万有引力与航天

一、开普勒三大定律 3
(一)开普勒第一定律(轨道定律) 3
(二)开普勒第二定律(面积定律) 3
(三)开普勒第三定律(调和定律) 3
例题 1(2021·全国甲卷) 3
例题 2 4
(四)适用范围 4
(五)中学阶段对行星轨道的近似 4
二、万有引力定律 4
(一)万有引力定律的表达式 4
(二)月—地检验 4
1.猜想 4
2.验证方式 4
3.检验结果 4
(四)引力常量的测量 5
1.测量装置 5
2.测量原理 5
3.计算公式 5
(五)均匀薄球壳对球内物体的引力为零 5
例题(2016 年清华大学领军计划) 6
(六)割补法计算万有引力 6
1.补齐缺损 6
2.对称添补 6
3.正负叠加 7
(七)平方反比定律 7
(八)利用开普勒定律推导万有引力定律 7
三、万有引力定律的应用 8
(一)计算地球的质量 8
(二)黄金代换公式 8
(三)万有引力与重力的关系 8
1.重力是万有引力的分力 8
2.重力与万有引力夹角的最大值 8
3.例题(2017 年中国科学技术大学自主选拔) 9
(四)计算天体的质量 10
(五)计算天体的密度 10
(六)计算天体的运转周期 10
(七)卫星环绕参数和轨道半径的关系 11
(八)潮汐现象 11
1.天体引潮力 11
2.太阳和月球的天体引潮力的共同作用 11
(九)重力探矿 12
四、万有引力定律在航天学中的应用 12
(一)前置知识 12
1.引力势能 12
(1)定义 12
(2)公式推导 12

(3)天体的机械能的计算 12
例题 1(2016 年清华大学自主招生) 12
例题 2(2014 年华约自主招生) 13
例题 3(2014 年北约自主招生) 14
2.曲率与曲率半径 15
(1)曲率 15
(2)曲率半径 15
(3)椭圆特殊位置的曲率半径 15
(4)曲率圆 15
(二)宇宙速度 16
1.第一宇宙速度 16
2.第二宇宙速度 16
3.第三宇宙速度 17
(三)人造地球卫星 17
1.近地卫星 17
2.同步卫星 17
例题(2016 年全国卷 I) 18
3.极地卫星 18
(四)卫星变轨问题 18
(五)引力弹弓效应 18
(六)霍曼转移 19
(七)拉格朗日点 19
1.拉格朗日点的定义 19
2.拉格朗日点的推导 19
3.拉格朗日点的性质 22
4.拉格朗日点的稳定性 23
五、星体稳定自转的临界问题 23
例题(2023 年湖北模拟) 23
六、史瓦西半径 24
七、多星系统 24
(一)特点 24
1.星体做匀速圆周运动的圆心为系统的质心 24
2.星体运转的角速度和周期均相同 24
3.合外力提供星体运转的向心力 24
(二)双星模型 24
例题(第 14 届全国物理竞赛复赛) 25
(三)三星模型 25
1.三星共线的情况 25
2.质量相等的三星体组成等边三角形的情形 26
3.质量不等的三星体组成等边三角形的情形 26
(1)例题(2015 年安徽理综第 24 题) 26
(2)解析几何法处理一般情况 28
(3)矢量法处理一般情况 28
(四)四星模型 28
1.组成等边三角形的情况 28
2.组成正方形的情况 29
3.四星共线的特殊情况 29

八、天体运动中的追及与相遇问题.....29
(一)两天体由最近至最远时.....29
(二)两天体由最近至最近时.....29
(三)例题.....30
九、洛希极限.....30
(一)定义.....30
(二)利用引潮力与万有引力计算.....30
(三)利用加速度大小的关系计算.....30
(四)例题(2023 年西城二模节选).....31
十、角动量及角动量守恒定律.....31
(一)角动量.....31
(二)质点的角动量定理.....31
(三)质点的角动量守恒定律.....32
例题(2011 年中国科学技术大学保送生面试节选).....32
(四)角动量守恒定律与开普勒第二定律.....32
十一、斯特潘-玻尔兹曼定律.....32
(一)定义.....32
(二)例题(2023 年烟台 德州一模).....33

一、开普勒三大定律

(一)开普勒第一定律(轨道定律)

所有行星绕太阳运动的轨道都是椭圆,太阳处在椭圆的一个焦点上.

开普勒第一定律告诉我们:行星绕太阳运行的轨道严格来说不是圆而是椭圆;太阳不在椭圆的中心,而是在其中一个焦点上;行星与太阳间的距离是不断变化的.

(二)开普勒第二定律(面积定律)

对任意一个行星来说,它与太阳的连线在相等的时间内扫过的面积相等.

开普勒第二定律告诉我们:当行星离太阳较近的时候,运行的速度较大,而离太阳较远的时候速度较小.

(三)开普勒第三定律(调和定律)

所有行星轨道的长半轴的三次方跟它的公转周期的二次方的比都相等.

若用a代表椭圆轨道的长半轴,T代表公转周期,则由开普勒第三定律有$\frac{a^3}{T^2}=k$,比值k是一个对所有行星(围绕运转的中心天体相同时)都相同的常量,且与中心天体的质量成正比.

例题 1(2021·全国甲卷)

执行我国火星探测任务的“天问一号”探测器成功进入运行周期约为$1.8\times10^5\ s$的椭圆形停泊轨道,轨道与火星表面的最近距离约为$2.8\times10^5\ m$.已知火星半径约为$3.4\times10^6\ m$,火星表面处自由落体的加速度大小约为$3.7\ m/s^2$,则“天问一号”的停泊轨道与火星表面的最远距离约为(C).

A.$6\times10^5\ m$　　B.$6\times10^6\ m$

C.$6\times10^7\ m$　　D.$6\times10^8\ m$

对于火星表面一质量为m的物体,有

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2}{T_1^2}r$$

得到

$$\frac{GM}{4\pi^2}=\frac{r^3}{T_1^2}=k$$

由黄金代换公式知

$$k=\frac{r^3}{T_1^2}=\frac{GM}{4\pi^2}=\frac{gr^2}{4\pi^2}=\frac{a^3}{T^2}$$

进而求得“天问一号”的停泊轨道与火星表面的最远距离约为$6\times10^7\ m$.

例题 2

飞船沿半径为R的圆周绕地球运动,其周期为T.如果飞船要返回地面,可在轨道上某一点A处将速率降低到适当数值,从而使飞船沿着以地心为焦点的椭圆轨道运行,椭圆与地球表面在B点相切,如图所示.求飞船由A点运动到B点所需要的时间.(已知地球半径为R_0)

由开普勒第三定律,有

$$\frac{R^3}{T^2}=\frac{\left(\frac{R+R_0}{2}\right)^3}{T'^2}=k$$

联立解得飞船在椭圆轨道上运动的周期为

$$T'=\sqrt{\frac{(R+R_0)^3}{8R^3}}T$$

故飞船由A运动到B点所需的时间为

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(R+R_0)^3}{8R^3}}T$$

(四)适用范围

开普勒行星运动定律不仅适用于行星绕太阳的运动,也适用于卫星绕行星的运动.

(五)中学阶段对行星轨道的近似

1.行星绕太阳运行的轨道十分接近圆,太阳处在圆心.

2.对某一行星来说,它绕太阳做匀速圆周运动.

3.所有行星轨道半径r的三次方跟它的公转周期T的二次方的比值都相等,即$\frac{r^3}{T^2}=k$.

二、万有引力定律

(一)万有引力定律的表达式

自然界中任何两个物体都相互吸引,引力的方向在它们的连线上,引力的大小与物体的质量乘积成正比、与它们之间距离的二次方成反比,即$F=\frac{GMm}{r^2}$.G为引力常量.

(二)月—地检验

1.猜想

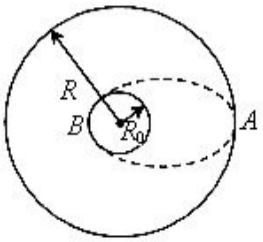
地球与太阳之间的吸引力与地球对周围物体的引力可能是同一种力,遵循相同的规律.

2.验证方式

若猜想正确,月球在轨道上运动的向心加速度与地面重力加速度的比值,应该等于地球半径平方与月球轨道半径平方之比,即$\frac{1}{60^2}$.

3.检验结果

地面物体所受地球的引力与月球所受地球的引力是同一种力.



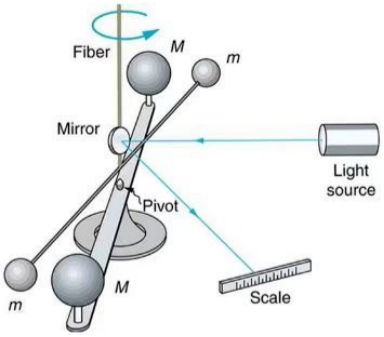
(三)适用条件

1.公式适用于质点间的相互作用.当两个物体间的距离远远大于物体本身的大

小时,物体可视为质点.
2.质量分布均匀的球体可视为质点,r是两球球心间的距离.即均匀球体或者薄球壳对球外物体的引力等效于位于球心的等质量质点对球外物体的引力.

(四)引力常量的测量

1.测量装置



卡文迪什扭秤的主要部分是一个轻而坚固的T形架,倒挂在一根石英丝的下端.T形架水平部分的两端各装一个质量是m的小球,T形架的竖直部分装一面小平面镜,它能把射来的光线反射到刻度尺上,这样就能比较精确地测量石英丝的扭转角度.

2.测量原理

实验时,把两个质量都是M的大球放在图中所示的位置,它们跟小球的距离均为r.由于m受到M的吸引,T形架发生转动,使石英丝发生扭动,扭转的角度可从平面镜反射的光点在刻度尺上移动的距离求出.根据石英丝的扭转角度,就可以求得m与M的引力F.最后根据万有引力公式,就可以算出引力常量G.

3.计算公式

扭转力矩为

$$M_1=k\theta$$

引力矩为

$$M_2=\frac{GMm}{r^2}\cdot L$$

力矩平衡有$M_1=M_2$,即

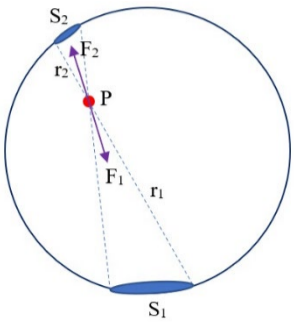
$$k\theta=\frac{GMm}{r^2}\cdot L$$

得到

$$G=\frac{kr^2\theta}{MmL}$$

(五)均匀薄球壳对球内物体的引力为零

在球壳内部任意取一点P,放置一质量为m的质点,如图所示.球壳表面两块微元对质点 P 的万有引力大小分别为



$$F_1=\frac{GS_1\eta m}{r_1^2},F_2=\frac{GS_2\eta m}{r_2^2}$$

其中η为面密度.

根据几何关系可知$\frac{S_1}{S_2}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$.从而得到$F_1=F_2$,大小相等,方向相反.

根据对称性,球壳表面所有微元对质点P的万有引力都可以相互抵消,从而得到均匀薄球壳对球内物体的引力为零.

例题(2016 年清华大学领军计划)

在一质量均匀分布的星球(近似为球体)的北极和南极打一条垂直贯通的通道,一小球从北极由静止释放,不与通道发生碰撞,则小球的运动为简谐运动.

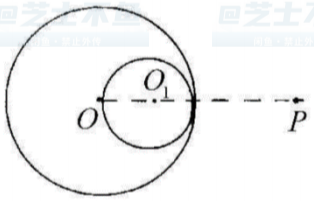
由均匀薄球壳对球内物体的引力为零知,当物体释放开始下落后,距离球心的距离为r时,所受引力为

$$F=\frac{GM\left(\frac{r}{R}\right)^3 m}{r^2}=\frac{GMm}{R^3}\cdot r$$

符合简谐运动中的$F=kx$,故小球做简谐运动.

(六)割补法计算万有引力

质量为M,半径为R的密度均匀的球,球心在O点,现挖去半径为$\frac{R}{2}$的小球,球心在O_1,在球心OO_1连线的延长线上离O点的距离为$2R$处有一个质点P,其质量为m,求挖空球对质点P的作用力.



1.补齐缺损

将缺损球补齐成半径为R的完整打球,将不完整的物体变得完整.补齐缺损后半径为R的完整大球对质点P的作用力可视为挖空球对质点m的作用力和挖去的半径为$\frac{R}{2}$的小球对质点P作用力之和.由于挖去的半径为$\frac{R}{2}$的小球的质量为$\frac{M}{8}$.故补齐缺损后半径为R的完整大球对质点P的作用力为

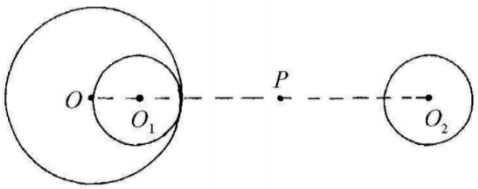
$$\frac{GMm}{(2R)^2}=F+\frac{\frac{1}{8}GMm}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2}$$

解得

$$F=\frac{7GMm}{36R^2}$$

2.对称添补

将缺损球补齐成半径为R的完整大球,并在OP连线上找到O_1点的对称点O_2.以O_2为球心添放一小球,将不对称的物体变得对称.以O_1,O_2为球心的两小球对质点P的作用力大小相等,方向相反,故两球对质点P作用力的合力为零,挖空球对质点P的万有引力大小等



效为补齐缺损后半径为R的完整大球对质点P的作用力和半径为$\frac{R}{2}$的小球O_2对质点P作用力之差.

@芝士不鱼 闲鱼，禁止外传

故挖空球对质点m的作用力为

$$F=\frac{GMm}{(2R)^2}-\frac{\frac{1}{8}GMm}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2}=\frac{7GMm}{36R^2}$$

3.正负叠加

挖空球对质点P的作用力可看作半径为R,质量为M的完整大球对质点P的作用力与半径为$\frac{R}{2}$质量为$-\frac{M}{8}$的小球O_1对质点P的作用力之和.

(七)平方反比定律

物体或粒子的作用强度随距离的平方而线性衰减,即作用力与距离平方成反比关系.如果任何一个物理定律中,某种物理量的分布或强度,会按照距离源的远近的平方反比而下降,该定律就可以称为是一个平方反比定律.万有引力定律、库仑定律均为平方反比定律.

(八)利用开普勒定律推导万有引力定律

推导万有引力定律实质上是推导平方反比定律.设引力的表达式为

$$F=GMmr^x$$

G为引力常量,无需考虑.而M,m二者的地位等价决定了表达式的形式,只需要推导出$x=-2$即可.

由开普勒第一定律知,行星运行的轨道为椭圆,太阳处在椭圆的一个焦点上.设椭圆的长半轴、短半轴、半焦距分别为a,b,c.当行星运行至长轴的两个顶点时,运用开普勒第二定律,在时间dt内,有

$$\frac{1}{2}(a-c)v_1dt=\frac{1}{2}(a+c)v_2dt$$

整理得

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{a+c}{a-c}$$

由万有引力提供向心力得

$$GMm(a-c)^x=m\frac{v_1^2}{R_1}$$

$$GMm(a+c)^x=m\frac{v_2^2}{R_2}$$

其中R_1,R_2分别代表椭圆长轴两端的曲率半径,由对称性知$R_1=R_2$.

两式作比,得

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2=\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^x$$

显然$x=-2$.得证.

三、万有引力定律的应用

(一)计算地球的质量

不考虑地球自转的影响,地球上质量为m的物体所受的重力mg等于地球对物体的引力,即

$$mg=\frac{GMm}{R^2}$$

解得

$$M=\frac{gR^2}{G}$$

(二)黄金代换公式

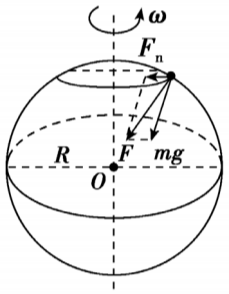
由$mg=\frac{GMm}{R^2}$,可得到$GM=gR^2$,此即为黄金代换公式.当GM不变时,g与R^2成反比.此公式只适用于不自转或自转很慢的天体.因为在这些天体的表面可以认为万有引力完全提供重力.在自转很快的天体表面万有引力要提供重力和向心力,此公式不适用.由黄金代换公式知,距离天体h时的重力加速度为

$$g'=\frac{GM}{(R+h)^2}$$

(三)万有引力与重力的关系

1.重力是万有引力的分力

由于地球的自转,地球上的物体都受到指向所在纬度圆的圆心的向心力(两极除外),故向心力$\overrightarrow{F_{向}}$与重力$\vec{G}$的合力为地球对物体的引力$\vec{F}$,即$\vec{G}+\overrightarrow{F_{向}}=\vec{F}$.



在赤道处,向心力与重力均指向地心,故$mg_0+m\frac{4\pi^2}{T^2}R=\frac{GMm}{R^2}$.

g_0为赤道处的重力加速度.

在两极处,向心力为零,重力指向地心,故$mg_1=\frac{GMm}{R^2}$.

g_1为两极处的重力加速度.

应用万有引力定律可以用于解释地球表面重力加速度微小差异的原因.

2.重力与万有引力夹角的最大值

设地球为球体,半径为R,质量为M,自转角速度为ω,纬度为φ.物体质量为m,绕地轴转动半径为r,所受引力为P_0,重力为P,所需向心力为f.P与P_0的夹角为θ,P_0与f的夹角即为φ.见图中所示.

在P,P_0,f三者组成的三角形中,由正弦定理,有

$$\frac{f}{\sin\theta}=\frac{P_0}{\sin(\pi-\theta-\varphi)}=\frac{P_0}{\sin(\theta+\varphi)}$$

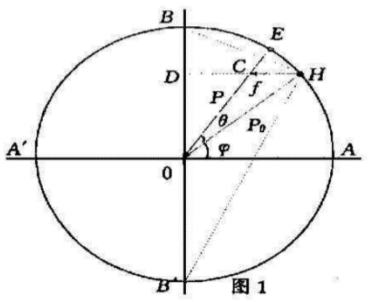


图 1

代入

$$f=m\omega^2 r=m\omega^2 R\cos\varphi$$

$$P_0=\frac{GMm}{R^2}$$

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

得

$$\frac{GM}{\omega^2 R^3}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\varphi}=\sin(\theta+\varphi)$$

展开整理得

$$\tan\theta=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\frac{GM}{\omega^2 R^3}-\cos^2\varphi}$$

令

$$f(\varphi)=\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\frac{GM}{\omega^2 R^3}-\cos^2\varphi}$$

求导有

$$f'(\varphi)=\frac{\left(\frac{2GM}{\omega^2 R^3}-1\right)\cos^2\varphi-\frac{GM}{\omega^2 R^3}}{\left(\frac{GM}{\omega^2 R^3}-\cos^2\varphi\right)^2}$$

令

$$f'(\varphi)=0\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt{\frac{\frac{GM}{\omega^2 R^3}}{\frac{2GM}{\omega^2 R^3}-1}}$$

代入得

$$\sin\theta_m=\frac{1}{\frac{2GM}{\omega^2 R^3}-1}$$

解得

$$\begin{cases}\theta_m=0.0986212^\circ\\ \varphi=44.9506894^\circ\end{cases}$$

3.例题(2017 年中国科学技术大学自主选拔)

假设地球为质量均匀分布的球体.已知地球表面的重力加速度在两极处为g_0,在赤道处为g,地球半径为R,求地球自转周期T.

在两极处,有

$$\frac{GMm}{R^2}=mg_0$$

在赤道处,有

$$\frac{GMm}{R^2}=mg+m\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

联立解得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g_0-g}}$$

回芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

(四)计算天体的质量

以计算太阳的质量为例.设M是太阳的质量,m是某个行星的质量,r是行星与太阳之间的距离,行星做匀速圆周运动的向心力由二者之间的万有引力提供,故

$$\frac{GMm}{r^2}=m\omega^2 r$$

由角速度的定义知

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

代入上式得

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

得到

$$M=\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

选择不同的行星的数据进行计算得到结果是一致的,因为开普勒第三定律有$\frac{r^3}{T^2}=k$.

(五)计算天体的密度

通过上文计算出天体的质量,视天体为球体,利用黄金代换公式可得天体的密度为

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\frac{gR^2}{G}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3g}{4\pi GR}$$

由上文还知$M=\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$,故另一种计算方式为

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\pi r^3}{GT^2R^3}$$

(六)计算天体的运转周期

$$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{4\pi^2}{T^2}R$$

解得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

当天体的运行轨道为椭圆时,用长半轴长a代换式中的R即可.利用开普勒第三定律可以验证该结论的

正确性.

(七)卫星环绕参数和轨道半径的关系

由万有引力提供向心力,计算可得卫星各环绕参数分别为

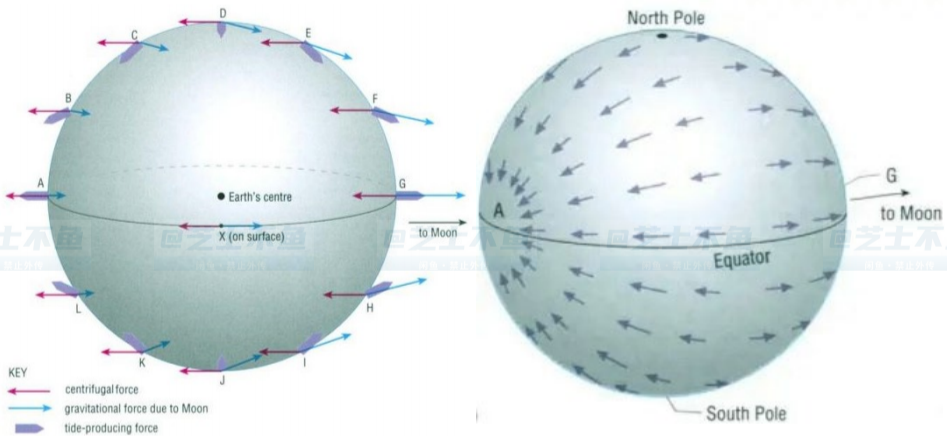
$$v=\sqrt{\frac{GM}{r}},\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}},T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}},a=\frac{GM}{r^2}$$

结论:r越大,v,ω越小,T越大.

(八)潮汐现象

海洋潮汐是指海水在天体(主要是太阳和月亮)引潮力作用下产生的周期性运动,习惯性把铅直向涨落为潮汐,水平的运动称之为潮流.

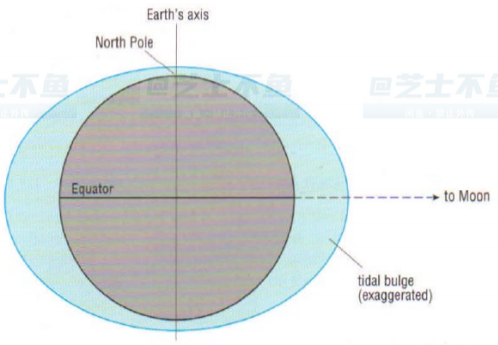
1.天体引潮力

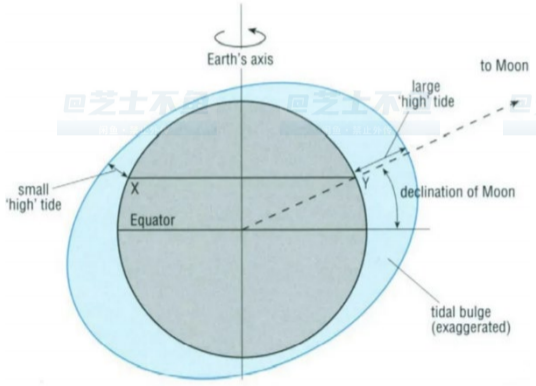


引潮力是万有引力与惯性离心力的合力.惯性离心力为转动参照系中的观察者在不知道系统作圆周运动的情况下,为解释他所观察到的现象而引入的一个假想力.以月球为例,图中蓝色部分为月球产生的万有引力,红色部分为惯性离心力,紫色部分即引潮力.如果将引潮力分解为铅直分量和水平分量,无论是水平还是铅直方向上量级都很小.在铅直方向上基本上无法与重力抗衡,可以忽略.在水平方向上的分量可以使海水发生辐聚和辐散,从而形成海水的起伏.因此形成海洋潮汐潮流运动的真正原动力是引潮力的水平分量.地球上不同位置的引潮力的水平分量是不同的,如图所示.

以地球上的一点海水为例,在平衡潮理论下,在各个时刻,海水是在引潮力水平分量、重力和压强梯度力的平衡之下的.因为受到引潮力的水平分量,海水为了保持平衡,海面就要相对于原静止的海面发生倾斜.由平衡潮的假设,地球被等深海水覆盖,海水没有惯性,这时就形成了一个椭球,称为潮汐椭球.

月球处在不同位置时的引潮力的大小不同.月球绕地球的转动与地球绕自身的转动不在一个平面内.因此,当月球位于白道面与赤道面的交点处时,潮汐椭球如下图中第一幅图所示.又因为地球绕地轴旋转,因此地球上的任何一点都会出现两次高潮和两次低潮,称为赤道潮.当月球位于白道面与赤道面夹角最大的位置时,潮汐椭球如下图中第二幅图所示.潮汐日不等现象最为明显,我们称为热带潮.





2.太阳和月球的天体引潮力的共同作用

太阳、月亮和地球接近于同一条直线时,海水受到的太阳和月亮的引潮力方向共线,月球和太阳引起的潮汐椭球的长轴方向一致,此时潮汐达到每月的最大.在上弦月和下弦月时,地球分别与月球和太阳的连线相互垂直,引潮力作用的潮汐椭球的长轴垂直,此时潮汐为每月的最小.

来源链接:https://www.zhihu.com/question/36824983/answer/99207005

(九)重力探矿

重力探矿是利用地质体的重力异常进行探矿的一种地球物理方法.地下地质体在地球引力场中将产生重力异常,用它可发现和认识地下构造或金属矿体.其理论基础是万有引力定律及位场理论.用重力仪测量地球表面的重力变化,确定地下密度的分布特征,从而解决某些地质问题并找矿.重力探矿具有不受电磁干扰的特点,只要矿体与围岩存在密度差,就能应用重力探矿法进行勘探.

四、万有引力定律在航天学中的应用

(一)前置知识

1.引力势能

(1)定义

物体(特别指天体)在引力场中具有的势能叫做引力势能.常把无穷远处定为引力势能的零势能点,在该条件下的引力势能表达式是$E=-\dfrac{GMm}{R}$,G为引力常数,M为产生引力场物体(中心天体)的质量,m为研究对象的质量,R为两者质心的距离.

(2)公式推导

当物体从无穷远处移至距离中心天体为R的过程中,引力做正功,引力势能减小,故有

$$E=-\int_R^{+\infty}\frac{GMm}{r^2}dr=\frac{GMm}{r}\Big|_R^{+\infty}=0-\frac{GMm}{R}=-\frac{GMm}{R}$$

(3)天体的机械能的计算

对于一质量为m的天体,围绕质量为M的中心天体做半径为R的匀速圆周运动,其机械能包括动能和引力势能两部分.由万有引力提供向心力,得

$$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{v^2}{R}$$

变形有

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2R}$$

由上文知此处天体m的引力势能为

$$E_p=-\frac{GMm}{R}$$

故天体的机械能为

$$E=E_k+E_p=-\frac{GMm}{2R}$$

同理可得当天体处于长半轴为a的椭圆轨道时,机械能为

$$E=-\frac{GMm}{2a}$$

例题 1(2016 年清华大学自主招生)

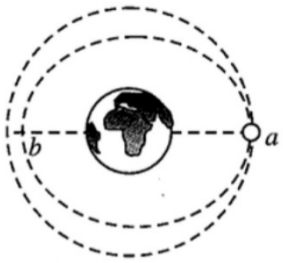
卫星携带一探测器在半径为$3R$(地球半径为R)的圆轨道上绕地球飞行.在a点,卫星上的动力装置短暂工作,将探测器沿运行方向射出(动力装置喷出的气体的质量可忽略).若探测器恰能完全脱离地球的

引力,而卫星沿新的椭圆轨道运动,其近地点b距地心的距离为nR(n略小于 3),求卫星与探测器的质量比.质量分别为M,m的两个质点相距为r时的引力势能为$-\dfrac{GMm}{r}$,式中G为引力常量.

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

设地球质量为M,卫星与探测器质量分别为m,m'.

当在圆轨道时有



$$\frac{GM(m+m')}{(3R)^2}=(m+m')\frac{v^2}{3R}$$

解得$v=\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$.

设分离后探测器的速度为v',探测器刚好脱离地球引力则满足

$$\frac{1}{2}m'v'^2-\frac{GMm'}{3R}=0$$

解得$v'=\sqrt{\dfrac{2GM}{3R}}=\sqrt{2}v$.

设分离后卫星速度为u,由机械能守恒知

$$\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{3R}=\frac{1}{2}mv_{近}^2-\frac{GMm}{nR}$$

由开普勒第二定律知

$$3R\cdot u=nR\cdot v_{近}$$

由动量守恒知

$$(m+m')v=mu+m'v'$$

三式联立,解得$\dfrac{m}{m'}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{\dfrac{2n}{3+n}}}$.

例题 2(2014 年华约自主招生)

已知地球的半径为R,地球附近的重力加速度为g,一天的时间为T.求同步卫星环绕地球的飞行速度.从地球表面发射同步轨道卫星时的速度v_0至少为多少(假定全程机械能守恒).

由定义知

$$v=\frac{2\pi}{T}\cdot r$$

只需求出r即可.又

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

结合黄金代换公式解得

$$r=\sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}$$

故同步卫星环绕地球的飞行速度为

$$v=\sqrt[3]{\frac{2\pi gR^2}{T}}$$

由机械能守恒,得

$$\frac{1}{2}mv_0'^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}$$

解得

$$v_0'=\sqrt{2gR\left(1-\sqrt[3]{\frac{\pi^2R}{2gT^2}}\right)}$$

考虑到地球自转最大的线速度为

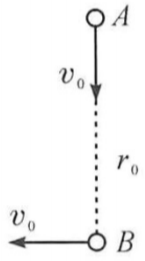
$$u=\frac{2\pi R}{T}$$

故从地球表面发射同步轨道卫星时的速度v_0至少为

$$v_0=v_0'-u=\sqrt{2gR\left(1-\sqrt[3]{\frac{\pi^2R}{2gT^2}}\right)}-\frac{2\pi R}{T}$$

例题 3(2014 年北约自主招生)

两个质量为m的质点,相距为r_0,初速度均为v_0,如图所示,当v_0至少为多少时,两小球能运动至相距无穷远的地方.



此时两质点间的引力为

$$F=\frac{Gm^2}{r_0^2}$$

对任一质点,加速度均为

$$a=\frac{Gm}{r_0^2}$$

以A为参考系,则B除所受的万有引力外,还受一指向A的惯性力ma,则B所受合力为

$$F_{合}=F+ma=\frac{2Gm^2}{r_0^2}$$

该问题等效为A处于静止,且质量为$2m$,B速度为$\sqrt{2}v_0$.此时B的机械能为

$$E=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{2}\,v_0\right)^2-\frac{2Gm^2}{r_0}$$

令$E\geq 0$,解得

$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{2Gm}{r_0}}$$

2.曲率与曲率半径

(1)曲率

①定义

曲线的曲率是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率,通过微分来定义,表明曲线偏离直线的程度.数学上表明曲线在某一点的弯曲程度的数值.曲率越大,表示曲线的弯曲程度越大.

②等价定义

弧 $\overline{MM'}$ 的切线转角 $\Delta\alpha$ 与该弧长 Δs 之比的绝对值称作该弧的平均曲率,记作

$$\overline{K}=\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$$

当 M' 沿曲线 L 趋向于 M 时,若弧 $\overline{MM'}$ 的平均曲率的极限存在,则称此极限为曲线 L 在点 M 处的曲率,记作 K,即

$$K=\lim_{M'\to M}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|\text{或}K=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$$

③计算公式

设曲线的直角坐标系方程为 $y=f(x)$ 且具有二阶导数,曲线在点 M 处的切线的斜率为 $y'=\tan\alpha$,故

$$\sec^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dx}=y''$$

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}=\frac{y''}{1+y'^2}$$

$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx$$

又 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$,故曲线 L 在 M 点处的曲率为

$$K=\frac{|y''|}{(1+y')^{\frac{3}{2}}}$$

(2)曲率半径

在微分几何中,曲率的倒数就是曲率半径,即 $R=\frac{1}{K}$.平面曲线的曲率就是针对曲线上某个点的切线方向角对弧长的转动率,通过微分来定义,表明曲线偏离直线的程度.对于曲线,它等于最接近该点处曲线的圆弧的半径.圆形半径越大,弯曲程度就越小,也就越近似于一条直线.所以说,曲率半径越大曲率越小,反之亦然.向心力公式 $F=m\frac{v^2}{r}$ 中的 r,对于椭圆轨道指曲率半径,对于圆轨道等于圆半径.

(3)椭圆特殊位置的曲率半径

在长轴的端点处,曲率半径为 $\rho=\frac{b^2}{a}$,曲率最大;在短轴的端点处,曲率半径为 $\rho=\frac{a^2}{b}$,曲率最小.

(4)曲率圆

①定义

在点M处曲线的法线的某一侧上取一点D,使$|DM|$等于曲率半径,并以D为圆心,以曲率半径为半径作圆.把这个圆称作曲线在点M处的曲率圆,把圆心D称做曲线在M处的曲率中心.

闲鱼·禁止外传

②性质

曲率圆与曲线在点M处有共同的切线和曲率;在点M邻近与曲线有相同的凹向.

(二)宇宙速度

宇宙速度是从地球表面向宇宙空间发射人造地球卫星、行星际和恒星际飞行器所需的最低速度.人造卫星能围绕地球运行是因为有恰当的速度,如果速度不够大,就会落回地面;如果速度过大,则会脱离地球引力场或太阳引力场.下述三个宇宙速度的定义给出了人造天体运动的三种范围.不考虑空气阻力以及光压等的影响.

1.第一宇宙速度

第一宇宙速度是人造卫星围绕地球表面作圆周运动时的速度.第一宇宙速度是人造卫星的最小发射速度与最大环绕速度.当卫星发射速度超过第一宇宙速度时,轨道变为椭圆形;速度愈大,椭率也就愈大.忽略太阳作用的影响,由万有引力提供人造卫星运动所需的向心力.设地球质量为M,人造卫星质量为m,人造卫星的运行高度为h,地球半径为R,G为引力常量,则有

$$\frac{GMm}{(R+h)^2}=m\frac{v_1^2}{R+h}$$

解得

$$v_1=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=7.9\ km/s$$

而$R\gg h$,故近似为

$$v_1=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

此即为人造卫星在地球附近绕地球做匀速圆周运动的速度,即第一宇宙速度.

当人造卫星在地面附近绕地球做匀速圆周运动时,也可近似认为向心力由重力提供,即

$$mg=m\frac{v_1^2}{R+h}$$

近似为

$$mg=m\frac{v_1^2}{R}$$

解得

$$v_1=\sqrt{gR}$$

而由上文提到的黄金代换公式知两结果等价.人造卫星距离地球越大,速度越小,即“越高越慢”.当卫星发射速度超过第一宇宙速度时,轨道变为椭圆形;速度愈大,椭率也就愈大.

2.第二宇宙速度

第二宇宙速度是航天器脱离地球引力场所需的最低速度.

由机械能守恒定律有

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R}=0$$

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

解得

$$v_2=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}=11.2\ km/s$$

此即为第二宇宙速度.同时注意到第二宇宙速度是第一宇宙速度的$\sqrt{2}$倍.

3.第三宇宙速度

第三宇宙速度是航天器脱离太阳引力场所需的最低速度.由上文中第二宇宙速度的推导知脱离地球的速度与围绕地球的速度之比为$\sqrt{2}$,同理脱离太阳的速度与围绕太阳的速度之比也为$\sqrt{2}$.设地球围绕太阳的速度为v_0,则地球脱离太阳所需的速度为$\sqrt{2}v_0$.而航天器在脱离太阳引力场的同时也要脱离地球引力场,由机械能守恒知

$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}mv'^2$$

其中v_2指第二宇宙速度.若顺着地球公转的方向发射,则所需的速度最小,故

$$v'=\left(\sqrt{2}-1\right)v_0$$

得到$v_3=16.7\ km/s$.

(三)人造地球卫星

1.近地卫星

近地卫星是指轨道在地球表面附近、运行高度在500千米以下的人造卫星,其角速度大于地球自转角速度.计算时轨道半径可近似取地球半径.近似条件下,轨道半径$r\approx R$,运行速度$v=\sqrt{gR}=7.9\ km/s$,是所有卫星中最大的绕行速度;向心加速度$a=g=9.8\ m\cdot s^{-2}$,是所有卫星中最大的加速度;运行周期为$T=85\ min$,是所有卫星中最小的运行周期.

2.同步卫星

地球同步卫星距离地面约35786 km(5.6R),R为地球半径,常用于通信、气象、导航以及军事情报搜集等.它的轨道周期与地球的自转周期相同,角速度与地球自转的角速度相同.

①地球静止卫星

当地球同步轨道卫星的轨道倾角为0°时,即为地球静止卫星.地球静止轨道卫星在任何时刻都处于地面上同一地点的上方,地面观察者看到卫星始终位于某一位置,静止不动.其星下点轨迹是一个点.

②极地轨道同步卫星

当地球同步轨道卫星的轨道倾角为90°时,即为极地轨道同步卫星.由于轨道平面能够固定在惯性空间中,而地球在极轨道下方旋转,极地轨道同步卫星能够在低的轨道高度观测地面上的几乎每个点,所以常用于地球测绘或监视.

③倾斜轨道同步卫星

当地球同步轨道卫星的轨道倾角大于0°并且小于180°,但不等于90°时,即为倾斜轨道同步卫星.其星下点轨迹是8字形.

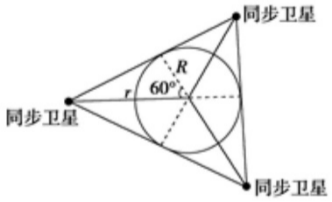
例题(2016 年全国卷 I)

利用三颗位置适当的地球同步卫星,可使地球赤道上任意两点之间保持无线电通讯,目前地球同步卫星的轨道半径若为地球半径的6.6倍,假设地球的自转周期变小,若仍仅用三颗同步卫星来实现上述目的,则地球自转周期的最小值约为(B).

A.1 h　　C.8 h

B.4 h　　D.16 h

地球自转变小,同步卫星的公转周期也随之减小.由几何关系知卫星周期最小时轨道半径为$2R$,由开普勒第三定律得



$$\frac{(6.6R)^3}{(24\,h)^2}=\frac{(2R)^3}{T^2}$$

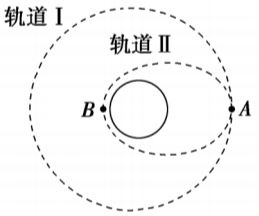
解得$T\approx 4\,h$.故选 B.

利用三颗同步通信卫星可以覆盖全球,实际上是忽略了南北极这些高纬度的地区的.不考虑大气折射、通信质量等因素,三颗同步通信卫星只能覆盖81.29° S~81.29° N的地区.假设卫星静止,完全覆盖全球也要至少四颗卫星.等价为一个正四面体,正四面体的顶点是四颗卫星,其内切球为地球.

3.极地卫星

极地卫星运行的轨道平面与赤道面夹角为90°.人造卫星运行时能到达南北极区上空,即卫星能飞经全球范围的上空.需要在全球范围内进行观测和应用的气象卫星、导航卫星、地球资源卫星等都采用这种轨道.由于地球自转的存在,极地卫星的星下点不会与任何一条经线重合.

(四)卫星变轨问题



在A点处,无论是在轨道I还是轨道II,均有

$$\frac{GMm}{L}=ma$$

即$a=\frac{GM}{L}$.L为卫星与地球中心间的距离.故在一点处卫星的加速度是一定的,与所处轨道无关系.

由上文的曲率半径知识知,在A点处,轨道I的半径为$r_1=L$,轨道II的曲率半径为$r_2<r_1$.由万有引力提供向心力解得

$$v_I=\sqrt{\frac{GMr_1}{L}},v_{II}=\sqrt{\frac{GMr_2}{L}}$$

故$v_I>v_{II}$.该结论也可由开普勒第二定律推出.

在A点处,卫星的引力势能不变,而$v_I>v_{II}$,故卫星位于轨道I时的机械能大于位于轨道II时的机械能.

(五)引力弹弓效应

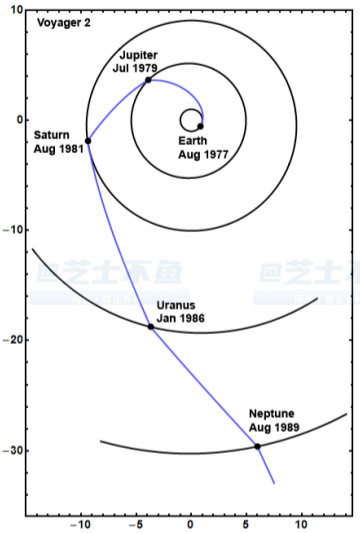
引力弹弓效应是利用大型天体的引力场来给较小物体进行加速的一种方法.利用引力弹弓使我们能探测冥王星以内的所有行星.在航天动力学和宇宙空间动力学中,所谓的引力助推是利用行星或其他天体的相对运动和引力改变飞行器的轨道和速度,以此来节省燃料、时间和计划成本.其原理为动量守恒和能量守恒.

理解引力弹弓效应的工作原理的关键是从两个不同的角度或称之为参考系来考虑问题.不妨考虑行星和太阳(或太阳系)的参考系.为了简便,将它们称为“行星坐标系”和“太阳坐标系”.在行星坐标系中定义行星静止不动.更重要的是,由于行星的质量比宇宙飞船的质量大得多,因此行星的质心几乎也是两个物体的质心,并且由于它们的相遇不会对行星产生任何可测出的量.例如木星的质量大约是旅行者号航天器的10^{24}倍,它们的相遇几乎不会对木星产生任何影响.这意味着航天器的总能量(由动能和势能组成),在整个过程期间是守恒的.在行星坐标系下,航天器在接近行星时确实会加速,在离开时会减少相同的速度.然而,航天器的方向在相遇过程中会发生变化,所以通常它会离开行星向和之前不同的方向飞行.可以通过调整航天器与行星的距离来控制速度的偏转角度.距离越近,偏转角度越大.在很大的

距离下,偏转角度可能是一个接近0度的小角度.最大的偏转角度是180度,意味着将航天器送回到来时的位置.一般从数学上讲,航天器的路径是双曲线,因此我们说航天器遵循行星坐标系中的双曲线轨迹.

现在考虑在太阳坐标系中相遇的情况,太阳静止不动,而行星是运动的.行星坐标系与太阳坐标系之间的差异只是行星有相对于太阳的速度.要从行星坐标系转换为太阳坐标系,我们只需将行星的速度加到行星和航天器上.该速度是一个向量,这意味着方向很重要,这个方向可以使是任意方向,具体取决于相遇时行星在其轨道上的位置(因为行星沿着轨道围绕太阳运动,所以方向是时刻改变的,但在与航天器的短暂相遇期间,可以近似将行星视为直线运动).由于航天器在遇到行星时会改变方向,并且航天器运动的初始方向不确定.因此方向的任意性在太阳坐标系中带来了一系列的情况,所有的情况均符合牛顿运动定律.最重要的是,由于速度方向的不确定,在太阳坐标系中观察时,航天器的速度在相遇前后会有所不同.航天器可以加速或减速.

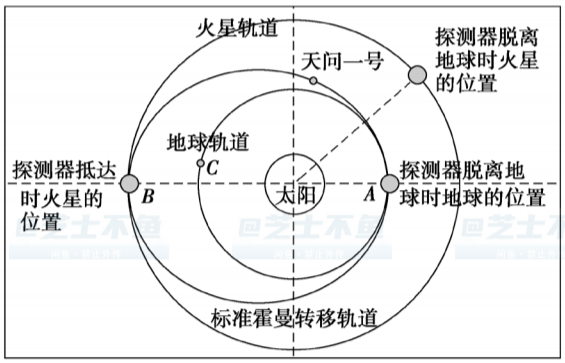
引力弹弓效应的一般经验法则:如果在相遇之后,航天器速度方向与行星速度方向夹角比相遇之前小,则其速度将会提高.加速航天器的能量来自行星自身的运动能量.在太阳坐标系中,动量和动能可以从行星传递到航天器.行星在其轨道上的减速可以忽略,航天器则会加速.牛顿第三定律指出对每一个作用力都有对应的大小相等方向相反的反作用力.引力弹弓效应同样符合牛顿第三定律.因为行星质量比航天器质量大得多,所以引力弹弓效应不会对行星产生任何可测量的到的影响,但是对航天器而言,这个影响是十分巨大的.例如可以计算出在旅行者号与木星相遇期间,木星的速度降低了大约$10^{-24}\ km/s$,这一变化太小了以至于无法测量.但是每个旅行者号得到了约为$10\ km/s$的速度,这是一个相当大的数字,足以使它们迅速飞向土星,并最终逃离了太阳系.



右图展示了1977年旅行者2号从地球发射12年后到达海王星的路径.

(六)霍曼转移

德国工程师奥尔特·霍曼博士推导出在两条倾角相同、高度相异的圆形轨道间转移卫星的最小能量方法,称之为霍曼转移.霍曼转移所用的轨道是一近地点在较低高度、远地点在较高高度的椭圆轨道.因为充分的利用了星体引力产生的能量,所以这种转移所用到的能量最小.利用这一轨道航天器可以实现从低轨道到高轨道的转移,或从高轨道到低轨道的转移(这里的高轨道、低轨道不特指某一高度的轨道).霍曼转移虽然所用到的能量最小,但它是以牺牲时间为代价的.霍曼转移涉及两次水平加力机动.在圆形轨道中运动的物体受到正向水平推力时,开始从较低的轨道转移到较大的椭圆形轨道,加力点是这个椭圆的近地点.然后顺着该椭圆轨道,物体开始向远地点运动,当到达远地点时,开始了第二次加力仍为正向水平推力,使得轨道转移到远地点高度上的圆形轨道.同样高轨道到低轨道转移也是这样,只不过这时物体是从远地点向近地点运动,经历的是两次减速运动.霍曼转移虽然所用到的能量最小,但它是以牺牲时间为代价的.要实现更快的转移需要更多的能量,消耗的推进剂增多.



(七)拉格朗日点

1.拉格朗日点的定义

拉格朗日点又称平动点,在天体力学中是限制性三体问题的五个特解.一个小物体在两个大物体的引力作用下在空间中的一点,在该点处,小物体相对于两大物体基本保持静止.

2.拉格朗日点的推导

设太阳质量为M,地球质量为m,日地距离为R;在某拉格朗日点处有一质量为m_0的物体.在质心系中对系统分析,可知卫星的运动以质心为中心且角速度等同于太阳和地球的圆周运动.设太阳为坐标原点,日地径矢方向为x轴,则质心坐标为

$$x_c=\frac{M\cdot 0+m\cdot R}{M+m}=\frac{m}{M+m}R$$

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

对地球分析,太阳对地球的万有引力提供地球运动所需的向心力,故

$$\frac{GMm}{R^2}=m\omega^2(R-x_c)$$

代入质心坐标,得

$$\omega^2=\frac{G(M+m)}{R^3}$$

L_1点

该拉格朗日点位于地日连线靠近地球处,设其与地球的距离为x.

对于物体m_0,太阳与地球对它的万有引力的合力提供向心力,有

$$\frac{GMm_0}{(R-x)^2}-\frac{Gmm_0}{x^2}=m_0\omega^2(R-x-x_c)$$

使用泰勒一阶展开进行近似,有

$$\frac{GMm_0}{(R-x)^2}\approx\frac{GMm_0}{R^2\left(1-\frac{2x}{R}\right)}$$

再近似一次,有

$$\frac{GMm_0}{R^2\left(1-\frac{2x}{R}\right)}\approx\frac{GMm_0}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right)$$

代入得到

$$\frac{GM}{R^2}+\frac{2GMx}{R^3}-\frac{Gm}{x^2}=\omega^2(R-x-x_c)$$

代入$\omega^2=\frac{G(M+m)}{R^3}$,$x_c=\frac{m}{M+m}R$解得

$$x=R\cdot\left(\frac{m}{3M+m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

故

$$x_{L_1}=R\left(1-\left(\frac{m}{3M+m}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

L_2点

该拉格朗日点位于地日连线延长线上,设其与地球的距离为x.

对于物体m_0,太阳与地球对它的万有引力的合力提供向心力,有

$$\frac{GMm_0}{(R+x)^2}+\frac{Gmm_0}{x^2}=m_0\omega^2(R+x-x_c)$$

同上文的近似方法,得到

$$\frac{GMm_0}{(R+x)^2}\approx\frac{GMm_0}{R^2}\left(1-\frac{2x}{R}\right)$$

回芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

代入得到

$$\frac{GM}{R^2}+\frac{Gm}{x^2}-\frac{2GMx}{R^3}=\omega^2(R+x-x_c)$$

代入$\omega^2=\frac{G(M+m)}{R^3},x_c=\frac{m}{M+m}R$解得

$$x=R\cdot\left(\frac{m}{3M+m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

故

$$x_{L_2}=R\left(1+\left(\frac{m}{3M+m}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

L_3点

该拉格朗日点位于地日连线反向延长线上,设其与地球的距离为$2R-x$.

对于物体m_0,太阳与地球对它的万有引力的合力提供向心力,有

$$\frac{GMm_0}{(R-x)^2}+\frac{Gmm_0}{(2R-x)^2}=m_0\omega^2(R-x+x_c)$$

同上文的近似方法,得到

$$\frac{GMm_0}{(R-x)^2}\approx\frac{GMm_0}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right),\frac{Gmm_0}{(2R-x)^2}=\frac{Gmm_0}{4R^2}\left(1+\frac{x}{R}\right)$$

代入得到

$$\frac{GM}{R^2}+\frac{Gm}{4R^2}+\frac{2GMx}{R^3}+\frac{Gmx}{4R^3}=\omega^2(R-x+x_c)$$

代入$\omega^2=\frac{G(M+m)}{R^3},x_c=\frac{m}{M+m}R$解得

$$x=R\cdot\frac{7m}{12M+5m}$$

故

$$x_{L_3}=R\left(\frac{7m}{12M+5m}-1\right)=R\cdot\frac{-12M+2m}{12M+5m}$$

L_4,L_5点

运用矢量方法求解.两引力矢量和必指向质心.显然L_4和L_5作圆周运动的径向矢量可以被$\overrightarrow{L_4},\overrightarrow{L_5}$线性表示,前者是拉格朗日点到太阳的矢量,后者为到地球的矢量.因此根据矢量性质有

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

$$\begin{cases}\mu\vec{L_1}+(1-\mu)\vec{L_2}=\vec{d}\\ \dfrac{GM}{L_1^3}\vec{L_1}+\dfrac{Gm}{L_2^3}\vec{L_2}=\omega^2\vec{d}\end{cases}$$

代入$\omega^2=\dfrac{G(M+m)}{R^3}$化简有

$$\begin{cases}\mu\vec{L_1}+(1-\mu)\vec{L_2}=\vec{d}\\ \dfrac{M}{L_1^3}\vec{L_1}+\dfrac{m}{L_2^3}\vec{L_2}=\dfrac{M+m}{R^3}\vec{d}\end{cases}$$

故

$$\frac{M}{L_1^3}+\frac{m}{L_2^3}=\frac{M+m}{R^3}$$

显然$L_1=L_2=R$为方程的解.因此L_4,L_5点与太阳和地球构成等边三角形.坐标为

$$\left(\frac{1}{2}R,\frac{\sqrt{3}}{2}R\right),\left(\frac{1}{2}R,-\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)$$

3.拉格朗日点的性质

L_1点

它在两个大天体的连线上,且在它们之间.例如一个围绕太阳旋转的物体,它距太阳的距离越近,它的轨道周期就越短.但是这忽略了地球的万有引力对其产生的拉力的影响.如果这个物体在地球与太阳之间,地球引力的影响会减弱太阳对这物体的拉力,因此增加了这个物体的轨道周期.物体距地球越近,这种影响就越大.在L_1点,物体的轨道周期恰好等于地球的轨道周期.如果发射一个航天器,以合适的初速度达到L_1点.该航天器就可以保持与地球相同的角速度与太阳公转,从而一直保持在地球和太阳连线的这个位置上.这种情况下,从航天器观察地球,永远看到的是地球被太阳照亮的半球.所以该位置在航天工程上有一些好的性质.从L_1点观察地球总是观察到白天的半球.而观察太阳则效果更好,因为太阳的位置相对静止,永远不用担心太阳被地球或者月球挡住(对地日系统来说,这个位置在地球太阳连线上,距离地球150万公里的位置,这个数字是月球到地球距离的4倍).

L_2点

它在两个大天体的连线上,且在较小的天体一侧.例如一个物体距太阳的距离越远,它的轨道周期通常就越长.地球引力对其的拉力减小了物体的轨道周期.在L_2点,轨道周期变得与地球的相等.它通常用于放置空间天文台和中继卫星.L_2点距离地球与L_1点与地球的距离是接近的,同样约 150 万公里,四倍的地月距离.从L_2点看地球,永远是看到黑夜的半球.从L_2点看太阳的话,理论上总有部分太阳被地球挡住了.基于以上特性,这个位置非常适合太空望远镜.一个是位置容易校准,只要保持这个航天器时刻是在地球上午夜0点位置的天顶之上即可.地球也挡住了部分太阳,所以减少了太阳辐射的干扰,也容易保持温度稳定.

2018年发射的鹊桥号月球专用通信中继卫星,它是配合嫦娥四号对月球背面的探月工程而发射的,这颗卫星至今仍然运行在地月系统的L_2点.月球总是以同一个面面对地球.如果一个探测器要在月球背面着陆,怎么从地球上与探测器通信就成为一个问题,需要有一个通信中继点.而地月系统的L_2点就位于地球与月球连线的延长线上,靠月球的另一侧,并且能时刻看到月球的背面.而且月球体积不那么大,所以在这个位置上,总还能看到部分地球.所以L_2点就是连接地球和月球背面的绝佳中继通信位置.

L_3点

它在两个大天体的连线上,且在较大的天体一侧.例如日地L_3点位于太阳的另一侧,比地球距太阳略微近一些.地球与太阳的合拉力再次使物体的运行轨道周期与地球相等.

L_4点

它在以两天体连线为底的等边三角形的第三个顶点上,且在较小天体围绕两天体系统质心运行轨道的前方.此点平衡的原因在于,它到两大物体的距离相等,其对两物体分别的引力之比,正好等于两大物体的质量之比.因此两个引力的合力正好指向该系统的质心,合力大小正好提供该物体公转所需之向心力,使其旋转周期与两大天体相同并达成轨道平衡.L_4点和L_5点有时被称为三角拉格朗日点或特洛伊点,在该处的自然小天体被称为特洛伊族.

L_5点

它在以两天体连线为底的等边三角形的第三个顶点上,且在较小天体围绕两天体系统质心运行轨道的后方,此点平衡的原因与L_4点的相同.

4.拉格朗日点的稳定性

对于L_4, L_5这两个拉格朗日点,当两个大质点的质量之比大于25的时候,这两个点是稳定平衡点."稳定平衡"意为当稍微偏离平衡位置时,系统会自动恢复到平衡位置.而太阳与地球质量比远大于25,所以地日系统的L_4, L_5点是稳定平衡点.而L_1到L_3点都不是稳定平衡点,也就是如果偏离平衡位置一些而不主动纠正的话,就会远离这些位置.达到过L_1和L_2点的航天器,它们并不能完全没有动力.实际上它们会环绕拉格朗日点运行,经常纠正自己的位置.

在科幻小说里,已经把L_4, L_5两点设定为未来星际殖民飞船的绝佳运行位置.首先这两个位置是稳定平衡点,意味着飞船一旦达到这个位置,就不需要再输出动力,从而以极低的成本保持与地球和太阳的相对静止.但稳定平衡的副作用是,有很多天然的物质容易靠近和积聚在这两个位置.现在已经观测到,在地日的L_4, L_5点附近,有一些星际尘埃和至少两颗小行星.如果殖民飞船要到达那个位置,就需要考虑如何避免和星际尘埃和小行星的碰撞问题.而太阳和木星系统的L_4, L_5两点上则有上百万的这样的小行星.

五、星体稳定自转的临界问题

当星体自转速度快到一定程度时,星体对赤道上的物体的引力不足以提供向心力时,物体会与星体脱离接触,即二者间不存在相互作用力.此时的自转速度进一步会使星体瓦解,临界条件为

$$\frac{GMm}{R^2}=m\omega^2R$$

例题(2023 年湖北模拟)

一可被视为均匀球体的中子星在自转周期为T_0时恰能维持星体的稳定(不因自转而瓦解),当中子星的自转周期为$3T_0$时,求一质量为m的物体在该中子星"两极"所受重力与在"赤道"所受重力的比值.

自转周期为T_0时,有

$$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{4\pi^2}{T_0^2}R$$

自转周期为$3T_0$.位于"两极"处时,所受重力等于其所受的万有引力.位于"赤道"处时,有

$$\frac{GMm}{R^2}=m\frac{4\pi^2}{(3T_0)^2}R+G'$$

联立解得比值为$\frac{9}{8}$.

六、史瓦西半径

对于一个质量为m的球状物体,当其半径R不大于$\frac{2Gm}{c^2}$时成为一个黑洞,此即为史瓦西半径.

闲鱼·禁止外传

七、多星系统

几个质量差别不太大的星体,在各自万有引力的影响下,围绕系统的质心做匀速圆周运动.将这样的系统称为多星系统.多星系统里星体之间质量不能相差太大.若质量相差太大,则变为环绕与被环绕的关系.现阶段题目中一般不考虑系统外的其他星体.

(一)特点

1.星体做匀速圆周运动的圆心为系统的质心

多星系统里各星体做匀速圆周运动有共同的圆心,该圆心为该系统中所有星体的质心.各星体的运行轨迹构成同心圆.

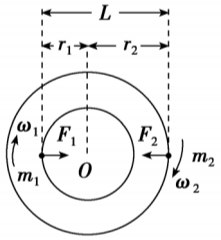
2.星体运转的角速度和周期均相同

3.合外力提供星体运转的向心力

(二)双星模型

对m_1分析,有

$$\frac{Gm_1m_2}{L^2}=m_1\frac{4\pi^2}{T^2}r_1$$



对m_1分析,有

$$\frac{Gm_1m_2}{L^2}=m_2\frac{4\pi^2}{T^2}r_2$$

即

$$\begin{cases}\frac{G}{L^2}m_1=\frac{4\pi^2}{T^2}r_2\\ \frac{G}{L^2}m_2=\frac{4\pi^2}{T^2}r_1\end{cases}$$

两式作比,得

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{r_2}{r_1}$$

又$r_1+r_2=L$,故

$$r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}L,r_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}L$$

两式相加,得

$$\frac{G(m_1+m_2)}{L^2}=\frac{4\pi^2L}{T^2}$$

解得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1+m_2)}},\omega=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{L^3}},M=m_1+m_2=\frac{4\pi^2L^3}{GT^2}$$

进而求出

$$v_1=\sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1+m_2)L}},v_2=\sqrt{\frac{Gm_1^2}{(m_1+m_2)L}}$$

例题(第 14 届全国物理竞赛复赛)

经过天文望远镜的长期观测,人们在宇宙中已经发现了许多双星系统,通过对它们的研究,我们对宇宙中的物质的存在形式和分布情况有了较深刻的认识.双星系统是由两个星体组成,其中每个星体的线度都远小于两个星体之间的距离.一般双星系统距离其他星体很远,可以当作孤立系统处理.现根据对某一双星系统的光学测量确定,该双星系统中每个星体的质量都是M,两者间距L,它们正围绕着两者连线的中点做圆周运动.

(1)计算该双星系统的周期$T_{计算}$.

由万有引力提供星体做圆周运动所需的向心力,故

$$\frac{GM^2}{L^2}=M\frac{4\pi^2}{T_{计算}^2}\cdot\frac{L}{2}$$

解得

$$T_{计算}=\pi L\sqrt{\frac{2L}{GM}}$$

(2)若实验上观测到的运动周期为$T_{观测}$,且$T_{观测}:T_{计算}=1:\sqrt{N}\,(N>1)$,为了解释观测周期$T_{观测}$和$T_{计算}$的不同,目前有一种理论认为,在宇宙中可能存在一种用望远镜也观测不到的暗物质.作为一种简化模型,我们假定在以这两个星体连线为直径的球体内均匀分布着这种暗物质,而不考虑其他暗物质的影响,试根据这一模型和上述观测结果确定该星系间这种暗物质的密度.

暗物质作用后,对于星体有

$$\frac{GM^2}{L^2}+\frac{GMM'}{\left(\frac{L}{2}\right)^2}=M\frac{4\pi^2}{T_{观测}^2}\cdot\frac{L}{2}$$

又$T_{观测}:T_{计算}=1:\sqrt{N}\,(N>1)$,故解得

$$M'=\frac{N-1}{4}M$$

设暗物质的密度为ρ,故

$$\rho=\frac{M'}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3}=\frac{\frac{N-1}{4}M}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{L}{2}\right)^3}=\frac{3(N-1)M}{2\pi L^3}$$

(三)三星模型

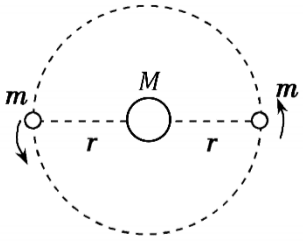
1.三星共线的情况

三星始终共线,系统处于稳定状态.质量为M的星体在中间不动,另外两个质量均为m的星体绕着质量为M的星体做匀速圆周运动,轨道半径为r.

对于质量为M的星体,受到方向相反且大小相等的万有引力,故合外力为零.

对于质量为m的星体,有

$$\frac{GMm}{r^2}+\frac{Gm^2}{(2r)^2}=m\omega^2 r$$



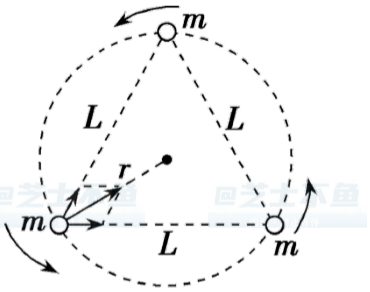
解得

$$\omega=\sqrt{\frac{G(4M+m)}{4r^3}},T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{4r^3}{G(4M+m)}}$$

2.质量相等的三星体组成等边三角形的情形

三颗质量均为m的星体分别位于等边三角形的顶点处,均绕等边三角形的中心做匀速圆周运动.三颗星体的轨道半径为r,等边三角形的边长为L.每颗星体作匀速直线运动所需的向心力都由其余两颗星体对其万有引力的合力提供,即

$$2\frac{Gm^2}{L^2}\cdot\cos 30^\circ=m\omega^2 r$$



解得

$$\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,Gm}{3r^3}}=\sqrt{\frac{3Gm}{L^3}}$$

进而求得

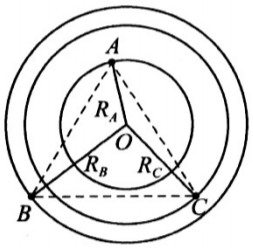
$$a=\frac{\sqrt{3}\,Gm}{3r^2}=\frac{\sqrt{3}\,Gm}{L^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{\sqrt{3}\,Gm}{3r}}=\sqrt{\frac{Gm}{L}}$$

3.质量不等的三星体组成等边三角形的情形

(1)例题(2015 年安徽理综第 24 题)

由三颗星体构成的系统,忽略其它星体对它们的作用,存在着一种运动形式:三颗星体在相互之间的万有引力作用下,分别位于等边三角形的三个顶点上,绕某一共同的圆心O在三角形所在的平面内做相同角速度的圆周运动(图示为三颗星体质量不相同时的一般情况).若A星体质量为$2m$,B和C两星体的质量均为m,三角形的边长为a,求:①A星体所受合力大小F_A;②B星体所受合力大小F_B;③C星体的轨道半径R_C;④三星体做圆周运动的周期T.



①A星体所受B,C两星体的万有引力大小相等,有

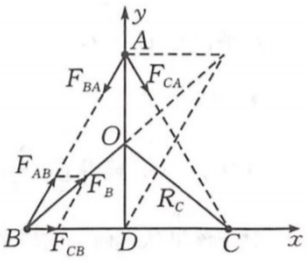
$$F_{BA}=F_{CA}=\frac{2Gm^2}{a^2}$$

进行合成,得到

$$F_A=\frac{2\sqrt{3}\,Gm^2}{a^2}$$

②同①得到

$$F_{AB}=\frac{2Gm^2}{a^2},F_{CB}=\frac{Gm^2}{a^2}$$



正交分解得到

$$F_x=F_{AB}\cdot\cos 60^\circ+F_{CB}=\frac{2Gm^2}{a^2},F_y=F_{AB}\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}Gm^2}{a^2}$$

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

合成得到

$$F_B=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\frac{\sqrt{7}Gm^2}{a^2}$$

由余弦定理,有

$$F_B=\sqrt{F_{AB}^2+F_{CB}^2-2F_{AB}\cdot F_{CB}\cdot\cos 120^\circ}=\frac{\sqrt{7}Gm^2}{a^2}$$

③由几何关系知圆心O在中垂线AD的中点,故

$$R_C=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}a$$

由对称性可知

$$OB=OC=R_C$$

$$\cos\angle OBD=\frac{F_x}{F_B}=\frac{DB}{OB}=\frac{\frac{1}{2}a}{R_C}$$

得到$R_C=\frac{\sqrt{7}}{4}a$.

从解析几何的角度出发,星体做匀速圆周运动的圆心必在星体所受合外力所在的直线上.
由对称性知,星体A所受合外力所在的直线为

$$x=0$$

通过对星体B所受合外力的正交分解,得到星体B所受合外力所在的直线为

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

二式联立,解得圆心位置为

$$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$$

进而求得$R_C=\frac{\sqrt{7}}{4}a$.

④星体所受的合外力提供星体做匀速圆周运动所需的向心力,故

$$F_C=F_B=\frac{\sqrt{7}Gm^2}{a^2}=m\frac{4\pi^2}{T^2}R_C$$

解得

$$T=\pi\cdot\sqrt{\frac{a^3}{Gm}}$$

(2)解析几何法处理一般情况

同上文中的建系方式,设星体A,B,C的质量分别为m_1,m_2,m_3,等边三角形的边长为a.利用解析几何的方法,可以得到星体做匀速圆周运动的圆心的坐标即如下方程的解.

$$y=\frac{\sqrt{3}\,m_1}{m_1+2m_3}\left(x+\frac{a}{2}\right)$$

$$y=-\frac{\sqrt{3}\,m_1}{m_1+2m_2}\left(x-\frac{a}{2}\right)$$

解得圆心的坐标为

$$\left(\frac{(m_3-m_2)}{2(m_1+m_2+m_3)}a,\frac{\sqrt{3}\,m_1}{2(m_1+m_2+m_3)}a\right)$$

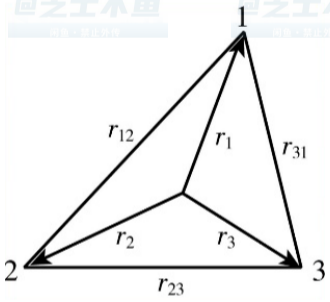
进而求得各物理量.

(3)矢量法处理一般情况

空间中有m_1,m_2,m_3三个质点以万有引力相互作用,三质点绕其质心匀速转动.

由质心定义知

$$m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}+m_3\vec{r_3}=\vec{0}$$



变形有

$$\vec{r_3}=-\frac{1}{m_3}\left(m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}\right)$$

对m_1应用万有引力定律,有

$$-m_1\omega^2\vec{r_1}=\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\left(\vec{r_2}-\vec{r_1}\right)+\frac{Gm_1m_3}{r_{31}^3}\left(\vec{r_3}-\vec{r_1}\right)$$

由以上二式可得

$$\left(\omega^2-\frac{Gm_1}{r_{31}^3}-\frac{Gm_2}{r_{12}^3}-\frac{Gm_3}{r_{31}^3}\right)\vec{r_1}+\left(\frac{Gm_2}{r_{12}^3}-\frac{Gm_2}{r_{31}^3}\right)\vec{r_2}=\vec{0}$$

由于$\vec{r_1},\vec{r_2}$不共线,故

$$\begin{cases}\omega^2-\dfrac{Gm_1}{r_{31}^3}-\dfrac{Gm_2}{r_{12}^3}-\dfrac{Gm_3}{r_{31}^3}=0\\ \dfrac{Gm_2}{r_{12}^3}-\dfrac{Gm_2}{r_{31}^3}=0\end{cases}$$

得到$r_{12}=r_{23}=r_{31}$,进而解得

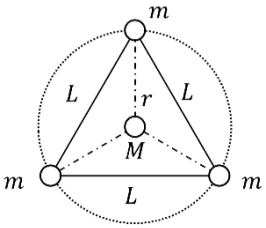
$$w=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{r_{12}^3}}$$

(四)四星模型

1.组成等边三角形的情况

如图所示,三颗质量均为m的星体分别位于等边三角形的顶点处,一个质量为M的星体位于等边三角形的中心处.质量均为m的星体均绕位于等边三角形的中心的星体做匀速圆周运动.三颗星体的轨道半径为r,等边三角形的边长为L.

对于位于等边三角形的中心、质量为M的星体而言,它所受到的其他三个质量相等的星体的万有引力的合力为零,共点力平衡.

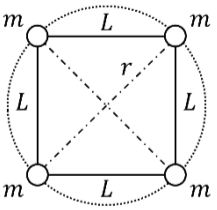


对于位于等边三角形各个顶点、质量为m的星体而言,它所受到的其他三个星体的万有引力的合力提供向心力,有

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

$$\frac{2Gm^2}{L^2}\cos 30^\circ+\frac{GMm}{r^2}=m\omega^2 r$$

2.组成正方形的情况



如图所示,四颗质量均为m的星体分别位于正方形的四个顶点处,均绕正方形的中心做匀速圆周运动,轨道半径均为r,正方形的边长为L.

由几何关系知

$$L=\sqrt{2}r$$

对于质量为m的每颗星体而言,做匀速圆周运动所需的向心力均由其余三颗星体对其万有引力的合力提供,即

$$\frac{2Gm^2}{L^2}\cos 45^\circ+\frac{Gm^2}{(2r)^2}=m\omega^2 r$$

3.四星共线的特殊情况

八、天体运动中的追及与相遇问题

本节中的n的取值为自然数.设两天体的角速度分别为$\omega_1,\omega_2(\omega_1>\omega_2)$.

(一)两天体由最近至最远时

当两天体转动方向相同时,有

$$(\omega_1-\omega_2)t=(2n+1)\pi$$

解得

$$t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}$$

当两天体转动方向相反时,有

$$(\omega_1+\omega_2)t=(2n+1)\pi$$

解得

$$t=\frac{(2n+1)\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

(二)两天体由最近至最近时

当两天体转动方向相同时,有

$$(\omega_1-\omega_2)t=2(n+1)\pi$$

解得

$$t=\frac{2(n+1)\pi}{\omega_1-\omega_2}$$

当两天体转动方向相反时,有

$$(\omega_1+\omega_2)t=2(n+1)\pi$$

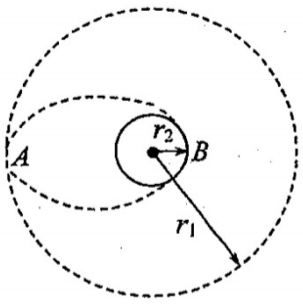
解得

$$t=\frac{2(n+1)\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

回芝士不鱼

(三)例题

已知某卫星在赤道上空轨道半径为r_1的圆形轨道上绕地球运行的周期为T,卫星运动方向与地球自转方向相同,赤道上某城市的人每三天恰好五次看到该卫星掠过其正上方.假设某时刻该卫星在A点变轨进入椭圆轨道,近地点B到地心距离为r_2.如图所示,设卫星由A到B(只经B点一次)运动的时间为t,地球自转周期为T_0.不计空气阻力,求T和t.



记卫星运转的角速度为ω,赤道上物体做匀速圆周运动的角速度为ω_0.由题知

$$(\omega-\omega_0)\cdot 3T_0=10\pi$$

又知$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$,解得$T=\frac{3}{8}T_0$.

由开普勒第二定律有

$$\frac{\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3}{(2t)^2}=\frac{r_1^3}{T^2}$$

解得

$$t=\frac{3(r_1+r_2)T_0}{32r_1}\cdot\sqrt{\frac{r_1+r_2}{2r_1}}$$

九、洛希极限

(一)定义

洛希极限是一个天体自身的引力与第二个天体造成的潮汐力相等时的距离.当两个天体的距离少于洛希极限,天体就会倾向碎散,继而成为第二个天体的环.它以首位计算这个极限的人爱德华·洛希命名.

(二)利用引潮力与万有引力计算

设小星体质量为m,大星体质量为M,二者距离为d,小星体的半径为r,大星体的半径为R.记引潮力为F_T.根据引潮力的定义,求得小星体上质量为m_0的、距离大星体最近的一部分所受的引潮力为

$$F_T=\frac{GMm_0}{(d-r)^2}-\frac{GMm_0}{d^2}$$

使用泰勒一阶展开进行近似,得

$$F_T=\frac{2rGMm_0}{d^3}$$

当此处质量为m_0的该部分所受引潮力等于它所受的来自小星体的万有引力时,到达洛希极限位置,即

$$F_{\mathrm{T}}=\frac{Gmm_0}{r^2}$$

解得

$$d=r\sqrt[3]{\frac{2M}{m}}$$

此即为洛希极限.

(三)利用加速度大小的关系计算

分析小星体,小星体的加速度由大星体对小星体的万有引力提供,即

$$\frac{GMm}{d^2}=ma$$

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

解得

$$a=\frac{GM}{d^2}$$

同上文对质量为m_0的一部分进行分析,当到达洛希极限处时,该部分物体不受支持力,而大星体对该部分的万有引力与小星体对该部分的万有引力的合力提供该部分运动所需的加速度,故得

$$\frac{GMm_0}{(d-r)^2}-\frac{Gmm_0}{r^2}=ma'$$

处于临界态时$a=a'$,联立后使用泰勒一节展开进行近似后可解得与上文相同的结果.知

$$M=\rho_1\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,m=\rho_2\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

故洛希极限还可写为

$$d=R\sqrt[3]{\frac{2\rho_1}{\rho_2}}$$

(四)例题(2023 年西城二模节选)

在科幻电影《流浪地球》中有这样一个场景:地球在木星的强大引力作用下,加速向木星靠近,当地球与木星球心之间的距离小于某个值d时,地球表面物体就会被木星吸走,进而导致地球可能被撕裂.这个临界距离d被称为洛希极限.已知木星和地球的密度分别为ρ_0和ρ,木星和地球的半径分别为R_0和R,且$d\gg R$.请据此近似推导木星使地球产生撕裂危险的临界距离d,即洛希极限的表达式.

【提示:当x很小时,$(1+x)^n\approx 1+nx$.】

本题解法与上文中利用加速度大小的关系计算相同.

十、角动量及角动量守恒定律

(一)角动量

质点动量p对O点的动量矩(通常称为角动量)$L(O)$(简记为$\vec{L}$)为

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

其中$\vec{r}$是质点相对O点的位矢.角动量$\vec{L}$的大小$\left|\vec{L}\right|=rp\sin\varphi$($\varphi$为$\vec{r}$与$\vec{p}$的夹角),方向垂直于位矢$\vec{r}$和动量$\vec{p}$所组成的平面,遵循右手螺旋定则.

(二)质点的角动量定理

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

即质点所受的合外力矩等于它的角动量对时间的变化率.

质点系的角动量定理也可写作同样的形式,此时$\vec{M}$为质点系所受的总外力矩,$\vec{L}$为质点系的总角动量.

两边积分得到

$$\Delta\vec{L}=\vec{L}-\vec{L_0}=\int_0^t\vec{M}dt=\int_0^t\vec{r}\times\vec{p}dt=\int_0^t\vec{r}\times\vec{I}$$

即在惯性系中,在一段时间内质点对固定点角动量的增量等于质点所受合力在这段时间内对该点的冲量矩.

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

(三)质点的角动量守恒定律

由$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt}$知,若作用在质点上的外力对某给定点$O$的力矩$\vec{r}\times\vec{F}$为零,则质点对$O$的角动量在运动过程中保持不变,即质点的角动量守恒定律.某段时间内若质点所受合力对点O力矩不为零,但是力矩的某分量总是零,则该段时间内质点对点O角动量的该分量守恒.

例题(2011 年中国科学技术大学保送生面试节选)

如图所示,一物体从地球表面发射,初速度$v_0=kv_1$(式中v_1为第一宇宙速度),初速度方向与竖直方向成θ角,其中$k<\sqrt{2}$.将地球视为质量均匀分布的球体,忽略空气阻力和地球自转的影响.求物体能到达的最大高度.

设物体运动离地面的最大高度为H,此时速度为v,由机械能守恒有

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{R}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R+H}$$

由角动量守恒有

$$\vec{R}\times\vec{p_0}=\vec{R'}\times\vec{p}$$

即

$$R\cdot mv_0\sin\theta=(R+H)\cdot mv$$

二式联立,结合$v_0=kv_1,\frac{GMm}{R^2}=m\frac{v_1^2}{R}$,得到关于$(R+H)$的一元二次方程,解得

$$H=\frac{-2Rv_1^2\pm\sqrt{4R^2v_1^4+4(v_0^2-2v_1^2)R^2v_0^2\sin^2\theta}}{2(v_0^2-2v_1^2)}-R$$

(四)角动量守恒定律与开普勒第二定律

位矢$\vec{r}$在单位时间内扫过的面积,称为它的掠面速度.显然掠面速度为

$$S=\frac{\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|}{2}$$

角动量大小为

$$\left|\vec{L}\right|=\left|\vec{r}\times\vec{p}\right|=2mS$$

角动量守恒定律指出,当合外力矩为零时,角动量守恒,物体与中心点的连线单位时间扫过的面积不变,在天体运动中表现为开普勒第二定律.

十一、斯特潘-玻尔兹曼定律

(一)定义

一个黑体表面单位面积在单位时间内辐射出的总能量与黑体本身的热力学温度T的四次方成正比.即

$$j=\sigma T^4$$

其中σ为斯特潘-波尔兹曼常数.

(二)例题(2023 年烟台 德州一模)

人类太空探测计划旨在探测恒星亮度以寻找适合人类居住的宜居行星.在某次探测中发现距地球数光年处有一颗相对太阳静止的质量为M的恒星A,将恒星A视为黑体,根据斯特藩-玻尔兹曼定律:一个黑体表面单位面积辐射出的功率与黑体本身的热力学温度T的四次方成正比,即黑体表面单位面积辐射出的功率为σT^4(其中σ为常数),A的表面温度为T_0,地球上正对A的单位面积接收到A辐射出的功率为I.

已知A在地球轨道平面上,地球公转半径为R_0,一年内地球上的观测者测得地球与A的连线之间的最大夹角为θ(角θ很小,可认为$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$).恒星$A$有一颗绕它做匀速圆周运动的行星$B$,该行星也可视为黑体,其表面的温度保持为$T_1$,恒星$A$射向行星$B$的光可看作平行光.已知引力常量为$G$,求:

(1)恒星A的半径R_A;

设恒星A与地球间的距离为d,由几何关系得

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{R_0}{d}$$

近似为

$$\frac{\theta}{2}=\frac{R_0}{d}$$

得

$$d=\frac{2R_0}{\theta}$$

恒星A辐射出的总功率与地球所在的以d为半径的球面上接受到由A辐射出的总功率相等,即

$$\sigma T_0^4\cdot 4\pi R_A^2=I\cdot 4\pi d^2$$

解得

$$R_A=\frac{2R_0}{\theta T_0}\sqrt{\frac{I}{\sigma}}$$

(2)行星B的运动周期T_B.

设行星B的质量为m,半径为R_B,绕恒星A做匀速圆周运动的轨道半径为r.

行星B接收到恒星A辐射出的功率为

$$P_1=\frac{\sigma T_0^4\cdot 4\pi R_A^2}{4\pi r^2}\cdot\pi R_B^2$$

行星B作为黑体向外辐射出的功率为

$$P_2=\sigma T_1^4\cdot 4\pi R_B^2$$

由题知行星B表面的温度保持为T_1,故$P_1=P_2$.

恒星A对行星B的万有引力提供做匀速圆周运动所需的向心力,故

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2}{T_B^2}r$$

联立解得

$$T_B=\frac{2\pi R_0}{\theta T_1^3}\sqrt{\frac{IR_0}{\sigma\theta GM}\sqrt{\frac{I}{\sigma}}}$$

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传