机械运动

目录

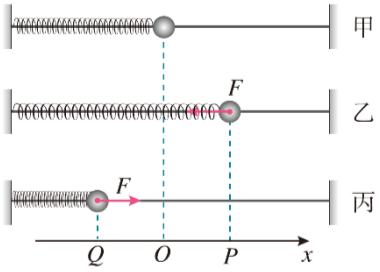
一、机械运动 3
二、弹簧振子 3
三、简谐运动 3
(一)定义 3
(二)判断方式 3
1.定义法 3
2.振动图像法 3
(三)回复力 3
(四)能量 3
(五)各物理量的推导 3
1.位移 3
(1)能量角度的三角换元法 3
(2)能量角度的微分方程法 4
(3)定义角度的微分方程法 5
2.速度 5
3.加速度 5
4.动能 5
5.弹性势能 5
(六)对称性 5
(七)描述 6
1.振幅 6
2.周期和频率 6
例题 1(多解类问题) 7
例题 2(2014 年清华大学保送生测试) 7
例题 3(2009 年同济大学自主招生) 8
3.相位 9
4.图像 9
(1)平衡位置处开始计时 9
(2)最大位移处开始计时 9
例题 1 9
例题 2(2011 年华约自主招生) 10
(八)各物理量的周期性变化 10
1.位移 10
2.速度 10
3.加速度 11
4.回复力 11
5.动能 11
6.弹性势能 11
(九)图像问题 11
(十)例题(2010 年南京大学自主招生) 11
(十一)非惯性系的应用 12
例题(2006 年上海交通大学夏令营) 12
四、单摆 13
(一)定义 13
(三)受力特征 13

1.回复力 13
2.向心力 13
3.特殊位置的受力情况 13
(1)最高点 13
(2)最低点 13
(三)周期 13
例题 1(2011 年复旦大学自主招生) 13
例题 2(2009 年浙江大学自主招生) 14
(四)秒摆 14
(五)与单摆有关的计算 14
1.求单摆的摆长 14
2.求单摆摆动的最大偏角 14
(六)实验:用单摆测量重力加速度 15
1.实验思路 15
2.实验装置 15
3.物理量的测量 15
(1)摆长的测量 15
(2)周期的测量 15
4.数据分析 15
(1)计算法 15
(2)图像法 15
例题 1(课本 56 页题目节选) 15
例题 2(数据处理类问题) 16
例题 3(图像选择类问题) 16
5.误差分析 16
(1)偶然误差 16
(2)系统误差 16
(七)单摆的异化情形 16
1.轨道球 16
例题(2010 年南京大学自主招生) 17
2.斜面摆 17
3.双线摆 17
例题 1 17
例题 2(2011 年卓越自主招生) 17
4.杆线摆 18
(八)摆钟问题 18
(九)例题(课本 56 页题目) 18
五、简谐运动中的多解问题 19
例题 1 19
例题 2 20
六、阻尼振动、受迫振动与共振 20
(一)阻尼振动 20
例题(课本 55 页题目) 20
(二)固有振动与固有频率 20
(三)受迫振动 20
(四)共振 21

一、机械运动

将物体或物体的一部分在一个位置附近的往复运动称为机械运动,简称振动.

二、弹簧振子



将小球和弹簧组成的系统称为弹簧振子,有时简称为振子.平衡位置是物体在振动过程中回复力为零的位置,并不一定是合力为零的位置.小球所受合力为零时,处于平衡位置.将小球拉向一方放开后,小球在平衡位置附近运动起来.弹簧振子是一个理想化模型,是研究一般性振动的基础.弹簧振子做简谐运动的条件为弹簧质量可忽略,无摩擦等阻力,在弹簧弹性限度内.弹簧振子的能量转化为弹性势能与动能的相互转化,机械能守恒.

三、简谐运动

此处的简谐运动以弹簧振子所做的简谐运动为例.

(一)定义

物体受力大小与位移成正比,而方向相反,即$\vec{F}=-k\vec{x}$,将具有这种特征的振动称为简谐运动.

(二)判断方式

1.定义法

根据物体的受力情况得到$\vec{F}=-k\vec{x}$即可说明该运动为简谐运动.

2.振动图像法

如果物体的位移与时间的关系遵从正弦函数的规律,即它的振动图像($x-t$图像)是一条正弦曲线,这样的振动即为简谐运动.下文将证明简谐运动的振动图像均为正弦曲线.

(三)回复力

回复力是指使振动物体返回平衡位置并总指向平衡位置的力.回复力是一种效果力,是物体合外力在振动方向上的投影,可以是某一个力,也可以是几个力的合力或某个力的分力.对于标准的简谐振动,合力就是回复力.有回复力的物体不一定做简谐运动.

(四)能量

在弹簧振子中,系统的能量共包括两部分,一部分为小球所具有的动能,另一部分为弹簧具有的弹性势能.在弹簧振子运动的任意位置,系统的动能与势能之和都是一定的,遵守机械能守恒定律.有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

(五)各物理量的推导

1.位移

(1)能量角度的三角换元法

由机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

整理,变换得

$$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}+\frac{v^2}{\frac{1}{m}}=2E$$

进行三角换元,令$\frac{x^2}{\frac{1}{k}}=2E\cdot\sin^2\varphi(t),\frac{v^2}{\frac{1}{m}}=2E\cdot\cos^2\varphi(t)$,推得

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\varphi(t),v(t)=\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\varphi(t)$$

知$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2E}{k}}\cdot\cos\varphi(t)\cdot\varphi'(t)=\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\varphi(t)$,即$\varphi'(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}$,积分有

$$\varphi(t)=\int\varphi'(t)=\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0$$

其中φ_0为初相.将$\varphi(t)$代入至$x(t)$中,得

$$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

(2)能量角度的微分方程法

由机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

改写为

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{k}{m}x^2=\frac{2E}{k}\cdot\frac{k}{m}$$

令$\frac{k}{m}=\omega^2,\frac{2E}{k}=A^2$,得

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\omega^2x^2=\omega^2A^2$$

改写为

$$\frac{dx}{dt}=\omega(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

即

$$\frac{dx}{(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\omega dt$$

设$t=0$时物体的位移为x_0,当$t=t$时物体的位移为x,则上式的积分为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{(A^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=\int_0^t\omega dt$$

得

$$\arcsin\frac{x}{A}-\arcsin\frac{x_0}{A}=\omega t$$

令

$$\arcsin\frac{x_0}{A}=\varphi$$

芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

则

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right)$$

(3)定义角度的微分方程法

由定义知$F=-kx$,即

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0$$

该微分方程的解为

$$x=A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

2.速度

已知$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$,故

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

3.加速度

已知$x(t)=\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right),v=\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$,故

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\sqrt{2Ek}}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$$

4.动能

由定义知动能为

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2=\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\cdot E$$

5.弹性势能

由定义知弹性势能为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\right)^2=\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\cdot E$$

(六)对称性

关于平衡位置O对称的两点,速度的大小、动能、势能相等,相对于平衡位置的位移大小相等;由对称点到平衡位置O用时相等.

(七)描述

位移x的一般函数表达式可写为$x=A\sin(\omega t+\varphi)$.

1.振幅

由三角函数的有界性知

$$|x|=|A\sin(\omega t+\varphi)|=A\cdot|\sin(\omega t+\varphi)|\leqslant A$$

故A为物体离开平衡位置的最大距离.将振动物体离开平衡位置的最大距离,称为振动的振幅.振幅是表示振动幅度大小的物理量,用A表示.由对称性,振动物体运动的范围是振幅的两倍.

设$t=t_0$时,$x=x_0,v=v_0$,则

$$x_0=A\sin(\omega t_0+\varphi)$$

知$v=\dfrac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi)$,故

$$v_0=\omega A\cos(\omega t_0+\varphi)$$

注意到

$$A=\sqrt{A^2\cdot\sin^2(\omega t+\varphi)+A^2\cdot\cos^2(\omega t+\varphi)}$$

将x_0,v_0代入得

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

由上文推导知$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,故

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{mv_0^2}{k}}=\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

2.周期和频率

将一个完整的振动过程称为一次全振动.做简谐运动的物体完成一次全振动所需要的时间称为振动的周期(T).物体完成全振动的次数与所用时间之比称为振动的频率(f).由定义有

$$f=\frac{1}{T}$$

周期越小,频率越大,表示振动越快.由$x=A\sin(\omega t+\varphi)$中三角函数的周期性知

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

又$f=\frac{1}{T}$,故$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}\Rightarrow\omega=2\pi f$,代表简谐运动的快慢.

由上文推导知$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$,故

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},f=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}}$$

由此可得,所有简谐运动的周期均与其振幅无关.

例题 1(多解类问题)

甲、乙两人观察同一单摆的振动,甲每经过$3.0s$观察一次摆球的位置,发现摆球都在其平衡位置处;乙每次经过$4.0s$观察一次摆球的位置,发现摆球都在平衡位置右侧的最高处,由此可知该单摆的周期不肯的是(　).

$A.0.5s$　　$B.1.0s$

$C.1.5s$　　$D.2.0s$

根据甲每经过$3.0s$观察一次摆球的位置,发现摆球都在其平衡位置处,可知$3.0s$是半周期的整数倍,即$n_1\cdot\frac{T}{2}=3.0s$;说明周期可能是$6s,3s,1s,0.5s$等.

根据乙每次经过$4.0s$观察一次摆球的位置,发现摆球都在平衡位置右侧的最高处,可知$4.0s$是周期的整数倍,即$n_2T=4.0s$;说明周期可能是$4s,2s,1s,0.5s$等.

综上所述可知,说明周期可能是$0.5s,1s,2s$,不可能是$1.5s$.故选C.

例题 2(2014 年清华大学保送生测试)

一轻弹簧两端固连着两个小球A,B.若将小球B固定,测得小球A的振动频率为f_A.若将小球A固定,测得小球B的振动频率为f_B.现将此系统自由地平放在光滑水平面上,求此系统的自由振动频率.

系统在光滑水平面上振动时所受的合力为零,故系统动量守恒且动量为零.所以该系统的质心静止不动.

质心两边相当于两个独立的弹簧振子,设两球的质量为m_1,m_2,两球距质心的距离为l_1,l_2,由质心定义有

$$m_1l_1=m_2l_2$$

设l_1,l_2两段的劲度系数分别为k_1,k_2,当系统自由振动时两弹簧振子的弹簧形变量分别为x_1,x_2,由弹簧串联规律、受力情况与质心定义有方程组

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}\\ k(x_1+x_2)=k_1x_1=k_2x_2\\ (l_1+x_1)m_1=(l_2+x_2)m_2\end{cases}$$

得到

$$\frac{k_1}{m_1}=\frac{k_2}{m_2}$$

而两弹簧振子的振动频率分别为$f_1=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$,$f_2=\dfrac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$,故$f_1=f_2$,系统的自由振动频率与两弹簧振子的振动频率相同.有

$$k_1=k_2\cdot\frac{x_2}{x_1}=k_2\cdot\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{\frac{1}{k}-\frac{1}{k_1}}\cdot\frac{m_1}{m_2}$$

解得

$$k_1=k\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}$$

故系统的自由振动频率为

$$f=f_1=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m_1}+\frac{k}{m_2}}=\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m_1}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m_2}}\right)^2}=\sqrt{f_A^2+f_B^2}$$

例题 3(2009 年同济大学自主招生)

金字塔型(四棱锥形)的冰山漂浮在海水中,平衡时塔尖离水面高度为h,冰的密度记为ρ_1,海水密度记为ρ_2,且$\rho_2>\rho_1$.忽略运动方向的所有阻力,试求:

(1)冰山自身的高度H.

设冰山正方形底面边长为a,则冰山体积为$V=\dfrac{1}{3}a^2H$.冰山重力为$G=mg=\rho_1Vg=\dfrac{1}{3}\rho_1ga^2H$.冰山排开海水的体积为$V'=\dfrac{1}{3}a^2\left(H-\dfrac{h^3}{H^2}\right)$,所受浮力为$F=\rho_2gV'=\dfrac{1}{3}\rho_2ga^2\left(H-\dfrac{h^3}{H^2}\right)$.受力平衡时得$F=G$,联立解得

$$H=\sqrt[3]{\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}}h$$

(2)冰山在平衡位置附近做竖直方向的小幅度振动的周期T.

设冰山从平衡位置向下偏移微量y,则浮力$F=\dfrac{1}{3}\rho_2ga^2\left[H-\dfrac{(h-y)^3}{H^2}\right]$,展开略去高阶小量,有

$$F=\frac{1}{3}\rho_2 g a^2\left(H-\frac{h^3}{H^2}+\frac{3h^2}{H^2}y\right)$$

芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

冰山所受合力为

$$F_{合}=G-F=-\frac{1}{3}\rho_2 g a^2\cdot\frac{3h^2}{H^2}y=-\frac{\rho_2 g a^2 h^2}{H^2}y$$

此力与位移y成正比,方向相反,冰山振动为简谐运动.冰山质量$m=\rho_1 V=\frac{1}{3}\rho_1 a^2 H$,由冰山所受合力知$k=\frac{\rho_2 g a^2 h^2}{H^2}$,由简谐运动周期公式知冰山振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\rho_1 h}{3(\rho_2-\rho_1)g}}$$

3.相位

将$(\omega t+\varphi)$称为相位.φ为$t=0$时的相位,称作初相位或初相.若两个简谐运动的频率相同,初相分别为φ_1,φ_2.当$\varphi_1>\varphi_2$时,相位差为$\Delta\varphi=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$.表述为1的相位比2的提前$\Delta\varphi$,或2的相位比1落后$\Delta\varphi$.

$t=0$时,$x_0=A\sin\varphi$.由$v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi)$知此时$v_0=\omega A\cos\varphi$.当$v_0$不为零时,两式作比得

$$\tan\varphi=\frac{\omega x_0}{v_0}$$

故$\varphi=\arctan\frac{\omega x_0}{v_0}$.

4.图像

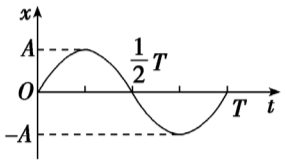
记录不同时刻弹簧振子小球的位置,不能用打点计时器,振子往复运动,图像叠加不易区分.

(1)平衡位置处开始计时

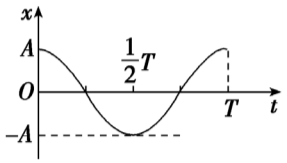
函数表达式为$x=A\sin\omega t$.图像如甲图所示.

(2)最大位移处开始计时

函数表达式为$x=A\cos\omega t$.图像如乙图所示.



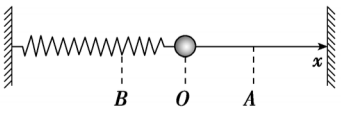
甲



乙

例题 1

(多选)如图,一弹簧振子沿x轴做简谐运动,振子零时刻向右经过A点,$2s$后第一次到达B点,已知振子经过A,B两点时的速度大小相等,$2s$内经过的路程为$0.4m$.该弹簧振子的(　　).



芝士不鱼
闲鱼·禁止外传

A.周期为$2s$　　B.周期为$4s$

C.振幅为$0.2m$　　D.振幅为$0.4m$

根据简谐运动对称性(下文中将提到)可知.振子零时刻向右经过A点,$2s$后第一次到达B点,已知振子经过A,B两点时的速度大小相等,则A,B两点关于平衡位置对称,而振动经过了半个周期的运动,则周期为$T=2t=4s$,故A错误,B正确.从A到B经过了半个周期的振动,路程为$s=0.4m$,而一个完整的周期路程为$0.8m$,为4个振幅的路程,有$4A=0.8m$,解得振幅为$A=0.2m$,故C正确,D错误.故答案为BC.

例题 2(2011 年华约自主招生)

一质点沿直线做简谐运动,相继通过距离为$16cm$的两点A和B,历时$1s$,并且在A,B两点处具有相同的速率;再经过$1s$,质点第二次通过B点.该质点运动的周期和振幅分别为(　　).

$A.3s,8\sqrt{3}\,cm$　　$B.3s,8\sqrt{2}\,s$

$C.4s,8\sqrt{3}\,cm$　　$D.4s,8\sqrt{2}\,m$

由题意知A,B两点位于平衡位置两侧点上,距离O点都为$8cm$,并且由对称性可知,物体从O到B用时$0.5s$,从B到位移最大位置用时也为$0.5s$,因此$\dfrac{T}{4}=1s$,得$T=4s$.设物体从平衡位置起的运动方程为$x=A\sin\dfrac{2\pi}{T}t=A\sin\dfrac{\pi}{2}t$,当$t=0.5s,x=8cm$,解得$A=8\sqrt{2}\,cm$.故选$D$.

(八)各物理量的周期性变化

靠近平衡位置时,物体的a,F,x都减小,v增大;远离平衡位置时,物体的a,F,x都增大,v减小.

1.位移

由$x=\sqrt{\dfrac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$知,位移做周期性变化,周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.系统完成一个全振动后位移的变化量为0,路程的变化量为$4A$.

2.速度

由$v=\sqrt{\dfrac{2E}{m}}\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$知,速度做周期性变化,周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$.

3.加速度

由$a=-\frac{\sqrt{2Ek}}{m}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$知,加速度做周期性变化,周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,且加速度的方向与位移的方向相反.

4.回复力

由$F=-kx$知$F=-\sqrt{2Ek}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$,回复力做周期性变化,周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,回复力的方向与加速度的方向相同,与位移的方向相反.

5.动能

知$E_k=\cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\cdot E$,变形有

$$E_k=\frac{E}{2}+\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t+2\varphi_0\right)\cdot\frac{E}{2}$$

动能做周期性变化,周期为$T=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.与位移、速度、加速度和回复力相比,动能变化的周期为它们周期的一半.

6.弹性势能

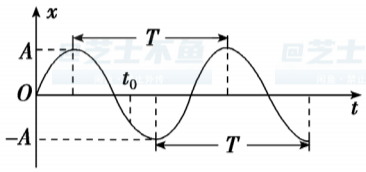
知$E_p=\sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right)\cdot E$,变形有

$$E_p=\frac{E}{2}-\cos\left(2\sqrt{\frac{k}{m}}t+2\varphi_0\right)\cdot\frac{E}{2}$$

弹性势能做周期性变化,周期为$T=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.与动能的变化周期一样,与位移、速度、加速度和回复力相比,弹性势能变化的周期为它们周期的一半.

(九)图像问题

根据简谐运动图像可获取的信息



1.振幅A、周期T(或频率f)和初相位φ(如图所示).

2.某时刻振动质点离开平衡位置的位移.

3.某时刻质点速度的大小和方向:曲线上各点切线斜率的大小和正负分别表示各时刻质点的速度的大小和相对上一时刻位移的方向,速度的方向也可根据下一时刻质点位移的变化来确定.

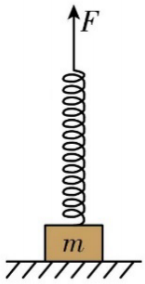
4.某时刻质点的回复力、加速度的方向:回复力总是指向平衡位置,回复力和加速度的方向相同,在图像上总是指向t轴.

5.某段时间内质点的位移、回复力、加速度、速度、动能和势能的变化情况.

(十)例题(2010 年南京大学自主招生)

如图所示,质量为m的物体静止在桌面上,上接一根劲度系数为k的轻质弹簧.现将轻弹簧上端施加一竖

直向上的力,使其上端点以速度v匀速上升.



(1)经过多长时间物体脱离地面?

物体脱离地面时,有

$$\begin{cases} mg = k\Delta x \\ vt = \Delta x \end{cases}$$

解得

$$t = \frac{mg}{kv}$$

(2)物体速度第一次达到最大值时,力F做的功多大?

从物体离开地面开始,以弹簧上端为参考系,物体从平衡位置开始向下振动,速度为v,经半个周期$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$后,物体回到平衡位置,速度第一次向上达到最大值,大小同样为v,回到地面系,此时物体的速度第一次达到最大值,大小为$2v$.物体从开始运动到速度第一次达到最大值,物体上升的高度为

$$H = vt = v\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

力F做的功等于弹簧弹性势能的增加量与物体动能和势能增加量之和,即

$$W = mgH + \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgv\pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 2mv^2 + \frac{m^2g^2}{2k}$$

(十一)非惯性系的应用

例题(2006 年上海交通大学夏令营)

在升降机的天花板上固定一摆长为l的单摆,当升降机静止时,让摆球从θ角度处摆下,试分析:

(1)当摆球摆到最高点时,升降机以加速度g下落,摆球相对于升降机如何运动?

最高点摆球速度为零,仅靠重力就能跟上升降机的加速下落,故摆线拉力消失,摆球相对于升降机静止.

(2)当摆球摆到最低点时,升降机以加速度g下落,摆球相对于升降机如何运动?

若以升降机为参考系(非惯性系),摆球多受一方向向上的大小为mg的惯性力的作用,此力与重力平衡,但因摆球在最低点时有水平速度,所以相对于升降机做匀速圆周运动,绳子的拉力提供向心力.

(3)若升降机以加速度g上升,则摆球相对于升降机如何运动?

若以升降机为参考系(非惯性系),摆球多受一方向向下的大小为mg的惯性力的作用,等效重力加速度为 2g.所以摆球相对于升降机做周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$的简谐运动.

四、单摆

(一)定义

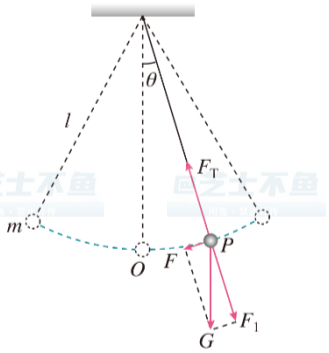
细线的长度不可改变,细线的质量与小球相比可以忽略.球的直径与线的长度相比也可以忽略,将这样的装置称为单摆.单摆是实际摆的理想模型.此外,单摆还需满足与小球受到的重力及绳的拉力相比,空气等对它的阻力可以忽略的条件.实验时为更好满足该条件,总要尽量选择质量大、体积小的球和尽量细的线.单摆的能量转化为重力势能与动能的相互转化,机械能守恒.

(三)受力特征

1.回复力

当摆角θ(5°以内)很小时,可将摆球运动的圆弧近似视为直线,认为F指向平衡位置O,与位移x反向,圆弧$\overset{\frown}{OP}$的长度可认为与摆球的位移x大小相等,即

$$\sin\theta\approx\theta=\frac{\overset{\frown}{OP}}{l}\approx\frac{x}{l}$$



重力G沿圆弧切线方向的分力F充当单摆中的回复力,即

$$F=-mg\sin\theta=-mg\cdot\frac{x}{l}=-\frac{mg}{l}x$$

故单摆在摆角很小的情况下做简谐运动.

2.向心力

细线的拉力和重力沿细线方向分力的合力充当向心力,即$F_{向}=F_T-mg\cos\theta$.

3.特殊位置的受力情况

(1)最高点

$F_{向}=m\frac{v^2}{l}=0,F_T=mg\cos\theta$.

(2)最低点

$F_{向}=m\frac{v_{\max}^2}{l},F_{向}$最大,$F_T=mg+m\frac{v_{\max}^2}{l}$.

(三)周期

知$k=\frac{mg}{l}$,故$\frac{m}{k}=\frac{l}{g}$,周期为$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.单摆做简谐运动的周期与摆长有关,摆长越长,周期越大;单摆的周期与摆球质量和振幅无关.又因$\pi^2\approx9.87\approx g$,有时计算可认为$\pi^2=g$.$l$为等效摆长,表示从悬点到摆球重心的距离.$g$为当地重力加速度.此公式不仅适用于基本单摆装置,也适用于其他较为复杂情况下的简谐运动.此时l为等效摆长,g为等效重力加速度.

例题 1(2011 年复旦大学自主招生)

一个充满水的塑料桶用轻绳悬挂在固定点上摆动,若水桶是漏水的,则随着水的流失,其摆动周期将(　).

A.总是变大　　B.总是变小

C.先变小再变大　　D.先变大后变小

将该系统近似看作单摆,摆长是悬点到重心的距离.随着水的流失,重心是先下降后上升的,相应的摆长是先增大后减小,由$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$知周期是先变大再变小,选项 D 正确.

例题 2(2009 年浙江大学自主招生)

升降机里有一个单摆,原始周期为T.求当升降机分别以加速度a向上加速运动、向下加速运动合匀速运动时单摆的周期.

设单摆摆长为L,当升降机以加速度a向上加速运动时,等效重力加速度$g'=g+a$,单摆周期

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}=\sqrt{\frac{g}{g+a}}T$$

当升降机以加速度a向下加速运动时,等效重力加速度$g'=g-a$,单摆周期

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}=\sqrt{\frac{g}{g-a}}T$$

当升降机匀速运动时,等效重力加速度为g,单摆周期为T.

(四)秒摆

周期为$2s$的单摆叫做秒摆,在地表附近摆长约等于$1m$.可由一根长约$1m$的上端固定不能伸长的细线(线的质量很小,可以忽略不计)和在下端悬挂的一个小球组成.虽然被称为秒摆,但实际上$1s$是指半周期,即从左摆到右的时间为$1s$的单摆.

(五)与单摆有关的计算

现有一单摆的振动图像,周期T、振幅A已知.

1.求单摆的摆长

知$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,解得

$$l=\frac{gT^2}{4\pi^2}$$

2.求单摆摆动的最大偏角

小球摆动的摆角最大时,小球处于最大位移处,振幅为A,摆长为l,由小角近似有

$$\sin\theta\approx\frac{A}{l}=\frac{4A\pi^2}{gT^2}$$

解得

$$\theta=\arcsin\frac{4A\pi^2}{gT^2}$$

(六)实验:用单摆测量重力加速度

1.实验思路

当摆角较小时,单摆做简谐运动,根据其周期公式可得

$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

闲鱼·禁止外传

2.实验装置

在细线的一端打一个比小球上的孔径稍大些的结,将细线穿过球上的小孔,并把细线上端固定在铁架台上,制成一个单摆.将铁夹固定在铁架台的上端,铁架台放在实验桌边,使铁夹伸到桌面以外,方便使用不同长度的摆线.

摆线要选择不可伸长的(伸缩性小些的)和细些的,并适当长一些(本实验要求$1m$左右),且细线质量相对于摆球质量可忽略.摆球要选择半径小一些的(远小于摆线长度)、质量大一些且体积小一些的.摆角要控制在$5°$内.

细线上端的悬挂方式应保证单摆在摆动过程中摆长不变,可调整摆长.还可以采取双线摆的方式,防止单摆在摆动过程中形成圆锥摆.

3.物理量的测量

(1)摆长的测量

摆长是摆线长度和小球半径之和.可以用刻度尺直接测量小球球心与悬挂点之间的距离作为摆长的测量值,精确到毫米;也可用游标卡尺测量小球的直径,进而求得半径,再测量悬挂点与小球上端之间的距离,以两者之和作为摆长的测量值.

(2)周期的测量

一般用停表测量单摆的周期.实验时可以测量单摆做一次全振动的时间作为它的周期的测量值;也可以测量单摆做多次全振动(例如几十次)的时间,然后通过计算求出它的周期的测量值.后者从摆球摆到平衡位置开始计时,测量N次全振动用的时间t,则周期$T=\frac{t}{N}$,有利于减小实验误差.

4.数据分析

(1)计算法

从测量的数据中选择几组,根据前面推导的公式,分别计算重力加速度,然后取平均值作为测量结果.

(2)图像法

根据$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$得$T^2=\frac{4\pi^2}{g}l$,画出T^2-l图像,则是一条过原点的直线,直线的斜率$k=\frac{4\pi^2}{g}$,由斜率k的值可求得重力加速度g.

例题 1(课本 56 页题目节选)

某同学用单摆测量重力加速度.实验时改变摆长,测出几组摆长l和对应的周期T的数据,作出$l-T^2$图像.本实验用$l-T^2$图像计算重力加速度,是否可以消除因摆球质量分布不均匀而造成的测量误差?

摆球质量分布不均匀,使摆球的重心不与其几何中心重合,故测量的摆长与实际不符,所作出的图像为一条不过原点的直线,计算重力加速度时注意到g值仅与该直线的斜率有关,与其截距是否为0无关,故可以消除因摆球质量分布不均匀而造成的测量误差.

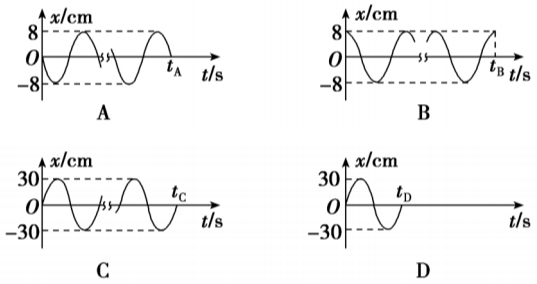
例题 2(数据处理类问题)

在做用单摆测定重力加速度的实验时,实验步骤有如下一步:根据公式$g=\frac{4\pi^2}{T^2}l$,分别计算出每组l和T对应的重力加速度g,然后取平均值即可作为重力加速度的测量结果.有同学认为可以先将多次测量的摆长l取平均值得到$\overline{l}$,周期T取平均值得到$\overline{T}$,再代入公式$g=\frac{4\pi^2}{T^2}l$,得到重力加速度g的测量结果,你认为这种做法是否正确并说明理由.

这种做法是错误的;由单摆周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$可知,摆长l与周期T间不是一次函数关系,不能求出l的平均值$\overline{l}$和T的平均值$\overline{T}$,再代入公式$g=\frac{4\pi^2}{T^2}l$求出重力加速度.

例题 3(图像选择类问题)

下列振动图像真实地描述了对摆长约为$1m$的单摆进行周期测量的四种操作过程,图中横坐标原点O为计时起点,A,B,C均为30次全振动的图像,已知$\sin 5^\circ=0.087$,$\sin 15^\circ=0.26$,这四种操作过程合乎实验要求且误差最小的是_____(填字母代号).



单摆振动的摆角$\theta\leqslant 5^\circ$,当$\theta=5^\circ$时单摆振动的振幅,为计时准确,在摆球摆至平衡位置时开始计时,故四种操作过程合乎实验要求且误差最小的是选项A.

5.误差分析

(1)偶然误差

①摆长的测量存在误差.

②测n次全振动的时间t存在误差.

③作图存在误差.

(2)系统误差

主要来源于单摆模型本身.

(七)单摆的异化情形

1.轨道球

小球在半径为R的光滑球面上的A、B之间来回运动.若$\overset{\frown}{AB}\ll R$,则小球的运动为简谐运动.

设小球运动时所在半径与竖直方向夹角为θ,将小球所受的重力沿半径方向和运动的切线方向分解.因

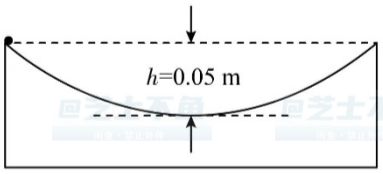
小球速度很小,不考虑向心力,沿半径方向上合力为零.小球所受合力为$mg\sin\theta$,知$\overset{\frown}{AB}\ll R$,故$\theta$很小,由小角近似知$\sin\theta\approx\theta=\dfrac{x}{R}$,$x$为小球的位移,则有$F=mg\sin\theta=-\dfrac{mg}{R}x$,故小球的运动为简谐运动.该情形与单摆等效,摆长$l=R$,小球振动的周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$,频率为$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{R}}$.

回芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

例题(2010 年南京大学自主招生)

一个球冠形光滑凹槽深度$h=0.050m$,球半径为$20m$.现将一质量为$0.10kg$的小球放在凹槽边缘从静止释放.重力加速度大小为$9.8m/s^2$.小球由凹槽最高点滑到最低点所用时间为_____s.

因$h\ll R$,圆弧所对的圆心角很小,可等同于一单摆模型,周期$T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}=\dfrac{20\pi}{7}s$,所求时间$t=\dfrac{T}{4}=\dfrac{5\pi}{7}s$.

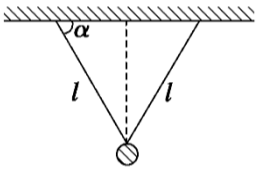


2.斜面摆

在摩擦力可以忽略的斜面上做单摆实验,即斜面摆.如果没有摆线的约束,摆球在该倾角为θ的斜面上运动的加速度为$a=g\sin\theta$,即等效重力加速度.周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sin\theta}}$.

3.双线摆

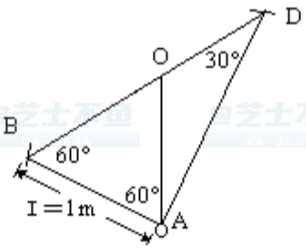
双线摆是一种单摆,它的优点是可以把摆球的运动轨迹约束在一个确定的平面上.将双线的悬点连线与过摆球的竖直线的交点和摆球间的距离作为双线摆的等效摆长.



例题 1

一双线摆如图所示,当它在垂直于纸面方向做小角度的摆动时,求该双线摆的周期.

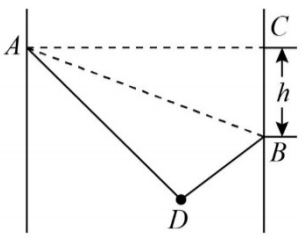
由图可知两悬线的固定点B,D连线与两线间的夹角分别为$30°$和$60°$,也就是两悬线之间的夹角为$90°$,两悬点的连线与过摆球A的竖直线的交点为O,则该双线摆的摆长即为$L=OA=1m$.摆长为$1m$的单摆为秒摆,其周期为$2s$.将双线的悬点连线与过摆球的竖直线的交点和摆球间的距离作为摆长.



例题 2(2011 年卓越自主招生)

如图所示,两段不可伸长细绳的一端分别系于两竖直杆上的AB两点,另一端与质量为m的小球D相连.已知AB两点高度相差h,$\angle CAB=\angle BAD=37°$,$\angle ADB=90°$,重力加速度为$g$.现使小球发生微小振动,则小球摆动的周期为(　　).

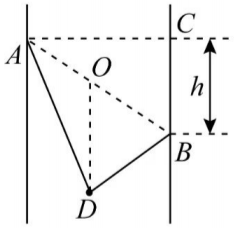
$A.\pi\sqrt{\dfrac{17h}{3g}}$　　$C.\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$



$B.\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{85h}{3g}}$　　$D.2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$

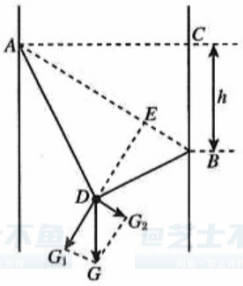
回芝士不鱼 闲鱼·禁止外传

法一



该单摆的等效摆长为OD,由图中的几何关系可推出$OD=h$,根据单摆的周期公式可知,小球摆动的周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{h}{g}}$.选项$D$正确.

法二



根据题设条件,可知$\triangle CAB\cong\triangle DAB$,则$BD=BC=h$.过点$D$点向$AB$作垂线,交$AB$于$E$点,如右图所示,$DE$为等效摆长的摆长,其长度为

$$L'=BD\cdot\cos\angle BDE=h\cdot\cos37^\circ$$

摆球在平衡位置时,把摆球的重力G分解为与AB垂直的分力G_1和与AB平行的分力G_2,则$G_1=G\cdot\cos37^\circ$,等效重力加速度为

$$g'=\frac{G_1}{m}=g\cdot\cos37^\circ$$

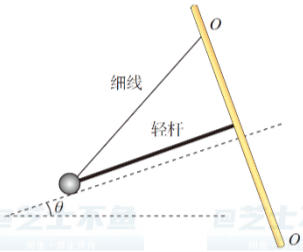
故摆球微小摆动时的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L'}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

选项D正确.

4.杆线摆

现把双线摆的其中一根悬线,换成一根很轻的硬杆,组成一个杆线摆,如图所示.杆线摆可以绕着悬挂轴OO'来回摆动,其摆球的运动轨迹被约束在一个倾斜的平面内,这相当于单摆在斜面上来回摆动,但避免了摆球在真实斜面上运动时所受的摩擦力.其等效加速度$a=g\sin\theta$,运动周期为$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sin\theta}}$.



(八)摆钟问题

利用单摆运动的等时性可制成摆钟计时,计算摆钟类问题的方法:在一定的时间内,摆钟走过的格子数n(n可以是分钟数,也可以是秒数)与频率成正比,即$n\propto f\propto\dfrac{1}{\sqrt{L}}$.

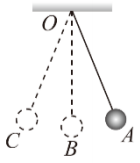
(九)例题(课本 56 页题目)

如图甲所示,O点为单摆的固定悬点,将力传感器接在摆球与O点之间.现将摆球拉到A点,释放摆球,摆球将在竖直面内的A、C之间来回摆动,其中B点为运动中的最低位置.图乙表示细线对摆球的拉力大

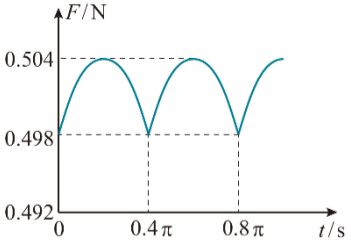
小F随时间t变化的曲线,图中$t=0$为摆球从A点开始运动的时刻,g取$10m/s^2$.

(1)求单摆的振动周期和摆长.

摆球通过最低点时速度最大,向心力最大,细线上的拉力最大,则力传感器的示数最大,摆球一个周期通过最低点两次,故由题图知$T=0.8\pi s$.由$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$得$l=\frac{gT^2}{4\pi^2}=1.6m$.



甲



乙

(2)求摆球的质量.(3)求摆球运动过程中的最大速度.

由题图知$F_{max}=0.504N,F_{min}=0.498N$,设单摆的摆角为$\theta$,得

$$\begin{cases}F_{max}-mg=m\frac{v^2}{l}\\F_{min}=mg\cos\theta\end{cases}$$

由机械能守恒定律知

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2$$

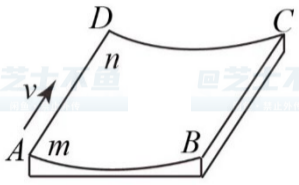
联立解得$m=0.05kg,v=\frac{4\sqrt{5}}{25}m/s$.

五、简谐运动中的多解问题

简谐运动的最大特点就是具有周期性,其位移、速度、加速度、回复力、动能、势能等物理量都具有周期性;若物体运动时间与简谐运动的周期之间存在整数倍的关系,则点的位移、速度、回复力、加速度、动能等物理量均相同;所以简谐运动在很多情况具有多解性,这是由运动时间与周期关系不确定造成的.简谐运动的周期性体现在振动图像上是曲线的重复性.此外,简谐运动的速度方向有时也会产生多解问题,解此类题目时分类讨论即可.下举两道与周期有关的多解问题.

例题 1

如图,$ABCD$为光滑的圆柱面,圆柱面的轴线水平,A,B,C,D四个点在同一水平面上,小球m自A点以沿AD方向的初速度v逐渐接近固定在D点的小球n.已知AB弧长$l=0.8m$,AB弧半径$R=10m$,AD间的距离$s=10m$,则v多大时才能使m恰好碰到小球n?($g=10m/s^2$)



小球m的运动可以看作是两个分运动的合成,这两个分运动分别是以速度v沿AD方向的匀速直线运动和在圆弧面AB上的简谐运动.设小球m在AD与BC间运动的周期为T,则有$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$.设小球m恰好碰到小球n,则有$s=vt$,且$t=nT,n=1,2,3,\cdots\cdots$.联立解得

$$v=\frac{5}{n\pi},n=1,2,3,\cdots\cdots$$

例题 2

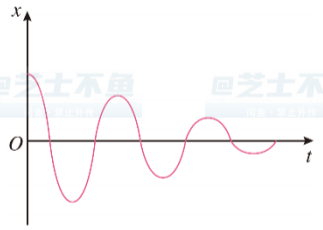
A,B 两个单摆,第一次同时从平衡位置以相同速度开始运动,经过时间 t_0,它们第二次以相同速度同时通过平衡位置,已知 A 摆的周期为 T_A,求 B 摆的周期 T_B.

由题知在 t_0 时间内,A 摆完成全振动的次数为 $n_A=\dfrac{t_0}{T_A}$;B 摆完成全振动的次数 $n_B=\dfrac{t_0}{T_B}$,又因 A,B 摆是以相同的速度第二次同时通过平衡位置,故 $n_A-n_B=n,n\in Z$,解得

$$T_B=\frac{t_0T_A}{t_0-nT_A},n\in Z$$

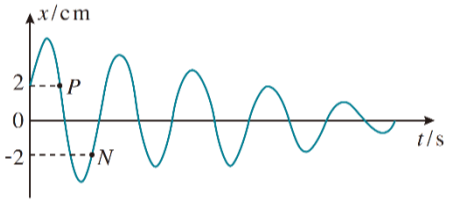
六、阻尼振动、受迫振动与共振

(一)阻尼振动



由于振动系统能量衰减使得振幅随时间逐渐减小的振动称为阻尼振动.振动系统能量衰减的方式通常有两种.一种是由于振动系统受到摩擦阻力的作用,使振动系统的机械能逐渐转化为内能.另一种是由于振动系统引起邻近介质中各质点的振动,使能量向四周辐射出去,从而自身机械能减少.

由 $x=\sqrt{\dfrac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}t+\varphi_0\right)$ 知,阻尼振动中振幅随时间逐渐减小,但周期与频率不变.



右图为一单摆做阻尼振动的 $x-t$ 图像.摆球在 P,N 两时刻的势能相等,在 P 时刻的机械能和动能更大.

例题(课本 55 页题目)

一个单摆完成10 次全振动的时间是 $40s$,摆球的质量为 $0.2kg$,它振动到最大位移时距最低点的高度为 $1.5cm$,它完成10 次全振动回到最大位移时,距最低点的高度变为 $1.2cm$.如果每完成10 次全振动给它补充一次能量,使摆球回到原来的高度,在 $200s$ 内总共应补充多少能量?

由阻尼振动知识知,物体做阻尼振动时,振幅减小,周期不变.完成10 次全振动后,单摆的重力势能减小,故应补充的能量为 $(1.5-1.2)\times10^{-2}m\times0.2kg\times10m/s^{-2}=0.006J$.在 $200s$ 内单摆共完成了 50 次全振动,故在 $200s$ 内总共应补充的能量为 $E=5\times0.006J=3\times10^{-2}J$.

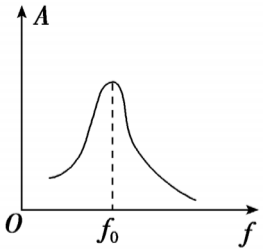
(二)固有振动与固有频率

弹簧振子与单摆在没有外力干预的情况下做简谐运动,周期或频率与振幅无关,仅由系统自身的性质决定.将这种振动称为固有振动,其振动频率称为固有频率.

(三)受迫振动

周期性的外力作用于振动系统,外力对系统做功,补偿系统的能量损耗,使系统的振动维持下去.这种周期性的外力叫作驱动力,系统在驱动力作用下的振动叫作受迫振动.

物体做受迫振动达到稳定后,物体振动的频率等于驱动力的频率,与物体的固有频率无关.物体在做受迫振动时,驱动力的频率与物体的固有频率相差越小,受迫振动的振幅越大;当驱动力的频率与物体的固有频率相等时,受迫振动的振幅达到最大.右图反映了受迫振动振幅A与驱动力频率f之间的关系,f_0为物体的固有频率. 物体做受迫振动的频率一定等于驱动力的频率,但不一定等于物体的固有频率,固有频率由物体本身决定.



做受迫振动的系统的机械能不守恒,系统与外界时刻进行能量交换.

(四)共振

当驱动力的频率等于固有频率时,物体做受迫振动的振幅达到最大值,这种现象称为共振.