武汉市2025届高三年级四月调研考试
数学试卷参考答案及评分标准

选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
答案	C	D	C	A	A	B	D	C	BCD	AD	BD

填空题：

12. 3　　13. 36　　14. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解答题：

15.（13分）解：

（1）因为$CA\perp AB, CA\perp A_1A$，$AA_1\cap AB=A$，$AB, AA_1\subset$平面ABB_1A_1，所以$CA\perp$平面ABB_1A_1，

$BE\subset$平面ABB_1A，所以$CA\perp BE$，又因为$BE\perp AB_1$

$AB_1\subset$平面AB_1C，$CA\subset$平面AB_1C，且$AB_1\cap AC=A$，$BE\perp$平面AB_1C.　　……6分

（2）以A为坐标原点，向量$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}$为$x, y, z$轴正方向，建立空间直角坐标系

$B(2,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B_1(2,0,4)$，设$E(0,0,t)$，$\overrightarrow{BE}=(-2,0,t)$，$\overrightarrow{AB_1}=(2,0,4)$

$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{BE}$，所以$-4+4t=0, t=1$，所以$E(0.0.1)$，$\overrightarrow{CE}=(0,-2,1), \overrightarrow{CB}=(2,-2,0)$

设平面BCE的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，$\begin{cases}-2y+z=0\\ 2x-2y=0\end{cases}$，

令$x=1$则$z=2, y=1$，$\therefore\vec{n}=(1,1,2)$，

平面ABE的法向量为$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，设平面$CBE$平面$ABE$之间的夹角为$\alpha$

$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2}{\sqrt{6}\times 2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.　　……13分

16.（15分）解：

（1）$f'(x)=e^x-\frac{1-\ln x}{x^2}-\frac{a}{x^2}$，$f'(1)=e-1-a=-1$　$\therefore a=e$　　……7分

（2）$f(x)=e^x-\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x}-1=\frac{xe^x-\ln x+a-x}{x}\geq 0$恒成立，因为$x>0$，等价于

$xe^x-\ln x+a-x\geq 0$恒成立，令$g(x)=xe^x-\ln x+a-x$，$g'(x)=(1+x)(e^x-\frac{1}{x})$

令$h(x)=e^x-\frac{1}{x}$，$h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$是增函数，由于$h\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2<0$，

$h(1)=e-1>0$，$\exists x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$h(x_0)=0$，即$g'(x_0)=0$，

当$x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$，$g'(x)>0$

所以$g(x)$在$(0,x_0)$单调递减，在$(x_0,+\infty)$单调递增，因为$h(x_0)=0$，所以$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$

$g(x)_{min}=g(x_0)=x_0\cdot e^{x_0}-\ln x_0-x_0+a=1+x_0-x_0+a\geq 0$，$\therefore a\geq -1$ ……15 分

17.（15 分）解：

（1）记“五张字母牌不相邻” 为事件 B，$P(B)=\frac{A_8^8A_9^5}{A_{13}^{13}}=\frac{14}{143}$ ……4 分

（2）记“在标有 8 的牌左侧，没有数字牌”为事件 C

由于标 $1\sim 7$ 的牌都在标有 8 的牌右侧，有 $A_7^7=7!$ 种排法，$P(C)=\frac{A_7^7A_{13}^5}{A_{13}^{13}}=\frac{1}{8}$ ……9 分

（3）标号比 k 小的牌有 $(k-1)$ 张，比 k 大的牌有 $(8-k)$ 张，$P(A_k)=\frac{(k-1)!A_{13}^{5+8-k}}{A_{13}^{13}}=\frac{1}{k}$

……15 分

18.（17 分）解：

（1）$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ 符合，$\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 不符合，0 没有倒数，$\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=7-4\sqrt{3}$ 符合

综上 $2+\sqrt{3}$，$7+4\sqrt{3}$ 属于 B ……4 分

（2）先证明若 $x\in A,y\in A$，则 $xy\in A$

设 $x=m+\sqrt{3}n,y=p+\sqrt{3}q$，$m,n,p,q$ 是整数，

$xy=(m+\sqrt{3}n)(p+\sqrt{3}q)=mp+3nq+(mq+np)\sqrt{3}$

由于 $mp+3nq$，$mq+np$ 都是整数，所以 $xy\in A$

该命题得证.

当 $x\in B,y\in B$ 时，有 $\frac{1}{x},\frac{1}{y}\in A$，所以 $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{xy}\in A$，即证 $xy\in B$ ……10 分

（3）根据题意，$\frac{1}{x}=\frac{1}{m+\sqrt{3}n}=\frac{m-\sqrt{3}n}{m^2-3n^2}=\frac{m}{m^2-3n^2}+\frac{-n}{m^2-3n^2}\sqrt{3}\in A$

所以 $\frac{m}{m^2-3n^2}$，$\frac{-n}{m^2-3n^2}$ 都是整数

因此 $\left(\frac{m}{m^2-3n^2}\right)^2-3\left(\frac{-n}{m^2-3n^2}\right)^2=\frac{m^2-3n^2}{\left(m^2-3n^2\right)^2}=\frac{1}{m^2-3n^2}$ 是整数，所以 $m^2-3n^2=\pm 1$

假如 $m^2-3n^2=-1$，$m^2+1=3n^2$，则 m^2+1 应为 3 的倍数

设t为整数，若$m=3t$，$m^2+1=9t^2+1$，不是3的倍数

若$m=3t+1$，$m^2+1=9t^2+6t+2=3(3t^2+2t)+2$，不是3的倍数

若$m=3t+2$，$m^2+1=9t^2+12t+5=3(3t^2+4t+1)+2$，不是3的倍数

因此$m^2-3n^2\neq-1$，即证$m^2-3n^2=1$ ……17分

19.（17分）解：

（1）由题意得，$m=4$，又因为$P_1(1,1)$在Γ_1上

代入Γ_1得$\frac{1}{4}+\frac{1}{n}=1$，所以$n=\frac{4}{3}$，则$\Gamma_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(\frac{4}{3})}=1$，$\Gamma_2:\frac{x^2}{(\frac{4}{3})}+\frac{y^2}{4}=1$ ……3分

（2）设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则$k_{P_1M}\cdot k_{P_3M}=\frac{(y_1-1)}{(x_1-1)}\frac{(y_1+1)}{(x_1+1)}=\frac{y_1^2-1}{x_1^2-1}$

又因为$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{(\frac{4}{3})}=1$，所以$y_1^2=\frac{4}{3}(1-\frac{x_1^2}{4})=\frac{4-x_1^2}{3}$，则$k_{P_1M}\cdot k_{P_3M}=\frac{\frac{4-x_1^2}{3}-1}{x_1^2-1}=-\frac{1}{3}$，

同理可得$k_{P_1N}\cdot k_{P_3N}=-3$，所以$\frac{k_2}{k_1}=9$ ……9分

（3）设直线$Q_1Q_2,Q_2Q_3,Q_3Q_4,Q_4N$分别为$l_1,l_2,l_3,l_4$，其斜率依次为$k_1,k_2,k_3,k_4$

设直线$l_1:y-1=k_1(x-1)$，联立$\frac{3x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$得$(k_1^2+3)x^2+2k_1(1-k_1)x+(1-k_1)^2-4=0$

即有$x_{Q_2}\cdot x_{P_1}=\frac{k_1^2-2k_1-3}{k_1^2+3}$，所以$x_O=\frac{k_1^2-2k_1-3}{k_1^2+3}$，代入直线方程得$y_{Q_2}=\frac{-k_1^2-6k_1+3}{k_1^2+3}$

则$k_2=\frac{y_{Q_2}-1}{x_{Q_2}+1}=\frac{-2k_1^2-6k_1}{2k_1^2-2k_1}=-\frac{k_1+3}{k_1-1}$，设$f(x)=-\frac{x+3}{x-1}$，则经过$P_1,P_2$的两直线$l_1,l_2$之间斜率满足关系：$k_2=f(k_1)$，将直线$l_2,l_3$绕原点顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$后也会经过$P_1,P_2$，所以两者斜率满足$-\frac{1}{k_3}=f(-\frac{1}{k_2})$，所以$k_3=-\frac{1}{f(-\frac{1}{k_2})}=-\frac{-1-k_2}{-1+3k_2}=\frac{-1}{k_1+2}$

同理将直线l_3,l_4绕原点顺时针旋转π后也会经过P_1,P_2，所以两直线斜率满足$k_4=f(k_3)$

$k_4=-\frac{k_3+3}{k_3-1}=-\frac{(\frac{-1}{k_1+2})+3}{(\frac{-1}{k_1+2})-1}=\frac{3k_1+5}{k_1+3}$，设$N(x,y)$，则有$\frac{y-1}{x-1}=k_1$，$\frac{y-1}{x+1}=k_4$，代入上式得：

$\frac{y+1}{x-1}=\frac{3\cdot\frac{y-1}{x-1}+5}{\frac{y-1}{x-1}+3}$，得到$y^2=5x^2-16x+12=(5x-6)(x-2)$所以$\frac{y}{x-\frac{6}{5}}\cdot\frac{y}{x-2}=5$，因此存在定点$G(\frac{6}{5},0)$，使直线$GN$和直线$HN$的斜率之积为定值5 ……17分