高三数学试题答案

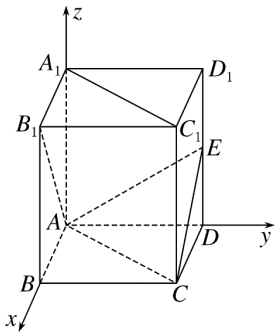
一、选择题:

1.B　解析　A 中函数定义域不是[-2,2];C 中图象不表示函数;D 中函数值域不是[0,2]。故选 B。

2.A　解析　sin 239°tan 149°=sin(270°-31°)·tan(180°-31°)=-cos 31°(-tan 31°)=sin 31°=$\sqrt{1-a^2}$。故选 A。

3.C　解析　由动点 P 满足$\overrightarrow{OP}$=(1-λ)$\overrightarrow{OD}$+$\lambda\overrightarrow{OC}$($\lambda\in$R),且 1-$\lambda$+$\lambda$=1,所以 P,C,D 三点共线,又因为 D 为 A,B 的中点,所以 CD 为△ABC 的边 AB 的中线,所以点 P 的轨迹一定过△ABC 的重心。故选 C。

4.D　解析



由题意,以 A 为原点,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AD}$,$\overrightarrow{AA_1}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,因为正四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 1,且∠B_1AB=$\frac{\pi}{3}$,所以 BB_1=AB·tan$\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,则 A(0,0,0),C(1,1,0),$E\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$A_1$(0,0,$\sqrt{3}$),所以$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{A_1E}=\left(0,1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CE}=\left(-1,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。设平面 EAC 的法向量为 n=(x,y,z),则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ -x+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$令 z=2$\sqrt{3}$,则 x=3,y=-3,所以 n=(3,-3,2$\sqrt{3}$)是平面 EAC 的一个法向量。因为 AC∥A_1C_1,且 AC⊂平面 EAC,A_1C_1⊄平面 EAC,所以 A_1C_1∥平面 EAC,所以 A_1C_1 到平面 EAC 的距离 d 即点 A_1 到平面 EAC 的距离,则 d=$\frac{|\overrightarrow{A_1E}\cdot n|}{|n|}=\frac{6}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{5}$。故选 D。

5.A　解析　设 P(x,y),由$\overrightarrow{QP}$=(1,-3),得 Q(x-1,y+3),因为 Q 在直线 l:x+2y+1=0 上,故 x-1+2(y+3)+1=0,化简得 x+2y+6=0,即 P 的轨迹 E 为直线且与直线 l 平行,E 上的点

到 l 的距离 $d=\frac{|6-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$,故 C,B,D 错误,A 正确。故选 A。

6.C　**解析**　因为 $h'(t)=-9.8t+8$,所以 $h'(0.5)=-9.8\times0.5+8=3.1$,所以此运动员在 0.5 秒时的瞬时速度为 3.1 米/秒。故选 C。

7.D　**解析**　由 $\{a_n\}$ 是等差数列,得 $a_5+a_6=a_2+a_9$,又 $a_5+a_6=a_2+4$,所以 $a_9=4$,所以 $S_{17}=\frac{17}{2}(a_1+a_{17})=17a_9=17\times4=68$。故选 D。

8.B　**解析**　从小到大排列此数据为:10,12,14,14,15,15,16,17,17,17。平均数为 $\frac{1}{10}\times(10+12+14\times2+15\times2+16+17\times3)=14.7$;数据 17 出现了三次,17 为众数;第 5 位、第 6 位均是 15,故 15 为中位数。所以 $a=14.7$,$b=15$,$c=17$,即 $a<b<c$。故选 B。

二、选择题:

9.ACD　**解析**　由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $c\neq0$。当 $c>0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,即 $b<a<0$,可得 $0<\frac{a}{b}<1$;当 $c<0$ 时,由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$,即 $b>a>0$,所以 $0<\frac{a}{b}<1$,故 A,D 正确;由 $\frac{c^3}{a}<\frac{c^3}{b}<0$,得 $\frac{c^3}{a}-\frac{c^3}{b}=\frac{c^3(b-a)}{ab}<0$,且 a 与 b 同号,即 $ab>0$,所以 c 与 $b-a$ 异号,即 c 与 $a-b$ 同号,故 C 正确;由 $ac<bc$,得 $(a-b)c<0$,故 B 错误。故选 ACD。

10.BCD　**解析**　A 项,零向量是有方向的,其方向是任意的,故 A 错误;B 项,由零向量的定义知,零向量的长度为 0,故 B 正确;C 项,因为 $\frac{a}{|a|}$ 与 $\frac{b}{|b|}$ 都是单位向量,所以只有当 $\frac{a}{|a|}$ 与 $\frac{b}{|b|}$ 是相反向量,即 a 与 b 是反向共线时才成立,故 C 正确;D 项,由向量相等的定义知 D 正确。故选 BCD。

11.ABC　**解析**　因为 $(a+b)^n$ 的展开式中第 5 项的二项式系数 C_n^4 最大,所以 $n=7$ 或 $n=8$ 或 $n=9$。故选 ABC。

三、填空题:

12. $a\parallel\alpha$ 或 $a\subset\alpha$ 。　**解析**　当 $a\not\subset\alpha$ 时,由 $a\parallel b$,$b\subset\alpha$,得 $a\parallel\alpha$;当 $a\subset\alpha$ 时,满足题中条件。综上,直线 a 与平面 α 的位置关系是 $a\parallel\alpha$ 或 $a\subset\alpha$。

13. $x=2$ 或 $3x-4y-10=0$ 。**解析**　易知过点 P 且垂直于 x 轴的直线满足条件,此时 l 的斜率不存在,其方程为 $x=2$。若斜率存在,设 l 的方程为 $y+1=k(x-2)$,即 $kx-y-2k-1=0$,由已知得 $\frac{|-2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=2$,解得 $k=\frac{3}{4}$,此时 l 的方程为 $3x-4y-10=0$。综上,直线 l 的方程为

x=2 或 3x-4y-10=0。

14. 13 。 **解析** 当 a=0 时,b 的值可以是-1,0,1,2,故(a,b)的个数为 4。当 a≠0 时,要使方程 ax^2+2x+b=0 有实数解,需使 Δ=4-4ab≥0,即 ab≤1。若 a=-1,则 b 的值可以是-1,0,1,2,(a,b)的个数为 4;若 a=1,则 b 的值可以是-1,0,1,(a,b)的个数为 3;若 a=2,则 b 的值可以是-1,0,(a,b)的个数为 2。由分类加法计数原理可知,(a,b)的个数为 4+4+3+2=13。

四、**解答题**:

15.(本小题满分 12 分)

解 (1)因为每件商品售价为 5 元,则 x 万件商品销售收入为 5x 万元,依题意得,当 0<x<8 时,$L(x)=5x-\left(\frac{1}{3}x^2+x\right)-3=-\frac{1}{3}x^2+4x-3$; 当 x≥8 时,$L(x)=5x-\left(6x+\frac{100}{x}-38\right)-3=35-\left(x+\frac{100}{x}\right)$。所以 $L(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^2+4x-3, 0<x<8,\\ 35-\left(x+\frac{100}{x}\right), x\geq 8。\end{cases}$

(2)当 0<x<8 时,$L(x)=-\frac{1}{3}(x-6)^2+9$。此时,当 x=6 时,$L(x)$取得最大值,为 9 万元。当 x≥8 时,$L(x)=35-\left(x+\frac{100}{x}\right)\leq 35-2\sqrt{x\cdot\frac{100}{x}}$=35-20=15,当且仅当 $x=\frac{100}{x}$时等号成立,即 x=10 时,$L(x)$取得最大值,为 15 万元。因为 9<15,所以当年产量为 10 万件时,小王在这一商品的生产中所获利润最大,最大利润为 15 万元。

16.(本小题满分 12 分)

解 (1)证明:因为 M,N 分别为 PD,AD 的中点,所以 MN∥PA。因为 MN⊄平面 PAB,PA⊂平面 PAB,所以 MN∥平面 PAB。在 Rt△ACD 中,∠CAD=60°,CN=AN,所以∠ACN=60°。又∠BAC=60°,所以 CN∥AB。因为 CN⊄平面 PAB,AB⊂平面 PAB,所以 CN∥平面 PAB。又 CN∩MN=N,所以平面 CMN∥平面 PAB。

(2)由(1)知,平面 CMN∥平面 PAB,所以点 M 到平面 PAB 的距离等于点 C 到平面 PAB 的距离。由已知,AB=1,∠ABC=90°,∠BAC=60°,所以 BC=$\sqrt{3}$,所以 $V_{P\text{-}ABM}=V_{M\text{-}PAB}=V_{C\text{-}PAB}=V_{P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

17.(本小题满分 12 分)

解 (1)证明:直线 l 的方程可化为 k(x+2)+(1-y)=0,令$\begin{cases}x+2=0,\\ 1-y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\ y=1,\end{cases}$所以

无论 k 取何值,直线 l 总经过定点(-2,1)。

(2)由方程知,当 $k\neq0$ 时,直线在 x 轴上的截距为-$\frac{1+2k}{k}$,在 y 轴上的截距为 1+2k,要使直线不经过第四象限,则必须有$\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}<0,\\1+2k>0,\end{cases}$解得 $k>0$;当 $k=0$ 时,直线为 $y=1$,符合题意,故 k 的取值范围是[0,+∞)。

(3)由题意知 $k\neq0$,由 l 的方程,得 $A\left(-\frac{1+2k}{k},0\right)$,$B(0,1+2k)$。依题意,得$\begin{cases}-\frac{1+2k}{k}<0,\\1+2k>0,\end{cases}$解得 $k>0$。因为

$S=\frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1+2k}{k}\right|\cdot|1+2k|=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2k)^2}{k}=\frac{1}{2}\left(4k+\frac{1}{k}+4\right)\geq\frac{1}{2}\times(2\times2+4)=4$,当且仅当 $4k=\frac{1}{k}$,即 $k=\frac{1}{2}$时,等号成立,所以 $S_{\min}=4$,此时直线 l 的方程为 $x-2y+4=0$。

18.(本小题满分 12 分)

解 (1)当 $a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x$,函数的定义域为(0,+∞)且 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=2$,于是当 x 变化时,$f'(x)$,$f(x)$的变化情况如下表。

x	(0,2)	2	(2,+∞)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	ln 2-1	单调递减

故 $f(x)$在定义域上的极大值为 $f(x)_{极大值}=f(2)=\ln2-1$,无极小值。

(2)由(1)知,函数 $f(x)$的定义域为(0,+∞),$f'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$。当 $a\leq0$ 时,$f'(x)>0$ 在(0,+∞)上恒成立,则函数在(0,+∞)上单调递增,此时函数在定义域上无极值点;当 $a>0$ 时,若 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$,则 $f'(x)>0$,若 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$,则 $f'(x)<0$,故函数在 $x=\frac{1}{a}$处有极大值。综上可知,当 $a\leq0$ 时,函数 $f(x)$无极值点,当 $a>0$ 时,函数 $y=f(x)$有一个极值点。

19.(本小题满分 12 分)

解 (1)解法一:记$\{a_n\}$的公差为 d,由 $3a_2+2a_3=S_5+6$,得

$3(a_1+d)+2(a_1+2d)=5a_1+\frac{5\times4}{2}d+6$,解得 $d=-2$,所以

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+(a_1+1)n$。若数列$\{S_n\}$为单调递减数列,则 $S_{n+1}-S_n<0(n\geq1)$恒

成立,即 $a_{n+1}=a_1-2n<0(n\geq1)$恒成立,得 $a_1<2n(n\geq1)$恒成立,得 $a_1<2$,即 a_1的取值范围为$(-\infty,2)$。

解法二:记$\{a_n\}$的公差为 d,由 $3a_2+2a_3=S_5+6$,得

$3(a_1+d)+2(a_1+2d)=5a_1+\frac{5\times4}{2}d+6$,解得 $d=-2$,所以

$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+(a_1+1)n$。若数列$\{S_n\}$为单调递减数列,则需满足$\frac{a_1+1}{2}<\frac{3}{2}$,解得 $a_1<2$,即 a_1 的取值范围为$(-\infty,2)$。

(2)由(1)知,$\{a_n\}$的公差 $d=-2$,又 $a_1=1$,所以 $a_n=1+(n-1)\times(-2)=3-2n$。根据题意,数列$\{b_n\}$为

$1,2^0,-1,2^0,2^1,-3,2^0,2^1,2^2,-5,\dots,-2n+3,2^0,2^1,\dots,2^{n-1},-2n+1,\dots$。可将数列分组:第一组为$1,2^0$;第二组为$-1,2^0,2^1$;第三组为$-3,2^0,2^1,2^2$;第 $k(k\in\mathrm{N}^*)$组为$-2k+3,2^0,2^1,2^2,\dots,2^{k-1}$。则前 k 组一共有 $2+3+\dots+(k+1)=\frac{(k+3)k}{2}$(项),当 $k=12$ 时,项数为 90。故 T_{95} 相当于是前 12 组的和再加上$-23,1,2,2^2,2^3$,即

$T_{95}=[1+(-1)+(-3)+\dots+(-21)]+[2^0+(2^0+2^1)+(2^0+2^1+2^2)+\dots+(2^0+2^1+\dots+2^{11})]+(-23+1+2+2^2+2^3)$。$2^0+(2^0+2^1)+(2^0+2^1+2^2)+\dots+(2^0+2^1+\dots+2^{11})$可看成是数列$\{c_n\}(c_n=2^n-1)$的前 12 项和,所以

$T_{95}=\frac{(1-21)\times12}{2}+\frac{2\times(1-2^{12})}{1-2}-12-23+1+2+4+8=2^{13}-142=8\ 050$。