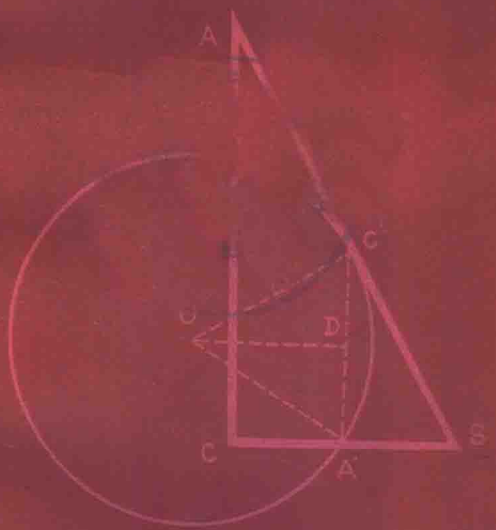
QUANGUOLIJIEGAOKAOSHITIJIJIEDA

1949—1979

全国历届高考试题及解答

（数学）



新蕾出版社

1949——1979

全国历届高考试题及解答

（数　学）

新蕾出版社

1949——1979
全国历届高考试题及解答
（数　学）
*
新蕾出版社编辑、出版
天津新华印刷二厂印刷
天津市新华书店发行
开本787×1092毫米　1/32　印张 6.875
1980年1月第1版　　1980年1月第1次印刷
统一书号：13213·1　　定价：0.57元

说　明

为了满足广大中学生的需要，我社编辑出版建国三十年来历届高考数学、物理、化学三科的试题及解答，以供广大考生及一般中学生自学、参考之用。

《数学》一册，汇集了1949～1979年各届高考的统一试题，及部分地区、部分院校的试题。书中对这些试题都一一作了详尽的解答。

本书承天津一中张士瑛老师作了详细的审核校订，在此表示谢意。

虽经反复加工整理，错漏之处仍然难免，请读者指正。

目　录

一九四九年（清华大学）……1
一九四九年（北京大学）……8
一九五〇年（华北）……15
一九五一年……30
一九五二年……38
一九五三年……44
一九五四年……49
一九五五年……55
一九五六年……60
一九五七年……67
一九五八年……75
一九五八年（河北省）……82
一九五八年（湖北省）……88
一九五八年（广东省）……93
一九五九年……99
一九五九年（副题）……109
一九六〇年……117
一九六一年……124
一九六二年……131

一九六三年 ……139
一九六四年 ……147
一九六五年 ……157
一九七七年（北京市） ……169
一九七七年（天津市） ……177
一九七七年（上海市） ……186
一九七八年 ……197
一九七九年（理工农医类）……207

一九四九年（清华大学）

一、证明若$(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$为含x的整平方式，则$9p^2-14pq+9q^2=0$．并证若$(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)$为含$x$的整平方式，则$a=b=c$.

证明 ① $(x+p)(x+2q)+(x+2p)(x+q)$

$=2x^2+3(p+q)x+4pq$

二次三项式ax^2+bx+c为完全平方式的充要条件是

$\triangle=b^2-4ac=0$

∴ 由$9(p+q)^2-32pq=0$得$9p^2-14pq+9q^2=0$

② $(x+b)(x+c)+(x+c)(x+a)+(x+a)(x+b)=3x^2+2(a+b+c)x+ab+ac+bc$

由 $4(a+b+c)^2-12(ab+ac+bc)=0$得$4a^2+4b^2+4c^2-4ab-4ac-4bc=0$

∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$

∴ $a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$

∴ $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$，∵$a$，$b$，$c$均为实数.

∴ $a-b=0$，$a-c=0$，$b-c=0$

故 $a=b=c$.

注：原题应说明a,b,c均为实数这一点.

二、求1的三次根（实根及虚根）并证明任一虚根的平

方等于另一虚根且：

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right)^n=-1$$（式中 n 可为任意整数，但不是 3 的倍数）

解 令 $x^3=1$

$$\therefore\quad x=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2).$$

故 1 的三次根为：1，

$$\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}.$$

由 *De'Movre*定理，

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^2=\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

故任一虚根等于另一虚根，

因而 1 的三次根可写为$1,\omega,\omega^2$，其中$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$。

因 $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+1}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+1}$

$=\omega^{3k+1}+(\omega^2)^{3k+1}=\omega+\omega^2$

$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+2}+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^{3k+2}$

$=\omega^{3k+2}+(\omega^2)^{3k+2}=\omega^2+\omega$

但显然，$\omega+\omega^2=1$.

故当 n 为不是 3 的倍数的整数时，

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=-1.$$

三、1. 求适合下列方程的比例值：

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \end{cases}$$

解 是齐次方程组，故可消去一元而立即得其它二元之比. 例如，消去 x，立即得到

$y-2z=0$ 即 $y:z=2:1$；消去 y 立即得 $x-z=0$.

即 $x:z=1:1$，由此，$x:y:z=1:2:1$.

2. 求下列方程组的解

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & ① \\ 2x-3y+4z=0 & ② \\ 4x^3+3y^3+z^3-xyz=216 & ③ \end{cases}$$

解 由①②，$x=z$，$y=2z$， ④

④代入③得 $27z^3=216$.

即 $z^3=8$； $z^3-8=0$.

$(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

$\therefore\quad z_1=2,\qquad z_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}i.$　　代入④.

得原方程组的解为

$$\begin{cases}x_1=2\\y_1=4\\z_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-1+\sqrt{3}i\\y_2=-2+2\sqrt{3}i\\z_2=-1+\sqrt{3}i\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=-1-\sqrt{3}i\\y_3=-2-2\sqrt{3}i\\z_3=-1-\sqrt{3}i\end{cases}$$

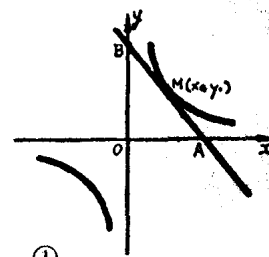
四、曲线$xy=a^2$上一切线与坐标轴成一个三角形，求此三角形的面积.

解　令$M\left(x_0,\frac{a^2}{x_0}\right)$为$xy=a^2$上的任意一点，则过此点的切线的斜率为

$$k=y'\Big|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}$$

$\therefore$　过M点的切线方程为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$$



可化简为　$y=-\frac{a^2}{x_0^2}x+\frac{2a^2}{x_0}$　①

在①中　令$y=0$，得切线和x轴交点A的坐标为$(2x_0,0)$

在①中　令$x=0$，得切线和y轴交点B的坐标为$\left(0,\frac{2a^2}{x_0}\right)$

$\therefore\quad S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}|OB|\cdot|OA|$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2a^2$$

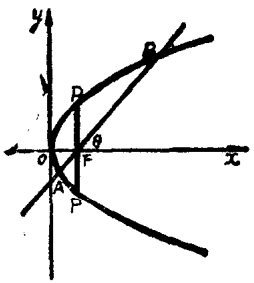
五、经过抛物线焦点的弦与抛物线的轴成θ角.证此弦在抛物线内的截线等于$L/\sin^2\theta$. 其中 L 为正焦弦的长.（经过焦点而又垂直于轴的弦称为正焦弦）

证 如图选取坐标系

如θ为直角，则此弦即为正焦弦.显然，结论是对的，故以下计算可设θ为锐角或钝角.

设抛物线方程为$y^2=2px$.

则焦点为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，正焦弦方程为 $x=\frac{p}{2}$.



解联立方程 $\begin{cases} x=\frac{p}{2} \\ y^2=2px \end{cases}$

得正焦弦与抛物线的交点为

$P\left(\frac{p}{2},\ p\right)$, $P'\left(\frac{p}{2},-p\right)$

故$L=|PP'|=2p$

设直线 AB 的方程为

$y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)$

它与抛物线的交点A、B的坐标为

$$\begin{cases} y^2=2px & ① \\ y=(tg\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right) & ② \end{cases}$$ 的公共解.

以下为其解法：

将②代入①，得$(tg^2\theta)\left(x-\frac{p}{2}\right)^2=2px$

$$x^2(tg^2\theta) - xp\,(tg^2\theta + 2) + \frac{p^2 tg^2\theta}{4} = 0$$

$$\therefore \quad x_{1,2} = \frac{p(2 + tg^2\theta) \pm \sqrt{p^2(tg^2\theta + 2)^2 - p^2 tg^4\theta}}{2tg^2\theta}$$

$$= \frac{2 + tg^2\theta \pm 2sec\theta}{2tg^2\theta} p$$

即 $$y_1 = (tg\theta)\left(x_1 - \frac{p}{2}\right) = \frac{1 + sec\theta}{tg\theta} p$$

$$y_2 = tg\theta\left(x_2 - \frac{p}{2}\right) = \frac{1 - sec\theta}{tg\theta} p$$

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{2sec\theta}{tg^2\theta} p\right)^2 + \left(\frac{2sec\theta}{tg\theta} p\right)^2}$$

$$= 2p \cdot \frac{sec^2\theta}{tg^2\theta} = \frac{2p}{sin^2\theta} = \frac{L}{sin^2\theta}$$

θ为钝角时计算上与锐角时完全一样.
（因此时同样有$sec\theta > 0$）.

六、 求证1. $3 + 4cos\theta + cos2\theta \geqslant 0$

证明 $3 + 4cos\theta + cos2\theta$

$= 3 + 4cos\theta + 2cos^2\theta - 1$

$= 2(cos\theta + 1)^2 \geqslant 0$

求证2. $$\frac{sin(2^N x)}{2^N sinx} = cosx \cdot cos2x \cdots cos(2^{N-1}x)$$

证 方法一 右端 $= \dfrac{2^N sinx cosx cos2x \cdots cos(2^{N-1}x)}{2^N sinx}$

$$= \frac{2^{N-1}\sin 2x\cos 2x\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)}{2^N\sin x}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \frac{\sin(2^N x)}{2^N\sin x}$$

= 左端

方法二　由倍角公式，得

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x,$$

$$\sin 2^2x = 2\sin 2x\cdot\cos 2x,$$

$$\sin 2^3x = 2\sin 2^2x\cdot\cos 2^2x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin(2^{N-1}x) = 2\sin(2^{N-2}x)\cdot\cos(2^{N-2}x),$$

$$\sin(2^N x) = 2\sin(2^{N-1}x)\cdot\cos(2^{N-1}x),$$

这 n 个等式两边相乘并约去共同因式，得

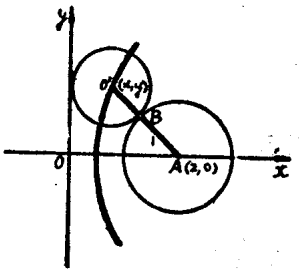
$$\sin(2^N x) = 2^N\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)$$

故 $\dfrac{\sin(2^N x)}{2^N\sin x} = \cos x\cdot\cos 2x\cdots\cos(2^{N-1}x)$.

一九四九年（北京大学）

一、一动圆与$(x-2)^2+y^2=1$及y轴皆相切．求动圆的圆心的轨迹方程．

解 定圆$(x-2)^2+y^2=1$的圆心为$A(2,0)$，半径为$r=1$．



设动圆圆心为$O'(x,y)$，

$|O'A|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

而 $\odot O'$与y轴相切于C．

设 $\odot O'$的半径为r'，则$r'=CO'=x$，

$|O'A|=r'+r=x+1$．

故 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=x+1$

化简得$y^2-6x+3=0$，即为一抛物线

二、若$kxy-8x+9y-12=0$表示两条直线，求k之值及两直线的夹角．

解 二次曲线$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

当 $\triangle=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=0$时表示的是退化曲线．

$$\therefore \quad 由 \begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{2} & -4 \\ \frac{k}{2} & 0 & \frac{9}{2} \\ -4 & \frac{9}{2} & -12 \end{vmatrix} = 0$$

展开后，得$k^2-6k=0$.

$k(k-6)=0$.

$\therefore \quad k_1=0, \qquad k_2=6$.

k不能为0，否则，原方程将成为二元一次方程，它只表示一条直线，而不表示两条直线了，故舍去.

当 $k=6$时，

由 $6xy-8x+9y-12=0$.

$(2x+3)(3y-4)=0$.

$\therefore \quad 2x+3=0, \quad 3y-4=0.$

这是两条分别与y轴，x轴平行的直线. 故两条直线互相垂直，夹角为90°.

三、若$A+B+C=n\pi$（n为整数）. 证明$sin2A+sin2B+sin2C=(-1)^{n-1}4sinAsinBsinC$.

证 $\because \quad A+B+C=n\pi$.（$n$为整数）.

$\therefore \quad A+B=n\pi-C$.

今先证 $sin(n\pi-C)=(-1)^{n-1}sinC$.

事实上

若n为奇数，即$n=2k+1$,

则 $sin(n\pi-C)=sin(2k\pi+\pi-C)=sinC$

$= (-1)^{n-1}sinC.$

若n为偶数，即$n=2k$.

则 $sin(n\pi - C) = sin(2k\pi - C) = -sinC$

$= (-1)^{n-1}sinC.$

故 $sin2A + sin2B + sin2C = 2sin(A+B)cos(A-B)$
$+ sin[2n\pi - 2(A+B)]$

$= 2sin(A+B)cos(A-B) - sin2(A+B)$

$= 2sin(A+B)cos(A-B) - 2sin(A+B)cos(A+B)$

$= 2sin(A+B)[cos(A-B) - cos(A+B)]$

$= 2sin(A+B)[-2sinAsin(-B)]$

$= 4sin(A+B)sinAsinB$

$= 4sin(n\pi - C)sinAsinB$

$= (-1)^{n-1}4sinAsinBsinC.$

四、在1、2、3、4、……99、100这一百个数中，任选51个．证明在此51个数内恒可找到两数，其中一个为另一个的倍数．

证 设选出的51个数为a_1、a_2、a_3、…… a_{51} 每一个数a_i都可以写成$a_i = 2^{zi}t_i$（zi是0或自然数）其中t_i是奇数

∵ 在100内具有50个奇数，因而t_i之中必有重复的，设$t_i = t_j = t(i \neq j)$

∴ $a_i = 2^{zi}t$ $a_j = 2^{zj}t$.

又∵ $a_i \neq a_j$ ∴$zi \neq zj$

不妨令 $zi > zj$

则 $a_i = 2^{zi}t$ 必是$a_j = 2^{zj}t$的倍数.

五、证明$(x^{2^0}+1)(x^{2^1}+1)(x^{2^2}+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$

$$= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}$$

证　左端乘以$(x-1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)\cdots\cdots$

$(x^{2^n}+1)$

$$= (x^2-1)(x^2+1)\cdots\cdots(x^{2^n}+1)$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= (x^{2^n}-1)(x^{2^n}+1)$$

$$= x^{2^{n+1}} - 1$$

命题得证.

六、在$\triangle ABC$的边AB、AC上各取一点D、E，且$AD=\frac{1}{3}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$，连接BE、CD相交于F，试证$\triangle FCB$的面积为$\triangle ABC$面积的一半.

证明　方法一：连接DE，并过F作$MP \parallel CB$

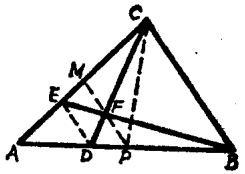
$\because$　$AD=\frac{1}{3}AB$　$AE=\frac{1}{3}AC$

$\therefore$　$DE \parallel CB$（截三角形两边成比例的直线平行于三角形的第三边）

$$DE=\frac{1}{3}BC \qquad \therefore EF=\frac{1}{3}BF=\frac{1}{4}BE$$

又$\because$　$MP \parallel BC$　$\therefore EM=\frac{1}{4}CE=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}AC=\frac{1}{6}AC$

$\therefore\ AM = AE + EM = \frac{1}{3}AC$



$+\frac{1}{6}AC = \frac{1}{2}AC$

$\therefore$ M是AC的中点.

同理P是AB的中点.

再连接CP $\therefore S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCP}$（同底等高的两个三角形等积）

而 $S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$（三角形中线分原三角形为两个等积三角形）

$\therefore\ S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

方法二：连结DE.

$\because\ AD = \frac{1}{3}AB,\ AE = \frac{1}{3}AC,$

$\therefore\ DE \parallel BC.$

且 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC, DE = \frac{1}{3}BC. \triangle DEF \backsim \triangle CBF$

$\therefore\ S_{\triangle ADE} = \frac{1}{9}S_{\triangle ABC},\ S_{\triangle DEF} = \frac{1}{9}S_{\triangle CBF}.$

又 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC},\ S_{\triangle DBC} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$

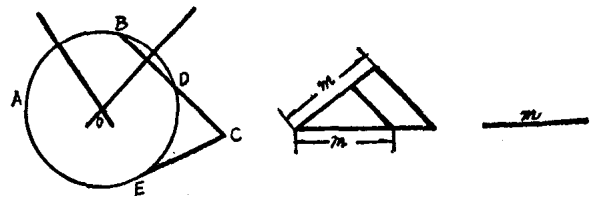
但 $S_{\triangle ABE} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle DEF} = S_{\triangle DBC} - S_{\triangle CBF},$

$$\therefore \quad \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{9}S_{\triangle CBF}$$

$$=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}-S_{\triangle CBF}.$$

整理得 $S_{\triangle CBF}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

七、A、B、C为三个定点，求作一个圆，通过A、B，且从C到此圆的切线等于一固定之长.



已知 A、B、C、m.

求作 ⊙O过A、B点，且C到⊙O的切线长为m.

分析（略）

作法：在线段CB或其延长线上作D点，

使 $CD\cdot CB=m^2$,

过 A、B、D三点作⊙O,

即为所求.

证明 作CE切⊙O于E

$\therefore \quad CE^2=CD\cdot CB=m^2$

$\therefore \quad CE=m$.

讨论：如$m<CB$，则D在CB上；

如$m>CB$，则D在CB的延长线上；

如$m=CB$，则D与B重合．此时作的$\odot O$应使过A、B两点，并切CB于B．

如 A、B、C在一直线上，则A、B、D亦在一直线上，此时本题无解．

如 A、B、C不在一直线上，则不论m之长短如何，本题均只有一解．

一九五〇年（华北）

甲组第一部分

（A）将下列各题正确的答案填入括号内：

一、$x^3-2x^2-2x+4=0$ 的一个根为 2，其它两根应为（两个实根）.

（A） 二个 0；　　（B） 一个 0，一个实根；

（C） 两个实根；　　（D） 一实根，一虚根；

（E） 二虚根.

解 用综合除法：

$$\begin{array}{r|l} 1-2-2+4 & 2 \\ \hline \quad 2+0-4 & \\ \hline 1+0-2+0 & \end{array}$$

$(x-2)(x^2-2)=0$ 除 2 外，尚有两个实根.

二、已知 $lgsin26°20'=9.6470-10$ 及 $lgsin26°30'=9.6493-10$，若 $lgsinx=9.6486-10$，则 x 的近似值为（26°27′）.

（A） 26°23′；　　（B） 26°24′；

（C） 26°25′；　　（D） 26°26′；

（F） 26°27′.

解
$$\begin{array}{l} lgsin26°30' = 9.6493-10 \\ \underline{lgsin26°20 = 9.6470-10} \\ 10'\text{的表差}=0.0023 \end{array}$$

$$\lg\sin x = 9.6486 - 10$$

$$\lg\sin 26°20' = 9.6470 - 10$$

正弦对数超过值 $= 0.0016$

$$0.0023 : 0.0016 = 10' : y$$

$$\therefore \quad y = \frac{10' \times 0.0016}{0.0023} = 7'$$

$$\therefore \quad x = 26°20' + 7' = 26°27'.$$

三、若(ρ, θ)为一点的极坐标，则$\rho = 20\cos\theta$的图形为（圆）.

（A）圆；　（B）椭圆；　（C）双曲线；

（D）抛物线；　（E）两平行直线.

解 将$\rho = 20\cos\theta$两边同乘以ρ.

$\therefore$ $\rho^2 = 20\rho\cos\theta$. 以 $\rho^2 = x^2 + y^2$，$\rho\cos\theta = x$代入，得 $x^2 + y^2 = 20x$ 即 $(x-10)^2 + y^2 = 10^2$.

这是一个以（10，0）为圆心，半径r为10的圆.

四、$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$ 之图形为（二平行直线）.

（A）圆　（B）椭圆　（C）双曲线　（D）抛物线

（E）二平行直线

解 给出$x^2 + 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0$，

$\therefore$ $A = C = 1$，$B = 2$. $B^2 - 4AC = 2^2 - 4(1)(1) = 0$.

$\therefore$ 为抛物线型方程，进一步地，原方程可写为

$$(x+y)^2 + (x+y) - 2 = 0$$

即 $(x+y+2)(x+y-1) = 0$.

这是退化的抛物线，它们表示两条$\parallel$直线 $x + y + 2 = 0$，及$x + y - 1 = 0$.

五、展开二项式$(a+b)^{17}$之第15项为（$680a^3b^{14}$）.

（A）$2380a^{15}b^2$；（B）$680a^3b^{14}$；（C）$736a^{14}b^3$；

（D）$(a+b)^{15}$；（E）a^8b^7.

解 $(a+b)^{17}$之第15项为

$$T_{r+1}=c_n^r a^{n-r}b^r=T_{14+1}=c_{17}^{14}a^{17-14}b^{14}=c_{17}^3a^3b^{14}$$

$$=\frac{17\cdot16\cdot15}{1\cdot2\cdot3}a^3b^{14}=680a^3b^{14}.$$

（B）将正确的答案填在虚线上：

一、两直线$x+y+4=0$，$5x-2y=10$相交锐角的正切为$-\frac{7}{3}$.

解 直线$x+y+4=0$的斜率$k_1=-1$.

直线$5x-2y=10$的斜率$k_2=\frac{5}{2}$.

∴ 它们相交之锐角的正切为

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}=\frac{\frac{5}{2}-(-1)}{1+\left(\frac{5}{2}\right)(-1)}=\frac{5+2}{2-5}$$

$$=-\frac{7}{3}.$$

二、设x，y都是实数，$i=\sqrt{-1}$，且$(x+yi)-(2+4i)=(x-yi)(1+i)$，则$x=-8$，$y=-2$.

解 ∵ $(x+yi)-(2+4i)=(x-yi)(1+i)$.

展开后得

$$(x-2)+(y-4)i=(x+y)+(x-y)i.$$

比较系数 $x-2=x+y$. $y-4=x-y$.

解之，得　　$x=-8$。　　$y=-2$。

三、$\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix} = 0$。

解　$\begin{vmatrix} a & d & a+5d \\ b & e & b+5e \\ c & f & c+5f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix}$

$=0+5\cdot 0=0$.

四、已知 x 在第四象限内，而 $sin^2x=\frac{1}{9}$，则 tgx 之值至第二位小数为 -0.35.

解　∵　x 在第四象限内，　　∴　$sinx=-\frac{1}{3}$.

$$cosx=\sqrt{1-sin^2x}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$tgx=\frac{sinx}{cosx}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

≈ -0.35.

五、参数方程 $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t(t+1) \end{cases}$ 之直角坐标方程为

$y=\frac{x^2-1}{4}$.

解 由 $x=1+2t$. 解出 $t=\frac{x-1}{2}$，代入另一式.

$$\therefore\quad y=t(t+1)=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x-1}{2}+1\right)=\frac{x-1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

$$=\frac{x^2-1}{4}=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}.$$

$\therefore$ 原参数方程的直角坐标方程为 $y=\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}$.

甲组第二部分

一、证明 $\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2$.

证 右 $=(\operatorname{tg}x+\sec x)^2=\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)^2$

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}=\frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\text{左}.$$

$\therefore$ 原式得证.

二、设方程 $x^3-5x^2+tx+s=0$，其中 t，s 为实数，已知此方程之一根为 $2-3i$，求 t，s 之值.

解 方程一根为 $2-3i$，另一根必为 $2+3i$，

x^3-5x^2+tx+s 必定被 $x^2-4x+13$ 整除，而 $x^3-5x^2+tx+s=(x^2-4x+13)(x-1)+(t-17)x+(s+13)$

$\therefore$ 由 $t-17=0$，$s+13=0$，得 $t=17$，$s=-13$.

三、用数学归纳法证明公式

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

证明 ① 当$n=1$时，左$=1\cdot2=2$，右$=\frac{1}{3}\cdot1\cdot(1+1)\cdot(1+2)=2$，

∴ 当$n=1$时，原式正确.

② 设当$n=k$时，原式正确，即

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

那么，$n=k+1$时，有

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)=\frac{1}{3}(k+1)(k+1+1)(k+1+2)$$

∴ 当$n=k+1$时原式也正确.

∴ 原式对一切自然数n都正确.

四、设$P_1(x_1, y_1)$及$P_2(x_2, y_2)$为二定点，过P_1作直线交y轴于B，过P_2作直线与过P_1之直线垂直，交x轴于A，求AB中点的轨迹.

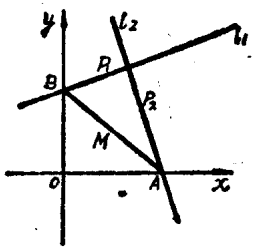
解 设过P_1所作直线l_1的方程为

$$y-y_1=k(x-x_1),$$

那么l_2的方程为

$$y-y_2=-\frac{1}{k}(x-x_2),$$

由 $\begin{cases} y-y_1=k(x-x_1), \\ x=0. \end{cases}$



得B的坐标为$(0,\ y_1-kx_1)$，

由 $\begin{cases} y-y_2=-\dfrac{1}{k}(x-x_2) \\ y=0. \end{cases}$

得A的坐标为$(ky_2+x_2,\ 0)$.

$\therefore$ AB中点$M(x,\ y)$为$\left(\dfrac{ky_2+x_2}{2},\ \dfrac{y_1-kx_1}{2}\right)$,

$\therefore$ $\begin{cases} x=\dfrac{ky_2+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1-kx_1}{2}. \end{cases}$

可得

$$2x_1x+2y_1y-y_1y_2-x_1x_2=0.$$

故AB中点的轨迹为一直线.

五、P为抛物线$y^2=4x$上一点，QR为抛物线上一弦并与其轴垂直. 设PQ交抛物线之轴于M，PR交抛物线之轴于N，证明MN线段为抛物线之顶点平分.

证 设P点坐标为$(x_1, 2\sqrt{x_1})$$Q$点坐标为$(x_2, 2\sqrt{x_2})$，$R$点坐标为$(x_2, -2\sqrt{x_2})$.

① 直线PQ的方程为

$$\frac{y-2\sqrt{x_1}}{x-x_1}=\frac{2\sqrt{x_2}-2\sqrt{x_1}}{x_2-x_1},$$

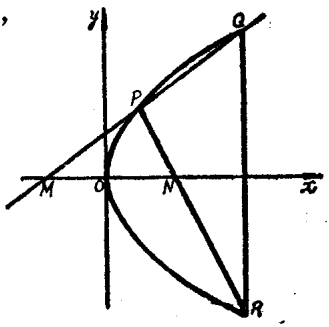
与x轴(即$y=0$)之交点为

$M(-\sqrt{x_1x_2},\ 0)$.

② 直线PR的方程为

$$\frac{y-2\sqrt{x_1}}{x-x_1}=\frac{2\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}}{x_1-x_2},$$

它与x轴之交点为$N(\sqrt{x_1x_2},0)$，MN中点的坐标为（0，0）故（0，0）是MN的中点，即O点平分MN.



乙组、丙组第一部分

（A）将正确答案填入括号内：

一、设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，下列各式何者为正确：

① $\frac{e}{f}=\frac{a+c}{b-d}$；② $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}$；

③ $\frac{ad}{bc}=\frac{e}{f}$；④ $\frac{ac}{bd}=\frac{e}{f}$；

⑤ $\frac{a+c-e}{b-d+f}=\frac{e}{f}$.

$\left(\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}\right)$.

解 设$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=r$

那么 $a=br$，$c=dr$，$e=fr$

$\therefore$ $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{br+dr+fr}{b+d+f}=r$

$$\frac{c+e}{d+f}=\frac{dr+fr}{d+f}=r$$

$$\therefore\quad \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{c+e}{d+f}.$$

二、圆内接四边形$ABCD$内，若$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=1:2:3:4$，则$A$、$B$、$C$、$D$各角为(90°，126°，90°，54°).

① 15°，135°，45°，135°；

② 36°，72°，108°，144°；

③ 72°，108°，72°，108°；

④ 90°，126°，90°，54°.

解 因圆心角与其所对弧成比例

$1+2+3+4=10$

$$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=360^\circ\times\frac{1}{10}=36^\circ,\quad \overset{\frown}{BC}=360^\circ\times\frac{2}{10}=72^\circ$$

$$\overset{\frown}{CD}=360^\circ\times\frac{3}{10}=108^\circ,\quad \overset{\frown}{DA}=360^\circ\times\frac{4}{10}=144^\circ$$

$$\overset{\frown}{AC}=36^\circ+72^\circ=108^\circ,\quad \overset{\frown}{BD}=72^\circ+108^\circ=180^\circ$$

优 $\overset{\frown}{AC}=108^\circ+144^\circ=252^\circ$

∵ 圆周角以其截弧之半度之.

$$\therefore\quad \angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\text{的度数}=90^\circ,$$

$$\angle B=\frac{1}{2}\text{优}\overset{\frown}{CA}\text{的度数}=126^\circ$$

$\angle C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$的度数 $= 90°$，

$\angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$的度数 $= 54°$.

三、$\frac{1}{a} = \frac{1}{n} + k$，则$a$等于$\left(\frac{n}{1+nk}\right)$.

① $\frac{n}{1+nk}$；　② $n - \frac{1}{k}$；　③ $n - k$；

④ $n + \frac{1}{k}$；　⑤ $\frac{1+nk}{n}$.

解 由 $\frac{1}{a} = \frac{1}{n} + k$.　∴ $\frac{1}{a} = \frac{1+nk}{n}$

即 $a = \frac{n}{1+nk}$.

四、若$lg5.8 = 0.7634$，$lg2.19 = 0.3404$，

则$lg(580 \times 2190)$等于(6.1038).

① 0.5770；　② 1.1038；　③ 6.1038；

④ 264.06；　⑤ 416.74.

解 $lg(580 \times 2190) = lg580 + lg2190$

$$\begin{array}{r} lg\ 580 = 2.7634 \\ \underline{lg2190 = 3.3404}\ (+ \\ 6.1038 \end{array}$$

五、若 $sinA = \frac{2}{\sqrt{29}}$，$cosA = \frac{5}{\sqrt{29}}$，$tgA = \frac{2}{5}$，

$sinB = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$cosB = \frac{2}{\sqrt{5}}$，$tgB = \frac{1}{2}$.

则 $tg(A+B)$ 等于$\left(1\frac{1}{8}\right)$.

① $-\frac{1}{12}$; ② $\frac{3}{4}$; ③ $-\frac{1}{8}$; ④ $1\frac{1}{8}$;

⑤ $\frac{1}{8}$.

解 $tg(A+B)=\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}$

$$=\frac{4+5}{10-2}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}.$$

(*B*) 将正确答案填在虚线上：

一、$sin330^\circ$ 之值为 $-\frac{1}{2}$.

解 $sin330^\circ=sin(360^\circ-30^\circ)=-sin30^\circ=-\frac{1}{2}$.

二、x^3-4x^2+5x-2 的因子是 $(x-2)(x-1)^2$.

解 用综合除法：

$$\begin{array}{r|l} 1-4+5-2 & 1 \\ \quad 1-3+2 & \\ \hline 1-3+2 \quad 0 & \end{array}$$

∴ 原式 $=(x-1)(x^2-3x+2)=(x-1)(x-1)(x-2)$.

三、一本书定价 p 元，因为有折扣，实价较定价少 d 元，则该书的实价是定价的百分之 $\frac{p-d}{p}\times100\%$.

解 因除扣之部分、余$p-d$元，故实价是定价的$\frac{p-d}{p}$

以百分法计之，为 $100\times\frac{p-d}{p}\%$.

四、若一多边形之每一外角为10°，则此多边形有9边.

解 设多边形的边数为n，因它外角的和$=360°$

$\therefore\quad 40n=360\qquad\therefore\quad n=9.$

五、a年前弟年是兄年的$\frac{1}{n}$，今年弟年是兄年的$\frac{1}{m}$，则兄今年为 $\frac{x-a}{n}=\frac{x}{m}-a$，得$\frac{am(n-1)}{n-m}$岁.

解 设哥哥今年为x岁，那么弟弟为 $\frac{x}{m}$岁，

得方程$\frac{1}{n}(x-a)=\frac{x}{m}-a$

$$m(x-a)=nx-mna$$

$$mna-ma=(n-m)x$$

$$\therefore\quad x=\frac{ma(n-1)}{n-m}.$$

乙组、丙组第二部分

一、设AB是一圆的直径，过A、B作AC及BD相交于E，则$AE\cdot AC+BE\cdot BD=AB^2$.

证明 连AD，BC.

$\therefore\quad \angle C=\angle D=90°$（半圆上的圆周角是直角）.

$$\therefore\quad AB^2=\frac{1}{2}(AD^2+BD^2+AC^2+BC^2)\qquad(1)$$

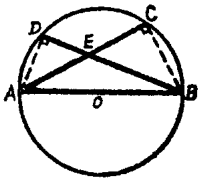
而在直角△ADE中，

$$AD^2 = AE^2 - DE^2 = AE^2 - (BD - BE)^2$$
$$= AE^2 - BD^2 - BE^2 + 2BD \cdot BE \qquad (2)$$

在直角△BCE中，

$$BC^2 = BE^2 - EC^2 = BE^2 - (AC - AE)^2$$
$$= BE^2 - AC^2 - AE^2 + 2AC \cdot AE \qquad (3)$$

将(2)、(3)式代入(1)中，



$$\therefore\ AB^2 = \frac{1}{2}(2BD \cdot BE + 2AC \cdot AE)$$
$$= AE \cdot AC + BE \cdot BD.$$

二、A、B、C为△ABC之内角，

则$tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$.

证 ∵ $A = 180° - (B + C)$

∴ $tgA = tg[180° - (B + C)]$

$$= -tg(B + C)$$
$$= -\frac{tgB + tgC}{1 - tgB\,tgC}$$

$$tgA(1 - tgB\,tgC) = -(tgB + tgC)$$
$$tgA - tgA\,tgB\,tgC = -(tgB + tgC)$$

∴ $tgA + tgB + tgC = tgA \cdot tgB \cdot tgC$.

三、分解因式：

(1) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$

$$= (x + 1)\left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}\right)\left(x + \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2}\right).$$

(2) $x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3$

$$= (x - 2y + 3)(x + 4y - 1)$$

(3) $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$

$=(x^2-y^2-z^2)^2-4y^2z^2$

$=(x^2-y^2-z^2-2yz)(x^2-y^2-z^2+2yz)$

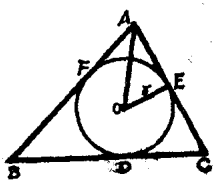
$=[x^2-(y-z)^2][x^2-(y+z)^2]$

$=(x+y-z)(x-y+z)(x+y+z)(x-y-z)$.

四、设s为$\triangle ABC$三边和之半，r为内切圆半径，已知

$tg\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，求证$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

证 设内切圆切各边于D、E、F点（如图）



则 $AE=AF$

$BD=BF$

$CD=CE$.

$\therefore$ $AE+BD+CD=s$.

但 $BD+CD=a$ $\therefore$ $AE=s-a$.

$\therefore$ $r=AEtg\frac{A}{2}=(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

五、设一调和级数之第p项为a，第q项为b，第r项为c，则$(q-r)bc+(r-p)ac+(p-q)ab=0$.

证明 设此调和级数之通项公式为$\frac{1}{a_1+(n-1)d}$，

$\therefore$ $a=\frac{1}{a_1+(p-1)d}$，$b=\frac{1}{a_1+(q-1)d}$，

$$c = \frac{1}{a_1 + (r-1)d},$$

$$\therefore \quad (q-r)bc + (r-p)ac + (p-q)ab$$

$$= \frac{q-r}{[a_1 + (q-1)d][a_1 + (r-1)d]}$$

$$+ \frac{r-p}{[a_1 + (p-1)d][a_1 + (r-1)d]}$$

$$+ \frac{p-q}{[a_1 + (p-1)d][a_1 + (q-1)d]} =$$

$$\frac{(q-r)[a_1 + (p-1)d] + (r-p)[a_1 + (q-1)d] + (p-q)[a_1 + (r-1)d]}{[a_1 + (q-1)d][a_1 + (r-1)d][a_1 + (p-1)d]}$$

$$= 0,$$

一九五一年

第一部分（占40%）

一、设联立方程 $\begin{cases} x+y=8 & ① \\ 2x-y=7 & ② \end{cases}$ 求x，y.

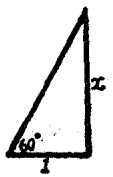
解 ①+② $x=5$，代入① $y=3$

$$\therefore \begin{cases} x=5 \\ y=3. \end{cases}$$

二、若一个三角形的重心与外接圆的圆心重合，则此三角形为何种三角形？

答：∵三角形的重心是三条中线的交点，而外接圆的圆心是三条边上的垂直平分线的交点，依题意，其中一中线就是这个边上的高，∴可证出每两边两两相等，故此△为等边△.

三、当太阳的仰角为60°时，若旗杆影长为1丈，则杆长若干丈？



解 $x=1\cdot tg60^\circ=\sqrt{3}\approx 1.732$（丈）.

四、若$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，而$a$、$b$、$c$各不相等，则$x+y+z=$？

解 令$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=t$

∴ $x=(a-b)t$, $y=(b-c)t$, $z=(c-a)t$

∴ $x+y+z=(a-b)t+(b-c)t+(c-a)t$

$=(a-b+b-c+c-a)t$

$=0$.

五、 若p点的极坐标为(ρ, θ)，则它的直角坐标为何？

解 $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$.

六、 试题十道，选答八道，则选法有几种？

解 共有 $C_{10}^{8}=C_{10}^{2}=\frac{10\times 9}{1\times 2}=45$（种）.

七、 若方程$x^2+2x+k=0$的两根相等，则$k=$？

解 由$\triangle=2^2-4k=0$，得$k=1$.

八、 列举两种证明两三角形相似的方法：

解 1. 若两三角形有两组对应角相等，则这两个三角形相似.

2. 若一个三角形的两边和另一个三角形的两边对应成比例，且夹角相等，则这两个三角形相似.

九、 当$(x+1)(x-2)<0$时，x的取值范围如何？

解 由 $\begin{cases}x+1>0\\x-2<0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x>-1\\x<2\end{cases}$

得 $-1<x<2$

由 $\begin{cases}x+1<0\\x-2>0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x<-1\\x>2\end{cases}$ 无解.

∴ 原不等式的解为：$-1<x<2$.

十、 若一直线通过原点且垂直于直线$ax+by+c=0$，求它的方程.

解 直线 $ax+by+c=0$ 的斜率为 $-\frac{a}{b}$，与上述直线垂直的直线的斜率为 $\frac{b}{a}$

∴ 经过原点且垂直于直线 $ax+by+c=0$ 的直线方程为 $y=\frac{b}{a}x$.

十一、 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 展开式中的常数项为何？

解 $T_{K+1}=C_6^K\cdot x^K(x^{-1})^{6-K}$

∵ $x^K\cdot x^{K-6}=1$.

∴ $2K-6=0$，∴ $K=3$

∴ $T_4=C_6^3=20$.

十二、 $cos2\theta=0$ 的通解是什么？

解 $2\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$，　∴ $\theta=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$ (k 是整数).

十三、系数是实数的一元三次方程最少有几个根是实根，最多有几个根是实根？

解 最少有一个实根，最多有三个实根.

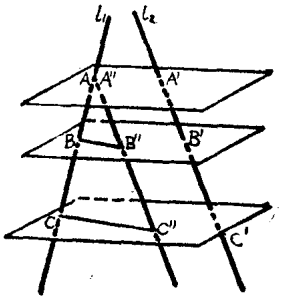
十四、
$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-100+100+40+60=100.$$

十五、 $x^2-4y^2=1$ 的渐近线方程如何？

解 由 $x^2-4y^2=0$ 得 $x\pm2y=0$.

十六、三个平行平面与一直线交于 A、B、C 三点，它与

另一直线交于A'、B'、C'三点，已知$AB=3, CB=7$，$A'B'=9$，求$A'C'=?$



解 作$AC'' \parallel l_2$

则$AB''=A'B'$，

$AC''=A'C'$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AB''}{AC''},\ \therefore \frac{3}{10}=\frac{9}{A'C'}$$

$$A'C'=30.$$

十七、二抛物线$y^2=12x$与$2x^2=3y$的公共弦长度是多少？

解 由$\begin{cases} y^2=12x \\ 2x^2=3y \end{cases}$得交点坐标为$A(0,\ 0)$；$B(3,\ 6)$

$\therefore\ |AB|=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

十八、国旗上的正五角星形的每一个顶角是多少度？

解 方法一：$\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$.

方法二：

$\because$ $A'B'C'D'E'$为正五边形.

$\therefore$ 每个内角为 $\frac{3\times 180^\circ}{5}=108^\circ$

$$\angle AA'E'=\angle AE'A'=180^\circ-108^\circ=72'$$

$\therefore$ $\angle A=180^\circ-2\times 72^\circ=36^\circ$

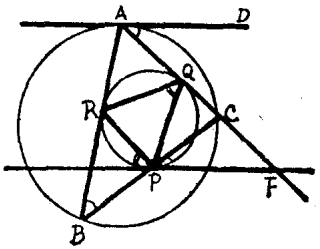
答：每个顶角是36°.

十九、有同底同高的圆柱及圆锥，已知圆柱的体积为$18R^3$，求圆锥的体积.

解 $V_{圆锥}=\frac{1}{3}V_{圆柱}=\frac{1}{3}\times 18R^3=6R^3$.

第二部分（占60%）

一、 P、Q、R顺次为$\triangle ABC$的BC、CA、AB三边的中点，求证圆ABC在A点的切线与圆PQR在P点的切线平行.



证明 $\angle DAC=\angle B$（弦切角等于同弧上的圆周角）

$\angle B=\angle PQR$（平行四边形对角相等）.

$\angle PQR=\angle RPB$（弦切角等于同弧上的圆周角）.

$\therefore\ \angle RPB=\angle DAC$

$\because\ AF\parallel RP$（三角形两边中点连线平行于第三边）

$\therefore\ \angle RPB=\angle AFP$（两条直线平行，则同位角相等）

$\therefore\ \angle DAF=\angle AFP$

$\therefore\ DA\parallel PE$（内错角相等，则两直线平行）.

二、设$\triangle ABC$的三边，$BC=4pq$，$CA=3p^2+q^2$，$AB=3p^2+2pq-q^2$，求$\angle B$；并证$\angle B$为$\angle A$及$\angle C$的等差中项.

证 $$\cos B=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2AB\cdot BC}$$

$$=\frac{(3p^2+2pq-q^2)^2+(4pq)^2-(3p^2+q^2)^2}{2(3p^2+2pq-q^2)\cdot 4pq}$$

$$= \frac{(3p-q)^2(p+q)^2+(4pq+3p^2+q^2)(4pq-3p^2-q^2)}{8pq(3p-q)(p+q)}$$

$$= \frac{(3p-q)^2(p+q)^2-(3p+q)(p+q)(3p-q)(p-q)}{8pq(3p-q)(p+q)}$$

$$= \frac{(3p-q)(p+q)[(3p-q)(p+q)-(3p+q)(p-q)]}{8pq(3p-q)(p+q)}$$

$$= \frac{3p^2-pq+3pq-q^2-3p^2-pq+3pq+q^2}{8pq}$$

$$= \frac{4pq}{8pq} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \quad \angle B = 60°$

又$\because \quad \angle A+\angle B+\angle C = 180°, \quad \therefore \quad \angle A+\angle C = 120°$

$$\therefore \quad \angle B = \frac{\angle A+\angle C}{2},$$

$\therefore$ $\angle B$是$\angle A$和$\angle C$的等差中项.

三、1. 求证若方程：$x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根可以排成等比级数，则$a^3c=b^3$.

证 设三根为$\frac{m}{q}$，m，mq.

$$\therefore \quad x^3+ax^2+bx+c = \left(x-\frac{m}{q}\right)(x-m)(x-mq)$$

$$= x^3-m\cdot\left(\frac{1}{q}+q+1\right)\cdot x^2+m^2\left(\frac{1}{q}+q+1\right)\cdot x-m^3$$

$$\therefore \quad a = -m\left(\frac{1}{q}+q+1\right), \quad b = m^2\left(\frac{1}{q}+q+1\right)$$

$$c = -m^3$$

则 $a^3c = -m^3\left(\frac{1}{q}+q+1\right)^3 \cdot (-m)^3 = m^6\left(\frac{1}{q}+q+1\right)^3$

而 $b^3 = m^6\left(\frac{1}{q}+q+1\right)^3$

故 $a^3c = b^3$.

2. 已知方程 $x^3+7x^2-21x-27=0$ 的三根可以排成等比级数，求三根.

解 由① $c=-m^3$ 得 $-27=-m^3$，∴ $m=3$. 故方程有一根为 3.

∴ $x^3+7x^2-21x-27$

$=(x-3)(x^2+10x+9)=(x-3)(x+1)(x+9)=0$

∴ $x_1=3$，$x_2=-1$，$x_3=-9$.

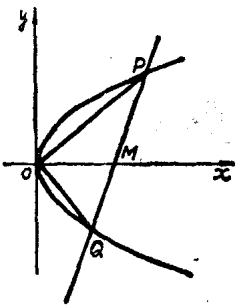
故三根为 3，-1，-9.

四、过抛物线顶点任何互相垂直的两弦，交此抛物线于两点，求证此两点连线的中点的轨迹仍是一抛物线.

证 设抛物线方程为 $y^2=2px$，并设 OP 的方程为 $y=kx$，

则 OQ 的方程必为

$$y=-\frac{1}{k}x.$$



由 $\begin{cases} y=kx \\ y^2=2px \end{cases}$ 得 p 点坐标为 $\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$

由 $\begin{cases} y = -\frac{1}{k}x \\ y^2 = 2px \end{cases}$ 得Q点坐标为$(2pk^2, -2pk)$

$\therefore$ P、Q中点M的坐标为 $\begin{cases} x = \dfrac{2pk^2 + \frac{2p}{k^2}}{2} = \dfrac{p(k^4+1)}{k^2} \\ y = \dfrac{\frac{2p}{k} - 2pk}{2} = \dfrac{p(1-k^2)}{k} \end{cases}$

消去参数 k：$y^2 = \dfrac{p^2(1+k^4-2k^2)}{k^2} = \dfrac{p^2(k^4+1)}{k^2} - 2p^2$

$\therefore$ $y^2 = px - 2p^2 = p(x-2p)$

这是抛物线方程，$\therefore M$点的轨迹是抛物线.

一九五二年

第一部分（占60%）

一、分解因式x^4-y^4

解 $x^4-y^4=(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=(x+y)(x-y)(x+yi)(x-yi)$.

二、若$lg2x=2lgx$，问$x=?$

解 由$lg2x=2lgx$，　　得　$lg2x=lgx^2$.

∴　$2x=x^2$

得　$x=2$，　　$x=0$（舍去）.

三、若方程$x^3+bx^2+cx+d=0$之根为1，-1，$\frac{1}{2}$，则$c=?$

解 由根与系数的关系，得

$$c=1\cdot(-1)+1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-1.$$

四、若　$\sqrt{x^2+7}-4=0$，　则$x=?$

解 由　$\sqrt{x^2+7}-4=0$

得　$x^2+7=16$

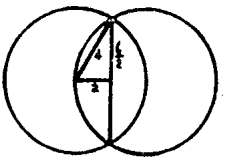
$x^2=9$

∴　$x=\pm3$

经检验 $x=\pm3$ 都是原方程的根.

五、$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 24 - 45 - 8 = -24.$

六、两个圆的半径都是4寸，并且一个圆过另一个圆的圆心，则此二圆的公共弦长是多少寸？



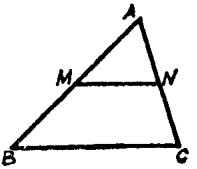
解 设公共弦长为L

则 $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 4 = 16$

$\therefore \quad L = 4\sqrt{3}$（寸）.

七、三角形ABC的面积是60平方寸，M是AB的中点，N是AC的中点，则$\triangle ANM$的面积是多少？

解 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}$



而 $S_{\triangle ABC} = 60$平方寸

$\therefore \quad S_{\triangle AMN} = \frac{60}{4} = 15$（平方寸）.

八、正十边形的一个内角是多少度？

解 正十边形的一内角$= 8 \cdot \frac{360^\circ}{20} = 144^\circ$.

九、祖冲之的圆周率 $\pi = ?$

答： $\pi = 3.14159265\cdots\cdots$，（用$\frac{22}{7}$作为约率，355/115作为密率.）

十、球的面积等于大圆面积的多少倍？

解 $S_{球}=4\pi R^2$

$S_{大圆}=\pi R^2$

$\therefore\ S_{球}=4S_{大圆}$.

十一、直圆锥的底半径为3尺，斜高为5尺，则其体积为多少立方尺？

解 高$h=4$尺，

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi\cdot3^2\cdot4=12\pi\ (\text{尺}^3).$$

十二、正多面体有几种，其名称是什么？

答：正多面体共有五种，分别为正四、六、八、十二、二十面体

十三、已知$sin\theta=\frac{1}{3}$，求$cos2\theta$.

解 $$cos2\theta=1-2sin^2\theta=1-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

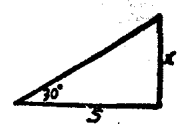
十四、方程$tg2x=1$的通解是什么？

解 $$2x=k\pi+\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\ (k\text{为整数}).$$

十五、太阳的仰角为30°时，塔影长5丈，求塔高

解 塔高 $x=5tg30^\circ=\frac{5\sqrt{3}}{3}$(丈).

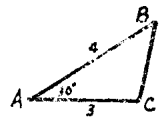


十六、$\triangle ABC$之b边为3寸，c边为4寸，$\angle A=30°$，则$\triangle ABC$的面积是多少平方寸.

解 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bcsinA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ$$

$$= 3 \text{（平方寸）}.$$



十七、已知一直线经过（2，3）点，其斜率为－1，则直线方程是什么？

解　$y-3=-(x-2)$或$x+y-5=0$.

十八、若原点在圆上，而此圆的圆心为(3，4)，则此圆的方程是什么？

解　$R=\sqrt{3^2+4^2}=5$

∴　$(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

十九、原点至$3x+4y+1=0$的距离是什么？

解　$d=\dfrac{|3\cdot 0+4\cdot 0+1|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{1}{5}$.

二十、抛物线$y^2-8x+6y+17=0$之顶点的坐标是什么？

解　由　$y^2-8x+6y+17=0$

配方，得　$(y+3)^2=8(x-1)$

∴　顶点坐标为(1，－3).

第二部分（占40%）

一、解方程$x^4+5x^3-7x^2-8x-12=0$.

解　令　$f(x)=x^4+5x^3-7x^2-8x-12$

∵　$f(2)=0$.

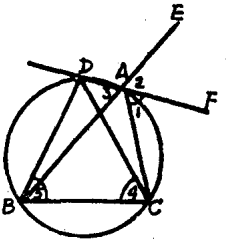
$f(-6)=0$.

∴　$x^4+5x^3-7x^2-8x-12$

$=(x-2)(x+6)(x^2+x+1)=0$

得 $x_1=2$，$x_2=-6$，$x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$。

二、在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的外角平分线与此 $\triangle$ 外接圆相交于 D，求证 $BD=CD$.



证明 $\angle 1=\angle 2$（$\because AF$ 是 $\angle BAC$ 外角的平分线）

$\angle 2=\angle 3$（对顶角相等）

$\angle 3=\angle 4$（同弧上的圆周角相等）.

而 $\angle 5=\angle 1$（圆内接四边形的外角等于其内对角）

故 $\angle 4=\angle 5$.

$\therefore$ $BD=CD$.

三、设 $\triangle ABC$ 的边长为 $a=4$，$b=5$，$c=6$. 其对角依次为 A、B、C，求 $cosC$、$sinC$、$sinB$、$sinA$，问 A、B、C 为锐角还是钝角？

解 $cosC=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{16+25-36}{40}=\dfrac{1}{8}$.

$\therefore$ C 为锐角，

又$\because$ C 是最大的角

$\therefore$ A、B 都是锐角.

$$sinC=\sqrt{1-cos^2C}=\sqrt{1-\frac{1}{64}}=\frac{\sqrt{63}}{8}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

由正弦定理，$\dfrac{sinB}{b}=\dfrac{sinC}{c}$.

$$\therefore\quad sinB=\frac{b}{c}\cdot sinC=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{8}\sqrt{7}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$\frac{sinA}{a} = \frac{sinC}{c}$$

$$\therefore \quad sinA = \frac{a}{c} \cdot sinC = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

四、一椭圆通过(2, 3)及(－1, 4)二点，中心为原点，长短轴重合于坐标轴，试求其长短轴及焦点.

解 设所求的椭圆方程为$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$，

∵ 它过(2, 3)及(－1, 4)两点，

$$\therefore \quad \begin{cases} \frac{4}{b^2} + \frac{9}{a^2} = 1 \\ \frac{1}{b^2} + \frac{16}{a^2} = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad a^2 = \frac{55}{3}, \quad a = \frac{\sqrt{165}}{3}$$

$$b^2 = \frac{55}{7}, \quad b = \frac{\sqrt{385}}{7}.$$

故长轴为 $2a = \frac{2\sqrt{165}}{3}$

短 轴 为 $2b = \frac{2\sqrt{385}}{7}$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{55}{3} - \frac{55}{7}} = \frac{2}{21}\sqrt{1155}.$$

焦点为$F \quad \left(0, \pm\frac{2}{21}\sqrt{1155}\right)$.

一九五三年

一、

1. 解方程 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$

解 两边各乘以 $3(x-1)(x+1)$，得

$$3(x+1)^2+3(x-1)^2=10(x^2-1)$$

$\therefore\ 6x^2+6=10x^2-10$

$\therefore\ x^2=4,\ x=\pm 2.$

经检验，它们都是原方程的根.

2. 若$3x^2+kx+12=0$ 的二根相等，求 k 的值.

解 由 $\triangle=k^2-4\times 3\times 12=0,$

$k^2=4\times 3\times 12$

得 $k=\pm 12.$

3. 求 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}=?$

解 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}=60+0-42-28-0+10=0.$

4. 求 $lg\frac{300}{7}+lg\frac{700}{3}+lg1$

解 原式 $= lg\frac{300\cdot 700}{7\cdot 3} = lg10^4 = 4$.

5. 若 $cos2x = \frac{1}{2}$，求 x 值.

解 $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ （k 为整数）.

6. 三角形相似条件为何？（把你所知道的都写出来）

答：两三角形相似的条件.

对任意三角形：

(1) 两个角对应相等；

(2) 两边对应成比例，夹角相等；

(3) 三边对应成比例.

对直角三角形：

(1) 一个锐角对应相等；

(2) 两直角边对应成比例；

(3) 斜边和一直角边对应成比例.

7. 长方体之长宽高各为12寸，3寸，4寸，求对角线长.

解 $L = \sqrt{3^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$(寸).

8. 直三棱柱之高为6寸，底面三边之长为3寸，4寸，5寸，求体积？

解 $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$

$= \sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6$.

$V = Sh = 36$(立方寸).

9. 求$tg870°$

解 $tg870° = tg(2\times360° + 150°) = tg150°$

$$= tg(180° - 30°) = -tg30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

二、解方程组 $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 & ① \\ 4x^2 - 5xy + 6y^2 = 30 & ② \end{cases}$

解 $3\times② - 10\times①$

$$2x^2 + 5xy - 12y^2 = 0$$

∴ $(x + 4y)(2x - 3y) = 0.$

把 $x = -4y$，$x = \frac{3}{2}y$ 分别代入①

由 $16y^2 + 8y^2 + 3y^2 = 9$

得 $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，$x = \mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$

由 $\frac{9}{4}y^2 - 3y^2 + 3y^2 = 9$

得 $y = \pm2$，$x = \pm3$

∴ 原方程组的解为

$$\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = -2. \end{cases}$$

三、

1. 化简 $\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt[4]{90000}+\sqrt[6]{\frac{64}{27}}$

解 原式 $=\frac{2\sqrt{3}}{5}+10\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{166\sqrt{3}}{15}$.

2. 求 $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^{12}$ 之展开式中的常数项.

解 令第 $k+1$ 项为常数项

$\therefore\quad T_{k+1}=C_{12}^{k}(2x^3)^k\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}$

由 $x^{3k+k-12}=x^0$

得 $k=3$

$\therefore\quad T_4=C_{12}^{3}\cdot 2^3=1760.$

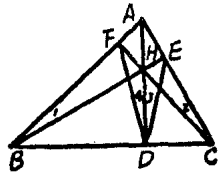
四、锐角 $\triangle ABC$ 之三高线为 AD、BE、CF，垂心为 H.

求证：HD平分$\angle EDF$

证明 $\because$ $BE\perp AC$、$CF\perp AB$

$\therefore$ B、F、E、C四点共圆

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（同弧上的圆周角相等）



同理可证.

A、B、D、E四点共圆.

且 $\angle 1=\angle 3$

A、C、D、F四点共圆

且 $\angle 2=\angle 4$

故 $\angle 3=\angle 4$

即 HD平分$\angle EDF$.

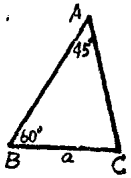
五、 已知$\triangle ABC$的二个角为45°、60°，而其夹边之长为1尺，求最小边之长及三角形面积.

解 已知$A=45°$，$B=60°$，$C=1$(尺)

求最小边及$S_{\triangle ABC}$

由正弦定理，

$$\frac{a}{\sin 45°}=\frac{1}{\sin 75°}$$



45°角所对之边为最小边

$$\therefore\quad a=\frac{\sin 45°}{\sin 75°}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}=\frac{2(2\sqrt{3}-2)}{4}$$

$$=\sqrt{3}-1\text{(尺)}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot c\sin 60°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{4}\text{(尺}^2\text{)}.$$

一九五四年

一、下面六题（每题5分）顺次解答，过程可以简化

1. $\left[\left(a^{-\frac{3}{2}}b^{2}\right)^{-1}\cdot\left(ab^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{7}\right]^{\frac{1}{3}}$

解 原式 $=\left(a^{\frac{3}{2}}b^{-2}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\left(a^{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=a^{\frac{2}{3}}$

$=\sqrt[3]{a^{2}}$.

2. 求解 $\frac{1}{6}lgx=\frac{1}{3}lga+2lgb+lgc$

解 $lgx=lga^{2}+lgb^{12}+lgc^{6}$

$=lga^{2}b^{12}c^{6}$

$\therefore\ x=a^{2}b^{12}c^{6}$.

3. 用二项式定理计算$(3.02)^{4}$使误差小于千分之一.

解 $(3+0.02)^{4}=c_{4}^{0}\cdot3^{4}+c_{4}^{1}\cdot3^{3}\cdot(0.02)+c_{4}^{2}\cdot3^{2}\cdot(0.02)^{2}$

$+c_{4}^{3}\cdot3\cdot(0.02)^{3}+c_{4}^{4}\cdot3^{0}\cdot(0.02)^{4}$

$\approx81+2.16+0.0216$

≈83.182.

4. 试证明直角三角形弦上半圆的面积等于勾上半圆面积与股上半圆面积的和.

证 设直角三角形三边为a、b、c.

则 $a^2+b^2=c^2$

$$S_{勾}+S_{股}=\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{\pi(a^2+b^2)}{8}$$

$$=\frac{\pi c^2}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=S_{弦}.$$

5. 已知球的半径等于R，试求内接正方体的体积.

解 设内接正方体的边长为a，则它的对角线的长为$2R$.

$\because$ $a^2+a^2+a^2=(2R)^2$

$\therefore$ $a^2=\frac{4}{3}R^2$

$\therefore$ $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}R$

故内接正方体体积为 $V=a^3=\frac{8\sqrt{3}}{9}R^3$.

6. 已知a是三角形的一边，B及C是这个边的两个邻角，试求另外一边b的计算公式.

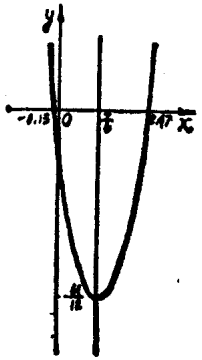
解 $A=180°-(B+C)$

$\therefore$ $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$

$$\therefore \quad b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{a\sin B}{\sin[180^\circ-(B+C)]}=\frac{a\sin B}{\sin(B+C)}.$$

二、描绘$y=3x^2-7x-1$的图象，并按下列条件分别求x值的范围.

1. $y>0$
2. $y<0$　　(18分)



解　由配方法得

$$y=3x^2-7x-1$$

$$=3\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{61}{12}$$

$\therefore$ 顶点$\left(\frac{7}{6},\ -\frac{61}{12}\right)$

对称轴方程 $x=\frac{7}{6}$

令　$y=0$

解得　$x=\frac{7\pm\sqrt{61}}{6}$

即　$x_1=\frac{7-\sqrt{61}}{6}\approx-0.13$,

$x_2=\frac{7+\sqrt{61}}{6}\approx2.47$

$\therefore$ 此抛物线与X轴的交点为$\left(\frac{7-\sqrt{61}}{6},\ 0\right)$及

$\left(\frac{7+\sqrt{61}}{6},\ 0\right)$

1. 当 $x<-0.13$，$x>2.47$时， $y>0$

2. 当 $-0.13<x<2.47$时， $y<0$.

三、假设两圆互相外切，求证用连心线作直径的圆必与前两圆外公切线相切 （17分）

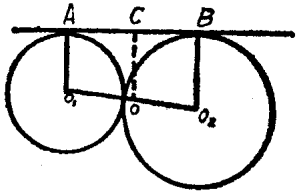
证明 $\odot O_1$和$\odot O_2$的半径分别用 r 和R表示，

$\because$ O是O_1O_2的中点

$\therefore$ $OO_1=\frac{r+R}{2}$，

过O作$OC\perp AB$

$\therefore$ $OC=\frac{r+R}{2}$



（梯形中位线等于两底和的一半）

$\because$ C点在$\odot O$上，

又$\because$ $OC\perp AB$.

$\therefore$ AC与$\odot O$切于C.

四、试由 $\frac{1+tgx}{1-tgx}=1+sin2x$，求$x$的通值 （17分）

解 由 $\frac{1+tgx}{1-tgx}=1+sin2x$，

$\therefore$ $\frac{1+\frac{sinx}{cosx}}{1-\frac{sinx}{cosx}}=1+2sinxcosx$，

$$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=1+2\sin x\cos x.$$

$$\cos x+\sin x$$
$$=(\cos x-\sin x)(\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x)$$
$$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2$$
$$(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\sin^2 x-1)=0.$$

① 由 $\cos x+\sin x=0$

得 $tgx=-1$

∴ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ （k 是整数）

② 由 $\cos^2 x-\sin^2 x-1=0$

即 $\cos^2 x-\sin^2 x-\sin^2 x-\cos^2 x=0$

故得 $\sin^2 x=0$

$$\sin x=0$$

∴ $x=k\pi$ （k为整数）

∴ 原方程的通值为 $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$

$$x=k\pi.$$

五、有一直圆锥，另外有一与它同底同高的直圆柱，假设 a 是圆锥的全面积，a' 是圆柱的全面积，试求圆锥的高与母线的比值？ （18分）

解 设圆柱和圆锥的高为 h，底半径为 R，圆锥的母线为 l，

∴ $S_{圆锥}=\pi R^2+\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot l$

$$= \pi R(l + R)$$

$$S_{圆柱} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$$

$$= 2\pi R(h + R)$$

根据已知条件，故有

$$a = \pi R(l + R)$$

$$a' = 2\pi R(h + R)$$

$$R^2 = l^2 - h^2$$

故 $\dfrac{l + R}{a} = \dfrac{2(h + R)}{a'}$ 这里 $2a > a' > a$。

由勾股定理，$R = \sqrt{l^2 - h^2}$ 代入公式.

$$\frac{l + \sqrt{l^2 - h^2}}{a} = \frac{2(h + \sqrt{l^2 - h^2})}{a'}$$

两边各除以 l，并令 $\dfrac{h}{l} = t$.

则得 $a'(1 + \sqrt{1 - t^2}) = 2a(t + \sqrt{1 - t^2})$

$$a' - 2at = (2a - a')\sqrt{1 - t^2}$$

$$a'^2 - 4aa't + 4a^2t^2 = (4a^2 - 4aa' + a'^2)(1 - t^2)$$

$$(8a^2 - 4aa' + a'^2)t^2 - 4aa't + 4a(a' - a) = 0.$$

$\therefore$ $t = \dfrac{h}{l}$

$$= \frac{2aa' \pm \sqrt{(-2aa')^2 - (8a^2 - 4aa' + a'^2)4a(a' - a)}}{8a^2 - 4aa' + a'^2}$$

$$= \frac{2aa' \pm 2\sqrt{a(8a^3 - 12a^2a' + 6aa'^2 - a'^3)}}{8a^2 - 4aa' + a'^2}$$

$$= \frac{2aa' \pm 2(2a - a')\sqrt{a(2a - a')}}{8a^2 - 4aa' + a'^2}.$$

一九五五年

一、下列四题（每题7分）顺次解答，不必抄题，结果必须明确，过程可以简单.

1. **试求以 $x^2-3x-1=0$ 的两根的平方作两根的二次方程**

解

由 $\begin{cases} x_1+x_2=3 \\ x_1\cdot x_2=-1 \end{cases}$

得 $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3^2-2(-1)=9+2=11 \\ x_1^2\cdot x_2^2=(x_1\cdot x_2)^2=(-1)^2=1. \end{cases}$

∴ 方程为 $x^2-11x+1=0$.

2 **假设等腰三角形一腰的长度是底边的4倍，求这三角形的各角的余弦.**

解 $$\cos B=\frac{\frac{a}{2}}{4a}$$

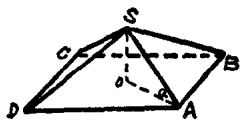
$$=\frac{1}{8}$$

$$\cos A=\frac{(4a)^2+(4a)^2-a^2}{2\cdot 4a\cdot 4a}$$

$$=\frac{16+16-1}{2\cdot 4\cdot 4}$$

$$= \frac{31}{32}.$$

3. 假设正四棱锥底面的边长等于 a，侧棱与底面的交角等于 45°，试求这棱锥的高.



解 如图

$SO \perp$ 平面 $ABCD$,

则 O是正方形$ABCD$的中心,

$\because$ $AB = a$

$\therefore$ $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

又$\because$ $\alpha = 45°$，故$\triangle SAO$是等腰直角三角形。

$\therefore$ 高$SO = OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

4. 写出两面角的平面角的定义.

答：从二面角的棱上任意一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫二面角的平面角.

二、试求b、c、d的值，使多项式 $x^3 + bx^2 + cx + d$适合下列三个条件，

① 被$x - 1$整除

② 被$x - 3$除时余2

③ 被$x + 2$除与$x - 2$除时余数相等 (18分)

解 令$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

由①得 $f(1) = b + c + d + 1 = 0$

由②得 $f(3) = 9b + 3c + d + 27 = 2$

由③知 $f(2)=f(-2)$，

得 $4b+2c+d+8=4b-2c+d-8$

故有方程组 $\begin{cases}b+c+d+1=0\\9b+3c+d+25=0\\4c+16=0\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}b=-2\\c=-4\\d=5.\end{cases}$

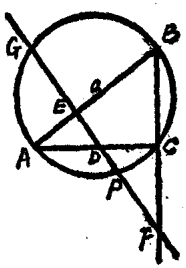
三、由直角三角形的勾上一点D作弦的垂线，交弦于E，交股的延长线于F，交外接圆于G，

求证①EG是EA和EB的比例中项，

②EG是ED、EF的比例中项。 （18分）

证明 ①∵ $EG\perp AB$.

且$AE\cdot BE=EG^2$（圆幂定理）



$\therefore\ \dfrac{AE}{EG}=\dfrac{EG}{BE}$

即 EG是EA和BE的比例中项.

②∵ $\angle A+\angle B=90^\circ$

$\angle F+\angle B=90^\circ$

$\therefore\ \angle A=\angle F$

$\therefore\ \triangle AED\backsim\triangle BEF$

$\therefore\ \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{ED}{EB}$.

即 $ED\cdot EF=AE\cdot EB$

但 $AE\cdot EB=EG^2$

$\therefore\ ED\cdot EF=EG^2$

即 EG是ED和EF的比例中项.

四、试解方程$cos2x = cosx + sinx$，

求 x的通值. （18分）

解 由 $cos2x = cosx + sinx$

得 $cos^2x - sin^2x = cosx + sinx$

∴ $(cosx + sinx)(cosx - sinx - 1) = 0$

① 由 $cosx + sinx = 0$

得 $tgx = -1$

∴ $x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$ （k为整数）.

② 由 $cosx - sinx - 1 = 0$

得 $sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - sinx = 1$

∴ $2cos\frac{\pi}{4} \cdot sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$

∴ $sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{4}$ （k为整数）

$x_1 = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$

又 $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{4}$

∴ $x_2 = 2k\pi$.

故　原方程的解为

$$x = k\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$$

$x = 2k\pi$（k为整数）.

五、假设一个三角形三边的长成等差级数，它的周长等于12尺，面积等于6平方尺，求证这个三角形是一个直角三角形.　（18分）

证明　设　三角形的三边长为$a-d$，a，$a+d$，

则　$(a-d)+a+(a+d)=12$.

$\therefore$　$a=4$

设　s代表三角形周长的一半

$\therefore$　$s=6$.

$\therefore$　$\sqrt{6(6-a+d)(6-a)(6-a-d)}=6$.

$\therefore$　$\sqrt{6\cdot(2+d)\cdot 2\cdot(2-d)}=6$.

$\therefore$　$4-d^2=3$

$\therefore$　$d^2=1$

取　$d=1$

$\therefore$　三边长为3尺、4尺、5尺.

$\because$　$3^2+4^2=5^2$

$\therefore$　是直角三角形.

一九五六年

一、（下列五个小题每题8分）

1. 利用对数性质计算$lg^2 5 + lg2 \cdot lg50$

解 $lg^2 5 + lg2 \cdot lg50 = lg^2 5 + lg2 \cdot lg(10 \times 5)$

$= lg^2 5 + lg2(lg10 + lg5)$

$= lg^2 5 + lg2(1 + lg5)$

$= lg^2 5 + lg2 \cdot lg5 + lg2$

$= lg5(lg5 + lg2) + lg2$

$= lg5 \cdot lg10 + lg2$

$= lg5 + lg2$

$= lg10$

$= 1.$

2. 设m是实数，求证方程$2x^2 - (4m-1)x - m^2 - m = 0$的两根必定都是实根.

证 $\triangle = [-(4m-1)]^2 - 4 \cdot 2(-m^2 - m)$

$= 16m^2 - 8m + 1 + 8m^2 + 8m$

$= 24m^2 + 1 > 0$

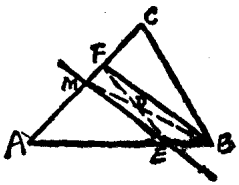
∴ 方程有不相等的2个实根.

3. 设M是$\triangle ABC$的边AC的中点，过M作直线交AB于E，过B作直线平行于ME交AC于F，

求证 $\triangle AEF$的面积等于$\triangle ABC$面积的一半.

证明 连BM、EF，

$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ （中线分原三角形为两个等积三角形，且等于原三角形面积的一半）



又∵ $BF \parallel ME$

∴ $S_{\triangle BEM}=S_{\triangle MEF}$,

$S_{\triangle AEF}=S_{\triangle AEM}+S_{\triangle EMF}$,

$S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AEM}+S_{\triangle BEM}$.

∴ $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

4. 一个三角形三边的长分别是3尺、4尺、及$\sqrt{37}$尺，求这三角形的最大角度.

解 设最大边$\sqrt{37}$尺所对的角为α，

∴ $\cos\alpha=\frac{9+16-37}{2\times3\times4}=-\frac{12}{24}=-\frac{1}{2}$

∴ $\alpha=120^\circ$.

5. 设$tg\alpha$和$tg\beta$是方程$x^2+6x+7=0$的两根，求证$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

证明 由 $\begin{cases} tg\alpha+tg\beta=-6 \\ tg\alpha\cdot tg\beta=7 \end{cases}$

∴ $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{-6}{1-7}=1$

即 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=1$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解方程组 $\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12 & ① \\ x^2+y^2=136 & ②\end{cases}$ (12分)

解 由① $7\sqrt{x+y}=12+(x+y)$

两边平方：

$$49(x+y)=144+24(x+y)+(x+y)^2$$

$\therefore\ (x+y)^2-25(x+y)+144=0$

$$[(x+y)-16][(x+y)-9]=0$$

(1) 由 $x+y=16$

得 $x^2+2xy+y^2=256$ ③

③－②得 $2xy=120$

由 $\begin{cases}x+y=16 \\ x\cdot y=60\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases}x_1=6 \\ y_1=10\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=10 \\ y_2=6\end{cases}$

(2) 由 $x+y=9$

得 $x^2+2xy+y^2=81$ ④

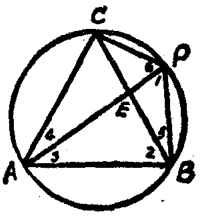
④－② $2xy=-55$

$\therefore$ 由 $\begin{cases}x+y=9 \\ x\cdot y=-\dfrac{55}{2}\end{cases}$

解之，得 $\begin{cases} x_3 = \dfrac{9+\sqrt{191}}{2} \\ y_3 = \dfrac{9-\sqrt{191}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = \dfrac{9-\sqrt{191}}{2} \\ y_4 = \dfrac{9+\sqrt{191}}{2} \end{cases}$

经检验，四组都是原方程组的解.

三、设 P 是等边三角形 ABC 外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上一点. 求证 $PA^2 = AB^2 + PB \cdot PC$. (15分)



证 设 PA 与 BC 交于 E. 在 $\triangle APB$ 与 $\triangle ABE$ 中，

$\angle 1 = \angle 2$ (同圆中，等弧所对的圆周角等)

$\angle 3 = \angle 3$ (公共角)

$\therefore \quad \triangle APB \backsim \triangle ABE$

$\therefore \quad \dfrac{PA}{AB} = \dfrac{AB}{AE}$. 即 $PA \cdot AE = AB^2$ ①

又在 $\triangle ACP$ 与 $\triangle BEP$ 中，

$\angle 4 = \angle 5$, (同弧上的圆周角相等)

$\angle 6 = \angle 1$, (同圆中，等弧所对的圆周角等)

$\therefore \quad \triangle ACP \backsim \triangle BEP$

$\therefore \quad \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PC}{PE}$ 即 $PA \cdot PE = PB \cdot PC$ ②

将①，②式相加，

$\therefore \quad PA \cdot AE + PA \cdot PE = AB^2 + PB \cdot PC$

$\therefore \quad PA(AE + EP) = AB^2 + PB \cdot PC$

即 $PA^2 = AB^2 + PB \cdot PC$.

四、有一个四棱柱体 $ABCD$ —— $A'B'C'D'$，底面 $A'B'C'D'$ 为菱形，且 $\angle AA'B' = \angle AA'D'$ 求证平面 $AA'C'C$ 垂直于底面 $A'B'C'D'$. (15分)

证明 作 $AE \perp A'B'$，$AF \perp A'D'$.

在直角 $\triangle AA'E$ 和 $\triangle AA'F$ 中

$\angle AA'E = \angle AA'F$ (已知)

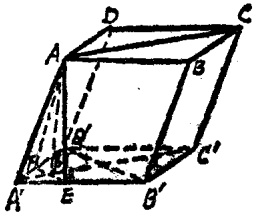
$AA' = AA'$ (公共边)

$\therefore$ $\triangle AA'E \cong \triangle AA'F$ (斜边、锐角)

$\therefore$ $AE = AF$,

$A'E = A'F$

$\therefore$ $EF \parallel B'D'$



又$\because$ $B'D' \perp A'C'$ (菱形对角线互相垂直平分)

$\therefore$ $EF \perp A'C'$

设 EF 和 $A'C'$ 交于 P 点

那么 P 是 EF 的中点，

连接 AP,

则 $AP \perp EF$ (等腰三角形底边的中线垂直于底边)

$\therefore$ $EF \perp$ 平面 $AA'C'C$ 中两条相交直线 $A'C'$ 和 AP

$\therefore$ $EF \perp$ 平面 $AA'C'C$

即 平面 $AA'CC' \perp$ 底面 $A'B'C'D'$

(如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直).

五、若三角形的三个角成等差级数，则其中一个一定是 60°，若这样的三角形三边又成等比级数，则三个角都为

60°，试证明之. (18分)

证 设三个角为$\alpha-\beta$，α，$\alpha+\beta$，

∵ 三角形内角和为180°

∴ $(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)=180°$

∴ $\alpha=60°$

∴ 三角形的三个内角为$60°-\beta$，60°，$60°+\beta$. 若这样的三角形三边成等比级数

设 公比$q\geqslant 1$

这样与以上三个角相应的三边为

$\frac{a}{q}$，a，aq

由正弦定理有

$$\frac{a}{sin60°}=\frac{aq}{sin(60°+\beta)}=\frac{\frac{a}{q}}{sin(60°-\beta)}$$

$$q=\frac{sin(60°+\beta)}{sin60°}$$

且 $q=\frac{sin60°}{sin(60°-\beta)}$

∴ $sin(60°+\beta)\cdot sin(60°-\beta)=sin^2 60°$

∴ $-\frac{1}{2}[cos120°-cos2\beta]=\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2}+cos2\beta=\frac{3}{2}$$

∴ $cos2\beta=1$ 解之得 $\beta=\frac{n\pi}{2}$ n为整数 从题意知

$0 \leqslant \beta < 60°$，故只有$\beta = 0°$符合题意．

∴ 三角形三个内角都是60°

或用余弦定理．

$$a^2 = \left(\frac{a}{q}\right)^2 + (aq)^2 - 2 \cdot \frac{a}{q} \cdot aq\cos 60°$$

∴ $1 = \frac{1}{q^2} + q^2 - 1$．

$$q^2 - 2 + \frac{1}{q^2} = 0$$

即 $\left(q - \frac{1}{q}\right)^2 = 0$

∴ $q = \frac{1}{q}$

$q^2 = 1$

∴ $q = \pm 1$．

但q为三角形边长之公比，不能为负．

故 取$q = 1$．

这时三角形的三边都相等（皆为a），因而三个内角都是60°。

一九五七年

一、（以下五个小题每题7分）

1. 化简$\left(2\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

解 原式$=\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{2}}+\frac{1}{\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$

$=102\frac{11}{48}$.

2. 求适合不等式$x^2+x<2$的实数x的范围.

解 $x^2+x-2<0$

∴ $(x-1)(x+2)<0$

得 $-2<x<1$.

3. 求证$ctg22°30'=1+\sqrt{2}$

证 方法一：

由 $ctg\theta=\pm\sqrt{\frac{1+cos2\theta}{1-cos2\theta}}$

∵ $ctg22°30'>0$

∴ $ctg22°30'=\sqrt{\frac{1+cos45°}{1-cos45°}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{2}+2}{2}}$$

$$= \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} = 1+\sqrt{2}.$$

方法二：$ctg22°30' = ctg\frac{45°}{2}$

$$= \frac{1+\cos 45°}{\sin 45°}$$

$$= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}.$$

4. 在四面体$ABCD$中，$AC=BD$，P、Q、R、S依次为棱AB、BC、CD、AD的中点，求证四边形$PQRS$为菱形.

证明 ∵ P、Q、R、S分别是AB、BC、CD、AD的中点，

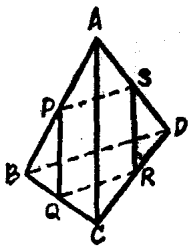
根据三角形中位线定理有

$PS \parallel BD$ 且 $PS=\frac{1}{2}BD$

$QR \parallel BD$ 且 $QR=\frac{1}{2}BD$

$PQ \parallel AC$ 且 $PQ=\frac{1}{2}AC$

$RS \parallel AC$ 且 $RS=\frac{1}{2}AC$



又∵ $AC=BD$

∴ $PS=QR=PQ=RS$

而易证P、Q、R、S在一平面上，

∴ 四边形$PQRS$是菱形（四边相等的四边形是菱形）。

5. 设a、b为异面直线，E、F为a、b的公垂线，Q为过EF中点且与a、b平行的平面，M为a上任一点，N为b上任一点，求证线段MN为平面Q所平分，

证明 设EF中点为C，MN和平面Q的交点为A，连接EN且和平面Q交于B，连接BC，

∵ $b\parallel$平面Q

平面EFN与平面Q的交线为BC，

∴ $BC\parallel b$

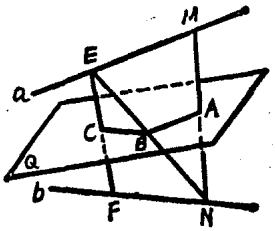
在$\triangle EFN$中

$BC\parallel FN$，C为EF中点，

∴ B为EN的中点，

连接BA.

同理$AB\parallel EM$



又∵ B是EN的中点

∴ A是MN的中点.

二、解方程 $\begin{cases} lg(2x+1)+lg(y-2)=1 & ① \\ 10^{xy}=10^{x}\cdot 10^{y} & ② \end{cases}$ (15分)

解 由① $lg(2x+1)(y-2)=lg10$

∴ $2xy+y-4x=12$ ③

由② $xy=x+y$ ④代入③

∴ $2x+2y+y-4x=12$

$\therefore \quad y=\dfrac{2x+12}{3}$ ⑤

把⑤代入④ $2x^2+7x-12=0$

$$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+96}}{4}$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{145}}{4}$$

代入⑤ $y_{1,2}=\dfrac{17\pm\sqrt{145}}{6}$

经检验 $\begin{cases} x=\dfrac{-7+\sqrt{145}}{4} \\ y=\dfrac{17+\sqrt{145}}{6} \end{cases}$ 是原方程组的解.

三、若$\triangle ABC$的内切圆半径为r，

求证 BC边上的高AD为

$$AD=\frac{2r\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$ (15分)

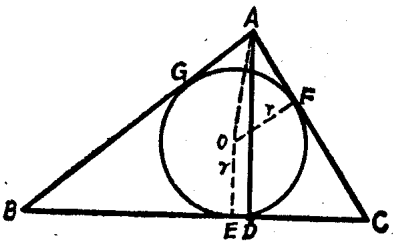
证明 如图，要求AD，可在直角$\triangle ADC$中先求AC.

$\because \quad AF=r\ ctg\dfrac{A}{2}$

$$CF=r\ ctg\frac{C}{2}$$

$\therefore \quad AC=AF+CF$

$$=r\left(ctg\frac{A}{2}+ctg\frac{C}{2}\right)$$



$$= r\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$= r\cdot\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}$$

$$= r\cdot\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

在直角△ADC中

$$AD = AC\sin C = r\cdot\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= \frac{2r\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$

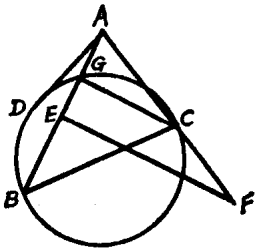
四、设△ABC为锐角三角形，以BC为直径作圆，若从A作此圆的切线AD与圆切于D，又在AB边上取$AE = AD$，并过E作AB的垂线与AC边的延长线交于F，

求证(1) $AE:AB = AC:AF$

(2) △ABC的面积等于△AEF的面积. (17分)

证明 (1) 连接CG，

则 $\angle CGB = 90°$



又∵ $FE \perp AB$,

∴ $GC \parallel EF$

∴ $\frac{AG}{AE} = \frac{AC}{AF}$ ①

又∵ $AD^2 = AG \cdot AB$

(圆幂定理)

∴ $\frac{AG}{AD} = \frac{AD}{AB}$.

而 $AD = AE$

∴ $\frac{AG}{AE} = \frac{AE}{AB}$. ②

由①和②得 ∴ $\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AF}$

即 $AE : AB = AC : AF$

(2) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CG \cdot AB$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF$

而 $\frac{CG}{EF} = \frac{AG}{AE} = \frac{AE}{AB}$

∴ $CG = \frac{AE \cdot EF}{AB}$

∴ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CG \cdot AB$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AE \cdot EF}{AB} \cdot AB$

$$= \frac{1}{2} AE \cdot EF$$

$$= S_{\triangle AEF}.$$

五、求证：方程$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$的一个根是1，设这个方程的三个根是三角形$ABC$的三个内角的正弦：$sinA$、$sinB$、$sinC$．求$A$、$B$、$C$的度数及$q$的值．（18分）

证明 设 $f(x)=x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q$

$$f(1)=1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0$$

∴ 1是方程$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$的根．

∴ $f(x)=(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)$

设这个方程的三个根是一个$\triangle ABC$的三个内角的正弦

令 $sinA=1$

∴ $\angle A=90°$

$\angle B+\angle C=90°$

由韦达定理

$$sinB+sinC=\sqrt{2}$$

$$2sin\frac{B+C}{2}cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{2}$$

∴ $2sin45°cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{2}$

∴ $cos\frac{B-C}{2}=1$

∴ $\angle B-\angle C=0°$与$\angle B+\angle C=90°$联立解得

∴ $\angle B = \angle C = 45°$

又由韦达定理

$$\sin B \cdot \sin C = -q$$

$$q = -\sin B \cdot \sin C = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

∴ 三角形三内角的度数为45°，45°，90°，

$q = -\frac{1}{2}$.

一九五八年

一、

1. 解方程$x-5=\sqrt{x+7}$ （5分）

解 由原方程得：$x^2-10x+25=x+7$

$\therefore$ $x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$

$x_1=2$，$x_2=9$.

经检验$x=2$是增根，$x=9$是原方程的解.

2. 已知$lg2=0.3010$，试利用对数性质判定$2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}$是几位数. （5分）

解 $lg2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}=lg2^7\times 2^{33}\times(10^{10}+2^{10})$

$=lg2^{30}\times 10^{10}$

$=30lg2+10$

$=9.030+10$

$=19.03$

$\therefore$ $2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}$是20位数字的数.

3. 由50个不同的元素中选47个，问有多少种选法？ （6分）

解 $C_{50}^{47}=C_{50}^{3}=\dfrac{50\times 49\times 48}{3\times 2\times 1}=19600$（种）.

4. 求$tg\left(arc\,tg\dfrac{5}{6}-arc\,tg\dfrac{3}{8}\right)$之值 （6分）

解 令$arc\,tg\frac{5}{6}=\alpha$，　　$arc\,tg\frac{3}{8}=\beta$

$\therefore$ $tg\alpha=\frac{5}{6}$，　　$tg\beta=\frac{3}{8}$.

而 $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}{1+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{8}}=\frac{22}{63}$

$\therefore$ $tg\left(arc\,tg\frac{5}{6}-arc\,tg\frac{3}{8}\right)=\frac{22}{63}$.

又解 原式$=\frac{tg\left(arctg\frac{5}{6}\right)-tg\left(arctg\frac{3}{8}\right)}{1+tg\left(arctg\frac{5}{6}\right)\cdot tg\left(arctg\frac{3}{8}\right)}$

$=\frac{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}{1+\frac{5}{6}\times\frac{3}{8}}$.

$=\frac{22}{63}$.

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=135°$，$\angle B=15°$，$C=1$. 问三角形的最大边长是多少？　　(6分)

解 $\angle C=180°-(135°+15°)=30°$

$\frac{BC}{sin135°}=\frac{1}{sin30°}$

最大边 $BC=\frac{sin135°}{sin30°}=\frac{sin45°}{sin30°}=\sqrt{2}$.

6. 过球面上的两个不同点能作几个大圆？为什么？

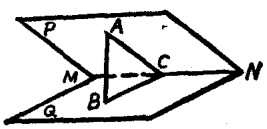
（6分）

答：如果这两个点的连线不过球心，只能作一个大圆，因为两个不同的点与圆心只决定一个平面，这个平面与球只交出一个大圆．如果球心在两点的连线上，那么过这条直线可作无数个平面、与球交出无数个大圆．

7. 自30°的二面角的一个面上一点A作另一个面的垂线，垂足是B，若已知AB的长是a，求A点到二面角的棱的距离 （6分）

解 作$BC\perp MN$，

连接AC，



则 $AC\perp MN$（三垂线定理）

$\therefore$ $\angle ACB$是二面角的平面角

$\angle ACB=30°$

在直角$\triangle ABC$中，

$AB=a$，$\angle ACB=30°$，$\angle ABC=90°$

$\therefore$ $AC=2a$（直角三角形中，斜边是30°角所对边长的二倍）

8. 已知二次函数$y=3+2x-x^2$ （15分）

(1) 问x在什么范围内$y>0$？又x在什么范围内$y<0$？

解 由$3+2x-x^2>0$

得 $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore$ $-1<x<3$

由 $3+2x-x^2<0$

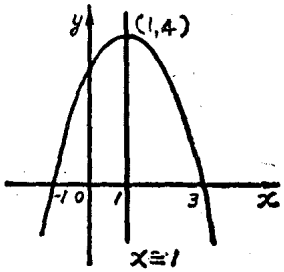
得 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore$ $x<-1$ $x>3$

$\therefore$ 当x在$(-1, 3)$范围内$y>0$，

而 x在$(-\infty, -1)$，$(3, +\infty)$的范围内 $y<0$，



(2) 求出这个函数图象的顶点坐标和对称轴方程，

证 $y=3+2x-x^2$

$=-(x-1)^2+4$

顶点(1, 4)

对称轴方程$x=1$

(3) 画出这个函数的图象。

三、设$\sin\alpha$和$\sin\beta$是方程

$x^2-\left(\sqrt{2}\cos20^\circ\right)x+\left(\cos^220^\circ-\frac{1}{2}\right)=0$ **的两根，**

其中α，β是锐角，求α，β的度数 (15分)

解 $$x=\frac{\sqrt{2}\cos20^\circ\pm\sqrt{2\cos^220^\circ-4\cos^220^\circ+2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos20^\circ\pm\sqrt{2(1-\cos^220^\circ)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos20^\circ\pm\sin20^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin70^\circ\pm\sin20^\circ)。$$

不妨令 $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 70^\circ + \sin 20^\circ)$

$= \sqrt{2}\sin 45^\circ \cdot \cos 25^\circ$

$= \cos 25^\circ$

$= \sin 65^\circ$

$\therefore \quad \alpha = 65^\circ$

$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 70^\circ - \sin 20^\circ)$

$= \sqrt{2}\cos 45^\circ \cdot \sin 25^\circ$

$= \sin 25^\circ$

$\therefore \quad \beta = 25^\circ$.

四、有甲、乙两容器，甲容器是直圆柱形，高 2 寸，底半径 1 寸，乙容器是直圆锥形（锥底向上）高 2 寸，底面半径 $2\sqrt{3}$ 寸，若将甲容器灌满水，然后把甲容器的一部分水倒入乙容器使得甲乙两容器的水面一样高，问这时水面的高度是多少？ （15分）

解 设甲容器的容积为V，

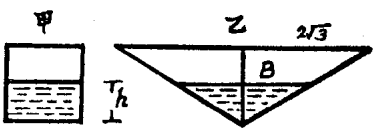
甲倒入乙剩下来的体积为V_1，

倒入乙容器内水的体积为V_2，

并设这时水面高度为h

$\therefore$ 乙容器内水面的半径R为

$\frac{R}{2\sqrt{3}} = \frac{h}{2}$.



$\therefore \quad R = \sqrt{3}h$.

$V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot h = \pi h$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}h)^2\cdot h=\pi h^3$$

而 $V_1+V_2=V$

即 $\pi h+\pi h^3=\pi\cdot 1^2\cdot 2=2\pi$

故 $h^3+h-2=0$

令 $f(h)=h^3+h-2$

∵ $f(1)=0$

∴ $h=1$是方程$h^3+h-2=0$的一个根.

故 $h^3+h-2=(h-1)(h^2+h+2)=0$

而方程$h^2+h+2=0$，无实根.

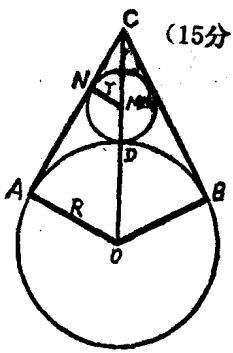
故 $h^3+h-2=0$只有一个实数根

$h=1$.

故甲乙容器水面一样高时

这时水面高度是1寸.

五、 已知$\overset{\frown}{AB}$是⊙O上含120°的弧，过A、B两点所引⊙O的切线交于C，⊙M是与$\overset{\frown}{AB}$、AC、BC都相切的圆，求证⊙M的周长等于⊙O的周长的$\frac{1}{3}$。 (15分)



证明 ∵ $\overset{\frown}{AB}$是120°

∴ $\angle AOC=60°$

∴ $\angle ACO=30°$

∴ $OC=2R$（在直角△中，斜边等于30°角所对边长的2倍）

∴ $CM=2R-(R+r)=R-r$

$\triangle CNM \backsim \triangle AOC$

$\therefore \quad \frac{r}{R} = \frac{R-r}{2R}$ $\qquad\qquad$ $\therefore \quad r = \frac{R}{3}$.

设 $\odot M$的周长为$C_{\odot M}$.

$\odot O$的周长为$C_{\odot O}$

$\therefore \quad C_{\odot M} = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{R}{3} = \frac{2\pi R}{3} = \frac{C_{\odot O}}{3}$.

一九五八年（河北省）

试卷上不必抄题，但须写明题号，例如一、1. 一、2. 二、三等.

一、（本题满分共30分）

1. 求多项式 $x^{376}-2x^{223}+5x^{145}-3x^{26}+3$.用$x+1$除所得的余数（本题满分4分）.

解 $f(-1)=(-1)^{376}-2(-1)^{223}+5(-1)^{145}-3(-1)^{26}+3$

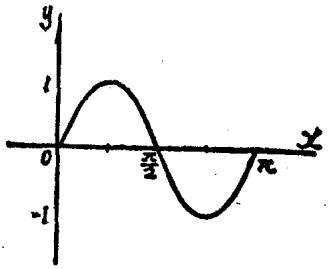
$=1-2(-1)+5(-1)-3\cdot(1)+3$

$=1+2-5-3+3=-2.$

2. 试求函数 $y=\sin 2x$ 的周期，并作出它在一个周期内的图象.（本题满分6分）

解 周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$=\dfrac{2\pi}{2}=\pi.$



3. 求 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}\right)^7$的展开式中含$x$的一次幂的项.（本题满分8分）

解 由 $T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$

依题意，$C_7^k(x^{\frac{1}{2}})^k(x^{-\frac{1}{3}})^{7-k}=x.$

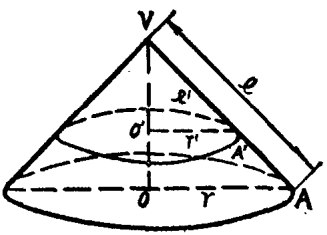
$\therefore \quad \frac{k}{2}-\frac{1}{3}(7-k)=1.$

$3k-2(7-k)=6. \qquad 5k=20 \qquad k=4.$

$\therefore \quad C_n^k=C_7^4=C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$

故　含x的一次幂的项为$35x$.

4. 设一圆锥的母线长为l，底面半径为r. 用平行于底面的一个平面在这圆锥上截下一个小圆锥. 若小圆锥的侧面积等于原来圆锥的侧面积的一半. 试求小圆锥的母线的长.（本题满分12分）



解　$S_{大圆锥侧}=\frac{1}{2}\cdot2\pi r\cdot l=\pi rl.$

$S_{小圆锥侧}=\frac{\pi rl}{2}=\pi r'l'$

$\because \quad \triangle VO'A'\backsim\triangle VOA.$

$\therefore \quad \frac{r'}{r}=\frac{l'}{l} \quad \therefore \quad r'=\frac{rl'}{l}$代入上式

$$\frac{\pi rl}{2}=\pi\cdot\frac{rl'}{l}\cdot l' \qquad \therefore \quad l'^2=\frac{l^2}{2}.$$

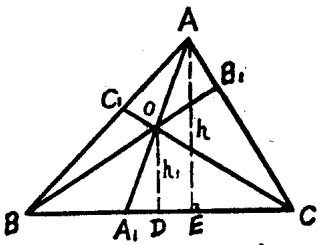
故 $l'=\frac{\sqrt{2}}{2}l$.

二、（本题满分16分）

设 O为$\triangle ABC$内的一点，线段 AO 的延长线交 BC于 A_1点，线段BO的延长线交AC于B_1点，线段CO 的延长线交 AB于C_1点，求证：

① $\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OA_1}{AA_1}$;

② $\frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=1$.



证 ① 分别由O及A作BC的高h_1及h.

则 $\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_1}{\frac{1}{2}BC\cdot h}$

$=\frac{h_1}{h}=\frac{OA_1}{AA_1}$（$\because \quad \triangle DOA_1\backsim\triangle EAA_1, \quad \therefore \quad \frac{h_1}{h}=\frac{OA_1}{AA_1}$）

② 同理可证 $\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}=\frac{OB_1}{BB_1}$

$\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{OC_1}{CC_1}$

$\therefore \quad \frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=$

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1.$$

三、（本题满分18分）

解方程组.

$$\begin{cases} \cos 2x+\cos 2y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & ① \\ x+y=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) & ② \end{cases}$$

解 由② $\cos(x+y)=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $x+y=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$. ③（$n$为任意整数）

由① 并注意到 $\cos(x+y)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $2\cos(x+y)\cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2\cdot\dfrac{1}{2}\cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ $\cos(x-y)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ $x-y=2m\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$. ④（$m$为任意整数）

解联立方程组③、④.

$$\begin{cases} x+y=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3} & ③ \\ x-y=2m\pi\pm\dfrac{\pi}{6} & ④ \end{cases}$$

n不一定等于m

$$\begin{cases} x_1=(n+m)\pi+\dfrac{\pi}{4}; \\ y_1=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=(n+m)\pi+\dfrac{\pi}{12}; \\ y_2=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{12}; \\ y_3=(n-m)\pi-\dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{6}; \\ y_4=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

四、（本题满分18分）

一农场有甲、乙两台打麦机，甲机的工作效率是乙机的2倍．先只用甲机打完全部麦子的$\frac{2}{3}$，然后只用乙机继续打完，所需要的时间比同时用两台打麦机打完全部麦子所需要的时间多4天，问分别用一台打麦机打完所有的麦子各需要多少天？

解 设全部麦子为1，乙机每天打麦的效率为x，甲机每天打麦的效率为$2x$．

依题意，列出方程．

$$\frac{\frac{2}{3}}{2x}+\frac{\frac{1}{3}}{x}-4=\frac{1}{2x+x}.$$

化简，得$\frac{1}{3x}=4$．　解得$x=\frac{1}{12}$．

答：单用甲机打完全部麦子需要$\frac{1}{2x}=6$（天）。

单用乙机打完全部麦子需要$\frac{1}{x}=12$（天）。

五、（本题满分18分）

已知方程$4x^2-(4\cos\theta)x+1=0$有实根，求θ的一切可能的值。

解　如方程$4x^2-(4\cos\theta)x+1=0$有实根。

则　$\triangle=(-4\cos\theta)^2-4\cdot4\cdot1\geqslant0$。

化简，得　$\cos^2\theta\geqslant1$。

由余弦函数的性质，$|\cos\theta|\leqslant1$。

故　只能有　$\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\pm1$。

故　$\theta=k\pi$。　（k为任意整数）

一九五八年（湖北省）

一、设A、B、C是$\triangle ABC$的三个内角，求证

$$tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$$

证 ∵ $A+B+C=180°$ ∴ $C=180°-(A+B)$

$$tgC=tg[180°-(A+B)]=-tg(A+B)$$

$$=-\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}$$

两边乘以 $1-tgA\cdot tgB$ 得

$$tgC(1-tgAtgB)=-(tgA+tgB)$$

去括号 $tgC-tgAtgBtgC=-tgA-tgB$

移项，得 $tgA+tgB+tgC=tgAtgBtgC$.

二、解方程 $(\log_x\sqrt{5})^2+\log_x 5\sqrt{5}+\frac{5}{4}=0$

解 化成 $\left(\log_x 5^{\frac{1}{2}}\right)^2+\log_x 5^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{4}=0$

$$\left(\frac{1}{2}\log_x 5\right)^2+\frac{3}{2}\log_x 5+\frac{5}{4}=0$$

即 $\frac{1}{4}(\log_x 5)^2+\frac{3}{2}\log_x 5+\frac{5}{4}=0$

乘以4，$(\log_x 5)^2+6\log_x 5+5=0$

$$(\log_x 5+1)(\log_x 5+5)=0$$

$\therefore$ $\log_x 5 = -1$　　$\log_x 5 = -5$

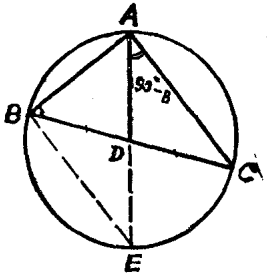
写成指数式

$x^{-1} = 5$　　$x^{-5} = 5$

$\therefore$ $x = \frac{1}{5}$　　$x = \sqrt[5]{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt[5]{5^4}}{5}$.

三、$\triangle ABC$ 中，AD 是边 BC 上的中线，而且 $\angle B$ 与 $\angle CAD$ 互为余角，问 $\triangle ABC$ 是怎样的三角形.

解法一　作 $\triangle ABC$ 的外接圆，延长 AD，交圆于 E 连 BE.



$\because$ $\angle B$ 与 $\angle CAD$ 互余（已知）

$\therefore$ $\angle B + \angle CAD = 90°$

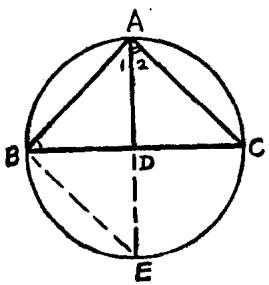
又 $\because$ $\angle CBE = \angle CAD$（同弧上的圆周角相等）

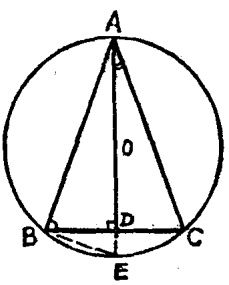
$\therefore$ $\angle CBE + \angle ABC = 90°$

$\therefore$ ADE 为圆的直径

$\because$ D 为 BC 的中点，即弦 BC 被直径 AE 平分，

故　① 若 BC 为直径，





则 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

② 若 BC 为直径，且与 ADE 垂直

则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

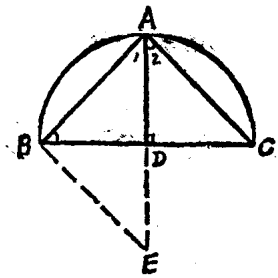
③ 若 BC 不是直径，则必有 $ADE \perp BC$，

故 $\triangle ABC$ 为等腰△.

解法二 $\because \quad \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle B}, \quad \dfrac{DC}{AD}=\dfrac{\sin\angle 2}{\sin\angle C}$

又 $BD=DC$

$\therefore \quad \dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle B}=\dfrac{\sin\angle 2}{\sin\angle C}$



$\because \quad \angle B+\angle 2=\dfrac{\pi}{2},$

$\therefore \quad \angle 1+\angle C=\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \dfrac{\cos\angle C}{\sin\angle B}=\dfrac{\cos\angle B}{\sin\angle C},$

$\therefore \quad \sin\angle C\cos\angle C=\sin\angle B\cos\angle B.$

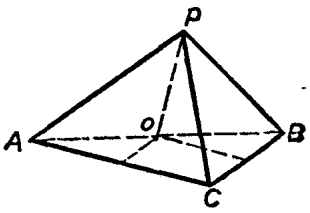
$\therefore \quad \sin 2\angle C=\sin 2\angle B.$

$\therefore \quad \angle B=\angle C \quad$ 或 $\quad \angle B+\angle C=\dfrac{\pi}{2}$

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形或等腰直角三角形.

四、在直角三角形所在的平面外取一点 p，而且 p 点与三角形的三个顶点的距离都是相等的，证明连结 p 点与直角三角形斜边中点的直线一定垂直于这个三角形所在的平面.

已知：O为直角三角形ABC斜边AB的中点，P为$\triangle ABC$所在平面N外一点，$PA=PB=PC$.



求证　直线$PO\perp$平面N.

证明　方法一：过P作直线$PO'\perp$平面N，O'为垂足．连结AO'，BO'，CO'.

$\because$　$PA=PB=PC$,

$\therefore$　$AO'=BO'=CO'$，即O'为$\triangle ABC$的外心，但$\triangle ABC$是直角三角形，其外心即斜边AB的中点O，因而O，O'重合，PO，PO'重合，故直线$PO\perp$平面N.

方法二：

$\because$　$PA=PB$

$\therefore$　$PO\perp AB$

$\because$　$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，$OA=OB$，　$\therefore$　$CO=AO$

$\therefore$　$\triangle PCO\cong\triangle PAO$　$\therefore$　$\angle POC=\angle POA=\frac{\pi}{2}$.

即　$PO\perp CO$　　$\therefore$　$PO\perp$平面ABC

亦即　$PO\perp\triangle ABC$所在的平面.

五、设有级数$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$

1．写出这个级数的第n项；

2．写出这个级数的前n项和的公式；

3．问这个和的公式当$x=1$的时候，能否成立？如能成立，说明理由；如不能成立，应怎样求和？

解 1. $a_n = nx^{n-1}$.

2. 设$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$ ①

则$xS_n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + nx^n$ ②

①－②，$S_n - xS_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$。

应用等比数列求和公式

$$S_n(1-x) = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

$$= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

3. 当$x = 1$时，这个公式不成立．这时

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

一九五八年（广东省）

一、

1. 求二项式$(3+2x)^5$展开式中x^3的系数.

解 x^3项系数为$C_5^3\cdot 3^2\cdot 2^3=\frac{5\times 4}{1\times 2}\cdot 3^2\cdot 2^3=720$.

2. 求证 $cosx\cdot cos2x\cdot cos4x=\frac{sin8x}{8sinx}$，$\left(\begin{matrix}x\neq k\pi\\ k\text{为任意整数}\end{matrix}\right)$

证明 ∵ $x\neq k\pi$，（k为任意整数）

故右式恒有意义.

$$\text{右边}=\frac{sin8x}{8sinx}$$

$$=\frac{2sin4x\cdot cos4x}{8sinx}$$

$$=\frac{4sin2xcos2x\cdot cos4x}{8sinx}$$

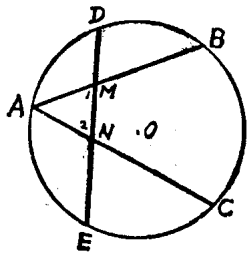
$$=\frac{8sinxcosxcos2xcos4x}{8sinx}$$

$$=cosx\cdot cos2x\cdot cos4x=\text{左边}.$$

3. AB、AC为⊙O的两弦，D为$\overset{\frown}{AB}$的中点，E为$\overset{\frown}{AC}$的中点，连D、E交AB于M，交AC于N.

求证：$AM=AN$

证 如图，$\angle 1$为$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{BD})$所度



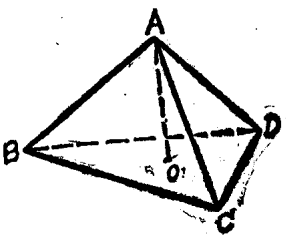
$\angle 2$为$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{EC})$所度

但 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

∴ $\angle 1=\angle 2$，$AM=AN$.

4. 求证：正四面体相对的两棱互相垂直

证 正四面体$ABCD$(如图)顶点A在底面内的射影是底面正三角形BCD的中心O.因此棱AD在底面内的射影为DO.



而$DO\perp BC$,

依三垂线定理$AD\perp BC$.

同理$AC\perp BD$、$AB\perp CD$.

5. 解方程$\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

解 以2除各项得$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$

即 $\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=0$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \qquad x-\frac{\pi}{3}=n\pi \qquad n\text{为整数}$$

故 $x=n\pi+\frac{\pi}{3}$.

二、解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+2y-1}=4\\ 2x+2y+\frac{1}{y}=9.\end{cases}$

解 设 $\sqrt{x+\frac{1}{y}}=X$, $\sqrt{x+2y-1}=Y$

并且X，Y非负数

则有 $\begin{cases}X+Y=4 & ①\\ \left(x+\frac{1}{y}\right)+(x+2y-1)=8 & ②\end{cases}$

②可写为$X^2+Y^2=8$ ③

①^2：$X^2+2XY+Y^2=16$ ④

2③－④，得 $(X-Y)^2=0$

∴ $X=Y$，代入①，得 $2X=4$，

∴ $X=Y=2$.

即 $\sqrt{x+\frac{1}{y}}=2$, $\sqrt{x+2y-1}=2$.

平方之：$x+\frac{1}{y}=4$ ⑤

$x+2y-1=4$ ⑥

⑥－⑤得　$2y-\frac{1}{y}-1=0$

即　$2y^2-y-1=0$

$(y-1)(2y+1)=0$

∴　$y_1=1$，　$y_2=-\frac{1}{2}$

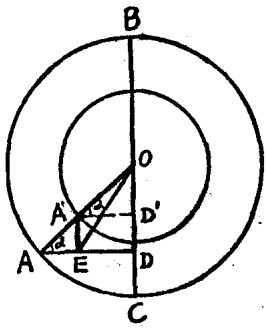
代入⑤：$x_1=3$，　$x_2=6$

经检验　$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=6\\y_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$　是原方程组的解.

三、设有两个同心圆，半径各为R、r、$(R>r)$今由圆心O作半径交大圆于A，交小圆于A'，由A作直线AD垂直于大圆直径BC，并交BC于D，作$A'E\perp AD$，并交AD于E，

已知：$\angle OAD=\alpha$

求　OE的长



解　如右图．在直角$\triangle OAD$中

$OD=R\sin\alpha$，　$AD=R\cos\alpha$

在直角$\triangle A'AE$中，

$AE=(R-r)\cos\alpha$

$ED=AD-AE=R\cos\alpha$

$-(R-r)\cos\alpha=r\cos\alpha$

（或作$A'D'\perp OD$，则有$ED=A'D'=r\cos\alpha$）

在直角$\triangle OED$中

$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}$

$=\sqrt{R^2\sin^2\alpha+r^2\cos^2\alpha}$.

四、已知△ABC，求作圆过A及AB中点M，并与BC相切.

作法 ①延长AB至D，使$BD=\frac{AB}{2}=BM$.

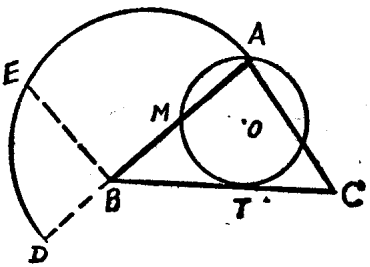
②作AB与BM的比例中项x.

③在BC上截取$BT=x$.

④过A、M、T作圆O即为所求.

证明 由圆幂定理.

设由圆外一点，作一切线与一割线，则此切线为割线及其圆外部分之比例中项，



今由作图，

$BT^2=BE^2$

$=DB\cdot BA=BM\cdot AB$.

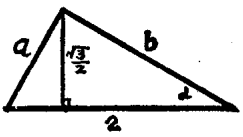
∴ T为所求作的圆的切点，

而此圆过A、M、T，即为所求.

五、已知一直角三角形的斜边长为2，斜边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

求证：此三角形的两个锐角是下列三角方程的根.

$$\sin^2x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$



解 设$\angle A=x$.

则 $a=2\sin x$.

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}.$$

依勾股定理，$c^2=a^2+b^2$，故得

$$4\sin^2x+\frac{3}{4\sin^2x}=4 \qquad ①$$

左边配方，

$$\left(2\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}\right)^2=4+2\sqrt{3}.$$

注意到x为锐角，故 $2\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}>0$，又右边

$$4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3=(1+\sqrt{3})^2$$

故将方程两边开方，得

$$2\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}=1+\sqrt{3}$$

以$\frac{1}{2}\sin x$乘之并移项，得

$$\sin^2x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0 \qquad ②$$

若设$\angle B=x$，则由$c^2=a^2+b^2$亦得①

故两锐角均满足方程②.

一九五九年

试卷上不必抄题，但须写明题号，例如一(1)、一(2)、二、三等.

一、（每小题满分6分，六小题共36分）

1. 已知$lg2=0.3010$，$lg7=0.8451$，求$lg35$.

（注）lg是以10为底的对数的符号.

解 $lg35=lg\frac{10\times7}{2}$

$=lg10+lg7-lg2$

$=1+0.8451-0.3010=1.5441.$

2. 化简$\frac{(1-i)^3}{1+i}$

解法一 $\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{(1-i)^4}{2}=\frac{[(1-i)^2]^2}{2}$

$=\frac{(1-2i+i^2)^2}{2}=\frac{(-2i)^2}{2}=-2.$

解法二 $\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{1-3i+3i^2-i^3}{1+i}$

$=\frac{1-3i-3+i}{1+i}=\frac{-2-2i}{1+i}=-2.$

3. 解不等式：$2x^2+5x<3$.

解法一 $2x^2+5x<3$.

移项，得 $2x^2+5x-3<0$

$(2x-1)(x+3)<0$.

因为两个数的积是负数，必须并且只须这两个数中一个是正数，一个是负数．所以从这个不等式可以得出下面不等式组：

$$\begin{cases}2x-1>0\\x+3<0\end{cases}\qquad\begin{cases}2x-1<0\\x+3>0\end{cases}$$

第一个不等式组无解，第二个不等式组的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$．所以原不等式的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$.

解法二 $2x^2+5x-3<0$.

$\triangle=5^2-4\times2\times(-3)>0$

二次三项式$2x^2+5x-3$的根是-3和$\frac{1}{2}$.

当 $-3<x<\frac{1}{2}$时，$2x^2+5x-3$和2异号.

因此， 原不等式的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$.

4. 求$\cos165°$的值.

解法一 $\cos165°=\cos(180°-15°)$

$=-\cos15°=-\cos(45°-30°)$

$=-(\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°)$

$=-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

解法二 $cos165^\circ = cos(180^\circ - 15^\circ) = -cos15^\circ$

$$= -cos\frac{30^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1+cos30^\circ}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

5. 一直圆台上底的面积为25π平方厘米，下底的直径为20厘米，母线长为10厘米，求这直圆台的侧面积.

解 圆台侧面积 $S = \pi l(R+r)$

其中l为母线，r、R分别为上、下底的半径.

上底面积 $= \pi r^2 = 25\pi$.

$\therefore$ $r = 5$（厘米）.

下底半径 $R = \frac{20}{2} = 10$（厘米）

母线$l = 10$（厘米）

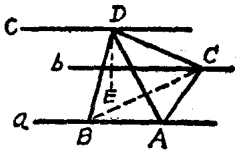
$\therefore$ $S_{圆台侧} = \pi l(R+r)$.

$= \pi \cdot 10 \cdot (10+5) = 150\pi$（厘米^2）.

6. 有三条不在同一平面内的平行线a、b、c. 在直线a上取一固定线段AB；在直线c、b上各任取一点C和D. 求证：不论C和D取在c、b的什么位置上，四面体$ABCD$的体积总是不变的.

证明 把$\triangle ABC$当作四面体$ABCD$的底（如图）. 由D向平面ABC作垂线，设垂足为E，则DE为底上的高，$\because a \parallel b$，

∴ 无论D在c上什么位置，
$\triangle ABC$的面积总不变.



∵ $a \parallel b$，∴ a，b决定一平面.

∵ $c \parallel a, c \parallel b$，∴ $c \parallel a, b$所决定的平面.

∴ 无论D点在c的什么位置，
高DE是一个定值，

∴ $V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot DE$是一个定值.

因之，不论C、D取在c、b上什么位置，四面体$ABCD$的体积总是一个定值.

二、〔本题满分16分〕.

三个数成等差数列，前两个数的和的三倍等于第三个数的二倍；如果第二个数减去2(仍当作第二项)，三个数成等比数列．求原来的三个数.

解 设成等差数列的三个数是 $x-y$，x，$x+y$，依据题中条件，列出方程组：

$$\begin{cases} 3[(x-y)+x]=2(x+y) & ① \\ (x-2)^2=(x-y)(x+y) & ② \end{cases}$$

化简①、②，得：

$$\begin{cases} 4x=5y & ③ \\ y^2-4x+4=0 & ④ \end{cases}$$

将③代入④，得 $y^2-5y+4=0$

$(y-1)(y-4)=0$

∴ $y_1=1$，$y_2=4$，

将y_1、y_2值代入③，得　$x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=5$，

故　$\begin{cases}x_1=\frac{5}{4}\\ y_1=1\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=5\\ y_2=4\end{cases}$

又　$x_1-y_1=\frac{1}{4}$，　$x_1+y_1=\frac{9}{4}$，

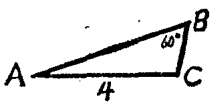
$x_2-y_2=1$，　$x_2+y_2=9$.

答：所求的三个数为$\frac{1}{4}$、$\frac{5}{4}$、$\frac{9}{4}$；或1，5，9.

三、（本题满分16分）

设有 $\triangle ABC$，已知 $\angle B=60°$，AC边长为4，面积为$\sqrt{3}$，求AB及BC两边之长.

解　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CB\cdot sin60°$



$\therefore$　$\sqrt{3}=\frac{1}{2}AB\cdot CB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$　$AB\cdot CB=4$.

而　$AC^2=4^2=AB^2+CB^2-2AB\cdot CB\cdot cos60°$

$AB^2+CB^2=16+2AB\cdot CB\cdot cos60°$

$=16+AB\cdot CB=16+4=20$.

$\therefore$　$(AB+CB)^2=AB^2+CB^2+2AB\cdot CB$

$=20+2\cdot4=28$

$\therefore$　$AB+CB=2\sqrt{7}$.

由 $\begin{cases} AB \cdot CB = 4 \\ AB + CB = 2\sqrt{7} \end{cases}$

根据韦达定理，知AB，BC是方程$x^2 - 2\sqrt{7}x + 4 = 0$的根.

而 $x_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{7} \pm \sqrt{28-16}}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{7} \pm 2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7} \pm \sqrt{3}$.

答：$AB = \sqrt{7} + \sqrt{3}$，$CB = \sqrt{7} - \sqrt{3}$.

或 $AB = \sqrt{7} - \sqrt{3}$，$CB = \sqrt{7} + \sqrt{3}$.

四、（本题满分16分）

A、B、C是直线l上三点，P是这直线外一点，已知$AB = BC = a$，$\angle APB = 90°$，$\angle BPC = 45°$；

试求：

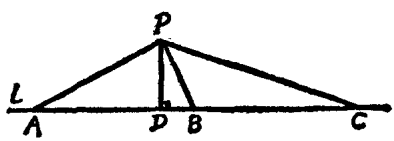
(1) $\angle PBA$的正弦、余弦、正切；

(2) 线段PB的长；

(3) P点到直线l的距离.

解法一 设$\angle PBA = \theta$，$PB = x$，P点到直线l的距离为h.

由 $\triangle APB$知 $x = a\cos\theta$ ①



由 $\triangle BPC$知 $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{x}{\sin(\theta-45^\circ)}$ ②

从①、②消去x，得 $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{a\cos\theta}{\sin(\theta-45^\circ)}$

$$\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)=\cos\theta$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\cos\theta$$

$$\sin\theta=2\cos\theta$$

$$\operatorname{tg}\theta=2$$

∵ θ是锐角，∴ $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

故 $x=a\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$，　$h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a$.

答：(1) $\sin\angle PBA=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle PBA=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

$\operatorname{tg}\angle PBA=2$.

(2) $PB=x=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

(3) P到l的距离 $h=\dfrac{2}{5}a$.

解法二　由②，得

$$x=\frac{a\sin(\theta-45^\circ)}{\sin 45^\circ}$$

$$=a\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)$$

$$=a(\sin\theta-\cos\theta)=a\sin\theta-a\cos\theta \qquad ③$$

由①，并因θ是锐角，得

$$\sin\theta = \frac{AP}{AB} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \qquad ④$$

将①、④代入③得，

$$x = \sqrt{a^2 - x^2} - x$$

由此得 $5x^2 = a^2$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

于是 $\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$，

$$tg\theta = 2. \qquad h = x\sin\theta = \frac{2}{5}a.$$

解法三 (1) $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AP \cdot BP$

$$S_{\triangle BPC} = \frac{1}{2}BP \cdot CP \cdot \sin 45^\circ.$$

$\because$ $S_{\triangle APB} = S_{\triangle BPC}$（等底同高）.

$\therefore$ $BP \cdot CP \cdot \sin 45^\circ = AP \cdot BP$.

$\therefore$ $CP = \sqrt{2}\,AP$.

又$\because$ $AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2AP \cdot CP \cdot \cos 135^\circ$

$\therefore$ $4a^2 = AP^2 + (\sqrt{2}\,AP)^2 + 2AP \cdot \sqrt{2}\,AP\cos 45^\circ$

$= AP^2 + 2AP^2 + 2AP^2 = 5AP^2$

$\therefore$ $AP = \sqrt{\frac{4a^2}{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

$$\sin\angle PBA = \frac{AP}{AB} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\angle PBA=\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$tg\angle PBA=\frac{\sin\angle PBA}{\cos\angle PBA}=2.$$

(2) $PB=\sqrt{AB^2-AP^2}=\sqrt{a^2-\frac{20}{25}a^2}=\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

(3) $\frac{1}{2}AP\cdot PB=\frac{1}{2}AB\cdot PD$

$$PD=\frac{AP\cdot BP}{AB}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a}{a}=\frac{2}{5}a.$$

五、（本题满分16分）

延长圆O的两弦AB、CD交于圆外一点E，过E点作DA的平行线交CB的延长线于点F，自F点作圆O的切线FG.求证$FG=FE$.

证 在$\triangle BEF$与$\triangle EFC$中，

$\angle EFB=\angle EFC$.

$\angle\alpha=\angle A$($\because EF\parallel DA$)

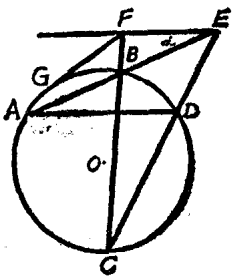
而 $\angle A=\angle C$

$\therefore$ $\angle\alpha=\angle C$

$\therefore$ $\triangle BEF\backsim\triangle EFC$

$\therefore$ $\frac{EF}{CF}=\frac{BF}{EF}$

$\therefore$ $EF^2=BF\cdot CF$.



因FG是圆O的切线，FBC是圆O的割线，

$\therefore \quad FG^2 = FC \cdot FB$（圆幂定理）

故 $\quad EF^2 = FG^2$

$\therefore \quad FG = FE$.

一九五九年(副题)

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如一、1、一、2、二、三等.

一、(每小题满分6分,六小题共36分)

1. 化$-1-i$为三角函数式:

解一 ∵ $r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$$\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

∴ θ 的主值是$\frac{5\pi}{4}$.

∴ $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

解二 $\operatorname{tg}\theta=\frac{-1}{-1}=1$. ∴ $(-1,-1)$在第Ⅲ象限

∴ θ的主值是 $\frac{5\pi}{4}$.

∴ $-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. 设 $x^2-15-m(2x-8)=0$的两个根相等. 求m的值.

解 $x^2-15-m(2x-8)=0$.

即 $x^2-2mx+8m-15=0$.

∵ 它的两个根相等.

∴ $\triangle=(-2m)^2-4(8m-15)=0$.

化简，得 $m^2-8m+15=0$

$(m-3)(m-5)=0$.

∴ $m_1=3$, $m_2=5$.

3. 求 $sin10^\circ-cos20^\circ+sin50^\circ$的值.

解 $sin10^\circ+sin50^\circ=2sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}cos\frac{50^\circ-10^\circ}{2}$

$=2sin30^\circ cos20^\circ=2\cdot\frac{1}{2}cos20^\circ=cos20^\circ$.

∴ $sin10^\circ-cos20^\circ+sin50^\circ$

$=(sin10^\circ+sin50^\circ)-cos20^\circ$

$=cos20^\circ-cos20^\circ=0$.

4. 设θ为大于0°而小于180°的角，且$sin\theta<cos\theta$，确定θ的范围，并简单说明理由.

解 分三种情形来看.

① $0^\circ<\theta<90^\circ$

在这个情形，$cos\theta$为正，不等式两边用$cos\theta$除，得$tg\theta<1$

因之，$0^\circ<\theta<45^\circ$.

② $\theta=90^\circ$ $sin90^\circ=1$ $cos90^\circ=0$.

因之，不等式不成立.

③ $90^\circ<\theta<180^\circ$.

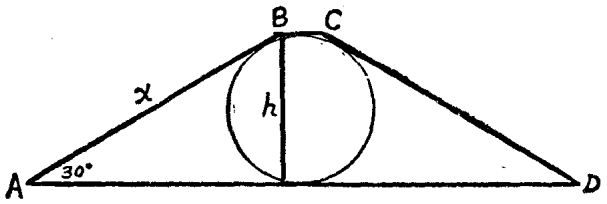
在这个情形，$cos\theta<0$，而$sin\theta>0$

因之，不等式不成立.

综上所述，θ的范围为 $0^\circ<\theta<45^\circ$.

5. 已知圆外切等腰梯形的面积为S，底角为30°，求这

梯形的腰长.



解 设梯形的腰长为x.高为h.

∵ 底角为30°.

$$\therefore \quad h=\frac{x}{2}$$

∵ 圆外切四边形对边的和相等.

$$\therefore \quad AD+BC=AB+CD=2x$$

这梯形面积 $S=\frac{AD+BC}{2}\cdot h=x\cdot\frac{x}{2}=\frac{x^2}{2}$.

$$\therefore \quad x^2=2S.$$

$$\therefore \quad x=\sqrt{2S}.$$

答：这梯形的腰长为$\sqrt{2S}$.

6. 设AB和CD分别是二异面直线上的两条线段，如果$AC=CB$，$AD=DB$，求证：直线AB与直线CD互相垂直.

（注）“异面直线”也叫“不共面直线”.

证（如图）.

过直线CD及AB中点O作平面α.

根据条件，$AC=BC$.

则CO为等腰$\triangle ABC$的中线.

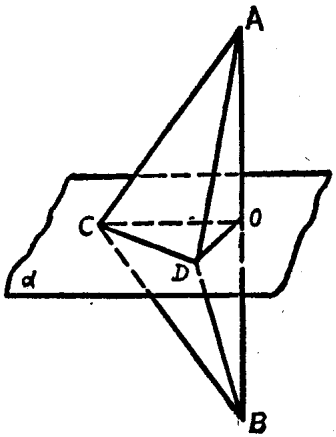
$$\therefore \quad CO\perp AB$$

同理 $DO \perp AB$

因此，AB垂直于平面α上的直线CO，DO.

根据直线垂直平面性质定理，AB应垂直于平面α.

因此，AB垂直于平面α上的直线CD.



二、（本题满分16分）

解 $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 9 & ① \\ lgx + lgy = 1 & ② \end{cases}$

（注）lg是以10为底的对数的符号.

解 由②，$x>0$，$y>0$，得 $lgx + lgy = lg10$.

$$xy = 10$$

$$y = \frac{10}{x} \qquad ③$$

将③代入①. $\quad 4x^2 - \left(\frac{10}{x}\right)^2 = 9$.

化简 $4x^4 - 9x^2 - 100 = 0$

$$(4x^2 - 25)(x^2 + 4) = 0$$

$$x_1 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_3 = 2i, \quad x_4 = -2i.$$

将x_1，x_2，x_3和x_4的值分别代入③，得

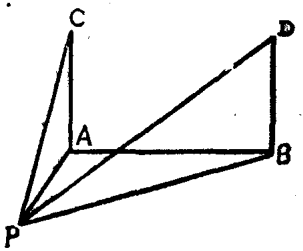
$y_1 = 4$，$y_2 = -4$，$y_3 = -5i$，$y_4 = 5i$.

再将x_1，y_1；x_2，y_2；x_3，y_3和x_4，y_4的值分别代入原方程组检验，所求的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=4. \end{cases}$$

三、(本题满分16分)

A、B、P是地平面上三点. AC、BD是两根垂直于地平面的杆子，它们的长度相同. 已知$\angle CPA=45°$，$\angle DPB=30°$，$\angle APB=60°$，$AB=10$米. 求杆子的长度. (精确到0.1米).



解 (如图).

设 $AC=BD=x$.

由 $\angle CPA=45°$，得

$AP=x\operatorname{ctg}45°=x$.

由 $\angle DPB=30°$，得

$BP=x\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}x$.

由余弦定理.

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cos 60°$$

代入，得 $AB^2=x^2+3x^2-\sqrt{3}x^2$

$$\therefore\quad x^2=\frac{AB^2}{4-\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad x=\frac{AB}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}.$$

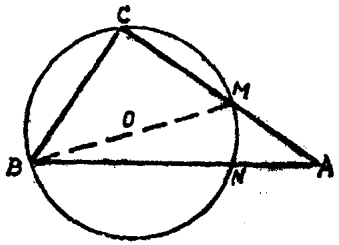
$\sqrt{3}\approx 1.73$ $\therefore$ $4-\sqrt{3}\approx 2.27$. $\sqrt{2.27}\approx 1.51$

$$\therefore\quad x\approx\frac{10}{1.51}=6.6\text{（米）}.$$

答：杆子的长度是6.6米.

四、（本题满分16分）

直角三角形ABC的二直角边AC、BC分别是4厘米和3厘米，在AC边上取一点M，作MN垂直于斜边AB并交AB于N点，使△AMN的面积为△ABC的面积的四分之一，求外接于四边形$BCMN$的圆的半径.



已知：直角三角形ABC.（如图）.

$\angle C$为直角.

$AC=4(cm)$

$BC=3(cm)$

$MN\perp AB$,

又 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

求 外接于四边形$BCMN$的圆的半径.

解 ∵ $MN\perp AB$.

∴ $\angle MNB=90°$

又 $\angle ACB=90°$

∴ 外接于四边形$BCMN$的圆的直径是BM,

∵ $\angle MAN=\angle BAC$

∴ 直角△AMN∽直角△ABC.

因此 $S_{\triangle AMN}:S_{\triangle ABC}=AM^2:AB^2$.

在直角△ABC中，$BC=3cm$，$AC=4cm$.

∴ $AB=5cm$,

又 已知$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

$\therefore \quad 1:4 = AM^2:25.$

$\therefore \quad AM = \frac{5}{2}(cm)$.

$\therefore \quad CM = AC - AM = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}(cm)$.

在直角$\triangle BCM$中，$BM^2 = BC^2 + CM^2$

$\therefore \quad BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2}$

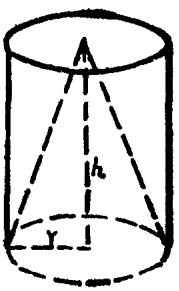
$= \frac{3}{2}\sqrt{5}(cm)$.

因此，外接于四边形的圆的半径是

$$BO = \frac{1}{2}BM = \frac{3}{4}\sqrt{5}(cm).$$

五、（本题满分16分）

以一直圆柱的上底中心为顶点，下底为底，作直圆锥．已知直圆柱的侧面积为A，直圆锥的侧面积为B．求直圆柱的高和底的半径



解 （如图）

设直圆柱的高为h，底的半径为r．

根据公式，得到

$$A = 2\pi r \cdot h \text{ 或 } rh = \frac{A}{2\pi} \qquad ①$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \pi\sqrt{(rh)^2 + r^4}$$

或$\sqrt{(rh)^2+r^4}=\dfrac{B}{\pi}$ ②

将①代入②，得到

$$\sqrt{\left(\frac{A}{2\pi}\right)^2+r^4}=\frac{B}{\pi}.$$

化简，得到 $r^4=\dfrac{B^2}{\pi^2}-\dfrac{A^2}{4\pi^2}$

或 $r=\left(\dfrac{4B^2-A^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}}>0.$

由此，得到 $h=\dfrac{A}{2\pi}\left(\dfrac{4\pi^2}{4B^2-A^2}\right)^{\frac{1}{4}}>0$

答：直圆柱的高为$\dfrac{A}{2\pi}\left(\dfrac{4\pi^2}{4B^2-A^2}\right)^{\frac{1}{4}}$，底的半径为$\left(\dfrac{4B^2-A^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

一九六〇年

一、

1. 解方程 $\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{5x-7}=0$. （限定在实数范围内） （6分）

解 由原方程得 $2x^2-5=5x-7$

$$\therefore \quad 2x^2-5x+2=0$$

$$(x-2)(2x-1)=0$$

$$\therefore \quad x_1=2, \quad x_2=\frac{1}{2}$$

经检验 $x=\frac{1}{2}$是增根，$x=2$是原方程的根.

2. 一次篮球赛，所有的球队分为5组，每小组6队，首先各组中各队进行单循环赛（即每两队比赛一次），然后各组中的冠军再进行单循环赛，问先后共赛多少次？（6分）

解 （1）每组中6个队进行单循环赛的次数相当于6个元素、每次取2个不同元素的所有组合的种数，

即 $C_6^2=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}=15$

5组共赛 $5C_6^2=75$（次）

（2）每组产生一个冠军后，再进行单循环赛，

$\therefore$ 第二阶段赛 $C_5^2=10$（次）

故先后共赛 $5C_6^2+C_5^2=85$（次）.

3. 求证等比数列的各项的对数组成等差数例（这里所说的等比数列的各项都是正数）（6分）

证 设等比数列为a，aq，aq^2，……aq^{n-1}，……数列lga，$lg(aq)$，$lg(aq^2)$，……$lg(aq^{n-1})$……的通项公式为$a_n=lg(aq^{n-1})=lga+(n-1)lgq$ 这是一个以lga为首项，以lgq为公差的等差数列的通项公式，所以lga，$lg(aq)$，$lg(aq^2)$……是等差数列.

4. 求使等式 $\sqrt{1-sin^2\frac{x}{2}}=cos\frac{x}{2}$成立的$x$值范围（$x$是0°—720°的角） （6分）

解 要使等式成立，必须 $cos\frac{x}{2}\geqslant 0$.

$\therefore$ $n360°-90°\leqslant\frac{x}{2}\leqslant n360°+90°$.

(1) $n=0$时，$-90°\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 90°$. 即 $-180°\leqslant x\leqslant 180°$

但x为正角，故 $0°\leqslant x\leqslant 180°$.

(2) $n=1$时， $270°\leqslant\frac{x}{2}\leqslant 450°$，即 $540°\leqslant x\leqslant 900°$

但$x\leqslant 720°$ 故 $540°\leqslant x\leqslant 720°$

答：x的取值范围是$0°\leqslant x\leqslant 180°$ 和 $540°\leqslant x\leqslant 720°$.

5. 用钢球测量机件上一个小孔的直径，所用的钢球的中心是O，直径是12毫米，将钢球放在这小孔上测得钢球上端D到机件平面的距离CD为9毫米，求小孔直径. （6分）

解 设小孔的直径为d

则 $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 9 \times 3$（圆幂定理）

$\therefore \quad d^2 = 108$

$d = 6\sqrt{3}$（毫米）.

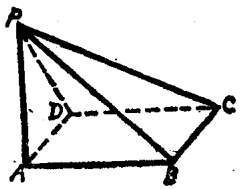


6. 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是一个正方形，PA 与底面垂直，已知 PA 是 $3cm$，P 到 BC 边的距离是 $5\,cm$，求 PC 的长. （6分）

解 $\because$ $PA \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore$ AB 是 PB 在平面 $ABCD$ 内的射影.

又 $\because$ $AB \perp BC$（正方形邻边互相垂直）



$\therefore$ $PB \perp BC$（三垂线定理）

故 PB 就是 P 到 BC 边的距离

$\therefore$ $PB = 5cm$

$\because$ $PA = 3cm$

$PB = 5cm$

$\therefore$ $AB = 4cm$

$BC = 4cm$

故 $PC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}(cm)$.

二、在一船的南30°东的海面上有一灯塔，船以30浬/时的速度向正东南的方向航行，半小时后看到这个灯塔在船的正西方向，问这时船与灯塔的距离是多少浬？（精确到0.1浬）（16分）

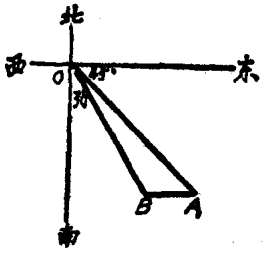
解 设船的开始位置为 O 点，半小时后到 A 点，灯塔在 B 点，

如图所示$\angle BOA=15°$

$\angle BAO=45°$,

$\therefore\ \angle ABO=120°$

$OA=0.5\times30=15$（浬）



$$\therefore\ \frac{AB}{\sin15°}=\frac{15}{\sin120°}$$

$$\therefore\ AB=\frac{15\cdot\sin15°}{\sin120°}$$

$$=\frac{15\cdot\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{5(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2}\approx4.5\text{（浬）}.$$

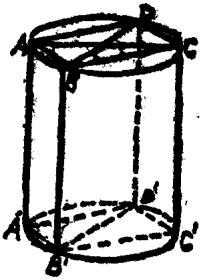
三、有一直圆柱，高是20cm，底面半径是5cm，它的一个内接长方体的体积是800cm³，求这个长方体的底面的长和宽.（16分）

解 设长方体底面的$AB=x$

则BD是圆柱底面的直径，

$\therefore\ BD=2r=10(cm)$

$\therefore\ AD=\sqrt{100-x^2}$



设长方体的体积为v

$$v=x\sqrt{100-x^2}\cdot20$$

$$\therefore\ 20x\sqrt{100-x^2}=800$$

$$\therefore\ x^2\cdot(100-x^2)=1600$$

$$x^4-100x^2+1600=0$$

$$(x^2-80)(x^2-20)=0$$

$\therefore \quad x_1^2 = 80, \quad x_1 = 4\sqrt{5}$

$\therefore \quad x_2^2 = 20, \quad x_2 = 2\sqrt{5}$

$\therefore \quad x_1 = 4\sqrt{5}, \quad x_2 = 2\sqrt{5}$

相应的 AB为$2\sqrt{5}$和$4\sqrt{5}$

$\therefore$ 内接长方体的边为 $4\sqrt{5}\,cm$.

另一边为 $2\sqrt{5}\,cm$.

四、要在墙上开一个矩形玻璃窗，周长定为6米.

1. 求以矩形一边之长(x)表示窗户的面积(y)的函数式.

2. 求这个函数图象的顶点坐标和对称轴方程.

3. 画出这个函数的图象并求出x的允许值的范围.

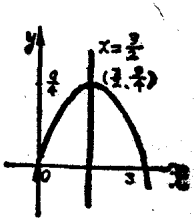
(16分)

解 1.函数式：$y = x(3-x) = 3x - x^2 \quad (0<x<3)$

2. $y = -x^2 + 3x$

$$y = -\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4}$$

$$y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$



$\therefore$ 顶点坐标是$\left(\frac{3}{2}、\frac{9}{4}\right)$

对称轴方程是 $x = \frac{3}{2}$.

3. x的允许值范围是$0<x<3$.

五、下列1、2两题任选一题　　(16分)

1. 已知方程$2x^2-x\cdot 4\sin\theta+3\cos\theta=0$的两根相等，且$\theta$为锐角，求$\theta$和这个方程的两根.

解 由 $\triangle=0$ 得 $16\sin^2\theta-24\cos\theta=0$

即 $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

$\therefore\ 2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$\because$ θ为锐角，$\cos\theta+2\neq 0$

故 $2\cos\theta-1=0$

得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=60^\circ$

$\therefore$ 原方程的根 $x=\dfrac{4\sin\theta}{4}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. a是什么实数的时候，下列方程组的解是正数

$$\begin{cases}2x+ay=4\\ x+4y=8\end{cases}$$

解

$$\begin{cases}x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & a\\ 8 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & a\\ 1 & 4\end{vmatrix}}=\dfrac{16-8a}{8-a}\\ y=\dfrac{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 8\end{vmatrix}}{8-a}=\dfrac{12}{8-a}\end{cases}$$

由 $y>0$, $\therefore\ 8-a>0$ $\therefore\ a<8$

$x>0$, $\therefore\ 16-8a>0$ $\therefore\ a<2$

故当$a<2$时，方程组的解为正数

本题不一定要用行列式法.

直接消去x. 解得 $y=\frac{12}{8-a}$，代入第二个方程，得

$$x=8-\frac{48}{8-a}$$

即 $x=\frac{16-8a}{8-a}$.其余同上.

一九六一年

一、

1. 求$(2-x)^{10}$展开式中含x^7项的系数. (6分)

解 $T_{K+1}=(-1)^K\cdot C_{10}^K\cdot x^K\cdot 2^{10-K}$，按题意应有：

$x^K=x^7$

∴ $K=7$，故含x^7的项是第8项，其系数是：

$(-1)^7\cdot C_{10}^7\cdot 2^3=-960$.

2. 解方程：$2lgx=lg(x+12)$ (6分)

解 $lgx^2=lg(x+12)$

$x^2=x+12$

∴ $x^2-x-12=0$

∴ $(x+3)(x-4)=0$

∴ $x_1=-3$, $x_2=4$

但原方程未知数的允许值是$x>0$,

∴ $x=4$是原方程的解.

3. 求函数$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-5}$的自变量$x$的允许值范围. (6分)

解 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-5\neq 0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x\neq 5\end{cases}$

∴ x的允许值范围为$[1,5)$及$(5,+\infty)$

4. 求$sin\frac{\pi}{12}\cdot sin\frac{5}{12}\pi$的值. （6分）

解 $sin\frac{\pi}{12}\cdot sin\frac{5}{12}\pi$

$$=-\frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)-cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(cos\frac{6\pi}{12}-cos\frac{4\pi}{12}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(cos\frac{\pi}{2}-cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

又解

∵ $\frac{\pi}{12}$与$\frac{5\pi}{12}$互余

∴ 原式$=sin\frac{\pi}{12}cos\frac{\pi}{12}$

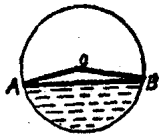
$$=\frac{1}{2}sin\frac{2\pi}{12}=\frac{1}{2}sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

5. 一水平放置的圆柱形排水管，内径$r=12cm$，被水淹没部分含150°的弧，求圆截面被水淹没部分的面积.(8分)

解 $S_{扇形OAB}=\frac{150\pi r^2}{360}=60\pi$ $\left(或=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{5\pi}{6}\cdot 12\right)$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot 12^2\cdot \sin 150^\circ=36$$

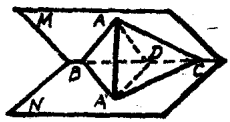


$\therefore\quad S_{弓形}=60\pi-36\approx 152.14(cm^2)$.

6. 已知$\triangle ABC$的BC边在平面N内，$\triangle ABC$所在的平面与平面N组成一个二面角$\alpha(\alpha<90^\circ)$，从A点作平面N的垂线AA'，A'是垂足，设$\triangle ABC$的面积为S，求证$\triangle A'BC$的面积为$S\cdot\cos\alpha$. (8分)

证明 作$A'D\perp BC$

则 $AD\perp BC$（三垂线定理）



$\therefore\quad S=\frac{1}{2}AD\cdot BC$,

$\angle A'DA=\alpha$

$AA'\perp A'D$,

$\therefore\quad A'D=AD\cdot\cos\alpha$

$\therefore\quad S_{\triangle A'BC}=\frac{1}{2}A'D\cdot BC$

$=\frac{1}{2}AD\cdot BC\cdot\cos\alpha$

$=S\cdot\cos\alpha$.

二、有一个机器制造厂的三年生产计划，每年比上一年增产的机器台数相同，如果第三年比原计划多生产1000台，那么每年比上一年的增长的百分数就相同，而且第三年的台数恰等于原计划三年生产总台数的一半，原计划每年各生产多少台？ (16分)

解 设原计划第一年生产x（台），第二年、第三年分别生产$x+d$，$x+2d$（台）.

根据条件有：$\begin{cases}(x+d)^2=x[(x+2d)+1000] \\ (x+2d)+1000=\dfrac{x+(x+d)+(x+2d)}{2}\end{cases}$

$\therefore \quad \begin{cases}x^2+2dx+d^2=x^2+2dx+1000x \\ 2x+4d+2000=3x+3d\end{cases}$

得 $\begin{cases}d^2=1000x \\ d=x-2000\end{cases}$

$\therefore \quad (x-2000)^2-1000x=0$

$\therefore \quad x^2-5000x+2000^2=0$

$\therefore \quad x=\dfrac{5000\pm\sqrt{5000^2-4\times2000^2}}{2}$

$=\dfrac{5000\pm3000}{2}$

$x_1=4000, \quad x_2=1000$

当$x_2=1000$时，　$d=1000-2000$不合题意，

$\therefore \quad x_1=4000, \quad d=2000.$

故原计划的产量三年分别为4000台，6000台，8000台。

又解

设原计划每年生产的台数分别为$x-y, x, x+y$(台)，如果第三年比原计划多生产1000台，即$x+y+1000$.依题意可得方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{x-(x-y)}{x-y}=\dfrac{(x+y+1000)-x}{x} & ① \\ x+y+1000=\dfrac{1}{2}[(x-y)+x+(x+y)] & ②\end{cases}$$

化简，得 $\begin{cases} y^2+1000y-1000x=0 & ③ \\ x=2y+2000 & ④ \end{cases}$

将④代入③，并化简，得

$$y^2-1000y-2000000=0$$

即 $(y-2000)(y+1000)=0$

∴ $y_1=2000$ $y_2=-1000$（不合题意）

将 y_1值代入②

得 $x=6000$.

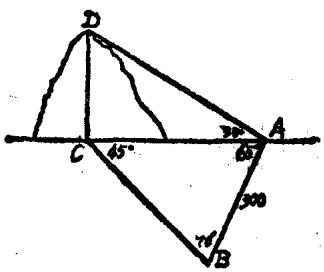
故原计划每年生产的台数分别为4000，6000，8000(台).

三、在平地上有A、B两点，A在山的正东，B在山的东南，且在A的西65°南300米的地方，在A测得山顶的仰角为80°，求山高.（已知$sin70°=0.940$，精确到10米.）

(15分)

解 如图，山高为CD.

$\angle ABC=70°$.



由 $\dfrac{AC}{sin70°}=\dfrac{AB}{sin45°}$

∴ $AC=\dfrac{300sin70°}{sin45°}$

$=\dfrac{300\times0.940}{0.707}$

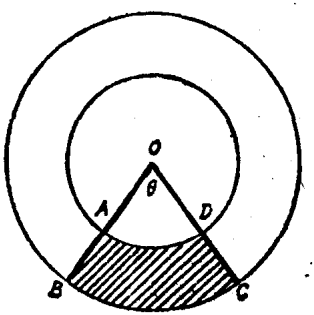
≈398.87（米）

$CD=AC\cdot tg30°$

$=398.87\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

≈230（米）.

四、有一块环形铁皮，它的内半径 $r=45cm$，外半径 $R=75cm$，用它的$\frac{1}{5}$（如图的阴影部分）作圆台形水桶的侧面，求这个水桶的容积．（15分）



解 设圆台形水桶的上下底的半径分别为a，b，高为h，母线长为l．

根据已知条件：$l=R-r=30(cm)$．

$\overset{\frown}{AD}=2\pi a$，　$\overset{\frown}{BC}=2\pi b$

而 $\theta=72^\circ=\frac{2\pi}{5}$．

$\therefore$　$\overset{\frown}{AD}=\frac{2\pi}{5}\cdot 45=18\pi$，

$\overset{\frown}{BC}=\frac{2\pi}{5}\cdot 75=30\pi$．

由 $\begin{cases}2\pi a=18\pi\\2\pi b=30\pi\end{cases}$

$\therefore$　$a=9$，$b=15$，

$h=\sqrt{l^2-(b-a)^2}=\sqrt{30^2-6^2}=12\sqrt{6}$．

$\therefore$　$V=\frac{\pi h}{3}(a^2+ab+b^2)$

$=\frac{\pi}{3}\cdot 12\sqrt{6}(81+135+225)$

$=1764\sqrt{6}\pi(cm^3)\approx 13570(cm^3)$．

答：这水桶的容积约为$13570cm^3$．

五、（本题满分15分）

下面甲、乙两题，选作一题（如果两题都做，必须划去一题，否则按所做的甲题评分）.

甲、k是什么实数的时候，

方程 $x^2-2(k+3)x+3k^2+1=0$有实数根？

解 由$\triangle=[-(k+3)]^2-(3k^2+1)$

$$=k^2+6k+9-3k^2-1$$

$$=-2k^2+6k+8=2(-k^2+3k+4)\geqslant 0.$$

$\therefore$ $k^2-3k-4\leqslant 0$

$(k+1)(k-4)\leqslant 0$

$\therefore$ $-1\leqslant k\leqslant 4$

故当$-1\leqslant k\leqslant 4$时，方程 $x^2-2(k+3)x+3k^2+1=0$ 有实数根.

乙、设方程 $8x^2-(8\sin\alpha)x+2+\cos 2\alpha=0$ 的两个根相等，求α.

解 方程两根相等，

$\therefore$ $b^2-4ac=(8\sin\alpha)^2-4\times 8(2+\cos 2\alpha)=0.$

即 $64\sin^2\alpha-32(2+1-2\sin^2\alpha)=0.$

亦即 $2\sin^2\alpha-(3-2\sin^2\alpha)=0$

$$4\sin^2\alpha=3$$

$$\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$$

$\therefore$ $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

故 $\alpha=n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$

一九六二年

一、某工厂第三年的产量比第一年的产量增长21%，问平均每年比上一年增长百分之几？第一年产量是第三年的百分之几？（精确到1%）　　（6分）

解　设第一年的产量为a，并设平均每年比上一年增长$x\%$，第三年比第一年增长21%，∴第三年产量为$a(1+21\%)$，而平均每年比上一年增长$x\%$，那么第三年产量应为$a(1+x\%)^2$.

$$\therefore\quad a(1+x\%)^2=a(1+21\%)$$

$$\therefore\quad (1+x\%)^2=\frac{121}{100}$$

$$\therefore\quad 1+x\%=\frac{11}{10}=110\%,\quad \therefore\ x=10\%,$$

第一年产量为a，第三年产量为$a(1+21\%)$，

$$\therefore\quad \text{第一年是第三年的}\frac{a}{a(1+21\%)}\text{倍，而}$$

$$\frac{a}{a(1+21\%)}=\frac{100}{121}\approx 82\%.$$

二、求$(1-2i)^5$的实部.　　(6分)

解　$(1-2i)^5=(1-2i)\cdot[(1-2i)^2]^2$

$=(1-2i)(-3-4i)^2=(1-2i)(-7+24i)$

$=(-7+48)+(14+24)i=41+38i$

∴ $R[(1-2i)^5]=41$.

三、解方程 $lg(x-5)+lg(x+3)-2lg2=lg(2x-9)$ (6分)

解 由对数的性质得 $lg\frac{(x-5)(x+3)}{4}=lg(2x-9)$

∴ $\frac{x^2-2x-15}{4}=2x-9$

∴ $x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$

∴ $x_1=3$, $x_2=7$

经检验$x=7$是原方程的根.[∵ $x=3$时,$lg(x-5)$无意义]

四、求 $sin\left(2arc\,sin\frac{4}{5}\right)$的值. (6分)

解 令$arc\,sin\frac{4}{5}=\alpha$, ∴ $sin\alpha=\frac{4}{5}$ $(0<\alpha<\pi)$

∴ $cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\pm\frac{3}{5}$

当 $cos\alpha=\frac{3}{5}$时, $sin2\alpha=2sin\alpha\cdot cos\alpha$

$=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

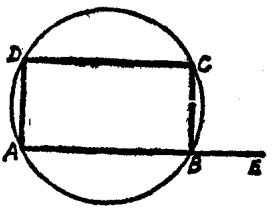
当 $cos\alpha=-\frac{3}{5}$时, $sin2\alpha=-\frac{24}{25}$.

五、求证：1. 圆内接平行四边形是矩形.(8分)

证明 ∵ $ABCD$是平行四边形,

∴ $\angle ABC = \angle D$（平行四边形的对角相等）

而 $\angle CBE = \angle D$（圆内接四边形的外角等于其内对角）



∴ $\angle ABC = \angle CBE$

而 $\angle ABC + \angle CBE = 180°$

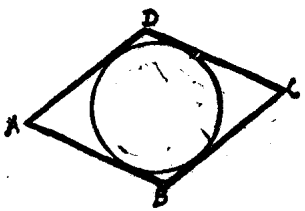
∴ $\angle ABC = 90°$

∴ 平行四边形$ABCD$是矩形.

（或用圆内接四边形对角互补来证也很简单）.

〔另法〕 平行四边形对角线互相平分，故对角线交点即为圆心，对角线即直径，直径上的圆周角为直角.

2. 圆的外切平行四边形是菱形.



证明 平行四边形$ABCD$与⊙O相切，

∴ $AB + CD = AD + BC$（圆外切四边形对边之和相等）.

而 $AB = CD$，$AD = BC$（平行四边形对边相等）

∵ $2AB = 2BC$

$AB = BC$

∴ 平行四边形$ABCD$是菱形.（一组邻边相等的平行四边形是菱形）.

六、解方程组 $\begin{cases} y^2-4x-2y+1=0 & ① \\ y=x+a & ② \end{cases}$

并讨论a是哪些实数时方程组：（1）有不同的两组实数解.（2）有相同的两组实数解.（3）没有实数解. （15分）

解 把②代入① $(x+a)^2-4x-2(x+a)+1=0$

$\therefore$ $x^2+2(a-3)x+(a-1)^2=0$

$\triangle=4(a-3)^2-4(a-1)^2=16(-a+2)$

（1）当$\triangle>0$，即$-a+2>0$，亦即$a<2$时，方程组有两组不同的实数解.

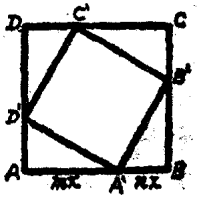
（2）当$\triangle=0$，即$a=2$时，方程组有相等的两组实数解.

（3）当$\triangle<0$，即$a>2$时，方程组没有实数解.

七、（15分）$ABCD$和$A'B'C'D'$都是正方形，而A'、B'、C'、D'分别顺次分AB、BC、CD、AD，成$m:n$，并设$AB=1$.

1. 求正方形$A'B'C'D'$的面积.

解 $\because$ $AA':(1-AA')=m:n$



$\therefore$ $AA'=\dfrac{m}{m+n}$,

$A'B=1-\dfrac{m}{m+n}$

$=\dfrac{n}{m+n}$

$S_{A'B'C'D'}=A'D'^2=AA'^2+AD'^2$

$=\left(\dfrac{m}{m+n}\right)^2+\left(\dfrac{n}{m+n}\right)^2$

$$= \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$$

2. 证明正方形$A'B'C'D'$的面积不小于$\frac{1}{2}$.

证明 $\because$ $m^2+n^2 \geqslant 2mn$ $[\because (m-n)^2 \geqslant 0]$

$\therefore$ $2(m^2+n^2) \geqslant m^2+2mn+n^2$

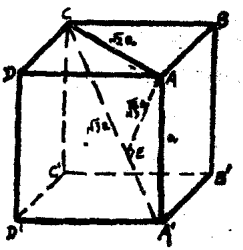
$\therefore$ $2(m^2+n^2) \geqslant (m+n)^2$

$\therefore$ $\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} \geqslant \frac{1}{2}$,

即 $S_{A'B'C'D'} \geqslant \frac{1}{2}$.

八、由正方体$ABCD-A'B'C'D'$的顶点A作这正方体的对角线$A'C$的垂线，垂足是E，求证：$A'E:EC=1:2$.

（15分）



证明

方法一：

连AC，则$A'A \perp AC$

设正方体棱长为a

则 $AC=\sqrt{2}a$

AE为直角三角形$A'AC$的斜边$A'C$上的高，依比例中项定理，

$$AA'^2 = A'E \cdot A'C$$

$$AC^2 = A'C \cdot EC$$

故 $A'E:EC = AA'^2:AC^2 = 1:2$

方法二：

在直角$\triangle AA'C$中，$A'C=\sqrt{3}a$

由面积公式得

$$AE\cdot A'C=AA'\cdot AC$$

即 $AE=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a.$

故 $A'E=\sqrt{a^2-\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{\frac{1}{3}}a.$

$$EC=\sqrt{2a^2-\frac{2}{3}a^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}a.$$

$\therefore$ $A'E:EC=1:2.$

方法三：

$$A'E=a\cos\alpha$$

$$=a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$EC=\sqrt{2}a\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $A'E:EC=1:2.$

九、求证两两相交而不通过同一点的四条直线在同一平面内.（8分）

证明 设a、b相交于P，

故有一平面α过a、b两直线.

因c、d至少有一条不通过P，

设为c.

c与a、b分别交于Q、S.

则Q、S相异且均在平面α上.

故c在α上.

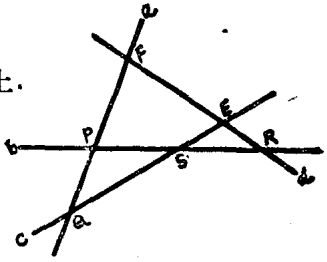
而P、Q、S三点不能同时在d上.

设P点不在d上.

命d与a、b之交点为F、R

则F、R相异，F、R均在α上.

故d亦在α上.

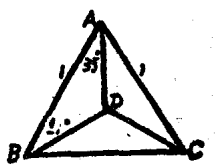


故两两相交而不通过同一点的四条直线必在同一平面内.

十、已知D是$\triangle ABC$内的一点，已知$AB=AC=1$，$\angle CAB=63^\circ$，$\angle DAB=33^\circ$，$\angle DBA=27^\circ$，求CD之长.（$sin27^\circ=0.4540$，精确到小数点后两位）. （15分）

解 $\because$ $\angle ADB=180^\circ-(33^\circ+27^\circ)=120^\circ$

$$\therefore \quad \frac{AD}{sin27^\circ}=\frac{AB}{sin120^\circ}$$



$$AD=\frac{sin27^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2sin27^\circ}{\sqrt{3}}$$

$$\angle DAC=63^\circ-33^\circ=30^\circ$$

$$CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cdot cos30^\circ$$

$$=\frac{4sin^227^\circ}{3}+1-2\cdot\frac{2sin27^\circ}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=1+\frac{4}{3}sin^227^\circ-2sin27^\circ$$

$$= 1 + 2\sin 27^\circ\left(\frac{2}{3}\sin 27^\circ - 1\right)$$

$$= 1 + 0.9080 \times (0.3027 - 1)$$

$$= 1 - 0.9080 \times 0.6973$$

$$= 1 - 0.6331$$

$$= 0.3669$$

$\therefore$ $CD = 0.61$.

一九六三年

一、已知 $tg\theta=\sqrt{2}$

求 $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$之值. （8分）

解 $$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1+tg\theta}{1-tg\theta}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{1-2}=-(3+2\sqrt{2})$$

$$=-3-2\sqrt{2}.$$

二、1. 求出复数 $1+\sqrt{3}i$ 的模和幅角. （8分）

解 $$r=|1+\sqrt{3}i|=\sqrt{1+3}=2$$

$$\varphi=arctg(1+\sqrt{3}i)=arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

2. 在直角坐标系 xoy 所在的平面内，以 A 点表示复数 $1+\sqrt{3}i$，把 OA 绕着 O 点按反时针方向旋转150°，设 A 点到达的位置为 B，写出 B 点所表示的复数的代数式.

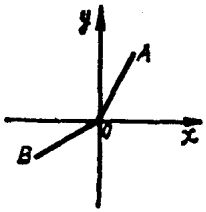
解 按题设条件，B 点所表示的复数 $c+di$ 中，模数 $r=2$，幅角 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{6}$.

$$\therefore\quad c = 2\cos\frac{7\pi}{6} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{3}.$$

$$d = 2\sin\frac{7\pi}{6} = 2\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -1$$



故 B点所表示的复数的代数式为$-\sqrt{3}-i$.

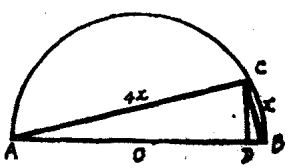
三、 AB为半圆的直径，$CD\perp AB$，已知$AB=1$，$AC:CB=4:1$，求CD. （6分）

解 设$CB=x$，则$AC=4x$，$\because\ AC^2+CB^2=AB^2$

$$\therefore\quad 16x^2+x^2=1,$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{17}}{17},\quad \text{即}CB=\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$AC=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

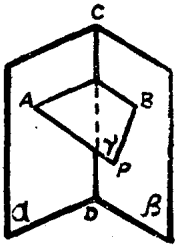


由 $\triangle CDB\backsim\triangle ABC$

$$\therefore\quad \frac{CD}{AC}=\frac{CB}{AB}$$

$$\therefore\quad CD=\frac{AC\cdot CB}{AB}=\frac{\frac{4\sqrt{17}}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}}{1}=\frac{4}{17}.$$

四、从二面角内任一点向二面角的两个面作垂线，求证这两条垂线所决定的平面垂直于二面角的棱.



(6分)

证明 PA是平面α的垂线.

$\therefore$ $PA \perp CD$（平面的垂线垂直于平面内的任意直线）

同理：$PB \perp CD$

PA和PB确定一个平面 r（两条相交的直线确定一个平面）.

因而CD和平面 r 内两条相交的直线PA和 PB 都垂直.

$\therefore$ $CD \perp$平面r（如果一条直线和一平面内的两条相交的直线都垂直，那么这条直线就垂直于这个平面）.

五、利用下列对数表计算$23.28^{-1.1}$（原题有附表）

（8分）

解 令 $N = 23.28^{-1.1}$

$\because$ $tgN = -1.1tg23.28 = -1.1 \times 1.367$

$= -1.5037 = \bar{2}.4963$

$\therefore$ $N = 0.03136$

六、解方程$sin3x - sinx + cos2x = 0$ (12分)

解 $2cos2xsinx + cos2x = 0$，

$cos2x(2sinx + 1) = 0$

由 $cos2x = 0$，

得 $2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$（$k$为整数）

$\therefore \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

$\therefore \quad x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$

$x_2 = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

由 $2\sin x + 1 = 0$

得 $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x = n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}$

$x_3 = 2k\pi + \frac{7}{6}\pi$

$\therefore \quad x_4 = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$.

（k：一切整数）

七、（12分）用1，2，3，4，7，9组成没有重复的五位数．问：

1．这样的五位数一共有多少？

解 共有 $A_6^5 = 720$（个）．

2．这些数中有多少个偶数？

解 末尾是2或末尾是4的数才是偶数，因而共有：$2A_5^4 = 240$（个）．

3. 在这些五位数中，有多少个是3的倍数？

解 在这六个数中，只有 $1+3+4+7+9=24$ 是3的倍数，所以共有 $5^1=120$（个）是3的倍数.

八、在实数范围内解方程组：$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1 & ① \\ \sqrt{xy+3}=x & ② \end{cases}$

（14分）

解 将（2）两边平方：$xy+3=x^2$

$\therefore\ x^2-xy=3$ ③

①乘以3，$3x^2-6xy-3y^2=3$ ④

④－③得 $2x^2-5xy-3y^2=0$.

$\therefore\ (2x+y)(x-3y)=0$

$\therefore\ 2x+y=0$ ⑤ 或 $x-3y=0$ ⑥.

这样，解原方程组就变为解下列两个方程组：

Ⅰ $\begin{cases} x^2-xy=3 & ③ \\ 2x+y=0 & ⑤, \end{cases}$ Ⅱ $\begin{cases} x^2-xy=3 & ③ \\ x-3y=0 & ⑥. \end{cases}$

解方程组Ⅰ.

从⑤得 $y=-2x$ 代入③

$\therefore\ 3x^2=3,$

$\therefore\ x=\pm 1,$

$y=\mp 2.$

解方程组Ⅱ.

从⑥得 $x=3y$ 代入③

$\therefore\ 6y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$

故 组Ⅰ的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=2. \end{cases}$

组Ⅱ的解为 $\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

经检验，原方程组的解为

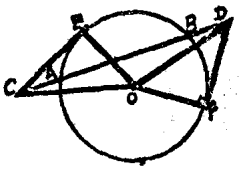
$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

九、 线段CD与⊙O相交于A、B两点，且$AC=BD$，又CE、DF分别与⊙O相切于E、F；求证$\triangle OEC\cong\triangle OFD$. （10分）

证明 ∵ $AC=BD$，∴ $BC=AD$.

$CE^2=AC\cdot AB$，$DF^2=BD\cdot AD$（圆幂定理）

∴ $CE^2=DF^2$，∴ $CE=DF$



在$\triangle OEC$与$\triangle OFD$中

又∵ $\angle OFD=\angle OEC=90^\circ$

（切线⊥过切点的半径）

$OF=OE$（同圆半径相等）

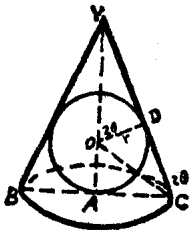
∴ $\triangle OEC\cong\triangle OFD$（边，角，边）.

十、（16分）半径为1的球内切于直圆锥，已知圆锥的母线与底面的夹角是2θ.

1. 求证圆锥母线与底面半径的和是$\dfrac{2}{tg\theta\cdot(1-tg^2\theta)}$.

证明 方法一 设圆锥的母线为 l，高为 h，底半径为 r，根据已知的条件有：

$$r=\frac{1}{tg\theta},\quad l=\frac{r}{cos2\theta}$$



$$\therefore\quad l+r=\frac{r}{cos2\theta}+r=r\left(1+\frac{1}{cos2\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{tg\theta}\cdot\left(\frac{1+cos2\theta}{cos2\theta}\right)$$

$$=\frac{2cos^2\theta}{tg\theta\cdot(2cos^2\theta-1)}=\frac{2}{tg\theta\left(2-\frac{1}{cos^2\theta}\right)}$$

$$=\frac{2}{tg\theta(2-sec^2\theta)}=\frac{2}{tg\theta(2-1-tg^2\theta)}$$

$$=\frac{2}{tg\theta(1-tg^2\theta)}$$

方法二 $r=\frac{1}{tg\theta}$

$$l=BD+DV$$

$$=\frac{1}{tg\theta}+tg2\theta.$$

$$\therefore\quad r+l=\frac{2}{tg\theta}+tg2\theta$$

$$=\frac{2}{tg\theta}+\frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta}=\frac{2}{tg\theta(1-tg^2\theta)}.$$

2. 求证圆锥的全面积是：$\frac{2\pi}{tg^2\theta(1-tg^2\theta)}$.

证明 $S_{圆锥全}=\pi r(l+r)=\pi\cdot\frac{1}{tg\theta}\cdot\frac{2}{tg\theta\,(1-tg^2\theta)}$

$$=\frac{2\pi}{tg^2\theta(1-tg^2\theta)}.$$

3. 当θ是什么值时，圆锥的全面积最小（θ用反三角函数表示）.

解 $S_{圆锥全}=\frac{2\pi}{tg^2\theta-tg^4\theta}=\frac{2\pi}{-\left(tg^2\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$

∴ 当 $tg^2\theta=\frac{1}{2}$时，即 $tg\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ （∵θ是锐角）

亦即 $\theta=arctg\frac{\sqrt{2}}{2}$时分母有最大值而$S_{全}$最小. 且 $S_{min}=8\pi$.

一九六四年

一、化简 $\dfrac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^2}$（6分）

解 原式 $=\dfrac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^3}}{3-2\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2\cdot(4-3)}=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}.$$

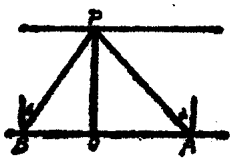
二、甲乙二人在河南岸的O处，隔河正北一建筑物P，甲向正东，乙向正西，沿河岸而行．甲每分钟比乙快a米，10分钟后，甲望见建筑物P在北α度西；乙望见建筑物P在北β度东，求O与P的距离．（10分）

解 $\angle OPA=\alpha$，$\therefore$ $OA=OP\cdot tg\alpha$.

同理$OB=OP\cdot tg\beta$.

由于甲每分钟比乙快a米，

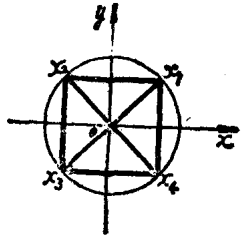
10分钟后，$\dfrac{OA}{10}=\dfrac{OB}{10}+a$



$\therefore$ $\dfrac{OP\cdot tg\alpha}{10}=\dfrac{OP\cdot tg\beta}{10}+a.$

$\therefore$ $OPtg\alpha-OPtg\beta=10a.$

故 $OP = \dfrac{10a}{tg\alpha - tg\beta}$.



三、解方程$x^4+1=0$，并证明，平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点．（10分）

解 $x^4 = -1 = cos\pi + isin\pi$.

$\therefore\quad x = cos\dfrac{2k\pi+\pi}{4} + isin\dfrac{2k\pi+\pi}{4} (k=0、1、2、3)$

$k=0$时，$x_1 = cos\dfrac{\pi}{4} + isin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=1$时，$x_2 = cos\dfrac{3}{4}\pi + isin\dfrac{3}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=2$时，$x_3 = cos\dfrac{5}{4}\pi + isin\dfrac{5}{4}\pi = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$k=3$时，$x_4 = cos\dfrac{7}{4}\pi + isin\dfrac{7}{4}\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

$\because\quad |x_1| = |x_2| = |x_3| = |x_4| = 1$.

$\therefore$ 在平面上表示这四个数的点在单位圆上.

$\because$ 幅角之差 $arctgx_2 - arctgx_1 = arctgx_3 - arctgx_2$

$= arctgx_4 - arctgx_3 = \dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 表示这四个数的点四等分单位圆.

因而，平面内表示这个方程的四个根的点是一个正方形的顶点.

四、（12分）已知A、B、C是三角形的内角，求证

$$\cos A = \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$$

证　只要能证 $2\cos A \cdot \sin B \cdot \sin C$

$$= \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A$$即可.

$$\text{右式} = \frac{1}{2}(1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C) - (1 - \cos^2 A)$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) + \cos^2 A$$

$$= -\cos(B+C)\cos(B-C) + \cos^2(B+C)$$

$$= \cos(B+C)[\cos(B+C) - \cos(B-C)]$$

$$= \cos(B+C)(-2\sin B \sin C)$$

$$= -\cos A(-2\sin B \sin C)$$

$$= 2\cos A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

故 $\cos A = \dfrac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}$.

另证　由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$（其中$R$为三角形外接圆的半径）

$\therefore$ $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

又由余弦定理

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2R)^2(\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A)}{2(2R)^2 \sin B \sin C}$$

$$= \frac{\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A}{2\sin B \sin C}.$$

五、（15分）已知方程$x^3 + mx^2 - 3x + n = 0$三根的平方

和等于 6，且已知这个方程有两个相等的正根，求 m、n 的值.

解 设此方程的三个根为 x_1、x_1、x_2，依题意及根与系数的关系，得方程组

$$\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 = 6 & ① \\ x_1^2 + 2x_1x_2 = -3 & ② \end{cases}$$

① + 2②得：$4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 0$.

$\therefore \quad (2x_1 + x_2)^2 = 0$

$\therefore \quad x_2 = -2x_1$ ③

将③代入①得 $2x_1^2 + (-2x_1)^2 = 6$，$x_1^2 = 1$，

$\therefore \quad x_1 = \pm 1$.

根据题意，x_1为正根，则$x_1 = -1$ 应舍去.

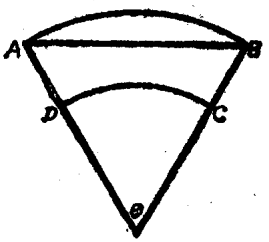
故 $x_1 = 1$.

于是 $x_2 = -2$.

从而 $m = -(2x_1 + x_2) = 0$.

$n = -x_1^2x_2 = 2$.

六、（15分）圆台形铁桶的上底半径为 15cm，下底半径为 10cm，母线长为 30cm，将桶的侧面展开成一扇形，求 AB 之间的距离.



解 圆台上底半径为$R = 15cm$，下底半径$r = 10cm$，母线$L = 30cm$.

设展开后扇形的半径为L'，

则 $L' = \dfrac{LR}{R-r} = \dfrac{30 \times 15}{15-10} = 90(cm)$

扇形的中心角 $\theta=\frac{R-r}{L}\times 360^{\circ}$

$$=\frac{15-10}{30}\times 360^{\circ}=60^{\circ}$$

$\therefore$ $AB=L'=90(cm)$.

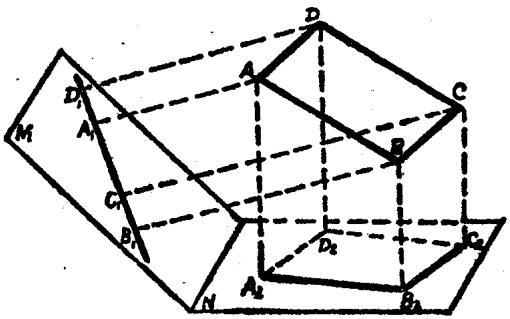
七、（15分）A、B、C、D四点在平面M和平面N之外，A、B、C、D在平面M内的射影为A_1、B_1、C_1、D_1；在平面N内的射影为A_2、B_2、C_2、D_2.已知A_1、B_1、C_1、D_1在一直线上，A_2、B_2、C_2、D_2是一个平行四边形，求证$ABCD$也是一个平行四边形.

证明 $\because$ A、B、C、D在平面M内的射影A_1、B_1、C_1、D_1在一条直线上.

$\therefore$ A_1、B_1、C_1、D_1或在一条直线上或在同一平面内.

又$\because$ A_1、B_1、C_1、D_1在N内的射影是一个平行四边形，不在一条直线上，

$\therefore$ A_1、B_1、C_1、D_1只能在一个平面上，我们设A_1、



B_1、C_1、D_1所在的平面为α.

∵ $AA_2\perp$平面N，$DD_2\perp$平面N.

∴ $AA_2 /\!/ DD_2$（垂直同一平面的两直线平行）.

又∵ $A_2B_2 /\!/ D_2C_2$（平行四边形的对边平行）

∴ 平面$AA_2B_2B /\!/$平面DD_2C_2C（一个平面内的两条相交直线和另一个平面内的两条相交的直线分别平行，则这两个平面平行）

∴ $AB /\!/ CD$（两平行平面和第三个平面相交，则交线平行）.

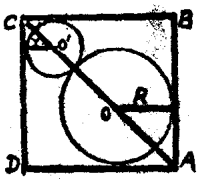
同理可证$AD /\!/ BC$.

∴ 四边形$ABCD$是平行四边形.（两组对边分别平行的四边形是平行四边形）.

八、(17分) $ABCD$是正方形，其边长为1. 在正方形内，⊙O与⊙O'相外切，⊙O与AB、AD两边相切，⊙O'与CB、CD两边相切.

1. 求这两圆半径的和.

解 由勾股定理



$$2[1-(R+r)]^2=(R+r)^2$$

$$2(R+r)^2-4(R+r)+2=(R+r)^2$$

$$(R+r)^2-4(R+r)+2=0$$

$$R+r=\frac{4\pm\sqrt{16-4(2)}}{2}=2\pm\sqrt{2}.$$

由于要求$R+r<1$，∴ 取$R+r=2-\sqrt{2}$.

2. 当两圆半径各是多少时，两圆面积之和最小？

解 $S=\pi R^2+\pi r^2=\pi(R^2+r^2)$

$$= \frac{1}{2}\pi[(R+r)^2 + (R-r)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left[(2-\sqrt{2})^2 + (R-r)^2\right]$$

当$R=r$时，S最小.

此时，$S_{最小} = \frac{1}{2}\pi(6-4\sqrt{2}) = (3-2\sqrt{2})\pi$.

$$R = r = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. 当两圆半径各是多少时，两圆面积之和最大？证明你的结论.

解 要使两圆面积之和S最大，r必须取最小值，但$R_{最大} = \frac{1}{2}$，（即正方形的内切圆）

这时，$r = 2-\sqrt{2} - R = 2-\sqrt{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{max} = \pi(R^2 + r^2) = \pi\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$

$$= \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{17-12\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{9-6\sqrt{2}}{4}\pi.$$

同样当$R = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$时，$S$也有极大值，

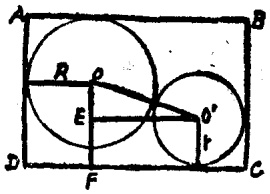
且 $S_{max}=\frac{9-6\sqrt{2}}{2}\pi$。

此时，$r=\frac{1}{2}$。

参考题：(10分)

一、第八题中正方形改为矩形时，得什么结果？为什么？

解 设矩形两相邻直角边之一为1，另一边为$1+a$，其中$0<a<1$.



$O'E=1+a-(R+r)$.

$OE=1-(R+r)$.

由勾股定理，可得

$(R+r)^2=[1-(R+r)]^2+[(1+a)-(R+r)]^2$

$\therefore\quad (R+r)^2-2(2+a)(R+r)+2+2a+a^2=0.$

$$R+r=(2+a)\pm\sqrt{[-(2+a)]^2-(2+2a+a^2)}$$
$$=2+a\pm\sqrt{2(1+a)}.$$

由于上式中根号前“+”不合理，应舍去.

$\therefore\quad R+r=2+a-2(1+a)$.

$$S=\pi R^2+\pi r^2=\pi(R^2+r^2)=\frac{\pi}{2}[(R+r)^2+(R-r)^2]$$

$$=\frac{\pi}{2}[(2+a-\sqrt{2(1+a)})^2+(R-r)^2].$$

当 $R=r=1+\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{2(1+a)}}{2}$ 时，S最小.

当 $R=\frac{1}{2}$，$r=\frac{3}{2}+a-\sqrt{2(1+a)}$时，$S$最大.

若$a=1$，即 $R=r=\frac{1}{2}$时，就不存在最大最小问题.

若$a>1$，由于矩形一边为1，故R，r只能是

$$R=r=\frac{1}{2}.$$

$\therefore\ R+r<1+a.$

因此$\odot O$，$\odot O'$分离，问题无意义.

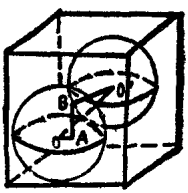
二、第八题中正方形改为正方体，圆改为球，得到什么结果？为什么？

解　根据题意，

球心必在正方体的某条对角线上.

$\because\ OA=AB=BO'=1-(R+r)$

而$OO'=R+r.$



接连运用两次勾股定理.

得　$3[1-(R+r)]^2=(R+r)^2$

即　$2(R+r)^2-6(R+r)+3=0.$

$$\therefore\ R+r=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}.$$

“+”应舍去.

$$\therefore\ R+r=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

$$V=\frac{4}{3}\pi(R^3+r^3)=\frac{4}{3}\pi(R+r)(R^2-Rr+r^2)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(R+r)\left[\frac{1}{4}(R+r)^2 + \frac{3}{4}(R-r)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3(R-r)^2\right].$$

当 $R=r=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 时，V 最小.

当 $R=\frac{1}{2}$ 时，$r=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$，V 最大.

一九六五年

一、（6分）某物体的主视图是边长为$2a$的正三角形，俯视图是边长为a的正六边形.这物体的立体图形是什么？并求它的体积.





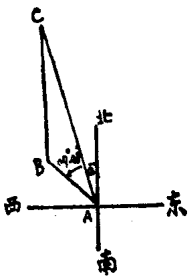
解 立体图形是正六棱锥.

高$h=\sqrt{3}a$

$$S=6\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cdot\sqrt{3}a=\frac{3a^3}{2}.$$

二、（14分）在A处的甲船测得乙船在北偏西49°48′的B处，乙船正以22浬/时的速度向正北行驶，甲船立即从A处出发，以速度26浬/时向北偏西α度直线追赶乙船，经过一段时间后，甲船在某C处恰好遇上乙船，求α的度数.（$lg2.2=0.3424$，$lg2.6=0.4150$，40°～49°的三角函数表也给出）



解 如图所示，设t小时后，甲、乙两船同时达到C处.

$\therefore$ $AC=26t$，$BC=22t$，$\angle ABC=180^\circ-49^\circ48'$

$\angle BAC=49^\circ48'-\alpha$

$\therefore$ $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$

$\therefore$ $\dfrac{26t}{\sin 49^\circ48'}=\dfrac{22t}{\sin(49^\circ48'-\alpha)}$

$\therefore$ $\sin(49^\circ48'-\alpha)=\dfrac{22\cdot\sin 49^\circ48'}{26}$

$=0.6463$

$\therefore$ $49^\circ48'-\alpha=40^\circ16'$

$\therefore$ $\alpha=49^\circ48'-40^\circ16'=9^\circ32'$.

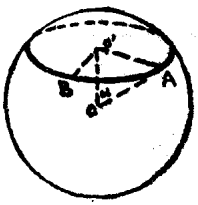
三、(15分)把地球当作半径为R的球，地球上面的两点A、B的纬度相同，都是α度，经度相差β度，试求A、B两点的地面距离（即小圆弧长）.

解 方法一 设纬度为α度时，小圆半径为r.

则 $r=R\sin\alpha$

$\because$ A、B的经度相差β度

$\therefore$ $\angle AO'B=\beta^\circ$



而 $\beta^\circ=\dfrac{\pi\beta}{180}$弧度

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}=r\cdot\dfrac{\pi\beta}{180}=\dfrac{\pi R\beta\cdot\sin\alpha}{180}$

方法二 $r=R\sin(90^\circ-\alpha)=R\cos\alpha$

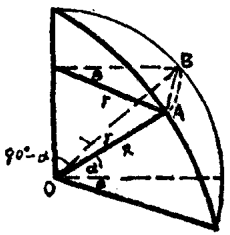
A、B两点之间的直线距离为

$AB = 2r\sin\frac{\beta}{2} = 2R\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$. 令 $\angle AOB = r$

则 $\sin\frac{r}{2} = \frac{\frac{AB}{2}}{R} = \cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$

$\therefore \quad \frac{r}{2} = arc\sin\left(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$r = 2arc\sin\left(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\right)$.



由此得A、B两点间的球面距离为

$\overset{\frown}{AB} = Rr$

$= 2Rarc\sin\left(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}\right)$.

四、(11分)P是什么实数值时，方程 $x^2 + Px - 3 = 0$(1)和$x^2 - 4x - (P-1) = 0$(2)有一个公共根，并求这个公共根？

解 设公共根为α，则

$\alpha^2 + P\alpha - 3 = 0 \qquad \alpha^2 - 4\alpha - (P-1) = 0$

相减整理得 $\alpha = \frac{4-P}{4+P}$

代入上方程之(1) 得 $\left(\frac{4-P}{4+P}\right)^2 + P\left(\frac{4-P}{4+P}\right) - 3 = 0$

整理得 $P^3 + 2P^2 + 16P + 32 = 0$

即 $(P+2)(P^2+16) = 0 \quad \therefore \quad P = -2$

从而又可得 $\alpha = 3$.

五、(15分)已知点(4，-2) 和直线l：$y - x + 5 = 0$ 及曲

线 C：$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$，求过 P 点且垂直于 l 的直线与曲线 C 的交点坐标，并画出图形.

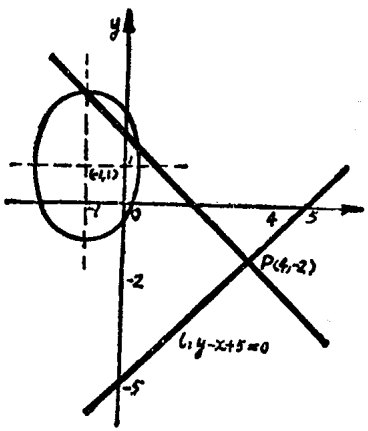
解 过 $P(4,-2)$ 且和 l 垂直的直线方程为 $y+2=-(x-4)$. 它和曲线 C 的交点为

$$\begin{cases} y+2=-(x-4) & ① \\ \frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 & ② \end{cases}$$ 的解.

由①$y=-x+2$ 代入②，$\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(2-x-1)^2}{4}=1$.

化简得 $3x^2+2x-1=0$

$\therefore$ $(3x-1)(x+1)=0$



$\therefore$ $x_1=\frac{1}{3}$ $\quad$ $x_2=-1$

代回① ∴ $y_1=\frac{5}{3}$ $y_2=3$

∴ 交点坐标为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}\\ y_1=\frac{5}{3}\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1\\ y_2=3.\end{cases}$

六、（15分）1．求证$|sin2x|\leqslant 2|sinx|$

证明

∵ $|cosx|\leqslant 1$ ∴ $2|sinx||cosx|\leqslant 2|sinx|$

∴ $|2sinx\cdot cosx|\leqslant 2|sinx|$

∴ $|sin2x|\leqslant 2|sinx|$

2．用数学归纳法证明：当n为整数时，下式成立：

$|sinnx|\leqslant n|sinx|$

证明 （1）当$n=2$时，

上面已证$|sin2x|\leqslant 2|sinx|$.

（2）假设当$n=k$时原式成立.

即 $|sinkx|\leqslant k|sinx|$

那么 $|sin(k+1)x|=|sinkx\cdot cosx+coskx\cdot sinx|$

$\leqslant|sinkx\cdot cosx|+|coskx\cdot sinx|$

$\leqslant|sinkx|+|sinx|\leqslant k|sinx|+|sinx|$

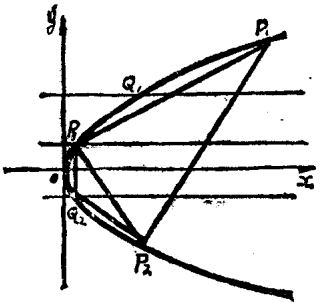
$=(k+1)|sinx|$

∴ $n=k+1$时等式也成立.

根据(1)、(2)，原式对一切大于2的自然数都成立.

七、已知抛物线的方程$y^2=2x$，在这曲线上有两点$P_1(x_1、y_1)$、$P_2(x_2、y_2)$，过P_1P_2的中点作平行于抛物线的对称轴的直线交曲线于P_3，求证：

1. $\triangle P_1P_2P_3$的面积$=\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3$



证明 ∵ P_1P_2的中点的纵坐标为$\frac{y_1+y_2}{2}$

∴ P_3的纵坐标亦为$\frac{y_1+y_2}{2}$

∵ $P_1P_2P_3$都在曲线$y^2=2x$上，

∴ 它们的横坐标可以用纵坐标表示，即P_1的坐标为$\left(\frac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$P_2$的坐标为$\left(\frac{y_2^2}{2},y_2\right)$，$P_3$的坐标为$\left(\frac{(y_1+y_2)^2}{8},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

故
$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\frac{y_1^2}{2} & y_1 & 1\\ \frac{y_2^2}{2} & y_2 & 1\\ \frac{(y_1+y_2)^2}{8} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$=\frac{1}{16}\left|\begin{vmatrix}4y_1^2 & y_1 & 1\\ 4y_2^2 & y_2 & 1\\ (y_1+y_2)^2 & \frac{y_1+y_2}{2} & 1\end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{16}\left| 4y_1^2y_2 + 2y_2^2(y_1+y_2) + y_1(y_1+y_2)^2 \right.$$
$$\left. - y_2(y_1+y_2)^2 - 2y_1^2(y_1+y_2) - 4y_1y_2^2 \right|$$
$$= \frac{1}{16}\left| -(y_1-y_2)(y_1-y_2)^2 \right| = \frac{1}{16}|y_1-y_2|^3.$$

2. 再分别过P_1P_3，P_2P_3的中点作$/\!/$对称轴的直线，分别交曲线于Q_1、Q_2，试将$\triangle P_1P_3Q_1$与$\triangle P_2P_3Q_2$的面积之和用y_1、y_2表示出来.

解 设Q_1的坐标为$\left(\frac{(3y_1+y_2)^2}{32}, \frac{3y_1+y_2}{4}\right)$，$Q_2$的坐标为

$$\left(\frac{(3y_2+y_1)^2}{32}, \frac{3y_2+y_1}{4}\right)$$

$$S_{\triangle P_1P_3Q_1} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2} & y_1 & 1 \\ \frac{(y_1+y_2)^2}{8} & \frac{y_1+y_2}{2} & 1 \\ \frac{(3y_1+y_2)^2}{32} & \frac{3y_1+y_2}{4} & 1 \end{vmatrix}\right|$$

利用行列式的性质，从第一行分别减去第二、三行作为第二、三行，则立即降低一阶并出现$|y_1-y_2|$的因式，

$$S_{\triangle P_1P_3Q_1} = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix} \frac{y_1^2}{2} & y_1 & 1 \\ \frac{(3y_1+y_2)(y_1-y_2)}{8} & \frac{y_1-y_2}{2} & 0 \\ \frac{(7y_1+y_2)(y_1-y_2)}{32} & \frac{y_1-y_2}{4} & 0 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{64} \cdot |y_1 - y_2|^2 \cdot \left| \begin{vmatrix} 3y_1 + y_2 & \frac{1}{2} \\ 7y_1 + y_2 & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{|y_1 - y_2|^2}{64} \cdot \left| 3y_1 + y_2 - \frac{7y_1 + y_2}{2} \right|$$

$$= \frac{|y_1 - y_2|^2}{64} \cdot \frac{1}{2} |y_2 - y_1| = \frac{1}{128} |y_1 - y_2|^3$$

同理

$$S_{\triangle P_2P_3Q_2} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \frac{y_2^2}{2} & y_2 & 1 \\ \frac{(y_1 + y_2)^2}{8} & \frac{y_1 + y_2}{2} & 1 \\ \frac{(3y_2 + y_1)^2}{32} & \frac{3y_2 + y_1}{4} & 1 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{128} |y_1 - y_2|^3$$

$$\therefore \quad S_{\triangle P_1P_2Q_1} + S_{\triangle P_2P_3Q_2} = \frac{1}{64} |y_1 - y_2|^3.$$

3. 用这种方法依此类推下去可以得到许多三角形，这些三角形的面积的和就是直线 P_1P_2 和抛物线所夹部分的面积，求出这个面积.

解 由 1 、 2 可知，每次所得到的三角形面积组成一个无穷递缩的等比数列，首项是

$$\frac{1}{16} |y_1 - y_2|^3$$

公比是 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{64}|y_1-y_2|^3:\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3=1:4$

$$\therefore\ S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}|y_1-y_2|^3.$$

参考题：

一、a、b、c为实数，试证a、b、c为正数的充要条件是

$$\begin{cases}a+b+c>0\\ ab+bc+ac>0\\ abc>0\end{cases}$$

证明 必要条件是显然的，由$a>0$、$b>0$、$c>0$．根据不等式的性质很容易推出来．

$$\begin{cases}a+b+c>0\\ ab+bc+ac>0\\ abc>0\end{cases}$$

我们证明其充分性，即由

$$\begin{cases}a+b+c>0\\ ab+bc+ac>0\\ abc>0\end{cases}$$ 得 $a>0$，$b>0$，$c>0$。

根据条件$abc>0$，则只有两种情况，即

① a、b、c中有两个负数，一个正数；

② a、b、c全是正数．

由$abc>0$ 说明，a、b、c三数中不能三个都是负数或两

个正数一个负数，我们否定第一种情况．不失一般性可令 $a<0$，$b<0$，$c>0$，那么由$ab+bc+ac>0$．

得 $a(b+c)+bc>0$，而 $bc<0$，$\therefore\ a(b+c)>0$．

又∵ $a<0$，$\therefore\ b+c<0$，因此与 $a+b+c>0$ 相矛盾，从而否定了a、b、c中两个负一个正的情况，

那么$abc>0$，只有一种情况$a>0$，$b>0$，$c>0$．

二、已知方程 $x^3+Px^2+qx+R=0$．求证方程的三个根α、β、γ，分别是三角形三边长的充要条件是$P<0$，$q>0$，$R<0$．$P^3>4Pq-8R$．

证明 ∵ α、β、γ是方程$x^3+Px^2+qx+R=0$的根．

$\therefore\ (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3+Px^2+qx+R$

故 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-P\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q\\ \alpha\beta\gamma=-R\end{cases}$

∵ $x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$

$=x^3+Px^2+qx+R$

① 先证必要性

∵ α、β、γ是三角形三条边的长．

$\therefore\ \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0$，且 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma>0\\ \alpha+\gamma-\beta>0\\ \beta+\gamma-\alpha>0\\ \alpha+\beta-\gamma>0\end{cases}$

由 $\alpha+\beta+\gamma>0$，得 $-P>0$，即 $P<0$．

由 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$，得 $q>0$．

由 $\alpha\beta\gamma>0$，得 $-R>0$，$\therefore\ R<0$．

而 $P^3-4Pq+8R$

$=-(\alpha+\beta+\gamma)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-8\alpha\beta\gamma.$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha$

$+4\alpha\beta+4\beta\gamma+4\gamma\alpha)-8\alpha\beta\gamma.$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)$

$-8\alpha\beta\gamma.$

$=\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+\gamma\beta^2+\beta\gamma^2-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3$

$-2\alpha\beta\gamma.$

$=(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)>0.$

② 再证明充分性.

由 $P<0$, $q>0$, $R<0$.得 $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma>0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0\\ \alpha\beta\gamma>0\end{cases}$

这可以从参考题1得到$\alpha>0$, $\beta>0$, $\gamma>0$.

而由 $P^3>4Pq-8R$.得 $P^3-4Pq+8R>0$.

∴ $-(\alpha+\beta+\gamma)^3+4(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$-8\alpha\beta\gamma>0$

∴ $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+\alpha\gamma^2-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3$

$-2\alpha\beta\gamma>0$

∴ $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)>0$

这三个括号，之积为正数.

则三个括号，不能同时为负.

此外，如果有两个括号是负的，也要引起矛盾.

例如：由 $\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma<0\\ \alpha+\gamma-\beta<0\end{cases}$ 得 $\alpha<0$，与上面得到的结果

矛盾.这样只能有

$\alpha+\beta-\gamma>0$，$\alpha+\gamma-\beta>0$，$\beta+\gamma-\alpha>0$

即 $\alpha+\beta>\gamma$，$\alpha+\gamma>\beta$，$\beta+\gamma>\alpha$.

我们知道：如果三个数中任意两个数之和都大于第三个数，那么以这三个数为边长的三角形必存在.

因而α、β、γ是三角形的三条边长.

一九七七年(北京市)

一、(8分)解方程$\sqrt{x-1}=3-x$.

解 将方程两边各自平方，得

$$x-1=(3-x)^2$$

$$x-1=9-6x+x^2$$

整理得 $x^2-7x+10=0$

$$(x-5)(x-2)=0$$

$$x-5=0 \qquad x-2=0$$

$$x_1=5 \qquad x_2=2$$

检验后，得知 $x=2$ 是原无理方程的根，$x_1=5$ 是增根.

二、(8分)

计算 $2^{-\frac{1}{2}}+\frac{2^0}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

解 原式$=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}-1=-1.$$

三、(8分)已知$lg2=0.3010, lg3=0.4771$,求$lg\sqrt{45}$.

解 $lg\sqrt{45} = lg3\sqrt{5} = lg3 + \frac{1}{2}lg5 = lg3 + \frac{1}{2}\left(lg\frac{10}{2}\right)$

$= lg3 + \frac{1}{2}(lg10 - lg2) = lg3 + \frac{1}{2}(1 - lg2)$

$= 0.4771 + \frac{1}{2}(1 - 0.3010) = 0.4771 + \frac{1}{2}$

$\times 0.6990$

$= 0.4771 + 0.3495$

$= 0.8266.$

四、（8分）证明 $(1 + tg\alpha)^2 = \frac{1 + sin2\alpha}{cos^2\alpha}$.

证明 左式 $= \left(1 + \frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right)^2 = \left(\frac{cos\alpha + sin\alpha}{cos\alpha}\right)^2$

$= \frac{cos^2\alpha + 2sin\alpha cos\alpha + sin^2\alpha}{cos^2\alpha}$

$= \frac{1 + 2sin\alpha cos\alpha}{cos^2\alpha}$

$= \frac{1 + sin2\alpha}{cos^2\alpha}$ = 右式.

五、（8分）求过两直线$x + y - 7 = 0$和$3x - y - 1 = 0$的交点、并且过点(1,1)的直线的方程.

解法一 解联立方程组 $\begin{cases} x + y - 7 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$ 得这两条直线的交点$M(2,5)$

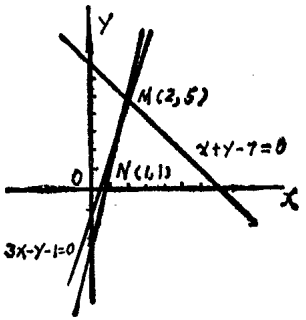
过$M(2,5)$和$N(1,1)$的直线方程为

$$\frac{y-5}{x-2}=\frac{5-1}{2-1}$$

$$\frac{y-5}{x-2}=4$$

∴ $y-5=4(x-2)$

即 $y=4x-3$



解法二

设所求直线方程为

$x+y-7+\lambda(3x-y-1)=0$，其中λ为待定系数.

用$x=1$，$y=1$代入上式，得

$$-5+\lambda=0$$

$$\lambda=5.$$

∴ 所求直线为 $x+y-7+5(3x-y-1)=0$

即 $16x-4y-12=0$ 或 $4x-y-3=0$.

六、（8分）某工厂今年七月份的产值为100万元，以后每月产值比上个月增加20%．问今年七月份到十月份的总产值是多少？

解 七至十月份总产值是

$$100+100\times1.2+100\times1.2^2+100\times1.2^3$$

$$=100(1+1.2+1.2^2+1.2^3)$$

$$=100\left(\frac{1.2^4-1}{1.2-1}\right)=536.8\text{（万元）}.$$

七、（13分）已知二次函数$y=x^2-6x+5$.

1. 求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程；

2. 画出它的图象；

3. 分别求出它的图象和x轴、y轴的交点坐标。

解 1. $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times1}=3$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times1\times5-(-6)^2}{4\times1}$$

$$=\frac{20-36}{4}=\frac{-16}{4}=-4$$

故图象的顶点坐标为(3，-4)

对称轴的方程为$x=3$

2. 原方程可写为$y=(x-3)^2-4$

x	……	1	2	3	4	5 ……
y	……	0	-3	-4	-3	0 ……

3. 令$y=0$

∴ $x^2-6x-5=0$

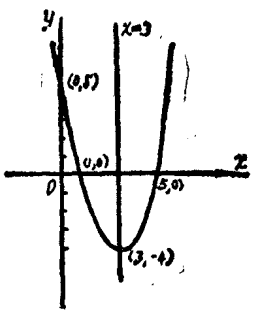
$(x-1)(x-5)=0$

$x_1=1$，$x_2=5$

∴ 抛物线和x轴的交点为(1,0)，(5,0)

令 $x=0$，求得$y=5$

∴ 抛物线和y轴的交点为(0,5).



八、（12分）一只船以20浬/小时的速度向正东航行。

起初，船在A处看见一灯塔B在船的北45°东（即北偏东45°）方向；1小时后，船在C处看见这个灯塔在船的北15°东（即北偏东15°）方向.求这时船和灯塔的距离CB.

解 $\angle A=45°$　　$\angle C=90°+15°=105°$

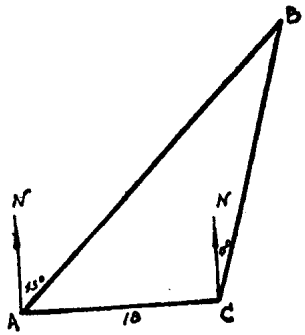
$\angle B=30°$　　$AC=20$

由正弦定理

$$CB=\frac{20\sin 45°}{\sin 30°}=\frac{20\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=20\sqrt{2}\approx 20\times 1.414$$

$$\approx 28.3\text{（浬）}.$$



九、（12分）有一个圆内接三角形ABC，$\angle A$的平分线交BC于D、交外接圆于E.

求证$AD\cdot AE=AC\cdot AB$

证　连结BE. 在$\triangle ACD$和$\triangle ABE$中

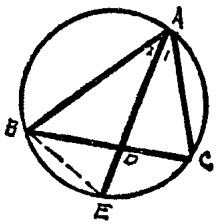
$\angle 1=\angle 2$　（∵AD是$\angle A$的平分线）

$\angle C=\angle E$（同弧上的圆周角相等）

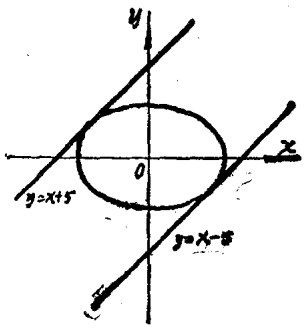
∴　$\triangle ACD\backsim\triangle AEB$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AC}{AE}$$

即$AD\cdot AE=AC\cdot AB$.



十、（15分）当 m 取哪些值时，直线 $y=x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 有一个交点？有两个交点？没有交点？当它们有一个交点时，画出它们的图形.



解 $\begin{cases} y=x+m & ① \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1 & ② \end{cases}$

将①代入②

$$9x^2+16(x+m)^2=144$$

$$25x^2+32mx+16m^2-144=0$$

$$\triangle=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)$$

$$=16(64m^2-100m^2+900)$$

$$=16(900-36m^2)$$

$$=16\cdot36(25-m^2)$$

当$\triangle>0$即$25-m^2=(5+m)(5-m)>0$时.

亦即 $-5<m<5$ 时，直线与椭圆有两个交点.

当$\triangle=0$即$m=\pm5$时，直线与椭圆有一个交点.

当$\triangle<0$即$m<-5$，或$m>5$时，直线与椭圆没有交点.

当它们有一个交点时，图形如上.

参考题

（以上题目全部做完，并检查无误后，可以做参考题，也可以不做.参考题的分数不计入总分，不作为录取不录取的根据，只作为录取之后能否跳级的参考）.

一、1. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{\pi}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ 的导数.

解 当$x\neq 0$时.

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{\pi}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{\pi}{x}+x^2\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{\pi}{x}-\pi\cos\frac{\pi}{x}.$$

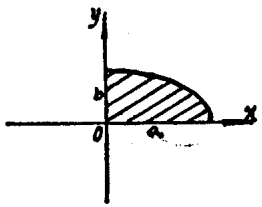
当 $x=0$时.

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{\pi}{\Delta x}=0$$

即 $f'(0)=0$.

2. 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕x轴旋转而成的旋转体的体积.

解 $V=2\pi\int_0^a y^2dx$.



$$=2\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi b^2\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$=2\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a=2\pi b^2\left(a-\frac{a^3}{3a^2}\right)$$

$$=2\pi b^2\cdot\left(a-\frac{a}{3}\right)$$

$$= 2\pi b^2 \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

二、1. 试用ε－δ语言叙述“函数$f(x)$在点$x = x_0$处连续”的定义.

解 如果函数$f(x)$在$x = x_0$及x_0的附近有定义，且对任意$\varepsilon > 0$，总存在一个$\delta > 0$，使得当$|x - x_0| < \delta$时，恒有$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 则称函数$f(x)$在点$x = x_0$处连续.

2. 试证明：若$f(x)$在点$x = x_0$处连续，且$f(x_0) > 0$，则存在一个x_0的邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，在这个邻域内，处处有$f(x) > 0$.

证明 ∵ $f(x_0) > 0$ ∴ $\frac{f(x_0)}{2} > 0$

又由 $f(x)$在$x = x_0$处连续

故对 $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$，存在$\delta > 0$，使得在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$内，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

即 $$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{f(x_0)}{2}$$

于是在邻域$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$内，处处有

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

一九七七年(天津市)

一、(每小题满分6分，五小题共30分)

1. 在什么条件下：$\frac{y}{2x}$ (1)是正数；(2)是负数；(3)等于零；(4)没有意义.

2. 比较下列各组数中的大小，并说明理由.

(1) $cos31°$与$cos30°$；(2) $log_2 1$ 与 $log_2\frac{1}{4}$

3. 求值：

(1) $tg(5arcsin\frac{\sqrt{3}}{2})$；　　(2) $(-2)^{\circ}(0.01)^{-\frac{1}{2}}$

4. 计算：$lg12.5-lg\frac{5}{8}+lgsin30°$

5. 解方程：$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}$

$$=1-\frac{1}{x+2}$$

解

1.(1) 当x，y同号时，$\frac{y}{2x}$是正数；

(2) 当x，y异号时，$\frac{y}{2x}$是负数；

(3) 当$x\neq 0$，$y=0$时$\frac{y}{2x}$等于零；

(4) 当$x=0$时，$\frac{y}{2x}$没有意义.

2.(1) ∵ 角α在第一象限变化时，$y=cos\alpha$是减函数，而$31°>30°$，

∴ $cos31°<cos30°$.

(2) ∵ $log_2 1=0$，$log_2\frac{1}{4}=-2$，而$0>-2$.

∴ $log_2 1>log_2\frac{1}{4}$.

3.(1) $tg(5arc\ sin\frac{\sqrt{3}}{2})=tg(5\times 60°)$

$=tg300°$

$=-tg60°$

$=-\sqrt{3}$

(2) $(-2)^0(0.01)^{-\frac{1}{2}}$

$=1\times(10^{-2})^{-\frac{1}{2}}$

$=10$.

4. $lg12.5-lg\frac{5}{8}+lg\ sin30°$

$=lg\frac{\frac{25}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}}=lg10=1$.

5. ∵ $\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=1-\frac{1}{x+2}$

$\therefore\quad 4x-2(x+2)=(x^2-4)-(x-2)$

整理，得：$x^2-3x+2=0$，解得$x_1=1$，$x_2=2$.

经检验，$x=1$是原方程的根，$x=2$为增根，舍去.

二、（每小题满分8分，三小题共24分）

1. 某厂准备在仓库的一侧建立一个矩形储料场（如图），现有50米长的铁丝网，如果用它来围这储料场，那么长和宽各是多少时，这个储料场的面积最大？并求出这个最大面积.

2. 已知：AB、DE是$\odot O$的直径，AC是弦，$AC\parallel DE$.

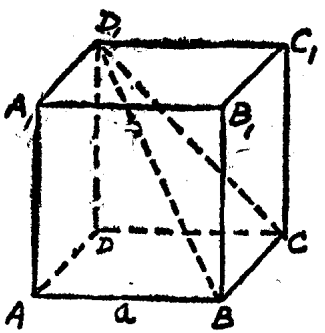
求证：$CE=BE$

3. 在如图所示棱长为a的正方体里：

(1) 求CD_1和AB所成的角的度数；

(2) 求$\angle B_1BD_1$的正弦值.





解

1. 如图所示，设储料场的宽为x米.

则储料场的长为$(50-2x)$米，

矩形面积为$S=(50-2x)x$

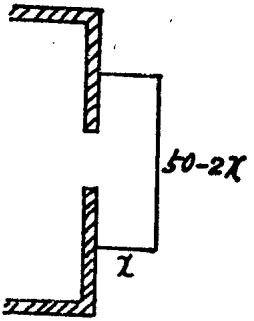
$= -2(x-12.5)^2+312.5$

当$x=12.5$时，S有极大值，为312.5，

此时长为：

$50-2x=50-2\times12.5=25$.

答：这个储料场长为25米，宽为12.5米时，面积最大，是312.5平方米.



2. 证明：

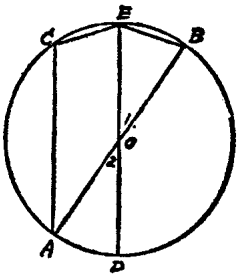
∵ $AC\parallel DE$(已知)

∴ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{AD}$（平行弦所夹的弧相等）

又∵ 点O为圆心(已知)，

且$\angle1=\angle2$（对顶角相等）

∴ $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AD}$（在同圆或等圆中，圆心角等，则其所对的弧等）



∴ $\overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{BE}$（等量代替）

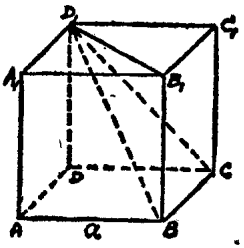
∴ $CE=BE$（在同圆或等圆中，等弧对等弦）.

3. (1) ∵ $AB\parallel CD$,

根据异面直线所成的角的定义，

∴ $\angle DCD_1$即为CD_1与AB所成的角.

∵ $\angle DCD_1=45°$



∴ CD_1与AB所成的角度为45°.

(2) 连B_1D_1，在$R_t\triangle B_1C_1D_1$中：

∵ $B_1C_1=C_1D_1=a$,

∴ $B_1D_1=\sqrt{2}a$.

又∵ $BB_1\perp$平面$A_1B_1C_1D_1$，而B_1D_1在平面$A_1B_1C_1D_1$内，

∴ $BB_1\perp B_1D_1$故$\triangle BB_1D_1$为直角三角形.

又∵ $BB_1=a$, $B_1D_1=\sqrt{2}a$,

∴ $BD_1=\sqrt{a^2+(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{3}a$

∴ $\sin\angle B_1BD_1=\dfrac{B_1D_1}{BD_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

三、（本题满分15分）

如果已知$bx^2-4bx+2(a+c)=0$（其中$b\neq0$）有两个相等的实数根．求证a、b、c成等差数列.

证明

∵ 方程有两相等实根.

∴ 其判别式$\Delta=0$，即：

$(-4b)^2-4\cdot b\cdot 2(a+c)=0$.

化简，得：$8b(2b-a-c)=0$.

∵ $b\neq0$,

∴ $2b-a-c=0$,

故 $2b=a+c$（或 $b=\dfrac{a+c}{2}$）

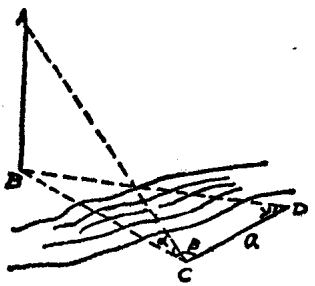
即：b为a，c的等差中项，∴ a,b,c 成等差数列.

四、（本题满分16分）

1. 如图. 为求得河对岸某建筑物的高 AB，在地面上引一条基线 $CD=a$. 测得 $\angle ACB=\alpha$，$\angle BCD=\beta$，$\angle BDC=\gamma$. 求 AB.

2. 如果 $\alpha=30°$，$\beta=75°$，$r=45°$，$a=33$ 米，求建筑物 AB 的高（保留一位小数）.

解



1. 在 $\triangle BCD$ 中：

$\angle CBD=180°-(\beta+\gamma)$

由正弦定理，得：$\dfrac{BC}{\sin\gamma}$

$$=\frac{a}{\sin[180°-(\beta+\gamma)]}$$

$$\therefore\quad BC=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

在 $R_t\triangle ABC$ 中：$\because$ $\angle ABC=90°$，$\angle ACB=\alpha$，而 $BC=\dfrac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

$$\therefore\quad AB=BC\cdot tg\alpha$$

$$=\frac{a\sin\gamma tg\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

2. 将 $a=33$，$\alpha=30°$，$\beta=75°$，$\gamma=45°$ 代入上式.

得：$$AB=\frac{33\sin45°tg30°}{\sin120°}$$

$$=11\sqrt{2}$$

$$\approx16(m).$$

答：建筑物的高，约为16米.

五、（本题满分15分）

1. 求直线$3x-2y+1=0$和$x+3y+4=0$的交点坐标；

2. 求通过上述交点，并同直线$x+3y+4=0$垂直的直线l的方程.

解

1. 解方程组 $\begin{cases}3x-2y+1=0\\x+3y+4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$

故此两直线的交点坐标为$(-1,-1)$.

2. $\because$ $x+3y+4=0$

$\therefore$ $y=-\frac{1}{3}x-\frac{3}{4}$，故此直线的斜率 $k=-\frac{1}{3}$.

$\because$ 直线l与直线$y=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$垂直，

$\therefore$ $k_l=-\frac{1}{k}=3$.

利用点斜式，l的方程为：$y-(-1)=3[x-(-1)]$

化简，得：$3x-y+2=0$.

六、附加题（不计入总分，另外计分，每题15分）

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$的值

2. 计算：$\int_0^4\dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

解

1. 应用洛毕达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$$

$$=\frac{1+1}{1}$$

$$=2.$$

2. 换元法积分：

令 $\sqrt{2x+1}=t$

则 $x=\dfrac{t^2-1}{2}$ 且 $x+2=\dfrac{t^2+3}{2}$

$\therefore\ dx=tdt.$

又，当$x=0$时，$t=\sqrt{2x+1}=1$

当$x=4$时，$t=\sqrt{2x+1}=3.$

$$\therefore\ \int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3\frac{\frac{t^2+3}{2}}{t}tdt$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (t^2 + 3)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} + 3t\right]_1^3$$

$$= 7\frac{1}{3}.$$

一九七七年（上海市）

一、本题20分.

1. 化简（5分）$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)$

$$\div\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$

2. 计算（6分）$\frac{1}{2}lg25+lg2-lg\sqrt{0.1}$

$$-log_2 9\cdot log_3 2.$$

3. （3分）$\sqrt{-1}$记作i，验算i是不是方程$2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$的解

4. 求证（6分）：$\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+\frac{cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}=\frac{2}{cos2\theta}$.

解

1. 原式$=\frac{a(a+b)-a^2}{(a+b)^2}\div\frac{a(a-b)-a^2}{a^2-b^2}$

$$=\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{(a+b)(a-b)}{-ab}$$

$$=\frac{b-a}{b+a}.$$

2. $\frac{1}{2}lg25+lg2-lg\sqrt{0.1}-log_29\cdot log_32$

$=lg5+lg2-lg10^{-\frac{1}{2}}-2log_23\cdot log_32$

$=1+\frac{1}{2}-2$

$=-\frac{1}{2}$.

3. 把i代入方程：$2x^4+3x^3-3x^2+3x-5=0$的左边：

$\because$ $2i^4+3i^3-3i^2+3i-5$

$=2-3i+3+3i-5$

$=0$

$\therefore$ $x=i$是原方程的根.

4. 证明

$\because$ $\frac{sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+\frac{cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$=\frac{sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]}{sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$

$=\frac{2sin\frac{\pi}{2}}{sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$

$=\frac{2}{cos2\theta}$

∴ 等式成立.

二、(8分) 在△ABC中∠C的平分线交AB于D，过D作BC的平行线交AC于E，已知$BC=a$，$AC=b$，求DE的长.

解

如图所示：

∵ CD平分∠C，∴∠1=∠2；又∵$DE \parallel BC$

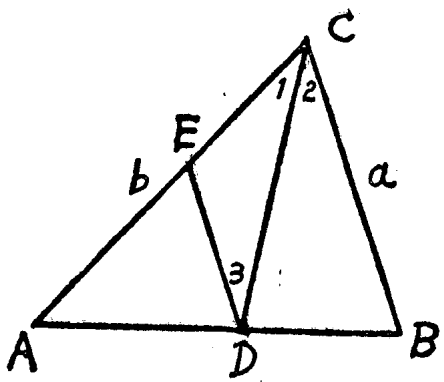
∴∠2=∠3 故∠1=∠3，∴$CE=ED$成立.

∵ $DE \parallel BC$ ∴$\frac{DE}{a}=\frac{AE}{b}$ 而$AE=b-CE$

$=b-DE$

∴ $\frac{DE}{a}=\frac{b-DE}{b}$

∴ $DE=\frac{ab}{a+b}$.



三、（10分）已知圆A的直径为$2\sqrt{3}$，圆B的直径为$4-2\sqrt{3}$，圆C的直径为2，$\odot A$外切$\odot B$，又与$\odot C$外切，$\angle A=60°$，求①BC的长；②$\angle C$的度数.

解

$\because$ $AB=2$，

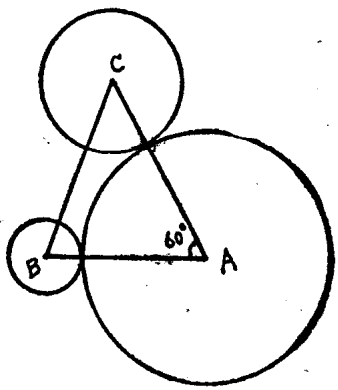
$AC=\sqrt{3}+1$，$A=60°$

$\therefore$ $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A$（余弦定理）

$=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times2\times(\sqrt{3}+1)\times\cos60°$

$=6$

$\therefore$ $BC=\sqrt{6}$



再由正弦定理，

得：$\sin C=\dfrac{AB\sin A}{BC}$

$=\dfrac{2\sin60°}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ $C_1=45°$或$C_2=135°$

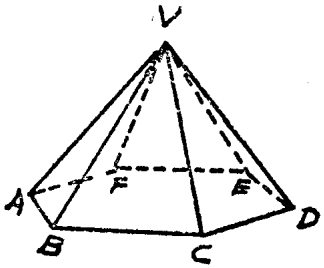
又$\because$ $\angle C$为AB所对的角，而AB是小边

$\therefore$ $C_2=135°$舍去，故$C=45°$为所求.

四、（10分）正六棱锥$V-ABCDEF$的高为$2cm$，底面边长为$2cm$ ① 按1:1画出它的二视图，② 求它的侧面积，③求它的侧棱和底面的夹角.

解 ①正六棱锥的二视图，如下图所示

② 过O引$OG\perp AB$连结VG，而VG为底面上的高则$VG\perp AB$（三垂线定理）



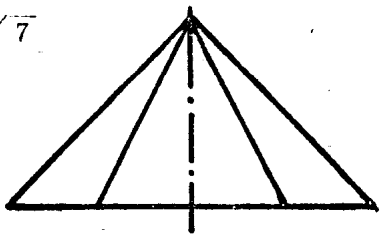
在$R_t\Delta VOG$中：

$\because\ VO=2,\ OG=\sqrt{3}$

$\therefore\ VG=\sqrt{VO^2+OG^2}=\sqrt{7}$

$\therefore\ S_{侧}=6\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{7}$

$=6\sqrt{7}\,(cm^2)$



③ 连结OA，在$R_t\Delta AOV$中：

$\because\ VO=2, OA=2,$

$\therefore\ VA=\sqrt{VO^2+OA^2}$

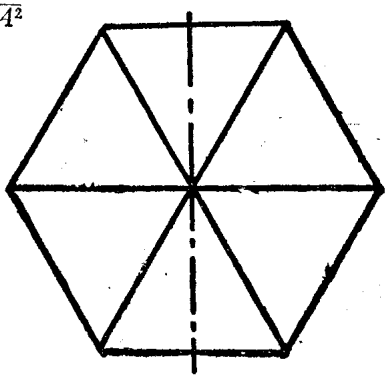
$=2\sqrt{2}\,(cm)$

$\because\ \sin\angle VAO$

$=\frac{VO}{VA}=\frac{2}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle VAO=45°$



即：侧棱长$2\sqrt{2}cm$，侧棱与底面夹角45°.

五、（12分）解不等式组

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x^2-x-6>0\end{cases}$$ 并在数轴上把它的解表示出来.

解

$\because$ $\begin{cases}16-x^2\geqslant 0 & ①\\ x^2-x-6>0 & ②\end{cases}$

$\therefore$ 由 ① 得：$-4\leqslant x\leqslant 4$

由 ② 得：$(x-3)(x+2)>0$

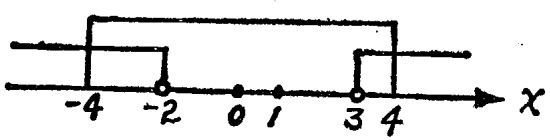
故 (i) $\begin{cases}x-3>0\\ x+2>0\end{cases}$ 或 (ii) $\begin{cases}x-3<0\\ x+2<0\end{cases}$

$\therefore$ (i) 的解是$x>3$，或(ii)的解是$x<-2$

由 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x>3\end{cases}$ 得：$3<x\leqslant 4$

由 $\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x<-2\end{cases}$ 得：$-4\leqslant x<-2$

故，不等式组的解是$3<x\leqslant 4$或者$-4\leqslant x<-2$.



六、（12分）已知两定点$A(-4,0)$、$B(4,0)$，一动点P

(x, y)与两定点A、B的连线PA、PB的斜率乘积为$-\frac{1}{4}$，求P点的轨迹方程，并把它化为标准形式，指出这是什么曲线.

解

$\because \quad k_{AP}=\frac{y-0}{x+4}, \quad k_{BP}=\frac{y-0}{x-4}$，而$k_{AP}\cdot k_{BP}=-\frac{1}{4}$

$\therefore \quad \frac{y}{x+4}\cdot\frac{y}{x-4}=-\frac{1}{4} \qquad (x\neq\pm4)$

化简，得：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \qquad (x\neq\pm4)$

其标准方程为$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1 \qquad (x\neq\pm4)$

方程所代表的曲线是：以原点为中心，长轴在x轴上，长半轴为4，短轴在y轴上，短半轴为2的椭圆．但要除去$x=\pm4$所对应的两个点.

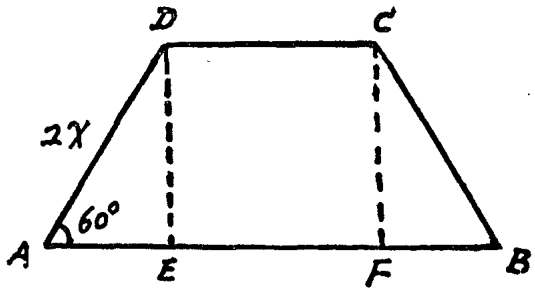
七、（14分）等腰梯形的周长为60，底角为60°，问这梯形各边长为多少时面积最大？

解

如图所示，设等腰梯形$ABCD$的一个腰长为$2x$，过D引$DE\perp AB$，

则高线$DE=\sqrt{3}x$，$AE=x$

$\because$ 等腰梯形的周长为60 $\therefore$ $AB+CD=60-4x$



$$\therefore \quad S_{梯形}=\frac{(AB+CD)\cdot DE}{2}$$

$$=\frac{(60-4x)\cdot\sqrt{3}x}{2}$$

$$=-2\sqrt{3}\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{225}{2}\sqrt{3}$$

当 $x=\frac{15}{2}$时，$S_{梯形}$面积最大，$S_{极大}=112.5\sqrt{3}$

此时：$AD=BC=2x=15$，

$$CD=\frac{60-6x}{2}=\frac{15}{2}=7.5$$

$$AB=CD+2x=22.5$$

答：当等腰梯形的两腰分别为15，底边分别为7.5和22.5时，其面积最大，为$112.5\sqrt{3}$.

八、（14分） 当k为何值时，方程组的两组解才相同，并求这组解.

$$\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 \\ kx-y-2k-10=0 \end{cases}$$

解

$$\begin{cases} x-\sqrt{y-2}=0 & (1) \\ kx-y-2k-10=0 & (2) \end{cases}$$

由(1) $\sqrt{y-2}=x$，$\therefore\quad y=x^2+2$ (3)

把(3)代入(2)，$kx-(x^2+2)-2k-10=0$

$\therefore\quad x^2-kx+2k+12=0$ (4)

欲使方程组有两组相同的解，必须使方程(4)有等根，为此，只有判别式$\Delta=0$

故 $(-k)^2-4(2k+12)=0$

$\therefore\quad k^2-8k-48=0$，解得$k_1=12$，$k_2=-4$

将$k=12$代入(4)，解(4)，得$x_1=x_2=6$

再将x值代入(3)，得$y_1=y_2=38$.

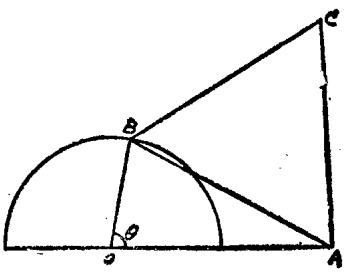
将$k=-4$代入(4)，解(4)得$x_3=x_4=-2$

当$x=-2$时，使得(1)无解

故 $k=-4$舍去

答：当 $k=12$时，方程组有两组相同的解，是 $\begin{cases} x=6 \\ y=38 \end{cases}$

九、附加题（14分）如图所示，半圆O的直径为2，A为直径延长线上一点，而且$OA=2$，B为半圆周上任意一点，以AB为一边作等边三角



形 ABC，问B在什么位置时，四边形 $OACB$ 的面积最大，并求出这个面积的最大值.

解

记 $\angle AOB$为θ，$\because OB=1$，$OA=2$为常量，再由余弦定理，

$$\therefore \quad AB^2=1^2+2^2-2\times1\times2\cos\theta=5-4\cos\theta$$

$$\therefore \quad S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(5-4\cos\theta)$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta$$

$$\text{又，}\quad S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\theta=\sin\theta$$

$$\therefore \quad S_{OACB}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{3}+\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$$

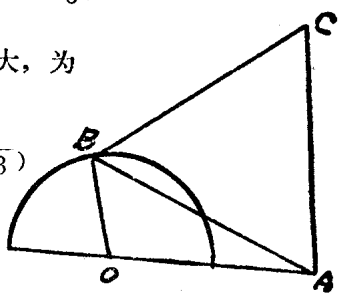
$$=\frac{5}{4}\sqrt{3}+2\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\sqrt{3}+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

当 $\theta-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$时$S_{OACB}$最大，为

$$\frac{5}{4}\sqrt{3}+2=\frac{1}{4}(8+5\sqrt{3})$$

此时，$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$



答： 当$\angle AOB=\frac{5\pi}{6}$时($B$的位置由$\angle AOB$来确定)，四边形$OACB$面积最大，是$\frac{1}{4}(8+5\sqrt{3})$.

十、 已知曲线$y=x^2-2x+3$与直线$y=x+3$相交于$P(0,3)$ $Q(3,6)$两点①分别求曲线在各交点的切线的斜率②求曲线与直线围成图形的面积.

解

① $\because$ $y=x^2-2x+3$

$y'=2x-2$

故 $k_P=2x-2\Big|_{x=0}=-2$；$k_Q=2x-2\Big|_{x=3}=4$

② $S=\int_0^3(x+3)dx-\int_0^3(x^2-2x+3)dx$

$=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=4.5.$

一九七八年

一、1.分解因式：

$x^2-4xy+4y^2-4z^2$

解 $x^2-4xy+4y^2-4z^2$

$=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$

$=(x-2y)^2-(2z)^2$

$=(x-2y+2z)(x-2y-2z)$.

2. 已知正方形的边长为a，求侧面积等于这个正方形的面积、高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积.

解 设直圆柱底半径为r，侧面积为S，体积为V，依题意：

$$S=2\pi ra=a^2,\quad \text{解得}\quad r=\frac{a}{2\pi}$$

于是：$V=\pi r^2a=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2a=\frac{a^3}{4\pi}$

答：所求直圆柱体体积$V=\frac{a^3}{4\pi}$.

3. 求函数$y=\sqrt{lg(2+x)}$的定义域.

解 要使函数有意义，只需使x满足：

$lg(2+x)>0$

由此得：$2+x>1$

$x>-1$

∴ 函数定义域为$x>-1$.

4. 不查表求$cos80^\circ cos35^\circ + cos10^\circ cos55^\circ$的值.

解 $cos80^\circ cos35^\circ + cos10^\circ cos55^\circ$

$= sin10^\circ cos35^\circ + cos10^\circ sin35^\circ$

$= sin(10^\circ + 35^\circ) = sin45^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 化简 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

解 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$= (4^{-1})^{-\frac{1}{2}} \frac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$= 4^{\frac{1}{2}} \frac{4^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{10^2\ a^{\frac{3}{2}}\ b^{-2}}$

$= \frac{4^2}{10^2} b^{-\frac{3}{2}+2}$

$= \frac{4}{25}\sqrt{b}$.

二、已知方程$kx^2 + y^2 = 4$，其中k为实数，对于不同范围的k值，分别指出方程所代表图形的类型，并画出显示其数量特征的草图.

解 当$k=0$时，得$y^2 = 4$，即$(y+2)(y-2)=0$，它的图

形由平行于 ox 轴的两条平行直线：$y=-2$，$y=2$ 组成．（图1）当 $0<k<1$ 时，将方程化为：

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\right)^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

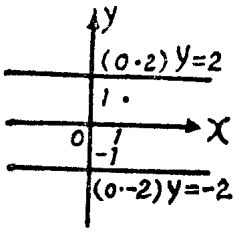


图 1

其图形为椭圆，中心在原点，长轴在ox轴上，半长轴 $=\frac{2}{\sqrt{k}}$，半短轴 $=2$．（图2）

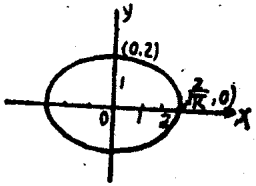


图 2

当 $k=1$ 时，得方程 $x^2+y^2=2^2$，其图形是以原点为圆心，2为半径的圆．（图3）

当$k>1$时，其图形为椭圆，中心在原点，长轴在oy轴上，半长轴 $=2$，半短轴 $=\frac{2}{\sqrt{k}}$（图4）

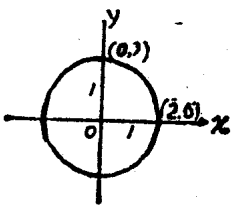


图 3

当 $k<0$ 时，将方程化为：

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{-k}}\right)^2}-\frac{y^2}{2^2}=-1$$

其图形为双曲线，中心在原点，实轴在oy轴上，半实轴 $=2$，半虚轴 $=\frac{2}{\sqrt{-k}}$．（图5）

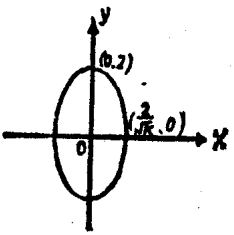


图 4

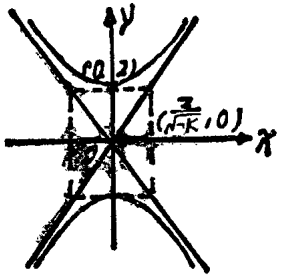
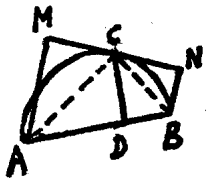


图 5

三、（如图）AB是半圆的直径，C是半圆上一点，直线MN切半圆于C点，$AM\perp MN$于M点，$BN\perp MN$于N点，$CD\perp AB$于D点.

求证：（1）$CD=CM=CN$.

（2）$CD^2=AM\cdot BN$.



证明　连接AC、CB

(1) $\because AB$是半圆的直径，

$\therefore\ \angle ACB=90°$

$\because\ MN$切半圆于C点，

$\therefore\ \angle MCA=\angle CBA$

又$\because\ AM\perp MN$(已知) $\therefore\angle M=90°$

$\therefore\ \angle MAC=\angle DAC$

在　$\triangle AMC$与$\triangle ADC$中

$\because\ CD\perp AB\ \ \therefore\angle CDA=90°$

又 $\angle M=90°$，$AC=AC$

$\angle MAC=\angle DAC$

∴ $\triangle AMC\cong\triangle ADC$

∴ $CM=CD$

同理可证 $CD=CN$.

∴ $CD=CM=CN$.

(2) 在$\triangle ABC$中，∵$\angle ACB=90°$ $CD\perp AB$

∴ $CD^2=AD\cdot BD$

又∵ $AD=AM$，$DB=BN$

∴ $CD^2=AM\cdot BN$.

四、 已知$log_{18}9=a$，$18^b=5$，求$log_{36}45$.

解 由$18^b=5$知$b=log_{18}5$，根据换底公式知：

$$log_{36}45=\frac{log_{18}45}{log_{18}36}=\frac{log_{18}(9\times5)}{log_{18}(18\times2)}$$

$$=\frac{log_{18}9+log_{18}5}{log_{18}18+log_{18}2}=\frac{a+b}{1+log_{18}\frac{18}{9}}$$

$$=\frac{a+b}{1+log_{18}18-log_{18}9}$$

$$=\frac{a+b}{2-a}$$

即 $log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}$.

五、 已知$\triangle ABC$的三内角的大小成等差数列，$tgA\,tgC=2+\sqrt{3}$，求角A、B、C的大小，又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$，求三角形各边a、b、c的长.

解 角A、B、C成等差数列，故得：

$$B=\frac{1}{2}(A+C)$$

因 $A+B+C=180°$

故 $A+C=180°-B$，代入上式解得：

$$B=60° \quad A+C=120°$$

$\because$ $tgAtgC=2+\sqrt{3}$

$\therefore$ $tg(A+C)=\dfrac{tgA+tgC}{1-tgAtgC}$

$$=\frac{tgA+tgC}{1-(2+\sqrt{3})}=tg120°$$

$$=-\sqrt{3},$$

从而得到

$$tgA+tgC=3+\sqrt{3}$$

又 $tgAtgC=2+\sqrt{3}$

由韦达定理可知tgA、tgC应是方程

$$x^2-(3+\sqrt{3})x+(2+\sqrt{3})=0$$

的两个根，将方程分解为：

$$(x-1)[x-(2+\sqrt{3})]=0$$

得到两个根为：$x_1=1$，$x_2=2+\sqrt{3}$，

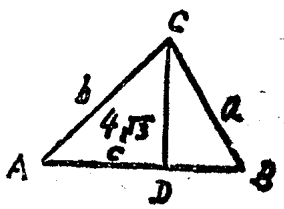
(1) 若设$A<B<C$，则应有：$tgA=1$，

$tgC=2+\sqrt{3}$，相应地

得到 $A=45°$，$C=75°$，

从而求得：

$$a=\frac{4\sqrt{3}}{sin60°}=8,$$



$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{6}$$

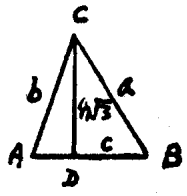
$$c=AD+DB=\frac{4\sqrt{3}}{tg45^\circ}+8\cos 60^\circ=4\sqrt{3}+4$$

$$=4(1+\sqrt{3})$$

(2) 若设$A>B>C$，

则应有：

$tgA=2+\sqrt{3}$，$tgC=1$.



相应地得到$A=75^\circ$，$C=45^\circ$；

$$\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$$

$$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$，从而得到

$$a=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=8,$$

$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 75^\circ}=\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=4(3\sqrt{2}-\sqrt{6}),$$

$$c=AD+DB=\frac{4\sqrt{3}}{tgA}+8\cos 60^\circ$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+4=8(\sqrt{3}-1).$$

六、 已知：α、β为锐角，且

$$3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1 \qquad ①$$

$$3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0 \qquad ②$$

求证：$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

证明 由①式得，

$$3\sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\beta = \cos 2\beta.$$

或 $\cos 2\beta = 3\sin^2\alpha$ ③

由②式得：

$$\sin 2\beta = \frac{3}{2}\sin 2\alpha = 3\cos\alpha\sin\alpha \qquad ④$$

将③式乘以$\cos\alpha$减去④式乘以$\sin\alpha$得：

$$\cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta = 0$$

即 $\cos(\alpha + 2\beta) = 0$

$\therefore$ $\alpha + 2\beta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$(n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2 \cdots)$

由于 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < 2\beta < \pi$

故 $0 < \alpha + 2\beta < \frac{3}{2}\pi$

因此 $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$.

七、已知函数$y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$
（m为实数）

1. m是什么数值时，y的极值是零？
2. 求证：不论m是什么数值，函数图象（即抛物线）

的顶点都在同一直线 l_1 上，画出 $m=-1$、0、1 时抛物线的草图，来检验这个结论.

3. 平行于 l_1 的直线中，哪些与抛物线相交？哪些不相交？

求证：任一条平行于 l_1 而与抛物线相交的直线，被各抛物线截出的线段都相等.

解 1. $y=x^2+(2m+1)x+(m^2-1)$

$$=x^2+(2m+1)x+\frac{(2m+1)^2}{4}$$

$$+(m^2-1)-\frac{(2m+1)^2}{4}$$

$$=\left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{4m+5}{4}$$

当 $m=-\frac{5}{4}$ 时，函数的最小值为 0.

2. 抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{2m+1}{2},\ -\frac{4m+5}{4}\right)$

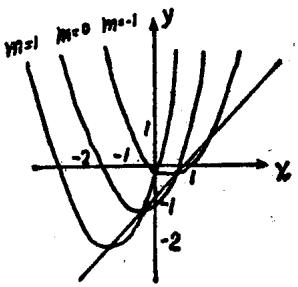
故抛物线族的顶点坐标 (x,y) 满足：

$$x=-\frac{2m+1}{2}=-m-\frac{1}{2}$$

$$y=-\frac{4m+5}{4}=-m-\frac{5}{4}$$

消去 m 得到方程：

$$y=x-\frac{3}{4}$$



这是一条直线方程. 即抛物线的顶点在一条直线上. 当

$m=-1$、0、1时，对应的抛物线分别为：

$$y=x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

$$y=x^2+x-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

$$y=x^2+3x=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

3. 设平行于l_1的直线方程为：

$y=x+b$代入抛物线方程，得

$$x+b=x^2+(2m+1)x+(m^2-1)$$

或 $$x^2+2mx+(m^2-b-1)=0$$

求出方程的二根：

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4(m^2-b-1)}}{2}$$

$$=-m\pm\sqrt{b+1}$$

由此可知：当$b>-1$时；直线与抛物线相交；$b=-1$时，直线与抛物线相切；$b>-1$时，直线与抛物线不相交.

当$b>-1$时，直线与每一抛物线有两个交点，其坐标分别为：

$$(-m-\sqrt{b+1},\quad b-m-\sqrt{b+1}),$$

$$(-m+\sqrt{b+1},\quad b-m+\sqrt{b+1})$$

被抛物线截出的线段长度d为：

$$d=\sqrt{(2\sqrt{b+1})^2+(2\sqrt{b+1})^2}$$

$$=\sqrt{8(b+1)}=2\sqrt{2(b+1)}$$

它与m无关，所以被各抛物线截出的线段都相等.

一九七九年

（理工农医类）

一、若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证：x，y，z成等差数列.

证明 ∵ $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$

$=z^2-2zx+x^2+4zx-4xy-4yz+4y^2$

$=(x+z)^2-2\cdot 2y(z+x)+4y^2$

$=(z+x-2y)^2=0$

∴ $z+x-2y=0$

即 $z-y=y-x$

所以 x，y，z成等差数列.

另一证法：

令 $x-y=a$，$y-z=b$，

则 $x-z=x-y+y-z=a+b$，

$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$

$=(a+b)^2-4ab$

$=(a-b)^2=0$ ∴ $a=b$

即 $x-y=y-z$，即 $y-x=z-y$，

所以，x、y、z成等差数列.

二、化简：$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-csc^2x}}}$.

解 原式 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{1-\csc^2x-1}{1-\csc^2x}}}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1-\csc^2x}{1-\csc^2x-1}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1-\csc^2x}{\csc^2x}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{\csc^2x+1-\csc^2x}{\csc^2x}}=\csc^2x.$

或原式 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{-ctg^2x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+tg^2x}}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sec^2x}}=\dfrac{1}{1-\cos^2x}=\dfrac{1}{\sin^2x}$

$=\csc^2x.$

三、甲、乙二容器内都盛有酒精.甲有v_1公斤,乙有v_2公斤.甲中纯酒精与水(重量)之比为$m_1:n_1$,乙中纯酒精与水之比为$m_2:n_2$.问将二者混合后所得液体中纯酒精与水之比是多少?

解 甲中含纯酒精$\dfrac{m_1v_1}{m_1+n_1}$公斤,含水$\dfrac{n_1v_1}{m_1+n_1}$公斤;

乙中含纯酒精$\dfrac{m_2v_2}{m_2+n_2}$公斤,含水$\dfrac{n_2v_2}{m_2+n_2}$公斤.

甲乙共含纯酒精$\left(\frac{m_1v_1}{m_1+n_1}+\frac{m_2v_2}{m_2+n_2}\right)$公斤

$=\frac{m_1v_1(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+n_1)}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$公斤，

甲乙共含水$\left(\frac{n_1v_1}{m_1+n_1}+\frac{n_2v_2}{m_2+n_2}\right)$公斤

$=\frac{n_1v_1(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$公斤，

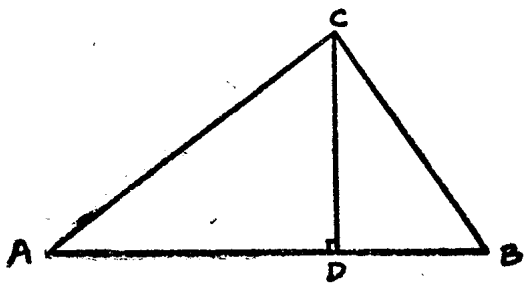
混合后，纯酒精与水之比为

$$\frac{m_1v_1(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+n_1)}{n_1v_1(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)}.$$

四、叙述并且证明勾股定理.

勾股定理：直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方之和.

证明 在直角$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$. 作$CD\perp AB$，交AB于D，则由射影定理

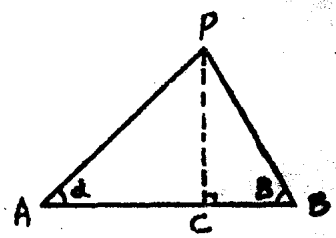


$$AC^2 = AB \cdot AD,\quad BC^2 = AB \cdot DB$$

$$\therefore\quad AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB = AB \cdot (AD + DB) = AB^2.$$

五、外国船只除特许者外，不得进入离我海岸线D海里以内的区域.设A及B是我们的观测站，A及B间的距离为S海里，海岸线是过A，B的直线，一外国船在P点，在A站测得$\angle BAP = \alpha$，同时在B站测得$\angle ABP = \beta$. 问α及β满足什么简单的三角函数值不等式，就应当向此未经特许的外国船发出警告，命令退出我海域？

解 自P向直线AB作垂线PC，设垂足为C，则



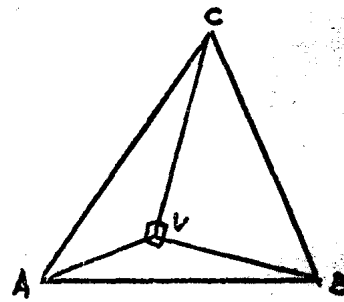
$$AC = PC \cdot ctg\alpha,$$

$$BC = PC\,ctg\beta$$

$$\therefore\quad S = AC + BC = PC(ctg\alpha + ctg\beta)$$

当$PC \leqslant D$，

即 $ctg\alpha + ctg\beta \geqslant \frac{S}{D}$时，



应向外国船发出警告.

（当α、β有一为钝角时，结论相同.）

六、设三棱锥$V-ABC$中，$\angle AVB = \angle BVC = \angle CVA =$直角.

求证：$\triangle ABC$是锐角三角形.

证明 $\because \angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=$直角

$\therefore\ AB^2=VA^2+VB^2$

$AC^2=VA^2+VC^2$

$BC^2=VB^2+VC^2$

由余弦定理 $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$$=\frac{VA^2+VB^2+VA^2+VC^2-VB^2-VC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=\frac{2VA^2}{2AB\cdot AC}>0$$

$\therefore\ \angle BAC$是锐角.

同理可证$\angle ABC$、$\angle BCA$也是锐角，故$\triangle ABC$为锐角三角形.

七、美国的物价从1939年的100增加到四十年后1979年的500，如果每年物价增长率相同，问每年增长百分之几？（注意：自然对数 $\ln x$ 是以 $e=2.718\cdots\cdots$ 为底的对数.本题中增长率 $x<0.1$，可用自然对数的近似公式，$\ln(1+x)\approx x$，取$\lg 2=0.3$，$\ln 10=2.3$来计算.）

解 设年增长率为x，则$100(1+x)^{40}=500$，即 $(1+x)^{40}=5$，取自然对数有$40\ln(1+x)=\ln 5$.

已知$\lg 2=0.3$，所以 $\lg 5=\lg\dfrac{10}{2}=1-0.3=0.7$，

$$\ln 5=\ln 10\lg 5=2.3\times 0.7=1.61.$$

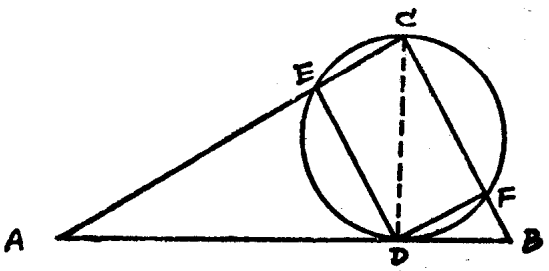
利用$\ln(1+x)\approx x$，则有

$$x=\frac{\ln 5}{40}=\frac{1.61}{40}=0.04025\approx 4\%.$$

答：每年约增长百分之四.

八、设$CEDF$是一个已知圆的内接矩形．过D作该圆的切线与CE的延长线相交于点A，与CF的延长线相交于点B．

求证：$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$．



证明 连接CD，因$\angle CFD=90°$，所以CD为圆O的直径．又由于AB切圆O于D，$\therefore CD\perp AB$．

由 $\triangle BDF\backsim\triangle ABC$，得$\frac{BF}{DF}=\frac{BC}{AC}$ (1)

由 $\triangle BDF\backsim\triangle DFC$，得$\frac{DF}{CF}=\frac{BF}{DF}$，因而

$$\frac{DF}{CF}=\frac{BC}{AC} \qquad (2)$$

又由 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，得$\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$ (3)

由(1)，(2)，(3)得$\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DF}{CF}\cdot\frac{DE}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

但因为 $CF=DE$，$\therefore\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}$.

九、试问数列

$$lg100,lg\left(100sin\frac{\pi}{4}\right),lg\left(100\ sin^2\frac{\pi}{4}\right),\cdots\cdots,$$

$$lg\left(100sin^{n-1}\frac{\pi}{4}\right)$$

前多少项的和的值是最大？并求出这最大值.(这里取$lg2=0.301$)

解 这数列的第k项（任意项）为

$$a_k=lg\left(100sin^{k-1}\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{1}{2}(k-1)lg2$$

所以这数列是递减的等差数列，首项为2，公差是$-\frac{1}{2}lg2$.

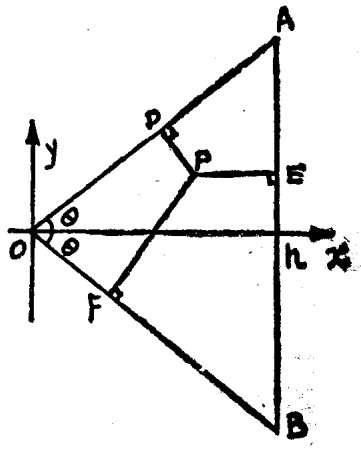
令$2-\frac{1}{2}(k-1)lg2=0$，得 $k\approx14.3$ 由递减性可知$a_1>a_2>\cdots\cdots>a_{14}>0>a_{15}>a_{16}>\cdots>a_n$，

因此前14项的和最大，其值为

$$S=\frac{a_1+a_{14}}{2}\times14=\frac{2+2-\frac{1}{2}\times13\times lg2}{2}\times14\approx14.30.$$

十、设等腰$\triangle OAB$的顶角为2θ，高为h.(1) 在$\triangle OAB$

内有一动点P，到三边OA，OB，AB的距离分别为$|PD|$，$|PF|$，$|PE|$，并且满足关系$|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$. 求P点的轨迹. (2) 在上述轨迹中定出点P的坐标，使得$|PD|+|PE|=|PF|$.



解 (1) 设坐标系如图，点P的坐标为(x,y). 由题设$x>0$.

直线OA的方程为$y=xtg\theta$，

直线OB的方程为$y=-xtg\theta$，

直线AB的方程为$x=h$.

又因为P点在$\angle AOB$内，于是

$$|PD|=\frac{xtg\theta-y}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=xsin\theta-ycos\theta$$

$$|PE|=h-x$$

$$|PF|=\frac{xtg\theta+y}{\sqrt{1+tg^2\theta}}=xsin\theta+ycos\theta$$

由条件$|PD|\cdot|PF|=|PE|^2$得

$$x^2sin^2\theta-y^2cos^2\theta=(h-x)^2 \qquad ①$$

即 $x^2cos^2\theta-2hx+y^2cos^2\theta+h^2=0$

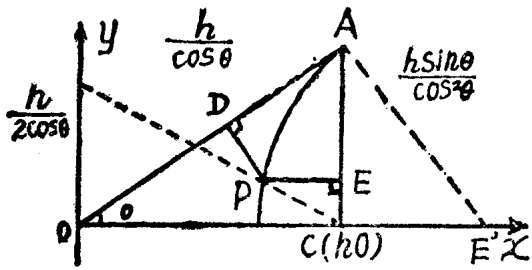
除以$cos^2\theta(\neq 0)$得

$$x^2-\frac{2h}{cos^2\theta}x+y^2+\frac{h^2}{cos^2\theta}=0$$

即$\left(x-\frac{h}{\cos^2\theta}\right)^2+y^2=h^2\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta}$

或$\left(x-\frac{h}{\cos^2\theta}\right)^2+y^2=\left(h\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)^2$

这是以$\left(\frac{h}{\cos^2\theta},\ 0\right)$为中心，以$h\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$为半径的圆．所求轨迹是此圆在所给等腰三角形内的那一部分．



过A作直线$AE'\perp OA$，设AE'交x轴于E'点，则$OE'=\frac{h}{\cos^2\theta}$，$E'$是圆的中心，$AE'=\frac{h\sin\theta}{\cos^2\theta}$是圆的半径．$A$是圆上一个点，而且圆在$A$的切线是$OA$.

(2) 由条件$|PD|+|PE|=|PF|$得

$x\sin\theta-y\cos\theta+h-x=x\sin\theta+y\cos\theta$

即 $x+2y\cos\theta=h$ ②

此直线通过$(h,\ 0)$即C点及$\left(0,\frac{h}{2\cos\theta}\right)$点．

由①，②得$x^2\sin^2\theta - y^2\cos^2\theta = 4y^2\cos^2\theta$

即 $5y^2\cos^2\theta = x^2\sin^2\theta$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{tg}\theta \cdot x.$$

由$|PD| + |PE| = |PF|$可知$y>0$，所以这里右端取正号．代入②得

$$x\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\right) = h$$

$$\therefore \quad x = \frac{h}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta} = \frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5} + 2\sin\theta}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5} + 2\sin\theta} = \frac{h\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5} + 2\sin\theta}$$

所求点P的坐标为

$$\left(\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5} + 2\sin\theta}, \frac{h\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{5} + 2\sin\theta}\right).$$

封面设计：曹知非



统一书号：13219·1
定　价：0.57 元