第 42 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题解答与评分标准

一. （45 分）

（1）电偶极矩 $\boldsymbol{p}_1$ 在位置 $\boldsymbol{r}$ 处产生的电场为

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}-\boldsymbol{p}_1 r^2}{r^5} \tag{①}$$

代入分子 A 的电偶极矩 $\boldsymbol{p}_1=p\boldsymbol{e}_y$ 和分子 B 的位置 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y$，得分子 A 在分子 B 处产生的电场强度

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3bx\boldsymbol{e}_x+(2b^2-x^2)\boldsymbol{e}_y}{(x^2+b^2)^{5/2}} \tag{②}$$

（2）电偶极矩为 $\boldsymbol{p}_2=p\sin\theta\boldsymbol{e}_x+p\cos\theta\boldsymbol{e}_y$ 的极性分子 B 在分子 A 的电场 $\boldsymbol{E}_1$ 中的电势能

$$W=-\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{E}_1=-\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3bx\sin\theta+(2b^2-x^2)\cos\theta}{(x^2+b^2)^{5/2}} \tag{③}$$

因此分子 B 受到的电场力沿 x 方向的分量

$$F_x(x,\theta)=-\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}\right)_{\theta\text{不变}}=\frac{3p^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b(b^2-4x^2)\sin\theta+x(x^2-4b^2)\cos\theta}{(x^2+b^2)^{7/2}} \tag{④}$$

其受到的绕绝缘轴的力矩

$$M(x,\theta)=-\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\right)_{x\text{不变}}=\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3bx\cos\theta-(2b^2-x^2)\sin\theta}{(x^2+b^2)^{5/2}} \tag{⑤}$$

平衡时要求

$$\begin{cases}F_x(x,\theta)=0\\M(x,\theta)=0\end{cases} \tag{⑥}$$

即

$$\begin{cases}b(b^2-4x^2)\sin\theta+x(x^2-4b^2)\cos\theta=0\\3bx\cos\theta-(2b^2-x^2)\sin\theta=0\end{cases} \tag{⑦}$$

解得

$$\begin{cases}x=0\\\theta=0\end{cases}\text{，或}\begin{cases}x=0\\\theta=\pi\end{cases} \tag{⑧}$$

静止条件：分子 B 位于 $x=0$ 的位置，且其电偶极矩 $\boldsymbol{p}_2$ 指向 z 轴正方向或负方向。

（3）根据题意，对于平衡位置 $\begin{cases}x=0\\\theta=0\end{cases}$，考虑小扰动，即 x、θ 均为小量。

根据质心运动定理，将④式保留至小量的一阶项得

$$F_x(x,\theta)\approx\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 b^5}3(\theta b-4x)=m\ddot{x} \tag{⑨}$$

根据绕绝缘轴的转动定理，将⑤式保留至小量的一阶项得

$$M(x,\theta)\approx\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 b^4}(3x-2b\theta)=I\ddot{\theta} \tag{⑩}$$

代入 $I=\frac{1}{12}mb^2$，令 $\omega_0^2=\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 b^5 m}$，可得线性微分方程组

$$\begin{cases}\omega_0^2(-12x+3\theta b)=\ddot{x}\\ \omega_0^2(3x-2\theta b)=\dfrac{1}{12}\ddot{\theta}b\end{cases} \tag{11}$$

考虑简正模式，即 $x(t)$ 、 $\theta(t)$ 以相同的角频率同步振动，设 $\begin{cases}x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)\\ \theta(t)b=B\cos(\omega t+\varphi)\end{cases}$ ，代入⑪式得

$$\begin{cases}(-12+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})A+3B=0\\ 3A+(-2+\dfrac{1}{12}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})B=0\end{cases} \tag{12}$$

关于 A、B 的齐次方程组存在非零解的条件为

$$\det\begin{pmatrix}-12+\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} & 3\\ 3 & -2+\dfrac{1}{12}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\end{pmatrix}=(-12+\frac{\omega^2}{\omega_0^2})(-2+\frac{1}{12}\frac{\omega^2}{\omega_0^2})-9=0 \tag{13}$$

解得简正频率

$$\begin{cases}\omega_1=\sqrt{6}\omega_0=\sqrt{\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}\\ \omega_2=\sqrt{30}\omega_0=\sqrt{\dfrac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}\end{cases} \tag{14}$$

此时方程组⑪式的解为

$$\begin{cases}x(t)=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \theta(t)b=B_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases} \tag{15}$$

对于 $\omega_1=\sqrt{6}\omega_0$ ，代入⑫式可得

$$B_1=2A_1 \tag{16}$$

对于 $\omega_2=\sqrt{30}\omega_0$ ，代入⑫式可得

$$B_2=-6A_2 \tag{17}$$

从而给出完整解

$$\begin{cases}x(t)=A_1\cos\left(\sqrt{\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t+\varphi_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\dfrac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t+\varphi_2\right)\\ \theta(t)=\dfrac{2A_1}{b}\cos\left(\sqrt{\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t+\varphi_1\right)-\dfrac{6A_2}{b}\cos\left(\sqrt{\dfrac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t+\varphi_2\right)\end{cases} \tag{18}$$

其中 A_1 、 φ_1 、 A_2 、 φ_2 可由初始条件确定。

⑱式表明在平衡位置 $\begin{cases}x=0\\ \theta=0\end{cases}$ 附近，分子 B 在小扰动下的运动为简谐振动的叠加，即此平衡位置为

稳定平衡位置 *

（4）根据初始条件

$$\begin{cases} x(0)=a, \ \dot{x}(0)=0 \\ \theta(0)=0, \ \dot{\theta}(0)=0 \end{cases} \tag{19}$$

可得

$$\begin{cases} A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2=a, \quad A_1\sin\varphi_1+A_2\sqrt{5}\sin\varphi_2=0 \\ 2A_1\cos\varphi_1-6A_2\cos\varphi_2=0, \ 2A_1\sin\varphi_1-6A_2\sqrt{5}\sin\varphi_2=0 \end{cases} \tag{20}$$

解得

$$\begin{cases} A_1=\dfrac{3}{4}a, \ \varphi_1=0 \\ A_2=\dfrac{1}{4}a, \ \varphi_2=0 \end{cases} \tag{21}$$

代入⑱式可得

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{3}{4}a\cos\left(\sqrt{\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right)+\dfrac{1}{4}a\cos\left(\sqrt{\dfrac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) \\ \theta(t)=\dfrac{3}{2}\dfrac{a}{b}\cos\left(\sqrt{\dfrac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right)-\dfrac{3}{2}\dfrac{a}{b}\cos\left(\sqrt{\dfrac{15p^2}{2\pi\varepsilon_0 b^5 m}}t\right) \end{cases} \tag{22}$$

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 5 分，①式 2 分，②式 3 分；

第（2）问 10 分，③④⑤⑦⑧式各 2 分；

第（3）问 20 分，⑨⑩⑫⑬式各 2 分，⑯⑰式各 1 分，⑭⑱式各 4 分，*2 分；

第（4）问 10 分，⑳㉑式各 4 分，㉒式 2 分。

二. （45 分）

（1）质量线密度为 ρ、张力为 τ 的均匀弦线中的波速和波矢分别为 $v=\sqrt{\dfrac{\tau}{\rho}}$、$k=\dfrac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\dfrac{\rho}{\tau}}$。

简谐波的方程为

$$y(x,t)=A\cos(kx-\omega t) \tag{1}$$

任意 t 时刻、在 x 处 $\mathrm{d}x$ 长度弦线具有的动能

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}(x,t)=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{2}$$

所以单位长度弦线具有的动能

$$\varepsilon_{\mathrm{k}}(x,t)=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right) \tag{3}$$

$\mathrm{d}x$ 长度（原始长度）弦线储存的弹性势能

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{p}}(x,t)=\tau(\mathrm{d}s-\mathrm{d}x)=\tau\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x\approx\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{4}$$

所以单位长度弦线的弹性势能

$$\varepsilon_{\mathrm{p}}(x,t)=\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right)=\varepsilon_{\mathrm{k}}(x,t) \tag{5}$$

质元的动能和势能同步变化。单位长度弦线的机械能

$$\varepsilon(x,t)=\varepsilon_{\mathrm{k}}(x,t)+\varepsilon_{\mathrm{p}}(x,t)=\rho\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right) \qquad ⑥$$

单位时间传过 x 处截面的机械能（即瞬时能流）

$$I(x,t)=\frac{\varepsilon(x,t)v\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=\varepsilon(x,t)v=\sqrt{\rho\tau}\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right) \qquad ⑦$$

[解法二：

任意 t 时刻、在 x 处弦线左侧对右侧做功的功率

$$P(x,t)=-\tau\sin\theta\frac{\partial y}{\partial t}\approx-\tau\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}=\sqrt{\rho\tau}\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right) \qquad ⑥'$$

单位时间传过 x 处截面的机械能（即瞬时能流）

$$I(x,t)=P(x,t)=\sqrt{\rho\tau}\omega^2A^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right) \qquad ⑦'$$

]

其时间平均值（即平均能流）

$$\bar{I}=\sqrt{\rho\tau}\omega^2A^2\overline{\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{\tau}}x-\omega t\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\rho\tau}\omega^2A^2 \qquad ⑧$$

（2）

（2.1）弦线 1 中和弦线 2 中的波可分别表示为

$$\tilde{y}(x<0,t)=\tilde{A}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x-\omega t)}+\tilde{B}_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_1x-\omega t)},\quad k_1=\frac{\omega}{v_1}=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}} \qquad ⑨\text{-}1$$

$$\tilde{y}(x>0,t)=\tilde{A}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2x-\omega t)}+\tilde{B}_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-k_2x-\omega t)},\quad k_2=\frac{\omega}{v_2}=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} \qquad ⑨\text{-}2$$

其中 $\tilde{A}_1$、$\tilde{B}_1$ 分别为两列波在 $x=0^-$ 处的复振幅，$\tilde{A}_2$、$\tilde{B}_2$ 分别为两列波在 $x=0^+$ 处的复振幅。

在分界面 $x=0$ 处质元位移连续

$$\tilde{y}(0^-,t)=\tilde{y}(0^+,t) \qquad ⑩$$

所以

$$\tilde{A}_1+\tilde{B}_1=\tilde{A}_2+\tilde{B}_2 \qquad ⑩'$$

分界面在 y 方向上受力应平衡

$$\tau_1\sin\theta_1=\tau_2\sin\theta_2,\ \text{即}\ \tau_1\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}(0^-,t)=\tau_2\frac{\partial\tilde{y}}{\partial x}(0^+,t) \qquad ⑪$$

所以

$$\tau_1k_1(\tilde{A}_1-\tilde{B}_1)=\tau_2k_2(\tilde{A}_2-\tilde{B}_2),\ \text{即}\ \sqrt{\rho_1\tau_1}(\tilde{A}_1-\tilde{B}_1)=\sqrt{\rho_2\tau_2}(\tilde{A}_2-\tilde{B}_2) \qquad ⑪'$$

由以上两个边界条件⑩′⑪′式可解得

$$\begin{cases}\tilde{A}_2=\dfrac{1}{2}(1+Z_{12})\tilde{A}_1+\dfrac{1}{2}(1-Z_{12})\tilde{B}_1\\ \tilde{B}_2=\dfrac{1}{2}(1-Z_{12})\tilde{A}_1+\dfrac{1}{2}(1+Z_{12})\tilde{B}_1\end{cases},\ \text{即}\begin{pmatrix}\tilde{A}_2\\ \tilde{B}_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+Z_{12} & 1-Z_{12}\\ 1-Z_{12} & 1+Z_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix} \qquad ⑫$$

其中 $Z_{12}=\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}=\dfrac{Z_1}{Z_2}$（即相对阻抗），系统从 $x=0^-$ 到 $x=0^+$ 的传输矩阵

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{12}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+Z_{12} & 1-Z_{12}\\ 1-Z_{12} & 1+Z_{12}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}} & 1-\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\\ 1-\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}} & 1+\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\end{pmatrix} \tag{13}$$

（2.2）设入射波和反射波在 $x=0^-$ 处的复振幅分别为 $\tilde{A}_{\mathrm{i}}$ 和 $\tilde{A}_{\mathrm{r}}$，透射波在 $x=0^+$ 处的复振幅为 $\tilde{A}_{\mathrm{t}}$，由传输矩阵可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\\ 0\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{i}}\\ \tilde{A}_{\mathrm{r}}\end{pmatrix}，\ 或\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{i}}\\ \tilde{A}_{\mathrm{r}}\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{12}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\\ 0\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{21}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\\ 0\end{pmatrix} \tag{14}$$

由此可得

$$\tilde{A}_{\mathrm{i}}=(\hat{\boldsymbol{M}}_{21})_{11}\tilde{A}_{\mathrm{t}}=\frac{1+Z_{21}}{2}\tilde{A}_{\mathrm{t}}，\ 即\ \frac{\tilde{A}_{\mathrm{t}}}{\tilde{A}_{\mathrm{i}}}=\frac{2}{1+Z_{21}}=\frac{2}{1+\sqrt{\dfrac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}} \tag{15}$$

（注意到只用到矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}_{21}$ 的左上角矩阵元）

透射率 T 即在 $x=0^+$ 处透射波的平均能流 $\overline{I}_{\mathrm{t}}$ 与在 $x=0^-$ 处入射波的平均能流 $\overline{I}_{\mathrm{i}}$ 之比

$$T=\frac{\overline{I}_{\mathrm{t}}}{\overline{I}_{\mathrm{i}}}=\frac{\dfrac{1}{2}\sqrt{\rho_2\tau_2}\omega^2|\tilde{A}_{\mathrm{t}}|^2}{\dfrac{1}{2}\sqrt{\rho_1\tau_1}\omega^2|\tilde{A}_{\mathrm{i}}|^2}=\sqrt{\frac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{\rho_2\tau_2/\rho_1\tau_1}}\right)^2=\frac{4\sqrt{\rho_1\tau_1\rho_2\tau_2}}{(\sqrt{\rho_1\tau_1}+\sqrt{\rho_2\tau_2})^2} \tag{16}$$

（3）

（3.1）在弦线 1 中从 $x=0^+$ 到 $x=a^-$ 的传输矩阵

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{1a}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1a} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1a}\end{pmatrix}\quad（k_1=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}）\tag{17}$$

系统从 $x=0^-$ 到 $x=a^+$ 的传输矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{M}}_{212}=\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\hat{\boldsymbol{M}}_{1a}\hat{\boldsymbol{M}}_{21}&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+Z_{12} & 1-Z_{12}\\ 1-Z_{12} & 1+Z_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1a} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1a}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+Z_{21} & 1-Z_{21}\\ 1-Z_{21} & 1+Z_{21}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos(k_1a)+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a) & -\mathrm{i}\dfrac{1}{2}(Z_{21}-Z_{12})\sin(k_1a)\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{2}(Z_{21}-Z_{12})\sin(k_1a) & \cos k_1a-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $Z_{12}=\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}=\dfrac{1}{Z_{21}}$，$k_1=\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}$，即

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{212}=\begin{pmatrix}\cos\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)+\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}+\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)\sin\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right) & -\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}-\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)\sin\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\\ \mathrm{i}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}-\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)\sin\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right) & \cos\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}+\sqrt{\dfrac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)\sin\left(\omega\sqrt{\dfrac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\end{pmatrix} \tag{18′}$$

（3.2）在弦线 2 中从 $x=a^{+}$ 到 $x=(a+b)^{-}$ 的传输矩阵

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{2b}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 b} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 b}\end{pmatrix}\qquad（k_2=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}）\tag{17′}$$

系统从 $x=0^{-}$ 到 $x=(2a+b)^{+}$ 的传输矩阵

$$\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}=\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\hat{\boldsymbol{M}}_{1a}\hat{\boldsymbol{M}}_{21}\hat{\boldsymbol{M}}_{2b}\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\hat{\boldsymbol{M}}_{1a}\hat{\boldsymbol{M}}_{21}=\hat{\boldsymbol{M}}_{212}\hat{\boldsymbol{M}}_{2b}\hat{\boldsymbol{M}}_{212}\tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}$ 左上角的矩阵元为

$$(\hat{\boldsymbol{M}}_{21212})_{11}=\left[\cos(k_1a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\right]^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b}+\frac{1}{4}(Z_{21}-Z_{12})^2\sin^2(k_1a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b}\tag{20}$$

设入射波和反射波在 $x=0^{-}$ 处的复振幅分别为 $\tilde{A}_{\mathrm{i}}$ 和 $\tilde{A}_{\mathrm{r}}$，透射波在 $x=(2a+b)^{+}$ 处的复振幅为 $\tilde{A}_{\mathrm{t}}$，由传输矩阵⑲式可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\\ 0\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{i}}\\ \tilde{A}_{\mathrm{r}}\end{pmatrix}，\ 或\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{i}}\\ \tilde{A}_{\mathrm{r}}\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\\ 0\end{pmatrix}\tag{21}$$

其中矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}^{-1}$ 只需将矩阵 $\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}$ 中的 a 替换为 $-a$、b 替换为 $-b$ 即可得到，由此可得

$$\tilde{A}_{\mathrm{i}}=(\hat{\boldsymbol{M}}_{21212}^{-1})_{11}\tilde{A}_{\mathrm{t}}=\left\{\left[\cos(k_1a)-\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\right]^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b}+\frac{1}{4}(Z_{21}-Z_{12})^2\sin^2(k_1a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b}\right\}\tilde{A}_{\mathrm{t}}\tag{22}$$

其中 $Z_{12}=\sqrt{\frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}=\frac{1}{Z_{21}}$，$k_1=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}$，$k_2=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}$。所以系统的透射系数

$$\tilde{t}=\frac{1}{\left[\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)-\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}+\sqrt{\frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\right]^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\rho_2\tau_2}{\rho_1\tau_1}}-\sqrt{\frac{\rho_1\tau_1}{\rho_2\tau_2}}\right)^2\sin^2\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b}}\tag{23}$$

（4）

（4.1）根据布洛赫定理

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x+d,t)&=\tilde{u}_K(x+d)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(K(x+d)-\omega t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}\tilde{u}_K(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Kx-\omega t)}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}\tilde{y}(x,t)\end{aligned}\tag{24}$$

即空间中相隔一个空间周期 d 的振动只相差一个相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}$。

弦线中同时存在沿 x 轴正方向和负方向传播的简谐波，在 $x=0^{-}$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_1$、$\tilde{B}_1$，在 $x=d^{-}$ 处的复振幅分别记为 $\tilde{A}_2$、$\tilde{B}_2$，根据布洛赫定理即㉔式可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{A}_2\\ \tilde{B}_2\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix}\tag{25}$$

对于此一维声子晶体，从 $x=0^{-}$ 到 $x=d^{-}$ 的传输矩阵

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{T}}&=\hat{\boldsymbol{M}}_{2b}\hat{\boldsymbol{M}}_{12}\hat{\boldsymbol{M}}_{1a}\hat{\boldsymbol{M}}_{21}=\hat{\boldsymbol{M}}_{2b}\hat{\boldsymbol{M}}_{212}\\&=\begin{pmatrix}\left[\cos(k_1a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b} & -\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}-Z_{12})\sin(k_1a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2b}\\ \mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}-Z_{12})\sin(k_1a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b} & \left[\cos(k_1a)-\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12}\\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

㉖

由此可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{A}_2\\ \tilde{B}_2\end{pmatrix}=\hat{\boldsymbol{T}}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{T}_{11} & \tilde{T}_{12}\\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix} \tag{27}$$

由㉕㉗式可得

$$\begin{pmatrix}\tilde{T}_{11}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd} & \tilde{T}_{12}\\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{A}_1\\ \tilde{B}_1\end{pmatrix}=0 \tag{28}$$

上述关于 $\tilde{A}_1$、$\tilde{B}_1$ 的齐次方程组有非零解的条件是系数行列式为 0，即

$$\det\begin{pmatrix}\tilde{T}_{11}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd} & \tilde{T}_{12}\\ \tilde{T}_{21} & \tilde{T}_{22}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}\end{pmatrix}=(\tilde{T}_{11}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd})(\tilde{T}_{22}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd})-\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21}=0 \tag{29}$$

解得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kd}=\frac{1}{2}[\tilde{T}_{11}+\tilde{T}_{22}\pm\sqrt{(\tilde{T}_{11}+\tilde{T}_{22})^2-4(\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22}-\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21})}] \tag{30}$$

注意到 $\tilde{T}_{11}=\tilde{T}_{22}^*$、$\tilde{T}_{12}=\tilde{T}_{21}^*$、$\tilde{T}_{11}\tilde{T}_{22}-\tilde{T}_{12}\tilde{T}_{21}=1$，可解得

$$\begin{aligned}\cos(Kd)&=\frac{\tilde{T}_{11}+\tilde{T}_{22}}{2}=\mathrm{Re}\left[[\cos(k_1a)+\mathrm{i}\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)][\cos(k_2b)+\mathrm{i}\sin(k_2b)]\right]\\&=\cos(k_1a)\cos(k_2b)-\frac{1}{2}(Z_{21}+Z_{12})\sin(k_1a)\sin(k_2b)\end{aligned} \tag{31}$$

即角频率 ω 与布洛赫波矢 K 满足的关系（色散关系）为

$$\cos(Kd)=\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b\right)-\frac{\rho_1\tau_1+\rho_2\tau_2}{2\sqrt{\rho_1\tau_1\rho_2\tau_2}}\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b\right) \tag{31′}$$

对于此一维声子晶体角频率最低的一个通带，当 $K\to0$ 时 $\omega\to0^+$，色散关系㉛′式可展开为

$$1-\frac{1}{2}(Kd)^2=\left[1-\frac{1}{2}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)^2\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b\right)^2\right]-\frac{\rho_1\tau_1+\rho_2\tau_2}{2\sqrt{\rho_1\tau_1\rho_2\tau_2}}\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}}a\right)\left(\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b\right) \tag{32}$$

即

$$|K|d=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}a^2+\frac{\rho_2}{\tau_2}b^2+\frac{\rho_1\tau_1+\rho_2\tau_2}{\tau_1\tau_2}ab} \tag{33}$$

波的相速度

$$v_{\mathrm{p}}(K\to0)=\frac{\omega}{|K|}=\frac{d}{\sqrt{\frac{\rho_1}{\tau_1}a^2+\frac{\rho_2}{\tau_2}b^2+\frac{\rho_1\tau_1+\rho_2\tau_2}{\tau_1\tau_2}ab}} \tag{34}$$

（4.2）当 $|\cos(Kd)|\le1$ 时，布洛赫波矢 K 为实数，对应一维声子晶体的“通带”；当 $|\cos(Kd)|>1$ 时对应一维声子晶体的“禁带”。记 $\alpha=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b$，由㉛′式和题目条件，“禁带”满足

$$\left|\cos2\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})\sin2\alpha\sin\alpha\right|>1 \tag{35}$$

或表示为

$$\cos2\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})\sin2\alpha\sin\alpha>1 \tag{35′-1}$$

$$\text{和}\ \cos 2\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}(2+\frac{1}{2})\sin 2\alpha\sin\alpha<-1 \qquad ㉟'\text{-}2$$

解得

$$\arccos\frac{2}{3}+n\pi<\alpha<\arccos\frac{1}{3}+n\pi \qquad ㊱\text{-}1$$

$$\text{和}\ \arccos(-\frac{1}{3})+n\pi<\alpha<\arccos(-\frac{2}{3})+n\pi \qquad ㊱\text{-}2$$

（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）

对应 ω 的范围为

$$\left[\arccos\frac{2}{3}+n\pi\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}<\omega<\left[\arccos\frac{1}{3}+n\pi\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \qquad ㊲\text{-}1$$

$$\text{和}\left[\arccos(-\frac{1}{3})+n\pi\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}<\omega<\left[\arccos(-\frac{2}{3})+n\pi\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \qquad ㊲\text{-}2$$

（$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）

各“禁带”的角频率宽度均为

$$\begin{aligned}\Delta\omega&=\left[\arccos\frac{1}{3}-\arccos\frac{2}{3}\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}=\left[\arccos(-\frac{2}{3})-\arccos(-\frac{1}{3})\right]\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}\\&=0.39\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}\end{aligned} \qquad ㊳$$

（4.3）对于第（4.3）问中的一维声子晶体角频率最低的一个通带，$K_0=\dfrac{\pi}{d}$ 时

$$\omega_0=\left(\arccos\frac{2}{3}\right)\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}}=0.84\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho_2}} \qquad ㊴$$

取 $K=K_0+\delta K$，$\omega=\omega_0+\delta\omega$，色散关系㉛′式可展开为

$$-1+\frac{1}{2}d^2(\delta K)^2=-1-\frac{5\sqrt{5}}{6}\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}b(\delta\omega)\text{，即}\ \delta\omega=\frac{(\delta K)^2}{2\left(-\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\dfrac{b}{d^2}\sqrt{\dfrac{\rho_2}{\tau_2}}\right)} \qquad ㊵$$

与 $\delta\varepsilon=\hbar\delta\omega=\dfrac{(\hbar\delta K)^2}{2m^*}$ 比较，并注意到 $d=a+b=3b$，可得此时声子的有效质量

$$m^*=-\frac{5\sqrt{5}/6}{9}\frac{\hbar}{b}\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}}=-\frac{5\sqrt{5}}{54}\frac{\hbar}{b}\sqrt{\frac{\rho_2}{\tau_2}} \qquad ㊶$$

评分标准：本题 45 分

第（1）问 4 分，③⑤⑦（或⑦′）⑧式各 1 分；

第（2）问 9 分，

（2.1）问 5 分，⑩′式 1 分，⑪′⑬式各 2 分；

（2.2）问 4 分，⑮式 1 分，⑯式 3 分；

第（3）问 12 分，

（3.1）问 5 分，⑰式 1 分，⑱′式 4 分；

（3.2）问 7 分，⑲式 1 分，⑳㉒㉓式各 2 分；

第（4）问 20 分，

（4.1）问 9 分，㉔式 1 分，㉖式 2 分，㉙㉛′1 分，㉝㉞式各 2 分；
（4.2）问 5 分，㉟㊲-1㊲-2 式各 1 分，㊳式 2 分；
（4.3）问 6 分，㊴式 1 分，㊵式 3 分，㊶式 2 分。

三. （45 分）
（1）在相对介电常数为ϵ_r里处于原点的点电荷产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = E(R)\widehat{\boldsymbol{R}} = -\frac{e\boldsymbol{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \tag{①}$$

其中$\widehat{\boldsymbol{R}}$为$\boldsymbol{R}$方向的单位向量。
（2）位于$\boldsymbol{R}$处氦原子的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}$$

由①，电场和$\boldsymbol{R}$平行，电偶极矩可视为位于$\boldsymbol{R}+\frac{d}{2}\widehat{\boldsymbol{R}}$带正电荷$+q$、和位于$\boldsymbol{R}-\frac{d}{2}\widehat{\boldsymbol{R}}$带负电荷$-q$的两个点电荷构成，且$\boldsymbol{p} = qd\widehat{\boldsymbol{R}}$；当电场随位置改变时，这个电偶极矩受力为

$$\boldsymbol{F} = +q\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}+\frac{d}{2}\hat{R}\right) - q\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}-\frac{d}{2}\widehat{\boldsymbol{R}}\right) \tag{②}$$

在$\boldsymbol{R}$处展开，保留到d的一次方项得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \frac{qd}{2}\frac{\mathrm{d}E(R)}{\mathrm{d}R}\widehat{\boldsymbol{R}} - q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \frac{qd}{2}\frac{\mathrm{d}E(R)}{\mathrm{d}R}\widehat{\boldsymbol{R}} \\ &= qd\frac{\mathrm{d}E(R)}{\mathrm{d}R}\hat{R} = \boldsymbol{p}\frac{\mathrm{d}E(R)}{\mathrm{d}R}\end{aligned} \tag{③}$$

由题意以及①，在$\boldsymbol{R}$处氦原子因为电子电场导致的极化为

$$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E} = -\frac{\alpha e\boldsymbol{R}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3} \tag{④}$$

由此在$\boldsymbol{R}$处每个氦原子受力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= -\frac{\alpha eR}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\frac{\mathrm{d}E(R)}{\mathrm{d}R}\widehat{\boldsymbol{R}} = \alpha\frac{-e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^2}(-2)\frac{-e}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R^3}\widehat{\boldsymbol{R}} \\ &= -\frac{2\alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5}\widehat{\boldsymbol{R}}\end{aligned} \tag{⑤}$$

[②③的另一种解法：
位于$\boldsymbol{R}$处氦原子的电偶极矩为$\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{E}$，可以看成是位于$\boldsymbol{R}+\boldsymbol{d}/2$带正电荷$+q$，和位于$\boldsymbol{R}-\boldsymbol{d}/2$带负电荷$-q$的两个点电荷构成，且 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$。当电场随位置改变时，这个电偶极矩受力为

$$\boldsymbol{F} = +q\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}+\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right) - q\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{R}-\frac{\boldsymbol{d}}{2}\right) \tag{②}$$

在$\boldsymbol{R}$处展开，保留到$\boldsymbol{d}$的一次方项得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \frac{q}{2}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{E} - q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) + \frac{q}{2}\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) \\ &= q\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\end{aligned} \tag{③}$$

]
（3）氦原子数密度为$n_0 = \frac{\rho_0}{M}$，则由于电子吸引力导致的单位体积上的作用力大小为

$$p_{\mathrm{p}} = n_0 F = -\frac{2n_0\alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} \tag{⑥}$$

这个力的方向指向原点。平衡时液氦会产生压强差抵消这个作用力，因此

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R} = p_{\mathrm{p}} = -\frac{2n_0\alpha e^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2 R^5} \tag{⑦}$$

积分后可以得距离原点R处的压强$p(R)$满足

$$p(R)-p(\infty)=\frac{n_0\alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2R^4} \tag{⑧}$$

远处压强为p_0，所以

$$p(R)=p_0+\frac{n_0\alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2R^4} \tag{⑨}$$

（4）压强改变导致密度改变，从体模量的定义得

$$B=-V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right)}=\rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{⑩}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}p}{B}=\frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R=-\frac{2n_0\alpha e^2}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2R^5}\mathrm{d}R \tag{⑪}$$

积分得

$$\ln\frac{\rho(R)}{\rho(\infty)}=\frac{n_0\alpha e^2}{2B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2R^4} \tag{⑫}$$

距离电子很远处的密度为ρ_0。电子对液氦密度影响比较小，可以将$\rho(R)$写成$\Delta\rho(R)+\rho_0$，并展开到$\Delta\rho(R)$的一次方项，得到

$$\ln\frac{\rho(R)}{\rho(\infty)}=\ln\frac{\rho(R)}{\rho_0}=\ln\left[1+\frac{\Delta\rho(R)}{\rho_0}\right]=\frac{\Delta\rho(R)}{\rho_0} \tag{⑬}$$

结合⑫和⑬式得

$$\Delta\rho(R)=\frac{n_0\rho_0\alpha e^2}{2B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2R^4} \tag{⑭}$$

（5）利用⑭式，可得气泡半径为r时，被电子吸引过来的所增加的液氦的总质量为

$$\begin{aligned}\Delta M_p&=\int\Delta\rho(R)\mathrm{d}V=4\pi\int_r^\infty\Delta\rho(R)\,R^2\mathrm{d}R\\&=\frac{2\pi n_0\rho_0\alpha e^2}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2}\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}R}{R^2}=\frac{2\pi\alpha e^2n_0\rho_0}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2r}\end{aligned} \tag{⑮}$$

（6）电子零点运动动能为

$$\varepsilon_K=\frac{P^2}{2m_\mathrm{e}}=\frac{\left(\frac{h}{2r}\right)^2}{2m_\mathrm{e}}=\frac{h^2}{8m_\mathrm{e}r^2} \tag{⑯}$$

气泡里电子密度为

$$n=\frac{1}{V}=\frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{3}{4\pi r^3} \tag{⑰}$$

利用气体碰壁产生的压强公式得到电子对气泡壁的压强为

$$p_e=\frac{2}{3}n\varepsilon_K=\frac{2}{3}\frac{\frac{h^2}{8m_\mathrm{e}r^2}}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{h^2}{16\pi m_\mathrm{e}r^5} \tag{⑱}$$

（7）平衡时，电子对气泡壁的压强等于气泡外压强$p(r)$和气泡表面张力导致的压强相等，利用气泡壁张力公式可得

$$p_e=p(r)+\frac{2\sigma}{r} \tag{⑲}$$

结合式⑨和⑱得

$$\frac{h^2}{16\pi m_e r^5}=p_0+\frac{n_0\alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2r^4}+\frac{2\sigma}{r} \qquad ⑳$$

当电子气泡半径$r=1\text{nm}$时，抵抗电子压强的三个贡献分别为：

大气压强：

$$p_0=1\ \text{atm} \qquad ㉑$$

极化导致的压强：

$$p_\text{p}=\frac{n_0\alpha e^2}{2(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2r^4}=\frac{(\epsilon_r-1)e^2}{2\varepsilon_0(4\pi\epsilon_r)^2r^4}=4.58\times10^5\text{N/m}^2\simeq4.58\ \text{atm} \qquad ㉒$$

表面张力的贡献：

$$p_\text{s}=\frac{2\sigma}{r}=7.4\times10^5\text{N/m}^2\simeq7.4\ \text{atm} \qquad ㉓$$

比较三者贡献，可以发现最重要的一项为表面张力。只保留表面张力贡献，可得气泡半径为

$$r=\left(\frac{h^2}{32\pi m_e\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \qquad ㉔-1$$

由㉔-1 式与题给数据得

$$r=1.9\times10^{-9}\ \text{m} \qquad ㉔-2$$

（8）将㉔-1 式代入⑮式，并加上气泡在液氦中运动导致的附加质量得总有效质量

$$m^*=m_\text{e}+\Delta M_p+\Delta M_b\simeq\frac{2\pi\alpha e^2n_0\rho_0}{B(4\pi\epsilon_0\epsilon_r)^2r}+\frac{1}{2}\frac{4\pi r^3}{3}\rho_0 \qquad ㉕$$

将$\epsilon_\text{r}-1\approx\frac{\rho_0}{M\epsilon_0}\alpha$代入㉕式得

$$m^*=\left[\frac{2\pi(\epsilon_r-1)e^2}{B\epsilon_0(4\pi\epsilon_r)^2r}+\frac{2\pi r^3}{3}\right]\rho_0 \qquad ㉖$$

再代入相应物理量后可得总有效质量为

$$\frac{m^*}{m_\text{e}}=1.8\times10^{-24}\ \text{kg}/m_\text{e}=2\times10^6 \qquad ㉗$$

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 2 分，①式 2 分；

第（2）问 4 分，②-⑤式各 1 分；

第（3）问 8 分，⑥-⑨式各 2 分；

第（4）问 10 分，⑩-⑭式各 2 分；

第（5）问 2 分，⑮式 2 分；

第（6）问 6 分，⑯-⑱式各 2 分；

第（7）问 8 分，⑲式 2 分，⑳-㉓式各 1 分，㉔式 2 分；

第（8）问 5 分，㉕式 1 分，㉖㉗式各 2 分。

四. （45 分）

（1）S_1和S_2到质心O的距离分别等于$\frac{m_2R}{m_1+m_2}$和$\frac{m_1R}{m_1+m_2}$，它们之间的万有引力提供了向心力。利用牛顿第二定律可得

$$m_1\omega^2\frac{m_2R}{m_1+m_2}=\frac{Gm_1m_2}{R^2},\qquad m_2\omega^2\frac{m_1R}{m_1+m_2}=\frac{Gm_1m_2}{R^2} \qquad ①$$

由此得

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R^3}} \qquad ②$$

[解法二：

m_1相对于m_2做半径为R的圆周运动，应用两体的相对运动方程得

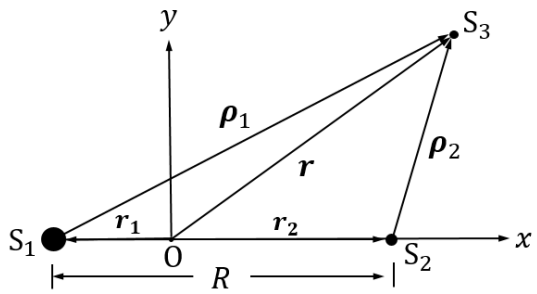
$$\mu\omega^2R=\frac{Gm_1m_2}{R^2},\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \qquad ①'$$

同样可得到

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{R^3}} \qquad ②'$$

]

（2）如题解图 4a 所示，以质心O为坐标原点建立与S_1和S_2一起以角速度ω匀速旋转的非惯性坐标系，以从S_1到S_2的连线为x轴，角速度ω的方向为z轴，x-y平面为S_1和S_2的轨道平面。S_1和S_2相对于O的矢径记为$\boldsymbol{r}_1$和$\boldsymbol{r}_2$，小天体S_3的天体相对O的矢径记为$\boldsymbol{r}$，相对S_1和S_2的矢径分别记为$\boldsymbol{\rho}_1$和$\boldsymbol{\rho}_2$，则有



题解图 4a

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_z, \qquad \boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{r}_1=-\alpha R\boldsymbol{e}_x,\quad \boldsymbol{r}_2=\beta R\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{\rho}_1(t)=[x(t)+\alpha R]\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z\\ \boldsymbol{\rho}_2(t)=[x(t)-\beta R]\boldsymbol{e}_x+y(t)\boldsymbol{e}_y+z(t)\boldsymbol{e}_z\end{cases} \qquad ③$$

这里$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$分别是沿着x轴、y轴、z轴的单位向量。S_1和S_2对S_3的万有引力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$分别为

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_1=-\dfrac{Gm_1m_3}{\rho_1^2}\dfrac{\boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1}=-\dfrac{Gm_1m_3}{[(x+\alpha R)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\left[(x+\alpha R)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z\right]\\ \boldsymbol{F}_2=-\dfrac{Gm_2m_3}{\rho_2^2}\dfrac{\boldsymbol{\rho}_2}{\rho_2}=-\dfrac{Gm_2m_3}{[(x-\beta R)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}\left[(x-\beta R)\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z\right]\end{cases} \qquad ④$$

除了万有引力之外，还需要考虑惯性离心力$\boldsymbol{f}_c$和科里奥利力$\boldsymbol{f}_{cor}$，

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_c=-m_3\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=-m_3[(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\omega}-\omega^2\boldsymbol{r}]=m_3\omega^2\left[x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y\right]\\ \boldsymbol{f}_{cor}=-2m_3\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}=-2m_3\omega\boldsymbol{e}_z\times\left(\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{y}\boldsymbol{e}_y+\dot{z}\boldsymbol{e}_z\right)=2m_3\omega\left(-\dot{x}\boldsymbol{e}_y+\dot{y}\boldsymbol{e}_x\right)\end{cases} \qquad ⑤$$

小天体S_3在转动参考系中的运动方程为

$$m_3\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{f}_c+\boldsymbol{f}_{cor}=-\frac{Gm_1m_3}{\rho_1^2}\frac{\boldsymbol{\rho}_1}{\rho_1}-\frac{Gm_2m_3}{\rho_2^2}\frac{\boldsymbol{\rho}_2}{\rho_2}-m_3\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})-2m_3\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}} \qquad ⑥$$

将以上运动方程投影到x轴、y轴和z轴方向，并消去公因子可得

$$\begin{cases}\ddot{x}=-\dfrac{Gm_1(x+\alpha R)}{\rho_1^3}-\dfrac{Gm_2(x-\beta R)}{\rho_2^3}+\omega^2x+2\omega\dot{y}\\ \ddot{y}=-\dfrac{Gm_1y}{\rho_1^3}-\dfrac{Gm_2y}{\rho_2^3}+\omega^2y-2\omega\dot{x}\\ \ddot{z}=-\dfrac{Gm_1z}{\rho_1^3}-\dfrac{Gm_2z}{\rho_2^3}\end{cases} \qquad ⑦$$

当S_3处于拉格朗日点时，它相对S_1和S_2静止，故在转动参考系中满足

$$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0$$

所以拉格朗日点的位置(x, y, z)由以下方程确定

$$\begin{cases}\dfrac{Gm_1(x+\alpha R)}{\rho_1^3}+\dfrac{Gm_2(x-\beta R)}{\rho_2^3}-\omega^2 x=0\\ \left(\dfrac{Gm_1}{\rho_1^3}+\dfrac{Gm_2}{\rho_2^3}-\omega^2\right)\omega y=0\\ \left(\dfrac{Gm_1}{\rho_1^3}+\dfrac{Gm_2}{\rho_2^3}\right)z=0\end{cases} \quad ⑧$$

上面第三个方程的解为

$$z=0 \quad ⑨$$

所以拉格朗日点一定在$x-y$平面内。同理，由y方向的运动方程可解得

$y=0$　或者

$$\frac{Gm_1}{\rho_1^3}+\frac{Gm_2}{\rho_2^3}-\omega^2=0 \quad ⑩$$

当$y=0$时，拉格朗日点落在x轴上，由x方向的运动方程决定，即

$$\frac{Gm_1(x+\alpha R)}{|x+\alpha R|^3}+\frac{Gm_2(x-\beta R)}{|x-\beta R|^3}-\omega^2 x=0 \quad ⑪$$

令$x=R(u+\beta)$，这里Ru是度量了S_3到S_2的距离，则有

$$x+\alpha R=(1+u)R,\ \ x-\beta R=uR$$

并利用

$$Gm_1=\beta G(m_1+m_2)=\beta\omega^2R^3,\qquad Gm_2=\alpha G(m_1+m_2)=\alpha\omega^2R^3$$

可将x方向的运动方程可化简为

$$\frac{s_1\beta}{(1+u)^2}+\frac{s_0\alpha}{u^2}-(u+\beta)=0$$

这里$s_0=\mathrm{sign}(u),\ s_1=\mathrm{sign}(1+u)$。将$\beta=1-\alpha$代入上述化简的运动方程得

$$u^2[(u+1)^3-s_1]=\alpha[s_0+2s_0u+(1+s_0-s_1)u^2+2u^3+u^4] \quad ⑫$$

这个关于拉格朗日点的方程是u的五次方程，没有求根公式。在$m_2\ll m_1$的极限下，即$\alpha\ll 1$时，可求得近似解。根据S_3在x轴上的位置可分为下面三种情况：

（i）$s_0=-1, s_1=+1$

此时S_3在S_1和S_2之间，若$\alpha=0$，可解得$u=0$，当$\alpha\ll 1$时，五次方程⑫式的近似解为

$$u\approx-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow x\approx R\left[1-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \quad ⑬$$

这是第一个拉格朗日点L_1。

（ii）$s_0=+1, s_1=+1$

此时S_3位于S_2的右侧，若$\alpha=0$，可解得$u=0$，当$\alpha\ll 1$时，五次方程⑫式的近似解为

$$u \approx \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x \approx R\left[1+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right] \tag{14}$$

这是第二个拉格朗日点L_2。

（iii）$s_0=-1, s_1=-1$

此时S_3位于S_1的左侧，若$\alpha=0$，可解得$u=-2$，当$\alpha \ll 1$时，五次方程⑫式的近似解为

$$u \approx -2+\frac{7}{12}\alpha \Rightarrow x \approx -R\left(1+\frac{5}{12}\alpha\right) \tag{15}$$

这是第三个拉格朗日点L_3。

当$y \neq 0$时，拉格朗日点在$x-y$平面的位置由x方向和y方向的运动方程决定，即

$$\begin{cases} \dfrac{Gm_1(x+\alpha R)}{\rho_1^3}+\dfrac{Gm_2(x-\beta R)}{\rho_2^3}-\omega^2 x=0 \\ \dfrac{Gm_1}{\rho_1^3}+\dfrac{Gm_2}{\rho_2^3}-\omega^2=0 \end{cases} \tag{16}$$

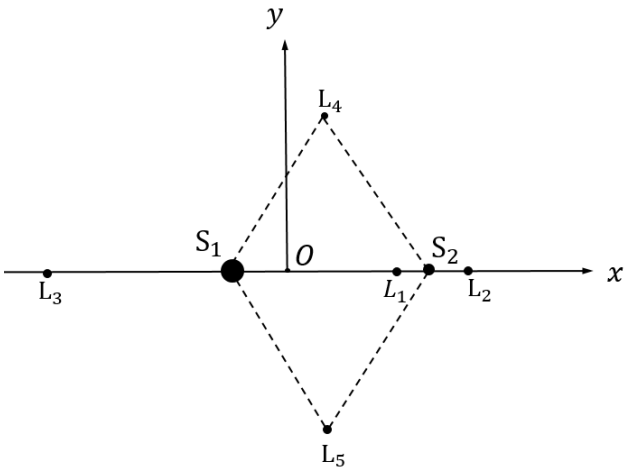
联立以上方程，可解得第四个和第五个拉格朗日点的位置为

$$L_4:\ x=\frac{\beta-\alpha}{2}R=\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}R, \quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}R \tag{17}$$

$$L_5:\ x=\frac{\beta-\alpha}{2}R=\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}R, \quad y=-\frac{\sqrt{3}}{2}R \tag{18}$$

综上可知，共存在五个拉格朗日点，其位置总结在下面的表格中，如题解图 4b。

拉格朗日点	位置坐标
L_1	$\left(R\left[1-\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right],0,0\right)$
L_2	$\left(R\left[1+\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right],0,0\right)$
L_3	$\left(-R\left[1+\frac{5}{12}\alpha\right],0,0\right)$
L_4	$\left(\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}R,\frac{\sqrt{3}}{2}R,0\right)$
L_5	$\left(\frac{m_1-m_2}{2(m_1+m_2)}R,-\frac{\sqrt{3}}{2}R,0\right)$



题解图 4b

（3）由第（2）问的结果可知，距离S_2最近的拉格朗日点是L_1和L_2，其位置为$x_0=R\left[1\mp\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right], y_0=0,\ z_0=0$。假设小天体$S_3$在拉格朗日点$L_1$和$L_2$附近受到小扰动、使得其偏离平衡位置，即

$$x = x_0 + \delta x,\ \ y = y_0 + \delta y,\ \ z = z_0 + \delta z$$

这里δx，δy和δz均为小量。把上式带入到运动方程⑦式，并把运动方程右边展开至偏移量δx，δy，δz的一阶，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2(\delta x)}{dt^2} = 9\omega^2\delta x + 2\omega\dfrac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2(\delta y)}{\mathrm{d}t^2} = -3\omega^2\delta y - 2\omega\dfrac{\mathrm{d}(\delta x)}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2(\delta z)}{\mathrm{d}t^2} = -4\omega^2\delta z \end{cases} \qquad ⑲$$

可以看出δz在平衡位置附近做简谐振动，所以这第一和第二拉格朗日点对沿着z轴方向的扰动均是稳定的。考虑偏移量δx，δy的解为指数函数，即

$$\delta x = \delta x_0 e^{\lambda t},\quad \delta y = \delta y_0 e^{\lambda t} \qquad ⑳$$

于是可得

$$\begin{cases} \lambda^2\delta x_0 = 9\omega^2\delta x_0 + 2\omega\lambda\delta y_0 \\ \lambda^2\delta y_0 = -3\omega^2\delta y_0 - 2\omega\lambda\delta x_0 \end{cases} \qquad ㉑$$

上述方程有非零解δx_0，δy_0的条件是

$$\det\begin{pmatrix} \lambda^2 - 9\omega^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + 3\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

或

$$\frac{\lambda^2 - 9\omega^2}{-2\omega\lambda} = \frac{2\omega\lambda}{\lambda^2 + 3\omega^2}$$

此即

$$\lambda^4 - 2\omega^2\lambda^2 - 27\omega^4 = 0 \qquad ㉒$$

可解得λ的根为

$$\Lambda = \pm\sqrt{2\sqrt{7} + 1}\,\omega \quad \text{或者} \quad \lambda = \pm i\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\,\omega \qquad ㉓$$

正实根的存在意味着L_1点和L_2点是不稳定平衡点。

（4）由题意知，通过适当地选择初始条件可抑制随时间指数增长或者指数衰减的模式，所以δx，δy，δz的解为

$$\begin{cases} \Delta x = a_1\cos\left(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t\right) + a_2\sin\left(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t\right) \\ \delta y = b_1\cos\left(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t\right) + b_2\sin\left(\sqrt{2\sqrt{7} - 1}\omega t\right) \\ \delta z = c_1\cos(2\omega t) + c_2\sin(2\omega t) \end{cases} \qquad ㉔$$

其中

$$b_1 = \frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{2\sqrt{7} - 1}}a_2,\quad b_2 = -\frac{\sqrt{7} + 4}{\sqrt{2\sqrt{7} - 1}}a_1 \qquad ㉕$$

考虑到初始条件：$t = 0$时，$\delta x(0) = \rho_0$，$\delta y(0) = \eta_0$，$\delta z(0) = \zeta_0$，$\delta\dot{z}(0) = \dot{\zeta}_0$，可得

$$a_1=\rho_0,\ a_2=\frac{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}{\sqrt{7}+4}\eta_0,\ b_1=\eta_0,\ b_2=-\frac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}\rho_0,\ c_1=\zeta_0,\ c_2=\frac{\dot{\zeta}_0}{2\omega} \tag{26}$$

所以小天体S_3的位置随时间的变化为

$$\begin{cases}\Delta x=\rho_0\cos\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right)+\dfrac{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}{\sqrt{7}+4}\eta_0\sin\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right)\\ \delta y=\eta_0\cos\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right)-\dfrac{\sqrt{7}+4}{\sqrt{2\sqrt{7}-1}}\rho_0\sin\left(\sqrt{2\sqrt{7}-1}\omega t\right)\\ \delta z=\zeta_0\cos(2\omega t)+\dfrac{\dot{\zeta}_0}{2\omega}\sin(2\omega t)\end{cases} \tag{27}$$

可知x方向和y方向的初始速度$\delta\dot{x}(0)=\dot{\rho}_0$和 $\delta\dot{y}(0)=\dot{\eta}_0$为

$$\dot{\rho}_0=\frac{2\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+4}\eta_0\omega,\quad \dot{\eta}_0=-\left(\sqrt{7}+4\right)\rho_0\omega \tag{28}$$

因此初始位置和初始速度紧密相关。如果初始条件满足㉘式，指数项将不出现，所以S_3在L_1和L_2拉格朗日点附近做准周期的运动。

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 3 分，①式 2 分，②式 1 分；或者①'式 2 分，②'式 1 分；

第（2）问 21 分，④⑤式各 2 分，⑧式 3 分，⑨⑩式各 2 分，⑪⑫式各 1 分，⑬⑭⑮式各 2 分，⑰⑱式各 1 分；

第（3）问 9 分，⑲式 3 分，⑳式 1 分, ㉑式 2 分，㉒式 1 分，㉓式 2 分；

第（4）问 12 分，㉔式 3 分，㉕式 1 分，㉖㉗式各 3 分，㉘式 2 分。

五.（45 分）

（1）在非相对论极限下，粒子的能量为

$$E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}=mc^2\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}}\approx mc^2\left(1+\frac{p^2}{2m^2c^2}\right)=mc^2+\frac{p^2}{2m} \tag{①}$$

由麦克斯韦-玻尔兹曼分布，可知原子核的数密度为

$$\begin{aligned}n&=\frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty}d^3\boldsymbol{p}\,\mathrm{e}^{(\mu-E)/(k_BT)}\\&=\frac{4\pi}{h^3}e^{\frac{\mu-mc^2}{k_BT}}\int_0^{+\infty}p^2\exp\left(-\frac{p^2}{2mk_BT}\right)dp\\&=\frac{4\pi}{h^3}e^{\frac{\mu-mc^2}{k_BT}}\frac{\sqrt{\pi}}{4}(2mk_BT)^{3/2}\\&=\left(\frac{2\pi mk_BT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\mu-mc^2}{k_BT}}\end{aligned} \tag{②}$$

所以化学势为

$$\mu = mc^2 + k_B T \ln\left[n\left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \quad ③$$

（2）因为核素分解及其逆过程处于动态平衡，所以反应物和生成物的化学势相等

$$\mu_{\mathrm{X}} + \mu_{\gamma} = Z\,\mu_{\mathrm{p}} + N\,\mu_{\mathrm{n}} \quad ④$$

这里光子的化学势为零$\mu_{\gamma} = 0$。所以有

$$\mu_{\mathrm{X}} = Z\,\mu_{\mathrm{p}} + N\,\mu_{\mathrm{n}} \quad ⑤$$

并利用③式可得

$$\begin{aligned}
\exp[\mu_{\mathrm{X}}/(k_B T)] &= \exp\left[\left(Z\mu_{\mathrm{p}} + N\mu_{\mathrm{n}}\right)/(k_B T)\right] \\
&= \left[\exp\left(\mu_{\mathrm{p}}/(k_B T)\right)\right]^{Z}\left[\exp\left(\mu_{\mathrm{n}}/(k_B T)\right)\right]^{N} \\
&= \left[n_{\mathrm{p}}\left(\frac{h^2}{2\pi m_{\mathrm{p}} k_B T}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{m_{\mathrm{p}}c^2/(k_B T)}\right]^{Z}\left[n_{\mathrm{n}}\left(\frac{h^2}{2\pi m_{\mathrm{n}} k_B T}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{m_{\mathrm{n}}c^2/(k_B T)}\right]^{N} \\
&= n_{\mathrm{p}}^{Z} n_{\mathrm{n}}^{N}\left(\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3A/2} \frac{1}{m_{\mathrm{p}}^{\frac{3Z}{2}} m_{\mathrm{n}}^{\frac{3N}{2}}} \exp\left[\left(Zm_{\mathrm{p}} + Nm_{\mathrm{n}}\right)c^2/(k_B T)\right]
\end{aligned} \quad ⑥$$

原子核${}_Z^A\mathrm{X}$的结合能为

$$B_{\mathrm{X}} = \left(Zm_{\mathrm{p}} + Nm_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{X}}\right)c^2 \quad ⑦$$

于是可得反应平衡时原子核的数密度为

$$\begin{aligned}
n_{\mathrm{X}} &= \left(\frac{2\pi m_{\mathrm{X}} k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{\frac{\mu_{\mathrm{X}} - m_{\mathrm{X}}c^2}{k_B T}} \\
&= \left(\frac{2\pi m_{\mathrm{X}} k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{-m_{\mathrm{X}}c^2/(k_B T)} n_{\mathrm{p}}^{Z} n_{\mathrm{n}}^{N}\left(\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3A/2} \frac{1}{m_{\mathrm{p}}^{3Z/2} m_{\mathrm{n}}^{3N/2}} \mathrm{e}^{\left(Zm_{\mathrm{p}} + Nm_{\mathrm{n}}\right)c^2/(k_B T)} \\
&= \left(\frac{m_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{p}}^{Z} m_{\mathrm{n}}^{N}}\right)^{3/2}\left(\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3(A-1)/2} n_{\mathrm{p}}^{Z} n_{\mathrm{n}}^{N}\, \mathrm{e}^{\left(Zm_{\mathrm{p}} + Nm_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{X}}\right)c^2/(k_B T)} \\
&= \left(\frac{m_{\mathrm{X}}}{m_{\mathrm{p}}^{Z} m_{\mathrm{n}}^{N}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3(A-1)/2} n_{\mathrm{p}}^{Z} n_{\mathrm{n}}^{N}\, \mathrm{e}^{B_{\mathrm{X}}/(k_B T)}
\end{aligned} \quad ⑧$$

（3）当核反应$\mathrm{D} + \gamma \rightleftharpoons \mathrm{p} + \mathrm{n}$达到平衡时，由上一问可知

$$n_{\mathrm{D}} = \left(\frac{m_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{p}} m_{\mathrm{n}}}\right)^{3/2}\left(\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} n_{\mathrm{p}} n_{\mathrm{n}}\, \mathrm{e}^{B_{\mathrm{D}}/(k_B T)} \quad ⑨$$

这里B_{D}是氘核的结合能

$$B_{\mathrm{D}} = \left(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{D}}\right)c^2 \quad ⑩$$

所以可得粒子数密度之比为

$$\frac{n_{\mathrm{D}}}{n_{\mathrm{p}}n_{\mathrm{n}}}=\left(\frac{m_{\mathrm{D}}}{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{n}}}\frac{h^2}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{B_{\mathrm{D}}/(k_B T)} \tag{11}$$

（4）当质子和中子的转化反应达到热平衡时，反应物和生成物的化学势相等，即

$$\mu_{\mathrm{n}}+\mu_{\nu_{\mathrm{e}}}=\mu_{\mathrm{p}}+\mu_{\mathrm{e}^-},\ \mu_{\mathrm{n}}+\mu_{\mathrm{e}^+}=\mu_{\mathrm{p}}+\mu_{\overline{\nu_e}} \tag{12}$$

由题设知$\mu_{\nu_{\mathrm{e}}}=\mu_{\overline{\nu_e}}=\mu_{\mathrm{e}^-}=\mu_{\mathrm{e}^+}=0$，所以有

$$\mu_{\mathrm{n}}=\mu_{\mathrm{p}} \tag{13}$$

此时质子和中子是非相对论粒子，满足麦克斯韦-玻尔兹曼分布，所以两者的数密度之比为

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}}=\frac{\left(\frac{2\pi m_{\mathrm{n}}k_B T}{h^2}\right)^{3/2}e^{(\mu_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{n}}c^2)/(k_B T)}}{\left(\frac{2\pi m_{\mathrm{p}}k_B T}{h^2}\right)^{3/2}e^{(\mu_{\mathrm{p}}-m_{\mathrm{p}}c^2)/(k_B T)}}=\left(\frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{p}}}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-(m_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{p}})c^2/(k_B T)} \tag{14}$$

当质子和中子相互转化反应冻结后，由题设知冻结温度为$k_B T\approx 0.8\mathrm{MeV}$，所以两者的粒子数之比为

$$\frac{n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{p}}}=\left(\frac{m_{\mathrm{n}}}{m_{\mathrm{p}}}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-(m_{\mathrm{n}}-m_{\mathrm{p}})c^2/(k_B T)}=\left(\frac{939.565}{938.272}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-(939.565-938.272)/0.8}\approx 0.2 \tag{15}$$

（5）由于氦原子核中包含了所有的中子，所以氦的数密度是中子数密度的一半，即

$$n_{\mathrm{He}}=\frac{1}{2}n_{\mathrm{n}} \tag{16}$$

所以氦的质量丰度（氦占宇宙质量的比例）为

$$Y_{\mathrm{He}}=\frac{4n_{\mathrm{He}}}{n_{\mathrm{n}}+n_{\mathrm{p}}}=\frac{2n_{\mathrm{n}}}{n_{\mathrm{n}}+n_{\mathrm{p}}}=\frac{2}{1+n_{\mathrm{p}}/n_{\mathrm{n}}}=\frac{2}{1+1/0.2}\approx 0.3 \tag{17}$$

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 8 分，①式 2 分，②式 4 分，③式 2 分；

第（2）问 14 分，④式 3 分，⑤式 1 分，⑥式 3 分，⑦式 2 分，⑧式 5 分；

第（3）问 7 分，⑨⑩式各 2 分，⑪式 3 分；

第（4）问 10 分，⑫式 3 分，⑬式 1 分，⑭式 3 分，⑮式 3 分；

第（5）问 6 分，⑯式 2 分，⑰式 4 分。

六. （50 分）

（1）电磁辐射是光子流，光子动量大小为p时，其能量E为

$$E=cp \tag{1}$$

单位时间垂直通过单位面积的光子的总动量为$\boldsymbol{P}$时，相应的能流密度为

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{r}}=ncE\hat{\boldsymbol{p}}=nc(c\boldsymbol{p})=c(nc\boldsymbol{p})=c\boldsymbol{P} \tag{2}$$

式中，n是光子的数密度。这些光子被理想黑体完全吸收，黑体单位面积单位时间内受到的冲量为$\boldsymbol{P}$，因此单位面积受力为

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{r}}/c \tag{3}$$

（2）太阳单位面积辐射能流密度为σT_s^4，到小行星轨道时单位面积直射的能流密度为

$$J_0=\sigma T_s^4\frac{4\pi r_s^2}{4\pi R_a^2}=\sigma T_s^4\frac{r_s^2}{R_a^2} \tag{4}$$

单位时间内小行星接收到的太阳辐射总能量为

$$\dot{E}_\iota = \pi r_a^2 J_0 \tag{⑤}$$

假设小行星温度处处为T_0，因此单位时间内出射的能量为

$$\dot{E}_o = 4\pi r_a^2 \sigma T_0^4 \tag{⑥}$$

平衡时$\dot{E}_\iota = \dot{E}_o$，因此

$$T_0 = \left(\frac{J_0}{4\sigma}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{T_s^4 r_s^2}{4R_a^2}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{r_s}{2R_a}} T_s \tag{⑦}$$

由于温度均匀，小行星自身向外辐射在所有方向上都相同，因此辐射力为零。只须考虑太阳辐射力作用即可。

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{sa}} = \frac{\pi r_a^2 J_0}{c} \widehat{\boldsymbol{R}}_a = \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} \widehat{\boldsymbol{R}}_a \tag{⑧}$$

这个力和小行星受到的太阳引力方向相反，且都具有与距离的平方成反比形式。考虑辐射作用后，小行星受到的合力为

$$F = \frac{GM_s M_a}{R_a^2} - \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} = \frac{4\pi G M_s \rho_a r_a^3}{3R_a^2} - \frac{\pi r_a^2 \sigma T_s^4 r_s^2}{c R_a^2} = \frac{GM_s' M_a}{R_a^2} \tag{⑨}$$

$$M_s' = M_s - \frac{3\sigma T_s^4 r_s^2}{4cG\rho_a r_a} \tag{⑩}$$

考虑辐射作用后，小行星受到的合力和万有引力具有相同的形式，太阳质量被修正为 M_s‘。假设小行星轨道保持为圆形，不考虑辐射时，速度为v_a时，轨道半径为R_a满足如下关系，

$$\frac{M_a v_a^2}{R_a} = \frac{GM_a M_s}{R_a^2}$$

即

$$R_a = \frac{GM_s}{v_a^2} \tag{⑪}$$

同理，考虑辐射之后，小行星轨道半径为

$$R_a' = \frac{GM_s'}{v_a^2} \tag{⑫}$$

因此考虑辐射前后轨道半径相对该变量为

$$\frac{\Delta R_a}{R_a} = \frac{R_a' - R_a}{R_a} = \frac{M_s' - M_s}{M_s} = -\frac{3\sigma T_s^4 r_s^2}{4cG\rho_a r_a M_s}$$

代入相应的物理量，对于典型的小行星，考虑辐射前后轨道半径相对该变量范围

$$\frac{\Delta R_a}{R_a} \sim -1.3 \times 10^{-10} \tag{⑬}$$

因此这种情况下辐射对小行星轨道运动几乎没有影响。

（3）将题中已知的解用复数形式写为

$$T = T_0 + T_1 e^{-\gamma x + i(\omega t - \beta x + \varphi - \delta)} = T_0 + T_1 e^{-\tilde{\gamma} x + i(\omega t + \varphi - \delta)}$$

其中$\tilde{\gamma} = \gamma + i\beta$，代入热传导方程得到：

$$i\omega\, T_1 e^{-\tilde{\gamma}x+i(\omega t+\varphi-\delta)} = \frac{k\tilde{\gamma}^2}{C\rho} T_1 e^{-\tilde{\gamma}x+i(\omega t+\varphi-\delta)} \quad ⑭$$

由于$x \geq 0$，$\tilde{\gamma}$实部应该为正数，否者当x很大时温度很高，不符合物理。化简上式并取实部为正的解，可得

$$\tilde{\gamma} = \gamma + i\beta = \sqrt{\frac{iC\rho\omega}{\kappa}} = \sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}} + i\sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}}$$

$$\gamma = \beta = \sqrt{\frac{C\rho\omega}{2\kappa}} \quad ⑮$$

代入表面的能流守恒方程得

$$\tilde{\gamma}\kappa T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} + \sigma\left(T_0 + T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta}\right)^4 = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad ⑯$$

保留到T_1的一次方项得

$$\sigma T_0^4 + (\tilde{\gamma}\kappa + 4\sigma T_0^3) T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} = \frac{J_0}{4} + \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad ⑰$$

由此得到和时间无关的平均温度T_0

$$T_0^4 = \frac{J_0}{4\sigma} \quad ⑱$$

（这和上小题得到的结果⑦相同），以及和时间有关的温度T_1

$$(4\sigma T_0^3 + \tilde{\gamma}\kappa) T_1 e^{i\omega t+i\varphi-i\delta} = \alpha J_0 e^{i\omega t+i\varphi} \quad ⑲$$

整理后可得

$$T_1 e^{-i\delta} = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 + \tilde{\gamma}\kappa} = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 + \sqrt{\frac{C\rho\omega\kappa}{2}} + i\sqrt{\frac{C\rho\omega\kappa}{2}}} \quad ⑳$$

由此可得

$$T_1 = \frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3 \sqrt{1 + 2\Phi + 2\Phi^2}} \quad ㉑$$

其中

$$\Phi = \frac{\sqrt{2C\rho\omega\kappa}}{8\sigma T_0^3} \quad ㉒$$

$$\tan\delta = \frac{\Phi}{1+\Phi} \quad ㉓$$

[解法二：不把解化为复数形式，直接把解代入热传导方程得

$$-\omega e^{-\gamma x}\sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) = \frac{\kappa}{\rho C} e^{-\gamma x}[(\gamma^2 - \beta^2)\cos(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) - 2\gamma\beta\sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta)]$$

整理得

$$\frac{\kappa}{\rho C}(\gamma^2 - \beta^2)\cos(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) + \left(\omega - \frac{2\gamma\beta\kappa}{\rho C}\right)\sin(\omega t + \varphi - \beta x - \delta) = 0 \quad ⑭'$$

要使得上式成立，cos 函数和 sin 函数之前的系数必须都为零，因此

$$\gamma = \beta = \sqrt{\frac{\rho C\omega}{2\kappa}} \qquad ⑮'$$

代入流守恒方程得，

$$\kappa T_1[\gamma\cos(\omega t+\varphi-\delta)-\beta\sin(\omega t+\varphi-\delta)]+\sigma[T_0+T_1\cos(\omega t+\varphi-\delta)]^4=\frac{J_0}{4}+\alpha J_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad ⑯'$$

保留到T_1的一次方项得，

$$\sigma T_0^4+[(\kappa\gamma+4\sigma T_0^3)\cos(\omega t+\varphi-\delta)-\kappa\gamma\sin(\omega t+\varphi-\delta)]T_1=\frac{J_0}{4}+\alpha J_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad ⑰'$$

由此得到和时间无关的平均温度T_0

$$T_0^4=\frac{J_0}{4\sigma} \qquad ⑱'$$

（这和上小题得到的结果⑦相同），以及和时间有关的温度T_1

$$[(\kappa\gamma+4\sigma T_0^3)\cos(\omega t+\varphi-\delta)-\kappa\gamma\sin(\omega t+\varphi-\delta)]T_1=\alpha J_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad ⑲'$$

整理得

$$4\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}\sigma T_0^3T_1\cos(\omega t+\varphi-\delta+\delta')=\alpha J_0\cos(\omega t+\varphi) \qquad ⑳'$$

为使得上述方程对所有时间成立，要求$\delta'=\delta$，因此

$$T_1=\frac{\alpha J_0}{4\sigma T_0^3\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}} \qquad ㉑'$$

⑳中，

$$\tan\delta'=\frac{\kappa\gamma}{\kappa\gamma+4\sigma T_0^3}=\frac{\Phi}{1+\Phi}$$

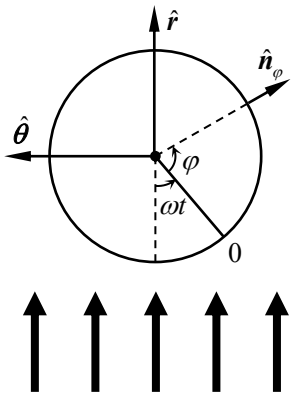
$$\Phi=\frac{\kappa\gamma}{4\sigma T_0^3}=\frac{\sqrt{2C\rho\omega\kappa}}{8\sigma T_0^3} \qquad ㉒'$$

因此

$$\tan\delta=\frac{\Phi}{1+\Phi} \qquad ㉓'$$

]

（4）由于公转周期远大于自转周期，在分析小行星辐射力时可以近似把小行星中心看成不动。建立如右图所示的直角坐标系，其中$\hat{\boldsymbol{r}}$轴是太阳辐射方向（即太阳和小行星中心连线方向），$\hat{\boldsymbol{\theta}}$轴垂直于$\hat{\boldsymbol{r}}$以及自转角速度方向$\hat{\boldsymbol{\omega}}$，$\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\omega}}$三个轴构成一个右手系。当公转方向和自转方向相同时，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$和公转速度方向相同；当公转方向和自转方向相反时，$\hat{\boldsymbol{\theta}}$和公转速度方向相反。在这个坐标系下，$t$时刻小行星赤道上经度为$\varphi$处的法向向量为



太阳辐射

题解图 6a

$$\hat{\boldsymbol{n}}_\varphi = (-\cos(\omega t+\varphi), -\sin(\omega t+\varphi), 0) \qquad ㉔$$

相应的温度为

$$T = T_0 + T_1\cos(\omega t+\varphi-\delta)$$

该处单位表面积的向外辐射对小行星的作用力为

$$\boldsymbol{F}(\varphi) = -\frac{\sigma}{c}T^4\hat{\boldsymbol{n}}_\varphi = -\frac{\sigma}{c}[T_0^4 + 4T_0^3T_1\cos(\omega t+\varphi-\delta)]\hat{\boldsymbol{n}}_\varphi$$

$$= -\frac{\sigma T_0^4}{c}\hat{\boldsymbol{n}}_\varphi - \frac{\alpha J_0}{c\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}\cos(\omega t+\varphi-\delta)\,\hat{\boldsymbol{n}}_\varphi \qquad ㉕$$

上式最后一步已利用了㉑式。㉕式右端第一项各向同性，对平均没有贡献。因此

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{F}(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{\alpha J_0}{2\pi c\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\varphi-\delta)\,(\cos(\omega t+\varphi),\sin(\omega t+\varphi))d\varphi$$

$$= \frac{\alpha J_0}{2\pi c\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}\int_0^{2\pi}[\cos(\omega t+\varphi)\cos\delta+\sin(\omega t+\varphi)\sin\delta](\cos(\omega t+\varphi),\sin(\omega t+\varphi))d\varphi$$

$$= \frac{\alpha J_0}{2c\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}(\cos\delta,\sin\delta) \qquad ㉖$$

（5）利用三角函数关系可得

$$\sin\delta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^{-2}\delta}} = \frac{\Phi}{\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}, \qquad ㉗$$

由上两个式子可得沿轨道方向的合力为

$$F = \lambda 4\pi r_a^2\frac{\alpha J_0}{2c\sqrt{1+2\Phi+2\Phi^2}}\sin\delta = \frac{2\alpha\lambda\pi r_a^2}{c}\frac{\sigma T_S^4 r_S^2}{R_a^2}\frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \qquad ㉘$$

因此沿轨道方向的加速度为

$$a = \frac{F}{m_a} = \frac{F}{\frac{4\pi r_a^3\rho}{3}} = \frac{3\alpha\lambda}{2cr_a\rho}\frac{\sigma T_S^4 r_S^2}{R_a^2}\frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \qquad ㉙$$

（6）圆形轨道时

$$\frac{mv^2}{R_a} = \frac{GMm}{R_a^2} \Rightarrow v = \left(\frac{GM}{R_a}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad ㉚$$

于是

$$a = \dot{v} = -\frac{\sqrt{GM}}{2R_a^{\frac{3}{2}}}\dot{R}_a \qquad ㉛$$

当自转和公转方向相同时，辐射力方向和公转方向同向，小行星加速，轨道半径变大

$$\dot{R}_a = \frac{3\alpha\lambda\sigma T_S^4 r_S^2}{cr_a\rho\sqrt{GMR_a}}\frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \qquad ㉜$$

已利用了㉙式。当自转和公转方向相反时，辐射力和公转方向相反，小行星减速，轨道半径减小。

$$\dot{R}_a = -\frac{3\alpha\lambda\sigma T_S^4 r_S^2}{cr_a\rho\sqrt{GMR_a}}\frac{\Phi}{1+2\Phi+2\Phi^2} \qquad ㉝$$

（7）由④或者⑧式小行星带上的小行星平均温度为

$$T_0 = T_{\rm S}\sqrt{\frac{r_{\rm S}}{2R_a}} \simeq 180\ {\rm K} \qquad ㉞$$

把石头和铁的参量代入㉒㉓式，得到

$$\Phi_{\rm ST} = \frac{\sqrt{2C_{\rm ST}\rho_{\rm ST}\omega\kappa_{\rm ST}}}{8\sigma T_0^3} = \frac{\sqrt{C_{\rm ST}\rho_{\rm ST}\omega\kappa_{\rm ST}}}{2\sigma T_{\rm S}^4 r_{\rm S}^{\frac{3}{2}}}R_a^{\frac{3}{2}} \sim 65 \qquad ㉟$$

$$\Phi_{\rm Fe} = \frac{\sqrt{2C_{\rm Fe}\rho_{\rm Fe}\omega\kappa_{\rm Fe}}}{8\sigma T_0^3} \sim 390 \qquad ㊱$$

由此可以得到石质和铁质小行星的切向加速度（㉜式）

$$a_{\rm ST} \propto \frac{1}{\rho_{\rm ST}}\frac{\Phi_{\rm ST}}{1+2\Phi_{\rm ST}+2\Phi_{\rm ST}^2} > a_{\rm Fe} \propto \frac{1}{\rho_{\rm Fe}}\frac{\Phi_{\rm Fe}}{1+2\Phi_{\rm Fe}+2\Phi_{\rm Fe}^2} \qquad ㊲$$

因此

石质小行星受到影响更大。 *

由㉝要使得轨道半径减小，小行星自转方向

必须和公转方向**相反**。 **

评分标准：本题共 50 分

第（1）问 3 分，①-③式各 1 分；

第（2）问 8 分，④-⑧、⑨⑪⑬式各 1 分；

第（3）问 13 分，⑭⑮式各 2 分，⑯式 1 分，⑰式 2 分，⑲⑳式各 1 分，㉑式 2 分，㉒㉓式各 1 分；

第（4）问 6 分，㉔-㉖式各 2 分；

第（5）问 6 分，㉗-㉙式各 2 分；

第（6）问 7 分，㉚式 1 分，㉛-㉝式各 2 分；

第（7）问 7 分，㉞-㊱式各 1 分，㊲式 2 分，*和**各 1 分。

七.（45 分）

（1）稳态下，电子运动方程左边等于零，即给出

$$-\partial_x p_\mathrm{e} + e n_\mathrm{e} \partial_x \phi = 0 \quad ①$$

其中

$$p_\mathrm{e} = n_\mathrm{e} k_\mathrm{B} T_\mathrm{e} \quad ②$$

电场改变电子的密度分布，温度保持不变，从而有

$$\partial_x \ln n_\mathrm{e} = \partial_x \frac{e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \quad ③$$

给出玻尔兹曼分布

$$n_\mathrm{e} = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\right)$$

（2）根据高斯定理，球坐标系下考虑球对称分布，电势只是半径r的函数，因此有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{dr}\right) = \frac{e n_0}{\epsilon_0}\left[\exp\left(\frac{e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}\right) - \exp\left(\frac{-e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{i}}\right)\right] \quad ④$$

弱耦合条件下，上式中的两个指数函数可以分别展开并保留到$\frac{e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{j}}$的一阶，上式就变成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0}\frac{T_\mathrm{e} + T_\mathrm{i}}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e} T_\mathrm{i}}\phi \quad ⑤$$

令

$$\lambda_\mathrm{D} = \left(\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0}\frac{T_\mathrm{e} + T_\mathrm{i}}{k_B T_\mathrm{e} T_\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ⑥$$

于是⑤式变成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}\phi}{dr}\right) = \frac{\phi}{\lambda_\mathrm{D}^2} \quad ⑦$$

引入函数$u(r) = \phi r$，即$\phi = \frac{u}{r}$，上式进一步写成

$$u'' = \frac{u}{\lambda_\mathrm{D}^2} \quad ⑧$$

解出

$$\phi(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_\mathrm{D}}\right) + \frac{B}{r}\exp\left(\frac{r}{\lambda_\mathrm{D}}\right) \quad ⑨$$

根据边界条件：$r \to \infty$时，电势趋于零，则$B = 0$；$r \to 0$时，电势应该等于原点的点电荷q的电势解$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$，综合即有

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_\mathrm{D}}\right) \quad ⑩$$

说明电势分布的特征长度是λ_D，因此⑥定义的长度即为德拜长度。在离子温度趋于无穷时，得到电子德拜屏蔽长度

$$\lambda_\mathrm{De} = \left(\frac{\epsilon_0 k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{e^2 n_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ⑪$$

将题给数据代入⑥式得

$$\lambda_\mathrm{D} = 22.4\ \mu\mathrm{m} \quad ⑫$$

（3）根据高斯定理

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{e\Delta n}{\epsilon_0}$$

由题设给出电场的空间梯度标长为L，即

$$\frac{E}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}x} = L$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{E}{L}$$

可得

$$\frac{\Delta n}{n}\sim\frac{E\epsilon_0}{eLn_0} \tag{13}$$

平衡状态下，离子受到的总电磁场洛伦兹力需为零，即$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}=0$，给出

$$E\sim v_iB\sim\omega_0LB$$

联立上两式得

$$\frac{\Delta n}{n}\sim\frac{\omega_0\omega_{\mathrm{ce}}}{\omega_{\mathrm{pe}}^2} \tag{14}$$

代入题给数据得

$$\frac{\Delta n}{n}\sim 0.35\% \tag{15}$$

（4）根据题意，得到如下的描述扰动量的方程组：

$$\begin{cases} -i\,\omega n_{\mathrm{j}1}+i\,kn_{\mathrm{j}0}v_{\mathrm{j}1}=0 \\ -i\,\omega m_{\mathrm{j}}n_{\mathrm{j}0}v_{\mathrm{j}1}+i\,kp_{\mathrm{j}1}-q_{\mathrm{j}}n_{\mathrm{j}0}E_1=0 \\ p_{\mathrm{j}1}=\gamma_{\mathrm{j}}k_BT_{\mathrm{j}0}n_{\mathrm{j}1} \\ i\,kE_1=\dfrac{e}{\epsilon_0}(n_{\mathrm{i}1}-n_{\mathrm{e}1}) \end{cases} \tag{16}$$

其中用到了

$$p_{\mathrm{j}0}=n_{\mathrm{j}0}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{j}0}$$

由⑯式得到

$$\frac{e^2n_0}{\epsilon_0m_{\mathrm{e}}}\left[\frac{1}{\omega^2-\dfrac{k^2\gamma_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}}+\frac{\dfrac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}}{\omega^2-\dfrac{k^2\gamma_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}}\right]=1$$

或者展开得到

$$\begin{aligned}\omega^4-\omega^2\left[\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\left(\gamma_{\mathrm{e}}k^2+\frac{1}{\lambda_{\mathrm{De}}^2}\right)+\frac{1}{\lambda_{\mathrm{De}}^2}\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}+\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}\gamma_{\mathrm{i}}k^2\right]\\+\frac{\gamma_{\mathrm{i}}k^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{i}}T_{\mathrm{e}}(1+\gamma_{\mathrm{e}}k^2\lambda_{\mathrm{De}}^2)+\gamma_{\mathrm{e}}k^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{e}}^2}{\lambda_{\mathrm{De}}^2m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{i}}}=0\end{aligned} \tag{17}$$

此即ω与k的一般关系式。

（5）题目要求$\omega^2\sim\frac{k^2k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}$，因此有$\frac{k^2k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\gg\omega^2$，分析上述一般关系式⑰，可得如下领头阶项

$$-\omega^2\frac{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}}\left(\gamma_{\mathrm{e}}k^2+\frac{1}{\lambda_{\mathrm{De}}^2}\right)+\frac{\gamma_{\mathrm{i}}k^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{i}}T_{\mathrm{e}}(1+\gamma_{\mathrm{e}}k^2\lambda_{\mathrm{De}}^2)+\gamma_{\mathrm{e}}k^2k_{\mathrm{B}}^2T_{\mathrm{e}}^2}{\lambda_{\mathrm{De}}^2m_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{i}}}=0 \tag{18}$$

由此给出色散关系

$$\omega^2=\frac{\gamma_{\mathrm{i}}k^2k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}+\frac{\gamma_{\mathrm{e}}k^2k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}(1+\gamma_{\mathrm{e}}k^2\lambda_{\mathrm{De}}^2)} \tag{19}$$

当

$$k^2\lambda_{\mathrm{De}}^2\ll 1 \tag{20}$$

时，该色散关系变成经典离子声波色散关系

$$\omega^2=k^2\frac{\gamma_{\mathrm{i}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{i}}+\gamma_{\mathrm{e}}k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}$$

该条件意味着波长远大于电子德拜屏蔽长度，等离子体在扰动尺度上体现不出电荷分离效应。

（6）题意要求$\omega^2 \sim \frac{k^2 k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}$，一般关系⑰中领头阶项为

$$\omega^4 - \omega^2 \left[\frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}\left(\gamma_\mathrm{e} k^2 + \frac{1}{\lambda_\mathrm{De}^2}\right)\right] = 0 \tag{21}$$

由此解出的色散关系为

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{m_\mathrm{e}\epsilon_0} + \gamma_\mathrm{e} k^2 \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} = \omega_{pe}^2 + \gamma_\mathrm{e} k^2 \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} \tag{22}$$

波的群速度

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\gamma_\mathrm{e} k \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}}{\sqrt{\omega_\mathrm{pe}^2 + \gamma_\mathrm{e} k^2 \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}}} \tag{23}$$

（7）电子满足弱耦合条件下的玻尔兹曼分布，此时的方程组变成

$$\begin{cases} -i\,\omega n_{\mathrm{i}1} + i\,k n_{\mathrm{i}0} v_{\mathrm{i}1} = 0 \\ -i\,\omega m_\mathrm{i} n_{\mathrm{i}0} v_{\mathrm{i}1} + i\,k\gamma_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i} n_{i1} + i\,k e n_{\mathrm{i}0}\phi = 0 \\ n_{\mathrm{i}1} = n_{\mathrm{e}1}, \\ n_{\mathrm{e}1} = n_{\mathrm{e}0}\dfrac{e\phi}{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}} \end{cases} \tag{24}$$

由此得到如下色散关系

$$\omega^2 = k^2 \frac{\gamma_\mathrm{i} k_\mathrm{B} T_\mathrm{i} + k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i}} \tag{25}$$

对比该结果与经典离子声波色散关系，发现只要在经典色散关系中取

$$\gamma_\mathrm{e} = 1 \tag{26}$$

即可得到上述色散关系。$\gamma_\mathrm{e} = 1$意味等温过程，电子玻尔兹曼分布正好是在等温条件下获得的。

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 3 分，①②③式各 1 分；

第（2）问 7 分，④⑤⑥⑨⑩⑪⑫式各 1 分；

第（3）问 5 分，⑬⑭式各 2 分，⑮式 1 分；

第（4）问 12 分，⑯式 7 分，⑰式 5 分；

第（5）问 5 分，⑱⑲式各 2 分，⑳式 1 分；

第（6）问 5 分，㉑㉓式各 1 分，㉒式 3 分；

第（7）问 8 分，㉔式 4 分，㉕式 3 分，㉖式 1 分。