2025 届高三第二学期 4 月质量检测·数学

参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	C	A	D	A	D
题号	9	10	11					
答案	ABD	ACD	BCD					

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】C

【解析】易知 $B=\{x|x>1\}$,所以 $A\cap B=\{2,3\}$,故选 C.

2.【答案】D

【解析】$z=\dfrac{1-\mathrm{i}^3}{\mathrm{i}^5}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}$,$\bar{z}=1+\mathrm{i}$,$z+\bar{z}=1-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}=2$,故选 D.

3.【答案】B

【解析】$\tan\theta\sin\theta=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=1$,所以 $\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$,解得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$或 $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$(舍),故选 B.

4.【答案】C

【解析】由$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$ 可知,$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\boldsymbol{a}$,所以 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的坐标为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{2}=(1,1)$,故选 C.

5.【答案】A

【解析】$P(B)=1-P(\bar{B})=\dfrac{3}{4}$,$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$,所以 $P(\bar{A}B)=\dfrac{1}{2}$,$P(\bar{A}|B)=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(B)}=\dfrac{2}{3}$,故选 A.

6.【答案】D

【解析】根据题意得 $V=\dfrac{1}{3}h\pi(r^2+4r^2+2r^2)=\dfrac{7}{3}\pi r^2h$,$\because 2r+h=8$,$\therefore V(r)=\dfrac{7}{3}\pi r^2(8-2r)=\dfrac{7}{3}\pi(8r^2-2r^3)$,$V'(r)=\dfrac{7}{3}\pi\cdot(16r-6r^2)$,当 $r\in\left(0,\dfrac{8}{3}\right)$时,$V'(r)>0$ 单调递增,$r\in\left(\dfrac{8}{3},4\right)$时,$V'(r)<0$ 单调递减,$\therefore$ 当 $r=\dfrac{8}{3}$时,$V(r)$取得最大值,此时 $h=8-\dfrac{16}{3}=\dfrac{8}{3}$,圆台母线与底面所成角的正切值为 1,故选 D.

7.【答案】A

【解析】$f(x)=x+[x]=\dfrac{5x}{2}-1$,即$[x]=\dfrac{3x}{2}-1$,因为 $x-1<[x]\leqslant x$,所以可得 $x-1<\dfrac{3x}{2}-1\leqslant x$,即 $0<x\leqslant 2$,当 $x=2$ 时,满足题意;当 $1\leqslant x<2$ 时,即 $1=\dfrac{3x}{2}-1$,解得 $x=\dfrac{4}{3}$,满足题意;当 $0<x<1$ 时,即 $0=\dfrac{3x}{2}-1$,解得 $x=\dfrac{2}{3}$,满足题意,所有实数根之和为 $2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=4$. 故选 A.

8.【答案】D

【解析】当 $n=1$ 时,$|a_1|=|S_1|=1$,设 $a_1=-1$,$n\geqslant 2$ 时,$|S_n-S_{n-1}|\leqslant|S_n|+|S_{n-1}|=2n-1$,

即 $|a_n|\leqslant 2n-1$,所以 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|\leqslant 1+3+\cdots+19=100$,$a_n=(2n-1)(-1)^n$ 时取等,故 D 项错误.

若 $a_n=(2n-1)(-1)^n$,$n\geqslant 4$,且 $a_1=1$,$a_2=1$,$a_3=-5$,此时 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=1+1+5+7+\cdots+19=98$;

若 $a_n=(2n-1)(-1)^n$,$n\geqslant 4$,且 $a_1=1$,$a_2=-3$,$a_3=-1$,此时 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|=1+3+1+7+9+\cdots+19=96$,故 A,B,C 正确,故选 D.

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9.【答案】ABD

【解析】对于 A:$f(x)$和 $g(x)$的最小正周期均为 π,选项 A 正确;

对于 B:当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$2x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以 $f(x)$单调递增,当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$2x-\dfrac{\pi}{3}\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$,所以$g(x)$单调递增,选项 B 正确;

对于 C:$f(x)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度所得函数为 $f\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$,选项 C 错误;

对于 D：$f\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=g(x)$，选项 D 正确；故选 ABD.

10.【答案】ACD

【解析】设直线 AB：$x=ty+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\therefore\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2-4ty-4=0\Rightarrow y_1y_2=-4$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{y_1^2y_2^2}{16}+y_1y_2=1-4=-3$，A 正确；

$\therefore|AB|=\sqrt{1+t^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{2}\times\sqrt{32}=8$，设 M 为 AB 中点，易知 $M(3,2)$，所以以 AB 为直径的圆截 y 轴所得弦长为 $2\sqrt{4^2-3^2}=2\sqrt{7}$，B 错误；

过 A,B 分别作 l 的垂线，垂足分别为 M,N，因为 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$，所以 $2|AM|=|BN|$，由抛物线的定义可知，$2|AF|=|BF|$，C 选项正确；

设 l 与 x 轴交于点 Q，因为 $|OQ|=|OF|$，所以不妨设 $\tan\angle FPQ=2\tan\angle OPQ=2t>0$，所以 $\tan\angle OPF=\tan(\angle FPQ-\angle OPQ)=\frac{2t-t}{1+2t^2}=\frac{t}{1+2t^2}\leqslant\frac{t}{2\sqrt{2}t}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，D 正确；故选 ACD.

11.【答案】BCD

【解析】对于 A 选项，$\because f'(x)=3(x^2-a)$，$\therefore$ 当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 无极值点；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $[-\sqrt{a},\sqrt{a}]$ 上单调递减，此时 $f(x)$ 有两个极值点，故 A 选项错误；

对于 B 选项，当 $a>0$，$x>0$ 时，$f(x)\geqslant f(\sqrt{a})=a^3-2a^{\frac{3}{2}}=(a^{\frac{3}{2}}-1)^2-1\geqslant-1$，故 B 选项正确；

对于 C 选项，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 至多只有一个零点，不合题意；当 $a>0$ 时，由单调性可知必然有 $f(-\sqrt{a})>0$，$f(\sqrt{a})<0$，解得 $a\in(0,\sqrt[3]{4})$. 而当 $a\in(0,\sqrt[3]{4})$ 时，$f(-1-a)=-1$，$f(\sqrt{3a})=a^3>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(-1-a,-\sqrt{a})$，$(-\sqrt{a},\sqrt{a})$，$(\sqrt{a},\sqrt{3a})$ 中分别各有一个零点，故 C 选项正确；

对于 D 选项，$\because f(s-t)+f(s+t)-2f(s)=6st^2$，$\therefore f(s-t)+f(s+t)=2f(s)$ 等价于 $s=0$ 或 $t=0$，$\therefore st=0$，故 D 选项正确. 综上，应选 BCD 选项.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.【答案】5

【解析】易知 $m<0$，$m+1>0$，$\frac{y^2}{\frac{1}{m+1}}-\frac{x^2}{-\frac{1}{m}}=1$，$2^2=4=-\frac{m}{m+1}$，解得 $m=-\frac{4}{5}$，所以 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{\frac{5}{4}}=1$，所以 C 的焦距为 $2\sqrt{5+\frac{5}{4}}=5$.

13.【答案】1

【解析】易知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为偶函数，若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有 3 个公共点，则 $f(0)=g(0)$，所以 $2|a|=2$，解得 $a=\pm1$. 当 $a=-1$ 时，$f(x)=2-|x|$，不符题意；易验证当 $a=1$ 时，$f(x)=|x|+2$，符合题意.

14.【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】设正三棱锥 $D-ABC$ 的底面 $\triangle ABC$ 边长 $|AB|=2a$，D 到平面 ABC 的距离为 h，所以 $(h-1)^2+\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2=1$，$a^2=\frac{3}{4}(2h-h^2)$，所以 $\frac{a^2}{h^2}=\frac{3}{4}\left(\frac{2}{h}-1\right)$，$S_{表}=\sqrt{3}a^2+3\times\frac{1}{2}\times2a\times\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}}=\sqrt{3}a(a+\sqrt{3h^2+a^2})$，$V=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}a^2h=\frac{1}{3}S_{表}\times r$，

所以 $r=\frac{\sqrt{3}a^2h}{S_{表}}=\frac{\sqrt{3}a^2h}{\sqrt{3}a(a+\sqrt{3h^2+a^2})}=\frac{ah}{a+\sqrt{3h^2+a^2}}=\frac{h}{1+\sqrt{\frac{3h^2}{a^2}+1}}=\frac{h}{1+\sqrt{\frac{4h}{2-h}+1}}$

$=\frac{h}{1+\sqrt{\frac{2+3h}{2-h}}}=\frac{h\sqrt{2-h}}{\sqrt{2-h}+\sqrt{2+3h}}=\frac{h\sqrt{2-h}(\sqrt{2+3h}-\sqrt{2-h})}{4h}=\frac{\sqrt{2-h}(\sqrt{2+3h}-\sqrt{2-h})}{4}$，

不妨设 $m=\sqrt{2-h}$，$n=\sqrt{2+3h}$，所以 $3m^2+n^2=8$，所以 $r=\frac{m(n-m)}{4}$，设 $m=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cos\theta$，$n=2\sqrt{2}\sin\theta$，

所以 $r=\frac{m(n-m)}{4}=\frac{\frac{2\sqrt{6}}{3}\cos\theta\left(2\sqrt{2}\sin\theta-\frac{2\sqrt{6}}{3}\cos\theta\right)}{4}=\frac{2(\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta)}{3}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta-\frac{\cos2\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)}{3}=$

$\frac{2\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)-1}{3}\leqslant\frac{1}{3}$，所以内切球半径的最大值为 $\frac{1}{3}$.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.【答案】(1)详见解析　(2)$\hat{y}=0.62x-49.68$,身高为 180 cm 的某同学,体重大概为 62 kg

【解析】(1)$\sum_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{9}x_iy_i-9\bar{x}\bar{y}=77\ 000-8\ 528\times9=248$. …… 2 分

因为 $r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{248}{\sqrt{400\times220}}=\dfrac{248}{40\sqrt{55}}\approx0.84\left(\text{或}\dfrac{248}{40\sqrt{55}}=\dfrac{31\sqrt{55}}{275}\approx0.83\right)$, …… 4 分

所以 $0.8\leqslant|r|<1$,即身高与体重间是高度相关的; …… 6 分

(2)因为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{248}{400}=0.62$, …… 8 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=52-0.62\times164=-49.68$, …… 10 分

所以体重关于身高的回归方程为 $\hat{y}=0.62x-49.68$, …… 11 分

所以当 $x=180$ cm 时,$y\approx62$ kg.

即某同学身高为 180 cm 时,体重大概为 62 kg. …… 13 分

16.【答案】(1)$(0,1]$　(2)$\left(0,\dfrac{e^2}{4}\right)$

【解析】(1)$f'(x)=\dfrac{e^x(ax^2-2ax+1)}{(ax^2+1)^2}$, …… 2 分

若 $f(x)$是增函数,即 $f'(x)=\dfrac{e^x(ax^2-2ax+1)}{(ax^2+1)^2}\geqslant0$,

所以 $ax^2-2ax+1\geqslant0$,因为 $a>0$, …… 4 分

所以 $\Delta=4a^2-4a\leqslant0$,

解得 $0<a\leqslant1$,所以 a 的取值范围是$(0,1]$; …… 6 分

(2)由(1)可知,若 $f(x)$有两个极值点,则 $a>1$, …… 8 分

所以 $x_1+x_2=2$,$x_1x_2=\dfrac{1}{a}$, …… 10 分

所以 $f(x_1)f(x_2)=\dfrac{e^{x_1}}{ax_1^2+1}\times\dfrac{e^{x_2}}{ax_2^2+1}=\dfrac{e^{x_1+x_2}}{a^2x_1^2x_2^2+ax_1^2+ax_2^2+1}=\dfrac{e^2}{2+a\left(4-\dfrac{2}{a}\right)}=\dfrac{e^2}{4a}$, …… 13 分

因为 $a>1$,所以$\dfrac{e^2}{4a}\in\left(0,\dfrac{e^2}{4}\right)$,

所以 $f(x_1)f(x_2)$的取值范围是$\left(0,\dfrac{e^2}{4}\right)$. …… 15 分

17.【答案】(1)详见解析　(2)1

【解析】(1)连接 BD,设 BD 与 AC 相交于点 O,连接 PO.

$\because E,F$ 分别为 PB,PD 的中点,$\therefore EF/\!/BD$, …… 1 分

在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PO\perp$平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为正方形,

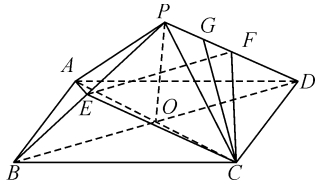
$\therefore BD\perp AC$, …… 2 分

又$\because BD\subset$平面 $ABCD$,$\therefore BD\perp PO$, …… 3 分

$\because AC\cap PO=O$,$AC\subset$平面 PAC,$PO\subset$平面 PAC,$\therefore BD\perp$平面 PAC, …… 4 分

$\therefore EF\perp$平面 PAC, …… 5 分

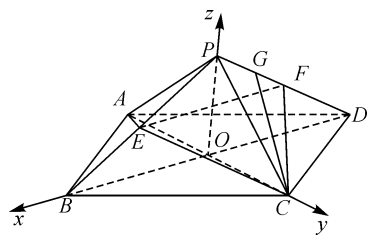
$\because EF\subset$平面 CEF,$\therefore$平面 $PAC\perp$平面 CEF; …… 6 分



(2)由(1)以及题意可知,在 Rt$\triangle BOC$ 中,$BC=2\sqrt{6}$,$BO=CO=2\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle POC$ 中,$CO=2\sqrt{3}$,$PC=4$,$\therefore PO=\sqrt{PC^2-CO^2}=2$. …… 7 分

又$\because PO\perp AC$,$BD\perp AC$,$BD\perp PO$,$\therefore$以 O 为坐标原点,以 OB,OC,OP 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,如图所示,则 $O(0,0,0)$,$A(0,-2\sqrt{3},0)$,$B(2\sqrt{3},0,0)$,$C(0,2\sqrt{3},0)$,$D(-2\sqrt{3},0,0)$,$P(0,0,2)$,$E(\sqrt{3},0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(0,4\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3},2\sqrt{3},1)$,$\overrightarrow{BP}=(-2\sqrt{3},0,2)$,$\overrightarrow{PD}=(-2\sqrt{3},0,-2)$. …… 9 分



$\because G$ 在棱 PD 上,$\therefore$不妨设$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PD}$$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $G(-2\sqrt{3}\lambda,0,2-2\lambda)$,$\overrightarrow{CG}=(-2\sqrt{3}\lambda,-2\sqrt{3},2-2\lambda)$. …… 10 分

设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x+2\sqrt{3}y+z=0,\\ 4\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 令 $x=-1$，则 $y=0$，$z=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{n}=(-1,0,\sqrt{3})$. …… 12 分

设 CG 与平面 AEC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CG}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CG}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\left(\lambda-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}\leqslant\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，当且仅当 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 时等号成立. …

…… 14 分

∴当 CG 与平面 AEC 所成角取得最大值时，$PG=\dfrac{1}{4}PD=1$. …… 15 分

18.【答案】(1)$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　(2)$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　(3)详见解析

【解析】(1)依题意 $\dfrac{2+a}{2-a}=3+2\sqrt{2}$，所以 $a=\sqrt{2}$， …… 1 分

因为 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c=1$， …… 2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=1$， …… 3 分

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$； …… 4 分

(2)设直线 l：$x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，易知 $F(1,0)$

由 $\begin{cases}x=my+2\\ x^2+2y^2-2=0\end{cases}$ 可得，$(m^2+2)y^2+4my+2=0$，$y_1+y_2=\dfrac{-4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{2}{m^2+2}$，

$\Delta=(4m)^2-4\times(m^2+2)\times2=8m^2-16>0$，解得 $m^2>2$， …… 6 分

$\triangle FAB$ 的面积是 $\triangle FPA$ 与 $\triangle FPB$ 的面积之差，

所以 $\triangle FAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|PF|\times|y_1-y_2|=\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{m^2-2}}{m^2+2}$， …… 8 分

设 $\sqrt{m^2-2}=t$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}t}{t^2+4}=\dfrac{\sqrt{2}}{t+\frac{4}{t}}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $t=2$ 时取“=”，

所以 $\triangle FAB$ 面积的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$； …… 10 分

(3)直线 FB：$x=\dfrac{x_2-1}{y_2}y+1$，

由 $\begin{cases}x=\dfrac{x_2-1}{y_2}y+1\\ y=y_1\end{cases}$，解得 $x_M=\dfrac{x_2-1}{y_2}y_1+1=\dfrac{my_2+1}{y_2}y_1+1=\dfrac{my_1y_2+y_1+y_2}{y_2}$， …… 12 分

所以线段 MA 的中点横坐标为 $x_0=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{my_1y_2+y_1+y_2}{y_2}+my_1+2\right)=\dfrac{2my_1y_2+y_1+3y_2}{2y_2}$，

所以 $x_0=\dfrac{2m\dfrac{2}{m^2+2}-\dfrac{4m}{m^2+2}+2y_2}{2y_2}=1$， …… 16 分

所以线段 MA 的中点在直线 $x=1$ 上. …… 17 分

19.【答案】(1)3　(2)(i)详见解析　(ii)$\dfrac{1}{64}$

【解析】(1)由题意知，$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ 或 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$， …… 1 分

若 $a_3=\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{3}{2}$，则 $a_4=\dfrac{a_2+a_3}{2}=\dfrac{7}{4}$ 或 $a_4=2a_3-a_2=1$，不符题意； …… 2 分

若 $a_3=2a_2-a_1=3$，则 $a_4=2a_3-a_2=4$，符合题意；

所以 $a_3=3$； …… 3 分

(2)(i)由题知 $a_1=a_4=a_7=0$，当 $n\neq1,4,7$ 时，$a_n>0$，

若 $a_4=\dfrac{a_2+a_3}{2}$，则与 $a_2>0$ 且 $a_3>0$ 矛盾，

所以 $a_4=2a_3-a_2=0$，所以 $a_3=\dfrac{a_2}{2}$， …… 4 分

若 $a_5=2a_4-a_3$，则与 $a_3>0$ 且 $a_5>0$ 矛盾，

所以 $a_5=\frac{a_4+a_3}{2}=\frac{a_3}{2}=\frac{a_2}{4}$，…… 6 分

同理，$a_8=\frac{a_5}{4}$，所以 a_2，a_5，a_8 成公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列；…… 8 分

(ii)由题意知，$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=1$，

对于任意正整数 $m,n(m<n)$，

$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{m+2}-a_{m+1}}{a_{m+1}-a_m}=\left(-\frac{1}{2}\right)^r(r\in\mathbf{N},r\leqslant n-m)$，

即 $a_{n+1}-a_n=(a_{m+1}-a_m)\left(-\frac{1}{2}\right)^r$，…… 10 分

所以 $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{r_0}(r_0\leqslant n-1)$，所以 $a_{n+1}\neq a_n$，

由题知 $a_i=a_j=a_k=0$，所以 $a_{j+1}\neq a_j=0$，$a_{i+1}\neq a_i=0$，$a_{i-1}\neq a_i=0$，

所以 $a_{j+1}>0$，$a_{i+1}>0$，$a_{i-1}>0$，

若 $a_i=\frac{a_{i-1}+a_{i-2}}{2}$，则与 $a_{i-1}>0$ 且 $a_{i-2}>0$ 矛盾，所以 $a_i=2a_{i-1}-a_{i-2}$，

因为 $a_{i-1}>0$ 且 $a_{i-2}>0$，所以 $j\neq i-1$ 且 $j\neq i-2$，所以 $j\leqslant i-3$，…… 12 分

因为 $a_{i+1}-a_i=a_{i+1}>0$，$a_i-a_{i-1}=-a_{i-1}<0$，所以 $a_{i+1}-a_i=-\frac{1}{2}(a_i-a_{i-1})$，

又 $a_i-a_{i-1}=(a_{j+1}-a_j)\left(-\frac{1}{2}\right)^{r_1}(r_1\leqslant i-j-1)$，$a_i-a_{i-1}<0$，$a_{j+1}-a_j=a_{j+1}>0$，

所以 r_1 为正奇数，

所以 $a_{i+1}-a_i=(a_{j+1}-a_j)\left(-\frac{1}{2}\right)^{r_1+1}\leqslant\frac{1}{4}(a_{j+1}-a_j)$，…… 14 分

同理，$a_{j+1}-a_j\leqslant\frac{1}{4}(a_{k+1}-a_k)$，$a_{k+1}-a_k\leqslant\frac{1}{4}(a_2-a_1)=\frac{1}{4}$，…… 15 分

所以 $a_{i+1}-a_i\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$，…… 16 分

当 $\{a_n\}$ 为 $\frac{1}{2},\frac{3}{2},1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},\frac{1}{8},0,\frac{1}{16},\frac{1}{32},0,\frac{1}{64},\cdots$ 时，符合题意，

所以 a_{i+1} 的最大值为 $\frac{1}{64}$.…… 17 分