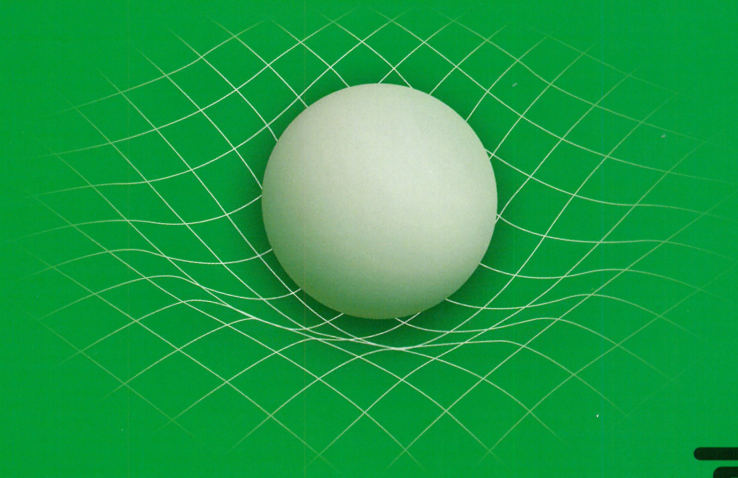
绿皮书

畅销20多年

总主编　张大同

物理竞赛教程

第七版



高中

第二分册

王新绍　朱天顺　编著

华东师范大学出版社

总主编　张大同

wuli jingsai jiaocheng

物理竞赛教程

（第七版）

高中第二分册

王新绍　朱天顺　编著

华东师范大学出版社
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

物理竞赛教程. 高中 第二分册/王新绍，朱天顺编著. —7 版. —上海：华东师范大学出版社，2024.

ISBN 978 - 7 - 5760 - 5789 - 8

Ⅰ. G634. 73

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20256YD704 号

物理竞赛教程(第七版)

高中第二分册

总 主 编　张大同
编　　著　王新绍　朱天顺
项目编辑　储成连　王练妹
责任编辑　丁　倩
责任校对　时东明
责任发行　颜星华
装帧设计　郝　钰　何莎莎

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购) 电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　上海颛辉印刷厂有限公司
开　　本　889 毫米 × 1194 毫米　1/16
印　　张　16. 25
字　　数　383 千字
版　　次　2025 年 5 月第 1 版
印　　次　2025 年 5 月第 1 次
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5760 - 5789 - 8
定　　价　62. 00 元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021 - 62865537 联系)

如发现图书内容有差错，或有更好的建议，请扫描下面的二维码联系我们。



总主编的话



正当本丛书的编写者在讨论新一版《物理竞赛教程》的编写思路时，传来了教育部决定自2020年起在部分高校开展基础学科招生改革试点（也称“强基计划”）的消息。“强基计划”主要选拔培养有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生；聚焦高端芯片与软件、智能科技、新材料、先进制造和国家安全等关键领域以及国家人才紧缺的人文社会科学领域，由有关高校结合自身办学特色，合理安排招生专业；突出基础学科的支撑引领作用，重点在数学、物理、化学、生物及历史、哲学、古文字学等相关专业招生。这是一项意义重大的战略决策，特别是在中华民族决心实现伟大复兴的关键时期。

物理学是一门基础学科。这里的基础应该有两重含义：一方面，物理知识是学习其他许多现代科学技术的基础；另一方面，学生在学习物理过程中得到的训练和提高的思维能力、动手能力和创造能力，也是学习其他应用科学和专业技术所不可缺少的。要想在物理竞赛中取得优异成绩，不但要掌握大量的物理知识，还必须有很强的解决问题的能力和很好的心理素质。因此，培养物理尖子学生的工作，实质上是典型的素质教育，对提高学生的创新能力也是十分有益的。

自1984年至今，中国物理学会已经举办了40届全国中学生物理竞赛，参加者累计超过600万人。这一活动对全国中学生，特别是那些对物理学科有浓厚兴趣的学生学习物理起了很好的推动作用。

我从1980年开始从事培养物理尖子学生的工作，经过40余年的探索，摸索出了一套培养优秀学生的行之有效的方法，积累了丰富的第一手资料。与此同时，全国各地也涌现出了许多在物理竞赛辅导方面卓有成效的教师。这次我们邀请了在全国影响力较大的几位老师，集中大家的智慧，共同编写了新一版《物理竞赛教程》，相信这套书会对我们的同行和广大爱好学习物理的中学生有较大的帮助。

从2014年开始，教育部取消了获得省一等奖的学生保送进入大学的资格；2020年，又停止了大学的自主招生。这些举措对全国物理竞赛看似“利空”，实则“利好”，它们可以确保物理竞赛正确、健康地发展。参加物理竞赛的同学应该具有两个基本的条件：一是对物理学确有兴趣；二是确实学有余力，在参与物理竞赛的同时能保证全面发展。大浪淘沙，实行了这一系列新举措后，那些带有功利色彩的同学和家长就不会再选择走参加竞赛这条路，使物理竞赛更加有利于对科学有浓厚的兴趣、在科学方面有一定特长的学生的发展。

物理竞赛获奖的同学虽然不再能通过保送的渠道进入大学，但他们在参加物理竞赛活动中获得的各方面的能力，在他们今后的学习、研究中是一定能表现出来的。正像原全国物理竞赛委员会主任、北大物理系的林纯镇教授所说的，只要我们的物理竞赛办得有质量、有水平，只要我们物理竞赛的获奖学生确实是很优秀的，那大学一定会欢迎他们的。现在教育部推出了“强基计划”，让这些同学又多了一种选择。

本丛书第六、七版不论是内容上还是结构上，和前五版相比都有了较大的变化。

- 内容上的变化

全国中学生物理竞赛从2016年开始实施新的竞赛大纲。新大纲要求掌握的物理内容明显增加，所用的数学工具包括了微积分。第六版是根据新大纲的要求编写的，和第五版差别较大。第七版又增加

了36届～40届竞赛的部分新题。《物理竞赛教程》高中的内容仍分三个分册编写。高中第一分册的内容是力学；第二分册的内容是热学、电学和磁学；第三分册的内容是光学、近代物理和物理实验，以及竞赛中解题的几种特殊方法。

实施了新大纲以后，全国物理竞赛的难度有所提高，特别是少数只有在全国决赛中才涉及的内容，新大纲中打上了星号。本丛书对这一部分内容也作了简单的介绍，并且也打上了星号。初学者遇见有星号的内容和题目，可以先不要看，等到对物理竞赛有了一定的积累，觉得自己可能有参加全国决赛的机会，再结合适当的大学教材来学习这一部分内容。

● 结构上的变化

本丛书在第六版修订的时候，增加了配套的《物理竞赛能力测试》，以便读者在读完《物理竞赛教程》后，检测一下自己的学习情况。《物理竞赛教程》中的每一章仍然有三个部分："知识要点和基本方法""例题精讲"和"练习题"。但是因为有了配套的《物理竞赛能力测试》，所以适当地减少了"练习题"的数量。《物理竞赛能力测试》中的每一章内容与《物理竞赛教程》相一致，分为能力测试A卷和能力测试B卷，分别对应物理竞赛学习的基本要求和提高要求。

阅读本丛书前有两个基本的要求。

第一，系统地学完高中物理的全部课程。由于课时的限制，为了减轻学生的学习负担，目前部分省市的高中物理教材删去了部分内容，以致部分同学阅读本书时会感到有些知识是完全陌生的。希望同学们能选择内容相对比较完整、系统的高中物理教材学习（例如有些学校专供理科班、实验班用的教材）。

第二，自学部分微积分的基础知识。微积分是一门很成熟、内容很丰富的课程，系统地学习需要花比较多的时间。建议同学们有选择地学习部分内容，然后再阅读本丛书。在第六版高中第一分册中有一个附录，简单地介绍了物理竞赛中需要用到的微积分知识。当然，在学习微积分的基础知识之前，必须先掌握高中的数学知识。

本丛书从第一版到第五版，累计销售册数超过100万册，受到全国中学生中的物理爱好者的肯定和欢迎，希望第六、七版能有更好的反响。

一如既往地恳请广大读者对《物理竞赛教程》（第七版）和配套的《物理竞赛能力测试》提出宝贵的意见和建议，以期这套丛书得以不断地完善。

张大同

2025年4月

目录

第 9 章　分子动理论和气体性质 …… 1

第 10 章　热力学定律 …… 22

第 11 章　固体、液体的性质和物态变化 …… 50

第 12 章　静电场 …… 70

第 13 章　直流电路和物质的导电性 …… 98

第 14 章　磁场 …… 126

第 15 章　电磁感应和电磁波 …… 150

第 16 章　交流电路 …… 178

参考解答 …… 205

第 9 章　分子动理论和气体性质

知识要点和基本方法

一　分子动理论

1. 物质是由大量分子组成的

1 mol 任何物质都含有相同的分子数，这个常数叫做阿伏加德罗常数，其精确值为 $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$。一般分子质量的数量级为 10^{-26} kg，分子直径的数量级为 10^{-10} m。

2. 分子在永不停息地做无规则运动

温度越高，扩散现象和布朗运动越明显，表明分子的无规则运动与温度有关。因此，分子永不停息的无规则运动又叫热运动。

3. 分子之间存在着相互作用力

分子间同时存在着引力和斥力，引力和斥力都随分子间距离的增大而减小，随分子间距离的减小而增大，并且斥力变化得更快，分子力是分子引力和分子斥力的合力。引力和斥力相等的位置叫平衡位置。如图 9－1 所示，为分子力随分子间距离的变化关系图线，r_0 为 10^{-10} m 数量级。当 $r > r_0$ 时，分子力表现为引力；当 $r < r_0$ 时，分子力表现为斥力；当 $r = r_0$ 时，分子力表现为零。分子力的作用范围为分子直径的数量级，当分子间距离 $r > 10r_0$ 时，分子力近似为零。

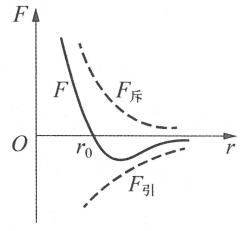


图 9－1

分子力是一个分子中的所有电子和原子核与另一个分子中的所有电子和原子核之间所产生的相互作用的总和，是一种电磁相互作用力。分子力是保守力，它具有势能，称为分子势能。

二　温度和内能

1. 温度

如果两个热力学系统分别与第三个热力学系统达到热平衡，那么这两个热力学系统也必定处于热平衡。这个结论叫热平衡定律，又叫热力学第零定律。

温度的宏观意义是表征物体的冷热程度，两个达到热平衡的系统，至少具有一个“共同性质”，把表征这一“共同性质”的物理量定义为温度。一切达到热平衡的系统都具有相同的温度。

2. 温标

温标是为了保证温度量值的统一和准确而建立的用来衡量温度的标定体系。物理学中使用的温标主要是热力学温标。

热力学温度的单位为开尔文，简称“开”，用 K 表示。热力学温标的零点，即绝对零度，记为“0 K”。由于水的三相点热力学温度为 273.16 K，摄氏温度为 0.01℃，所以 0℃＝273.15 K。热力学温度与摄氏温度的每一度大小相等，热力学温度 T 和摄氏温度 t 之间的关系为 $T=t+273.15$ 或 $t=T-273.15$。

3. 内能

(1) 分子动能

温度越高，分子的热运动越剧烈，分子的平均平动动能与热力学温度成正比，$\overline{\varepsilon_k}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}kT$，$k$ 是玻尔兹曼常量。所以说温度是分子平均平动动能的标志，与分子的质量和种类无关。

对于单原子分子，只有平动动能；对于多原子分子，分子中的原子之间有振动，整个分子作为一个整体还有转动，所以多原子分子除了平动动能之外，还有振动动能、振动势能和转动动能。温度升高，分子的平动速度、振动振幅和转动角速度都要增大，从而分子的动能相应地增大。

(2) 分子间的势能

由于分子力是保守力，所以分子间具有由分子间的相对位置所决定的势能，叫分子势能。分子在平衡位置 ($r=r_0$) 时，分子力表现为零，分子势能最小；当 $r>r_0$ 时，分子力表现为引力，r 越大，分子势能越大；当 $r<r_0$ 时，分子力表现为斥力，r 越小，分子势能越大。选 $r\gg r_0$ 时分子势能为零，分子间的势能曲线如图 9-2 表示。

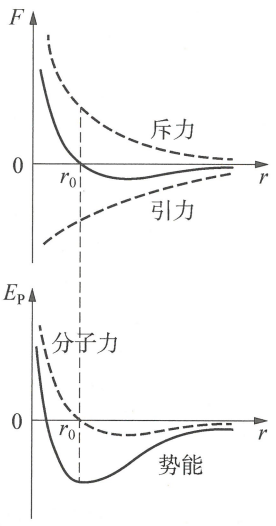


图 9-2

由功能关系不难得出，$F\mathrm{d}r=-\mathrm{d}E_P$ 或 $F=-\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}r}$，故在势能曲线中，$r=r_0$ 处的切线斜率等于零。$r_1(\geqslant r_0)$ 处的势能等于分子力图线在 $r\geqslant r_1$ 的范围内与横轴围成的面积的负值(如图 9-2 所示)。

(3) 物体的内能

物体内所有微观粒子的无规则运动动能和总的相互作用势能之和，称为物体的内能。从宏观方面讲，内能由物体的热力学状态决定，是状态函数，内能与物体的机械运动无关。从微观方面讲，内能包括分子以及组成分子的原子的无规则热运动的动能和势能，物体的内能与物体的温度和体积等有关。

三 能量均分定理

1. 自由度

描述一个物体在空间的位置所需要的独立坐标称为该物体的自由度。决定一个物体在空间的位置所需要的独立坐标个数，称为自由度数。不同类型的分子，自由度数不同。

物体视作质点时，只需要三个独立坐标(x，y，z)来描述其位置，有三个自由度。

刚体的运动可视为随质心的平动和绕质心轴转动的合运动，质心的平动与质点的空间运动一样有三个平动自由度；绕质心轴的转动由质心轴的方向和转过的角度来描述，而质心轴的方向用与质心系中的空间直角坐标系的三个轴 x、y、z 之间夹角 α、β、γ 中的任意两个独立变量来描述（由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，所以 α、β、γ 中只有两个独立变量），转过的角度还需要一个角度 θ 来描述，因此有三个转动自由度。所以刚体总共有六个自由度。对于像哑铃形状的刚体，由于绕自身轴线的转动惯量远小于绕垂直于自身轴线的转动惯量，所以不需要引入转过的角度 θ 来描述，故只有两个转动自由度。

由此看来，单原子分子只有三个平动自由度；刚性双原子分子（刚性分子是指各原子间距离不会改变的分子）和刚性线型分子有三个平动自由度，两个转动自由度，共有五个自由度；刚性多原子分子（由三个或三个以上原子构成的分子）有三个平动自由度，三个转动自由度，共有六个自由度。

2. 能量均分定理

处于平衡态的温度为 T 的气体中，分子的热运动动能平均分配到每一个自由度上，每一个自由度的平均动能都是 $\frac{1}{2}kT$，这就是能量均分定理。

由于每个分子都有三个平动自由度，故分子平均平动动能 $\bar{\varepsilon}_k=\frac{3}{2}kT$。所以说温度是分子平均平动动能的标志，与分子的质量和种类无关。单原子分子有三个自由度，平均动能为 $\bar{\varepsilon}_k=\frac{3}{2}kT$；刚性双原子分子和刚性线型分子有五个自由度，平均动能为 $\bar{\varepsilon}_k=\frac{5}{2}kT$；刚性多原子分子有六个自由度，平均动能为 $\bar{\varepsilon}_k=3kT$。有 i 个自由度的分子的平均动能 $\bar{\varepsilon}_k=\frac{i}{2}kT$。

说明：(1) 只有在平衡态下才能应用能量均分定理，非平衡态不能应用能量均分定理。

(2) 能量均分定理只限于均分平均动能。对于振动能量，每一个振动自由度上的平均动能和平均势能都是 $\frac{1}{2}kT$。

(3) 分子的热运动动能是分子的平动动能、转动动能以及分子内原子的振动动能的总和，对于温度不是很高的常见气体，其分子振动动能不考虑，可视为刚性分子。

四 气体的状态参量

描述气体性质的物理量叫做气体的状态参量。气体的体积、压强、温度是描述气体性质的三个状态参量。其中体积描述气体的几何性质，压强描述气体的力学性质，温度描述气体的热学性质。

1. 体积

气体的体积是指气体所充满的容器的容积。由于气体分子间的距离远大于分子的直径，

所以分子之间的作用力十分微弱，由于分子的热运动，每一部分气体都能充满整个容器。

2. 压强

(1) 气体压强的定义

大量气体分子频繁地碰撞器壁，从而对器壁产生持续的、均匀的压力，单位面积器壁上的压力称为压强。气体压强在数值上等于单位时间内大量气体分子频繁碰撞器壁所给予单位面积器壁的平均总冲量。

(2) 理想气体的压强

推导方法一：理想气体分子之间没有相互作用力，并且气体分子对器壁的碰撞为弹性碰撞。对于长方体容器内处于平衡态的气体，假设在单位体积中各有$\frac{n}{6}$(n 为分子数密度)个分子以平均速率 $\bar{v}$ 垂直向着六个侧壁方向运动，则在 Δt 时间内垂直碰撞在某个侧壁的 ΔS 面积上的分子数为$\frac{n}{6}\Delta S\bar{v}\Delta t$。因为每个分子与器壁碰撞是完全弹性碰撞，所以每次碰撞产生 $2m\bar{v}$ 的动量改变，即给予器壁大小为 $2m\bar{v}$ 的冲量，则单位时间内大量气体分子频繁碰撞器壁所给予单位面积器壁的平均总冲量，也就是对器壁的压强，为

$$p=\frac{\frac{n}{6}\Delta S\bar{v}\Delta t\cdot 2m\bar{v}}{\Delta S\Delta t}=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}$$

由分子平均平动动能

$$\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}m\overline{v^2},\ \bar{\varepsilon}_k=\frac{3}{2}kT$$

可得理想气体压强公式

$$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k=nkT$$

其中 $p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k$ 为微观表达式，$p=nkT$ 为宏观表达式。注意：在推导过程中我们利用了平均速率近似等于方均根速率和单位时间内近似有$\frac{n}{6}\bar{v}$ 个分子垂直碰撞单位面积器壁的条件，但最终得到的表达式是精确公式。

推导方法二：由能量均分定理可知

$$\bar{\varepsilon}_k=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=3\cdot\frac{1}{2}m\overline{v_x^2},\ \frac{1}{2}m\overline{v_x^2}=2\cdot\frac{1}{2}m\overline{v_{+x}^2}$$

利用气体压强定义可得气体对器壁的压强

$$p=\frac{2m\overline{v_{+x}}n\Delta S\overline{v_{+x}}\Delta t}{\Delta S\Delta t}=2nm\overline{v_{+x}^2}=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k$$

即 $$p=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k=nkT$$

推导方法三：对于长、宽、高分别为 a、b、c 的长方体容器内处于平衡态的气体，假设在单位体积中各有 $\frac{n}{6}$（n 为分子数密度）个分子以平均速率 $\bar{v}$ 垂直向着六个侧壁方向运动，对一个 ab 侧壁而言，在时间 $\frac{c}{\bar{v}}$ 内，共有 $\frac{n}{6}abc$ 个分子与其碰撞，故气体对器壁的（平均）压强

$$p=\frac{2m\bar{v}\cdot\frac{n}{6}abc}{\frac{c}{\bar{v}}\cdot ab}=\frac{1}{3}nm\overline{v^2}=\frac{2}{3}n\bar{\varepsilon}_k=nkT$$

3. 温度

温度是描述气体性质的重要状态参量之一，一切处于热平衡状态的气体都具有确定的温度。温度越高，气体分子的无规则热运动越剧烈。一定质量的理想气体，其体积、压强和温度之间满足一定的关系。

五 （理想）气体的几个重要方程

1. 三个基本实验定律

（1）玻意耳-马略特定律：在温度不变的情况下，一定质量的气体，其压强和体积的乘积是不变的常量，即 $pV=$恒量，或 $p_1V_1=p_2V_2$。在 $p-V$ 图上，一定质量气体的等温线为双曲线。

（2）查理定律：在体积不变的情况下，一定质量的气体，其压强跟它的热力学温度成正比，即 $\frac{p}{T}=$恒量，或 $\frac{p_2}{T_2}=\frac{p_1}{T_1}$。在 $p-T$ 图上，一定质量气体的等容线为延长线通过原点的直线。

（3）盖-吕萨克定律：在压强不变的情况下，一定质量的气体，其体积跟它的热力学温度成正比，即 $\frac{V}{T}=$恒量，或 $\frac{V_2}{T_2}=\frac{V_1}{T_1}$。在 $V-T$ 图上，一定质量气体的等压线为延长线通过原点的直线。

2. 阿伏加德罗定律

在相同的温度和压强下，相同体积的任何气体都含有相同的分子数，称为阿伏加德罗定律。在标准状态（0℃，1 atm）下，1 mol 任何气体的体积均约为 22.4 L。

3. 道尔顿分压定律

当有 n 种理想气体混合在一个容器中时（当然每种气体都具有与混合气体相同的温度和体积），它们所产生的总压强等于每一种气体单独充满这个容器时所产生的压强之和。即：

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_n$$

4. 气体状态方程

一定质量的理想气体，其压强 p 和体积 V 的乘积与热力学温度 T 成正比，即 $\frac{pV}{T}=C$ 或 $\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}=C$（常量 C 由理想气体的质量和种类决定）。

5. 克拉伯龙方程

利用理想气体状态方程和阿伏加德罗定律可以推导出任意质量理想气体的状态方程，即克拉伯龙方程

$$pV=\frac{m}{\mu}RT=nRT$$

其中 m 是气体的质量，μ 是气体的摩尔质量，n 是摩尔数，T 是热力学温度，R 是一个对任何气体都适用的恒量——摩尔气体恒量，$R=8.31\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$。

(1) 密度公式

由克拉伯龙方程可得到理想气体密度公式 $\rho=\frac{\mu p}{RT}=nm_0$，或 $\frac{p_1}{\rho_1T_1}=\frac{p_2}{\rho_2T_2}=\frac{R}{\mu}$，其中 n 表示分子数密度，m_0 表示分子质量。如果压强相等，则有 $\rho_1T_1=\rho_2T_2$。

(2) 压强公式

由克拉伯龙方程还可得到理想气体压强公式 $p=nkT$，其中 k 为玻尔兹曼常量，$k=\frac{R}{N_A}=1.38\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot k^{-1}}$。

6. (混合)理想气体状态方程分态式

将状态为(p、V、T)的(混合)理想气体分成 n 份，状态分别为(p_1、V_1、T_1)，(p_2、V_2、T_2)，…，(p_n、V_n、T_n)，根据道尔顿分压定律和克拉伯龙方程可以得到

$$\frac{pV}{T}=\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}+\cdots+\frac{p_nV_n}{T_n}=R\sum n_i\ (n_i\text{ 为第 }i\text{ 种气体的摩尔数})$$

这就是(混合)理想气体状态方程分态式。

对于几种理想气体混合在一起(不发生化学反应)时，一般可以用(混合)理想气体状态方程分态式求解。

六 麦克斯韦速率分布*

1. 概率

在所有可能发生的事件(变量)中，某种事件(变量)发生可能性(或出现相对机会)的大小称为该事件发生的概率。通常用某一事件 A 发生的次数 $N(A)$ 和实验的总次数 N(N 很大，或 $N\to\infty$)的比值表示该事件发生的概率，并用 $P(A)$ 表示，则

$$P(A)=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N(A)}{N}\right)$$

概率是一个介于0到1之间的数。概率愈大，事件发生的可能性就愈大；概率愈小，事件发生的可能性就愈小。

例如，我们做抛掷硬币的实验，共抛掷了100 000次，其中出现正面的次数接近50 000次，则出现正面的概率 $P_{正}=\frac{50\,000}{100\,000}=\frac{1}{2}$。由于各种可能发生事件的总数总是等于总共发生的事件数，即 $\sum_i N_i=N$，所以

$$\sum_i P_i=P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n=\frac{N_1}{N}+\frac{N_2}{N}+\frac{N_3}{N}+\cdots+\frac{N_n}{N}=1$$

即各种可能发生事件的概率之和等于1，这一结论称为概率的归一化条件。

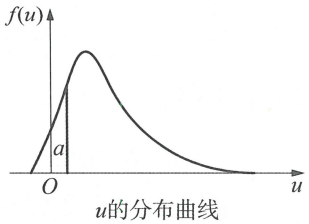
2. 平均值

若求某随机变量在某 N 个统计单位中的平均值，要先求出这 N 个统计单位的随机变量之和，然后再除以 N 个单位数即得该随机变量的平均值。例如求 N 个人的平均年龄，就是 N 个人的年龄之和除以总人数 N。为此将人按年龄分组，设 u_i 为随机变量(年龄)，其中出现 u_i(年龄)值的次数(人数)为 N_i，则该随机变量(年龄)的平均值为 $\bar{u}=\sum_i \frac{u_iN_i}{N}$。

因为 $\frac{N_i}{N}$ 是出现 u_i 值的(百分)比率，当 N 很大(或 $N\to\infty$)时就是出现 u_i 值的概率 P_i，故 $\bar{u}=\sum_i u_iP_i$。再例如求 N 个分子的平均动能，应先求得 N 个分子的动能之和；求 N 个分子的平均速率，应先求 N 个分子的速率之和，然后分别除以总分子数即得其平均动能或平均速率。如果 N 非常大(或 $N\to\infty$)，并且事先知道 u_i 的概率分布 $P(u_i)$(即出现 u_i 值的概率为 P_i)，则利用概率分布来求随机变量 u_i 的平均值 $\bar{u}=\sum_i u_iP_i$ 更为方便。对于连续性变量 u 而言，在 u_1 - u_2 内的平均值 $\bar{u}=\int_{u_1}^{u_2} uf(u)\mathrm{d}u$，概率统计分布的最直接应用就是求平均值。

3. 概率分布函数

对于连续性变量 u 而言，事件发生在某一间隔 Δu 内的概率 $\Delta P(u)$ 应与这一间隔的位置 u 及间隔大小 Δu 有关。为了充分反映概率随变量 u 分布的特点，把概率 $P(u)$ 在 u 附近单位间隔内发生的概率称为概率密度，即概率密度 $f(u)=\frac{\mathrm{d}P(u)}{\mathrm{d}u}=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}u}$。以概率密度 $f(u)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}u}$ 为纵坐标，变量 u 为横坐标，画出的一条连续曲线表示 u 的分布曲线，如图9-3所示。其中 $f(u)=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}u}$ 叫做概率密度分布函数，$f(u)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}N}{N\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$ 叫做概率分



u的分布曲线

图9-3

布函数。

由此可得在间隔 du 内事件发生的概率 $dP(u)=f(u)du$，为 u 的分布曲线与横轴围成的小窄条的面积。由概率的归一化条件可知，整个曲线与横轴围成的面积等于 1。

4. 麦克斯韦速率分布

分子动理论指出，一切分子都在永不停息地做无规则热运动。大量分子在无规则运动过程中频繁地相互碰撞，在频繁的碰撞过程中，分子间不断交换动量和能量，使每一分子的速度不断地变化，导致分子以各种大小不同的速率向各个方向运动。处于平衡态的气体，虽然每个分子在某一瞬时的速度大小、方向都在随机地变化着，但是大量气体分子之间存在一种统计相关性，这种统计相关性表现为气体分子向各个方向运动的概率相等。在速率 v 附近，单位速率区间内分子出现的概率，即速率分布概率密度不会变化，也就是单位速率区间内分子数占总分子数的百分比不会变化。为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2$$

这就是麦克斯韦速率分布概率密度。其中 k 为玻尔兹曼常量，m、T 分别为气体分子质量和气体热力学温度。由麦克斯韦速率分布概率密度的表达式可知，麦克斯韦速率分布概率密度与分子速率的关系满足“中间大，两头小”的特点，即在某一温度下处于平衡状态的一定质量的某种气体，速率很大和速率很小的分子数较少，速率处于中间区域的分子数较多。气体分子的速率在 v 到 $v+dv$ 区间的概率为

$$f(v)dv=\frac{dN(v)}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}v^2dv$$

该式称为麦克斯韦速率分布，如图 9-4 所示。由麦克斯韦速率分布曲线能直观地得到分子速率分布“中间大，两头小”的特点。

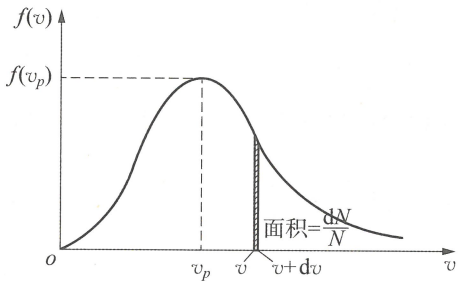


图 9-4

由概率的归一化条件可知，麦克斯韦速率分布曲线与横轴围成的面积等于 1（当然速率不会超过光速达到无限大，但速率上限设为无限大不会影响计算），读者可以利用积分公式给予证明。

5. 三个特征速率

利用麦克斯韦速率分布律可以计算最概然速率、平均速率和方均根速率，这三个速率称为特征速率。

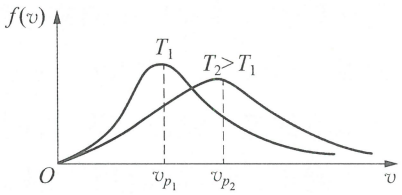
（1）最概然速率

最概然速率是系统中任何分子最有可能具有的速率，即概率最大的速率，在该速率处速率分布函数对速率的一阶导数为零。由

$$\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}=0$$

得
$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

其中 R 是气体普适常量，M 是气体的摩尔质量。最概然速率随温度的升高而增加，如图 9－5 所示。



温度升高峰向右移动

图 9－5

对于室温(300 K)下的氮气(空气的主要成分)，可得 $v_p=422\ \mathrm{m/s}$。

(2) 平均速率

平均速率是速率的平均值，由平均值公式得

$$\bar{v}=\int_0^\infty vf(v)\mathrm{d}v=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

(3) 方均根速率

方均根速率$\sqrt{\overline{v^2}}$是速率平方的平均值的平方根，由平均值公式得

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\left(\int_0^\infty v^2f(v)\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

三个特征速率之比

$$v_p:\bar{v}:\sqrt{\overline{v^2}}=1:1.128:1.224$$

三个特征速率均随着温度的升高而增加，其中方均根速率最大。正是因为平均速率和方均根速率接近，所以前面推导压强公式时，近似认为平均速率等于方均根速率。这三种速率在不同的问题中各有自己的应用。在讨论速率分布，比较两种不同温度或不同分子质量的气体的速率分布曲线时常用到最概然速率；在计算分子平均自由程、气体分子碰壁次数及气体分子之间碰撞频率时则用到平均速率；在计算分子平均动能时用到方均根速率。

6. 平均自由程

把气体分子看作具有一定直径的弹性球，我们认为只有当气体分子相互接触时才有相互作用。这样，气体分子在连续两次碰撞之间做匀速直线运动所通过的平均路程，称为分子的平均自由程，用符号 $\bar{\lambda}$ 表示，单位为 m。若分子的有效直径为 d，单位体积内的分子数为 n，气体压强为 p，则平均自由程为 $\bar{\lambda}=\dfrac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}=\dfrac{kT}{\sqrt{2}p\pi d^2}$。标准状态下，气体平均自由程的数量级为 10^{-7} m，分子有效直径的数量级为 10^{-10} m，若平均速率为 10^3 m/s，则碰撞频率为 $10^{10}\ \mathrm{s}^{-1}$。

例题精讲

例 1 在压强不太大、温度不太低的情况下，气体分子本身的大小比分子间的距离小很多，因而在理想气体模型中通常忽略分子的大小。已知液氮的密度 $\rho=810\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，氮气的摩尔质量为 $M_{\mathrm{mol}}=28\times10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$。假设液氮可看作由立方体分子堆积而成，根据所给数据对标准状态下的氮气做出估算，说明上述结论的合理性。

解析 标准状态下气体分子数密度

$$n=\frac{N_{\mathrm{A}}}{V_{\mathrm{m}}}=\frac{6.02\times10^{23}}{22.4\times10^{-3}}=2.7\times10^{25}(\mathrm{m^{-3}})$$

氮气分子的间距

$$d=\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{(2.7\times10^{25})^{\frac{1}{3}}}=3\times10^{-9}(\mathrm{m})$$

而液氮中单位体积的氮分子数

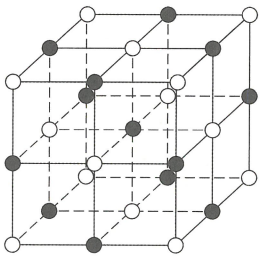
$$n'=\frac{\rho N_{\mathrm{A}}}{M_m}=\frac{810\times6.02\times10^{23}}{28\times10^{-3}}=1.74\times10^{28}(\mathrm{m^{-3}})$$

据此可以估算液氮分子的线度

$$d'=\frac{1}{\sqrt[3]{n'}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1.74\times10^{28}}}=3.86\times10^{-10}(\mathrm{m})$$

所以 $d\approx8d'$，可见标准状况下氮气气体分子间距比分子直径大很多。故将氮气作为理想气体处理是合理的。

例 2 如图所示，食盐(NaCl)的晶体是由钠离子(图中以白色圆点表示)和氯离子(图中以黑色圆点表示)组成的，离子键两两垂直且键长相等。已知食盐的摩尔质量为 $58.5\times10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$，密度为 $2.2\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$，阿伏加德罗常数为 $6.0\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$，求食盐晶体中两个距离最近的钠离子中心之间的距离。



例 2 图

解析 一摩尔的氯化钠含有 N_{A} 个氯化钠分子，即含有 $2N_{\mathrm{A}}$ 个离子，所以每个钠离子占据空间为 $V=\frac{V_{\mathrm{mol}}}{2N_{\mathrm{A}}}$。由图不难看出，一个离子占据的空间就是小立方体的体积 a^3，即 $a^3=\frac{V_{\mathrm{mol}}}{2N_{\mathrm{A}}}=\frac{\frac{M_{\mathrm{mol}}}{\rho}}{2N_{\mathrm{A}}}$，所以邻近钠离子之间的距离 $l=\sqrt{2}a=3.97\times10^{-10}\ \mathrm{m}$。

例 3 有一个用伸缩性极小且不漏气的布料制作的气球(布的质量可忽略不计),直径为 $d=2.0\ \mathrm{m}$。球内充有压强 $p=1.005\times10^5\ \mathrm{Pa}$ 的轻质气体,该布料所能承受的最大不被撕破力为 $f_\mathrm{m}=8.5\times10^3\ \mathrm{N/m}$(即对于一块展平的一米宽的布料,沿布面且垂直于布料宽度方向所施加的力超过 $8.5\times10^3\ \mathrm{N}$,布料将被撕破)。开始时,气球被置于地面上,该处的大气压强为 $p_0=1.000\times10^5\ \mathrm{Pa}$,温度 $T_0=293\ \mathrm{K}$,假设空气的压强和温度均随高度而线性地变化,压强的变化率为 $\alpha_p=-9.0\ \mathrm{Pa/m}$,温度的变化率为 $\alpha_T=-3.0\times10^{-3}\ \mathrm{K/m}$,问该气球上升到多高时将破裂?(假设气球上升得很缓慢,可认为球内温度随时与周围空气的温度保持一致。在考虑气球破裂时,可忽略气球周围各处和底部之间空气压强的差别)

解析 取上半球为研究对象,其受到三个力的作用:①下半球面所施加的张力 F;②上半球外空气对其压力的合力,大小为 $p_a\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$,其中 p_a 是气球所在高度处的大气压强;③球内气体对其压力的合力,大小为 $p\cdot\frac{\pi d^2}{4}$,其中 p 为气球内气体的压强。由三力平衡得

$$p\cdot\frac{\pi d^2}{4}=p_a\cdot\frac{\pi d^2}{4}+F$$

当 $F>f_\mathrm{m}\cdot\pi d$ 时布料被撕裂,所以气球破裂的条件是

$$(p-p_a)\cdot\frac{\pi d^2}{4}>f_\mathrm{m}\cdot\pi d$$

其中 p_a 为气球破裂时所在高度 h 处的压强,即

$$p_a=p_0+\alpha_p\cdot h$$

而 p 为气球破裂时所在高度 h 处的温度下球内气体的压强。因为气体是在等容条件下上升的,因此 $\frac{p}{T}=\frac{p_0}{T_0}$,其中

$$T=T_0+\alpha_T h$$

解得

$$h>\frac{\frac{4f_\mathrm{m}}{d}-(p-p_0)}{\frac{p_0}{T_0}\cdot\alpha_T-\alpha_p}=2.1\times10^3\ \mathrm{m}$$

即气球上升到 $2.1\times10^3\ \mathrm{m}$ 高度时将破裂。

例 4 一球形热气球总重 300 kg,经加热后气体膨胀到最大体积,此时它的直径为 18 m,球内外气体成分相同,球内气体压强稍高于大气压。试求刚好能使热气球上升时的球内空气温度。已知此时大气温度为 27℃,压强为 1 atm,在标准状态下空气密度为 $1.3\ \mathrm{kg/m^3}$。

解析 设此时球内气体和气球排开空气的质量分别为 M_2 和 M_1,则气球刚升起时应使

$$M_1 = M_2 + 300$$

其中
$$M_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \rho$$

由密度公式 $\frac{p_1}{\rho_1 T_1} = \frac{p_2}{\rho_2 T_2}$ 得 27℃、1 atm 时的空气密度

$$\rho = \rho_0 \frac{273}{300} = 1.18\ \text{kg/m}^3$$

可求得 $M_1 = 3603$ kg。

设气球内空气的体积为 V_2，压强为 p_2，温度为 T_2，则有

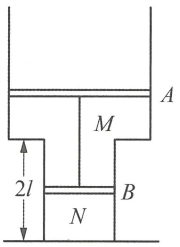
$$p_2 V_2 = \frac{M_2}{M} R T_2$$

同理对被气球排开的那一部分空气有
$$p_1 V_1 = \frac{M_1}{M} R T_1$$

由于
$$p_2 \doteq p_1,\ V_2 \doteq V_1$$

故
$$T_2 = \frac{M_1 T_1}{M_2} = \frac{3603 \times 300}{3603 - 300} = 327\ \text{K},\ t = 54℃$$

例 5 如图所示气缸上部足够长，质量不计的轻活塞 A、B 的截面积分别为 $2S$ 和 S，气缸下部长为 $2l$。A、B 活塞间以长为 $\frac{7l}{4}$ 的无弹性轻质细绳相连，A 活塞上部有压强为 p_0 的大气。开始时封闭的气室 M、N 中充有同种气体，M 的体积是 N 的 2 倍，N 中气体恰好为 1 mol，小活塞 B 位于距底部 l 处，气体温度为 T_0。现同时缓慢升高两部分封闭气体的温度至 $2T_0$，求平衡后活塞 A 与底部的距离。



例 5 图

解析 因初始时刻 $V_M = 2V_N$，而 $V_N = lS$，$V_M = lS + x \cdot 2S$，得 $x = 0.5l$。这表明开始时两活塞间距为 $1.5l$，它小于 $\frac{7l}{4}$，即开始时细绳处于松弛状态，且 $p_M = p_N = p_0$。

现同时缓慢升高两部分气体的温度，两部分气体开始都做等压膨胀。设 B 能上移距离 l，线仍然未张紧，此时对应的温度 T' 满足

$$\frac{lS}{T_0} = \frac{2lS}{T'}$$

得
$$T' = 2T_0$$

此时对 M 部分气体有

$$\frac{2lS}{T_0}=\frac{l'\cdot 2S}{T'}$$

得
$$l'=2l>\frac{7l}{4}$$

这表明前面假设不成立，升温至 $2T_0$ 时，M、N 两部分气体已混合。

设升温至 $2T_0$ 时，A 离底部的距离是 x'，

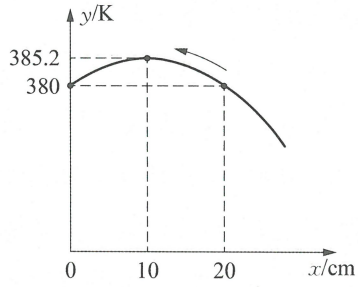
$$p_0[2lS+(x'-2l)\cdot 2S]=(n_N+n_M)R\cdot 2T_0=6RT_0$$
$$p_0lS=n_NRT_0=RT_0$$

解得
$$x'=4l$$

例 6 如图 1 所示，在标准大气压下，一端封闭的玻璃管长 96 cm，内有一段长 20 cm 的水银柱，当温度为 27℃且管口向上竖直放置时，被封闭的气柱长为 60 cm。试问：当温度至少升高到多少度时，水银柱才会从玻璃管中全部溢出？



例 6 图 1



例 6 图 2

解析 设某时刻气柱压强为 p，水银柱在管中剩下的长度为 x。由玻意耳定律得

$$\frac{p_1L_1}{T_1}=\frac{pL}{T}$$
$$\frac{(76+20)\times 60}{300}=\frac{p(96-x)}{T}$$

得
$$p=\frac{19.2T}{96-x}$$

对水银柱下面的液面分析，可知 $p\leqslant 76+x$ 时准静态过程能够达成（p 可以随升温而增大，直至不等式取等号），而 $p>76+x$ 时准静态过程无法达成（T 升高时，p 增大而 x 减小），水银自动溢出。

所以，自动溢出的条件是

$$T>\frac{1}{19.2}(-x^2+20x+7296)$$

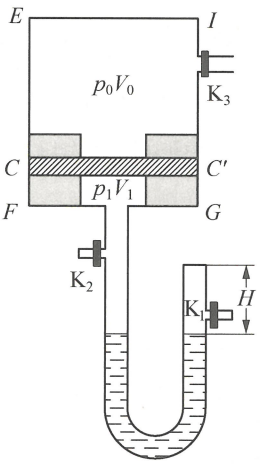
如图 2 所示，考查函数

$$y=\frac{1}{19.2}(-x^2+20x+7296)$$

当 $x=10\ \text{cm}$ 时，$y_{\max}=385.2\ \text{K}$。然后无需升温，自动溢出，升温到 385.2 K即可。

例 7 薄膜材料气密性能的优劣常用其透气系数来表示。对于均匀薄膜材料，在一定温度下，某种气体通过薄膜渗透过的气体分子数 $N=k\dfrac{\Delta pSt}{d}$，其中 t 为渗透持续时间，S 为薄膜的面积，d 为薄膜的厚度，Δp 为薄膜两侧气体的压强差。k 称为该薄膜材料在该温度下对该气体的透气系数。透气系数愈小，材料的气密性能愈好。

如图所示为测定薄膜材料对空气的透气系数的一种实验装置示意图。$EFGI$ 为渗透室，U 形管左管上端与渗透室相通，右管上端封闭；U 形管内横截面积 $A=0.150\ \text{cm}^2$。实验中，首先测得薄膜的厚度 $d=0.66\ \text{mm}$，再将薄膜固定于图中 CC' 处，从而把渗透室分为上下两部分，上面部分的容积 $V_0=25.00\ \text{cm}^3$，下面部分连同 U 形管左管水面以上部分的总容积为 V_1，薄膜能够透气的面积 $S=1.00\ \text{cm}^2$。打开开关 K_1、K_2 与大气相通，大气的压强 $p_1=1.00\ \text{atm}$，此时 U 形管右管中气柱长度 $H=20.00\ \text{cm}$，$V_1=5.00\ \text{cm}^3$。关闭 K_1、K_2 后，打开开关 K_3，对渗透室上部分迅速充气至气体压强 $p_0=2.00\ \text{atm}$，关闭 K_3 并开始计时。两小时后，U 形管左管中的水面高度下降了 $\Delta H=2.00\ \text{cm}$。实验过程中，始终保持温度为 0℃。求该薄膜材料在 0℃ 时对空气的透气系数。（本实验中由于薄膜两侧的压强差在实验过程中不能保持恒定，在压强差变化不太大的情况下，可用计时开始时的压强差和计时结束时的压强差的平均值 $\overline{\Delta p}$ 来代替公式中的 Δp。普适气体常量 $R=8.31\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$，$1.00\ \text{atm}=1.013\times10^5\ \text{Pa}$。）



例 7 图

解析 （1）开始时 U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2=HA、p_2=p_1$$

经过 2 小时，U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2'=(H-\Delta H)A、p_2'=\frac{p_2V_2}{V_2'}$$

渗透室下部分连同 U 形管左管水面以上部分气体的总体积和压强分别为

$$V_1'=V_1+\Delta HA、p_1=p_2'+2\rho g\Delta H$$

式中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度。由理想气体状态方程 $pV=nRT$ 可知，经过 2 小时，薄膜下部分增加的空气的摩尔数

$$\Delta n=\frac{p_1'V_1'}{RT}-\frac{p_1V_1}{RT}$$

在 2 个小时内，通过薄膜渗透过去的分子数 $N=\Delta nN_A$，式中 N_A 为阿伏加德罗常量。渗透室上部分空气的摩尔数减少，压强下降了

$$\Delta p=\frac{\Delta nRT}{V_0}$$

经过 2 小时渗透室上部分中空气的压强为

$$p_0'=p_0-\Delta p$$

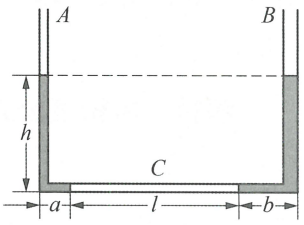
测试过程的平均压强差

$$\overline{\Delta p}=\frac{1}{2}[(p_0-p_1)+(p_0'-p_1')]$$

根据定义，由以上各式和有关数据，可求得该薄膜材料在 0℃时对空气的透气系数

$$k=\frac{Nd}{\overline{\Delta p}tS}=2.4\times10^{11}\,\mathrm{Pa^{-1}\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$$

例 8 U 形管的两支管 A、B 和水平管 C 都是由内径均匀的细玻璃管做成的，它们的内径与管长相比都可忽略不计。已知三部分的截面积分别为 $S_A=1.0\times10^{-2}\ \mathrm{cm^2}$，$S_B=3.0\times10^{-2}\ \mathrm{cm^2}$，$S_C=2.0\times10^{-2}\ \mathrm{cm^2}$，在 C 管中有一段空气柱，两侧被水银封闭。当温度为 $t_1=27$℃ 时，空气柱长为 $l=30\ \mathrm{cm}$（如图所示），C 中气柱两侧的水银柱长分别为 $a=2.0\ \mathrm{cm}$，$b=3.0\ \mathrm{cm}$，A、B 两支管都很长，其中的水银柱高均为 $h=12\ \mathrm{cm}$。大气压强保持为 $p_0=76\ \mathrm{cmHg}$ 不变。不考虑温度变化时管和水银的热膨胀，试求管中空气温度缓慢升高到 $t=97$℃ 时空气的体积。



例 8 图

解析 在温度为 $T_1=(27+273)\ \mathrm{K}=300\ \mathrm{K}$ 时，气柱中的空气的压强和体积分别为

$$p_1=p_0+h,\ V_1=lS_C$$

当气柱中空气的温度升高时，气柱两侧的水银将被缓慢压入 A 管和 B 管。设温度升高到 T_2 时，气柱右侧水银刚好全部压到 B 管中，使管中水银高度增大

$$\Delta h=\frac{bS_C}{S_B}$$

由此造成气柱中空气体积的增大量为

$$\Delta V'=bS_C$$

与此同时，气柱左侧的水银也有一部分进入 A 管，进入 A 管的水银使 A 管中的水银高度也应增大 Δh，使两支管的压强平衡，由此造成气柱空气体积增大量为

$$\Delta V''=\Delta h S_A$$

所以，当温度为 T_2 时空气的体积和压强分别为

$$V_2=V_1+\Delta V'+\Delta V''、p_2=p_1+\Delta h,$$

由状态方程知 $$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$$

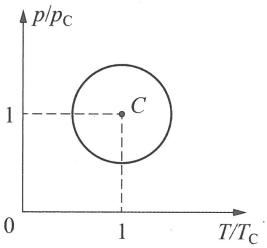
由以上各式，代入数据可得 $$T_2=347.7\ \mathrm{K}$$

此值小于题给的最终温度 $T=273+t=370\ \mathrm{K}$，所以温度将继续升高。从这时起，左边水银不再移动，气柱中的空气做等压变化。

当温度到达 T 时，气柱体积为 $$V=\frac{T}{T_2}V_2$$

代入数据可得 $$V=0.72\ \mathrm{cm}^3$$

例 9 如图 1 所示是一定质量理想气体状态变化所经历的 $p-T$ 图线，该图线是以 C 点为圆心的圆。p 轴以 C 点的纵坐标 p_C 为单位（T 轴以 T_C 为单位）。若已知在此过程中气体所经历的最低温度为 T_0，则在此过程中，气体密度的最大值 ρ_1 和最小值 ρ_2 之比等于多少？



例 9 图 1

解析 由密度公式 $\frac{p_1}{\rho_1T_1}=\frac{p_2}{\rho_2T_2}$ 可得 $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{p_1T_2}{p_2T_1}=\frac{\frac{p_1}{T_1}}{\frac{p_2}{T_2}}$，此式表明 $\frac{p}{T}$ 越大时，ρ 就越大，即求 $\frac{p}{T}$ 的极大值和极小值。

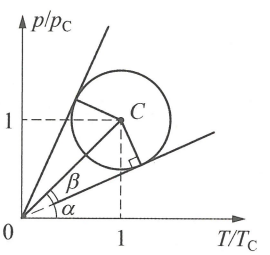
方法一：p 与 T 的关系满足的圆的参数方程

$$T=T_C+r\cos\theta,\ p=p_C+r\sin\theta$$

可得 $\frac{p}{T}=\frac{p_C+r\sin\theta}{T_C+r\cos\theta}$，然后求出这个函数的极大值与极小值的比值为

$$\frac{\dfrac{p_C\sqrt{2T_CT_0}+T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}-p_C(T_C-T_0)}}{\dfrac{p_C\sqrt{2T_CT_0}-T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}+p_C(T_C-T_0)}}$$

方法二：如图 2 所示，由 $\frac{p}{T}$ 的几何意义可知，$\frac{p}{T}$ 等于状态点到原点的连线与 T 轴夹角的正切值，求 $\frac{p}{T}$ 的极大值和极小值归结为求这个正切值的极大和极小。很显然，当直线与圆周的两处相切时，出现了这样的极大



例 9 图 2

值和极小值。即有

$$\theta_{max}=\alpha+\beta,\ \theta_{min}=\alpha-\beta$$

而 $\tan\alpha=\dfrac{p_C}{T_C}$，由 $\sin\beta=\dfrac{r}{\sqrt{T_C^2+p_C^2}}$，$r=T_C-T_0$，得

$$2\tan\beta=\frac{T_C-T_0}{\sqrt{2T_CT_0}}$$

所以

$$\tan\theta_{max}=\frac{p_C\sqrt{2T_CT_0}+T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}-p_C(T_C-T_0)}$$

$$\tan\theta_{min}=\frac{p_C\sqrt{2T_CT_0}-T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}+p_C(T_C-T_0)}$$

比值为

$$\frac{\dfrac{p_C\sqrt{2T_CT_0}+T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}-p_C(T_C-T_0)}}{\dfrac{p_C\sqrt{2T_CT_0}-T_C(T_C-T_0)}{T_C\sqrt{2T_CT_0}+p_C(T_C-T_0)}}$$

例 10 在正方体盒子里装有由相对论性粒子组成的理想气体，设每个粒子的动量为 $p_{动}$，真空中的光速为 c，则每个粒子能量满足 $E=p_{动}c$。已知气体的压强和体积分别为 $p_{压}$、V，求气体的总能量 U。

解析 设粒子沿 x 方向速率为 v_x，则

$$p_{压}=n\overline{v_x\cdot p_x}=\frac{1}{3}n\overline{\vec{v}\cdot\vec{p}}$$

其中 $v=c$，$p=\dfrac{E_0}{c}$，所以 $p_{压}=\dfrac{1}{3}nE_0$。

E_0 为每个分子能量，总能量 $U=nVE_0=3p_{压}V$。

例 11* 已知在一定温度下，空气中的氧气分子速率分布满足麦克斯韦速率分布，为

$$P(v)=4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{\frac{Mv^2}{2RT}}$$

其中，M 为气体的摩尔质量，T 为气体的绝对温度，R 为理想气体常数。该分布给出了气体粒子速度为从 v 到 $v+dv$ 之间的概率(最大为 $1.0=100\%$)，其中 dv 为一个增量。

(1) 计算当温度 $T=300\ K$ 时，氧气分子的最概然速率。氧的摩尔质量为 $M=0.0320\ kg/mol$，$R=8.31\ J/(mol\cdot K)$。

(2) 画出麦克斯韦速率分布图。

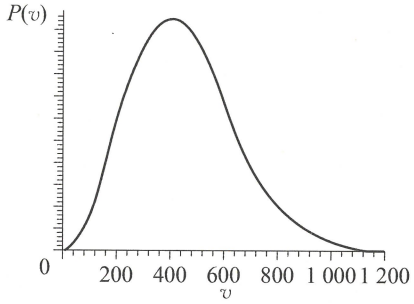
解析 (1) 在大量分子中，分子处于不同速率的概率是不同的。速率太大或太小的概率实

际上都比较小，而具有中等速率的分子数占总分子数的比率却很大。与 $P(v)$ 极大值对应的速率叫做最概然速率，求 $P(v)$ 对速率 v 的一阶导数并令其等于零。解得

$$v=\left(\frac{2RT}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

温度 $T=300\ \mathrm{K}$ 时，摩尔质量为 $M=0.0320\ \mathrm{kg/mol}$ 的氧气分子最概然速率为

$$v\approx 395\ \mathrm{m/s}$$



例 11 图

(2) 温度 $T=300\ \mathrm{K}$ 时，麦克斯韦速率分布图如图所示。

例 12* 绝热薄壁容器处于远离其他星体的太空(可视为真空)中。在某惯性系中观察，该容器的初始速度为零。容器的容积为 V，容器中充有某种单原子分子理想气体，气体的初始分子数、分子质量分别为 N_0、m，气体的初始温度为 T_0。$t=0$ 时容器壁上出现面积为 S 的一个小孔，假设小孔较小，容器中的气体在泄漏过程中始终处于平衡态。已知气体分子速度沿 x 方向的分量 v_x 的麦克斯韦分布函数为 $f(v_x)=\sqrt{\dfrac{m}{2\pi kT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$ (k 为玻尔兹曼常量)。在泄漏过程中，求：

(1) 当气体的分子数密度为 n、温度为 T 时在单位时间内从小孔单位面积泄出的气体分子数；

(2) 当容器中气体温度为 T 时，从小孔泄出的气体分子相对于容器的平均动能。

已知积分公式：$\displaystyle\int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2A}$，$\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{A^3}}$，$\displaystyle\int_0^\infty x^3\,\mathrm{e}^{-Ax^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2A^2}$

解析 (1) 设小孔所在平面垂直于 x 方向。在 $\mathrm{d}t$ 时间范围内泄出小孔的气体分子数等于处于小孔内侧体积为 $v_xS\mathrm{d}t$ 柱体中垂直小孔方向速度分量在 v_x 到 $v_x+\mathrm{d}v_x$ 范围内的气体分子数。该柱体中的符合条件的气体分子数为 $n_{v_x}Sv_x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v_x$，其中 n_{v_x} 为速度为 v_x 的气体分子的分子数密度，其与分子数密度 n 的关系为

$$n_{v_x}=nf(v_x)=n\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}$$

小孔处单位时间单位面积泄出气体的平均分子数为

$$N_{泄}=\int_0^\infty n_{v_x}v_x\,\mathrm{d}v_x=\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^\infty v_x n\,\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\,\mathrm{d}v_x=n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}=\frac{N_0}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}\qquad①$$

(2) 当气体温度为 T 时，泄出气体分子的平均动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{N_{泄}}\int_0^\infty\frac{1}{2}mv_x^2n_{v_x}v_x\,\mathrm{d}v_x+kT$$

其中 kT 为气体分子垂直于 x 方向速度对平均动能的贡献。联立以上三式，得

$$\bar{E}_k=\frac{1}{n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}mn\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}v_x^3\mathrm{e}^{-\frac{mv_x^2}{2kT}}\mathrm{d}v_x+kT$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}}\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\frac{1}{2\left(\frac{m}{2kT}\right)^2}+kT=2kT \qquad ②$$

练习题

1 如果白银原子具有动能 $E_k=1\times10^{-17}$ J，对器壁产生的压强为 $p=0.1$ Pa，则器壁的白银覆盖层的厚度将以多大速率增长？白银的原子质量 $A=108$，密度 $\rho=10.5\ \mathrm{g\cdot cm^{-3}}$。

2 贮气罐体积 V、罐内气压 p，贮气罐经阀门与体积 V_0 的真空室相连，打开阀门为真空室充气，平衡后关闭阀门，然后再换一个新的同样贮气罐继续为之充气……如此不断充气，直至原真空室的气压达到 $p_0(p_0<p)$ 为止。试问：共需要多少个贮气罐？设充气过程温度不变。

3 1 mol 理想气体初态压强、体积和温度分别为 p_1、V_1 和 T_1，然后气体经过一个压强与体积间满足 $p=AV$ 的过程(其中 A 为常量)。

(1) 用 p_1、T_1、和 R(气体普适常数)表示 A；

(2) 若气体经历上述过程后体积增大一倍，则气体的末态温度 T 是多少？

(3) 对 1 mol 理想气体，如何才能实现上述过程？

4* 一容器被一隔板分成两部分，其中气体的压强分别为 p_1、p_2，温度都是 T，摩尔质量都是 μ。隔板上开有面积为 S 的小孔，小孔面积很小，以至于分子从小孔射出和射入时对每部分气体平衡态的影响都可以忽略。试证明每秒通过小孔的气体质量为 $\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}(p_1-p_2)S$。

5 一双原子分子的势能函数 $E_p(r)=E_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]$，式中 r 为两原子间的距离。

(1) 试证明：r_0 是分子势能极小时的原子间距。

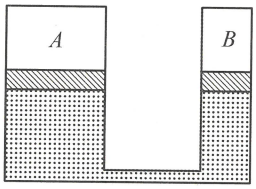
(2) 求分子势能的极小值。

(3) 求分子间的相互作用力，并判断平衡的稳定性。

6 一定质量的压强为 p_1、温度为 T_1 的理想气体与同体积的压强为 p_2、温度为 T_2 的同种理想气体相混合。已知混合后气体的体积为原来气体的体积之和，且在混合的过程中，气体与外界未发生能量变换。气体的比热容可视为常数，求混合后气体的温度和压强。

7 如图所示，导热性能良好的气缸 A 和 B 高度均为 h(已除开活塞的厚度)，横截面积不同，竖

直浸没在温度为 T_0 的恒温槽内。它们的底部由一细管连通(细管容积可忽略)。两气缸内各有一个活塞,质量分别为 $m_A=2m$ 和 $m_B=m$,活塞与气缸之间无摩擦,两活塞的下方为理想气体,上方为真空。当两活塞下方气体处于平衡状态时,两活塞底面相对于气缸底的高度均为 $\frac{h}{2}$。现保持恒温槽温度不变,在两活塞上面同时各缓慢加上同样大小的压力,让压力从零缓慢增加,直至其大小等于 $2mg$(g 为重力加速度)为止,并一直保持两活塞上的压力不变;系统再次达到平衡后,缓慢升高恒温槽的温度,对气体加热,直至气缸 B 中活塞底面恰好回到高度为 $\frac{h}{2}$ 处。求:



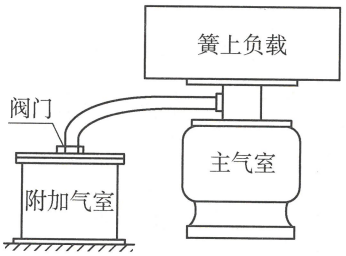
第 7 题图

(1) 两个活塞的横截面积之比 $S_A:S_B$;

(2) 气缸内气体的最后的温度;

(3) 在加热气体的过程中气体对活塞所做的总功。

8 高铁运行的平稳性与列车的振动程度密切相关,列车上安装的空气弹簧可以有效减振。某高铁测试实验采用的空气弹簧模型由主气室(气囊)和附加气室(容积不变)构成,如图所示。空气弹簧对簧上负载竖直向上的作用力由气囊内被压缩的空气产生的弹力提供。簧上负载处于平衡状态时,主气室内气体的压强和体积分别为 p_{10} 和 V_{10},附加气室的容积为 V_2,大气压强为 p_0。空气弹簧竖直向上的作用力 F 与主气室内气体压强和大气压强之差的比值称为空气弹簧的有效承载面积 A_e。已知空气的摩尔定容热容 $C_V=\frac{5}{2}R$(R 是普适气体常量)。假设在微振幅条件下,主气室内气体的体积 V_1 和有效承载面积 A_e 均可视为空气弹簧(气囊)的承载面相对于其平衡位置的竖直位移 y(向下为正)的线性函数,变化率分别为常量 $-\alpha(\alpha>0)$ 和 $\beta(\beta>0)$。



第 8 题图

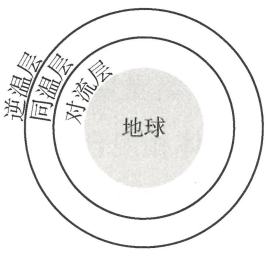
(1) 附加气室未与主气室连通(阀门关闭),试在下述两种情形下,导出空气弹簧的劲度系数 $K=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}$ 与其有效承载面积 A_e 之间的关系:

ⅰ) 上下乘客(主气室内气体压强和体积的变化满足等温过程);

ⅱ) 列车运行中遇到剧烈颠簸(主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程)。

(2) 主气室连通附加气室(阀门打开)后,在上述两种情形下,导出空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系。主气室与附加气室之间连通管道的容积可忽略。

9 大气层最底部是对流层,厚度约为 10 km。在对流层中,空气的温度随高度升高而降低。对流层顶部之上 10 km 左右的范围内温度近似不随高度变化,被称为同温层;同温层之上一定高度范围内大气温度会随高度升高而升高,被称为逆温层,如图所示。在此基础上,讨论如下问题:



第 9 题图

(1) 由于阳光照射，地表附近的空气温度较高。对流层中温度变化可以看成是空气缓慢地绝热上升的结果。求对流层中空气温度和高度的关系。设地表温度为 T_0，空气是理想气体，其摩尔质量为 μ，等压比热容和等容比热容的比值为常数 γ，普适气体常量为 R。对流层中重力加速度近似为常量 g。

(2) 气体中声音的传播速度 $v_s=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\text{绝热}}}$，其中 p 是压强，ρ 是气体的密度。不考虑风的影响，求声速与空气温度 T 的关系，并讨论题图所示的大气各层中声速随高度的变化。

第 10 章 热力学定律

知识要点和基本方法

一 理想气体的内能

理想气体没有分子势能，所有分子动能的总和就是理想气体的内能。所以 n mol 理想气体的内能为 $E=nN_{\mathrm{A}}\frac{i}{2}kT=n\cdot\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}pV$，式中 i 为理想气体分子的自由度数。对于给定的一定质量的某种理想气体(气体质量 m、摩尔质量 μ、自由度 i、摩尔数 n 都是确定的)，其内能唯一地由温度来确定，即内能是温度的单值函数，内能的变化只与温度的变化有关，由初末状态决定，与状态变化所经历的具体过程无关，即

$$\Delta E=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{i}{2}R\Delta T=n\cdot\frac{i}{2}R\Delta T=\frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$$

1 mol 单原子分子(如 He)气体的内能 $E=\frac{3}{2}RT$，1 mol 双原子分子(如 O_2)气体的内能 $E=\frac{5}{2}RT$，1 mol 多原子分子(三个或三个以上原子的分子，如 CO_2)气体的内能 $E=3RT$。

二 绝热过程方程

由热力学第一定律 $\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V$

得 $0=\frac{i}{2}(p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p)+p\mathrm{d}V$

积分得 $\ln(p^{\frac{i}{2}}V^{(1+\frac{i}{2})})=C_1$

引入比热比 $\gamma=\frac{c_p}{c_V}=\frac{\left(\frac{i}{2}+1\right)R}{\frac{i}{2}R}=\frac{i+2}{i}$

得 $pV^{\gamma}=C$

单原子分子气体，$\gamma=\frac{5}{3}$；刚性双原子分子气体或刚性线型分子气体，$\gamma=\frac{7}{5}$；刚性多原子分子气体，$\gamma=\frac{4}{3}$。

说明：只有在平衡态下才能应用能量均分定理，非平衡态不能应用能量均分定理。由于热

传递需要时间，所以凡是极短时间内的迅速变化过程，都可认为没有热量交换，视为绝热过程。但是绝热过程方程和其他过程方程一样只有在准静态过程中才适用，如果题目没有明确说明满足绝热过程方程，应首先考虑使用热力学第一定律求解。

三 多方过程方程

一定质量的理想气体在一般的准静态变化过程中，p、V、T 均发生变化，若在变化过程中满足 $pV^n = C$（常量），n = 常数，$n \in (-\infty, +\infty)$，则称此过程为多方过程，n 叫做多方指数。多方过程是特殊的准静态过程，对于任意的准静态过程，即使它不是多方过程，也都可以视为一连串无穷多个无限小多方过程（它们的多方指数可以不相同）的组合。等容过程、等压过程、等温过程和绝热过程都是特殊的多方过程，如图 10－1 所示。等温过程 $n = 1$，等压过程 $n = 0$，等容过程 $n \to \infty$，绝热过程 $n = \gamma$，p 与 V 成正比的准静态过程（$p = \alpha V$，α 为常量）$n = -1$。

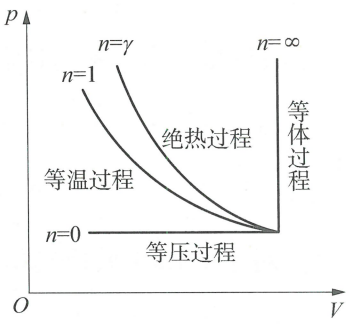


图 10－1

四 自由膨胀过程

气体向真空的膨胀过程称为气体的自由膨胀。气体自由膨胀时，没有外界阻力，所以外界不对气体做功，即 $W = 0$；又因为过程进行得很快，气体来不及与外界交换热量，可以看作是绝热过程，即 $Q = 0$，所以内能不变。对于理想气体自由膨胀过程，内能不变，温度不变；对于实际气体自由膨胀过程，内能不变，分子势能增加，分子动能减少，温度降低。

五 热容

1. 热容

物体吸收的热量与升高温度的比值称为热容，数值上等于物体每升高 1 K 温度时所吸收的热量（释放热量时为负值），$C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$，单位为 J/K，热容与物体的质量、物质状态、物质的量和热力学过程有关。热容可以为正值、零或者负值。

2. 比热容

1 kg 物体温度每升高 1 K 所吸收的热量称为比热容，$c = \dfrac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$，单位为 J/(kg · K)。

3. 摩尔热容

1 mol 物体温度每升高 1 K 所吸收的热量称为摩尔热容，分为摩尔定压热容 $C_{p,\,m}$ 和摩尔定容热容 $C_{V,\,m}$，其中 $C_{p,\,m} = \left.\dfrac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T}\right|_{p\text{一定}}$，$C_{V,\,m} = \left.\dfrac{\Delta Q}{n \cdot \Delta T}\right|_{V\text{一定}}$，单位均是 J/(mol · K)。

(1) 摩尔定容热容

根据热力学第一定律可知，1 mol 理想气体在等容变化过程中(没有做功过程)，吸收的热量等于气体内能的变化，故摩尔定容热容

$$C_{V,\mathrm{m}}=\frac{\Delta Q}{n\cdot\Delta T}=\frac{\Delta E}{n\cdot\Delta T}=\frac{n\cdot\frac{i}{2}R\cdot\Delta T}{n\cdot\Delta T}=\frac{i}{2}R$$

即 $C_{V,\mathrm{m}}=\frac{i}{2}R$，对刚性气体分子 $i=3,5,6$。所以 1 mol 理想气体的内能为

$$E=\frac{i}{2}RT=\frac{i}{2}pV=C_{V,\mathrm{m}}T$$

对于 n mol 理想气体，有

$$E=\frac{i}{2}nRT=\frac{i}{2}pV=nC_{V,\mathrm{m}}T$$

(2) 摩尔定压热容

理想气体在保持压强不变的情况下，吸收的热量除了增加气体内能外，还要对外界做功，所以摩尔定压热容大于摩尔定容热容，即 $C_{p,\mathrm{m}}>C_{V,\mathrm{m}}$。由热力学第一定律和摩尔定容热容可得摩尔定压热容

$$C_{p,\mathrm{m}}=\frac{\Delta Q}{n\cdot\Delta T}=\frac{\Delta E+p\Delta V}{n\cdot\Delta T}=\frac{n\cdot\frac{i}{2}R\cdot\Delta T+nR\Delta T}{n\cdot\Delta T}=\frac{i}{2}R+R=C_{V,\mathrm{m}}+R$$

(3) 绝热过程热容

理想气体在绝热过程中吸收热量 $\Delta Q=0$，所以热容 $C=0$。

(4) 等温过程热容

理想气体在等温过程中温度不变，$\Delta T=0$，所以热容 $C\to\infty$。

(5) 多方过程摩尔热容

由理想气体摩尔内能公式 $E=C_{V,\mathrm{m}}T$ 和热力学第一定律 $\mathrm{d}Q=\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V$ 可得多方过程摩尔热容

$$C_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}=\frac{C_{V,\mathrm{m}}\mathrm{d}T+p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=C_{V,\mathrm{m}}+\frac{p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}\qquad①$$

对多方过程方程 $pV^n=C$ 微分可得

$$pnV^{n-1}\mathrm{d}V+V^n\mathrm{d}p=0\qquad②$$

对 1 mol 理想气体的克拉伯龙方程 $pV=RT$ 微分可得

$$p\mathrm{d}V+V\mathrm{d}p=R\mathrm{d}T\qquad③$$

联立②③式得

$$\frac{p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=-\frac{R}{n-1} \qquad ④$$

把④式代入①式得

$$C_{\mathrm{m}}=C_{V,\mathrm{m}}-\frac{R}{n-1}=C_{V,\mathrm{m}}-\frac{C_{p,\mathrm{m}}-C_{V,\mathrm{m}}}{n-1}=\frac{nC_{V,\mathrm{m}}-C_{p,\mathrm{m}}}{n-1}=\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)C_{V,\mathrm{m}}$$

这就是理想气体多方过程的摩尔热容表达式。其中 n 是多方指数，γ 是比热比，$C_{V,\mathrm{m}}$ 是摩尔定容热容。

六 热传递

1. 热对流

液体或气体中较热的部分由于体积膨胀、密度变小而上升，较冷的部分由于密度较大而下沉，形成循环的流动，使温度趋向一致，该过程称为热对流。在对流过程中，相互接触的部分之间同时发生热传导。

2. 热传导

物体或直接接触的物体由于各处温度不同而引起的热量从温度较高处传递到温度较低处的现象叫热传导。如果导热物体各点温度不随时间变化，这种导热过程称为稳定导热。设导热柱体长度为 l，横截面积为 S，两端截面处的温度分别为 T_1、T_2，且 $T_1>T_2$，热量沿着柱体长度方向传递，则在 Δt 时间内通过导热柱体横截面 S 所传递的热量为 $Q=K\dfrac{T_1-T_2}{l}S\Delta t$，极短时间内 $Q\approx 0$，可视为绝热过程。K 为物质的导热系数。

(1) 导热系数

导热系数是指在稳定传热条件下，在 1 s 内通过厚度为 1 m、温度差为 1 K、横截面积为 1 m^2 的截面传导的热量，单位为 W/(m·K)。导热系数反映了物质的导热能力，与物质的材料和其结构、密度、湿度、温度、压力等因素有关，导热系数越大，则其导热性能越好。导热系数在 0.12 W/(m·K)以下的材料称为绝热材料。

(2) 热阻

当有热量在物体上传输时，在物体两端的温度差与热源功率的比值称为热阻。即 $R=\dfrac{T_2-T_1}{P}$，其中 T_1 为物体一端的温度，T_2 为物体另一端的温度，P 为热源的功率。热阻单位为 K/W 或 ℃/W。物体的热阻越大，则其对热传导的阻碍能力越强，导热效果越差。

(3) 热阻定律

物体的热阻(对热流传导的阻碍能力)与传导路径长度成正比，与材料的热阻率成正比(即

与材料的导热系数成反比），与通过的截面积成反比，这就是热阻定律。表达为热阻 $R=\frac{\rho L}{S}=\frac{L}{KS}$，其中 ρ 是热阻率，K 是导热系数，L 是材料长度，S 是传热面积。热阻定律表明，物体的热阻由材料的性质、几何形状和导热路径共同决定，与物体两端的温度和热源功率无关。

3. 热辐射

构成固体或液体的带电粒子或极性分子由于热运动而不断地产生电磁辐射，任何物体在任何温度下都会不断地产生电磁辐射，由于这类辐射与物体温度有关，所以叫做热辐射。热辐射不依靠于任何介质，在真空中也能进行。热辐射的强弱与物体的自身温度有关，与周围物体的温度无关。

在热辐射中，有一类物体在任何温度下都能够全部吸收辐射到其表面的所有电磁波而没有反射，这类物体称为黑体（又叫绝对黑体）。黑体单位表面积的辐射功率 P 与其热力学温度 T 的四次方成正比，即 $P=\sigma T^4$，这就是黑体辐射定律，又叫做斯忒藩定律。式中 $\sigma=5.67\times10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$，称为斯忒藩常量。如果不是黑体（称为灰体），单位表面积的辐射功率 $P=\varepsilon\sigma T^4$。ε 叫表面吸收系数，又叫表面辐射系数，其值在 0 和 1 之间，由物体表面性质决定。吸收系数和反射系数之和等于 1。

既不反射，也不辐射可见光的物体，叫做黑色物体，而不是黑体。现实生活中，如果物体发射或反射的光比周围的光都微弱得多时，则称该物体为黑色物体。

4. 维恩位移定律

在一定的温度下，黑体的热力学温度与辐射本领最大值所对应的波长的乘积为一常量，称为维恩位移定律。其数学表达式为：$\lambda(\mathrm{m})T=b$，式中 $b=0.002\,897\ \mathrm{m\cdot K}$，称为维恩常量。维恩位移定律表明，黑体越热，其辐射本领最大值所对应的波长越短。而除了绝对零度外，其他任何温度下物体辐射电磁波的频率都是从零到无穷大，只是各个不同的温度对应的“波长-能量”曲线不同。如图 10-2 所示，每一条曲线都有一个极大值，对应的波长为 $\lambda(\mathrm{m})$。随着温度的升高，黑体的总辐射强度迅速增大，并且曲线的极大值点逐渐向短波方向移动。

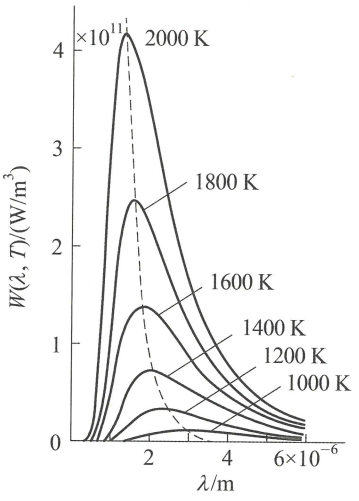


图 10-2

维恩位移定律是热辐射的基本定律之一。维恩位移定律不仅与黑体辐射的实验曲线的短波部分相符合，而且对黑体辐射的整个能谱都符合，它是经典物理学对黑体辐射问题所能做出的最大限度的探索。

譬如在宇宙中，不同恒星随表面温度的不同会显示出不同的颜色，温度较高的显蓝色，次之显白色，濒临燃尽而膨胀的红巨星表面温度只有 2000—3000 K，因而显红色。太阳的表面温度是 5778 K，根据维恩位移定律计算得的峰值辐射波长为 502 nm，这近似处于可见光光谱范围的中点，为绿色光。但实际我们看到的太阳是黄色的，这和各个波长成分的光所做出的贡献有

关。通电的白炽灯的温度可达到2700℃，所以白炽灯的辐射光谱偏橙色。处于炽热状态的电炉丝，温度通常在1300℃左右，所以呈现红色。而人体温度为37℃，辐射的电磁波主要是红外线。

七 理想气体的功

理想气体膨胀可以分为两种情况：一是理想气体周围有其他物质，理想气体对外做功；二是理想气体周围没有其他物质，进行自由膨胀，理想气体不做功。例如，如果两个容器相连，其中一个容器内充满理想气体，另一个容器内是真空，将两个容器相连后理想气体膨胀充满两个容器，该过程中理想气体不做功。一般情况下，如不做特别说明，认为气体膨胀对外做功。

理想气体膨胀对外做功 $W=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$。在 $p-V$ 图中，图象与 V 轴围成的“面积”表示功。若过程曲线为闭合曲线，则闭合曲线所围成的“面积”表示功，其中顺时针循环（正循环，又叫热机循环），气体对外界做正功；逆时针循环（逆循环，又叫制冷循环），气体对外界做负功，即外界对气体做正功。

1. 等容过程做功：$W=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V=0$；

2. 等压过程做功：$W=p(V_2-V_1)$；

3. 等温过程做功：$W=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V=RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\mathrm{d}V=RT\ln\frac{V_2}{V_1}=RT\ln\frac{p_1}{p_2}=Q$；

4. 绝热过程做功

$$W=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V=\frac{C}{1-\gamma}(V_2^{1-\gamma}-V_1^{1-\gamma})=\frac{p_2V_2^{\gamma}V_2^{1-\gamma}-p_1V^{\gamma}V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-\gamma}$$

$$=\frac{nR}{1-\gamma}\Delta T=-\Delta E=-nC_{V,\mathrm{m}}\Delta T=-n\cdot\frac{i}{2}R\Delta T=\frac{i}{2}(p_1V_1-p_2V_2)$$

5. 多方过程做功

$$W=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V=\frac{C}{1-n}(V_2^{1-n}-V_1^{1-n})=\frac{p_2V_2^{n}V_2^{1-n}-p_1V_1^{n}V_1^{1-n}}{1-n}=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-n}$$

$$=\frac{nR}{1-n}\cdot\Delta T$$

理想气体的五个特殊准静态过程比较：

过程名称	过程特征	过程方程	内能增加量	对外做功	吸收热量	摩尔热容
等容过程	$V=$常量	$\frac{p}{T}=C$	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	0	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	$\frac{R}{\gamma-1}$
等压过程	$p=$常量	$\frac{V}{T}=C$	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	$p(V_2-V_1)$	$nC_{p,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	$\frac{\gamma R}{\gamma-1}$

续 表

过程名称	过程特征	过程方程	内能增加量	对外做功	吸收热量	摩尔热容
等温过程	$T=$常量	$pV=C$	0	$nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	$nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$	∞
绝热过程	$\mathrm{d}Q=0$	$pV^{\gamma}=C$	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	0	0
多方过程	pVT 均变化	$pV^{n}=C$	$nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)$	$\frac{1}{n-1}(p_1V_1-p_2V_2)$	$\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)C_{V,\mathrm{m}}\Delta T$	$\left(\frac{n-\gamma}{n-1}\right)C_{V,\mathrm{m}}$

八 热力学第一定律

外界对系统所做的功 W 和系统从外界吸收的热量 Q 之和，等于系统内能的增加量 ΔE，即 $\Delta E=Q+W$，这就是热力学第一定律。系统吸热 $Q>0$，系统放热 $Q<0$；外界对系统做功 $W>0$，系统对外界做功 $W<0$。

热力学第一定律也可以表述为：系统从外界吸收的热量 Q 等于系统对外界所做的功 W 和系统内能的增加量 ΔE 之和，即 $Q=\Delta E+W$。系统吸热 $Q>0$，系统放热 $Q<0$；系统对外界做功 $W>0$，外界对系统做功 $W<0$。热力学第一定律是能量守恒和转化定律在热力学过程中的具体体现，是第一类永动机不可能制成的理论依据。

九 可逆过程与不可逆过程

某一物质系统，由一状态经过某一过程变化到另一状态，如果存在另一过程，它能使该物质系统和外界环境完全复原，即物质系统复原到原来状态，同时消除了原来过程对外界环境所产生的影响，则原来的过程称为可逆过程。反之，如果用任何方法都不可能使该物质系统和外界环境完全复原，则原来的过程称为不可逆过程。无耗散的准静态过程是可逆过程，一切实际过程都有能量耗散，也都不是准静态过程，都不是可逆过程。

十 循环过程

1. 循环过程

系统从一个平衡态出发，经历一系列过程后又回到原来平衡态的过程，称为循环过程。系统的循环过程可在 $p-V$ 图上用一个闭合曲线表示。如果在 $p-V$ 图上所示的循环过程是沿顺时针方向进行，如图 10-3 所示，称为正循环，又叫热机循环。例如热机的工作过程为正循环，利用工作物质，连续不断地把内能转换为机械功。反之，如果在 $p-V$ 图上所示的循环过程是沿逆时针方向进行，称为逆循环，又叫制冷循环。例如制冷机的循

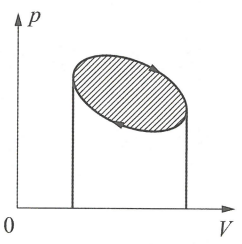


图 10-3

环过程为逆循环，通过外界对制冷机做功使制冷机从低温热源吸收热量，加上外界对它所做的功转化成的热量，一起向高温热源释放热量，实现了热量从低温热源向高温热源的传递。

正循环过程中，系统对外界所做的总功 W 为 $p-V$ 图中循环曲线所包围的面积，而循环过程中内能增量 $\Delta E=0$，根据热力学第一定律，系统从外界吸收的热量 Q_1 一定大于系统向外界放出的热量 Q_2，且有 $Q_1-Q_2=W$，所以必定有 $Q_1>W$。逆循环过程中，外界对系统所做的总功 W 也为 $p-V$ 图中循环曲线所包围的面积，而循环过程中内能增量 $\Delta E=0$，根据热力学第一定律，系统向外界放出的热量 Q_1 一定大于系统从外界吸收的热量 Q_2，且有 $Q_1-Q_2=W$，但是可能有 $Q_2>W$。

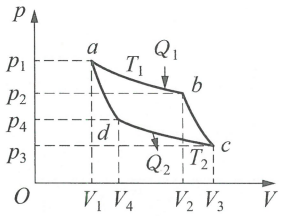
全部由可逆过程组成的循环称为可逆循环，否则为不可逆循环。

2. 卡诺循环

工作物质只与两个恒温热源交换热量的循环，叫做卡诺循环。

说明：由于散热、摩擦、漏气等不可逆损耗总是存在，工作物质与热源之间存在热阻（两个等温过程中工作物质温度 T_1 和 T_2 与热源温度 T_H 和 T_L 不相等，总是有 $T_H>T_1>T_2>T_L$），工作物质内部不可能经历无限缓慢的准静态过程，所以实际卡诺循环是不可逆循环。今后为了研究问题的方便，如果没有特别说明，说到卡诺循环，一般指的都是可逆卡诺循环，工作物质均为理想气体。

由于卡诺循环只有两个热源，一个高温热源温度为 T_1 和一个低温热源温度为 T_2。所以卡诺循环由两个等温（线）过程和两个绝热（线）过程组成，如图 10-4 所示，等温吸热膨胀对外做功过程，绝热膨胀对外做功过程，等温压缩放热外界对气体做功过程，绝热压缩外界对气体做功过程。即理想气体从状态 $a(p_1, V_1, T_1)$ 等温吸热到状态 $b(p_2, V_2, T_2)$，再从状态 b 绝热膨胀到状态 $c(p_3, V_3, T_3)$，此后，从状态 c 等温放热到状态 $d(p_4, V_4, T_4)$，最后从状态 d 绝热压缩回到状态 a。



卡诺循环 $p-V$ 图

图 10-4

3. 卡诺循环的效率

设在一个循环过程中，工作物质从高温热源 T_1 吸收热量 Q_1，向低温热源 T_2 释放热量 Q_2，对外做净功 W。在一个循环过程中，工作物质对外做净功 W 与从高温热源 T_1 吸收热量 Q_1 之比值称为卡诺循环效率，即 $\eta=\dfrac{W}{Q_1}$。由热力学第一定律得

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}$$

由

$$Q_1=W_1=\int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V=nRT_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{1}{V}\mathrm{d}V=nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q_2=-W_2=-\int_{V_3}^{V_4}p\,\mathrm{d}V=-nRT_2\int_{V_3}^{V_4}\frac{1}{V}\mathrm{d}V=-nRT_2\ln\frac{V_4}{V_3}$$

得
$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{-nRT_2\ln\frac{V_4}{V_3}}{nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}}=\frac{T_2\ln\frac{V_3}{V_4}}{T_1\ln\frac{V_2}{V_1}}$$

由绝热过程方程 $pV^\gamma=C$，并设过程 $b\to c$、$d\to a$ 的常量分别为 C_{23}、C_{41} 得

$$\frac{V_3}{V_4}=\left(\frac{V_3^\gamma}{V_4^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{\frac{C_{23}}{p_3}}{\frac{C_{41}}{p_4}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{\frac{p_2V_2^\gamma}{p_3}}{\frac{p_1V_1^\gamma}{p_4}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{p_4\cdot p_2V_2^\gamma}{p_3\cdot p_1V_1^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

又由等温过程有方程
$$p_1V_1=p_2V_2,\ p_3V_3=p_4V_4$$

得
$$\frac{V_3}{V_4}=\left(\frac{V_3\cdot V_1V_2^\gamma}{V_4\cdot V_2V_1^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

两边同时 γ 次方，得
$$\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma=\frac{V_3\cdot V_1V_2^\gamma}{V_4\cdot V_2V_1^\gamma}$$

解得
$$\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_2}{V_1}$$

所以
$$\frac{Q_2}{Q_1}=\frac{T_2}{T_1}$$

故效率 $\eta=1-\frac{T_2}{T_1}$。即卡诺循环的效率只由高、低温热源温度决定，与工作物质无关。因为不能获得 $T_1\to\infty$ 的高温热源或 $T_2=0\ \mathrm{K}(-273.15℃)$ 的低温热源，所以，卡诺循环的效率必定小于 1。

4. 逆卡诺循环的制冷系数

逆卡诺循环与正向循环相反，沿 $a-d-c-b-a$ 方向，如图 10-4 所示。因而 Q_2 是工作物质从低温热源吸入的热量(通称制冷量)，Q_1 是工作物质排放给高温热源的热量，W 是完成逆循环所需外界输入的净功。在逆卡诺循环中，工作物质从低温热源吸入的热量 Q_2 与外界输入的净功 W 之比值称为逆卡诺循环的制冷系数，即 $\varepsilon=\frac{Q_2}{W}$。由热力学第一定律和绝热方程得

$$\varepsilon=\frac{Q_2}{W}=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{nRT_2\ln\frac{V_3}{V_4}}{nRT_1\ln\frac{V_2}{V_1}-nRT_2\ln\frac{V_3}{V_4}}=\frac{T_2}{T_1-T_2}$$

5. 卡诺制冷机

按照逆卡诺循环工作的制冷机叫卡诺制冷机。制冷机从低温热源获得的制冷量与其消耗

的功之比，称为制冷机的制冷系数，即 $\varepsilon=\dfrac{Q_2}{W}$。制冷系数是制冷机的一项重要技术经济指标。如图 10－5 所示为制冷机的工作原理示意图。

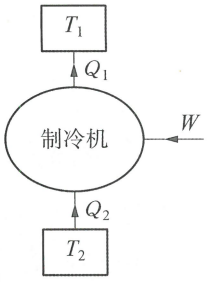


图 10－5

可逆卡诺制冷机的制冷系数 $\varepsilon=\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$。逆卡诺循环制冷系数是在这两个热源之间工作的一切制冷机制冷系数的极限，实际制冷机的制冷系数 $\varepsilon<\dfrac{T_2}{T_1-T_2}$。

6. 卡诺热机

按照卡诺循环工作的热机叫做卡诺热机。热机工作部分中转变为机械功的热量和工作物质从发热器得到的热量之比，称为热机的效率，即 $\eta=\dfrac{W}{Q_1}$。热机的效率是热机性能的重要指标之一。如图 10－6 所示为卡诺热机工作原理示意图。可逆卡诺热机的效率 $\eta=1-\dfrac{T_2}{T_1}$。

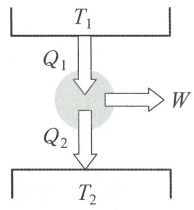


图 10－6

由于卡诺循环的效率只与两个热源的热力学温度有关，如果高温热源的温度 T_1 愈高，低温热源的温度 T_2 愈低，则卡诺循环的效率愈高。由于散热、摩擦、漏气等不可逆损耗总是存在，而且工作物质与热源之间存在热阻，循环过程不可能是准静态过程，所有实际循环的效率都低于同样条件下卡诺循环的效率，也就是说，如果高温热源和低温热源的温度确定之后，卡诺循环的效率是在这两个热源之间工作的一切热机效率的最高界限。

说明：理想热机是没有散热、摩擦、漏气等不可逆损耗的热机，可逆热机一定是理想热机；由于工作物质与热源之间可能存在热阻，循环过程不一定是准静态过程，所以理想热机不一定是可逆热机。一切热机总是要有热量进入发动机的温度 T_1 和发动机排放其废气的环境温度 T_2，所以热机的效率总是小于 1。

7. 卡诺定理

(1) 在相同的高温热源和低温热源之间工作的一切可逆热机的效率都相等，与工作物质无关，即 $\eta=1-\dfrac{T_2}{T_1}$，其中 T_1、T_2 分别是高温热源和低温热源的绝对温度。

(2) 在相同高温热源和低温热源之间工作的一切热机中，不可逆热机的效率不可能大于可逆热机的效率，即不可逆热机的效率 $\eta<1-\dfrac{T_2}{T_1}$。

十一 克劳修斯等式和不等式*

1. 克劳修斯等式

由上述推导可知，可逆卡诺循环中，热机的效率

$$\eta=1-\frac{T_2}{T_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1},\ \frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2}$$

令吸热为正，放热为负，则 $$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0$$

由于任意可逆循环都可以视为无限多的无穷小卡诺循环构成，故$\oint\frac{\mathrm{d}Q}{T}=0$，即为克劳修斯等式。

2. 克劳修斯不等式

对于不可逆的理想卡诺热机，其效率

$$\eta=\frac{W}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}<1-\frac{T_2}{T_1},\ \frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}<0,\oint\frac{\mathrm{d}Q}{T}<0$$

由于对任意的不可逆循环，均可视为无限多的无穷小不可逆卡诺循环构成，则均有$\oint\frac{\mathrm{d}Q}{T}<0$，即为克劳修斯不等式。

十二 熵*

1. 可逆过程与不可逆过程

系统由初态经历一过程到达末态，若可以找到能使系统和外界都回到初态的过程，则原过程为可逆过程。只有无耗散的准静态(无限缓慢)过程是可逆过程。

一切实际过程都不可能无限缓慢，都不是准静态过程，而且都会涉及向内能的转化过程(电磁能、机械能自发地转化为内能的过程叫耗散过程)，都有能量耗散，所以都是不可逆过程。凡是与热现象有关的过程都是不可逆过程，一切宏观过程都涉及热现象，所以都是不可逆过程，具有方向性。

2. 熵的定义

如图 10－7 所示，在可逆循环 $AaB\,\mathrm{I}\,A$、$AaB\,\mathrm{II}\,A$、$AaB\,\mathrm{III}\,A$ 中，均有

$$\oint\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_A^B\frac{\mathrm{d}Q}{T}+\int_B^A\frac{\mathrm{d}Q}{T}=0$$

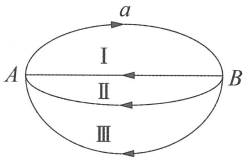


图 10－7

说明从 B 到 A 的任意可逆过程 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ 中的积分$\int\frac{\mathrm{d}Q}{T}$都相等，与可逆过程无关。也就是说，由 B 状态到 A 状态的所有可逆过程对应的积分$\int\frac{\mathrm{d}Q}{T}$都相等，因此积分$\int\frac{\mathrm{d}Q}{T}$由 A、B 的状态决定，与可逆过程无关，所以定义与热力学状态对应的态函数熵，用 S 表示。由 B 状态到 A 状态的熵变$S_A-S_B=\int_B^A\frac{\mathrm{d}Q}{T}_{\text{可逆}}$，如果给定任意平衡态 P_0 的熵为 S_0，则 $S_A=$

$S_0+\int_{P_0}^{A}\left(\frac{dQ}{T}\right)_{可逆}$。

3. 熵增加原理

由克劳修斯不等式 $$\oint\left(\frac{dQ}{T}\right)_{不可逆}<0$$

可得 $$\oint\left(\frac{dQ}{T}\right)_{不可逆}=\int_A^B\left(\frac{dQ}{T}\right)_{可逆}+\int_B^A\left(\frac{dQ}{T}\right)_{不可逆}<0$$

而 $$\int_A^B\left(\frac{dQ}{T}\right)_{可逆}+\int_B^A\left(\frac{dQ}{T}\right)_{可逆}=0$$

故 $$\int_B^A\left(\frac{dQ}{T}\right)_{不可逆}<\int_B^A\left(\frac{dQ}{T}\right)_{可逆}=S_A-S_B$$

即 $$S_A-S_B\geqslant\int_B^A\frac{dQ}{T}$$（可逆过程取等号，不可逆过程取大于号）

若为绝热过程，则 $dQ=0$。

故 $S_A-S_B\geqslant 0$，即当热力学系统从一个平衡态经绝热过程到达另一个平衡态时，它的熵永不减少，如果过程可逆，则熵不变；如果过程不可逆，则熵增加。这个结论称为熵增加原理。

4. 热力学第二定律的基本微分方程

$$dS=\frac{dQ}{T}$$

$$TdS=dQ=dU+pdV$$

即 $TdS=dU+pdV$，称为热力学第二定律的基本微分方程，包含了 T、p、V、S、U 五个热力学态函数。

5. 系统的熵与微观状态数

系统的熵 S 与所有可能的微观状态数 Ω 满足 $S=k\ln\Omega$，式中 k 是玻尔兹曼常量，它提示了熵的统计物理学意义。设一个热力学系统包含有 N 个粒子，系统越有序，可能的微观状态数越少，熵越小；反之，系统越混乱，可能的微观状态数（可以用粒子的位置、动量等描述）越多，熵越大。这就是熵的微观意义，熵的本质描述了一个系统的混乱程度。当系统为均匀分布的平衡态时，可能的微观状态数 Ω 最多，$\Omega_m=C_N^{\frac{N}{2}}$，所以系统处于平衡态时熵最大。

熵增加原理指出，一个孤立系统的熵不会减小，即总混乱度不会减小，更深刻地指出了大量分子无规则运动的统计规律，是热力学第二定律的又一种表述。特别说明，由于宇宙是不稳定的热力学系统，并不像静态宇宙模型所设想的那样具有平衡态，因而宇宙的熵无最大值，宇宙不会达到热寂状态。

十三 热力学第二定律

1. 开尔文表述：不可能从单一热源吸收热量，使之完全变为有用的功而不产生其他影响。

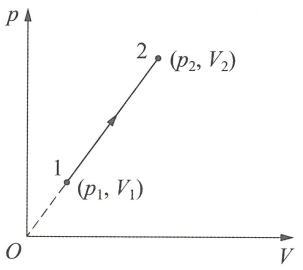
2. 克劳修斯表述：不可能把热量从低温物体传到高温物体而不引起其他变化。

热力学第二定律的所有表述是等效的，它们都反映了与热现象有关的宏观过程是不可逆的。开尔文表述是说功变热的过程是不可逆的，功可以完全变为热；而在不引起其他变化的条件下，热不能完全变为功。克劳修斯表述是说热传递的过程是不可逆的，热量从高温物体向低温物体传递可不产生其他影响；而在不产生其他影响的条件下，热量不可能从低温物体向高温物体传递。热力学第二定律揭示了，对于一个孤立系统，熵总会随着时间的流逝而增大。

3. 微观解释：从微观角度看，热力学第二定律的实质是对于一个不受外界影响的孤立系统，总是沿着从有序到无序使无规则程度增大的方向发展，即沿着分子热运动的无序化程度增加的方向发展。

例题精讲

例 1 一定质量的理想气体由状态(p_1, V_1)沿直线过程到达状态(p_2, V_2)，连接两状态点的线段延长线过坐标原点，如图所示。该气体每摩尔内能为$U=C_{V,\mathrm{m}}T$，其中$C_{V,\mathrm{m}}$为摩尔定容热容，T为热力学温度。求：(1) 由状态 1 到状态 2 气体内能的变化量；(2) 此过程中气体吸热多少；(3) 此过程中气体的平均摩尔热容多大。



例 1 图

解析 (1) 设此气体有 n mol。内能变化量为

$$\Delta E=nC_{V,\mathrm{m}}(T_2-T_1)=\frac{C_{V,\mathrm{m}}(p_2V_2-p_1V_1)}{R}$$

(2) 该过程中气体对外界做的功

$$A=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1V_2-p_1V_1+p_2V_2-p_2V_1)$$

利用$\frac{p_1}{V_1}=\frac{p_2}{V_2}$，可得

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)$$

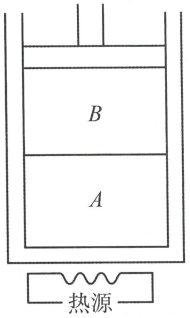
由热力学第一定律，得

$$\Delta Q=\Delta E+A=\left(\frac{C_{V,\mathrm{m}}}{R}+\frac{1}{2}\right)(p_2V_2-p_1V_1)$$

(3) 过程的平均摩尔热容为

$$c_{\mathrm{m}}=\frac{1}{n}\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\left(\frac{C_{V,\mathrm{m}}}{R}+\frac{1}{2}\right)R=C_{V,\mathrm{m}}+\frac{1}{2}R$$

例 2 右图表示有一除底部外都是绝热的气筒，被一位置固定的导热隔板隔成相等的两部分 A 和 B，其中各盛有 1 mol 理想气体氮，其 $C_V=\frac{5}{2}R$。设活塞上的压强始终维持为 1.00 atm。今将 334.4 J 的热量缓慢地由底部供给气体，求 A 和 B 温度改变，以及各自吸收的热量(导热板的热容可以忽略)。若将位置固定的导热板换成可自由滑动的绝热隔板，重复上述讨论。



例 2 图

解析 A 经历的是等容过程，B 经历的是等压过程，且温度增加量 ΔT 相同。则 A、B 气体吸收的热量

$$\Delta Q_A=C_V\Delta T,\ \Delta Q_B=C_p\Delta T$$

$$\Delta Q_A+\Delta Q_B=334.4\,\mathrm{J}$$

$$\frac{\Delta Q_A}{\Delta Q_B}=\frac{C_V}{C_p}=\frac{C_V}{C_V+R}=\frac{5}{7}$$

可得

$$\Delta T=\frac{334.4}{\frac{5}{2}\times 8.31+\frac{5+2}{2}\times 8.31}\,\mathrm{K}=6.7\,\mathrm{K}$$

$$\Delta Q_A=139.3\,\mathrm{J},\ \Delta Q_B=195.1\,\mathrm{J}$$

在计算中已利用了关系式 $C_p-C_V=R$。

若隔板换成绝热且可移动，则 A 对 B 不传热，B 的压强维持不变，同样 A 的压强始终等于 B 的压强，也不变，这时 A 对 B 做的功总是等于 B 对大气做的功，所以 B 对外界做的净功为零，B 的状态没有变化，而 A 做等压变化，故

$$\Delta Q'_B=0,\ \Delta Q'_A=C_p\Delta T'=334.4\,\mathrm{J}$$

故

$$\Delta T'=\frac{334.4}{\left(\frac{5+2}{2}\right)R}=11.5\,\mathrm{K}$$

例 3 设地球上能被人类利用的能源功率共计为 $P=1\times10^{13}$ W，而传到地球上的太阳能的功率为 $P_0=1\times10^{17}$ W。

(1) 试求因利用地球上的能源而使地球表面升高的温度。

(2) 从生态平衡观点看，若升温不超过 $\Delta T'=0.1$ K 的话，则地球上的能源可允许利用的最大功率为多大?

解析 (1) 地球一方面吸收太阳辐射的能量，另一方面在不断辐射，二者为动态平衡。

设地球只吸收太阳能的功率 P_0 时，地球表面的温度为 T_0，取 $T_0=300\ \mathrm{K}$，则 $P_0=\varepsilon\sigma T_0^4$。

设因利用地球上的能源功率为 P 时，地球表面增加的温度为 ΔT，这种情况下，地球上辐射的总功率为 $(P+P_0)$，地球表面的温度为 $(T_0+\Delta T)$，则

$$P+P_0=\varepsilon\sigma(T_0+\Delta T)^4=\varepsilon\sigma T_0^4\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\right)^4$$

$$=\varepsilon\sigma T_0^4\left(1+4\frac{\Delta T}{T_0}+\cdots\right)\approx P_0+\frac{4P_0}{T_0}\Delta T$$

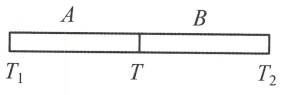
所以

$$\Delta T=\frac{PT_0}{4P_0}$$

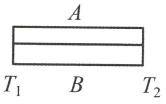
将 $P=1\times10^{13}\ \mathrm{W}$，$P_0=1\times10^{17}\ \mathrm{W}$，$T_0=300\ \mathrm{K}$ 代入得 $\Delta T=1\times10^{-2}\ \mathrm{K}$。

(2) $P_{\max}=4P_0\dfrac{\Delta T_{\max}}{T_0}=4\times10^{17}\times\dfrac{0.1}{300}\ \mathrm{W}\approx1\times10^{14}\ \mathrm{W}$。

例 4 如图所示，两根金属棒 A、B 尺寸相同，A 的导热系数是 B 的两倍，用它们来导热，设高温端和低温端温度恒定，求将 A、B 并联使用与串联使用的能流之比。设棒侧面是绝热的。



例 4 图 1



例 4 图 2

解析 能流是单位时间内通过某横截面所传递的能量(热量)，串联时有

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{串}=K_A\cdot\frac{T_1-T}{L}S=K_B\cdot\frac{T-T_2}{L}S$$

式中 K_A、K_B 为导热系数，L、S 为棒长和横截面积。得两棒接触处的温度为

$$T=\frac{K_AT_1+K_BT_2}{K_A+K_B}$$

于是

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{串}=\frac{K_AK_B}{K_A+K_B}\cdot S\cdot\frac{T_1-T_2}{L}$$

并联时能流为

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{并}=K_A\cdot\frac{T_1-T_2}{L}S+K_B\cdot\frac{T_1-T_2}{L}S$$

$$=(K_A+K_B)\cdot\frac{T_1-T_2}{L}S$$

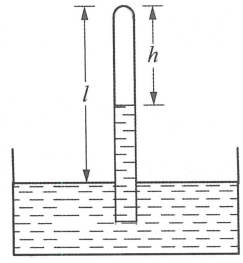
于是

$$\frac{\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{并}}{\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{串}}=\frac{(K_A+K_B)^2}{K_AK_B}=\frac{9}{2}$$

例 5 在一大水银槽中竖直插入一根玻璃管，管上端封闭，下端开口。已知槽中水银液面以上的那部分玻璃管的长度 $l=76\ \text{cm}$，管内封闭有 $n=1.0\times10^{-3}\ \text{mol}$ 的空气。保持水银槽与玻璃管都不动而设法使玻璃管内空气的温度缓慢降低 10℃，问：在此过程中管内空气放出的热量为多少？已知管外大气的压强为 76 cmHg，每 mol 空气的内能 $U=C_VT$，其中 $C_V=20.5\ \text{J}\cdot(\text{mol}\cdot\text{K})^{-1}$。

解析 设玻璃管内空气柱的长度为 h，大气压强为 p_0，管内空气的压强为 p，水银密度为 ρ，重力加速度为 g，由图 1 可知

$$p+(l-h)\rho g=p_0 \tag{1}$$



例 5 图 1

根据题给的数据，可知 $p_0=l\rho g$

得 $p=\rho gh$

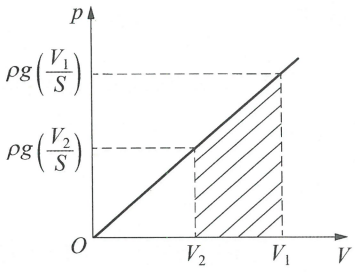
若玻璃管的横截面积为 S，则管内空气的体积为 $V=Sh$，可得

$$p=\frac{V}{S}\rho g$$

即管内空气的压强与其体积成正比。由克拉伯龙方程 $pV=nRT$ 得

$$\rho g\frac{V^2}{S}=nRT$$

由上式可知，压强随体积的变化关系为 $p-V$ 图上过原点的直线，如图 2 所示。在管内气体的温度由 T_1 降到 T_2 的过程中，气体的体积由 V_1 变到 V_2，体积缩小，外界对气体做正功



例 5 图 2

$$W=\frac{1}{2}\rho g\left(\frac{V_1}{S}+\frac{V_2}{S}\right)(V_1-V_2)=\rho g\left(\frac{V_1^2-V_2^2}{2S}\right)$$

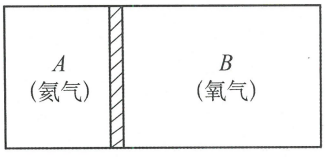
管内空气内能的变化 $\Delta U=nC_V(T_2-T_1)$

外界传给气体的热量 $Q=\Delta U-W$

可得 $$Q=n(T_2-T_1)\left(C_V+\frac{1}{2}R\right)=-0.247\ \text{J}$$

$Q<0$，表示管内空气放出热量 0.247 J。

例 6 如图所示，一刚性绝热容器中用一个可以无摩擦移动的导热活塞将容器分为 A、B 两部分。A、B 两部分分别充有 1 mol 的氦气和 1 mol 的氧气。开始时氦气的温度为 $T_1=400\ \text{K}$，氧气的温度 $T_2=600\ \text{K}$，氦气和氧气的压强相同，均为 $p_0=1.013\times10^5\ \text{Pa}$。试求经过一段时间后整个系统达到平衡时的温度 T 和压强 p。已知氦气的摩尔



例 6 图

定容热容为 $C_{V_1}=\frac{3}{2}R$，氧气摩尔定容热容为 $C_{V_2}=\frac{5}{2}R$，活塞热容可忽略，R 为摩尔气体常量。

解析 对氦气和氧气组成的系统，因为没有与外界发生热交换和做功，所以系统总内能将不变。设平衡时温度为 T，则

$$\Delta E_1+\Delta E_2=0$$

即

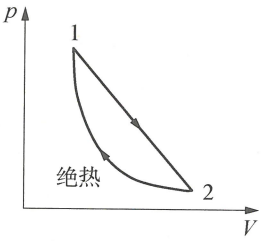
$$C_{V_1}(T-T_1)+C_{V_2}(T-T_2)=0$$

解得

$$T=\frac{C_{V_1}T_1+C_{V_2}T_2}{C_{V_1}+C_{V_2}}=525\ \mathrm{K}$$

设氦气和氧气初始体积分别为 V_1、V_2，平衡后体积分别为 V_1'、V_2'，温度为 T，压强为 p，由克拉伯龙方程可得 $p_0V_1=RT$，$p_0V_2=RT_2$，$pV_1'=RT$，$p_0V_2'=RT$，由几何关系得 $V_1+V_2=V_1'+V_2'$，联立以上各式可解得 $p=\frac{2p_0T}{T_1+T_2}=1.06\times10^5\ \mathrm{Pa}$。

例 7 如图 1 所示，0.1 mol 单原子分子理想气体从初态（$p_1=32.0\ \mathrm{Pa}$，$V_1=8.00\ \mathrm{m^3}$）经 $p-V$ 图上的直线过程到达终态（$p_2=1.0\ \mathrm{Pa}$，$V_2=64.0\ \mathrm{m^3}$），再经过绝热过程回到初态构成循环，试求上述循环的最高温度与最低温度以及循环效率。



例 7 图 1

解析 （1）最高温度和最低温度应处在直线过程 1～2 上，现写出 1～2 的直线过程方程

$$p=\alpha-\beta V$$

或者

$$\beta V^2-\alpha V+nRT=0$$

将 1、2 两态的参量代入，联立方程得

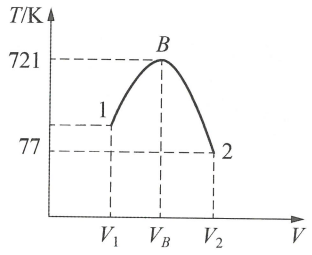
$$\alpha=\frac{255}{7}\ \mathrm{Pa},\ \beta=\frac{31}{56}\ \mathrm{Pa\cdot m^{-3}}$$

直线过程中 T 有极大值 T_B：

$$\begin{cases}V_B=\dfrac{\alpha}{2\beta}=32.9\ \mathrm{m^3}\\ p_B=\alpha-\beta V_B=18.2\ \mathrm{Pa}\\ T_B=T_{\max}=\dfrac{p_BV_B}{nR}=721\ \mathrm{K}\end{cases}$$

由图 2 可知 1～B 段升温，B～2 段降温。最低温度为 T_2：

$$T_2=T_{\min}=\frac{p_2V_2}{nR}=77\ \mathrm{K}$$



例 7 图 2

（2）气体循环对外界的功（注意 $C_V=\frac{3R}{2}$）：

$$W'=W'_{直线}+W'_{绝热}=\frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}-nC_V(T_1-T_2)$$

$$=\frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}+\frac{3(p_2V_2-p_1V_1)}{2}=636\ \mathrm{J}$$

求直线过程中吸、放热的转变点，因为

$$\Delta T=\frac{\alpha-2\beta}{nR}\Delta V$$

所以对于直线过程中任一微过程，有

$$\Delta Q=\Delta E+p\Delta V=nC_V\Delta T+p\Delta V$$

$$=\left[\frac{C_V(\alpha-2\beta V)}{R}+(\alpha-\beta V)\right]\Delta V$$

$$=\left(\frac{5\alpha}{2}-4\beta V\right)\Delta V$$

令 $\Delta Q=0$ 得吸放热转变点 A：

$$\begin{cases}V_A=\dfrac{5\alpha}{8\beta}=41.1\ \mathrm{m^3}\\ p_A=\alpha-\beta V_A=13.7\ \mathrm{Pa}\\ T_A=\dfrac{p_AV_A}{nR}=677.6\ \mathrm{K}\end{cases}$$

因此，$1\sim A$ 段 $(V<V_A,\ \Delta Q>0)$ 吸热，$A\sim 2$ 段 $(V>V_A,\ \Delta Q<0)$ 放热。

该循环中仅 $1\sim A$ 段吸热 Q_1：

$$Q_1=(\Delta E)_{1A}+W'_{1A}=nC_V(T_A-T_1)+\frac{(p_1+p_A)(V_A-V_1)}{2}$$

$$=\frac{3(p_AV_A-p_1V_1)}{2}+\frac{(p_1+p_A)(V_A-V_1)}{2}=1215\ \mathrm{J}$$

效率：

$$\eta=\frac{W'}{Q_1}=\frac{636}{1215}=52\%$$

例 8 一热机工作于两个相同材料的物体 A 和 B 之间，两物体的温度分别为 T_A、T_B（$T_A>T_B$），每个物体的质量均为 m、比热容恒定，均为 s，设两个物体的压强保持不变且不发生相变。

(1) 假定热机能从系统获得理论上允许的最大机械能，求出物体 A 和 B 最终达到的温度 T_0 的表达式。

(2) 由此得出允许获得的最大功的表达式。

(3) 假定热机工作于两箱水之间，每箱水的体积为 2.50 $\mathrm{m^3}$，一箱水的温度为 350 K，另一箱水的温度为 300 K，计算可获得的最大机械能。

已知水的比热容为 $4.19\times10^3\ \mathrm{J/(kg\cdot℃)}$，水的密度为 $1.00\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$。

解析 (1) 为获得最大的机械能，可设热机工作的全过程由 $n(n\to\infty)$ 个元卡诺循环组成。第 i 次卡诺循环中，卡诺热机从高温热源(温度设为 T_i)处吸收的热量为 ΔQ_1 后，温度降为 T_{i+1}；在低温热源(温度设为 T_j)处放出热量为 ΔQ_2 后，温度升高为 T_{j+1}。满足

$$\frac{\Delta Q_1}{T_i}=\frac{\Delta Q_2}{T_j}$$

又
$$\Delta Q_1=ms(T_i-T_{i+1}),\ \Delta Q_2=ms(T_{j+1}-T_j)$$

可知
$$\frac{T_i-T_{i+1}}{T_i}=\frac{T_{j+1}-T_j}{T_j}$$

令
$$\frac{T_i-T_{i+1}}{T_i}=\frac{T_{j+1}-T_j}{T_j}=\frac{A}{n}(n\to\infty,\ A\text{ 为常数})$$

有
$$\frac{T_{i+1}}{T_i}=1-\frac{A}{n},\ \frac{T_{j+1}}{T_j}=1+\frac{A}{n}$$

所以经过 $n(n\to\infty)$ 次循环后，有

$$\frac{T_1}{T_0}\cdot\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{T_3}{T_2}\cdot\cdots\cdot\frac{T_n}{T_{n-1}}=\left(1-\frac{A}{n}\right)^n$$

$$\frac{T_n}{T_0}=\left(1-\frac{A}{n}\right)^n$$

对等号两边分别求极限，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{T_0}=\frac{T_A}{T_0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{A}{n}\right)^{\frac{n}{A}\cdot A}=\mathrm{e}^A$$

则
$$\frac{T_A}{T_0}=\mathrm{e}^A,\text{即 }A=\ln\frac{T_A}{T_0}$$

同理可得
$$A=\ln\frac{T_0}{T_B}$$

所以
$$\ln\frac{T_A}{T_0}=\ln\frac{T_0}{T_B},\ T_0=\sqrt{T_AT_B}$$

(2) 由卡诺热机的循环过程可知

$$W=Q_1-Q_2=ms(\sqrt{T_A}-\sqrt{T_B})^2$$

(3) 根据题意代入数据即可得 $W=2.0\times10^7\ \mathrm{J}$。

例 9 一直径 $2r=100\ \mathrm{mm}$ 的直立的圆筒形容器，内装 $T_0=20.0℃$(即室温)、$n=0.100\ \mathrm{mol}$ 的

气体，筒的上盖是可自由上下移动、质量 $m=800\ \mathrm{g}$ 的玻璃板，圆筒（包括上盖和筒底）的导热率和热容量很小，一束功率固定的激光器发射 $\lambda=5.14\times10^{-7}\ \mathrm{m}$ 的光无吸收地穿过空气和玻璃板照入筒内，被筒内气体完全吸收并转化为热运动，照射 $\Delta t=10\ \mathrm{s}$ 后关掉激光器，测得玻璃板位移 $\Delta h=30.0\ \mathrm{mm}$。求：

(1) 辐射后空气的温度和压强；

(2) 气体吸收的辐射能、气体吸收的辐射功率及单位时间内吸收的光子数；

(3) 光能转化为机械势能的效率；

(4) 让圆筒缓慢旋转 90°后成水平方向，气体的温度和压强。

已知大气压强 $p_0=101.3\ \mathrm{kPa}$，气体摩尔定容热容 $C_V=20.8\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$。

解析 (1) 辐射后气体的压强为

$$p=p_0+\frac{mg}{\pi r^2}=1.0232\times10^5\ \mathrm{Pa}$$

这是等压过程。开始气体占有容器高度 h_1 为

$$h_1=\frac{V_1}{\pi r^2}=\frac{nRT_0}{\pi r^2 p_0+mg}$$

辐照后

$$h_2=h_1+\Delta h$$

$$T_2=\frac{T_0(h_1+\Delta h)}{h_1}=T_0+\frac{T_0\Delta h}{h_1}$$

$$=T_0+\frac{(\pi r^2 p_0+mg)\Delta h}{nR}=322\ \mathrm{K}=49℃$$

(2)

$$W'=mg\Delta h+p_0\pi r^2\Delta h=24.1\ \mathrm{J}$$

$$\Delta E=nC_V(T_2-T_0)=\frac{nC_VT_0\Delta h}{h_1}=\frac{C_V(mg+\pi r^2 p_0)\Delta h}{R}$$

气体吸收的辐射能为

$$Q=\Delta E+W'=(mg+\pi r^2 p_0)\left(1+\frac{C_V}{R}\right)\Delta h=84\ \mathrm{J}$$

因为激光器功率恒定，因此吸收光的功率为

$$N=\frac{Q}{\Delta t}=8.4\ \mathrm{W}$$

光子能量为 $h\dfrac{c}{\lambda}$，单位时间气体吸收的光子数

$$\frac{N}{h\dfrac{c}{\lambda}}=2.2\times10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}$$

(3) 光能转化为机械热能的效率为

$$\eta=\frac{mg\Delta h}{Q}=0.3\%$$

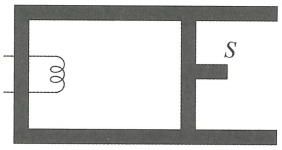
(4) 圆筒转向水平方向是绝热过程。压强由 p 变为 p_0，温度由 T_2 变为 T_3，则

$$p_0=1.013\times10^{5}\ \mathrm{Pa}$$

$$a=\frac{C_p}{C_V}=1+\frac{R}{C_V}=1.399$$

$$T_3=T_2\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{a-1}{a}}=321\ \mathrm{K}=48℃$$

例 10 如图所示，绝热的活塞 S 把一定质量的稀薄气体(可视为理想气体)密封在水平放置的绝热气缸内，活塞可在气缸内无摩擦地滑动，气缸左端的电热丝可通弱电流对气缸内气体十分缓慢地加热。气缸处在大气中，大气压强为 p_0。初始时，气体的体积为 V_0、压强为 p_0。已知 1 摩尔该气体温度升高 1 K 时其内能的增量为一已知恒量，求以下两种过程中电热丝传给气体的热量 Q_1 与 Q_2 之比。



例 10 图

(1) 从初始状态出发，保持活塞 S 位置固定，在电热丝中通以弱电流，并持续一段时间，然后停止通电，待气体达到热平衡时，测得气体的压强为 p_1。

(2) 仍从初始状态出发，让活塞处在自由状态，在电热丝中通以弱电流，也持续一段时间，然后停止通电，最后测得气体的体积为 V_2。

解析 以 m 表示气缸内气体的质量，μ 表示其摩尔质量，当气体处在初始状态时，已知其压强为 p_0、体积为 V_0。设其温度为 T_0，由理想气体状态方程有

$$p_0V_0=\frac{m}{\mu}RT_0$$

在过程 1 中，对气体加热时，活塞 S 位置固定不动，气体对外不做功。

$$Q_1=\frac{m}{\mu}C(T_1-T_0),\ p_1V_0=\frac{m}{\mu}RT_0$$

由以上三式得

$$Q_1=\frac{C}{R}V_0(p_1-p_0)$$

在过程 2 中，气体的压强保持 p_0 不变，体积由 V_0 变为 V_2

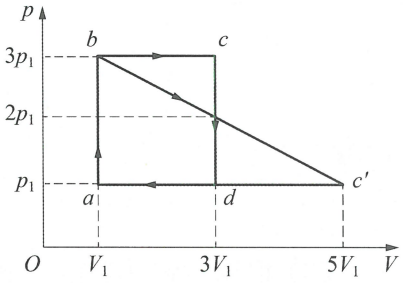
$$Q_2=\frac{m}{\mu}C(T_2-T_0)+p_0(V_2-V_0),\ p_0V_2=\frac{m}{\mu}RT_2$$

可解得

$$Q_2=\frac{(C+R)}{R}p_0(V_2-V_0)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{C}{C+R}\right)\cdot\frac{(p_1-p_0)V_0}{(V_2-V_0)p_0}$$

例 11 如图所示，1 mol 单原子理想气体构成的系统分别经历循环过程 $abcda$ 和 $abc'a$。已知理想气体在任一缓慢变化过程中，压强 p 和体积 V 满足函数关系 $p=f(V)$。



例 11 图

(1) 试证明：理想气体在任一缓慢变化过程的摩尔热容可表示为

$$C_\pi=C_V+\frac{pR}{p+V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}}$$

式中，C_V 和 R 分别为摩尔定容热容和理想气体常数；

(2) 计算系统经 bc' 直线变化过程中的摩尔热容；

(3) 分别计算系统经 bc' 直线过程中升降温的转折点 A 在 $p-V$ 图中的坐标和吸、放热的转折点 B 在 $p-V$ 图中的坐标；

(4) 定量比较系统在两种循环过程的循环效率。

解析 (1) 根据热力学第一定律，有 $\mathrm{d}U=\delta Q+\delta W$

对于 1 mol 理想气体经历的任一缓慢变化过程中，有

$$\delta Q=C_\pi\mathrm{d}T,\ \delta W=-p\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}U=C_V\mathrm{d}T$$

将理想气体状态方程

$$pV=RT$$

两边对 T 求导，可得

$$p\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}+V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=R$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{R}{p+V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}}$$

可得

$$C_\pi=C_V+\frac{pR}{p+V\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}}$$

(2) 设 bc' 过程方程为

$$p=\alpha-\beta V$$

根据 $$C_\pi = C_V + \frac{pR}{p + V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}}$$

可得该直线过程的摩尔热容为 $$C_\pi = C_V + \frac{\alpha - \beta V}{\alpha - 2\beta V}R$$

式中 $C_V = \frac{3}{2}R$。对 bc' 过程的初态$(3p_1, V_1)$和终态$(p_1, 5V_1)$,有

$$3p_1 = \alpha - \beta V_1,\ p_1 = \alpha - 5\beta V_1$$

可得 $$\alpha = \frac{7}{2}p_1,\ \beta = \frac{p_1}{2V_1},\ C_\pi = \frac{8V - 35V_1}{4V - 14V_1}R$$

(3) 根据过程热容的定义有 $$C_\pi = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

由以上式子得 $$\Delta T = \frac{4V - 14V_1}{8V - 35V_1}\frac{\Delta Q}{R}$$

$$\Delta Q = \frac{8V - 35V_1}{4V - 14V_1}R\Delta T$$

因此 bc' 过程中的升降温的转折点 A 在 $p-V$ 图上的坐标为 $A\left(\frac{7}{2}V_1, \frac{7}{4}p_1\right)$;

bc' 过程中的吸放热的转折点 B 在 $p-V$ 图上的坐标为 $B\left(\frac{35V_1}{8}, \frac{21p_1}{16}\right)$。

(4) 对于 $abcda$ 循环过程,ab 和 bc 过程吸热,cd 和 da 过程放热

$$Q_{ab} = nC_V(T_b - T_a) = 1.5(RT_b - RT_a) = 3p_1V_1$$
$$Q_{bc} = nC_p(T_b - T_a) = 2.5(RT_c - RT_b) = 15p_1V_1$$

气体在 $abcda$ 循环过程的效率为循环过程中对外做的功除以总吸热,即

$$\eta_{abcda} = \frac{W_{abcda}}{Q_{ab} + Q_{bc}} = \frac{4p_1V_1}{18p_1V_1} = 0.22$$

对于 $abc'a$ 循环过程,ab 和 bB 过程吸热,Bc' 和 $c'a$ 过程放热。由热力学第一定律可得,bB 过程吸热为

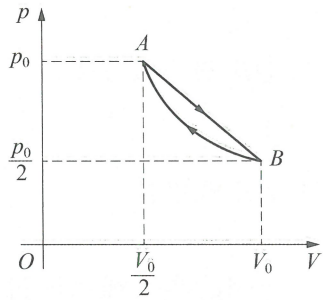
$$Q_{bc'} = \Delta U_{bB} - W_{bB} = nC_V(T_B - T_b) + \frac{1}{2}(p_B + 3p_1)(V_B - V_1) = 11.39p_1V_1$$

所以,循环过程 $abc'a$ 的效率为

$$\eta_{abc'a} = \frac{W_{abc'a}}{Q_{ab} + Q_{bc'}} = \frac{4p_1V_1}{14.39p_1V_1} = 0.278$$

显然 $$\eta_{abc'a} > \eta_{abcda}$$

例 12 如气体压强-体积图所示，摩尔数为 n 的双原子理想气体构成的系统经历一正循环过程（正循环指沿图中箭头所示的循环），其中自 A 到 B 为直线过程，自 B 到 A 为等温过程。双原子理想气体的摩尔定容热容为 $\frac{5R}{2}$，R 为气体常量。



例 12 图

（1）求直线 AB 过程中的最高温度；

（2）求直线 AB 过程中气体的摩尔热容随气体体积变化的关系式，说明气体在直线 AB 过程各段体积范围内是吸热过程还是放热过程，确定吸热和放热过程发生转变时的温度 T_C；

（3）求整个直线 AB 过程中所吸收的净热量和一个正循环过程中气体对外所做的净功。

解析 （1）直线 AB 过程中任一平衡态的气体压强 p 和体积 V 满足方程

$$\frac{p-p_0}{p_0-\frac{p_0}{2}}=\frac{V-\frac{V_0}{2}}{\frac{V_0}{2}-V_0}$$

此即 $$p=\frac{3}{2}p_0-\frac{p_0}{V_0}V$$

理想气体状态方程有 $$pV=nRT$$

由以上二式得

$$T=\frac{1}{nR}\left(-\frac{p_0}{V_0}V^2+\frac{3}{2}p_0V\right)=\frac{-p_0}{nRV_0}\left(V-\frac{3}{4}V_0\right)^2+\frac{9}{16}\frac{p_0V_0}{\nu R} \quad ①$$

当 $V=\frac{3}{4}V_0$ 时，气体达到直线 AB 过程中的最高温度

$$T_{\max}=\frac{9p_0V_0}{16nR}$$

（2）在直线 AB 过程中

$$\mathrm{d}Q=nC_{\mathrm{m}}\mathrm{d}T$$
$$\mathrm{d}U=\mathrm{d}Q-P\mathrm{d}V \quad ②$$

由理想气体内能公式和题给数据有

$$\mathrm{d}U=nC_V\mathrm{d}T=n\frac{5R}{2}\mathrm{d}T$$

可得 $$C_{\mathrm{m}}=C_V+\frac{p}{n}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{5}{2}R+\left(\frac{3}{2}p_0-\frac{p_0}{V_0}V\right)\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$$

由①式两边微分得 $$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{2nRV_0}{p_0(3V_0-4V)}\qquad③$$

由上二式可得 $$C_{\mathrm{m}}=\frac{21V_0-24V}{3V_0-4V}\frac{R}{2}$$

因此在直线 AB 过程中：

在 V 从 $\frac{V_0}{2}$ 增大到 $\frac{3}{4}V_0$ 的过程中

$$C_{\mathrm{m}}>0,\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}>0$$

故 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}>0$，吸热；

在 V 从 $\frac{3}{4}V_0$ 增大到 $\frac{21V_0}{24}$ 的过程中

$$C_{\mathrm{m}}<0,\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}<0$$

故 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}>0$，吸热；

在 V 从 $\frac{21V_0}{24}$ 增大到 V_0 的过程中

$$C_{\mathrm{m}}>0,\ \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}<0$$

故 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}<0$，放热。

系统从吸热到放热转折点发生在

$$V=V_C=\frac{21}{24}V_0$$

由①式和上式得 $$T_C=\frac{1}{nR}\left(-\frac{p_0}{V_0}V^2+\frac{3}{2}P_0V\right)=\frac{35}{64}\frac{p_0V_0}{nR}$$

(3) 对于直线 AB 过程，由②③式得

$$\mathrm{d}Q=nC_{\mathrm{m}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\mathrm{d}V=\frac{21V_0-24V}{4V_0}p_0\mathrm{d}V=\left(\frac{21}{4}-\frac{6V}{V_0}\right)p_0\mathrm{d}V$$

将上式两边对直线过程积分，得整个直线 AB 过程中所吸收的净热量为

$$Q_{直线}=\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}}\left(\frac{21}{4}-\frac{6V}{V_0}\right)p_0\mathrm{d}V=p_0\left(\frac{21}{4}V-\frac{3V^2}{V_0}\right)\Big|_{\frac{V_0}{2}}^{V_0}=\frac{3}{8}p_0V_0$$

直线 AB 过程中气体对外所做的功为

$$W_{直线}=\frac{1}{2}\left(p_0+\frac{p_0}{2}\right)\left(V_0-\frac{V_0}{2}\right)=\frac{3}{8}p_0V_0$$

等温过程中气体对外所做的功为

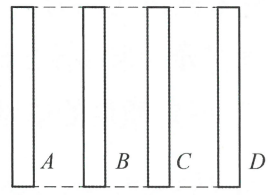
$$W_{等温}=\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}}p\mathrm{d}V=\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}}p_0\frac{V_0}{2}\frac{\mathrm{d}V}{V}=-\frac{p_0V_0}{2}\ln 2$$

一个正循环过程中气体对外所做的净功为

$$W=W_{直线}+W_{等温}=\left(\frac{3}{8}-\frac{\ln 2}{2}\right)p_0V_0$$

练习题

1 就黑体辐射而言，辐射最大波长 λ_m 满足：$\lambda_m T=b$（T 为黑体的热力学温度，b 是常量），同时黑体单位面积上的辐射功率：$P=\sigma T^4$（σ 为常量）。已知人体的 $\lambda_{m1}=9.6\ \mu\mathrm{m}$，太阳的 $\lambda_{m2}=500.96\ \mathrm{nm}$。



第 1 题图

（1）如图所示，真空中有四块完全相同且彼此靠近的大金属板 A、B、C、D 平行放置，表面涂黑（可看成黑体），最外侧两块板的热力学温度各维持为 T_1 和 T_4，且 $T_1>T_4$。当达到热稳定时，求 B 板的温度。

（2）火星与太阳距离为 $400R$（R 是太阳半径）。认为火星受热的面积为 πr^2（r 为火星半径），估算火星表面的温度，把火星看作黑体。

2 1 mol 的氦气的温度 T 和体积 V 的变化规律为 $T=\beta V^2$，其中 β 为常数，当气体体积由 V_1 减至 V_2 时，判断此过程是吸热还是放热。

3 一高为 $2h$ 的直立绝热圆筒，由一透热隔板分成体积均为 V 的两部分，各充入 1 mol 的不同气体，已知上部气体密度 ρ 小于下部气体密度 ρ'，现将隔板抽开，使两部分气体均匀混合，已知这两部分气体的摩尔定容热容量均为 $C_V=\frac{3R}{2}$，求两部分气体混合前温度 T_1 与混合后温度 T_2 之差。

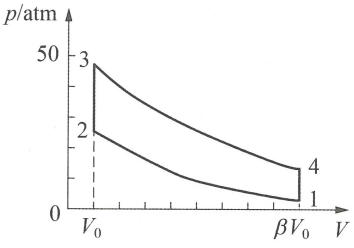
4 某空调器按可逆卡诺循环运转，其中的做功装置连续工作时所提供的功率为 P_0。

（1）夏天室外温度恒为 T_1，启动空调器连续工作，最后可将室温降至恒定的 T_2，室外通过热传导在单位时间内向室内传输的热量正比于 (T_1-T_2)（牛顿冷却定律），比例系数为 A。试用 T_1、P_0 和 A 来表示 T_2。

(2) 当室外温度为 30℃时，若这台空调器只有 30%的时间处于工作状态，室温可维持在 20℃。试问：室外温度最高为多少时，用此空调器仍可使室温维持在 20℃？

(3) 冬天，可将空调器吸热、放热反向，试问：室外温度最低为多少时，用此空调器可使室温维持在 20℃？

5 一台四冲程内燃机的压缩比 $\beta=9.5$，热机抽出的空气和气体燃料的温度为 27℃，在 $1\ \text{atm}=1\times10^3\ \text{kPa}$ 压强下的体积为 βV_0。如图所示，从 1→2 是绝热压缩过程；2→3 混合气体燃爆，压强加倍；从 3→4 活塞外推，气体绝热膨胀至体积 $9.5V_0$，这时排气阀门打开，压强回到初始值 1 atm(压缩比 β 是气缸最大与最小体积比，γ 是比热容比)。

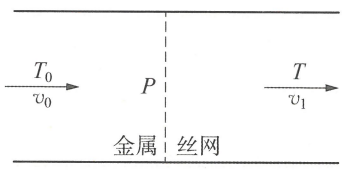


第 5 题图

(1) 确定状态 1、2、3、4 的压强和温度；

(2) 求此循环的热效率。

6 压强为 p_0、温度为 T_0(K)的空气(设气体分子质量为 m，每个分子热运动平均动能为 $\frac{5}{2}kT_0$)以 v_0 速度流过一横截面积为 S 的粗细相同的光滑导管，导管中有一个对气流的阻力可忽略的金属丝网，它被输出功率为 P 的电源加热，因而气流变热。达稳定状态后空气在导管末端流出时的速度为 v_1，如图所示，试求出气体的温度 T_1 及空气受到的推力 F。



第 6 题图

7 一定质量的单原子理想气体在一密闭容器中等压膨胀到体积为原来的 1.5 倍，然后又被压缩，体积和压强均减为 $\frac{1}{3}$，且过程中压强与体积始终成正比，比例系数不变，在此压缩过程中气体向外放热 Q_0，压缩后气体重新等压膨胀到原体积(气体在第一次等压膨胀前的状态)，为使气体等容回到上面提到的原状态(第一次膨胀前的状态)，需要传给气体的热量 Q_1 是多少？

8 空气是混合气体，其质量的百分比是：氮气约 76.9%、氧气约 23.1%，其他组分忽略不计。现有一气缸，缸内充有空气，并装有一些由极细钢丝组成的钢丝棉；缸内活塞能自由移动，使缸内气压恒定为 1 atm；缸内有缓慢的化学反应，假定反应生成 1 mol 的 Fe_2O_3 后，氧气耗尽，已知这个过程是在 1 atm、300 K 的条件下进行，系统放热 8.24×10^5 J，试求此过程中：

(1) 整个系统内能的改变量；

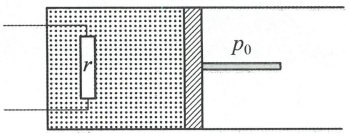
(2) 缸内气体内能的改变量；

(3) 缸内氮气密度的改变量。

已知 1 mol 氧气和 1 mol 氮气的内能均认为是 $\frac{5}{2}RT$，缸内钢丝棉等固态物质与气体相比，所占体积可忽略不计。

9 如图所示，水平放置的横截面积为 S 的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有 1 mol 的理想气体。其内能 $U=CT$，C 为已知常量，T 为热力学温度。器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦，最

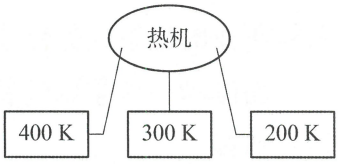
大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为 F。图中 r 为电阻丝，通电时可对气体缓慢加热。起始时，气体压强与外界大气压强 p_0 相等，气体的温度为 T_0。现开始对 r 通电，已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收。若用 Q 表示气体从电阻丝吸收的热量，T 表示气体的温度，试以 T 为纵坐标，Q 为横坐标，画出在 Q 不断增加的过程中 T 和 Q 的关系图线，并在图中用题给的已知量及普适气体常量 R 标出反映图线特征的各量(不要求写出推导过程)。



第 9 题图

10 在地面上方垂直于太阳光的入射方向，放置一半径 $R=0.10\ \mathrm{m}$、焦距 $f=0.50\ \mathrm{m}$ 的薄凸透镜，在薄透镜下方的焦面上放置一黑色薄圆盘(圆盘中心与透镜焦点重合)，于是可以在黑色圆盘上形成太阳的像。已知黑色圆盘的半径是太阳像的半径的两倍。圆盘的导热性极好，圆盘与地面之间的距离较大。设太阳向外辐射的能量遵从斯特藩-玻尔兹曼定律：在单位时间内在其单位表面积上向外辐射的能量为 $W=\sigma T^4$，式中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常量，T 为辐射体表面的绝对温度。对太阳而言，取其温度 $t_S=5.50\times10^3\,^\circ\mathrm{C}$。大气对太阳能的吸收率为 $\alpha=0.40$。又设黑色圆盘对射到其上的太阳能全部吸收，同时圆盘也按斯特藩-玻尔兹曼定律向外辐射能量。如果不考虑空气的对流，也不考虑杂散光的影响，试问：薄圆盘到达稳定状态时可能达到的最高温度为多少摄氏度？

11* 图中所示为一可逆机工作示意图，它表示在循环过程中，分别依次与 3 个热源交换热量，并对外做功。已知由温度为 $T_1=400\ \mathrm{K}$ 的热源吸收 1200 J 的热量，对外做的总功为 200 J。求：



第 11 题图

(1) 与其他热源交换的热量，并说明热源是吸热还是放热；

(2) 各热源熵的改变；

(3) 总熵的改变。

12 一端开口的薄壁玻璃管竖直放置，开口朝上，玻璃管总长 $l=75.0\ \mathrm{cm}$，横截面积 $S=10.0\ \mathrm{cm}^2$，玻璃管内用水银封闭一段理想气体，水银和理想气体之间有一薄而轻的绝热光滑活塞，气柱高度与水银柱高度均为 $h=25.0\ \mathrm{cm}$。已知该理想气体初始温度 $T_0=400\ \mathrm{K}$，摩尔定容热容 $C_V=\dfrac{5}{2}R$，其中 $R=8.31\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$ 为普适气体常量；水银密度 $\rho=13.6\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$，大气压强 $p_0=75.0\ \mathrm{cmHg}$，重力加速度大小 $g=9.80\ \mathrm{m/s^2}$。


第 12 题图

(1) 过程 A：对封闭的气体缓慢加热，使水银上液面恰好到达玻璃管开口处。求过程 A 中封闭气体对外所做的功。

(2) 过程 B：继续对封闭气体缓慢加热，直到水银恰好全部流出为止(薄活塞恰好与玻璃管开口平齐)。通过计算说明过程 B 能否缓慢稳定地发生，计算过程 B 中封闭气体所吸收的热量。

忽略玻璃管和水银的热膨胀效应。计算结果保留三位有效数字。



第 11 章 固体、液体的性质和物态变化



知识要点和基本方法

一 固体的性质

1. 固体分子运动的特点

由于固体分子间的相互作用力很强，所以固体具有一定的体积和一定的形状。固体又分为晶体与非晶体两类，晶体又分为单晶体与多晶体。

由于非晶体没有固定的熔点，所以非晶体不是严格意义上的固体，它可看成黏滞性很大的液体。晶体中物质微粒间的相互作用是很强的，微粒的热运动不足以克服其相互作用而远离结点。微粒的热运动主要表现为以结点为平衡位置的微振动，称为热振动。粒子振动的方向、振幅和频率等都是杂乱无章的。

2. 空间点阵

晶体和非晶体物理性质的不同是因为组成它们的微粒空间排布的方式不同。组成晶体的物质微粒(分子、原子或离子)依照一定的规律排成整齐的行列，构成所谓空间点阵。在点阵中微粒所在的位置叫做结点。

晶体的一些重要的特点，比如外形的不同、各向异性、有固定的熔点等，都可以用空间点阵加以解释。

3. 固体的线膨胀

设 0℃时杆长为 l_0，加热到 t℃，杆长为 l，有

$$l=l_0(1+\alpha t)$$

α 称为固体的线膨胀率，它等于单位杆长升高 1℃时的增加量，其数量级 $10^{-6}\sim10^{-5}/\mathrm{K}$。

4. 固体的面膨胀

设 0℃时物体的面积为 S_0，加热到 t℃，面积为 S，有

$$S=S_0(1+\gamma t)$$

γ 称为固体的面膨胀率，它等于单位面积升高 1℃时的增加量。

5. 固体的体膨胀

如果 0℃时物体体积为 V_0，加热到 t℃体积为 V，则有

$$V=V_0(1+\beta t)$$

β 称为体膨胀率。一般有 $\gamma=2\alpha$，$\beta=3\alpha$。

二 液体的性质

1. 液体分子运动的特点

由于液体分子间的相互作用力较强，所以液体分子排列的最大特点是远程无序、近程有序，液体的物理性质表现为各向同性。液体分子的热运动主要表现为在平衡位置附近做微振动，但其平衡位置又是不断在变化的，因而液体没有固定的形状，具有流动性。

2. 表面张力

液体与空气（真空）的接触面叫自由面，其薄层叫表面层。由于蒸发，分子稀疏（$r > r_0$），分子间作用力为引力。如果在液体表面任意画一条直线，则直线两侧的液体之间的作用力是引力，其作用效果总是使液体表面绷紧，所以称为液体的表面张力。液体的表面张力方向与液面相切，与两部分液面的分界线垂直，具有使表面收缩的趋势。天空中下落的雨滴呈球形，就是表面张力作用的结果。表面张力的大小与直线段长度成正比，即 $f = \sigma L$。式中 σ 为液体表面张力系数，单位为 N/m。σ 随温度升高而减小，有些杂质会使 σ 减小，这些杂质叫表面活性物质。如果 f 表示整个液面受到的表面张力，则 L 为液面边界线长度。

3. 浸润与不浸润

液体与固体相接触的一层很薄的液体层叫附着层，固体分子与附着层内的液体分子间的吸引力叫附着力，内部液体分子与附着层内的液体分子间的吸引力叫内聚力。如果附着力大于内聚力，造成附着层内液体分子分布比内部密集，液体分子力表现为斥力，从而使附着层有扩大的趋势，这种现象叫做浸润；反过来，如果附着力小于内聚力，附着层有缩小的趋势，这种现象叫做不浸润。同一种液体，可能对一些固体来说是浸润的，对另一些固体来说是不浸润的，如水能浸润玻璃却不能浸润石蜡，水银能浸润锌板却不能浸润玻璃。

4. 接触角

在液体与固体接触处，作液体表面的切线及固体表面的切线，这两切线通过液体内部所成的角度 θ 为接触角。

液体不浸润固体，$\theta > \frac{\pi}{2}$；液体浸润固体，$\theta < \frac{\pi}{2}$；液体完全浸润固体，$\theta = 0$；液体完全不浸润固体，$\theta = \pi$。

5. 附加压强

由于液体表面张力的存在，弯曲液面下液体的压强不同于平坦液面下液体的压强，这两者压强之差就称为附加压强。在凸状弯曲液面的情况下，附加压强为正值，凸状弯曲液面下液体的压强大于平坦液面下液体的压强；在凹状弯曲液面的情况下，附加压强为负值，凹状弯曲液面下液体的压强小于平坦液面下液体的压强。

附加压强的计算：

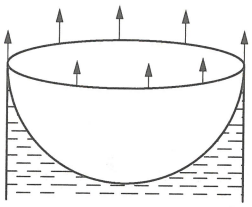


图 11-1

圆周边界线长 $L=2\pi R$

设液体完全浸润管壁：

合力 $F=\alpha L=\alpha 2\pi R$

附加压强 $p_S=\dfrac{F}{S}=\dfrac{F}{\pi R^2}=\dfrac{\alpha 2\pi R}{\pi R^2}=\dfrac{2\alpha}{R}$

对于内外半径分别是 R_1、R_2 的液体球壳，内外的附加压强为

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R_1}+\frac{2\sigma}{R_2}$$

6. 毛细现象

浸润液体在细管里上升的现象和不浸润液体在细管里下降的现象叫毛细现象。能够发生毛细现象的管子称为毛细管。

三 物态变化

具有相同物质成分及相同物理性质、化学性质的均匀物质，叫做相。物态变化又叫做相变，即不同相之间的相互转化，伴随着吸热和放热。相变有汽化、液化、凝固、熔化、升华、凝华六种方式。

1. 汽化

物质从液态变成气体的过程叫做汽化。单位质量的某种液体变成同温度的饱和汽时所吸收的热量称为汽化热，用 L 表示，$L=\dfrac{Q}{m}$ 或 $Q=Lm$，国际单位制单位是 J/kg。汽化有两种方式：蒸发和沸腾。

(1) 饱和气和未饱和气

在蒸发过程中，若单位时间内飞离液面分子数大于返回液面的分子数，此时继续蒸发。若液体盛于密闭容器中，则随着蒸发的不断进行，蒸气分子数密度逐渐增大，一定时间后使单位时间内通过表面蒸发出来的分子数等于返回液面的蒸气分子数，达到动态平衡，把这时的蒸气称为饱和蒸气(简称饱和气)，对应的压强称为饱和气压。在一个密闭容器中只要有液体存在，最终该种液体蒸气压一定是饱和气压。液体汽化时，未达到动态平衡的气叫做未饱和气。未

饱和气同一般气体一样近似遵循理想气体状态方程。

饱和气有如下性质：

① 在同一温度下，不同气体的饱和气压一般不同，100℃时水蒸气的饱和气压是 1×10^5 Pa。

② 同种液体的饱和气压随温度的升高而迅速增大。

③ 温度一定时，同种液体的饱和气压和饱和气体积无关，体积变化时引起饱和气的质量变化和液体的质量变化，而饱和气压不变化。

(2) 沸腾及产生条件

一般液体的内部和器壁上，都有很多的小气泡。由于液体的不断蒸发，气泡内部的蒸气总是处于饱和状态，其压强为饱和蒸气压 p_s。随着温度升高，p_s 不断增大，从而使气泡不断地胀大，但只要气泡内饱和蒸气压 p_s 小于外界压强(气泡外压强由三部分组成：大气压强、液体静压强、气泡表面张力的附加压强，一般液体静压强、附加压强比大气压小得多，可以忽略不计)，气泡还能维持平衡。一旦当气泡内部饱和蒸气压 p_s 等于外界压强 p 时，气泡无论怎样胀大也不能维持平衡，在浮力作用下迅速上升，到液面破裂，放出蒸气。像这样在液体表面和内部同时进行的汽化现象叫沸腾。由此可见，液体沸腾的条件是液体的饱和气压等于外界压强。

液体沸腾时的温度叫沸点。不同液体在相同压强下的沸点不同，同种液体的沸点随外界压强的增大而升高。

含有空气的密闭容器内的气体压强 $p=p_{空气}+p_{饱和}$，总是大于液体内部气泡内的饱和气压 $p_{饱和}$，所以含有空气的密闭容器内的液体永远不会沸腾。

2. 液化

当饱和气的体积减小或温度降低时，气体将转化成液体，这一过程叫做液化或凝结。

各种气体都有一个特殊的温度，在这个温度以上，无论怎样增大压强都不能使气体液化，这个温度称为临界温度。气体凝结为液体时要放出热量，实验表明，单位质量的气体凝结为液体所放出的热量等于在同一温度下该种液体的汽化热。

(1) 空气的湿度

空气的湿度可通俗地理解为空气的潮湿程度，它有绝对湿度和相对湿度之分，空气中水蒸气的压强 p 叫做空气的绝对湿度，某一温度时空气中水蒸气的压强与相同温度下水蒸气饱和气压的百分比叫相对湿度，$B=\dfrac{p_{温}}{p_{饱}}\times100\%$。人体感受到的干湿程度一般取决于相对湿度。

(2) 露点

使空气中的水蒸气刚好达到饱和时的温度叫做露点。在露点温度时，水的饱和气压就是空气的绝对湿度。根据露点和气温的差值，可大致判断出相对湿度的大小，差值越大，相对湿度越小。露点时的饱和气压与实际温度下的饱和气压之比就是该温度时空气的相对湿度。

3. 熔化和凝固

物体从固体变成液态叫做熔化，从液态变成固态叫做凝固。

晶体有一定的熔化温度——熔点(严格地说,只有晶体才称得上是固体),非晶体则没有。大多数物质熔化时体积会膨胀,熔点会随压强的增大而升高,但也有少数物质例外(如水、灰铸铁、锑、铋等,规律正好相反)。

熔化热:单位质量的某种物质在熔化成同温度的液体时所吸收的热量,用 λ 表示,国际单位制单位是 J/kg。单位质量的某种物质凝固时放出的热量等于它的熔化热。$\lambda=\dfrac{Q}{m}$ 或 $Q=\lambda m$。

4. 升华与凝华

物质从固态直接转变为气态的过程称为升华,其逆过程称为凝华。在常温常压下,碘化钾、樟脑、硫磷、干冰等都有显著的升华现象。单位质量的物质在升华时所吸收的热量称为升华热。单位质量的物质凝华时的放热量与同温度下升华时的吸热量相等,即等于升华热。升华热等于同种物质相同条件下的汽化热和熔化热之和。

5. 三相图

将同一物质的汽化曲线 OK、熔化曲线 OL、升华曲线 OS 同时画在图上,它反映出固、液、气三相存在的条件及相互转变的情况,这称为三相图。三条曲线的交点,它表征物质的固、液、气三相平衡共存的状态,称为三相点。

右图所示为水的三相图,水的三相点 O 是水、冰、水蒸气平衡共存时的状态,水的三相点的压强和温度是固定不变的,它们分别是 4.58 mmHg 和 273.16 K,所以国际上把水的三相点作为国际温标中的固定点。

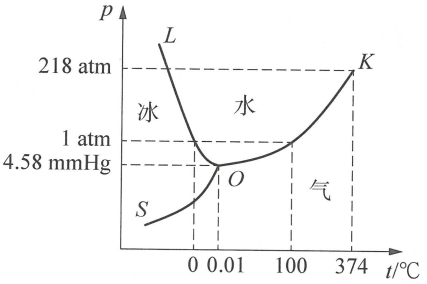
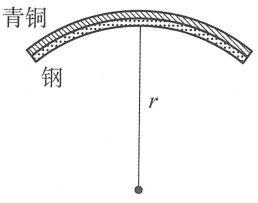


图 11-2

例题精讲

例 1 温控开关用厚度均为 0.20 mm 的钢片和青铜片作感温元件;在温度为 20℃时,将它们紧贴,两端焊接在一起,成为等长的平直双金属片。若钢和青铜的线膨胀系数分别为 1.0×10^{-5}/度和 2.0×10^{-5}/度。当温度升高到 120℃ 时,双金属片将自动弯成圆弧形,如图所示。试求双金属片弯曲的曲率半径(忽略加热时金属片厚度的变化)。



例 1 图

解析 设弯成的圆弧半径为 r,金属片原长为 l,圆弧所对的圆心角为 ϕ,钢和青铜的线膨胀系数分别为 α_1 和 α_2,钢片和青铜片温度由 $T_1=20$℃ 升高到 $T_2=120$℃ 时的伸长量分别为 Δl_1 和 Δl_2。对于钢片

$$\left(r-\frac{d}{2}\right)\phi=l+\Delta l_1,\ \Delta l_1=l\alpha_1(T_2-T_1)$$

式中，$d=0.20\ \text{mm}$。对于青铜片

$$\left(r+\frac{d}{2}\right)\phi=l+\Delta l_2,\ \Delta l_2=l\alpha_2(T_2-T_1)$$

联立以上各式得

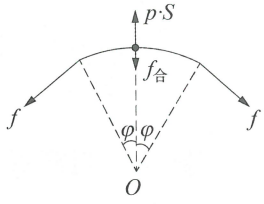
$$r=\frac{2+(\alpha_1+\alpha_2)(T_2-T_1)}{2(\alpha_2-\alpha_1)(T_2-T_1)}d=2.0\times10^2\ \text{mm}$$

例 2 一个球形肥皂泡，其中充有空气（不计空气质量），泡外为真空，平衡时其半径长为 r_0。由于受到扰动，肥皂泡做微小的径向膨胀、收缩振动，求其振动周期。设振动过程泡内空气温度保持不变，已知肥皂泡的质量为 m，肥皂膜的表面张力系数为 σ。

解析 如图所示，取一块对球心 O 夹角为 2φ 的小圆面肥皂膜作为研究对象，平衡时肥皂泡内的压强为 p_0。平衡时

$$2\sigma\cdot2\pi r_0\cdot\sin\varphi\cdot\sin\varphi=p_0\pi(r_0\sin\varphi)^2$$

$$p_0=\frac{4\sigma}{r_0}$$



例 2 图

当肥皂泡做微小振动使膜向外膨胀 x 时，$r=r_0+x$，

$$p_0\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3=p\cdot\frac{4}{3}\pi(r_0+x)^3$$

$$p=\left(\frac{r_0}{r_0+x}\right)^3p_0$$

小肥皂膜所受到的表面张力合力为

$$\begin{aligned}f_{合}&=\sum f\cdot\sin\varphi=2\sigma\cdot[\pi(r_0+x)\cdot2\varphi]\cdot\sin\varphi\\&=4\sigma\pi(r_0+x)\cdot\varphi\cdot\sin\varphi\\&\approx4\sigma\pi(r_0+x)\varphi^2\end{aligned}$$

且

$$f_{回}=f_{合}-p\cdot S$$

故有

$$f_{回}=4\sigma\pi(r_0+x)\varphi^2-\left(\frac{r_0}{r_0+x}\right)^3p_0\cdot\pi[(r_0+x)\varphi]^2$$

$$=4\sigma\pi\varphi^2x\left(1+\frac{r_0}{r_0+x}\right)\approx8\pi\sigma\varphi^2x\ (x\ \text{为极小值})$$

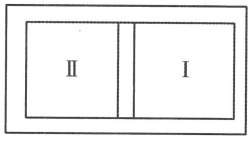
小圆面肥皂膜质量为

$$m'=\frac{\pi r_0^2\varphi^2}{4\pi r_0^2}m=\frac{1}{4}\varphi^2\cdot m$$

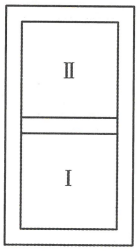
其振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m'}{k}}=\sqrt{\frac{\pi m}{8\sigma}}$$

例 3 在一个横截面积为 S 的密闭容器中，有一质量为 M 的活塞把容器隔成Ⅰ、Ⅱ两室，Ⅰ室中为饱和水汽，Ⅱ室中有质量为 m 的氮气，活塞可在容器中无摩擦地滑动，原本容器被水平地放置在桌面上，活塞处于平衡，两边气体均为 p_0、$T_0=373\ \mathrm{K}$，如图 1 所示。今将整个容器缓慢地转到图 2 示的直立位置，两室温度仍是 T_0，并有少量的水蒸气液化成水。已知水的汽化热为 L，水蒸气和氮气的摩尔质量分别为 μ_1 和 μ_2，求在整个过程中，Ⅰ室内系统与外界交换的热量。



例 3 图 1



例 3 图 2

解析 当容器处于初始位置，设水蒸气体积为 V_1，氮气体积为 V_2，当容器处于直立位置，水蒸气体积为 $V_1-\Delta V$，压强仍为 p_0，氮气体积为 $V_2+\Delta V$，压强为

$$p=p_0-\frac{Mg}{S}$$

因

$$p_0V_2=\frac{m}{\mu_2}RT_0,\ p(V_2+\Delta V)=\frac{m}{\mu_2}RT_0$$

由以上三式解得

$$\Delta V=\frac{Mg}{p_0S-Mg}V_2$$

设转变为水的质量为 Δm，水的体积忽略不计，于是

$$\Delta m=\frac{p_0\mu_1}{RT_0}V_1-\frac{p_0\mu_1}{RT_0}(V_1-\Delta V)=\frac{p_0\mu_1}{RT_0}\Delta V$$

由以上二式得

$$\Delta m=\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{Mg}{p_0S-Mg}m$$

Ⅰ室内系统向外界放出的热量为

$$Q=L\Delta m=\frac{\mu_1}{\mu_2}\cdot\frac{Mg}{p_0S-Mg}mL$$

例 4 质量为 2.0 kg、温度为 −13℃、体积为 0.19 m^3 的氟利昂（摩尔质量为 121），在保持温度不变的条件下被压缩，其体积变为 0.10 m^3。试求在此过程中有多少千克的氟利昂被液化。

已知在$-13℃$时，液态氟利昂的密度$\rho_f=1.44\times10^3\ kg/m^3$，饱和蒸汽压$p_s=2.08\times10^5\ Pa$，氟利昂的饱和蒸汽可近似地看做理想气体。

解析 假设压缩前全部氟利昂都以气态存在，则其压强p_i可由状态方程求得，即

$$p_iV_i=\frac{M}{\mu}RT$$

式中V_i为压缩前氟利昂的体积，则

$$p_i=\frac{MRT}{\mu V_i}=\frac{2\times8.31\times(273-13)}{121\times10^{-3}\times0.19}\ Pa=1.85\times10^5\ Pa$$

因$p_i<p_s$，所以压缩前氟利昂全部处于气态的假设成立。

设氟利昂被压缩后，液态部分的质量为M_1，体积为V_1，气态部分的质量为M_2，体积为V_2，压强即为饱和蒸气压p_s。由于饱和蒸气近似看做理想气体，则

$$p_sV_2=\frac{M_2}{\mu}RT$$

而

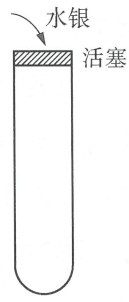
$$V_1+V_2=V,\ M_1+M_2=M,\ M_1=\rho_fV_1$$

式中V为被压缩后的氟利昂体积，M为氟利昂总质量，由以上四式得

$$M_1=\frac{M\dfrac{RT}{\mu}-p_sV}{\dfrac{RT}{\mu}-\dfrac{p_s}{\rho_f}}=0.84\ kg$$

由于压缩前氟利昂全部处于气态，故压缩过程中有0.84 kg氟利昂液化。

例5 如图所示，有一个一端开口、一端封闭的长圆柱形导热容器，将其开口向上竖直放置。在气温为27℃、气压为760 mmHg、相对湿度为75%时，用一质量可不计的光滑薄活塞将开口端封闭。已知27℃时水蒸气的饱和蒸气压为26.7 mmHg，在0℃时为4.5 mmHg。



例5图

(1) 若保持温度不变，想通过在活塞上方注入水银加压强的方法使管内开始有水珠出现，那么容器至少为多长？

(2) 若在水蒸气开始凝结时固定活塞，降低容器温度，当温度降至0℃时，容器内气体压强为多大？

解析 (1) 灌水银前空气柱中水蒸气的压强为$p_{气}=\frac{3}{4}p_{饱}$，设容器长为l_0，空气柱长度减小到l时，水蒸气达饱和状态，根据玻意耳定律有

$$p_{气}\cdot l_0=p_{饱}\cdot l,\ l=\frac{3}{4}l_0$$

此时活塞上下方压强分别为

$$p_{上}=\left(760+\frac{1}{4}l_0\right)\text{mmHg},\ p_{下}=\frac{4}{3}p_0$$

因 $p_{上}=p_{下}$，有

$$760+\frac{1}{4}l_0=\frac{4}{3}\times 760,\ l_0=1013(\text{mm})$$

(2) 水珠体积可以忽略，开始时，容器内干燥空气压强应为

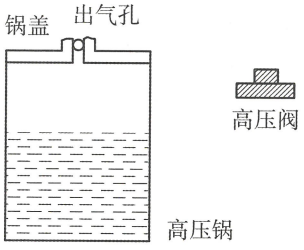
$$p_1=\left(\frac{4}{3}\times 760-26.7\right)\text{mmHg}=986.3\ \text{mmHg}$$

因活塞固定，气体降温过程等容，故有

$$p_1'=\frac{273}{273+27}p_1=897.5\ \text{mmHg}$$

容器内气体总压强为　　$p'=p_1'+p_2'=897.5\ \text{mmHg}+4.5\ \text{mmHg}=902.0\ \text{mmHg}$

例 6　如图 1 所示，正确使用高压锅的方法是：将已加上密封锅盖的高压锅加热，当锅中水沸腾时，加上一定质量的高压阀，此时可认为锅内空气已全部排出，只有水的饱和蒸气，继续加热，水温将继续升高，到高压阀被蒸气顶起时，锅内温度即达到预期温度。



例 6 图 1

某一高压锅的预期温度为 120℃，如果某人在使用此锅时，未按上述程序而在水温被加热到 90℃时就加上高压阀(可以认为此时锅内水汽为饱和气)，问当继续加热到高压阀被顶起而冒气时，锅内温度为多少?

已知：大气压强 $p_0=1.013\times10^5$ Pa，90℃ 时水的饱和气压 $p_{s(90)}=7.010\times10^4$ Pa，120℃ 时水的饱和气压 $p_{s(120)}=1.985\times10^5$ Pa。在90℃ 和120℃ 之间的饱和气压 p_s 和温度 t(℃) 的函数关系 $p_s(t)$ 如图 2 所示。

解析　90℃时锅内干空气压强 $p_{(90)}$ 为

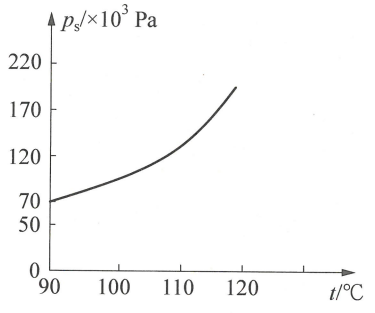
$$p_{(90)}=p_0-p_{s(90)}=3.12\times10^4\ \text{Pa}$$

温度为 t℃时，根据查理定律，有

$$p(t)=\frac{273+t}{273+90}p_{(90)}=(2.35\times10^4+86.0t)\ \text{Pa}$$

设温度为 t_1 时，高压阀被顶起，则有

$$p_{s(t_1)}+p_{(t_1)}=1.985\times10^5\ \text{Pa}$$



例 6 图 2

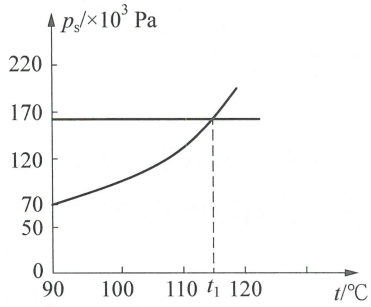
即 $$p_{s(t_1)}=1.985\times10^5-p_{(t_1)}$$

令 $$\begin{aligned}p'_{s(t)}&=1.985\times10^5-p_{(t)}\\&=(1.985\times10^5-2.35\times10^4-86.0t)\\&=(1.750\times10^5-86.0t)\ \text{Pa}\end{aligned}$$

显然，在 $t=t_1$ 时，$p_{s(t_1)}$ 即为顶起高压阀时锅内的饱和气压。从 $p'_{s(t)}$ 表达式可以看出，$p'_{s(t)}-t$ 的图象是一条直线，它应与 $p_{s(t)}-t$ 曲线在 $t=t_1$ 处相交。故由此交点即可确定 t_1 的值。利用数据

$$p'_{s(90)}=1.673\times10^5\ \text{Pa},\quad p'_{s(120)}=1.647\times10^5\ \text{Pa}$$

在本题 $p_{s(t)}-t$ 曲线图中画出 $p'_{s(t)}-t$ 直线如图 3 所示，由此直线与曲线的交点，得所求温度为 $t_1=114.5$℃。



例 6 图 3

例 7 物理小组的同学在寒冷的冬天做了一个这样的实验：他们把一个实心的大铝球加热到某温度 t，然后把它放在结冰的湖面上（冰层足够厚），铝球便逐渐陷入冰内。当铝球不再下陷时，测出球的最低点陷入冰中的深度 h。将铝球加热到不同的温度，重复上述实验 8 次，最终得到如下数据：

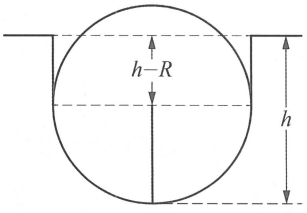
实验顺序数	1	2	3	4	5	6	7	8
热铝球的温度 t/℃	55	70	85	92	104	110	120	140
陷入深度 h/cm	9.0	12.9	14.8	16.0	17.0	18.0	17.0	16.8

已知铝的密度约为水的密度的 3 倍，设实验时的环境温度及湖面冰的温度均为 0℃。已知此情况下，冰的熔化热 $\lambda=3.34\times10^5$ J/kg。

（1）试采用以上某些数据估算铝的比热容 c。

（2）对未被你采用的实验数据，试说明不采用的原因，并作出解释。

解析 （1）铝球放热，使冰熔化。设当铝球的温度为 t_0 时，能熔化冰的最大体积恰与半个铝球的体积相等，即铝球的最低点下陷的深度 h 与球的半径 R 相等。当热铝球的温度 $t>t_0$ 时，铝球最低点下陷的深度 $h>R$，熔化的冰的体积等于一个圆柱体的体积与半个铝球的体积之和，如图 1 所示。



例 7 图 1

设铝的密度为 ρ_{Al}，比热容为 c，冰的密度为 ρ，熔化热为 λ，则铝球的温度从 t℃降到 0℃的过程中，放出的热量

$$Q_1=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{Al}ct$$

熔化的冰吸收的热量

$$Q_2=\rho\left[\pi R^2(h-R)+\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3\right]\lambda$$

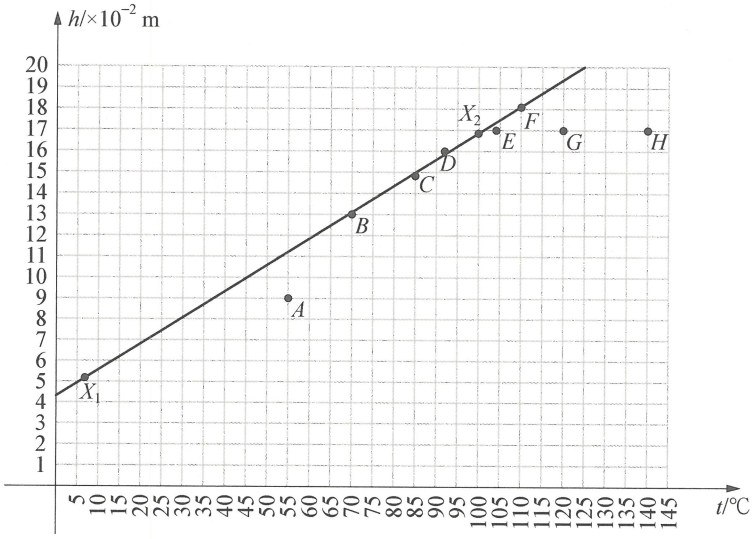
不计铝球使冰熔化过程中向外界散失的热量，则有

$$Q_1=Q_2$$

解得

$$h=\frac{4Rc}{\lambda}t+\frac{1}{3}R$$

即 h 与 t 成线形关系。此式只对 $t>t_0$ 时成立。将表中数据画在 $h\sim t$ 图中，得第 1，2，…，8 次实验对应的点 A，B，…，H。数据点 B、C、D、E、F 五点可拟合成一直线，如图 2 所示。



例 7 图 2

此直线应与上式一致。这样，在此直线上任取两点的数据，代入上式，再解联立方程，即可求出比热 c 的值。例如，在直线上取相距较远的横坐标为 8 和 100 的两点 X_1 和 X_2，它们的坐标由图中读得为 $X_1(8.0,\ 5.0)$，$X_2(100,\ 16.7)$。将此数据及 λ 的值代入上式，消去 R，得

$$c=8.6\times10^2\ \mathrm{J/(kg\cdot℃)}$$

(2) 在本题作的图 2 中，第 1、7、8 次实验的数据对应的点偏离直线较远，未被采用。原因是 $t_1<t_0$，t_7、t_8 温度过高，使得一部分冰升华成水蒸气，且因铝球与环境的温度相差较大而损失的热量较多。

例 8 图中表示的是在 10～30℃范围内水的饱和蒸气压曲线，现将温度 27℃、压强 760 mmHg、相对湿度 80%的空气密封在容器中，将它逐渐冷却，试问：

(1) 冷却到 12℃时，容器内空气压强为多少？

(2) 温度降到多少摄氏度开始有水凝结？这时纯空气和水蒸气的压强各为多少？

解析 (1) 由图可知，27℃时饱和气压 $p_s(27℃)=27$ mmHg，容器中水蒸气分压强 $p_W=$

$80\% \times p_s(27℃) = 21.6(\text{mmHg})$。

空气的分压强 p_a 为

$$p_a = 760 - 21.6 = 738.4(\text{mmHg})$$

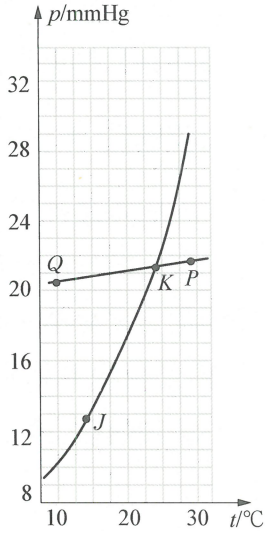
容器冷却到 12℃，假设水蒸气未凝结，由查理定律可求出 12℃时水汽分压强 p'_W，即

$$\frac{21.6}{300} = \frac{p'_W}{285}$$

$$p'_W = 20.5(\text{mmHg})$$

由图可查得 12℃时水的饱和气压为 10.3 mmHg，表明容器内已有水汽凝结。即 12℃时容器内水蒸气是饱和的，水蒸气的分压强为

$$p_s(12℃) = 10.3(\text{mmHg})$$



例 8 图

12℃时容器内空气的分压强为 p'_a，则

$$\frac{738.4}{300} = \frac{p'_a}{285},\quad p'_a = 701.5(\text{mmHg})$$

12℃时容器内压强

$$p' = 10.3 + 701.5 = 711.8(\text{mmHg})$$

(2) 可以利用图象法找出容器内水汽的凝结点。水汽未达到饱和前，其压强随温度线性变化，因此假设全部水汽从初态 P(27℃、21.6 mmHg)变化到末态 Q(12℃、20.5 mmHg)，都按查理定律变化，可在图中将 P、Q 连一直线，直线 PQ 与饱和水汽压曲线的交点 K，就是水蒸气开始饱和时的状态，此后再降温水蒸气不再沿 KQ 直线变化，而是沿 KJ 曲线变化。K 点就是水汽开始凝结点，由图可知，温度降到 23℃开始有水凝结，此时水蒸气的压强即饱和气压为 21.3 mmHg。

由查理定律可得 23℃时纯空气的压强 p''_a 为

$$\frac{738.4}{300} = \frac{p''_a}{296},\quad p''_a = 728.1(\text{mmHg})$$

总压强 $$p'' = 728.1 + 21.3 = 749.4(\text{mmHg})$$

例 9 已知冰、水和水蒸气在一封闭容器内(容器内没有其他的物质)，如三态能平衡共存，则系统的温度和压强必定分别是 $t_0 = 0.01℃$，$p_0 = 4.58$ mmHg。现有冰、水、水蒸气各 1 g 处于上述平衡态，若保持总体积不变，对系统缓慢加热，输入热量 $Q = 0.255 \times 10^3$ J，试估算系统再达到平衡后，冰、水和水蒸气质量。已知在此条件下冰的升华热 $L_{升} = 2.83 \times 10^3$ J/g，水的汽化热 $L_{汽} = 2.49 \times 10^3$ J/g。

解析　冰的熔化热近似为 $L_{熔}=L_{升}-L_{汽}=0.34\times10^{3}\ \mathrm{J/g}$。

显然，系统仅吸收了 $Q=0.25\times10^{3}\ \mathrm{J}$ 的热量，1 g 冰未能完全熔化，系统在物态变化时始终三态共存且接近平衡，因而系统的温度、压强均不变。

依题设，可估算水蒸气的密度为 $\rho_{汽}=\dfrac{p_0\mu}{RT_0}\approx5\times10^{-3}\ \mathrm{kg/m^3}$。

在同样条件下，水、冰的密度分别为 $\rho_{水}\approx1\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$，$\rho_{冰}\approx0.9\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$。

因水蒸气的密度远小于水和冰的密度，所以水蒸气体积远大于水、冰的体积之和，又因为冰熔化为水时体积变化不大，在总体积不变的条件下，物态变化过程中，可以认为水蒸气体积不变，即再次平衡时，水蒸气质量仍为 1 g。本题的物态变化几乎完全是冰熔化为水的过程。

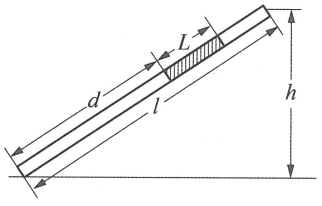
设加热后，冰、水、水蒸气的质量分别为 x、y、z，有

$$z=1\ \mathrm{g},\ x+y=2\ \mathrm{g},\ (1-x)L_{熔}=Q$$

由以上三式解得　　$x=0.25\ \mathrm{g},\ y=1.75\ \mathrm{g},\ z=1\ \mathrm{g}$

例 10　一根细玻璃管，长 0.6 m，内径 2.0 mm，两端封闭，内有 50 mm 长的水银柱。水银柱将细管分为两截：真空以及真空与水蒸气的混合物，毛细管倾斜，气室长度 d 将改变。做不同倾斜度的实验，结果如下表所示：

d(mm)	h(mm)
521	100
259	200
100	400
68	500
51	600



例 10 图 1

图 1 中表示的是毛细管倾斜放置的情况。每次测量前，都要等气体恢复平衡。试确定管中空气和水的质量。

解析　因为每次测量前空气已达平衡态，其温度等于环境温度，为等温变化，水蒸气未达饱和时，有

$$p\propto\frac{1}{d}$$

水蒸气达饱和后，有

$$(p-p_{\mathrm{B}})\propto\frac{1}{d}$$

其中 p 为总气压，p_B 为饱和水汽压，水银柱应平衡，有

$$\rho LSg\sin\theta = pS$$

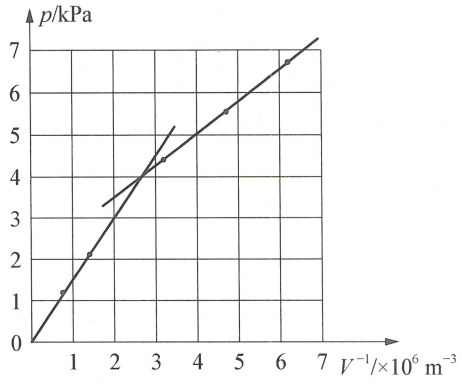
而 $\sin\theta = \frac{h}{l}$，故 $p = \frac{\rho Lg}{l}h$；

当 $p_W < p_B$ 时，有

$$pV = (n_A + n_W)RT$$

或

$$p = (n_A + n_W)\frac{RT}{V}$$



例 10 图 2

n_A、n_W 分别为空气、水的物质的量。

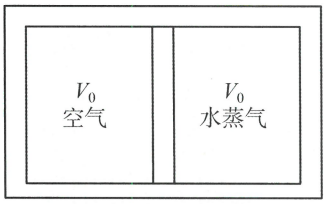
当 $p_W > p_B$ 时，有 $p = n_A\frac{RT}{V} + p_B$，作 $p - \frac{1}{V}$ 图。题中没有给出 T，可以由数据外推饱和蒸气压，然后从标准饱和汽压表中查到温度，由图 2 可以计算 n_A 和 $n_W + n_A$，得到空气为 2.9×10^{-7} mol 和水为 4.4×10^{-7} mol。

例 11 导热活塞将气缸分成体积都是 V_0 的两部分，左边装有干燥空气，右边装有水蒸气和 $4g$ 水，如图 1 所示，现对气缸缓慢加热，活塞向左移动。当活塞移动四分之一气缸长度后，活塞不再移动. 试问：加热前活塞右边的水蒸气质量 $m_{汽}$ 是多少？气缸的初始温度 t_1 是多少？活塞左边的空气质量 $m_{空}$ 是多少？活塞到达四分之一气缸长度时的末态温度 t_2 是多少？

水的饱和蒸气压与温度关系如下表：

t(℃)	100	120	133	152	180
$p_{饱}$(N/m²)	1×10^5	2×10^5	3×10^5	4×10^5	5×10^5

解析 设右边气缸中气体的初始压强为 p_1，末态压强为 p_2。显然，p_1、p_2 分别是温度 t_1、t_2 时的饱和蒸气压，且在 t_2 温度活塞右边的水恰好全部变为水汽。



例 11 图 1

对左边空气

$$\frac{p_1V_0}{t_1+273} = \frac{p_2\frac{V_0}{2}}{t_2+273}$$

对 t_1 温度的水蒸气

$$p_1V_0 = \frac{m_{汽}}{\mu_{水}}R(t_1+273)$$

对末态水蒸气

$$p_2\cdot\frac{3}{2}V_0 = \frac{m_{汽}+m_{水}}{\mu_{水}}R(t_2+273)$$

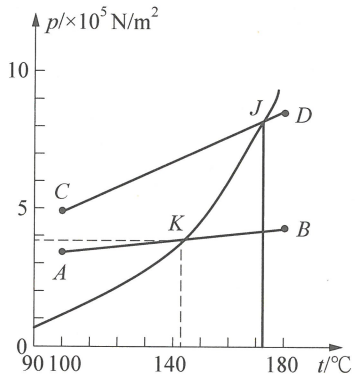
可解得

$$m_{汽} = \frac{1}{2}m_{水} = 2(\text{g})$$

利用题中所给数据作出水的饱和蒸气压曲线，如图 2 所示，由于活塞两边压强、温度始终

相等，若没有水的蒸发和凝结，活塞不会因温度变化而移动，这时水蒸气始终按等容过程变化，它在 $p-t$ 状态图上是一条直线。设初态时活塞右边只有水蒸气，没有水，它的状态方程为

$$p=\frac{m_{汽}R(t+273)}{\mu_{水}V_0} \qquad ①$$



例 11 图 2

以 $t_A=100℃$，$t_B=180℃$ 分别代入①式得

$$p_A=\frac{0.002\times 8.31\times(100+273)}{0.018\times10^{-3}}=3.4\times10^5(\mathrm{N/m^2})$$

$$p_B=\frac{0.002\times 8.31\times(180+273)}{0.018\times10^{-3}}=4.2\times10^5(\mathrm{N/m^2})$$

在图中分别找出坐标为（$3.4\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，100℃）及（$4.2\times10^5\ \mathrm{N/m^2}$，180℃）的 A、B 两点，显然 AB 直线就代表①式。而 AB 直线与饱和蒸气压曲线的交点就是水蒸气的初态，因为它同时满足理想气体条件与饱和水蒸气条件。由此可求出

$$t_1=t_K=143(℃),\quad p_1=3.7\times10^5(\mathrm{N/m^2})$$

同样因为末态的水蒸气维持 $\frac{3}{2}V_0$ 不变，故

$$p=\frac{m_{汽}+m_{水}}{\mu_{水}}\cdot\frac{R(t+273)}{\frac{3}{2}V_0} \qquad ②$$

设 $t_C=100℃$，$t_D=180℃$，由②式可求得

$$p_C=\frac{0.002+0.004}{0.018}\times\frac{8.31\times(100+273)}{1.5\times10^{-3}}=5.0\times10^5(\mathrm{N/m^2})$$

$$p_D=8.4\times10^5(\mathrm{N/m^2})$$

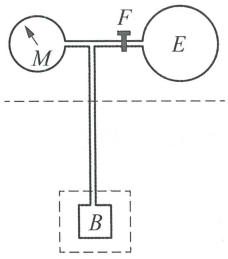
在图 2 中分别按上列坐标标出 C、D 两点，直线 CD 与饱和蒸气压曲线交点 J 即表示水蒸气的末态，由此定出

$$t_2=t_J=172(℃)$$

$$m_{空}=\frac{p_1V_0M_{空}}{RT_1}=\frac{3.7\times10^5\times1.1\times10^{-3}\times0.029}{8.31\times(143+273)}=3.07\times10^{-3}(\mathrm{kg})$$

例 12 如图所示为低温工程中常用的一种温度计的原理示意图，M 为压力表，以 V_M 表示其中可以容纳气体的容积；B 为测温泡，处在待测温度的环境中，以 V_B 表示其体积；E 为贮气容器，以 V_E 表示其体积；F 为阀门。M、E、B 由体积可忽略的毛细管连接。在 M、E、B 均处在室温 $T_0=300\ \mathrm{K}$ 时充以压强 $p_0=5.2\times10^5\ \mathrm{Pa}$ 的氢气。假设氢的饱和蒸气仍遵从理想气体状

态方程。现考察以下各问题：



例 12 图

(1) 关闭阀门 F，使 E 与温度计的其他部分隔断，于是 M、B 构成一简易的气体温度计，用它可测量 25 K 以上的温度，这时 B 中的氢气始终处在气态，M 处在室温中。试导出 B 处的温度 T 和压力表显示的压强 p 的关系。除题中给出的室温 T_0 时 B 中氢气的压强 p_0 外，理论上至少还需要测量几个已知温度下的压强才能定量确定 T 与 p 之间的关系？

(2) 开启阀门 F，使 M、E、B 连通，构成一用于测量 20～25 K 温度区间的温度计，此时压力表 M 测出的是液态氢的饱和蒸气压。由于饱和蒸气压与温度有灵敏的依赖关系，知道了氢的饱和蒸气压与温度的关系，通过测量氢的饱和蒸气压，就可相当准确地确定这一温区的温度。在设计温度计时，要保证当 B 处于温度低于 $T_V=25$ K 时，B 中一定要有液态氢存在，而当温度高于 $T_V=25$ K 时，B 中无液态氢。要达到这一目的，V_M+V_E 与 V_B 间应满足怎样的关系？已知 $T_V=25$ K 时，液态氢的饱和蒸气压 $p_V=3.3\times10^5$ Pa。

解析 (1) 当阀门 F 关闭时，设封闭在 M 和 B 中的氢气的摩尔数为 n_1，当 B 处的温度为 T 时，压力表显示的压强为 p，由理想气体状态方程，可知 B 和 M 中氢气的摩尔数分别为

$$n_{1B}=\frac{pV_B}{RT},\quad n_{1M}=\frac{pV_M}{RT_0},\quad n_{1B}+n_{1M}=n_1$$

解得

$$\frac{1}{T}=\frac{n_1R}{V_B}\frac{1}{p}-\frac{V_M}{V_BT_0},\quad T=\frac{p}{\dfrac{n_1R}{V_B}-\dfrac{V_M}{V_BT_0}p}$$

可见 $\frac{1}{T}$ 与 $\frac{1}{p}$ 成线性关系，式中的系数与仪器结构有关。至少要测得两个已知温度下的压强，作 $\frac{1}{T}$ 对 $\frac{1}{p}$ 的图线，就可求出系数。由于题中已给出室温 T_0 时的压强 p_0，故至少还要测定另一已知温度下的压强，才能定量确定 T 与 p 之间的关系式。

(2) 若蒸气压温度计测量上限温度 T_V 时有氢气液化，则当 B 处的温度 $T\leqslant T_V$ 时，B、M 和 E 中气态氢的总摩尔数应小于充入氢气的摩尔数。由理想气体状态方程可知充入氢气的总摩尔数

$$n_2=\frac{p_0(V_B+V_M+V_E)}{RT_0}$$

假定液态氢上方的气态氢仍可视为理想气体，则 B 中气态氢的摩尔数为

$$n_{2B}=\frac{p_VV_B}{RT_V}$$

在上式中，已忽略了 B 中液态氢所占的微小体积。由于蒸气压温度计的其他部分仍处在室温中，其中氢气的摩尔数为

$$n_{2M}+n_{2E}=\frac{p_V(V_M+V_E)}{RT_0}$$

根据要求有 $$n_{2B}+n_{2M}+n_{2E}\leqslant n_2$$

解得 $$V_M+V_E\geqslant\frac{p_VT_0-p_0T_V}{(p_0-p_V)T_V}V_B$$

代入有关数据得 $$V_M+V_E\geqslant 18V_B$$

练习题

1 将压强为 $p_0=1\ \text{atm}$ 的空气等温地压入肥皂泡内，最后吹成半径为 $R=3\ \text{cm}$ 的肥皂泡，设肥皂泡的胀大过程是等温的，求吹成这个肥皂泡所需的总功。（已知肥皂液的表面张力系数 $\sigma=4\times10^{-2}\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$，肥皂泡膜很薄，内半径几乎等于外半径且等于 R）

2 在一个密闭容器中有 $T_0=100℃$ 的饱和水蒸气 $m_1=0.1\ \text{kg}$ 和水 $m_2=0.001\ \text{kg}$。继续对容器加热，问：

（1）水刚好蒸发完毕时的温度是多少？

（2）所需热量是多少？已知温度每升高 1℃，饱和蒸汽压增加 $3.7\times10^3\ \text{Pa}$，水的汽化热为 $L=2.25\times10^6\ \text{J/kg}$，水蒸气的定容比热容 $c_V=1.38\times10^3\ \text{J/kg}$。

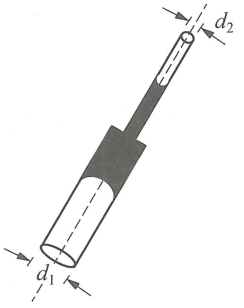
3 一气缸的初始体积为 V_0，其中盛有 2 mol 的空气和少量的水（水的体积可以忽略）。平衡时气体的总压强是 3.0 atm，经等温膨胀使其体积加倍，在膨胀结束时，其中的水刚好全部消失，此时的总压强为 2.0 atm，若令其继续做等温膨胀，使体积再次加倍，试计算此时：(1)气缸中气体的温度；(2)气缸中水蒸气的摩尔数；(3)气缸中气体的压强。假定空气和水蒸气均可当作理想气体处理。

4 0℃时，一水银温度计玻璃泡的容积为 V_0，毛细管的横截面积为 A_0，玻璃的线膨胀系数为 α_1，水银的体膨胀系数为 β。若 0℃时，泡内恰好盛满水银：

（1）在 t℃时，设 A_0 不变，试证明毛细管中水银的高度与 t 成正比；

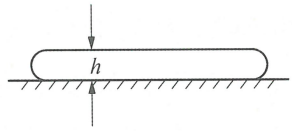
（2）若 t 随温度变化，求证第一问的结论是否成立。

5 毛细管由两根内径分别为 d_1 和 d_2 的薄壁玻璃管构成，其中 $d_1>d_2$，如图所示。管内注入质量为 M 的一大滴水，当毛细管水平放置时，整个水滴“爬进”细管内，而当毛细管竖直放置时，所有水从中流出来。试问：当毛细管的轴与竖直方向之间成多大角时，水滴一部分在粗管内而另一部分在细管内？水的表面张力系数 σ，水的密度为 ρ。对玻璃管来说，水是浸润液体。

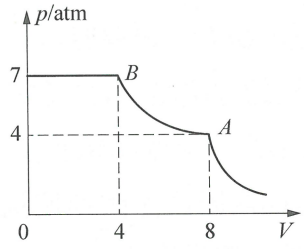


第 5 题图

6 在水平放置的洁净平玻璃板上倒一些水银，由于重力和表面张力的影响，水银近似成圆饼形状（侧面向外突出），如图所示，已知水银的密度 $\rho=13.6\times10^{3}\ \mathrm{kg/m^{3}}$，水银的表面张力系数 $\sigma=0.49\ \mathrm{N/m}$，当圆饼的半径很大时，试估算其厚度 h 的数值大约是多少。（取一位有效数字）



第 6 题图



第 7 题图

7 把质量为 $m_1=100\ \mathrm{g}$ 的氮气与未知质量的氧气混合，在温度 $T=77.4\ \mathrm{K}$ 的条件下让混合气体做等温压缩，单位体积的混合气体的压强和体积的关系如图所示。

（1）确定氧气的质量 m_k；

（2）计算在 $T=77.4\ \mathrm{K}$ 时氧气的饱和气压强 p_{HK}。（说明：$T=77.4\ \mathrm{K}$ 是标准大气压下液态氮的沸点，液态氧沸点更高）

8 一根 1.0 m 长的竖直玻璃管，在 20℃时用某种液体灌到一半，问：当玻璃管温度升高到 30℃时，液体高度变化了多少？取玻璃的线膨胀系数为 $\alpha=1.0\times10^{-5}/℃$，液体的体膨胀系数为 $\beta=4.0\times10^{-5}/℃$。

9 当压强不变、温度变化量 Δt 不太大时，液体或固体在某一温度下的体膨胀系数 α 可以表示为 $\alpha=\dfrac{\Delta V}{V\Delta t}$，其中 V 为该温度时的体积，ΔV 为体积的变化量。一般来说，在常温下液体和固体的体膨胀系数分别在 $10^{-3}/\mathrm{K}$ 量级和 $10^{-6}/\mathrm{K}\sim10^{-5}/\mathrm{K}$ 量级。

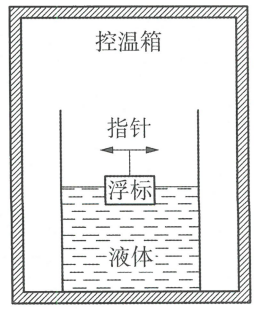
图中所示的装置可以用来测量控温箱中圆筒形玻璃容器内液体的体膨胀系数，实验步骤如下：

① 拿掉浮标，将液体的温度调控为接近室温的某一温度 t_0，测量液柱的高度 h；

② 放入浮标，保持压强不变，将液体的温度升高一个不太大的量 Δt，用精密的位置传感器确定指针高度的变化量 Δh；

③ 利用步骤①和②中测得的数据计算液体在 t_0 时的体膨胀系数 α。

回答下列问题：



第 9 题图

（1）不考虑温度变化导致的液体密度变化，写出用测量量表示的 α 的表达式；

（2）①在温度升高过程中，液体密度变化会对用上面的表达式计算出的结果有什么影响？为什么？

② 在所用浮标为直立圆柱体时，某同学对如何减小这一影响提出以下几条建议，其中有效的是_____。（填入正确选项前的字母）

A. 选用轻质材料制成的浮标　　B. 选用底面积较大的浮标

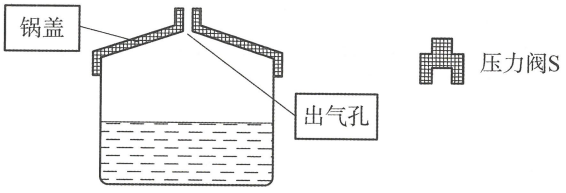
C. 选用高度较小的浮标　　D. 尽量加大液柱的高度 h

E. 尽量选用底面积大的玻璃容器

10 正确使用压力锅的方法是：将已盖好密封锅盖的压力锅加热，当锅内水沸腾时再加盖压力阀 S，此时可以认为锅内只有水的饱和蒸气，空气已全部排除。然后继续加热，直到压力阀被锅内的水蒸气顶起时，锅内即已达到预期温度（即设计时希望达到的温度），现有一压力锅，在海平面处加热能达到的预期温度为 120℃。某人在海拔 5000 m 的高山上使用此压力锅，锅内有足量的水。

（1）若不加盖压力阀，锅内水的温度最高可达多少？

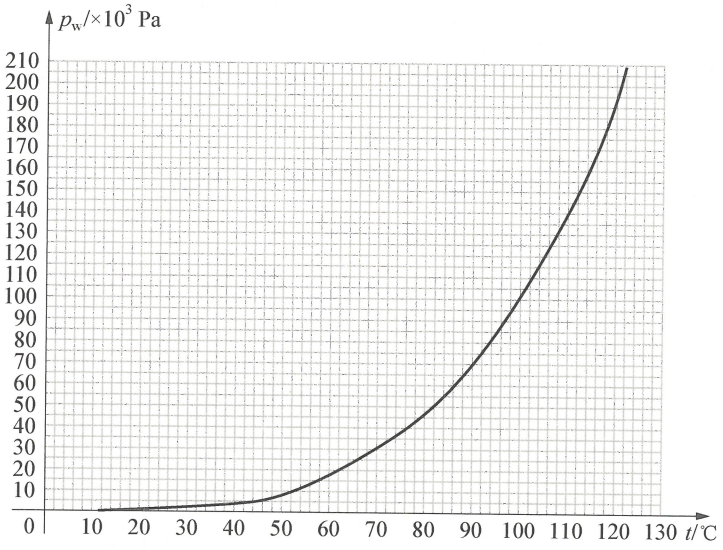
（2）若按正确方法使用压力锅，锅内水的温度最高可达多少？



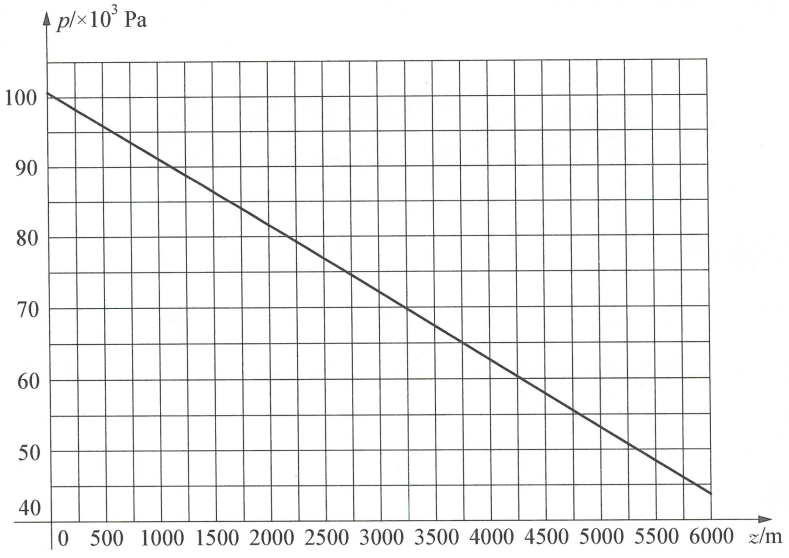
第 10 题图 1

（3）若未按正确方法使用压力锅，即盖好密封锅盖一段时间后，在点火前就加上压力阀。此时水温为 27℃，那么加热到压力阀刚被顶起时，锅内水的温度是多少？若继续加热，锅内水的温度最高可达多少？

已知：水的饱和蒸气压 $p_w(t)$ 与温度 t 的关系图线如图 2 所示。大气压强 $p(z)$ 与高度 z 的关系的简化图线如图 3 所示。



第 10 题图 2



第 10 题图 3

$t=27℃$ 时 $p_w(27)=3.6\times10^3$ Pa；$z=0$ 处 $p(0)=1.013\times10^5$ Pa。

第 12 章 静电场

知识要点和基本方法

一 电荷守恒定律

电荷既不能创生，也不能被消灭。电荷只能从一个物体转移到另一个物体（比如摩擦起电），或者从物体的一部分转移到物体的另一部分（比如静电感应、发电机等）。

二 库仑定律

1. 点电荷

只有位置和电量，没有体积的带电体，叫做点电荷。点电荷是一种理想化的物理模型。在实际应用中，只要带电体的大小与它们之间的距离相比可以忽略不计，就可以把带电体看作点电荷。

2. 库仑定律

如果在真空中有两个静止的点电荷，电量分别为 Q_1 和 Q_2，它们之间的距离为 r，那么它们之间的相互作用力的大小为

$$F = k\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

式中的比例恒量 $k = 9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$。作用力的方向沿着它们的连线，同种电荷互相排斥，异种电荷互相吸引。

在不少场合，我们常把 k 写成

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

式中的 ε_0 称为真空中的介电常数，是电磁学中的一个基本常量。

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}$$

引进了 ε_0 之后，虽然库仑定律的数学形式变得复杂了一点，但在此后导出的一些常用公式中 4π 消失了，使运算反而变得简洁。

三 电场强度

我们知道力是物体对物体的作用，两个物体彼此不接触时，它们之间的相互作用力必须依赖其间的物质来传递。真空中两个点电荷之间的相互作用，是通过电场来传递的。

一个研究对象的物理特性，总是通过它对其他物体的作用显示出来的。电场对电荷有力

的作用，电场可以对电荷做功，利用前者，物理学中引进了电场强度的概念；利用后者，物理学中引进了电势的概念。

1. 电场强度的定义式

$$E=\frac{F}{q}$$

其中 q 是检验电荷的电量，F 是电场对检验电荷的作用力。电场强度是一个矢量，它的方向和带正电的检验电荷的受力方向一致。

对于真空中一个孤立的点电荷 Q，它周围场强的大小

$$E=k\frac{Q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

其中 r 是该点到点电荷的距离，Q 是点电荷的电量。

如果一个电场中各处的电场强度都相同，那么这样的电场叫做匀强电场。匀强电场也是一种理想模型。

2. 电场强度的叠加原理

由 N 个点电荷所激发的电场中，任一点的总场强等于每个点电荷单独存在时所激发的场强的矢量和，这就是电场强度的叠加原理。

如果激发电场的是一个带电物体，比如说一根均匀带电的细杆，那么可以把细杆上的每一小段看成一个点电荷，然后把细杆上所有的点电荷产生的场强进行叠加，便是这根带电细杆产生的总场强。具体的叠加计算需要用到积分的知识。

四 高斯定理

1. 电通量

穿过电场中某一截面的电通量等于截面面积和电场强度沿截面法向分量的乘积，即

$$\Delta\Phi_E=\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}=E\Delta S\cos\theta=E\Delta S_\perp=\Delta SE_\perp$$

此处截面 $\Delta\vec{S}$ 矢量的正方向沿法线方向并指向预先规定的正方向一侧，θ 为 $\vec{E}$ 与 $\Delta\vec{S}$ 方向之间的夹角。在这样的规定下，当 $\theta<90^\circ$ 时，电场线穿过 $\Delta\vec{S}$ 正向一侧，$\Delta\Phi_E>0$；当 $90^\circ<\theta\leqslant180^\circ$ 时，电场线穿过 $\Delta\vec{S}$ 负向一侧，$\Delta\Phi_E<0$。

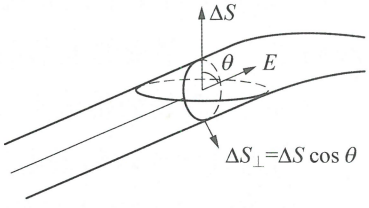


图 12-1

当电场线穿过一个有限大小曲面 $\vec{S}$ 时，其电通量可以通过其上无限多个小面元上的电通量代数相加得到 $\Phi_E=\sum_S\vec{E}\cdot\Delta\vec{S}$，式中求和符号下的 S 表示对 S 上无限多个小面元上的电通量求

和。显然，在求和之前，$\vec{S}$ 上的正法向应先作出规定。若此有限大小的曲面 $\vec{S}$ 是一个封闭面时，除非特殊约定，外法向为曲面的正法向。

2. 真空中静电场的高斯定理

静电场中通过任意闭合曲面（高斯面）S 的电通量等于该闭合曲面内全部电荷代数和的 $4\pi k$ 倍，与面外的电荷无关。

高斯定理的数学表达式 $$\sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{S} = 4\pi k \sum_{S\text{面内}} q_i$$

其中 $\vec{E}$ 为闭合面 S 上每一个面元 $\Delta\vec{S}$ 所在处的电场强度，是形成静电场的全体电荷在面元 $\Delta\vec{S}$ 处激发产生的合电场强度，既包括 S 面内的电荷，也包括 S 面外的电荷。等式右边电荷的代数和仅指 S 面内的电荷，而和 S 面外的电荷无关。高斯定理是静电场的普遍规律，对任意闭合曲面都成立，利用高斯定理可以求出具有某种对称性分布的电场的场强。静电场的高斯定理表明，静电场是有源场，电荷是产生静电场的源。

3. 常见电场分布

（1）均匀带电薄球壳的电场

取一个和球壳同心的、半径小于球壳半径 R 的球面高斯面，利用高斯定理，易得球壳内 $E=0$。

取一个和球壳同心的、半径大于 R 的球面高斯面，利用高斯定理，可得球壳外距离球心 r 处的场强 $E=k\dfrac{Q}{r^2}$。这个结果和点电荷的场强完全相同。

（2）均匀带电球体的电场

取一个和球体同心的、半径 r 小于球体半径 R 的球面高斯面，利用高斯定理，可得球体内的电场强度 $E=k\dfrac{Qr}{R^3}$。

取一个和球体同心的、半径 $r\geqslant R$ 的球面高斯面，利用高斯定理，可得球体外离球心 r 处的电场强度 $E=k\dfrac{Q}{r^2}$，也和点电荷的场强相同。

（3）无限大均匀带电薄板的电场

因为薄板均匀带电且无限大，所以电场线垂直于平板且疏密均匀。取一个圆柱形的高斯面，两底面平行于平板放置，如图 12－2，侧面没有电通量。利用高斯定理，可得电场强度 $E=2\pi k\sigma$（σ 为大平板的电荷面密度）。

（4）无限长的带电直导线的电场

因为直导线均匀带电且无限长，所以电场线都在垂直于直导线的平面内，呈发散状，如图 12－3。取一个以长直导线为轴线的圆柱形高斯面，两底面没有电通量。利用高斯定理，可得在与直导线距离为 r 处的电场强度 $E=2k\dfrac{\lambda}{r}$（λ 为长直导线的电荷线密度）。

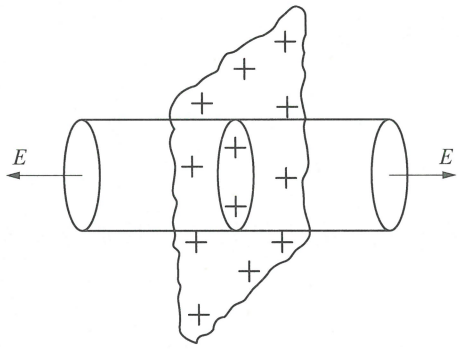


图 12-2

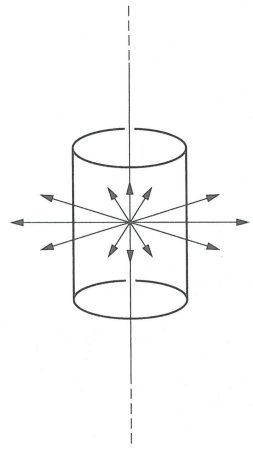


图 12-3

五 电势

1. 静电场的环路定理

静止电荷形成的电场是保守场。在静电场中移动一个试探电荷，电场力对试探电荷做的功与路径无关，而只与路径的起点和终点位置有关。对静电场的这种性质，还有另一种表述方法：试探电荷从电场中某点出发，经过闭合路径后又回到原来的位置，电场力对试探电荷做的功为零。这个规律也叫静电场的环路定理。

2. 电势

电场强度是从力的角度来描述电场的特征量，电势是从能量的角度来描述电场的特征量。一个试探电荷 q 放在电场中的某点，如果它的电势能是 ε，那么这一点的电势

$$U=\frac{\varepsilon}{q}$$

电势是相对零势面而言的，取不同的零势面，电场中某点的电势是不同的。电势是电场的一种属性，和试探电荷无关。

3. 电势差

电场中 A、B 两点之间的电势差

$$U_{AB}=U_A-U_B=\frac{\varepsilon_A}{q}-\frac{\varepsilon_B}{q}=\frac{\varepsilon_A-\varepsilon_B}{q}=\frac{W_{AB}}{q}$$

式中的 W_{AB} 是把试探电荷 q 从电场中的 A 点缓慢地移到 B 点过程中电场力做的功。

4. 电势差和电场强度的关系

因为电场力做的微功

$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

所以 $$W_{AB}=q\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

即 $$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

5. 常见电势的分布

(1) 点电荷电场的电势

设无穷远处的电势为零。将一个检验电荷 q 从无穷远处移到与场源电荷 Q 的距离为 r 处时，该检验电荷的电势能为

$$\varepsilon=-\int_{\infty}^{r} k\frac{Qq}{R^2}\cdot \mathrm{d}R=k\frac{Qq}{r}$$

因此与场源电荷 Q 的距离为 r 处的电势为

$$U=\frac{\varepsilon}{q}=k\frac{Q}{r}$$

(2) 均匀带电薄球壳的电势

因为均匀带电薄球壳形成的电场在球壳外和点电荷电场完全相同，所以

$$U_{外}=k\frac{Q}{r}\quad (r\geqslant R)$$

在球壳内，电场强度为零，处处等势。电势为

$$U_{内}=k\frac{Q}{R}$$

如果某电场是由若干个点电荷共同形成的，或者是由一个带电体形成的，那么根据电势叠加的原理，电场中某点的电势等于每一个点电荷(带电体也可以分成许多个点电荷)单独在该点所激发的电势的代数和。

(3) 均匀带电圆环的轴线上的电势

设圆环带电量为 q，取一小段圆环 $\mathrm{d}l$，其电量为 $\mathrm{d}q$，则 $\mathrm{d}q=\frac{q}{2\pi R}\mathrm{d}l$，该电荷元在轴线上离环心 x 处 P 点(如图 12-4)的电势为

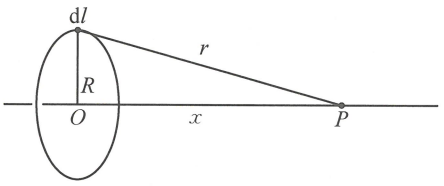


图 12-4

$$\mathrm{d}U=k\frac{\mathrm{d}q}{r}=k\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi Rr}=k\frac{q\mathrm{d}l}{2\pi R\sqrt{R^2+x^2}}$$

则对于此均匀带电圆环，该点的电势

$$U=\int \mathrm{d}U=k\int_0^{2\pi R}\frac{q\cdot \mathrm{d}l}{2\pi R\sqrt{R^2+x^2}}=k\frac{q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

六* 电偶极子

两个大小相等、符号相反的点电荷$+q$和$-q$。它们分开的距离为l，这一电荷系统称为电偶极子。通常这个l比研究的场点到电荷的距离小得多。连接两电荷的直线称为电偶极子的轴线，取从负电荷指向正电荷的方向作为轴线的正方向。电荷量q和$\vec{l}$的乘积叫做电偶极矩，记作$\vec{p}$，$\vec{p}=q\vec{l}$。

1. 电偶极子轴线和轴线的中垂线上的场强

选电偶极子轴线的中点为坐标原点，轴线延长线上某点$A(x, 0)$，$x \gg l$，正、负点电荷的坐标分别为$\left(\frac{l}{2}, 0\right)$和$\left(-\frac{l}{2}, 0\right)$（如图12-5），那么$A$点的场强

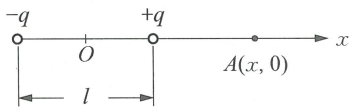


图12-5

$$E_A=k\left[\frac{q}{\left(x-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{q}{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2}\right]$$

因为$x \gg l$，所以E_A可以近似为

$$E_A=k\frac{2ql}{x^3}$$

方向和电偶极子轴线的方向相同。

对于电偶极子轴线中垂线上的某点$B(0, y)$，$y \gg l$如图12-6，正、负点电荷的场强沿y方向的分量互相抵消，沿x方向的分量互相叠加

$$E_B=-k\frac{ql}{\left(y^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

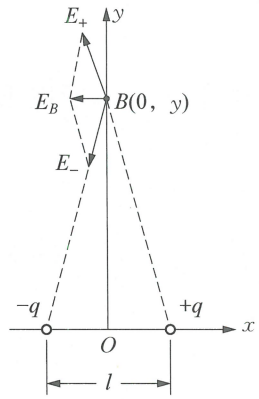


图12-6

因为$y \gg l$，所以E_B可以近似为

$$E_B=k\frac{ql}{y^3}$$

方向和电偶极子轴线的方向相反。

由此可见，电偶极子的场强和距离的三次方成反比，和电偶极子的电偶极矩ql成正比。

2. 电偶极子的电势和场强分布

电偶极子如图12-7放置，电场中任一点P的电势由点电荷$+q$和点电荷$-q$在该点的电势叠加而成。P点到两个点电荷的距离

$$r_+ \approx r-\frac{l}{2}\cdot\cos\theta$$

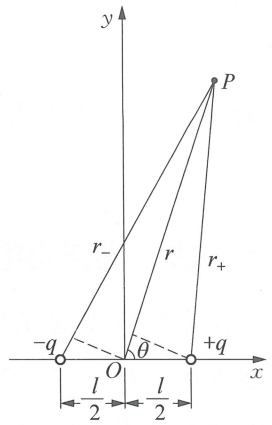


图12-7

$$r_{-} \approx r + \frac{l}{2} \cdot \cos\theta$$

所以

$$U_P = k\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}\right) = k\,\frac{ql\cos\theta}{r^2 - \left(\frac{l}{2}\cos\theta\right)^2}$$

由于 $r \gg l$，所以

$$U_P = k\,\frac{ql\cos\theta}{r^2}$$

如图 12-8 所示，利用点电荷场强公式和场强叠加原理，可得

$$E_r = \frac{kq}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta} \cdot \frac{r - \frac{l}{2}\cos\theta}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta}}$$

$$- \frac{kq}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2 \cdot r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta} \cdot \frac{r + \frac{l}{2}\cos\theta}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2 \cdot r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta}}$$

由于 $r \gg l$，所以 $E_r = \frac{k \cdot 2ql\cos\theta}{r^3} = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}$。

$$E_\theta = \frac{kq}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta} \cdot \frac{\frac{l}{2}\sin\theta}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - 2r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta}$$

$$+ \frac{kq}{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sin\theta}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 2r \cdot \frac{l}{2}\cos\theta}}$$

由于 $r \gg l$，所以 $E_\theta = \frac{kql\sin\theta}{r^3} = \frac{kp\sin\theta}{r^3}$。

七 场强与电势的关系

电场强度总是指向电势降落的方向，并且沿电势降落最快的方向，所以电场中某点的电场强度等于该点电势梯度的负值，这就是场强与电势的微分关系。利用这个结论可以从已知的电势分布求场强分布

$$\vec{E}=-\nabla U$$

电场强度在任意方向 Δl 上的投影 E_l 为

$$E_l=-\frac{\partial U}{\partial l}$$

利用场强与电势的关系 $\vec{E}=-\nabla U$，读者可自行推导 E_r、E_θ。

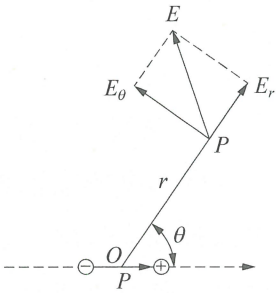


图 12-8

八 电容和电容器

1. 电容

一个导体带电后就有一定的电势 U。从理论和实验可知，一个孤立导体的电势 U 与它所带的电量 q 成正比，即 $\frac{q}{U}=C$。这个比例系数 C 叫做孤立导体的电容。

电容是表征导体储电能力大小的物理量，其物理意义是：使导体升高单位电势所需的电量。

2. 平行板电容器

孤立导体是一种理想化的情况，实际上一个导体附近总会有其他的导体。两个导体就可以构成一个电容器。

最简单的电容器是由两块靠得很近、相互平行、同样大小的导体板组成的，我们称之为平行板电容器。平行板电容器充电后，两块板带异种电荷。两板之间是匀强电场，电场线垂直于两板。取一个如图 12-9 中虚线所示的高斯面，其电通量为零，所以平行板电容器两板的内表面一定带等量异种电荷。再取一个如图 12-10 中虚线所示的高斯面，设板内表面的电荷面密度是 σ，那么有

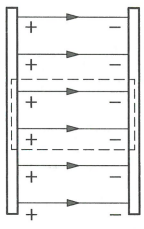


图 12-9

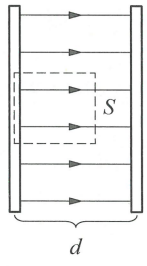


图 12-10

$$E\cdot S=4\pi k\cdot\sigma\cdot S$$

$$E=4\pi k\cdot\sigma$$

两板间的电势差

$$U=E\cdot d=4\pi k\cdot\sigma\cdot d$$

根据电容器电容的定义，平行板电容器电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\sigma\cdot S}{4\pi k\sigma\cdot d}=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}$$

3. 球形电容器

球形电容器由两个半径分别为 R_A 和 R_B（$R_B>R_A$）的同心球壳组成。设内球壳带电 $+q$，外球壳带电 $-q$。取一个内球壳体内的同心球壳高斯面，可知内球壳的电荷都分布在外表面上。取一个外球壳体内的同心球壳高斯面，可知外球壳的电荷都分布在内表面上。在离球心 r（$R_A>r>R_B$）处的场强

$$E=k\frac{q}{r}$$

两球壳之间的电势差

$$U=\int_{R_A}^{R_B}E\cdot\mathrm{d}r=\int_{R_A}^{R_B}k\frac{q}{r^2}\cdot\mathrm{d}r=k\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

球形电容器的电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{1}{k}\frac{R_A\cdot R_B}{R_B-R_A}$$

设想球形电容器的外球壳在无限远处，即 $R_B\gg R_A$，那么 $C=\dfrac{R_A}{k}$，这就是孤立导体球的电容。

4. 圆柱形电容器

圆柱形电容器由两个同轴金属圆柱面组成，设两圆柱面的长度均为 l，半径分别为 R_A 和 R_B（$R_A<R_B$），$l\gg(R_B-R_A)$。

设内、外圆柱面分别带电 $+q$ 和 $-q$，单位长度圆柱面上的电量为 $\lambda=\dfrac{q}{l}$。取适当的高斯面，可证明内圆柱面上的 $+q$ 全部分布在外表面，外圆柱面上的 $-q$ 全部分布在内表面。在两圆柱面之间与轴线距离为 r（$R_A<r<R_B$）处的场强

$$E=2k\frac{\lambda}{r}$$

内、外圆柱面的电势差

$$U=\int_{R_A}^{R_B}E\cdot\mathrm{d}r=2k\lambda\ln\frac{R_B}{R_A}$$

圆柱形电容器的电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{\lambda l}{2k\lambda\ln\dfrac{R_B}{R_A}}=\frac{l}{2k\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$$

5. 电容器的连接

(1) 并联

n 个原来不带电的电容器并联后接在电压 U 上，每个电容器的电压都是 U，电量分别为 q_1，q_2，…，q_n，那么

$$q_1=C_1U,\ q_2=C_2U,\ \cdots,\ q_n=C_nU$$

则并联所得组合电容器的总电荷量

$$q=q_1+q_2+\cdots+q_n=(C_1+C_2+\cdots+C_n)U$$

此组合电容器的电容

$$C=\frac{q}{U}=C_1+C_2+\cdots+C_n$$

(2) 串联

n 个原来不带电的电容器串联后接在电压 U 上，由于静电感应，每个电容器的两个极板都带有等量异种电荷 $+q$ 和 $-q$，每个电容器的电压

$$U_1=\frac{q}{C_1},\ U_2=\frac{q}{C_2},\ \cdots,\ U_n=\frac{q}{C_n}$$

则串联所得组合电容器的总电压

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_n=q\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right)$$

由 $U=\frac{q}{C}$ 可得

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

即串联组合电容器总电容的倒数等于每个电容器电容的倒数之和。

九* 静电场中的电介质

电介质是电阻率很大、导电能力很差的物质。电介质中的电子一般都处于束缚状态，无法自由移动，因此电介质是理想的绝缘体。

1. 电介质的极化

电介质的分子可以分为两种：有极分子和无极分子。有极分子中正、负电荷中心不重合，相当于一个电偶极子。无极分子的正、负电荷中心是重合的，电偶极矩为零。在有极分子构成的电介质中，虽然有许许多多电偶极子，但因为它们的方向是杂乱无章的，所以电介质还是电中性的。

当电介质处于外电场中时，会发生极化。无极分子电介质的正、负电荷中心发生分离，且

取向趋于一致，电介质的表面产生极化电荷。有极分子电解质中的分子在外部电场力的作用下发生转动，电偶极矩的方向和外电场方向趋向一致，电介质表面同样会产生极化电荷。

2. 电极化强度

在电介质内取一无限小的体积元 ΔV，当没有外电场时，这个体积元中所有分子的电偶极矩的矢量和 $\sum \vec{p}$ 等于零。有了外电场时，电介质被极化，$\sum \vec{p}$ 将不等于零。我们把单位体积内分子电偶极矩的矢量和叫做电极化强度，即

$$\vec{P}=\frac{\sum \vec{p}}{\Delta V}$$

电极化强度和电介质的性质以及外部电场都有关系。

3. 电介质中的静电场

把电介质置于静电场中，电介质中会同时有外电场 E_0 和极化电荷产生的电场 E'，这两个电场的方向是相反的，所以合场强

$$E=E_0-E'$$

这就是说，由于电介质的置入，电场强度会减小。这也就是平行板电容器两板间置入电介质之后电容增大的原因。

4. 电位移

为了计算方便，我们再引进一个描述电场的辅助物理量——电位移矢量 $\vec{D}$，且

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

在电场中有电介质存在的情况下，仍然可以用高斯定理，但高斯定理中的 $\sum q$ 应理解为处于高斯面内所有电荷的总和，包括自由电荷和极化电荷，即

$$\sum q=\sum q_0+\sum q'$$

但有时极化电荷 $\sum q'$ 不是很容易求。引入了电位移矢量 $\vec{D}$ 之后，这个问题得以简化。只要把真空中高斯定理中的电通量变成电位移通量，$\sum q'$ 即不必考虑。而

$$\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$$

式中的 ε_r 是电介质的相对介电常数。

十 静电场中的导体

1. 静电感应

导体中有大量的自由电子，如果把导体放在外电场中，自由电子会在外电场力的作用下移

动到导体的两个端面。这种现象叫静电感应现象，两个端面的等量异种电荷叫感应电荷。感应电荷也会在导体内部产生自己的电场，当感应电荷的电场和外电场相互抵消后，导体内的自由电荷不再定向移动，这时就达到了静电平衡。

电场中的导体达到静电平衡以后，导体内部的合场强为零，整个导体是一个等势体，净电荷全部分布在导体的外表面。

2. 静电屏蔽

利用静电平衡可实现静电屏蔽。如果要使某一仪器不受外部电场的影响，可将此仪器置于一个封闭的导体壳内，导体壳就可以屏蔽外部电场。如果需要外部空间不存在电场，可将场源置于封闭导体壳内，并将导体壳接地。

3. 电像法

导体置于电场中，导体表面会产生感应电荷，这些感应电荷同样会影响导体外电场的分布。由于导体表面感应电荷的分布一般比较复杂，因此这些感应电荷对导体外电场的影响不易判断。在有些情况下，我们可以用一个(或几个)点电荷来等效替代感应电荷，使导体外电场分布的计算得以简化。下面我们看两种比较典型的情况。

一块接地的大导体板附近有一个点电荷$+q$(图 12-11)，在导体板的左表面产生负的感应电荷。这些感应电荷显然不是均匀分布的，因此要直接求导体板左面空间的电场分布比较困难。因为导体板是等势体，所以导体板左侧空间的电场线在接触导体板之前肯定是垂直于导体板的。现在我们在导体板左侧放一个点电荷$-q$，电量和$+q$相同，位置与$+q$关于导体板左表面对称。$+q$和$-q$在导体板左表面处形成的合场强显然是垂直于左表面的，因此可以认为$-q$和导体板上的感应电荷对导体板左侧空间电场分布的影响是等效的，可以互相替代。这样的方法叫电像法，$-q$叫做镜像电荷。

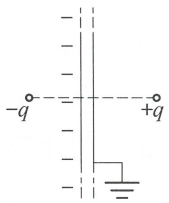


图 12-11

再看一个例子。一个半径为r的接地导体球，在离球心h处有一个场源点电荷$+q(h>r)$，$+q$会在导体球上感应出负的感应电荷(图 12-12)。我们希望找一个镜像电荷q'来等效替代导体球上的感应电荷。由于对称性，可以判断q'肯定在q和球心O的连线上，设q'与O的距离是h'。因为导体球接地，所以球体的电势为零。取球表面上一点P，它的电势

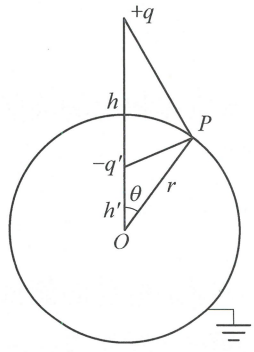


图 12-12

$$U=k\left(\frac{q}{\sqrt{r^2+h^2-2rh\cos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{r^2+h'^2-2rh'\cos\theta}}\right)=0$$

$$q^2(r^2+h'^2)-2q^2rh'\cos\theta=q'^2(r^2+h^2)-2q'^2rh\cos\theta$$

要使上式对任何θ都成立，必须有

$$\begin{cases}q^2(r^2+h'^2)=q'^2(r^2+h^2)\\ q^2h'=q'^2h\end{cases}$$

可解得

$$h'=\frac{r^2}{h},\ q'=\frac{r}{h}q$$

十一 静电场的能量

静电场能够对电场中的带电体做功，说明电场是具有能量的。

1. 匀强电场的能量

平行板电容器内的电场是匀强电场，我们就以平行板电容器的充电过程来讨论匀强电场的能量。平行板电容器由1板和2板组成，原来不带电。将平行板电容器充电的过程想象成不断地把微小电荷 $\mathrm{d}q$ 从2板移到1板，两板总是带等量异种电荷。当两板已带电 $\pm q$ 电量时，两板的电势差为 U'，这时再把电荷 $+\mathrm{d}q$ 从2板移到1板，外力克服电场力做的功为

$$\mathrm{d}A=U'\cdot\mathrm{d}q=\frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

因此在电容器从 $q=0$ 开始充电到电量 $q=Q$ 的过程中，外力做的总功

$$A=\int\mathrm{d}A=\int_0^Q\frac{q}{C}\cdot\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

这个功就等于电容器的静电能，也就是平行板电容器两板间的匀强电场的能量。

2. 电场的能量密度

如果平行板电容器两板间的距离为 d，两板的面积均为 S，那么两板的电势差 $U=E\cdot d$，平行板电容器的电容 $C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$，所以平行板电容器的静电能

$$W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2S\cdot d=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\cdot V$$

单位体积电场的能量

$$w_\mathrm{e}=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$$

这就是电场的能量密度。这个公式虽然是由匀强电场导出的，但它在非匀强电场中仍然是正确的。例如要求一个半径为 R、带电量为 q 的导体球壳的电场的能量（球壳外为真空）：

球壳内电场为零，没有能量。球壳外离壳心 r 处的电场强度 $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}$，此处取一个厚度为 $\mathrm{d}r$ 的球壳，体积为 $\mathrm{d}V=4\pi r^2\cdot\mathrm{d}r$。球壳外电场的总能量

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_R^\infty\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2\cdot4\pi r^2\cdot\mathrm{d}r=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0R}$$

例题精讲

例 1 一个均匀带电圆盘，带电量为 Q，半径为 R，求其轴线上距圆盘中心 z 处的电场强度。

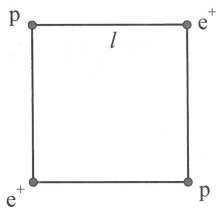
解析 将圆盘分为面积为 $2\pi r\,dr$ 的小环，每个小环在 z 处的电势为 $d\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{\sqrt{r^2+z^2}}$，其中 $dq=Q\cdot\frac{2\pi r\,dr}{\pi R^2}$，于是

$$\varphi=\int_0^R\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q\cdot 2\pi r\,dr}{\pi R^2\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot 2(\sqrt{R^2+z^2}-z)$$

根据场强与电势的关系

$$E_z=-\frac{d\varphi}{dz}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\cdot\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

例 2 将两个质子和两个正电子分别固定在一边长为 l 的正方形的四个顶点，其分布如图所示。现同时释放这四个粒子，估算四个粒子相距甚远时，各自速度的大小。已知质子质量 m_p 约为电子质量（正电子质量）m_e 的 1860 倍。



例 2 图

解析 当两个质子和两个正电子分别固定在一边长为 l 的正方形的四个顶点上时，系统的相互作用势能为 $4k\frac{e^2}{l}+2k\frac{e^2}{\sqrt{2}l}$。由于正电子质量远小于质子质量，近似地，可以认为当正电子跑得足够远时，质子还基本保持原位，这样近似有

$$4k\frac{e^2}{l}+2k\frac{e^2}{\sqrt{2}l}=2\frac{1}{2}m_e v_e^2+k\frac{e^2}{\sqrt{2}l}$$

$$v_e=\sqrt{\frac{ke^2}{m_e l}\left(4+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

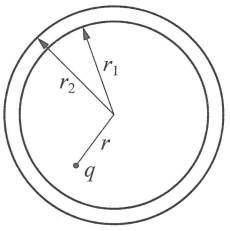
最后，两个质子分开，有

$$k\frac{e^2}{\sqrt{2}l}=2\frac{1}{2}m_p v_p^2$$

$$v_p=\sqrt{\frac{ke^2}{\sqrt{2}m_p l}}$$

例 3 如图所示，把一个点电荷 q 放置在内外半径分别为 r_1、r_2 的不带电的导体球壳内，已知 q 距球心为 r。求作用在此电荷上的电场力。导体球壳的电势为多少？

解析 电荷 q 置于壳内，壳上产生感应电荷，其中内表面电荷受 q 影响分布不均，而外表面电荷则分布均匀，对 q 作用力为零，电荷 q 的受力只与内表面感应电荷有关。



例 3 图

内表面感应电荷对 q 的作用相当于球外的一电荷 q'，距球壳中心为 r'，可得到

$$r'=\frac{r_1^2}{r}$$

像电荷与内表面感应电荷电荷量之比为

$$\frac{q'}{-q}=\frac{r'}{r_1}=\frac{r_1}{r},\ q'=-\frac{r_1}{r}q$$

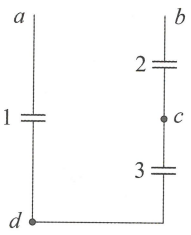
则内部感应电荷对电荷 q 的作用力等于 q' 对 q 的作用力

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-\frac{r_1}{r}q\cdot q}{(r'-r)^2}=\frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{r_1 r}{(r_1^2-r^2)^2}$$

导体球外表面电荷量为 q，分布均匀，故导体球壳电势为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r_2}$$

例 4 三个完全相同的电容器相接，如图所示。已知电容器 1 带电荷量为 Q，上板带正电，电容器 2、3 原来不带电。



例 4 图

(1) 用导线将 a、b 相连，求电容器 2 的上、下板带电荷量及符号。

(2) 然后断开 a、b，将 a、c 相连；再断开 a、c，将 a、b 相连。求这时电容器 2 的上、下板所带电荷量及其符号。

(3) 在(2)情况下，将 a、d 相连，再求电容器 2 的上、下板所带电荷量及其符号。

解析 (1) a、b 相连后，设电容器 1、2、3 的电量分别为 q_1、q_2、q_3，且上板都带正电，由 ad 与 bd 电压相等 $U_{ad}=U_{bd}$ 及电容公式 $C=\frac{Q}{U}$ 得

$$\frac{q_1}{C}=\frac{q_2}{C}+\frac{q_3}{C},\text{即 } q_1=q_2+q_3$$

由电荷守恒定律

$$Q=q_1+q_2,\ q_2=q_3$$

解得

$$q_1=\frac{2}{3}Q,\ q_2=q_3=\frac{1}{3}Q$$

q_2 为正值，假设成立，故电容器 2 上板带正电。

(2) 断开 a、b 后，各电容器的电荷量不变。a、c 连接前后电容器 2 的电荷量不变，为 $q_2=\frac{1}{3}Q$。a、c 连接后，电容器 1、3 并联，由于电容相等，因此电荷量也相等，为 $q=\frac{1}{2}(q_1+q_3)=\frac{1}{2}Q$。断开 a、c，再连接 a、b，设电容器 1、2、3 带电量分别为 q_1'、q_2'、q_3'，仍设上板带正电，由电荷量守恒得

$$q_1'+q_2'=q_1+q_2，所以\ q_1'+q_2'=\frac{5}{6}Q \tag{①}$$

$$-q_2+q_3=-q_2'+q_3'，所以\ -q_2'+q_3'=\frac{1}{6}Q \tag{②}$$

又

$$\frac{q_1'}{C}=\frac{q_2'}{C}+\frac{q_3'}{C} \tag{③}$$

联立①②③式，解得 $q_1'=\frac{11}{18}Q$，$q_2'=\frac{2}{9}Q$，$q_3'=\frac{7}{18}Q$

(3) 在(2)情况下，再将 a、d 相连，电容器 1 不带电，设电容器 2、3 带电量分别为 q_2''、q_3''，则

$$q_2''=q_3''=\frac{1}{2}(q_3'-q_2')=\frac{Q}{12}$$

故电容器 2 的上板带负电，下板带正电，电荷量为 $\frac{Q}{12}$。

例 5 一个带电量为 q 的导体球，半径为 R，球外距球心 b 处有一带电量也为 q 的点电荷。当 b 取何值时导体球与点电荷的相互作用力为 0，即系统可处于平衡态？

解析 利用电像法可将导体球表面电荷等效为一个位于 r' 处的像电荷 q'，与一个位于球心处的像电荷 $q-q'$。其中

$$q'=-\frac{qR}{b}$$

$$r'=\frac{R^2}{b}$$

为使合力为 0，需满足

$$\frac{q'}{\left(b-\frac{R^2}{b}\right)^2}=\frac{q+q'}{b^2}$$

令 $x=\frac{R}{b}$，方程可简化为

$$x=(1+x^3)(1-x)^2$$

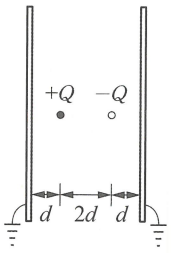
再因式分解为

$$(1-x-x^2)(1+x-x^3)=0$$

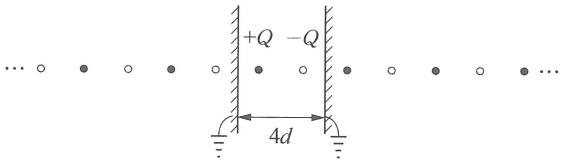
在 $0<x<1$ 内有唯一解 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

所以 $b=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}R=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}R$

例 6 两块接地的无限大平行导体板相距 $4d$，其间置有两个点电荷 $+Q$ 和 $-Q$，分别与其中一块板相距 d 和 $3d$，如图 1 所示。试求：



例 6 图 1



例 6 图 2

(1) 把两点电荷取出并分离到相距无限远过程中外力做的功；

(2) 原来位置每个点电荷所受力的大小和方向；

(3) 原来位置两点电荷对每块板总作用力的大小和方向；

(4) 原来位置每块板受到总作用力的大小和方向；

(5) 原来位置每块板上感应电荷量；

(6) 移走点电荷 $-Q$ 后，每块板上感应电荷量。

提示：$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\ln 2$，$1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$。

解析 (1) 两板间的电场是由两个实电荷和两导体板上的感应电荷共同激发形成，而导体板上的感应电荷可用像电荷等效。两点电荷在两板上共有无穷多个像电荷。用图 2 示意。

容易看出，这一系列像电荷为正负电荷相间排列，且相邻正负电荷间隔均为 $2d$。

在 $+Q$ 实电荷处，由 $-Q$ 实电荷和全体像电荷产生的电势为

$$U_+=2\cdot k\frac{-Q}{2d}+2\cdot k\frac{Q}{4d}+2\cdot k\frac{-Q}{6d}+\cdots$$

$$=\frac{-kQ}{d}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=-\frac{kQ}{d}\ln 2$$

同理，在 $-Q$ 实电荷处，由 Q 实电荷和全体像电荷产生的电势为

$$U_-=\frac{kQ}{d}\ln 2$$

系统互能为

$$W_{互}=\frac{1}{2}[QU_{+}+(-Q)U_{-}]$$

由功能关系得，外力做的总功为

$$A=-W_{互}=-\frac{1}{2}[QU_{+}+(-Q)U_{-}]=\frac{kQ^{2}}{d}\ln 2$$

(2) 根据实电荷、像电荷的排列示意图 2，相对实电荷 Q（或相对实电荷 $-Q$）两侧电荷分布具有对称性，所以，$+Q$ 和 $-Q$ 实电荷受力均为零。

(3) 设向右为正方向。实电荷 $+Q$ 对右极板上感应电荷的作用力，等效地用对右极板像电荷的作用力计算：

$$F_{右+}=k\frac{Q^{2}}{(4d)^{2}}-k\frac{Q^{2}}{(6d)^{2}}+k\frac{Q^{2}}{(8d)^{2}}-\cdots=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left(\frac{1}{2^{2}}-\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}-\cdots\right)$$

$$=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left[1-\left(1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\frac{1}{4^{2}}+\cdots\right)\right]=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left(1-\frac{\pi^{2}}{12}\right)$$

同理计算实电荷 $-Q$ 对右极板的作用力

$$F_{右-}=-k\frac{Q^{2}}{(2d)^{2}}+k\frac{Q^{2}}{(4d)^{2}}-k\frac{Q^{2}}{(6d)^{2}}+\cdots$$

$$=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left(1-\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}-\cdots\right)=-\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\cdot\frac{\pi^{2}}{12}$$

两实电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 对右极板的总作用力

$$F_{右}=F_{右+}+F_{右-}=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left(1-\frac{\pi^{2}}{6}\right)=\frac{kQ^{2}}{24d^{2}}(6-\pi^{2})$$

用同样方法解得两实电荷 $+Q$ 和 $-Q$ 对左极板的作用力

$$F_{左+}=\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\cdot\frac{\pi^{2}}{12}$$

$$F_{左-}=-\frac{kQ^{2}}{4d^{2}}\left(1-\frac{\pi^{2}}{12}\right)$$

$$F_{左}=F_{左+}+F_{左-}=\frac{kQ^{2}}{24d^{2}}(\pi^{2}-6)$$

从 $F_{右}<0$、$F_{左}>0$ 可知，两实电荷对极板的作用力均为引力。

(4) 设左极板左侧像电荷从右向左数分别为 1，2，3，…，受到实电荷 $+Q$、$-Q$ 和右极板右侧全部像电荷的作用力分别为 f_1，f_2，f_3，…，则

$$f_1=k\frac{Q^2}{(2d)^2}-k\frac{Q^2}{(4d)^2}+k\frac{Q^2}{(6d)^2}-\cdots=k\frac{Q^2}{4d^2}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots\right)$$

$$f_2=-k\frac{Q^2}{(4d)^2}+k\frac{Q^2}{(6d)^2}-k\frac{Q^2}{(8d)^2}+\cdots=k\frac{Q^2}{4d^2}\left(-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\right)$$

$$f_3=k\frac{Q^2}{4d^2}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\right)$$

左极板受到的总作用力为

$$f_{左}=f_1+f_2+f_3+\cdots=\frac{kQ^2}{4d^2}\left(1-\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}-\frac{4}{4^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{kQ^2}{4d^2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\right)=\frac{kQ^2}{4d^2}\ln 2$$

同样对右极板有

$$f'_1=-k\frac{Q^2}{(2d)^2}+k\frac{Q^2}{(4d)^2}-k\frac{Q^2}{(6d)^2}+\cdots=-f_1$$

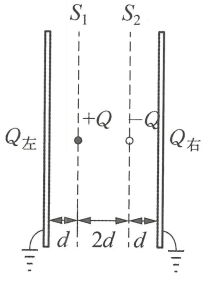
$$f'_2=+k\frac{Q^2}{(4d)^2}-k\frac{Q^2}{(6d)^2}+k\frac{Q^2}{(8d)^2}-\cdots=-f_2$$

右极板受到的总作用力为

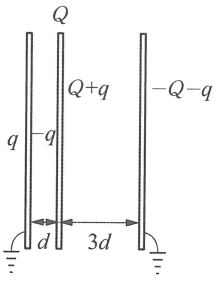
$$f_{右}=f'_1+f'_2+\cdots=-\frac{kQ^2}{4d^2}\ln 2$$

(5) 如图 3 所示，设左、右极板上的感应电荷量分别为 $Q_{左}$、$Q_{右}$。由对称性分析可知，两板中间位置电势为零，设想为电势为零的等大导体平面，则该平面左右两侧的电量分别等于 $Q_{左}$、$Q_{右}$。由电场线观点可知左极板带电量 $Q_{左}=-\frac{1}{2}Q$，右极板带电量为 $Q_{右}=\frac{1}{2}Q$。

(6) 移走 $-Q$ 后，与(5)的分析类似，过 $+Q$ 处的平行平面为等势面，设想为等大导体平面，利用静电感应和电荷守恒，标出各板带电量，如图 4 所示，有



例 6 图 3



例 6 图 4

$$-q\cdot d-(Q+q)\cdot 3d=0$$

解得左、右极板带电量分别为

$$Q'_{左}=q=-\frac{3}{4}Q$$

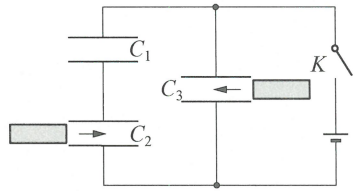
$$Q'_{右}=-(Q+q)=-\frac{1}{4}Q$$

例 7 如图所示，C_1、C_2、C_3 是三个电容量均为 C_0 的完全相同的平行板电容器，电源电动势为 U。

(1) 接通电源，求三个电容器贮能之比；

(2) 接通电源，在 C_2、C_3 中充满介电常数为 ε 的电介质，求三个电容器贮能之比；

(3) 在(2)的基础上，断开电源，然后将 C_2、C_3 中电介质取走，求总能量的改变；



例 7 图

(4) 在电介质尚未引入 C_2、C_3 两板间的情况下，先接通电源足够长时间，然后再断开电源；最后使 C_2 与 C_3 的两极板间均被电介质充满，求三电容器贮能之比。

解析 (1) C_1、C_2 两电容器串联后和电容器 C_3 并联，故

$$U_1=U_2=\frac{1}{2}U,\ U_3=U$$

则
$$E_1:E_2:E_3=U_1^2:U_2^2:U_3^2=1:1:4$$

(2) 由题意得
$$C_2=C_3=\varepsilon C_0$$

而
$$Q_3=C_0\varepsilon U$$

另有
$$\frac{Q_1}{C_1}+\frac{Q_2}{C_2}=U,\text{且 } Q_1=Q_2$$

得
$$Q_1=Q_2=\frac{C_0\varepsilon U}{1+\varepsilon}$$

故
$$E_1:E_2:E_3=\frac{Q_1^2}{2C_1}:\frac{Q_2^2}{2C_2}:\frac{Q_3^2}{2C_3}=\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}:\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}:1$$

(3) 将电介质取走后，设电容器 C_3 的带电荷量为 Q'_3，C_1、C_2 的带电荷量分别为 Q'_1、Q'_2，且都为上正下负，则

$$\frac{Q'_1}{C_0}+\frac{Q'_2}{C_0}=\frac{Q'_3}{C_0}$$

$$Q'_2-Q'_1=Q_2-Q_1=0$$

$$Q'_1+Q'_3=Q_1+Q_3=\frac{C_0\varepsilon U}{1+\varepsilon}+C_0\varepsilon U$$

解得
$$Q'_1=Q'_2=\frac{2+\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}C_0\varepsilon U,\ Q'_3=\frac{4+2\varepsilon}{3(1+\varepsilon)}C_0\varepsilon U$$

总能量的改变量为

$$\Delta W=\frac{Q_1'^2}{2C_0}+\frac{Q_2'^2}{2C_0}+\frac{Q_3'^2}{2C_0}-\frac{Q_1^2}{2C_0}-\frac{Q_2^2}{2C_0\varepsilon}-\frac{Q_3^2}{2C_0\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon\frac{(2+\varepsilon)(\varepsilon-1)2\varepsilon+3}{3(1+\varepsilon)^2}C_0U^2$$

(4) 设最后 C_1、C_2、C_3 三电容器的带电荷量分别为 Q_1''、Q_2''、Q_3''，则

$$\frac{Q_1''}{C_0}+\frac{Q_2''}{C_0\varepsilon}=\frac{Q_3''}{C_0\varepsilon}$$

$$Q_1''-Q_2''=Q_1-Q_2=0$$

由此得 $$Q_3''=(1+\varepsilon)Q_1'',\ Q_2''=Q_1''$$

可得 $$W_1'':W_2'':W_3''=\varepsilon:1:(1+\varepsilon)^2$$

例 8 已知真空中电场的能量密度为 $\sigma=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$，试求：

(1) 均匀带电球面(电荷量为 $+Q$，半径为 R)上的电场强度。

(2) 带电球面上的表面张力系数 α。

解析 根据对称性 E_R 应沿径向向外，设带电球面缓缓地向外膨胀，半径由 R 变为 $(R+\Delta R)$，则电场力对单位球面积做的功为 $E_R\sigma\Delta R$，对整个球面做的功为

$$\Delta A=E_R\cdot\sigma\cdot\Delta R\cdot4\pi R^2=4\pi E_R\sigma R^2\Delta R$$

球面膨胀后，R 内和 $R+\Delta R$ 外电场及能量未变，而 $R\to R+\Delta R$ 的薄球壳内的电场能发生变化，且

$$\Delta W=0-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\,4\pi R^2\Delta R=-\frac{2\pi R^2\sigma^2}{\varepsilon_0}\Delta R$$

而电场力做的功等于电势能改变加一负号，则

$$4\pi E_R\sigma R^2\Delta R=\frac{2\pi R^2\sigma^2}{\varepsilon_0}\Delta R$$

$$E_R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0R^2}$$

说明：也可以利用高斯定理和叠加原理求解。

(2) 球面膨胀后增加的表面积

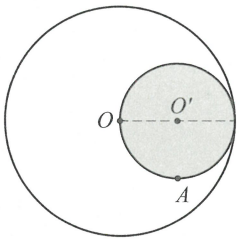
$$\Delta S=4\pi(R+\Delta R)^2-4\pi R^2=8\pi R\Delta R$$

电场力做功导致电势能减小，电势能转化为球面膨胀而增加的表面自由能。由虚功原理

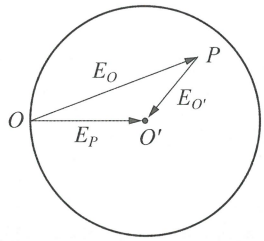
$$\frac{2\pi R^2\sigma^2}{\varepsilon_0}\Delta R = 8\pi R\Delta R\alpha$$

得
$$\alpha = \frac{R\sigma^2}{4\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{64\pi^2\varepsilon_0 R^3}$$

例 9 一个半径为 R 的球，如图 1 所示挖去半径为 $\frac{R}{2}$ 的球形空腔，此球均匀带上电荷密度为 ρ 的正电荷，空腔的中心为 O' 点，在其正下方 A 点固定一个电荷量为 $+q$、质量为 m 的小珠，设小珠与球之间无电荷量交换，并不计小珠的重量，将固定小珠无初速释放，求它运动速度的最大值。



例 9 图 1



例 9 图 2

解析 此球可看成是半径为 R、体电荷密度为 ρ 的球 O 与半径为 $\frac{R}{2}$、体电荷密度为 $-\rho$ 的球 O' 的叠加。半径为 R、体电荷密度为 ρ 的球内离球心距离为 $r(r \leqslant R)$ 任一点场强，相当于半径为 r、体电荷密度为 ρ 的球内电荷集中在球心处在该点产生的场强，如图 2 所示。

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho}{r^2} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho r$$

方向由球心指向该点，则

$$\vec{E}_P = \vec{E}_O + \vec{E}_{O'} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\overrightarrow{PO'} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{6\varepsilon_0}\rho R\hat{r}_{OO'}$$

方向由 O 指向 O'。因此，小球到达腔的最右端时速度最大，由

$$qE_P\frac{R}{2} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

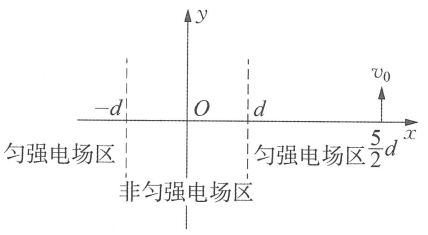
得
$$v_{\max} = R\sqrt{\frac{\rho q}{6m\varepsilon_0}}$$

例 10 如图 1 所示，在 $x > 0$ 的空间各点，存在沿 x 轴正方向的电场，其中在 $x \leqslant d$ 的区域中，电场是非匀强电场，场强 $E = bx$，$b > 0$，为已知常量；在 $x \geqslant d$ 的区域中，电场是匀强电场，场强为 $E = bd$。在 $x < 0$ 的区域中的各点，电场分布与 $x > 0$ 的空间中的分布对称，场强的方向

都沿 x 轴的负方向。一电子，其电荷为 e，质量为 m，在 $x=\frac{5}{2}d$ 处以沿 y 轴正方向的初速度 v_0 开始运动。求：

(1) 电子的 x 方向分运动的周期；

(2) 电子运动的轨迹与 y 轴的任意两个相邻交点间的距离。



例 10 图 1

解析 (1) 先研究电子在 x 方向的分运动，电子沿 x 方向运动的初速度为 0，在电场力的作用下开始向负 x 方向做加速运动。

① 在 $d\leqslant x\leqslant\frac{5}{2}d$ 区域内电子受到负 x 方向的力的大小为

$$F=ebd$$

电子的加速度的大小为

$$a_1=\frac{ebd}{m}$$

设电子由 $\frac{5}{2}d$ 到 d 处需要时间为 t_1，则有

$$\frac{5}{2}d-d=\frac{1}{2}a_1t_1^2$$

得

$$t_1=\sqrt{\frac{3m}{eb}}$$

② 在 $-d\leqslant x\leqslant d$ 区域内，电子受力

$$F=-eE=-ebx=-kx$$

其中 $k=eb$，在此区域内电子的 x 方向分运动是简谐运动，运动的角频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{eb}{m}}$$

在 x 方向上，电子运动的平衡位置在 $x=0$ 处。在 $x=d$ 处时，电子的速度为

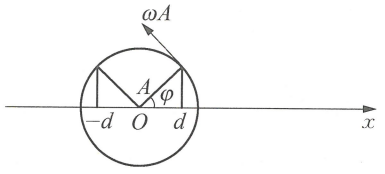
$$v=v_1=\sqrt{\frac{3eb}{m}}d=\sqrt{3}\omega d$$

方向向左。

设在半径为 A 的参考圆上，如图 2 所示，这时旋转半径与 x 轴的夹角为 φ，则由图可得

$$x=A\cos\varphi=d$$

$$v_1=-\omega A\sin\varphi=-\sqrt{3}\omega d$$



例 10 图 2

解得 $$A=2d,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$$

设电子自 $x=d$ 运动到 $x=-d$ 所需时间为 t_2，则由对称性可得

$$\omega t_2=2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\pi}{3},\ t_2=\frac{\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{eb}}$$

③ 在 $x\leqslant -d$ 区域内，电子在 x 方向上以初速度 v_1 向左做匀减速运动，到过 $x=-\frac{5}{2}d$ 处时，速度为零。这一过程经历的时间为 $t_3=t_1$。

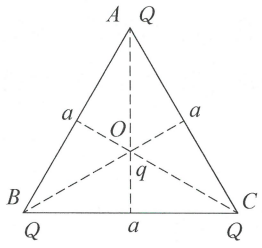
综上所述，电子在 x 方向上的分运动为在 $x=-\frac{5}{2}d$ 与 $x=\frac{5}{2}d$ 间的往复运动，其周期为

$$T=2(t_1+t_2+t_3)=\left(4\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{m}{eb}}$$

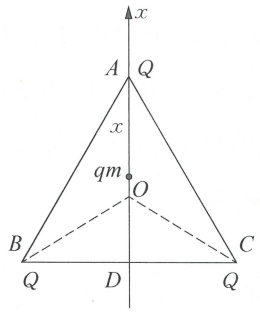
(2) 由于电子在 y 方向上做匀速直线运动，在 x 方向上做周期性运动，不难得出电子运动的轨迹与 y 轴的各个交点中，任意两相邻交点间距离 Δy 都相等，且

$$\Delta y=v_0\frac{T}{2}=\left(2\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\frac{m}{eb}}$$

例 11 如图 1 所示，在边长为 a 的正三角形三个顶点 A、B、C 处分别固定电荷量为 $+Q$ 的点电荷，在其三条中线的交点 O 上放置一个质量为 m、电荷量为 $+q$ 的带电质点，O 点显然为带电质点的平衡位置，设该质点沿某一中线稍稍偏离平衡位置，试证它将做简谐振动，并求其振动周期。



例 11 图 1



例 11 图 2

解析 如图 2 所示，以 O 为坐标原点在中线 AOD 上设置 x 轴，考察 $(q,\ m)$ 沿 x 轴的小位移运动。设偏移量为 x，A 处 Q 对其作用力为 F_{x1}，B、C 两处两个 Q 对其合作用力记为 F_{x2}，这些力取正时朝 x 轴正方向，取负时朝 x 轴负方向。记

$$r=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\frac{\sqrt{3}}{3}a,\ h=\overline{OD}=\frac{\sqrt{3}}{6}a$$

则有 $$F_{x1}=-\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq}{(r-x)^2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{-2}$$

因 $\frac{|x|}{r}\ll 1$，故有 $F_{x1}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\left(1+\frac{2x}{r}\right)=-\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}\left(1+\frac{6x}{\sqrt{3}a}\right)$

可得 $$F_{x2}=\frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{a^2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2a}x\right)$$

因此$(q,\ m)$所受合力为

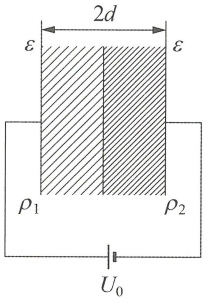
$$F_x=F_{x1}+F_{x2}=-\frac{9\sqrt{3}Qq}{8\pi\varepsilon_0 a^3}x$$

这是一个线性恢复力，故$(q,\ m)$将做简谐振动，振动角频率和周期分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{9\sqrt{3}Qq}{8\pi\varepsilon_0 a^3 m}}=\frac{3}{2a}\sqrt{\frac{\sqrt{3}Qq}{2am\pi\varepsilon_0}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi a}{3}\sqrt{\frac{2\pi m\varepsilon_0 a}{\sqrt{3}Qq}}$$

例 12 有一个板间距为 $2d$、面积为 S 的平行板电容器，中间充满厚度相同、介电常数均为 ε，电阻率分别为 ρ_1、ρ_2 的两层漏电介质。两极板与电压为 U_0 的直流电源相接，如图 1 所示。电源内阻可以忽略。稳定后，试求：



例 12 图 1

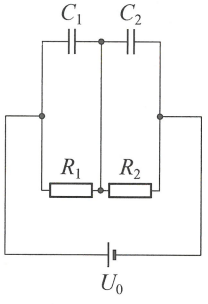
(1) 流过两层介质的电流强度；

(2) 两介质交界面堆积的自由电荷；

(3) 两介质内的电场强度。

解析 因为平行板电容器中充满的是漏电介质，说明此电容器有电流通过，表现出电阻的特性，所以，我们可以把它等效成电阻与电容器的并联。

对于两层漏电介质来说，图 1 可简化成图 2 所示的等效电路，其中每个等效元件的电阻和电容分别为



例 12 图 2

$$R_1=\frac{\rho_1 d}{S},\ R_2=\frac{\rho_2 d}{S},\ C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}=C_2$$

(1) 电路稳定以后，流过电阻 R_1 和 R_2 的电流相等，其值为

$$I=\frac{U_0}{R_1+R_2}=\frac{U_0}{\frac{\rho_1 d}{S}+\frac{\rho_2 d}{S}}=\frac{SU_0}{(\rho_1+\rho_2)d}$$

(2) 稳定时，电容器 C_1、C_2 上电压分别与 R_1、R_2 两端的电压 U_1 和 U_2 相等，则

$$U_1 = IR_1 = \frac{SU_0}{(\rho_1+\rho_2)d}\cdot\rho_1\frac{d}{S} = \frac{\rho_1 U_0}{\rho_1+\rho_2}$$

$$U_2 = IR_2 = \frac{SU_0}{(\rho_1+\rho_2)d}\cdot\rho_2\frac{d}{S} = \frac{\rho_2 U_0}{\rho_1+\rho_2}$$

两电容器所带的电荷量为

$$Q_1 = C_1U_1 = \frac{\varepsilon S}{4\pi kd}\cdot\frac{\rho_1 U_0}{\rho_1+\rho_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho_1 SU_0}{d(\rho_1+\rho_2)}$$

$$Q_2 = C_2U_2 = \frac{\varepsilon S}{4\pi kd}\cdot\frac{\rho_2 U_0}{\rho_1+\rho_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho_2 SU_0}{d(\rho_1+\rho_2)}$$

由于 Q_1、Q_2 不相等，它们的差即为两层介质交界面上堆积的电荷，即

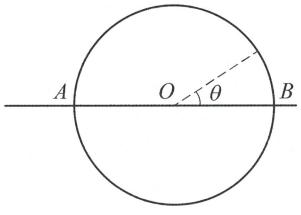
$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon SU_0(\rho_2-\rho_1)}{d(\rho_2+\rho_1)}$$

(3) 两层介质内的电场强度分别为

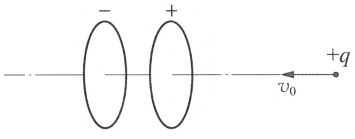
$$E_1 = \frac{U_1}{d} = \frac{\rho_1 U_0}{(\rho_1+\rho_2)d},\quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{\rho_2 U_0}{(\rho_1+\rho_2)d}$$

练习题

1 如图所示带电量为 Q，半径为 R 的带电圆环，如果要使其在直径 AB 上无电场，则环上的电荷要怎么分布？此时直径 AB 上的电势为多大？



第 1 题图



第 2 题图

2 两个固定的相同金属环相距某一距离，同轴放置，如图所示，两环带异种等量电荷。远离环处有一个带正电粒子(重力不计)，沿着通过两环中心并且垂直于环面的直线飞向环。为了飞过两环，粒子应该具有的最小初速度为 v_0。如果两环所带电荷的种类不变，而电量减少为原来的 $\frac{1}{n}$ 时，粒子在无穷远处的速度仍为 v_0，求粒子在飞过两环过程中最大速度和最小速度之比。

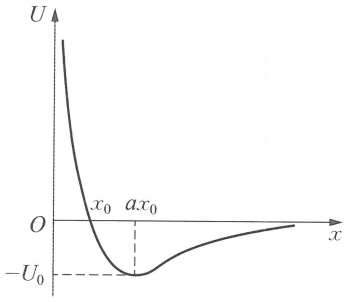
3 两个点电荷位于 x 轴上，在它们形成的电场中，若取无限远处的电势为零，则在正 x 轴上各点的电势如图中曲线所示，当 $x\to 0$ 时，电势 $U\to\infty$；当 $x\to\infty$ 时，电势 $U\to 0$。电势为零的点的

坐标为 x_0，电势为极小值 $-U_0$ 的点的坐标为 $ax_0(a>2)$。试根据图线提供的信息，确定这两个点电荷所带电荷的符号、电量的大小以及它们在 x 轴上的位置。

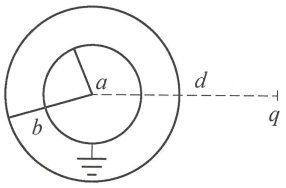
4 半径为 a 的导体球外同心放置一个半径为 b 的不带电导体薄球壳，在离球心距离为 $d(d>b)$ 处有一个带电量为 q 的固定点电荷。现让内导体球接地，如图所示，静电平衡后，试求：

(1) 内导体球上电荷量；

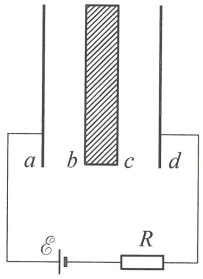
(2) 外导体球壳电势。



第 3 题图



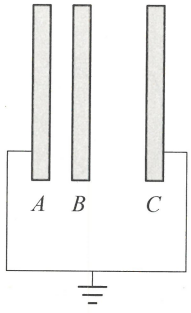
第 4 题图



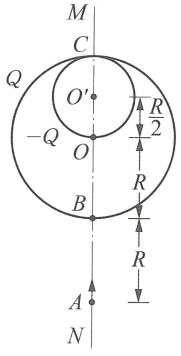
第 5 题图

5 如图所示，a、d 为一平行板电容器的两个极板，bc 是一块长宽都与 a 板相同的厚导体板，平行地插在 a、d 之间，导体板的厚度 $bc=ab=cd$。极板 a、d 与内阻可忽略的电动势为 E 的蓄电池以及电阻 R 相连，如图所示。已知在没有导体板 bc 时电容器 ad 的电容为 C。现将导体板 bc 抽走，设抽走过程中所做的功为 A，求这过程中电阻 R 上消耗的电能。

6 如图所示，三块平面金属板 A、B、C 彼此平行放置，A、B 之间的距离是 B、C 之间距离的一半。A、C 连接后接地，使中间导体板 B 带电 $+18\ \mu C$ 电量，则 A、B、C 三导体的六个表面上的电荷各为多少？



第 6 题图



第 7 题图

7 如图所示，两个固定的均匀带电球面，所带电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$，半径分别为 R 和 $\frac{R}{2}$，小球面与大球面内切于 C 点，两球面球心 O 和 O' 连线 MN 沿铅垂方向。在 MN 与两球面的交点 B、O 和 C 处各开有足够小的孔，因小孔损失的电荷量忽略不计。有一质量为 m、带电量为 $+q$ 的质点自 MN 线上与 B 点距离为 R 的 A 点竖直上抛。设静电力常量为 k，重力加速度为 g。

(1) 要使质点从 A 点上抛后能到达 B 点，所需的最小初动能为多少？

(2) 要使质点从 A 点上抛后能到达 O 点，在不同条件下所需的最小初动能各为多少？

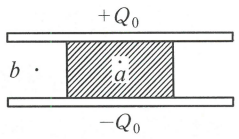
8 一个均匀带电球壳上电荷面密度为 σ，试求：

(1) 单位面积球壳受到的静电力 f_0；

(2) 带电球壳外侧紧邻处静电场能量密度 w_e；

(3) 带电球壳表面因带电新增表面张力系数。

9 有一空气平行板电容器，极板面积为 S，与电池连接，极板上充有电荷 $+Q_0$ 和 $-Q_0$，断开电源后，保持两板间距离不变，在极板中部占极板间的一半体积的空间填满(相对)介电常数为 ε 的电介质，如图所示。求：



第 9 题图

(1) 图中极板间 a 点的电场强度 E_a；

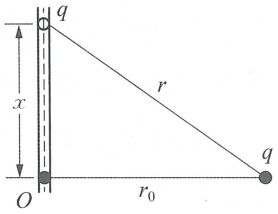
(2) 图中极板间 b 点的电场强度 E_b；

(3) 图中与电介质接触的那部分正极板上的电荷 Q_1；

(4) 图中与空气接触的那部分正极板上的电荷 Q_2；

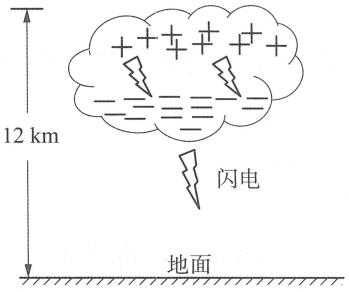
(5) 图中与正极板相接触的那部分介质界面上的极化电荷 Q_1'。

10 一质量为 m、带电量为 q 的粒子，能够在一竖直的细管内无摩擦地上下运动。在与管中心 O 水平距离为 r_0 处有另一点电荷 q，如图所示。假定由于重力与库仑力的平衡，致使粒子静态稳定点的位置在 $x=x_0$ 处，试求当粒子在稳定点附近做微小振动时的振动频率。



第 10 题图

11 闪电通常由雷电云(离地 6～12 km)放电产生，多数闪电发生在云内，少数到达地面。由于云内冰状颗粒相互碰撞，小颗粒冰晶带正电，随气流上浮到云上端；较大颗粒带负电，下坠到云底端，如图所示。云中闪电中和了云内的正负电荷，而云地闪电则把负电荷释放到地面。



雷电云的电荷分布

第 11 题图

(1) 利用高空气球携带的电场测量仪测量高空中某圆柱形空域雷电云内的电场，其强度可视为均匀分布，大小为 0.15 MV/m。该圆柱区域的中轴线垂直于地面，半径为 2.5 km，高度为 1.0 km。求该区域上下两端的电势差、正电荷总量以及携带的总电能。已知真空介电常量 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ F/m。(提示：可以把圆柱形空域视为极板平行于地面的平行板电容器)

(2) 在起电过程中，雷电云上下两端电荷会随时间指数增加。当地表电场大于 1.0 kV/m 时，就会发生云地闪电，因此地表电场很少超过 10 kV/m。假定(1)中所述的雷电云从高空缓慢整体下移，直至其负电荷层离地高度为 6.0 km 时暂时保持稳定，地面为良导体，试估算此雷电云正下方产生的地表电场强度。



第 13 章 直流电路和物质的导电性



知识要点和基本方法

一 电路的基本概念和规律

1. 电动势

对于闭合回路来说，单靠静电力是无法维持稳恒电流的。充有电荷的电容器两极板外部用导线接通后，导线中立即产生电流，并且电流会越来越小，直至为零。要想维持稳恒电流，必须把从正极板经外电路迁移到负极板的正电荷又输运到正极板，而静电力恰恰阻碍这种输运，必须有一种非静电力克服静电力的阻碍作用，把正电荷从负极输运到正极。在稳恒电路中，把提供这种非静电力的装置称为电源。

非静电力把单位正电荷从电源负极经电源内部移到正极所做的功，称为电源的电动势。电动势反映电源内非静电力做功的本领，即电源把其他形式的能转化为电能的本领。电动势和内阻都是表征电源本身的特征量，与外电路的性质以及是否接通都没有关系。

电动势定义为电源内单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时，非静电力所做的功，其表达式为

$$\mathscr{E}=\int_{-}^{+}\vec{E}_K\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

式中，$\vec{E}_K$ 为单位正电荷反受到的“非静电力”，又称作“非静电性场强”，即

$$\vec{E}_K=\frac{\vec{f}_{非}}{q}$$

特别注意，电源的非静电场通常分布在电源内部的电极附近。

2. 电流的微观表达式

设导体的横截面积为 S，导体每单位体积内的自由电荷数为 n，每个电荷的电荷量为 e，电荷的定向移动速率为 v，则由电流定义式 $I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ 得电流的微观表达式 $I=nevS$。由于电子的定向迁移速率非常小，和无规则热运动速率相差近亿倍。因此，在交变电流中，导线中的电荷整体看来虽然是往复地移动着，但就单个电子而言，它仍在做无规则的运动，而不是随电流方向简单地做往复运动。

3. 电阻定律

导体的电阻 R 跟它的长度 L、电阻率 ρ 成正比，跟它的横截面积 S 成反比，这个规律叫做电阻定律，公式为 $R=\frac{\rho L}{S}$。其中 ρ 是制成电阻的材料的电阻率，L 是绕制成电阻的导线长度，S

是绕制成电阻的导线的横截面积。

电阻率 ρ 不仅和导体的材料有关，还和导体的温度有关。在温度变化不大的范围内，几乎所有金属的电阻率都随温度做线性变化，即 $\rho=\rho_0(1+at)$。式中 t 是摄氏温度，ρ_0 是 0℃ 时的电阻率，a 是电阻率的温度系数。

4. 电流密度

通过导体截面的电流与导体的横截面面积的比值叫电流密度。电流密度大小

$$j=\frac{I}{S_\perp}=\frac{U}{RS_\perp}=\frac{ELS_\perp}{\rho LS_\perp}=\frac{1}{\rho}E=\sigma E$$

方向与电场方向相同，式中 σ 叫电导率，E 为电场强度。

5. 一段含源电路的欧姆定律

一段含源电路中任意两点间的电势差等于连接这两点的支路上各电路元件上电势降落的代数和，这个结论叫一段含源电路的欧姆定律，即

$$U=\sum IR-\sum \mathscr{E}$$

其中电势降落的正、负符号规定如下：

(1) 当从电路中的一点到另一点的走向确定后，如果支路上的电流流向和走向一致，该支路电阻元件上的电势降取正号，反之取负号；

(2) 支路上电源电动势的方向和走向一致时，电动势为正值，电源的电动势降为电源电动势的负值(电源内阻视为串联电阻)，反之取正值。

如图 13-1 所示，为一段含源电路，由一段含源电路的欧姆定律可求得

$$U_{AB}=I_1R_1-\mathscr{E}_1+I_1r_1+\mathscr{E}_2-I_2r_2-I_2R_2-\mathscr{E}_3-I_2r_3$$

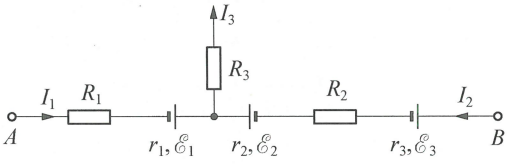


图 13-1

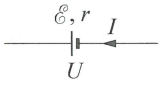


图 13-2

如果所研究的支路中只有一个电源，如图 13-2 所示，则电源两端的电压 $U=\mathscr{E}-Ir$，U、$\mathscr{E}$、I、r 分别表示电源的路端电压、电源电动势、通过电源内部的电流和电源内阻。特别注意，I 是所有电路元件引起的通过电源的总电流，电流的正方向与电动势方向一致。

6. 基尔霍夫定律

所谓解一个比较复杂的电路，就是要求出各条支路的电流。基尔霍夫定律是求解复杂电路的有效方法。

(1) 基尔霍夫第一定律：对于电路中任何一个节点，流入节点的总电流等于流出节点的总

电流。如果规定流入的电流为负，流出的电流为正，则对任何一个节点都有 $\sum I=0$。

如果一个电路总共有 n 个节点，则可以对 $n-1$ 个节点列出电流方程。如果对 n 个节点都列出电流方程，则一定有一个电流方程是和其他 $n-1$ 个电流方程等价的。

(2) 基尔霍夫第二定律：对电路中任何一个回路，绕着回路走一圈，电势的变化等于零。顺着电流 I 走过电阻 R，电势降落 IR，反之则升高 IR（电阻包括电源的内阻）。从电源 $\mathscr{E}$ 的负极走到正极，电势升高 $\mathscr{E}$，反之则降低 $\mathscr{E}$。

我们选来列方程的回路，其中必须有一段电路是没有用过的，否则列出的方程无效。

二 电路的等效变换

1. 等势点拆并法

在一个复杂的电路中，如果能找到一些完全对称的点（以电源两端连线为对称轴），那么对称点一定等势，可以将接在两个等势点间的支路去掉，也可以用导线将两个等势点连起来，不影响电路的等效性。

2. 电流分布法

假设电流 I 从网络 A 端流入，B 端流出，如图 13-3 所示。运用电流的分流思想和网络中两点间任意路径等电压的原理，利用电路欧姆定律列出方程组，解出各电流与 I 的比例关系，然后选取 A 到 B 的某一路径计算出 A、B 间的电压 U_{AB}，再由电阻定义 $R_{AB}=\dfrac{U_{AB}}{I}$ 可求出 R_{AB}。

10 根电阻均为 r 的电阻丝连接成如图 13-3 所示的网络，求 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB}。

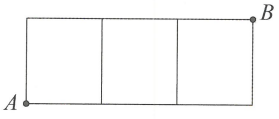


图 13-3

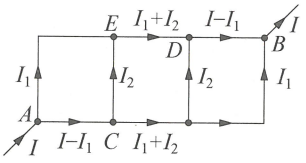


图 13-4

由电路结构的中心对称性可知，电流 I 从 A 点流入后在 A 点的电流分布应与电流 I 从 B 点流出前的电流分布相同，中间四方形上、下电流分布对称和左、右电流分布对称，如图 13-4 所示。对图中 C 点，由节点定律

$$I-I_1=I_2+(I_1+I_2)$$

解得

$$I_1+I_2=\frac{1}{2}I \qquad ①$$

由 A、E 两点间不同路线等电压的要求，得

$$I_1 \cdot 2r = (I - I_1)r + I_2 r$$

即
$$3I_1 - I_2 = I \qquad ②$$

联立①②两式得

$$I_1 = \frac{3}{8}I,\ I_2 = \frac{1}{8}I$$

对支路 $AEDB$，可得

$$U_{AB} = I_1 \cdot 2r + (I_1 + I_2)r + (I - I_1)r = \frac{15}{8}Ir$$

A、B 间等效电阻为

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{15}{8}r$$

3. 无限电路

由无限多个某种小网络元按相同的方式逐个连接而成的无限电阻网络，可采用等效法来求解网络的电阻。

例如，有一无限电阻网络如图 13－5 所示，其中每一段电阻均为 r。求 a、b 两点之间的电阻。

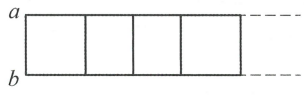


图 13－5

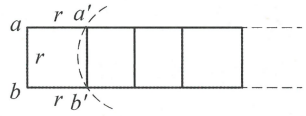


图 13－6

设 a、b 两点之间的无限网络等效电阻为 R，因为网络右边是无限的，所以左边减少一个单元不影响网络的总电阻，即 a'、b' 两点之间向右边看的无限网络电阻也为 R。a、b 两点之间的电阻为

$$R_{ab} = \frac{(R + 2r)r}{(R + 2r) + r} = \frac{(R + 2r)r}{R + 3r} = R$$

解得
$$R_{ab} = (\sqrt{3} - 1)r$$

再例如，如图 13－7 所示，是用同种细金属丝制成的单位长度电阻为 r 的近似无限多的内接等边三角形电阻网络，设 AB 边长为 a，内部的三角形边长依次减半。求 A、B 间的等效电阻。

该无限网络由无限多个三角形构成，并设 A、B 间的等效电阻为 R_x。三角形 CDE（连同其内部的所有三角形）和原电路是相似的，只是每边长度减小一半，因此 C、D 间的等效电阻为 $\frac{1}{2}R_x$，设 AB 边的电阻为 R，则此无限网络的等效电路如图 13－8 所示，因此有

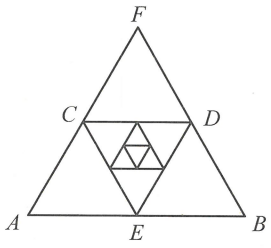


图 13－7

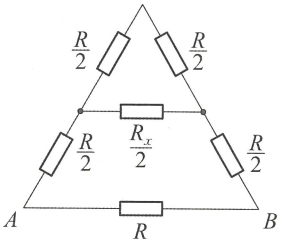


图 13－8

$$R_x = R\left(R + \frac{R\dfrac{R_x}{2}}{R + \dfrac{R_x}{2}}\right) \cdot \left(R + R + \frac{R\dfrac{R_x}{2}}{R + \dfrac{R_x}{2}}\right)^{-1}$$

解得

$$R_{AB} = R_x = \frac{\sqrt{7}-1}{3}R = \frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)a_r$$

4. 等效电压源定理(戴维宁定理)

任何一个线性二端有源网络，就其两个端点来说，总可以用一个理想电压源(恒定电压源)串联一个电阻来代替。电压源的电压 $\mathscr{E}_0$(等效电动势)等于被换网络开路时的路端电压，其串联电阻 r_0(等效内阻)等于被换网络中所有电源短路而保留其内阻时所得网络的等效电阻。如图 13－9 所示。

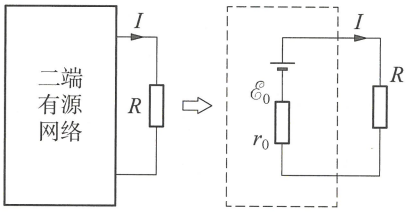


图 13－9

特别注意：(1)等效电压源定理只适用于计算二端网络外部的电压和电流，不适用于计算网络内部的电压和电流。(2)等效电压源定理只适用于线性的二端有源网络。如果二端有源网络中含有非线性元件时，则不能应用该定理求解。

5. 等效电流源定理(诺顿定理)

任何一个线性二端有源网络，就其两个端点来说，总可以用一个理想电流源(恒定电流源)并联一个电阻来代替。电流源的电流 I_0 等于被换网络短路时的输出电流，其并联电阻 r_0 等于被换网络中所有电源短路而保留其内阻时所得网络的等效电阻。如图 13－10 所示。

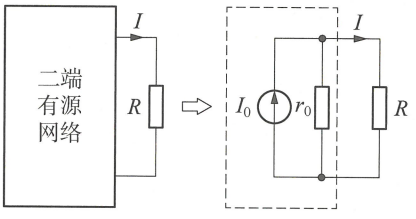


图 13－10

特别注意：(1)等效电流源定理只适用于计算二端网络外部的电压和电流，不适用于计算网络内部的电压和电流。(2)等效电流源定理只适用于线性的二端有源网络。如果二端有源网络中含有非线性元件，则不能应用该定理求解。

一个实际电源(电动势为 $\mathscr{E}_0$，内阻为 r_0)，既可以看作电压源，也可以看作电流源，两者是等效的。其中，电压源的电压就是实际电源的电动势 $\mathscr{E}_0$，电压源的串联电阻就是实际电源的内阻

r_0，电流源的电流就是实际电源的短路电流 $I_0\left(I_0=\dfrac{\mathscr{E}_0}{r_0}\right)$，电流源的并联电阻就是实际电源的内阻 r_0。

在图 13－11 中，已知 $\mathscr{E}_1=4\ \mathrm{V}$，$\mathscr{E}_2=6\ \mathrm{V}$，$r_1=r_2=1\ \Omega$，$R_1=1\ \Omega$，$R_2=5\ \Omega$，$R_3=3\ \Omega$，试求通过 R_3 的电流。

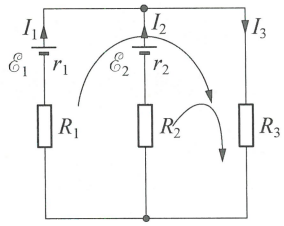


图 13－11

解法一：基尔霍夫定律。

设各支路中的电流 I_1、I_2、I_3 的方向如图 13－11 所示，取两个回路：$R_1\mathscr{E}_1R_3$ 回路和 $R_2\mathscr{E}_2R_3$ 回路，回路绕行方向如图中所示，则由基尔霍夫定律可得

$$\begin{cases}-I_1-I_2+I_3=0\\ I_1(R_1+r_1)+I_3R_3=\mathscr{E}_1\\ I_2(R_2+r_2)+I_3R_3=\mathscr{E}_2\end{cases}$$

将数据代入后，以上三式变为

$$\begin{cases}I_1+I_2=I_3\\ 2I_1+3I_3=4\\ 6I_2+3I_3=6\end{cases}$$

由以上三个方程，即可解得

$$I_1=0.5\ \mathrm{A},\ I_2=0.5\ \mathrm{A},\ I_3=1\ \mathrm{A}$$

解法二：叠加原理。

当 $\mathscr{E}_1$ 单独存在时，电路的等效电路如图 13－12 所示，由电阻串、并联关系即可求得

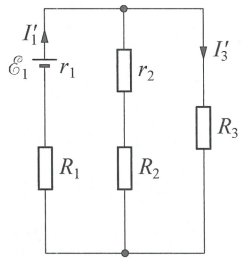


图 13－12

$$I_1'=\frac{\mathscr{E}_1}{R_1+r_1+\dfrac{R_3(R_2+r_2)}{R_3+R_2+r_2}}=\frac{4}{1+1+\dfrac{3(5+1)}{3+5+1}}=1(\mathrm{A})$$

$$I_3'=I_1'\frac{R_2+r_2}{R_3+R_2+r_2}=1\times\frac{5+1}{3+5+1}=\frac{2}{3}(\mathrm{A})$$

当 $\mathscr{E}_2$ 单独存在时，电路的等效电路如图 13－13 所示，则

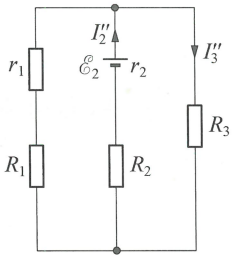


图 13－13

$$I_2''=\frac{\mathscr{E}_2}{R_2+r_2+\dfrac{R_3(R_1+r_1)}{R_3+R_1+r_1}}=\frac{6}{5+1+\dfrac{3(1+1)}{3+1+1}}=\frac{5}{6}(\mathrm{A})$$

$$I_3''=I_2''\frac{R_1+r_1}{R_3+R_1+r_1}=\frac{5}{6}\times\frac{1+1}{3+1+1}=\frac{1}{3}(\mathrm{A})$$

根据叠加原理，可得通过 R_3 的电流为

$$I_3 = I_3' + I_3'' = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1(\mathrm{A})$$

解法三：戴维宁定理。

将图 13－14 中虚线框内的网络等效为一个电压源。

当网络两端开路时，由全电路欧姆定律可求得电路中的电流为

$$I = \frac{\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1}{R_1 + R_2 + r_1 + r_2} = \frac{6-4}{1+5+1+1} = 0.25(\mathrm{A})$$

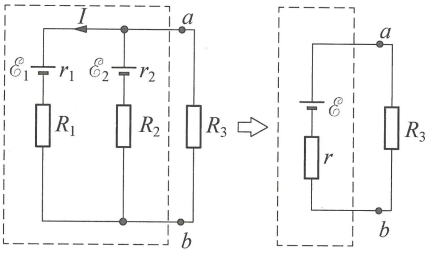


图 13－14

根据一段含源电路的欧姆定律可求得此时两端的端电压为

$$\begin{aligned} U_a - U_b &= I(R_1 + r_1) - (-\mathscr{E}_1) \\ &= 0.25 \times (1+1) + 4 = 4.5(\mathrm{V}) \end{aligned}$$

故电压源的电动势

$$\mathscr{E} = 4.5\ \mathrm{V}$$

电压源的内阻

$$r = \frac{(R_1 + r_1)(R_2 + r_2)}{R_1 + r_1 + R_2 + r_2} = \frac{(1+1) \times (5+1)}{1+1+5+1} = 1.5(\Omega)$$

于是，通过 R_3 的电流为

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}}{R_3 + r} = \frac{4.5}{1.5+3} = 1(\mathrm{A})$$

解法四：诺顿定理。

将图 13－15 中虚线框内的网络等效为一个电流源。当网络两端短路时，流经两端点 a、b 的电流为

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_1}{R_1 + r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{R_2 + r_2} = \frac{4}{1+1} + \frac{6}{5+1} = 3(\mathrm{A})$$

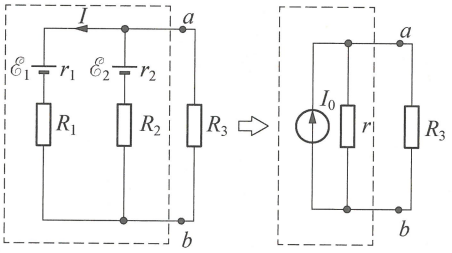


图 13－15

内阻

$$r = 1.5\ \Omega$$

于是，通过 R_3 的电流为

$$I_3 = I_0 \frac{r}{R_3 + r} = 3 \times \frac{1.5}{3+1.5} = 1(\mathrm{A})$$

6. 电源的连接

(1) 电源的串联

两个直流电源($\mathscr{E}_1$, r_1)和($\mathscr{E}_2$, r_2)的串联有顺串和反串两种方式,顺串是一个电源的正极与另一个电源的负极相连,如图 13-16 所示,其等效的电动势和内阻可表示为 $\mathscr{E}=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2$, $r=r_1+r_2$。

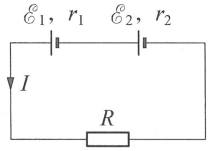


图 13-16

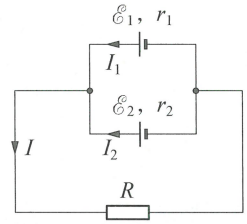


图 13-17

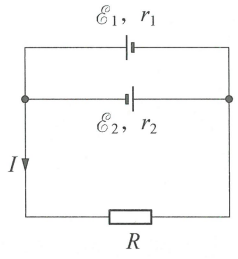


图 13-18

(2) 电源的并联

两个直流电源($\mathscr{E}_1$, r_1)和($\mathscr{E}_2$, r_2)的并联即将两电源的正极相连,负极相连,它也可等效为一个直流电源,如图 13-17 所示,其内阻与电动势 $\mathscr{E}$ 分别满足:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

$$\frac{\mathscr{E}}{r}=\frac{\mathscr{E}_1}{r_1}+\frac{\mathscr{E}_2}{r_2}$$

即

$$r=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$$

$$\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_2 r_1+\mathscr{E}_1 r_2}{r_1+r_2}$$

如果两个直流电源($\mathscr{E}_1$, r_1)和($\mathscr{E}_2$, r_2)正极、负极相连构成并联电源,如图 13-18 所示,也可等效为一个直流电源。其内阻与电动势 $\mathscr{E}$ 分别满足:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$$

$$\frac{\mathscr{E}}{r}=\frac{\mathscr{E}_1}{r_1}-\frac{\mathscr{E}_2}{r_2}$$

$\mathscr{E}$ 的正方向与 $\mathscr{E}_1$ 的方向一致。即

$$r=\frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$$

$$\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_1 r_2-\mathscr{E}_2 r_1}{r_1+r_2}$$

读者可以分别用叠加原理、戴维宁定理和诺顿定理进行推导。

7. Y-△变换

复杂电路经过Y-△变换，往往可以变成简单电路，如图13-19中的甲为Y网络，乙为△网络。

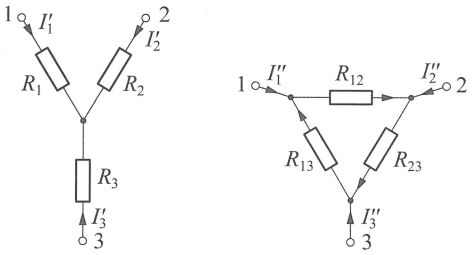


图13-19

要使Y网络和△网络可以互相替代，就要求当甲、乙两图中U_{12}、U_{13}、U_{23}完全相同时，有

$$I_1'=I_1'',\ I_2'=I_2'',\ I_3'=I_3''$$

在Y网络中，有

$$I_1'R_1-I_2'R_2=U_{12}$$
$$I_2'R_2-I_3'R_3=U_{23}$$
$$I_1'+I_2'+I_3'=0$$

可解得

$$I_1'=\frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}U_{12}-\frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}U_{13}$$

在△网络中，有

$$I_1''=\frac{U_{12}}{R_{12}}-\frac{U_{13}}{R_{13}}$$

因为要求$I_1'=I_1''$，所以

$$\frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}U_{12}-\frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}U_{13}=\frac{U_{12}}{R_{12}}-\frac{U_{13}}{R_{13}}$$

要上式总是成立，便要求U_{12}和U_{13}的系数相等，即

$$R_{12}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$$
$$R_{13}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$$

同理可得

$$R_{23}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_1}$$

由以上三式可将Y网络变成△网络而保持等效。

将以上三式中的 R_{12}、R_{13}、R_{23} 作为已知量，可解出 R_1、R_2、R_3。

$$R_1=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$

$$R_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

$$R_3=\frac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{13}}$$

由以上公式可以看出，当 Y 形连接的三电阻都相等时，与之等效的△形连接的三电阻也相等，并且等于 Y 形连接电阻的 3 倍；同样，当△形连接的三电阻都相等时，与之等效的 Y 形连接的三电阻也相等，并且等于△形连接电阻的$\frac{1}{3}$。

三 电路测量

1. 电阻的测量

测量电阻有我们熟知的伏安法（有外接和内接两种接法）和欧姆表法，测量电表的电阻还可以用半偏法。这里我们介绍一下电桥法。

（1）惠斯通电桥

在测量精度要求较高的时候，常采用惠斯通电桥来测量电阻。其电路结构如图 13－20 所示。图中 AD、DC、CB 和 BA 均称为电桥的臂，BD 支路称为连接臂的桥，R_x 为待测电阻。惠斯通电桥的工作原理是：先将电键 S 闭合，然后调节 R_3 使 G 表读数为零（即桥上没有电流），这时 B、D 两点电势相等，称为电桥平衡，有 $\frac{R_3}{R_x}=\frac{R_1}{R_2}$ 或 $R_2R_3=R_1R_x$，可得待测电阻 $R_x=\frac{R_2R_3}{R_1}$。R_x 的精确度由 R_2、R_3 和 R_1 的精确度及 G 的灵敏度决定。

实验室中常用的滑线式电桥，其结构如图 13－21 所示。图中 ADB 为一粗细均匀的电阻丝。R 为已知的精密电阻，对照图 13－20 可知，两者结构实质相同，闭合 S，调节 D 使 G 示数为零。可得到 $R_x=\frac{l_2}{l_1}R$。

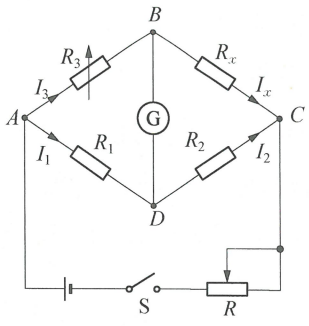


图 13－20

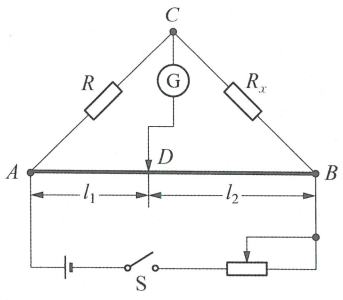


图 13－21

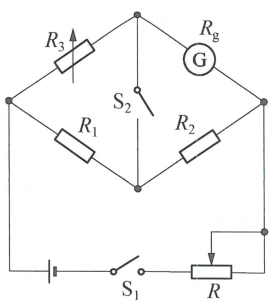


图 13－22

（2）汤姆逊电桥

如果我们需要测一个电表Ⓖ的内阻，由于Ⓖ本身有指示功能，所以可以省去中间的灵敏电流计，接成如图 13－22 所示的电路。调节 R_3，直至开、闭 S_2 时，Ⓖ的指针不动。此时有

$$R_1 : R_2 = R_3 : R_g$$

$$R_g = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

2. 电动势的测量

如果我们有内阻很大的电压表（比如数字式电压表）。那么可以直接用电压表测量电源的电动势。否则可以用电位差计来测量电动势。

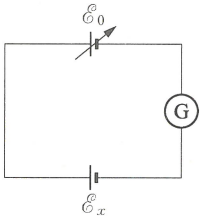


图 13－23

电压表直接测电源电动势，由于电源存在内阻 r，测得的是路端电压，因为电源内阻上有电压 Ir。要准确测定电动势，必须在没有任何电流通过该电源的情况下测定它的路端电压，解决这一问题的办法是补偿电路法。补偿电路法原理如图 13－23 所示，$\mathscr{E}_0$ 是电动势可调的电源，$\mathscr{E}_x$ 是待测电源，两个电源通过检流计 G 反接在一起。调节电动势 $\mathscr{E}_0$ 的大小，使检流计 G 的指针不偏转（即电路中没有电流），此时两个电源的电动势大小相等，互相补偿，即 $\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_0$。

为了得到准确、稳定、便于调节的 $\mathscr{E}_0$，实际测量中采用图 13－24 所示的电路。在这个电路里，电源 $\mathscr{E}$、限流电阻 R 和滑线电阻 AB 所组成的回路，叫做辅助回路。滑动接触头 C，可以改变 A、C 两端的电压 U_{AC}。只要滑线电阻两端的总电压 $U_{AB} > \mathscr{E}_x$，那么移动滑动接触头 C，就一定能找到一个位置，使检流计 G 的指针不发生偏转，此时

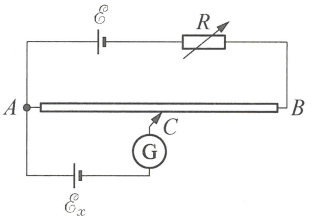


图 13－24

$$\mathscr{E}_x = U_{AC} = IR_{AC}$$

式中 R_{AC} 表示 AC 一段电阻的阻值，I 表示流过滑线电阻 AB 的电流，通常叫做辅助回路的工作电流。当 R_{AC} 和 I 为已知时，就可以求得待测电动势。电位差计就是根据上述补偿原理来测定电动势的。

实际的电位差计如图 13－25 所示，其中 $\mathscr{E}$ 是供电电源，$\mathscr{E}_S$ 是电动势已知的标准电源，G 是灵敏电流计，AB 是一条均匀电阻丝，C 是滑动触头。

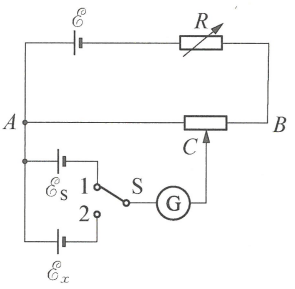


图 13－25

S 是单刀双掷开关。校准时，把开关 S 拨到位置“1”，即把标准电池 $\mathscr{E}_S$ 接入补偿回路。把滑动接头 C 拨到对应于标准电池电动势数值 E_S（如 1.0186 V）的位置上，观察检流计 G 的指针有无偏转，如果检流计 G 的指针有偏转，则表明这时工作电流 I 偏离标定值 I_0。于是，调节限流电阻 R，直到检流计 G 的指针没有偏转，即电流达到平衡。这时，工作电流准确地达到标定值 I_0，A、C 两点间（测出 A、C 间距 L）的电势差为 $U_{AC} = \mathscr{E}_S$，校准工作就完成了。

校准后就可进行测量。测量时，把开关 S 拨到位置“2”，即把待测电源接入补偿回路。这

时不应再动限流电阻 R，而只需移动滑动接触头 C，找到平衡位置 C'，使 G 表中无电流，这时 $U'_{AC}=\mathscr{E}_x$，测出 AC' 为 L'，$\dfrac{U_{AC}}{U'_{AC}}=\dfrac{L}{L'}$，则有 $\mathscr{E}_x=\dfrac{L'}{L}\cdot\mathscr{E}_S$。实际上就可以从仪器的面板上直接读出待测电动势 $\mathscr{E}_x$ 的数值。

所以使用电位差计时，总是先校准后测量。不论校准或测量，采用的都是同一个电路，依据的都是同样的补偿原理。

四 物质的导电性

1. 金属导电的经典微观解释

当导体内没有电场时，从微观角度上看，导体内的自由电荷并不是静止不动的。以金属为例，金属的自由电子好像气体中的分子一样，总是在不停地做无规则热运动。电子的热运动是杂乱无章的，在没有外电场时，它们朝任何一方运动的概率都一样。如图 13－26 所示，设想在金属内部任意作横截面，那么在任意一段时间内向左和向右穿过截面的电子数相等。因此，从宏观上看，自由电子的无规则热运动没有集体定向的效果，因此并不形成电流。

自由电子在做热运动的同时，还不时地与晶体点阵上的原子碰撞，所以每个自由电子的轨迹如图 13－27 中的实线所示，是一条迂回曲折的折线。

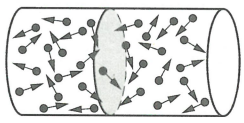


图 13－26

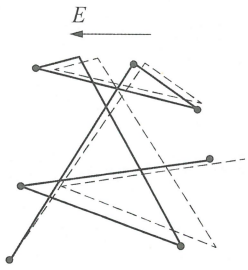


图 13－27

如果在金属导体中加了电场以后，每个自由电子的轨迹将如图 13－27 中的虚线所示那样，逆着电场方向发生“漂移”。这时可以认为自由电子的总速度是由它的热运动速度和因电场产生的附加定向速度两部分组成，前者的矢量平均仍为 0，后者的平均叫做漂移速度，正是这种宏观上的漂移运动形成了宏观电流。由于电子带负电荷，自由电子的漂移速度 u 与场强 E 的方向相反。在金属导体里，自由电子在电场力的推动下做定向运动形成电流的过程中，电场力对自由电子做功，使电子的定向运动动能增大。同时，自由电子又不断地和晶体点阵上的原子碰撞，在碰撞时把定向运动动能传递给原子，使它的热振动加剧，因而导体的温度就升高，同时电子的动能减少。电阻反映的就是自由电子与晶体点阵上的原子碰撞造成对电子定向运动的破坏作用，这也是电阻元件中产生焦耳热的原因。

需要说明一点，电子定向速率很小（10^{-4} m/s 数量级）。为什么平常我们都说“电”的传播速度是非常快的？例如在很远的地方把开关接通，电灯就会立即亮起来。如果按例题中的速

率 u 来计算，似乎要等很久电灯才会亮起来。这是因为开关一旦连通，电场就会以约为 3×10^8 m/s 的速度传播出去，电路各处的导线里很快建立了电场，推动当地的自由电子定向运动，形成电流。如果认为，当开关接通后电子才从电源出发，等到它们到达负载之后，那里才有电流，这完全是一种误解。

2. 电解液导电

在溶液或熔融状态中可离解为正、负离子而能导电的物质叫做电解质。最常见的电解质有酸、碱、盐等。电解质的溶液或熔融的电解质，叫做电解液。在电解液中插入两个电极，用电源在两电极间加上一定的电压时，电解液中的正离子移向阴极（与电源负极相连接的电极），负离子移向阳极（与电源正极相连接的电极），从而形成电流，这叫做电解液导电。电解液的导电属于单纯的离子导电，其中载流子是正、负离子。电解质溶液中的电流是由正、负离子共同定向移动形成的。

3. 法拉第电解定律

法拉第定律是描述电极上通过的电量与电极反应物的量之间关系的规律，又称为电解定律。法拉第定律是电镀过程遵循的基本定律，在任何温度、任何压力下均可以使用。

（1）第一定律

第一定律的内容是：在电极界面上发生化学变化物质的质量与通入的电量成正比。

法拉第第一定律表明，对单个电解池而言，在电解过程中，阴极上还原物质析出的量与所通过的电流强度和通电时间成正比。可以表示为：

$$M=KQ=KIt$$

式中 M 是析出金属的质量，K 是比例常数（电化当量），Q 是通过的电量，I 是电流强度，t 是通电时间。

（2）第二定律

第二定律的内容是：若干个电解池串联时，当所取的基本带电微粒的电荷数相同时，在各个电极上析出物质的质量与其摩尔质量成正比。

4. 气体导电

在通常情况下气体的自由电荷极少，是良好的绝缘体。但是由于某些原因气体中的分子发生了电离，它便可以导电，这种现象称为气体导电或气体放电。气体中有电流流过时，往往伴随着发光和放热。

（1）被激导电

为使两极之间的气体能够导电，可用外加手段使之电离。例如：用紫外线、X 射线或各种放射性射线照射，或者用火焰将气体加热都可使气体电离。这些能使气体发生电离的物质统称电离剂。在电离剂的作用下，气体不断电离产生正负电子对，定向移动形成电流，如果把电离剂撤除，气中的离子很快中和（消失），电流中止。亦即导电过程必须靠电离剂来维持，故称为气体的被激导电。

(2) 自持导电

当两极电压增加到某一数值后，气体中的电流突然加剧，这时即使撤去电离剂，导电过程仍能维持。这种情形称为气体的自持导电。当气体由被激导电过渡到自持导电时，我们说气体被击穿(或点燃)，使气体击穿的电压称为击穿电压。自持导电中参与导电的带电粒子的来源有以下几种：正负离子在电场中已获得相当大的动能，致使它们的各种碰撞过程足以产生新的离子，主要是电子与中性分子的碰撞，使后者电离，这样的过程连锁式地发展下去，形成簇射；获得较大动能的正离子轰击阴极，产生了二次电子发射；当气体中电流密度很大时，还会使阴极温度升高而产生热电子发射。

自持导电因条件不同，有辉光放电、弧光放电、火花放电、电晕放电等不同的形式。辉光放电是低压气体中显示辉光的气体放电现象。弧光放电是伴有强烈的弧光并产生高温的一种气体放电。电弧可作为强光源如弧光灯，或强热源如电弧炉。火花放电是由于空气或其他电介质材料突然被击穿，引起带有瞬间闪光的短期放电现象。在曲率很大的尖端电极附近，由于局部电场强度超过气体的电离场强，使气体发生电离和激励，因而出现电晕放电。

地面上的树木等尖端物体在大地电场作用下的电晕放电是参与大气电平衡的重要环节。极光是由太阳辐射的带电粒子沿地磁场线沉降到极地上空引起的电晕放电。

5. 真空中的电流

当空间的气体分子少到一定的程度，比如气压降到 0.1 Pa 以下，此时电子可在空间自由地运动，形成真空中的电流。

示波管是电子在真空中运动的一个典型的例子，它的构造如图 13 - 28 所示。灯丝给阴极加热，使阴极不断地发射电子。控制板使电子形成电子束，阳极使电子束加速。水平偏转极板 XX' 使电子束发生水平偏转，竖直偏转极板 YY' 使电子束发生竖直偏转。一般在 XX' 上加上周期性均匀变化的电压，使电子束左右扫描，在荧光屏上形成一条水平亮线。将需要观察的信号加在 YY' 极板上，荧光屏上便可以显示出观察信号随时间变化的规律。

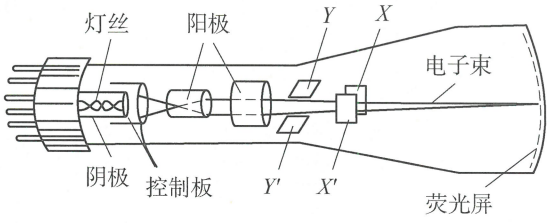


图 13 - 28

五 半导体

半导体是指一种导电性可受控制，导电性能处于绝缘体和导体之间的材料。大部分的电子产品，如计算机、移动电话或是数字录音机当中的核心单元都和半导体有着极为密切的关系。常见的半导体材料有硅、锗、砷化镓等。

1. 半导体的导电性

半导体材料的导电性由导带中含有的电子数量决定。这可以通过在半导体中有选择地加入其他“杂质”来控制。如果我们在纯硅中掺杂少许的砷或磷，就会多出一些自由电子，这样就

形成了 N 型半导体，载流子为自由电子；如果我们在纯硅中掺入少许的硼，反而会少一些电子，形成一些空穴，这样就形成了 P 型半导体（少了 1 个带负电荷的电子，可视为多了 1 个正电荷），载流子为空穴（正电荷）。

2. PN 结

采用特殊的工艺，把一块半导体材料制成一部分是 P 型半导体，另一部分是 N 型半导体（如图 13－29）。由于空穴和电子浓度的差异，P 区的空穴会向 N 区扩散，N 区的电子会向 P 区扩散，形成一个扩散区域。这个区域内电场是由 N 区指向 P 区的，这个电场会阻止由于浓度差异引起的扩散。到一定的时候，空穴和电子的扩散运动达到平衡，在 P 型半导体和 N 型半导体的交界面上，会形成一个很薄的阻挡层。我们把这个阻挡层叫做 PN 结。

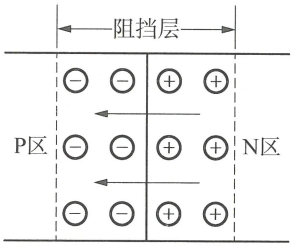


图 13－29

如果 P 型半导体接外电场的正极，N 型半导体接外电场的负极，那么外电场会减弱阻挡层的电场，使阻挡层变薄，PN 结电阻变小，有利于电流通过。此时的电阻称为正向电阻，电流称为正向电流。如果 P 型半导体接外电场的负极，N 型半导体接外电场的正极，则阻挡层变厚，PN 结电阻变大，不利于电流通过。此时的电阻称为反向电阻，电流称为反向电流。由于正向电阻远小于反向电阻，所以由 PN 结制成的半导体二极管具有单向导电性。

3. 半导体三极管的放大作用

半导体三极管有三个电极：发射极 e、基极 b 和集电极 c。三极管中包含两个 PN 结。三极管有两种类型：PNP 型和 NPN 型，它们的结构和符号如图 13－30 所示。

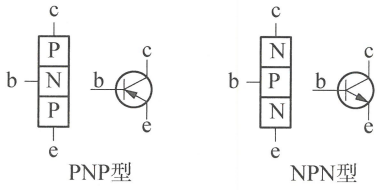


图 13－30

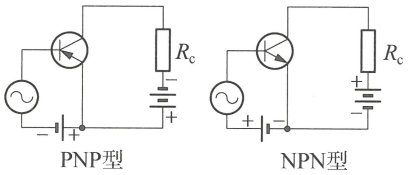


图 13－31

半导体三极管具有放大作用，放大电路如图 13－31 所示。将小信号加在 e 极和 b 极之间，在负载 R_c 上就可以得到放大的信号。

通过三极管 e 极、b 极、c 极的电流分别为 I_e、I_b 和 I_c，那么有

$$I_e = I_b + I_c,\ I_c \gg I_b,\ \beta = \frac{I_c}{I_b}$$

上式中的 β 叫做三极管的电流放大倍数。

六　超导体

超导现象是指在某一温度以下，物质表现出零电阻和完全抗磁性特点的现象。

1. 超导体的零电阻

超导体的零电阻，指在某温度以下，材料电阻突然消失为零的现象。

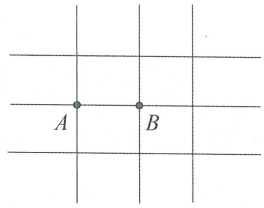
受仪器测量精度的限制，没有一台仪器能测得绝对的零电阻。人们设计了一个超导环的实验，通过监测环中电流产生的磁场的变化，间接地监测环中电流的变化，从而测定环的电阻。根据仪器灵敏度推测，超导体的电阻率应小于 $10^{-23}\ \Omega\cdot\mathrm{cm}$。之后人们采用更为精密的实验，估算超导体的电阻率小于 $10^{-28}\ \Omega\cdot\mathrm{cm}$。这比铜的电阻率（$10^{-9}\ \Omega\cdot\mathrm{cm}$）要小得多。如果能够一直保持低温，按此电阻率推算，超导环中的电流需要数百万年才会有所变化。

2. 超导体的完全抗磁性

“抗磁性”是指在外界磁场中，磁感线无法完全穿过材料，材料内部的实际磁场小于外界磁场的现象。而超导体具有“完全抗磁性”，指的是外部磁场低于临界值的情况下，磁感线完全无法进入超导体，超导体内部磁感应强度等于零。超导体的完全抗磁性可以用法拉第电磁感应定律和楞次定律来解释。当外磁场作用于超导体时，会在其表面产生一个磁感应电流。由于超导体电阻为零，这个电流不会产生损耗，它产生的磁场总是和外磁场大小相等、方向相反，从而使得超导体内部的合磁场场强为零。

例题精讲

例 1 如图所示为一个无限方格电阻丝网络的一部分，其中每一小段电阻丝的阻值都是 r，求相邻两个节点 A、B 之间的等效电阻。



例 1 图

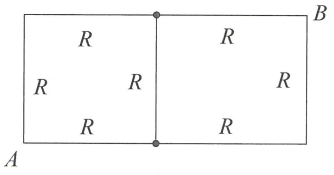
解析 设电流 I 从 A 点流入，向四面八方流到无穷远处，根据对称性，有 $\frac{I}{4}$ 电流由 A 点流到 B 点。假设电流 I 经过无限长时间稳定后，再由四面八方汇集到 B 点后流出；根据对称性，同样有 $\frac{I}{4}$ 电流经 A 点流到 B 点。这样，AB 段的电流便由两个 $\frac{I}{4}$ 叠加而成为 $\frac{I}{2}$，因此

$$U_{AB}=\frac{I}{2}r$$

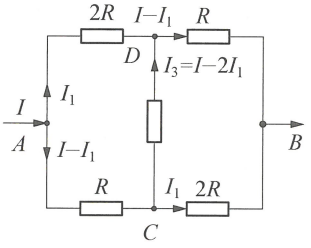
A、B 间的等效电阻

$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{r}{2}$$

例 2 7 个电阻均为 R 的网络如图 1 所示。试求 A、B 间的等效电阻 R_{AB}。



例 2 图 1



例 2 图 2

解析 设电流 I 从 A 端流入，B 端流出。利用串联等效电阻公式，可将电路转化为图 2 所示电路，应用分流思想，由于

$$I_2=I-I_1,\ I_3=I_2-I_1=I-2I_1$$

根据两点间不同路径等电压的思想，可得图 2 中 A、D 间的电压

$$U_{AD}=I_1\cdot 2R=(I-I_1)R+(I-2I_1)R$$

解得 $I_1=\dfrac{2I}{5}$，取路径 ADB，可算出

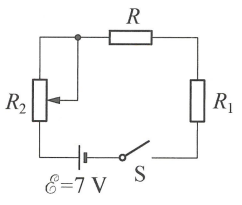
$$U_{AB}=I_1\cdot 2R+(I-I_1)R=\frac{4}{5}IR+\frac{3}{5}IR=\frac{7}{5}IR$$

得

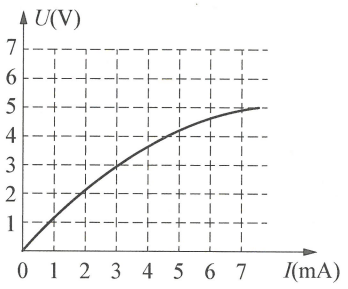
$$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}=\frac{7}{5}R$$

说明：本题还可以利用叠加原理、Y－△等效变换求解，请读者自行解答。

例 3 在如图 1 所示的电路中，$R_1=1.0\ \text{k}\Omega$，且是一个阻值不随温度变化的标准电阻，电源电动势 $\mathscr{E}=7.0\ \text{V}$，内阻不计。图 2 中的实线是电阻 R 的伏安特性曲线。电路周围的环境温度保持 $t_0=25℃$ 不变，电阻 R 的散热情况跟它与环境的温度差有关，温度每相差 1℃，每秒放热为 $\alpha=6.0\times10^{-4}\ \text{J}$。



例 3 图 1



例 3 图 2

(1) 调节 R_2，使 R_1 与 R 消耗的电功率相等，这时 R 的温度是多少？

(2) 当 $R_2=0$ 时，R 上的电压和 R 的阻值各是多少？

解析 (1) 因 R 与 R_1 串联，且电功率相同，则由 $P=I^2R$ 知，$R=R_1=1000\ \Omega$。因此，在伏安特性曲线上寻找流过 R 的电流，即寻找曲线上满足方程 $R=\dfrac{U}{I}=1000\ \Omega$ 的点。这可以通过在图上画直线 $U=1000I$ 来完成。由此得直线与 R 的伏安特性曲线的交点：

$$U=3.0\ \text{V},\ I=3.0\times10^{-3}\ \text{A}$$

因此得到 R 上每秒放出的热量为

$$Q=I^2Rt=(3.0\times10^{-3}\ \text{A})^2\times1000\ \Omega\times1\ \text{s}=9.0\times10^{-3}\ \text{J}$$

设 R 稳定时的温度为 t℃，则利用题中所给散热关系，有

$$t-t_0=\frac{Q}{\alpha}\times1℃$$

$$t=t_0+\frac{Q}{\alpha}\times1℃=25℃+\frac{9.0\times10^{-3}}{6.0\times10^{-4}}℃=40℃$$

(2) 依题设 $R_2=0$，若此时电路中电流为 I_R，则电阻 R 两端的电压为 $U_R=E-I_RR_1=7.0-1000I_R$。这是利用了 R_1 满足的欧姆定律。此式给出了电路中 R 应满足的 U_R-I 的直线关系。与此同时，R 又需满足伏安特性曲线。利用图解法，把上述方程在图 2 中画出直线，它与伏安特性曲线的交点，即为实际电路中 R 所处的状态。查得交点处的数值 $I_R=3.7\times10^{-3}\ \text{A}$，$U_R=3.3\ \text{V}$，$R=\dfrac{U_R}{I_R}=8.9\times10^{-3}\ \Omega$。

例 4 用 n 个相同电池串联的电池组对一个电容器充电，第一种方式是：将这个电容器与一个电阻串联后接在 n 个串联好的电池的两端。第二种方式是：仍把这个电容器跟同一个电阻串联，先用一个电池充电，再改为用两个电池串联继续充电，再改为用三个电池串联继续充电……最后是 n 个电池串联继续充电。用哪一种方式充电损耗电能多？请说明理由。

解析 用第一种方式充电损耗的电能多。

解法一 设每一节电池的电动势为 $\mathscr{E}$。用第一种方式充电，电容器获得电荷量为

$$Q=nC\mathscr{E}$$

电源提供的电能为

$$A_1=Q(n\mathscr{E})=C(n\mathscr{E})^2$$

电容器储存的能量为

$$W=\frac{1}{2}C(n\mathscr{E})^2$$

在电阻上消耗的能量为

$$\Delta W_1=A_1-W=C(n\mathscr{E})^2-\frac{1}{2}C(n\mathscr{E})^2=\frac{1}{2}C(n\mathscr{E})^2$$

用第二种方式充电，电容器最终的带电荷量和储存的能量与第一种方式中相同，储存的能量为

$$W_2=W_1=\frac{1}{2}C(n\mathscr{E})^2$$

每次电容器充得的电荷量为

$$q=C\mathscr{E}$$

全过程电源提供的总电能为

$$\begin{aligned}A_2&=E\cdot C\mathscr{E}+2\mathscr{E}\cdot C\mathscr{E}+3\mathscr{E}\cdot C\mathscr{E}+\cdots+n\mathscr{E}\cdot C\mathscr{E}\\&=C\mathscr{E}^2(1+2+3+\cdots+n)\\&=\frac{n}{2}(n+1)C\mathscr{E}^2\end{aligned}$$

全过程电阻上消耗的能量为

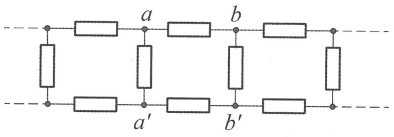
$$\Delta W_2=A_2-W=\frac{n}{2}(n+1)C\mathscr{E}^2-\frac{1}{2}C(n\mathscr{E})^2=\frac{n}{2}C\mathscr{E}^2$$

因为 $n>1$，所以 $n^2>n$，则 $\Delta W_1>\Delta W_2$，即第一种方式充电损耗电能多。

解法二　两种方式，电容器最终带相等的电荷量。第一种方式充电，所有电荷都要通过电势差 $n\mathscr{E}$，而第二种方式充电，只有最后一次充得的电荷量 $q=C\mathscr{E}$ 通过电势差为 $n\mathscr{E}$，其余的电荷通过的电势差均小于 $n\mathscr{E}$，因此，第二种方式充电电源提供的总电能小于第一种方式，而电容器最终储存的电能是一样的，因此第一种方式损耗的电能多。

例 5　有一两端无限的电路如图所示，其中每一个电阻均为 r。求 a、b 两点之间的电阻。

解析　整个电路可看成由三部分组成：a、a' 两点之间直到左边的无限网络电路，b、b' 两点之间直到右边的无限网络电路及余下的中间部分电路。设 b、b' 两点之间直到右边的无限网络电阻为 R_x，则 a、a' 两点之间直到左边的无限网络电阻也为 R_x。a、b 两点之间的电阻为



例 5 图

$$R_{ab}=\frac{(2R_x+r)r}{(2R_x+r)+r}=\frac{(2R_x+r)r}{2(R_x+r)}$$

b、b' 两点之间直到右边的无限网络，去掉一个网格元，其电阻不变

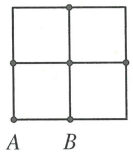
$$R_x=\frac{(R_x+2r)r}{(R_x+2r)+r}$$

得

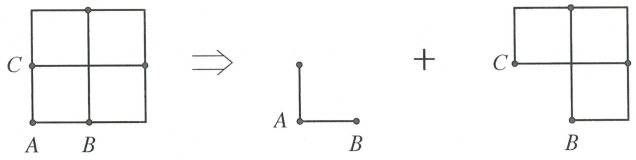
$$R_x=(\sqrt{3}-1)r$$

所以 $$R_{ab}=\frac{6-\sqrt{3}}{6}r$$

例 6 如图 1 所示电阻网络，每一小段电阻丝阻值均为 R，求 A、B 间等效电阻。

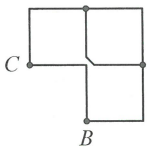


例 6 图 1



例 6 图 2

解析 引入 C 节点，将原电路分为两部分，如图 2 所示。其中 C、B 间部分可由等电势点断开，如图 3 所示，则

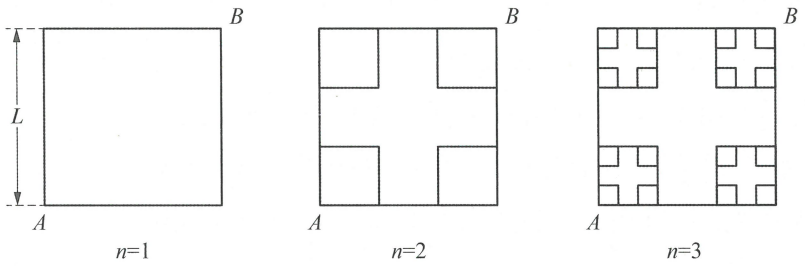


例 6 图 3

$$R_{CB}=\frac{2R\cdot 5R}{2R+5R}=\frac{10}{7}R$$

$$R_{AB}=\frac{R\cdot(R_{CB}+R)}{R+R_{CB}+R}=\frac{17}{24}R$$

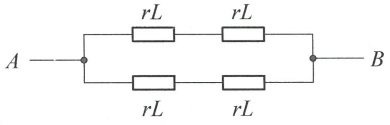
例 7 由单位长度电阻为 r 的导线组成如图所示的正方形网络系列。$n=1$ 时，正方形网络边长为 L；$n=2$ 时，小正方形网络的边长为 $\frac{L}{3}$；$n=3$ 时，最小正方形网络的边长为 $\frac{L}{9}$。当 $n=1$、2、3 时，各网络上 A、B 两点间的电阻分别为多少？



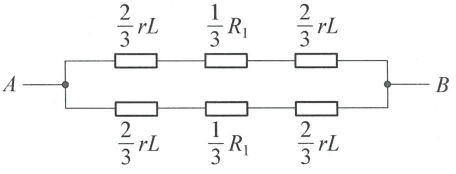
例 7 图 1

解析 $n=1$ 时，A、B 间等效电路如图 2 所示，A、B 间的电阻

$$R_1=\frac{1}{2}(2rL)=rL$$



例 7 图 2



例 7 图 3

$n=2$ 时，A、B 间等效电路如图 3 所示，A、B 间的电阻

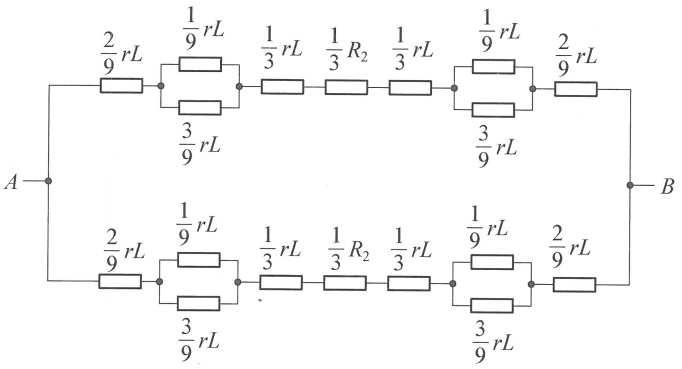
$$R_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}rL+\frac{1}{3}R_1\right)$$

联立得

$$R_2=\frac{5}{6}rL$$

$n=3$ 时，A、B 间等效电路如图 4 所示，A、B 间的电阻

$$R_3=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\left(2+\frac{3}{4}+3+3+\frac{3}{4}+2\right)rL+\frac{1}{3}R_2\right]$$

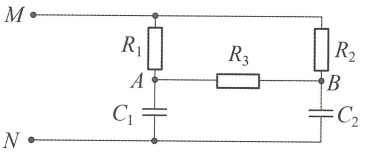


例 7 图 4

解得

$$R_3=\frac{7}{9}rL$$

例 8 如图所示电路，$R_1=R_3=R$，$R_2=2R$，$C_1=C_2=C$，求当 M、N 间加上电压 U 后通过电阻 R_3 的电荷量。



例 8 图

解析 如果去了电阻 R_3，则电容器 C_1、C_2 各自独立充电，由于 $R_1<R_2$，所以对 C_1 的充电快于对 C_2 的充电，那么同一时刻 A 点的电势高于 B 点的电势，当接上电阻 R_3 后，便有从 A 到 B 的电流 I 通过电阻 R_3。

令 N 点电势为零，在充电过程中的某一时刻 t，通过电阻 R_3 的电流为 $I=\dfrac{U_A-U_B}{R_3}$。

设经过一极小的时间间隔后，C_1、C_2 的电荷量分别增加 Δq_1、Δq_2，根据电荷守恒定律，有

$$\frac{U-U_A}{R_1}\Delta t=I\Delta t+\Delta q_1,\ \frac{U-U_B}{R_2}\Delta t=I\Delta t+\Delta q_2$$

联立上面三式，得

$$I\Delta t=\frac{R_2\Delta q_2-R_1\Delta q_1}{R_1+R_2+R_3}=\frac{1}{2}\Delta q_2-\frac{1}{4}\Delta q_1$$

通过电阻 R_3 的电荷量为

$$Q=\sum I\Delta t=\sum\left(\frac{1}{2}\Delta q_2-\frac{1}{4}\Delta q_1\right)=\frac{1}{2}\sum\Delta q_2-\frac{1}{4}\sum\Delta q_1$$

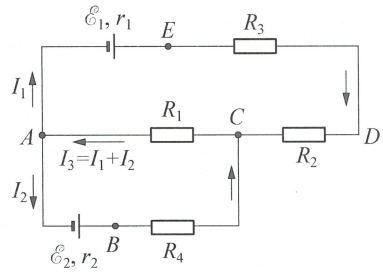
而 $\sum\Delta q_1$、$\sum\Delta q_2$ 即为电容器 C_1、C_2 的最后带电荷量。最后两电容器上的电压均为 U，所以

$$\sum\Delta q_1=CU、\sum\Delta q_2=CU$$

通过电阻 R_3 的电荷量为

$$Q=\sum I\Delta t=\frac{1}{4}CU$$

例 9 已知如图所示的电路中，电动势 $\mathscr{E}_1=3.0\ \mathrm{V}$，$\mathscr{E}_2=1.0\ \mathrm{V}$，内阻 $r_1=0.5\ \Omega$，$r_2=1.0\ \Omega$，电阻 $R_1=10.0\ \Omega$，$R_2=5.0\ \Omega$，$R_3=4.5\ \Omega$，$R_4=19.0\ \Omega$，求电路中电流的分布。



例 9 图

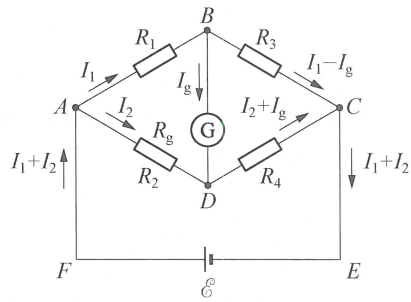
解析 标定各支路电流的正方向如图所示。

根据基尔霍夫第二定律，对于回路 $ABCDEA$ 和回路 $AEDCA$，有

$$\begin{cases}-I_1(R_2+R_3+r_1)+I_2(r_2+R_4)=\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1\\ I_1(r_1+R_3+R_2+R_1)+I_2R_1=\mathscr{E}_1\end{cases}$$

解得 $I_1=160\ \mathrm{mA}$，$I_2=-20\ \mathrm{mA}$，负号表示 I_2 的力向与图中所标的方向相反。

例 10 如图所示是一个电桥电路，其中 G 为检流计（内阻为 R_g），求通过检流计的电流 I_g 与各臂阻值 R_1、R_2、R_3、R_4 的关系（电源内阻可忽略，$\mathscr{E}$ 已知），并求出电桥平衡条件。



例 10 图

解析 设各支路电流的正方向如图，由基尔霍夫第二定律得

$$\begin{cases}\text{回路 } ABDA:I_1R_1+I_gR_g-I_2R_2=0\\ \text{回路 } BCDB:(I_1-I_g)R_3-(I_2+I_g)R_4-I_gR_g=0\\ \text{回路 } ABCEFA:I_1R_1+(I_1-I_g)R_3=\mathscr{E}\end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases}I_1R_1-I_2R_2+I_gR_g=0\\ I_1R_3-I_2R_4+I_g(R_3+R_4+R_g)=0\\ I_1(R_1+R_3)-I_gR_3=\mathscr{E}\end{cases}。$$

用行列式解出

$$I_g=\frac{\Delta_g}{\Delta}$$

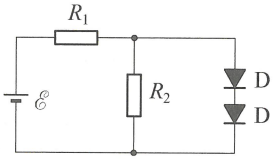
其中
$$\Delta=\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & R_g \\ R_3 & -R_4 & -(R_3+R_4+R_g) \\ R_1+R_3 & 0 & -R_3 \end{vmatrix}$$
$$=R_1R_2R_3+R_2R_3R_4+R_3R_4R_1+R_4R_1R_2+R_g(R_1+R_3)(R_2+R_4)$$
$$\Delta_g=\begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & -R_4 & 0 \\ R_1+R_3 & 0 & \mathscr{E} \end{vmatrix}=-(R_1R_4-R_2R_3)\mathscr{E}$$

当 $R_1R_4-R_2R_3=0$ 时，$\Delta_g=0$，$I_g=0$，所以 $R_1R_4-R_2R_3=0$ 就是电桥平衡条件。

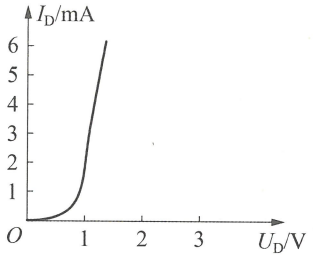
例 11 如图 1 所示，电阻 $R_1=R_2=1\ \mathrm{k\Omega}$，电动势 $E=6\ \mathrm{V}$，两个相同的二极管 D 串联在电路中，二极管 D 的 I_D-U_D 特性曲线如图 2 所示。试求：

(1) 通过二极管 D 的电流。

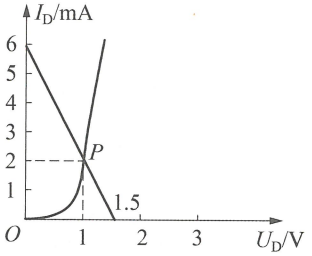
(2) 电阻 R_1 消耗的功率。



例 11 图 1



例 11 图 2



例 11 图 3

解析 (1) 设二极管 D 两端的管压为 U_D，流过二极管的电流为 I_D。则有
$$2U_D=\mathscr{E}-\left(I_D+\frac{2U_D}{R_2}\right)R_1$$

代入数据解得 U_D 与 I_D 的关系为
$$U_D=(1.5-0.25I_D\times10^3)\ \mathrm{V}$$

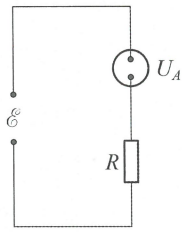
这是一条在图 3 中横轴上截距为 1.5，纵轴上截距为 6、斜率为 -4 的直线方程(称为二极管的负载线)因管压 U_D 与流过二极管电流 I_D 还受二极管 D 的 $I_D\sim U_D$ 特性曲线的限制，因而二极管就工作在负载线与 $I_D\sim U_D$ 特性曲线的相交点 P 上。由此得二极管两端的管压和电流分别为 $U_D=1\ \mathrm{V}$，$I_D=2\ \mathrm{mA}$。

(2) 电阻 R_1 上的电压
$$U_1=\mathscr{E}-2U_D=4\ \mathrm{V}$$

其功率

$$P_1=\frac{U_1^2}{R_1}=16\ \text{mW}$$

例 12 电弧是气体自激放电的一种形式，电流强度越大，电弧的两个电极之间的电压 U_A 越小。它的伏安特性关系为 $U_A=a+\dfrac{b}{I}$。图 1 中，稳流电阻 R 和弧光灯串联，接到电动势 $\mathscr{E}=200\ \text{V}$ 的电源两端，电阻 R 的作用是使弧光灯发光稳定。忽略电源内阻和导线电阻，求能使弧光灯稳定发光且释放的功率不小于电源消耗功率的一半的所有电阻 R 的值。（设常量 $a=55\ \text{V}$，$b=50\ \text{A}$。电弧发光的稳定状态是指当电路中的电流或某段电路两端的电压意外有了微小偏差时，偏差会自行消失）



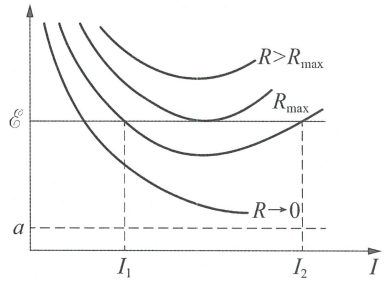
例 12 图 1

解析 在弧光灯和电阻 R 上的总电压为 $U(I)$，它与电流强度有关，即

$$U(I)=U_A+U_R=a+\frac{b}{I}+IR \qquad ①$$

这是一个以 R 作为参量的 $U-I$ 函数，不同的 R 值，将有不同的 $U-I$ 关系。用 $U-I$ 函数图象表示，如图 2 所示。其中

$$U(I)=\mathscr{E}(\text{常量}) \qquad ②$$



例 12 图 2

在图 2 中是一条平行于 I 轴且 $U=\mathscr{E}$ 的直线，系统所处平衡状态是曲线与直线的交点。交点的 U、I 值也可以用解析方法求得。联立方程 ① 和方程 ②，得

$$\mathscr{E}=a+\frac{b}{I}+IR$$

写成 I 的一元二次方程　　$I^2R-(\mathscr{E}-a)I+b=0$

求出 I 的两个解

$$I_1=\frac{1}{2R}[\mathscr{E}-a-\sqrt{(\mathscr{E}-a)^2-4Rb}],\ I_2=\frac{1}{2R}[\mathscr{E}-a+\sqrt{(\mathscr{E}-a)^2-4Rb}]$$

$$R>\frac{(\mathscr{E}-a)^2}{4b},\text{无解，无交点}$$

$$R=\frac{(\mathscr{E}-a)^2}{4b}\approx 105.1(\Omega),\ I_1=I_2,\text{相切}$$

$$R<\frac{(\mathscr{E}-a)^2}{4b},\ I_1\neq I_2,\text{有两交点}$$

如图 2 中所示，可看出 I_1 在曲线下降段，I_2 在曲线上升段。

当电流 I 在 I_2 附近稍有偏差时，即由 I_2 变为 $I_2+\Delta I_2$，（设 $\Delta I_2>0$），由图 2 中曲线知，U

将产生变化，将从 $\mathscr{E}$ 变为 $\mathscr{E}+\Delta U_2$（设 $\Delta U_2>0$），但事实上 $\mathscr{E}$ 不变，所以电流将会自动回落到 I_2，即电流的偏差自行消失。所以平衡状态 I_2 是一个稳定平衡状态。当电流 I 在 I_1 附近稍有偏差，即由 I_1 变为 $I_1+\Delta I_1$（设 $\Delta I_1>0$），由图 2 中曲线知，U 将产生变化，将从 $\mathscr{E}$ 变为 $\mathscr{E}-\Delta U_1$（设 $\Delta U_1>0$），但事实上 $\mathscr{E}$ 不变，所以电流将会变得更大，即电流的偏差不能消失。所以平衡状态 I_1 是一个不稳定平衡状态。

由稳定性判定，解存在的 R 的可能值为 $R<105.1(\Omega)$。

本题的第二个条件，即弧光灯发光释放功率不小于电源消耗功率的一半。这个条件可以写成

$$I_2\left(a+\frac{b}{I_2}\right)\geqslant\frac{1}{2}\mathscr{E}I_2,\ I_2\leqslant\frac{2b}{\mathscr{E}-2a}$$

从图 2 中可以看出，适合第二个条件的 I，在图中 I_2 的位置或其左侧，这表示参量 R 必须大于或等于图 2 中

$$I_2=\frac{2b}{\mathscr{E}-2a}$$

所对应的 R 为

$$R\geqslant\frac{\mathscr{E}(\mathscr{E}-2a)}{4b}\approx 90(\Omega)$$

可见，为了弧光灯能稳定发光，而且其释放的功率不小于总功率的一半，稳流电阻取值应满足

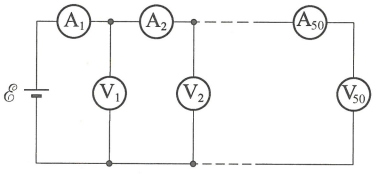
$$\frac{\mathscr{E}(\mathscr{E}-2a)}{4b}\leqslant R\leqslant\frac{(\mathscr{E}-a)^2}{4b}$$

或

$$90\ \Omega\leqslant R\leqslant 105.1\ \Omega$$

练习题

1 在如图所示的电路中，共有 50 只不同规格的电流表（$A_1\sim A_{50}$）和 50 只相同规格的电压表（$V_1\sim V_{50}$）。第一只电压表的读数为 $U_1=9.6$ V，第一只电流表的读数 $I_1=9.5$ mA，第二只电流表的读数 $I_2=9.2$ mA，求所有电压表的读数之和。

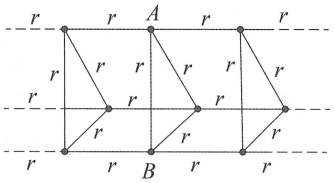


第 1 题图

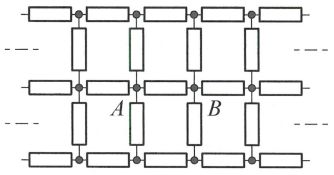
2 (1)电阻丝无限网络如图 1 所示，每两个节点之间的电阻丝的电阻都是 r，试求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB}。

(2) 如图 2 所示的无限网络，每个电阻阻值为 r，求等效电阻 R_{AB}。

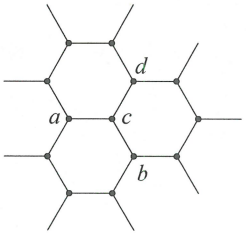
(3) 有一无限大的导体网络，它由大小相同的正六边形网眼组成，如图 3 所示，所有六边形每边的电阻都为 R，求节点 a、b 之间的电阻。



第 2 题图 1

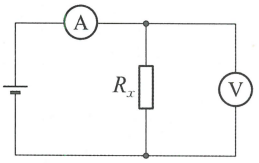


第 2 题图 2



第 2 题图 3

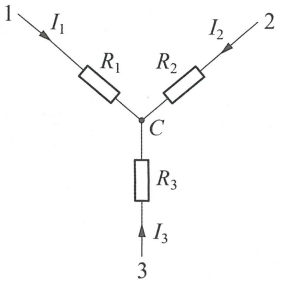
3 如图所示的电路，电源的内阻可忽略不计，电流表(内阻不能忽略)的示数为 10.0 mA，电压表的示数为 2.0 V，当电阻 R_x 与电压表分开，同电流表并联后，电流表示数减小到 2.5 mA。根据上述测量结果，你能否确定电压表的内阻 R_V 和电阻 R_x 的值?



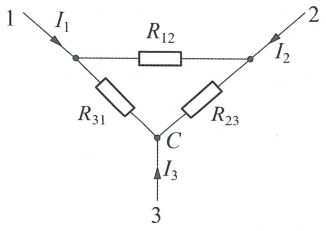
第 3 题图

4 证明图 1 中的 Y 形电阻网络与图 2 中的△形电阻网络的等效变化关系为：

$$\begin{cases} R_{12}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_3} \\ R_{23}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1} \\ R_{31}=\dfrac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_2} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} R_1=\dfrac{R_{31}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_2=\dfrac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \\ R_3=\dfrac{R_{23}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \end{cases}$$



第 4 题图 1

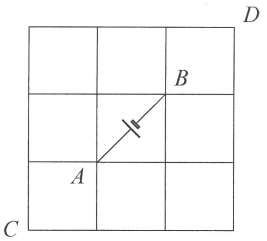


第 4 题图 2

5 用均匀电阻线制作成的正方形网络如图所示，它由 9 个相同的小正方形组成，小正方形每边的电阻均为 $r=8\ \Omega$。

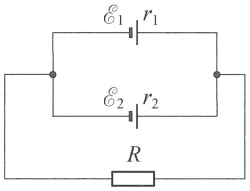
(1) 在 A、B 两点间接入电池，其电动势 $\mathscr{E}=5.7\ \mathrm{V}$，内阻可忽略，求流过电池的电流；

(2) 若用导线连接 C、D 两点，求通过此导线的电流（略去导线的电阻）。

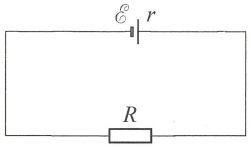


第 5 题图

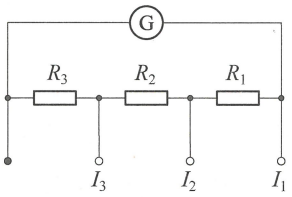
6 电动势分别为 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$，内阻分别为 r_1 和 r_2 的两个电池，用一个电动势为 $\mathscr{E}$ 和内阻为 r 的电池代替，分别如图 1 和图 2 所示，流过 R 的电流不变，并与 R 无关。$\mathscr{E}$ 和 r 应随 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、r_1、r_2 怎样变化？如果开始不是两个而是 n 个电动势分别为 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、…、$\mathscr{E}_n$ 和内阻分别为 r_1、r_2、…、r_n 的电池，求 $\mathscr{E}$ 和 r 的表达式。



第 6 题图 1



第 6 题图 2



第 7 题图

7 如图所示，已知表头内阻为 R_{g0}，满偏电流为 I_{g0}，改装后电流表的三挡量程分别为 $I_1=n_1I_{g0}$，$I_2=n_2I_{g0}$，$I_3=n_3I_{g0}$，求分流电阻 R_1、R_2、R_3。

8 用伏安法测电阻时，由于电压表、电流表内阻的影响，使得测量结果总存在误差，而按图 1 所示电路进行测量，则由电压表、电流表内阻所造成的误差可消除。

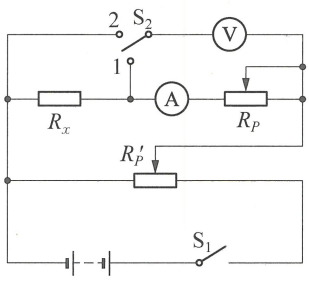
(1) 请你简要写出还未完成的主要操作步骤，并用字母表达出相应的测量值。

① 闭合开关 S_1，开关 S_2 接 2，调节 R_P 和 R_P'，读出电流表和电压表的示数 I_2、U_2。

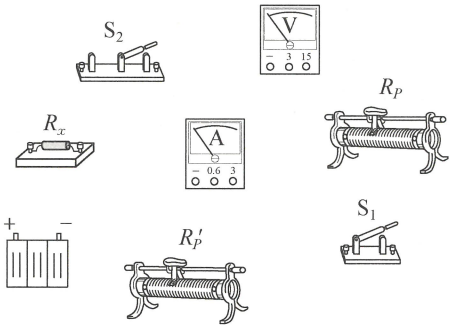
② 保持 R_P 不变，_____。

(2) 请你推导出待测电阻 R_x 的表达式_____。

(3) 用实线表示导线，将图 2 中的器材按电路图连成测量电路。

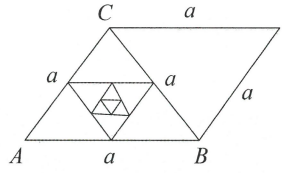


第 8 题图 1



第 8 题图 2

9 如图所示为由粗细、质地均匀的细金属丝连成的无限内接网络。已知金属丝单位长度电阻为 R_0，求等效电阻 R_{AB}。（$\triangle ABC$ 为等边三角形，内接三角形的顶点均为三角形各边的中点）



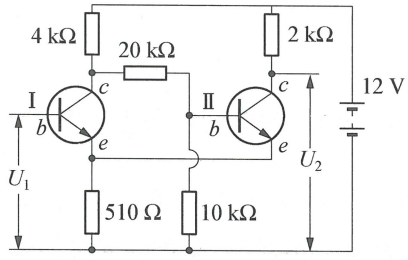
第 9 题图

10 设铅丝粗细均匀，初始时通有 $I=100\ \mathrm{A}$ 的电流，电流检测仪器的精度为 $\Delta I=0.1\ \mathrm{mA}$，在持续一年的时间内电流检测仪器没有测量到电流的变化。根据这个实验，试估算对超导态铅的电阻率为零的结论认定的上限。设铅中参与导电的电子数密度 $n=8.00\times10^{20}\ \mathrm{m^{-3}}$，已知电子质量 $m=9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$，基本电荷 $e=1.60\times10^{-19}\ \mathrm{C}$。（采用的估算方法必须利用本题所给出的有关数据）

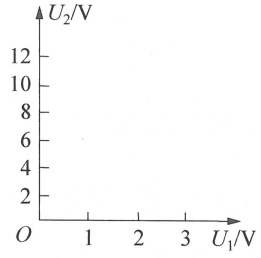
11 晶体三极管的基极 b、发射集 e、集电极 c 的电势分别用 U_b、U_e 和 U_c 表示。理想的硅 NPN 开关三极管的性能如下：

当 U_b 较 U_e 高 0.6 V 或更高，即 $U_\mathrm{b}-U_\mathrm{e}\geqslant0.6\ \mathrm{V}$ 时，三极管完全导通，即 e 和 c 之间相当于用导线接通。

当 $U_\mathrm{b}-U_\mathrm{e}<0.6\ \mathrm{V}$ 时，三极管关断，即 e 和 c 之间完全不通，开关三极管只有完全导通和关断的两种状态。图 1 所示是一个有实际用途的电路，Ⅰ 和 Ⅱ 都是理想的 NPN 开关三极管。在图 2 中画出电压 U_2 随输入电压 U_1 的变化图线。



第 11 题图 1



第 11 题图 2

第 14 章 磁场

知识要点和基本方法

一 磁场

1. 毕奥-萨伐尔定律

电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$（电流元是矢量，大小为 $I\mathrm{d}l$，方向沿导线指向电流的方向）在其周围空间产生磁场，磁感应强度 $\mathrm{d}\vec{B}$ 的大小

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

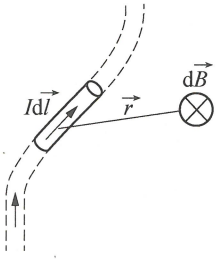


图 14-1

其中常量 μ_0 为真空的磁导率，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}$，$r$ 为场点相对电流元的距离，θ 为电流元的方向与场点相对电流元的位置矢量方向之间的夹角。磁感应强度 $\mathrm{d}\vec{B}$ 的方向由从 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 到 $\vec{r}$ 的右手螺旋定则判定，这就是毕奥-萨伐尔定律，反映了载流导线产生磁场的基本规律。写成矢量形式为

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

如图 14-1 所示。

由毕奥-萨伐尔定律可知，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $\mathrm{d}B$ 最大，即垂直电流方向上磁感应强度最大；$\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时 $\mathrm{d}B=0$，即在电流方向的延长线或反向延长线上磁感应强度为零（没有磁场）。

毕奥-萨伐尔定律仅对线电流元适用，即电流通过的横截面的线度远小于其到待求场点的距离，所以不存在 $\vec{r}\to0$ 时 $\mathrm{d}\vec{B}\to\infty$ 的困惑。

2. 几种常见电流磁场的磁感应强度

对于任意形状的载流导线，均可利用毕奥-萨伐尔定律及场的叠加原理求其磁场，满足磁场的叠加原理，即 $\vec{B}=\int_L\mathrm{d}\vec{B}$，$\mathrm{d}\vec{B}$ 为各电流元单独在待求场点产生的磁场。

（1）无限长通电直导线的磁场

直导线中通有电流 I，在与直导线垂直距离为 a 处的磁感应强度大小为 $B=\frac{I\mu_0}{2\pi a}$，方向由右手螺旋法则决定。拇指表示电流的流向，四指表示磁场指向。

考虑在这直导线旁任意一点 P 的磁感应强度（见图 14-2）。根据毕奥-萨伐尔定律可以看出，任意电流元 $I\mathrm{d}l$ 产生的元磁场 $\mathrm{d}B$ 的方向都一致（在 P 点垂直于纸面向内）。因此在求总

磁感应强度 B 的大小时，只需求 $\mathrm{d}B$ 的代数和。对于有限的一段导线 A_1A_2 来说

$$B=\int_{A_1}^{A_2}\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{A_1}^{A_2}\frac{I\,\mathrm{d}l\sin\theta_r}{r^2}$$

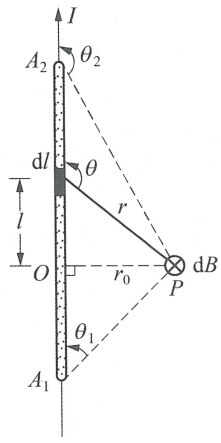


图 14-2

从场点 P 作直导线的垂线 PO，设它的长度为 r_0，以垂足 O 为原点，设电流元 $I\mathrm{d}l$ 到 O 的距离为 l，由图中可以看出：

$$l=r\cos(\pi-\theta)=-r\cos\theta$$

$$r_0=r\sin(\pi-\theta)=-r\sin\theta$$

由此消去 r，得

$$l=-r_0\cot\theta$$

取微分

$$\mathrm{d}l=\frac{r_0\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

将上面的积分变量 l 换为 θ 后得到

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{I\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{r_0}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

式中 θ_1、θ_2 分别为在 A_1、A_2 两端 θ 角的数值，这就是一段直导线外任一点的磁场。

若导线为无限长

$$\theta_1=0,\ \theta_2=\pi$$

则

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r_0}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

以上结果表明，在载流无限长直导线周围的磁感应强度 B 与距离 r_0 的一次方成反比。我们在实际中遇到的当然不可能真正是无限长的直导线。然而若在闭合回路中有一段长度为 l 的直导线，在其附近 $r_0\ll l$ 的范围内上式近似成立。

(2) 环形电流轴线上的磁场

设圆线圈的中心为 O，半径为 R，其上任意点 A 处的电流元在对称轴线上一点 P 产生元磁场 $\mathrm{d}B$，它位于 POA 平面内且与 PA 连线垂直，因此 $\mathrm{d}B$ 与轴线 OP 的夹角 $\alpha=\angle PAO$（如图所示）。由于轴对称性，在通过 A 点的直径的另一端 A' 点处的电流元产生的元磁场 $\mathrm{d}B'$ 与 $\mathrm{d}B$ 对称，合成后垂直于轴线方向的分量相互抵消，因此我们只需计算沿轴线方向的磁场分量。对于整个圆周来说也是一样，由于每个直径两端的电流元产生的元磁场在垂直轴线方向一对对地抵消，总磁感应强度 B 将沿轴线方向，它的大小等于各元磁场沿轴线分量 $\mathrm{d}B\cos\alpha$ 的代数和，即

$$B=\oint\mathrm{d}B\cos\alpha$$

根据毕奥-萨伐尔定律

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin\theta$$

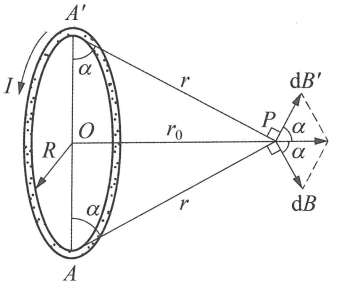


图 14-3

对于轴上的场点 P，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=1$。令 r_0 为场点 P 到圆心的距离，则 $r_0=r\sin\alpha$，故

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\sin^2\alpha$$

$$B=\oint dB\cos\alpha=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r_0^2}\sin^2\alpha\cos\alpha\oint dl$$

因 $$\cos\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+r_0^2}},\ \sin\alpha=\frac{r_0}{\sqrt{R^2+r_0^2}},\ \oint dl=2\pi R$$

故 $$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{(R^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 I}{(R^2+r_0^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad①$$

下面我们考虑两个特殊情形：

ⅰ 在圆心处，$r_0=0$，$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi I}{R}=\frac{\mu_0 I}{2R}$，由叠加原理易知，如果一段载流圆弧所对应的圆心角为 θ，则在圆心处的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\times\frac{\theta}{2\pi}$$

ⅱ 当 $r_0\gg R$ 时

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi R^2 I}{R_0^3}=\frac{\mu_0 R^2 I}{2R_0^3}$$

(3) 运动电荷所激发的磁场

利用毕奥-萨伐尔定律

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

和等效电流元

$$Id\vec{l}=\frac{q}{dt}\vec{v}dt=q\vec{v}$$

得运动电荷所激发的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

若 q 是正的，$\vec{B}$ 的方向与 $\vec{v}\times\vec{r}$ 的方向相同；若 q 是负的，$\vec{B}$ 的方向与 $\vec{v}\times\vec{r}$ 的方向相反。

3. 安培环路定理

磁感应线是套连在闭合载流回路上的闭合线。若取磁感应强度沿磁感应线的环路积分，则因 $\vec{B}$ 与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的夹角 $\theta=0$，$\cos\theta=1$，故在每条线上 $\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=|B|\cdot|\mathrm{d}l|>0$，从而

$$\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

安培环路定理就是反映磁感应线这一特点的。安培环路定理表述如下：恒磁场中，磁感应强度沿任何闭合环路 L 的线积分，等于穿过这环路所有电流强度的代数和的 μ_0 倍。用公式来表示，则有

$$\oint_L\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\sum_{(L_{内})}I$$

其中电流 I 的正负规定如下：当穿过回路 L 的电流方向与回路 L 的环绕方向服从右手法则时，$I>0$，反之，$I<0$。如果电流 I 不穿过回路 L，则它对上式右端无贡献。例如在图 14-4 所示情形里，$\sum I=I_1-2I_2$。

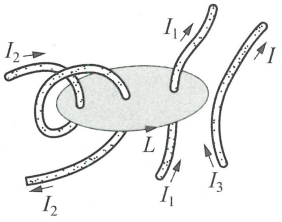


图 14-4

正如静电场的高斯定理可以帮助我们计算某些具有对称性的带电体的电场分布一样，安培环路定理也可以帮助我们计算某些具有对称性的载流导线的磁场分布。我们取适当的环路，就能很方便地得到无限长通电直导线的磁场分布和通电直螺线管内的磁场。

(1) 长直圆柱形载流导线内外的磁场

因为导线是长而且直的，所以导线中电流形成磁场的磁感应线是在垂直于导线平面内以轴线为中心的同心圆。设圆柱形导线的半径为 R，电流 I 均匀地分布在导线内。设某点到导线轴线的距离为 r。在垂直于导线的平面内取一个以轴线为圆心的半径为 r 的圆作为积分回路。如果 $r>R$，则 I 全部在回路内，根据安培环路定理有

$$2\pi rB=\mu_0 I,\quad B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

如果 $r<R$，只有 $\dfrac{\pi r^2}{\pi R^2}\cdot I$ 电流在回路内，则

$$2\pi rB=\mu_0\frac{r^2}{R^2}\cdot I,\quad B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

(2) 载流长直螺线管内的磁场

因为是无限长的螺线管，所以内部的磁感应线应该是和螺线管方向一致的平行线(如图 14-5)。为了计算螺线管内 P 点的磁感应强度，作一个过 P 点的闭合环路 $abcd$。ad 和 bc 边垂直于磁感应线，cd

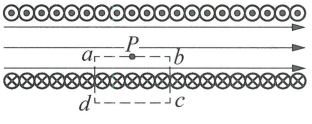


图 14-5

边处没有磁场，所以应用安培环路定理

$$B \cdot \overline{ab} = \mu_0 \overline{ab} n I$$

$$B = \mu_0 n I$$

式中 n 是单位长度的匝数，I 是通过螺线管的电流强度。由此可见：无限长的螺线管内的磁场是匀强磁场。

(3) 载流细螺绕环内的磁场

绕在环形管上的一组圆形电流形成螺绕环(如图 14－6)。如果环上的线圈绕得很紧密，则磁场几乎全部集中在螺绕环内，环外磁场接近于零。由于对称性，环内磁场的磁感应线都是同心圆，圆心在通过环心且垂直于环面的直线上。为了计算环内某点 P 的磁感应强度，取过 P 点的磁感应线作为积分回路。该积分回路的半径为 r，则有

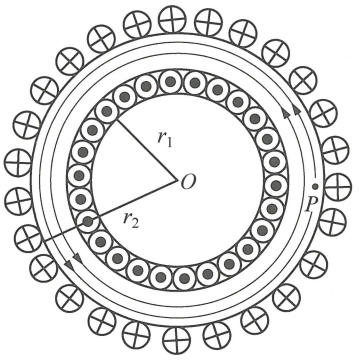


图 14－6

$$B 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

式中 N 是螺绕环的总匝数，I 是通过螺绕环的电流强度。

二 磁场力

1. 安培力

设电流元 $I\mathrm{d}\vec{l}$ 在外磁场 $\vec{B}$ 中所受的磁场力(安培力)为 $\mathrm{d}\vec{F}$，则安培力的表示式为

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$$

根据力的叠加原理，有限长载流导线在磁场中所受的安培力(电流受到的安培力)为 $\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$，该安培力 $\vec{F}$ 为各电流元所受的安培力 $\mathrm{d}\vec{F}$ 的矢量和，简化为 $\vec{F}_{安} = I\vec{L} \times \vec{B}$。安培力大小 $F_{安} = BIL\sin\theta$(θ 为 I 与 B 夹角)，方向由左手定则或从 I 到 B 的右手螺旋定则确定。安培力是洛伦兹力垂直电流方向分力的宏观表现，可能做正功，也可能做负功。

2. 洛伦兹力

运动电荷在磁场中所受到的磁场力称为洛伦兹力，当粒子带电量为 q，在磁场 $\vec{B}$ 中以速度 $\vec{v}$ 运动时，所受磁场力为

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{f}$ 总是与速度 $\vec{v}$ 垂直，故只改变电荷的速度方向，不改变速度大小，洛伦兹力对运动电荷永

远不做功，但洛伦兹力可以有冲量，有力矩作用。

洛伦兹力大小 $f_{洛}=Bqv\sin\theta$（θ 为 v 与 B 夹角），方向由左手定则或从 v 到 B 的右手螺旋定则确定。

三 磁力矩*

磁场对通电线圈的磁场力的矢量和总是为零，但可以产生力矩作用，叫做磁力矩。磁力矩大小 $M_{磁}=NBIS\sin\theta$（N 为匝数，S 为线圈面积，θ 为线圈平面法线与 $\vec{B}$ 的夹角），磁力矩由电流大小、线圈面积、匝数、磁感应强度大小、线圈平面法线与 $\vec{B}$ 的夹角的正弦决定，与线圈形状无关。磁力矩的矢量式为

$$\vec{L}=IS(\vec{e}_{n}\times\vec{B})。$$

这是一个载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩。若磁场不均匀，则除了磁力矩之外，载流线圈还会受到一个不等于 0 的合力。

不难证明，对于线圈平面与磁场垂直的情况，整个线圈所受的合力和合力矩都为 0。对于线圈平面与磁场成任意角度的情况，可将 $\vec{B}$ 分解为两个分量，一个分量与线圈平面平行，另一分量与线圈平面垂直，只有前一分量使线圈受到磁场的力矩。力矩仍是 $\vec{L}=IS(\vec{e}_{n}\times\vec{B})$。式中 $IS\vec{e}_{n}$ 是描述一个任意形状的载流平面线圈本身性质的矢量，称为这个线圈的磁矩，用 $\vec{m}$ 表示：

$$\vec{m}=IS\vec{e}_{n}$$

用线圈的磁矩来表示，上式可写为

$$\vec{L}=\vec{m}\times\vec{B}$$

任意形状的载流平面线圈作为整体，在均匀外磁场中不受力，但受到一个力矩，这力矩总是试图使这线圈的磁矩 m（或者说它的右旋法线矢量 $\vec{e}_{n}$）转到磁感应强度矢量 B 的方向。当 $\vec{m}$ 与 $\vec{B}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，力矩的数值最大（这时力矩 $L=mB=ISB$）；当 $\theta=0$ 或 π 时，力矩 L 都等于 0。但当 $\theta=0$ 时线圈处于稳定平衡状态；$\theta=\pi$ 时线圈处于非稳定平衡状态，这时它稍受扰动，磁场的力矩就会使它继续偏转，直到 m 转向 B 的方向为止。

四 霍尔效应

如图 14-7 所示，将一导电板放在垂直于它的磁场中，当有电流通过它时，在导电板 A、A' 两侧会产生电势差 $U_{AA'}$，这一现象叫做霍尔效应。霍尔效应可以用洛伦兹力来解释。

设导电板内载流子的平均定向移动速度为 v，它们在磁场中所受的洛伦兹力为 qvB。当 A、A' 之间形成电势差后载流子还受到一个相反的电场力 $qE=\dfrac{qU_{AA'}}{h}$。E 为电场强度，h 为导电板的宽度，如图所示，最后达到稳定状态时，两力平衡，有 $qvB=\dfrac{qU_{AA'}}{h}$，此外，设载流子的浓度为 n，则电流强度 I 与 v 的关系为 $I=ndhqv$。于是

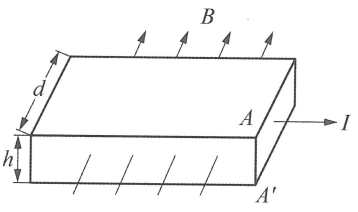


图 14-7

$$U_{AA'}=\frac{1}{nq}\cdot\frac{IB}{d}$$

令 $K=\dfrac{1}{nq}$，K 称为霍尔系数，则

$$U_{AA'}=K\cdot\frac{IB}{d}$$

利用霍尔效应可以研究半导体载流子浓度的变化，根据霍尔电势差 $U_{AA'}$ 的正负，可以判断半导体的导电类型是电子型(N)还是空穴型(P)。

五　质谱仪

质谱仪是一种测定带电粒子荷质比和分析同位素的重要仪器，其基本结构如图 14-8 所示，它的工作程序包括四个过程：

(1) 电离——中性气体在电离室中被电离成带电粒子。

(2) 加速——带电粒子从缝 S_1 进入加速电场，加速电场电压为 U，获得速度 v，且有 $qU=\dfrac{1}{2}mv^2$。

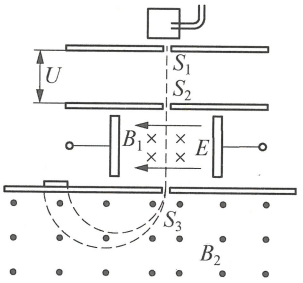


图 14-8

(3) 选择速度——加速后的粒子从缝 S_2 进入相互正交的匀强电场 E 和匀强磁场 B_1 区域，能直线到达缝 S_3 的粒子应满足条件：$qvB_1=qE$。

(4) 产生质谱线——通过缝 S_3 的粒子垂直进入匀强磁场 B_2 区域后做匀速圆周运动，最后打在照片上形成质谱线，此时有 $qvB_2=\dfrac{mv^2}{R}$。

六　回旋加速器

回旋加速器是利用带电粒子在匀强磁场中做匀速圆周运动的周期与运动速率及轨道半径无关来实现对带电粒子的反复加速的装置。如图 14-9 所示，回旋加速器有两个 D 形盒，两个

D形盒之间留有一个窄缝，在中心处放有离子源。D形盒放在真空容器中，整个装置放在巨大电磁铁两极之间，磁场方向垂直于D形盒面。把两D形盒分别接到高频电源的两极上，如果高频电源的周期与带电粒子在D形盒中的运动周期相同，那么带电粒子每一次通过D形盒间的窄缝都会被电场加速。经过反复加速，粒子的速度越来越大，轨道半径也越来越大，趋近盒的边缘。达到预期的速率后，用特殊的装置把它们引出。设带电粒子的电量为 q、质量为 m、磁场的磁感应强度为 B，D形盒的半径为 R，高频电压为 U，窄缝宽度为 d，则带电粒子能达到最大速度 $v_{\mathrm{m}}=\dfrac{BqR}{m}$，

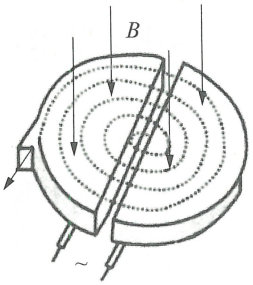


图 14－9

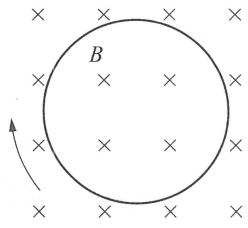
最大动能 $E_{\mathrm{k}}=\dfrac{B^2q^2R^2}{2m}$（与加速电压无关），运动时间

$$t=t_B+t_E=\frac{BR(\pi R+2d)}{2U}$$

由于相对论效应 $\left(m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v_0^2}{c^2}}}\text{，}m_0\text{ 为粒子静止的质量}\right)$ 当粒子的速度很大时，质量将变大，从而使带电粒子的运动周期增长，频率减小，小于高频电源频率，回旋加速器不能保持加速，所以要获得高能量的粒子，需要选择其他类型加速器。

例题精讲

例 1 如图所示，一质量均匀分布的细圆环，其半径为 R，质量为 m。令此环均匀带正电，总电量为 Q。现将此环平放在绝缘的光滑水平桌面上，并处于磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向竖直向下。当此环绕通过其中心的竖直轴以匀角速度 ω 沿图示方向旋转时，环中增加的张力等于多少？（设圆环的带电量不减少，不考虑环上电荷之间的作用）



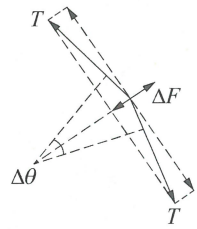
例 1 图 1

解析 当环匀速转动时，环上电荷也随环一起转动，形成电流，电流在磁场中受力导致环中增加张力，同时由于环上任意小段质元做圆周运动使环中张力增加。

在圆环上取 $\Delta L=R\Delta\theta$ 圆弧元，受力情况如图所示。

因转动角速度 ω 而形成的电流 $I=\dfrac{Q\omega}{2\pi}$，电流元 $I\Delta L$ 所受的安培力

$$\Delta F=I\Delta LB=\frac{R\omega}{2\pi}QB\Delta\theta$$



例 1 图 2

因圆环法线方向合力为圆弧元做匀速圆周运动所需的向心力，$2T\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}-\Delta F=\Delta m\omega^2R$。

当 $\Delta\theta$ 很小时，$\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\approx\dfrac{\Delta\theta}{2}$，则

$$T\Delta\theta-\frac{R\omega QB}{2\pi}\Delta\theta=\Delta m\omega^2R$$

因为

$$\Delta m=\frac{m}{2\pi}\Delta\theta$$

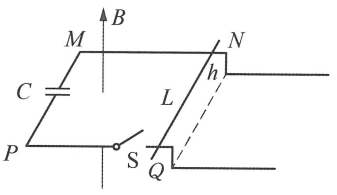
所以

$$T\Delta\theta-\frac{R\omega QB}{2\pi}\Delta\theta=\frac{m\omega^2R}{2\pi}\Delta\theta$$

解得圆环中张力为

$$T=\frac{R\omega}{2\pi}(QB+m\omega)$$

例 2 如图所示，在水平桌面上放有两根相互平行的相距为 0.2 m 的金属导轨 PQ 和 MN，电容器的电容 $C=1\times10^4\ \mu\text{F}$，且已充电完毕，$L$ 是质量 $m=0.1\ \text{kg}$ 的铝棒，它与轨道的摩擦不计，竖直向上的磁场的磁感应强度 $B=2T$，导轨离地面的高度 $h=0.8\ \text{m}$。当开关 S 闭合后，铝棒被推出，落地点的水平位移为 0.4 m。求电容器两极板间的电压的改变量。



例 2 图

解析 设铝棒平抛时初速度为 v_0，安培力作用的时间为 Δt，由平抛运动规律 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$、$s=vt$ 得

$$v_0=s\sqrt{\frac{g}{2h}}=1\ \text{m/s}$$

由动量定理得

$$BLI\,\text{d}t=m\,\text{d}v$$

两边积分

$$\int_0^Q BL\,\text{d}Q=\int_0^{v_0}m\,\text{d}v$$

$$BLQ=mv_0$$

$$Q=\frac{mv_0}{BL}=0.25\ \text{C}$$

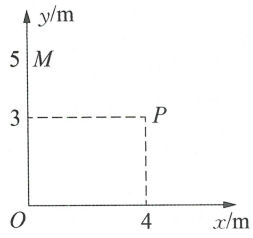
又由

$$C=\frac{Q}{U}$$

得电容器两极板间电压的改变量

$$\Delta U=\frac{Q}{C}=25\ \mathrm{V}$$

例 3 xOy 平面为一光滑水平面，在 $x>0$、$y>0$ 的空间区域内有平行于 xOy 平面的匀强电场，场强大小为 100 V/m；在 $x>0$、$y<3$ m 的区域内同时有垂直于 xOy 平面的磁场。一质量 $m=1\times10^{-6}$ kg、电荷量 $q=2\times10^{-7}$ C 的带负电粒子从坐标原点 O 以一定的初动能入射，在电场和磁场的作用下发生偏转，到达 $P(4,3)$ 点时，动能变为初动能的 0.2 倍；速度方向平行于 y 轴正方向。最后，粒子从 y 轴上点 $M(0,5)$ 射出电场，动能变为初动能的 0.52 倍，粒子重力不计。



例 3 图 1

(1) OP 连线上写出与 M 点等电势点 Q 的坐标；

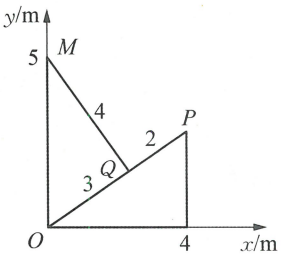
(2) 粒子由 P 点运动到 M 点所需的时间。

解析 (1) 设粒子在 O 点时的动能为 E_{k0}，则 M 点的动能为 $0.52E_{k0}$，由于洛伦兹力不做功，粒子从 O 点到 P 点和从 O 点到 M 点的过程中，电场力做的功分别为 $-0.8E_{k0}$ 和 $-0.48E_{k0}$，O 点和 P 点及 M 点之间的电势差分别为

$$U_{OP}=\frac{0.8E_{k0}}{q}$$

$$U_{OM}=\frac{0.48E_{k0}}{q}$$

由几何关系得 OP 的长度为 5 m，沿 OP 方向电势每米下降 $\frac{0.16E_{k0}}{q}$，则 $OQ=3$ m



例 3 图 2

OP 与 x 轴的夹角 $\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$，$Q$ 点的坐标为

$$x_Q=OQ\cos\alpha=2.4\ \mathrm{m}$$

$$y_Q=OQ\sin\alpha=1.8\ \mathrm{m}$$

(2) M、Q 为等势点，MQ 是电场的一条等势线，等势线与电场垂直；可知电场方向沿 OP 方向，电场强度的 x 方向分量为

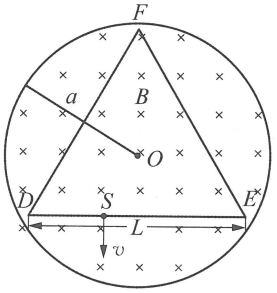
$$E_x=E\cos\alpha=80\ \mathrm{V/m}$$

粒子由 P 点运动到 M 点，在 x 方向上做初速度为 0 的匀加速直线运动，则

$$x_P=\frac{1}{2}\frac{qE_x}{m}t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2mx_P}{qE_x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{s}$$

例 4 如图所示，在半径为 a 的圆柱空间中（图中圆为其横截面）充满磁感应强度大小为 B 的均匀磁场，其方向平行于轴线指向纸面内。在圆柱空间中垂直轴线平面内固定放置一绝缘材料制成的边长为 $L=1.6a$ 的刚性等边三角形框架 $\triangle DEF$，其中心 O 位于圆柱的轴线上。DE 边上 S 点 $\left(\overline{DS}=\dfrac{1}{4}L\right)$ 处有一发射带电粒子的源，发射粒子的方向皆在图中截面内且垂直于 DE 边向下。发射粒子的电量皆为 $+q$，质量皆为 m，但速度 v 有各种不同的数值。若这些粒子与三角形框架的碰撞均为完全弹性碰撞，并要求每一次碰撞时速度方向垂直于被碰的边。试问：



例 4 图 1

（1）带电粒子速度 v 的大小取哪些数值时可使由 S 点发出的粒子最终又回到 S 点？

（2）这些粒子中，回到 S 点所用的最短时间是多少？

解析 （1）从 S 点出发的粒子要做 $R=\dfrac{mv}{qB}$、圆心 O 位于 DE 边上的匀速圆周运动，要求此粒子每次与 $\triangle DEF$ 的三条边碰撞时都与边垂直，要能回到 S 点，则 R 和 v 应满足以下条件：

① 与边垂直的条件。粒子绕过三角形顶点 D、E、F 时的圆弧的圆心就一定要在相邻边的交点上。粒子在 SE 边上最后一次的碰撞点与 E 点的距离应为 R，所以 $\overline{SE}$ 的长度应是 R 的奇数倍。

② 粒子能绕过顶点与三角形的边相碰的条件，如图所示，$R\leqslant\overline{DM}$。

取 $\overline{DS}=R_1$，则

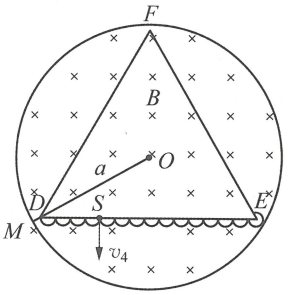
$$\overline{DS}=(2n-1)R=(2n-1)R_n$$

$$R=R_n=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{L}{4}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

此时

$$\overline{SE}=3\overline{DS}=(6n-3)R_n$$

$$\overline{DM}=a-\frac{1.6}{\sqrt{3}}a\approx 0.076a$$



例 4 图 2

将 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，分别代入得

$$n=1,\ R_1=\frac{2a}{5}=0.400a$$

$$n=2,\ R_2=\frac{2a}{15}=0.133a$$

$$n=3,\ R_3=\frac{2a}{25}=0.080a$$

$$n=4,\ R_4=\frac{2a}{35}=0.057a$$

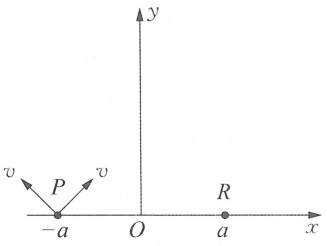
只有 $n\geqslant 4$ 的粒子能经多次碰撞绕过 E、F、D 点，最终回到 S 点。其速度为

$$v_n=\frac{qB}{m}R_n=\frac{qB}{m}\cdot\frac{2a}{5(2n-1)}(n=4,\ 5,\ 6,\ \cdots)$$

(2) 这些粒子在磁场中做圆周运动的周期为 $T=\dfrac{2\pi R}{v}$，粒子从 S 点出发最后回到 S 点的过程中，与三角形的边碰撞次数愈少，所经历的时间就愈少，所以应取 $n=4$，由图可看出该粒子的轨迹包括 3×13 个半圆和 3 个圆心角为 300° 的圆弧，所需时间为

$$t=3\times13\times\frac{T}{2}+3\times\frac{5}{6}T=44\,\frac{\pi m}{qB}$$

例 5 质量均为 m、电荷量均为 q 的一簇离子在 $P(-a,\ 0)$ 点朝 x、y 上半平面各个方向以速率 v 散开，且 $\dfrac{mv}{|q|B}<a$，如图 1 所示，垂直 x、y 平面的匀强磁场将这些离子会聚于 $R(a,\ 0)$ 点，设离子间的相互作用可以忽略，磁感应强度为 B，试确定磁场区域的边界。



例 5 图 1

解析 离子进入磁场做匀速圆周运动，离开磁场则做匀速直线运动。因为 P、R 是相对 y 轴对称的，因此离子运动轨迹也是相对 y 轴对称的，圆周运动的圆心一定都在 y 轴上，磁场区也必然左右对称。

解法一：设轨道圆心在 $(0,\ b)$ 点，轨道半径为 $r=\dfrac{mv}{|q|B}$，离子在磁场边界点 $(x,\ y)$ 外切向地飞离圆轨道指向 R 点。由图 2 中两个直角三角形的相似关系可得

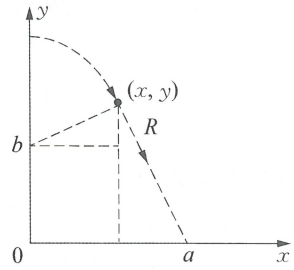
$$\frac{y-b}{x}=\frac{a-x}{y}$$

因为 $(x,\ y)$ 点也属于圆轨迹，所以

$$x^2+(y-b)^2=r^2$$

两式联列消去 $(y-b)$，便得

$$(r^2-x^2)y^2=(a-x)^2x^2$$



例 5 图 2

这是一条过 $(0,\ 0)$ 点的四次曲线，但这并不相对 y 轴对称，因此只取它在第一象限的部分代表磁场区域的右边界。左边界为右边界相对 y 轴的对称曲线，应是

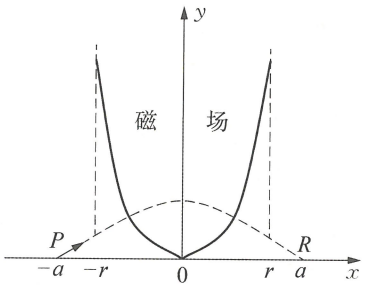
$$(r^2-x^2)y^2=(a+x)^2x^2$$

因此磁场边界可表述为

$$y=\begin{cases}\dfrac{x(a-x)}{\sqrt{r^2-x^2}},\ x\geqslant0\\[2ex] -\dfrac{x(a+x)}{\sqrt{r^2-x^2}},\ x<0\end{cases}$$

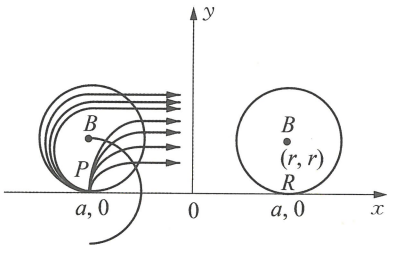
显然必须有 $0 \leqslant |x| < r$。

因为有 $\dfrac{mv}{|q|B} < a$ 的条件，即 $r < a$，磁场区域如图 3 所示。离子束中出射角 $\varphi < 90^\circ$ 的离子均可会聚于 R 点，而出射角 $\varphi \geqslant 90^\circ$ 的均不能到达 R 点。



例 5 图 3

解法二：如果在坐标的第一、二象限各有一个圆柱形的磁场区，圆柱的轴线和磁场都垂直于 xy 平面，圆心分别在 (r, r) 点和 $(-r, r)$ 点，半径都是 r，$r = \dfrac{mv}{|q|B}$，如图 4 所示。那么从 P 点发出的离子经过第二象限磁场的偏转后，沿着平行于 x 轴的方向向右飞出磁场区。所有离子在磁场区中的轨迹都是一系列圆弧，这些圆弧的圆心都在以 $(-a, 0)$ 为圆心、r 为半径的圆的右半个圆弧上，半径也就是 r。离子进入第一象限后，经过与第二象限相反的路线会聚到 R 点。



例 5 图 4

这种磁场可使从 P 点发出的所有在 xy 平面内的离子都到达 R 点。

例 6 回旋加速器的 D 形盒半径为 $R = 60$ cm，两盒间距为 1 cm，用它加速质子时可使每个质子获得 4 MeV 的能量，加速电压为 $U = 2 \times 10^4$ V，求：

(1) 该加速器中偏转磁场的磁感应强度 B；

(2) 质子在 D 形盒中运动的时间 t；

(3) 整个加速过程中，质子在电磁场中运动的总时间。

解析 (1) 由题意得

$$R = \frac{mv}{Bq} = \frac{\sqrt{2mE_k}}{Bq}$$

代入数据得

$$B = 0.47\ \mathrm{T}$$

(2) 设质子经过 n 次加速，圆周运动的半径达到 R，则

$$R_n = \frac{\sqrt{2m \cdot nqU}}{Bq}$$

由 $R_n = R$，可求质子在 D 形盒中运动的时间为

$$t = \frac{n}{2}T = n \cdot \frac{\pi m}{Bq}$$

代入数据得

$$t = 1.39 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

(3) 由

$$evB = \frac{mv^2}{R},\ a = \frac{eU}{md},\ v = at'$$

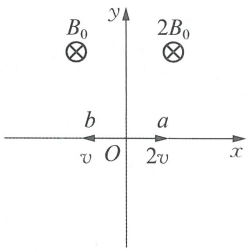
可解得

$$t' = 0.06 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}$$

在整个加速过程中，质子在电磁场中运动的总时间为

$$t_{总}=t+t'=1.45\times10^{-5}\ \mathrm{s}$$

例 7 如图 1 所示，y 轴右边存在磁感应强度为 $2B_0$ 的匀强磁场，y 轴左边存在磁感应强度为 B_0 的匀强磁场，它们的方向皆垂直于纸面向里。在原点 O 处，一个带正电的电荷量为 q、质量为 m 的粒子 a，在 $t=0$ 时以大小为 $2v$ 的初速度沿 x 轴方向运动。在粒子 a 开始运动后，另一质量和电荷量都与 a 相同的粒子 b 从原点 O 以大小为 v 的初速度沿负 x 轴方向开始运动。要想使 a 和 b 能在运动过程中相遇，试分析和计算它们出发的时间差的最小值应为多大，并求出与此对应的相遇地点的坐标。设整个磁场区域都处于真空中，且不考虑重力及 a、b 两粒子之间相互作用力。



例 7 图 1

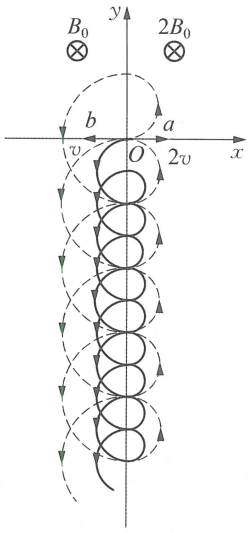
解析 a 粒子开始在第一象限中运动（y 轴以右），则

$$T_{ar}=\frac{2\pi m}{q(2B_0)}=\frac{\pi m}{qB_0},\ R_{ar}=\frac{m(2v_0)}{q(2B_0)}=\frac{mv_0}{qB_0}$$

经半个周期后，进入第二、三象限中（y 轴以左），周期和轨道半径变为

$$T_{al}=\frac{2\pi m}{qB_0},\ R_{al}=\frac{2mv_0}{qB_0}$$

以后就按此模式在 xOy 平面内沿图 2 中的虚线运动。



例 7 图 2

同理，粒子 b 开始在第三象限（y 轴以左）中运动，则

$$T_{bl}=\frac{2\pi m}{qB_0},\ R_{bl}=\frac{mv_0}{qB_0}$$

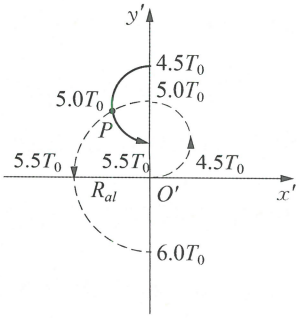
经半个周期后，进入第四象限（y 轴以右）运动，周期和轨道半径变为

$$T_{br}=\frac{\pi m}{qB_0},\ R_{br}=\frac{mv_0}{2qB_0}$$

以后就按此模式在 xOy 平面内沿图 2 中的实线运动。

假设管 a、b 同时开始运动，分析可看出，在 $5T_0$ 到 $5.25T_0$ 之间的交叉点（图 3 中的 P 点），a、b 通过它的时间差最短。

取负 y 轴上距原点 O 为 $3R_{al}$（即 $6R_{bl}$）处为新的原点 O'，如图 3 所示。取时间 $t=5T_0$ 为新的起始计时时刻，对 a 用 $t'=0$ 表示，对 b 用 $t''=0$ 表示。在 y 轴以左 a、b 的周期相同，所以角速度亦相同，以 ω_1 表示 a、b 在 y 轴以左的角速度 $\omega_1=\dfrac{\pi}{T_0}$。



例 7 图 3

对 a　　$x'_a=R_{al}\cdot\cos\left(\omega_1 t'+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y'_a=R_{al}\cdot\sin\left(\omega_1 t'+\dfrac{\pi}{2}\right)$

对 b　　$x'_b=\dfrac{R_{a1}}{2}\cdot\cos(\omega_1 t''+\pi)$，$y'_b=R_{a1}+\dfrac{R_{a1}}{2}\cdot\sin(\omega_1 t''+\pi)$

$$x'_a=x'_b,\ y'_a=y'_b$$

由以上各式可解得所求的时间差应为

$$\Delta t=t'-t''=0.0802\frac{\pi m}{qB_0}$$

要 a、b 相遇，则 b 的出发时间应比 a 晚 $0.0802\dfrac{\pi m}{qB_0}$。

由以上各式还可求得在 $x'O'y'$ 坐标系中 P 点的坐标：

$$x'_P=-\frac{\sqrt{15}}{8}R_{a1}=-0.484R_{a1}=-0.968\frac{mv_0}{qB_0}$$

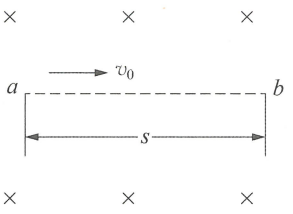
$$y'_P=-\frac{7}{8}R'_{a1}=0.875R_{a1}=1.75\frac{mv_0}{qB_0}$$

换为 xOy 坐标系：

$$x_P=-0.968\frac{mv_0}{qB_0}$$

$$y_P=-3R_{a1}+\frac{7}{8}R_{a1}=-2.125R_{a1}=-4.25\frac{mv_0}{qB_0}$$

例 8　如图所示，空间有一个与水平面平行且垂直纸面向里的足够大的匀强磁场 B，在磁场区域内有 a、b 两点，相距为 s，ab 连线在水平面上且与 B 垂直。一质量为 m，带电量为 $+q$ 的粒子从 a 点以初速度 v_0 对着 b 点射出，为使粒子能经过 b 点，试问 v_0 可取什么值？



例 8 图

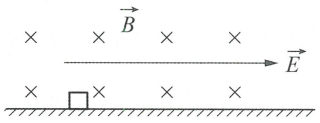
解析　带电粒子以初速度 v_0 从 a 点射出，所受重力竖直向下，洛伦兹力竖直向上，若两力恰好抵消，则粒子将做直线运动，必然经过 b 点，所以为 $v_{01}=\dfrac{mg}{Bq}$。

若 $v_0\neq v_{01}$，可将粒子速度 v_0 分解为 $\vec{v_0}=\vec{v_{01}}+\vec{v}$，粒子的运动看成是以 v_{01} 指向 b 的匀速直线运动和以 v 的匀速圆周运动的合运动。为确保击中 b，必须使圆周运动这一分运动恰好是完整的 N 圈，这时匀速直线运动的位移也恰好是 s，则 $T=\dfrac{2\pi m}{Bq}$，$s=N\cdot T\cdot v_{01}=\dfrac{2N\pi m^2 g}{B^2q^2}$，$N=1,2,\cdots$，将以上两种情况综合，可得结论：

若 $s\neq\dfrac{2N\pi m^2 g}{B^2q^2}$，$N=1,2,\cdots$，则粒子以 $v_0=\dfrac{mg}{Bq}$ 的速度射出必能击中 b 点；

若 $s=\dfrac{2N\pi m^2 g}{B^2q^2}$，$N=1,2,\cdots$，则粒子以任何初速度 v_0 射出后均能击中 b 点。

例 9 无限大绝缘水平台面上放有质量为 m、电荷量为 $+q$ 的滑块，滑块和水平台面之间的动摩擦因数为 μ，水平台面上方有场强大小为 E、方向水平向右的匀强电场和垂直于纸面的磁感应强度大小为 B 的匀强磁场，且 $\mu<\dfrac{qE}{mg}$，滑块由静止释放后经过时间 t 离开水平台面，求这段时间内滑块经过的路程及滑块离开水平台面后能达到的最大速度。



例 9 图

解析 滑块开始向右加速、获得向右速度后，另外受到竖直向上的洛伦兹力作用，导致滑块所受的滑动摩擦力变小，做加速运动的加速度的相应变大，对滑块考察一段极短时间 Δt，利用动量定理得 $qE\Delta t-\mu(mg+qBv)\Delta t=m\Delta v$，将上式累加后，即可得

$$qEt-\mu mgt-\mu qBs=mv_{\mathrm{m}}$$

而物体离开水平台面时满足

$$qBv_{\mathrm{m}}=mg$$

解得

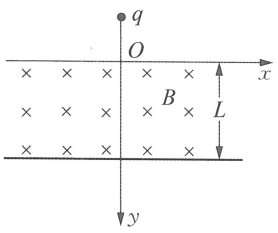
$$s=\frac{m^2g+\mu mgtBq-q^2BEt}{\mu q^2B^2}$$

滑块离开水平台面时，虚拟竖直向上速度 v_{01} 和竖直向下速度 v_{02}，且 $v_{01}=v_{02}$，$qv_{01}B=qE$，则 v_{m} 引起的洛伦兹力与重力相平衡，使滑块以 v_{m} 做匀速直线运动，v_{01} 引起的洛伦兹力与电场力相平衡，使滑块以 v_{01} 做匀速直线运动，所以滑块做匀速直线分运动的合速度 $v_0=\sqrt{v_{01}^2+v_{\mathrm{m}}^2}$；$v_{02}$ 引起的洛伦兹力就是滑块受到的合力，使滑块以 v_{02} 做匀速圆周分运动。故滑块的运动为以 v_0 的匀速直线运动和以 v_{02} 的匀速圆周运动合成的滚轮线运动。

当 v_0 与 v_{02} 方向相同时速度最大，设为 v'_{m}，则 $v'_{\mathrm{m}}=v_{02}+v_2$，解得

$$v'_{\mathrm{m}}=\frac{E}{B}+\sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2+\left(\frac{mg}{qB}\right)^2}$$

例 10 在真空中建立一坐标系，以水平向右为 x 轴正方向，竖直向下为 y 轴正方向，z 轴垂直纸面向里，如图 1 所示。在 $0\leqslant y\leqslant L$ 的区域内有匀强磁场，$L=0.80\ \mathrm{m}$，磁场的磁感应强度的方向沿 z 轴的正方向，其大小 $B=0.10\ \mathrm{T}$。今把一荷质比 $\dfrac{q}{m}=50\ \mathrm{C\cdot kg^{-1}}$ 的带正电质点在 $x=0$，$y=-0.20\ \mathrm{m}$，$z=0$ 处由静止释放，将带电质点过原点的时刻定为 $t=0$ 时刻，求带电质点在磁场中任一时刻 t 的位置坐标。并求它刚离开磁场时的位置和速度。取重力加速度 $g=10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。



例 10 图 1

解析 带电质点静止释放时，受重力作用做自由落体运动，当它到达坐标原点时，速度为

$$v_1=\sqrt{2g\mid y\mid}=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

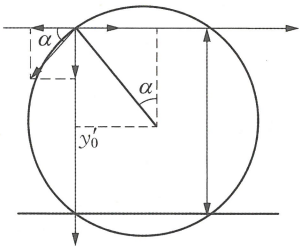
方向竖直向下。带电质点进入磁场后，除受重力作用外，还受到洛伦兹力作用，质点速度的大小和方向都将变化，洛伦兹力的大小和方向亦随之变化。设想在带电质点到达原点时，给质点附加上沿 x 轴正方向和负方向两个大小都是 v_0 的初速度。在 $t=0$ 时刻，带电质点因具有沿 x 轴正方向的初速度 v_0 而受洛伦兹力 f_1 的作用

$$f_1=qv_0B$$

其方向与重力的方向相反。适当选择 v_0 的大小，使 f_1 等于重力，即 $qv_0B=mg$，得

$$v_0=\frac{q}{\frac{q}{m}B}=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

带电质点竖直向下的速度 v_1 和沿 x 轴负方向的速度 v_0 的合成速度大小为 $v=\sqrt{v_0^2+v_1^2}=2.8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向指向左下方，设它与 x 轴的负方向的夹角为 α，如图 2 所示，则



例 10 图 2

$$\tan\alpha=\frac{v_1}{v_0}=1$$

得

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$

因而带电质点从 $t=0$ 时刻起的运动可以看做是速率为 v_0，沿 x 轴的正方向的匀速直线运动和在 xOy 平面内速率为 v 的匀速圆周运动的合成。圆周半径

$$R=\frac{mv}{qB}=0.56\ \mathrm{m}$$

带电质点进入磁场瞬间所对应的圆周运动的圆心 O' 位于垂直于质点此时速度 v 的直线上，其坐标为

$$\begin{cases}x_{O'}=R\sin\alpha=0.40\ \mathrm{m}\\ y_{O'}=R\cos\alpha=0.40\ \mathrm{m}\end{cases}$$

圆周运动的角速度

$$\omega=\frac{v}{R}=5.0\ \mathrm{rad^{-1}}$$

带电质点离开磁场区域前的任何时刻 t，质点位置的坐标为

$$x=v_0t-[R\sin(\omega t+\alpha)-x_{O'}],\ y=y_{O'}-R\cos(\omega t+\alpha)$$

带电质点到达磁场区域下边界时，$y=L=0.80\ \mathrm{m}$，代入有关数值，解得

$$t=0.31\ \mathrm{s},\ x=0.63\ \mathrm{m}$$

所以带电质点离开磁场下边界时的位置的坐标为

$$x=0.63\ \mathrm{m},\ y=0.80\ \mathrm{m},\ z=0$$

带电质点在磁场内的运动可分解成一个速率为 v 的匀速圆周运动和一个速率为 v_0 的沿 x 轴正方向的匀速直线运动，任何时刻 t，带电质点的速度 u 便是匀速圆周运动速度 v 与匀速直线运动的速度 v_0 的合速度。若圆周运动的速度在 x 方向和 y 方向的分量为 v_x、v_y，则质点合速度在 x 方向和 y 方向的分速度分别为

$$u_x=v_x+v_0,\ u_y=v_y$$

由于圆周运动的圆心的 y 坐标恰为磁场区域宽度的一半，由对称性可知，带电质点离开磁场下边缘时，圆周运动的速度方向应指向右下方，与 x 轴正方向夹角 $\alpha'=\dfrac{\pi}{4}$，故代入数值得

$$v_x=v\cos\alpha'=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$v_y=v\sin\alpha'=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

解得带电质点刚离开磁场区域时的速度分量分别为

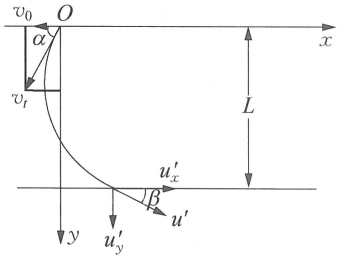
$$u_x=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$u_y=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

速度大小为 $u=\sqrt{u_x^2+u_y^2}=4.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，设 u 的方向与 x 轴的夹角为 β，如图 3 所示，则

$$\tan\beta=\frac{u_y}{u_x}=\frac{1}{2}$$

解得

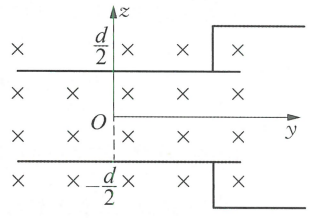
$$\beta=27^\circ$$



例 10 图 3

例 11 平行板电容器两极板分别位于 $z=\pm\dfrac{d}{2}$ 的平面内，电容器起初未被充电。整个装置处于均匀磁场中，磁感应强度大小为 B，方向沿 x 轴负方向，如图所示。

(1) 在电容器参考系 S 中只存在磁场；而在以沿 y 轴正方向的恒定速度 $(0,\ v,\ 0)$（这里 $(0,\ v,\ 0)$ 表示为沿 x、y、z 轴正方向的速度分量分别为 0、v、0，以下类似）相对于电容器运动的参考系 S' 中，可能既有电场 $(E'_x,\ E'_y,\ E'_z)$ 又有磁场 $(B'_x,\ B'_y,\ B'_z)$。试在非相对论情形下，从伽利略速度变换，求出在参考系 S' 中电场 $(E'_x,\ E'_y,\ E'_z)$ 和磁场 $(B'_x,\ B'_y,\ B'_z)$ 的表达式。已知电荷量和作用在物体上的合力在伽利略变换下不变。



例 11 图

(2) 现在让介电常数为 ε 的电中性液体（绝缘体）在平行板电容器两极板之间匀速流动，流速大小为 v，方向沿 y 轴正方向。在相对液体静止的参考系（即相对于电容器运动的参考系）S'

中，由于液体处在第1问所述的电场(E_x', E_y', E_z')中，其正负电荷会因电场力作用而发生相对移动(即所谓极化效应)，使得液体中出现附加的静电感应电场，因而液体中总电场强度不再是(E_x', E_y', E_z')，而是$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(E_x', E_y', E_z')$，这里$\varepsilon_0$是真空的介电常数。这将导致在电容器参考系$S$中电场不再为零。试求电容器参考系$S$中电场的强度以及电容器上、下极板之间的电势差。(结果用ε_0、ε、v、B或(和)d表示)

解析 (1) 一个带电量为q的点电荷在电容器参考系S中的速度为(u_x, u_y, u_z)，在运动的参考系S'中的速度为(u_x', u_y', u_z')。在参考系S中只存在磁场$(B_x, B_y, B_z)=(-B, 0, 0)$，因此这个点电荷在参考系$S$中所受磁场的作用力为

$$F_x=0,\ F_y=-qu_zB,\ F_z=qu_yB$$

在参考系S'中可能既有电场(E_x', E_y', E_z')又有磁场(B_x', B_y', B_z')，因此点电荷d在S'参考系中所受电场和磁场的作用力的合力为

$$\begin{aligned}F_x'&=q'(E_x'+u_y'B_z'-u_z'B_y')\\F_y'&=q'(E_y'-u_x'B_z'+u_z'B_x')\\F_z'&=q'(E_z'+u_x'B_y'-u_y'B_x')\end{aligned}\qquad①$$

两参考系中电荷、合力和速度的变换关系为

$$\begin{aligned}q'&=q\\(F_x', F_y', F_z')&=(F_x, F_y, F_z)\\(u_x', u_y', u_z')&=(u_x, u_y, u_z)-(0, v, 0)\end{aligned}$$

由以上三式可知电磁场在两参考系中的电场强度和磁感应强度满足

$$\begin{aligned}E_x'+(u_y-v)B_z'-u_zB_y'&=0\\E_y'-u_xB_z'+u_zB_x'&=-u_zB,\\E_z'+u_xB_y'-(u_y-v)B_x'&=u_yB\end{aligned}$$

它们对于任意的(u_x, u_y, u_z)都成立，故

$$(E_x', E_y', E_z')=(0, 0, vB),\ (B_x', B_y', B_z')=(-B, 0, 0)\qquad②$$

可见两参考系中的磁场相同，但在运动的参考系S'中却出现了沿z方向的匀强电场。

(2) 电中性液体在平行板电容器两极板之间以速度$(0, v, 0)$匀速运动。电容器参考系S中的磁场会在液体参考系S'中产生由②式中第一个方程给出的电场。这个电场会把液体极化，使得液体中的电场为

$$(E_x', E_y', E_z')=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}(0, 0, vB)$$

下面从液体参考系 S' 中的电场和磁场来确定电容器参考系 S 中的电场和磁场。考虑一带电量为 q 的点电荷在两参考系中所受的电场和磁场的作用力。在液体参考系 S' 中，这力(F_x'，F_y'，F_z')如①式所示。它在电容器参考系 S 中的形式为

$$F_x = q(E_x + u_y B_z - u_z B_y)$$
$$F_y = q(E_y - u_x B_z + u_z B_x)$$
$$F_z = q(E_z + u_x B_y - u_y B_x)$$

利用两参考系中电荷、合力和速度的变换关系，可得

$$E_x + u_y B_z - u_z B_y = 0$$
$$E_y - u_x B_z + u_z B_x = -u_z B$$
$$E_z + u_x B_y - u_y B_x = \frac{\varepsilon_0 vB}{\varepsilon} + (u_y - v)B$$

对于任意的(u_x，u_y，u_z)都成立，故

$$(E_x, E_y, E_z) = \left(0, 0, \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - 1\right)vB\right)$$
$$(B_x, B_y, B_z) = (-B, 0, 0) \qquad ③$$

可见，在电容器参考系 S 中的磁场仍为原来的磁场，现由于运动液体的极化，也存在电场，电场强度如③中第一式所示。

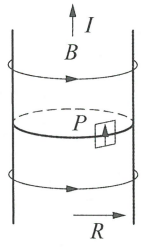
电容器上、下极板之间的电势差为

$$V = -E_2 d$$

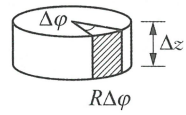
由③式中第一式和上式得

$$V = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)vBd$$

例 12 电流强度 I 沿着半径为 R 的薄壁长圆筒轴线流动，求圆筒侧壁单位面积受多大的压力？



例 12 图 1



例 12 图 2

解析 如图 1 所示，薄壁长圆筒沿轴向均匀地流过电流强度 I，由安培环路定理可知，圆筒内的磁感应强度为零，筒壁外侧的磁感应强度为

$$B(R_+)=\frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{R}$$

在筒壁 P 点处取一小面元

$$\Delta S=R\Delta\varphi\cdot\Delta z$$

如图 2 所示，电流元

$$I\Delta z=i\cdot R\Delta\varphi\cdot\Delta z=i\Delta S$$

其中面电流密度

$$i=\frac{1}{2\pi R}$$

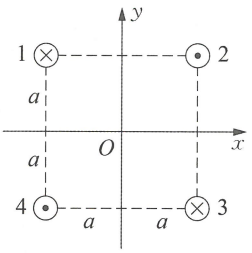
由叠加原理和对称性可知，小面元处筒壁其余部分电流产生的磁感应强度必为 $B(R_+)$ 的一半，方向与图 1 中相同。所以 P 点处电流元受力大小为

$$\Delta f=I\Delta z\cdot\frac{1}{2}B(R_+)=i\Delta S\cdot\frac{1}{2}B(R_+)$$

单位面积受力为

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}=\frac{1}{2}iB(R_+)=\frac{1}{2}\cdot\frac{I}{2\pi R}\cdot\frac{\mu_0}{1\pi}\cdot\frac{I}{R}=\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2R^2}=\frac{1}{2}\mu_0 i^2$$

例 13 Ioffe-Pritchard 磁阱可用来束缚原子的运动，其主要部分如图所示。四根均通有恒定电流 I 的长直导线 1、2、3、4 都垂直于 xOy 平面，它们与 xOy 平面的交点是边长为 $2a$、中心在原点 O 的正方形的顶点，导线 1、2 所在平面与 x 轴平行，各导线中电流方向已在图中标出。整个装置置于匀强磁场 $\vec{B}_0=B_0\vec{k}$（$\vec{k}$ 为 z 轴正方向单位矢量）中。已知真空磁导率为 μ_0。



例 13 图

(1) 求电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布；

(2) 电流在原点附近产生的总磁场的近似表达式，保留至线性项。

解析 (1) 四根通有直流电流 I 的导线在 xOy 平面内的空间坐标依次是

$$(-a,a),(a,a),(a,-a),(-a,-a)$$

取 x 轴和 y 轴方向单位矢量为 $\vec{i}$ 和 $\vec{j}$，考虑通电导线外任一点 (x,y)。导线 1、2、3、4 上的电流在点 (x,y) 产生的磁场 $\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$、$\vec{B}_3$、$\vec{B}_4$ 为

$$\vec{B}_1=\frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\frac{-(y-a)\vec{i}+(x+a)\vec{j}}{(x+a)^2+(y-a)^2}$$

$$\vec{B}_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y-a)\vec{i}+(x-a)\vec{j}}{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

$$\vec{B}_3=\frac{\mu_0(-I)}{2\pi}\frac{-(y+a)\vec{i}+(x-a)\vec{j}}{(x-a)^2+(y+a)^2}$$

$$\vec{B}_4=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y+a)\vec{i}+(x+a)\vec{j}}{(x+a)^2+(y+a)^2}$$

导线电流在通电导线外产生的总磁场的空间分布为

$$\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4=$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\left[\frac{y-a}{(x+a)^2+(y-a)^2}-\frac{y-a}{(x-a)^2+(y-a)^2}+\frac{y+a}{(x-a)^2+(y+a)^2}-\frac{y+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\right]\vec{i}+\right.$$

$$\left.\left[-\frac{x+a}{(x+a)^2+(y-a)^2}+\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-a)^2}-\frac{x-a}{(x-a)^2+(y+a)^2}+\frac{x+a}{(x+a)^2+(y+a)^2}\right]\vec{j}\right\}$$

(2) 对于原点 O 附近的任一点$(x,\ y)$,有

$$|x|\ll a,\ |y|\ll a$$

保留至$\frac{x}{a}$、$\frac{y}{a}$的一次项,$\vec{B}_1$、$\vec{B}_2$、$\vec{B}_3$、$\vec{B}_4$ 可近似为

$$\vec{B}_1\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\vec{i}-(a+y)\vec{j}]$$

$$\vec{B}_2\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\vec{i}-(a+y)\vec{j}]$$

$$\vec{B}_3\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[(a+x)\vec{i}+(a-y)\vec{j}]$$

$$\vec{B}_4\approx\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}[-(a-x)\vec{i}+(a-y)\vec{j}]$$

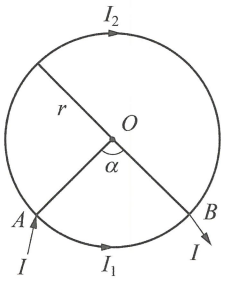
电流在原点附近任一点$(x,\ y)$产生的总磁场可近似为

$$\vec{B}\approx\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(x\vec{i}-y\vec{j})$$

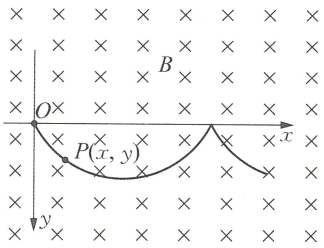
练习题

1 如图所示,将均匀细导线做成的环上的任意两点 A 和 B 与电源连接起来,计算由环上电流引起的环中心的磁感应强度。

2 一根长为 l 的导线,载电流为 I,如果此导线绕成单匝线圈放在磁感应强度为 B 的匀强磁场中,什么条件下,这个线圈所受的磁力矩最大?最大磁力矩值是多少?



第 1 题图



第 3 题图

3 在磁感应强度为 B 的水平匀强磁场中，一质量为 m、带正电 q 的小球在 O 处静止释放，小球的运动曲线如图所示。已知此曲线在最低点的曲率半径为该点到 x 轴距离的 2 倍，重力加速度为 g。求：

(1) 小球运动到任意位置 $P(x, y)$ 的速率 v。

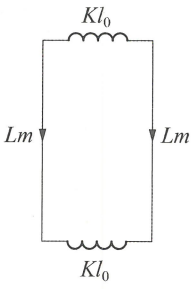
(2) 小球在运动过程中第一次下降的最大距离 y_m。

(3) 在上述磁场中加一竖直向上、场强为 $E\left(E>\dfrac{mg}{q}\right)$ 的匀强电场时，小球从 O 静止释放后获得的最大速率 v_m。

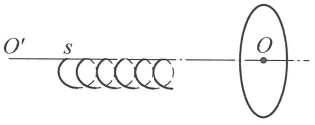
4 质量为 m，电量为 $+q$ 的带电小球在水平匀强磁场 B 中从离地面高度 h 处由静止释放，为使带电小球不与地面碰撞，求 B 的最小值及 B 取最小值时带电小球的运动轨迹。

5 电荷量为 q 的粒子飞入相互垂直的匀强电场 E 和匀强磁场 B 的区域，在此区域粒子还受到黏滞摩擦力 $f=-kv$ 作用(k 为已知正数，v 为粒子瞬时速度)，求粒子稳定运动时的速度大小和方向。

6 如图所示，两根平行金属棒与两金属弹簧构成回路，已知棒长为 L，质量为 m，只能做左右对称的振动，边缘效应可以忽略，已知弹簧的劲度系数为 K，原长为 l_0($l_0 \ll L$)，设以某种方式使回路有恒定的电流 I，如果电磁感应可以忽略，试求两棒围绕平衡位置做小振动的周期。



第 6 题图



第 7 题图

7 s 为一离子源，它能机会均等地向各方向持续地大量发射正离子，离子质量皆为 m，电荷皆为 q，速率皆为 v_0。在离子源的右侧有一半径为 R 的圆屏，如图所示。图中 OO' 是通过圆屏的

圆心并垂直于屏面的轴线，s 位于轴线上。离子源和圆屏所在的空间有一范围足够大的匀强磁场，其磁感应强度的大小为 B，方向垂直于圆屏向右。在发射的离子中，有的离子不管 sO 的距离如何改变，总能打到圆屏上，试求这类离子的数目与总发射离子数之比。不考虑离子间的碰撞。

8 在坐标系 $O-xyz$ 中 z 轴竖直向上，在点 $(0,\ 0,\ h)$ 处，固定一个电荷量为 $-Q$ 的点电荷，同时还有一个竖直向上的匀强磁场，磁感应强度为 B。今有两个粒子，第一个粒子质量为 m_1，电荷量为 $q_1(q_1>0)$，第二个粒子质量为 m_2，电荷量未知。首先，第一个粒子在 xOy 平面内以 O 为圆心，做匀速圆周运动，然后第二个粒子从远处飞来，沿着圆周切线方向，与第一个粒子发生完全非弹性碰撞，并结合成一个复合粒子，如果这个复合粒子仍然在 xOy 平面内做匀速圆周运动，问：

(1) 第二个粒子带有多少电荷？

(2) 第二个粒子是从第一个粒子的前面还是后面飞来与之相碰的？

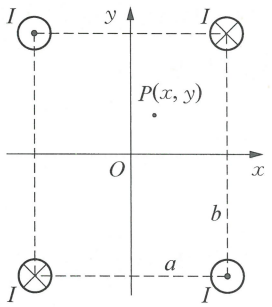
(3) 第二个粒子碰前的速度是多少？

9 某长直弹簧由涂了绝缘漆的磷铜细丝绕制 N 匝而成，可视为横截面半径为 r 的长直螺线管。弹簧原长为 $l_0(l_0\gg r)$，劲度系数为 k。假设在弹簧形变过程中，螺线管始终可视为均匀密绕的，其横截面半径的变化可忽略。不计边缘效应、漏磁和重力。真空磁导率为 μ_0。用恒流源通过柔软导线对螺线管通以不变的电流 I_0，通电期间用外力使弹簧处处无形变。缓慢撤除外力后，弹簧达到新的平衡位置(但仍可压缩或拉伸)，此时的长度记为 l_p。

(1) 试导出可求解 l_p 的代数方程(但不必求解)，并求通电弹簧在其平衡位置附近发生小幅度形变时的等效弹性系数 k_{eff}(表达式中可以含有参量 l_p)；

(2) 求能实现上述平衡状态的 I_0 的取值范围(表达式中不得含有参量 l_p)。

10 利用磁阱囚禁原子的一种常见装置是 Ioffe 势阱。Ioffe 势阱由四根横截面积可忽略、相互平行的无限长直导线组成。这四根导线垂直穿过一边长为 a 和 b 的长方形的四个顶点。导线中通以大小相同的电流 I，电流方向如图所示。以长方形中心 O 点为原点，垂直于长度分别为 b、a 的边的直线为 x、y 轴，建立右手直角坐标系，任取 $x-y$ 平面上原点附近一点 P，其坐标为 $(x,\ y,\ 0)$ $(x\ll a,\ y\ll b;\ a$ 和 b 为同阶量)，求 O、P 两点的磁感应强度；所得结果如果可做小量近似，试将所得结果做小量近似并保留至领头阶。



第 10 题图



第 15 章 电磁感应和电磁波



知识要点和基本方法

一 电磁感应

当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中会产生感应电动势，这类现象称为电磁感应现象。如果回路是闭合的，将会形成感应电流。

1. 法拉第电磁感应定律

精确的实验表明，导体回路中感应电动势 $\mathscr{E}$ 的大小与穿过回路的磁通量的变化率 $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 成正比。这个结论叫做法拉第电磁感应定律。用公式来表示为

$$\mathscr{E}\propto\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\text{ 或 }\mathscr{E}=-k\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

式中 k 是比例常数，它的数值决定于式中各量的单位。如果 Φ 的单位用 Wb(韦伯)，时间单位用 s，$\mathscr{E}$ 的单位用 V，则 $k=1$，

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

式中的负号表示感应电动势的方向，由楞次定律判定。如果回路不是单匝线框而是多匝线圈，那么当磁通量变化时，每匝中都将产生感应电动势。由于匝和匝之间是互相串联的，整个线圈的总电动势就等于各匝所产生的电动势之和。令 Φ_1、Φ_2、…、Φ_N 分别是通过各匝线圈的磁通量，则

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}-\cdots-\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_N)=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$$

式中 $\Psi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_N$ 叫做全磁通(也叫磁链)。如果穿过每匝线圈的磁通量相同，均为 Φ，则 $\Psi=N\Phi$，

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}=-N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

2. 楞次定律

闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场阻止引起感应电流的磁通量的变化。即感应电流的磁场方向与引起感应电流的磁通量方向满足“增反减同”。

如果用“−”表示楞次定律描述的 $\mathscr{E}$ 与 Φ 的关系，则

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\text{ 或 }\mathscr{E}=-N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

感应电动势 $\mathscr{E}$ 的正负总是与磁通量变化率$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$的正负相反。

在电磁感应现象中磁通量 Φ 的变化是关键，由 $\Phi=BS\sin\theta$（θ 为 B 和 S 平面的夹角）可知：θ、B、S 三者中只要有一个发生变化，就将引起磁通量 Φ 的变化，从而产生感应电动势。根据电磁感应现象产生的机理不同，感应电动势可以分为动生电动势和感生电动势。

3. 动生电动势

导体在磁场中做切割磁感线运动时，导体中产生的感应电动势叫动生电动势。动生电动势的产生是洛伦兹力作用的结果。导体 ab 在磁场 B 中做垂直于磁感线的运动，速度为 v，导体长度为 L。由于导体中所有自由电子也随着导体一起以 v 向右运动，因而受到洛伦兹力 $F_{洛}=evB$，这样就使导体的 b 端积累了负电荷，a 端积累了正电荷，如图 15-1 所示，形成了感生电动势。这种自由电子的定向移动一直要进行到洛伦兹力和感生电场的电场力相互平衡为止，即

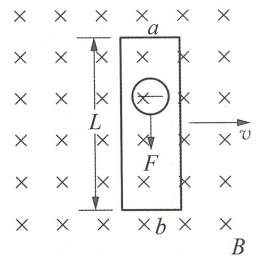


图 15-1

$$evB=\frac{\mathscr{E}_{ab}}{L}e$$

$$\mathscr{E}_{ab}=BLv$$

由此可见，在导体切割磁感线运动而产生电磁感应过程中，是洛伦兹力充当了搬运电荷的非静电力。而维持导体运动，就需要靠外力克服由于电荷相对导体定向运动而受到洛伦兹力阻碍作用做功，把其他形式的能（如动能）转化为回路中的电能。

当 v 与 B 成 α 角时

$$\mathscr{E}_{ab}=BLv\sin\alpha$$

如果导体与 B 不垂直，则 $L\sin\alpha$ 表示垂直于 B 方向的有效长度。

更一般的情况，由电动势等于单位正电荷从负极通过电源内部移动到正极的过程中，非静电力所做的功。非静电力即洛伦兹力，所以

$$\mathscr{E}=\int_C^D(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

如果 $v\perp B$，即$(\vec{v}\times\vec{B})$ 的方向与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 方向一致，上式积分化为

$$\mathscr{E}=\int_C^D vB\,\mathrm{d}l=Blv$$

动生电动势只可能存在于运动的这一段导体上，而不动的那一段导体上没有电动势，一般说来，不同 $\mathrm{d}l$ 段的速度 v 不同，在整个线圈中产生的动生电动势为

$$\varepsilon=\int_L(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

动生电动势的方向除了用矢量叉乘的右手螺旋关系判断外，也可以利用右手定则判定。

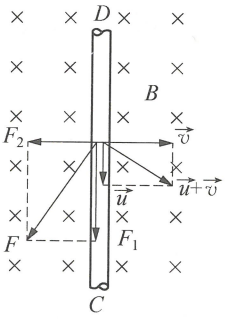


图 15－2

说明：动生电动势满足能量守恒和洛伦兹力不做功的特点。在运动导体中的电子不但具有导体本身的速度 $\vec{v}$，而且还有相对导体的定向运动速度 $\vec{u}$，如图 15－2 所示，正是由于电子的后一运动构成了感应电流。因此，电子所受的总的洛伦兹力为

$$\vec{F}=-e(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{B}$$

$\vec{F}$ 与合成速度 $(\vec{u}+\vec{v})$ 垂直，总的洛伦兹力对电子不做功。然而 $\vec{F}$ 的一个分量 $\vec{F}_1=-e(\vec{v}\times\vec{B})$ 却对电子做正功，形成动生电动势；而另一个分量 $\vec{F}_2=-e(\vec{u}\times\vec{B})$，方向沿 $-\vec{v}$，阻碍导体运动，从而做负功。读者可以证明两个分量所做的功的代数和等于零。因此，洛伦兹力并不做功，只是外力克服洛伦兹力的一个分量 $\vec{F}_2$ 所做的功通过另一分量 $\vec{F}_1$ 转化为感应电流的能量。

4. 动生电动势应用——交流发电机

交流发电机是根据电磁感应原理制成的，它是动生电动势的典型例子。图 15－3 所示是最简单交流发电机的示意图。

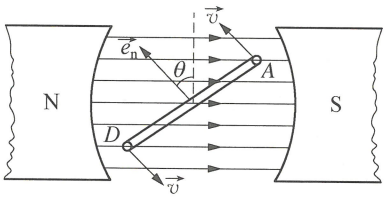


图 15－3

设某一瞬间，线圈平面的法线方向 $\vec{e}_n$ 与竖直方向之间的夹角 θ。在 AB 边中产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}_{CD}=\int_C^D(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_C^D vB\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\mathrm{d}l=vBl\cos\theta$$

由于在线圈回路中这两个电动势的方向相同，则整个回路中感应电动势为

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{AB}+\mathscr{E}_{CD}=2vBl\cos\theta$$

设线圈旋转的角速度为 ω，并取线圈平面刚巧处于水平位置时作为计时的零点，则

$$\mathscr{E}=2\cdot\frac{S}{2}\omega Bl\cos\omega t=BS\omega\cos\omega t$$

式中 B 为磁极间的磁感应强度。也可以利用线圈的磁通量

$$\Phi=BS\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-BS\sin\omega t$$

由法拉第电磁感应定律得

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=BS\omega\cos\omega t$$

两种方法求得的结果相同。

5. 感生电动势和涡旋电场

导体相对磁场静止，由于磁场的变化而引起导体内产生的感应电动势叫做感生电动势。

根据麦克斯韦电磁场理论，变化的磁场在空间激发感生电场或涡流电场，这种电场与静电场的不同之处是涡旋电场的电场线是闭合曲线，因而它不是保守场。涡旋电场没有电势(差)的概念，只有在静电场中或电流场中才有电势(差)。感生电动势是感生电场的电场力作用的结果。如图 15－4 所示，是一圆柱状均匀磁场区的横截面，截面半径为 R，如果磁感应强度 B 随时间增加，变化率为 $\frac{\Delta B}{\Delta t}$，$B$ 的方向垂直于纸面向里，根据法拉第电磁感应定律，则磁场中以 O 点为圆心，以 r 为半径的导体回路上的感应电动势为：

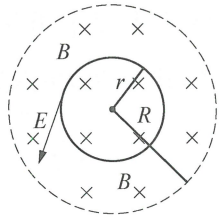


图 15－4

$$\mathscr{E}=\frac{\Delta B}{\Delta t}\pi r^2(r\leqslant R);\ \mathscr{E}=\frac{\Delta B}{\Delta t}\pi R^2(r>R)$$

根据麦克斯韦理论可知，圆形回路上的感生电场强度大小处处相等，方向沿图示的圆周切线方向，电动势是非静电力做功的结果，故回路感生电动势大小等于单位正电荷沿闭合回路一周感生电场力做的功，即 $\mathscr{E}=\sum\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$。由对称性可知，圆柱形区域内的匀强磁场变化产生的感生电场电场线是以圆柱形区域中心为圆心的一簇同心圆，场强方向沿圆切线方向，即与半径垂直，场强大小

$$E=\begin{cases}\frac{r}{2}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}, & r\leqslant R\\ \frac{R^2}{2r}\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}, & r>R\end{cases}$$

感生电场中说到两点间的电动势，必须明确是哪段导体(或哪段积分路径)上的电动势，利用

$$\mathscr{E}=\oint E_{旋}\cdot\mathrm{d}l=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

求解。

二 自感和互感

1. 自感

(1) 自感现象和自感系数

自感现象是电磁感应现象的特例。当通过线圈的电流强度发生变化时，它产生的磁场将随之变化，穿过该线圈的磁通量也随之变化，因而在线圈中将产生阻碍变化的感生电动势，这就是自感现象，产生的电动势称为自感电动势。由毕奥-萨伐尔定律可知，线圈中的电

流所激发的磁感应强度与电流强度成正比，因此通过线圈的全磁通正比于线圈中的电流强度，即

$$\Psi = LI,\ \mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

式中 L 为比例系数，与线圈中电流无关，仅由线圈的大小，几何形状以及匝数所决定，当线圈中的电流改变时，Ψ 也随之改变，按照法拉第定律，线圈中产生的自感电动势为

$$\mathscr{E} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

由此式可以看出，对于相同的电流变化率，比例系数 L 越大的线圈所产生的自感电动势越大，即自感作用越强。比例系数 L 称为自感系数，简称自感。L 的大小决定于线圈本身的情况，如线圈的截面积 S、单位长度的匝数 n、线圈的长度 l、是否有铁芯等。L 的单位为亨利(H)，1 H=1 Wb/A。

(2) 密绕螺线管的自感系数

对于密绕通电螺线管，内部磁场

$$B = \mu_0 nI = \mu_0\frac{N}{l}I$$

则

$$L = \frac{N\varphi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 Sl = \mu_0 n^2 V$$

(3) 电感线圈通电与断电时的特点

如图 15-5 所示，当合上 K 使电感线圈通电时，线圈中将产生电动势来阻碍电流的增大。而 $\mathscr{E}_{自} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$，它是以 I 的增大为前提条件而存在的，故 $\mathscr{E}_{自} \leqslant \mathscr{E}$。在 K 合上的瞬间，$\mathscr{E}_{自}$ 与电动势的大小相等；过一段时间后趋于稳定，I 达到最大，$\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$，因而 $\mathscr{E}_{自} = 0$。

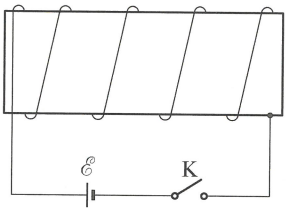


图 15-5

当 K 断开时，线圈上的电流 I 将减小到 0，因而线圈上将产生自感电动势，其大小为 $\mathscr{E}_{自} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}$，它阻碍电流的减小，即它有维持原电流不变的趋势。但是 $\mathscr{E}_{自}$ 的存在是以 I 的减小为前提的，因而自感电动势提供的电流 $I_{自} \leqslant I$，只有在 K 断开的瞬间，$I_{自} = I$。此时加在 K 两端的最大电压为 $U = IR$，其中 R 为 K 两端的电阻；可见 R 越大，U 就越大。应用该装置可以在瞬间产生高压。

由以上分析可知，电感线圈通电时，它的自感电动势不大于电源电压；而断电时，它的自感电流不大于原来线圈上的电流。如图 15-6、15-7 所示电路可以演示自感现象。

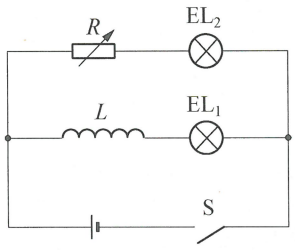


图 15－6

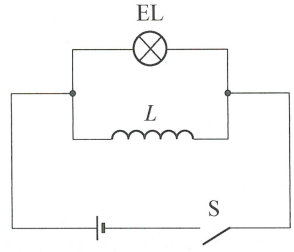


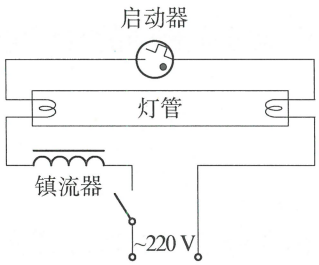
图 15－7

日光灯是自感的一种典型的应用，电路的组成如图 15－8 所示。

灯管：日光灯管的两端各有一个灯丝，灯管内有微量的氩和汞蒸气，灯管内涂有荧光粉。两个灯丝之间的气体导电时发出紫外线，激发管壁上的荧光粉发出可见光。但要使管内气体导电所需电压比 220 V 的电源电压高得多。

镇流器作用：灯管启动时提供一个瞬时高压，灯管工作时起降压限流作用。

启动器：a. 结构：电容、氖气、静触片、U 形动触片、管脚、外壳。b. 原理：热胀冷缩。c. 作用：先接通电路，再瞬间断开电路，使镇流器产生瞬间高压。



日光灯的电路图

图 15－8

日光灯电路的工作过程：合上开关，电源电压 220 V 加在启动器两极间→氖气放电发出辉光→辉光产生的热量，使 U 形动触片伸长，与静触片接触接通电路→镇流器和灯丝中通过电流→氖气停止放电→动静触片分离→切断电路→镇流器产生瞬间高压，与电源电压加在一起，加在灯管两端→灯管中气体放电→日光灯发光。

日光灯启动后正常工作时，启动器断开，电流从灯管中通过。镇流器产生自感电动势起降压限流作用。

（4）自感磁能

$$W=\sum \Delta q\cdot \mathscr{E}=\sum \Delta q\cdot L\frac{\Delta I}{\Delta t}=L\sum I\cdot \Delta I=\frac{1}{2}LI^2$$

当线圈与电源接通时，由于自感现象，电路中的电流 i 并不立刻由 0 变到恒定值 I，而要经过一段时间。在这段时间内，电路中的电流在增大，因而有反方向的自感电动势存在，外电源 $\mathscr{E}$ 不仅要供给电路中产生的焦耳热的能量，而且还要反抗自感电动势 $\mathscr{E}_L$ 做功。在时间 $\mathrm{d}t$ 内，电源反抗自感电动势所做的功为

$$\mathrm{d}A=-\mathscr{E}_L i\,\mathrm{d}t$$

式中 i 为电流强度的瞬时值，而 $\mathscr{E}_L$ 为

$$\mathscr{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

因而

$$\mathrm{d}A = Li\,\mathrm{d}i$$

在建立电流的整个过程中，电源反抗自感电动势所做的功为

$$A = \int \mathrm{d}A = \int_0^I Li\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

这部分功以能量的形式储存在线圈内。当切断电源时电流由恒定值 I 减少到 0，线圈中产生与电流方向相同的自感电动势。自感电动势在电流减少的整个过程中所做的功是

$$A' = \int \mathscr{E}_L i\,\mathrm{d}t = -L\int_1^0 i\,\mathrm{d}i = \frac{1}{2}LI^2$$

这部分功以能量形式又全部释放出来，称为自感磁能，所以自感磁能 $W = \frac{1}{2}LI^2$。

2. 互感

设有两个邻近的回路，分别通有电流，则任一回路中电流所产生的磁感应线将有一部分穿过另一个回路。当前者的电流发生变化时，通过后者的磁通量也随之变化，因而在回路中产生感应电动势。这种由于一个回路中的电流变化而在邻近的另一个回路中产生感应电动势的现象，称为互感现象。

如果有一个螺线管上面绕有两层线圈 C_1 和 C_2，两层线圈的长度均为 l，螺线管半径为 r，C_1 有 N_1 匝，C_2 有 N_2 匝。当 C_1 中通有电流 I_1 时，由 I_1 所激发的磁场通过 C_2 每匝线圈的磁通量为

$$\Phi_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} I_1 \pi r^2$$

当 C_1 中的电流 I_1 变化时，在 C_2 线圈中将产生互感电动势

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l}\pi r^2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

将上式改写成下列形式

$$\varepsilon_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

式中

$$M_{21} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l}\pi r^2$$

同样，当 C_2 线圈中的电流 I_2 变化时，在 C_1 线圈中也将产生互感电动势

$$\varepsilon_{12}=-\mu_0\frac{N_1N_2}{l}\pi r^2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=-M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

式中 $M_{12}=M_{21}$。可以证明，对于任何形状的两个回路，关系式 $M_{12}=M_{21}$ 总是成立的。因此可以用统一的符号 M 来表示，称为互感系数，简称互感。如果两个回路的形状和相对位置都不变，而且周围没有铁磁性物质，则两个回路的互感等于其中一个回路中单位电流激发的磁场通过另一个回路所围面积的磁链，即

$$M=\frac{\Phi_{21}}{I_1}=\frac{\Phi_{12}}{I_2}$$

在这种情况下，互感和自感一样只和两个回路的形状、相对位置及周围介质的磁导率有关，而与电流无关。在知道了互感系数之后，互感电动势就是

$$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t},\ \varepsilon_{12}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

互感的单位和自感相同，都是亨利。

下面仍以双层螺线管为例，说明两个线圈的互感和它们各自的自感之间的关系。两个线圈的自感分别为

$$L_1=\mu_0\frac{N_1^2}{l}\pi r^2,\ L_2=\frac{N_2^2}{l}\pi r^2$$

那么 $$M^2=\left(\mu_0\frac{N_1N_2}{l}\pi r^2\right)^2=\left(\mu_0\frac{N_1^2}{l}\pi r^2\right)\left(\mu_0\frac{N_2^2}{l}\pi r^2\right)=L_1L_2$$

即 $$M=\sqrt{L_1L_2}$$

必须注意，只有当一个线圈产生的磁感应线全部穿过另一个线圈时，才有 $M=\sqrt{L_1L_2}$。否则一般情况下是

$$M=k\sqrt{L_1L_2}$$

其中 k 是耦合因数，$0\leqslant k\leqslant 1$。

三 电磁振荡

1. 电磁振荡

电路中电容器极板上的电荷和电路中的电流及与它们相联系的电场和磁场作周期性变化的现象，叫做电磁振荡。能产生电磁振荡的电路叫振荡电路。最简单的振荡电路是由一个电容器和一个电感线圈组成的 LC 电路。在电磁振荡过程中，如果没有能量损失，振荡将永远持续下去，这种振荡叫无阻尼振荡。振荡电流的振幅将保持不变，又称为等幅振荡。振荡中如果有能量损失，振荡电流的振幅将逐渐减小，这种振荡叫阻尼振荡。

2. 无阻尼振荡的周期和频率

对 LC 振荡电路充电过程，由回路微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{q}{C}=0$$

又 $q=Cu$，$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$，联立得

$$L\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{u}{C}=0$$

这是二阶线性常系数齐次微分方程，与简谐运动的特征方程一致，其解为正弦函数 $u=U\sin\omega t$，圆频率 $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$。所以无阻尼振荡又叫简谐振荡。无阻尼振荡完成一次周期性变化需要的时间叫做周期

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{LC}$$

单位时间内完成的振荡次数叫做频率

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

振荡周期和频率由本身性质 L、C 决定，与振荡 U、I 无关。

3. 无阻尼振荡的能量

设 LC 振荡电路中电容器的最大电压为 U，电感线圈中的最大电流为 I，则无阻尼振荡的能量等于任一瞬时的电场能和磁场能之和，也等于最大的电场能或最大的磁场能，即

$$W=W_C+W_L=\frac{1}{2}CU^2+\frac{1}{2}LI^2。$$

四 电磁场和电磁波

1. 麦克斯韦电磁场理论

麦克斯韦电磁场理论指出，变化的磁场会产生涡旋电场，变化的电场会产生磁场；周期性变化的磁场会产生周期性变化的涡旋电场，周期性变化的电场会产生周期性变化的磁场，从而形成周期性变化的电磁场。因此周期性变化的电场和磁场互相联系、互相激发从而形成统一的电磁场，周期性变化的电磁场由近及远地传播，形成电磁波。

2. 电磁波

电磁波中电场和磁场的方向彼此垂直，并且跟传播方向垂直，所以电磁波为横波。电场和

磁场的方向与传播方向之间满足右手螺旋关系。

电磁波在真空中的传播速度等于光在真空中的传播速度，为一常量，与频率无关。

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=3.0\times10^8\ \mathrm{m/s}$$

其中 ε_0 是真空的介电常数，由实验测定，约为 $8.9\times10^{-12}\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$，$\mu_0$ 是真空的磁导率，等于 $4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{Wb/(A\cdot m)}$。电磁波在一个周期内传播的距离叫做波长。电磁波在真空中的波长为

$$\lambda=cT=\frac{c}{f}=2\pi c\sqrt{LC}$$

由麦克斯韦电磁场理论可知，电磁波在介质中的波速 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$，在介质中电磁波的波速 v 为真空中的 $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ 倍，即 $v=\dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$。光在真空中的速度 c 与在透明介质中的速度 v 的比值叫做介质的折射率 n，即

$$n=\sqrt{\varepsilon\mu}\ ,\ v=\frac{c}{n}$$

其中 ε 是介质的相对介电常数，μ 是介质的相对磁导率。

3. 电磁波的发射与接收

振荡电路发射电磁波的功率与电磁波频率的四次方成正比，所以采用如图 15－9 所示的开放电路，电容 C、电感 L 都很小，频率就很大，发射的无线电波的频率也很大。将要传递的低频信号加载在高频振荡电流上，这一过程叫调制，经调制后的高频电流产生的电磁波就载着低频信号（语音、图像信号）由开放电路（天线）发射出去。电磁波的接收回路实际上是一个 LC 振荡电路（见图 15－10），频率不同的无线电波都将在线圈 L 中产生感应电动势，在接收回路中产生受迫振荡的振荡电流。当 LC 回路的固有频率与某一电磁波的频率相同时，这个频率的电磁波在 LC 回路中激发的振荡电流最强，这就是电磁谐振现象，从而从众多的电磁波信号中把这种电磁波挑选出来，这个过程就是调谐。可通过调节电容 C 或调节电感 L 的大小来实现调谐，这个过程就是通常所说的选台。最后再从高频振荡电流中检出所携带的低频信号，这就是解调（检波或鉴频）。这样就得到我们所需要的信号了。



图 15－9

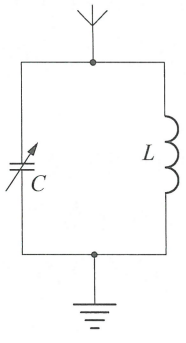


图 15－10

五 电磁场的能量和能流密度

利用麦克斯韦方程组，可以得到电磁场的能量密度等于电场的能量密度和磁场的能量密度之和，即

$$\omega=\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

任意体积 V 内的电磁场能量为电场能量和磁场能量之和

$$W=\int\omega\,\mathrm{d}V=\int\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})\mathrm{d}V=\int\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)\mathrm{d}V$$

如果各场量随时间变化，体积 V 内的电磁能 W 也将随时间变化，假设体积 V 内无焦耳热，也没有电源做的功，则体积 V 内电磁能 W 随时间减少的变化率

$$-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{2}(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{B}\cdot\vec{H})\mathrm{d}V=-\frac{1}{\mathrm{d}t}\int\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)\mathrm{d}V=\oint\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

等式右边闭合曲面的面积分表示单位时间从体积 V 的表面流出的电磁能量，即电磁能流。$\vec{S}$ 表示单位时间内通过垂直于能量传播方向的单位面积的电磁能量，称为电磁能流密度，又叫坡印廷矢量。

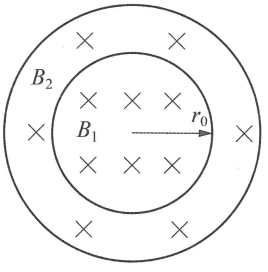
能流密度（坡印廷矢量）$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$，方向沿电磁波的传播方向。对于平面电磁波，能量密度 $\omega=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right)=\varepsilon_0E^2$，所以能流密度为

$$S=\frac{1}{\mu_0}EB=\frac{1}{\mu_0}E^2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=\frac{1}{c\mu_0}E^2=c\varepsilon_0E^2=\omega c$$

正比于电场振幅 E 或磁场振幅 H 的平方。

例题精讲

例 1 一个电子感应加速器的简化模型如图所示。半径为 r_0 的圆形区域中的磁感应强度为 B_1，在 $r>r_0$ 的环形区域中的磁感应强度为 B_2。欲使带正电荷 q 的粒子能在环形区域内沿半径为 $r=r_0$ 的圆形轨道上不断加速。试求：B_1 与 B_2 的时间变化率之间的关系以及 B_1 与 B_2 的瞬时大小关系。



例 1 图

解析 当磁感应强度 B_1 随时间变化时，将在周围空间激发一个涡旋状的感应电场，此感应电场加速带电粒子。为了使 r_0 保持不变，B_2 应随 v 的增大而增大。在 r_0 不变的条件下应满足

$$\frac{\Delta B_2}{\Delta t}=\frac{m}{qr_0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

切向力满足 $$F=m\frac{\Delta v}{\Delta t}=qE$$

其中 E 是由于 B_1 随时间变化产生的涡旋电场。利用绕半径为 r_0 的圆环上的电动势的两种表达式求出 E：

$$\mathscr{E}=E\cdot 2\pi r_0,\ \mathscr{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\pi r_0^2\frac{\Delta B_1}{\Delta t}$$

解得 $$E=\frac{r_0}{2}\frac{\Delta B_1}{\Delta t}$$

得到 $$\frac{qr_0}{2}\frac{\Delta B_1}{\Delta t}=qr_0\frac{\Delta B_2}{\Delta t},\ \frac{\Delta B_2}{\Delta t}=\frac{1}{2}\frac{\Delta B_1}{\Delta t}$$

设加速过程开始时 $B_1=0$，电子的速率 $v=0$，$B_2=0$，上式积分可得 $B_1=2B_2$。

例 2 如图所示，阻值为 R，质量为 m，边长为 l 的正方形金属框位于光滑水平面上。金属框的 ab 边与磁场边缘平行，并以一定的初速度进入矩形磁场区域，运动方向与磁场边缘垂直。磁场方向垂直水平面向下，在金属框运动方向上的长度为 $L(L>l)$。设金属框的 ab 边进入磁场后，框的运动速度与 ab 边在磁场中的位置坐标之间关系为 $v=v_0-cx(x<l)$，式中 c 为未知的正值常量。若金属框完全通过磁场后恰好静止，求

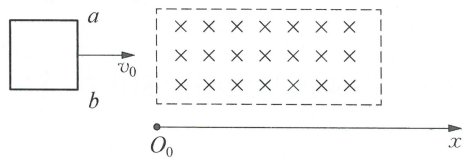
(1) 磁场的磁感应强度；

(2) 从线框进入磁场区域到线框 ab 边刚出磁场区域的运动过程中安培力所做的功。

解析 (1) 线框进入磁场过程中的极短时间内由动量定理得：

$$-Bil\Delta t=m\Delta v=-Bl\Delta q$$

而 $$\Delta q=\bar{I}\Delta t=\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{Bl\Delta x}{R}$$



例 2 图

代入上式得 $-B^2l^2\Delta x=mR\Delta v$

对上式求和 $-B^2l^2x=mR(v-v_0)$

即 $$v=v_0-\frac{B^2l^2x}{mR}$$

对照题设关系 $v=v_0-cx$，易知 $c=\frac{B^2l^2}{mR}$。而金属框完全通过磁场后恰好静止，即

$$v\,|_{末}=v_0-cl-cl=0$$

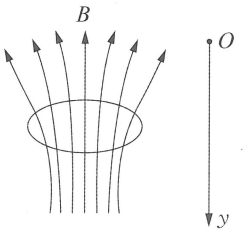
则 $$c=\frac{v_0}{2l}$$

所以 $$B=\sqrt{\frac{v_0mR}{2l^3}}$$

(2) 根据速度的表达式，在线框进入磁场区域的过程中线框速度的减小量和线框出磁场区域的过程中线框速度的减少量是相同的，从线框进入磁场区域到线框 ab 边刚出磁场区域的运动过程中，安培力做的功为

$$W=\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2-\frac{1}{2}mv_0^2\right]=-\frac{3}{8}mv_0^2$$

例 3 一个质量为 m、直径为 d、电阻为 R 的金属圆环，在范围足够大的磁场中竖直下落，磁场的分布情况如图所示。已知磁感应强度竖直方向分量 B_y 的大小只随高度 y 变化，其随高度 y 变化关系为 $B_y=B_0(1+ky)$（此处 k 为比例常数，且 $k>0$），且 B_y 的方向始终向上。金属圆环在下落过程中环面始终保持水平，速度越来越大，最终稳定为某一收尾速度，求圆环收尾速度的大小。



例 3 图

解析 本题中磁感应强度在竖直方向上分布不均匀，致使圆环下落过程中通过圆环的磁通量在不断变化，从而在金属圆环中产生感应电流。但对圆环切割磁感线的问题，同学们一般习惯于用 $E=Blv$ 计算感应电动势值。因为不知道磁感应强度的水平分量 B_x 的表达式，所以这条思路将无法求解。因而我们从能量变化关系来研究，这是处理电磁感应问题最常见的另一条基本思路。

设圆环的收尾速度为 v_m，则在 $\Delta t(\Delta t\to 0)$ 时间内，圆环下落的高度为 $v_m\Delta t$，由此引起的穿过圆环磁通量的变化量

$$\Delta\Phi=\Delta B_y\cdot S=B_0k\Delta yS=B_0k\cdot v_m\Delta t\cdot\frac{1}{4}\pi d^2$$

所以，在此短时间内回路中的感应电动势

$$\mathscr{E}=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{1}{4}\pi B_0kv_md^2$$

同时，在圆环匀速下落时，金属圆环重力做功的功率等于回路的发热功率，故

$$\frac{\mathscr{E}^2}{R}=mgv_m$$

即 $$\frac{\pi^2B_0^2k^2v_m^2d^4}{16R}=mgv_m$$

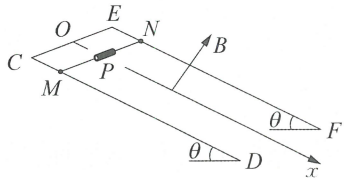
解得收尾速度 $$v_m=\frac{16mgR}{\pi^2k^2B_0^2d^4}$$

例 4 如图所示，光滑的平行金属导轨 CD 与 EF 间距 $L=1\ \mathrm{m}$，与水平面夹角 $\theta=30°$，导轨上端用导线 CE 连接（导轨和连接线电阻不计），导轨处在磁感应强度为 $B=0.1\ \mathrm{T}$，方向垂直于导轨平面向上的匀强磁场中，一根电阻为 $R=1\ \Omega$ 的金属棒 MN 两端有导电小轮搁在两导轨上，棒上有吸水装置 P。取沿导轨向下为 x 轴正方向，坐标原点在 CE 中点。开始时棒处在 $x=0$ 位置（即与 CE 重合），棒的起始质量不计。当棒自静止起下滑时，便开始吸水，质量逐渐增大，设棒质量的增大与位移 x 的平方根成正比，即 $m=k\sqrt{x}$，k 为一常数，$k=0.1\ \mathrm{kg/m^{\frac{1}{2}}}$，求：

（1）定量描述金属棒下滑过程中的运动性质。

（2）金属棒下滑 2 m 时速度为多大？

（3）金属棒下滑 2 m 的过程中，通过棒的电量是多少？



例 4 图

解析 （1）对金属棒，由动量定理得

$$F_{合}=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$$

即
$$mg\sin\theta-\frac{B^2L^2v}{R}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

设 $x=c^2t^2$，得 $v=2c^2t$，$a=2c^2$，$m=kct$，且 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2c^2$，$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=kc$，得

$$4kc^2+\frac{2B^2L^2}{R}c-kg\sin\theta=0$$

代入数据，得
$$4c^2+0.2c-5=0$$

解得
$$c=\frac{\sqrt{2001}-1}{40}=1.09$$

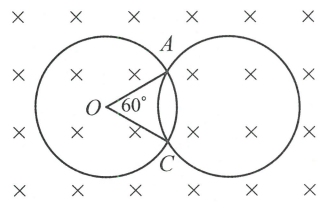
金属棒做匀加速直线运动，加速度大小为

$$a=2c^2=2.39\ \mathrm{m/s^2}$$

（2）$v=\sqrt{2ax}=\sqrt{2\cdot 2c^2x}=2c\sqrt{x}\approx 3.08\ \mathrm{m/s}$。

（3）$\mathrm{d}q=\frac{BLv}{R}\mathrm{d}t=\frac{BL\,\mathrm{d}x}{R}\Rightarrow q=\frac{BLx}{R}=0.2\ \mathrm{C}$。

例 5 如图 1 所示，均匀磁场的方向垂直纸面向里，磁感应强度 B 随时间 t 变化，$B=B_0-Kt$（K 为大于 0 的常数）。现有两个完全相同的均匀金属圆环相互交叠并固定在图中所示位置。圆环的半径为 R，电阻为 r，相交点的电接触良好。两个环的接触点 A 与 C 间的劣弧对圆心 O 的张角为 60°。求 $t=t_0$ 时，左环所受的作用力，不考虑感应电流之间的作用。

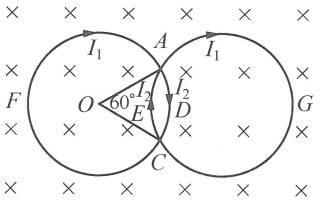


例 5 图 1

解析 (1) 求网络各支路的电流。

因磁感应强度大小随时间减少，考虑到电路的对称性，可设两环各支路的感应电流 I_1、I_2 的方向如图 2 所示，对左环电路 $ADCFA$，有

$$\mathscr{E}=I_1 r_{CFA}+I_2 r_{ADC}$$



例 5 图 2

因 $$r_{CFA}=\frac{5r}{6},\ r_{ADC}=\frac{r}{6},\ \varepsilon=K\pi R^2$$

故 $$K\pi R^2=I_1\frac{5r}{6}+I_2\frac{r}{6}$$

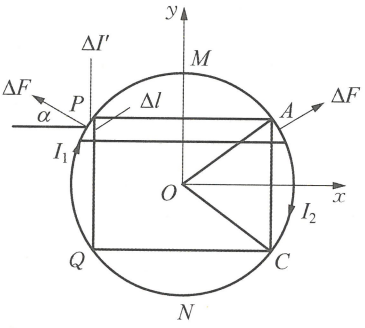
因回路 $ADCEA$ 所围的面积为 $$2\left(\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right)R^2$$

故对该回路有 $$K\left[2\left(\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{12}\right)R^2\right]=2I_2\frac{r}{6}$$

解得 $$I_2=\frac{(2\pi-3\sqrt{3})R^2}{2r}K,\ I_1=\frac{(10\pi+3\sqrt{3})R^2}{10r}K$$

(2) 求左环所受的力。

因圆弧 PMA 与圆弧 CNQ 中的电流方向相反，所以它们受的安培力相互抵消，而弧 PQ 与弧 AC 的电流相对 x 轴上下是对称的，因而每段载流导体所受的安培力在 y 方向的合力为零，研究 PQ 上的小线段 $\Delta l'$，安培力 ΔF 为径向，其 x 分量的大小表示为



例 5 图 3

$$|\Delta F_x|=I_1 B\Delta l'\cos\alpha$$

因 $\Delta l'\cos\alpha=\Delta l$，故

$$|\Delta F_x|=I_1 B\Delta l$$

$$|F_x|=\sum I_1 B\Delta l=I_1 B\overline{PQ}=I_1 BR$$

PQ 在 t_0 时刻的受力

$$F_1=|F_x|=I_1 BR=\left[\frac{(10\pi+3\sqrt{3})R^2}{10r}K\right]BR$$

$$=\left[\frac{(10\pi+3\sqrt{3})R^2}{10r}K\right](B_0-Kt_0)R$$

方向向左。

同理，AC 在 t_0 时刻的受力

$$F_2 = I_2 BR = \left[\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2r}K\right]BR$$

$$= \left[\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2r}K\right](B_0 - Kt_0)R$$

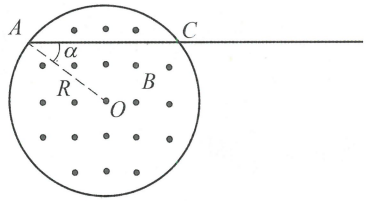
方向向右。

左环所受的合力大小为

$$F = F_1 - F_2 = \frac{9\sqrt{3}}{5r}K(B_0 - Kt_0)R^3$$

方向向左。

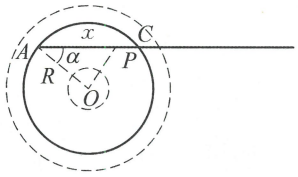
例 6 在图 1 中，半径为 R 的圆柱形区域内有匀强磁场，磁场方向垂直纸面向外，磁感应强度 B 随时间均匀变化，变化率 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = K$（$K$ 为一正值常量），沿图中 AC 弦的方向画一直线，并向外延长，弦 AC 与半径 OA 的夹角 $\alpha = \frac{\pi}{4}$。直线上有一任意点，设该点与 A 点的距离为 x，求从 A 沿直线到该点的电动势的大小。



例 6 图 1

解析 由于圆柱形区域内存在变化磁场，在圆柱形区域内外空间中将产生涡旋电场，电场线为圆，圆心在圆柱轴线上，圆面与轴线垂直，如图 2 中虚点线所示。在这样的电场中，沿任意半径方向移动电荷时，由于电场力与移动方向垂直，涡旋电场力做功为零，因此沿半径方向任意一段路径上的电动势均为零。

(1) 若任意点在磁场区域内：令 P 为图 2 中任意点 $x \leqslant \sqrt{2}R$，在图中连直线 OA 与 OP。取闭合回路 $APOA$，可得回路电动势 $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{AP} + \mathscr{E}_{PO} + \mathscr{E}_{OA}$，式中 $\mathscr{E}_{AP}$、$\mathscr{E}_{PO}$、$\mathscr{E}_{OA}$ 分别为从 A 到 P、从 P 到 O、从 O 到 A 的电动势。由前面的分析可知 $\mathscr{E}_{PO} = 0$，$\mathscr{E}_{OA} = 0$，故 $\mathscr{E}_{AP} = \mathscr{E}_1$。



例 6 图 2

令△AOP 的面积为 S_1，此面积上磁通量 $\Phi_1 = BS_1$，由电磁感应定律，回路的电动势大小为

$$\mathscr{E}_1 = \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = S_1 \frac{\Delta B}{\Delta t} = S_1 k$$

由图 2 可知

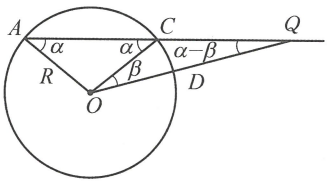
$$S_1 = \frac{1}{2}xR\sin\alpha = \frac{xR}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}xR}{4}$$

可得沿 AP 线段的电动势大小为

$$\mathscr{E}_{AP}=\frac{kR}{2\sqrt{2}}x=\frac{\sqrt{2}kR}{4}x$$

(2) 若任意点在磁场区域外：令 Q 为图 3 上任意点，$x>\sqrt{2}R$。在图中连 OA、OQ。取闭合回路 $AQOA$，设回路中电动势为 $\mathscr{E}_2$，根据类似上面的讨论有 $\mathscr{E}_{AQ}=\mathscr{E}_2$。

对于回路 $AQOA$，回路中磁通量等于回路所包围的磁场区的面积的磁通量，此面积为 S_2，通过它的磁通量 $\Phi_2=BS_2$。根据电磁感应定律可知回路中电动势的大小 $\mathscr{E}_2=S_2k$。



例 6 图 3

在图中连 OC，令 $\angle COQ=\beta$，则 $\angle OQC=\alpha-\beta$，于是

$$S_2=\triangle AOC\text{ 的面积}+\text{扇形 }OCD\text{ 的面积}$$

$$=\left(\frac{1}{2}R\sin\alpha\right)\cdot 2R\cos\alpha+\frac{\beta}{2\pi}\pi R^2=\frac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha+\beta)$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时

$$S_2=\frac{1}{2}R^2(1+\beta)$$

$\triangle OCQ$ 中有

$$\frac{x-\sqrt{2}R}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\left[\frac{\pi}{4}-\beta\right]}$$

$$R\sin\beta=(x-\sqrt{2}R)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=(x-\sqrt{2}R)\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\beta-\sin\beta)$$

$$\left(R+\frac{x-\sqrt{2}R}{\sqrt{2}}\right)\sin\beta=\frac{x-\sqrt{2}R}{\sqrt{2}}\cos\beta$$

$$\tan\beta=\frac{x-\sqrt{2}R}{x}$$

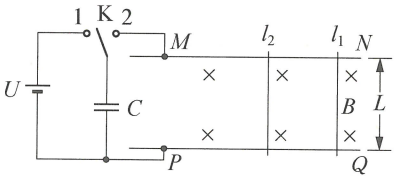
于是得

$$S_2=\frac{1}{2}R^2\left(1+\arctan\frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right)$$

可得沿 AQ 线的电动势的大小为

$$E_{AQ}=\frac{kR^2}{2}\left(1+\arctan\frac{x-\sqrt{2}R}{x}\right)$$

例 7 如图 1 所示，电源的电动势为 U，电容器的电容为 C，K 是单刀双掷开关，MN、PQ 是两根位于同一水平面内的平行光滑长导轨，它们的电阻可以忽略不计，两导轨间距为 L，导轨处在磁感应强度为 B 的均匀磁场中，磁场方向垂直于两导轨所在的平面。l_1 和 l_2 是两根横放在导轨上的导体小棒，它们在导轨上滑动时与导轨保持垂直并接触良好，不计摩擦，两小棒的电阻相同，质量分别为 m_1 和 m_2，且



例 7 图 1

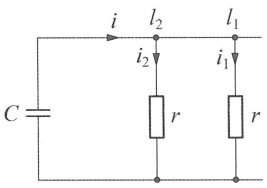
$m_1<m_2$，开始时两根小棒均静止在导轨上，现将开关 K 先合向 1，然后合向 2。求：

(1) 两根小棒最终的速度大小；

(2) 在整个过程中的焦耳热损耗。

解析 开关 K 由 1 合向 2 之后，起初电容器通过导轨及两小棒构成的回路放电，外磁场 B 对通有电流的两小棒施加向右的安培力，使两小棒从静止开始向右做加速运动，但加速度是逐渐变小的，最终状态两棒以相同的速度运动，并且两棒匀速切割磁感线产生的感应电动势与电容器两端的电压相等。

(1) 自电容器开始放电至小棒达到最终恒定速度的过程中，任一时刻的电流如图 2 所示，此时作用于 l_1 与 l_2 上的安培力分别为



例 7 图 2

$$f_1=BLi_1,\ f_2=BLi_2$$

在 t 到 $t+\Delta t$ 时间内，利用动量定理得

$$f_1\Delta t=BLi_1\Delta t=m_1\Delta v_1,\ f_2\Delta t=BLi_2\Delta t=m_2\Delta v_2$$

设最终两棒速度均为 v，由于开始时两棒均静止，则有

$$\sum BLi_1\Delta t=m_1v,\ \sum BLi_2\Delta t=m_2v$$

上两式相加得 $$BL\sum(i_1+i_2)\Delta t=(m_1+m_2)v$$

而 $$i=i_1+i_2$$

即 $$\sum(i_1+i_2)\Delta t=\sum i\Delta t=Q-q,\ Q=CU$$

由此解得 $$v=\frac{BLCU}{m_1+m_2+B^2L^2C}$$

(2) 电容开始放电时，所具有的电能为

$$W_0=\frac{1}{2}CU^2$$

两棒达到最终速度时，电容器的储能为

$$W_1=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2}\frac{B^4L^4C^3U^2}{(m_1+m_2+B^2L^2C)^2}$$

两棒最终动能为

$$W_2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{B^2L^2C^2U^2}{(m_1+m_2+B^2L^2C)^2}$$

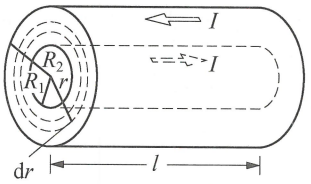
整个过程中的焦耳热损耗为

$$\Delta W = W_0 - (W_1 + W_2) = \frac{(m_1 + m_2)CU^2}{2(m_1 + m_2 + B^2L^2C)^2}$$

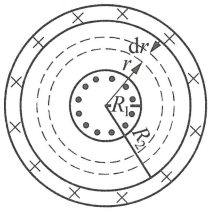
例 8 一根很长的同轴电缆(见图 1)外层的内、外半径分别为 R_1 和 R_2,内芯的半径为 R_1(绝缘层厚度不计)。内芯上载有稳定电流 I,再经外层导体返回形成闭合回路。试计算:

(1) 长为 l 的一段电缆内的磁场中所储藏的能量;

(2) 该段电缆的自感。



例 8 图 1



例 8 图 2

解析 (1) 由安培环路定理可知,在内外导体间的区域内距轴线为 r 处的磁感应强度为

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

在电缆外面,$B = 0$,所以磁能储藏在两个导体之间的空间内。在此空间中离轴线距离为 r 处的磁能密度为

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在半径为 r 与 $r + \mathrm{d}r$,长 l 的圆柱壳空间之内的磁能

$$\mathrm{d}W_m = w_m \mathrm{d}V = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r l \,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

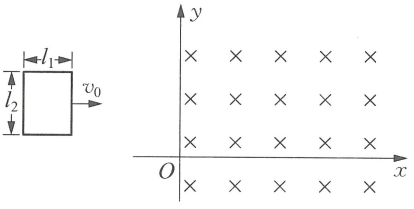
对上式积分可得储藏在内外导体之间空间内的总磁能

$$W_m = \iiint_V w_m \mathrm{d}V = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

(2) 由磁能公式 $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ 可求出长为 l 的同轴电缆的自感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

例 9 图 1 中 xOy 是位于水平光滑桌面上的直角坐标系,在 $x > 0$ 的一侧,存在匀强磁场,磁场方向垂直于 xOy 平面向里,磁感应强度的大小为 B。在 $x < 0$ 的一侧,一边长分别为 l_1 和 l_2 的刚性矩形超导线框位于桌面上,框内无电流,框的一对边与 x 轴平行。线框的质量为 m,自感为 L。现让超导线框沿 x



例 9 图 1

轴方向以初速度 v_0 进入磁场区域，试定量地讨论线框以后可能发生的运动情况及与初速度 v_0 大小的关系。（假定线框在运动过程中始终保持超导状态）

解析 设某一时刻线框在磁场区域的深度为 $x(x \leqslant l_1)$，速度为 v，因线框的一条边切割磁感线产生的感应电动势为 $\mathscr{E}_v = vBl_2$，它在线框中引起感应电流，感应电流的变化又引起自感电动势。设线框的电动势和电流的正方向均为顺时针方向，则切割磁感应线产生的电动势 E_v 与设定的正方向相反，自感电动势 $\mathscr{E}_L = -L\dfrac{\Delta i}{\Delta t}$ 与设定的正方向相同。因线框处于超导状态，电阻 $R=0$，故有

$$\mathscr{E}_L - \mathscr{E}_v = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} - vBl_2 = iR = 0$$

即
$$L\frac{\Delta i}{\Delta t} + Bl_2\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0 \text{ 或 } Bl_2\Delta x = -L\Delta i$$

求和得
$$\frac{\Delta i}{\Delta x} = -\frac{Bl_2}{L}$$

可见 i 与 x 成线性关系，有
$$i = -\frac{Bl_2}{L}x + C$$

C 为一待定常数，注意到 $x=0$ 时，$i=0$，可得 $C=0$，故有

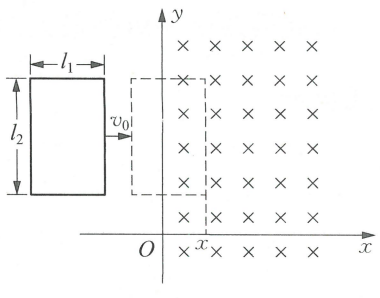
$$i = -\frac{Bl_2}{L}x$$

$x>0$ 时 $i<0$，电流为负值表示线框中电流的方向与设定的正方向相反，即在线框进入磁场区域时右侧边的电流实际流向是向上的。外磁场作用于线框的安培力

$$f = Bl_2 i = -\frac{B^2 l_2^2}{L}x$$

其大小与线框位移 x 成正比，方向与位移 x 相反，线框做简谐运动。下面分两种情形做进一步分析：

（1）线框的初速度 v_0 较小，在安培力的作用下，当它的速度减为 0 时，整个线框未全部进入磁场区，这时在安培力的继续作用下，线框将反向运动，最后退出磁场区。线框在磁场中运动了简谐振动的半个周期，振动的圆频率 $\omega = \sqrt{\dfrac{B^2 l_2^2}{Lm}}$，周期 $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{Lm}{B^2 l_2^2}}$。



例 9 图 2

令 x_m 表示线框速度减为 0 时进入磁场的深度，即振幅。由

能量守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\left(\frac{B^2l_2^2}{L}\right)x_m^2,\ x_m=\sqrt{\frac{Lmv_0^2}{B^2l_2^2}}$$

故其运动方程为

$$x=\frac{v_0\sqrt{Lm}}{Bl_2}\sin\left(\frac{Bl_2}{\sqrt{Lm}}t\right)$$

t 从 0 到 $\pi\frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2}$。

半个周期后，线框退出磁场，将以速度 v_0 向左匀速运动。因为在这种情况下 x_m 的最大值是 l_1，即

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\frac{B^2l_2^2}{L}l_1^2$$

由此可知，发生第 1 种情况时，v_0 的值要满足下式

$$\frac{1}{2}mv_0^2\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{B^2l_2^2}{L}\right)l_1^2$$

即

$$v_0\leqslant\frac{Bl_1l_2}{\sqrt{mL}}$$

(2) 若线框的初速度 v_0 比较大，整个线框能全部进入磁场区，则要求

$$v_0>\frac{Bl_2l_1}{\sqrt{mL}}$$

线框进入磁场过程经历的时间为

$$t_1=\frac{\sqrt{Lm}}{Bl_2}\left[\arcsin\frac{Bl_1l_2}{\sqrt{Lmv_0^2}}\right]$$

此后线框中维持最大的电流 $i_m=-\frac{Bl_2}{L}l_1$，线框将在磁场区域匀速前进，运动的速度可由下式决定

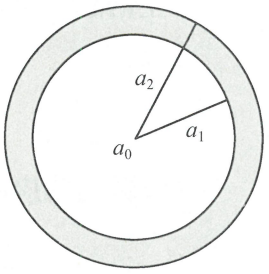
$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\frac{B^2l_2^2}{L}l_1^2$$

即

$$v=\sqrt{v_0^2-\frac{B^2l_1^2l_2^2}{Lm}}$$

例 10 如图所示，一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环，其内、外半径分别为 a_1、a_2，厚度可以

忽略。两个表面都带有电荷，电荷面密度 σ 随离开环心距离 r 变化的规律均为 $\sigma(r)=\dfrac{\sigma_0}{r^2}$，$\sigma_0$ 为已知常量。薄圆环绕通过环心垂直环面的轴以大小不变的角加速度 β 减速转动，$t=0$ 时刻的角速度为 ω_0。将一半径为 $a_0(a_0 \ll a_1)$、电阻为 R 并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置。试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力 F 与时间 t 的关系。



例 10 图

已知：半径为 r、电流 I 的圆线圈，在圆心处产生的磁感应强度为 $B=k\dfrac{I}{r}$（k 为已知常量）。

解析 用半径分别为 $r_1(>a_1)$，r_2，…，r_i，…，$r_{n-1}(<a_2)$ 的 $n-1$ 个同心圆把塑料薄圆环分割成 n 个细圆环。第 i 个细圆环的宽度为 $\Delta r_i=r_i-r_{i-1}$，其环带面积

$$\Delta S_i=\pi r_i^2-\pi(r_i-\Delta r_i)^2=2\pi r_i\Delta r_i$$

式中已略去高阶小量 $(\Delta r_i)^2$。该细圆环带上、下表面所带电荷量之和为

$$\Delta q_i=2\sigma\Delta S_i=\frac{2\sigma_0}{r_i^2}2\pi r_i\Delta r_i=\frac{4\pi\sigma_0\Delta r_i}{r_i}$$

设时刻 t，细圆环转动的角速度为 ω

$$\omega=\omega_0-\beta t$$

单位时间内，通过它的“横截面”的电荷量，即为电流

$$\Delta I_i=\Delta q_i\frac{\omega}{2\pi}=\frac{2\omega\sigma_0\Delta r_i}{r_i}$$

该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

$$\Delta B_i=k\frac{\Delta I_i}{r_i}=k\frac{2\omega\sigma_0\Delta r_i}{r_i^2}$$

式中 Δr_i 是一个微小量，注意到 $r_ir_{i-1}=r_i(r_i-\Delta r_i)\approx r_i^2$，有

$$\frac{\Delta r_i}{r_i^2}=\frac{r_i-r_{i-1}}{r_ir_{i-1}}=\frac{1}{r_{i-1}}-\frac{1}{r_i}$$

将各细圆环产生的磁场叠加，得环心 O 点处的磁感应强度

$$B=\frac{2k\omega\sigma_0(a_2-a_1)}{a_1a_2}$$

由于 $a_0 \ll a_1$，可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场，导线环的磁通量

$$\Phi=BS=\frac{2k\omega\sigma_0(a_2-a_1)}{a_1a_2}\pi a_0^2$$

产生的感应电动势大小为

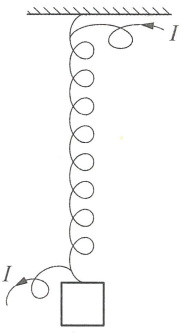
$$\mathscr{E}=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=\frac{2k\sigma_0(a_2-a_1)\pi a_0^2}{a_1a_2}\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right|=\frac{2k\sigma_0(a_2-a_1)\pi a_0^2\beta}{a_1a_2}$$

导线环内感应电流的大小为

$$I=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{2k\sigma_0(a_2-a_1)\pi a_0^2\beta}{a_1a_2R}\text{(也可以直接用微积分求解)}$$

对半个导线圆环，受安培力的大小为 $BI2a_0$，由受力平衡，张力 F 应满足 $2F=BI2a_0$，$F=BIa_0=\dfrac{4k^2\sigma_0^2\pi a_0^3(a_2-a_1)^2\beta}{a_1^2a_2^2R}(\omega_0-\beta t)$，张力 F 随时间 t 线性减小。

例 11 如图所示，悬挂着的弹簧下挂一重物，其长度 $l=1\ \text{m}$，直径 $D=0.04\ \text{m}$，劲度系数 $k=0.5\ \text{N/m}$，一共有 700 匝。如给弹簧通以电流 $I=2.5\ \text{A}$，则重物平衡位置将做微小变化，试求此变化量。视弹簧近似为无限长密绕螺线管。



例 11 图

解析 视弹簧为无限长螺线管，则内部磁感应强度

$$B=\mu_0\frac{N}{l}I(\mu_0\text{ 为真空中的磁导率})$$

故磁通量

$$\Phi=NSB=\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l}I=LI$$

故

$$L=\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l}$$

设稳定后，弹簧缩短 x，长度变为 l_1，则自感系数

$$L_1=\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l_1}=\frac{\mu_0\pi N^2D}{4(l-x)}$$

当系统处于平衡状态时，假设重物受到一微扰，下降了 $\Delta l(\Delta l\to0)$，则机械势能变化

$$\Delta E_1=\frac{1}{2}k(x-\Delta l)^2-\frac{1}{2}kx^2=-kx\Delta l+\frac{1}{2}k\Delta l^2\approx-kx\Delta l$$

自感系数变化

$$\Delta L=\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4(l_1+\Delta l)}-\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l_1}\approx-\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l_1^2}\Delta l$$

故磁场能量变化

$$\Delta E_2=\frac{1}{2}\Delta(LI^2)=\frac{1}{2}I^2\Delta L=-\frac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{8l_1^2}\Delta l$$

同时，L 的变化，使弹簧两端有了电压，恒流电源将对系统做功，由电磁感应定律，有

$$U=\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{\Delta(LI)}{\Delta t}=\frac{I\Delta L}{\Delta t}$$

故恒流电源做功为

$$W=UI\Delta t=\frac{I^2\Delta L}{\Delta t}\Delta t=-I^2\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l_1^2}\Delta l$$

由能量守恒有

$$W=\Delta E_1+\Delta E_2$$

$$-\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{4l_1^2}I^2\Delta l=-kx\Delta l-\frac{\mu_0\pi N^2D^2}{8l_1^2}I^2\Delta l$$

故

$$x=\frac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{8l_1^2k}=\frac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{8(l-x)^2k}$$

$$\approx\frac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{8l^2k}\left(1+\frac{2x}{l}\right)(x\ll l)$$

故

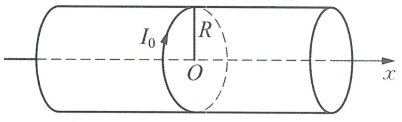
$$x=\frac{\dfrac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{8l^2k}}{1-\dfrac{\mu_0\pi N^2D^2I^2}{4l^3}}$$

代入数据得

$$x=4.9\ \text{mm}$$

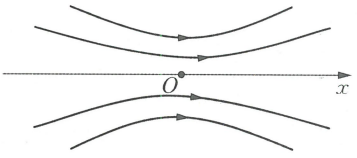
平衡位置最终上升了 4.9 mm。

例 12 如图 1 所示，空间有一圆柱形区域，其轴线是空间磁场的对称轴，设圆柱的轴线为 x 轴，且磁场指向 x 正方向，其 x 方向分量 $B_x=C-k|x|$，其中 C、k 为已知常数，且保证很大的范围内 $B_x>0$，现放上一半径为 R 的极细超导截流线圈于原点 O 处，其中心轴与 x 轴重合。初始时带电流 I_0，且电流产生的磁场沿 x 轴负方向。已知线圈自感系数为 L，质量为 m，如给线圈一个沿 x 正方向的微扰，试分析线圈以后的运动。



例 12 图 1

解析 O 为 B_x 极大处，则 x 正方向上必有磁感线穿出圆柱面，负方向则有磁感线穿入，如图 2 所示。受到微扰后线圈将在辐向磁场作用下远离 O，但由于线圈为超导体，在远离 O 的过程中 I 不断减小，直至零。此时安培力为零，但线圈还有速度，将继续运动，于是 I 将会反向，安培力为回复力。设线圈在 $x(x>0)$ 处以 v 滑动，电流为 I。则



例 12 图 2

$$L\Delta I=\Delta\Phi=\pi R^2[(C-k|x+\Delta x|)-(C-k|x|)]=-\pi R^2k\Delta x$$

求和，有

$$L(I-I_0)=-\pi R^2 k\Delta x$$

故

$$I=I_0-\frac{\pi R^2 k}{L}x$$

再考察辐向磁场 B_y，线圈上的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\pi R^2 k\,\frac{\Delta x}{\Delta t}=\pi R^2 kv$$

同时线圈切割 B_y，亦有感应电动势为

$$\mathscr{E}'=B_y\cdot 2\pi R$$

$\mathscr{E}$、$\mathscr{E}'$实际是同一个物理量的两种描述，所以

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}',\ \pi R^2 kv=B_y\cdot 2\pi Rv,\ B_y=\frac{Rk}{2}$$

故线圈所受安培力为

$$F=B_y\cdot 2\pi R\cdot I=\frac{Rk}{2}\cdot 2\pi R\left(I_0-\frac{\pi R^2 k}{L}x\right)$$

$$=\pi R^2 kI_0-\frac{\pi^2 R^4 k^2}{L}x$$

可见，当 $x=x_0=\dfrac{I_0 L}{\pi R^2 k}$ 时，$F=0$，为平衡力。而在 x_0 两侧，F 表现为线性回复力。故线圈将在 x_0 附近做简谐振动，比例系数为

$$k'=\frac{\pi^2 R^4 k^2}{L}$$

故

$$\omega=\sqrt{\frac{k'}{m}}=\frac{\pi R^2 k}{\sqrt{mL}}$$

于是线圈的运动为简谐运动

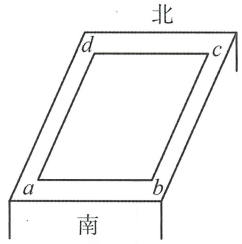
$$x=x_0(1-\cos\omega t)=\frac{I_0 L}{\pi R^2 k}\left(1-\cos\frac{\pi R^2 k}{\sqrt{mL}}t\right)$$

练习题

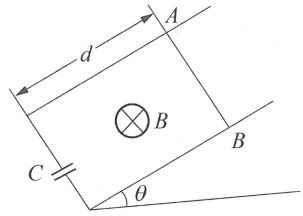
1 一个电阻为 R 的长方形线圈 $abcd$ 沿着磁针所指的南北方向平放在北半球的一个水平桌面

上。如图所示，ab 边长为 L_1，bc 边长为 L_2。现突然将线圈翻转 180°，使 ab 与 dc 交换一下位置，可设法测得导线中流过的电量为 Q_1，然后维持 ab 边不移动，将线圈绕 ab 边转动，使之突然竖直，这次测得导线中流过的电量为 Q_2，试求该处地磁场的磁感应强度的大小。

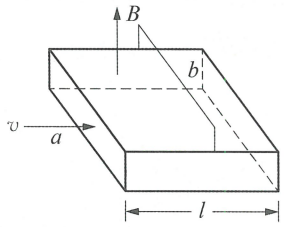
2 如图所示，有一与电容器 C 串联的光滑 U 形金属轨道，轨道宽度为 L、与地面成 θ 角放置。轨道上有一质量为 m，其长度方向与轨道垂直的金属杆 AB 可以在轨道上自由滑动。整个系统处于与轨道平面垂直的均匀磁场 B 中。若金属杆 AB 原来处于离轨道底部距离为 d 的位置，忽略整个系统的电阻，求金属杆从静止开始滑动到轨道底部所需要的时间。



第 1 题图



第 2 题图



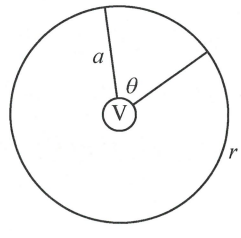
第 3 题图

3 如图所示，一矩形管道长为 l，宽度为 a，高度为 b，相距为 a 的两个侧面是导体、上下平面是绝缘体，现将两个导体平面用导线短路，使磁感应强度为 B 的匀强磁场垂直于上下平面，有电阻率为 ρ 的水银通过矩形管道，如果水银通过管子的速度 v 和加在管两端的压强差成正比，无磁场时，在压强差为 p 时水银的速度为 v_0。当加在管上的压强差为 p 且有磁场时，求水银的流速 v。

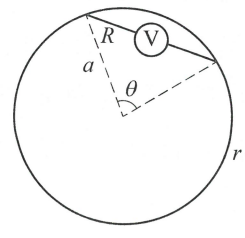
4 把一根长度为 $2\pi a$，电阻为 r 的均匀细导线的两端连接起来形成一个圆圈。一个电阻为 R 的小电压表由电阻可以忽略的裸导线连接到线圈的圆周上的两点，圆心角为 θ，如图所示。一垂直于导线圈平面的均匀的磁场以 $\dfrac{\Delta B}{\Delta t}=k$ 的速率均匀变化。问：如果电压表放在如下的位置，电压表上的示数将会是多少？

(1) 在导线圈的中心(见图 1)；

(2) 在连接两个点的弦上(见图 2)。



第 4 题图 1



第 4 题图 2

5 如图所示，阻值为 R 的等边三角形水平导轨 OPQ 上，导轨在 O 点断开，磁感应强度为 B、方向竖直向下、宽度为 d 的条形磁场区域与 PQ 平行，质量为 m 的导体棒接在劲度系数为 k 的弹簧的一端，弹簧的另一端固定，导体棒始终与 PQ 平行，且与导轨保持良好接触，弹簧无伸长

时，导体棒停于 MM' 处。现将导体棒拉至 NN' 处后自由释放，若 MM' 至顶点 O，以及 MM'、NN' 到磁场边沿的距离均为 d，导轨和导体棒的阻值忽略不计，求：

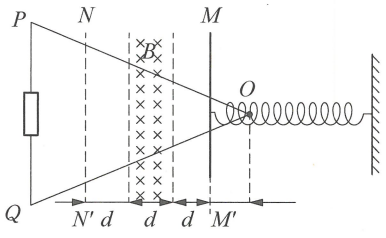
(1) 导体棒释放后，第一次穿越条形磁场区域过程中，电阻 R 中通过的电量 q。

(2) 整个过程中，电阻 R 中最多产生的焦耳热 Q。

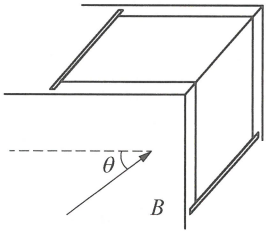
6 大的水平桌面上放一棒，长为 L，质量为 m，电阻为 R，棒平行桌缘放置，桌子的侧面有一根相同的棒，用两根无电阻的光滑柔软导线将上面的棒系在一起，空间中有匀强磁场 B，方向与桌缘垂直，与水平方向夹角为 θ。开始时刻将两棒由静止释放。

(1) 理论上棒的最大速度 v_m 多大？

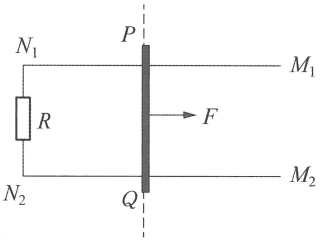
(2) 当棒速为 v，且 $v < v_m$ 时，求机械能的损耗功率 P_1 与电功率 P_2。



第 5 题图



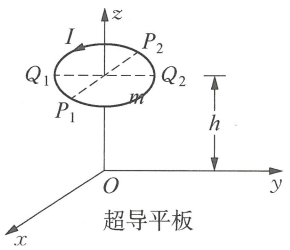
第 6 题图



第 7 题图

7 如图所示，$M_1N_1N_2M_2$ 是位于光滑水平桌面上的刚性 U 形金属导轨，导轨中接有阻值为 R 的电阻，它们的质量为 m_0。导轨的两条轨道间的距离为 l，PQ 是质量为 m 的金属杆，可在轨道上滑动，滑动时保持与轨道垂直，杆与轨道的接触是粗糙的，杆与导轨的电阻均不计。初始时，杆 PQ 位于图中的虚线处，虚线的右侧为一匀强磁场区域，磁场方向垂直于桌面，磁感应强度的大小为 B。现有一位于导轨平面内的与轨道平行的恒力 F 作用于 PQ 上，使之从静止开始在轨道上向右做加速运动。已知经过时间 t，PQ 离开虚线的距离为 x，此时通过电阻的电流为 I_0，导轨向右移动的距离为 x_0（导轨的 N_1N_2 部分尚未进入磁场区域）。求在此过程中电阻所消耗的能量（不考虑回路的自感）。

8 在外磁场中的超导体，平衡后超导体内部的磁感应强度处处为零，超导体表面外侧的磁感应强度与表面平行。如图所示的 $O-xyz$ 直角坐标系中，xOy 平面是水平面，其中有一超导平板，z 轴竖直向上，超导平板在 $z=0$ 处，在 $z=h$ 处有一质量为 m、半径为 r、环心在 z 轴上、环平面为水平面的匀质金属圆环，且有 $r \ll h$。在圆环内通以稳恒电流，刚好使圆环漂浮在 $z=h$ 处。



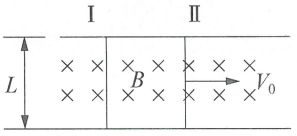
第 8 题图

(1) 试求圆环中的电流强度。

(2) 若使圆环保持水平，从平衡位置稍稍偏上或偏下，则圆环将上下振动，试求振动周期 T_1。

9 水平面内，有两根足够长的固定平行金属导轨，在它们上面横放两根平行导体棒，构成矩形

回路，每根棒长度为 L，质量为 m，电阻为 R，导轨电阻不计，空间有方向竖直向下、磁感应强度为 B 的匀强磁场。不计导体棒与导轨间的摩擦，开始时图中左侧导体棒Ⅰ静止，右侧导体棒Ⅱ具有向右的初速度 v_0，试求两根导体之间距离增量 x 的上限。



第 9 题图

10 质量为 m 的小珠，只能沿半径为 r 的圆形轨道运动，轨道平面为水平面，小珠带有正电荷 q。设圆形轨道内有空间均匀分布但随时间变化的磁场，磁感应强度 $B(t)$ 方向垂直环面向上，$t=0$ 时，$B=0$，小珠静止于环上；$0<t<T$ 时，$B(t)$ 随时间均匀增大；$t=T$ 时，$B=B_0$；$t\geqslant T$ 时，磁场稳定不变。试定量讨论 $t>0$ 时小珠的运动状况及由于小珠的运动而对轨道的作用力（阻力不计）。

第 16 章　交流电路

知识要点和基本方法

一　正弦式交流电

1. 交流电的产生

如图 16－1 所示，当矩形线圈在匀强磁场中绕垂直于磁场方向的轴以角速度 ω 匀速转动时，线圈中的电动势 e、电流 i 按正弦规律变化，即产生正弦交流电。如果从中性面开始计时，则电动势 $e=NBS\omega\sin\omega t$，$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=NBS\omega$。一般形式为

$$u=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$
$$i=I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi)$$

这就是最基本的正弦交流电，其图象为正弦曲线，如图 16－2 所示。

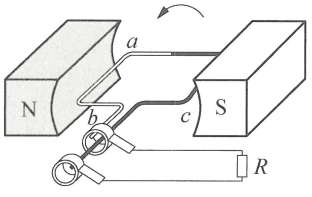


图 16－1

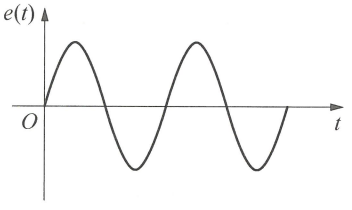


图 16－2

由数学上的傅里叶分解可知，任何一个周期性的函数都可分解成一系列频率成整数倍的简谐函数。即一切非简谐式的变化量，都可分解成一系列不同频率的简谐成分的叠加。所以，任何非简谐式的交流电都可分解为一系列不同频率的简谐成分。而且不同频率的简谐成分在线性电路中彼此独立、互不干扰。因此正弦式交流电是处理一切交流电问题的基础，是最基本的交流电。

2. 描述正弦式交流电的特征量

通常采用余弦函数的形式：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{交变电动势} & e(t)=\mathscr{E}_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_e)\\ \text{交变电压} & u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)\\ \text{交变电流} & i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_i)\end{array}\right\}\qquad①$$

(1) 周期和频率

式①中的 ω 是角频率，它与频率 f 之间的关系是

$$\omega=2\pi f\qquad\text{或}\qquad f=\frac{\omega}{2\pi}$$

f 的含义是单位时间内交流电做周期性变化的次数，它与周期 T 的关系是

$$f=\frac{1}{T} \qquad 或 \qquad T=\frac{1}{f}$$

(2) 峰值和有效值

式①中 $\mathscr{E}_m$、U_m、I_m 分别是电动势、电压、电流的峰值，是瞬时值随时间变化的幅度。通常说交流电压、电流的数值指的是有效值。在交流电变化的一个周期内，交流电流在电阻 R 上产生的热量相当于某一数值的直流电流在该电阻上所产生的热量，此直流电流的数值就是该交流电流的有效值。交流电的有效值通常用 U 或 I 来表示。设电阻 R 通以交流电 i，在一个周期内交流电在电阻上产生的总热量

$$W=\sum_0^{\pi} i^2R\Delta t$$

而直流电 I 在同一时间 T 内在该电阻上产生的热量

$$W=I^2Rt$$

根据有效值的定义有

$$\sum_0^{\pi} i^2R\Delta t=I^2Rt$$

对正弦交流电，有 $i=I_m\sin\omega t$，故

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}I_m^2\sum\sin^2(\omega t)\Delta t}$$

其中

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

而

$$\sin^2\omega t=\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

所以

$$I=I_m\sqrt{\frac{1}{2T}\sum_0^{T}(1-\cos 2\omega t)\Delta t}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}\approx 0.707I_m$$

即

$$E=\frac{E_m}{\sqrt{2}},\ I=\frac{I_m}{\sqrt{2}},\ U=\frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

可见正弦交流电的有效值等于峰值的 0.707 倍。通常，交流电表都是按有效值来刻度的。一般不做特别说明，交流电的大小均是指有效值。例如电压 220 V，就是指其有效值为 220 V，它的峰值为 $U_m=220\sqrt{2}\ \text{V}\approx 311\ \text{V}$。

(3) 相位

式①中的 $\omega t+\varphi_e$、$\omega t+\varphi_u$、$\omega t+\varphi_i$ 等叫做相位，其中 φ_e、φ_u、φ_i 叫做初相位。和简谐振动中相位决定瞬时运动状态一样，交流电中的相位也是决定瞬时变化状态的。如果两个简谐

量之间有相位差，就表示它们变化的步调不一致。

(4) 交流电流的平均值

交流电在半周期内，通过电路中导体横截面的电量 Q 和某一直流电在同样时间内通过该电路中导体横截面的电量相等时，这个直流电的数值就称为该交流电在半周期内的平均值。根据定义，不难算出交流电流的平均值 $I=\dfrac{2}{\pi}I_{\mathrm{m}}\approx 0.637I_{\mathrm{m}}$。

3. 趋肤效应

在直流电路里，均匀导线横截面上的电流密度是均匀的。但在交流电路里，随着频率的提高，在导线截面上的电流分布越来越向导线表面集中。当 $f>100\ \mathrm{kHz}$ 时，电流明显地集中到表面附近，这种现象叫做趋肤效应。趋肤效应使高频下导线的有效横截面积减小，从而使它的等效电阻增加。

二 简单交流电路

在交流电路中，电压、电流之间不仅有量值(峰值或有效值)大小的关系，还有相位关系。所以反映某一元件上电压 $u(t)$ 和其中电流 $i(t)$ 的关系，需要有两个量，一是二者峰值之比(即有效值之比)，这叫做该元件的阻抗，用 Z 表示：

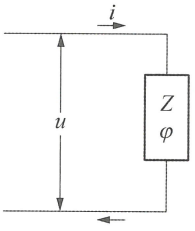


图 16-3

$$Z=\frac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}=\frac{U}{I}$$

二是两者相位之差 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$。

Z 和 φ 总起来代表着元件本身的特性(如图 16-3 所示)。

1. 纯电阻交流电路

欧姆定律仍适用于交流电路中的电阻元件，即瞬时电压和瞬时电流之间仍是一个简单的比例关系。设

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

则

$$i(t)=\frac{u(t)}{R}=\frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\cos\omega t=I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

其中 $I_{\mathrm{m}}=\dfrac{U_{\mathrm{m}}}{R}$ 为电流的峰值。由此可见，对于电阻元件，其交流阻抗 Z_R 就是它的电阻 R，电压、电流的相位一致，即

$$\left.\begin{aligned}Z_R&=R\\ \varphi&=0\end{aligned}\right\}$$

如图 16-4 所示。

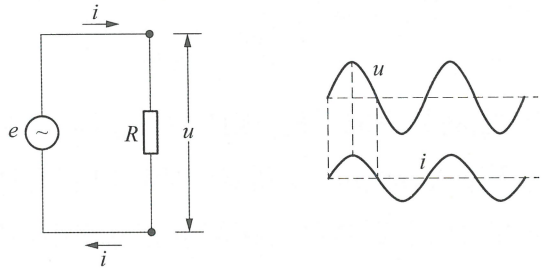


图 16－4

2. 纯电容交流电路

设电路中的电流 $i(t)$和电容器极板上电荷量 $q(t)$对应。如图 16－5 所示，当电路中有电流 $i(t)$时，在时间间隔 Δt 内电容器极板上的电荷量将增加 $\Delta q = i(t)\Delta t$，取 $\Delta t \to 0$ 的极限，得到

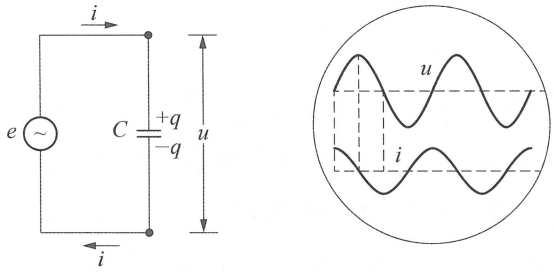


图 16－5

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

即电流是电荷量 q 对 t 的导数。

设 $q(t)$、$i(t)$、$u(t)$都随时间做简谐变化，并选 $q(t)$的初相位为 0，

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= Q_{\mathrm{m}}\cos \omega t \\ i(t) &= I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_i) \\ u(t) &= U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t + \varphi_u) \end{aligned}\right\}$$

得

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\omega Q_{\mathrm{m}}\sin \omega t = \omega Q_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

因为电容器上的电压 $u(t)$与 $q(t)$成正比：

$$u(t) = \frac{q}{C} = \frac{Q_{\mathrm{m}}}{C}\cos \omega t$$

由此得到电容元件上的相位差为

$$\varphi_i = \frac{\pi}{2},\ \varphi_u = 0 \quad \text{（相应的波形图如图 16－5 所示）}$$

容抗 $$Z_C=\frac{u}{I}=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}$$

由于电容器的容抗与交流电的频率成反比，因此频率越高，容抗就越小，频率越低，容抗就越大。对直流电来讲，容抗为无限大，故相当于断路。所以电容元件在交流电路中的基本作用之一就是“隔直流，通交流”或“阻低频，通高频”；在纯电容电路中，其电流的相位超前于电容两端的电压$\frac{\pi}{2}$。其根源在于在任何瞬时电压都与电荷量成正比，而电流等于电荷量的时间变化率。

3. 纯电感交流电路

如图 16－6 所示的交流电源加于电感元件上，当有交变电流通过电感时，就在线圈内部产生自感电动势

$$e_L=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

上式中的 e_L 和 i 是对回路的同一标定方向而言的。例如标定电流 i 的方向为顺时针方向，即从 A 到 B 通过电感元件，则上式中 e_L 取正值或负值也是相对此方向而言的。由于电感元件内存在着自感电动势 e_L，它本身就是一个交流电源，当 $e_L>0$ 时 A 是这电源的负极，B 是它的正极；反之，当 $e_L<0$ 时，电源的极性也跟着反过来。电感元件上的电压 $u(t)$ 指的是“电势降落”，如果我们选择回路的绕行方向和电流的方向一致，即在图中也取为顺时针方向，则电感元件上的电势降落 $u(f)$ 是 $u_{AB}=u(A)-u(B)$ 而不是 $u_{BA}=u(B)-u(A)$。因此当 $e_L>0$ 时，A 是负极，B 是正极，$u=u_{AB}<0$；反之，当 $e_L<0$ 时，A 是正极，B 是负极，$u=u_{AB}>0$。在任何情况下 $u=u_{AB}$ 总与 e_L 相差一个负号。在电感元件的内阻可忽略的情况下，我们有 $u=u_{AB}-e_L$，即

$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

仍设 $i(t)$，$u(t)$ 都随时间做简谐变化，并选 $i(t)$ 的初相位为 $\varphi_i=0$，则

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos\omega t,\ u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

得 $$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=-\omega LI_{\mathrm{m}}\sin\omega t=\omega LI_{\mathrm{m}}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_{\mathrm{m}}=\omega LI_0,\ \varphi_u=\frac{\pi}{2}$$

由此可见，电感元件的阻抗（感抗）和相位差为

$$Z_L=\frac{U_{\mathrm{m}}}{I_{\mathrm{m}}}=\omega L,\ \varphi=\varphi_u-\varphi_i=\frac{\pi}{2}$$

相应的波形图参见图 16－6。

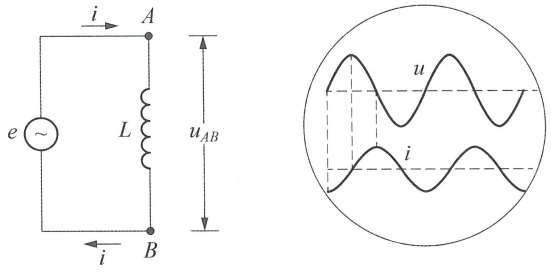


图 16－6

交流电路元件的比较

元件种类	$Z=\frac{U_m}{I_m}=\frac{U}{I}$	$\varphi=\varphi_u-\varphi_i$
电容 C	$Z_C=\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{2\pi fC}\propto\frac{1}{f}$	$-\frac{\pi}{2}$
电阻 R	$Z_R=R$ （与 f 无关系）	0
电感 L	$Z_L=\omega L=2\pi fL\propto f$	$\frac{\pi}{2}$

三 用矢量图解法计算串、并联电路*

在简谐机械运动中已经知道，如果一矢量绕其起端（原点 O）匀速转动，则其末端在其基准线 Ox 上的投影运动为简谐运动。

1. 用矢量图解法求合矢量 A 和相位 φ 的步骤

（1）取原点 O 和一水平基准线 Ox 如图 16－7 所示。从原点 O 引两个矢量 $\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$，它们的长度 A_1 和 A_2 分别等于简谐量 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 的峰值；$\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$ 与水平轴线的夹角（辐角）φ_1 和 φ_2 分别等于简谐量 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 的初相位。

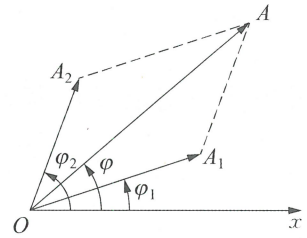


图 16－7

（2）用矢量的加法（平行四边形法则）求出合成矢量

$$\vec{A}=\vec{A}_1+\vec{A}_2$$

则 $\vec{A}$ 的长度 A 即为合成简谐量 $a(t)$ 的峰值，$\vec{A}$ 的辐角 φ 即为 $a(t)$ 的初相位。

2. 用矢量图解法求交流电路中的串、并联问题

（1）RC 串联

在串联电路中，通过各元件的电流 $i(t)$ 是共同的，如图 16－8 所示。我们就以它为基准，画一个水平矢量 I 来代表它，如图 16－9 所示。因为电阻元件上的电压 $u_R(t)$ 与 $i(t)$ 相位一致，

代表 $u_R(t)$ 的矢量 U_R 与 I 平行。因为电容元件上的电压 $u_C(t)$ 比 $i(t)$ 的相位落后 $\frac{\pi}{2}$，代表 $u_C(t)$ 的矢量 U_C 垂直向下。以 U_R、U_C 为邻边的矩形的对角线即为合矢量 $U=U_R+U_C$。U 的长度为 $U=\sqrt{U_R^2+U_C^2}$，

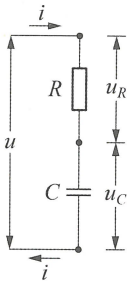


图 16－8

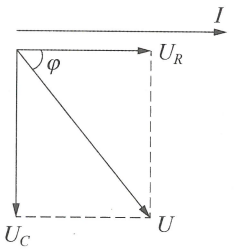


图 16－9

它与矢量 $\vec{I}$ 之间的夹角为 $\varphi=-\arctan\dfrac{U_C}{U_R}$。

如果 U_R、U_C 代表 R、C 元件上分电压的有效值，则 U 就是总电压的有效值，φ 是总电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 之间的相位差。

设电流 $i(t)$ 的有效值为 I，则

$$U_R=IZ_R=IR,\ U_C=IZ_C=\frac{I}{\omega C}$$

故二者之比为

$$\frac{U_C}{U_R}=\frac{Z_C}{Z_R}=\frac{1}{\omega CR}$$

$$U=I\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2},\ \varphi=-\arctan\frac{1}{\omega CR}$$

我们还可求出 RC 串联电路的总阻抗为

$$Z=\frac{U}{I}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

这表明总电压的有效值 U 不等于分电压有效值 U_R、U_C 之和，分电压有效值的分配与各元件的阻抗成正比。

(2) RL 串联

对于 RL 串联电路(如图 16－10 所示)，可用同样方法来计算，其结果如下。

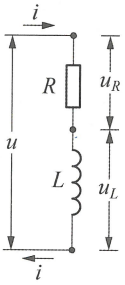


图 16－10

总电压为 $U=\sqrt{U_R^2+U_L^2}$

总阻抗为 $Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$

总电压 $u(t)$ 与电流 $i(t)$ 之间的相位差为

$$\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}$$

(3) RC 并联

在并联电路中，各元件上的电压 $u(t)$ 是共同的，我们就以它为基准，画一个水平的矢量 U 来代表。因 $i_R(t)$ 与 $u(t)$ 相位一致，画 I_R 与 U 平行；因 $i_C(t)$ 比 $u(t)$ 相位超前 $\frac{\pi}{2}$，画 I_C 垂直向上。合矢量 $\vec{I}=\vec{I}_R+\vec{I}_C$ 的长度为

$$I=\sqrt{I_R^2+I_C^2}$$

u 与 I 之间的夹角为 $\varphi=-\arctan\frac{I_C}{I_R}$（因 u 比 i 落后，故 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$ 加负号）

又因

$$I_R=\frac{U}{Z_R}=\frac{U}{R},\ I_C=\frac{U}{Z_C}=\omega CU$$

故两分支电路电流之比为 $\frac{I_C}{I_R}=\frac{Z_R}{Z_C}=\omega CR$

得 $I=U\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2},\ \varphi=-\arctan(\omega C)$

可求出 RC 并联电路的等效阻抗为

$$Z=\frac{U}{I}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+(\omega C)^2}}$$

这表明总电流的有效值不等于分电流有效值 I_R、I_C 之和，分电流有效值的分配与各元件的阻抗成反比。

(4) RL 并联

用同样方法计算 RL 并联电路，所得结果如下：

总电流为 $I=\sqrt{I_R^2+I_L^2}$

等效阻抗为 $Z=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{(\omega L)^2}}}$

电压 $u(t)$ 与总电流 $i(t)$ 之间的相位差为

$$\varphi=\arctan\frac{R}{\omega L}$$

四 交流电路的复数表述*

1. 简谐量的复数表示

如果我们将简谐量按下列法则和复数量对应起来：

$$a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\leftrightarrow\tilde{A}_1=A_1e^{j(\omega t+\varphi_1)}$$

$$a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\leftrightarrow\tilde{A}_2=A_2e^{j(\omega t+\varphi_2)}$$

即令复数 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 的模 A_1 和 A_2 分别等于 $a_1(t)$和 $a_2(t)$的峰值，辐角 $\omega t+\varphi_1$ 和 $\omega t+\varphi_2$ 分别等于 $a_1(t)$和以 $a_2(t)$的相位。

令复数 $\tilde{A}_1$ 和 $\tilde{A}_2$ 之和 $\tilde{A}=\tilde{A}_1+\tilde{A}_2=Ae^{j(\omega t+\varphi)}$，则 $\tilde{A}$ 的模 $A=|\tilde{A}|$ 即为合成简谐量 $a(t)=a_1(t)+a_2(t)$ 的峰值(或有效值)，$\tilde{A}$ 的辐角 $\omega t+\varphi$ 即为 $a(t)$ 的相位，$t=0$ 时的辐角 φ 即为 $a(t)$ 的初相位。

2. 复电压、复电流及复阻抗

复数法的基本原则是把所有的简谐量都用对应的复数来表示。

与交变电压 $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi_u)$

和交变电流 $i(t)=I_m\cos(\omega t+\varphi_i)$

对应的复数分别是

$$\tilde{U}=U_me^{j(\omega t+\varphi_u)}\text{ 和 }\tilde{I}=I_me^{j(\omega t+\varphi_i)}$$

$\tilde{U}$ 称为复电压，$\tilde{I}$ 称为复电流。同一段电路上的 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{I}$ 的比值

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\frac{U_me^{j(\omega t+\varphi_u)}}{I_me^{j(\omega t+\varphi_i)}}=\frac{U_m}{I_m}e^{j(\varphi_u-\varphi_i)}=Ze^{j\varphi}$$

这也是一个复数，它的模等于这段电路的阻抗 $Z=\dfrac{U_m}{I_m}$，它的辐角为 $\varphi=\varphi_u-\varphi_i$。我们把这个复数记作 $\tilde{Z}$，即 $\tilde{Z}=Ze^{j\varphi}$。复数 $\tilde{Z}$ 完全概括了这段电路本身的两方面基本性质——阻抗和相位差，它叫做这段电路的复阻抗。即

$$\frac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\tilde{Z}\quad\text{或}\quad\tilde{U}=\tilde{I}\tilde{Z}$$

这个公式同直流电路中的欧姆定律具有完全相同的形式，这里的 $\tilde{Z}$ 和欧姆定律中的电阻 R 地位相当。

(1) 电阻元件：$Z_R=R$，$\varphi=0$，故 $\tilde{Z}_R=R$。

(2) 电容元件：$Z_C=\dfrac{1}{\omega C}$，$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tilde{Z}_C=\dfrac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}}=\dfrac{-j}{\omega C}=\dfrac{1}{j\omega C}$。

(3) 电感元件：$Z_L=\omega L$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tilde{Z}_L=\omega L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}=\mathrm{j}\omega L$。

上述结果表明，$\tilde{Z}_R$ 为正实数，$\tilde{Z}_C$ 为负虚数，$\tilde{Z}_L$ 为正虚数。

3. 串、并联电路的复数解法

(1) 串联电路

如图 16－11 所示，串联电路上总电压的瞬时值等于各段分电压瞬时值之和：

$$\tilde{U}=\tilde{U}_1+\tilde{U}_2$$

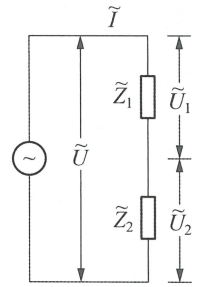


图 16－11

设各段的复阻抗为 $\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_2$，整个电路的复阻抗为 $\tilde{Z}$，则根据复数形式的欧姆定律式有

$$\tilde{U}_1=\tilde{I}_1\tilde{Z}_1,\ \tilde{U}_2=\tilde{I}_2\tilde{Z}_2,\ \tilde{U}=\tilde{I}\tilde{Z}$$

因为复电流 $\tilde{I}$ 是共同的，代入式 $\dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\tilde{Z}$ 即得串联电路的复阻抗公式：

$$\tilde{Z}=\tilde{Z}_1+\tilde{Z}_2$$

(2) 并联电路

如图 16－12 所示，并联电路中总电流的瞬时值等于各分支电流瞬时值之和：

$$\tilde{I}=\tilde{I}_1+\tilde{I}_2$$

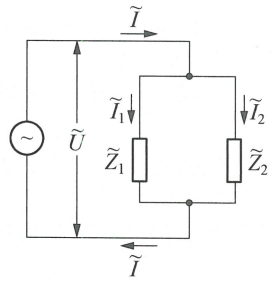


图 16－12

设各分支的复阻抗为 $\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_2$，整个电路的等效阻抗为 $\tilde{Z}$，则

$$\tilde{I}_1=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_1},\ \tilde{I}_2=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}_2},\ \tilde{I}=\frac{\tilde{U}}{\tilde{Z}}$$

因为复电压 $\tilde{U}$ 是共同的，代入式 $\dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}}=\tilde{Z}$ 即得并联电路的复阻抗公式：

$$\frac{1}{\tilde{Z}}=\frac{1}{\tilde{Z}_1}+\frac{1}{\tilde{Z}_2}$$

上述结果表明，交流电路复阻抗的串、并联公式和直流电路电阻的串、并联公式在形式上完全一样。

五 交流电的功率*

交流电在某一元件或组合电路中瞬间消耗的功率 $P(t)$（瞬时功率），与直流电路中一样，

也等于该瞬间电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的乘积：

$$P(t)=u(t)i(t)$$

设 $u(t)$ 和 $i(t)$ 之间有相位差 φ，φ 的大小由该元件和组合电路的性质所决定。并设

$$i(t)=I_{\mathrm{m}}\cos\omega t$$

则

$$u(t)=U_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$P(t)=U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)$$

$$=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos\varphi+\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos(2\omega t+\varphi)$$

平均功率

$$\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P(t)\mathrm{d}t$$

由于第二项结果为 0，故 $\bar{P}=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}\cos\varphi$。

下面我们先看三个单纯元件的情形。

(1) 纯电阻元件

这里 $\varphi=0$，$\cos\varphi=1$，故 $\bar{P}=\frac{1}{2}U_{\mathrm{m}}I_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}I_{\mathrm{m}}^2R$。

与直流电路完全相同，产生焦耳热。

(2) 纯电容或纯电感元件

这里 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$，$\cos\varphi=0$，从而 $\bar{P}=0$，$P(t)>0$ 表示有能量输入该元件，输入到电容元件中的能量以两极板间的电场能形式储存起来；输入到电感元件中的能量以线圈中的磁场能形式储存起来。$P(t)<0$ 表示能量从元件中输出，即电容、电感元件把自己储存的电场能、磁场能重新释放出来。$\bar{P}=0$ 表明，在纯电容或纯电感元件中能量的转换过程完全是可逆的。

(3) 功率因数

用有效值来表示，$\bar{P}=UI\cos\varphi$，小于 1 的正因子 $\cos\varphi$ 叫做功率因数。总电流即可分解成有功分量和无功分量两部分。用电器的功率因数 $\cos\varphi$ 越大，则有功分量所占的比例就越大。

六 整流和滤波

1. 整流

将交变电流变为脉动直流电流的过程，叫做整流。

(1) 半波整流

半波整流是一种利用二极管的单向导通特性来进行整流的常见电路。半波整流后输出的直流电为脉动直流电。

半波整流电路如图 16－13 所示，B 为电源变压器，D 为二极管，R 是负载。对应原线圈中输入的交流电，副线圈两端有交变电压输出。设输出电压 $u_{ab}=U_{\mathrm{m}}\sin\omega t$，得其波形如图 16－14 所示。当 $u_{ab}>0$ 时，二极管导通，设正向电阻为零，则 $u_R=u_{ab}$；当 $u_{ab}<0$ 时，$u_R=0$，得如图 16－15 所示的波形。可知，u_R 为强度随时间变化的直流电，也叫脉动直流电。

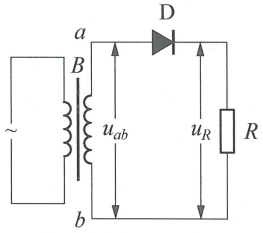


图 16－13

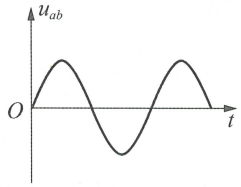


图 16－14

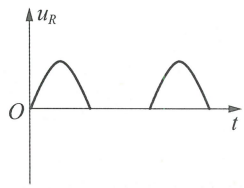


图 16－15

（2）全波整流

全波整流对交流电的正、负半周电流都加以利用，输出的脉动电流将交流电的负半周也变成正半周，即将周期为 T 的交流电流，变成周期为$\frac{T}{2}$的脉动直流电流。全波整流电路如图 16－16 所示，其实质是用两个二极管 D_1、D_2 分别完成半波整流从而实施全波整流。O 是变压器的中央抽头。由于二极管的单向导电性，D_1、D_2 交替导通，在两种情形通过负载的电流方向是相同的。如图 16－17 所示为变压器副线圈 a、b 间的交变电压波形，图 16－18 所示为负载电阻上的电压波形。

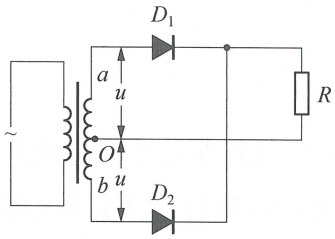


图 16－16

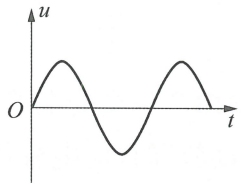


图 16－17

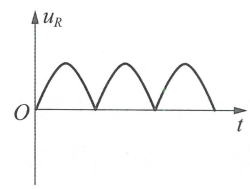


图 16－18

（3）桥式整流

如图 16－19 所示电路为桥式整流电流，它采用四个二极管桥式连接实现整流。桥式整流的波形跟全波整流的波形相似。与全波整流相比，桥式整流的优点是变压器不用抽头，应用十分广泛。

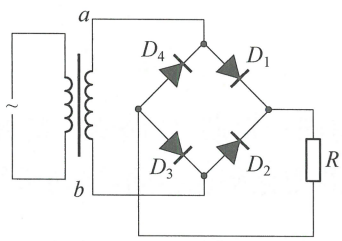


图 16－19

2. 滤波

把脉动直流电流中的变化成分滤掉变成比较平稳的直流电，这一过程称为滤波。最常见的是 π 形滤波电路(如图 16－20 所示)。

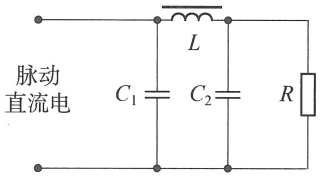


图 16－20

利用电容器隔直通交和电感器通直隔交的特性可在负载 R 上得到比较平稳的直流电。

七 变压器

变压器是以互感现象为基础的电磁装置，它的原理性结构如图 16－21 所示，是绕在同一铁芯上的两个线圈。连接到电源上的称为原线圈(或初级线圈)，连接到负载上的称为副线圈(或次级线圈)，能量靠铁芯中的互感磁通来传递。

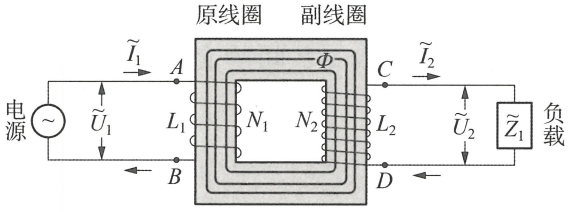


图 16－21

在交流电源的作用下，在原线圈内产生交变电流，从而在铁芯内激发交变的磁通量。交变的磁通量又在副线圈内产生感应电动势和感应电流，它反过来通过互感磁通又影响到原线圈。

1. 理想变压器

(1) 没有漏磁，即通过两绕组每匝的磁通量 Φ 都一样；

(2) 两绕组中没有电阻：从而没有铜损(即忽略绕组导线中的焦耳损耗)；

(3) 铁芯中没有铁损(即忽略铁芯中的磁滞损耗和涡流损耗)；

(4) 原、副线圈的感抗趋于∞，从而空载电流趋于 0。

满足这些条件的变压器叫做理想变压器，因为在理想变压器中忽略了一切损耗，电能的转换效率是 100%。

2. 变比公式

由于初级线圈与次级线圈共用同一铁芯，忽略铁芯的漏磁可以认为穿过初级线圈与次级线圈的磁通量 Φ 相同，因而磁通量的变化率也相同，在初级线圈与次级线圈的每一匝上产生的感应电动势 $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ 也相等。初级线圈与次级线圈中的感应电动势分别为：

$$\mathscr{E}_1 = n_1 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t},\ \mathscr{E}_2 = n_2 \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

式中 n_1、n_2 分别是初级线圈与次级线圈的匝数。因此 $\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{n_1}{n_2}$。

对于理想变压器，初级线圈与次级线圈的电阻可忽略不计，则输入电压 $U_1 = \mathscr{E}_1$，输出电压 $U_2 = \mathscr{E}_2$。因此变压器的输入电压与输出电压满足

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

上式表明变压器初级线圈与次级线圈的端电压之比等于这两个线圈的匝数比。

对于理想变压器不计能量损耗，所以变压器的输入功率等于输出功率，即 $U_1 I_1 = U_2 I_2$，因此 $\frac{I_1}{I_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$。

这就是说，对于只有一个次级线圈的变压器工作时，初级线圈与次级线圈中电流强度跟线圈匝数成反比。

3. 远距离输电

由于在输电线中的焦耳热损耗正比于电流的平方。远距离输电时，就需要用变压器升高电压以减小电流。发电机的输出电压一般是 6～10 kV，通常根据输电距离的远近，用大型电力变压器将电压升高到 35 kV、110 kV、220 kV 等高压。电流经高压线传送到企业用户时，再用降压变压器把电压降到几百伏，这样可以有效减少输电线上的损失功率。

八 三相交流电*

1. 三相交流电的产生、相电压和线电压

图 16－22 所示是一个三相交流发电机的示意图，其中 AX、BY、CZ 是三个结构完全相同的线圈，它们排列在圆周上的位置彼此差 $\frac{2\pi}{3}$（即 120°）的角度。当磁铁 N、S 极以匀角速 ω 旋转时，每个线圈内产生一个交变电动势，它们的幅值 $\mathscr{E}_0$（或有效值 $\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}}$）和角频率 ω 都相同，但相位彼此差 $\frac{2\pi}{3}$。因此它们的瞬时值及其复数表示可分别写成：

$$e_{AX}(t) = \mathscr{E}_0 \cos \omega t,\ \dot{\mathscr{E}}_{AX} = \mathscr{E}_0 e^{j\omega t}$$

$$e_{BY}(t) = \mathscr{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),\ \dot{\mathscr{E}}_{AX} = \mathscr{E}_0 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{3})}$$

$$e_{CZ}(t) = \mathscr{E}_0 \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right);\ \dot{\mathscr{E}}_{AX} = \mathscr{E}_0 e^{j(\omega t + \frac{2\pi}{3})}$$

瞬时值随时间变化的情况，参见图 16－23。这种频率相同而相位彼此差$\frac{2\pi}{3}$的三个交流电，叫做三相交流电。

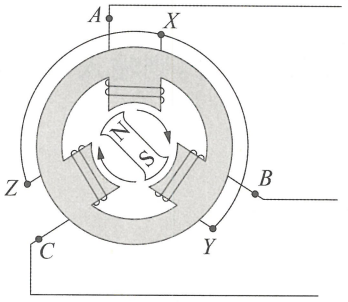


图 16－22

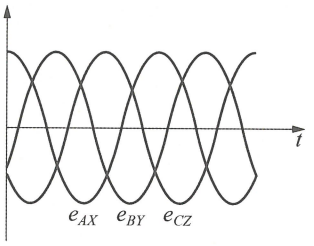


图 16－23

2. 三相发电机内部三个线圈的两种接法

(1) 星形连接(Y 形连接)

如图 16－24 所示，三相中每个线圈的头 A、B、C 分别引出三条线，为相线；每个线圈尾 X、Y、Z 连接在一起引出另一条线，为中性线。这种连接，叫星形连接。共有四根输出的引线，叫做三相四线制。

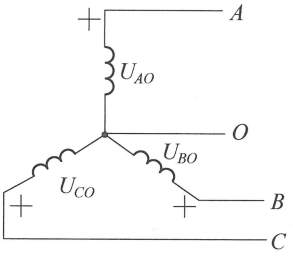


图 16－24

(2) 三角形连接(△连接)

如图 16－25 所示，三相电源有三个线圈，具有 A、X、B、Y、C、Z 六个接头，如果把这三个线圈的六个接头首尾依次连接起来，引出三根导线，这种连接叫三角形连接。这也叫做三相三线制。

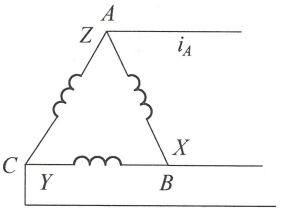


图 16－25

(3) 相电压和线电压

在三相交流电中，三相发电机每个线圈首尾两端之间的电压叫做相电压。在发电机内阻可以忽略的情况下，相电压就等于各相中的电动势，因此它们的有效值相等(用 U_φ 表示)，相位彼此差$\frac{2\pi}{3}$。从 A、B、C 引出的各端线之间的电压 $\tilde{U}_{AB}$、$\tilde{U}_{BC}$、$\tilde{U}_{CA}$ 叫做线电压。星形连接中各端线与中性线间的电压 $\tilde{U}_{AO}$、$\tilde{U}_{BO}$、$\tilde{U}_{CO}$ 就是相电压。在三角形连接中，线电压与相电压总是相等的。

星形连接的三相四线制中，当每一相的负载相同时，每个线圈中的电流(线电流)与每个相线中的电流(相电流)总是相等的，即 $I_{线}=I_{相}$。

(4) 星形连接中线电压与相电压的关系

$$\left.\begin{aligned}\tilde{U}_{AB}&=\tilde{U}_{AO}-\tilde{U}_{BO}\\ \tilde{U}_{BC}&=\tilde{U}_{BO}-\tilde{U}_{CO}\\ \tilde{U}_{CA}&=\tilde{U}_{CO}-\tilde{U}_{AO}\end{aligned}\right\}$$

根据矢量的减法，不难得到线电压等于相电压的$\sqrt{3}$倍。

通常在车间或实验室中三相交流电源的线电压是 380 V(有效值)，从而相电压是$\frac{380\ \mathrm{V}}{\sqrt{3}}=220\ \mathrm{V}$(有效值)。

从电压矢量图(见图 16－26)还可看出，代表三个线电压的矢量$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{CB}$、$\overrightarrow{AC}$彼此间的夹角也都是$\frac{2\pi}{3}$，这表明，三个线电压的相位也彼此差$\frac{2\pi}{3}$。

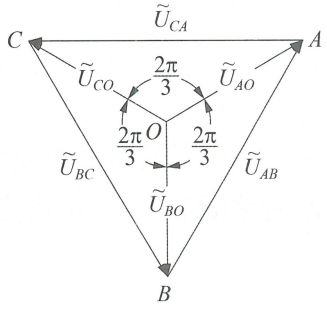


图 16－26

3. 感应电动机

如果在圆周上均匀地固定三个线圈$\left(\text{位置彼此差}\frac{2\pi}{3}\text{角度}\right)$，将三相交流电分别通入三个线圈，就可以在中间形成一个旋转的磁场。中间一个闭合线圈和外面的圆周共轴。利用楞次定律和左手定则，可知闭合线圈会跟着磁场旋转，这就是感应电动机的基本原理。

感应电动机的一大优点是无需由外界将电流通入转子，这样就可以避开电刷等易损部件。此外感应电动机改变旋转方向也十分方便，只要将三相电流其中的两相对换即可。

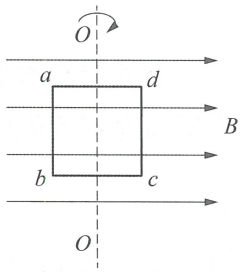
例题精讲

例 1 如图所示，正方形线圈 $abcd$ 绕对称轴 OO' 在匀强磁场中匀速转动，转速 $n=120/\mathrm{min}$。已知 $ab=bc=0.2\ \mathrm{m}$，匝数 $N=20$，磁感应强度 $B=0.2\ \mathrm{T}$，求：

(1) 转动中产生的最大电动势及产生的位置；

(2) 从图示位置转过 90°过程中的平均电动势；

(3) 设线圈是闭合的，总电阻 $R=10\ \Omega$，线圈转动过程中受到的最大电磁力矩及位置。



例 1 图

解析 (1) 当线圈平面与磁场方向平行时，线圈的 ab、cd 边切割磁感线的有效速度最大，产生的感应电动势最大

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=NBS\omega=NBS\cdot 2\pi\frac{n}{60}=2.01\ \mathrm{V}$$

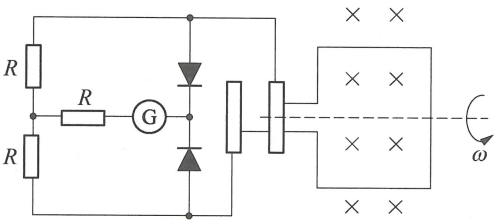
(2) 从图示位置转过 90°过程中，线圈中发生的磁通量变化 $\Delta\Phi=BS$，经历的时间为$\frac{\pi}{2\omega}$，由法拉第电磁感应定律解得平均感应电动势为

$$\bar{\mathscr{E}}=N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=\frac{NBS}{\frac{\pi}{2\omega}}=\frac{2NBS\omega}{\pi}=1.28\ \mathrm{V}$$

(3) 当线圈平面与磁场方向平行时，线圈中产生的感应电动势最大，产生的感应电流最大。此时线圈的 ab、cd 边受到的安培力最大且与线圈平面垂直，因而磁力矩也就最大

$$M_{\mathrm{m}}=NBI_{\mathrm{m}}S=NBS\frac{\mathscr{E}_{\mathrm{m}}}{R}=\frac{N^2B^2S^2\omega}{R}=0.032\ \mathrm{N\cdot m}$$

例 2 有一个矩形平面线圈，面积 $S=\sqrt{2}l^2$，匝数为 n，总电阻为 $0.5R$，此线圈在磁感应强度为 B 的匀强磁场中绕对称轴匀速转动。开始转动时，线圈平面与磁感线垂直，线圈外部电路中，三个电阻器阻值均为 R。二极管正向电阻为零，反向电阻无穷大。已知电流表的示数为 I，如图所示，求：



例 2 图

(1) 线圈转动角速度 ω；

(2) 写出线圈中感应电动势随时间的表达式；

(3) 使线圈匀速转动时外力矩的大小。

解析 (1) 矩形线圈在磁场中匀速转动时，将产生交流电。在交流电的两个半周期内，两只二极管交替导通。因此，线圈外部电路的总电阻将不会改变，即

$$R_{外}=\frac{1}{2}R+R=\frac{3}{2}R$$

电流表的示数表示流经两并联电阻中一个电阻器的电流强度有效值。因此，外部电路总电流强度有效值应为 $2I$。由闭合电路欧姆定律，可得交变电动势的有效值：

$$\mathscr{E}=2I(R_{外}+r)=4IR$$

则交流电动势的最大值为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=\sqrt{2}\mathscr{E}=4\sqrt{2}IR$$

根据法拉第电磁感应定律，线圈在磁场中匀速转动产生的感应电动势最大值为

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}}=nB\omega S=\sqrt{2}n\omega Bl^2$$

可得

$$\omega=\frac{4IR}{nBl^2}$$

(2) 感应电动势的表达式

$$e=\mathscr{E}_{\mathrm{m}}\sin\omega t=4\sqrt{2}IR\sin\left(\frac{4IR}{nBl^2}t\right)$$

(3) 线圈在 t 时刻受到的电磁力矩大小为

$$M=|\vec{m}\times\vec{B}|=mB\sin\omega t=(niS)B\sin\omega t$$

式中 $\vec{m}$ 为线圈磁矩，其大小为 $m=niS$。i 是线圈中的电流强度

$$i=\frac{e}{R_{外}+r}=\frac{e}{2R}=2\sqrt{2}\,I\sin\omega t$$

又因力矩平衡时，外力矩等于电磁力矩，所以

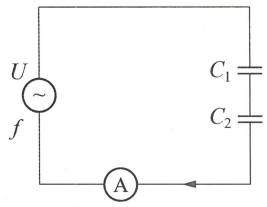
$$M_{外}=M=2\sqrt{2}\,I\sin\omega t\cdot nSB\sin\omega t=4nIBl^2\sin^2\left(\frac{4IR}{nBl^2}t\right)$$

例 3 电路如图所示，电源的频率为 f，电压为 U，两电容分别为 C_1 与 C_2，电流表的内阻不计。

(1) 试列出通过电流表的电流 i 的表达式。

(2) 在 $C_1+C_2=C_0$（C_0 为常数）的条件下，要使电流表读数 I 达到极大，求 C_1、C_2。并求出电流表读数 I 达到极大时的表达式。

(3) 接第(2)问，当 $U=220\ \mathrm{V}$，$f=50\ \mathrm{Hz}$，$C_0=25\ \mu\mathrm{F}$ 且满足 I 有极大条件时，I 的值等于多少？



例 3 图

解析 (1) 电路的总电容由 $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$ 得

$$C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

电路的容抗

$$X_C=\frac{1}{2\pi fC}=\frac{1}{2\pi f}\cdot\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$$

设电压 u 的表达式为

$$u=U_{\mathrm{m}}\cdot\sin(2\pi ft)$$

则电流 i 的表达式为

$$i=I_{\mathrm{m}}\cdot\sin\left(2\pi ft+\frac{\pi}{2}\right)$$

纯电容电路中，i 的相位比 u 超前 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$i=\frac{U_{\mathrm{m}}}{X_C}\cdot\sin\left(2\pi ft+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\pi f\cdot\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\cdot U_{\mathrm{m}}\cdot\sin\left(2\pi ft+\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) 由 $C_1+C_2=C_0$ 得 $C_2=C_0-C_1$，要使电流表读数 I（I 的有效值）有极大值，需使 $\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ 最大，把 $C_2=C_0-C_1$ 代入

$$\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{C_1(C_0-C_1)}{C_1+(C_0-C_1)}=-\frac{1}{C_0}(C_1^2-C_0C_1)$$

$$=\frac{C_0}{4}-\frac{1}{C_0}\left(C_1-\frac{C_0}{2}\right)^2$$

当 $C_1=\dfrac{C_0}{2}$ 时，I 有极大值，此时 $C_2=\dfrac{C_0}{2}$。

电流表读数是 i 的有效值，(1)中已求出 $I_m=2\pi f\cdot\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\cdot U_m$，所以

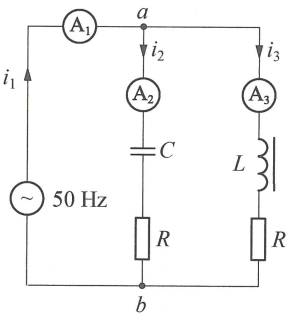
$$I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi fC_0U_m$$

(3) 当 $U=220\ \mathrm{V}$，$f=50\ \mathrm{Hz}$，$C_0=25\ \mu\mathrm{F}$，且 $C_1=C_2=\dfrac{C_0}{2}$，电流表的读数 I 有极大值，其值

$$I'=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi fC_0U_m=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi fC_0\sqrt{2}U$$

$$=\frac{1}{2}\pi fC_0U=0.43\ \mathrm{A}$$

例 4 如图 1 所示的电路中，简谐交流电源的频率 $f=50\ \mathrm{Hz}$，三个交流电表的示数相同，两个电阻器的阻值都是 $100\ \Omega$，求线圈的自感 L 和电容器的电容 C 的大小。

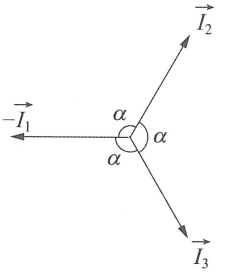


例 4 图 1

解析 以 a 为节点，各支路中电流瞬时值 i_1、i_2、i_3 有关系 $i_1=i_2+i_3$，又因为三个交流电表的示数相同，所以对应于 i_1、i_2、i_3 的三个电流矢量 $\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$、$\vec{I}_3$，满足

$$-\vec{I}_1+\vec{I}_2+\vec{I}_3=0,\ I_1=I_2=I_3$$

矢量关系如图 2 所示，图中各矢量间夹角均为 $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$。且图中 $\vec{I}_2$ 的位相超前 $\vec{I}_3$，这是因为含 C 的支路和含 L 的支路加在 a、b 两点的电压相同。含 C 支路的电流 i_2，其位相超前 a、b 间电压 $\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$；含 L 支路的电流 i_3，其位相落后于 a、b 间电压 $\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 i_2 位相超前 i_3 $(<\pi)$。



例 4 图 2

设含 C 支路的阻抗为 Z_2，含 L 支路的阻抗为 Z_3，有

$$Z_2=\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$Z_3=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

又因为两支路端点 a，b 间电压相同，所以有 $I_2Z_2=I_3Z_3$；

因 $I_2=I_3$，所以 $Z_2=Z_3$

即
$$\frac{1}{\omega C}=\omega L \qquad ①$$

设 $\vec{I}_2$、$\vec{I}_3$ 与 a、b 间的电压的位相差绝对值为 φ_2、φ_3，则

$$\tan\varphi_2=\frac{1}{\omega CR},\ \tan\varphi_3=\frac{\omega L}{R} \qquad ②$$

利用式①得

$$\varphi_2=\varphi_3=\frac{\alpha}{2},\ \tan\varphi_2=\tan\varphi_3=\sqrt{3}$$

利用式②得

$$C=\frac{1}{\sqrt{3}\omega R}=\frac{1}{2\sqrt{3}\pi fR}=18.4(\mu\mathrm{F})$$

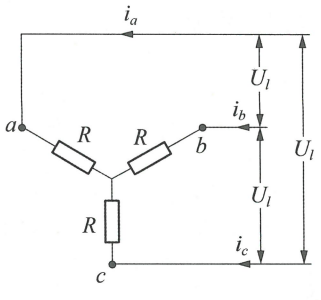
$$L=\frac{\sqrt{3}R}{\omega}=\frac{\sqrt{3}R}{2\pi f}=0.55(\mathrm{H})$$

例 5* 三个阻值都是 R 的电阻按星形连接，三个阻值都是 r 的电阻按三角形连接。若所加的三相交流电线电压相同，并且这两种方式的相电流也相同。试求：

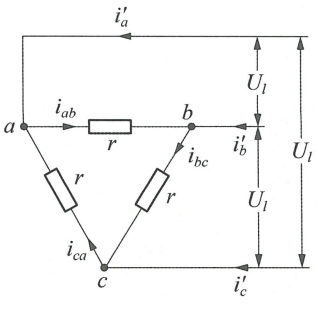
(1) $\frac{R}{r}$为多少？

(2) 消耗的功率之比为多少？

解析 (1) 如图 1 所示的三个阻值均为 R 的星形连接，所加线电压为 U_l，流经各相的电流分别为 i_a，i_b，i_c，有效值相等，均为 I_a。如图 2 所示为三个阻值均为 r 的三角形连接，按题意，所加线电压仍为 U_l，流经各相的电流分别为 i_{ab}、i_{bc}、i_{ca}，有效值相等，均为 I_φ。



例 5 图 1



例 5 图 2

按题意，两种方式下的相电流相等，即 $I_a=I_\varphi$。

利用
$$I_a=\frac{U_\varphi}{R}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}U_l}{R},\ I_\varphi=\frac{U_l}{r}$$

得
$$\frac{R}{r}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

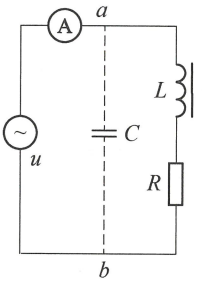
(2) 设消耗在三个 R 上的功率记为 $P(R)$，消耗在三个 r 上的功率记为 $P(r)$，则
$$P(R)=3I_a^2R,\ P(r)=3I_\varphi^2r$$

功率之比为
$$\frac{P(R)}{P(r)}=\frac{I_a^2R}{I_\varphi^2r}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

例 6 如图 1 所示，简谐交流电路中，电源提供的电压为 U，频率为 f，线圈电感为 L，电阻阻值为 R，求：

(1) 在 a、b 间接入电容器 C 之前，L、R 上的电压分别是多少？

(2) 在 a、b 间接入电容器电容 C 为多大时，电流表的示数最小？此值多大？



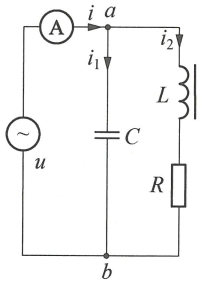
例 6 图 1

解析 (1) 接入电容器 C 之前，回路中的电流 I 满足
$$I=\frac{U}{Z}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(2\pi fL)^2}}$$

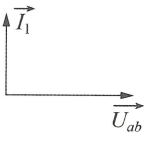
L，R 上的电压分别为
$$U_L=I\cdot\omega L=\frac{2\pi fL\cdot U}{\sqrt{R^2+(2\pi fL)^2}},\ U_R=I\cdot R=\frac{RU}{\sqrt{R^2+(2\pi fL)^2}}$$

(2) 接入电容器 C 之后，设 a，b 间的电压为 U_{ab}。利用矢量法，画出图 2 中 u_{ab} 和电流 i_1 的矢量 $\vec{U}_{ab}$ 和 $\vec{I}_1$ 的矢量图，如图 3 所示，以及 i_2 和 u_{ab} 的矢量 $\vec{I}_2$ 和 $\vec{U}_{ab}$ 的矢量图，如 4 所示，再把 $\vec{U}_{ab}$、$\vec{I}_1$、$\vec{I}_2$ 画于同一个矢量图，如图 5 所示。

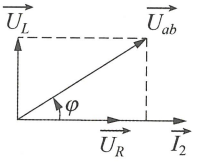
电流表中流经的电流 I 满足
$$I^2=I_1^2+I_2^2-2I_1I_2\sin\varphi$$



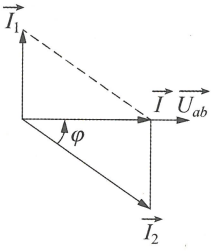
例 6 图 2



例 6 图 3



例 6 图 4



例 6 图 5

利用 $$I_1=\frac{U_{ab}}{Z_C},\ I_2=\frac{U_{ab}}{Z_{RL}}$$

$$\sin\varphi=\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}=\frac{\frac{\omega L}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$$

$$Z_C=\frac{1}{\omega C},\ Z_{RL}=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

代入得

$$\begin{aligned}I^2&=U^2\left[\frac{1}{Z_C^2}+\frac{1}{Z_{RL}^2}-\frac{2}{Z_CZ_{RL}}\frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}}\right]\\&=U^2\left[\omega^2C^2+\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}-\frac{2\omega C}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cdot\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\right]\\&=U^2\left[\omega^2C^2+\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}-\frac{2\omega L}{R^2+(\omega L)^2}(\omega C)\right]\\&=U^2\left\{\left[\omega C-\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2+\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}-\left[\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2\right\}\end{aligned}$$

由此式得到 $$C=\frac{L}{R^2+(\omega L)^2}$$

此时电流表中的示数最小，此值为

$$I=U\sqrt{\frac{1}{R^2+(\omega L)^2}-\left[\frac{\omega L}{R^2+(\omega L)^2}\right]^2}$$

例 7 一辆自行车上装有直流发电机，它包括两个装在半径为 r 的车轮的中心轴上的永久磁铁和一个固定在车架上的自感系数为 L 的线圈，穿过线圈的磁通量按照规律 $\Phi_0\cos\omega t$ 随时间变化，ω 为车轮转动的角速度，线圈两端接有电阻为 R 的小灯泡。

(1) 如果流经线圈的电流为 $I_0\cos(\omega t+\theta)$，求满足 I_0 与 θ 关系的方程，并证明 $\tan\theta=\frac{Rr}{vL}$。式中 v 为自行车的车速。

(2) 求灯泡的功率与车速 v 之间的关系，并证明功率不会超过 $\frac{R\Phi_0^2}{2L^2}$。

解析 (1) 线圈因磁通量变化而产生的感应电动势为

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_0\cos\omega t)=\omega\Phi_0\sin\omega t$$

由于电流 $I=I_0\cos(\omega t+\theta)$ 既经过线圈又流经小灯泡，因此有

$$\mathscr{E}=L\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}+RI$$

即 $\omega\Phi_0\sin\omega t=-LI_0\omega\sin\theta\cdot\cos\omega t-LI_0\omega\cos\theta\sin\omega t+RI_0\cos\theta\cos\omega t-RI_0\sin\theta\sin\omega t$，等式两边 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 的系数应分别相等，即得

$$\begin{cases}\omega\Phi_0=-L\omega I_0\cos\theta-RI_0\sin\theta\\0=-L\omega I_0\sin\theta+RI_0\cos\theta\end{cases}$$

以上两方程即为题目所要求的方程。

由第二个方程可得 $$\tan\theta=\frac{R}{\omega L}$$

而自行车的速度 v 与角速度 ω 之间的关系为 $v=\omega r$；

代入上式，得 $$\tan\theta=\frac{Rr}{vL}$$

(2) 灯泡的功率为(一周平均)

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T RI_0^2\cos^2(\omega t+\theta)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}RI_0^2$$

电动势为 $$\mathscr{E}=\omega\Phi_0\sin\omega t=\varepsilon_0\sin\omega t$$

式中 $\mathscr{E}_0=\omega\Phi_0$。

由于电阻两端的电压与通过电阻的电流同相位，而电感两端的电压超前电流 $\frac{\pi}{2}$，所以

$$I_0=\frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2+(L^2\omega^2)}}=\frac{\omega\Phi_0}{\sqrt{R^2+(L^2\omega^2)}}$$

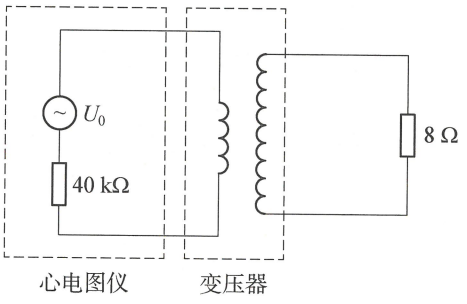
所以灯泡的功率为

$$P=\frac{1}{2}\frac{\omega^2\Phi_0^2R}{\omega^2L^2+R^2}=\frac{1}{2}Rv^2\Phi_0^2(L^2v^2+R^2r^2)^{-1}$$

由上式可知灯泡的功率 P 随着 v 的增大而增大，但它有一极限

$$\lim_{v\to\infty}P=\frac{R\Phi_0^2}{2L^2}$$

例 8 心电图仪是将心肌收缩产生的脉冲转化为电压脉冲的仪器，其输出部分可用一个与大电阻(40 kΩ)串联的交变电源来等效，如图所示。心电图仪与一理想变压器的初级线圈相连，一扬声器(可以等效为阻值为 8.0 Ω 的电阻)与该变压器的次级线圈相连。在等效电源电压的有效值 U_0 不变的情况下，为使扬声器获得最大功率，变压器初



例 8 图

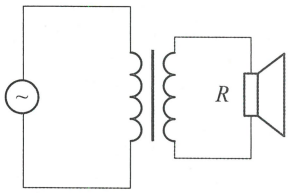
级线圈与次级线圈匝数之比约为多少?

解析 设变压器的初、次级线圈的匝数比为 k,将副线圈的电阻 $R=8\ \Omega$ 折算成原线圈回路中的等效电阻值为 $R'=k^2R$,当 $R'=40\ \text{k}\Omega$ 时,可使扬声器获得最大功率,即 $40\ 000=k^2\times 8$,得 $k=70$。即变压器初级线圈与次级线圈匝数之比约为 70。

例 9 如图所示,信号源电动势 $\mathscr{E}=6\ \text{V}$,内阻 $r=100\ \Omega$,扬声器的电阻 $R=8\ \Omega$。

(1) 计算直接把扬声器接在信号源上时的输出功率。

(2) 若用 $N_1=300$ 匝、$N_2=100$ 匝的变压器耦合,输出功率多少?



例 9 图

解析 (1) 直接把扬声器接在信号源上时,输出功率为

$$\begin{aligned}\bar{P}&=\left(\frac{\mathscr{E}}{R+r}\right)^2R\\&=\left(\frac{6\ \text{V}}{8\ \Omega+100\ \Omega}\right)^2\times 8\ \Omega\\&=25\ \text{mW}\end{aligned}$$

(2) 等效信号源的电动势和内阻分别为

$$\mathscr{E}'=\frac{N_2}{N_1}\mathscr{E}=\frac{100}{300}\times 6\ \text{V}=2\ \text{V}$$

$$r'=\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2r=\left(\frac{100}{300}\right)^2\times 100\ \Omega=11.1\ \Omega$$

从而输出功率为 $\bar{P}=\left(\dfrac{\varepsilon'}{R+r'}\right)^2R=\left(\dfrac{2\ \text{V}}{8\ \Omega+11.1\ \Omega}\right)^2\times 8\ \Omega=88\ \text{mW}$

说明:原来扬声器的电阻与信号源内阻(8 Ω 与 100 Ω)相差甚远,很不匹配,若直接接上,则输出功率较小(25 mW)。若经变压器耦合,负载阻抗与电源内阻(8 Ω 与 11 Ω)比较接近,输出功率就大多了(88 mW)。

例 10 某理想变压器,当其输入端接在电动势为 E、内阻为 r 的交流电源上,输出端接上电阻为 R 负载时,R 上可获得最大功率。求:

(1) 这时输入电流多大?负载上的最大功率为多少?

(2) 负载获得最大功率时,变压器的原副线圈电压各为多少?

(3) 变压器的变压比为多少?

解析 (1) 设变压器原线圈中的电流为 I_1,则输入功率为 $P_1=I_1E-I_1^2r$。对于理想变压器,负载功率与输入功率相同,即 $P_2=I_1E-I_1^2r$。负载电阻 R 为输出功率最大时的电阻值,此时 P_2 最大,要求输入电流 $I_1=\dfrac{E_1}{2r}$,则负载最大功率为 $P_{2,\max}=\dfrac{E^2}{4r}$。

(2) 按定义,输出功率 $P_2=\dfrac{U_2^2}{R}$,则负载获得最大功率时变压器的副线圈电压为

$$U_2=\sqrt{P_{2,\max}R}=\sqrt{\frac{E^2R}{4r}}=\frac{E}{2}\sqrt{\frac{R}{r}}$$

而原线圈中的电压为 $$U_1=E-I_1r=E-\frac{Er}{2r}=\frac{E}{2}$$

(3) 变压器变压比为 $$\frac{N_2}{N_1}=\frac{U_2}{U_1}=\frac{\frac{E}{2}\sqrt{\frac{R}{r}}}{\frac{E}{2}}=\sqrt{\frac{R}{r}}$$

练习题

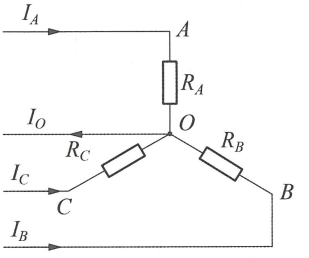
1 用测电笔接触市电相线，即使赤脚站在地上也不会触电，原因是_____；另一方面，即使穿绝缘性能良好的电工鞋操作，测电笔仍会发亮，原因是_____。

2 求证：正弦交流电的有效值和最大值之间应满足 $I=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$。

3* 三相交流电的相电压为 220 V，负载为不对称的纯电阻，$R_A=R_B=22\ \Omega$，$R_C=27.5\ \Omega$，连接如图所示，试求：

(1) 中性线上的电流；

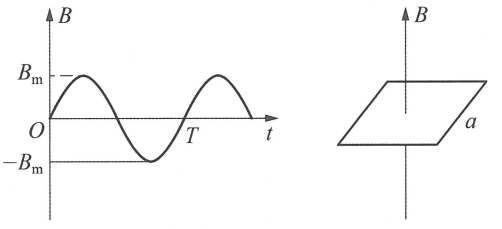
(2) 线电压。



第 3 题图

4 试证明纯电容电路的容抗 $Z_C=\frac{1}{\omega C}$，且它的电流相位超前电压相位 $\frac{\pi}{2}$。

5 边长为 a 的单匝正方形导线框静止置于按空间均匀分布的磁场区域内，磁感应强度 B 的方向与线框平面垂直，B 随时间按正弦规律变化，如图所示。若线框中产生的最大感应电流为 I_m，导体的电阻率为 ρ，求导线的横截面积。



第 5 题图

6 氖灯接入频率 $f=50$ Hz、电压的有效值 $U_{有效}=120$ V 的正弦交流电路中共 10 min。若氖灯点燃和熄灭时的电压 $u_{燃}=u_{熄}=120$ V，试求氖灯亮的时间（$u_{燃}$ 和 $u_{熄}$ 小于 $U_{有效}$）。

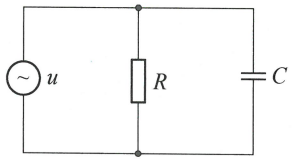
7* 有一个如图所示的 R、C 并联电路，电源的电压为 $u=U_m\cdot\sin\omega t$，R 和 C 的阻抗相等，

试求：

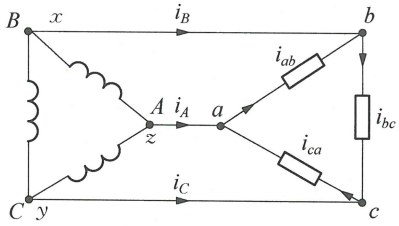
（1）通过 R、C 的电流的瞬时值和有效值。

（2）电源供给的电流的瞬时值和有效值。

（3）通过 R、C 的电流和电源供给的电流的相位关系。



第 7 题图



第 8 题图

8* 试证如图所示的三角形连接的三相输电线路中 $I_{线}=\sqrt{3}I_{相}$。

9 一个平行板电容器和一个理想线圈构成 LC 振荡回路，回路中总能量为 W_0。现将电容器两极板缓慢拉开，使振荡频率增大为原来的 η 倍，在此过程中外力做了多少功？

参考解答

第9章　分子动理论和气体性质

1 在 Δt 时间内撞击器壁单位面积 ΔS 上的粒子数 $N=v\Delta t\Delta S\cdot n_0$，$n_0$ 是粒子数密度，v 为银原子定向运动速率。

压强　　$$p=\frac{N\cdot f}{\Delta S}=\frac{N}{\Delta S}\cdot\frac{mv}{\Delta t}=n_0mv^2$$

m 为每个银原子质量。

银质量　　$$M=N\cdot m=v\Delta t\Delta S\cdot n_0\cdot m$$

设白银覆盖层增厚速率为 v'，则

$$M=v'\cdot\Delta t\cdot\Delta S\cdot\rho$$

由　　$$v'\Delta t\cdot\Delta S\cdot\rho=\Delta t\Delta S\cdot n_0\cdot m$$

得

$$v'=\frac{m}{\rho}\cdot n_0\cdot v=\frac{mv}{\rho}\cdot\frac{p}{mv^2}=\frac{p}{\rho}\cdot\sqrt{\frac{m}{2E_k}}$$

$$=\frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{A}{2E_k\cdot N_A}}=9\times10^{-10}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

2 每个贮气罐原有气体摩尔数　　$$\nu=\frac{pV}{RT}$$

第一罐向真空室充气平衡后，气体压强

$$p_1=\frac{\nu RT}{V+V_0}=\frac{pV}{V+V_0}$$

进入真空室的气体摩尔数　　$$\nu_1=\frac{\nu V_0}{V+V_0}$$

同理，第二罐充气进入真空室的气体摩尔数

$$\nu_2=(\nu+\nu_1)\frac{V_0}{V+V_0}=\nu\left(1+\frac{V_0}{V+V_0}\right)\frac{V_0}{V+V_0}$$

第 k 罐向真空室充气进入真空室的气体摩尔数

$$\nu_k=\nu\left[1+\frac{V_0}{V+V_0}+\left(\frac{V_0}{V+V_0}\right)^2+\cdots+\left(\frac{V_0}{V+V_0}\right)^{k-1}\right]\frac{V_0}{V+V_0}=\nu\left[1-\left(\frac{V_0}{V+V_0}\right)^k\right]\frac{V_0}{V}$$

最后充气结束，真空室内气体压强达到 p_0，则

$$p_k=p_0,\ k=\frac{\ln\dfrac{p-p_0}{p}}{\ln\dfrac{V_0}{V+V_0}}>0$$

3 (1) $A=\dfrac{p_1^2}{RT_1}$；　(2) $4T_1$；　(3) 吸热且对外做功，并使 T 与 V^2 成正比变化。

4 证明：每一部分气体在单位时间内通过小孔射出的分子数就等于未曾有孔时在小孔面积上碰撞的分子数。已知每秒钟能与面积为 S 的器壁相碰的分子数为 $\dfrac{1}{4}n\bar{v}S$，若气体分子质量为 m，则这些分子的总质量为 $\dfrac{1}{4}n\bar{v}Sm$。设隔板两边气体分子的数密度分别为 n_1 和 n_2，并假定隔板两边到达小孔的分子都能通过小孔，则每秒钟通过小孔的气体质量等于两侧气体通过小孔的分子质量之差，即

$$M=\frac{1}{4}n_1\bar{v}Sm-\frac{1}{4}n_2\bar{v}Sm=\frac{1}{4}S\cdot\frac{\mu}{N_A}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}\left(\frac{p_1}{kT}-\frac{p_2}{kT}\right)=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi RT}}(p_1-p_2)S$$

5 (1) 分子势能极小的条件是

$$\frac{\mathrm{d}E_p(r)}{\mathrm{d}r}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}E_p(r)}{\mathrm{d}r}=E_0\left[12\left(\frac{r_0}{r}\right)^{11}\left(-\frac{r_0}{r^2}\right)-12\left(\frac{r_0}{r}\right)^{5}\left(-\frac{r_0}{r^2}\right)\right]=0$$

即 $12\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{11}\left(-\dfrac{r_0}{r^2}\right)-12\left(\dfrac{r_0}{r}\right)^{5}\left(-\dfrac{r_0}{r^2}\right)=0$，得 $r=r_0$。

(2) 当 $r=r_0$ 时，$(E_p)_{\min}=E_0\left[\left(\dfrac{r_0}{r_0}\right)^{12}-2\left(\dfrac{r_0}{r_0}\right)^{6}\right]=-E_0$。

(3)
$$F=\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=-E_0\left[-\frac{12}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13}+\frac{12}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right]=\frac{12E_0}{r_0}\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right]$$

当 r 较小时为斥力，r 较大时为引力。

平衡位置由 $\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}=0$ 决定，即 $r=r_0$。平衡性质由 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}r^3}\right|_{r=r_0}$ 决定：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^3E_p}{\mathrm{d}r^2}\right|_{r=r_0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{12E_0}{r_0}\right)\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right]\Bigg|_{r=r_0}$$

$$=-\frac{12E_0}{r_0^2}\left[-13\left(\frac{r_0}{r}\right)^{14}+7\left(\frac{r_0}{r}\right)^{8}\right]\Bigg|_{r=r_0}$$

$$=\frac{72E_0}{r_0^2}>0$$

可见平衡是稳定平衡。

6 设混合前每一部分气体的体积均为 V_0，摩尔数分别为 n_1、n_2。写出每一部分混合前的状态方程

$$\frac{p_1V_0}{T_1}=n_1R,\ \frac{p_2V_0}{T_2}=n_2R \qquad ①$$

可得

$$\frac{\dfrac{p_1}{T_1}}{\dfrac{p_2}{T_2}}=\frac{n_1}{n_2} \qquad ②$$

设混合后气体终态温度为 T。因混合过程中与外界未发生能量交换，所以一部分吸收的热量与另一部分放出的热量相等，有

$$\frac{Q_1}{Q_2}=\frac{n_1c(T_1-T)}{n_2c(T-T_2)}=\frac{n_1(T_1-T)}{n_2(T-T_2)}=1$$

解得 $$\frac{n_1}{n_2}=\frac{T-T_2}{T_1-T} \tag{③}$$

联立②③式，解得混合后气体的温度

$$T=\frac{(p_1+p_2)T_1T_2}{p_1T_2+p_2T_1} \tag{④}$$

再计算混合后气体的压强。利用式①得

$$\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right)V_0=(n_1+n_2)R$$

即 $$\frac{n_1+n_2}{V_0}=\frac{1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right)$$

混合后的状态方程 $$\frac{n_1+n_2}{2V_0}=\frac{p}{RT}$$

可得 $$p=\frac{1}{2}T\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right)=\frac{1}{2}(p_1+p_2)$$

7 (1) 平衡时气缸 A、B 内气体的压强相等，故

$$\frac{m_Ag}{S_A}=\frac{m_Bg}{S_B} \tag{①}$$

由①式和题给条件得

$$S_A:S_B=2:1 \tag{②}$$

(2) 两活塞上各放一质量为 $2m$ 的质点前，气体的压强 p_1 和体积 V_1 分别为

$$p_1=\frac{2mg}{S_A}=\frac{mg}{S_B} \tag{③}$$

$$V_1=\frac{3}{2}S_Bh \tag{④}$$

两活塞上各放一质量为 $2m$ 的质点后，B 中活塞所受到的气体压力小于它和质点所受重力之和，B 中活塞将一直下降至气缸底部为止，B 中气体全部进入气缸 A。假设此时气缸 A 中活塞并未上升到气缸顶部，气体的压强 p_2 为

$$p_2=\frac{4mg}{S_A}=\frac{2mg}{S_B} \tag{⑤}$$

设平衡时气体体积为 V_2。由于初态末态都是平衡态，由理想气体状态方程有

$$\frac{p_1V_1}{T_0}=\frac{p_2V_2}{T_0} \tag{⑥}$$

由③④⑤⑥式得

$$V_2=\frac{3}{4}S_Bh=\frac{3}{8}S_Ah \tag{⑦}$$

这时气体的体积小于气缸 A 的体积，与活塞未上升到气缸顶部的假设一致。

缓慢加热时，气体先等压膨胀，B 中活塞不动，A 中活塞上升；A 中活塞上升至顶部后，气体等容升压；压强升至 $\frac{3mg}{S_B}$ 时，B 中活塞开始上升，气体等压膨胀。设当温度升至 T 时，该活塞恰位于 $\frac{h}{2}$ 处。此时气体的体积变为

$$V_3=\frac{5}{2}S_Bh \tag{⑧}$$

气体压强

$$p_3=\frac{3mg}{S_B} \tag{⑨}$$

设此时气缸内气体的温度为 T，由状态方程有

$$\frac{p_2V_2}{T_0}=\frac{p_3V_3}{T} \tag{⑩}$$

由⑤⑦⑧⑨⑩式得

$$T=5T_0$$

(3) 升高恒温槽的温度后，加热过程中，A 活塞上升量为

$$h-\frac{3}{8}h=\frac{5}{8}h$$

气体对活塞所做的总功为

$$W=4mg\cdot\frac{5}{8}h+3mg\cdot\frac{1}{2}h=4mgh$$

8 (1) 依题意，空气弹簧主气室对簧上负载竖直向上的作用力为

$$F=(p_1-p_0)A_e \tag{①}$$

式中，p_1 是主气室内空气的压强。

当空气弹簧承受的负载发生变化时，主气室内气体的压强 p_1 和体积 V_1 均会发生变化。为了统一处理题给的两种情形，考虑气体压强和体积变化的过程方程为

$$p_1V_1^n=\text{常量} \tag{②}$$

式中，n 是常数。①式左右两边对空气弹簧承载面的竖直位移 y 微商，可知空气弹簧的劲度系数 K 满足

$$K\equiv\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}=(p_1-p_0)\frac{\mathrm{d}A_e}{\mathrm{d}y}+\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}y}A_e \tag{③}$$

②式左右两边对 y 微商得

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}y}V_1^n+kp_1V_1^{n-1}\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}=0 \tag{④}$$

由题意知，空气弹簧主气室内体积 V_1 和有效承载面积 A_e 相对于平衡位置的竖直位移的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}=-\alpha,\ \frac{\mathrm{d}A_e}{\mathrm{d}y}=\beta \tag{⑤}$$

联立①③④⑤式得，空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系为

$$K=\alpha\frac{kp_{10}V_{10}^{n}}{V_1^{k+1}}A_e+\beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{n}-p_0\right] \tag{⑥}$$

在高铁上下乘客的情形下，主气室内气体压强和体积变化满足等温过程

$$n=1 \tag{⑦}$$

由⑥⑦式得

$$K=\alpha\frac{p_{10}V_{10}}{V_1^{2}}A_e+\beta\left[p_{10}\frac{V_{10}}{V_1}-p_0\right] \tag{⑧}$$

在列车运行中遇到强烈颠簸的情形下，主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程

$$n=\gamma \tag{⑨}$$

式中，γ 是空气的摩尔定压热容 C_p 与摩尔定容热容 C_V 之比

$$r=\frac{C_p}{C_V}=\frac{C_V+R}{C_V}=\frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R}=\frac{7}{5}$$

由⑥⑨式得

$$K=\alpha\frac{7p_{10}V_{10}^{7/5}}{5V_1^{12/5}}A_e+\beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{7/5}-p_0\right]$$

(2) 主气室连通附加气室后，如果车辆振动频率较低，例如情形 ⅰ)，空气弹簧变形较慢，可认为在任意瞬间，空气弹簧主气室的压强与附加气室的压强相同，两气室间的压强差可视为零。两气室的空气作为一个整体，经历等温过程。空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系

$$K=\alpha\frac{p_{10}(V_{10}+V_2)}{(V_1+V_2)^{2}}A_e+\beta\left[p_{10}\frac{V_{10}+V_2}{V_1+V_2}-p_0\right]$$

对于情形 ⅱ)，车辆系统的振动频率较高，空气弹簧主气室内部的压力和体积变化较快，主气室与附加气室之间来不及进行气体流动，此时空气弹簧的容积相当于主气室容积单独作用，经历绝热过程。空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系为

$$K=\alpha\frac{7p_{10}V_{10}^{7/5}}{5V_1^{12/5}}A_e+\beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{7/5}-p_0\right]$$

9 (1) 在高度为 z 处，压强为 $p(z)$，温度为 $T(z)$，利用理想气体的状态方程可以得到气体密度为

$$\rho(z)=\frac{n\mu}{V}=\frac{p(z)\mu}{RT(z)} \tag{①}$$

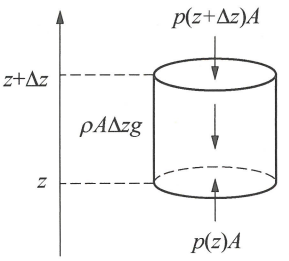
这里 n 是气体的摩尔数，V 为气体的体积。

如答图所示，面积为 A、高度位于 $[z,\ z+\Delta z]$ 这个小区间内气体的重力为 $\rho(z)A\Delta zg$，方向向下；上表面受到向下的压力，大小为 $p(z+\Delta z)A$；下表面受到力为 $p(z)A$，方向向上。由于气体上升缓慢，这三个力平衡。

$$p(z+\Delta z)A+\rho(z)A\Delta zg=p(z)A \tag{②}$$

对小量 Δz 展开，方程②可以化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\rho g \qquad ③$$



第 9 题答图

利用①式中的密度公式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}=-\frac{p\mu g}{RT} \qquad ④$$

两边同除以压强 p，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=-\frac{\mu g}{RT} \qquad ⑤$$

绝热过程 pV^{γ} 为常量，代入理想气体状态方程可得 $p^{1-\gamma}T^{\gamma}$ 是常量，取对数可得

$$C=-(\gamma-1)\ln p+\gamma\ln T$$

其中 C 为常量。方程两边对高度 z 求微分可以得到

$$0=-(\gamma-1)\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}+\gamma\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}$$

移项并利用⑤式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln T}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}\ln p}{\mathrm{d}z}=-\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{RT}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}=-\frac{(\gamma-1)\mu g}{\gamma R}$$

对高度 z 积分之后可得

$$T(z)=T_0-\frac{(\gamma-1)\mu g}{\gamma R}z$$

(2) 绝热过程 pV^{γ} 为常量，即 $p=C\rho^{\gamma}$，因此

$$v_s^2=\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\right)_{\text{绝热}}=\frac{\mathrm{d}(C\rho^{\gamma})}{\mathrm{d}\rho}=\gamma C\rho^{\gamma-1}=\gamma\frac{C\rho^{\gamma}}{\rho}=\gamma\frac{p}{\rho}$$

利用 $\rho=\frac{n\mu}{V}$ 并代入理想气体状态方程 $pV=nRT$ 得

$$v_s^2=\gamma\frac{pV}{n\mu}=\gamma\frac{nRT}{n\mu}=\gamma\frac{RT}{\mu}$$

因此在对流层里声速随高度升高而降低，直到同温层为止；

在同温层里温度近似保持不变，所以声速近似不随高度改变而变化；

在逆温层里温度随高度升高而升高，所以声速会随高度升高而增大。

第 10 章　热力学定律

1 (1) B 板处于热平衡状态

$$\sigma T_1^4+\sigma T_C^4=2\sigma T_B^4$$

同理，C 板处于热平衡状态

$$\sigma T_B^4+\sigma T_2^4=2\sigma T_C^4$$

得

$$T_B=\left(\frac{2T_1^4+T_2^4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

(2) 火星接收到的太阳辐射功率

$$P_1=\frac{\pi r^2}{4\pi(400R)^2}\sigma T_{太阳}^4\cdot 4\pi R^2$$

而火星对外辐射功率为

$$P_2=\sigma T_{火}^4\cdot 4\pi r^2$$

由平衡条件

$$P_1=P_2$$

又由题给条件

$$T_{太阳}\cdot\lambda_{m_2}=T_{人}\cdot\lambda_{m_1}$$

其中 $T_{人}=310\,\mathrm{K}$，联立可得

$$T_{火}=210\,\mathrm{K}$$

2 由理想气体状态方程，将 T、V 关系式代入后得 $p=\beta RV$，因为外界气体所做的功为

$$W=\frac{p_1+p_2}{2}(V_1-V_2)=\frac{\beta R}{2}(V_1^2-V_2^2)$$

这过程中，气体的内能增量为

$$\Delta E=\frac{3}{2}R\Delta T=-\frac{3}{2}R\beta(V_1^2-V_2^2)$$

根据热力学第一定律 $\Delta E=Q+W$，代入后得

$$Q=-2R\beta(V_1^2-V_2^2)$$

负号表示该过程中气体放热。

3 因直立圆筒绝热，故抽去隔板气体混合过程中筒内气体与外界无热交换。因此，系统温度(内能)的变化，只与做功有关，由于两部分气体密度不同，混合前、后重心位置明显变化，即重力做了功，故引起系统内能发生变化。

以 A、B 两部分气体为研究对象，混合过程中，系统重力势能的增加量为

$$\Delta E_p=\rho_B Vg\cdot\frac{h}{2}-\rho_A Vg\cdot\frac{h}{2}=(\rho_B-\rho_A)Vg\cdot\frac{h}{2}$$

气体内能的减少量可表示为

$$\Delta E=2C_{V,m}(T_1-T_2)$$

由于 $Q=0$，系统重力势能的增加由气体内能的减少转化而来，即 $\Delta E=\Delta E_p$；

得 $$T_1-T_2=\frac{(\rho_B-\rho_A)Vgh}{6R}$$

4 (1) 夏天，空调器为制冷机，单位时间从室内吸热 Q_2，向室外放热 Q_1，空调的平均功率 P，则 $Q_1=Q_2+P$。对可逆卡诺循环，则有

$$\frac{Q_1}{T_1}=\frac{Q_2}{T_2},\ Q_2=\frac{T_2}{T_1-T_2}P$$

通过热传导传热 $$Q=A(T_1-T_2)$$

由 $Q=Q_2$ 得 $$T_1-T_2=\sqrt{\frac{P}{A}\cdot T_2}$$

$$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{A}-\sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2+\frac{4P_0T_1}{A}}\right]$$

因空调连续工作，式中 $P=P_0$；

则 $$T_2=T_1+\frac{1}{2}\left[\frac{P_0}{A}-\sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2+\frac{4P_0T_1}{A}}\right]$$

(2) $T_1=293\ \mathrm{K}$，$P=0.3P_0$，$T_1=303\ \mathrm{K}$，而所求的是 $P=P_0$ 时对应的 T_1 值，记为 $T_{1\max}$，则

$$T_1-T_2=\sqrt{\frac{0.3P_0}{A}\cdot T_2}$$

$$T_{1\max}-T_2=\sqrt{\frac{P_0}{A}\cdot T_2}$$

解得 $$T_{1\max}=T_2+\sqrt{0.3}(T_1-T_2)=311.26\ \mathrm{K}=38.26℃$$

(3) 冬天，空调器为热机，单位时间从室外吸热 Q_1'，向室内放热 Q_2'，空调器连续工作，功率为 P_0，有

$$Q_2'=Q_1'+P_0,\ \frac{Q_1'}{T_1'}=\frac{Q_2'}{T_2'}$$

由热平衡方程得

$$\begin{aligned}T_1'&=T_2-\sqrt{\frac{P_0}{A}\cdot T_2}=T_2-(T_{1\max}-T_2)\\&=2T_2-T_{1\max}=274.74\ \mathrm{K}\\&=1.74℃\end{aligned}$$

若空调器连续工作，则当冬天室外温度最低为 1.74℃，仍可使室内维持在 20℃。

5 本题为实际热机的等容加热循环——奥托循环，其热效率取决于压缩比。

对于绝热过程，有 $pV^\gamma=$恒量，结合状态方程，有 $TV^{\gamma-1}=$恒量。对于空气、O_2 等双原子分子，γ 在普通温度下是常数，约等于 $\frac{7}{5}$。

(1) 在状态 1，$p_1=1\ \mathrm{atm}$，$T_1=300\ \mathrm{K}$。由于 $T_2V_0^{\gamma-1}=T_1(\beta V_0)^{\gamma-1}$ 得 $T_2=300\times2.461=738.3\ \mathrm{K}$，$p_2=23.38\ \mathrm{atm}$。在状态 3，$p_3=2p_2=46.76\ \mathrm{atm}$，$T_3=2T_2=1476.6\ \mathrm{K}$。用绝热过程计算状态 4，由 $T_3V_0^{\gamma-1}=$

$T_4(\beta V_0)^{\gamma-1}$，得 $T_4=600\ \mathrm{K}$，$p_4=2\ \mathrm{atm}$。

(2) 热效率公式中商的分母是 2→3 过程中的吸热量，这热量是在这一过程中燃烧燃料所获得的。因为在这一过程中体积不变、不做功，所以吸收的热量等于气体内能的增加，即 $[c_V m(T_3-T_2)-c_V m(T_4-T_1)]$。热效率为

$$\eta=\frac{c_V m(T_1+T_3-T_2-T_4)}{c_V m(T_3-T_2)}=1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$$

绝热过程有 $$T_4V_4^{\gamma-1}=T_3V_3^{\gamma-1},\ T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1}$$

因为 $$V_4=V_1,\ V_2=V_3$$

故 $$\frac{T_4}{T_1}=\frac{T_3}{T_2},\ \eta=1-\frac{T_1}{T_2}$$

而 $$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\gamma-1}=\beta^{1-\gamma}$$

因此 $$\eta=1-\beta^{1-\gamma}$$

可见热效率只依赖于压缩比。$\eta=59.34\%$，实际效率只是此结果的一半稍大些，因为大量的热量耗散了，没有参与循环。

6 由题意，显然在相同时间内从导管进入的空气分子总数同从导管流出的空气分子总数相等。同时达到稳定状态后，单位时间内流进气体的总的平均能量(由热运动平均动能和定向机械运动动能组成)加上热功率应等于单位时间内流出气体的平均总能量。

设在导管入口及出口处空气分子的数密度分别为 n_0、n_1，则 $n_0v_0=n_1v_1$。在此时间内，根据能量守恒关系有

$$n_0v_0\Delta tS\left[\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{5}{2}kT_0\right]+P\Delta t=n_1v_1\Delta tS\left[\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{5}{2}kT_1\right]$$

另外，由于导管光滑，金属丝网对气流的阻力可以忽略，故可认为气体在导管中流动时的压强是不变的。由于金属丝加热，温度升高，气体膨胀，致使气体向外流动的定向运动速度增加，流出气体的总动量比流入气体的总动量要大，因而存在一个推力 F(这是由金属丝网加热而施予的)。根据动量定理得 $F\Delta t=n_0v_0\Delta tSm(v_1-v_0)$，对入口处的气体利用阿伏加德罗定律有 $p_0=n_0kT_0$，解以上各方程可得

$$T_1=\frac{1}{5K}\left[\frac{2PkT_0}{p_0v_0S}-m(v_1^2-v_0^2)\right]+T_0$$

$$F=\frac{p_0}{kT_0}v_0Sm(v_1-v_0)$$

7 从状态 2 到状态 3 过程中，外界对它做功

$$W_1=\frac{1}{2}\left(p_1+\frac{p_1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}V_1-\frac{1}{2}V_1\right)=\frac{2}{3}p_1V_1$$

相应内能减少 $$\Delta E_1=\frac{3}{2}\gamma R\left(\frac{1.5p_1V_1}{\gamma R}-\frac{\frac{1}{6}p_1V_1}{\gamma R}\right)=2p_1V_1$$

由热力学第一定律得 $$Q_0=\frac{2}{3}p_1V_1+2p_1V_1=\frac{8}{3}p_1V_1$$

从状态 4 到状态 1，做功 $W'=0$，内能增加

$$\Delta E'=\frac{3}{2}\gamma R\left(\frac{p_1V_1}{\gamma R}-\frac{p_1V_1}{3\gamma R}\right)=p_1V_1$$

故

$$Q_1=p_1V_1=\frac{3}{8}Q_0$$

8 (1) 缸内化学反应是

$$2\mathrm{Fe}+\frac{3}{2}\mathrm{O_2}\longrightarrow \mathrm{Fe_2O_3}$$

因铁氧化反应完毕，缸内气体的摩尔数减少，$\Delta n=-1.5\ \mathrm{mol}$，气体体积也随之减少 $\Delta V=\frac{T_0}{p_0}R\Delta n$。在题设等温等压过程中，外界对系统所做的功

$$W=-p_0\Delta V=-RT_0\Delta n=3739.5\ \mathrm{J}$$

已知系统放热 $Q=-8.24\times10^5\ \mathrm{J}$，系统内能的改变量是

$$\Delta E=W+Q=-8.203\times10^5\ \mathrm{J}$$

即系统内能减少 $8.203\times10^5\ \mathrm{J}$。

(2) 缸内温度恒定，氮气的内能不会变化，但氧气的内能会因摩尔数减少而减小。因此，缸内气体内能的改变量为

$$\Delta E'=\frac{5}{2}RT_0\Delta n=-9349\ \mathrm{J}$$

(3) 由于缸内生成物是 1 mol 的 $\mathrm{Fe_2O_3}$，可知反应前的氧气质量 M_1 和氮气质量 M_2 分别为

$$M_1=1.5\times32\times10^{-3}=48\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$$

$$M_2=\frac{76.9}{23.1}M_1=159.8\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$$

因 $p_0=1\ \mathrm{atm}$，反应前空气体积 V_0、氮气的分压强为 p；反应后氮气体积 V，μ_1 和 μ_2 分别表示氧和氮的摩尔质量，则反应前

$$pV_0=\frac{M_2}{\mu_2}RT_0,\ (p_0-p)V_0=\frac{M_1}{\mu_1}RT_0$$

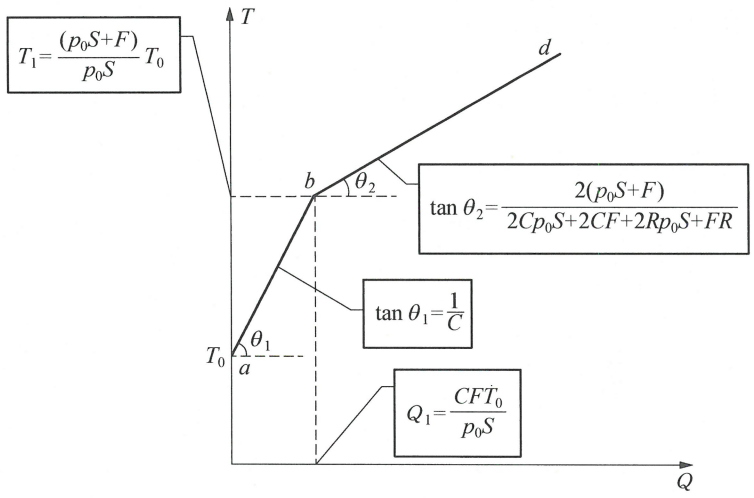
反应后对氮气有

$$p_0V=\frac{M_2}{\mu_2}RT_0$$

缸内氮气密度的改变量

$$\Delta\rho=\frac{M_2}{V}-\frac{M_2}{V_0}=\frac{\frac{M_1}{\mu_1}p_0\mu_2}{\left(\frac{M_1}{\mu_1}+\frac{M_2}{\mu_2}\right)RT_0}=0.236\ \mathrm{kg/m^3}$$

9



（第 9 题答图）

10 按照斯特藩-玻尔兹曼定律，在单位时间内太阳表面单位面积向外发射的能量为

$$W_S=\sigma T_S^4 \tag{①}$$

其中 σ 为斯特藩-玻尔兹曼常量，T_S 为太阳表面的绝对温度。若太阳的半径为 R_S，则单位时间内整个太阳表面向外辐射的能量为

$$P_S=4\pi R_S^2 W_S \tag{②}$$

单位时间内通过以太阳为中心的任意一个球面的能量都是 P_S。设太阳到地球的距离为 r_{SE}，考虑到地球周围大气的吸收，地面附近半径为 R 的透镜接收到的太阳辐射的能量为

$$P=\pi R^2(1-\alpha)\frac{P_S}{4\pi r_{SE}^2} \tag{③}$$

薄凸透镜将把这些能量会聚到置于其后焦面上的薄圆盘上，并被薄圆盘全部吸收。

另一方面，因为薄圆盘也向外辐射能量。设圆盘的半径为 R_D，温度为 T_D，注意到薄圆盘有两个表面，故圆盘在单位时间内辐射的能量为

$$P_D=2\cdot\pi R_D^2\cdot\sigma T_D^4 \tag{④}$$

显然，当

$$P_D=P \tag{⑤}$$

即圆盘单位时间内接收到的能量与单位时间内辐射的能量相等时，圆盘达到稳定状态，其温度达到最高。由①②③④⑤各式得

$$T_D=\left[(1-\alpha)\frac{R^2R_S^2}{2r_{SE}^2R_D^2}\right]^{\frac{1}{4}}T_S \tag{⑥}$$

依题意，薄圆盘半径为太阳的像的半径 R'_S 的 2 倍，即 $R_D=2R'_S$。由透镜成像公式知

$$\frac{R'_S}{f}=\frac{R_S}{r_{SE}} \tag{⑦}$$

于是有

$$R_D=2\frac{R_S}{r_{SE}}f \tag{⑧}$$

把⑧式代入⑥式得 $$T_D=\left[(1-\alpha)\frac{R^2}{8f^2}\right]^{\frac{1}{4}}T_S$$

代入已知数据，注意到 $$T_S=(273.15+t_S)\text{K}$$

$$T_D=1.4\times10^3\ \text{K}$$

即有 $$t_D=T_D-273.15=1.1\times10^3\text{℃}$$

11 (1) 由克劳修斯不等式，有

$$\sum\frac{Q_i}{T_i}\leqslant0$$

所以

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}+\frac{Q_3}{T_3}=0$$

即 $$\frac{1200}{400}+\frac{Q_2}{300}+\frac{Q_3}{200}=0$$

对于热机循环时，$\Delta E=0$，故由热力学第一定律，有

$$Q_1+Q_2+Q_3=W$$

即 $Q_2+Q_3=-1000\ \text{J}$。由以上几式可得 $Q_2=-1200\ \text{J}$，$Q_3=200\ \text{J}$。

上述结果表明 T_2 热源吸热 1200 J，T_3 热源放热 200 J。

(2) 各热源的熵变分别为

$$\Delta S_1=\frac{Q_1}{T_1}=-3\ \text{J/K},\ \Delta S_2=\frac{Q_2}{T_2}=4\ \text{J/K},\ \Delta S_3=\frac{Q_3}{T_3}=-1\ \text{J/K}$$

(3) 总熵变为 $\Delta S=\sum\Delta S_i=0$。

12 (1) 过程 A 中封闭气体初态体积为 $V_1=Sh$，温度为 $T_1=T_0$，初始压强为 $p_1=p_0+\rho gh=4\rho gh$，末态压强为 $p_2=p_1$，末态体积为 $V_2=2Sh$。

根据理想气体物态方程得

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}$$

由以上各式得

$$T_2=2T_0$$

过程 A 是等压过程，此过程中封闭气体对外所做的功为

$$W_1=p_1(V_2-V_1)=4\rho ghSh=33.3\ \text{J}$$

(2) 设过程 B 中水银柱的高度为 x，若该过程可以缓慢稳定地发生，则要求水银柱高度在不断减小的过程中，满足气体状态方程的 x 始终有解。设对应于 x 的封闭气体压强为 p，体积为 V，温度为 T，则

$$p=p_0+\rho gx=3\rho gh+\rho gx$$

$$V=S(l-x)=S(3h-x)$$

根据理想气体状态方程有

$$\frac{pV}{T}=\frac{p_1V_1}{T_1}$$

即

$$\frac{(3\rho gh+\rho gx)S(3h-x)}{T}=\frac{4\rho ghSh}{T_0}$$

或

$$9h^2-x^2=4h^2\frac{T}{T_0}$$

解为

$$x=h\sqrt{9-4\frac{T}{T_0}}$$

当 $T=2T_0$ 时，$x=h$ 是过程 B 的初始状态；当 $T=\frac{9}{4}T_0$ 时，$x=0$ 是过程 B 的末状态。由上式知，x 随 T 单调递减，所以过程 B 可以缓慢稳定地发生。

根据热力学第一定律，过程 B 中总的吸热 Q 等于气体内能的增加 ΔU 和气体对外做的功 W_2，即

$$Q=\Delta U+W_2$$

该理想气体的摩尔数为

$$\mu=\frac{p_1V_1}{RT_1}=\frac{4\rho ghSh}{RT_0}\approx 1.00\times10^{-2}\ \text{mol}$$

理想气体内能只是其温度的函数，其增加量为

$$\Delta U=\mu C_V\left(\frac{9T_0}{4}-2T_0\right)\approx 20.8\ \text{J}$$

此过程中气体对外做功等于水银重力势能的增加以及克服大气压所做的功，即

$$W_2=\rho Shg\frac{h}{2}+p_0(V_3-V_2)$$

$$=\rho Shg\frac{h}{2}+3\rho ghSh=29.2\ \text{J}$$

式中 V_3 是过程 B 中封闭气体的末态体积。总的吸热为

$$Q=20.8\ \text{J}+29.2\ \text{J}=50.0\ \text{J}$$

第 11 章　固体、液体的性质和物态变化

1 将压强为 p_0 的空气等温压缩到 p 的过程中，外界做的功为

$$W_1=-\frac{m}{\mu}RT\ln\frac{p_0}{p}=pV\ln\frac{p}{p_0}$$

肥皂泡由于面积增大外力做的功为

$$W_2=2\sigma\cdot 4\pi R^2=8\sigma\pi R^2$$

因 $$p=p_0+\frac{4\sigma}{R}$$

故 $$W_1=p_0\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_0}\right)V\ln\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_0}\right)$$

因 $$\frac{4\sigma}{Rp_0}\ll 1$$

故 $$\ln\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_0}\right)=\frac{4\sigma}{Rp_0}$$

即 $$W_1=p_0\left(1+\frac{4\sigma}{Rp_0}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\cdot\frac{4\sigma}{Rp_0}=\frac{16}{3}\pi R^2\sigma$$

外力所做的总功为 $$W=W_1+W_2=\frac{40}{3}\pi R^2\sigma=1.7\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

2 (1) 假设水的摩尔质量为 μ，设温度升高 ΔT 后水刚好全部汽化，饱和蒸气压增大了 $\Delta p=\alpha\cdot\Delta T$，式中 $\alpha=3.7\times10^3$ Pa。研究水被加热前的饱和气：$pV=\frac{m_1}{\mu}RT_0$。研究水被全部汽化后的饱和气：$(p+\Delta p)V=\frac{m_1+m_2}{\mu}R(T_0+\Delta T)$。由上可得

$$\frac{p+\alpha\cdot\Delta T}{p}=\frac{m_1+m_2}{m_1}\cdot\frac{T_0+\Delta T}{T_0}$$

解得 $$\Delta T=\frac{m_2T_0p}{m_1T_0\alpha-m_1p-m_2p}=0.29\ \mathrm{K}$$

故当水刚好蒸发完毕时的温度为 $T=100.29$℃。

(2) 整个过程所需热量包括两部分，一部分是使 0.001 kg、100℃的水汽化成 100℃的水蒸气所需的热量；另一部分是使 0.101 kg、100℃的水蒸气等容升温到 100.29℃所需的热量。$Q=Lm+c_V(M+m)\Delta T$，代入数据得 $Q=2290$ J。

3 (1) 只要有液态水存在，水蒸气的压强为饱和气压，平衡时气缸中气体的总压强就等于空气压强和饱和水蒸气的饱和气压之和

$$p_{总0}=p_{空0}+p_{饱}=3.0\ \mathrm{atm}$$

第一次膨胀后 $$V_1=2V_0,\ p_{总1}=p_{空1}+p_{饱}=2.0\ \mathrm{atm}$$

第一次是等温膨胀 $$p_{总0}V_0=p_{空1}V_1=2p_{空1}V_0$$

由以上三式得

$$p_{饱}=1.0\ \mathrm{atm},\ p_{空0}=2.0\ \mathrm{atm},\ p_{空1}=1.0\ \mathrm{atm}$$

由于 $p_{饱}=1.0$ atm，可知气缸中气体的温度 $T_0=373$ K，经两次膨胀气体温度未改变。

(2) 设水蒸气为 n mol。经第一次膨胀，水全部变成水蒸气，水蒸气的压强仍为 $p_{饱}$，这时对于水蒸气和空气

分别有

$$p_{饱}V_1=nRT_0,\ p_{空1}V_1=2RT_0$$

可得

$$n=2\ \text{mol}$$

(3) 在第二次膨胀过程中，水蒸气成为未饱和气，有

$$p_{总2}V_2=p_{总1}V_1$$

由题意知

$$V_2=4V_0,\ V_1=2V_0$$

可得

$$p_{总2}=1.0\ \text{atm}$$

4 (1) 玻璃泡受热后 t℃时的体积为 V_1，而玻璃泡内水银在 t℃时的体积为 V_2，则

$$V_1=V_0(1+3\alpha_1 t)$$

$$V_2=V_0(1+\beta t)$$

$$\Delta V=V_2-V_1=V_0t(\beta-3\alpha_1)$$

温度升高后水银膨胀，有一部分水银溢到毛细管中，其上升高度为 h，值为

$$h=\frac{\Delta V}{A_0}=\frac{V_0t(\beta-3\alpha_1)}{A_0}$$

由于此式中 V_0、A_0、$(\beta-3\alpha_1)$ 是恒量，因此 h 与 t 成正比。

(2) 若毛细管的横截面积随温度变化而变化，$A=A_0(1+2\alpha t)$，如果 $2\alpha t\ll 1$，第一问的公式仍成立。

5 由于对玻璃管来说，水是浸润液体，故玻璃管中的水面成凹液面，且可认为接触角为 0°。当管水平放置时，则水会“爬进”细管内。而当细管竖直放置时，由于水柱本身的重力作用使得水又“爬进”了粗管。

毛细管轴与竖直线之间夹角最大时，整个水滴在细管内，这时水柱长为

$$L_{\max}=\frac{M}{\frac{1}{4}\rho\pi d_2^2}$$

于是根据平衡条件得

$$p_0-\frac{4\sigma}{d_1}=p_0-\frac{4\sigma}{d_2}+\rho gL_{\max}\cos\alpha_{\max}$$

式中 p_0 为大气压强。

由此得到

$$\alpha_{\max}=\arccos\frac{\pi\sigma d_2}{Mg}\left(1-\frac{d_2}{d_1}\right)$$

同理，毛细管的轴与竖直线之间的夹角为最小值时，整个水滴位于粗管内，这时水柱长

$$L_{\min}=\frac{M}{\frac{1}{4}\rho\pi d_1^2}$$

根据平衡条件得

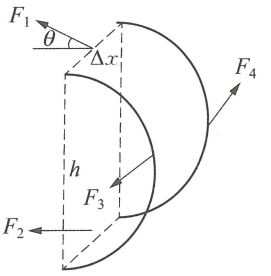
$$p_0-\frac{4\sigma}{d_1}=p_0-\frac{4\sigma}{d_2}+\rho gL_{\min}\cos\alpha_{\min}$$

由此得到

$$\alpha_{\min}=\arccos\frac{\pi\sigma d_1}{Mg}\left(\frac{d_1}{d_2}-1\right)$$

6 由于水银内部存在压强，使水银圆饼侧面向外突出，稳定时，此向外的作用力与水银侧表面张力平衡。

如图所示，在圆饼的侧面处取宽度为 Δx、高为 h 的面元 ΔS，由于重力而产生的水银对 ΔS 的侧压力为



第 6 题答图

$$F=\bar{p}\cdot\Delta S=\frac{1}{2}\rho g h\cdot h\cdot\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}\rho g h^2\Delta x$$

上式中 $\bar{p}=\frac{1}{2}\rho g h$ 为水银对侧面的平均压强。由于压力 F 使圆饼侧面向外突出，设上下两层的表面张力的合力的水平分力 F' 是指向水银内部的，其方向与 F 的方向相反，设上表面处的表面张力 F_1 的方向与水平方向成 θ 角，则 F' 的大小为

$$F'=F_1\cos\theta+F_2$$

$$=\sigma\cdot\Delta x\cdot\cos\theta+\sigma\cdot\Delta x=\sigma\Delta x(1+\cos\theta)$$

当水银的形状稳定时，有 $F'=F$。由于圆饼半径很大，ΔS 两侧表面张力 F_3 和 F_4 可认为方向相反而相互抵消，因而

$$\sigma\Delta x(1+\cos\theta)=\frac{1}{2}\rho g h^2\Delta x$$

解得

$$h=\sqrt{\frac{2\sigma(1+\cos\theta)}{\rho g}}$$

由于 θ 的实际数值一定大于 0，小于 $\frac{\pi}{2}$，所以 $1<\sqrt{1+\cos\theta}<\sqrt{2}$，将 ρ 和 σ 的数值代入上式得

$$h=\sqrt{\frac{2\times0.49(1+\cos\theta)}{13.6\times10^3\times9.8}}\ \mathrm{m}=0.0027\sqrt{1+\cos\theta}\ \mathrm{m}$$

h 的取值范围：$2.7\times10^{-3}\ \mathrm{m}<h<3.8\times10^{-3}\ \mathrm{m}$。

由此可得水银层厚度的估算值取 $3\times10^{-3}\ \mathrm{m}$。

7 (1) 从 $A\to B$，氧气保持压强 p_2 不变，而其质量减少，到 B 点，氮气也达饱和气压，设为 p_1，$A\to B$ 过程中氮气质量不变，在 A 点对氧气有

$$p_2V_A=\frac{m_k}{\mu_2}RT$$

对氮气有

$$p_0V_A=\frac{m_1}{\mu_1}RT$$

$$p_2+p_0=4\ \mathrm{atm}$$

在 B 点有 $p_2+p_1=7\ \mathrm{atm}$，在 $A\to B$ 中氮气质量不变，因而有

$$p_0V_A=p_1V_B$$

且 $V_A=2V_B$，得 $p_1=2p_0$，联立可得

$$m_k=\frac{1}{3}m_1\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}=38.1\ \mathrm{g}$$

(2) 由(1)解得，在 $T=77.4\ \mathrm{K}$ 时氧气的饱和气压为

$$p_{HK}=\frac{1}{6}p_2=\frac{1}{6}\ \mathrm{atm}$$

8 温度升高，玻璃管的截面积会增大，液体的体积也会增大，分别求出这两个量以后即可求得 30℃时液柱的高度。

设 0℃时玻璃管的截面积为 S_0，液体的体积为 V_0，则根据热膨胀规律，在 20℃时玻璃管的截面积 S_{20}、液体的体积 V_{20} 可表示为

$$S_{20}=S_0(1+2\alpha t_{20})$$
$$V_{20}=V_0(1+\beta t_{20})$$

同理，在 30℃时玻璃管的截面积 S_{30}、液体的体积 V_{30} 可表示为

$$S_{30}=S_0(1+2\alpha t_{30})$$
$$V_{30}=V_0(1+\beta t_{30})$$

另由题意得 $$\frac{V_{20}}{S_{20}}=0.5\ \mathrm{m}$$

在 30℃时液柱的高度可表示为 $$h=\frac{V_{30}}{S_{30}}$$

将有关数据代入后可得 $h=0.5001\ \mathrm{m}$，即当玻璃管温度升高到 30℃ 时，液柱的高度增加了 $0.0001\ \mathrm{m}$。

9 (1) 不考虑温度变化导致的液体密度变化，由于液体质量不变，则液体的体积 V 不变。设圆桶玻璃容器内液体的底面积为 S，则

$$\alpha=\frac{\Delta V}{V\Delta T}=\frac{S\Delta h}{Sh\Delta T}=\frac{\Delta h}{h\Delta T}$$

(2) ① 温度升高，密度变小，浮标实际上升的高度小于 ρ 不变时的上升高度，Δh 偏小，故 α 偏小。

② 由(1)可知 $\alpha_{测}=\frac{1}{h}\cdot\frac{\Delta h_{测}}{\Delta t}$

$$\Delta h_{测}=\frac{m_{液}+m_{标}}{\rho_{t_0液}\cdot S_{容}}-\frac{m_{液}+m_{标}}{\rho_{t_1+\Delta t液}S_{容}}-\left(\frac{m_{标}}{\rho_{t_0+\Delta t液}S_{标}}-\frac{m_{标}}{\rho_{t_0液}S_{标}}\right)$$
$$=\frac{m_{液}}{\rho_{t_0+\Delta t液}S_{容}}-\frac{m_{液}}{\rho_{t_0液}S_{容}}-m_{标}\left(\frac{1}{S_{标}}-\frac{1}{S_{容}}\right)\left(\frac{1}{\rho_{t_0+\Delta t液}}-\frac{1}{\rho_{t_0液}}\right)$$

而 $$\Delta h_{真}=\frac{m_{液}}{\rho_{t_0+\Delta t液}S_{容}}-\frac{m_{液}}{\rho_{t_0液}S_{容}}$$

故 $$\Delta\alpha_{减}=\alpha_{真}-\alpha_{测}=\frac{m_{标}}{h\Delta t}\left(\frac{1}{S_{标}}-\frac{1}{S_{容}}\right)\left(\frac{1}{\rho_{t_0+\Delta t液}}-\frac{1}{\rho_{t_0液}}\right)$$

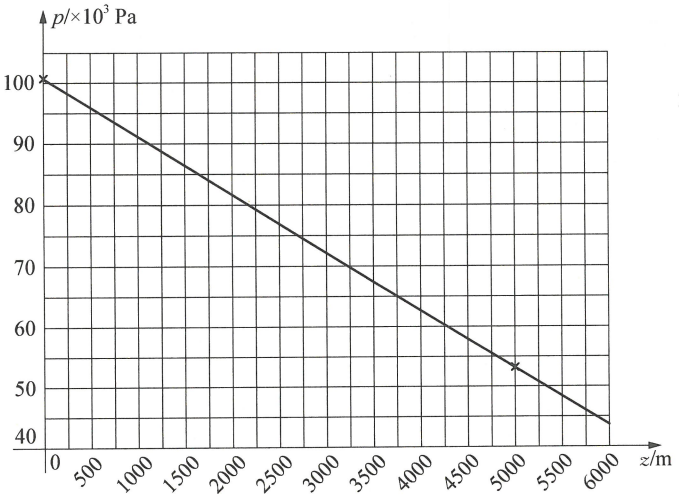
所以，h 越大，$m_{标}$ 越小，$S_{标}$ 越大，$S_{容}$ 越小，$\Delta\alpha_{减}$越小，误差越小。故选 ABD。

10 (1) 已知在海平面处，大气压强 $p(0)=101.3\times10^3\ \mathrm{Pa}$。如答图 1 所示，在 $z=5000\ \mathrm{m}$ 处，大气压强为 $p(5000)=53\times10^3\ \mathrm{Pa}$。

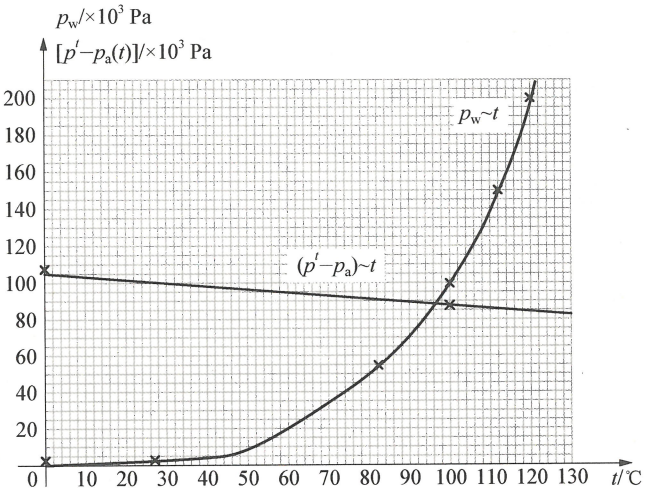
此处水沸腾时的饱和蒸气压 p_w 应等于此值。由答图 2 可知，对应的温度即沸点为

$$t_1 = 82℃$$

达到此温度时锅内水开始沸腾，温度不再升高，故在 5000 m 高山上，若不加盖压力锅，锅内温度最高可达 82℃。



第 10 题答图 1



第 10 题答图 2

(2) 由答图 2 可知，在 $t = 120℃$ 时，水的饱和蒸气压 $p_w(120℃) = 198 \times 10^3$ Pa，而在海平面处，大气压强 $p(0) = 101 \times 10^3$ Pa。可见压力阀的附加压强为

$$\begin{aligned} p_S &= p_w(120℃) - p(0) \\ &= 198 \times 10^3\ \text{Pa} - 101.3 \times 10^3\ \text{Pa} \\ &= 96.7 \times 10^3\ \text{Pa} \end{aligned}$$

在 5000 m 高山上，大气压强与压力阀的附加压强之和为

$$p' = p_S + p(5000) = 96.7 \times 10^3\ \text{Pa} + 53 \times 10^3\ \text{Pa} = 149.7 \times 10^3\ \text{Pa}$$

若在 $t = t_2$ 时阀被顶起，则此时的 p_w 应等于 p'，即

$$p_w = p'$$

由答图 2 可知

$$t_2 = 112℃$$

此时锅内水开始沸腾，温度不再升高，故按正确方法使用此压力锅，在 5000 m 高山上锅内水的温度最高可达 112℃。

(3) 在未按正确方法使用压力锅时，锅内有空气，设加压力阀时，内部水蒸气已饱和。由答图 2 可知，在 $t = 27℃$ 时，题中已给出水的饱和蒸气压 $p_w(27℃) = 3.6 \times 10^3$ Pa，这时锅内空气的压强(用 p_a 表示)为

$$\begin{aligned} p_a(27℃) &= p(5000) - p_w(27℃) \\ &= (53 \times 10^3 - 3.6 \times 10^3)\text{Pa} \\ &= 49.4 \times 10^3\ \text{Pa} \end{aligned}$$

当温度升高时，锅内空气的压强也随之升高，设在温度为 t℃时，锅内空气压强为 $p_a(t)$，则有

$$\frac{p_a(t)}{273 + t} = \frac{p_a(27℃)}{273 + 27}$$

$$p_a(t)=(164.7t+45.0\times10^3)\text{Pa}$$

若在 $t=t'$ 时压力阀刚好开始被顶起，则有

$$p_w(t')+p_a(t')=p'$$

由此得

$$p_w(t')=p'-p_a(t')=(105\times10^3-164.7t')\text{Pa}$$

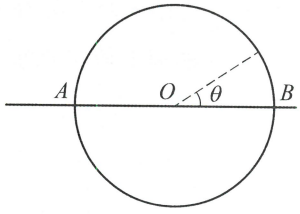
画出函数 $p'-p_a(t')$ 的图线，取 $t=0℃$，$p'-p_a(0℃)=105\times10^3$ Pa 和 $t=100℃$，$p'-p_a(100℃)=88.6\times10^3$ Pa 两个点，由此两点便可在图上画出此直线，此直线与图中的 $p_w(t)-t$ 曲线的交点为 A，即为所求的点，由图可看出与 A 点对应的温度为

$$t'=97℃$$

即在压力阀刚开始被顶起时，锅内水的温度是 97℃，若继续加热，压力阀被顶起后，锅内空气随水蒸气一起被排出，最终空气排净，锅内水温仍可达 112℃。

第 12 章　静电场

1　考虑均匀带电的球壳在球内场强 $E=0$，即 AB 上是等势的，如答图所示，应用电势叠加原理，在半径为 R 的球壳上将半径为 $r=R\sin\theta$、宽为 $\Delta L=R\Delta\theta$ 的小圆环上电量 ΔQ 对称分布在 θ 处圆环上的两段圆弧 $R\Delta\theta$ 上，则在直径 AB 上等电势。所以，所求圆环的带电线密度 λ 满足 $\frac{Q}{4\pi R}[2\pi(R\sin\theta)(R\Delta\theta)]=2\lambda R\Delta\theta$，得 $\lambda=\frac{Q\sin\theta}{4R}$，即为所求圆环的带电线密度与 θ 的关系。此时直径上的电势等于 O 点电势 $U=k\frac{Q}{R}$。



第 1 题答图

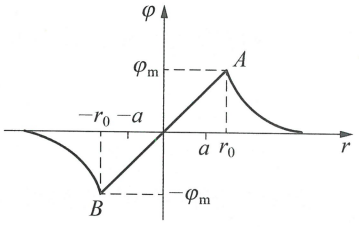
2　设粒子质量为 m，带电量为 q，所具有最高电势为 φ_m，在粒子运动的直线上，电势随坐标的变化图线如答图所示。

根据题意由能量守恒，有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=q\varphi_m$$

当电荷量减少后，粒子通过 A 点时的速度最小：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_{min}^2+\frac{1}{n}q\varphi_m$$



第 2 题答图

粒子通过 B 点时的速度最大：

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2-\frac{1}{n}q\varphi_m$$

解得

$$\frac{v_{max}}{v_{min}}=\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$$

3　根据所提供的电势的曲线，当考察点离坐标原点很近时，电势为正，且随 x 的减小而很快趋向无限大，故正的点电荷必定位于原点 O 处，以 Q_1 表示该点电荷的电量。当 x 从 0 增大时，$x=x_0$ 处的电势为零，没有出现负无限大，故可知这两个点电荷必定是一正一负，负的点电荷在原点的左侧，设它到原点的距离为 a。按题目所给的条

件有

$$k\frac{Q_1}{x_0}-k\frac{Q_2}{x_0+a}=0$$

$$k\frac{Q_1}{ax_0}-k-\frac{Q_2}{ax_0+a}=-U_0$$

因 $x=ax_0$ 时，电势为极小值，故该点场强等于零，有

$$k\frac{Q_1}{(ax_0)^2}-k\frac{Q_2}{(ax_0+a)^2}=0$$

可解得

$$a=a(a-2)x_0$$

$$Q_1=\frac{ax_0}{a-2}\frac{U_0}{k}$$

$$Q_2=\frac{a(a-1)^2}{a-2}\frac{U_0x_0}{k}$$

式中 k 为静电力常量。

4 设球壳内表面带电为 q_a，则其内表面带电 $-q_a$ 且均匀分布。内球体表面带电 q_a 且均匀分布。

(1) 所有电荷在内球球心处(及内球的其他处)的总电势为

$$k\frac{q}{d}+k\frac{q_a}{a}+k\frac{-q_a}{b}+k\frac{q_a}{b}=0$$

解得 $$q_a=-\frac{a}{d}q$$

(2) 外导体球壳电势：外球壳到内球体的电势差仅取决于内球体表面的电荷 q_a。

所以 $$U_{b-a}=\left(k\frac{q_a}{b}-k\frac{q_a}{b}\right)-\left(k\frac{q_a}{a}-k\frac{q_a}{b}\right)=k\frac{q_a}{b}-k\frac{q_a}{a}=kq_a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

在内球接地条件下 $U_a=0$，得

$$U_b=kq_a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{kq}{d}\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

5 没有导体板 bc 时，电容器 ad 的电容为 C，当有 bc 存在时，电容器的电容 C' 相当于电容器 ab 和 cd 串联，而每个电容器都是 $3C$(因距离减为原来的$\frac{1}{3}$)，所以

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{3C}+\frac{1}{3C},\ C'=\frac{3}{2}C$$

电容器中的电能减少量为：

$$\Delta E_1=\frac{1}{2}C'E^2-\frac{1}{2}CE^2=\frac{1}{4}CE^2$$

电容器极板上电量减少量为：

$$\Delta Q=C'E-CE=\frac{1}{2}CE$$

由此可知对电源充电电能为：

$$\Delta E_2=\frac{1}{2}\Delta QE=\frac{1}{2}CE^2$$

用 W 表示电阻上消耗的电能，由能量守恒可知：

$$A+\Delta E_1=\Delta E_2+W$$

所以

$$W=A+\Delta E_1-\Delta E_2=A-\frac{1}{4}CE^2$$

6 $Q_1=0$，$Q_2=-6\ \mu C$，$Q_3=6\ \mu C$，$Q_4=12\ \mu C$，$Q_5=-12\ \mu C$，$Q_6=0$。

由题意

$$2C_{BC}=C_{AB}，U_{BA}=U_{BC}$$

故

$$\frac{Q_3}{C}=\frac{Q_4}{2C}$$

而

$$Q_3+Q_4=18\ \mu C$$

得

$$Q_3=6\ \mu C，Q_4=12\ \mu C$$

7 (1) 带电质点在由 $A\rightarrow B$ 的运动过程中，除了受到竖直方向的重力以外，还受到大小球面上的静电作用力。因 $A\rightarrow B$ 一路上各点均在大小球面以外，所以两球面上均匀分布的电荷均可等价于集中在各自的球心处处理，对带电质点的合电力方向与重力方向相同，因此带电质点由 $A\rightarrow B$ 做减速运动，要能达 B 点必须有足够的初动能。

设质点在 A 点的最小初动能为 E_{k0}，则根据能量守恒，可得质点刚好能到达 B 点的条件为

$$E_{k0}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{\frac{5R}{2}}=mgR+\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{\frac{3R}{2}}\qquad①$$

这里已取 A 点重力势能为零点。由此可得

$$E_{k0}=mgR+\frac{7kqQ}{30R}\qquad②$$

(2) 质点由 $B\rightarrow O$ 的运动有三种可能情况：

(ⅰ) 质点由 $B\rightarrow O$ 做加速运动。则在 B 点处的竖直向上静电力大于重力，便能保证质点由 $B\rightarrow O$ 一直做加速运动，即其条件为

$$mg\leqslant\frac{kqQ}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2}=\frac{4kqQ}{9R^2}\qquad③$$

此时只要质点能过 B 点，必然能到达 O 点。因此质点能到达 O 点所需的最小初动能仍由式②给出，即

$$E_{k0}=mgR+\frac{4kqQ}{30R}\qquad④$$

若式③中取等号，则最小初动能应比式④给出的 E_{k0} 略大一点。

(ⅱ) 质点由 $B\rightarrow O$ 做减速运动，则重力始终大于小球面施于质点的静电力，故在 O' 处静电力小于重力，即

$$mg\geqslant\frac{kqQ}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{4kqQ}{R^2}\qquad⑤$$

此时质点刚好能到达 O 点所需满足的能量守恒方程为

$$E_{k0}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{\frac{5R}{2}}=mg(2R)+\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{\frac{R}{2}} \tag{6}$$

从中解得质点能到达 O 点的最小初动能为

$$E_{k0}=2mR-\frac{11kqQ}{10R} \tag{7}$$

（ⅲ）质点在 $B\to O$ 之间存在一平衡点 D，由 $B\to D$ 质点做减速运动，由 $D\to O$ 质点做加速运动。对应的条件可以直接从式③和式⑤得到，有

$$\frac{4kqQ}{9R^2}<mg<\frac{4kqQ}{R^2}$$

设 D 到 O 点的距离为 x，则

$$mg=\frac{kqQ}{\left(\frac{R}{2}+x\right)^2}$$

解得

$$x=\sqrt{\frac{kqQ}{mg}}-\frac{R}{2}$$

根据能量守恒，质点刚好能到达 D 点满足的方程为

$$E_{k0}+\frac{kqQ}{2R}-\frac{kqQ}{\frac{5R}{2}}=mg(2R-x)+\frac{kqQ}{R}-\frac{kqQ}{\frac{R}{2}+x}$$

联立解得质点能到达 D 点的最小初动能为

$$E_{k0}=\frac{5}{2}mgR+\frac{9kqQ}{10R}-2\sqrt{kmgqQ}$$

8 （1）设球壳半径为 R，带电量为 Q，则电荷面密度为

$$\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$$

设均匀带电球壳在无限缓慢过程中，半径从 R 变到 $R+\Delta R(\Delta R\ll R)$，静电力做功

$$\Delta A=f_0\cdot 4\pi R^2\cdot\Delta R$$

由虚功原理，等于静电力势能的减少，即

$$\Delta A=\frac{Q^2}{2C_0}-\frac{Q^2}{2C}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}-\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0(R+\Delta R)}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{1}{1+\frac{\Delta R}{R}}\right)\approx\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\Delta R$$

求得单位面积受到的静电力

$$f_0=\frac{Q}{4\pi R^2}\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

（2）利用真空中静电场能量密度表达式

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

代入球壳外侧紧邻处的电场强度表达式 $E=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$，得到

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=f_0$$

即在真空中的一个均匀带电球面，单位面积受到的沿径向的静电力，正好等于带电球面外侧紧邻处静电能量密度 w_e。

(3) 利用半球面的静力平衡方程

$$f_0\cdot\pi R^2=\alpha\cdot 2\pi R$$

从中解得因带电新增的球面张力系数

$$\alpha=\frac{\pi R^2}{2\pi R}f_0=\frac{R}{2}\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma^2 R}{4\varepsilon_0}$$

9 设未插入电介质时平行板电容器的电容为 C，则

(1)(2) $E_a=E_b=\dfrac{U}{d}=\dfrac{1}{d}\cdot\dfrac{Q}{C}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{Q_0}{\frac{C_0}{2}+\frac{C_0\varepsilon}{2}}\right)=\dfrac{2}{\varepsilon+1}\cdot\dfrac{Q}{dC_0}=\dfrac{2}{\varepsilon+1}\cdot\dfrac{4\pi kQ}{S}$。

(3) $Q_1=C_aU=\dfrac{\varepsilon}{2}C_0(E_0 d)=\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1}Q_0$。

(4) $Q_2=C_bU=\dfrac{1}{2}C_0(E_0 d)=\dfrac{1}{\varepsilon+1}Q_0$。

(5) 因 $E_a=E_b$，故

$$4\pi k\frac{Q_1+Q_1'}{\frac{S}{2}}=4\pi k\frac{Q_2}{\frac{S}{2}}$$

解得

$$Q_1'=-(Q_1-Q_2)=-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}Q_0$$

负号表示上极板处的极化电荷为负。

10 带电粒子在受力平衡时，存在使粒子静态稳定的平衡点 $x=x_0$，粒子可以在此平衡点附近做微小振动。把重力势能零点取在 $x=0$ 处，静电势能零点取在无穷远处。

任一时刻 t，位于位置 x 处的粒子上势能为

$$V(x)=mgx+\frac{kq^2}{\sqrt{r_0^2+x^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=mg-\frac{kq^2x}{(r_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=-kq^2\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(r_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}+x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{2x}{(r_0^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}\right]=kq^2\frac{3x^2-(r_0^2+x^2)}{(r_0^2+x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

利用 $x=x_0$ 为稳定平衡点的条件

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0 \text{ 和} \left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}>0$$

有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=mg-\frac{kq^2x}{(r_0^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=kq^2\frac{3x_0^2-(r_0^2+x_0^2)}{(r_0^2+x_0^2)^{\frac{5}{2}}}>0$$

由功能关系得

$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-mg+\frac{kq^2x}{(r_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{kq^2x_0}{(r_0^2+x_0^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{kq^2x}{(r_0^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

得到粒子在稳定点附近小振动时受到的力

$$F=-V''(x_0)(x-x_0)=-mg\left(\frac{3x_0}{r_0^2+x_0^2}-\frac{1}{x_0}\right)(x-x_0)$$

$$=-mg\frac{2x_0^2-r_0^2}{(r_0^2+x_0^2)x_0}(x-x_0)$$

因此粒子在 x_0 附近做简谐振动，其动力学方程为

$$m\ddot{x}=-\frac{mg(2x_0^2-r_0^2)}{(r_0^2+x_0^2)x_0}(x-x_0)$$

圆频率为

$$\omega=\sqrt{\frac{2x_0^2-r_0^2}{(r_0^2+x_0^2)x_0}g}$$

11 (1) 该圆柱形雷电云空域的电荷分布可近似认为是一个平行板电容器，其电容为

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

式中 $S=\pi r^2$，$r=2.5\,\mathrm{km}$，$d=1.0\,\mathrm{km}$。该区域上下两端的电势差为

$$U=Ed=150\,\mathrm{MV}$$

式中 $E=0.15\,\mathrm{MV/m}$。所带正电荷总量为

$$Q=CU=\frac{\varepsilon_0\pi r^2U}{d}=26\,\mathrm{C}$$

携带的总电能为

$$W=\frac{1}{2}QU=2.0\times10^9\,\mathrm{J}$$

(2) 将地面考虑为平面导体。应用镜像电荷法，可得高度为 h 的点电荷 Q 产生的地面电场为

$$E=2\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h^2}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0h^2}$$

雷电云正负电荷产生的总地表电场为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0(h+d)^2}+\frac{(-Q)}{2\pi\varepsilon_0 h^2}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(h+d)^2}-\frac{1}{h^2}\right]=-3.5\ \mathrm{kV/m}$$

结果为负，说明电场方向垂直于地面朝上。

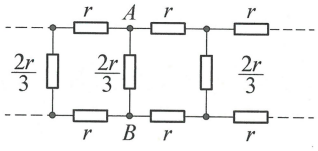
第 13 章　直流电路和物质的导电性

1　304 V。提示：$(I_1-I_2)R_V=U_1$，得 $R_V=32\,000\ \Omega$，故 $U_{总}=\sum_{i=1}^{50}R_V I_i=R_V\sum_{i=1}^{50}I_i=R_V I_1=304\ \mathrm{V}$。

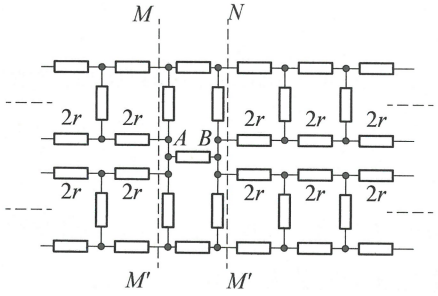
2　(1) 因为后面各点等势，所以后面一根横的电阻线可删去。然后即可求出 $R_{AB}=\frac{2\sqrt{21}}{21}r$。

(2) 可以把 A、B 两点连线方向上各节点拆开，拆后的等效网络示于答图 2 中，图中未标阻值的电阻阻值为 r。

利用答图 2 中虚线 MM'、NN'，并把 AB 沿线上 A 左侧、B 右侧的电阻均拆成两并联电阻，分割网络成五部分，除了中间部分以外，其余四部分均为两端无限网络，画出其中一个，如答图 3 所示，写出等效电阻丝 x 满足的方程



第 2 题答图 1



第 2 题答图 2

$$R_x=r+2r+\frac{rR_x}{r+R}$$

整理并化简得

$$R_x^2-3rR_x-3r^2=0$$

得

$$R_x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}r$$

再把答图 2 画成等效电路，如答图 4 所示，则 A、B 间的等效电阻为

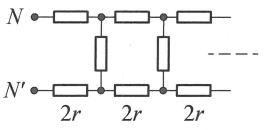
$$R_{AB}=\frac{rR}{r+R}$$

其中

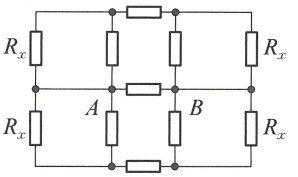
$$R=\frac{1}{2}\left(r+2\frac{rR_x}{r+R_x}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{3+\sqrt{21}}{1+\frac{3+\sqrt{21}}{2}}\right]r=\frac{1}{2}(\sqrt{21}-2)r$$

最后得

$$R_{AB}=\left(1-\frac{2}{21}\sqrt{21}\right)r$$



第 2 题答图 3



第 2 题答图 4

(3) 由网络的对称性可知，假设有电流 I 从 a 点流入网络，必有 $\frac{1}{3}I$ 电流由 a 流向 c，在 c 点又分为两支路电流，则 cb 的电流为 $\frac{1}{6}I$。

另一方面，假设有 I 电流由 b 点流出网络，必有 $\frac{1}{3}I$ 电流由 c 流向 b，a 和 d 分别有 $\frac{1}{6}I$ 流向 c。

将两种情况叠加，则有 I 电流由 a 流入，从 b 流出，按电流的分步法，必有

$$I_{ac}=\frac{I}{3}+\frac{I}{6}=\frac{I}{2}$$

方向经导线 ac 由 a 流向 c；

$$I_{ab}=\frac{I}{3}+\frac{I}{6}=\frac{I}{2}$$

方向经导线 cb 由 c 流向 b，所以 a、b 两点间的等效电阻为

$$R_{ab}=\frac{U_{ab}}{I}=\frac{I_{ac}R+I_{cb}R}{I}=R$$

3 令 $I_1=10.0\ \text{mA}$，$I_2=2.5\ \text{mA}$，$U_1=2.0\ \text{V}$，并令电流表的内阻为 R_A，电压表的内阻为 R_V，电源的电动势为 E，由分压关系得电压表的读数为

$$U_1=\frac{\dfrac{R_\text{V}R_x}{R_\text{V}+R_x}}{\dfrac{R_\text{V}R_x}{R_\text{V}+R_x}+R_\text{A}}E=\frac{R_\text{V}R_xE}{R_\text{V}R_x+R_xR_\text{A}+R_\text{A}R_\text{V}}$$

当 R_x 与电压表分开，与电流表并联后，电流表两端的电压

$$U_\text{A}=I_2R_\text{A}=\frac{\dfrac{R_\text{A}R_x}{R_\text{A}+R_x}}{\dfrac{R_\text{A}R_x}{R_\text{A}+R_x}+R_\text{V}}E=\frac{R_\text{A}R_xE}{R_\text{V}R_x+R_xR_\text{A}+R_\text{A}R_\text{V}}$$

将上述两式相除可得电压表的内阻

$$R_\text{V}=\frac{U_1}{I_2}=8.0\times10^2\ \Omega$$

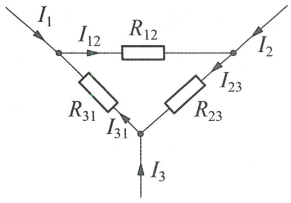
R_x 与电压表并联时，通过电压表的电流为

$$I_\text{V}=\frac{U_1}{R_\text{V}}=2.5\ \text{mA}$$

则

$$R_x=\frac{U_1}{I_1-I_\text{V}}=267\ \Omega$$

4 如答图所示，设流经电阻 R_{12}、R_{23}、R_{31} 的电流分别是 I_{12}、I_{23}、I_{31}，对题图 1 所示的 Y 形网络有



第 4 题答图

$$I_1R_1-I_2R_2=U_{12},\ I_3R_3-I_1R_1=U_{31},\ I_1+I_2+I_3=0$$

由此可得 $$I_1=\frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}U_{12}-\frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}U_{31}$$

对题图 2 所示的网络有

$$I_{12}=\frac{U_{12}}{R_{12}},\ I_{31}=\frac{U_{31}}{R_{31}},\ I_1=I_{12}-I_{31}$$

解得 $$I_1=\frac{U_{12}}{R_{12}}-\frac{U_{31}}{R_{31}}$$

所以有 $$\frac{R_3}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}U_{12}-\frac{R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}U_{31}=\frac{U_{12}}{R_{12}}-\frac{U_{31}}{R_{31}}$$

式中各对应项的系数相等

$$R_{12}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_3}$$

$$R_{31}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_1R_3}{R_2}$$

$$R_{23}=\frac{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}{R_1}$$

即证明了由 Y 形网络变成△形网络的等效变换关系式。

利用对应项的系数相等得出三个等式后进一步变换可证明由△形网络变成 Y 形网络的等效变换关系式。读者也可以直接利用两端点间电阻等效证明 Y-△变换。

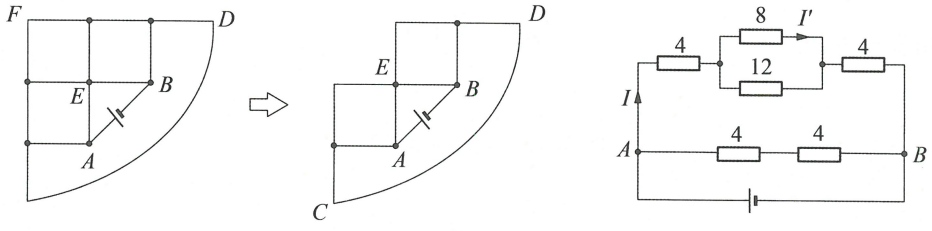
5 (1) 等效电路逐渐变化如答图所示，则易得

$$R_{AB}=\frac{40}{7}\ \Omega,\ I=\frac{\mathscr{E}}{R_{AB}}=1\ \mathrm{A}$$

(2) 若用导线连线 C、D 两点，则 $$I=\frac{\mathscr{E}}{\left(8+\frac{96}{20}\right)\Omega}$$

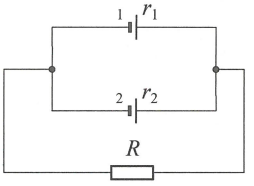
而 $$I\times\frac{96}{20}=I'\times 8$$

得 $$I'=0.267\ \mathrm{A}$$



第 5 题答图

6 对答图 1 所示的电路，设通过电池 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$ 的电流强度分别为 I_1、I_2，则



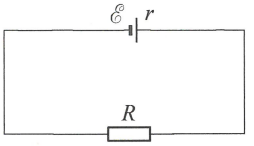
第 6 题答图 1

$$\mathscr{E}_1 = I_1 r_1 + IR$$
$$\mathscr{E}_2 = I_2 r_2 + IR$$
$$I = I_1 + I_2$$

由以上三式解出：

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 - IR}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2 - IR}{r_2} = \frac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}}{1 + \dfrac{R}{r_1} + \dfrac{R}{r_2}}$$

对答图 2 所示电路有



第 6 题答图 2

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + R}$$

根据题给条件，两个 I 应该相等，化简后得

$$R\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right) + r\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right) = R\mathscr{E}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \mathscr{E}$$

两个多项式完全相等，对应项的系数相等，有

$$\frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2} = \mathscr{E}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$
$$r\left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right) = \mathscr{E}$$

由此得

$$\mathscr{E} = \frac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

若换用 n 个 $\mathscr{E}_1$、$\mathscr{E}_2$、…、$\mathscr{E}_n$，内阻分别为 r_1、r_2、…、r_n 的 n 个电池并联时也可用一个电池代替，可用数学归纳法证明得

$$\mathscr{E} = \frac{\dfrac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \dfrac{\mathscr{E}_2}{r_2} + \cdots + \dfrac{\mathscr{E}_n}{r_n}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \cdots + \dfrac{1}{r_n}}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}$$

7 由并联电路分流原理，有

$$R_{并} = \frac{R_{g0}}{n - 1}$$

对 I_1 挡有

$$R_1 + R_2 + R_3 = \frac{R_{g0}}{n_1 - 1}$$

对 I_2 挡有

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{g0} + R_1}{n_2 - 1}$$

对 I_3 挡有 $$R_3=\frac{R_{g0}+R_1+R_2}{n_3-1}$$

令 $$R_1+R_2+R_3=R_{并1},\ R_2+R_3=R_{并2},\ R_3=R_{并3}$$

可得 $$n_1R_{并1}=n_2R_{并2}=n_3R_{并3}=\cdots=n_iR_{并i}$$

表明各量程的扩程倍数 $\left(n_i=\frac{I_i}{I_g}\right)$ 与该量程的分流电阻之积为一常数。所以 $R_{并i}=\frac{R_{并1}}{\frac{n_1}{n_i}}=\frac{R_{并1}}{\frac{I_1}{I_i}}$，即在闭路抽头式多量程电流表中，某量程是最小量程的多少倍，该量程的分流电阻就是总分流电阻的多少分之一。由此不难求得 R_1、R_2、R_3 之值。

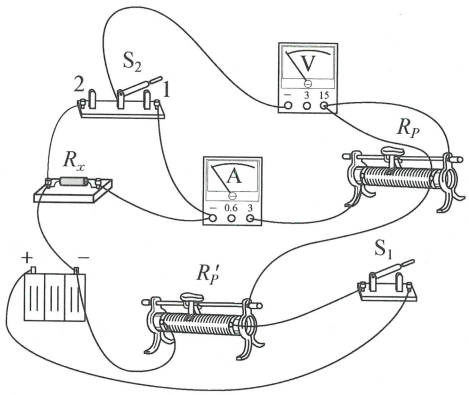
8 (1) S_2 接 1，闭合 S_1，调节 R_P'，读出此时电压表和电流表的示数 U_1、I_1。

(2) 在情况①下 $$R_x+R_P+R_A=\frac{U_2}{I_2}$$

在情况②下 $$R_A+R_P=\frac{U_1}{I_1}$$

故 $$R_x=\frac{U_2}{I_2}-\frac{U_1}{I_1}。$$

(3) 电路连接如图所示。



第 8 题答图

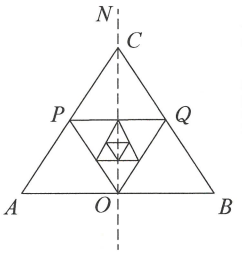
9 由于“多出来的一角”破坏了结构中的强对称性，故先去掉多余的一角，得答图 1。先求答图 1 中 A、B 两点间的等效电阻 R_{AB}'。

答图 1 所示网络具有对称性，POQ 与 AOB 在 O 点分开，不影响计算的结果。这样，答图 1 网络等效于答图 2 网络，而答图 2 网络相当于在大三角形 ABC 两边中点 P 与 Q 之间连接一个边长为 $\frac{a}{2}$ 的无限内接三角形网络。设这一网络的等效电阻为 R_{PQ}，并联接在大三角形 P、Q 两点，这样网络可等效于答图 3 所示网络。对于答图 3 所示网络，容易得到

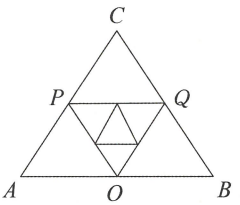
$$R_{AB}'=\frac{aR_0+2R_{PQ}}{2aR_0+3R_{PQ}}\cdot aR_0$$

考虑到电阻与长度成正比，应有

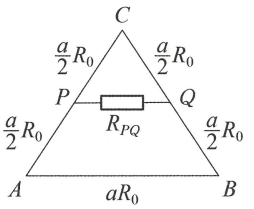
$$R_{PQ}=\frac{1}{2}R_{AB}'$$



第 9 题答图 1



第 9 题答图 2



第 9 题答图 3

代入上式可得

$$R'_{AB}=\frac{1}{3}(\sqrt{7}-1)aR_0$$

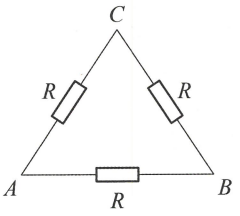
由于答图 1 具有对称性，可用一个三角形网络与之等效，三角形网络中三个电阻相等，同记为 R，如答图 4 所示。答图 4 网络和答图 1 网络等效，那么 A、B 两点间等效电阻应相等。即

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{2R}=\frac{1}{R'_{AB}}$$

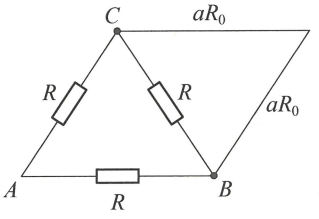
$$R=\frac{3}{2}R'_{AB}=\frac{\sqrt{7}-1}{2}aR_0$$

最后将“多余的一角”加上，如答图 5 所示，很容易得到

$$R_{AB}=\frac{5\sqrt{7}-7}{12}aR_0$$



第 9 题答图 4



第 9 题答图 5

10 设其电阻为 R，则在一年时间 t 内电流通过线圈因发热而损失的能量为 $\Delta E=I^2Rt$，以 ρ 表示铅的电阻率，S 表示铅丝的横截面积，I 表示铅丝的长度，则有 $R=\rho\dfrac{l}{S}$。设导电电子的平均速率为 v，根据电流的定义有 $I=Svne$，则 $\Delta I=neS\Delta v$，铅丝中所有导电电子减少的平均动能为

$$\Delta E_k=lSn\left[\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(v-\Delta v)^2\right]$$

$$\approx lSnmv\Delta v$$

即

$$\Delta E_k=\frac{lmI\Delta I}{ne^2S}$$

铅丝中所有导电电子减少的平均动能就是一年内因发热而损失的能量，即

$$\Delta E_k=\Delta E$$

解得 $$\rho=\frac{m\Delta I}{ne^2It}$$

由电流变化的上限为

$$\Delta I=1.0\ \text{mA},\ t=365\times24\times3600\ \text{s}=3.15\times10^7\ \text{s}$$

解得 $$\rho=1.4\times10^{-26}\ \Omega\cdot\text{m}$$

所以电阻率为 0 的结论在这一实验中只能认定到

$$\rho\leqslant1.4\times10^{-26}\ \Omega\cdot\text{m}$$

11 当输出电压 $U_1=0$ 时，$U_{b1}-U_{e1}=0<0.6\ \text{V}$，故三极管 Ⅰ 关断，这时 $U_{e2}=U_{e1}=0$，而

$$U_{b2}=12\times\frac{10}{4+20+10}\ \text{V}=3.5\ \text{V}$$

所以 $$U_{b2}-U_{e2}=3.5\ \text{V}>0.6\ \text{V}$$

故三极管Ⅱ导通，输出电压 $$U_2=12\times\frac{510}{510+2000}\ \text{V}=2.4\ \text{V}$$

三极管Ⅱ导通后，在 R_1 上有电压降，使发射极电势升高，这时

$$R'_{e2}=U'_{e1}=12\times\frac{510}{510+2000}\ \text{V}=2.4\ \text{V}$$

$$U'_{b1}-U'_{e1}=(0-2.4)\ \text{V}=-2.4\ \text{V}<0.6\ \text{V}$$

$$U'_{b2}-U'_{e2}=(3.5-2.4)\ \text{V}=1.1\ \text{V}>0.6\ \text{V}$$

故三极管Ⅰ仍关断，Ⅱ仍导通，处于稳定状态。

使输入电压增加到 $U'_1=3.0\ \text{V}$ 时

$$U'_{b1}-U'_{e1}=3.0\ \text{V}-2.4\ \text{V}=0.6\ \text{V}$$

使三极管Ⅰ导通。导通后，R_1 上的电压降发生变化，使 U'_{e1} 变化(忽略并联的 20 kΩ＋10 kΩ)，则

$$U'_{e1}=12\times\frac{510}{510+\dfrac{4000\times2000}{4000+2000}}\ \text{V}=3.3\ \text{V}$$

而 $$U'_{b2}=3.3\times\frac{10}{20+10}\ \text{V}=1.1\ \text{V}$$

$$U'_{b2}-U'_{e1}=(1.1-3.3)\ \text{V}=-2.2\ \text{V}<0.6\ \text{V}$$

使三极管Ⅱ关断，这样 U'_{e1} 由 3.3 V 变为

$$U''_{e1}=12\times\frac{510}{510+4000}\ \text{V}=1.3\ \text{V}$$

$$U'_{b1}-U''_{e1}=(3.0-1.3)\ \text{V}=1.7\ \text{V}>0.6\ \text{V}$$

故三极管Ⅰ仍保持导通，因为三极管Ⅱ关断，$U_{e2}=12\ \text{V}$，这时输出端电压 $U'_2=12\ \text{V}$，电路处于稳定状态。

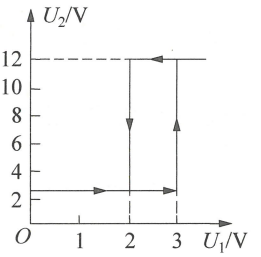
继续增加输入电压时，输出电压不再变化，仍为 $U'_2=12\ \text{V}$。

当输入电压由 3.0 V 减少时，由于现在 $U''_{e1}=1.3\ \text{V}$，因此当输入电压降低到

$$U''_{e1}=U''_{b1}=1.9\ \text{V}$$

以下时，能使 $U''_{e1}-U''_{b1}<0.6\ \text{V}$。

三极管Ⅰ关断，与初始所讨论的情况相同，这时输出电压又变到 $U_2=2.4\ \text{V}$，所以，当输入电压自 1.9 V 变到 0 时，输出电压保持 $U_2=2.4\ \text{V}$ 不变，其输出电压 U_2 随输入电压 U_1 的变化图象如答图所示。



第 11 题答图

第 14 章　磁场

1　设 A、B 两点之间的电压为 U，导线单位长度上的电阻为 ρ，由欧姆定律得

$$I_1=\frac{U}{\rho r\alpha},\quad I_2=\frac{U}{\rho r(2\pi-\alpha)}$$

磁感应强度 B 可以看成是圆环的各个电流微元的贡献之和。

因为

$$\Delta B=K\frac{I\Delta l}{r}$$

所以

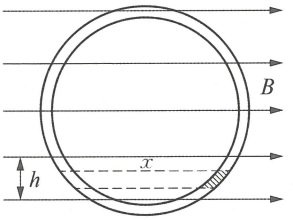
$$B_1=K\frac{I_1l_1}{r}=K\frac{I_1}{r}r\alpha=KI_1\alpha$$

$$B_2=K\frac{I_2l_2}{r}=K\frac{I_2}{r}r(2\pi-\alpha)=KI_2(2\pi-\alpha)$$

因为 $I_1\rho r\alpha=I_2\rho r(2\pi-\alpha)$，故 $B_1=B_2$，即来自两部分的磁感应强度的大小相同，而磁场的方向正好相反，因此环中心的磁感应强度为零。

2　设任意形状的线圈放在匀强磁场中，磁感应强度 B 平行于线圈平面，如答图所示，把载流线圈所围面积分成许多块与 B 平行的小狭条，左右侧边 Δl_K、$\Delta l'_K$ 的电流元受到的安培力为

$$F_K=BI\Delta l_K\sin\theta$$
$$F'_K=BI\Delta l'_K\sin\theta'$$



第 2 题答图

式中 θ、θ' 为线圈上两小段弧长 Δl_K、$\Delta l'_K$ 中的电流与 B 的夹角。

因

$$\Delta l_K\sin\theta=\Delta l'_K\sin\theta'=h$$

F_K、F'_K 组成一对小力偶，力偶矩为

$$\Delta M_K=F_K\cdot x=BIhx=BIS_K\ (S_K\text{ 为第 }K\text{ 狭条的面积})$$

整个线圈所受力矩

$$M=\sum\Delta M_K=BI(h_1x_1+h_2x_2+\cdots h_nx_n)$$
$$=BI(S_1+S_2+\cdots+S_n)=BIS$$

S 为线圈总面积。

因此，当周长为一定时，要使 S 最大，必须把线圈绕成圆形。

如果线圈平面和 B 夹 α 角，第 K 狭条所受的安培力未变，但力偶臂变为 $x\cos\alpha$，所以要使力偶矩最大，有 $\cos\alpha=1$，即 $\alpha=0$（线圈平面与 B 平行）。

由 $l=2\pi R$，得 $R=\frac{l}{2\pi}$，即 $S=\pi r^2=\frac{l^2}{4\pi}$，得 $M_{\max}=\frac{BIl^2}{4\pi}$。

3 (1) $mgy=\frac{1}{2}mv^2$，$v=\sqrt{2gy}$。

(2) 设在最大距离 y_m 处的速率为 v_m，根据圆周运动有

$$qv_mB-mg=m\frac{v_m^2}{R},\ v_m=\sqrt{2gy_m}$$

由 $R=2y_m$ 得

$$y_m=\frac{2m^2g}{q^2B^2}$$

(3) $(qE-mg)\mid y_m\mid=\frac{1}{2}mv_m^2$，$v_mB+mg-qE=m\frac{v_m^2}{R}$

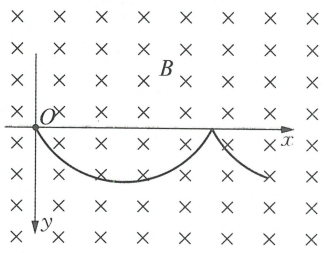
由

$$R=2\mid y_m\mid$$

解得

$$v_m=\frac{2}{qB}(qE-mg)$$

4 带电小球的运动轨迹为滚轮线，为使带电小球不与地面碰撞，则滚高小于等于 h，设 B 的最小值为 B_{min}，则由 $mg=qvB_{min}$，$h=\frac{2mv}{qB_{min}}$，得 B 的最小值 $B_{min}=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{2g}{h}}$。选静止释放位置为坐标原点，建立如答图所示坐标系，带电小球运动轨迹的参数方程是



第 4 题答图

$$\begin{cases}x=\sqrt{\frac{gh}{2}}t-\frac{h}{2}\cdot\sin\sqrt{\frac{2g}{h}}t\\ y=\frac{h}{2}\left(1-\cos\sqrt{\frac{2g}{h}}t\right)\end{cases}$$

5 $v=\frac{qE}{\sqrt{q^2E^2+k^2}}$，速度方向与电场方向夹角 $\theta=\arctan\frac{qB}{k}$。

6 设平衡时，弹簧伸长 Δl，弹簧长度为

$$l=l_0+\Delta l$$

两棒所受弹力

$$F=2K\Delta l$$

安培力

$$F_{安}=IBL=IL\frac{\mu_0 I}{2\pi(l_0+\Delta l)}=\frac{\mu_0 I^2L}{2\pi(l_0+\Delta l)}$$

故平衡条件为

$$2K\Delta l=\frac{\mu_0 I^2L}{2\pi(l_0+\Delta l)}$$

即

$$4\pi K(\Delta l)^2+4\pi Kl_0(\Delta l)-\mu_0 I^2L=0$$

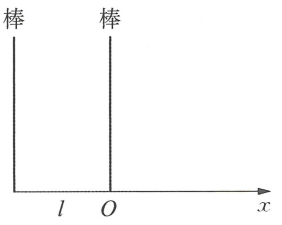
解出正根

$$\Delta l=\frac{1}{2}\left[\sqrt{l_0^2+\frac{\mu I^2L}{\pi K}}-l_0\right]=\frac{l_0}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\mu_0 I^2L}{\pi Kl_0^2}}-1\right]$$

故平衡时两棒距离为

$$l=l_0+\Delta l=\frac{l_0}{2}\left[\sqrt{1+\frac{\mu_0 I^2L}{\pi Kl_0^2}}+1\right]$$

取 x 轴如答图所示，原点 O 设在右棒的平衡位置。设右棒向右偏离小量 x，同时左棒向左偏离小量 x，即当两棒相距 $(l+2x)$ 时，右棒受力为



第 6 题答图

$$
\begin{aligned}
F_x &= \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi(l+2x)} - 2K(\Delta l + 2x) \\
&= \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(1+\frac{2x}{l}\right)^{-1} - 2K\Delta l - 4Kx \\
&= \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l} - \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(\frac{2x}{l}\right) - 2K\Delta l - 4Kx \\
&= -\frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi l}\left(\frac{2x}{l}\right) - 4Kx \\
&= -4\left(1+\frac{\Delta l}{l}\right)Kx
\end{aligned}
$$

令 $\dfrac{\Delta l}{l}=\alpha$，有 $F_x=-4(1+\alpha)Kx$，故做简谐运动。

$$
\omega=\sqrt{\frac{4(1+\alpha)K}{m}},\quad T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{m}{(1+\alpha)K}}
$$

其中

$$
\alpha=\frac{\Delta l}{l}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi K l_0^2}}-1}{\sqrt{1+\dfrac{\mu_0 I^2 L}{\pi K l_0^2}}+1}
$$

7 由于离子速度都有平行于与垂直于磁场的分量 $v_{/\!/}$ 与 $v_\perp$，故离子在磁场中将做螺旋线运动。设某一离子的初速度与 OO' 夹角为 θ，有 $v_{/\!/}=v_0\cos\theta$，$v_\perp=v_0\sin\theta$。

螺旋线半径和周期分别表示为

$$
r=\frac{mv_0\sin\theta}{Bq},\quad T=\frac{2\pi m}{Bq}
$$

离子若要打到圆屏上，必须满足 $r\leqslant\dfrac{R}{2}$，即

$$
\sin\theta\leqslant\frac{BqR}{2mv_0}=\sin\theta_0
$$

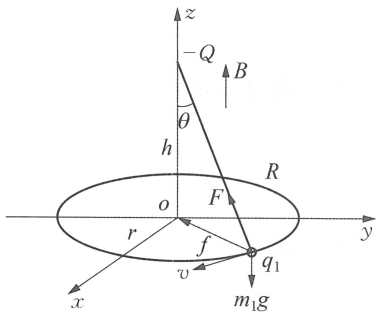
其中 θ_0 是能打中圆屏面的临界角。若以 s 为球心，任取一半径 a 作一球面，所有 $\theta\leqslant\theta_0$ 的离子均位于圆锥角为 θ_0 的圆锥内。由于离子源向各方向均匀地发射，故在圆锥内离子数 N 与总发射离子数 N_0 之比等于圆锥所对球冠面积 S 与球面面积 $S_0=4\pi a^2$ 之比。球冠的高 $h=a(1-\cos\theta_0)$。故

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{N'}=\frac{S}{S_0} &= \frac{2\pi a^2(1-\cos\theta_0)}{4\pi a^2} \\
&= \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\sin^2\theta_0}) \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{BqR}{2mv_0}\right)^2}\right]
\end{aligned}
$$

8 根据题意可画出答图。

(1) 电荷 q_1 受三个力作用:重力 m_1g,静电力 $F=K\dfrac{Qq_1}{R^2}$,磁场力 $f=q_1vB$。

假定圆周运动旋转的正方向如答图所示。



第 8 题答图

在竖直方向

$$K\frac{Qq_1}{R^2}\cos\theta=m_1g$$

沿圆半径方向

$$K\frac{Qq_1}{R^2}\sin\theta+q_1\omega rB=m_1\omega^2r$$

因 $R\sin\theta=r$, $R\cos\theta=h$,得

$$\frac{m_1g}{h}+\omega q_1B=m_1\omega^2$$

解得

$$\omega=\frac{\dfrac{q_1B}{m_1}\pm\sqrt{\left(\dfrac{q_1B}{m_1}\right)^2+4\dfrac{g}{h}}}{2}$$

ω 的负值对应与图中旋转方向相反。

对于复合粒子,有

$$K\frac{Q(q_1+q_2)}{R^2}\cos\theta=(m_1+m_2)g$$

$$K\frac{Q(q_1+q_2)}{R^2}\sin\theta+(q_1+q_2)\omega rR=(m_1+m_2)\omega^2r$$

解得

$$q_2=\frac{m_2}{m_1}q_1$$

(2) 电荷做圆周运动的角速度大小与荷质比有关,且有两个旋转方向,所以,碰撞后的复合粒子的角速度可能与原来粒子的角速度方向相反。因此第二个粒子只可能迎面相撞。

(3) 设第二个粒子碰撞前的速度是 u,由动量守恒,有:

第一种情况

$$m_2u-m_1\omega_1r=(m_1+m_2)\,|\,\omega_2'\,|\,r,\ \omega_2=\omega_2'$$

得

$$u=\frac{(m_1+m_2)\,|\,\omega_2'\,|\,r+m_1\omega_1r}{m_2}$$

$$=\frac{(m_1+m_2)\,|\,\omega_2\,|\,r+m_1\omega_1r}{m_2}$$

第二种情况

$$m_2u-m_1\,|\,\omega_2'\,|\,r=(m_1+m_2)\omega_1r$$

得

$$u=\frac{(m_1+m_2)\omega_1r+m_1\,|\,\omega_2\,|\,r}{m_2}$$

分别将(1)中表达式代入 u 的表达式,即可求出 u。

9 (1) 不计边缘效应和漏磁。记螺线管长度为 l、通电电流为 I,则管内磁感应强度为

$$B=\mu_0nI=\frac{\mu_0NI}{l}\qquad①$$

螺旋管的磁通匝链数为

$$\Psi = NB\pi r^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I}{l} \tag{②}$$

螺线管的电感为

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \tag{③}$$

弹簧的弹性势能为

$$W_k = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \tag{④}$$

当 $I = I_0$ 时，电感存储的磁场能量为

$$W_B = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \tag{⑤}$$

考虑一缓慢、微小形变过程，记 Δl 为过程中的弹簧的微小伸长量(可正可负，视为无穷小量)。加载于弹簧两端以维持弹簧平衡的外力设为 F(以拉伸方向为力的正方向)，则依功能原理有

$$F\Delta l + \Delta A_S = \Delta W_k + \Delta W_B \tag{⑥}$$

其中 ΔA_S 是恒流源克服自感电动势所做的功。按照法拉第电磁感应定律，维持电流 $I = I_0$ 不变，螺线管所在电流回路的自感电动势为(沿电流的反方向)

$$U = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = \frac{\Delta (LI_0)}{\Delta t}$$

恒流源克服自感电动势做的功 ΔA_S 为

$$\Delta A_S = UI_0 \Delta t = \frac{\Delta (LI_0)}{\Delta t} I_0 \Delta t = I_0^2 \Delta L = -\Delta W_S \tag{⑦}$$

式中

$$W_S = -LI_0^2$$

将④⑤⑦式代入⑥式，并与下式

$$F\Delta l = \Delta W \tag{⑧}$$

比较得

$$W = W_k + W_B + W_S = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \tag{⑨}$$

由⑧⑨式得

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = k(l - l_0) + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l^2} I_0^2 \tag{⑩}$$

缓慢撤除外力后，弹簧达到新的平衡位置时的长度 l_p；换言之，当 $l = l_p$ 时 $F = 0$。由⑩式得

$$k(l_p - l_0) + \frac{1}{2}\frac{\mu_0 \pi N^2 r^2}{l_p^2} I_0^2 = 0 \tag{⑪}$$

此即为所求的 l_p 需满足的代数方程。

若 $l=l_p+\delta l$，对⑩式做小量 δl 展开得

$$F=\left(k-\frac{\mu_0\pi N^2r^2}{l_p^3}I_0^2\right)\delta l+\cdots=k_{\text{eff}}\delta l+\cdots \tag{⑫}$$

式中，…是比 δl 更高阶的小量，k_{eff} 是通电弹簧在平衡长度 l_p 附近发生小幅度形变时的等效弹性系数。由⑪⑫式得

$$k_{\text{eff}}=k-\frac{\mu_0\pi N^2r^2}{l_p^3}I_0^2=\frac{\mu_0\pi N^2r^2(3l_p-2l_0)}{2l_p^3(l_0-l_p)}I_0^2$$

(2) 由⑪式得

$$I_0^2=\frac{k}{\mu_0\pi N^2r^2}(2l_0-2l_p)l_pl_p$$

由平均值不等式 $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}$，当 $a>0$，$b>0$，$c>0$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号知

$$I_0^2\leqslant\frac{k}{\mu_0\pi N^2r^2}\left(\frac{2l_0}{3}\right)^3=\frac{8}{27}\frac{kl_0^3}{\mu_0\pi N^2r^2}$$

等号仅对应于 $l_p=\frac{2}{3}l_0$ 的情况。于是

$$I_0\leqslant\sqrt{\frac{8}{27}\frac{kl_0^3}{\mu_0\pi N^2r^2}}$$

10 根据安培环路定理，一根通有电流 I 的无限长直导线在距离该直导线 r 处产生的磁场的磁感应强度大小为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{①}$$

式中 μ_0 是真空磁导率，方向按右手定则沿围绕直导线的圆(垂直于直导线、且以该直导线穿过圆面的点为中心)的切向。根据对称性，四根导线在 O 点产生的磁感应强度为 0。

对于 P 点，磁感应强度的 z 分量为 0，而 x 分量和 y 分量分别为

$$B_x=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\frac{b}{2}-y}{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}+\frac{\frac{b}{2}+y}{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{b}{2}+y\right)^2}-\right.$$
$$\left.\frac{\frac{b}{2}-y}{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}-\frac{\frac{b}{2}+y}{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{b}{2}+y\right)^2}\right] \tag{②}$$

$$B_y=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{\frac{a}{2}+x}{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}-\frac{\frac{a}{2}+x}{\left(\frac{a}{2}+x\right)^2+\left(\frac{b}{2}+y\right)^2}+\right.$$
$$\left.\frac{\frac{a}{2}-x}{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{b}{2}-y\right)^2}-\frac{\frac{a}{2}-x}{\left(\frac{a}{2}-x\right)^2+\left(\frac{b}{2}+y\right)^2}\right] \tag{③}$$

当 $x \ll a$，$y \ll b$ 时，②③式近似为

$$B_x = -\frac{16\mu_0 abI}{\pi(a^2+b^2)^2}x$$

$$B_y = \frac{16\mu_0 abI}{\pi(a^2+b^2)^2}y$$

因此，P 点的磁感应强度大小为

$$B = \frac{16\mu_0 abI}{\pi(a^2+b^2)^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

第 15 章　电磁感应和电磁波

1 设 B_1 水平向北，B_2 竖直向下。

由

$$Q_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{R} = \frac{2B_2L_1L_2}{R}$$

可得

$$B_2 = \frac{Q_1R}{2L_1L_2}$$

由

$$Q_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{R} = \frac{B_1L_1L_2 - B_2L_1L_2}{R}$$

可得

$$B_1 = \frac{(Q_1+2Q_2)R}{2L_1L_2}$$

而

$$B = \sqrt{B_1^2+B_2^2}$$

得

$$B = \frac{R}{2L_1L_2}\sqrt{Q_1^2+(Q_1+2Q_2)^2}$$

2 由 $u = BLv$，得

$$mg\sin\theta - BiL = ma$$

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{C\cdot\Delta u}{\Delta t} = CBLa$$

$$d = \frac{1}{2}at^2,\ t = \sqrt{\frac{2d(m+B^2L^2C)}{mg\sin\theta}}$$

3 $E = Bav$，$I = \frac{E}{R} = \frac{Ebl}{\rho a}$，$F = BIa$，$\frac{v}{v_0} = \frac{p-\frac{F}{ab}}{p}$，得 $v = \frac{\rho v_0 p}{\rho p + B^2 l v_0}$。

4 (1) 设大圆弧和小圆弧中电流分别为 I_1、I_2，方向逆时针，电压表中电流为 I_V，则

$$S_1 = \frac{\theta\pi a^2}{2\pi},\ S_2 = \frac{(2\pi-\theta)\pi a^2}{2\pi}$$

$$\mathscr{E}_1 = \frac{S_1\Delta B}{\Delta t},\ \mathscr{E}_2 = \frac{S_2\Delta B}{\Delta t}$$

且小圆弧和大圆弧中的电阻分别为

$$R_1 = \frac{\theta r}{2\pi},\ R_2 = \frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}$$

则 $$I_V=I_2-I_1,\ \mathscr{E}_1=I_1R_1-I_VR,\ \mathscr{E}_2=I_2R_2+I_VR$$

得 $$I_1=I_2,\ I_V=0$$

故电压表示数为 0。

(2) 方法同上。

$$I_V=\frac{2\pi^2Ra^2k\sin\theta}{4\pi R+r(2\pi-\theta)\theta}$$

5 (1) 在导体棒穿过磁场区域时,导体棒中产生动生电动势,回路中产生变化的感应电流 i,$i=\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$。导体棒第一次穿越条形磁场区域的过程中,电阻 R 中通过的电荷量为

$$q=\sum i\Delta t=\sum\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Delta t=\frac{1}{R}\sum\Delta\Phi=\frac{BS}{R}$$

其中 S 为三角形水平导轨 OPQ 所围磁场区域的面积,即

$$S=\frac{1}{2}\times3d\times2\times3d\tan30^\circ-\frac{1}{2}\times2d\times2\times3d\tan30^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{3}d^2$$

则 $$q=\frac{BS}{R}=\frac{5\sqrt{3}}{3}\frac{Bd^2}{R}$$

(2) 在导体棒运动过程中,导体棒有可能多次通过磁场区域,由于导体回路中电阻的存在,使得系统的机械能不断减小。当系统的机械能减小到一定程度时,导体棒最大位移处位于条形磁场区域的边界,此后,导体棒在磁场区域外做简谐运动,机械能保持不变。在此之前,系统机械能减小,全部转化为电阻释放的焦耳热。由此可得

$$Q=\frac{1}{2}k(3d)^2-\frac{1}{2}kd^2=4kd^2$$

6 (1) 金属棒达最大速度 v_m 时,回路中的感应电动势大小为

$$\mathscr{E}=B\cos\theta lv_m-B\sin\theta lv_m=Blv_m(\cos\theta-\sin\theta)$$

回路中的电流 $$I=\frac{\mathscr{E}}{2R}$$

当两棒均做匀速运动时,棒的速度达最大值,由

$$mg=BIl\cos\theta-BIl\sin\theta$$

得 $$v_m=\frac{2mgR}{B^2l^2(\cos\theta-\sin\theta)^2}$$

(2) 金属棒速度为 v 时,回路中的电动势

$$\mathscr{E}'=Blv(\cos\theta-\sin\theta)$$

此时 $$F_{安}=B\frac{F'}{2R}l=\frac{B^2l^2v}{2R}(\cos\theta-\sin\theta)$$

所以机械能损失的功率

$$P_1 = F_{安} \cdot v = \frac{B^2 l^2 v^2}{2R}(\cos\theta - \sin\theta)$$

此时回路中的发热功率

$$P_2 = \frac{E'^2}{2R} = \frac{B^2 l^2 v^2 (\cos\theta - \sin\theta)}{2R}$$

7 杆 PQ 在磁场中运动时，受外加恒力 F，安培力 $F_A = BIl$，摩擦力 f，由动能定理，在所考察过程中作用于杆的合力做的功等于杆所增加的动能，即

$$W_F + W_{F_A} + W_f = \frac{1}{2}mv^2$$

恒力 F 对杆做的功 $W_F = Fx$

杆克服安培力做的功等于电阻所消耗的能量，即

$$-W_{F_A} = E_R$$

摩擦力 F_μ 是恒力，它对杆做的功 $W_f = -fx$，$f = m_0 a$

而 $a = \frac{2x_0}{t^2}$，得 $W_f = -2m_0 \frac{x_0 x}{t^2}$

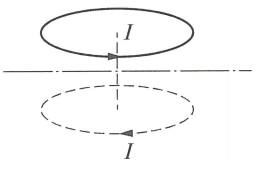
经过时间 t，杆和导轨构成的回路中的感应电动势 $\mathscr{E} = Blv$，感应电流 $I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R}$；

解得 $E_R = \left(F - 2m_0 \frac{x_0}{t^2}\right)x - \frac{1}{2}m\frac{I_0^2 R^2}{B^2 l^2}$

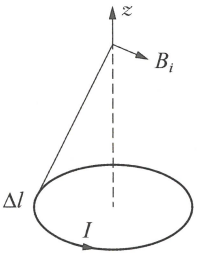
8 (1) 在圆环磁场的作用下超导平板内形成感应电流，产生附加磁场。圆环磁场与附加磁场之和，在超导平板内应处处为零，在超导平板表面的外侧应沿水平方向。可以证明，超导平板内感应电流在 $z > 0$ 区域产生的附加磁场，相当于在 $z = h$ 处对称地放置一个镜像圆环电流所产生的磁场。镜像圆环的半径也为 r，电流强度也为 I，但电势方向与原圆环电流反向，如答图 1 所示。

设想半径 r、电流强度为 I 的环形电流在距环中心上方 z 处产生的磁感应强度(如答图 2 所示)

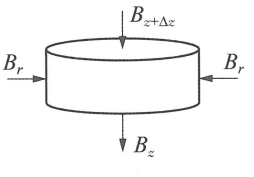
$$B_z = \sum B_{iz} = \sum \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta l}{z^2 + r^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$



第 8 题答图 1



第 8 题答图 2



第 8 题答图 3

考虑到 $r \ll h$，可以认为 $z^2 + r^2 = z^2$，且取 $\Delta l = 2\pi r$，可得：

$$B_z = \frac{\mu_0 I r^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 I r^2}{16h^3}$$

如答图 3 所示，在上圆环所在位置处选取一封闭小圆柱面，其圆心和上圆环圆心重合，柱面半径正好为 r，高 Δz（$\Delta z \ll z$），根据磁场的高斯定理（在磁场中通过任意闭合曲面的总磁通量恒等于 0）有

$$(B_z - B_{z+\Delta z}) \cdot \pi r^2 = B_r \cdot 2\pi r \cdot \Delta z$$

即

$$\frac{\mu_0 I r^2}{2}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z+\Delta z)^3}\right) \cdot \pi r^2 = B_r \cdot 2\pi r \cdot \Delta z$$

利用

$$(z+\Delta z)^{-3} = z^3\left(1 - \frac{3\Delta z}{z}\right)$$

得

$$B_r = \frac{3\mu_0 I r^3}{4z^4} = \frac{3\mu_0 I r^3}{64h^4}$$

超导平板内感应电流对原圆环电流的作用力即为镜像圆环电流对原圆环电流的安培斥力，上侧通电圆环平衡时满足

$$B_r I \cdot 2\pi r = mg$$

得

$$I = \frac{h^2}{r^2}\sqrt{\frac{32mg}{3\mu_0 \pi}}$$

（2）若令圆环水平地上下振动，当和平衡位置有任一小位移 Δh 时，上圆环所受回复力

$$F_{回} = -mg + \frac{3\mu_0 I r^3 \cdot I \cdot 2\pi r}{4(2h - 2\Delta h)^4} = -\frac{3\pi\mu_0 I^2 r^4}{8h^5}\Delta h \propto \Delta h$$

表明环在竖直方向做简谐运动，运动周期

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

9 导体棒Ⅱ运动，回路中有感应电流，两棒受到安培力作用，导体棒Ⅱ做减速运动，导体棒Ⅰ从静止开始做加速运动，导体棒Ⅰ、Ⅱ的速度分别用 v_1、v_2 表示，只要 $v_2 > v_1$，两根导体之间距离便增大，当两者速度相等时，两者间距最大，回路中电流为零，两导体棒以共同速度 v 运动，两根导体之间距离增量 x 取得最大。两导体棒在任一时刻受到的安培力大小相等、方向相反，两棒构成的系统动量守恒，则 $mv_0 = 2mv$，得 $v = \frac{v_0}{2}$，考察过程中某一极小的时间间隔 Δt，两导体棒之间距离增加

$$\Delta x = (v_2 - v_1)\Delta t$$

t 时刻，导体棒Ⅰ的加速度为

$$a = \frac{Bil}{m} = \frac{(BL)^2(v_2 - v_1)}{2mR}$$

$$\Delta x = \frac{2mRa\Delta t}{(BL)^2} = \frac{2mR}{(BL)^2}\Delta v_1$$

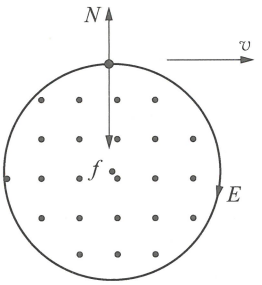
全过程两导体棒间距增量

$$x = \sum \Delta x = \frac{2mR}{(BL)^2}\sum \Delta v_1$$

而 v_1 从 0 变化到 $\frac{v_0}{2}$，所以有

$$x=\frac{2mR}{(BL)^2}\cdot\frac{v_0}{2}=\frac{mRv_0}{B^2L^2}$$

10 如答图所示，在轨道法线方向，珠子受到洛伦兹力和轨道对它的支持力的作用。洛伦兹力大小为 $f=qBv$，而均匀变化的磁场产生恒定的感应电场，在 $0<t<T$ 时间内，场强的大小为



第 10 题答图

$$E=\frac{\pi r^2\dfrac{\Delta B}{\Delta t}}{2\pi r}=\frac{rB_0}{2T}$$

$t\geqslant T$ 时，磁场稳定不变，不存在感应电场。

(1) $0<t<T$ 时，感应电场恒定，珠子在切线方向上受到大小恒定的电场力作用，切向加速度大小恒定，t 时刻珠子的线速度为

$$v=at=\frac{qE}{m}t=\frac{rB_0qt}{2mT}$$

t 时刻珠子受到的洛伦兹力大小为

$$f=qBv=q\cdot\frac{B_0}{T}t\cdot v=\frac{q^2B_0^2rt^2}{2mT^2}$$

洛伦兹力的方向指向圆心。

珠子所需向心力为 $$F=m\frac{v^2}{r}=\frac{q^2B_0^2rt^2}{4mT^2}$$

显然，$F<f$，所以轨道对珠子有沿半径向外的支持力 N，即

$$N=f-F=\frac{q^2B_0^2rt^2}{4mT^2}$$

珠子对轨道的作用力大小为

$$N'=N=\frac{q^2B_0^2rt^2}{4mT^2}$$

方向沿半径指向圆心。

(2) $t>T$ 时，磁场恒定，感应电场消失，珠子做匀速圆周运动，其速率为 $v=\frac{B_0qr}{2m}$，珠子对轨道的作用力恒定。洛伦兹力大小为

$$f=B_0qv=\frac{B_0^2q^2r}{2m}$$

方向沿半径指向圆心。

珠子所需向心力为 $$F=m\frac{v^2}{r}=\frac{q^2B_0^2r}{4m}$$

轨道对珠子的弹力 $$N=f-F=\frac{q^2B_0^2r}{4m}$$

珠子对轨道的作用力大小为 $$N'=N=\frac{q^2B_0^2r}{4m}$$

方向沿半径指向圆心。

第 16 章　交流电路

1 测电笔内阻很大，通过与之串联的人体上的电流（或加在人体上的电压）在安全范围内；市电为交流电，而电工鞋相当于一电容器，串联在电路中仍允许交流电通过。

2 证明：设有一直流电和一正弦交流电分别通过同样的电阻 R，经时间 T（T 为交流电的周期）产生的热量分别为

$$Q_{直}=I^2RT,\ Q_{交}=\bar{P}T$$

（$\bar{P}$ 为交流电压一个周期内瞬时功率的平均值）

若 $Q_{直}=Q_{交}$ 即 $I^2RT=\bar{P}T$，则

$$I=\sqrt{\frac{\bar{P}}{R}}$$

正弦交流电的瞬时电功率

$$P(t)=i_{(t)}^2R=I_m^2R\sin^2\omega t=I_m^2R\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)$$

$$=\frac{1}{2}I_m^2R-\frac{1}{2}I_m^2R\cos 2\omega t$$

可知 $\frac{1}{2}I_m^2R$ 是不随时间变化的常量，而 $\frac{1}{2}I_m^2R\cos 2\omega t$ 在一个周期内的平均值为零，所以

$$\bar{P}=\frac{1}{2}I_m^2R$$

则 $$I=\sqrt{\frac{\bar{P}}{R}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

3 （1）有中性线时，三个相电压 $U_{AO}=U_{BO}=U_{CO}=220\ \mathrm{V}$，彼此相差为 $\frac{2}{3}\pi$，其瞬时值表达式为

$$u_{AO}=220\sqrt{2}\sin\omega t\ (\mathrm{V})$$

$$u_{BO}=220\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)\ (\mathrm{V})$$

$$u_{CO}=220\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\frac{4}{3}\pi\right)\ (\mathrm{V})$$

三个线电流 i_A、i_B、i_C 为

$$i_A=\frac{u_{AO}}{R_A},\ i_B=\frac{u_{BO}}{R_B},\ i_C=\frac{u_{CO}}{R_C}$$

则有

$$i_A = 10\sqrt{2}\sin\omega t\,(\mathrm{A})$$

$$i_B = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)(\mathrm{A})$$

$$i_C = 8\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right)(\mathrm{A})$$

中性线电流 $i_0 = i_A + i_B + i_C$，得

$$\begin{aligned} i_0 &= 10\sqrt{2}\sin\omega t + 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right) + 8\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\omega t - \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cos\omega t \\ &= 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)(\mathrm{A}) \end{aligned}$$

所以中性线电流为

$$I_0 = 2\ \mathrm{A}$$

(2) 线电压 u_{AB}、u_{BC}、u_{CA} 应振幅相等，其最大值皆为 $380\sqrt{2}$ V，有效值为 380 V，彼此相差为$\frac{2}{3}\pi$。

4 证明：设 $u_1 = U_{\max}\sin\omega t$，经很短时间 Δt 后，电压变为

$$u_2 = U_{\max}\sin\omega(t + \Delta t)$$

电压增量为

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_2 - u_1 = U_{\max}\sin\omega(t + \Delta t) - U_{\max}\sin\omega t \\ &= 2U_{\max}\cos\omega\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2}\Delta t \end{aligned}$$

将上式和差化积，并利用在 $\Delta t \to 0$ 时

$$t + \frac{\Delta t}{2} \to t,\ \sin\frac{\omega}{2}\Delta t \to \frac{\omega}{2}\Delta t$$

可得

$$\Delta u = U_{\max}\omega\,\Delta t\cos\omega t$$

又知，电流 $i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$，对电容器 $\Delta q = C\Delta u$，于是，$i = \frac{C\Delta u}{\Delta t}$，将上式代入后得

$$\begin{aligned} i &= \frac{C\Delta u}{\Delta t} = C\frac{U_{\max}\omega\,\Delta t\cos\omega t}{\Delta t} = \omega C U_{\max}\cos\omega t \\ &= \omega C U\cdot\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

由此可得纯电容的电流相位超前电压相位$\frac{\pi}{2}$，且可得

$$I = \omega C U$$

又因

$$I = \frac{U}{Z_C}$$

故得

$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

5 $\Phi = Ba^2 = B_m a^2 \sin \omega t$，$\mathscr{E} = \dfrac{\Delta \Phi}{\Delta t} = B_m \omega a^2 \cos \omega t$；

$\mathscr{E}_m = B_m \omega a^2$，$I_m = \dfrac{\mathscr{E}_m}{R}$，$R = \dfrac{\rho 4a}{S}$，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$，得 $S = \dfrac{2\rho T I_m}{\pi B_m a}$。

6 氖灯管端的瞬时电压 $u = U\sin \omega t = U\sin(2\pi f t)$，式中 U 为电压的最大值，故 $U = \sqrt{2}U_{有效}$。在半个周期内氖灯发光时间 $\tau = t_2 - t_1$，式中 t_2 为从周期开始时刻起到熄灭前的时间间隔。t_1 为每一周期开始到点燃前的时间间隔。在时间间隔 $t_0 = 10$ min 内，有 $\dfrac{t_0}{\dfrac{T}{2}} = 2ft_0$ 个半周期，因此在 t_0 时间内，氖灯亮的时间为 $\tau_0 = 2ft_0\tau$。

若在 u 的方程中用 $U_{有效}$ 表示 U，可得 $u = U_{有效}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$，式中除 t 外均已知，故可由它确定 t_1、t_2。

把数值 $u = u_{燃} = u_{熄}$ 代入后，可得

$$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

由此可得$\left(在\ 0\ 到\ \dfrac{T}{2}\ 内\right)$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot t_1 = \frac{\pi}{4},\ t_1 = \frac{1}{8}T$$

$$\frac{2\pi}{T} \cdot t_2 = \frac{3\pi}{4},\ t_2 = \frac{3}{8}T$$

$$\tau = \frac{3}{8}T - \frac{1}{8}T = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{f} = \frac{1}{200}\ \mathrm{s}$$

$$\tau_0 = 2ft_0\tau = 300\ \mathrm{s}$$

7 (1) 通过 R、C 的电流瞬时值分别为

$$i_R = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t$$

$$i_C = \frac{U_m}{\dfrac{1}{\omega C}} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C U_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

因为 $R = \dfrac{1}{\omega C}$，所以电流的有效值为 $I_R = I_C = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{U_m}{R}$。

(2) 电源供给的电流瞬时值为

$$\begin{aligned} i &= i_R + i_C \\ &= \frac{U_m}{R}\left[\sin \omega t + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \sqrt{2}\,\frac{U_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\,I_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{R}$$

(3) i 比 i_R 超前相位 $\frac{\pi}{4}$，i_C 比 i_R 超前相位 $\frac{\pi}{2}$。

8 证明：设三相相电压分别为

AB 相 $$u_1 = U_m \cdot \sin \omega t$$

BC 相 $$u_2 = U_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

CA 相 $$u_3 = U_m \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

对应的电流分别为

$$i_{ab} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t$$

$$i_{bc} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$i_{ca} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

相电流的有效值为 $$I_{相} = I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{U_m}{R}$$

线电流分别为

$$i_A = i_{ab} - i_{ca} = \frac{U_m}{R}\left[\sin \omega t - \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt{3} \frac{U_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{2} I_{相} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2} I_A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

同理可得

$$i_b = i_{bc} - i_{ab}$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{2} I_{相} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2} I_B \cdot \sin\left(\omega t + \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$i_C = i_{ca} - i_{bc}$$

$$= \sqrt{3} \times \sqrt{2} I_{相} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2} I_C \cdot \sin\left(\omega t + \frac{9\pi}{6}\right)$$

所以得 $$I_{线} = I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} I_{相}$$

9 设平行板电容器的电容和线圈的电感分别为 C 和 L，则振荡回路的振荡频率为

$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

设平行板两极板缓慢拉开前后的距离分别为 x_0 和 x，电容器电容分别为 C_0 和 C，有

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 S}{x_0},\ C=\frac{\varepsilon_0 S}{x} \tag{①}$$

根据题给的条件，有

$$f=\eta f_0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{LC}}=\eta\frac{1}{\sqrt{LC_0}}\Rightarrow C_0=\eta^2 C\Rightarrow x=\eta^2 x_0 \tag{②}$$

根据 LC 振荡回路在振荡过程中电磁能量守恒，这个能量可以用振荡中的最大电能表示，初、末态的电磁能量分别表示为 W_i 和 W_f，有

$$W_i=W_0=\frac{Q_0^2}{2C_0},\ W_f=\frac{Q^2}{2C}$$

外力做功表示为

$$A=W_f-W_i=\frac{Q_2}{2C}+\frac{Q_0^2}{2C_0} \tag{③}$$

其中 Q_0 和 Q 分别是初、末态平行板电容器极板上所带电量，且 $Q_0\neq Q$。

将电容器两极板缓慢拉开过程中，在两极板被拉开一个无限小间距 Δx 过程中，认为 LC 振荡回路已发生了很多次振荡。因此，对于一次振荡，可近似认为板间距 x 是一个常量；极板上带电量随时间变化

$$q=q_0\cos\omega t \tag{④}$$

而且可以近似认为 q_0 也是一个常量。

同时认为极板被拉开过程中，板间电场力与外力时时平衡，外力大小等于电场力大小，有

$$F=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}q=\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} \tag{⑤}$$

一次振荡过程中的电磁能（用最大电能表示）为

$$E=\frac{q_0^2}{2C}=\frac{q_0^2 x}{2\varepsilon_0 S} \tag{⑥}$$

利用功能原理，极板被拉开过程中，外力做功等于系统能量的增量，$F\Delta x=\Delta E$，即

$$\frac{q^2}{2\varepsilon_0 S}\Delta x=\frac{1}{2\varepsilon_0 S}\Delta(q_0^2 x) \tag{⑦}$$

因为 q 随时间 t 急速振荡变化。作为近似，在此取 q^2 的时间平均值

$$\overline{q^2}=\frac{1}{T}\sum_0^T q_0^2\cos^2\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}q_0^2 \tag{⑧}$$

将式⑧代入式⑦，得方程

$$\frac{q_0^2}{4\varepsilon_0 S}\Delta x=\frac{1}{2\varepsilon_0 S}\Delta(q_0^2 x)=\frac{1}{2\varepsilon_0 S}(q_0^2\Delta x+2q_0 x\Delta q_0)$$

整理化简得 $$\frac{\Delta x}{x}+4\frac{\Delta q_0}{q_0}=0\Rightarrow\Delta\ln(xq_0^4)=0$$

得 $$x_0Q_0^4=xQ^4 \tag{9}$$

代入式②，得 $$Q_0^4=\eta^2Q^4\Rightarrow Q_0^2=\eta q^2 \tag{10}$$

将式①和式⑩代入式③，便得外力做功

$$A=\frac{Q_0^2}{2C_0}(\eta-1)=W_0(\eta-1)$$

《物理竞赛教程》

畅销 20 余年

荣获 2022 ~ 2023 年度高效能助学品牌图书 TOP 榜

竞赛类　金奖


荣誉证书

HONORARY CREDENTIAL

华东师范大学出版社：

在由中国出版传媒商报社发起的“2022~2023 年度高效能助学品牌图书 TOP 榜”推选活动中，贵单位的物理竞赛教程荣获

竞赛类　金奖

中国出版传媒商报

2023 年 8 月

探竞赛物理奥秘，赴物理竞赛之约

融学界名师智慧，摘奥林匹克金牌

《物理竞赛教程》和《物理竞赛能力测试》一起使用效果更佳



王新绍　中学高级教师，华东师大二附中物理竞赛教练，华东师大师范生兼职导师、浦东新区物理学科带头人。曾获省级教学技能大赛特等奖、省级五一劳动奖章、华东师大教学成果奖。所辅导的学生获国际物理奥林匹克金牌 2 枚、亚洲物理奥林匹克金牌 4 枚，22 人入选国家集训队，2025 年有 3 人入选国家队（参加第 55 届国际物理奥林匹克）。



朱天顺　华东师大二附中物理竞赛教练，第 27 届物理竞赛国家集训队成员。长期从事物理竞赛辅导工作。2020 年以来，所辅导的学生获全国物理奥林匹克金牌 2 枚，多人获上海市一等奖，1 人入选清华大学“物理专业攀登计划”，1 人入选北京大学“物理学科卓越人才培养计划”。

物理竞赛教程（第七版）　初中第一分册　/ 张继达
物理竞赛教程（第七版）　初中第二分册　/ 陈　檬
物理竞赛教程（第七版）　高中第一分册　/ 黄洪才　旷　星
物理竞赛教程（第七版）　高中第二分册　/ 王新绍　朱天顺
物理竞赛教程（第七版）　高中第三分册　/ 张大同　应轶群

物理竞赛能力测试　初中第一分册　/ 张继达　何　静
物理竞赛能力测试　初中第二分册　/ 陈　檬
物理竞赛能力测试　高中第一分册　/ 旷　星　黄洪才
物理竞赛能力测试　高中第二分册　/ 王新绍　朱天顺
物理竞赛能力测试　高中第三分册　/ 应轶群　张大同

华师教辅 ECNUP

出版社公众号

天猫旗舰店

ISBN 978-7-5760-5789-8
9 787576 057898
定价：62.00 元
www.ecnupress.com.cn