第 43 届全国中学生物理竞赛决赛理论考试试题

2026 年 10 月 31 日 9:00-12:00

提示：

1. 任意一个多元函数$f(x,y,z)$对x的偏导数$\partial_x f(x,y,z)\equiv\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y,z)|_{y,z不变}$，余类推；

2. 梯度算符∇在直角坐标系中定义为$\nabla\equiv\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$，式中$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$和$\boldsymbol{k}$分别为$x$、$y$和$z$坐标轴正方向的单位矢量。

一（45 分）. 天文观测中能看到这样的现象：天区某处突然增亮，在数周至数月内达到峰值，随后逐渐变暗。这类“先亮后暗”的现象的一种可能是潮汐瓦解事件：一颗恒星经过质量远大于其质量的黑洞附近，被潮汐力撕裂，部分碎片回落并被黑洞吸积，从而产生光度为L的辐射，其余部分碎片逃逸。已知其辐射的光度L与碎片质量回落率$\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$成正比：

$$L(t)\propto\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中m表示被黑洞吸积的恒星碎片物质的质量。在潮汐瓦解事件逐渐变暗的晚期阶段，在选取了适当的时间零点后，其光度L随时间t的衰减近似满足幂律关系：

$$L(t)\propto t^{-\alpha},\quad \alpha\text{为某一待求常数}$$

为简单起见，假设恒星密度均匀，不考虑恒星自转。已知引力常量为G. 本题在牛顿力学框架下求解。

（说明：本题中涉及的所有推导均采用量级估算，无需确定表达式前的纯数值系数，如$a\sim b^2c^3$与$a\sim 4\pi b^2c^3$可视为相同答案，这里a,b和c均为物理量。）

（1）一质量为m_s、半径为R_s的恒星，在近椭圆轨道上掠过质量为M_bh（$M_\mathrm{bh}\gg m_\mathrm{s}$）的黑洞。轨道的近心点 P 距黑洞中心的距离为$r_\mathrm{p}$，如图 1a 所示。黑洞对恒星产生的潮汐力是黑洞引力场沿黑洞–恒星连线方向、在恒星上不同位置的引力差别。当潮汐力超过恒星的自引力时，恒星将被撕裂。

（1.1）计算恒星质心在距黑洞为$r_\mathrm{p}+R_\mathrm{s}$和$r_\mathrm{p}$（或$r_\mathrm{p}-R_\mathrm{s}$）处的引力之差，保留至 $R_\mathrm{s}/r_\mathrm{p}$ 的一阶项，从而估算潮汐力的表达式。

（1.2）导出恒星的自引力的表达式；如果恒星能够被黑洞撕裂，r_p需小于某一临界距离r_tide，试求r_tide.

（2）恒星在被撕裂前整体沿近抛物轨道运动，其比轨道能量（单位质量的轨道能量）可视为$e=0$。假设恒星恰好在近心点 P（$r_\mathrm{p}\gg R_\mathrm{s}$）处被瞬间完全撕裂（如图 1a 所示），且各碎片近似保持相同的轨道速度；不考虑碎片之间的引力。考虑到恒星具有一定尺度，不同碎片到黑洞的距离略有不同，从而在黑洞引力势场 $-GM_\mathrm{bh}/r$ 中具有不同的比势能，并获得不同的比轨道能量，从而产生比能量展宽Δe. 约一半质量的碎片具有负的比能量，另一半质量的碎片具有正的比能量。

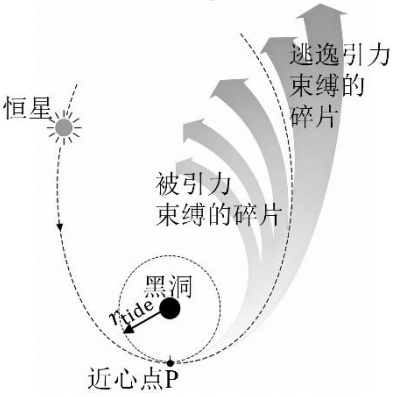


图 1a

（2.1）具有正、负比能量的两部分碎片，哪一部分最终回落至黑洞，哪一部分逃逸？

（2.2）试导出碎片获得的比能量展宽Δe的表达式。如果一颗质量为$1\,\mathrm{M}_\odot$（其中$\mathrm{M}_\odot$为太阳质量）的恒星，恰好在 P 点被质量为$10^6\,\mathrm{M}_\odot$的超大质量黑洞撕裂，且$r_\mathrm{p}=r_\mathrm{tide}$，则撕裂后的碎片的能量展宽是被撕裂前恒星的自引力能的多少倍？

（2.3）取黑洞到恒星质心的连线为x轴，恒星中心为x轴的原点，证明在恒星区域$|x|\ll R_\mathrm{s}$有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\approx\text{常量}$$

其中$\mathrm{d}m$为在x处$\mathrm{d}x$范围内的碎片质量。

（3）当恒星在r_{p}处被撕裂（此时不妨记为时间t的零点）后，被束缚的碎片在黑洞引力势中沿各自的椭圆轨道运动。假设被束缚的每个碎片在完成一个轨道周期运动、首次返回其轨道近心点时即被黑洞吸积，求出潮汐瓦解事件晚期（$e \approx 0$）的光度$L(t)$关于时间t的幂律关系$L(t) \propto t^{-\alpha}$中的指数α.

二（45 分）.

（1）沿相反方向传播的两束角频率为ω、偏振方向相同的激光相干干涉形成驻波场，分子和光学驻波场相互作用产生周期性的电偶极势（光晶格），如图 2a 所示。

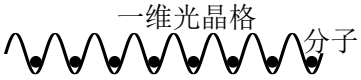


图 2a

（1.1）采用经典模型：分子中的质量为m_{e}的电子的固有振动频率为$\omega_0\,(\omega_0 >> \omega)$，在振动过程中电子受到正比于速度的阻力，比例系数为γ（阻尼系数）。若光场的电矢量为$\hat{z}E\cos(\omega t)$（$\hat{z}$为偏振方向），计算分子在此光场中的极化率$\alpha(\omega)$的复数形式。

（1.2）设向右传播的光场的电矢量$\boldsymbol{E}_1 = \hat{z}A\cos(kx-\omega t)$，沿相反方向传播的光场的电矢量$\boldsymbol{E}_2 = \hat{z}A\cos(kx+\omega t)$，$k$是波数，$A$是振幅。计算分子在这两个光场形成的驻波场中的电偶极势能在一个光波周期内的平均值。

（1.3）设每个分子电偶极子的固有电偶极矩为$\boldsymbol{d}$，且这些分子的电偶极矩同向。束缚在光晶格中的分子间距为$\frac{\lambda}{2}$（λ是光波波长），计算相邻分子之间的电偶极相互作用能（保留至$\frac{r_0}{\lambda}$的一阶小量，这里r_0是电偶极子中正、负电荷之间的距离，$r_0 << \lambda$）。

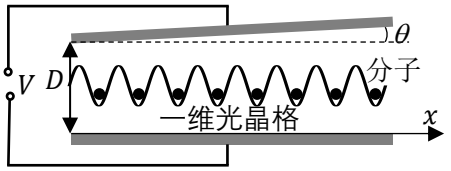


图 2b

（2）如图 2b，电容器的极板长为L（沿x方向）、宽为s，下极板水平放置，两极板之间夹角为θ（$\theta \sim 0$）。两板左端的距离为D，它们之间的电压为V. 在电容器内由光学驻波场和分子相互作用构建沿水平方向的一维光晶格。电容器内部介质可视为真空。忽略边缘效应。

（2.1）计算此电容器的电容。

（2.2）在此一维光晶格中，分子物质波（波包）的波函数$\psi(x,t)$可表示为$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(K)e^{-iKx+ie_1(K)t/\hbar}\mathrm{d}K$，其中$e_1(K) = -\frac{W_1}{2}\cos(\frac{\lambda}{2}K)$，$W_1$是一个常量，$g(K)$主要分布在$K_{\mathrm{C}}$附近，$K_{\mathrm{C}} - \Delta K < K < K_{\mathrm{C}} + \Delta K$。

（2.2.1）为简单起见，假设$\Delta K << \left|\frac{\mathrm{d}e_1/\mathrm{d}K}{\mathrm{d}^2e_1/\mathrm{d}K^2}\right|$，证明波包的群速度$v_g = \frac{\mathrm{d}e_1(K)}{\hbar \mathrm{d}K}$。

（2.2.2）分子物质波也可视为准粒子。若分子的固有电偶极矩$\boldsymbol{d}(d_x,d_y,d_z)$的方向不变，且与电容器的电场不垂直，则该准粒子将作周期振动。求振动频率。

已知，电子电荷量为$-e$（$e>0$），$\hbar$是约化普朗克常量。真空介电常量为ε_0.

三（45 分）. 如图 3a，三个质量均为m的物块 1、2、3，分别通过相同的轻质弹簧，沿竖直方向与固定于水平基座上的等边三角形的三个顶点相连，弹簧的劲度系数为k_0. 三物块仅能沿竖直方向上下振动，振动位移分别记为$x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$。 同时，物块 1、2、3 两两之间也用轻质弹簧相连，其相互作用势能$U_{ij}=\frac{1}{2}\kappa_{ij}(x_i-x_j)^2$，其中$\kappa_{ij}$为有效劲度系数，$\kappa_{ij}=\kappa_{ji}$，$i,j=1$、2、3。不计重力。

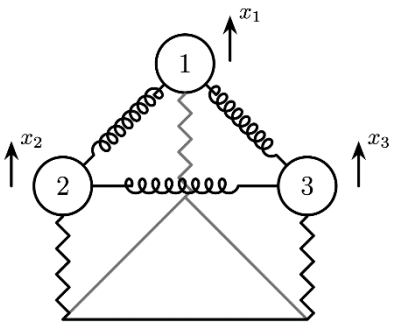


图 3a

（1）考虑无阻尼且$\kappa_{12}=\kappa_{13}=\kappa_{23}=\kappa$的情形：

（1.1）试写出三个物块的运动方程，并求出系统振动的本征频率（即所有物块都以同一个频率振动的频率），简述对应的运动形式。

（1.2）已知初始状态为

$$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=a,\quad \dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=\dot{x}_3(0)=0$$

其中$a\neq 0$，分别写出此后t时刻三个物块的位移的表达式$x_1(t),x_2(t),x_3(t)$。

（2）假设上述系统中存在弱阻尼，在角频率为ω_{p}的策动力作用下，

$$x_i=A_i\sin\left(\omega_{\mathrm{p}}t+\phi_i(t)\right),\ i=1,2,3$$

式中，$\phi_i(t)$随时间的变化率满足方程

$$\dot{\phi}_i=-K\sum_{j\neq i}\kappa_{ij}\sin\left(\phi_i-\phi_j\right)-K_s\sin(2\phi_i),\quad i=1,2,3$$

其中K、K_s均为正的常量。

（2.1）为研究此情形下系统的动力学过程，引入函数

$$E(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=-K\sum_{i<j}\kappa_{ij}\cos\left(\phi_i-\phi_j\right)-\frac{K_s}{2}\sum_{i=1}^{3}\cos(2\phi_i)$$

试证明$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\leq 0$.

（2.2）当系统接近平衡时，$\phi_i(t)$随时间的变化率满足的方程可简化为

$$\dot{\phi}_i=-K_s\sin(2\phi_i),\quad i=1,2,3$$

求其平衡相位（ϕ_i不随时间变化）并判断其稳定性，找出其中的稳定相位状态。

四（45 分）. 图 4a 所示的 “大摆锤” 是一种游乐设施，其结构为旋转圆盘悬挂于摆杆，在圆盘自身旋转的同时摆杆可往复摆动。


图 4a

将该设施抽象并拓展为 “圆盘单摆模型”：一均质圆盘通过轻质刚性杆（轻杆）与悬挂点 O 相连，轻杆可绕 O 做定点转动（全方位），杆始终与圆盘平面垂直，圆盘可绕杆自转（圆盘质心在以 O 为球心、杆长为半径的球面上运动）。如图 4b 所示。

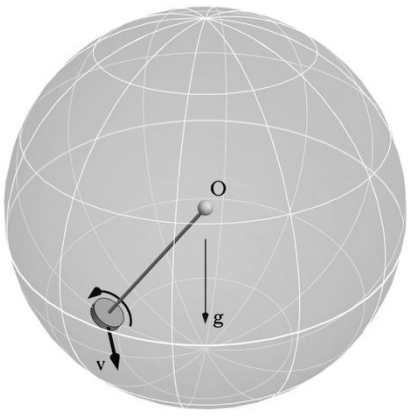


图 4b

取 O 为原点，圆盘质量为 m，质心位矢为$\boldsymbol{r}$，$r=|\boldsymbol{r}|$ 。圆盘绕过圆盘中心且垂直于盘面的对称轴高速自转，自转角动量大小为S，方向沿$\boldsymbol{r}$方向（与图示方向相反），重力加速度大小为g.

为简化起见，假设圆盘半径远小于杆长，圆盘自转角速度的大小远大于圆盘质心绕 O 点转动的角速度的大小。不计摩擦。

（1）试导出圆盘质心的运动方程。

（2）（2.1）第（1）问中的质心运动可等价为机械约束在球面上运动的带电粒子（电荷量为 q）在特定电场与磁场中的运动，写出与力学运动方程对应的带电粒子在电磁场中的运动方程，并指出电磁系统中的物理量与原力学系统中物理量的对应关系。

（2.2）画出该对应的带电粒子系统示意图，体现带电粒子的约束、电磁场分布等要素。

（3）利用第（2）问给出的对应电磁模型，考虑带电粒子在势能最低位置附近的小振幅周期运动，求运动周期，并描述相应的运动轨迹。

（4）将圆盘单摆置于空间站内，系统处于完全失重环境。忽略空间站自身转动。设初始时刻圆盘质心位矢为 $\boldsymbol{r}_0$，初速度为 $\boldsymbol{v}_0$。试描述圆盘质心的运动轨迹；若为周期运动，求运动周期。

五（45 分）. 一竖直放置的平行圆板电容器的电容为C，其极板间距为d；取坐标轴 z 垂直于两极板，z 轴正方向向右，原点 O 在左极板内侧的圆心处。真空介电常量为ε_0. 为简单起见，两极板半径均可视为无限大。

（1）如图 5a，平行板电容器的两个极板接地，在$z=z_q\,(0<z_q<d)$处有一电荷量为q、静止的带电粒子。

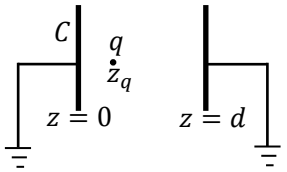


图 5a

（1.1）求平行板电容器左极板内侧上的感应电荷密度和此极板内侧上的总感应电荷；

（1.2）求电容器两个极板上的感应电荷对此带电粒子的作用力的合力；

（1.3）若此带电粒子以速度v沿z轴运动，证明电路中产生的感应电流$i_{\text{ind}}=-\dfrac{qv}{d}$（规定电流的正方向为从地到右极板）。

（2）如图 5b，平行板电容器C、电阻R和电感L串联。电容器中存在势阱$V(z)=\dfrac{1}{2}k(z-\dfrac{d}{2})^2$（$k$为常量），在势阱中心附近捕获 1 个带电粒子，其质量和电量分别为M和q. 假设$\dfrac{k}{M}\ll\dfrac{1}{LC}<\dfrac{R^2}{4L^2}$，$t=0$时，粒子位于$z(0)=\dfrac{d}{2}$，受到小扰动沿 z 轴从静止开始运动（已知粒子运动范围偏离势阱中心很小），在电路中产生电流（以逆时针方向为正方向）。

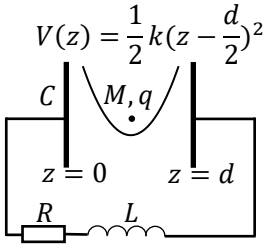


图 5b

（2.1）求在粒子从$z(0)$经足够长时间运动到$z(t)=\mathrm{z}(0)+\delta(t)$（$|\delta|\ll d$）的过程中，电路中流过的电荷量（结果保留至粒子速度的一阶项）。

已知：方程$\dfrac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}t^2}+a\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}+bY=f(t)$（$a$、$b$均为常数）的解为

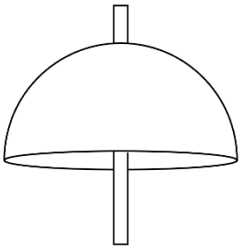
$$Y(t)=e^{-\lambda_2 t}Y(0)+\left[\left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}+\lambda_2 Y(0)\right]\frac{e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int_0^t\left(e^{-\lambda_1(t-\tau)}-e^{-\lambda_2(t-\tau)}\right)f(\tau)\mathrm{d}\tau,\ \text{其中}\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a\\ \lambda_1\lambda_2=b\end{cases}。$$

（2.2）求带电粒子所受到的作用力的表达式（用粒子的速度和题给量表示）。若势阱能稳定地捕获粒子，k应满足什么条件？

六（50 分）. 半球谐振陀螺是一种高精度固态惯性传感器，其核心单元为熔融石英薄半球壳。工作时，谐振子在固有共振模态下被交变电场激发起稳定的驻波；当壳体绕对称轴旋转时，科里奥利力使振动模态发

生耦合，使驻波相对于壳体进动（布莱恩效应）。驻波相对于壳体的进动角速度$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}$与壳体旋转角速度$\boldsymbol{\Omega}$满足：$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}} = k_{\mathrm{B}}\,\boldsymbol{\Omega}$，比例系数$k_{\mathrm{B}}$称为布莱恩系数。

如图 6a，由于薄半球壳的顶点通过细杆固定支撑，而底边为自由端，驻波振幅从顶点到底边逐渐增大，振动能量主要集中在底边开口区域，因此可将薄半球壳近似为无支撑的均质弹性细圆环，且仅考虑圆环在自身平面内的微幅简谐自由振动。已知圆环半径为R，线密度为λ. 如图 6b，取极坐标系，设无振动时圆环上一点的坐标为(R,θ)，其振动的径向位移为$u_r(\theta,t)$（向外为正），切向位移为$u_\theta(\theta,t)$（逆时针为正）。圆环发生微小形变后，该点曲率κ的变化为$\Delta\kappa = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2} + u_r\right)$，单位弧长的弯曲应变能为$\frac{1}{2}k_0(\Delta\kappa)^2$，$k_0$为抗弯刚度. 对于细圆环，仅考虑弯曲振动引起的驻波，此时圆环周长近似保持不变，径向位移u_r与切向位移u_θ满足不可伸长的几何约束：$u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0$。


图 6a

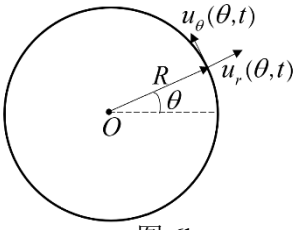


图 6b

符号定义：$u_{r,n}, u_{\theta,n}$分别表示第n阶驻波的径向和切向位移，$u'_{r,n}, u'_{\theta,n}$分别表示第n阶驻波在旋转参照系中的径向和切向位移（n为周向波数，对应沿θ角度的传播，$n \geq 2$）。

（1）求圆环弯曲振动的应变能U和动能T的积分表达式（用$u_r, u_\theta, R, \lambda, k_0$表示）。

（2）求第n阶驻波的固有角频率ω_n的表达式（用n, R, λ, k_0表示）。

（3）如果圆环绕过其中心且垂直于圆环平面的轴以角速度Ω匀速旋转（逆时针为正），在实际工作中，角速度Ω远小于固有角频率ω_n，可忽略离心力的影响。在随环转动的参考系中，科里奥利力使得径向和切向的运动发生耦合。试导出第n阶驻波的单位弧长沿径向和切向的动力学方程（用$u'_{r,n}, u'_{\theta,n}, \omega_n, \Omega$ 表示）。

（4）驻波由顺行波(与Ω同向)和逆行波(与Ω反向)叠加而成，在随环转动的参考系中，顺行波和逆行波因科里奥利力而发生频率分裂。根据第（3）问的动力学方程，求出组成第n阶驻波的两列反向行波的角频率之差$\Delta\omega$的表达式（用n, Ω表示）。

提示：将径向、切向动力学方程分别乘以径向、切向位移$u'_{r,n}$、$u'_{\theta,n}$后相加，并沿环积分，将连续分布的矢量方程变成一个关于行波角频率的标量方程。

（5）根据第（4）问的结果，求出布莱恩系数k_{B}的表达式。半球谐振陀螺通常工作在$n = 2$的四波腹模态，此时k_{B}的值为多少？

七（45 分）. 通过在不同区域配置具有不同热传导性质的材料，可以获得具有新奇传热特性的超构材料。考虑一个二维正方形热传导结构，正方形边长为W，左、右边界分别维持恒定的低温T_{cold}和高温T_{hot}，上下边界绝热。两个同心圆将材料分为 I、II、III 区域，如图 7a 所示。区域 III 为各向同性的背景材料，其热导率为κ_3，温度分布为

$$T_3(r,\theta) = \frac{T_{\mathrm{hot}} - T_{\mathrm{cold}}}{W} r\cos\theta + \frac{T_{\mathrm{hot}} + T_{\mathrm{cold}}}{2}$$

材料满足稳态热传导方程

$$\nabla\cdot(\kappa\nabla T) = 0,$$

其中κ为热导率。

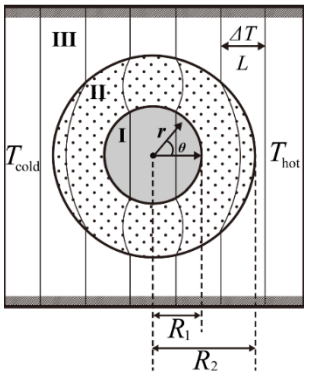


图 7a

（1）在图 7a 中，假设区域 II 中填充了某种径向热导率为κ_{rr}、切向热导率为$\kappa_{\theta\theta}$的各向异性材料，热传导方程在区域 II 的通解可近似为

$$T_2(r,\theta) = (Br^m + Cr^{-m})\cos\theta + (T_{\mathrm{hot}} + T_{\mathrm{cold}})/2$$

其中$m=(\kappa_{\theta\theta}/\kappa_{rr})^{1/2}$。试根据边界条件求解以下两种器件（热传感器、热隐身斗篷）所用的热超构材料的B、C、κ_{rr}和$\kappa_{\theta\theta}$。

（1.1）热传感器：区域 I 和区域 III 的温度分布相同，如图 7a 所示；

（1.2）热隐身斗篷：区域 II 各向同性，区域 I 与区域 II 之间绝热，如图 7b 所示。

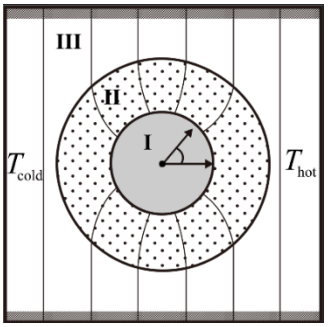


图 7b

（2）第（1.1）问中得到的“热传感器”区域 II 的等温线是弯曲的。可引入如下径向坐标变换将区域 II 等温线“拉直”并与区域 III 的等温线一致：

$$\begin{cases} \text{区域 I：} & r'=r, & r<R_1 \\ \text{区域 II：} & r'=f(r), & R_1<r<R_2 \\ \text{区域 III：} & r'=r, & r>R_2 \end{cases}$$

在新的坐标r'下，区域 II 的等温线恢复为竖直。试写出变换函数$r'=f(r)$的具体表达式。

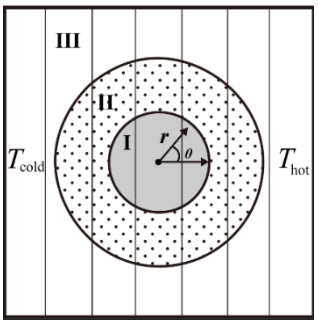


图 7c

（3）根据上述理论探讨，可以寻找新的材料替换原有的区域 II 的材料，使得在r'坐标下等温线处处恢复为竖直，如图 7c 所示。这种新材料应具有特殊的热导率分布使得变换前后的热阻保持不变。求在坐标变换后，新材料径向热导率κ'_{rr}和切向热导率$\kappa'_{\theta\theta}$的表达式（用r, m, κ_{rr}和$\kappa_{\theta\theta}$表示）。

已知：任意一个二维矩形区域（长度为s，宽度为b），如果沿s方向的热导率κ_s为常量，则沿s方向的热阻为$Z_s=\dfrac{s}{\kappa_s b}$.

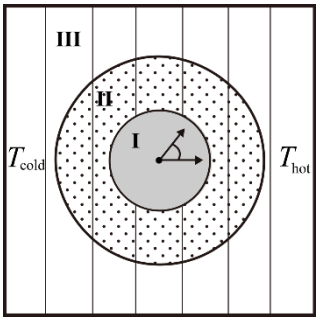


图 7d

（4）根据第（3）问所得结果，若区域 I 界面处热导率趋近于零（例如，区域 I、II 界面处有一极薄的空气层，其热导率远小于两侧介质的热导率），热超构材料会变化为如图 7d 所示的情形。现实可制备的热超材料参数须保持在一定范围内，其中一个重要的参数是材料热导率的各向异性比率$\gamma'=\kappa'_{\theta\theta}/\kappa'_{rr}$. 试求在$\delta\equiv(r'-R_1)\to 0$处，该材料的$\gamma'$随距内边界的距离$\delta$变化的近似表达式，用$R_1$和$\delta$表示。