雅安市高中2022级第二次诊断性考试

数学参考答案

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1.C　　2.C　　3.B　　4.A　　5.D　　6.B　　7.D　　8.B

二、选择题（本大题共3小题，每小题6分，共18分）

9.ACD　　10.ABD　　11.ABC

（11题解析）将所有两位素数列表如下：

	1	3	7	9
1	11	13	17	19
2		23		29
3	31		37	
4	41	43	47	
5		53		59
6	61		67	
7	71	73		79
8		83		89
9			97	

第一句：甲不知道说明不是97，A选项正确；
第二句：乙笃定甲不知道，说明个位数不是7，排除17，37，47，67，
第三句：甲回答还是不知道，说明十位数不是3，6，排除31，61，B选项正确；
第四句：乙仍然笃定刚才甲不知道，说明个位数不是1，
第五句：甲回答知道了，说明该素数十位所在行划去1，7列后剩唯一素数，只有43满足条件，C选项正确，D选项错误.

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）

12. $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$　　13.135　　14.10或4049

（注：第14题，若只填写10或只填写4049，给3分）

四、解答题(本大题共5小题，共77分)

15.解：（1）（i）$\overline{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}=5.5$ ……2 分

$\overline{y}=\frac{\sum_{i=1}^{10}y_i}{10}=\frac{355.03}{10}=35.503$ ……4 分

（ii）因为 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\overline{x}^2=385-10\times5.5^2=82.5$ ……6 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-n\overline{x}^2}=\frac{594.495}{82.5}=7.206$ ……8 分

因此 $\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=35.503-7.206\times5.5=-4.13$ ……9 分

故 $\hat{y}=7.206x-4.13$ ……10 分

（2）不合理. ……11分

当 $x=180$ 时，y 的值高达千亿，显然不符合实际情况，误差非常大，所以不合理.

……13分

注：用其他 x 的值计算后指出误差较大，给满分；
用自然语言说明建立的模型自变量的取值范围决定了模型的适用范围，通常不能超出太多，否则会出现较大的误差，给满分；
用自然语言说明结合生活实际，应建立非线性回归模型（不必指出具体模型），给满分.

16.（1）由正弦定理和二倍角公式得 $\sin A\cdot2\sin C\cos C=\sqrt{3}\sin C\sin A$， 4分

因为在三角形中 $\sin A\neq0$，$\sin C\neq0$，所以 $\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\dfrac{\pi}{6}$. 6分

（2）由面积公式可得 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{4}a$，

又由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

可得 $a=\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sin(B+\frac{\pi}{6})}{\sin B}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2\tan B}$， 9分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{4}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2\tan B})=\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{8\tan B}$，

因为锐角三角形中，$\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\\0<C<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，所以 $\begin{cases}0<\dfrac{5\pi}{6}-B<\dfrac{\pi}{2}\\0<B<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$，解得 $\dfrac{\pi}{3}<B<\dfrac{\pi}{2}$， 12分

所以 $\tan B>\sqrt{3}$，所以 $0<\dfrac{1}{\tan B}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\Delta ABC}\in(\dfrac{\sqrt{3}}{8},\dfrac{\sqrt{3}}{6})$. 15分

17.（1）当 $a=0,b=1$ 时，$f(x)=-\ln x+x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

$\because f'(x)=-\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{x-1}{x}$ ……..2分

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $(0,1)$，单调增区间为 $(1,+\infty)$

$f(x)$ 的极小值为 $f(1)=1$，无极大值. ……..6分

（2）当 $b=0$ 时，$f(x)=ae^{x}-\ln x(x>0)$，

$\therefore f'(x)=ae^{x}-\dfrac{1}{x}$，

令 $g(x)=ae^{x}-\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=ae^{x}+\dfrac{1}{x^{2}}>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $y=f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增 ……..9分

$\because$ 当 $x\to 0^{+}$ 时，$f'(x)\to-\infty$，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=ae^{\frac{1}{a}}-a=a\left(e^{\frac{1}{a}}-1\right)>0$

$\therefore\exists x_0\in(0,+\infty)$ 使得 $f'(x_0)=ae^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增 ……..11分

$\therefore f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极小值，也是最小值，最小值为

$f(x_0)=ae^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+x_0+\ln a\geq 2+\ln a$，

当且仅当 $x_o=\dfrac{1}{x_0}$ 即 $x_o=1$ 时等号成立，

$\therefore f(x)\geq 2+\ln a$. ……..15分

18.（1）过 B 作 $BH\perp AC$，交 AC 于 H，

因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$，$BH\subset$ 平面 ABC，

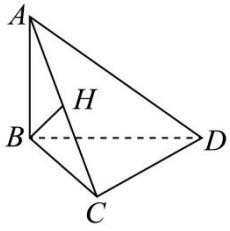
所以 $BH\perp$ 平面 ACD ……..2分

又 $CD\subset$ 平面 ACD，所以 $BH\perp CD$．

又因为 $BC\perp CD$，$BH\cap BC=B$，$BH\subset$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $CD\perp$ 平面 ABC． ……..4分

又 $AB\subset$ 平面 ABC，所以 $CD\perp AB$． …... …… ……..5分



（2）由（1）得 $CD\perp AB$，又 $BD\perp AB$，$CD\cap BD=D$，$CD,BD\subset$ 平面 BCD，

所以 $AB\perp$ 平面 BCD，

以 B 为原点，过 B 作 BD 的垂线为 x 轴，BD、BA 所在的直线分别为 y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $B-xyz$， …... …… ……..6分

因为 $AD=2BC=2CD=4$，

故 $BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=2\sqrt{2},AB=\sqrt{AD^2-BD^2}=2\sqrt{2}$，

所以 $B(0,0,0),A\left(0,0,2\sqrt{2}\right),C\left(\sqrt{2},\sqrt{2},0\right),D\left(0,2\sqrt{2},0\right)$ … ……..7分

所以 $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},2\sqrt{2}\right),\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2},0\right)$．

设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}z=0\\ -\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-y=0\end{cases}$， … ……..8分

令 $z=1$，则 $x=y=1$，即平面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}=(1,1,1)$． … ……..9分

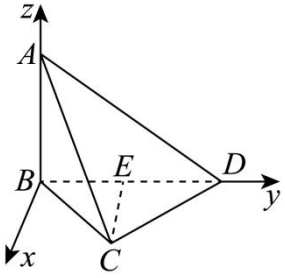
设在线段 BD 上存在一点 E 使得 $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BD}$，且此时直线 CE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\left(-\sqrt{2},2\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2},0\right)$ … ……..10分

则 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{CE},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CE}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|-\sqrt{2}+2\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+\left(2\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2}\right)^2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，即在线段 BD 上存在一点 E 使得直线 CE 与平面 ACD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，

且 $\frac{BE}{BD}=\frac{1}{2}$. … ……..12分



（3）6条棱中任选2条，共有 $C_6^2=15$ 种情况，其中相互垂直的棱有5对：

$AB\perp BC,AB\perp CD,AB\perp BD,AC\perp CD,BC\perp CD$，故 $P_1=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$； ……..13分

4个面任选2个面，共有 $C_4^2=6$ 种情况，其中相互垂直的面有3对：

平面 $ABC\perp$ 平面 BCD，平面 $ABC\perp$ 平面 ACD，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，故 $P_2=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

……..14分

任选1个面和不在此面上的1条棱，先从4个平面任选1个平面，共有 $C_4^1=4$ 种情况，

再从不在此面上的3条棱中选1条，有 $C_3^1=3$ 种情况，故共有 $C_3^1C_4^1=12$ 种情况，

其中满足垂直关系的有2种，分别为平面 BCD 和棱 AB，平面 ABC 和棱 CD，

故 $P_3=\dfrac{2}{12}=\dfrac{1}{6}$，……..16分

所以 $P_3<P_1<P_2$.……..17分

19.（1）解法 1：设在 P 处的切线方程为 $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$，与 Γ：$y=x^2$ 联立得：

$x^2-kx+kx_0-y_0=0$，由题意，该方程的判别式 $\Delta=k^2-4\left(kx_0-y_0\right)=0$ ……2 分

因为 P 在抛物线 Γ 上，所以 $y_0=x_0^2$，代入上式得 $k^2-4kx_0+4x_0^2=\left(k-2x_0\right)^2=0$

所以 $k=2x_0$，切线方程为 $y-y_0=2x_0\left(x-x_0\right)$，整理得 $\dfrac{1}{2}\left(y_0+y\right)=x_0x$，即证 ……4 分

解法 2：对二次函数 $y=x^2$ 求导，得：$y'=2x$，所以在点 P 处的切线斜率 $k=2x_0$ ……2 分

所以切线方程为 $y-y_0=2x_0\left(x-x_0\right)$，整理得 $\dfrac{1}{2}\left(y_0+y\right)=x_0x$，即证. ……4 分

（2）（i）令 $E\left(x_1,\ x_1^2\right)$，$F\left(x_2,\ x_2^2\right)$，$G\left(x_3,\ x_3^2\right)$，则切线 CE，CF，AB 的方程分别为：

$\dfrac{1}{2}\left(x_1^2+y\right)=x_1x$，$\dfrac{1}{2}\left(x_2^2+y\right)=x_2x$，$\dfrac{1}{2}\left(x_3^2+y\right)=x_3x$

分别联立，解得 $x_c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$x_A=\dfrac{x_1+x_3}{2}$，$x_B=\dfrac{x_2+x_3}{2}$ ……7 分

所以 $\dfrac{EC}{CA}=\dfrac{x_C-x_E}{x_A-x_C}=\dfrac{\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\dfrac{x_3-x_2}{2}}=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}$ ……9 分

同理：$\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\dfrac{x_3-x_2}{2}}=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}$，$\dfrac{AB}{BG}=\dfrac{\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\dfrac{x_3-x_2}{2}}=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}$，故 $\dfrac{EC}{CA}=\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{AB}{BG}$ ……10 分

注：也可解出 y_c，y_A，y_B，进一步解出 $\dfrac{EC}{CA}=\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{AB}{BG}=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}$

（ii）由（i）：令 $\dfrac{EC}{CA}=\dfrac{CF}{FB}=\dfrac{AB}{BG}=\lambda=\dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_2}$

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{S_{\triangle AEG}-S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CEF}-S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle AEG}}{S_{\triangle ABC}}-\dfrac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle ABC}}-\dfrac{S_{\triangle BGF}}{S_{\triangle ABC}}-1$ ……13 分

$=\dfrac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}-\lambda\cdot\dfrac{\lambda}{\lambda+1}-\dfrac{1}{\lambda}\cdot\dfrac{1}{\lambda+1}-1$ ……15 分

$=\dfrac{\left(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1\right)-\lambda^3-1-\left(\lambda^2+\lambda\right)}{\lambda\left(\lambda+1\right)}=\dfrac{2\lambda^2+2\lambda}{\lambda\left(\lambda+1\right)}$

$=2$ ……17 分

注：指出 $\dfrac{S_1}{S_2}=2$，给2分.