宣城市2025届高中毕业班第二次调研测试

高三数学参考答案

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	D	A	C	A	B	D	C	D

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。

题　号	9	10	11
答　案	AC	BCD	ACD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. 0　　13. 1280　　14. $\frac{\pi}{4}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。

15.（13分）

解：(1) $\bar{x}=1\times\frac{3}{100}+3\times\frac{4}{100}+5\times\frac{8}{100}+7\times\frac{11}{100}+9\times\frac{41}{100}+11\times\frac{20}{100}+13\times\frac{8}{100}+15\times\frac{5}{100}$

$=9$，所以 $\mu=9,\sigma=3$，X 服从正态分布 $N(9,3^2)$. …… 3分

$P(X\geqslant 15)=P(X\geqslant 9+2\times 3)=\frac{1}{2}\times[1-P(9-6\leqslant X\leqslant 9+6)]\approx\frac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.02275$，$5000\times 0.02275=113.75\approx 114$（人）

估计该校114名学生平均每周的体育锻炼时间15小时以上； …… 6分

(2) 由(1)知，$\mu=9$，则 $P(X>9)=\frac{1}{2}$

ξ 可取0，1，2，3，

$P(\xi=0)=C_3^0\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(\xi=1)=C_3^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

$P(\xi=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，$P(\xi=3)=C_3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

所以随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

…… 11分

均值为 $E(\xi)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ …… 13分

16.（15分）

解：(1) 根据题意可得，$\frac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}{\left|\frac{4\sqrt{3}}{3}-x\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

将上式两边平方，并化简，得 $x^2+4y^2=4$，即 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

所以，点 M 的轨迹 E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ …… 4 分

(2)因为直线 AB 与 $x^2+y^2=1$ 相切，与曲线 E 相交，故 $k_{AB}\neq 0$.

若直线 AB 的斜率不存在，不妨设直线 AB 为：$x=1$，

此时线段 $|AB|=\sqrt{3}$. 则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot 1=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… 7 分

若直线 AB 的斜率存在，可设直线 AB 的方程为：$y=kx+m(k\neq 0)$.

由直线 AB 与 $x^2+y^2=1$ 相切，故 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，可得：$m^2=1+k^2$①

联立 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}$

线段 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{8km}{1+4k^2}\right)^2-4\cdot\frac{4m^2-4}{1+4k^2}}$

$=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\cdot\sqrt{4k^2m^2-(1+4k^2)(m^2-1)}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\cdot\sqrt{4k^2+1-m^2}$. ②

将①式代入到②式得 $|AB|=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\times\sqrt{4k^2+1-(1+k^2)}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}\sqrt{3k^2}$

$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot 1=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1+k^2)\cdot k^2}}{1+4k^2}$

$=2\sqrt{\frac{(1+k^2)\cdot 3k^2}{(1+4k^2)^2}}\leqslant\frac{2\times\frac{1}{2}\times(1+k^2)}{1+k^2}=1$

当且仅当 $3k^2=k^2+1$，即 $k^2=\frac{1}{2}$ 时，$S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 1.

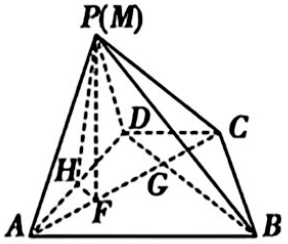
综上所述：当 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$S_{\triangle OAB}$ 的最大值为 1. …… 15 分

17. (15 分)

(1)证明：设 BD 交 AC 于点 G. 因为 D 为 CM 的中点，所以 $DC/\!/AB$，$DC=\frac{1}{2}AB$，故 $CG=\frac{1}{2}GA$，即点 G 为 AC 的三等分点.

又 $AF=\frac{1}{2}FC$，故 $AF=FG$. 因为 H 为 AD 的中点，所以 $HF/\!/DG$. $HF\subset$ 平面 PHF，$BD\not\subset$ 平面 PHF，故 $BD/\!/$ 平面 PHF. …… 5 分

(2)解：连接 PH，因为 $PA=PD$，$\angle PAD=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle PAD$ 为正三角形.



又 H 为 AD 的中点，故 $PH\perp AD$.

由题意知 $AD=PA=1$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，

$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle BAD=1+4-2\times 1\times 2\times\frac{1}{2}=3$，

故 $AD^2+BD^2=AB^2$，即 $AD\perp BD$. 又 $HF/\!/DG$，故 $AD\perp HF$，

$AD\perp PH$，$PH\cap HF=H$，故 $AD\perp$ 平面 PHF. 又 $PF\subset$ 面 PHF，故 $AD\perp PF$.

又 $PF\perp AC$，$AC\cap AD=A$，故 $PF\perp$ 平面 $ABCD$.

综上可得，若函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值，则 a 的取值范围为 $(-3,0)$. ……

…… 11 分

(3) 当 $a\geqslant 2$ 时，要证 $f(x)=ae^x-2x-3\cos x+1\geqslant 0$，即证 $ae^x-2x\geqslant 3\cos x-1$. 显然 $3\cos x-1\leqslant 2$. 令 $G(x)=ae^x-2x$，$G'(x)=ae^x-2=0$，解得 $x=\ln\frac{2}{a}$.

当 $x<\ln\frac{2}{a}$ 时，$G'(x)<0$；当 $x>\ln\frac{2}{a}$ 时，$G'(x)>0$. 所以 $G(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $G(x)\geqslant G(\ln\frac{2}{a})=ae^{\ln\frac{2}{a}}-2\ln\frac{2}{a}=2-2\ln\frac{2}{a}\geqslant 2$.

所以 $G(x)\geqslant 3\cos x-1$，即 $ae^x-2x\geqslant 3\cos x-1$.

综上所得，当 $a\geqslant 2$ 时，$f(x)\geqslant 0$. …… 17 分

19. (17 分)

解：(1) 因为 $a_n=n+\frac{2}{3}$，数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的“接近数列”，则 $\left|n+\frac{2}{3}-b_n\right|<\frac{1}{2}$，

$n+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}<b_n<n+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$，即 $n+\frac{1}{6}<b_n<n+\frac{7}{6}$.

又 $b_n\in\mathbf{Z}$，所以 $b_1=2,b_2=3,b_3=4$. …… 3 分

(2) 因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，所以对于任意正整数 n 均有 $|a_n-b_n|<\frac{1}{2}$ 恒成立，则 $a_n-\frac{1}{2}<b_n<a_n+\frac{1}{2}$，$a_{n+1}-\frac{1}{2}<b_{n+1}<a_{n+1}+\frac{1}{2}$，

从而 $a_{n+1}-a_n-1<b_{n+1}-b_n<a_{n+1}-a_n+1$，即 $d-1<b_{n+1}-b_n<d+1$.

因为 $b_n\in\mathbf{Z}$，$d\in\mathbf{Z}$，所以 $b_{n+1}-b_n=d$.

综上可得，$\{b_n\}$ 也是公差为 d 的等差数列； …… 8 分

(3) 当 n 为奇数时，$a_n=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$，由函数 $y=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}$ 的单调性可知 $\frac{3}{2}<a_n\leqslant a_1$，即 $a_n\in\left(\frac{3}{2},\frac{79}{36}\right]$，$a_n-2\in\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{36}\right]$，所以 $b_n=2$，

当 n 为偶数时，$a_n=\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$，由函数 $y=\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{6}\right)^{x+1}$ 的单调性可知 $a_2\leqslant a_n<\frac{3}{2}$，即 $a_n\in\left[\frac{199}{216},\frac{3}{2}\right)$，$a_n-1\in\left[-\frac{17}{216},\frac{1}{2}\right)$，所以 $b_n=1$.

综上可得，$b_n=\begin{cases}2,n=2k+1(k\in\mathbf{N})\\1,n=2k(k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$， …… 12 分

由前 n 项和公式化简得 $S_n=\frac{3}{2}n+\frac{25}{66}\left[1-\left(-\frac{5}{6}\right)^n\right]$，$T_n=\begin{cases}\frac{3n+1}{2},n=2k+1(k\in\mathbf{N})\\\frac{3n}{2},n=2k(k\in\mathbf{N}^*)\end{cases}$

当 k 为偶数时，令 $T_k-S_k>0\Rightarrow-\frac{25}{66}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]>0\Rightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^k>1$，无解；

当 k 为奇数时，令 $T_k-S_k>0\Rightarrow\frac{1}{2}-\frac{25}{66}\left[1+\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]>0\Rightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^k<\frac{8}{25}$，

所以 $k>\log_{\frac{5}{6}}\frac{8}{25}\approx 6.25$，即 $k_{\min}=7$.

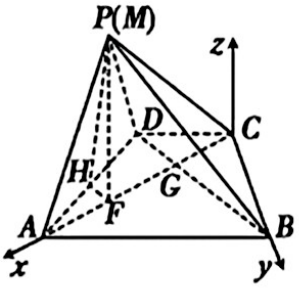
所以存在正整数 k，使得 $S_k<T_k$，且 $k_{\min}=7$. …… 17 分

在 $\mathrm{Rt}\triangle PHF$ 中，$PH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$HF=\frac{1}{2}DG=\frac{1}{6}DB=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以

$PF=\sqrt{PH^2-HF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由题意知 $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，故 $AC\perp BC$. …… 8 分

以点 C 为坐标原点，直线 CA，CB 分别为 x 轴，y 轴，过点 C 与平面 $ABCD$ 垂直的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$D(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)$，

$P(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3})$，所以 $\overrightarrow{CP}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{CB}=(0,1,0)$，

设平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{6}}{3}z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=y=0\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=0$，$z=-\sqrt{2}$，所以 $\vec{m}=(1,0,-\sqrt{2})$.

同理可得，平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(\sqrt{2},-\sqrt{6},1)$ …… 13 分

设平面 PBC 和平面 PCD 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=0$，

所以平面 PBC 和平面 PAD 所成角的余弦值为 0. …… 15 分

18. (17 分)

解：(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=2e^x-2x-3\cos x+1$，$f'(x)=2e^x-2+3\sin x$. 显然 $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增. 所以 $f'(x)<f'(0)=2e^0-2+3\sin 0=0$，即 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减. …… 3 分

(2) $g(x)=f'(x)=ae^x-2+3\sin x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在极值. 即 $g'(x)=ae^x+3\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点. 令 $ae^x+3\cos x=0$，则 $a=-\frac{3\cos x}{e^x}$. 设 $h(x)=-\frac{3\cos x}{e^x}$

则 $h'(x)=\frac{3\sin x+3\cos x}{e^x}=\frac{3\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}>0$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数且 $h(0)=-3$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

所以 $h(x)\in(-3,0)$，从而 $a\in(-3,0)$， …… 8 分

当 $a\in(-3,0)$ 时，存在唯一实数 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$ 成立.

即 $g'(x)=ae^x+3\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，又∵ $g'(0)=a+3>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=ae^{\frac{\pi}{2}}<0$，故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$. 所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减. 所以 $g(x_0)$ 为函数 $g(x)$ 的极大值.