数学家谈数学本质

王庆人 译
程民德 审校

北京大学出版社

封面设计：陈友庄

ISBN 7-301-00525-3/O · 106

定价：3.95元

数学家谈数学木匠

[illegible]

[illegible]

程 民 德 审校

北京大学出版社

数学家谈数学本质

王庆人　译

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京昌平精工印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

787×960毫米　32开　12.125印张　180千字
1989年4月第一版　1989年4月第一次印刷
印数：0001—8,000 册

ISBN 7-301-00525-3/O·106

定价：3.95元

内 容 摘 要

本书选编了世界上各个时代的数学家、科学家思想言论录九百余条。这些言论录在数学本质这一主题下，涉及到数学的抽象与应用，数学中的直觉和想象，数学模型、公理化、推广、证明，数学中的动机，数学和美学、艺术、科学、技术，纯数学和应用数学，数学家和数学才能，数学的各种特征和数学的统一等问题。这本书适合具有各种数学水平的教师、学生、学生家长、科技工作者阅读，它可以是一本便于查阅的数学家语录，也可以是一本使读者在这一思想领域内得到系统修养的好书。书中还提供了许多值得讨论或争论的观点。

Thougts on Nature of Mathematics

J. N. Kapur

ATMA RAM & SON, DELHI–6

1973

前　言

作者曾经编写过“The Spirit of Mathematics”一书，收集了各个时期最伟大的数学家和科学家们关于数学及其应用的本质方面的五百条言论录。这一本书可以看作上一本书的继续。本书所收九百多条言论录是为说明数学本质这一主题而认真挑选的。

每一位数学教员都应该对数学本质感兴趣，因为他只有恰当地理解这一问题才能教好数学这门课。

每一位数学专业的学生都应当对数学本质感兴趣，因为他对这一本质的理解将极大地提高他学习数学和欣赏数学的能力。

每一位受过教育的人都应该对数学本质感兴趣，因为他一定学习过数学，而且无论他是否喜欢数学，他对数学本质的了解都将帮助他理解他

自己以前对这门课的反应。

每一位家长都应该对数学本质感兴趣，因为他的孩子们必须学习数学，而孩子们对这门课的反应将影响他对全部学习过程的反应。

每一位科学工作者都应该对数学本质感兴趣，因为他的研究课题相当大地受到数学的影响，而他又必须明白为何数学在科学和技术领域竟有如此“异乎寻常”的影响。

因此，几乎世界上的每一个人都应该对数学本质问题感兴趣。

有两种讨论数学本质的方法。可以由一位作者著述他关于数学本质的观点，但这对于无论哪一位个人来说都显然是过于繁重的任务。并且，这种讨论不可避免地受到作者所感兴趣的某些数学的领域的局限。

另一种方法是由某人通读文献，选编各个时期的大数学家们关于数学本质的言论录。这样收集到的材料显然不能完备，但能够较好地代表这一主题上的各种见解。

本书采取了第二种编写方法。我真心地希望本书所选编的材料能够代表关于数学本质的各种各样的见解。

这些言论录兼具指导意义和鼓舞力量。读者

仅对每条言论录一阅而过是不够的，必须加以深思，在必要时还应该精心发挥。

对任何一条具体的言论录，读者完全可以自己决定同意或反对。事实上只有评价性地阅读每一条言论录并以读者本人的经验来充分地加以阐明，才能收到有益的效果。

这些言论录可以给课内、外的讨论和数学俱乐部的聚会提供有价值的题材，也能给学生们提供辩论的要点。

言论录的编排顺序是相当任意的，但这个排列（或者说没有排列）还是经过认真考虑的。如果按题目排列是会导致困难的，因为我们发现，有许多时候一条言论录是涉及到两个或多个题目的。

本书的题目索引列出了同一题目的言论录编号，其中重复的内容由于我们现在采取的编排顺序而避免了。而且我们把各种言论录混编还可以避免按题目编排可能产生的单调乏味。

作者真诚地期望，这些言论录能够导致年青一代在数学上的更大的创造性，也能够导致每个人对数学及其应用本质的更清晰的理解。这样也就达到了我们选引其言论的那些科学家和数学家的目的。

我将感谢关于改进或增删本书的各种建议。

J.N.Kapur
于秘鲁大学

译 者 序

不言而喻，数学本质是一个十分重要的讨论题目。正如原书序言所说，数学本质是每一位数学教员，每一位学习数学的学生，每一位受过教育的人，每一位科学（包括社会科学）技术工作者，甚至每一位学生家长都关心的问题，是世界上几乎每一个人都应该感兴趣的问题。

数学是人类创造的。它在涉及到和它外部诸事物关系时，就表现出它实践性和应用性的一面；但在处理内在矛盾时，数学就表现出“纯粹性”，显得脱离常人生活。历来有两种观点。一种观点强调数学的美丽无瑕，称之为科学的皇后，并认为数学应该为其自身的完美不断发展。另一种观点则强调数学是人类文化的组成部分，它源于数学之外的人类社会活动，而且只能从那里得到进一步发展的动力。这两种观点除了表面上的对立之外，其实有着内在的统一性。作者选择了各个

时代的数学家、科学家思想言论录共九百余条，这些言论录极好地反映了上述两种观点以及处于这二者之间的各种看法。

在数学本质这一个大题目下，各言论录还涉及了数学的抽象与应用，数学中的直觉和想象，数学模型、公理化、推广和证明，数学中的动机，数学和美学、艺术、科学、技术，纯数学和应用数学，数学家和数学才能，数学的各种特征和数学的统一等等。有趣的是，许多言论录的理解并不需要太高深的数学基础。各条言论录是相对独立的，读者甚至可能在零散时间内选读几条就受益匪浅。言论录没有按主题顺序编排，但是读者可以从书后的主题索引或著者索引中查到他所关心的名人铭言。

总之，这本书适合具有各种数学水平的读者。它可以是一本便于查阅的数学家语录，也可以是读者借以系统地提高自己在这一思想领域修养的好书。它还提供了许多值得大家共同讨论的题材。译者深信这一翻译工作是值得的，但又明白自己难于全面理解诸家思想。为了避免对原著的曲解，译文中的许多地方采用直译，保持原文的结构。这些地方读起来可能很不顺嘴，但给读者留下了正确理解原意的机会。

原书的排版错误较多，索引中也有许多漏排部分。译者尽自己努力做了订正，但对原书编号中的跳号未予改正。

王庆人

1987年3月10日

目　录

前言　I

译者序　V

数学本质言论录 1—902　1

著者索引　343

主题索引　359

数学本质言论录

1．我不是在评论数学，而是在广泛得多的方面评论有关数学在真实世界中的应用。我试图证明这样的论题：数学的研究对象，以及其规范等等，常常并不适应于计算，不适应于数学的各种应用。

R. W. Hamming

2．我已经指出过，数学的许多“艺术形式”是由精致的、“无噪声的”结果所组成的，但应用数学的许多领域是被噪声主导着的。在计算中也是这样，计算过程是基本的，而严格的数学证明在计算情况下常常是无意义的。最后，在数值分析方面以及工程方面，选取正确的模型比采用具有漂亮的数学形式的模型更重要。

R. W. Hamming

3．如果我们在理解我们的环境，在认识我们自

身以及在找到其间的秩序和科学基础的巨大努力中，抱有随时与其他科学家合作的态度，那么数学是应用的。它在创造与使用概念方面必须是有独创性的和有想象力的。与纯数学不同，应用的数学在其概念能动性方面对外部经验有深厚的兴趣，并用那些从经验与观察中提出来的，或者与经验观察密切相关的结构来丰富数学。

B. R. Seth

4．在未来的十年中，我们将在基础科学和工程研究方面，在管理机能和军事指挥方面，在经济计划，甚至在人类思维方面看到强大的数学化进程。这些年头还将决定究竟应用数学仍然作为庞大数学总体的有效成份而存在呢，还是将发展成为独立的科学事业。

B. R. Seth

5．尽管数学的系谱是悠久而又朦胧的，但是数学思想是起源于经验的。这些思想一旦产生，这门学科就以其特有的方式生存下去。和任何其它学科，尤其是经验学科相比，数学可以比作一种有创造性的，又几乎完全受审美动机控制的学科。

J. Von Neumann

6．当数学学科走向远离其经验源泉或更远些时，当这门学科进入第二代、第三代，仅能依靠来自“现实”的思想的间接的启迪时，它就会被很严重的困难所包围。它变得越来越纯审美的，越来越纯粹地“为艺术而艺术”的。当然，这也不一定是坏事，因为这个领域可能仍然与那些更接近经验的有关学科交融着，或者这个学科处在具有极高鉴赏能力的人们的影响之下。但是存在着很大的危险，这个领域会沿着最省力的方向再向前发展，这条发自源头的川流会分道为数目众多的、无意义的支流，这个学科将会成为既琐碎又复杂的一团杂乱无章之物。换句话说，在远离其经验之源之后，在过于“抽象的”内部繁殖之后，一个数学学科处于退化的危险之中。不论怎样，只要到了这个地步，我认为唯一的解决办法就是使之返老还童：回到其源，回到或多或少的直接经验的概念。我确信这样做是使这门学科保持新鲜和生命力的必要条件；这一点在未来仍将同样是正确的。

J. Von Neumann

7．即使数学家在选择问题、舍弃问题或者转向

其他问题时，实质上是不受约束的；然而理论物理中的一个重要问题通常是“必须”解决的争论和矛盾。一位数学家有许多他可以从事研究的领域，在这些领域里他享受着相当大的自由度。我认为，正确地说，他选择领域和课题的原则以及成功的准则主要地是审美学的。

J. Von Neumann

8．人们不但期望一个数学定理或数学理论以简单而优美的方式描述和区分一些已知的特殊情况，人们还期望在“体系”结构的建造上的“优美”，在提出问题上的自然，在掌握这个问题以及试图解决它时所遇到的重大困难，然后又是某些令人吃惊的意外转折，使得这个方法或方法的一部分变得容易了，等等。还有，如果推导过程冗长而复杂，其中应该有某些简单而一般的原则能够解释问题的复杂性，并把那些明显的任意性归结为少数几条指导性的动机。这些显然是那些称之为艺术的准则。在问题背景中，往往是相隔遥远的背景中存在着的基础经验世界的动机，由于审美式的发展而被变得畸形，并被演变为众多的迷宫式的变形，所有这些都比经验科学更加多地倾向于艺术的、纯粹的和简单化

的基调。

J. Von Neumann

9. 二十世纪数学的一个令人惊异的特征是它对抽象方法的力量的承认。这已经引出了大量的新结果、新课题；事实上这已经引导我们开辟了以前从未被提出的一些全新的数学领域。随着这些发展而来的不仅是崭新的数学，而且是其生气勃勃的前景，以及对那些困难的古典结果所给出的简洁而又新颖的证明。把一个问题分离为一些基本的本质部分，这就为我们揭示了它在整个事物结构中的环境；它向我们显示了以往被认为是无关的若干领域之间的联系。

I. N. Hernstein

10. 尽管旁观数学比从事数学要容易得多，但那是一项最无收益的吸引观众的运动。

C. G. Gullin

11. 不幸的是，为坚持抽象方法所必须的技术手段常常掩盖了所要掌握的问题的本质。其结果是加大了纯数学与应用数学之间的人为隔阂以及纯数学与应用数学之间的表面上的疏远。那些被集

合论公式的精确性迷住的人常常忽略了数学本身，而那些被公式吓倒的人常常把所有的抽象都贬低为摆弄公理，並且对抽象所能带来的深刻见解熟视无睹。

A. M. Gleason

12. 学生们得到了这样的印象：集合论是数学的最根本的探讨，真正的数学家只考虑完全以集合论术语给出其最终形式的那种问题。直到过了很长时间之后，学生才发现数学研究主要地是一个从实质东西、模糊的类别和几何形象的大杂烩中筛出定理的过程。

A. M. Gleason

13. 的确有着一条关于数学成就的无可争议的准则，那就是数学研究结果在科学和技术中的直接可应用性。在得出正面结论时，即有一项工作满足这项准则时，这条准则是绝对可靠的。但是人们都知道这不是唯一的准则。我们都知道许多深刻的数学定理的例子，它们在刚刚出现时都是远离任何可能的应用的（非欧几何，伽罗华群论，理想论，超限数，等等）。

P. S. Aleksendrov

14. 还有另一条关于数学成就的准则，即考虑论文的影响的准则，这一条不够体面。它经不起严格逻辑的批评（承认了这一条就会把数学理解为某种圆圈舞，一个数学家的成就在于他和与他相邻的数学家的手拉手）。然而，这一条和下面要提到的第三条准则一样占有很大的份量，被主观和强烈地认做“竞争性”准则。事实上每个人都会满足于他对困难的结果的证明，并建议他的学生们证明这些结果……最后一个准则是时髦。对时髦的过分的追求是鉴赏力低下的迹象。然而不幸的是，这条准则常常能对数学的各部分产生影响。

P. S. Aleksendrov

15. 如果我们要谈论数学中创造性工作的主观标准和动机（对一位数学家个人，这些是有最后的决定性意义的；因为在他单独从事其课题而要做出决定时，这种标准和动机是直接作用于他的情绪的），那么每个重要的数学发现都在某一时刻需要一种由智力、精神力和感情力构成的完整的浓缩，被诗人们称为灵感的东西，按照普希金的说法，它在几何中和在诗赋中是同样重要的。

P. S. Aleksendrov

16. 经过长期的、无成效的劳动之后，帐幔突然移去，地平线突然展宽。这时，灵感是和对数学真理的真正认知分不开的。这可能是创造性的学者所感受的最深刻的经验。它总是某些客观上有价值的结果在主观上的反映，因而也就成为一条判别天才的数学成就的可靠准则。

P. S. Aleksendrov

17. 在数学中（可能所有认真地关心过数学的人也都有这种经验），认知的准则与审美的准则是分不开的，与从突然揭示了具有新的奇妙和新的结构的知识所得到的喜悦是分不开的。在大多数情况下，审美的准则压倒了对所获科学进展的所有其它严肃和客观的准则，而这类进展在数学思想的各个分枝中都可能出现并且具有头等重要性。

P. S. Aleksendrov

18. 按照希尔伯特的想象，数学就象一块多面晶体，每个面既有它自己的来源，也为天才而严肃的学者提出潜在的前景。我认为不存在适用于数学真理的所有侧面的唯一客观价值标准，只有数学自身和历史才能做出评价。数学的自由度就在

于此，并且仅在于此。这一点早就被G. 康托看到了。

P. S. Aleksendrov

19. 数学被认为是单调乏味的学科，但如今已经越来越被人们承认为在科学发展中具有高度重要性的学科。实际上，数学研究极大地开阔了人类思想的地平线，并且在某种程度上帮助人们理解自然界和物理世界。今天，它是表达严格的科学思想的媒介。

Jawahar Lal Nehru

20. 无论一位数学专业学生的最终兴趣和职业是什么，他都应该懂一些数学是如何被应用的，懂一些有关数学和各门科学间的复杂交互作用。许多从事纯研究的数学家很少与其它科学接触。他们倾向于主要地把他们的学科看作是自给自足的，自行繁衍的，可以从内部提出问题的，仅仅是偶尔地获得外界刺激的。另外一些更直接地与邻近学科打交道的数学家可能很难同意这种看法，他们可能实际上十分强调物理科学对数学概念和思想所起的源泉的作用。

R. C. Buck & E. F. Buck

21. 数学之所以重要，其中心原因在于它所提供的数学结构的丰富与多样；此外的原因是，数学给出了一个系统，以便使用这些模型对物理现实和技术领域提出问题、回答问题，并且也就探索了模型的行为。

R. C. Buck & E.F.Buck

22. 我希望我已经证明了，数学既不必是严峻的，也未必是遥远的，它既和几乎所有的人类活动有关，又对每个真心感兴趣的人有益。

R. C. Buck

23. 数学作为一种人类活动是与其他的人类经验有关的。其中关系最密切的是对独特物体的知觉，对我们周围的空间的知觉，对在时间、空间维度中运动的连续性的知觉，此外还可能有对于生命过程以及对社会的结构和动力学的知觉。数学对科学的关系是微妙的和深奥的。这种关系不能仅仅理解为数学服务于科学，或者是数学和数学家寻求出路的方式。我喜欢把数学对于现实的关系与绘画艺术对于现实的关系相比较。它不仅仅是个表示问题，它比表示要多得多，并且如今已变

得十分抽象。然而其间的关系仍然存在，而这种关系是绘画艺术的本质之一。

Peter Lax

24. 数学和物理的关系尤其牢固。其原因在于，数学的课题毕竟是一些问题，而许多数学问题是物理中产生出来的。并且不止于此，许多数学理论正是为处理深刻的物理问题而发展出来的。

Peter Lax

25. 尽管有些严肃的学术期刊和有代表性的学术团体致力于应用数学，我并不准备承认它以一种明确规定的意义存在着。我准备在逻辑意义上承认应用数学的存在，然而愿意在合理的基础上把那种将所谓纯数学分离于所谓应用数学的任何企图归之于荒谬。数学之一部分可能在数学之外是有用的，但这个事实并不能把这部分划为应用数学；类似地，“没有用”也不是被划为纯数学的唯一准则。

Mark Kac

26. 简要地说，或者使用无疑是过于简化的措词，我们认为有着两组人：一组人相信数学是自足

的，或者是不与数学之外任何事物进一步接触也能成长的，另一组人则相信，自然仍然是并将总是数学灵感的主要的（如果不是唯一的）源泉。前一组被认作纯数学的（也许‘最纯的’更合适些），而后一组则被同样地不够恰当地归作“应用的”。我倒喜欢坚定地站在第二组一边。

Mark Kac

27．现代数学的一个特征是它试图尽可能的一般化。现代数学并不取代经典数学。前者推广后者，补充后者，统一后者；并且我们无法在全部数学知识中划一条界线，说这部分是传统数学，那部分是现代数学。数学概念的成长是连续的，新得到的数学扎根于旧的之中。

I. Adler

28．我不相信人类思想具有单靠隔离反省就能存活下去的能力，也不认为除去我们头脑的反映之外就不再有真实存在。我要和这样一种人争辩，他们想要把数学和其它学科隔绝，说什么数学现在是完全自给自足的了，说数学再也不能从传统模式中和从伙伴那里获得什么了。我看不出有什么理由相信奇迹时代已经结束，相信应该把数学

排除于更广的科学思潮之外。

Mark Kac

29. 我们这里有了一个佐证 Wigner 教授所说“数学的异乎寻常的效力”的引人注目的例子。一个理想的数学模型显示了物理现实的起因。

有可能靠物理直觉猜想数学定理，还有可能靠数学推理加深物理见解。一个人为什么不准自己多从一个角度来思维呢？为什么要对另一个直觉的来源关上大门呢？

Mark Kac

30. 我相信，自然要比人类思想丰富无穷倍。它那已被我们形式化了的少数几个方面已经给了我们无法估量的数学财富。因此，不言而喻的是，我们应该使数学和自然科学广泛交往。

Mark Kac

31. 从本质上讲，一般性至多是个真假参半的优点。如果未经核对并且缺乏实质，那么它就有可能成为非常有害的特性。但我并不提倡废除一般性。一般化和抽象是数学之最重要的功能。正是由于一般化和抽象，数学才能如此异乎寻常地有

效。但我也确信，之所以有这种异乎寻常的有效性，主要地是因为许多一般化和抽象的出发点是深深地扎根于自然的。

Mark Kac

32．数学科学是统一的一体，其组织的活力依赖于其各部分之间的联系。构成数学中的进展的有：方法的简化，已经失去效用的旧的程序的消失，以及以往相异的领域的统一。

D. Hilbert

33．当一个数学分支不再引起除去其专家以外的任何人的兴趣时，这个分支就快要僵死了，只有把它重新栽入生气勃勃的科学土壤之中才能挽救它。

A. Weil

34．数学系统以及定义它们的那些公理应该有其一定的自然性。它们必须来自对大量例子的观察，也必须能导出大量有意义的结果。一个人不能坐下来写几条公理，就对这样描述出的系统研究起来。有些人会这样做，但绝大多数数学家会斥之为无聊的数学。选作研究的数学之所以被选中，

是因为这种结构的各个实例反复出现过，是因为研究者最后注意到这些特例实际上是一般现象的特殊情况，是因为他注意到两个完全无联系的数学对象之间的相似，而要去寻找这些相似性的根源。

I. N. Hernstein

35. 数学教育是一个学习从相似的事物之间抽取越来越细微的差别，并将其组织为越来越精细的结构的过程。我们的青年人头脑中的二值世界变成了成年人的多灰阶世界，简单的事物变得复杂了。大学新生的那种不动摇的确定性变成了毕业生的富有哲理的疑虑。

R. C. Buck

36. 对公理化的关心在职业数学家的活动中只占很小一部分，在以数学为工具的职业科学家的活动中占得还要小。这些概念可能是安装数学实体的构架的有用的要素，但若得到印象认为这些就构成了这一学科本身的核心，那就错了。

R. C. Buck

37. 模型化是数学中的一个基本概念。它处于所

有的数学应用之心脏，也处在某些最抽象的纯数学的核心之中。

R. C. Buck

38. 在公理系统的进化式处理中主要有三个精细化层次：

(i) 朴素的，或描述层。这里把公式形式化，用来描述或编纂已有系统的基本性质，再用公理得出系统的另外一些性质。

(ii) 结构层。在这里，观点从对单一系统的研究转向对共用同一公理集合的一类系统的研究。

(iii) 哲理层。在这里，我们着眼于诸如相容性，冗余度和等价性等等事项。正是在这一层上我们感到了逻辑自身的公理化本质。

R. C. Buck

39. 数学教学计划的拟定者不应该以牺牲数学动机和具体内容的教学来强调抽象与优美之处。

R. C. Buck

40. 科学文明的显著特征之一是定量。因此，数学在现代教育中占有永久的位置。它除了在物理

科学的成长中起作用之外，现在还在生物科学的发展中起着越来越重要的作用。本世纪内自动化和控制论的出现标志着科学的工业革命的开端，并使得对数学学习的注重变得越发迫切了。

D. S. Kothari

41. 数学是要做的而不是拿来看的……我们必须留心数学明日会是什么，以及它对它的今日有什么不满足之处。数学的渗透力不仅具有广度，而且具有深度。科学和技术的巨大发展主要地是由于数学的现代发展，是由于数学在物理学、生物学以及社会科学中的纵深渗透。

R. S. Varma

42. 医学一度基本上与数学无关。但现在化学试验需要数理统计，血液循环正在成为流体动力学的课题，致癌是一个随机过程，遗传学充满了高等代数，医院行政是一个运筹学的问题，中枢神经系统的研究要用上控制论的知识，放射线疗法对数学物理提出了要求，药理学包含了生物测定，传染病学用偏微分方程来描写，等等。

Coulson & Hemmerseley

43. 数学在过去几乎完全与科学相连结，而逻辑则与希腊哲学相连结。但二者在现代都发展了。逻辑变得更数学了而数学则更逻辑了。无法在二者之间划分界限。

Dharam Vira

44. 逻辑和数学之不同就象孩子和大人一样：逻辑是数学的初期而数学是逻辑的成年期。

Bertrand Russel

45. 最使我对数学感到高兴的是事物是能被证明的。

Bertrand Russel

46. 我的确感到，数学的效用可能是发展人类思维的心理条件，它促进了思想的力量和逻辑思考的能力。数学由于它对推理思维和确实推导的强调，能够有助于发展新的思想态度。

Dharam Vira

47. 如下几条原因使得数学的基本结构具有重要意义。一个原因，也是最简单的一个是，等价关系，有序关系甚至群结构看来都和我们大脑的结

构相对应，正如 Piaget 的心理学研究结果所表明的。另一个造成其重要性的原因是它们在数学中处处可见。对这些结构的每一个所做的详尽研究都已经使得思维大大地经济和有效了，因为现在，当一位数学家碰到一个与几种不同的结构有牵连的困难问题时，他有能力将它分解为几个分别仅与一种结构有关的、不严重的困难。此外，对于一种特殊结构的研究所得到的每一进展都将帮助所有用这种结构进行研究的问题获得进展。

G.Choquet

48．数学中的基本结构可以和那种成批制造产品的机器相比，这种机器只能制造一种产品，但是短时间内就能制造出许多件，并且每一件都造得相当完美。当今的年轻的数学家应该首先在学习大型数学机器上多花时间，这就是学习基本结构，而从中受益。他们得到的定理不再是仅与单一数学问题有关，而是关于一大类函数的或空间的，并且它的证明方法也是十分漂亮的、简单的和经济有效的。

G.Choquet

49．过去常说数学是一种语言。在那种意义上你

可以说现代数学是一种美丽的、精确的语言。

G.Choquet

50．现代数学概念不是作为纯粹的、抽象的游戏而发明出来的，它们是更旧的、更复杂的概念的综合，而这种综合使大大经济有效的思维成为可能。在五十年来的巨大的数学进展中，新的结果和新的定理并不象已经完成的综合那样令我们感兴趣。

G.Choquet

51．在数学中，我们从明显的事实出发并从此推导出不够明显的事实，并再从此推导出更不明显的事实，如此下去以至无穷。

J. N. Kapur

52．数学是对结构的分析。结构可能是数系的，代数的，经济、语言或生物系统的。分析则可能以工业的或者几何的结构为对象，也可能以政治的或者高速公路交通的结构为对象。只要你对无论什么事情的基本结构做了真正的、漂亮的分析，那么你就是在做漂亮的数学；如果对结构分析得糟糕，那你就丢面子了。

R. V. Andree

53. 数学仅仅是空洞的思想游戏吗？如果它仅仅给了物理学家一种方便的语言，难道这不会是一种平庸的，或者严格地说是一种用不着的帮助吗？甚至可以问，难道不该担心这种人造语言会是设置在现实与物理学家的眼睛之间的幕帐吗？事情远非如此：如果没有这种语言，大多数的事物内在的相似性将会永远是未知的，我们对于世界的内部和谐也会永远地无知，然而正是这种和谐才是唯一真正的客观现实。

Henri Poincare

54. 应该使年轻的学习者的头脑中印上这样的观念，即生物学作为一种探究方法要依靠精确的、可以进一步证实的观察，要依靠用定量方法和数学方法分析的并加以控制的实验。

Indian Education Commission

55. 数学家得出结论说，他的科学是被人的手工所固有的弱点所包围着的人类事业，但它又被人的创造力和想象力的光辉所映照，焕发着人们对美好事物的爱好。数学家仍旧觉得他的断言是对的，即数学是人类智慧王冠上最明亮的宝石。

N. A. Court

56. 认真地讲，数学可能是个玩笑；开玩笑地讲，数学可能是认真的。

N. A. Court

57. 首先，内行们从数学中得到乐趣，就象人们从绘画和音乐中得到的一样。他们欣赏数和形的精美的和谐，他们惊奇地看到，新的发现向他们展示了意外的前景并因而给他们带来欢乐，尽管美学并未介入，但这难道没有美学特征吗？只有少数几个有特权的人可以说欣赏了它的全部美，但在最高尚的艺术中不也正是如此吗？

Henri Poincare

58. 数学通常被认为是与诗歌绝对相反的。但是数学与诗歌同属一个宗族，因为它们都是想象的产品。

Thomas Hill

59. 数学所处理的结构就好象是花边，好象是一棵树的叶子，好象是一片草地或一个人脸上的明暗变幻。

Scott Buchanan

60. 数学为其证明所具有的逻辑性而骄傲，也有资格为之骄傲。但是这些证明并不是数学学说的必要组成部分。它们是数学家用以得到其结果的工具，是数学家为了俯瞰他们所要眺望、凝视和观赏的领域而骑上的火箭。

N. A. Court

61. 另一个广为流传的误解是认为数学包含有命题，有那么多不连贯的语句，有那么多小小的鸽子窝。但是对于已经入门的人，数学就象一幅美丽的风景画那样连贯，那样延续。命题是被选出来作为定位点的，作为特别引人入胜的观光之处，作为可以眺望意外的而又悦目的风光的高地。但是，就象乡野的平地没有构成全部风景一样，命题至多也未构成全部数学。

N. A. Court

62. 确实，数学家所表现出的创造性的想象力在任何方面都没有被超越过，甚至没有被赶上过，并且我愿冒昧地说，甚至不曾在其他地方被接近过。

N. A. Court

63. 欧几里得独自看过裸美。

A. S. V. Millay

64. 本作家谦卑地承认，对他来说，如果几何学不是艺术的一个分支，那它就什么也不是了。

J. L. Coolidge

65. 的确，现在应该承认关于数学是自由艺术之一员的断言是完全合适的。看来整个美学可以认为是具有四个中心的构架，这些中心可以看作是四面体的顶点，它们就是史诗、音乐、造形和数学。

J. J. Sylvester

66. 和把数学看作一门学科相比，我几乎更喜欢把它看作一门艺术，因为数学家在理性世界指导下（虽然不是控制下）所表现出的经久的创造性活动，具有和艺术家的，例如画家的活动相似之处，这是真实的而并非臆造的。数学家的严格的演绎推理在这里可以比作专门性技巧。就像一个人若不具备一定量的技能就不能成为画家一样，不具备一定水平的精确推理能力就不能成为数学家。这些品质是很基本的，但它们还不足以使一

个人称得上是画家或数学家，实际上它们也不是对应情况下的主要因素。其它一些要微妙得多的品质才构成一个优秀的艺术家或优秀的数学家的素质，其中最主要的一条在两种情况下都是想象力。

M. Bocher

67. 数学证明并不是已经完成的数学结构的一部分，但它们是数学研究中的一环。最好的数学证明通常是简短的，直接的和深刻的。这种证明中的“实际上”有时带有恩赐般微笑的柔和，有时带有机智讽刺般的敏捷，有时带有直截了当的、诙谐轶事般的出其不意。一个长篇证明可能缺少简短证明的那种直接性，但它常常用摇摆、起伏和音乐般的韵律来弥补这一点。它甚至可以具有和音乐作品同一的结构。这里是一串随便的、看上去无关的思想的开端，它们达到某点后就被丢开，而另一条逻辑证明路线开始，然后还可能有第三条又同样地开始了。这就好象一个音乐主题发展到一定程度之后就放弃了，而另一个看上去无关的主题又开始了。然后分立的逻辑证明路线和音乐主题开始互相靠近、混合、盘绕，然后它们紧紧地交织在一起，最后爆发出胜利完成的结

束曲。

N. A. Court

68. 数学家使用词语已经经济到教义的地步了，不容许任何进一步的越界。他走到了这样一种地步，废掉了所有的或者几乎所有的词语，然后用特殊的记号和符号取代之，这使他的陈述在意识和优美上都是无与伦比的。但他要付出的代价是他写的东西外行人看不懂。

N. A. Court

69. 数学家就象任何诗人和艺术家一样对他们所使用的技巧严格要求。他们长久地注重于他们的证明及问题答案的优美。任何一位数学家如果能够想出另一种显然省力而又可以得到同样结果的方法，那么他将立刻抛弃他原先的证明。当他发现了一个简单的证明时，他就得到了一种创造精巧答案的美的满足。从职业角度出发，数学家总是在为着使他的科学从审美方面展示更大的满意性而工作着。于是新方法的美也就成了职业性的快乐与骄傲。

N. A. Court

70. 若问一位在学业上称职的数学家为什么要在他的研究工作中花费那样多的时间与精力，他将肯定无疑地告诉人们，他这样做是因为他发现这很有趣，是因为他喜爱这工作，，因为这对他几乎是令人兴奋的惊险活动。

N. A. Court

71. 数学家警觉地、提防地守卫着他们的科学的严格性，并且在这门科学的纯正性出了问题时互相之间一点也不宽容。严格性被无情地遵循着，尽管它是难以捉摸的。虽然十九世纪已在数学严格性方向上取得许多进展，当今这一代数学家仍然感到他们比任何其它时期的数学家都更处于一种“悬而未决”之中。

N. A. Court

72. 数学不但给了人类以利用自然的技术工具，不仅提供了一个伟大的、无与伦比的智慧美与享受的宝库，而且它还使人类对其自身及其命运充满信心，给人类以希望，鼓励其进一步斗争，争取更好的、更高尚的和更加美的生活。

N. A. Court

73. 我们应该学习数学以建造机器，我们应该建造机器以省出时间来学习数学。

H.Poincare

74. 数学之不断累积的特性真令人吃惊。在数学中从来没有什么东西会失效，也没有什么会过时的。数学的这种积累过程，这种不断的扩大与完善是其特性中最宝贵之点，因为它已经清晰地、明显地给了人类以过程的概念，其方式是任何其它事物不能比拟的，更不必说超过了。

N. A. Court

75. 数学作为人类思想的表达，反映了积极的愿望，沉思的推理，以及对于美的完善的向往。它的基本要素是逻辑和直觉，分析和构造，一般性和个性。尽管不同的传统强调不同的方面，然而正是这些矛盾力之间的相互作用以及使之综合的斗争构成了数学科学的生命和极大的效用。毫无疑问，所有的数学发展都或多或少地在实践需要方面有其心理学的根源。但是一经被必要的应用推动而起了步，它就从自身得到冲量并超出了直接应用的局限。这种从应用科学走向理论科学的趋势出现在古代历史中，也出现在许多工程师和

物理学家对现代数学的贡献之中。

R. Courant

76. 讲授数学的方法是很不完美的，我把这看作是对我们所从事的职业的责备，指出了我们还没有发明出教这门课的文明方法。乘法表的背诵，复杂开方口诀的记忆，厌烦的解三角形问题，如此等等，全都与对数学的理解毫不相干。我认为这些是学校中数学的虐待成份，是能够并且应该废除的。

E. M. Llyod

77. 哈代在 1920 年说过："数学研究即使是无益的，也是完全无害的和清白的职业。"从那时以来我已经明白了，献身于一个无害的职业并不是小成就，也不是所有当代数学家都能够自称取得的成就。

E. M. Llyod

78. 创造一个有活力的数学模型是一项需要了不起的技能和判断力的迷人的工作，必须在过细的描述与过于简化的描述之间做出合理的权衡。过细就会造成一组无法解决的数学问题，过简则可

能掩盖有兴趣的细节，至使无法发现所要寻求的最优预报。一个在这种意义上合理地接近所考虑的过程的模型可以用来设计、预言和发现最优工作条件，使得所花代价最小，效率最大，等等。

E. M. Llyod

79. 文化中的主要的数学因素，包括现代数学中的活生生的、成长着的主体，将主要为职业数学家所具有。的确，某些职业，象工程、实际科学和统计学，也使用大量数学，具有相当多的数学习惯；在物理学、工程、研究及统计学这样一些领域中，有些个人对文化中数学因素的成长做出贡献。但是我们文化中数学因素的存在和成长主要地依靠那些被称为数学家的人们。

R. L. Wilder

80. 数学的普遍性看来是它在各个文化因素中最显著的特征。但是有些数学还具有明显的民族特征。长期以来人们认为法国数学偏爱函数论，英国数学对应用感兴趣，德国着重于数学基础，意大利感兴趣于几何，而美国的数学则以其抽象特征著称。然而，尽管有这些由于文化影响造成的

差异，数学在今日还是可以看作具有绝大多数其它人类活动所没有的普遍性。

R. L. Wilder

81．试图给数学下定义所遇到的困难看来主要来自于这样的假设，即认为数学就其本质而言是绝对的、不随时间和地点而改变的事物，因而一旦一位具有能够识破和刻划这一本质的慧眼的天才诞生于人世之后，它就能够被鉴定了。既然数学不是上述这种事物（尽管外行人还会在未来的世代中相信它是这种事物），任何刻划它的企图肯定只能失败。

R. L. Wilder

82．如果一位数学家以某种方式不承认数学真理的不可改变性及其无条件的有效性，看来没有哲学家会赞同他。数学事实或真或假，它们之为真理或谬误是绝对的，独立于我们关于它们的知识。

G. H. Hardy

83．根据哈代的说法，“被我们夸张为我们的‘创造’的新数学不过是我们对我们的观察所做的注释”；在他看来那已经是我们外部的“数学现实”

的一部分，我们不过是“发现和观察”了它。如Bell 所看到的，“这个信条的坚不可摧的力量在于它既不能被证明为真，也不能被证明为假”。他还可能再加上一条，即这个信条的不可避免的弱点在于它完全不能解释有关数学的任何事情。

R. L. Wilder

84. 数学受到过农业、商业和制造业的影响，受到过战争、工程和哲学的影响，受到过物理学和天文学的影响。流体动力学对函数论的影响，康德哲学和测量学对几何学的影响，电磁学对微分方程的影响，笛卡尔哲学对力学的影响和经院哲学对微积分的影响——只有把所有这些决定性因素都考虑到，才能理解数学这门课和数学的内容。

D. J. Struik

85. 在社会心理学而不是个体心理学的水平上有一个迷人的题目，即探求在数学进展和造成这种进展的时代的一般意识之间的关系。

D. Jackson

86. 数学天才只能从他所处的文化中的数学知识

已经达到的那一点继续发展下去。因此爱因斯坦如果是出生在一个只会数“1，2，3”的原始部落里，那么他对数学的毕生努力并不会使他超出基于手指、脚趾的十进数系的创立。

Ralph Linton

87．和任何其它的文化因素一样，数学依靠传播与演变而成长。无论是在个体的头脑中还是在一组人的头脑中给定了一组并列的思想，都会发生综合并出现新的概念。如同Spengler所说的，“一个由历史必然所提出的任务，无论有无某个个人都将会完成。”数学并不是因为一定时期偶而地诞生了一个牛顿，一个黎曼或者一个高斯才成长的，相反地，伟大的数学家被包括数学成份在内的文化条件所造就，这种条件导致了他们的成长。如同在产生维尔斯特拉斯和克劳尼克的时代一样，在希腊时代也诞生了潜在的伟大分析家和伟大代数学家，但是除其它条件不同外，在希腊文化中还缺少必要的分析与代数要素。这并不是贬低伟大人物的伟大之处，而是要哀悼那些在过去以及在现代失去了施展其才能机会的人们。我们当然会同意若无“创造天才”就不能发展数学；我们还要坚持说，天才不能在智慧的真空中工作，

而且若无合适的智力刺激，他的“才能”将永不为人所知。

R. L. Wilder

88. 数学发展的“顺利”条件是怎样产生的呢？首先只有在提供了专门职业的文化中，数学才能得到某种程度的发展。其次必须有符号体系，原因是：(1)所有的人类活动都基于象征表示，而象数学这种具有抽象本质的活动就绝对需要符号体系了；(2)符号是交流与传播数学思想的媒介。与上述二条件相结合的还有第三个条件，即必须有某些使数学思想得以传播的手段。仅仅依靠符号的使用而无需复杂工具及昂贵仪器，数学就能得到广泛的发展，而这是其他领域做不到的。甚至在因国际政治冲突造成传播障碍的情况下，数学在现代的发展中也不曾表现为不同的文化领域。

R. L. Wilder

89. 当今，数学在演变力量和传播力量的复杂影响之下成长着。许多作者强调了一个数学家在选择其研究方向上的自由度。我们还是要承认，只有那些与数学的演变如此有关以致以某种方式被证明是硕果累累的数学构造才能得以发展并生存

下来。例如，随意建立假设系统并称之为数学并不一定是数学。然而，今日（因为与现存数学缺乏关系而）不是数学的东西某一天可能成为数学。

R. L. Wilder

90．然而看来有理由期望，一旦一个能够提供研究沃土的数学新分支存在于足够多的数学家头脑之中，这个分支就将沿着与推进该分支的数学家的个人气质无关（除去纯细节方面）的方向发展。先是出现许多重复性的结果，该学科的活动达到了最热烈的程度，继而兴趣开始衰落。衰落可能是因为最重要的、最有兴趣的问题已经解决，也许是因为这个分支已经被包容更大领域的数学新分支所吸收。最后只有分散的工作者滞留在原分支中，而主要的年轻人则忙于新理论的工作。

R. L. Wilder

91．在给定的文化中，数学家具有一个特殊文化，即数学的特殊文化；这个特殊文化不但受到其它数学文化的影响，也要受到它所栽入的、更大的文化的影响。当然，在一个文化中，数学的发展方向要受到文化的需要和属性的引导，这些属性包括宗教的，哲学的，农业的，航海的，工业的

以及数学的。

R. L. Wilder

92. 数学中出现了各种各样的时兴方式，这些方式所遵循的进程与文化中其它部分各种方式的进程并无不同。一个处于本世纪前期的数学家可能会对今日的数学感到吃惊。就象在人类事物的其他领域一样，长者对年轻人所喜爱的新方式总是兴叹。

R. L. Wilder

93. 简而言之，数学是我们造出的，这不是在对我们文化中的数学组成不予适当考虑的情况下造出的，而是根据旧的寻求建造新的理论，根据我们对数学发展需要的了解去解决悬而未决的问题。直至我们造出之前，它並不存在。並在已经造出之后，它甚至也可能在将来的某个时候不再是数学。

R. L. Wilder

94. 数学科学和所有其他活生生的事物一样有其自然的生长规律。

C.N.Moore

95. 有着以取得一般文化中的高水平为目标的良好训练，这种训练是各种学科的基础，没有这种良好训练就不可能有数学上的良好训练。这一点是必要的，只有这样才能从其他地方得到清晰的思想，并且再独立地、清晰地陈述这些思想。

F.C.Racine

96. 正是由于数学的方法的万能性和广泛性使得它能够处理种类众多的问题，如空间的和运动的，机会的和概率的，统计学的和社会科学的，艺术的和文学的，逻辑学的和哲学的，伦理学的和战争的，音乐的和建筑的，战争的和政治的，食物的和医药的，伦琴射线的和晶体的，遗传的和继承的，人类思维的和电脑的。

Jagjit Singh

97. 数学之所以能够以令人吃惊的程度深入到科学和技术的每一个分支中去，其原因在于数学的思想是纯粹抽象的，而抽象化正是科学和技术的主要动力。数学越是远离现实(即走向抽象)，它就越靠近现实。因为不管它显得多么抽象，它归根到底还是从某些现实范围中抽象出来的、一定

的本质特征的具体体现。

Jagjit Singh

98．我们不能在同科学、教育和研究的关系中过分地强调数学。这一条总是对的，但是数学从未象今日这样意义重大。基于控制论和自动化的科学中的新革命在本世纪末可能将十分活跃，它可能对人类产生比人类史上任何一次都要大的影响。控制论革命会给数学带来新的重要性和新的作用。由于这些原因，以及其他原因，一件重要的事就是尽力把印度置于以后十年间的“世界数学地图”之上。

Indian Education Commission

99．纯数学家提供了一个知识宝库，而应用数学家利用这个宝库。重要的是要使这个宝库永不耗尽。在今日的数学家生产新数学的速率之下，我们除去宝库的大小不适宜之外不必担心它会被耗尽。

H.Montague and M.Montogomory

100．逻辑是贫乏的，而数学是最多产的母亲。

Anonymous

101. 搞数论的人可以和贪图安乐的人相比。它是极吸引人的，一旦你试过它，其它的数学活动可能会显得有些乏味。

D. Hilbert

102. 在教育未来的纯数学家和应用数学家时，我们所应该尝试的是使他们准备同他们的科学一齐成长，给他们以对于数学的连续变化的知觉以及发展他们对数学和其他科学的关系的理解。

L. Bers

103. 不大严格地讲，大多数物理应用中所采用的决定性数学模型是基于这样的观察，即一旦一个物理系统各成份之间的局部相互作用决定了之后，它的总体行为也就被决定了。对于非物理过程，总体行为往往不能通过局部行为的观察得到满意的预测，因此统计方法以及象自动机理论、形式语言理论、图论和组合数学这样的数学分支就成为有用的了，它们都处理总体结构。

W. C. Rheinboldt

104. 尽管一个数学家感到他在发展其理论时有完全的自由，但我还是认为数学实际上是人类的集体努力，是人类理解世界的更一般的努力的一部分。尽管我们看不到惊奇的事，但我们还是可以说，数学的任何一个有意义的部分都至少有一个机会被发现是令人愉快和惊奇的。

L. Bers

105. 在对日益增大的数学知识总体进行简化、廓清和统一化时，抽象是必不可少的工作。但是抽象不应该被用来把数学和其来源隔断。

I. Kaplansky

106. 数学的力量是抽象，但是抽象只有在覆盖了大量特例时才是有用的。

L. Bers

107. 一位应用数学家比一位纯数学家在选题方面的自由要少。因此在应用数学的教育中要特别注意今日数学的发展以及设想中的未来发展。

L. Bers

108. 应用数学的范围很广，可以借用阿尔伯特·

爱因斯坦的话来描述："它的领土相应地定义为那些能被数学术语表达的知识的总和。"

C. C. Lin

109. 一般地说，应用数学是一个领域，是经验科学与纯数学之间的活动。它在实质上可以用态度、方法和思考方式来刻划。其主要论题是数学与科学间的相互依赖。与纯数学共同之处是，应用数学也对新数学的发展感兴趣，但它主要强调被科学问题直接地，或者至少是强烈地促动的那些方面。与理论科学共同之处是，应用数学家通过数学方法寻求科学事实和物理现象的知识以及对它的理解。

C. C. Lin

110. 尽管应用数学家懂得并欣赏证明的严格性，但他不能因为这些考虑而变得消极。但是当他创造新的数学时，他应该做这些事，包括象纯数学中那样严格的处理。通过数学媒介抄近路以穿过传统科学，这种愿望和能力大概是一个应用数学家的主要特征。

C. C. Lin

111. 我深信应用数学中有价值的、有生命力的成

份全都是基于不同领域的思想和动力之间的相互作用的，伟大的成就作为成果，总是由于一些具有独创能力的人致力于多个领域才获得的。必须不遗余力地强调数学科学的整体性。

R. Courant

112. 数学和数学的概念为现代科学与现代工程提供了公共语言。这种语言以及数学方法在科学与工程中得到越来越大的运用，这种趋势大家都是清楚的。

R. D. Toupin

113. 应用数学是这样一门科学，它的献身者基本上着眼于使用以数学为统一成份和主要来源的工具去回答主要是来自于数学外部的问题。

G. F. Carrier

114. 应用数学的未来发展将大大地依赖于数学与科学两方面的发展。

J: K. Hale

115. 应用数学的统一特征是态度而不是题材。在现实事物中运用数学技能并让现实去影响你对数

学所要做的事情的选择，生活就是这样，这就是令人兴奋的事。

R.E.Gomory

116．数学是有活力的和不断增长的。数学是一门艺术，因为它创造了显示人类精神的纯思想的形式和模式。它已经成为最伟大的人的属性之一，因为它是一个表达、解释和交流人的全部行为的方法。在具有清晰的、严格的和逻辑的结构方面，它仍然是科学的王后。这样，当研究者在其他科学领域探索发现我们宇宙的物理的、生物的和社会的现象时，数学成为完善这些学科的理想和目标。

H.F.Fehr

117．在未来的十年中领导世界的国家将是在科学的知识、解释和运用方面起领导作用的国家。整个科学的基础又是一个不断增长的数学知识总体。我们越来越多地用数学模型指导我们探索未知的工作。

H.F.Fehr

118．数学领域在二十世纪已经被新的、有力的、令人振奋的思想所丰富。这些新概念一方面是想

象力的有趣创造，另一方面在科学，技术，甚至在所谓人文科学的研究中也是有用的。现代数学和数理逻辑已经使下述事情成为可能，即不但在物理和工程中应用数学，而且在工业规划、医学、生物化学、生物物理，以至在哲学和语言学问题中应用数学。

H.F.Fehr

119．在过去的六十年中，数学的分支总数和种类都有了很大的增长。新的知识分支在数学方法的基础上被创造出来了。其中可以提到的有试验设计，数学人口理论，风险理论，符号逻辑，生物数学，因子分析，质量控制，通讯的数学理论，信息论，策略和博奕理论，线性规划，周期图分析以及时间序列和统计决策理论。尽管不是所有这些理论都已经产生了与其数学结构等量齐观的实践结果，但是在创造这些分支的各领域内工作的人们相信，数学方法在总体上是有益于他们的特定领域的。

H.F.Fehr

120．学习任何数学主题的第一步是发展直觉。

C. B. Allendoerfer

121. 我们感到有可能和比我们水平高许多的数学接触，这种数学的力量与美尽管只能简单地一瞥，也构成了丰富我们的思想的基础，並在我们作为数学使用者和数学教师的朴素活动中给了我们长期反省的机会。

L.Felix

122. 数学家们从未对他们的科学取得一致意见，尽管数学被认为是自明的绝对真理，是无可置疑的和确定的。他们一直在对数学的发展方向争论，一直认为他们自己的时代是一个危机时期。

H.Lebesque

123. 数学的一个无可置疑的特征是，它在实际上是不可比拟的严格语言。

L.Felix

124. 十进计数法的发明恐怕是科学史上最重要的成就。

H.Lebesque

125. 二十五个世纪以来，数学家一直惯于纠正他

们的错误——並且他们看到了，他们的科学因此而丰富了而不是贫瘠了。这使得他们有权平静地注视未来。

N.Bourbaki

126. 现代数学带着两个急迫要求出现于科学中。一方面，它渴望在所有的方面冒险，无畏地甚至是性急地走到前面去为一些领域做准备，使得这些领域中的研究者能够专心于物理学的需要，或甚至专心于其个人好奇心的需要；另一方面，数学打算重建大厦的支撑，使其基础更加宽广，足以广泛地支持最近的将来所要出现的一切，这种打算所基于的条件是，只要上述事情是可以预期的，並且有人具有足够的勇气去竖起给各种理论以合适位置的新结构。最后，数学又从旁监督这个结构的建立，甚至硬说它有权对其整体的牢固性做出评价。

L.Felix

127. 也许和物理学家相比，数学家更加不曾得到一门科学完成了並且没有疑问了的印象。有时以失之于严格性为代价涌现出大量的发现，也出现了矛盾；有时又从事宏伟的组织化任务；但当正

在充满信心地开始前进时，却又出现了某些流言蜚语。

L.Felix

128. 我们清楚地认识到在如下两组人之间有着连续不断的冲突：一组人是研究者，他们甚至在不安全时也关心着前进，坚信以后总有一天能巩固征服了的领土；另一组人是批评者，他们尽管在直觉才能和创造天资上都不弱于前一组人，但还是不相信花费工夫对精确表达式与概念进行严格证明的这种“徒劳”。

N.Bourbaki

129. 就此而论，在数学中，或者在其他任何方面都没有靠演绎逻辑获得发现。发现产生于有创造性的想象，这种想象有时靠类别，有时靠审美思想，但它根本不是成立于牢固的逻辑基础之上的。一旦得到了发现，逻辑便介入并进行控制；正是逻辑决定这发现是真理还是错觉，因而逻辑的作用尽管极重要却还是第二位的。但是从严格的观点来看，一个证明若没有完成，它就不存在。

H.Lebesque

130. 一个人必须同时考虑一个非形式的理论和这个理论的合理的形式化，只要其中的每一件事都是依其证据首尾一致地确立着。因为它们所牵连和所承认的证据在非形式的与形式的方面並不精确地相同。

Gonseth

131. 一个未经解释的符号化表达仅仅是个记号游戏；只有当它有了含义，只有当有人使用了这些符号和符号游戏的解释，它才是一门语言；不能把直觉的作用降到次要的地位。

Jorgensen

132. 今天，拓扑的天使和抽象代数的精灵为每一个数学领域的灵魂而斗争。

H.Weyl

133. 数学家必须探索他工作的领域，观察他在那时发现的数学实体，观看它们的生存，这样做可以说是为了认出其性质以及这些性质的重要意义。

H.Lebesque

134. 不可压缩流体湍流的统计力学要求对可测函数变换的研究，这又与一定的代数有关，其中还能引入拓扑学。

Kampe De Feriet

135. 数学的连续性常常受到了各种威胁，但又总是保持了下来。如果我们希望正确地观察当代的数学运动，我们就必须牢记这种连续性。以连续为依据的证明就象以内在美或效用为依据的证明一样重要。

L.Felix

136. 数学对具有代数和拓扑结构的抽象集合进行研究。数学越来越成为综合的和多价的。它的进展主要是靠对每一理论的最初结果进行扩展，目的在于推广性质和统一那些具有公共结构的理论——如许瓦尔兹所说的是“合成与统一”。

L.Felix

137. 现代数学与它所扩展的早期数学是相连贯的。通常，这不是没有冲突的，但是它比以往更加快速地改变着科学的面貌，改变其结果的内容，

改变研究对象的选择以及工作的工具。另一方面，数学比以往更密切地接触其它科学，尤其是物理学，因为这两门科学感到了来自共同的灵感的支撑，並肩并肩地走向未来的发展。

L.Felix

138. 我们生活在伟大的数学思想更新时期，这是不可估量的好运气。如果不从提供给我们的大量新鲜空气中获益，不是再次发现青春与热情，那就与我们的使命相违背了。因为在我们被邀来回顾价值时，数学正在打扮得年轻、美貌，变得更加有用、更加丰产。

L.Felix

139. 我敢说，若不是因为有了毛泽东思想的指导，我就会满足于我的过去。沏上一杯茶，点上一支烟，我的时间就能全部用于我深感亲切的、熟悉的数学，而不顾四大洋五大陆的狂风暴雨。不用费过大的力量，我每年都会写出大量的学术论文，得以扬名並得到平静、舒适的生活。我可以教一点书，指导指导学生，並且无保留、无歧视地把我的专门知识教给年轻的一代。我以为这就是我的责任，但是我受到了启蒙。我明白了，

讲其所学、用其所长、学用结合的习惯是与在概念中兜圈子、沉迷于自己所熟悉的术语的空洞讨论那种学习方式完全不同的。

A Chinese Mathematician

140. 应用数学家应该敏感于这样的想法，即某些问题比其他问题更重要。

Greenberg

141. 对许多人来说，战争极大地刺激他们致力于发展数学和技术、科学之间的相互作用。我希望将来在没有战争时，那在知识界与工程界，在社会科学，在经济学，在生物学等等方面处处皆有的巨大挑战能够被清楚地理解，能够对成长着的年轻一代具有说服力，也能够形成对数学家的挑战。

R.Courant

142. “应用数学家”和“应用数学”这两个词恰好表示人的局限和视野的局限。

R.Courant

143. 我希望能找到一种方法说服青年人，告诉他

们不应该留在极其抽象的“安全”领域内，而应该试着在应用方面做一些事。

R.Courant

144. 应用数学家的职责就是生产出有用的算法，使科学家能用以得到数目。

J.B.Rosser

145. 一位应用数学家必须是一个数学家；而要做一个数学家，他就必须时时回到数学环境中去恢复精神。他必须回到本源。同时，他要做一个应用数学家，就必须时时停止做数学家而做科学家。

J.B.Rosser

146. 当你作为应用数学家而试图插足于两个阵线时，就会有一种危险。你忙个不停，你抽出一支脚，当你放回这支脚时就会发现两脚在同一阵营了，这时你不是应用数学家而是纯数学家了，或者你根本不是数学家而成了一个物理学家或工程师了。

J.B.Rosser

147. 应用数学包含着对特定问题的定量结果的

强烈愿望，但又着眼于数学方法的可能推广，並且对创造新的数学技巧尤其抱有希望。它要求对数学和应用都怀有强烈的好奇心。

J.B.Rosser

148. 应用数学不能在真空中栽培。它和数学所要应用的领域有着必不可少的密切牵连。如果我们试图把应用数学中可能被称为精神的东西提取出来，我们得到的结果可能是一些几乎无用的方法。

W.Prager

149. 应用数学专业的学生在学成时应对相关领域有广泛的了解，对其中的几个领域有深刻的理解，对大量定量问题中的某些问题有着高度激发的好奇心以及做出有意义的贡献的愿望。

G.F.Carrier

150. 一位应用数学家所做的工作的中心是一门艺术。正是由于那种判断力的使用允许他将他的定量规则知识平衡地运用于他所研究的课题，並且从这些定量规则中抽出贴切的推论。他的判断力必须允许他在下述二者之间做出智慧的选择，

一是所采用的数学模型的恰当性，一是所提出的数学问题的可解性，后者最终导出的结果应该能够按照原问题的来龙去脉做出有用的解释。

G.F.Carrier

151. 在一门数学学科远离其经验之源而发展时，存在着一种危险，即这门学科会沿着一些最省力的方向发展并分为为数众多而又无意义的支流。唯一的解决办法是使其回到其源，返老还童。

John Von Neumann

152. 应用数学家不同于纯数学家之处主要在于他更多地了解他的问题在现实世界中的本源，他能够更好地鉴别哪一个问题重要，並且知道传统数学形式在解决这些问题时的优点与缺点。

G.F.Carrier

153. 数学模型的建立近年来变得日益广泛。现代心理学家用与随机变量有关的模型研究学习过程。计量经济学家运用博弈论和规划论发展了全局平衡模型，並用这个模型来理解竞争经济中消费、生产和价格单位间的关系。一些政治科学家正在用n人博弈理论的概念去分析那些控制着立

法机构的权力关系。越来越多的营业商行正在把精细的数学思想应用于管理、库存和生产问题。工程师们在系统分析领域进行集中的研究，这一领域主要也是关于给定操作的仿真模型的。

S.Karlin

154. 应用数学专业的学生应该主要接受基于纯数学的训练。我相信，只有在对数学结构与过程深刻理解並且真正地和其他学科接触之后，一个人才能在应用数学中做出好的工作。

S.Karlin

155. 除了物理科学和工程，现在还有社会科学和生物科学也为数学研究提供新的研究方向。这种研究有两个方面，一是建立以概率论和随机过程为基本观点的模型，另一是模型的规范化要点(优化)，即统计学、博弈论、决策理论和运筹学等范围。很明显，要懂得如何优化目标函数，必须弄懂模型的结构和机理；要合理地构造模型，必须弄明白这个模型有什么用。

S.Karlin

156. 从心理学、社会学和生物学中数学模型的观

点来看，目前的大量文献是关于模型如何适合于经验的。另一方面，管理、经济学和统计学中的模型则更多地涉及它们之间关系的规范化问题（博弈和决策理论）。

S.Karlin

157．在生物科学中的应用为新型数学问题与结构提供了丰富的和迅速扩展的领域。运用数学的例子有血流研究，呼吸的物理学，遗传密码问题，以及一些具有数学味道的生物医学问题。生物数学中的一个热门的、富有兴趣的领域是神经生理学。有一个几乎全部由生物学家发展的，直至最近才为数学家所了解的重要而迷人的数学生物学领域，就是数学遗传学问题以及更一般的群体生物学。费歇尔为此发展了统计学的现代理论，Haldane构造了许多数学模型，並以极高的技巧和智慧分析了这些模型，Wright强调了人口少的效果的重要性及其对进化过程的影响。几位杰出的纯数学家，包括哈代和伯恩斯坦，对数学遗传学做出了贡献。在植物动物群体中的各种机理就太多了，适合这类研究的数学模型才刚刚接触到。

S.Karlin

158. 大多数科学家研究一个实在的世界，这个世界就其本质来说是模糊和不精确的。另一方面，数学家几乎毫无例外地研究一个由精确定义的概念组成的宇宙，并且对任何含糊的或仅仅部分确实的事情抱有反感。照这种情况，我不相信数学，无论是纯的还是应用的，能够对现代科学中大多数问题的系统阐述及合理解决提供合理的框架。

L.A.Zadeh

159. 经过更密切的观察之后，现代科学的许多问题仅有精确的外表，而其后存在着大量的模糊和不确定性。经典数学在涉及这种问题领域时就过于精确了，它不准备描述不完全真理或边界定义得不分明的模糊集合。

L.A.Zadeh

160. 依我看，现代数学的一个主要缺点是它没有千方百计对付模糊这个现实。通过给模糊概念赋以精确意义并进而证明有关这些概念的定理，一个数学家就能够，并且不断地构造漂亮的数学理论，这种理论与作为其动机的问题可能有关，也可能无关。但是往往是，这类理论的应用领域由于忽略了模糊进而排除了不完全真理而受到了极

大的限制。

L.A.Zadeh

161. 我相信，科学家和工程师在面向数学概念和技巧时有一个极限点，超过这一点就有害于他的态度，特别有害于他的创造性。一个过于数学化的科学家和工程师很可能过于全神贯注于严格性而远离那些并不参与数学的问题领域。

L.A.Zadeh

162. 我相信经典数学的概念的框架事实上是增宽的。它必须允许模糊概念和模糊真理进入。计算机时代的出现必然是沿这方向前进的有力刺激。

L.A.Zadeh

163. 几何学是对于画得不恰当的图形进行正确推理的艺术。

H.Poincare

164. 不要问数学能为别的科学做什么，要问一问别的科学能为数学做什么。

S.Ulam

165. 在今日科学与数学中，除去需要少数天才人物以外，还需要比以往任何时候都多的一群有能力的人，他们应能够通过碎小的步子推动大量思想和材料的不断增长。

S.Ulam

166. 有可能在相对短的时间里向优秀的数学专业学生有效地讲授现代物理学的任何分支，因为这些学生在数学方面是成熟的。

E.W.Montroll

167. 有成效的数学家和最好的学生并不全神贯注于严格性，而是着眼于实质概念。

L.Bers

168. 数学革命的奇迹是，数学精确性的机制对于描述模糊世界是有用的。这是令人激动之处。数学在用于求解模糊问题时有时很重要，这并不令人吃惊。令人吃惊的是应用数学有时会有这样大的功能。

L.Bers

169. 应用数学的任务是面向外部提出的问题，适

合这些问题的形式，把它们翻译为数学语言，分析其模型表示的抽象问题，然后是最后的也是最主要的一步，从理论分析转回现实语言并使之合于使用。

R.Courant

170. 数学家更倾向于重技巧而不是重思想，这和重大科学研究成就中的基本优先次序不同。许多科学家是富于想象的，机敏的，但在使用数学工具上常常是笨拙的。此外他们的数学论述常常包含逻辑错误，但这些缺陷不会怎样影响科学。在实验科学和理论科学中都不象数学那样正统，错误的出现和改正错误的过程是科学中有活力的文献的组成部分，并且在发现有价值的结果中起了本质的作用。

S.Karlin

171. 应用数学是一门科学（不是技术），应用数学家是学者(不是技术专家)，应用数学中的教育是一种自由教育(不是工艺教育)，作为其主要目标，这种教育包括关于对纯数学与科学间相互作用的全部写照的知识与恰当理解，以及对为增进这种合作关系从事创造性工作的能力的增长方面

的知识与理解。

C.C.Lin

172. 我愿大胆地提出综合应用数学家(*Comprehensive Applied Mathematician*)的概念，他既不是对理论科学的某些专门方向感兴趣的纯数学家，也不是在与其职业（密切）相关的数学中具有广泛知识的理论科学家。这种人对应用数学有贡献，但主要尽忠效力于其它地方。他们中的一些人可能毫不迟疑地撤回其私人避难所，并置应用数学于不良状态。然而又不能责怪他们，因为他们主要关心的不是应用数学。如果在应用数学的全部写照中没有综合应用数学家，我们就不会奇怪为什么有人评论说，可能有应用数学，但没有应用数学家。

C.C.Lin

173. 综合应用数学家(*Comprehensive Applied Mathematician*)是这样一些人，他们对数学与科学间的恰当关系有完全的理解和欣赏，并以各种方式致身于进一步巩固这种关系。这些人应该在数学与那些具有简单数学公式的科学的基本方面之间的相互作用方面具有知识。他们应该有能力

在理论科学方面从事创造性的工作。他们应该有能力解决在他们自己的科学工作中出现的数学问题，并且有能力把它们阐述为数学定理。首要的是他们应该对应用数学有深深的感情上的依恋。实际上罕见这种在上述各项准则中都能达到高标准的人，但是一组职业应用数学家必须能够这样做。

C.C.Lin

174. 在应用数学中一种特别具有挑战性的活动是发现应用数学的新思想并在至今没有系统地使用数学方法的科学领域中发展数学理论（社会科学和生物学是常提起的例子）。这些努力可以导致新的数学思想和定理（通过抽象，推广和别的工作），这就其自身而言就是纯数学的一部分。认识这种二元性对于应用数学的精神是必要的。强调了这种二元性，显然就强调了应用数学与纯数学，以及应用数学与实验科学间的差别。

C.C.Lin

175. 应用数学不包括所有的科学。它仅仅是与所有的科学重叠。这种重叠的程度可大（如在物理学中）可小（如现在的生物学中）。实际上正是这种重叠的扩张才是应用数学家应该关心的。因此，

应用数学家通过其从事各种数学应用的经验而得到的智慧使他最有能力判断，数学的功能在什么科学领域或问题上最有效。

C.C.Lin

176. 应用数学家的努力导致新的数学思想和理论的创造，并且由于这种数学理论的来源，它们更适合于其他科学分支。

C.C.Lin

177. 应用数学家的论述总是认真的和训练有素的，但他不是一个仅仅对形式美和抽象功能感兴趣的演绎逻辑家。但他还是应该在纯数学方面有足够的背景以使他能区分严格的证明，清晰的演示，合理的争辩和有希望的推测，所有这些在应用数学的研究中都是用得到的。

C.C.Lin

178. 不用借助任何自然现象，理性就能感知一件数学工作的价值，它的美以及它的存在，玄学通常认为自然是独立于人的知觉而存在的。在这种玄学及无法证明的断言的制约之下，一些人发现了很神秘的事，即数学和自然有各种关系，或者

科学已经影响了数学的发展。

R.D.Toupin

179. 应用数学代表了数学、科学和工程中的一定的趣味和风格。在数学一方，应用数学倾向于为那种已与科学、工程有着确立了和证实了的关系的领域确定其重要性。在科学与工程中，它倾向于在下述方面把自己区分于这个大领域：选择可用数学表明的问题，以及在系统阐述科学和工程问题时，更大地依赖于数学方法。

R.D.Toupin

180. 一位应用数学家首先是一位数学家，然后才是一位科学家；一位数学科学家首先是一位科学家，然后才是一位数学家。

Anonymous

181. 我们正处于这样一个转折点：符号计算可以给出级数展开的五项、十项或五十项，甚至二百项；若用手算，一项还相对地容易，算二项就勉强了。这是一个主要的转变并将在数学与科学的几乎所有关系上产生重大影响。

J.W.Tukey

182. 有三件事，一是数学的肯定性，二是对科学的类比概念性思考，三是已充分发展的数值分析与统计数据分析中的不确定性，要是期望所有的应用数学家都能同时正视这三个方面，那就是远远过多的要求。但是对他们中那些适于承担所有三个方面的人提出要求似乎是有极大的重要性的。

J.W.Tukey

183. 专门化长期以来被看作把数学分成多个相分离的领域，它导致了更深刻的理解，并似乎在创造着数学中的新的统一。

L.Bers

184. 在许许多多应用数学中，非数学题材学起来相对地容易，例如，生产规划问题。

R.E.Gomory

185. 数学应用新领域的首要特征是其巨大进展，这样在其不断成熟时，如果不对数学所要应用的领域有更多的了解，那就越发难于对这种应用做出有意义的贡献。

W.Prager

186. 当技术发展到一个新的陌生领域时，工程经验变得不相干了，实验方法成为昂贵而不可行的了，直接研究已不可能，这时指导设计的唯一方法是取代了实验的更精细的计算。计算机不仅允许极其快速的计算，而且允许人们甚至迫使人们用一个新鲜的观点去看待问题。过去，应用数学家被迫过于经常地采用粗略近似，因而是面向那些时时变化的最特殊的情况。所有这些都是令具有美学感觉的数学家反感的，他喜欢基础的而不喜欢近似的，喜欢一般而不喜欢特殊。最后这种人不得不按其自己的风格工作，这样他才能达到实效。

P.W.Lax

187. 社会十分尊重数学，这可能不是因为这门学科的内在美，而是因为数学是社会极其需要的一种艺术。

L.Bers

188. 看来不证自明的是，我们敞开使数学和自然科学交流的渠道。

M.Kac

189. 应用数学是我碰巧知道其一个应用的数学。我认为这包括了数学中的几乎每一件事。

H.O.Pollack

190. 有一件事就要发生，这在工程中是常见的，在数学中却是罕见的。将有一个数学研究潮流，它从工业界流回研究生院，甚至流回大学课程。数学的许多分支可能会从工业中开始。

H.O.Pollack

191. 一门应用数学给公众的印象是，它能对从物理世界得出的特殊问题提供独创性的解决方法，这种印象必须改变。

H.O.Pollack

192. 应用数学的任务之一是设立那种使无论多聪明的使用者都无法超过的标准。

H.O.Pollack

193. 你既不应该证明那种完全合理性，也不应该证明那种完全不合理性。前者使学生厌烦得要死，而后者使学生对数学失去信心（例如巴拿赫-塔斯

基悖论)。

H.O.Pollack

194. 连续数学的成见约束了离散数学的成长。然而将来会在与组织复杂性问题有关的组合数学中有一大挑战。十九世纪克服了简单性，二十世纪前半叶取得了解决非组织复杂性问题的胜利。科学必须在二十世纪后半叶学会解决组织复杂性问题，因而组合数学对于人类的未来具有最大的重要性。

A.W.Tucker

195. 数学之所以变得越发应用广泛，其原因是数学变得越发抽象了。抽象是一种在一个理智观点内包括越来越广的应用的方法。

Anonymous

196. 有能力的数学家将不得不搞物理学、经济学和生物学，等等，但他们可能不被称为数学家。当出现更多种的应用之后，称呼的含义就必须改变。

Anonymous

197. 如果数学是科学之王后，数学家就应该是王

室美德的卫士。

Anonymous

198. 数学是数学，物理是物理，但是物理可以通过数学的抽象而受益，而数学则可通过物理见识而受益。

Anonymous

199. 既然数学家对物理问题做了抽象和理想化，还是应该由他来放松抽象与理想化的程度，以得到更深刻的见识。

B.R.Seth

200. 最令人兴奋的时刻不在什么东西被证明之日，而在一个新的概念被引伸出来之时。

I.Kaplansky

201. 有时，人脑看来不是从事数学研究的好仪器。

I.Kaplansky

202. 如果出现了原子大屠杀，存活下来的人仍将会连续几代地压制和淹没数学，因为它参与了原子弹的发展。

L.Henkin

203. 数学应用的数量和比率正在增长，学生为掌握未预见到的应用所需的装备不是专门化的数学而是能使他们研究新应用的那种最一般的数学的核心。

L.Henkin

204. 不要再相信这种神话，说什么理解数学的方式和出租汽车司机理解汽车一样。

E.E.Moise

205. 每一个孩子都有可能成为科学家，但不是每一个孩子都有可能成为数学家。

Charles Snow

206. 要使数学教学保持良好状态，就必须使它不断更新。当数学知识迅速增长时，这一条尤其正确。

T.J.Fletcher

207. 数学教学也需要更好地与工业与研究中的现代应用相结合，实际上这些应用应该常常用来作为讲授这门课的媒介；如果认为这些应用仅仅是辅助性解释，是肉已烧好后加上的酱油，那就是误解了它们在教学中的作用。但是主要之点不在于这些题材中的可应用性，而是从学生那里唤起对数学的响应。

T.J.Fletcher

208. 数学并不从课本中已完成的定理出发，而是始于丰富而又变化的环境。在得到初步结果之前有一个发现，创造，犯错误，丢弃和承认的阶段。

T.J.Fletcher

209. 数学涉及抽象的过程，这种过程始于具体情况，它认出相应的结构，并用一个结构去解决被另一结构表达的问题。

T.J.Fletcher

210. 目前是数学史上少有的时机之一：一场革命不仅影响了这门学科的前沿部分，而且影响到

其初等基础。历史上数学教学从来没有提出过比现在更多的问题，从来没有提出过更多的要求或呈现出更使人满意的前景。

T. J. Fletcher

211. 应用数学的传奇是知识的传奇之一部分。它是智力的传奇，是人和真理的传奇，是为了能控制自然而揭示其奥秘的斗争的传奇。自然就象一位美丽的女子，人类从文明之始就一直在追求她。起初追求的方法是对自然的崇拜，但科学已经用探索自然的奥秘取代了对它的盲目崇拜，所用的方法是数学、科学和技术。这样做的代价是一心一意地贡献于真理。然而自然从来不会被完全征服，如果人在迎接自然的挑战中取得了一些理智的成功，那就是好运气。

数学的传奇就是攀登智慧之山的传奇。这类似于写作美丽诗赋的传奇，类似于创作美丽图画的传奇，类似于制作美丽雕塑的传奇。通常学生们也进入这种传奇，但它以考试和学位作为结束。他们没有得到真正的目的，并且他们甚至不知道失漏了什么。数学致力于通过物理学、生物学和社会科学征服自然的永久的传奇之中。为此数学家为自然的各个侧面准备了模型并攻克这些模

型，而这种对模型的征服帮助科学家实际地征服物理学和生物学中的问题。因此建立数学模型的确是一门精细的艺术。

纯数学家追求他亲自为其创造图象的女子。这些图象极其美丽。应用数学家不得不追求形象类似但不那么美丽的女子，但她们确实存在。他的征服不是迷人的，但却更现实。

J.N.Kapur

212. 所有对教育感兴趣的人应该掌握的是如下事实：我们关于数学本质的概念已经改善了，我们关于这门学科的技术性知识被大大地改进了，并且，为了科学技术进步，我们对它的依赖大大地增加了。

M.H.Stone

213. 数学中大多数抽象推广来自于描写和解释人的环境的企图，历史上的确如此。这种抽象和推广不仅因其本身有趣，而且常常被证实是能容纳具体的解释与应用的。看来有一种确定的循环的模式。实际情况引起了数学公式，后者又引起推广和抽象，推广和抽象又被发现在新的应用中有用。数学之伟大功能和影响依赖于这种模式的

保持。对纯的或应用的数学，过于强调任何一个而忽视另一个，都必然会削弱二者。

H.Barker and C.Konove

214. 应用数学的首要任务是通过数学概念、抽象、方法和技巧去理解一系列科学现象(物理学，生物学，社会的，计算的以及管理的)。应用数学家同时是一位数学专家和一位万能科学家，他的兴趣和动机来自于用数学的分析与概念去处理高度复杂的或描述性的情况的强烈愿望。这样，应用数学家在其研究和教学活动中实质上对数学和科学都做出了贡献，使二者关系更加密切。

CUPM Panel

215. 一个应用数学家的成功极大地依赖于他在下述两点上的能力，一是对科学情况给出理想的但又有关的数学模型，二是提出关于这种模型的准确的和有说服力的数学问题，这种问题有解出的可能，并又可能有助于对原情况的理解。在这个过程中，他常常必须运用精心的科学判断和细致的数学洞察力。最后，应用数学家寻求使一个好的模型的数学特征抽象化，以使它有更广泛的

可应用性。这常常把他引导到纯数学研究中去。

CUPM Panel

216. 应用数学家所受教育应该包括如下三个成份:

（i）关于现代数学各分支的概念与方法方面的大量知识，以及在与他所感兴趣的应用密切相关的那些数学领域中的大量专门知识。

（ii）对某些科学领域的原则、方法和实践的深刻理解。

（iii）以数学概念和分析正视科学情况的愿望与能力。

CUPM Panel

217. 必须在严格形式和习惯语形式方面将学生们引向数学语言。他应该学会清晰地解释一些基本的概念、陈述和记号。他应该用有选择的数学技巧发展自己的敏捷，应该知道一部分基本定理的证明并得到构造证明方面的经验。他应该懂得抽象和公理化方法的效力。他应该了解数学的可应用性，以及在数学与其他领域之间的建树性的相互作用。他应该开始阅读数学文献，理解它们，并以此为乐趣。他应该学会

从例证和经验中培养好奇心和实验习惯，学会比直接目标看得更远，提出和验证假设。总之，学生必须在数学方面开始成熟，而且开始获取数学信息。

CUPM Panel

218．有很多方法帮助学生在数学方面成熟。可以把他编入为高材生开设的专门的“优等生班”。可以在开始阶段给他布置课内阅读作业，后期再布置学术杂志中较难论文的阅读作业。可以通过“文献阅读课”教授学生。他可以在讨论班或讨论会上做报告。他可以准备一份对他来说是独创性的大学生论文，尽管这不是更高意义上的独创性。还可以为学生开设一种“开发性课程”，由教授指导他发展一批教学题材。一般地，每一种大学课程表中都应该包括发展学生在数学方面的自立、首创和自信精神的工作。

CUPM Panel

219．应该设计一些方法使学生成为学术方面的积极参加者。为学生独立于他的教授们而成为他们的同事的时刻做准备，要培养他独立从事智力活动。这样学生必须日益采取主动，不仅主动地

独立进行证明，而且主动地发展他的想象能力以便能对证明或反证做出猜测，甚至进而通过创造新的概念或理论做出贡献。

CUPM Panel

220．应该合理地安排和表达题材，使得学生总是把数学看作内部有联系的一个整体，而不是一堆相互隔离的领域的大杂烩。这种准备还需要如下几方面的更良好的平衡：一是较好的，系统阐述的数学证明，一是通过解决问题和证明定理的独立工作获得发现的机会，一是数学的和物理的动机。必须使学生自然地明白，数学中有重大意义的方面是提出恰当的问题。

Cupm Panel

221．强调这一点是很重要的，即追随和构成严格证明的能力必须与每一数学领域中的自由伸展的直觉的发展相平衡。一般地说，题材中某些成份的严格处理应该在最早的课程中就出现，并且当学生学到更深奥的题材时，严格的部分应该在长度上增加。但若在任一深度上没有培养直觉都可能造成思想的沉闷。

CUPM Panel

222. 广博，包括应用领域的知识，对最有意义的数学研究具有重大价值。对于那些有能力学习各种课程的学生，重要的是把他所能吸收的知识全部用来构成关于数学的完整图画。

CUPM Panel

223. 许多人断言，不必采取什么措施去帮助高材生：他们好动脑筋，他们渴望对效能更高的技巧得到更深刻的见识，并且他们有能力欣赏数学的精美、眼界和激励。这些人认为这些学生不可避免地要成为创造性的、天赋的数学家。诚然，最常做这种断言的人，他们自己是从各种逆境中幸存下来的。然而相反的例子都未能幸存下来检验如上断言。

CUPM Panel

224. 事实上数学的严格性不是物理学家和工程师生活的方式，这里我们所指的严格性是试图证明所用到的每一件事情；另一方面，数学的精细性却是所有准备从事科学工作的学生所向往的，也是值得他们向往的，这里的精细性是指对许多事情细心地和清晰地给出数学陈述和证明，并且

一般地说是指对我们赖以建造模型的数学块料的欣赏。

CUPM Panel

225. 无论是严密地证明完全可能性还是严密地证明完全不可能性都是不明智的，前者是因为学生们不能看出为什么这样小题大做，后者的最可能的后果则是对数学的拒绝。适度的可能性和适度的不可能性是位于中间的，我们可以坚持并从而大大获益的基础。

CUPM Panel

226. 既然每种动机（数学的和物理的）对多数学生都是富有意义的，我们觉得在其相关之处，二者都应该出现。在展示数学论题之前还是之后，给出一种还是全部两种动机，这当然是个人爱好问题。然而在每种情况下，必要的是要把作为动机的数学或物理内容明确地区别于作为结果的抽象。

CUPM Panel

227. 我们讲“直觉”是指猜测数学性质和猜测数学抽象的局限性的能力，它是靠类比激发抽象

的数学或物理对象的已知性质来达到的。只要有可能，直觉就应该导向严密；在数学的发展中，这二者都不能改变，也不能互相代替。

CUPM Panel

228. 一门为工程师和物理学家开设的数学课程如果不涉及从动机和直觉到精细和严密的整个系列，它就不能是完整的经验。

CUPM Panel

229. 计算机科学与数学密切相关。数值分析实际上是这门学科的一个分支，而在计算机中出现的许多问题则与组合数学、抽象代数和符号逻辑密切结合。但是甚至存在更基本的关系。计算机的内在结构迫使这个伴随领域努力于一般性、抽象性以及对逻辑细节的注重，后者恰为数学证明的特征。计算机科学的研究人员，必须具备数学的精神和技巧方面的知识。尽管他们不必是数学家，但他们必须象数学家那样思考。

CUPM Panel

230. 创造性是数学的心脏和灵魂，创造性发生在优秀教师的初等课堂上，在任何把数学应用于其

他领域的场合都展示出创造性，它在每门大学数学课程中都应该表现出来。好奇心当然是数学的要旨。许多数学研究是在数学家之间的讨论中涌出的。

R.C.Buck

231. 有些数学家坚持说所有的数学都应该建立在公理化基础之上。这并不是说他们要求给出一个适合于所有数学的系统。这当然是不可能的。我们甚至可以给数学下一个这样的定义——如果存在那种使它统一的系统，那么能找到五个数学家同意这个系统就几乎是奇迹了。但是许多人仍断言数学之每一分支或每一部分应该公理化。有些数学家则走另一极端，他们关于公理无事可做，他们的关于数学的概念是，一搞形式化就会把数学实质从形式化了的题材中挤出去了。

R.L.Wilder

232. 我的(几何)书是空间学说的抽象基础，即，它从所有的空间直觉来看都是正确的，它是一个纯数学领域，它在空间的应用产生了空间科学。后一科学既然是关于自然所给的某事物（空间），它就不再是数学的分支，但它是数学在自然中的

一个应用。

Grassman

233. 实际上如果几何是演绎的，这种演绎必须处处独立于几何概念的含义，就象它必须独立于图解一样；唯一允许用来推理的是命题与定义中规定的关系。在这个演绎中，思考各个术语的含义是有用的，也是合法的，但绝不是必须的；事实上若必须这样做，就说明这个证明不是充分的。

Pasch

234. 数学独创于个人的思想之中就象它在历史上是无疑地独创于人类的集体生活一样，这里被承认的方面有，人们共同经验中的一定的递归抽象特征，计数、测量和计算过程的发展，后者又引入了序来对这些特征进行操作。它实际上就是这样发源的；但自很早阶段，它就开始超越实践的范围，而且其特征也经历了相应的变化。智力的好奇心不受控制地向前进而不顾另一个事实，即出于实践的考虑可能长期以来继续是兴趣的主要源泉，并且可能实际上从不停止地刺激着新概念新方法的创造。当数学脱离了它早期对实际功利的依赖时，它的“立即的”意义也同时失去，

而其目标也变成探索是什么东西使“解放了的”数学合法的。

G.T.Kneebone

235. 可以以这样两种方式想象数学：

（i）想象成为基于纯逻辑的所有演绎“理论”的全体。

（ii）想象为以原始直觉功能为其最终源泉的自主推理活动。

G.T.Kneebone

236. 数学作为理想的命题总体而存在，而数学家工作的目的就是发现这些命题并用它们形成理论，这些理论付印成书时，就是数学。

Logistic Thesis

237. 数学、科学和语言构成了人的活动的三种主要功能，人靠这些功能支配自然。这些功能的起源要在思想的数学态度中，在数学抽象中和在意志的确立中发现。

D.Brouwer

238. 肯定地说，数学任一分支中第一批问题也是

最老的一些问题是从经验中产生、并由外部现象世界提出的。然而在一个数学领域的进一步发展中，人类思想受到求解早期问题成功的鼓舞，因而意识到其自身的独立；它然后又十分成功地从其内部创造了新的、有成果的问题，这常常不靠外界刺激而仅仅靠逻辑组合，靠推广和特殊化，靠分离和装配概念。这样思想走到前面，自己成了问题的提出者。但是甚至当这种纯思想的创造活动正在进行时，外部世界再一次重申其有效性，并通过发生的现象突然对我们提出新问题，而打开了数学知识的新领域。当我们努力把这些新领域带到纯思想领域之下时，我们常常发现著名的未解决问题有了答案，这样我们以最有效的方式同时推进了先前的理论。

D. Hilbert

239. 确信每一数学问题的可解决性对我们的工作是有力的鼓舞。我们在同行之中不断地听到这样的号召：那里有问题，要设法解决。你通过纯粹的思考就能找到答案。

D. Hilbert

240. （i）数学被想象为关于能被演绎地掌握的

概念系统的一种纯的、理智的理论，这种系统同样可以从经验抽象而来，或自由地假定出来，而且在抽象数学和具体经验之间有着不断的相互作用。

（ii）数学是一项自主的学习，自由地选取概念、公理和演变程序，它只受相容性这一压倒一切的条件的限制。

（iii）数学是向前看的。数学更关心解决悬而未决的问题以及创造强有力的新概念和新方法，而不是仅仅关心已经赢得的深思熟虑的知识。

Hilbert's Thesis on Mathematics

241. 直觉比以往任何时候都更加成为数学发现的创造源泉，但它今后要利用重大结构类型理论所提供的强大的杠杆，并且它一下子就扫荡了已被公理化方法统一了的广大领域，而这里的一切曾被最任性的混乱压倒。

N.Bourbaki

242. 数学和大多数人类活动一样，总是向未知世界延伸的。数学家不为任何关于什么算做数学的先验限制所约束，而是自由地创造全新的概念与程序。数学只不过是数学家研究工作的产物，他们循着经过二十五个世纪演变和加强了的传统工

作，并总是使他们的结果和理论经受整个数学世界的批判性的检查。

G.T.Kneebone

243. 有时一个数学理论是直接由具体经验提出，再通过抽象过程从这些经验中提炼精华的；有时纯数学及其应用是肩并肩地发展的，二者互相促进；还有时，一个数学理论最初靠纯智力的运用而提出，其后才表明具有意义重大的应用。

G.T.Kneebone

244. 我们将不把数学哲学史看作一种为了给数学提供持久基础的一系列忧郁的、不成功的尝试。相反地，我们将把它看作一个进化过程，并将惊呼道：自哲学这一分支成熟以来，这个过程竟如此迅速而又坚定地发展着。

G.T.Kneebone

245. 人们之所以不能成为纯数学家，其性格上的原因远比任何智力问题更大；只有少数人能够和感情上的困难共同生活，而这种困难又是数学生命所固有的。

D.R.Weidman

246. 数学家必须有能力涉及一系列问题。要搞数学，你就得把整个身心放进去，从各个方面学习它，夜以继日地摆弄它，并把点点滴滴的精力都用于理解它。你能够有，也许应该允许你有偶尔的休息；但这种竭尽心力的状态总是要延续一段时间的，往往是连续几天或几周。

D.R.Weidman

247. 数学家必须冒着失败的危险。事实上在大多数时间里，他发现经数周或数月的不停寻求之后，什么结果也没有，什么思想也没得到，精力也没有了。由于他至少把一些时间完全用掉，这就极其近乎完全失败。这当然严重地影响了他对所有其它事物的看法。我相信，冒完全失败的危险以及几乎注定要输掉的危险，这构成占第一位的心理学问题。

D.R.Weidman

248. 甚至最成功的数学家也因不被人欣赏而苦恼。自然他的家庭和朋友们对他成就的意义没有接受能力，甚至比这还要糟糕。其他数学家也不欣赏对一项看去简单、直接而又琐碎的研究成果中注入的血、汗和泪。数学术语被设计成排除支

节事物而集中于基本过程，但是找到结果的方法远远不同于这些基本过程。数学写作不允许对隐于结果之后的劳动作任何注释。

D.R.Weidman

249. 数学史简单地写道，所有总的轮廓和大多数主要结果是由少数几个天才得到的，他们是不同凡响的数学家。这些大人物们跨大步前进，然后小明星挤进漏洞，做些推广并发现新的应用，同时巨人们又跨步奔向更前方。也许由某些人去填补间隙、进行推广是重要的，而创造数学思想的气氛也是必要的，以便让天才们能发现自我并茁壮成长，但是不突出的数学家都认为他自己不能证明重大定理，因而几乎肯定对自己不满意。这部分地是因为他迎头遇到的问题过于巨大，不能完全解决。

D.R.Weidman

250. 简而言之，我们相信数学注定会生存下去，这座壮丽大厦的主要部分永远不会因为一个矛盾的突然出现而坍塌，但我们只能说这种信念是基于经验的。

N.Bourbaki

251. 下述各点可以作为数学训练之目标：

（ｉ）提出对数学与现实相互作用的理解。

（ii）转达这样的事实，即数学和每一件其它事物一样，是建筑在直觉理解和公认的传统之上的，而这些都不是固定不变的。

（iii）证实数学是一项人类活动，它的历史性标志有发明，发现，猜想(好的坏的都有)，说明其成长的前沿被有趣的未解决问题所覆盖。

（iv）将“权威人物的论辩”与“通过事实和证明的论辩”相对比，解释“没有证明的”与“反驳了的”之间的区别，以及“构造性”证明与“非构造性”证明的区别。

（ｖ）说明“为什么”这个问题是重要的，应该多发问。在数学中，仅仅给出详细证明不是总能构成答案的。

（vi）证明复杂事物有时是简单的，而简单事物有时又是复杂的，并且证明在数学以及在其它领域中，值得对熟悉事物详尽进行研究，以及对看去没希望搞懂的东西进行研究。

R.C.Buck

252. 数学是一门有活力的、成长着的学科。它最好由数学上有活力的、成长着的教师去讲授。那

些在学科前沿工作着的人们倾向于做最好的教员，他们也常常是我们最好的教员。数学家们作为整体是精力旺盛的，充满智慧的献身者，他们自己力争首创，但又把教学看作增进数学的一种方式。数学是有活力的和成长着的，这一条使得数学从教学和研究两方面看都是有兴趣的。

R.H.Bing

253．虽然搞研究和发现数学的新应用也许是进行数学工作的最有趣的方式，但还有其它方法保持数学的严密性。这包括通过阅读数学文章保持对数学中新发展的了解，参加讨论班，参与发展新的教学计划和教学技巧，解数学迷棋和问题以及培训数学教师。最有效率的数学教师是这种人，他们订阅数学杂志，参加数学活动，读书、考虑、深思、计划，又突然加速前进，能够设计并讲授一门他们从未教过的、更好的课程。现在是做一位数学家和一位教师的好日子。事情是动人的。既有兴奋也有争议。

R.H.Bing

254．数学教师不仅要传授事实与理解，还要讲出数学魅力和挑战的闪光。他应该引导他的好学生

们观看数学之美，给他们尝到支配着数学家的兴趣的那种数学型的滋味，启发学生的想象力，并使他们愿意从事和渴望从事长期的艰苦工作，以获得对其具有挑战味道的结果。

R.H.Bing

255．大多数学生将不是从事研究的数学家，大多数不会到达前沿——但他们能更多地欣赏数学，如果他们知道前沿就在那里，知道它（指前沿）不是不可达到的，对它偶一瞥见并认识到它正在被接近了——有时是平稳的，但常常是一阵阵的。

R.H.Bing

256．学习数学思维模式就象学习数学事实那样重要。

D.R.Weidman

257．当今的趋势是考虑由具有共同性质的数学对象组成的大的类别，并通过研究来发现那产生共同性质的相同的结构要素。这有助于铲除不同数学领域间的界限并因而统一这个学科。此外，强调存在于我们不够熟悉的对象与那些我们已熟

知其性质的对象之间的相似性，还有助于对新的对象进行推理。

E.J.Macshane

258. Hermann Weyl 提出过警告说，我们长期以来搞抽象与推广，今后的数学需要发现新的有趣的例子。有些数学对象的主要公共性质实在单调，找到其公共的推广并无多大益处。

E.J.Macshane

259. 在一位数学家试图证明某些事以前，他必须猜想那些内容，在他的证明成功之前，他必须已经决定了证明的模式，这通常是从熟悉的手段中选出片断并把它们组合在一起的。通常他在想做证明之前需要预感，而为做出证明又需要窍门。

E.J.Macshane

260. 显然对几项数学内容的公共推广不可能包括每一实例的每个细节——如果这个推广真的包括了这些，它就无法区别于各个实例了。一个好的推广具有满意的广泛性，而又保留了有趣的实例的味道。很清楚，人们今日的兴趣对广泛要偏爱得多，而对个别例子的迷人之处的爱好却要少

得多。有时发现某推广过程抛弃了一些有价值而不宜忽略的性质，这时发展一个不同的推广以恢复忽视了的东西。在目前的数学扩散速度下，唯一的解决方案是进行合并过程，即把累积信息的总体熔成一个首尾一致的一般系统。在这个过程中，我们大概会丢失许多原想保留的细节。但我们还得到了一个结构，它的美常常抵偿了那些装饰性个体特性的丢失，并使它确保成活下去。

E.J.Macshane

261. 计算的快速成长很可能对数学思想的方向具有长期的影响。分析复杂情况的新方法将为熟知情况提供新的集成，新的抽象结构将从中发展起来。

E.J.Macshane

262. 数学力量的来源之一是，研究上的合作习惯在近期得到发展，这种习惯是在能动地分享思想和举行研究讨论班中养成的。

S.Mac Lane

263. 如果一个人对数学至少贡献了已为他人所使用的一个思想、理论或过程，那他就可以被看

作是一位数学家。

S.Mac Lane

264. 在实验科学中，实验室中发现的事实是起支配作用的，在数学中起支配作用的则是在头脑中发觉的一种素养。这种素养的个性意味着数学家必须对其本身工作的重大意义和锲而不舍的重要性发扬一种特殊的虔诚。

S.Mac Lane

265. 恰当地寄于纯数学的热情不一定与应用数学相抵触，恰当地寄于应用数学的热情也不反对纯数学。甚至公众对应用的热情也是同样，这种热情是不会与对于纯数学的进展全然无知相联系的。

S.Mac Lane

266. 古代印度哲学家的许多美德应归于他们不讨好公众或平息批评的想法所干扰。他们除去已决定要做的工作什么也没有想，他们的一个目标就是使其工作尽量完善。这种令人吃惊的系统是印度不屈而又无畏的思想家们精心建立的，我们的哲学家们则没有人鼓起勇气去树立这种从不怕

暴风与闪电的塔尖。

Max Muller

正是这种无畏的、不屈的、勇敢的、有胆量的思考给了我们数学零，位值系统以及数学中的其它伟大发明，这是我们引以骄傲的。如果我们想把印度再次放到世界数学地图之上，我们必须以同样的勇敢进行思维，并同样地专心致志于此目标。

J.N.Kapur

267．日益明确和迫切的问题是，数学教学应该安排得使学生尽量正确地并且尽量早地接触更新的概念。经典数学贯于以不寻常的技巧和机智研究孤立的、单一的模型。在这种研究中，它发展了几种本身很好的技术。但是在其任一结果中，很难分清多少应该归于符合模型的模式，而又有多少是归于情况的特殊性。与此事实相反，在现代数学中我们从特殊情况中提取抽象结构和模式，并研究这些结构。这种研究的优点在于，如此得到的知识不仅能应用于我们从其出发的特殊的数系，而且也能应用于所有表现出同一模式的其它系统。不能对具有同一模式的不同领域间的可连结性的优美和兴奋之处过分强调。对于结构的研

究除了把看上去孤立的、无联系的领域统一起来，还导致思维的很大的经济化。

U.G.C. Mathematics Reforms Committee

268. 数学结构的主要分类为（i）代数的和（ii）拓扑的（包括分析）结构。在这些结构中使用的语言是集合论语言，研究方法是公理化方法，而所做的推理是我们所称的演绎推理，这种推理和“直觉的”或介绍性的推理完全不同。当我们使用演绎和公理化方法时，我们并不否认直觉思维在猜想一个结果或一个模式时的用处。我们仅仅是想强调，在各种思维过程中，数学证明是最后的上诉法庭。这样，现代数学的精神就是鼓励逻辑推理，推广，发现和发展。

U.G.C. Mathematics Reforms Committee

269. 数学形式的美丽之处甚至超过了（全直径的*）满月的圆轮，因为它在被学识渊博者品尝时，其形式上甚至会增加，这不同于月亮，后者在被天神们品尝时，其形式上是减少的。这门数学科学还具有极不相同的两翼或两侧（如初等除法中

---

* 英文中日月的直径为 12 个digits（数字）。

的方程），这也不同于月亮，后者很难在第一天就见到一个月的两半。说太多了有什么用！在天、人、地之间的动与不动的万物中，哪一样没有数学的帮助也不能理解。

Indian Scriptures

270．数学在更高层的区域内比思想和知识的其它分支包括了宇宙的更加广泛的部分，并已达到其它科学没有到达的高度。也许不能同意亚里士多德关于几乎所有事物可用数值表达的概念，或者古希腊关于球面的音乐按数学尺度移动的想法，但是人类知识的进步已经完全证实了毕达哥拉斯为数学所做的断言，即数学中的关系为自然自身的模式提供了真正的线索。数学并不局限于我们所知的物质和能量的形式。它代表了人类在抽象思维方面的最高成就和胜利。

K.L.Misra

271．数学思想超越时代与地域，在社会的、政治的以及经济的条件之外进行，并且寻求衡量永恒的形式。作为社会和经济条件的产物的通常语言不适合于这种目的，因而不得不发明了一种为进行抽象思维的符号语言。尽管这种语言是抽象的，

但数学为生活的各种哲学提供了新的基础。数学家生活在唯一可被证明为不可非议的世界之象牙塔内，而这种证明依赖的事实是数学家的象牙塔，就象一座灯塔一样照亮了黑暗中的巨大地域，照亮了自然的未被探索的秘密。

K.L.Misra

272. 已经特别地提到过，在工作中使用更理论和更数学的方法的生物学家们，他们精心设计的培养研究很可能在其结果的功能和兴趣方面得到超常地进展。这意味着在生物学家的教育中，数学、统计学、系统理论、计算机技术和理论以及定量方法必须占有更重要的位置。

T.H.Waterman

273. 尽管在生物学的少数几个领域中，形式理论方法已成为重要的，但至今数学方法对于生物学的总的影响还不是很有说服力的。相对数目较小的一批研究者已经在构成生物问题的理论方法方面作出想象的开端。这些方法在其失败以及在其成功方面都是有教益的。它们表明目前数学的某些不适当之处，这就指出为面向生物学应用可能需要构造新数学。这些不适当性的最生动的例子

就是缺乏有效的系统理论，以及如冯·诺伊曼的结论所说，生物官能至少有一个阶段依一种目前未知的数学运行。计算机对其中一些问题提出了解法，但就是不知道要多久它才能引起我们的兴趣。然而生物的有结构的本质以及它与物理学和化学的关系产生了一切希望，即形式理论在我们对生物系统的理解中将具有重大价值。

H.J.Morowitz

274．数学不可比拟的永久性和万能性及它对时间和文化背景的独立性正是其本质的直接后果。

Asger Aaboe

275．数学是累积的，即它从不失去领土，并且其边界总是向外移动。这部分地是其绝对标准造成的，这种标准保证曾经一度为好数学的内容将永远是好的并将保持为有活力的数学知识总体的一部分。这种稳定的增长与物理学的发展形成了对比。古希腊物理学对现代物理学家只有历史的兴趣，而古希腊数学则仍然是现代数学家无法回避的好数学。

Asger Aaboe

276. 一个数学理论从明确陈述的公理出发以一种有序的、逻辑的方式向前发展。一部生物学词典写道，个体发育包含了种系的发育，这意味着在个体的发展中，我们以快速回顾的方式看到了其整个物种的发展。这在修正了的意义上也适用于数学家的种类。数学家的胚胎发育，即引导他从开端走向他所处时代的研究前沿的那种教育，实际上是赤裸裸地沿着数学自身的发展路线的。

Asger Aaboe

277. 每个工作的数学家都懂得在一串缺少活力的形式化命题与一个人对一个数学理论所具有（或试图得到）的“感觉”之间的差别，并且大概会同意帮助学生看到“内部”景色是数学教学的最终目标。

J.Dieudonne

278. 数学中的发现不是一个逻辑问题。倒不如说它是神功所使，没有人懂得这种力量，但那种对美的不知不觉的认识必定起着重要的作用。

Marston Morse

279. 由于数学推理之美，自然暴露了它自己的偏

爱，这在根本上不是偶然的。

C.N.Yang

280. 纯数学使我们能够发现概念和联系这些概念的规律，这些概念和规律给了我们理解自然现象的钥匙。

A.Einstein

281. 明显地，我们希望一个好的证明使用最小的计算量和最容易的方法。证明的最基本思想必须是极其简单的，并且只考虑适合于证明的那些思想。在证明中运用这些思想，应该是看上去必然却又完会意外的。

L.J.Mordell

282. 在这个世界上没有丑陋数学的容身之地。如果读者看到一个定理的证明显得丑陋，那他的明确责任就是找到一个更好的证明。不美的数学是不允许继续存在的。

C.A.Coulson

283. 我们不应该过分地急于发表我们的数学研究或为其著书。原因是这样做时，我们不大可能

适当地处理我们的材料。把本来可能避免的丑陋付诸发表是一种罪过。

C.A.Coulson

284. 数学是人发展的，因而它有各种错误和不确定性。它不是存在于人头脑之外的，它的质量是从创造它的那些人们的头脑中获得的。它也必定在每个学习它的人的头脑中被发展或再发展。在这种意义上，数学只能通过创造来学习。一是数学家发明新数学的活动，一是儿童学习数学的活动，我们不相信能够在这两种活动之间划出清楚的界限。

Association of Mathematics Teachers

285. 数学家十分了解在纯科学和它的规律在生活中的应用之间存在的差别，前者只搞思想，而在后者中他们被迫受到事情的不完美性和偶然性的影响。

Dr.Johnson

286. 我相信总有一天，生物学家作为非数学家会在需要数学分析时毫不迟疑地使用它。

Karl Pearson

287. 我们常常把数学看作一门严格的科学，并且数学也必须是严格的。它是一门运用深难手段的艺术，而那种手段在逻辑上是严格的。无法严格的工作是无价值的。很勉强的工作中会有几处缺陷，而能被数学家严格化的工作实际上可能很优秀。换句话说，科学工作除形式上正确之外，还必须有其它规范。

N.Weiner

288. 数学概念不是因其概念上的简单性而被选中的，而是因为它们适合于精巧操作和极卓越的论证才被选中的。

E.P.Wigner

289. 数学在各智力领域中的独特之处在于它是由建筑于无可争议的公设之上的必然结论组成的塔形大厦，因而它基本上是渐进地和系统地发展的。

B.Thwaites

290. 数学的实践必然为计算机所完全改变；从历史观点看，我们现在的笔和纸将被比做石器时代的勤劳方法。

B.Thwaites

291. 必须比过去更加多地强调离散数学。在较初级阶段应该详尽地介绍有限集及其上的封闭二元运算，而不是无限集的概念。无论在哪一个水平上，再也不能在学生面前把数学描述成由被天赐规律决定的证明、论证和争辩组成的系统。必须有意识地、及时地对我们的学生进行算法方面的教育，并辅以启发方式的教育。必须明确地教导他们，任何数学方法及其成功的机会必定依赖于可运用的手段及所得结果的用处。

B.Thwaites

292. 下述各项任务对超大规模确定性程序的发展提出了迫切的要求：求解数学物理中的某些典型方程；严格检查中小学和大学的数学教学大纲；有计划地用标准程序补充数学表；建立发展精细操作技术的研究组；以及在利用计算机进行教学方面搞试验项目。

B.Thwaites

293. 初学者解决一个巧题时得到了快乐，数学家掌握了更先进的问题时也得到了快乐，在这两种快乐之间没有很大区别。二者都观看美丽动人之处——即支承着所有结构的那种匀称的、定义分

明的、神秘的和迷人的秩序。

M.Gardner

294. 计算机不是在代替数学家，而是在抚育数学家。一台计算机可能用不了20秒钟就解决了一个棘手问题，但为这问题编程则可能耗费一组数学家的数月时间。此外，科学研究在理论的重大突破方面正变得越来越依赖于数学家。别忘了，相对论革命出自一个没有实验室工作经验的人的研究成果。目前，科学家们被三十来个基本粒子的反常性质挡住了去路。有那么一天，一个伟大的、创造性的数学家，或者独自一人坐在那里，纸笔相伴，或者在他刮胡须时，或者在与其家庭共进野餐时，在一闪之间悟出了奥秘。这些粒子将转到它们的指定地点，按顺序排好并且按照不可改变的规律构成美丽的图案。至少这是粒子物理学家们希望发生的事。

M.Gardner

295. 数学不仅在摧毁着物理科学中紧锁的大门，而且正在侵入并摇撼着生物科学、心理学和社会科学。会有这样一天，经济的争执能够用数学以一种没有争吵的方式来解决，现在想象这一天的

到来不再是荒谬的了。

M.Gardner

296. 数学问题的研究逐渐地把我们引向比数和形状更复杂的概念，这种过程发展的结果可能是在理性世界中无法再作解释的解释。这些新概念自然提出了无数问题，为解决这些问题我们又在充满生气的环境中引入甚至更抽象的概念，然而这就离数学本质越来越远，也就使数学家们越来越远离物理学家或工程师们对他们提的问题。这样有人会说，原则上现代数学就其大部分而言是没有功利目标的，它构成了一种“效用”为零的智力领域。抽象理论有可能在某一天发现其有意外的“应用”。尽管如此，从来不是这种无法预知的应用引导了数学研究，而是那种用数学现象去理解其自身的愿望推动了数学研究。

J.Dieudonne

297. 无疑问，由于数学的历史起源，许多人发现数学的观点是用其自身解释的，是难以令人接受的，他们总是要求数学为某些东西“服务”，而数学竟然仅仅是文化“奢侈”，这真令人震惊。数学家只不过要求人们承认他们与其他学者，如与天

文物理学家、古生物学家、或诗人有同样的理解权利。当今至少百分之八十的数学家对于数学的应用毫无兴趣。

J.Dieudonne

298. 现代数学的许多研究与科学家、工程师、经济师、经理人员、社会学家和其它数学用户完全无关。但是，Dieudonnes 给出的图画看来有点儿过于绝对。似乎确有一部分现代数学具有实践的兴趣，同时也具有诗人般的兴趣。

W.W.Sawyer

299. 二十世纪初的数学家的目标是澄清十九世纪数学家没有搞清楚的那些逻辑要点，解决十九世纪数学家没有解出的那些问题，对回答得笨拙的问题给出干净的答案，对讨论得浮浅的问题深入识破其原委，统一原来分离开的东西，推广原来作为特殊情况处理的东西。一件二十世纪的发现会被认为是极有意义的，因为它照亮了十九世纪的一大部分问题。一点儿不谈论上一个世纪而只介绍本世纪数学，就好象不解释前两幕剧中发生了什么，单单表演第三幕一样。

W.W.Sawyer

300. 向年纪幼小的儿童教数学是最容易的，因为他们有着求知的欲望，他们是自信的并按其自身需要理解事物，他们不同于许多成年人，他们的信心未被拙劣的教学动摇过。

W.W.Sawyer

301. 没有数学语言的帮助，具有复杂组织的商业就会延缓发展，甚至停止发展。在管理科学中也同在其它科学中一样，数学成为进步的条件。

A.Battersby

302. 如果一个学生要成为完全合格的，多方面武装的科学家，他在其发展初期就必定来到一座大门并且必须通过这座门。在这座大门上用每一种人类语言刻着同样的一句话："这里使用数学语言。"

Q.Hogg

303. 实际上，我们的学校的成绩在一个方面常常是消极的，那就是学生们学习后不但对数学符号冷漠，而且感到它们可怕。因此我们发现，聪明的企业家的头脑对数学的刺激性挑战紧闭着。但还是有这门学科，它从纯哲学的形而上学起一直

伸向商店地板上有关价格的确定的事实，它也是唯一的一门既可以授艺术学士，也可以授科学学士学位的学科。

A. Battersby

304. 认真的经理人员遇到进退两难的处境；一方面他对他理解数学语言的能力缺乏信心，另一方面他可能在其周围发现了从这种语言中不断长大的金融利益数组。这种结果是一种迷惑，在极端情况下是一种下意识的内疚。某些数学家的傲慢态度对这种情况是无助的，他们把不熟悉他们语言的任何人视为低能，并且还费尽苦心地把自己的观点隐瞒起来。

A. Battersby

305. 数学能给出更高的见识，但不应该以丢失普通见识为代价；数学能给出重要结果，但这只有在一个人真正使用他的头脑时才有可能；最后，数学能通过铅笔给出重要结果，但要假定一个人知道如何使用铅笔。

Anonymous

306. 数学命题既不是分析的逻辑真理，也不是从

属于确定经验的综合命题。这些命题既不是无谓的重复，也不是经验推广，但它们还是必然为真的。但是逻辑命题和数学命题是独立于题材或独立于对经验主体的参照的。应该认为数学和逻辑是相互连贯的，因为它们都处理数学系统的形式性质。亚里士多德的逻辑不是纯形式的。它考虑部分几何的形式以及基于这类形式的某些推断。逻辑的严格的形式部分与数学是同类型的，而研究各种语言形式的含义的那部分逻辑是不同的领域。

S.Radhakrishnan

307．有一种紧张的脑力斗争，其目的为在脑的深层构造之间发展有意义的关系，数学研究是这一斗争的另一名字。这种斗争在真正的深层不能立即成功，但一旦成功就会引起一个突破，就会有一大批关系接踵而来。突破前的初期斗争就是数学研究的心脏。

J.N.Kapur

308．为在数学中证明一个陈述的正确性，我们必须引用其它陈述，而后者又必须要用进一步的陈述来证明其合理，如此等等。并且每个陈述都将

包含某些术语，这些术语必须在讨论中明确地定义。但是一个给定术语的定义将要用到其它术语，后者的定义又要引入进一步的术语，等等。这可能在我们的辩论中引起“循环推理”，或引起“无穷回归”，这种情况应该避免。因此我们必须在讨论尹始接受一些不被证明的论述和不被定义的术语。并且我们还必须明确地指出我们在讨论中所遵循的那些推理规则。

V.S.Hazurbazar

309．数学主要地是一项青年人的游戏。它是智力运动练习，只有具有青春与力量才能做得满意。许多青年数学家在发表了一两篇有前途的论文，显示了其能力之后就沉陷于包围昔日英雄的同一困境之中。

N.Weiner

310．如果数学家的生涯根本不违反气候规律，那他就必须为发现新领域及新问题而发展他自己春天般的最高创造能力，这种能力包括他一生所能竭尽的丰富性和引人注目的特征。

N.Weiner

311. 具有创造性的艺术家，甚至还有具有创造性的音乐家都比数学家能更好地吸引外行读者的注意力。很容易使外行人信服，无论他自己是否没迷于这些创造性工作，对这些艺术家创造活动本质的了解程度总是他的教养的组成部分。外行人并不认为对数学的起码的了解是其美学的以及教养的应有组成。对他来说，数学好象是一门沉闷的、枯燥的和形式的学科。如果公众也考虑过数学，他们最好不过把它看作物理学家和统计学家的一种工具，最坏则把它看作和会计类似的工作。非数学家几乎不会承认数学具有文化和美学的感染力，也不承认它和美、力量以及感情有任何关系。我绝对地否认这种关于数学的冷淡的和僵硬的概念。

N. Weiner

312. 数学家的任务是使用一种严格的、苛求的手段来为宇宙的某些方面做出新的和有意义的美景，表现和揭示其新颖动人之处。如果说他的手段是严格的和有限制的，那么所有有创造性的艺术家的手段事实上也都是这样的。

N. Weiner

313. 把艺术的数学家的感染力区分于艺术雕刻家和艺术音乐家，不是因为公众缺乏感情，而是因为要成为数学的鉴赏家必须接受严格的训练。

N.Weiner

314. 数学家脱离其公众的表现，并不主要是因为一种智力美学的势力观点，而更多的是因为一个业余爱好者只有达到很高的必要训练水平才有可能欣赏展示给他的那些内容，还因为如果缺少这种技术上的欣赏力，外行人似乎根本没有可以感觉任何事情的渠道，哪怕仅仅是被动的感知。

N.Weiner

315. 然而，对于学科审美侧面上的各种观点的真实个性，数学足以在事实上使合作成为可能，并使意见上的差异得以在非个人基础之上评判与解决。

N.Weiner

316. 新的哲学是由未加定义的词语和公理等组成的抽象系统，不必和自然有任何关系。它们不再是任何事情的模型，而仅仅是因为数学家认为有研究兴趣才建造的。既然这些抽象的数学系统

并不产生于自然，它们的鼓吹者也就没有把其相关定理再应用到自然中去的义务，因而我们有了一个纯粹地为其自身而存在的数学。当代数学的一大部分是这种数学。

C.B.Allendoerfer

317. 尽管这些现代理论的外表暗示了它们与自然根本无联系，我还是不能想出这样一个理论，它不承认它的存在是由于一个远离它的，来自自然的数学模型，而它正是从这个模型再经变异与推广而成长出来的。也许发明一个没有自然渊源的理论是超出思想的能力的，但更可能的是在数学发展的下一个重要突破来到之前，就构造出这种理论。

C.B.Allendoerfer

318. 对数学家来说，每一步新的抽象都变得如此熟悉，他甚至认为它是具体的，并把它作为进一步抽象的基础。一代数学大约为十年，每一代人都灰心地把奇迹般地进行进一步抽象的下一代人的态度看作繁琐的和狭隘的。

C.B.Allendoerfer

319. 依靠直觉，我们推测定理，以应用检验它们，把通过检验的那些组织好，并找到它们能够从之证明的公理，这样建立了我们的数学模型。一个小小的为人所知的职业秘密就是在这个过程中先有定理而后有公理。一个很好的例子就是上一世纪对欧几里得几何的重新考核。那时发现了欧几里得的许多定理不能从其公理证出。但所有人还是相信这些定理是真实的，并且发展了许多不同的公理系统，在这些系统中那些定理可以证出。这种通过找到前提来辩证一个信念，看后者能否从前者演绎出来的过程，与我们日常生活的大多数推理有着惊人的相似之处。数学家们就是这种艺术的专家，讲出了这一点真使我为难。

C.B.Allendoerfer

320. 说一个数学论述是正确的就是说这个论述是一套公理系统的一个逻辑序列，此外没有别的。绝对真理的说法对数学来说是十足的门外话。它是由一些研究固定不变的事物的人对数学的非恶意的崇拜而致。

C.B.Allendoerfer

321. 我担心我引导你们误以为一个数学理论是通过按照如下顺序的步骤建立的：建立自然的数学模型，把未定义的术语抽象化，定义术语和公理，从其通过逻辑演绎证明定理并最后把定理应用于自然。数学家们表演一种不去建造前四层楼，甚至不考虑这个基础部分就能建第五层楼的魔术。我们从中间和两个端开始，经过数十年努力才产生了我们可以拿来在学生面前炫耀的，美丽的，逻辑的和抛光的宝石。

C.B.Allendoerfer

322. 当前最令人兴奋的发展是在社会科学和生物科学中数学模型的构造。尽管这些模型还远远不够理想，但它们是把这些课题置于坚固的数学基础之上的大胆尝试，并且是将要到来的伟大事件的先驱。

C.B.Allendoerfer

323. 无法理解直觉的本质。几位伟大的数学家已经书面陈述了他们在数学发现中的直觉阶段经验，但是心理学家们却被他们的证据所挫败。对这一过程的成功解释必定是对理解人类思想做出的主要贡献。但无论能否解释直觉，总还是通过

这一手段才得以首次发现大多数数学定理的。

C.B.Allendoerfer

324. 未来的生物学家们和医生们面临着一场改变他们学科主要部分的革命。现在生物学中的重要发现与现代化学和物理紧密交织，而后者又需要数学方面的深刻的知识。未来的医生将希望在生物学的发现的基础上研究医学和诊断疾病，他们还希望能够在开展医学研究和疾病诊断中懂得高速计算机的使用。他不能做数学上的跛子。

C.B.Allendoerfer

325. 数学可以定义为抽象形式的科学。在绘画与交响乐欣赏上的结构辨别并不比在物理系统行为上的来得次要，在经济上的结构辨别也不比在天文上的次要。从特殊物体和表现该种物体的现象中抽象出秩序，数学就研究这种以一般形式存在的秩序。

Harvard Committee

326. 一个数学家越超脱越好。

Anonymous

327. 数学不再是学术高贵者预先占有的职业了；它是吸引越来越多的有才能的男女加入的职业。数学研究和教学在当前时期已被大大扩展，数学技术已经深深地渗入数学科学以外的领域，例如物理学，新的技术领域，生物科学，甚至经济学和其它社会科学。计算机和计算技术已经刺激了许多研究领域，这种刺激明显地对数学自身和所有本质上包含数学成分的各门科学具有极大的重要性，但它还仅仅是部分地为人所理解。

R.Courant

328. 今日数学反映了一种在数学严格精神下巩固已有成果的生动活泼的趋势。这种努力已经鼓舞了数学基础方面的集中工作，目的在于澄清数学结构中和数学思想中，各种对象的“存在”是什么含义。

R.Courant

329. 数学的扩张加强了本来就有的那种专门化和分离化趋势；数学受到了丧失统一性与连贯性的威胁。在数学不同领域的代表之间的相互理解已经变得困难，而且数学与其它科学的接触也已经被削弱。但是引人注目的进展仍旧不断地主要

由年轻的数学天才们赢得，一个承认数学的日益增长的重要性的社会支持他们。因此，数学家的迫切义务就是要对能够使分歧的兴趣相互靠拢的数学实质、动机、目标和思想全面反省。

R.Courant

330. 没有关于韵律、谐和和结构的经验，或者没有形式、颜色和构图的经验，谁也不能对音乐或绘画进行欣赏。而为了欣赏数学，真正地接触其本体就更加重要。

R.Courant

331. 数学的目的在于渐进的抽象，逻辑上严格的公理化演绎以及更加宽广的推广。这样一种刻划反映了真理，但不是全部真理，它仅仅是事物的一个侧面，几乎是生活现实的一个漫画。

R.Courant

332. 严格的公理化演绎的模型构成了引人注目的有吸引力的形式，在这种形式里常常能够结晶出数学思想的最终产品。这表明在深入数学本体，找出其秩序以及暴露其内在结构方面的最终成功。但若因为强调了这个方面而提出构造过程，

想象的归纳以及称为直觉的难以捉摸的脑力过程在有成果的数学活动中是起了第二位作用的，那就完全是误解了。确实，从看来教条式的公理开始的演绎方法在数学教学中提供了覆盖大块领域的捷径。但是构造式的苏格拉底式方法，从具体走向一般和极端教条式的肯定否定，引导出进行独立的、有成果的思维的更可靠的途径。

R.Courant

333．必须依靠对丰富多采的细节重视和热爱来调和与平衡对于渐进一般化的推动。不应该把一个具体问题看作是对玄虚的一般理论所做特殊解释的一例。事实上，一般理论是从考虑特殊情况中产生的，并且它若不能用来澄清和整理更多的，处于下一级的特殊问题，这种一般理论就是无意义的。

R.Courant

334．在一般与个别，演绎与构造以及逻辑与想象之间，有着相互作用，这就是生动的数学的深刻本质。这些方面的任一个或另一个都可能处于一个特定成就的中心。在一个意义深远的发展中，它们全部都会牵涉到。一般地说，这种发展会从具体的基础开始，然后通过抽象抛弃压载并且上

升上到玄虚的稀薄空气层，那里的航行与观察都变得容易了；在这种飞行之后就是严格的检验，这包括在新俯视到的个别“现实”平原上着陆并达到特定的目标。简言之，那种通向抽象达到一般化的飞行必须是从具体和特殊起飞并再返回具体和特殊的。

R.Courant

335. 一个人必须牢记，“具体”、“抽象”、“个别”和“一般”这些术语在数学中没有稳定的和绝对的含义。它们主要涉及一个思想框架，一个知识状态以及数学本体的特征。例如已被列为熟悉的事物很容易被看作是具体的。“抽象”和“推广”这些词描述的不是静止情况或最终结果，而是从某些具体层次导向更高层次的动态过程。

R.Courant

336. 数学中的富于成果的发现有时相对地没有用太大努力就突然出现了，观点的澄清依靠了从具体材料出发的抽象以及对结构上的本质要素的暴露。

R.Courant

337. 直觉这个不可捉摸的生动的力量在创造性的数学中总是在起作用，推动并指导着甚至最抽象的思维。但是可以说在数学中还是有一种强有力的压迫，那就是用精确和严密的推理去减低可以看得到的直觉作用。

R.Courant

338. 数学必须从具体的特殊的材料中得到动机并再以“现实”的某个层次为目标。引向抽象的飞行不能是单纯的逃脱而必须比那多些什么。从地面起飞和重返地面都是必不可少的，既使飞行员不能掌握飞行轨道的所有阶段，这两段也是不能不做的。在最纯的数学思维中的定义可能常常由有形的物理现实来提供。数学作为人类思想的创造物在描述和理解物理世界时竟然会看去如此有效，这个事实是具有挑战性的。

R.Courant

339. 事实上在“纯的”与“应用的”数学之间找不到严格的分界线。不应该有一些人充当具有十足的数学美而又仅仅是对其爱好负责的神父，另外又有一些人充当服务于其他主人的工人。对人的这种分类最褒义地讲也是人类局限性的一个

症候，这些局限性使大多数个人不能按其意志在广泛的兴趣领域内漫游。

R.Courant

340. 尽管数学本体是不可分的，但同一类科学家或不同的科学家们对一个问题可能采取不同的态度，应该承认这种明显的差别。最纯的科学家对完美性的要求毫不让步，这种纯性至少是每个具有科学倾向的头脑有时会接受的。在问题的解中，不容忍缺口和粗陋的斑点，并且结果必须是从天衣无缝的推理中得到的。如果这种企图遇到了不可逾越的困难，这位最纯的科学家就要准备重新提出他的问题，或者用一个能够设法解决其中的困难的问题取代旧的问题。他甚至可能通过对他的解重新定义含义来“解决”他的问题；事实上，在通往原问题真正解的道路上，这种做法并不是少见的初始步骤。

R.Courant

341. 在应用研究中，情况就不同了。首先，问题不能随意修改或回避，所要求的是一个令人置信的，人们看上去有道理的回答。必要时，数学家必须接受折衷的解决，他必须乐于在推理序列中

插入猜测性的工作，并且允许在数值证据中出现不确定性。但是，甚至最富实践动因的研究也可能对基础数学研究提出要求，目的在于发现如何来构造它的问题。纯粹的存在性证明在应用性研究中也可能是有意义的，查明解的存在性就对数学模型的适当性给出了所需要的保证。最后，应用数学被近似所主导，在努力于理解数学模型中的物理过程时，近似是无法回避的。

R.Courant

342．掌握从现实到抽象的数学模型的变换，以及对精确程度和可逼近程度做出鉴别，都需要直觉感觉，而后者是依靠经验才变得敏锐了的。此外，也可能常常还牵扯到构造那些真正困难的数学问题，而这些问题又难到目前科学的已有技术无法解决的地步。这种困难性成为某些数学家从事智力冒险的部分原因，也是他们所达到的满意的本质，这些数学家是和工程师、自然科学家共同工作以掌握“真实”问题的，而那些问题又是在人们延伸他们对自然的理解与控制时大量出现的。

R.Courant

343. 整数的简单构成，若干世纪以来一直是使数学获得新生的源泉。

G.D.Birkhoff

344. 虚数是上帝精神的神奇飞行，它们几乎是介于存在与不存在之间的两栖类。

G.W.Leibinitz

345. 数学的无穷无尽的诱人之处在于，它的最棘手的悖论能够盛开出美丽的理论之花。

P.J.Davis

346. 仅仅注意公理就好象一群全神贯注于舞蹈的人，每周见面都讨论舞蹈设计却从来不跳舞。和其它事物一样，数学也是要求合理比例的。

P.J.Davis

347. 十九世纪初期引入的两个新思想，深刻地扩展了数学的领域。第一个思想是，数学并不局限于数和形，它可以有效地处理任何事情(尽管“任何事情”常常仍然以某种方式与数和形相联系)。第二个思想则进一步发展抽象，有时把数学看作纯逻辑过程，认为它与任何事情无关。科学家和

数学家不同之处是他们被第一个思想所吸引，因为这个思想指出了数学的应用范围可能比以往想象的更加广泛。第二个思想则更多地感染了纯数学家，他们已经把数学看作仅仅是对美丽模式所进行的研究。在这两种观点中并无真正的冲突。一个因其美丽而被纯数学家构想出来的模式可能被证明恰好适合物理世界的某些方面；相反地，被科学家在自然中发现的某些数学模式已被证明本来就是异常美丽的。

W.W.Sawyer

348. 如同数学和科学中每一个其它分支一样，代数继续以热带森林那样的活力和扩张能力增殖着。这造成了困难的情况。显然不可能每一件事都知道，但每个专家还是认定他必须知道他所感兴趣的那部分代数。使用数学的科学家必须了解，许多新的数学知识正在被发现，而几乎所有这些新知识都将与他的研究无关；但是他必须盯住那种可能对他具有极大价值的少量知识。

W.V.Quine

349. 义不容辞，你的名字是数学。让自然科学去

接受事实，数学则需要证明。

W.V.Quine

350．当发现一个新的数学概念有用时，一个上层建筑便随之产生。以后这个原始概念可能被证明为不可靠的，但它必须在不破坏那个上层建筑的条件下重新构造。

W.V.Quine

351．不能一劳永逸地定义数学在物理科学中的位置。数学和科学的相互关系就象科学本身的纹理那样丰富和多样。

F.J.Dyson

352．在物理科学史上的所有迂迴曲折之中有一个始终存在的因素，这就是数学想象的首要作用。每一个世纪在科学中都有其特别的成见，并在数学方面有其特别的风格。但是在每一个取得了重大进展的世纪中，物理认识的成长总是受到经验观察与纯数学直觉相结合的指导。

F.J.Dyson

353．对于一位物理学家，数学不仅仅是用来对现象进行计算的工具；它还是用以创造新理论的概

念与原则的主要来源。

F.J.Dyson

354. 数学直觉是好坏两面兼有的，它既是物理学中创造性工作中必不可少的，又完全不可信赖。这种两面性的品质是数学本质带来的。

F.J.Dyson

355. 一位物理学家要用数学材料来建造理论，因为他靠数学所能想象的比他所能思考清楚的东西要多。物理学家的艺术就是选择他的材料并用来为自然建造一个图象，在这种选择中，他不靠推理，而仅仅是模糊地和直觉地知道这些材料适于其目的。在理论建造的过程中，数学直觉是不可缺少的，因为“排除不必要的思考”给了想象以自由；但是数学直觉也可能是危险的，因为在很多情况下，对科学的理解并不是要节约思考，而需要多多思考。

F.J.Dyson

356. 现代基本粒子理论中的三个主要方法被称为域论，S-矩阵理论和群论。域论开始时就偏爱数学的深度，认为深刻的物理理解应该和深刻的数

学在一起。它强调的是一个严格的数学理论，而不是与实验的细节对照。在这三个理论中，域论是离实验最远的，数学上最严格的，在智能色调上最具雄心，而在与物理学的关系上又最模糊。另一方面，S-矩阵理论对实验解积的成功则给人们留下了印象。然而我感到S-矩阵理论过于简单，在数学的深度上过于浅陋，而我不能相信它全部就止于此。如果S-矩阵理论竟然能够解释一切，那我就会为理论创造者的不够老练感到失望。但是我了解到，理论创造者在别人没有期望到的方式方面是老练的。和S-矩阵理论相比，群论具有漂亮的和极严格的数学基础；和域论相比，群论又具有清楚的和坚实的实验支持。它把自然中单靠抽象对称性就可以理解的那些方面以一种优美的方式联系起来。看来，抽象过程过于戏剧性了，以至于现实世界的许多本质的和具体的特征都被排除，不予考虑。总而言之，群论的成功在于它的目的适中。

F.J.Dyson

357．数学对于生物学的特殊价值不在于它可以作为工具使用，而在于它的抽象功能，它因此能揭露基本问题，揭露在表面性质截然不同的实体与过程之间的关系。有机体是机器，尽管它们是

高度组织的机器。在我看来，机器理论中的某些问题与生物学基本问题有关，逻辑地审查这些问题将导致数学和生物学的有意义的结合。

E.F.Moore

358. 使用了计算机的新的数学研究有可能比过去必须采用过于简化的生物过程的模型所进行的研究取得更多的成果。

E.F.Moore

359. 自然选择理论提供了一个基本数学思想对生物学概念的发展做出贡献的例子，这个理论的动因是马尔萨斯的数学模型，其中人口按几何级数增长而食物则按算术级数简单地增长，造成了生存竞争。在Fisher 和Wrights 的遗传学研究的促进下，Feller 进行了关于扩散的研究，这又是生物学对数学做出贡献的例子。

E.F.Moore

360. 正是数学化的过程有助于说明在许多看去不同的问题的结构中存在着一定的统一性。

R.Stone

361. 我们能够希望有这样的一天，在数学工具的帮助下，决策可以更多地依靠知识，而更少地依靠猜测，我们所生活的世界变得更好一些，更少地依赖于意料之外的事件。

R.Stone

362. 可能在人们看来，数学模型越实际，预测就越精确，控制也就越有效。但是收益递减律很快就出现了。现实世界的细节如此丰富，如果一个人想使一个数学模型过于实际，他很快就被包含未知量和未知函数的许多复杂方程所淹没。为决定这些函数甚至导致更复杂的方程，这些方程又带有更加多的数量和函数，简直是讲不完的故事。

R.Bellman

363. 旧的哲学问题继续存在。数学是否主要是人脑的自由创造，拟或定义、公理和问题主要地是由外部物理世界提出来的？（我愿把人脑自身的剖析看作物理世界的一部分。）很可能关于电子机器的工作在未来的十年左右将使问题明白地显示出来。通过对人的神经系统的工作与计算机组织之间的相似性的研究可能得到进一步的见识。在生物科学中将会有数学的新颖的应用，而对生物的

研究又将提出数学的新问题。

S.M.Ulam

364. 数学方法的优势在于其一般性与抽象性，但在应用它们时必须引进具体的条件并在问题能够真正解出之前进行必要的修正。

Hua Lo-Keng

365. 数学简化了思维过程并使之更可靠，这是它对工业的主要帮助。

T.C.Fry

366. 典型的数学家对于从认真推理得来的结论感到十分信任。他不能被实验证据说服到同样的程度。对于典型的工程师，这条陈述可能要颠倒过来。如果碰到了这种情况：经认真推理导出的理论预言了某个结果，而一个认真进行的试验并没有产生这一结果，典型的数学家先要问："推理出了什么问题?"由于对思维过程的信任，数学家在很多情况下自然地求助于纸和铅笔，而工程师或物理学家则凭借实验室来解决问题。由于同样的原因，处于"纯粹"形态的数学家高兴于建造逻辑结构，如拓扑或抽象代数，这些与物理现实

世界没有明显的联系，也不会引起典型工程师的兴趣；然而相反地，处于“纯粹”形态的工程师或物理学家对于象硬度数据表这样的有用信息产生很大兴趣，现在已知这种数据和多种理论都有关，但它们却使典型的数学家感到讨厌。

T.C.Fry

367. 典型数学家因其高度批评性态度而具有的第二个特征是倾向于证明的细节。对几乎其他所有人，即使次要问题还未解决，能有一个证明他们就满意了。但对于数学家，一个证明或者是形式、实质和细节都完美，或者是错误的。这里没有中间分类。他把这称为“严格思维”，并说若使结论具有永久价值，就必须这样做。典型的工程师则称之为“繁琐而无益的分析”，并说他若沉迷于这种分析，那就永远干不成任何事情。

T.C.Fry

370. 数学家还倾向于把他所遇到的情况理想化。他的气体是“理想的”，他的导体是“完全的”，他的表面是“光滑的”。他赞美这个理想化过程而且称之为“追究本质”，工程师或物理学家则很可

能轻蔑地称其为“无视事实”。

T.C.Fry

371. 数学家的一个密切相关的特征是他要求一般化的愿望。遇到求解 $x^3-1=0$ 这种简单方程时，他却去解 $x^n-1=0$。他称之为“节省能量”，他是一次解出全部同类问题，而不是零敲碎打地处理它们。工程师则称之为“浪费时间”。

T.C.Fry

372. 数学家对于工程问题所做的帮助与他的思维习惯密切相联。数学家进行推理，批判，理想化和一般化。并且，他以精确的和定量的方式来做这些事。除非明确地给出基本假设，否则就不能从数学角度系统地阐述一个问题。对条理清楚的思维的这种坚持也许是数学家的最重要的贡献。

B.Noble

373. 计算机的出现对工业数学起着解放作用。把问题表达为可以用简单的经典分析工具处理的形式已经不再有压倒一切的必要性。另一方面在使用计算机时，我们仍然必须对一给定的工程问题

做抽象和理想化，我们仍然必须把原始问题分解为各个成份，决定什么是有意义的，规定我们必须开始计算的数据，以及分析采用什么步骤，需要什么样的最终结果。这些步骤需要数学家的思考习惯。

B.Noble

374. 工程师决定物理问题是什么，什么因素是重要的，什么因素可以忽略以及他想得到什么答案。工程师和数学家共同专注于对问题做出理想的数学阐述。然后数学家使用其熟练的技巧解算纯粹的数学问题。最后工程师必须研究数学结果并决定这些结果是否适合于他的目的。总的看来，数学家受过训练并在抽象理论的王国中工作，而工程师则在具体细节的王国中工作。

B.Noble

375. 数学之实用性有如下一些特定的类别：

i） 如果数据能被事先想好的理论所解释，就有可能从这组数据出发对不便于观察的事物进行推理，并且若能如此推理就大大地省去了其它的实验工作。

ii） 数学常常为预想的理论提供定量的检

验。如果数据与该理论不符，进一步的数学研究往往有助于理论的完善。

iii）在实践中往往需要对实验数据进行从一种尺度向另一种尺度的外推分析，这几乎要求分析者必须具有某种数学经历。

iv）数学往往有助于工作的经济性，这或者通过减少所需实验量来实现，或者通过以分析完全取代实验来实现。

v）有时完全不可能进行试验，就必须用数学来完成相应任务。

vi）有时要设计一个实验来验证一个理论的正确性，这时数学往往是有用的。

vii）数学还往往给出反面结果，但这种结果有时极重要——它预先防止了对那种不可能情况的寻求；因为工业中有许多目标如同永动机那样无法达到，而发现这个事实的唯一办法往往是求助于数学推导。

viii）在更加积极的意义上，数学常常能指出最佳水平的成绩是什么，因而也就为工程师提供了所追求的目标。

ix）在把复杂的计算方法简化为易于解出的形式的过程中，数学往往起重要的作用。特别地，计算机能把工程师从乏味的常规计算中解放出

来。

x） 数学能帮助解释实验数据。

B.Noble

376. 尽管数学家能在与建造抽象模型有关的方面大有助益，但是他的作用不是也不能是在任何纯粹的意义下对工程问题给出数学式的系统阐述，否则的话培养工程师就失去了意义，因为那样只要数学家就够了。

B.Noble

377. 如果不去注意刻划课程特征的那些抽象概念，那这门课就变成了数学以外的课程了。

C.V.Newsom

378. 和许多经典科学相比，现代的社会科学与自然科学发现了数学的符号式阐述具有重要意义，这种意义表现在它具有把从社会和自然的宇宙中得到的数据联系起来的能力，以及因而还具有对带有科学重要性的基本问题做出回答的能力。

C.V.Newsom

379. 一般地说，数学这门科学为我们提供了处理

自然现象的强有力的工具，其原因不仅在于它的符号式阐述所具有的一般性，而且还在于这样的事实，即个别的命题或公式是从它们与其它命题和公式的逻辑关系的角度来进行研究的。数学家基本上关心命题组成的链，在这种链中除去第一个命题以外，后一成员都是从前一个逻辑地推导出来的。简要地说就是，一个数学系统就是两类命题组成的一个集合，第一组由可以称为公理的那些命题组成，第二组则由可从公理逻辑地寻出的那些命题组成。

C.V.Newsom

380. 数学家较少地关心特定问题的解，较多地关心那些在特殊情况的研究中具有广泛应用的一般模式的发展。

C.V.Newsom

381. 在现代意义上，数学的特征在于它以自由的精神去构造假设与定义，而不在于它对事实的承认。

G.C.Evans

382. 如果追求数学分析而同时又违背应用与直

觉，那就宣布了数学的无益及衰退。

R.Courant

383．成功的研究依赖于构想合理的标记，尽管试图给这种依赖赋予数值是草率的，但还是不难找到许多例子说明当问题得到恰当的系统阐述时，它的解就变得显然了。相反地，如果所使用的标记笨拙而不明显，那就要求较多的努力和极大的创造力。例如，设想使用罗马数字进行算术和代数演算，那会是什么样子。一个设计合理的标记法，总要不含糊、不混乱地表达基本数学的本质。

R.Bellman

384．在数学的许多部分中，往往要求读者在能够细致思考任何内容丰富的问题之前，先单凭信仰吞下大量简化过的材料。这种情况太常见了，但是应该避免。一旦发现有实际问题存在，那就有一种要引进更精细概念的动机。这才是在实际的研究中和许多应用中，数学所面临的情况。

Anonymous

385．逻辑毕竟是人的头脑设计出来以解决某些类型问题的诀窍。但数学比逻辑要多，它是逻辑

加上创造过程。如何把数学工具的逻辑部分结合起来产生所希望的结果，这一点未必是逻辑的，并不比写交响乐更象逻辑练习，或者不比绘画更象三段论法练习。

R.Bellman

386. 重要的是让学生看到，问题的复杂程度永远也不能用它的公式来实际地度量。任何人很快就知道了，某些非常简单的陈述可能包藏较重要的困难。在解决问题时，应该做那些能够做的，也要花一些时间做些更难解的问题，并且在分析能力不断成熟与增强后，经常地做一些困难问题。

R.Bellman

387. 必须认识到，对于数学中所有的部分都存在着许多不同的方法。掌握所有的方法是重要的，因为许多问题扩展后，需要不同的方法来解。实际上，有些扩展对某种方法来说是常规的，但用另外一些方法则难于对付或者不可能解出。

R.Bellman

388. 要想学好数学这门学科，有好多种方法：可以自己去创造它，可以培养学习兴趣，可以了解它

过去的伟大成就以及它未来的美妙前景，可以培养攀登智慧之山的愿望，以及培养对物理、社会、生物和管理科学的问题进行系统的数学阐述的渴望。

J.N.Kapur

389. 在科学王国中，数学有一个特殊的位置。它是一个独立的领域，但又为其它领域提供进行思维的工具。在我们为理解物理世界的全部努力中，常有这样一种趋势，即构造那些尽可能微妙地表达广大物理世界的主要理论，并以数学术语实施。值得向往的是在每一步都以事实来检验这些理论，并且确认它们并不仅仅是某些想象世界的理论，这一点是通过巧妙设计的试验和数学推导来实现的。

A.Lichnerowicz

390. 科学不仅仅是事实的积累。它是经过组织和推理得出的知识。被这样理解的科学是以指数形式增长的，而数学则给这种科学带来了特有的思维经济性。也许正是因为数学，才使得科学和科学活动仍然可能存在，并且数学肯定是使科学统一的最显著的力量。

A.Lichnerowicz

391. 是否存在着两种数学，一个是有益于其它领域的应用数学，而另一个是高傲自立的、仅与前者有脆弱作用的纯数学呢？根本不是。事实上，只要是这个领域或其它领域的科学家设法能吸收的任何数学就都是应用数学。

A.Lichnerowicz

392. 从大约 1830 年以来，数学开始了一个系统清理其自身的过程，这个过程使它更加接近其实现首尾一致的雄心，使它能够认识到这一雄心的极限，使它能为思维过程提供显著的经济性，并使它能获得超出以往任何时候的能力。

A.Lichnerowicz

393. 我们可以称之为“传统数学”的领域现在已经转变为一个统一的数学领域，即可以用如下词汇刻划的当代数学：现代数学已经不是遵从数学结构，不是或多或少地依靠机会去辨认结构，而是致力于支配这些结构。

A.Lichnerowicz

394. 数学的新进展并不局限于新知识的获得，它甚至使我们具备了另一种看待知识的眼光，并迫

使我们对一直在使用的概念做艰苦的重新系统化的工作。这样，一个新的数学为我们提供了已经重构的过去，也提供了所要建造的未来。

A.Lichnerowicz

395. 纯数学在经济的发展中也可以起直接作用。经济和社会领域中的分析，决策，计划和管理，在没有精细的数学技术以及十分强有力的计算设备的情况下，已经不可能在合理的条件下以有效的方式应用于实际情况。可以预言，在任何方面从事经济计划的组织和研究机构将需要数量日益增加的，有能力使用和开发这些新技术的训练有素的人员。这种预言是靠得住的。

M.H.Stone

396. 电子计算机给人的数学能力增加了一个维度，但这种能力的运用，有待于数学洞察力的进一步增加，这一点我们已经知道；为能设计数学机器，建造它们，使用它们，与它们合作，人必须对其数学思维的最内层结构有完全清醒的意识。

UNESCO Publication

397. 数学在现实中的多方面应用将会比按规则

呆板工作的机械程序更加求助于人。对于各门科学和技术的先驱者，这种应用将要求他们具有创造性的数学直觉能力，这种能力使他们能为其研究工作提供一种新的数学结构，一种职业数学家还不知道的数学结构。

UNESCO Publication

398. 一个公理系统是一个漫长的工作过程的最终结果。对初学者突然提出一个已发展完善的公理系统，相当于对他们强加一组教条式的命题，这样做将是令人反感的，并且可能是无效的。另一方面，从简单的例子出发，并引导学生经历建立公理的过程，就使学生分享到真正的、全面的数学创造力，这种创造力包括启发式的观察，用数学术语压缩问题的表述，以及严格的推导。

UNESCO Publication

399. 在所有的时代里，物理科学和技术都是数学灵感的先声，也是检验数学实践效果的标准。数学用户的总数，包括用数学很多的和偏少的，总是比纯数学家的数目要大得多。

UNESCO Publication

400. 解释一个公理系统在于给出其中首次出现的术语的意义，以便使所有的公理成为真的命题。在一个公理化系统中，我们把两种解释称为同构的，如果在它们的元素间有一一对应关系，使得一个在该系统内按一种解释为真的命题，在另一种解释下也为真，且反之亦然。从结构观点看，两个同构的解释就象按同一线路图组装的两台无线电收音机那样等同。一个公理系统被称为单叶的(或绝对的)，如果它的任何两个解释都是同构的。这种情况在数学中是例外的，因为在大多数系统中可以找到不同构的解释。在定义群、环、域、向量空间和拓扑空间概念的公理系统中恰好有这种情况。正是在这种意义上，这些结构被称为多叶的，因而它们适应于所有的各种情况。

UNESCO Publication

401. 经典数学分为几个领域，但现代数学是一个领域。它是一个统一的领域，并有着一个理智的标准化。

UNESCO Publication

402. 我们有把握地说，在使用计算机之后，数学在生理学问题上应用的可能性几乎不受限制，这

种应用至今仍将主要地是（给人印象深刻的）—堆经验数据的科学，并会转变为一个充分发展的、逻辑上首尾一致的科学。然而应该清楚的明白，数学并不取代实验。生物学是靠使用数学，而不是靠滥用数学才获得进展的。

I.N.Snedoon and J.G.Defaras

404．某些数学家的确是机智又聪明的，但不是所有的数学家都机智又聪明。一个数学家所需要的唯一器官是逻辑思维的能力。

D.Pedoe

405．许多人把数学家视为另一种族，几乎具有超自然的能力。虽然这样做很讨成功的数学家的喜欢，但因某种原因，这样做对试图学习数学的人是不利的。

W．W．Sawyer

406．专门技巧总是给外行人以深刻印象……但是如果有一种专业能引起最深切的欣赏，有一种技术能唤起最大的惊异，那就是数学家们的专业和技巧。

S.Brodetsky

407. 一位数学家是一个觉得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

很显然的人，就象外行人看待二乘二等于四那样显然。

Lord Kelvin

408. 数学发展的决定理论，即使在修改和调和某些点之后也仍然是不充分的。许多数学发展是极端反复无常的，而要找到其合理解释的任何企图都是白费时间的。不能过分强调数学发展的反复无常性。

George Sarton

409. 数学之意味深长准确地在于它事实上是一门艺术。通过把我们思想的本质告诉我们自己，它还告诉了我们许多依赖于我们思想的东西。它并不能使我们探索遥远的外部存在，它帮我们搞清了，我们存在的方式决定了离我们多么遥远之处存在着什么东西。我们是宇宙的制定法典者。我们甚至只能运用我们所创造的东西，别无它物可用，并且我们的最大创造物就是物质宇宙自身。数学在宇宙中具有深远意义，这不是因为它显示了我们必须遵从的原则，而且因为它显示了我们

所强加的原则。

J.W.N.Sullivan

410. 我们喜爱在宇宙中发现那些存在于我们意识深处的几何形状。我们记忆物体体积的精确性和我们思维机器的准确性表达了我们思想的基本特征。几何并不存在于泥土般的世界，它源于我们自己。自然的方法从来不象人的方法那么准确。我们在宇宙中找不到我们的思想所具有的清晰性和准确性。因此我们试图从现象的复杂性中抽象出一些简单的系统，这些系统的组成部分之间存在着能够用数学描述的特定关系。

A.Garrel

411. 一方面数学是对人类思维过程的某些方面的研究，另一方面当我们使自己成为物理情况的主人时，我们按照思维过程的要求来安排数据。因而看出，单单把问题按照便于讨论的形式安排就已经引入了数学；我们的处理不可避免地引进了数学，而数学原则看来必然统治自然。

W.Hisenberg

412. 某些典型数学思维的美，实际上能被中小学儿童所欣赏，例如一个干净利索的证明，比一个笨拙费力的证明要美，又如一个能代替许多特例的简明推广式，数学对生活经验的极少要求，引导小学生认识并必然得到其结论的那些数学概念的确定性和准确性，以及证明的概念的发展，等等。

J.H.Murdoch

413. 数学的严重局限是：它不能提供文学的、音乐的、历史的、地理的以及艺术的训练；为进行数学研究所需的基本优点要求人们经多年系统学习才能获得；有许多推理形式很重要，这里不列举，但有一种危险，就是有可能导致对数学程序的过于抬高以及对不适合数学方法的研究课题的蔑视。

J.H.Murdoch

414. 在数学这门科学中，人们使用容易的词汇表达困难的概念。

E.Kasner

415. 数学的目标是思考那些能够严格思考的问题。

E.Kasner

416. 数学宇宙已经如此宏大和多样化，以至于一个简单的头脑几乎不能掌握它，或者换句话说，为了掌握它要耗去的精力太多，所剩精力不足以进行创造性研究了。一个数学会议使人想起了通天塔，因为没什么人能够跟得上别的组的讨论，而且即使在本领域，他们有时也感到陌生。

G.Sarton

417. 数学真理具有与地点、个人和权威相独立的有效性。乘法表是国际性和永久性的，它既与传统无关，也不依赖于国家或教堂的权威。π的数值并不顺从于人的任性。发现一个数学定理可能成为发现者个人生活中的一段浪漫插曲，但并不能期望从这一点看出定理发现者的种族、性别或性格。

A.Report

418. 数学是一个自决的智力活动领域。它不需要为其正确性做辩解或证明，实际它也不做这类事。如果我想知道如何找到一个方程的解，或如何做几何图形，如何证明一个关于数的定理，或如何建立空间的一个性质，那么怀此愿望的合理原因

仅仅是我想知道。未被损害的人类头脑想知道，并且不承认这一知识的领域限制。它想知道金字塔的年龄，一个四面体的角度，原子的结构以及负1平方根的意义。

S.Brodetsky

419. 数学科学的四个方面，即它的分析功能，它对函数关系的关切，它的抽象本质以及它对变换下不变量的兴趣，全是具有抽象特征的；数学家从其固有的兴趣出发培养了这些方面。它们已转变为有益的成果，可能是因为它们揭示了人类头脑的基本特性，但是它们的应用是属于科学的，包括自然科学与社会科学。

A.Dresdon

420. 如果我的老师们真的曾在最初就告诉我，数学是一种摆弄假设的纯粹游戏，并且完全是悬在空中的，我倒可能已经成为优秀的数学家了，因为我在本质王国里感到十分幸福。

G.Santayana

421. 数学是自主的。它必须自己去寻求那些与它最密切的东西，寻求它的本质，结构以及生存规

律。

R.D.Carmichael

422. 数学是所有人类活动中最完全自主的。它是最纯的艺术，尽管它与其它艺术在如下方面有区别：每一个时期的工作都成为下一时期工作的一个完整部分，因而能存在下去；它不是独立的而是被吸收到更大的整体与完美之中。因而，尽管一部数学史主要是那些不复孤立存在的发现的历史，这些发现被纳入了更现代的推广之中，但是这些发现并没有被忘记，也没有失去其价值。它们没有死亡，而仅仅是改变了形式。

J.W.N.Sullivan

423. 大量的二十世纪数学家采用了抽象观点，这种抽象观点的出现最终导致一种感觉，认为数学题材不是对数或空间或它们之上的什么精制物的研究，而是对公理系统的结果的决定。从这种观点出发，不管什么公理系统都是好的研究题材。至少在这门艺术的许多实践者的眼中，数学最终成为那种可以粗略地描写为公理科学的东西。

R.Kershner and L.R.Wilcox

424. 数学的最终基础及最终意义是个还未解决的问题；我们不知道它将沿什么方向找到答案，甚至不知道能否期望一个回答了所有人的最终的客观答案。

H.Weyl

425. 和其它文化实体一样，数学是沿着演变与扩散方向发展的人类集体努力的结果。它变成什么并不取决于对我们目前不知的“数学真理”的发现，而是取决于人类通过文化模式制造什么。简言之，数学是我们制造的，是适当地遵重了我们文化中数学的构成的，是在旧理论的指导下寻求建造新的理论，以及解决那些如我们所知的，一般认为对数学发展具有价值的悬而未决的问题。直到我们制造它之前，它并不存在，并且在未来某时，它虽已被制造，却可能不复为“数学”。

R.L.Wilder

426. 数学突出地对这样的方法感兴趣，即用其它概念来定义一个概念，以及用其它断言来推导一个断言。

H.Weyl

427. 不存在广为人所接受的关于数学的定义，但谁也不认为这一点是科学的缺陷。相反地，数学知识整体极大地扩展并超出了晚至一世纪以前才为它划定的界限，这一事实反而有力地支持了这样的思想，即数学从一个时代到另一个时代没有一个广为接受的定义，这在科学的发展中不是不幸，而是万幸。

S.T.Sanders

428. 使数学成为其学生们的乐事的原因很多，这包括，从一般定理间的相互作用，可以导出没有限制的丰富内容，这些内容的复杂性，推理出发点与导出内容的相隔遥远，大量不同的方法，以及这些方法的纯粹抽象性特征，而正是这个特征作为其赠品又带来了永恒的真理。当然，所有这些特征对学生有着无法估计的价值，多少个时代以来，它们迷住了某些最敏锐的、最有才智的学生。

A.N.Whitehead

429. 常常说，单单十九世纪贡献的数学就是以往时代全部贡献的五倍之多，这个断言是有其可靠根据的。这不仅是指数量上的，而且还包括力量

方面的，后者有着不可比拟的重要性。

E.T.Bell

430．对学生来说最常见的困难之源是，一件工作很少以创始人当初所用的形式讲给学生。它已被浓缩了，光饰了，按逻辑重新安排了，而把使其诞生的那些思想隐藏起来了。这样，这位数学家也以头脑超人的形象出现，因为我们无法跟随他的思想。

A.H.Read

431．数学家如何思维？一个人可能先说，他必定为好奇心所使。在数学中，能够提出问题甚至比能回答它们更加重要。真正数学家的一个突出特征是，他能从发生于他面前的诸多问题中选择出值得发问的问题。引导他进行选择的那种偏爱，包括对一般性的期望以及对严格性和确切性的追求。真正的准则是，这个问题的研究是否会有丰富的新思想内容，以及是否导致优美数学的诞生。伟大的数学家对这类情况有着一种直觉。

A.H.Read

432．一个专心于新发现的数学家主要关心证明

事情，而不是发现它们，这一点可能听起来奇怪。但是总的来说，这是数学取得进步的方式。数学家在为他自己提出问题后，感觉到问题的答案，然后，再企图证明这个答案是正确的。

A.H.Read

433. 在这个古代研究与现代研究发生冲突的时代中，对数学的研究肯定有些事情要讨论，这不是到毕达哥拉斯时才有的，也不是到爱因斯坦就结束的，而是全部历史中最古老的和最年青的话题。

G.H.Hardy

434. 数学构成了人类智力的最壮丽的纪念碑。数学具有极大的广度，且不同于其它科学的是，它从未遭受衰退。每一个数学真理一旦按照严格的证明原则发展，并且只要为真正的数学家所承认，它从此就永为科学之一部分，并且懂得这门学科的人不会给它找毛病。

Thomas Thomson

435. 关于自然的时空关系的数学分析学不能靠先验决定。数学为我们提供了可能性，但它不决

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

人类的心理状态和完整性，辅之以人类所具有的对代代相传的思想进行改善的能力。

E.R.Stabler

474. 数学的问题、概念和定理的有用性，取决于它们对数学或其它领域的有成效的或统一的发展所做出贡献的程度，而与所涉及的题材属于纯数学还是应用数学无关。

E.R.Stabler

475. 无论在纯数学还是在应用数学中，数学定理的真理性都是相对的而不是绝对的，数学知识的本质都是进化的，并且公设化组织与方法都是重要的。

E.R.Stabler

476. 对称是一个广阔的主题，在艺术和自然两方面都意义重大。数学就是它的根本，并且很难再找到可以论证数学智慧作用的更好的主题。

H.Weyl

477. 我们常常听人说，纯数学与应用数学互抱敌对态度。这是不真实的。纯数学和应用数学从未

互抱敌意。纯数学和应用数学将永不会互抱敌意。纯数学与应用数学不可能互抱敌意，因为事实上在它们之间绝无共同之处。

D.Hilbert

478．尽管数学喜欢纯粹并远离其它科学，但其它科学，尤其是物理学，却喜欢数学并试图与它尽可能地“亲近”。

G.Gamow

479．所有在其最终研究中与序和测度有关的科学，都与数学有关，至于所寻求的测度是数中的、形中的、星体中的、声音中的或其它对象中的，则并不大重要。相应地，应该有一个解释所有与序和测度有关的已知事实的一般科学，这里指的序和测度与所适用的特殊学科无关，而这门一般科学又应有其合适的名字，那就是数学。一个证明在其敏捷性和重要性大大地超过了依赖它的那些科学之处在于，它同时把这些科学所致力的对象和许许多多邻近的对象概括在一起。

R.Descartes

480．有三个现行的概念，三个渗透到整个数学科

学内部的思想范围，每一条数学真理都容许涉及其中的这一个或那一个，或其中两个的结合，甚至全部三个；这些就是三个基本概念，它们是数的、空间的和序的。

J.J.Sylyester

481. 现代纯数学处理形式，这是指这个术语的非常一般的含义；这将包括代数形式，函数关系，在任何象由数这种对象组成的有序集中存在的序的关系，以及形式或标子群的特殊性能的分析。

E.W.Hobson

482. 数学的分析学是与自然同样广阔的，它定义了所有可理解的关系，它是一个慢慢形成的困难的科学，它认真地保留了每一条既经获得的原则，它在人类思想的变迁与错误之中不断地长大并变得更强壮。它的主要属性是清晰性，它丝毫不表达混淆的概念。它对最多种多样的现象进行比较，并发现将它们联系在一起的秘密的相似性。它用同一种语言解释这些现象，就好象它亲见过设计宇宙的统一性和简单性一样；这样也就更加显现

了那统辖着自然界所有起因的、不可改变的秩序。

J.Fourier

483. 数学是一门万用的并具有绝对真理的艺术。数学思想的真理特性以及其结论的确定性和正确性，取决于它用以处理精确度、分明度和完全性的那些概念的特征。有些概念容许这种精确度，另一些则不容许，而数学家就是采用前一类概念的人。

C.J.Keyser

484. 数学知识比任何其它知识都更清楚地把真理印在其结果上，它总是确定地导致其它方面的正确知识，而又不需要其它知识。

H.Schubert

485. 数学家对证据或猜测都未给予起码的注意，而是从他的定义和公理出发，通过证明式的推理导出一切事情。

T.Reid

486. 数学家的思维在逻辑的宇宙中前进，寻求存

在着的事物，探索事实的高度与深度——包括概念、类别、关系、蕴涵及其它；对观察到和搜集到的数据所具有的内部和谐做出猜测；在检验数学的假设时，不仅依靠完全的演绎，而且也和其他科学家一样地求助于实验，求助于不完全的演绎；他还经常发现，必须放弃某个有希望的假设，或将其做些变换，这样就在他的领域内无一例外地施行着自然科学工作者所熟悉的过程、方法和实验。

C.J.Keyser

487. 数学甚至在其最纯的与最抽象的状态下，也不与生活相分离。它恰恰是掌握生活问题的理想方式，这正如同雕刻把人的体形理想化，或者如同诗和画，分别把形象与景物理想化一样。

C.J.Keyser

488. 数学是基于经验之上的，它是从关系转化为美丽的正规结构的结晶，是我们与实际世界的接触的升华。逻辑反映了这种或那种结构如何起作用，而我觉得很难看出何以能考虑某些并不存在的东西。

Z.P.Dienes

489. 赋予模式是数学思考中极为重要的事。所建立的模式很快就成为数学的对象，这些对象又被适配于进一步的模式，后者在被熟悉之后，又被认作对象，等等。

Z.P.Dienes

490. 第一次抽象的方法在于如下两点：(a)发现实验的(或数学的)情况，(b) 建立一个具有适合(a)中数学情况的公理和公设的演绎系统。数学可谓通过这种过程产生于人类经验。第二次抽象的方法在于另外两点：(c) 建立一个演绎系统，其公理为 (b) 中公理的一个合适的变形，(d) 实现一个带有这种变形公理的数学模型。这种第二次抽象的方法，比推广更具一般性。条件 (d) 是非常限定的，因而也是非常有用的；在进行 (d) 这一步时，系统 (c) 应该由一个代数的或几何的模型来实现。如今许多数学家担心他们的学科会成为不受这条约束的纯粹的符号运算练习。这一条件会自动地注意并消除 (c) 阶段对公理做的一些不够认真的变形。这里包含着数学的选择与执行方面的精美性。欧几里德几何是用第一次抽象方法发现数学的首例，而非欧几何则是用第二次抽象方法发明数学的首例。通过这一过程，数学

可以说是在人的思想中被创造出来。纯数学和应用数学都采用这两种抽象方法。对于一位纯数学家，实验情况不必是物理的，它也可以是数学的。一件应用性工作的新颖性和首创性在于，它是用第一次抽象方法创造的新数学的一个实例。

I.V.V.Raghavacharyalu

491. 一位数学家从来不象一位哲学家那样，企图用量去定义其自身；他定义它们之间的相等，它们的和与积，而这些定义就决定了甚至构成了量的数学性质。以一种更抽象、更形式化的方式给出符号，同时又规定了这些符号在相结合时要遵守的规则。这些规则是足以刻划这些符号并给出了它们的数学值。简言之，他利用任意的规定创造了数学实体，就好象几种象棋棋子是通过对走子的规定和各子间关系的规定来定义的一样。

E.T.Bell

492. 这两种讲话方式把数学家分作两种类型；讲“我们能”的人相信(或仅是下意识地)数学是纯粹的人类创造；讲“存在”的人则相信数学具有其自身的、独立于人类的“存在”，而“我们”不过是在我们生活的旅途中遇到了数学的“永恒

真理”，这十分象一个在城市中散步的人遇到了许多条街道，而他本来又不曾计划过这些街道。

E.T.Bell

493．数学的一致性很重要。船舱密封隔离就会干燥。制品脱水就会早枯，留下的仅仅是难看而又贫瘠的残余。

T.A.A.Broadbent

494．我们不相信仅在工程和技术领域就能完全证明数学的正当性，但我们的确相信，学生在学习并看到数学作为一个整体，成为交流抽象的和理性的思想之自然和必然的语言之后，将会发觉到它是思考工程和技术问题的一个自然的和实际上必然的方式。

T.A.A.Broadbent

495．作为我们当今如此众多科技的首要基础，作为如同一门伟大创造艺术那样重要的分支，作为一个万能语言以及一个基本的思维方式，我们很难对数学是现代文化的完整部分这一断言提出什么争议。……我确实相信，有能力欣赏并且真正欣赏勒具格积分的人，将会象欣赏日月蚀的人一

样多。

T.A.A.Broadbent

496. 数学的理想是要建立一套用于推理的运算方法，这种推理是在思维或外部经验的各部分之间进行的，以使得各思想或事件的发展，能够被明确地搞清和精确地陈述。这样，每一个严肃的思想或者演绎推理，或者带有想象力的文献，只要它不是哲学，就都将是利用运算方法发展的数学。

A.N.Whitehead

497. 一门数理科学是任何一个这样的命题集合体，它能进行抽象的公式化，并且它的安排使得其中某一个命题之后的每一个命题是在其前面的某些命题或全部命题在形式上的逻辑结果。

C.W.Young

498. 纯数学是一组假设的和演绎的理论，其中每一理论包含一个确定的系统，这个系统中有基本的、未经定义的概念或符号，有基本的、未经证明的但又自相容的假定(通常被称为公理)，以及可以不靠直觉而从这些假设严格地、逻辑地导出

的结果。

G.D.Fitch

499. 持批判态度的数学家丰富了追求真理的工作。他不再沾沾自喜于他自己或任何其他人知道了他的命题是真理，而是以能够找到命题的正确性与相容性为满足。认为相容性本质上包含着真理的想法是不会消除上述二者之间的区别的，甚至不会模糊二者的界限。他并不绝对地肯定，但他深深地相信可以找到几个不同的、只含少数几个命题的集合，使得每个命题集合相容，并且每一个这种集合都蕴含其它命题，即后者可以从前者确定地推导出来。也就是说，他相信存在由首尾一致的或者相容的命题组成的系统，而他把发现这些系统看作自己的职责。任何一个这样的系统是数学的一个分支。

C.J.Keyser

500. 数学在其发展中是十分自由的，它所受的唯一限制就是要考虑到其概念本身不能矛盾，并且这些概念必须用定义明确和有秩序地与已经存在并确立了的概念联系起来。

George Cantor

501. 有什么科学比数学这门科学更雄伟，更卓越，对人们更有用，更令人崇尚及更富有论证性呢？

Benjamin Franklim

502. 如果没有一些数学知识，那么就是对最简单的自然现象也很难理解什么，而要对自然的奥秘做更深入的探索，就必须要同时地发展数学。

J.W.A.Young

503. 数学的历史是重要的，它也是文明史的有价值的组成部分。人类的进步是与科学思想极为一致的。数学的和物理的研究是智慧进一步的一个可靠的记录。

F.Cajori

504. 当代，没有哪一位数学家十分重视孤立的定理的发现，除非它暗示了一个意外的新思想领域，就象是从未被发现的思索行星体上分离下来的一块陨石那样。

J.J.Sylvester

505. 随着数学知识的扩大，会不会最后使单个的

研究者无法接受这一知识的所有范围呢？为回答这一问题，让我指出深深植根于数理科学中的一个事实，即每一真正的进展总是伴随着发明更锐利的工具和更简单的方法，它们同时帮助理解那些早期的理论，而把某些更复杂的发展抛到一边。因此单一的研究者在把这些工具和方法变为自己的以后，有可能在数学各分支中比在任何其它科学都更容易地找到他的道路。

D. Hilbert

506. 初看起来，好象数学范围的扩张必定成为其未来发展的危险之源。不仅是领域变宽，而且研究课题的数目迅速增大，而数学家的工作也变得越来越专门化了。如果说哪位数学家也不能明白任何其他数学家的工作，那当然是明显的夸张，但下述情况的确是真实的，即一个数学家正在一天比一天更难于对数学任一分支的进步保持着哪怕是一般性的了解，除非这一分支是他通过他自己的劳动形成的。然而我相信，数学领域的增长程度将总是被交流手段的功能增长所收缩。增加的知识为我们提供了新的原则和方法，使我们可以极容易地把自己引向以前最难于接近的结果；而标记法的改进可能最有效地简化课题和使之易

于理解。不但要由数学工作者去探索新的真理，并要由他来设计可以用来发现和表达真理的语言，而在所得到的结果中，一个伟大的数学家也显示出其天才。恰当选择的标记法简化了复杂的理论并把远离的理论联系起来，我对这种标记法所具有的力量具有极大的信心，而且我认为有把握预言，不断增加的关于原则的知识以及不断改进的数学符号语言，永远能使我们满意地对付仅仅由于这个学科的扩大所带来的困难。

J.W.L.Glaisher

507. 为了理解和完全掌握算术概念和证明方法，必须要有一个高度的抽象，而这一条件有时被指责为错误地对待算术。我认为所有其它的知识领域，只要它们的基础也要求处处严格地和完整地经受考验，那么它们也都需要至少象数学那样的高度抽象，而这种严格检验实际上又是必要的。

D.Hilbert

508. 为了准确性，迫切地要求现代数学的精确化……这对研究也是必要的。它有利于思想的清晰，有利于在尝试概念的新结合时得到丰富的结果。最初，当陈述是模糊和潦草的时候，不得不在有

限的应用中引入常识并用以解释含义。现在，在创造性的思想中，常识是坏的主导，它唯一的判别准则是，新概念要和旧的相象，换句话说，它只能起压抑首创精神的作用。

A.N.Whitehead

509. 数学家认为他们的方法和结果的精美是极为重要的。这并非纯粹的浅薄爱好。那么究竟是什么使我们感到一个结果和一个证明是精美的呢？它就是不同部分间的合谐，它们的对称性，它们的美好的平衡；总之一句话，这就是那引入秩序的，给出统一性的东西，它使我们看得清楚，并且很快理解整体和细节。但这恰恰是产生伟大结果的东西，事实上，我们越是一眼就看清这个聚合体，我们就越能感到它与相邻对象的相似处，因而我们就得到了越多的机会以给出可能的推广。精美性可以使我们感觉到未预见过的东西，这是通过把我们不惯于将其联系起来的那些对象意外地聚集在一起而做到的；它还是硕果累累的，因为它为我们揭露了未被认出的亲缘关系。甚至当结果仅仅是来自在方法的简单性与问题的复杂性之间的对比时，精美性也是多成果的；它使我们思考这种对比的原因并常常使我们看到，

原因并不在于机会，而在意外的规律之中。简言之，对数学精美性的感觉仅仅是为解决我们的思想需要而给我们的一种满足；这是非常合适的，因而这种解决办法成为我们的一种手段。因此，这种美学的满足与思想的经济性密切相关。

H.Poincare

510. 在其它的科学分支中，人们好象急于出版其著述，因而可能为世界提供了马虎而又乏味的工作，但在数学中是没有这种借口的。形式必须象实质那样完美，而证明又必须象欧几里得的那样严格。数学家不得不处理大自然的最精确的事实，并且必须不遗余力地找到与其课题相适合的解释，并使其工作达到最高度的完美。高斯的座佑铭是“只言片语”。

J.W.L.Glaisher

511. 是人解决问题而不是方法解决问题。

H.Maschke

512. 最伟大的数学家，如阿基米得，牛顿和高斯，总是以同等重要性把理论与应用统一起来。

F.Klein

513. 无论思维与外界的关系是如何超乎寻常地重要，它的很大组成部分必定有其自己的内部生命。科学的任何一个范围，至少象数学那样需要高度集中的智力的学科，不可能完全的或主要地从面向外部应用的角度得到自身的发展。现在，知识各分支愈发复杂和专门化，这也许使上述发展成为可能，然而以前，象数学这种分支的发展，大概只能寄希望于为数学而数学的人，以及这样的一些人，他们虽然虚心地看待外部启发，但使自己的思想沿本学科现状所指示的发展方向自由地驰骋，不受其它有关科学领域的应用所带来的成见的影响。即使持有应用观点，如果数学想在未来去处理从物理、化学或其它物理科学中提出来的本质问题，处理那些我们现在还无法预言的问题，那么也必须允许数学沿着其自身的方向自由发展。

E.W.Hobson

514. 数学是科学中最古老的分支，它也是最活跃的学科，因为它的力量就在于它的永葆青春的活力。

A.R.Forsyth

515. 现代数学的主要成就之一，在于我们已经发现了数学实际上是什么。

Bertrand Russell

516. 数学家本质上是热心人。没有热心就没有数学。

Novalis

517. 对数学科学的追求使追求者本人显得对人们的通常兴趣及忧虑毫不关心。他寻求永恒的真理并在形状和数中找到了乐趣，因而对消磨时光的争执和辩论失去了兴趣。

Thomas Hill

518. 在数学家取得真正伟大成就的秘密中有些崇高的东西。但这并未得到广泛的称赞；当代人和下一代人都不理解这一点。几何学家应由与他同等的人来评审，而真正称得起是几何学家或分析学家的人往往找不到足够组成陪审团的十二个同行。

Thomas Hill

519. 数学具有三重目标。它应该提供用以研究自

然的手段。此外它有一个哲学目标，并且我敢说还有一个美学目标。它应该刺激哲学家探究数、空间和时间概念；而首要的是，内行能从数学中得到与绘画、音乐所给予的相类似的乐趣。他们欣赏数和形的精美的谐和；当一个新的发现为他们展示了意外的前景时，他们感到惊奇；他们从而得到快乐，这里尽管感官并未介入，但这难道不具有美学特征吗？的确，仅有极少数有特权的人能够完全欣赏它，但是对所有最高雅的艺术，情况不正是这样吗？因而我毫不迟疑地说，数学是值得为数学而发展的，而那些在物理中不能应用的理论也象其它理论一样值得研究。

H.Poincare

520．我几乎更喜欢把数学看作艺术，然后才是科学，因为数学家的活动是不断创造的，它虽不被感官的外界所控制，却和艺术家，例如画家的活动相似，我相信这不是幻想出来的，而是真实情况。数学家的严格演绎推理在这里可以比作画家的绘画技巧。就如同不具备一定的技巧就成不了好画家一样，不具备一定准确程度的推理能力就成不了数学家。这些素质尽管很基本，但还不足以使一个人称得起是画家或数学家，在这两种情

况下，这些都不是最主要的因素。还有一些远比上述条件难以捉摸的素质才是造就优秀艺术家或优秀数学家的条件，其中有一个共同的素质，那就是想象力。

M.Bocher

521. 真正的数学家总是同时在很大程度上也是一个艺术家，一个建筑师或一个诗人。数学家们还在现实世界之外依靠智慧创造了一个理想世界，后者虽然可以从前者领悟到，但数学家试图把它发展成为一个最完美的世界，并且正从各个方向去探索它。除去知道这个世界的人，其他人对它一点儿概念也没有。

A.Pringesheim

522. 数学有其自身的美，这显然包括所得结果的对称与符合比例，没有多余的成份以及方法严格地适合于目的，在数学之外，这些只有在最美丽的作品中才能见到。歌德称雄伟的教堂为“冻结的音乐”，这是个恰当的提法；但也许称其为“石化的数学”更加好。即使对年轻的孩子们也可以并且应该强调在数学的简单性、对称性和完整性中所具有的美。当恰当地、具体地介绍了这一主

题之后，内心的情绪就是感到美的欣赏，而不是感到丑陋不快。

J.W.A.Young

523．一种特别的美统治着数学王国，这种美与艺术美的相似性不象与自然美的相似性那样大，它反映了具有反射能力的思想，它得到了欣赏，很象自然中的美。

E.E.Kummer

524．数学也是一种语言，并且是现存的在结构与内容方面最完美的语言，胜过任何方言；实际上，因为每个民族都懂得数学，它可以称为语言的语言。可以说，自然用这个语言讲话；造世主已用它说过话，而世界的保护者继续用它讲话。

C.Dillmann

525．没有数学这门语言，事物间大多数密切的类似关系将永远不会被我们发现；我们也无从发现世界内部的和谐，而这种和谐正是唯一真正的客观现实……这种和谐是唯一的客观现实，是我们所能达到的唯一真理；当我讲世界万物之和谐是所有美丽之源时，我是指我们应该付出多大代价

去推动这个缓慢的、困难的过程，以使得我们一点点地、越来越好地理解这个和谐。

H.Poincare

526. 就其本质而言，数学是抽象的；实际上它的抽象比逻辑的抽象更高一阶。

G.Chrystal

527. 人们意识到，形式思维是所有精确知识的手段；而对主要的形式科学，即逻辑和数学的正确理解是科学教育的恰当的和唯一可靠的基础。

A.Lefevre

528. 一般认为数学的确定性归因于它对不可改变的形式逻辑原则的依赖。这仅仅是未被完整地表述的真理之一半。事情的另一个侧面则是，形式逻辑的原则之所以具有这种程度的不变性是因为它们被数学家长期地、多样化地使用，从而受到锤炼。你也许说这是“恶性循环”。我则宁愿把这件事作为数学家们熟知的不断逼近方法的一个过程性例子。

M.Bocher

529. 如果谁不知道正方形的对角线和边是不能用同一单位度量的，那他就不值得人的称号。

Plato

530. 数学家已经在许多情况下证明了有些事是可能的，而另一些则不可能，但若没有证明，人们可能不会相信……数学能够提出在事物本质上不可能的例子，但这些例子若不经严格证明就没有人会相信。我们若能在其它学科内进行证明式的推理，也象在数学中进行推理的水平，我们也许会发现许多事是不可能的。我们不迟疑这一点是完全可能的。

Thomas Reid

531. 在我看来，似乎没有一门科学能够象所有科学的皇后数学那样，把它们协调起来并使它们结合起来。

E.W.Davis

532. 我相信，化学作为精确科学的未来发展，实际上非常地依赖于它和数学的联合。

A.Frankland

533. 我们在数学中找到了理性的基本来源；而生物学家必须到数学中去寻求他们用于研究的方法。

A.Comte

534. 在不久的将来，数学将在医学中起重要作用；已经有越来越多的迹象表明，生理学，描述解剖学，病理学和治疗学都不能逃避数学的检验。

M.Dessoir

535. 在伦理和社会科学的极大要求下……数学提供了演绎艺术的唯一充分型式(这里我总是在指应用数学)。直到现时，我敢说，一个人若不从数学中学到演绎，那他就不知道什么是作为研究自然定律的手段的演绎；一个人若不在一生中的某一段时间了解足够的数学以熟悉工作手段，那他就不会有完全理解演绎的信心。

J.S.Mill

536. 纯数学是魔术家的真正的魔杖。

Novalis

537. 奇迹被认为是违反自然的事，也是违反数学

的。在这种意义上是没有奇迹的，而那些所谓的奇迹也可以通过数学手段来理解，因为对于数学，什么东西都不是超自然的奇迹。

Novalis

538. 数学一旦良好地建立在几个公理和定义的基础之上，如同建在岩石之上，那样它就会随世代而成长，以至成为人类推理所引以自豪的最牢固的结构。

T.Reid

539. 数学所揭示和照亮的概念世界，它所归纳的对天赐的美与序的研讨，它各部分的和谐联接，数学所关心的真理的无穷递阶和绝对证据，类似的这一切是它所以能引起人们注视的基本原因，而且若宇宙的计划也象地图那样在我们脚下展开，若人的思想在一瞥之下就全览整个创造方案，那么上述那些将会完好无损。

J.J.Sylvester

540. 对于数学的使用总有那么两个极端的观点。一种情况是因在数学、物理、统计学和其它科学的应用而产生兴趣。我们有那么一些人则在另一

个极端，他们仅仅受对纯科学的热爱所激励。对他们来说，以数论为首的数学是唯一真实的和名符其实的科学，而应用只有在其包含或提出纯数学中的问题时才引起兴趣。有两位最伟大的现代数学家，牛顿和高斯，前者可以看作是第一种观点的代表，而后者代表第二种观点；但是两人都不那么绝对，牛顿在纯数学中的发明大概和高斯在应用数学中的工作是等量齐观的。

J.J.Mertz

541. 数学作为人文学和科学这两种文化之间的桥梁，是靠近各种教育活动的中心的。科学文化的突出特征之一是定量化。因此，数学在现代教育中被赋予突出的地位。并且，数学是作为人类思想最精细的产品之一而独立地存在着，并且因其本质和内容，它和其它的艺术共同证明着人的创造能力。

V.Singh

542. 数学教员不应该让自己与他学科中的正在成长的分支失去接触，他必须安排时间或者挤出时间来了解他所处理的题材，这些题材不是僵死的枯骨，而是活的器官的肌腱，这样才能使他的

教学保持新鲜和活力，简言之，他必须是从其职业获益的人。

V.Singh

543. 不能在数学中过分强调逻辑严格的重要性，因为单单这一条就包括了作为人类思维的数学的全部意义。显然，逻辑是思维的艺术，而这种艺术只能按实践的要求而发现，并且应该通过一系列阶段逐渐地发展。严格性是数学的技艺，但并无绝对标准；当这门学科经历了许多年的发展之后，标准也就改变了。因而对个人的合理要求是，他的严格性应随他的数学教养的进步而发展。

V.Singh

544. 数学是观察世界的一种方式，这种方式有助于精确地、完全地、经济地并尽可能一般地理解生活的每一个方面，数学的效用主要是心理学的，是发展思维功能和掌握复杂情况的能力。我们国家所不断增大需求的人材不是“训顺的数学家”或计算机看管员，而是整整一代学会用数学方式看待世界的人。

V.Singh

545. 历史告诉我们，我们无法预见将来什么数学会有用，或者现在看上去有用的哪一种数学将来会失去其重要性。关于卓越性的真正满意标准在于一定思维品质的表达，这包括透彻性、精确性、一般性等等，这种表达在逻辑学、数学和科学中一直存在着。

V.Singh

546. 数学作为一门学科是一个结构，其中每一部分逻辑地和必然地依赖于它以前的各部分，整个结构则已经被人们深入细致地发展了 2500 多年。在这段时间中，这个结构已经成长到非凡的程度，使得至今，即使仅仅熟悉其中一个主要部分也成为无法完成的任务了。然而这种不断复杂化的趋势不时地被洞察的闪光所逆转，这种洞察指明了如何能够简化、缩减、统一并阐明和理解一些极复杂的步骤，而对这些观念的欣赏对于数学教育的正常发展是十分重要的。

V.Singh

547. 如果从两条数学陈述中的一个导出另一个，我们就称它们是等价的。在数学这样一门科学中，我们关心的是对一条陈述寻找越来越简单的等价

陈述，直至找到一条我们感到“显然”的，或者直接“有用”的句子。类似地，数学见解包含于把对于一条陈述的证明归结为对一个等价的陈述的证明，而后者可能相对简单得多。

J.N.Kapur

548．公众不要再把数学教师想象为二十世纪的念咒施魔术的巫师；人们必须学会给他以恰当的身份，这种身份适于数学在二十世纪文化、思想和技术发展中所起的完整的、有生气的作用。公众必须承认，数学家对公众生活的贡献是重要的、智慧的和人们所希望的，甚至是首要的。另一方面，数学教员必须不遗余力地使自己与这一身份相称。教员不能与他的学科中有生命的分支脱离接触；他必须找到或挤出时间来使他思想的翅膀保持适应性，使他的基本教学永远保持新鲜和朝气。如果公众要承认数学家的高尚身份，数学家就必须表明他是配得上这种承认的，并比以往任何时候更加表明他必须为其职业而不停地学习。

T.A.A.Broadbent

549．尽管数学至今在本质上是以逐渐的和系统

的方式演变的，尽管除微积分学外在数学中几乎没有不连续的演变，但这种经验是不能外推到计算机的奇迹般能力的，这种能力还在发展，而分析的连续性难于用到这种“奇异性”上。

B.Thwaites

550．不管在什么水平上，再也不要在学生面前把数学描写为一个包含有任意的、可能是天赐定律给定的证明、阐明或其它大块论证的系统。必须培养我们的学生在带有启发趣味的算法式方法方面的自觉性。必须明确地教导学生，在数学任何部分，所使用的方法以及成功的机会必定依赖于所得到的手段和数学结果有什么用途。特别地，现在应该使图的概念渗入所有的数学教学，图表示了一个系统的可能的状态以及连结这些状态的算子。

B.Thwaites

551．在过去的五十年中，以先进数学手段为其本质的整个新思想系统已经得以存在。我确信，我们还未完全了解这一发展的所有含义。但我看到它具有非常深远的重要性，并且我确定再过五十年，只要经过新时代的最初几步停滞，这种系统

就将对人类本质表现出巨大的贡献。

F.C.Powell

552. 数学家寻求一个新的逻辑关系，某个旧关系的一个新的证明，或者许多关系的一个新的综合。

P.R.Halmos

553. 数学在刺激思想的智力兴趣和定量方式上起重要作用，也在培养对模式、结构和逻辑的感觉上起重要作用。

A.Report

554. 给我五个系数，我将画出一支大象；给我第六个系数，大象将会摇动尾巴。

A.Cauchy

555. 连篇的算术练习和重复的“实际生活”问题比没有价值更糟糕，它们阻碍了学习的进程。我们以为，直到最近还在小学中讲授的那种算术，在智力内容上就是如此贫乏的，而常见的对该学科的反感并不是对于困难问题的不幸反抗，而是对于繁琐偏见的完全合理的反应。

Cambridge Report

556. 数学是具有极大人文主义价值的学科，它对于有教养的人的重要性就如同它对于许多技术专家的重要性一样。对提早进行微积分教育的最强烈的争议是关于一般教育的。自由式教育要人们注意天才的工作，而微积分正是人类所建造的最宏大的知识大厦之一。

Cambridge Report

557. 在普通生活中常见的许多粗劣的思维模式，可以通过学习数学来改善。有一种几乎是普通的，引起误解的假设，认为事物必须按单线排序，这种假设可以通过学习半序来解除。只需在逻辑和推断方面的一点儿经验就能去除我们那些过于常见的，不正确的推理方式。仅仅是对于概率的浅薄知识，就能澄清“平均定律”。

Cambridge Report

558. 数学是一门正在成长的学科，应该让所有的学生都知道这一点。如果知道了有许多未解决的问题，而它们又正在逐渐被解决，这就给数学以新的光明，剥去其某些神秘的外衣，而且有助于动摇在这一领域的教学中长期起统治作用的服从

权威观念。

Cambridge Report

559. 数学是一门极好的学科，人们在其中所进行的富于智力的努力可以成为真正的节约劳动的手段。

Cambridge Report

560. 数学在很大程度上是组织数据的过程。通过符号化以及对新概念的精确表述，人们的思想掌握了大块的信息。数学的定义是任意的，但它们同时必须遵循利于组织数学学科这一条原则。

Cambridge Report

561. 我们必须承认这条必然的事实，即数学的使用者比它的创造者要多得多。

Cambridge Report

562. 早期引入严格数学可能会使学生如此地醉心于该领域可达到的逻辑精确性，以至对精确性次之的学科失去兴趣。他们可能变得如此僵硬，以至在典型的应用环境中无所作为。其补救办法不是去焕发他们的智力，而是理智上公正地对待

各个学科。如果仔细地描述了科学中所用的数学模型的本质和局限，并且又很好地演示了构成数学模型的各个直觉步骤，那么逻辑确实性的吸引力就会和通过解决实际问题去发现自然奥秘的内在吸引力相平衡。

Cambridge Report

562. 以严格演绎方式完整地介绍数学不仅会排除任何使数学得以应用的可能性，它也是不真实的，即使现代数学也不是这样的。无论是应用数学的实践者，还是纯数学的创造者，都是在“有了这种情况，我们要探索”方面花费大量时间与精力的，而不是仅仅致力于“这儿是个问题，要解决”，或者“这儿有个定理，要证明”。

Cambridge Report

563. 只有在详尽给出现实世界的一个模型之后，数学才能出场。数学的每一个应用都依赖于模型，而演绎地价值更多地是作为模型的属性而不是数学自身的属性。无论分析工作做得多么细致，一个基于拙劣证据的决策都可能是很糟糕的。

Cambridge Report

564. 不应该让学生得到这种印象，即在他的全部数学努力中，严格性将会最终取代直觉性。因为那样将会扼杀他的创造潜力。他应该领悟到，他的思维能够先行，甚至能够有效地提前运用“某些知识”。在创造性的数学中，假设往往先于证明。这是一个历史事实；还不止此，一些猜想例如黎曼猜想和费尔玛猜想，它们至今未被证明，却已经以重要的方式影响了数学。

Cambridge Report

565. 学生个人在发展创造性的和独立的思维时，必然会进行发现性的研究。他的天赋兴趣和竞争本能使得他把注意力集中于他所碰到的带有创造性的问题。

Cambridge Report

566. 有人说，数学家的主要动机是懒惰。

Cambridge Report

567. 展望未来会给人们带来独创的勇气，并且对某些个人还会导致他成为数学家。

Cambridge Report

568. 应该把数学内部及外部的应用都教给学生，使他对两个方面都明白：一是数学作为科学方法的效力，一是数学作为科学所应有的统一与美。在某种意义上，把数学的思考方式传递给我们智力工作的其余部分，就是数学的一个应用。至于精确的数学解答，往往并不必要，并且这种解答可能与模型的输入、输出结构也不相容。

Cambridge Report

569. 数学是一个工具，是一种语言，是一幅地图；它是一件艺术品，是以其自身为目标的产物，是热衷于完美性的成就。它是个讽刺物，是个幽默题材，是争论的源泉和机智的刺激物；它是使人们发狂又给他们以愉快的活动。从广义观点看，它是人们创造的知识体，但它又远离并独立于人们。

James Newman

570. 尽管数学的年龄很大，但它不会因其复杂性的增长而渐渐僵硬，相反地，它仍然生气勃勃，仍然不断地用它扎在思想和自然中的深根获取营养。

H. Weyl

571. 我所讲的数学思维方式首先是指这样的推理形式，通过这种形式数学渗入外部世界的各门科学，甚至渗入我们关于人类事物的日常思维；第二是指这样的推理方式，即数学家留给自己的、用于他自己领域的推理方式。

H. Weyl

572. 我已经把两种数学区分开，一种数学是作为发现某些真理的方法，另一种数学则是被发现的真理。数学发现的过程是一个有生气的、成长中的事物。

P. E. B. Jourdain

573. 如果没有作为科学和秩序的语法的数学知识，我们就不能计划一个使人人都有闲暇，而谁也不受贫困的国民社会。

L. Hogben

574. 数学具有超越种族和时间的尺度；数学可能谦恭地为市场服务，但它还可以高达星宿。对一个人，数学是游戏（但要搞清是什么样的游戏!），但对另一个人，数学又是科学的侍女。最伟大的数学具有诗歌与音乐的那种至高无上的简

明性和必然性，它处在这样的边界上，一侧是科学中所有的美妙事物，另一侧则是艺术中所有的美妙事物。

H. W. Turnbull

575. 如果纯数学家发现艺术能运用他的计算或者理性可以验证艺术，他就会感到欣慰和惊奇，感到了新的发现，这十分象一位作曲家发现了海员们在唱着他写的歌曲时能够更好地驾驶船只。

G. Santayana

576. 在最低层次上，数学家的思维是和其他人一样的。他们常常是受过更高的训练并且具有技术手段的，这些手段部分地来自实践，部分地来自为达到正确和迅速地思维而运用了发明创造，而后者是由于数学和现代逻辑所提供的、用于发明创造的符号和规则才得以成为可能。没有任何理由说，具有耐心的普通人不能理解数学，广义地说，即不能理解数学家做什么，他们为什么做这个，以及我们现在所知的数学到底是什么。

P. E. B. Jourdain

577. 数学的每一大进展都产生于自然科学的需

要，或者产生于要把事物联系起来的需要，产生于把描述不同自然现象的数学过程按照方法排成一个整体的需要。

P. E. B. Jourdain

578. 数学是逻辑的而不是心理学的，因此，历史、人和自然问题都与数学自身不相关。数学已经要求人们做了多少个世纪的挖掘，而这种挖掘过程还未完结，当然永远也不会完结。但我们已经清楚地看到了所挖掘出来的内容，这些足以把内容和挖掘者自己所使用的工具区别开。这一点从来不被挖掘者自己所混淆，但却被某些评论挖掘过程富于哲理的旁观者所混淆。

P. E. B. Jourdain

579. 我尤其对数学推理的确实性与明了性感到高兴。如果在这样坚实与牢固的基础之上没能竖起更高的上层建筑，那倒使我吃惊。

R. D. Descartes

580. 一个开始随欧几里得读几何的人在学习了第一条命题之后向欧几里得问道："那么我学了

这些之后究竟能得到什么呢?”为回答这个问题，欧几里得唤来一个奴隶并吩咐道：“给他三个便士，因为他每学点东西就非得要点什么。”

Stobaeus

581. 世界上没有什么研究能比数学给思想能力带来更和谐的作用了，……诸如此类使得他们达到自觉智能生物的越来越高级的状态。数学家既长寿又年轻；其灵魂的翅膀不会过早地脱落，它的毛孔也不会过早地脱落，它的毛孔也不会过早地被世俗生活大道上扬起的尘土颗粒所堵塞。

J. J. Sylvester

582. 数学的首创性在于数学科学展示了事物之间的联系，如果没有人的推理作用，这些联系就不明显。现代数学家头脑中的概念距离那些可以通过感官直接感知到的任何见解极其遥远，除非这种感知是被以前的数学知识刺激和指导的。

A. N. Whitehead

583. 我们在数学中总是排除特例，甚至排除一类特殊情况，这就是数学的要点。你在数学中所做的断言总是这样的：不管什么实体，只要它们具

有满足这样的纯抽象条件的关系，那么它们就必定具有满足某些其它纯抽象条件的另外一些关系。数学被认为是从它所讨论的任一特例出发，在一个完全抽象的范围内移动的。数学的确实性依赖于它的不完全的抽象一般性。

A. N. Whitehead

584. 在批判一个基于把数学应用于特殊事实的论证时，我们心中总要很好地区分三个过程。我们必须细查纯的数学推理部分以确信其中没有推理过失，没有因思考错误造成的荒唐、违背逻辑之处。下一个过程要把预先假定成立的所有抽象条件确实搞清。这里的主要危险是漏察，或者说是暗中引入了一些条件，这些条件很自然地被我们假定了，事实上又不总能成立。也有另一种漏察，虽然不引起错误，但使问题不够简化。很容易出现的一个情况是我们想到的，所需的假设条件多于实际需要的条件。换句话说，我们可能认为某个抽象条件是必要的，而事实上它又能够从我们已有的其它假设中得到证明。这种过多使用抽象假设的唯一效果是使我们的数学推理失去美的享受，并且在我们进入批评的第三个过程时增添麻烦，这最后过程就是验证在所研究的特殊情

况下，抽象假定是否成立。

A. N. Whitehead

585. 在纯数学中有着一种沿着完全分析的路线的不屈不挠的努力，目的是把纯事实的成份从它们所例证的纯抽象条件中分离出去。这种分析的习惯启发了人脑的各种思维过程。它强调了对经验内容确实的欣赏。

A. N. Whitehead

586. 当数学越是退到抽象思想的更加极端区域时，它就越是在分析具体事实方面相应地获得脚踏实地的重要成长。没有比这事实更令人难忘的了。它导致了这样的悖论，即极端的抽象是我们用以控制关于具体事实的思想的正式武器。

A. N. Whitehead

587. 数学向生物学的渗透不仅仅是开始；借鉴科学的历史可以看出，这种渗透还会继续下去。数学往往能够帮助证明明显的事实，而且当可以做这样的证明时，也是值得对明显性加以证明的。

J. B. S. Haldane

588. 数学是一个逻辑方法。数学命题并不表达思想。在生活中我们从不需要数学命题，我们仅仅是用数学命题去推断那些并不属于数学的命题的含义。

Wittgenstein

589. 数学在经济学中的那些既短小又简单的应用是最有帮助的，它们仅使用少数符号，目的在于完全搞明白庞大经济运动的一小部分，而不是去表示它的无休止的复杂度。

A. Marshall

590. 至今所发现的用来说明数学在经济中绝对必要性的例子是很少的，但是有更多的用数学来作为争论手段的例子。

O. Morgenstern

591. 很清楚，经济学要成为科学，就必须是一门数学科学。经济学必须是数学的，因为它处理那些可大可小，经历连续变化的数量。在本质上，数学符号和语言没有区别；它们形成一个完美的语言系统，它们为演示和理解我们所运用的推理提供了手段。我们并不是通过避免使用符号来减

少数学的使用。我们仅仅是在一个非常不完善的、十分需要各种帮助的科学中，拒绝使用那些在其它科学中所发现的必须使用的符号。

Anonymous

592. 由于最近20年的进步，社会科学的许多重要领域已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段，并且学者越来越吃惊地发现，对人类本身的研究正从他的手中传到技术人员和专家的手中。这样做被公认为造成不良的美学效果。数学如果能在这些科学中起作用，那就是一种必不可少的作用；现在，在人的关系中，许多人往往被作为数学项来处理，再也无法忽略或逃避这种新的语言了。我们向读者提出，在社会科学中不断扩大数学语言的运用是具有重要意义的。

A. Kaplan

593. 把数学应用于对人的研究不再是一种闲想，而是已经成为现实。如果所使用的数学不仅仅是纯理论的，不仅仅是一个抽象的方法学的解释，不仅仅局限于数据获得的可能性，尤其是概念获得的可能性，那就有理由希望数学最终会对关于人的研究做出贡献，这种贡献也象它对理解自然

的其它部分已经贡献的那样多。

A. Kaplan

594. 特殊的数学才能好象仅仅来自可靠的记忆力或异常的注意力。然而一个数学证明并不是简单地罗列推论式，它是以一定秩序排列的推论式，其中元素排列的方式比元素本身重要得多。如果我对这个排序有直观感觉，可以一眼就看穿推理的整体，那我就再也不必担心会忘掉一个元素了，因为每个元素在整个队列中都有其配定位置，不需要我再费力去记它们。

H.Poincare

595. 不可能每个人都具有看穿内在和谐和关系的那种关于数学秩序的直觉。一些人或者不具备难以言传的精细感觉，或者不具备超常的记忆力与注意力，他们绝对没有理解高等数学的能力。大多数人正是如此。另外一些人仅在一定程度上具有这种感觉，但他们被赋予非凡的记忆力与极强的注意力。他们用心地、一点点地学习细节；他们能够理解数学，并且有时做出应用，但他们不能创造。最后的一些人，他们在或多或少的程度上具有我们所说的直觉，因而他们不但能理解

数学，并且在记忆力并不超常时也能成为创造者，也能致力于发明，他们的成功是多还是少取决于这种直觉在他们身上有多大的发展。

H. Poincare

596. 现在值得我们研究的数学事实是在与其它事实相比时可以引导我们得到数学定律知识的那些事实，就好象实验事实引导我们获得物理定律知识一样。这些事实可以揭示出存在于其它事实之间的不曾被预料的亲族关系，人们长期以来知道这些有关系的事实却错误地认为它们互不相关。在所选择的组合中，最多产的常常是由从相距很远的领域抽出的元素组成的。我并不是说把尽量远的东西放在一起就足以发明创造；这样组成的大多数组合将会是完全不毛的。但在这些组合中，确有一些往往是最富成果的。

H. Poincare

597. 发明就是选择，但要选的样本太多了，以至一个人毕生的时间也不足以考察它们。这并不是事物的实际情况。发明者的头脑中并不装那些不毛的组合。这样，他只需要对少数在某种程度上具有有用组合的特征的情况进行排除就能完成选

择。

H. Poincare

598. 并不是总能简单地和令人信服地证明数学植根于经验。科学的某些分支是这样地极端抽象，这样地不近人情，它们只是满足抽象数学家中的最抽象者。有些数学领域甚至好象能够完全离开经验，可以自己存活下去，但我认为，谁也不能逃避这条结论，即所有分支都完全来自人类的经验。任何其它观点最终都会完全乞助于神秘主义。再者，最抽象和最无用的学科在被人们发展了一段时间之后，常常被科学的其它部分所俘获，作为实际工具。我想这不是偶然的，就好象一个人戴了一顶高帽去参加婚礼，后来在起火时发现它可以当水桶用。冯·诺伊曼给出了微分几何和群的两个例子，原来都是设计成智力游戏的，一直主要是“非应用”式的。但其中一个在十年后，另一个在百年之后*，都被发现在物理学中非常有用。

James Newman

---

* 此处按原文直译。——译者注

599. 有这种数学家，他们把对其心爱学科的利用看作是一种玷污；他们至多认为，在经验科学中的有用性是与他们不相干的事。没必要和这种观点争吵。我们所要导出的结论是，常常被认为是抽象地构造的数学活动，参与了世上的实际工作。这一点即使不是证明了，也是提出了一个深厚的联系。

James Newman

600. 冯·诺伊曼判断数学是否成功的准则“几乎完全是美学的”，它远远地脱离了认为数学是必然的、外部真理的科学的观点。作为嗜好问题，数学是一个概念，它引起许多人注意，但一点也不会引起那种对这门学科的进一步严格化毫无兴趣的人的注意。

James Newman

601. 数学不是一门经验科学，或者它至少在几个决定的方面以与经验科学和技术不同的方式实践着。但它的发展还是与自然科学密切地联系着。它的一个主要分支，即几何学，实际上是从自然的经验科学起源的。现代数学的最好的灵感（我相信是最好的）都来源于自然科学。数学方法侵

入自然科学的“理论”部分并且在那里起主导作用。一门现代经验科学是否可以运用数学方法或者接近数学的物理方法，这一点越来越成为判断它是否成功的主要准则。

J. Von Neumann

602. 在数学本质中有着一种十分奇怪的二重性。必须认识到这种两重性，接受它并且将它溶入关于这门学科的思维之中。这个两重性就是数学的面貌，我不相信任何关于事物的简单化的一元论观点能够不牺牲本质。实际上，数学是一个多重现象。并且无法否认的是，数学中一些最好的灵感，甚至人们可以想象的最纯的数学中的灵感，是来自自然科学的。

J. Von Neumann

603. 就连“绝对的”数学严格性的概念也不是一成不变的。严格性概念的变化说明在数学抽象之外必定还有某些事情在数学的构成中起了作用。当对关于数学基础的争论进行分析时，我一直无法相信这一条，即任何裁决必定对额外成份的经验本质有利。尽管倾向于这种解释的立场并不是绝对令人信服的，但却是相当强烈的。然而

下述二点是非常清楚的。第一，某些非数学的事情，或是与经验科学有关的人，或是与哲学有关的，或者是与二者都有关的，实质上介入了数学基础的构成，你要想维持它的非经验特征，你就必须假设哲学（或更具体地，认识论）能够独立于经验而存在（这条假设仅仅是必要的而不是充分的）。第二，数学的经验本源得到几何和微积分这种例子的强有力支持，这一点是与如何最好地解释关于基础的争论无关的。

J. Von Neumann

604. 大多数最好的数学灵感来自经验，很难相信一个关于数学的严格性的、绝对不变的、不赋予人类经验的概念能够存在。我正对这个问题缺少见识。有一种假设认为，数学的严格性是先验的。但是，无论一个人在这方面会持何等的哲学的或认识论的偏爱，数学界的实际经验不能对上述假设给以什么支持。

J. Von Neumann

605. 理论物理并不解释现象，而只是给现象分类、建立它们之间的联系，这种态度已为今日大多数理论物理学家所接受。这意味着判断这样一

种理论是否成功的准则就是，它的分类和所建立的联系是不是简单和雅致，是否可以覆盖许多现象，而若不采用这种分类，这些现象就会显得复杂和纷乱；另一个准则是，这个方案能否覆盖那些在该方案形成时未被考虑甚至还不为人知的一些现象（这两条当然表达了理论的统一和预言能力）。这里所提出的准则显然在很大程度上也适用于数学，数学成功的准则几乎完全是美学的。在数学和理论物理的实际方法间的差别毕竟还是很大的，是根本性的。理论物理的目的主要是从外部给出的，在大多数情况下来自实验物理的需要。它们几乎总是起源于一个要解决的困难，只是到后来才是达到预言和统一化的成就。这些困难通常来自实验，但也有时来自于已被接受的理论中不同部分之间的矛盾。理论物理的问题是客观地给出的，但其成功的准则却主要是美学的。

J. Von Neumann

606. 今天的优秀理论物理学家可能还具有其学科工作知识的大部分，但是我怀疑现在活着的数学家能够具有其学科知识的四分之一以上。

J. Von Neumann

607. 数学家对计算机感兴趣，因为它们能进行计算。它们接受单调乏味的习题并迅速地解决问题，如果是人去解这种问题，则要花费很长的时间，付出极大量的劳动。但在某种意义上，这是计算机的最不重要、最无兴趣的方面。一个迫切的问题是，计算机能够告诉我们多少关于人脑的事情。人们认为也许在适当时候，这些机器能告诉我们许多关于我们自己的事，它们不但能回答我们提出的所有问题，甚至还能向人们提出更好的问题。

J. Von Neumann

608. 大多数数学家早就预料到哲学思想的三个基本方面不断地数学化的趋势，这三个方面分别是逻辑、美学和伦理学。因为数学家可能都同意法国伟大的哲学家兼数学家笛卡尔的话："对我来说，每一件事都变成数学"。

G. D. Birkhoff

609. 数学家只有在他内心感到真实的美时才是完美的。

Goethe

610. 天生的数学家把自己置于作曲大师、雕刻大

师和绘画大师之旁；他和他们一样要奋斗，并且必须为用符号构成所有事物的统一秩序而奋斗，这样做以便向普通的同胞传授秩序，后者内心听到了这种秩序，但并不掌握它；数目就和音符、线条与颜色的领域一样，数目领域也成为世界外貌的一幅图象。由于这个原因，“创造”这个词在数学范围内比在其它范围内意味着更多的东西。

O. Spengler

611. 数学是人类的发明，这一点是最纯粹的真实，是稍微观察一下就能发现的事实。

P. W. Bridgman

612. 我们已经克服了这样的概念，即认为数学真理具有独立的和远离我们头脑的存在性。我们居然有过这种概念，单这一点就够奇怪了。

E. Kasner and J. Newman

613. 数学现实是独立于个体头脑而存在的，但它却完全依赖于人类的思想。数学是人类世代努力的累积。

L. A. White

614. 非欧几何证明了数学是人的手工作品，它仅仅受到思维规律所规定的限制。

E. Kasner and J. Newman

615. 数学概念是独立于个体头脑的，但又完全存在于人类思想中，也就是存在于文化中。数学发明与发现仅仅是一个事件的两个方面，这个事件同时发生于文化传统中和一个或多个神经系统中。在这两个因素中，文化更具有重要意义；人的神经系统不过是使文化过程成为可能的催化剂。

L. A. White

616. 数学的陈述是强制性的，但它们具有特殊的力量，它们是真理性的，其真理是唯一地定义的。数学推理是严格的和演绎的，数学命题仅仅是把这种推理用于一定的原始公理的结果。然而这种机敏的、自包含式的、严格规定式的方法在创造性上是无限制的，在自由度上是无限制的。既不能用物理事实确认它，也不能用物理事实为其建立根据。然而在数学命题与物理世界的事实间有着生动的联系。就是纯数学的符号也与现实的某些方面相对应。抽象毕竟是由人来创造的，而不是由其它的抽象来创造的。数学概念是从经验中

产生的，并且在许多情况下得到了经验的支持。

J. R. Newman

617．人们经常说，数学真理与经验科学的假设相比，既不需要事实的证据，也不需要任何其它验证，因为它们是“自明”的。然而这种把真理的决定完全归为一个自明的感觉的观点是遇到了许多困难的。首先许多数学定理都是难于建立的，即使专门领域的专家们也感到了困难，因为它们根本不是以自明的面貌出现的。第二，众所周知，数学的结果特别是如抽象集合论和拓扑学这种领域的最有趣的结果，与根深蒂固的直觉以及自明的习惯性感觉背道而驰。第三，存在着象哥德巴赫、费尔玛这样的一些数学猜想，它们在内容上是相当初等的，但是至今还不能被肯定或者否定；这一点当然说明不是所有的数学真理都是自明的。最后，即使是只把基本的数学假设归为自明的，而其它数学命题再从这些假设导出，我们也还是要指出，判断哪一些命题选为自明的这一点是主观的，是因人而异的，因而以此来作为决定数学命题的客观有效性的基础也是不合适的。

C. G. Hempel

618. 对数学陈述的确认并不需要经验的证据，它们的真理性可以通过对其中所出现术语的含义进行纯分析来证明，这是分析的或者先验的，它们的真理性是逻辑地独立于或逻辑地先验于任何实验证据的。然而经验科学的陈述是综合的，它们的有效性只能被后验地验证，并且要根据新证据的启发不断地修正；分析性陈述的真理性则可以一劳永逸地建立。但是为了得到分析性命题的这种理论肯定性，我们必须付出高的代价。一个分析性陈述并不包含有关事实的信息，它并不蕴含什么事实，也没有经验内容；也正是由于这个原因，这个陈述才不必须被经验证据所验证。

C. G. Hempel

619. 数学的正确性既不依赖于所宣称的自明性，也不依赖于任何经验基础，这种正确性来自于那些决定数学概念含义的约定，因而数学命题在本质上是依定义为真的。

C. G. Hempel

620. 数学是逻辑学的一个分支。可以在下述意义上从逻辑得到数学：

（a）数学的概念也就是算术、代数和分析的

所有概念，可以用逻辑概念来定义。

（b）数学的所有定理，可以根据逻辑的原则从这些定义推导出（包括无穷公理和选择公理）。

在这种意义下所规定的数学系统的命题可以说是根据有关的数学概念的定义为真的，或者可以说，这些命题给出了某些明确的特征，而我们用定义的方法把这些特征赋予我们的数学概念。因而数学命题的确定性就如下述命题那样毋容置疑。“所有的单身汉都是未婚状态的。”但它们都缺少赋予这种确定性所需的经验内容。数学命题是缺乏任何事实内容的；它们不包含任何经验题材任何信息。

C. G. Hempel

621. 这样在建立经验知识中，数学（以及逻辑学）可以说起着提取理论精髓的作用，数学和逻辑学的理论技巧并不能产生比构成实际信息的假设中所含有的更多的精髓，而它们（指理论技巧）正是被应用到这些假设上去的，但比起对构成素材的这些假设作初次直觉观察所能预期的，它们所产生的精髓确要多得多。

C. G. Hempel

622. 数学可作为分析的工具，它揭露了一组给定

假设所蕴含的东西，但并不增加更多的内容。然而它无论作为这种知识的验证仪器，还是作为其表达语言都是必不可少的。经验科学中多数更加深刻的定理都是借助数学概念陈述的。并且，这些理论的科学检验，它们给出的预测的确立以及其实际应用，也全都需要一种从一般理论导出某些特殊结果的演绎；这里若无从一般理论直接断言某些特殊情况的数学技术，这种演绎也是完全不可能的。这样，数学系统是一个不含经验内容的庞大而机敏的概念结构，同时又是为了科学地理解和掌握我们的经验世界所必不可少的强有力武器。

C. G. Hempel

623. 经验科学的所有理论和假设都表现出已为人们建立和接受了的定律所表现出的那种暂时性，这种暂时性要到一个数学定理被一劳永逸地证明之后才能改变。定理将以那种特有的确定性而存在，任何随后的意外的和特别的经验证据都不能对这种确定性产生微小的影响。

C. G. Hempel

624. 既然所有的数学证明都毫无例外地依赖于从某些假定出发的逻辑演绎，我们可以得出结论

说，数学定理并不比导出该定理的假设多断言了什么客观上的或者理论上的新颖东西，当然我们以前可能不知道这条定理的内容蕴含于这些假设之中，这些内容在心理学上还是真正新颖的。一条数学定理当然是与导出该定理的那组假定有关的，也就是说如果那组假定为真，定理就必然为真；因为这条定理即使被严格地证明了，也不过是重申了那些在假定中已被约定好的东西。

C. G. Hempel

625. 纯数学所感兴趣的一切以及它所能建立的一切就是从给定假设定集出发的演绎结果，因而也就是保证定理相对于所考虑的假定而成立的那种真理。几何学中的假定不能被看作是“不证自明的真理”，因为它在没有被肯定时就不能被称为显然成立。

C. G. Hempel

626. 为证明一条定理，不必懂得它的含义，了解它的含义也无助于证明。如果这样理解就可以想象一种机器，从一端输入假设，另一端输出定理，就好象传说中的芝加哥机器，进活猪，出火腿和香肠。数学家还知道他在做什么，而这种机器则

不必知道自己在做什么。

H. Poincare

627. 数学是一个最卓越的学科，它从任何给定的一组公理（或假定）抽出必然的结论，其推断过程的有效性不依赖于我们对假定所做的任何特殊解释。因此数学就比人们传统上所认为的还要“抽象”得多和“形式”得多。在证明性数学的任一分支中，假定在其本质上并不是关于“空间”的、“数量”的或任何其它事物的；而且对假定中各描述项（或谓词）所赋的任何特殊含义在定理推导过程中都不起本质作用（这些含义当然在对公理和目的探讨及进行系统阐述时还是能起到诱导作用和促进作用的）。为了数学的目的，所有熟悉的内涵都被排除，而表达式的“含义”全部被联系着这些表达式的公理所描述；用更加技术性的语言来讲就是，这些表达式被公理“蕴含地定义”了，蕴含定义之外的任何东西则完全与定理的证明无关。

E. Nagel and J. R. Newman

628. 这片严格抽象的、没有任何熟悉的标志的土地，肯定是难于进入的。但它给出了运动的自由

度和新鲜街景的形式作为补偿。对于表达式的标准解释限制了人们构造具有新颖假定的系统，对数学形式化的加强则把人们的思想从这种限制中解放出来。当某些项的意义变得更一般，更不明显时，它们的用途就变得更广泛，而从其导出的推断所受的限制也就更少。形式化在事实上导致了许多种具有相当的数学兴趣与价值的，而又各不相同的公理化演绎系统。必须承认，一些这类系统并不导致明显的直觉解释，但这并不引起担心。直觉是一种有弹性的机制，但不是值得信赖的引导。在科学探索中，无论是真理性还是成功与否都不能从直觉作为可靠的准则。

E. Nagel and J. R. Newman

629. 按照歌德尔的不完全性定理，在初等数论中有着无穷无尽的这种问题类，对于它们中的任何一个，无论计算机的构造机理多么复杂，运算速度多么快，也不可能给出答案。很可能人脑也是这样，人脑作为一种“机器”有构造上的局限性，因而有许多数学问题它也解不了。即使如此，人脑所具有的运算法则结构看来比目前所能想象的人造机器的运算法则结构的功能要强得多。看不出从机器人代替人的近期前景。歌德尔这条定理

表明，人脑在结构和功能上比任何现已观察到的非生物机器都要复杂得多和巧妙得多。歌德尔本人所给出的证明也正是这种复杂性和精巧性的惊人的例子。这并不是因形式演绎的局限而气馁的时候，而是对创造性的理性重新欣赏的机会。

E. Nagel and J. R. Newman

630. 对现象的观察可能告诉我们，这类事情，如这些数学方程是正确的，或这些方程可能同样地表示了另外一些物质系统的行为等等，但这种观察不能告诉比这类事更多的东西。例如，具有椭圆形状的膜的振动可以利用熟知的Mathieu方程来计算，但当我们研究马戏演员的动力学，并且他是手持平衡棒，脚踩滚动的大圆球时，也遇到了这同一个方程。现在我们若想象这样一位观察者，他发现某一现象的未来进程可以用Mathieu方程来产生，但他由于某种原因不能感知产生该现象的系统，那么他显然不能断定所讨论的系统是一个椭圆形膜还是一个杂耍艺术家。

E. T. Wittakar

631. 数学作为一个整体，和其它科学一样具有其形式化的一面和经验的一面，它不同于其它科学

之处在于，这里形式的一面比任何其它地方更重要和更有决定性。数学原则中也有其经验的一面，这一个侧面不再谈论“结论的必然性”，但在认识论的研究中也不能忽略它。

R. Von Mises

632. 数学产生正确结论的名声是完全虚假的。它的正确性不过是等同。二乘二不是四，不过就是二乘二，并且这一结果就是我们为了简化而称之为四的东西。但四根本不是什么新东西。数学在其结论中就是这样不断前进的，只有在更高级些的公式中，这种等同性才看不出来了。

Goethe

633. Huxley说过“数学是那样一种研究，它什么观察也不知道，什么实验也不知道，什么归纳也不知道，什么因果关系也不知道。我想在违反确定事实的言论中，没有比这种意见更强烈的了。数学不断地从新原则、新概念和新方法中取得帮助，这些新的东西是直接从人的思想的固有能力和活动中产生出来的，是从思想的内部世界的不断更新的内省中产生出来的，思想世界也象外部物理世界那样变化多端，那样细节丰富，它不停

地要求观察的和比较的方法，它的主要手段之一是归纳，它常常依赖于实验性的尝试与验证，并且它在无止境的范围内实行着想象与创作方面的最高努力。

J. J. Sylvester

634. 数学是关于事物各假设状态中何者为真的研究。数学思想的一个特征是它超乎寻常地运用抽象。数学思想的另一特征是当它不能推广时，它就没有成功。在数学的另一些较次要的，然而还是很显著的特征中，可以提到它的命题的精悍构造，它的推理的特别困难、复杂和重要，它的结果所具有的完美的严格性、普遍性以及实践上的必然性。合起来讲，数学的这种完美的严格性、实践的必然性以及没有限制的普遍性是惊人的。但是不难看到，数学的所有这些特征都是它作为假设真理的研究的必然结果。

C. S. Pierce

635. 逻辑学是研究抽出结论的科学，数学则是抽出必然结论的科学。逻辑学依靠数学，但数学并不必求助于逻辑学的任何东西。的确，数学进行推理。但正如为了讲话并不需要懂得元音构成的

理论一样，为了推理也不必先具备推理理论。

C. S. Pierce

636. 数学得以应用依赖于如下事实，即人们发现，那些被数学家感到清晰、简单的关系，在外部实验世界中是重要的关系。

N. Campbell

637. 数学家就象法国人一样，无论你对他们讲什么，他们都把它翻译成自己的语言，并且立刻成为一些全新的东西。

Goethe

638. 数学中最头痛的事是，你学会数学之后还要走多么遥远的路才能使用它。

J. R. Newman

639. 数学的词汇变得更加深奥了，但其概念并未因此而变得更加深刻。出现更困难的词汇的原因之一是数学已经向广大的实务世界移动并服务于陌生的目的。这些词汇肯定给人们造成一种数学思想近期得到膨胀式发展的印象。数学的确已经向前发展，但它并不象那些术语所夸张的那样迅

速，那样显赫。

J. R. Newman

640．数学职业，它的上上下下，它激奋人心的动力以及它要求的烦琐工作等等，都与其它职业很相象，如果数学家的劳动与其他科学家们的劳动有什么不同的话，那仅仅是这门学科的抽象本质以及看上去离生活更遥远。数学和音乐、诗歌一样是思想的创造物，它的现实性并不是物理世界的现实性，数学家的首要任务也和任何其他艺术家的一样，是用表示和解释来扩展人们思想的视野。然而这门困难而又严格的学问正是科学用来在感觉印象世界和根本的现实之间的鸿沟之上架设拱架的一块枢石。如果要为数学辩护的话，那首先就要谈到，人类所应当研究的就是人，因为数学在物理科学中取得的胜利从各方面说都是人战胜自然的故事。

O. G. Sutton

641．纯数学家如果精通他们的工作，他们就应该懂得，所有的各种几何都是同样为真的，但某一些几何被认为是比其它的几何更密切地对应于时空宇宙。在纯数学中，这种对应是无关紧要的，

但是在应用数学中，这种对应则比其它什么事情都更要紧。

O. G. Sutton

642. 数学是一种关于思想的模式的研究，这种研究采用一种高度发展的，相信不出差错的专门技术。它只关心抽象。自从古希腊时代以来，我们已经越来越依靠这种研究作为掌握自然的唯一可靠方式，并且这个过程在其本质特征上几乎是不变的。纯数学家沿着一定的思想路线，在其前进过程中创造必要的技术，而对物理世界中的可能应用并不提出许多要求。人们时时发现，纯数学中的一个特别发展与物理中的一个问题有着一种特有的关系(常常不很明显)，或者物理学中的一个问题有可能用纯数学中的定理所提出的一种形式重新描述。应用数学家的任务恰恰是用纯数学所提供的工具去澄清和扩充物理学家的观察。

O. G. Sutton

643. 严格地讲，数学并不能揭示具体对象所构成的世界中的任何东西，因为它处理的完全是头脑中的概念。但是如达尔文所说，在物理科学中“每一新的发现都具有数学形式，因为我们除此没有

任何其它指导”，这一条也是千真万确的。一个已经发生的，也许是在实验室中意外地发生的现象，在科学知识总体中找到了永久的位置，它迟早要被度量并归结为数目。在没进行这项工作之前，这个现象就好象一个野生动物从我们周围的歪歪斜斜的宇宙的深处跑了出来一样。

O. G. Sutton

644. 数学是极端的思维经济学，它抛弃任何对其它大多数思维行动产生影响的那种感情和联系。

O. G. Sutton

645. 我们是根据我们自己规定（有时又破坏了）的规则创造的符号，那么在这种符号上的运算操作又怎么能揭示出什么超出我们感觉的东西呢？换句话问就是，我们怎能用数学去发现任何东西呢？无论读者是否赞成Hartz的说法“数学现实存在于我们之外，而我们所证明的定理以及我们夸大为我们的‘创造’的东西，不过是我们对自己的观察所做的注解”，上面的提问都不象是我们这一代人能够给出满意答案的问题。我们至多只能指出这个答案的几条线索。

O. G. Sutton

646. 和这个愚蠢地构造出的“真实”宇宙相比，“想象”的宇宙是如此地美丽，但是应用数学家的那些精致的幻想产品，大部分在刚刚被创造之后就被拒绝，一条无情而又充分的理由是，这些幻想与事实不符。

O. G. Sutton

647. 数学的第一项任务是提供方便和精确的总结经验的方法。这个尽管是服务性的任务，却具有基本的重要性，因为若没有这种总结和精炼，思想就不可能掌握被实验所揭示的复杂模式，科学就会无指望地陷入不断增加而又看上去无关的大量事实之中。

O. G. Sutton

648. 数学关心抽象，却闭口不谈时空宇宙。物理的观察无论多么精心也绝不能“证明”或者“反驳”一个定理。引入数学来发展物理理论的过程描述于后。

O. G. Sutton

649. 当今载入数学的伟大的方面极大地为如下事实所支持，即数学分析所揭示的理想模型的性

质和实验观察所揭示的真实世界的特征是极其一致的。

O. G. Sutton

650. 希尔伯特把数学定义为游戏，但是这个游戏至少在一个重要方面是不同于其它游戏的。在数学中，公开地打破一些规则常常是有益的，因为这是数学得以发展的一个最可靠的方式。其结果可能是产生一个新的数学。当然打破旧规则是很有讲究的，并不是每一次这样做都能导致有趣的结果。在一组新的公理上建造一个新代数或一个新几何需要技巧，但不一定需要天才。然而这种新代数或新几何可能引不起什么兴趣。只有在新代数或几何打开了思想的新领域时才能看得出真正的天才来，而这种事情又非常少见。

O. G. Sutton

651. 自然的终极秘密是用一种我们还不能阅读的语言书写的。数学为这种原文提供了评注，有时是很接近的翻译，但这是用我们能够读的词语写的，因为这些是我们自己的词语。

O. G. Sutton

652. 数学家绝不是传统的维护者，而是积习不改的异教徒，他们随时准备着改变传统的基础并创造新的思想体系。

O. G. Sutton

653. 有这样一个奇怪的想法，数学所使用的少数符号，没什么意义的纸上记号，居然对生活的模样做出了世人所知的如此多的贡献。如果一个中世纪学者现在又醒来，他将会认为这些符号是符咒组成的魔力公式，如果念得对，就可以给人们以战胜自然的能量。

O. G. Sutton

654. （i）数学在每个时期都帮助反映那个时代的精神；事实上它已被称为“文明的镜子”。数学有它自己的历史，这不是与文明史分离的，而是文明史的重要组成部分。（ii）数学是一个主要工具，人们已经用这个工具为自己建造了他们今日生存的那个世界。（iii）数学发展具有累积特征。（iv）在许多情况中，数学思想象是独立地而又常常几乎是同时地产生的。（v）数学的累积性进展是由倾向于传播知识的改革态度造成的。（vi）曾被认为相互无关的许多数学课题后来被发现是

紧密相联的。(vii)曾被认为是纯抽象的数学的解后来发现了实践上的解释。(viii)在数学发展的过程中，许多曾被认为十分重要的课题，由于有了新的数学发现而被慢慢地抛弃了；人们对另外一些规则也不认真看待了，因为用它们去处理的那些问题已经不存在了。(ix)在反映时代精神方面，数学追求时兴。（x）数学真理具有独立于地点、个人或人类权威的有效性。（x i）刻划大量数学发现的特征是追求一般化的愿望，这样就避免用例外的方式来陈述命题，把以往的许多结果包容在单一的公式表达中，抽象出本质的内容而又排除偶然性的局限。（x ii）数学、物理学、化学、植物学、动物学、地质学、历史学、经济学、心理学、政治科学和社会学，这些学科中每一个都比它的后者更加数学化，而又比它的前者更易受到理性行为和感情的影响。

A. Report

655．如果对数学的理解成为惯例而不是例外，那么人类在处于当代世界所面临的难以回答的问题时就会处于更有利的地位。

A. Dresdon

656. 在与智慧有关的事物中，人主要关心的都是关于数学的事。

C. J. Keyser

657. 数学的抽象把我们置于纯洁的气氛中，这种气氛离具体的经验太远了，很难令探讨者满意。他设法更加靠近现象，但是自然界的复杂性迫使他对现象进行抽象，再把它从环境的母体中提升出来。

R. D. Carmichael

658. 数学语言提供了表达精确思想的主要手段。为了取得更加深刻的、影响远大的结果，必须依靠思维过程。但若没有数学语言的支持，这种过程就无法贯彻到底。在数学符号中好象存贮了一定量的智力，这种智力释放出来时就能产生几乎是爆炸性的威力。这就象是强大的发动机，我们借助它竖起智力结构；如果没有这种支持，我们的能力就无法进入这种结构。

R. D. Carmichael

659. 数学和诗歌都具有永恒的性质。历史上，诗歌使得通常的交际语言完美，而数学则在创造描

述精确思想的语言中起了主要作用。

R. D. Carmichael

660. 数学是第一门将自身从哲学的守护下解放出来的科学。在精确思维历史的早期，哲学插上了具有思索威严的翅膀飞向高空，并且迅速地达到它从来没有达到过的高度。数学则花费时间向深处挖掘，为建立体系完成了可靠的基础。在这个基础上竖起了不朽的和壮丽的结构，并且在哲学领域、在逻辑学、在无穷与连续的概念上以及在向现代哲学注入新精神方面也赢得了胜利。数学所具有的一条与人类有关的最深刻、最本质的价值，那就是它攻克了具有永恒兴趣的智力问题。如果不用数学的精神和方法，如果不是抽出真理的永恒成份并且以大量令人信服的精确证据来验证，那就无法使人们对这些问题取得一致意见。

R. D. Carmichael

661. 数学在本质上比真理体系的其它分支要容易，这归因于它的自足性，它的抽象特征以及它从它所关心的理想考虑中排除了复杂因素。在数学中所以出现了更大困难，那是因为它比其它科学更先进。比起其它科学，数学更要求学者进行

持久的努力以达到他能够欣赏未勘查领域前景的高度。数学的荒野超出了文明的边界。

R. D. Carmichael

662. 在过去的大约半个世纪中，数学肯定在其方法和猜想方面达到了一个自觉的阶段，这些方面经受了严格逻辑的分析和影响。这门学科建于其上的基础已被理解，但它对其它领域来说却是完全陌生的。数学是一个思想领域，它为我们提供了有关清晰、精确思维的必要和明确的知识。而正是在数学中，精确思想在获得具有价值的持久成果方面取得了成功。

R. D. Carmichael

663. 在数学中，有些事可以看作是被发现的，而另外一些，并且是更基本的一些事看来是由头脑创造的。例如正整数就不是在自然中发现而是从人的精神中创造出来的。创造了它之后，它的许多性质又被发现。创造与发现之间的关系充满了大多数数学文献。数学空间在自然中没有，也是发明的，比如数学家有几种三维空间以及许多种高维空间。诚然他的创造能力是通过对环境的观察才得以发挥的，但是不能坚持说是环境规定了

几何学，不然的话就只能产生一种几何学。在数学中，发现的过程首先是发明创造的过程。精确思维的方法甚至处处都主要依靠创造，科学的假设不是从自然中抽出来的，而是自然现象给头脑带来了能量，头脑在释放这种能量时创造了科学假设。

R. D. Carmichael

664．在对数学进展的沉思中产生的思想方法的哲学导致了一种教义，它把思维过程看得很高贵，把它抬到真正的创造威严的高度。它的发展增加了生活的价值。它对前途是乐观的，而这正是构成永恒性所必须的几条首要品质之一。

R. D. Carmichael

665．通过变换和不变量的群的理论，数学已经提供了一种在变动之中研究永恒性要素的方法。事实上自然定律是自然发生变化时的不变关系的表达。数学还帮助研究那些从个体到个体的不变成份。

R. D. Carmichael

666．任何数学定理的持久性以及不同种族、不同时代对证明的一致连贯性，表明了在那些深思定

理的人们的特有思考过程中有着一种深厚的统一，这也显示了人的本质的一个基本方面。

R. D. Carmichael

667. 通过显示许多千年不朽、不必修正的，并同时又在总量上、范围上和兴趣上不断增长的真理，数学已经给人类精神提供了新的基础，使人相信数学自身并欣赏数学的相容性思想所具有的能量。成千上万的人们在数千年中考察了通过大量方法和大量关系证明的成千上万个定理，并且发现在证明的不容争议的特征上和在结果的相容性上有着绝对的全体一致性，这使得我们有理由充满信心，敢于免去对逻辑确定性的担忧，并且愉快地提出数学真理具有永恒性、相容性和精确性这一假说。

R. D. Carmichael

668. 数学基本上是一门自由的科学。它的可能的选题范围好象是没有限制的，至于从这些可能的课题中选择哪些进行实际研究，那仅仅是出自兴趣和美的考虑。这种兴趣受到了自然科学所提出的实际问题的极大刺激，并且今后还会受到同样的刺激，而数学对这种实际问题的偿还就是对现

象的解释做出本质性的贡献。但数学活动的基本动机毕竟还是在其自身之中的，并且数学要想继续发展，就必须依靠这种基本动机。

R. D. Carmichael

669. 对于那些愿意为满意的知识付出代价的人，数学提供了其它来源不能超越的艺术感觉上的满足。数学家因为对发现的纯粹爱好和对其脑力劳动产品的美的欣赏，创造了抽象和理想化的真理。数学真理中的特有的愉快就是在一般定理的创造中实现了思维经济学所提出的东西。当我们从一组较广的假设出发发展相继的结果时，我们发现那儿有许多方向可循。这样我们看到了不同事物间的共同成份，并能把它们视作一个定理的各个部分，这个定理则因其精美和含蓄广泛而令人愉快。

R. D. Carmichael

670. 数学和建筑学都为人的实质性享乐贡献了必要的成份。且除此之外，二者都通过各自特有的美以及各自存在的理想化理由来提供艺术感觉上的满足。

R. D. Carmichael

671. 和其它思想家的追求相比，数学家所追求的是更加理想，并且也许是在艺术上更加令人满意的形式，因为他所感兴趣的主要是抽象思想的形式，时代可以变更，语言可以发展和消亡，画家的画布可以腐成碎片，雕像的材料可以溶浊分解为灰尘，然而这种形式却保持不变。它的确是永远使人快乐的美丽事物。

R. D. Carmichael

672. 一个深厚的感情上的提升来自对数学真理的注视，这既包括由它所完成的结果所构成的静态方面，也包括它作为一门科学不断促成进一步发展的动态方面。通过它所构造的理想价值和它的结果的永恒性，数学给了人的精神以勇气，这种勇气使人们信赖数学，并相信数学的有控制的腾飞。这里它以比其它领域更完全、更深刻的方式辩明了它对杰出性的主张。它显示了具有永恒快乐的真理。

R. D. Carmichael

673. 先建造狭窄的、纯属构想的基础，再一点点地增加永恒真理的内容，这样数学已经能够把人的想象力释放出来并打开许多深入思考的新领

域。这种胜利给出了关于权力的新观念和关于征服的新观念，并且增加了人的尊严。在数学家的如此大量的美丽创造面前，“他自己既长寿又年轻，他灵魂的翅膀不会早衰”，他欣赏他有控制的想象所达到的高度的壮观。

R. D. Carmichael

674. 如果一个人要领会钻研数学的兴奋，他必须做数学奥秘的热忱学生。只有在把他能力的一大部分用于研究并且取得创造和发现新真理的成功时，他才有可能因为看到自己得到的理想的胜利而享受到最大的快乐。他在发现了一件事实，或者宣布了一条新定律，或者以任何方式为真理增添了新颖的美之后，他就成了我们每个人的债权人了。我们时代的数学的最大荣耀就是，数学的成就正在被当今的研究者们以极大的幅度丰富着和扩展着，因而这门最古老的科学成为所有科学中最富有活力、最富有青春和最富有成长力的科学。

R. D. Carmichael

675. 直到比较近的时期，数学还一直被全面地看作处理数量、度量和计算的纯科学。这些是数学

的平凡的、会计学的方面（这一点也不能过于强调），它们是纯机械式的，这些方面因其单调和乏味的重复甚至使得数学家也感到厌倦。外行的头脑很少能接触数学中任何不以计数和计算为主的部分。许多（如果不是大多数的话）不熟悉高等数学的错综性、奇妙性和精巧性的人把它看作一门枯燥的、没有灵魂的学科，认为发展感觉力和想象力是个悲剧。他们不能欣赏数学中的抽象逻辑，不能欣赏想象与直觉的壮景，不能欣赏数学的精巧、丰富、多样和美丽。

A. Henderson

676. 数学家对证明中的“优美”感到愉快，这是指在进行数学运算的一种表达中蕴含着某些审美的特性。比较显著的优美特性包括简明性、扼要性、首创性、用材经济性、想象力、透切性以及手段与目的之间的完美的适应性。

A. Henderson

677. 真能建立一个与物理系统同构的数学系统吗？我认为，如果这个数学系统以任何方式包含无穷，包括无理数和连续性，那么这个问题就没有任何意义。这些无穷形式是数学的虚构。人的意识

不是连续的，我们关于时间的经验也不是连续的。

T. Fort

678. 数学家所处理的全是对头脑的行动，他乐于做这件事而又不愿承认这一点。他肯定知道他那作为本钱的天才技巧有其感觉印象的来源，他将其称为原始的现实，并且当他发现这些技巧有时与它们从中诞生的现实十分适切地吻合时，他并不感到意外。但是数学家拒绝把这种适切性作为判断其成功的准则；出自他的创造性想象力的实在物的价值，将不会用它们在物理现实中的应用范围来衡量。不会的！数学成就将用数学家特有的标准来衡量。这些标准与我们感觉的原始事实相独立。它们是：没有逻辑矛盾，支配所创造的形式的定律所具有的一般性以及新形式与原有形式之间的类似性。

T. Dantzig

679. 在每一个数学的胜利之后，不是都有另一个更高级的胜利吗？历史证明，许多反复出现的、曾被很多人认为是最终的和完全的理论，不过是更好的理论的石阶，而当看去似乎没有发展新理论的余地时，新理论还是一个接着一个地建立起

来。为什么未来总是与过去有着本质的区别呢？由此看来，数学很可能将继续以越来越大的丰富性伸展着。不断抽象的、多样化的和复杂化的过程还将继续下去。数学的领域已经超常地扩大了，但是这个领域越是变大，机会就越是增加而不是减少；科学的前沿越是宽广，探索未知世界的出发基地就越多。

G. Sarton

680．数学的发现无疑是以各种外部事件，如政治的、经济的、科学的或军事的为条件的，是以和平与战争的不断需要为条件的。数学从来不曾在政治的和经济的真空中发展。然而数学的内部需要在其发展中也起重要的作用。

G. Sarton

681．数学家无论多么伟大都不会知道未来。他们的天才可能使他们能够把目的提得更远，就好象他们有一盏为他们照亮道路的灯，而天才不足的人就没有这样的灯；然而即使在最理想的情况下，这盏灯也只能在漆黑中照亮一个小小的锥体。热情的崇拜者常犯的错误就是，他们把伟大人物的发现带来的无尽的后果，把伟大人物无法预见

的后果也都归功于他们。一个伟大的数学家在其领域之外同样会是经验有限、智慧有限的，他对非数学事物的劝告恐怕只有极小的价值。

G. Sarton

682. 在实验科学中，有可能用新装备来获得或者帮助获得发现，而且在一定的情况下无法把装备的效力与观察者相分离。但是如同在音乐中一样，在数学中也可以在更加纯粹的意义上评价天赋，因此数学的历史可能比我们的其它科学的历史更加引起心理学家的兴趣。

G. Sarton

683. 任何真正的数学家必须认识到，数学的真正成就绝不是粗浅的，对数学的流行看法是建立在无知与混淆之上的，因此还应进行更合理的争辩。

G. H. Hardy

684. 人们往往极大地夸张了数学家和普通人在思维过程上的差别。无法否认数学天资是一种最特殊的才能，但是数学家作为一类人在一般能力和多才多艺方面并不是特别突出的。如果一个人无论在什么意义上讲都是一位数学家，那么数学肯定比他

能做的任何其它事情都更加适合于他，他如果放弃实践其才能的任何适宜的机会而到其它领域中去做他并不出色的工作，那他就是办了糊涂事。没有哪位第一流的数学家在放弃了数学去从事任何其它领域的工作之后又达到了第一流的成就。

G. H. Hardy

685. 我所认识的每一个具有真正才能的青年数学家都已忠实地从事数学，这不是因为他们缺乏雄心，而正是因为他的满怀壮志；他们全都意识到，如果有着任何取得终生成就之路的话，那这条路就是在数学之中。

G. H. Hardy

686. 数学家永远也不应该让自己忘记，数学与任何其它艺术或科学相比，数学更加是青年人的游戏。举个简单的例子，被选入皇家学会的人中，数学方面的平均年龄是最低的。牛顿的各项重大发现，都是他近 40 岁之前取得的，戈逻华则死于二十一岁，阿贝尔死于二十七岁，Ramanujam死于三十三岁，黎曼死于四十岁。

G. H. Hardy

687. 我们所做的事可能是渺小的，但它具有某些永恒的性质，并且无论它是短短的一节，还是一个几何定理，只要做出了具有永恒兴趣的事，哪怕是最微小的永恒兴趣，那也是做了一件完全超出绝大多数人的能力的事。

G. H. Hardy

688. 如果智力上的好奇心，职业上的骄傲与事业上的雄心是研究的主要动力的话，那么的确没有人能够比数学家具有使这三点得到满足的更好机会了。数学家的学科是所有学科中最令人好奇的，它为发挥纯净的职业技巧提供了无与伦比的好机会，并且数学的成就也是最为不朽的。

G. H. Hardy

689. 其它学科都不象数学这样具有清晰和一致的接受标准，那些在数学中被人们记忆的人几乎永远是值得记忆的人。如果你能够为数学的名声付钞票的话，那么它真是最安全、最稳定不过的投资了。

G. H. Hardy

690. 事实上，没有什么比数学更“通俗”的学科了。这可用如下事例证明：有大量的棋手能够欣

赏一盘漂亮的对弈，能从谜棋所提供的兴奋中发现乐趣，而这些正是低水平的纯数学思维练习。

G. H. Hardy

691. 最好的数学是严肃而又美丽的。数学定理的严肃性不在于它通常具有不可忽略的实践效果，而在于被它所联系的数学概念的重要意义。可以粗略地说，如果一个数学概念能够以一种自然的而又令人恍然大悟的方式与众多的其它数学概念相联系，那么它就是“具有重要意义的”。这样一个严肃的数学定理，一个联系了具有重要意义的概念的定理很可能在数学自身中，或在其它科学中导致重要的概念。当然，定理的严格性并不仅仅表现在说明其严格性的影响之中。数学定理的美丽则在很大程度上依赖其严肃性。

G. H. Hardy

692. 一个“严肃的”定理是一个含有“意味深长的”概念的定理。当我们看到一个“意味深长的”概念时，我们能够识别它，但是这种识别力需要一个人在数学上相当高度地成熟，对数学概念相当高度地熟悉，而这些只有在他与数学打过许多年交道之后才可能达到。看来有两件事对

“意味深长”是重要的，一是要有一定的一般性，一是要有一定的深度。一个意味深长的概念是许多数学构造的要素，在许多类型不同的定理的证明中都要用到。包含这种概念的定理应该是这样的，它即使是用最初的语句来陈述的，是以十分特殊的形式出现的，也能够做相当大的推广，并且在同类定理中具有典型性。被它的证明所揭示的关系应该是联系着许多不同的数学概念的。在任何高级的定理中都应该体现一般性，但若太一般了就会不可避免地导致空洞。过多的事物所共有的性质是很难引起兴趣的，数学概念若不具有丰富的个性就会黯然失色。正如怀特海德说的，

“正是那些具有广泛的一般性，而又被巧妙的特殊性所限制的，才是获益最多的概念”。

G.H.Hardy

693. 在“真正的数学”中，存在着严肃性，意味深长，美丽，一般性，深刻性，意外性，必然性和经济性。那些论证是采取令人吃惊的形式的，相对其所得的意义深远的结果，所使用的武器又是简单的。在证明中并无许多“变幻”，因为“情况列举”实际上是数学论证中最乏味的形式。一个数学证明应该象一个简单的和轮廓鲜明的星

座，而不应该象银河系中松散的星团。

G.H.Hardy

694．不可否认，许多基本数学，包括关于运用微积分演算的良好知识，有相当大的实际用途。但总的来说，数学的这些部分是相当沉闷的，它们刚好是美学价值最小的部分。“真正”的数学家的“真正”的数学，费尔玛的以及欧拉的、高斯的、阿贝尔的和黎曼的数学，是几乎完全“无用”的（并且，这也象“应用的”与“纯的”数学的关系一样）。不可能根据其工作的有用性来肯定任何真正的职业数学家的一生。

G.H.Hardy

695．有一种错误的概念以为，纯数学家是以其工作的无用为光荣的人，他们炫耀于人的就是他们的工作没有实际应用。没有数学家会愚蠢到贬损和怨恨应用的地步。但是无论对于好的和坏的数学家，他们从事的是同一门科学，尽管他们的工作尽管远离常人的活动，但必须是既文雅又明晰的。

G.H.Hardy

696．很自然地会假设，“纯的”与“应用的”数学在实用性方面有极大的差别。这是一个误会。

在这两种数学之间有一个明显的区别，但这很难影响它们的实用性。

G.H.Hardy

697. 有纯几何的科学，其中包括许多种几何。其中每一种几何都是一个模型，是一个由概念组成的模式，并且都用其特有模式的美丽与兴趣来评价。它是局部数学现实的一幅地图或画面。但是还有一个物理世界的时间——空间现实，而无论如何，这些几何不是这种现实的图画。显然不可能是，因为地震和日月蚀不是数学概念。

G.H.Hardy

698. 没有纯到对物理世界一点儿也不感兴趣的纯数学家，一个纯数学家只要受到物理世界的引诱，他就会放弃他的纯数学的身份。

G.H.Hardy

699. 可以明白地说，纯数学总的来说比应用数学更有用。看来一位纯数学家，既在实践方面，也在美学方面具有优越性。因为有用的东西毕竟是技术，而数学技术主要地是通过纯数学来教授的。

G.H.Hardy

700. 不幸的是，在数学中用来保持抽象方式的那些必要的技术手段常常掩盖了当初设计它们时所要求解的问题。结果是扩大了纯数学与应用数学在智慧方面的间隙，而且很可惜的是，还造成了纯数学与应用数学在表面上的疏远。那些被集合论体系精确性迷住的人常常忽略了数学自身，而那些被形式化吓倒的人又常常把所有的抽象都贬为单纯的公理嗜好，视而不见抽象所能带来的洞察力。

A.M:Gleason

701. 学生得到的印象是，集合论是处理数学问题最根本的手段，甚至真正的数学家在任何问题未被完全用集合论术语形式化以前是不会去考虑它的。只是在很迟以后，学生才发现数学研究主要地是一个从一堆混杂的预感，模糊的类比和几何形象中筛选出定理的过程。

A.M.Gleason

702. 当数学家的思想变得更抽象时，他发现越来越难于用物理世界检验他的直觉。为了证实直觉，就必须更详细地进行证明，更细心地下定义，以及为达到更高水平的精确度而进行持续的

斗争。

A.M.Gleason

703. 今日数学以集合论为基础。每一个数学概念都用集合来描述，并且所有的数学关系都被表示为某些集合之间的连锁式的成员资格关系，这种集合正是由我们所谓的一些结构所组成的。数学从而在某种意义上被约简为受人们称颂的组合问题。有些人把这种做法贬低为使数学失去直觉，然而它事实上导致了一种新的，在现代代数以及数学的各个有价值的分支中都必不可少的直觉。

A.M.Gleason

704. 如果一个假设系统是相容的，并且它的所有模型都是同构的，它就被称为绝对的系统。直到本世纪初之前，数学的研究完全是关于那些被绝对地决定的结构，但自那以后，很多努力已经扩展到由非决定性假设系统所决定的一些结构，如域和拓扑空间。这些研究的目的不仅仅在于更大的一般性。当略去某些假设并探究剩余假设的各种推论时，人们发现可以得到更大的洞察力，例如对实数这样被绝对地决定的系统的洞察力。

A.M.Gleason

705. 数学是人类的一项奇异的成就。它有时充当艺术和科学的顺从侍女，但更经常的是抛开市场而驰向思维和想象的最高峰。它在许多方面是一种独特的孤立活动，是远离人的通常事物的。然而自历史的萌芽期，数学就一直享有值得羡慕的威望。从任何一点来说，被认作是创造艺术的数学都不会吸引普通人。也不能说数学主要是因为它对科学的贡献才被羡慕与尊敬。不是的，对数学的普通的尊敬来自于人类的深刻的需要，这种需要只有通过数学活动才能满足。

W.L.Shaaf

706. 我觉得，可以想象一个人可能在熟悉了大量数学之后，仍然不会欣赏数学的内在本质以及它在文化意义上的全部重要性。

W.L.Shaaf

707. 数学想象力的宏大视野，数学所达到的无止境的高度以及其创造者的紧迫感，这些全都表明数学这一人类最大胆的成就是一份真正辉煌的世袭财产。

W.L.Shaaf

708. 近半个世纪以来，数学已经和正在向各个方向以神话般的速度扩展。新的领域出现了，向其它领域的扩散加速了，并且我们关于经典领域的知识变得更加深厚了。同时，现代数学中的最显著特征之一是在其不同分支之间有着不断增长的相互关系。这样，现在的学生面临着巨大的材料之山。除去传统的方式以外，还可以用新的、启发的方式去看待这些传统的领域，以及去看待那些具有极大潜在前景的广大新领域。

R.Gunning and H.Rossi

709. 外行人可能觉得奇怪，为什么数学家不但能够去做他那复杂的工作，而且还乐于做这种工作。世上有谁愿意浪费时间去解决那种人类的百分之九十九都不能理解，并且在数学家本人的大学内也有百分之九十九的人不能理解的问题呢？

H.Bondi

710. 有些作者被数学思维所能达到的精确性迷住了，他们好象是把读者锁在一间照得通亮的小房间里，在那儿，每个微末细节都能看得清楚，都被突出了，但是一点儿也不生动。我更爱那蓝天下开阔的、带有远景的风光，从近处的、细节多变

的景色开始，逐渐延伸并慢慢地消失于地平线。

H.Weyl

711．与有些假设正好相反，数学家的直觉并不一定具有空间的本质，甚至不一定具有感觉的本质。还不如说这种直觉只是表达了关于数学对象的行为的某些知识。这种直觉可以加上各种各样的图画，但在大多数情况下可以加上带有画面的永恒事物。

N.Bourbaki

712．数学的风景在构造上极有丰富多采，它本身就足以引起兴趣并给人带来愉快。事实上，二十世纪的数学是人类思想所创造的最渊博的知识领域。今天已经不大可能有哪一位数学家能够全面纵观数学的开阔风光了。数学已经成长了，它和其它精确科学一样处于迅速膨胀之中。

W.R.Fuchs

713．只有数学家才是幸运者。他在努力著述时不必去祈祷什么，在阅读书籍时也不需要上帝的暗喻。

Novalis

714. 我们可以将数学研究与在群山重峦中的探索相媲美。总有一些人以在山地探险中尝试自己的能力为主要兴趣。他们要攀登最难登上的顶峰。另外一些人则沿山谷和隘口修路，使整个山都易于攀登，这样他们自己也能看到目标。他们最终也登上了顶峰，他们主要是为看到美景，如果可能，他们乘坐缆车也行。

H.Hermes

715. 对真正的科学生活有一个严重的威胁，它蕴含在这样一种说法之中：数学不过是由从定义和假定抽出的结论所组成的相容的系统，除必须相容这一点之外，数学家可以随意创造这样的系统。如果这种描述是确切的话，那么数学就不会吸引任何智者。数学也就成了由定义、规则和三段论组成的游戏，既没有动机也失去了目标。

R.Courant and H.Robbins

716. 我们应该理解数学，因为它是人类的一项很有意义的活动，因为它帮助我们理解我们所生存的世界的重要方面，并且还给我们以观察空间、时间和物质所需的更为深刻的洞察力，因为它在人的文化成就中位于前列，并且因为它是我们的

生气与智力的标志。

W.R.Fuchs

717. 数学的目标并不是揭示事物的真正本质。它的目的是把各个定律相互联系起来，这些定律尽管能够通过实验来认识，但若不借助数学就难以表述。

H.Poincare

718. 现代数学主要对结构感兴趣。被选为实现这些结构的那些对象仅仅是作为一般对象生长的基础。

H.Hermes

719. 形式化的数学可以与游戏相比较。例如符号对应于象棋子，一个公式对应于棋盘上棋子的一个布局，推断方法对应于走棋规则，而证明则对应着从初始棋局到某个确定布局的一系列着棋。

F.Waismann

720. 数学证明的目的不是为使人确信定理，而是为洞察各项陈述之间的关系。要求对所有能够证明的都进行证明，这并不是怀疑思想上有错误。

相反地，它仅仅是表示要透彻地理解陈述形式的结构并发现各个算术真理之间的联系。

F.Waismann

721．数学具有独立于任何逻辑的可靠内容，因而它永远不可能建立在唯一的逻辑基础之上。

D.Hilbert

722．数学为逻辑推理提供了一个理想的模型，它的表达是清晰的和准确的，它的结论是确定的，它有着新颖的和多种多样的领域，它具有增进力量的抽象性，它具有预言事件的能力，它能间接地度量数量，它有着无限的创造机会，它有着比其它知识领域更大的永恒性，它的曲线和曲面具有平衡和对称，就象艺术大作那样令人愉快，并且在自然的图案和定律中处处可见。

D.A.Johnson and W.H.Glenn

723．每一位数学家在一定时期都会有一个转变，在转变前他可以通过听课、演算例题、参加讨论班和阅读最有效地进行学习，转变后他则通过“做”去取得进一步地发展，后一状态就是数学家个人从事数学研究的状态。在这种研究中，问

题的答案一般事先不知，而一项研究的延续周期从数小时到数月，长短不等。经验向我们表明，数学家发生这两状态之间转变的时间和他取得他第一个学位的时间是非常接近的。

IMA.Report

724. 我们的确不能在数学的应用中过分地强调逻辑与数学推理的价值。那些有正确根据的提法是可以信赖的，例如，对于假设的检验不只基于直接的实验证据，也基于间接的关于假设的逻辑推论的实验证据；与其在浅薄的基础上仓促进行昂贵的计算并企求理论的逻辑相容性，还不如回到最初的推理中的首要的原则上去。

IMA.Report

725. 过去的二十年是数学以其威力影响工程、技术以及自然科学和社会科学的许多分支的二十年，这种影响借助高速的模拟与数学计算得到超常速地发展。在运筹学与经济学中的运用，例如工业经济学中的复杂数学模型已经以极快的速度成长。结晶学分析及其在生物化学和遗传学中的大量应用都已经依靠在生命科学中的另一代表领域中，人口动力学的数学内容也在迅速地增多，

并且越来越复杂。

IMA.Report

726. 尽管数学极为重要，极富成就，尽管它迷住许多初学者，尽管它对科学与现代文明的发展做出了贡献，但是数学在普通人心目中仍然是枯燥的和困难的。在学校的书本中，数学好象是一系列明显地缺乏意义的程序，有时带有一些“低档技巧”或者一些窍门，聪明的学生自然对这些产生反感，这种教学的后果是使学生们感到乏味因而忽视了这门课。这种情况很普遍，致使对数学的不顾不问变成一种社会态度。但过去可不总是这样的。那些最早期的哲学家们都是拒绝研究任何不精通数学的人的铭言的。

Y.B.Chavan

727. 应该根据数学充满智力的背景以及它在现代文明中作为主要驱动力这两点来评价数学。即使一个外行人也能看到在数学不断增长的发展中所反映出来的西方国家的久远历史；数学的巨大发展是与四个世纪的历史相吻合的，这正好是希腊文化的高峰期以及文艺复兴所带来的智力活动和独立思维的惊人爆发期。在另一方面，

中世纪所标志的智力上的思想停滞以及缺乏首创也在直至十六世纪以前的数学萧条期中得到反映。

Y.B.Chavan

728. 我觉得，数学中的创造性工作尽管最终由个人完成，但都是大量不同层次基础工作的成果，这一点在数学中尤为确实。

Y.B.Chavan

729. 数学是所有科学发展的主要基础和必要成份。它是科学的皇后。必须懂得什么是数学，什么是数学家以及他(它)们可以做什么。数学首先是一种探讨研究的方法。这个方法包括对所讨论的概念认真地下定义以及明确地给出一些用于推理的基础假设。从这些定义和假设出发，再运用最严格的逻辑推导出结论。然而数学家还需要有高度的直觉和想象力。正因为这种能力，他们才能打破旧时代的僵化传统并建立新的、革命性的概念。一个数学家的座右铭是“怀疑明显的东西”。

Y.B.Chavan

730. 数学的教学质量是几个变量的函数，即

$$T = T\ (S,\ B,\ C,\ M,\ R,\ E,\cdots),$$

其中 S 是教学要点的恰当性，B 是选作阅读用的书籍，C 是教员的能力，M 是教学方法，R 是学生的接受能力，E 是考试制度等等。为了全面地改进 T，必须恰当地改进 T所依赖的所有要素。

A.C.Banerjee

731. 数学家的主要目的是探索人类思想海洋中的秘密和奥妙。这些虽然是与人类整体有关的，但却是独立于数学家个人而存在的。数学家有着发明新概念、新工具的自由，而且好象可以随意地做这些事。然而他并不十分自由，因为一个新的概念在他的工作中必须有用，这正象海员可以随意建造任何种类的船，但他造的船至少不能在第一场风浪中就被击成碎片。

A.Renyi

732. 如果你想要做数学家，那么你必须意识到，你将主要是为了未来而工作。

A.Renyi

733. 数学概念是从现实世界的知识中结晶而来的，这决定了它们自然会带有其原型的标记，就象儿童带有其双亲的标记一样。并且，就和儿童长大后要供养双亲一样，数学的任一分支在充分地发展了之后，也要成为探索现实世界的有用工具。

A.Renyi

734. 数学家成功的根源在于他们所使用的方法，在于他们使用的逻辑所具有的高标准，他们为着完全真理而进行的不妥协的斗争，此外还在于他们总是从最首要的原则出发，严格地定义所用到的每一概念以及避免自相矛盾等等良好习惯。

A.Renyi

735. 常常碰到这样一种情况：你在搞应用时需要一个数学定理，而它又不存在，这时你不得不去发现它和证明它。建立数学模型也不容易，找到符合某一实际情况的数学模型绝不象配手套那样简单。首先，人们对同一实际情况能够创造出许多种数学模型，必须从中选择出最合适的模型来，也就是按照具体需要在一些方面适合实际情况的模型(它永远也不能完全适合)。同时，它不

能过于复杂，而应该是数学能够处理的。当然这两条是相互抵触的要求，而这两者之间的巧妙的平衡往往是必要的。在每一个对于你的目的来说是重要的方面，模型必须很好地近似现实情况，而把那些对你的实际目的不重要的方面放到一旁。一个模型不需在每个方面都与它所针对的现实相似，它仅仅需要在真正有价值的方面相似。另一方面，同一个数学模型能够用来适配一些十分不同的实际情况。

A.Renyi

736. 甚至一个粗糙的数学模型也能帮助我们更好地理解一个实际的情况，因为我们在试图建立数学模型时被迫考虑了各种逻辑可能性，不含混地定义了所有的概念，并且区分了重要的和次要的因素。一个数学模型即使导出了与事实不符合的结果，它也还可能是有价值的，因为一个模型的失败可以帮助我们去寻找更好的模型。应用数学和战争是相似的，有时一次失败比一个胜利更有价值，因为它帮助我们认识到我们的武器或战略的不适当之处。

A.Renyi

737. 为了成功地应用数学，必须对它有深刻的理解。谁若想做出独创性的应用数学工作，他就必须是一位有创造性的数学家。反之，对应用的关心也会有助于纯数学研究。

A. Renyi

738. 数学模型仅仅是一个近似，它总有一些方面与事实不符，正因为这一点，人们必须当心不要因粗心地使用数学而使它与事实进一步不符合。必须尽可能精确。此外还有一种常见的对近似的误解，认为使用近似就意味着远离数学的精确性。实际上，近似有它的精确理论，关于近似的结果也要象等式那样被严格地证明，例如不等式就是这样。

A. Renyi

739. 数学只会报答那些不仅为了得到报答而且也为了数学自身而对它感兴趣的人们。数学就象是国王的一个美丽的女儿，每当求婚者出现时，她就怀疑他不是真正地爱她，而仅仅是因为想要当驸马才对她感兴趣。她想要的丈夫是为她的美丽、聪明和迷人才爱她的人，而不是为了得到财富和权力才和她结婚的人。同样地，数学仅仅向

那些因为真心爱慕数学之美而研究它的人们揭示自己的秘密。作为报答，这些人当然也得到了具有实践重要性的结果。但是，如果一个人每次都要问“我这样做能得到什么利益”，那他就不会得到太多。

A.Renyi

740. 一个关于自然的物理学假设永远不能象数学定理那样来证明，这里指的是从一定的公理出发经过一系列逻辑结论得出证明的方式。那些关于自然的假设实际上就是公理，而公理本身也是不能在数学中证明的。人们不能证明几何公理。但可以看出这些公理的正确性，因为基于这些公理的几何正确地描述了我们所生存的空间。一般地说，物理假设不能得到形式化的证明。我们只能从这些假设出发，对一些可观察、可以通过实验控制的事件导出结论，然后再验证这些结论。但是从我们的假设推导结论是用数学方法进行的，因而我们是以假设为公理，再以数学的严格性从公理导出结论。

A.Renyi

741. 如果不使用数学公式，自然定律本身就无法

表达，这是在研究自然中不能缺少数学的另一个原因。如果有人能够和自然对话，那么自然是使用数学语言的；如果我们不懂这一语言，我们就不知道它在讲什么。而且仅仅是杂乱无章地知道这一语言还是不够的。不幸的是，有许多人是这样的，他们很可能误解自然对他们讲的话，而且他们在试图用数学语言讲述他的思想时，讲出的也都是结结巴巴不成样子的话。

A.Renyi

742. 许多哲学家对数学抱有奇怪的，甚至是缺少教养的想法。今天他们无法否认对数学的需要，但他们说利用数学研究自然的人不需要完全了解它。他们说他们只需要最终结果，他们没有时间和耐心去认真搞懂定理的证明与精确的公式表达。这就象讲下面话的人一样愚蠢："让我们把树叶和树根砍下来吧，因为我们只需要树的果实。"想要享受数学果实的人，不管他喜欢与否，都必须同时接受它的思考方式。

A.Renyi

743. 一个人只有在正确地理解证明部分以后，才能真正地理解一个数学定理。还有时，他只是在

得到与第一个证明十分不同的另一个证明之后，才能正确地理解这一条定理。一个人常常从更困难的证明缩回，他被一连串长而复杂的论证吓倒，不愿一步一步地追随证明。一个人常常感到象是在爬山，从悬崖爬向山顶，还要盯住自己的脚，当心不要滑倒。然而当他到达山顶后再环顾四方时，那壮丽的风光就是对他艰苦工作的报答。起初他努力搞懂那烦人的证明是因为他希望看到这一风光，但后来，当发现定理中的一些步骤既出奇又巧妙时，他感到了快乐，这种快乐就象欣赏最美的音乐时得到的快乐一样。这种情况和登山十分相象：他最初决定从事这种疲劳的体力活动是因为他希望看到新的风光，但当他习惯于登山时，这种活动本身，一个个障碍的突破以及新立脚点的发现，也都成了使他快乐的原因。

A.Renyi

745. 数学是有用的，如果谁想理解自然并利用它的能量，那他甚至不能离开数学。不但如此，数学还是有趣的和美丽的，是令人兴奋的，是一项美妙的人类思想探险活动。我想数学的美不是一件辅助的、附带的事，它是数学的一个基本特征。真理永远是美的，而美的东西也总是真的。那些

对数学抱有未开化的见解的人不理解这一点，其原因或是他们看不到数学之美，或是虽看到它却又怀疑它。他们认为美是多余的侈奢，并且他们在背向她时才觉得自己更接近现实。

A.Renyi

746. 不经过艰苦的脑力劳动，谁也不能在数学中前进多远。但无论谁，他只要享受到了理论知识的快乐，见到了数学的美，他就会乐于付出郑重的努力。讲授数学的主要目的必须是使学生获得这种快乐，并通过这种快乐对他进行数学中必不可少的逻辑思维训练。这是值得的，因为谁若能通过数学得到逻辑思维的艺术，那他就能在生活中处处运用它。

A.Renyi

747. 学生在看不到一门课的上层构造又不了解其价值时，可能看不到为这门课认真地打好基础的重要性。一门数学课程与一门绘画课的共同点应该比一门“艺术欣赏”课与绘画课的共同点更多，因为数学的学问是以解决一定类型问题为目的的。正如一门绘画课的目的是学会如何做画，一门数学课的目的是学会如何做数学。只给出通

常的解释是不够的，必须要有动机和鼓励。

CUPM Panel

748. 现代数学中的许多高度抽象是合理的，因为许多过去曾经难倒过数学家的困难问题在这个抽象的层次上已经得到了解决。现代数学的极端严格性也是合理的，它避免了错误并且使透彻的思维成为可能，而这种思维在极为众多的困难问题中是必须的。

CUPM Panel

749. 在各种水平的教学计划中都加强了对数学的要求，这是因为数学科学在处理现实世界的现实问题中取得了巨大成功。越来越多的人看到，良好的数学知识对他们谋生是重要的。有迹象表明，引起这种变化的各种社会的与经济的力量正在增强。

CUPM Panel

750. 任何一个科学思维的领域只要发展到了可以构成理论的阶段，它就会转向公理化的方法，因而也就间接地以数学为主导方法。

D. Hilbert

751. 具有洞察力和想象力的数学家手中握有严格的演绎逻辑武器，这种武器的威力对人类理解其所生活的神秘宇宙一直是最伟大的援助。如果没有这种威力，尽管大实验家会象在田野中发现新奇，采下知识的野花，但是人的思想不会发现那宁静的、愉快的、美丽的花园，这花园就是对事物的理解。

F.G.Doman

752. 和在任何事情中一样，在数学中用过短的绳子把人们的思想系在“有用”的柱子上是不划算的。

John Dewey

753. 如果数学不过是一种逻辑推理的形式，那么可以问，为什么要使用很少有人理解的数学而不用大家都能明了的逻辑学呢？这仅仅是个效率问题，就象工程承包人决定使用机械挖土设备而不用铁锹一样。使用锄和锹常常是更简单的，而且可以设想它们总能做任何工作，但蒸汽铲同样胜任并且常常是经济的方案。数学是逻辑推理的蒸汽铲，使用它可能是合算的，也可能是不合算的。要紧的是，经济的事实是异常复杂的，我们可以

期望数学蒸汽铲是挖掘复杂问题的最有效工具。

R.G.D.Allen

754. 对于一个从经验内容出发大胆地建立理论模型的经济学家，我们劝他以数学形式建立精细的模型。他如果不这样做就有可能遭到失败，或者至少他可能忽视一些重要情况和一些重要的可能性，这样，他的模型就更难以用经验来验证。

R.G.D.Allen

755. 如果没有数学，哲学中应该知道的事就无法知道。一个人如果不懂数学，他就无法懂其它科学。更重要的，他甚至无从发现自己的无知，也就更找不到解决的办法。

Lord Bacon

756. 如果一个人轻浮，易于分散精力，在需要集中注意力时不能保持注意力，那么数学可以帮他克服缺点，因为在数学中，谁要是在思想上稍微开了一点儿小差，那么整个证明就得重新开始。

Lord Bacon

757. 宇宙就是哲学的全书。这本书向着人们的好奇心敞开着，但是谁如果不先掌握好写这本书所用的语言和文字，他就不用想读懂它。这个语言就是数学，这些文字就是三角形、圆和其它几何图形。

Galileo Gallilei

758. 虚数是奇妙的人类精神寄托，它好象是存在与不存在之间的一种两栖动物。

G.W.Leibnitz

759. “根据数学家的说法，这个级数是发散的。因此我相信我真的能在它上面搞出点东西来。”

Heaveside

当人们告诉 Heaveside 他的运算方法不能被严格地证明时，他说，“我能够因为不完全理解消化过程就拒绝一顿美餐吗？”

760. 在访问美国以后，Felix Kelin 相信，和美国的巨大自然资源比，和美国的工业物质生产方法的初次成功比，那些自然资源次之的国家只有通过广泛地运用数学方法改进其科学的工程，才

能有国际竞争的机会。他的想法在工业界得到了实际的支持。为了推行这一想法，他还在哥丁根成功地建立了应用数学研究中心。

T. Von Karman

761. 非数学家们觉得很奇怪，为什么会有这种人花费这么多的时间去讨论抽象空间中的连续性，可数性，可分性和紧性呢？对于数学家，同样奇怪的是竟会有人认为这些讨论没有足够的引诱力。

Anonymous

762. 一位数学家是一个用全付精力去求解悬而未决的数学问题的人。

Anonymous

763. 选择一组符号，给它们赋予一定性质并假设它们之间有一定关系。下一步再推导出它们之间的进一步关系。如果我们知道这些符号的确切的‘物理意义’，那么上面的那套理论就可以得到应用。也就是说，只要我们能在自然界中找到具有我们所赋的性质和相互关系的对象，我们就能运用这一理论。“纯”数学家仅对符号的相互关系感

兴趣,“应用”数学家总要决定什么是这些符号的确切物理意义。如果知道了这一点，那么在理论的任何阶段，我们都能知道我们的定理的物理意义。但是，这个链的强度决定于链上最弱环节的强度，有时恰恰在物理意义这一环上的连接是极为脆弱的。

J.E.Kerrich

764. 物理科学不仅给了我们（数学家）求解问题的机会,而且还帮助我们发现解决它们的方法,后者包括了两个方面。它一方面引导我们预期问题的解,另一方面又为我们提出了适当的论证路线。

H.Poincare

765. “当我使用一个词时”，Humpty Dumpty说道,“它就意味着我所要表达的意思，不比这个词多，也不比这个词少”。

G.L.Dodgsen

这位儿歌的主角的话也反映了在数学中使用术语的精神。

766. 只要我们能够消除许多人从其童年经验中

得到的对数学的反感，就可以鼓励人们对数学的兴趣。

H.Rademacher

767. 许多数学证明是非常冗长而又错综的，另外一些不太长的证明才是构造得十分巧妙的。

E.C.Titchmarch

768. 研究给定数学结构的对称性的工作，总是得到大量结果的。

E.Artin

769. 欧几里得如此喜爱的归谬法是数学家最精巧的武器之一。它是比任何象棋中的舍车保帅都更加精巧的舍车保帅；一位象棋棋手可以舍去一个卒，甚至一个主子，一位数学家则可以舍掉一盘棋。

G.H.Hardy

770. 一些出自最伟大的数学家的最卓越的成就，可以看作是从基本原则出发导出解决问题的捷径。

M.H.A.Newman

771. 在分析学家 Kasner 看来，代数在几何中的应用能够把学生从欧几里得的苛刻学科中解放出来。它使得学生能够为自己而思考，不必老是盯着老师的嘴唇。可 Kasner 有一句话，刻在每个现代学校的校门上都是合适的："我们所能尝受的最大的满足是为我们自己找到了真理。"

J.L.Synge

772. "北方的海洋是美丽的，" Arc 说道，"并且雪花在其消融之前的细致交错花纹也是美丽的"，但这种美丽对他好象没有一样，因为他只对数感到乐趣，而不理睬生活中的荒唐的不合理性，也不理睬自然定律的不可理解的复杂性。

J.L.Synge

773. 数学语言是困难的，但又是永恒的。我不相信任何生活在今日的希腊学者对柏拉图对话或亚里士多德诙谐中的成语语调的理解能够象一位数学家对阿基米德工作意义的每一侧面的理解那样透彻。

M.H.A.Newman

774. 数学完全是人的工作。每一个定理，每一个

证明都是人的头脑的产物。在数学中每一张牌都可以摆到桌面上来，在这种意义上，数学是具体的，而世界都是抽象的。

S.K.Stein

775. 数学宇宙从我们周围的世界中生长出来，就象夜里的梦是从白天的事生长出来的一样。世界成为我们的线索，成为出发点，提出引诱数学家的问题。从这些问题或其答案又生长出更多的问题来。只要还有问题需要解答，数学就会扩张。

S.K.Stein

776. 下述问题迫切需要我们回答：有些科学内部已经分解为相分离的分支，这些分支的代表互不理解，其联系则变得更松散，数学是否注定也要走这一条路呢？我不相信这一点，也不希望这个事实出现。我的意见是，数学科学是一个其生命力依赖于其各部分之间的联系的机体。

D.Hilbert

777. 我们的经验使我们确信（每个数学家都确信，却又无人能够证明），每个确定的数学问题必然能够精确地解决，或以所提问题的实际答案的

形式给出，或以其解的不可能性的证明给出，不可能就是所有尝试都必然失败。这种对每个数学问题的可解性的确信，对数学工作者是“强有力的”鼓舞。我们在同行之中听到了永恒的呼唤。“那儿有问题，找到它的解。根据最纯粹的理由你是能够找到解的”。

Anonymous

778. 如果我已经搞清了并且完成了某一件事，我就把它放在一边而再次进入黑暗。贪心的人就是这样奇怪。当他完成了一个建筑物之后，他并不是为了舒适地住在里面，而是又开始了另一个建筑。我就是这样地想象一个世界征服者的感觉的，他好容易才镇压了一个王国，就又把他的手臂伸向其它国家。

C.F.Gauss

779. 公理化方法有两个目标。第一个是通过逐个考察基本符号法和基本假设给数学推理建立坚固的基础。公理化的第二个方法更微妙，更体现现代思想的特征。在详细列举定理的假设时，我们有机会进行尝试。我们可以试着证明改用其它假设的同一定理，或者研究把某些熟悉的公理用某

些与之相矛盾的条件代替后所得到的新定理。这种过程是完全合法的，因为公理不是定理，也不是从任何事情导出的。事实上，任何公理只要被提出就都是合法的。但在实践上，一个公理系统还必须经得起进一步地检验，那就是它应该能够产生出美丽的定理。

H.W.Guggenheimer

780. 当人们忘记伊斯基勒思*时，大家还会记得阿基米得，因为语言会死亡而数学思想不会消逝。

G.H.Hardy

781. 为什么今日有如此多的男子和女子学习数学呢？因为我们对于什么是科学领域的中心这个问题的理解正在改变，二十年代是化学，四十和五十年代是物理学，明日是生物学，而数学很快就要成为中心了。这是因为现代计算机在规模和复杂度上的崛起吗？它是反映了太空时代的要求吗？是因为现在的数学训练打开了通往多种多样的机会与挑战之路吗？确实所有这些原因都是事

---

* Aescheylus，古希腊悲剧诗人。——译者注

实，1962 年主修数学的大专毕业生就比 1956 年的多到三倍。这趋势还在上升。人数越来越多，但是和得到数学训练的人数相比，总是有更多的工作机会等着他们。

J.W.Tukey

782. 也还有其它的原因，更持久的原因。许多人喜欢解决特定的问题。有些人则乐于做数学，还有的人喜欢在少数看去简单的假设的基础之上去建立由有组织的上层结果所构成的雄伟建筑。人只有在数学中才能够不依赖于对世界的实验与观察，仅仅靠头脑去形成新的概念，并且用这些概念从紊乱中探求出一定的新秩序。

J.W.Tukey

783. 学习数学就象攀登高山。登山者说，爬上了一个山峰又一个山峰，都不是主峰，每次看去后面都还有一座新的山峰。并且在登上新的山峰时，脚下的小山就看得更清楚了，不时地看到了新的光明，同时又对旧的、熟悉的概念进行重新组织。在数学中就是这样。数学的山脉已经建立了许多个世纪了，它的尺度就象它的年龄那样大。但也是和全部科学一样，在数学中人们已经付出的劳动

中十年以上的历史的那部分占了不足一半，并且数学今日比以往任何时期都以更快的速度生长。

J.W.Tukey

784. 不同情况下的数学可以有很大的区别，可以有许多观点，其中正确的绝不在少数。通常考虑得最多的要素以及一些更重要的因素，可以分别从下面七要素中找到，或从它们的组合中找到：抽象计算，自由组配，逻辑可靠性，保险性，精确性，定量及符号方法。

J.W.Tukey

785. 抽象的力量和抽象的危险来自同一根源，那就是绝对简单与绝对确定二者的结合。

J.W.Tukey

786. 在形式数学中，每一个步骤或为允许的，或为不正确的，没有中间余地。那些允许采用的单独步骤只要相互适配，无论是在计算中还是在证明中，都可以按任何次序装配成任意大小的网络或链条。这样看上去极小的一组假设最终变成了由一系列结果构成的洋洋大观。

J.W.Tukey

787. 在数学的运用中，我们必须常常把一个步骤或一组步骤的结果与数学所应用的对象的实际性能进行对照比较。一个长长的近似链，尽管每一近似都相对精确，但其总体却不一定给出与现实接近的和有价值的结论。

J.W.Tukey

788. 只要我们仅仅在假设和结论之间，沿着已建立好的程序规则做数学，我们的假设就永远不会受到挑战，而我们的证明和计算就能被别人客观地检验。因为数学家有完全的不确定性，他是唯一能够毫无怀疑地证明某些提出的事不可能存在，某些非常特定的问题不可能解出的人。因此，没有一个智力上的挑战能比数学挑战具有更大的保证。

J.W.Tukey

789. 相比之下，哪里只要运用了数学，我们的假设的合理性以及我们的导出的合适性（二者几乎总是作为近似）就都是有生气的争论题目，这种争论光靠逻辑不靠判断力是不可能解决的。为了有效地运用数学，我们必须接受不可靠性。

J.W.Tukey

790. 数学在假设和结论方面都是典型地精确的。它不允许假设有一点成立，哪怕是很小的，很次要的。对比之下，几乎数学的每一个运用都是近似的，其中几乎每个假设都有一点不成立。例如，数学可以对近似做出精确的断言，但如果要使这些断言本身精确，它们就必须是关于实际上永远不会发生的事情的断言。由于它们的不实际性，从来也不能单独地使用它们；但即使是这样的断言，也能够为使用近似的人提供有助的指导，并且也的确提供了这种指导。使用近似方法的人必须时时把这种方法和大量的直觉与判断结合起来。

J.W.Tukey

791. 数和数学家常常是友好的伙伴，但远不是不可分离的。许多数学家实际上并不十分擅长算术的细节；进行数值工作的天资未必一定导致一个人去做数学工作。相反地，它可能导致例如定量科学，工程或数据分析中的工作。

J.W.Tukey

792. 几乎数学的每一分支都靠一种符号语言而生存，这种语言的浓缩使我们能够对复杂的推理

链进行客观检验，自由装配以及各种想象。我们几乎每一个人都学过算术这种符号语言。普通代数也是一种符号语言。有些学生愿意把它看作关于数字的语言，然而数学家则认为它是关于多项式、方程式以及另外一些仅以数值为其第二位意义的事物的语言。当学生沿数学前进时，他将遇到一些更先进的数学的符号语言，这些数学与数字毫不相关。数学的符号式陈述所具有的精度以及符号运算的简便所带来的优点，是贯穿于全部数学以及数学的全部应用的。

J.W.Tukey

793. 数学研究有许多方面。它吸引着人们去发现新概念，尤其是那些为探索和组织一个领域提供重要步骤的概念。数学的一个挑战是对真理性事物的洞察力，而不论它是否能被证明。绝大多数数学发展过程有一个突出特征，即在探索与发明之间有着相互作用：探索的是解决问题的途径，一条途径可能导致一个证明，一个计算或展示某一数学模型所期望的性能；这种探索往往与反例的发明相结合，一条反例能够证明许多途径的必定失败。数学好象是一个装满零件的仓库，这些零件可以以各种方式放到一起，并且因为它们除

定义中所要求的那些之外没有多余的性质，这些零件可以用来模仿所有种类的事物。数学家有一种习惯，即他们善于考察所有具有同一给定性质的事物，或者一定行为的事物，这种习惯是一件非常强有力的工具，它使数学家的结果达到令人惊异的深度和广度。所有这些方面在建造新数学和建立数学的新应用中都是有生命力的，它们对进步以及促成进步的人都是重要的。

J.W.Tukey

794．在数学和数学的应用之间的鸿沟是深刻而鲜明的。这个鸿沟在我们的七要素中的四个要素上明显地体现出来，我们不能忽视它。在这个沟的一侧，人们建立并改进自身相容的，并且仅对自身有价值的结构；在沟的另一侧，人们用这些现成的结构或者一些为使用目的而新造的结构去近似某些事物，某些在我们所生存的世界中的科学方面的、工业方面的甚至政治方面的事物。有些人可以在沟的两侧都日复一日地很好地、愉快地工作，其他人则只能在一侧或另一侧愉快地工作。准备专心于数学的人们应该弄清自己属于哪一组。

J.W.Tukey

795. 从事纯数学研究的那些人有时被称为修道者。如果正确地理解这词的含义，这个词就是用得好的。纯数学研究是能够独自从事的，并且足以满足各时代中最有能力的人的智力要求。新知识、新概念和新秩序的智力挑战就象我们所知道的任何挑战那样纯粹和强烈。在这种应战的成功中所得到的满足是巨大的。对某一类个人来说，这种满足显然是最可能的。许多这样的人有过兴奋的和满意的生活，并对人类生活做出过许多贡献。这种事在将来仍然会有。

J.W.Tukey

796. 数学为什么会被如此广泛地应用呢？它的主要用途是模拟某些物理的、生物的、社会的或组织的系统，或者更确切地说，模拟这种系统的一组被认真选择的方面，那些可能具有重要性的方面，那些我们可以通过适当的工作找到其抽象类比的方面。其结果是，要想在几乎任何一个领域内成为数学的优秀的使用者，就必须对这一课题具有某些“感觉”，如果模拟在根本上是靠得住的话，这种感觉是不可缺少的。关于实际情况，必须懂得它的哪一个方面是可以忽略的，也就是根据所构成的模型的性能这种忽略带来的损失最

小；必须懂得在什么条件下对于实际问题的一个特别方面的抽象模拟是足够好的，并且一个人应尽其可能牢固地掌握尽可能多的各种数学分支。仅仅具有数学家的条件是不足以成为优秀的数学使用者的。

J.W.Tukey

797. 我们一旦模拟了实际系统并以数学术语表达了这个模拟，它就常常被称作一个数学模型，我们就能够从中得到指导以解决各种各样的问题：如果事情是如此这般会怎么样？模型的行为如何受某一数值常数的影响？或者受另一常数选择的影响？如果有任何效应的话，哪一个是起主导的？是具有重要性的？是不能忽略的？回答这些问题是一个数学的任务，一个能够并的确导致运用几乎所有数学分支的任务，甚至是导致发明新数学的任务。我们常常还不知道如何发展所需要的数学，因而必须寻找另一条路。今天，当我们有这样的困难时，或当数学回答过于复杂而难于完全理解时，我们越来越多地求助于计算。

J.W.Tukey

798. 数据分析以一种特别的和有意义的方式有

别于数学。在数学中，事实上允许仅仅从一些假设得到一系列结果。在数据分析中，只从部分数据进行推断则可能是不合伦理的、不道德的，甚至是错误的。相比之下，许多数据分析成为可能仅仅是因为我们可以用样本工作而无需考察全部数据。这里，数据分析家又必须沿参差的边界前进，边界的一侧过多地依赖那些不能支撑他体重的东西，另一侧则过少地依赖那些足够强壮的东西。

J.W.Tukey

799. 数学理论的指导在发展数据分析的各种技术中是首要的，今天，数据分析技术在抗菌素测量或其它药物剂量测量等广泛的领域中起重要作用。对海洋波浪的研究，对各种个体的人的性能的度量，玉米或其它作物的新品种产量的比较研究，改造气候的方案的试验以及对人们中的新闻流和概念流的研究，都要用到数据分析。举个例子，基于概率论的关于科学采样的思想，可以应用于人的统计，应用于对他们的意见(或其收入)的研究，应用于关于沉积岩石（以及油和矿藏）的研究，以及进行财务记录的会计审核。并且还有许多许多的应用方面。

J.W.Tukey

800. 一个数学证明，一个问题的解以及一个理论的构成全都是艺术的工作。

P.C.Roselbloom

801. 数学的应用往往是从数学之外的一个不佳的定义开始的。这项工作是要尽可能好地理解所定义的情况。其工作程序是建立一个数学模型，这模型将帮助我们搞清我们试图理解的情况。现在外部世界通常是如此地复杂，以至我们不能把它所有的相关特征都包括到数学模型中，也不能指望用那种包罗万象的模型做任何事情。我们将不得不简化事情，仅保留其重要成分。现在的危险是扔得太多了。因为我们若把现实世界中足够多的成份抛弃了，而得到一个能够计算的数学公式，那么所得结果和原有情况的关系恐怕就很值得怀疑了。数学应用的最有趣的特征之一就是不断地追求数学的简单性，而事实上物理世界又是十分复杂的。

H.O.Pollak

802. 所有的数学家在世界的最广泛的意义下从事问题求解。在一种狭义下，一个被提出的问题表达了所取的一个前哨点，是我们征服未知的一

个简单的交战。毫不奇怪，数学的大战略家们，除去少数例外，都是极好的战术家。

N.J.Fine

803．数学是结构的科学。当直觉和未经分析的经验表明在许多不同的背景下存在着共同的结构特征时，数学就有了任务，这就是以精确的和客观的形式系统地阐明基本的结构特征。数学家首先进行抽象的工作，即提炼出其中的基本关系，抛弃同一背景下的其它易变的及无关的特征，然后必定提出并设法回答这样的问题：如果仅仅保留这些基本关系会导出什么样的系列结果？这就是不加掩饰的形式下的，被称作公理化的方法，并且人们时刻都不要忘记，一个公理系统的合理性在于我们从它出发可以证明什么，在于这些公理对于它们的那些背景能提供什么有意义的洞察力。一个确定的形式一旦结晶出来并被证明是有成果的时候，一个数学理论的作用，过程和客观困难就可能提供一个背景，在这个背景下通过数学抽象的新作用在更高的水平上创造新的数学理论。然而这个新抽象的合理性并不来自这种为抽象而抽象的激情，而是来自数学发现的迫切要求。数学发现的过程并不是仅仅把无止境的幻想无益

地编织起来，而是向未知，非结构化以及难于克服的困难进行斗争。

A.A.Albert,F.E.Browder
I.N.Herstein,I.Kaplansky,S.McLane

804. 当代数学的真正精神就是创造性理解的精神，是为了进一步澄清思想而进行抽象的精神，是为了使证明以及对一些相对具体的问题的实验研究变得容易的抽象化的精神。从一组固定的假设出发的指导并不是定理的严格证明，那仅仅是工具，而不是目的。如果你是艺术家，那么你必须学会如何调好颜料。但艺术不是调颜料，它是绘画，而对年轻艺术家的训练应该使他能够按其技术可能性画得尽量好，同时也改进他的绘画技巧。

G.S.Young

805. 公理这个词是从希腊语中“有思想价值”这个词来的。一个公理是一个没有逻辑证据而被接受的命题，作为逻辑证明的基础的命题，因为它是有思想价值的，就是说因为它似乎正确。在对数学的公理化处理中，我们试图理解我们周围的世界，它可能是一个物理世界，也可能是一个

理想化了的世界，但总归是我们不加控制的世界。欧几里得对几何学的处理是公理化的。其目的是在少数几个公理的帮助下描述我们所生存的空间的结构。我们接受欧几里得几何的公理，因为它们与我们的感觉证据相一致，并且我们若发现它们由于物理上的限制而失去了运算意义的话，我们就准备去考虑一个理想化的世界。“假设”这个词来自拉丁语，原意为“要求”。一个假设是我们要求于我们所研究的系统的一个命题，它实际上是系统的定义的第一个部分。在使用假设的数学研究中，我们通过对假设的选择来控制我们正在研究的系统。我们不承担证明我们的假设与现实世界有任何关系的义务。不管我们采用什么处理方式，所造成的逻辑结果是一样的，但发展过程有所不同。

A.M.Gleason

806. 现代纯数学总是用假设的观点来表述的。数学家不费什么力气就能用那些只有专家才能听懂的术语证明他们工作的关联性。我并不是说纯数学家对其假设系统的关联性没有给出思想。恰恰相反，一个人在数学中的声誉完全是基于他的研究与被认为是重要的那些问题的关联性。但许多

数学家并没有真正地采用假设式的研究方法。

A.M.Gleason

807. 并不是每一个人都能成为一个画家，一个音乐家或一个数学家的；一般的聪明和努力在这里也无济于事。

P.J.Moebius

808. 在实际经验中（特别在早餐前），乘法是趋于非交换的。

W.Feller

809. 如果古希腊人不曾培育圆锥截面，开普勒就不会怀疑托勒枚；如果古希腊人培育了动力学，开普勒也许会预见到牛顿。

W.Whewell

810. 数学家已经智慧地创造了一个理想的世界。除了懂得这个世界的数学家以外，任何人对它连最淡薄的概念也没有。

A.Pringesheim

811. 数学的黄金时代不是欧几里得时代，而是我

们的时代。

C.J.Keyser

812. 正是为了严格性的努力，迫使我们去发现更简单的证明。

D.Hilbert

813. 数学对象有时就象外来的飞禽走兽那么奇怪，为了考察它们很可能要费相当的时间。

H.Steinhaus

814. 没有数学，我们无法看穿哲学的深度；没有哲学，人们也无法看穿数学的深度；而若没有这两者，人们就什么也看不透。

Bordas Demollins

815. 我们现在所具有的数学真理中的大多数都是以许多世纪以来的艰苦智力劳动为先决条件的。

H.Schubert

816. 一个类别的数目就是与这个类别相似的所有类别组成的总类别。

B.Russel

817. 就事物本性而言，雄辩的数学家必定象会讲话的鱼那样少见。当人们要他在公众面前发言时，他就会觉得好象在经过长期的使用显微镜的生活之后，突然要去负责天文观测一样。

J.J.Sylvester

818. 每个人都知道曲线是什么，但是他如果学习了很多数学，反而会被无数的例外情况搞糊涂。

F.Klein

819. 我应该高兴地看到欧几里得已经被尊敬地收藏起来，或者说被埋到了学童们测深铅锤所不及的深度。

J.J.Sylvester

820. 数学是我们时代中有势力的科学，它不声不响地扩大它所征服的领域；那种不用数学为自己服务的人将会发现数学被别人用来反对他自己。

J.F.Herbart

821. 数学的运动能量不是推理而是想象。

A.D.Morkan

822. 数学中的卓越是卓越中最鲜明的样板。首先，它的准则是客观的。和数学家去辩论谁有才能或者谁无才能是无用的，他们知道谁有谁没有。和音乐才能一起，数学才能是人之天资中最明显的和最特定的。它是无阶级差别的，就是说，尽管它也需要训练(正是我们所讨论的题目)，但它是天生而就的。如果你天生无此才能，那么天下最优良的训练最终也不会对你有多大帮助。

C.P.Snow

823. 数学才能是很罕见的天资。它是特殊的才能，并且应该在幼年时期就表现出来。数学的语言是国际性的，是唯一完全国际化的语言。一个外国数学家可以从我们的孩子中挑出人才来，就象在他自己的孩子中挑选数学人才一样地容易。

C.P.Snow

824. 最后，我们应该同意数学创造是自我们的爬洞生活以来的创造中最伟大的胜利之一，也是我们过去四百年来所以爬得如此之快的原因之一，也许是最主要的原因。不言而喻，数学是我们科学文明的基础。但我还要说，数学有资格作为人类成就的象征和符号。有许多可用于检验社会教

育的方法，但其中之一是——这个社会是否培养了许多创造性的数学家，他们是否按照世界标准有其自己的记录？这当然不是唯一的检验。但它是一个起码的、客观的和主要的检验。如果一个社会教育没有达到这个目标，那就是这个社会出了问题或它的教育出了问题。一个社会若不能鼓励卓越，以及这种特别的卓越，长久下去，它就不是一个适当的社会。

C.P.Snow

825．数学才能有两种主要特征，一种是值得羡慕的，另一种则不是。第一条是这种才能很容易表现出来，第二条是这种才能不易持久。一个数学家的创造生命可能是很短的，如果他在四十岁以前还没有做出他最好的工作，那他就得靠运气了。那以后，他就没有多少年头可以利用了。

C.P.Snow

826．谈到数学杰出人才的各个中心要点，数学是重要的，竞争的压力也是不可缺少的，但是研究过这一问题的人们相信，成功的真正源泉在于被物理学家们称为“临界物质”的那种东西。这是指，你把足够多的聪明学生和足够多的优秀教师

集合起来，你就可以产生一个卓越水准，它比分开的，散布于全国的聪明学生与优秀教师所能达到的水准要高得多。用简单的话说，它的意思是聪明人互教互学。

C.P.Snow

827. 数学卓越才能是难于从管理上或政治上去掌握的，因为只有极少人具有这种才能。如果谁也不具有它，生活就会更简单、更整齐。也就不会出现那些关于某些特殊安排的烦人的争论。是的，生活会更简单、更整齐，但也就失去了智力上的荣耀。对这种卓越才能的关心不是教育的唯一价值。和我们教育的几百万儿童的任务相比，这种卓越才能在数量上不值一提。这种才能至多不过几千人。这不是它的唯一价值。然而我确信，如果我们忽略了它，无论是出自什么动机，我们都将被证明是不懂得教育的价值的。

C.P.Snow

828. 在数学界内人们关于如下问题有一定混淆，即数学家的恰当作用是什么，是什么构成了有意义的数学，等等。看来可能很滑稽，有些人甚至持极端的观点，认为人类智能的表现是最远离于

人的利益的。与这种禁欲主义相一致地，他们想要把数学从与现实世界的所有交互作用中分离出去。他们认为不需存在任何动机，但实际上并没有任何证据表明人类在进行着他们所想象的过程。对这些人来说，数学仅仅是个逻辑游戏，但计算机同样也能玩好这种游戏。我是属于另外一派人的，这派人认为数学和科学之间的相互作用是绝对需要的，若没有科学必然性所给予的不断刺激，数学就会变得贫瘠，甚至更糟，变得讨厌。而当一个游戏变得令人讨厌时，它就失去了它的首要功能。

R. Bellman

829. 我不相信有任何方式，用任何能够被普遍接受的美学公理系统，可以证明出哪一种击球姿势是正确的。但若考察数学的历史，好象关于这两个哲学的相对价值没有什么问题。大多数有意义的定理是以科学为其渊源的，并且即使已经建好的领域也需要从新科学问题再归纳以便保持其活力。今日，有些数学家声称时代已经变了。他们认为我们现在已经有足够的数学来建立一个自己能长久维持的系统了。再过十年时间会告诉我们实际情况如何，那时我们能够再为我们的论点

争辩。还有一点要坚持的，我不相信任何自包含的系统能够保持其活力和强度。

R. Bellman

830. 如果你的确相信有活力的科学领域是重要数学问题的丰富来源，那么生物科学领域对你就是一个合适的领域。而且它还是目前最新的研究前沿。物理领域的问题永远也不会被完全解决，但是现在看来，和这个领域所不断得到的资金与人力相比，它的收获是有限的。然而生物学领域是如此富饶和复杂，人们在今后的一百年或二百年以内是不会看到它的枯竭的。如果人们在经典生物学中再加入知觉现象和人工智能对它提出的许多问题，那么前述持续时间还要延长。

R. Bellman

831. 从实践观点看，生物医学领域的研究是青年数学家的活动。青年人将要挖掘这个老数学家不曾涉足过的领域，这里充满了数百个既有兴趣又十分重要的新问题，迷人的问题。这是一种既能搞好数学，又能为我们创名声的好方式。如果等到这个领域变得时髦了，等到公认的大学智力界领导人前去培养学生，培养出这个领域中的几百

个博士来，那就为时太晚了。威望是留给中年数学家的。年轻的学生和研究者必须懂得学术世界是带有时髦之谜的。有威望的领域总是人才过剩的。

R.Bellman

832. 数以千计的年轻数学家为一个领域中的存在唯一性定理的完美化而奋斗，而那些问题都是十几年前提出来的。我们遗憾地看到聪明的年轻人在面包屑后爬来爬去，而宴席正在数理生物科学那里等待着人们。

R.Bellman

833. 随着时间的推移，数学家因他所面临的最困难的挑战能用几个词向学童讲明白这一事实而得到满足。事实上，难于使具有良好科学训练的人对数理生物科学感兴趣，其原因之一就是业余的或初学者在问题的真正智力层次上缺乏全面理解。一旦一个问题领域在智力方面享有了威望，加之校方批准的印章，研究者就会成群地涌向这个领域。这时研究者个人的困难就是他要和数百、数千个其他研究者竞争，而其所做的工作常常只有注解的价值。另一方面，先驱者占有一个优势

就是他可以随意在一个广大的领域内漫游，在很大程度上按其个人兴趣挑拣和选择研究课题。

R. Bellman

834. 在数理生物学中，在数学活动的所有层次上有许多机会进行引人入胜的研究。对传统数学家，有新型的泛函方程和新型的控制过程值得分析；对系统分析家，有类型新颖的系统等待探索；对计算机专家，有着各种各样与自然竞赛的挑战，而且只要牵扯到数据的存贮与检索，就还有改进结果的问题。

R. Bellman

835. 我们作为教员所能做出的重要贡献之一就是用一个接一个的例子使学生们相信，大部分有意义的研究问题，甚至包括象数学这样抽象领域中的问题，是以一种感觉的和自然的方式从外部世界提出来的。当然，许多数学家不愿意相信这一点。他们宁肯相信遥远的神圣来源，不管它是多么模糊，也不愿承认他们所求解的问题有物理的参照，甚至不愿承认有选择研究问题的合理方式。为什么有些人会乐于相信他们所终身奉献的职业是与人事完全无关的呢？我也许要把回答这

个问题的任务留给精神病学家和文化历史学家作为有意义的研究课题。另一个没有解决的问题是，为什么被认为是有教养、有文化的人会藐视每一个愿将其智力活动的合理的比例贡献出来改善世人生活条件的人？为什么这些人会以他们脱离实际这一点为自豪呢？

R. Bellman

836. 成功的研究不仅依靠一系列孤立的个别问题的解决，而且还依靠由一些问题和相应的解相联结所组成的链。首要的是设计出敞开式的程序，这样人们就不会因一个问题的解而随便地拒绝其它的东西，一个问题应该自然地导致进一步的问题，一个解也应该导致进一步的解。

R. Bellman

837. 在把数学用于科学世界时，我们经常碰到这样的情况：我们既不考虑所有的变量也不考虑它们之间所有相互作用，我们不能精确地测量任何东西，甚至当方程和输入数据都精确时，我们也不能进行准确的计算。

R. Bellman

838. 我并不否认求解智力问题的快乐和人们好奇心的满足，也不诋毁抽象数学的美学方面。Edna St.Vincent Millay的名言“欧几里得独自欣赏过裸美”有点极端，但包含了许多真理。但这些都只是画面的一部分。成熟的人想要得到比智力问题求解还要多的东西，比智力航行还要多的以及比美学还要多的东西，他想成为各种活动参与者。在圣经中有一句熟悉的话：“时间是给予所有人的。至于抽象，它有着效用主义的朴素美。”

R.Bellman

839. 在人类历史上，我们已经到达一个能够在任何可能的环境中起主导作用的阶段。这样我们的数学兴趣必然在许多领域中从描述性分析转向控制论。如果我们真的想当实行家而不是观察家，这就要求更加熟练的和更强有力的数学。实际上数学的历史清楚地表明，有生气的数学的成长严格地依赖于与现实世界的不断的相互作用。这样，新的工程的、经济的和医学的目标将不可避免地要促成新的数学理论，我们可靠地预言，这种理论将照亮那经典问题沉睡着的、落满了灰尘的旧时代书架。

R.Bellman

840. 抽象逻辑与课本含有如下意思：当我们面临一个不能用当前的方法处理的新问题时，依照惯例的和通常的做法是抛弃旧的、不够有效的方法而发展某些新的方法。然而人的逻辑以及人类历史都指出和证实了，我们只是把问题抛开而装作它并不存在。进一步，那些指出旧理论的弱点并要求新理论的人们通常遭到嘲笑、蔑视，并被认为是制造麻烦的人，或者至少被认为是拒绝参加合作的人。但如果他们有幸得以足够的长寿，他们就能看到转变的完成并突破思想障碍，就能成为“人类思想的先驱”。最后他们还成为一些科学创始的大师，成为真正正统的和反对变动的大师，因而也就取代了旧时代的卫道士。

R. Bellman

841. 必须强调这一点，即计算机的存在同时也扩大了数学家的领域，并加强了他的作用。但是不能过分地强调说正确地使用计算机需要更多的，而不是更少的数学。分析中最困难的部分处于数值解的中心，它需要知识、熟练、经验和机敏这几个因素的最大程度的结合。不幸的是，由几所出色的学校，相距不远地忠实地追随着布尔巴基学派的学校培养出来的数学家对函数方程的

数值解抱有奇怪的傲慢态度。回想一下就可以有趣地看到古希腊对科学的态度的复活，这是对实践和工程的厌恶，是使科学的发展推迟了几百年的态度。伽利略引进了现代的理智的态度；布尔巴基则引起向中世纪主义的倒退。根据这一群学者及其罗马阵列的标准，牛顿和高斯都不够美国数学学会的会员资格。

R.Bellman

842. 优秀的数学就像政治一样，是可能性的艺术。

R.Bellman

843. 十八、十九世纪所发展的数学分析的许多内容来源于力图胜过算术的努力。为了求解带有初值条件的几千个（以至几百万个）联立非线性微分方程，我们不必培养大规模算术解题能力，因为已经有了需要极少数学训练的、既简单又直接的方法。这种新能力意味着我们有了更多的时间去披露更新的、更有力的和更巧妙的方法，这一点又决定了在整个科学界内，科学家至少可以不靠数学家给出的绕道方法就可以检验理论和假设。这种情况绝不是要在数学物理中撵走数学家

的意思。它只是表明，统计力学、控制理论等经典领域和许多新兴领域急需数学家把原始的数学问题变换成另外的形式，使得经过适当的科学训练和基本的数学训练的人就可以利用计算机有效地解决它们。从本质上讲，数学家的主要工作就是足够好地理解数学公式，以便简化那些数学内容过多的问题。

R. Bellman

844. 这样游戏就其自身也值得研究，并且一位有眼光的数学家若对它们冥思苦想就会发现许多重要的结果，因为人从来没有比他下棋时表现出更多的机智。

G. W. Leibnitz

845. 我们先假设数学家基本上是无责任的人，一位数学家可以定义为一个“从社会取得在其后半生做游戏的执照的人”。然而生活中没有比游戏更重要的事情了，而把一项活动描写为游戏就意味着在其中有不懈的追求。一位数学家可以做许多不同的游戏。可以用一个人所做的游戏的种类恰当地评价它。有一个游戏就是找到更简单、更吸引人的和优美的定理表达。另一个相关的游戏

是使得对数学某一重要领域的理解变得十分简单，目的是使将来的学生在读这些结果时将说“当然罗”。庞开莱的风格是明朗的和自然的。布尔巴基的风格则是挑剔的。读到这些，我们可以看到在智力上的优点与学术味浓重的莫名其妙之间有着巨大差别，这种差别在今日是十分普通的。中世纪的一份有趣的遗产是这样一种概念，即认为只有困难的才能是出色的，只有古代的才可能是博学的，而能够真正理解的就不可能是意义深远的。

Anonymous

846. 现代化的态度是充分扩大信息流，扩大智力工具的使用，经典的概念则是按照知识就是力量这一箴言屯积定理，在这二者之间存在着巨大的差别。数学的经纪人必须从科学世界出发。有些人可能认为这种态度有些奇怪。难道一个谨慎的数学家不应该巧妙地使用暧昧以增加他的才能和技巧的必要性吗？我认为有许许多多领域是我们不理解的，它们绝对地需要数学家的注意。只要还能受到雇用，数学家就不必耽心技术上的失业。

R. Bellman

847. 如果一位科学家不懂得必须花费过度的时

间去学习操作复杂的数学工具，那他必定是把时间花费到不该做的事上去了。另一方面，如果他因为缺乏数学训练而降低了他的科学眼光，那他就没有真正地理解要点。老实说，他必须沿窄路前进。因而引入数学技巧是一件好坏各半的事情。这条窄路的一端是数学的复杂性，另一端则是无成果的过分简单化。如果不具备那种被称为科学直觉的神秘力量，就不可能通过这条难于行走的路。

R. Bellman

848. 我们面临着智慧历史上的间断：数字计算机。它将对数学分析产生压倒一切的影响。重点将从小范围内的智巧移向大范围内的智巧——这类似于解析几何对综合几何产生的影响。综合几何的美仍然保留着，但它不是有生气的研究领域。在哲学中人们常常指出，重要的量变引起质变。

R. Bellman

849. 一位杰出科学家的主要特征之一就是，他是具有数学才能的，然而又不是按照数学训练的。换句话说，他是数学的分析学的爱好者。这没有什么可奇怪的，它是事实。这种机敏以后在细小部分，甚至在最后部分是会有用的。基本的新方

法的发展者的幸运之处在于他们不知道标准理论的旧路，当然这样的例子也不多见。总的来说，靠力量夺来的路导致死胡同。

R.Bellman

850. 数学的分析学不能够证明任何理论的有效性，但它很容易证明它们的无效性。这当然也是个不寻常的贡献，因为通过抛弃各种似乎可能的先验假设，我们就可以更加接近那些更现实和更有用的解释。

R.Bellman

851. 把概念和那在各种方法之间的折衷混合在一起就构成了科学的实质部分，实际上也是文化的实质部分，而教育应该直接以此为目标。只有不纯熟的人才会相信，世界的复杂性可以用受限制的狭隘正统观点来理解。智力上眼花缭乱的方法不是一种有教育的方法。真正有教育的人坚持考察一个理论的所有方面以及所有的理论，然后才决定采取什么行动。

R.Bellman

852. 除去作为科学的一种工具之外，数学还是

一种艺术形式。它具有它自己的结构及美学目标。我们是怎样培养我们的青年艺术家的呢？绘画、雕刻、文学和戏剧等领域全都强烈地引起文化和技术上的混乱，而一个保持静止的艺术形式则不可能是不贫乏的。数学也决不是这种普遍法则的例外。

R.Bellman

853. 科学的历史表明，模型的使用已经加速了数学的发展。这样，几何图形已被作为代数关系的模型，赌博已被作为概率论的模型，而引力作用则被作为调和函数的模型。由于以下三个主要原因，这样的模型已经加速了数学的发展：（a）把注意力集中于有意义的问题，（b）模型是感觉复杂关系时的直觉，（c）提出了新的概念。

R.J.Duffin

854. 数学方法可以有益地应用于从基本物理问题到道德问题的整个活动范围。很容易构想出一个多层次的等级或者至少是一个活动的系列，但不是必须这样做。当这个层次达到更高程度的抽象时，数学方法也就更难于应用，而其发展也就更少了。但如果在合适的层次上运用数学，那么它在本质上和常识方法的区别也不很大。它仅仅

是更精确的和更有格套的，其概念具有更大的适用范围。尽管它可能超出常识的文字推理，但它最终必须与这种推理兼容。

N.I.J.Bailey

855. 数学家必须花费几十年甚至几个世纪的时间去创造材料，然后才有保证得到象欧几里得给予几何学的那种演绎组织的知识体。并且不象逻辑组织那样，这种创造工作并不是从一个证明向另一个证明一步一步地前进，其中每个证明被公理和先前建立的结论所支持。这种创造过程所牵扯的是摸索、疏忽、猜测和假设。想象、直觉、预测、洞察、实验、机会、运气、艰苦的工作以及巨大的耐心都被用来掌握一个关键的概念，构成一个猜想以及找到一个证明。总体来说，数学创造在于“用自己的智慧做自己最厌烦的事，同时把握住一切可能”。任何逻辑无误的指导都不能告诉头脑应该如何思考。伟大的数学家们着手解决一个问题并失败了，另一位又来解它并成功了，就是这一事实表明了在创造中溶入了多少个人的脑力劳动，这种创造不是在最后的证明中所表现出来的系统的、有条不紊的推理。

M.Kline

856. 对于学生，创造性的活动和消遣性的活动就是数学的核心。正是在这种工作中，数学家做出了最高的贡献，并最有意义地推进了这个学科。创造过程不但在解决已有问题时是必不可少的，在其它方面也有重要作用。如果不创造新观点、新的研究方法及新的目标，那么数学就只能对旧的证明做重新组合或者继续严格化的工作，这样它很快就会枯竭，并失去其生命。把步骤重排，把定理编成系列以便构造已有知识的演绎的重新组织，这些常常需要机敏，但总的来说，这种工作十分象把书本重新安排，而创造性活动则可以和写书相比。数学家在创造性工作中所能得到的满意，射猎的兴奋，发现的颤音，取得成就的意识，以及成功时的得意，所有这些都比他在按照演绎模式对证明做最后整理的工作中所能得到的要多得多，强烈得多。

M.Kline

857. 很久以前数学家就知道直觉的可靠性要胜过逻辑的可靠性，有如光辉的太阳胜过苍白的月亮。更伟大的数学家则以这种或那种方式看到了这一真理。柏拉图确信数学真理独立于人之外，存在于世界之上，而人的头脑通过深思来认识它。

笛卡尔说得肯定，“逻辑仅在交流我们已知的东西时有用。”数学家亨利·勒贝格说过，“逻辑使我们拒绝某些推理，但它不能使我们相信任何推理。”对这一点，哈达玛又加上一句，“逻辑仅仅是核准直觉的胜利”。A.S.Besiovitch 的多少有些醋意的话也说明这同一真理。他说，一个伟大的数学家因其所发表的错误证明的数量而知名。伟大的数学家在组成一个逻辑证明之前就知道一个定理是真的，并且他们只要看出可证明性就得到了满足。数学的最大进步是由具有杰出的直觉能力的人推动的，而不是由具有构造严格证明能力的人推动的。

M.Kline

858. 这样看来，我们只要学会数学的语言就行了，并且我们还会因此而得到额外收获，那就是用来描述我们的宇宙的合适手段；我说过，我们应该对这份收获感到格外高兴。

C.A.Coulson

859. 对数学内容的逻辑表达方式忽略了数学的另一个有生气的成份，即部分数学工作的目的。当然，有些数学家会认为怎么会提出这种问题，

并斥之为异端。他们争辩道，数学是一门如此显然的艺术，而询问它的目的或终极目标就等于玷污了艺术。如今这种态度尤为流行，现在多种多样的数学回答着由许多数学家个人所提出的大量问题，但在维护其价值时，人们提到的理由仅仅是著者在创造美。这些人把在现实中的任何应用认作是搀假或损害。然而伟大的数学家把数学的美作为额外奖励而满足地接受它。他们最深刻的动机是通过数学媒介，其中也有他自己的作用，帮助人们研究并从而理解宇宙，并为着人类的利益而利用自然的力量与现象。例如高斯把这句话作为他的座右铭："自然界是我的女神，为其定律服务是我的义务。"几乎所有的数学的含义和目的都不在于寻找一堆在逻辑上相关的符号，而在于这堆符号要告诉我们的关于世界的事。

M.Kline

860. 对自然的深刻研究是数学发现的最富饶的来源。这种研究不仅有利地提供了一系列恰当相关的目标，而且还有益地排除了含糊的问题和无用的计算。它是建立分析学的方法，也是发现至关重要的、科学总要维护的概念的方法。最基本

的概念是那些代表自然事件的概念。

Fourier

861. 有一种把数学创造分类的方法：它可以是对旧事实的一个新的证明，可以是一个新的事实，或者可以是同时针对几个事实的一个新方法。

P.R.Halmos

862. 每个人在实际上都知道数学在科学和技术的进步中起了中心作用。然而许多人把数学自身看作一门静止的艺术——一个永恒的真理体，它好象是几个古代的朦胧人物发现的，工程师和科学家只是按照需要从中取用。当然不可能从这种真理再向前进了。数学是每天都在改进，变动和成长的。这种成长不仅依赖各种基本研究的进展，还依赖我们日常生活中最浅薄的，象面包和黄油这类事物的发展。

P.R.Halmos

863. 为防止任何人认为数学概念是从其创造者额前被吹起来和完美化的，我们提醒如下事实，即大名鼎鼎的欧几里得几何在 2000 年之后被发

现有几处缺陷。

P.R.Halmos

864. 数学在其过去的2000年间能够蓬勃地发展，必定是因为它不断地被抛光，被简化，被系统化、统一和浓缩，不然的话就完全不可能把这知识的火炬传给每一代新人。今天活着的人中谁都不能了解过去这十年中被抛光的所有的数学，即使是粗略的了解也做不到。为了使这个领域内的工作者能够充分理解这些知识，使他们能够有理智地前进，绝对有必要找到更加新的、更加短小的和简洁的证明，这种证明应该比其对应的旧版更带有启发性，给人们以更大的洞察力。

P.R.Halmos

865. 仅仅把一个个证明放在更广阔的背景之下就可以很容易地看清它们，使它们变得简短。这个广阔的背景扩展着并且与其它一般概念相混合，形成了一个更加大的、更加统一的整体。几个世纪之后，我们这个时代的十个最伟大的发现**很可能被放到**一个研究生口袋中的一本小册子**里，而他将幸运地在**两三个月内就把它们吸收了。

P.R.Halmos

866. 一个数学革新的来源在哪里？有时在数学之外，但绝不是总在数学之外。正如数学家对工程学、物理学、心理学、经济学和其它学科做出了贡献一样，这些领域反过来也使数学保持了有生气的创造力，其方式就是向数学提出令人兴奋的问题，引导其沿着新的方向发展，有时还为表达数学概念建议某种语言。已经发生过这种事，即当一个物理学家需要一个数学定理时，它已经放在那儿了，等待着人们取用。但更经常发生的事则是，当人们需要某些新东西时，这个消息要经过几十年或者更长的时间才能渗透到象牙塔上，而且差不多要再经过这么长的时间，其答案才能从塔上传达下来。

P.R.Halmos

867. 新的数学常常来自普通的好奇心。正确的数学好奇心是一份珍贵的财产，但通常只有最高等的职业数学家才具有这种好奇心。年轻数学家面临的最困难问题就是如何找到一个问题。一个正确的、问得好的问题就是这场战斗的一半，并且常常是唯一需要灵感的部分。问题的答案可能是困难的，并且它可能需要机敏地运用已知的技术，但常常是，创造与洞察的颤音就集中在问题

之中。

P.R.Halmos

868. 也许应该提到，在问题被系统阐述之后，数学家并不象（尽管人们假设很象）一个科学的谢洛克·福尔摩斯。一个数学家并不是一个演绎推理的机器，而是人类的一员。新数学并不是通过纯思维和演绎来到他这里的，而是通过浸满汗水的实验和归纳，并且他如果是幸运的话，还通过灵感。当然一个数学试验是不用导线，管子或沸腾的液体的；它所包含的是对一般结果的特例或类比所进行的审查。在这种试验的基础之上，数学家通过归纳得到大胆的结论。对这些结论进行证明可能是困难的，证明不过是把这项工作进行纯演绎的安排，更多地是传达事实而不是建立事实。

P.R.Halmos

869. 实际应用、好奇心和历史都是革新的主要源泉，此外还有两个值得提的，一个是失败，另一个是错误。每一个曾经试图证明费尔玛猜想的人都失败了，但其中有一些努力已经在现代代数和现代数论中产生了最有成果的概念。至于错误，整整几本书的漂亮数学都是由它产生的灵感。数

学家X的一个漏失或一个误述正好是数学家Y所需要的用以发现真理的东西。如果X和Y碰巧是一个人，那情况就要好得多。

P.R.Halmos

870. 亨利·庞开莱曾经说过，“以后的各代人将把集合论看作一场疾病，那时的人已经从这种病中恢复过来了”。然而集合论的方法已被慢慢地灌输到年轻数学家的头脑中了，事实上是在摇篮期就开始灌输了。其结果是他们的血液中灌得太多了，以至于所有有争议的特征都已失去。它可能被证明是数学史上最强有力的一个统一理论，是一个把看上去远离的各个概念领域之间的联系揭示出来的理论。

P.R.Halmos

871. 可能要十年或百年才能对一个数学革新形成恰当的见解。但有一件事是可以肯定的。只要世界上还存在着数学家，革新就不会停止。新的概念将会得到研究，有时在实际问题中还会得到应用，并且总是得到欣赏。

P.R.Halmos

872. 数学鲜明地区别于人类的其它所有知识体之处在于，它坚持从作为必要条件的、已阐明的公理出发进行演绎证明，得出可以被接受的结论。这条要求实际上已经给数学以力最，因为演绎证明强化了它的结构。此外还把数学组织成演绎系统，使其繁多的内容首尾一致，并且公理化的固有组织类型也清晰而准确地给出了预先的假定，因而指出了这种系统适用于何处。它还具有抽象性，因而能包容几种结构。

M.Kline

873. 数学主要地是一项创造性活动，因此它要求想象、几何直觉、实验、有见识的猜测、尝试与错误、模糊的类比以及疏忽和摸索。每一个数学家都知道，创造性努力需要艰难的工作、困惑苦恼和真正的思维，他们也知道所导致的成就的含义。详细写出最终的演绎公式是一项厌烦的任务。

M.Kline

874. 创造性要求在求解问题时具有灵活性，要求容纳来自数学任何领域的任何概念，而不论它们是否在特定的公理结构的限定之内。这种限定是

对思维的一种阻碍。

M.Kline

875. 有些最伟大的数学思想根本不是逻辑问题。的确有些数学家，象魏尔斯特拉斯在其部分工作中，以及皮亚诺和弗莱格在公理演绎结构上产生出严格的定理来。但是在这种工作中，他们不过是重新系统地陈述已知的东西，而其目的是把已经理解的东西严格化。新的思想永远不会以这种方式得到。逻辑什么也没有发现，既没有发现定理的陈述，也未发现其证明，甚至在对已知结果构造公理化系统时也没有发现什么。因此在演绎方法基础上的构造忽略了现实活动。逻辑公式化的确用活动打扮起来，但把血肉掩藏了起来。它就象用来装扮女人的服装，却又不是女人。它是数学的一个分支的最后的积极发展，并如一位聪明的教授所说，当做这件事时，这个学科已准备了葬礼。逻辑可以是数学的标准和约定，但并不是它的本质。

M.Kline

876. 由于另一个原因，数学的逻辑版本是它的一种畸变。概念、定理和证明从现实世界中表现出

来。正是对数学的利用才告诉了人们什么是正确的。在概念和运算的基础上我们决定了它们应该具有什么性质；这以后我们发明了一个逻辑结构，它产生出这些性质来，然而它必定是人造的。因此逻辑并不指示数学内容。是使用决定了逻辑结构。逻辑组织是后来的想法。如哈达玛所说，逻辑仅仅核准直觉的成功，或如魏依指出的，“逻辑只是一种健身法，数学家做这种练习可以保持他思想的健康与强壮。”

M.Kline

877．在严格化中，数学科学表现出突出的人造特征，这一点打动了每一个人。它尾随历史的由来，我们看到问题是怎样回答的，但是我们看不到它们是怎样提出的和为什么提出的。

H.Poincare

878．你常常能够从不搞数学的人那里听到，尤其是从哲学家那里听到，数学所包括的完全是从明确陈述的前提出发抽出结论，并且在这一过程中，只要这些前提之间没有矛盾，那么它们的含义以及它们是真是假都是无所谓的。但是，一个做过创造性数学工作的人讲的则完全不同。事实上前

一种人仅仅考虑了由已完成的数学定理所铸成的结晶化的形式。然而数学的研究者自己也象在其它科学中的一样，并不是以这种严格演绎的方式进行工作的。相反地，他从根本上是使用他的想象力，并且在启发式办法的帮助下归纳地前进的。可以给出许多数学家的例子，他们发现了具有最显著的重要性的定理，但却不能证明它们。难道我们能够因此而拒绝承认它是伟大的成就吗？难道我们能根据那些人的定义坚持说这些定理不是数学吗？如何用词毕竟是任意的，但是任何有价值的评价都不能否认，第一次宣布这个定理的人所做的归纳性工作至少和第一个证明它的人所做的演绎性工作具有同样的价值。因为二者是同样必要的，而发现是对结论的预料。

F.Kline

879. 没有解决完了的问题，它们仅仅是或多或少地解决了的问题。数学只能达到人的正确程度，而人是容易犯错误的。

H.Poincare

880. 关于数学的最终基础及最终意义的问题还未解决。我们并不知道沿什么方向前进可以找到

最后的解答，甚至也不知道从根本上是否能够期望一个客观的回答。“数学化”可能完全是人的一项创造性活动，就象具有首创性的语言或音乐，它的历史决定并不考虑完全的和客观的合理化。

H.Weyl

881. 他们不在分离结构上付出努力，而是走着一条迅速混合并且极富成果的路。人们能够看到，当几个非常不同的结构碰到一起时，数学中的伟大思想就出现了。下面就是我现在给出的关于数学的画面。一团毛线和一支胡乱摆动的钩子，所有的数学家在那里以一种几乎无法预测的方式相互作用。无法预测，因为从来没有一年不发现这类新反应。然后，在这团毛线内有一定数量的线头，指向所有的方向并且不与其它任何东西相联。

J.A.Dieudonne

882. 布尔巴基学派认为数学从根本上是简单的，并且对每一个数学问题，在所有的解题方法中有一个最好的、最优的方法。我们可以给出例子验证这一观点，但在另外一些例子中，我们因为还未找到问题的最优解而不能肯定这种观点。

J.A.Dieudonne

883. 在把纯数学区分于应用数学时，看来存在着两个问题。一项工作是否真是抽象的并且与所有的应用相分离？如果它的确是一项抽象的工作，所追求的目的完全是其自身的，那么它还是不是一项数学工作？我相信在严格的数学抽象思维和那种依靠现实世界的思维之间绝对没有明确的分界线，而且数学中的某些主要发展，象微积分，就多多少少是依靠现实世界思考出来的。进一步的抽象并不一定使数学变得更好。

M.L.Cartwright

884. “她出生时十分弱小，但每个时辰都在长大。她在大地上蔓延，并震撼着周围的世界。”

关于数学的荷马诗句
（公元三世纪）

885. 数学任一知识领域中的研究都包括这样一条主要目的，那就是找到一个观点，从这观点出发可以使这门学科显得最为简单。

J.W.Gibbs

886. 现代数学的一个显著特征就是它的发展方式：它及时地把旧的数学概念分开，对它们做分立

的研究，然后再把这些部分重新做有趣的组合，并且着力研究这些组合。这个过程对数学自身的简化做出了超乎寻常的贡献，并因而使它更便于应用。

Bushaw

887．我们有：

(a)实际现象所组成的现实世界，它通过关于这些现象的多种实验被我们所了解。

(b)数学模型所组成的抽象世界，它使用符号并以更大的精度和经济性表述关系和事实。

(c)辅助模型。

从(a)到(b)的转变就是用数学术语系统地阐述现实世界的现象；从(b)向(a)的转变则是对从系统阐述出发的纯数学演绎进行解释。但是我把这些都看作数学式的思考，而只有(b)中的演绎才是数学本身。我们还可从(b)向(c)进行数学式的思考，这里(c)是第二位的解释，然后再从(c)回到(b)或者直接回到(a)，这样来肯定(c)所提出的内容。

M.L.Cartwright

888．尽管数学模型可能帮助我们发现关于现实世界的重要事实，但它不能用来证明关于这个世界的任何事情。一个模型既不是真的也不是假的，

它只有适合实际和不适合实际的区别。若下述两条件有一个成立，它就是令人不满意的：(a)模型问题的解有一个不符合现实的解释，(b)模型包罗万象，或者各假设不相容，使数学推导出现矛盾。

M.L.Cartwright

889．我喜爱数学，因为它是一门比任何其它随便什么都更精确的，因而也是更令人极为满意的学科，在这里潦草的工作根本不行。一小时繁忙的辉煌工作抵得上终生一知半解的不专心的工作。因为数学思想是人类头脑能力的最高显示。

C.A.Coulson

890．有一种说法认为数学不过是从定义和假设抽出的结论组成的一个系统，其中定义和假设当然要认真考虑，不然数学家随意创造系统。这种说法恰恰蕴含着对科学生命的强大威胁。如果这个描述是准确的话，那么数学就会只由定义、法则和三段论法组成，成为没有动机、没有目标的游戏。认为智者可以按其爱好创造有意义的假设系统，这种概念只对了一半。只有在对整个科学体系负责的领域内，只有在内在必要性的指导之下，自由思想才有可能达到具有科学价值的

结果。

R.Courant, Robbins

891. 在伟大的数学中有一种振奋人心的，带有交响乐效果的渐强音。加速的拍子和渐强的音量使得脉博加快，心情激动。数学也有这种令人振奋的经验。

C.A.Coulson

892. $e^{i\pi}=-1$。

先生们，这的确是真实的，但又是完全似是而非的；我不能理解它，并且我们不知道它意味什么，但是我们已经证明了它，因此我们知道它必定是真的。

B.Pierce

893. 数学是一种语言，具有一种语言的所有魅力和用处。但是它比更传统的语言还多了一条优点，即它是一种可以对我们的世界给出任何科学描述的语言。数学家能够坚持攀登，不仅是因为他热情地追求纯粹真理，而且还因为他具有一种用最整洁、最简单和最根本的方式来表达我们宇宙的某些特征的愿望。

A.C.Coulson

894. 数学因其本质和历史遗产而生存在各种概念的相互作用之上。数学的进步及其活力总是依赖于抽象对具体的帮助以及具体对抽象的哺育。我们必须晓得数学仅仅是伟大思想潮流的一个部分。从长远看，使得数学孤立和分裂的作法就是使它窒息，甚至还可能使它灭亡。

M.Kac

895. 当数学退回到更极端的抽象思想的高度时，它是得到了对分析具体事实具有重要性的成长而返回中心的。

A.N.Whitehead

896. 自然几乎不可能不对数学推理的美抱有偏爱。

C.N.Yang

897. 纯数学家改良了语言，应用数学家使用这个语言，这个结合是十分有力量的，甚至可以对自然本身进行研究。

A.C.Coulson

898. 自从柏拉图对Eudoxus和Ar.Chyster表示

愤怒以来，许多第一流的数学家相信了应用败坏风俗的教义。仅有一个败坏数学的根源，那就是除去好奇心、渴望理解和渴望和谐的愿望之外的任何其它动机。

M.Kac

899. 一吨矿物中所含的真金几乎是无穷小的，然而它的提取还是被证明为有价值的。因此只要证实了纯数学的极少部分有用，就能证明它的工作的正当价值。

L.J.Mordell

900. 在（数学中）美的各个属性之中，首先要推崇的大概是简单性了。结果的意思及其意义马上就会被读者所掌握，而这一点本身可能就使得人们觉得这个结果多么漂亮。然而证明是个问题。它应该是以短为好，不牵扯什么细节，只有最少量的计算。它应该给读者一种优雅的感觉，使得人们奇怪，如此多的东西怎么能够用这样少的篇幅就证明出来了。

L.J.Mordell

901. 丑陋的数学是牵扯了大量计算而又产生了

无特殊意义或特殊重要性的数学。它用了那么大量的变量，常数和上、下、左、右标，使得人们很难掌握结果的含义；它显然只是为其自身需要进行推广，产生的结果也没什么新颖之处。另外还有一些工作，它们的结果没有显著的重要性，因此也不应该在理解和验证的方式上给读者加重负担。

L.J.Mordell

902. 在生理学中，某些人得到好名声是因为有这样一种说法："一位不是生理学家的数学家是几乎无价值的。"有那么一天，这个论题很有可能被证明是可逆的。

I.N.Snedoon and J.G.Defaras

903. 说一个数学陈述为真，只是说这个陈述是一组公理的逻辑后果，其它什么也没有讲。尽管外行人崇拜数学并想从中找出不变的和永恒的东西，但是绝对真理的概念是与数学毫不相干的。

C.B.Allendoerfer

904. 无可辩驳，你的名字叫数学。让自然科学家接受证据，让数学家要求证明。

W.V.Quine

905. 有些教师试图用记忆规则和发展机械程式的方法讲授数学。他们是拙劣的教员，这种教学方法也是不值得提倡的。无论谁，他如果只学习处方而又没有真正弄懂他所学的东西，那他就不能正确地使用这些处方。

A. Renyi

著者索引

Aaboe, Asger 274, 275, 276
Adler, I. 27
Aleksendrov, P. S. 13, 14, 15, 16, 17, 18
Allen, R.G.D. 753, 754
Allendoerfer, C.B. 120, 316, 317, 318, 319, 321, 322, 323, 324, 903
Andree, R.V. 52
Anonymous 100, 180, 195, 196,197, 198, 305, 326, 384, 591, 761, 762, 777, 845, 884
Artin, E. 768
Association of Mathematics Teachers 284
A Chinese Mathematician 139
Bacon, Lord 755, 756
Bailey, N.T.J. 854
Banerjee, A.C. 730
Barker, H. and Konove,C. 213
Battersby, A. 301, 303; 304
Bell, E. T. 429, 491, 492
Bellman, R. 362, 383, 385, 386, 387, 343

828, 829, 830, 831, 832,
833, 834, 835, 836, 837,
838, 839, 840, 841, 842,
847, 848, 849, 850, 851,
852

Bers, L. 102, 104, 106, 107, 167,
168, 183, 187

Bing, R.H. 252, 253, 254, 255

Birkhoff, G. D. 343, 608

Bocher, M. 66, 520, 528

Bondi, H. 709

Bourbaki, N. 125, 128, 241, 250, 711

Bridgman, P. W. 611

Broadbent, T.A.A. 493, 494, 495, 548

Brodetsky, S. 406, 418

Brooks 442

Brouwer, D. 237

Browder, F. E. 803

Buchanan, Scott 59

Buck, E. F. 20, 21

Buck, R. C. 20, 21, 22, 35, 36, 37, 38,
39, 230, 251

Bushaw 886

Cajori, F. 503
Cambridge Report 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568
Campbell, N. 636
Cantor, G. 500
Carmichael, R. D. 421, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674
Cartwright, M. L. 883, 887, 888
Carrier, G. F. 112, 149, 150, 152
Cauchy, A. 554
Chavan, Y. B. 726, 727, 728, 729
Choguet, G. 47, 48, 49, 50
Chrystal, G. 526
Comte, A. 533
Coolidge, J. L. 64
Coulson, C. A. 283, 284, 858, 889, 891, 893, 897
Coulson & Hem merseley 42
Court, N. A. 55, 56, 60, 61, 62, 67, 68, 345

69, 70, 71, 72, 74
Courant, R. 75, 111, 141, 142, 143, 169, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 382
Courant, R. &Robbins, H. 436, 715, 890
CUPM Panel 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 747, 748, 749
Dantzig, T. 678
Davis, P. J. 345, 346
Demollins, Bordas 814
Descartes, R. 479, 579
Dessoir, M. 534
Dewey, John 752
Dienes, Z. P. 488, 489
Dieudonne, J. 277, 296, 297, 881, 882
Dillmann, C. 524
Dodgson, G. L. 765
Doman, F. G. 751

Dresdon, A. 419, 654
Duffin, R. J. 853
Dyson, F. J. 351, 352, 354, 355, 356
Einstein, A. 280, 803
Evans, G. C. 381
Fehr, H. F. 116, 117, 118, 119
Felix, L. 121, 123, 126, 127, 135, 136, 137, 138
Feller, W. 808
Feriet, K. D. 134
Fine, N. J. 802
Fitch, G. D. 498
Fletcher, T. J. 206, 207, 208, 209, 210, 211
Forsyth,A,R, 514
Fort, T. 677
Fourier, J. 482, 860
Frankel, A. A. 437
Frankland,A. 532
Franklin, B. 501
Freudenthal, Hans 449, 450, 451, 452
Fry, T. C. 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371

Fuchs, W. R. 712, 716
Gallilei, Galileo 757
Gamow, G. 478
Gardner, M. 293, 294, 295
Garrel, A. 410
Gauss, C. F. 440, 444, 778
Gibbs, J. W. 885
Glaishier, J. W. L. 439, 506, 510
Gleason A. M. 11, 12, 700, 701, 702, 703, 704, 805, 806
Goethe, 609, 632, 637
Gomory, R. E. 115, 184
Gonseth 130
Grassman 232
Greenberg 140
Guggenheimer, H. W. 779
Gullin, C. G. 10
Gunning, R. & Rossi, H. 708
Lefevre, A. 527
Haldane, J. B. S. 587
Hale, J. K. 114
Hamming, R. W. 1, 2
Halmos, P. R. 552, 861, 862, 863, 864,

865, 866, 867, 868, 869,
870, 871
Hardy, G. H. 82, 433, 646, 683, 684,
685, 686, 687, 688, 689,
690, 691, 692, 693, 694,
695, 696, 697, 698, 699,
769
Harvard Committee 325
Hazurbazar, V. S. 308
Hermes, H. 714, 718
Heaveside 759
Hempel, C. G. 617, 618, 619, 620, 621,
622, 623, 624, 625
Henderson, A. 675, 676
Henkin, L. 202, 203
Herbart, J. F. 820
Hernstein,I.N. 9, 34, 803
Hertz, H. 472
Hilbert, D. 32, 101, 238, 239, 240,
477, 505, 507, 721, 750,
776, 812
Hill, Thomas 58, 517, 518
Hisenberg, W. 411

Hobson, E. W. 481, 513
Hogben, L. 573
Hogg, Q. 302
I. E. C. (Indian Edu. Commi., 54, 98
Indian Scriptures 269
Jackson, D. 85
Johnson, D. A. & Glenn, W. H. 722
Johnson, Dr. 285
Jorgsen 131
Jourdain, P. E. B. 572, 576, 577, 578
Kac, Mark 25, 26, 28, 29, 30, 31, 188, 894, 898
Kaplan, A. 592, 593
Kaplansky, I. 105, 200, 201, 803
Kapur, J. N. 51, 211, 256, 266, 307, 547
Karlin, S. 153, 154, 155, 156, 157, 170
Karman, T. Von 760
Kasner, E. 414
Kasner, E. and Newman, J.

612, 614
Kelvin, Lord 407
Kerrich, J. E. 763
Kershner R. & Wilcox, L. R. 423
Keyser, C. J. 415, 483, 486, 487, 499, 556, 811
Klein, F. 471, 512, 818, 878
Kline,M. 855, 856, 857, 859, 872, 873, 874, 875, 876
Kneebone, G. T. 234, 235, 242, 243, 244
Kothari, D. S. 40
Kummer, E. E. 523
Lax, P. W. 23, 24, 186
Lebesgue, H. 122, 124, 129, 133
Leibnitz, G. W. 344, 758, 844
Lichnerowicz, A. 389, 390, 391, 392, 393, 394
Lin, C. C. 108, 109, 110, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177
Linton, Ralph 86
Llyod, E. M. 76, 77, 78
Lo-Keng Hua 364

Logistic Thesis 236
Maclane, S. 262, 263, 264, 265, 803
Macshane, E. J. 257, 258, 259, 260, 261
Marshall, A. 589
Mertz, J. J. 540
Maschke, H. 511
Mill, J. S. 535
Millay, A. S. V. 63
Mises, R. Von 631
Misra, K. L. 270, 271
Moebius, P. J. 807
Moise, E. E. 204
Montague H. & Montogomory M. 99
Montroll, E. W. 166
Moore, E. F. 357, 358, 359
Mordell, L. J. 281, 899, 900, 901
Morgenstern, O. 590
Morkan, A. D. 821
Morowitz, H. J. 273
Morse M. 278
Muller, Max 266
Murdoch, J. H. 412, 413

Nagel, E. & Newman, J. R. 627, 628, 629
Nehru, Jawahar Lal. 19
Neumann, J. V. 5, 6, 7, 8, 151, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607
Newman, James 569, 598, 599, 600
Newman, J. R. 616, 638, 639
Newman, M. H. A. 770, 773
Newsom, C. V. 377, 378, 379, 380
Noble, B. 372, 373, 374, 375, 376
Novalis 113, 516, 537, 713
Pasch 233
Pearson, Karl 286
Pedoe, D. 404
Pierce, B. 892
Pierce, C. S. 634, 635
Plato 463, 529
Pollack, H. O. 189, 190, 191, 192, 193, 801
Poincare, Henri 53, 57, 73, 163, 509, 519, 525, 594, 595, 596, 597, 717, 764, 877, 879
Powell, F. C. 551

Prager, W. 148, 185
Pringesheim, A. 521, 810
Quine, W. V. 350, 904
Racine, F. C. 95
Rademacher H. 766
Radhakrishnan, S. 306
Raghavacharyalu, I. V. V. 490
Rao, A. N. 464, 465, 466
Read, A. H. 430, 431, 432
Reid, T. 455, 530, 538
Report, I. M. A. 723, 724, 725
Report, A. 417, 553, 654
Report, G. C. M. 441
Rheinboldt, W. C. 103
Renyi, A. 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 745, 746, 905
Robbins, H. 715
Rose, M. E. 147
Roselbloom, P. C. 800
Rosser, J. B. 144, 145, 146

Russel, Bertrand, 44, 45, 435, 515, 816
Sanders, S. T. 427
Santayana, G. 420, 575
Sarton, G. 408, 416, 679, 680, 681, 682
Sawyer, W. W. 298, 299, 300, 347, 348, 405
Sedgwick 447
Seth, B. R. 3, 4, 199
Shaaf, W. L. 705, 706, 707
Shubert, H. 484, 815
Singh, Jagjit 97, 438
Singh, V. 541, 542, 543, 544, 545, 546
Snedoon I. N. & Defaras, J. G.
Snow, C. P. 402, 902, 205, 822, 823, 824, 825, 826, 827
Spengler, O. 610
Stabler, E. R. 473, 474, 475
Stein, S. K. 774, 775
Steinhaus, H. 813
Stobaeus 580

Stone, M. H. 212, 395
Stone, R. 360, 361
Struik D. J. 84
Sullivan, J. W. N. 409, 422
Sutton, O. G. 640, 641, 642, 643, 644, 645, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653
Sylvester, J. J. 65, 480, 504, 539, 581, 633, 817, 819
Synge, J. L. 771, 772
Talmund, The 448
Thomson, D. W. 446
Thomson, Thomas 434
Thwaites, B. 289, 290, 291, 292, 549, 550
Titchmarsh, E. C. 453, 544, 455, 456, 457, 458, 767
Toeplitz, O. & Radenmacher H. 460, 461, 462
Toupin, R. D. 113, 178, 179
Tucker, A. W. 194
Tukey, J. W. 181, 182, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788,

789, 790, 791, 792, 793,
794, 795, 796, 797, 798,
799
Turnbull, H. W. 574
U. G. C. (Mathematics Reform Committee
267, 268
Ulam, S. 164, 165, 363
UNESCO Publications
396, 397, 398, 399, 400,
401
Varma, R. S. 41
Vijayraghavan, T. 467
Vira, Dharam 43, 46
Waismann, F. 719, 720
Waterman, T. H. 272
Weidman, D. R. 245, 246, 247, 248, 249
Weil, A. 33
Weiner, N. 287, 309, 310, 311, 312,
313, 314, 315
Weyl, H. 132, 424, 426, 476, 570,
571, 710, 880
White, L. A. 613, 615
Whitehead, A. N. 428, 443, 470, 496, 508,
357

582, 583, 584, 585, 586, 895
Whewell, W. 809
Wigner, E. P. 288
Wilder, R. L. 79, 80, 81, 83, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 231, 426
Wilhelmhis 445
Wittakar, E. T. 630
Wittgenstein 588
Wordsworth W. 459
Wylie, C. R. Jr. 468
Yang, C. N. 279, 896
Young, G. S. 804
Young, J. W. A. 502, 522
Youńg, C. W. 497
Zedeh, L. A. 158, 159, 160, 161, 162

主题索引

对数学的理解（*Understanding of mathematics*）
204，330，461，495，655，737，741，742
对数学的尊重（*Respect for mathematics*）
187，539，649
抽象数学和具体经验（*Abstract mathematics and concrete experience*）
240，243，894，895
抽象性和应用性（*Abstraction and applicability*）
195，198，213，217，347，364，382，458，586，599，657，700
纯数学和应用数学（*Pure and applied mathematics*）
11，26，75，99，177，179，211，213，215，232，265，284，297，298，317，339，341，347，391，419，452，477，499，512，513，540，545，561，562，568，574，599，602，642，695，696，699，700，702，737，794，883，887，899
数学辩证（*Mathematical Sophistication*）
224，228，710
数学才能（*Mathematical talent*）
823，825，826，827，849

数学成就的判别准则（*Criteria of mathematical achievement*）
7, 8, 13, 14, 18, 70, 77, 600, 678, 700
数学的动态特征（*Dynamic character of mathematics*）
81, 102, 125, 138, 212, 252, 255, 275, 335, 348, 394, 515, 558, 570, 572, 674, 679, 708, 712, 783, 811, 862, 864, 865
数学的精确性（*Precision in mathematics*）
483, 508, 579, 634, 700, 702, 710, 738, 765, 784
数学的局限（*Limitations of mathematics*）
413, 638, 807
数学的积累特性（*Cumulative character of mathematics*）
74, 613, 654
数学的力量（*Power of mathematics*）
19, 21, 22, 97, 98, 121, 182, 202, 237, 269, 270, 271, 361, 392, 406, 434, 442, 447, 450, 463, 465, 468, 482, 501, 502, 529, 531, 536, 537, 554, 557, 573, 581, 656, 658, 672, 673, 674, 683, 725, 727, 751, 820, 824, 850

数学的目的（*Objectivity of mathematics*）
315, 417, 457, 472, 578, 583, 644, 654, 660, 665, 666, 822
数学的统一（*Unity of mathematics*）
32, 50, 61, 105, 111, 136, 183, 220, 222, 257, 267, 329, 393, 401, 418, 444, 452, 474, 493, 505, 506, 568, 708, 776
数学的万能性（*Versatility of mathematics*）
96, 118, 119
数学的严格性（*Rigour in mathematics*）
71, 110, 123, 128, 164, 224, 227, 228, 287, 328, 332, 337, 415, 543, 564, 603, 604, 708
数学的研究（*Research in mathematics*）
15, 143, 262, 266, 282, 284, 299, 307, 309, 310, 333, 380, 386, 387, 394, 714, 793, 836, 837, 868, 885
数学的意义（*Significance in mathematics*）
691, 692, 693, 694, 705, 828, 829
数学的应用（*Applications of mathematics*）
20, 37, 119, 184, 258, 375, 397, 448, 584, 636, 724, 740, 787, 798
数学的永恒性（*Permanence in mathematics*）
362

250, 274, 275, 664, 665, 666, 667, 672,
673, 682, 722, 773, 780, 863
数学的中肯性（*Relevance of mathematics*）
22, 23, 160, 599, 641, 806
数学概念的成长（*Growth of mathematical ideas*）
3, 4, 6, 27, 135, 137, 408, 422, 427,
439, 482, 514, 546, 549, 551, 639, 654,
680, 809, 815
数学概念的起源（*Origin of mathematical ideas*）
5, 6, 234, 829, 866
数学鉴赏（*Appreciation of mathematics*）
248, 580, 772
数学和对称性（*Mathematics and symmetry*）
476, 509, 722, 768
数学和符号（*Mathematics and symbols*）
131, 378, 379, 383, 440, 443, 460, 471,
491, 506, 560, 618, 639, 645, 653, 658,
784, 792
数学和工程学（*Mathematics and engineering*）
153, 366, 367, 370, 371, 372, 373, 374,
376, 438, 494, 760, 866

数学和工业（*Mthematics and industry*）
190，207，365，725
数学和化学（*Mathematics and chemistry*）
632，725
数学和计算机（*Mathematics and computers*）
1，2，181，186，229，261，290，292，294，
327，363，373，396，607，841，843，848
数学和经济学（*Mathematics and economics*）
153，295，327，395，584，589，590，591，
725，753，754，799，839，866
数学和科学（*Mathematics and Science*）
4，23，28，29，30，33，40，41，84，113，
114，116，117，126，141，146，159，161，
164，168，170，175，178，180，188，205，
212，214，302，351，360，389，390，465
469，479，601，623，640，643，647，729，
828，846。
数学和逻辑学（*Mathematics and logic*）
43，44，45，60，100，109，130，306，385，
488，527，528，543，608，620，621，635，
721，722，769，857，859，875，876
数学和模式（*Mathematics and patterns*）
453，456，487，642，697

数学和美学（*Mathematicas and aesthatics*）
17，75，278，282，283，293，412，459，510，519，522，523，539，568，608，668，691，745，838，900，901
数学和人类思想（*Mathematics and human thought*）
68，239，455，544，614，644，662，664，667
数学和人类学（*Mathematics and humanitics*）
55，116
数学和人脑（*Mathematics and human mind*）
46，201，238，264，323，363，409，410，538，541，585，611，612，613，633，745，774，782，889
数学和商业（*Mathematics and business*）
253，301，304
数学和社会科学（*Mathematics and Social Sciences*）
155，295，322，327，464，592，593
数学和生活（*Mathematics and life*）
72，73，187
数学和生物学（*Mathemarics and biology*）
54，155，157，272，273，286，295，322，365

323, 327, 357, 358, 359, 363, 402, 403,
445, 446, 533, 587, 607, 725, 799, 830,
831, 832, 833, 834
数学和数值分析（*Mathematics and numerical analysis*）
2, 182, 729, 798
数学和算法（*Mathematics and algorithms*）
291, 451, 550
数学和文化（*Mathematics and culture*）
79, 80, 86, 87, 88, 91, 92, 93, 95, 139,
425, 495, 502, 541, 615, 706, 716
数学和物理学（*Mathematics and Physics*）
24, 166, 351, 352, 354, 355, 356, 366,
399, 478, 605, 606, 764, 866
数学和现实世界（*Mathematics and real world*）
1, 23, 83, 158, 238, 362, 435, 449, 460,
487, 488, 521, 544, 563, 588, 616, 622,
640, 643, 648, 677, 678, 691, 698, 716,
733, 775, 835, 839, 887
数学和相容性（*Mathematics and consistency*）
240, 499, 500
数学和想象（*Mathematics and imagination*）
62, 199, 707, 729, 821

数学和心理学（*Mathematics and Psychology*）
85，153，245，323，473，594，662，682，866
数学和艺术（*Mathematics and art*）
8，57，58，64，65，66，69，116，311，312，313，409，422，495，520，521，610，669，722，800，852
数学和医学（*Mathematics and medicine*）
42，323，534，839
数学和音乐（*Mathematics and music*）
461，462，575，640，659，670，671
数学和语言（*Mathematics and language*）
49，53，494，495，524，525，823，858，893
数学和哲学（*Mathematics and Philosiphy*）
178，244，519，660，664，755，814
数学和真理（*Mathematics and truth*）
82，473，475，484，499，600，609，616，617，618，619，624，892，903
数学和政治科学（*Mathematics and Political Science*）
153，842
数学和直觉（*Mathematics and intuition*）

120, 131, 221, 227, 228, 241, 319, 323,
332, 337, 354, 355, 564, 711, 729, 857
数学和自然（*Mathematics and nature*）
31, 178, 279, 280, 317, 411, 482, 519,
535, 651, 653, 741, 757, 859, 896
数学和专心（*Mtathematics and concentration*）
246, 247, 462, 594, 756
数学基础（*Foundations of mathematics*）
328, 662, 880
数学教学（*Teaching of mathematics*）
252, 253, 254, 542, 548, 730, 746, 747,
826, 905
数学家（*Mathematician*）
180, 263, 264, 276, 297, 304, 310, 311,
312, 313, 314, 326, 373, 380, 404, 405,
406, 407, 437, 456, 492, 511, 516, 517,
571, 637, 684, 685, 686, 694, 698, 713,
732, 761, 762, 817, 845
数学教育（*Mathematical education*）
35, 39, 76, 102, 107, 154, 161, 203, 206,
207, 210, 212, 216, 217, 219, 220, 223,
226, 251, 252, 253, 255, 256, 267, 276,
277, 284, 300, 303, 314, 384, 386, 388,

398, 405, 412, 481, 548, 555, 556, 562,
565, 568, 701, 723, 726, 749, 766, 781
数学模型（*Mathematical models*）
78, 155, 156, 169, 179, 213, 342, 362,
388, 563, 649, 704, 735, 736, 738, 797,
843, 853, 888
数学上的成熟（*Mathematical maturity*）
217, 218, 363
数学思维方式（*Mathematical way of thinking*）
571, 576, 585, 729, 734, 742, 763, 771,
786, 790, 854
数学演绎（*Mathematical deduction*）
51, 233, 332, 449, 485, 530, 751, 788,
872
数学证明（*Mathematical proof*）
67, 221, 259, 268, 281, 693, 720, 743,
767, 812, 857, 904.
数学之本质（*Nature of mathematics*）
10, 127, 197, 235, 236, 242, 271, 274,
297, 303, 305, 311, 316, 317, 325, 327,
331, 332, 377, 379, 381, 410, 413, 414,
420, 421, 424, 433, 435, 436, 451, 454,
457, 458, 469, 480, 497, 498, 515, 547,

553, 559, 569, 631, 632, 634, 661, 675, 690, 705, 715, 719, 845, 882, 884, 890
数学中的抽象（*Abstraction in mathematics*）
9, 31, 597, 105, 106, 195, 209, 258, 267, 318, 412, 419, 490, 507, 526, 583, 598, 616, 634, 648, 657, 722, 748, 785, 872
数学中的创造性（*Creativity in mathematics*）
12, 16, 89, 90, 104, 208, 230, 238, 242, 249, 284, 293, 294, 296, 319, 321, 334, 336, 338, 340, 350, 418, 437, 441, 467, 491, 496, 513, 582, 595, 596, 597, 650, 652, 663, 682, 707, 722, 728, 804, 855, 856, 861, 873, 874, 878
数学中的动机（*Motivation in mathematics*）
226, 228, 239, 258, 299, 329, 338, 343, 347, 384, 418, 432, 496, 518, 552, 566, 567, 570, 577, 582, 650, 669, 688, 689, 709, 731, 739, 747, 752, 775, 777, 778, 783, 795, 821, 860, 864, 867, 869, 871, 898
数学中的概念（*Concepts in mathematics*）
200, 240, 288, 412, 440, 470, 560, 625
数学中的公理方法（*Axiomatic method in math-*

ematics)
34, 36, 48, 231, 241, 289, 308, 316, 319, 346, 393, 400, 423, 426, 453, 498, 624, 625, 626, 627, 715, 750, 779, 803, 804, 805, 872, 874, 903
数学中的激励（*Excitement in mathematics*）
253, 254, 258, 268, 345, 388, 745, 891
数学中的结构（*Structures in mathematics*）
47, 48, 52, 59, 136, 241, 257, 260, 267, 268, 325, 393, 481, 504, 546, 703, 704, 717, 718, 720, 803, 870, 881, 886
数学中的近似（*Approximations in mathematics*）
186, 341, 738
数学中的推广（*Generalisations in mathematics*）
27, 31, 136, 258, 260, 412, 583, 634
数学中的优雅（*Elegance in mathematics*）
8, 267, 412, 509, 510, 676, 900
数字（*Numbers*）
101, 791
问题求解（*Problem solving*）
220, 240, 802, 879

应用数学家（*Applied mathematician*）
172, 173, 177, 182, 191, 192, 196, 214, 215, 216, 341, 342
应用数学的本质（*Nature of applied mathematics*）
3, 25, 103, 108, 109, 110, 112, 115, 140, 144, 145, 147, 148, 149, 150, 152, 169, 171, 174, 176, 177, 179, 184, 189, 214, 391, 645, 646, 796, 797, 801, 847
在数学中证明什么（*What to prove in mathematics*）
193, 222
组合数学（*Combinatorial mathematics*）
194, 291