绝密★启用前

海南省 2024—2025 学年高三学业水平诊断(四)

数　学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号. 回答非选择题时,将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设复数 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})$,则 $\bar{z}=$

A. $2-\mathrm{i}$　　B. $2+\mathrm{i}$　　C. $-2-\mathrm{i}$　　D. $-2+\mathrm{i}$

2. 双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的离心率为

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 3

3. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=3\sin\alpha$,则 $\tan\alpha=$

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. 3

4. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,下列结论错误的是

A. 直线 AB 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 平行　　B. 直线 A_1C_1 与平面 BDD_1B_1 垂直

C. 平面 AB_1D_1 与平面 BDC_1 平行　　D. 平面 ABB_1A_1 与平面 BCC_1B_1 垂直

5. 已知集合 $A=\{x\mid\log_3(x-1)<1\}$,$B=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 8\right\}$,则 $A\cap B=$

A. $(1,2)$　　B. $[-3,4)$　　C. $[-1,3]$　　D. $(1,3]$

6. 某科技公司使用新开发的人像识别模型对 5 个人像进行识别,每个人像识别成功的概率均为 p,且每次是否成功相互独立,设 X 为这 5 个人像中识别成功的个数,若 $D(X)=0.8$,且全部识别成功的概率大于全部识别失败的概率,则 $p=$

A. 0.8　　B. 0.6　　C. 0.4　　D. 0.2

7. 已知圆锥的底面半径为 1,圆锥内能容纳的最大球的表面积为 2π,则圆锥的表面积为

A. $(\sqrt{2}+1)\pi$　　B. $(\sqrt{3}+1)\pi$

C. 3π　　D. 4π

8. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量,且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,$|4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2$,则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$ 的最大值为

A. $\frac{7}{5}$　　B. $\frac{9}{5}$　　C. $\frac{11}{5}$　　D. $\frac{13}{5}$

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知 $a>b>0>c$,则下列各选项正确的是

A. $\frac{b}{a}<\frac{b-c}{a-c}$　　B. $\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c}$

C. $\frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$　　D. $a+\frac{c}{b}>b+\frac{c}{a}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$,则

A. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

B. $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

C. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 上的极值点个数为 4

D. $f(x)$ 的图象可以由 $y=\sin 4x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到

11. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-ax-1,x\leqslant 0,\\ \ln x-ax+a,x>0,\end{cases}$ 其中 $a\in\mathbf{R}$,则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是

A. 当 $a=1$ 时,$f(x)$ 有 2 个零点

B. 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减,则 a 的取值范围是 $[1,+\infty)$

C. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上有最小值 $-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$

D. 若 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,则 $x_1+x_2>1$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 某城市有 10 个著名的地标建筑,文旅部门要从中选取 3 个作为城市名片进行特色文化宣传,且甲、乙、丙 3 个建筑中至少选 1 个,那么共有_____种不同的选法.

13. 在 $\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\frac{a}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}b}{\sin B}$,$a=3$,且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,则 $b+c=$_____.

座位号_____　考场号_____　考生号_____　姓名_____　班级_____　县(市、区)_____

线　订　装

14. 过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的上顶点 A 作两条相互垂直的直线，分别与 C 交于点 P,Q（异于点 A），且直线 AP 经过 C 的左焦点，直线 PQ 经过 C 的右焦点，则 C 的焦距为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）

随着人们环保意识的增强和科技的发展，新能源汽车越来越受到消费者的关注. 为了解消费者对新能源汽车续航里程和充电设施的满意率，随机调查了 200 名新能源汽车车主，得到如下数据：

	对续航里程满意	对续航里程不满意
对充电设施满意	70	30
对充电设施不满意	50	50

（Ⅰ）任意调查一名新能源汽车车主，设事件“该车主对续航里程满意”为 A，事件“该车主对充电设施满意”为 B，求 $P(A)$ 和 $P(A|B)$；

（Ⅱ）根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为消费者对续航里程的满意率与对充电设施的满意率有关？

附：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

α	0.05	0.01	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

16.（15 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=1,\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2n-1$.

（Ⅰ）求 a_2,a_3；

（Ⅱ）证明：$\left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$ 是等比数列；

（Ⅲ）求数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

17.（15 分）

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $M\left(\frac{3}{2},y_0\right)$ 在 E 上，且 $|MF|=\frac{5}{2}$.

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）过点 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，直线 l_1 与 E 交于 A,B 两点，直线 l_2 与 E 交于 C,D 两点，设线段 AB,CD 的中点分别为 P,Q，证明：直线 PQ 过定点.

18.（17 分）

已知函数 $f(x)=ax^2-2\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=\mathrm{e}$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交于 A,B 两点，AB 的中点横坐标为 x_0，证明：$f'(x_0)>0$.

19.（17 分）

如图，正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，平面 α 与底面 $ABCD$ 平行且与四棱锥的四条侧棱（不含端点）分别交于点 E,F,G,H，四棱台 $EFGH-ABCD$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的棱长和相等（“棱长和”指多面体的所有棱长之和）.

（Ⅰ）若 E 是棱 PA 的中点，求四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积；

（Ⅱ）求平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值；

（Ⅲ）已知四棱柱 Ω 的底面是边长为 m 的正方形，侧棱长为 n，且侧棱与底面所在平面所成的角为 $\theta\left(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，若平面 α 任意上下平移时，总存在正数 m,n，使得四棱柱 Ω 与四棱台 $EFGH-ABCD$ 有相同的体积，也有相同的棱长和，求 $\sin\theta$ 的取值范围.

