动量

目录

一、动量与冲量 3
(一)动量的定义 3
(二)动量与动能的区别和代数联系 3
(三)冲量 3
(四)动量与冲量的单位的等价性 3
二、动量定理 3
(一)动量定理 3
(二)运动量度 4
(三)动量定理的应用 4
(四)微元法与微积分法 4
三、质点系动量定理 5
(一)质点系 5
1.定义 5
2.内力与外力 5
3.性质 5
(二)质点系动量定理 5
四、质心与质心运动定理 5
(一)质心 5
1.定义 5
2.推导 6
(二)质心运动定理 6
(三)质心运动守恒定理 6
(四)质心系是零动量系的证明 6
五、柯尼希定理 7
(一)推导 7
(二)两体问题 7
例题 8
六、动量守恒定律 9
例题 9
七、实验:验证动量守恒定律 10
(一)思路 1 10
1.实验思路及基本操作 10
2.操作要领 10
3.数据处理及分析 10
4.误差分析 10
5.注意事项 10
(二)思路 2 10
1.实验思路及基本操作 10
2.操作要领 10
3.数据处理及分析 11
4.误差分析 11
5.注意事项 11
八、弹性碰撞和非弹性碰撞 11
(一)对心碰撞 11
1.弹性碰撞 11

审稿：应俊

(1)定义 11
(2)弹性碰撞方程的通解 11
(3)弹性碰撞的特殊情形 12
(4)弹性碰撞中物体速度与质心速度的关系 12
2.非弹性碰撞 12
3.完全非弹性碰撞 12
(1)定义 12
(2)完全非弹性碰撞损失动能最大的证明 12
(3)题目中隐含的完全非弹性碰撞条件 12
4.碰撞可能性分析 13
5.反冲模型 13
(1)作用原理 13
(2)动量守恒 13
(3)机械能增加 13
6.人船模型 13
(1)模型图 13
(2)模型特点 13
(3)结论 13
(4)例题(2012 年卓越自主招生) 13
①运动学解法 13
②动量守恒积分法 14
7.爆炸模型 14
(1)动量守恒 14
(2)动能增加 14
(3)位置不变 14
(4)例题(2021 年浙江 1 月选考) 14
8.弹簧系统模型 15
(1)模型图 15
(2)模型特点 15
9.滑块木板模型 15
(1)模型图 15
(2)模型特点 15
10.子弹打木块模型 15
(1)模型图 15
(2)模型特点 15
11.多次碰撞次序的分析 15
12.多次碰撞次数讨论的一道例题(2011 年复旦大学千分考) 16
(1)直接讨论法 16
(2)排列组合解法 16
(二)非对心碰撞 16
1.二维非对心碰撞角度的关系 16
2.二维非对心碰撞角度的几个特殊情况 17
3.二维非对心碰撞中弹性碰撞的分析 17
(三)力学三大观点的综合运用 18
九、恢复系数 19
(一)定义 19
(二)在碰撞可能性分析中的应用 19

例题.....19
十、反冲现象 火箭.....19
(一)反冲现象的定义.....19
(二)反冲现象的特点.....19
(三)爆炸现象.....19
(四)火箭的原理.....19
(五)例题(2016 年清华大学自主招生).....19

一、动量与冲量

(一)动量的定义

对于质量为 m 的质点,在某参考系中速度为 $\vec{v}$,其动量 $\vec{p}=m\vec{v}$,单位为 $kg\cdot m\cdot s^{-1}$.动量为矢量,方向与速度的方向相同.

质点系的动量等于系统内各个物体动量的和,即

$$\vec{p}=\sum_i \vec{p_i}=\sum_i m_i\vec{v_i}$$

动量是状态量,它是物体运动状态本身具有的量.动量随着参考系的改变而改变.

(二)动量与动能的区别和代数联系

区别: $p\propto v, E_k\propto v^2$;动量为矢量,动能为标量;动量的运算符合矢量运算法则,动能的运算符合代数法则.

代数联系: $E_k=\dfrac{p^2}{2m}, p=\sqrt{2mE_k}$.

(三)冲量

作用于质点的力,在时间上的累计量称为力的冲量.在 dt 内,力 $\vec{F}$ 的冲量为

$$d\vec{I}=\vec{F}dt$$

对上式在 $t\in[t_1,t_2]$ 内积分,得到冲量 $\vec{I}$ 的积分表达式

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$$

冲量的单位为 $N\cdot s$.

冲量为矢量,恒力冲量的方向与力的方向相同.冲量的大小既与力的大小和方向有关,又与力的作用时间有关.冲量是过程量,描述的是物体在一段时间内的运动过程的参量.在经典力学中,冲量不随着参考系的改变而改变.

(四)动量与冲量的单位的等价性

二者的单位是等价的,因为 $kg\cdot m\cdot s^{-1}=kg\cdot m\cdot s^{-2}\cdot s=N\cdot s$.

二、动量定理

(一)动量定理

物体在一个过程中所受力的冲量等于它在这个过程中始末的动量变化量,即 $\vec{I_{合}}=\Delta\vec{p}$.

积分形式为

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{t_1}^{t_2}m\vec{a}dt=m\int_{t_1}^{t_2}\vec{a}dt=m\Delta\vec{v}=\Delta\vec{p}$$

微分形式为

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

回芝士不鱼
闲鱼：禁止外传

(二)运动量度

$F=\frac{dp}{dt}$即动量定理反映了力对时间的累积效应;$F=\frac{dE_k}{dx}$即动能定理反映了力对空间的累积效应.

(三)动量定理的应用

Δp一定时,由于$\Delta p=F\cdot\Delta t$,作用的时间短,物体受的力就大;作用的时间长,物体受的力就小.

(四)微元法与微积分法

1.水流射向墙壁,会对墙壁产生冲击力.假设水枪喷水口的横截面积为S,喷出水流的流速为v,水流垂直射向竖直墙壁后速度变为 0.已知水的密度为ρ,重力加速度大小为g,求墙壁收到的平均冲击力. (课本29 页题目)

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{dmv}{dt}=v\frac{dm}{dt}=v\frac{d\rho SL}{dt}=\rho vS\frac{dL}{dt}=\rho vS\frac{v\cdot dt}{dt}=\rho v^2S$$

2.一物体以初速度v_0竖直向上抛出,返回抛出点时的速度大小为v_t,运动过程中所受的空气阻力与其运动的速度大小成正比,则其运动的总时间为$\frac{v_0+v_t}{g}$.若物体上升过程的时间为t_1,且设其下降过程的最后阶段速度已达稳定不再变化,则其运动的总路程为$\frac{2v_t(v_0-gt_1)}{g}$.

知$f=kv$.在上升过程中有

$$\int_0^{t_1}(mg+f)dt=mgt_1+\int_0^{t_1}kvdt=mgt_1+kh=mv_0$$

在下降过程中有

$$\int_0^{t_2}(mg-f)dt=mgt_2-\int_0^{t_2}kvdt=mgt_2-kh=mv_t$$

知总时间为t_1+t_2,联立上述二式得总时间为$\frac{v_0+v_t}{g}$.

下降过程的最后阶段速度已达稳定不再变化得到$kv_t=mg$,故$k=\frac{mg}{v_t}$,代入上升过程中的积分结果有

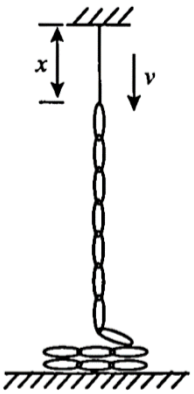
$$mgt_1+\frac{mg}{v_t}\cdot h=mv_0$$

得到$h=\frac{v_t(v_0-gt_1)}{g}$.运动的总路程为$2h=\frac{2v_t(v_0-gt_1)}{g}$.

3.(2011 年复旦大学自主招生)太空飞船在宇宙空间中飞行时,会遇到太空尘埃的碰撞而受到阻碍作用,设单位体积内的太空均匀分布着尘埃n颗,每颗尘埃平均质量为m,尘埃速度可忽略,飞船的横截面积为S,与尘埃碰撞后将尘埃完全附黏住.当飞船维持恒定的速率v飞行时,求飞船引擎需要提供的平均推力.

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{v\cdot dm}{dt}=v\cdot\frac{(dt\cdot v)\cdot S\cdot n\cdot m}{dt}=nmv^2S.$$

4.一质量为m、长为L的柔软绳自由悬垂,下端恰与一台秤的秤盘接触,如图所示.某时刻放开柔软绳上端,求台秤的最大读数.



设经时间t落到秤盘上的绳长为x,此时绳的下落速度为$v=\sqrt{2gx}$.设绳的线密度为ρ.

微分有

$$F=\frac{dp}{dt}=\frac{v\cdot dm}{dt}=\frac{v\cdot(\rho\cdot v\cdot dt)}{dt}=\rho v^2=2\rho gx$$

故压力为

$$F_N=F+\rho gx=3\rho gx$$

读数随x的增大而增大,故当绳上端即将落到盘面上时,读数最大,为$3\rho gL=3mg$.

三、质点系动量定理

(一)质点系

1.定义

质点系是指包含两个或两个以上互相有联系的的质点组成的力学系统,是一个理想化模型.

2.内力与外力

质点系内各质点不仅可受到外界物体对质点系的作用力即外力的作用,而且还受到质点系内各质点之间的相互作用力即内力的作用.外力或内力的区分取决于质点系的选取.

3.性质

质点系的总动量的改变与内力无关;质点系的角动量的改变与内力无关;质点系的机械能的改变与保守力无关.

(二)质点系动量定理

对于质点系组成的系统,该系统的动量变化与内力无关,只等于外力的冲量,即

$$\Delta p=\Delta\vec{I}_{外}=\overrightarrow{F_{外}}\Delta t$$

积分形式为

$$\Delta\vec{p}=\sum_i\Delta\vec{p_i}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{外}dt$$

微分形式为

$$\overrightarrow{F_{外}}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_i\frac{d\vec{p_i}}{dt}$$

四、质心与质心运动定理

(一)质心

1.定义

质心是能把某物体或某质点系的质量全部集中于此以进行整体性的运动学或动力学分析的一个假想点.

2.推导

对于质点系组成的系统,系统总动量为

@芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

$$\vec{p}=\sum_i \vec{p_i}=\sum_i m_i\vec{v_i}$$

由质心定义可得

$$\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v_i}=\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}\Rightarrow\sum_i m_i\frac{d\vec{r_i}}{dt}=M\frac{d\vec{r}}{dt}$$

积分可得

$$\sum m_i\vec{r_i}=M\vec{r}$$

进而得到

$$\vec{r}=\frac{\sum m_i\vec{r_i}}{\sum m_i}$$

(二)质心运动定理

质心位置的定义为

$$\vec{r}=\frac{\sum m_i\vec{r_i}}{\sum m_i}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{r_i}$$

求导有

$$\overrightarrow{v_C}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{v_i}$$

$$\overrightarrow{a_C}=\frac{1}{M}\sum m_i\vec{a_i}$$

由质点系动量定理知$\overrightarrow{F_{外}}=\sum\frac{d\vec{p_i}}{dt}=\sum m_i\vec{a_i}$,得到

$$\overrightarrow{F_{外}}=M\overrightarrow{a_C}$$

即质点系受到的合外力等于质点系的总质量与质心加速度乘积.

(三)质心运动守恒定理

如果作用于质点系的外力主矢恒等于零,则质心做匀速直线运动;若开始静止,则质心位置始终保持不变.如果作用于质点系的所有外力在某轴上投影的代数和恒等于零,则质心速度在该轴上的投影保持不变;若开始时速度投影等于零,则质心沿该轴的坐标保持不变.

(四)质心系是零动量系的证明

在某参考系中一质点系的质心速度为$\overrightarrow{v_C}$,其中第i个质点的质量为m,速度为$\vec{v_i}$,相对于质心的速度为$\overrightarrow{v_{iC}}$.

由质心速度公式

@芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

$$\vec{v_C}=\frac{\sum m_i\vec{v_i}}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\left(\vec{v_C}+\vec{v_{iC}}\right)}{\sum m_i}=\vec{v_C}+\frac{\sum m_i\vec{v_{iC}}}{\sum m_i}$$

故

$$\vec{p}=\sum m_i\vec{v_{iC}}=\vec{0}$$

五、柯尼希定理

质点系在任意参考系中的动能等于其在质心系的动能加上质心动能.

(一)推导

设质点i在参考系S和S'中的速度为v_i和v_i',S'系对S系相对速度为u,故$v_i=v_i'+u$.

在S系中质点系的动能为

$$\begin{aligned}E_k&=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i(v_i'+u)^2\\&=\frac{1}{2}\sum_i m_iv_i'^2+\frac{1}{2}\sum_i m_iu^2+\sum_i m_iv_i'u\\&=E_k'+\frac{1}{2}Mu^2+\left(\sum_i m_iv_i'\right)\cdot u\end{aligned}$$

其中M代表质点系中各质点的总质量$M=\sum_i m_i$.

若令S'系为质心系,由于质心系为零动量系,则有$\sum_i m_iv_i'=Mv_C'=0$,且$u=v_C$,则

$$E_k=E_k'+\frac{1}{2}Mv_C^2$$

柯尼希定理的正确性与质心系是不是惯性系无关.

(二)两体问题

质点系中只有m_1,m_2两个质点,其速度分别为v_1,v_2.

质心速度

$$v_C=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

在质心系中m_1和m_2的速度分别为

$$v_1'=v_1-v_C=\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)$$

$$v_2'=v_2-v_C=\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_2-v_1)$$

质心系中两质点的动能和为

$$E_k'=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m_1(v_1-v_C)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-v_C)^2$$
$$=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_2-v_1)\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2}(v_2-v_1)^2=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)^2=\frac{1}{2}\mu v_{相}^2$$

@芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

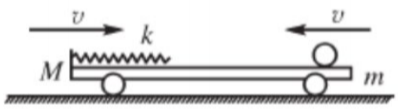
定义$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$为两物体的折合质量.两体问题中柯尼希定理可简化为

$$E_k=E_k'+\frac{1}{2}Mv_C^2=\frac{1}{2}\mu v_{相}^2+\frac{1}{2}Mv_C^2=E_{kr}+E_{kc}$$

由质心运动定理,当质点系内部发生碰撞时,合外力为零,质心速度保持不变,故质心动能不变.故碰撞过程中,只有相对动能可以转化为其他形式能量.

例题

1.上表面光滑的平板车左端固定一劲度系数为k的轻质弹簧,平板车的质量为M,以速度v在光滑地面上向右匀速运动.平板车上有一质量为m的小球以相对于地面向左的速度v冲向弹簧,求弹簧的最大压缩量.



由柯尼希定理有

$$\frac{1}{2}kx_m^2=\frac{1}{2}\mu v_{相}^2=\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(2v)^2$$

解得

$$x_m=2v\sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$$

2.一根长为$2L$的轻杆一端固定在O点,中点及另一端分别固定一质量均为m的小球.轻杆从水平位置自由释放,不计空气阻力,重力加速度为g.求杆摆至数值位置时角速度的大小.

由柯尼希定理有

$$\frac{1}{2}\times2m\left(\frac{3L}{2}\omega\right)^2+2\times\frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\omega\right)^2=mgL+2mgL$$

解得

$$\omega=\sqrt{\frac{6g}{5L}}$$

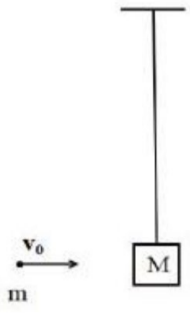
3.如图所示,求子弹打入木块后的最大摆角.

由柯尼希定理有

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m}v_0^2=(M+m)gl(1-\cos\theta_m)$$

解得

$$\cos\theta_m=1-\frac{m^2v_0^2}{2(M+m)^2gl}$$



六、动量守恒定律

如果一个系统不受外力或者所受外力的矢量和为零,这个系统的总动量保持不变.由此可得到相互作用的两个物体动量的变化量等大反向,即 $\Delta p_1 = -\Delta p_2$.

对两个物体构成的情况也可应用此定律:

(一)系统内力远大于外力;

(二)系统虽受外力,但在某一方向上的合外力为零,则该方向的动量守恒.

例题

地面上静止放置着质量为M的平板车,车上有N个人,每个人的质量均为m.每个人以相同的相对速度u(相对跳后的车速)沿水平方向从车后跳离平板车.忽略一切阻力.试比较在N个人同时跳出和逐个跳出两种情况下,在哪种情况下平板车最终获得的速度最大.

将平板车和N个人视为一系统,该系统水平方向动量守恒.

当N个人同时跳出时.设跳后平板车的速度为v,则人相对于地面的速度为$(v+u)$.由动量守恒有

$$Mv + Nm(v+u) = 0$$

解得

$$v = -\frac{N}{M+Nm}mu$$

负号表示v与u反向.

当N个人逐个跳出时.设第一个人跳出后车速为v_1,则人相对于地面的速度为(v_1+u).由动量守恒有

$$[M+(N-1)m]v_1 + m(v_1+u) = 0$$

解得

$$v_1 = -\frac{1}{M+Nm}mu$$

负号表示v_1与u反向.

设第二个人跳出后车速为v_2,则人相对于地面的速度为(v_2+u).由动量守恒有

$$[M+(N-1)m]v_1 = [M+(N-2)m]v_2 + m(v_2+u)$$

解得

$$v_2 = -\left[\frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+(N-1)m}\right]mu$$

负号表示v_2与u反向.

以此类推,第N个人跳出后,平板车的速度为

$$v_N = -\left[\frac{1}{M+Nm} + \frac{1}{M+(N-1)m} + \cdots + \frac{1}{M+m}\right]mu = -mu\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{M+(N+1-n)m}$$

负号表示v_N与u反向.

当$n \geq 1$时,放缩有

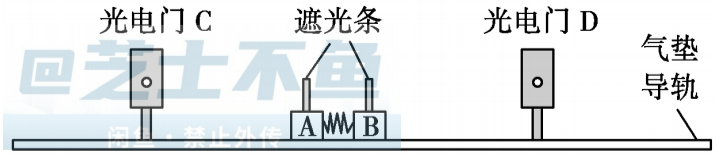
$$\frac{1}{M+(N+1-n)m} \geq \frac{1}{M+Nm}$$

进而得到

$$|v_N| > |v|$$

因此,N个人逐个跳出平板车最终获得的速度最大.

七、实验:验证动量守恒定律



(一)思路 1

1.实验思路及基本操作

(1)两个滑块碰撞前沿同一条直线运动,碰撞后仍沿这条直线运动.

(2)物理量的测量:测量质量、速度.

2.操作要领

(1)测质量:用天平测量两滑块质量 m_1, m_2.

(2)调水平:调整导轨使之处于水平状态，并使光电计时器系统正常工作.

(3)记录:记录光电门挡光片的宽度 Δx 以及光电计时器显示的挡光时间 Δt.

(4)填表:将实验中测得的物理量填入表格.

3.数据处理及分析

(1)滑块速度的测量

$v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$,式中 Δx 为滑块挡光片的宽度(仪器说明书上给出，也可直接测量),Δt 为数字计时器显示的滑块(挡光片)经过光电门的时间.

(2)在实验误差允许的范围内验证表达式 $m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2$ 是否成立.

4.误差分析

(1)主要来源于实验器材及实验操作等.

(2)碰撞是否为一维碰撞.

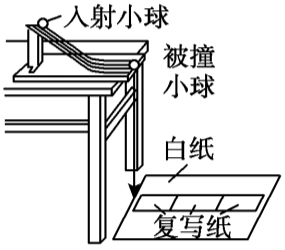
(3)气垫导轨是否完全水平.判断气垫导轨水平的办法,给滑块一个初速度,使滑块在导轨上运动,比较滑块经过两光电门的时间,若相等(大致相等),则气垫导轨水平.

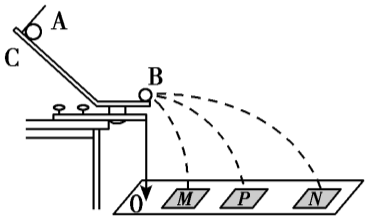
5.注意事项

(1)气垫导轨一定要调水平.

(2)给滑块的初速度应沿着导轨的方向.

(二)思路 2





1.实验思路及基本操作

让入射球 A 从同一位置 C 释放，测出不发生碰撞时球 A 飞出的水平距离 l_{OP}，再测出球 A, B 碰撞后分别飞出的水平距离 l_{OM}, l_{ON}.

2.操作要领

(1)测质量:用天平测出两球的质量.

(2)安装:斜槽末端切线必须沿水平方向.

(3)起点:入射小球每次都必须从斜槽同一高度由静止释放.

(4)铺纸:白纸在下，复写纸在上且在适当位置铺放好，记下重垂线所指的位置 O.

(5)测距离:用小球平抛的水平位移替代速度，用刻度尺量出O到各圆心的距离.
(6)改变C点位置:重复上述实验
3.数据处理及分析
(1)碰撞找点:把被碰小球B放在斜槽末端,每次让入射小球从斜槽同一高度自由滚下,使它们发生碰撞,重复实验10次.标出碰撞前、后入射小球A落点的平均位置P,M和被碰小球B落点的平均位置N.

(2)验证:测量线段OP,OM,ON的长度.将测量数据填入表中,最后代入$m_1\cdot\overline{OP}=m_1\cdot\overline{OM}+m_2\cdot\overline{ON}$,看在误差允许的范围内是否成立.
4.误差分析

(1)主要来源于质量m_1,m_2的测量.

(2)小球落点的确定.
(3)小球水平位移的测量.
5.注意事项
(1)调整斜槽末端切线水平,保证小球碰后均做平抛运动.
(2)入射小球与被碰小球的平抛起点相同.

(3)选质量较大的小球作为入射小球,即$m_{入}>m_{被碰}$.

(4)小球碰撞前后做平抛运动的时间相同,因此可用平抛的水平位移替代平抛的初速度进行实验验证.
(5)以最小的圆包括小球的落地点,则该圆的圆心即为小球落点的平均位置.
(6)实验过程中实验桌、斜槽、记录的白纸的位置要始终保持不变.

八、弹性碰撞和非弹性碰撞

(一)对心碰撞
1.弹性碰撞
(1)定义

系统的动量、动能均守恒,即$\begin{cases}m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2\\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2\end{cases}$.

(2)弹性碰撞方程的通解

$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2\Rightarrow m_1v_1-m_1v'_1=m_2v'_2-m_2v_2$,

$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2\Rightarrow(m_1v_1-m_1v'_1)(v_1+v'_1)=(m_2v'_2-m_2v_2)(v'_2+v_2)$.

两式作比,有$v_1+v'_1=v_2+v'_2$,代入到$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2$中有$m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2(v_1+v'_1-v_2)$,

整理得$(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2=(m_1+m_2)v'_1$,故$m_1=m_2$,同理得到$v'_2$.

综上所述,$v'_1=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}$,$v'_2=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}$.

该方程的解还可改写为$v'_1=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}+\frac{m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)$,$v'_2=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}+\frac{m_1}{m_1+m_2}(v_1-v_2)$.

(3)弹性碰撞的特殊情形

当 $m_1=m_2$ 时, $v'_1=v_2, v'_2=v_1$,称为速度交换.

@芝士木鱼 闲鱼 禁止外传

当 $m_1 \ll m_2$ 时, $v'_1 \approx -v_1, v'_2 \approx 0$.

当 $m_1 \gg m_2$ 时, $v'_1 \approx v_1, v'_2 \approx 2v_1$.

(4)弹性碰撞中物体速度与质心速度的关系

$$v'_A=2v_C-v_A, v'_B=2v_C-v_B$$

v_A 为物体A碰撞前的速度,v'_A 为物体A碰撞后的速度,其中 v_C 为质心速度;v_B, v'_B 定义类似.

2.非弹性碰撞

系统在碰撞后动能减少为非弹性碰撞,且系统损失的动能介于弹性碰撞和完全非弹性碰撞之间.

3.完全非弹性碰撞

(1)定义

碰后速度相同,即 $m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v$,得 $v=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$.

系统损失的动能最大, $\Delta E_{km}=\dfrac{1}{2}m_1v_1^2+\dfrac{1}{2}m_2v_2^2-\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$.

(2)完全非弹性碰撞损失动能最大的证明

由动量守恒知 $m_1v_1+m_2v_2=m_1v'_1+m_2v'_2$,则 $v'_1=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1}-\dfrac{m_2v'_2}{m_1}$.碰撞过程中系统损失的动能为

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= E_k-E'_k\\ &=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2\right)\\ &=\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}-\frac{m_2(m_1+m_2)}{2m_1}\left(v'_2-\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}\right)^2\\ &\le\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{2(m_1+m_2)}.\end{aligned}$$

当且仅当 $v'_2=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ 时,即碰后速度相同时有系统损失的动能最大.

(3)题目中隐含的完全非弹性碰撞条件

A,B 两个粒子都带正电, $q_B=2q_A, m_B=4m_A$.A以已知速度v_0向静止的B粒子飞去.由于静电力,它们之间的距离缩短到某一极限值后又被弹开,然后各自以新的速度做匀速直线运动.设作用前后它们的轨迹都在同一直线上,计算 A,B 之间的距离最近时它们各自的速度.

粒子 A,B 只受库仑力,故粒子 A,B 组成的系统动量守恒,距离最近时,二者速度相同,有动量守恒定律知

$$m_Av_0=(m_A+m_B)v$$

解得$v=\frac{1}{5}v_0$.(课本 28 页题目)

4.碰撞可能性分析

两小球碰撞后(同向运动)不再碰撞的条件为

$$\begin{cases} v_1 > v_2 \\ v'_1 < v'_2 \\ m_1v_1+m_2v_2 = m_1v'_1+m_2v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2 \geq \frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases}$$

若两物体相向运动,则碰撞后两物体的运动方向不可能都不改变.

5.反冲模型

(1)作用原理

反冲运动是系统内物体之间的作用力和反作用力产生的效果.

(2)动量守恒

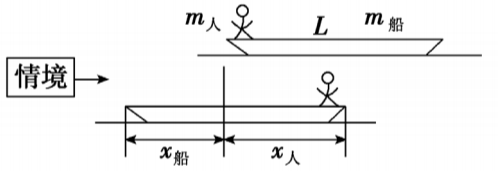
反冲运动中系统不受外力或内力远大于外力，所以反冲运动遵循动量守恒定律.

(3)机械能增加

反冲运动中，由于有其他形式的能转化为机械能，所以系统的总机械能增加.

6.人船模型

(1)模型图



(2)模型特点

①两个物体;②动量守恒;③总动量为零.

(3)结论

$m_1x_1=m_2x_2$

(4)例题(2012 年卓越自主招生)

在滑冰场上有质量$m=40\ kg$的孩童,站在质量$M=20\ kg$的长木板的左端,该孩童与木板在水平光滑冰面上一起以$v_0=2\ m/s$的速度向右运动.若孩童以$a_0=1\ m/s^2$的加速度匀加速跑向右端,并从端点水平跑离木板时,木板恰好静止,求出木板的长度L.

由动量守恒知

$$(m+M)v_0=mv$$

得$v=3\ m/s$.

①运动学解法

记孩童的速度为v_1,长木板的速度为v_2,知二者组成的系统动量守恒,记二者的合动量为p.孩童运动的加速度为a_0.由加速度的定义知$a_0=\frac{dv_1}{dt}$,记a_1为长木板的加速度,则有

$$a_1=\frac{dv_2}{dt}=\frac{d\left(\frac{p-mv_1}{M}\right)}{dt}=\frac{d(p-mv_1)}{Mdt}=-\frac{mdv_1}{Mdt}=-\frac{m}{M}a_0$$

@芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

事实上,利用两物体间的相互作用力也可得到此结论.得到$a_1=-2\ m/s^2$.由$v=v_0+a_0t$知$t=1\ s$.此过程中孩童的位移为$x_1=v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2=2.5\ m$,木板的位移为$x_2=v_0t-\frac{1}{2}a_1t^2=1\ m$.

故$L=x_1-x_2=1.5\ m$.

②动量守恒积分法

由动量守恒有

$$mv_1+Mv_2=mv$$

两侧同时积分有

$$mx_1+Mx_2=mvt$$

得到

$$2x_1+x_2=6\ m$$

由运动学公式有

$$x_1=v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2=2.5\ m$$

故$x_2=1\ m$.进而得到$L=x_1-x_2=1.5\ m$.

7.爆炸模型

(1)动量守恒

由于爆炸是在极短的时间内完成的,爆炸时物体间的相互作用力远远大于受到的外力,所以在爆炸过程中,系统的总动量守恒.

(2)动能增加

在爆炸过程中,由于有其他形式的能量(如化学能)转化为动能,所以爆炸后系统的总动能增加.

(3)位置不变

爆炸的时间极短,因而作用过程中,物体产生的位移很小,一般可忽略不计,可以认为爆炸后仍然从爆炸前的位置以新的动量开始运动.

(4)例题(2021 年浙江 1 月选考)

在爆炸实验基地有一发射塔,发射塔正下方的水平地面上安装有声音记录仪.爆炸物自发射塔竖直向上发射,上升到空中最高点时炸裂成质量之比为2:1、初速度均沿水平方向的两个碎块.遥控器引爆瞬间开始计时,在5s 末和6s 末先后记录到从空气中传来的碎块撞击地面的响声.已知声音在空气中的传播速度为340 m/s,忽略空气阻力.下列说法正确的是(B).

A.两碎块的位移大小之比为1:2

B.爆炸物的爆炸点离地面高度为80m

C.爆炸后质量大的碎块的初速度为68 m/s

D.爆炸后两碎块落地点之间的水平距离为340m

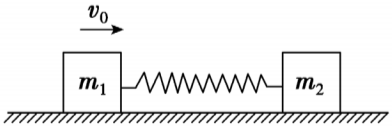
质量之比为2:1,由动量守恒知速度之比为1:2,水平位移之比为1:2,合位移之比不为1:2,A 错误.设质量较大的物体落地后距离声音记录仪为s,故质量较小的物体落地后距离声音记录仪为2s,爆炸点距离地

面高度为h.由题意得方程组$\begin{cases}\dfrac{s}{340}+\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=5\\ \dfrac{2s}{340}+\sqrt{\dfrac{2h}{g}}=6\end{cases}$,解得$\begin{cases}s=340\\ h=80\end{cases}$.B 正确,D 错误.由$h=\dfrac{1}{2}gt^2$知$t=4s$.又$s=vt$,

故$v=85$ m/s,C 错误.

8.弹簧系统模型

(1)模型图



(2)模型特点

①在能量方面,由于弹簧的形变会具有弹性势能,系统的总动能将发生变化,若系统所受的外力和除弹簧弹力以外的内力不做功,系统机械能守恒.

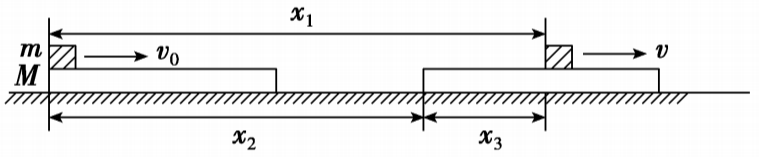
②在动量方面,系统动量守恒.

③弹簧处于最长(最短)状态时两物体速度相等,弹性势能最大.

④弹簧处于原长时,弹性势能为零.

9.滑块木板模型

(1)模型图



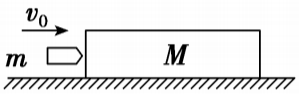
(2)模型特点

①当滑块和木板的速度相等时平板的速度最大,两者的相对位移也最大.

②系统的动量守恒,但系统的机械能不守恒,摩擦力与两者相对位移的乘积等于系统机械能的减少量,当两者的速度相等时,系统机械能损失最大.

10.子弹打木块模型

(1)模型图



(2)模型特点

①若未穿出,系统动量守恒,能量守恒,即$mv_0=(m+M)v$,$Q_{热}=F_f\cdot\Delta L=\dfrac{1}{2}mv_0^2-\dfrac{1}{2}(m+M)v^2$.

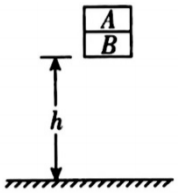
②穿出木块,有$mv_0=mv_1+Mv_2$,$Q_{热}=F_f\cdot\Delta L=\dfrac{1}{2}mv_0^2-\left(\dfrac{1}{2}mv_1^2+\dfrac{1}{2}Mv_2^2\right)$.

11.多次碰撞次序的分析

(2016 年清华大学领军计划)如图所示,两物块重叠放置,从距地面$h=5$ m 高的地方由静止释放,假定所有碰撞均为弹性碰撞,B 碰地后静止,A 弹起的高度为h',则(A).

A.$h'=20$ m　　B.$h'=10$ m

C.$m_A=3m_B$　　D.$m_A=2m_B$



由机械能守恒定律有

$$(m_A+m_B)gh=m_Agh'$$

A 与 B 重叠放置一起下落,B 首先与地面碰撞,由于为弹性碰撞,且 B 的质量远小于地球质量,故碰撞后 B 的速度大小不变,方向竖直向上;然后再与 A 发生碰撞,使得 A 碰撞后速度向上.

由动量守恒有

闲鱼·禁止外传

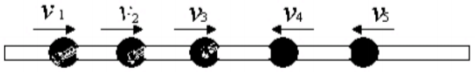
$$m_B\sqrt{2gh}-m_A\sqrt{2gh}=m_A\sqrt{2gh'}$$

联立二式解得$h'=20\ m, m_B=3m_A$.

12.多次碰撞次数讨论的一道例题(2011 年复旦大学千分考)

在一根长的水平杆上穿着 5 个质量相同的珠子,珠子可以在杆上无摩擦地运动,初试时若各珠子可以有任意的速度大小和方向,则它们之间最多可以碰撞 10 次.

(1)直接讨论法



如果珠子之间的碰撞是完全非弹性碰撞,每碰撞一次,运动个体的数目就减少,所以最多碰撞 4 次.如果碰撞是完全弹性碰撞,某碰撞一次,珠子便交换速度,最终应该是外面的珠子速度大.里面的珠子速度小,初始状态时,如果外面珠子速度大,里面珠子速度小,外面珠子向里运动时,它们发生碰撞的次数最多.如图所示,它们的速率关系为$v_1>v_5>v_2>v_4>v_3$.珠子 1 的速度传递到珠子 5 需要 4 次碰撞;珠子 2 的速度传递到珠子需要 3 次碰撞;珠子 3 的速度传递到珠子 5 需要 2 次碰撞;珠子 4 的速度传递到珠子 5 需要 1 次碰撞.所以它们之间最多可以碰撞 4+3+2+1=10 次.

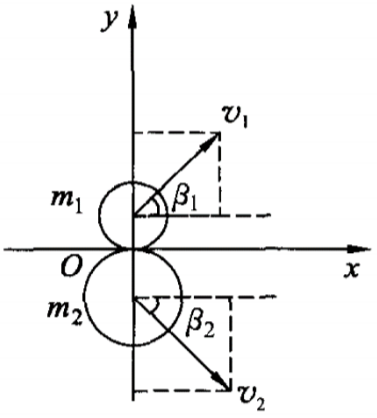
(2)排列组合解法

粒子在碰撞前后都是匀速直线运动,其$x-t$图像是一条倾斜的直线,直线的斜率表示物体的速度,两个质量相同的珠子相碰,则对应的两条$x-t$图线会相交于一点,因速度互换,所以交点过后的斜率也互换.5 个质量相同的珠子最多可以碰几次,相当于$x-t$图像中 5 条直线最多可有几个交点.根据排列组合的知识,最多可有$C_5^2=10$个交点,所以它们之间最多可以碰撞 10 次.

(二)非对心碰撞

遵循动量守恒定律,但情况较复杂,中学阶段不作要求.按发展趋势看,要求会定性判断方向.

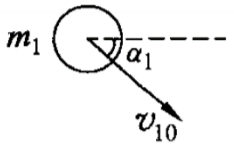
1.二维非对心碰撞角度的关系



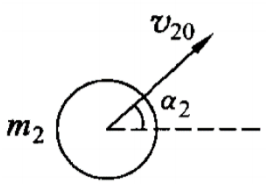
在两小球的速度矢量平面内建立直角坐标系$O-xy$,设两小球碰撞接触面的公切线方向为x轴,y轴沿碰撞时的连心线,如图所示.将两球看作一质点组,因外力矢量和为零,故动量守恒.在y轴上有

$$m_1v_{10y}+m_2v_{20y}=m_1v_{1y}+m_2v_{2y}.$$

碰撞时,因球面光滑,故两小球沿公切线方向即x轴方向不受力,所以碰撞前后两小球沿x轴方向的速度分量不变,有$v_{10x}=v_{1x}, v_{20x}=v_{2x}$.由恢复系数$e$的定义知$e=\dfrac{v_{2y}-v_{1y}}{v_{10y}-v_{20y}}$.



v_{10}, v_{20}与x轴的夹角分别是α_1,α_2;v_1, v_2与x轴的夹角分别是β_1,β_2,由动量守恒得



$$m_1v_{10}\sin\alpha_1+m_2v_{20}\sin\alpha_2=m_1v_1\sin\beta_1+m_2v_2\sin\beta_2.$$

沿x轴方向的速度分量不变,则$v_{10}\cos\alpha_1=v_1\cos\beta_1, v_{20}\cos\alpha_2=v_2\cos\beta_2$.

又 $e=\dfrac{v_{2y}-v_{1y}}{v_{10y}-v_{20y}}=\dfrac{(-v_2\sin\beta_2)-v_1\sin\beta_1}{(-v_{10}\sin\alpha_1)-v_{20}\sin\alpha_2}$.

@之工术鱼 闲鱼·禁止外传

联立以上三式,分别消去 v_1,v_2 得

$$\frac{v_{10}}{v_{20}}=\frac{m_2(\cos\alpha_2\tan\beta_2+\sin\alpha_2)}{m_1(\cos\alpha_1\tan\beta_1+\sin\alpha_1)},\frac{v_{10}}{v_{20}}=\frac{\cos\alpha_2\tan\beta_2-e\sin\alpha_2}{e\sin\alpha_1-\cos\alpha_1\tan\beta_1}.$$

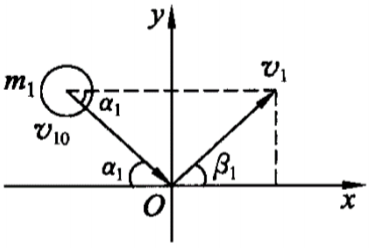
消去 v_{10},v_{20} 有 $\dfrac{m_2(\cos\alpha_2\tan\beta_2+\sin\alpha_2)}{m_1(\cos\alpha_1\tan\beta_1+\sin\alpha_1)}=\dfrac{\cos\alpha_2\tan\beta_2-e\sin\alpha_2}{e\sin\alpha_1-\cos\alpha_1\tan\beta_1}$.化简得

$$\frac{m_2(\tan\beta_2+\tan\alpha_2)}{m_1(\tan\beta_1+\tan\alpha_1)}=\frac{\tan\beta_2-e\tan\alpha_2}{e\tan\alpha_1-\tan\beta_1}.$$

2.二维非对心碰撞角度的几个特殊情况

当两小球质量相等且初始状态均处于运动中,发生完全弹性非对心碰撞,即 $e=1$ 时,有

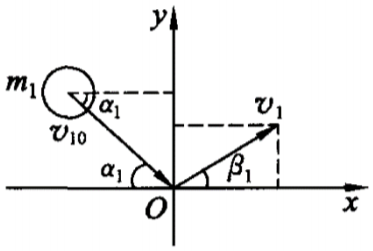
$$\frac{\tan\beta_2+\tan\alpha_2}{\tan\beta_1+\tan\alpha_1}=\frac{\tan\beta_2-\tan\alpha_2}{\tan\alpha_1-\tan\beta_1},$$



化简有 $\tan\alpha_1\tan\alpha_2=\tan\beta_1\tan\beta_2$.

若 $\alpha_1+\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$,则 $\tan\alpha_1\tan\alpha_2=\tan\beta_1\tan\beta_2=1$,同样有 $\beta_1+\beta_2=\dfrac{\pi}{2}$.故等质量的两小球以垂直的运动方向发生完全弹性碰撞后它们的运动方向仍然是垂直的.

若小球质量 $m_1\ll m_2$,发生完全弹性非对心碰撞,即 $e=1$ 时.可看作小球从倾斜方向与半径无穷大的球即光滑平面相碰撞,可把质量为 m_2 的小球看作保持静止,得 $e\tan\alpha_1=\tan\beta_1$,又 $e=1$,故 $\alpha_1=\beta_1$,即 m_1 在 m_2 的表面上作等角反射.



若小球质量 $m_1\ll m_2$,当恢复系数 $0<e<1$ 时,仍把质量为 m_2 的小球看作保持静止.有 $e\tan\alpha_1=\tan\beta_1$,而由于 $0<e<1$,故 $a_1>\beta_1$.即当两小球发生非完全弹性碰撞时,m_1 碰撞后速率减小,机械能损失.

3.二维非对心碰撞中弹性碰撞的分析

设两球质量分别为 m_1,m_2,速度分别为 v_1,v_2,速度方向与球心连线的夹角分别为 α,β.在球心连线垂直的方向的速度分量不变,在球心连线直线上的速度分量符合弹性碰撞规律,故有

$$m_1v_1\cos\alpha+m_2v_2\cos\beta=m_1u_1+m_2u_2$$

弹性碰撞过程中机械能守恒,即动能守恒,知在球心连线垂直的方向的速度分量不变,故只需有

$$\frac{1}{2}m_1(v_1\cos\alpha)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2\cos\beta)^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2$$

类似于弹性碰撞方程的通解的形式,解得

$$u_1=\frac{(m_1-m_2)v_1\cos\alpha+2m_2v_2\cos\beta}{m_1+m_2},u_2=\frac{(m_2-m_1)v_2\cos\beta+2m_1v_1\cos\alpha}{m_1+m_2}$$

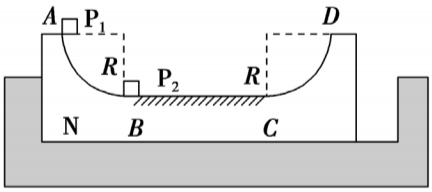
回艺十不鱼
闲鱼·禁止外传

故碰撞后的速度为

$$v_1'=\sqrt{(v_1\cdot\sin\alpha)^2+u_1^2},v_2'=\sqrt{(v_2\cdot\sin\beta)^2+u_2^2}$$

(三)力学三大观点的综合运用

(2022·湖北黄冈 1 月质检)如图所示,固定的凹槽水平内表面光滑,其内放置 U 形滑板 N,滑板两端为半径 $R=0.45$ m 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧面(圆心与 A、D 等高).A 和 D 分别是两圆弧的端点,BC 段表面粗糙,其余段表面光滑.小滑块 P_1 和 P_2 的质量均为 m.滑板的质量 $M=4m$,P_1 和 P_2 与 BC 面间的动摩擦因数分别为 $\mu_1=0.10$ 和 $\mu_2=0.20$,最大静摩擦力等于滑动摩擦力.开始时滑板紧靠槽的左端,P_2 静止在粗糙面的 B 点,P_1 以 $v_0=4.0\ m/s$ 的初速度从 A 点沿弧面滑下,与 P_2 发生弹性碰撞后,P_1 处在粗糙面 B 点上.当 P_2 滑到 C 点时,滑板恰好与槽的右端碰撞并与槽牢固粘连,P_2 继续运动,到达 D 点时速度为零.P_1 与 P_2 均视为质点,P_1、P_2 碰撞时间极短,取 $g=10\ m/s^2$.



(1)P_1 和 P_2 碰撞后瞬间 P_1、P_2 的速度分别为多大?
(2)P_2 在 BC 段向右滑动时,滑板的加速度为多大?
(3)N、P_1 和 P_2 最终静止后,P_1 与 P_2 间的距离为多少?

解:(1)设 P_1 滑到最低点时速度为 v_1,由机械能守恒定律有 $\frac{1}{2}mv_0^2+mgR=\frac{1}{2}mv_1^2$,解得 $v_1=5\ m/s$.

P_1、P_2 碰撞,满足动量守恒定律、机械能守恒定律,设 P_1、P_2 碰后速度分别为 v'_1,v'_2,则由动量守恒和机械能守恒可得 $mv_1=mv'_1+mv'_2$,解得 $v'_1=0,v'_2=5$ m/s.

(2)P_2 向右滑动时,假设 P_1 相对滑板保持不动,对 P_2 有 $F_{f2}=\mu_2mg$.

设 P_1、滑板的加速度为 a,对 P_1、滑板有 $F_f=F_{f2}=(m+M)a$,解得 $a=0.4\ \text{m/s}^2$.

此时对 P_1 有 $F_{f1}=ma$,小于 P_1 受到的最大静摩擦力 $F_{f\max}=\mu_1mg$,所以假设成立.

故滑板的加速度为 $0.4\ \text{m/s}^2$.

(3)设 P_2 滑到 C 点时速度为 v_C,由机械能守恒定律有 $mgR=\frac{1}{2}mv_C^2$,解得 $v_C=3\ m/s$.

从 P_1、P_2 碰撞后瞬间到 P_2 滑到 C 点时,设 P_1、滑板速度为 v,由动量守恒定律得

$$mv_2'=(m+M)v+mv_C$$

解得 $v=0.40$ m/s.

注:P_1 和滑板为整体,在 P_2 施加的摩擦力作用下向右运动,有动能增量.

对 P_1、P_2、滑板组成的系统,设 BC 长为L,由功能关系可得

@芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

$$f_2L=\frac{1}{2}mv_2^{2\prime}-\left(\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}(m+M)v^2\right)$$

解得$L=3.8\ m$.

滑板与凹槽碰后,P_1 向右滑行的距离$s_1=\frac{v^2}{2a_1}=0.08\ m$,其中$a_1=\frac{\mu_1 mg}{m}=1.0\ m/s^2$.

P_2 返回到 C 点后向左滑行的距离$s_2=\frac{{v_C}^2}{2a_2}=2.25\ m$,其中$a_2=\frac{\mu_2 mg}{m}=2.0\ m/s^2$.

所以 P_1、P_2 静止后相距$\Delta s=L-s_1-s_2=1.47\ m$.

九、恢复系数

(一)定义

恢复系数(e)是碰撞前后两物体沿接触处法线方向上的分离速度与接近速度之比,只与碰撞物体的材料有关.v_1为碰撞后两物体的分离速度,即$v_1=v_b'-v_a'$;v_2为两物体碰撞前的接近速度,即$v_2=v_a-v_b$.当$e=1$时系统发生完全弹性碰撞;当$0\le e<1$时系统发生非弹性碰撞;当$e=0$时系统发生完全非弹性碰撞,利用动量守恒与能量守恒即可证明.

(二)在碰撞可能性分析中的应用

例题

两球A,B在光滑水平面上沿同一直线、同一方向运动,$m_A=2\ kg,m_B=3\ kg,v_A=6\ m/s,v_B=2\ m/s$.当$A$追上$B$并发生碰撞后,两球$A,B$速度的可能值为(　　).

A.$v_A=4.5\ m/s,v_B=3\ m/s$　　B.$v_A=3\ m/s,v_B=4\ m/s$

C.$v_A=-1.5\ m/s,v_B=7\ m/s$　　D.$v_A=7.5\ m/s,v_B=1\ m/s$

两物体的接近速度$v_1=v_A-v_B=4\ m/s$,知$0\le e\le 1$,故$v_2=v_B'-v_A'$的范围为$0\le v_2\le 4\ m/s$.计算知只有B选项正确.

十、反冲现象 火箭

(一)反冲现象的定义

静止或运动的物体通过分离出部分物质,而使自身在反方向获得加速的现象.

(二)反冲现象的特点

在反冲运动中,如果没有外力作用或外力远小于物体间的相互作用力,系统的动量是守恒的.

(三)爆炸现象

爆炸与碰撞类似,物体间的相互作用力很大,且远大于系统所受的外力,所以系统动量守恒,爆炸过程中位移很小,可忽略不计,作用后从相互作用前的位置以新的动量开始运动.

(四)火箭的原理

应用了反冲的原理,依靠喷出气流的反冲作用而获得巨大的速度.

(五)例题(2016 年清华大学自主招生)

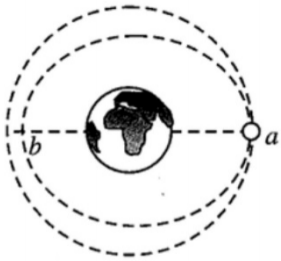
卫星携带一探测器在半径为$3R$(地球半径为R)的圆轨道上绕地球飞行.在a点,卫星上的动力装置短暂工作,将探测器沿运行方向射出(动力装置喷出的气体的质量可忽略).若探测器恰能完全脱离地球的引力,而卫星沿新的椭圆轨道运动,其近地点b距地心的距离为nR(n略小于 3),求卫星与探测器的质量比.

质量分别为M,m的两个质点相距为r时的引力势能为$-\frac{GMm}{r}$,式中G为引力常量.

设地球质量为M,卫星与探测器质量分别为m,m'.

当在圆轨道时有

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传



$$\frac{GM(m+m')}{(3R)^2}=(m+m')\frac{v^2}{3R}$$

解得$v=\sqrt{\frac{GM}{3R}}$.

设分离后探测器的速度为v',探测器刚好脱离地球引力则满足

$$\frac{1}{2}m'v'^2-\frac{GMm'}{3R}=0$$

解得$v'=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{2}v$.

设分离后卫星速度为u,由机械能守恒知

$$\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{3R}=\frac{1}{2}mv_{近}^2-\frac{GMm}{nR}$$

由开普勒第二定律知

$$3R\cdot u=nR\cdot v_{近}$$

由动量守恒知

$$(m+m')v=mu+m'v'$$

三式联立,解得$\frac{m}{m'}=\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{\frac{2n}{3+n}}}$.