参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	B	C	C	B	A	B
题号	9	10	11					
答案	AC	ABD	ACD					

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】D

【解析】因为 $M=\{-1,0,1,2,3\}$，从而 $M\cap N=\{2\}$，故选 D.

2.【答案】B

【解析】$E(X)=np=2$，故选 B.

3.【答案】B

【解析】因为 $\boldsymbol{a}^2-k^2\boldsymbol{b}^2=20-2k^2=0$，所以 $k=\sqrt{10}$，故选 B.

4.【答案】C

【解析】$\dfrac{\tan\theta+\sin\theta\cos\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\frac{1}{2}(\cos\theta+\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}=\dfrac{\frac{1}{2}(1+\tan\theta)}{1-\tan\theta}=\dfrac{3}{2}$，故选 C.

5.【答案】C

【解析】由 $f(-2-x)+f(x)=0$，有 $\ln\dfrac{-x-2}{-x}-(-2-x)+a+\ln\dfrac{x}{x+2}-x+a=0$，可得 $a=-1$，故选 C.

6.【答案】B

【解析】设 $\dfrac{z-1}{z-\mathrm{i}}=a\mathrm{i}(a>0)$，因此 $z=\dfrac{1+a}{1-a\mathrm{i}}$，$|z|=\dfrac{1+a}{\sqrt{1+a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{2}{a+\frac{1}{a}}}\leqslant\sqrt{2}$（当且仅当 $a=1$ 时取“=”），故选 B.

7.【答案】A

【解析】由 $f'(x)=a-(x+1)\mathrm{e}^x$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有极大值 m，必存在极大值点 x_0，且有 $a>1$，$a=(x_0+1)\mathrm{e}^{x_0}$，$m=f(x_0)=x_0(a-\mathrm{e}^{x_0})=x_0^2\mathrm{e}^{x_0}$，有 $m-a=(x_0^2-x_0-1)\mathrm{e}^{x_0}$，令 $g(x)=(x^2-x-1)\mathrm{e}^x(x>0)$，有 $g'(x)=(x^2+x-2)\mathrm{e}^x=(x+2)(x-1)\mathrm{e}^x$，可得函数 $g(x)$ 的减区间为 $(0,1)$，增区间为 $(1,+\infty)$，有 $g(x)_{\min}=g(1)=-\mathrm{e}$，故 $m-a$ 的最小值为 $-\mathrm{e}$，故选 A.

8.【答案】B

【解析】易知 $|AF_1|=|AF_2|=a$，由 $AF_1\parallel BM$ 可知，$\dfrac{|AF_2|}{|BF_2|}=\dfrac{|F_1F_2|}{|MF_2|}=\dfrac{2c}{a-c}=\dfrac{a}{|BM|}$，

所以 $|BF_2|=\dfrac{a(a-c)}{2c}$，

设 $|BF_2|=m$，$\angle AF_2F_1=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{c}{a}$，$|BF_1|=2a-m$，由余弦定理有 $|BF_1|^2=|F_1F_2|^2+|BF_2|^2-2|BF_2|\cdot|F_1F_2|\cos(\pi-\theta)$，

即 $(2a-m)^2=4c^2+m^2+2m\times 2c\times\dfrac{c}{a}$，所以 $|BF_2|=m=\dfrac{ab^2}{a^2+c^2}=\dfrac{a(a-c)}{2c}$，

所以$\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}=\frac{a-c}{2c}$，即$\frac{a+c}{a^2+c^2}=\frac{1}{2c}$，

整理得，$e^2+2e-1=0$，解得 $e=\sqrt{2}-1$. 故选 B.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.【答案】AC

【解析】对 S_1，S_2 分别求平均数，均为$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，A 对；

S_1 的中位数为 x_2，S_2 的中位数为$\frac{x_3+x_1}{2}$，大小关系不确定，B 错；

S_1 的极差为 x_3-x_1，S_2 的极差为$\frac{x_3-x_1}{2}$，C 对；

由 $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{x_1+x_3}{2}<\frac{x_2+x_3}{2}<x_3$，且 S_1 和 S_2 的平均数相等，从而 $s_1^2>s_2^2$，D 错. 故选 AC.

10.【答案】ABD

【解析】因为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ 为 $(0,1)$，所以 $p=2$，A 对；

设 $M(-m,0)(m>0)$，因此 $B(m,2)$，从而 $m=2\sqrt{2}$，直线 l 的斜率为$\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，B 对；

直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+1$，因此可求得 $A\left(-\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$，可得 $|AB|=\frac{9}{2}$，C 错；

直线 BN 的斜率为 $y'|_{x=2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，方程为 $y=\sqrt{2}x-2$，因此 $N(\sqrt{2},0)$，$\triangle MBN$ 的面积为$\frac{1}{2}\times|MN|\times y_B=3\sqrt{2}$，D 对. 故选 ABD.

11.【答案】ACD

【解析】$f(0)=a^2+|a|=2$，因此可解得 $a=\pm1$，A 对；

若 $f(x)$ 为偶函数，其中 $a=0$ 时 $f(x)=2|x|\geqslant0$，B 错；

令 $f(x)$ 的最小值 $|a^2-a|=0$，从而 $a=0$ 或 $a=1$，C 对；

①当 $a>1$ 时，$f(x)=\begin{cases}a+a^2-2x,x<a\\a^2-a,a\leqslant x\leqslant a^2\\2x-a-a^2,x>a^2\end{cases}$，可知若 $f(x)$ 与 $y=\sqrt{x}$ 有且仅有两个交点，只需点 (a^2,a^2-a)，在 $y=\sqrt{x}$ 的图象的下方，即 $\sqrt{a^2}>a^2-a$，可得 $1<a<2$；

②当 $0<a\leqslant1$ 时，$f(x)=\begin{cases}a+a^2-2x,x<a^2\\a-a^2,a^2\leqslant x\leqslant a\\2x-a-a^2,x>a\end{cases}$，由 $\sqrt{a^2}>a-a^2$，可得点 (a^2,a^2-a) 在 $y=\sqrt{x}$ 的图象的下方，此时 $f(x)$ 的图象与 $y=\sqrt{x}$ 有且仅有两个交点；

③当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)=\begin{cases}a+a^2-2x,x<a\\a^2-a,a\leqslant x\leqslant a^2\\2x-a-a^2,x>a^2\end{cases}$，当 $y=2x-a-a^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 相切时，有 $2x-\sqrt{x}-(a+a^2)=0$，可得 $\Delta=1+8(a+a^2)=0$，解得 $a=-\frac{2+\sqrt{2}}{4}$（舍去）或 $a=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$，可得 $f(x)$ 与 $y=\sqrt{x}$ 有两个交点时$\frac{\sqrt{2}-2}{4}<a\leqslant0$，由上知$\frac{\sqrt{2}-2}{4}<a<2$，D 对，故选 ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12.【答案】8

【解析】由 $\bar{x}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i=3$，$\bar{y}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}y_i=2$，有 $2=-6+\hat{a}$，可得 $\hat{a}=8$.

13.【答案】$\frac{5\pi}{6}$

【解析】$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

$\therefore f(\pi-x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，即 $\sin(2\pi-2x+\varphi)=\sin(-2x+\varphi)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$，

$\therefore-2x+\varphi+2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\varphi=k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，$\because0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

14.【答案】$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】设 $AB=a$，$PA=h$，则 $a^2+h^2=9$，

由 $CA=2CB$ 根据圆的方程可知，$\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{a^2}{3}$，

$\therefore$三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{1}{3}\times\frac{a^2}{3}\times h=\frac{a^2\sqrt{9-a^2}}{9}=\frac{\sqrt{9a^4-a^6}}{9}$，

设 $a^2=x$，$f(x)=9x^2-x^3$，则 $f'(x)=18x-3x^2=3x(6-x)$，

易知当 $x=6$ 时，$f(x)$取得最大值 $f(6)=108$，

$\therefore$三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{108}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

15.【答案】(1)$\frac{\pi}{3}$　(2)$\frac{5\sqrt{3}}{8}$

【解析】(1)由正弦定理得，$\sin C-2\sin A\cos^2 B=2\sin B\cos A\cos B$，…… 2 分

$\therefore\sin C=2\cos B(\sin A\cos B+\cos A\sin B)=2\cos B\sin(A+B)$，

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore\sin C=2\cos B\sin(A+B)=2\cos B\sin(\pi-C)=2\cos B\sin C$，…… 4 分

$\because0<C<\pi$，$\therefore\sin C\neq0$，$\therefore\cos B=\frac{1}{2}$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3}$；…… 6 分

(2)由余弦定理得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，$\therefore a^2+c^2-4=ac$，…… 8 分

$\because\overrightarrow{BD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}(a^2+c^2+ac)$，$BD=\frac{3}{2}$，$\therefore a^2+c^2+ac=9$，…… 10 分

$\therefore4+2ac=9$，解得 $ac=\frac{5}{2}$，…… 12 分

$\therefore\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{8}$.…… 13 分

16.【答案】(1)详见解析　(2)$\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】(1)因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，$AD\subset$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，…… 1 分

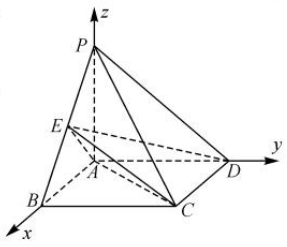
又 $AD\perp AB$，$AP\cap AB=A$，AP，$AB\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp$平面 PAB，…… 3 分

因为 $PB\subset$平面 PAB，所以 $AD\perp PB$，…… 4 分

因为 $AP=AB$，E 为 PB 的中点，所以 $AE\perp PB$，

因为 $AE\cap AD=A$，AE，$AD\subset$ 平面 AED，所以 $PB\perp$ 平面 AED；…… 6 分

(2)如图所示，建立空间直角坐标系，…… 7 分



则 $A(0,0,0)$，$E(1,0,1)$，$C(2,2,0)$，$P(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，

$\overrightarrow{AE}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，…… 9 分

设平面 AEC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+z=0,\\ 2x+2y=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=z=-1$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$. …… 11 分

由(1)可知，$\overrightarrow{PB}=(2,0,-2)$为平面 AED 的法向量，…… 13 分

设平面 AED 与平面 AEC 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

所以平面 AED 与平面 AEC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …… 15 分

17.【答案】(1)详见解析　(2)详见解析

【解析】(1)易知 $f'(x)=a\ln x+a-1$，…… 1 分

①当 $a=0$ 时，$f'(x)=-1<0$，$\therefore f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减；…… 2 分

当 $a\neq0$ 时，令 $f'(x)=a\ln x+a-1=0$，得 $x=e^{\frac{1}{a}-1}$；…… 3 分

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，则 $x>e^{\frac{1}{a}-1}$，$\therefore f(x)$在区间$(e^{\frac{1}{a}-1},+\infty)$上单调递增；

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<e^{\frac{1}{a}-1}$，$\therefore f(x)$在区间$(0,e^{\frac{1}{a}-1})$上单调递减；…… 5 分

③当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，则 $0<x<e^{\frac{1}{a}-1}$，$\therefore f(x)$在区间$(0,e^{\frac{1}{a}-1})$上单调递增；

令 $f'(x)<0$，则 $x>e^{\frac{1}{a}-1}$，$\therefore f(x)$在区间$(e^{\frac{1}{a}-1},+\infty)$上单调递减；…… 7 分

综上所述，当 $a<0$ 时，$f(x)$在区间$(0,e^{\frac{1}{a}-1})$上单调递增，在区间$(e^{\frac{1}{a}-1},+\infty)$上单调递减.

当 $a=0$ 时，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在区间$(0,e^{\frac{1}{a}-1})$上单调递减，在区间$(e^{\frac{1}{a}-1},+\infty)$上单调递增；

(2)$\forall a\in(0,+\infty)$，关于 x 的不等式 $4af(x)+e\leqslant0$ 有实数解，

即 $\forall a\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant-\dfrac{e}{4a}$有实数解，…… 9 分

由(1)可知，当 $a>0$ 时，$f(x)$在区间$(0,e^{\frac{1}{a}-1})$上单调递减，在区间$(e^{\frac{1}{a}-1},+\infty)$上单调递增，

$\therefore f(x)$的最小值为 $f(e^{\frac{1}{a}-1})=a\cdot e^{\frac{1}{a}-1}\cdot\left(\dfrac{1}{a}-1\right)-e^{\frac{1}{a}-1}=-a\cdot e^{\frac{1}{a}-1}$，…… 10 分

只需证明 $\forall a\in(0,+\infty)$，$-a\cdot e^{\frac{1}{a}-1}\leqslant-\dfrac{e}{4a}$，

即证 $\forall a\in(0,+\infty)$，$e^{\frac{1}{a}-2}\geqslant\dfrac{1}{4a^2}$，

即证 $\forall a\in(0,+\infty)$，$e^{\frac{1}{2a}-1}\geqslant\dfrac{1}{2a}$，…… 11 分

令 $t=\dfrac{1}{2a}$，则 $t>0$，只需证 $\forall t\in(0,+\infty)$，$e^{t-1}-t\geqslant0$，…… 12 分

令函数 $g(t)=e^{t-1}-t$，则 $g'(t)=e^{t-1}-1$，

当 $0<t<1$ 时，显然 $g'(t)<0$，$\therefore g(t)$在区间$(0,1)$上单调递减；…… 13 分

当 $t>1$ 时，显然 $g'(t)>0$，$\therefore g(t)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增，…… 14 分

$\therefore g(t)$的最小值为 $g(1)=0$，即 $\forall t\in(0,+\infty)$，$g(t)\geqslant0$，

$\therefore \forall a\in(0,+\infty)$，关于 x 的不等式 $4af(x)+e\leqslant 0$ 有实数解. …… 15 分

18.【答案】(1)C_1 的方程为 $x^2-y^2=2$，C_2 的方程为 $y^2-x^2=2$　(2)详见解析　(3)详见解析

【解析】(1)设 $C_1:x^2-y^2=m^2$，$C_2:y^2-x^2=m^2$，

因此 $2\sqrt{2}m=4$，所以 $m=\sqrt{2}$，…… 2 分

C_1，C_2 的方程分别为 $x^2-y^2=2$，$y^2-x^2=2$；…… 4 分

(2)设点 $A(a,y_A)$，$B(b,y_B)$，

因此 $\frac{y_A}{a}\times\frac{y_B}{b}=1$，$y_Ay_B=ab$，且 $y_A^2=a^2-2$，$y_B^2=b^2+2$，…… 6 分

所以 $(y_Ay_B)^2=a^2b^2=a^2b^2-2b^2+2a^2-4$，因此 $a^2-b^2=2$，$y_A=\pm b$，$y_B=\pm a$，

所以 $|OA|=|OB|=\sqrt{a^2+b^2}$；…… 9 分

(3)由题意 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，设点 $P(x_P,y_P)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

因此 $(x_P,y_P)=\lambda(x_1,y_1)+\mu(x_2,y_2)=(\lambda x_1+\mu x_2,\lambda y_1+\mu y_2)$，…… 11 分

又 $x_P^2-y_P^2=2$，从而 $(\lambda x_1+\mu x_2)^2-(\lambda y_1+\mu y_2)^2=2$，…… 13 分

整理得 $\lambda^2(x_1^2-y_1^2)+\mu^2(x_2^2-y_2^2)+2\lambda\mu(x_1x_2-y_1y_2)-2=0$，…… 15 分

由(2)可知 $x_1x_2=y_1y_2$，因此 $\lambda^2-\mu^2=1$ 为定值. …… 17 分

19.【答案】(1)满足条件的 a_4 可能为 2，0，4，-2　(2)详见解析　(3)3 035

【解析】(1)由题意，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n^2-2a_n+1=a_{n-1}^2+2a_{n-1}+1$，$\therefore(a_n-1)^2=(a_{n-1}+1)^2$，

$\therefore a_n=a_{n-1}+2$ 或 $a_n=-a_{n-1}$，…… 1 分

$\therefore a_2=a_1+2=4$ 或 $a_2=-a_1=-2$，

$\because a_2<1$，$\therefore a_2=-2$，…… 2 分

①若 $a_3=a_2+2=0$，则 $a_4=a_3+2=2$ 或 $a_4=-a_3=0$；

②若 $a_3=-a_2=2$，则 $a_4=a_3+2=4$ 或 $a_4=-a_3=-2$；

综上所述，满足条件的 a_4 可能为 2，0，4，-2；…… 3 分

(2)先证当正整数 $k\geqslant 2$ 时，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，且 $a_k\geqslant 4$，

①由(1)得，$a_2=4$ 或 -2，又 $\because a_2>1$，$\therefore a_2=4$，

$\therefore$ 当 $k=2$ 时，a_1,a_2 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，且 $a_2\geqslant 4$；…… 5 分

②假设当 $k=i(i\geqslant 2$ 且 $i\in\mathbf{N})$ 时，

$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_i$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，且 $a_i\geqslant 4$，

若 $a_{i+1}=-a_i$，则 $a_{i+1}\leqslant -4$，

由题意，则必有 $j\in\{1,2,3,\cdots,i\}$，使得 $a_j=a_{i+1}+2$，$\therefore a_j\leqslant -2$，

$\because a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，

$\therefore a_j=a_1+2(j-1)=2j\geqslant 2$，与 $a_j\leqslant -2$ 矛盾，

$\therefore a_{i+1}=a_i+2\geqslant 6$，

$\therefore$ 当 $k=i+1$ 时，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{i+1}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，且 $a_{i+1}\geqslant 4$；…… 8 分

由①②得，当正整数 $k\geqslant 2$ 时，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列，且 $a_k\geqslant 4$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列；…… 9 分

(3)设 $a_i\leqslant -4(i\geqslant 2$ 且 $i\in\mathbf{N})$，则必有 $j\in\{1,2,3,\cdots,i-1\}$，使得 $a_j=a_i+2$，此时 $a_j\leqslant -2$，

要使 $i-j$ 最小，则需 $a_{j+1}=-a_j$，且 $a_{j+2}=a_{j+1}+2$，且 $a_{j+3}=-a_{j+2}$，

此时取 $i-j=3$，则满足 $a_i=a_{j+3}=a_j-2$，…… 13 分

$\therefore$ 当正整数 k 取最小值时，$a_{k-3}=a_k+2=-2\,022$，$a_{k-6}=a_{k-3}+2=-2\,020$，$\cdots$，$a_{k-3\,033}=a_{k-3\,030}+2=-2$，

$\because a_{k-3\,033}=-a_1=-2$，$\therefore k-3\,033=2$，$\therefore k$ 的最小值为 3 035. …… 17 分