数学试卷

注意事项：

1. 答题前，考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.

2. 每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 在试题卷上作答无效.

3. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回. 满分150分，考试用时120分钟.

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. “$\frac{1}{x}>|x|$”是“$|x|<1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 过点$P(1,0)$且与抛物线C：$x^2=y$有且仅有1个公共点的直线l的条数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 复数$(1-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})(a\in\mathbf{R})$在复平面内对应的点不可能在第（　　）象限.

A. 一　　B. 二　　C. 三　　D. 四

4. 已知圆锥的侧面展开图是一个半圆，且圆锥的底面积为4π，则此圆锥的体积为

A. $8\sqrt{3}\pi$　　B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$　　C. 16π　　D. $\frac{16}{3}\pi$

5. 在钝角$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a=3$，$b=7$，且最大角$B<\frac{2\pi}{3}$，则c的取值范围是

A. $(4,2\sqrt{10})$　　B. $(4,7)$

C. $(5,7)$　　D. $(5,2\sqrt{10})$

6. 若$(x+2)^2+(y+1)^2=2$，则$\frac{x+y+1}{x}$的最小值为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

7. 我们解不等式$\ln x>\frac{1}{2}$时，可以采用如下方法：$\ln x>\frac{1}{2}$等价于$\mathrm{e}^{\ln x}>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$，即$x>\sqrt{\mathrm{e}}$. 根据以上思路求解：函数$f(x)=x^x$，$x\in(0,+\infty)$的最小值为

A. 0　　B. 1　　C. $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$　　D. $\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$

8. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$都是单位向量，且向量$\vec{c}$满足向量$\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{b}-\vec{c}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\vec{c}|$的最大值为

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. 3

二、多项选择题（本大题共3个小题，每小题6分，共18分，在每个给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分）

9. 若函数$y=f(x)$的图象经过平移后可以得到函数$y=g(x)$的图象，则称函数$f(x)$与$g(x)$是“全等函数”. 下列各组函数中，$f(x)$与$g(x)$是“全等函数”的是

A. $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，$g(x)=\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}\cos x$

B. $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g(x)=2\cdot\mathrm{e}^x$

C. $f(x)=\ln x$，$g(x)=\ln(2x)$

D. $f(x)=\ln|x|$，$g(x)=\ln(|x|+1)$

10. 已知a，b为正实数，$ab+a+2b=14$，则下列说法正确的是

A. $a+b<21$　　B. $\frac{a-6}{b+1}$的最小值为-1

C. $a+4b$的最小值为12　　D. $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+1}$的最小值为$\frac{1}{2}$

11. 数的进制是人们利用符号来计数的方法. 我们在日常生活中习惯于采用十进制计数与运算，但是在其它领域中，其它进制计数方式也应用广泛，例如计算机处理数据时，采用的就是二进制方法. 二进制数是用0和1表示的数，它的基数为2，进位规则是“逢二进一”，借位规则是“借一当二”. 若十进制数$n=a_0\times2^k+a_1\times2^{k-1}+a_2\times2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times2^1+a_k\times2^0$，其中$a_0=1$，$a_i\in\{0,1\}$，则$n$对应的二进制数为$(a_0a_1a_2\cdots a_k)_2(k\in\mathbf{N})$. 以下说法正确的是

A. 十进制数2025用二进制表示为$(1111101001)_2$

B. 满足a_0，a_1，a_2，…，a_6中有且只有3个1的所有二进制数$(a_0a_1a_2\cdots a_6)_2$对应的十进制数的和为1275

C. 将n对应的二进制数中1的个数记为$S(n)$，则$S(2n+1)=S(16n+4)$

D. 将n对应的二进制数中0的个数记为$T(n)$，令$f(n)=2^{T(n)}$，则$f(2^{2025})+f(2^{2025}+1)+f(2^{2025}+2)+\cdots+f(2^{2026}-1)=3^{2025}$

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. 已知 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}$，则 $\cos 2\alpha=$_____.

13. 若一组数据 6，1，7，5，5，27，11，21，m，$3m(m\in\mathbf{R})$的第 75 百分位数为 12，则这组数据的第 40 百分位数为_____.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+1, & x\leqslant 0\\ |\ln x|, & x>0\end{cases}$. 若函数 $y=f(af(x))$ 所有零点的乘积为 1，则实数 a 的取值范围是_____.

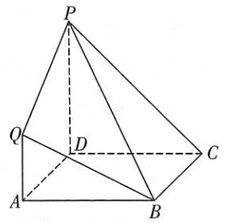
四、解答题（共 77 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 13 分）

如图所示，在空间几何体 $ABCDPQ$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，平面 $PCD\perp$平面 $ABCD$，$QA\perp AB$，$PD/\!/QA$，$PD=DC=2QA$.

（1）证明：$PD\perp$平面 $ABCD$.

（2）求平面 PBC 与平面 PBQ 所成锐二面角的大小.



16.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x+a}(a>0)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{4}$.

（1）求 a 的值；

（2）记 $f(x)$ 的极大值点为 x_0，证明：$x_0f(x_0)=1$.

17.（本小题满分 15 分）

甲、乙、丙三位同学组队参加一个闯关活动. 每次只能派 1 个人参加闯关活动，每次闯关用时 1 分钟，如有必要则派下一个人继续参加闯关活动，直至三人中有两人闯关成功就视为团队“挑战胜利”，否则视为“挑战失败”. 在已经确定“挑战胜利”或“挑战失败”时，活动立刻结束. 已知甲、乙、丙各自能闯关成功的概率分别为 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，且假定每人能否闯关成功的事件是相互独立的.

（1）若改变三个人先后参加闯关的顺序，团队“挑战胜利”的概率是否会发生变化？请说明理由.

（2）为了使活动平均用时最少，三位同学应该以怎样的先后顺序参加闯关活动，并说明理由.

18.（本小题满分 17 分）

已知直线 l：$y=kx+t(k>0,\ t<0)$ 与椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 交于 A，B 两点（A 在下方，B 在上方），线段 AB 的中点为 E，直线 OE 的斜率为 $-\frac{1}{3k}$（O 为坐标原点）.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）若射线 OE 与椭圆 C、直线 $x=3$ 分别交于 G，D 两点，且 $|OD|$，$|OG|$，$|OE|$ 成等比数列.

（ⅰ）求点 $M(0,\ 1)$ 到直线 l 的距离的最大值；

（ⅱ）当直线 BG 与 x 轴垂直时，求 $\triangle ABG$ 的外接圆方程.

19.（本小题满分 17 分）

存在 $m\in\mathbf{N}^*$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，当 $n>m$ 时，正项数列 $\{a_n\}$ 都满足 $a_{n-m}\cdot a_{n-m+1}\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdot\cdots\cdot a_{n+m-1}\cdot a_{n+m}=a_n^{2m}$，则称 $\{a_n\}$ 满足 $P(m)$ 性质. 例如：当 $m=4$ 时，$2^{n-4}\cdot 2^{n-3}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-1}\cdot 2^{n+1}\cdot 2^{n+2}\cdot 2^{n+3}\cdot 2^{n+4}=2^{8n}=(2^n)^{2\times 4}$，则等比数列 $\{2^n\}$ 满足 $P(4)$ 性质；当 $m=1$ 时，$(n-1)(n+1)\neq n^2$，则数列 $\{n\}$ 不满足 $P(1)$ 性质. 已知数列 $\{a_n\}$ 同时满足 $P(2)$，$P(3)$ 性质.

（1）证明：数列 $\{a_n\}$ 为等比数列；

（2）已知 $a_1=1$，$a_2=3$，若数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_n=\begin{cases}k, & n=a_k\\ b_{n-1}+2k, & a_k<n<a_{k+1}\end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$. 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，记 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2S_n}$.

①求 T_n 的表达式（用含 n 的式子表示）；

②试判断 $\sum_{i=1}^{n}\frac{8i-1}{16T_i-(3i+1)(8i-1)-1}$ 与 $\frac{9}{40}$ 的大小关系，并说明理由.

数 学 答 题 卡

姓　名＿＿＿＿＿＿　考场号 [ ][ ][ ]　座位号 [ ][ ]

填涂范例　正确填涂 ■　错误填涂 ✓ ✗ ⊖ ○

准考证号

[ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ][ ]

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

缺考标记 □ （填涂说明：缺考考生由监考员用2B铅笔填涂准考证号及左边缺考标记）

5 [A] [B] [C] [D]　9 [A] [B] [C] [D]
6 [A] [B] [C] [D]　10 [A] [B] [C] [D]
7 [A] [B] [C] [D]　11 [A] [B] [C] [D]
8 [A] [B] [C] [D]

大题共3小题，每小题5分，共15分）

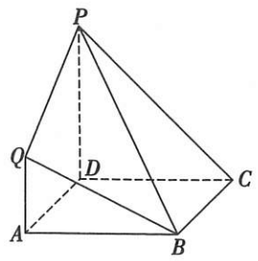
＿＿＿＿　13. ＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿

答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

77分）

分13分）



请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

16.（本小题满分15分）

解：

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

17.（本小题满分15分）

解：

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

18.（本小题满分17分）

解：

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

19.（本小题满分17分）

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出矩形边框限定区域的答案无效