第 43 届全国中学生物理竞赛决赛理论试题解答与评分标准（内部资料）

2026 年 10 月 31 日 9:00-12:00

一（45 分）.

（1）

（1.1） 黑洞引力加速度的量级为

$$g(r)=\frac{GM_{\mathrm{bh}}}{r^2} \qquad ①$$

按题中定义，对①式在r_{p}附近作一阶展开，潮汐加速度可由恒星尺度R_{s}上的黑洞引力加速度的变化估算：

$$a_{\mathrm{tide}}\sim\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\right|_{r_{\mathrm{p}}}R_{\mathrm{s}}\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}^3} \qquad ②$$

潮汐力等于恒星质量m_{s}乘以②式给出的差分加速度，因此

$$f_{\mathrm{tide}}\sim m_{\mathrm{s}}a_{\mathrm{tide}}\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}m_{\mathrm{s}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}^3} \qquad ③$$

（1.2） 均匀密度恒星的自引力量级：

$$f_{\mathrm{self}}\sim\frac{Gm_s^2}{R_s^2} \qquad ④$$

利用③式和④式，碎裂条件为 $f_{\mathrm{tide}}\sim f_{\mathrm{self}}$，即

$$\frac{GM_{\mathrm{bh}}m_{\mathrm{s}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{tide}}^3}\sim\frac{Gm_s^2}{R_s^2} \qquad ⑤$$

由⑤式解得：

$$r_{\mathrm{tide}}\sim\left(\frac{M_{\mathrm{bh}}}{m_{\mathrm{s}}}\right)^{1/3}R_{\mathrm{s}} \qquad ⑥$$

当 $r_{\mathrm{p}}\lesssim r_{\mathrm{tide}}$ 时恒星被撕裂。

（2）

（2.1）比能量 $e<0$ 的碎片是束缚轨道，会在黑洞引力作用下回落至近心区域；比能量 $e>0$ 的碎片是不束缚轨道，可以逃逸到远处。（*）

（2.2）题干给出黑洞引力势$\Phi(r)=-GM_{\mathrm{bh}}/r$。对该势在$r_{\mathrm{p}}$附近作一阶展开，恒星的质心位于$r_{\mathrm{p}}$、相距$\Delta r$（$|\Delta r|\le R_{\mathrm{s}}\ll r_{\mathrm{p}}$）处的碎片比能量与质心之差为：

$$\delta e\approx\frac{\partial\Phi}{\partial r}\bigg|_{r_{\mathrm{p}}}\Delta r\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}}{r_{\mathrm{p}}^2}\Delta r\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}}{r_{\mathrm{p}}^2}R_{\mathrm{s}} \qquad ⑦$$

由⑦式可得比能量展宽为：

$$\Delta e\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}}{r_{\mathrm{p}}^2} \qquad ⑧$$

利用⑥式，若$r_{\mathrm{p}}\sim r_{\mathrm{tide}}\sim(M_{\mathrm{bh}}/m_{\mathrm{s}})^{1/3}R_{\mathrm{s}}$，将其代入⑧式，得

$$\Delta e(r_{\mathrm{p}}=r_{\mathrm{tide}})\sim\frac{GM_{\mathrm{bh}}R_{\mathrm{s}}}{(M_{\mathrm{bh}}/m_{\mathrm{s}})^{2/3}R_s^2}=\frac{GM_{bh}^{1/3}m_s^{2/3}}{R_{\mathrm{s}}}=\left(\frac{M_{\mathrm{bh}}}{m_{\mathrm{s}}}\right)^{1/3}\frac{Gm_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{s}}} \qquad ⑨$$

由⑨式可知，该能量展宽相对于恒星自引力能大一个因子

$$\frac{\Delta e}{Gm_{\mathrm{s}}/R_{\mathrm{s}}}\sim\left(\frac{M_{\mathrm{bh}}}{m_{\mathrm{s}}}\right)^{1/3} \qquad ⑩$$

将题目中给出的 $m_{\mathrm{s}}=1\,\mathrm{M}_\odot$、$M_{\mathrm{bh}}=10^6\,\mathrm{M}_\odot$ 代入⑩式，得

$$\left(\frac{M_{\mathrm{bh}}}{m_{\mathrm{s}}}\right)^{1/3}=100 \qquad ⑪$$

说明在潮汐半径处被撕裂的恒星碎片的能量展宽约为被撕裂前恒星结合能的100倍。

（2.3）取x为沿黑洞径向、相对于恒星质心的位置坐标，$x=0$对应质心。对于均匀密度球，位于x到$x+\mathrm{d}x$之间的薄片截面积为$\pi({R_{\mathrm{s}}}^2-x^2)$，所以薄片质量为

$$\mathrm{d}m=\rho\pi(R_s^2-x^2)\,\mathrm{d}x \qquad ⑫$$

其中ρ为恒星密度。由⑫式可得

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}=\rho\pi(R_s^2-x^2)\approx\rho\pi R_s^2=\mathrm{const}\quad(|x|\ll R_{\mathrm{s}}) \qquad ⑬$$

也就是说，在$x=0$附近，质量分布对径向坐标x的一阶近似是常数。

（3）

根据题目假设，碎片完成一个完整轨道后即回落并被吸积，因此其轨道周期与回落时间相当（$t\sim P$）。对于开普勒椭圆运动有$e=-GM_{\mathrm{bh}}/(2a)$，其中a为半长轴，因此$a\propto|e|^{-1}$。将其代入开普勒椭圆轨道周期公式，得

$$t\sim P=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_{\mathrm{bh}}}}\propto a^{3/2}\propto|e|^{-3/2} \qquad ⑭$$

因此，具有更大负能量（$|e|$更大）的束缚碎片周期更短，会在早期返回；而接近零能量（$e=0$附近）的束缚碎片周期最长，会在晚期返回，从而贡献了晚期的光度变化。因此，为了得出潮汐瓦解事件晚期的光度变化，下面我们考察$e=0$附近的束缚碎片的运动情况。

首先，根据⑭式，有

$$|e|\propto t^{-2/3},\qquad\left|\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right|\propto t^{-5/3} \qquad ⑮$$

此外，由⑦式可知，当$R_{\mathrm{s}}\ll r_{\mathrm{p}}$时，比能量与位置近似线性相关：$e\approx\delta e\propto\Delta r\propto x$，因此有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}e}\approx\mathrm{const} \qquad ⑯$$

由于在$e=0$附近的碎片满足⑬式，结合⑬与⑮、⑯式，并根据题干中$L(t)\propto\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$，有

$$L(t)\propto\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}e}\left|\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right|\propto t^{-5/3} \qquad ⑰$$

因此，潮汐瓦解事件的光度随时间的衰减满足$t^{-5/3}$的幂律关系，$\alpha=5/3$。

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 10 分，②–⑥各 2 分；

第（2）问 15 分，（*）2 分，⑦–⑫各 2 分，⑬1 分；

第（3）问 20 分，⑭–⑰各 5 分。

二（45 分）.

（1.1）原子核质量远远大于电子，可以假设原子核不动。设电子到核的距离为 $\boldsymbol{R}$ 。分子中的电子在光场中的运动方程为

$$m_e\ddot{\boldsymbol{R}} = -m_e\omega_0{}^2\boldsymbol{R} - \gamma\dot{\boldsymbol{R}} - e\hat{z}E(t) \qquad ①$$

在垂直于$\hat{z}$的方向，振动最终消失，只需要考虑$\hat{z}$方向。下面引入物理量的复数形式：$\tilde{Z} = Z\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $\tilde{E} = E\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $\tilde{p} = p\mathrm{e}^{-i\omega t}$，所以$\hat{z}$方向的运动方程可以写为

$$\ddot{\tilde{Z}} = -\omega_0^2\tilde{Z} - \frac{\gamma}{m_\mathrm{e}}\dot{\tilde{Z}} - \frac{e}{m_e}\tilde{E} \qquad ②$$

算出②式中$\tilde{Z}$对时间的导数并整理得

$$\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)\tilde{Z} + i\omega\frac{\gamma}{m_\mathrm{e}}\tilde{Z} - \frac{e}{m_e}\tilde{E} = 0 \qquad ③$$

由此解得

$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{e}{m_\mathrm{e}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + i\omega\gamma}\tilde{E}(\omega) \qquad ④$$

诱导的电偶极矩

$$\tilde{p}(\omega) = -e\tilde{Z}(\omega) = -\frac{e^2}{m_\mathrm{e}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + i\omega\gamma}\tilde{E}(\omega), \qquad ⑤$$

故

$$\tilde{\alpha}(\omega) \equiv \frac{\tilde{p}(\omega)}{\tilde{E}(\omega)} = -\frac{e^2}{m_e(\omega^2 - \omega_0^2) + i\omega\gamma} \qquad ⑥$$

（1.2）

光场诱导的分子电偶极矩为

$$\boldsymbol{p} = \hat{z}A\alpha(\omega)[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)] = 2\hat{z}A\alpha(\omega)\cos(kx)\cos(\omega t) \qquad ⑦$$

分子在驻波场 $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{z}}A[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)]$ 中的电偶极势能

$$\varepsilon = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{p} = -4\,\mathrm{Re}[\tilde{\alpha}(\omega)]A^2\cos^2 kx\cos^2(\omega t) \qquad ⑧$$

平均电偶极势能

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{2\pi/\omega}\frac{\varepsilon}{2\pi/\omega}\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{Re}[\tilde{\alpha}(\omega)]A^2\cos^2 kx = 2A^2\cos^2 kx\ \frac{m_e e^2(\omega^2 - \omega_0^2)}{m_\mathrm{e}^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad ⑨$$

（1.3）

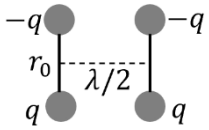
电偶极矩 d，等价于两个相距 r_0 的电荷 $q, -q$，

$$d = qr_0\text{。} \qquad ⑩$$

（$r_0 \ll \lambda$）。

两个电偶极子的相互作用能为

$$W_{dd} = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\lambda/2} - 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(\frac{\lambda}{2})^2 + r_0^{\,2}}}, \qquad ⑪$$



题解图 2a

利用 $r_0 \ll \lambda$，对⑪右式做泰勒展开保留到 r_0/λ 的一级小量得到偶极子相互作用能为

$$W_{dd} = \frac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3} \qquad ⑫$$

【

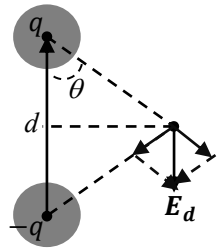
另解：

偶极子中垂线上相距为 $\lambda/2$ 处产生的电场 E_d 为

$$E_d = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}$$

$$= 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}\frac{\frac{r_0}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2}} \qquad ⑪'$$

$$= \frac{d}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left\{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{2}\right)^2\right\}^{3/2}}$$



题解图 2b

利用 $\lambda >> r_0$，⑪′右式做泰勒展开保留到 r_0/λ 的一级小量，得到

$$E_d = \frac{2d}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}, \qquad ⑫'$$

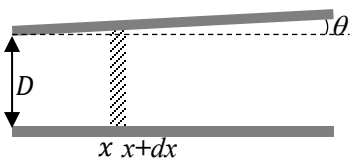
方向和电偶极矩矢量相反。电偶极相互作用势能，就是一个电偶极子的电场和另外一个电偶极子的相互作用能，即

$$-\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{E}_d = \frac{2d^2}{\pi\varepsilon_0\lambda^3}。 \qquad ⑬'$$

】

（2.1）如图取从 x 到 $x+dx$ 一小区域，这个区域的两个极板构成一个微电容器，其电场

$$\varepsilon(x) = \frac{V}{D+\theta x} \approx \frac{V}{D}(1-\frac{\theta}{D}x), \qquad ⑬$$



题解图 2c

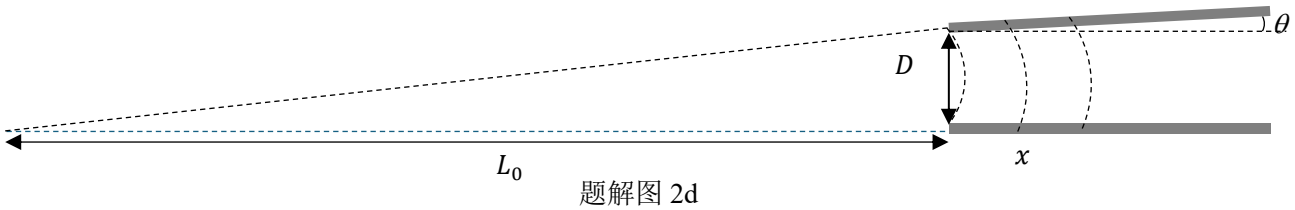
因此近似为一个梯度电场。

此微电容器的电容为

$$\mathrm{d}C=\varepsilon_0\frac{s\mathrm{d}x}{D+\theta x}\text{。}\qquad ⑭$$

电容器是无穷多个这样的微电容器的并联，所以总电容

$$C=\varepsilon_0\int_0^L\frac{s\mathrm{d}x}{D+\theta x}=\frac{\varepsilon_0}{\theta}s\ln(1+\frac{L\theta}{D})\qquad ⑮$$



题解图 2d

【解法 2：两个极板相交于一点，利用了 $\tan\theta\approx\theta$，此交点到极板的距离 $L_0\approx D/\theta$。电场垂直于于两个极板。忽略边界效应，且 $\phi\approx 0$，则电力线近似沿以极板交点为圆心的圆弧上，且垂直于极板。

$$V=rE(r)\int_0^\theta\mathrm{d}\phi=rE(r)\theta\text{，}\qquad ⑬''$$

所以电场

$$\varepsilon(r)=\frac{V}{r\theta}=\frac{V}{(L_0+x)\theta}=\frac{V}{L_0\theta}(1-\frac{x}{L_0})=E_0(1-\frac{x}{L_0})=\frac{V}{D}(1-\frac{x\theta}{D})\text{，}\qquad ⑭'$$

，

所以电场近似为一个梯度电场。表面电荷密度

$$\sigma(x)=\varepsilon_0E(r)\text{，}\qquad ⑮'$$

总电荷为

$$q=s\int_{L_0}^{L_0+L}\varepsilon_0\varepsilon(r)\mathrm{d}r=s\int_{L_0}^{L_0+L}\varepsilon_0\frac{V}{r\phi}\mathrm{d}r=\varepsilon_0s\frac{V}{\theta}\ln(1+\frac{L}{L_0})\text{，}\qquad ⑯'$$

因此电容

$$C=q/V=\frac{\varepsilon_0}{\theta}s\ln(1+\frac{L}{L_0})=\frac{\varepsilon_0}{\theta}s\ln(1+\frac{L\theta}{D})\text{。}\qquad ⑰'$$

】

【解法三

记图 2a 中的上下两板（线）的延长线的交点为 O，下板的左端为 a. 取下板上某点 x（$a\le x\le a+L$）。若上下板带有等量异号电荷（电荷量大小为 Q），则过点 x 的电场线是以 O 点为圆心、以 $\overline{\mathrm{O}x}$ 之长为半径的、位于上下两板之间的圆弧，余类推（这样的静电场满足相应的边界条件，根据静电唯一性定理，它就是真实的物理场）。由于同一电场线上不同点处电场线的疏密程度的大小相同，因而同一电场线上不同点处电场强度的大小相同。由电势的定义，对于过点 x 的电场线有

$$V=E_xx\theta\qquad ⑬'''$$

式中 E_x 过点 x 的电场线上电场强度的大小。

由静电场的边界条件得

$$\varepsilon_0 E_x = \frac{\mathrm{d}q}{s\mathrm{d}x} \qquad ⑭''$$

这里 dq 是面元 sdx 上所带的电荷量大小。联立以上两式得

$$\frac{\mathrm{d}q}{V} = \frac{\varepsilon_0 s}{\theta}\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad ⑮''$$

于是

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_0 s}{\theta}\int_a^{a+L}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\varepsilon_0 s}{\theta}\ln\frac{a+L}{a} \approx \frac{\varepsilon_0 s}{\theta}\ln\left(1+\frac{L\theta}{D}\right) \qquad ⑯''$$

】

（2.2）

（2.2.1）对 e_1(K) 在K_C附近做泰勒展开，

$$e_1(K) = e_1(K_C) + \frac{de_1}{dK}(K-K_C) + \frac{1}{2}\frac{d^2e_1}{dK^2}(K-K_C)^2 + \cdots$$

因为 $\Delta K << \left|\dfrac{\mathrm{d}e_1/\mathrm{d}K}{\mathrm{d}^2e_1/\mathrm{d}K^2}\right|$，

$$e_1(K) \approx e_1(K_C) + \frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}K}(K-K_C) \qquad ⑯$$

利用此近似，

$$\psi(x,t) \approx \int_{-\infty}^{\infty} g(K)e^{-iKx+i\frac{e_1(K_C)t}{\hbar}+i\frac{de_1}{\hbar dK}(K-K_C)t}\mathrm{d}K = \psi(x-\frac{de_1}{\hbar dK}t,0)e^{-ie_1(K_C)t/\hbar+i\frac{de_1}{\hbar dK}K_C t} \qquad ⑰$$

故

$$|\psi(x,t)|^2 = \left|\psi(x-\frac{de_1}{\hbar dK}t,0)\right|^2 \qquad ⑱$$

由⑱可知，物质波波包以群速度

$$v_g = \frac{\mathrm{d}e_1}{\hbar\mathrm{d}K}$$

运动。

（2.2.2）

电场和极性分子相互作用能

$$U(x) = -d_z\varepsilon(x)\,, \qquad ⑲$$

其中 $\varepsilon(x)$ 由⑬给出。分子所受到的力的大小为

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = d_z\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x} = -\frac{V\theta}{D^2}d_z\,, \qquad ⑳$$

这里，d_z为电偶极矩平行于电场方向的分量。由于$\frac{d\varepsilon}{dx}$与x无关，因此F是恒力。分子的动量$\hbar K$满足

$$\frac{\mathrm{d}(\hbar K)}{\mathrm{d}t}=F \qquad ㉑$$

因此

$$K=K(0)+Ft/\hbar \qquad ㉒$$

利用㉒式和$v_g=\frac{\mathrm{d}e_1(K)}{\hbar \mathrm{d}K}$，分子波包的群速度

$$v_g(K)=\frac{W_1\lambda}{4\hbar}\sin[K(0)\frac{\lambda}{2}-\omega_B t] \qquad ㉓$$

由㉒㉓式得

$$\omega_B=-\frac{F\lambda}{2\hbar}=\frac{V\theta d_z\lambda}{2\hbar D^2} \qquad ㉔$$

上式的绝对值的$\frac{1}{2\pi}$倍为振动频率。

评分标准：本题 45 分

（1.1）问共 12 分，①②③④⑤⑥式各 2 分；

（1.2）问共 9 分，⑦⑧⑨各 3 分；

（1.3）问共 9 分，⑩⑪⑫各 3 分；

（2.1）问共 6 分，⑬⑭⑮各 2 分；

（2.2.1）问共 3 分，⑯⑰⑱各 1 分；

（2.2.2）问共 6 分，⑲⑳㉑㉒㉓㉔各 1 分。

三（45 分）.

（1）

（1.1）系统的运动方程为

$$m\ddot{x}_i + k_0 x_i + \sum_{j\neq i} \kappa\left(x_i - x_j\right) = 0, \qquad i = 1,2,3. \qquad ①$$

由于每个质点都与另外两个质点耦合，因此对任意 i，

$$\sum_{j\neq i} \kappa\left(x_i - x_j\right) = \kappa\left[\left(x_i - x_j\right) + \left(x_i - x_k\right)\right] = 2\kappa x_i - \kappa x_j - \kappa x_k,$$

其中 $j,k \neq i$ 且 $j \neq k$。故三式分别为

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_0 + 2\kappa)x_1 - \kappa x_2 - \kappa x_3 = 0, \\ m\ddot{x}_2 - \kappa x_1 + (k_0 + 2\kappa)x_2 - \kappa x_3 = 0, \\ m\ddot{x}_3 - \kappa x_1 - \kappa x_2 + (k_0 + 2\kappa)x_3 = 0. \end{cases} \qquad ②$$

写成矩阵形式：

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} + A\boldsymbol{x} = 0, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad ③$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} k_0 + 2\kappa & -\kappa & -\kappa \\ -\kappa & k_0 + 2\kappa & -\kappa \\ -\kappa & -\kappa & k_0 + 2\kappa \end{pmatrix}.$$

现在求简正模。设解为

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}e^{i\Omega t},$$

代入得

$$(A - m\Omega^2 I)\boldsymbol{v} = 0. \qquad ④$$

因此 Ω^2 由矩阵 A/m 的本征值给出。 根据对称性，第一个本征向量可取为

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)^T.$$

代入 $A\boldsymbol{v}_1$：

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_0 \\ k_0 \end{pmatrix} = k_0\boldsymbol{v}_1.$$

故对应本征值为 k_0，本征角频率为

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \qquad ⑤$$

对应三个质量块同相同幅振动。因为三者始终相等，所以耦合弹簧不伸缩，只剩对地弹簧在起作用。

其余两个本征向量必须与 $(1,1,1)^T$ 正交，因此满足分量和为零。可取一组正交基，例如

$$\boldsymbol{v}_2 = (1,-1,0)^T, \qquad \boldsymbol{v}_3 = (1,1,-2)^T. \qquad ⑥$$

*注：⑥式取其他正交形式也给分。

对 $\boldsymbol{v}_2$ 有

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 + 3\kappa \\ -(k_0 + 3\kappa) \\ 0 \end{pmatrix} = (k_0 + 3\kappa)\boldsymbol{v}_2.$$

所以

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + 3\kappa}{m}}.$$

同理对 $\boldsymbol{v}_3$ 有

$$A\boldsymbol{v}_3 = (k_0 + 3\kappa)\boldsymbol{v}_3,$$

故

$$\Omega_3 = \sqrt{\frac{k_0 + 3\kappa}{m}}.$$

所以后两个模是简并的，其共同频率为

$$\Omega_2 = \Omega_3 = \sqrt{\frac{k_0 + 3\kappa}{m}}. \qquad ⑦$$

根据本征向量，模式 2 对应的运动形式是质量 1、2 做等幅反相振动，质量 3 始终静止在平衡位置。模式 3 对应的是运动是质量块 1、2 同相等幅运动，质量块 3 以两倍振幅进行反相运动。 **

（1.2）考虑题目给的初始条件，该初始位移向量正比于 $(1,1,1)^T$，且初始速度也沿该方向，因此只激发同相模。故运动为

$$x_1(t) = x_2(t) = x_3(t) = a\cos\left(\sqrt{\frac{k_0}{m}}\, t\right). \qquad ⑧$$

（2）（2.1）题目给出已经给出系统相位动力学为

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -K\sum_{j\neq i}\kappa_{ij}\sin(\phi_i - \phi_j) - K_s\sin(2\phi_i), \quad i = 1,2,3$$

由题意，需证明

$$\frac{dE}{dt} \leq 0$$

根据链式法则，

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{dt} \qquad ⑨$$

由题目给出的E

$$E(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = -K\sum_{i<j}\kappa_{ij}\cos(\phi_i - \phi_j) - \frac{K_s}{2}\sum_{i=1}^{3}\cos(2\phi_i)$$

对ϕ_i求偏导，可得

$$\frac{\partial E}{\partial \phi_i} = K\sum_{j\neq i}\kappa_{ij}\sin(\phi_i - \phi_j) + K_s\sin(2\phi_i), \qquad ⑩$$

因此恰有

$$\frac{d\phi_i}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial \phi_i}$$

于是

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial \phi_i}\frac{d\phi_i}{dt} = -\sum_i\left(\frac{\partial E}{\partial \phi_i}\right)^2 \leq 0 \qquad ⑪$$

（2.2）方程中$-K_s\sin(2\phi_i)$，首先求该项对应的平衡相位，令

$$-K_s\sin(2\phi_i)=0，即\ \sin(2\phi_i)=0 \qquad ⑫$$

在一个2π周期内，可得

$$\phi_i=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\pmod{2\pi}. \qquad ⑬$$

令

$$f(\phi_i)=-K_s\sin(2\phi_i)$$

则在线性稳定性分析中，若$f'(\phi)<0$则平衡点稳定；若$f'(\phi)>0$则平衡点不稳定。

由于

$$f'(\phi)=-2K_s\cos(2\phi) \qquad ⑭$$

对于$\phi=0,\pi$，

有

$$\cos(2\phi)=1 \quad\rightarrow\quad f'(\phi)=-2K_s<0 \qquad ⑮$$

故稳定。

对于$\phi=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$，

有

$$\cos(2\phi)=-1 \quad\rightarrow\quad f'(\phi)=2K_s>0 \qquad ⑯$$

故不稳定。

因此，第二项产生的稳定相位为

$$\phi_i=0,\pi\pmod{2\pi}. \qquad ⑰$$

可用于表示两种离散状态。

评分标准，本题共 45 分：

（1）问 23 分：①或② 4 分，③④各 2 分，⑤⑥各 3 分，⑦4 分，⑧4 分，**1 分。

（2）问 22 分：⑨⑩各 3 分，⑪4 分，⑫⑬⑭⑮⑯⑰各 2 分。

说明：若采用与参考答案等价的其他方法或表述，只要推导正确、结果等价，应按相应得分点给分。对于第（1）问中二重简并的两个简正模，任取该二维简并子空间中的一组线性无关基均可。

四（45 分）.

（1）整个系统（相对于悬挂点 O）的角动量包括圆盘质心作为单摆的轨道角动量$\boldsymbol{L}$和圆盘自旋角动量 $\boldsymbol{S}$：

$$\boldsymbol{J} \simeq \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} + S\hat{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} + S\hat{\boldsymbol{r}} \qquad ①$$

近似说明：总角动量原则上还需包括除圆盘自转之外的圆盘绕质心的转动（因为圆盘整体在绕着 O 点转动），该转动带来的角动量大小约为 $L' \sim I\omega \sim ma^2|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|/r^2$（其中 a 为圆盘半径）。由于 $a \ll r$，$L' \ll L$。此外，由于圆盘在高速自转，那么由于公转带来的叠加自转角速度远远小于自转角速度：$|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|/r^2 \ll \sqrt{S/I}$，因此 $L' \ll S$。因此，我们可以忽略圆盘绕质心的转动对总角动量的贡献。

重力产生的力矩为 $\boldsymbol{T} = -mg\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{z}}$，其中 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 是竖直向上的单位矢量。根据角动量定理，系统的角动量变化率等于作用在系统上的外力矩：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{J} = \boldsymbol{T} = -mg\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{z}}. \qquad ②$$

将 $\boldsymbol{J}$ 的表达式代入上式，得到系统的运动方程：

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} + S\hat{\boldsymbol{r}}) = -mg\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{z}} \Longrightarrow m\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} + S\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = -mg\boldsymbol{r} \times \hat{\boldsymbol{z}} \qquad ③$$

两边叉乘 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 得到圆盘质心位置 $\boldsymbol{r}$ 在球面方向上分量的的运动方程：

$$m(\ddot{\boldsymbol{r}} - (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}) = -\frac{S}{r^2}\dot{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{r}} - mg(\hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{z}}) \times \hat{\boldsymbol{r}}. \qquad ④$$

（2）质心运动方程④式右侧对应的力均垂直于位矢$\boldsymbol{r}$，因此其运动被限制在一个半径为 r 的球壳上。④式等号右侧第一项类似于带电粒子在磁场中感受的洛伦兹力—力的大小正比于速度大小、方向垂直于速度方向，第二项则等价于沿着$\hat{\boldsymbol{z}}$方向的电场力在球壳切向的分量。

（2.1）电磁场作用下粒子所受的电磁力为：

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}. \qquad ⑤$$

由于粒子受限在球壳上，只需考虑切向分量的力，因此粒子在球壳上的运动方程为（可假设$\boldsymbol{B}$垂直于球面，沿球面的磁场分量产生的洛伦兹力会被球壳约束抵消，没有效果）

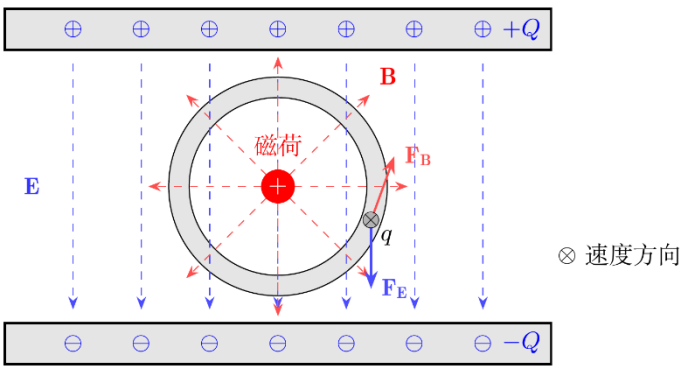
$$\begin{aligned} m(\ddot{\boldsymbol{r}} - (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \ddot{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}}) &= \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{F} \times \hat{\boldsymbol{r}}) = \hat{\boldsymbol{r}} \times [(q\boldsymbol{E} + q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) \times \hat{\boldsymbol{r}}] \\ &= \mathrm{q}\,\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{B} + q\,(\hat{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{E}) \times \hat{\boldsymbol{r}}. \end{aligned} \qquad ⑥$$

逐项对比④和⑥，可得该带电粒子所受的等效电磁场包含匀强静电场和径向静磁场：

$$q\boldsymbol{E} \leftrightarrow -mg\hat{\boldsymbol{z}}, \quad q\boldsymbol{B} \leftrightarrow -S\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}, \qquad ⑦$$

（2.2）电磁等价模型如下图所示

有趣的是⑥中的等效磁场是一个处于球心的“磁单极”产生的磁场。不同的自旋角动量对应不同的电荷 q，当 $S = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} > 0$ 时，电荷 q 为负，反之为正。



（3）在小角度下，圆盘单摆处在接近 $\boldsymbol{r} \parallel -\hat{\boldsymbol{z}}$ 附近，此时径向磁场可近似看做指向$\boldsymbol{B} \parallel -\hat{\boldsymbol{z}}$方向的均匀磁场。在此匀强磁场下，电荷可绕$\hat{\boldsymbol{z}}$轴的匀速圆周运动。设圆周运动偏离竖直方向的夹角为$\theta$，圆周运动角速度为$\omega$，则沿着球壳切向方向受力平衡条件要求

$$m\omega^2 r\sin\theta\cos\theta + q(r\sin\theta\omega)B = qE\sin\theta. \quad ⑧$$

由于 θ 很小，$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$，$\cos\theta \simeq 1$，因此上式可简化为

$$\omega^2 + \frac{qB}{m}\omega - \frac{qE}{mr} = 0. \quad ⑨$$

代入⑦中的等效电磁场，并定义 $\Omega = S/mr^2, \omega_0 = \sqrt{g/r}$， 得到

$$\omega^2 + \Omega\omega - \omega_0^2 = 0. \quad ⑩$$

该代数方程具有两个解：

$$\omega_\pm = \frac{-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \qquad \Omega = \frac{S}{mr^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad ⑪$$

其中$\omega_\pm$ 符号相反，表示两种周期性运动为顺时针和逆时针圆周运动。

附加讨论：如考虑$\cos\theta < 1$，则两个本征频率会随着振幅角θ的变大而有所升高。

当 $\Omega > 0$ 很大时（即圆盘自传角动量极大时），

$$\omega_+ \simeq \frac{\omega_0^2}{\Omega}, \quad \omega_- \simeq -\Omega. \quad ⑫$$

【另解（微分方程解法）：

圆盘单摆处在$-r\hat{\boldsymbol{z}}$附近，可设

$$\boldsymbol{r}(t) = -r\hat{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{u}(t) \quad ⑬$$

其中 $\boldsymbol{u}(t)$ 是一个小量，且 $\boldsymbol{u}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = 0$。将 $\boldsymbol{r}(t)$ 的表达式代入运动方程，并线性化得到

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -\frac{S}{r^2}\dot{\boldsymbol{u}}\times\hat{\boldsymbol{z}} - m\frac{g}{r}\boldsymbol{u}. \quad ⑭$$

定义 $\Omega = S/mr^2, \omega_0 = \sqrt{g/r}$，并将二维矢量 $\boldsymbol{u}$ 看做复数，$u = u_x + iu_y$，则上式可以写成

$$\ddot{u} = i\Omega\dot{u} - \omega_0^2 u. \quad ⑮$$

设 $u(t) = u_0 e^{-i\omega t}$，得到特征方程

$$\omega^2 + \Omega\omega - \omega_0^2 = 0. \quad ⑯$$

存在两个解

$$\omega_\pm = \frac{-\Omega \pm \sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2}}{2}, \quad u_\pm(t) = u_0^\pm e^{-i\omega_\pm t}. \quad ⑰$$

这两个解的初始条件要求满足：

$$\omega_\pm: \quad u'_\pm(0) = -i\omega_\pm u_\pm(0), \quad ⑱$$

它们分别代表了顺时针和逆时针绕$\hat{\boldsymbol{z}}$轴的周期性解。周期分别为 $T_\pm = 2\pi/|\omega_\pm|$。

单摆的一般解可以用两个本征解叠加：

$$u(t) = u_+ e^{-i\omega_+ t} + u_- e^{-i\omega_- t}. \quad ⑲$$

若圆盘单摆从小角度静止释放，意味着 $u(0) = u_0, u'(0) = 0$。因此初始条件要求满足

$$u(0) = u_+ + u_- = u_0, \quad u'(0) = -i\omega_+ u_+ - i\omega_- u_- = 0. \quad ⑳$$

解出 $u_\pm$ 的值，得到

$$u_+ = \frac{-\omega_-}{\omega_+ - \omega_-}u_0, \quad u_- = \frac{\omega_+}{\omega_+ - \omega_-}u_0. \quad ㉑$$

因此单摆的质心运动轨迹为

$$u(t) = \frac{\omega_+ e^{-i\omega_- t} - \omega_- e^{-i\omega_+ t}}{\omega_+ - \omega_-}u_0. \quad ㉒$$

若圆盘单摆受到瞬时水平冲击，意味着 $u(0)=0, u'(0)=v_0$，因此初始条件要求满足

$$u(0)=u_+ + u_- = 0, \quad u'(0) = -i\omega_+ u_+ - i\omega_- u_- = v_0. \tag{23}$$

解出 $u_\pm$ 的值，得到

$$u_+ = \frac{v_0}{i(\omega_+ - \omega_-)}, \quad u_- = \frac{-v_0}{i(\omega_+ - \omega_-)}. \tag{24}$$

因此单摆的质心运动轨迹为

$$u(t) = \frac{v_0}{i(\omega_+ - \omega_-)}\left(e^{-i\omega_+ t} - e^{-i\omega_- t}\right). \tag{25}$$

（4）在太空站中，由于失重，重力项消失，因此电磁等效下的运动方程为

$$\ddot{\boldsymbol{r}} - (\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}})\hat{\boldsymbol{r}} = -\Omega\,\dot{\boldsymbol{r}}\times\hat{\boldsymbol{r}}. \tag{26}$$

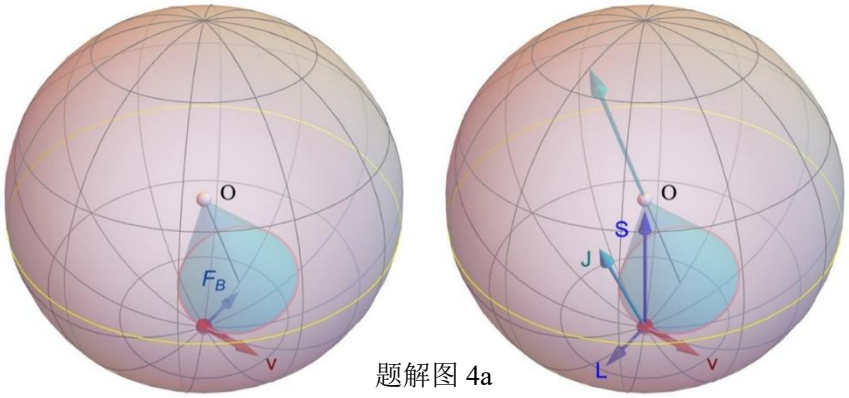
该方程看似简单，但是要解析求解还是不那么简洁。下面通过电磁等效模型中的力学分析和原始力学模型中的角动量守恒两种方法来计算（猜出）轨迹。

解法一（基于电磁等效模型中带电粒子的运动学分析）：

由于此时除了球壳提供的约束力之外，粒子只受到洛伦兹力的作用，而洛伦兹力不做功，因此粒子在球面上的速度大小保持不变。设初始速度为 $\boldsymbol{v}=v\hat{\boldsymbol{x}}$，则粒子在球面上做匀速圆周运动。如下图左，假设所做圆周运动针对球心形成的锥形锥角为 θ，则圆周运动的半径为 $r\sin\theta$。受力平衡条件要求

$$\frac{mv^2}{r\sin\theta}\cos\theta = qvB \Longrightarrow \tan\theta = \frac{mv}{qBr} = \frac{mvr}{S} = \frac{L}{S}. \tag{27}$$

此即粒子的轨道角动量和自传角动量的比值。因此只有当 $v\to\infty$ 时，$\theta\to\pi/2$，即粒子在球面上沿着大圆做圆周运动。



题解图 4a

圆盘单摆在失重空间站中的运动如题解图 4a，左图：圆盘在等效洛伦兹力作用下沿着过南极点的圆周运动。右图：圆盘质心的轨道角动量和自旋角动量保持互相垂直，且大小保持不变。

粒子圆周运动的周期为

$$T = \frac{2\pi r\sin\theta}{v} = \frac{2\pi r}{v}\frac{L}{\sqrt{L^2+S^2}} = 2\pi\frac{mr^2}{\sqrt{L^2+S^2}} = 2\pi\frac{mr^2}{J} \tag{28}$$

其中为J总角动量。

注意：在电磁等效模型中，因外加磁场的存在，机械角动量不再守恒。

解法二（基于原力学模型中的角动量分析）：

在太空中，由于失重，没有外力矩作用，同时悬挂点 O 光滑也不提供力矩，因此系统的总角动量守恒。初始时刻的总角动量为

$$\boldsymbol{J}(0) = -mr\hat{\boldsymbol{z}}\times v\hat{\boldsymbol{x}} + S\hat{\boldsymbol{z}} = S\hat{\boldsymbol{z}} - L\hat{\boldsymbol{y}}, \quad L = mvr. \tag{29}$$

任何时刻的总角动量由公转和自转角动量组成

$$\boldsymbol{J}(t) = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = m\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}} + S\hat{\boldsymbol{r}}. \tag{30}$$

如上图右所示，由于自转角动量（沿$\hat{\boldsymbol{r}}$）、公转角动量（沿球面切向）方向始终保持互相垂直，并且它们的大小各自保持不变。与此同时，它们的矢量和㉙也要保持守恒不变。唯一的可能就是这两个角动量$\boldsymbol{L},\boldsymbol{S}$以相同的角速度围绕总角动量 $\boldsymbol{J}(0)$旋转。也就是圆盘质心（粒子）在一个以$\boldsymbol{J}(0)$为对称轴，且过南极点的一个圆周上运动。这个圆周相对球心的锥角大小为 $\theta = \arctan(L/S)$，相应的周期为

$$T = \frac{2\pi r\sin\theta}{v} = \frac{2\pi r}{v}\frac{L}{\sqrt{L^2+S^2}} = 2\pi\frac{mr^2}{\sqrt{L^2+S^2}} = 2\pi\frac{mr^2}{J} \qquad ㉛$$

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 11 分，①4 分，② 3 分，③4 分；

第（2）问 12 分，⑥3 分，⑦6 分（电场、磁场各 3 分），电磁场示意图 3 分（球面约束、匀强电场、径向磁场各 1 分）；

第（3）问 12 分，

解法一：提到周期性圆周运动 3 分，⑧3 分，⑨1 分，⑪1 分，说明顺时针、逆时针圆周运动 4 分；

解法二：⑬ 1 分，⑭⑮⑯各 1 分，⑰1分，说明顺时针、逆时针圆周运动 4 分，因无对应关系已扣 3 分。

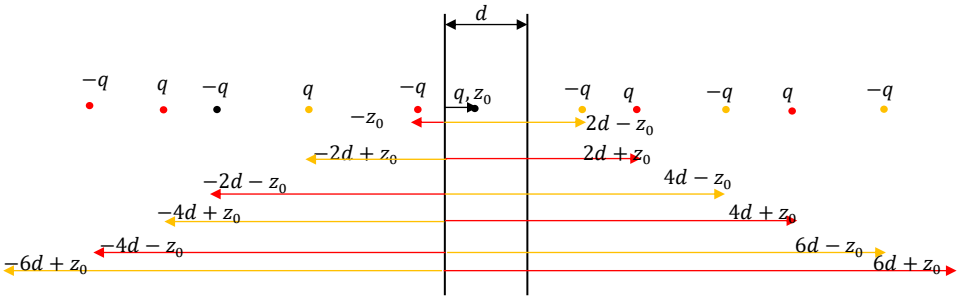
第（4）问 10 分，

解法一：说明是匀速圆周运动 3 分，㉗3 分，㉘4 分。

解法二：说明角动量守恒 2 分，说明角动量方向㉙2 分，说明轨道和自旋角动量绕着总角动量旋转 2 分，得出㉛4 分。

五（45 分）.

（1）（1.1）如题解图 5a，电荷 q 相对于左右两个板的内表面的镜像电荷为$-q$，分别位于$-z_0$ 和$2d-z_0$；上述两个镜像电荷相对于右左两个板的内表面的镜像电荷为 q，分别位于 z_0-2d 和 $2d+z_0$；依此类推。电荷 q 以及带电为 q 的镜像电荷位于 z_0+2nd，而带电为$-q$ 的镜像电荷位于 $-z_0+2nd$。这里 n 为整数。



题解图 5a

所有这些电荷在电容器内部空间产生的电势能为

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-2nd-z_q)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-2nd+z_q)^2}}\},\qquad ①$$

面电荷密度

$$\sigma_{\text{in}}=-\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial z}|_{z=0}=\frac{q}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{(2nd-z_q)}{[\rho^2+(2nd-z_q)^2]^{3/2}}-\frac{(2nd+z_q)}{[\rho^2+(2nd+z_q)^2]^{3/2}}\right\}\qquad ②$$

左极板内侧上的电荷

$$Q_{\text{ind,L}}=2\pi\int_0^{\infty}\sigma_{\text{in}}(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\qquad ③$$

面电荷密度代入③式得到一个新的无穷级数级数求和，为了保证这个无穷级数求和绝对收敛，把②重组为

$$\sigma_{\text{ind}}=$$

$$\frac{q}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{(1-\theta)\frac{(2nd+2d-z_q)}{[\rho^2+(2nd+2d-z_q)^2]^{3/2}}+\frac{\theta(2nd-z_q)}{[\rho^2+(2nd-z_q)^2]^{3/2}}-\frac{(2nd+z_q)}{[\rho^2+(2nd+z_q)^2]^{3/2}}\right\}\qquad ④$$

其中 $\theta=\dfrac{d-z_q}{d}$。

把④代入③求得

$$Q_{\text{ind,L}}=-q(1-z_q/d)\qquad ⑤$$

【另解：

根据②③

$$Q_{\text{in,L}}=-\frac{q}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\text{sgn}(2nd+z_0)-\text{sgn}(2nd-z_0)]\qquad ④'$$

利用 $\text{sgn}(a)=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\dfrac{\sin(ka)}{k}d$ 得到

$$Q_{\text{in,L}} = -\frac{q}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{\sin[k(2nd+z_0)]-\sin[k(2nd-z_0)]\}}{k} \qquad ⑤'$$

$$= -\frac{2q}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(kz_0)}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos(2ndk)dk$$

利用泊松求和公式$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(x-n)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi ikx}$（$\delta(x)$是狄拉克 delta 函数）

$$Q_{\text{in,L}} = -\frac{2q}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dk}{k}\sin(kz_0)\frac{\pi}{d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(k-\frac{\pi m}{d}\right) \qquad ⑥'$$

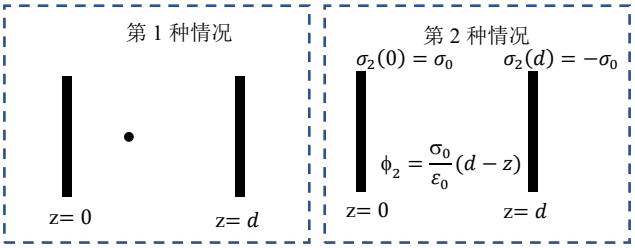
$$= -\frac{2q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{d}z_0)}{n}$$

再利用$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(mx)}{m}=\frac{\pi-x}{2}(0<x<2\pi)$，得到

$$Q_{\text{in,L}} = -q(1-z_0/d) \qquad ⑦'$$

另解 2：

我们考虑图示的两种情况，第一种情况，板间电势为$\phi_1(z)$，板内电荷密度为$\rho_1 = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$，板间电场为$E_1$。第二种情况，两个板的面电荷密度分别为$\sigma_2(0)=\sigma_0$和$\sigma_2(d)=-\sigma_0$，板间电势$\phi_2(z)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d-z)$，板内电场强度为$E_2$。



题解图 5b

利用$\boldsymbol{E}_1=-\nabla\phi_1$，$\boldsymbol{E}_2=\nabla\phi_2$，有等式

$$\iiint_V \nabla\phi_1\bullet\boldsymbol{E}_2 dxdydz = \iiint_V \nabla\phi_2\bullet\boldsymbol{E}_1 dxdydz \qquad ③'$$

这里V是板间所围区域。利用分部积分技巧有

$$\iint_S \phi_1\boldsymbol{E}_2\bullet d\vec{S} - \iiint_V \phi_1\nabla\bullet\boldsymbol{E}_2 dxdydz = \iint_S \phi_2\boldsymbol{E}_1\bullet d\vec{S} - \iiint_V \phi_2\nabla\bullet\boldsymbol{E}_1 dxdydz \qquad ④''$$

利用边界条件和高斯定理有

$$\iint_S \phi_1\sigma_2 dS + \iiint_V \phi_1\rho_2 dxdydz = \iint_S \phi_2\sigma_1 dS + \iiint_V \phi_2\rho_1 dxdydz \qquad ⑤''$$

这里σ_1是第一种情况的表面电荷密度。

利用 $\rho_1 = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)$，$\phi_2 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d-z)$，第一种情况 $z=0$ 处极板电荷 $Q(0)=\iint_S \sigma_1(0)dS$，

第二种情况的板上电荷 $Q_1(d) = C\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d$，$Q_2(d) = -C\dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}d$，从⑤′得到

$$\iint_{S(z=0)} \phi_2(0)\sigma_2(0)dS = \frac{\sigma_2 d}{\varepsilon_0}\iint_{S(0)}\sigma_1 dS + q\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(d-z_0) \qquad ⑥''$$

求解得

$$0 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}dQ_{\text{ind,L}} + q\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}(d-z_0) \qquad ⑦'',$$

经过整理后有

$$Q_{\text{ind,L}} = -\frac{q}{d}(d-z_0) \qquad ⑧''$$

】

（1.2）

通过分析图 1a 得到

$$F_{\text{ind}}(z_q) = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z_q^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(nd-z_q\right)^2}-\frac{1}{\left(nd+z_q\right)^2}\right)\right] \qquad ⑥$$

【另解：

电荷 q 受到它所有的镜像电荷对其产生的库仑力。规定沿 z 轴正方向为力的正方向。利用对称性，带有电量 q 的镜像电荷对电荷 q 的作用力 F_+ 为零（$F_+ = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n\neq 0}\dfrac{z_q-\left(2nd+z_q\right)}{|z_q-\left(2nd+z_q\right)|^3} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n\neq 0}\dfrac{-2nd}{|2nd|^3} = 0$）。带有 $-q$ 电量的镜像电荷对电荷 q 的作用力为

$$F_- = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{-q\left(z_q-\left(2nd-z_q\right)\right)}{|z_q-\left(2nd\text{-}z_q\right)|^3} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2z_q-2nd}{|2z_q-2nd|^3}$$

$$= \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z_q^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(nd-z_q\right)^2}-\frac{1}{\left(nd+z_q\right)^2}\right)\right] \quad 。$$

$$F_{\text{ind}}(z_q) = F_+ + F_- = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{z_q^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(nd-z_q\right)^2}-\frac{1}{\left(nd+z_q\right)^2}\right)\right] \qquad ⑥''$$

】

（1.3）

当电荷运动，极板上感应电荷量发生变化，当电荷向右运动，左边极板内表面的电量减小。因此利用电流的定义以及电流方向的定义，

$$i_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}Q_{\text{in,L}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{qv}{d}。 \qquad ⑦$$

（2）（2.1）

带电粒子在极板间运动时，在电路中的感应电流为⑦式。设外电路电容器施加的电压为U（右极板电势与左极板电势之差），当其变化时，外电路还要提供充电电流$C\dot{U}$。因此电路总电流

$$I = -\frac{q}{d}v + C\dot{U} \qquad ⑧$$

设Q是右极板上的总电荷量，$I = \frac{dQ}{dt}$。利用初始条件$Q(0)=0$，$U(0)=0$，由⑧得到

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{q}{Cd}\delta , \qquad ⑨$$

其中$\delta = (z - \frac{d}{2})$。

设电感磁通链为Φ，它和电流以及Q的关系为

$$\Phi = LI = L\dot{Q} \qquad ⑩$$

利用基尔霍夫定律,

$$-\dot{\Phi} = U + IR \qquad ⑪$$

由⑧-⑪得到

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \omega_c^2 Q = -\omega_c^2 \frac{q}{d}\delta \qquad ⑫$$

其中$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$。

利用初始条件$Q(0)=0$，$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}|_{t=0}=0$，$z(0)=\frac{d}{2}$，由⑫得到

$$Q(t) = -\omega_c^2 \frac{q}{d}\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\int_0^t [e^{-\lambda_1(t-\tau)} - e^{-\lambda_2(t-\tau)}]\delta \mathrm{d}\tau \qquad ⑬$$

其中$\lambda_1 = \frac{R/L + \sqrt{(R/L)^2 - 4\omega_c^2}}{2}$，$\lambda_2 = \frac{R/L - \sqrt{(R/L)^2 - 4\omega_c^2}}{2}$

由于$\dot{\delta} = \dot{z} \sim \sqrt{\frac{k}{M}} \ll \frac{1}{\sqrt{LC}}$，所以$\sqrt{\frac{k}{M}} \ll \lambda_1$，所以利用分部积分得到

$$Q(t) \approx -\omega_c^2 \frac{q}{d}\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{[\frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2}]\delta - \frac{(1-e^{-\lambda_1 t})\dot{\delta}}{\lambda_1^2} + \frac{(1-e^{-\lambda_2 t})\dot{\delta}}{\lambda_2^2}\} \qquad ⑭$$

当$t \gg \lambda_2^{-1}, \lambda_1^{-1}$,

$$Q = -\frac{q}{d}\delta + \frac{qRC}{d}v \qquad ⑮$$

（2.2）带电粒子运动受到运动势阱$V(z)=\frac{1}{2}k\delta^2$产生的力

$$F_H=-\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}=-k\delta\,, \qquad ⑯$$

以及电场力F_e。电场力来自两部分，一部分是外电路在极板上带来的电荷CU产生的力

$$F_Q=-q\frac{U}{d}=-q\frac{Q+\frac{q}{d}\delta}{Cd} \qquad ⑰$$

以及感应电荷产生的力F_{ind}。由于$z_q=\frac{d}{2}+\delta$，$\delta\sim 0$，对⑥式做泰勒展开得到

$$F_{ind}\approx\frac{dF_{ind}\left(d/2\right)}{dz_q}\delta=\frac{7\zeta q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\delta \qquad ⑱$$

其中$\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$。所以带电粒子所受的合力为

$$F=F_H+F_Q+F_{ind}=-[k-\frac{7\zeta q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}]\delta-\frac{q}{Cd}Q-\frac{q^2}{Cd^2}\delta \qquad ⑲$$

把⑮代入⑲得到$Q=-\frac{q}{d}\delta+\frac{qRC}{d}v$

$$F=-k'\delta-\frac{q^2R}{d^2}v \qquad ⑳$$

其中

$$k'=k-\frac{7\zeta q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3}$$

由⑳，简谐势阱稳定捕获粒子需要$k'>0$，即

$$k>\frac{7\zeta q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \qquad ㉑$$

评分准则：本题 45 分

第（1.1）问共 13 分，①②③各 2 分，④4 分，⑤3 分；

第（1.2）问共 2 分，⑥2 分；

第（1.3）问共 2 分，⑦2 分；

第（2.1.1）问共 19 分，⑧⑨⑩⑪各 2 分，⑫3 分，⑬2 分，⑭4 分，⑮2 分；

第（2.1.2）问共 9 分，⑯⑰各 1 分，⑱2 分， ⑲1 分，⑳2 分，㉑2 分。

六（50 分）.

（1）（1.1）取长度为 $R\,\mathrm{d}\theta$ 微元，其弯曲应变能为

$$\mathrm{d}U=\frac{1}{2}k_0(\Delta\kappa)^2R\mathrm{d}\theta,$$

沿圆环积分，可得弯曲振动的应变能积分表达式

$$U=\frac{1}{2}k_0\int_0^{2\pi}(\Delta\kappa)^2R\,\mathrm{d}\theta=\frac{k_0}{2R^3}\int_0^{2\pi}(\frac{\partial^2u_r}{\partial\theta^2}+u_r)^2\mathrm{d}\theta \qquad ①$$

（1.2）微元质量 $\lambda R\,\mathrm{d}\theta$，径向速度 $\frac{\partial u_r}{\partial t}$（记为 $\dot{u}_r$），切向速度 $\frac{\partial u_\theta}{\partial t}$ (记为 $\dot{u}_\theta$)，其动能为

$$\mathrm{d}T=\frac{1}{2}\lambda R\,[(\dot{u}_r)^2+(\dot{u}_\theta)^2]\mathrm{d}\theta$$

沿圆环积分，可得弯曲振动的动能积分表达式

$$T=\tfrac{1}{2}\lambda R\int_0^{2\pi}[\,(\dot{u}_r)^2+(\dot{u}_\theta)^2]\mathrm{d}\theta \qquad ②$$

（2）（2.1）对于环向驻波，第 n 阶驻波的径向位移形式应为

$$u_{r,n}(\theta,t)=2A\cos(n\theta)\cos(\omega_nt) \qquad ③$$

其中 $2A$ 为振幅，ω_n 为固有角频率，n 为周向波数。

由题设的不可伸长几何约束

$$u_r+\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=0$$

可得第 n 阶驻波的切向位移形式为

$$u_{\theta,n}(\theta,t)=-\int u_{r,n}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{2A}{n}\sin(n\theta)\cos(\omega_nt) \qquad ④$$

积分常数与振动无关，取为零。

（2.2）当振动的径向和切向位移均达到最大时，应变能最大，可得

$$\cos(\omega_nt)=\pm1 \qquad ⑤$$

⑤代入③，得

$$u_{r,n_\max}=\pm2A\cos(n\theta) \qquad ⑥$$

⑥代入①，得

$$\begin{aligned}U_{\max}&=\frac{k_0}{2R^3}\int_0^{2\pi}[\mp2n^2A\cos(n\theta)\pm2A\cos(n\theta)]^2\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2k_0A^2(n^2-1)^2}{R^3}\int_0^{2\pi}\cos^2(n\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2\pi k_0A^2(n^2-1)^2}{R^3}\end{aligned} \qquad ⑦$$

（2.3）当振动的速度最大时，动能最大，可得

$$\cos(\omega_nt)=0,\ \sin(\omega_nt)=\pm1 \qquad ⑧$$

③和④对时间求导，再根据⑧，可得

$$\begin{cases}\dot{u}_{r,n_\max}=\mp2A\omega_n\cos(n\theta)\\\dot{u}_{\theta,n_\max}=\pm\dfrac{2A\omega_n}{n}\sin(n\theta)\end{cases} \qquad ⑨$$

⑨代入②，并整理得

$$T_{\max}=2\lambda R\,A^2\omega_n^2\int_0^{2\pi}[\cos^2(n\theta)+\frac{1}{n^2}\sin^2(n\theta)]\mathrm{d}\theta$$
$$=2\lambda R\,A^2\omega_n^2\,(\pi+\frac{\pi}{n^2})$$
$$=2\pi\lambda R\,A^2\omega_n^2\frac{n^2+1}{n^2}\qquad ⑩$$

（2.4）驻波能量守恒,即

$$U_{\max}=T_{\max}\qquad ⑪$$

将⑦和⑩代入上式，可得

$$\frac{2\pi k_0A^2(n^2-1)^2}{R^3}=2\pi\lambda RA^2\omega_n^2\frac{n^2+1}{n^2}$$

整理上式，可得驻波的固有角频率

$$\omega_n=\frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}}\sqrt{\frac{k_0}{\lambda R^4}}\quad(n=2,3,4,\dots)\qquad ⑫$$

（3）在随环以 $\boldsymbol{\Omega}$ 转动的参考系中，圆环单位弧长在科里奥利力 $\boldsymbol{f}_c$ 和弹性力 $\boldsymbol{f}_e$ 作用下运动。

圆环单位弧长受到的科里奥利力为

$$\boldsymbol{f}_c=2\lambda\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}$$

可得分量形式的科里奥利力

$$\begin{cases}f_r^c=2\lambda\Omega\,\dot{u}'_{\theta,n} & (\text{径向})\\ f_\theta^c=-2\lambda\Omega\,\dot{u}'_{r,n} & (\text{切向})\end{cases}\qquad ⑬$$

圆环单位弧长还受到弹性力，但弹性力仅由位移场的弯曲变形决定，与圆环是否旋转无关。

一维简谐振子满足简谐关系

$$F=-kx=-m\omega^2x$$

以此类推，圆环单位弧长的弹性力作为恢复力，与位移也满足类似的简谐关系，

可得分量形式的弹性力

$$\begin{cases}f_r^e=-\lambda\omega_n^2u'_{r,n} & (\text{径向})\\ f_\theta^e=-\lambda\omega_n^2u'_{\theta,n} & (\text{切向})\end{cases}\qquad ⑭$$

由⑬、⑭和牛顿第二定律，可得

$$\begin{cases}\lambda\ddot{u}'_{r,n}=-\lambda\omega_n^2u'_{r,n}+2\lambda\Omega\dot{u}'_{\theta,n} & (\text{径向})\\ \lambda\ddot{u}'_{\theta,n}=-\lambda\omega_n^2u'_{\theta,n}-2\lambda\Omega\dot{u}'_{r,n} & (\text{切向})\end{cases}$$

消去λ，得分量形式的动力学方程

$$\begin{cases}\ddot{u}'_{r,n}=-\omega_n^2u'_{r,n}+2\Omega\dot{u}'_{\theta,n} & (\text{径向})\\ \ddot{u}'_{\theta,n}=-\omega_n^2u'_{\theta,n}-2\Omega\dot{u}'_{r,n} & (\text{切向})\end{cases}\qquad ⑮$$

（4）（4.1）圆环静止时的驻波$u_{r,n}$可以看成是角频率均为ω_n的顺行波$u_{r,n}^+$和逆行波$u_{r,n}^-$组合而成，即

$$u_{r,n}=2A\cos(n\theta)\cos(\omega_nt)=A\cos(n\theta-\omega_nt)+A\cos(n\theta+\omega_nt)=u_{r,n}^++u_{r,n}^-$$

$$\begin{cases}u_{r,n}^+=A\cos(n\theta-\omega_nt)\\ u_{r,n}^-=A\cos(n\theta+\omega_nt)\end{cases}$$

圆环旋转时，在旋转参考系中，由于科里奥利力，形成驻波的顺行波和逆行波的角频率不一样，分别记为ω_n^+和ω_n^-，可得

$$u'_{r,n}=u'^+_{r,n}+u'^-_{r,n}=A\cos(n\theta-\omega_n^+t)+A\cos(n\theta+\omega_n^-t)$$

以此类推，结合不可伸长的几何约束，可得顺行波的径向和切向位移为

$$\begin{cases} u'^{+}_{r,n} = A\cos(n\theta - \omega_n^{+}t) \\ u'^{+}_{\theta,n} = -\int u'^{+}_{r,n}\mathrm{d}\theta = -\dfrac{A}{n}\sin(n\theta - \omega_n^{+}t) \end{cases} \qquad ⑯$$

同理，逆行波的径向和切向位移为

$$\begin{cases} u'^{-}_{r,n} = A\cos(n\theta + \omega_n^{-}t) \\ u'^{-}_{\theta,n} = -\int u'^{-}_{r,n}\,\mathrm{d}\theta = -\dfrac{A}{n}\sin(n\theta + \omega_n^{-}t) \end{cases} \qquad ⑰$$

（4.2）将径向、切向动力学方程⑮分别乘以径向、切向位移$u'_{r,n}$、$u'_{\theta,n}$后相加，并沿环积分，得

$$\int_0^{2\pi}(\ddot{u}'_{r,n}u'_{r,n} + \ddot{u}'_{\theta,n}u'_{\theta,n})\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi}(\omega_n^2 u'^2_{r,n} + \omega_n^2 u'^2_{\theta,n})\,\mathrm{d}\theta + 2\Omega\int_0^{2\pi}(\dot{u}'_{\theta,n}u'_{r,n} - \dot{u}'_{r,n}u'_{\theta,n})\,\mathrm{d}\theta \qquad ⑱$$

（4.3）$u'_{r,n}$是$u'^{+}_{r,n}$和$u'^{-}_{r,n}$的线性组合，因此顺行波和逆行波也满足⑱

将⑯代入⑱式的左边 ，可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\left(\ddot{u}'^{+}_{r,n}u'^{+}_{r,n} + \ddot{u}'^{+}_{\theta,n}u'^{+}_{\theta,n}\right)\mathrm{d}\theta &= -(\omega_n^{+})^2\int_0^{2\pi}\left[A^2\cos^2(n\theta - \omega_n^{+}t) + \frac{A^2}{n^2}\sin^2(n\theta - \omega_n^{+}t)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= -(\omega_n^{+})^2\left(A^2\pi + \frac{A^2}{n^2}\pi\right) \\ &= -\pi A^2(\omega_n^{+})^2\frac{n^2+1}{n^2} \qquad ⑲ \end{aligned}$$

（4.4）将⑯代入⑱式右边的第一项，得

$$\begin{aligned} -\int_0^{2\pi}\left[\omega_n^2\left(u'^{+}_{r,n}\right)^2 + \omega_n^2\left(u'^{+}_{\theta,n}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta &= -\omega_n^2\int_0^{2\pi}\left[A^2\cos^2(n\theta - \omega_n^{+}t) + \tfrac{A^2}{n^2}\sin^2(n\theta - \omega_n^{+}t)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= -\pi A^2\omega_n^2\frac{n^2+1}{n^2} \qquad ⑳ \end{aligned}$$

（4.5）将⑯代入⑱式右边的第二项

$$\begin{aligned} 2\Omega\int_0^{2\pi}(\dot{u}'^{+}_{\theta,n}u'^{+}_{r,n} - \dot{u}'^{+}_{r,n}\,u'^{+}_{\theta,n})\mathrm{d}\theta &= 2\Omega\int_0^{2\pi}\left[\tfrac{A^2\omega_n^{+}}{n}\cos^2(n\theta - \omega_n^{+}t) + \tfrac{A^2\omega_n^{+}}{n}\sin^2(n\theta - \omega_n^{+}t)\right]\mathrm{d}\theta \\ &= 2\Omega\int_0^{2\pi}\frac{A^2\omega_n^{+}}{n}\mathrm{d}\theta \\ &= 4\pi\Omega A^2\omega_n^{+}\frac{1}{n} \qquad ㉑ \end{aligned}$$

（4.6） 将⑲⑳㉑ 代入⑱，可得

$$-\pi A^2(\omega_n^{+})^2\frac{n^2+1}{n^2} = -\pi A^2\omega_n^2\frac{n^2+1}{n^2} + 4\pi\Omega A^2\omega_n^{+}\frac{1}{n}$$

整理得

$$(\omega_n^{+})^2 + \frac{4n\Omega}{n^2+1}\omega_n^{+} - \omega_n^2 = 0 \qquad ㉒$$

其根为

$$\omega_n^{+} = -\frac{2n\Omega}{n^2+1} \pm \sqrt{(\frac{2n\Omega}{n^2+1})^2 + \omega_n^2} \qquad ㉓$$

因 $\Omega \ll \omega_n$ ，忽略高阶小量，得

$$\omega_n^{+} = -\frac{2n\Omega}{n^2+1} \pm \omega_n \qquad ㉔$$

只保留正根，可得顺行波角频率

$$\omega_n^+ = \omega_n - \frac{2n\Omega}{n^2+1} \qquad ㉕$$

（4.7）根据顺行波⑯和逆行波⑰的对称性，将㉔中的 ω_n^+ 替换为 $-\omega_n^-$，整理得

$$\omega_n^- = \frac{2n\Omega}{n^2+1} \mp \omega_n \qquad ㉖$$

只保留正根，因 $\Omega \ll \omega_n$，可得逆行波角频率

$$\omega_n^- = \omega_n + \frac{2n\Omega}{n^2+1} \qquad ㉗$$

（4.8）两反向行波角频率差为

$$\Delta\omega = \omega_n^- - \omega_n^+ = (\omega_n + \frac{2n\Omega}{n^2+1}) - (\omega_n - \frac{2n\Omega}{n^2+1}) = \frac{4n\Omega}{n^2+1} \qquad ㉘$$

（5）（5.1）频率不同的正反行波叠加后，会形成包络缓慢移动的驻波。两列行波叠加为

$$\begin{aligned} u'_{r,n} &= A\cos(n\theta - \omega_n^+ t) + A\cos(n\theta + \omega_n^- t) \\ &= 2A\cos\left(n\theta + \frac{\omega_n^- - \omega_n^+}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_n^+ + \omega_n^-}{2}t\right) \end{aligned} \qquad ㉙$$

上式中的$2A\cos(n\theta + \frac{\omega_n^- - \omega_n^+}{2}t)$ 为“拍”的慢变振幅包络，对应驻波的进动。

波腹位置满足包络相位为常数，因此

$$n\theta + \frac{\omega_n^- - \omega_n^+}{2}t = \text{常数} \qquad ㉚$$

㉚对时间求导，并整理，得到进动角速度

$$\omega_p = \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\omega_n^- - \omega_n^+}{2n} \qquad ㉛$$

将㉘代入上式㉛，得

$$\omega_p = -\frac{2\Omega}{n^2+1} \qquad ㉜$$

（5.2）根据题设的布莱恩系数定义，由㉜可得

$$k_B = \frac{\omega_p}{\Omega} = -\frac{2}{n^2+1} \qquad ㉝$$

负号表示驻波相对圆环的进动方向与圆环转动方向相反。

对于 $n=2$ 的四波腹模态,可得

$$k_B|_{n=2} = -\frac{2}{2^2+1} = -0.4 \qquad ㉞$$

评分标准：本题 50 分

第（1）问 4 分：①②各 2 分；

第（2）问 14 分：③2 分，④⑤⑥⑦⑧各 1 分，⑨2 分，⑩1 分，⑪⑫各 2 分；

第（3）问 7 分：⑬3 分，⑭⑮各 2 分；

第（4）问 16 分：⑯⑰⑱各 2 分，⑲⑳㉑㉒㉓㉔㉕㉖㉗㉘各 1 分；

第（5）问 9 分：㉙㉚㉛各 1 分，㉜㉝㉞各 2 分。

七（45 分）.

（1）（1.1）对于“热传感器”：

在内边界$r=R_1$处，由温度连续条件

$$\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}\cdot R_1=BR_1^m+CR_1^{-m}. \quad ①$$

由径向热流连续条件

$$\kappa_1\cdot\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}=\kappa_{rr}m\cdot(BR_1^{m-1}-CR_1^{-m-1}).②2$$

令$K=\kappa_{rr}m=\sqrt{\kappa_{rr}\kappa_{\theta\theta}}$，通过①式和②式的加减相消得

$$B=\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{2W}R_1^{1-m}\left(1+\frac{\kappa_1}{K}\right). \quad ③$$

$$C=\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{2W}R_1^{1+m}\left(1-\frac{\kappa_1}{K}\right). \quad ④$$

在外边界$r=R_2$处，由温度连续条件

$$\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}\cdot R_2=BR_2^m+CR_2^{-m}. \quad ⑤$$

由径向热流连续条件

$$\kappa_3\cdot\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}=\kappa_{rr}m\cdot(BR_2^{m-1}-CR_2^{-m-1}). \quad ⑥$$

将③式和④式代入⑤式和⑥式加减相消后可得

$$B=\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}\cdot\frac{R_2R_1^{-m}-R_1R_2^{-m}}{R_2^mR_1^{-m}-R_1^mR_2^{-m}}, \quad ⑦$$

$$C=\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}\cdot\frac{R_1R_2^m-R_2R_1^m}{R_2^mR_1^{-m}-R_1^mR_2^{-m}}, \quad ⑧$$

$$K=\sqrt{\frac{R_2^2\kappa_3^2-R_1^2\kappa_1^2}{R_2^2-R_1^2}}, \quad ⑨$$

$$m=1+\frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{K+\kappa_3}{K+\kappa_1}\right). \quad ⑩$$

根据K的定义可得

$$\kappa_{rr}=K/m=K/\left[1+\frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{K+\kappa_3}{K+\kappa_1}\right)\right], \quad ⑪$$

$$\kappa_{\theta\theta}=K\cdot m=K\cdot\left[1+\frac{1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}\ln\left(\frac{K+\kappa_3}{K+\kappa_1}\right)\right]. \quad ⑫$$

（1.2）对于“热隐身斗篷”，此时区域 II 各向同性$\kappa_2=\kappa_{rr}=\kappa_{\theta\theta}$，因此$m=1$。

由于区域 I 与区域 II 间绝热，因此内边界$r=R_1$处的温度连续条件不再成立，计算时可将区域 I 热导率简化为

$$\kappa_1=0.$$

将以上条件代入②式、⑤式和⑥式得

$$\kappa_2(B-CR_1^{-2})=0, \quad ⑬$$

$$BR_2+CR_2^{-1}=\frac{(T_{\text{hot}}-T_{\text{cold}})}{W}\cdot R_2, \quad ⑭$$

$$\kappa_2(B - CR_2^{-2}) = \kappa_3 \cdot \frac{(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})}{W}. \quad ⑮$$

化简得

$$B = \frac{(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})}{W} \cdot \frac{R_2^2}{R_2^2 + R_1^2}, \quad ⑯$$

$$C = \frac{(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})}{W} \cdot \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 + R_1^2}, \quad ⑰$$

$$\kappa_2 = \kappa_3 \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad ⑱$$

（2）由题意得，在变换后的坐标系(r', θ)下，区域 II 温度分布形式与区域 III 一致：

$$T'_2(r', \theta) = \frac{(T_{\text{hot}} - T_{\text{cold}})}{W} \cdot r'\cos\theta + \frac{(T_{\text{hot}} + T_{\text{cold}})}{2} \cdot. \quad ⑲$$

坐标变换前后对应的点温度不变

$$T'_2(r', \theta) = T_2(r, \theta). \quad ⑳$$

根据式⑲、式⑳和式⑦、式⑧得到映射函数表达式：

$$r' = \frac{R_2 R_1^{-m} - R_1 R_2^{-m}}{R_2^m R_1^{-m} - R_1^m R_2^{-m}} r^m + \frac{R_1 R_2^m - R_2 R_1^m}{R_2^m R_1^{-m} - R_1^m R_2^{-m}} r^{-m}. \quad ㉑$$

（3）取一个变换前径向宽度为$\mathrm{d}r$、张角为$\mathrm{d}\theta$的微小扇形单元。

变换前，微小扇形单元的径向长度和角向长度分别为

$$L_r = \mathrm{d}r, \quad L_\theta = r\mathrm{d}\theta.$$

变换后径向长度和切向长度分别变为

$$L'_r = \mathrm{d}r', \qquad L'_\theta = r'\mathrm{d}\theta.$$

沿径向传热时，传热距离为径向长度，传热宽度为角向长度，因此变换前后的径向热阻为

$$Z_r = \frac{\mathrm{d}r}{\kappa_{rr} r\mathrm{d}\theta},$$

$$Z'_r = \frac{\mathrm{d}r'}{\kappa'_{rr} r'\mathrm{d}\theta}.$$

由$Z'_r = Z_r$，得到

$$\kappa'_{rr} = \kappa_{rr}\left(\frac{r}{r'}\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right). \quad ㉒$$

沿切向传热时，传热距离为角向长度，传热宽度为径向长度，因此变换前后的切向热阻为

$$Z_\theta = \frac{r\mathrm{d}\theta}{\kappa_{\theta\theta}\mathrm{d}r},$$

$$Z'_\theta = \frac{r'\mathrm{d}\theta}{\kappa'_{\theta\theta}\mathrm{d}r'}.$$

由$Z'_\theta = Z_\theta$，得到

$$\kappa'_{\theta\theta} = \kappa_{\theta\theta} / \left(\frac{r}{r'}\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right). \quad ㉓$$

对映射函数式㉑求关于r的导数

$$\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r} = m\frac{R_2 R_1^{-m} - R_1 R_2^{-m}}{R_2^m R_1^{-m} - R_1^m R_2^{-m}} r^{m-1} - m\frac{R_1 R_2^m - R_2 R_1^m}{R_2^m R_1^{-m} - R_1^m R_2^{-m}} r^{-m-1}. \quad ㉔$$

将式㉑和式㉔代入上面得到的热导率变换公式中得

$$\kappa'_{rr}=\kappa_{rr}m\frac{(R_2R_1^{-m}-R_1R_2^{-m})r^m-(R_1R_2^m-R_2R_1^m)r^{-m}}{(R_2R_1^{-m}-R_1R_2^{-m})r^m+(R_1R_2^m-R_2R_1^m)r^{-m}},\tag{25}$$

$$\kappa'_{\theta\theta}=\kappa_{\theta\theta}/\left[m\frac{(R_2R_1^{-m}-R_1R_2^{-m})r^m-(R_1R_2^m-R_2R_1^m)r^{-m}}{(R_2R_1^{-m}-R_1R_2^{-m})r^m+(R_1R_2^m-R_2R_1^m)r^{-m}}\right].\tag{26}$$

（4）区域 I 界面处的热导率趋于 0，令$\kappa_1=0$，则式③和式④变为

$$B=\frac{(T_{\mathrm{hot}}-T_{\mathrm{cold}})}{2W}\cdot R_1^{1-m},\tag{27}$$

$$C=\frac{(T_{\mathrm{hot}}-T_{\mathrm{cold}})}{2W}\cdot R_1^{1+m}.\tag{28}$$

映射函数式㉑变为

$$r'=\frac{1}{2}R_1^{1-m}r^m+\frac{1}{2}R_1^{1+m}r^{-m}.\tag{29}$$

对式㉙分别求一阶和二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}=\frac{m}{2}R_1^{1-m}r^{m-1}-\frac{m}{2}R_1^{1+m}r^{-m-1},\tag{30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}r^2}=\frac{m(m-1)}{2}R_1^{1-m}r^{m-2}+\frac{m(m+1)}{2}R_1^{1+m}r^{-m-2}.\tag{31}$$

将$r=R_1$代入其中，一阶导数值$\mathrm{d}r'/\mathrm{d}r|_{r=R_1}=0$，二阶导数值$\mathrm{d}^2r'/\mathrm{d}r^2|_{r=R_1}=m^2/R_1$。在$r=R_1$附近进行泰勒展开

$$r'(r)\approx r'(R_1)+\left.\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right|_{R_1}(r-R_1)+\frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}r^2}\right|_{\mathrm{R}_1}(r-R_1)^2.$$

得到$\delta\to 0$处

$$(r'-R_1)\approx\frac{m^2}{2R_1}(r-R_1)^2.\tag{32}$$

根据γ的定义

$$\gamma'=\kappa'_{\theta\theta}/\kappa'_{rr}=m^2/\left(\frac{r}{r'}\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right)^2.\tag{33}$$

靠近内边界处$r\approx R_1$且$r'\approx R_1$，故$r'/r\approx 1$。利用泰勒展开，一阶导数$r\to R_1$的近似值为

$$\left.\frac{\mathrm{d}r'}{\mathrm{d}r}\right|_{R_1}\approx\left.\frac{\mathrm{d}^2r'}{\mathrm{d}r^2}\right|_{R_1}(r-R_1)=(m^2/R_1)(r-R_1).\tag{34}$$

将㉜㉞式代入㉝式

$$\gamma'\approx\frac{R_1}{2(r'-R_1)}=\frac{R_1}{2\delta}.\tag{35}$$

评分标准：本题 45 分。

（1） （1.1）问 18 分，①②⑤⑥各 3 分，⑦⑧⑨⑩⑪⑫各 1 分；

（1.2）问 6 分，⑬⑭⑮⑯⑰⑱各 1 分；

（2）问 5 分，⑲1 分，⑳㉑各 2 分；

（3）问 9 分，㉒㉓各 3 分，㉔㉕㉖各 1 分；

（4）问 7 分，㉙㉜各 2 分，㉟3 分。