第 1 篇

数学基础

第1章 微　　分

微积分的发现是科学史上一个里程碑式的事件，它由牛顿和莱布尼茨各自从物理学和数学中独立导出，当然牛顿一直耿耿于怀地宣称是莱布尼茨盗窃了自己的想法，本来微积分的荣耀仅属于他和物理学，而与莱布尼茨和数学无关。他的说法可能是有一定的道理，有兴趣的同学可以查阅相关书籍，这里我们不做进一步介绍。

1.1 微分的定义

任意一个连续函数 $y=y(x)$或 $f=f(x)$，假设其自变量从 x 变成$x+\Delta x$，即自变量的增量为 $\Delta x=(x+\Delta x)-x$，对应的函数值从 $y(x)$变成 $y(x+\Delta x)$，则函数增量为

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

引入极限，其表示为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

它表示当 Δx 趋向于零时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的取值。

我们想知道为什么要做这样的研究，其意义何在？

牛顿首先研究了运动学，他发现瞬时速度很难定义，真实情况是我们只能定义出平均速度，即 $\bar{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，它表示单位时间发生的位移，但不能表示某时刻或某位置的瞬时值。

我们可以考虑让 Δt 趋向于零，这样平均速度就变成了瞬时速度。把这个想法数学化，就是

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

举个例子，一个物体向前运动，其位移随时间变化，变化关系为

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

你能看出这是一个什么运动吗？我们当然一眼就看出这是一个匀加速直线运动，但为什么呢？

牛顿说，首先求出 Δt 时间内的平均速度，为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\left[v_0(t+\Delta t)+\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2\right]-\left(v_0 t+\frac{1}{2}at^2\right)}{\Delta t}$$

$$= v_0 + at + \frac{1}{2}a \cdot \Delta t$$

然后让时间 Δt 趋向于零，则其瞬时速度为

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(v_0 + at + \frac{1}{2}a \cdot \Delta t\right) = v_0 + at \tag{1.1}$$

继续下去，求得平均加速度为

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{[v_0 + a(t+\Delta t)] - (v_0 + at)}{\Delta t} = a \tag{1.2}$$

式(1.1)表示速度随时间均匀增加，式(1.2)表示单位时间速度的变化量不变，恒为 a。它比速度重要得多，叫作加速度(acceleration)，符号为 a。

每次都要写“$\lim_{\Delta x \to 0}$”太啰唆了，给它换个写法，让我们书写起来方便些。我们这样定义，把“$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta x$”记为“$\mathrm{d}x$”，称为**自变量微元**，把“$\lim_{\Delta x \to 0}\Delta y$”记为“$\mathrm{d}y$”，为**函数微元**，这样任意函数的极限就被记为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

(实际上这套符号是莱布尼茨首创的，牛顿采用的是流数法。)

一般认为 $\mathrm{d}x$ 是一个要多小就有多小的值。上式中的$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$就是我们经常说的微分，它还有其他的名字，比如微商(注意不是在微信上倒卖东西)，又比如导数，在本书中我们都将会采用“导数”这个名称。

它还可以有其他的数学表示方法，比如在 y 的右上角加一撇，记为 y'，表示 y 对 x 的一阶导数；或者在 y 的头顶加一个小点，记为 $\dot{y}$，也表示 y 对 x 的一阶导数，不过**这种书写仅适用于自变量为时间 t**。

1.2 导数的意义

我们先从数学上给出导数的意义。如图 1.1 所示，$y = y(x)$已经画在平面直角坐标系中，取 $x \to x + \Delta x$ 这段区间，其函数值从 $y(x) \to y(x + \Delta x)$。

图中 AB 表示 Δx，BC 表示 Δy，其平均值为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，它表示什么呢？

大家很快就发现，它恰好就是$\angle CAB$ 的正切值，即 $\tan\theta$，我们往往把 $\tan\theta$ 叫作割线 AC 的斜率。

现在考虑极限情况，根据导数定义$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$，它要求 Δx 变成 $\mathrm{d}x$，就要求 C 点沿着曲线 $y = y(x)$不断向 A 点靠近，直到两者重

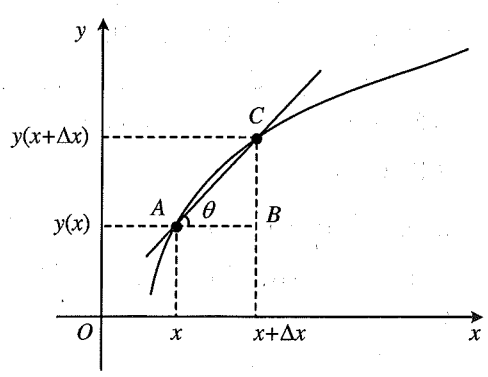

图 1.1

合，则此时割线 AC 将变成 A 点处的切线，而切线的斜率就是 A 点处的导数值。下面我们来举个例子。

例 1 试求函数 $y=x^3$ 在 $x=1$ 处的斜率大小。

解析 斜率即为导数，故为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\cdot\Delta x+3x\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]\\&=3x^2\end{aligned}$$

在 $x=1$ 处，$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=3$。

数学上是这样，物理上也是如此，只是赋予了真实意义。

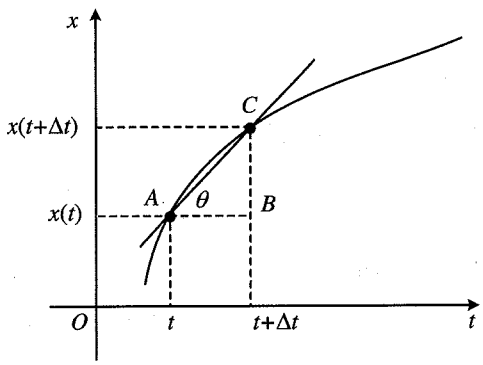

图 1.2

如图 1.2 所示，以位移-时间图像为例，平均速度 $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 表示割线斜率，位移对时间的导数 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 就是瞬时速度，它可以用 A 点的切线的斜率来表示。那么加速度和位移之间的关系如何呢？

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$$

我们把加速度 a 称为位移对时间的二阶导数，上面的书写太不方便了，改一下吧。有以下三种方式，实际上我们任选其一就行：

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad x'',\quad \ddot{x}$$

1.3 常见函数的导数

尽管知道了导数的定义和图像意义，但还是不够的，我们还需要知道一些最简单函数的导数以及相关的运算规则。本节将介绍几种常见函数的导数。

介绍之前，请先记住下面三个极为有用的极限：

极限 A：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\Delta x=\Delta x=\tan\Delta x$。

极限 B：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\Delta x=1$。

极限 C：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=\mathrm{e}=2.718281828\cdots$（e 是与 π 一样，是一个无理数）。

对于这三个极限，我们不做细致证明，同学们记住就可以了。

（以下函数形式均写成 $y=y(x)$，若出现其他字母，均表示常数。）

（1）常数 $y=A$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A - A}{\Delta x} = 0$$

结论:常数的导数恒为零。

(2) 幂函数 $y = x^n$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = nx^{n-1}$$

每求导一次,就降一次幂。这个结论相当有用,我们再记住下面两个常用的结果:

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

(3) 正弦函数 $y = \sin x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x}$$

应用极限 A 和极限 B 化简上式,可以得到

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

同样我们可以得到

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

这两个正弦系的函数非常有用,需要记住,并且它们都是循环函数。

$\sin x$ 和 $\cos x$ 连续的四阶导数见表 1.1。

表 1.1 $\sin x$ 和 $\cos x$ 连续的四阶导数

原函数	$\sin x$	$\cos x$
一阶导数	$\cos x$	$-\sin x$
二阶导数	$-\sin x$	$-\cos x$
三阶导数	$-\cos x$	$\sin x$
四阶导数	$\sin x$	$\cos x$

我们发现了几个有趣的特点:

① 正弦系函数的 $4n$ 阶导数仍为本身;

② 导数与原函数量阶相同,则可以做物理上的加减。而像幂函数 $y = x^n$ 就不可以进行加减,因为导数与原函数量阶不同。

(4) 指数函数 e^x 的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

应用极限 C,即 $e = (1 + dx)^{\frac{1}{dx}}$,代入上式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x[(1 + dx)^{\frac{1}{dx} \cdot dx} - 1]}{dx} = e^x$$

这是一个非常神奇的函数。e^x 的导数仍然是 e^x,即无论经过多少次求导操作,它仍是自己本身,如此神奇的函数必然会在大自然中有大用途并大面积出现,因为自然界本身也是很神

奇的。另外，这个函数与上面的正弦系函数类似，都是循环函数，所以它们之间必然也存在一些关系。后来大数学家欧拉研究并发现了数学中最美的公式(没有之一)：

$$e^{i\pi}+1=0$$

(5个最重要的数学常量构成了一个恒等式，这绝非巧合。)

(5) 对数函数 $y=\ln x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

下面就计算不下去了。我们换一个思路，利用反函数来求解：把 $y=\ln x$ 写成 $x=e^y$，然后考虑 x 对 y 的导数，即

$$\frac{dx}{dy}=e^y=e^{\ln x}=x$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x}$$

这个函数也是非常重要的，但在导数部分不太用得到，反而在积分部分出现的概率和频次远超其他函数。

1.4 复合函数的导数

有些函数的形式不像上文讲到的函数那样简单，而是组合起来的，比如 $y=\ln(2x^2)$ 的导数是多少呢?

这个函数的导数求解是这样的：如果发现 $y=y(x)$ 比较复杂，那么可以引入一个中间函数 $u=u(x)$，从而使原函数变成 $y=y(u)$，则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$，将 y 的自变量从 x 变成 u。若 $\frac{dy}{du}$ 和 $\frac{du}{dx}$ 比较简单，则可以大大方便我们的计算。

对于 $y=\ln(2x^2)$，我们引入 $u(x)=2x^2$，$\frac{du}{dx}=4x$，则 $y=\ln u$，$\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{2x^2}$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2x^2}\cdot 4x=\frac{2}{x}$$

我们再来试一下：求 $y=\frac{5}{x^4+3x-8}$ 的导数。

引入 $u(x)=x^4+3x-8$，$\frac{du}{dx}=4x^3+3$，则

$$y=\frac{5}{u},\quad \frac{dy}{du}=-\frac{5}{u^2}=-\frac{5}{(x^4+3x-8)^2}$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{5}{(x^4+3x-8)^2}\cdot(4x^3+3)=-\frac{5(4x^3+3)}{(x^4+3x-8)^2}$$

下面举一个物理中的实例。

例 2 如图 1.3 所示的弹簧振子，它做简谐振动的位移为 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，其中 A 为振幅，ω 为圆频率，φ_0 为初相位，三者均为常数。试求 t 时刻的速度和加速度。

解析 位移对时间的导数就是速度，即 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，而 $x(t)$明显是一个复合函数，故我们引入：

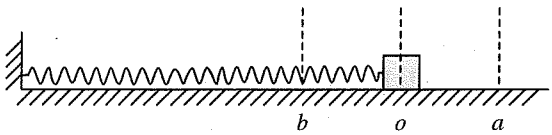

图 1.3

$$u(t)=\omega t+\varphi_0,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\omega$$

则

$$x=A\cos u,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=-A\sin u=-A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

所以

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

再考虑加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，同样引入：

$$u(t)=\omega t+\varphi_0,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\omega$$

则

$$v=-\omega A\sin u,\quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=-\omega A\cos u=-\omega A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

所以

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

我们可以看到 v 和 a 均随时间 t 做周期性的变化，这会有怎样的物理绘景呢？

首先当位移为 x 时，合力为 $F=-kx$，它产生的加速度为 $a=\dfrac{F}{m}=-\dfrac{k}{m}x$，而 $a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2x$，比较可得

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

即

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

所以简谐振动的周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

其次，我们来观察一下简谐振动时的能量变化。其中，振子的动能为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

弹簧的势能为

$$E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$$

由此可见，动能和势能不断做周期性变化，且动能最大时势能最小，动能最小时势能最大，两者互相转化。总能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

它是一个守恒量，不随时间变化。

看到这里，同学们一定会有惊艳的感觉吧。周期公式和能量规律都是从位移公式出发自然得到的结果，全程只用到了导数，这是一件很神奇的事情！

只要能够熟练使用导数这个数学工具，就能很自然地推导出其他看起来毫不相关的结果。就好像第 8 章“万有引力与航天”中的开普勒三大定律一样，只要数学足够好，第三定律就是第二定律的自然推论（当然前提是承认万有引力定律）。

就像侦探破案一样，对一点蛛丝马迹（如位移公式），通过逻辑推理、经验判断等手段（如导数等数学工具），就能顺藤摸瓜，还原事物的全部细节（如周期公式、能量规律等），这无疑是一种更高层次的享受和挑战。

1.5 导数的四则运算

导数的加减法与一般的数字运算完全相同，这里不再赘述。本书主要研究乘法和除法。

1. 乘法

如果想求 $y = x^2\sin x$ 的导数，我们会引入 $y_1 = x^2$ 和 $y_2 = \sin x$，从而将 y 视作 y_1 和 y_2 的乘积。那么问题来了：当 y_1 和 y_2 乘在一起时，结果是什么呢？

首先给出结论：**前导后不导 + 后导前不导**。即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(y_1 \cdot y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx}y_2 + y_1\frac{dy_2}{dx}$$

或写为

$$y' = y_1'y_2 + y_1y_2'$$

我们来证明一下。

由定义可知

$$\frac{d(y_1 \cdot y_2)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y_1(x+\Delta x)y_2(x+\Delta x) - y_1(x)y_2(x)}{\Delta x}$$

我们把 $y_1(x+\Delta x)$ 和 $y_2(x+\Delta x)$ 分别写为

$$y_1(x+\Delta x) = y_1(x) + \Delta y_1 \quad 和 \quad y_2(x+\Delta x) = y_2(x) + \Delta y_2$$

则

$$\text{原式} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y_1(x)y_2(x) + y_1(x)\cdot\Delta y_2 + y_2(x)\cdot\Delta y_1 + \Delta y_1\cdot\Delta y_2 - y_1(x)y_2(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y_1(x)\cdot\Delta y_2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{y_2(x)\cdot\Delta y_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y_1\cdot\Delta y_2}{\Delta x} = y_1\frac{dy_2}{dx} + y_2\frac{dy_1}{dx}$$

证明完毕。

现在我们来求 $y=x^2\sin x$ 的导数。

引入：

$$y_1=x^2,\quad \frac{dy_1}{dx}=2x;\quad y_2=\sin x,\quad \frac{dy_2}{dx}=\cos x$$

则

$$\frac{dy}{dx}=2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x=x(2\sin x+x\cos x)$$

2. 除法

如果 $y=\frac{y_1}{y_2}$，想要求它的导数，又该怎么办呢？可以把它写成 $y=y_1\cdot\frac{1}{y_2}$，从而把除法转变为乘法。我们来计算一下：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{1}{y_2}+y_1\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y_2}\right)=\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{1}{y_2}-\frac{y_1}{y_2^2}\cdot\frac{dy_2}{dx}=\frac{\frac{dy_1}{dx}\cdot y_2-y_2\cdot\frac{dy_1}{dx}}{y_2^2}$$

或写为

$$y'=\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}$$

（说明：在求 $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y_2}\right)=-\frac{1}{y_2^2}\cdot\frac{dy_2}{dx}$ 的时候，已经使用了复合函数求导。）

练习 试求 $y=\tan x$ 的导数。

解析 $y=\frac{\sin x}{\cos x}$，引入 $y_1=\sin x$，$y_1'=\cos x$ 和 $y_2=\cos x$，$y_2'=-\sin x$，代入以上除法公式，并化简得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

用同样的方法可以得到 $y=\cot x$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

以上就是简单一元函数求导的相关知识，下面我们来实际应用一下。

例 3 求等量同种点电荷组中垂线上何处的场强最大。

解法 1 如图 1.4 所示，假设点电荷电量均为 $+Q$，两者相距为 $2d$，中点记为 O，在中垂线上取一点 P，$PO=x$，我们可以尝试写出 P 点的场强 $E=E(x)$。则显然有

$$E(x)=2E_1\sin\theta=2kQ\cdot\frac{x}{(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

当 E 最大时，可知其对 x 的导数必然为零。

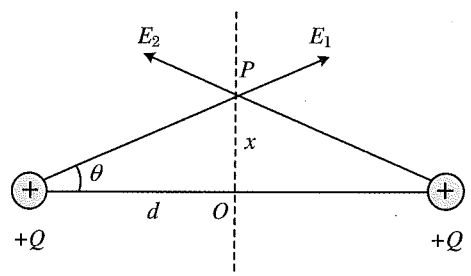

图 1.4

自变量 x 同时出现在分子和分母上，应该采用导数的除法运算规则。引入：$u_1=x$，$u_1'=1$；

$u_2=(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$，$u_2'=3x\cdot\sqrt{d^2+x^2}$。注意，$u_2'$的计算要用到复合函数求导。所以

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=2kQ\cdot\frac{1\cdot(d^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-x\cdot3x\cdot\sqrt{d^2+x^2}}{(d^2+x^2)^3}=0$$

从而得到 $x=\frac{d}{\sqrt{2}}$，此时可得

$$E_{\max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{kQ}{d^2}$$

解法 2 如果我们选择自变量为夹角 θ，而不用 x，会更容易求解。首先有

$$E(\theta)=2\cdot\frac{kQ}{\left(\frac{d}{\cos\theta}\right)^2}\cdot\sin\theta=\frac{2kQ}{d^2}\sin\theta\cdot\cos^2\theta$$

想知道 $E(\theta)$的极大值，就需要知道 $y(\theta)=\sin\theta\cdot\cos^2\theta$ 的极大值。下面我们用两种方法来计算 $y(\theta)$的极大值。

首先当然是求导。运用乘法规则，引入 $y_1=\sin\theta$ 和 $y_2=\cos^2\theta$，相应的导数为

$$y_1'=\cos\theta,\quad y_2'=-2\sin\theta\cos\theta$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\cos^3\theta-2\sin^2\theta\cos\theta=0$$

得$\cos^2\theta=2\sin^2\theta$。又因为$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$，所以

$$\sin^2\theta=\frac{1}{3},\quad\cos^2\theta=\frac{2}{3},\quad\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

此时可得

$$E_{\max}=\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{kQ}{d^2}$$

解法 3 我们还可以利用初等数学的不等式来寻找 $y(\theta)$的极值位置。初中时，我们学过 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，当 $a=b$ 时，$a+b$ 取得极小值，而 ab 取得极大值；若有三项连加，则有 $a+b+c\geqslant3\sqrt[3]{abc}$，当 $a=b=c$ 时，$a+b+c$ 取得极小值，而 abc 取得极大值，即

$$abc\leqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$$

回到 $y(\theta)=\sin\theta\cdot\cos^2\theta$，先平方再配方，得

$$y^2=4\cdot\sin^2\theta\cdot\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{2}\cos^2\theta$$

明显可得

$$y^2\leqslant4\left(\frac{\sin^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{1}{2}\cos^2\theta\cdot}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$$

即 $y\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}$，取等号时$\sin^2\theta=\frac{1}{2}\cos^2\theta$，代回可知 E 的最大值为$\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{kQ}{d^2}$。

1.6 泰勒级数展开

本节介绍一种极端重要且有用的数学方法——级数展开。它可以类比物理中:将一个总矢量分解为无数个分矢量。或者理解为整体由无数局部组合而成,从而可以寻找到一种或几种巧妙的办法将整体分解为局部,这种分解的方法就是级数展开。

数学上有许多不同的级数展开,比较著名的有两类。第一类是傅里叶级数展开,它在工程学、信息学的地位是奠基性的,如果没有傅里叶级数展开,整个世界将是混沌的、原始的,不可能这么快地进入现代化。将来去读工科的同学一定会同意我的观点,但它涉及的数学是以积分为基础的,所以我们暂时不介绍。第二类泰勒级数展开是在微分的基础上提出的,我们可以谈谈。下面详细介绍一下泰勒级数展开,没有兴趣的同学可以跳过直接看应用,并不影响整体阅读。

任意一个矢量总可以写成如下形式:

$$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

我们把三维空间的$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$称为一组基底,后来希尔伯特(Hilbert)把它推广到了无限维欧几里得空间,后人称为希尔伯特空间。

泰勒说,类似地,可以把任意函数 $y(x)$分解为如下形式:

$$y(x) = A_0x^0 + A_1x^1 + A_2x^2 + \cdots$$

以$(x^0,x^1,x^2,x^3,\cdots)$为基底,所有的 $A_n(n=0,1,2,\cdots)$均为某个特定常数。一般地,我们会把上式简写为

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n$$

其中$\sum_{n=0}^{\infty}$为求和符号,它表示 n 从0累加到 ∞。现在我们就来看看这些系数 A_n 分别是多少。

首先,取 $x=0$,同时代入上式左、右两边,我们可以非常快速地发现:

$$y(0) = A_0$$

第一个系数出来了,那么 A_1 怎么求呢?它与 x^1 连在一起,如果没有 x^1,那该多好啊!有办法吗?仔细看看等式右边,它是一系列幂函数的和。我们知道如果对一个幂函数做一个求导操作相当于进行了一次降幂的操作,这给我们带来了灵感。

将原式求一次导数,则变成下式:

$$y'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \cdots$$

取 $x=0$,同时代入上式左、右两边,我们开心地得到了:

$$A_1 = y'(0)$$

这下我们知道怎么做了。继续求导,然后取 $x=0$,我们陆续得到了后续的常数,分别为

$$A_2 = \frac{1}{2}y''(0),\quad A_3 = \frac{1}{3\cdot 2}y'''(0),\quad A_4 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}y^{(4)}(0),\quad \cdots$$

因此可以写出通式为

$$A_n = \frac{1}{n!}y^{(n)}(0)$$

注意 y 上方的 n 代表 n 次求导，而不是 y 的 n 次方。分母中 $n!$ 代表阶乘，其具体数值为 $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$，这样我们就可以把 $y(x)$ 简写为

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

利用泰勒级数展开，我们可以完美地证明欧拉公式 $e^{i\pi} + 1 = 0$，这里不再赘述。

例 4 试用泰勒级数展开证明：当 x 很小时，存在以下关系：

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx \quad (n \text{ 为任意实数，可正可负})$$

证明 确定函数为 $f(x) = (1 \pm x)^n$，先计算常系数 $A_n = \frac{1}{n!} y^{(n)}(0)$，可得

$$A_0 = y(0) = 1$$

$$A_1 = y'(0) = n(1+x)^{n-1}\big|_{x=0} = n$$

$$A_2 = \frac{1}{2} y''(0) = \frac{1}{2} n(n-1)(1+x)^{n-2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{2} n(n-1)$$

即

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx \pm \frac{1}{2} n(n-1)x^2 \pm \cdots$$

考虑到 x 很小，为小量，故 x^2 及后面其他项都是 x 的高阶小量，均可忽略，则剩下来的部分自然就是 $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx$。证明完毕。

举几个特例：

$$(1+x)^2 = 1 + 2x$$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x$$

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)x = 1 - \frac{3}{2}x$$

$$(1-x)^{-2} = 1 - (-2)x = 1 + 2x$$

这套运算在物理学中的应用及其广泛。下面以简谐运动为例。

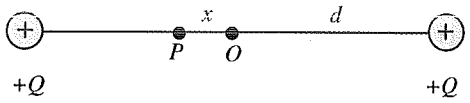

图 1.5

例 5 如图 1.5 所示，光滑水平地面上固定两个等量同种点电荷，电荷量均为 $+Q$，间距为 $2d$，在中心 O 处放置一质量为 m，电荷量为 $+q$ 的带电小球。现使它沿连线方向偏离中心一段很小的距离 x，然后放手，小球将在 O 点左右往复运动。请证明小球的运动是简谐振动，并计算它的振动周期。

解析 简谐振动的等效证明有许多种形式，最常用的方法就是考察在位置 x 时，指向平衡位置的合力是否满足 $F = -kx$，其中 k 为常量，负号表示方向。

周期公式为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

假设如图 1.5 所示的小球向左平移 x，则其合力方向向右，大小为

$$F(x) = \frac{kQq}{(d-x)^2} - \frac{kQq}{(d+x)^2} = \frac{kQq}{d^2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{x}{d}\right)^2} - \frac{kQq}{d^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{d}\right)^2}$$

我们把 x 作为一个小量，则由小量近似可知

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{d}\right)^2}=\left(1-\frac{x}{d}\right)^{-2}=1+\frac{2x}{d},\quad \frac{1}{\left(1+\frac{x}{d}\right)^2}=\left(1+\frac{x}{d}\right)^{-2}=1-\frac{2x}{d}$$

则

$$F(x)=\frac{4kQq}{d^3}x\triangleq k'x$$

所以周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}=2\pi\sqrt{\frac{md^3}{4kQq}}$$

1.7 小 结

本章从实用性角度向大家介绍了微分的初步知识，应该说真正的微分是很严谨和缜密的，不是像我们这样蜻蜓点水。本章只是给大家做一个简单的介绍，并且把它作为一个工具来使用，告诉大家应该如何使用就可以了。如果真的进行严格缜密的推理，就需要考虑函数的连续性，是否可导、可微，极限的存在与否等，那就过于严肃了。

在物理学的实际应用中往往是去寻找两个变量 x 和 y 之间的关系，很多时候我们如果想要求得 y 的极值，可以通过求其导数为零的方法快速解答。

真实的问题中自变量往往不是只有一个，即不是一元的，而是多元的，比如 $y=y(x_1,x_2,x_3,\cdots)$，因此又会引出偏导数、全微分等概念，这就不是我们这本书的任务了。

一个实际问题往往可以分成两部分：一是提出问题，二是解决问题。在提出问题时，我们常会使用微分，从而建立相关参量之间的关系，一般是一个微分方程（详见本书第 11 章“机械振动”）；而在解决问题时，基本上都要依靠积分来求解微分方程，所以如果只是学习了微分其实是跛足的，还需要继续探索，你会发现积分的世界更大、更远、更妙且更有趣。

第2章　积　　分

积分是微分的逆运算，在了解了微分后，还需要学习积分的相关内容。

2.1　什么是积分

任意一个函数 $y=y(x)$，如图 2.1 所示，想要知道此函数在 $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ 时与 x 轴所围的面积，所进行的操作就是积分。

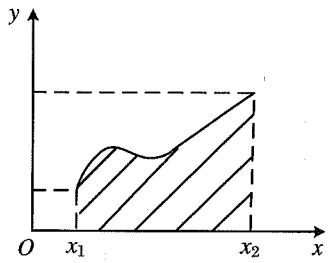

图 2.1

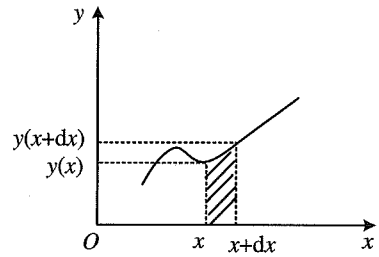

图 2.2

具体的计算方法如下：如图 2.2 所示，取 $x \to x+\mathrm{d}x$ 的微元过程，此过程中可以认为函数值 $y(x)$ 基本不变，视为恒定，则画阴影的小窄条可看作一个长方形，它的底边为 $\mathrm{d}x$，高为 y，所以小窄条的面积为 $\mathrm{d}s=y\mathrm{d}x$。

沿着 x 轴不停地取 $\mathrm{d}s$，然后做出一个一个的小窄条，每个小窄条都有一定的面积，把所有的小窄条的面积加起来，就得到了总面积：

$$s=\sum \mathrm{d}s=\sum y\mathrm{d}x$$

我们把它标记为 $s=\int \mathrm{d}s=\int y\mathrm{d}x$，其中“$\int$”为积分符号，它是一个拉长的字母“$s$”。

我们以 $y=x^2$ 为例，来具体说明求解的过程。

面积为

$$s=\int y\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x$$

下面我们来回忆一下：在导数的学习中，我们知道 $\dfrac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}x}=3x^2$，即 $x^2\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$，代入上式，可得

$$s=\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3\right)$$

把积分符号重新换回求和符号会看得更清楚，即

$$s = \sum \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}x^3$$

回顾刚才的计算，我们的操作是这样的：

形如 $s = \int y\mathrm{d}x$ 的积分，我们需要寻找一个函数 $s(x)$（我们称为原函数），它对 x 的导数如果恰好为 y，则该原函数就是我们要求的积分结果。

比如 $s = \int \sin x\mathrm{d}x$，我们发现 $-\cos x$ 对 x 的导数恰好就是 $\sin x$，所以

$$s(x) = -\cos x$$

可以看到，求导数和求积分之间恰好是一个互逆操作：已知原函数 $s(x)$，求它对 x 的变化率，叫作求导；已知导函数 $y(x)$，求它的原函数就是积分。

以幂函数 x^2 为例，其导数为 $2x$，求一次导数相当于降了一次幂；而求它的积分为 $\frac{1}{3}x^3$，相当于升了一次幂。

另外需要指出的是，积分有定积分和不定积分之分。如果自变量的上、下限给出（也就是说积分的区间给定），分别记为 x_1 和 x_2，则函数 $y(x)$ 的积分可以表为 $s = \int_{x_1}^{x_2} y\mathrm{d}x$，这种积分叫作定积分。比如我想知道 $y = x^2$ 在 $x \in [0,1]$ 区间的面积，如图 2.3 所示。则

$$s = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

其中，“$\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$”表示分别将 $x=1$ 和 $x=0$ 代入 $\frac{1}{3}x^3$，然后求差的结果，即 $\frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 = \frac{1}{3}$。

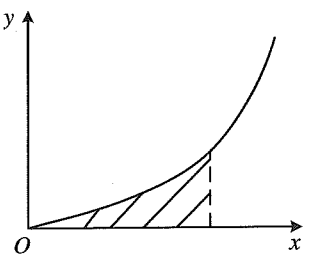

图 2.3

如果自变量的上、下限不给出，则称为不定积分，积分后会多出一个常数项 C。比如 $s = \int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$，其中，$C$ 为某个待定常量，由初始状态来决定。

为什么会有 C 呢？因为“$\frac{1}{3}x^3 + C$”的导数仍然为 x^2，所以 $\frac{1}{3}x^3 + C$ 也为 x^2 的原函数。

2.2 典型示例

例 1 已知圆的周长为 $l = 2\pi R$，试求其面积。

解析 我们其实早就知道圆的面积公式是 $S = \pi R^2$，但它是怎么得来的？不知道同学们有没有去追究过。我们现在用积分的方法来求解，顺便熟悉一下积分的基本操作路径。

如图 2.4 所示，我们尝试将此圆周切分成许多条非常狭窄的环带，这个环带称为**微元**。从圆心 O 点沿某条半径取 $r \to r + \mathrm{d}r$ 的环带，将环带取出并剪开，由于 $\mathrm{d}r$ 极小（要多小有多

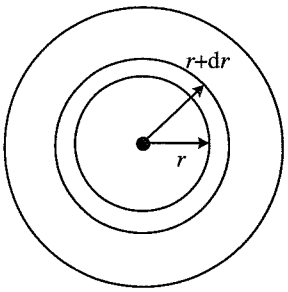

图 2.4

小),可以把它看作一个长条形的矩形,长度为 $2\pi r$,宽度为 $\mathrm{d}r$,则面积为

$$\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$$

沿着半径的方向不断地裁剪出无数条类似的环带,每个环带都有面积,把所有的面积求和后就得到了圆的总面积,这就是积分操作的基本思路。

积分的上、下限为从 $r=0$ 到 $r=R$,则

$$S = \int \mathrm{d}S = \int_0^R 2\pi r\mathrm{d}r$$

观察上式,什么函数的导数是 $2\pi r$ 呢?很明显,$\frac{\mathrm{d}(\pi r^2)}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$,所以

$$S = \int_0^R \mathrm{d}(\pi r^2) = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2$$

求解完毕。

说明 (1) 只要有了周长公式,原则上就有了面积公式。同样地,如果知道球的表面积为 $S=4\pi R^2$,则可以计算得出球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,这点留给读者自己证明。

(2) 再次强调积分操作的标准流程:取出合适的微元→列出微元的表达式→写出积分式→寻找原函数→代入数据取得结论。

再来看一个数学常数——椭圆的面积。

例 2 椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,试求它的面积 S。

解析 如图 2.5 所示,我们只需要计算第一象限内椭圆曲线所围的面积 S_0 即可,然后由对称性可知 $S=4S_0$。

在第一象限中,截取出微元为 $\mathrm{d}S_0 = y\mathrm{d}x$,则

$$S_0 = \int \mathrm{d}S_0 = \int_0^a y\mathrm{d}x$$

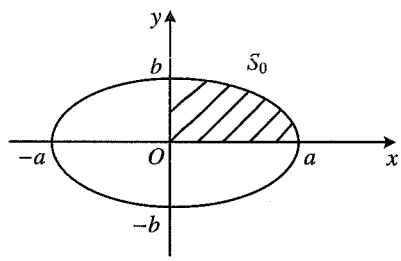

图 2.5

由于 $y(x)=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$ 比较复杂,它的原函数 $\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}=y(x)$ 比较难找,因此这里向大家介绍一种非常实用的方法——换元法。

考虑引入新的自变量 θ,从而将 x 和 y 写成如下形式:

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta$$

代入 S_0 的关系式,可得

$$S_0 = \int_0^a b\sin\theta\mathrm{d}x$$

下面要做两件事:

第一,将微元 $\mathrm{d}x$ 换成 $\mathrm{d}\theta$,由 $x=a\cos\theta$ 可知 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -a\sin\theta$,所以

$$\mathrm{d}x = -a\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

第二，将积分的上、下限也换成 θ 的上、下限，当 $x_1=0$ 时，得 $\theta_1=\frac{\pi}{2}$，当 $x_2=a$ 时，得 $\theta_2=0$。

重新代入，得到下式：

$$S_0=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin\theta\cdot(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

积分号中的$\sin^2\theta$也不是一下就能看出其原函数的。利用倍角公式可以将其降阶为

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

则

$$S_0=-\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

上式可拆解为两个积分的差：

$$S_0=\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta$$

等式右边第一项为 $\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta$。而我们知道$\frac{d(\sin 2\theta)}{\mathrm{d}\theta}=2\cos 2\theta$，所以 $\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}d(\sin 2\theta)$，即

$$\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}ab\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=0$$

等式右边第二项为 $\frac{1}{2}ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}ab\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=-\frac{1}{4}\pi ab$。所以

$$S_0=0-\left(-\frac{1}{4}\pi ab\right)=\frac{1}{4}\pi ab$$

于是可知整个椭圆的面积为 $S=4S_0=\pi ab$，它是一个常数。

说明 在2013年复旦千分考中出现了一道有关的试题。复旦千分考是复旦大学的能力水平测试，也称为复旦大学优秀生测试，简称复旦水平测试，属于自主招生类考试。当然，也是考查学生综合能力素质教育的考试，是素质教育的精神体现。凡是推荐生、艺术生等想要进入复旦大学的考生都必须参加此测试。首先以自荐或者学校推荐的方式进行考试。该考试的形式为200道选择题。答题时间为3小时。

考试内容有：语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理、生物、政治、计算机10门学科。评分标准为：答对一题加5分，错答减2分，不答不得分，最后看总分。此考试通过后进入面试，通过以后即可进入复旦大学当年的预录取名单，但仍需参加高考。

2017年开始复旦大学面向浙江、上海单独出卷。考试形式是：理科类只考数学和物理，各1.5小时，总共3小时；数学、物理各45题，前30题每道3分，共90分，高考难度，后15题，每道4分，共60分，自招、三一难度；单科150分，合计300分；全部为单选题，答错倒扣分。

例3 （2013年复旦千分考）一个质点做直线运动，在$0\leqslant t\leqslant T$时间内瞬时速度为$v(t)=v_0\cdot\sqrt{1-\left(\frac{t}{T}\right)^2}$。在$0\leqslant t\leqslant T$时间内的平均速度$\bar{v}$为（　　）。

A. v_0　　B. $\frac{v_0}{2}$　　C. $\frac{\pi}{4}v_0$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$

答案 C

解析 本题的标准做法如下：将 $v(t)$ 变形为 $\frac{v^2}{v_0^2}+\frac{t^2}{T^2}=1$，则如图 2.6 所示，$v$-$t$ 图像为椭圆曲线在第一象限的部分。其面积为

$$x=\frac{1}{4}\pi\cdot v_0\cdot T$$

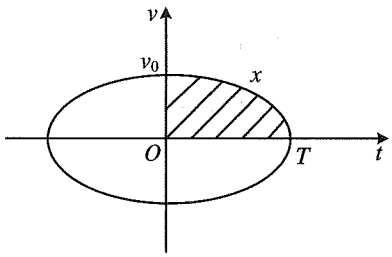

图 2.6

由平均速度关系 $x=\bar{v}\cdot T$，可知 $\bar{v}=\frac{\pi}{4}v_0$。故选择 C。

说明 由于要求在 180 min 内完成 200 道题，并且有倒扣分机制，所以要求考生答题时要做得又对又快。如果能够快速看出 v-t 图像为椭圆，则可迅速选择 C，因为只有这个选项含有 π。

2.3 转动惯量的导出

例 4 有一根质量分布不均匀的长直杆静置于水平地面，长为 L，左端点为 O。以 O 为起点沿杆方向建立 x 轴。引入质量分布线密度 ρ，它表示单位长度上的质量 $\rho=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$。已知 $\rho(x)=\rho_0+kx$，k 为大于 0 的常数。试求：

(1) 总质量 M；

(2) 质心的位置 x_C；

(3) 若直杆绕 O 点以角速度 ω 转动，求直杆的总动能 E_k。

解析 处理实际物理中的变化问题，我们一定要取好微元。取什么好呢？如图 2.7 所示，我们取 $x\to x+\mathrm{d}x$。

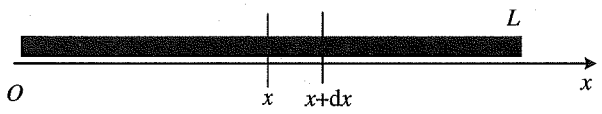

图 2.7

这段微元内有质量，它可以被视为质点。由于 $\mathrm{d}x$ 极短，因此在这个区间内质量分布可以认为是均匀的，线密度为 $\rho(x)=\rho_0+kx$，则其质量为

$$\mathrm{d}m=\rho(x)\mathrm{d}x=(\rho_0+kx)\mathrm{d}x$$

为什么要这样取？原因很简单：所有的物理过程讨论均以质点为基本模型，如动能的计算，质心位置的确定等。所以我们需要将直杆切分为无数质点的集合。选择以 $\mathrm{d}x$ 为基础来取出微元，它使得周围的很小区域质量分布均匀，所以 $\mathrm{d}m=\rho(x)\mathrm{d}x$。取出 $\mathrm{d}m$ 后，就很容易计算了。

解析 (1) 总质量为

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^L (\rho_0 + kx)\mathrm{d}x = \int_0^L \rho_0 \mathrm{d}x + \int_0^L kx\mathrm{d}x = \rho_0 L + \frac{1}{2}kL^2$$

(2) 质心位置为

$$x_C = \frac{\int x\mathrm{d}m}{M} = \frac{\int_0^L (\rho_0 + kx)x\mathrm{d}x}{M} = \frac{\int_0^L \rho_0 x\mathrm{d}x + \int_0^L kx^2\mathrm{d}x}{\rho_0 L + \frac{1}{2}kL^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\rho_0 L^2 + \frac{1}{3}kL^3}{\rho_0 L + \frac{1}{2}kL^2} = \frac{3\rho_0 L + 2kL^2}{6\rho_0 + 3kL}$$

(3) 由于各质点的速度并不相同，所以我们首先计算各质点的动能，为

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot (\rho_0 + kx)\mathrm{d}x \cdot (\omega x)^2 = \frac{1}{2}\omega^2(\rho_0 x^2 + kx^3)\mathrm{d}x$$

然后通过积分就可以知道总动能为

$$E_k = \int \mathrm{d}E_k = \int_0^L \frac{1}{2}\omega^2(\rho_0 x^2 + kx^3)\mathrm{d}x = \omega^2 L^3\left(\frac{1}{6}\rho_0 + \frac{1}{8}kL\right)$$

说明 (1) 物体平动时，组成物体的各质点的线速度完全相同，所以其总动能为

$$E_k = \int \mathrm{d}E_k = \int \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\int \mathrm{d}m\right) \cdot v^2 = \frac{1}{2}Mv^2$$

但是如果物体在转动，则各质点的线速度并不相同，所以不能直接计算，要按本例中第(3)小题的做法，先算出单个质点的动能，然后积分计算。

(2) 不过在转动系中，虽然线速度不同，但各质点的角速度是相同的。假设质元 $\mathrm{d}m$ 离转动中心的距离为 r，则其转动动能为

$$\mathrm{d}E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}m \cdot (\omega r)^2 = \frac{1}{2} \cdot (r^2\mathrm{d}m) \cdot \omega^2$$

总动能为

$$E_k = \int \mathrm{d}E_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\int r^2\mathrm{d}m\right) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

其中，$I = \int r^2\mathrm{d}m$，它的地位类似于平动中的惯性，我们给它取个名称，叫作**转动惯量**，它决定物体转动时的“惯性”。也就是说，对于一个转动系统，我们可以统一采用 $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ 的公式来计算动能，难点在于转动惯量 $I = \int r^2\mathrm{d}m$ 的求解。下面我们来试试看。

例 5 如图 2.8 所示，均匀杆的质量为 m，长度为 L，两端点为 a 和 b，中点为 O，试求：

(1) 以 O 为转轴时的转动惯量 I_o；

(2) 以 a 为转轴时的转动惯量 I_a。

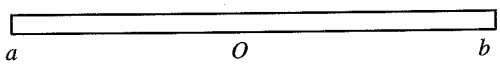

图 2.8

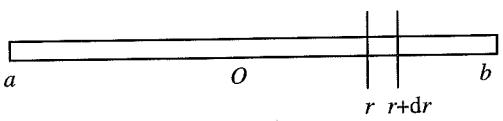

图 2.9

解析 (1) 如图 2.9 所示，以 O 为转轴时，从 O 出发向右取 $r \to r + \mathrm{d}r$ 的质元，其质量

为 $\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\mathrm{d}r$，则转动惯量为

$$I_a=\int r^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{m}{L}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\frac{m}{L}r^3\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}=\frac{1}{12}mL^2$$

注意积分的上、下限为 $-\frac{L}{2}$ 和 $\frac{L}{2}$。

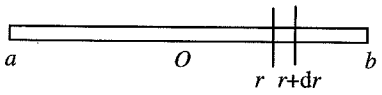

图 2.10

(2) 如图 2.10 所示，以 a 为转轴时，从 a 出发向右取 $r\to r+\mathrm{d}r$ 的质元，其质量为 $\mathrm{d}m=\frac{m}{L}\mathrm{d}r$，则转动惯量为

$$I_a=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^L\frac{m}{L}r^2\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\frac{m}{L}r^3\Big|_0^L=\frac{1}{3}mL^2$$

注意积分的上、下限为 0 和 L。

说明 有别于平动系统，对转动系统来说，如果转轴的位置不同，转动惯量就会不相同，这点大家要切记。有兴趣的同学可以搜索一下“平行轴定理”。

例 6 如图 2.11 所示，均匀细杆质量为 m，长为 L，两端点为 a 和 b，质心为 O，用铰链悬挂端点 a，然后从水平释放，不计所有阻力，试求细杆第一次运动到竖直状态时端点 b 的速度大小。

解析 取杆为研究对象，它不是一个质点，而是许多质点的组合，它们具有相同的角速度 ω，如果知道竖直状态时的 ω，则点 b 的速度为 $v=\omega L$。

我们利用机械能守恒来求解此题。重力势能减少量为 $mg\cdot\frac{1}{2}L$，转化为转动动能。细杆绕端点转动时的转动惯量为 $I=\frac{1}{3}mL^2$，则竖直时的转动动能可表示为

$$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\cdot\omega^2$$

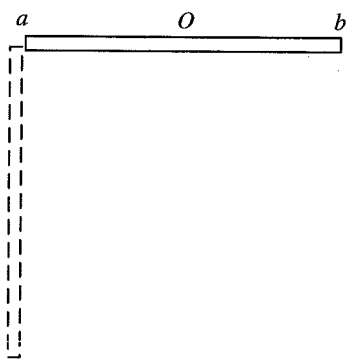

图 2.11

由于所有阻力均不计，所以能量守恒，则有

$$\frac{1}{2}mgL=\frac{1}{6}mL^2\omega^2$$

所以 $\omega=\sqrt{\frac{3g}{L}}$，故点 b 的速度为

$$v=\omega L=\sqrt{3gL}$$

说明 如果把细杆换成一个质量为 m 的小球，被一根长为 L 的细绳拴着由静止释放，则小球到达最低点的速度为 $v=\sqrt{2gL}$，这两个速度是不一样的。

下面给大家留一个题，大家可以试一下，用以熟悉积分的使用。

练习 1 均匀圆盘的质量为 m，半径为 R，转轴垂直圆盘且通过中心，求其转动惯量。$\left(\text{答案：}I=\frac{1}{2}mR^2\text{。}\right)$

2.4 电势能和电势

库仑力和万有引力具有高度的类似性，都与距离的平方成反比，做功都与路径无关，因此必然存在相对应的势能。

如图 2.12 所示，场源电荷 $+Q$ 对距离它为 x 处的试探电荷 $+q$ 的作用力为

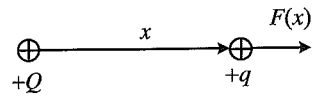

图 2.12

$$F(x) = \frac{kQq}{x^2}$$

现在用外力将试探电荷 $+q$ 从 r 处缓慢移送到无穷远处。取 $x \to x + \mathrm{d}x$ 的微元过程，在此过程中可将电场力视为恒定，则外力所做的元功为

$$\mathrm{d}W = \frac{kQq}{x^2}\mathrm{d}x$$

全过程的总功为

$$W = \int_r^{\infty} \frac{kQq}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{kQq}{x}\right)\Big|_r^{\infty} = \frac{kQq}{r}$$

另外，做功与势能的变化关系是 $W = E_{\mathrm{p}}$，因此我们导出了库仑场中的电势能公式为

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{kQq}{r}$$

利用同样的方法可以知道引力势能为

$$E_{\mathrm{p}}(r) = -\frac{GMm}{r}$$

它和电势能 $E_{\mathrm{p}} = \dfrac{kQq}{r}$ 在形式上高度相似，但是相差一个负号，这是为什么吗？

比较发现，因为万有引力的方向总是指向被吸引的物体，即 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 总是方向相反，处于反平行关系，记作 $\boldsymbol{F} \uparrow \downarrow \boldsymbol{r}$，所以做功为负；而在我们上述的假设中电场力是斥力，$\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 总是方向相同，处于平行关系，记作 $\boldsymbol{F} \uparrow \uparrow \boldsymbol{r}$，所以做功为正。

如果两个电荷异号呢？回答是：电场力所做的功将变成负功。

为了将以上情况统一在一个公式中，我们约定电势能中的电荷量 Q 和 q 均包含正负号。由电势能公式，我们很自然可以知道 r 处的电势为

$$\varphi(r) = \frac{E_{\mathrm{p}}}{q} = \frac{kQ}{r}$$

下面简单分析一下这个公式。

当 $Q>0$ 时，φ 是 r 的单值函数，当 r 慢慢变大时，电势 φ 不断减小，由于 $\varphi(\infty)=0$，因此正点电荷周围区域的电势都是大于零的。

那么有同学一定会有疑问了，如果 r 一直变小到零呢？$r \to 0$，$\varphi(0) \to \infty$，难道电势 U 变成无穷大了吗？

这是不对的，实际上当 $r \to 0$ 时，点电荷模型就失效了，那么由点电荷模型导出的电势公式 $\varphi(r) = \dfrac{kQ}{r}$ 也不再适用了，需要用别的办法求解，具体内容详见本书的第 15 章。

同样地，当 $Q<0$ 时，φ 也是 r 的单值函数，当 r 慢慢变大时，电势 φ 不断变大，由于 $\varphi(\infty)=0$，因此负点电荷周围区域的电势都是小于零的。

如果空间中既有正电荷，又有负电荷呢？空间一点的电势会是正、负电荷激发的电势的叠加，由于电势是标量，它的叠加法则就是直接代数相加。比如，正电荷在某点激发的电势为 $+5\ \mathrm{V}$，负电荷在同一点激发的电势为 $-8\ \mathrm{V}$，则该点的真实电势就是

$$\varphi=+5\ \mathrm{V}+(-8)\ \mathrm{V}=-3\ \mathrm{V}$$

我们分三种情形来具体讨论一下。

1. 等量异种点电荷组

如图 2.13 所示，正、负电荷电量均为 Q，空间中任取一点 P，它与两个电荷的距离分别为 r_1 和 r_2，则根据叠加原理，点 P 的电势为

$$\varphi(r_1,r_2)=\frac{kQ}{r_1}+\frac{k(-Q)}{r_2}=\frac{kQ}{r_1}-\frac{kQ}{r_2}$$

我们观察一下上式，很自然得到电势分布的规律：

(1) 当 $r_1=r_2$ 时，$\varphi=0$，即中垂线上电势处处为零，这正是我们所熟知的结论。

(2) 当 $r_1<r_2$ 时，$\varphi>0$，即靠近正电荷处电势均为正；反之当 $r_1>r_2$ 时，$\varphi<0$，靠近负电荷处电势均为负。

可以把以上结果绘制成图 2.14，等势线分布就像一把斧头劈柴火，斧头劈下去，劈开的木柴往两边倒。

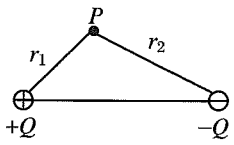

图 2.13

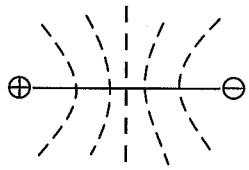

图 2.14

2. 等量同种点电荷组

如图 2.15 所示，两个正电荷电量均为 Q，空间中任取一点 P，它与两个电荷的距离分别为 r_1 和 r_2，则根据叠加原理，点 P 的电势为

$$\varphi(r_1,r_2)=\frac{kQ}{r_1}+\frac{kQ}{r_2}$$

我们观察一下上式，很自然得到电势分布的规律。

(1) 首先点 P 的电势一定为正，只有无限远处电势为零。

(2) 当 $\varphi=\varphi_0$（φ_0 为某一常数）时，$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{\varphi_0}{kQ}$，它的图像如图 2.16 所示。

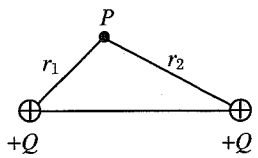

图 2.15

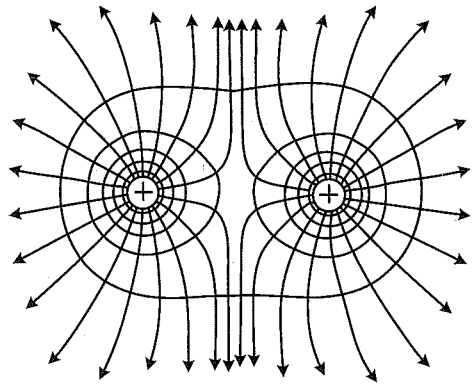

图 2.16

3. 电偶极子周围的电势分布

下面来考虑一个很有意思的情况：

如图 2.17 所示，一对等量异种点电荷组，每个电荷的电量均为 q，它们之间的距离为 l，中点为 O。外空间有一点 P，与中心 O 的距离为 r，所成的方向角为图中的 θ。

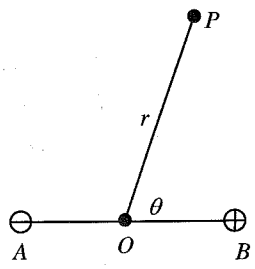

图 2.17

现在假定 AB 的距离非常小(此时我们习惯上把 AB 系统称为**电偶极子**，它是电介质物理中的基本模型，其地位相当于牛顿力学中的质点)，以至于可以把点 P 看作远方，所谓远方是指 $r \gg l$，那么此时此刻点 P 的电势是多少呢?

有同学会脱口而出说是零。因为由点电荷的电势公式可知，每个点电荷在很远处($r \to \infty$)激发的电势均为零，所以两个零加起来当然还是零。这种说法是值得鼓励和肯定的。不过我们现在考察的是：r 很大，但还远远达不到 ∞ 的情况。

解析 假设 P 与 A 的距离为 r_1，与 B 的距离为 r_2，则由电势叠加公式可知

$$\varphi(r,\theta) = \frac{kq}{r_2} - \frac{kq}{r_1}$$

接下来的任务是要用 r,θ 来表示 r_1 和 r_2。我们又要用到数学了，这一次我们要用两个三角形。

解法 1 微元等腰直角三角形

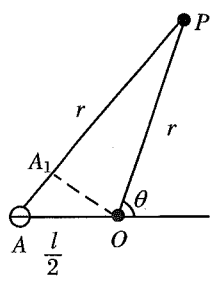

图 2.18

如图 2.18 所示，先取出△POA，在 PA 上截取 PA_1，使 $PA_1 = r$，连接 A_1O，△PA_1O 为一等腰三角形。这个等腰三角形很特殊，因为 $r \gg l$，所以顶角∠APO 极小，可以视为零。那么∠PA_1O = ∠POA_1 = $\frac{\pi}{2}$，这就是一个不同寻常的等腰直角三角形，它的两个底角都是 90°。

而在△AA_1O 中，因为 $AA_1 \perp A_1O$，∠$A_1AO \approx \theta$，所以

$$AA_1 = OA \cdot \cos\theta = \frac{l}{2}\cos\theta$$

故

$$r_1 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$$

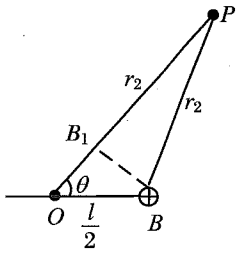

图 2.19

同样地，取出$\triangle POB$，如图 2.19 所示，在 PO 上截取 PB_1，使 $PB_1 = r_2$，连接 B_1B，$\triangle PB_1B$ 也为一个特殊的等腰直角三角形，$\angle PB_1B = \angle PBB_1 = \frac{\pi}{2}$。

在$\triangle BB_1O$ 中，因为 $BB_1 \perp B_1O$，$\angle B_1OB = \theta$，所以

$$OB_1 = OB \cdot \cos\theta = \frac{l}{2}\cos\theta$$

故

$$r_2 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$$

解法 2　余弦定理

首先介绍一下什么是余弦定理。在如图 2.20 所示的$\triangle ABC$ 中，三条边长分别为 a，b，c，则

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

这就是余弦定理。它的分母为构成 θ 角的两条邻边乘积 bc 的 2 倍，分子为这两条邻边的平方和 $b^2 + c^2$ 减去对边 a 的平方。角度 θ 不局限为锐角，也可以是直角或钝角。

我们不浪费笔墨去证明这个定理了，直接使用就行了。

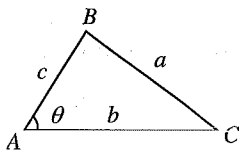

图 2.20

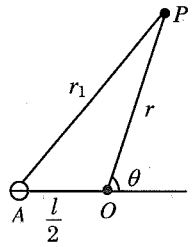

图 2.21

回到本题，在如图 2.21 所示的$\triangle POA$ 中，$\angle POA = \pi - \theta$，三条边的长度分别为 r，r_1，$\frac{l}{2}$，写出关于$\angle POA$ 的余弦定理，即

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - r_1^2}{2 \cdot r \cdot \frac{l}{2}} = -\cos\theta$$

求得

$$r_1^2 = r^2 + \frac{l^2}{4} + lr\cos\theta \approx r^2 + lr\cos\theta \quad (\text{因为 } r \gg l, \text{所以 } r^2 \gg l^2)$$

所以

$$r_1 = r\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos\theta}$$

利用第1章中泰勒级数展开的基本结论

$$(1+x)^n = 1+nx \quad (x \ll 1)$$

可得

$$r_1 = r\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{r}\cos\theta\right) = r+\frac{l}{2}\cos\theta$$

同样地，在如图2.22所示的$\triangle POB$中，写出关于$\angle POB$的余弦定理，即

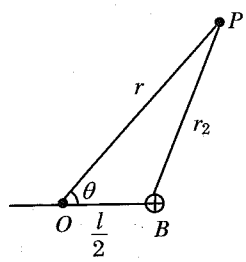

图2.22

$$\cos\theta = \frac{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 - r_2^2}{2\cdot r\cdot\frac{l}{2}}$$

求得

$$r_2^2 = r^2+\frac{l^2}{4} - lr\cos\theta \approx r^2 - lr\cos\theta$$

所以

$$r_2 = r\sqrt{1-\frac{l}{r}\cos\theta} = r-\frac{l}{2}\cos\theta$$

以上我们用了两种数学方法计算出了同样的结果：

$$r_1 = r+\frac{l}{2}\cos\theta, \quad r_2 = r-\frac{l}{2}\cos\theta$$

现在将它们代入电势公式$\varphi(r,\theta)=\frac{kq}{r_2}-\frac{kq}{r_1}$，得

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \frac{kq}{r-\frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{kq}{r+\frac{l}{2}\cos\theta}\\ &= \frac{kq}{r}\left[\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^{-1} - \left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^{-1}\right]\\ &= \frac{kql}{r^2}\cos\theta\end{aligned}$$

（上式在求解的时候又一次用到了$(1+x)^n=1+nx$。）

说明 点P的电势为

$$\varphi(r,\theta) = \frac{kql}{r^2}\cos\theta$$

仔细观察就会发现它与r的平方呈反比，而单个点电荷的电势$\varphi(r)=\frac{kQ}{r}$是与r的一次方呈反比的。也就是说，相比点电荷系统来说，电偶极子周围的电势衰减得更快。在第14章我们还会学到，电偶极子产生的电场强度$E\propto r^{-3}$，也比点电荷$E\propto r^{-2}$衰减得更快。

电偶极子是电介质物理学的基本模型，在电介质物理学中的地位相当于静电场中的点电荷和静磁场中的电流元，而介质极化问题在大学物理中是非常重要的内容，所以有必要提前向大家介绍一下。

2.5 感应电动势

法拉第电磁感应定律给出了感应电动势的计算公式：

$$\varepsilon = -n\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

上式表明，感应电动势 ε 的大小等于磁通量 φ 对时间 t 的导数。其中，n 表示匝数，负号表示电动势的方向与磁通量变化的方向相反，具体表现被统一为楞次定律。以下只计算 ε 的大小，所以在下面的计算中把负号去掉了。

在实际问题中，我们往往将电磁感应现象人为地分为感生和动生两类，为什么要这样分？如果能够分解为两类，那么为什么不能分成三类、四类呢？

这主要是由于产生电动势的非静电力有两种。产生动生电动势的非静电力是洛伦兹力的分力，产生感生电动势的非静电力由感生电场的作用力提供。具体的细节可以参看本书第 21 章“动生电动势”和第 22 章“感生电动势”。这里主要是来探讨积分在动生电动势中的应用。

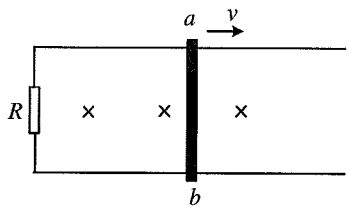

图 2.23

例 7 如图 2.23 所示，导体棒 ab 长为 L，某时刻以速度 v 向右切割匀强磁场 B，试求此时的电动势 ε。

解析 实际上，导体棒在前进时，由于产生了电动势，因此会有电流，会受到安培阻力的作用，导体棒的速度会减小，导体棒将做减速运动，所以我们需要使用微积分。

还记得积分处理的精髓吗？先取好微元，再积分求和。

取 $t \to t + \mathrm{d}t$ 时间内，假设速度 v 是不变的，在 $\mathrm{d}t$ 时间内导体棒前进的距离是 $v\mathrm{d}t$，则导体棒切割扫过的面积为 $\mathrm{d}s = Lv\mathrm{d}t$，磁通量变化了 $\mathrm{d}\varphi = B\mathrm{d}s = BLv\mathrm{d}t$，所以电动势为

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = BLv$$

这就是我们所熟悉的动生电动势的表达式。

下面我们来计算一下转动切割时的感应电动势。

例 8 如图 2.24 所示，均匀直导体棒 AC 长为 L，放在匀强磁场 B 中，现使导体棒整体绕 A 端以角速度 ω 旋转起来，试问：导体棒上的电动势 ε 是多大？

解析 导体棒在旋转，也算是切割磁感线，按理也应该可以使用 $\varepsilon = BLv$ 来计算。但是有别于平动切割，因为导体棒上各点的速度 v 处处不同，所以不能直接用点 C 的速度 ωL 作为 v 而得出 $\varepsilon = BL \cdot \omega L = B\omega L^2$，这显然是错误的。

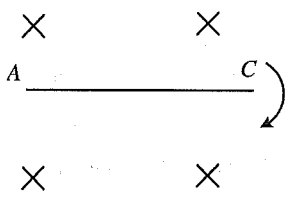

图 2.24

下面我们采用三种不同的方法来计算。

解法 1 平均速度

由于 ε 与 v 成正比，故可以考虑用 AC 中点的速度来替代公式中的 v，这样做是可以的。因为

$$v = \frac{1}{2}(v_A + v_C) = \frac{1}{2}\omega L$$

所以

$$\varepsilon = BL\bar{v} = BL \cdot \frac{1}{2}\omega L = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

解法 2 定义法(微分)

我们知道 $\varepsilon = BLv$ 是从 $\varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ 导出的,所以我们干脆抛弃 $\varepsilon = BLv$ 而直接应用 $\varepsilon = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$。

如图 2.25 所示,考察 $\mathrm{d}t$ 时间内,由于棒的运动,扫出一个扇形。扇形的半径为 L,圆心角为 $\mathrm{d}\theta = \omega\mathrm{d}t$,所以扇形的面积是

$$\mathrm{d}s = \frac{1}{2}L^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\omega L^2\mathrm{d}t$$

故

$$\varepsilon = \frac{B\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

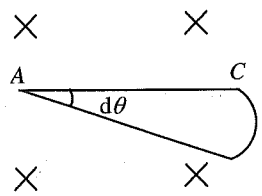

图 2.25

解法 3 积分法

解法 1 通过使用平均速度来取代 v,解法 2 从最基本的定义出发导出了最后结果,实际上我们在有意回避直接使用 $\varepsilon = BLv$ 这个公式。下面我们通过积分的方法直接使用此公式导出最后的结果。

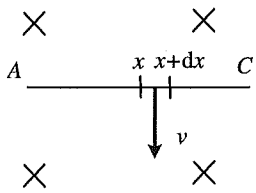

图 2.26

因为棒上各处的 v 并不相同,所以我们设法把它做质点化处理。如图 2.26 所示,我们所取的微元是与点 A 距离为 $x \to x + \mathrm{d}x$ 的微元,其长度为 $\mathrm{d}x$,速度为 $v = \omega x$,则这段微元产生的元电动势为

$$\mathrm{d}\varepsilon = Bv\mathrm{d}x = B\omega x\mathrm{d}x$$

AC 之间的总电动势就是所有这些小电动势的积分,即

$$\varepsilon = \int\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^L B\omega x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}B\omega L^2$$

说明 以上我们用了三种方法来计算转动时的电动势。一般我们都会使用第一种方法,极少采用第二种和第三种,因为第二种方法需要使用微分,第三种方法需要使用积分。

但事实上,第一种方法是建立在 ε 和 v 呈正比或呈线性关系的前提下才能使用,如果 $\varepsilon \propto v^2$,则此方法就不适用了。而第二种微分方法和第三种积分方法仍然是成立的,所以用解法 2 和解法 3 来处理这类变化的问题,更普适。

2.6 正弦交流电的有效值

一般正弦交流电的形式为 $u(t) = U_0\sin(\omega t + \varphi_0)$。其中,$U_0$ 为电压峰值,ω 为圆频率,φ_0 为初相位。为便于讨论,我们取 $\varphi_0 = 0$(这并不影响我们的讨论)。则

$$u(t) = U_0\sin\omega t$$

把它画出来,如图 2.27 所示。

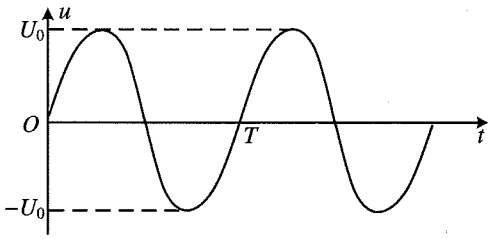

图 2.27

我们知道该交流电通过某个电阻 R 后是会生热的，其生热的效果可以通过有效值来等效表示。我们假设一个周期 T 内该交流电通过 R，生成的热量为 Q。再给出一个**直流电**，它的电压是 U_C，也让它通过 R，给出同样的时间 T，如果生成的热量也为 Q，那么就说交流电 $u(t)$ 和直流电 U_C 的生热效果是相同的，U_C 称为 $u(t)$ 的有效值。

那么问题来了，U_C 多大呢？教科书上给出的结果是 $U_C=\dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$，但没有给出计算过程。下面我们通过积分来详细计算。

假设 t 时刻电压值为 $u(t)$，取 $t\to t+\mathrm{d}t$ 时间段，因为 $\mathrm{d}t$ 极小，所以可以认为此时电压是恒定的，在 $\mathrm{d}t$ 时间内所生的热量为

$$\mathrm{d}Q=\frac{u^2(t)}{R}\mathrm{d}t$$

在 $0\to T$ 时间内的总热量为

$$Q=\int \mathrm{d}Q=\int_0^T\frac{u^2(t)}{R}\mathrm{d}t$$

我们将 $u(t)=U_0\sin\omega t$ 代入上式，得

$$Q=\int \mathrm{d}Q=\int_0^T\frac{U_0^2\sin^2\omega t}{R}\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{U_0^2}{2R}\mathrm{d}t-\int_0^T\frac{U_0^2}{2R}\cos(2\omega t)\mathrm{d}t$$

等式右边第一项为

$$\int_0^T\frac{U_0^2}{2R}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot\frac{U_0^2}{R}T$$

等式右边第二项为

$$\int_0^T\frac{U_0^2}{2R}\cos(2\omega t)\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{U_0^2}{4\omega R}\cos(2\omega t)\mathrm{d}(2\omega t)=\frac{U_0^2}{4\omega R}\sin(2\omega t)\Big|_0^T=0$$

所以

$$Q=\frac{1}{2}\cdot\frac{U_0^2}{R}T$$

又因 $Q=\dfrac{U_C^2}{R}T$，所以

$$U_C=\frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

说明 日常生活中我们所说的 220 V 就是指有效值 U_C，它的极大值是 $U_0=220\sqrt{2}\ \mathrm{V}=311\ \mathrm{V}$，真实交流电的周期是 $T=0.02\ \mathrm{s}$，即圆频率 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=100\pi$，所以日常输出的交流电的表达式为

$$u(t)=311\sin(100\pi t)$$

当然有效值还有更为简便的计算方法。

假定有两种交流电，它们分别为 $u_1=U_0\sin\omega t$ 和 $u_2=U_0\cos\omega t$，在同样的时间内分别通过电阻 R，那么在 $\mathrm{d}t$ 时间内它们各自产生的热量为

$$dQ_1 = \frac{u_1^2}{R}dt = \frac{U_0^2 \sin^2 \omega t}{R}dt, \quad dQ_2 = \frac{u_2^2}{R}dt = \frac{U_0^2 \cos^2 \omega t}{R}dt$$

一个周期内各自生热为

$$Q_1 = \int_0^T \frac{U_0^2 \sin^2 \omega t}{R}dt, \quad Q_2 = \int_0^T \frac{U_0^2 \cos^2 \omega t}{R}dt$$

显然有

$$Q_1 = Q_2 \triangleq Q$$

这两个积分我们假定不知,现在换一个思路,考虑在 dt 时间内它们产生的热量之和为

$$dQ_1 + dQ_2 = \frac{u_1^2}{R}dt + \frac{u_2^2}{R}dt = \frac{U_0^2}{R}dt$$

仅需对时间求和即可。这样很容易就可以知道在一个周期内总共生热为

$$2Q = \frac{U_0^2}{R}T$$

即 $Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0^2}{R}T$。又因为 $Q = \frac{U_C^2}{R}T$,所以

$$U_C = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

2.7 小 结

本章首先介绍了数学上积分的定义与意义,以及计算的方法和流程。这里再次强调它的操作流程是:首先取出微元(微元可以是元质量,可以是元位移,可以是元功,还可以是元动能、元电动势、元热量),然后积分求和即可。

应该说以上给大家所举出的例子中,被积函数的形式都是常见的、可积的,也就是说,原函数还是比较容易找到的。而实际情况是,我们可能写得出积分形式,但许多实际积分是没有解析解的,物理学家们只能选择将积分送入计算机,画出图像,然后用计算机不断去拟合,得出一个接近的函数,后来慢慢发展成物理学的一个分支,即计算物理学。它在工程力学、原子物理、核物理、气象预报、地质勘测中经常用到。

与积分相比,微分实际上是更加高级的数学概念,更加需要注意处理极限的方法。阿基米德在公元前3世纪就研究了用于计算面积的积分,我国古代先贤祖冲之在公元4世纪研究圆周率问题中也采用了类似的方法。而牛顿和莱布尼茨在17世纪才想出微分的方法,中间相差了1000年以上的时间。

历史上积分先被发现,这是有一定原因的。因为积分与面积、体积等具体量的计算有着直接的关系。而研究微分前,首先必须准确理解无穷小量和极限等概念。例如物体运动的速度需要通过微分来定义,不过因为早期并没有明确极限的概念,所以出现了古希腊芝诺的一系列悖论,比如飞矢不动、阿基里斯跑不过乌龟等。

尽管如此,我们还是先介绍了微分,然后才介绍积分。原因在于微分的计算相对比较简单,而积分对我们来说还是更抽象一点。

限于篇幅,微积分的部分到此为止。

第3章 矢量分析

标量和矢量是两类最基本的物理量，所有的物理量不是标量就是矢量。标量是只有大小而没有方向的量，矢量既有大小又有方向。

当我们比较两个标量的时候，仅需比较它们的代数值。比如，$+10>-20$ 是天经地义的。海平面以上 10 m 一定比海平面以下 20 m 要高，两者相差 30 m；零上 10 ℃一定比零下 20 ℃要高。

而矢量大小的比较就不是这样的了。若取向东为正方向，向东的力为 3 N，向西的力为 4 N，考虑方向可表示为 -4 N，很显然 $+3\ \text{N}<-4\ \text{N}$。也就是说，矢量在比较大小的时候，我们是取它们的绝对值的大小来进行比较的。这是标量和矢量的第一个不同点。

第二个不同点，当两个标量或两个矢量相遇的时候，它们所遵守的数学原理是不同的。当两个标量相遇时，我们往往直接进行代数运算。比如，电路中某个节点 a 同时有 3 A 和 4 A的电流流入，则流出点 a 的电流一定是 $3\ \text{A}+4\ \text{A}=7\ \text{A}$（仅指直流电，而非交流电）。而当矢量相遇时，它们会遵守更复杂的平行四边形定则。比如，一个物体同时受到向东 3 N 的力和向北 4 N 的力，那么它实际受到的力为 5 N，方向为东偏北 53°，它的大小并不是 $3+4=7$ 或者 $4-3=1$，而是 $\vec{3}+\vec{4}=\vec{5}$。

第三个不同点，当两个标量相乘时，直接做代数运算即可。比如 $3\times4=12$。而两个矢量相乘时，会出现三种结果，分别为标量、矢量和张量。

本章我们就来好好地谈一谈标量和矢量。

3.1 特殊的标量

先来说说标量。由前述可知，两个标量分别为 $+10$ 和 -20 时，我们往往毫不犹豫地选择 $+10$ 大于 -20。但真的是这样吗？来看两个典型的例子。

1. 做功

以 $m=1$ kg 的物体为例，让它自由下落 $h_1=1$ m，则重力做功为

$$W_1 = mgh_1 = 10\ \text{J}$$

再从地面把它竖直抛上去，高度为 $h_2=2$ m，则重力做功为

$$W_2 = -mgh_2 = -20\ \text{J}$$

如何比较 10 J 和 -20 J 的大小呢？我们知道做功 W 是一个标量，那么是否可以说 W_1

$>W_2$ 呢？粗一看应该是这样的，但仔细一想又不对。

真实情况是 $W_1<W_2$，即 10 J<-20 J。为什么会这样？我们的疑惑在于功明明是一个标量，为什么会像矢量的比较一样仅比较绝对值呢？它的数值前面的正负号到底代表着什么呢？

物体向下做自由落体运动，重力做功为 $W_1=10$ J，代表有 10 J 的重力势能转化为动能；而当物体做竖直上抛运动时，重力做功为 $W_2=-20$ J，代表有 20 J 的动能转化为重力势能。

所以功的正负其实是有物理意义和广义方向的，它代表能量转化和流动的方向。我们在比较的时候不能简单粗暴地直接比较两者的代数值，应该首先区分是否有必要将正负号优先取出，再比较它们的大小。

2. 电流

假设有两个电流分别为 $I_1=3$ A 和 $I_2=-4$ A，试问哪个更大呢？同学们一定会毫不犹豫地选择后者，虽然后者前面有个负号。这是为什么呢？因为电流是一个双向标量，它前面的正负号其实代表电流的方向。那么问题来了，既然做功 W 和电流 I 都有方向，为什么不干脆把它们归为矢量呢？

教科书上说，只有大小而无方向的量叫作标量，而现在做功 W、电流 I 都属于标量但均有方向，又如何解释呢？后面我们会学到的磁通量 $\varphi=BS$、电通量 $\varphi=ES$ 等也是有正负之分的标量。

事实上，矢量和标量的区分标准应该是这样的：标量的加法（包含减法）遵守代数运算规则，比如做功 $W_1=3$ J，$W_2=-4$ J，则合功必然为 $W=W_1+W_2=-1$ J。而矢量的加法或减法遵守平行四边形定则。当两个矢量相遇的时候会出现很多不确定的值。我们学到力的合成的时候，一定会遇到 3 N 和 4 N 合成为 5 N 的情况，即 3 N+4 N=5 N。事实上，当 3 N 和 4 N 同时作用的时候，其合力可以是 1～7 N 的任何值，具体数值要看 3 N 和 4 N 所夹的角度大小。

所以在中学阶段区分矢量和标量的标准定义方法是：凡是相加满足代数运算的物理量都是标量；凡是相加满足平行四边形定则的物理量都是矢量。当然这个定义到了大学还会有新的发展，比如电流有时候是标量，有时候又是矢量。

3.2 何谓矢量

既有大小又有方向的量，在物理学中称作矢量，在数学中称作向量；一般用黑体字母如 $\boldsymbol{A}$ 或带有箭头的符号如 $\overrightarrow{AB}$ 表示。有些矢量头上戴的不是一个箭头，而是一顶帽子，比如 $\hat{r}$（读作“r 盖帽”），其意思是一样的，都是矢量的一种表示，无非是形式上有点差别。

本书的矢量统一用黑体字母表示。

我们现在把这个矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小和方向都表示出来。把矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小记为 A，数学上把 $\boldsymbol{A}$ 的大小叫作模量，数学形式为在 $\boldsymbol{A}$ 的两边加两条竖杠，就像取绝对值一样，记为 $A=|\boldsymbol{A}|$。

然后再表示出 $\boldsymbol{A}$ 的方向。我们引入“单位方向矢量”这个概念。它是什么意思呢？单位方向矢量是一个大小为 1 的矢量，其方向与 $\boldsymbol{A}$ 方向相同，则 $\boldsymbol{A}$ 的单位方向矢量为

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{A}}{A}$$

于是矢量 $\boldsymbol{A}$ 就可以被这样表示出来：

$$\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{a}$$

举个例子，比如万有引力的矢量表达。

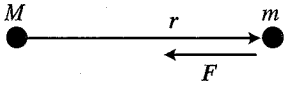

图 3.1

如图 3.1 所示，距离定点 M 为 r 处放置一个 m，则 m 受到 M 的引力大小为

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

我们一般会用图中的 $\boldsymbol{r}$ 表示位移矢量，简称径矢，它是从 M 指向 m 的一个矢量。$\boldsymbol{r}$ 的大小即为 M 和 m 的距离 r，引入单位方向矢量 $\boldsymbol{e}_r$，则

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

再看引力 $\boldsymbol{F}$，它可以被表示为 $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_F$，其中单位方向矢量 $\boldsymbol{e}_F$ 与 $\boldsymbol{e}_r$ 的关系是：大小同为 1，方向刚好相反。所以有

$$\boldsymbol{e}_F = -\boldsymbol{e}_r$$

故

$$\boldsymbol{F} = \frac{GMm}{r^2}(-\boldsymbol{e}_r)$$

将 $\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 代入上式，可得

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

这是许多高水平教科书或教学辅导书上经常出现的万有引力的矢量表达，希望对你有帮助。

3.3 坐标系中的矢量

一个矢量可以分解为多个矢量的和，原则上如果没有其他条件的约束，分解的形式是任意的。

如图 3.2 所示，矢量 $\boldsymbol{A}$ 既可以分解为 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$，也可以分解为 $\boldsymbol{A}_3$ 和 $\boldsymbol{A}_4$，它们的数学形式可以书写为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 \quad 或 \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_4$$

注意：等式中的加号是矢量的加法，也就是平行四边形定则，绝不是代数运算，这里只是借用了加法符号而已。如果你看得不习惯，完全可以换一个符号，比如用“⊕”取代“+”。

很多时候，我们一般会构建一个互相正交的坐标系，然后将矢量 $\boldsymbol{A}$ 向坐标轴投影。

如图 3.3 所示为一个二维平面矢量 $\boldsymbol{A}$，它在 x 轴、y 轴上的投影得到两个矢量 $\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$，明显可得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y$$

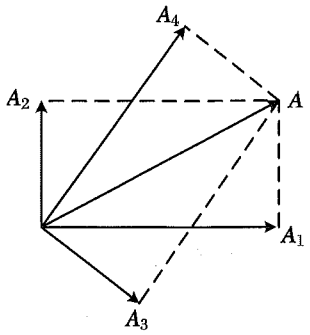

图 3.2

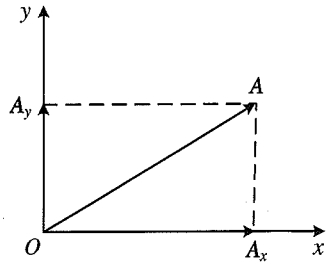

图 3.3

如果我们定义 x 和 y 方向上的单位方向矢量为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，则有

$$\boldsymbol{A}_x = A_x\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{A}_y = A_y\boldsymbol{j}$$

所以我们可以把矢量 $\boldsymbol{A}$ 书写为 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$。

例 1 如图 3.4 所示，一个质点从 a 出发，绕 O 点以匀角速度 ω 做匀速圆周运动，我们连接 Oa，箭头方向由 O 指向 a，它是一个位置矢量 $\boldsymbol{r}$，可用它来表示 a 相对 O 的位置变化。

由图可知，$\boldsymbol{r}$ 可被分解为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

其中

$$x(t) = r\cos\theta = r\cos\omega t, \quad y(t) = r\sin\theta = r\sin\omega t$$

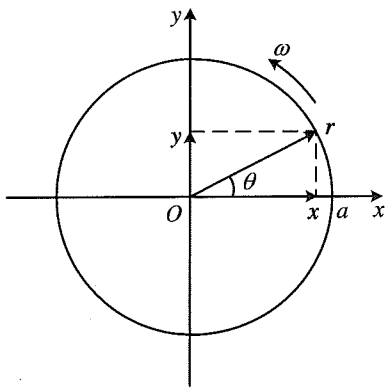

图 3.4

说明 (1) 我们注意到在 x 方向和 y 方向都是一个简谐振动，也就是说，匀速圆周运动是由两个相互正交的简谐运动叠加而成的，即我们可以把匀速圆周运动分解为两个互相正交且同频的简谐振动，这种方法叫作旋转矢量法，利用这种方法可以快速求解某种简谐振动在某段过程中的运动时间，详见本书第 11 章。

(2) 我们适当改变一下它们的相位，比如假定

$$x(t) = r\cos\omega t, \quad y(t) = r\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

化简可得

$$y = x$$

它代表一条过原点倾斜 45°的直线。

(3) 假设相位相同，振幅不同，比如

$$x(t) = r_1\cos\omega t, \quad y(t) = r_2\sin\omega t$$

化简可得

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$

这是一个椭圆运动。

(4) 我们还可以改变它们的频率，然后叠加，会得到另外一系列图像。

(5) 以上所有情形被统称为李萨如图形，如图 3.5 所示。

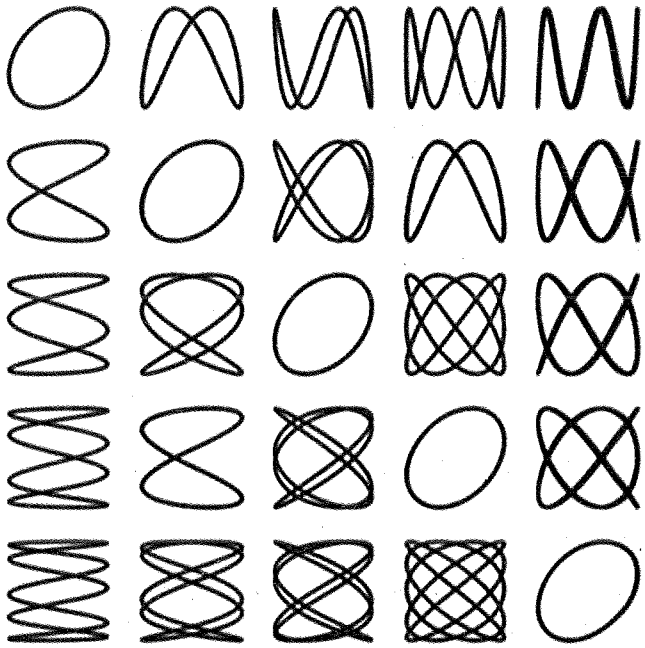

图 3.5

3.4 两个矢量的加法

有两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，我们想知道它们的和 $\boldsymbol{C}$ 是多少？有两种方法。

方法 1 如图 3.6 所示，以 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为边作出平行四边形，则对角线就是待求的 $\boldsymbol{C}$。

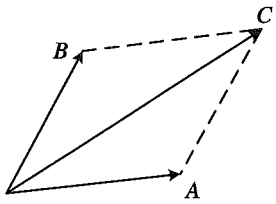

图 3.6

方法 2 将 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 置于同一正交坐标系中，分别将它们分解为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j}$$

因为 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$，所以

$$(A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j}$$

即

$$C_x = A_x + B_x,\quad C_y = A_y + B_y$$

类似地，如果是一个三维空间中的矢量 $\boldsymbol{A}$，我们可以将它分解为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是三个单位方向矢量。

为了书写更加便利，有时候我们会把 $\boldsymbol{A}$ 简化写为

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

三维矢量的加法与二维的加法完全一致，都是对应的投影量之间的独立运算。而矢量的减法可视为加法的逆运算。

3.5　矢量的点乘

两个矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的乘法比较麻烦。因为有三种乘法，所以有三种运算规则，三种不一样的乘法符号，出现三种完全不同的结果。它们分别叫作点乘、叉乘和自乘，依次出现标量、矢量、张量这三种结果。这个系列我们简单介绍点乘和叉乘，自乘一般在广义相对论中使用，离我们太过遥远。

点乘是在矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 之间加一个小点，标记为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，结果会得到一个标量，记为 $C=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，所以点乘又叫作标量积（或数量积、内积）。

我们通过举例来体会这种乘法。比如，物体做功的表达式为 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x}$，做功 W 就是力矢量 $\boldsymbol{F}$ 与位移矢量 $\boldsymbol{x}$ 的点乘结果。

例 2　如图 3.7 所示，倾斜方向的恒力 F 拉动物体向前运动，位移为 x，夹角为 θ，试求 F 所做的功 W。

解析　我们可以口算得到

$$W = Fx\cos\theta \qquad ①$$

现在我们换一种方法来重新计算。如图 3.8 所示，建立平面直角坐标系，然后在此坐标系中标出 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{x}$。

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i}$$

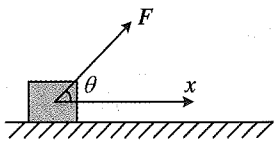

图 3.7

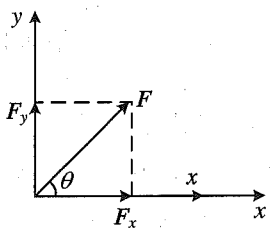

图 3.8

故

$$\begin{aligned} W &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{x} = (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j})\cdot x\boldsymbol{i} = F_x x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + F_y x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} \\ &= Fx\cos\theta\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + Fx\sin\theta\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} \end{aligned} \qquad ②$$

观察②式，我们发现矢量 $\boldsymbol{F}$ 和矢量 $\boldsymbol{x}$ 的点乘变成了两个单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 的点乘，它们遵守怎样的计算规则呢？

比较①、②两式，可以发现：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = 0$$

从这个例子中抽象出来，可以给出两个矢量点乘的一般方法。

方法 1　假定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 成 θ 角，则有 $C=AB\cos\theta$。

方法 2　将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分解为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j}$$

单位方向矢量的点乘规则是

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

所以

$$C=A_xB_x+A_yB_y$$

例 3 试证:重力做功与路径无关。

证明 假设一质量为 m 的物体在空中的轨迹(这个轨迹是任意的)如图 3.9 所示,初始时刻位于 A 点,离原点的高度为 h_1,某时刻运动到 B 点,离原点的高度为 h_2。我们选择图中 $\mathrm{d}t$ 的时间,这段时间发生的位移为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$,它是一个矢量,与重力 $m\boldsymbol{g}$ 所成的角度为 θ,则元功为

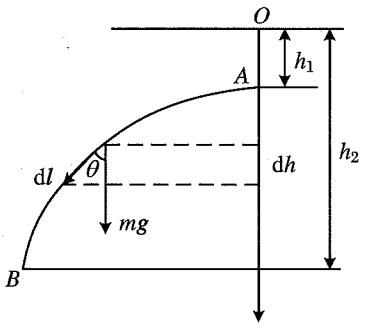

图 3.9

$$\mathrm{d}W=m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=mg\cdot\mathrm{d}l\cdot\cos\theta$$

注意到图中 $\mathrm{d}l\cdot\cos\theta=\mathrm{d}h$。所以

$$\mathrm{d}W=mg\cdot\mathrm{d}h$$

从 $A\to B$ 所做的总功为

$$W=mgh_2-mgh_1$$

因为 W 仅与 h_1,h_2 有关,所以重力做功与路径无关。

说明 在上例中我们可以引入一个位置函数 $E_\mathrm{p}=mgh$ 来快速表达做功的数值,我们把这个空间位置函数叫作势能。

更一般地,物理学上又陆续发现了许多其他具有类似性质的力,它们都具有同样的特点:做功与路径无关,仅与始末位置有关。物理上把这种力叫作保守力,关于保守力可以参考本书第 10 章“做功问题新观点”和第 15 章“电势和电势能”。

例 4 试求弹簧弹性势能的表达式。

解析 如图 3.10 所示,光滑水平面上放置一劲度系数为 k 的轻质弹簧,左端拴在墙上,右端固定连接一质量为 m 的物体,原长时弹簧端点在 O 点。

我们先考虑几个小问题。首先,要计算弹性势能,必须给出一个做功过程,也就是说要让物体运动起来。其次,由于物体运动会具有动能,会给我们的讨论带来干扰,所以我们考虑让物体缓慢运动。

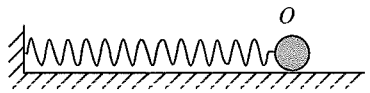

图 3.10

最后,由于弹簧具有伸缩性,因此物体的运动可以有两个方向,它既可以被拉伸,又可以被压缩,两种情况都要考虑。也就是说,弹簧拉伸时和压缩时的势能要分别计算。

(1) 缓慢拉伸弹簧至伸长量为 x 处。在此运动过程中,弹簧的弹力为 $F(x)=kx$,在 $\mathrm{d}x$ 位移内所做的元功为 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-kx\mathrm{d}x$,负号表示弹力的方向与位移的方向相反,做功为负。总功为

$$W_{0\to x}=\int\mathrm{d}W=\int_0^x-kx\mathrm{d}x=0-\frac{1}{2}kx^2$$

其中,$W_{0\to x}$ 可以被写成两个势能的差值,即

$$W_{0\to x}=E_\mathrm{p}(0)-E_\mathrm{p}(x)$$

比较可知,我们可以定义原长时弹性势能为零,则 x 处的弹性势能就是 $E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2$,它是一个大于零的值。也就是说,弹簧被拉伸过程中储存的弹性势能会越来越多。

(2) 缓慢压缩弹簧至压缩量为 x 处。在此运动过程中，弹簧的弹力为 $F(x)=kx$，在 $\mathrm{d}x$ 位移内所做的元功为 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=-kx\mathrm{d}x$，负号仍然表示弹力的方向与位移的方向相反。

总功为

$$W_{0\to x}=\int \mathrm{d}W=\int_0^x -kx\mathrm{d}x=0-\frac{1}{2}kx^2$$

由于

$$W_{0\to x}=E_{\mathrm{p}}(0)-E_{\mathrm{p}}(x)$$

因此我们还是可以定义原长时弹性势能为零，则 x 处的弹性势能就是 $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2$，它也是一个大于零的值。也就是说，弹簧被压缩过程中储存的弹性势能也会越来越多。

综上所述，不管是拉伸弹簧还是压缩弹簧，弹簧的弹性势能都是增大的，这是显而易见的，因为导致弹簧形变的外力需要做正功，它做正功表示外界消耗能量，转变成了弹簧的弹性势能被储存起来。

3.6 矢量的叉乘

在矢量 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{B}$ 之间加一个乘号，标记为 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，结果会得到一个矢量，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，所以叉乘又叫作矢量积。

还是先来看一个例子。

例 5 如图 3.11 所示，匀强磁场大小为 B，方向沿 $+y$ 方向，通电直导线电流为 I，长度为 L，沿 $+x$ 方向，试求：安培力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向。

解析 安培力的大小为 $F=BIL$，它的方向可由左手定则判定为沿 $+z$ 方向。我们现在尝试寻找三个矢量的关系。

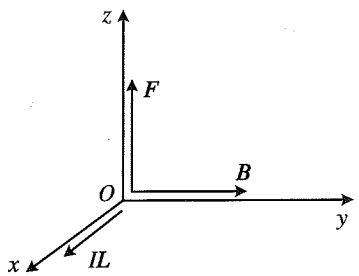

图 3.11

把三个矢量全部书写出来，分别为

$$\boldsymbol{IL}=IL\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{B}=B\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{F}=F\boldsymbol{k}$$

三个矢量之间的关系可用叉乘来表示，即

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{IL}\times\boldsymbol{B}$$

把它们具体写出来为

$$(BIL)\boldsymbol{k}=(IL)\boldsymbol{i}\times B\boldsymbol{j}=(BIL)(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})$$

由上式我们可以得到单位矢量的叉乘规律为

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$$

全部写出来就有如下法则：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

它与点乘的区别在于，同一方向矢量的点乘为 $1(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1)$，叉乘为 $0(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0)$。

正交方向矢量的点乘为 $0(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0)$，叉乘满足右手螺旋法则，即

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$$

关于右手螺旋定则，下面再说明一下。

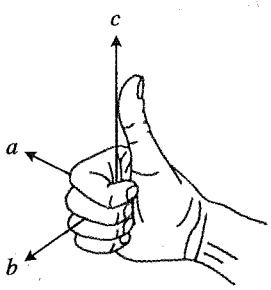

图 3.12

如图 3.12 所示，以 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为例，伸出你的右手，摊平，四指指向 $\boldsymbol{a}$，然后四指向 $\boldsymbol{b}$ 方向卷曲，则大拇指的方向就是 $\boldsymbol{c}$ 的方向，$\boldsymbol{c}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 叉乘的结果。

另外，点乘和叉乘均为乘法，我们还有必要研究一下乘法的交换律和分配律。首先，点乘的交换律和分配律都是成立的，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\cdot\boldsymbol{B}$$

叉乘的分配律也是成立的，即

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_2\times\boldsymbol{B}$$

但是叉乘的交换律是不成立的，即

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

因为用右手螺旋可以得到

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$$

即

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}$$

我们称为**反交换律**。

例 6 试证：任意通电曲线在匀强磁场中受到的安培力可以等效为首尾相连的通电导线所受到的安培力。

解析 先来翻译一下，如图 3.13 所示，通电曲线 AB（AB 为任意曲线）中通有电流 I，置于匀强磁场 B 中，磁场方向垂直纸面向里，曲线 AB 所受的安培力记为 $\boldsymbol{F}_1$。

如图 3.14 所示，通电直导线 AB 的长为 l，电流也为 I，其所受到的安培力记为 $\boldsymbol{F}_2$。本题要求证明：$\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{F}_2$。怎么证明呢？还是老办法，先取好对象。本题的基本单元是什么——电流元。

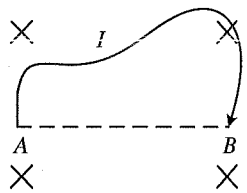

图 3.13

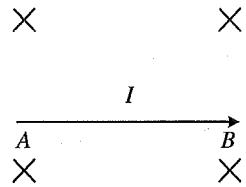

图 3.14

证明 我们将图 3.13 中的曲线 AB 微元化为许多直导线，微元为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，注意它是一个矢量。此微元受到的安培力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，则受到的合力为

$$\boldsymbol{F}=\sum\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\sum I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=I\left(\sum\mathrm{d}\boldsymbol{l}\right)\times\boldsymbol{B}$$

而 $\sum\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}$，所以有 $\boldsymbol{F}_1=I\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}_2$。证明完毕。（一般性的证明可以参看本书第 19 章“安培力与洛伦兹力”）

说明 这是一个实用性相当强大的等效，在做题时经常会用到，各级、各类考试中出现的频次也很高。下面再举一个例子来展示它的妙用。

例 7 如图 3.15 所示，有一环形线圈，置于匀强磁场 B 中，环中电流为 I，环的半径为

R，试求：环中张力 T。

解析　本题有两种解法，不管用什么解法，我们都需要将此闭合曲线拆解开来，选取合适的对象以有利于计算。

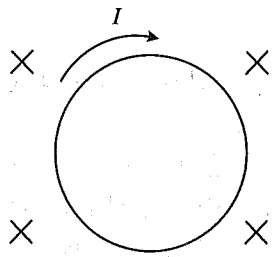

图 3.15

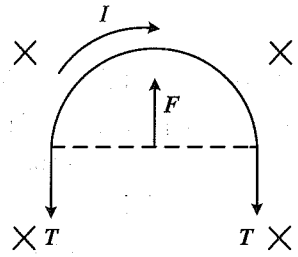

图 3.16

解法 1　取图中半圆为研究对象。如图 3.16 所示，通电半圆 AB 所受的安培力等效为通电直导线 AB 所受的安培力，其大小为

$$F = BI \cdot 2R \quad （方向向上）$$

将在 A，B 两端受到临近质点对它的张力记为 T。则由平衡条件可知 $F=2T$，所以

$$T = BIR$$

解法 2　微元法。如图 3.17 所示，我们取微元 $\mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$，其所张的圆心角为 $\mathrm{d}\theta$。把它单独取出来，如图 3.18 所示，它受到三个力的作用而平衡。

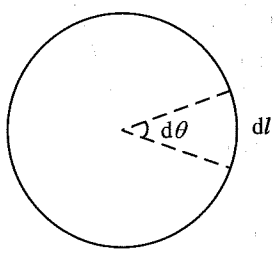

图 3.17

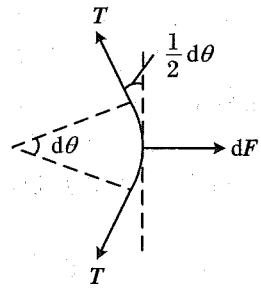

图 3.18

背向圆心的安培力为

$$\mathrm{d}F = BI\mathrm{d}l = BIR\mathrm{d}\theta$$

两端受到的张力为 T，它们沿半径方向的合力大小为

$$\sum T = 2T\sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta\right)$$

我们还记得，在微分一章中提到过的一个极限 $\sin\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta$。因此

$$\sum T = 2T \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = T\mathrm{d}\theta$$

由平衡条件可知 $\mathrm{d}F = \sum T$，即 $BIR\mathrm{d}\theta = T\mathrm{d}\theta$，所以

$$T = BIR$$

说明　比较可知，解法 1 明显省时省力，解法 2 很常规。归根到底还是一个能否取好对象的问题。对象如果取得好，列出的式子就会很简单，便于求解。

3.7 两道典型例题

例 8 如图 3.19 所示，3 个相同的轻质理想弹簧，不计原长，分别固定在 A，B，C 三点，另一端铰接在点 O 而平衡，请问点 O 的具体位置在哪里？

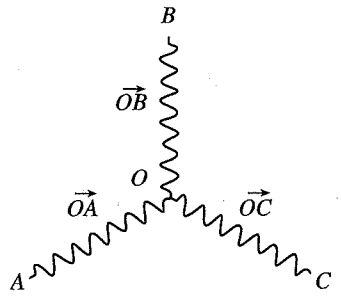

图 3.19

解析 我们利用矢量的运算规则来快速求解。运用矢量求解的一个很大好处是不用画图，很有理论力学的味道。

由于原长不计，因此三个弹簧的弹力分别为

$$\boldsymbol{F}_A = k \cdot \vec{OA}, \quad \boldsymbol{F}_B = k \cdot \vec{OB}, \quad \boldsymbol{F}_C = k \cdot \vec{OC}$$

因为点 O 处于静止状态，所以有

$$\boldsymbol{F}_A + \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{F}_C = 0$$

代入得

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 0$$

所以点 O 是△ABC 的重心。

例 9 （三体问题）如图 3.20 所示，宇宙空间中有三个星体，组成一个三角形。其质量分别为 m_1，m_2 和 m_3，它们都在做圆周运动，试求此系统的稳定条件。

解析 三个星体应该是围绕着某个定点 O 做独立的圆周运动，但是圆周运动的向心力应该是其他两个星体对环绕星体的引力的矢量和，所以在讨论的时候会略显复杂。可以猜测中心点 O 应该是三个星体的质心，当然这只是一种猜测，最后还是需要定量计算出来。同时由稳定条件可知，它们的角速度 ω 应该是相同的。

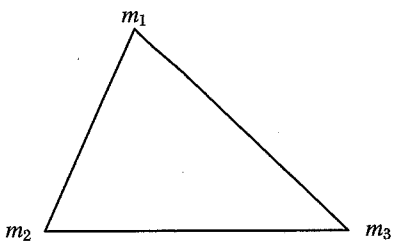

图 3.20

首先给出万有引力的矢量式，由前述可知，万有引力为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

其中，r^3 表示 r 的大小的 3 次方。

对于下角标我们做如下规定，比如 m_2 对 m_1 的引力表示为

$$\boldsymbol{F}_{21} = -\frac{GMm}{r_{21}^3}\boldsymbol{r}_{21}$$

m_3 对 m_1 的引力表示为

$$\boldsymbol{F}_{31} = -\frac{GMm}{r_{31}^3}\boldsymbol{r}_{31}$$

则 m_1 受到的合力为

$$\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{31}$$

给出的三个基本矢量是 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_3$，它们表示从点 O 指向三个星体的位移。我们考虑把其他的所有矢量用 $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_3$ 表征出来。如图 3.21 所示，先看位移的表示。

从 m_2 向 m_1 引出一条直线，把它标记为 $\boldsymbol{r}_{21}$，反之从 m_1 向 m_2 引出的直线标记为 $\boldsymbol{r}_{12}$。

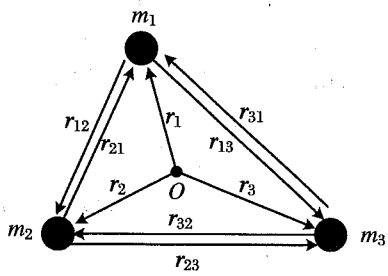

图 3.21

明显地，有 $r_{12}=-r_{21}$，即 $r_{12}+r_{21}=0$。因此由图可得

$$r_{12}=r_2-r_1,\quad r_{21}=r_1-r_2$$

用同样的方式我们把其他的两组矢量都表示如下：

$$r_{13}=r_3-r_1,\quad r_{31}=r_1-r_3$$

$$r_{23}=r_3-r_2,\quad r_{32}=r_2-r_3$$

则 m_2 对 m_1 的作用力为

$$F_{21}=-\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}r_{21}=\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}r_{12}$$

$$=\frac{Gm_1m_2}{|r_1-r_2|^3}(r_2-r_1)$$

m_3 对 m_1 的作用力为

$$F_{31}=\frac{Gm_1m_3}{|r_1-r_3|^3}(r_3-r_1)$$

m_1 的合力为

$$F_{21}+F_{31}=\frac{Gm_1m_2}{|r_1-r_2|^3}(r_2-r_1)+\frac{Gm_1m_3}{|r_1-r_3|^3}(r_3-r_1)$$

而 m_1 的向心力为 $-m_1\omega^2r_1$，也就是说，针对 m_1 写出来的向心力的矢量方程为

$$-m_1\omega^2r_1=\frac{Gm_1m_2}{|r_1-r_2|^3}(r_2-r_1)+\frac{Gm_1m_3}{|r_1-r_3|^3}(r_3-r_1)\qquad①$$

同理，针对 m_2 和 m_3 写出的向心力公式分别为

$$-m_2\omega^2r_2=\frac{Gm_1m_2}{|r_1-r_2|^3}(r_1-r_2)+\frac{Gm_2m_3}{|r_2-r_3|^3}(r_3-r_2)\qquad②$$

$$-m_3\omega^2r_3=\frac{Gm_1m_3}{|r_1-r_3|^3}(r_1-r_3)+\frac{Gm_2m_3}{|r_2-r_3|^3}(r_2-r_3)\qquad③$$

书写的时候一定要仔细一点，特别是角标的规范。

针对以上三式，我们做如下的数学处理，可以得到很多物理上的结论：

(1) 三式相加，等式右边刚好为零，则有

$$-\omega^2(m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3)=0$$

所以

$$m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3=0$$

又因为系统的质心位置为

$$r_C=\frac{m_1r_1+m_2r_2+m_3r_3}{m_1+m_2+m_3}=0$$

所以点 O 确实是系统的质心。

(2) ①式去掉 m_1，②式去掉 m_2，然后两式相减，并移项整理后可得

$$r_1\left[\omega^2-\frac{G(m_1+m_2)}{|r_1-r_2|^3}-\frac{Gm_3}{|r_1-r_3|^3}\right]=r_2\left[\omega^2-\frac{G(m_1+m_2)}{|r_1-r_2|^3}-\frac{Gm_3}{|r_2-r_3|^3}\right]$$

由于 r_1 与 r_2 不共线，因此只有它们的系数均为零，方程才能成立，即要求：

$$\omega^2-\frac{G(m_1+m_2)}{|r_1-r_2|^3}-\frac{Gm_3}{|r_1-r_3|^3}=\omega^2-\frac{G(m_1+m_2)}{|r_1-r_2|^3}-\frac{Gm_3}{|r_2-r_3|^3}=0\qquad④$$

观察④式，可以得到

$$|r_1-r_3|=|r_2-r_3|$$

由对称性，可推广为

$$|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_3|=|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|$$

即三条边是相等的，我们把边长记为 l。再由④式可以计算出角速度 ω 和周期 T 分别为

$$\omega=\sqrt{\frac{G(m_1+m_2+m_3)}{l^2}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l^2}{G(m_1+m_2+m_3)}}$$

综上，可得稳定的条件是：**三个星体构成等边三角形；点 O 为系统质心；它们以相同的角速度围绕点 O 做匀速圆周运动。**

说明 此题用矢量进行计算，显然容易很多，如果读者不相信，可以用标量试试看能不能计算出这三个结果。演算的时候要特别小心对角标和矢量的书写，千万别弄错了！

3.8 小　　结

大部分物理量都是矢量，对于它们的了解有助于你更好地认识物理。而且，这么多物理问题如果直接从矢量的本性出发可以很自然地得到相应的结果。比如从洛仑兹引力 $\boldsymbol{xf}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 出发结合牛顿第二定律可以极自然地导出如下结论：在匀强磁场中垂直入射的带电粒子必然做匀速圆周运动。

再比如文中提到的“地转偏向力”其实就是物理中的“科里奥利力”，其表达式为 $\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{w}$ 为地球的自转角速度，$\boldsymbol{v}'$ 为物体相对地球的速度，从这个公式出发可以很自然地知道为何为半球河流态度受到侵蚀；而且可以解释为何自由下落物体总是偏东等等。更有趣的是，在 1851 年法国物理学家得科在巴黎先贤祠中所做的傅科摆实验了。

标量和矢量之间可以通过一个“纳布拉算符”联系起来，它的形式是这样的：$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\frac{2}{2x}+\boldsymbol{j}\frac{2}{2y}+\boldsymbol{k}\frac{2}{2z}$，如果将这个算符作用在一个标量上，就会产生一个矢量。比如将 $\boldsymbol{v}$ 作用在电势 φ 上，就会导出电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{v}\varphi$，物理上把 $\boldsymbol{v}\varphi$ 叫作梯度。

总之，矢量和标量的话题可以持续到很远，本章只是一个开胃小菜。