雅安市高2022级第二次诊断性考试试题

数　学

本试卷满分150分，答题时间120分钟

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名，考号用0.5毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确.

2.选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上；非选择题用0.5毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡的对应框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸，试题卷上答题无效.

3.考试结束后，将答题卡收回.

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|1<x\le 6\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{6\}$　　B. $\{2,4\}$　　C. $\{2,4,6\}$　　D. $\{1,2,4,6\}$

2. 下列函数中为奇函数的是

A. $y=x+1$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\tan 2x$　　D. $y=\sqrt{3x}$

3. 已知 $(1+\mathrm{i})z=4$，则 $z=$

A. $2+2\mathrm{i}$　　B. $2-2\mathrm{i}$　　C. $-2+2\mathrm{i}$　　D. $-2-2\mathrm{i}$

4. 已知向量 $\vec{a}=(3,-4)$，$\vec{b}=(x,2)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x 的值为

A. $\frac{8}{3}$　　B. $-\frac{8}{3}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $-\frac{3}{8}$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_7=10$，$a_5a_9=65$，则 $\frac{S_n}{n}=$

A. $14-n$　　B. $n-2$　　C. $12-n$　　D. $n-4$

6. 已知正四棱锥的所有顶点都在同一个球面上，若该棱锥的高为1，底面边长为2，则球的体积为

A. 9π　　B. $\frac{9}{2}\pi$　　C. $\frac{9}{4}\pi$　　D. $\frac{27}{8}\pi$

7. 已知双曲线渐近线的斜率的绝对值大于 $\sqrt{3}$，则该双曲线离心率的取值范围是

A. $(2,+\infty)$　　B. $\left(1,\frac{4}{3}\right)$　　C. $\left(1,\frac{4}{3}\right)\cup(2,+\infty)$　　D. $\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\cup(2,+\infty)$

8. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$，对于任意 $x\ge 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-a-2b)\ge 0$，则

A. $a>0$　　B. $a<0$　　C. $b>0$　　D. $b<0$

二、选择题（本大题共3小题，每小题6分，共18分）在每小题给出的四个选项中，有多个符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知函数 $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$，下列说法正确的是

A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{\pi}{9}$ 对称

C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{7\pi}{18},\frac{13\pi}{18}\right]$ 上单调递增

D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{9}$ 个单位长度后得到 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=-\sin 3x$

10. 已知点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$，动点 P 满足 $|PA|=2|PB|$，记点 P 的轨迹为曲线 C，则下列说法中正确的是

A. 曲线 C 的方程为 $(x-3)^2+y^2=4$

B. $|AP|$ 的最大值为 6

C. 点 B 到直线 AP 的距离的最大值为 2

D. 设直线 BP 与曲线 C 的另一个交点为 Q，则 $\angle BAP=\angle BAQ$

11. 某次考试结束后，甲、乙两人去询问分数. 老师对两人说：你们的分数相同，是一个两位的素数，并将这个素数的十位、个位数字分别告诉甲、乙. 两人写出所有两位素数（11，13，17，19，23，29，31，37，41，43，47，53，59，61，67，71，73，79，83，89，97）后，对话如下：

甲：我不知道这个素数是多少.

乙：我早就知道你不可能知道.

甲：我还是不知道.

乙：我也早就知道你刚才不可能知道.

甲：我现在知道了.

则这个素数

A. 不是 97　　B. 十位数字不是 3，6

C. 是 43　　D. 是 73

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）将答案填在答题卡相应的横线上.

12. 椭圆 C 上一点 P 到其两焦点 $F_1(-8,0)$，$F_2(8,0)$ 的距离之和等于 20，则椭圆 C 的标准方程为_____.

13. $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数为_____.

14. 在公比不为1的等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{2025}=1$，且有 $a_1a_2\cdots a_5=a_1a_2\cdots a_{m-5}(m\in\mathbf{N}^*,\ m>5)$ 成立，则 $m=$_____.

四、解答题(本大题共5小题，共77分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）国产动画电影《哪吒之魔童闹海》现已登顶全球动画电影票房榜榜首，并刷新多项世界票房纪录. 下表截取了该电影上映后10日的单日累计票房：

日期	1月29日	1月30日	1月31日	2月1日	2月2日	2月3日	2月4日
日期代码 x	1	2	3	4	5	6	7
累计票房 y（亿元）	4.88	9.68	15.87	23.19	31.32	39.76	48.43

续表

日期	2月5日	2月6日	2月7日
日期代码 x	8	9	10
累计票房 y（亿元）	54.92	60.78	66.20

（1）请根据这10日数据：

（i）计算 x，y 的平均值 $\overline{x}$，$\overline{y}$；

（ii）求 y 关于 x 的经验回归方程；

（2）用上面求出的经验回归方程预测该电影上映半年后的票房，得到的结果合理吗？为什么？

附：

参考公式：经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2},\quad \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x};$$

参考数据：$\sum_{i=1}^{10}y_i=355.03$，$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=594.495$.

16.（15分）记锐角△ABC的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$a\sin 2C=\sqrt{3}c\sin A$.

（1）求角 C；

（2）若 $b=1$，求△ABC 面积的取值范围.

17.（15分）已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x+bx$.

（1）若 $a=0$，$b=1$，求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

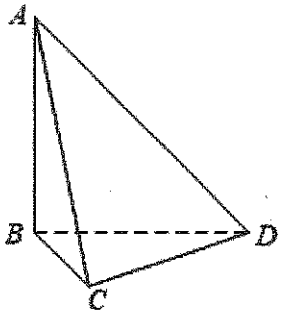
（2）若 $b=0$，证明：当 $a>0$ 时，$f(x)\geq 2+\ln a$.

18.（17分）如图，已知四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp BD$，$BC\perp CD$，$AD=2BC=2CD=4$，平面 $ABC\perp$ 平面 ACD.

（1）求证：$AB\perp CD$；

（2）在线段 BD 上是否存在一点 E，使得直线 CE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，若存在，求出 $\frac{BE}{BD}$ 的值，若不存在，请说明理由；

（3）在此四面体中任取两条棱，记它们互相垂直的概率为 P_1；任取两个面，记它们互相垂直的概率为 P_2；任取一个面和不在此面上的一条棱，记它们互相垂直的概率为 P_3. 试比较 P_1,P_2,P_3 的大小.



19.（17分）已知抛物线 Γ：$y=x^2$.

（1）若点 $P(x_0,y_0)$ 为抛物线 Γ 上一点，证明：抛物线 Γ 在点 P 处的切线方程为 $\frac{1}{2}(y_0+y)=x_0x$；

（2）设 E，F 是抛物线 Γ：$y=x^2$ 上两点，过点 E，F 分别作 Γ 的切线交于点 C，点 A，B 分别在线段 EC，CF 的延长线上，直线 AB 与抛物线 Γ 相切于点 G.

（i）证明：$\frac{|EC|}{|CA|}=\frac{|CF|}{|FB|}=\frac{|AB|}{|BG|}$；

（ii）记 $\triangle EFG$，$\triangle ABC$ 的面积分别为 S_1，S_2，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.