海南省2024—2025学年高三学业水平诊断(四)

数学·答案

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

1. **答案** A

命题透析 本题考查共轭复数.

解析 由题得 $z=2+\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=2-\mathrm{i}$.

2. **答案** C

命题透析 本题考查双曲线的方程和离心率.

解析 由 C 的方程知 $a^2=9$,$b^2=16$,$c^2=a^2+b^2=25$,故 C 的离心率 $e=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\dfrac{5}{3}$.

3. **答案** B

命题透析 本题考查诱导公式和同角三角函数的基本关系.

解析 根据诱导公式可知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$,所以 $\cos\alpha=3\sin\alpha$,所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$.

4. **答案** B

命题透析 本题考查立体几何中平行与垂直关系的判断.

解析 对于B,若矩形 $A_1B_1C_1D_1$ 不是正方形,则 A_1C_1 与 B_1D_1 不垂直,直线 A_1C_1 与平面 BDD_1B_1 也不可能垂直,故B错误. 易知其余选项均正确.

5. **答案** D

命题透析 本题考查集合的交运算,对数函数与指数函数的性质.

解析 由 $\log_3(x-1)<1$,得 $0<x-1<3$,所以 $1<x<4$,故 $A=\{x\mid 1<x<4\}$. 由 $\dfrac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 8$,解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,故 $B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$. 所以 $A\cap B=\{x\mid 1<x\leqslant 3\}=(1,3]$.

6. **答案** A

命题透析 本题考查二项分布的性质.

解析 由题意知 $X\sim B(5,p)$,所以 $D(X)=5p(1-p)=0.8$,解得 $p=0.8$ 或 $p=0.2$,因为全部识别成功的概率大于全部识别失败的概率,所以 $p^5>(1-p)^5$,即 $p>1-p$,得 $p>0.5$,所以 $p=0.8$.

7. **答案** D

命题透析 本题考查圆锥的结构特征及相关计算.

解析 圆锥的底面半径 $r=1$,设母线长为 l,则圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-1}$,圆锥内能容纳的最大球的表面积为 2π,即圆锥的内切球的表面积为 2π,所以内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故该圆锥的轴截面三角形的内切圆半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2+2l)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{l^2-1}$,解得 $l=3$,故圆锥的表面积为 $\pi rl+\pi r^2=4\pi$.

8. 答案　C

命题透析　本题考查平面向量的模、线性运算的性质.

解析　$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\left|\frac{9}{5}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\frac{1}{5}(4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\right|\leqslant\frac{9}{5}|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+\frac{1}{5}|4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\frac{11}{5}$,当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 和 $4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向相反时等号成立,可得此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{5}$, $|\boldsymbol{b}|=\frac{6}{5}$.

二、多项选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 每小题全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 答案　AC

命题透析　本题考查不等式的性质.

解析　对于 A,因为 $a>b>0>c$,所以 $\frac{b}{a}-\frac{b-c}{a-c}=\frac{b(a-c)-a(b-c)}{a(a-c)}=\frac{(a-b)c}{a(a-c)}<0$,所以 $\frac{b}{a}<\frac{b-c}{a-c}$,故 A 正确;

对于 B,$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{b+c}=\frac{b-a}{(a+c)(b+c)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0$,但 $a+c,b+c$ 的符号无法确定,故 $\frac{1}{a+c}$ 与 $\frac{1}{b+c}$ 的大小不确定,故 B 错误;

对于 C,因为 $a>b>0$, $-c>0$,所以 $a-c>b-c>0$,则 $\frac{a}{b-c}-\frac{b}{a-c}=\frac{a^2-ac-b^2+bc}{(b-c)(a-c)}=\frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)}>0$,所以 $\frac{a}{b-c}>\frac{b}{a-c}$,故 C 正确;

对于 D,$\left(a+\frac{c}{b}\right)-\left(b+\frac{c}{a}\right)=(a-b)+c\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=(a-b)\left(1+\frac{c}{ab}\right)$, $a>b>0$, $a-b>0$,但 $1+\frac{c}{ab}$ 的符号无法确定,故 D 错误.

10. 答案　BCD

命题透析　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　对于 A,当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$,所以点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的图象的对称中心,故 A 错误;

对于 B,当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$,函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,故 B 正确;

对于 C,当 $x\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 时,$4x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right)$,函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{3}\right)$ 上有 4 个极值点,即 $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}$,所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$ 上有 4 个极值点,故 C 正确;

对于 D,因为 $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]$,所以 $f(x)$ 的图象可以由函数 $y=\sin 4x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到,故 D 正确.

11. 答案　ABD

命题透析　本题考查利用导数研究函数的性质.

解析　对于 A,当 $a=1$ 时,$f(x)=\begin{cases}e^x-x-1,x\leqslant0,\\ \ln x-x+1,x>0,\end{cases}$ 当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=e^x-x-1$, $f'(x)=e^x-1$,因为 $x\leqslant0$,所

以$f'(x)\leqslant 0$,故$f(x)$在$(-\infty,0]$上单调递减,且$f(0)=e^0-0-1=0$,所以$x=0$是$f(x)$的一个零点;当$x>0$时,$f(x)=\ln x-x+1$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1$,令$f'(x)=0$,得$x=1$,易知$f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,则$f(x)_{max}=f(x)_{极大值}=f(1)=\ln 1-1+1=0$,所以$x=1$是$f(x)$的一个零点,故当$a=1$时,$f(x)$有$x=0$,$x=1$两个零点,故A正确.

对于B,当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-ax-1$,则$f'(x)=e^x-a$,依题意,当$x\leqslant 0$时,$f'(x)=e^x-a\leqslant 0$恒成立,即$a\geqslant e^x$恒成立,又$x\leqslant 0$,所以$0<e^x\leqslant 1$,所以$a\geqslant 1$,故B正确.

对于C,当$a=\frac{1}{2}$时,$f(x)=\begin{cases}e^x-\frac{1}{2}x-1,x\leqslant 0,\\ \ln x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2},x>0,\end{cases}$当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x-1$,$f'(x)=e^x-\frac{1}{2}$,令$f'(x)=0$,得$x=-\ln 2$. 当$x<-\ln 2$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(-\infty,-\ln 2)$上单调递减;当$-\ln 2<x\leqslant 0$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\ln 2,0]$上单调递增,所以$f(x)$在$x=-\ln 2$处取得极小值,也是在$(-\infty,0]$上的最小值,且$f(-\ln 2)=e^{-\ln 2}-\frac{1}{2}(-\ln 2)-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2-1=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$,故C错误.

对于D,$f(x)=\begin{cases}e^x-ax-1,x\leqslant 0,\\ \ln x-ax+a,x>0,\end{cases}$当$x\leqslant 0$时,$f(x)=e^x-ax-1$,$f'(x)=e^x-a$,当$x>0$时,$f(x)=\ln x-ax+a$,$f'(x)=\frac{1}{x}-a$. 依题意,$f(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1<x_2)$,则$e^{x_1}-a=0(x_1\leqslant 0)$,$\frac{1}{x_2}-a=0(x_2>0)$,即$a=e^{x_1}=\frac{1}{x_2}$,则$x_1=\ln a$,$x_2=\frac{1}{a}$,因为$x_1\leqslant 0$,所以$0<a\leqslant 1$,又$f(x)$有两个极值点,所以$a\neq 1$,所以$0<a<1$,所以$x_1+x_2=\ln a+\frac{1}{a}(0<a<1)$,令$g(a)=\ln a+\frac{1}{a}$,则当$0<a<1$时,$g'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}<0$,所以$g(a)$在$(0,1)$上单调递减,则$g(a)>g(1)=\ln 1+\frac{1}{1}=1$,即$x_1+x_2>1$,故D正确.

三、填空题:本题共3小题,每小题5分,共15分.

12. **答案** 85

命题透析 本题考查计数原理的应用.

解析 从10个地标建筑中选取3个,共有$C_{10}^3=120$种,若不选甲、乙、丙这3个地标建筑,即从剩下的7个中选3个,有$C_7^3=35$种,所以满足条件的选法有$120-35=85$种.

13. **答案** $3\sqrt{3}$

命题透析 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 由正弦定理得$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}\sin B}{\sin B}$,即$\tan A=\sqrt{3}$,又$0<A<\pi$,所以$A=\frac{\pi}{3}$. 由$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$,得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,可得$bc=6$. 在$\triangle ABC$中,由余弦定理可得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,又$a=3$,$A=\frac{\pi}{3}$,代入可得$b^2+c^2=15$,所以$(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=27$,所以$b+c=3\sqrt{3}$.

14. **答案** $\sqrt{2}$

命题透析 本题考查椭圆与直线的位置关系.

解析 设 C 的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c^2+1=a^2$,由题意可得直线 AP 的方程为 $y=\frac{1}{c}x+1$,直线 AQ 的方程为 $y=-cx+1$. 由 $\begin{cases} y=\frac{1}{c}x+1, \\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \end{cases}$ 得 $\frac{a^2+c^2}{c^2}x^2+\frac{2a^2x}{c}=0$,得 $x=0$ 或 $x=-\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$,则 $P\left(-\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\frac{c^2-a^2}{a^2+c^2}\right)$,用 $-\frac{1}{c}$ 替换 c,可得 $Q\left(\frac{2a^2c}{1+a^2c^2},\frac{1-a^2c^2}{1+a^2c^2}\right)$,又因为直线 PQ 经过 C 的右焦点 $(c,0)$,所以 $\frac{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}{c+\frac{2a^2c}{a^2+c^2}}=\frac{\frac{a^2c^2-1}{1+a^2c^2}}{c-\frac{2a^2c}{1+a^2c^2}}$,结合 $c^2+1=a^2$,解得 $a^2=\frac{3}{2}$,$c^2=\frac{1}{2}$,所以 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 C 的焦距为 $2c=\sqrt{2}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. **命题透析** 本题考查独立性检验的应用.

解析 (Ⅰ)$P(A)=\frac{70+50}{200}=0.6$, ……(3 分)

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{70}{70+30}=0.7$. ……(6 分)

(Ⅱ)由已知数据可得

$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(70\times50-50\times30)^2}{100\times100\times120\times80}=\frac{25}{3}\approx8.333$. ……(10 分)

因为 $\chi^2\approx8.333>6.635$,所以依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,可以认为消费者对续航里程的满意率与对充电设施的满意率有关. ……(13 分)

16. **命题透析** 本题考查递推数列、等差数列与等比数列求和.

解析 (Ⅰ)由题意知 $\frac{1}{a_2}=\frac{3}{a_1}+1=4$,$\therefore a_2=\frac{1}{4}$. ……(2 分)

$\because \frac{1}{a_3}=\frac{3}{a_2}+3=15$,$\therefore a_3=\frac{1}{15}$. ……(4 分)

(Ⅱ)由 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{a_n}+2n-1$,整理得 $\frac{1}{a_{n+1}}+n+1=3\left(\frac{1}{a_n}+n\right)$, ……(7 分)

又 $\frac{1}{a_1}+1=2$,$\therefore \left\{\frac{1}{a_n}+n\right\}$ 是首项为 2,公比为 3 的等比数列, ……(9 分)

(Ⅲ)由(Ⅱ)可知 $\frac{1}{a_n}+n=2\times3^{n-1}$, ……(11 分)

$\therefore \frac{1}{a_n}=2\times3^{n-1}-n$,

$\therefore T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\times(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times\frac{1-3^n}{1-3}-\frac{n(n+1)}{2}=3^n-1-\frac{n^2+n}{2}$. ……(15 分)

17. **命题透析** 本题考查抛物线的性质、抛物线与直线的位置关系.

解析 (Ⅰ)E 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$,

因为点 $M\left(\frac{3}{2},y_0\right)$在 E 上,且$|MF|=\frac{5}{2}$,即$\frac{3}{2}+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$,得 $p=2$, ……(3 分)

所以 E 的方程为 $y^2=4x$. ……(4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $F(1,0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

设 l_1 的方程为 $x=my+1(m\neq0)$,代入 $y^2=4x$,得 $y^2-4my-4=0$.

所以 $y_1+y_2=4m$,则 $y_P=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$, ……(6 分)

代入 $x=my+1$,得 $x_P=2m^2+1$,所以 $P(2m^2+1,2m)$. ……(7 分)

因为 $l_1\perp l_2$,所以 l_2 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1$,同理可得 $Q\left(\frac{2}{m^2}+1,-\frac{2}{m}\right)$. ……(8 分)

当 $m=\pm1$ 时,$2m^2+1=\frac{2}{m^2}+1=3$,直线 PQ:$x=3$. ……(9 分)

当 $m\neq\pm1$ 时,$k_{PQ}=\frac{2m+\frac{2}{m}}{2m^2-\frac{2}{m^2}}=\frac{m+\frac{1}{m}}{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)}=\frac{1}{m-\frac{1}{m}}=\frac{m}{m^2-1}$,

直线 PQ 的方程为 $y-2m=\frac{m}{m^2-1}[x-(2m^2+1)]$, ……(12 分)

即 $y=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{2m^3+m}{m^2-1}+2m=\frac{m}{m^2-1}x-\frac{3m}{m^2-1}$,

整理得 $y=\frac{m}{m^2-1}(x-3)$. ……(14 分)

所以直线 PQ 过定点$(3,0)$. ……(15 分)

18. **命题透析** 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (Ⅰ)若 $a=\mathrm{e}$,则 $f(x)=\mathrm{e}x^2-2\ln x$,$f'(x)=2\mathrm{e}x-\frac{2}{x}$, ……(1 分)

所以 $f'(1)=2\mathrm{e}-2$,$f(1)=\mathrm{e}$, ……(2 分)

所以曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=(2\mathrm{e}-2)(x-1)+\mathrm{e}$,

即 $y=(2\mathrm{e}-2)x-\mathrm{e}+2$. ……(4 分)

(Ⅱ)$f'(x)=2ax-\frac{2}{x}$,$x>0$.

①若 $a\leqslant0$,则 $f'(x)<0$ 恒成立,所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减; ……(5 分)

②若 $a>0$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$,且当 $x\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$时,$f'(x)>0$,

所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$上单调递增. ……(8 分)

(Ⅲ)由(Ⅱ)知,若 $a\leqslant0$,则曲线 $y=f(x)$与 x 轴最多有 1 个交点,故 $a>0$.

不妨设 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，$0<x_1<x_2$，则 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}<x_2$. ……（10 分）

要证 $f'(x_0)>0$，即证 $f'\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>0$，只需证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\frac{1}{\sqrt{a}}$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. ……（11 分）

设函数 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)$，则 $g'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x\right)=\frac{4(\sqrt{a}x-1)^2}{(\sqrt{a}x-2)x}$，

当 $x\in\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{2}{\sqrt{a}}\right)$ 上单调递减，……（13 分）

因为 $0<x_1<\frac{1}{\sqrt{a}}$，所以 $g(x_1)>g\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=0$，即 $f\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1\right)<f(x_1)=f(x_2)=0$，……（15 分）

又 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1>\frac{1}{\sqrt{a}}$，$x_2>\frac{1}{\sqrt{a}}$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $\frac{2}{\sqrt{a}}-x_1<x_2$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{\sqrt{a}}$. 从而原命题得证. ……（17 分）

19. **命题透析**　本题考查棱锥、棱台、棱柱的结构特征及相关计算.

解析　（Ⅰ）由题意知平面 $EFGH$ // 平面 $ABCD$，所以四棱锥 $P-EFGH$ 也是正四棱锥，

因为四棱台 $EFGH-ABCD$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的棱长和相等，

所以 $PE+PF+PG+PH=EF+FG+GH+HE$，即 $4PE=4EF$，故 $PE=EF$，即四棱锥 $P-EFGH$ 和正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面都是正三角形. ……（2 分）

连接 AC，设点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影为 O，则 O 为 AC 的中点.

由已知得 $AC=\sqrt{2}$，$PA=PC=1$，所以 $\triangle PAC$ 是等腰直角三角形，所以 AC 上的高 $PO=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……（3 分）

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$，当 E 是棱 PA 的中点时，$V_{P-EFGH}=\frac{1}{8}V_{P-ABCD}$，

所以四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为 $\frac{7}{8}V_{P-ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{7\sqrt{2}}{48}$. ……（5 分）

（Ⅱ）设 AD，BC 的中点分别为 M，N，连接 PM，PN，MN.

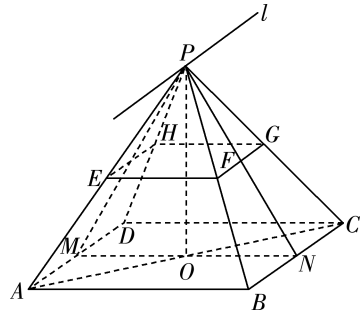
设平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l，因为 AD // BC，所以 AD // 平面 PBC，所以 AD // BC // l.

因为 $\triangle PAD$ 是等边三角形，所以 $PM\perp AD$，所以 $PM\perp l$，同理可得 $PN\perp l$，

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角即 $\angle MPN$（或其补角）. ……（7 分）

由已知可得 $PM=PN=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$MN=1$，所以 $\cos\angle MPN=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}$，

所以平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$. ……（9 分）



(Ⅲ)由题意知四棱柱 Ω 的高为 $n\sin\theta$,体积为 $m^2 n\sin\theta$. ……(10 分)

当平面 α 任意上下平移时,设 $\frac{PE}{PA}=t$,$0<t<1$,

则 $V_{P-EFGH}=t^3 V_{P-ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{6}t^3$,四棱台 $EFGH-ABCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……(11 分)

所以 $m^2 n\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ①

又四棱柱 Ω 与四棱台 $EFGH-ABCD$ 的棱长和相等,所以 $8m+4n=8$,

所以 $n=2-2m$,$0<m<1$. ……(12 分)

将其代入①,得 $(2m^2-2m^3)\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)$. ……(13 分)

令 $f(m)=2m^2-2m^3$,则 $f'(m)=4m-6m^2=2m(2-3m)$,

当 $0<m<\frac{2}{3}$ 时,$f'(m)>0$,当 $\frac{2}{3}<m<1$ 时,$f'(m)<0$,

所以 $f(m)$ 在 $m=\frac{2}{3}$ 处取得极大值,也是最大值,最大值为 $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$,

所以 $f(m)\in\left(0,\frac{8}{27}\right]$,$(2m^2-2m^3)\sin\theta\in\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$. ……(15 分)

又 $\frac{\sqrt{2}}{6}(1-t^3)\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$,且总存在满足题中条件的 m 和 n,所以 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\subseteq\left(0,\frac{8}{27}\sin\theta\right]$,

故 $\frac{8}{27}\sin\theta\geqslant\frac{\sqrt{2}}{6}$,解得 $\sin\theta\geqslant\frac{9\sqrt{2}}{16}$,

又 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\sin\theta$ 的取值范围是 $\left[\frac{9\sqrt{2}}{16},1\right]$. ……(17 分)