姓名_____ 准考证号_____

秘密★启用前

数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试题相应的位置。

2. 全部答案在答题卡上完成，答在本试题上无效。

3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上。

4. 考试结束后，将本试题和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合$A=\{x|-3<x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-2\leqslant x<3, x\in \mathbf{Z}\}$，则$A\cap B=$

A. $[-2,2]$　　B. $(-3,3)$

C. $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 在复平面内，复数$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$对应点的坐标是

A. $(0,1)$　　B. $(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　C. $(1,1)$　　D. $(0,-1)$

3. 若$\{e_1,e_2\}$是平面内的一个基底，则下列四组向量中能作为平面向量的基底的是

A. $\{e_1-e_2,e_2-e_1\}$　　B. $\{2e_1-e_2,-e_1+\dfrac{1}{2}e_2\}$

C. $\{e_1+e_2,e_1+4e_2\}$　　D. $\{3e_1-2e_2,-6e_1+4e_2\}$

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=8$，$S_8=40$，则$S_{12}=$

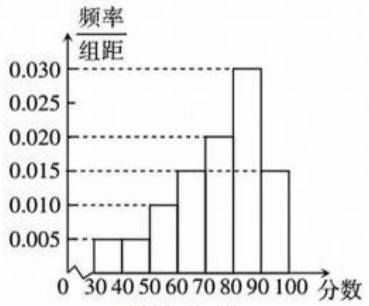
A. 52　　B. 96　　C. 106　　D. 120

5. 甲组有2名男生，3名女生；乙组有3名男生，2名女生．若从甲、乙两组中各选2名学生，选出的4人中恰有1名女生的选法种数为

A. 24　　B. 25　　C. 30　　D. 36

6. AI正悄然改变着我们的生活．某在线平台利用AI技术为学生提供个性化学习路径，为了解学生对平台的满意程度，随机抽取使用该平台的学生进行打分，将收集到的分数数据按照$[30,40)$，$[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$分组，

画出频率分布直方图如图所示，则这些数据的中位数约为



（第6题图）

A. 85　　B. 80　　C. 77.5　　D. 75

7. 已知抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F，准线为 l. 点 P 在 C 上，过 P 作抛物线的切线交准线 l 于点 Q. 当 $\triangle FPQ$ 外接圆面积最小时，点 P 的坐标可以是

A. $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{8})$　　B. $(\sqrt{2},\frac{1}{2})$　　C. $(1,\frac{1}{4})$　　D. $(2,1)$

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=0$，函数 $y=xf(x+3)$ 是奇函数，函数 $y=(x+1)f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称，则

A. $f(x)$ 是偶函数　　B. $f(x-1)$ 是奇函数

C. $f(x+8)=f(x)$　　D. $f(1)=0$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知函数 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-1$，则下列命题正确的是

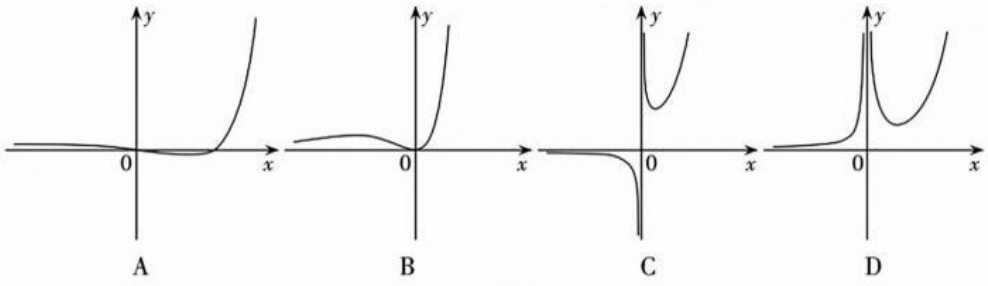
A. 该函数的振幅为 $\sqrt{2}$

B. 该函数的周期为 π

C. 该函数图象的对称轴为 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

D. 该函数图象的对称中心为 $(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},-1),k\in\mathbf{Z}$

10. 若 $k\in\mathbf{Z}$，则函数 $f(x)=x^k\mathrm{e}^x$ 的函数图象可能是



（第10题图）

11. 记$Z_p=\{0,1,2,3,\cdots,p\}$,$p\in\mathbf{N}$,A_m表示m个元素的有限集合,$S(K)$表示非空数集K中所有元素的和.若集合$Q_{p,m}=\left\{S(A_m)\middle|A_m\subseteq Z_p\right\}$,则

A. $Z_3=\{0,1,2,3\}$　　B. $Q_{3,2}=\{1,2,3,4,5\}$

C. $S\left(Q_{10,3}\right)=376$　　D. 若$S\left(Q_{p,2}\right)\geqslant 365$,则$p$的最小值为14

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. 已知双曲线的方程为$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{8}=1$,则其离心率$e=$__▲__.

13. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_1=2$,$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2},a_n\text{为偶数},\\ a_n+3,a_n\text{为奇数},\end{cases}$则$S_{13}=$__▲__.

14. 圆锥顶点为P,底面中心为O,体积为$\frac{\sqrt{6}}{4}$的正四面体O-ABC的底面ABC与该圆锥的底面平行,且点A,B,C都在圆锥的侧面上,则该圆锥体积的最小值是__▲__.

四、解答题:本题共5小题,共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13分)

从以下两个条件中选择一个合适的条件将题目补充完整(只填序号),并求解本题:

①$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{2\Delta x}=3$;

②曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y=\frac{7}{2}$.

题目:已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+a\ln x\,(a\in\mathbf{R})$存在极值,并且__▲__.

(1)求$f(x)$的解析式;

(2)当$x\in\left[\frac{1}{2},4\right]$时,求函数$f(x)$的最值.

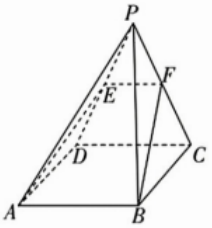
注:如果选择多个条件,按第一个解答记分.

16. (15分)

已知四棱锥P-$ABCD$,底面$ABCD$是边长为2的正方形,E是线段PD的中点,平面ABE交PC于点F.

(1)求证:$EF\parallel$平面$ABCD$;

(2)若$PC=PD$,平面$PCD\perp$平面$ABCD$,平面ABE与平面$ABCD$夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$,求直线AF与直线PB所成角的余弦值.



(第16题图)

17.（15分）

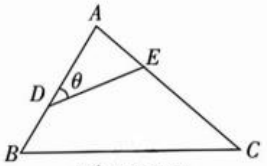
如图，已知$\triangle ABC$的三个角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 动点D在边AB上且不与点A,B重合，动点E在边AC上，$\angle ADE=\theta$. 向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{m}=\dfrac{\overrightarrow{DE}}{\left|\overrightarrow{DE}\right|}$.

（1）试用A,B,C,a,b,c及θ表示下列各式：

（ⅰ）当$\theta=0$时，$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}$；

（ⅱ）$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$；

（2）当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时依据（ⅱ）求解，若已知$a=\sqrt{3},b=\sqrt{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，求B.



（第17题图）

18.（17分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F,a=2$，离心率$e=\dfrac{1}{2}$. 过点$F$的直线$l$交椭圆于$A,B$两点，过$F$且与$l$垂直的直线交椭圆于$D,E$两点，其中$B,D$在$x$轴上方，$M,N$分别为$AB,DE$的中点.

（1）求点M的轨迹方程；

（2）证明：直线MN过定点；

（3）求$\triangle FMN$面积的最大值.

19.（17分）

某企业采用智能检测器对生产的产品进行检测. 若产品为次品，该智能检测器能正确识别的概率为0.95；若产品为正品，该检测器将它识别为次品的概率为p. 该企业生产出的产品次品率为0.1. 现用两台型号相同的检测器组成一个检测系统，每台检测器独立识别，若任意一台识别某件产品为次品，则认定该产品为次品.

（1）若$p=0.02$，求一件产品被该检测系统识别为次品的概率；

（2）设该系统第i次检测结果为随机变量$X_i(i\in\mathbf{N}^*)$，$X_i=1$表示检测结果为次品，$X_i=0$表示检测结果为正品，每一次检测结果相互独立. 设随机变量$X=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 一次调查中抽取20件产品，检测出3件次品，若以此次检测结果的均值作为X的数学期望，由此求p的估计值$\hat{p}$；

（3）若在检测过程中，需同时满足以下两个条件：①检测结果识别为次品，该产品确实是次品的概率至少为0.9；②检测结果识别为正品，该产品确实是正品的概率至少为0.9. 求p的最大值.

附：若随机变量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$相互独立，且$E(X_i)$存在，则$E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)$；

参考数据：$\sqrt{\dfrac{0.84975}{0.9}}\approx0.9717,\sqrt{\dfrac{0.8}{0.81}}\approx0.9938$.

秘密★启用前

2025年高考考前适应性测试(冲刺卷)

数学参考答案详解及评分说明

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. D

【解析】$B=\{x|-2\leqslant x<3,x\in\mathbf{Z}\}=\{-2,-1,0,1,2\}$,$A\cap B=B$.

2. A

【解析】$z=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\dfrac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$,所以在复平面内该复数对应点的坐标为$(0,1)$.

3. C

【解析】对于选项A,$e_1-e_2=-(e_2-e_1)$,两向量共线,不符合基底的定义,故选项A错误;

对于选项B,$2e_1-e_2=-2(-e_1+\dfrac{1}{2}e_2)$,两向量共线,不符合基底的定义,故选项B错误;

对于选项C,不存在实数λ,使得$e_1+e_2=\lambda(e_1+4e_2)$,故选项C正确;

对于选项D,$-6e_1+4e_2=-2(3e_1-2e_2)$,两向量共线,不符合基底的定义,故选项D错误.

4. B

【解析】由$S_8-S_4=a_5+a_6+a_7+a_8=40-8=32$,

得$a_6+a_7=16$,则$S_{12}=\dfrac{12\times(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)=6\times16=96$.

5. A

【解析】恰有1名女生分两类.第一类:甲组选1名女生,1名男生,乙组选2名男生,有$C_3^1C_2^1C_3^2=18$种选法;第二类:甲组选2名男生,乙组选1名女生1名男生,有$C_2^2C_2^1C_3^1=6$种选法,所以,由分类加法计数原理可知共有24种选法.

6. C

【解析】根据中位数的意义,在样本中,有50%的个体小于或等于中位数,也有50%的个体大于或等于中位数.由于$(0.005+0.005+0.010+0.015)\times10=0.35$,$0.35+0.02\times10=0.55$,因此中位数落在区间$[70,80)$内.设中位数为$x$,由$0.35+0.02\times(x-70)=0.5$,得$x=77.5$.因此,中位数约为77.5.

7. B

【解析】设点$P(2t,t^2)(t\neq0)$,则过P作抛物线的切线为:$y=tx-t^2$,又准线l为:$y=-1$,所以可得点$Q(t-\dfrac{1}{t},-1)$.又$F(0,1)$,所以$\overrightarrow{FP}=(2t,t^2-1)$,$\overrightarrow{FQ}=(t-\dfrac{1}{t},-2)$,$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=0$,所以$\angle PFQ$为直角,$PQ$为$\triangle FPQ$外接圆的直径.$\overrightarrow{PQ}=(-t-\dfrac{1}{t},-1-t^2)$,$|PQ|^2=t^4+3t^2+\dfrac{1}{t^2}+3$.令$v=t^2$,则可得$u(v)=v^2+3v+\dfrac{1}{v}+3$,$v>0$.由$u'=\dfrac{(v+1)^2(2v-1)}{v^2}=0$,知当$v=\dfrac{1}{2}$时,$u$取得最小值,即所求外接圆的面积最小,此时点$P(\pm\sqrt{2},\dfrac{1}{2})$.

8. B

【解析】因为$y=xf(x+3)$是奇函数,所以$f(x+3)$为偶函数,

所以$f(-x+3)=f(x+3)$,即$f(-x)=f(x+6)$,故$f(x)$关于$x=3$对称,

由$y=(x+1)f(x)$的图象关于直线$x=-1$对称,

得$(x+1)f(x)=(-2-x+1)f(-2-x)$,

即$(x+1)f(x)=-(x+1)f(-2-x)$,

即$f(x)=-f(-x-2)$，所以$f(x)$关于$(-1,0)$对称，

所以$f(-x)=-f(x-2)$，

所以$f(-x-1)=-f(x-1)$，

故$f(x-1)$是奇函数，所以B选项正确；

因为$f(-x)=-f(x-2)$，又$f(-x)=f(x+6)$，

所以$f(x+6)=-f(x-2)$，

即$f(x+8)=-f(x)$，所以$f(x+16)=-f(x+8)=f(x)$，故C选项错误；

不能得到$f(x)$的奇偶性与$f(1)$的值，故A、D选项错误.

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.

9. ABD

【解析】振幅由系数A决定，此处$A=\sqrt{2}$，故选项A正确. 周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选项B正确. 由$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，解得$x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选项C错误. 由$2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$，解得$x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以对称中心为$(-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},-1)$，$k\in\mathbf{Z}$，故选项D正确.

10. BCD

【解析】当$k=0$时，$f(x)=e^x(x\neq0)$，其图象为指数函数的一部分；

当k为正的奇数时，定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=x^{k-1}e^x(x+k)$，可知当$x\in(-\infty,-k)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

当$x\in(-k,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，函数$f(x)$在$x=-k$处取得极小值，此时$-k$是负数；

4个选项中没有与以上两种情况对应的图象.

当k为正的偶数时，定义域为$\mathbf{R}$，$f'(x)=x^{k-1}e^x(x+k)$，可知当$x\in(-\infty,-k)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

当$x\in(-k,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故B选项正确；

当k为负的奇数时，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=x^{k-1}e^x(x+k)$，可知当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(0,-k)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(-k,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故C选项正确；

当k为负的偶数时，定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f'(x)=x^{k-1}e^x(x+k)$，可知当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in(0,-k)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，当$x\in(-k,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，故D选项正确.

11. ABD

【解析】由题可知A选项正确；选项B中，由$A_2\subseteq Z_3$，知A_2的所有可能为：$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{0,3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，则$S(A_2)$分别为1，2，3，3，4，5，所以$Q_{3,2}=\{1,2,3,4,5\}$，故B选项正确；选项C中，易知$Q_{10,3}=\{3,4,5,\cdots,26,27\}$，所以$S(Q_{10,3})=\frac{(3+27)\times25}{2}=375$，故C选项错误；选项D中，易知$Q_{p,2}=\{1,2,3,\cdots,2p-1\}$，所以$S(Q_{p,2})=\frac{(1+2p-1)\times(2p-1)}{2}=p(2p-1)$，又当$p=14$时，$p(2p-1)=378$，当$p=13$时，$p(2p-1)=325$，所以满足$S(Q_{p,2})\geqslant365$的$p$的最小值为14，故选项D正确.

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12. $\frac{\sqrt{105}}{7}$

【解析】因为$a^2=7$，$b^2=8$，所以$c^2=15$，所以$a=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{15}$，所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{105}}{7}$.

13. 30

【解析】由题意，当$n=1$时，$a_2=\frac{a_1}{2}=1$，

当$n=2$时，$a_3=a_2+3=4$，

当$n=3$时，$a_4=\frac{a_3}{2}=2$，

当$n=4$时，$a_5=\frac{a_4}{2}=1$，

当$n=5$时，$a_6=a_5+3=4$，

当$n=6$时，$a_7=\frac{a_6}{2}=2$，归纳可得数列$\{a_n\}$是以3为周期的数列，

故$S_{13}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}+a_{13}=4(a_1+a_2+a_3)+a_{13}=4\times(2+1+4)+2=30$.

14. $\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi$

【解析】设圆锥PO的底面半径为r，高为h. 底面ABC的中心为O_1，则点P,O,O_1三点共线.

设正四面体O-ABC棱长为a，则高为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$，所以$V_{O-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3=\frac{\sqrt{6}}{4}$，解得$a=\sqrt{3}$.

故$O_1A=\frac{\sqrt{3}}{3}a=1$，$OO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}a=\sqrt{2}$，

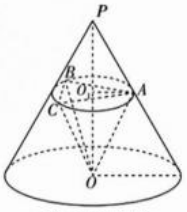
由$\frac{h-\sqrt{2}}{h}=\frac{1}{r}$，得$h=\frac{\sqrt{2}r}{r-1}$.

该圆锥的体积$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\frac{\sqrt{2}r}{r-1}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\frac{r^3}{r-1}$.

令$f(r)=\frac{r^3}{r-1}(r>1)$，则$f'(r)=\frac{3r^2(r-1)-r^3}{(r-1)^2}=\frac{r^2(2r-3)}{(r-1)^2}$，

当$r>\frac{3}{2}$时，$f'(r)>0$；当$1<r<\frac{3}{2}$时，$f'(r)<0$.

所以当$r=\frac{3}{2}$时，$f(r)$有最小值$\frac{27}{4}$，这时圆锥的体积有最小值$\frac{9\sqrt{2}}{4}\pi$.



（第14题答图）

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+a\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，…… 1分

$f'(x)=x+3+\frac{a}{x}=\frac{x^2+3x+a}{x}$. …… 2分

若选①：因为$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2-\Delta x)}{2\Delta x}=3$，所以由导数定义可知$f'(2)=3$，…… 4分

即$\frac{10+a}{2}=3$，解得$a=-4$. …… 5分

所以$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4\ln x$，$f'(x)=\frac{x^2+3x-4}{x}=\frac{(x+4)(x-1)}{x}$， …… 6分

可知，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以函数$f(x)$在$x=1$处取得极值，符合题意，

所以$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4\ln x$. …… 8分

若选②：由曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y=\frac{7}{2}$，可知$f'(1)=0$，…… 4分

所以$f'(1)=1+3+\frac{a}{1}=0$，解得$a=-4$， …… 5分

所以$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4\ln x$，$f'(x)=\frac{x^2+3x-4}{x}=\frac{(x+4)(x-1)}{x}$， …… 6分

可知，当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以函数$f(x)$在$x=1$处取得极值，符合题意，

所以$f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-4\ln x$. …… 8分

(2)由(1)知，当$x \in (0,1)$时，$f'(x) < 0$，$f(x)$单调递减；

当$x \in (1,+\infty)$时，$f'(x) > 0$，$f(x)$单调递增.

又$f(\frac{1}{2}) = \frac{13}{8} + 4\ln 2$， …… 9分

$f(1) = \frac{7}{2}$， …… 10分

$f(4) = 20 - 8\ln 2$， …… 11分

且$f(4) > f(\frac{1}{2})$， …… 12分

$\therefore f(x)$在区间$\left[\frac{1}{2},4\right]$上的最大值为$20 - 8\ln 2$，最小值为$\frac{7}{2}$. …… 13分

16. **解**：(1)证明：因为底面$ABCD$是正方形，所以$AB \parallel DC$.

又$CD \subset$平面PCD，$AB \not\subset$平面PCD，

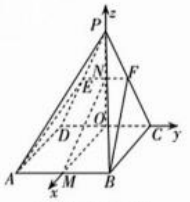
所以$AB \parallel$平面PCD. …… 2分

又因为平面$ABE \cap$平面$PCD = EF$， …… 3分

所以$AB \parallel EF$. …… 4分

又$AB \subset$平面$ABCD$，$EF \not\subset$平面$ABCD$，

所以$EF \parallel$平面$ABCD$. …… 5分



（第16题答图）

(2)设CD的中点为O，则$PO \perp CD$，

$\because$平面$PCD \perp$平面$ABCD$，又平面$ABCD \cap$平面$PCD = CD$，

$\therefore PO \perp$平面$ABCD$. …… 6分

过点O在平面$ABCD$内作$OM \perp CD$交AB于点M，则OM，OC，OP两两垂直. …… 7分

以O为原点，OM，OC，OP所在直线分别为x轴、y轴、z轴建立空间直角坐标系，则$A(2,-1,0)$，$B(2,1,0)$.

设$P(0,0,a)(a>0)$，则$F(0,\frac{1}{2},\frac{a}{2})$. …… 8分

设EF的中点为N，则点N在PO上，连接MN，因为$NO \perp$平面$ABCD$，所以$NO \perp AB$，又$OM \perp AB$.

$\therefore AB \perp$平面OMN，$\therefore AB \perp MN$，所以$\angle NMO$为二面角F-AB-C的平面角. …… 9分

因为平面ABE与平面$ABCD$夹角的余弦值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以$\cos\angle NMO = \frac{2\sqrt{5}}{5}$， …… 10分

即$\frac{MO}{MN} = \frac{2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$， …… 11分

解得$a = 2$. …… 12分

则$\overrightarrow{AF} = (-2,\frac{3}{2},1)$，$\overrightarrow{BP} = (-2,-1,2)$， …… 13分

$\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{BP}\rangle = \frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{BP}|} = \frac{\frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{29}{4}}\times 3} = \frac{3\sqrt{29}}{29}$. …… 14分

所以直线AF与直线PB所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{29}}{29}$. …… 15分

17. 解：(1)(ⅰ)当$\theta=0$时，$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{c}$反向，即$\boldsymbol{m}$与$\boldsymbol{a}$的夹角为B. …… 2分

$|\boldsymbol{m}|=\left|\dfrac{\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{DE}|}\right|=1$. …… 3分

所以$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{a}|\cos B=a\cos B$. …… 4分

(ⅱ)$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{a}=a\cos(B-\theta)$. …… 6分

$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{b}=b\cos(\theta+A)$. …… 8分

$\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{c}=c\cos(\pi-\theta)=-c\cos\theta$. …… 10分

代入$\boldsymbol{m}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0$中，得到：$a\cos(B-\theta)+b\cos(\theta+A)-c\cos\theta=0$. ① …… 11分

(2)当$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，①式化简为$a\sin B-b\sin A=0$ ②. …… 13分

将$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$代入②，得$\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …… 14分

又因为$a>b$，所以$A>B$，所以$B=\dfrac{\pi}{4}$. …… 15分

说明：第(2)问，没有依据①式得到②式，直接求角B的，不给分.

18. 解：(1)因为$e=\dfrac{1}{2}$，$a=2$，所以$c=1$，所以椭圆C的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，点$F(-1,0)$. …… 1分

由已知B，D在x轴上方，所以直线l的斜率存在且不为0，

设直线l：$x=my-1(m\neq0)$，代入椭圆方程得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$. …… 2分

设点$M(x,y)$，则$x=\dfrac{-4}{4+3m^2}$，$y=\dfrac{3m}{4+3m^2}$， …… 3分

消去m得$3x^2+3x+4y^2=0(y\neq0)$，即为所求. …… 5分

(2)接(1)可设垂线DE方程为$x=-\dfrac{1}{m}y-1$，代入椭圆方程得中点$N(-\dfrac{4m^2}{3+4m^2},\dfrac{-3m}{3+4m^2})$. …… 6分

所以直线MN的斜率为$k_1=\dfrac{7m}{4(m^2-1)}(m\neq\pm1)$. …… 7分

方程为：$(4+3m^2)y-3m=\dfrac{7m}{4(m^2-1)}[(4+3m^2)x+4]$. ① …… 8分

令$m=2$得：$7x-6y+4=0$；② …… 9分

令$m=-2$得：$7x+6y+4=0$. ③ …… 10分

联立②③得交点$P(-\dfrac{4}{7},0)$，代入①式，该式恒成立，当$m=\pm1$时，直线MN方程为$x=-\dfrac{4}{7}$，也过点$(-\dfrac{4}{7},0)$. 所以直线MN过定点$P(-\dfrac{4}{7},0)$. …… 11分

(3)由(1)(2)得直线MN过定点$P(-\dfrac{4}{7},0)$，且$y_M=\dfrac{3m}{4+3m^2}$，$y_N=-\dfrac{3m}{3+4m^2}$ …… 12分

所以$S_{\triangle FMN}=S_{\triangle FPM}+S_{\triangle FPN}=\dfrac{1}{2}|FP|\cdot|y_M-y_N|$

$=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{|m|(1+m^2)}{(3+4m^2)(4+3m^2)}=\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{(|m|+\dfrac{1}{|m|})}{12(m^2+\dfrac{1}{m^2})+25}$， …… 14分

令$t=|m|+\dfrac{1}{|m|}$，则$t\geqslant2$，

则$\dfrac{|m|+\dfrac{1}{|m|}}{12(m^2+\dfrac{1}{m^2})+25}=\dfrac{t}{12t^2+1}=\dfrac{1}{12t+\dfrac{1}{t}}$ …… 15分

令$y=12t+\dfrac{1}{t}(t\geqslant 2)$，则$y'=12-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{12t^2-1}{t^2}>0$

$\therefore$ $y=12t+\dfrac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上单调递增，

当$t=2$时，y有最小值$\dfrac{49}{2}$， …… 16分

即$|m|=1$时，$S_{\triangle FMN}$有最大值$\dfrac{9}{49}$.

$\therefore$ $\triangle FMN$面积的最大值为$\dfrac{9}{49}$. …… 17分

19. **解**：设事件A为“检测系统识别为次品”，事件B为“该产品实际为次品”. …… 1分

由已知得：

$P(A|B)=1-(1-0.95)^2=0.9975, P(\bar{A}|B)=0.0025,$

$P(A|\bar{B})=1-(1-p)^2, P(\bar{A}|\bar{B})=(1-p)^2,$ …… 3分

$P(B)=0.1.$

(1)若$p=0.02$，则$P(A|\bar{B})=1-(1-0.02)^2=0.0396$，

$P(A)=P(AB\cup A\bar{B})=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})$ …… 4分

$=0.1\times 0.9975+0.9\times 0.0396=0.13539.$

所以一件产品被检测系统识别为次品的概率为0.13539. …… 5分

(2)$P(X_i=1)=0.1\times 0.9975+0.9\times[1-(1-p)^2]=0.99975-0.9(1-p)^2$， …… 6分

所以$E(X_i)=1\times P(X_i=1)+0\times P(X_i=0)=0.99975-0.9(1-p)^2$. …… 7分

又$E(X)=E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}E(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=E(X_i)$， …… 8分

由抽查结果得$\bar{x}=\dfrac{3}{20}$，所以$0.99975-0.9(1-\hat{p})^2=\dfrac{3}{20}$， …… 9分

解得$(1-\hat{p})^2=\dfrac{0.84975}{0.9}$，根据参考数据可知$1-\hat{p}\approx 0.9717$，则$\hat{p}=0.0283$.

所以p的估计值为0.0283. …… 11分

(3)$P(\bar{A})=P(\bar{A}B\cup\bar{A}\bar{B})=P(B)P(\bar{A}|B)+P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})$

$=0.1\times 0.0025+0.9\times(1-p)^2.$

$P(A)=1-P(\bar{A})=0.99975-0.9(1-p)^2.$ …… 13分

所以$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.9975\times 0.1}{0.99975-0.9(1-p)^2}\geqslant 0.9$， …… 14分

即$(1-p)^2\geqslant\dfrac{80}{81}$，解得$1-p\geqslant 0.9938$，$p\leqslant 0.0062$. …… 15分

由$P(\bar{B}|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\dfrac{0.9(1-p)^2}{0.00025+0.9(1-p)^2}\geqslant 0.9$，解得$p\leqslant 0.95$. …… 16分

综上，p的最大值为0.0062. …… 17分