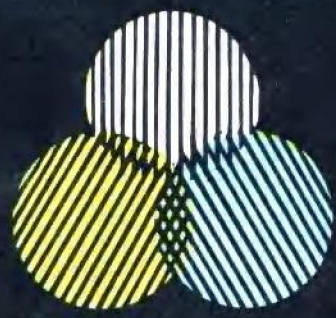
项武义



从算术到代数

科学出版社

O11/187/32

数学小丛书

从算术到代数

项武义

北京师范大学 藏书 742965 图书馆

科学出版社

1981

内 容 简 介

美国加利福尼亚大学数学系教授项武义等，怀着为祖国四化贡献一份力量的满腔热情，为我国青年编写了一套供课外阅读的《数学小丛书》，每册只讲一个主题（约100页左右），《从算术到代数》是其中的第一本。

本书以数系运算的基本法则为主线，通过一些简明的实例，分析比较了算术解法和代数解法，进而介绍了解代数方程式的原理与方法。每章均附有练习和思考题。该书取材新颖灵活，内容循序渐进、浅显易懂。

本书可供广大青年自学或课外阅读，亦可供中学教师和学生家长参考之用。

数学小丛书

从算术到代数

项武义

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年1月第一版　开本：787×1092　1/32

1981年1月第一次印刷　印张：4

印数：0001—114,950　字数：76,000

统一书号：13031·1451

本社书号：2001·13—1

定价：0.35元

《数学小丛书》编写前言

为了普及和提高我国的现代科学技术知识水平，为了培养我国青年思考和解决问题的能力，我们试着把基础数学中的题材编写成一套便于自学的小册子——《数学小丛书》，希望能成为在广度和深度上进一步充实我国的基础数学方面的参考读物.

在着手编写这套小丛书时，我们有下面几点认识与想法：

(一)基础数学涉及的面比较广，在这里若把它编写成一部体系严整偏重推理的"巨著"，这对于初学者自学是很困难的，也是不切实的. 因此，我们采取化整为零的方法，每一册只对某些中心课题做深入细致的讨论，使得它不仅是整套丛书的不可分割的一部分，而且其本身又自成独立完整的体系，这样做，对自学者会更加方便些，也能使基础数学丰富多彩的各个分支和广泛应用，得到应有的反映.

(二)理论与实际之间的关系，概括地说，从实际到理论是"由繁精简"，而从理论到实际则是"以简御繁". 所以，基础理论必须对实际问题进行由浅入深的分析和由感性到理性的飞跃才能得到. 反过来，只有深刻地理解了基础理论的高度概括性，才能够运用它来解决各种繁复多样的实际问题. 这套小丛书，虽然各册讨论的课题互不相同，但每册都按上述这种自然演变过程作一次由实践到理论再回到实践的小循环.

(三)分析、综合、推理，这三种基本思考方法应该相互配合运用.然而，在许多数学书里往往过于偏重推理而忽略了分析与综合的工作，则读者缺乏对实际问题进行分析和综合的训练，也就不善于把实际问题归纳成数学问题来加以解决了.因此，在编写这套小丛书时，我们将着重讲述如何认识问题和解决问题的思路．并通过一些实例来说明上述三种思考方法是怎样配合运用的，而不再过分追求形式的数理证明与逻辑体系.

最后我们建议由海内外的热心数学教学的工作者们，同心协力为中国青年编好这套数学小丛书，为祖国的四个现代化贡献我们的一份力量.

项　武　义

于美国加州大学　1979年.

目　录

《数学小丛书》编写前言 ……i

引子　代数学的源起 ……1

第一章　有理数系和四则运算法则 ……4

　第一节　自然数系 ……4

　第二节　有理数系 ……12

第二章　从算术到代数 ……25

　第一节　代数方程式和解代数方程原理 ……25

　第二节　低次方程式的解法 ……37

第三章　多项式的四则运算 ……53

　第一节　多项式的加、减、乘 ……53

　第二节　单元多项式的除法 ……63

　第三节　余式定理和辗转相除 ……69

第四章　初步应用与展望 ……87

　第一节　求和公式与插入法 ……88

　第二节　未定系数法与联立方程式 ……98

展望 ……118

引子　代数学的源起

在小学的算术课程里，同学们已经循序渐进地学习了整数、小数和分数的加、减、乘、除四则运算，并且也初步地运用四则运算去解答一些简单的数量问题——通常称为“四则应用题”。这本小册子就是要和同学们谈一谈如何从算术进步到代数学的领域.

首先，让我们先来谈一下代数学的起源和它的基本想法. 代数学的基本课题是着眼于运算来讨论各种数量问题的. 从发展的眼光来看，代数学是在算术中“数”与“运算”的基础上有系统地发展起来的. 要做到有系统地运用“数的运算”，首先要对整个“数的体系”有一个概括的认识. 在第一章中，我们将对“数系的运算法则”作一番全面的分析与总结. 说明数系的加法与乘法具有下列简单明了、普遍成立的运算法则. 设 a、b、c 表示任意三个数，则下述等式恒成立：

$$\begin{cases} \text{交换律：} & a+b=b+a,\ a\times b=b\times a; \\ \text{结合律：} & (a+b)+c=a+(b+c), \\ & (a\times b)\times c=a\times(b\times c); \\ \text{分配律：} & a\times(b+c)=a\times b+a\times c. \end{cases}$$

也许同学们会问：“这些显然的事实，会有什么用呢？”其实，整个代数学的基本出发点就是要有效地运用上面这种普遍成立

的“运算法则”来有系统地解决各种数量问题. 在这方面第一个历史性的突破就是下述“解代数方程原理”的发现.

在很多实际的数量问题中，我们可以先用一些简写符号(通常用 x、y、z 等字母)来表达问题中待求的“未知量”(这种符号叫做“未知数”). 这样，就可以把问题中的“数量关系”用算式来表达(通常这种含有未知数符号的等式，叫做“代数方程式”). 通过代数方程式去确定其中所含的未知数所应有的值叫做“解代数方程式”.

解代数方程式的原理：解代数方程式的原理，就是对方程式中所含的“未知数”运用“数系运算法则”. 因为法则是对任何数都成立的性质，所以对于那些暂时还不知道它们所应有的值的“未知数”，这些法则当然也应该成立. 有意思的是：只要适当运用这些简易的“数系运算法则”，就可以由方程式解得那些未知数所应有的值.

我们将在第二章用简明的实例，来分析说明上述解代数方程的原理的具体用法. 引用符号来代表待求的数，正是为了有效地运用数系运算法则，这也就是“代数”这个名词的来由. 在代数学的讨论中，我们经常要对含有文字符号的算式(往后叫做多项式)作运算. 基于上述原理，所要做的运算的基本法则也就是对于文字符号运用“数系运算法则”. 将这种运算系统化、形式化，也就是我们要在第三章讨论的多项式运算. 多项式是由某几个给定的文字符号并用四则运算加以组合所得的表达式. 多项式运算只有一个唯一的原则：那就是这些文字符号在运算上具有交换律、结合律、分配律这几个对任

何数都成立的法则. 只要把握这个唯一的要点，多项式的运算是容易的. 它的用场也是广泛而且多样的；它不但是解代数方程的基本功，而且也是整个代数学的基本功. 在第四章中我们将对于多项式的应用，选一些典型的例子作初步的探讨.

第一章　有理数系和四则运算法则

在这一章中，我们将概括地对整数和分数的四则运算加以分析与总结．然后再引进“负数”概念，并建立一个新的数系——有理数系．

第一节　自然数系

一、源起与结构

“数系”是我们用来表达、讨论数量问题的，对于不同类型的量，则有不同种类的数系．常用的量大体上来说可以分成两类．例如一群人，一群牛，一排树，一堆蛋……等等，这种量的特征是它们由不可再分割的个体组成的．即一个人，一头牛(不可能有半个人，半头牛)等．计算这一类型的量，我们处理的办法就是去数一下它的“个数”．用来数个数的工具也就是大家所常用的自然数系：

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ 10,\ 11,\ \cdots\}.$$

另外一类常见的量如长度，面积，重量……等等，这些量

是可以无限细分的，所以并不具有自然单元．处理这类量的方法是度量，用来表达度量型的量的数系叫做“实数系”．度量与实数系，将在第三册：“实变多项函数”中再详加讨论，在这里让我们先对“自然数系”作一番全面的分析与探讨．

“自然数系”是由 {1, 2, 3, 4, 5, …} 这样一串顺序排列的符号所组成的体系：

其中头一个数“1”也就是“单元”的抽象化，表示“一个”；其次“2”表示比 1 多加“一个”，即 2－1＋1；“3”表示比“2”多加一个；“4”表示比“3”多加一个，“5”表示比“4”多加一个，……等等．用算式来表达，即 3＝2＋1，4＝3＋1，5＝4＋1，…等等．不难看出，当我们在计算某一群事物究竟有“多少个”时，所做的程序是一面逐个地清点，一面在 1, 2, 3, 4, 5…逐个地往下数，其实你所做的就是逐次“加一”．

从上面的初步分析，我们知道“＋1”是自然数系中最原始、最简单的运算，其实它也就是一切其他运算的根本所在！这也就是下面我们所要接着讨论的课题．

首先，让我们来看一看一般的“加法”和“＋1”之间的关系：

“＋2”也就是把“＋1”运算连续做两次的结果，用 a 表示一个任意自然数，则上述语句可以用下列算式来表达[1]：

$$a+2=(a+1)+1.$$

“＋3”也就是把“＋1”运算连续做 3 次的结果，或者是

1) 为了使问题的讨论变得简单明了，易写好算．下面我们将用小写英文字母，如 a, b, c, d, l, m, n 等符号来表示一个任意的自然数．

“+2”之后再做“+1”，用算式来表达，即：

$$a+3=[(a+1)+1]+1=(a+2)+1,$$

以此类推，“$+n$”就是连做 n 次“+1”的结果，“$+(n+1)$”就是“$+n$”之后再做“+1”的结果．用算式来表达即：

$$a+n=a+1+1+\cdots+1 \quad (n\text{ 个“+1”}),$$

$$a+(n+1)=(a+n)+1.$$

上面的分析，简要地说明了一般的“加法运算”(即 $a+n$)和那个原始的“+1”运算之间的关系．我们可以说：“$+n$”其实就是连续做 n 次“+1”的缩写．下面让我们接着来分析一下“乘法运算”：

$$1\times a=a,$$

$$2\times a=a+a,$$

$$3\times a=(a+a)+a=2\times a+a,$$

$$4\times a=(a+a+a)+a=3\times a+a,\ \cdots\text{ 等等.}$$

以此类推，$n\times a$ 就是 n 个 a 自身连加的结果，所以 $(n+1)\times a$ 也就是 n 个 a 自身连加之后再多加一个 a，用算式来表达，即：

$$n\times a=a+a+\cdots+a \quad [n\text{ 个 }a\text{ 自身连加}],$$

$$(n+1)\times a=n\times a+a.$$

上面的分析说明了乘法运算和加法运算之间的关系，其实 $n\times a$ 就是 n 个 a 自身连加的缩写！也许同学们接下去会问“n 个 a 自身连乘的缩写是什么呢？”这也就是我们下面所要介绍的指数符号：

$$a^1=a,$$

$$a^2=a\times a,$$

$$a^3=(a\times a)\times a=a^2\times a,$$

$$a^4=(a\times a\times a)\times a=a^3\times a,\ \cdots\text{等等.}$$

以此类推，$a^{(n+1)}=a^n\times a$.

指数符号：我们将用 a^n 来表示"n 个 a 自身连乘的缩写"上述符号中的 a 叫做"底数"，n 叫做"指数"，a^n 读成"a 的 n 次方".

[练习]：

(1) 计算：2^8, 3^5, 5^3, $(2^2)^4$.

(2) 试说明：$3^8\times 3^{12}=3^{20}$, $(2^4)^5=2^{20}$,

$3^{20}\times 2^{20}=6^{20}$, $2^8\times 5^8=10^8$.

[不必算出上述等式两边的值，直接由指数的意义加以说明].

(3) 从上面这些事实，是否可以归纳出一些普遍性的事实[1].

二、运 算 法 则

上面我们对自然数系的源起和结构简要地做了一次分析. 现在让我们再来对整个体系在四则运算上所具有的性质作一次全面的总结. 从而得出一组对任何自然数都普遍成立的运算法则，它们也就是整个代数学的基础所在.

---

1) $3^8\times 3^{12}=3^{20}$ 这个等式的真正要点是 $8+12=20$，$(2^4)^5=2^{20}$ 这个等式的真正要点是 $4\times 5=20$，$2^8\times 5^8=10^8$ 这个等式的要点是 $2\times 5=10$ 而且指数都是 8.

先让我们举些简单的例子来看看：

$2+3=3+2$, $2\times3=3\times2$, $3+4=4+3$, $3\times4=4\times3$,

$2+5=5+2$, $2\times5=5\times2$, …等等.

上面这些简单的等式是很容易由等式两边的计算加以验证的. 经验告诉我们：

$$a+b=b+a, \quad a\times b=b\times a,$$

是对任何两个自然数 a, b 都普遍成立的，叫做加法和乘法的交换律. 在这儿也许有人会问："为什么交换律总是对的呢？"而有些同学则可能会抱着下述几种态度：到目前为止的经验中还没有遇到不成立的情形；看来大概是对的吧；或者是老师说的对的，我也就相信了；或者是这些法则对了又有什么用场呢？第一种态度是追根究底的"怀疑派"，第四种态度是讲求实效的"实用派". 科学的精神就是既要追根究底又要讲求实效！就拿上面的交换律来说吧，我们的经验其实是很有限的，譬如：

$$123456789\times987654321\overset{?}{=}987654321\times123456789$$

我想很少有人真的去验算两边相等还是不等. 而且说不定在验算过程中算错了一点还弄出一个不等的"假象"来呢. 下面就让我们把自然数系的运算法则逐一列举，并加以说明.

1. 加法结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

[说明]：从加法的本意来看，上式的意义是对 a 先做 b 次"+1"然后再做 c 次"+1"，其结果也就等于对 a 总共做了

$(b+c)$ 次“+1”. 所以上述加法结合律的正确性是相当清楚的.

2. 加法交换律:

$$a+b=b+a.$$

[说明]: 我们可以这样来理解加法交换律的正确性: 设有甲、乙两堆东西, 甲堆有 a 个, 乙堆有 b 个, 假如我们要数一下两堆合起来的总数时, 如先数甲堆得其个数为 a, 然后再接下去数乙堆, 也就是先由 a 再做 b 次“+1”, 所得总数是 $(a+b)$. 反之, 如先数乙堆即得其个数为 b, 然后再接下去数甲堆, 这就是先由 b 再做 a 次“+1”, 总数是 $(b+a)$. 这样就看出 $a+b=b+a$ 是同一个数, 即甲、乙两堆合起来总共的个数.

3. 分配律:

(i) $(m+n)\times a=m\times a+n\times a$.

[说明]: 从乘法和加法之间的关系可以看出:

$$m\times a+n\times a=\overbrace{(a+\cdots+a)}^{m\text{ 个 }a}+\overbrace{(a+\cdots+a)}^{n\text{ 个 }a}$$

运用结合律就可以改写上式为

$$\overbrace{a+\cdots+a+a+\cdots+a}^{(m+n)\text{ 个 }a}=(m+n)\times a.$$

例如当 $a=12$ 时, 这就是我们常用的一打为 12 个, 则上式就是说“m 打”加“n 打”等于 $(m+n)$ 打.

(ii) $n\times(a+b)=n\times a+n\times b$.

[说明]: 把乘法表示为加法:

$$n\times(a+b)=\overbrace{(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b)}^{n\text{ 个 }(a+b)\text{ 相加}},$$

运用加法的结合律及交换律就可以把上式改写成

$$\overbrace{(a+a+\cdots+a)}^{n\text{ 个 }a}+\overbrace{(b+b+\cdots+b)}^{n\text{ 个 }b}=n\times a+n\times b.$$

4. 乘法结合律：

$$(n\times a)\times b=n\times(a\times b).$$

[说明]：$n\times a=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a}$，

所以 $$(n\times a)\times b=(\overbrace{a+a+\cdots+a}^{n\text{ 个 }a})\times b,$$

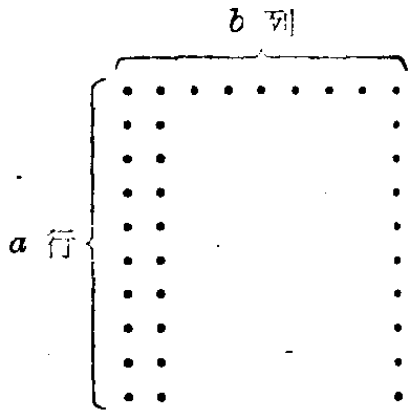
运用分配律上式可改写为

$$\overbrace{a\times b+a\times b+\cdots+a\times b}^{n\text{ 个 }a\times b}=n\times(a\times b).$$

5. 乘法交换律：

$$a\times b=b\times a.$$

[说明]：设想有一队士兵排成一个 a 行、b 列的方阵，所以每行 b 人，共有 a 行，这样来计算总人数就是：



$$\overbrace{b+b+\cdots+b}^{a\text{ 个 }b}=a\times b,$$

当然我们也可以用每列 a 人共有 b 列来计算总人数，即：

$$\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{ 个 }a}=b\times a,$$

这也就说明了 $a\times b=b\times a$.

6．指数定则：

（i） $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$.

（ii） $(a^m)^n = a^{(m \times n)}$,

(iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$.

[说明]：(i) $a^m \times a^n = \overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{m\text{个}a\text{相乘}} \times \overbrace{(a \times \cdots \times a)}^{n\text{个}a\text{相乘}}$,

运用乘法结合律

$$\overbrace{a \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a}^{m+n\text{个}a\text{相乘}} = a^{(m+n)}.$$

(ii)

$$[a^m]^n = \overbrace{(\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\text{个}a\text{相乘}}) \times (\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\text{个}a\text{相乘}}) \times \cdots \times (\underbrace{a \times \cdots \times a}_{m\text{个}a\text{相乘}})}^{n\text{个括号相乘}},$$

运用乘法结合律，上式可改写为

$$\overbrace{a \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a \times a \cdots \times a}^{m \times n\text{个}a\text{相乘}} = a^{(m \times n)}.$$

(iii) $(a+b)^m = \overbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}^{m\text{个}(a \times b)\text{相乘}}$,

运用乘法的结合律和交换律，就可以把上式改写为

$$\overbrace{(a \times a \times a \cdots \times a)}^{m\text{个}a\text{相乘}} \times \overbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}^{m\text{个}b\text{相乘}} = a^m \times b^m.$$

总结上面的讨论，我们掌握了自然数系的加法、乘法和指数运算的基本法则．它们是简单易用的，对于任何自然数都普遍成立．同学们会问："这些运算法则有什么用呢？怎样用呢？"这就要逐章逐节、按步就班地详加讨论了．因为代数学的基本想法就是"有系统的运用这些法则"．这本小册子所要介

绍的初等代数学可以说就是它们的初步应用.

[练习]:

(1) 试求 $1+2+3+\cdots+100=?$

(2) 试求 $1+3+5+\cdots+1001=?$

(3) 试将上述经验推广，来求下述"等差级数"[1]的和.

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(n-1)d)=?$$

[思考]

在上述运算法则中，对分配律简要的总结，表明了"乘法"和"加法"这两种基本运算之间的关系，所以它在运算法则中是很关键性的. 在往后运用"运算律"来解代数方程时，分配律也扮演着主要的角色.

第二节 有理数系

一、分数的源起与运算

当某一种量可以任意细分时，我们就可以把一个取定的单位(例如用"米"作为长度单位)加以等分，从而得出各种分单位(例如米的十分之一叫做"分米"、百分之一叫做"厘米"、千分之一叫做"毫米"). 很自然地我们可以用分数去表示分量. 在小学算术课程中，同学们业已熟习了分数的四则运算，

1) 上述级数逐项增加 d，亦即后项和前项的"差"恒等于 d，(d 叫做公差)，所以叫做等差级数. a 叫做首项，n 是项数.

在这里我们只是简要的再以"代数"的观点来加以复习：

(i) $\frac{a}{n}$ 的 n 倍等于 a，这也就是"$\frac{a}{n}$"的特征性质．即：

$$n\times\left(\frac{a}{n}\right)=a,$$

或者说 $\frac{a}{n}$ 是满足方程式 $n\times ?=a$ 的唯一解．

(ii) 在小学算术中学习了如何把分数的加法与乘法的计算归于它们分子、分母之间的整数运算来计算，用文字的算式表达这种算法，即：

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{a\times n}{m\times n}+\frac{m\times b}{m\times n}=\frac{n\times a+m\times b}{m\times n},$$

$$\frac{a}{m}\times\frac{b}{n}=\frac{a\times b}{m\times n}.$$

(iii) 我们将把整数看成分数的特例，即 $a=\frac{a}{1}=\frac{n\times a}{n}$．除法是乘法的逆运算：$a\div n$ 就是要去求 $n\times ?=a$ 的那个数，所以 $a\div n=\frac{a}{n}$．由乘法公式，$\frac{a}{n}\times\frac{n}{a}=\frac{a\times n}{n\times a}=1$．所以把分子分母倒过来的两个分数的乘积为 1．基于上述事实，我们以后把两个乘起来等于 1 的数叫做互为"倒数"．

[练习]：

(1) 试用上述加法、乘法公式配合"自然数系的运算法则"来说明分数体系的加法、乘法也具有交换律、结合律、分配律这几个运算法则．

(2) 试说明：

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m},\quad \left(\frac{a}{b}\right)^m\times\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{(m+n)},$$

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{(m\times n)}.$$

(3) 试说明小数和分数之间的关系，并用分数的观点去说明小数加、乘的计算法则.

二、相反量和相反数，负数的引入

(i) 我们通常用 0 表示"没有"，读做零. 所以 $a+0=0+a=a$ 也就是 0 的特征性质.

(ii) 在日常生活中，往往有一对对互相相反的量，例如收入与支出，盈余与亏损，上升与下降等等. 为了讨论这种相反量，在代数中我们引进"负数"的概念：

$(-a)$ 是 a 的相反数，读做"负 a". 若两个相反量相加后相消，则可写为：$(-a)+a=a+(-a)=0$，

$(-a)$ 和 a 互为相反数. 例如 1 表示某种量的单位，则 (-1) 就表示它的相反量的单位.

显然，我们可以看出 (-1) 的 a 倍是 1 的 a 倍的相反数.

即：　　$(-1)\cdot a=-a$，　$(-1)\cdot(-a)=a$.

[例子]：

$(-1)\times 7=-7$，　$(-1)\times(-7)=7$，　$(-7)+7=0$;

$(-1)\times\frac{3}{5}=-\frac{3}{5}$，　$(-1)\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$，　$\frac{3}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=0$;

$(-1)\times(0.053)=-0.053$，　$(-1)\times(-0.053)=0.053$;

$0.053+(-0.053)=0$.

$$(-a)+(-b)=(-1)\times a+(-1)\times b$$
$$=(-1)\times(a+b)=-(a+b).$$

(iii) "减法"是加法的逆运算，即 $a-b$ 就是唯一能满足 $?+b=a$ 的那个数. 例如 $5-3=2$ 和 $2+3=5$ 是同一回事的两种说法，

$$\frac{5}{3}-\frac{7}{5}=\frac{25}{15}-\frac{21}{15}=\frac{4}{15} \quad 和 \quad \frac{4}{15}+\frac{7}{5}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$$

是一回事. 但是在自然数或分数的领域中，会遇到"不够减"的情况例如 $3-5$, $\frac{7}{5}-\frac{5}{3}$ 等. 引进"负数"后的好处是可以消除这种不够减的局面，从

$$[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+0=a$$

可以看出 $[a+(-b)]$ 也满足"$?+b=a$ 这个 $(a-b)$ 的特征性质"所以：

$$a+(-b)=a-b.$$

[例子]：

$$3-5=3+(-5)=3+(-1)\times(3+2)$$
$$=3+(-1)\times3+(-1)\times2$$
$$=[3+(-3)]+(-2)=0+(-2)=-2.$$

$$\frac{7}{5}-\frac{5}{3}=\frac{7}{5}+\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{7}{5}+(-1)\times\left(\frac{7}{5}+\frac{4}{15}\right)$$
$$=\frac{7}{5}+(-1)\times\frac{7}{5}+(-1)\times\frac{4}{15}$$
$$=\left[\frac{7}{5}+\left(-\frac{7}{5}\right)\right]+\left(-\frac{4}{15}\right)$$
$$=0+\left(-\frac{4}{15}\right)=-\frac{4}{15}.$$

总结上面的讨论，正、负分数之间的加、减运算如下：

$$\begin{cases} a+(-b)=a-b=-(b-a), \\ \text{当 } a>b \text{ 时，} a-b>0, \\ \text{当 } a<b \text{ 时，} b-a>0, \\ \text{当 } a=b \text{ 时，} a-b=0. \end{cases}$$

(iv) 符号定则：

$$(-a)\times b=a\times(-b)=-(a\times b),$$
$$(-a)\times(-b)=a\times b.$$

[说明]：因为

$$(-1)\times(-1)=1,\quad (-1)\times 1=1\times(-1)=-1,$$

所以

$$\begin{aligned}(-a)\times(-b)&=[(-1)\times a]\times[(-1)\times b]\\&=[(-1)\times(-1)]\times(a\times b)=a\times b,\\(-a)\times b&=[(-1)\times a]\times b=(-1)\times(a\times b)\\&=-(a\times b),\\a\times(-b)&=a\times[(-1)\times b]=(-1)\times(a\times b)\\&=-(a\times b).\end{aligned}$$

[练习]：

(1) 试说明

$a\times(b-c)=a\times b-a\times c$ [即 $a\times(b-c)+a\times c=a\times b$].

(2) 试说明

$$\frac{1}{(-a)}=\frac{-1}{a}=-\frac{1}{a},\quad \frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b},\quad \frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

(3) $\frac{7}{13}+\frac{-3}{2}+\frac{5}{-2}=?$

$$\left(10+\frac{-13}{3}+\frac{5}{-2}\right)\times\left(\frac{-3}{5}\right)-100=?$$

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\times\left(\frac{-1}{7}+\frac{3}{-2}\right)+\left(-\frac{3}{2}+\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{-5}{2}-\frac{-6}{5}\right)=?$$

(4) 何时摄氏温度计和华氏温度计的度数相同?

(5) 天山主峰的高度是海拔6995米,吐鲁番盆地的最低点是海平面下154米,两者的标高差是多少米?

三、有理数系的运算法则

有理数系是由所有正、负分数(整数是分数的特例)和零所组成的体系. 它的四则运算法则如下:

1. 交换律: $a+b=b+a$, $a\times b=b\times a$;

2. 结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$,

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

3. 分配律: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$;

4. 零的特性: $a+0=0+a=a$, $a\times 0=0\times a=0$;

5. 1的特性: $1\times a=a\times 1=a$;

6. 相反数与减法: $a+(-a)=0$, $a-b=a+(-b)$ 是 $?+b=b+?=a$ 的唯一解;

7. 倒数与除法: 当 $a\neq 0$ 时, a 的倒数为 $\left(\frac{1}{a}\right)$, 它满足下

列特征性质：$a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=1$，$b\left(\frac{1}{a}\right)$是$a\times ?=b$的唯一解；

8．大小次序：对于任意给定的两个比数a、b，下列三种关系必有一种也只有一种成立，即

$$a>b \quad 或 \quad a=b \quad 或 \quad a<b,$$

相当于 $a-b>0$ 或 $a-b=0$ 或 $a-b<0$；

9．等式的基本性质：假如用大写字母代表整个算式，由等式的意义则有：

$$\begin{cases} 若\ A=B,\ 则\ B=A, \\ 若\ A=B,\ B=C,\ 则\ A=C, \\ 若\ A=B,\ 则\ A+C=B+C,\ A\cdot C=B\cdot C; \end{cases}$$

10．不等式的基本性质：

$$\begin{cases} 若\ A>B,\ B>C,\ 则\ A>C, \\ 若\ A>B,\ 则\ A+C>B+C, \\ 若\ A>B,\ C>0,\ 则\ A\cdot C>B\cdot C, \\ 若\ A>B,\ C<0,\ 则\ A\cdot C<B\cdot C. \end{cases}$$

[思考]：

1．进位记数法：在第一节中我们说明了自然数系和“数个数”之间的关系．想必同学们还记得当年刚开始学数数时，自己的十个手指就是极为“顺手”的计数工具．这也就是我们常用的十进位记数法的“厂史渊源”．在小学的算术课程里同学们通过大量的习题熟习了“十进记数法”的加、减、乘、除．现在让我们再来回顾一下“十进记数法”的原理．十进记数法的基本想法是采用10^1，10^2，10^3，10^4…这一系列“十”的幂次

的数作为"计数"的"辅助单位". 这样, 一年的天数就可以表成 $3\times10^2+6\times10^1+5$, 简写成 365. 一天的秒数就可以表成 $8\times10^4+6\times10^3+4\times10^2+0.10^1+0$, 简写成 86,400, 以此类推, 我们只要用 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这十个符号就可以简单明了地表达任何正整数. 其实这种记数法不但简洁而且易算! 譬如我们要算一下一年有几秒? 那么就得要算一下

$$86400\times365=(8\times10^4+6\times10^3+4\times10^2)\times(3\times10^2+6\times10+5),$$

我们可以用分配律和指数定则来计算上述乘积, 得:

$$\begin{aligned}&(8\times3)\times10^6+(6\times3)\times10^5+(4\times3)\times10^4\\&+(8\times6)\times10^5+(6\times6)\times10^4\\&+(4\times6)\times10^3+(8\times5)\times10^4\\&+(6\times5)\times10^3+(4\times5)\times10^2\\=&31,536,000.\end{aligned}$$

这样就可以把任何两个整数(不管有多大)的乘法归于相应位数上"个位数"的乘法来计算. 这也就是为什么同学们在学习乘法时要熟背九九表的缘故.

概括地来说, 这种记数法不但符号简洁, 而且很容易运用"运算律"把多位数的四则运算归于个位数的四则运算. 同学们现在可以再来复习一下整数的四则运算, 就不难看出当年所学的计算方法的原理就是前面所讨论的"运算法则"!

[练习]:

(1) 试用运算律来说明小学中"加法"的计算法则.

(2) 试用运算律来说明小学中"乘法"的计算法则.

"十进位记数法"之所以简明易算是因为这样一套符号体系容易把"多位数"的运算归于"个位数"的运算. 而且是建立在上述"运算法则"上的. 当我们掌握了基本原理后, 自然就会触类旁通. 其实, 我们也同样可以采用二进位记数法, 三进位记数法, ……等等. 譬如人类的手指假如只有八个的话, 我们现在多半采用八进位记数法. 譬如在电子计算机的构造上, 电路只有"通"与"不通"这两种可能, 所以采用二进位也最为简便. 在二进位记数法中, 学习乘法时就不必背九九表了, 你只要"记得" $1\times1=1$ 就够了! 也许同学们会说: 这倒好记, 那么我们为什么不改用二进位呢? 二进位也有不方便的地方, 即一个不太大的数, 用二进位写起来, 将是一长串的 0 和 1. 譬如, 一年的天数用二进位记数法写出来是:

$$2^8+0.2^7+2^6+2^5+0.2^4+2^3+2^2+0.2+1$$

即

$$101101101_{(二)}{}^{1)}.$$

由上面这样一串 0, 1 所组成的符号的顺序, 一点儿也不能弄错. 可见, 在实际运用中, 二进位记数法并不见得方便. 但在电子计算机中, 一来用二进位最方便, 二来机器的记忆是死板而不容易错的. 所以, 在电子计算机作"内部运算"时, 仍然采用二进位记数法比较方便. 一年的天数我们说是 $365_{(十)}$ 而电子计算机则说是 $101101101_{(二)}$. 这两套"语言"的构造原理大体相同, 用起来要做一次翻译, 而"翻译"工作是容易的, 下面就请同学实践一下:

1) 我们用(二)表示是二进位记数法.

[练习]:

(1) $3600_{(十)} = _?_{(二)}$, $24_{(十)} = _?_{(二)}$.

(2) 试用二进位记数法表达一天的秒数.

(3) $110101001_{(二)} + 111000101_{(二)} = _?_{(二)}$

(4) $110101_{(二)} \times 1001001_{(二)} = _?_{(二)}$

(5) $\begin{cases} 110101001_{(二)} = _?_{(十)} \\ 111000101_{(二)} = _?_{(十)} \\ 110101_{(二)} = _?_{(十)}, \quad 1001001_{(二)} = _?_{(十)} \end{cases}$

(6) 用十进位的乘法来验算(4)的二进位乘法的答案.

在计算时间时，我们常采用古代巴比仑的一小时为六十分、一分为六十秒的"六十进位"记数法. 也许巴比仑的小学生觉得背 59×59 表太辛苦了，所以这一套记数法并没有广为采用. 古罗马的记数法又是另一种形式，它以 V 表示五，X 表示十，D 表示五十，C 表示百，M 表示千，然后用一串这样的缩写符号去表达一些不太大的数. 例如 1 到 20 的数写成

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII,

XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX, XX, …

这是一套五、十并用，加减混杂的笨记数法. 难怪在古罗马时代，连做一个简单的乘法都成为只有专家才会的学问了.

2. 统计: 我国有两句常用的俗语: 一是用"多如牛毛"来形容一件事物的"个数"多得没法数; 另一句是用"九牛一毛"来形容相比之下一个极小量的差别微不足道! 这两句俗语蕴含着一些很有意思的问题和想法. 例如真的要一根根地去数一下某一只牛身上有几根毛是很困难，甚至是不可能的，有什

么比较简便的法子呢？同样，“九牛一毛”这句话也给了我们一个有意思的启示．其实“一牛九毛”这种小差别也还是微不足道的！所以在讨论种种实用问题时，假如所涉及的个数“多如牛毛”时，我们完全没有必要去计算一个也不差的个数，只要求得一个足够精确的估计值就行了．譬如，我们就可以这样去求某牛牛毛的估计值：（一）先用放大镜给牛皮各区域单位面积（即每平方厘米）上所长的牛毛密度作一研究调查，这样就可以大体上把“牛皮”按牛毛密度分成几个区域；（二）对于每个区域用抽样法选几个小的面积来仔细数它每平方厘米的面积上有几根毛．然后，以其平均数作为该区域的密度；（三）最后，分区以密度乘以面积来求和，就可以算得“牛毛”的一个估计值．

上面这个例子也就初步地说明了“统计”的一种方法，其实它在日常实用问题中是经常遇到的．

[练习]：

(9) 采用抽样调查，平均、分区求和的办法，估计某一公社即将收割的粮食产量．

(10) 拟一个调查方案，估计一下某一牧区的草料年产量，从而计算该牧区的有效利用率．

(11) 估计某一林区的总材积．

3．集合所含元素的个数：

在数学的讨论中，有一个极为基本、常用的术语叫做“集合”．它是由一堆事物集在一起的“群体”．它所含的个别“成

员”叫做它的“元素”. 例如你班上的同学就是一个集合，每一位同学就是这个集合中的元素. 从集合的观点，它的唯一要素就是该集合所含有的元素. 例如一个手表的所有零件组成一个集合. 至于这一大堆零件是散乱地堆在一起的，还是装配成一个能准确计时的手表，从集合的观点来看是没有区别的，两者是同一个集合. 因为集合只是由它所含的元素所确定. 一个集合所含有的元素的个数，简称为它的“个数”. 在这里我们用符号 $\#(A)$ 表示集合 A 的个数.

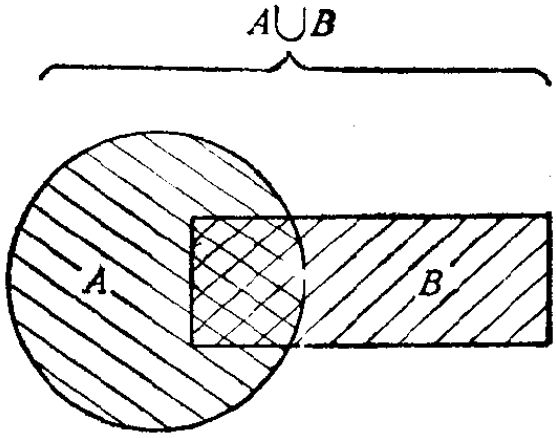




图 1

设 A, B 是两个集合，那些同时属于 A, B 的元素所组成的集合叫做 A, B 的交集，用符号 $A\cap B$ 表示. 由 A、B 的元素合起来所组成的集合叫做 A、B 的和集，用 $A\cup B$ 表示(见图 1).

[练习]:

设 A、B、C 都是由有限元素所组成的集合，问下列各式是否成立:

(12) $\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$.

(13) $\#(A\cup B\cup C)=\#(A)+\#(B)+\#(C)$
$-\#(A\cap B)-\#(B\cap C)$
$-\#(A\cap C)+\#(A\cap B\cap C)$.

(14) 试着把上述公式推广到四个集合 A、B、C、D 的情形，或更广的五个、六个、……，n 个的情形.

4．文字符号的运算：

在往后代数问题的讨论中，我们经常用文字符号来代表一个“任意的数”或者一个待定的“未知数”. 对于含有这种文字符号的算式的运算就是运用上面讲的“数系运算法则”，因为它们是对于任何数都普遍成立的！这也就是代数学的源起，我们将在往后的章节中详加讨论. 下面同学先自行练习一下.

[练习]：

试用运算律说明下列恒等式：

(15) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(16) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

(17) $(a+b)^3=a^3+3a^2\cdot b+3a\cdot b^2+b^3$.

试用运算律说明下列公式：

(18) $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(19) $\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2-\left[\dfrac{1}{2}(n-1)n\right]^2=n^3$.

(20) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2$.

第二章　从算术到代数

在第一章中，我们对于整数、分数在四则运算上的性质，做了一番全局性的分析．总结了一系列如交换律、结合律、分配律等对于任何数都普遍成立的“运算法则”．然后再引进“负数”，建立了一个在四则运算上简便易用的数系——有理数系．以上讲的是对小学算术的温习．

这一章将要讨论的课题是：“如何从算术进展到代数？”代数学的基础仍然是上一章所讨论的数系运算法则．即有效地运用这些运算法则来有系统地解决种种关于代数量的问题．在这方面第一个历史性的突破，就是“解代数方程式原理”的发现！我们将在第一节中对此发现详加分析讨论．

第一节　代数方程式和解代数方程原理

一、四则问题的算术解法与代数解法

常见的种种数量问题中，同学们在小学算术课程所练习求解的四则应用问题，可以说是最简单的类型了．让我们用几个简单的四则题作为实例，来对“算术解法”与“代数解法”做一番比较分析的工作．

[例 1]： 设有 5 元和 10 元的钞票共 12 张，共计 85 元，问其中 5 元、10 元的各几张？

[算术解法]：

假如全部都是 5 元的钞票，则共计：$5\times12=60$(元)，所以和 85(元) 相差：

$$85-60=25(\text{元}).$$

现在让我们逐次用一张 10 元钞票去换下一张 5 元钞票，使得总张数 12 维持不变．每换一次总值将增加：

$$10-5=5.$$

那么，“换几次”才能补足总差额 25，这只要做一次除法就行了，即：$25\div5=5$．答案是：

$$10\text{ 元钞的张数}=(85-60)\div(10-5)=25\div5=5 \qquad (1)$$

$$5\text{ 元钞的张数}=12-5=7.$$

[代数解法]：

设 10 元钞票的张数是 x，则 5 元钞票的张数是 $(12-x)$．其中 x 是一个待求的数，叫做“未知数”，在这儿它只是“10 元钞票的张数”的简写，利用上述未知数符号，“总值是 85 元”这个事实也就可以用下述等式来表达：

$$10\times x+5\times(12-x)=85, \qquad (2)$$

象上面这种含有“未知数”的等式叫做“代数方程式”．上面只是代数解法的预备工作．代数解法的关键就在于可以直接由方程式(2)，求得未知数 x 所应有的值！那么怎样解代数方程式呢？下面就来谈谈：

基本想法：由于结合律、交换律、分配律等数系运算法则

对任何数字计算都成立，所以对于那些我们暂且不知的“未知数”，这些“法则”当然也成立.

让我们用上述基本想法来探讨方程式(2)：

$$10\times x+5\times(12-x)=85.$$

由分配律：　　$10\times x+5\times 12-5\times x=85,$

由交换律、分配律：

$$(10-5)\times x+60=85,$$

等式两边同减 60：

$$(10-5)\times x=85-60,$$

等式两边同除(10−5)得：

$$x=(85-60)\div(10-5)=5, \qquad (1)$$

[比较分析]：

在代数解法中，我们引进一个未知数 x 表示问题中一个待求的量(如 10 元钞票的张数). 然后，把未知数代入问题中，列出算式，此算式就叫做“代数方程式”. 对于代数方程式逐步运用数系运算法则，就可以求得方程式中待求的未知数 x 所应有的值，此过程叫做解代数方程式. 例如在上述实例中由方程式(2)解得(1)式：

$$x=(85-60)\div(10-5)=5.$$

经比较不难看出，算术解法其实就是上面由代数方程式(2)所解得的求值公式(1). 然后对于公式中的每一步计算，$60=5\times 12$, $85-60$, $10-5$, $(85-60)\div(10-5)$ 找出适当的理由加以解释. 也许同学们会问：老师是怎么样“想到”上述求值公式(1)的呢？对于这个问题的回答，大体有两种可能：

第一种可能是算术老师先用代数解法，由(2)式求得公式(1)，但是因为小学生还没有学到代数，所以只好耐心地对(1)式中的每一步计算，结合题意加以解释．第二种可能是对于上述实际问题，做一番实践归纳的工夫，即：

假如 12 张都是 5 元钞，则 $12\times5=60$，

假如 11 张为 5 元，1 张 10 元则 $11\times5+1\times10=65$，

假如 10 张 5 元，2 张 10 元则 $10\times5+2\times10=70$．

以此类推，也就不难发现当 10 元钞票的张数由 0 逐次加 1 时，总额由 60 开始逐次加一个 5．(1) 式就是这个意思．

把两种解法加以比较，可以看出，算术解法的准备工作是对于给定类型的问题，先来做一番实践归纳工作，从而求得解决该问题的"公式"．然后还要逐步地对于公式中的计算找出理由加以解释．显然这样做是缺乏普遍性的．而代数解法的准备工作是代入未知数符号，把问题中的数量关系平铺直叙地用代数方程式表达出来．然后再有系统地运用数系运算法则，由方程式求得未知数所应有的值．所以，代数解法是简捷的，是具有高度普遍性的！一般来说，算术解法的公式和理由是随着问题的类型而定，但是代数解法的基本原理就是有效运用运算法则，它是一种统一的、普遍的道理．

[例 2]：在什么温度时，华氏温度计和摄氏温度计的度数相同？

[分析]：华氏的冰点是 32°F，沸点是 212°F，摄氏的冰点是 0°C，沸点是 100°C．所以摄氏 1 度相当于华氏 $\frac{180}{100}=\frac{9}{5}$ 度．

[代数解法]：

设温度摄氏 x°C 的华氏度数也是 x°F. 则：

$$x=32+\frac{9}{5}\times x,$$

两边同减 $\frac{9}{5}\times x$：

$$x-\frac{9}{5}\times x=32,$$

由分配律：

$$\left(1-\frac{9}{5}\right)\times x=32,$$

两边同除以 $\left(1-\frac{9}{5}\right)$：

$$x=32\div\left(1-\frac{9}{5}\right)=-40,$$

即：　　-40°C $=-40$°F　(负号表示零下的度数).

[算术解法]：

先让我们分析一下所求的温度应该在冰点之上还是在冰点之下？因为冰点是 0°C 和 32°F，由冰点每上升摄氏 1 度时，华氏上升 $\frac{9}{5}$ 度. 所以华氏度数要比摄氏度数愈来愈大，当然不可能相等. 反之，由冰点下降摄氏 1 度时，华氏下降 $\frac{9}{5}$ 度，所以每降摄氏 1 度，两者的差额减少 $\left(\frac{9}{5}-1\right)$ 度. 所以由冰点下降 $32\div\left(\frac{9}{5}-1\right)$ 度时，摄氏和华氏的度数相同. 即 -40°C $=-40$°F.

[比较分析]：

因为上述问题的基本事实就是关系式：

$$\text{华氏度数}=32+\frac{9}{5}\times\text{摄氏度数}.$$

所以，两种解法大同小异. 但是代数解法的优点在于负数的运用. 所以不必象算术解法中先得作一番分析来决定所求的温度是在冰点之上还是之下？从方程式中解得 $x=-40$ 也就自然说明它是在冰点之下了.

二、解代数方程式原理

总结上面的分析，让我们把代数解法的要点和原理，列述如下：

1. 代数解法的基本想法是：有效地运用数系的运算法则（如交换律、结合律、分配律及加、乘的可逆性等）去有系统地解答种种关于代数量的问题（简称为代数问题）.

2. 把上述"基本想法"付诸实践的具体做法如下：

(i) 引进一些符号（通常习用 u, v, w, x, y, z 这几个字母）用来表示问题中所要"求解"的"未知量"，叫做未知数. 换句话说，未知数也就是用来表达未知量的符号.

(ii) 引进未知数的好处是：这样我们就可以把所要解决的代数问题中的数量关系，用含有未知数符号的算式表达出来. 这种式子叫做"代数方程式".

初学的同学们，可能对上面所说的"列代数方程式"这个步骤感到有些困难，其实列方程式就是一种翻译工作，那就是要把所要解决的代数问题中的未知量改用未知数符号来表

示，把代数问题中各种量之间的数量关系改用算式来表示. 初学者感到有些困难的主要原因是因为"新概念"难免有些陌生，感到不自在罢了. 克服这种陌生感的有效办法是多拿几个实际问题来练习一下，也就自然熟悉了. 在练习时，请注意把握代数问题中的各种相等关系. 因为代数方程式是一种等式. 它表达代数问题中的一个相等关系. 所以列方程式时所要做的预备工作就是得先分析一下，所要解的代数问题中哪些量是未知量？哪些数量关系是相等关系？把这样分析所得的相等关系，用含有未知量符号的等式表达出来，就是该代数问题的方程式. 所以有几个相等关系也就得出几个代数方程式.

(iii) 上面的两个步骤其实只是代数解法的准备工作. 关键在于解方程式，即从所列出的代数方程式去求解那些未知数所应有的值(此值叫做方程式的"解").

3. 解代数方程式的基本原理就是对于方程式中所含的"未知数"运用"数系运算法则". 既然法则对于任何数都成立，未知数的值在还没有求出来之前，我们虽然还不知道它应该等于那一个数，但是只要它是一个数，就当然满足那些对任何数都成立的运算法则！有意思的是，有系统地、适当地运用这些运算法则，我们就可以由方程式解出未知数所应有的值.

虽然解代数方程式的原理很简单，但对于一个给定的代数方程式，如何适当地运用运算法则去解它？这就要看方程式的类型了. 这也就是我们在这本小册子要和同学们讨论的中心课题之一. 下面先用代数方程式中最简单的一元一次方

程式，来说明解代数方程的两个基本功.

(i) 分配律和去括号：

也许同学们还记得在算术课程中，学习处理含有大、中、小各种括号的算式时，我们总是先算小括号，再算中括号，然后再算大括号. 总之是由里到外，逐步地算出括号中所表示的值. 但是这种办法在代数运算中就行不通了. 例如下面的代数方程式就是这样.

[例 3]: $2\times[(10-x)\times3+5\times(2x-5)+4]$

$=10\times(x+3)+22.$

[分析]: 因为小括号中含有未知数"x". 所以在还没有解出 x 所应有的值之前，那些小括号$(10-x)$, $(2x-5)$, $(x+3)$的值当然也还是"未知的". 怎么办呢？这里"分配律"就派上用场了. 只要运用分配律我们就可以把上述方程式中所含的括号由外及里逐步"解除"掉.

$2\times[(10-x)\times3+5\times(2x-5)+4]=10\times(x+3)+22,$

由分配律：

$$2\times(10-x)\times3+2\times5\times(2x-5)+2\times4$$
$$=10\times x+10\times3+22,$$

再用分配律：

$$6\times10-6\times x+10\times2x-10\times5+8=10\times x+52,$$

由交换律、结合律：

$$20\times x-6\times x+60-50+8=10\times x+52,$$

由分配律：

$$(20-6)\times x+18=10\times x+52,$$

即可把原先含有括号的方程式简化成下述形式：

$$14x+18=10x+52,$$

从上面这样一个代数方程式的“简化”运算，同学们可以看出只要灵活运用分配律、交换律、结合律等“运算法则”就可以直接把一个含有括号的代数式简化成非常简短的形式，其中尤其突出的是运用分配律来处理括号．可以这么说，有了“分配律”这个处理括号的工具，则括号可去、可加．可以“由里及外”也可以“由外及里”．我们将在第三章再来有系统地讨论“含有文字符号的代数式”的运算．

(ii) 可逆性与移项：

在数系的四则运算中，减法是加法的“逆运算”，除法是乘法的“逆运算”．用代数方程式的说法，即：

$$\begin{cases} a-b \text{ 就是方程式 } x+b=a \text{ 的唯一解，} \\ a\div b \text{ 或 } \dfrac{a}{b} \text{ 就是方程式 } bx=a \text{ 的唯一解 } (b\neq 0!) \end{cases}$$

引进“负数”就是要使得 $x+b=a$，对任何 a，b 都有解；引进分数就是要使得 $bx=a$ 在 $b\neq 0$ 时总是有解．当 a，b 相同时，$x+a=a$ 的解是 0，$ax=a$ 的解是 $1\ (a\neq 0)$．当 a 是 0 时 $x+b=0$ 的解是 $-b$，即 b 的“相反数”；而 $a=1$ 时，$bx=1$ 的解是 $\dfrac{1}{b}$，叫做 b 的“倒数”．总结上面对于减与除的温习，我们可以看出它们的根源也就是上述最简单、最基本的两种代数方程式的解！现在让我们再把它们的用场推广到更一般的方程式中去．仍以上面的[例 3]为例子．前面我们已经用运算律把[例 3]的方程式整理成下述简短的形式了：

$$14x+18=10x+52,$$

我们只要两边同加(-18)[等量加等量，当然还是等量！]

$$14x+18+(-18)=10x+52+(-18),$$

化简后即得：$14x=10x+52-18$，同样地，我们也可以对上式两边加$(-10x)$，即得：

$$14x+(-10x)=10x+(-10x)+52-18,$$

即
$$4x=34,$$

所以
$$x=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}.$$

从上面这种简单明了的计算，同学们可以看出下述常用的简明法则——移项法则：

(i) 对于一个等式中某一边的某一项，我们可以用两边同加"该项的负量"来消去该项.其结果是在另一边增加了"该项的负量".换句话说，其结果是把某一项变号后移到了另一边.这种运算叫做"移项".请注意：移项时不要忘记变号！

(ii) 当等式某一边都有一个公因子$b(b\neq 0)$时，(即可以写成$b\times\{\cdots\cdots\}$这种形式).则可以用两边同乘以它的倒数$\left(\text{即}\ \frac{1}{b}\right)$而消去这一边的公因子.其结果是在另外一边增加了一个$\frac{1}{b}$的公因子.换句话说，我们可以把一个公因子b搬到另一边，成为它的倒数公因子$\frac{1}{b}$.这种运算可以叫做"搬因子".请注意：搬因子时要记住把它倒过来！

移项的原理是加的逆运算，搬因子的原理是乘的逆运算.它们分别是减法与除法在解代数方程式时的具体表现.这就

是为什么我们要先将整数系扩充到有理数系的缘故. 因为只有在加、减、乘、除都通行无阻的有理数系，我们才能作"移项"与"搬因子".

[例 4]：有果子若干要分给班上的同学，假如每人 4 个则余 14 个，假如每人 5 个则又缺 15 个，问班上的同学有几位？果子共有几个？

[分析]：设班上有 x 位同学，则两种不同的分法，对于果子总数，可有两种表示法，即 $4x+14$ 和 $5x-15$. 所以，上述问题的代数方程式为：

$$5x-15=4x+14,$$

[解法]：

分别将 -15 和 $4x$ "移项"：

$$5x-4x=14+15,$$

即 $$x=29, \quad (\text{有 } 29 \text{ 位同学}).$$

代入两种表示法的任何一种，即得

$$\text{果子总数}=4\times 29+14=130.$$

[例 5]：设父亲年龄是儿子年龄的 5 倍，但是 8 年后则父年是子年的 3 倍，问父子现在的年龄各多少？

[分析]：设儿子现年为 x，由题意父现年是 $5x$，所以 8 年后的子年是 $x+8$，而父年是 $5x+8$. 所以 8 年后父年是子年的 3 倍就可以用下述等式表达：

$$5x+8=3\times(x+8).$$

[解法]：

由分配律上式可写为

$$5x+8=3\times x+3\times 8=3x+24,$$

移项：
$$5x-3x=24-8,$$

$$2x=16,$$

即 $2x=16$，$x=8$（儿子现年岁数）；所以父现年为 $5x=40$.

[乘法符号的更改]：

到目前为止，我们依然沿用算术中习用的乘号“×”. 相信同学们已经觉得有些别扭了，因为“×”和代数中常用的未知数符号“x”很相似，容易混淆. 所以，在代数学中通常改用“·”作为乘号，把 $a\times b$ 改为 $a\cdot b$ 表达，有些时候在不可能产生误解的情形下，甚至连“·”也省略了，直接用 ab 表示 $a\times b$，用 $5x$ 表示 $5\times x$；但是 $12\cdot 25$ 这种情形当然不可以把“·”省略掉，因为 $12\cdot 25=300$，而省略掉“·”岂不成了 1225？也许同学们会问：那么为什么不在算术中就采用“·”作为乘号呢？因为算术中常用到小数点. 所以假如采用“·”作为乘号，则 $7\cdot 8$ 是“7 乘 8”，而 7.8 是“7 点 8”. 其差别在于一个是中圆点，一个是下脚点，反而容易混淆. 然而在代数中，不常用小数（通常改用分数），而且常用未知数符号 x，所以采用“·”作为乘号比较方便.

[练习]：

(I) 试用分配律和可逆性，逐步地做展开、集项、移项和搬因子来解下列一元一次方程式：

(1) $2\cdot\{4-5x+2\cdot(3x-1)\}=\{3\cdot(x+1)-5\cdot(2-x)\}\cdot 3$.

(2) $3\cdot(x-5)+5\cdot(2x-7)-7\cdot(2x-5)=8x+13$.

(3) $2\cdot\{x-3\cdot[2-3\cdot(x+4)+2\cdot(2x+3)]+5x-7\}=4$.

(4) $(5x+7)\cdot 4-(3x+10)\cdot 6$

$=3\cdot[(x-1)\cdot 2+(2x+3)\cdot(-2)]$.

(5) $\left[\frac{1}{5}\cdot(2x+3)-\frac{1}{3}(4x+3)\right]\cdot 2-\frac{7}{10}=\frac{1}{15}\cdot(7x+8)$.

(6) $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{3}\right)\right]\cdot\frac{6}{5}$

$=(3x+7)\cdot\frac{7}{5}-100$.

(11) 试用代数方程式解下列应用问题:

(7) 有鸡兔同笼,共有头 15 个,脚 44 只,问鸡兔各几只?

(8) 试求一温度,其华氏度数是摄氏度数的 4 倍,试求另一温度其摄氏度数是华氏度数的 4 倍.

(9) 用 1 元钱去买 4 分和 10 分的邮票,共买了 19 张,问买了几张 4 分和几张 10 分的?

(10) 有一群学生到某食堂,若每桌坐 12 人则尚空 2 桌,若每桌坐 8 人则还有 4 人没坐位,问共有桌几张?学生几位?

第二节 低次方程式的解法

当问题很简单时,通常列出来的方程式是一元一次方程式,即只需要用一个未知数(一元),而这个未知数在方程式中只出现一次项. 但是当问题稍微复杂一些,则所列出来的方程往往是多元一次的,或者一元高次的;或者是多元高次的. 本节将把上一节的讨论,初步地拓展到二元一次联立方程和一元二次方程的解法.

一、二元一次联立方程式的解法

当一个代数问题中有两个未知量，而它们之间又有两个相等关系，则要引进两个未知数符号（例如 x, y），分别表示这两个未知量. 然后由它们来表达那两个相等关系，从而得到两个代数方程式. 例如在上一节中的[例 1]，其实是有两个未知量的，即 10 元钞票的张数和 5 元钞票的张数，也有两个相等关系，即共有 12 张，总值 85 元. 所以比较自然的处理方式是设 10 元钞票的张数为 x，5 元钞票的张数为 y. 则上述两个关系就可以写成：

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 10\cdot x+5\cdot y=85. \end{cases}$$

由第一个关系式可以得出 $y=(12-x)$，再代入第二式，就可得到原先的方程式：

$$10\cdot x+5\cdot(12-x)=85.$$

上一节例 4 中，也可设两个未知量，即人数和果子数. 两种分果子的结果也就是两个相等关系. 所以比较自然的处理方式是设“人数”为 x，“果子数”为 y，则两种分法也就是：

$$\begin{cases} y=4x+14, \\ y=5x-15. \end{cases}$$

从上二式正好得出 $4x+14=5x-15$ 这个只含一个未知量 x 的方程式. 此外上一节例 5 也有两个未知量，即儿子现在年龄和父亲现在年龄分别用 x, y 来表示则有：

$$\begin{cases} y=5x, \\ y+8=3\cdot(x+8). \end{cases}$$

用 $y=5x$ 代入第二式即得原先的方程式：

$$5x+8=3\cdot(x+8).$$

上面的例子说明，大部分代数问题是有多个未知量和多个关系的问题．所以列出来的方程式很自然的是多元联立方程式．让我们现在就来讨论其中最简单的情形——二元一次联立方程式——的解法．

[例 1]：

$$\begin{cases} 2x-3y=-2, & (1) \\ 3x+2y=23. & (2) \end{cases}$$

[解 1]：(1)式经移项可改写成：

$$2x+2=3y,$$

即

$$y=\frac{1}{3}(2x+2),$$

然后再"代入"(2)式，即得下列不含 y 的方程式：

$$3x+2\cdot\frac{1}{3}(2x+2)=23,$$

即

$$9x+4x+4=3\cdot 23-69,$$

$$13x=65,$$

$$x=5.$$

再把所求得的 $x=5$ 代回到 $y=\frac{1}{3}(2x+2)$，即得 $y=4$．

[解 2]：我们可以把(1)式两边同乘以 2，(2)式两边同乘以 3，得：

$$\begin{cases} 2\cdot(2x-3y)=2\cdot(-2), \\ 3\cdot(3x+2y)=3\cdot 23. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 4x-6y=4, \\ 9x+6y=69. \end{cases}$$

这样做的目的是，要使上述两个方程式中 y 的系数恰好相反. 这样，把两式左右两边分别相加(等量加等量，当然还是等量)则含有 y 的两项相消而得出一个只含有 x 的方程式，即：

$$13x=-4+69=65,$$

所以 $x=5$. 把 $x=5$ 代回(1)式，即得：

$$10-3y=-2,$$

即：
$$3y=12, \quad y=4.$$

上面这个简单的例子，事实上已经充分显示了二元一次联立方程式的两种普遍适用的解法：

第一种解法叫做"代入消元法"，即先从其中一个方程式求出用 x 表示 y 的表达式，再代入另一个方程式. 这样就消去了 y 而得出一个只含 x 的一次方程式. 从而可以解得 x，然后把解得的 x 的值代入上面用 x 表达 y 的表达式中，也就得出 y 的解.

第二种解法叫做"加减消元法"，即在两个方程式两边分别乘以适当的倍数. 使得 y(或者 x)的系数恰好相反. 然后把这样的两个方程式相加，从而消去 y(或者 x)，而得到一个只含 x(或者 y)的一次方程式. 于是可逐步解得 x 和 y 的值.

其实上面两种方法是大同小异的，只要做一些习题很容易掌握它们的要点. 下面就是一些简单的习题.

[练习]：

请分别用代入消元法和加减消元法来解下列联立二元一次方程式：

(1) $\begin{cases} 2x-y=5, \\ 3x+2y=7. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=7, \\ x-y=2. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y=15, \\ 2x+4y=44. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{7}{5}y=8, \\ \frac{5}{3}x+\frac{1}{3}y=2. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{17}{10}x-\frac{3}{2}y=1, \\ \frac{7}{5}x+\frac{4}{5}y=9. \end{cases}$

同样我们也可以用代入消元法或加减消元法去解三元一次联立方程式．同学们不妨用下面几个简单的例子试一下：

(6) $\begin{cases} x+y=2, \\ y+z=5, \\ z+x=4. \end{cases}$　　(7) $\begin{cases} x+y+z=5, \\ x-y+z=3, \\ 2x+3y-2z=7. \end{cases}$

(8) $\begin{cases} 3x+y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+2y+3z=0. \end{cases}$

二、平方与平方根

让我们先举一个最简单的一元二次方程式的实例．

[例 1]：试求一个面积为 25 平方米的正方形的边长．

[解]：同学们早已知道：

长方形面积＝长×宽.

当长方形的长、宽相等时，上述公式就是

A＝正方形面积＝(边长)^2＝l^2　(用 l 表示边长).

上述公式告诉我们如何由一个正方形的边长去求得它的面积. 假如我们反过来要从它的面积 A 去求它的边长，用代数的语言来说，就是要解下列二次方程式：

$$x^2=A,\quad 或\quad x^2-A=0.$$

所以例 1 的方程式是 $x^2=25$，或 $x^2-25=0$. 不难看出，5 和 -5 是上述方程式的两个解. 但是边长 x 显然应该是正的，所以所求的正方形的边长是 5 米.

[练习]：

试求面积 A 分别是 4, 9, 16, $\frac{25}{16}$, $\frac{49}{169}$, 0.25 平方米的正方形的边长.

上面所给的一串数都恰好是有理数的平方，假如我们把 A 的值改成一个并不是另一个有理数的平方的值时，$x^2=A$ 的解是什么呢？让我们用 $A=2$ 先来看一看吧. 换句话说，会不会有一个正方形，它的面积是 2 平方米呢？从直观上来想，这样的正方形应该是有的或者说是存在的. 为什么呢？因为我们可以这么样去想象：边长是 1 米的正方形面积是 1 平方米，边长是 2 米的正方形是 4 平方米，当我们把正方形的边长从 1 米逐渐放大到 2 米时，它的面积也逐渐由 1 平方米加大到 4 平方米. 在这个过程中总应该有经过面积恰好是 2 平方米的时候. 这种想法是有它的道理的，但是象上面这样全凭

想象的说明太笼统了，叫人难以捉摸，觉得不够扎实．当然，说明这样一个正方形的存在性，最切实的办法是老老实实地在纸上画出这样一个正方形来．怎么个画法呢？下面让我们介绍一个在两、三千年之前就被我们的祖先发现的画法．

[例 2]：试作一个面积为 2 平方米的正方形．

[作法]：

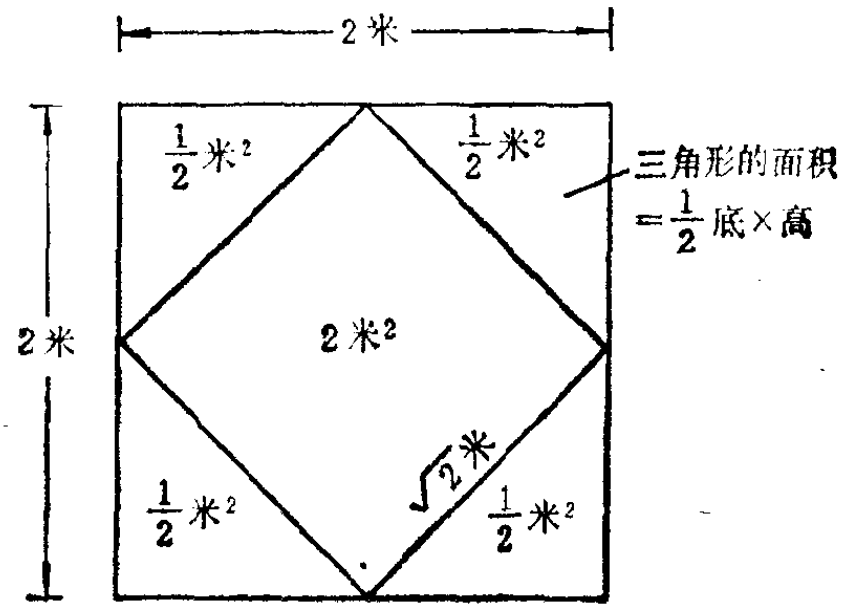


图 2

大正方形面积 $=(2\text{米})^2=4\text{米}^2$，

小正方形面积 $=4\text{米}^2-4\cdot$三角形面积

$$=4\text{米}^2-4\cdot\frac{1}{2}\text{米}^2=2\text{米}^2.$$

上述正方形的边长叫做“2 的平方根”，通常用符号 $\sqrt{2}$ 来表示，它的特征性质是：

$$\sqrt{2}>0,\quad (\sqrt{2})^2=2.$$

[例 3]：试作一个面积等于 3 米² 的正方形．

[作法]：仿照例 2 的作法，改用 $(1+\sqrt{2})$ 米为边长先

作一个大正方形，然后如(图3)所示切去四个高是1，底边是$\sqrt{2}$的直角三角形，它们的面积$=\frac{1}{2}$底$\times$高$=\frac{1}{2}\sqrt{2}$米^2. 所以剩下的小正方形的面积等于：

$$(1+\sqrt{2})^2-4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{2}$$
$$=1+(\sqrt{2})^2=1+2=3(\text{米}^2).$$

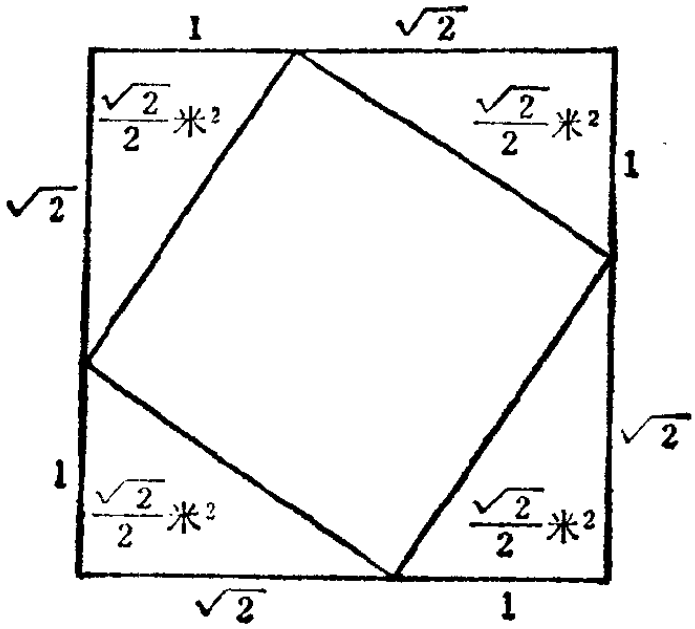


图 3

[说明]：上面计算$(1+\sqrt{2})^2$时用了两次分配律，即：

$$(1+\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})\cdot 1+(1+\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$$
$$=1+\sqrt{2}+\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$$
$$=1+2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2.$$

它是下列公式的特殊情形，即：

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=(a+b)\cdot a+(a+b)\cdot b$$
$$=a\cdot a+b\cdot a+a\cdot b+b\cdot b=a^2+2ab+b^2,$$

即
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

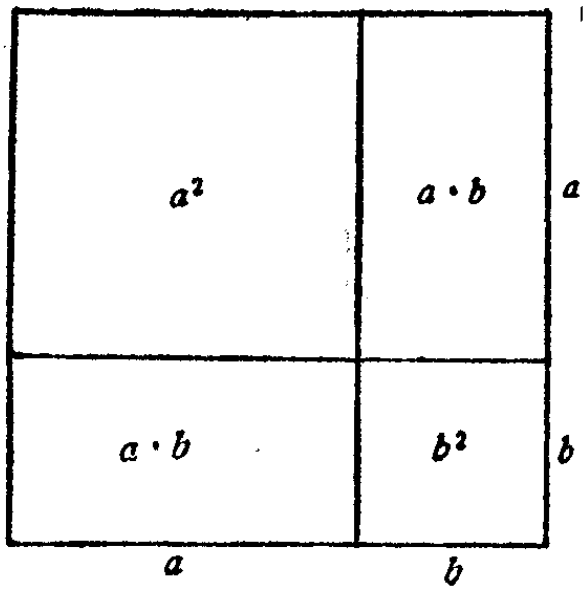


图 4

上述公式也可用几何图形的面积来加以说明，即如(图4)所示，一个以$(a+b)$为边长的正方形可以分隔成一个边长为a的正方形，2个边长分别为a, b的长方形和一个边长为b的正方形这样四部分.

[例 4]:

把例 2、例 3 的作图法一般化，设a，b是两个任给的正数，我们可以用$(a+b)$为边长作一个正方形，然后同样把它分割成 4 个高和底分别是a，b的直角三角形和以斜边c为边的一个正方形，则由下述计算:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

$$= c^2 + 2ab,$$

两边同减$2ab$，就得出直角三角形的三边边长a，b，c之间的数量关系:

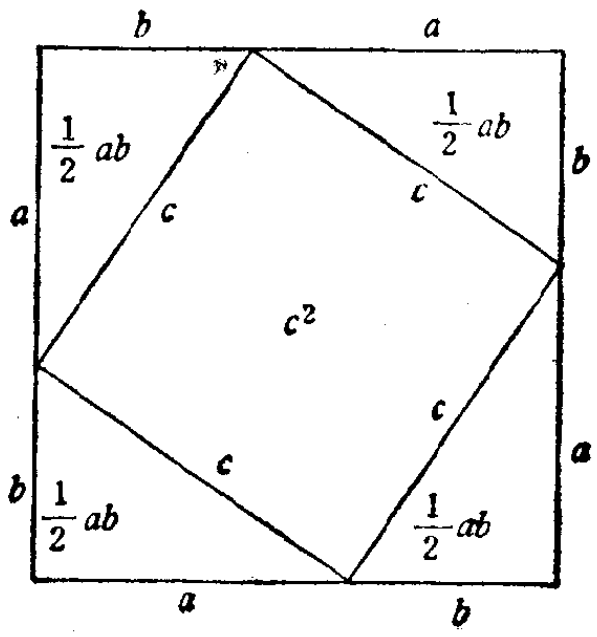


图 5

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

[说明]: 我国古书中把一个直角三角形的三边分别叫做

勾、股、弦，则上述重要关系式可写成：勾^2+股^2=弦^2，叫做勾股定理．同一定理在西方叫做毕达哥拉斯定理．但是我国对于这个基本事实的发现与证明，要比西方毕达哥拉斯的证明早几百年．

[练习]：试作一些正方形，使它们的面积分别等于5，7，8，13，17，$\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$，$\frac{13}{3}=\frac{39}{9}=\frac{36+3}{9}$米^{2}等．

综上所述，我们对于平方与平方根可以得出下列几点：

1．在第一章中我们曾提到常见的量大体可以分成两类：一类具有不可分割的"个别单元"，对于这一类型的量，我们用自然数系来数它的个数；另一类常见的量如长度、面积等等，这些量是可以无限细分的，所以并不具有自然单元，处理这种量的方法是度量，用来表达度量型的量的数系叫做实数系．

2．一个边长为 l 米的正方形的面积是 l^2 米^2．反之，一个面积为 A 米^2 的正方形的边长是 $x=\sqrt{A}$ 的正实数解，叫做 A 的平方根，用 $\sqrt{A}$ 表示．代数方程式 $x^2=A$ 或 $x^2-A=0$ 的两个根就是 $\sqrt{A}$ 和 $-\sqrt{A}$．

定义：对于任何给定的正实数 $A>0$，存在一个唯一满足 $x^2=A$ 或 $x^2-A=0$ 的正实数，叫做 A 的平方根，用符号 $\sqrt{A}$ 表示它．$x^2-A=0$ 的另外一个根是 $-\sqrt{A}$．

3．例2，3用实际作图的办法求得面积分别等于2米^2，3米^{2}的正方形．所以它们的边长分别是 $\sqrt{2}$ 米和 $\sqrt{3}$ 米．例4说明了一个直角三角形的三边边长 a，b，c 之间的数量关系是 $a^2+b^2=c^2$．所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}$．

[例 5]：$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$；$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

[说明]：$(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2$ [指数定则]

$=a\cdot b$. [$\because(\sqrt{a})^2=a$, $(\sqrt{b})^2=b$.]

这也说明了 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ 是满足 $x^2=a\cdot b$ 的正数，所以它就是 $\sqrt{a\cdot b}$.

同理 $$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b},$$

所以 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 是满足 $x^2=\dfrac{a}{b}$ 的正数，即 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

[例 6]：$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{b}$;

$$\frac{F}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{F\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}$$

$$=\frac{F\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}=\frac{F\cdot(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}{a-b}.$$

$\because$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{a}+(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(-\sqrt{b})$

$=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}-\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$

$=a-b$.

三、一元二次方程式的解法——配方法

前面说明了 $x^2=A$ 或 $x^2-A=0$(当 $A>0$)这种特别简单的二次方程式的解就是 $\pm\sqrt{A}$. 现在让我们再来讨论一般

的一元二次方程式的普遍解法. 首先，让我们再来举一个简单的实例.

[例 7]：试作一个长方形，长比宽多 4 米，面积 32 米^2.

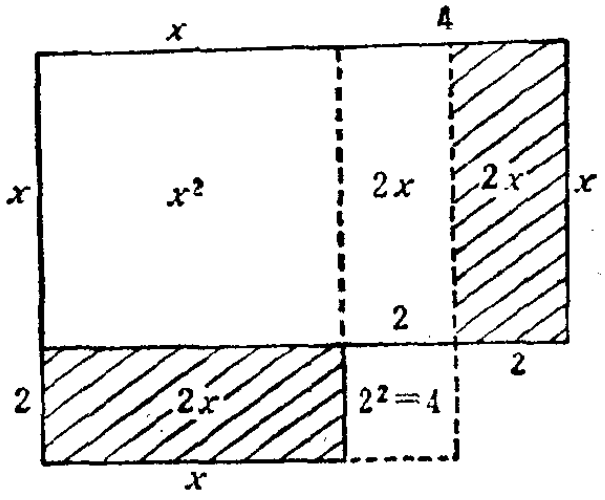


图 6

[解]：设长方形的宽是 x 米，则长为 $(x+4)$ 米. 则由长方形面积公式，即得方程式：

$$x\cdot(x+4)=32,$$

即：
$$x^2+4x=32.$$

从上面的图解，可以看出，把长方形先切成一块 x 乘 x 的正方形和一块 4 乘 x 的长方形，然后再把长方形平分成两条 2 乘 x 的长条，并将其中一条移到下方，再在角上补上一个 2×2 的小方块，即得一个 $(x+2)\cdot(x+2)$ 的正方形，上述几何想法，用代数式表达就是：

$$x^2+4x+4=(x+2)^2=32+4=36,$$

所以：$x+2=\pm\sqrt{36}=\pm6$，即：$x=\begin{cases}4,\\-8.\end{cases}$

由题意 x 必须是正的，故 $x=4$，即长方形的宽 4 米，长 8 米.

上面这个简单明了的实例，给我们一个相当明白的启示，那就是我们可以用同样的方法来解下列形式的二次方程式，即：

$$x^2+bx=c.$$

其解法如下：

(i) 将方程式两边同加 $\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2}{4}$，即得：

$$x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

(ii) 因为 x^2+bx 加 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ 后，等于 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$，所以上述方程式可以改写成：$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$，

(iii) 从上面这种形式，很容易看出方程式的解有下列三种可能性：

$$\begin{cases}\text{当 } c+\left(\frac{b}{2}\right)^2>0 \text{ 时，} \\ \qquad x+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2},\ x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}; \\ \text{当 } c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=0 \text{ 时，} x+\frac{b}{2}=0,\ x=-\frac{b}{2}; \\ \text{当 } c+\left(\frac{b}{2}\right)^2<0 \text{ 时，} x \text{ 不可能有实数解.}\end{cases}$$

上述方法叫做“配方法”，因为整个解法中的关键所在是将 x^2+bx 加上 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$，把左边配成 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2$. 其实任何二次方程式都很容易把它整理成 $x^2+bx=c$ 这种形式，所以“配方法”是解一元二次方程的一个普遍可用的好方法.

[例 8]：试求 $(2x-1)(x+2)+2x-18=0$ 的解.

[解]：先用分配律乘开、集项，即得：

$$2x^2+7x-16=0,$$

把 -16 移到右边，然后全式除以 2，即得：$x^2+\frac{7}{2}x=8$，

用配方法，得：

$$x^2+\frac{7}{2}x+\left(\frac{7}{4}\right)^2=\left(x+\frac{7}{4}\right)^2=8+\left(\frac{7}{4}\right)^2=8+\frac{49}{16}=\frac{177}{16},$$

所以：$x+\frac{7}{4}=\pm\frac{\sqrt{177}}{16}=\pm\frac{\sqrt{177}}{4}$，即：$x=-\frac{7}{4}\pm\frac{\sqrt{177}}{4}$.

[练习]：

试解下列二次方程式：

(1) $x(x-1)=1$.　　(2) $x^2+4x=45$.

(3) $x^2+3x=10$.　　(4) $3x^2+x-10=0$.

(5) $3x^2+x-30=0$.　　(6) $3x^2+x-9=0$.

(7) $(2x-1)\cdot(3x+5)=2x^2+5x-5$.

(8) $(2x+3)\cdot(x-1)+(x+1)^2=0$.

(9) $2x^2-4x+5=0$.

(10) $(2x+3)(x-1)+10x+21=0$.

试用上面讲过的"代入消元法"解下列二元一次、二次联立方程式：

(11) $\begin{cases}x-y+3=0,\\x^2+y^2=25.\end{cases}$

(12) $\begin{cases}2x+3y-5=0,\\x^2+xy+3y^2-x+3y-30=0.\end{cases}$

(13) $\begin{cases}5x+2y-25=0,\\x^2+y^2-2x+4y+4=0.\end{cases}$

[小结]：

第二章的中心课题是对于代数方程式的源起和解代数方程式的基本原理作一个初步的介绍与探讨．这也就是从算术进展到代数的起步．全章的要点在于说明代数方法的基本想

法：灵活运用数系的运算法则，引进未知数符号，把所要解答的问题中的数量关系列成简单明了的算式——代数方程式，就是为了便于运用数系法则的准备工作．代数方法的关键在于如何适当地运用数系法则，从所列的代数方程式解出其中未知数所应有的值！所以解代数方程式是代数学的一个基本的中心课题．在这一章中我们只是用一些简明的实例，初步地讨论了代数方程式中最简单的一元一次，二元一次联立和一元二次这三种方程式的解法．目的是使同学们通过这些简单明了的典型，去体会和掌握数系运算法则这个代数学的基本想法．在结束本章的讨论之前，让我们对代数方程式作几点概括性的分析，提出几个基本的问题，好让同学们在进一步学习代数方程的解法之前，有个概略的轮廓：

（i）任意一个一元一次方程式，经过整理后都可以写成 $ax=b$ 这种形式．显然它只有一个解，即 $x=\frac{b}{a}$．任一个一元二次方程式，经过配方整理后，均可写成 $x^2+bx=c$ 这种形式，再加以配方，就可以改写成 $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=c+\left(\frac{b}{2}\right)^2$．并且，当 $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2>0$ 时有两个实数解 $\left(\text{即 } x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)$，当 $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2=0$ 时，只有一个实数解 $\left(\text{即 } x=-\frac{b}{2}\right)$，而当 $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2<0$ 时，不可能有实数解．

一个一元 n 次方程式，它最多有几个解？在第三章中我们将证明，任何一元 n 次方程式最多只有 n 个解．

(ii) 代数方程式的解的存在性：在前面我们就已经提到一元二次方程式 $x^2+bx=c$ 在 $c+\left(\frac{b}{2}\right)^2<0$ 时不可能有“实数解”. 其实在讨论一个代数方程式的解的存在性时，先要弄清楚所要的解是那一类数. 譬如，当 x 代表人数的问题中，则 x 的解当然应该是正整数. 假如所列的方程式的所有解都不是正整数，则原给问题还是无解的. 在这一方面，实践经验告诉我们，比较方便的办法是：

在讨论代数方程式的解的存在问题时，我们可以把“数系”的范围扩充到比实数系还要大一些的“复数系”. 它包含 -1 的平方根(通常用 i 表示)和所有能写成 $a+bi$ 这种形式的数(其中 a, b 是任意的两个实数). 往后我们可以证明在“复数系”的范围中，任何一元 n 次方程式的解总是存在的，这个重要的事实叫做代数基本定理. 我们将在“复变多项函数”这本小册子中讨论它的证明和意义.

(iii) 消元法：一般的代数问题中往往含有多个未知量，它们之间具有多个关系. 用未知数和代数方程式来表达它们，便是多元联立方程式. 本章仅讨论了其中最简单的二元一次联立方程式. 所用的方法是设法先消去其中一个未知数. 这样就可以把解二元联立方程式的问题，通过消元法，化成解一元方程式的问题. 往后解多元高次联立方程式的步骤也是大同小异的. 我们将在第四章初步地讨论一般的消元法.

第三章　多项式的四则运算

引用“未知数”符号来代表未知量，就可以用简明的方程式来表达问题中的数量关系，而且也便于运用数系运算法则去解方程式．因为解代数方程式的基本原理是：对未知数符号而言数系运算法则同样适用．这也就是我们在处理含有文字符号的算式时唯一要把握的要点．把这种运算系统化、形式化，也就是我们在这一章所要讨论的课题——多项式的四则运算．它是整个代数学的基本功．

第一节　多项式的加、减、乘

一、概念与术语

多项式实质上也就是含有文字符号的算式，这些符号在运算上具有“数系运算法则”，因为这种算式不但在解方程时用到，而且在往后讨论多项式函数、或更广泛的体系时，都是常用的．所以，我们在这里最好不要把目前学习的算式中所含的文字符号的意义，不必要地局限成“未知数”这一种狭窄的解释．因为在这种算式的运算过程中，唯一要抓住的要点就是这些文字符号也满足数系运算法则(即交换律、结合律、

分配律、指数定则等运算法则). 所以最简便的办法是把这种符号看成为可进行数系运算法则的符号，叫做"不定元". 为了明确起见，让我们定义下述常用的术语.

(i) "不定元"就是一种在运算上具有交换律、结合律、分配律、指数定则等数系运算法则的符号[它在各种不同的应用中，含意也不同，"不定元"的名称也就是说它的意义是待定的——即暂时不必去确定它].

(ii) 单项式：一个由不定元和数字的连乘积所组成的式子叫做单项式，例如

$$2x^3,\ 3xy,\ (-5)xyz^2 = -5xyz^2,\ \sqrt{2}\,x^2y,\ -\frac{\sqrt{3}}{5}\,x^2y^5,$$

等. 一个单独的数如 2，$\sqrt{5}$ 等也可看成单项式的特例.

(iii) 多项式：由有限个单项式的代数和所组成的式子叫做多项式. 例如：

$$x^2-3x+\sqrt{2},\ xy-3x+\sqrt{5}\,y+1,\ -\frac{\sqrt{3}}{5}\,x^2y^3z\cdots\text{等.}$$

单项式看成多项式的特例，一个多项式中所含有的不定元个数叫做它的"元数"，例如第一式是单元多项式，第二式是二元多项式，第三式则是一个三元多项式.

(iv) 次数：一个单项式中所含的不定元的"方次"(或幂次)的总和，叫做它的次数(当它只是一个非零常数这种特殊情形时，它的次数定义为 0 次). 一个多项式的次数定义为它所含的各单项式的次数中的最大者，例如：

$5x^3$，$\sqrt{5}\,xy^2$，$-\sqrt{5}\,xyz$，$(-5)^3xy^2$ 都是三次的 $2x^2+10^5x-2^{100}$ 是二次的，$x^{10}-x^3+\sqrt{1013}$ 是 10 次的 [注意：x^{19}

$+x^5-10^3x^3-x^{10}-1$ 的次数是 5，而不是 10. 因为上述式子中 x^{10} 和 $-x^{10}$ 相消了，不算数].

(v) 同类项：对同一个不定元的方次对应相等的单项式，叫做同类项. 例如：

$5x^3$ 和 $(-13)^5x^3$ 是同类项，$5x^3$ 和 $5y^3$ 不是同类项；$\sqrt{5}xy^2z$ 和 $-100zy^2x$ 是同类项，但是 xy^2z 和 xyz^2 不是同类项.

[例子]：(i) 两个同单元的单项式是同类项的必要充分条件是它们的次数相同；

(ii) 试列举由 x, y 所产生的 4 次非同类项.

[解]：x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, y^4 是 5 个典型的 x, y 所产生的 4 次非同类项，任何 x, y 的 4 次单项式都和上述五个中的一个是同类的.

[练习]：

(1) 试列举由 x, y, z 所产生的典型 4 次非同类项；

(2) 试列举由 x, y, z, w 所产生的典型 3 次非同类项.

二、单元多项式的加、减、乘

因为单元多项式在形式上最简单，所以让我们先来讨论单元多项式的加、减、乘.

1. 同类项合并系数：

例如，　　$3x^5+\sqrt{2}\,x^5=(3+\sqrt{2})x^5$，

$$\sqrt{5}\,x^2-\sqrt{3}\,x^2=(\sqrt{5}-\sqrt{3})x^2.$$

上述运算也就是分配律的运用，一般说来，上述简单的事实可以用下列普通形式表达：

$$ax^n+bx^n=(a+b)x^n,$$

其中 a, b 是任意的常数.

2．降次排列：

对于一个多项式，我们可以先把它所含的各种同类项分别合并系数，然后再以降次[1]的顺序排列起来（即先写高次的）．经过这样整理后的形式，叫做该多项式的降次标准式.

[例子]　请把下列几个多项式整理成降次标准式：

(i)　$-10\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\,x^2-x^3+\sqrt{2}\,x^2+1001$,

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,x^3-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\,x^3+x^{10}-5x^2+10^{10}$.

3．多项式的和或差：

两个多项式相加，实际上就是只要把两式中的同类项合并系数，当两个多项式都已经整理成降次标准式时，我们就只要把各次项的对应系数加起来（当然，缺项的系数为 0）．同样的，相减时对应的系数相减．通常，一个方便的做法是把缺项补写成系数是 0 的项，用横式降次的写法来计算（很象小学所学的整数加减，但是这里不需要进位，所以更加简单）.

[例子]：

1) 当然也可以用升次排列，但是通常习惯用降次排列.

(i) $(5x^2-3x+7)+(3x^2+5x+3)$

$=5x^2-3x+7+3x^2+5x+3$ [用加的结合律]

$=(5x^2+3x^2)+(-3x+5x)+(7+3)$

[用加的交换律、结合律]

$=8x^2+2x+10$. [同类项合并系数用的是分配律]

(ii) 我们可以用横式来算加法，把同类项(在单元时也就是同次项)列在上下相对应的位置，即

$$\begin{array}{r} 5x^2-3x+\ 7 \\ +\quad 3x^2+5x+\ 3 \\ \hline 8x^2+2x+10 \end{array}.$$

(iii) 用横式来算两个多项式的加法时，缺项可以补上一个"零系数项". 例如在算 $(6x^3-4x+7)+(4x^3+8x^2+1)$ 时，横式的写法是：

$$\begin{array}{r} 6x^3+0\cdot x^2+(-4)\cdot x+7 \\ +\quad 4x^3+\ 8x^2+\quad 0\cdot x+1 \\ \hline 10x^3+\ 8x^2+\ (-4)x+8 \end{array}.$$

(iv) 减法时对应项的系数相减，我们就以上述两个例子，用横式来做减法如下：

$$\begin{array}{r} 5x^2-3x+7 \\ -)\ 3x^2+5x+3 \\ \hline 2x^2-8x+4 \end{array};$$

$$\begin{array}{r} 6x^3+\quad 0\cdot x^2+(-4)x+7 \\ -)\ 4x^3+\quad 8x^2+\quad 0\cdot x+1 \\ \hline 2x^3+(-8)x^2+(-4)x+6 \end{array}.$$

[练习]：

试用横式计算下述各对多项式的“和”与“差”，即做一次加法，一次减法：

(1) $(3x^4-5x^3-7x^2+8)\pm(2x^4+5x^3+7x-8)=?$

(2) $(5x^4-7x^3+\sqrt{2}\,x^2+x-1)$

$$\pm\left(5x^4-7x^3+\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2-x+1\right)=?$$

(3) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x)\pm(x^4+x^3+x^2+x+1)=?$

(4) $(x^5-x^4+x^3-x^2-x)\pm(x^4-x^3+x^2-x+1)=?$

4．单项式的乘法：

两个单项式相乘时，其系数相乘，次数相加．例如

$$(2x^3)\cdot(3x^2)=(2\cdot3)\cdot(x^3\cdot x^2),\quad\text{[乘的结合律、交换律]}$$

$$=6x^5;\qquad\qquad\text{[指数定则]}$$

$$(\sqrt{2}\,x^5)\cdot(-\sqrt{3}\,x^3)=(-\sqrt{6})x^8;$$

$$(\sqrt{2}+1)\,x^5\cdot(\sqrt{2}-1)\,x^3=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\cdot x^8=x^8.$$

5．多项式的乘法：

多项式的乘法的基本原理是先用分配律展开成许多单项式的乘法．然后再合并同类项．

[例子]：

(i) $5x^3\cdot(x^2-x+2)=5x^3\cdot x^2+5x^3\cdot(-x)+5x^3\cdot2$

$$=5x^5-5x^4+10x^3.$$

(ii) $(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$=x\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)+(-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$=(x^5+x^4+x^3+x^2+x)+(-x^4-x^3-x^2-x-1)$$

$$=x^5-1.$$

(iii) 一般的多项式乘法我们可以先对一边运用分配律展成许多单项式乘多项式的和，然后用横式求和．例如：

$$
\begin{aligned}
&(x^2-2x+3)\cdot(3x^3-4x^2-3x+5)\\
&=x^2\cdot(3x^3-4x^2-3x+5)+(-2x)\cdot(3x^3-4x^2-3x+5)\\
&\quad+3\cdot(3x^3-4x^2-3x+5)\\
&=3x^5-4x^4-3x^3+5x^2\\
&\qquad-6x^4+8x^3+6x^2-10x\\
&+)\qquad\qquad+9x^3-12x^2-9x+15\\
&=3x^5-10x^4+14x^3-x^2-19x+15.
\end{aligned}
$$

(iv) 从上面这几个简单的例子中，我们可以看出一个常用的简单的事实：

两个多项式相乘时，其次数相加．假如我们用$f(x)$，$g(x)$分别表示两个多项式，用$\deg(f(x))$，$\deg(g(x))$分别表示它们的次数，则上述事实可以用下列式子表达[1]：

$$\deg(f(x)\cdot g(x))=\deg(f(x))+\deg(g(x)).$$

[说明]：设$f(x)$的最高次项是ax^m，$g(x)$的最高次项是bx^n(即$\deg(f(x))=m$，$\deg(g(x))=n$)，则不难看出$f(x)\cdot g(x)$的展开式中的最高次项是$ax^m\cdot bx^n=(a\cdot b)x^{m+n}$，所以$\deg(f(x)\cdot g(x))=m+n=\deg(f(x))+\deg(g(x))$.

[练习]：

(1) $(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)=?$

1) $f(x)$，$\deg(f(x))$等是以后几章做一般性讨论时常用的符号，它们分别表示多项式和该多项式的次数。

(2) $(x-1)(x^2+x+1)=?$

$(x-1)(x^3+x^2+x+1)=?$

$(x-1)(x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=?$

(3) $(x+1)\cdot(x+1)=?$

$(x+1)^3=(x+1)[(x+1)(x+1)]=?$

$(x+1)^4=(x+1)(x+1)^3=?$

$(x+1)^5=(x+1)(x+1)^4=?$

$(x+1)^6=(x+1)(x+1)^5=?$

能不能由上面的逐步计算中归纳出一些法则来呢?

(4) $(x-1)(x+1)=?$

$(x-1)(x^2+x+1)=?$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)=?$

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=?$

$(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=?$

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=?$

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=?$

[假如你没有算错的话，上面这些乘积的结果都是 x^n-1 这种形式. 我们将在以后再进一步讨论它们.]

三、多元多项式的加与乘

多元多项式的加与乘，基本上与单元多项式的加、乘相同.

1. 加法就是同类项的对应系数相加;

2．单项式的相乘是系数相乘，不定元的指数分别相加；

3．多项式相乘是，先用分配律展开，用单项式求积后再合并同类项．

下面是一些简单的例子：

(i) $2xy^2z^3+\frac{4}{\sqrt{3}+1}xy^2z^3=\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}+1}\right)xy^2z^3$

$=2\sqrt{3}xy^2z^3$.

(ii) $(2xy^2z^3)(5x^3yz^2)=10x^4y^3z^5$.

(iii) $(x-y)\cdot(x+y)=x\cdot(x+y)-y(x+y)$

$=x^2+xy-xy-y^2=x^2-y^2$.

(iv) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

(v) $(x+y)^2=x(x+y)+y(x+y)=x^2+xy+xy+y^2$

$=x^2+2xy+y^2$,

$(x+y)^3=(x+y)(x^2+2xy+y^2)$

$=x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)$

$=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$

$=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

(vi) $(x+y+z)^2$

$=x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)$

$=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

从上面的例子，我们可以看出，多元多项式的加法与乘法在原理上、实质上是和单元的情形一样的，只是多元单项式在每一

个次数中往往有好些不同类型的项(对于单元的情形,在每一个次数中只有一种类型)所以在形式上比较复杂.下面是一些简单的题目,同学们只要细心一些计算类似的题是不会错的!

[练习]:

(1) $(x+y)^4=(x+y)(x+y)^3$

$=(x+y)(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)=?$

$(x+y)^5=(x+y)(x+y)^4=?$

$(x+y)^6=(x+y)(x+y)^5=?$

(2) $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=?$

(3) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=?$

(4) $(x+ay+b)(x+cy+d)$[1] $=?$

(5) $(x+y)(y+z)(z+x)=?$

$(x-y)(y-z)(z-x)=?$

(6) $(x+y+z)(xy+yz+zx)=?$

(7) 当多元多项式相乘时,是不是它们的次数也相加呢?试说明之.

(8) 试说明对于任何正整数 n,下式

$$(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})=x^n-y^n$$

总是成立的[这是一个简单而有用的公式].

(9) 试说明对于任何常数 a,下式

$$(x+au)^2+(y+av)^2+(z+aw)^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2)+2a(xu+yv+zw)+a^2(u^2+v^2+w^2)$$

---

1) 可把式中的 a、b、c、d 看成任意常数.

恒成立.

第二节　单元多项式的除法

一、单元多项式除法和整数除法的比较

在小学中我们学习了正整数系的"除法"：对于一个给定的被除数 a 和除数 b，除法运算的目的是去求得一个商数 q 和一个余数 r，满足下列条件：

$$a=q\cdot b+r \quad 0\leqslant r<b.$$

例如：$100=11\cdot 9+1$；　$a=100,\ b=9,\ q=11,\ r=1$；

$231=19\cdot 12+3$；　$a=231,\ b=12,\ q=19,\ r=3$，

$375=15\cdot 25$；　$a=375,\ b=25,\ q=15,\ r=0$；

…等等.

现在我们所要讨论的单元多项式的"除法"，是对于给定的一个被除式 $f(x)$ 和一个除式 $g(x)$ 去求得一个商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$，同样地满足下列关系：

$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，　$r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数.

让我们先举几个实例来看一看：

[例 1]：

$$f(x)=5x^3+3x^2-7x+8,\quad g(x)=x^3+x^2-3x+2.$$

[解]：$g(x)$ 和 $f(x)$ 的次数都是 3. 假如我们把 $g(x)$ 乘以 5，则 $f(x)$ 和 $5\cdot g(x)$ 的首项相同，所以 $f(x)-5\cdot g(x)$ 肯定会是一个低于 3 次的多项式，实际的计算如下：

$$f(x)=5x^3+3x^2-\ 7x+\ 8$$
$$-)\ \ 5\cdot g(x)=5x^3+5x^2-15x+10$$
$$-2x^2+\ 8x-\ 2,$$

即求得　　$f(x)=5\cdot g(x)+(-2x^2+8x-2)$,

所以商式 $q(x)=5$, 余式 $r(x)=(-2x^2+8x-2)$.

[例 2]: $f(x)=5x^3+3x^2-7x+8$, $g(x)=x^2-x+1$

[解]: 将例 1 的计算略作更改, $5x\cdot g(x)$ 的首项和 $f(x)$ 相同, $\because f(x)-5x\cdot g(x)$ 的次数就肯定低于 3 次, 实际的计算得:

$$f(x)=5x^3+3x^2-17x+8$$
$$-)\qquad 5x\cdot g(x)=5x^3-5x^2+5x$$
$$f(x)-5x\cdot g(x)=\qquad 8x^2-12x+8$$
$$-)\qquad 8\cdot g(x)=\qquad 8x^2-\ 8x+8$$
$$[f(x)-5x\cdot g(x)]-8\cdot g(x)=\qquad -\ 4x+0$$

即求得　　$f(x)-(5x+8)\cdot g(x)=-4x$,

即　　$f(x)=(5x+8)\cdot g(x)+4x$,

故　　商式　$g(x)=(5x+8)$,

余式　$r(x)=-4x$.

上面两个例子给我们一个启发; 那就是当 $f(x)$ 的次数大于或等于 $g(x)$ 的次数时, 我们可以将 $g(x)$ 乘以适当的单项式使得乘积的首项和 $f(x)$ 的相同, 用符号说明上述事实是:

设 $f(x)$ 的首项是 ax^n, $g(x)$ 的首项是 bx^m, 则 $\frac{b}{a}x^{(n-m)}\cdot g(x)$ 的首项也是 ax^n. 所以 $f(x)-\frac{b}{a}x^{(n-m)}\cdot g(x)$ 的次数肯

定会比 $f(x)$ 的次数要低！利用上面这个简单的事实逐次进行，就可以求得 $g(x)$ 的一个适当倍式 $q(x)\cdot g(x)$，使得 $[f(x)-q(x)\cdot g(x)]=r(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数. 这也就是单元多项式的除法运算，它是一种计算虽繁，但不难的运算，下面让我们再举几个例子来看一看.

[例 3]：设 $f(x)=2x^3-4x^2+x-3$，$g(x)=(x-3)$ 试求以 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$.

[解]：

$$\begin{aligned}
&f(x)=2x^3-4x^2+\ x-\ 3\\
-)\quad&2x^2\cdot g(x)=2x^3-6x^2\\
\hline
&f(x)-2x^2\cdot g(x)=\quad 2x^2+\ x-\ 3\\
-)\quad&2x\cdot g(x)=\quad 2x^2-6x\\
\hline
&f(x)-2x^2\cdot g(x)-2x\cdot g(x)=\quad 7x-\ 3\\
-)\quad&7\cdot g(x)=\quad 7x-21\\
\hline
&f(x)-2x^2\cdot g(x)-2x\cdot g(x)-7\cdot g(x)=\quad 18,
\end{aligned}$$

所以 $f(x)-(2x^2+2x+7)\cdot g(x)=18,$

即 $f(x)=(2x^2+2x+7)\cdot g(x)+18;$

$q(x)=2x^2+2x+7,\ r(x)=18.$

[例 3']：假如我们把上一题的 $g(x)$ 改成 $2\cdot(x-3)=2x-6$，那么因为上面所做的除法已经求得关系式：

$$2x^3-4x^2+x-3=(2x^2+2x+7)\cdot(x-3)+18,$$

上式可以改写成：

$$\begin{aligned}
2x^3-4x^2+x-3&=\frac{1}{2}(2x^2+2x+7)\cdot 2(x-3)+18\\
&=\left(x^2+x+\frac{7}{2}\right)\cdot(2x-6)+18,
\end{aligned}$$

所以，　　商式$=\frac{1}{2}(2x^2+2x+7)$，　余式$=18$.

[例 4]：设$f(x)=2x^3+4x^2-3x+1$，$g(x)=x^2-x+1$试求以$g(x)$去除$f(x)$的商式$q(x)$和余式$r(x)$.

[解]：

$$\begin{array}{rr} & f(x)=2x^3+4x^2-3x+1 \\ -) & 2x\cdot g(x)=2x^3-2x^2+2x \\ \hline & f(x)-2x\cdot g(x)=\quad 6x^2-5x+1 \\ -) & 6\cdot g(x)=\quad 6x^2-6x+6 \\ \hline & f(x)-2x\cdot g(x)-6\cdot g(x)=\quad x-5, \end{array}$$

所以$f(x)=(2x+6)\cdot g(x)+(x-5)$，即$q(x)=(2x+6)$，$r(x)=x-5$.

上面只是几个简单的例子，但是它们已充分显示单元多项式除法的原理和典型计算程序，那就是逐次把除式$g(x)$乘以适当的单项式，使得其积和被除式或“所剩下的式子”的首项相同，相减即得一个较低次的多项式，这样逐次降次，一直到所余的式子次数低于除式$g(x)$的次数时为止. 这也是求余式$r(x)$的过程.

假如我们再对上面所涉及的计算程序加以分析，就不难看出下面几点.

（i）假如除式的首项系数是 1，则每项所要乘的单项式的系数也就是“所剩下的式子”的首项系数（其次数是两者之差），所以计算起来比较简便.

（ii）当$f(x)$被$g(x)$除所得的商式是$q(x)$，余式是$r(x)$时，即$f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$，$\deg[r(x)]<\deg[g(x)]$. 则

$f(x)$ 被 $k\cdot g(x)$ 除得的商式是 $\frac{1}{k}\,g(x)$，余式还是 $r(x)$，即 $f(x)=\left[\frac{1}{k}\,q(x)\right]\cdot[k\cdot g(x)]+r(x)$ [参看例 3 和例 3′].

(iii) 除法运算是逐次减去 $g(x)$ 的一个适当"倍式"来逐步降低次数，因为减法是一种逆算，做起来不如加法顺手，而在代数中的减也可以改用加 (-1) 倍. 我们能不能把上面的计算程序稍加改善，使得写起来简便一些呢？这也就是我们要为同学们介绍的"综合除法". 仍然用上面的例 3，例 4 为例子，这样同学可以把两种做法加以比较.

[例 3]：第一步把 $f(x)$ 的逐项系数降次一字横排[注意：如有缺次，一定要补上一个 0 在相当的位置!].

当 $g(x)=x-a$ 时，把 a 写在这儿：

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & -4 & 1 & -3 \\ 3 & & 6 & 6 & 21 \\ \hline & 2 & 2 & 7 & 18 \end{array}$$

则前段 2, 2, 7 是 $q(x)$ 的系数，后段 18 是 $r(x)$ 的系数.

[例 4]：同样的把被除式的逐项系数降次横排.

当 $g(x)$ 首项系数是 1 时，把它第二项开始的系数变号竖列在左边

$$\begin{array}{r|cccc} & 2 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & -2 & \\ -1 & & & 6 & -6 \\ \hline & 2 & 6 & 1 & -5 \\ & (q(x)\text{的系数}) & & [r(x)\text{的系数}] & \end{array}$$

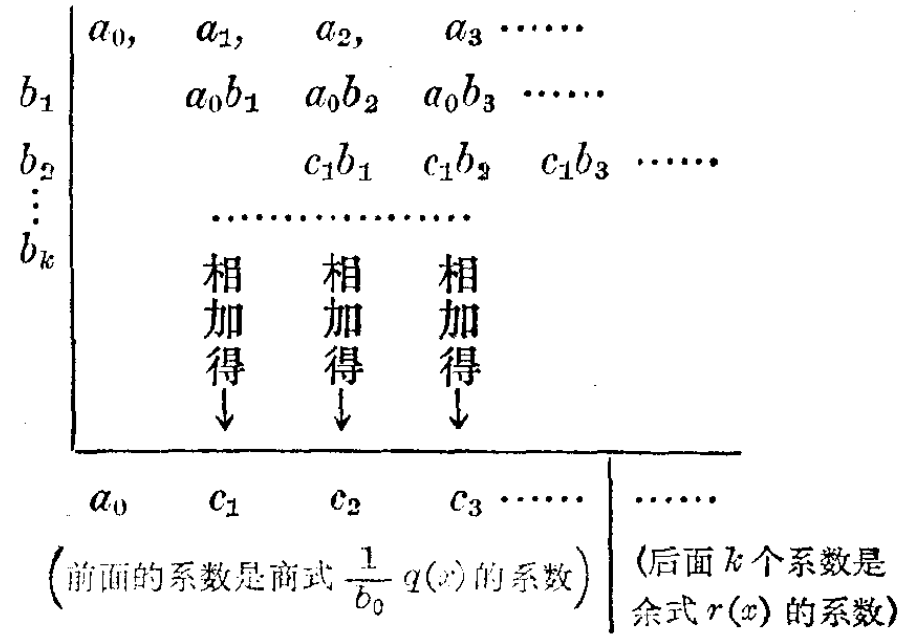
当 $g(x)$ 的系数不是 1 时，我们可以改用 $\frac{1}{b_0}\cdot g(x)$，其中 b_0 是 $g(x)$ 的首项系数. 然后把这样所求得的商式乘以 $\frac{1}{b_0}$，就得出所求的商式和余式.

总结上面的讨论，我们可以把"综合除法"的计算程序简要地叙述如下：

1° 把被除式 $f(x)$ 逐次的系数降次横排，要注意把缺次的地方补上一个 0!

2° 把除式 $g(x)$ 除以它的首项系数，这样就改为首项系数为 1 的新的除式，然后把新除式第二项开始的系数变号纵列在左侧(设 $g(x)=x^k-b_1x^{k-1}-b_2x^{k-2}\cdots\cdots b_k$)

3° 在留有足够的空间的下方划一横线，如下图所示：



[练习]：

试用原先未经简化的除法求各题的商式和余式，然后再改用综合除法来做，并比较两者的异同.

(1) $f(x)=4x^4-3x^3+2x^2-x$, $g(x)=x-2$.

(2) $f(x)=x^4-x^2+3x+2$, $g(x)=x+2$.

(3) $f(x)=8x^5-12x^3+x^2+8x-10$, $g(x)=x^2-2x+3$.

(4) $f(x)=8x^4+4x^3-12x^2+16$, $g(x)=2x^2+2x-5$.

(5) $f(x)=x^6-x^3+3x-7$, $g(x)=x^3-x+1$.

(6) $f(x)=x^6-2x^3+8x-5$, $g(x)=6x^5-6x^2+8$.

[注意]：单元多项式的除法的基本原理在于有效利用"降次排列"，这样我们才能够逐步减去 $g(x)$ 的适当"倍式"来减低次数，一直到所余的多项式的次数低于 $g(x)$ 的次数为止. 同学们可以想一想，在多元多项式的情形(例如二元多项式)就不再存在降次排列(例如一般来说，x 降次时，y 就可能升次，总之是无法同时做到 x, y 都降次排列的). 所以多元多项式是没有除法的！换句话说，除法只是单元多项式所特有的一种运算！

第三节　余式定理和辗转相除

单元多项式的除法的原理是相当简单的，但是计算程序略为有些烦(假如熟习了用综合除法，也就不那么烦了). 在这一节我们将讨论单元多项式的"除法"的两个重要推论——"余式定理"和辗转相除.

一、余式定理及其推论

对于一个给定的多项式 $f(x)$，当我们以一个数值 a 去代

替其中"不定元" x 的位置时，就得到一个同样的 a 的算式，按照这个算式直接加以计算即得出一个值，叫做多项式 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的值，并用 $f(a)$ 表示它.

例如：(1) 设 $f(x)=x^2-3x+2$ 则当 $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \sqrt{2}$，$a$ 的值如下：

$$f(-2)=(-2)^2-3\cdot(-2)+2=4+6+2=12,$$

$$f(-1)=(-1)^2-3\cdot(-1)+2=6,$$

$$f(0)=0^2-3\cdot 0+2=2,$$

$$f(1)=1^2-3\cdot 1+2=0,$$

$$f(2)=2^2-3\cdot 2+2=0,$$

$$f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2-3\cdot\sqrt{2}+2=4-3\sqrt{2},$$

$$f(a)=a^2-3a+2.$$

(2) 设 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)=(x^2-1)(x-2)$

$$=x^3-2x^2-x+2,$$

则当 $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 时上述多项式的值如下：

$$f(-2)=(-2+1)(-2-1)(-2-2)$$

$$=(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)=-12,$$

$$f(-1)=(-1+1)(-1-1)(-1-2)$$

$$=0\cdot(-2)\cdot(-3)=0,$$

$$f(0)=0^3-2\cdot 0^2-0+2=2,$$

$$f(1)=(1+1)(1-1)(1-2)=2\cdot 0\cdot(-1)=0,$$

$$f(2)=(2+1)(2-1)(2-2)=3\cdot 1\cdot 0=0,$$

$$f(3)=(3+1)(3-1)(3-2)=4\cdot 2\cdot 1=8.$$

从上面这两个简单的例子，可以看出一个简单的事实：

当 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)$ 时，$f(a)=0$ 即 a 是 $f(x)$ 的一个根，或 a 是 $f(x)=0$ 的一个解.

反过来，设 $f(a)=0$ 时，$f(x)$ 是不是一定含有 $(x-a)$ 这个因式呢？回答也是肯定的！这就是这一节所要讨论的余式定理.

余式定理：若以 $(x-a)$ 去除 $f(x)$，其余式是常数 $f(a)$，并有商式 $q(x)$，即 $f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a)$.

[证明]：由单元多项式的除法，用 $(x-a)$ 去除 $f(x)$，即可求得商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$，满足下列条件：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+r(x),$$

其中 $r(x)$ 的次数要比 $(x-a)$ 的次数低，这里的 $(x-a)$ 是一次的，所以 $r(x)$ 肯定是一个常数. 即：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+R \quad (R \text{ 中不含 } x),$$

以 $x=a$ 代入上式两边，即得：

$$f(a)=q(a)\cdot(a-a)+R \quad [R \text{ 是一个不含 } x \text{ 的待定常数}]$$
$$=q(a)\cdot 0+R=R.$$

这就说明了余式 $R=f(a)$，即 $f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a)$.

余式定理是十分简单的定理，但是它说明了多项式的根和多项式因子分解式之间的重要关系. 下面是几个重要的推论.

推论 1：$f(a)=0$ 的必要充分条件是 $(x-a)$ 能整除 $f(x)$，即 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)$.

推论 2：设 a，b 是 $f(x)$ 二个相异的根，则 $(x-a)\cdot(x-b)$ 能整除 $f(x)$.

[说明]：由推论 1 和 $f(a)=0$，即得：

$$f(x)=q_1(x)\cdot(x-a),$$

以 $x=b$ 代入上式，再由 $f(b)=0$，即得：

$$0=f(b)=q_1(b)\cdot(b-a),$$

因为 b、a 是不同的，即 $(b-a)\neq 0$，所以 $q_1(b)=0$，再对多项式 $q_2(x)$ 用推论 1，即 $q_1(x)=q_2(x)\cdot(x-b)$，代入原式，即得所要证的：

$$f(x)=q_2(x)\cdot(x-b)(x-a).$$

重复运用上面的说明，不难看出当 $f(x)$ 有 k 个相异的根 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$[1] 则 $f(x)$ 能被 $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_k)$ 这 k 次多项式所整除，即若 $\{a_1, \cdots, a_k\}$ 是 k 个相异的数，则：

$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_k)=0$ 或者说 $(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdots(x-a_k)$ 能整除 $f(x)$.

推论 3：一个 n 次多项式，最多只有 n 个不同的根.

[说明]：我们只要说明当 $f(x)$ 已经有 n 个不同的根 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 时，则 $f(x)$ 不可能再有任何其他的根. 因为由上面的说明可知：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

然后再用多项式相乘，其次数相加这个事实，由于等式右边的次数必须等于左边 $f(x)$ 的次数. 即得 $q(x)$ 是一个 0 次多项式. 换句话说，$q(x)$ 肯定是一个非零的常数 C，即：

$$f(x)=C\cdot(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

---

1) 我们用脚码 1, 2, …, k 来标明 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 是 k 个不同的根，这是一种常用的符号，叫做下标.

设 b 是一个与 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 这几个根不同的任意数，则 $f(b)=C\cdot(b-a_1)(b-a_2)\cdots(b-a_n)$ 是 $(n+1)$ 个不等于零的数的乘积，所以不可能等于 0，这也就说明了 $f(x)$ 不可能再有其他根!

推论 4：一个 n 次多项式 $f(x)$ 被它在 $(n+1)$ 个不同的数 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}\}$ 相应的值 $\{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_{n+1})\}$ 所唯一确定.

[说明]：我们只要说明两个 n 次多项式 $f(x)$，$g(x)$，当它们满足：

$f(a_1)=g(a_1)$，$f(a_2)=g(a_2)$，$\cdots$，$f(a_n)=g(a_n)$，$f(a_{n+1})=g(a_{n+1})$ 时，它们必须是同一个多项式，即 $f(x)-g(x)\equiv 0$ (恒等于零)．要不然，$[f(x)-g(x)]$ 就是一个至多是 n 次的多项式，它也有 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\}$ 这样 $(n+1)$ 个根，这是不可能的!

[例 1]：设一个二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根是 r_1，r_2，则 $r_1+r_2=-\dfrac{b}{a}$，$r_1\cdot r_2=\dfrac{c}{a}$.

[说明]：由推论 2，

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\cdot(x-r_1)\cdot(x-r_2) \\ &= ax^2-a(r_1+r_2)x+a\cdot r_1\cdot r_2. \end{aligned}$$

比较两边的系数即得 $-a(r_1+r_2)=b$，$a\cdot r_1 r_2=c$，(所谓两个多项式相等，就是它们对应项的系数相同.)所以

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a},\quad r_1 r_2=\frac{c}{a}.$$

[例 2]：设一个三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a\neq 0)$

的三个根是 r_1, r_2, r_3, 则:

$$r_1+r_2+r_3=-\frac{b}{a},$$

$$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=\frac{c}{a},$$

$$r_1r_2r_3=-\frac{d}{a}.$$

[说明]: 同样,由推论 2 可得:

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&=a\cdot(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\\&=ax^3-a(r_1+r_2+r_3)x^2\\&\quad+a(r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3)x-ar_1r_2r_3,\end{aligned}$$

比较上述多项式等式两边的对应项系数, 即可得上述所要说明的结果.

[例 3]: 试求一个二次多项式它在 0, 1, 2 的值分别是 0, 0, 1.

[解]: 由推论 2 得知所求的多项式应该含有 $x(x-1)$ 这个因式,所以 $f(x)=kx(x-1)$,其中 k 是待定系数.

把 $x=2$ 代入上式,由假设 $f(2)=1$,即得

$$1=f(2)=k\cdot 2(2-1)=2k, \quad 或 \quad k=\frac{1}{2},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-1).$$

[例 4]: 试求一个三次多项式 $g(x)$, 它在 0, 1, 2, 3 的值分别是 0, 0, 1, 5.

[解]: 由推论 2 得知,所求的多项式应该含有 $x(x-1)$ 这个因式,所以 $f(x)=x\cdot(x-1)\cdot q(x)$. $q(x)$ 是一个待求的一次

多项式，亦即 $f(x)=x(x-1)\cdot(Ax+B)$ 其中 A, B 是待求的未定系数. 然后再利用已知条件 $f(2)=1$, $f(3)=5$, 即得:

$$\begin{cases}1=f(2)=2\cdot(2-1)(A\cdot 2+B)=4\cdot A+2\cdot B,\\ 5=f(3)=3\cdot(3-1)\cdot(A\cdot 3+B)=18A+6B.\end{cases}$$

从上面 A, B 的二元一次联立方程式，就可以解得 $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{6}$, 所以 $f(x)=x(x-1)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}x\cdot(x-1)\cdot(2x-1)$.

二、整数因子分解

在讨论多项式的因式和倍式之前，让我们先来复习一下小学里学过的整数因子分解的情形.

1. 倍数、因数、质数

定义：设 a、b 是两个给定整数，假如 b 恰好能整除 a, 即 $a=q\cdot b$, 则称 a 为 b 的倍数，反过来 b 为 a 的因数，通常用符号 b/a 来表示这种关系，读成"b 整除 a".

任何整数 a 当然能被 ± 1 和 $\pm a$ 整除. 即 $a=(\pm 1)\cdot(\pm a)$, 所以任何整数 a 至少有 ± 1, $\pm a$, 这四个显然的因数.

定义：一个大于 1 的整数 p, 假如除了 ± 1, $\pm p$ 这四个显然的因数之外，不再含有任何其他因数，则称 p 为一个"质数"(或称为素数).

[例 1]：{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 47} 都是质数，它们是少于 50 的质数所成的集合.

[例 2]：$60=2\cdot2\cdot3\cdot5$，所以它的所有因数所成的集合如下：$\{\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm(2\cdot2),\ \pm5,\ \pm(2\cdot5),\ \pm(2\cdot2\cdot3),\ \pm(3\cdot5),\ \pm(2\cdot2\cdot5),\ \pm(2\cdot3\cdot5),\ \pm60\}$.

定义：同时能整除 a, b 的数叫做 a, b 的公因数. a, b 的所有公因数中的最大者叫做 a, b 的"最大公因数"[1]，通常用小括号 (a, b) 来表示. 同样，一个能同时整除好几个数 a, b, c, … 的数叫做 a, b, c, … 的公因数. 其中最大者叫做 a, b, c, … 这几个数的最大公因数，用小括号 $(a, b, c, \cdots)$ 表示它.

定义：一个能同时被 a, b 整除的数叫做 a, b 的公倍数. a, b 的正的公倍数中的最小者叫做 a, b 的"最小公倍数"，通常用中括号 $[a, b]$ 表示它. 同样地也可以定义好几个数 a, b, c, … 的公倍数和最小公倍数，用中括号 $[a, b, c, \cdots]$ 来表示它们的最小公倍数.

[例子]：最大公因数：$(144, 60)=12$, $(144, 25)=1$；最小公倍数：$[144, 60]=720$, $[144, 25]=144\cdot25=3600$.

[练习]：

(1) 写下所有小于 100 的质数.

(2) 设 d 是 a, b 的一个公因数，则 d 就能整除所有写成 $(ma+nb)$ 这种形式的整数.

(3) 试求下述各对整数的最大公因数和最小公倍数：

(i) 625, 1000,　　(ii) 739, 252,

(iii) 1551, 23232.

1) "最大公因数"亦称"最大公约数".

(4) 试说明 $a_k\cdot 10^k+a_{k-1}\cdot 10^{k-1}+a_{k-2}\cdot 10^{k-2}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$ 能够被 3 整除的充分必要条件是 $(a_k+a_{k-1}+a_{k-2}+\cdots+a_1+a_0)$ 可以被 3 整除.

2. 辗转相除求最大公因子

对于两个给定的整数 a, b, 去求它们的最大公因数是一个经常遇到的问题. 例如要把一个分数 $\frac{a}{b}$ 约分,我们所要做的就是上、下同除以 a, b 的最大公因数. 在 a, b 都是很小的时候, 例如 $a=12$, $b=10$ 或者 $a=144$, $b=60$. a, b 的所有的因数都是一目了然的. 它们所有的公因数为 $(12, 10)=2$, $(144, 60)=12$. 但是当 a, b 比较大的时候,它们的最大公因数可就不容易看得出了. 例如: $a=3887$, $b=2231$,它们的最大公因数是什么? 是不太容易看得出来的. 能不能找出一个普遍可行的"算法", 按一定步骤就可算出 a, b 的最大公因数 (a, b) 呢? 这就得分析一下了:

(i) 因数是倍数的相对名词,因子分解可以说是乘法的一种"逆运算". 所以"因子分解"和"除法"之间, 应该有相当密切的关联, 设 b 比 a 小, 我们用除法可以求得一个商数 q_1 和一个余数 r_1 使得:

$$a=q_1\cdot b+r_1,\quad 0\leqslant r_1<b.$$

当 $r_1=0$ 这个特殊情形时, b 本身就是一个 a, b 的公因数,所以显然有 $(a, b)=b$.

(ii) 在一般 $r_1\neq 0$ 的情形,从上述 a、b、q_1、r_1 之间的关系式, 我们可以看出下述事实,即: 因为 $r_1=a+(-q_1)\cdot b$, 由

分配律可以看出来，任何能同时整除 a, b 的公因数也一定能整除 r_1，换句话说，任何 a, b 的公因数也一定是 b, r_1 的公因数.

反之，由 $a=q_1\cdot b+r_1$ 同样的道理说明了任何 b, r_1 的公因数也一定是 a, b 的公因数!

总结上述两点，a, b 的公因数和 b, r_1 的公因数其实是由同一组数所成的集合，所以：$(a, b)=(b, r_1)$.

上面的分析说明了 $(a, b)=(b, r_1)$. 实质上，在求最大公因数的问题中，把一个比 b 大的数 a，换成了一个比 b 小的 r_1. 假如我们嫌 (b, r_1) 还是太大的话，当然还可以用 r_1 去除 b 而得出除式 $b=q_2\cdot r_1+r_2$, $0\leq r_2<r_1$.

同样的道理有 $(a, b)=(b, r_1)=(r_1, r_2)$. 这样就又把一个比 r_1 大的 b 换成比 r_1 小的 r_2. 这样逐步用除法把所要求的最大公因数的一对数逐步换成愈来愈小，自然就可以求得 (a, b) 了. 这也就是我们如何克服“原先 a, b 太大了，看不出它们的最大公因数”这个困难的办法. 下面让我们就以 $a=3887$, $b=2231$，来说明上述办法：

[例 1]：$a=3887$, $b=2231$.

$$3887=1\cdot 2231+1656,$$
$$2231=1\cdot 1656+575,$$
$$1656=2\cdot 575+506,$$
$$575=1\cdot 506+69,$$
$$506=7\cdot 69+23,$$
$$69=3\cdot 23,$$

所以　　$(a,\ b)$[1] $=(3887,\ 2231)=(2231,\ 1656)$

$=(1656,\ 575)=(575,\ 506)$

$=(506,\ 69)=(69,\ 23)=23.$

以上这个算法叫做辗转相除，是求最大公因子的好方法．它不但提供了一个有效的算法，而且逐次除法所求得的除式也提供了 a, b 和它们的最大公因数 $r_k=(a,b)$ 之间的一串关系式，例如以 $k=3$ 的情形来看（即 $(a,\ b)=r_3$）我们就可以先把：

$$\begin{cases} a=q_1b+r_1, \\ b=q_2r_1+r_2, \\ r_1=q_3\cdot r_2+r_3,\ \ r_3=(a,\ b). \end{cases}$$

这三个关系式改写成：

$$r_1=a-q_1b,\ \ r_2=b-q_2\cdot r_1,\ \ r_3=r_1-q_3r_2,$$

将第一式的 r_1 表法代入第二式得：

$$r_2=b-q_2(a-q_1b)=(-q_2)\cdot a+(1+q_2q_1)\cdot b.$$

将第一式的 r_1 表法和上述 r_2 的表法代入第三式，即得：

$$(a,\ b)=r_3=(a-q_1b)-q_3\cdot\{(-q_2)\cdot a+(1+q_2q_1)\cdot b\}$$

$$=(1+q_3\cdot q_2)\cdot a+[-q_1-q_3\cdot(1+q_2q_1)]\cdot b.$$

这样就得到一个 $(a,\ b)$ 和 a, b 之间的直接关联，它是[2]：

$$(a,\ b)=m\cdot a+n\cdot b.$$

由于上面这样的最大公因数 $(a,\ b)$ 和 a, b 之间的关系式是具有基本重要性的，我们把它叙述为一个定理：

---

1) 在往后实际计算时，当然不必象上面这样写一长串等号，反正最后一个能够整除前一个余数的那个余数，就是所要去求的 a, b 最大公因数．

2) 式中的 m, n 并不唯一，这里着重讲这种形式的关系的存在性！

定理 1：a, b 的最大公因数 (a, b) 和 a, b 之间存在有下述形式的关系：

$$(a, b) = m \cdot a + n \cdot b,$$

其中 m、n 是适当的正、负整数(一正、一负)．

定义：当 $(a, b) = 1$ 时，称 a, b 为互素(或互质)．

定理 2：设 $(a, b) = 1$(即互素)，而且 $a/b \cdot c$ 则 a/c．

[证明]：由定理 1 和假设 $(a, b) = 1$，得知存在着适当的 m、n，使得 $1 = m \cdot a + n \cdot b$，两边同乘以 c，即得：

$$c = m \cdot c \cdot a + n \cdot b \cdot c.$$

再由假设 $a/b \cdot c$，即 $b \cdot c$ 可以表成 a 的倍数，$b \cdot c = k \cdot a$，代入上式，就有：

$$c = m \cdot c \cdot a + n \cdot k \cdot a = (mc + nk) \cdot a \quad \text{即} \quad a/c.$$

[练习]：

(1) 试用辗转相除来求出下列各组整数的最大公因子：

(i) $a = 377$, $b = 299$.

(ii) $a = 629$, $b = 259$.

(iii) $a = 629$, $b = 259$, $c = 1073$.

(iv) $a = 1073$, $b = 377$.

(2) 试将上述各组数的最大公因数，按下述表示法来表示：

$$(a, b) = m \cdot a + n \cdot b,$$

或

$$(a, b, c) = m \cdot a + n \cdot b + k \cdot c.$$

(3) 设 d 是 a_1, a_2, a_3 的一个正的公因数，而且它又可以

表成 $n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3$，(即存在适当的 n_1, n_2, n_3 使得 $d=n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3$) 则 d 就是 a_1, a_2, a_3 的最大公因数.

(4) 试说明 $((a, b), c)=(a, b, c)=(a, (b, c))$.

(5) 试把(3), (4)的事实推广到任意有限个数的情形，例如先把它们推广到4个或5个数的情形.

(6) 试说明 $(a, b)\cdot[a, b]=a\cdot b$，亦即 $[a, b]=\dfrac{a\cdot b}{(a, b)}$，并且想一想它和第一章思考与习题的(12)题：$\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)-\#(A\cap B)$ 在形式上有何"相似"之处?

(7) 参考第一章末(13)题的形式，试求一个由 a, b, c, (a, b), (b, c), (a, c), (a, b, c) 来表达 $[a, b, c]$ 的公式.

三、单元多项式因式分解

单元多项式也具有和整数除法极相似的除法(注意：多元多项式就不再具有这种除法).所以单元多项式在因式分解上的讨论，可以按照整数因子分解完全同样的形式进行.

1. 倍式与因式

定义：设 $f(x)$, $g(x)$ 是两个给定多项式，假如 $g(x)$ 恰好能整除 $f(x)$，即 $f(x)=q(x)\cdot g(x)$，则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的倍式，相对地 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的因式. 把一个多项式 $f(x)$ 分解成它的几个因式的乘积，叫做对 $f(x)$ 的一种"因式分解"(因式分解也可以想成是乘法的另一种"逆运算". 由整数的因子分解的讨论，同学们不难想到两者之间也会有同样的密切关系).

(1) $f(x)$ 具有 $(x-a)$ 这个因式的必要充分条件是 $f(a)=0$.

(2) 当 $a\neq b$ 时, $f(x)$ 具有 $(x-a)\cdot(x-b)$ 这个二次因式的条件是 $f(a)=0$, $f(b)=0$.

2. 公因式, 最高公因式

定义: 设 $d(x)$ 同时是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的因式, 则称 $d(x)$ 为 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式. $f(x)$, $g(x)$ 的所有公因式中次数最高者, 叫做 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式. 当 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式是 0 次时, 即是一个非零常数时, 称 $f(x)$, $g(x)$ 为互为质数.

事实上, $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式并不是唯一的, 但是它们都彼此只相差一个非零常数倍.

由上述定义, 我们可以仿照前面对于整数因子分解的讨论, 同样地说明下述基本定理.

3. 单元多项式因式分解基本定理

(i) 可以用单元多项式的辗转相除来求出两个给定多项式 $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式.

(ii) $f(x)$, $g(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 也可以用下述形式表达, 即存在适当的两个多项式 $m(x)$, $n(x)$ 使得:

$$d(x)=m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x).$$

(iii) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素, 而且 $f(x)$ 能整除 $g(x)\cdot k(x)$, 则 $f(x)$ 必定要能整除 $k(x)$.

上述三点我们不必再"重复"说明, 因为它们的理由是和整数的情形完全同样的.

推论：两个给定单元多项式 $f(x)$，$g(x)$ 具有一个非零次的最高公因式（即 $f(x)$，$g(x)$ 不是互素）的必要充分条件是存在两个适当的非零多项式 $a(x)$，$b(x)$ 满足下列性质：

（i） $a(x)\cdot f(x)+b(x)\cdot g(x)=0$（即是零多项式）；

（ii） $\deg(a(x))<\deg(g(x))$，$\deg(b(x))<\deg(f(x))$.

[说明]：设 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的最高公因式，$\deg(d(x))>0$，换句话说：

$$f(x)=d(x)\cdot f_1(x),$$

$$\deg(f_1(x))=\deg(f(x))-\deg(d(x))<\deg(f(x)),$$

$$g(x)=d(x)\cdot g_1(x),$$

$$\deg(g_1(x))=\deg(g(x))-\deg(d(x))<\deg(g(x)).$$

所以，我们可以取 $a(x)=g_1(x)$，$b(x)=-f_1(x)$，

即
$$g_1(x)\cdot d(x)\cdot f_1(x)+(-f_1(x))\cdot d(x)\cdot g_1(x)$$
$$=d(x)\cdot[g_1(x)\cdot f_1(x)-f_1(x)\cdot g_1(x)]=0.$$

反之，设存在上述两个非零多项式 $a(x)$ 和 $b(x)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 不可能互素！因为假如 $f(x)$，$g(x)$ 互素，则由：

$a(x)\cdot f(x)=-b(x)\cdot g(x)$ 即 $f(x)$ 整除 $b(x)\cdot g(x)$，$g(x)$ 整除 $a(x)\cdot f(x)$ 和根据上述基本定理的 3°，则：

$f(x)$ 必定要能整除 $b(x)$，$g(x)$ 也必定要能整除 $a(x)$. 所以，不可能同时满足 $\deg(b(x))<\deg(f(x))$ 和 $\deg(a(x))<\deg(g(x))$. 这也就说明了 $f(x)$，$g(x)$ 不能是互素的.

[思考与习题]：

1. 当我们用 $(x-a)$ 去除一个给定的 $f(x)$，其余式是 $f(a)$（这也就是余式定理），即 $f(x)=q_1(x)\cdot(x-a)+f(a)$.

假如我们再用 $(x-a)$ 去除 $q_1(x)$，则得 $q_1(x)=q_2(x)\cdot(x-a)+q_1(a)$. 代入上式即得：

$$f(x)=q_2(x)\cdot(x-a)^2+q_1(a)\cdot(x-a)+f(a).$$

以此类推，我们也可以用 $(x-a)$ 逐步去除商式 $q_1(x)$，$q_2(x)\cdots$ 等，把 $f(x)$ 表示成下述形式，即：

$$f(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+C_3(x-a)^3+\cdots+C_n(x-a)^n,$$

其中常数 C_0, C_1, C_2, $\cdots$, C_n 可以由 $f(x)$ 和 a，通过上述逐步除法算出.

(1) 对于下述所给的 $f(x)$ 和 a，试求上述形式的表法：

(i) $f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$, $a=1$;

(ii) $f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$, $a=3$;

(iii) $f(x)=x^4$, $a=a$;

(iv) $f(x)=3x^4+5x^2-3$, $a=3$.

(2) 我们也可以令 $(x-a)=t$，则 $x=(t+a)$，把它代入 $f(x)$，即得 $f(t+a)$. 例如 $f(x)=x^4$，则 $f(t+a)=(t+a)^4$，当 $f(x)=2x^3-3x^2+5x-7$，$a=1$ 时，则 $f(t+1)=2(t+1)^3-3(t+1)^2+5(t+1)-7$，所以我们也可以通过展开、集项来求得上式，试用展开来计算(1)中的4个情形.

2. 在我们刚开始由算术进到代数时，我们最先遇到的是“代数方程式”(即象 $f(x)=0$ 的这种表式，其中的符号 x 是“未知数”). 到了第三章，为了“解代数方程式”，我们引进“不定元”这种纯粹形式化的符号，系统地讨论由不定元所产生的代数式的运算，这也就是本章所讨论的多项式的四则运算. 在

这儿我们要特别提醒同学一下，在我们所采用的符号体系中：

（i）当我们写 $f(x)$，或 $x^3-5x^2-\sqrt{2}x+10$ 时，它们所表示的是多项式，其中所含的符号 x 是一个“不定元”.

（ii）当我们写 $f(x)=0$，或 $x^3-5x^2-\sqrt{2}x+10=0$ 这种类型的表达式时，我们的意思是方程式 $f(x)=0$ 或 $x^3-5x^2-\sqrt{2}x+10=0$，其中所含的符号 x 就“变成”一个“未知数”了！

多项式和方程式，不定元和未知数是两种不同的东西！但是它们所用的符号差别很小，所以同学们在初学时千万要注意区别它们，在读到、用到时，每次都要弄明白它是多项式呢？还是方程式？其中的符号 x, g, … 是当做不定元呢！还是未知数？也许同学们会问：“那么为什么不改用差别较大的一种符号体系，这样岂不是就更容易分辨了？”我们采用上述差别很小的符号体系是有它的好处的，因为当我们在解方程式时，我们所用的基本原理是运用数系运算法则．所以我们所作的计算，主要是多项式运算．再者，只要同学们初学时小心些，多加注意，自然就可以分辨得清楚，也就更能体会这样一套符号体系的方便之处了.

其实，在数学中，符号 x, y, z 等还经常用来表示“变数”，譬如我们用 x 表示一个正方形的边长，y 表示它的面积，则正方形的面积公式是 $y=x^2$，在上述公式中 x 可以取任意正实数作为它的“值”，y 是可以用上述公式由 x 算出来的值．当正方形的大小改变时，x 在所有正实数这个领域（亦即集合）中变动，而 y 则随着 x 的值的变动，以一定的方式跟随着变动.

自然界的事物总是变动的，其中所含的各种量往往是可以改变其"值"的量，简称"变量". 而一个事物的内部关联又使得某些变量之间存在着一些给定的"关系". 例如一个正方形的边长和面积是它的两个变量，它们之间的关系就是上述求面积的公式. 为了有效处理这样的"变量问题"，我们以"变数"符号表示"变量"，用变数之间的关系式（例如$y=x^2$）来描述变量之间的给定关系，通常叫做"函数"关系. 例如$y=x^2$，$y=5x+3$, $y=(x+5)^3$, ……等. 在上面这几个例子中，我们用"算式"直截了当地说明如何由x的值去计算y的相应值. 这种简单的函数叫做"多项式函数"，我们将在第三册再来对多项式函数的性质作有系统的讨论.

3. 试用辗转相除法，求下列各对多项式的最高公因式：

(1) $x^6+x^4+x^3+x^2+1$, x^4+x^2+1.

(2) x^3+x^2-5x+2, $x^4+4x^3+5x^2+4x+1$,

(3) x^3+3x^2-5x+7, $2x^4+7x^3-6x^2+10$.

(4) $2x^3-x^2+3x-5$, x^2+3x-1.

4. 在单元多项式的基本定理中，已讲到，若$f(x)$, $g(x)$的最高公因式为$d(x)$，则可以用$d(x)=m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x)$这种形式来表达. 这种表达式的一个实际求法就是由辗转相除来求最高公因式的过程. 试对上题中的4对多项式，用上述办法去求得这种表法，即：

$$dx=m(x)\cdot f(x)+n(x)\cdot g(x)$$

中的一组$m(x)$和$n(x)$.

第四章　初步应用与展望

在第一章中我们对于数系的结构，全面地做了一番温故知新的分析与总结．掌握了有理数系的运算法则，如交换律、结合律、分配律、指数定则等．在第二章中，我们初步地用一些简单的实例来说明代数学的基本想法——有系统地运用数系法则去解决代数问题．具体的做法是用"未知数"符号如 x、y、z 等来代表问题中待解的未知量，然后把问题中的数量关系表达成含有未知数符号的算式，叫做代数方程式．用代数方程式来解答问题的关键在于解代数方程式，而解代数方程式的原理又在于灵活运用数系通性，例如第二章中所讨论的分配率和去括号，集项，加法可逆性和移项，乘法可逆性和搬因式以及配方法解一元二次方程式等等．为了更有系统地运用运算法则，我们在第三章中把解代数方程式中所涉及的运算形式化，引进不定元这个概念："不定元"就是在运算上具有数系运算通性的符号．由"不定元"和"系数"用加、乘所组合而成的算式叫做多项式．进行多项式加、乘运算的要点就在于对不定元灵活地运用数系运算法则．对单元多项式这个特殊的情形，我们还有一个类似于"整数除法"的"单元多项式除法"．除法和因子分解，是乘法的两种逆运算，两者之间具有密切的关联，而且各有所长也各有其重要性．概括地来说："因

子分解”是乘法在概念上的逆运算(例如 $f(x)=g(x)\cdot h(x)$，若由 $g(x)$，$h(x)$ 去求 $f(x)$，则叫做乘法；反过来由 $f(x)$ 求 $g(x)$、$h(x)$，就叫做因子分解)．但是，通常没有一种固定可行的算法可以求出一个给定多项式的因子分解；另一方面，除法本身就是一个直截了当的算法．所以很自然的，我们在第三章第三节中以除法为工具说明了因子分解的基本性质．例如用辗转相除法，能求得任给两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式．同学们切勿因为它算起有些较麻烦而忽略了它！所以，千万不能偷懒，一定要多做几个练习，认真地学会这个算法，往后还要经常用到它的．

在第三章第三节中，我们还讨论另一个单元多项式除法的重要推论——余式定理．余式定理的证明是十分简单明了的，它也是非常重要和有用的基本定理．它说明了方程式的根(亦即解)和因式分解的关系；它也说明了一个 n 次方程式 $f(x)=0$，至多只有 n 个不同的解；它还说明了一个 n 次多项式函数 $y=f(x)$ 可以由自变量 x 的 $(n+1)$ 个不同的数值代入后所得的“函数值”来确定，下面我们简单地说明它的一些应用．

第一节　求和公式与插入法

一、求和公式

前面的讨论说明了“多项式的运算”是由于解代数方程式

的需要而产生的，所以它的第一个用场当然就是用来解代数方程式．为了换个口味，下面介绍它的另一种用处，以便开扩一下同学们的眼界．

[例 1]：讲一个小故事：当年，德国数学家高斯还是一个小学生，他在课堂上老爱发问．有一天，老师给学生出了一个算术题目：

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+100=?$$

老师估计学生一定要算上好一阵子哩．没料到高斯很快就交卷了，他说："老师，我已经算好了，答案是 5050"．老师带着有些难以置信的神态去查看一下他的算法，发现他所用的算法如下：

他把 1 到 100 这 100 个数配成 50 对，即：$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，… 每对的和都是 101，所以总和是 $50\times101=5050$．

当然，这种等差级数求和法，老师是知道的．但是对于一个初学加、乘运算的小朋友，就已经能灵活运用数系运算法则，怎么能不叫他惊喜不已呢？往后他对高斯也就更加悉心，更注意因材施教了．后来高斯在数学上取得了重大的成就．

把上面这个算法推广，就得出下列求和公式：

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1),$$

$$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+a+(n-1)d$$

$$=\frac{1}{2}n\cdot[2a+(n-1)d].$$

[说明]：令上述等差级数的和为 S，则由

$$
\begin{array}{rl}
 & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]=S \\
+) & \underline{[a+(n-1)d]+[a+(n-2)d]+\cdots+a \qquad\qquad =S} \\
 & [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\cdots+[2a+(n-1)d]=2S.
\end{array}
$$

将等式左边展开、集项，则可得到：

$$n\cdot[2a+(n-1)d]=2S,$$

所以，

$$S=\frac{1}{2}n\cdot[2a+(n-1)d].$$

此公式叫做等差级数求和公式.

[例 2]：上述级数的任意相连两项的差，都等于 d（叫做公差），所以这种级数叫做等差级数. 而下列级数任意相连两项的“比”值，都是 r（叫做公比）：

$$a+a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots\cdots+a\cdot r^{(n-1)},$$

这类级数叫做等比级数.

设 S 是等比级数的总和，我们不难由多项式的运算看出：

$$
\begin{array}{rl}
 & S=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\
-) & \underline{\quad nS=\quad ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n} \\
 & (1-n)S=a+0+0+0\qquad +0\qquad -ar^n=a\cdot(1-r^n).
\end{array}
$$

不难看出，上式当 $r=1$ 时，上式两边都是 0，故：

$$a+a\cdot r+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=n\cdot a;$$

当 $r\neq 1$ 时，两边同除以 $(1-r)$ 即得：

$$S=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)},\ (r\neq 1),$$

此公式叫做等比级数求和公式.

一般来说，代数学的基本想法是运用运算法则对各种代数问题寻求一个统一的、普遍适用的解法. 前面用代数方程

式去求解未知量，只是其中一种常用的类型而已。另外一种常用的类型就是对于某些问题求出一般性的"公式"(例如上面所举例的两个求和公式)。现在让我们再举几个稍为复杂一些的例子来分析一下：

[例 3][1]：$0+1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=?$

[例 4]：$0+1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=?$

[例 5]：$0+1^4+2^4+3^4+\cdots+(n-1)^4=?$

[例 6]：设 $f(x)$ 是一个给定的 k 次多项式(例如 $f(x)=x$, x^2, x^3, x^4 或 (x^3+x^2-5x+1) 等等)，问

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=?$$

[分析]：

(i) 设 $0+1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=S(n)$ (即 n 项的和)。那么，$S(0)=0$, $S(1)=0$, $S(2)=1$, $S(2)=5$, …, $S(n+1)-S(n)=n^2$.

公式的可能形式中最简单的就是一个关于 n 的"多项式"。同样我们也可以求一个多项式 $S(x)$，使它满足下列两个性质，即：

$$S(x+1)-S(x)=x^2,\quad S(0)=0.$$

反之，假如我们业已求得具有上述两个性质的多项式 $S(x)$，则 $S(i+1)-S(i)=i^2$ 对于任何整数 i 都成立，所以：

$$\begin{aligned}S(n)=S(n)-S(0)&=S(0)+[S(1)-S(0)]\\&+[S(2)-S(1)]+[S(3)-S(2)]\\&+[S(n)-S(n-1)]=0+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2.\end{aligned}$$

1) 这个问题在我国古代与古希腊就已受到重视，并且有重要的应用。

换句话说 $S(n)$ 也就是我们所要求的求和公式.

(ii) 一般来说，设 $f(x)$ 是一个给定的 k 次多项式，令：

$$f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n-1)=S_f(n),$$

则所要求的公式也就是另一个多项式 $S_f(x)$，它满足下列两个性质：

$$S_f(0)=0,\quad S_f(x+1)-S_f(x)=f(x).$$

(iii) 当 $f(x)$ 是 k 次时，上述 $S_f(x)$ 究竟应该是几次的呢？

不难看出 $(x+1)^m$ 的展开式中的最高次项是 x^m，第二项是 mx^{m-1}，所以，$(x+1)^m-x^m=mx^{m-1}+\cdots$ 是一个 $(m-1)$ 次多项式，从上面这个事实，就可以说明下述事实，即：

当 $g(x)$ 是一个 $k+1$ 次多项式时，$g(x+1)-g(x)$ 是一个 k 次多项式[1].

所以上面所要求的多项式 $S_f(x)$ 应该是 $(k+1)$ 次的.

[例 2 之解]：从上面的分析，我们所要求的公式是一个 3 次多项式，而且 $S(0)=0$，$S(1)=0$，$S(2)=1$，$S(3)=1^2+2^2=5$. 由余式定理，$S(x)$ 应该有 $x(x-1)$ 的因子，所以 $S(x)=x(x-1)(ax+b)$ 其中 a，b 是待求的"未定系数". 再把条件 $S(2)=1$，$S(3)=5$，代入，即得：

$$\begin{cases}1=S(2)=2\cdot(2-1)(2a+b)=4a+2b,\\5=S(3)=3\cdot(3-1)(3a+b)=18a+6b.\end{cases}$$

从上述联立方程式就可以解得 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{6}$，即

1) 此点同学们可以自己试着说明一下.

$$S(x)=\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$$

或　　$0+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)$.

同样，可以求得[1]：

$$0+1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3=\frac{1}{4}n^2(n-1)^2.$$

[例 6 的特殊情形]：

设 $f(x)$ 是一个 4 次多项式，它在 0, 1, 2, 3, 4 的值，分别是 0, 0, 0, 0, 1. 则由余式定理，

$$f(x)=c\cdot x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$$

由于它在 0, 1, 2, 3 的值都是 0. 再将 $x=4$ 代入，即得：$1-f(4)=c\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=24\cdot c$，所以未定系数 $c=\frac{1}{24}$，即 $f(x)=\frac{1}{24}x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$.

现在让我们来求上述 $f(x)$ 的求和公式：

$$S_f(n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n-1).$$

由前面的讨论，我们知道 $S_f(x)$ 是一个 5 次多项式，它在 0, 1, 2, 3, 4, 5 的值分别如下：

$S_f(0)=0$,

$S_f(1)=f(0)=0$,

$S_f(2)=f(0)+f(1)=0+0=0$,

$S_f(3)=f(0)+f(1)+f(2)=0+0+0=0$,

$S_f(4)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=0+0+0+0=0$,

---

1) 具体的计算请同学们自己做.

$$S_f(5)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$$
$$=0+0+0+0+1=1.$$

同样，由余式定理和 $S_f(0)=S_f(1)=S_f(2)=S_f(3)=S_f(4)=0$，得知 $S_f(x)=c\cdot x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$。然后再用条件 $S_f(5)=1$ 可以定出 $c=\frac{1}{120}$。

当 $f(x)=\frac{1}{4!}$[1] $x\cdot(x-1)(x-2)(x-3)$ 时，

$$S_f(x)=\frac{1}{5!}x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4).$$

[练习]：

(1) 设 $f(x)=\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)$，试求 $S_f(x)=?$

(2) 设 $f(x)=\frac{1}{5!}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，试求 $S_f(x)=?$

(3) 设 $f_k(x)=\frac{1}{k!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$，试求 $S_f(x)=?$

(4) 设 $f(x)=g(x)+h(x)$，试说明：

$$S_f(x)=S_g(x)+S_h(x).$$

(5) 设 $f(x)=c\cdot g(x)$ [c 是一个常数]，试说明：

$$S_f(x)=c\cdot S_g(x).$$

(6) 试求适当的 5 个常数 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4，使得

---

1) 在数学中，通常用符号"$k!$"表达由 1 到 k 的连乘叫做 k 的阶乘。

$$x^4 = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot \left[\frac{1}{2} x(x-1)\right]$$
$$+ c_3 \cdot \left[\frac{1}{3!} x(x-1)(x-2)\right]$$
$$+ c_4 \cdot \left[\frac{1}{4!} x(x-1)(x-2)(x-3)\right].$$

(7) 总结 (4), (5), (6) 的结果, 试求[例 5]的求和公式:

$$0^4 + 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + (n-1)^4 = ?$$

亦即当 $f(x) = x^4$ 时的 $S_f(x) = ?$

二、插 入 法

在余式定理和它的推论中, 我们说明了一个 n 次多项式 $f(x)$, 可以由 $(n+1)$ 个不同的数 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 所取的值, 即 $\{f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_n)\}$ 来确定. 在上面求和公式的讨论中, 我们就是运用这个原理, 由 $S_f(x)$ 在 0, 1, 2, $\cdots$, $(k+1)$ 的值去反求 $S_f(x)$ 的.

[例 1]: 试求一个 2 次多项式, 它在 0, 1, 2, 的值分别是 0, 0, 1. 其答案是 $\frac{1}{2} x \cdot (x-1)$. 这也就是 $f(x) = x$ 时的求和公式, 即:

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

[例 2]: 试求一个 3 次多项式, 它在 0, 1, 2, 3 的值分别是 0, 0, 1, 5. 其答案是 $\frac{1}{6} x(x-1)(x-2)$. 这也就是 $f(x) = x^2$ 时的求和公式, 即:

$$0+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1).$$

把上面这种问题普遍化，就是下述"插入问题"：

[插入问题]：设 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 $(n+1)$ 个彼此不同的给定数，而 $\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 是 $(n+1)$ 个(不一定不同)给定值. 试求某一个次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f(x)$，使它对上述 $(n+1)$ 个数 a_i 的值，恰好等于上述给定值 b_i，即 $f(a_i)=b_i$，$i=0, 1, \cdots, n$.

解决上述插入问题的解法叫做插入法[1)]，下面就让我们来讨论这种常用的算法.

请同学们注意，$(n+1)$ 个给定数 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 一定是彼此不同的！但是其相应值 $\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 不一定不同. 所以我们不妨先来看一下，$b_1=b_2=\cdots=b_n=0$ 这种特殊情形. 因为在这种情形，我们可以用余式定理来大大简化所涉及的计算.

[例 3]：试求一次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f_0(x)$，它在 $(n+1)$ 个不同数 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}$ 的值分别是 $\{b_0, 0, \cdots, 0\}$.

[解]：由余式定理，

$$f_0(x)=c_0\cdot(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

将 a_0 代入上式，即得：

$$b_0=f(a_0)=c_0\cdot(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n),$$

即
$$c_0=\frac{b_0}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)},$$

1) 插入法和余式定理推论 2 可以说是同一事实的二面；推论 2 说明了上述多项式的唯一性，插入法将说明上述多项式的存在性.

$$f_0(x)=b_0\cdot\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\cdots(a_0-a_n)}.$$

[例 3]：试求某一个次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f_j(x)$，使它在 $\{a_0, a_1, a_2\cdots, a_j, \cdots, a_n\}$ 的值分别是 $\{0, 0, 0, \cdots, b_j, 0\cdots, 0\}$.

[解]：由余式定理：

$$f_j(x)=c_j\cdot(x-a_0)\cdots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\cdots(x-a_n),$$

再将 $x=a_j$ 代入上式即得：

$$c_j=\frac{b_j}{(a_j-a_0)\cdots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\cdots(a_j-a_n)},$$

$$f_j(x)=b_j\frac{(x-a_0)\cdots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\cdots(x-a_n)}{(a_j-a_0)\cdots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\cdots(x-a_n)}.$$

[例 4]：总结上述讨论，我们求解 $(n+1)$ 个次数 $\leqslant n$ 的多项式 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_j(x)\cdots, f_n(x)$. 它们在 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n\}$ 的值分别如下：

	a_0,	a_1,	a_2,	$\cdots$,	a_j,	$\cdots$,	a_n
$f_0(x)$	b_0,	0,	0,	$\cdots$,	0,	$\cdots$,	0,
$f_1(x)$	0,	b_1,	0,	$\cdots$,	0,	$\cdots$,	0,
$f_2(x)$	0,	0,	b_2,	$\cdots$,	0,	$\cdots$,	0,
$\vdots$							
$f_j(x)$	0,	0,	0,	$\cdots$,	b_j,	$\cdots$,	0,
$\vdots$							
$+)\ f_n(x)$	0,	0,	0,	$\cdots$,	0,	$\cdots$,	b_n
$f(x)$	b_0,	b_1,	b_2,	$\cdots$,	b_j,	$\cdots$,	b_n

所以，

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_i(x)+\cdots+f_n(x).$$

这就是我们所要求的多项式 $f(x)$，它满足 $f(a_i)=b_i$，$i=0, 1, 2, \cdots, n$.

[练习]：

(1) 试求一个次数 $\leqslant 4$ 的多项式，它在 0, 1, 2, 3, 4 的值分别是 1, 0, 2, 0, 3.

(2) 试求一个次数 $\leqslant 5$ 的多项式，它在 0, 1, 2, 3, 4, 5 的值分别是 0, 0, 1, 1, 2, 2.

(3) 试求一个次数 $\leqslant 3$ 的多项式，它在 -3, 2, 5, 7 的值分别是 1, 2, 2, 1.

(4) 试求一个次数 $\leqslant 4$ 的多项式，它在 $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 的值分别是 -5, -5, 1, -5, -5. [先求 $f(x)+5$，因为它在 $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, 0, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 的值是 0, 0, 6, 0, 0].

第二节　未定系数法与联立方程式

一、未定系数法

在很多代数问题中，有一个常用的方法叫做“未定系数法”，现在让我们先举几个简单的例子，来初步地说明它的要点与用法.

[例 1]：试求一个一次多项式，它在 -1, 2 的值分别是 3, 9.

[解]：这是一个很简单的问题，可以直接用上一节插入法的公式写下答案，在这儿我们改用未定系数法来处理它.

设所求的一次多项式是 $f(x)=c_1x+c_0$，其中 c_1，c_0 是待求的"未定系数"(换句话说，也就是问题中的"未知数"，这儿因为是以系数的形式出现，所以叫做"未定系数")．将条件 $f(-1)=3$, $f(2)=9$ 代入，即得下列联立方程式：

$$\begin{cases} c_1\cdot(-1)+c_0=3, \\ c_1\cdot 2+c_0=9. \end{cases}$$

解之即得 $c_0=5$, $c_1=2$，所以所求的：

$$f(x)=2x+5.$$

[例 2]　试求一个 3 次多项式，它在 -2, -1, 1, 2 的值分别是 -10, -12, -10, 18.

[解]：同样地，我们可以设所求的 3 次多项式为

$$f(x)=c_3\cdot x^3+c_2\cdot x^2+c_1\cdot x+c_0.$$

然后把条件 $f(-2)=-10$, $f(-1)=-12$, $f(+1)=-10$, $f(2)=18$ 列为"未定系数" c_3, c_2, c_1, c_0 的联立方程式如下：

$$\begin{cases} c_3\cdot(-2)^3+c_2\cdot(-2)^2+c_1\cdot(-2)+c_0=-10, \\ c_3\cdot(-1)^3+c_2\cdot(-1)^2+c_1\cdot(-1)+c_0=-12, \\ c_3\cdot(1)^3+c_2\cdot(1)^2+c_1\cdot 1+c_0=-10, \\ c_3\cdot 2^3+c_2\cdot 2^2+c_1\cdot 2+c_0=18. \end{cases}$$

由上述四元一次联立方程式去解出 c_3, c_2, c_1, c_0.

我们也可以把未定系数法和余式定理配合运用如下:

令 $g(x)=f(x)+10$[$\because f(x)$ 的值中有二个是 -10]则 $g(-2)=0$, $g(1)=0$, $g(-1)=-2$, $g(2)=28$. 由余式定理得知 $g(x)$ 含有 $(x+2)(x-1)$这两个因式,所以

$$g(x)=(x+2)(x-1)(c_1x+c_0),$$

其中 c_1, c_0 是待求的未定系数. 再把 $g(-1)=-2, g(2)=28$ 这两个条件代入[$g(-2)=0$, $g(1)=0$ 已经用过了]即得:

$$\begin{cases} g(-1)=(-1+2)(-1-1)\cdot(c_1\cdot(-1)+c_0) \\ \qquad\quad =(-2)\cdot(-c_1+c_0)=-2, \\ g(2)=(2+2)(2-1)(c_1\cdot 2+c_0)=4\cdot(2c_1+c_0)=28. \end{cases}$$

亦即
$$\begin{cases} -c_1+c_0=2, \\ 2c_1+c_0=7. \end{cases}$$

解之即得:
$$\begin{cases} c_1=2, \\ c_0=3. \end{cases}$$

所以所求的 $f(x)=(x+2)(x-1)(2x+3)-10$, 乘开, 即得:

$$f(x)=2x^3+5x^2-x+16.$$

[例 3]: 试求 A, B, C 满足下式:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x-1)}.$$

[解]: 将上述分式两边乘以 $(x+2)(x^2-1)$, 即得:

$$(x^2+x+1)=A\cdot(x^2-1)+B\cdot(x+2)(x-1)$$
$$+C\cdot(x+2)(x+1).$$

对上述等式两边分别以 $x=-2$, -1, 1 代入, 即得:

$$\begin{cases}(-2)^2+(-2)+1=A\cdot[(-2)^2-1],\\ \quad 即\ 3=A\cdot 3,\ A=1,\\ (-1)^2+(-1)+1=B\cdot(-1+2)(-1-1),\\ \quad 即\ 1=B\cdot(-2),\ B=-\dfrac{1}{2};\\ 1^2+1+1=C\cdot(1+2)\cdot(1+1),\ 即\ 3=C\cdot 6,\ C=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

所以 $$\frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2-1)}=\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}.$$

[例 4]：试求 A, B, C, D 满足下式：

$$\frac{3x^3-x^2+9x}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

[解]：同样地在等式的两边分别乘以 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$，即得：

$$3x^3-x^2+9x=(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

在这儿可以用两种稍有不同的方式来处理上述含有未定系数 A、B、C、D 的等式，第一种办法是将右边乘开、集项，即得：

$$\begin{aligned}3x^3-x^2+9x&=[Ax^3+(B-A)x^2+(A-B)x+B]\\&\quad+[Cx^3+(C+D)x^2+(c+b)x+D]\\&=(A+C)x^3+(-A+B+C+D)x^2\\&\quad+(A-B+C+D)\cdot x+(B+D).\end{aligned}$$

比较等式两边的对应项的系数，即得下列联立方程式：

$$\begin{cases} A+C=3, \\ -A+B+C+D=-1, \\ A-B+C+D=9, \\ B+D=0. \end{cases}$$

然后直接解上述四元一次联立方程式，可得：$A=2$，$B=-3$，$C=1$，$D=3$.

另外一种处理方法是先将左式除以(x^2+x+1)即得：

$$\begin{aligned} &3x^3-x^2+9x=(3x-4)\cdot(x^2+x+1)+(10x+4) \\ &\quad\| \\ &(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1) \\ &\quad\| \\ &[(A+C)x+(-2A+B+D)](x^2+x+1) \\ &\quad+[(2A-2B)x+2A], \end{aligned}$$

比较上式两边的“余式”和“商式”的对应项系数[1]，即得：

$$\begin{cases} 2A-2B=10, \\ 2A=4. \end{cases} \Rightarrow \quad A=2,\ B=-3.$$

$$\begin{cases} A+C=3, \\ -2A+B+D=-4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1, \\ D=3. \end{cases}$$

第二种计算法[2]多做了一次除法，所得的联立方程式也就变得很容易解．所以两者各有所长，同学们不妨把两种方式都练习一下.

---

1) 这儿我们用到除法中商式和余式的唯一存在性.

2) 上述计算把一个“分式”改写成分母次数较低的几个分式之和，这种计算叫做分项分式，它在求分式多项函数的积分时需要用到.

[例 5]：试将 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2-5x+3$ 改写成 $c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4$ 这种形式.

[解]：对于上述问题，我们可以有三种解法：第一种解法是把 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 想象成未定系数，然后把下述等式的右边展开、集项，即：

$$\begin{aligned}
&x^4-3x^3+2x^2-5x+3\\
&\quad=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4\\
&\quad=(c_0+c_1a+c_2a^2+c_3a^3+c_4a^4)+(c_1-2ac_2+3a^2c_3\\
&\qquad-4a^3c_4)\cdot x+(c_2-3ac_3+6a^2c_4)\cdot x^2\\
&\qquad+(c_3-4c_4a)x^3+c_4x^4,
\end{aligned}$$

比较等式两边对应项的系数，即得下列联立方程式：

$$\begin{cases}
c_4=1,\\
c_3-4c_4\cdot a=-3\Rightarrow c_3=4a-3,\\
c_2-3ac_3+6a^2c_4=2\Rightarrow c_2=6a^2-9a+2,\\
c_1-2ac_2+3a^2c_3-4a^3c_4=-5\Rightarrow c_1=4a^3-9a^2+4a-5,\\
c_0-ac_1+a^2c_2-a^3\cdot c_3+a^4\cdot c_4=3\\
\qquad\Rightarrow c_0=a^4-3a^3+2a^2-5a+3.
\end{cases}$$

第二种解法是由余式定理先求出 $c_0=f(a)=a^4-3a^3+2a^2-5a+3$，（亦即以 $x=a$ 代入等式的两边），然后将求出的 c_0 移项到左边，即：

$$\begin{aligned}
f(x)-f(a)=&c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3\\
&+c_4(x-a)^4,
\end{aligned}$$

逐项使用公式 $(x^n-a^n)=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+\cdots+a^{n-1})$，即得：

$$
\begin{aligned}
&f(x)-f(a)\\
&=(x^4-a^4)-3(x^3-a^3)+2(x^2-a^2)-5(x-a)\\
&=(x-a)\cdot\{(x^3+x^2a+xa^2+a^3)-3(x^2+xa+a^2)\\
&\quad+2\cdot(x+a)-5\}\\
&=(x-a)\cdot\{c_1+c_2\cdot(x-a)+c_3\cdot(x-a)^2+c_4(x-a)^3\},
\end{aligned}
$$

将上述等式两边约去公因子$(x-a)$后，再以$x=a$代入，即得：

$$4a^3-9a^2+4a-5=c_1.$$

用同样的办法，又可以逐步求得$c_2=6a^2-9a+2$，$c_3=4a-3$，$c_4=1$. 其实，第二种算法就是：先用$(x-a)$去除$f(x)$，得到商式$q_1(x)=c_1+c_2(x-a)+c_3(x-a)^2+c_4(x-a)^3$和余式$c_0=f(a)$. 然后再以$(x-a)$去除$q_1(x)$，即得$q_2(x)=c_2+c_3(x-a)+c_4(x-a)^2$和第二个余式$c_1=q_1(a)$. 依此类推，用$(x-a)$再去除前一次除法所求得的商式，即得$c_2=q_2(a)$，$c_3=q_3(a)$，$c_4=q_4(a)$. 所以，第二种算法的实质就是逐次以$(x-a)$去除前一次的商式，而$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$正是逐次除式中所得的“余式”.

第三种解法是令$t=(x-a)$，则$x=(t+a)$，将$x=t+a$代入$f(x)$，即得：

$$f(t+a)=(t+a)^4-3(t+a)^3+2(t+a)^2-5(t+a)+3,$$

逐项展开，以t的升次集项，即得：

$$
\begin{aligned}
&=(t^4+4t^3a+6t^2a^2+4ta^3+a^4)-3(t^3+3t^2a+3ta^2+a^3)\\
&\quad+2(t^2+2ta+a^2)-5(t+a)+3\\
&=(a^4-3a^3+2a^2-5a+3)+(4a^3-9a^2+4a-5)\cdot t\\
&\quad+(6a^2-9a+2)t^2+(4a-3)t^3+t^4,
\end{aligned}
$$

这就是所要求的表达式(只要把$t=(x-a)$代回去就行了).

[例 6]：试用未定系数法来说明：

$$x^2-xy-2y^2-2x+7y+10,$$

不可能分解成两个一次因式的乘积.

[解]：假如上式是可以分解成两个一次因式的乘积，即一定满足：

$$\begin{aligned}&x^2-xy-2y^2-2x+7y+10\\&=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2),\end{aligned}$$

这个等式的"未定系数"：a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 必定有解. 所以，要说明它不可能分解成因子，也就是要说明上述"未定系数"无解.

因为在讨论多项式的因子分解时，我们可以随时调整一个常数因子. 所以上式可以改写成：

$$\begin{aligned}&(x^2-xy-2y^2-2x+7y+10)\\&=a_1\left(x+\frac{b_1}{a_1}y+\frac{c_1}{a_1}\right)\cdot a_2\left(x+\frac{b_2}{a_2}y+\frac{c_2}{a_2}\right)\\&=a_1a_2\cdot(x+b_1'y+c_1')\cdot(x+b_2'y+c_2')\\&=(x+b_1'y+c_1')(x+b_2'y+c_2'),\end{aligned}$$

其中 $a_1a_2=1$, b_1', c_1', b_2', c_2' 是新的未定系数，展开右边，再比较对应项系数，即得下列联立方程式：

$$\begin{cases}b_1'+b_2'=-1, & ①\\ b_1'\cdot b_2'=-2, & ②\\ c_1'+c_2'=-2, & ③\\ b_1'c_2'+b_2'\cdot c_1'=7, & ④\\ c_1'\cdot c_2'=10. & ⑤\end{cases}$$

由第三章第三节的例 1，我们知道 b'_1，b'_2 也就是下列二次方程式的两个根，即：

$$x^2-(b'_1+b'_2)x+b'_1b'_2=x^2+x-2=0.$$

所以 $\begin{cases} b'_1+b'_2=-1, \\ b'_1+b'_2=-2. \end{cases}$ 的两组解是 $\begin{cases} b'_1=1,\ b'_2=-2, \\ b'_1=-2,\ b'_2=1. \end{cases}$

我们不妨取定 $b'_1=1$，$b'_2=-2$. 代入第 ④ 式再由 ③，④ 式联立（即 $c'_1+c'_2=-2$，$-2c'_1+c'_2=7$），就可以解得 $c'_1=-3$，$c'_2=1$，换句话说，从 ①，②，③，④ 式可求得两组解：

$$\begin{cases} b'_1=1, \\ b'_2=-2, \\ c'_1=-3, \\ c'_2=1; \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} b'_1=-2, \\ b'_2=1, \\ c'_1=1, \\ c'_2=-3. \end{cases}$$

但是他们都不可能满足 $c'_1\cdot c'_2=10$. 所以联立方程系 ①～⑤ 无解，这也就说明了原给的二次式是不可能分解成两个一次因式的乘积的.

[例 7]：下述形式的二次多项式：

$$x^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

的系数 B、C、D、E、F 满足什么条件时，该多项式可以分解成二个一次因式的乘积？

[解]：假设上述二次式可以分解因子，则

$$x^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$
$$=(x+\alpha_1y+\beta_1)(x+\alpha_2y+\beta_2),$$

其中 α_1，α_2，β_1，β_2 是待求的未定系数（改用符号 α_1，α_2，β_1，β_2 是为了避免和 B，C，D 等混淆）. 同样地乘开右边后，比

较对应项的系数，即得下列联立方程组：

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2=2B, & ① \\ \alpha_1\alpha_2=C, & ② \\ \beta_1+\beta_2=2D, & ③ \\ \beta_1\cdot\beta_2=F, & ④ \\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1=2E. & ⑤ \end{cases}$$

由①，②两式得知 α_1，α_2 是 $x^2-2Bx+C=0$ 的两个根，由③，④两式得知 β_1，β_2 是 $y^2-2Dy+F=0$ 的两个根。

由一元二次方程式的求根公式，即得：

$$\begin{cases} \alpha_1=B\pm\sqrt{B^2-C}, \\ \alpha_2=B\pm\sqrt{B^2-C}, \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_1=D\pm\sqrt{D^2-F}, \\ \beta_2=D\pm\sqrt{D^2-F}. \end{cases}$$

把上述 α_1，α_2，β_1，β_2 代入⑤式，即得所求的条件为：

$$\begin{aligned} 2E=\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1&=(B\pm\sqrt{B^2-C})(D\mp\sqrt{D^2-F} \\ &+(B\mp\sqrt{B^2-C})(D\pm\sqrt{D^2-F}) \\ &=2BD-2\sqrt{B^2-C}\cdot\sqrt{D^2-F}, \end{aligned}$$

亦即

$$\sqrt{B^2-C}\cdot\sqrt{D^2-F}=(BD-E).$$

两边平方，即得：

$$\begin{aligned} &(B^2-C)(D^2-F)=(BD-E)^2=B^2D^2-2BDE+E^2 \\ &\quad\| \\ &B^2D^2-CD^2-B^2F+CF \end{aligned}$$

移项即得整理后的条件[1]：

$$2BDE+CF-CD^2-B^2F-E^2=0.$$

从上面几个初步的实例，同学们可以看出来，未定系数法其实是对于很多代数问题的一种直截了当的处理方法，而且

1) 上述条件在解析几何中是一个重要的事实。

它不但可以用来"求解",也可以用来说明某些问题"无解",甚至于还可以用来求得某些问题"有解的条件".在运用"未定系数法"解代数问题时,先引进适当的几个"未定系数",把要解答的代数问题列成某一种多项式的等式. 然后,运用多项式运算,两边展开、集项,比较对应项的系数,即得到一组未定系数所要满足的联立方程组. 所以归根究底,未定系数法解题的关键是这组联立方程组是否有解. 下面就让我们接着讨论一下联立方程组的解法.

二、联立方程组

联立方程式中,最简单的是多元一次联立方程式. 在第二章中我们以二元一次联立方程式为例,讨论了它的两种解法,即代入消元法和加减消元法. 现在让我们来温故而知新. 下面,我们先讨论二元一次联立方程式的情形.

1. 二元一次联立方程组

[例 1]: 试讨论下列一般性的二元一次方程组:

$$a_1x+b_1y=c_1, \qquad ①$$

$$a_2x+b_2y=c_2. \qquad ②$$

[讨论]:

$b_2\cdot①-b_1\cdot②$ 即得:

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1. \qquad ③$$

在这里,我们要分三种情形来讨论:

(i) 当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时,

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

所以方程组有唯一的一组解，而上述表达式也就是这个唯一一组解的“公式”.

(ii) 当 $a_1b_2-a_2b_1=0$，而 $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$ 时，则 ③ 式就成为：

$$0\cdot x=c_1b_2-c_2b_1\neq 0,$$

这种矛盾的式子说明，在这种情况下方程组无解.

(iii) 当 $a_1b_2-a_2b_1=0$，$c_1b_2-c_2b_1=0$ 时，

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

所以，① 式和 ② 式成比例. 换句话说，存在着一个适当的比例常数 $k=\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$，使得 ①$=k$②. 对于这种情形，任何满足 ② 式的 (x, y) 也就自然满足 ① 式. 换句话说，只要 $x=\frac{1}{a_2}(c_2-b_2y)$ 或者 $y=\frac{1}{b_2}(c_2-a_2x)$〔其中 y 或 x 可以任意取〕就能满足方程组. 所以它有无穷多组解.

[例 1′]：

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=0,\\ a_2x+b_2y=0.\end{cases}$$

有非零解的必要充分条件是 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

[说明]：上述方程组显然有一组零解，即 $x=0$，$y=0$. 由例 1 的讨论，当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，只有唯一一组解，即上述零解；当 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 时（因为 $c_1=c_2=0$，所以 $c_1b_2-c_2b_1=0$）则有无穷多组解，所以有非零解.

[例 2]：试求下列三元一次方程组的解：

$$\begin{cases} x-y+z=-2, & ① \\ 2x+y+3z=3, & ② \\ -x+3y+2z=9. & ③ \end{cases}$$

〔解〕：我们可以从 ① 式解得 $y=x+z+2$，代入 ②，③ 两式，即得：

$$\begin{cases} 2x+(x+z+2)+3z=3, \\ -x+3(x+z+2)+2z=9. \end{cases}$$

即：
$$\begin{aligned} 3x+4z&=1, & ②' \\ 2x+5z&=3. & ③' \end{aligned}$$

由 ②′ 和 ③′ 容易解得：$x=-1$，$z=1$，代入 $y=x+z+2$，即得 $y=2$. 所以原方程组的解是 $(x, y, z)=(-1, 2, 1)$.

[例 3]：试讨论下列一般性的三元一次联立方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & ① \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & ② \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. & ③ \end{cases}$$

[讨论]：对于上述一般性的三元一次联立方程组，我们当然也可以仿照例 1 的讨论，用加减消元法，先分别用 ①、② 式和 ②、③ 式消去 z，即：

$$\begin{cases} c_2\cdot①-c_1\cdot②: \\ \quad (a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=(d_1c_2-d_2c_1) \\ c_3\cdot②-c_2\cdot③: \\ \quad (a_2c_3-a_3c_2)x+(b_2c_3-b_3c_2)y=(d_2c_3-d_3c_2) \end{cases}$$

然后，由上述二元联立方程式再用一次加减消元法，即得：

$$\begin{aligned} &\{(a_1c_2-a_2c_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2c_3-a_3c_2)(b_1c_2-b_2c_1)\}\cdot x \\ &=(d_1c_2-d_2c_1)\cdot(b_2c_3-b_3c_2)-(d_2c_3-d_3c_2)(b_1c_2-b_2c_1) \end{aligned}$$

耐心地把上式两边展开，其中左右各有两项不含 c_2 的正负相消（即 $\pm a_2c_1b_2c_3$ 和 $\pm d_2c_1b_2c_3$），整理后的结果是：

$$c_2\cdot[a_1\cdot(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(c_1b_3-c_3b_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]\cdot x$$
$$=c_2[d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(c_1b_3-c_3b_1)-d_3(b_1c_2-b_2c_1)]$$

当 $c_2\cdot[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(c_1b_3-c_3b_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]\neq 0$ 时，

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

首先让我们把上面的计算分析一下：

(i) 在上面消去的过程中，我们分别由 ①，② 和 ②，③ 式中消去 z，这里 ② 式多用了一次，这也就是为什么最后两边同时多出一个 c_2 因子的原因. 由最后的答案给我们一个启示，那就是我们可以用：

$$(b_2c_3-b_3c_2)\cdot①\text{ 式}+(b_3c_1-b_1c_3)\cdot②\text{ 式}$$
$$+(b_1c_2-b_2c_1)\cdot③\text{ 式}$$

来得出同时消去 y、z 的式子，即：

$$[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]\cdot x+0\cdot y+0\cdot z$$
$$=[d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$+d_3(b_1c_2-b_2c_1)].$$

(ii) 当 $[a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)]\neq 0$ 时，用上述消元法，求得 x 的公式为：

$$x=\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

同学们略加注意就可以看出上述 x 的“公式”中，分子表达式及分母表达式中的 a_1、a_2、a_3 分别换成 d_1、d_2、d_3. 由此，

同学们可以想象到 y, z 的公式如下:

$$y=\frac{a_1(d_2c_3-d_3c_2)+a_2(d_3c_1-d_1c_3)+a_3(d_1c_2-d_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

即将分母中的 b_1, b_2, b_3, 分别换成 d_1, d_2, d_3 后作为分子. 同样:

$$z=\frac{a_1(b_2d_3-b_3d_2)+a_2(b_3d_1-b_1d_3)+a_3(b_1d_2-b_2d_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

即将分母中的 c_1, c_2, c_3 分别换成 d_1, d_2, d_3 后作为分子.

类似于例 1 中二元的情形, 当: $\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\neq 0$ 时, 上述联立方程组的解唯一存在, 而且它们可以用上述公式表达.

(iii) 当 $\Delta=0$ 时, 上述联立方程组可能"无解", 也可能"有无穷多组解". 详细的讨论比较烦, 在这里暂时从略(参看后面解析几何与线性代数中更有系统的讨论).

[例 4]

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0, \\ a_3x+b_3y+c_3z=0. \end{cases}$$

具有非零解的必要充分条件是:

$$\Delta=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=0$$

[说明]: $(x, y, z)=(0, 0, 0)$ 显然是上述方程组的一组解(即零解), 所以当 $\Delta\neq 0$ 时, 由例 3 的讨论可知上述方程组只有唯一的一组零解. 反之, 当 $\Delta=0$ 时, 我们可以说明它们具有非零解如下:

(i) 假如上述三个方程式都互相成比例, 即存在适当的

k, k' 使得: $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k$, $\frac{a_1}{a_3}=\frac{b_1}{b_3}=\frac{c_1}{c_3}=k'$,

则上述三个方程式实际上只是一个方程式. 换句话说, 只要满足其中一个方程式的一组值(x, y, z)也就自然跟着满足其他两个方程式了. 在这种情况下是容易看出它们有无穷多组非零解的.

(ii) 设上述三个方程式并不都互相成比例, 即:

$$(a_1b_2-a_2b_1),\ (a_1c_2-a_2c_1),\ (b_1c_2-b_2c_1),$$
$$(a_2b_3-a_3b_2),\ (a_2c_3-a_3c_2),\ (b_2c_3-b_3c_2),$$
$$(a_1b_3-a_3b_1),\ (a_1c_3-a_3c_1),\ (b_1c_3-b_3c_1).$$

这 9 个数中至少有一个不为零. 譬如: $(a_2b_3-a_3b_2)\neq 0$

则不难由直接验算和条件 $\Delta=0$, 得知:

$$x=(b_2c_3-b_3c_2),\ y=(c_2a_3-c_3a_2),\ z=(a_2b_3-a_3b_2).$$

就是一组非零(即不全为零的)解. 因为当我们把上述这一组表达式代入 ① 式, 即得 Δ. 由假设 $\Delta=0$, 所以满足 ① 式; 而当我们把上述表达式代入 ②, ③ 式时, 很容易看出是恒等于 0 的(即所有各项都自然相消了).

由上面对于二元, 三元一次联立方程组的讨论, 我们可以总结出一般性的认识:

(i) 多元一次联立方程组的一种普遍适用的解法是, 逐步消去其中一元. 譬如要从含有 x 的一次联立方程组中消去 x, 我们只要任意选取其中一个 x 的系数不为零的方程式, 例如:

$$ax+by+cz+\cdots=0,\quad a\neq 0.$$

移项, 再两边除以 a, 即得 x 的表达式:

$$x=-\frac{1}{a}(by+cz+\cdots).$$

用它代入其他各方程式，即得一组不含 x 的一次方程组，它的方程式个数和元数各减 1.

（ii）如此逐步代入消去，就可以确定一个给定方程组的解. 一般说来，有无解、唯一解和无穷多组解这三种可能性.

(iii) 当一个一次方程组中每一个方程式的常数项都是零，则称为齐次一次方程组. 对于这样的方程组显然有一组零解(即把每一个未知数都取为 0)，在许多代数问题中，我们经常要讨论某些齐次一次方程组是否具有非零解这样的问题，在上面的讨论中，我们说明了二元、三元齐次一次方程组具有非零解的必要充分条件. 在多元的一般情形，我们也有类似的具有非零解的必要充分条件，它是由系数所组成的一个要等于零的特定表达式，我们将在往后介绍线性代数的小册子中再详加讨论.

2. 二元二次联立方程组

让我们先举几个不全是一次的联立方程组来看一看：

[例 5]：

$$\begin{cases} 2x-3y+5=0, & ① \\ 5x^2-3xy+9y^2+10x-6y-1=0. & ② \end{cases}$$

[解]：

由 ① 式得 $y=\frac{1}{3}(2x+5)$ 代入 ② 式即得：

$$5x^2-x(2x+5)+(2x+5)^2+10x-2(2x+5)-1=0,$$

即：　　$7x^2+21x+14=0$　或　$x^2+3x+2=0.$

解之得 $x=-1,\ -2$, 代入 $y=\frac{1}{3}(2x+5)$, 即得:

$$y=1,\ \frac{1}{3}.$$

[例 6]

$$\begin{cases} x^2+2xy-8y^2-4x+2y+3=0, & ① \\ x^2-xy+y^2-6x+2y-25=0. & ② \end{cases}$$

[解]:

① 式是一个如上节例 7 中的二次式, 即 $B=1,\ C=-8,\ D=-2,\ E=1,\ F=3$. 代入上节例 7 所求得的条件, 即:

$$\begin{aligned} &2BDE+CF-CD^2-B^2F-E^2 \\ &=2\cdot1\cdot(-2)\cdot1+(-8)\cdot3-(-8)\cdot(-2)^2-1^2\cdot3-1^2 \\ &=-4-24+32-3-1=0. \end{aligned}$$

所以 ① 式可以分解成两个一次因式的乘积, 我们可以用未定系数法(参看例 7)求得:

$$x^2+2xy-8y^2-4x+2y+3=(x+4y-3)(x-2y-1),$$

所以一组数 $(x,\ y)$ 满足 ① 式的必要充分条件是它满足:

$$(x+4y-3)=0,\quad 或\quad (x-2y-1)=0.$$

换句话说, 联立方程组 ①, ② 可以分成下列两组联立方程组来求解, 即:

$$\begin{cases} x+4y-3=0, & ①' \\ x^2-xy+y^2-6x+2y-25=0. & ② \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x-2y-1=0, & ①'' \\ x^2-xy-y^2-6x+2y-25=0. & ② \end{cases}$$

联立第一组 ①'、②, 我们可以用例 5 的办法解之如下:

由 ①' 式解得 $x=3-4y$, 代入 ② 式得:

$$(3-4y)^2-(3-4y)y+y^2-6(3-4y)+2y-25$$
$$=21y^2-y-34=0.$$

解之即得：$y=\frac{1\pm\sqrt{2789}}{42}$，$x=3-4y=3-\frac{2\pm2\sqrt{2789}}{21}$.

同样地，从第二组①″、② 联立，我们可以由①″式解得：$x=1+2y$，代入②式即得：

$$(1+2y)^2-(1+2y)y+y^2-6(1+2y)+2y-25$$
$$=3y^2-7y-30=0.$$

解之即得：$y=\frac{7\pm\sqrt{409}}{6}$，$x=1+2y=\frac{10\pm\sqrt{409}}{3}$.

所以，原方程组①、② 有下列四组解：

$$(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{61\mp2\sqrt{2789}}{21},\ \dfrac{1\pm\sqrt{2789}}{42},\\[2ex]\dfrac{10\pm\sqrt{409}}{3},\ \dfrac{7\pm\sqrt{409}}{3}.\end{cases}$$

[例 7]：

$$5x^2-2xy-4y^2-28x+10y-97=0,\qquad①$$
$$x^2-xy+y^2-6x+2y-25=0.\qquad②$$

[分析]：

从例 6 的经验，我们知道假如上述两个方程式中有一个可以分解的因式，那就很容易把它归于两组一次与二次的联立方程组来求解．但是用上一节例 7 的条件来检验上述两个二次式，发现两者都是不可以分解成因式的，怎么办呢？当然，我们可以把上述方程组① 和②，换成①$+k\cdot$② 和② 联立，其中 k 是任意常数，所以我们自然可以试问：是否可以求得一

个适当的常数 k，使得 ①$+k$② 变得可以分解因式呢？这样就可以运用"未定系数法"了. 设 k 是一个待求的未定系数，它使得 ①$+k$②能够分解因子，即：

$$(5+k)x^2-(2+k)xy+(k-4)y^2-(28+6k)x$$
$$+(10+2k)y-(97+25k)=0,$$

以 $(5+k)$ 遍除全式，即得：

$$x^2-\left(\frac{2+k}{5+k}\right)xy+\left(\frac{k-4}{5+k}\right)y^2-\left(\frac{28+6k}{5+k}\right)x$$
$$+\left(\frac{10+2k}{5+k}\right)y-\left(\frac{97+25k}{5+k}\right)=0,$$

上式能够分解的必要充分条件是：

$$\left(\frac{2+k}{5+k}\right)\left(\frac{14+3k}{5+k}\right)+\left(\frac{k-4}{5+k}\right)\left(-\frac{97+25k}{5+k}\right)-\left(\frac{k-4}{5+k}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{14+3k}{5+k}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2+k}{5+k}\right)^2\left(-\frac{97+25k}{5+k}\right)-1=0,$$

以 $(5+k)^3$ 遍乘全式，即得：

$$(5+k)(2+k)(14+3k)-(5+k)(k-4)(97+25k)-(k-4)$$
$$\cdot(14+3k)^2+\frac{1}{4}(2+k)^2(97+25k)-(5+k)^3=0,$$

展开，集项，即得未知数 k 的三次方程式(同学们试自求之).

$k=-4$ 是它的一个根，所以 ①$-4$②，即：

$$x^2+2xy-8y^2-4x+2y+3$$

可以分解成因式(它就是例 6 的 ① 式).

上述例子初步地说明了二元二次联立方程组的解法.

展　望

在这本小册子中，我们由算术中大家熟悉的数系四则运算开始，逐步深入地经过分析、探讨，建立起代数学的初步理论，它们是解决很多常用的代数问题的有力工具，也是整个代数学的基础．现在让我们对于它的进一步发展作一个简要的介绍，作为本书的结束．

代数学的起源就是运用数系运算法则解代数方程．在这本小册子中，我们讨论了多元一次联立方程组和一元、二元二次方程的解法和应用．也许同学们会问："一元高次方程或多元高次方程组应该如何处理呢？"让我们先来谈一谈一元高次方程吧．二次方程式的解法是配方．换句话说，利用一个适当的代换，即 $y=\left(x+\frac{b}{2}\right)$，我们可以把一个一般的二次方程式 $x^2+bx=c$ 变换成 $y^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$ 来求解．那末，一个一般的三次方程式是否也可以经由几个适当的代换，同样地求得一种普遍适用的解法呢？经过集项整理后，任何一个三次方程式都可以写成下述一般形式：

$$x^3+bx^2+cx+d=0.$$

同样地，我们可以用 $y=x+\frac{b}{3}$ 这个代换，把上述方程式变换成：

$$y^3+py+q=0 \quad \left[\text{即 } p=\left(c-\frac{b^2}{3}\right),\ q=d-\left(\frac{b}{3}\right)^3\right].$$

在这里，让我们对立方运算做进一步分析. 立方的基本公式是:

$$(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+3uv(u+v)+v^3,$$

从上面这个形式，就出现了下述解三次方程的关键性想法: 假如我们令

$$u+v=y,\quad 3uv=-p.$$

换句话说，令 $y=\left(u-\frac{p}{3u}\right)$. 那么方程式:

$$y^3+py+q,$$

就变换成: $y^3+3py+q=u^3-\frac{p^3}{27}\cdot\frac{1}{u^3}+q=0$.

令 $u^3=z$, 则 z 满足:

$$z^2-\frac{p^3}{27}+qz=0.$$

总结上面的分析，我们可以先从 $z^2+q\cdot z-\frac{p^3}{27}=0$, 解出 z 的值，然后只要开立方就可以求得 u 的值，而原给三次方程式 $x^3+6x^2+cx+d=0$ 的解也就是:

$$x=y-\frac{b}{3}=u-\frac{p}{3u}-\frac{b}{3}.$$

接着，我们再来看一看四次方程式是否也有一种普遍适用的解法呢? 因为在前面我们曾经讨论过二元二次联立方程式的解法. 所以我们不妨利用四次方程式和二元二次联立方程式之间的密切关系来说明四次方程式的解法如下:

设 $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 是一个任意给定的四次方程式. 则它可以由下述二元二次联立方程式消去 y 而得:

$$\begin{cases} x^2+ey^2+bx+dy+c=0, & ① \\ xy-1=0. & ② \end{cases}$$

因为我们只要由 ② 式解得 $y=\frac{1}{x}$, 代入 ① 式即得:

$$x^2+e\frac{1}{x^2}+bx+d\frac{1}{x}+c=0.$$

以 x^2 遍乘上式, 即得原给四次方程式:

$$x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0. \qquad ③$$

换言之, 解上述四次方程式和解联立方程组 ①、② 基本上是一回事, 在第二节末我们对二元二次联立方程组 ①、② 的解法是用未定系数法, 即引进一个未定系数 k, 使得 ①+k②:

$$x^2+kxy+ey^2+bx+dy+(c-k),$$

可以分解成因式, 其条件是 k 满足下列三次方程式(参看第一节例 7):

$$k\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{d}{2}+e(c-k)-e\cdot\frac{b^2}{4}-\frac{k^2}{4}(c-k)-\frac{d^2}{4}=0,$$

即:
$$(k^2-e)(k-c)+bd\cdot k-(eb^2+d^2)=0.$$

所以在解四次方程式时, 我们只要先解一个上述 k 的三次方程式, 就可以把它归于两个二次方程式来解.

但是, 这种适当结合开方根运算, 由系数去求一个一般性的二次、三次、四次方程式的解法, 对于五次以上的方程式根本不存在! 那么我们怎么样去解高次方程式呢? 解高次方程式

的"出路"在于先把代数方程式的观点扩大到多项式函数. 例如我们要解一个五次方程式:

$$f(x)=x^5+3x^2-5x+7=0.$$

我们把所有可能的实数 x 都代入多项式 $f(x)$, 去看它的相应值 $y=f(x)$ 的变化情况, 例如, $f(1)=6$, $f(-1)=14$, $f(-2)=-3$. 所以当 x 从 -2 "连续"变到 -1 时, $f(x)$ 的值也"连续"地从 -3 变到 14. 所以中间一定要经过 0. 换句话说, 在 -2 和 -1 之间必定有一个数是 $f(x)=0$ 的一个根. 通过这种定性分析可以确定出一个方程式的根的大概位置, 我们将在第三册《实变多项式函数》中再详细讨论多项式函数和实根的近似值求法. 概括地讲, 高次方程式的实用解法是引进多项式函数的概念, 设法去求它的实根近似值.

现在再来谈一谈多元高次方程组的解法, 从第二节的讨论中, 同学们不难看出多元一次方程组的解法用的是逐步代入消元法. 因为我们很容易从一个方程式中, 把其中一个不定元写成其它不定元的表达式, 将这样的表达式代入其它方程式, 也就达到了消去这个不定元的目的. 但是对高次联立方程组, 往往无法求出这种表达式, 例如:

$$y^5+x^5+3x^2y^3-2xy^2+7=0,$$

就无法解得用 x 表示 y 或用 y 表示 x 的根式表达式. 所以对于一般高次联立方程组, 用代入消元法是行不通的, 非得寻求出另一种普遍适用的消元法. 然而, 有趣的是, 这种普遍适用的消元法是可以从多元一次方程组的普遍理论中得出. 我们将在以后介绍线性代数的小册子中再来讨论这种普遍适用的

消元法.

在讨论二次方程式 $x^2+bx=c$ 的解法时，假如 $\frac{b^2}{4}+c<0$，则不可能有实根，这也就显示在代数方程式的讨论中，“实数系”依然不够完整. 于是很自然的一种想法是设法引进一些“新数”，把实数系扩充成一个更加完整的数系. 例如 $x^2=-1$ 在实数系中无解，我们引进两个新数 $\pm i$，它们的特征就是 $(\pm i)^2=-1$. 这样，我们也就自然要同时引进 $\{a+bi;\ a, b$ 是任给实数$\}$ 这一系列“新数”. 这样我们就得到一个比实数系更大的数系叫做“复数系”. 它由所有能写成 $a+bi$ 这种形式的数所构成. 两个“复数” $a+bi$ 和 $c+bi$ 的加和乘可以如下计算:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di)&=a\cdot c+bci+adi+bdi^2\\&=(ac-bd)+(bc+ad)i.\end{aligned}$$

在复数系的范围中，很容易看出任何二次方程式都有解. 也许同学们会问，会不会有些高次方程式在复数系中依然无解. 这样我们又得把复数系再加以扩充了. 可喜的是，高斯证明了下述代数基本定理：任何多项式 $f(x)$ 在复数系中一定有根! 所以复数系是讨论代数方程的一个完整数系，我们将在以后介绍复变数多项式函数的小册子中，证明这个基本定理.