绝密★启用前

2025届高三第二学期4月质量检测

数　　学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2,3\}$　　B. $\{-2,2,3\}$　　C. $\{2,3\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. 若 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}^3}{\mathrm{i}^5}$，则 $z+\bar{z}=$

A. $-2\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. -2　　D. 2

3. 设 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，若 $\tan\theta\sin\theta=1$，则 $\cos\theta=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

4. 若向量 $\boldsymbol{a}=(2,2)$，向量 $\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{a}$，则 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{2}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量的坐标为

A. $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$　　B. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $(1,1)$　　D. $(2,2)$

5. 已知 A 与 B 为随机事件，若 $P(\bar{B})=P(AB)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(\bar{A}\mid B)=$

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

6. 已知圆台上、下底面半径分别为 $r,2r$，高为 h，且 $2r+h=8$，当圆台的体积最大时，圆台的母线与底面所成角的正切值为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

7. 已知函数 $f(x)=x+[x]$(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数),则关于 x 的方程 $f(x)=\frac{5x}{2}-1$ 的所有实数根之和为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

8. 记数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若$|S_n|=n$,则$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{10}|$的值不可能为

A. 96　　B. 98　　C. 100　　D. 102

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$,则

A. $f(x)$和 $g(x)$的最小正周期相同

B. $f(x)$和 $g(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上的单调性相同

C. $f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度得到 $g(x)$的图象

D. $f(x)$和 $g(x)$的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称

10. 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,O 为坐标原点,过 F 的直线与 C 交于 A,B 两点,交 C 的准线 l 于点 P,则

A. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-3$

B. 若直线 AB 的斜率为 1,则以线段 AB 为直径的圆截 y 轴所得的弦长为 10

C. 若$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AB}$,则$|BF|=2|AF|$

D. $\tan\angle OPF$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$

11. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=x^3-3ax+a^3$,则

A. $f(x)$有两个极值点

B. 若 $a>0$,则当 $x>0$ 时,$f(x)\geqslant -1$

C. 若 $f(x)$有 3 个零点,则 a 的取值范围是$(0,\sqrt[3]{4})$

D. 若存在 $s,t\in\mathbf{R}$,满足 $f(s-t)+f(s+t)=2f(s)$,则 $st=0$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知双曲线 $C:mx^2+(m+1)y^2=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$,则 C 的焦距为_____.

13. 设函数 $f(x)=a|x|+2|a|$,$g(x)=e^x+e^{-x}$,若曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$恰有 3 个公共点,则 $a=$_____.

14. 已知正三棱锥 $D-ABC$ 的各顶点均在半径为 1 的球 O 的球面上,则正三棱锥 $D-ABC$ 内切球半径的最大值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

某研究小组为了解青少年的身高与体重的关系，随机从 15 岁人群中选取了 9 人，测得他们的身高（单位：cm）和体重（单位：kg），得到如下数据：

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	均值
身高 x_i	165	157	156	173	163	159	177	161	165	164
体重 y_i	53	46	48	56	57	49	60	45	54	52

（1）若两组变量间的样本相关系数 r 满足 $0.8\leqslant|r|<1$，则称其为高度相关，试判断青少年身高与体重是否高度相关，说明理由（r 精确到 0.01）；

（2）建立 y 关于 x 的经验回归方程，并预测某同学身高为 180 cm 时，体重的估计值（保留整数）.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{9}(x_i-\bar{x})^2=400$，$\sum\limits_{i=1}^{9}(y_i-\bar{y})^2=220$，$\sum\limits_{i=1}^{9}x_iy_i=77\ 000$，$\bar{x}\cdot\bar{y}=8\ 528$，$\sqrt{55}\approx7.4$.

参考公式：样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$，经验回归方程 $\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

16.（本小题满分 15 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{ax^2+1}(a>0)$.

（1）若 $f(x)$ 是增函数，求 a 的取值范围；

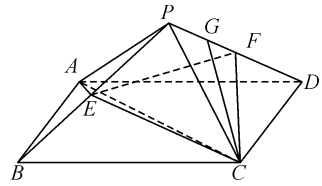
（2）若 x_1，x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点，求 $f(x_1)f(x_2)$ 的取值范围.

17.（本小题满分 15 分）

如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=2\sqrt{6}$，$PA=4$，E，F 分别为 PB，PD 的中点.

（1）证明：平面 $PAC\perp$ 平面 CEF；

（2）若点 G 在棱 PD 上，当直线 CG 与平面 AEC 所成角取最大值时，求 PG.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过点 $P(2,0)$ 的直线 l 交 C 于 A，B 两点（B 在线段 AP 上），当直线 l 的斜率为 0 时，$|PA|=(3+2\sqrt{2})|PB|$.

（1）求 C 的方程；

（2）求 $\triangle FAB$ 面积的最大值；

（3）过 A 且与 x 轴平行的直线与直线 FB 交于点 M，证明：线段 MA 的中点在定直线上.

19.（本小题满分 17 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\geqslant 0$，且 $(2a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)(a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n)=0$.

（1）若 $a_4=2a_2=4a_1=4$，求满足条件的 a_3 的值；

（2）设集合 $A=\{n\mid a_n=0\}$，

（i）若 $A=\{1,4,7\}$，证明：a_2，a_5，a_8 成等比数列；

（ii）若 $A=\{i,j,k\}$（其中 $i>j>k>3$），且 $a_2=a_1+1$，求 a_{i+1} 的最大值.