绝密★启用前

2025年普通高等学校全国统一模拟招生考试
4月联考

数　学

全卷满分150分，考试时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 请按题号顺序在答题卡上各题目的答题区域内作答，写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 选择题用2B铅笔在答题卡上把所选答案的标号涂黑；非选择题用黑色签字笔在答题卡上作答；字体工整，笔迹清楚。
4. 考试结束后，请将试卷和答题卡一并上交。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\in\mathbf{Z}\mid -2<x\leqslant 3\}$，$N=\{x\mid 1<|x|\leqslant 2\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-1,0,2\}$　　B. $\{0,1,2\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{2\}$

2. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(5,0.4)$，则 $E(X)=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(-4,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，若 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b})(k>0)$，则 $k=$

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}$　　C. 5　　D. 10

4. 设 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，则 $\dfrac{\tan\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

5. 已知曲线 $y=\ln\dfrac{x}{2+x}-x+a$ 关于点 $(-1,0)$ 中心对称，则 $a=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

6. 设复数 $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点在虚轴的正半轴上，则 $|z|$ 的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

7. 若函数 $f(x)=x(a-e^x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上有极大值 m，则 $m-a$ 的最小值是

A. $-e$　　B. -1　　C. 1　　D. e

8. 已知 F_1,F_2 为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，A 为椭圆 C 的上顶点，M 为椭圆 C 的右顶点，连接 AF_2 交椭圆 C 于另一点 B，若 $AF_1 // BM$，则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}-1$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知 $x_1<x_2<x_3$，样本数据 $S_1:x_1,x_2,x_3$，$S_2:\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_2+x_3}{2},\frac{x_3+x_1}{2}$，则

A. S_1 的平均数一定等于 S_2 的平均数　　B. S_1 的中位数一定小于 S_2 的中位数

C. S_1 的极差一定大于 S_2 的极差　　D. S_1 的方差一定小于 S_2 的方差

10. 设抛物线 $C:x^2=2py\ (p>0)$ 的焦点为 $F(0,1)$，过 F 的直线 l 交 x 轴的负半轴于点 M，交抛物线 C 于 A,B 两点，$|AF|<|BF|$，$|BF|=|MF|$，过 B 作抛物线 C 的切线交 x 轴于点 N，则

A. $p=2$　　B. 直线 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $|AB|=9$　　D. $\triangle MBN$ 的面积为 $3\sqrt{2}$

11. 已知函数 $f(x)=|x-a|+|x-a^2|$，下列结论正确的是

A. 若 $f(0)=2$，则 $a=\pm 1$

B. 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)\geqslant 2$

C. 有且仅有 2 个 a 使得 $f(x)$ 的最小值为 0

D. 若函数 $f(x)$ 的图象与 $y=\sqrt{x}$ 的图象有且仅有两个交点，则 a 的取值范围为 $\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4},2\right)$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知具有线性相关性的变量 x,y，设其样本点为 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,20)$，经验回归方程为 $\hat{y}=-2x+\hat{a}$，若 $\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=40$，则 $\hat{a}=$_____.

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的最小正周期为 π，若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后所得的图象与曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，则 $\varphi=$_____.

14. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，若 $CA=2CB$，且 $PB=3$，则三棱锥 $P-ABC$ 的体积的最大值为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.（本小题满分 13 分）

记$\triangle ABC$的内角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$c-2a\cos^2 B=2b\cos A\cos B$.

（1）求B；

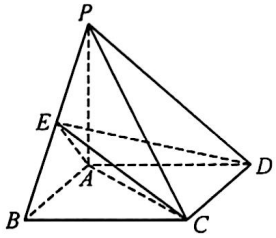
（2）设D为AC边的中点，若$b=2$，$BD=\frac{3}{2}$，求$\triangle ABC$的面积.

16.（本小题满分 15 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是正方形，$PA\perp$平面$ABCD$，$AP=AB=2$，设E为棱PB的中点.

（1）证明：$PB\perp$平面AED；

（2）求平面AED与平面AEC的夹角的余弦值.



17.（本小题满分 15 分）

已知函数$f(x)=ax\ln x-x$.

（1）讨论函数$f(x)$的单调性；

（2）证明：$\forall a\in(0,+\infty)$，关于x的不等式$4af(x)+\mathrm{e}\leqslant 0$有实数解.

18.（本小题满分 17 分）

已知等轴双曲线 C_1，C_2 的对称中心均为坐标原点 O，焦点分别在 x 轴和 y 轴上，且焦距均为 4. 设 A，B 两点分别在 C_1，C_2 上，满足直线 OA，OB 的斜率之积为 1，点 P 为 C_1 上异于 A 的另一点，过 P 分别作平行于 OA，OB 的直线，交 OB，OA 于 N，M 两点.

(1)求双曲线 C_1，C_2 的方程；

(2)证明：$|OA|=|OB|$；

(3)设 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{ON}=\mu\overrightarrow{OB}$，证明：$\lambda^2-\mu^2$ 为定值.

19.（本小题满分 17 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足以下条件：①$a_1=2$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n^2-2a_n=a_{n-1}^2+2a_{n-1}$；②若存在某项 $a_i\leqslant -4$，则必有 $j\in\{1,2,3,\cdots,i-1\}$，使得 $a_j=a_i+2(i\geqslant 2$ 且 $i\in\mathbf{N})$.

(1)若 $a_2<1$，写出所有满足条件的 a_4；

(2)若 $a_2>1$，证明：数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；

(3)设 $a_k=-2\,024$，求正整数 k 的最小值.