黑龙江省哈尔滨市黑龙江实验中学 2025 届高三上学期第三次月考数学试卷

一、单选题（本大题共 8 小题）

1．已知集合 $M=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}\le 0\right.\right\}, Q=\{x\in \mathbf{N}\,\|x|\le 2\}$，则 $M\cap Q=$（　　）

A．$\{0,1,2\}$　　B．$[0,2]$

C．$(-2,2]$　　D．$\{1,2\}$

2．若 $(1-2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=5$，则 $|z|=$（　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\sqrt{10}$

3．已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则（　）

A．p 和 q 都是真命题　　B．$\neg p$ 和 q 都是真命题

C．p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D．$\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

4．已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，且 $\vec{b}\perp(2\vec{a}+\vec{b})$，则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

5．设 m，n 是空间两条不同的直线，α，β 是空间两个不同的平面.给出下列四个命题：

①若 $m//\alpha$，$n//\beta$，$\alpha//\beta$，则 $m//n$；

②若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\beta$，$m\not\subset\alpha$，则 $m//\alpha$；

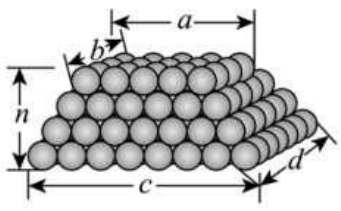
③若 $m\perp n$，$m\perp\alpha$，$\alpha//\beta$，则 $n//\beta$；

④若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m//\alpha$，$m\perp l$，则 $m\perp\beta$.

其中正确命题的个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．北宋数学家沈括在酒馆看见一层层垒起的酒坛，想求这些酒坛的总数，经过反复尝试，终于得出了长方台形垛积的求和公式.如图，由大小相同的小球堆成的一个长方台形垛积，第一层有 ab $(a=b+1)$ 个小球，第二层有 $(a+1)(b+1)$ 个小球，第三层有 $(a+2)(b+2)$ .....依此类推，最底层有 cd 个小球，共有 n 层.现有一个由小球堆成的长方台形垛积，共 7 层，小球总个数为 168，则该垛积的第一层的小球个数为（　）



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．已知函数 $f(x)=x^3+3x+1$，若关于 x 的方程 $f(\sin x)+f(m+\cos x)=2$ 有实数解，则 m 的取值范围为（　）

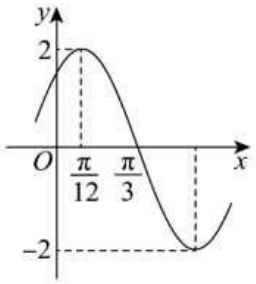
A．$\left[-1,\sqrt{2}\right]$　　B．$[-1,1]$　　C．$[0,1]$　　D．$\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

8．已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$，关于 x 的不等式 $f^2(x)-af(x)>0$ 有且只有三个正整数解，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$[\dfrac{5}{e^6},\dfrac{4}{e^5})$　　B．$\left(\dfrac{4}{e^5},\dfrac{3}{e^4}\right]$　　C．$(\dfrac{5}{e^6},\dfrac{4}{e^5}]$　　D．$\left[\dfrac{4}{e^5},\dfrac{3}{e^4}\right)$

二、多选题（本大题共 3 小题）

9．已知函数 f(x) = Asin(ωx+φ)（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，下列说法正确的是（　）



A．函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(-\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 对称

B．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 对称

C．该图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $y=2\sin 2x$ 的图象

D．函数 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

10．等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，则下列命题正确的是（　）

A．若 $a_3+a_7=4$，则 $S_9=18$

B．若 $a_1+a_2=5$，$a_3+a_4=9$，则 $a_7+a_8=17$

C．若 $S_{15}>0$，$S_{25}<0$，则 $a_1^2<a_9^2$

D．若 $S_9=S_{10}$，则 $S_{11}>0$

11．已知对任意的 $x<0$，不等式 $(ax-4)(x^2+b)\geq 0$ 恒成立，则下列说法正确的是（　　）

A．$a>0$　　B．$b<0$

C．a^2-b 的最小值为 8　　D．$\dfrac{1}{a}+b$ 的最小值为 $\dfrac{1}{64}$

三、填空题（本大题共 3 小题）

12．等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n，若 $S_2=-1$，$S_8=17S_4$，则 $S_6=$_____.

13．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle PBC$ 为等边三角形，$AC\perp AB$，$PA\perp BC$，$PA=2\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{6}$，则三棱锥的外接球的半径为_____.

14．把一个三阶魔方看成是棱长为 1 的正方体（图 1），若中间层旋转角 x（x 为锐角，如图 2 所示），记表面积增加量为 $S=f(x)$，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$_____，$S$ 的最大值是_____.



图1

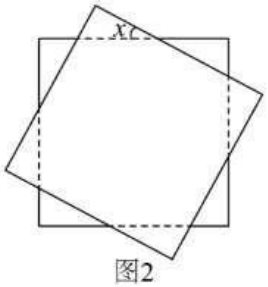


图2

四、解答题（本大题共 5 小题）

15．已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，且 $a_1=2$，$a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)记数列 $\left\{\frac{1}{a_na_{n+2}}\right\}$ 前 n 项的和为 S_n，求 S_n.

16．已知 $\triangle ABC$ 面积为 S，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，请从以下条件中任选一个，解答下列问题：

① $4S=\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)$；

② $c\sin A=\sqrt{3}a\cos\frac{A+B}{2}$；

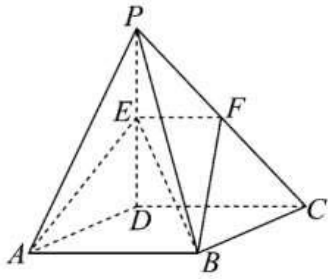
③ $c\sin(A+C)=b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$

(1)求角 C；

(2)若 $c=3$，D 是 AB 上的点，CD 平分 $\angle ACB$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$，求角平分线 CD 的长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17．如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，E 为 PD 的中点.



(1)设平面 ABE 与直线 PC 相交于点 F，求证：$EF \parallel CD$；

(2)若 $AB=4$，$\angle ADC=120^\circ$，$PD=6$，求棱锥 $E-PAB$ 的体积

18．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $S_n=2a_n-1$，$n\in \mathbf{N}^*$.数列 $\{b_n\}$ 满足 $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$，$n\in \mathbf{N}^*$，且 $b_1=1$.

(1)证明数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $d_n=a_{2n-1}\cdot\sqrt{b_{2n+1}}$，数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 M_n，对任意的 $n\in \mathbf{N}^*$，都有 $M_n>\frac{2n}{3}S_{2n}+a$，求实数 a 的取值范围；

(3)记 $c_m=\frac{1}{a_{m-1}}$，$\{c_m\}$ 的前 m 项和记为 T_m，是否存在 m，$t\in \mathbf{N}^*$，使得 $\frac{T_m-t}{T_{m+1}-t}=\frac{1}{c_t+1}$ 成立？若存在，求出 m，t 的值；若不存在，请说明理由.

19．已知函数 $f(x)=mx+\ln x(m\in \mathbf{R})$.

(1)当 $m=-1$ 时，求曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+x^2+\ln x$，求函数 $g(x)$ 极值点的个数；

(3)当 $m=1$ 时，若 $f(x)\le k(x+1)+b$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求证：$b\ge(e+1)(1-k)$.

----------分页符----------

参考答案

1. 【答案】A

【分析】通过解不等式求出 M,N 的元素，进而利用集合的交集运算即可求解.

【详解】不等式 $\frac{x-3}{x+1}\le 0$ 的解集等价于不等式组 $\begin{cases}(x-3)(x+1)\le 0\\ x+1\ne 0\end{cases}$ 的解集，

即 $\begin{cases}-1\le x\le 3,\\ x\ne -1,\end{cases}$ 得 $-1<x\le 3$，

又 $|x|\le 2$，解得 $-2\le x\le 2$，

于是 $M=\left\{x\left|\frac{x-3}{x+1}\le 0\right.\right\}=\{x|-1<x\le 3\}$，

$Q=\{x\in \mathbf{N}\,||x|\le 2\}=\{x\in \mathbf{N}\,|-2\le x\le 2\}=\{0,1,2\}$，

则 $M\cap Q=\{0,1,2\}$.

故选 A.

2. 【答案】D

【分析】设 $z=a+b\mathrm{i}$，利用复数乘法和复数相等的概念求出 a,b，再利用复数的模长公式求解即可.

【详解】设 $z=a+b\mathrm{i}$，

则 $(1-2\mathrm{i})(z-\mathrm{i})=(1-2\mathrm{i})\left[a+(b-1)\mathrm{i}\right]=a+(b-1)\mathrm{i}-2a\mathrm{i}+2(b-1)=5$，

所以 $\begin{cases}a+2(b-1)=5\\ b-1-2a=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\ b=3\end{cases}$，

所以 $z=1+3\mathrm{i}$，$|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

故选 D.

3. 【答案】B

【分析】对于两个命题而言，可分别取 $x=-1$ 、 $x=1$，再结合命题及其否定的真假性相反即可得解.

【详解】对于 p 而言，取 $x=-1$，则有 $|x+1|=0<1$，故 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题，

对于 q 而言，取 $x=1$，则有 $x^3=1^3=1=x$，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题，

综上，$\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选 B.

4. 【答案】C

【详解】因为 $\vec{b}\perp(2\vec{a}+\vec{b})$，所以 $\vec{b}\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$，有 $2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=0$，

因为 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，所以 $2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle+4=0$，

解得 $\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=-\frac{1}{2}$，$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{2\pi}{3}$，

故选：C.

5．【答案】B

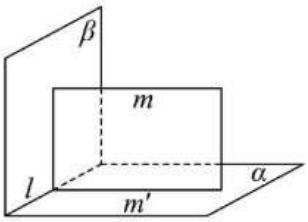
【详解】①若 $m//\alpha$，$n//\beta$，α//β，则 m 与 n 平行、相交或异面，故错误；

②若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\beta$，则 $m\subset\alpha$ 或 $m//\alpha$，又 $m\not\subset\alpha$，则 $m//\alpha$，故正确；

③若 $m\perp\alpha$，α//β，则 $m\perp\beta$，又 $m\perp n$，则 $n\subset\beta$ 或 $n//\beta$，故错误；

④假设 m' 是 m 在面 α 上的投影，$m//\alpha$，$m\perp l$，即 $m'\perp l$，$m'\subset\alpha$，

若 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=l$，$m'\subset\alpha$，得 $m'\perp\beta\Rightarrow m\perp\beta$，故正确．



故选：B

6．【答案】B

【详解】设各层的小球个数为数列 $\{a_n\}$，

由题意得 $a_1=ab$，$a_2=(a+1)(b+1)$，$a_3=(a+2)(b+2)$，$\cdots a_n=(a+n-1)(b+n-1)$，

因为 $a=b+1$，可得 $a_1=b(b+1)=b^2+b$，

$a_2=(b+1)(b+2)=b^2+3b+1\times2$，

$a_3=(b+2)(b+3)=b^2+5b+2\times3$，

L

$a_7=(b+6)(b+7)=b^2+13b+6\times7$，

则 $S_7=7b^2+49b+(1\times2+2\times3+\cdots+6\times7)=7b^2+49b+112$，

因为前 7 层小球总个数为 168，所以 $7b^2+49b+112=168$，即 $b^2+7b-8=0$，

解得 $b=1$ 或 $b=-8$（舍去），

所以 $a=b+1=2$，可得 $ab=2$，即该垛积的第一层的小球个数为 2 个．

故选：B.

7．【答案】D

【分析】设 $g(x)=f(x)-1=x^3+3x$，利用函数的单调性和奇偶性，把 $f(\sin x)+f(m+\cos x)=2$ 转化成 $m=-\sin x-\cos x$，再结合三角函数的性质求 m 的取值范围．

【详解】令 $g(x)=f(x)-1=x^3+3x$，则 $g'(x)=3x^2+3>0$ 恒成立，则 $g(x)$ 在 R 上单调递增，且 $g(x)$ 是奇函数．

由 $f(\sin x)+f(m+\cos x)=2$，得 $f(\sin x)-1=-\left[f(m+\cos x)-1\right]$，即

$g(\sin x)=g(-m-\cos x)$，

从而 $\sin x=-m-\cos x$，即 $m=-\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$．

故选 D.

【方法总结】设 $g(x)=f(x)-1=x^3+3x$，可得函数 $g(x)$ 为奇函数，利用导函数分析函数

$g(x)$ 的单调性，把 $f(\sin x)+f(m+\cos x)=2$ 转化成 $m=-\sin x-\cos x$，再求 m 的取值范围.

8．【答案】D

【详解】函数 $f(x)=\frac{x-1}{e^x}$ 的定义域为 R，求导得 $f'(x)=\frac{2-x}{e^x}$，

当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)<0$，

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

则 $f(x)_{max}=f(2)=\frac{1}{e^2}$，而 $f(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，

不等式 $f^2(x)-af(x)>0\Leftrightarrow f(x)\left[f(x)-a\right]>0$，

当 $a\le 0$ 时，$f(x)<a$ 或 $f(x)>0$，由 $f(x)>0$，得 $x>1$，

原不等式的整数解有无数个，不符合题意；

当 $a>0$ 时，$f(x)<0$ 或 $f(x)>a$，由 $f(x)<0$，得 $x<1$，无正整数解，

因此原不等式有且只有 3 个正整数解，等价于不等式 $f(x)>a$ 有且只有 3 个正整数解，

公众号：高中试卷君

3 个正整数解只能是 2,3,4，因此 $f(5)\le a<f(4)$，即 $\frac{4}{e^5}\le a<\frac{3}{e^4}$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{4}{e^5},\frac{3}{e^4}\right)$.

故选：D.

9．【答案】BC

【详解】由函数图象可得 $A=2$，周期 $T=4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}+\varphi\right)=2$，

所以 $2\times\frac{\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{1}{2}\pi,k\in Z$，则 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in Z$，

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，故 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

对于 A，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\ne 0$，故 A 错误；

对于 B，当 $x=-\frac{5\pi}{12}$ 时，$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\times 2+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2$，故 B 正确；

对于 C，该图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度可得 $f(x)=2\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin 2x$，故 C 正确；

对于 D，若 $x\in\left[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{3}\in[-\pi,0]$，此时函数不单调，故 D 错误；

故选：BC.

10．【答案】ABD

【分析】利用等差数列的性质，对于 A 项，$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_5+a_7)}{2}$，计算即可；对于 B 项，由已知计算数列公差，再求值即可；对于 C 项，结合数列单调性比较大小即可；对于 D 项，由 $a_1>0$，$a_{10}=0$，得 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$.

【详解】对于 A 项，等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1>0$，设公差为 d，

若 $a_5+a_7=4$，则 $S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_5+a_7)}{2}=18$，所以 A 正确；

对于 B 项，若 $a_1+a_2=5$，$a_3+a_4=9$，则 $(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=9-5=4d$，得 $d=1$，

所以 $a_7+a_8=a_1+a_2+12d=5+12=17$，所以 B 正确；

对于 C 项，若 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$，$S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}<0$，所以公差 $d<0$，

当 $a_9>0$ 时，有 $a_1>a_9>0$，则有 $a_1^2>a_9^2$，

当 $a_9<0$ 时，有 $a_7+a_9=2a_8>0$，得 $a_7>-a_9>0$，

所以 $a_1>a_7>-a_9>0$，则有 $a_1^2>a_9^2$，所以 C 错误；

对于 D 项，若 $S_9=S_{10}$，则 $a_{10}=0$，

因为 $a_1>0$，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$，所以 D 正确.

故选 ABD.

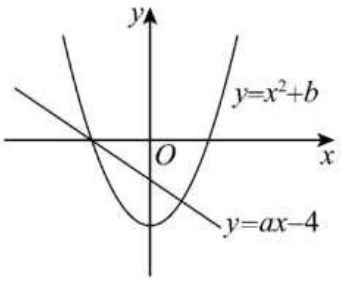
11. 【答案】BC

【详解】当 $b\geq 0$ 时，$x^2+b\geq 0$ 恒成立，

由对任意的 $x<0$，不等式 $(ax-4)(x^2+b)\geq 0$ 恒成立，

则 $ax-4\geq 0$ 对任意的 $x<0$ 恒成立，

所以 $a\leq\frac{4}{x}$ 对任意的 $x<0$ 恒成立，此时 a 不存在，所以 $b<0$，故 B 正确；



当 $b<0$ 时，作出函数 $y=ax-4$ 和 $y=x^2+b$ 的图象的示意图如图所示，

当 $a\geq 0$ 时，显然 $ax-4<0$ 恒成立，此时 $x^2+b\leq 0$ 不恒成立，

由对任意的 $x<0$，不等式 $(ax-4)(x^2+b)\geq 0$ 恒成立，

所以 $\begin{cases}a<0\\ \frac{4}{a}=-\sqrt{-b}\end{cases}$，故 A 错误；

所以 $b=-\frac{16}{a^2}(a<0)$，所以 $a^2-b=a^2+\frac{16}{a^2}\geq 2\sqrt{a^2\times\frac{16}{a^2}}=8$，

当且仅当 $a^2=\frac{16}{a^2}$，即 $a=-2$ 时取等号，所以 a^2-b 的最小值为 8，故 C 正确；

$\frac{1}{a}+b=\frac{1}{a}-\frac{16}{a^2}<0$，故 D 错误.

故选：BC.

12．【答案】 -21

【分析】运用等比数列的求和公式计算即可 。

【详解】等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和记为 S_n，$S_8=17S_4$，显然 $q\neq 1$.

则 $\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^4)(1+q^4)}{1-q}=17\times\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$，化简得 $1+q^4=17$，

解得 $q^4=16$，则 $q=\pm 2$，$S_2=-1=a_1+a_1q$.

当 $q=2$ 时，$a_1=-\frac{1}{3}$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{-\frac{1}{3}(1-64)}{-1}=-21$

当 $q=-2$ 时，$a_1=1$，$S_6=\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1(1-64)}{3}=-21$.

故答案为：-21.

13．【答案】3

【详解】取线段 BC 的中点 K，分别连接 AK,PK，因为 $\triangle PBC$ 为等边三角形，

则 $PB=PC=BC=2\sqrt{6}$，所以 $PK\perp BC$，因为 $PA\perp BC$，且 $PK\cap PA=P$，$PK,PA\subset$ 平面 APK，

所以 $BC\perp$ 平面 APK，因为 $AK\subset$ 平面 APK，

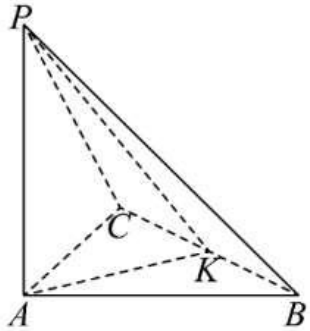
所以 $BC\perp AK$，又因为 BC 的中点为 K，则 AK 垂直平分 BC，因为 $AC\perp AB$，

所以 $\angle CAK=\angle BAK=45^\circ$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

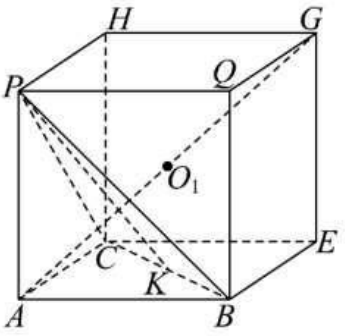
所以 $AC=AB=2\sqrt{3}$，因为 $PB=2\sqrt{6}$，则 $PA^2+AB^2=PB^2$，

所以 $PA\perp AB$，又因为 $PA\perp BC$，$AB,BC\subset$ 平面 ABC，$AB\cap BC\subset B$，所以 $PA\perp$ 平面 ABC，

则易知 PA，AB，AC 两两垂直且长度均为 $2\sqrt{3}$，



所以可将三棱锥补成正方体，如图所示三棱锥的外接球就是正方体的外接球，



设外接球的半径为 R，则 $R=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}\times\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}=3$.

故答案为：3.

14．【答案】 $\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$ $12-8\sqrt{2}$

【详解】显然这些个三角形全等，且增加的三角形个数为 16 个，

设三角形的斜边长为 a，则 $a\cos x+a\sin x+a=1$ ①，

所以 $S=f(x)=\frac{1}{2}\cdot a\cos x\cdot a\sin x\cdot 16=4a^2\sin 2x$，

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，由①式得，$a=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S=f(x)=4\times(\frac{3-\sqrt{3}}{3})^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$；

$S=8a^2\sin x\cos x$，

因为 $\sin x\cos x\le\frac{(\sin x+\cos x)^2}{4}$，当且仅当 $\sin x=\cos x$ 时，等号成立，

又由①可得，$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-a}{a}$，

所以 $S\le 8a^2\times\frac{(\sin x+\cos x)^2}{4}=2a^2\times\left(\frac{1-a}{a}\right)^2=2(1-a)^2$，

因为 x 为锐角，所以 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，

所以 $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-a}{a}\in(1,\sqrt{2}]$，所以 $a\in\left[\sqrt{2}-1,\frac{1}{2}\right)$，

所以 $1-a\in\left(\frac{1}{2},2-\sqrt{2}\right]$，所以 $(1-a)^2\le(2-\sqrt{2})^2=6-4\sqrt{2}$，

即 $S\le 12-8\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{8\sqrt{3}-12}{3}$，$12-8\sqrt{2}$

15．【答案】(1) $a_n=2n$

(2) $S_n=\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$

【详解】（1）因为 $a_{n+1}^2-2a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，

所以 $(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2(a_{n+1}+a_n)$，

因为 $\{a_n\}$ 各项均为正数，$a_n>0$，

所以 $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以首项为 2，公差为 2 的等差数列，

故 $a_n=2+(n-1)\times 2=2n$.

（2） $\frac{1}{a_na_{n+2}}=\frac{1}{2n\times 2(n+2)}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$，

所以 $S_n=\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{16}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$.

16. 【答案】(1) $C=\frac{\pi}{3}$；

(2) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

【分析】（1）若选①，由三角形的面积公式及余弦定理可得 $\tan C$ 的值，再由角 C 的范围，可得角 C 的大小；如选②，由正弦定理及二倍角公式可得 $\cos\frac{C}{2}$ 的值，再由角 C 的范围，可得角 C 的大小；若选③，由正弦定理及诱导公式可得角 C 的大小；

（2）由等面积法及余弦定理可得角平分线 CD 的值.

【详解】（1）若选① $4S=\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)$，

由三角形的面积公式及余弦定理可得 $4\times\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}\times 2ab\cos C$，

可得 $\tan C=\sqrt{3}$，又因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$；

若选② $c\sin A=\sqrt{3}a\cos\frac{A+B}{2}$，由正弦定理可得 $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos\frac{\pi-C}{2}$，

因为 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin A>0$，所以 $\sin C=\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}$，所以 $2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}$，

又 $C\in(0,\pi)$，则 $\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\frac{C}{2}\neq 0$，

所以 $\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，则 $C=\frac{\pi}{3}$；

若选③ $c\sin(A+C)=b\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，由正弦定理可得 $\sin C\sin B=\sin B\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $B\in(0,\pi)$，则 $\sin B>0$，所以 $\sin C=\cos\left(C-\frac{\pi}{6}\right)$，

即 $\sin C=\cos C\cos\frac{\pi}{6}+\sin C\sin\frac{\pi}{6}$，所以 $\cos C\cos\frac{\pi}{6}-\sin C\sin\frac{\pi}{6}=0$，

即 $\cos\left(C+\frac{\pi}{6}\right)=0$，

又 $C\in(0,\pi)$，则 $C+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，所以 $C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，则 $C=\frac{\pi}{3}$；

（2）因为 $c=3$，D 是 AB 上的点，CD 平分 $\angle ACB$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$，

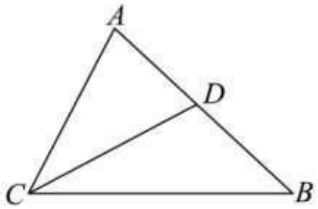
所以 $\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(a+b)\cdot CD\times\sin\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$，

可得 $ab=5$，$(a+b)\cdot CD=5\sqrt{3}$，

由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-3ab$，

即 $9=\left(\frac{5\sqrt{3}}{CD}\right)^2-3\times5$，解得 $CD=\frac{5\sqrt{2}}{4}$（负值已舍去），

即角平分线 CD 的长为 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$.



17. 【答案】(1)证明见解析

(2) $4\sqrt{3}$

【详解】（1）∵平面 ABE 与直线 PC 相交于点 F，

∴平面 $ABE\cap$ 平面 $PCD=EF$.

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB/\!/CD$，

∵ $AB\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，

∴ $AB/\!/$ 平面 PCD，

∵ $AB\subset$ 平面 ABE，平面 $ABE\cap$ 平面 $PCD=EF$，

∴ $AB/\!/EF$，故 $EF/\!/CD$.

（2）∵底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ADC=120^\circ$，∴ $\angle BAD=60^\circ$，♀ ABD 为正三角形，

又 $AB=4$，∴ $S_{♀ABD}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$，

∵ E 为 PD 的中点，∴ P 到平面 EAB 的距离与 D 到平面 EAB 的距离相等，

又 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，即 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，$DE=\frac{1}{2}PD=3$，

∴棱锥 $E-PAB$ 的体积为

$V_{E-PAB}=V_{P-EAB}=V_{D-EAB}=V_{E-ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot DE=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}\times 3=4\sqrt{3}$.

18. 【答案】(1) $a_n=2^{n-1}$， $b_n=n^2$

(2)实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$

(3)存在这样的 $\begin{cases}m=3\\t=3\end{cases}$，使得 $\frac{T_m-t}{T_{m+1}-t}=\frac{1}{c_t+1}$ 成立

【详解】（1）当 $n=1$ 时， $S_1=2a_1-1$，所以 $a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，由 $S_n=2a_n-1$ 可得： $S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，两式相减得： $a_n=2a_{n-1}$，

又 $a_1=1$，从而数列 $\{a_n\}$ 为首项 $a_1=1$，公比 $q=2$ 的等比数列.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$，

又 $nb_{n+1}-(n+1)b_n=n(n+1)$，两边同除以 $n(n+1)$ 得： $\frac{b_{n+1}}{n+1}-\frac{b_n}{n}=1$，

从而数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 为首项 $b_1=1$，公差 $d=1$ 的等差数列，

所以 $\frac{b_n}{n}=n$，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=n^2$；

（2）因为 $d_n=a_{2n-1}\cdot\sqrt{b_{2n+1}}$，结合（1）可得 $d_n=2^{2n-1-1}\cdot\sqrt{(2n+1)^2}=(2n+1)4^{n-1}$，

所以 $M_n=d_1+d_2+d_3+\cdots+d_n=3\times 4^0+5\times 4^1+7\times 4^2+\cdots+(2n+1)\times 4^{n-1}$ ①，

$4M_n=3\times 4^1+5\times 4^2+7\times 4^3+\cdots+(2n+1)\times 4^n$ ②，

①-②可得 $-3M_n=3\times 4^0+2\times 4^1+2\times 4^2+2\times 4^3+\cdots+2\times 4^{n-1}-(2n+1)\times 4^n$，

$-3M_n=3+2(4^1+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1})-(2n+1)\times 4^n=3+2\times\frac{4(1-4^{n-1})}{1-4}-(2n+1)\times 4^n$，

$M_n=-1+\frac{8(1-4^{n-1})}{9}+\frac{1}{3}(2n+1)\times 4^n=-\frac{1}{9}+\frac{(6n+1)\times 4^n}{9}$，

由（1）可得 $S_n=2a_n-1=2^n-1$，所以 $S_{2n}=2^{2n}-1=4^n-1$，

因为 $M_n>\frac{2n}{3}S_{2n}+a$，所以 $-\frac{1}{9}+\frac{(6n+1)\times 4^n}{9}>\frac{2n}{3}\times(4^n-1)+a$，

$a<-\frac{1}{9}+\frac{4^n}{9}+\frac{2n}{3}$，又 $-\frac{1}{9}+\frac{4^n}{9}+\frac{2n}{3}$ 单调递增，

所以 $\left(-\frac{1}{9}+\frac{4^n}{9}+\frac{2n}{3}\right)_{\min}=-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}=1$，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1)$；

（3）由（1）可得 $c_m=\frac{1}{a_{m-1}}=\frac{1}{2^{m-2}}$，所以 $T_m=\frac{2[1-(\frac{1}{2})^m]}{1-\frac{1}{2}}=4[1-(\frac{1}{2})^m]$，

由 $\frac{T_m-t}{T_{m+1}-t}=\frac{1}{c_t+1}$，可得 $\frac{T_{m+1}-t}{T_m-t}=c_t+1$，所以 $\frac{T_m-t+c_{m+1}}{T_m-t}=c_t+1$，

所以 $1+\frac{c_{m+1}}{T_m-t}=c_t+1$，所以 $\frac{c_{m+1}}{T_m-t}=c_t$，所以 $T_m-t=\frac{c_{m+1}}{c_t}=(\frac{1}{2})^{m+1-t}$，

$4-4\times(\frac{1}{2})^m-t=(\frac{1}{2})^m(\frac{1}{2})^{1-t}$，所以 $4-4\times(\frac{1}{2})^m-t=(\frac{1}{2})^m(\frac{1}{2})^{1-t}$，

所以 $(\frac{1}{2})^m=\frac{4-t}{4+(\frac{1}{2})^{1-t}}$，因为 $(\frac{1}{2})^m>0, 4+(\frac{1}{2})^{1-t}>0$，

所以 $4-t>0$，所以 $t\in\{1,2,3\}$，

当 $t=1$ 时，解得 $(\frac{1}{2})^m=\frac{3}{5}$，解得 $m=\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{5}\notin Z$（舍去），

当 $t=2$ 时，解得 $(\frac{1}{2})^m=\frac{1}{3}$，解得 $m=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}\notin Z$（舍去），

当 $t=3$ 时，解得 $(\frac{1}{2})^m=\frac{1}{8}$，解得 $m=3\in Z$.

所以存在这样的 $\begin{cases}m=3\\t=3\end{cases}$，使得 $\frac{T_m-t}{T_{m+1}-t}=\frac{1}{c_t+1}$ 成立.

19. 【答案】(1) $y=-1$

(2)答案见解析

(3)证明见解析

【分析】（1）求出导函数，利用导数的几何意义求出切线斜率，即可求出切线方程；

（2）求导，分类讨论求解函数的单调区间，根据极值点的概念即可判断极值点个数；

（3）由题意 $x+\ln x-k(x+1)\le b$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，构造函数 $h(x)=x+\ln x-k(x+1)$，分类讨论研究函数的单调性，参变分离，构造函数，利用导数法求解最值即可证明.

【详解】（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)=-x+\ln x$，$f'(x)=-1+\frac{1}{x}$，

所以 $f(1)=-1$，$f'(1)=0$，所以曲线 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-1$.

（2）$g(x)=f(x)+x^2+\ln x=2\ln x+mx+x^2$，$g'(x)=2x+m+\frac{2}{x}=\frac{2x^2+mx+2}{x}(x>0)$，

对于方程 $2x^2+mx+2=0$，$\Delta=m^2-16$，

①当 $-4\le m\le 4$ 时，$\Delta=m^2-16\le 0$，$g'(x)\ge 0$，此时 $g(x)$ 没有极值点；

②当 $m<-4$ 时，方程 $2x^2+mx+2=0$ 的两根为 x_1，x_2，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_1+x_2=-\frac{m}{2}>0$，$x_1x_2=1$，$0<x_1<x_2$，当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x_1<x<x_2$ 时，$f'(x)<0$，此时 x_1，x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点；

③当 $m>4$ 时，方程 $2x^2+mx+2=0$ 的两根为 x_3，x_4，且 $x_3+x_4=-\frac{m}{2}<0$，$x_3x_4=1$，

故 $x_3<0$，$x_4<0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 没有极值点；

综上，当 $m<-4$ 时，函数 $g(x)$ 有两个极值点；

当 $m \geq -4$ 时，函数 $g(x)$ 没有极值点.

（3）证明：由 $f(x) \leq k(x+1)+b$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

得 $x+\ln x-k(x+1) \leq b$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

设 $h(x)=x+\ln x-k(x+1)$，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x}-k$，

当 $k \leq 1$ 时，$h'(x) \geq 0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $b \geq h(x)$ 显然不恒成立.

当 $k>1$ 时，若 $x \in \left(0, \dfrac{1}{k-1}\right)$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{k-1}\right)$ 上单调递增，

若 $x \in \left(\dfrac{1}{k-1}, +\infty\right)$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{k-1}, +\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{k-1}\right)=\ln\dfrac{1}{k-1}+\dfrac{1}{k-1}-k\left(\dfrac{1}{k-1}+1\right)=-\ln(k-1)-k-1$，

所以 $-\ln(k-1)-k-1 \leq b$.

要证 $b \geq (e+1)(1-k)$ 成立，因为 $k>1$，即证明 $\dfrac{b}{k-1} \geq -e-1$.

因为 $\dfrac{b}{k-1} \geq \dfrac{-\ln(k-1)-k-1}{k-1}=\dfrac{-\ln(k-1)-(k-1)-2}{k-1}$，

令 $k-1=t(t>0)$，$p(t)=\dfrac{-\ln t-t-2}{t}$，$p'(t)=\dfrac{\ln t+1}{t^2}$，令 $p'(t)=0$ 得 $t=\dfrac{1}{e}$，

当 $t \in \left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ 时，$p'(t)<0$，$p(t)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，

当 $t \in \left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ 时，$p'(t)>0$，$p(t)$ 在 $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $p(t)_{\min}=p\left(\dfrac{1}{e}\right)=-e-1$，所以 $\dfrac{b}{k-1} \geq -e-1$，所以 $b \geq (e+1)(1-k)$ 成立.