第 43 届全国中学生物理竞赛复赛试题解答与评分标准

（2026 年 9 月 19 日 9:00-12:00）

一（45 分）.

解法一：基尔霍夫定律联立消元法

取 $V_{\mathrm{B}}=0$，$V_{\mathrm{A}}=V_0$，令 $x=V_{\mathrm{C}}/V_0$，$y=V_{\mathrm{D}}/V_0$。分别由节点 C 和 D 的节点电流方程，并在方程中约去公因子 κV_0^3，得

$$16(1-x)^3=x^3+8(x-y)^3 \qquad ①$$

和

$$16y^3=(1-y)^3+8(x-y)^3, \qquad ②$$

其中①式表示流入节点C的AC支路电流等于流出节点C的CB和CD两支路电流之和；②式表示流出节点D的DB 支路电流等于流入节点 D 的 AD 和 CD 两支路电流之和。

①②两式中都有一项 $8(x-y)^3$。为避免直接展开两个三次方程，先将该项消去。由式①和式②分别解出 $8(x-y)^3$

$$8(x-y)^3=16(1-x)^3-x^3=16y^3-(1-y)^3, \qquad ③$$

引入辅助函数 $F(t)=16(1-t)^3-t^3$。注意到 $F(1-y)=16y^3-(1-y)^3$，于是式③可写为

$$F(x)=F(1-y) \qquad ④$$

$F(t)$对t求导

$$F'(t)=-48(1-t)^2-3t^2<0. \qquad ⑤$$

故F严格单调递减，因此由④式得

$$x=1-y. \qquad ⑥$$

[另解：

观察发现，如果①式的三项和②式的三项之中，对应的项分别相等，则两式均成立，因此必有⑥式成立。这一句话，可以代替③④⑤三式的分析内容 **(*)]**

由x和y的定义，⑥式等价于

$$V_{\mathrm{C}}+V_{\mathrm{D}}=V_0. \qquad ⑦$$

将 $y=1-x$ 代回①式，此时 $x-y=2x-1$，得

$$16(1-x)^3=x^3+8(2x-1)^3. \qquad ⑧$$

展开⑧式并整理得

$$27x^3-48x^2+32x-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-2)(9x^2-10x+4)=0. \qquad ⑨$$

⑨式中二次因子判别式 $\Delta<0$，无实根，故

$$x=\frac{2}{3}. \qquad ⑩$$

联立⑥⑩两式得

$$y=\frac{1}{3}. \qquad ⑪$$

由x和y的定义以及⑩⑪式得

$$V_{\mathrm{C}}=\frac{2V_0}{3},\qquad V_{\mathrm{D}}=\frac{V_0}{3}. \tag{⑫}$$

由⑫式和基尔霍夫回路电压方程，得各支路的电压为

$$V_{\mathrm{AB}}=V_0,\qquad V_{\mathrm{AC}}=\frac{V_0}{3},\qquad V_{\mathrm{AD}}=\frac{2V_0}{3}. \tag{⑬}$$

由伏安特性、题给数据以及⑬式得支路电流

$$I_{\mathrm{AB}}=\frac{\kappa V_0^3}{9},\quad I_{\mathrm{AC}}=\frac{16\kappa V_0^3}{27},\quad I_{\mathrm{AD}}=\frac{8\kappa V_0^3}{27}. \tag{⑭}$$

由点A的节点电流方程得，总电流为

$$I_{总}=I_{\mathrm{AB}}+I_{\mathrm{AC}}+I_{\mathrm{AD}}. \tag{⑮}$$

联立⑭⑮两式得

$$I_{总}=\frac{3+16+8}{27}\kappa V_0^3=\kappa V_0^3. \tag{⑯}$$

由电阻的定义

$$R_{\mathrm{eq}}(V_0)=\frac{V_0}{I_{总}}. \tag{⑰}$$

⑯式代入⑰式得

$$R_{\mathrm{eq}}(V_0)=\frac{1}{\kappa V_0^2}. \tag{⑱}$$

等效电阻R_{eq}是V_0的函数，与V_0^2成反比。

解法二：对称性法

定义对调操作σ：$\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}$，$\mathrm{C}\leftrightarrow\mathrm{D}$。在该操作下，各支路（及其非线性系数）对应为

$$\mathrm{AC}\leftrightarrow\mathrm{BD}\ (16\kappa=16\kappa),\quad \mathrm{AD}\leftrightarrow\mathrm{BC}\ (\kappa=\kappa),\quad \mathrm{AB}\leftrightarrow\mathrm{AB}(\kappa/9),\quad \mathrm{CD}\leftrightarrow\mathrm{CD}(8\kappa) \tag{①′}$$

故网络系数在σ操作下不变。

设电势场为

$$\{V_{\mathrm{A}},V_{\mathrm{B}},V_{\mathrm{C}},V_{\mathrm{D}}\}=\{V_0,0,V_{\mathrm{C}},V_{\mathrm{D}}\}. \tag{②′}$$

构造如下复合操作：

第一步：节点对调。按σ操作交换节点，即 $\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{B}$，$\mathrm{C}\leftrightarrow\mathrm{D}$。由于①式中对调前后网络系数不变；电势场变为 $\{0,V_0,V_{\mathrm{D}},V_{\mathrm{C}}\}$，对调后端口电压变为 $-V_0$。

第二步：电源反接。将所有节点电势取负，得$\{0,-V_0,-V_{\mathrm{D}},-V_{\mathrm{C}}\}$。由于 $I=c_{ij}V^3$ 为奇函数，支路电压反号时各支路电流也反号，节点电流方程仍成立。

第三步：电势平移。将所有节点电势整体加V_0，得$\{V_0,0,V_0-V_{\mathrm{D}},V_0-V_{\mathrm{C}}\}$。整体平移不改变任意支路电压，因此不改变支路电流和节点电流方程，但使端口边界恢复为 $V_{\mathrm{A}}=V_0$，$V_{\mathrm{B}}=0$。

上述操作过程电势改变为

$$\{V_0,0,V_{\mathrm{C}},V_{\mathrm{D}}\}=>\{0,V_0,V_{\mathrm{D}},V_{\mathrm{C}}\}=>\{0,-V_0,-V_{\mathrm{D}},-V_{\mathrm{C}}\}=>\{V_0,\ 0,\ V_0-V_{\mathrm{D}},\ V_0-V_{\mathrm{C}}\}. \tag{③′}$$

三步操作完成后，末态与初态具有相同的网络系数、相同的伏安关系和相同的端口电压，因此末态也是同一网络在同一电源下的合理解。又因 $c_{ij}>0$，$I=c_{ij}V^3$ 严格单调增，给定端口电压时解是唯一的，故③′式中初、末两个状态电势场必须一样，即得

$$V_{\mathrm{C}} = V_0 - V_{\mathrm{D}} \text{ 及 } V_{\mathrm{D}} = V_0 - V_{\mathrm{C}}. \qquad ④'$$

将④′式代入节点C的节点电流方程中；此时 $V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}} = 2V_{\mathrm{C}} - V_0$；代入题给数据，公因子 κ 约去，得

$$16(V_0 - V_{\mathrm{C}})^3 = V_{\mathrm{C}}^3 + 8(2V_{\mathrm{C}} - V_0)^3. \qquad ⑤'$$

令$x = V_{\mathrm{C}}/V_0$，将⑤′式展开整理得

$$27x^3 - 48x^2 + 32x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-2)(9x^2 - 10x + 4) = 0. \qquad ⑥'$$

⑥′式中二次因子的判别式 $\Delta < 0$，无实根，故

$$x = \frac{2}{3}. \qquad ⑦'$$

由x的定义及④′和⑦′式得

$$V_{\mathrm{C}} = \frac{2V_0}{3}, \qquad V_{\mathrm{D}} = \frac{V_0}{3}. \qquad ⑧'$$

由⑧式和基尔霍夫回路电压方程得，各支路的电压为

$$V_{\mathrm{AB}} = V_0, \qquad V_{\mathrm{AC}} = \frac{V_0}{3}, \qquad V_{\mathrm{AD}} = \frac{2V_0}{3}. \qquad ⑨'$$

由伏安特性、题给数据以及⑨′式得，支路电流

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{\kappa V_0^3}{9}, \quad I_{\mathrm{AC}} = \frac{16\kappa V_0^3}{27}, \quad I_{\mathrm{AD}} = \frac{8\kappa V_0^3}{27}. \qquad ⑩'$$

由点A的节点电流方程得，总电流为

$$I_{\text{总}} = I_{\mathrm{AB}} + I_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{AD}}. \qquad ⑪'$$

联立⑩′⑪′两式得

$$I_{\text{总}} = \frac{3 + 16 + 8}{27}\kappa V_0^3 = \kappa V_0^3. \qquad ⑫'$$

由定义

$$R_{\mathrm{eq}}(V_0) = \frac{V_0}{I_{\text{总}}}. \qquad ⑬'$$

⑫′式代入⑬′式得

$$R_{\mathrm{eq}}(V_0) = \frac{1}{\kappa V_0^2}. \qquad ⑭'$$

评分标准：本题 45 分。

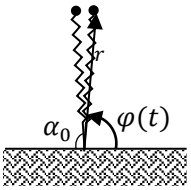
解法一：

①②式各 3 分，③④⑤式各 2 分[或(*)6 分]，⑥式 3 分，⑦式 2 分，⑧⑨式各 3 分，⑩⑪⑫式 2 分，⑬⑭⑮式各 3 分，⑯⑰式各 2 分，⑱式 3 分。

解法二：

①’式 5 分，②’式 2 分，③’式 9 分，④’⑤’⑥’式各 3 分，⑦’式 2 分，⑧’式 2 分，⑨’⑩’⑪’式各 3 分，⑫’⑬’式各 2 分，⑭’式 3 分。

二（45 分）.



题解图 2a

（1）如题解图 2a，以腿和地面的接触点为极点，水平向右为极轴正向，逆时针方向为极角的正方向建立极坐标系。设此过程中 t 时刻弹簧腿的长度为$r(t)$，弹簧腿和水平面的极角记为$\varphi(t)$。

由胡克定律知，质点受到径向的弹簧力为

$$F=-k(r-l_0). \qquad ①$$

由牛顿第二定律知，质点的径向和角向加速度和受力分别满足

$$m\ddot{r}=F+mr\dot{\varphi}^2-mg\sin\varphi, \qquad ②$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}=-mg\cos\varphi. \qquad ③$$

由①②③式，结合题意$\varphi(t)\approx 90^\circ$，$\sin\varphi\approx 1,\cos\varphi\approx 0$知

$$m\ddot{r}=k(l_0-r)+mr\dot{\varphi}^2-mg, \qquad ④$$

$$\frac{\mathrm{d}(mr^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}=0. \qquad ⑤$$

由⑤式得，质点绕转的角动量$L\equiv mr^2\dot{\varphi}$近似为守恒量，即

$$mr^2\dot{\varphi}=ml_0^2\omega. \qquad ⑥$$

由④⑥式得

$$m\ddot{r}=k(l_0-r)+\frac{ml_0^4\omega^2}{r^3}-mg. \qquad ⑦$$

由题意“弹簧腿长度变化量远远小于其自由长度l_0”知

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{{l_0}^3(1+\dfrac{r-l_0}{l_0})^3}\approx\frac{1}{{l_0}^3}(1-3\frac{r-l_0}{l_0}). \qquad ⑧$$

由⑦⑧式得

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=-(\omega_0^2+3\omega^2)r+(\omega_0^2+4\omega^2-\nu^2)l_0,\ \text{其中}\ \ \omega_0=\sqrt{k/m}\ ,\ \ \nu=\sqrt{g/l_0}. \qquad ⑨$$

在⑨式中做变量变换

$$\xi=r-\frac{\omega_0^2+4\omega^2-\nu^2}{\omega_0^2+3\omega^2}l_0 \qquad ⑩$$

得

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}=-(\omega_0^2+3\omega^2)\xi. \qquad ⑪$$

由⑪式可知ξ即r方向做简谐运动，其解用原变量r可表示为

$$r(t)=C_1\cos(\Omega t)+C_2\sin(\Omega t)+\frac{\omega_0^2+4\omega^2-\nu^2}{\omega_0^2+3\omega^2}l_0,\quad \text{其中}\quad \Omega=\sqrt{\omega_0^2+3\omega^2}. \qquad ⑫$$

由系统的总动能为E知，初始时

$$E=\frac{m}{2}\dot{r}(0)^2+\frac{m}{2}l_0^2\omega^2+mgl_0\sin\alpha_0. \qquad ⑬$$

由⑬式及近似$\alpha_0\approx 90°$，并舍去不合理的解得初始条件

$$\dot{r}(0)=-l_0\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}\ ，其中\ \ \tilde{\omega}=\sqrt{E/(ml_0^2/2)}\ . \qquad ⑭$$

另由题意得另外一个初始条件

$$r(0)=l_0. \qquad ⑮$$

由⑫⑭⑮式得

$$r(t)=l_0[1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\Omega^2}(1-\cos\Omega t)-\frac{\sqrt{(\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2)}}{\Omega}\sin\Omega t]. \qquad ⑯$$

弹簧腿离地时的长度满足

$$r(t')=l_0. \qquad ⑰$$

由⑯⑰式并去掉平凡解得

$$t'=\frac{2}{\Omega}\arctan\frac{\Omega\sqrt{(\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2)}}{(\omega^2-\nu^2)} \qquad ⑱$$

【

$$t'=\frac{\pi-2\arcsin\dfrac{\omega^2-\nu^2}{\sqrt{(\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2)\Omega^2+(\omega^2-\nu^2)^2}}}{\Omega} \qquad ⑱'$$

】

（2）按定义，从着地到离地过程中弹簧腿转过的角度为

$$\Delta\varphi=\int_0^{t'}\dot{\varphi}dt. \qquad ⑲$$

由⑥⑲式得

$$\Delta\varphi=\int_0^{t'}\frac{\omega}{(1+\dfrac{r-l_0}{l_0})^2}dt. \qquad ⑳$$

由题意得

$$\frac{1}{(1+\dfrac{r-l_0}{l_0})^2}\approx 1-2\frac{r-l_0}{l_0}. \qquad ㉑$$

由⑯⑱⑳㉑得

$$\Delta\varphi=\frac{2\omega}{\Omega^3}\left((\Omega^2+2\nu^2-2\omega^2)\arctan\left[\frac{\Omega\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}}{\omega^2-\nu^2}\right]+2\Omega\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}\right) \qquad ㉒$$

其中ν、Ω、$\tilde{\omega}$分别在⑨、⑫和⑭式末尾表出。

（2）按定义，从着地到离地过程中弹簧腿转过的角度为

$$\Delta\varphi=\int_0^{t'}\dot{\varphi}dt\,. \qquad ⑲$$

由⑥⑲式得

$$\Delta\varphi=\int_0^{t'}\frac{\omega}{(1+\frac{r-l_0}{l_0})^2}dt\,. \qquad ⑳$$

由题意得

$$\frac{1}{(1+\frac{r-l_0}{l_0})^2}\approx 1-2\frac{r-l_0}{l_0}\,. \qquad ㉑$$

由⑯⑱⑳㉑得

$$\Delta\varphi=\frac{2\omega}{\Omega^3}\left((\Omega^2+2\nu^2-2\omega^2)\arctan\left[\frac{\Omega\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}}{\omega^2-\nu^2}\right]+2\Omega\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}\right) \qquad ㉒$$

【

$$\Delta\varphi=\frac{2\omega}{\Omega^3}\left\{[\Omega^2+2\nu^2-2\omega^2]\arccos\frac{\omega^2-\nu^2}{\sqrt{(\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2)\Omega^2+(\omega^2-\nu^2)^2}}+2\Omega\sqrt{\tilde{\omega}^2-2\nu^2-\omega^2}\right\} \qquad ㉒'$$

】

评分标准：本题 45 分。

第（1）问 36 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱式各 2 分；

第（2）问 9 分，⑲⑳㉑各 2 分，㉒式 3 分（此式只要求其绝对值，正负都可）。

三（45 分）.

令

$$m_x=m\sin\theta,\qquad m_z=m\cos\theta,$$

则有

$$\boldsymbol{m}=m_x\hat{\boldsymbol{x}}+m_z\hat{\boldsymbol{z}}. \qquad ①$$

（1）求镜像磁偶极子的磁矩

（1.1）$z<0$ 区域为理想超导体

理想超导体内部 $\boldsymbol{B}=0$。由磁场边界条件，界面两侧磁感应强度法向分量连续，可知真空侧界面上各处总的磁感应强度的法向（沿z轴正方向）分量

$$B_z(x,y,0^+)=0. \qquad ②$$

在界面任取一点 $P(x,y,0)$，记

$$\rho^2=x^2+y^2,\qquad R^2=\rho^2+h^2.$$

对位于 $(0,0,h)$处的真实磁偶极子，由题给磁偶极子磁感应强度公式计算其在 $P(x,y,0)$ 点产生的磁感应强度的法向分量，得

$$B_z^h = \frac{\mu_0}{4\pi R^5}[-3hm_x x + m_z(2h^2 - \rho^2)]. \quad ③$$

③式推导过程中用到了自$(0,0,h)$点到$P(x,y,0)$点的位矢

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} - h\hat{\boldsymbol{z}}.$$

其中$\hat{\boldsymbol{y}}$是沿 y 轴正方向的单位矢量，方向垂直于纸面向内。

设待求镜像磁矩为

$$\boldsymbol{m}_S = m_{Sx}\hat{\boldsymbol{x}} + m_{Sz}\hat{\boldsymbol{z}}. \quad ④$$

镜像磁矩位于 $(0,0,-h)$，由题给公式可得，其在 P 点产生的磁感应强度的法向分量为

$$B_z^S = \frac{\mu_0}{4\pi R^5}[3hm_{Sx}x + m_{Sz}(2h^2 - \rho^2)]. \quad ⑤$$

⑤式推导过程中用到了自$(0,0,-h)$点到$P(x,y,0)$点的位矢

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + h\hat{\boldsymbol{z}}.$$

真实磁偶极子和镜像磁偶极子产生的总的磁感应强度的法向分量

$$B_z = B_z^h + B_z^S. \quad ⑥$$

联立②⑥二式得

$$B_z^h + B_z^S = 0. \quad ⑦$$

⑦式对所有 (x,y) 成立，③⑤二式代入⑦式得

$$3h(m_{Sx} - m_x)x + (m_{Sz} + m_z)(2h^2 - \rho^2) = 0. \quad ⑧$$

由于 x 与 $2h^2 - \rho^2$ 不能恒成比例，上式对任意 x, y 成立的唯一可能是两项系数分别为零，即

$$m_{Sx} = m_x, \qquad m_{Sz} = -m_z. \quad ⑨$$

⑨式代入④式，得超导体的镜像磁矩为

$$\boldsymbol{m}_S = m\sin\theta\ \hat{\boldsymbol{x}} - m\cos\theta\ \hat{\boldsymbol{z}}. \quad ⑩$$

$\boldsymbol{m}_S$与$\boldsymbol{m}$相比，在x轴方向的分量相等，而在z轴方向的分量等大反向。

（1.2）$z < 0$ 区域为 $\mu \to \infty$ 的理想软铁

当 $\mu \to \infty$ 时，软铁内部 $\boldsymbol{H} \to 0$。界面无传导电流，故界面两侧切向 $\boldsymbol{H}$ 连续，于是真空侧界面沿x方向的切向磁感应强度

$$B_x(x,y,0^+) = 0. \quad ⑪$$

仍考察界面上的点 $P(x,y,0)$。由题给公式得，$(0,0,h)$处的真实磁偶极子在 P 点产生的磁感应强度的 x 分量为

$$B_x^h = \frac{\mu_0}{4\pi R^5}[3x(m_x x - m_z h) - m_x R^2]. \quad ⑫$$

设待求软铁镜像磁矩为

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{I}} = m_{\mathrm{I}x}\hat{\boldsymbol{x}} + m_{\mathrm{I}z}\hat{\boldsymbol{z}}. \quad ⑬$$

其在 P 点产生的磁感应强度的 x 分量为

$$B_x^{\mathrm{I}} = \frac{\mu_0}{4\pi R^5}[3x(m_{\mathrm{I}x}x + m_{\mathrm{I}z}h) - m_{\mathrm{I}x}R^2]. \quad ⑭$$

真实磁偶极子和镜像磁偶极子产生的总的磁感应强度沿x方向的分量为

$$B_x = B_x^h + B_x^{\mathrm{I}}. \quad ⑮$$

联立⑪⑮式得

$$B_x^h + B_x^{\mathrm{I}} = 0. \tag{16}$$

⑯式对所有 (x, y) 成立，将⑫⑭二式代入⑯式得

$$3(m_x + m_{\mathrm{I}x})x^2 + 3h(m_{\mathrm{I}z} - m_z)x - (m_x + m_{\mathrm{I}x})R^2 = 0. \tag{17}$$

⑰式对任意 x, y 成立,由此可得

$$m_{\mathrm{I}x} = -m_x, \qquad m_{\mathrm{I}z} = m_z. \tag{18}$$

将⑱式代入⑬式，考虑到 $m_x = m\sin\theta$, $m_z = m\cos\theta$，得软铁的镜像磁矩为

$$\boldsymbol{m}_{\mathrm{I}} = -m\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{x}} + m\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{z}}. \tag{19}$$

$\boldsymbol{m}_{\mathrm{I}}$与$\boldsymbol{m}$相比，在$x$轴方向的分量等大反向，而在$z$轴方向的分量相等。

（2）镜像场使真实磁矩受到力矩

镜像磁矩位于 $(0,0,-h)$，真实磁矩位于 $(0,0,h)$。从镜像磁矩指向真实磁矩的单位矢量为 $\hat{\boldsymbol{z}}$，二者间距离为 $2h$。设镜像磁矩为 $\boldsymbol{m}'$，根据题给磁感应强度公式，得其在$(0,0,h)$点处产生的磁场的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{im}} = \frac{\mu_0}{4\pi(2h)^3}[3(\boldsymbol{m}'\cdot\hat{\boldsymbol{z}})\hat{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{m}']. \tag{20}$$

为书写简洁，令

$$C = \frac{\mu_0}{32\pi h^3}.$$

（2.1）超导体情形：

由⑩式，此时

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}_S = m_x\hat{\boldsymbol{x}} - m_z\hat{\boldsymbol{z}}.$$

上式代入⑳式，得镜像磁矩在$(0,0,h)$处的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{im}} = \boldsymbol{B}_S = -C(m_x\hat{\boldsymbol{x}} + 2m_z\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{21}$$

磁偶极子$\boldsymbol{m}$受到的力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_S = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_S\,. \tag{22}$$

将①式和㉑式代入㉒式得

$$\boldsymbol{\tau}_S = Cm_xm_z\hat{\boldsymbol{y}}.$$

将$C = \frac{\mu_0}{32\pi h^3}$, $m_x = m\sin\theta$，$m_z = m\cos\theta$ 代入上式得

$$\boldsymbol{\tau}_S = \frac{\mu_0 m^2}{32\pi h^3}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{23}$$

（2.2）软铁情形：

由⑲式，此时

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}_{\mathrm{I}} = -m_x\hat{\boldsymbol{x}} + m_z\hat{\boldsymbol{z}}.$$

上式代入⑳式，得镜像磁矩在$(0,0,h)$处的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{im}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}} = C(m_x\hat{\boldsymbol{x}} + 2m_z\hat{\boldsymbol{z}}). \tag{24}$$

磁偶极子$\boldsymbol{m}$受到的力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\,.$$

将①式和㉔式代入上式得

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{I}} = -Cm_xm_z\hat{\boldsymbol{y}}.$$

将$C = \frac{\mu_0}{32\pi h^3}$, $m_x = m\sin\theta$，$m_z = m\cos\theta$ 代入上式，得磁偶极子$\boldsymbol{m}$受到的力矩

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{I}} = -\frac{\mu_0 m^2}{32\pi h^3}\sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{y}}. \qquad ㉕$$

（3）磁矩的稳定取向

解法一：由力矩平衡及其稳定性判断

记 $A = \mu_0 m^2/(32\pi h^3) > 0$。由㉓式和㉕式得

$$\tau_{\mathrm{S}} = A\sin\theta\cos\theta, \qquad \tau_{\mathrm{I}} = -A\sin\theta\cos\theta. \qquad ㉖$$

力矩为零，对应平衡位置。由

$$\sin\theta\cos\theta = 0$$

得到 4 个平衡位置

$$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}. \qquad ㉗$$

稳定平衡，需要在偏离平衡位置后会受到回复力矩，即

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\theta} < 0. \qquad ㉘$$

㉖式力矩对θ求导得

$$\frac{\mathrm{d}\tau_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}\theta} = A\cos 2\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}\tau_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}\theta} = -A\cos 2\theta.$$

由上式以及㉗㉘式得以下结果：

（3.1）超导体情形：有两个稳定平衡位置

$$\theta_{\mathrm{S}} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \qquad ㉙$$

即最终稳定取向为磁矩平行于界面。

考虑到本题的介质具有左右对称性，可约定 $0 \le \theta \le \pi$，只写$\theta_{\mathrm{S}} = \frac{\pi}{2}$ 也是正确的。

（3.2）软铁情形：有两个稳定平衡位置

$$\theta_{\mathrm{I}} = 0,\ \ \pi \qquad ㉚$$

即最终稳定取向为磁矩垂直于界面。

解法二：由势能最低原理判断

镜像磁场是由真实磁矩感应出的场，因此取向势能

$$U = -\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{im}}. \qquad ㉖'$$

微弱阻尼会使系统能量逐渐耗散，最终趋向势能最低。

（3.1）超导体情形：

将题给$\boldsymbol{m}$及㉑式代入㉖′式得

$$U_{\mathrm{S}} = \frac{\mu_0 m^2}{64\pi h^3}(1+\cos^2\theta). \qquad ㉗'$$

U_{S} 取最低值，要求

$$\cos^2\theta = 0, \qquad ㉘'$$

得

$$\theta_{\mathrm{S}}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}, \tag{29}$$

即最终稳定取向为磁矩平行于界面。

考虑到本题的介质具有左右对称性，可约定 $0\le\theta\le\pi$，只写$\theta_{\mathrm{S}}=\frac{\pi}{2}$ 也是正确的。

（3.2）软铁情形：

将题给$\boldsymbol{m}$及㉔式代入㉖′式得

$$U_{\mathrm{I}}=-\frac{\mu_0 m^2}{64\pi h^3}(1+\cos^2\theta),$$

U_{I}取最低值，要求 $\cos^2\theta=1$，得

$$\theta_{\mathrm{I}}=0,\quad \pi \tag{30}$$

即最终稳定取向为磁矩垂直于界面。

评分标准：本题 45 分。

第（1）问 22 分，②式 3 分，③⑤式各 2 分，⑥⑧⑨式各 1 分，⑩式 2 分，⑪式 3 分，⑫式 1 分，⑭式 2 分，⑰⑱式各 1 分，⑲式 2 分；

第（2）问 13 分，⑳㉑式各 2 分，㉒式 3 分，㉓㉔㉕式各 2 分；

第（3）问 10 分，㉖[或㉖′]式 1 分，㉗[或㉗′]式 2 分，㉘[或㉘′]式 3 分，㉙㉚式各 2 分。

四（50 分）.

（1.1）由题意知，初始圆轨道半径 $r_0=R_{\mathrm{E}}+h_0=6.77\times10^6\ \mathrm{m}$，系统总质量$M=m_1+m_2=500\ \mathrm{kg}$。由万有引力定律、牛顿第二定律和圆周运动规律得

$$\frac{Mv_0{}^2}{r_0}=\frac{GMM_{\mathrm{E}}}{r_0{}^2}, \tag{①}$$

$$\Omega_0=\frac{v_0}{r_0}, \tag{②}$$

由①②式得

$$v_0=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{E}}}{r_0}}, \tag{③}$$

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{E}}}{r_0{}^3}}, \tag{④}$$

由③④式和题给数据得

$$v_0\approx 7.67\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}, \tag{⑤}$$

$$\Omega_0\approx 1.13\times10^{-3}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}. \tag{⑥}$$

（1.2）由于绳索沿$-\hat{\boldsymbol{r}}$，绳索速度$\boldsymbol{v}$ 沿圆周运动轨道方向$\hat{\boldsymbol{\phi}}$，$\boldsymbol{B}$ 垂直于轨道平面，三者两两正交。由于与轨道半径绳索长度可忽略，故绳索不同位置处速度差异可忽略，绳索切割磁力线产生动生电动势大小$\mathcal{E}$为

$$\mathcal{E} = BLv_0\,, \tag{7}$$

由欧姆定律得

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_\mathrm{t}}, \tag{8}$$

由⑦⑧式得

$$I = \frac{BLv_0}{R_\mathrm{t}}, \tag{9}$$

由⑤⑨式和题给数据得

$$I \approx 5.75\ \mathrm{A}\,, \tag{10}$$

由直流电功率公式得

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_\mathrm{t}}, \tag{11}$$

由⑦⑪式得

$$P = \frac{B^2L^2v_0^2}{R_\mathrm{t}}, \tag{12}$$

由⑤⑫式和题给数据得

$$P \approx 6.62\ \mathrm{kW}. \tag{13}$$

（1.3）设系统距离地面高度为h，距离地心为r时圆轨道速度为v，由万有引力和牛顿第二定律有

$$Mv^2 = \frac{GMM_\mathrm{E}}{r}, \tag{14}$$

系统总机械能 E 为

$$E = -\frac{GMM_\mathrm{E}}{r} + \frac{Mv^2}{2}, \tag{15}$$

由⑭⑮式得

$$E = -\frac{GMM_\mathrm{E}}{2r}, \tag{16}$$

由能量守恒得

$$\frac{dE}{dt}|_{r=r_0} = -P, \tag{17}$$

由⑯⑰式及关系$r = R_\mathrm{E} + h$得

$$\frac{dh}{dt}|_{h=h_0} = -\frac{2P\,{r_0}^2}{GMM_\mathrm{E}}, \tag{18}$$

由⑬⑱式和题给数据得

$$\frac{dh}{dt}|_{h=h_0} \approx -3.04\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \tag{19}$$

初始时，卫星轨道周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}, \tag{20}$$

故绕轨道一圈后卫星高度变化Δh近似为

$$\Delta h = T_0\frac{dh}{dt}|_{h=h_0}, \tag{21}$$

由⑥⑲⑳㉑得

$$\Delta h \approx -16.9\ \mathrm{km}. \tag{22}$$

（2）

（2.1）设质心距离地心为r。在随轨道转动的参考系中，取坐标原点在质心处，轨道方向记为 $\hat{\boldsymbol{\phi}}$方向，径向向外记为$\hat{\boldsymbol{r}}$方向，方向$\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{\phi}}\times\hat{\boldsymbol{r}}$.

由题意知绳索方向（从接触器指向卫星）单位矢量为

$$\boldsymbol{n}=\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}}+\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{23}$$

设卫星相对质心的位置为$\boldsymbol{r}_1=l_1\boldsymbol{n}$, 接触器相对质心的位置为$\boldsymbol{r}_2=-l_2\boldsymbol{n}$。由质心定义，有

$$m_1l_1=m_2l_2, \tag{24}$$

由几何关系有

$$l_1+l_2=L, \tag{25}$$

由㉔㉕式得

$$l_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}L,\qquad l_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}L, \tag{26}$$

由万有引力和离心力公式得，作用在 m_1上的合力和m_2上的合力分别为

$$\boldsymbol{F}_1=m_1\left[\Omega_0^2(r_0+l_1\cos\theta)-\frac{GM_{\mathrm{E}}}{(r_0+l_1\cos\theta)^2}\right]\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{27}$$

$$\boldsymbol{F}_2=m_2\left[\Omega_0^2(r_0-l_2\cos\theta)-\frac{GM_{\mathrm{E}}}{(r_0-l_2\cos\theta)^2}\right]\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{28}$$

由④㉗㉘式及题意$\{l_1,l_2\}<L<<r_0$,使用近似$\frac{1}{1+x}\approx1-x(x\ll1)$得

$$\boldsymbol{F}_1\approx3m_1\Omega_0^2\,l_1\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{F}_2\approx-3m_2\Omega_0^2\,l_2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{30}$$

由㉖㉙㉚式知，准确到 $\frac{L}{r_0}$的一阶，质心所受合力为

$$\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2\approx0, \tag{31}$$

相对于质心参考系，外力作用于系统上的总力矩为

$$\boldsymbol{\tau}=l_1\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}_1-l_2\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}_2, \tag{32}$$

由系统角动量定理得

$$-(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{\tau}, \tag{33}$$

由㉓㉖㉙㉚㉜㉝式得

$$\ddot{\theta}\approx-3\Omega_0^2\cos\theta\sin\theta, \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\tau}=3(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\Omega_0^2\cos\theta\sin\theta\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{35}$$

当偏角θ很小时，㉞式简化为

$$\ddot{\theta}\approx-3\Omega_0^2\,\theta, \tag{36}$$

此为简谐振动方程，θ变化的角频率为

$$\omega_1=\sqrt{3}\Omega_0, \tag{37}$$

(2.2) 此时系统速度为$\boldsymbol{v}=v_0\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$，磁场为$\boldsymbol{B}=B\,\hat{\boldsymbol{z}}$，从而 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}=-v_0B\hat{\boldsymbol{r}}$。绳索上线元$d\boldsymbol{l}=dl\,\boldsymbol{n}$。所以动生电动势大小为

$$\mathcal{E}(\theta)=\int_{-l_2}^{l_1}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{l}=-v_0BL\cos\theta, \tag{38}$$

负号表示电势沿绳索从接触器到卫星是降低的。由欧姆定律，此时绳索内由接触器流向卫星的电流强度为

$$I(\theta)=+\frac{\mathcal{E}(\theta)}{R_{\mathrm{t}}}, \tag{39}$$

系统受到的洛伦兹力为

$$\boldsymbol{F}_L(\theta)=F_r(\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}}+F_\phi(\theta)\hat{\boldsymbol{\phi}}=I(\theta)L\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}, \tag{40}$$

由㉓㊳㊴㊵式得

$$F_{\phi}(\theta) = -\frac{B^2L^2\,v_0}{R_{\mathrm{t}}}\cos^2\theta, \tag{41}$$

$$F_{r}(\theta) = \frac{B^2L^2\,v_0}{R_{\mathrm{t}}}\cos\theta\sin\theta\,. \tag{42}$$

(2.3)单位长度绳索受到洛伦兹力为

$$\boldsymbol{f}_L(\theta) = \frac{\boldsymbol{F}_L(\theta)}{L}, \tag{43}$$

在质心参考系中，系统受到的洛伦兹力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_L = \int_{-l_2}^{l_1} dl\; l\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{f}_L(\theta), \tag{44}$$

由②㉟㊶㊷㊸㊹式得

$$\boldsymbol{\tau}_L = -\frac{\Omega_0 r_0 B^2L^3\cos\theta}{2M^2R_{\mathrm{t}}}(m_1^2-m_2^2)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{45}$$

由㉟㊺式得系统受到的总力矩为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tot}} = \boldsymbol{\tau}_L + \boldsymbol{\tau} = \left[3(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\Omega_0^2\cos\theta\sin\theta - \frac{\Omega_0 r_0 B^2L^3\cos\theta}{2M^2R_{\mathrm{t}}}(m_1^2-m_2^2)\right]\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{46}$$

由㊻式及平衡角度条件$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tot}}=\boldsymbol{0}$及$\theta$允许的范围得，新的平衡偏角

$$\theta_{\mathrm{eq}} = \arcsin\left[\frac{r_0B^2L}{6MR_{\mathrm{t}}\Omega_0}\left(\frac{m_1}{m_2}-\frac{m_2}{m_1}\right)\right], \tag{47}$$

由⑥㊼式及题给数据得

$$\theta_{\mathrm{eq}} \approx 23.5°, \tag{48}$$

将㊻式在$\theta=\theta_{\mathrm{eq}}$上展开得

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tot}} \approx 3(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\Omega_0^2\cos^2\theta_{\mathrm{eq}}\left(\theta-\theta_{\mathrm{eq}}\right)\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{49}$$

可知当θ偏离θ_{eq}时，此力矩会试图将角度拉回平衡位置，此平衡位置是稳定的。 (*)

此时，由角动量定理得

$$-(m_1l_1^2+m_2l_2^2)\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{z}} \approx \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{tot}}\,, \tag{50}$$

结合㊾㊿式可得，θ的运动满足简谐振动方程，简谐振动得角频率为

$$\omega_2 = \sqrt{3}\Omega_0\cos\theta_{\mathrm{eq}}\,, \tag{51}$$

由⑥㊽51式得

$$\omega_2 = 1.80\times10^{-3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}. \tag{52}$$

评分标准：本题 50 分。

第（1）问 21 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑮⑯⑰⑱⑲⑳㉑㉒式各 1 分；

第（2）问 29 分，㉔㉕㉖㉗㉘㉙㉚㉜㉝㉞㉟㊱㊲㊳㊴㊵㊶㊷㊸㊹㊺㊻㊼㊽㊾(*)㊿51 52各 1 分。

五（45 分）.

（1）

（1.1）

由浮力定律与力平衡条件得

$$\rho_0 g \cdot 2ahL = \rho g \cdot 4abL, \qquad ①$$

由①式得

$$h = \frac{2\rho}{\rho_0} b, \qquad ②$$

（1.2）平衡时，取木块重心G为坐标系的原点

$$x_{\mathrm{G}} = y_{\mathrm{G}} = 0. \qquad ③$$

x轴沿横截面的宽度方向，y轴沿高度方向。平衡时排水横截面几何中心坐标（即浮心 B）为

$$x_{\mathrm{B}} = 0, \quad y_{\mathrm{B}} = -b + \frac{h}{2}, \qquad ④$$

木块平衡时的浮心 B 到木块重心 G 的距离为

$$y_{\mathrm{G}} - y_{\mathrm{B}} = b - \frac{h}{2} = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) b, \qquad ⑤$$

（2）

（2.1）

木块转过微小角θ后，液面在实验室系中保持水平；在随体坐标系中，水平液面相对木块反方向倾斜了θ，故水平液面方程形式为

$$y = c + x\tan\theta. \qquad ⑥$$

式中c为待定常量。浮力在倾斜前后都等于重力，故排除液体的横截面积S保持不变，仍为

$$A = 2ah. \qquad ⑦$$

排除液体的横截面的底边即木块的底边，其在随体坐标系中的方程为

$$y = -b. \qquad ⑧$$

由⑥⑧式得到水平液面、木块底边以及左右边围成的横截面积

$$A = \int_{-a}^{a} (y + b)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} [(c + x\tan\theta) - (-b)]\mathrm{d}x = 2a(b + c). \qquad ⑨$$

由⑦⑨式得

$$c = h - b, \qquad ⑩$$

由②⑥⑩式得，液面在随体坐标系中的方程为

$$y = -(b - h) + x\tan\theta = -\left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right) b + x\tan\theta. \qquad ⑪$$

（2.2）

重心即各个质量微元的坐标以质量为权重的加权平均。对坐标x处，可构造一高为$H(x)$、宽为$\mathrm{d}x$的沿 y 方向的微条元计算其对浮心B′的坐标贡献。（*1）

坐标x处的微条元高$H(x)$为

$$H(x) = [-(b - h) + x\tan\theta] - (-b), \qquad ⑫$$

浮心B′在随体坐标系中的x坐标为

$$x_{\mathrm{B}'} = \frac{1}{A}\int_{-a}^{a} xH(x)dx, \qquad ⑬$$

由⑫⑬式得，

$$x_{\mathrm{B}'} = \frac{1}{2ah}\int_{-a}^{a} x(h + x\tan\theta)dx = \frac{1}{2ah} \cdot \tan\theta \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{a^2}{3h}\tan\theta. \qquad ⑭$$

坐标x处竖条微元的y坐标为

$$y(x) = -b + \frac{H(x)}{2}. \qquad ⑮$$

由⑮式，浮心B′在随体坐标系中的y坐标为

$$y_{B'}=\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}y(x)H(x)dx=\frac{1}{A}(-b)\int_{-a}^{a}H(x)dx+\frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}H(x)\cdot H(x)dx. \quad ⑯$$

由②⑫⑯式，

$$y_{B'}=\frac{1}{A}(-b)\int_{-a}^{a}(h+x\tan\theta)dx+\frac{1}{2A}\int_{-a}^{a}(h^2+2x\tan\theta+x^2\tan^2\theta)dx$$

$$=-b+\frac{h}{2}+\frac{a^2}{6h}\tan^2\theta. \quad ⑰$$

在小角度θ的一阶近似下，

$$\tan\theta=\theta+O(\theta^2).$$

由②式，⑭⑰式成为

$$x_{B'}=\frac{1}{2ah}\cdot\theta\cdot\frac{2a^3}{3}=\frac{a^2}{3h}\theta, \quad ⑱$$

$$y_{B'}=-b+\frac{\rho}{\rho_0}b+O(\theta^2)\approx y_B. \quad ⑲$$

新浮心的 y 坐标$y_{B'}$在一阶近似下不变，仅 x 坐标 $x_{B'}$在一阶近似下产生位移。

（2.3）

倾斜后浮力竖直向上，作用线过 B′，在随体坐标系中与y轴夹角为θ. 由几何关系得到

$$x_{B'}=(y_M-y_{B'})\tan\theta\approx(y_M-y_B)\tan\theta, \quad ⑳$$

由⑭⑳式得

$$y_M-y_B=\frac{a^2}{3h}, \quad ㉑$$

由②④㉑式得，稳心坐标为

$$y_M=\frac{a^2}{3h}-\left(b-\frac{h}{2}\right)=\frac{a^2\rho_0}{6\rho b}-\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)b. \quad ㉒$$

注意到稳心在一阶小角近似下、随体坐标系中可视作为固定点。

稳定条件：若木块相对于平衡位置发生偏转，它所受到相对于质心的外力矩应与偏转方向相反，阻止偏转趋势。因此若偏角$\theta>0$，应有$y_M\sin\theta>0$，也就是$y_M>0$，浮力的力矩沿逆时针方向，使偏角θ减小（*2）。故两参数a/b与ρ/ρ_0之间满足下述条件

$$\frac{a^2\rho_0}{6\rho b}>\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)b,\quad 或\left(\frac{a}{b}\right)^2>6\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad ㉓$$

时，系统是稳定的。

（3）

（3.1）以木块质心为参考点。浮力作用线相对质心的力臂为 $y_M\sin\theta$. 木块所受的浮力力矩为

$$\tau=-mg\,y_M\sin\theta\approx-mg\,y_M\,\theta. \quad ㉔$$

木块绕长度方向中心轴的转动惯量为

$$I=\frac{1}{12}m[(2a)^2+(2b)^2]=\frac{1}{3}m(a^2+b^2). \quad ㉕$$

根据惯性系中相对于质心的角动量定理，由㉔㉕式得，木块的运动满足方程

$$I\ddot{\theta}=-mg\,y_M\,\theta, \quad ㉖$$

这是简谐振动方程，振动的角频率为

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{3g\,y_{\mathrm{M}}}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2\rho_0}{6\rho b} - \left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)b\right]}. \quad ㉗$$

当 $y_{\mathrm{M}} \to 0^+$ 时，$\omega_\theta \to 0$，系统接近失稳边界（注意：系统稳定的条件是木块重心在稳心之下），往复倾斜越慢。（*3）

【解法二：也可以在在小角近似下，忽略稳心在竖直方向上的变化，在随稳心平动的非惯性参考系 S 中，惯性力为

$$f_I = m y_{\mathrm{M}}\,\ddot{\theta}\ （向左）$$

其力矩为

$$\tau_I = m y_{\mathrm{M}}\,\ddot{\theta}\cdot y_M cos\theta \approx m y_{\mathrm{M}}^2\,\ddot{\theta},$$

这里按θ的方向取正负号，即顺时针为正。

重力的力矩为

$$\tau_g = -mg\,y_{\mathrm{M}}\sin\theta \approx -mg\,y_{\mathrm{M}}\theta$$

浮力作用线过稳心，无力矩。

总力矩表达式为

$$\tau \approx -mg\,y_{\mathrm{M}}\,\theta + m y_{\mathrm{M}}^2\,\ddot{\theta}.$$

在 S 中，木块绕稳心作定轴转动，其转动惯量包含关于质心的转动惯量

$$I_g = \frac{1}{12}m[(2a)^2+(2b)^2] = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$$

和由平行轴定理导致的附加项。总转动惯量为

$$I = I_g + m y_{\mathrm{M}}^2 = \frac{1}{3}m(a^2+b^2) + m y_{\mathrm{M}}^2$$

根据角动量定理得

$$\left[\frac{1}{3}m(a^2+b^2) + m y_{\mathrm{M}}^2\right]\ddot{\theta} = -mg\,y_{\mathrm{M}}\,\theta + m y_{\mathrm{M}}^2\,\ddot{\theta}$$

消掉等式两边相同的项得

$$\frac{1}{3}m(a^2+b^2)\ddot{\theta} = -mg\,y_{\mathrm{M}}\,\theta$$

由此求出角频率为

$$\omega_\theta = \sqrt{\frac{mg\,y_{\mathrm{M}}}{I_g}} = \sqrt{\frac{3g\,y_{\mathrm{M}}}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{3g}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2\rho_0}{6\rho b} - \left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)b\right]}$$

】

（3.2）设木块的竖直位移为 ξ（向上为正），浸深变为 $h-\xi$. 木块所受浮力与重力的合力为

$$F_y = \rho_0 g\cdot 2aL(h-\xi) - mg = -2aL\rho_0 g\xi. \quad ㉘$$

木块的运动方程为

$$m\ddot{\xi} = -2aL\rho_0 g\xi \quad ㉙$$

这是简谐振动方程，振动的角频率为

$$\omega_{\mathrm{v}}^2 = \frac{2aL\rho_0 g}{m} = \frac{\rho_0 g}{2b\rho} = \frac{g}{h}. ㉚$$

由㉗㉚式得

$$\frac{\omega_\theta^2}{\omega_{\mathrm{v}}^2}=\frac{3h\,y_{\mathrm{M}}}{a^2+b^2}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2-6\frac{\rho}{\rho_0}\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}.\ ㉛$$

由㉓㉛式知

$$0<\frac{\omega_\theta^2}{\omega_{\mathrm{v}}^2}<1,$$

即

$$\omega_\theta<\omega_{\mathrm{v}}.\ ㉜$$

评分标准：本题 45 分。

第（1）问 7 分，①式 2 分，②③式各 1 分，④式 2 分，⑤式 1 分；

第（2）问 25 分，⑥⑦⑧⑨⑩式各 1 分，⑪式 2 分，（*1）2 分，⑫⑬⑭⑮⑯⑰⑱式各 1 分，⑲式 2 分，⑳㉑式各 1 分，㉒式 2 分，（*2）2 分，㉓式 1 分；

第（3）问 13 分，㉔式 2 分，㉕㉖式各 1 分，㉗式 2 分，（*3）2 分，㉘㉙㉚㉛㉜式各 1 分。

所有将 tanθ写为θ的正确结果均同样给分。

六（45 分）.

（1）

（1.1）由于电子层相对于正离子背景发生位移，在电子层两侧形成厚度为$|\xi|$的正、负电荷分离区域；其面电荷密度大小为 $n_0e|\xi|$。由高斯定理，电子层内的电场为

$$\boldsymbol{E}=E_x\,\hat{\boldsymbol{x}}=\frac{n_0e}{\varepsilon_0}\,\xi\,\hat{\boldsymbol{x}}.\qquad ①$$

这是一个均匀电场：当 $\xi>0$ 时，左侧为正、右侧为负，电场沿 $+x$ 方向；当 $\xi<0$时，右侧为正、左侧为负，电场沿 $-x$ 方向。

（1.2）利用①式，单个电子所受电场力与位移方向相反：

$$m_{\mathrm{e}}\ddot{\xi}=-eE_x=-\frac{n_0e^2}{\varepsilon_0}\xi,\qquad ②$$

这是简谐运动的方程。上式对电子层中的所有电子都是成立的，因而电子层作简谐运动，运动的角频率为

$$\omega_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{n_0e^2}{m_{\mathrm{e}}\varepsilon_0}},\qquad ③$$

（2）

（2.1）将玻尔兹曼分布中的指数函数展开到指数的一阶：

$$n(r)\approx n_0\left(1+\frac{e\varphi}{k_{\mathrm{B}}T}\right),\qquad ④$$

由④式得，外部点电荷的电场引起的电子数密度的改变量为

$$\delta n(r)=\frac{n_0e\varphi(r)}{k_{\mathrm{B}}T}.\quad ⑤$$

$\varphi>0$ 时电子势能 $-e\varphi$ 降低，故电子聚集，$\delta n>0$。净电荷密度为

$$\rho_{\mathrm{q}}(r)=n_0e-en(r),\quad ⑥$$

由⑤⑥式得

$$\rho_{\mathrm{q}}(r) = -e\delta n = -\frac{n_0 e^2}{k_{\mathrm{B}}T}\varphi(r). \quad ⑦$$

（2.2）将⑦式代入题目给出的德拜长度定义式，得

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}}T}{n_0 e^2}}. \qquad ⑧$$

（2.3）将⑧式代入（2.2）小问中的题给静电势方程，有

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(r\varphi)}{dr^2} = \frac{\varphi}{\lambda_{\mathrm{D}}^2} = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 k_{\mathrm{B}}T}\varphi, \qquad ⑨$$

利用题给的通解形式和边界条件

$$\varphi \to 0（r \to \infty），⑩$$

通解中的指数增长项必须消失，故

$$B = 0. \qquad ⑪$$

再利用题给条件

$$\varphi \to Q/(4\pi\varepsilon_0 r),（r \to 0），$$

有

$$r\varphi = \psi \to Q/(4\pi\varepsilon_0),$$

所以

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad ⑫$$

由⑪⑫式得

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{\lambda_D}}. \qquad ⑬$$

由⑬式知：

当 $r \ll \lambda_D$ 时，$\mathrm{e}^{-r/\lambda_D} \approx 1$，电势近似为未被屏蔽的库仑势；

当 $r \gg \lambda_D$ 时，电子重新分布产生的感应电荷显著抵消外部电荷的电场，电势被指数压低。故点电荷的静电影响主要局限在德拜长度λ_D以内。*

（3）

（3.1）

在某一给定位置$\boldsymbol{x}$处的电子在外电场$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E'}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$作用下的横向位移$\boldsymbol{\eta}$满足如下的运动方程

$$m_{\mathrm{e}}\ddot{\boldsymbol{\eta}} = -e\boldsymbol{E}. \quad ⑭$$

其在外电场作用下的稳态位移为

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad ⑮$$

将⑮式代入⑭式，有

$$-m_{\mathrm{e}}\omega^2\boldsymbol{\eta}_0 = -e\boldsymbol{E'}_0, \qquad ⑯$$

由⑯式得

$$\boldsymbol{\eta}_0 = \frac{e\boldsymbol{E'}_0}{m_{\mathrm{e}}\omega^2}. \qquad ⑰$$

由题给公式$\boldsymbol{P} = -n_0 e\boldsymbol{\eta}$,利用⑮⑰式得

$$\boldsymbol{P} = -n_0 e\boldsymbol{\eta} = -\frac{n_0 e^2}{m_{\mathrm{e}}\omega^2}\boldsymbol{E}. \qquad ⑱$$

将⑱式与题给公式$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}$ 比较，得

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{n_0e^2}{m_e\varepsilon_0\omega^2}=1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \qquad ⑲$$

上式最后一步利用了③式。

（3.2）将⑲式代入题给的色散关系：

$$k^2c^2=\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\omega^2=\omega^2-\omega_p^2. \quad ⑳$$

由⑳式得

$$k^2=\frac{\omega^2-\omega_p^2}{c^2}. \qquad ㉑$$

当 $\omega>\omega_p$ 时，$k^2>0$，电磁波可以在等离子体中传播；当 $\omega<\omega_p$ 时，$k^2<0$，k 为虚数，电磁波的空间因子 e^{+ikx} 转化为指数衰减形式$\mathrm{e}^{-|k|x}$，电磁波的电磁场随空间衰减，不能在等离子体中传播。**

（3.3）将题给参数代入③式：

$$\omega_p\sim\sqrt{\frac{10^7\times(10^{-19})^2}{10^{-30}\times10^{-11}}}\,\mathrm{rad/s}\sim10^5\,\mathrm{rad/s}, \qquad ㉒$$

可以在该等离子体中传播的电磁波频率f需要大于等离子体频率f_p：

$$f>f_p=\frac{\omega_p}{2\pi}\sim10^4\,\mathrm{Hz}. \qquad ㉓$$

题中给出的可见光频率

$$f_{vis}\sim10^{14}\,\mathrm{Hz}\gg f_p\,. \qquad ㉔$$

这说明等离子体中的电子无法响应快速变化的可见光电场，因此太阳风对该可见光是透明的。***

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 6 分，①②③式各 2 分；

第（2）问 18 分，④⑤式各 2 分，⑥⑦⑧⑨式各 1 分，⑩⑪⑫⑬式各 2 分，* 2 分；

第（3）问 21 分，⑭⑮式各 2 分，⑯⑰式各 1 分，⑱⑲⑳式各 2 分，㉑式 1 分，** 2 分，㉒式 2 分，㉓㉔式各 1 分， *** 2 分。

七（45 分）.

（1）单色情形下，在每一段介质折射率为 n 的均匀区域内的平面光波为 $\mathcal{E}e^{\pm inkx}$，分别对应沿 $+x$ 与 $-x$ 传播。按题意，$x<0$ 区域存在入射光波与反射光波，$x>0$ 区域只存在透射光波。为简单起见，设入射波的波幅为 $\mathcal{E}=1$，按照定义反射波的波幅为 r，透射波的波幅为 t。因此，在$x<0$ 区域光波的电场为

$$E_-(x)=e^{in_1kx}+re^{-in_1kx},\ (x<0) \qquad ①$$

在$x>0$ 区域光波的电场为

$$E_+(x)=te^{in_2kx},\ (x>0) \qquad ②$$

根据边界条件，在界面 $x=0$ 处 E 和 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$ 连续，有：

$$1+r=t \qquad ③$$

$$in_1k-in_1kr=in_2kt \qquad ④$$

将③代入④有

$$r=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \qquad ⑤$$

注意，r 会有正负号的差别（即反射相位差），依赖于 n_1 和 n_2 的大小差异。

由③⑤式得，界面的透射系数为

$$t = 1 + r = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \qquad ⑥$$

（2）

（2.1）记空间周期$a = d_1 + d_2$. 设晶体结构含 N个完整周期，共 $2N$ 个界面（$x = Na$ 之后仍为 n_1，故该处无界面）。光子晶体第 p 个周期（$p = 0$，1，$2 \ldots N-1$）内含两类界面：（$n_1 \to n_2$）型界面，位于 $x = pa$，由⑤⑥式可知，（$n_1 \to n_2$）型单界面反射系数和透射系数分别为

$$r_{12} = \frac{\delta n}{n_1 + n_2} = r, \quad t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \qquad ⑦$$

（$n_2 \to n_1$）型界面，位于 $x = pa + d_2$. 同理，（$n_2 \to n_1$）型单界面反射系数和透射系数分别为

$$r_{21} = -\frac{\delta n}{n_1 + n_2} = -r, \quad t_{21} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \qquad ⑧$$

光穿过某一个周期结构的幅正比于

$$t_{12}t_{21} = 1 - r^2 \sim 1,$$

这意味着在仅保留一阶小量$\delta n \sim r$的近似下，光可视为“无衰减的”穿过各周期结构。

同时，经过界面反射，界面反射次数为q（ $q \geq 2$ ）的光的幅正比于

$$r^q \sim \mathrm{O}(r^2)$$

可忽略。 （*1）

在本问中总反射振幅只需考虑 $2N$ 条“单次反射路径”的电场幅的相干叠加。每条路径的振幅等于该界面的反射系数乘以从 $x = 0$ 处到该界面的往返传播相位因子。

考虑某一个周期结构的两界面的两条反射光线，从 $x = 0$ 到（$n_1 \to n_2$）型界面 $x = pa$ 的往返光程为 $2p(n_1d_1 + n_2d_2)$，对应的相位差为

$$2pk(n_1d_1 + n_2d_2)\,;$$

从 $x = 0$到同一周期结构内的（$n_2 \to n_1$）型界面的往返光程为 $2p(n_1d_1 + n_2d_2) + 2n_2d_2$，对应的相位差为

$$2pk(n_1d_1 + n_2d_2) + 2kn_2d_2$$

又由⑦⑧式知

$$r_{12} = -r_{21} = r$$

因此，总反射系数就是

$$r_{\mathrm{tot}} = \sum_{p=0}^{N-1} \{r_{12}e^{i2pk(n_1d_1+n_2d_2)} + r_{21}e^{i[2pk(n_1d_1+n_2d_2)+2kn_2d_2]}\} \qquad ⑨$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} \{re^{i2pk(n_1d_1+n_2d_2)} - re^{i[2pk(n_1d_1+n_2d_2)+2kn_2d_2]}\}$$

$$= r\left(1 - e^{2ikn_2d_2}\right) \sum_{p=0}^{N-1} e^{i2pk(n_1d_1+n_2d_2)}$$

$$= r(1 - e^{2ikn_2d_2}) \frac{1 - e^{2iNk(n_1d_1+n_2d_2)}}{1 - e^{2ik(n_1d_1+n_2d_2)}} \qquad ⑩$$

利用 $\left|1 - e^{i\theta}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$，由⑩式得

$$|r_{\mathrm{tot}}|=\frac{|\delta n|}{n_1+n_2}\cdot 2|\sin(kn_2d_2)|\cdot\frac{|\sin[Nk(n_1d_1+n_2d_2)]|}{|\sin[k(n_1d_1+n_2d_2)]|}\qquad ⑪$$

⑪式与多缝衍射光栅的振幅分布同构。

一般地，$\sin(kn_2d_2)\neq 0$，$|r_{\mathrm{tot}}|$的主极大出现在 ⑪ 式分母为零处

$$k_m(n_1d_1+n_2d_2)=m\pi，\ m=1，\ 2，\ 3，\ \cdots\quad ⑫$$

由⑫式得第 m 个主极大的角频率为

$$\omega_m=\frac{m\pi c}{n_1d_1+n_2d_2}\qquad ⑬$$

由⑪式知，

$$\sin(k_mn_2d_2)=0,⑭$$

即

$$k_mn_2d_2=l\pi,\qquad 对于给定的m，l为小于m的某一确定正整数\qquad (*2)$$

为主极大不能实现的条件。此条件对应的 ω_m满足的关系式为

$$\omega_m=\frac{l\pi c}{n_2d_2}⑮$$

将$\omega=\omega_m+\epsilon$代入⑪式，并利用⑫⑭式得

$$|r_{\mathrm{tot}}(\omega_m+\epsilon)|=\frac{|\delta n|}{n_1+n_2}\cdot 2|\sin(kn_2d_2)|\cdot\frac{|\sin[Nk(n_1d_1+n_2d_2)]|}{|\sin[k(n_1d_1+n_2d_2)]|}$$

$$=\frac{|\delta n|}{n_1+n_2}\cdot 2\left|\sin\left(\frac{\omega_m+\epsilon}{c}n_2d_2\right)\right|\cdot\frac{\left|\sin\left[\frac{N\epsilon}{c}\right]\right|}{\left|\sin\left[\frac{\epsilon}{c}\right]\right|}$$

$$=\frac{|\delta n|}{n_1+n_2}\cdot 2\left|\sin\left(\frac{\epsilon}{c}n_2d_2\right)\right|\cdot\frac{\left|\sin\left[\frac{N\epsilon}{c}\right]\right|}{\left|\sin\left[\frac{\epsilon}{c}\right]\right|}=\frac{2Nn_2d_2}{c(n_1+n_2)}|\delta n\epsilon|\quad ⑯$$

（2.2）按照本小问约定的$\bar{n}=(n_1d_1+n_2d_2)/(d_1+d_2)$， 向前等效波矢 $\bar{k}$与向后等效波矢 $-\bar{k}$之差为

$$-\bar{k}-(\bar{k})=-2\bar{k}=-2k\frac{n_1d_1+n_2d_2}{d_1+d_2}\quad ⑰$$

由⑰得

$$2\bar{k}(d_1+d_2)=2k(n_1d_1+n_2d_2)\quad ⑱$$

将发生主极大的波矢值⑫式代入上式得

$$2k_m(n_1d_1+n_2d_2)=2m\pi\quad ⑲$$

由⑰式可知，向前等效波矢 $\bar{k}$与向后等效波矢$-\bar{k}$之差，即$2\bar{k}$的物理意义是：一个平面光波沿+x方向正入射到光子晶体后，在任意一个“完整周期”的单位长度上往返传播产生的光波振动的相位差。

因此，整个光子晶体的周期性结构的一个“完整周期”(d_1+d_2)上往返传播产生的相位差为⑱式。⑲式表明，当入射光的波矢满足发生主极大条件时，经一个“完整周期”往返后回到起点的反射光和此起点处界面反射的光同相位，因此两者相干加强；同理，经 2 个和 2 个以上的“完整周期”往返后返回的反射光均与此处界面的反射光相干加强，这些反射光彼此之间也相干加强，由此形成主极大。 (*3)

评分标准：本题共 45 分

第（1）问 12 分，①式 3 分，②式 1 分，③④⑤⑥式 2 分；

第（2）问 33 分，⑦⑧式各 2 分，（*1）3 分，⑨式 3 分，⑩式 2 分，⑪⑫式各 2 分，⑬3 分，（*2）2 分，⑭式 1 分，⑮式 2 分，⑯式 3 分，⑰⑱式各 1 分，⑲式 2 分，（*3） 2 分。