微积分

清华大学基础课《微积分》编写组

感受老一辈
踏实求真的学风

科学出版社

小单节过景酷意.

毛主席語录

① 单知的余光泛，阮建钊，浣慧子，石舜玫，阎志辉，高同盾，陈不晔

分析的方法就是辩证的方法。所谓分析，就是分析事物的矛盾。

（依次看的的原理.
② 依是它一定的矛盾，小定表要到.

矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。

② 行定的同者要求，一切都在不停变

③ 得紧定二级，不能为小会说理量：小孩就，人定的，发成有所主动的年

微积分的及部的基本分析方和概念.

第二章　微积分的基本分析方法和概念

（毛主席教导我们：）　（微积分的基本分析法和概念

先侦章的提案

毛主席教导我们：**“一切真知都是从直接经验发源的。”**微积分的方法也与其他科学一样，它的源泉是劳动人民的生产实践。我国历史上随着生产力的发展而出现的“割圆术”求圆周长以及关于无限分割的概念[注]，都是微积分的基本方法和概念的萌芽。但是，资产阶级把微积分搞得神秘难懂，一一方面是为了排斥工农，实行文化垄断；另一方面，也是因为他们的世界观是唯心主义和形而上学的，他们不可能理解微积分方法中丰富的辩证思想，故意抹煞微积分的实践来源。今天，抹煞微积分的实践来源。今天，我们工农农兵要打破资资产阶级的文化垄断，占领科学文化阵地）。

求毛主席，永跟一定勝了.

交替以论这些章

毛主席的光辉哲学思想是我们认识世界和改造世界最锐利的武器，只要我们活学活用毛泽东思想，就一定能掌握微积分这个数学工具，利用它为社会主义服务。这一章用“捅破窗

（小灵，资野市市一环）。但是，“捅破窗”.

[注]　春秋战国时提出的“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

户纸”的办法，从工农兵的实践经验出发，先用一些简单直观的例子，开门见山地介绍微积分解决问题的基本分析方法，按照毛主席关于“**分析事物的矛盾**”、“**促成事物的转化**”的教导，以微分、积分这一对矛盾的发生，发展和相互转化为线索，结合实际，逐步阐明微积分的基本概念和理论。

第一节　微分和积分

在这一节中，我们用几个简单的例子，说明微分、积分的基本分析方法，然后概括为一般概念。

一、几个具体实例

例 1　求圆扇形的面积

图 2-1 中 OAB 是一个圆扇形，半径 $\rho = 8$ 厘米，圆心角 $= \frac{\pi}{3}$ 弧度，要求它的面积。

解　(1) 分析主要矛盾

我们已经会算直边形的面积，如：

$$\text{长方形面积} = \text{长} \times \text{宽},$$

$$\text{三角形面积} = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}。$$

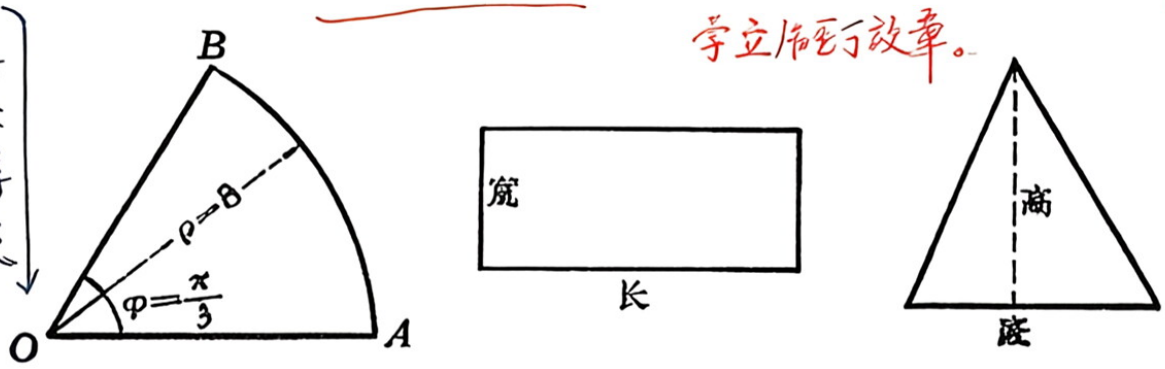


图　2-1

而圆扇形有一条曲边，上面的公式不能直接用，会算直边形的面积，不会算曲边形的面积，这就是困难，就是矛盾。求圆扇形的面积，就必须解决“曲”与“直”这一对矛盾，

（2）解决矛盾的基本思路

毛主席教导我们：**“人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争，阶级斗争和科学实验这三项实践中来。”**

劳动人民在长期的社会实践中，用了各种巧妙的办法来解决“曲”与“直”这一对矛盾，充分显示了劳动人民的聪明和才能。

钳工师傅用平锉可以锉出一个圆形工件，平锉锉一下是直的，但不断改变平锉的方向，就能锉出一个圆形的工件（图2-2）。就是说，在工件极小的一段上看，锉出来是直的，而总体看工件的外形却是曲的。

建筑工人用条石可以砌成半圆形的桥洞（图2-3），从一块条石看，是直的，总体却是圆的。



图 2-2

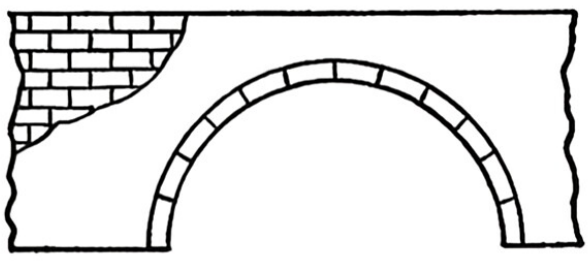


图 2-3

劳动人民的生产实践，说明了一个真理：**“矛盾着的双方，依据一定的条件，各向着其相反的方面转化。”**“曲”和“直”这一对矛盾，在一定的条件下可以互相转化，这个条件就是，相对于整体来说，在局部很短的一段上，可以“以直代曲”。正

如恩格斯所说：“**高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾，即在一定条件下，直线与曲线应当是一回事。**”我们解决矛盾的基本思路就是：在很短的一段上，以直线代替曲线，下面运用这一基本思路求出圆扇形的面积，从而说明做分、积分的概念。

为了在很短的一段上以直线代替曲线，将整个扇形分成许多小扇形（图 2-4），在分得极细的条件下，每个小扇形的曲边就可以看成是直边，小扇形就可以看成三角形，可以利用三角形面积公式求出其面积。

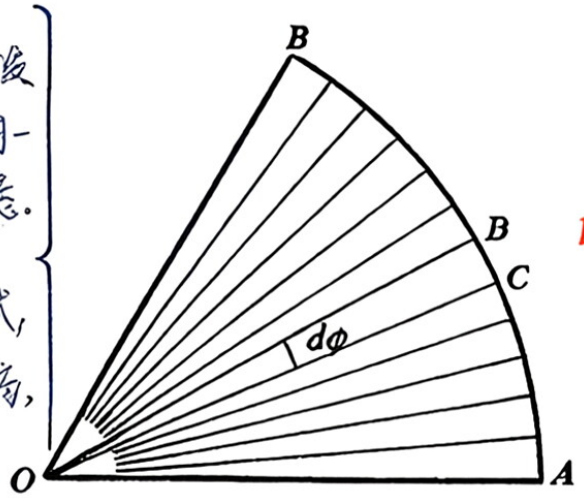


图 2-4

取一个小扇形 OCD，其圆心角用 $d\varphi$ 表示，其面积用 dF 表示（φ 表示角，F 表示面积，d 表示很小的意思），dF 可用三角形面积公式算出：

$$dF = \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}.$$

$$\text{高} = \text{半径} = 8\ (\text{厘米})$$

$$\text{底} = CD \text{ 弧长} = \text{半径} \times \text{圆心角} = 8 \times d\varphi (\text{厘米}),$$

$$dF = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times d\varphi\ (\text{厘米}^2).$$

每个小扇形的面积都可以这样求，dF 叫做面积的微分，整个面积是所有小扇形面积的总和，在无限分细的条件下，把 OA 和 OB 之间所有的微分 dF 积累起来，就得出整个扇形的面积 F，无限多个微分的积累叫做积分，用下面的符号表示

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times d\varphi,$$

一矛盾，就必须遵照伟大领袖毛主席关于“**对立统一**”的光辉思想，创造条件，“**促成事物的转化**”．从整体看是曲的东西，在很小的局部看能够“以直代曲”，这是“曲直”矛盾的转化基础，因此，关键在于创造条件，这个条件就是：“无限分小”．正如要把资本主义社会转化为社会主义社会，就只有通过武装斗争，夺取政权．武装斗争夺取政权就是条件，没有这个条件，资本主义社会就不能转化为社会主义社会．直和曲的矛盾，在“无限分小”的条件下才能转化。

这个简单的例子，使我们看到微积分并不神秘，它的基本思想来自于劳动人民的生产实践．对于这个例子来说，微积分的基本思想可以概括为下面四句话：

化整为零无限分，以直代曲得微分，
积零为整微分和，要求面积算积分．

例 2　压力的计算

在水利工程中，要计算闸门所受的水压力（图 2-6）．闸门在深水处所受的压力大，接近水面处所受的压力小，通常用单位面积上所受压力的大小（称为压强）来衡量压力的情况．在闸门上，不同深度的地方压强也不同，实验确定：压强与水深成正比，用 p 表示压强，h 表示水深，则 p 与 h 的函数关系是

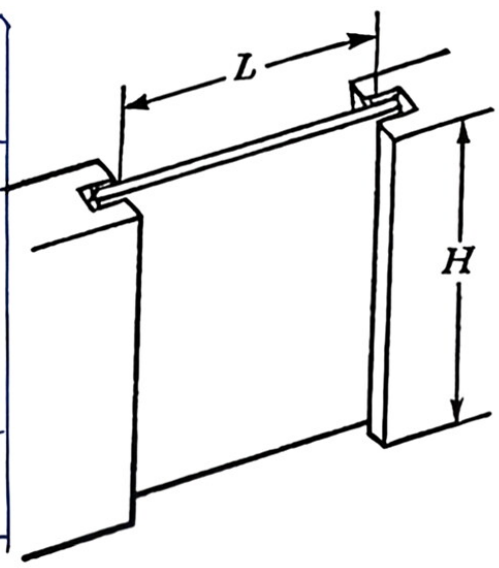


图　2-6

$$p = \gamma \cdot h$$

γ 是一立方米的水重，$\gamma = 1$ 吨/米^3，这个函数图形如图 2-7 所示，它表明了压强是随水深而变的．

设闸门宽 $L = 2$ 米，高 $H = 3$ 米，当水面齐闸门顶时，求

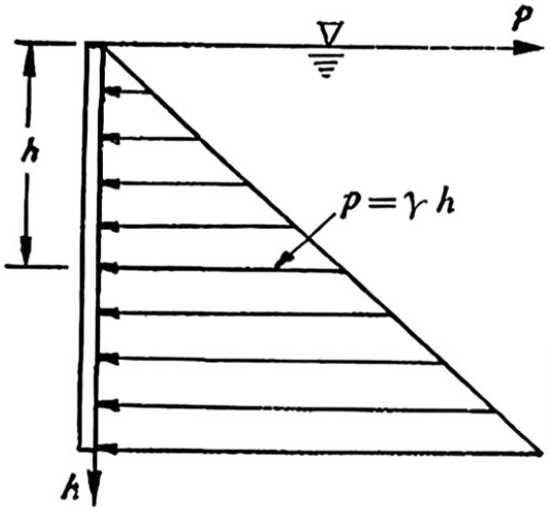
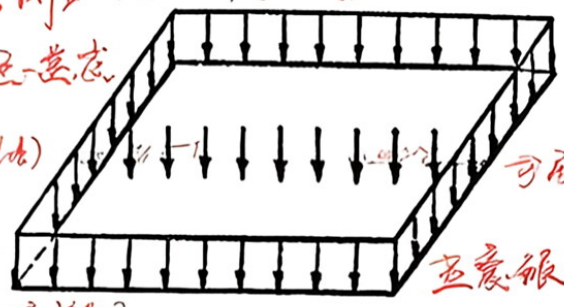


图 2-7　压强 $p=\gamma h$ 的图形



闸门所受的压力 P.

解　(1) 分析主要矛盾

对于均匀受压的情形(图 2-8),即压强处处相同,有公式

压力 = 压强 × 受压面积

可以计算。但闸门不是均匀受压的,压强 p 随水深 h 而变化,因此,不能用上述公式求压力。为求闸门所受压力,必须解决压强变与不变这对矛盾。

(2) 解决矛盾的基本思路

毛主席教导我们:**“一切真知都是从直接经验发源的。”**我们从亲身体验就知道,一定的水深处,压强相同,并且附近的压强也变化不大,可以近似地看成不变。从 $p=\gamma h$ 的函数图形(图 2-7),也可以看出压强 p 是随水深 h 连续变化的。因此,在水深变化很小的一段上,压强变与不变这对矛盾可以转化,也就是说,可以近似地以不变压强代替变压强。

在水深为 h 的地方,在闸门上取一个高为 dh 的小条(图 2-9 中阴线部分),由于 DH 很小,在这小条上可以近似地看作均匀受压,例如,这小条各处压强都是水深为 h 处的压强 $p=\gamma h=h$(因为 $\gamma=1$). 因此,可以近似地求出这小条上所受压力 ΔP:

$\Delta P \approx$ 压强 × 小条面积 $= h\times(2\times dh)=2hdh$,

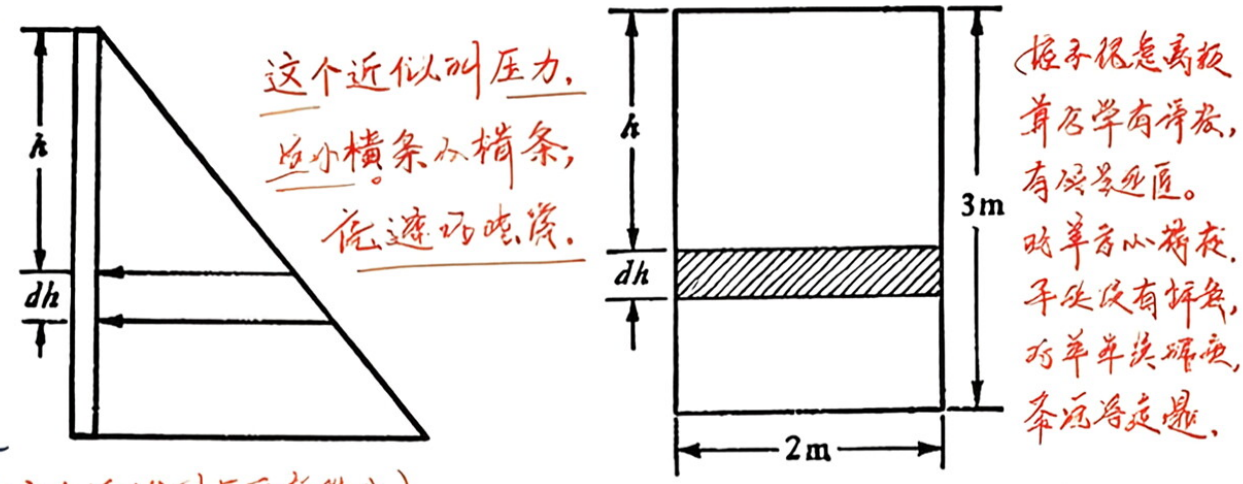


图 2-9

这个近似值叫压力的微分，记为 dP

$$dP = 2hdh,$$

从上图可以看出：dh 越小，压强的变化越小，以不变压强代替变压强就越接近实际情况。

解决矛盾的基本思路就是：将闸门从上到下分成很多小横条，各横条上水深变化都不大，可以近似地看作压强不变，用均匀受压的公式可算出各小横条所受压力的近似值，再总和起来，就是闸门所受压力的近似值，小横条分得越窄，算出的结果就越精确(图 2-10)。

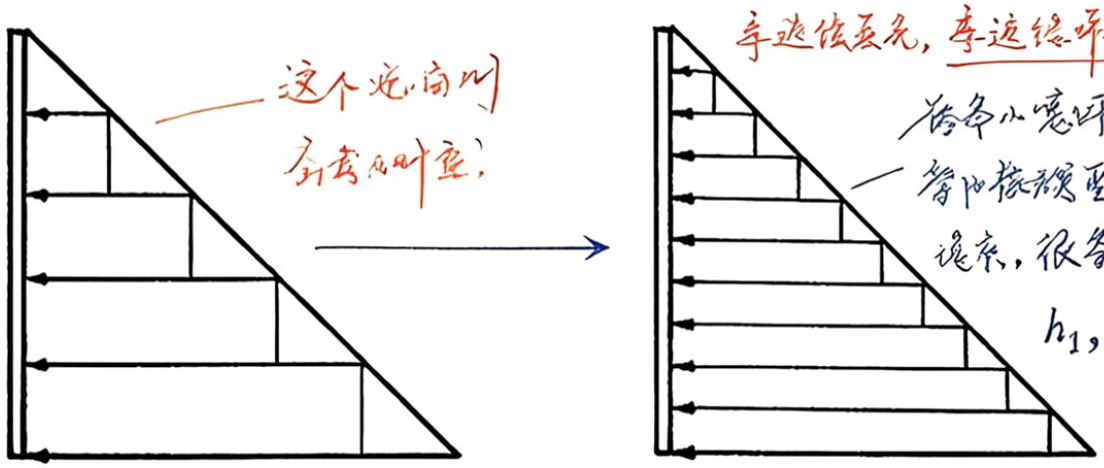


图 2-10

下面进行具体的计算。

第一步　将闸门从上到下分成很多小横条，各横条的高都是 dh，各小横条的上边线处的水深分别是 h_1，h_2，$h_3\cdots$ 各

分成 10000 个小条，$dh=\frac{3}{10000}$，

……

$P=\int_0^3 2h\,dh\approx 8.9991$，

可以一直算下去，但是，算出来的总是近似值，怎样求出精确值呢？

“事物都是一分为二的.”上面算出的虽然都是近似值，但是，随着小条越分越细这个过程的继续，我们看出近似值就越来越接近于一个数“9”。无限分下去，近似值就无限接近“9”，分析一下近似值随着分的小条数目而变化的规律，就可肯定这一点.

若将闸门从上到下分成 n 条，则 $dh=\frac{3}{n}$，

第 1 条：$h_1=0$，　$dP_1=2\times 0\times\frac{3}{n}$，

第 2 条：$h_2=\frac{3}{n}$，　$dP_2=2\times\frac{3}{n}\times\frac{3}{n}=2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2$，

第 3 条：$h_3=\frac{3}{n}\times 2$，　$dP_3=2\times 2\times\frac{3}{n}\times\frac{3}{n}=2\times 2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2$，

……

第 n 条：$h_n=\frac{3}{n}\times(n-1)$，

$dP_n=2\times(n-1)\times\frac{3}{n}\times\frac{3}{n}=2\times(n-1)\times\left(\frac{3}{n}\right)^2$，

则闸门压力

$$P=\int_0^3 2h\,dh$$

$$\approx 0+2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2+2\times 2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots$$

$$+2\times(n-1)\times\left(\frac{3}{n}\right)^2$$

$$=2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2\times[0+1+2+\cdots+(n-1)]$$

$$=2\times\left(\frac{3}{n}\right)^2\times\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^{[注]}$$

$$=9\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

① 单本单，一同出的有学习更信布，每面棉发，共愿，心崩：良核，条子喜欢耻顾。

② 隔字板，单在的化学云节要点，顾在之根每，难得是实路，样几可讲校，而另了，史部二养问。

③ 持教主足安处，搭足问报，

滑本的实品设所先并，适与学区有降，家教各变质在钢间坡本根。

迷预谈、投，诚度的总领求，按年每六年降，希度迷话，发现原有钢预讲，详本课，生本来想。

总结实现大无限分，中的小好基点，和、小底题境底实，

在 n 无限变大即分的小条数目无限多时，$\frac{1}{n}$ 无限变小，接近于“0”，因此，近似值无限接近于“9”。前面已经提到，越

总结二本限年，实又反实专意字形同号，一章字种学成千示程。

[注] 公式 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ 的说明。

先看一个实例，设有一批圆钢，如图 2-11 的方法堆放，第一层 9 根，第二层 8 根，…，最上一层 1 根，问：这批圆钢 一这是是了的素在机器。设想的共儿根？一篇幕子总是一颗古，用于预定后序的烧动。

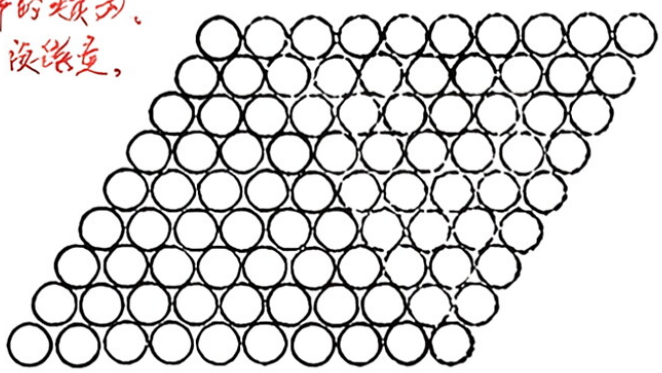
解 我们设想在这维圆钢的一侧，设缝是，如图围着堆放另一堆相同的圆钢，则每一层都是 10 根，共有 9 层，所以

$$2\times(\text{圆钢堆数})=9\times 10$$

$$\text{圆钢根数}=\frac{9\times 10}{2},$$

即：

$$1+2+3+\cdots+9=\frac{9\times 10}{2}.$$



实际的

图 2-11

同理可知 学生小路分的顶实质太，

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$ …东京要求，

底数各对称，阔还有段在一全年底。

分越小越精确，即 n 无限变大，P 的近似值应无限接近于精确值，因此，P 的精确值就是“9”.

若水深为 H，用上面所说的方法，可以求得 $h=0$ 到 $h=H$ 时闸门所受的总压力

$$P=\int_0^H 2h\,dh=H^2\text{(吨)},$$

即压力 P 是水深 H 的函数，水深是 3 米时，$P=9$ 吨；水深是 2 米时，$P=4$ 吨.

小　结

在解决压力计算问题时，基本的分析方法与例 1 相同，也可以概括为四句话：

化整为零无限分，　　与代不匀得微分，
积零为整无限和，　　計算压力求积分。

二、极限概念

伟大领袖毛主席教导我们：**“客观过程的发展是充满着矛盾和斗争的发展，人的认识运动的发展也是充满着矛盾和斗争的发展，”**在积分的计算中，我们遇到了如何解决将近似转化为精确的矛盾，解决的办法就是无限分。所谓无限分，这是指一个永远没有完结的细分过程，以计算闸门压力为例，在每一个分法下，可以得到闸门压力的一个近似值，随着细分过程的无限延续，细分的份数的无限增加，近似值就无限接近精确值，这就是取极限的概念。

再举一个日常生产中的例子说明极限概念。钳工师傅锉圆形工件时，先锉出了一个近似圆形的多边形，再用细锉锉就更接近圆形了。当然，还可以用精密的工具提高精度，但从具体的操作过程看，在有限次的加工过程中所能达到的，总还是