1．D

【分析】解一元二次不等式、分式不等式求集合，再应用集合的交运算求结果.

【详解】由 $A=\{x\,|\,x(x-3)\le 0\}=\{x\,|\,0\le x\le 3\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-2}{x}\ge 0\right\}=\{x\,|\,x<0\text{或}x\ge 2\}$，

所以 $A\bigcap B=\{x\,|\,2\le x\le 3\}$.

故选：D

2．A

【分析】应用复数除法的几何意义及模长的定义求复数的模长.

【详解】由题设 $z=\dfrac{4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=\dfrac{|4\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

故选：A

3．C

【分析】由质量和密度求出此陀螺圆柱体积，通过圆锥、圆柱体体积公式求得此陀螺圆柱体积，然后建立方程后解得底面面积.

【详解】此陀螺圆柱体积 $V=\dfrac{81.6}{0.8}=102\mathrm{cm}^3$，

设此陀螺圆柱的底面半径为S，则 $V=Sh_1+\dfrac{1}{3}Sh_2=\left(5+\dfrac{2}{3}\right)S=\dfrac{17}{3}S=102$，

∴此陀螺圆柱的底面面积 $S=102\times\dfrac{3}{17}=18\mathrm{cm}^2$.

故选：C.

4．A

【分析】根据题意求出用水量的 15.4%分位数，即可得.

【详解】由题意及 $0.077\times 3=0.231>0.154$，则 $0.077\times(x-1.2)=0.154$，可得 $x=3.2$ 吨.

故选：A

5．B

【分析】根据题意得不等式 $0<\dfrac{b}{a}<\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，利用双曲线的离心率计算公式和范围，求解不等式即得其范围.

【详解】依题意，$0<\dfrac{b}{a}<\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，而 $e^2=\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}=1+(\dfrac{b}{a})^2<\dfrac{6}{5}$，

因 $e>1$，故得 $1<e<\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

故选：B.

6．B

【分析】根据题意分别求出等差数列的公差 d 和等比数列的公比 q，利用等比数列通项公式求值即可.

【详解】由题意，设前 10 项等差数列的公差为d，则$a_9-a_6=3d=3$，解得$d=1$，

所以$a_{10}=a_9+d=1+1=2$.

设第 9 项起依次成的等比数列的公比为q，则$a_{10}=a_9\cdot q$，即$q=2$.

所以$a_{2023}=a_{10}\cdot q^{2013}=2\times 2^{2013}=2^{2014}$.

故选：B.

7．C

【分析】由二倍角余弦公式得$\sin 15^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，应用正弦定理求出$AM,AN$，再应用余弦定理求距离.

【详解】由题设$\angle BAM=105^\circ$，$\angle ABM=30^\circ$，则$\angle AMB=45^\circ$，而$AB=2\sqrt{5}$，

所以$\dfrac{AB}{\sin\angle AMB}=\dfrac{AM}{\sin\angle ABM}$，则$AM=\dfrac{AB\sin\angle ABM}{\sin\angle AMB}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{10}$，

由$\angle ABN=120^\circ$，$\angle BAN=45^\circ$，则$\angle ANB=15^\circ$，而$AB=2\sqrt{5}$，

又$\sin 15^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以$\dfrac{AB}{\sin\angle ANB}=\dfrac{AN}{\sin\angle ABN}$，则$AN=\dfrac{AB\sin\angle ABN}{\sin\angle ANB}=\dfrac{2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=3\sqrt{10}+\sqrt{30}$，

由$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos\angle MAN}=\sqrt{10+30(\sqrt{3}+1)^2-\sqrt{10}\times(3\sqrt{10}+\sqrt{30})}$

$=\sqrt{100+50\sqrt{3}}=5(\sqrt{3}+1)\cdot$

故选：C

8．D

【分析】根据“新驻点”的定义，依次对函数求导，构造方程，再通过导函数研究函数的单调性，利用零点存在定理得到方程的根所在区间，最后比较大小即可.

【详解】根据题意，$f(x)=2025x$求导得$f'(x)=2025$，

由$f(x)=f'(x)$即$2025x=2025$解得$x=1$，所以函数$f(x)$的“新驻点”$a=1$.

同理，$g(x)=\ln x$求导得$g'(x)=\dfrac{1}{x}$，则$g(x)=g'(x)$即$\ln x=\dfrac{1}{x}$，

设函数$\varphi(x)=\ln x-\frac{1}{x}$，易知函数$\varphi(x)$在定义域上单调递增，

且$\varphi(1)=0-1=-1<0,\varphi(2)=\ln 2-\frac{1}{2}=\ln 2-\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\ln\sqrt{\frac{4}{\mathrm{e}}}>0$，

根据零点存在定理可知，$\ln x=\frac{1}{x}$的根$b\in(1,2)$.

由$h(x)=x^3-1$求导得$h'(x)=3x^2$，则$h(x)=h'(x)$即$x^3-1=3x^2$，

设函数$t(x)=x^3-3x^2-1$，则$t'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，

所以，当$x<0$或$x>2$时，$t'(x)>0$，$t(x)$单调递增；当$0<x<2$时，$t'(x)<0$，$t(x)$单调递减.

因为$t(0)=-1<0,t(2)=-5<0,t(3)=-1<0,t(4)=15>0$，

根据零点存在定理，可知$x^3-1=3x^2$的根$c\in(3,4)$.

综上，$c>b>a$.

故选：D.

9．AC

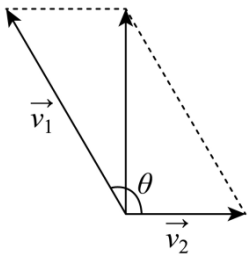
【分析】利用向量的加法法则以及数量积的运算律解决速度合成问题，根据船的航行时间$t=\frac{d}{v}$（其中船垂直河岸方向的分速度$v=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\sin\theta$）可计算并判断 A,C；根据船的航行距离最短时，合速度方向垂直河岸，可计算并判断 B；通过向量的有关运算计算出合成速度$\left|\overrightarrow{v_0}\right|$，可计算并判断 D.

【详解】对于 A，将船的速度$\overrightarrow{v_1}$和水流速度$\overrightarrow{v_2}$进行合成，船垂直河岸方向的分速度$v=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\sin\theta$，

河宽$d=500\mathrm{m}=0.5\mathrm{km}$，则渡河时间$t=\frac{d}{v}=\frac{0.5}{10\sin\theta}=\frac{1}{20\sin\theta}$，

当$\sin\theta=1$，即$\theta=\frac{\pi}{2}$，t取得最小值，所以当船的航行时间最短时，$\theta=\frac{\pi}{2}$，故 A 正确；

对于 B，当船的航行距离最短时，合速度方向垂直河岸，如图，



则$\cos(\pi-\theta)=\frac{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}=\frac{1}{5}$，所以$\cos\theta=-\frac{1}{5}$，故 B 错误；

对于 C，当$\theta=\frac{\pi}{6}$时，船垂直河岸方向的分速度$v=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\sin\theta=10\times\frac{1}{2}=5\mathrm{km/h}$，

船的航行时间$t=\dfrac{d}{v}=\dfrac{0.5}{5}=\dfrac{1}{10}$h，即 6 分钟，故 C 正确；

对于 D，将船的速度$\overrightarrow{v_1}$和水流速度$\overrightarrow{v_2}$进行合成$\overrightarrow{v_0}$，则$\overrightarrow{v_0}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}$，

当$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时，$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\left|\overrightarrow{v_2}\right|\cos\dfrac{2\pi}{3}=10\times2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-10$，

所以$\left|\overrightarrow{v_0}\right|=\sqrt{\left(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\right)^2}=\sqrt{\overrightarrow{v_1}^2+\overrightarrow{v_2}^2+2\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}=\sqrt{100+4-20}=2\sqrt{21}$，

因为船垂直河岸方向的分速度$v=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\sin\theta=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$km/h，

所以船的航行时间$t=\dfrac{d}{v}=\dfrac{0.5}{5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{30}$h，

所以船的航行距离为$\left|\overrightarrow{v_0}\right|\cdot t=2\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{3}}{30}=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$km，故 D 错误.

故选：AC.

10．BCD

【分析】由题设可得$C:y^2=8x$，$F(2,0)$，设$MN:x=ty+2$，联立抛物线并应用韦达定理得$y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，应用弦长公式、抛物线的定义求弦长，确定MN的中点横坐标，即可得判断 A、B、C；应用向量数量积的坐标表示及韦达公式化简判断 D.

【详解】由题设$8^2=2p\times8\Rightarrow p=4$，则$C:y^2=8x$，$F(2,0)$，

可设$MN:x=ty+2$，联立抛物线得$y^2-8ty-16=0$，显然$\Delta>0$，

所以$y_1+y_2=8t$，$y_1y_2=-16$，则$\left|MN\right|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=8(1+t^2)\geq8$，当且仅当$t=0$时等号成立，A 错；

由抛物线的定义知$\left|MN\right|=x_1+x_2+4$，而$MN$的中点横坐标为$\dfrac{x_1+x_2}{2}$，

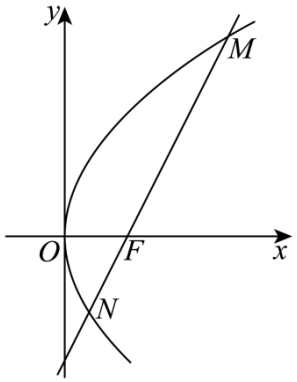
所以MN的中点与直线$x=-2$的距离为$\dfrac{x_1+x_2}{2}+2$，即为$\left|MN\right|$的一半，

所以以线段MN为直径的圆与直线$x=-2$相切，B 对；

若$\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{FN}$，且$y_1>0>y_2$，则$y_1=2|y_2|$，而$y_1y_2=-16$，

所以$y_1=4\sqrt{2},y_2=-2\sqrt{2}$，则$y_1+y_2=8t=2\sqrt{2}\Rightarrow t=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

所以$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times2\sqrt{2}+4=5$，则$\left|MN\right|=x_1+x_2+4=9$，C 对；



由$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=(t^2+1)y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4=-16t^2-16+16t^2+4=-12$，D 对.

故选：BCD

11．ACD

【分析】构造$g(x)=(\cos x-2)f(x)$，根据已知及奇偶性定义、导数研究函数的性质得到$g(x)$在 R 上单调递减，且$x<0$时$g(x)>0$，$x>0$时$g(x)<0$，$f(x)=\dfrac{g(x)}{\cos x-2}$，进而判断各项的正误.

【详解】令$g(x)=(\cos x-2)f(x)$，而$f\left(x\right)$是定义在**R**上的奇函数，则$g(0)=-f(0)=0$，

$g(-x)=[\cos(-x)-2]f(-x)=-(\cos x-2)f(x)=-g(x)$，即$g(x)$在 R 上也是奇函数，

而$g'(x)=(\cos x-2)f'(x)-f(x)\sin x$，当$x<0$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，结合奇函数性质知：$g(x)$在 R 上单调递减，

综上，$x<0$时$g(x)>0$，$x>0$时$g(x)<0$，$g(0)=0$，故$f(x)=\dfrac{g(x)}{\cos x-2}$，

显然$x\in\mathrm{R}$时$\cos x-2<0$，故$x<0$时$f(x)<0$，$x>0$时$f(x)>0$，

所以$f\left(x\right)$在 R 上有且只有 1 个零点，$f\left(2025\right)>0$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)<0<f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，A、C、D 对；

由$f(x)=\dfrac{-g(x)}{2-\cos x}$，显然$-g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$-g(x)>0$，

$y=\dfrac{1}{2-\cos x}$在$(0,\pi)$上单调递减，在$(\pi,2\pi)$上单调递增，且周期为2π，$y=\dfrac{1}{2-\cos x}>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上不一定单调，B 错.

故选：ACD

12．0

【分析】根据分段函数的组成，代入求解即得.

【详解】由$f\left(x\right)=\begin{cases}\log_3 x,x>0\\ f\left(x+3\right),x\le 0\end{cases}$，可得$f\left(-5\right)=f(-5+3)=f(-2)=f(-2+3)=f(1)=\log_3 1=0$.

故答案为：0.

13．1280

【分析】根据分步计数乘法原理，结合题意计算即可得结果.

【详解】根据题意，第一天从 5 个人中选 1 个人值班，有 5 种选法；第二天不能选第一天值班的人，所以有 4 种选法；第三天同样不能选第二天值班的人，所以还是有 4 种选法；第四天也不能选第三天值班的人，有 4 种选法；第五天不能选第四天值班的人，有 4 种选法.

所以，总共有$5\times4\times4\times4\times4=1280$种不同的安排方法.

故答案为：1280.

14．$\frac{\pi}{4}$##$\frac{1}{4}\pi$

【分析】根据题意，利用$\tan(\alpha+\frac{\beta}{2})$和条件求出$\tan\alpha+\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$，将$\tan\alpha,\tan\frac{\beta}{2}$看成方程$t^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)t+2-\sqrt{3}=0$的两根，分解因式求得$\tan\alpha,\tan\frac{\beta}{2}$，根据角的范围确定$\tan\alpha$的值，进而求出角$\alpha$.

【详解】由$2\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，可得$\alpha+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{3}$，故$\tan(\alpha+\frac{\beta}{2})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\beta}{2}}=\sqrt{3}$，

因$\tan\alpha\cdot\tan\frac{\beta}{2}=2-\sqrt{3}$，代入解得$\tan\alpha+\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$，

可将$\tan\alpha,\tan\frac{\beta}{2}$看成方程$t^2-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)t+2-\sqrt{3}=0$的两根，解得 $t=2-\sqrt{3}$或$t=1$，

因α，β都是锐角，且$2\alpha+\beta=\frac{2\pi}{3}$，由$\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-2\alpha<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\frac{\pi}{12}<\alpha<\frac{\pi}{3}$，

而$\tan\frac{\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，故$\tan\alpha=1$，则$\alpha=\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{\pi}{4}$.

15．(1)114个学生；

(2)分布列见解析，均值为$\frac{3}{2}$.

【分析】（1）根据题设求得$\mu=9$、$\delta=3$，应用正态分布的三段区间概率及对称性得$P(X>15)\approx0.02275$，即可求人数；

（2）由题意平均每周的体育锻炼时间在 9 小时以上的人数服从$\xi\sim B(3,\frac{1}{2})$分布，应用二项分布的概率公式求分布列，进而求均值.

【详解】（1）由题设$\mu=\frac{3\times1+4\times3+8\times5+11\times7+41\times9+20\times11+8\times13+5\times15}{100}=9$，且$\delta=3$，

所以该校学生平均每周的体育锻炼时间 X 近似服从正态分布 $N\left(9,3^2\right)$，

由 $P(X>15)=P(X>\mu+2\delta)=\dfrac{1-P\left(\mu-2\delta\le X\le\mu+2\delta\right)}{2}\approx0.02275$，

所以估计该校大约有 $0.02275\times5000\approx114$ 个学生平均每周的体育锻炼时间 15 小时以上；

（2）由（1）知 $P(X>9)=P(X>\mu)=\dfrac{1}{2}$，

则平均每周的体育锻炼时间在 9 小时以上的人数服从 $\xi\sim B(3,\dfrac{1}{2})$ 分布，

所以 $P(\xi=0)=\mathrm{C}_3^0(\dfrac{1}{2})^0(1-\dfrac{1}{2})^3=\dfrac{1}{8}$，$P(\xi=1)=\mathrm{C}_3^1(\dfrac{1}{2})^1(1-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{8}$，

$P(\xi=2)=\mathrm{C}_3^2(\dfrac{1}{2})^2(1-\dfrac{1}{2})^1=\dfrac{3}{8}$，$P(\xi=3)=\mathrm{C}_3^3(\dfrac{1}{2})^3(1-\dfrac{1}{2})^0=\dfrac{1}{8}$，

所以分布列如下，

ξ	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{8}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{8}+1\times\dfrac{3}{8}+2\times\dfrac{3}{8}+3\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{2}$.

16．(1)$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2)1

【分析】（1）根据题设条件列出方程，化简即得曲线 E 的方程；

（2）依题设直线 AB 的方程为 $x=my+t$，由圆心到直线的距离等于半径推出 $m^2+1=t^2$，再由直线 $x=my+t$ 与椭圆方程 $x^2+4y^2=4$ 联立消元，写出韦达定理，计算弦长 $|AB|$ 和点 $O(0,0)$ 到直线 $x=my+t$ 的距离，表示出 $\triangle OAB$ 面积，利用换元和基本不等式即可求得面积最大值.

【详解】（1）设 M 到定直线 $l:x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 的距离为 d，

依题意，可得 $\dfrac{|MF|}{d}=\dfrac{\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+y^2}}{|x-\frac{4\sqrt{3}}{3}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $x^2+4y^2=4$，

即曲线 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）依题意，直线 AB 的斜率不可能是 0，不妨设其方程为：$x=my+t$，

则圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $x=my+t$ 的距离 $\dfrac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，即 $m^2+1=t^2$ ①

由 $\begin{cases}x=my+t\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 消去 x，可得 $(m^2+4)y^2+2mty+t^2-4=0$，

由$\Delta=4m^2t^2-4(m^2+4)(t^2-4)>0$，可得$m^2-t^2+4>0$，

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2+4}\\ y_1\cdot y_2=\dfrac{t^2-4}{m^2+4}\end{cases}$，

则$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1\cdot y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(-\dfrac{2mt}{m^2+4})^2-\dfrac{4(t^2-4)}{m^2+4}}$

$=\dfrac{4\sqrt{1+m^2}}{m^2+4}\cdot\sqrt{m^2-t^2+4}$，

将①式代入，化简得：$|AB|=\dfrac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+m^2}}{m^2+4}$，

因点$O(0,0)$到直线$x=my+t$的距离为$d_1=\dfrac{|t|}{\sqrt{m^2+1}}$，

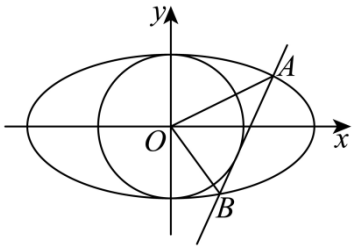
则$\triangle OAB$的面积为$S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d_1=\dfrac{2\sqrt{3}|t|}{m^2+4}$，

$=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{t^2}{\left(m^2+4\right)^2}}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{m^2+1}{\left(m^2+4\right)^2}}$

设$\lambda=m^2+1$，则$\lambda\geq1$，$S_{\triangle OAB}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{\lambda}{(\lambda+3)^2}}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\lambda+\dfrac{9}{\lambda}+6}}$，

因$\lambda+\dfrac{9}{\lambda}\geq2\sqrt{\lambda\cdot\dfrac{9}{\lambda}}=6$，当且仅当$\lambda=3$时取等号，

此时$m=\pm\sqrt{2}$，　$\triangle OAB$的面积的最大值为$2\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{12}}=1$.



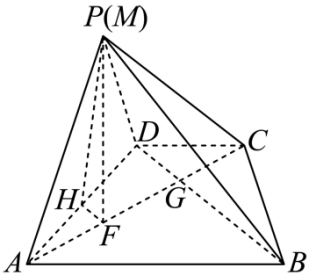
17．(1)证明见解析；

(2)0.

【分析】（1）根据平行四边形对边平行，结合边长关系，证得F为AG中点，利用中位线性质证得$HF//BD$，即可证得线面平行.

（2）证明$PF\perp$平面$ABCD$，$AC\perp BC$，建立空间直角坐标系，利用向量法求两平面所成角即可.

【详解】（1）



如图，连接 BD，交 AC 于点 G，

$\because$ 四边形 $ABCM$ 是平行四边形，D 为 CM 的中点，

$\therefore CD//AB$，$CD=\frac{1}{2}CM=\frac{1}{2}AB$，故 $\frac{CG}{GA}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$，故 G 为 AC 的三等分点，

$\because AF=\frac{1}{2}FC$，$\therefore F$ 为 AC 的三等分点，即 F 为 AG 的中点，

又 $\because H$ 为 AD 的中点，$\therefore HF//DG$，即 $HF//BD$

$\because HF\subset$ 平面 PHF，$BD\not\subset$ 平面 PHF，

$\therefore BD//$ 平面 PHF.

（2）由题意，$MA=MD=1$，$\angle MAD=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle MAD$ 是等边三角形，

所以，$\angle AMD=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAD=\pi-\angle AMD-\angle MAD=\frac{\pi}{3}$，$AD=1$.

在 $\triangle ABD$ 中，$AB=MC=2$，

根据余弦定理，$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cos\angle BAD=1+4-2\times1\times2\times\frac{1}{2}=3$，

故 $AD^2+BD^2=AB^2$，即 $AD\perp BD$，

$\because HF//BD$，故 $AD\perp HF$，

又 $\because$ 在等边 $\triangle PAD$ 中，H 为 AD 的中点，$\therefore AD\perp PH$，

$\therefore AD\perp PH, AD\perp HF$，$PH\cap HF=H$，$PH\subset$ 平面 PHF，$HF\subset$ 平面 PHF，

$\therefore AD\perp$ 平面 PHF.

$\because PF\subset$ 平面 PHF，$\therefore AD\perp PF$，

又 $\because PF\perp AC$，$AC\cap AD=A$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PF\perp$ 平面 $ABCD$.

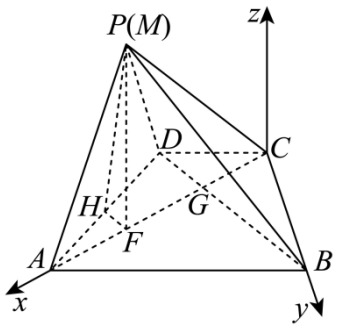
在 Rt$\triangle PFH$ 中，$PH=\frac{\sqrt{3}}{2}, HF=\frac{1}{2}DG=\frac{1}{6}BD=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$\therefore PF=\sqrt{PH^2-HF^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

由题意，$AD=BC=1$，所以梯形 $ABCD$ 是等腰梯形，则 $AC=BD$，所以 $\triangle ABD\cong\triangle BAC$，

又 $\because AD\perp BD$，$\therefore AC\perp BC$.

以点C为坐标原点，以$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}$分别为$x$轴、$y$轴正方向，过点$C$作平面$ABCD$的垂线为$z$轴，建立如图所示坐标系.



则$C\left(0,0,0\right)$，$B\left(0,1,0\right)$，$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{CP}=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{CB}=\left(0,1,0\right)$，

设平面PBC的一个法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}$，

令$x_1=1$，则$y_1=0$，$z_1=-\sqrt{2}$，所以$\vec{m}=\left(1,0,-\sqrt{2}\right)$，

$\because \overrightarrow{AD}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right),\overrightarrow{AP}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$

设平面PAD的一个法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2-\dfrac{1}{2}y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_2+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z_2=0\end{cases}$，

令$x_2=\sqrt{2}$，则$y_2=-\sqrt{6},z_2=1$，所以$\vec{n}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{6},1\right)$

设平面PBC和平面PAD的夹角为θ，

则$\cos\theta=\left|\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times 3}\right|=0$，

所以平面PBC和平面PAD的夹角余弦值为0.

18．(1)函数$f\left(x\right)$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上的单调递减；

(2)$a\in(-3,0)$；

(3)证明见解析.

【分析】（1）利用导数研究函数的区间单调性即可；

（2）问题化为$a=-\dfrac{3\cos x}{\mathrm{e}^x}$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有解，导数研究右侧的单调性和区间值域，即可得参数范围；

（3）问题化为证$f(x)\geq 2\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1\geq 0$，构造$k(x)=2\mathrm{e}^x-2x+1$并应用导数研究其最小值，得到$2\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1\geq 3-3\cos x$，即可证.

【详解】（1）由题设$f(x)=2\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1$，则$f'(x)=2\mathrm{e}^x-2+3\sin x$，

当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，有$2(\mathrm{e}^x-1)<0,3\sin x<0$，则$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上的单调递减；

（2）由题设$g(x)=f'(x)=a\mathrm{e}^x-2+3\sin x$，则$g'(x)=a\mathrm{e}^x+3\cos x$，

所以$\exists x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上$g'(x_0)=0$，即$a=-\dfrac{3\cos x}{\mathrm{e}^x}$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上有解，

令$h(x)=-\dfrac{3\cos x}{\mathrm{e}^x}$且$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$h'(x)=\dfrac{3(\sin x+\cos x)}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{3\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}{\mathrm{e}^x}>0$，

所以$h(x)$在$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故$-3<h(x)<0$，即$a\in(-3,0)$；

（3）由$a\geq 2$，只需证$f(x)=a\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1\geq 2\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1\geq 0$恒成立，

令$k(x)=2\mathrm{e}^x-2x+1$，则$k'(x)=2\mathrm{e}^x-2$，

当$x<0$时，$k'(x)<0$，即$k(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

当$x>0$时，$k'(x)>0$，即$k(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

所以$k(x)\geq k(0)=2-0+1=3$，故$2\mathrm{e}^x-2x-3\cos x+1\geq 3-3\cos x\geq 0$，

所以$a\geq 2$，$f(x)\geq 0$恒成立.

19．(1)$b_1=2$，$b_2=3$，$b_3=4$；

(2)证明见解析；

(3)存在，最小 k 为 7.

【分析】（1）根据定义有$|n+\dfrac{2}{3}-b_n|<\dfrac{1}{2}$且$b_n\in\mathrm{Z}$，将$n=1,2,3$代入依次求出$b_1,b_2,b_3$；

（2）根据已知有$|a_n-b_n|<\dfrac{1}{2}$，$|a_{n+1}-b_{n+1}|<\dfrac{1}{2}$得$-1<(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)<1$，进而有$d-1<b_{n+1}-b_n<d+1$，$d\in\mathrm{Z}$，$b_n\in\mathrm{Z}$，即可证；

（3）根据题设定义得到$b_n=\begin{cases}2,n=2k-1\\1,n=2k\end{cases}$且$k\in\mathrm{N}^*$，进而有$T_n=\begin{cases}\dfrac{3n+1}{2},n=2k-1\\\dfrac{3n}{2},n=2k\end{cases}$且$k\in\mathrm{N}^*$，结合

$S_n=\frac{3}{2}n+\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}+\frac{25}{66}$ 及不等式能成立求 n 的范围，即可得.

【详解】（1）由题设 $|a_n-b_n|=\left|n+\frac{2}{3}-b_n\right|<\frac{1}{2}$，且 $b_n\in \mathrm{Z}$，

所以 $|\frac{5}{3}-b_1|<\frac{1}{2}$，即 $\frac{7}{6}<b_1<\frac{13}{6}$，$b_1=2$，

$|\frac{8}{3}-b_2|<\frac{1}{2}$，即 $\frac{13}{6}<b_2<\frac{19}{6}$，$b_2=3$，

$|\frac{11}{3}-b_3|<\frac{1}{2}$，即 $\frac{19}{6}<b_3<\frac{25}{6}$，$b_3=4$，

所以 $b_1=2$，$b_2=3$，$b_3=4$；

（2）由题设 $a_n=a_1+(n-1)d$，则 $|a_n-b_n|<\frac{1}{2}$，$|a_{n+1}-b_{n+1}|<\frac{1}{2}$

所以 $-\frac{1}{2}<a_n-b_n<\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{1}{2}$，则 $-1<(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)<1$，

所以 $-1<(a_{n+1}-a_n)-(b_{n+1}-b_n)=d-(b_{n+1}-b_n)<1$，$d\in \mathrm{Z}$，$b_n\in \mathrm{Z}$，

所以 $d-1<b_{n+1}-b_n<d+1$，故 $b_{n+1}-b_n=d$，即数列 $\{b_n\}$ 是等差数列；

（3）当 n 为奇数时 $a_n=\frac{3}{2}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$，$0<\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\le\frac{25}{36}$，则 $\frac{3}{2}<a_n\le\frac{79}{36}$，

由 $|a_n-b_n|<\frac{1}{2}$，即 $a_n-\frac{1}{2}<b_n<a_n+\frac{1}{2}$，$b_n\in \mathrm{Z}$，则 $b_n=2$；

当 n 为偶数时 $a_n=\frac{3}{2}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}$，$0<\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}\le\frac{125}{216}$，则 $\frac{199}{216}\le a_n<\frac{3}{2}$，

由 $|a_n-b_n|<\frac{1}{2}$，即 $a_n-\frac{1}{2}<b_n<a_n+\frac{1}{2}$，$b_n\in \mathrm{Z}$，则 $b_n=1$；

所以 $b_n=\begin{cases}2,n=2k-1\\1,n=2k\end{cases}$ 且 $k\in \mathrm{N}^*$，则 $T_n=\begin{cases}\frac{3n+1}{2},n=2k-1\\\frac{3n}{2},n=2k\end{cases}$ 且 $k\in \mathrm{N}^*$，

而 $S_n=\frac{3}{2}n+(-\frac{5}{6})^2+\cdots+\left(-\frac{5}{6}\right)^{n+1}=\frac{3}{2}n+\frac{(-\frac{5}{6})^2[1-(-\frac{5}{6})^n]}{1+\frac{5}{6}}=\frac{3}{2}n+\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}+\frac{25}{66}$，

要使 $S_n<T_n$，则 $S_n-T_n<0$，

当 $n=2k-1$ 且 $k\in \mathrm{N}^*$，则 $\frac{3}{2}n+\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}+\frac{25}{66}-\frac{3n+1}{2}=\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}-\frac{8}{66}<0$，

所以 $\frac{5}{11}(\frac{5}{6})^{n+1}<\frac{8}{66}$，则 $(\frac{5}{6})^{n+1}<\frac{4}{15}\Rightarrow(\frac{5}{6})^n<\frac{8}{25}\Rightarrow n>\log_{\frac{5}{6}}\frac{8}{25}\approx 6.25$，可得 $n\ge 7$；

当 $n=2k$ 且 $k\in \mathrm{N}^*$，则 $\frac{3}{2}n+\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}+\frac{25}{66}-\frac{3n}{2}=\frac{5}{11}(-\frac{5}{6})^{n+1}+\frac{25}{66}<0$，

所以$\frac{5}{11}(\frac{5}{6})^{n+1}>\frac{25}{66}$，则$(\frac{5}{6})^{n}>1$，显然不成立；

综上，$S_k<T_k$时k的最小值为7.