数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	B	D	B	D	A

【解析】

1. 因为$\frac{1}{x}>|x|\Leftrightarrow 0<x<1$，$|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$，故“$\frac{1}{x}>|x|$”是“$|x|<1$”的充分不必要条件，故选 A.

2．过点$P(1,\ 0)$可以作 3 条直线与抛物线C：$x^2=y$有且仅有 1 个公共点，故选 D.

3．因为$z=(1-\mathrm{i})(a+2\mathrm{i})=(a+2)+(2-a)\mathrm{i}$，所以它在复平面内对应的点为$(a+2,\ 2-a)$；$(a+2)+(2-a)=4>0$，故点$(a+2,\ 2-a)$不可能在第三象限，故选 C.

4．设圆锥的底面半径为r，母线为l，则$\begin{cases}\pi r^2=4\pi,\\ \pi l=2\pi r,\end{cases}$解得$\begin{cases}r=2,\\ l=4,\end{cases}$故圆锥的高$h=\sqrt{l^2-r^2}=2\sqrt{3}$，故此圆锥的体积$V=\frac{1}{3}S_{底}h=\frac{1}{3}\cdot 4\pi\cdot 2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$，故选 B.

5．由钝角$\triangle ABC$中的最大角为$B\in\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$；故由余弦定理：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\frac{c^2-40}{6c}\in\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，解得$c\in(5,\ 2\sqrt{10})$，故选 D.

6．$\frac{y+1}{x}=\frac{y-(-1)}{x}$，可以看作圆$(x+2)^2+(y+1)^2=2$上的动点$P(x,\ y)$与定点$Q(0,\ -1)$连线的斜率；数形结合可知$\frac{y-(-1)}{x}=k_{PQ}\in[-1,\ 1]$，$\frac{x+y+1}{x}=1+\frac{y+1}{x}\in[0,\ 2]$，故选 B.

7．由$x>0$知$f(x)=x^x=\mathrm{e}^{\ln x^x}=\mathrm{e}^{x\ln x}$，$x\in(0,\ +\infty)$；令$g(x)=x\ln x$，$x>0$，则$g'(x)=1+\ln x$，令$g'(x)=0$，解得$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$，当$0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$\left(0,\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$上单调递减；当$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},\ +\infty\right)$上单调递增；$f(x)$由函数$y=\mathrm{e}^u$与$u=g(x)$复合而成，而

$y=\mathrm{e}^u$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增；

所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{e}}}$，故选 D.

8．记 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则 $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\angle AOB,\ \langle\vec{a}-\vec{c},\ \vec{b}-\vec{c}\rangle=\angle ACB=\frac{\pi}{3}$；由题意：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$，故 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-\frac{1}{2}$，故 $\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$；且 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=3$，故 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，即 $|AB|=\sqrt{3}$；故 $\angle AOB+\angle ACB=\pi$；$|\vec{c}|=|\overrightarrow{OC}|$ 取最大值时，O，C 两点应该在直线 AB 的两侧，故 O，A，B，C 四点共圆，则 $|\vec{c}|=|\overrightarrow{OC}|$ 的最大值即为圆的直径；在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理：$|\vec{c}|_{\max}=2R=\frac{|AB|}{\sin\frac{\pi}{3}}=2$，故选 A.

二、多项选择题（本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11
答案	ABC	ABD	BCD

【解析】

9．对于 A：$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\ g(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，正确；对于 B：$f(x)=\mathrm{e}^x,\ g(x)=2\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln 2}\cdot\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{x+\ln 2}$，正确；对于 C：$f(x)=\ln x,\ g(x)=\ln(2x)=\ln x+\ln 2$，正确；对于 D：$f(x)=\ln|x|$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)=\ln(|x|+1)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，所以无论怎么平移两函数，图象都不可能重合，错误，故选 ABC.

10．由 $a>0,\ b>0$，知 $ab+2b=14-a>0$，故 $a<14$；$ab+a=14-2b>0$，故 $b<7$；故 $a+b<21$，故 A 正确；由 $ab+a+2b=14$ 知 $a(b+1)=14-2b$，故 $a=\frac{14-2b}{b+1}=\frac{16}{b+1}-2$，故 $\frac{a-6}{b+1}=\frac{\frac{16}{b+1}-8}{b+1}=16\left(\frac{1}{b+1}\right)^2-8\cdot\frac{1}{b+1}=16\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{4}\right)^2-1$，故当 $b=3,\ a=2$ 时，$\frac{a-6}{b+1}$ 取得最小值 -1，故 B 正确；由 $ab+a+2b=14$，知 $(a+2)(b+1)=16$，故

$(a+2)+4(b+1)\geqslant 2\sqrt{4(a+2)(b+1)}=16$，故 $a+4b\geqslant 10$，当且仅当 $a=6$，$b=1$ 时取等号；故 $a+4b$ 的最小值为 10，故 C 错误；$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+1}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a+2}\cdot\frac{1}{b+1}}=2\sqrt{\frac{1}{(a+2)(b+1)}}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=2$，$b=3$ 时取等号；故 $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+1}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$，故 D 正确，故选 ABD.

11．对于 A：$2025=1024+512+256+128+64+32+8+1=1\times 2^{10}+1\times 2^9+1\times 2^8+1\times 2^7+1\times 2^6+1\times 2^5+0\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+0\times 2^1+1=(11111101001)_2$，故 A 错误；对于 B：$n=a_0\times 2^6+a_1\times 2^5+\cdots+a_5\times 2^1+a_6\times 2^0$，其中 $a_0=1$，a_1，a_2，…，a_6 中有且只有 2 个 1，有 $C_6^2=15$ 种可能；所以所有二进制数 $(a_0a_1a_2\cdots a_6)_2$ 对应的十进制数的和中，2^6 出现 $C_6^2=15$ 次，2^5，2^4，…，2^1，2^0 均出现 $C_5^1=5$ 次，所以对应的十进制数的和为 $C_5^1(2^5+2^4+\cdots+2^1+2^0)+C_6^2\times 2^6=1275$，故 B 正确；对于 C：$n=a_0\times 2^k+a_1\times 2^{k-1}+a_2\times 2^{k-2}+\cdots+a_{k-1}\times 2^1+a_k\times 2^0$，则 $S(n)=\sum_{i=0}^{k}a_i$；$2n+1=a_0\times 2^{k+1}+a_1\times 2^k+a_2\times 2^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\times 2^2+a_k\times 2^1+1$，故 $S(2n+1)=\sum_{i=0}^{k}a_i+1=S(n)+1$；$16n+4=a_0\times 2^{k+4}+a_1\times 2^{k+3}+a_2\times 2^{k+2}+\cdots+a_{k-1}\times 2^5+a_k\times 2^4+2^2$，故 $S(16n+4)=\sum_{i=0}^{k}a_i+1=S(n)+1$，故 $S(2n+1)=S(16n+4)$，故 C 正确；对于 D：2^{2025}，$2^{2025}+1$，$2^{2025}+2$，…，$2^{2026}-1$ 共 $2^{2026}-2^{2025}=2^{2025}$ 个数中所有的数转换为二进制后，总位数都为 2026，且最高位都为 1；而除最高位之外的剩余 2025 位中，每一位都是 0 或者 1；设其中的数 x，转换为二进制后有 k 个 $0\,(0\leqslant k\leqslant 2025)$，$f(x)=2^k$；在这 2^{2025} 个数中，转换为二进制后有 k 个 0 的数共有 C_{2025}^k 个，故 $f(2^{2025})+f(2^{2025}+1)+f(2^{2025}+2)+\cdots+f(2^{2026}-1)=\sum_{k=0}^{2025}2^k\cdot C_{2025}^k=(1+2)^{2025}=3^{2025}$，故 D 正确，故选 BCD.

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

题号	12	13	14
答案	$\frac{20}{29}$	$\frac{11}{2}$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup[1,+\infty)$

【解析】

12．$\cos 2\alpha=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{20}{29}$.

13．将 m，$3m(m\in\mathbf{R})$ 以外的数据从小到大排列：1，5，5，6，7，11，21，27；因为 $10\times75\%=7.5$，故第 75 百分位数为第 8 位数，即：从小到大的第 8 位数是 12；显然 $m>0\Rightarrow 3m>m$，故 $3m=12\Rightarrow m=4$，故将所有数据从小到大排列：1，4，5，5，6，7，11，12，21，27；因为 $10\times40\%=4$，故第 40 百分位数为 $\frac{5+6}{2}=\frac{11}{2}$.

14．令 $y=f(af(x))\Rightarrow y=f(t)$，$t=af(x)$；令 $f(t)=0$ 得 $t=1$，故 $af(x)=1\Rightarrow f(x)=\frac{1}{a}$（显然 $a\neq0$）；即：$f(x)=\frac{1}{a}$ 的所有解的乘积为 1；数形结合：$f(x)=\frac{1}{a}$ 的解可看作函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{a}$ 的交点的横坐标；结合 $f(x)=\begin{cases}2^x+1,\ x\leqslant0,\\ |\ln x|,\ x>0\end{cases}$ 的图象可知：当 $a<0$ 时：函数 $y=f(x)\geqslant0$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{a}<0$ 没有交点；当 $a>0$ 时：函数 $y=f(x)=|\ln x|(x>0)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{a}$ 有 2 个交点，即 $f(x)=\frac{1}{a}$ 当 $x>0$ 时有 2 个解 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，且满足 $|\ln x_1|=|\ln x_2|\Rightarrow-\ln x_1=\ln x_2\Rightarrow\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1x_2=0$，故 $x_1x_2=1$；又 $y=f(x)=2^x+1(x\leqslant0)$ 单调递增，且 $f(x)=2^x+1(x\leqslant0)\in(1,\ 2]$，故 $\frac{1}{a}\in(0,\ 1]\cup(2,\ +\infty)$，故 $a\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right)\cup[1,\ +\infty)$.

四、解答题（共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15．（本小题满分 13 分）

（1）证明：由四边形 $ABCD$ 为正方形知 $AB/\!/CD$；

又 $QA\perp AB$，故 $QA\perp CD$；

又 $PD/\!/QA$，故 $PD\perp CD$；

又平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，

所以 $PD\perp$ 平面 $ABCD$．……（5 分）

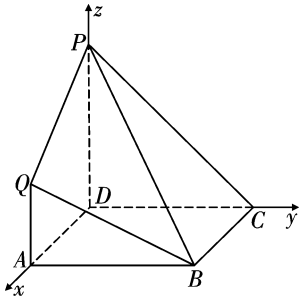
（2）解：由（1）知 $PD\perp$ 平面 $ABCD$ 且 $DA\perp DC$，故 DA，DC，DP 互相垂直；

以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系；

不妨设 $QA=1$，则 $PD=DC=2$，则 $B(2,\ 2,\ 0)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 2)$，$Q(2,\ 0,\ 1)$，

故 $\overrightarrow{PB}=(2,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{PC}=(0,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{PQ}=(2,\ 0,\ -1)$；

……（6 分）



设平面 PBQ 的法向量是 $\vec{m}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=2x_1+2y_1-2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PQ}=2x_1-z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，可得 $\vec{m}=(1,\ 1,\ 2)$；

……（8 分）

设平面 PBC 的法向量是 $\vec{n}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=2x_2+2y_2-2z_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=2y_2-2z_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=1$，可得 $\vec{n}=(0,\ 1,\ 1)$；……（10 分）

记平面 PBC 与平面 PBQ 所成锐二面角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\vec{m},\ \vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$；

故平面 PBC 与平面 PBQ 所成锐二面角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$．……（13 分）

16.（本小题满分 15 分）

（1）解：$f'(x)=\dfrac{\frac{x+a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}=\dfrac{1+\frac{a}{x}-\ln x}{(x+a)^2}(a>0)$，

故 $f'(1)=\dfrac{1+a}{(1+a)^2}=\dfrac{1}{1+a}(a>0)$；……（2 分）

$f(1)=0$，

故函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+a}(a>0)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线斜率为 $\pm\dfrac{1}{2}$，即 $f'(1)=\pm\dfrac{1}{2}$；

……（4 分）

由 $a>0$ 知 $f'(1)=\dfrac{1}{1+a}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=1$．……（6 分）

（2）证明：由（1）知 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$，定义域 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$；

……（8 分）

令 $g(x)=1+\dfrac{1}{x}-\ln x$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

由 $g(1)=2>0$，$g(\mathrm{e}^2)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-1<0$ 知存在 $x_0\in(1,\mathrm{e}^2)$，使得 $g(x_0)=0$；

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

故 x_0 即为 $f(x)$ 的极大值点；……（11 分）

由 $g(x_0)=0$，知 $1+\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0=0\Rightarrow\ln x_0=1+\dfrac{1}{x_0}$，

故 $f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0+1}=\dfrac{1+\frac{1}{x_0}}{x_0+1}=\dfrac{1}{x_0}$，

故 $x_0f(x_0)=1$，结论成立．……（15 分）

17．（本小题满分 15 分）

解：（1）若按某指定顺序参加活动，这三位同学各自能闯关成功的概率依次为 p_1，p_2，p_3，

其中 p_1，p_2，p_3 是 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ 的一个排列；……（2 分）

则“挑战胜利”的概率 $P=p_1p_2+p_1(1-p_2)p_3+(1-p_1)p_2p_3=p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-2p_1p_2p_3$

$=\left(\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\right)-2\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{13}{36}$，

故改变三个人先后参加活动的顺序，“挑战胜利”的概率不会发生变化．

……（6 分）

（2）若按某指定顺序参加活动，这三位同学各自能闯关成功的概率依次为 p_1，p_2，p_3，

其中 p_1，p_2，p_3 是 $\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ 的一个排列；

记活动用时为随机变量 t（单位：分钟），

则 $P(t=2)=p_1p_2+(1-p_1)(1-p_2)=2p_1p_2-(p_1+p_2)+1$，

$P(t=3)=1-P(t=2)=(p_1+p_2)-2p_1p_2$；

故数学期望 $E(t)=2P(t=2)+3P(t=3)=4p_1p_2-2(p_1+p_2)+2+3(p_1+p_2)-6p_1p_2$

$=(p_1+p_2)-2p_1p_2+2$；……（9 分）

当 $p_3=\frac{1}{4}$ 时，$E(t)=\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)-2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+2=\frac{23}{9}$；

当 $p_3=\frac{1}{3}$ 时，$E(t)=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-2\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+2=\frac{31}{12}$；

当 $p_3=\frac{2}{3}$ 时，$E(t)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)-2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+2=\frac{29}{12}$；

由 $\frac{29}{12}<\frac{23}{9}<\frac{31}{12}$ 知：甲、乙同学应该先参加前两次闯关活动.

……（15 分）

18.（本小题满分 17 分）

解：（1）点差法：设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $x_E=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_E=\frac{y_1+y_2}{2}$；

由 A、B 两点在椭圆上：$\frac{x_1^2}{a^2}+y_1^2=1$①，$\frac{x_2^2}{a^2}+y_2^2=1$②；

……（2 分）

用①−②得：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

即：$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=\frac{2y_E(y_1-y_2)}{2x_E(x_1-x_2)}=\frac{y_E(y_1-y_2)}{x_E(x_1-x_2)}=k_{OE}k_{AB}=-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{3}\Rightarrow a^2=3$，

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$．……（4 分）

（2）（i）联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(3k^2+1)x^2+6ktx+3t^2-3=0$；

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

由韦达定理：$x_1+x_2=-\frac{6kt}{3k^2+1}$，所以 $y_1+y_2=\frac{2t}{3k^2+1}$.

由于 E 为线段 AB 的中点，因此 $x_E=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3kt}{3k^2+1}$；

……（6 分）

若射线OE与椭圆C、直线$x=3$分别交于G，D两点，

知$x_G>0$且射线OE的方程为$y=-\dfrac{1}{3k}x(x\geqslant 0)$，

将其代入椭圆C的方程，解得$x_G=\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}}$，$x_D=3$；

由$|OD|$，$|OG|$，$|OE|$成等比数列知$|OG|^2=|OD|\bullet|OE|$，故$x_G^2=x_Dx_E$，

故$\left(\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}}\right)^2=3\bullet\left(-\dfrac{3kt}{3k^2+1}\right)\Rightarrow\dfrac{9k^2}{3k^2+1}=-\dfrac{9kt}{3k^2+1}\Rightarrow k=-t$；

因此，直线l的方程为$y=k(x-1)$，所以直线l恒过定点$N(1,0)$；

……（9分）

故当直线$l\perp MN\Rightarrow k=1$时，点$M(0,1)$到直线l距离的最大值$d_{\max}=|MN|=\sqrt{2}$.

……（10分）

（ii）由（i）得$G\left(\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},-\dfrac{1}{\sqrt{3k^2+1}}\right)$，

由直线BG与x轴垂直知$B\left(\dfrac{3k}{\sqrt{3k^2+1}},\dfrac{1}{\sqrt{3k^2+1}}\right)$，

代入$y=k(x-1)$整理得$3k^2-1=k\sqrt{3k^2+1}$，

故$3k^2-1>0$且$6k^4-7k^2+1=0$，

解得$k^2=\dfrac{1}{6}$（舍去）或$k^2=1$，所以$k=1$，

此时$B\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$G\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$关于$x$轴对称；……（13分）

此时直线l：$y=x-1$，故$A(0,-1)$；

由于$\triangle ABG$的外接圆的圆心在x轴上，可设$\triangle ABG$的外接圆的圆心为$(d,0)$，

因此$d^2+1=\left(d-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，解得$d=\dfrac{1}{2}$，

故$\triangle ABG$的外接圆的半径为$r=\sqrt{d^2+1}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

所以$\triangle ABG$的外接圆方程为$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{5}{4}$.……（17分）

19.（本小题满分 17 分）

（1）证明：因为数列 $\{a_n\}$ 同时满足 $P(2)$， $P(3)$ 性质，

所以当 $n>2$ 时， $a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}=a_n^4$ $(*)$，

当 $n>3$ 时， $a_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}=a_n^6$ $(**)$，……（2 分）

当 $n>3$ 时，由 $(*)$ 得： $a_{n-3}\cdot a_{n-2}\cdot a_n\cdot a_{n+1}=a_{n-1}^4$ $(***)$， $a_{n-1}\cdot a_n\cdot a_{n+2}\cdot a_{n+3}=a_{n+1}^4$ $(****)$，

将 $(***)$， $(****)$ 式代入 $(**)$ 式得： $\dfrac{a_{n-1}^4}{a_n\cdot a_{n+1}}\cdot a_{n-1}\cdot a_{n+1}\cdot\dfrac{a_{n+1}^4}{a_{n-1}\cdot a_n}=a_n^6$，

所以 $a_{n-1}^4\cdot a_{n+1}^4=a_n^8$，

又因为 $a_n>0$，所以 $a_{n-1}\cdot a_{n+1}=a_n^2$；

取 $n=4$，得 $a_3\cdot a_5=a_4^2$；

所以当 $n\geqslant 3$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列．……（4 分）

设 $q=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots$，

将 $n=4$ 代入 $(*)$ 式得 $a_2\cdot a_3\cdot a_5\cdot a_6=a_4^4$，所以 $a_2=\dfrac{a_3}{q}$；

将 $n=3$ 代入 $(*)$ 式得 $a_1\cdot a_2\cdot a_4\cdot a_5=a_3^4$，所以 $a_1=\dfrac{a_3}{q^2}$；

所以对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 为等比数列．……（6 分）

（2）解：①因为 $a_1=1$， $a_2=3$，所以 $q=3$，所以 $a_n=3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

……（7 分）

$S_n=\dfrac{1\times(1-3^n)}{1-3}=\dfrac{3^n-1}{2}$．……（8 分）

当 $3^{k-1}+1\leqslant i\leqslant 3^k-1$ 时， $b_i-b_{i-1}=2k$，所以 $\{b_i\}$ 为等差数列，

得到： $\sum\limits_{i=3^{k-1}+1}^{3^k-1}b_i=(2\cdot 3^{k-1}-1)(k+2k)+\dfrac{(2\cdot 3^{k-1}-1)(2\cdot 3^{k-1}-2)}{2}\times 2k=4k\cdot 3^{2k-2}-k$，

……（9 分）

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2S_n}=\sum\limits_{i=1}^{3^n-1}b_i=\sum\limits_{i=1}^{n}i+\sum\limits_{k=1}^{n}(4k\cdot 3^{2k-2}-k)=\dfrac{4}{9}\sum\limits_{k=1}^{n}(k\cdot 9^k)$，

……（10 分）

所以 $T_n=\frac{4}{9}[1\times 9+2\times 9^2+\cdots+(n-1)\cdot 9^{n-1}+n\times 9^n]$，

所以 $9T_n=\frac{4}{9}[1\times 9^2+2\times 9^3+\cdots+(n-1)\cdot 9^n+n\times 9^{n+1}]$，

两式相减得：$-8T_n=\frac{4}{9}(9^1+9^2+\cdots+9^n-n\times 9^{n+1})=\left(\frac{1}{2}-4n\right)\times 9^n-\frac{1}{2}$，

所以 $T_n=\frac{(8n-1)\times 9^n+1}{16}$. ……（12 分）

② $\sum_{i=1}^{n}\frac{8i-1}{16T_i-(3i+1)(8i-1)-1}<\frac{9}{40}$， ……（13 分）

理由如下：令 $c_n=\frac{3n+1}{9^n}$， $c_{n+1}-c_n=\frac{3n+4}{9^{n+1}}-\frac{3n+1}{9^n}=\frac{-24n-5}{9^{n+1}}<0$，

所以数列 $\{c_n\}$ 单调递减，所以 $c_n\leqslant\frac{4}{9}$，

所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{8i-1}{16T_i-(8i-1)(3i+1)-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{9^i-(3i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{9^i\cdot\left(1-\frac{3i+1}{9^i}\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{9^i\cdot(1-c_i)}$

$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{9^i\cdot\left(1-\frac{4}{9}\right)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{5}\times\frac{1}{9^{i-1}}=\frac{1}{5}\times\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{40}\left(1-\frac{1}{9^n}\right)<\frac{9}{40}$.

……（17 分）