2025 届高三“一起考”大联考（模拟二）

数学

（时量：120 分钟 满分：150 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\left\{x\middle|\ x^2-2x-3\leqslant 0\right\}, B=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|2-x\geqslant 0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A.$\{1\}$　　B.$\{0,1\}$　　C.$\{0,1,2\}$　　D.$\{1,2\}$

2.以 $y=\pm 2x$ 为渐近线的双曲线可以是（　　）

A.$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$　　B.$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

C.$\dfrac{y^2}{2}-x^2=1$　　D.$y^2-\dfrac{x^2}{2}=1$

3.已知平面向量 $\vec{a}=\left(-\sqrt{3},-1\right), \vec{b}=\left(1,2\right)$，则 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$（　　）

A.1　　B.$\sqrt{3}$　　C.$-\sqrt{3}$　　D.-1

4.若 $\tan\alpha=2\tan\beta, \sin\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\left(\alpha-\beta\right)=$（　　）

A.$-\dfrac{1}{9}$　　B.$\dfrac{1}{9}$　　C.$\dfrac{2}{9}$　　D.$-\dfrac{2}{9}$

5.甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学进行劳动技术比赛，决出第 1 名到第 5 名的名次.甲和乙去向老师询问成绩，老师对甲说：“很遗憾，你和乙都没有得到冠军.”对乙说：“你当然不会是最差的.”从这两个回答分析，5 人的名次排列的情形有（　　）

A.36 种　　B.48 种　　C.54 种　　D.64 种

6.已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x+a, x\leqslant 0,\\ -\ln\left(x+1\right)+a, x>0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上没有零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A.$\left(-\infty,-1\right)$　　B.$\left(-\infty,-1\right)\cup\{0\}$

C.$\left[1,+\infty\right)\cup\{0\}$　　D.$\left(1,+\infty\right)\cup\{0\}$

7.已知某正三棱柱外接球的表面积为 4π，则该正三棱柱体积的最大值为（　　）

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$2\sqrt{2}$　　D.4

8.记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1$，且$a_1=0$，则$|S_{30}|$的最小值为（　　）

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

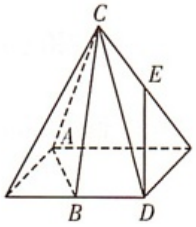
二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

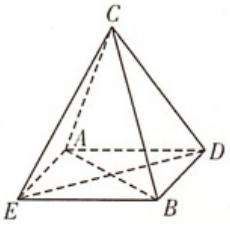
9.已知z_1,z_2都是复数，则下列说法正确的是（　　）

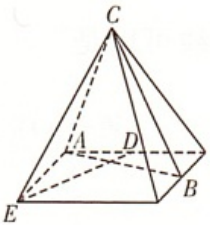
A.若$z_1=\overline{z_2}$，则$z_1z_2\in\mathbf{R}$　　B.若$z_1z_2\in\mathbf{R}$，则$z_1=\overline{z_2}$

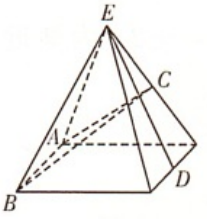
C.若$z_1^2+z_2^2=0$，则$|z_1|=|z_2|$　　D.若$|z_1|=|z_2|$，则$z_1^2=z_2^2$

10.下列四棱锥的所有棱长都相等，若A,B,C,D,E分别是四棱锥的顶点或所在棱的中点，则直线DE不与平面ABC垂直的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

11.已知函数$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，则（　　）

A.$f^2(x)-g^2(x)=1$

B.对任意实数$x,y,g(x+y)g(x-y)=g^2(x)+g^2(y)$

C.$f(2x)=f^2(x)+g^2(x)$

D.若直线$y=t$与函数$y=f(x)$和$y=g(x)$的图象共有三个交点，设这三个交点的横坐标分别为x_1,x_2,x_3，则$x_1+x_2+x_3>\ln(1+\sqrt{2})$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12.已知实数a,b,c满足$3^a=6^b=c$且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，则$c=$_____.

13.已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x\left(\omega>0\right),f\left(x_1\right)=0,f\left(x_2\right)=\sqrt{3}$，且$\left|x_1-x_2\right|$的最小值为$\frac{\pi}{2}$，则$\omega=$_____.

14.已知过抛物线$C:y^2=2px\left(p>0\right)$的焦点$F\left(2,0\right)$的直线与抛物线$C$交于$A,B$两点（$A$在第一象限），以$AB$为直径的圆$E$与抛物线$C$的准线相切于点$D$.若$\left|AD\right|=\sqrt{3}\left|BD\right|$,$O$为坐标原点，则$\triangle AOB$的面积为_____.

四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.（13分）

中国是茶的故乡，茶文化源远流长，博大精深.某兴趣小组，为了了解当地居民对喝茶的态度，随机调查了100人，并将结果整理如下：

单位：人

年龄段	态度		合计
	不喜欢喝茶	喜欢喝茶	
35岁以上(含35岁)	30	30	60
35岁以下	25	15	40
合计	55	45	100

（1）依据小概率值$\alpha=0.1$的χ^2独立性检验，能否据此推断该地居民喜欢喝茶与年龄有关?

（2）以样本估计总体，用频率代替概率.该兴趣小组在当地喜欢喝茶的人群中，随机选出2人参加茶文化艺术节.抽取的2人中，35岁以下的人数记为X，求X的分布列与期望.

参考公式：$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中$n=a+b+c+d$.

参考数据：

α	0.10	0.05	0.010	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

16.（15分）

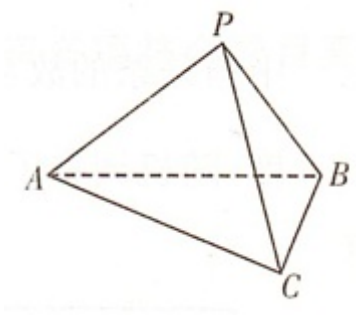
在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且$\frac{1+\sin A}{\cos A}=\frac{1+\sin B}{\cos B}$.

（1）判断 $\triangle ABC$ 的形状；

（2）设 $AB=1$，且 D 是边 BC 的中点，求当 $\angle CAD$ 最大时，$\triangle ABC$ 的面积.

17.（15 分）

在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABC, PA\perp$ 平面 PBC .



（1）求证：$PB\perp BC$；

（2）若二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$，且 $AB=2, BC=\sqrt{2}$，求 PA .

18.（17 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x+1\right)-\frac{ax}{x+1}$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间与极值；

（2）若 $f\left(x\right)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的值；

（3）求证：$\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln 2\left(n\in\mathbf{N}^{*}\right)$.

19.（17 分）

已知点 $F_1\left(-1,0\right), F_2\left(1,0\right)$，动点 T 满足 $\left|TF_1\right|+\left|TF_2\right|=4$，动点 T 的轨迹记为 C .

（1）求 C 的方程；

（2）直线 $l: x=4$ 与 x 轴交于点 M, B 为 l 上的动点，过 B 作 C 的两条切线，分别交 y 轴于点 P, Q .

①证明：直线 BP, BF_2, BQ 的斜率成等差数列；

②$\odot N$ 经过 B, P, Q 三点，是否存在点 B，使得 $\angle PNQ=90^{\circ}$？若存在，求 $\left|BM\right|$；若不存在，请说明理由.

2025 届高三“一起考”大联考（模拟二）·数学

参考答案

1.C　解析：由题意可得 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}, B=\{x\in \mathbf{N}|\ x\leqslant 2\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 C.

2.B　解析：对于 A，由 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 得渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，故 A 错误；

对于 B，由 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 得渐近线方程为 $y=\pm 2x$，故 B 正确；

对于 C，由 $\frac{y^2}{2}-x^2=1$ 得渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，故 C 错误；

对于 D，由 $y^2-\frac{x^2}{2}=1$ 得渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$，故 D 错误.故选 B.

3.D　解析：$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=\left[(-\sqrt{3})^2+(-1)^2\right]-\left(1^2+2^2\right)=4-5=-1$.故选 D.

4.B　解析：由 $\tan\alpha=2\tan\beta$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\sin\alpha\cos\beta=2\cos\alpha\sin\beta$，由 $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\frac{1}{3}$，得

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$，故 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{2}{9}, \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{9}$，则

$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{9}$，故选 B.

5.C　解析：分三步完成：冠军有 A_3^1 种可能，乙的名次有 A_3^1 种可能，余下 3 人有 A_3^3 种可能，所以 5 人的名次排列有 $A_3^1A_3^1A_3^3=54$（种）不同情况，故选 C.

6.B　解析：当 $x\leqslant 0$ 时，$0<e^x\leqslant 1$，若 $e^x=-a$ 无解，则 $a\geqslant 0$ 或 $a<-1$；

当 $x>0$ 时，$\ln\left(x+1\right)>0$，若 $\ln\left(x+1\right)=a$ 无解，则 $a\leqslant 0$.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-1\right)\cup\{0\}$.故选 B.

7.A　解析：设外接球的半径为 R，则 $4\pi R^2=4\pi$，解得 $R=1$.

设正三棱柱的底面三角形的边长为 x，则该三角形外接圆的半径为 $\frac{x}{\sqrt{3}}$，

故该正三棱柱的高为 $h=2\sqrt{R^2-\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}=2\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$，

所以该正三棱柱的体积 $V\left(x\right)=Sh=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times 2\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{x^4-\frac{x^6}{3}}$.

由 $x^4-\frac{x^6}{3}>0$，解得 $0<x<\sqrt{3}$.

令 $f\left(x\right)=x^4-\frac{x^6}{3}$，则 $f'\left(x\right)=4x^3-2x^5=-2x^3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$,

所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\sqrt{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ 上单调递减，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\sqrt{2}$ 时取得最大值，

故 $V(x)_{\max}=V\left(\sqrt{2}\right)=1$，所以该正三棱柱体积的最大值为 1.故选 A.

8.D　解析：数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，由 $a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1$，得 $2a_n=a_{n+1}^2-a_n^2-1$，即 $a_n=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2-1}{2}$.

所以 $S_{30}=a_1+a_2+\cdots+a_{30}=\frac{1}{2}\left[\left(a_2^2-a_1^2\right)+\left(a_3^2-a_2^2\right)+\cdots+\left(a_{31}^2-a_{30}^2\right)\right]-15=\frac{1}{2}\left(a_{31}^2-a_1^2\right)-15$,

又 $a_1=0$，所以 $\left|S_{30}\right|=\frac{1}{2}\left|a_{31}^2-30\right|$.又由 $a_{n+1}^2=a_n^2+2a_n+1$ 得 $\left|a_{n+1}\right|=\left|a_n+1\right|$ 且 $a_1=0$，

可知 $a_2=\pm1,a_3=\pm2,0,a_4=\pm3,\pm1,a_5=\pm4,\pm2,0,a_6=\pm5,\pm3,\pm1,\cdots$,

所以 a_n 是整数，于是 $\left|S_{30}\right|$ 是整数，且 a_{31}^2 是偶数的平方，则 $\left|S_{30}\right|=\frac{1}{2}\left|a_{31}^2-30\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|6^2-30\right|=3$，当 $a_{31}=6$ 取等号.

下面举例说明 a_{31} 可以取到 $6,a_{2n-1}=0,n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant13,a_{2n}=-1,n\in\mathbf{N}^*,n\leqslant12$，

$a_{26}=1,a_{27}=2,a_{28}=3,a_{29}=4,a_{30}=5,a_{31}=6$，

此时 $\left|S_{30}\right|=\left|a_1+a_2+\cdots+a_{30}\right|=\left|13\times0+12\times\left(-1\right)+1+2+3+4+5\right|=3$，

所以 $\left|S_{30}\right|$ 的最小值为 3.故选 D.

9.AC　解析：设 $z_1=a+b\mathrm{i},z_2=c+d\mathrm{i}\left(a,b,c,d\in\mathbf{R}\right)$，

对于 A，若 $z_1=\overline{z_2}$，则 $z_1=c-d\mathrm{i}$，故 $z_1z_2=c^2+d^2\in\mathbf{R}$，故 A 正确；

对于 B，当 $z_1=z_2=\mathrm{i}$ 时，$z_1z_2=-1\in\mathbf{R},\overline{z_2}=-\mathrm{i}\neq z_1$，故 B 错误；

对于 C，若 $z_1^2+z_2^2=0$，则 $z_1^2=-z_2^2$，所以 $\left|z_1^2\right|=\left|-z_2^2\right|=\left|z_2^2\right|$，

$\left|z_1^2\right|=\left|a^2-b^2+2ab\mathrm{i}\right|=\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+4a^2b^2}=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}=a^2+b^2=\left|z_1\right|^2$，

同理 $\left|z_2^2\right|=\left|z_2\right|^2$，所以 $\left|z_1\right|^2=\left|z_2\right|^2$，所以 $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$，故 C 正确；

对于 D，当 $z_1=1,z_2=\mathrm{i}$ 时，$\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$，但 $z_1^2=1,z_2^2=-1$，故 D 错误.故选 AC.

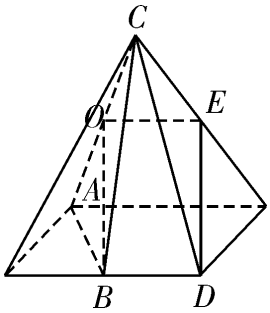
10.ACD　解析：由条件可知四棱锥为正四棱锥，

对于 A，取 CA 的中点为 O，连接 EO,BO，由中位线的性质可知：$EO\ /\!/\ BD$，

$EO=BD$，所以四边形 $BDEO$ 为平行四边形，所以 $DE\ /\!/\ BO$，

又 $BO\subset$ 平面 $ABC,DE\not\subset$ 平面 ABC，

所以 $DE\ /\!/$ 平面 ABC，故 A 正确；

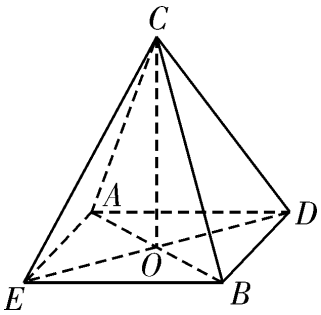


对于 B，设 AB,DE 的交点为 O，连接 CO，由正四棱锥的结构特征可知：

$CO\perp$ 平面 $AEBD,ED\subset$ 平面 $AEBD$，所以 $CO\perp ED$，

又 $ED\perp AB,CO,AB$ 为平面 ABC 内两条相交直线，

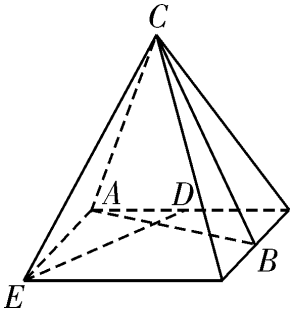
所以直线 $DE\perp$ 平面 ABC，故 B 错误；



对于 C，设棱长为 $2,\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$，

所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2\times\cos120^\circ+2\times2\times\cos60^\circ=1$，

所以 AC 与 DE 不垂直，所以直线 DE 不与平面 ABC 垂直，故 C 正确；



对于 D，设棱长为 2，如图，$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}$，

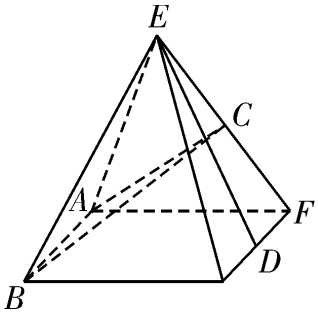
所以

$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}\right)=\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FC}=2\times2\times\cos60^\circ+0+2\times1\times\cos180^\circ+1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$,

所以 AC 与 DE 不垂直，所以直线 DE 不与平面 ABC 垂直，故 D 正确.

故选 ACD.



11.ACD　解析：$f^2\left(x\right)-g^2\left(x\right)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=1$，故 A 正确；

$g\left(x+y\right)g\left(x-y\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^{-x-y}}{2}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^{x-y}-\mathrm{e}^{-x+y}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{-2x}}{4}$，而

$g^2\left(x\right)+g^2\left(y\right)=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-y}}{2}\right)^2=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2y}+\mathrm{e}^{-2y}+\mathrm{e}^{-2x}-4}{4}$，故 B 错误；

$f^2\left(x\right)+g^2\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}+2}{4}+\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}-2}{4}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}=f\left(2x\right)$，故 C 正确；

$f'\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，令 $f'\left(x\right)=0$，得 $x=0$，

当 $x>0$ 时，$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$ 单调递增；当 $x<0$ 时，$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$ 单调递减.

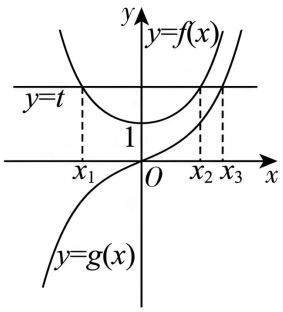
所以 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处取得极小值 1，

当 $x\to+\infty$ 时，$f\left(x\right)\to+\infty$；当 $x\to-\infty$ 时，$f\left(x\right)\to+\infty$.

$g'\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}>0$ 恒成立，所以 $g\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

当 $x\to+\infty,g\left(x\right)\to+\infty$；当 $x\to-\infty,g\left(x\right)\to-\infty$.

所以函数 $f\left(x\right),g\left(x\right)$ 的大致图象如图所示，



不妨设 $x_1<x_2<x_3$，由 $f\left(x\right)$ 为偶函数可得 $x_1+x_2=0$，

直线 $y=t$ 与 $y=f\left(x\right)$ 和 $y=g\left(x\right)$ 的图象有三个交点，显然 $t>1$，

令 $g\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=t>1$，整理得 $\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{x}-1>0$，

解得 $\mathrm{e}^{x}>1+\sqrt{2}$ 或 $\mathrm{e}^{x}<1-\sqrt{2}$（舍去），

所以 $x>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$，即 $x_3>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$，

又因为 $x_1+x_2=0$，所以 $x_1+x_2+x_3>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$，故 D 正确.

故选 ACD.

12. $3\sqrt{2}$　解析：由 $3^{a}=6^{b}=c$ 可知 $c>0,a=\log_3 c,b=\log_6 c$，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\log_c 3+\log_c 6=\log_c 18=2$，即 $c^2=18$，所以 $c=3\sqrt{2}$.故答案为 $3\sqrt{2}$.

13.1　解析：因为

$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\dfrac{1}{2}\cos\omega x+\cos\omega x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x+\dfrac{3}{2}\cos\omega x=\sqrt{3}\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

，又 $f\left(x_1\right)=0,f\left(x_2\right)=\sqrt{3}$，且 $\left|x_1-x_2\right|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{2}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{2k+1}{4}\cdot T=\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbf{N}\right)$，则 $T=\frac{2\pi}{2k+1}\left(k\in\mathbf{N}\right)$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2k+1\left(k\in\mathbf{N}\right)$，故当 $k=0$ 时，ω 取最小值 1.

故答案为 1.

14. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$　解析：依题意 $\frac{p}{2}=2$，得 $p=4$，所以抛物线 C 的方程为 $y^2=8x$.

由题意可知 DE 与抛物线的准线 $x=-2$ 垂直，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$\left|AD\right|=\sqrt{3}\left|BD\right|$，

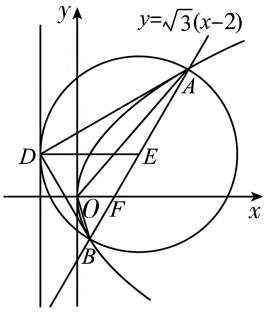
则 $\angle BAD=\frac{\pi}{6},\angle ABD=\angle DEB=\angle AFx=\frac{\pi}{3}$，所以直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}\left(x-2\right)$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}\left(x-2\right),\\y^2=8x,\end{cases}$ 消去 y 并化简整理得 $3x^2-20x+12=0,$

易得 $\Delta>0,x_A+x_B=\frac{20}{3}$，则 $\left|AB\right|=x_A+x_B+p=\frac{20}{3}+4=\frac{32}{3}$，

原点 $\left(0,0\right)$ 到直线 $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ 的距离为 $\sqrt{3}$，

所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times\frac{32}{3}\times\sqrt{3}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.故答案为 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$.



15.解析：（1）零假设为 H_0：该地居民喜欢喝茶与年龄没有关系.

根据列联表中的数据，可以求得 $\chi^2=\frac{100\times(30\times15-30\times25)^2}{60\times40\times55\times45}=\frac{50}{33}\approx1.515<2.706$.

根据小概率值 $\alpha=0.1$ 的 χ^2 独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，据此推断该地居民喜欢喝茶与年龄没有关系.

（2）由题意可知，X 的取值可能为 $0,1,2$.

则 $P\left(X=0\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$；$P\left(X=1\right)=\mathrm{C}_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；

$P\left(X=2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

所以 X 的期望为 $E\left(X\right)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$.

16.解析：（1）由二倍角公式得 $\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\left(\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}}$，

所以 $\frac{\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}}$，

整理得 $\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=0$，即 $\sin\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=0$.

因为 $A,B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $\frac{A}{2}-\frac{B}{2}=0$，即 $A=B$，即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

（2）由（1）及题设，有 $AC=BC=2CD$，

所以 $\cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}=\frac{AC^2+AD^2-\frac{AC^2}{4}}{2AC\cdot AD}=\frac{\frac{3AC^2}{4}+AD^2}{2AC\cdot AD}$

$=\frac{3AC}{8AD}+\frac{AD}{2AC}\geqslant2\sqrt{\frac{3AC}{8AD}\cdot\frac{AD}{2AC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $\angle CAD$ 为三角形内角，所以 $\angle CAD\leqslant\frac{\pi}{6}$，当且仅当 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，等号成立.

即 $\angle CAD$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}$，此时 $\frac{AD}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又 $\frac{CD}{AC}=\frac{1}{2}$，所以 $\left(\frac{AD}{AC}\right)^2+\left(\frac{CD}{AC}\right)^2=1$，

故 $AD^2+CD^2=AC^2$，可得 $\triangle ACD$ 为直角三角形且 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$.

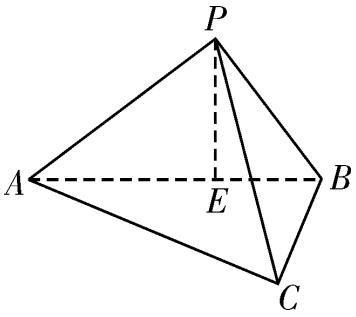
又由（1）可得 $\triangle ABC$ 为正三角形,

所以当 $\angle CAD$ 最大时， $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

17.解析：（1）证明：过 P 作 $PE\perp AB$ 于 E.

因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB, PE\subset$ 平面 $PAB, PE\perp AB$,

所以 $PE\perp$ 平面 ABC.



又 $BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PE\perp BC$.

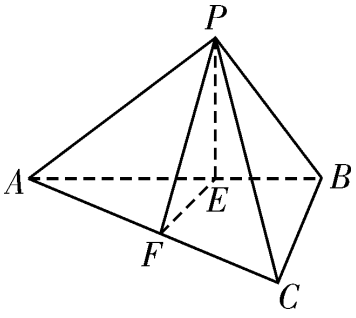
又 $PA\perp$ 平面 $PBC, BC\subset$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$.

因为 $PA, PE\subset$ 平面 PAB，且 $PA\cap PE=P$,

所以 $BC\perp$ 平面 PAB，又 $PB\subset$ 平面 PAB，所以 $PB\perp BC$.

（2）法 1：过 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，连接 PF.

易知 $AC\perp$ 平面 PEF，又 $PF\subset$ 平面 PEF，所以 $PF\perp AC$.



所以 $\angle PFE$ 即为二面角 $P-AC-B$ 的平面角,

所以 $\cos\angle PFE=\dfrac{1}{3}, \tan\angle PFE=2\sqrt{2}$.

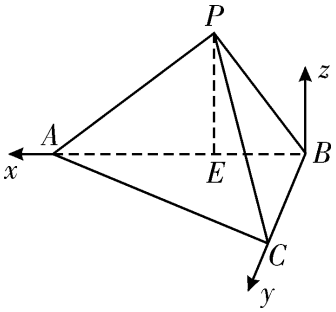
又由（1）可得 $PA\perp PB, BC\perp AB$，设 $\angle PAB=\theta$，因为 $AB=2$,

所以 $PA=2\cos\theta, PE=2\cos\theta\sin\theta, AE=2\cos^2\theta, EF=AE\sin\angle BAC=\dfrac{2\sqrt{3}\cos^2\theta}{3}$,

所以 $\tan\angle PFE=\dfrac{PE}{EF}=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\dfrac{2\sqrt{3}\cos^2\theta}{3}}=\sqrt{3}\tan\theta=2\sqrt{2}$，

所以 $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$，从而 $PA=2\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{33}}{11}$.

法 2：由（1）可得 $PA\perp PB, BC\perp AB$.如图，以 B 为原点，BA, BC 所在直线分别为 x 轴，y 轴建立空间直角坐标系，



记二面角 $P-AC-B$ 为 α，设 $\angle PAB=\theta$，因为 $AB=2$，

所以 $PA=2\cos\theta, PE=2\cos\theta\sin\theta, AE=2\cos^2\theta$，

则 $A(2,0,0), C\left(0,\sqrt{2},0\right), P\left(2-2\cos^2\theta,0,2\cos\theta\sin\theta\right)$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\left(-2,\sqrt{2},0\right), \overrightarrow{AP}=\left(-2\cos^2\theta,0,2\cos\theta\sin\theta\right)$.

设平面 ACP 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-2x+\sqrt{2}y=0,\\ -2\cos^2\theta x+2\cos\theta\sin\theta z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，得 $\vec{m}=\left(1,\sqrt{2},\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$，

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，又 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，

所以 $\left|\cos\alpha\right|=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\vec{m}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|}{\sqrt{3+\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}}=\dfrac{1}{3}$，

解得 $\tan\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，则 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{33}}{11}$，所以 $PA=2\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{33}}{11}$.

18.解析：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}(x>-1)$，

则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，

当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$，

在 $x=0$ 处取得极小值 0，无极大值.

（2）由题意得 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{a}{(x+1)^2}=\frac{x-(a-1)}{(x+1)^2}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，与 $f(x)\geqslant 0$ 矛盾；

②当 $a>0$ 时，当 $x\in(-1,a-1)$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(a-1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(a-1)=\ln a-(a-1)$，

因为 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $\ln a-(a-1)\geqslant 0$.

记 $g(a)=\ln a-(a-1), g'(a)=\frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}$，

当 $a\in(0,1)$ 时，$g'(a)>0, g(a)$ 单调递增，当 $a\in(1,+\infty)$ 时，$g'(a)<0, g(a)$ 单调递减，所以 $g(a)_{\max}=g(1)=0$，所以 $\ln a-(a-1)\leqslant 0$.

又 $\ln a-(a-1)\geqslant 0$，所以 $\ln a-(a-1)=0$，所以 $a=1$.

（3）证明：先证 $\sin x<x(x>0)$，设 $h(x)=\sin x-x(x>0)$，则 $h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)<h(0)=0$，即 $\sin x<x$.

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$，再证 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}$.

由（2）可知 $\ln(x+1)\geqslant\frac{x}{x+1}$，当 $x=0$ 时等号成立，

令 $x=\frac{1}{n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right)>\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1}$，

即 $\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(n+1\right)-\ln n$，

所以 $\frac{1}{n+2}<\ln\left(n+2\right)-\ln\left(n+1\right),\cdots\cdots,\frac{1}{n+n}<\ln\left(2n\right)-\ln\left(2n-1\right)$，

累加可得 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}<\ln\left(2n\right)-\ln n=\ln 2$，

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<\ln 2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

19.解析：（1）因为 $\left|TF_1\right|+\left|TF_2\right|=4>\left|F_1F_2\right|=2$，

所以 C 的轨迹是以 F_1,F_2 为焦点，且长轴长为 4 的椭圆，

设 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，则 $2a=4$，可得 $a=2$.

又 $c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=3$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）设 $B\left(4,t\right)$，易知过 B 且与 C 相切的直线斜率存在，设直线方程为 $y-t=k\left(x-4\right)$，联立

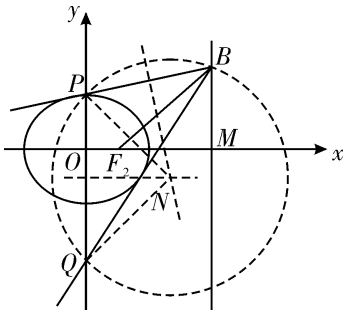
$\begin{cases}y-t=k\left(x-4\right),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8k\left(t-4k\right)x+4(t-4k)^2-12=0$，

由 $\Delta=64k^2(t-4k)^2-4\left(3+4k^2\right)\left[4(t-4k)^2-12\right]=0$，得 $12k^2-8tk+t^2-3=0,$

设两条切线 BP,BQ 的斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1+k_2=\frac{8t}{12}=\frac{2t}{3},k_1k_2=\frac{t^2-3}{12}.$

①证明：设 BF_2 的斜率为 k_3，则 $k_3=\frac{t}{4-1}=\frac{t}{3}$，

因为 $k_1+k_2=\frac{2t}{3}=2k_3$，所以 BP,BF_2,BQ 的斜率成等差数列.



②法 1：在$y-t=k_1(x-4)$中，令$x=0$，得$y_P=t-4k_1$，所以$P(0,t-4k_1)$，

同理，得$Q(0,t-4k_2)$，所以PQ的中垂线为$y=t-2(k_1+k_2)$.

易得BP的中点为$(2,t-2k_1)$，所以BP的中垂线为$y=-\dfrac{1}{k_1}(x-2)+t-2k_1$，

联立$\begin{cases}y=t-2(k_1+k_2),\\ y=-\dfrac{1}{k_1}(x-2)+t-2k_1,\end{cases}$解得$N\left(2k_1k_2+2,t-2(k_1+k_2)\right)$，

所以$\overrightarrow{NP}=(-2k_1k_2-2,2k_2-2k_1),\overrightarrow{NQ}=(-2k_1k_2-2,2k_1-2k_2)$，

要使$\angle PNQ=90^\circ$，则$\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{NQ}=0$，即$4(k_1k_2+1)^2-4(k_1-k_2)^2=0$，

整理得$|k_1k_2+1|=|k_1-k_2|$，

而$|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=\sqrt{\left(\dfrac{2t}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{t^2-3}{12}}=\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}$，

所以$\left|\dfrac{t^2-3}{12}+1\right|=\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}$，解得$t^2=7,t=\pm\sqrt{7}$，因此$|BM|=\sqrt{7}$，

故存在符合题意的点B，使得$\angle PNQ=90^\circ$，此时$|BM|=\sqrt{7}$.

法 2：在$y-t=k_1(x-4)$中，令$x=0$，得$y_P=t-4k_1$，因此$P(0,t-4k_1)$，

同理可得$Q(0,t-4k_2)$，所以PQ的中垂线为$y=t-2(k_1+k_2)$.

易得BP的中点为$(2,t-2k_1)$，所以BP的中垂线为$y=-\dfrac{1}{k_1}(x-2)+t-2k_1$，

联立$\begin{cases}y=t-2(k_1+k_2),\\ y=-\dfrac{1}{k_1}(x-2)+t-2k_1,\end{cases}$解得$x_N=2k_1k_2+2$，

因为$\angle PNQ=90^\circ$，所以$\left|x_N\right|=\dfrac{\left|PQ\right|}{2}$，即$\left|2k_1k_2+2\right|=2\left|k_1-k_2\right|$，

而$\left|k_1-k_2\right|=\sqrt{\left(k_1+k_2\right)^2-4k_1k_2}=\sqrt{\left(\dfrac{2t}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{t^2-3}{12}}=\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}$，

所以$\left|\dfrac{t^2-3}{12}+1\right|=\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}$，解得$t^2=7,t=\pm\sqrt{7}$，因此$\left|BM\right|=\sqrt{7}$，

故存在符合题意的点B，使得$\angle PNQ=90^\circ$，此时$\left|BM\right|=\sqrt{7}$.

法 3：要使$\angle PNQ=90^\circ$，即$\angle PBQ=45^\circ$或135°，

从而$\left|\tan\angle PBQ\right|=1$，又$\tan\angle PBQ=\dfrac{\left|k_1-k_2\right|}{1+k_1k_2}$，所以$\dfrac{\left|k_1-k_2\right|}{\left|1+k_1k_2\right|}=1$，

因为$\left|k_1-k_2\right|=\sqrt{\left(k_1+k_2\right)^2-4k_1k_2}=\sqrt{\left(\dfrac{2t}{3}\right)^2-4\cdot\dfrac{t^2-3}{12}}=\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}$，

所以$\dfrac{\sqrt{t^2+9}}{3}=\left|1+\dfrac{t^2-3}{12}\right|$，解得$t^2=7,t=\pm\sqrt{7}$，所以$\left|BM\right|=\sqrt{7}$，

故存在符合题意的点B，使得$\angle PNQ=90^\circ$，此时$\left|BM\right|=\sqrt{7}$.

法 4：要使$\angle PNQ=90^\circ$，即$\angle PBQ=45^\circ$或135°，从而$\left|\cos\angle PBQ\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{BQ}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在$y-t=k_1\left(x-4\right)$中，令$x=0$，得$y_P=t-4k_1$，故$P\left(0,t-4k_1\right)$，同理可得$Q\left(0,t-4k_2\right)$，因此

$\overrightarrow{BP}=\left(-4,-4k_1\right),\overrightarrow{BQ}=\left(-4,-4k_2\right)$，

所以$\dfrac{\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\left|\overrightarrow{BQ}\right|}=\dfrac{16+16k_1k_2}{4\sqrt{1+k_1^2}\cdot4\sqrt{1+k_2^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故$\sqrt{2}\left(1+k_1k_2\right)=\sqrt{1+k_1^2k_2^2+k_1^2+k_2^2}$，即$2+2k_1^2k_2^2+4k_1k_2=1+k_1^2k_2^2+k_1^2+k_2^2$，

整理得$k_1^2k_2^2+6k_1k_2+1=\left(k_1+k_2\right)^2$，

所以$\left(\dfrac{t^2-3}{12}\right)^2+6\cdot\dfrac{t^2-3}{12}+1=\left(\dfrac{2t}{3}\right)^2$，整理得$t^4+2t^2-63=0$，解得$t^2=7$或$-9$（舍去），

因此$t=\pm\sqrt{7},\left|BM\right|=\sqrt{7}$，故存在符合题意的点$B$，使得$\angle PNQ=90^\circ$，

此时$\left|BM\right|=\sqrt{7}$.法 5：要使$\angle PNQ=90^\circ$，即$\angle PBQ=45^\circ$或135°，从而$\sin\angle PBQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在$y-t=k_1(x-4)$中，令$x=0$，得$y_P=t-4k_1$，故$P(0,t-4k_1)$，同理可得$Q(0,t-4k_2)$，

由等面积法得$\frac{1}{2}|PQ|\cdot|x_B|=S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}|BP|\cdot|BQ|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即$\frac{1}{2}|4k_1-4k_2|\cdot 4=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{1+k_1^2}\cdot 4\sqrt{1+k_2^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$，整理得$(k_1+k_2)^2=k_1^2k_2^2+6k_1k_2+1$，

所以$\left(\frac{2t}{3}\right)^2=\left(\frac{t^2-3}{12}\right)^2+6\cdot\frac{t^2-3}{12}+1$，整理得$t^4+2t^2-63=0$，解得$t^2=7$或$-9$（舍去），

因此$t=\pm\sqrt{7},|BM|=\sqrt{7}$，故存在符合题意的点$B$，使得$\angle PNQ=90^\circ$，

此时$|BM|=\sqrt{7}$.