物理竞赛一轮讲义

全书合并册

董兴习

合肥一六八中学

19719272621

2026

微积分

物理竞赛一轮讲义

第一讲

极限与导数

2026

目录

第一讲　极限与导数 **1**

1.1　物理量、函数与图像 1

1.2　极限：从有限过程走向确定的结果 2

1.3　导数与微分 6

1.4　从几何约束求运动 12

1.5　例题与分析 15

1.6　本讲小结 31

1.7　练习 32

练习解答 33

第一讲　极限与导数

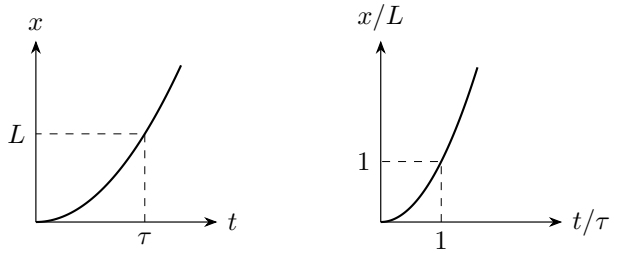
1.1　物理量、函数与图像

1.1.1　位置函数和坐标尺度

把位置写成 $x(t)$，表示给定时间 t 后可以确定位置；这里 t 是自变量，x 是因变量。函数关系不一定来自一个已经解出的显式公式，也可以来自几何约束、实验测量或动力学方程。开始计算前，应交代自变量范围、物理量正方向和参数的含义。例如绳长 L 在一次运动中可视为固定参数，时间在变；若题目改为比较不同绳长的装置，L 才成为另一个需要改变的量。

定义域是物理模型的一部分。小球尚未碰地时的自由落体公式不能直接延伸到碰地之后；液面高度必须非负；某个平方根的两个代数分支也未必都对应实际装配位置。几何图帮助确定允许范围，随后求导、积分和取极值都应在同一范围内进行。

函数图的横纵轴可以是不同物理量，因此纸面上的一个角度不直接等于具有量纲的变化率。设运动关系为 $x = L(t/\tau)^2$，其中 L 为长度尺度、τ 为时间尺度。令 $s = t/\tau$，就有 $x/L = s^2$。图 1.1 左边使用物理坐标，右边使用无量纲坐标；二者表示同一过程，但横纵轴的刻度不同。



$x = L(t/\tau)^2$　　同一过程的尺度表示

图 1.1: 物理坐标与无量纲坐标表示同一变化关系

在图 1.1 的无量纲图中，横坐标增加 $\Delta s = \Delta t/\tau$，纵坐标增加 $\Delta(x/L) = \Delta x/L$。所以两图的割线斜率之间有比例

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{L}{\tau}\frac{\Delta(x/L)}{\Delta s}.$$

令 $\Delta t \to 0$ 后，两边分别得到相应切线斜率。用稍后将要推导的链式法则表示，就是

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}(s^2)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = L(2s)\frac{1}{\tau} = \frac{2Lt}{\tau^2}.$$

无量纲图上的斜率 $2s$ 乘以 L/τ，就得到物理坐标中的瞬时速度。

1.1.2　平均变化与瞬时变化回答不同问题

在有限时间 $\Delta t \neq 0$ 内，平均速度是 $[x(t+\Delta t)-x(t)]/\Delta t$。对上面的二次位置函数，先展开有限增量：

$$\begin{aligned}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} &= \frac{L}{\tau^2}\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \\ &= \frac{L}{\tau^2}\frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \frac{2Lt}{\tau^2} + \frac{L\Delta t}{\tau^2}.\end{aligned}$$

在图 1.2 中，割线给出这段时间的平均速度。随着 Q 向 P 移动，Δt 趋零，上式右端的第二项随之消失，割线斜率趋向 $2Lt/\tau^2$。

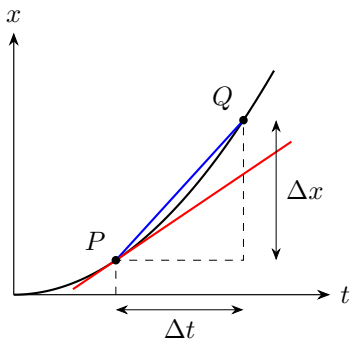


图 1.2: 割线斜率由 $\Delta x/\Delta t$ 给出，极限为 P 点的切线斜率

反过来，已知每个时刻的速度，要恢复一段过程的位移，需要累积 $v\,\mathrm{d}t$，还要给出初始位置。导数、积分和初始条件各自提供不同信息：导数描述局部变化率，积分连接有限过程，初值确定常数。把图上的割线变成切线，需要先弄清怎样取极限。

1.2　极限：从有限过程走向确定的结果

1.2.1　无限细分与收敛

把长度为 L_0 的线段反复对半分，每次保留其中一半，经过 n 次操作后余长为 $L_n = L_0/2^n$。每次所得余长仍为正数，并且可以随 n 增大而任意接近零。

数列 a_n 收敛到 A，是指对任意给定的误差 $\varepsilon>0$，总能找到整数 N，使全部 $n>N$ 都满足 $|a_n-A|<\varepsilon$。这里“全部”很关键：偶尔接近并不能说明收敛。例如 $a_n=(-1)^n$ 在两个值之间往复跳动，不具有极限。几何级数则说明，无穷多段长度相加也可能得到有限值。当 $|q|<1$ 时，

$$S_N=a\frac{1-q^{N+1}}{1-q},\qquad \lim_{N\to\infty}S_N=\frac{a}{1-q}.$$

先对有限项求和，再取极限，可以避免把无穷当作普通整数处理。

有限小数 $0.\underbrace{99\cdots9}_{n\text{ 位}}$ 等于 $1-10^{-n}$，它与一的差为 10^{-n}，趋于零。无限循环小数 $0.999\cdots$ 的定义正是这些有限截断值的极限，所以 $0.999\cdots=1$。每增加一位，截断值与一的距离便缩为原来的十分之一。

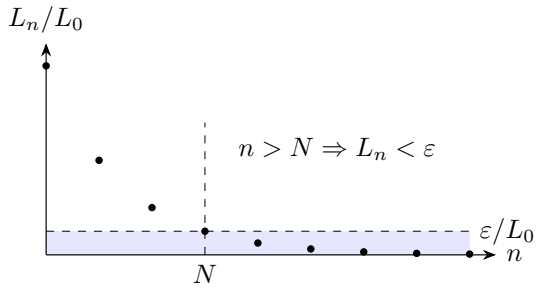


图 1.3: 误差带要求后续全部项都留在带内

图 1.3 中的横线先由误差要求确定，再沿数列寻找进入误差带后不再离开的起点。减小允许误差，所需的起点可以向后移动，但产生数列的规则不变。因此证明收敛不是选取一个足够小的数值算一次，而是说明任意误差要求都能满足。若把公比改为 $q=-1/2$，各项虽在极限两侧交替，误差的绝对值仍按 2^{-n} 衰减，也同样收敛。

例 1.3 把单位圆上的两块三角形和一个扇形画在一起。将三个面积排出大小，就得到夹住 $\sin x/x$ 的上下两项。

1.2.2 函数极限与左右极限

当 x 在定义域内趋近 x_0 时，若 $f(x)$ 任意接近 A，记为 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A$。严格地说，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$。条件中排除了 $x=x_0$，所以函数在该点未定义，也可能存在极限。

从两侧趋近得到同一个有限值，双侧有限极限才存在。若左侧趋于 $-\infty$、右侧趋于 $+\infty$，不能将二者合称一个有限极限。无穷远处的极限则考察 $|x|$ 很大时的行为；此时有理函数常可将分子、分母同时除以最高次幂，比较主导项。

两个有限极限可以相加、相乘；作商还要求分母的极限非零。如果分子和分母同时趋于零，先找它们的共同因子或比较它们的变化快慢。用因式分解时，在去掉极限点的邻域内约去非零的公共因子。

极限值与函数值还应分开判断。例如 $f(x)=(x^2-a^2)/(x-a)$ 在 $x=a$ 处没有定义，但在 $x\neq a$ 时等于 $x+a$，因此极限为 $2a$。约去 $x-a$ 合法，是因为趋近过程排除了该点；它并没有给缺失点自动补上函数值。若另行规定 $f(a)=2a$，才得到连续延拓。物理近似中先化简再取极限，也必须保留这种定义域检查。

含多个小量时，还要先说明它们怎样趋近。例如细杆应变、摆角或折射角的近似，往往隐含其他参数保持不变。若多个量一同趋零，要按物理条件写清它们之间的关系。若其余参数固定，就只让所选自变量趋近。

图 1.4 把两种容易混淆的情形并列起来。左图中，曲线在 $x=a$ 两侧都走向空心点 H；把实际函数值另定在 K，只改变一个点，不改变极限。连续则还要求 K 与 H 重合。右图中，两支分别走向不同高度 A_-、A_+，无论怎样补上中心点，都不能使双侧极限存在。因此处理分段函数时，应沿曲线分别走到接点，再比较两侧高度，最后才检查接点本身。

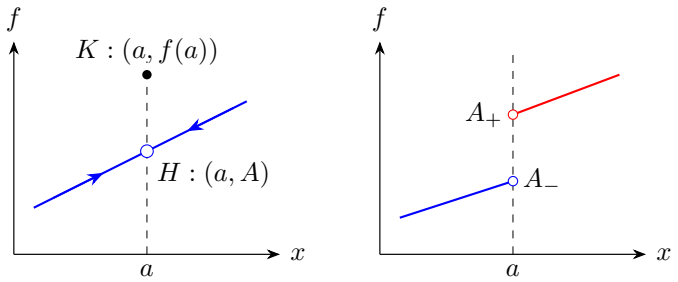


图 1.4: 邻近点的趋向决定极限，中心点的取值决定能否连续

1.2.3　从误差要求反求自变量的范围

极限中的“足够接近”应由误差要求决定。以 $f(x)=x^2$ 在 $x=a$ 处为例，要使 $|x^2-a^2|<\varepsilon$，先分解为 $|x-a||x+a|$。若同时限制 $|x-a|<1$，三角不等式给出 $|x+a|\le|x-a|+2|a|<1+2|a|$。因此取

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|a|}\right\},$$

便能保证 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|x^2-a^2|<\varepsilon$。这里先给变化系数一个统一上界，再反求允许的输入误差，完成了从定性接近到定量控制的转换。$a=0$ 也被同一证明包含；若单独利用 $|x^2|=|x|^2$，则可以取得更宽的范围 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$。

图 1.5 中先给出竖直误差带，再寻找横向区间，使曲线在该区间的全部点都留在带内。所找区间可以比实际允许的区间小，证明并不要求 δ 最大。函数在中心点是否定义，与去心邻域内的极限是两件事；因此 $\sin x/x$ 在零点没有定义，仍可有确定的零点极限。

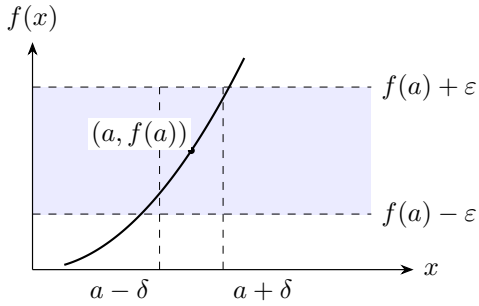
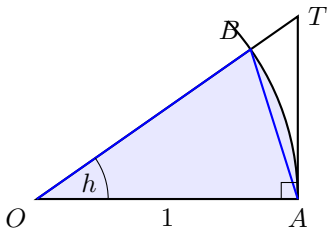


图 1.5: 竖直误差带限制一段完整的横向邻域

1.2.4 三角极限的几何依据

三角函数求导所用的基本极限，可以直接由单位圆的面积比较建立。图 1.6 取 $0 < h < \pi/2$，$OA = OB = 1$，AT 为圆的切线。三角形 OAB 包含在扇形 OAB 内，扇形又包含在三角形 OAT 内，因此

$$\tfrac{1}{2}\sin h < \tfrac{1}{2}h < \tfrac{1}{2}\tan h, \qquad \cos h < \frac{\sin h}{h} < 1.$$



$\sin h < h < \tan h$

图 1.6: 以弧度表示扇形面积，才能把几何夹逼写成极限

当 $h \to 0^+$，两端均趋于一；$\sin h/h$ 是偶函数，左极限相同，故极限为一。图中的 h 必须是弧度数，否则扇形面积不等于 $h/2$。同时 $(1-\cos h)/h = \sin^2 h/[h(1+\cos h)] \to 0$，于是求导推导所需的两个极限都有了依据。利用同一极限，还可把二阶小量写成可判断的形式：

$$\frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)^2 \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

因此 $\sin h$ 的首项是 h，$1-\cos h$ 的首项是 $h^2/2$。前者不能用来抵消后者的二阶分母；先辨认小量的阶次，才能选择合法的化简。这里的近似是在 $h\to 0$ 时成立，图 1.6 并没有断言有限角度下弧长与弦长相等。

1.3　导数与微分

1.3.1　割线极限和局部线性关系

设 $y=f(x)$。从 $P(x,f(x))$ 到邻近点 $Q(x+h,f(x+h))$ 的割线斜率是

$$\frac{\Delta y}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

若 $h\to 0$ 时该比值具有有限极限，就定义

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

对坐标单位固定的函数图像，导数给出切线斜率。对物理量关系，它给出瞬时变化率，并带有相应单位：$\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ 的单位为速度，$\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$ 的单位为加速度。画图时改变横纵坐标的缩放会改变纸面夹角，但不会改变物理变化率。

可导也可以写成局部线性形式

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h),\qquad \lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0.$$

取 $\mathrm{d}x=h$，定义 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$，它给出 Δy 中与 h 成正比的部分。例如 $y=x^2$ 时，

$$\Delta y=2xh+h^2,\qquad \mathrm{d}y=2x\,\mathrm{d}x.$$

这一区分将决定近似展开应保留到哪一阶。

局部线性式还说明可导必连续：当 $h\to 0$ 时，$f'(x)h$ 与 $o(h)$ 均趋零，故 $f(x+h)-f(x)\to 0$。反过来，连续只限制增量本身，不保证差商具有唯一极限。下面先借切线图理解局部线性关系，再分别检查连续、一阶可导与二阶可导。

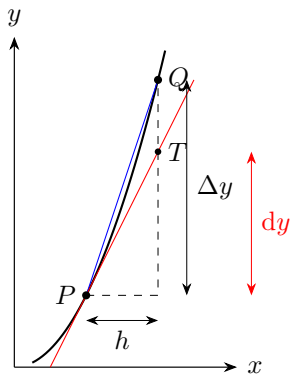


图 1.7: 曲线增量与切线增量具有不同的二阶部分

图 1.7 取 $y=x^2$、$P=(1,1)$，Q 在曲线上，T 在切线上，且 Q,T 的横坐标相同。由 P 的高度到 Q 的高度是实际增量 $2h+h^2$，到 T 的高度是线性增量 $2h$。二者绝对差为 h^2，相对于一阶项又小一个 h 的量级。图中为了看清差别取了较大的间隔；当 h 缩小时，这一构图说明微分为什么能作局部近似，有限间隔的差值仍为 h^2。

在测量误差估计中，同样可用 $\Delta y\simeq f'(x)\Delta x$，但要保证误差区间内的导数变化不显著。若 $f'(x)=0$，一阶估计只说明线性项消失，不能说明测量误差完全不影响结果，此时应继续检查二阶项。

1.3.2 连续、可导与二次可导的图像区别

图 1.8 中的三张图依次对应 $f(x)=|x|$、$g(x)=x|x|$ 和 $g'(x)=2|x|$。左图的两条割线在零点停留于斜率 -1 和 1，所以曲线虽然接上，却没有唯一切线。中图的两侧斜率都趋于零，故零点有水平切线；右图说明它的导函数仍有折角，所以二阶导数不存在。判断“光滑”必须说清正在讨论哪一阶导数。

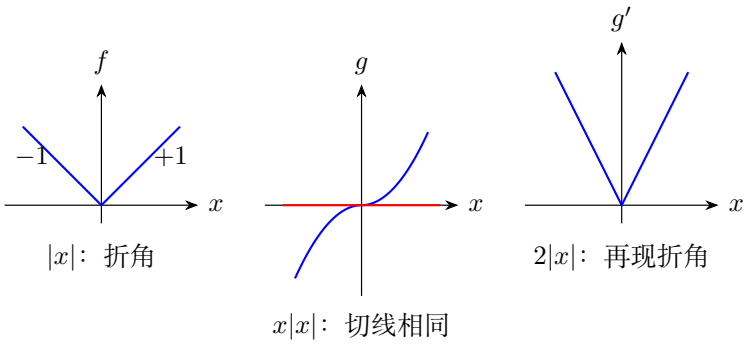


图 1.8: 函数接上、切线接上与导函数可导是逐级增加的要求

计算时，这三张图对应三个不同判断：先比较 $f(x)$ 与 $f(0)$，再比较两侧差商，最后检查导函数的差商。图像帮助定位可疑点，存在性仍由极限决定。碰撞前后的位移可以连续，速度却发生突变；这正是“函数连续但不可导”的物理情形，不能跨过碰撞时刻沿用同一光滑运动公式。

1.3.3　基本函数的导数怎样得到

对正整数 n，二项式展开给出

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\cdots,$$

取极限得到 $(x^n)'=nx^{n-1}$。一般实数幂在其可导的实数定义区间内仍满足这个规律，例如 $x>0$ 时 $(\sqrt{x})'=1/(2\sqrt{x})$。

三角函数求导使用弧度制。由 $\lim_{h\to0}\sin h/h=1$ 及 $(1-\cos h)/h\to0$，

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\longrightarrow\cos x.$$

余弦同样先展开角和，再对两个商取极限：

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\longrightarrow-\sin x.$$

所以 $(\cos x)'=-\sin x$。若角度以度为数值，必须补上弧度换算因子，不能直接套用这些式子。

指数函数的导数也可从局部增量理解。由指数的乘法性质，

$$\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h}=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{e}^h-1}{h}.$$

自然底数 e 的特征是最后一个比值在 $h\to0$ 时趋于一，因此 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$。换成底数 $a>0$ 时，$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}$，还会出现系数 $\ln a$。这解释了为什么用自然指数表示连续增长，方程中最少出现额外系数。

再把自然对数看成指数的反函数。若 $y=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^y$。对同一个自变量 x 求导，左侧导数为一，右侧须经过中间变量 y，于是 $1=\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$，得到 $(\ln x)'=1/x$，要求 $x>0$。在负半轴，$\ln|x|=\ln(-x)$，链式法则给出 $(\ln(-x))'=(-1)/(-x)=1/x$；因此在不跨越零点的区间内统一写成 $(\ln|x|)'=1/x$。

导数公式也有定义区间。以 $\sqrt{x}$ 为例，原点右侧的差商是 $1/\sqrt{h}$，当 $h\to0^+$ 时趋于无穷，而公式 $1/(2\sqrt{x})$ 用于 $x>0$。$\ln x$ 的自变量取正值。使用 $\ln|x|$ 时，在 $x>0$ 和 $x<0$ 两个区间内分别求导，两侧导数均为 $1/x$。

三角函数在物理中通常以 $\theta=\omega t+\phi$ 为自变量。先对角度求导，再对时间求导，会带来频率因子 ω；再求一次还会再出现一个 ω。由此得到的速度振幅与加速

度振幅分别具有长度每时间、长度每时间平方的单位，这同时是判断求导系数是否遗漏的有效办法。

1.3.4 乘积、商与复合函数

设 u, v 均可导。在乘积增量中加减 $u(x+h)v(x)$，便有

$$\Delta(uv) = v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\,\Delta v.$$

除以 h，得到

$$\frac{\Delta(uv)}{h} = v(x)\frac{\Delta u}{h} + u(x)\frac{\Delta v}{h} + \frac{\Delta u}{h}\,\Delta v.$$

当 $h \to 0$，$\Delta u/h \to u'(x)$ 且 $\Delta v \to 0$，最后一项趋零。因此

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

乘积变化率的两项，分别对应保持另一个因子暂时取原值时的增量。

图 1.9 把乘积 uv 看成矩形面积。对正的 u, v 和正增量，面积增加由三块组成：沿右边增加的条带为 $v\Delta u$，沿上边增加的条带为 $u\Delta v$，右上角小块为 $\Delta u\Delta v$。当两个增量都与 h 同阶时，小角块是二阶量；先除以 h 再取极限，它才消失。有限增量的准确面积包含这三块。带符号的增量仍满足前面的代数恒等式，图中的正增量只是便于辨认各项。

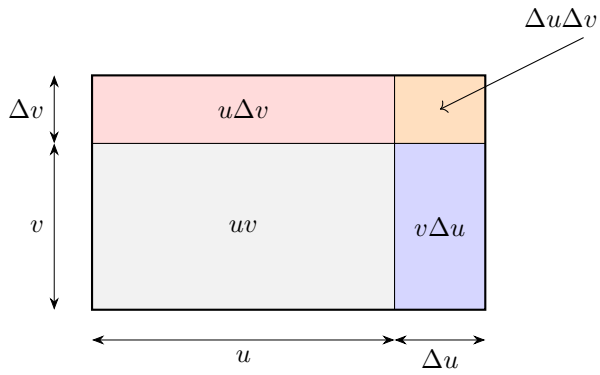


图 1.9: 矩形的两条窄带给出乘积的一阶变化，角块面积为两个增量之积

复合函数 $y = f(u), u = g(x)$ 的链式法则是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \tag{1.1}$$

先在实际的内层变量 $u = g(x)$ 处求外层导数，再乘内层导数。以 $y = \sin(ax+b)$ 为例，外层变化率是 $\cos(ax+b)$，内层变化率是 a，故结果为 $a\cos(ax+b)$。微分记号在此能够帮助追踪变量，但推导依据是可导函数的局部线性关系。

商法则由乘积法则求出。在 $v \neq 0$ 的区间设 $w = u/v$，于是 $wv = u$。对 x 求导，$w'v + wv' = u'$，移项并除以 v，

$$w' = \frac{u' - wv'}{v} = \frac{u' - (u/v)v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

链式法则的理由同样来自局部线性化。写 $\Delta u = g'(x)h + o(h)$，再写 $\Delta y = f'(u)\Delta u + o(\Delta u)$；由于 $\Delta u = O(h)$，合并后便有 $\Delta y = f'(u)g'(x)h + o(h)$。因此两个局部变化率相乘，是逐级传递微小变化的结果；即使 $g'(x) = 0$，这一结论仍成立，不需要先除以一个可能为零的 Δu。

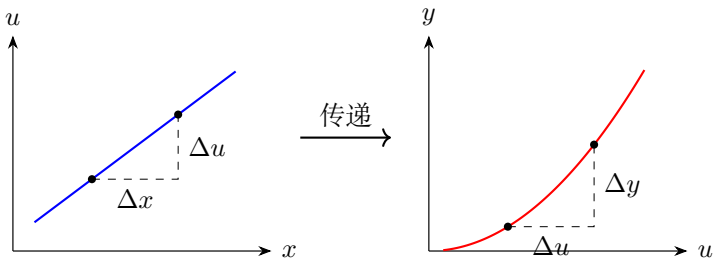


图 1.10: 同一个输入增量先改变内层变量，再沿外层曲线产生输出增量

图 1.10 左侧的竖直增量 Δu，成为右侧的水平增量；右侧计算斜率的位置也随 $u = g(x)$ 决定。式(1.1) 的两个斜率分别在左、右图读出，相乘便得到对原自变量的变化率。对 $\sin^2 x$ 求导时，外层是平方、内层是 $\sin x$，故导数为 $2\sin x \cos x$；它与 $\sin(x^2)$ 的导数 $2x\cos(x^2)$ 对应不同的复合顺序。

对于前面的一般实数幂公式，可以在 $x > 0$ 用复合函数补全证明。任意固定实数 p 满足 $x^p = \mathrm{e}^{p\ln x}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}x^p}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{p\ln x}\frac{\mathrm{d}(p\ln x)}{\mathrm{d}x} = x^p\frac{p}{x} = px^{p-1}.$$

这里指数函数、对数函数与链式法则各提供一环。特别取 $p = 1/2$，才得到平方根的导数；零点与负半轴仍应另按原函数的实数定义及差商检查。

1.3.5　相对变化率与误差传播

还应区分绝对变化率与相对变化率。若 $f \neq 0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

右侧表示单位自变量变化对应的相对变化。指数函数的相对变化率为常数；幂函数 x^n 的相对变化率是 n/x，随位置改变。在实验误差估计中，若 $Y = CX^n$ 且 $|\Delta X| \ll |X|$，便有 $\Delta Y/Y \simeq n\Delta X/X$，其有效性仍由被忽略的高阶项控制。

图 1.11 用 $Y = X^2$ 展示误差怎样沿曲线传播。以 $X_0 > 0$ 为中心，输入范围 $X_0 \pm \delta$ 经曲线映到不完全对称的输出范围；切线给出的两侧变化是 $\pm 2X_0\delta$，真实变化还各有 δ^2。因此忽略二阶项要求 $\delta/(2X_0) \ll 1$。若中心移到 $X_0 = 0$，切线水平，一阶变化为零，但实际输出仍在 $[0, \delta^2]$，必须保留二阶量。

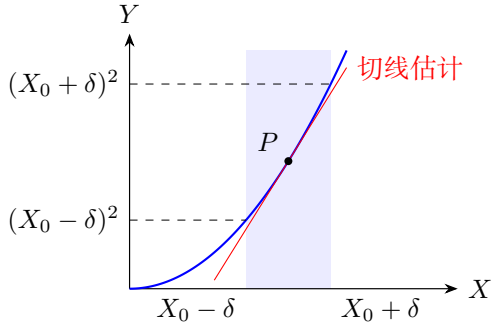


图 1.11: 输入区间经曲线变成输出区间，切线只给出局部线性估计

1.3.6 复合运动的二次求导

图 1.12 中，等时间内的水平位移均为 $u\Delta t$，竖直位移却越来越大，说明水平匀速不能推出竖直匀速。对一般的 $y = f(x(t))$，第一次用链式法则得到 $\dot{y} = f'(x)\dot{x}$。第二次求导时，$f'(x(t))$ 和 $\dot{x}(t)$ 都随时间变化，必须分别求导：

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f'(x(t))\dot{x}(t)\big] \\ &= \frac{\mathrm{d}f'(x(t))}{\mathrm{d}t}\dot{x} + f'(x)\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} \\ &= \big[f''(x)\dot{x}\big]\dot{x} + f'(x)\ddot{x} = f''(x)\dot{x}^2 + f'(x)\ddot{x}.\end{aligned}$$

第一项来自曲线斜率随位置变化，第二项来自水平运动本身的加速。对 $y = \beta x^2$，即使 $\ddot{x} = 0$，仍有 $\ddot{y} = 2\beta\dot{x}^2$。若水平速度也变化，就必须加上 $2\beta x\ddot{x}$。单纯把 y'' 改写为 $\ddot{y}$ 既漏掉速度因子，也混淆了两个不同的自变量。

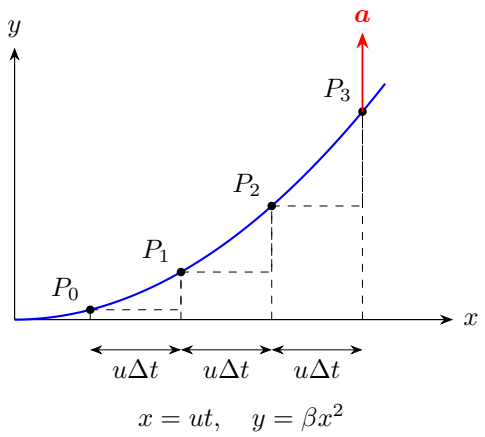


图 1.12: 沿抛物线前进时，即使水平位移相等，竖直增量仍逐段增加

1.4 从几何约束求运动

1.4.1 位置、速度和加速度

在固定直角坐标系中，

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y, \quad \boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y.$$

基矢固定，才能这样逐分量求导。速率 $v = |\boldsymbol{v}|$ 的导数只是切向加速度 $a_\tau = \dot{v}$，并不等于加速度矢量，也一般不等于其大小。对半径 R 的圆周运动，

$$\boldsymbol{a} = \dot{v}\,\boldsymbol{e}_\tau + \frac{v^2}{R}\,\boldsymbol{e}_n,$$

其中 $\boldsymbol{e}_n$ 指向圆心。即使速率恒定，速度方向仍在变化，加速度仍可非零。

速度矢量的变化可以拆成大小变化与方向变化。令单位切向量为 $\boldsymbol{e}_\tau$，则 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_\tau$，乘积法则给出 $\boldsymbol{a} = \dot{v}\boldsymbol{e}_\tau + v\,\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\tau/\,\mathrm{d}t$。单位向量的长度恒为一，对 $\boldsymbol{e}_\tau \cdot \boldsymbol{e}_\tau = 1$ 求导，得到它的导数与自身垂直。因此第一项记录速率的变化，第二项记录速度方向的变化。

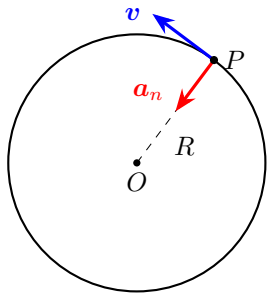


图 1.13: 匀速圆周运动中速度与法向加速度互相垂直

在图 1.13 中，经过小时间 Δt，半径转过 $\Delta\theta$，速度也转过同一角。两个等长速度矢量之差的大小为 $2v\sin(\Delta\theta/2)$；除以 Δt 并取极限，得到 $a_n = v\dot{\theta} = v^2/R$，方向指向圆心。若速率同时变化，再加上切向项。先看大小是否变化、再看方向是否变化，比仅对一个标量速率求导更完整。

上述推导中的“两个速度矢量之差”必须按矢量相减理解。把图 1.14 左侧的 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 平移到同一起点 A，从前者箭头端 B 指向后者箭头端 C，才是 $\Delta\boldsymbol{v}$。等速时 $AB = AC = v$，故三角形给出 $BC = 2v\sin(\Delta\theta/2)$。有限时间的 $\Delta\boldsymbol{v}$ 指向这段圆弧的中点附近，取极限后才得到瞬时指向圆心的加速度；不能在有限角度下把它直接当作任一端点的半径方向。

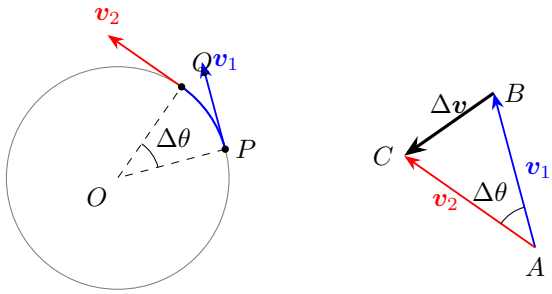


图 1.14: 先把两个速度平移到共同起点，再用箭头端之差求加速度

1.4.2 先写约束，再对同一时间求导

运动约束常以 $F(x, y) = 0$ 出现，x, y 均随同一个时间变化。若 F 可微，链式法则给出

$$F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0.$$

这通常只是一个速度方程，还需配合题设的驱动规律才能确定所有速度。例如固定圆上的点满足 $x^2+y^2=R^2$。先求一次，再对所得乘积逐项求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2+y^2-R^2)=0 \quad\Longrightarrow\quad 2x\dot{x}+2y\dot{y}=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\dot{x}+y\dot{y})=(\dot{x}\dot{x}+x\ddot{x})+(\dot{y}\dot{y}+y\ddot{y})=0.$$

约去第一式的公因子 2，再整理第二式，分别得到

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0, \qquad \dot{x}^2+\dot{y}^2+x\ddot{x}+y\ddot{y}=0.$$

第一式是 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，表示速度与图 1.13 中的半径垂直；第二式是 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=-v^2$，只确定加速度的径向投影，并未要求切向加速度为零。两个速度平方项分别来自 $x\dot{x}$、$y\dot{y}$ 的乘积求导，不能遗漏。

若把第一式改写成 $\dot{x}=-y\dot{y}/x$，还要确认 $x\neq 0$。在 $x=0, y=\pm R$ 处，未相除的方程仍有效，并给出 $\dot{y}=0$；它没有单凭圆形轨道就确定 $\dot{x}$。因此分式的分母为零时，应先回到几何约束及驱动条件，不能立即认定真实速度无穷。

对多条连杆，应先给活动端点选坐标，再联立长度不变、接触保持等位置条件。开平方得到的正、负根通常代表不同装配支路，例如 $x=\sqrt{R^2-y^2}$ 只表示右半圆。几何交点可以由不同时刻的不同物质点构成，交点速度不应直接等同于某根杆上的物质速度；参数支路与物理对象的身份都需随求导过程保留。

1.4.3 约束求导失去信息时怎样判断

约束的一阶导数是必要条件，在特殊构形处却可能暂时不给出有效限制。以 $xy=0$ 为例，它表示两条坐标轴的并集。质点处于原点时，求导式 $y\dot{x}+x\dot{y}=0$ 化为 $0=0$。通过原点的运动仍沿图中的两条轴之一。

若运动可作二次求导，再求一次得到

$$y\ddot{x}+2\dot{x}\dot{y}+x\ddot{y}=0.$$

在原点代入 $x=y=0$，剩下 $2\dot{x}\dot{y}=0$，因此至少有一个速度分量为零。这与图 1.15 中只能沿某一坐标轴离开原点的轨迹相符。若只能保证一次可导，不能擅自使用加速度，就改从局部增量判断：写成 $x=\dot{x}(0)t+o(t)$、$y=\dot{y}(0)t+o(t)$，则

$$xy=\dot{x}(0)\dot{y}(0)t^2+o(t^2)=0,$$

除以 t^2 并取极限，同样要求 $\dot{x}(0)\dot{y}(0)=0$。

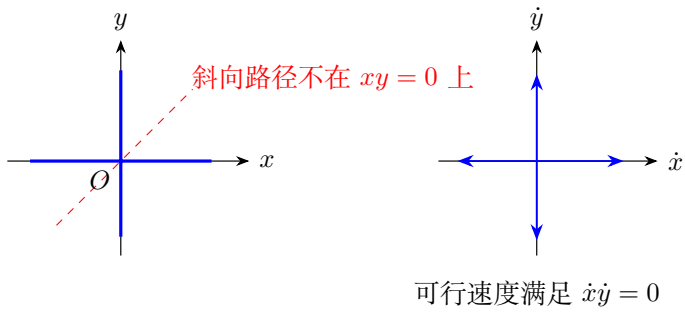


图 1.15: 原点处一阶约束退化，实际速度仍受轨迹分支限制

图 1.15 左图的每一点表示位置，右图的每一点表示速度。左图允许沿两条坐标轴运动，右图相应要求 $\dot{x}\dot{y}=0$。若要判断一段完整的运动，再把位置函数代入原来的几何约束 $F(x(t),y(t))=0$。

1.5 例题与分析

例 1.1 (反复对半与误差标准)**.** 长度 $L_0>0$ 的线段，每次取去余下的一半。求 n 次后余长的极限，并求余长小于给定 $\varepsilon\in(0,L_0)$ 所需的操作次数条件。

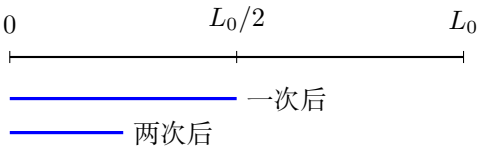


图 1.16: 相继保留的半段

解　由反复对半建立余长数列

图 1.16 中每条蓝段都是上一条的一半，因此 $L_n=L_0 2^{-n}$，其中 $n=0$ 表示尚未操作。要求 $L_n<\varepsilon$，先除以正数 L_0，再利用对数函数单调递增：

$$\begin{aligned} L_0 2^{-n}<\varepsilon \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{-n}<\varepsilon/L_0,\\ -n\ln 2<\ln(\varepsilon/L_0)&=-\ln(L_0/\varepsilon),\\ n\ln 2&>\ln(L_0/\varepsilon). \end{aligned}$$

第二行到第三行乘以 -1，所以不等号反向。最后除以 $\ln 2>0$，得到

$$n>\frac{\ln(L_0/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

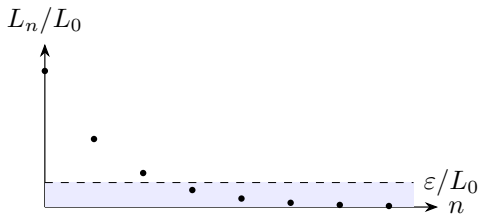


图 1.17: 给定误差后，后续各项都落入误差带

把严格误差要求转成整数次数

按图 1.17 的整数横坐标，取严格大于这个实数的第一个整数：

$$n_{\min} = \left\lfloor \frac{\ln(L_0/\varepsilon)}{\ln 2} \right\rfloor + 1.$$

图中从 $n_{\min}$ 起，各项均低于误差带上沿。对任意正的 $\varepsilon < L_0$ 都有这样的 $n_{\min}$，因此 $\lim_{n\to\infty} L_n = 0$。

例 1.2 (反复弹跳的总路程)**.** 球从 $H = 5\,\mathrm{m}$ 高处静止释放。运动时阻力大小恒为 $mg/2$、方向与速度相反，落地碰撞不损失机械能。忽略球的大小，求反复弹跳的总路程。

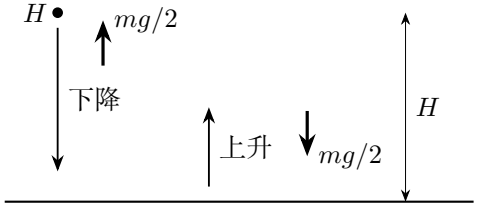


图 1.18: 下降与上升时阻力方向相反

解　分别计算下降与上升的能量变化

图 1.18 的下降过程中，重力功为 mgH，阻力功为 $-(mg/2)H$。初速度为零，由动能定理，落地前 $K = mgH - (mg/2)H = mgH/2$。碰撞不损能，反弹后的初动能仍为此值。上升到第一最高点 h_1 时，末动能为零，重力功与阻力功分别为 $-mgh_1$、$-(mg/2)h_1$，因而

$$\frac{1}{2}mgH = \frac{3}{2}mgh_1, \qquad h_1 = \frac{H}{3}.$$

对任意一次从最高点开始的完整弹跳，同理 $h_{j+1} = h_j/3$。下降段每米增加的动能为 $mg/2$，上升段每米减少的动能为 $3mg/2$，所以每次反弹高度是上一次的三分之一。

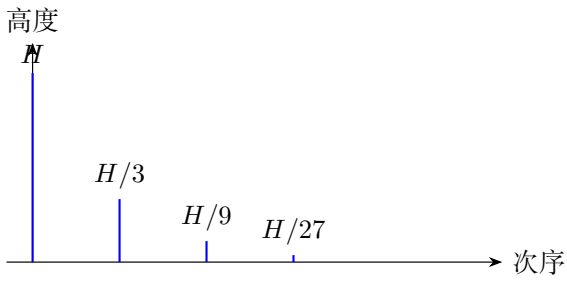


图 1.19: 各次最高点构成等比数列

按每段路程的实际次数求和

图 1.19 中,初次高度 H 只走下降一次,其余每个高度均上、下各走一次。计入前 N 个反弹高度时, $s_N = H + 2H\sum_{j=1}^{N} 3^{-j}$。有限等比和为 $\sum_{j=1}^{N} 3^{-j} = \frac{1}{2}(1-3^{-N})$, 令 $N \to \infty$ 后,

$$s = H + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{H}{3^j} = H + 2\frac{H/3}{1-1/3} = 2H = \boxed{10\,\mathrm{m}}.$$

累计路程与机械能

每走一小段 $\mathrm{d}s$, 阻力就使机械能减少 $(mg/2)\,\mathrm{d}s$。因此图 1.20 的直线从初始机械能 mgH 出发, 斜率为 $-mg/2$。落地反弹的瞬间机械能连续, 各次最高点的能量 mgh_j 沿直线逐渐降到零。

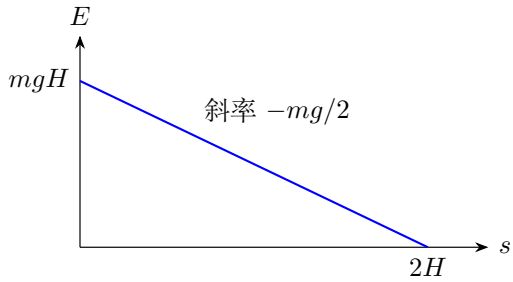


图 1.20: 各次最高点的机械能随累计路程逐渐降到零

例 1.3 (用夹逼确定三角极限)**.** 用单位圆的几何关系证明 $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$，并求 $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$。

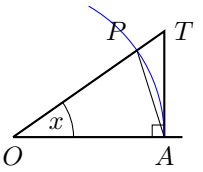


图 1.21: 单位圆、扇形和两侧三角形

解　把面积的包含关系变成不等式

先取 $0<x<\pi/2$。图 1.21 中 $\triangle OAP$ 包含于扇形 OAP，扇形又包含于 $\triangle OAT$。比较面积有

$$\tfrac12\sin x<\tfrac12 x<\tfrac12\tan x\implies \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

弧度制使单位圆扇形面积恰为 $x/2$。从 $\sin x<x$ 除以正数 x，得到 $\sin x/x<1$；从 $x<\tan x=\sin x/\cos x$ 乘以正数 $\cos x/x$，得到 $\cos x<\sin x/x$。当 $x\to 0^+$ 时两侧都趋于 1。又因 $\sin(-x)/(-x)=\sin x/x$，负侧极限相同。

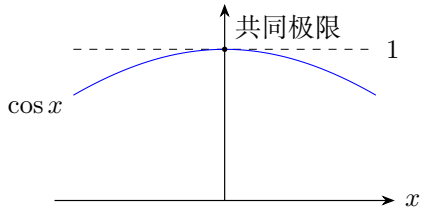


图 1.22: 上下界同时收拢到一

把二阶小量化成已知极限

图 1.22 的界限给出第一问。第二问先用 $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$，再把分母写成 $x^2=4(x/2)^2$：

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac12\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2\longrightarrow\boxed{\frac12}.$$

因此分子在零点附近是二阶小量，不能仅凭分子、分母都趋零判断结果。

例 1.4 (不同形式的极限)**.** 判断并计算 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{1}{x-5}$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$，并比较 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^2+203x}{3x^2+5x+7}$。

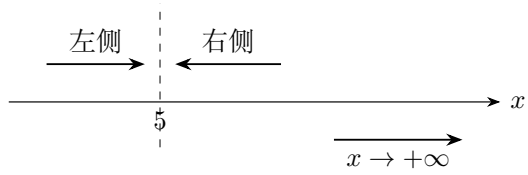


图 1.23: 极点两侧与无穷远处的考察方向

解 在极点处分别判断左右极限

图 1.23 的左右两条箭头必须分别考察。第一式在 $x\to5^-$ 时趋于 $-\infty$，在 $x\to5^+$ 时趋于 $+\infty$，所以双侧有限极限不存在。

在零点处提取基本三角极限

第二式在足够小且非零的 x 处可改写为

$$\frac{x^2}{\sin x}=\frac{x}{\sin x/x}\longrightarrow 0.$$

在无穷远处利用趋零包络

第三式分子虽然振荡，却始终满足 $|\sin x|\le 1$。图 1.24 的包络给出 $-1/x\le\sin x/x\le 1/x$。两侧在 $x\to+\infty$ 时都趋于零，夹在中间的函数也趋于零。分子本身没有极限，并不妨碍整个商收敛。

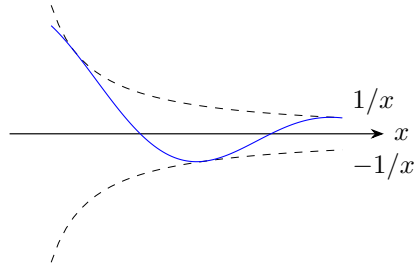


图 1.24: 振荡函数受到趋零包络约束

比较分子分母的最高次项

第四式同时除以 x^2：

$$\frac{1}{1+1/x+1/x^2}\longrightarrow\boxed{1}.$$

同理，

$$\frac{10x^2+203x}{3x^2+5x+7}=\frac{10+203/x}{3+5/x+7/x^2}\longrightarrow\frac{10}{3}.$$

一次项系数虽大，仍不改变无穷远处由二次项决定的结果。这些式子分别需要左右极限、基本三角极限、夹逼和主导项比较，不能由表面形式统一作代入处理。

例 1.5 (基本求导与定义域)**.** 设 $a>0$，求 x^2-a^2、$\sqrt{x^2-a^2}$、$\sin(ax+b)$、$\cot x$、$(a^2-x^2)^{-1/2}$ 的导数，并说明可导区间。另求 $3\cos x$、$5\sqrt{x}$、$9/x^3$ 的导数。

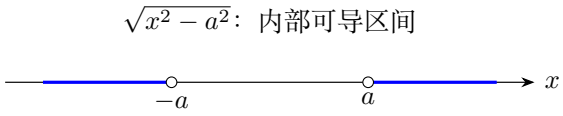


图 1.25: 根式在实轴上的可导区间

解　先判定根式区间，再作链式求导

多项式对所有实数可导，$(x^2-a^2)'=2x$。第二式先把外层看成平方根、内层看成 $u=x^2-a^2$：

$$(\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad |x|>a.$$

从图 1.25 的 a 点向右取增量 $h>0$，差商为 $\sqrt{(a+h)^2-a^2}/h=\sqrt{2a+h}/\sqrt{h}$，在 $h\to 0^+$ 时趋于无穷。由函数的偶对称性，$-a$ 处的左差商趋于负无穷。第三式令 $u=ax+b$，外层导数为 $\cos u$，内层导数为 $u'=a$，所以 $[\sin(ax+b)]'=\cos(ax+b)\,a=a\cos(ax+b)$，对所有实数 x 成立。

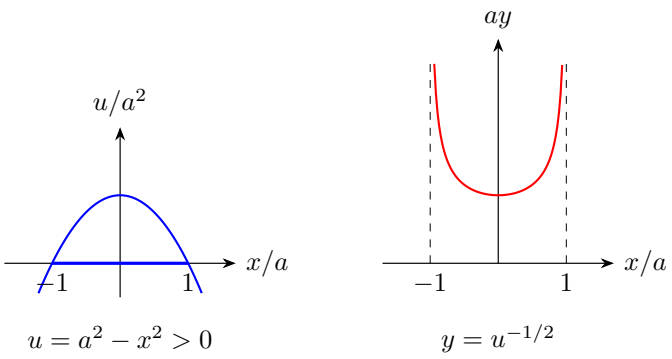


图 1.26: 内层为正给出可导区间，外层负幂使两端斜率急剧增大

按商法则处理余切函数

把 $\cot x$ 写成 $\cos x/\sin x$，商法则给出

$$(\cot x)' = \frac{(-\sin x)\sin x - \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

再用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，得到 $(\cot x)' = -1/\sin^2 x$，要求 $x \neq n\pi$，$n \in \mathbb{Z}$。

对负幂根式逐层求导

图 1.26 左侧给出内层为正的区间，右侧显示最终函数在两端发散。按这两层关系，最后一式外层导数为 $-\frac{1}{2}u^{-3/2}$，内层导数为 $-2x$，相乘得到

$$-\tfrac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-3/2}(-2x) = \boxed{\frac{x}{(a^2 - x^2)^{3/2}}}, \quad |x| < a.$$

图 1.25 给出 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 的可导区间 $|x| > a$，图 1.26 左侧给出 $(a^2 - x^2)^{-1/2}$ 的可导区间 $|x| < a$。两者都是从根号内的量严格为正得到的。

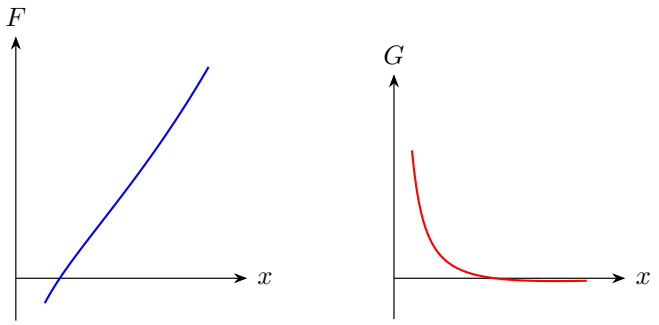
根式求导的端点

再把常系数法则应用到三个指定函数。系数保持不变，幂次按幂函数法则改变，得到

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3\cos x) &= 3(-\sin x) = -3\sin x, && x \in \mathbb{R},\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5\sqrt{x}) &= 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{1/2} = \frac{5}{2}x^{-1/2} = \frac{5}{2\sqrt{x}}, && x > 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{9}{x^3} &= 9\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-3} = -27x^{-4} = -\frac{27}{x^4}, && x \neq 0.
\end{aligned}$$

$5\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 的右差商为 $5(\sqrt{h} - \sqrt{0})/h = 5h^{-1/2}$，当 $h \to 0^+$ 时趋于无穷，因此它的有限导数只在 $x > 0$ 处取得。

例 1.6（求和与商的逐项求导）. 求 $F(x)=3x^2+2\sin x+7\ln x$ 及 $G(x)=\cos x/(3x^2+\sin x)$ 的导数，并说明所用定义域。



和函数，$x>0$　　商函数，图示 $x>0$ 部分

图 1.27: 和函数与商函数的局部图像，求导前先辨认运算结构

解　逐项求导并保留对数的定义域

图 1.27 左侧先对三个加项分别求导。常系数留在导数外面，有

$$F'(x)=3(2x)+2\cos x+7\frac{1}{x}=\boxed{6x+2\cos x+\frac{7}{x}},\qquad x>0.$$

条件 $x>0$ 来自实数对数；导数公式不能扩大函数的定义域。

跟踪分子和分母的共同变化

右侧先记 $N=\cos x$、$D=3x^2+\sin x$，分别求得 $N'=-\sin x$、$D'=6x+\cos x$。在 $D\neq 0$ 的区间，对恒等式 $GD=N$ 按乘积法则求导，再逐步消去 G：

$$G'D+GD'=N',$$
$$G'=\frac{N'-GD'}{D}=\frac{N'}{D}-\frac{(N/D)D'}{D}=\frac{N'D-ND'}{D^2}.$$

代入刚才分别求得的 N,N',D,D'，得到

$$\boxed{G'(x)=\frac{-\sin x(3x^2+\sin x)-\cos x(6x+\cos x)}{(3x^2+\sin x)^2}}.$$

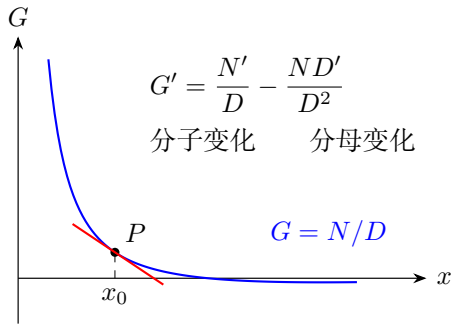


图 1.28: 商的变化分成分子变化和分母变化，两者在图像上对应同一切线斜率

图 1.28 的曲线只画出 $x > 0$ 的一段，红线是其中一点的切线。斜率由两个贡献相加决定；仅保留 N'/D 会遗漏分母改变所造成的影响。分母不为零是应用商法则的前提，因此 G 及其上述导数的定义域均为 $3x^2 + \sin x \neq 0$。若要化简分子，可用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，得到 $-3x^2 \sin x - 6x \cos x - 1$；两个形式完全相同。不能在求导前把一个和式分母分别除到各项上，这会改变函数本身。

例 1.7 (三次位置函数)**.** 质点沿 x 轴运动，$x(t) = \alpha t^3$，其中 $\alpha > 0, t \geq 0$。从导数定义求 $v(t)$，再求 $a(t)$，并比较 $[0, t]$ 内的平均速度与末速度。



图 1.29: 同一运动的起点与末点

解　用位置的差商求瞬时速度

对图 1.29 的位置，在时刻 t 到 $t + h$ 间有

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \alpha \frac{(t+h)^3 - t^3}{h} = \alpha \frac{3t^2 h + 3th^2 + h^3}{h} = \alpha(3t^2 + 3th + h^2).$$

令 $h \to 0$，得 $v = 3\alpha t^2$。

用速度的差商求加速度

再对速度取差商，

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = 3\alpha \frac{(t+h)^2 - t^2}{h} = 6\alpha t + 3\alpha h \longrightarrow 6\alpha t,$$

所以 $a = 6\alpha t$。

用割线与切线比较平均和瞬时速度

对 $t>0$，平均速度由总位移除以时间得到：$\bar v=[x(t)-x(0)]/t=\alpha t^2$，故 $\bar v=v(t)/3$。

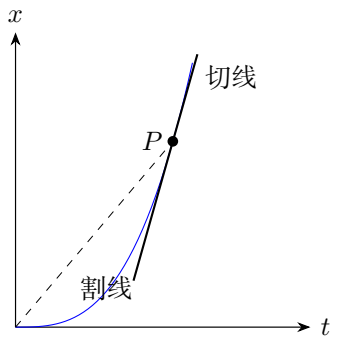


图 1.30: 割线斜率与末点切线斜率

图 1.30 中割线连接起、末位置，切线只描述末时刻附近的变化。α 的量纲为 $\mathrm{L/T^3}$，因此速度、加速度的量纲分别正确。$t=0$ 时二者都为零，也符合位置函数在起点的平坦程度。

例 1.8 (圆周运动的分量求导)**.** 质点在半径 R 的圆上以恒定角速度 $\omega>0$ 逆时针运动，$t=0$ 时位于 $(R,0)$。求位置、速度和加速度，说明加速度方向。

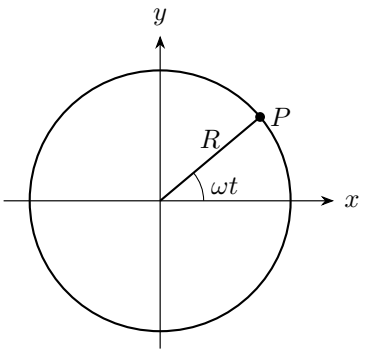


图 1.31: 位置角与固定直角坐标

解　把圆周位置写成两个时间函数

图 1.31 取固定直角坐标系。半径 R 和角速度 ω 固定，位置分量随转角改变。分别对两个分量求导，所得分量沿同一组坐标轴合成速度和加速度。

图 1.31 中 $\theta=\omega t$，故

$$\boldsymbol{r}=(R\cos\omega t,R\sin\omega t).$$

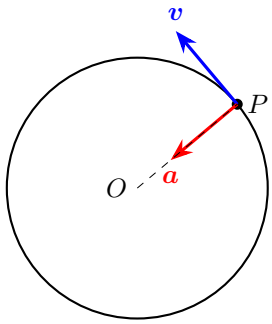


图 1.32: 切向速度与指向圆心的加速度

逐次求导，确定速度和加速度方向

每次求导都要乘内层导数 $\mathrm{d}(\omega t)/\,\mathrm{d}t=\omega$。先逐分量写出这两次链式求导，常数 R,ω 始终不变：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=R[-\sin(\omega t)]\omega=-R\omega\sin\omega t,\\ \dot{y}&=R\cos(\omega t)\omega=R\omega\cos\omega t,\\ \ddot{x}&=-R\omega\cos(\omega t)\omega=-R\omega^2\cos\omega t,\\ \ddot{y}&=R\omega[-\sin(\omega t)]\omega=-R\omega^2\sin\omega t.\end{aligned}$$

将同一时刻的两个分量合成，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=R\omega(-\sin\omega t,\cos\omega t),\\ \boldsymbol{a}&=-R\omega^2(\cos\omega t,\sin\omega t)=-\omega^2\boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

图 1.32 中蓝箭头沿切线，红箭头由 P 指回圆心，与矢量式中的负号相符。两速度分量的平方和为

$$v^2=R^2\omega^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=R^2\omega^2.$$

因此图 1.32 的加速度大小为 $R\omega^2=v^2/R$，方向由 $\boldsymbol{a}=-\omega^2\boldsymbol{r}$ 确定，指向圆心。同时

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=R^2\omega\big(-\cos\omega t\sin\omega t+\sin\omega t\cos\omega t\big)=0.$$

这又从代数上验证了速度沿切线。速率恒定使 $\dot{v}=0$，却不能使 $\boldsymbol{a}$ 为零。

角速度改变时的切向加速度

若圆周上的角度不再与时间成正比，而是一般的 $\theta(t)$，应在同一分量计算中保留 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$。由 $x=R\cos\theta$、$y=R\sin\theta$，先得

$$\boldsymbol{v}=R\dot{\theta}(-\sin\theta,\cos\theta).$$

再用乘积法则分别对 $\dot\theta$ 和三角函数求导：

$$a_x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-R\dot\theta\sin\theta) = -R\ddot\theta\sin\theta - R\dot\theta(\cos\theta\dot\theta),$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R\dot\theta\cos\theta) = R\ddot\theta\cos\theta + R\dot\theta(-\sin\theta\dot\theta).$$

把含 $\ddot\theta$ 与含 $\dot\theta^2$ 的项分别合并，才得到

$$\boldsymbol{a} = R\ddot\theta(-\sin\theta,\cos\theta) - R\dot\theta^2(\cos\theta,\sin\theta).$$

图 1.33 中第一项沿角度增加的切向，第二项沿内法线。只有 $\ddot\theta = 0$ 时才没有切向项；本题的恒定角速度条件使一般公式退化为已求的向心加速度。

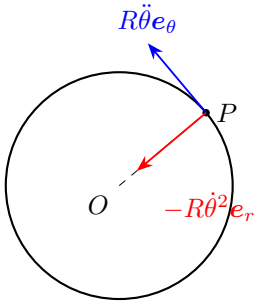


图 1.33: 角速度变化时，切向与向心项必须同时保留

例 1.9 (曲柄连杆与滑块)**.** 曲柄 $OP = R$ 以 $\dot\theta = \omega > 0$ 匀速逆时针转动，连杆 $PB = l > R$，滑块 B 受限于 x 轴，始终位于 P 右侧。求 B 的位置、速度和加速度，并给出 $R/l \ll 1$ 时的位置近似。

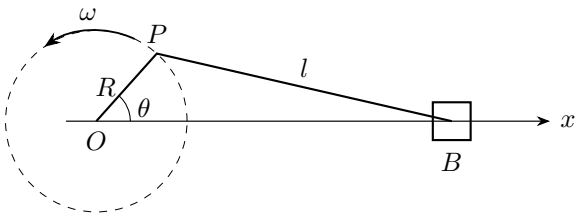


图 1.34: 右侧装配支路的曲柄滑块

解　由杆长约束选择右侧装配支路

图 1.34 中 $P = (R\cos\theta, R\sin\theta)$。连杆长度给出

$$(x - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta = l^2.$$

因 B 位于右侧，应取正根。记 $D = \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\theta} > 0$，则

$$x = R\cos\theta + D,$$

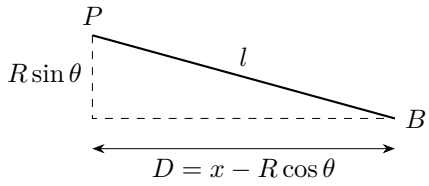


图 1.35: 将连杆分解为水平投影和竖直投影

把水平投影的变化计入速度和加速度

图 1.35 的水平投影也在变化，不能只对 $R\cos\theta$ 求导。利用

$$D_\theta = \frac{1}{2\sqrt{l^2 - R^2\sin^2\theta}}(-2R^2\sin\theta\cos\theta) = -\frac{R^2\sin\theta\cos\theta}{D},$$

先由 $v_B = \omega x_\theta$ 得到

$$v_B = -R\omega\sin\theta - \frac{R^2\omega\sin\theta\cos\theta}{D}.$$

第一项来自曲柄端点的水平运动，第二项来自图 1.35 中连杆水平投影的伸缩。为展开第二次求导，记 $Q = \sin\theta\cos\theta$，则 $Q_\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$，并且

$$\left(\frac{Q}{D}\right)_\theta = \frac{Q_\theta}{D} - \frac{QD_\theta}{D^2} = \frac{\cos 2\theta}{D} + \frac{R^2Q^2}{D^3}.$$

再用 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \omega\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta$ 对速度的两项分别求导，得到

$$a_B = -R\omega^2\cos\theta - \frac{R^2\omega^2\cos 2\theta}{D} - \frac{R^4\omega^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{D^3}.$$

当 $\theta = 0$，速度为零、加速度为 $-R\omega^2 - R^2\omega^2/l$，符合右死点开始向左运动的方向。

控制小参数，展开有限连杆修正

若 $R/l \ll 1$，

$$x = l + R\cos\theta - \frac{R^2}{2l}\sin^2\theta + O(R^4/l^3).$$

此处先写成 $D = l\sqrt{1-\varepsilon}$，$\varepsilon = (R/l)^2\sin^2\theta$，再用 $\sqrt{1-\varepsilon} = 1 - \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$。被舍去的长度项为 $l\,O(\varepsilon^2) = O(R^4/l^3)$。只保留 $l + R\cos\theta$ 会漏掉有限连杆长度产生的二倍频修正。

解释二倍频项为何更影响加速度

进一步把位置近似整理成各个转动频率的形式。由 $\sin^2\theta = (1-\cos 2\theta)/2$，有

$$x_B = l - \frac{R^2}{4l} + R\cos\theta + \frac{R^2}{4l}\cos 2\theta + O(R^4/l^3).$$

在 l, R 固定、$\theta = \omega t$ 的运动中，常数项的时间导数为零。对保留的两个余弦项求导时，内层角度的导数分别为 ω 与 2ω：

$$\begin{aligned} v_B &\simeq R(-\sin\theta)\omega + \frac{R^2}{4l}(-\sin 2\theta)(2\omega) \\ &= -R\omega\sin\theta - \frac{R^2\omega}{2l}\sin 2\theta, \\ a_B &\simeq -R\omega\cos\theta\,\omega - \frac{R^2\omega}{2l}\cos 2\theta\,(2\omega) \\ &= -R\omega^2\cos\theta - \frac{R^2\omega^2}{l}\cos 2\theta. \end{aligned}$$

图 1.35 中的连杆水平投影因此带来二倍频修正。

其位置振幅相对主项为 $R/(4l)$，加速度振幅相对主项却为 R/l，因为两次求导使二倍频项多乘 2^2。这说明在比较加速度精度时，不能仅凭位置修正看起来很小便直接删去它。本题根号在 $l > R$ 时全周期光滑，且按 R/l 的展开可逐项求导；对于缺乏这种光滑控制的一般误差项，不能仅由函数误差小就断定其导数误差也小。

例 1.10 (抛物面镜的平行出射)**.** 在截面内，镜面为 $y = ax^2, a > 0$，焦点 $F = (0, f)$，$f = 1/(4a)$。证明由焦点射向镜面的光线反射后沿 $+y$ 方向传播。

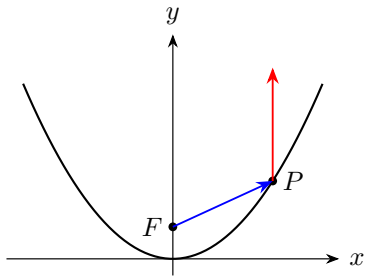


图 1.36: 焦点入射光与沿轴出射光

解　由焦点距离确定入射单位矢量

图 1.36 中取任意 $P = (x, ax^2)$。先计算

$$|FP|^2 = x^2 + (ax^2 - f)^2 = a^2x^4 + (1 - 2af)x^2 + f^2.$$

由于 $4af = 1$，有 $1 - 2af = 2af$，右侧等于 $(ax^2 + f)^2$。再由 $ax^2 + f > 0$，取正根得到 $|FP| = ax^2 + f =: D$，所以入射单位方向为

$$\boldsymbol{u} = \frac{(x, ax^2 - f)}{D}.$$

用导数构造切向与法向

固定 a，以横坐标 x 作为镜面的参数，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x, ax^2) = (1, a\cdot 2x) = (1, 2ax).$$

所以镜面切向量可取 $(1, 2ax)$；图 1.37 中的法向与它垂直，可取非单位法向量 $\boldsymbol{n} = (-2ax, 1)$，因为 $(1, 2ax)\cdot(-2ax, 1) = 0$。矢量反射公式是 $\boldsymbol{u}_{\text{out}} = \boldsymbol{u} - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}/|\boldsymbol{n}|^2$。

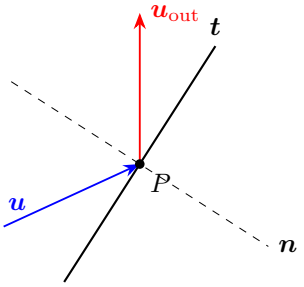


图 1.37: 把入射方向分成切向与法向

由法向分量求出射方向

图 1.37 中反射保持切向分量、反转法向分量。具体地，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = [-2ax^2 + (ax^2 - f)]/D = -(ax^2 + f)/D = -1$；而 $4aD = 4a^2x^2 + 4af = 1 + 4a^2x^2$，所以

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = -1, \quad |\boldsymbol{n}|^2 = 1 + 4a^2x^2 = 4aD.$$

代回可得

$$\boldsymbol{u}_{\text{out}} = \frac{(x, ax^2 - f)}{D} + \frac{(-2ax, 1)}{2aD} = (0, 1).$$

最后一个向量等式的横分量是 $x/D - x/D = 0$，纵分量是 $(ax^2 - f + 1/(2a))/D = (ax^2 + f)/D = 1$，这里用了 $1/(2a) = 2f$。因此全部出射方向均平行于轴，且朝 $+y$。此证明同时检查了出射的正负方向，在顶点 $x = 0$ 时也适用。

例 1.11 (下降直杆与圆的交点)**.** 水平细杆以恒速 $u>0$ 下移，与固定圆 $x^2+y^2=R^2$ 相交。取右交点 P，以杆经过圆顶端为 $t=0$，故 $y=R-ut$。求 P 的速度、加速度和切向、法向加速度。

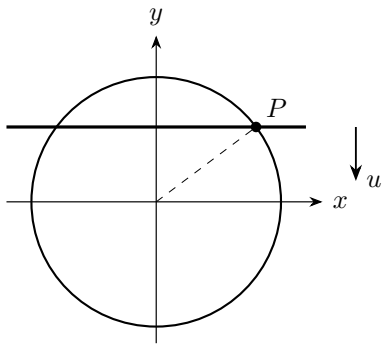


图 1.38: 右交点由圆与水平杆共同确定

解　确定交点的支路和存在时间

图 1.38 的右交点满足

$$x=\sqrt{R^2-y^2}>0,\qquad 0<t<2R/u.$$

对圆约束连续求导，得到矢量运动量

因为 $\dot y=-u$，对 $x^2+y^2=R^2$ 求导得到 $2x\dot x+2y\dot y=0$，所以 $x\dot x=uy$、$\dot x=uy/x$。速度的分量与大小为

$$\boldsymbol{v}_P=(uy/x,-u),\qquad v_P=uR/x.$$

这里 $v_P^2=(uy/x)^2+u^2=u^2(x^2+y^2)/x^2=u^2R^2/x^2$，用 $u,R,x>0$ 取正根才得到速率 uR/x。再次求导，保留商中分子、分母的变化：

$$a_x=u\frac{\dot y\,x-y\dot x}{x^2}=-\frac{u^2(x^2+y^2)}{x^3}=-\frac{u^2R^2}{x^3},\qquad a_y=0.$$

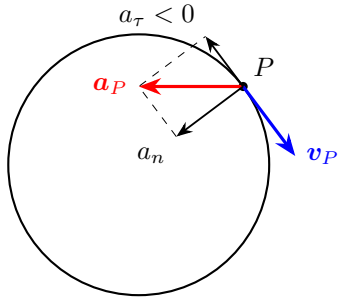


图 1.39: 交点的合加速度与切法向分解

按实际运动方向作切向和法向投影

图 1.39 画的是上半圆 $y>0$ 的状态：速度向右下，合加速度水平向左。切向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_\tau=(y/R,-x/R)$，内法线单位矢量为 $\boldsymbol{e}_n=(-x/R,-y/R)$。将 $\boldsymbol{a}_P=(-u^2R^2/x^3,0)$ 向它们投影，分别得到

$$a_\tau=\dot v_P=-\frac{u^2Ry}{x^3},\qquad a_n=\frac{v_P^2}{R}=\frac{u^2R}{x^2}.$$

直接求 $\mathrm{d}(uR/x)/\,\mathrm{d}t=-uR\dot x/x^2=-u^2Ry/x^3$，与切向投影一致。两个正交分量的平方和为 $u^4R^2(y^2+x^2)/x^6=u^4R^4/x^6$，开方后恰为 $|\boldsymbol{a}_P|$。过赤道时 $a_\tau=0$，下半圆时 $a_\tau>0$。端点 $x=0$ 使交点速度发散，这是理想几何交点的奇异性；杆上物质点始终只有向下速度 u。

用角度参数看端点附近的速度

还可把上述结论写成手算中常用的角度形式。令半径与向上竖直线的夹角为 $\theta\in(0,\pi)$，则 $x=R\sin\theta$、$y=R\cos\theta$。由 $\dot y=-R\sin\theta\dot\theta=-u$，求出

$$\dot\theta=\frac{u}{R\sin\theta},\qquad v_P=R\dot\theta=\frac{u}{\sin\theta}.$$

对速率求导时，θ 也变化，所以

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\csc\theta)=-u\csc\theta\cot\theta\dot\theta=-\frac{u^2\cos\theta}{R\sin^3\theta},\qquad a_n=\frac{u^2}{R\sin^2\theta}.$$

图 1.39 所示的上半圆对应 $\cos\theta>0$，切向分量为负；到下半圆时符号反转，而法向分量始终朝圆心。按勾股关系合成，

$$|\boldsymbol{a}_P|=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\frac{u^2}{R\sin^3\theta}\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{u^2}{R\sin^3\theta}.$$

$\dot v_P$ 给出切向分量，切线转动给出法向分量。将这两个分量沿图中的切线和法线合成，就得到直角坐标中同一个加速度。

1.6 本讲小结

极限需要先判断趋近方式与定义域，再选择变形或夹逼。导数把局部增量转化为变化率；链式法则则把几何约束、位置关系与运动联系起来。求运动量时应先明确自变量，区分对位置求导与对时间求导，并始终保留速度、加速度的矢量性质。处理交点时，还应检查其是否代表同一物质点。

1.7　练习

练习 1.1 (乘积函数的变化率)．求 $f(x)=x\sin x\,\mathrm{e}^{x}$ 的导数，并在 $x=0$ 处写出切线方程。

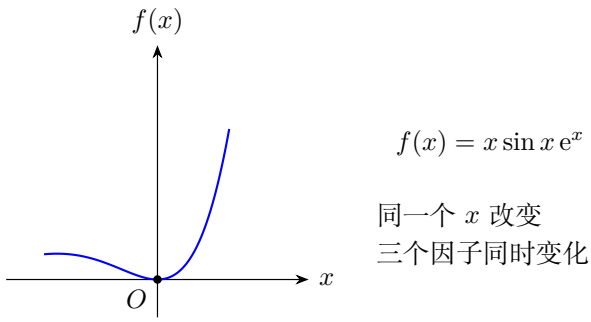


图 1.40: 三个因子的乘积在零点附近的图像与待求切线位置

练习 1.2 (连续与可导)．函数 $f(x)=|x|$ 在零点连续吗? 可导吗? 函数 $g(x)=x|x|$ 呢?

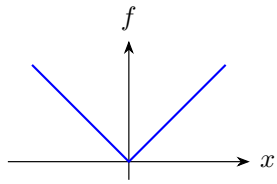


图 1.41: 零点两侧的函数形状

练习 1.3 (对时间的二次求导)．质点满足 $y=\beta x^{2}$，$\beta>0$，且 $x=ut$，$u>0$。求速度、加速度，并说明 $\ddot{y}$ 为什么不等于 $\mathrm{d}^{2}y/\,\mathrm{d}x^{2}$。

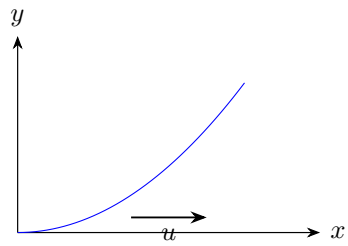


图 1.42: 匀速水平投影下的抛物线路径

练习 1.4 (无穷小量之比)**.** 不用洛必达法则，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$，以及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{2x-\cos x}$。

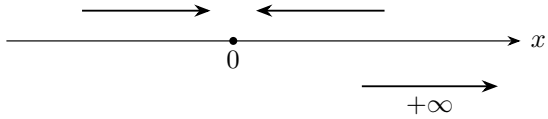


图 1.43: 趋近零点和趋向无穷远是两种过程

练习解答

练习 1.1

解　分别计算三个因子的变化贡献

乘积的每一项导数都来自一个因子的变化，另外两个因子取原值。图中把三份贡献分开列出。

图 1.40 中每个因子都有变化，故

$$f'=\mathrm{e}^x\sin x+x\mathrm{e}^x\cos x+x\mathrm{e}^x\sin x=\mathrm{e}^x[(1+x)\sin x+x\cos x].$$

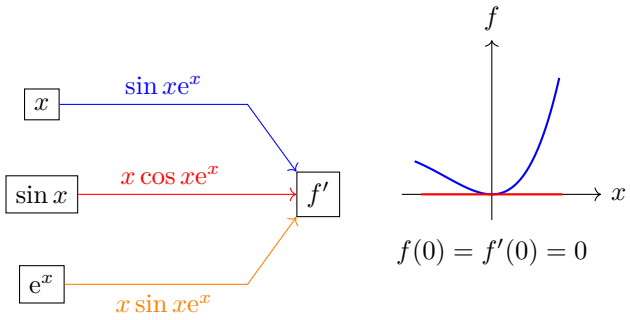


图 1.44: 三条求导路径与零点的水平切线

同时确定切线斜率与切点

图 1.44 左侧的三条路径分别给出一个因子的变化贡献，相加才是总变化率；右侧红线用于对照零点切线。代入 $x=0$ 时 $\sin 0=0,\cos 0=1,\mathrm{e}^0=1$，得到 $f(0)=0$、$f'(0)=0$。切线的一般方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$，所以本题为 $y=0$。又因 $\sin x\sim x,\mathrm{e}^x\to1$，有 $f(x)\sim x^2$，与水平切线相符。

零点的差商

零点处还可直接用定义作独立检查，而不再次使用乘积法则。由 $f(0)=0$，有

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{h\sin h\mathrm{e}^{h}}{h}=\lim_{h\to0}\sin h\mathrm{e}^{h}=0.$$

定义法只判断这一点的局部变化，前面的乘积法则则给出整个可导区间的表达式；二者所得零点斜率一致。

练习 1.2

解　零点处的函数值与极限

先由函数值的极限判断连续，再从两侧的差商求零点斜率。

图 1.41 两侧都趋于零，且 $f(0)=0$，所以连续。

比较绝对值函数的左右差商

求零点导数时，$h>0$ 的差商为 $h/h=1$，$h<0$ 时为 $(-h)/h=-1$，两侧不同，故不可导。

乘上横坐标后的左右差商

对 g，有 $g(x)=x^2$ $(x>0)$ 和 $g(x)=-x^2$ $(x<0)$，两侧也都趋于 $g(0)=0$。其零点差商为 $h|h|/h=|h|\to0$，所以可导且 $g'(0)=0$。

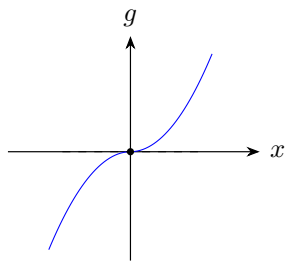


图 1.45: 乘以横坐标后，零点成为水平切点

图 1.45 的两侧切线在零点一致。再对两个开区间内的多项式分别求导：

$$g'(x)=\begin{cases}\mathrm{d}(x^2)/\,\mathrm{d}x=2x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \mathrm{d}(-x^2)/\,\mathrm{d}x=-2x, & x<0.\end{cases}$$

正半轴上 $|x|=x$，负半轴上 $|x|=-x$，所以三种情形统一为 $g'(x)=2|x|$。它与零点的导数连续衔接；这不是由函数连续本身推出的，而是差商及分段求导的结果。

练习 1.3

解　把几何路径与时间规律结合

由图中横坐标的时间规律，把路径方程变成位置的时间函数，再对同一个时间连续求导。

图 1.42 的几何式给出路径，时间式给出走过路径的方式。先代入 $x=ut$，得到两个位置分量 $x(t)=ut$、$y(t)=\beta u^2t^2$；固定参数 u,β 后，对同一个时间逐次求导：

$$v_x=\frac{\mathrm{d}(ut)}{\mathrm{d}t}=u,\qquad v_y=\beta u^2\frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}=2\beta u^2t,$$
$$a_x=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0,\qquad a_y=2\beta u^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=2\beta u^2.$$

因此 $\boldsymbol{v}=(u,2\beta u^2t)$、$\boldsymbol{a}=(0,2\beta u^2)$。

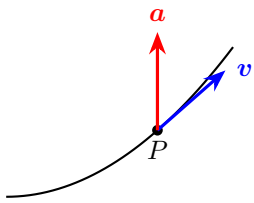


图 1.46: 速度沿切线，加速度沿竖直方向

加速度的方向和单位

图 1.46 中 $\boldsymbol{a}$ 没有水平分量，因为 $\dot{x}=u$ 为常数。还可沿原几何式对照链式法则中产生的因子：

$$\dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\dot{x}=2\beta x\dot{x},$$
$$\ddot{y}=2\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\dot{x})=2\beta(\dot{x}\dot{x}+x\ddot{x})=2\beta(u^2+0)=2\beta u^2.$$

$y''(x)=2\beta$ 的量纲为逆长度，$\ddot{y}$ 的量纲为加速度；中间的 $\dot{x}^2=u^2$ 正是改变自变量时产生的因子，不能省去。

练习 1.4

解　在零点处统一三角函数的自变量

前两个极限都先化为已知的 $\sin z/z$ 型。第一式补出并约去常数三，保证分子、分母具有同一个趋零变量；第二式先用 $1-\cos 2x=2\sin^2 x$，避免直接把两个趋零量分别置零。最后一式考察无穷远行为，应将分子、分母同除以 x，再利用正弦与余弦有界。

结合图 1.43 的趋近方向，

$$\frac{\sin 3x}{x} = 3\frac{\sin 3x}{3x} \to 3, \qquad \frac{1-\cos 2x}{x^2} = 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \to 2.$$

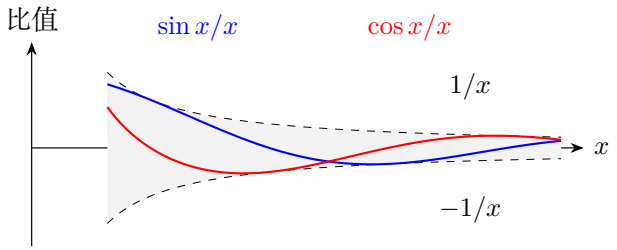


图 1.47: 正弦与余弦的修正项都落在逐渐收窄的包络内

在无穷远处控制有界修正项

图 1.47 中两个三角函数的修正项都夹在 $-1/x$ 与 $1/x$ 之间。两条包络随 $x \to +\infty$ 趋零，故 $\dfrac{x+\sin x}{2x-\cos x} = \dfrac{1+\sin x/x}{2-\cos x/x} \to \boxed{1/2}$。分母趋于 2，满足商的极限法则的非零条件。

微积分

物理竞赛一轮讲义

第二讲

积分与连续分布

2026

目录

第二讲　积分与连续分布 **1**

2.1　积分如何表示连续累积 1

2.2　原函数与微积分基本定理 4

2.3　面积、体积与质心 8

2.4　积分与运动、做功 11

2.5　例题与分析 13

2.6　本讲小结 29

2.7　练习 29

练习解答 30

第二讲　积分与连续分布

2.1　积分如何表示连续累积

沿直线运动的质点从 t_a 走到 t_b。在图 2.1 中，以 $t_0 = t_a, t_N = t_b$ 为端点分段。第 i 段宽为 $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$，在段内选时刻 ξ_i。若这一段很短，速度可用 $v(\xi_i)$ 近似，位移约为 $v(\xi_i)\Delta t_i$。把它画成矩形，横宽用秒计，竖高用米每秒计，面积的单位便是米。连续速度下，最大段宽趋零时，矩形和趋向准确位移：

$$x(t_b) - x(t_a) = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} v(\xi_i)\Delta t_i = \int_{t_a}^{t_b} v(t)\ \mathrm{d}t.$$

相同的构造也适用于变力做功。把横轴改成位置，竖轴改成力在位移方向上的分量，第 i 个矩形表示的是 $F(x_i^*)\Delta x_i$，它的单位是焦耳。再换成非均匀细杆，矩形的宽和高分别对应小段的长度和线密度。

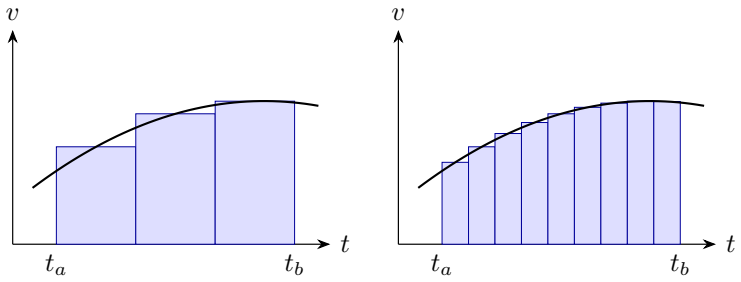


图 2.1: 同一段运动的两种分割，矩形的高度取各小段中点的速度

2.1.1　从分割求和到定积分

非均匀细杆各处的线密度不同。将杆分成许多小段，在第 i 段内取一点 ξ_i，以 $\lambda(\xi_i)\Delta x_i$ 近似该段质量。对于连续线密度，当最大段长趋于零时，这些近似之和趋于同一个结果：

$$M = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i} \lambda(\xi_i)\Delta x_i = \int_0^L \lambda(x)\ \mathrm{d}x.$$

这种“分割、求和、取极限”的过程定义了定积分。它不要求各段一样长，也不要求函数恒定；连续性保证分割充分细时，段内变化导致的总误差趋零。

一般记 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$。$x$ 是积分变量，决定微元如何排列；$\mathrm{d}x$ 表示所选分割方向的小长度。若自变量是时间，$I(t)\,\mathrm{d}t$ 是通过的微小电量；若自变量是体积，$\rho\,\mathrm{d}V$ 是微小质量。先说明要累加什么，再写出微元，通常比直接寻找可套用的积分公式更可靠。

定积分有方向。约定 $\int_b^a f\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f\,\mathrm{d}x$，且中间点处可拆分相加。若 f 在横轴两侧变号，积分给出正、负区域的代数和。几何面积应积 $|f|$；路程应积 $|v|$；电流积分则给出净通过电量。能否直接把积分叫作面积，取决于被积函数的符号。

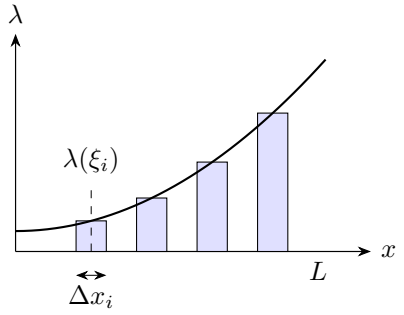


图 2.2: 用窄条的高度乘厚度近似局部质量

图 2.2 中，每个矩形的横宽对应一小段杆长，高度是段内选定点的线密度。矩形面积的单位为质量。分割越细，矩形的上边越贴近线密度曲线，矩形和也越接近细杆的实际质量。

若累积的是带符号的量，正负部分应保留方向。例如速度图在时间轴下方的部分表示反向位移，其积分为负；若求路程，就要把这一段的符号反过来后再相加。把积分对象从位移改成路程，便分别积 $v\,\mathrm{d}t$ 和 $|v|\,\mathrm{d}t$。

图 2.3 把这个区别画成一段先向前、后退回的运动。时间轴上方的面积为 S_+，下方几何面积的大小为 S_-。位移记录位置的净变化，所以反向部分应扣除；路程记录实际走过的长度，所以两部分都要累加：

$$\Delta x = S_+ - S_-, \qquad s = S_+ + S_-.$$

若两块面积相等，物体返回原位，但走过的路程仍为 $2S_+$。这也解释了为什么 $\left|\int v\,\mathrm{d}t\right|$ 通常不等于 $\int |v|\,\mathrm{d}t$：前者在相加时已经把正负位移抵消。

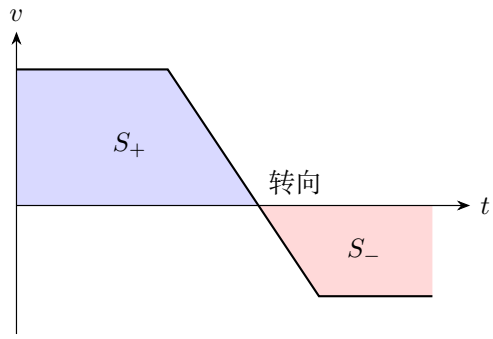


图 2.3: 同一速度图，位移取代数面积，路程取各块面积之和

2.1.2 微元的近似为什么能够相加

在位置 x 处，有限小段的准确质量为 $\Delta m = \lambda(x)\Delta x + o(\Delta x)$。当分割细化，使用 $\mathrm{d}m = \lambda(x)\,\mathrm{d}x$ 保留一阶部分，所有小段的高阶误差总和趋于零。若所取“微元”内部仍有同阶变化，例如把大圆环当成等高小圆柱，却漏掉弧面倾斜因子，误差就不会随分割消失。

平行截面切出厚为 $\mathrm{d}z$ 的薄片，体积为 $\mathrm{d}V = A(z)\,\mathrm{d}z$。在图 2.4 的球面上，窄带沿母线的宽度为 $\mathrm{d}s$，高度差为 $|\mathrm{d}z|$，用局部切线的斜率联系二者。

误差之和趋零还需要一致控制。对长度为 L 的杆，若每一小段内线密度相对所选高度的最大偏差不超过 ω，总质量误差就不超过 $\sum_i \omega\Delta x_i = \omega L$。连续密度在有限闭区间上一致连续，因此分段足够细时，可以使所有小段共用的 ω 任意小。这一步把“每一段很准”与“全部相加仍然很准”连接起来。

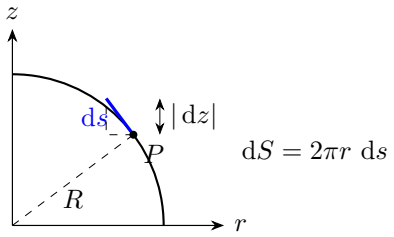


图 2.4: 球面窄带的母线宽度与竖直厚度不同

图 2.4 的蓝段是球面母线的局部切线段。旋转一周时，它扫出窄带，所以面积应为圆周长乘 $\mathrm{d}s$。在 $r > 0$ 的球面部分，固定 R，对 $r(z)^2 + z^2 = R^2$ 求导：

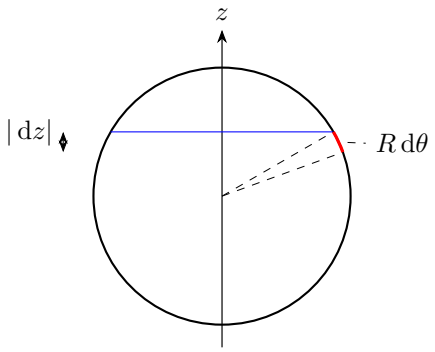
$$2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + 2z = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = -\frac{z}{r}.$$

由局部切线段的勾股关系，再把 $r^2+z^2=R^2$ 代回，得到

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2}\,|\mathrm{d}z|=\sqrt{\frac{r^2+z^2}{r^2}}\,|\mathrm{d}z|=\frac{R}{r}|\mathrm{d}z|,$$

$$\mathrm{d}S=2\pi r\;\mathrm{d}s=2\pi r\frac{R}{r}|\mathrm{d}z|=2\pi R|\mathrm{d}z|.$$

两极处的表达式可由邻近窄带的极限理解。若直接用 $2\pi r|\mathrm{d}z|$，就漏掉了图中的倾斜因素；即使分割无限细，这个同阶误差也不会消失。



图中红弧表示沿面宽度

图 2.5: 窄带周长随极角变化，沿面宽度取弧长

图 2.5 中沿面宽度为 $R\,\mathrm{d}\theta$，水平圆周半径为 $R\sin\theta$；二者的乘积是球面窄带面积。用 $|\mathrm{d}z|=R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ 换元，面积写成 $2\pi R|\mathrm{d}z|$。图上不同纬度的圆周有长有短，同一竖直高度差所对应的斜宽也随之改变，乘积恰好相同。

2.2　原函数与微积分基本定理

2.2.1　积分上限函数的变化率

设 f 在区间内连续，定义 $A(x)=\int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$。自变量从 x 到 $x+h$ 时，只多出一条窄带，

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\big[f(s)-f(x)\big]\,\mathrm{d}s.$$

图 2.6 的深色条带所用区间以 x 和 $x+h$ 为两端。设这一带中 $|f(s)-f(x)|$ 的最大值为 $\omega(h)$。无论 h 正负，右式的绝对值都不超过 $|h|\omega(h)/|h|=\omega(h)$。连续性给出 $\omega(h)\to 0$，于是 $A'(x)=f(x)$。

如果 $F'(x)=f(x)$，那么 $(A-F)'=f-f=0$，故在一个连通区间内 $A(x)-F(x)=C$。代入起点，$C=A(a)-F(a)=-F(a)$，所以 $A(x)=F(x)-F(a)$；最后取 $x=b$，得到

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)}. \tag{2.1}$$

不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$ 表示一族原函数，而定积分是给定区间内的一个数。式(2.1)使积分常数在两端相减时抵消；由初始条件求运动函数时，常数则承载初始位置或初始速度，不能省略。

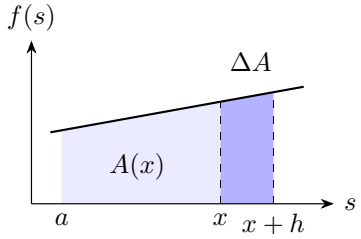


图 2.6: 积分上限移动时只增添端点旁的一条窄带

若上限由 $g(t)$ 给出，图中条带的宽随 t 变化。将 $A'(g(t))=f(g(t))$ 与上限的变化率 $g'(t)$ 相乘，$\mathrm{d}[\int_a^{g(t)} f(s)\,\mathrm{d}s]/\,\mathrm{d}t=f(g(t))g'(t)$。

因此积分常数的处理与求导方向相连。对不定积分，相差常数的函数具有相同导数；对给定初值的运动，初值从这一族函数中选出唯一成员。用定积分表示初值问题，可以在书写上直接保留起始时刻和起始状态，减少漏常数的机会。

2.2.2 积分限移动时的增量

图 2.7 中窗口两端都移动。设 $B(t)=\int_{a(t)}^{b(t)} f(x)\,\mathrm{d}x$，可先用原函数写成 $B(t)=F(b(t))-F(a(t))$，再对两项分别应用链式法则：

$$\begin{aligned}\dot{B}&=F'(b(t))\dot{b}-F'(a(t))\dot{a}\\&=f(b(t))\dot{b}-f(a(t))\dot{a}.\end{aligned}$$

负号由下限移动时被删去的部分决定。例如同一密度分布中一段滑动窗口的质量变化，由前端扫入的质量率减去后端扫出的质量率。若被积函数本身也随时间变化，还须把区间内部的变化加入；这里只讨论固定的 $f(x)$。

对于图中的固定密度分布，两端每秒扫入和扫出的质量决定窗口内总质量的变化。

图 2.7 将两端同时右移的窗口分成“删去”和“新增”两条窄带。若 $\dot{a}=\dot{b}=u>0$，窗口长度不变，内部总量仍以 $u[f(b)-f(a)]$ 的速率变化。右端密度比左

端大时，等长的新条带比删去条带含量更多，总量增加；均匀分布才使两项恰好抵消。

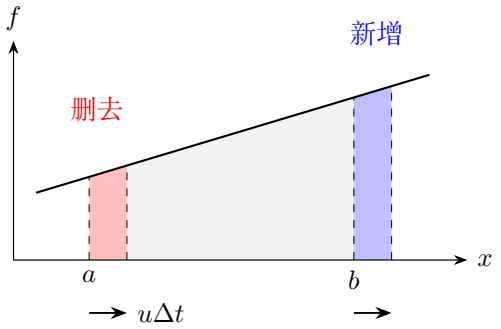


图 2.7: 固定分布中的移动窗口，右端新增与左端删去分别计入

2.2.3　基本积分与适用区间

求不定积分时，可以先把候选原函数求导，检查是否恰好得到被积式。对幂函数而言，导数会使指数下降一，所以应尝试把指数提高一。由于 $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$，还须除以多出的系数，得到

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

条件 $n \neq -1$ 不是形式上的附注：当 $n = -1$ 时，候选式的分母为零，而常数 x^0 的导数也不能给出 x^{-1}。这时应利用 $(\ln|x|)' = 1/x$，所以原函数改为 $\ln|x| + C$。

指数函数的原函数仍是它自身，因为求导后不改变函数形状：$\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$。如果指数中出现系数 k，则 $(\mathrm{e}^{kx})' = k\mathrm{e}^{kx}$，积分时必须补上 $1/k$。这个系数补偿与幂函数中的除以 $n+1$ 本质相同，都是把求导产生的额外系数消去。

正弦、余弦的积分还要追踪符号。因为 $(\cos x)' = -\sin x$，$\sin x$ 的一个原函数是 $-\cos x$；因为 $(\sin x)' = \cos x$，$\cos x$ 的一个原函数是 $\sin x$。例如对 $-\cos(kx+\varphi)/k$ 求导时，外面的负号、余弦求导的负号与内层导数 k 共同作用，结果正好为 $\sin(kx+\varphi)$。先这样验证一次，比只记住一个结果更能避免系数和符号错误。

这些原函数关系都要在被积函数连续的区间内使用。$\ln|x|$ 能分别描述零点两侧的原函数，却不能消除被积式在零点的奇异性。因此 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x/x$ 不能直接用两端原函数值相减；这类反常积分需分别检查奇点两侧的极限。

在连续区间内，两个原函数的导数相同，它们的差就是常数；如果区间被奇点分成两段，两侧可以具有不同的积分常数。例如 $1/x$ 的正、负半轴分别连通，不能仅凭一个写在式尾的 C 就把零点两侧视为同一个物理过程。

反向求导还能检查参数退化。式 $\int \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{kx}/k + C$ 只适用于 $k \neq 0$；当 $k = 0$ 时被积式等于一，原函数为 $x + C$。若需要研究 $k \to 0$ 的连续极限，可以选取定积分形式 $(\mathrm{e}^{kx} - 1)/k$，其极限才是 x。先把初值写清再研究参数极限，能避免被无关的积分常数掩盖实际结果。

图 2.8 给出不能跨越奇点使用端点差的典型情形。对 $1/x$，若从两侧分别截去零点附近的小区间，则

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln|x|\right]_{-1}^{-\varepsilon} = \ln\varepsilon - \ln 1 \longrightarrow -\infty,$$
$$\int_{\eta}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \left[\ln|x|\right]_{\eta}^{1} = \ln 1 - \ln\eta \longrightarrow +\infty.$$

两侧反常积分都不收敛，通常意义下的定积分不存在。人为令 $\eta = \varepsilon$ 得到的对称抵消是另一种限制过程，不能用它代替分别收敛的要求。图中的正面积向上增大，负面积向下增大，两侧各自发散。

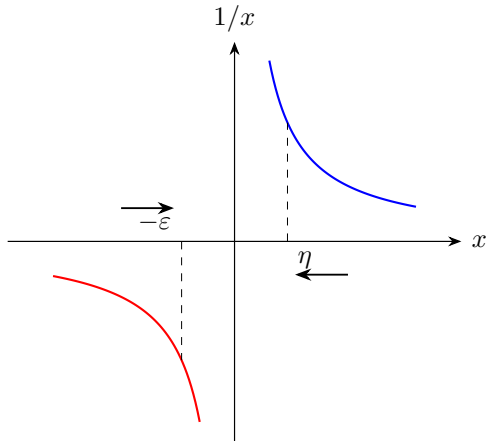


图 2.8: 奇点两侧须分别取极限，不能仅因图形对称就抵消

2.2.4 换元是同时更换函数、微元与端点

设 $u = g(x)$，则 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$。当被积式含有 $g'(x)\,\mathrm{d}x$ 时，

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

新积分的上下限是新变量的取值，不是旧变量的数值。若采用 $x = \cos\theta$，应同时写出 $\mathrm{d}x = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$；区间选择还决定 $\sqrt{\sin^2\theta}$ 等于 $\sin\theta$ 还是 $|\sin\theta|$。

有理式可先代数分解。例如 $1/[(x+3)(x+4)] = 1/(x+3) - 1/(x+4)$，就化成两个对数积分。任何求出的原函数，都应反向求导验证；求定积分还需检查上下限顺序和结果正负。

换元公式可由链式法则验证。若 $F' = f$，则 $F(g(x))$ 对 x 的导数是 $f(g(x))g'(x)$，对原区间积分后得到 $F(g(b)) - F(g(a))$，恰好等于新变量积分的端点差。这里的 $g'(x)$ 将横轴小段 $\mathrm{d}x$ 换成 $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$。

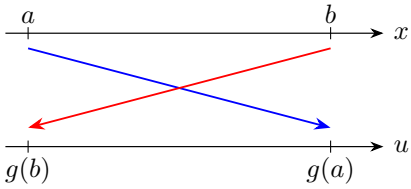


图 2.9: 递减换元使新变量的两个端点次序反转

图 2.9 表示 g 递减的情形：沿旧变量从 a 走到 b，新变量从较大的 $g(a)$ 走到较小的 $g(b)$。保留这一次序时，微元中的负号与方向已经一致；若交换新上下限，还必须再引入一个负号。只有在把区间改写成新变量区间时，才需要特别检查所选分支和单调性。对反三角或根式换元，区间同时决定根号的符号，不能在计算中另行猜测。

2.3　面积、体积与质心

2.3.1　连续分布的加权平均

离散系统质心满足 $x_C = \sum m_i x_i / \sum m_i$。对连续分布取极限，

$$x_C = \frac{\int x\ \mathrm{d}m}{M}, \qquad y_C = \frac{\int y\ \mathrm{d}m}{M}.$$

分子称质量对相应坐标原点的一次矩。密度均匀时可以在分子、分母约去同一个密度；密度变化时不能直接约去。

竖直窄条在 $y = f(x) \ge 0$ 与横轴之间，面积微元为 $f(x)\,\mathrm{d}x$，该窄条的质心高度为 $f(x)/2$，因此

$$y_C = \frac{\frac{1}{2}\int f(x)^2\,\mathrm{d}x}{\int f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

这里的一次矩可以进一步从窄条内部积分验证。若面密度为 σ，窄条内高度 y 到 $y + \mathrm{d}y$ 的质量为 $\sigma\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$，它对横轴的一次矩为 $y\sigma\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$。由下到上积分，

$$\mathrm{d}(My_C) = \sigma\,\mathrm{d}x \int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y = \sigma\,\mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{f(x)} = \sigma\,\mathrm{d}x \left(\frac{f(x)^2}{2} - 0\right) = \frac{\sigma}{2} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

再沿 x 累加，并用总质量 $M=\sigma\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 相除，就得到上式。若改用水平条，必须先写清该高度处左右轮廓；同一条物理微元不能重复计算两次。

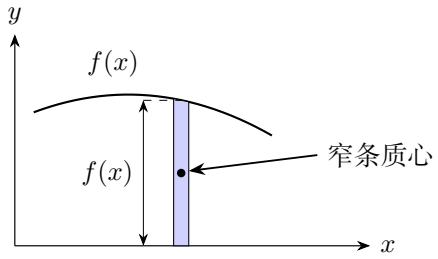


图 2.10: 窄条内部的质心位于上下两条曲线的中间高度

图 2.10 中，均匀窄条的一次矩是条的质量乘以条中点的高度。若下方曲线改为 $g(x)$，条宽仍为 $\mathrm{d}x$，竖直高度改为 $f(x)-g(x)$，中点高度为 $[f(x)+g(x)]/2$。两者相乘给出一次矩 $\sigma[f(x)^2-g(x)^2]\,\mathrm{d}x/2$。

对非均匀体，几何对称只有在密度也保留该对称时才能确定质心。例如形状关于纵轴对称但右侧更密，质心仍可能向右偏移。计算结果应位于质量分布的凸包内；若全部质量都在 $0\le x\le L$，却算出 $x_C>L$，应首先检查分子与分母是否使用了同一密度和同一积分范围。

改用水平条时，在同一高度上求左、右端点。对抛物线薄板 $y=4\ell-x^2/\ell$，两端坐标为 $x_\pm(y)=\pm\sqrt{\ell(4\ell-y)}$，故 $\mathrm{d}A=2\sqrt{\ell(4\ell-y)}\,\mathrm{d}y$。在求高度的一次矩时，整条的质心高度就是 y。

2.3.2 体积分、表面积分与转动惯量

球体按高度 z 切片，截面是面积 $\pi(R^2-z^2)$ 的圆盘；薄球壳却应按曲面上的窄带求面积。区分实心体与薄壳，是质心题中最常见的建模关口。

转动惯量是另一种加权积分，

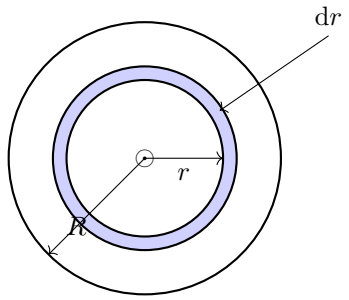
$$I=\int r_\perp^2\,\mathrm{d}m.$$

权重是质量元到转轴距离的平方。对杆绕端点轴，$r_\perp=x$；对圆盘绕中心法线，应取同心圆环，$\mathrm{d}m=\sigma\,2\pi r\,\mathrm{d}r$。距离、密度和微元三者必须来自同一个分割方案。质心一次矩的单位是质量乘长度，转动惯量的单位是质量乘长度平方，二者不可混淆。

微元的选择通常由对称性决定。薄杆沿长度分割，圆盘按同心圆环分割，旋转体按垂直对称轴的圆盘分割，都能使微元内部的密度或轴距便于处理。若一个微元

内部的轴距明显不同，就应继续分割，或先在该微元内完成一次积分，不能仅取某个边缘的距离代表全部质量。

还应把物体厚度与选定的数学维数对应起来。实心球用体密度乘体积，薄球壳用面密度乘表面积，细圆环用线密度乘弧长。三者分别用 $\mathrm{d}V$、$\mathrm{d}S$ 和 $\mathrm{d}s$ 描述质量所在区域。对这些模型分别写出质量元后，总质量、一次矩和转动惯量只是选取不同权重；方法可以迁移，质量元却必须重新核实。



$$\mathrm{d}m = 2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}I = r^2\,\mathrm{d}m$$

转轴垂直盘面

图 2.11: 同心圆环的厚度与到转轴的距离具有不同作用

图 2.11 中蓝色环带沿半径的宽为 $\mathrm{d}r$，沿周向却延伸整整一圈。面积取圆周长与径向宽度的乘积 $2\pi r\,\mathrm{d}r$。环带内各点到中心轴的距离在微元近似下均为 r，故均匀圆盘有

$$I = 2\pi\sigma\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = 2\pi\sigma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi\sigma R^4}{2} = \frac{1}{2}MR^2.$$

这里的 r^2 是惯量的权重，$2\pi r$ 来自微元面积，二者不能相互替代。若转轴改为盘面内的直径，同一圆环各点到新轴的距离不再相同，须先对周向位置再积分，不能继续整环乘 r^2。

图 2.12 取同一根非均匀杆上的质量元 $\mathrm{d}m$，并指定左端转轴 O。求总质量时，左右各块只按自身质量相加；求质心一次矩时，同样质量的远端块贡献更大；求转动惯量时，远端块还多乘一次轴距。因而从 M 转到 Mx_C、再转到 I_O，改变的是所求量的权重，并没有改变杆或密度：

$$M = \int \mathrm{d}m, \qquad Mx_C = \int x\,\mathrm{d}m, \qquad I_O = \int x^2\,\mathrm{d}m.$$

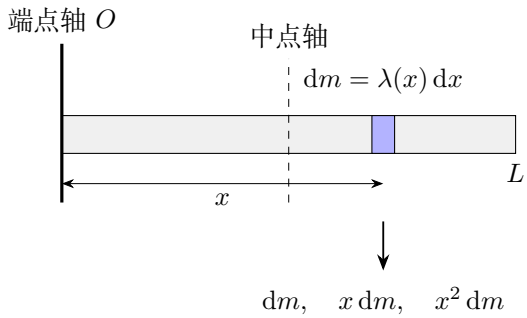


图 2.12: 同一小段质量，随所求量不同乘以不同位置权重

若改绕中点轴，图中的物理位置 x 不变，但到新轴的距离是 $|x - L/2|$，惯量应积 $(x - L/2)^2\,\mathrm{d}m$。先在图上标出所求量对应的轴或原点，再确定权重，可以避免把“到原点的坐标”与“到转轴的距离”混淆。

2.4 积分与运动、做功

2.4.1 沿同一过程累积变化率

由 $a = \dot{v}, v = \dot{x}$ 可依次积分：

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s.$$

若加速度给为位置函数，在一个位置单调变化的运动段内，链式法则给出 $a = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t) = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。于是定质量的一维牛顿方程可写成 $F(x)\,\mathrm{d}x = mv\,\mathrm{d}v$。位置端点 x_0, x_1 对应速度端点 v_0, v_1，两边必须沿同一过程积分：

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} F(x)\,\mathrm{d}x = m\int_{v_0}^{v_1} u\,\mathrm{d}u &= m\left[\frac{u^2}{2}\right]_{v_0}^{v_1} \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.\end{aligned}$$

此式是牛顿定律在过程上的积分结果。对转向点，$v = 0$ 处应避免无依据地除以 v；可以先在单调运动段推导，再以连续性接到转向点。变质量系统的动量流入问题还需另行建立方程，不能直接把这里的 m 换成随时间变化的质量。

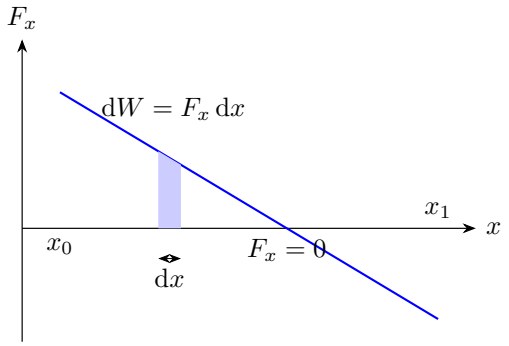


图 2.13: 同一力随位置变化的图，带方向的窄条面积给出微元功

图 2.13 取右为正。物体向右走时，横轴上方的面积给正功，下方给负功。由 $m\dot{v} = F_x$ 两边乘 $v\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$，可得 $mv\,\mathrm{d}v = F_x\,\mathrm{d}x$。若物体在途中转向，就按实际运动顺序将路径分段，各段的 $\mathrm{d}x$ 带自己的符号。

若先由加速度求速度，再由速度求位置，两次积分中的积分变量只是临时记号，应与上限 t 区分。例如 $v(t) = v_0 + \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s$，这里 s 从起点运行到当前时刻，最终函数仍依赖 t。把 v_0 直接写成零，等于加入一个题目未必给出的初始条件；积分方法本身并不允许这样省略。

在力随位置变化的题目中，动能定理先给出 $v^2(x)$，它不能单独决定速度方向。应根据运动支路取 $v = \pm\sqrt{v^2(x)}$，再由 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$ 求时间。到达转向点时若平方速度为零，还应检查时间积分是否收敛，以及受力是否会使物体反向。这样，能量式负责联系状态，时间积分负责描述过程，两者承担不同任务。

积分变量由选取的微元决定。例 2.4 用竖直窄条求薄板质心，条长决定质量，条中点的高度决定一次矩。两个积分使用相同的窄条，但被积式分别记录质量和质量乘高度。

2.5 例题与分析

例 2.1（反向求导与积分常数）. 求 $\int c\,\mathrm{d}x$、$\int x^n\,\mathrm{d}x$ $(n\neq -1)$、$\int(3x+1)^2\,\mathrm{d}x$、$\int \sin x\,\mathrm{d}x$、$\int \sin 3x\,\mathrm{d}x$、$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$、$\int \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x$ $(k\neq 0)$ 和 $\int \mathrm{d}x/x$。

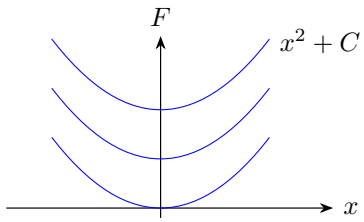


图 2.14: 同一导函数对应相差常数的原函数

解　用反向求导确定幂函数与复合函数的原函数

图 2.14 的各条曲线只作竖直平移，斜率相同，因此每个不定积分都要包含常数。由于 $(cx)'=c$，第一式为 $cx+C$；由于 $(x^{n+1})'=(n+1)x^n$，第二式要除以 $n+1$，得到 $x^{n+1}/(n+1)+C$，这也说明为何排除 $n=-1$。第三式令 $u=3x+1$，则 $\mathrm{d}u=3\,\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/3$，所以

$$\int(3x+1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\frac{u^3}{3}+C=\frac{(3x+1)^3}{9}+C.$$

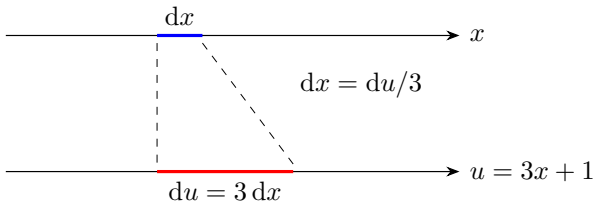


图 2.15: 换元把同一微小区间的宽度放大三倍

分别处理降次、指数补偿与对数积分

图 2.15 中的微元关系说明，外面的 1/3 来自 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/3$，不是任意添加的系数。其余积分按被积函数的形式分别处理。正弦平方先用倍角公式降次，再令 $u=2x$、$\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x$ 计算其中的余弦积分：

$$\int\cos 2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sin u+C=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

因此

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C,$$

$$\int \mathrm{e}^{kx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{u}}{k} + C = \frac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + C \quad (u = kx,\ \mathrm{d}u = k\,\mathrm{d}x),$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C.$$

第一式即 $x/2 - \sin 2x/4 + C$。最后一式由 $(\ln|x|)' = 1/x$ 确定，在零点两侧各自的连通区间使用。常数倍的积分仍先提出系数，再计算原函数，例如

$$\int 5x^3\,\mathrm{d}x = 5\int x^3\,\mathrm{d}x = 5\frac{x^4}{4} + C,$$

$$\int 4\frac{\mathrm{d}x}{x} = 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = 4\ln|x| + C,$$

$$\int 7\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2}\int \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{7}{2}\sin u + C = \frac{7}{2}\sin 2x + C,$$

其中第三式仍取 $u = 2x$、$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$。对这些原函数求导，幂函数系数或链式法则产生的系数恰好抵消积分时补入的因子。

对另外两个正弦积分，先从已知导数反向确定符号与系数：

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \Longrightarrow \quad \int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C,$$

对 $\sin 3x$ 令 $u = 3x$，则 $\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/3$。因此

$$\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$$

后式求导时，余弦的负号与内层导数 3 分别抵消前面的负号与 $1/3$，结果正好是 $\sin 3x$。这两个积分不需要使用正弦平方的降次公式。

例 2.2 (带端点的积分)**.** 设 $a > 0, k \neq 0$。计算 $\int_a^b (v_0 + gt)\,\mathrm{d}t$、$\int_a^b \sin(kx + \varphi)\,\mathrm{d}x$、$\int_a^{2a} \mathrm{d}x/(a+x)^2$、$\int_1^5 \mathrm{d}x/(x^2 + 7x + 12)$。

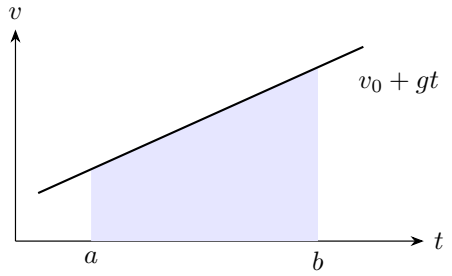


图 2.16: 积分是区间内的连续求和

解　先求原函数，再代入带方向的端点

图 2.16 在 $b>a$ 且速度为正时把第一式表示成位移面积；一般仍按带方向的积分计算。先写原函数，再作上限值减下限值：

$$\int_a^b (v_0+gt)\,\mathrm{d}t = \left[v_0 t + gt^2/2\right]_a^b$$
$$= (v_0 b + gb^2/2) - (v_0 a + ga^2/2) = v_0(b-a) + \frac{g}{2}(b^2-a^2).$$

第二式令 $u=kx+\varphi$，则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/k$，旧端点 $x=a,b$ 分别变成 $u=ka+\varphi, kb+\varphi$。同时改变函数、微元与端点，得到

$$\int_a^b \sin(kx+\varphi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int_{ka+\varphi}^{kb+\varphi} \sin u\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{k}\left[-\cos u\right]_{ka+\varphi}^{kb+\varphi} = \frac{\cos(ka+\varphi)-\cos(kb+\varphi)}{k}.$$

$k<0$ 时新端点顺序反向，但这里保留了它们的实际次序，仍使用同一个公式。第三式令 $u=a+x$、$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$，上下限变为 $2a, 3a$：

$$\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x)^2} = \int_{2a}^{3a} u^{-2}\,\mathrm{d}u = \left[-u^{-1}\right]_{2a}^{3a}$$
$$= -\frac{1}{3a} - \left(-\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{6a} > 0.$$

第四式先因式分解为 $(x+3)(x+4)$。令 $1/[(x+3)(x+4)] = A/(x+3)+B/(x+4)$，两边同乘分母，得 $1=A(x+4)+B(x+3)$。比较 x 的系数与常数项，

$$A+B=0, \qquad 4A+3B=1.$$

由第一式 $B=-A$，代入第二式得到 $4A-3A=1$，所以 $A=1$、$B=-1$。

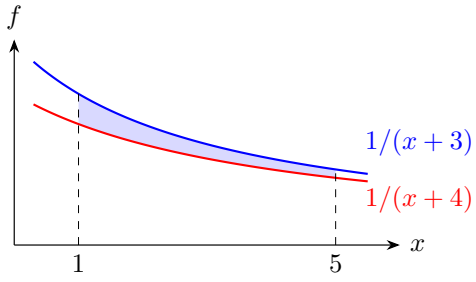


图 2.17: 两个倒数函数之间的面积恰好等于所求正积分

部分分式与原函数

图 2.17 中，蓝线与红线的高度差为 $1/(x+3)-1/(x+4)=1/[(x+3)(x+4)]$，阴影面积正是原积分。分解后两个函数都是已知的对数导数。在积分区间内 $x+3, x+4$ 均为正，所以

$$\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+12} = [\ln(x+3)-\ln(x+4)]_1^5$$
$$= \ln\frac{8}{9}-\ln\frac{4}{5} = \ln\frac{8\cdot 5}{9\cdot 4} = \boxed{\ln\frac{10}{9}}.$$

被积函数在整个区间为正，结果也应为正；若写成 $\ln(9/10)$，就应检查上下限相减的顺序。

例 2.3 (四分之一圆的面积积分)**.** 计算 $J=\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，分别用几何和三角换元解释结果。

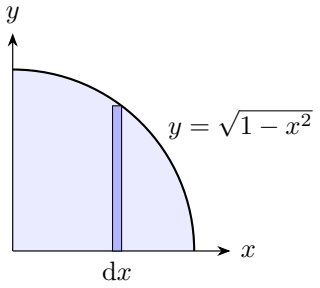


图 2.18: 单位圆第一象限内的竖直窄条

解　用四分之一圆判断积分的几何量级

单位圆的第一象限由圆弧、横轴和纵轴围成，面积在零与一之间。采用余弦换元时，角度增大使横坐标减小，因此微元带负号。

图 2.18 的被积函数非负，积分正是单位圆的四分之一面积，故 $J=\pi/4$。为说明换元，令 $x=\cos\theta$，取 $0\le\theta\le\pi/2$。此时根式为 $\sin\theta$，而 $\mathrm{d}x=-\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。

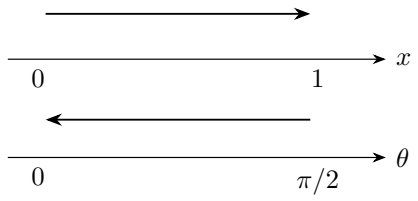


图 2.19: 新变量的两端与旧变量顺序相反

同时变换微元和两个端点

由图 2.19，$x:0\to1$ 对应 $\theta:\pi/2\to0$，所以

$$J=\int_{\pi/2}^{0}-\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

原函数中的 $-\sin2\theta/4$ 来自 $\int\cos2\theta\,\mathrm{d}\theta=\sin2\theta/2$。上限处 $\sin\pi=0$，下限处 $\sin0=0$，只剩 $(\pi/2)/2=\pi/4$。负微元与反向端点恰好补偿；不能只替换根式，却保留 $\mathrm{d}x$ 或旧上下限。

例 2.4 (抛物线薄板的面积与质心)**.** 均匀薄板占据 $-2\ell\le x\le2\ell$、$0\le y\le4\ell-x^2/\ell$，其中 $\ell>0$。求面积与质心。另求无量纲坐标中 $0\le\eta\le1-\xi^2$ 所围区域的面积，并说明两个区域的缩放关系。

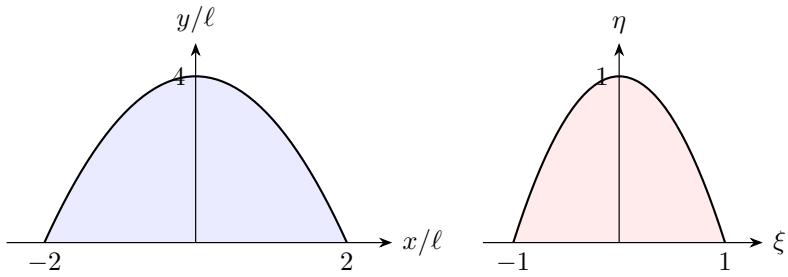


图 2.20: 抛物线与横轴围成的均匀薄板

解　用对称性和竖直窄条确定一次矩

图 2.20 关于 y 轴对称，故 $x_C=0$。取图 2.21 的竖直窄条，记高度 $f(x)=4\ell-x^2/\ell$，则 $\mathrm{d}A=f(x)\,\mathrm{d}x$，该条质心在 $y=f(x)/2$。

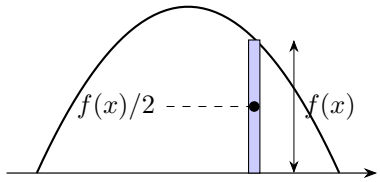


图 2.21: 竖直微元的质量集中在其中点计算一次矩

累加窄条面积

先求面积。因为 $f(x)$ 为偶函数，可以把关于零点对称的积分化为正半轴的两倍：

$$A=\int_{-2\ell}^{2\ell}\left(4\ell-\frac{x^2}{\ell}\right)\mathrm{d}x=2\left[4\ell x-\frac{x^3}{3\ell}\right]_0^{2\ell}=2\left(8\ell^2-\frac{8}{3}\ell^2\right)=\frac{32}{3}\ell^2.$$

将每条质量放在条内质心计算一次矩

再求高度的一次矩。图 2.21 的条形微元高 $f(x)$，其中点高 $f(x)/2$，因此分子多乘的高度不是 $f(x)$，而是它的一半。平方展开后为

$$f(x)^2=16\ell^2-8x^2+\frac{x^4}{\ell^2}.$$

$$\int y\,\mathrm{d}A=\frac{1}{2}\int_{-2\ell}^{2\ell}\left(4\ell-\frac{x^2}{\ell}\right)^2\mathrm{d}x=\left[16\ell^2x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5\ell^2}\right]_0^{2\ell}=\frac{256}{15}\ell^3.$$

最后一步的三项为 $32\ell^3-(64/3)\ell^3+(32/5)\ell^3$，通分后得到上式。

面密度相同，在分子分母约去后，$\boxed{(x_C,y_C)=(0,8\ell/5)}$。代入得到 $y_C=(256\ell^3/15)/(32\ell^2/3)=8\ell/5$。图中竖条的质量集中到各自中点来计算一次矩。下部较宽、分布的质量较多，整个薄板的质心低于半高 2ℓ。

用水平条求面积和一次矩

图 2.22 画出同一薄板的水平微元。它的整条质心高度就是 y，宽度却随 y 改变；因此这里不再出现竖条内平均高度的 $1/2$ 因子。

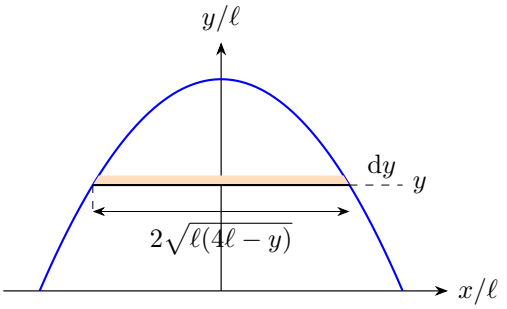


图 2.22: 水平窄条的高度权重为本身所在的高度

用水平条再作一次独立计算。图 2.20 在高度 y 处左右轮廓为 $x=\pm\sqrt{\ell(4\ell-y)}$，因此

$$A=2\sqrt{\ell}\int_0^{4\ell}\sqrt{4\ell-y}\,\mathrm{d}y.$$

令 $u=4\ell-y$，则 $\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u$，上下限由 $0,4\ell$ 变为 $4\ell,0$，故

$$\begin{aligned}A&=2\sqrt{\ell}\int_0^{4\ell}u^{1/2}\,\mathrm{d}u=2\sqrt{\ell}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{4\ell}\\&=\frac{4}{3}\sqrt{\ell}\big[(4\ell)^{3/2}-0\big]=\frac{4}{3}\sqrt{\ell}\,8\ell^{3/2}=\frac{32}{3}\ell^2.\end{aligned}$$

一次矩同理为

$$\begin{aligned}Q_x&=2\sqrt{\ell}\int_0^{4\ell}(4\ell u^{1/2}-u^{3/2})\,\mathrm{d}u\\&=2\sqrt{\ell}\left[\frac{8\ell}{3}u^{3/2}-\frac{2}{5}u^{5/2}\right]_0^{4\ell}\\&=2\sqrt{\ell}\left(\frac{64}{3}-\frac{64}{5}\right)\ell^{5/2}=\frac{256}{15}\ell^3.\end{aligned}$$

于是 $y_C=Q_x/A=8\ell/5$，与图 2.21 的竖直条结果相同。水平条自身的高度就是 y，此时不再额外乘 $1/2$；这个因子只出现在把竖直条按其中点计算一次矩时。

图 2.20 右侧的单位区域与左侧薄板都由抛物线和横轴围成；横、纵尺度应分别改变。先由 $1-\xi^2=0$ 得左右端点 $\xi=\pm1$，在其间上方曲线不低于横轴，所以

$$A_*=\int_{-1}^{1}(1-\xi^2)\,\mathrm{d}\xi=\left[\xi-\frac{\xi^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\boxed{\frac{4}{3}}.$$

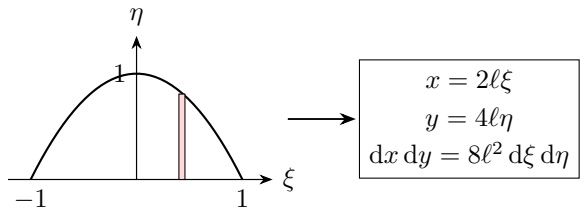


图 2.23: 单位区域的竖条与两个方向的缩放

图 2.23 中横尺度放大 2ℓ、纵尺度放大 4ℓ，面积因而乘二者之积 $8\ell^2$，不是仅乘一个长度因子。于是薄板面积为 $8\ell^2A_*=32\ell^2/3$，与前面两种积分一致。

例 2.5 (两曲线之间的面积)**.** 求无量纲坐标中直线 $y = x$ 与抛物线 $y = x^2 - x - 3$ 围成的面积。

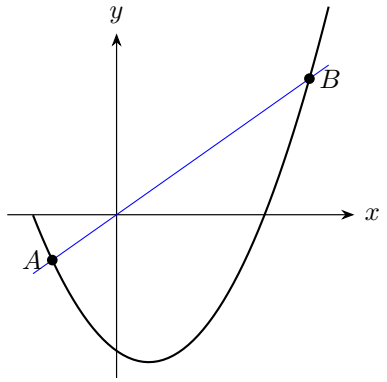


图 2.24: 先确定交点和上下两条曲线

解　解交点并确定上下两条曲线

由图 2.24，交点方程 $x = x^2 - x - 3$ 化为 $(x-3)(x+1) = 0$，所以积分区间是 $[-1, 3]$。其内直线在上，竖直窄条高度为 $x - (x^2 - x - 3) = 4 - (x-1)^2 \geq 0$。

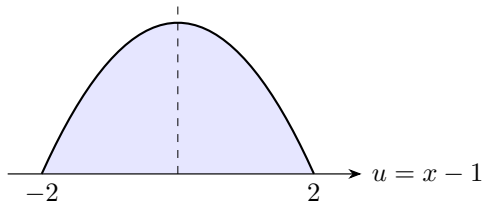


图 2.25: 平移到对称轴后，条高为偶函数

平移坐标后求面积

图 2.25 中取 $u = x - 1$，则 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$，两个端点 $x = -1, 3$ 变成 $u = -2, 2$。因此

$$A = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} (4 - u^2)\,\mathrm{d}u = 2\left[4u - \frac{u^3}{3}\right]_0^2 = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

在最后一步，上限代入给出 $4(2) - 2^3/3 = 8 - 8/3 = 16/3$，再乘偶对称的系数二，得到 $32/3$。平移后的条高仍是原来两条曲线的高度差，图 2.25 给出了以 $u = 0$ 为轴的对称区域。

例 2.6 (球的体积与表面积)**.** 只用圆面积 πr^2 和圆周长 $2\pi r$，分别积分求半径 R 的球体体积与球面面积。

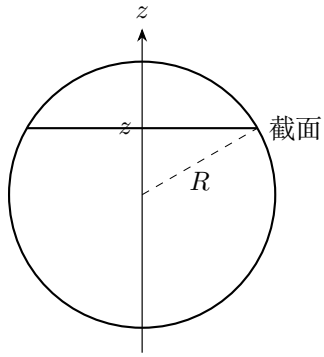


图 2.26: 球体的平行圆盘截面

解　把实心球分成水平圆盘

体积由水平圆盘叠加，每层的厚度是 $\mathrm{d}z$。表面积由球面窄带叠加，每带的宽度是沿球面的弧长微元。图中一个沿竖直方向量，另一个沿球面量。

图 2.26 的截面半径满足 $r^2 = R^2 - z^2$，故

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = 2\pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

求表面积时改取图 2.27 的纬度窄带。令 $z = R\cos\theta$，纬圈半径为 $R\sin\theta$，沿球面母线的宽度为 $R\,\mathrm{d}\theta$。

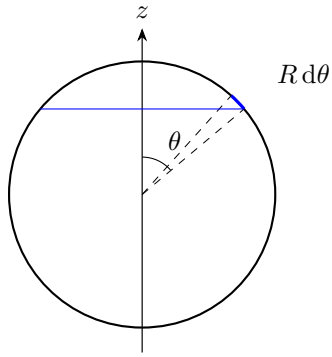


图 2.27: 球面窄带的宽度沿弧面测量

沿球面窄带计算面积

于是 $\mathrm{d}S = 2\pi R\sin\theta\, R\,\mathrm{d}\theta$，

$$S = 2\pi R^2\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R^2[-\cos\theta]_0^{\pi}$$
$$= 2\pi R^2[-\cos\pi+\cos 0] = 2\pi R^2[1+1] = \boxed{4\pi R^2}.$$

若误用周长乘 $\mathrm{d}z$，就漏掉球面倾斜。还可独立校验：半径增加 $\mathrm{d}R$ 时，新增薄壳体积的一阶量为 $S\,\mathrm{d}R$；对已得体积求导，有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}R = (4\pi/3)\,3R^2 = 4\pi R^2$，与曲面窄带积分一致。

例 2.7 (实心半球与半球壳的质心)**.** 求均匀实心半球和均匀薄半球壳的质心高度，均以底面圆心为原点、对称轴向上为 z 轴，半径为 R。

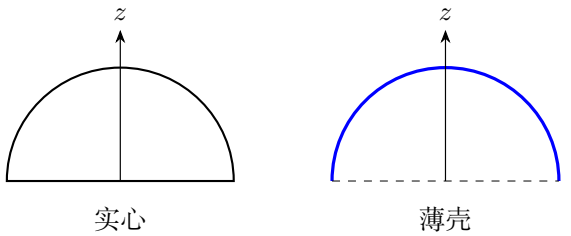


图 2.28: 相同外形的实心半球与薄壳

解　实心半球按圆盘质量加权

图 2.28 的两物体都轴对称，质心只能在 z 轴上。实心半球在高度 z 处的圆盘微元为 $\mathrm{d}m = \rho\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$，排列范围为 $0\le z\le R$。分别计算总质量与一次矩：

$$M = \rho\pi\int_0^R (R^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \rho\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^R$$
$$= \rho\pi\left(R^3-\frac{R^3}{3}-0\right) = \frac{2}{3}\pi\rho R^3,$$
$$Mz_C = \rho\pi\int_0^R (R^2z-z^3)\,\mathrm{d}z = \rho\pi\left[\frac{R^2z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_0^R$$
$$= \rho\pi\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}-0\right) = \frac{1}{4}\pi\rho R^4.$$

一次矩除以总质量，得到 $z_C = (\pi\rho R^4/4)/(2\pi\rho R^3/3) = 3R/8$。

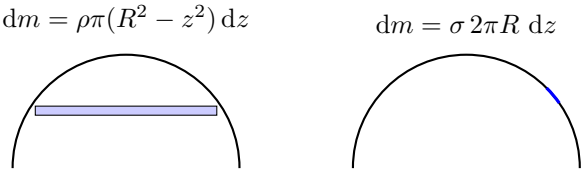


图 2.29: 圆盘微元与曲面窄带的区别

半球壳按等高度球面带加权

对图 2.29 的薄壳，上一例的窄带面积为 $\mathrm{d}S=2\pi R^2\sin\theta\,|\mathrm{d}\theta|$。由 $z=R\cos\theta$ 得 $|\mathrm{d}z|=R\sin\theta|\mathrm{d}\theta|$，因此 $\mathrm{d}S=2\pi R|\mathrm{d}z|$。从底面向上排列时取正的 $\mathrm{d}z$，于是

$$M=2\pi\sigma R\int_0^R\mathrm{d}z=2\pi\sigma R[z]_0^R=2\pi\sigma R^2,$$
$$Mz_C=2\pi\sigma R\int_0^R z\,\mathrm{d}z=2\pi\sigma R\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^R=2\pi\sigma R\frac{R^2}{2}=\pi\sigma R^3.$$

再取比值 $z_C=(\pi\sigma R^3)/(2\pi\sigma R^2)=\boxed{R/2}$。薄壳各等高窄带质量相同，实心半球各圆盘质量随高度减小，因此后者质心更低。

例 2.8 (圆锥的质量与质心)**.** 均匀实心圆锥高 h、底面半径 b、体密度 ρ。以顶点为 $z=0$、向下为正方向，求质量及质心。

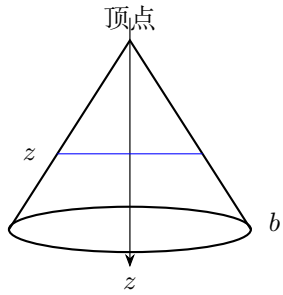


图 2.30: 从顶点向下的圆锥截面

解　用相似三角形确定随高度变化的截面

本题的高度从顶点向底面增加。图中靠近底面的圆盘半径较大，包含的质量也较多，因此质心应偏向底面。一次矩给每一层质量乘的是该层的高度坐标 z，不是圆盘半径；半径平方已经包含在质量元之内，再拿它作高度权重会改变所求物理量。

图 2.30 中由相似三角形 $r(z)=bz/h$。图 2.31 的截面积随 z^2 增加。

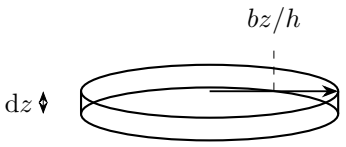


图 2.31: 厚度为 $\mathrm{d}z$ 的圆盘微元

$$\mathrm{d}m=\rho\pi\frac{b^2z^2}{h^2}\,\mathrm{d}z,\quad M=\frac{\rho\pi b^2}{h^2}\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\rho\pi b^2}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}\rho\pi b^2h.$$

计算一次矩并明确质心从何处量起

再对高度加权，先列一次矩 $Mz_C=\int_0^h z\,\mathrm{d}m=(\rho\pi b^2/h^2)\int_0^h z^3\,\mathrm{d}z$。其原函数为 $z^4/4$，所以

$$z_C=\frac{\rho\pi b^2}{Mh^2}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^h=\frac{\rho\pi b^2h^2/4}{\rho\pi b^2h/3}=\boxed{\frac{3}{4}h}.$$

这是从顶点量起的位置，距底面为 $h-z_C=h/4$。改变坐标零点会改变坐标值，但对应同一个物理位置。

例 2.9 (非均匀细杆)**.** 细杆占据 $0\le x\le L$，线密度 $\lambda(x)=Ax^4$，$A>0$。求质量和质心。若线密度写成 $\lambda_0(x/L)^p$，$p>-1$，结论怎样推广?

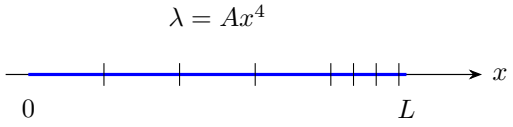


图 2.32: 线密度向右增大的细杆

解　把位置相关密度保留在两个积分中

图 2.32 的小段质量为 $\mathrm{d}m=Ax^4\,\mathrm{d}x$。式中 Ax^4 的单位为质量除以长度，所以 A 的量纲为质量除以长度五次方。

$$M=A\int_0^L x^4\,\mathrm{d}x=A\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^L=\frac{AL^5}{5},$$
$$Mx_C=A\int_0^L x^5\,\mathrm{d}x=A\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^L=\frac{AL^6}{6}.$$

将一次矩除以质量，$x_C=(AL^6/6)/(AL^5/5)=\boxed{5L/6}$。

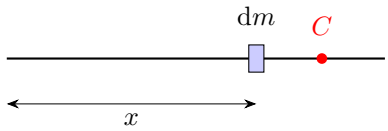


图 2.33: 一次矩比总质量多乘一个位置权重

密度幂次改变后的质心

图 2.33 的质心位于中点右侧，符合右端质量更集中的判断。对一般的 $p>-1$，若 $-1<p<0$，密度在原点发散，必须把质量积分理解为反常积分。为统一处理各个 p，先取 $\varepsilon>0$，最后令 $\varepsilon\to 0^+$：

$$\begin{aligned} M &= \frac{\lambda_0}{L^p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{L} x^p\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda_0}{L^p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{\varepsilon}^{L} \\ &= \frac{\lambda_0}{L^p}\,\frac{L^{p+1}-0}{p+1} = \frac{\lambda_0 L}{p+1}, \\ Mx_C &= \frac{\lambda_0}{L^p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{L} x^{p+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda_0}{L^p}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^{p+2}}{p+2}\right]_{\varepsilon}^{L} \\ &= \frac{\lambda_0}{L^p}\,\frac{L^{p+2}-0}{p+2} = \frac{\lambda_0 L^2}{p+2}. \end{aligned}$$

$p+1>0$ 与 $p+2>0$ 分别保证 ε^{p+1}、ε^{p+2} 趋零。先分别得到总质量与一次矩，再作商，才有 $x_C=L(p+1)/(p+2)$。条件 $p>-1$ 保证原点附近质量积分收敛；$p=0$ 恢复均匀杆中点，$p=4$ 恢复本题。若 $p\to+\infty$，质量越来越集中到右端，$x_C\to L$。

密度系数改变时，各质量元和一次矩按相同比例变化，故系数在质心比值中消去。令 $\xi=x/L$ 还可看出，长度尺度改变只使质心位置随 L 同比变化，x_C/L 由密度分布的形状决定。正密度保证质心落在杆内，这是不依赖具体积分结果的检查。

例 2.10 (光滑圆柱上的链条)**.** 一条均匀链条质量 m、长度 $\pi R/2$，静置在水平光滑圆柱右上方的四分之一圆周上。下端 A 位于圆心等高处且自由，上端 B 在圆顶受到水平向左拉力 F。求链内张力及 F。

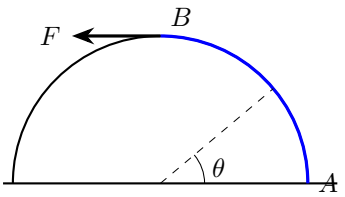


图 2.34: 自由端到圆顶的四分之一圆弧

解　画微小链段并投影两端张力

图 2.34 的线密度为 $\lambda = 2m/(\pi R)$。取极角 θ 到 $\theta + \mathrm{d}\theta$ 的微段，弧长为 $R\,\mathrm{d}\theta$。沿逆时针切向，重力分量为 $-\lambda g R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$；支持力沿径向，没有切向分量。

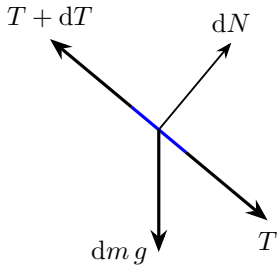


图 2.35: 微小链段的切向受力

从自由端端点积分到任意截面

在图 2.35 的局部受力中，仅对切向列平衡：

$$\mathrm{d}T = \lambda g R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

沿图 2.35 的上行切向，前端张力与后端张力相减为 $\mathrm{d}T$，重力投影为 $-\lambda g R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，两者相加为零。自由端给出 $T(0) = 0$，用哑变量 ϕ 写完整积分：

$$T(\theta) - T(0) = \lambda g R\int_0^{\theta}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \lambda g R[\sin\phi]_0^{\theta}.$$

由此得到

$$T(\theta) = \lambda g R\sin\theta, \qquad F = T(\pi/2) = \boxed{\frac{2mg}{\pi}}.$$

这不是把整条链的重量投影到某一个固定方向，而是逐段累加随位置变化的切向分量。$F < mg$，其余重力由圆柱的分布支持力承担。

例 2.11 (杆与圆盘的转动惯量)**.** 求均匀细杆绕端点且垂直于杆的轴、绕中点平行轴的转动惯量，再求均匀圆盘绕中心法线的转动惯量。杆长 L、盘半径 R，质量均记为 m。

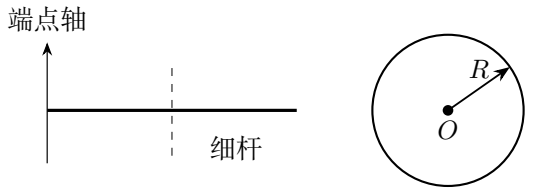


图 2.36: 转轴决定质量元的距离权重

解　改变转轴时重新确定杆元的轴距

对图 2.36 的端点轴，杆元 $\mathrm{d}m=(m/L)\,\mathrm{d}x$，轴距为 x，所以

$$I_O=\frac{m}{L}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L=\frac{m}{L}\left(\frac{L^3}{3}-0\right)=\frac{mL^2}{3}.$$

中点轴把原点移到杆中点，坐标范围改为 $[-L/2,L/2]$，两边都必须计入：

$$\begin{aligned}I_C&=\frac{m}{L}\int_{-L/2}^{L/2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2}\\&=\frac{m}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3-\left(-\frac{L}{2}\right)^3\right]=\frac{m}{3L}\frac{L^3}{4}=\frac{mL^2}{12}.\end{aligned}$$

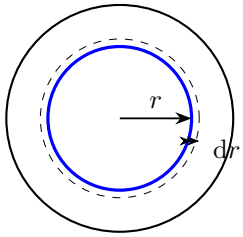


图 2.37: 圆盘按同心圆环分割

用同心圆环计算圆盘惯量

图 2.37 中整条窄圆环到轴距离相同，适合作微元。面密度 $\sigma=m/(\pi R^2)$，故 $\mathrm{d}m=\sigma\,2\pi r\,\mathrm{d}r$。把轴距平方 r^2 乘入质量元，再从中心积到盘边：

$$\begin{aligned}I&=2\pi\sigma\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=2\pi\sigma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\\&=2\pi\sigma\left(\frac{R^4}{4}-0\right)=\frac{\pi\sigma R^4}{2}=\frac{\pi R^4}{2}\frac{m}{\pi R^2}=\boxed{\frac{1}{2}mR^2}.\end{aligned}$$

平行轴关系则来自

$$I_O=\int(x+d)^2\,\mathrm{d}m=\int x^2\,\mathrm{d}m+2d\int x\,\mathrm{d}m+d^2\int\mathrm{d}m.$$

以质心为原点时 $\int x\,\mathrm{d}m=0$，所以 $I_O=I_C+md^2$。对杆取 $d=L/2$，得 $mL^2/12+mL^2/4=mL^2/3$，与直接积分相符。

例 2.12 (半圆链条的张力与虚功)**.** 均匀柔软链条质量 m、长 πR，沿光滑水平圆柱的上半圆静置，两端均在圆心等高处且自由。求圆顶处的张力，再用半段链条的虚位移求圆顶张力。

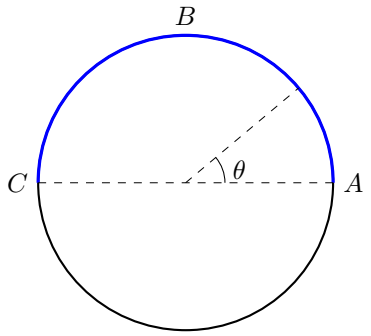


图 2.38: 两个自由端之间的上半圆链条

解　沿圆弧列切向平衡方程

图 2.38 的整条链长为 πR，故线密度 $\lambda = m/(\pi R)$。从右端 A 起沿逆时针方向量极角 θ。微段的质量为 $\lambda R\,\mathrm{d}\theta$，重力沿此切向的投影为 $-\lambda g R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$；光滑圆柱的支持力沿法线。两端张力之差与切向重力平衡，因此

$$\mathrm{d}T - \lambda g R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

右自由端给出端点条件 $T(0) = 0$。从它积到任意截面，张力变量与角度变量的上下限分别对应：

$$\int_0^{T(\theta)} \mathrm{d}\mathcal{T} = \lambda g R \int_0^{\theta} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi,$$
$$T(\theta) - 0 = \lambda g R[\sin\phi]_0^{\theta} = \lambda g R(\sin\theta - \sin 0).$$

所以 $T(\theta) = \lambda g R\sin\theta$。在圆顶 $\theta = \pi/2$ 处代入，

$$T_B = \lambda g R\sin\frac{\pi}{2} = \frac{m}{\pi R} g R = \boxed{\frac{mg}{\pi}}.$$

在左端 $\theta = \pi$ 处，$T(\pi) = \lambda g R\sin\pi = 0$，与另一自由端条件相符；在链条内部 $0 < \theta < \pi$，张力为正。

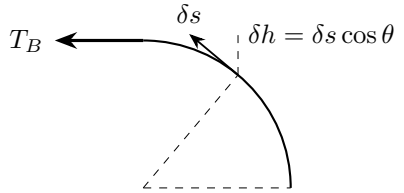


图 2.39: 截取右半段，作沿圆周的虚位移

由半链的虚位移求顶端张力

在图 2.39 中截取 AB 段，圆顶的另一半链对它施加张力 T_B。令该段作沿圆周逆时针的虚位移 δs，各微段升高 $\delta h = \delta s\cos\theta$，支持力始终与位移垂直。

平衡时拉力功等于重力势能增量：

$$\begin{aligned} T_B\delta s &= \lambda R g\,\delta s\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \lambda R g\,\delta s[\sin\theta]_0^{\pi/2} = \lambda R g\,\delta s(1-0). \end{aligned}$$

积分中的 $\lambda R\,\mathrm{d}\theta$ 是微段质量，$g\delta s\cos\theta$ 是单位质量的势能增量。约去共同的非零虚位移 δs，再代入 $\lambda = m/(\pi R)$，同样得到 $T_B = mg/\pi$。不能直接用整条链重量的一半作为顶端张力，因为沿圆周各位置的切向重力分量不同。本题只讨论所给对称静置状态，微小不对称滑动的稳定性需另行分析。

2.6 本讲小结

积分的核心是先构造具有明确意义的微元，再在正确区间内累加。求质量、质心和转动惯量虽然都要积分，权重却分别为 1、位置和轴距平方。换元必须同时改变微元与端点；微元图必须反映实际截面或弧面。计算后用求导、正负、量纲和对称性检查，能发现许多单纯代数运算难以暴露的错误。

2.7 练习

练习 2.1 (变化率的两次积分)**.** 质点初始位置 x_0、初速度 v_0，加速度 $a(t) = a_0 + bt$。求 $v(t), x(t)$，并在 $b = 0$ 时消去时间，恢复匀加速运动的速度与位移关系。另求电流 $I(t) = \alpha t$ 在 0 到 T 内的净通过电量，以及线数密度 $n(x) = \gamma x$ 在 0 到 L 内的总粒子数。

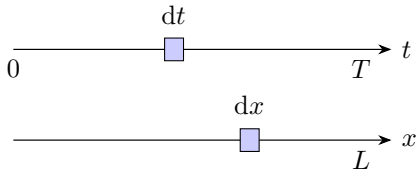


图 2.40: 时间、长度上的分割分别对应不同累积量

练习 2.2 (由高度决定的攀爬速度)**.** 物体沿竖直杆向上运动，速度 $v(h) = c/(a + bh)$，其中 $a, c > 0, b \geq 0$。求从 $h = 0$ 到 $h = H$ 的时间，说明为何不能用末速度直接除总高度。

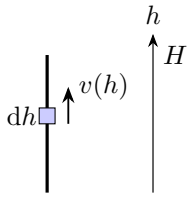


图 2.41: 同样高度微元需要的时间随位置变化

练习 2.3 (抛物面容器的容量)**.** 将曲线 $z = r^2/\ell$ 绕 z 轴旋转得到容器内壁，$\ell > 0$，容器高为 H。忽略壁厚，求容量。说明单独旋转一条曲线得到的是曲面，容量还需要指定内部区域。

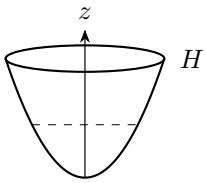


图 2.42: 以高度确定容器内的圆盘半径

练习 2.4 (四维球的体积)**.** 四维球定义为 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + w^2 \leq R^2$。已知三维球体积 $4\pi r^3/3$，求四维球体积 V_4 及其球面的三维测度 $S_3 = \mathrm{d}V_4/\mathrm{d}R$。再以四维球为截面，求五维球体积 V_5 及其球面测度 S_4。

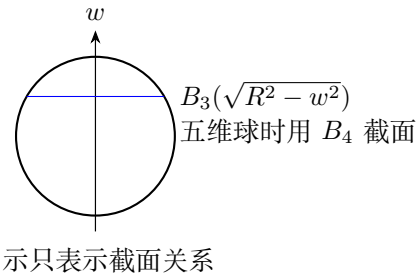


图 2.43: 示意截面：固定第四坐标后得到三维球

练习解答

练习 2.1

解　从加速度依次积分，并各自代入初值

按图 2.40，加速度对时间累积给速度改变量，而速度对时间累积给位移。用 τ 作积分中的哑变量，并分别带入初值：

$$\begin{aligned} v(t)-v_0 &= \int_0^t (a_0+b\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[a_0\tau+\frac{b}{2}\tau^2\right]_0^t = a_0t+\frac{b}{2}t^2, \\ x(t)-x_0 &= \int_0^t \left(v_0+a_0\tau+\frac{b}{2}\tau^2\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \left[v_0\tau+\frac{a_0}{2}\tau^2+\frac{b}{6}\tau^3\right]_0^t = v_0t+\frac{a_0}{2}t^2+\frac{b}{6}t^3. \end{aligned}$$

因此 $v=v_0+a_0t+bt^2/2$，$x=x_0+v_0t+a_0t^2/2+bt^3/6$。

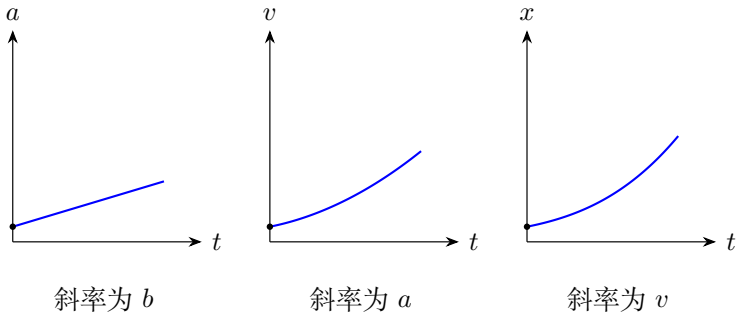


图 2.44: 同一组初值下，加速度面积依次决定速度和位置的增量

位置曲线和速度曲线的斜率

图 2.44 以 a_0,v_0,x_0,b 均为正的情形示意：速度曲线的切线斜率跟随加速度，位置曲线的切线斜率跟随速度。反向求导可以逐项验证两次积分中的系数：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0+v_0+\frac{a_0}{2}(2t)+\frac{b}{6}(3t^2) = v_0+a_0t+\frac{b}{2}t^2 = v(t), \\ \dot{v} &= 0+a_0+\frac{b}{2}(2t) = a_0+bt = a(t). \end{aligned}$$

令 $t=0$ 又分别恢复 x_0,v_0。参数 b 具有长度每时间三次方的单位，故 bt^3 具有位置的量纲。

加速度恒定时的运动

取 $b=0$，恢复匀加速关系 $v=v_0+a_0t$、$x-x_0=v_0t+a_0t^2/2$。若 $a_0\neq 0$，用 $a_0t=v-v_0$ 消去时间：

$$2a_0(x-x_0) = 2v_0(a_0t)+(a_0t)^2 = 2v_0(v-v_0)+(v-v_0)^2 = v^2-v_0^2.$$

这一步得到的是恒加速度情况下的速度与位移关系；$b \neq 0$ 时不能直接套用。若 $a_0 = 0$，则直接按 $x - x_0 = v_0 t$ 处理，不能在消元时除以零。

分别累积电荷与粒子数

另两种累积分别使用时间微元和空间微元：

$$Q = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{\alpha T^2}{2}, \qquad N = \int_0^L n(x)\,\mathrm{d}x = \gamma\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\gamma L^2}{2}.$$

电流图和线密度图都从零线性增加。相应三角形的面积分别为 $I(T)T/2$ 和 $n(L)L/2$，单位分别是电量和粒子数。

练习 2.2

解　把每段高度转换成所需时间

图 2.41 中向上运动时 $v(h) > 0$，微小高度 $\mathrm{d}h$ 需要的时间为 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}h/v(h)$。代入题设速度，沿整个高度累加得

$$t = \int_0^H \frac{a + bh}{c}\,\mathrm{d}h = \left[\frac{ah + bh^2/2}{c}\right]_0^H = \boxed{\frac{aH}{c} + \frac{bH^2}{2c}}.$$

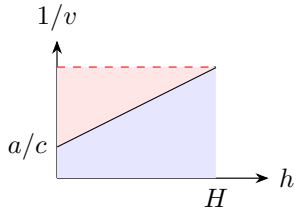


图 2.45: 梯形表示实际时间，上方三角形表示末速估计的偏差

用面积比较说明末速估计的偏差

图 2.45 中 $1/v$ 随高度线性增加，实际时间是梯形面积。若把全程按末速度估计，便是高为 $1/v(H)$ 的矩形；矩形比梯形多出的上方三角形，正好给出估计偏差：

$$\frac{H}{v(H)} - t = \left(\frac{aH}{c} + \frac{bH^2}{c}\right) - \left(\frac{aH}{c} + \frac{bH^2}{2c}\right) = \frac{bH^2}{2c} \geq 0.$$

当 $b = 0$ 时偏差为零，恢复匀速情形；$b > 0$ 时末速估计偏大。

相对于实际时间的误差为

$$\frac{H/v(H) - t}{t} = \frac{bH^2/(2c)}{aH/c + bH^2/(2c)} = \frac{bH}{2a + bH}.$$

因而只有 $bH \ll a$ 时，才可把速度变化的影响视为较小修正。相对误差只由无量纲参数 bH/a 决定，选用不同长度单位不会改变这一判断。

练习 2.3

解　根据旋转体内部确定圆盘微元

图 2.42 中先指定内部 $0 \le r \le \sqrt{\ell z}$，再取图 2.46 的圆盘，得到 $\mathrm{d}V = \pi \ell z \,\mathrm{d}z$。

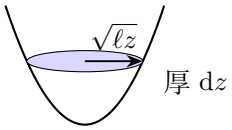


图 2.46: 容器内部以圆盘叠加

沿容器高度累加圆盘体积

将半径平方 $r^2 = \ell z$ 代入圆盘面积，得到 $A(z) = \pi r^2 = \pi \ell z$，所以 $V = \int_0^H \pi \ell z \,\mathrm{d}z = \pi \ell [z^2/2]_0^H = \boxed{\pi \ell H^2/2}$。量纲为长度三次方。口部圆盘面积为 $\pi \ell H$，同高圆柱体积为 $\pi \ell H^2$，故容器容量恰为其一半。在截面中同时取左右两支 $z = x^2/\ell$，$|x| \le \sqrt{\ell H}$，只需绕轴旋转半周就能覆盖同一内壁；若只取右支，则需旋转一周。

选定长度单位后，若内壁为 $z = r^2$ 且杯高为 1，便有 $\ell = H = 1$，容量数值为 $\pi/2$。图 2.46 的截面从杯底的零面积线性增加到杯口的 π，平均截面积为 $\pi/2$；乘杯高 1，再次得到同一容量。换回实际单位时，应给这个数值附上相应的体积单位。

练习 2.4

解　把四维体积分成三维球截面

图 2.43 的线段只是截面示意，实际截面是三维球，故

$$V_4 = \int_{-R}^{R} \frac{4\pi}{3} (R^2 - w^2)^{3/2} \,\mathrm{d}w.$$

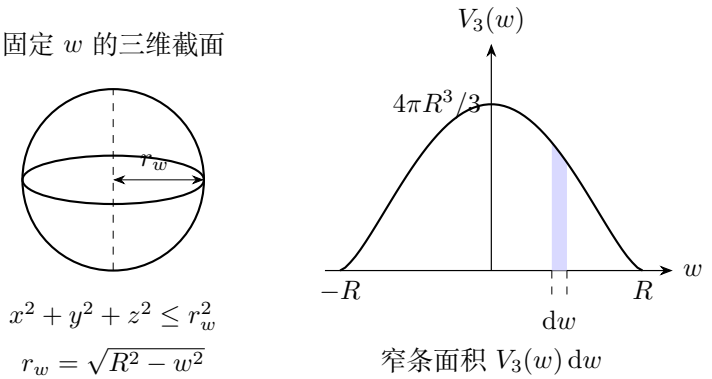


图 2.47: 固定第四坐标后得到三维球，截面体积随第四坐标变化

保留三次截面半径与一阶微元因子

令 $w=R\cos\theta$，选择 $0\le\theta\le\pi$，则 $\sin\theta\ge 0$，且

$$\mathrm{d}w=-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,\qquad (R^2-w^2)^{3/2}=R^3|\sin\theta|^3=R^3\sin^3\theta.$$

旧上下限 $w=-R,R$ 分别对应新上下限 $\theta=\pi,0$。把函数、微元与端点一同代入，再交换上下限吸收负号：

$$\begin{aligned}V_4&=\frac{4\pi}{3}\int_{\pi}^{0}R^3\sin^3\theta(-R\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4\pi R^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

计算换元后的积分与球面测度

为算最后的积分，先平方 $\sin^2\theta=(1-\cos 2\theta)/2$，再用 $\cos^2 2\theta=(1+\cos 4\theta)/2$，得到 $\sin^4\theta=(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta)/8$。因此

$$\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\left[\frac{3\theta}{8}-\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}\right]_0^{\pi}=\frac{3\pi}{8}.$$

乘回截面积分前面的系数，

$$V_4=\frac{4\pi R^4}{3}\cdot\frac{3\pi}{8}=\boxed{\frac{\pi^2}{2}R^4}.$$

对 R 求导，$S_3=\mathrm{d}V_4/\,\mathrm{d}R=(\pi^2/2)\,4R^3=\boxed{2\pi^2R^3}$。图 2.47 左侧画的是固定 w 后真实的三维截面，右侧用截面体积作为纵坐标；右图窄条面积为 $V_3(w)\,\mathrm{d}w$。对所有 w 累加时，每个三维体积都增加一个长度因子，所以体积的量纲为长度四次方，球面测度的量纲为长度三次方；后者不是通常的二维表面积。

从四维截面求五维球体积

截面递推还可延续一步，以检查“维数”与球面测度的关系。五维球在固定第五坐标 z 的截面是半径 $\sqrt{R^2-z^2}$ 的四维球，因此

$$\begin{aligned} V_5(R) &= \frac{\pi^2}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-z^2)^2\,\mathrm{d}z \\ &= \pi^2\int_0^R (R^4-2R^2z^2+z^4)\,\mathrm{d}z \\ &= \pi^2\left[R^4z-\frac{2}{3}R^2z^3+\frac{1}{5}z^5\right]_0^R \\ &= \pi^2R^5\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8\pi^2}{15}R^5. \end{aligned}$$

第二行利用了被积式关于 z 的偶对称。相应球面的四维测度由固定其他参数、对 R 求导得到：

$$S_4=\frac{\mathrm{d}V_5}{\mathrm{d}R}=\frac{8\pi^2}{15}\frac{\mathrm{d}R^5}{\mathrm{d}R}=\frac{8\pi^2}{15}\,5R^4=\frac{8\pi^2}{3}R^4.$$

图 2.43 标出了固定 w 后截面半径随 w 的变化。一般地，若 $V_n(R)=C_nR^n$，增厚 $\mathrm{d}R$ 形成薄层，便有 $S_{n-1}(R)=\mathrm{d}(C_nR^n)/\,\mathrm{d}R=nC_nR^{n-1}$；两式的长度量纲相差一次，球面测度的维数比体积低一。

微积分

物理竞赛一轮讲义

第三讲

极值、近似与曲线几何

2026

目录

第三讲　极值、近似与曲线几何 **1**

3.1　极值、最值与平衡 1

3.2　近似展开与误差阶数 4

3.3　曲线切线、曲率与运动 10

3.4　多变量的变化与空间方向 13

3.5　例题与分析 15

3.6　本讲小结 31

3.7　练习 32

练习解答 33

第三讲　极值、近似与曲线几何

3.1　极值、最值与平衡

3.1.1　从导数符号判断极值

在区间内部，若 $f'>0$，函数随自变量增大而增大；若 $f'<0$，则减小。可导函数在内点取得局部极值时，必有 $f'=0$，但这个条件只是候选条件。例如 x^3 在零点导数为零，却始终递增，因此零点不是极值点。

判断候选点应看两侧导数：由正变负是极大，由负变正是极小；若导数在两侧严格同号，函数便沿同一方向通过该点。二阶导数判据是这一规律的局部形式：若 $f'(x_0)=0$，且 $f''(x_0)>0$，则附近向上弯曲，x_0 为极小；若 $f''(x_0)<0$ 则为极大。二阶导数为零时，可比较两侧导数的符号，或找展开中最低阶的非零项。

闭区间上的连续函数必有最大值、最小值。求全局最值时，应把内部驻点、内部不可导点与端点一起比较。端点未必满足 $f'=0$，例如 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上的最大值位于 1。开区间则可能只有上确界或下确界，而没有实际取得该值的位置；定义域是解题步骤的一部分。

导数判单调的依据是有限变化也能由某个中间位置的变化率控制。若 f 在 $[a,b]$ 上连续、内部可导，中值定理给出 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。所以整个区间内导数为正时，任意从左到右的有限变化都为正。仅知道某一点导数为零，没有提供两侧有限变化的符号，自然不足以判断极值。

实际建模时先确定允许区间，再寻找候选位置。例如绳长、折射角、液面高度有各自端点，数学驻点可能落在不可实现区域。对含绝对值或接触切换的关系，还要把表达式发生变化的位置列入比较。将候选位置代回原函数，比较所得的大小。

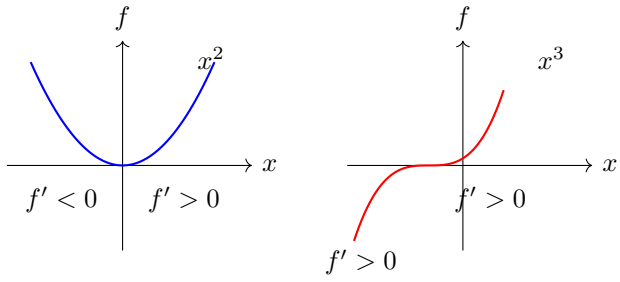


图 3.1: 同为水平切线，导数是否变号决定极值性质

图 3.1 左图从原点左侧减小、右侧增大，原点确为极小点；右图经过原点仍递增，水平切线只表示瞬时斜率为零。因而解 $f'=0$ 是找候选点，读取两侧变化才完成判别。若自变量还限于闭区间，例如 x^3 在 $[-1,1]$ 内求最值，最大、最小分别在端点，原点的驻点性质不能替代端点比较。

3.1.2　势能导数与稳定性

对一个广义坐标 q，保守力的虚功满足 $Q\,\mathrm{d}q=-\,\mathrm{d}U$，故 $Q=-U'(q)$。若 q 是长度，Q 为相应方向的力；若 q 是角度，Q 是力矩。不能不看坐标意义就把势能的一阶导数都称作同一种力。

平衡满足 $U'(q_0)=0$。作小位移 $\eta=q-q_0$，若

$$U(q)=U(q_0)+\tfrac{1}{2}K\eta^2+\cdots,$$

则恢复作用为 $Q=-K\eta+\cdots$。$K>0$ 时扰动受到恢复，称稳定平衡；$K<0$ 时扰动被放大，称不稳定平衡。若 $K=0$，应看更高阶：$+\eta^4$ 仍给出稳定平衡，$-\eta^4$ 不稳定，η^3 也不能给出局部势阱。若一个区间内势能完全恒定，则在该坐标方向为随遇平衡。

稳定性还依赖允许的扰动。只准沿杆轴改变两球距离时的稳定，不等于对所有空间扰动都稳定。题设中的约束必须保留到判据中。

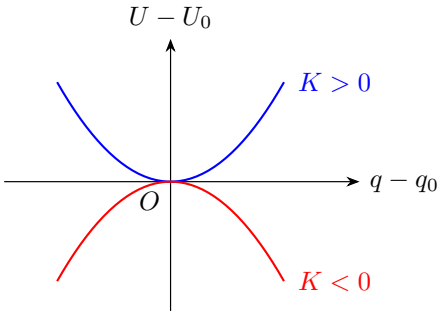


图 3.2: 势能在平衡点两侧的变化决定扰动后的趋势

图 3.2 的蓝色曲线在平衡点两侧上升，向任一侧偏移都要增加势能，负梯度就把物体推回；红色曲线则相反。在蓝色势阱内，小扰动引起往复运动。存在耗散时，振幅可随时间减小。

当二阶系数为零，继续求导只是找最低非零项的手段。若 $U-U_0=a\eta^{2n}$、$a>0$，两侧势能仍上升，因而仍稳定；若最低非零项为奇次幂，一侧势能下降，便不是局部势阱。对只允许单侧扰动的区间端点的平衡，不能照搬双侧判据，应在真正允许的方向上检查势能变化。

图 3.3 把二阶判据失效时的三种情况画在同一尺度下。三条曲线在原点都满足一阶、二阶导数为零，但蓝线 $+\eta^4$ 在两侧都上升，红线 $-\eta^4$ 在两侧都下降，虚线 η^3 则一侧升、一侧降。对蓝线，力 $Q=-4a\eta^3$ 仍然指回平衡点，只是不再正比于位移；因此稳定不能自动推出简谐振动。

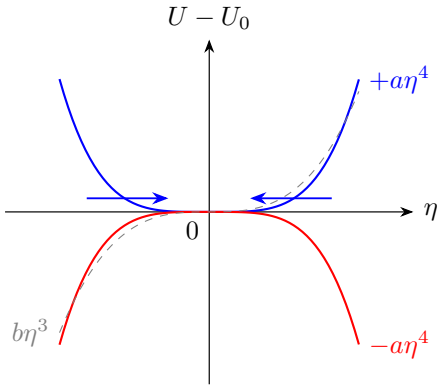


图 3.3: 同样具有零二阶导数，最低非零项仍可导致不同稳定性

3.1.3 平衡点附近的惯量和振动频率

势能曲线的最低点确定稳定位置，却不能单独给出振动频率。若系统用坐标 q 描述，动能为 $T=J(q)\dot{q}^2/2$，在平衡点附近令 $q=q_0+\eta$，最低阶动能为 $J(q_0)\dot{\eta}^2/2$，势能为 $U_0+U''(q_0)\eta^2/2$。对保守运动，先对精确能量逐项求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(T+U)}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}J(q)}{\mathrm{d}t}\dot{q}^2+\frac{1}{2}J(q)\frac{\mathrm{d}(\dot{q}^2)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}U(q)}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{1}{2}[J'(q)\dot{q}]\dot{q}^2+\frac{1}{2}J(q)(2\dot{q}\ddot{q})+U'(q)\dot{q}\\&=\frac{1}{2}J'(q)\dot{q}^3+J(q)\dot{q}\ddot{q}+U'(q)\dot{q}=0.\end{aligned}$$

在 $\dot{q}\neq 0$ 的运动段除以 $\dot{q}$，再以连续性接到转向点，得到 $J(q)\ddot{q}+J'(q)\dot{q}^2/2+U'(q)=0$。令位移和速度均为一阶小量，$J'(q)\dot{q}^2/2$ 至少二阶；$U'(q_0)=0$ 且 $U'(q_0+\eta)=U''(q_0)\eta+O(\eta^2)$。保留一阶，线性方程就是

$$J(q_0)\ddot{\eta}+U''(q_0)\eta=0.$$

在 $J(q_0)>0$、$U''(q_0)>0$ 时，试取 $\eta=C\cos\omega t+D\sin\omega t$。固定 C,D,ω，逐次求导有

$$\begin{aligned}\dot{\eta}&=-C\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t,\\\ddot{\eta}&=-C\omega^2\cos\omega t-D\omega^2\sin\omega t=-\omega^2\eta.\end{aligned}$$

代入线性方程，非零振动要求 $[-J(q_0)\omega^2 + U''(q_0)]\eta = 0$，所以

$$\omega^2 = \frac{U''(q_0)}{J(q_0)}.$$

若初始位移为 η_0、初速度为 u_0，则 $\eta(0) = C = \eta_0$、$\dot\eta(0) = D\omega = u_0$，由此确定两个常数。该解描述稳定平衡附近的一阶近似运动。坐标是长度时 J 通常是有效质量；坐标是角度时则是相应转动惯量。若把角坐标换成弧长 $s = R\eta$，势能二阶系数与惯量都会除以 R^2，比值不变，实际频率自然不依赖坐标名称。

图 3.4 用弧长和转角计量同一位移。两种坐标相差因子 R，相应的惯量与恢复系数一同换算。例 3.3 以两球的距离为坐标，惯量取相对运动的约化质量。

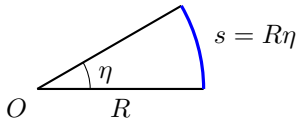


图 3.4: 角位移与弧长位移描述同一局部运动

3.2　近似展开与误差阶数

3.2.1　泰勒公式的结构

当函数在 x_0 附近足够光滑时，

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n. \tag{3.1}$$

式(3.1)的有限阶展开只需要局部光滑性。若可用拉格朗日余项，

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

便可用整个区间内的导数上界估计误差。对给定的 h，若 $n \to \infty$ 时 $R_n \to 0$，泰勒级数就等于该处的函数值。

记 $R = O(h^n)$，意为充分小时 $|R| \le C|h|^n$，并不要求 R/h^n 有非零极限。记 $R = o(h^n)$，则要求该比值趋于零。物理近似通常先确定无量纲小参数，例如 v/c、ℓ/r、摆角 θ，再决定保留到哪一阶。

泰勒系数来自逐阶匹配。先设 $f(x_0+h) \simeq a_0 + a_1 h + a_2 h^2$，在 $h = 0$ 处分别匹配函数值、一阶导数和二阶导数，就得到 $a_0 = f(x_0)$、$a_1 = f'(x_0)$、$2a_2 = f''(x_0)$。阶乘正是多项式反复求导时产生的系数。这样得到的多项式优先匹配展开点附近的局部性质，不保证在远处仍有相同形状。

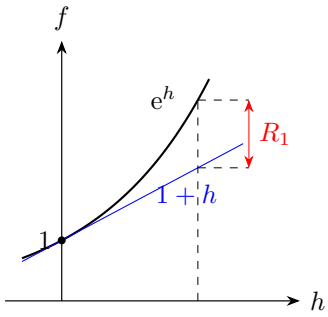


图 3.5: 余项是同一自变量处函数与近似式的差

图 3.5 中函数与一次近似在展开点有相同高度和斜率，但离开该点后逐渐分开。若要保证误差不超过某一数值，应在整个考察区间内给出高阶导数的上界，再代入余项公式，不能只用展开点处的高阶导数代替这个上界。

含量纲变量时，常先写成 $f(x_0+\ell\epsilon)$，让 ϵ 成为无量纲小参数。例如长度 r 受微小改变量 η 影响，以 η/r 为展开参数。比较尺度一变，可忽略的项也可能改变。

以一个常见的几何量为例。图 3.6 中，AB 的长度为 ℓ，把端点 B 沿垂线移动到 B'，位移为 h，新长度为 $\sqrt{\ell^2+h^2}$。取 $\epsilon=h/\ell$，令 $g(z)=\sqrt{1+z}$，则

$$g'(z)=\tfrac{1}{2}(1+z)^{-1/2},\qquad g''(z)=-\tfrac{1}{4}(1+z)^{-3/2}.$$

在 $z=0$ 展开到二阶并代入 $z=\epsilon^2$，

$$AB'-AB=\ell\big[g(\epsilon^2)-1\big]=\ell\left(\frac{\epsilon^2}{2}-\frac{\epsilon^4}{8}+O(\epsilon^6)\right).$$

所以长度增加量的首项是 $h^2/(2\ell)$。端点向上或向下移动同样远，长度增量相同。这也可以从图中的直角关系直接看出。后面比较低速动能和远处偶极场时，也先找无量纲小参数，再看相减后留下的第一项。

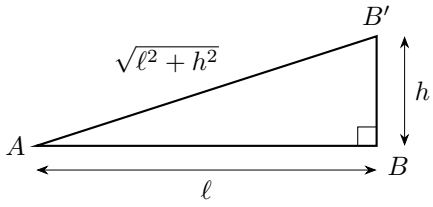


图 3.6: 端点沿垂线移动后，斜边比原长度多出的量从二阶开始

3.2.2　从导数得到展开，并确定有效范围

以零点为展开中心时，各项系数由函数在零点的逐阶导数确定。指数函数每阶导数仍为 e^x，在零点都等于一，因而

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

若只保留到三次项，余项满足 $|R_3| \le \mathrm{e}^{|x|}|x|^4/4!$。因此“级数对全部实数收敛”与“少量几项已经足够准确”是两件不同的事：只保留前几项时，误差上界仍要按实际的 $|x|$ 计算。

正弦函数的导数依次为 $\cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x$，每四次重复。代入零点，偶数阶导数为零，奇数阶导数交替为 $1, -1$，于是

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

余弦是偶函数，只有偶次项；其零点导数依次给出

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots .$$

奇偶性不仅节省计算，还能检查展开：若在余弦的零点展开中出现一次项，必有计算或变量选择错误。正弦和余弦的无穷级数对全部实数收敛，作小角近似时仍应根据第一项被舍去的量估计误差。

图 3.7 显示小角展开中“先看所求量”的含义。对 $\sin\theta$ 本身，直线已经给出首项；若所求的是 $\theta - \sin\theta$，直线近似却会把结果抹掉，必须保留三次项：

$$\theta - \sin\theta = \frac{\theta^3}{6} + O(\theta^5).$$

右图单独画差值，放大后才看清这个三阶量。误差的比较对象应随问题改变：对于 $\sin\theta$，舍去三次项造成相对二阶误差；对于差值，三次项就是主项。

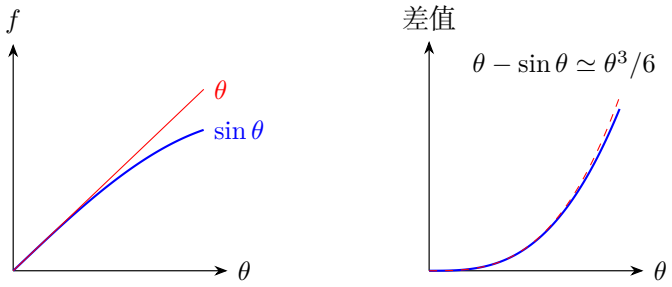


图 3.7: 小角时，正弦曲线与切线的差从三阶开始

对 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$，连续求导给出 $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$、$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$。把零点函数值与这两个导数值代入泰勒公式，便得到

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2}+O(x^{3}).$$

逐阶求导的系数遵循同一规律。定义 $\binom{\alpha}{0}=1$、$\binom{\alpha}{n}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)/n!$，便可写成

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^{n},\qquad |x|<1.$$

若 α 为非负整数，系数在有限项后全部为零，所得多项式恒等式对任意实数 x 成立。实数非整数幂在此取 $1+x>0$ 的分支，其无穷展开的端点须另作收敛判断。相对论动能、远处电场与几何长度的低阶近似通常要求 $|x|\ll 1$；先化成上述形式，才能明确小参数和保留阶数。

几何级数还能提供一个带显式余项的例子。有限求和恒等式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{j=0}^{N}x^{j}+\frac{x^{N+1}}{1-x}$$

对 $x\neq 1$ 成立。只有在 $|x|<1$ 时，最后的余项才随 $N\to\infty$ 趋于零，得到无穷展开。将变量换成 $-t$，先保留有限和，再从 0 积到 x：

$$\int_{0}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\sum_{j=0}^{N}(-1)^{j}\int_{0}^{x}t^{j}\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}\frac{(-t)^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

左侧原函数为 $\ln(1+t)$，右侧每个多项式项的原函数为 $t^{j+1}/(j+1)$。记最后一个积分为 $R_N(x)$，则

$$\begin{aligned}\ln(1+x)&=\bigl[\ln(1+t)\bigr]_{0}^{x}\\&=\sum_{j=0}^{N}(-1)^{j}\left[\frac{t^{j+1}}{j+1}\right]_{0}^{x}+R_N(x)\\&=\sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^{j}x^{j+1}}{j+1}+R_N(x).\end{aligned}$$

在任意闭区间 $|x|\le q<1$ 内，$1+t\ge 1-q>0$，因此

$$|R_N(x)|\le\frac{1}{1-q}\int_{0}^{|x|}s^{N+1}\,\mathrm{d}s=\frac{1}{1-q}\left[\frac{s^{N+2}}{N+2}\right]_{0}^{|x|}=\frac{|x|^{N+2}-0}{(1-q)(N+2)}\longrightarrow 0.$$

当 $N\to\infty$ 时，积分后的余项趋于零，得到 $\ln(1+x)=x-x^{2}/2+x^{3}/3-\cdots$。这里对有限和逐项积分，再用余项估计取极限。

决定保留阶数时，要看所求量中哪一阶最先出现。例如单摆的切向恢复力第一项与 θ 成正比，保留一阶就能得到线性方程；其势能 $mgl(1-\cos\theta)$ 的常数项抵

消，最低非零项为二阶，因此只保留势能的一阶会把恢复作用整个丢掉。两个相近场强相减也会消去零阶，必须计算到第一个不相消的阶数。

对相近量相减的表达式，先变形再展开有时更稳妥。例如 $1-\sqrt{1-\epsilon^2}=\epsilon^2/[1+\sqrt{1-\epsilon^2}]$，立即可见最低非零阶为 ϵ^2。若分别把两项都粗略取为一，便会误判结果为零。还应区分绝对误差与相对误差：原量本身很小时，一个绝对很小的舍弃项仍可能占据很大比例。

3.2.3 误差要求与截断阶数

实际计算很少需要无穷多项。若要用 $\sin x \simeq x$ 且要求相对误差小于 η，对小的非零 x，第一项误差的相对量级为 $x^2/6$，所以可先以 $|x| \lesssim \sqrt{6\eta}$ 估计允许角度，再用余项上界定出角度范围。角度必须使用弧度；将度数直接代入会使小参数失去正确尺度。

图 3.8 比较 $\cos x$ 与其二阶、四阶近似。三条曲线在零点附近贴近，离开零点后逐渐分开。若所求是 $1-\cos x$，常数一已经抵消，二阶项成为主项；若又从中减去 $x^2/2$，便必须计算到四阶。这种先检查抵消再定阶的次序，比机械地对所有中间式都保留一阶可靠。

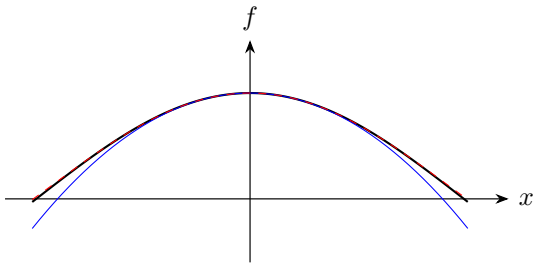


图 3.8: 零点附近的余弦与不同阶数近似

3.2.4 先无量纲化，再比较主导项

设精确量为 $Q(\varepsilon)=Q_0+Q_1\varepsilon+Q_2\varepsilon^2+\cdots$，其中 ε 必须无量纲。若 $Q_0\neq 0$，省略一阶项的相对误差通常为 $O(\varepsilon)$；若 $Q_0=0$ 而 $Q_1\neq 0$，同样的绝对二阶误差相对主项仍为 $O(\varepsilon)$。因此“误差是二阶”必须说明比较的是绝对量还是相对量。

对两相近力相减的偶极模型，单个场强的主项为 $O(r^{-2})$，但两个主项方向相反，合场的最低非零阶为 $O(d/r^3)$。若每个场只算到零阶，相减会得到零，物理上却丢掉了真正的领先项。反过来，若零阶不抵消，保留不必要的许多高阶只会掩盖主导关系。

一个有效的计算顺序是先把长度写成 $r\sqrt{1+\delta}$，辨明 δ 中一次和二次小量；再展开外层函数，最后将各项相加或相减。对 $1/\sqrt{1+\delta}$，二阶系数为 $3/8$，而对 $1/(1+\delta)$，二阶系数为 1；二者对应不同外层函数，不能只记“分母展开”而混用系数。

图 3.9 给出相消情形的具体几何模型。在轴线上远处的观察点 P，两电荷的场都近似与 q/r^2 同阶，但方向相反。保留两距离的区别，才得到

$$\begin{aligned} E_x &= \mathcal{K}q\left[\frac{1}{(r-d/2)^2}-\frac{1}{(r+d/2)^2}\right] \\ &= \frac{\mathcal{K}q}{r^2}\left[\left(1+\frac{d}{r}+O((d/r)^2)\right)-\left(1-\frac{d}{r}+O((d/r)^2)\right)\right] \\ &\simeq \frac{2\mathcal{K}qd}{r^3}, \qquad d/r \ll 1. \end{aligned}$$

这里 $\mathcal{K}$ 是库仑常量，所需电学输入只有点电荷场随距离平方反比且按方向叠加。两项的零阶部分抵消，首个不抵消项由电荷间距决定；这个结论来自图中两距离的差异，不能仅凭“远处”把两距离先设成完全相等。

$$|E_+| > |E_-|$$

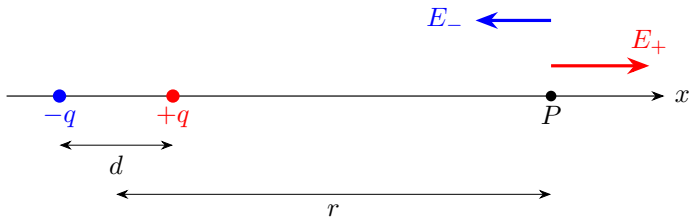


图 3.9: 先保留两条距离的差，再叠加方向相反的贡献

3.2.5 复指数与振动表示

令 $\mathrm{i}^2=-1$。将绝对收敛的指数级数分成偶数项与奇数项，

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\cdots\right)+\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\cdots\right)=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta.$$

因此正弦振动可以由复指数的实部或虚部表示。复表示是一种运算工具，实际位移仍取实数部分；振幅、相位和频率应在取实部之前说明。遇到阻尼振动时，指数实部给出衰减，虚部给出振荡。

例如 $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ 可以写成 $x(t)=\operatorname{Re} z(t)$，其中 $z(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$。把 $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 看成常量，对时间应用链式法则：

$$\dot z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{i}\omega t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{i}\omega z,$$
$$\ddot z = \mathrm{i}\omega \dot z = (\mathrm{i}\omega)^2 z = -\omega^2 z.$$

实部运算是线性的，故 $\ddot x = \operatorname{Re}\ddot z = -\omega^2 \operatorname{Re} z = -\omega^2 x$。复数的乘法同时记录振幅与相位，因而适合处理线性振动中的叠加。若方程含有非线性项，不能未经验证就把求实部与非线性运算交换。

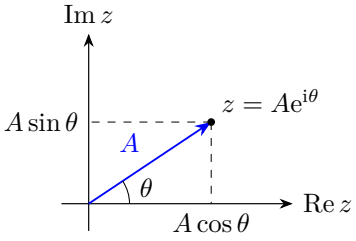


图 3.10: 复平面中的转动对应正弦振动的投影

图 3.10 中，模长 A 决定投影的振幅，辐角 $\theta=\omega t+\phi$ 决定投影的相位。乘以 i 相当于在复平面旋转直角，所以求导不仅带来系数 ω，还使相位超前 $\pi/2$；二次求导再转直角，便与原位移反向。

处理多个同频线性振动时，可以先把各自的复振幅 $A_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_j}$ 相加，求合成复振幅的模与辐角，最后取实部。不同频率的项不能合并成一个恒定复振幅；非线性作用更不能先随意合并再取实部。复数表示简化了运算，但没有改变实际运动必须满足实数方程与初值的要求。

3.3　曲线切线、曲率与运动

3.3.1　切线转角与曲率

切线方向角为 ψ，弧长为 s。曲率定义为 $\kappa=|\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s|$，曲率半径 $\rho=1/\kappa$。直线的方向不变，曲率为零；圆在任何点都有 $\kappa=1/R$。一般曲线在一点附近可以用具有相同切线、相同曲率的密切圆作二阶近似。

若曲线写成 $y=f(x)$，则 $\tan\psi=y'$。对 x 求导，先得到 $(1+\tan^2\psi)\,\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x=y''$，即 $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}x=y''/(1+y'^2)$。另一方面，小段路径的水平、竖直分量分别为 $\mathrm{d}x, y'\,\mathrm{d}x$，由勾股关系有 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,|\mathrm{d}x|$。把转角变化除以弧长变化，才得到

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\qquad \boxed{\rho=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}}.$$

这里撇号是对 x 求导。$y''=0$ 时不能机械地说存在一个有限曲率半径；在普通光滑情形曲率为零、半径趋于无穷。

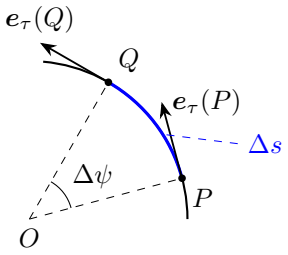


图 3.11: 沿弧长行进时切线转过的角度

图 3.11 用圆弧说明两个切向量的方向差。切线均与半径垂直，因此切线转角等于半径转角，$\Delta s=R\Delta\psi$，给出 $\kappa=1/R$。一般曲线则先取很短的一段，再求转角与弧长的比值极限。曲率大表示同样弧长内转向更明显，与图画得大还是小应作物理尺度上的区分。

曲率公式中的 x,y 应是同一空间中的长度坐标。把位置对时间的图线直接当成实际空间轨道，会混淆坐标单位：图线的凹凸能表示加速度符号，却不能直接解释为质点轨道的曲率。对实际轨迹，改变绘图时横纵轴的比例会改变纸面形状，计算仍必须使用实际坐标与一致的长度单位。

3.3.2 密切圆的位置也由局部导数确定

在平面正则点，曲率半径只给出密切圆的大小，圆心还必须沿曲线内法线定位。若轨迹 $y=f(x)$ 且 $f''\neq0$，取向上法线单位矢量 $\boldsymbol{n}=(-f',1)/\sqrt{1+f'^2}$。有符号曲率为 $\kappa_s=f''/(1+f'^2)^{3/2}$，所以从曲线点指向圆心的位移为

$$\boldsymbol{r}_C-\boldsymbol{r}_P=\frac{\boldsymbol{n}}{\kappa_s}=\frac{(-f',1)}{\sqrt{1+f'^2}}\frac{(1+f'^2)^{3/2}}{f''}=\frac{1+f'^2}{f''}(-f',1).$$

把它的两个分量分别加到 $P=(x,f(x))$ 上，得到圆心坐标

$$x_C=x-\frac{f'(1+f'^2)}{f''},\qquad y_C=f(x)+\frac{1+f'^2}{f''}.$$

$f''>0$ 时圆心在向上法线侧，$f''<0$ 时在另一侧。曲率公式中的绝对值只用于半径大小，若在圆心公式中也随意取绝对值，就会把弯曲方向画反。

对图 3.12 所画的开口向上的抛物线 $y=ax^2$，$a>0$。逐次求导得 $f'(x)=2ax$、$f''(x)=2a$；在顶点 $x=0$，代入圆心公式，得 $C=(0,1/(2a))$，半径为 $1/(2a)$。图中的焦点 $F=(0,1/(4a))$ 由抛物线的几何定义给出，焦点决定反射方向，密切圆描述顶点附近的弯曲。

图 3.12 把抛物线顶点 O、焦点 F 和密切圆心 C 分开标出。密切圆在 O 附近的下半支可写成

$$\begin{aligned} y &= \rho-\sqrt{\rho^2-x^2}=\rho\left[1-\sqrt{1-(x/\rho)^2}\right] \\ &= \rho\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\rho}\right)^2+O\!\left(\frac{x^4}{\rho^4}\right)\right]=\frac{x^2}{2\rho}+O(x^4/\rho^3). \end{aligned}$$

只有取 $\rho=1/(2a)$，二次项才与 $y=ax^2$ 相同。于是图中的圆与抛物线在顶点有相同的切线和二次项。

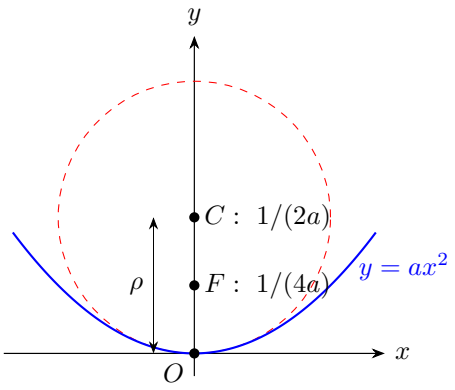


图 3.12: 焦点与局部曲率中心是不同的点

3.3.3　用运动学计算曲率

任意正则参数 t 下，

$$\rho=\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|}.$$

推导时，平面内的叉积大小为 $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|=|\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}|$。切向加速度与速度平行，不贡献叉积，故该大小等于 va_n。先除以 v 得 $a_n=|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|/v$，再代入 $\rho=v^2/a_n$，就得到 $\rho=v^3/|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|$，也就是上式。曲率由路径决定，与沿曲线快走、慢走无关；若参数在某点使速度为零，应换用正则参数或取极限。

特别地，椭圆参数 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 便于求导，但若 $\dot\theta$ 恒定，实际速率一般并不恒定。求 v^2/ρ 时取法向加速度；在椭圆的轴端点，速度和加速度垂直，此时合加速度就是法向分量。

这个表达式对正则参数的选择不敏感。若改用参数 q，则

$$\dot{\boldsymbol r}=\boldsymbol r_q\dot q,\qquad \ddot{\boldsymbol r}=\boldsymbol r_{qq}\dot q^2+\boldsymbol r_q\ddot q.$$

叉积中含 $\boldsymbol r_q\times\boldsymbol r_q$ 的项为零，所以 $|\dot{\boldsymbol r}\times\ddot{\boldsymbol r}|=|\boldsymbol r_q\times\boldsymbol r_{qq}|\,|\dot q|^3$；分子的 $v^3=|\boldsymbol r_q|^3|\dot q|^3$ 带有相同因子，约去后得到只依赖曲线的结果。只要参数变换在该点满足 $\dot q\neq0$，公因子就可以约去。

因此利用运动求曲率时，应先分清真正的切向与法向加速度。若只知道合加速度大小，可以用 $a_n=\sqrt{a^2-\dot v^2}$，或直接用叉积排除切向部分。图 3.11 中的转向只由法向变化决定；沿同一条路径加快行进虽改变加速度大小，却不会改变该位置的密切圆。

3.4 多变量的变化与空间方向

3.4.1 偏导数保持其余自变量不变

一个量有时同时依赖多个独立变量，例如场点的电势取决于位置，气体压强取决于温度和体积。对可微函数 $f(x,y)$，询问“变化率”之前，必须说明沿哪个方向改变自变量。固定 y，只改变 x，得到的偏导数定义为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}.$$

同理，$\partial f/\partial y$ 的计算固定 x。符号 ∂ 用来强调这个约束。比如 $f=x^2y$，对 x 求偏导时 y 是常量，得 $2xy$；对 y 求偏导时 x^2 是常量，得 x^2。

图 3.13 把从 P 到邻近点 Q 的变化分成两段：$P\to A$ 只改变 x，$A\to Q$ 只改变 y。将两段函数增量相加，在导数连续的条件下保留一阶项，得到

$$\Delta f=f_x\Delta x+f_y\Delta y+o\Big(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\Big),\qquad \mathrm d f=f_x\,\mathrm dx+f_y\,\mathrm dy.$$

这里 f_x,f_y 均在起点计算。两条微小路径次序不同引起的差别属于更高阶量；全微分给的是各方向一阶变化的合成。

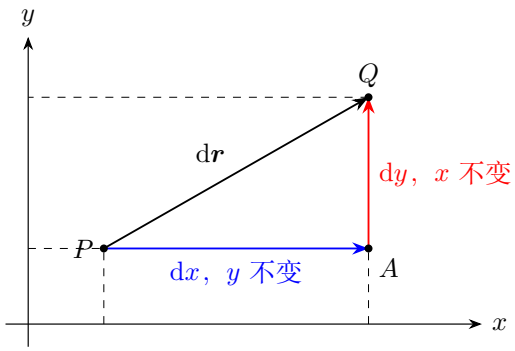


图 3.13: 沿两个独立坐标方向分解函数的增量

若 x, y 又沿某条运动路径随 t 变化，把 $\mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t$、$\mathrm{d}y = \dot{y}\,\mathrm{d}t$ 代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}.$$

偏导描述单独改变一个自变量的效应，沿路径的总变化率还必须计入两个变量实际怎样变化。只算其中一项，会漏掉另一段位移的贡献。

3.4.2　方向导数要除以真实的位移长度

在直角坐标中，$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y$，所以可将全微分写成

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\nabla} f = f_x\boldsymbol{e}_x + f_y\boldsymbol{e}_y.$$

向量 $\boldsymbol{\nabla} f$ 称为梯度。沿单位方向 $\boldsymbol{n}$ 走过小距离 $\mathrm{d}s$，有 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}s = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{n}$；它把某个方向上的实际距离变化率从全微分中取出。

换成半径 r 和角度 θ 时，角度本身不是长度。图 3.14 在一个子午面内从 $+z$ 轴量 θ：$P \to P_r$ 固定角度，其长度为 $\mathrm{d}r$；$P \to P_\theta$ 固定半径，其弧长为 $r\,\mathrm{d}\theta$。角度用弧度，两种位移在一阶上正交。

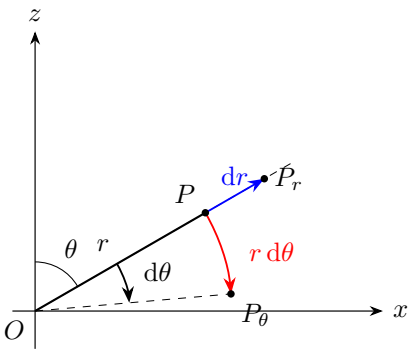


图 3.14: 径向线段与增角圆弧对应不同的长度因子

因此，在 $r>0$ 的这两个方向上，

$$\mathrm{d}f = f_r\,\mathrm{d}r + f_\theta\,\mathrm{d}\theta, \qquad \boldsymbol{\nabla} f = f_r \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \boldsymbol{e}_\theta.$$

这里的 $1/r$ 来自把“每单位角度的变化”换成“每单位弧长的变化”。例如静电场满足 $\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，便有 $E_r = -V_r$、$E_\theta = -V_\theta/r$。若三维问题还随方位角变化，就必须加入第三个方向；轴对称时才可只保留图中的两个方向。在坐标原点应改用不奇异的直角坐标或适当极限。

3.5 例题与分析

例 3.1 (驻点与极值的分类)**.** 在各自实数定义域内，分析 x^2、x^2+1/x^2、$x-2\sin x$、x^3、$\sqrt{1-x^2}$ 的极值和全局最值。

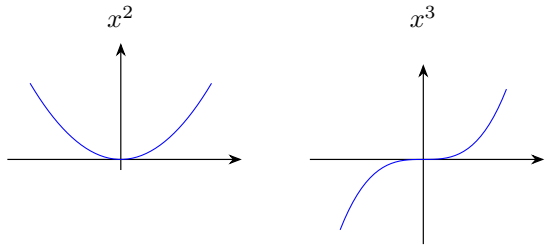


图 3.15: 导数为零不一定形成峰或谷

解　比较驻点两侧的导数符号

图 3.15 中，对 x^2 求导得到 $2x$：$x<0$ 时为负，$x>0$ 时为正，故零点由减转增，有全局最小值零；$|x|\to\infty$ 时函数无界，故无最大值。对 x^3 求导得到 $3x^2\geq 0$，零点两侧不变号，故无局部极值；函数在两端分别趋于正、负无穷，也无全局最值。

对 x^2+x^{-2}，定义域排除零。先按幂函数法则逐项求导，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+x^{-2}) = 2x - 2x^{-3}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x-2x^{-3}) = 2+6x^{-4} > 0.$$

令一阶导数为零，$2x-2/x^3=0$ 两边乘以非零的 $x^3/2$，得到 $x^4=1$，实根只有 ±1。二阶导数均为正，两点均为极小；代回原函数，值均为 $1+1=2$。全局判断再用 $x^2+x^{-2}-2=(x-1/x)^2\geq 0$，证明二为全局下界。$|x|\to\infty$ 时平方项无界，故没有最大值。

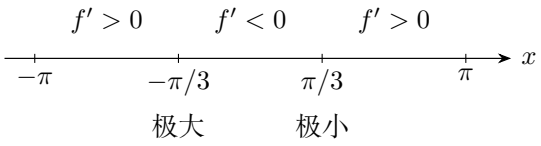


图 3.16: 在 $[-\pi,\pi]$ 内用导数符号判定极值

区分周期性局部极值与全局最值

对 $f=x-2\sin x$, $f'=1-2\cos x$, 驻点要求 $\cos x=1/2$, 所以 $x=2n\pi\pm\pi/3$。二阶导数为 $2\sin x$：在减号支等于 $-\sqrt{3}<0$，在加号支等于 $\sqrt{3}>0$。因此图 3.16 中，减号支为极大点，其值为 $(2n\pi-\pi/3)-2(-\sqrt{3}/2)=2n\pi-\pi/3+\sqrt{3}$；加号支为极小点，其值为 $2n\pi+\pi/3-\sqrt{3}$。由于 $x-2\le f(x)\le x+2$，函数随 $x\to\pm\infty$ 分别无界地增大、减小，没有全局最值。

最后一式定义域是 $[-1,1]$。内部按链式法则求导：

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

导数在 $(-1,0)$ 为正、$(0,1)$ 为负，因此零点为极大点。比较实际函数值：$f(0)=1$，$f(\pm1)=0$，又因整个区间内 $0\le\sqrt{1-x^2}\le1$，所以最大值为一、最小值为零。端点不要求导数为零，仍须参加全局最值比较。

例 3.2 (圆锥上的弹性绳套)**.** 质量 m、自然长度 L、整体劲度系数 k 的均匀弹性绳套水平套在光滑圆锥上，圆锥顶角为 2α。绳套保持水平圆形，只作升降。求距顶点的平衡高度 z，并讨论该方向稳定性。

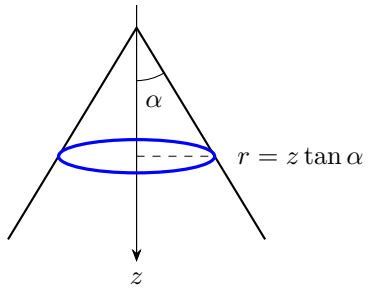


图 3.17: 向下坐标决定绳套的周长

解　用下降高度统一绳长与势能

图 3.17 中向下为正，圆环半径 $r=z\tan\alpha$，伸长量为 $2\pi z\tan\alpha-L$。重力势能为 $-mgz$，故

$$U(z)=\frac{k}{2}(2\pi z\tan\alpha-L)^2-mgz.$$

对 z 求导时，k, L, α, m, g 均为固定参数。先按平方的链式法则写出

$$U'(z) = \frac{k}{2}\,2(2\pi z\tan\alpha - L)(2\pi\tan\alpha) - mg.$$

令 $U'(z_0) = 0$，整理后得到

$$2\pi k\tan\alpha(2\pi z_0\tan\alpha - L) = mg,$$

先将平衡方程除以正数 $2\pi k\tan\alpha$，得到 $2\pi z_0\tan\alpha - L = mg/(2\pi k\tan\alpha)$，再移项并除以 $2\pi\tan\alpha$，就得到平衡高度。

$$\boxed{z_0 = \frac{L}{2\pi\tan\alpha} + \frac{mg}{4\pi^2 k\tan^2\alpha}}.$$

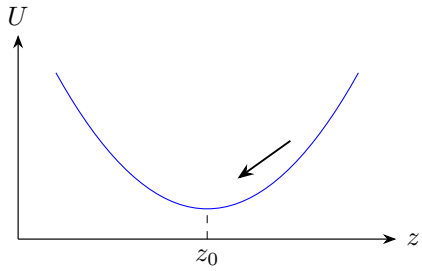


图 3.18: 平衡位置附近形成势阱

绳套张紧时的恢复力

如图 3.18，再对 $U'(z)$ 中的线性项求导，

$$U''(z) = 2\pi k\tan\alpha\,(2\pi\tan\alpha) - 0 = 4\pi^2 k\tan^2\alpha > 0.$$

所以升降扰动后存在恢复作用。平衡伸长量为 $mg/(2\pi k\tan\alpha) > 0$，也验证绳套处于张紧状态。若圆锥有限长，还须检查 z_0 未越过底边。

由绳元的实际速度确定振动惯量

若进一步研究保持水平圆形的升降振动，不能直接把 z 的有效质量写成 m。因为绳套下降时半径也增加，$r = z\tan\alpha$ 给 $\dot r = \dot z\tan\alpha$。每个绳元同时具有竖直和径向速度，图 3.19 给出

$$v_{\text{元}}^2 = \dot z^2 + \dot r^2 = \dot z^2\sec^2\alpha, \qquad T = \frac{1}{2}m\sec^2\alpha\dot z^2.$$

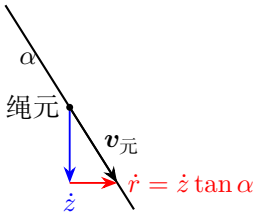


图 3.19: 圆锥母线上运动的绳元具有两个速度分量

令 $z=z_0+\eta$，势能在平衡位置附近为 $U_0+2\pi^2k\tan^2\alpha\,\eta^2$。因此

$$m\sec^2\alpha\ddot{\eta}+4\pi^2k\tan^2\alpha\,\eta=0.$$

代入简谐位移的 $\ddot{\eta}=-\omega^2\eta$，非零振动要求

$$-m\sec^2\alpha\,\omega^2+4\pi^2k\tan^2\alpha=0.$$

于是 $\omega^2=4\pi^2k\tan^2\alpha/(m\sec^2\alpha)=(4\pi^2k/m)\sin^2\alpha$。这一步说明，势能的二阶系数确定回复作用，而频率还必须结合实际速度场确定惯量。若只取竖直速度，就会漏掉径向运动的动能。

例 3.3 (弹簧连接的引力双球)**.** 两球各质量 M，在同一直线上由轻弹簧连接，仅考虑相互引力与弹力。平衡时压缩量为 $x>0$，劲度系数为 k，球半径忽略。求弹簧自然长度，并讨论沿连线方向的稳定性。

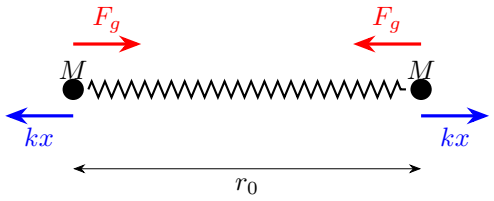


图 3.20: 相互吸引与压缩弹簧的排斥

解　由受力平衡确定弹簧自然长度

图 3.20 中平衡时 $kx=GM^2/r_0^2$，因此

$$r_0=\sqrt{\frac{GM^2}{kx}},\qquad \boxed{L_0=x+\sqrt{\frac{GM^2}{kx}}}.$$

为判断距离扰动，写系统势能 $U(r)=\frac{1}{2}k(L_0-r)^2-GM^2/r$。对第一项用链式法则，对第二项写成负幂：$U'(r)=\frac{k}{2}\,2(L_0-r)(-1)-GM^2(-r^{-2})=k(r-L_0)+GM^2/r^2$，在 $r=r_0$ 处等于零，恰好恢复受力平衡。再用 $(r^{-2})'=-2r^{-3}$，得到

$$U''(r_0)=k-\frac{2GM^2}{r_0^3}=k\left(1-\frac{2x}{r_0}\right).$$

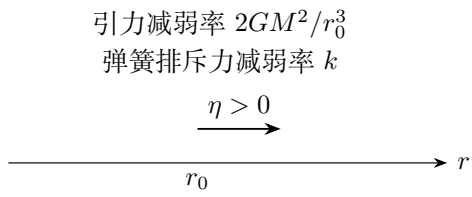


图 3.21: 距离增加时两种力的变化率相互竞争

比较两种力的变化率，判定稳定范围

图 3.21 中，若弹簧排斥力减小得更快，拉开后净力会把两球拉回，故稳定条件为

$$r_0>2x \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{kx^3<GM^2/4}.$$

把 $r_0=\sqrt{GM^2/(kx)}$ 代入 $r_0>2x$，两侧均正，可以平方，得到 $GM^2/(kx)>4x^2$；再乘 $kx>0$，才得到 $kx^3<GM^2/4$。反向不等号为不稳定。等号处 $U''=0$，但 $U'''=6GM^2/r_0^4>0$，势能首个变化项为 $U'''(r_0)(r-r_0)^3/6$，在平衡点两侧异号，不形成局部极小，仍不稳定。这里 kx^3 与 GM^2 量纲相同。

以两球相对坐标建立小振动方程

可把稳定结论继续转成小振动方程。两球各自相对质心的位移大小为 $r/2$，速度大小为 $\dot r/2$，所以系统动能为

$$T=2\cdot\frac{1}{2}M\left(\frac{\dot r}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)\dot r^2.$$

因此距离坐标的有效质量是 $M/2$。在稳定分支令 $r=r_0+\eta$，线性回复项为 $-U''(r_0)\eta$，有

$$\frac{M}{2}\ddot\eta+k\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)\eta=0.$$

对简谐位移有 $\ddot\eta=-\omega^2\eta$；代回并约去非零解的共同因子，得到

$$-\frac{M}{2}\omega^2+k\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)=0,\qquad \omega^2=\frac{2k}{M}\left(1-\frac{2x}{r_0}\right)>0.$$

图 3.21 中当两种力的变化率逐渐接近时，回复系数和频率都减小；在临界等号处，线性频率为零，首个非零的势能项为三阶，势能向平衡点的一侧降低。

例 3.4 (圆环上的零自然长度弹簧)**.** 竖直光滑圆环半径 R, 最高点 A 与质量 m 的小珠 P 之间连接劲度系数 k、自然长度为零的轻弹簧。小珠仅能沿圆环运动。求平衡位置及稳定性。

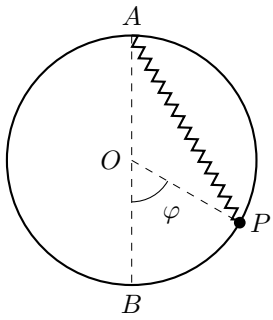


图 3.22: 用圆心角描述珠的位置

解　由弦长与高度写出角坐标势能

图 3.22 中从向下半径起量圆心角 φ。以圆心为原点，$A = (0, R)$、$P = (R\sin\varphi, -R\cos\varphi)$，所以

$$AP^2 = R^2\sin^2\varphi + R^2(1+\cos\varphi)^2 = 2R^2(1+\cos\varphi).$$

最低点高度为 $-R$，珠高于 B 的高度为 $-R\cos\varphi - (-R) = R(1-\cos\varphi)$。因弹簧自然长度为零，其伸长量就是 AP，于是

$$U = kR^2(1+\cos\varphi) + mgR(1-\cos\varphi) = \text{常数} + R(kR-mg)\cos\varphi.$$

对角坐标求导有 $U' = -R(kR-mg)\sin\varphi$。当 $kR \neq mg$，平衡要求 $\sin\varphi = 0$，在完整圆周上只对应最低点 B 与最高点 A（角度相差 2π 表示同一位置）。

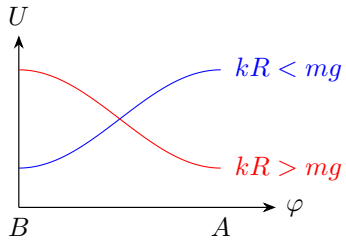


图 3.23: 参数变化使势能最低位置交换

圆环上下两点的平衡条件

二阶导数为 $U''=-R(kR-mg)\cos\varphi$。在 B，$\cos 0=1$，故 $U''_B=R(mg-kR)$；在 A，$\cos\pi=-1$，故 $U''_A=R(kR-mg)$。图 3.23 因而显示：$kR<mg$ 时 B 稳定、A 不稳定；$kR>mg$ 时正好相反。$kR=mg$ 时角度项系数严格为零，势能完全不变，全部位置均为该约束下的随遇平衡。

在各稳定点附近求振动频率

稳定点附近的频率也可由同一势能直接求出。用题设圆心角 φ，小珠动能为 $T=mR^2\dot\varphi^2/2$。在稳定的最低点 B 附近令 $\varphi=\eta$，有

$$mR^2\ddot\eta+R(mg-kR)\eta=0.$$

代入 $\ddot\eta=-\omega_B^2\eta$，得到 $-mR^2\omega_B^2+R(mg-kR)=0$，故

$$\omega_B^2=\frac{R(mg-kR)}{mR^2}=\frac{g}{R}-\frac{k}{m}\quad(kR<mg).$$

在稳定的最高点 A 附近令 $\varphi=\pi+\eta$，此处回复系数为 $U''_A=R(kR-mg)$。同样代入简谐位移，

$$-mR^2\omega_A^2+R(kR-mg)=0,$$

$$\omega_A^2=\frac{R(kR-mg)}{mR^2}=\frac{k}{m}-\frac{g}{R}\quad(kR>mg).$$

图 3.23 中哪一个点是势阱，便在哪一点使用正的频率平方。临界时 $kR=mg$ 使整个势能严格为常数，而不只是二阶项消失；此时若给予切向初速，小珠会沿环匀速运动，不会自行返回某个唯一平衡点。这与存在四次势阱但线性频率为零的情形不同。

例 3.5 (相对论动能的低速极限)**.** 静质量为 m_0 的粒子总能量为 $E=m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$。求动能的前两项非零展开，并估计经典动能的相对误差首项。



图 3.24: 小参数来自速度与光速之比

解　以速度比的平方作为展开参数

图 3.24 的低速区满足 $\beta = v/c \ll 1$，真正进入根式的展开量是 $z = \beta^2$。令 $f(z) = (1-z)^{-1/2}$，先对 z 逐次求导：

$$f'(z) = -\frac{1}{2}(1-z)^{-3/2}(-1) = \frac{1}{2}(1-z)^{-3/2},$$
$$f''(z) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-z)^{-5/2}(-1) = \frac{3}{4}(1-z)^{-5/2}.$$

因此 $f(0)=1$、$f'(0)=1/2$、$f''(0)=3/4$，代入二阶泰勒式，

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{3/4}{2!}z^2 + O(z^3) = 1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 + O(z^3).$$

动能必须减去静能，常数项在这一步抵消：

$$\begin{aligned} K &= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + O(\beta^6) - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}m_0c^2\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}m_0c^2\frac{v^4}{c^4} + O(m_0v^6/c^4) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}m_0\frac{v^4}{c^2} + O(m_0v^6/c^4)}. \end{aligned}$$

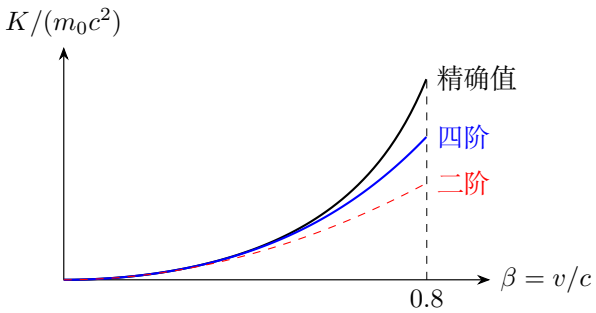


图 3.25: 经典动能与四阶近似从下方逐步接近精确动能

以精确动能为基准计算相对误差

图 3.25 将减去静能后的精确动能、二阶近似和四阶近似画在同一坐标系。小 β 时三线靠近，速度增大后经典二阶式逐渐低于精确曲线。记 $K_{\mathrm{cl}} = m_0v^2/2$，对非零的小速度，先将分子、分母同除以 K_{cl}：

$$\frac{K - K_{\mathrm{cl}}}{K} = \frac{\frac{3}{4}\beta^2 + O(\beta^4)}{1 + \frac{3}{4}\beta^2 + O(\beta^4)} = \frac{3}{4}\beta^2 + O(\beta^4).$$

因此经典式低估动能，且相对误差首项为 $3v^2/(4c^2)$。这里始终使用不随速度变化的静质量 m_0；若以经典动能作分母，首项相同，更高阶项则应重新计算。

例 3.6 (电偶极子的远场)**.** $-q$ 与 $+q$ 分别位于 $z=-d/2$ 与 $z=d/2$。观察点 P 的球坐标为 (r,θ)，θ 从 $+z$ 轴起量，$r\gg d$。求远场电势、电场，并给出轴向和赤道方向的结果。

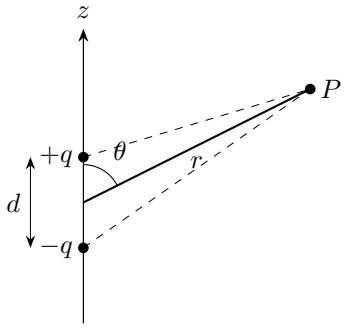


图 3.26: 两电荷距离相差一个一阶小量

解　分别展开两个电荷到场点的距离

取 $\mathcal{K}=1/(4\pi\varepsilon_0)$，偶极矩大小 $p=qd$。图 3.26 中两距离满足 $r_\pm^2=r^2+d^2/4\mp rd\cos\theta$。以 d/r 展开，

$$\frac{1}{r_\pm}=\frac{1}{r}\left(1\pm\frac{d\cos\theta}{2r}+O(d^2/r^2)\right).$$

这里先将距离平方中的 r^2 提出，再对 $(1+\varepsilon_\pm)^{-1/2}$ 展开，其中 $\varepsilon_\pm=d^2/(4r^2)\mp(d/r)\cos\theta$。一阶项是 $-\varepsilon_\pm/2$，其中关于 d 的一次项分别为 $\pm d\cos\theta/(2r)$，所以得到上面的倒数。相减时 $1/r$ 抵消，两项一次项相加为 $d\cos\theta/r^2$。由交换两电荷等价于 $d\to-d$，电势差为奇函数，全部偶次项也抵消，下一项从三次开始，故

$$V=\mathcal{K}q(1/r_+-1/r_-)=\frac{\mathcal{K}p\cos\theta}{r^2}+O(\mathcal{K}qd^3/r^4).$$

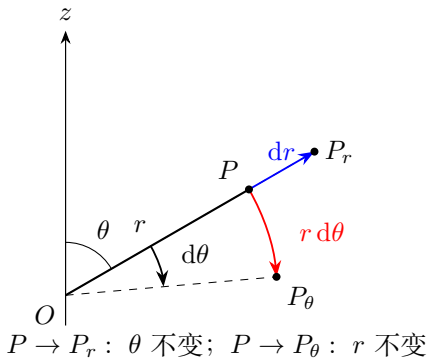


图 3.27: 分别固定角度与半径，用线段和圆弧计算电势变化

由两个方向的位移读取电势梯度

按图 3.27，$P \to P_r$ 的径向小位移为 $\mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r$，$P \to P_\theta$ 的增角小位移为 $r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$。对 r 求偏导时固定 θ，对 θ 求偏导时固定 r，分别对应图中的线段和圆弧。

电势微分满足 $\mathrm{d}V = -E_r\,\mathrm{d}r - E_\theta r\,\mathrm{d}\theta$，与 $\mathrm{d}V = (\partial V/\partial r)\,\mathrm{d}r + (\partial V/\partial\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 比较系数，得到

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \simeq -\mathcal{K}p\cos\theta\,\frac{\mathrm{d}(r^{-2})}{\mathrm{d}r} \\ &= -\mathcal{K}p\cos\theta(-2r^{-3}) = \frac{2\mathcal{K}p\cos\theta}{r^3}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \simeq -\frac{\mathcal{K}p}{r^3}\frac{\mathrm{d}(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \\ &= -\frac{\mathcal{K}p}{r^3}(-\sin\theta) = \frac{\mathcal{K}p\sin\theta}{r^3}. \end{aligned}$$

横向的 $1/r$ 来自图中实际弧长 $r\,\mathrm{d}\theta$，不能遗漏。

轴向与赤道面上的场

轴正向 $\theta = 0$ 时 $E_\theta = 0$，$E_r = 2\mathcal{K}p/r^3$，径向正是 $+z$；赤道面 $\theta = \pi/2$ 时 $E_r = 0$，$E_\theta = \mathcal{K}p/r^3$，增角方向则为 $-z$。对试探电荷 Q，受力为 $Q\boldsymbol{E}$；$Q < 0$ 时方向反转。

合成为矢量并投影到固定坐标轴

把已求的两个场分量合成为矢量，可以避免在轴线与赤道面之间更换符号。图 3.28 取偶极轴为 $+z$，有 $\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$。记 $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{e}_z$，则 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r = p\cos\theta$。把 $-\boldsymbol{p} = -p\cos\theta\boldsymbol{e}_r + p\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 代入，可将两个分量合并成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{\mathcal{K}p}{r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \frac{\mathcal{K}}{r^3}[3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r)\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{p}]. \end{aligned}$$

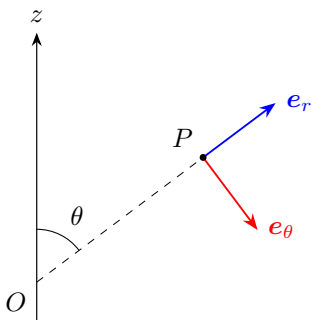


图 3.28: 径向与角向分量的正方向

再取图示子午面内垂直偶极轴的方向为 x，则 $\boldsymbol{e}_r = (\sin\theta, \cos\theta)$、$\boldsymbol{e}_\theta = (\cos\theta, -\sin\theta)$。将两个分量投影，得到

$$\begin{aligned} E_x &= E_r \sin\theta + E_\theta \cos\theta \\ &= \frac{\mathcal{K}p}{r^3}(2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta) = \frac{3\mathcal{K}p}{r^3}\sin\theta\cos\theta, \\ E_z &= E_r \cos\theta - E_\theta \sin\theta \\ &= \frac{\mathcal{K}p}{r^3}(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{\mathcal{K}p}{r^3}(3\cos^2\theta - 1). \end{aligned}$$

用正交分量比较同一球面上的场强

在 $\cos^2\theta = 1/3$ 处，E_z 虽为零，E_x 却不为零；某一分量的抵消不能误判为总场消失。利用径向与角向正交，还得

$$|\boldsymbol{E}| = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{\mathcal{K}p}{r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

在半径 r 远大于电荷间距的球面上，场强从赤道的 $\mathcal{K}p/r^3$ 连续增至轴线的 $2\mathcal{K}p/r^3$。

例 3.7 (指数密度液体中的浮杆)**.** 液面以下深度为 z 处的密度为 $\rho(z) = \rho_0 \mathrm{e}^{z/\ell}$。竖直刚性杆长 ℓ、截面积 S、密度 $3\rho_0/2$。液体静止，杆保持竖直。求平衡时杆顶相对液面的高度。

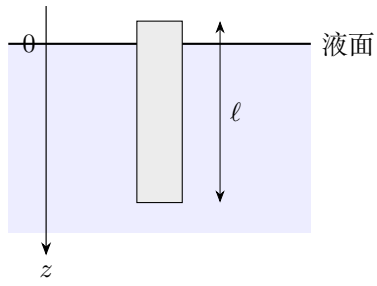


图 3.29: 深度坐标从自由液面向下

解　先假设部分浸没，按深度积分压强

先假定图 3.29 所示的部分浸没状态，令杆底深度为 b。静水压梯度为 $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}z = \rho(z)g$，顶面在空气中，故净浮力等于

$$\begin{aligned} F_B &= S[p(b) - p(0)] = \rho_0 g S \int_0^b \mathrm{e}^{z/\ell}\,\mathrm{d}z \\ &= \rho_0 g S[\ell \mathrm{e}^{z/\ell}]_0^b = \rho_0 g S(\ell \mathrm{e}^{b/\ell} - \ell \mathrm{e}^0) \\ &= \rho_0 g S \ell(\mathrm{e}^{b/\ell} - 1). \end{aligned}$$

指数项的原函数可由 $\mathrm{d}(\ell \mathrm{e}^{z/\ell})/\,\mathrm{d}z = \ell \mathrm{e}^{z/\ell}(1/\ell) = \mathrm{e}^{z/\ell}$ 验证。令浮力等于杆重 $3\rho_0 g S\ell/2$，约去正的共同因子 $\rho_0 g S\ell$，得到 $\mathrm{e}^{b/\ell} - 1 = 3/2$，所以 $\mathrm{e}^{b/\ell} = 5/2$，取对数得

$$b = \ell \ln(5/2) \simeq 0.91629\ell < \ell.$$

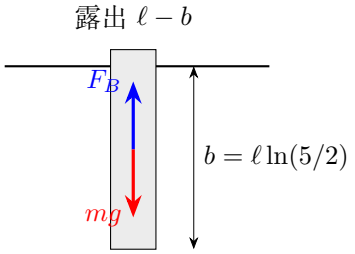


图 3.30: 平衡后顶端露出液面，底端位于深度 b

部分浸没的深度范围

图 3.30 中假设得到验证，顶端露出高度为

$$\boxed{h_{\text{top}} = \ell[1 - \ln(5/2)] \simeq 0.08371\ell}.$$

若强行假定完全浸没，杆顶深度为 $z_0 \geq 0$，杆底深度为 $z_0 + \ell$，上下两条曲线必须同时改变：

$$\begin{aligned} F_B &= \rho_0 g S \int_{z_0}^{z_0+\ell} \mathrm{e}^{z/\ell}\,\mathrm{d}z = \rho_0 g S[\ell \mathrm{e}^{z/\ell}]_{z_0}^{z_0+\ell} \\ &= \rho_0 g S\ell[\mathrm{e}^{(z_0+\ell)/\ell} - \mathrm{e}^{z_0/\ell}] = \rho_0 g S\ell \mathrm{e}^{z_0/\ell}(\mathrm{e}-1). \end{aligned}$$

与重量相等、提出 $\mathrm{e}^{z_0/\ell}$ 后，应满足 $\mathrm{e}^{z_0/\ell} = \frac{3}{2(\mathrm{e}-1)} < 1$，反而要求 $z_0 < 0$，不自洽。对实际部分浸没状态，

$$\frac{\mathrm{d}F_B}{\mathrm{d}b} = \rho_0 g S\ell \mathrm{e}^{b/\ell}\frac{1}{\ell} = \rho_0 g S \mathrm{e}^{b/\ell} > 0.$$

下沉小量 $\delta b > 0$ 时重量不变、浮力增加，向下的合力变化为 $-\rho_0 g S \mathrm{e}^{b/\ell}\delta b < 0$，故竖直平移方向稳定。

在部分浸没区间构造有效势能

还可将上述回复力写成势能，检查局部判稳与有限位移是否一致。令平衡底深为 $b_0 = \ell \ln(5/2)$，杆整体向下位移 η，则底深为 $b_0 + \eta$。在仍部分浸没的区间 $-b_0 < \eta < \ell - b_0$，净向下力为

$$\begin{aligned} Q(\eta) &= mg - F_B(b_0 + \eta) \\ &= \rho_0 g S\ell\left[\frac{3}{2} - \left(\frac{5}{2}\mathrm{e}^{\eta/\ell} - 1\right)\right] = \frac{5}{2}\rho_0 g S\ell(1 - \mathrm{e}^{\eta/\ell}). \end{aligned}$$

将浮力和重力合并为位置势能，$\mathrm{d}U/\mathrm{d}\eta = -Q$。用 ξ 作积分变量，从平衡位置到 η 积分，先写

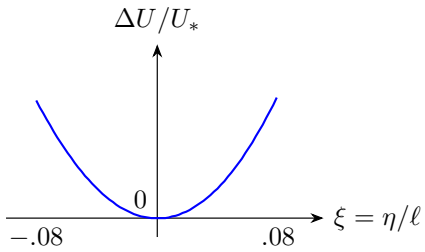
$$U(\eta) - U(0) = \frac{5}{2}\rho_0 g S\ell \int_0^{\eta} (\mathrm{e}^{\xi/\ell} - 1)\,\mathrm{d}\xi = \frac{5}{2}\rho_0 g S\ell[\ell \mathrm{e}^{\xi/\ell} - \xi]_0^{\eta}.$$

指数项可令 $u = \xi/\ell$、$\mathrm{d}\xi = \ell\,\mathrm{d}u$，其原函数才是 $\ell\mathrm{e}^{\xi/\ell}$。代入上下限，得到

$$U(\eta) - U(0) = \frac{5}{2}\rho_0 g S\ell \left[\ell(\mathrm{e}^{\eta/\ell} - 1) - \eta\right].$$

指数函数满足 $\mathrm{e}^{\xi} \geq 1 + \xi$，因此方括号非负，且仅在 $\eta = 0$ 为零。

图 3.31 显示平衡位置确为势能低点，而不仅是合力为零的点。



按六阶展开放大显示，$U_* = \frac{5}{2}\rho_0 g S\ell^2$

图 3.31: 部分浸没范围内的有效势能具有严格极小值

势能的二次项与回复刚度

继续展开 $\mathrm{e}^{\eta/\ell} = 1 + \eta/\ell + \eta^2/(2\ell^2) + O(\eta^3/\ell^3)$，线性项抵消，故

$$U(\eta) - U(0) = \frac{5}{4}\rho_0 g S\eta^2 + O\left(\rho_0 g S\frac{|\eta|^3}{\ell}\right).$$

二次项系数为正，给出回复刚度 $5\rho_0 g S/2$，与前面的浮力导数相同。这里判断竖直平移的静态稳定性；计算实际振动频率时，还需明确液体运动和阻尼的处理条件。

例 3.8 (抛物线与椭圆的曲率)**.** 求抛物线 $y = ax^2$ 在顶点的曲率半径，以及椭圆 $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ 在两类轴端点的曲率半径，$a, A, B > 0$。

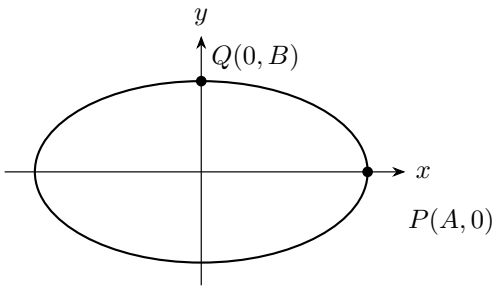


图 3.32: 椭圆两类端点的弯曲程度不同

解　分别选取函数式与椭圆参数式

对抛物线固定 a，先在一般位置求导：$y' = a\,2x = 2ax$，$y'' = 2a$。顶点 $x = 0$ 处才有 $y' = 0$，代入曲率公式得到 $\rho = (1 + 0^2)^{3/2}/|2a| = 1/(2a)$。其中 a 的量纲为逆长度，所得半径量纲正确。

对图 3.32 的椭圆，取正则参数 $x = A\cos\theta, y = B\sin\theta$。有

$$x' = -A\sin\theta, \quad y' = B\cos\theta, \quad x'' = -A\cos\theta, \quad y'' = -B\sin\theta,$$

撇号在这里表示对参数 θ 求导。代入行列式，$x'y'' - y'x'' = AB\sin^2\theta + AB\cos^2\theta = AB$。同时 $x'^2 + y'^2 = A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta$，两部分都代入曲率公式。

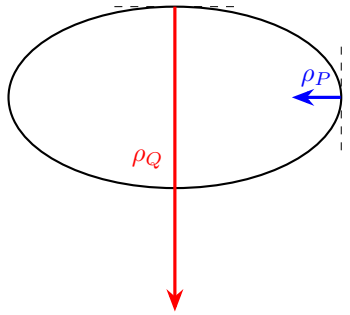


图 3.33: 密切圆半径沿内法线

$$\rho(\theta) = \frac{(A^2\sin^2\theta + B^2\cos^2\theta)^{3/2}}{AB}.$$

在轴端点代入并比较弯曲程度

在 P 处 $\theta=0$，分子为 $(B^2)^{3/2}=B^3$，除以 AB 得 B^2/A；在 Q 处 $\theta=\pi/2$，分子变为 A^3，除以 AB 得 A^2/B。因此 $\boxed{\rho_P=B^2/A,\quad \rho_Q=A^2/B}$。图 3.33 的箭头表示内法线方向；当 $A>B$ 时长轴端更尖，半径更小。$A=B=R$ 时两式同时恢复圆的半径 R。

沿内法线确定一般位置的曲率中心

已知半径后，还应能在图上确定曲率中心。记 $D=A^2\sin^2\theta+B^2\cos^2\theta$。沿参数增加方向的单位切向为 $\boldsymbol{e}_t=(-A\sin\theta,B\cos\theta)/\sqrt{D}$；将其逆时针转 90°，得到指向椭圆内部的单位法向

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{(-B\cos\theta,-A\sin\theta)}{\sqrt{D}}.$$

所以曲率中心 C 的坐标应由 $\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{r}_P+\rho\boldsymbol{e}_n$ 确定，方向取图中的内法线。代入已求的 $\rho=D^{3/2}/(AB)$，分别整理两个分量：

$$x_C=A\cos\theta-\frac{D}{A}\cos\theta=\frac{A^2-B^2}{A}\cos^3\theta,$$
$$y_C=B\sin\theta-\frac{D}{B}\sin\theta=\frac{B^2-A^2}{B}\sin^3\theta.$$

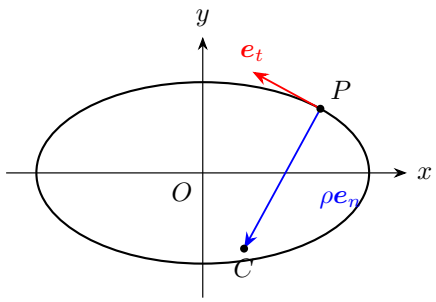


图 3.34: 一般位置的曲率中心位于内法线上

图 3.34 中的 PC 与切向垂直，长度为 ρ；一般位置的法线并不经过 O。在长轴端 $P=(A,0)$，曲率中心为 $((A^2-B^2)/A,0)$，两点之差的长度正是 B^2/A。在短轴端，曲率中心可能落在椭圆之外；这不影响它作为局部密切圆圆心的意义。

取 $A=B=R$，圆心公式给出 $C=O$，曲率半径为 R。对一般椭圆，真实速率还取决于参数随时间的变化。

例 3.9 (移动切线的切点)**.** 固定圆半径 R、圆心 O。点 $A=(x,0)$ 位于圆外，$x>R$，以速度 $\dot{x}=u>0$ 向右运动。从 A 作上侧切线，切点为 P。求 P 的坐标、速度大小以及切线段 AP 长度的变化率。

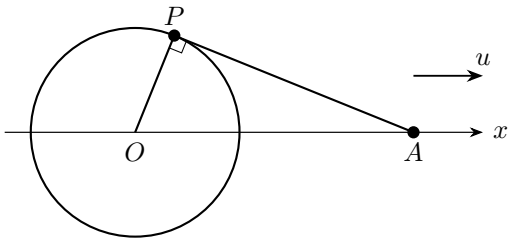


图 3.35: 半径与切线垂直

解　联立切线垂直条件和圆方程

图 3.35 中设 $P=(X,Y)$。半径与切线垂直，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=X(X-x)+Y^2=0$。又因 $X^2+Y^2=R^2$，有 $R^2-xX=0$，从而 $X=R^2/x$。代回圆方程，并由上侧切点的 $Y>0$ 取正根，

$$X=\frac{R^2}{x},\qquad Y=\frac{R\sqrt{x^2-R^2}}{x}.$$

求导时 $\dot{x}=u$，而 X,Y 都通过 $x(t)$ 随时间变化。先记 $W=\sqrt{x^2-R^2}>0$，按链式法则求出根式的导数，再对 $Y=RW/x$ 使用商法则：

$$\begin{aligned}W'&=\frac{1}{2}(x^2-R^2)^{-1/2}(2x)=\frac{x}{W},\\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}&=R\frac{W'x-W}{x^2}=\frac{R(x^2-W^2)}{x^2W}=\frac{R[x^2-(x^2-R^2)]}{x^2W}\\ &=\frac{R^3}{x^2\sqrt{x^2-R^2}}.\end{aligned}$$

再乘以 $\dot{x}=u$，得到

$$\dot{X}=-\frac{R^2u}{x^2},\qquad \dot{Y}=\frac{R^3u}{x^2\sqrt{x^2-R^2}}.$$

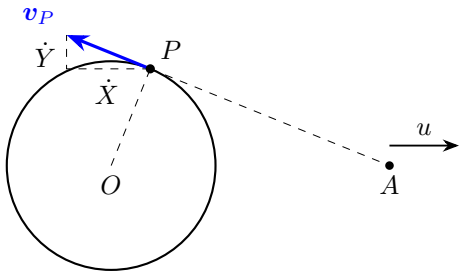


图 3.36: 切点速度沿圆的切线，外点速度沿水平轴

切点速度的大小与方向

图 3.36 的两个分量一负一正，切点向左上方移动。计算速率平方时先提出公因子：

$$v_P^2 = \frac{R^4u^2}{x^4}\left(1+\frac{R^2}{x^2-R^2}\right) = \frac{R^4u^2}{x^2(x^2-R^2)}.$$

用 $x>R, u>0$ 取正根，

$$\boxed{v_P = \frac{R^2u}{x\sqrt{x^2-R^2}}}.$$

由直角三角形 $AP=\sqrt{x^2-R^2}$，再次追踪 $x(t)$ 的内层导数：

$$\frac{\mathrm{d}(AP)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-R^2}}\,2x\dot{x} = \frac{xu}{\sqrt{x^2-R^2}}.$$

这是切线段的伸长率，与切点速率不同。$x\to R^+$ 时二者发散，提醒我们外点接近圆周时，切点几何对应关系对位置变化异常敏感。

3.6 本讲小结

极值分析要从定义域、候选点和导数符号展开，势能判稳则必须明确允许的扰动方向。近似展开先找无量纲小参数，再保留足以决定结果的最低非零阶；发生相减时应特别检查低阶项是否抵消。曲率半径描述路径的局部几何，几何点的速度则还取决于驱动条件，二者需要不同的信息。

3.7　练习

练习 3.1 (带误差的近似)**.** 用二阶展开估算 $\sqrt{4.01}$，并给出误差上界。再估计把 $\sin\theta$ 近似为 θ 时，在 $|\theta| \le 0.1$ 内相对 θ 的误差上界。

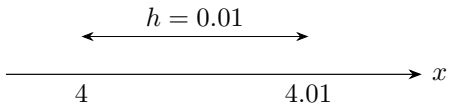


图 3.37: 展开点与实际求值点相邻

练习 3.2 (分层大气中的圆形光路)**.** 球对称大气折射率为 $n(r) = 1 + \delta \mathrm{e}^{-(r-r_0)/b}$，$r_0 = 6400\,\mathrm{km}$，$b = 8772\,\mathrm{m}$。已知近地层实际折射率为 1.0003。若光线要沿 $r = r_0$ 的圆周传播，所需密度约为实际密度的多少倍？假定 $n-1$ 与密度成正比，并使用分层介质光线曲率关系 $\kappa = -n'(r)/n(r)$。

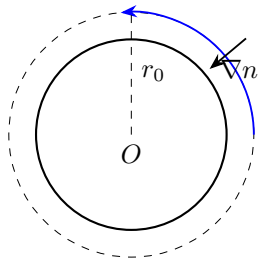


图 3.38: 折射率梯度朝向地心

练习 3.3 (闭区间的最大与最小)**.** 求 $f(x) = x^3 - 3x$ 在 $[-2, 3]$ 上的最大值和最小值，说明为何只解 $f' = 0$ 不足以完成此题。

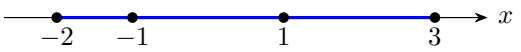


图 3.39: 端点也属于可取位置

练习 3.4 (曲率与参数选择)**.** 质点轨迹为 $x = A\cos\omega t,\ y = B\sin\omega t,\ A > B > 0, \omega > 0$。求 $t = 0$ 时速率、加速度和曲率半径；再求 $\omega t = \pi/4$ 时的切向加速度，判断它是否一般为零。

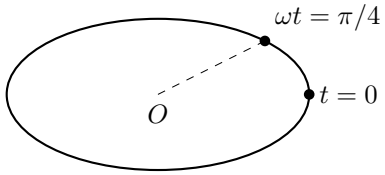


图 3.40: 恒定参数角速度不等于恒定速率

练习解答

练习 3.1

解　在已知点附近展开根式并估计余项

图 3.37 中 $h = 0.01$。把 $f(x) = \sqrt{x}$ 写成 $x^{1/2}$，逐次应用幂函数求导法则：

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4x^{3/2}},$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8x^{5/2}}.$$

在四处代入得到 $f(4) = 2$、$f'(4) = 1/4$、$f''(4) = -1/32$，所以二阶展开为

$$\sqrt{4+h} = 2 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{64} + R_2,$$

代入 $h = 0.01$，依次计算 $h/4 = 0.0025$、$h^2/64 = 0.0000015625$，得到 $\sqrt{4.01} \simeq 2.0024984375$。前面已求得 $f'''(x) = 3/(8x^{5/2})$；它在正半轴随 x 增加而减小，所以在 $[4, 4.01]$ 上的最大值为 $f'''(4) = 3/(8\cdot 32) = 3/256$。按拉格朗日余项，$|R_2| \le (3/256)h^3/3! = h^3/512 = 1.953125 \times 10^{-9}$。

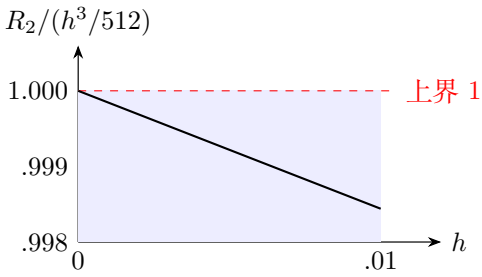


图 3.41: 放大余项与其严格上界之比，整个区间都在一以下

以严格余项界确定小角允许范围

图 3.41 放大显示余项与上界的比值：它为正且小于 1，所以实际值在二阶近似上方，但增量不超过 $h^3/512$。这个界来自三阶导数，不能用保留的小数位数替代。对正弦在零点保留到二阶，常数、二次项均为零，三阶导数为 $-\cos\theta$、绝对值不超过一，因此余项界为 $|\sin\theta - \theta| \le |\theta|^3/3!$。再除以 $|\theta| > 0$，得到 $|\sin\theta - \theta|/|\theta| \le \theta^2/6 \le 1/600$；零点以极限补充为零。这里误差的比较基准是 θ，不是 $\sin\theta$。

练习 3.2

解　沿内法线把圆轨道曲率代入折射率梯度

令 $\delta = n(r_0) - 1 > 0$。先对题给指数逐层求导：$n'(r) = \delta \mathrm{e}^{-(r-r_0)/b}\,[-1/b]$。在图 3.38 的地表位置代入 $r = r_0$，得到 $n(r_0) = 1 + \delta$、$n'(r_0) = -\delta/b$；光线向折射率较大的内层弯曲。半径 r_0 的圆形光路要求内法线曲率为 $1/r_0$，代入题给曲率关系，

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{n'(r_0)}{n(r_0)} = \frac{\delta}{b(1+\delta)}.$$

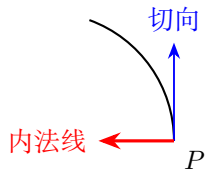


图 3.42: 局部切向传播时的内法线曲率

解出折射率增量并换算密度

图 3.42 标明内法线方向，所以曲率取正。将等式两边乘正数 $br_0(1+\delta)$，再移项：

$$b(1+\delta)=r_0\delta,\qquad b=(r_0-b)\delta,\qquad \delta=\frac{b}{r_0-b}.$$

在所取近似下，空气密度之比等于两处 $n-1$ 的比。先把 $r_0=6400\,\mathrm{km}$ 换成 $6.4\times10^6\,\mathrm{m}$，再与实际增量 0.0003 相比，得到

$$\frac{\rho_{\mathrm{req}}}{\rho_{\mathrm{act}}}=\frac{\delta}{0.0003}=\frac{8772}{(6400000-8772)\,0.0003}\simeq\boxed{4.575}.$$

若在曲率式中预先将 $1+\delta$ 近似为一，会得到约 4.57；完整表达式则明确保留了这一步近似的位置。

从光程驻值求圆形光路条件

还可用光程驻值从费马原理推导圆形光路条件，其作用是解释曲率条件的来由。取极角 ϕ 为参数，将邻近路径写成 $r(\phi)=r_0+\epsilon\eta(\phi)$，其中 η 为光滑的周期函数。路径微元为

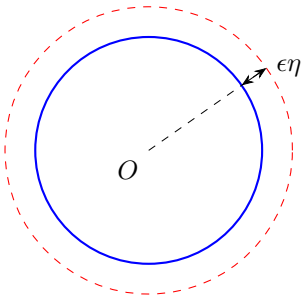
$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(\mathrm{d}r/\,\mathrm{d}\phi)^2}\,\mathrm{d}\phi=[r_0+\epsilon\eta(\phi)]\,\mathrm{d}\phi+O(\epsilon^2).$$

导数平方只贡献二阶小量；折射率的一阶展开为

$$n(r)=n(r_0)+\epsilon n'(r_0)\eta(\phi)+O(\epsilon^2).$$

两式相乘，沿一周积分，得到光程的一阶变化

$$\delta\mathcal{L}=\epsilon\int_0^{2\pi}[n(r_0)+r_0n'(r_0)]\eta(\phi)\,\mathrm{d}\phi.$$



蓝：r_0　红：邻近路径

图 3.43: 路径略向外移时，长度增加而折射率减小

图 3.43 中路径向外移动时，几何长度增加、折射率减小。

要使任意小扰动下的一阶变化为零，二者须满足 $n(r_0) + r_0 n'(r_0) = 0$，即 $-n'(r_0)/n(r_0) = 1/r_0$，与前面使用的曲率条件相同。两种方法由此给出相同的圆形光路条件和弯曲方向；候选光路的扰动稳定性还需进一步检查二阶变化。

练习 3.3

解　列出驻点、端点并逐一比较函数值

图 3.39 给出的 $f(x) = x^3 - 3x$ 在闭区间 $[-2, 3]$ 连续，故全局最值一定存在。先求导并解出内部驻点：

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1) = 0, \qquad x = -1, 1.$$

按单调区间收集全部候选点并比较

导数在 $(-2, -1)$ 为正、在 $(-1, 1)$ 为负、在 $(1, 3)$ 为正。每个单调区间的最大值与最小值都在两端取得。把四个候选点代入原函数，

$$f(-2) = -8 + 6 = -2, \quad f(-1) = -1 + 3 = 2,$$

$$f(1) = 1 - 3 = -2, \qquad f(3) = 27 - 9 = 18.$$

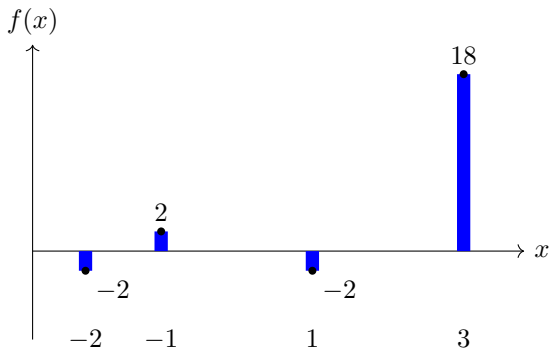


图 3.44: 端点与驻点都要比较，局部极大不保证全局最大

由图 3.44 的四个候选值，最大值为 18，在 $x = 3$ 取得；最小值为 -2，在 $x = -2, 1$ 两处取得。内部驻点 $x = -1$ 处由增转减，局部极大值 2 小于右端点的 18。

练习 3.4

解　利用轴端点的正交关系求曲率

先在图 3.40 的固定直角坐标中求一般时刻的分量。A, B, ω 保持不变，每次时间求导都带上内层导数 $\mathrm{d}(\omega t)/\,\mathrm{d}t = \omega$：

$$\begin{aligned} v_x &= A[-\sin(\omega t)]\omega = -A\omega \sin \omega t, \\ v_y &= B\cos(\omega t)\omega = B\omega \cos \omega t, \\ a_x &= -A\omega \cos(\omega t)\omega = -A\omega^2 \cos \omega t, \\ a_y &= B\omega[-\sin(\omega t)]\omega = -B\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

现在代入 $t = 0$，有 $\boldsymbol{v} = (0, B\omega)$、$v = B\omega$，$\boldsymbol{a} = (-A\omega^2, 0)$、$|\boldsymbol{a}| = A\omega^2$。两矢量垂直，加速度全为法向，因此

$$\rho = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{B^2\omega^2}{A\omega^2} = \frac{B^2}{A}.$$

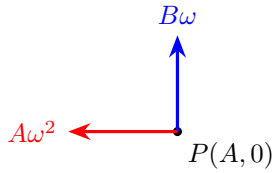


图 3.45: 轴端点可以直接用全部加速度求曲率

在一般位置分离切向与法向加速度

图 3.45 的垂直关系只在该类特殊位置成立。对一般位置，使用上面逐分量求得的速度和加速度计算点积。点积为 $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a} = \omega^3(A^2 - B^2)\sin \omega t \cos \omega t$，速率为 $\omega\sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t}$。由于 $v^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$，两边对时间求导得到 $2v\dot{v} = 2\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}$。在本题 $v > 0$，因此切向加速度 $a_\tau = \dot{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})/v$，即

$$a_\tau = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a}}{v} = \frac{\omega^2(A^2 - B^2)\sin \omega t \cos \omega t}{\sqrt{A^2 \sin^2 \omega t + B^2 \cos^2 \omega t}}.$$

在 $\omega t = \pi/4$ 时，分子中的 $\sin \omega t \cos \omega t = 1/2$，分母根式为 $\sqrt{(A^2 + B^2)/2}$，化简后为 $\omega^2(A^2 - B^2)/\sqrt{2(A^2 + B^2)} > 0$。所以恒定参数角速度下，椭圆上的速率正在增加；只有 $A = B$ 的圆才处处无切向加速度。

由速度与加速度的叉积求法向分量

为补全一般位置的分解，令 $\phi=\omega t$、$D=A^2\sin^2\phi+B^2\cos^2\phi$。平面运动的叉积仅有垂直纸面的分量，逐项计算为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a})_z &= (-A\omega\sin\phi)(-B\omega^2\sin\phi)-(B\omega\cos\phi)(-A\omega^2\cos\phi)\\ &= AB\omega^3(\sin^2\phi+\cos^2\phi)=AB\omega^3.\end{aligned}$$

因切向部分与 $\boldsymbol{v}$ 平行，只有法向部分进入叉积。由 $|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|=va_n$，可得

$$a_n=\frac{AB\omega^2}{\sqrt{D}},\qquad \rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{D^{3/2}}{AB}.$$

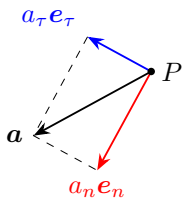


图 3.46: 一般位置先分解加速度，再用法向分量求曲率

图 3.46 的两分量相互垂直；总加速度的大小应满足 $|\boldsymbol{a}|^2=a_\tau^2+a_n^2$。在 $\phi=\pi/4$ 处，

$$a_n=\frac{\sqrt{2}AB\omega^2}{\sqrt{A^2+B^2}},\qquad a_\tau=\frac{(A^2-B^2)\omega^2}{\sqrt{2(A^2+B^2)}}.$$

两式平方相加，分子为 $4A^2B^2+(A^2-B^2)^2=(A^2+B^2)^2$，所以总量为 $\omega^4(A^2+B^2)/2$，与直接求 $a_x^2+a_y^2$ 相同。只有先确认 $a_\tau=0$，才能用总加速度代替法向加速度；轴端点的简便算法不应直接套到整条椭圆上。

微积分

物理竞赛一轮讲义

第四讲

微分方程与物理应用

2026

目录

第四讲　微分方程与物理应用 **1**

4.1　把局部规律写成微分方程 1

4.2　从受力方程到过程关系 5

4.3　小振动与线性化 7

4.4　转动与追及中的微积分 10

4.5　例题与分析 13

4.6　本讲小结 33

4.7　练习 34

练习解答 35

第四讲　微分方程与物理应用

4.1　把局部规律写成微分方程

4.1.1　未知量是一个函数

牛顿定律 $m\ddot{x} = F$、电流关系 $I = \dot{Q}$、静水压关系 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\rho g$，都只涉及某时刻或某位置附近的局部变化。当未知量是整个运动或分布函数时，这些规律就成为微分方程。解方程的任务是找到一个函数，使它在规定区间内处处满足局部规律，并符合初始或端点条件。

一阶方程通常需要一个初始条件，例如位置函数的速度规律配上 $x(0) = x_0$；二阶运动方程通常还需要 $v(0) = v_0$。由方程给出的函数族，不代入条件便不能确定具体运动。判断答案时应同时检查方程、初值与适用区间，而不只是看最终表达式是否熟悉。

物理建模应先明确研究对象和变量。若速度给成位置函数，选位置作为积分变量往往比先求时间函数更直接；若加速度只随速度变化，可以先解速度的一阶方程；若研究微小偏离平衡的行为，则先选偏移量，再把恢复作用展开到一阶。

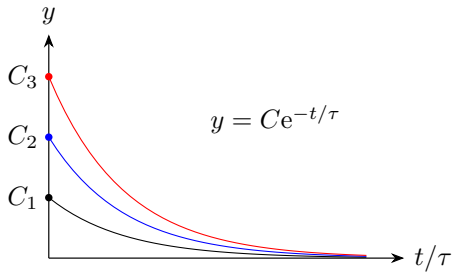


图 4.1: 相同方程的解由初始状态进一步确定

图 4.1 的三条曲线都满足 $\dot{y} = -y/\tau$，却对应三个不同的初值。局部规律只规定“在当前状态怎样变化”，初始条件才指定从哪一点开始。对解作判断时，可先求导代回方程，再令起始时刻为零代入初值；两步都成立后，还要检查解是否一直留在模型允许的范围内。

初始条件与端点条件也不同。运动题通常给同一时刻的位置和速度；静态分布可能给两个不同位置处的条件。分段介质还要用交界处的连续条件把两侧解接起来，例如稳态热传导中的热流连续。

用图 4.2 可以同时读出二阶方程的两个初值。以水平弹簧振子为例，取平衡位置为 $x=0$。在 x–v 平面上，每个点给定某时刻的位置和速度。动能与势能之和为 $mv^2/2+kx^2/2$。当总能量为 $kA^2/2$ 时，令 $\omega_0^2=k/m$，可写成

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{v^2}{\omega_0^2A^2}=1.$$

图中的点 $P=(x_0,v_0)$ 选定椭圆上的出发位置。因为 $\dot x=v$，上半支向右走，下半支向左走。在右端 $x=A$，虽有 $v=0$，但 $\dot v=-kA/m<0$，接下来的轨迹进入下半支。给定出发点后，方程还决定沿这条曲线怎样随时间运动。

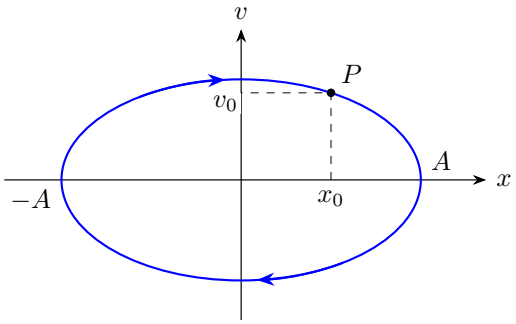


图 4.2: 同一能量对应一条相轨迹，P 由初始位置和速度确定

4.1.2　可分离变量与平衡解

若 $\dot y=f(t)g(y)$，在 $g(y)\neq0$ 的区间内可写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \int_{y_0}^{y(t)}\frac{\mathrm{d}u}{g(u)}=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

上下限已包含初值，因此不必再引入一个独立的不定积分常数。分离前必须检查 $g(y)=0$ 的解：例如 $\dot y=-\lambda y$ 除以 y 后会暂时排除恒零解，但恒零解本来合法。

左边是 $1/g(y)$ 的一个原函数沿 $y(t)$ 的增量，链式法则给出其对 t 的导数为 $f(t)$。遇到不单调运动，应按区间求解；积分中出现对数时，还要根据初值确定符号与允许区间。

以 $\dot y=ay(1-y/K)$、$a,K>0$ 为例，若先除以 $y(1-y/K)$，会把 $y=0$ 与 $y=K$ 两个常值解排除在积分步骤之外。它们却直接满足方程，应先保留。对其余解，也无需立即算出显式函数就能判断变化方向：当 $0<y<K$ 时右侧为正，y 增长；当 $y>K$ 时右侧为负，y 减小。

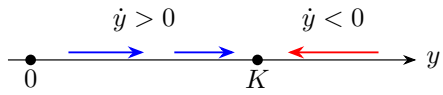


图 4.3: 方程右侧的符号给出允许状态的变化方向

图 4.3 中箭头指向 K。以 $0<y_0<K$ 为初值，沿这一支分离变量。部分分式为

$$\frac{1}{u(1-u/K)}=\frac{K}{u(K-u)}=\frac{1}{u}+\frac{1}{K-u}.$$

把 y_0 和 $y(t)$ 分别代入积分下限和上限，得

$$\begin{aligned} at &= \int_{y_0}^{y(t)}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{K-u}\right)\mathrm{d}u \\ &= \Big[\ln u-\ln(K-u)\Big]_{y_0}^{y(t)} = \ln\frac{y(t)}{K-y(t)}-\ln\frac{y_0}{K-y_0}. \end{aligned}$$

取指数并解出 $y(t)$，

$$y(t)=\frac{K}{1+(K/y_0-1)\mathrm{e}^{-at}}.$$

$t=0$ 时分母是 K/y_0，恢复初值。随着 t 增大，指数项趋零，解从下方接近 K。在图中，$y=0$ 和 $y=K$ 各对应一条常值解，分别由方程右端的两个零点给出。

4.1.3 量纲与时间尺度

对方程 $\dot y=-y/\tau$，先取 $y_0\neq 0$，在与初值同号的区间分离变量：

$$\int_{y_0}^{y(t)}\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t\mathrm{d}s,\qquad \big[\ln|u|\big]_{y_0}^{y(t)}=-\frac{t}{\tau}.$$

于是 $\ln|y/y_0|=-t/\tau$；由同号性取 $y/y_0>0$，得到 $y=y_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$。求导判断为 $\dot y=y_0\mathrm{e}^{-t/\tau}(-1/\tau)=-y/\tau$，且 $y(0)=y_0$；$y_0=0$ 另有恒零解。指数必须无量纲，所以 τ 有时间单位；它表示初始量衰减到 $1/\mathrm{e}$ 所需时间。线性阻力的 $\tau=m/k$、RC 电路的 $\tau=RC$ 都出于这一结构。增长过程只改变指数的符号，但长期指数增长常受资源或其他效应限制，不能无限外推简单模型。

把时间改写为 $s=t/\tau$，原方程成为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s=-y$；再令 $Y=y/y_0$，便得到 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}s=-Y$、$Y(0)=1$。不同质量的阻力运动与不同元件的电路，在各自时间尺度下具有同一条无量纲衰减曲线。图 4.1 中初值改变只作纵向缩放，时间尺度改变则作横向伸缩。

时间常数给出了衰减的计量尺度。在一个 τ 后剩下 $1/\mathrm{e}$，两个 τ 后剩下 $1/\mathrm{e}^2$，精确零值在理想指数模型中只于无限时间达到。若实验要求剩余比例小于 ϵ，所需

时间满足 $t > \tau \ln(1/\epsilon)$。半衰期则为 $\tau \ln 2$，它与时间常数描述同一过程的不同计量方式。

4.1.4　平衡值能否在有限时间到达

方向关系能说明解趋向哪个平衡值，却不能单独给出到达时间。设衰减规律为 $\dot{y} = -k y^{\alpha}$，其中 $k > 0$、$\alpha > 0$、$y(0) = y_0 > 0$，且模型只允许 $y \geq 0$。在 $y > 0$ 的区间内分离变量；当 $\alpha \neq 1$ 时，先写带初值的积分与原函数：

$$\int_{y_0}^{y(t)} u^{-\alpha}\,\mathrm{d}u = -k\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad \left[\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{y_0}^{y(t)} = -k[s]_0^t.$$

代入上下限，再乘 $1-\alpha$、取正值分支，依次得到

$$\frac{y^{1-\alpha} - y_0^{1-\alpha}}{1-\alpha} = -kt, \qquad y(t) = \left[y_0^{1-\alpha} - k(1-\alpha)t\right]^{1/(1-\alpha)}.$$

若 $0 < \alpha < 1$，括号在 $T = y_0^{1-\alpha}/[k(1-\alpha)]$ 时首次变为零。正值分支适用于 $t < T$，从 T 起取 $y = 0$，仍满足原方程。若 $\alpha > 1$，括号随时间增大而外层指数为负，解在无限时间趋于零。

$\alpha = 1$ 时不能使用含 $1-\alpha$ 的分母，应单独写成

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -k\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln u]_{y_0}^{y(t)} = -k[s]_0^t.$$

代入端点得到 $\ln(y/y_0) = -kt$，取指数才有 $y = y_0 \mathrm{e}^{-kt}$，同样不会在有限时间达到零。

因此，液面按 $\dot{h} \propto -\sqrt{h}$ 下降的理想排水过程可以有限排空，指数衰减则只能逐渐接近零。二者都有零平衡解，差别来自平衡附近的变化率：$0 < \alpha < 1$ 时，右侧对 y 的导数在零点无界，有限到达不违反前面所述光滑方程的性质。判断分离变量结果时，除了代回方程，还应确定积分所得分支在哪个时刻终止，以及终止后模型允许怎样延续。

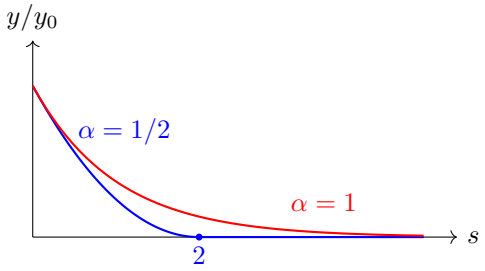


图 4.4: 相同初值的衰减可以在有限时刻终止，也可以渐近趋零

图 4.4 用 $s = ky_0^{\alpha-1}t$ 消去单位。$\alpha = 1/2$ 时 $y/y_0 = (1 - s/2)^2$ 只在 $0 \le s \le 2$ 表示下降支路；此后按非负模型接到 $y = 0$。若把平方式直接延长到 $s > 2$，它反而增大，已经不满足原来的负导数方程。$\alpha = 1$ 的指数曲线在任意有限 s 仍为正。图形的触轴方式因此对应不同的到达时间，必须与方程和允许状态一起判断。

4.2 从受力方程到过程关系

4.2.1 选择时间、位置或速度作为变量

定质量的一维运动满足

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t, x, v), \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v.$$

若 $F = F(x)$，在单调运动段有 $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = v\ \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，于是

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} F(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

左边来自 $\int_{v_0}^{v} mu\,\mathrm{d}u = [mu^2/2]_{v_0}^{v} = m(v^2 - v_0^2)/2$。这就是动能定理。若 $F = -kx$，则

$$\int_{x_0}^{x}(-k\xi)\,\mathrm{d}\xi = \left[-\frac{k\xi^2}{2}\right]_{x_0}^{x} = -\left(\frac{kx^2}{2} - \frac{kx_0^2}{2}\right),$$

故可将 $U(x) = kx^2/2$ 认作弹性势能。若 $F = -cv$，时间变量更便于直接分离。不同方法只是对同一局部方程选择了不同的变量，初值与方向约定应保持一致。

自变量的选择应与已知关系相配。若力只随位置变化，先求能量关系便能直接消去时间；若阻力只随速度变化，则 $\mathrm{d}t = m\ \mathrm{d}v/F(v)$ 可直接积出速度与时间。需要位置时，再用 $\mathrm{d}x = v\ \mathrm{d}t$。若已知 $v(x)$，还可以积分 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v(x)$。这些微分关系都必须在速度方向和单调运动段已经确定后使用。

特别要检查积分端点。例如 $v(x)$ 在某个位置趋零，$\mathrm{d}x/v$ 可能仍可积，也可能使到达时间发散；仅从能量式看出存在零速位置，还不能判断是否在有限时间到达。反过来，若求得 $v^2 < 0$，应把它解释为该运动支路不能进入的区域，而不能给速度任意加一个复数值继续运动。

图 4.5 用弹簧运动说明“先由能量求 v^2”会留下什么信息。设振幅为 A，能量式给出

$$v^2 = \omega_0^2(A^2 - x^2).$$

相图的上半支表示向右运动，下半支表示向左运动；同一个位置通常对应两个相反速度。到 $x = A$ 时，速度为零，但恢复力向左，随后应沿下半支返回。能量式给出椭圆形状，原微分方程还给出沿椭圆运动的方向，二者共同决定实际过程。

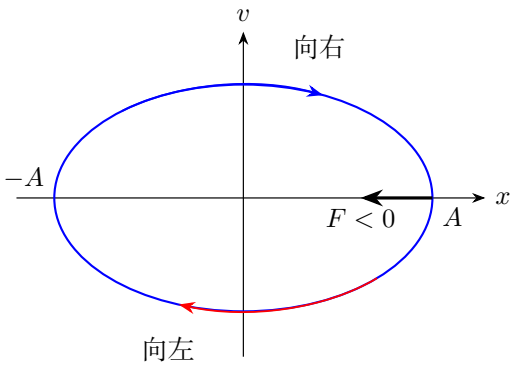


图 4.5: 同一能量曲线包含去程和回程，不能由平方速度独自选择支路

在单调支路上使用 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$ 时，$\mathrm{d}x$ 与 v 同号。转向前后各取与运动方向一致的速度根。图中相椭圆的每一点由位置 x 和速度 v 共同确定，一个循环对应一次往复运动。

4.2.2　变质量系统与流入动量

有链节不断从静止堆积部分加入运动部分时，“正在运动的部分”不是一个固定物质系统。若其质量为 $m(t)$、速度为 v，新进入的质量在地面参考系中的进入速度为零，则沿运动方向

$$F_{\mathrm{ext}} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\dot{v} + \dot{m}\,v.$$

第二项用于把新加入的质量加速到运动速度。若进入质量本来就有速度，还应加入对应的动量流入项，不能无条件使用上述形式。

新链节从静止并入运动部分时经历非弹性过程，一部分机械能转化为内能。

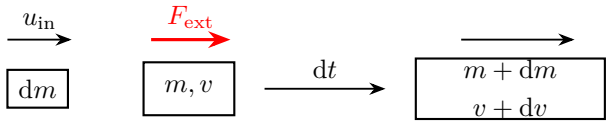


图 4.6: 短时间内将新质量纳入运动部分

图 4.6 中，把原运动部分与即将加入的 $\mathrm{d}m$ 一同作为短时物质系统。初动量是 $mv + u_{\mathrm{in}}\,\mathrm{d}m$，末动量是 $(m + \mathrm{d}m)(v + \mathrm{d}v)$。将外力冲量 $F_{\mathrm{ext}}\,\mathrm{d}t$ 加到初动量上，展开末动量并舍去二阶小量 $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$，得到

$$m\dot{v} = F_{\mathrm{ext}} + (u_{\mathrm{in}} - v)\dot{m}. \tag{4.1}$$

式(4.1)中的 u_{in} 和 v 都在同一惯性系量取，相对进入速度是二者之差。取 $u_{\text{in}}=0$，便回到收集静止物质的方程。

对于原先静止的微小质量，它被带到速度 v 所需动量为 $v\,\mathrm{d}m$，动能却是 $v^2\,\mathrm{d}m/2$。维持运动部分的外力还可能通过合并过程产生不可逆能量损失，因而动量方程不能替代能量方程。题目若要求外力功率，应同时追踪运动部分的质量增加和速度改变，而不只是对单个质点的 $mv^2/2$ 求导。

4.3 小振动与线性化

4.3.1 恢复系数和有效惯量

平衡点 q_0 附近令 $\eta=q-q_0$。若动能与势能可写成

$$T=\frac{1}{2}M_{\text{eff}}\dot{\eta}^2+\text{高阶项},\qquad U=U_0+\frac{1}{2}K_{\text{eff}}\eta^2+\text{高阶项},$$

且 $M_{\text{eff}},K_{\text{eff}}>0$，则保留扰动一阶项的线性化运动方程为

$$M_{\text{eff}}\ddot{\eta}+K_{\text{eff}}\eta=0,\qquad \omega_0=\sqrt{K_{\text{eff}}/M_{\text{eff}}}.$$

这里两个“有效”量必须由同一广义坐标定义：对长度坐标，它们可分别具有质量、劲度系数的单位；对角坐标，有效惯量通常是转动惯量。

为了求解而不只识别方程，试取 $\eta=\mathrm{e}^{rt}$，则 $\dot{\eta}=r\mathrm{e}^{rt}$、$\ddot{\eta}=r^2\mathrm{e}^{rt}$，代入后得到 $r^2+\omega_0^2=0$，即 $r=\pm\mathrm{i}\omega_0$。由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z$，两个实独立解是 $\cos\omega_0 t$、$\sin\omega_0 t$，所以

$$\eta=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t,\qquad \dot{\eta}=-\omega_0 C_1\sin\omega_0 t+\omega_0 C_2\cos\omega_0 t.$$

若 $\eta(0)=\eta_0$、$\dot{\eta}(0)=u_0$，便有 $C_1=\eta_0$、$C_2=u_0/\omega_0$。再写成 $\eta=A\cos(\omega_0 t+\phi)$，系数比较给出 $A\cos\phi=\eta_0$、$-A\sin\phi=u_0/\omega_0$，从而同时确定振幅和相位。势能需要保留二阶，恢复作用只需保留一阶；它们正好通过 $-\mathrm{d}U/\,\mathrm{d}\eta=-K_{\text{eff}}\eta$ 联系起来。

从能量得到线性化方程时，可写 $\mathrm{d}(T+U)/\,\mathrm{d}t=\dot{\eta}(M_{\text{eff}}\ddot{\eta}+K_{\text{eff}}\eta)$。在非零速度的区间令能量变化率为零，再以连续性接到转向点，便得到简谐方程。这里有效惯量取平衡点的值；若它随坐标变化，所产生的附加项应按小量阶数判断，不能在尚未线性化时就随意视为常数。

用同一坐标定义两个系数尤其重要。若改用 $\xi=b\eta$，动能中的系数变为 M_{eff}/b^2，势能中的系数也变为 K_{eff}/b^2，二者之比保持不变。因此固有频率是物理系统的性质，不能随选择长度坐标还是角坐标而改变。若算出两种坐标给出不同频率，通常是惯量或恢复系数遗漏了几何因子。

4.3.2 单摆的自变量与近似

摆角 θ 是随时间变化的未知函数，时间 t 是自变量。沿圆弧切向列方程得

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta, \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

在 $|\theta| \ll 1$、角度采用弧度时，$\sin\theta \simeq \theta$，线性方程为 $\ddot{\theta} + (g/l)\theta = 0$。代入简谐解的 $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$，得到 $(-\omega_0^2 + g/l)\theta = 0$，所以非零振动的 $\omega_0 = \sqrt{g/l}$。精确势能为 $mgl(1-\cos\theta)$，小角近似为 $mgl\theta^2/2$；动能为 $ml^2\dot{\theta}^2/2$。摆长改变惯量与恢复系数，所以不能只比较重力的大小。

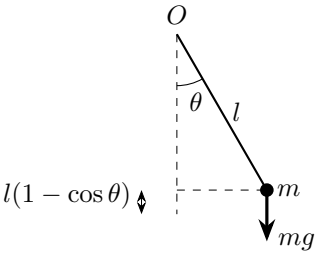


图 4.7: 角坐标同时决定摆球的路径、惯量与势能

图 4.7 中，沿绳的约束力与切向位移垂直，切向运动只需保留重力的切向投影。选 θ 为坐标，速度大小为 $l|\dot{\theta}|$，所以有效惯量是 ml^2；势能在零点附近的二阶项为 $mgl\theta^2/2$，恢复系数是 mgl，二者之比才给出 g/l。

小角近似的对象是整段运动中允许出现的最大摆角，而不只是经过最低点时的瞬时角度。最低点处 $\theta = 0$ 并不能使一个大振幅摆动变成小振幅运动。若要求较高精度，恢复力中被舍去的项从 $-\theta^3/6$ 开始，周期也会出现与振幅有关的修正；采用线性解时应同时说明这一精度范围。

4.3.3 黏滞阻尼与库仑摩擦

黏滞阻力 $-c\dot{x}$ 连续随速度变化，弹簧振子满足 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$。设 $\gamma = c/(2m)$、$\omega_0 = \sqrt{k/m}$，特征方程为 $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$。下面从两根的实部和虚部读出位移的变化。机械能 $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$ 的导数要分别计算两项：

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{m}{2}(2\dot{x}\ddot{x}) + \frac{k}{2}(2x\dot{x}) \\ &= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -c\dot{x}^2 \le 0.\end{aligned}$$

这就是黏滞阻力的功率，随速度平方增大。

干摩擦则在滑动时大小近似恒定，方向随速度反转；静止时静摩擦在允许范围内取值以维持平衡。到达停点后，若弹力大小在最大静摩擦力以内，物体便保持静止。

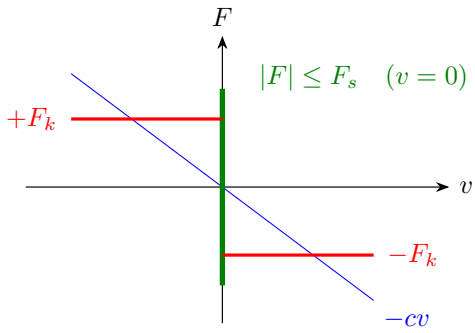


图 4.8: 连续阻力与静摩擦的零速行为不同

图 4.8 的蓝线在零速处连续过原点，表示黏滞阻力随速度消失；红线在速度两侧分别为定值，表示大小为 F_k 的滑动摩擦；绿色线段表示最大静摩擦力为 F_s 时的零速允许范围。静止时由沿运动方向的力平衡确定静摩擦力。

黏滞振动的振幅包络随时间下降。干摩擦问题按滑动方向分段，滑动时摩擦力取固定大小，停点由弹力与最大静摩擦力的比较决定下一段运动。

4.3.4 阻尼率与无量纲阻尼比

对 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$，定义 $\omega_0=\sqrt{k/m}$、$\gamma=c/(2m)$，则方程为 $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$。$\gamma$ 有时间倒数的量纲。再定义无量纲阻尼比 $\zeta=\gamma/\omega_0=c/(2\sqrt{mk})$。特征方程的配方过程为

$$r^2+2\gamma r+\omega_0^2=0 \quad\Longrightarrow\quad (r+\gamma)^2=\gamma^2-\omega_0^2.$$

取平方根，再减去 γ，得到

$$r_\pm=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}=\omega_0(-\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}).$$

欠阻尼、临界阻尼、过阻尼分别由 $0<\zeta<1$、$\zeta=1$、$\zeta>1$ 区分。欠阻尼时，写 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$，特征根为 $-\gamma\pm\mathrm{i}\omega_d$。把 $\mathrm{e}^{(-\gamma\pm\mathrm{i}\omega_d)t}$ 展开，两个实解为 $\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega_d t$ 与 $\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega_d t$。例如图 4.9 的蓝线，取

$$x=\mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos\omega_d t+B\sin\omega_d t).$$

分别对指数因子和括号求导，

$$\begin{aligned}\dot{x} = &-\gamma \mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t)\\ &+\mathrm{e}^{-\gamma t}(-A\omega_d\sin\omega_d t + B\omega_d\cos\omega_d t).\end{aligned}$$

代入 $t=0$，得 $x(0)=A$、$\dot{x}(0)=-\gamma A+\omega_d B$。图取 $x(0)=x_0$、$\dot{x}(0)=0$，所以 $A=x_0$、$B=\gamma x_0/\omega_d$。当 $c=0$ 时，这组初值得到 $x=x_0\cos\omega_0 t$。

把时间改为 $\tau=\omega_0 t$，导数变为 $\dot{x}=\omega_0 x_\tau$、$\ddot{x}=\omega_0^2 x_{\tau\tau}$，方程简化成 $x_{\tau\tau}+2\zeta x_\tau + x=0$。同一个 ζ 决定同一类归一化曲线，而 ω_0^{-1} 决定实际时间尺度。这种无量纲化同时检查了求导中的频率系数。

图 4.9 固定相同的 $x(0)=x_0>0$、$\dot{x}(0)=0$，只比较阻尼比。欠阻尼曲线反复穿过平衡点，振荡包络衰减；临界阻尼曲线在这组初值下从同侧返回；过阻尼曲线的慢指数分量使长期回归更慢。图中各曲线的初始切线都水平，对应同一个零初速度。

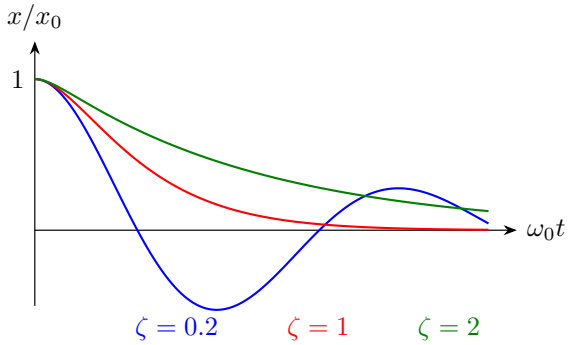


图 4.9: 相同初位移和零初速度下，阻尼比改变回归过程

图上的红线取临界阻尼的重根形式 $(A+Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$。两个初值给出 $A=x_0$、$B-\omega_0 A=0$。绿线由两个不同的实指数合成，长期变化取决于衰减较慢的一项。例 4.8 将用一般初值分别计算这三种曲线。

4.4 转动与追及中的微积分

4.4.1 定轴转动中的两种加速度

绕固定轴转动的刚体有 $M_O=I_O\ddot{\theta}$。角加速度产生的切向加速度为 $r_\perp\ddot{\theta}$，转动还产生法向加速度 $r_\perp\dot{\theta}^2$。端点受恒定切向力矩时，只有角加速度恒定，端点的全部线加速度并不恒定。

求端点加速度时，切向项与法向项应按互相垂直的矢量合成。例如角加速度为常数 β 且从静止开始，先对 $\dot{\omega}=\beta$ 带初值积分：

$$\int_0^{\omega(t)} \mathrm{d}\Omega = \beta \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad \omega(t)-0=\beta[s]_0^t=\beta t.$$

因此 $a_\tau = r_\perp\beta$ 恒定，而 $a_n = r_\perp\beta^2 t^2$ 随时间增加。把“恒定角加速度”简写为“恒定加速度”，就会遗漏越来越明显的转向作用。

图 4.10 将同一端点的加速度分别画在早、晚两个时刻，图中切向方向均为转角增加方向。恒定角加速度 β 给出相同大小的切向箭头；角速度变大后，法向箭头变长，合加速度的大小和方向都会改变：

$$|\boldsymbol{a}| = r_\perp\sqrt{\beta^2+\omega^4}.$$

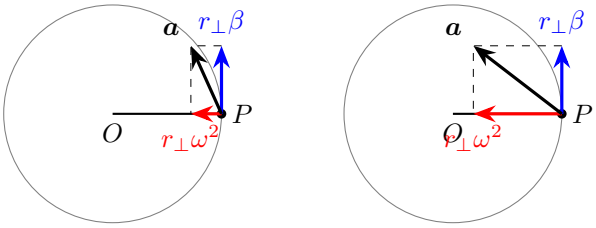


图 4.10: 恒定的是切向项，法向项随角速度平方增加

图中为比较分量，将两个时刻的局部径向统一画成水平；实际空间中的径向和切向随杆一起转动。

4.4.2 质心运动与能量分解

若刚体同时平移和转动，总动能可分解为 $T = Mv_C^2/2 + I_C\omega^2/2$。它来自各质点速度写成质心速度与相对速度后，一次矩交叉项为零。此关系与平行轴定理都依赖质心的定义，不能随意把任一点当成质心。

对多个质点分别写 $m_i\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_i^{\text{int}}$，再相加。成对内力相消后，

$$\sum_i \boldsymbol{F}_i^{\text{ext}} = M\boldsymbol{a}_C.$$

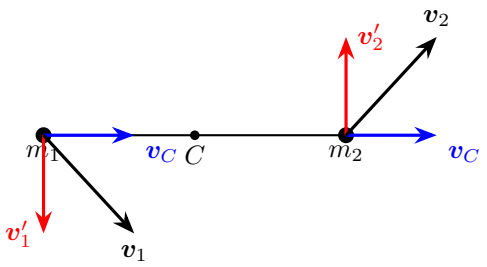
这说明外力合力决定质心平动，却不能仅靠合力判断刚体是否转动。关于质心的外力矩进一步决定转动；只有力矩也为零时，刚体才可能保持不转。对于两质点，质心条件为 $m_1\boldsymbol{r}_1' + m_2\boldsymbol{r}_2' = 0$，因此它们到质心的距离与质量成反比。

将每个速度写成 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_i'$，展开动能后，

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} M v_C^2 + \boldsymbol{v}_C \cdot \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2.$$

由于质心关系对时间求导给出 $\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$，中间项严格消失。这说明质心平动能与相对运动能的分解具有直接的代数依据。

图 4.11 以等质量双球刚体展示速度分解。质心平动速度在两点都相同，相对转动速度则大小相同、方向相反，因此动能展开中的交叉项互相抵消。对不等质量系统，同样由质心系的总动量 $\sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$ 消去交叉项。



图示 $m_1 = m_2$，逆时针转动

图 4.11: 各点共同的平动速度与绕质心的相对速度分开计算

4.4.3　连线方向与追及速度

追及问题需要对同一时间求相对位置的变化。记 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B$，两点距离 $r = |\boldsymbol{R}|$。先对 $r^2 = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}$ 求导：

$$2r\dot{r} = \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{R}} = 2\boldsymbol{R} \cdot (\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B).$$

相遇前 $r > 0$，可以除以 $2r$；取从 B 指向 A 的 $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{R}/r$，得到

$$\dot{r} = (\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) \cdot \boldsymbol{e}_r.$$

只有相对速度沿连线的投影改变距离，横向部分改变连线方向。对称性可大幅简化问题，但须先解释为什么运动规则保持该对称性，再把二维曲线化为径向或边长的一阶方程。

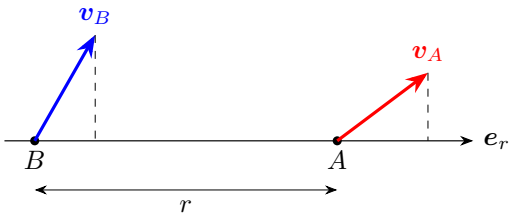


图 4.12: 距离变化率取决于两端速度沿连线的投影之差

图 4.12 中，$\boldsymbol{e}_r$ 从 B 指向 A。短时间内两点沿连线的位移分别为 $(\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{e}_r)\,\mathrm{d}t$ 与 $(\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{e}_r)\,\mathrm{d}t$，相减才是距离的一阶变化。即使两点速率相同，它们沿连线的投影也可能不同，所以不能只用两个速率直接相减。

若连线本身转动，沿垂直方向的相对速度满足 $r\dot\theta=(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{e}_\theta$。这与径向方程共同决定轨迹形状；只求相遇时间时，有时能借助对称性消去角度函数，但消去之前仍需说明它代表的方向关系。求得相遇时间后，还应检查距离在这一段内保持非负，并确实趋于零。

4.5 例题与分析

例 4.1 (指数衰减与指数增长)**.** 某类粒子的衰变常量为 $\lambda>0$，即每个粒子在很短时间 $\mathrm{d}t$ 内的衰变概率为 $\lambda\,\mathrm{d}t$。初始期望数为 N_0，求未衰变期望数和半衰期。另讨论理想种群按连续比例率 λ 增长的数量。

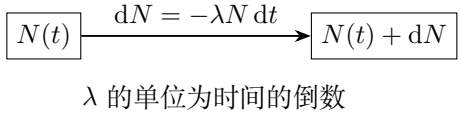


图 4.13: 短时间内的减少量与当时数量成正比

解　把相对变化率积分并代入初值

图 4.13 中的局部规律为 $\dot N=-\lambda N$。$N_0>0$ 时分离变量，

$$\int_{N_0}^{N(t)}\frac{\mathrm{d}n}{n}=-\lambda\int_0^t\mathrm{d}s,\qquad [\ln n]_{N_0}^{N(t)}=-\lambda[s]_0^t.$$

代入两个端点，$\ln N(t)-\ln N_0=-\lambda(t-0)$，即 $\ln[N(t)/N_0]=-\lambda t$。两边取指数，再乘回 N_0，得到

$$N(t)/N_0=\mathrm{e}^{-\lambda t},\qquad \boxed{N(t)=N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}}.$$

由衰减解反求半衰期

令 $N = N_0/2$，则 $-\ln 2 = -\lambda t_{1/2}$，所以 $t_{1/2} = \ln 2/\lambda$。

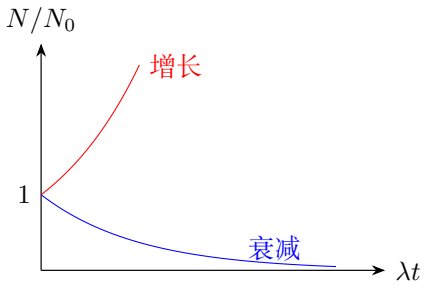


图 4.14: 衰减与增长由同一初值向不同方向演化

指数增长及恒零解

理想种群的方程为 $\dot{N} = +\lambda N$。对 $N_0 > 0$ 仍先分离变量，只改变时间积分前的符号：

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{\mathrm{d}n}{n} = \lambda \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln n]_{N_0}^{N(t)} = \lambda [s]_0^t.$$

因此 $\ln[N(t)/N_0] = \lambda t$，取指数得到图 4.14 的增长支 $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$。$N_0 = 0$ 时两方程都有恒零解，应在除以 N 以前单独保留。

连续比例率与 “每过一个单位时间增加固定百分数” 的离散模型需区分：若离散增长因子为 $1 + p$、单位时长为 Δt，由 $\mathrm{e}^{\lambda \Delta t} = 1 + p$ 取对数，才得到对应连续率 $\lambda = \ln(1 + p)/\Delta t$。

例 4.2 (线性阻力下的滑行)**.** 质量 m 的物体在水平光滑面上仅受阻力 $F = -kv$，$k > 0$。初始 $x = 0, v = v_0 > 0$。求位置、速度以及最终趋近的位置，判断是否在有限时间停下。

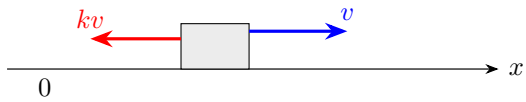


图 4.15: 阻力始终与当前速度相反

解　在正速度支路上求衰减规律

图 4.15 取向右为正，$m\dot{v} = -kv$。初速度为正，在速度不为零的运动段可分离为 $\mathrm{d}v/v = -(k/m)\,\mathrm{d}t$。两侧按初值积分，

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{k}{m} \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln u]_{v_0}^{v(t)} = -\frac{k}{m} [s]_0^t.$$

代入端点，得到 $\ln[v(t)/v_0] = -kt/m$。定义 $\tau = m/k$，对上式取指数，得到 $v(t) = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$。再使用 $x(0) = 0$ 对速度积分，指数中的系数 $-1/\tau$ 使原函数多出 $-\tau$：

$$\begin{aligned} x(t) - 0 &= \int_0^t v_0\mathrm{e}^{-s/\tau}\,\mathrm{d}s = [-v_0\tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t \\ &= -v_0\tau\mathrm{e}^{-t/\tau} - (-v_0\tau\mathrm{e}^{0}) = v_0\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}). \end{aligned}$$

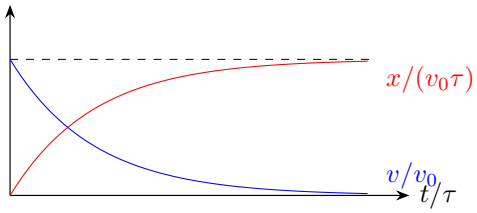


图 4.16: 速度渐近为零，位置渐近到有限值

求极限距离并判断是否有限时停止

图 4.16 显示 $t \to \infty$ 时 $x \to v_0\tau = mv_0/k$；有限 t 时指数始终为正，故没有有限停止时刻。代入 $t = 0$ 得到 $x(0) = 0$，而 $\dot{x} = v_0\tau[-\mathrm{e}^{-t/\tau}(-1/\tau)] = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$，又恢复前面求得的速度。

另在 $v > 0$ 的段内，$mv\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x = -kv$ 可除以 v，变为 $\mathrm{d}v = -(k/m)\,\mathrm{d}x$。取 $x(0) = 0, v(0) = v_0$，将变量与上下限对应后积分：

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}u = -\frac{k}{m}\int_0^x \mathrm{d}\xi, \qquad [u]_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}[\xi]_0^x.$$

所以 $v - v_0 = -kx/m$，即 $v = v_0 - kx/m$。它给出同一极限位置，却不能单独判定到达时间；时间结论须由指数解确定。

例 4.3 (速度与剩余距离成反比)**.** 追逐者与静止目标初距 L，初速 v_0，随后速度满足 $v = v_0L/r$，r 为剩余距离。求相遇时间。若两者都按同样规则对称迎面运动，初速各为 v_0，相遇时间怎样改变?

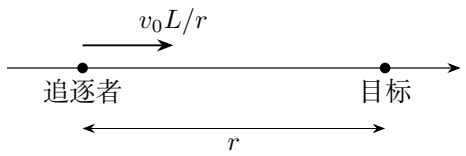


图 4.17: 剩余距离缩短时速度增加

解　用剩余距离的减小确定微分方程符号

图 4.17 的距离随时间减小，因此 $\dot r = -v_0 L/r$，不是正号。先分离变量 $r\,\mathrm{d}r = -v_0 L\,\mathrm{d}t$。从初距 $r(0) = L$ 开始，

$$\int_L^{r(t)} \rho\,\mathrm{d}\rho = -v_0 L \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_L^{r(t)} = -v_0 L[s]_0^t.$$

代入上下限，得到 $(r^2 - L^2)/2 = -v_0 L t$，移项后 $r^2 = L^2 - 2v_0 L t$。相遇时 $r = 0$，所以 $2v_0 L t_c = L^2$，即 $t_c = L/(2v_0)$。

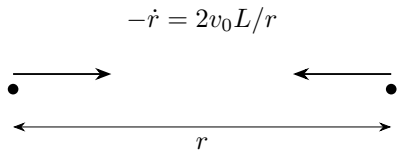


图 4.18: 对称迎面运动时，闭合速率为两者速度之和

双向接近时重新计算闭合速率

图 4.18 中，两者各自朝对方前进，闭合速率为两个速率之和，所以 $\dot r = -2v_0 L/r$。乘以 $r\,\mathrm{d}t$，再使用同一初值 $r(0) = L$：

$$\int_L^{r(t)} \rho\,\mathrm{d}\rho = -2v_0 L \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_L^{r(t)} = -2v_0 L[s]_0^t.$$

所以 $(r^2 - L^2)/2 = -2v_0 L t$，即 $r^2 = L^2 - 4v_0 L t$。令 $r = 0$，得到 $t_c = L/(4v_0)$。两结果都是理想速度规律一直外推到 $r = 0$ 的极限时间；速度本身在那里发散。若存在速度上限，应在达到上限后换用新规律。

例 4.4 (容器泄流)**.** 竖直圆柱容器截面积 S，初始液面距底部孔口的高度为 H，小孔面积 $S_0 \ll S$。液体不可压、上下均受大气压，忽略损耗。求液面距孔口的高度 $h(t)$ 及从 H 降至 $H/2$ 的时间。

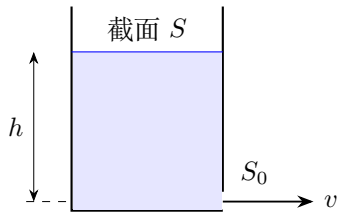


图 4.19: 液面下降与孔口流出由体积守恒联系

解　由孔口出流与容器体积变化列连续方程

图 4.19 中，液面与孔口均受大气压，相同压强项在能量关系中抵消。液面处单位质量的重力势能为 gh；孔口高度取零，单位质量动能为 $v^2/2$。因 $S_0 \ll S$，液面速度相对孔口可忽略，故 $gh = v^2/2$、$v = \sqrt{2gh}$。

短时间内流出体积为 $S_0 v\,\mathrm{d}t$，容器内体积从 Sh 变为 $S(h+\mathrm{d}h)$，所以变化量为 $S\,\mathrm{d}h < 0$。二者相加应为零，得到

$$S\dot{h} = -S_0\sqrt{2gh}, \qquad \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{S_0}{S}\sqrt{2g}\,\mathrm{d}t.$$

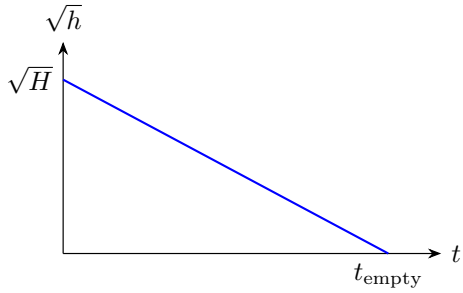


图 4.20: 根号高度随时间线性下降

带初始液面积分，并在排空处终止支路

按 $h : H \to h(t)$、$t : 0 \to t$ 写出两个有向积分，用 η, s 区分积分变量与上限：

$$\begin{aligned}\int_H^{h(t)} \eta^{-1/2}\,\mathrm{d}\eta &= -\frac{S_0}{S}\sqrt{2g}\int_0^t \mathrm{d}s,\\ \left[2\sqrt{\eta}\right]_H^{h(t)} &= -\frac{S_0}{S}\sqrt{2g}\,[s]_0^t,\\ 2(\sqrt{h}-\sqrt{H}) &= -\frac{S_0}{S}\sqrt{2g}\,t.\end{aligned}$$

除以二并移项，图 4.20 对应 $\sqrt{h} = \sqrt{H} - (S_0/S)\sqrt{g/2}\,t$。只要右侧非负，才可以取平方写成

$$\boxed{h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{S_0}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t\right)^2}.$$

为求半高时间，代入 $h = H/2$，先解线性方程

$$\frac{S_0}{S}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t_{1/2} = \sqrt{H} - \sqrt{H/2} = \sqrt{H}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

所以

$$t_{1/2} = \boxed{\frac{S}{S_0}\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

排空时取 $\sqrt{h}=0$，同理得到 $t_{\text{empty}} = (S/S_0)\sqrt{2H/g}$。在 $0 \le t \le t_{\text{empty}}$，图中 $\sqrt{h}$ 沿直线降到零。排空后取 $h=0$。由流量守恒，液面速率为 $(S_0/S)v$，所以被忽略的动能与孔口动能之比为 $(S_0/S)^2$。

例 4.5 (等温大气压强)**.** 大气为理想气体，摩尔质量 μ，温度恒为 T，重力加速度 g 视为常数。地面压强 p_0，求高度 z 处的压强和密度。

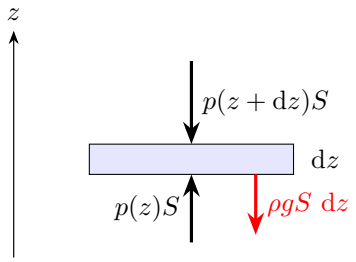


图 4.21: 水平薄层上下表面的压力不同

解　对气体薄层列受力平衡并消去密度

图 4.21 薄层质量为 $\rho S\,\mathrm{d}z$。竖直平衡给出 $p(z)S - p(z+\mathrm{d}z)S - \rho g S\,\mathrm{d}z = 0$，即 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\rho g$。图中的红色向下箭头是薄层自重，不能在平衡式中遗漏。理想气体满足 $pV = \nu RT$，薄层质量为 $\mu\nu$，所以 $\rho = \mu\nu/V = \mu p/(RT)$。代入静水平衡式，得到 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = -\mu g p/(RT)$，再分离变量并用 $p(0)=p_0$ 积分，

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\,\mathrm{d}z, \qquad H_s = \frac{RT}{\mu g}.$$

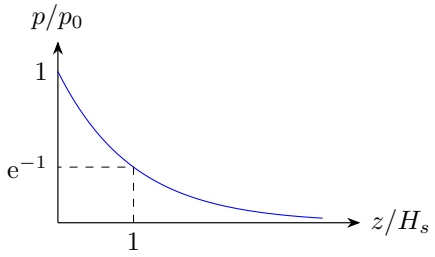


图 4.22: 压强和密度具有同一标高

由地面端点得到压强与密度分布

在 T,μ,g 均保持不变的近似下，从地面 $z=0,p=p_0$ 积分到所求高度：

$$\begin{aligned}\int_{p_0}^{p(z)}\frac{\mathrm{d}P}{P}&=-\frac{\mu g}{RT}\int_0^z\mathrm{d}\zeta,\\ [\ln P]_{p_0}^{p(z)}&=-\frac{\mu g}{RT}[\zeta]_0^z,\\ \ln p(z)-\ln p_0&=-\frac{\mu g}{RT}(z-0)=-\frac{z}{H_s}.\end{aligned}$$

取指数得到 $p(z)/p_0=\mathrm{e}^{-z/H_s}$，所以

$$\boxed{p(z)=p_0\mathrm{e}^{-z/H_s}},\qquad \rho(z)=\frac{\mu}{RT}p(z)=\frac{\mu p_0}{RT}\mathrm{e}^{-z/H_s}.$$

图 4.22 因而同时表示压强和密度的归一化变化。H_s 的单位为长度，温度越高衰减越慢；使用中要求温度与 g 在该高度范围内近似不变。

例 4.6 (恒定切向力驱动的细杆)**.** 均匀细杆质量 m、长 L，一端绕固定光滑轴 O 自由转动。另一端始终受大小 F、垂直于杆的力，力矩方向不变。忽略重力，从静止开始求转角、角速度和端点加速度分量。

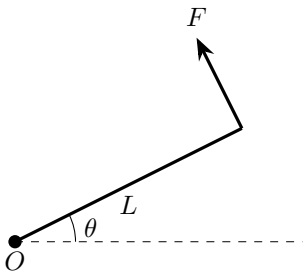


图 4.23: 力随杆转动，保持垂直于杆

解　由恒定力矩求角加速度

图 4.23 的力臂始终为 L，力矩 $M_O=FL$。用上一讲积分所得 $I_O=mL^2/3$，

$$\beta=\ddot{\theta}=\frac{M_O}{I_O}=\frac{FL}{mL^2/3}=\frac{3F}{mL}.$$

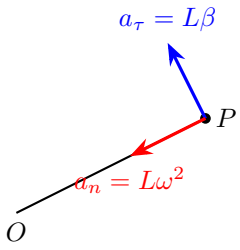


图 4.24: 端点加速度分为切向和法向

逐次积分引入初值并分解端点加速度

先用静止初值 $\omega(0)=0$ 积分角加速度，再用初角 $\theta(0)=\theta_0$ 积分角速度：

$$\omega(t)-0=\int_0^t \beta\,\mathrm{d}s=[\beta s]_0^t=\beta t,$$
$$\theta(t)-\theta_0=\int_0^t \beta s\,\mathrm{d}s=\left[\frac{\beta s^2}{2}\right]_0^t=\frac{\beta t^2}{2}.$$

图 4.24 中切向加速度为 $L\beta=3F/m$，法向加速度为 $L\omega^2=L\beta^2t^2$，指向轴，所以合加速度不恒定。力矩所做的功为

$$W=\int_{\theta_0}^{\theta} FL\,\mathrm{d}\phi=FL[\phi]_{\theta_0}^{\theta}=FL(\theta-\theta_0).$$

而 $\frac{1}{2}I_O\omega^2=\frac{1}{2}I_O\beta^2t^2=FL\,\beta t^2/2=FL(\theta-\theta_0)$，其中用了 $I_O\beta=FL$，故功与动能一致。若力方向在空间固定而不随杆转动，力矩一般不再恒定，本题解法就不适用。

例 4.7 (弹簧振子的初值与能量)**.** 光滑水平面上质量 m 的物体连接劲度系数 k 的弹簧。平衡位置为 $x=0$，初始 x_0, v_0。求运动、振幅与机械能，并画出相平面关系。

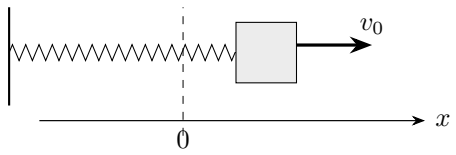


图 4.25: 位移相对平衡位置量取

解　用初位移、初速度确定两个独立解的系数

图 4.25 以平衡位置为原点，弹力 $-kx$，故 $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$，$\omega_0=\sqrt{k/m}$。试取 $x=\mathrm{e}^{rt}$，有 $\ddot{x}=r^2\mathrm{e}^{rt}$，代入并约去指数得 $r^2+\omega_0^2=0$。两根 $r=\pm\mathrm{i}\omega_0$ 由欧拉公

式给出两个独立实解 $\cos\omega_0 t$ 与 $\sin\omega_0 t$，故写成 $x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$。代入 $t=0$ 得 $C_1 = x_0$；逐项用链式法则 $\mathrm{d}\cos(\omega_0 t)/\,\mathrm{d}t = -\sin(\omega_0 t)\omega_0$、$\mathrm{d}\sin(\omega_0 t)/\,\mathrm{d}t = \cos(\omega_0 t)\omega_0$，得到 $v = -\omega_0 C_1\sin\omega_0 t + \omega_0 C_2\cos\omega_0 t$，再代入初速度，得 $\omega_0 C_2 = v_0$。所以

$$\boxed{x = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t},$$

$$v = -\omega_0 x_0\sin\omega_0 t + v_0\cos\omega_0 t.$$

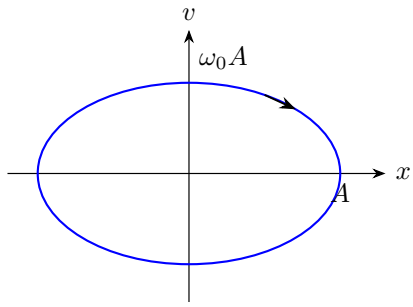


图 4.26: 守恒能量对应相平面椭圆

从相图确定振幅、相位与能量

将位移写成 $A\cos(\omega_0 t+\phi)$，展开角和并比较余弦、正弦系数，得到 $A\cos\phi = x_0$、$-A\sin\phi = v_0/\omega_0$。两式平方相加：

$$A^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2.$$

由于振幅 $A \geq 0$，取正根得到 $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$。若两个初值都为零，则物体始终静止在原点，以下相椭圆关系只针对 $A > 0$。

机械能求导时，分别对动能和势能使用链式法则，再代入 $m\dot{v} = -kx$：

$$\dot{E} = \frac{m}{2}(2v\dot{v}) + \frac{k}{2}(2x\dot{x}) = v(m\dot{v} + kx) = 0.$$

所以

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

因为 $\dot{E} = 0$，能量等于初值 $E(0) = mv_0^2/2 + kx_0^2/2 = kA^2/2$。将一般时刻的能量式除以 $kA^2/2$，再用 $k = m\omega_0^2$，便得到图 4.26 的 $x^2/A^2 + v^2/(\omega_0^2 A^2) = 1$。在右端 $x = A, v = 0$，加速度为 $-\omega_0^2 A < 0$，下一瞬速度变负，所以沿相椭圆顺时针运动。相图不是物体在空间中的椭圆路径。

例 4.8 (阻尼振动的三种情形)**.** 弹簧振子受黏滞阻力 $-c\dot{x}$，$m,k,c>0$。以 $\gamma=c/(2m)$、$\omega_0=\sqrt{k/m}$ 表示不同阻尼条件下满足 $x(0)=x_0,\dot{x}(0)=v_0$ 的解，并检查机械能变化。

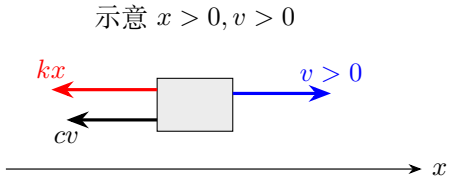


图 4.27: 弹力与阻力对应不同的运动变量

解　建立运动方程并求特征根

图 4.27 所示状态下两力都向左；以 $+x$ 为正，弹力和阻力的分量分别为 $-kx$ 和 $-c\dot{x}$。除以质量后，方程为

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0.$$

特征根的计算先令 $x=\mathrm{e}^{rt}$，则 $\dot{x}=r\mathrm{e}^{rt}$、$\ddot{x}=r^2\mathrm{e}^{rt}$。代入方程并除以非零的 e^{rt}，得到 $r^2+2\gamma r+\omega_0^2=0$；配方为 $(r+\gamma)^2=\gamma^2-\omega_0^2$，再开方并移项，得到

$$r_\pm=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}.$$

欠阻尼：由复根组合实解并代入初值

欠阻尼 $0<\gamma<\omega_0$ 时，记 $\Omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$。复根为 $-\gamma\pm\mathrm{i}\Omega$，由欧拉公式组合成实解 $x=\mathrm{e}^{-\gamma t}(C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t)$。初位移给出 $C_1=x_0$。求导时同时对指数因子与括号求导：

$$\dot{x}=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[-\gamma(C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t)-\Omega C_1\sin\Omega t+\Omega C_2\cos\Omega t\right].$$

再令 $t=0$，得到 $v_0=-\gamma C_1+\Omega C_2$，所以 $C_2=(v_0+\gamma x_0)/\Omega$，即

$$x=\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[x_0\cos\Omega t+\frac{v_0+\gamma x_0}{\Omega}\sin\Omega t\right].$$

临界阻尼：用重根构造第二个独立解

临界阻尼 $\gamma=\omega_0$ 时两根重合，只写两个相同的指数函数不能给出两个独立常数。此时令 $x=\mathrm{e}^{-\omega_0 t}y(t)$，逐次求导为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\dot{y}-\omega_0\mathrm{e}^{-\omega_0 t}y=\mathrm{e}^{-\omega_0 t}(\dot{y}-\omega_0 y),\\ \ddot{x}&=\mathrm{e}^{-\omega_0 t}[-\omega_0(\dot{y}-\omega_0 y)+\ddot{y}-\omega_0\dot{y}]\\ &=\mathrm{e}^{-\omega_0 t}(\ddot{y}-2\omega_0\dot{y}+\omega_0^2y).\end{aligned}$$

代入 $\ddot{x}+2\omega_0\dot{x}+\omega_0^2x=0$ 并约去指数因子，各项实际组合为

$$\ddot{y}-2\omega_0\dot{y}+\omega_0^2y+2\omega_0(\dot{y}-\omega_0y)+\omega_0^2y=0.$$

$\dot{y}$ 项与 y 项分别抵消，只剩 $\ddot{y}=0$。先积分 $\dot{y}(t)-\dot{y}(0)=\int_0^t 0\,\mathrm{d}s=0$，令常值 $\dot{y}(0)=C_2$；再积分

$$y(t)-y(0)=\int_0^t C_2\,\mathrm{d}s=[C_2s]_0^t=C_2t.$$

令 $y(0)=C_1$，便得到 $y=C_1+C_2t$。

由 $x(0)=C_1=x_0$ 和 $v_0=C_2-\omega_0C_1$，得 $C_2=v_0+\omega_0x_0$，因此

$$x=\mathrm{e}^{-\omega_0t}[x_0+(v_0+\omega_0x_0)t].$$

过阻尼：对两个实指数分别代入初值

过阻尼 $\gamma>\omega_0$ 时两根不同且均为负实数，通解为 $x=A\mathrm{e}^{r_+t}+B\mathrm{e}^{r_-t}$。两个初值给出 $A+B=x_0$、$r_+A+r_-B=v_0$。从第二式减去第一式的 r_- 倍，得 $(r_+-r_-)A=v_0-r_-x_0$；再由 $B=x_0-A$ 求出另一常数。因此

$$x=A\mathrm{e}^{r_+t}+B\mathrm{e}^{r_-t},\quad A=\frac{v_0-r_-x_0}{r_+-r_-},\quad B=\frac{r_+x_0-v_0}{r_+-r_-}.$$

图 4.28 取同一初值 $x_0>0, v_0=0$，横轴为 $\tau=\omega_0t$，以 $\zeta=\gamma/\omega_0$ 比较三种阻尼。三条曲线均从 $x/x_0=1$ 水平出发；欠阻尼反复穿过零点，临界阻尼与过阻尼在这组初值下从同侧返回。图示初值不能推广为任意初值下位移必定单调的结论。

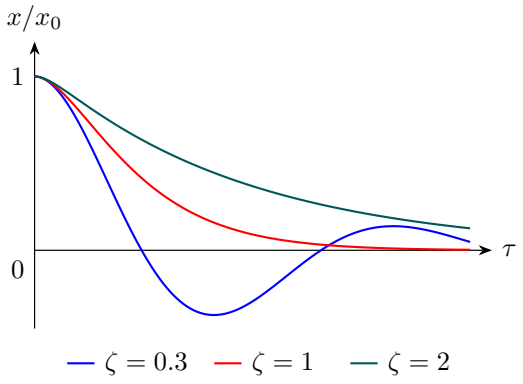


图 4.28: 同一初位移、零初速度下三种阻尼的位移过程

阻尼力做功与机械能

三种情形的机械能均为 $E = m\dot{x}^2/2 + kx^2/2$。对时间求导，再用原方程 $m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$，得到

$$\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -c\dot{x}^2 \le 0.$$

“能量单调减少”不能误写成“位移单调减少”。

例 4.9 (电容的充电与放电)**.** 电阻 R、电容 C 串联接到理想恒压电源 $\mathcal{E}$，初始电容不带电。求电容电压与充电电流。充电充分久后断开电源，使同一电阻与电容形成放电回路，再求电压和电流。

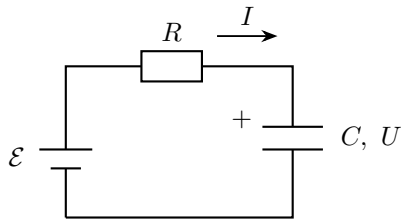


图 4.29: 充电时选电源正端经电阻流向电容为正电流

解　把充电方程转为与终值之差的衰减

图 4.29 中 $Q = CU, I = \dot{Q} = C\dot{U}$。回路电压关系为 $\mathcal{E} = RI + U$，代入 $I = C\dot{U}$ 得 $RC\dot{U} + U = \mathcal{E}$。令 $\tau = RC$、$W = \mathcal{E} - U$。由于电源恒压，$\dot{W} = -\dot{U}$，方程化为 $\dot{W} = -W/\tau$。初始不带电意味着 $U(0) = 0$、$W(0) = \mathcal{E}$，所以

$$\int_{\mathcal{E}}^{W(t)} \frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln w]_{\mathcal{E}}^{W(t)} = -\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

代入端点得 $\ln[W(t)/\mathcal{E}] = -t/\tau$，取指数后有 $W(t) = \mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}$。用 $U = \mathcal{E} - W$ 换回，并逐项求导：$\dot{U} = -\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}(-1/\tau) = \mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}/\tau$。再乘 C、用 $\tau = RC$，得到

$$\boxed{U = \mathcal{E}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})}, \qquad \boxed{I = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}}.$$

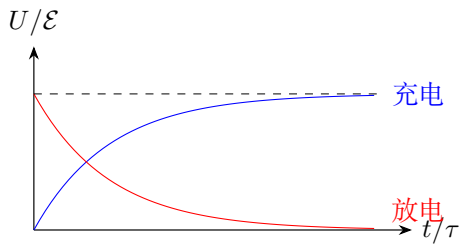


图 4.30: 充电电压上升，放电电压下降

放电初值和电流方向

放电时另取开始放电为时间零，并仍以流入电容正极板的电流为正。图 4.31 中电源已移出闭合回路，电容电压驱动反向电流，方程变为 $RC\dot{U}+U=0$。

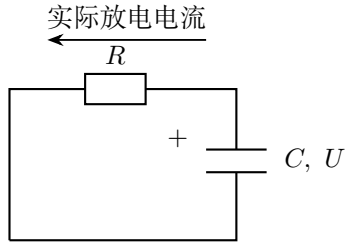


图 4.31: 放电回路中的实际电流从电容正极板流出

初值 $U(0)=\mathcal{E}$ 对应新的积分限，

$$\int_{\mathcal{E}}^{U(t)}\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t\mathrm{d}s,\qquad[\ln u]_{\mathcal{E}}^{U(t)}=-\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

代入端点得 $\ln U(t)-\ln\mathcal{E}=-t/\tau$，所以 $U/\mathcal{E}=\mathrm{e}^{-t/\tau}$，即 $U=\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}$。

对它求导并乘 C，得到 $I=C[-\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}/\tau]=-\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}/R$。电容电量在充、放电时分别为 $Q=C\mathcal{E}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$ 与 $Q=C\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau}$。图 4.30 的放电曲线从切换时的电压出发。负电流沿原正极板流出，电压在切换处连续，电流则由新回路的电阻和驱动电压决定。

例 4.10 (浮柱的竖直小振动)**.** 均匀柱体长 L、截面积 S、密度 $\rho_b<\rho_f$，竖直漂浮于密度 ρ_f 的液体上。只允许竖直运动，忽略液体附加惯性和阻力。求平衡浸入深度及小振动周期。

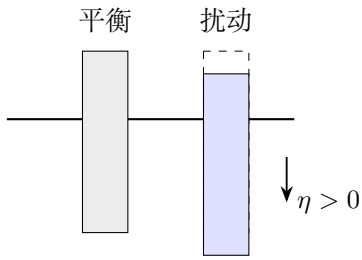


图 4.32: 平衡状态与向下偏移后的浸入深度

解　以平衡浸深为基准写出浮力增量

图 4.32 的平衡浮力等于柱重：$\rho_f g S b_0 = \rho_b g S L$，所以 $b_0 = \rho_b L/\rho_f$。以向下偏移 η 为正，浸深变为 $b_0+\eta$，浮力增加 $\rho_f g S\eta$，净力指向上方：

$$\rho_b S L\ddot{\eta} = -\rho_f g S\eta.$$

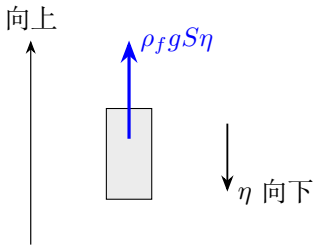


图 4.33: 平衡重量抵消后只剩恢复力

浮力的线性项与周期

扰动后，向下的重量仍为 $\rho_b g S L$，向上的浮力为 $\rho_f g S(b_0+\eta)$。利用平衡式 $\rho_b g S L = \rho_f g S b_0$，两者相减只剩 $-\rho_f g S\eta$，这就是图 4.33 的恢复力。再将运动方程除以正的惯性质量 $\rho_b S L$，得到 $\ddot{\eta}+[\rho_f g/(\rho_b L)]\eta = 0$。取简谐形式 $\eta = A\cos(\omega_0 t+\phi)$，求导有 $\dot{\eta} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)$、$\ddot{\eta} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi) = -\omega_0^2\eta$。代入方程，非零振动要求 $-\omega_0^2+\rho_f g/(\rho_b L) = 0$。因此取正的角频率，并用 $T = 2\pi/\omega_0$ 换算周期，得到

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_f g}{\rho_b L}}}, \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_b L}{\rho_f g}}}.$$

振幅必须小于 $\min(b_0, L-b_0)$，保证上下端都不跨过改变受力形式的端点。在此理想柱形模型中恢复力恰好线性；实际液体的运动惯性和阻力会改变周期与衰减。

例 4.11 (卫星的径向微扰)**.** 卫星原在中心质量 M 周围作半径 r_0 的圆周运动。忽略卫星质量对中心天体的影响，瞬时给予很小的径向速度 u，不改变切向速度。求一阶近似下径向偏移 $\eta(t)$。

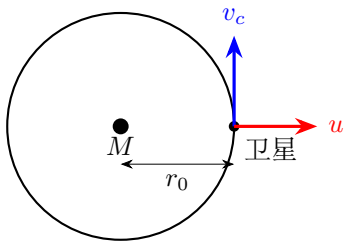


图 4.34: 径向冲量不改变关于中心的角动量

解　保留径向冲量不改变的角动量

记 $\mu = GM$。原圆轨道满足 $v_c^2/r_0 = \mu/r_0^2$，因此 $v_c = \sqrt{\mu/r_0}$、$n = v_c/r_0 = \sqrt{\mu/r_0^3}$。图 4.34 的径向冲量与半径平行，对中心无力矩，故单位质量角动量保持 $h = r_0 v_c = \sqrt{\mu r_0}$。

为明确径向运动方程，将位置写成 $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$。在固定坐标中 $\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$、$\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$，逐分量应用链式法则，得到 $\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot\theta \boldsymbol{e}_\theta$、$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = -\dot\theta \boldsymbol{e}_r$。先用乘积法则求速度，再对速度的两项分别求导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot r \boldsymbol{e}_r + r\dot\theta \boldsymbol{e}_\theta,\\ \boldsymbol{a} &= \ddot r \boldsymbol{e}_r + \dot r\dot\theta \boldsymbol{e}_\theta + (\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\boldsymbol{e}_\theta - r\dot\theta^2 \boldsymbol{e}_r\\ &= (\ddot r - r\dot\theta^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\boldsymbol{e}_\theta.\end{aligned}$$

将径向加速度代入牛顿第二定律，并用单位质量角动量 h 表示角速度，得到

$$\ddot r - r\dot\theta^2 = -\frac{\mu}{r^2}, \qquad r^2\dot\theta = h.$$

代入 $\dot\theta = h/r^2$，得到 $\ddot r = h^2/r^3 - \mu/r^2$。

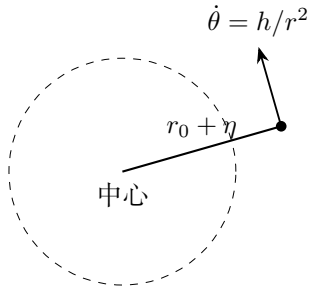


图 4.35: 扰动后半径与角速度联动

同时展开引力与离心项

令 $r = r_0 + \eta$，$\varepsilon = \eta/r_0$，$|\varepsilon| \ll 1$。图 4.35 的角动量约束使离心项为 $\mu r_0/(r_0+\eta)^3$。先提出各分母中的 r_0，再分别用 $(1+\varepsilon)^{-3} = 1 - 3\varepsilon + O(\varepsilon^2)$、$(1+\varepsilon)^{-2} = 1 - 2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$，得到

$$\ddot{\eta} = \frac{\mu}{r_0^2}\left(1 - \frac{3\eta}{r_0}\right) - \frac{\mu}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\eta}{r_0}\right) + O(\mu\eta^2/r_0^4) = -n^2\eta + O(\mu\eta^2/r_0^4).$$

用径向冲量确定振幅

上式中两个常数项 μ/r_0^2 恰好抵消，一次项系数为 $(-3+2)\mu/r_0^3 = -n^2$。舍去二阶项后，试取 $\eta = \mathrm{e}^{st}$，代入得到 $(s^2 + n^2)\mathrm{e}^{st} = 0$，故 $s = \pm \mathrm{i}n$。由两个指数解组合实解，得 $\eta = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$。逐项求导得 $\dot{\eta} = -nC_1 \sin nt + nC_2 \cos nt$。初值 $\eta(0) = 0$ 给出 $C_1 = 0$，$\dot{\eta}(0) = u$ 给出 $nC_2 = u$，因此 $\boxed{\eta = (u/n)\sin nt}$。要求 $|u| \ll nr_0 = v_c$。径向频率与原圆轨道角频率相同；同时 $\dot{\theta} \simeq n(1 - 2\eta/r_0)$，故半径增加时角速度减小。

例 4.12 (有干摩擦的弹簧首次停点)**.** 水平弹簧振子质量 m、劲度系数 k，静、动摩擦系数同为 μ。从 $x = -A_0$ 处静止释放。求它能够启动后的首次停点，并确定“首次停在原点右侧且不再反向”的 A_0 范围。

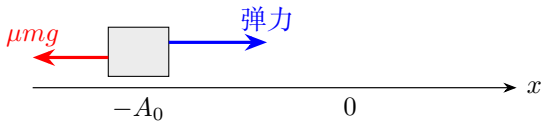


图 4.36: 向右滑动时摩擦力向左

解　先判断能否启动，再求首个滑动半周

设 $d = \mu mg/k$。图 4.36 中初始弹力超过最大静摩擦才会启动，故要求 $A_0 > d$。向右滑动时 $m\ddot{x} = -kx - \mu mg = -k(x+d)$，令 $y = x + d$。由于 d 是常量，$\ddot{y} = \ddot{x}$，方程变成 $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$，其中 $\omega_0^2 = k/m$。

平移坐标后求通解并代入释放初值

试取 $y = \mathrm{e}^{rt}$，代入 $\ddot{y} = r^2\mathrm{e}^{rt}$，约去非零指数得到 $r^2 + \omega_0^2 = 0$。两根 $\pm\mathrm{i}\omega_0$ 对应实通解及其导数

$$y = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t,$$
$$\dot{y} = -\omega_0 C_1 \sin\omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos\omega_0 t.$$

代入两个初值，$y(0)=C_1=d-A_0$，$\dot y(0)=\omega_0 C_2=0$，所以 $C_2=0$。由此 $y=(d-A_0)\cos\omega_0 t$，最后换回 $x=y-d$，得到

$$x(t)=-d-(A_0-d)\cos\omega_0 t,\qquad \omega_0=\sqrt{k/m}.$$

对位移求导时，常量 $-d$ 的导数为零，余弦项需乘内层导数 ω_0，因此 $v=-(A_0-d)[-\sin\omega_0 t]\omega_0=\omega_0(A_0-d)\sin\omega_0 t$。在 $0<t<\pi/\omega_0$ 内，$A_0>d$、$\sin\omega_0 t>0$，物体向右滑动，摩擦力始终向左。首次速度再次为零发生在 $t_1=\pi/\omega_0$，此时 $\cos\pi=-1$，所以 $x_1=-d+(A_0-d)=A_0-2d$。

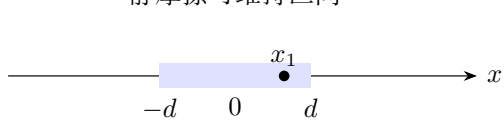


图 4.37: 停点落入静摩擦可维持的区间才会停住

首次停下后的静摩擦

按图 4.37，停住以后需要的静摩擦为 $k|x_1|$。题目要求 $x_1>0$ 且 $kx_1\le\mu mg$，即

$$0<A_0-2d\le d\quad\Rightarrow\quad \boxed{2d<A_0\le 3d}.$$

上端等号应保留，因为最大静摩擦可以恰好维持平衡。$A_0\le d$ 时根本未启动；$d<A_0\le 2d$ 时首次停点不在右侧；$A_0>3d$ 时到达首次停点后会向左反向，届时滑动摩擦也必须反向。

还可从已求出的位移、速度式消去时间。将 $x+d=-(A_0-d)\cos\omega_0 t$ 与 $v/\omega_0=(A_0-d)\sin\omega_0 t$ 平方相加，利用 $\sin^2+\cos^2=1$，得到该段相平面关系

$$(x+d)^2+(v/\omega_0)^2=(A_0-d)^2,\qquad v\ge 0.$$

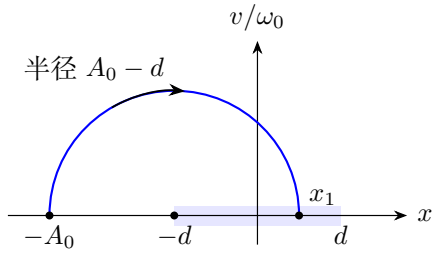


图 4.38: 向右滑动段的相图，示意 $2d<A_0<3d$

图 4.38 的上半圆以 $x=-d$ 为中心，箭头从左停点指向右停点；右停点进入蓝色静摩擦区间便停住。若在右端开始向左滑动，摩擦力改向右，方程变为 $\ddot{x}+\omega_0^2(x-d)=0$，相图接入以 $x=+d$ 为圆心的下半圆。

例 4.13 (从静止堆积中提起链条)**.** 均匀链条线密度 λ、总长 L，堆在水平地面。初始已有长度 $x_0\in(0,L)$ 竖直拉直并静止，其余链节静止堆积。对上端施加恒定向上拉力 $F_0>\lambda gL$，随后链节从堆中加入竖直运动部分。忽略横向运动，求拉直长度达到 x 时的速度，并讨论 $x_0\to 0$ 的理想极限。

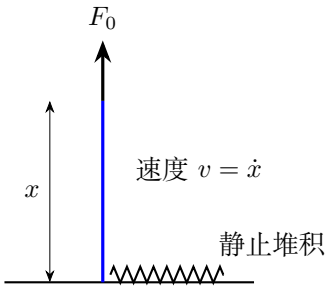


图 4.39: 运动部分质量随提起长度增加

解　对旧链段和新加入链节一起列短时动量关系

图 4.39 中运动部分质量为 λx。在 $\mathrm{d}t$ 内，新加入长度为 $\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t$，质量为 $\mathrm{d}m=\lambda v\,\mathrm{d}t$；进入前的竖直速度为零，进入后与运动部分一起以速度 $v+\mathrm{d}v$ 运动。对这段时间内的旧运动部分和新加入链节计算动量差，

$$(\lambda x+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)-\lambda x v=\lambda x\ \mathrm{d}v+v\ \mathrm{d}m+O(\mathrm{d}t^2).$$

新链节原先没有竖直动量，因此合外力冲量必须同时提供右侧两项。

除以 $\mathrm{d}t$ 并取极限，得到

$$F_0-\lambda g x=\frac{\mathrm{d}(\lambda x v)}{\mathrm{d}t}=\lambda x\dot{v}+\lambda v^2.$$

以 x 为自变量，链式法则给出 $\dot{v}=(\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x)\dot{x}=v\ \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$。令 $w=v^2$，则 $w'=2v\ \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，所以 $\dot{v}=w'/2$。代回并除以 λ，再将等式乘以 $2x$，得到

$$\frac{x}{2}w'+w=\frac{F_0}{\lambda}-gx,\quad \frac{\mathrm{d}(x^2w)}{\mathrm{d}x}=2\frac{F_0}{\lambda}x-2gx^2.$$

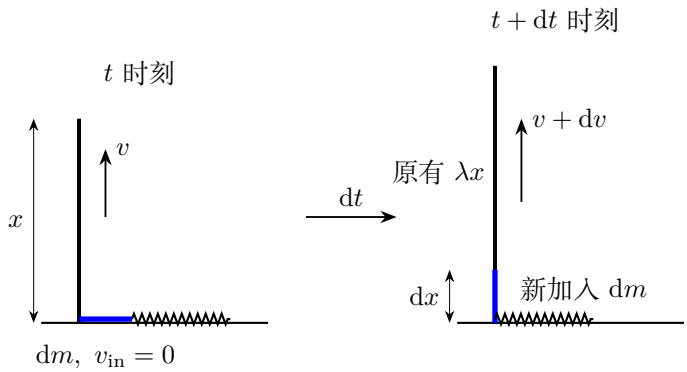


图 4.40: 同一批链节在短时间内由静止并入运动部分

以位置为变量积分并限制可达区间

第二式左边是乘积 x^2w 的导数，因为 $(x^2w)' = 2xw + x^2w'$。用 $v(x_0) = 0$，从 x_0 到 x 积分：

$$x^2w(x) - x_0^2w(x_0) = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{2F_0}{\lambda}\xi - 2g\xi^2\right) \mathrm{d}\xi = \left[\frac{F_0}{\lambda}\xi^2 - \frac{2g}{3}\xi^3\right]_{x_0}^{x}.$$

将 $w(x_0) = 0$ 与两个积分端点代入，得到

$$x^2w(x) = \frac{F_0}{\lambda}(x^2 - x_0^2) - \frac{2g}{3}(x^3 - x_0^3).$$

再除以 $x^2 > 0$，得到

$$\boxed{v^2(x) = \frac{F_0}{\lambda}\left(1 - \frac{x_0^2}{x^2}\right) - \frac{2g}{3}\left(x - \frac{x_0^3}{x^2}\right)}.$$

在持续向上运动的支路，速度 $v(x)$ 取此式右侧的正平方根；在初始端点 $x = x_0$ 取 $v = 0$。不能由平方速度另取负根来表示本题的提起过程。图 4.40 的加速过程不能忽略。运动部分的质心在高度 $x/2$，所以机械能为 $E = \lambda x v^2/2 + \lambda g x^2/2$。两项求导时都要考虑 x 变化：

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\lambda}{2}\frac{\mathrm{d}(xv^2)}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda g}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\lambda}{2}(\dot{x}\,v^2 + x\,2v\dot{v}) + \lambda g x\dot{x} \\ &= \frac{\lambda}{2}v^3 + \lambda x v\dot{v} + \lambda g x v.\end{aligned}$$

将动量方程乘以 v，得 $\lambda x v\dot{v} = F_0 v - \lambda g x v - \lambda v^3$。

代回后重力项抵消，得到 $\dot{E} = F_0 v - \lambda v^3/2$。损失功率为 $\lambda v^3/2$，所以不能只用拉力功等于最终机械能。

题设的 $F_0>\lambda g L$ 还保证运动确能持续到 L：上面积分的被积式为 $2x(F_0/\lambda - gx)>0$，所以在任意 $x_0<x\le L$ 都有 $x^2 w(x)>0$，不会在途中提前停下。

对固定 $x>0$ 取 $x_0\to 0, v^2 = F_0/\lambda - 2gx/3$，在 $x=L$ 时得 $v_L^2 = F_0/\lambda - 2gL/3$。此极限在 $x=0$ 是奇异的，不能同时声称零质量运动部分从零速度连续按该极限公式启动；保留 $x_0>0$ 能使初值问题明确。

例 4.14 (等边三角形的循环追逐)**.** 三个小虫初始位于边长 a 的等边三角形顶点，各以恒定速率 v 追向下一个小虫的即时位置，追逐方向依次为 $A\to B\to C\to A$。求相遇时间及轨迹的径向规律。

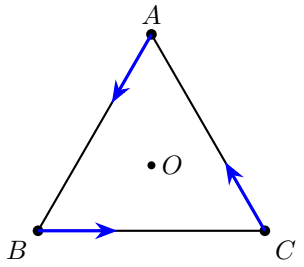


图 4.41: 循环规则保持等边三角形的对称性

解　证明对称性保持，再求边长缩短率

图 4.41 的规则对三个顶点作 120° 旋转后不变，所以相遇前始终保持三重旋转对称，三点构成等边三角形。三速度方向也相差 120°，矢量和为零，故三点位置的平均值不动，中心 O 固定。设边长为 ℓ，沿 A 指向 B 的单位方向为 $\boldsymbol{e}_{AB}$。$\boldsymbol{v}_A$ 就沿这个方向，而 $\boldsymbol{v}_B$ 沿 BC，与 $\boldsymbol{e}_{AB}$ 夹角为 120°，所以

$$\dot\ell = (\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A)\cdot \boldsymbol{e}_{AB} = v\cos 120^\circ - v = -\frac{3}{2}v.$$

用初值 $\ell(0)=a$ 对 $\dot\ell = -3v/2$ 积分，

$$\int_a^{\ell(t)} \mathrm{d}u = -\frac{3v}{2}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [u]_a^{\ell(t)} = -\frac{3v}{2}[s]_0^t.$$

代入端点得到 $\ell(t)-a = -3vt/2$，所以 $\ell(t) = a - 3vt/2$。

相遇要求 $\ell = 0$，所以 $\boxed{t_c = 2a/(3v)}$。

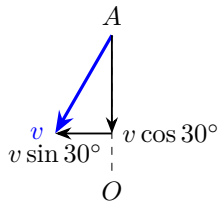


图 4.42: 速度相对内径向夹角为三十度

把速度分成径向与转向分量

等边三角形高为 $\sqrt{3}\ell/2$，中心到顶点占高的 $2/3$，所以 $r=\ell/\sqrt{3}$。图 4.42 中速度与内径向夹角为 30°，向内投影为 $v\cos 30^\circ=\sqrt{3}v/2$，横向投影为 $v\sin 30^\circ=v/2$。向外为径向正方向，且横向速率等于 $r\dot\theta$，因此

$$\dot r=-\frac{\sqrt{3}}{2}v,\qquad \dot\theta=\frac{v}{2r}.$$

第一式也可由已经求出的边长函数验证：$r(t)=\ell(t)/\sqrt{3}=a/\sqrt{3}-\sqrt{3}vt/2$，其有效区间为 $0\le t\le t_c$。以 $\dot r/\dot\theta$ 消去时间，得到 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=(-\sqrt{3}v/2)/(v/(2r))=-\sqrt{3}r$。再分离为 $\mathrm{d}r/r=-\sqrt{3}\,\mathrm{d}\theta$。在 $r>0$ 的运动段，取初值 $r(\theta_0)=r_0=a/\sqrt{3}$，得到

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\sqrt{3}\int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{d}\psi,\qquad [\ln\rho]_{r_0}^{r}=-\sqrt{3}[\psi]_{\theta_0}^{\theta}.$$

所以 $\ln(r/r_0)=-\sqrt{3}(\theta-\theta_0)$，取指数即 $r=r_0\mathrm{e}^{-\sqrt{3}(\theta-\theta_0)}$。轨迹是对数螺线，接近中心时转角无界，但总时间有限。

有限时间与无穷转角并不矛盾，因为相同转角对应的弧长越来越短。

4.6 本讲小结

微分方程把局部规律延伸为过程函数。正确建模比形式求积分更先行：变量、符号、所取系统与初值应一起确定。线性化必须保留约束与守恒量，阻尼要区分黏滞阻力和干摩擦，质量流入还会带来额外动量需求。所有解都应回代方程，并检查初值、极限及物理适用区间。

4.7　练习

练习 4.1 (垂直方向的追逐)**.** 目标 A 从原点沿 $+y$ 方向以速率 v 运动。追逐者 B 从 $(a,0)$ 出发，以恒定速率 kv 始终朝向 A，$k>1$。求相遇时间。若相遇点高度恰为 a，求 k。

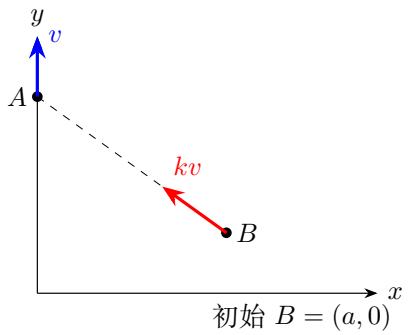


图 4.43: 瞄准方向不断改变的追逐

练习 4.2 (单摆的方程与能量)**.** 摆长 l，摆球质量 m，从小角度 θ_0 静止释放。写出精确方程及小角解，求最低点速率的精确表达式和小角首项，说明两者如何一致。

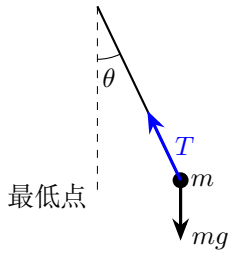


图 4.44: 摆角、切向方向与最低点

练习 4.3 (由位置决定的作用力)**.** 质量 m 的质点在光滑直线上从 $x=0$ 静止出发，受 $F(x)=F_0(1-x/L)$，$F_0, L>0$。求 $0<x\le L$ 内的速度，判断速度何处最大，并求到达 L 的时间。

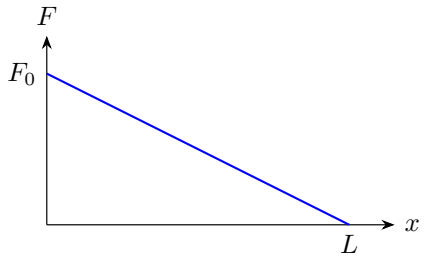


图 4.45: 力逐渐减小，直到终点为零

练习 4.4 (阻尼振子的能量耗散)**.** 欠阻尼振子满足 $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$，且最终停在平衡位置。初始 $x=x_0, v=v_0$。不求位移显式解，计算 $\int_0^\infty v(t)^2\,\mathrm{d}t$，并说明该积分何时收敛。

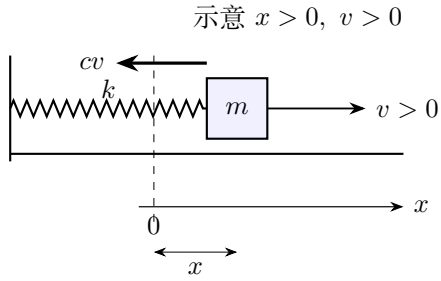


图 4.46: 有阻尼的弹簧振子及相对平衡位置的位移

练习解答

练习 4.1

解　沿连线投影相对速度并证明会相遇

图 4.43 的即时瞄准单位方向由 B 指向 A，记其与竖直向上的夹角为 θ、两者距离为 r。由于目标的速度沿竖直向上，径向相对速度为 $\dot{r}=v\cos\theta-kv$。因为 $\cos\theta\le 1$，有 $\dot{r}\le -(k-1)v<0$。从初距 a 开始，距离最迟在 $a/[(k-1)v]$ 的时间内降到零，所以可以在有限相遇时刻 t_c 上作以下积分。

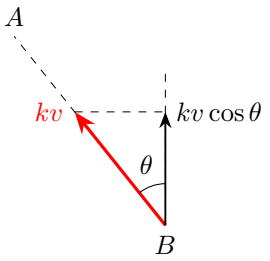


图 4.47: 将瞄准速度投影到竖直方向

联立竖直位移与距离积分求相遇时间

图 4.47 中追逐者的竖直速度为 $kv\cos\theta$。

追逐者的初始纵坐标为零，因此

$$y_B(t_c) - y_B(0) = kv\int_0^{t_c} \cos\theta(s)\,\mathrm{d}s.$$

相遇时 $y_B(t_c) = y_A(t_c) = vt_c$，所以 $\int_0^{t_c}\cos\theta(s)\,\mathrm{d}s = t_c/k$。这样便从追逐者的竖直位移求出了距离方程右侧所需的积分。

另一方面，对距离方程从起点积分到相遇时刻，左边为

$$\int_0^{t_c} \dot r(s)\,\mathrm{d}s = [r(s)]_0^{t_c} = r(t_c) - r(0) = 0 - a.$$

代入右边，并使用刚才的竖直位移积分，得到

$$-a = v\int_0^{t_c}\cos\theta\,\mathrm{d}t - kvt_c = \frac{vt_c}{k} - kvt_c.$$

右侧合并为 $-vt_c(k^2-1)/k$，两边约去负号，再除以正系数 $v(k^2-1)/k$，得到 $\boxed{t_c = ak/[v(k^2-1)]}$。若相遇高度为 a，则 $vt_c = a$；代入时间式并约去 a，得 $k/(k^2-1) = 1$，即 $k^2 - k - 1 = 0$。二次方程两根为 $(1\pm\sqrt{5})/2$，负根不满足 $k > 1$，所以 $\boxed{k = (1+\sqrt{5})/2}$。$k \to 1^+$ 时相遇时间发散，$k \gg 1$ 时约为 $a/(kv)$，都符合直观极限。

练习 4.2

解　投影到摆弧切向并明确小角近似对象

图 4.44 中张力 T 沿绳指向悬点，与摆弧的切向垂直，因而没有切向分量。沿增大摆角的切向取正方向，重力投影为 $-mg\sin\theta$，切向加速度为 $l\ddot\theta$，所以 $ml\ddot\theta = -mg\sin\theta$。除以 ml，得精确方程 $\ddot\theta + (g/l)\sin\theta = 0$。

求小角方程的通解并代入释放初值

小角时以 θ 代替 $\sin\theta$，令 $\omega_0=\sqrt{g/l}$，得到 $\ddot\theta+\omega_0^2\theta=0$。试取 $\theta=\mathrm{e}^{rt}$，则 $\dot\theta=r\mathrm{e}^{rt}$、$\ddot\theta=r^2\mathrm{e}^{rt}$，代入后

$$(r^2+\omega_0^2)\mathrm{e}^{rt}=0 \quad\Longrightarrow\quad r^2=-\omega_0^2 \quad\Longrightarrow\quad r=\pm\mathrm{i}\omega_0.$$

组合两个指数解得到实通解。求导时保留内函数的导数 ω_0：

$$\theta(t)=C_1\cos\omega_0 t+C_2\sin\omega_0 t,$$
$$\dot\theta(t)=-\omega_0 C_1\sin\omega_0 t+\omega_0 C_2\cos\omega_0 t.$$

释放时 $\theta(0)=\theta_0$ 给出 $C_1=\theta_0$，而 $\dot\theta(0)=0$ 给出 $\omega_0C_2=0$、$C_2=0$。因此

$$\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{g/l}\,t\right).$$

二次求导得 $\ddot\theta=-\omega_0^2\theta_0\cos\omega_0 t=-\omega_0^2\theta$，满足线性方程；代入 $t=0$ 同时恢复两个初值。

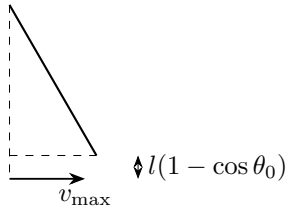


图 4.48: 下降的高度决定最低点动能

用实际下降高度计算最低点速度

图 4.48 中，初始球心在悬点下方的竖直距离为 $l\cos\theta_0$，最低点为 l，所以下降高度为 $l-l\cos\theta_0$。初动能为零、最低点势能取零，能量守恒给出 $mv_{\max}^2/2=mgl(1-\cos\theta_0)$。约去 m 并取正根，

$$v_{\max}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}=2\sqrt{gl}\,|\sin(\theta_0/2)|\simeq\sqrt{gl}\,|\theta_0|.$$

其中先用 $1-\cos\theta_0=2\sin^2(\theta_0/2)$，再在小角时用 $|\sin(\theta_0/2)|\simeq|\theta_0|/2$。对小角解求导，过零点时 $|\dot\theta|=\omega_0|\theta_0|$，故 $l|\dot\theta|=\sqrt{gl}|\theta_0|$，与能量法的首项一致。

练习 4.3

解　沿位置累积功，选择正速度支路

图 4.45 中 $0<x<L$ 时力为正，速度持续增加。对位置积分，

$$\frac{1}{2}mv^2=\int_0^x F_0(1-\xi/L)\,\mathrm{d}\xi=F_0\left[\xi-\frac{\xi^2}{2L}\right]_0^x=F_0\left(x-\frac{x^2}{2L}\right),$$

故 $v=\sqrt{(F_0/mL)(2Lx-x^2)}$，在讨论区间内最大值为 $v(L)=\sqrt{F_0L/m}$。

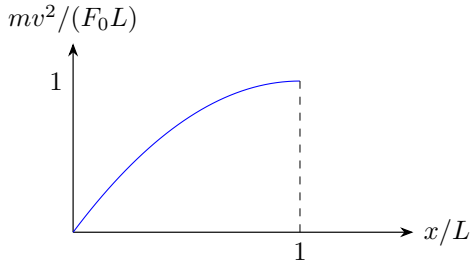


图 4.49: 速度平方在终点达到最大

由倒速度积分求到达时间

图 4.49 中 $\mathrm{d}(v^2)/\,\mathrm{d}x=(2F_0/m)(1-x/L)$，在 $0<x<L$ 为正、$x=L$ 为零，验证最大值位置。求时间时令 $x/L=1-\cos\phi$，$\phi:0\to\pi/2$。此时 $\mathrm{d}x=L\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$，$2Lx-x^2=L^2[1-\cos^2\phi]=L^2\sin^2\phi$。该区间 $\sin\phi\ge0$，所以 $v=\sqrt{F_0L/m}\sin\phi$，从而

$$t=\int_0^L\frac{\mathrm{d}x}{v(x)}=\sqrt{\frac{mL}{F_0}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi=\sqrt{\frac{mL}{F_0}}[\phi]_0^{\pi/2}=\boxed{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mL}{F_0}}}.$$

换元后的比值为 $\mathrm{d}x/v=[L\sin\phi/(\sqrt{F_0L/m}\sin\phi)]\,\mathrm{d}\phi=\sqrt{mL/F_0}\,\mathrm{d}\phi$；端点 $\phi=0$ 以连续极限补充。因此最后只需积分常数，再乘区间长度 $\pi/2$。

从静止出发的时间积分

起点虽有 $v=0$，但 $v\sim\sqrt{2F_0x/m}$，时间积分在起点附近与 $x^{-1/2}$ 的积分具有相同的收敛性。先截去奇点再取极限，

$$\int_0^{\varepsilon}x^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}[2\sqrt{x}]_{\delta}^{\varepsilon}=\lim_{\delta\to0^+}(2\sqrt{\varepsilon}-2\sqrt{\delta})=2\sqrt{\varepsilon}.$$

这个积分在起点有限。质点由静止开始，随后进入图中的正速度支路。

练习 4.4

解　将运动方程乘速度，转成能量变化率

对图 4.46 的运动方程乘以 $v=\dot{x}$，得到 $mv\dot{v}+kx\dot{x}=-cv^2$。左边两项分别来自 $\mathrm{d}(mv^2/2)/\,\mathrm{d}t=(m/2)\,2v\dot{v}$ 与 $\mathrm{d}(kx^2/2)/\,\mathrm{d}t=(k/2)\,2x\dot{x}$，所以 $\dot{E}=-cv^2$。从零到 T 积分，能量一侧可直接用基本定理计算：

$$\int_0^T\dot{E}(t)\,\mathrm{d}t=[E(t)]_0^T=E(T)-E(0)=-c\int_0^Tv(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

移项得到 $c\int_0^Tv(t)^2\,\mathrm{d}t=E(0)-E(T)$。

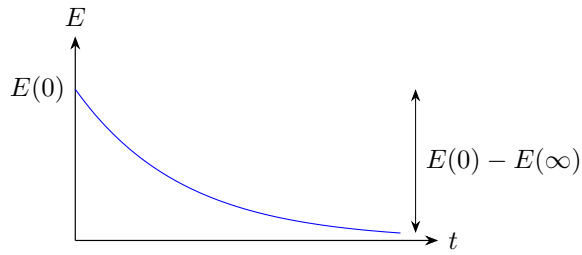


图 4.50: 耗散积分等于机械能的总减少

利用最终静止求整个耗散积分

图 4.50 只示意能量单调下降，实际斜率随 v^2 起伏。欠阻尼解含有 $\mathrm{e}^{-ct/(2m)}$ 因子，所以 x, v 均趋于零，$E(T)\to 0$。把初始能量 $E(0)=mv_0^2/2+kx_0^2/2$ 代入积分式，再除以 $c>0$ 并取 $T\to\infty$，得到

$$\boxed{\int_0^{\infty} v^2\,\mathrm{d}t=\frac{mv_0^2+kx_0^2}{2c}}.$$

结论也适用于临界、过阻尼，只要保持同一被动阻尼方程。$c=0$ 且有非零初始能量时振动不衰减，积分不收敛；零初始能量的恒静止解则例外地给出零。

运动学

物理竞赛一轮讲义

第一讲

运动学基础

2026

目录

第一讲　运动学基础 **1**

1.1　怎样描述物体的运动 1

1.2　速度和加速度 3

1.3　由变化率还原运动与读图 6

1.4　分段运动与时间积分 8

1.5　轨迹、几何位置与坐标方向 13

1.6　例题与分析 16

1.7　本讲小结 29

1.8　练习 30

练习解答 31

第一讲　运动学基础

1.1　怎样描述物体的运动

1.1.1　质点、参考系和坐标系

汽车行驶、河水流动、行星绕日运行，都表现为物体的位置随时间改变。运动学研究这种位置变化，暂且不问是什么作用使物体这样运动。描述一个运动，首先要说明研究的是哪个物体，以及相对于什么来描述它的位置。

实际物体都有形状和大小。研究列车往返于两座城市的行程时，列车的长度对结果影响很小，可以把整列车当作一个点；研究整列车通过一座桥的时间时，车长就要保留。这种忽略形状和大小、用一个点代表物体的处理，称为质点模型。能否采用这一模型，取决于所研究的问题。例如地球绕太阳的公转可以近似看作质点运动，研究昼夜交替所涉及的自转时，就要考虑地球各部分的位置。

图 1.1 中，开始时车头到达桥头，结束时车尾刚离开桥尾。在整个过程中，车头前进的距离是桥长 L 与车长 ℓ 之和。若列车速率恒为 u，通过时间就是 $(L+\ell)/u$。同样一列车，所问的过程不同，需要保留的几何长度也不同。

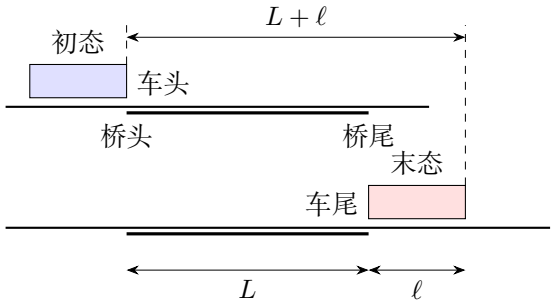


图 1.1: 列车完全通过桥时，车头前进桥长与车长之和

坐在行驶列车中的旅客，相对车厢不动，相对站台却在前进。我们把描述运动所依据的物体或彼此相对静止的物体组称为参考系。参考系选定以后，还要建立坐标系，把位置用数表示出来。研究平面运动时，通常选一个原点 O 和两个互相垂直的坐标轴；研究直线运动，只需沿直线选一条坐标轴。坐标系是描述位置的数学工具，参考系则给这套描述以物理意义。

同一参考系内平移坐标原点，会使坐标相差一个常数，而各点的位置变化量保持不变。若改用另一个运动着的参考系，所得速度也会改变。第二讲将进一步讨论参考系之间的位置和速度关系。

1.1.2 时刻与时间间隔

时刻表示一个过程进行到哪一瞬间，时间间隔表示这个过程持续多久。“第 n 秒末”是 $t = n\,\mathrm{s}$ 这个时刻；“第 n 秒内”是从 $(n-1)\,\mathrm{s}$ 到 $n\,\mathrm{s}$；“前 n 秒”则从计时开始一直到 $n\,\mathrm{s}$。位置和速度属于某个时刻，位移、路程及平均量则属于一段时间。

1.1.3 用长度和时间记录一次运动

给运动建立坐标以后，还要把它与测量联系起来。沿直轨道等距离设置标记，用同一只钟记录小车经过各标记的时刻，就得到一组 (t, x) 数据。时间原点可以取在小车开始运动时，空间原点可以取在轨道上一处固定标记；两种原点分别确定钟和尺的读数。

图 1.2 将同一运动记录在轨道和位置图上。轨道上的点距相等，而相邻事件的时间间隔逐渐缩短，说明小车通过同样距离越来越快。把各次记录画成位置图，再在相邻记录间补入平滑的运动过程，位置就成为时间的函数 $x = x(t)$。速度、加速度都从这一个函数逐次得到。

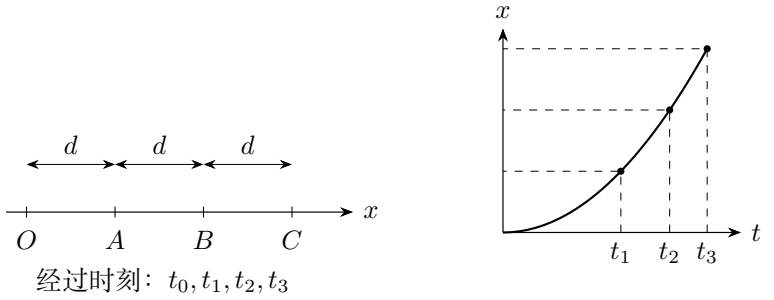


图 1.2: 等距离标记与对应的位置记录

在同一个参考系中，可以按研究对象选择方便的坐标原点；求导时采用固定在该参考系上的坐标轴。长度、时间、速度和加速度的单位依次为 $\mathrm{m}, \mathrm{s}, \mathrm{m/s}, \mathrm{m/s^2}$。例如从速度图的一块面积求位移，纵轴单位与横轴单位相乘，正好得到长度。这也使图上的斜率、面积与相应物理量联系起来。

1.1.4 位矢、位移和路程

如图 1.3，质点在 t_1 时刻位于 P_1，在 t_2 时刻位于 P_2。从原点指向质点的矢量称为位矢，在平面直角坐标系中写成

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y.$$

这里 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ 是沿两坐标轴正向的单位矢量。起、末位矢之差称为位移：

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1).$$

它由 P_1 指向 P_2，只由这两个位置决定。图中的弯曲实线则给出质点实际经过的轨迹，沿这条曲线量出的长度是路程 s。

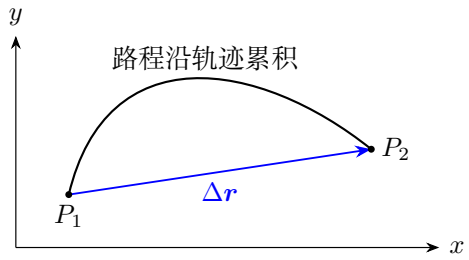


图 1.3: 轨迹长度与起终点之间的位移

两点之间直线最短，所以 $s \geq |\Delta\boldsymbol{r}|$。质点沿连接两点的直线一直向前运动时取等号；沿弯路运动或中途折返，路程会更长。绕一圈回到出发点时，位移为零，路程仍等于这一圈的长度。

对于直线运动，位移为带正负号的坐标差 Δx。若先向右运动 3 m，再向左运动 1 m，取向右为正，则位移为 2 m，路程为 4 m。求往返运动的路程，要将每段路程相加，而各段位移相加时应保留正负。

1.2 速度和加速度

1.2.1 从平均速度到瞬时速度

一段时间内位移与用时之比，叫作平均速度；路程与用时之比，叫作平均速率：

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \qquad \overline{u} = \frac{s}{\Delta t}.$$

跑完一圈的人虽然一直在运动，全程平均速度仍为零，而平均速率为正。两个平均量各自概括了整段过程，却没有告诉我们运动员在每个位置跑得多快。

为了描述某一瞬间的运动，可以从这个时刻起，取越来越短的时间间隔。在图 1.3 中，相邻两点之间的位移方向随之趋于轨迹在该点的切线方向。平均速度的极限就是瞬时速度：

$$\boldsymbol{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t},\qquad u=|\boldsymbol{v}|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{1.1}$$

速度的大小称为速率，方向沿质点前进方向的轨迹切线。路程 s 随运动累积，故 $\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t\geq 0$；直线运动的坐标 x 可以减小，因而 $v_x=\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ 可以为负。

1.2.2 速度的改变与加速度

速度既有大小又有方向，因此质点跑得越来越快、越来越慢，或保持速率而转弯，速度都在改变。将相邻两时刻的速度移到同一个起点，如图 1.4，从 $\boldsymbol{v}_1$ 的末端指向 $\boldsymbol{v}_2$ 的末端，得到速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}$。速度变化率的极限称为加速度：

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}.$$

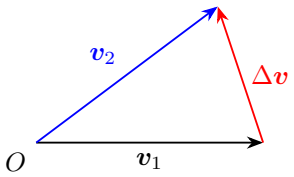


图 1.4: 速度方向变化本身也产生加速度

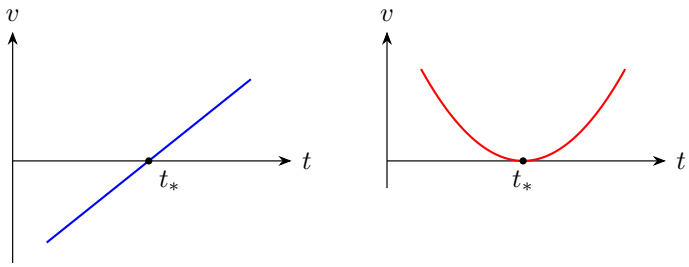
速度大小相同而方向不同，$\Delta\boldsymbol{v}$ 仍不为零，匀速圆周运动正是这样的例子。加速度方向也就不必沿速度方向。它沿速度方向的分量改变速率，垂直于速度的分量改变运动方向。

为把这一点写成公式，记速率为 $u=|\boldsymbol{v}|$，先对 $u^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ 求导：

$$2u\dot{u}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a},\qquad \dot{u}=\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{u}\quad(u\neq 0).$$

在直线运动中，$va>0$ 表示速度和加速度同向，速率增加；$va<0$ 时速率减少。例如物体向左运动，$v<0$；若 $a<0$，它会向左越跑越快。

速度为零的瞬间，需要看前后怎样运动。图 1.5 左侧的 v 在零点两边异号，物体由负向改为正向；右侧的 v 只在一点为零，两边都为正，物体短暂停顿后仍向原方向前进。



$v \propto t - t_*$，转向　　$v \propto (t - t_*)^2$，不转向

图 1.5: 速度过零与瞬时停顿的两种直线运动

若 $v(t_*) = 0$ 而 $a(t_*) \neq 0$，则在附近

$$v(t_* + \delta t) = a(t_*)\delta t + o(\delta t),$$

速度随 δt 变号而变号。若加速度也为零，首个非零项可能是 $(\delta t)^2$，这时速度两侧同号。这种区别在读速度图和计算往返路程时都会出现。

1.2.3 由运动方程求速度和加速度

在固定直角坐标系中，两个基矢方向不变，可以分别对坐标求导：

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{a} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y.$$

例如 $x = A\cos\omega t, y = B\sin\omega t$，其中 $A, B, \omega > 0$ 为常量。逐次用复合函数求导，

$$\begin{aligned} v_x &= A[-\sin(\omega t)]\omega = -A\omega\sin\omega t, \\ v_y &= B\cos(\omega t)\omega = B\omega\cos\omega t, \\ a_x &= -A\omega\cos(\omega t)\omega = -A\omega^2\cos\omega t, \\ a_y &= B\omega[-\sin(\omega t)]\omega = -B\omega^2\sin\omega t. \end{aligned}$$

消去 t 得轨迹 $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$，而

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}, \qquad u^2 = \omega^2(A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t).$$

加速度始终指向原点。若 $A \neq B$，质点沿椭圆运动，速率随位置改变；只有 $A = B$ 时，轨迹为圆且速率不变。图 1.6 中的速度沿椭圆切线，加速度斜指原点，同时具有沿切线和垂直切线的分量。

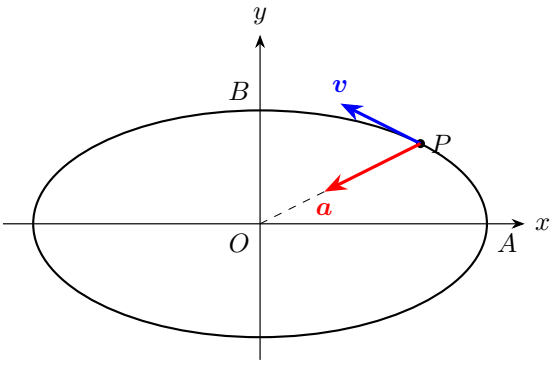


图 1.6: 指向固定中心的加速度可以包含切向分量

由速率表达式直接求导也有

$$\dot{u} = \frac{2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{u}.$$

这与前面从点积得到的结果相同。运动方程给出了质点在每个时刻的位置，所以既包含轨迹，也包含沿轨迹运行的快慢；单独一条椭圆方程则只给出形状。

1.3　由变化率还原运动与读图

1.3.1　从位置到变化率，再由变化率还原运动

前面的定义把位置、速度和加速度连成一条关系：

$$x(t) \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} v(t) \xrightarrow{\mathrm{d}/\mathrm{d}t} a(t).$$

若已知加速度，则从一个已知状态 (t_0, x_0, v_0) 往后累积。小时间段内 $\mathrm{d}v = a(t)\,\mathrm{d}t$，小位移为 $\mathrm{d}x = v(t)\,\mathrm{d}t$，所以

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

第一次积分确定速度相对初速度的改变，第二次积分确定位置相对初位置的改变。加上初速度和初位置，就确定了各时刻的速度和位置。下文从图像的面积说明这一累积过程，再把它用于分段运动与速度随位置变化的情形。

1.3.2 斜率、面积与运动

在 x–t 图中，割线斜率表示平均速度，切线斜率表示瞬时速度；在 v–t 图中，斜率表示加速度。图的纵轴不同，同一形状便有不同含义：位置图上的水平线表示静止，速度图上的水平线表示速度不变。

反过来，知道速度就能累积位移。把时间分成许多小段，第 i 段用时为 Δt_i，位移近似为 $v(t_i)\Delta t_i$，即速度图中一个窄矩形的有向面积。分得越来越细，矩形之和趋于积分，得到

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

图 1.7 中，时间轴上方的面积记为 S_+，下方的面积大小记为 S_-，则

$$\Delta x = S_+ - S_-, \qquad s = S_+ + S_-.$$

负速度表示向负坐标方向前进，所以它对位移作负贡献，却仍增加路程。

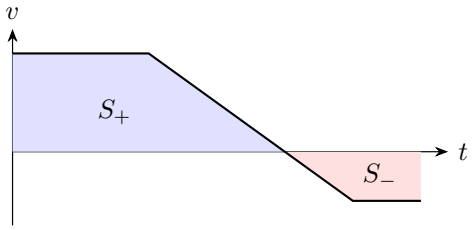


图 1.7: 速度图中正负面积共同决定位移

1.3.3 微小位移怎样累积成积分

在短时间 h 内，用起始时刻的速度 $v(t)$ 近似这一段运动，得到的位移是 $v(t)h$。图 1.8 中，这一项对应窄矩形的面积；速度在这段内的变化还增加了一小块面积。

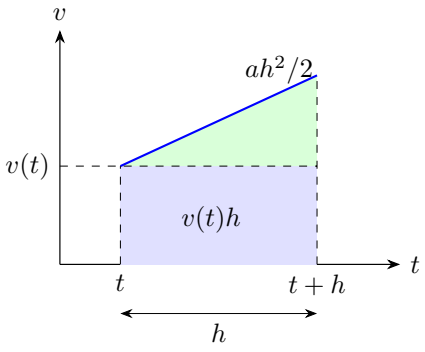


图 1.8: 一个短时间段中，位移的矩形近似与速度改变带来的余量

以加速度为常量 a 的短段为例，增加的面积是底为 h、高为 ah 的三角形，大小为 $ah^2/2$。时间缩短一半时，矩形面积大约缩短一半，而这块余量缩为原来的四分之一。这使逐段采用起始速度的近似越来越准确。

对光滑运动，位置增量的展开也表达了同一件事：

$$\boldsymbol{r}(t+h)-\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{v}(t)h+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}(t)h^2+o(h^2).$$

在所研究的有限时间内，若加速度大小有上界，每段略去的位移大小可用 Ch^2 估计，其中 C 是一个与小段长度无关的常量。把总时间 T 分成 N 段，$h=T/N$，全部近似误差的上界为

$$NCh^2=NC\frac{T^2}{N^2}=\frac{CT^2}{N}\longrightarrow 0.$$

因此窄矩形的面积和收敛到真实位移，得到速度积分。测量只给出离散速度时，矩形或梯形的面积也提供相应的近似计算。

1.4 分段运动与时间积分

1.4.1 分段运动的平均量

设质点沿同一方向走过两段路程 s_1,s_2，速率依次为 u_1,u_2。走完每段所用时间为 $s_1/u_1,s_2/u_2$，于是

$$\overline{u}=\frac{s_1+s_2}{s_1/u_1+s_2/u_2}.$$

两段用时相等时，由 $s_i=u_it_i$ 得 $\overline{u}=(u_1+u_2)/2$；两段路程相等时，则有

$$\overline{u}=\frac{2}{1/u_1+1/u_2}=\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2}.$$

这两种平均的差别来自各段所占的时间。图 1.9 中，两段路程都为 d，但速率分别为 $2u,u$，用时就是 $t_0,2t_0$。三份时间中有两份以较慢速率运动，因此

$$\overline{u}=\frac{2ut_0+u(2t_0)}{3t_0}=\frac{4}{3}u.$$

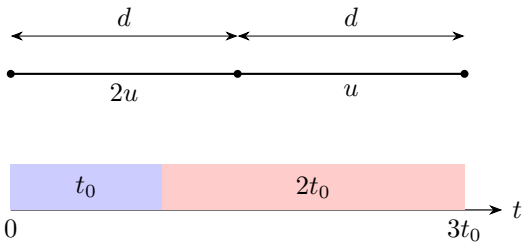


图 1.9: 等路程运动中，慢段占用较多时间

若把 $2u, u$ 直接平均，所得 $3u/2$ 对应的是两种速率各运动相同时间的另一过程。两种平均的大小还可从

$$\frac{u_1+u_2}{2}-\frac{2u_1u_2}{u_1+u_2}=\frac{(u_1-u_2)^2}{2(u_1+u_2)}\geq 0$$

看出。发生折返时，平均速度的分子改用带符号的总位移，平均速率的分子仍取总路程。

若两段各自占总路程的比例为 $\lambda, 1-\lambda$，两段时间分别为 $\lambda s/u_1$ 和 $(1-\lambda)s/u_2$。将总路程除以总时间并约去 s，得到

$$\frac{1}{\overline{u}}=\frac{\lambda}{u_1}+\frac{1-\lambda}{u_2}.$$

这里的比例来自路程分配；速度较慢的一段以同样路程占用更多时间。

1.4.2 分段运动的图像

以初速 $v_0>0$、加速度 $-a$ 的直线运动为例，$a>0$。图 1.10 的速度线从 v_0 出发，斜率为 $-a$。由 $v(t)-v_0=\int_0^t(-a)\,\mathrm{d}\tau=[-a\tau]_0^t=-at$ 得到速度。再从 $x(0)=0$ 对速度积分，

$$x(t)=\int_0^t(v_0-a\tau)\,\mathrm{d}\tau=\left[v_0\tau-\frac{a}{2}\tau^2\right]_0^t=v_0t-\frac{1}{2}at^2.$$

在 $t_*=v_0/a$，速度为零，位置图切线水平，位置达到 $x_*=v_0^2/(2a)$。若相同加速度继续作用，物体随后向负方向运动，位置图向下弯回；若汽车刹停后保持静止，停下后的速度为零，位置保持 x_*。图 1.10 中的实线和虚线分别表示这两种后续过程。

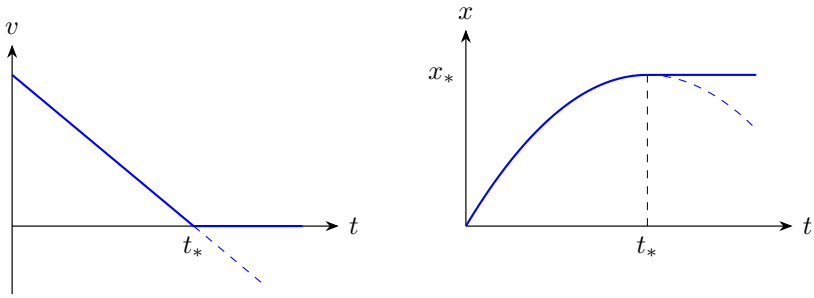


图 1.10: 持续负加速度与刹停后静止对应不同的后续图像

由速度求位置还要给出初始位置。两辆车的速度图相同，只说明它们在相同时间内前进相同位移，最初相差多远，后来仍相差多远。同理，由加速度求速度要给初速度；由加速度完整求出位置，要给初速度和初位置。

物体在某时刻由一段运动转入下一段时，位置连续。若没有碰撞等瞬时改变速度的作用，速度也连续，但加速度可以突然改变。位置图出现折角意味着左右速度不同；速度图的折角则表示加速度发生变化。

1.4.3 分段运动怎样接续

分段研究运动时，可以在新一段开始的时刻重新计时。设第一段结束于 $t = t_1$，这时位置为 x_1、速度为 v_1。取新时间 $\tau = t - t_1$，若随后加速度恒为 a_2，由初值积分得

$$v - v_1 = \int_0^\tau a_2 \,\mathrm{d}s = [a_2 s]_0^\tau = a_2\tau,$$
$$x - x_1 = \int_0^\tau (v_1 + a_2 s)\,\mathrm{d}s = \left[v_1 s + \frac{a_2 s^2}{2}\right]_0^\tau = v_1\tau + \frac{1}{2}a_2\tau^2.$$

所以用原来的时间表示时，

$$v = v_1 + a_2(t - t_1), \qquad x = x_1 + v_1(t - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t - t_1)^2.$$

重新计时改变的是时间的读数，物体的位置和速度仍承接前一段末态。图 1.11 将同一段过程放在两条时间轴上：上轴读作 t_1 的事件，在下轴读作零。

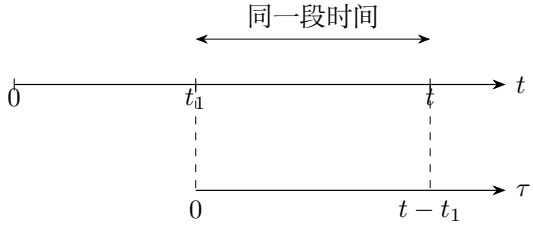


图 1.11: 局部时间的零点取在阶段切换事件

例如汽车先以 v_0 匀速行驶一段反应时间 τ，然后制动。制动开始时，它已经走过 $v_0\tau$，速度仍为 v_0。以制动开始为新计时起点，所得位置增量与原来走过的路程相加，就给出汽车相对最初起点的位置。

两辆车先同速行驶、再以同样的减速度 a 先后制动时，也可这样接续。记前车制动持续时间 $T = v_0/a$，后车延迟 τ 开始制动。前车速度为 $f(t) = \max(v_0 - at, 0)$；后车先以 v_0 行驶 τ，随后速度为 $f(t - \tau)$。f 随时间减小，因此后车在每个时刻都至少与前车同样快，两车间距逐渐减小。

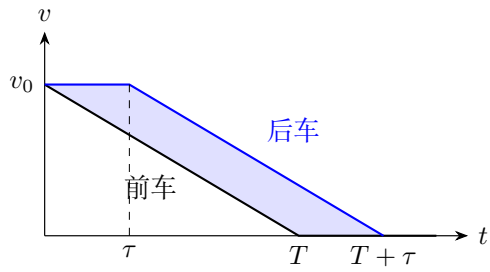


图 1.12: 后车延迟制动时，两速度曲线之间的面积表示累计接近量

图 1.12 将后车的制动曲线沿时间向后移 τ，阴影是累计接近量。前、后车全部路程由各自速度积分得到：

$$
\begin{aligned}
s_F &= \int_0^T (v_0 - at)\,\mathrm{d}t = \left[v_0 t - \frac{a}{2}t^2\right]_0^T = \frac{v_0^2}{2a},\\
s_R &= \int_0^\tau v_0\,\mathrm{d}t + \int_\tau^{\tau+T} [v_0 - a(t-\tau)]\,\mathrm{d}t\\
&= [v_0 t]_0^\tau + \left[v_0(t-\tau) - \frac{a}{2}(t-\tau)^2\right]_\tau^{\tau+T}\\
&= v_0\tau + \frac{v_0^2}{2a}.
\end{aligned}
$$

两车停车距离之差为 $v_0\tau$，也是全程接近量。这个结果适用于 $\tau < T$ 和 $\tau \geq T$；两种情形的制动阶段虽有不同重叠，总路程的分段积分方式相同。后面的延迟刹车例题取 $\tau = T$，再具体研究两个阶段的间距。

例 1.5 给出三段等长时间的速度图。把每段速度积成位移，并以前一段末位置作为下一段起点，就能把三段接成一条连续的位置图。

1.4.4 速度随位置变化时的时间积分

有些题目给出的不是 $v(t)$，而是质点到达不同位置时的速度 $v(x)$。设质点沿正方向运动，走过小段 $\mathrm{d}x$ 的用时为

$$
\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}, \qquad t_2 - t_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{v(x)}.
$$

因此，求时间应画 $1/v$–x 图。图 1.13 中的每个窄条，宽是位移 $\mathrm{d}x$，高是当地的 $1/v$，面积正是这段的用时。相同距离在慢处花费更多时间；后面的蜗牛爬行题将按这个方法求总时间。

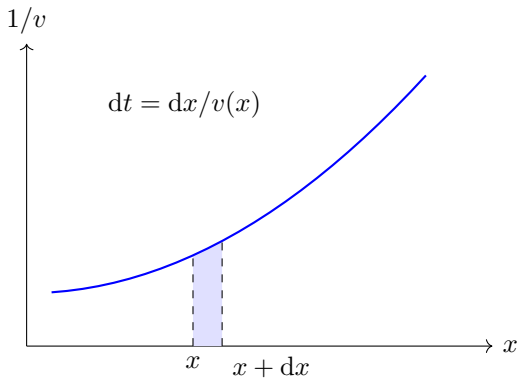


图 1.13: $1/v$–x 图中窄条面积表示所需时间

图中选取 $v>0$ 的一段，低速区域在纵轴上更高，对用时的贡献更大。往返运动可以分别沿每一段的运动方向累积时间。

若高度为 h，同样写成 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}h/v(h)$。图 1.14 中，两块等宽高度条在不同速率处给出不同的时间。总用时由每一小段的速度倒数累积得到，各段占用的时间随当地速率而改变。

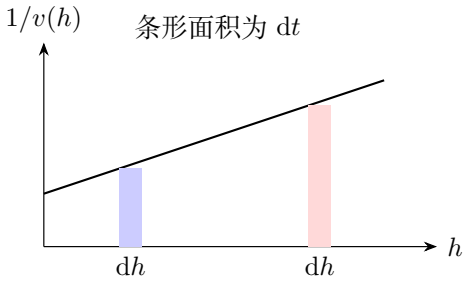


图 1.14: 等高度微元的时间权重由速度倒数决定

1.4.5　速度在末端趋零时的到达时间

设 ξ 是离终点的剩余距离，质点始终朝终点运动，其速率在终点附近满足

$$u(\xi)=u_0\left(\frac{\xi}{\ell}\right)^{p},\qquad u_0,\ell,p>0.$$

这里 u_0 给出速率尺度，ℓ 给出长度尺度。质点越靠近终点，速率越小；能否在有限时间走完，要由每小段用时累加决定。

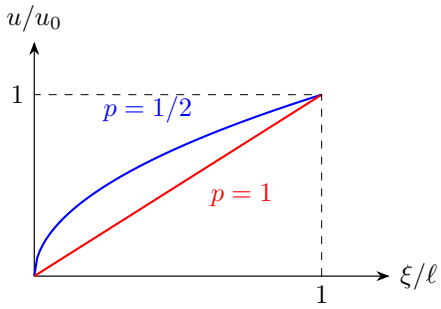


图 1.15: 同样在终点趋零的两种速率，给出不同的末段用时

图 1.15 比较 $p=1/2$ 和 $p=1$ 的速度规律。两条曲线在终点都变为零，但前一条在同样剩余距离处保持较大的速率。

质点前进时 ξ 减小，故 $\mathrm{d}\xi/\,\mathrm{d}t=-u(\xi)$。从剩余距离 ε 走到更小的 $\delta>0$，用时为

$$\Delta t=\int_{\varepsilon}^{\delta}-\frac{\mathrm{d}\xi}{u(\xi)}=\frac{\ell^{p}}{u_0}\int_{\delta}^{\varepsilon}\xi^{-p}\,\mathrm{d}\xi.$$

分别写原函数、代入上下限，

$$\int_{\delta}^{\varepsilon}\xi^{-p}\,\mathrm{d}\xi=\begin{cases}\left[\dfrac{\xi^{1-p}}{1-p}\right]_{\delta}^{\varepsilon}=\dfrac{\varepsilon^{1-p}-\delta^{1-p}}{1-p}, & p\neq 1,\\[2mm] [\ln\xi]_{\delta}^{\varepsilon}=\ln(\varepsilon/\delta), & p=1.\end{cases}$$

令 $\delta\to 0^{+}$，当 $0<p<1$ 时，$\delta^{1-p}\to 0$，剩余时间有限。例如 $p=1/2$ 时，从 $\xi=\ell$ 出发的到达时间为 $2\ell/u_0$。当 $p=1$ 时，对数随 $\delta\to 0$ 无限增加；当 $p>1$ 时，δ^{1-p} 无限增加，时间也趋于无穷。这几个具体过程说明：末端速率减小得越快，最后一段所需的时间越长。

1.5 轨迹、几何位置与坐标方向

1.5.1 轨迹形状与运动快慢

若轨迹写成 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}(q)$，参数 q 可以是角度、弧长或其他几何量。给出 $q(t)$，才知道质点怎样沿这条轨迹前进。用链式法则和乘积法则，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{R}'(q)\dot q,\\ \boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{R}'(q)\dot q]=\boldsymbol{R}''(q)\dot q^{\,2}+\boldsymbol{R}'(q)\ddot q.\end{aligned}$$

第一式的 $\boldsymbol{R}'$ 给出切线方向，$\dot q$ 决定运动的快慢与正反。第二式还包含轨迹弯曲带来的速度方向变化。第五讲会用切向和法向分量进一步讨论这两种变化。

影端、光斑、两杆交点都是由几何关系确定的位置，它们也随时间变化。移动的两杆在这一瞬间相交，下一瞬间相交的可以是杆上的另两个点。交点速度应由两条杆的几何方程共同求出；同样，影端速度应从光线和地面的交点求出。后面的例题和练习将分别处理这两种情形。

影子的移动可以具体说明几何位置怎样进入速度计算。设人高 l，脚的横坐标为 x，头顶影端横坐标为 X。平行光与水平地面的夹角为 $\gamma(t)$，由光线形成的直角三角形，

$$\ell = X - x = l\cot\gamma.$$

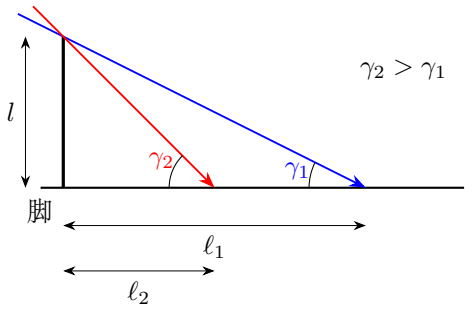


图 1.16: 同一身高下，光线升高使影长缩短

图 1.16 中，光线升高时，影长缩短。对上式求导，l 为常量，

$$\dot\ell = l\frac{\mathrm{d}(\cot\gamma)}{\mathrm{d}\gamma}\dot\gamma = -l\csc^2\gamma\,\dot\gamma,$$
$$\dot X = \dot x + \dot\ell = v - l\csc^2\gamma\,\dot\gamma.$$

影端速度由人的平移和光线方向的改变共同构成。光线方向在一段时间内固定时，$\dot\gamma = 0$，整条影子随人一起平移；练习还会比较有限高度路灯形成的另一种投影关系。

若位置满足 $F(x,y,t) = 0$，把 x, y 当作时间函数，求导得

$$F_x\dot x + F_y\dot y + F_t = 0.$$

其中 F_x, F_y 是分别固定其他变量时对 x, y 的偏导数，F_t 来自曲线或杆本身随时间的移动。再求一次导数时，各系数也可能改变，因此会出现速度乘积项；这在第三讲的定长杆问题中将具体展开。

1.5.2 极坐标中的速度与加速度

研究绕某点的运动时，可以用到该点的距离 ρ 和方位角 θ 描述位置。图 1.17 中，$\boldsymbol{e}_\rho$ 沿径向向外，$\boldsymbol{e}_\theta$ 沿角度增加的方向。这两个单位矢量的方向随质点一起转动：

$$\boldsymbol{e}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

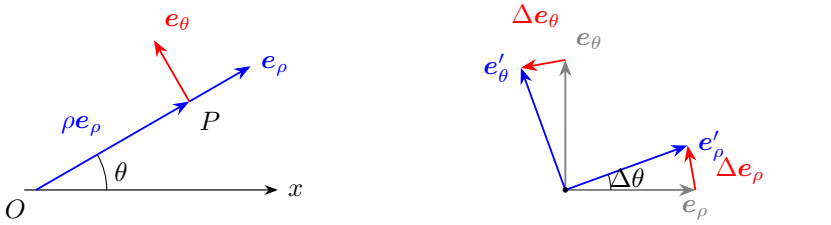


图 1.17: 径向、横向及相邻时刻基矢的变化

图 1.17 右侧把两个相邻时刻的基矢移到共同起点，端点之间的短箭头表示基矢增量。时间间隔缩小时，两个增量的方向分别趋于横向和负径向，显示了方向变化怎样进入导数。逐分量求导，得到

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = (-\sin\theta\,\dot\theta, \cos\theta\,\dot\theta) = \dot\theta\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = (-\cos\theta\,\dot\theta, -\sin\theta\,\dot\theta) = -\dot\theta\boldsymbol{e}_\rho.$$

位矢 $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho$ 的长度和方向同时改变，所以

$$\boldsymbol{v} = \dot\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

记 $\omega = \dot\theta$，再分别对速度的两项求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot\rho\boldsymbol{e}_\rho) = \ddot\rho\boldsymbol{e}_\rho + \dot\rho\omega\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\omega\boldsymbol{e}_\theta) = (\dot\rho\omega + \rho\dot\omega)\boldsymbol{e}_\theta - \rho\omega^2\boldsymbol{e}_\rho.$$

相加得

$$\boldsymbol{a} = (\ddot\rho - \rho\omega^2)\boldsymbol{e}_\rho + (2\dot\rho\omega + \rho\dot\omega)\boldsymbol{e}_\theta.$$

横向的两个 $\dot\rho\omega$ 分别来自径向速度的转向和横向速度大小的改变。半径固定时，径向加速度成为 $-\rho\omega^2$，横向加速度成为 $\rho\dot\omega$；方向固定、$\omega = 0$ 时，则只剩沿射线的直线运动。

径向和横向依据所选原点确定，轨迹的法向和切向则依据曲线本身确定，两套方向各有自己的几何依据。例如物体沿不经过原点的直线匀速运动，ρ, θ 都在变，

但总加速度仍为零，各分量中的项恰好相消。练习将完整计算这一例子。若质点经过极点，方位角在该点无从确定，可改用固定直角坐标描述。

1.6　例题与分析

例 1.1（由正弦位置函数求速度和加速度）. 质点沿 x 轴运动，以米和秒为单位，位置函数为

$$x(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

求 $t = 0, 3, 6, 9, 12\,\mathrm{s}$ 时的位置、相对于零时刻的位移、速度和加速度。

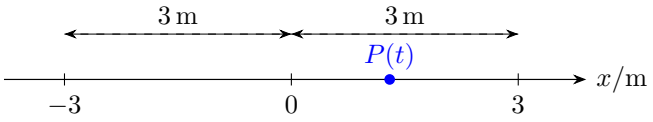


图 1.18: 质点在原点两侧往复运动

解　图 1.18 表示质点沿固定直线往复运动，速度和加速度都可由坐标函数直接求导。角频率 $\pi/6$ 是常量，先对外层正弦求导，再乘内层角度的时间导数：

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\frac{\mathrm{d}(\pi t/6)}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right),$$
$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{2}\left[-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right]\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{12}\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right).$$

$x(0) = 0$，故相对于零时刻的位移 $\Delta x = x(t) - x(0) = x(t)$。将所给的五个时刻代入，角度依次为 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$，得到

t/s	0	3	6	9	12
x/m	0	3	0	-3	0
$\Delta x/\mathrm{m}$	0	3	0	-3	0
$v/(\mathrm{m/s})$	$\pi/2$	0	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$a/(\mathrm{m/s^2})$	0	$-\pi^2/12$	0	$\pi^2/12$	0

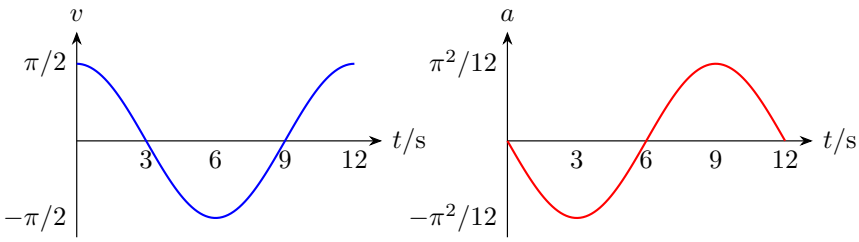


图 1.19: 速度和加速度各自随时间变化，零点出现在不同位置

图 1.19 中，$t=3\,\mathrm{s}$ 时速度由正变负，质点在右端转向；$t=9\,\mathrm{s}$ 时由负变正，在左端转向。$t=6\,\mathrm{s}$ 时质点经过原点，加速度为零，速度为 $-\pi/2\,\mathrm{m/s}$。各式还给出 $a=-(\pi/6)^2x$，加速度始终指向原点，正是往复运动中速度方向不断改变的原因。

例 1.2 (等路程两段的平均速度)**.** 质点沿一直线单向运动，前一半路程速度为 $v_1>0$，后一半速度大小不变，全程平均速度为 $v>0$。求后一半速度 v_2 及其存在条件。

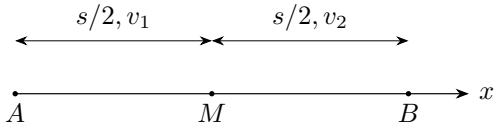


图 1.20: 两段等路程的直线运动

解 图 1.20 中，两段路程各为 $s/2$。先由各段路程求时间，

$$t_1=\frac{s}{2v_1},\qquad t_2=\frac{s}{2v_2}.$$

质点沿同一直线同向运动，全程位移等于 s。平均速度给出总时间 s/v，故

$$\frac{s}{v}=\frac{s}{2v_1}+\frac{s}{2v_2}.$$

约去正的 s，再移项、通分，

$$\frac{1}{v_2}=\frac{2}{v}-\frac{1}{v_1}=\frac{2v_1-v}{vv_1},\qquad \boxed{v_2=\frac{vv_1}{2v_1-v}}.$$

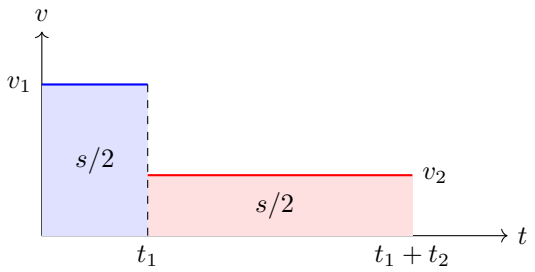


图 1.21: 等路程对应相同面积，各段用时不同

图 1.21 中，两个矩形的面积都是 $s/2$，较低的速度对应较长的用时。第二段用时为

$$t_2 = \frac{s}{v} - \frac{s}{2v_1} = \frac{s(2v_1 - v)}{2vv_1}.$$

有限的正速度要求 $t_2 > 0$，所以存在条件为 $\boxed{0 < v < 2v_1}$。$v = v_1$ 时，两段用时相等，得到 $v_2 = v_1$；随着 v 接近 $2v_1$，留给第二段的时间趋零，所需 v_2 随之增大。等路程运动的平均速度由两段各自用时决定。

例 1.3 (一圈赛跑的平均量)**.** 运动员从 400m 标准跑道的某点出发，40s 后跑完一圈回到该点。求全程平均速度、平均速率，并判断能否据此确定跑到 50m 处的瞬时速度。

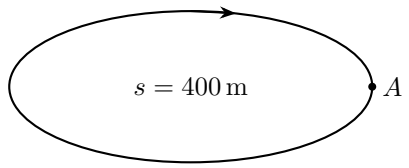


图 1.22: 运动员沿跑道回到出发点

解　图 1.22 中的起点和终点同为 A，因此

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}, \qquad \overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{40\,\mathrm{s}} = \boxed{\boldsymbol{0}}.$$

运动员实际沿跑道走过 400 m，平均速率为

$$\overline{u} = \frac{400\,\mathrm{m}}{40\,\mathrm{s}} = \boxed{10\,\mathrm{m/s}}.$$

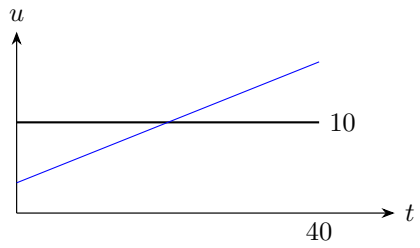


图 1.23: 面积相等的两条速率曲线

图 1.23 中，水平线表示全程速率相同，蓝色斜线表示先慢后快。两条速率曲线在 0 至 40 s 间围成的面积相等，都能给出题设的总路程。它们经过 50 m 处的速率却可以不同。

用积分表示这两件事，总成绩只给出

$$\int_0^{40\,\mathrm{s}} u(t)\,\mathrm{d}t = 400\,\mathrm{m};$$

到达 50 m 的时刻 t_{50} 则由

$$\int_0^{t_{50}} u(t)\,\mathrm{d}t = 50\,\mathrm{m}$$

确定。求 t_{50} 及 $u(t_{50})$ 还需要速率随时间变化的具体规律。因此，本题给出的总路程和总用时对应许多种跑动过程。若另给全程匀速这一条件，该处速率才确定为 10 m/s，速度方向沿当时跑道的前进切线。

例 1.4 (速度图中的位移与路程)**.** 质点沿直线运动：$0 \le t \le 1\mathrm{s}$ 时 $v = 3\mathrm{m/s}$；$1 \le t \le 3\mathrm{s}$ 时速度由 3 线性降至 0；$3 \le t \le 6\mathrm{s}$ 时速度由 0 线性降至 $-3\mathrm{m/s}$。求前 3s 及前 6s 的位移与路程。

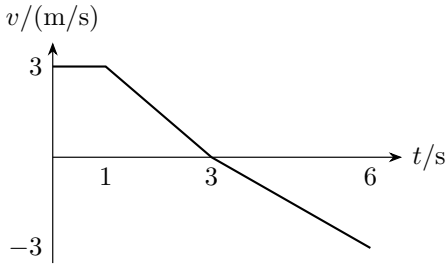


图 1.24: 质点在前 6 秒的速度变化

解　图 1.24 在 $t=3\,\mathrm{s}$ 处由正速度转为负速度。按这个时刻分开，位移取有向面积，路程取各段面积的大小。下面将积分和图中的面积放在同一段运动中计算，以秒、米为单位。

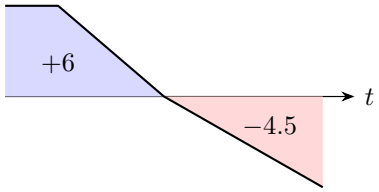


图 1.25: 正向和反向运动各自贡献的位移

前 3 秒的正向运动　第一段 $v=3$，所以

$$\Delta x_{0,1}=\int_0^1 3\,\mathrm{d}t=[3t]_0^1=3.$$

它就是图 1.25 中宽 1、高 3 的矩形面积。第二段速度的斜率为 $(0-3)/(3-1)=-3/2$，故

$$v(t)=3-\frac{3}{2}(t-1),\qquad 1\le t\le 3.$$

这一段位移为

$$\begin{aligned}\Delta x_{1,3}&=\int_1^3\left[3-\frac{3}{2}(t-1)\right]\mathrm{d}t\\&=\left[3(t-1)-\frac{3}{4}(t-1)^2\right]_1^3=(6-3)-0=3.\end{aligned}$$

这也等于图中底为 2、高为 3 的三角形面积。前 3 秒速度非负，位移和路程相同：

$$\boxed{\Delta x_3=s_3=3+3=6\,\mathrm{m}}.$$

3 至 6 秒的反向运动　此段速度斜率为 -1，因而 $v=-(t-3)$。积分得

$$\begin{aligned}\Delta x_{3,6}&=\int_3^6[-(t-3)]\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(t-3)^2}{2}\right]_3^6=-\frac{9}{2},\\ s_{3,6}&=\int_3^6|v|\,\mathrm{d}t=\int_3^6(t-3)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(t-3)^2}{2}\right]_3^6=\frac{9}{2}.\end{aligned}$$

图 1.25 中红色三角形在时间轴下方，它给出 $-4.5\,\mathrm{m}$ 的位移和 $4.5\,\mathrm{m}$ 的路程。于是前 6 秒

$$\boxed{\Delta x_6=6-4.5=1.5\,\mathrm{m}},\qquad \boxed{s_6=6+4.5=10.5\,\mathrm{m}}.$$

负速度使坐标减小，实际走过的距离仍逐段增加。再分别除以全程 $6\,\mathrm{s}$，平均速度为 $0.25\,\mathrm{m/s}$，平均速率为 $1.75\,\mathrm{m/s}$。

例 1.5 (由分段速度重建位置图)**.** 取 $x(0)=0$，质点在三个连续且等长为 T 的时间段内，速度依次为 $v_0, 0, -v_0$，其中 $v_0>0$。写出位置函数并画出位置随时间变化的图。

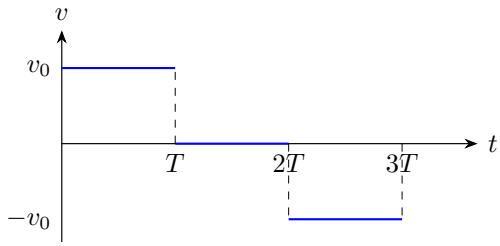


图 1.26: 三个等长时间段内的速度

解 图 1.26 所示的过程依次是前进、停留、返回。每一段从上一段的末位置开始，逐段积分即可得到位置函数。

第一段 $0\le t\le T$，由 $x(0)=0$，

$$x(t)=\int_0^t v_0\,\mathrm{d}\tau=[v_0\tau]_0^t=v_0t,\qquad x(T)=v_0T.$$

第二段 $T\le t\le 2T$，速度为零，

$$x(t)-x(T)=\int_T^t 0\,\mathrm{d}\tau=0,\qquad x(2T)=v_0T.$$

第三段 $2T\le t\le 3T$，运动已经从 $x(2T)=v_0T$ 开始，用原计时的积分上下限写为

$$x(t)-x(2T)=\int_{2T}^t(-v_0)\,\mathrm{d}\tau=[-v_0\tau]_{2T}^t=-v_0(t-2T),$$
$$x(t)=v_0T-v_0(t-2T)=v_0(3T-t).$$

三段合起来，

$$x(t)=\begin{cases}v_0t, & 0\le t\le T,\\ v_0T, & T\le t\le 2T,\\ v_0(3T-t), & 2T\le t\le 3T.\end{cases}$$

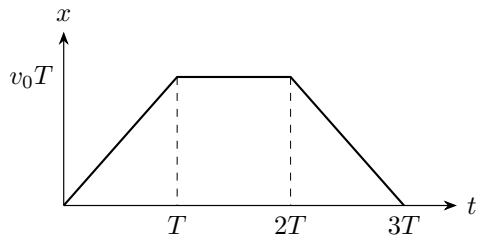


图 1.27: 前进、静止和返回的位置图

图 1.27 中的斜率依次为 $v_0, 0, -v_0$。两处连接位置连续，图线在连接处形成折角，分别对应速度从 v_0 变为 0、从 0 变为 $-v_0$ 的理想化瞬时变化。质点最后回到原点，全程位移为零；前进和返回各走 v_0T，全程路程为 $2v_0T$。

例 1.6 (延迟刹车的安全间距)**.** 两辆相同汽车同向以速率 v_0 行驶，初始车尾与后车车头之间的净间距为 d。前车以恒定减速度 a 刹车，停车距离为 s；前车刚停下时，后车才以同一减速度刹车。两车停车后不倒退，求避免接触所需的 d。

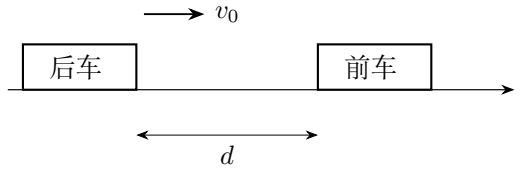


图 1.28: 同向行驶的两车及其净间距

解 图 1.28 给出两车之间的净间距 d。从前车开始制动计时，记它的停车时刻为 T。制动期间前车的速度由加速度积分得到：

$$v_F(t) - v_0 = \int_0^t (-a)\,\mathrm{d}\tau = [-a\tau]_0^t = -at.$$

令 $v_F(T) = 0$，得 $T = v_0/a$。对应停车距离

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T (v_0 - at)\,\mathrm{d}t = \left[v_0 t - \frac{at^2}{2}\right]_0^T \\ &= v_0T - \frac{aT^2}{2} = \frac{v_0T}{2} = \frac{v_0^2}{2a}. \end{aligned}$$

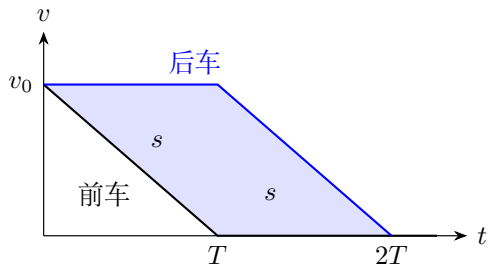


图 1.29: 前车与后车的速度图，以及两阶段的接近量

前车制动，后车匀速 图 1.29 中，黑线表示前车，蓝线表示后车。在 $0 \le t \le T$，后车速度与前车速度之差为 at，累计接近量

$$C_1(t) = \int_0^t a\tau \,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{a\tau^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}at^2.$$

到 $t = T$，这一量为 $aT^2/2 = s$，对应左侧阴影三角形。

前车静止，后车制动 令后车开始制动后的时间为 $\eta = t - T$，$0 \le \eta \le T$。后车速度为 $v_0 - a\eta$，前车速度为零。这一阶段的接近量为

$$C_2(\eta) = \int_0^\eta (v_0 - aq)\,\mathrm{d}q = \left[v_0 q - \frac{a}{2}q^2\right]_0^\eta = v_0\eta - \frac{a}{2}\eta^2.$$

它随 η 增加，到后车停下时为 s，对应右侧阴影三角形。两段合计接近 $2s$，间距在整个过程中逐渐减小，最终达到 $d - 2s$，所以严格避免接触要求

$$\boxed{d > 2s}.$$

$d = 2s$ 给出两车停车时恰好接触的临界情形。按上述两段的积分，全程间距也可整理为

$$D(t) = \begin{cases} d - \frac{1}{2}at^2, & 0 \le t \le T, \\ d - s - v_0(t-T) + \frac{1}{2}a(t-T)^2, & T \le t \le 2T. \end{cases}$$

两式在 $t = T$ 同为 $d - s$，在 $t = 2T$ 给出 $d - 2s$。图中的两块面积与分段间距分别表示同一累计接近过程。

例 1.7 (定时发车与途中相遇)**.** A, B 两站相距 60km。自 $t = 0$ 起，A 站每隔 10min 发出一辆速度为 60km/h 的汽车驶向 B。B 站一车也以 60km/h 驶向 A，并选择在 A 站某次发车的同时出发。只计两站之间的相遇，不计在站内相遇。求最多遇车数和达到此数量的最早出发时刻。

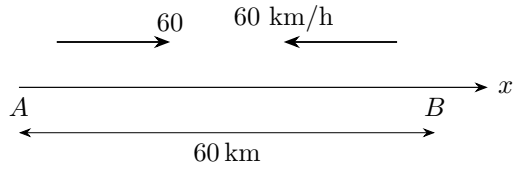


图 1.30: 两站之间相向行驶的汽车

解 图 1.30 两站单程时间为 $T = 60\,\mathrm{min}$，发车间隔为 $\tau = 10\,\mathrm{min}$。从 A 出发的第 k 辆车在 $k\tau$ 发车，$k = 0, 1, \ldots$；令 B 车在 $t_b = m\tau$ 出发，m 为非负整数。将路程与速度均换成千米、分钟后，位置方程为

$$x_A = u(t - k\tau), \qquad x_B = uT - u(t - t_b), \qquad u = 1\,\mathrm{km/min}.$$

相遇要求 $x_A = x_B$，约去 $u > 0$ 得到 $t - k\tau = T - t + t_b$，所以 $t = (T + t_b + k\tau)/2$。途中相遇的时刻位于两车各自离站以后、到站以前。将这个时间条件分别写出，再代入相遇时刻：

$$\begin{aligned} k\tau < t < k\tau + T \quad &\Longrightarrow \quad t_b - T < k\tau < t_b + T, \\ t_b < t < t_b + T \quad &\Longrightarrow \quad t_b - T < k\tau < t_b + T. \end{aligned}$$

两车的限制恰好给出同一组严格不等式：

$$t_b - T < k\tau < t_b + T, \qquad k \geq 0.$$

这里用严格不等号取途中事件；两端的等号分别对应在车站相见。

用 $T = 6\tau$、$t_b = m\tau$ 化简，允许的整数满足

$$m - 6 < k < m + 6, \quad k \geq 0, \qquad k = \max(0, m - 5), \ldots, m + 5.$$

其数量为 $m + 5 - \max(0, m - 5) + 1$：$m < 5$ 时为 $m + 6$，$m \geq 5$ 时为 11。因此最多遇到 $\boxed{11\text{辆}}$，首次达到这一数量的出发时刻为 $\boxed{50\,\mathrm{min}}$。

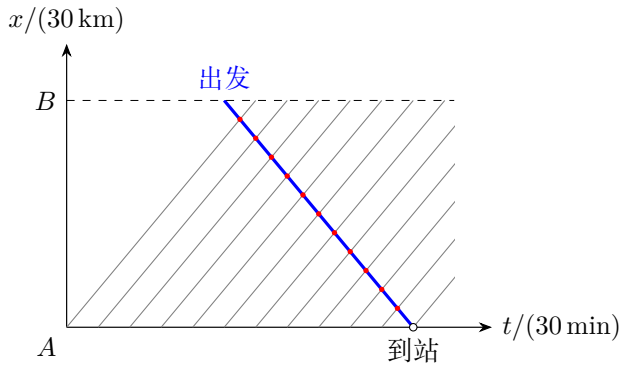


图 1.31: 位置时间图中的红色交点计入，站点端点排除

图 1.31 特取 $t_b = 50\,\mathrm{min}$。此时 $k = 0, 1, \ldots, 10$，相遇时刻为 $t_k = 55 + 5k$ 分钟，均严格落在 $(50, 110)$ 内；相邻相遇间隔是 5 分钟。第 11 号车于 110 分钟在 A 发车，与 B 车恰在站点相见，对应图中的空心端点，不计入红点数量。

这 11 个红点分别对应一辆途中相遇的车；更早出发时，已有发车数量不足，红点也随之减少。

例 1.8 (两根平移直杆的交点)**.** 两根足够长直杆 A, B 与水平线分别成 $30°, 60°$，A 从左下向右上倾斜，B 从左上向右下倾斜。A 以速率 v_A 向左平移，B 以速率 v_B 向右平移。求交点 C 的速度，并分别讨论其中一杆静止的情形。

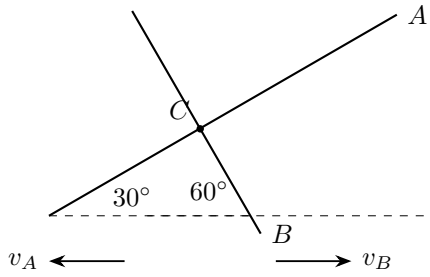


图 1.32: 两根向相反方向平移的直杆

解 图 1.32 中，两根杆的交点同时位于两条直线上。取初始交点为原点，向右、向上为正，先将两根杆与水平的锐角记为 θ, φ，并令 $p = \tan\theta$、$q = \tan\varphi$。

杆 A 向左平移 $v_A t$，原来横坐标为 $x + v_A t$ 的材料点移到 x 处；杆 B 向右平移 $v_B t$，相应初始横坐标为 $x - v_B t$。因此交点满足

$$y = p(x + v_A t), \qquad y = -q(x - v_B t).$$

两式对同一时间求导，得到

$$v_y = p(v_x + v_A) = q(v_B - v_x),$$

从而

$$(p+q)v_x = qv_B - pv_A, \qquad v_x = \frac{qv_B - pv_A}{p+q}.$$

代回第一式，

$$\begin{aligned} v_y &= p\left(\frac{qv_B - pv_A}{p+q} + v_A\right) \\ &= \frac{p(qv_B - pv_A + pv_A + qv_A)}{p+q} = \frac{pq(v_A + v_B)}{p+q}. \end{aligned}$$

本题 $p = 1/\sqrt{3}$、$q = \sqrt{3}$，所以

$$\boxed{v_x = \frac{3v_B - v_A}{4}}, \qquad \boxed{v_y = \frac{\sqrt{3}(v_A + v_B)}{4}}.$$

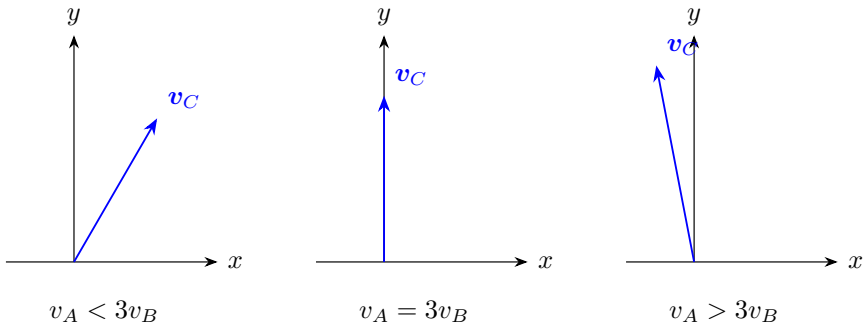


图 1.33: 水平分量不同符号时的三种交点运动方向

图 1.33 按水平分量的符号画出三种方向。$v_A < 3v_B$ 时交点向右上移动，$v_A = 3v_B$ 时竖直向上，$v_A > 3v_B$ 时向左上。两分量平方相加，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}_C|^2 &= \frac{(3v_B - v_A)^2 + 3(v_A + v_B)^2}{16} \\ &= \frac{9v_B^2 - 6v_Av_B + v_A^2 + 3v_A^2 + 6v_Av_B + 3v_B^2}{16} \\ &= \frac{v_A^2 + 3v_B^2}{4}, \end{aligned}$$

故速率为 $\frac{1}{2}\sqrt{v_A^2 + 3v_B^2}$。

题目所问的一杆静止情形，可以在上述分量式中直接令相应速度为零：

$$v_A=0:\quad (v_x,v_y)=\left(\frac{3v_B}{4},\frac{\sqrt{3}v_B}{4}\right),\qquad |\boldsymbol{v}_C|=\frac{\sqrt{3}}{2}v_B;$$

$$v_B=0:\quad (v_x,v_y)=\left(-\frac{v_A}{4},\frac{\sqrt{3}v_A}{4}\right),\qquad |\boldsymbol{v}_C|=\frac{v_A}{2}.$$

前一种情况下，交点沿静止的 A 杆向右上移动；后一种沿静止的 B 杆向左上移动。相对于各杆的速度分别为 $\boldsymbol{v}_C-(-v_A,0)$ 和 $\boldsymbol{v}_C-(v_B,0)$，由前面的两条导数关系，它们的斜率为 p 和 $-q$，恰沿各自的杆。这样也能看清交点在两根杆材料上的相对移动。

例 1.9 (速度随高度变化的爬行)**.** 蜗牛从电杆底部向上爬，速度与高度关系为 $v(h)=lv_0/(l+h)$，其中 $l=20\text{cm}$，$v_0=2\text{cm/s}$。求爬高 20cm 的时间，并用图像说明积分的意义。

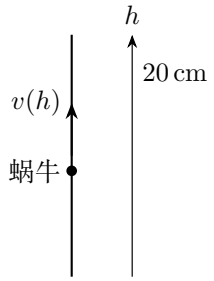


图 1.34: 蜗牛的速率随爬行高度改变

解 图 1.34 中，蜗牛越高，速率越小。走过微小高度 $\mathrm{d}h$ 的时间为

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}h}{v(h)}=\frac{l+h}{lv_0}\,\mathrm{d}h.$$

将各小段用时累加，先求任意高度 H 对应的时间：

$$\begin{aligned}t(H)&=\int_0^H\frac{l+h}{lv_0}\,\mathrm{d}h=\frac{1}{lv_0}\left[lh+\frac{h^2}{2}\right]_0^H\\&=\frac{lH+H^2/2}{lv_0}=\frac{H}{v_0}+\frac{H^2}{2lv_0}.\end{aligned}$$

代入 $H=l=20\,\text{cm}$、$v_0=2\,\text{cm/s}$，

$$\boxed{t(l)=\frac{3l}{2v_0}=15\,\text{s}}.$$

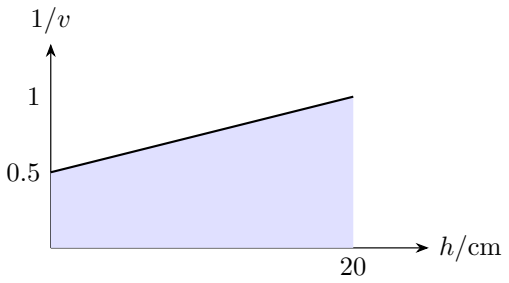


图 1.35: 速度倒数随高度变化的梯形面积

图 1.35 的纵轴为 $1/v$。起点和终点的高度分别为 $1/v_0 = 0.5\,\mathrm{s/cm}$ 和 $2/v_0 = 1\,\mathrm{s/cm}$，横向宽度为 $20\,\mathrm{cm}$，梯形面积正好是上式累加的时间。每个窄条的面积有单位 $(\mathrm{s/cm})\mathrm{cm} = \mathrm{s}$，这给出了积分的直接物理意义。

由时间函数还可看出，前一项 H/v_0 是始终保持初速时的用时，后一项描述逐渐减速所增加的时间。本题 $H = l$，后一项占总时间的三分之一。固定 l, v_0 求导，

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}H} = \frac{1}{v_0} + \frac{2H}{2lv_0} = \frac{l+H}{lv_0} = \frac{1}{v(H)},$$

导数给出每增加单位高度所需的时间。

从高度对应的用时求运动方程 为进一步描述每一时刻的位置，将 H 换回 h 并反解时间关系：

$$v_0 t = h + \frac{h^2}{2l}, \qquad (h+l)^2 = l^2 + 2lv_0 t.$$

蜗牛从 $h = 0$ 向上爬，取 $h + l > 0$，得到

$$h(t) = l\left(\sqrt{1 + \frac{2v_0 t}{l}} - 1\right).$$

对它逐次求导，

$$\begin{aligned}
\dot{h} &= l \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2v_0 t}{l}\right)^{-1/2} \frac{2v_0}{l} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + 2v_0 t/l}} = \frac{lv_0}{l+h}, \\
\ddot{h} &= v_0 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{2v_0 t}{l}\right)^{-3/2} \frac{2v_0}{l} \\
&= -\frac{v_0^2}{l}\left(1 + \frac{2v_0 t}{l}\right)^{-3/2} < 0.
\end{aligned}$$

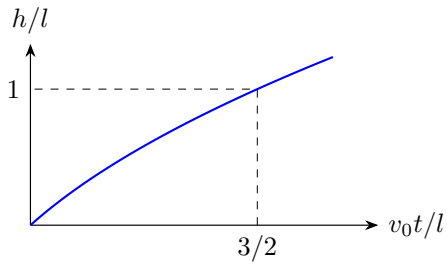


图 1.36: 位置曲线的斜率递减，但高度始终增加

图 1.36 的高度一直增加，切线斜率逐渐减小，分别对应 $\dot{h}>0$ 和 $\ddot{h}<0$。横轴用 v_0t/l、纵轴用 h/l 后，l 与 l/v_0 分别给出长度和时间尺度，同一曲线可描述不同参数的这类爬行运动。

1.7 本讲小结

描述运动要选定参考系、坐标和计时起点。位移连接初末两个位置，路程沿实际轨迹累积；平均速度与平均速率由整段过程给出，瞬时速度则来自越来越短时间内的位移变化。加速度既可改变速率，也可改变方向。

位置图的斜率给出速度，速度图的有向面积给出位移，各段面积大小之和给出路程。已知 $v(x)$ 时，每小段的用时为 $\mathrm{d}x/v(x)$。影端和几何交点的位置由相应几何关系确定；极坐标中的单位矢量随方位转动，求速度和加速度时，它们的变化与分量的变化一起进入导数。

1.8 练习

练习 1.1 (路灯与太阳形成的影子)**.** 路灯光源 S 高为 h，人高为 $l < h$，人沿水平地面背离灯柱以速度 v 匀速行走。设脚的位置距灯柱为 x，头顶影子在地面的位置为 X。求影端速度和影长变化率；再讨论太阳光方向固定时的情况。

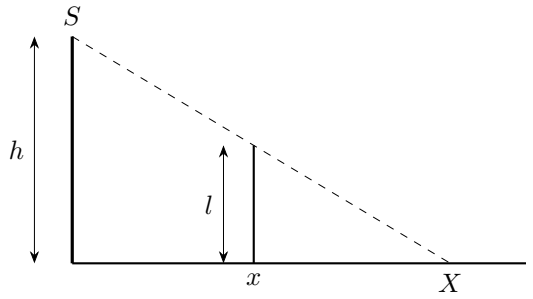


图 1.37: 路灯、人的头顶和影端共线

练习 1.2 (两圆上部交点的运动)**.** 半径均为 R 的两个薄圆环竖直放在同一水平线上。左环圆心 O_1 固定，右环圆心 O_2 沿水平方向运动，$O_1O_2 = d$，$0 < d < 2R$，规定 $\dot{d} = v$。求两圆上部交点 P 的速度分量和速率。

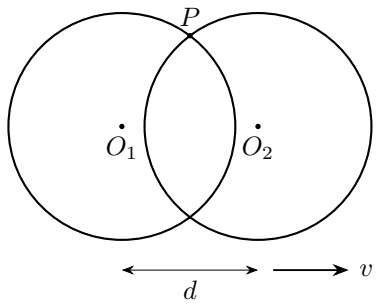


图 1.38: 等半径两圆的上部交点

练习 1.3 (斜绳牵引的水平速度)**.** 物体 M 只能沿水平面向右运动，绳从物体上的 B 点连接到高处固定滑轮 C，越过滑轮后以速率 v 收绳。绳不可伸长、滑轮尺寸忽略。当 BC 与水平成 α 时，求物体速度。

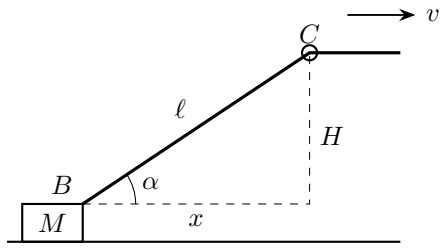


图 1.39: 斜绳的水平距离、高度差与绳长

练习 1.4 (极坐标速度的矢量求导)**.** 在固定平面内，质点的极坐标速度写成 $\boldsymbol{v} = v_\rho \boldsymbol{e}_\rho + \rho\omega \boldsymbol{e}_\theta$，其中 $v_\rho = \dot{\rho}$、$\omega = \dot{\theta}$。推导加速度在径向与横向的分量。

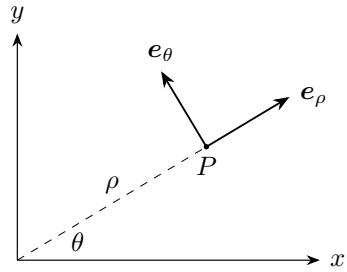


图 1.40: 随质点方位转动的径向和横向单位矢量

练习解答

练习 1.1

解 图 1.37 中，人的位置为 x，影端位置为 X，影长为 $\ell = X - x$。路灯、头顶和影端共线，形成的两个直角三角形相似，因此

$$\frac{l}{X-x} = \frac{h}{X}, \qquad lX = h(X-x), \qquad (h-l)X = hx.$$

由此解出

$$X = \frac{h}{h-l}x, \qquad \ell = X - x = \frac{l}{h-l}x.$$

题设 h, l 均为常量，人的速度 $\dot{x} = v$，逐式求导，

$$\boxed{\dot{X} = \frac{h}{h-l}v}, \qquad \boxed{\dot{\ell} = \frac{l}{h-l}v}.$$

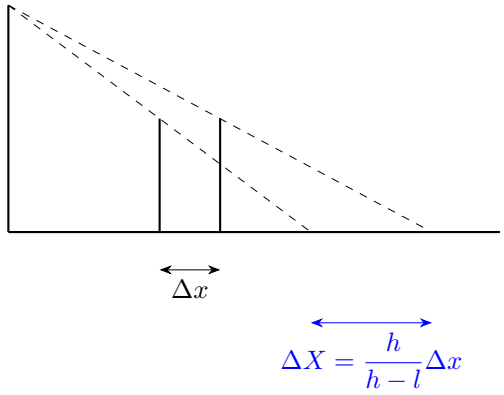


图 1.41: 人的位移与影端位移的相似关系

图 1.41 画出人的两次位置和对应的影端位置。两者位移之比始终为 $h/(h-l)$，影端因而也匀速前进，且比人走得快。人越高，或路灯与头顶的高度差越小，影端位移相对于人的位移就越大。$l \to 0$ 时，两者位置逐渐合并。

方向固定的平行阳光 图 1.42 中，光线与地面的夹角 γ 保持不变，人的身高也保持不变。于是

$$\tan\gamma = \frac{l}{\ell}, \qquad \ell = l\cot\gamma, \qquad X = x + l\cot\gamma.$$

右侧的 $l\cot\gamma$ 为常量，对时间求导得到

$$\boxed{\dot{\ell} = 0, \qquad \dot{X} = v}.$$

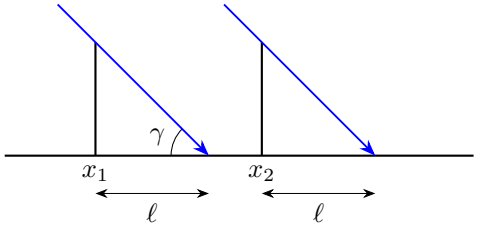


图 1.42: 平行阳光下，身高不变使影长保持不变

图 1.42 中，人的两个位置形成相同的影长。整个“人和影子”的图形沿地面平移，影端与人具有相同速度。这与路灯情况下随离灯距离增加而增长的影长形成对照。

练习 1.2

解 取图 1.38 中的 $O_1=(0,0)$、$O_2=(d,0)$，上方交点为 $P=(x,y)$，$y>0$。P 同时在两个圆上，

$$x^2+y^2=R^2,\qquad (x-d)^2+y^2=R^2.$$

两式相减，得 $2dx=d^2$。由 $d>0$，

$$x=\frac{d}{2},\qquad y=\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}.$$

先对 $x=d/2$ 求导，$v_x=\dot{d}/2=v/2$；再对左圆方程求导，

$$2x\dot{x}+2y\dot{y}=0,\qquad xv_x+yv_y=0.$$

将 $x=d/2$ 和 $v_x=v/2$ 代入，解出

$$\boxed{v_x=\frac{v}{2},\qquad v_y=-\frac{dv}{4y}}.$$

合速率由两分量平方相加得到：

$$u_P^2=\frac{v^2}{4}+\frac{d^2v^2}{16y^2}=\frac{v^2(4y^2+d^2)}{16y^2}=\frac{v^2R^2}{4y^2},$$

$$u_P=\boxed{\frac{|v|R}{\sqrt{4R^2-d^2}}}.$$

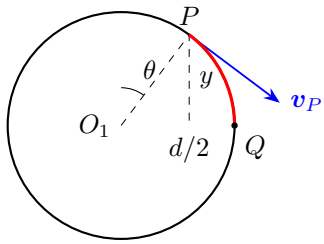


图 1.43: 交点切向速度与相切前的剩余圆弧

图 1.43 中，速度沿左圆切线，因而与 O_1P 垂直，这正是 $xv_x+yv_y=0$ 的几何意义。对右圆，相对于圆心的速度为 (v_x-v,v_y)，满足

$$(x-d)(v_x-v)+yv_y=0.$$

$v>0$ 时交点向右下移动；$v<0$ 时沿同一切线反向移动。交点的位置由两个圆共同决定，每一时刻它对应的圆环材料点可以改变。

相切前经过的圆弧　当 d 逐渐接近 $2R$，上方交点沿图中的红色圆弧靠近 Q。为描述这段路径，取 $v>0$，将 O_1P 与竖直方向的夹角记为 θ，则

$$d = 2R\sin\theta, \qquad \mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta.$$

从当前 P 到 Q 的剩余弧长为

$$\begin{aligned} s_{PQ} &= \int_{\theta}^{\pi/2} R\,\mathrm{d}\phi = R[\phi]_{\theta}^{\pi/2} \\ &= R\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = R\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{d}{2R}\right]. \end{aligned}$$

它随着 $d\to 2R$ 而趋零，而瞬时速率随 $y\to 0$ 增大。路径长度与运动快慢在这个例子中分别由弧长和位置变化率描述。$d=2R$ 时两个交点在 Q 合并；$d=0$ 时两圆重合，所有圆周点均为公共点。

练习 1.3

解　图 1.39 中，物体到滑轮正下方的水平距离为 x，高度差为常量 H，斜绳长为 ℓ。绳的直角三角形给出

$$\ell = \sqrt{x^2+H^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\ell}.$$

物体向右靠近滑轮，记水平速率为 u，于是 $\dot{x} = -u$。收绳使斜段以速率 v 缩短，即 $\dot{\ell} = -v$。对绳长使用链式法则，

$$\begin{aligned} \dot{\ell} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+H^2}}(2x\dot{x}) = \frac{x}{\ell}\dot{x} \\ &= \cos\alpha(-u) = -v. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{u = \frac{v}{\cos\alpha}}.$$

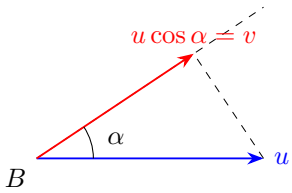


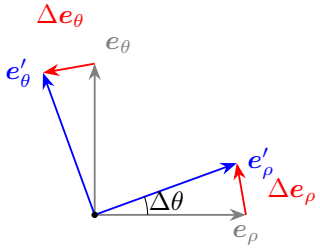
图 1.44: 水平速度沿绳方向的投影等于收绳速率

图 1.44 将水平速度投影到绳方向。短时间内物体移动 $u\,\mathrm{d}t$，它在当前绳方向上的投影为 $u\cos\alpha\,\mathrm{d}t$，这正是斜绳缩短的一阶量。图中的虚线连接水平速度的末

端和投影点，组成直角三角形。绳越陡，同样的水平移动在绳方向上产生的缩短量越小，为维持收绳速率 v，水平速率就越大。$\alpha = 0$ 时投影等于整个水平速度，得到 $u = v$。

练习 1.4

解　转动的单位矢量　图 1.40 的基矢随质点方位转动，求导时将方向变化与分量变化一起计算。



灰色：t 时刻；蓝色带撇：$t + \Delta t$ 时刻

图 1.45: 基矢增量由相邻时刻同长单位矢量的端点相连得到

图 1.45 把相邻时刻的两组基矢放在共同起点，由各自端点相连的矢量给出增量。由 $\boldsymbol{e}_\rho = (\cos\theta, \sin\theta)$、$\boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$，逐分量使用链式法则，

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = (-\sin\theta\,\dot\theta, \cos\theta\,\dot\theta) = \omega\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = (-\cos\theta\,\dot\theta, -\sin\theta\,\dot\theta) = -\omega\boldsymbol{e}_\rho.$$

速度中的径向项与横向项分别应用乘积法则，第二项还需同时改变 ρ、ω 与基矢：

$$\frac{\mathrm{d}(v_\rho\boldsymbol{e}_\rho)}{\mathrm{d}t} = \dot v_\rho\boldsymbol{e}_\rho + v_\rho\omega\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}(\rho\omega\boldsymbol{e}_\theta)}{\mathrm{d}t} = (\dot\rho\omega + \rho\dot\omega)\boldsymbol{e}_\theta - \rho\omega^2\boldsymbol{e}_\rho.$$

两项相加，再代入 $v_\rho = \dot\rho$、$\dot v_\rho = \ddot\rho$，得到

$$\boldsymbol{a} = \boxed{(\ddot\rho - \rho\omega^2)\boldsymbol{e}_\rho + (2\dot\rho\omega + \rho\dot\omega)\boldsymbol{e}_\theta}.$$

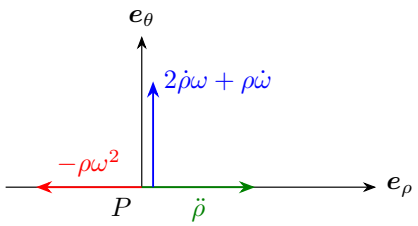


图 1.46: 加速度中各项在径向、横向的分解

加速度各项的来源

图 1.45 所画的基矢变化分别进入两次乘积求导。图 1.46 中，径向的 $\ddot\rho$ 来自径向速度大小的变化，$-\rho\omega^2$ 来自横向速度方向的转动。横向的两个 $\dot\rho\omega$，一个来自径向速度的转向，另一个来自 $\rho\omega$ 随半径变化而产生的增量；$\rho\dot\omega$ 则来自角速度的改变。将同一方向的贡献相加，就得到两个加速度分量。若 $\rho=R$ 恒定，便有 $a_\rho=-R\omega^2$、$a_\theta=R\dot\omega$；若 $\omega=0$，则恢复沿固定射线的直线运动。

匀速直线运动的例子

再看一个具体运动：物体沿不经过极点的直线匀速运动时，极坐标基矢仍会转动，而速度矢量保持不变，总加速度为零。取 $P=(a,ut)$，其中 $a,u>0$，则

$$\rho=\sqrt{a^2+u^2t^2},\qquad \theta=\arctan\frac{ut}{a}.$$

先对根式作链式求导，再对所得商式求导：

$$\begin{aligned}\dot\rho&=\frac{1}{2\sqrt{a^2+u^2t^2}}\,2u^2t=\frac{u^2t}{\rho},\\ \ddot\rho&=u^2\frac{\rho-t\dot\rho}{\rho^2}=\frac{u^2}{\rho}-\frac{u^4t^2}{\rho^3}\\ &=\frac{u^2(\rho^2-u^2t^2)}{\rho^3}=\frac{a^2u^2}{\rho^3}.\end{aligned}$$

反正切的内层为 ut/a，所以 $\dot\theta=[1+(ut/a)^2]^{-1}(u/a)=au/(a^2+u^2t^2)$。用 $\rho^2=a^2+u^2t^2$ 并再按链式法则求导，得到

$$\omega=\frac{au}{\rho^2},\qquad \dot\omega=-\frac{2au\dot\rho}{\rho^3}=-\frac{2au^3t}{\rho^4}.$$

把它们逐项代入所证的公式：

$$\begin{aligned}a_\rho&=\frac{a^2u^2}{\rho^3}-\rho\frac{a^2u^2}{\rho^4}=0,\\ a_\theta&=2\frac{u^2t}{\rho}\frac{au}{\rho^2}-\rho\frac{2au^3t}{\rho^4}=0.\end{aligned}$$

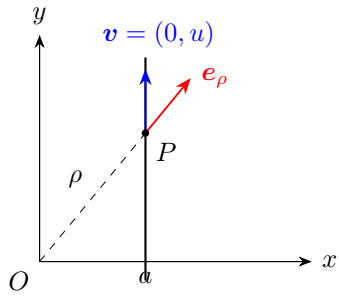


图 1.47: 沿直线匀速运动时，径向和横向的各项分别抵消

图 1.47 中，位置变化使径向、横向基矢一起转动；上面的计算显示，同一基矢方向的两项各自抵消，合加速度为零。固定半径圆周运动时，径向基矢指向圆外，径向加速度便简化为 $-R\omega^2$，横向加速度为 $R\dot{\omega}$。

运动学

物理竞赛一轮讲义

第二讲

相对运动与变速直线运动

2026

目录

第二讲　相对运动与变速直线运动 **1**

2.1　匀变速与一般变速直线运动 1

2.2　相对运动 6

2.3　渡河与最近距离 10

2.4　追及、制动与重复碰撞 12

2.5　例题与分析 14

2.6　本讲小结 33

2.7　练习 34

练习解答 35

第二讲　相对运动与变速直线运动

2.1　匀变速与一般变速直线运动

2.1.1　由加速度求速度和位置

沿一条固定直线选坐标正向，设加速度 a 为常量，$t=0$ 时的位置和速度为 x_0, v_0。先求速度变化，再将速度累积为位移：

$$v - v_0 = \int_0^t a \,\mathrm{d}\tau = [a\tau]_0^t = at,$$
$$x - x_0 = \int_0^t (v_0 + a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[v_0\tau + \frac{1}{2}a\tau^2\right]_0^t = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

将位移式乘 $2a$，用 $at = v - v_0$ 消去时间，

$$\begin{aligned} 2a(x - x_0) &= 2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2 \\ &= v^2 - v_0^2. \end{aligned}$$

三个常用关系便为

$$v = v_0 + at, \qquad x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2, \qquad v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0).$$

式中的 $a, v, x - x_0$ 都带正负。速度平方关系便于消去时间，但平方根的正负要由运动方向确定。$a = 0$ 时则直接用 $v = v_0$ 和 $x - x_0 = v_0 t$。

速度图为直线时，位移等于梯形面积，平均速度是 $(v_0 + v)/2$。汽车停下后保持静止，则停车以后的位置保持固定，运动由匀减速改为静止。前后两段应各用自己的速度表达式。

2.1.2　加速顺序与各段初值

一辆车先以 a_1 加速 T，再以 a_2 加速 T。第一段结束的速度为 $v_0 + a_1 T$，它就是第二段的初速度。两段位移为

$$s_1 = v_0 T + \frac{1}{2}a_1 T^2, \qquad s_2 = (v_0 + a_1 T)T + \frac{1}{2}a_2 T^2.$$

图 2.1 在分段时刻速度连续，图线的斜率改变。速度增加量在下一段仍然保留，这使交换加速顺序通常会改变总位移。

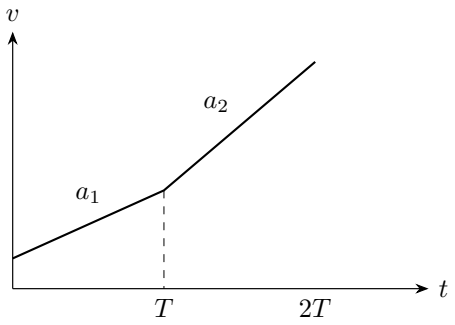


图 2.1: 分段加速度改变斜率但保留速度的连续性

图 2.2 比较两种顺序，末速度都是 $v_0 + (a_1 + a_2)T$。当 $a_1 > a_2$ 时，先用 a_1 的过程在中间阶段速度较大，多走的位移为

$$\begin{aligned} s_{12} - s_{21} &= \left(\frac{3}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{3}{2}a_2 - \frac{1}{2}a_1\right) T^2 \\ &= (a_1 - a_2)T^2. \end{aligned}$$

它也是两条速度图线之间四边形的面积。较早得到的速度增量，会在以后更长时间内继续贡献位移。

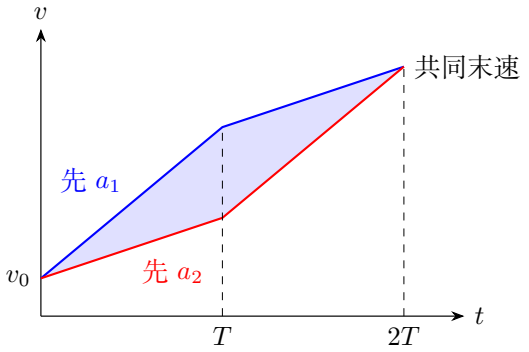


图 2.2: 相同末速度不保证相同位移，加速顺序改变图下面积

2.1.3 等时间位移与两个中点速度

把匀变速运动分成时长均为 τ 的小段，第 n 段位移为

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= x(n\tau) - x((n-1)\tau)\\ &= v_0\tau + \frac{a}{2}[n^2-(n-1)^2]\tau^2\\ &= v_0\tau + \frac{a}{2}(2n-1)\tau^2,\\ \Delta x_{n+1} - \Delta x_n &= a\tau^2.\end{aligned}$$

从静止出发、沿同一方向加速时，等时间路程比是 $1:3:5:\cdots$。有折返时，以上仍给带符号的位移，路程应在转向处分段相加。

“用时的一半”和“走过位移的一半”通常不是同一事件。前者利用 $v(t)$ 的直线关系，后者利用 $v^2(x)$ 的直线关系。图 2.3 取正向加速的过程，分别得到

$$v_{\text{时中}} = \frac{v_0+v_1}{2}, \qquad v^2_{\text{位中}} = \frac{v_0^2+v_1^2}{2}, \qquad v_{\text{位中}} = \sqrt{\frac{v_0^2+v_1^2}{2}}.$$

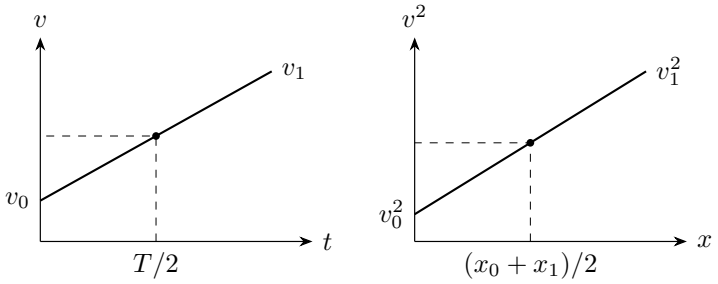


图 2.3: 在各自线性图上取中点，平均的是纵轴实际表示的量

同一位置若在往返中经过两次，速度平方相同也可能对应相反的速度。图中取平方根的正号，来自已给定的正向运动。

2.1.4 加速度随时间、位置或速度变化

加速度不恒定时，仍从 $\dot v = a$ 出发。如果给出 $a(t)$，则

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

若给出 $a(x)$，利用链式法则将时间导数改写为

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

沿运动的这一段积分，

$$\int_{v_0}^{v} u\,\mathrm{d}u = \int_{x_0}^{x} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \frac{v^2 - v_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} a(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

左侧由原函数 $u^2/2$ 代入两端得到。这个关系将速度平方与走过位置联系起来，对位置相关的加速度特别方便。求得 v^2 后，在当前运动方向上取相应的速度；到速度为零的位置，再根据实际运动决定是否转向。

若给出 $a(v)$，在加速度非零的一段可以分离变量：

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{a(v)}, \qquad \mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t = \frac{v\,\mathrm{d}v}{a(v)}.$$

因此

$$t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}u}{a(u)}, \qquad x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{u\,\mathrm{d}u}{a(u)}.$$

减速时速度增量与加速度同为负，所得时间增量仍为正。当某速度 v_* 满足 $a(v_*) = 0$ 时，$v(t) = v_*$ 对应一个匀速解。给定其他初速度后，可以在加速度非零的速度段内按上述积分继续求运动。

为了看清速度相关的加速度怎样给出完整运动，考虑

$$a(v) = -kv, \qquad k > 0, \qquad v(0) = v_0 > 0, \quad x(0) = x_0.$$

速度越大，减速作用越强。运动方程为 $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = -kv$。在 $v > 0$ 的这段运动中分离变量，从初值积到当前速度，

$$\begin{aligned}
\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}q}{q} &= -k \int_0^t \mathrm{d}\tau, \\
[\ln q]_{v_0}^{v} &= -k[\tau]_0^t, \\
\ln \frac{v}{v_0} &= -kt, \qquad v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-kt}.
\end{aligned}$$

再积分速度，

$$\begin{aligned}
x(t) - x_0 &= \int_0^t v_0 \mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = \Big[-\frac{v_0}{k}\mathrm{e}^{-k\tau}\Big]_0^t \\
&= \frac{v_0}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt}).
\end{aligned}$$

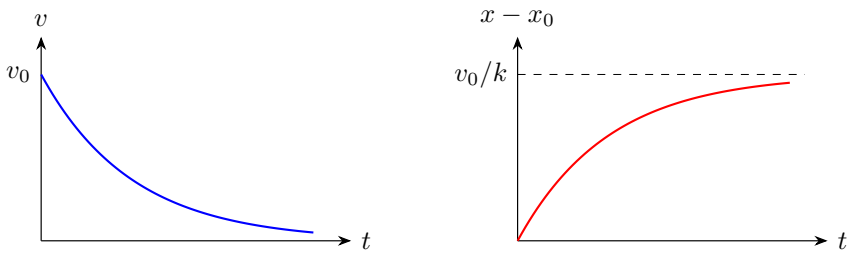


图 2.4: 速度逐渐衰减，位置趋向有限的极限

图 2.4 中，速度一直为正并逐渐减小，位置一直增加并趋近 $x_\infty = x_0 + v_0/k$。将剩余距离记为 $\xi = x_\infty - x$，有

$$\xi = \frac{v_0}{k}\mathrm{e}^{-kt}, \qquad v = k\xi.$$

这就是第一讲中 $p = 1$ 的末端减速情形：在任何有限时刻尚有正的剩余距离，而随时间无限增加，距离趋零。

若已知的是随时间改变的加速度，也可逐次积分。例如在 $0 \le t \le T$ 内，$a(t) = a_0(1 - t/T)$，$a_0 > 0$，从 v_0, x_0 出发，

$$\begin{aligned} v(t) - v_0 &= \int_0^t a_0(1 - \tau/T)\,\mathrm{d}\tau = a_0\left[\tau - \frac{\tau^2}{2T}\right]_0^t \\ &= a_0 t - \frac{a_0 t^2}{2T}, \\ x(t) - x_0 &= \int_0^t \left(v_0 + a_0\tau - \frac{a_0\tau^2}{2T}\right)\mathrm{d}\tau \\ &= \left[v_0\tau + \frac{a_0\tau^2}{2} - \frac{a_0\tau^3}{6T}\right]_0^t \\ &= v_0 t + \frac{a_0 t^2}{2} - \frac{a_0 t^3}{6T}. \end{aligned}$$

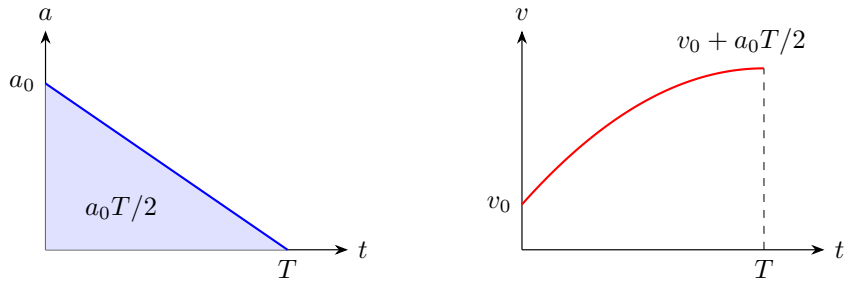


图 2.5: 加速度图的面积给出速度增量，速度图斜率随之减小

图 2.5 中，加速度图的三角形面积 $a_0T/2$ 就是整段速度增量。加速度逐渐减小到零，速度仍继续增加，但速度图的斜率逐渐减小。下面的位置相关加速度例题则将使用 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 来消去时间。

2.2 相对运动

2.2.1 从一个参考系到另一个参考系

在岸上看，船一边横渡河流，一边被水带向下游；坐在随水漂流的小筏上看，船又有另一条运动轨迹。两种观察描述的是同一运动，区别在于选作参照的物体不同。遇到船、风雨、车流等问题，选择合适的参考系，常能使原来复杂的运动变得直观。

如图 2.6，地面参考系的原点为 O，另一参考系的原点为 B，质点为 A。从 O 到 A，可以先到 B 再到 A，因此

$$\boldsymbol{r}_{A/O} = \boldsymbol{r}_{B/O} + \boldsymbol{r}_{A/B}.$$

下标 A/B 表示 A 相对于 B。若两套坐标轴始终平行，逐项对同一时间求导，得到

$$\boldsymbol{v}_{A/O} = \boldsymbol{v}_{B/O} + \boldsymbol{v}_{A/B}, \qquad \boldsymbol{a}_{A/O} = \boldsymbol{a}_{B/O} + \boldsymbol{a}_{A/B}. \tag{2.1}$$

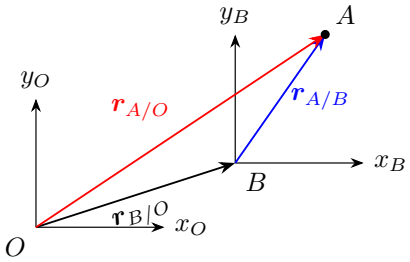


图 2.6: 同一质点在两套平行坐标系中的位矢

速度的相加是矢量相加。图 2.7 中，船对水速度与水对岸速度首尾相接，合成船对岸速度。若已知两物体对地速度，改在随 B 平动的系中看 A，只需写成

$$\boldsymbol{v}_{A/B} = \boldsymbol{v}_{A/O} - \boldsymbol{v}_{B/O}.$$

同理 $\boldsymbol{v}_{B/A} = -\boldsymbol{v}_{A/B}$：彼此看来，对方的运动方向相反。

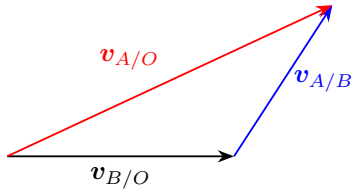


图 2.7: 平动参考系之间的速度三角形

设两船相对于水匀速运动。以其中一船为参照，另一船的轨迹是一条直线。如果这条相对轨迹经过第一船所在的位置，两船便会相遇；若从旁经过，相对轨迹到第一船的距离就是两船最近距离。这把两条运动轨迹之间的关系，化成了一个动点对一个定点的关系，后面将给出相应计算。

上述加速度关系用于两套坐标轴不相对转动的情形。旋转木马上观察雨滴时，可以先在某瞬间减去观察者的对地速度，求雨滴相对观察者的速度；若要连续描述其后运动，还要计入观察方向的转动。

2.2.2 参考系怎样改变轨迹的形状

在一列沿直轨道以恒速 V 行驶的车中，从高度 h 由静止释放小球。取释放瞬间两系原点重合，x 轴沿列车前进方向，y 轴竖直向上。在车内看，小球保持 $x'=0$，并沿竖直方向下落；在地面看，它在释放时已具有水平速度 V。

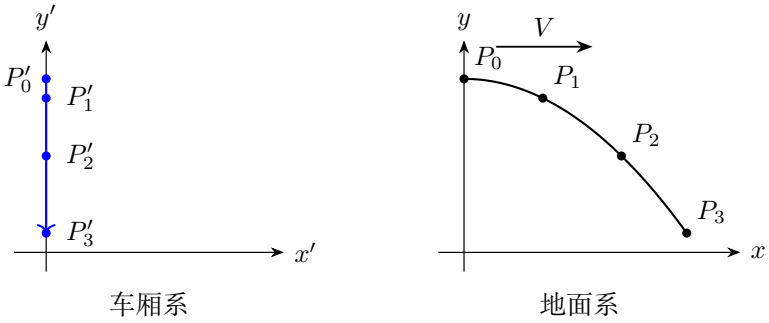


图 2.8: 同一组下落事件在车厢系与地面系中的位置

车厢系中，水平初速度与水平加速度均为零，故 $x'=0$。竖直方向从 $v_y'(0)=0$、$y'(0)=h$ 依次积分：

$$v_y' = \int_0^t (-g)\,\mathrm{d}\tau = [-g\tau]_0^t = -gt,$$

$$y'-h = \int_0^t (-g\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[-\frac{1}{2}g\tau^2\right]_0^t = -\frac{1}{2}gt^2.$$

地面系中的位置再由平移关系给出：

$$x = Vt + x' = Vt, \qquad y = y' = h - \frac{1}{2}gt^2.$$

图 2.8 中下标相同的点对应同一时刻。两系中的高度相同，水平坐标相差 Vt。地面系内消去 $t = x/V$，得 $y = h - gx^2/(2V^2)$，轨迹为抛物线；车厢系内轨迹是一条竖直线。两次求导则给出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' = (0, -g)$。轨迹与速度随参考系改变，而匀速平移的两个参考系给出相同加速度。后面的风雨、渡河和最近距离问题，都是从这种位置关系逐步得到相对速度。

2.2.3　共同加速度下的相对运动

两个抛体在空中都受同一重力加速度。分别写位置，

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_{10} + \boldsymbol{v}_{10}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_{20} + \boldsymbol{v}_{20}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2.$$

相减后，重力项消去：

$$\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (\boldsymbol{r}_{20} - \boldsymbol{r}_{10}) + (\boldsymbol{v}_{20} - \boldsymbol{v}_{10})t.$$

虽然每个物体对地都做抛体运动，它们的相对运动却是匀速直线运动。图 2.9 中，两球同时从同一高度水平抛出，到同一时刻下落高度相等，所以它们的连线保持水平，间距为 $|u_2 - u_1|t$。

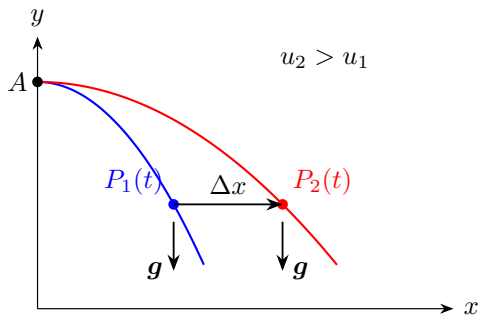


图 2.9: 共同竖直加速度相消，同一时刻的相对位移保持水平

图中的两个位置取自同一时刻；共同重力使两球在空中获得相同的竖直位移。后面的四球构形例题也将用这个共同平移来描述它们的位置关系。

2.2.4 行车中看到的风雨方向

竖直落下的雨，在前进的汽车中看来向后倾斜。取向右、向上为正，雨的对地速度为 $(u,-w)$，汽车速度为 $(V,0)$，则雨对车的速度为

$$\boldsymbol{v}_{\text{雨/车}}=(u-V,-w).$$

水平分量 $u-V$ 决定雨从车的哪一侧斜着落来，与竖直线夹角的正切为 $|u-V|/w$。图 2.10 取雨对地竖直的情形，改变的是观察者，因而多出了向后的相对分量。

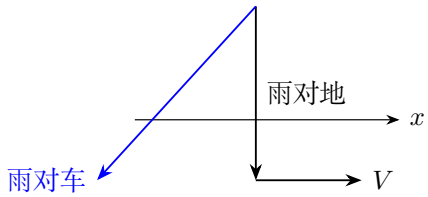


图 2.10: 车辆速度改变雨滴的相对方向

风向的“来向”与速度矢量的指向相反。例如东北风由东北吹向西南。根据旗子、雨滴方向反求风速时，先在图上画出实际运动箭头，再将各个相对速度联系起来。把玻璃上的雨痕用来描述雨向时，采用的是雨痕沿雨滴相对运动投影的理想化模型。

2.2.5 穿过运动平面的粒子数

相对速度还决定有多少雨滴撞上运动的木板。设雨滴在空间均匀分布，数密度为 n，木板面积为 S，单位法向为 $\boldsymbol{n}$。在短时间 $\mathrm{d}t$ 内，能穿过板面的雨滴来自一个薄柱体，它的高是相对位移的法向分量：

$$\mathrm{d}h=|\boldsymbol{v}_{\text{雨/板}}\cdot\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}t.$$

薄柱的体积为 $S\,\mathrm{d}h$，所以穿过板面的雨滴数为

$$\mathrm{d}N=nS|\boldsymbol{v}_{\text{雨/板}}\cdot\boldsymbol{n}|\,\mathrm{d}t.$$

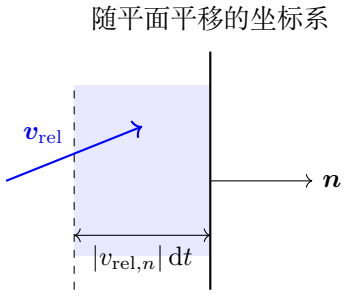


图 2.11: 随板观察，穿过板面的雨滴来自一段法向薄柱

薄柱的厚度为 $|v_{\mathrm{rel},n}|\,\mathrm{d}t$。雨滴和平面的法向速度相等时，厚度为零，这一瞬间没有雨滴穿面。图 2.11 中的平行分量只改变雨滴打在板上的位置，法向分量才改变穿过的数量。若只接收从板某一侧射来的粒子，取朝向这一侧的入射分量。分布或板的朝向改变时，将相应的瞬时数量沿时间积分。

迎雨行走的竖直板，走得快时单位时间撞雨较多，但走完固定距离所用时间较短，两种影响可能相抵。水平伞面接收的是竖直方向的相对雨速，情况又不同。下面的例题将依次从板面的接雨数量、玻璃的垂直入射和人的跑动方向讨论这些分量。

2.3　渡河与最近距离

2.3.1　渡河的时间与航程

设水流沿 x 正向，速率为 u，船对水速率为 w，河宽为 d。船头从河岸法线向上游偏角 β，则船对岸的两个分量为

$$V_x = u - w\sin\beta, \qquad V_y = w\cos\beta > 0.$$

到达对岸的时间与对岸航程分别为

$$T = \frac{d}{V_y}, \qquad S = |\boldsymbol{V}|T = d\frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{V_y}.$$

要使时间最短，就使 V_y 最大，船头应垂直河岸，时间为 d/w。这时水流仍把船向下游带走。

航程最短则要求船对岸的方向尽可能接近河岸法线。$w > u$ 时，可取 $\sin\beta = u/w$，使 $V_x = 0$，船沿垂直河岸的直线抵达对岸，航程为 d。$w < u$ 时无法完全抵消水流，可以用速度圆求最有利方向。

图 2.12 中，水速的端点为 W，船对岸速度的端点 V 在以 W 为圆心、w 为半径的圆上。航程与 $|OV|/V_y$ 成正比，所以应使 OV 与河岸的夹角最大，即从 O 向圆作切线。

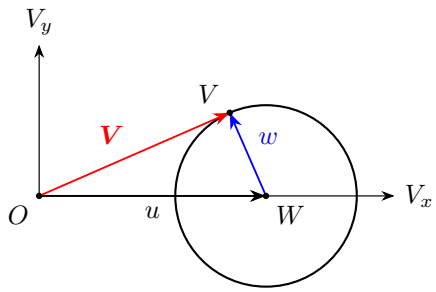


图 2.12: 水速大于船速时，最短航程对应速度圆的切线

切点处 $WV \perp OV$，直角三角形给出

$$|OV| = \sqrt{u^2 - w^2}, \qquad \frac{V_y}{|OV|} = \frac{w}{u}.$$

代入航程式得到

$$S_{\min} = \frac{du}{w}, \qquad \sin\beta = \frac{w}{u}.$$

最短航程和最短时间对应不同的船头方向。$w = u$ 时，让航迹逐渐接近垂直河岸，会同时使过河速度趋于零；航程趋近 d 时，用时趋于无穷；航程 d 是这一情形的下确界。

2.3.2 相对直线运动的最近距离

设两物体的相对位矢为 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{U}t$，$\boldsymbol{U}$ 为恒定相对速度。将距离平方展开再配方：

$$\begin{aligned} R^2 &= R_0^2 + 2(\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{U})t + U^2 t^2 \\ &= U^2 \left(t + \frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{U}}{U^2} \right)^2 + R_0^2 - \frac{(\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{U})^2}{U^2}. \end{aligned}$$

当 $U \neq 0$ 时，平方项在

$$t_* = -\frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{U}}{U^2}$$

达到零。也可求导得到

$$\frac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{U} + 2U^2 t = 2\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U},$$

所以最近时连线与相对速度垂直，这正是点到直线垂线段最短的几何关系。

图 2.13 中，实际考虑的运动是从 P_0 到 P_T 的实线段。垂足 H 在这段内时取垂足；若垂足在过去，应取初始位置；若垂足在考察结束之后，应取终位置。$U=0$ 时，两物体相对静止，距离始终不变。

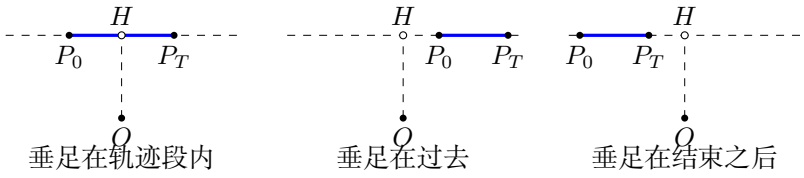


图 2.13: 垂足与实际相对轨迹段的三种位置关系

例 2.1 中，两船的初始间隔是一条矢量，相对速度也是一条矢量。固定其中一艘船来画另一艘船的轨迹，最近距离便可从原点到这条相对轨迹的垂线求得。

2.4　追及、制动与重复碰撞

2.4.1　两车间距怎样改变

研究前后两车时，取同一正向，以两车间净距离 $D=x_{\text{前}}-x_{\text{后}}$ 描述接近程度。求导有

$$\dot{D}=v_{\text{前}}-v_{\text{后}}.$$

后车较快，D 减小；两车同速时，间距瞬时不变；前车较快，D 增大。图 2.14 给出先接近后远离的情形，同速时刻正是间距最小的时刻。

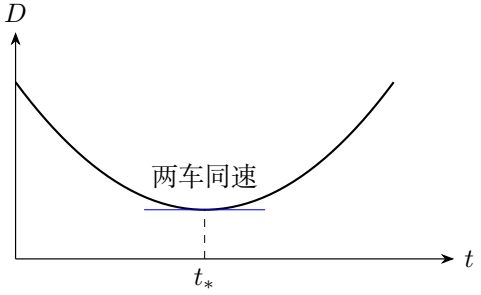


图 2.14: 间距的极小值由全程运动而非仅由停车位置确定

例如前车保持速率 u，后车初速 $v>u$，从此刻以减速度大小 b 制动，初距为 d。后车停下之前，

$$D=d+(u-v)t+\frac{1}{2}bt^2,\qquad \dot{D}=u-v+bt.$$

令两车同速，得到 $t_* = (v-u)/b$，小于后车停车时间 v/b。代入间距式，

$$\begin{aligned} D(t_*) &= d - \frac{(v-u)^2}{b} + \frac{(v-u)^2}{2b} \\ &= d - \frac{(v-u)^2}{2b}. \end{aligned}$$

因而不出现负间距要求 $d \geq (v-u)^2/(2b)$。若要求始终不接触，就取严格大于。等号给出临界接触状态，使用它求出的制动参数表示临界值。

两车都制动时，谁先停车会改变后一段的运动关系。应将共同制动、其中一车已停、两车都停三个阶段接起来。在每段内，用速度差判断间距的增减，再比较同速时刻和各段开始、结束时的间距。最后停车位置之差只是其中一个可能的最小间距。三车题还需使前后两组间距都满足要求，中间车的制动方式会同时影响两组距离。

2.4.2 碰撞后的初值与递推

连续碰撞把一段段平滑运动连接起来。每次碰撞的地点同时是下一段的起点，而碰后速度成为下一段的初速度。若每一段都按同一种规律演化，就可以用第 n 次碰后的状态表示第 $n+1$ 次的状态。

以两块交换速度的直线运动为例。设第 n 次碰后，前块比后块快 $u_n > 0$；两块在下一次碰撞前的相对加速度，使后块相对前块以 $a > 0$ 逐渐追近。以碰后时刻为 $\tau = 0$，间距为 D_n，便有

$$\begin{aligned} \dot{D}_n(\tau) - u_n &= \int_0^\tau (-a)\,\mathrm{d}s = -a\tau, \\ D_n(\tau) &= \int_0^\tau (u_n - as)\,\mathrm{d}s = \Big[u_n s - \frac{a}{2}s^2\Big]_0^\tau = u_n\tau - \frac{1}{2}a\tau^2. \end{aligned}$$

间距先增后减，再次为零时

$$\tau\left(u_n - \frac{a}{2}\tau\right) = 0, \qquad \Delta t_n = \frac{2u_n}{a}.$$

下一次碰前，$\dot{D}_n = -u_n$；交换速度后，相对速度反号，又成为 u_n。于是 $u_{n+1} = u_n$，相邻碰撞的时间间隔相同。图 2.15 把相邻两段相对运动并排画出。

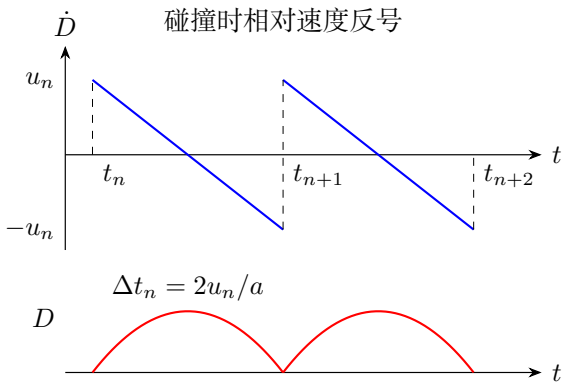


图 2.15: 交换速度后，相邻两次碰撞间的相对运动重复

若前块在被追上前停住，接下来的间距变化由后块的继续前进决定，应从停车时的间距和速度接续下一段。练习中的连续碰撞题将进一步得到 u_{n+1} 与 u_n 的关系，并据此求第 n 次碰撞的时间和位移。

2.5　例题与分析

例 2.1 (两船是否相遇及其最近距离)**.** 在平面直角坐标系中，两船的初位置为 $A=(0,0)$、$B=(400,200)\,\mathrm{m}$，对地速度分别为 $\boldsymbol{v}_A=(3,2)\,\mathrm{m/s}$、$\boldsymbol{v}_B=(1,1)\,\mathrm{m/s}$，以后保持匀速。判断它们是否相遇，求相遇时刻和位置。若只把 B 的速度改为 $(1,0)\,\mathrm{m/s}$，两船的最近距离又是多少？将船视为质点。

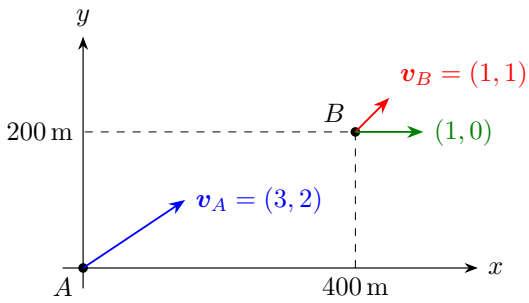


图 2.16: 两船的初位置及对地速度

解　如图 2.16，两船都在移动，直接比较两条轨迹还要使到达交点的时刻相同。改在随 A 船平动的参考系中观察，A 静止于原点，B 的初始相对位矢及相对速度为

$$\boldsymbol{R}_0=(400,200)\,\mathrm{m},\qquad \boldsymbol{U}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A=(-2,-1)\,\mathrm{m/s}.$$

以米、秒为单位，B 的相对位置为

$$\boldsymbol{R}(t) = (400 - 2t,\ 200 - t).$$

相遇要求两个分量同时为零，

$$400 - 2t = 0, \qquad 200 - t = 0,$$

两式均给出 $t = 200\,\mathrm{s}$。代入 A 船的位置，得到相遇地点

$$\boldsymbol{r}_A(200) = (3 \times 200, 2 \times 200) = (600, 400)\,\mathrm{m}.$$

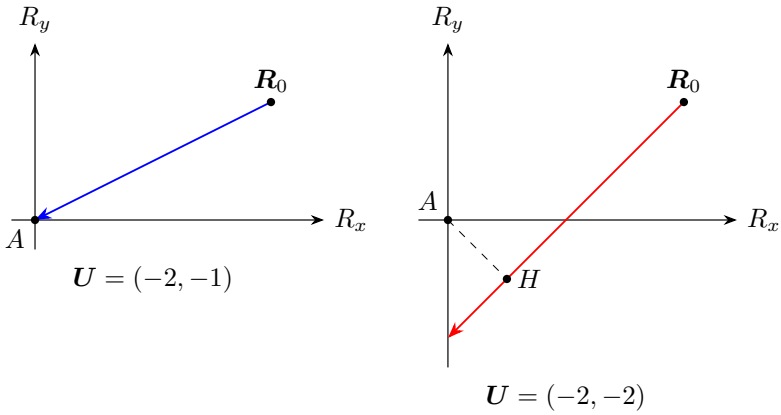


图 2.17: 随 A 船观察：一条相对轨迹经过原点，另一条从旁经过

图 2.17 左侧，相对速度恰好指向 A，所以 B 最后到达相对原点。改变 B 的速度后，相对速度为 $(-2, -2)\,\mathrm{m/s}$，相对位矢为 $(400 - 2t, 200 - 2t)$，两个分量不在同一时刻为零，两船不再相遇。

此时两船距离平方为

$$\begin{aligned} D^2(t) &= (400 - 2t)^2 + (200 - 2t)^2 \\ &= 8t^2 - 2400t + 200000 \\ &= 8(t - 150)^2 + 20000. \end{aligned}$$

平方项在 $t = 150\,\mathrm{s}$ 时为零，因而

$$D_{\min} = \sqrt{20000} = 100\sqrt{2}\,\mathrm{m}.$$

图中右侧的 $H = (100, -100)\,\mathrm{m}$ 是这一时刻的相对位置，$\overrightarrow{AH}$ 与相对轨迹垂直。也可以从 $\mathrm{d}(D^2)/\,\mathrm{d}t = 16t - 2400 = 0$ 求出同一时刻，几何图和距离函数分别表达了同一个最近过程。

例 2.2 (行车中竖直木板的淋雨量)**.** 雨滴以恒定速度竖直下落，空间雨滴数密度为 n。面积 S 的薄木板竖直立在车上，板面垂直行驶方向。车匀速驶过给定路程 D，求撞到板面上的雨滴数，并说明是否依赖车速和雨滴下落速度。

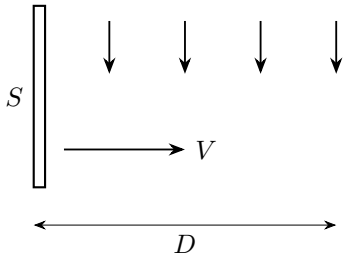


图 2.18: 车载竖直木板迎着相对雨流运动

解　图 2.18 中，木板的迎雨面竖直，法线沿车的行驶方向。在随车参考系中，雨滴既向下又向后运动：竖直分量沿板面，朝向板面的水平分量大小为车速 V。

在短时间 $\mathrm{d}t$ 内，能够撞到板面的雨滴来自厚度为 $V\,\mathrm{d}t$、底面积为 S 的柱体，故

$$\mathrm{d}N = nSV\,\mathrm{d}t.$$

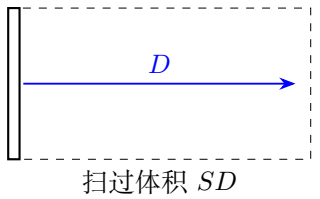


图 2.19: 木板行驶路程决定扫过的柱体体积

图 2.19 把这些薄柱逐段接在一起。木板行驶时间为 $T = D/V$，于是

$$N = \int_0^T nSV\,\mathrm{d}t = nSV[t]_0^T = nSV\frac{D}{V} = \boxed{nSD}.$$

车速越大，单位时间撞雨越多，用于走完固定路程的时间相应缩短；两者相乘只留下扫过体积 SD。竖直雨速只改变雨滴在板上的落点高度，板面法向的厚度仍由 $V\,\mathrm{d}t$ 决定。

若保持向前行驶而车速随时间改变，令 $x(0) = 0$、$x(T) = D$。用 $\mathrm{d}x = V(t)\,\mathrm{d}t$ 换元，积分的时刻上下限改为相应位置，

$$\begin{aligned} N &= nS\int_0^T V(t)\,\mathrm{d}t = nS\int_{x(0)}^{x(T)}\mathrm{d}x \\ &= nS[x]_0^D = nSD. \end{aligned}$$

这说明同一结果也适用于沿这段路程的变速行驶；起作用的是竖直板面扫过的总路程。

例 2.3 (挡风玻璃上的垂直入射)**.** 无风时雨滴对地竖直下落。汽车向右以 30m/s 行驶，挡风玻璃由左上向右下倾斜，与水平面成 37°。司机看到雨滴相对汽车垂直射向玻璃。求雨滴对地速率，取 $\sin 37^\circ = 3/5$、$\cos 37^\circ = 4/5$。

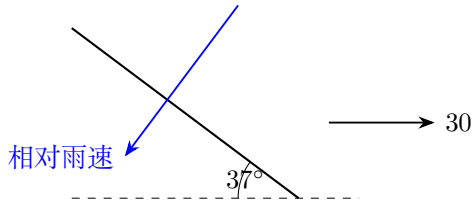


图 2.20: 雨对车的速度垂直于挡风玻璃

解 图 2.20 中的挡风玻璃向右下方倾斜，雨对车的速度沿其左下方法线。取向右、向上为正，设竖直雨速大小为 w，则

$$\boldsymbol{v}_{雨/地} = (0, -w), \qquad \boldsymbol{v}_{车/地} = (30, 0), \qquad \boldsymbol{v}_{雨/车} = (-30, -w).$$

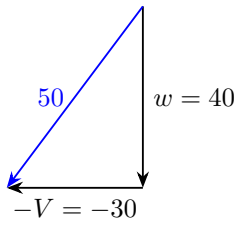


图 2.21: 雨对地、车对地和雨对车的速度三角形

图 2.21 中，将雨的对地速度与负的车速首尾相接，得到相对雨速。玻璃切向的单位矢量为 $(\cos 37^\circ, -\sin 37^\circ)$，相对雨速与它垂直，点积为零：

$$(-30, -w) \cdot (\cos 37^\circ, -\sin 37^\circ) = -30\cos 37^\circ + w \sin 37^\circ = 0.$$

代入题给的三角函数值，

$$w = 30\frac{\cos 37^\circ}{\sin 37^\circ} = 30\frac{4/5}{3/5} = \boxed{40\,\mathrm{m/s}}.$$

图中的相对雨速大小另为 $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\mathrm{m/s}$。它的水平、竖直分量之比为 $3:4$，与玻璃的水平、竖直投影比 $4:3$ 相配，构成互相垂直的两个方向。

例 2.4 (遮住头顶以后怎样避雨)**.** 雨速大小为 w，与竖直向下方向成角 ζ。人用遮雨物完全挡住头顶来雨，侧面淋雨量按相对水平雨速的大小计。在给定时间内，若人的水平跑速大小固定为 u，应朝哪个方向跑？若跑速也可选择，结论如何？

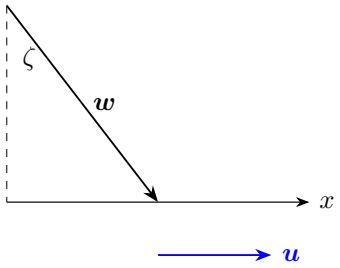


图 2.22: 雨滴运动与人的水平跑动方向

解 题目将侧面淋雨量与相对水平雨速的大小联系起来，观察时间固定，因此只需求这个速率的最小值。图 2.22 中，雨速的水平分量为 $\boldsymbol{w}_h$，大小 $w\sin\zeta$。设跑动方向与 $\boldsymbol{w}_h$ 的夹角为 ψ，则

$$|\boldsymbol{w}_h - \boldsymbol{u}|^2 = w^2\sin^2\zeta + u^2 - 2uw\sin\zeta\cos\psi.$$

当 $u, w\sin\zeta$ 均为正时，前两项固定，最后一项在 $\cos\psi = 1$ 时最小，所以应顺着雨滴的水平运动方向跑。

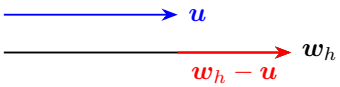


图 2.23: 水平雨速与跑速同向时，相对水平速率最小

图 2.23 中，两条同向速度相减，相对速率最小为 $|w\sin\zeta - u|$。若跑得比雨的水平分量更快，相对来雨方向转到身后，最优跑动方向仍保持同向。

若跑速也可选择，取 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_h$，人和雨滴在水平方向一起移动，题设模型中的侧面淋雨量为零。若雨竖直下落，即 $\zeta = 0$，相对水平速率就是 u，同样跑速下各方向等价，静止时侧面接雨最少。这些结论针对题目所给的固定时间及完全遮住头顶的情形。

例 2.5 (渡河时间与路程的不同最优方向)**.** 平直河道宽 d，水对岸速率 $u>0$，船对水速率 $w>0$，航向保持不变。分别求过河时间最短和对岸路程最短的航向；最短路程须讨论 $w>u$、$w=u$、$w<u$。

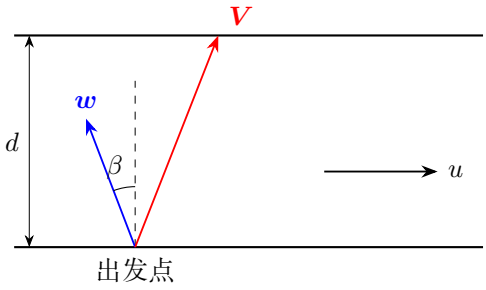


图 2.24: 水流方向、船头偏角与直线航迹

解 取图 2.24 的水流方向为 x、过河方向为 y，船头从正 y 轴向上游偏角 β，取 $-\pi/2<\beta<\pi/2$，相应过河分速度为正。合速度为

$$V_x = u - w\sin\beta, \qquad V_y = w\cos\beta > 0.$$

河宽是沿 y 的位移，所以 $T = d/V_y = d/(w\cos\beta)$。由于 $\cos\beta \le 1$，时间最短须取 $\boxed{\beta = 0,\ T_{\min} = d/w}$；船头垂直河岸，此时仍有顺流漂移。

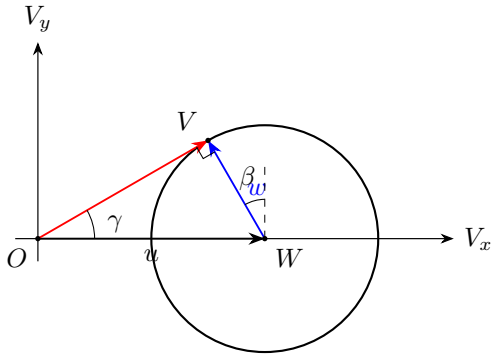


图 2.25: 以水速端点 W 为圆心的速度圆及相切关系

航向固定时轨迹是直线，长度为 $S = |\boldsymbol{V}|T = d|\boldsymbol{V}|/V_y$。图 2.25 中船对水的速度大小固定，故合速度端点位于以 $(u,0)$ 为圆心、w 为半径的速度圆上。最短航程相当于让合速度方向尽量接近河岸法线，须按原点与速度圆的位置讨论。

船速大于水速

当 $w > u$ 时，能够令 $V_x = 0$，所需航向为 $\sin\beta = u/w$。任何过河路线长度都不小于宽度 d，此时正好达到，故

$$\boxed{S_{\min} = d}, \qquad T = \frac{d}{w\cos\beta} = \frac{d}{\sqrt{w^2 - u^2}}.$$

船速小于水速

当 $w < u$ 时，原点在速度圆外，合速度与河岸的最大夹角对应上侧切线。令合速度端点为 V、圆心为 W，则 $OV \perp WV$。由直角三角形 OWV，$\sin\gamma = w/u$、$|OV| = \sqrt{u^2 - w^2}$，所以

$$\boxed{S_{\min} = \frac{d}{\sin\gamma} = \frac{du}{w}}.$$

同一切线条件也可写成 $\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{V} - u\boldsymbol{e}_x) = 0$。将 $\boldsymbol{V} - u\boldsymbol{e}_x = (-w\sin\beta, w\cos\beta)$ 代入，逐项展开：

$$\begin{aligned} 0 &= (u - w\sin\beta)(-w\sin\beta) + (w\cos\beta)^2 \\ &= -uw\sin\beta + w^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = w^2 - uw\sin\beta. \end{aligned}$$

因 $u, w > 0$，除以 uw 得到 $\sin\beta = w/u$。又因 $\cos\beta > 0$，有 $\cos\beta = \sqrt{u^2 - w^2}/u$，进而

$$V_x = \frac{u^2 - w^2}{u}, \qquad V_y = \frac{w\sqrt{u^2 - w^2}}{u}, \qquad T = \frac{du}{w\sqrt{u^2 - w^2}}.$$

船速等于水速

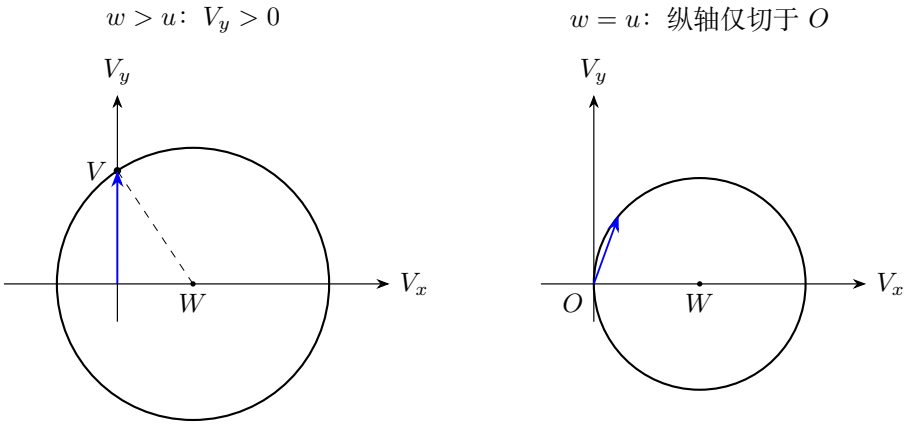


图 2.26: 速度圆与纵轴的交点决定能否沿河岸法线到达

图 2.26 左图的纵轴交点对应有限的过河分速度；右图要趋向纵轴方向，合速度端点也同时趋近原点。接近这个方向时，航程缩短而用时增大。

当 $w=u$ 时，先用 $(1-\sin\beta)^2+\cos^2\beta=2(1-\sin\beta)$，再用 $\cos^2\beta=(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$。在有限时间的允许范围内 $\sin\beta<1$，可以约去 $1-\sin\beta$，所以

$$S=d\frac{\sqrt{(1-\sin\beta)^2+\cos^2\beta}}{\cos\beta}=d\sqrt{\frac{2}{1+\sin\beta}}.$$

要使它趋近 d，需 $\beta\to\pi/2$，但这使 $V_y\to0$、$T\to\infty$。因此 $w=u$ 时航程的下确界为 d，对应船头越来越接近上游方向、过河用时越来越长的极限过程。

例 2.6 (两次旗向反求风速)**.** 船沿固定航向行驶，速率 20km/h 时，旗伸向船后侧并与航向直线成锐角 60°；速率增至 40km/h 后，旗仍伸向后侧，锐角变为 30°。旗方向视为风对船的流动方向。求风对地的速度及旗与航向垂直时的船速。

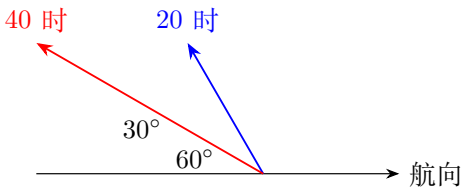


图 2.27: 不同船速下，旗沿相对风伸展

解 取图 2.27 中的航向为 x 正向，并把旗伸向的一侧取作 y 正向，记真风对地速度为 (W_x,W_y)。两次相对风分别为

$$(W_x-20,W_y),\qquad (W_x-40,W_y).$$

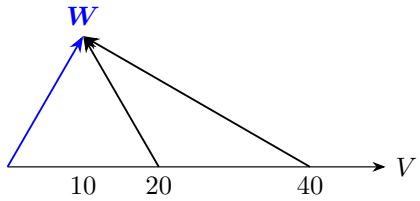


图 2.28: 两次相对风具有相同的横向分量

图 2.28 中，两条由船速端点指向 $\boldsymbol{W}$ 端点的矢量就是这两次相对风。它们的横向分量相同，沿航向分量均向后。由图中两个锐角，

$$\frac{W_y}{20-W_x}=\tan60^\circ=\sqrt3,\qquad \frac{W_y}{40-W_x}=\tan30^\circ=\frac{1}{\sqrt3}.$$

消去 W_y，

$$3(20-W_x)=40-W_x,\qquad 20=2W_x,\qquad W_x=10.$$

回代，

$$W_y = \sqrt{3}(20-10) = 10\sqrt{3}.$$

因此

$$\boxed{\boldsymbol{W} = (10, 10\sqrt{3})\,\mathrm{km/h}}, \qquad |\boldsymbol{W}| = \sqrt{10^2 + (10\sqrt{3})^2} = \boxed{20\,\mathrm{km/h}}.$$

真风流动方向与航向正向成 $60°$，风的来向为这一方向的反向。若船速变为 V，旗与航向垂直要求相对风沿航向分量为零，即 $W_x - V = 0$，故

$$\boxed{V = 10\,\mathrm{km/h}}.$$

图中这时从速度轴上的 10 点指向风速端点，恰沿横向。

例 2.7 (骑行者看到的风向)**.** 自行车向正东以 5km/h 行驶时，骑车人感到风从正北吹来；车速增加两倍，即增至 15km/h 时，风从正东北吹来。求风对地的速度和来向。

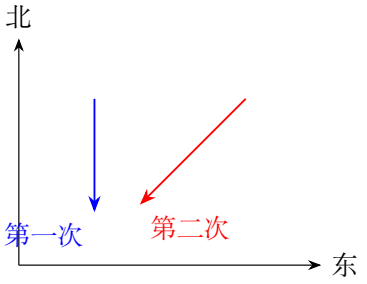


图 2.29: 两次骑行中观察到的相对风向

解　把两次观测写成风速分量

图 2.29 中，两次来风分别从北、东北吹来，实际相对流动方向为正南、西南。以东、北为坐标正向，设真风为 (W_x, W_y)。

第一次车速为 $(5, 0)$，相对风正南的水平分量为零，因此

$$W_x - 5 = 0, \qquad W_x = 5.$$

第二次车速为 $(15, 0)$，相对风指向西南，东、北两个分量均为负且绝对值相同，于是

$$W_y = W_x - 15 = 5 - 15 = -10.$$

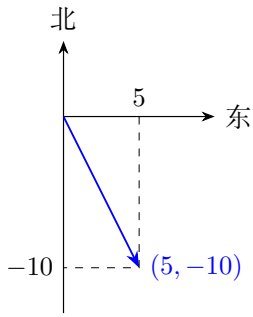


图 2.30: 由两次相对风确定对地风速

由真风分量求来向和速率

图 2.30 中，真风矢量指向东南方，两个分量及其大小为

$$\boxed{\boldsymbol{W} = (5, -10)\,\mathrm{km/h}}, \qquad |\boldsymbol{W}| = \sqrt{5^2 + (-10)^2} = \boxed{5\sqrt{5}\,\mathrm{km/h}}.$$

来向沿该矢量反向，位于西北，偏离正北的角 δ 满足

$$\tan\delta = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \qquad \delta = \arctan\frac{1}{2} \approx 26.6^\circ.$$

所以风从北偏西 26.6° 吹来。图中两条相对风矢量的北向分量同为 $-10\,\mathrm{km/h}$，车速的改变全落在东西分量上。

例 2.8 (旋转木马上的雨伞)**.** 人在距旋转木马轴线 r 处随木马以角速度 ω 转动，雨滴对地以速率 w 竖直下落。忽略风和气流作用，求每个瞬间雨伞轴线应朝向何方以及相对竖直方向的倾角。

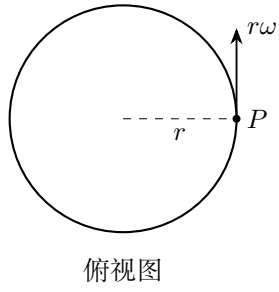


图 2.31: 人在木马上转动，雨滴竖直下落

解 图 2.31 中，人在该瞬间的对地速度沿圆周切线，写为 $\boldsymbol{V} = r\omega\boldsymbol{e}_\theta$。雨滴的对地速度为 $-w\boldsymbol{e}_z$，相减得到雨对人的速度：

$$\boldsymbol{v}_{\text{雨/人}} = -r\omega\boldsymbol{e}_\theta - w\boldsymbol{e}_z.$$

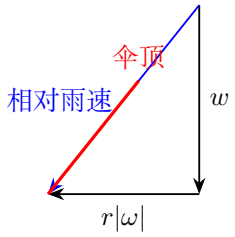


图 2.32: 伞顶应指向相对雨速的反方向

图 2.32 把向下的雨速和向后的相对水平分量首尾相接。雨伞从手到伞顶的轴线朝向来雨一侧，因而指向前上方；它与竖直方向的夹角 δ 由速度三角形给出

$$\boxed{\tan\delta = \frac{r|\omega|}{w}}.$$

只要 $r, |\omega|, w$ 保持不变，倾角便恒定。人在木马上转动时，前进切线方向不断转动，所以伞的水平朝向也跟着转动。站在轴线上时 $r = 0$，应竖直撑伞；站得更远或转得更快时，伞向前倾得更多。

例 2.9 (由雨痕倾角求车速比)**.** 将车窗上的理想雨痕方向视为雨滴相对火车速度在竖直行驶平面内的方向。停车时雨痕向前倾，偏离竖直的角为 θ_0；车速为 v_1, v_2 时雨痕均向后倾，角分别为 θ_1, θ_2。求 v_1/v_2。

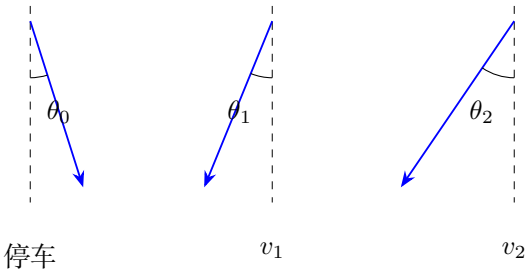


图 2.33: 从竖直方向量起的三个雨痕倾角

解　图 2.33 将三个倾角都从竖直方向量起。取火车前进方向为水平正向，记雨对地的水平分量为 $u > 0$、竖直向下分量为 $w > 0$。

停车时相对雨速就是对地雨速，图中的前倾给出

$$u = w\tan\theta_0.$$

行驶时雨向后落，水平相对分量为 $u - v_i < 0$，大小 $v_i - u$，所以

$$v_i - u = w\tan\theta_i, \qquad i = 1, 2.$$

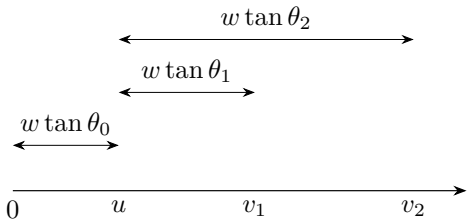


图 2.34: 共同竖直雨速下的水平速度差

图 2.34 把车速分成两段：从 0 到 u 补上雨的对地水平速度，从 u 到 v_i 给出向后的相对速度大小。将上面两式相加，

$$v_i = w\tan\theta_0 + w\tan\theta_i = w(\tan\theta_0 + \tan\theta_i).$$

两次观察中共同的竖直分量 w 相同，作比后消去，得到

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{\tan\theta_0 + \tan\theta_1}{\tan\theta_0 + \tan\theta_2}}.$$

若 $\theta_2 > \theta_1$，后一段所需的水平速度差更大，于是 $v_2 > v_1$；两次后倾角相同时，两次车速相同。

例 2.10 (以最小速率穿过车流)**.** 宽为 c 的道路中央有一列车，以速率 v 向右匀速行驶。车宽 $b < c$，相邻车头车尾之间的净间隙为 a。人视为质点，可选择入路时刻并沿直线匀速穿过该列车流。求刚好可行的最小速率，以及以此速率穿过整条道路的时间。

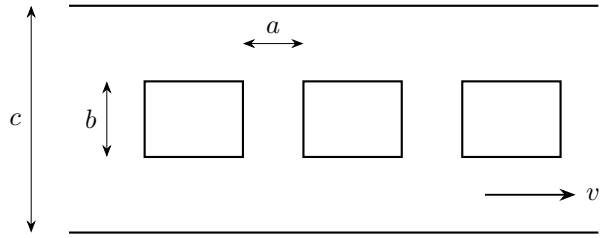


图 2.35: 车宽、车间净空与行人过路的方向

解　随车流观察穿越过程　取图 2.35 中人的对地速度为 (U_x, U_y)，$U_y > 0$。在随车流匀速运动的参考系里，车辆静止，人的速度为 $(U_x - v, U_y)$。

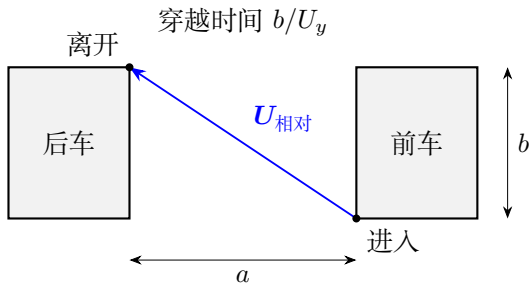


图 2.36: 随车流观察，人在固定间隙中沿斜线通过车带

图 2.36 中，车带沿过路方向的宽度为 b，因此穿过车带用时 b/U_y。这段时间内相对水平位移的大小为 $|U_x - v|b/U_y$。人可选择入路时刻，使进入车带时恰落在所选间隙中；相对轨迹是直线，沿水平投影占用的间隙宽度至多为 a，因而通行条件为

$$|U_x - v|\frac{b}{U_y} \le a, \qquad v - \frac{a}{b}U_y \le U_x \le v + \frac{a}{b}U_y.$$

求最小速率　令 $k = a/b > 0$。左侧条件给出 $U_x + kU_y \ge v$。由平方恒等式

$$(1+k^2)(U_x^2 + U_y^2) - (U_x + kU_y)^2 = (kU_x - U_y)^2 \ge 0,$$

有

$$U^2 = U_x^2 + U_y^2 \ge \frac{(U_x + kU_y)^2}{1+k^2} \ge \frac{v^2}{1+k^2}.$$

等号同时要求 $U_y = kU_x$、$U_x + kU_y = v$，联立解得

$$U_x = \frac{v}{1+k^2} = \frac{vb^2}{a^2+b^2}, \qquad U_y = \frac{vk}{1+k^2} = \frac{vab}{a^2+b^2}.$$

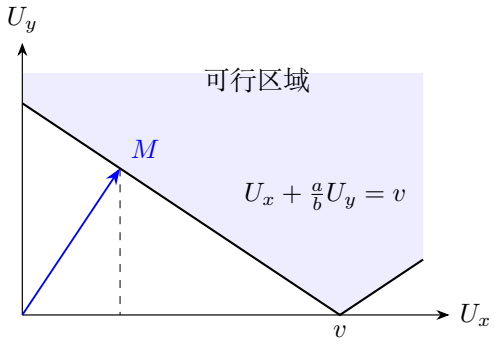


图 2.37: 可行速度区域中距离原点最近的点

图 2.37 将上面的几何条件画在速度平面中。原点到可行区域的最近点 M 为直线 $U_x + kU_y = v$ 上的垂足。代入所得分量，

$$v - U_x = \frac{vk^2}{1+k^2} = kU_y > 0, \qquad |U_x - v|\frac{b}{U_y} = a.$$

因此人在图 2.36 中从间隙右下端进入，沿相对直线到达左上端，恰好用完间隙宽度。这一入路相位可由题目允许选择的出发时刻实现，最小临界速率为

$$\boxed{U_{\min} = \frac{vb}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

穿过整条道路 进入车带之前与离开车带以后，人仍沿同一直线匀速前进。总横过宽度为 c，竖直分速度始终为上述 U_y，故

$$\boxed{T = \frac{c}{U_y} = \frac{c(a^2+b^2)}{vab}}.$$

车宽 b 用于限制穿过间隙时的相对位移，道路总宽 c 用于计算全部过路时间。这里的 T 对应所求最小速率方案。

例 2.11 (绿灯剩余时间与停车距离)**.** 汽车以 8m/s 驶向 18m 外的停车线，绿灯还剩 2s，最大加速度为 2m/s^2，最大制动减速度为 5m/s^2，限速 12.5m/s。判断：能否加速且不超速地在绿灯熄灭前通过；立即制动能否通过；保持 8m/s 至离线 5m 处才制动，能否停在线前。

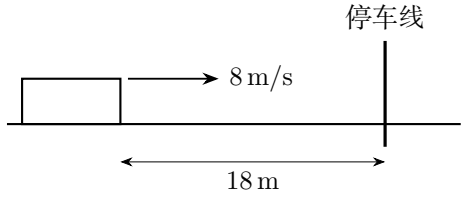


图 2.38: 驶向停车线的汽车及剩余距离

解 加速通过停车线 图 2.38 中，若在到达停车线以前保持加速度 a，从 $v(0)=8$、$x(0)=0$ 积分，

$$v(t) = 8 + \int_0^t a\,\mathrm{d}\tau = 8 + [a\tau]_0^t = 8 + at,$$
$$x(t) = \int_0^t (8 + a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[8\tau + \frac{a}{2}\tau^2\right]_0^t = 8t + \frac{1}{2}at^2.$$

在绿灯结束前通过，要求 $x(2) > 18$，即 $16 + 2a > 18$，得到 $a > 1\,\mathrm{m/s^2}$。最大允许加速度为 $2\,\mathrm{m/s^2}$，取这个值，令 $x(t) = 18$，

$$18 = 8t + t^2, \qquad (t+4)^2 = 34, \qquad t = \sqrt{34} - 4 \approx 1.831\,\mathrm{s}.$$

对应速度 $8 + 2t \approx 11.66\,\mathrm{m/s}$，小于限速 $12.5\,\mathrm{m/s}$。从出发到到线，速度一直增加，所以这一整个加速过程都在限速以内。

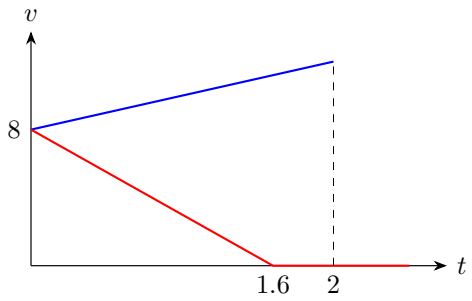


图 2.39: 加速通过与立即制动时的速度变化

立即制动　图 2.39 的红线表示开始制动后的速度。以制动持续时间 τ 为变量，$v(\tau) = 8 - 5\tau$，停车时刻为 $\tau_s = 8/5 = 1.6\,\mathrm{s}$，此后速度为零。停车距离

$$\begin{aligned} s_{\mathrm{stop}} &= \int_0^{8/5} (8 - 5\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[8\tau - \frac{5}{2}\tau^2\right]_0^{8/5} \\ &= \frac{64}{5} - \frac{32}{5} = 6.4\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

汽车会停在停车线前 $18 - 6.4 = 11.6\,\mathrm{m}$ 处，因而立即制动时到不了停车线。

行驶到余下 5 米时制动　此时制动初速仍为 $8\,\mathrm{m/s}$，停车所需距离仍为 $6.4\,\mathrm{m}$。它比剩余距离大 $1.4\,\mathrm{m}$，汽车将越过停车线。到线时的速度还可由

$$v_{\mathrm{line}}^2 = 8^2 - 2 \times 5 \times 5 = 14$$

得到 $v_{\mathrm{line}} = \sqrt{14}\,\mathrm{m/s} > 0$。这三个过程各自的起始时刻不同，制动段均从开始制动的速度 $8\,\mathrm{m/s}$ 算到停车。

例 2.12 (位置图中的平均速率)**.** A, B, C 同时同地出发，20s 后均位于同一正坐标 x_0。B, C 全程沿正方向运动；A 先沿正方向经过 x_0 到达 $x_m > x_0$，再返回 x_0。比较三者平均速度与平均速率。

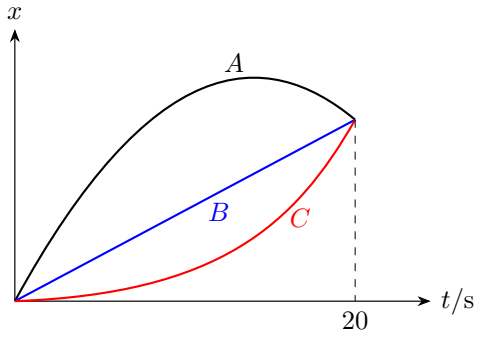


图 2.40: 同一起终点、不同中途位置的运动

解 图 2.40 中，三个运动的起点都是 $x = 0$，在 20 s 时终点都是 x_0。因此位移相同，平均速度均为

$$\overline{v}_A = \overline{v}_B = \overline{v}_C = \frac{x_0}{20\,\mathrm{s}},$$

方向沿正轴。

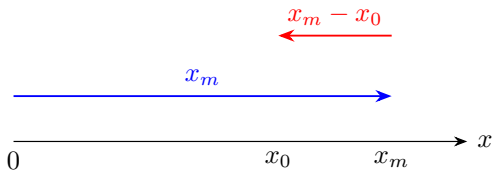


图 2.41: 折返使路程增加而全程位移相同

求路程时，沿图 2.41 所示的实际方向逐段累加。B, C 全程向正方向，路程都是 x_0。A 先走到 x_m，再返回 x_0，两段路程分别为 x_m 和 $x_m - x_0$，故

$$s_A = x_m + (x_m - x_0) = 2x_m - x_0.$$

平均速率为

$$\boxed{\overline{u}_A = \frac{2x_m - x_0}{20\,\mathrm{s}} > \overline{u}_B = \overline{u}_C = \frac{x_0}{20\,\mathrm{s}}}.$$

这个读图方法也可用于一般分段运动：位置图每个单调段给出的路程为 $|x(t_{i+1}) - x(t_i)|$，把它们相加即可。对本题 A，折返部分 $x_m - x_0$ 在两段路程中各计一次，而在带符号的位移相加时抵消。

例 2.13 (共同重力下的四球构形)**.** 四个小球在高空同一点同时以相同速率 v_0 分别向上、向下、向左、向右抛出。忽略空气阻力且尚未碰到地面。求时间 t 后四球的位置构形，说明其中心怎样运动。

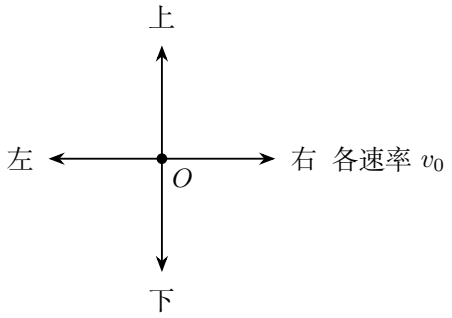


图 2.42: 同时同地向四个方向抛出的球

解　把图 2.42 的抛出点取为原点，y 轴向上。对任意一个初速度为 $\boldsymbol{v}_{i0}$ 的小球，先积分共同加速度，再用共同的初位置为零:

$$\boldsymbol{v}_i(t)-\boldsymbol{v}_{i0}=\int_0^t(-g\boldsymbol{e}_y)\,\mathrm{d}\tau=[-g\tau\boldsymbol{e}_y]_0^t=-gt\boldsymbol{e}_y,$$
$$\boldsymbol{r}_i(t)=\int_0^t(\boldsymbol{v}_{i0}-g\tau\boldsymbol{e}_y)\,\mathrm{d}\tau=\Big[\boldsymbol{v}_{i0}\tau-\frac{g}{2}\tau^2\boldsymbol{e}_y\Big]_0^t=\boldsymbol{v}_{i0}t-\frac{gt^2}{2}\boldsymbol{e}_y.$$

令共同平移后的中心为 $G=(0,-gt^2/2)$，代入四个初速度，四个位置分别为 $G+(0,v_0t)$、$G+(0,-v_0t)$、$G+(-v_0t,0)$、$G+(v_0t,0)$。

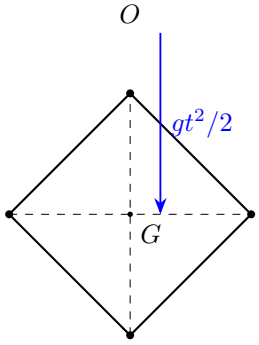


图 2.43: 自由落体中心与向外展开的正方形

图 2.43 中的四点以 G 为中心，顶点分别在上下左右，两条对角线的长度均为 $2v_0t$。共同的重力位移把四个点整体下移，任何两球之间的相对位置都保持其初速度之差所给出的关系。

例如上球与右球的相对位置为 $(-v_0t, v_0t)$，长度为 $\sqrt{2}v_0t$，其余相邻边由对称性相同，所以四点构成正方形。四个位置矢量相加时，初速度项互相抵消，平均位置为 $G=(0,-gt^2/2)$，说明正方形的几何中心做自由落体。

例 2.14 (交换两段加速度)**.** 甲乙从静止出发沿同一方向运动。在第一段时长 T 内，甲加速度为 a、乙为 $2a$；第二段同样长为 T，两车交换加速度。求两段结束时的位移比与速度比。

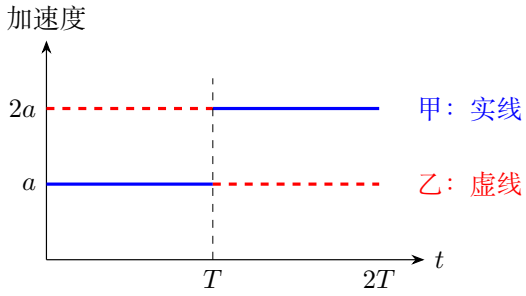


图 2.44: 换段时加速度改变，而速度保持连续

解 图 2.44 在 $t=T$ 处换加速度，速度本身连续。先得到 $v_{甲}(T)=aT$、$v_{乙}(T)=2aT$，这两个量分别是第二段的初速度。于是

$$s_{甲}=\underbrace{\tfrac{1}{2}aT^2}_{\text{第一段}}+\underbrace{(aT)T+\tfrac{1}{2}(2a)T^2}_{\text{第二段}}=\tfrac{5}{2}aT^2,$$

$$s_{乙}=\underbrace{\tfrac{1}{2}(2a)T^2}_{\text{第一段}}+\underbrace{(2aT)T+\tfrac{1}{2}aT^2}_{\text{第二段}}=\tfrac{7}{2}aT^2.$$

第二段的初速度项是先后顺序影响位移的来源。

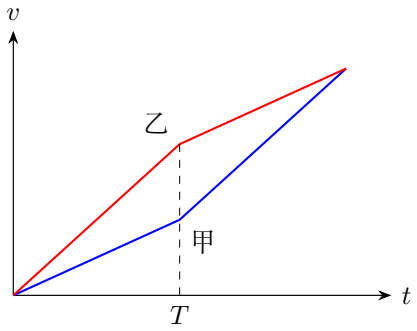


图 2.45: 相同末速度下，两条速度图所围面积不同

图 2.45 的两条速度曲线在 $2T$ 汇合，末速度均为 $3aT$，但乙在整个中间阶段速度更大，面积也更大。因此 $\boxed{s_{\text{甲}} : s_{\text{乙}} = 5:7}$，$\boxed{v_{\text{甲}} : v_{\text{乙}} = 1:1}$。若只对两个加速度取平均，会得到相同末速度，却错误地遗漏先获得速度所带来的额外位移。

图中两条速度线之间的面积给出位移差：前一段差值从 0 线性增至 aT，后一段从 aT 线性降至 0，两块三角形面积之和为 aT^2。这恰等于 $7aT^2/2 - 5aT^2/2$，说明早获得的速度能在后续较长时间内贡献位移。

例 2.15 (位置相关的线性加速度)**.** 质点从 $x = 0$ 以正速度 v_0 出发，加速度为 $a(x) = a_0 - kx$，$a_0, k > 0$。求第一次沿正方向到达 $x = s_0$ 时的速度，说明允许的 s_0 范围。

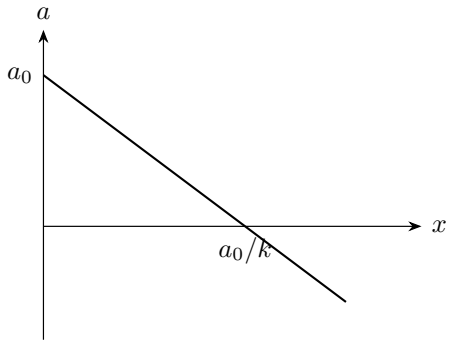


图 2.46: 加速度随位置线性减小

解　图 2.46 给定各位置处的加速度。沿首次向右运动的过程，链式法则给出 $a = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t) = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，所以

$$\int_{v_0}^{v} u\,\mathrm{d}u = \int_0^{s_0} (a_0 - k\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \left[\frac{u^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = \left[a_0\xi - \frac{k}{2}\xi^2\right]_0^{s_0}.$$

代入上下限，得 $(v^2 - v_0^2)/2 = a_0 s_0 - k s_0^2/2$。乘二、移项并按首个向右支路取非负根，得到 $\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2a_0 s_0 - k s_0^2}}$。

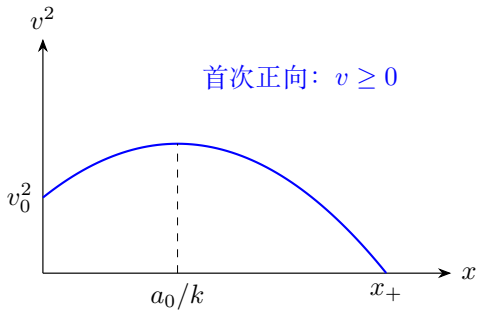


图 2.47: 速度平方曲线的顶点与首个正向转向点

图 2.47 的 v^2–x 图为开口向下的抛物线，$x = a_0/k$ 处速率最大。求其零点需解

$$kx^2 - 2a_0x - v_0^2 = 0, \qquad x_\pm = \frac{2a_0 \pm \sqrt{4a_0^2 + 4kv_0^2}}{2k} = \frac{a_0 \pm \sqrt{a_0^2 + kv_0^2}}{k}.$$

因 $v_0 > 0$，根号严格大于 a_0，所以 $x_- < 0 < x_+$。首个正向分支到 x_+ 停止，故 $0 \leq s_0 \leq x_+$；端点速度为零，中间取正根。随后反向运动经过同一位置时，速率大小相同，速度对应负平方根。

令 $x_c = a_0/k$，则 $v^2 = v_0^2 + a_0^2/k - k(x - x_c)^2$。质点从原点向右时，先因 $a > 0$ 增速，过 x_c 后因 $a < 0$ 减速，直到正根 x_+ 停止。负根在原点左侧，不属于首次正向到达的区间。停止处 $a(x_+) = -\sqrt{a_0^2 + kv_0^2} < 0$，这个负加速度使质点从最右端开始向左运动。

2.6 本讲小结

换一个参考系，可以把两个物体的运动化成一个物体的相对运动。速度三角形说明船、水和岸之间的速度关系，也说明行车中风雨方向的改变。渡河时间由横过河岸的分速度决定，航程则与合速度方向有关，两个问题对应不同的船头方向。

加速度恒定时，速度随时间线性改变；加速度随位置或速度改变时，可选择相应变量积分。追及问题由相对位置描述，间距的增减由速度差决定。停车和碰撞连接不同运动阶段，下一段从这一事件的位置和碰后速度出发；重复碰撞还可把相邻两次的状态联系成递推关系。

2.7　练习

练习 2.1 (斜面下滑后追及加速物体)**.** A 从斜面底端沿水平面向左由静止以加速度 $a_0 > 0$ 运动。B 同时从倾角 θ 的斜面上由静止下滑，沿斜面加速度 $g\sin\theta$，到达底端后保持所得速率向左匀速运动。忽略转接时的速度损失，求 B 能追上 A 的条件。

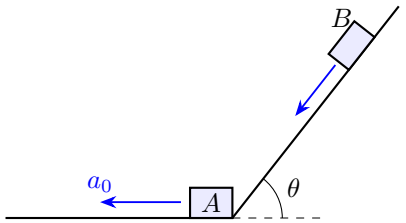


图 2.48: 滑块沿斜面下滑后，在水平面上追及 A

练习 2.2 (前后车同时制动的分支)**.** 摩托车以 $v_1 > v_2 > 0$ 在后，前方净距离 $s > 0$ 处汽车以速率 v_2 行驶。此刻汽车以减速度 $a_2 > 0$ 制动，摩托车同时以恒定减速度 a 制动，两者停住后均不倒退。求摩托车避免接触的临界最小 a。

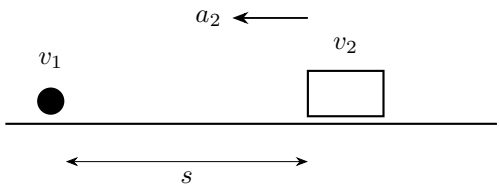


图 2.49: 前后两车同时制动

练习 2.3 (三车制动与中车策略)**.** 三辆点状小车从左至右为 A, B, C，初始相邻净间距均为 5m，速度依次为 9、8、6m/s。C 从此刻以 1m/s^2 制动；A, B 也从此刻分别选择恒定制动减速度，停车后不倒退。允许选择 B 的减速度，求使全程不相撞的 A 最小临界减速度。

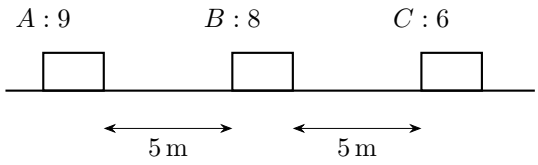


图 2.50: 三车的初速度与相邻净间距

练习 2.4 (交换速度的连续碰撞)**.** 同一直线上，点状滑块 A 在后、B 在前，初距 l，初速均为 0。A 始终受恒加速度 $a>0$，B 在两次碰撞间匀速；每次碰撞瞬间交换两者速度。求第 n 次与第 $n+1$ 次碰撞间隔，以及第 n 次碰撞时 B 相对其初位置的位移。再改为 A 恒加速 a_1，B 以 $a_2>0$ 制动且停住后不反向，求碰撞间隔。

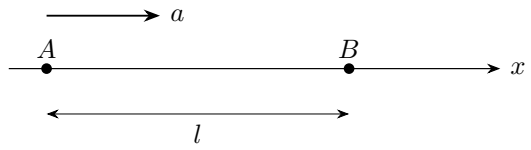


图 2.51: 后块加速、前块匀速的连续碰撞

练习解答

练习 2.1

解　从下滑末速写出水平位置差

图 2.48 中，设 B 下滑用时为 T，到达底端的速率为 u。沿斜面的加速度为常量 $g\sin\theta$，从静止积分得

$$u=\int_0^T g\sin\theta\,\mathrm{d}\tau=[g\sin\theta\,\tau]_0^T=g\sin\theta\,T.$$

以斜面底端为原点，向左为正。到 $t\geq T$ 时，A 已加速了 t，B 在水平面上只运动了 $t-T$。由图 2.48 中两段运动的起点分别积分：

$$\begin{aligned}v_A(t)&=\int_0^t a_0\,\mathrm{d}s=[a_0s]_0^t=a_0t,\\ x_A(t)&=\int_0^t a_0s\,\mathrm{d}s=[a_0s^2/2]_0^t=a_0t^2/2,\\ x_B(t)&=\int_T^t u\,\mathrm{d}s=[us]_T^t=u(t-T).\end{aligned}$$

两者位置差为 $F(t)=x_B-x_A$。在 $t=T$ 时它为 $-a_0T^2/2<0$；随后若能增加到零，B 就追上 A。

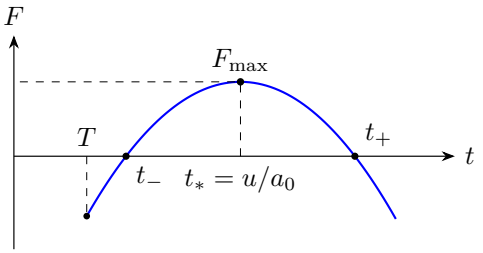


图 2.52: 位置差在 t_* 处最大；图示有两个交点的情形

用位置差的最大值判定能否追上

图 2.52 是开口向下的位置差抛物线。对时间求导，

$$F'(t) = u\frac{\mathrm{d}(t-T)}{\mathrm{d}t} - \frac{a_0}{2}(2t) = u - a_0 t, \qquad F''(t) = -a_0 < 0.$$

顶点时刻 $t_* = u/a_0$，其值为

$$\begin{aligned} F(t_*) &= u\left(\frac{u}{a_0} - T\right) - \frac{a_0}{2}\frac{u^2}{a_0^2} \\ &= \frac{u^2}{2a_0} - uT. \end{aligned}$$

令这个最大值非负，

$$\frac{u^2}{2a_0} - uT \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u \geq 2a_0 T.$$

用 $u = g\sin\theta\, T$ 并约去 $T > 0$，得到

$$\boxed{a_0 \leq \frac{g\sin\theta}{2}}.$$

此时 $t_* = u/a_0 \geq 2T$，抛物线顶点确在 B 已经滑到底端以后的阶段。若 $t_* < T$，则 $F(t)$ 从 $t = T$ 开始一直下降，始终保持负值。等号情形在 $t = 2T$ 相切，两者位置和速度同时相同；严格小于时，两图相交，B 先追上并超过 A。

取第一次相交的时刻

将 $F(t) = 0$ 写成

$$a_0 t^2 - 2ut + 2uT = 0.$$

求根并将较小根有理化，

$$t_- = \frac{u - \sqrt{u^2 - 2a_0 uT}}{a_0} = \frac{2uT}{u + \sqrt{u^2 - 2a_0 uT}}.$$

由 $0 \leq \sqrt{u^2 - 2a_0 uT} < u$，得 $T < t_- \leq 2T$。较大根表示 A 持续加速后再追上 B，在图中对应右侧交点。

练习 2.2

解　两车仍在制动时的接近量　对图 2.49 先设 $\Delta v = v_1 - v_2$。若最危险状态发生在汽车停住前，此时闭合速率为 $\Delta v - (a - a_2)t$；要在这段内由接近转为远离，须 $a > a_2$，过零时刻为 $t_* = \Delta v/(a - a_2)$。从初始时刻积分到它，

$$C(t_*) = \int_0^{t_*} [\Delta v - (a - a_2)\tau]\,\mathrm{d}\tau = \left[\Delta v\tau - \frac{a - a_2}{2}\tau^2\right]_0^{t_*}$$
$$= \frac{\Delta v^2}{a - a_2} - \frac{\Delta v^2}{2(a - a_2)} = \frac{\Delta v^2}{2(a - a_2)}.$$

临界时令 $C(t_*) = s$，得到 $a = a_2 + \Delta v^2/(2s)$。这一同速时刻位于前车停车以前，相应时间条件为 $t_* \le v_2/a_2$。代入刚求的 $a - a_2 = \Delta v^2/(2s)$，该条件化为 $2s/\Delta v \le v_2/a_2$，即 $s \le s_* = v_2\Delta v/(2a_2)$。

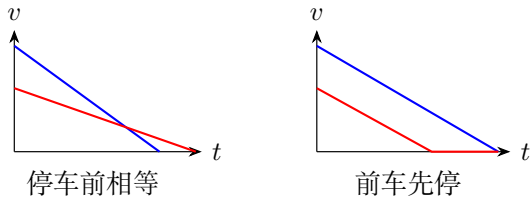


图 2.53: 同速发生在前车停下之前或之后

前车先停的情形

图 2.53 区分提前速度相等和前车先停车的情形。若 $s \ge s_*$，最大闭合量在后车停车时取得。两车各积分到自己的停车时刻，不把负速度段算入位移：

$$s_1 = \int_0^{v_1/a} (v_1 - a\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[v_1\tau - \frac{a}{2}\tau^2\right]_0^{v_1/a} = \frac{v_1^2}{2a},$$
$$s_2 = \int_0^{v_2/a_2} (v_2 - a_2\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[v_2\tau - \frac{a_2}{2}\tau^2\right]_0^{v_2/a_2} = \frac{v_2^2}{2a_2}.$$

临界条件为 $s_1 - s_2 = s$，即 $v_1^2/a = 2s + v_2^2/a_2$，解出 $a = v_1^2/(2s + v_2^2/a_2)$。综上

$$\boxed{a_{\min} = \begin{cases} a_2 + \dfrac{(v_1 - v_2)^2}{2s}, & s \le s_*, \\ \dfrac{v_1^2}{2s + v_2^2/a_2}, & s \ge s_*. \end{cases}}$$

两分支在 $s = s_*$ 都给 a_2v_1/v_2，连续相接。式中等号对应间距最小值为零的临界接触。两段的分界由同速时刻恰与前车停车时刻重合给出。

在大间距情形中，把该分支所得 a 与 a_2v_1/v_2 比较，$s \ge s_*$ 恰给 $a \le a_2v_1/v_2$，所以后车停车时间 v_1/a 不早于前车停车时间 v_2/a_2。前车停住后，后车继续前进

使间距减小，直到后车停车才达到最小；因此在这段运动中，后车停下时的间距最小，可直接用停车距离差表示总接近量。

练习 2.3

解 取图 2.50 中 A,B,C 的初位置依次为 $0,5,10\,\mathrm{m}$，分别记 A,B 的制动减速度为 a,b。以下用两组间距的最小值恰为零确定题目所求的临界策略。

先确定中间车的制动方式 在 B,C 都还运动时，速度分别为 $8-bt$ 和 $6-t$，所以

$$\begin{aligned} D_{BC}(t) &= 5+\int_0^t [(6-\tau)-(8-b\tau)]\,\mathrm{d}\tau \\ &= 5+\left[-2\tau+\frac{b-1}{2}\tau^2\right]_0^t \\ &= 5-2t+\frac{b-1}{2}t^2. \end{aligned}$$

间距达到最小时，两车同速：

$$\dot{D}_{BC}=-2+(b-1)t=0, \qquad t_*=\frac{2}{b-1}.$$

将它代入 $D_{BC}(t_*)=0$，

$$5-\frac{4}{b-1}+\frac{2}{b-1}=0, \qquad b=\frac{7}{5}\,\mathrm{m/s^2}, \qquad t_*=5\,\mathrm{s}.$$

这时 B 的停车时间 $8/b=40/7\,\mathrm{s}$，C 的停车时间为 $6\,\mathrm{s}$，均晚于 $5\,\mathrm{s}$。整个共同制动阶段的间距因而可写成

$$D_{BC}(t)=5-2t+\frac{t^2}{5}=\frac{(t-5)^2}{5}.$$

C 停车前，两车已经在 $t=5\,\mathrm{s}$ 由接近转为远离。

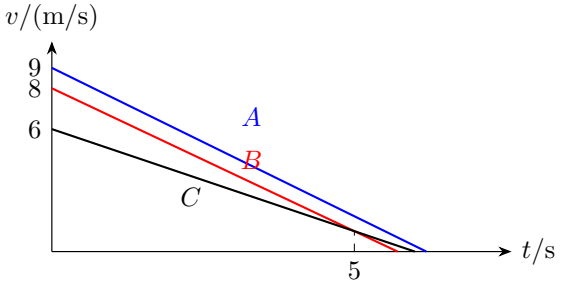


图 2.54: 三车速度曲线的面积与停车先后

若 $b<7/5$, B 到 5 s 仍在运动, 代入同一间距式有 $D_{BC}(5)=(25b-35)/2<0$, 接触已经发生。增大 b 则使 B 的停车距离缩短，给后车 A 留下的前进空间也缩小。因此有利于 A 的选择为上述最小 $b=7/5$。

再确定后车的减速度 图 2.54 中各条速度曲线到时间轴的面积为停车距离。两车各自积分到停车时刻,

$$s_A=\int_0^{9/a}(9-a\tau)\,\mathrm{d}\tau=\left[9\tau-\frac{a}{2}\tau^2\right]_0^{9/a}=\frac{81}{2a},$$
$$s_B=\int_0^{8/b}(8-b\tau)\,\mathrm{d}\tau=\left[8\tau-\frac{b}{2}\tau^2\right]_0^{8/b}=\frac{32}{b}.$$

最末停车位置相同给出临界关系 $s_A-s_B=5$，于是

$$\frac{81}{2a}-\frac{32}{7/5}=5,\qquad \frac{81}{a}=10+\frac{64}{7/5}=\frac{390}{7},$$

解得

$$\boxed{a_{A,\min}=\frac{81\times 7}{390}=\frac{189}{130}\,\mathrm{m/s^2}}.$$

这个停车位置条件也适用于整个接近过程：代入所得 a，在 B 停车前，两车速度差为

$$v_A-v_B=1-(a-b)t=1-\frac{7}{130}t.$$

到 $t=40/7\,\mathrm{s}$ 时仍为 $9/13\,\mathrm{m/s}>0$; 以后 B 静止, A 继续前进到 $t=9/a=130/21\,\mathrm{s}$ 才停下。因此 A,B 间距一直减小，最后达到零。

两组间距的最小时刻分别是 5 s 和 $130/21\,\mathrm{s}$。最终位置为 $x_A=x_B=195/7\,\mathrm{m}$、$x_C=28\,\mathrm{m}$，$B,C$ 最终相隔 $1/7\,\mathrm{m}$。这展示了中间车的一次制动怎样同时影响前、后两组运动。

练习 2.4

解 第一次碰撞 由图 2.51，首碰前 B 静止，A 的位移满足 $at_1^2/2=l$，故 $t_1=\sqrt{2l/a}$，碰前速度 $u=at_1=\sqrt{2al}$。

相邻两次碰撞的间隔

以每次碰后为当地时间 $\tau=0$，令 $r=x_A-x_B$，则 $r(0)=0$、$\dot r(0)=-u$、$\ddot r=a$。逐次带初值积分：

$$\dot r(\tau)+u=\int_0^{\tau}a\,\mathrm{d}s=[as]_0^{\tau}=a\tau,$$
$$r(\tau)=\int_0^{\tau}(-u+as)\,\mathrm{d}s=\left[-us+\frac{a}{2}s^2\right]_0^{\tau}=-u\tau+\frac{a}{2}\tau^2.$$

再相遇要求 $r=0$，即 $\tau(-u+a\tau/2)=0$。排除刚碰后的零根，得到 $\tau=2u/a$。这时 $\dot r=-u+a(2u/a)=u$；速度交换使相对速度再次变成 $-u$，所以这个间隔逐次重复：

$$\boxed{t_{n+1}-t_n=2\sqrt{2l/a}},\qquad t_n=(2n-1)t_1.$$

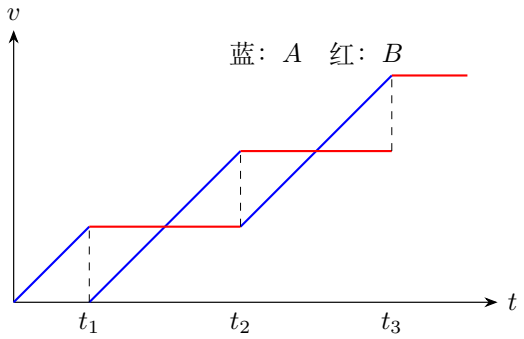


图 2.55: 速度交换使前块速度逐次增加

前块的位移

图 2.55 中，首碰后 B 带速 u，A 带速零。在下一间隔内 A 增加速度 $a(2u/a)=2u$，再次交换后 B 带速 $2u$、A 带速 u。同理，每次交换使 B 所得速度增加 u，故第 k 与第 $k+1$ 次碰撞间 B 带速 ku。从自身初位置累计的位移为

$$\begin{aligned}\Delta x_B(n)&=\sum_{k=1}^{n-1}ku\frac{2u}{a}=\frac{2u^2}{a}\frac{(n-1)n}{2}\\&=\frac{u^2}{a}n(n-1)=\boxed{2ln(n-1)}.\end{aligned}$$

这里使用等差数列求和 $1+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$ 和 $u^2=2al$；$n=1$ 时尚无带速前进段，结果为零。

两块都有加速度的情形

推广情形先记首碰速度 $u_1=\sqrt{2a_1l}$。当 $a_1\ge a_2$，令第 n 次碰后 A 的速度为 V_n、B 的速度为 V_n+u_1，第一次碰后 $V_1=0$。两块都在运动时，相对加速度为 a_1+a_2，按前面相对位移的积分，下一次相遇满足

$$0=-u_1\tau+\frac{1}{2}(a_1+a_2)\tau^2,\qquad \Delta t=\frac{2u_1}{a_1+a_2}.$$

下一碰前的两速度为

$$v_A^-=V_n+\frac{2a_1u_1}{a_1+a_2},\qquad v_B^-=V_n+u_1-\frac{2a_2u_1}{a_1+a_2}=V_n+\frac{(a_1-a_2)u_1}{a_1+a_2}.$$

由于 $V_n \geq 0$ 且 $a_1 \geq a_2$，B 在此之前尚未反向。交换速度后，

$$V_{n+1} = V_n + \frac{(a_1 - a_2)u_1}{a_1 + a_2}, \qquad v_{B,n+1} - v_{A,n+1} = u_1.$$

所以 $V_{n+1} \geq 0$，碰后的速度差仍为 u_1，每段都能按同一形式继续，相邻间隔为 $2u_1/(a_1 + a_2)$。$a_1 = a_2$ 时，B 恰在下一碰撞时停住，所得间隔也保持不变。

前块先停车的情形

当 $a_1 < a_2$，首次碰后 A 静止、B 带速 u_1。设第 n 次碰后仍为 A 静止、B 带速 u_n，下面从这次碰后的状态求出下一次碰后状态。B 的停车时间为 $\tau_s = u_n/a_2$，停车位移为

$$L_n = \int_0^{u_n/a_2} (u_n - a_2 s)\,\mathrm{d}s = \left[u_n s - \frac{a_2}{2}s^2\right]_0^{u_n/a_2} = \frac{u_n^2}{2a_2}.$$

在 B 停车以前，相对位置方程的非零交点候选为 $2u_n/(a_1 + a_2)$。它大于 u_n/a_2，所以该候选超出共同制动阶段，实际应改用 B 已停住的方程。A 从静止追到固定位置 L_n，须满足

$$\frac{a_1}{2}\tau_n^2 = \frac{u_n^2}{2a_2}, \qquad \tau_n = \frac{u_n}{\sqrt{a_1 a_2}} > \frac{u_n}{a_2}.$$

碰前 A 速率为 $a_1\tau_n = u_n\sqrt{a_1/a_2}$，而 B 已静止，交换后 A 又静止，故递推假设成立。令 $q = \sqrt{a_1/a_2}$，则

$$u_{n+1} = qu_n, \qquad u_n = u_1 q^{n-1}, \qquad \tau_n = \frac{u_1}{\sqrt{a_1 a_2}}q^{n-1}.$$

因此

$$\boxed{t_{n+1} - t_n = \begin{cases} \dfrac{2u_1}{a_1 + a_2}, & a_1 \geq a_2, \\ \dfrac{u_1}{\sqrt{a_1 a_2}}\left(\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}}\right)^{n-1}, & a_1 < a_2. \end{cases}}$$

两支在 $a_1 = a_2$ 处一致。后一支中，每次碰后前块先走到停车位置，后块再追至该处，速度交换把下一段的初速度乘以同一个 $q < 1$，碰撞间隔因而按等比数列递减。

图 2.56 表示每次交换速度以后、到下一次碰撞以前的间距。左图在同一个相对加速度阶段内回到零；右图在 $t_s = u_n/a_2$ 处先发生 B 停车，之后只由 A 继续加速缩小间距。停车时位置和速度连续，因此间距及其斜率连续，但二阶变化规律改变；下次相遇发生在右侧的第二阶段，相应时间由这一阶段的位移关系确定。

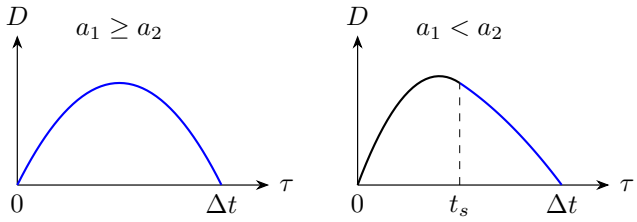


图 2.56: 相邻碰撞之间的间距与先停车的阶段切换

运动学

物理竞赛一轮讲义

第三讲

运动约束与速度关联

2026

目录

第三讲　运动约束与速度关联 **1**

3.1　由位置方程描述相互连接的物体 1

3.2　长度变化、速度投影与加速度 2

3.3　由物体的连接关系求运动 3

3.4　杆与可伸缩连接的二阶运动关系 8

3.5　无滑动滚动 10

3.6　均匀伸长细线上的运动 13

3.7　例题与分析 16

3.8　本讲小结 29

3.9　练习 29

练习解答 31

第三讲　运动约束与速度关联

3.1　由位置方程描述相互连接的物体

前两讲用 $\boldsymbol{r}(t)$ 描述一个质点的位置。研究连杆、绳和轮组成的机构时，可以为每个指定物质点分别建立位置函数，再用几何关系把这些函数联系起来。刚杆保持两端距离，绷紧的绳保持各段长度之和，保持接触的两表面在接触处具有相同的法向位置。这些几何关系随整个运动过程同时成立，给出运动约束。

3.1.1　构形与运动的时间规律

图 3.1 中，一根长 L 的杆绕固定点 O 转动，杆上材料点 A, B 到 O 的距离分别为 a, L。用同一个转角 θ 就能确定两点的位置：

$$\boldsymbol{r}_A = a(\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{r}_B = L(\cos\theta, \sin\theta).$$

这两式描述杆处在怎样的构形。再给出 $\theta = \theta(t)$，才能确定它怎样随时间转动。对点 A 逐次求导，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_A &= a\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta), \\
\boldsymbol{a}_A &= a\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) + a\dot{\theta}(-\cos\theta\dot{\theta}, -\sin\theta\dot{\theta}) \\
&= a\ddot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta) - a\dot{\theta}^2(\cos\theta, \sin\theta).
\end{aligned}$$

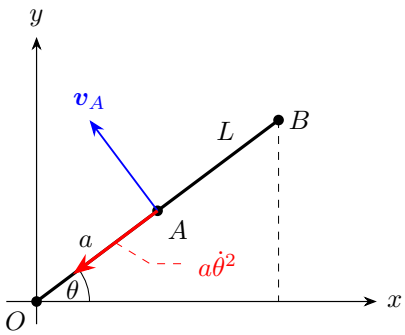


图 3.1: 一个转角确定整根杆的构形，两次求导分别给出切向和向心项

图 3.1 中，速度垂直于杆；加速度中的第二项沿杆指向 O，来自杆方向的变化。对 B 求导得到相同形式，只把 a 换为 L。同一刚体各点的运动由共同转角联系起来。

一般地，若一个坐标 q 已足以确定机构，点 P 的位置可写成 $\boldsymbol{r}_P(q)$。沿实际运动使用链式法则：

$$\boldsymbol{v}_P = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P}{\mathrm{d}q}\dot{q}, \qquad \boldsymbol{a}_P = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_P}{\mathrm{d}q^2}\dot{q}^2 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_P}{\mathrm{d}q}\ddot{q}.$$

第一项反映构形改变时速度方向和比例的变化，第二项反映驱动快慢的变化。下面先从两点距离推导速度投影，再把同一个位置求导的方法用于滑杆、滑轮和接触机构。相应例题中的每个速度比，都能追溯到图上的一条长度或位置关系。

3.2　长度变化、速度投影与加速度

3.2.1　两点距离的变化率

令两点的相对位矢为 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$，距离为 $\ell = |\boldsymbol{R}| > 0$，从 A 指向 B 的单位矢量为 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{R}/\ell$。对 $\ell^2 = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}$ 求导，

$$2\ell\dot{\ell} = \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{R}} = 2\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A),$$

于是

$$\dot{\ell} = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A).$$

也就是说，两点距离的变化率等于相对速度在连线方向的投影。图 3.2 中，随 A 平动来观察，记 $\boldsymbol{u}$ 为这段时间内 B 对 A 的平均速度，相对位移为 $\boldsymbol{u}\Delta t$。把位移分成沿 AB 和垂直于 AB 的两部分，前一部分决定距离的一阶变化。取 $\Delta t \to 0$ 时，$\boldsymbol{u}$ 趋于瞬时相对速度。

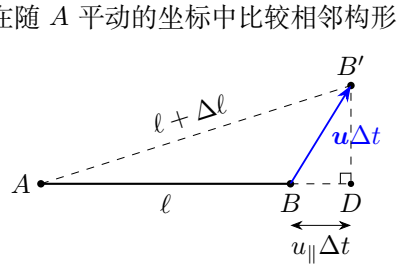


图 3.2: 距离变化由相对速度沿连线的分量决定

记图中垂足为 D，则 $AD = \ell + u_{\parallel}\Delta t$、$DB' = u_{\perp}\Delta t$。由直角三角形 ADB'，

$$\ell(t+\Delta t)^2 = (\ell + u_{\parallel}\Delta t)^2 + (u_{\perp}\Delta t)^2 = \ell^2 + 2\ell u_{\parallel}\Delta t + O(\Delta t^2).$$

把平方差分解为长度差乘长度之和，两边除以 Δt 后取极限，得到 $2\ell\dot{\ell} = 2\ell u_{\parallel}$。收绳时绳段缩短，长度导数为负；沿绳投影的负号就来自这一物理过程。

例 3.4 中，绳的一端在岸上固定，另一端随船水平运动。计算船速时，要取船的速度沿绳方向的投影；这一个分量就是该段绳的长度变化率。

3.3 由物体的连接关系求运动

3.3.1 定长杆怎样联系两个端点

一根杆的两端沿互相垂直的导轨运动，一个端点向外滑动，另一个端点就要向导轨交点靠近。固定杆长把两端的位置联系起来，位置关系的导数再给出两端的速度关系。这类由连接、接触和轨道形状给出的运动关系，称为运动约束。

如图 3.3，杆长为 L，水平端和竖直端到导轨交点的距离为 $x, y > 0$。直角三角形给出

$$x^2 + y^2 = L^2.$$

只要知道 x，就能由此确定 y。原本的两个坐标只剩一个可以独立改变，我们说这个机构有一个自由度。对两端位置关系求时间导数，

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0, \qquad x\dot{x} + y\dot{y} = 0.$$

若水平端向右，$\dot{x} > 0$，竖直端便有 $\dot{y} = -x\dot{x}/y < 0$，沿导轨向下运动。速度的正负在这里直接表示两端的实际运动方向。

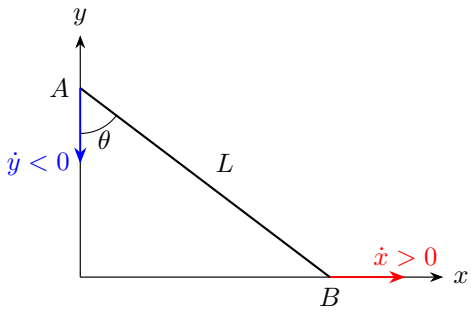


图 3.3: 定长杆两端的位置与运动方向

也可以用杆与竖直线的夹角 θ 描述整个形状：

$$x = L\sin\theta, \quad y = L\cos\theta, \qquad \dot{x} = L\cos\theta\dot{\theta}, \quad \dot{y} = -L\sin\theta\dot{\theta}.$$

知道一个端点的速度，就可求 $\dot{\theta}$，再求另一个端点或杆上任意一点的速度。后面的滑杆例题将按这种方法处理固定在杆上的分点。

3.3.2　不可伸长绳与活动滑轮

绷紧的不可伸长绳，把两端的运动联系起来。把绳分成各个直线段以及绕滑轮的弧段，总长度保持不变。一段绳增长，其他绳段的总长就要相应缩短。滑轮半径和包绕角不变时，弧段长度为常量；忽略滑轮尺寸的题目，则可把绳长写成各点之间距离之和。

图 3.4 中，一端固定，绳绕过下方活动滑轮，再绕过上方定滑轮，末端 Q 自由。向下量活动轮心的坐标为 y，自由端坐标为 z。轮心下降 Δy，左右两条支承绳各增长 Δy；定滑轮后的绳段便要缩短 $2\Delta y$，使自由端上升。因此

$$\ell = 2y + z + C, \qquad 2\Delta y + \Delta z = 0.$$

对时间逐次求导，有

$$2\dot{y} + \dot{z} = 0, \qquad 2\ddot{y} + \ddot{z} = 0.$$

自由端与活动轮心运动方向相反，速率为轮心速率的两倍。图中用实际的下降、上升箭头表示这一次运动，向下的坐标正向另外标在坐标轴上。

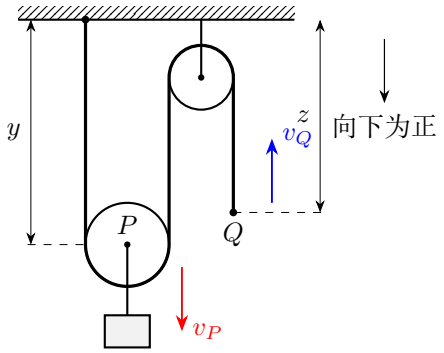


图 3.4: 活动滑轮下降，自由端经定滑轮向上移动

若滑轮两端都能运动，仍从两条绳段的长度出发。图 3.5 取向上为正，轮心在两端上方，三个坐标分别为 y_P, y_1, y_2。绳长为

$$\ell = (y_P - y_1) + (y_P - y_2) + C.$$

在两绳段保持平行、弧长不变的过程中，

$$2\Delta y_P = \Delta y_1 + \Delta y_2, \qquad v_P = \frac{v_1 + v_2}{2}, \qquad a_P = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

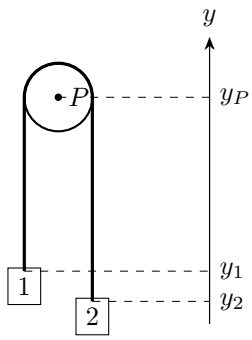


图 3.5: 两侧绳端与滑轮中心的竖直坐标

三个速度都相对于地面，并按同一正向计。轮心固定时，两端速度等大反向；一端固定时，另一端的位移为轮心位移的两倍。斜绳的方向会改变长度变化率，应按实际绳路求导；本讲第一个例题便讨论绳段不平行的活动滑轮。

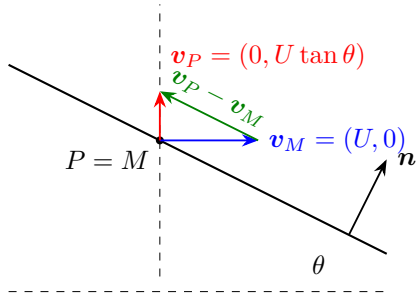
3.3.3 接触点的法向与切向运动

斜面向右平移，可以将只能竖直运动的杆顶起。杆端和斜面接触处的位置重合，但它们的速度方向不同。只要相对运动沿斜面，杆端就能一边滑动一边保持接触；相对速度在斜面法线方向的分量为零。

图 3.6 中的杆端为 P，这一瞬间与它接触的斜面材料点为 M。斜面向右下倾斜，倾角 θ，单位法向为 $\boldsymbol{n}=(\sin\theta,\cos\theta)$。若斜面速度为 $(U,0)$，杆端速度为 $(0,v_P)$，则

$$(\boldsymbol{v}_P-\boldsymbol{v}_M)\cdot\boldsymbol{n}=-U\sin\theta+v_P\cos\theta=0,$$

所以 $v_P=U\tan\theta$，方向向上。图中的绿色速度差沿斜面，表示两物体正在相对滑动。



P：竖直导杆端点；M：此刻接触的斜面材料点

图 3.6: 接触法向速度相同，切向相对运动仍可存在

光滑接触允许这种切向滑动。若另给无滑动条件，接触处的切向速度也应相等，于是两个物体在接触处的完整速度相同。物体相互分离以后，则要根据新的运动条件继续求解。

3.3.4　几何交点与杆上的物质点

杆端经过的斜面材料点会不断改变，两杆的几何交点也会在杆上移动。先用一个具体的直线模型描述这种几何位置：黑线固定，方程为 $y = mx$；蓝线保持斜率 n 而竖直平移，方程为 $y = nx + b(t)$，$m > n$。

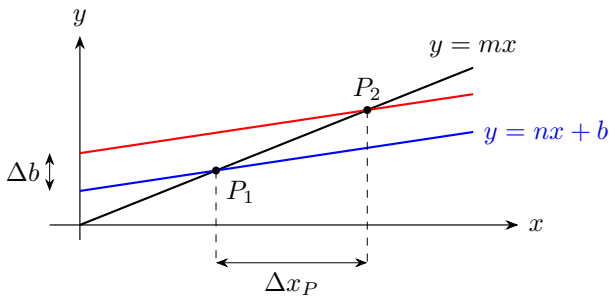


图 3.7: 两条直线斜率接近时，平移量对应较大的交点位移

图 3.7 中，蓝线向上平移 Δb，与黑线的交点从 P_1 移到 P_2。交点同时满足两条直线方程，因而

$$mx = nx + b(t), \qquad x_P = \frac{b(t)}{m-n}, \qquad y_P = \frac{mb(t)}{m-n}.$$

斜率 m, n 为常量，逐项求导得

$$v_{P,x} = \frac{\dot b}{m-n}, \qquad v_{P,y} = \frac{m\dot b}{m-n}.$$

同样的位移关系给出 $\Delta x_P = \Delta b/(m-n)$。两线越接近平行，斜率差越小，同样的平移量就产生越大的交点移动量。图中的交点沿黑线走过一段较长距离，而黑线的材料仍静止。

两条直线都平移时，可把方程写为

$$a_1 x + b_1 y = c_1(t), \qquad a_2 x + b_2 y = c_2(t),$$

其中 a_i, b_i 固定。对同一个交点的两个方程求导，

$$a_1\dot x + b_1\dot y = \dot c_1, \qquad a_2\dot x + b_2\dot y = \dot c_2.$$

第一式乘 b_2、第二式乘 b_1 后相减，消去 $\dot y$；同理消去 $\dot x$，得到

$$\dot x = \frac{\dot c_1 b_2 - \dot c_2 b_1}{D}, \qquad \dot y = \frac{a_1\dot c_2 - a_2\dot c_1}{D}, \qquad D = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0.$$

两线平行时可能相离，也可能重合；跟踪唯一交点的这套位置描述对应 $D \neq 0$ 的相交情形。

3.3.5 弹性连接与坐标比例

刚杆把两端距离固定，弹簧则通过伸长或缩短容许两端发生相对运动。取共线两端 A, B，B 始终在 A 右侧，弹簧长度为

$$\ell = x_B - x_A, \qquad \dot{\ell} = v_B - v_A.$$

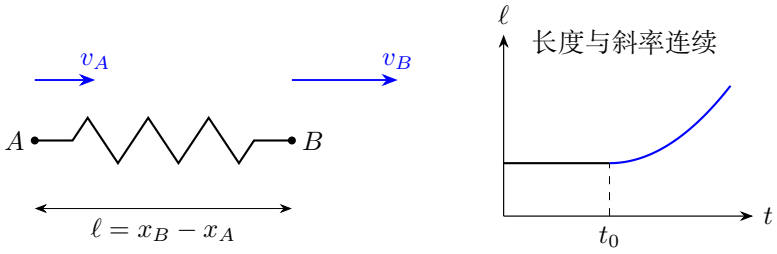


图 3.8: 弹簧形变量与形变速率是不同的物理量

图 3.8 左侧中，右端向右运动得更快，弹簧随之伸长；若两端速度相同，弹簧只整体平移，长度保持不变。右图表示在 t_0 后两端相对速度从零逐渐增加的一个过程。

例如外部装置使两端在 t_0 之后分别按

$$x_A = u(t - t_0), \qquad x_B = \ell_0 + u(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (a > 0)$$

运动。两式相减并求导，

$$\ell = \ell_0 + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \qquad \dot{\ell} = \frac{a}{2}\,2(t - t_0) = a(t - t_0).$$

两端位置和速度在 t_0 连续，长度曲线便有连续的位置和斜率。对理想轻弹簧，弹力大小由当时形变量给出，

$$F = k(\ell - \ell_0) = \frac{1}{2}ka(t - t_0)^2.$$

外部作用若在某一瞬间改变，两端的位置仍连续，弹簧当时的长度和弹力也连续，而与它连接物体的加速度可随合力改变。这里把长度、长度变化率与作用力各自联系到具体的物理量，便能按问题所给条件建立相应方程。

对于有质量的弹簧，拉动一端会使形变以波动方式传播；若连接中还含阻尼元件，作用力还与两端相对速度有关。这些动力学作用要与弹簧允许变长这一几何关系一起考虑。

另一类机构通过相似形给出固定坐标比例。若整个过程中 $x_2 = kx_1 + C$，k, C 为常量，逐次求导为

$$v_2 = k\dot{x}_1 = kv_1, \qquad a_2 = k\dot{v}_1 = ka_1.$$

三组铰接菱形的水平投影都含同一个 $\cos\theta$，后面的例题将从各组边长得出这种坐标比例，再求上顶点的竖直分量。

若比例 k 随时间改变，乘积求导给出

$$\begin{aligned} v_2 &= \dot{k}x_1 + kv_1, \\ a_2 &= \ddot{k}x_1 + \dot{k}v_1 + \dot{k}v_1 + ka_1 = \ddot{k}x_1 + 2\dot{k}v_1 + ka_1. \end{aligned}$$

持续成立的固定比例使导数保持同一比例；随时间改变的几何比例，则将它自身的变化一起带进速度和加速度。

3.4　杆与可伸缩连接的二阶运动关系

3.4.1　定长杆的速度与加速度

杆长固定时 $\dot{\ell} = 0$，所以

$$(\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A)\cdot\boldsymbol{e} = 0, \qquad \boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{e}.$$

图 3.9 中，两端沿杆的速度投影相等。垂直杆的相对速度使杆转动，因此两端完整的速度通常不同。

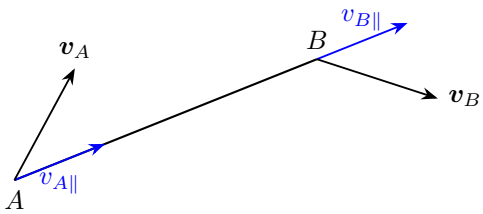


图 3.9: 相等的是沿杆分量

继续求加速度时，杆的方向也在变。记相对速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A$，对定长关系逐次求导，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R} &= L^2, \\ \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{u}) &= \dot{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} \\ &= u^2 + \boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A) = 0. \end{aligned}$$

因 $\boldsymbol{R}=L\boldsymbol{e}$，得到

$$(\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}_A)\cdot\boldsymbol{e}=-\frac{u^2}{L}.$$

图 3.10 中的相对速度垂直杆，相对加速度则有沿杆向内的分量。若杆角速度为 ω，$u=L|\omega|$，该分量就是 $-L\omega^2$；角速度改变时，还会有垂直杆的相对加速度。

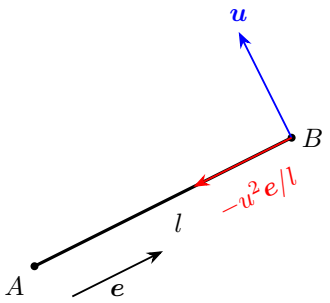


图 3.10: 定长杆的相对速度垂直杆，相对加速度具有沿杆内向分量

回到两端沿垂直导轨移动的滑杆。若水平端匀速向外，$\dot{x}=u>0$、$\ddot{x}=0$，由

$$x\dot{x}+y\dot{y}=0$$

再求导，

$$\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}=0.$$

代入 $\dot{y}=-xu/y$ 后，

$$y\ddot{y}=-u^2-\frac{x^2u^2}{y^2}=-u^2\frac{x^2+y^2}{y^2}=-\frac{u^2L^2}{y^2},$$
$$\ddot{y}=-\frac{u^2L^2}{y^3}.$$

杆越接近水平，水平端移动同样的小距离，竖直端就要下降更多；在给定水平端匀速的条件下，竖直端的速率和加速度大小都不断增大。

3.4.2 长度可变时的二阶关系

对于可伸缩连接，ℓ 也随时间改变。由 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{R}/\ell$ 使用商法则，

$$\dot{\boldsymbol{e}}=\frac{\dot{\boldsymbol{R}}\ell-\boldsymbol{R}\dot{\ell}}{\ell^2}=\frac{\boldsymbol{u}-\boldsymbol{e}\dot{\ell}}{\ell}.$$

再对 $\dot\ell = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{u}$ 求导，

$$\begin{aligned}\ddot\ell &= \dot{\boldsymbol{e}}\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\\ &= \frac{u^2 - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{u})\dot\ell}{\ell} + \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A)\\ &= \frac{u^2 - \dot\ell^2}{\ell} + \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_A).\end{aligned}$$

分子 $u^2 - \dot\ell^2$ 是垂直连线的相对速度分量平方。这部分速度转动连线方向，因而在二阶长度变化中出现。令 $\dot\ell = \ddot\ell = 0$，就回到定长杆的结果。

这些具体长度关系还可归纳为 $F(q_1, q_2, t) = 0$。沿实际运动求导，

$$F_{q_1}\dot q_1 + F_{q_2}\dot q_2 = -F_t.$$

给定 $\dot q_1$ 后，$F_{q_2} \neq 0$ 时，上式直接给出 $\dot q_2$。当 $F_{q_2} = 0$，该瞬间的一阶关系化为 $F_{q_1}\dot q_1 = -F_t$，给出对驱动速度的条件。例如定长杆在 $y = 0$ 时，$x\dot x + y\dot y = 0$ 化为 $x\dot x = 0$；由于 $x = L > 0$，水平端在这个位置的有限速度运动满足 $\dot x = 0$。这些特殊形状因而可以直接从原位置方程及其导数研究。

3.5 无滑动滚动

先看沿水平地面滚动的圆轮。轮上任一点的速度由轮心的平动速度和绕轮心转动的速度相加。设轮心 C 向右速率为 V，轮半径为 r，轮顺时针转动的角速度大小为 ω_0。

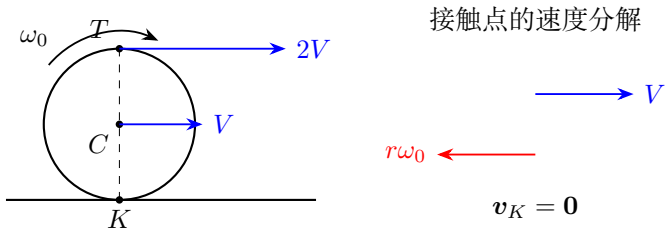


图 3.11: 水平面滚轮的轮心、顶点与接触点速度

图 3.11 中，最下方接触点 K 随轮心的平动分速度向右，大小 V；绕轮心转动的分速度向左，大小 $r\omega_0$。无滑动时，轮上此处物质点的瞬时对地速度为零，因此

$$V - r\omega_0 = 0, \qquad V = r\omega_0.$$

轮心只有平动速度 V，最上方点 T 的转动分速度也向右，与平动速度相加成为 $2V$。轮上各点速度方向和大小随所在位置改变，都能从这一矢量相加关系求出。轮

沿圆形表面滚动时，仍从接触点的速度关系出发，只是轮心所走的轨迹也变成了圆。

3.5.1 沿固定圆内外滚动的圆轮

圆轮在固定表面上无滑动滚动时，接触处轮上物质点相对地面的瞬时速度为零。这个速度由轮心平动和绕轮心的转动两部分相加而成。轮心沿圆运动时，连心线本身也在转动，所以对地自转角和相对连心线的转角不同。

图 3.12 中，固定圆半径为 R，小轮半径为 r。取逆时针为正，小轮心的公转角速度为 Ω，小轮对地自转角速度为 ω。外滚时轮心轨道半径为 $R+r$，在图示右侧位置，轮心速度向上；接触点在轮心左侧，自转速度在接触点向下。因此

$$(R+r)\Omega - r\omega = 0, \qquad \omega = \frac{R+r}{r}\Omega.$$

内滚时 $R>r$，轮心轨道半径为 $R-r$，接触点在小轮心右侧，同为逆时针的两种速度在该点同向，故

$$(R-r)\Omega + r\omega = 0, \qquad \omega = -\frac{R-r}{r}\Omega.$$

负号表示内滚时自转与公转反向。

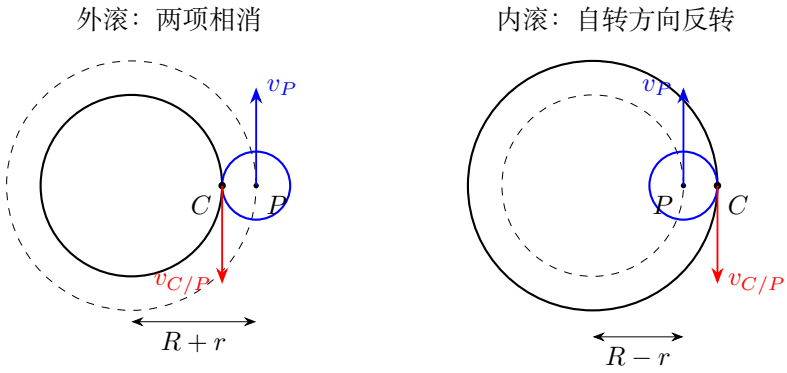


图 3.12: 内外滚动中，圆心平动与接触点绕圆心转动的速度相加

若小轮心从 t_0 到 t_1 逆时针公转一周，公转角 θ 从 θ_0 增至 $\theta_0+2\pi$。外滚时的自转角 ϕ 满足 $\dot\phi = (R+r)\dot\theta/r$，于是

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \int_{t_0}^{t_1} \omega\,\mathrm{d}t = \frac{R+r}{r}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{R+r}{r}[\theta]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = 2\pi\frac{R+r}{r}.\end{aligned}$$

这里换元用了 $\mathrm{d}\theta = \dot\theta\,\mathrm{d}t$，时间的两端换成相应角度。内滚则为

$$\Delta\phi = -\frac{R-r}{r}[\theta]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = -2\pi\frac{R-r}{r}.$$

对地自转圈数分别为 $R/r+1$ 和 $-(R/r-1)$。若观察轮上标记相对于连心线的转动，要减去连心线转角 2π，分别得到 $2\pi R/r$ 和 $-2\pi R/r$。题目给的参照不同，所计的转角也就不同。

3.5.2　同时与两个圆环接触的滚子

夹在同心圆环间的滚子同时受两处无滑动条件联系。设内、外环接触半径为 R_i, R_o，滚子半径为 $r=(R_o-R_i)/2$，圆心轨道半径为 $R_c=(R_i+R_o)/2$。各角速度均相对于地面，以逆时针为正。

图 3.13 将滚子圆心 C 放在共同圆心 O 的右侧，切向正向为向上。滚子逆时针自转时，内侧接触点 A 相对 C 向下，外侧接触点 B 相对 C 向上。因此两处的速度分别为

$$V_C - r\omega_s = R_i\omega_i, \qquad V_C + r\omega_s = R_o\omega_o.$$

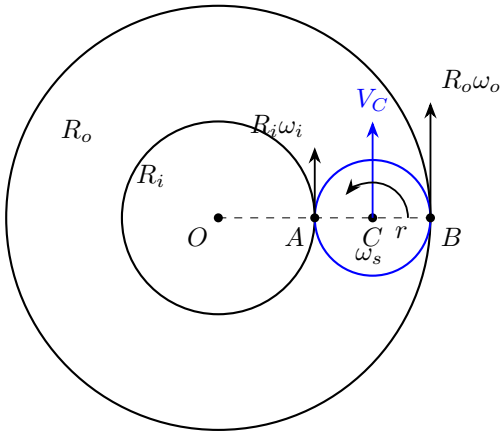


图 3.13: 在同一瞬时位置比较两个接触点速度：内侧自转速度与圆心速度相减，外侧相加

两式相加、相减，分别消去自转和平动，得到

$$V_C = \frac{R_i\omega_i + R_o\omega_o}{2}, \qquad \omega_s = \frac{R_o\omega_o - R_i\omega_i}{2r}, \qquad \Omega_C = \frac{V_C}{R_c}.$$

例如内环固定，代入 $\omega_i = 0$ 就能同时求出公转和自转。转过一段时间后，对地自转圈数为 $\int\omega_s\,\mathrm{d}t/(2\pi)$，公转圈数为 $\int\Omega_C\,\mathrm{d}t/(2\pi)$；相对连心线的姿态变化为 $\int(\omega_s-\Omega_C)\,\mathrm{d}t$。后面的圆环练习会将这些速度关系按实际时间积分。

3.6 均匀伸长细线上的运动

3.6.1 材料点的速度与爬行速度

一根细线左端固定、右端被拉长。如果伸长是均匀的，原来位于全长一半处的材料点，以后仍位于全长一半处。用比例 $z\in[0,1]$ 标记同一材料点，总长为 $L(t)$，该点的位置为 $x=zL(t)$，速度为 $z\dot{L}$。靠近固定端的材料移动较慢，靠近自由端的材料移动较快。

图 3.14 中的黑点代表相同材料，虚线连接它们在前后两个时刻的位置。中点由 $L(t)/2$ 移到 $L(t+\Delta t)/2$，其速度是自由端的一半。

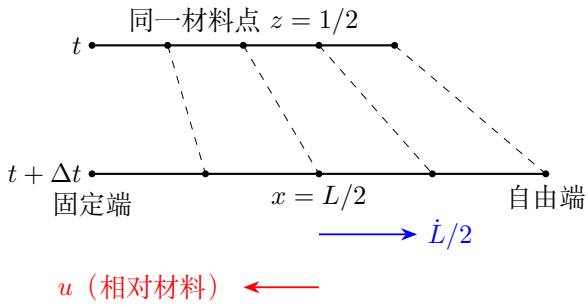


图 3.14: 均匀伸长保持材料分数，材料点的地面速度随位置增加

若虫相对当地材料以速率 $u>0$ 向左爬，虫对地的速度要加上它所在位置的材料速度：

$$\dot{x}=\frac{x}{L}\dot{L}-u.$$

虫会经过不同材料点，所以它的比例坐标 $z(t)=x(t)/L(t)$ 随时间改变。用商法则求导，

$$\dot{z}=\frac{\dot{x}L-x\dot{L}}{L^2}=\frac{[(x/L)\dot{L}-u]L-x\dot{L}}{L^2}=-\frac{u}{L(t)},$$

$$z(t)=z_0-u\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{L(\tau)}.$$

两项伸长贡献在 z 的导数中抵消，留下虫穿过材料的运动。虫对地可能暂时向右，但它相对于材料的位置始终向左移动。到达固定端要求 $z=0$，所以取决于长度倒数的累积积分。

若自由端以恒速 w 拉长，$L=L_0+wt$，材料速度为 wx/L，固定端速度仍为零，自由端速度为 w。练习将完整求解这个线性伸长问题。对于不均匀伸长，材料点的位置由具体的形变分布确定，对相应位置求时间导数就得到当地速度。

3.6.2　不同伸长规律下的到达时间

设长度按 $L(t)=L_0(1+t/\tau_0)^p$ 增长，$p>0$。令 $\xi=1+\tau/\tau_0$，有 $\mathrm{d}\tau=\tau_0\,\mathrm{d}\xi$，上下限 $0,t$ 变为 $1,1+t/\tau_0$。当 $p\neq 1$，

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{L(\tau)} &= \frac{\tau_0}{L_0}\int_1^{1+t/\tau_0} \xi^{-p}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{\tau_0}{L_0}\left[\frac{\xi^{1-p}}{1-p}\right]_1^{1+t/\tau_0} \\ &= \frac{\tau_0}{L_0(1-p)}\left[(1+t/\tau_0)^{1-p}-1\right].\end{aligned}$$

当 $p=1$，原函数为 $\ln\xi$，同一换元给出

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{L(\tau)} = \frac{\tau_0}{L_0}[\ln\xi]_1^{1+t/\tau_0} = \frac{\tau_0}{L_0}\ln(1+t/\tau_0).$$

$0<p\le 1$ 时，这个积分随时间无限增长，最终可达到任意有限的 z_0/u。$p>1$ 时，积分趋于有限值 $\tau_0/[L_0(p-1)]$，满足

$$\frac{z_0}{u} < \frac{\tau_0}{L_0(p-1)}$$

时，累积量会在有限时刻达到所需值，虫随即到达固定端。图 3.15 将累积量与所需的 z_0/u 画在一起，交点对应到达时刻。

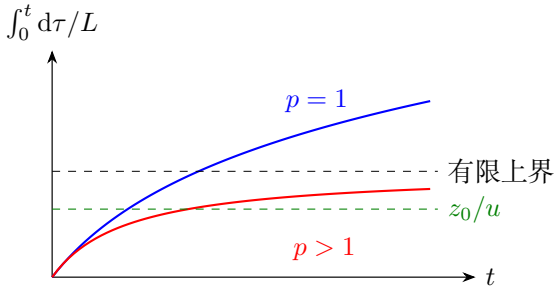


图 3.15: 长度倒数的累积量决定固定端的可达性

等号情形还可从实际距离看得更清楚。记临界初始比例

$$z_c = \frac{u\tau_0}{L_0(p-1)}.$$

将前面的积分代入 $z(t)=z_0-u\int_0^t \mathrm{d}\tau/L(\tau)$，对 $p>1$ 整理，

$$\begin{aligned}z(t) &= z_0 - z_c\left[1-(1+t/\tau_0)^{1-p}\right] \\ &= (z_0-z_c)+z_c(1+t/\tau_0)^{1-p}.\end{aligned}$$

当 $z_0 = z_c$ 时，材料比例 $z(t)$ 趋零，而虫距固定端的实际距离为

$$\begin{aligned} x(t) &= L(t)z(t) = L_0(1+t/\tau_0)^p z_c(1+t/\tau_0)^{1-p} \\ &= \frac{u\tau_0}{p-1}(1+t/\tau_0) = \frac{u}{p-1}(t+\tau_0). \end{aligned}$$

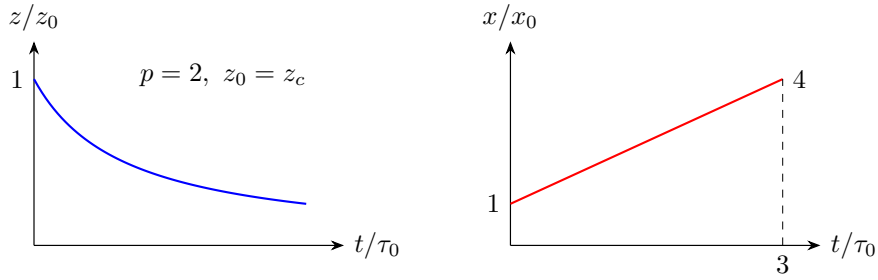


图 3.16: 临界伸长情形中，材料比例减小而实际距离增加

图 3.16 以 $p = 2$ 为例，左图的材料比例逐渐减小，右图的实际距离一直增加。虫在细线上向左爬过材料，同时细线向右伸长，把虫带向离固定端更远的位置。对地速度 $\dot{x} = u/(p-1) > 0$，所以这一临界情形始终向右运动。$z_0 > z_c$ 时，$z(t)$ 还保留正的常量项，实际距离同样随伸长增加。

在有限时间到达的情形，令 $A = z_0 L_0/(u\tau_0)$，由 $z(T) = 0$，当 $p \neq 1$ 时依次移项、取幂得

$$(1+T/\tau_0)^{1-p} = 1+(1-p)A, \qquad T = \tau_0\left\{[1+(1-p)A]^{1/(1-p)} - 1\right\}.$$

底数为正对应上述有限到达条件。$p = 1$ 时，

$$\ln(1+T/\tau_0) = A, \qquad T = \tau_0(\mathrm{e}^A - 1).$$

在前一个式子中令 $\varepsilon = 1-p$，由

$$\ln\big([1+\varepsilon A]^{1/\varepsilon}\big) = \frac{\ln(1+\varepsilon A)}{\varepsilon} \longrightarrow A,$$

可见 $p \to 1$ 时它趋于后一结果。于是线性伸长及其附近的幂律伸长，被同一材料坐标方法联系起来。

3.7　例题与分析

例 3.1 (沿斜壁移动的滑轮)**.** 绳的一端固定在倾角为 θ 的斜壁左下方，沿斜壁绕过滑轮 P 后连接物体 M。滑轮以速率 v_0 沿斜壁向上运动，物体受导轨限制只能竖直运动。忽略滑轮尺寸，绳不可伸长且始终绷紧。当 PM 恰好竖直、M 位于 P 下方时，求 M 的对地速度。

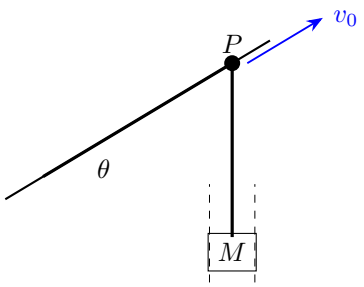


图 3.17: PM 竖直的瞬间，滑轮沿斜壁向上运动

解　图 3.17 中，沿壁绳段随着滑轮上移而变长，另一段绳便要缩短。所问瞬间，这段绳的上端还在上升，因此物体 M 应上升得比滑轮的竖直分速度更快。

取向右、向上为正，沿壁绳段长记为 s，PM 长为 ℓ。物体的横坐标 x_M 固定，而滑轮的两个坐标都在改变，一般有

$$\ell^2 = (x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2, \qquad s + \ell = C.$$

将两个式子分别对时间求导，

$$\begin{aligned} 2\ell\dot{\ell} &= 2(x_P - x_M)(\dot{x}_P - \dot{x}_M) + 2(y_P - y_M)(\dot{y}_P - \dot{y}_M), \\ \dot{s} + \dot{\ell} &= 0. \end{aligned}$$

在 PM 竖直的瞬间，$x_P = x_M$、$y_P - y_M = \ell > 0$，第一式化为 $\dot{\ell} = \dot{y}_P - \dot{y}_M$。又有 $\dot{s} = v_0$、$\dot{y}_P = v_0 \sin\theta$，所以

$$0 = v_0 + v_0 \sin\theta - v_M, \qquad \boxed{v_M = v_0(1 + \sin\theta)},$$

方向竖直向上。

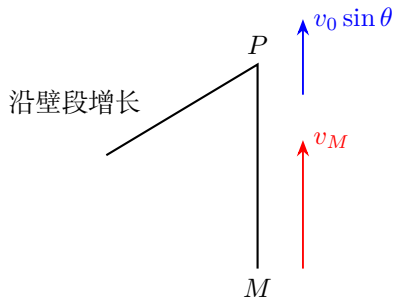


图 3.18: 物体上升同时补偿绳段增长和滑轮上升

图 3.18 中的两项各有直接意义：v_0 补偿沿壁绳段的增长，$v_0\sin\theta$ 来自滑轮本身的上升。斜壁趋于水平时，滑轮没有竖直分速度，物体仍以 v_0 上升；斜壁趋于竖直时，两项趋于相等，物体的瞬时速率趋于 $2v_0$。

滑轮继续沿斜壁运动以后，PM 通常会偏离竖直，上式描述的是题目指定的瞬间。任意后续时刻都可以从前面的距离平方关系重新求 $\dot{\ell}$，其中横坐标差的贡献也随之出现。

例 3.2 (碗内小球与弦长)**.** 半径 R 的光滑半圆碗固定，绳从碗内小球 m_1 经右侧碗沿 A 连到竖直悬挂的 m_2。绳在碗内为直线且绷紧。令 $\angle AOm_1=\alpha$, $0<\alpha<\pi$；当 m_2 向下速率为 v_0 时，求 m_1 的速率和方向。

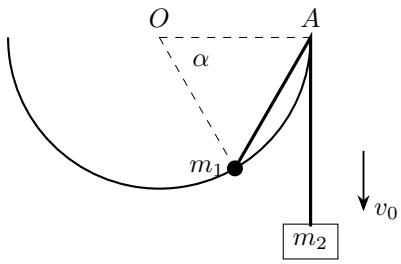


图 3.19: 小球与碗沿之间的弦及悬挂绳段

解 图 3.19 中，悬物 m_2 向下，悬挂绳段增长；绳总长保持不变，碗内弦段 Am_1 便以同样速率缩短。记这条弦长为 ℓ，即 $\dot{\ell}=-v_0$。

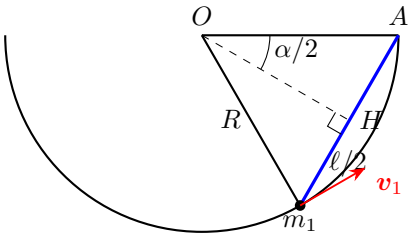


图 3.20: 弦中点 H 将弦长关系化为直角三角形

图 3.20 将弦的中点记为 H。$OA = Om_1 = R$，所以 OH 平分中心角并垂直于弦。在直角三角形 OHm_1 中，

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Hm_1}{Om_1} = \frac{\ell/2}{R}, \qquad \ell = 2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

半径 R 固定，对复合函数逐层求导，

$$\dot{\ell} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\dot{\alpha}}{2} = R\cos\frac{\alpha}{2}\,\dot{\alpha} = -v_0,$$
$$\dot{\alpha} = -\frac{v_0}{R\cos(\alpha/2)}.$$

$0 < \alpha < \pi$ 时分母为正，角 α 减小，小球沿碗面朝 A 移动。小球沿圆周走过的弧长变化率为 $R|\dot{\alpha}|$，故

$$\boxed{v_1 = \frac{v_0}{\cos(\alpha/2)}}.$$

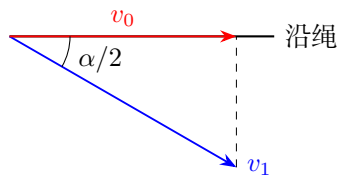


图 3.21: 以弦方向为水平轴，画出小球切向速度的投影

图 3.21 把绳方向旋到水平，画出小球切向速度在绳方向上的投影。切线与弦的夹角为 $\alpha/2$，所以沿绳分量 $v_1\cos(\alpha/2)$ 等于弦缩短速率 v_0。夹角越大，同样的切向速度在绳方向上的分量越小，所需 v_1 便越大；小球接近右侧碗沿时 $\alpha \to 0$，两方向逐渐重合，$v_1 \to v_0$。

例 3.3 (平移斜面顶起竖杆)**.** 斜面向右下方倾斜，倾角为 θ，整体以速率 v_0 向右平移。一根细杆受导轨限制只能竖直运动，下端与斜面光滑接触。求杆的速度。

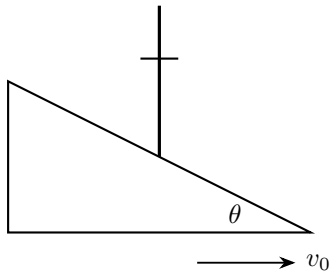


图 3.22: 水平移动斜面与竖直导杆的接触

解　区分材料点与新的接触点

图 3.22 中，杆沿固定的竖直导轨运动。考察一小段时间：斜面向右平移 ΔX 后，原接触处的斜面材料点也向右移去，新的接触点位于更高的位置。

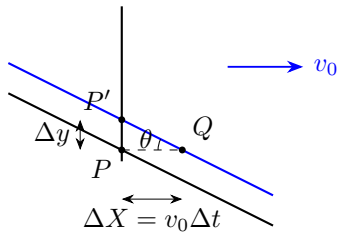


图 3.23: 斜面材料点右移到 Q，杆端上升到新接触点 P'

图 3.23 中 P 是原接触点，Q 是这块斜面材料平移后的位置，P' 是新的杆端位置。$PQ=\Delta X$、$PP'=\Delta y$，直角三角形 $PP'Q$ 给出

$$\tan\theta=\frac{\Delta y}{\Delta X},\qquad \Delta y=\Delta X\tan\theta.$$

由接触高度求杆端速度

从 $t=0$ 起，把斜面的累计平移量记为 $X(t)$，杆端初高度为 y_0。固定倾角使同一比例在整个接触阶段成立：

$$y_P(t)=y_0+X(t)\tan\theta.$$

对时间求导，y_0,θ 为常量，

$$\dot y_P=\dot X\tan\theta=v_0\tan\theta,\qquad \boxed{\boldsymbol{v}_P=v_0\tan\theta\,\boldsymbol{e}_y}.$$

杆端向上运动。更陡的斜面在同样水平平移量下产生更大的接触高度变化；斜面趋于水平时，这个上升速度趋零。图中 Q 随斜面向右，P' 随杆向上，两者的相对位移沿斜面，体现了光滑接触允许切向滑动的关系。

例 3.4 (斜绳牵引小船)**.** 岸上定滑轮高出船上系绳点 h。收绳速率恒为 v，某瞬间绳与水平线成 θ，求船向岸的速率。忽略滑轮尺寸及船的竖直运动。若开始收绳时斜绳长为 $\ell_0 > h$，再求船到岸的水平距离 $x(t)$。

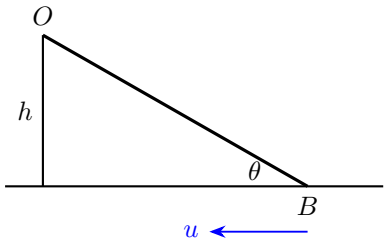


图 3.24: 船与高处定滑轮之间的斜绳

解　图 3.24 中，水平距离为 x，固定高度差为 h，斜绳长为 ℓ，有

$$x^2 + h^2 = \ell^2, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\ell}.$$

从斜绳长为 ℓ_0 时开始计时，恒速收绳使 $\dot{\ell} = -v$。带初值积分，

$$\ell(t) - \ell_0 = \int_0^t (-v)\,\mathrm{d}\tau = [-v\tau]_0^t = -vt, \qquad \ell(t) = \ell_0 - vt.$$

代回几何关系并取 $x > 0$，得到船到岸的水平距离

$$\boxed{x(t) = \sqrt{(\ell_0 - vt)^2 - h^2}}, \qquad 0 \le t < \frac{\ell_0 - h}{v}.$$

对外层根式、内层平方逐次求导，

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2\sqrt{(\ell_0 - vt)^2 - h^2}}\, 2(\ell_0 - vt)(-v) \\ &= -\frac{v\ell}{x}.\end{aligned}$$

船向岸运动，其速率 $u = -\dot{x}$，所以所问瞬间

$$\boxed{u = \frac{v\ell}{x} = \frac{v}{\cos\theta}}.$$

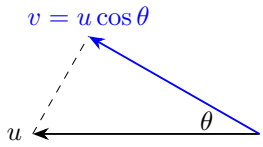


图 3.25: 船速沿绳的分量等于收绳速率

图 3.25 中，船速沿斜绳方向的分量为 $u\cos\theta$，它正好给出绳的缩短速率 v。随船靠岸，θ 增大，同样的水平位移对绳长的改变逐渐减小，保持恒定收绳速率便使船的水平速率增大。上面的 $x(t)$ 也给出这一运动：距离一直减小，曲线的斜率绝对值逐渐增大。

例 3.5 (半圆柱与竖直从动杆)**.** 半径 R 的半圆柱在水平面上向右平移，某瞬间速度为 v、加速度为 a。细杆只能竖直运动，下端接触圆柱右上侧。令接触点相对圆心的半径与竖直向上方向夹角为 $\theta \in (0, \pi/2)$。求杆的速度和加速度。

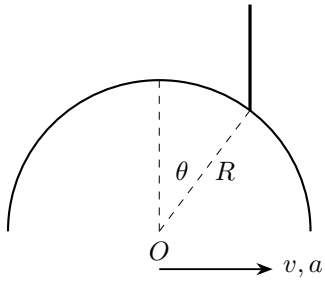


图 3.26: 圆柱右上侧与竖直杆的接触位置

解　杆的速度　设图 3.26 中竖直杆的水平坐标为常量 x_P，圆心横坐标为 X，以半圆柱底面为高度零点。接触点的坐标满足

$$x_P - X = R\sin\theta, \qquad y_P = R\cos\theta.$$

因为 $\dot{X} = v$，对第一式求导得 $-v = R\cos\theta\dot{\theta}$，故

$$\dot{\theta} = -\frac{v}{R\cos\theta}.$$

对第二式求导，再代入上式，得到杆的竖直速度

$$\dot{y}_P = -R\sin\theta\dot{\theta} = \boxed{v\tan\theta}.$$

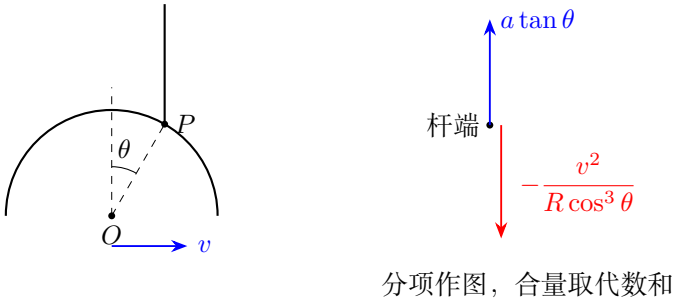


图 3.27: 驱动加速度与接触角变化分别贡献加速度

杆的加速度

图 3.27 将加速度分成驱动变化和几何变化两项。速度 v 和角度 θ 都随时间变化，对速度式应用乘积法则与链式法则，逐项得到

$$\begin{aligned}\ddot{y}_P &= \dot{v}\tan\theta + v\sec^2\theta\dot{\theta}\\ &= a\tan\theta + \frac{v}{\cos^2\theta}\left(-\frac{v}{R\cos\theta}\right)\\ &= \boxed{a\tan\theta - \frac{v^2}{R\cos^3\theta}}.\end{aligned}$$

图中上箭头表示 $a>0$ 时第一项的方向；若 $a<0$，该项也向下。

第二项始终非正，它来自圆心前移时 θ 减小、投影比例改变。合加速度由这两个竖直分量的代数和给出，可以向上、向下或为零。

当圆心匀速向右时，$a=0$，杆向上运动却减速。趋近圆弧顶端 $\theta\to 0$ 时，杆速趋于零而加速度趋于 $-v^2/R$，与顶端向下弯曲的局部几何一致。在题设的右上侧接触阶段，角 θ 随圆心前移而减小，杆端逐渐接近圆弧顶端。

例 3.6 (沿不同射线运动的最近距离)**.** 甲乙初始分别在 $A=(-l,0)$ 和 $B=(0,0)$。甲以 v_1 向右运动，乙以 v_2 沿上半平面内与向左水平线成角 $\alpha\in(0,\pi)$ 的射线运动。两者沿各自射线持续运动，求最近距离及其出现时刻。

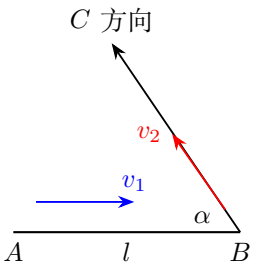


图 3.28: 两质点沿不同射线匀速运动

解 题目规定两者从初位置出发后沿各自射线持续运动，考察时间为 $t \geq 0$。取图 3.28 中向右、向上为正，乙的速度为 $(-v_2\cos\alpha, v_2\sin\alpha)$，甲的速度为 $(v_1, 0)$。乙相对甲的位矢因此是

$$\boldsymbol{R}(t) = \big(l - (v_1 + v_2\cos\alpha)t, v_2\sin\alpha\, t\big).$$

为简写计算，令 $c = v_1 + v_2\cos\alpha$，并记相对速度大小为 W，则

$$W^2 = c^2 + v_2^2\sin^2\alpha = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha > 0.$$

从距离平方求最近时刻 将两个分量平方相加，

$$R^2 = l^2 - 2lct + W^2t^2.$$

逐项求导，

$$\frac{\mathrm{d}R^2}{\mathrm{d}t} = -2lc + 2W^2t, \qquad \frac{\mathrm{d}^2R^2}{\mathrm{d}t^2} = 2W^2 > 0.$$

因而抛物线顶点在 $t_* = lc/W^2$。

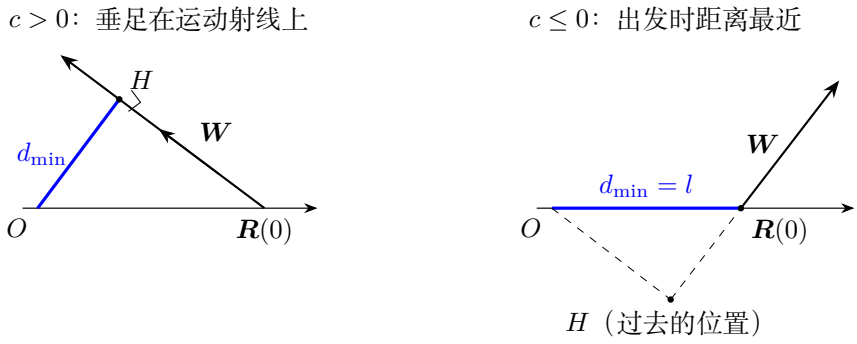


图 3.29: 相对运动射线上的垂足与出发时刻的最近位置

图 3.29 把实际相对轨迹画成从 $\boldsymbol{R}(0)$ 出发的射线。$c > 0$ 时，距离开始减小，垂足 H 位于这条射线上，最近时刻取 t_*；$c \leq 0$ 时，距离平方的导数在 $t \geq 0$ 始终非负，最小值就在出发时刻。

最近距离 对 $c > 0$，把 t_* 代回，

$$\begin{aligned} d_{\min}^2 &= l^2 - 2lc\frac{lc}{W^2} + W^2\frac{l^2c^2}{W^4} = \frac{l^2(W^2 - c^2)}{W^2}, \\ W^2 - c^2 &= v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha - (v_1 + v_2\cos\alpha)^2 \\ &= v_2^2(1 - \cos^2\alpha) = v_2^2\sin^2\alpha. \end{aligned}$$

$\alpha \in (0,\pi)$ 使 $\sin\alpha > 0$，取距离的正根，连同 $c \le 0$ 情形一起写为

$$\boxed{t_{\min} = \begin{cases} lc/W^2, & c > 0, \\ 0, & c \le 0, \end{cases} \qquad d_{\min} = \begin{cases} lv_2 \sin\alpha / W, & c > 0, \\ l, & c \le 0. \end{cases}}$$

两种情形分别对应图中垂足位于未来轨迹上和起始点最近的几何关系。

例 3.7 (三组铰接菱形的速度)**.** 三组边长比为 $3:2:1$ 的菱形首尾铰接，其共同水平对角线端点依次为 A_0, A_1, A_2, A_3；各边与水平线的锐角始终相同，记为 θ。A_0 固定，A_3 向右速率为 v。求 $\theta = 45^\circ$ 时 A_1, A_2 及第二组上顶点 B_2 的速度。

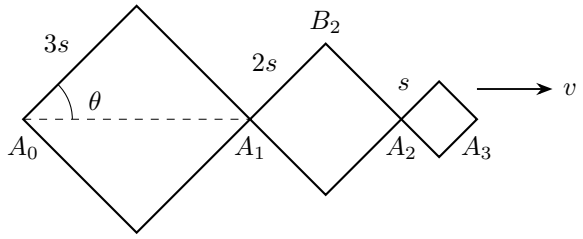


图 3.30: 三组菱形的共同夹角与边长比例

解　把最小一组菱形的边长记为 s，则三组边长依次为 $3s, 2s, s$。图 3.30 中，各组的边与水平夹角相同，整组形状由一个角 θ 决定。

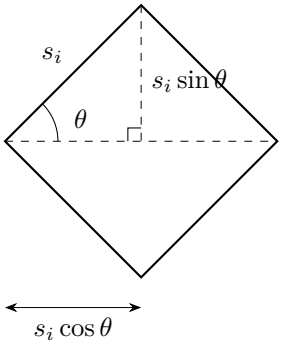


图 3.31: 单个菱形的边长、水平投影和高度

图 3.31 取单个边长为 s_i 的菱形。上顶点的高为 $s_i \sin\theta$，半条水平对角线为 $s_i \cos\theta$，整条水平对角线便为 $2s_i \cos\theta$。

水平端点的速度 从固定的 A_0 起累加三组水平对角线，

$$\begin{aligned} x_{A_1} &= 2(3s)\cos\theta = 6s\cos\theta, \\ x_{A_2} &= 2(3s+2s)\cos\theta = 10s\cos\theta, \\ x_{A_3} &= 2(3s+2s+s)\cos\theta = 12s\cos\theta. \end{aligned}$$

对最后一式求导，利用已知 $\dot{x}_{A_3} = v$，

$$-12s\sin\theta\,\dot{\theta} = v, \qquad \dot{\theta} = -\frac{v}{12s\sin\theta}.$$

另两端点的速度分别为

$$v_{A_1} = -6s\sin\theta\,\dot{\theta} = \boxed{\frac{v}{2}}, \qquad v_{A_2} = -10s\sin\theta\,\dot{\theta} = \boxed{\frac{5v}{6}},$$

方向均向右。

第二组上顶点的速度 B_2 在 A_1, A_2 的水平中点上方，第二组边长为 $2s$，所以

$$x_{B_2} = \frac{x_{A_1} + x_{A_2}}{2} = 8s\cos\theta, \qquad y_{B_2} = 2s\sin\theta.$$

对两个坐标分别求导，代入 $\dot{\theta}$，

$$\begin{aligned} v_{B_2,x} &= -8s\sin\theta\,\dot{\theta} = \frac{2v}{3}, \\ v_{B_2,y} &= 2s\cos\theta\,\dot{\theta} = -\frac{v}{6}\cot\theta. \end{aligned}$$

当 $\theta = 45^\circ$，$\cot\theta = 1$，得到

$$\boxed{\boldsymbol{v}_{B_2} = (2v/3, -v/6)}, \qquad |\boldsymbol{v}_{B_2}| = \sqrt{\frac{4v^2}{9} + \frac{v^2}{36}} = \boxed{\frac{\sqrt{17}}{6}v}.$$

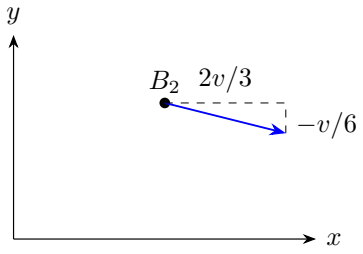


图 3.32: 水平端点与上顶点的速度分量

图 3.32 的水平、竖直两条虚线表示刚求出的两个分量。向右拉开机构使 θ 减小，上顶点因而一边向右、一边下降。

上顶点的轨迹　将坐标分别除以 $8s, 2s$，平方相加消去 θ，

$$\frac{x_{B_2}^2}{(8s)^2}+\frac{y_{B_2}^2}{(2s)^2}=1, \qquad x_{B_2}>0, \quad y_{B_2}>0.$$

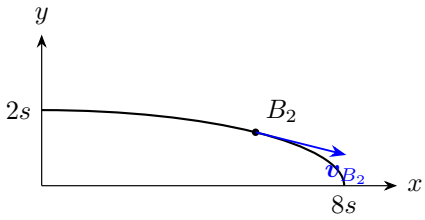


图 3.33: 上顶点的椭圆轨迹与切向速度

图 3.33 保留横纵方向的实际比例，所画速度沿这段椭圆的切线。对轨迹方程求时间导数，

$$\frac{2x_{B_2}v_{B_2,x}}{64s^2}+\frac{2y_{B_2}v_{B_2,y}}{4s^2}=0, \qquad v_{B_2,y}=-\frac{x_{B_2}}{16y_{B_2}}v_{B_2,x}.$$

在 45° 处，$x_{B_2}/y_{B_2}=4$，切线斜率为 $-1/4$，与图 3.32 的两速度分量之比相同。铰接关系决定了轨迹形状，端点运动的快慢决定沿轨迹前进的速率。

例 3.8 (滑杆上任一点的运动)**.** 长为 L 的杆，端点 A 沿竖直导轨向下速率为 v_A，端点 B 沿水平导轨向右运动。杆与竖直线成 $\theta\in(0,\pi/2)$，点 P 位于杆上且 $AP=\lambda L$。求 B,P 的速度及 P 的轨迹；若另给竖直端向下的加速度 a_A，再求 B,P 的加速度。

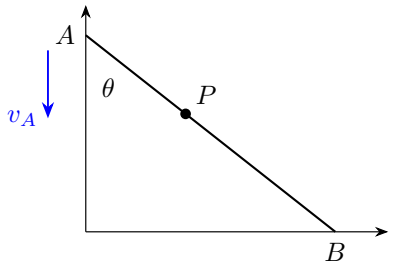


图 3.34: 杆的两端沿垂直导轨运动

解　**先求两端的运动**　以图 3.34 的导轨交点为原点，向右、向上为正。两端坐标为

$$A=(0,L\cos\theta), \qquad B=(L\sin\theta,0).$$

竖直端向下运动，$\dot{y}_A=-v_A$。对 $y_A=L\cos\theta$ 求导，

$$-L\sin\theta\,\dot{\theta}=-v_A, \qquad \dot{\theta}=\frac{v_A}{L\sin\theta}.$$

再对 $x_B = L\sin\theta$ 求导，

$$\dot{x}_B = L\cos\theta\,\dot{\theta} = \boxed{v_A\cot\theta},$$

它为正，表示 B 向右。

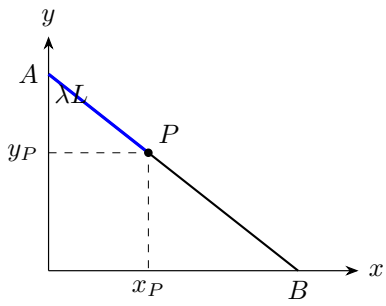


图 3.35: 由固定分点的横、纵投影建立坐标

杆上固定分点的速度 图 3.35 中，$AP/AB = \lambda$ 在运动中保持不变。P 的位置是两端位置按比例组合的结果：

$$\boldsymbol{r}_P = (1-\lambda)\boldsymbol{r}_A + \lambda\boldsymbol{r}_B, \qquad P = (\lambda L\sin\theta, (1-\lambda)L\cos\theta).$$

分别对两个坐标求导，

$$\dot{x}_P = \lambda L\cos\theta\,\dot{\theta} = \lambda v_A\cot\theta,$$
$$\dot{y}_P = -(1-\lambda)L\sin\theta\,\dot{\theta} = -(1-\lambda)v_A.$$

因此

$$\boxed{\boldsymbol{v}_P = (\lambda v_A\cot\theta, -(1-\lambda)v_A)}.$$

图中的横纵投影分别来自端点 B、A 的坐标，这也解释了两个速度分量各自的比例系数。

分点的轨迹 对 $0 < \lambda < 1$，由坐标式得到

$$\frac{x_P}{\lambda L} = \sin\theta, \qquad \frac{y_P}{(1-\lambda)L} = \cos\theta.$$

两式平方相加，

$$\boxed{\frac{x_P^2}{(\lambda L)^2} + \frac{y_P^2}{[(1-\lambda)L]^2} = 1}.$$

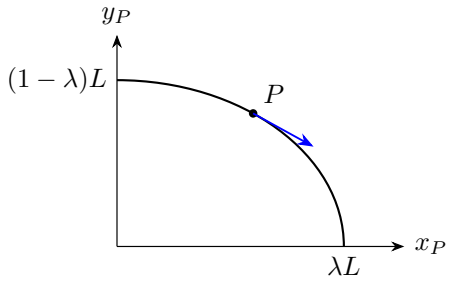


图 3.36: 杆上固定分点沿第一象限椭圆弧运动

图 3.36 画出给定角区间对应的第一象限椭圆弧。$\lambda = 0$ 时 P 就是端点 A，轨迹沿竖直导轨；$\lambda = 1$ 时 P 是端点 B，轨迹沿水平导轨。若考察的是沿杆滑动的点，$\lambda(t)$ 的变化也进入乘积求导，速度增添 $\dot\lambda(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A)$ 这一沿杆分量。

给定驱动加速度时　将竖直端向下的加速度记为 $a_A = \dot v_A$。对 $v_{B,x} = v_A \cot\theta$ 使用乘积法则，再对 $\cot\theta$ 使用链式法则，

$$\begin{aligned} a_{B,x} &= \dot v_A \cot\theta + v_A(-\csc^2\theta)\dot\theta \\ &= a_A \cot\theta - \frac{v_A}{\sin^2\theta}\frac{v_A}{L\sin\theta} = a_A\cot\theta - \frac{v_A^2}{L\sin^3\theta}. \end{aligned}$$

固定分点的位置比例再次求导，得到

$$\boldsymbol{a}_P = (\lambda a_{B,x}, -(1-\lambda)a_A).$$

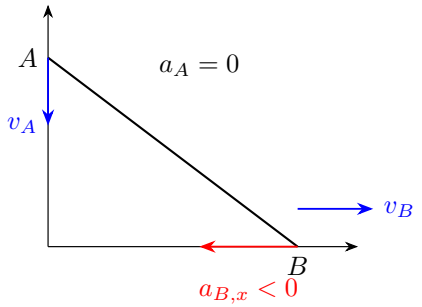


图 3.37: 竖直端匀速时，水平端向右运动而减速

图 3.37 取 $a_A = 0$。竖直端匀速下降时，水平端向右的速率 $v_A\cot\theta$ 随着 θ 增大而减小，因而加速度向左。这使速度方向与加速度方向的关系也能由几何变化直接读出。

3.8 本讲小结

约束问题从位置关系出发：定长、绳长与接触分别对应不同方程。速度投影是对位置约束求导的结果，加速度还含方向变化带来的平方项。先判断独立坐标，再选择投影法或参数微分法，通常比逐个猜速度关系可靠。

滚动接触点的速度由轮心平动和绕轮心的转动合成，两处无滑动接触便给出两条速度关系。自转角相对于地面或相对于连心线，代表不同的姿态变化。均匀伸长的细线则在不同位置有不同的材料速度，虫的爬行速度要与所在位置的材料速度相加。

3.9 练习

练习 3.1 (硬币沿另一硬币滚动)**.** 固定大硬币半径 $R = 3r$。小硬币半径为 r，分别沿大硬币外侧和内侧无滑动地绕行一周。以小硬币圆心逆时针公转为正，求小硬币相对地面的自转圈数及方向。

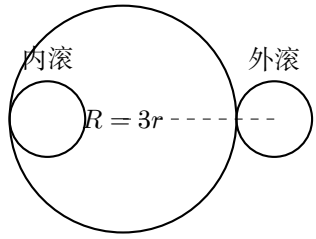


图 3.38: 小硬币沿固定圆的外侧与内侧滚动

练习 3.2 (圆环之间滚子的自转与公转)**.** 同心内外圆环半径分别为 $2r, 4r$，半径 r 的滚子夹在其间并与两环均无滑动。内环固定，外环顺时针转一周。求滚子圆心的公转圈数及滚子对地自转圈数。

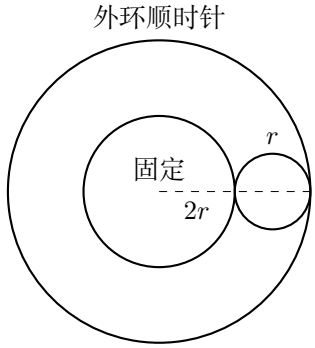


图 3.39: 滚子与内外圆环同时无滑动接触

练习 3.3 (两圆环与斜绳)**.** 两个小圆环分别只能沿竖直杆运动，左环 O 低于右环 O'。绳从右杆上方固定点 A' 竖直向下穿过 O'，再斜向左下连接 O。绳长不变，O' 向下速率为 v'。斜绳与左侧竖直向上方向成 $\alpha \in (0, \pi/2)$，求 O 的速度。

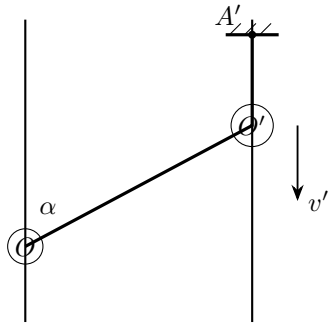


图 3.40: 两竖直导杆上的圆环与连接绳段

练习 3.4 (均匀伸长丝线上的爬行)**.** 丝线左端固定，初长 $L_0 = 1\mathrm{m}$，右端以 $w = 1\mathrm{cm/s}$ 向右拉，且丝线均匀伸长。虫初始距左端 $x_0 \in (0, L_0]$，以相对当地丝线 $u = 1\mathrm{mm/s}$ 向左爬。求到达固定端所需时间，并计算从自由端出发的情形。

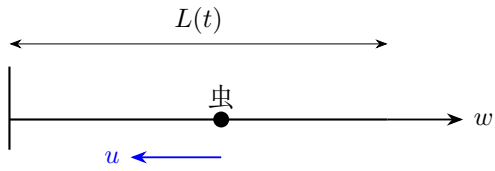


图 3.41: 固定端、伸长细线与向左爬行的虫

练习解答

练习 3.1

解 取公转和自转均以对地逆时针为正，公转角速度为 $\Omega > 0$。分别考察小硬币圆心位于固定大圆心右方的瞬间；两个构型的圆心速度都向上，但接触点位于小圆心的不同侧。

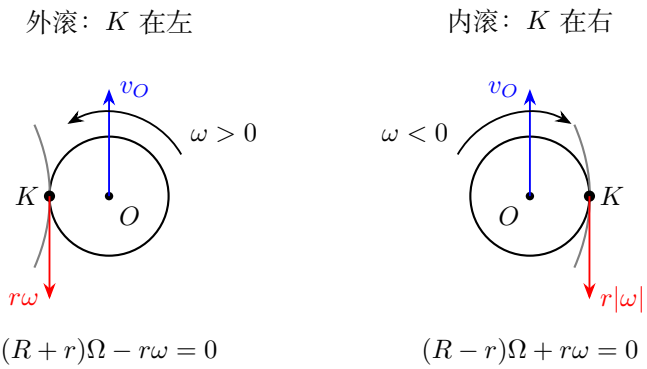


图 3.42: 外滚与内滚的接触点速度分解；灰色曲线为固定大圆的局部圆弧

外滚。 图 3.38 给出圆心轨道半径 $R + r$，故 $v_O = (R + r)\Omega$。图 3.42 左侧接触点在小圆心左方，逆时针自转给该点向下速度，恰好抵消圆心向上速度：

$$\omega = \frac{R + r}{r}\Omega.$$

以 θ 表示圆心公转角，$\mathrm{d}\theta=\Omega\,\mathrm{d}t$。公转一周时，角度积分上下限从 θ_0 变为 $\theta_0+2\pi$，代入 $R=3r$，

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_{外}&=\int_{t_0}^{t_1}\omega\,\mathrm{d}t=\frac{R+r}{r}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\mathrm{d}\theta\\&=4[\theta]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}=8\pi,\qquad\boxed{n_{外}=4\text{圈，逆时针}}.\end{aligned}$$

内滚。　圆心轨道半径改为 $R-r$。图 3.42 右侧接触点位于小圆心右方，只有顺时针自转才能产生向下的接触点速度。因此

$$\omega=-\frac{R-r}{r}\Omega.$$

使用相同的公转角度积分上下限，

$$\Delta\varphi_{内}=-\frac{R-r}{r}\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}\mathrm{d}\theta=-2[\theta]_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi}=-4\pi.$$

因此 $\boxed{n_{内}=2\text{圈，顺时针}}$。

相对于连心线的转角。

以上角度均相对地面计。若改问相对两圆心连线的姿态变化，还须从有向自转角中减去连线转过的 2π，分别得到 $2\pi R/r$ 与 $-2\pi R/r$。只用固定圆周长除以小圆周长，计算的是这一相对角度，会漏掉圆心连线自身转动对地面姿态的贡献。

练习 3.2

解　取对地逆时针为正，记外环角速度为 $-\omega$，其中 $\omega>0$，滚子圆心的公转角速度为 Ω，滚子的自转角速度为 ω_s。图 3.39 中，滚子圆心轨道半径为 $3r$。

在圆心位于共同圆心右方的瞬间，以向上为切向正向。内侧接触点的自转分速度为 $-r\omega_s$，外侧为 $r\omega_s$。两处无滑动分别给出

$$3r\Omega-r\omega_s=0,\qquad 3r\Omega+r\omega_s=-4r\omega.$$

相加与相减，

$$6r\Omega=-4r\omega,\qquad 2r\omega_s=-4r\omega,$$

所以

$$\Omega=-\frac{2}{3}\omega,\qquad \omega_s=-2\omega.$$

两者均为顺时针方向。

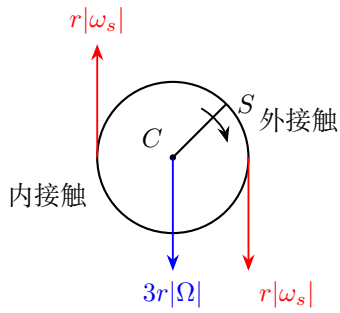


图 3.43: 接触点速度分解的实际方向，箭头旁为速率大小

图 3.43 画出求得的实际方向，箭头旁标速率大小。内接触处向上的自转分速度与圆心向下的速度抵消；外接触处两分速度都向下。滚子上一条标记半径随 ω_s 转动，它相对于地面的姿态变化给出自转角。

设外环从 t_0 到 t_1 顺时针转一周，其有向转角为 ϕ_o，则

$$\mathrm{d}\phi_o = -\omega\,\mathrm{d}t, \qquad \phi_o(t_1) = \phi_o(t_0) - 2\pi.$$

用这个变量积分，时间的两端改为相应外环角度：

$$\begin{aligned}\Delta\theta_C &= \int_{t_0}^{t_1} \Omega\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int_{\phi_{o0}}^{\phi_{o0}-2\pi} \mathrm{d}\phi_o \\ &= \frac{2}{3}[\phi_o]_{\phi_{o0}}^{\phi_{o0}-2\pi} = -\frac{4\pi}{3}, \\ \Delta\phi_s &= \int_{t_0}^{t_1} \omega_s\,\mathrm{d}t = 2\int_{\phi_{o0}}^{\phi_{o0}-2\pi} \mathrm{d}\phi_o \\ &= 2[\phi_o]_{\phi_{o0}}^{\phi_{o0}-2\pi} = -4\pi.\end{aligned}$$

分别除以 2π，负号给出顺时针方向，故

$$\boxed{\text{圆心顺时针公转2/3圈，滚子顺时针自转2圈}}.$$

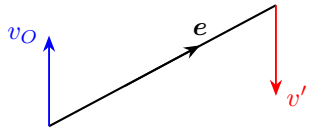
练习 3.3

解 取向上为正，图 3.40 中竖直绳段 $A'O'$ 的增长率为 v'。为求斜段的长度变化率，记两杆水平距离为常量 d、两环高度差为 $h = y_{O'} - y_O > 0$，则 $\ell = \sqrt{d^2+h^2}$，$\dot{h} = -v' - v_O$。链式求导给出

$$\dot{\ell} = \frac{2h\dot{h}}{2\sqrt{d^2+h^2}} = \frac{h}{\ell}(-v' - v_O) = (-v' - v_O)\cos\alpha.$$

图中的 $h/\ell = \cos\alpha$，也正是斜绳单位方向的竖直分量。总绳长不变，因此

$$v' + (-v' - v_O)\cos\alpha = 0, \qquad \boxed{v_O = v'(\sec\alpha - 1)}.$$



斜段缩短率 $(v_O + v')\cos\alpha$

图 3.44: 右环下降与左环上升共同缩短斜绳

图 3.44 显示左环向上，右环向下，两者共同缩短斜绳，恰好补偿上方竖直段增长。若 $\alpha \to 0$，右环的下降本身就足以缩短斜段，左环速度趋零；当斜绳接近水平时，竖直运动对长度变化的效率很低，所需左环速率增大。减号对应的正是右环下降已经带来的那一部分斜绳缩短量。

若左环固定，右环下降会使竖直段增长 v'，斜段却只能缩短 $v'\cos\alpha$，总长仍增加。要补足剩下的 $v'(1-\cos\alpha)$，左环向上提供这一部分缩短量，使斜段再以 $v_O\cos\alpha$ 缩短。于是 $v_O\cos\alpha = v'(1-\cos\alpha)$，这与绳长求导得到的关系一致，并直接说明了左环上升的原因。

练习 3.4

解　细线材料的运动　由图 3.41 的均匀伸长条件，任一段材料占总长的比例在不爬行时保持不变。设丝线总长 $L = L_0 + wt$，距固定端 x 处的材料速度即为 wx/L。虫相对该处材料向左爬，所以虫的地面速度满足

$$\dot{x} = \frac{wx}{L_0 + wt} - u, \qquad x(0) = x_0.$$

虫在细线上的相对位置

引入无量纲相对位置 $z = x/L$，用商的求导法则消去伸长项：

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}L - x\dot{L}}{L^2} = \frac{(wx/L - u)L - xw}{L^2} = -\frac{u}{L_0 + wt}.$$

从初值 $z(0) = x_0/L_0$ 积分。令 $q = L_0 + w\tau$，则 $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}q/w$，上下限由 $0, t$ 变为 $L_0, L_0 + wt$，所以

$$\begin{aligned} z(t) - \frac{x_0}{L_0} &= -u\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{L_0 + w\tau} = -\frac{u}{w}\int_{L_0}^{L_0+wt} \frac{\mathrm{d}q}{q} \\ &= -\frac{u}{w}\left[\ln\frac{q}{L_0}\right]_{L_0}^{L_0+wt} = -\frac{u}{w}\ln\left(1 + \frac{wt}{L_0}\right). \end{aligned}$$

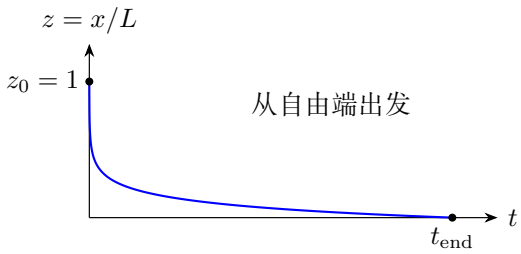


图 3.45: 相对于材料的位置逐渐趋近固定端

到达固定端的时间

到达固定端等价于 $x = 0$，也即 $z = 0$。将它代入并依次取指数、解出时间，得到

$$\ln\left(1 + \frac{wt_{\text{end}}}{L_0}\right) = \frac{wx_0}{uL_0}, \qquad \boxed{t_{\text{end}} = \frac{L_0}{w}\left[\exp\left(\frac{wx_0}{uL_0}\right) - 1\right]}.$$

图 3.45 画出从自由端出发的 $z(t)$，曲线在有限的 t_{end} 处到达横轴。到达前 $\dot{z} < 0$ 且 $z > 0$，所以该时刻唯一。单位统一为米、秒后，$L_0/w = 100\,\text{s}$、$w/u = 10$；从自由端出发 $x_0 = L_0$，有

$$t_{\text{end}} = 100(e^{10} - 1)\,\text{s} \approx 2.20 \times 10^6\,\text{s} \approx 25.5\text{天}.$$

对地位置与转向

为了判断虫对地的运动方向，还须把相对位置还原为

$$x(t) = (L_0 + wt)\left[z_0 - \frac{u}{w}\ln\left(1 + \frac{wt}{L_0}\right)\right], \qquad z_0 = \frac{x_0}{L_0}.$$

由乘积法则，对地速度为 $\dot{x} = \dot{L}z + L\dot{z} = wz + (L_0 + wt)[-u/(L_0 + wt)] = wz - u$，代回即满足原运动方程。若 $z_0 > u/w$，虫开始向右；随着 z 单调减小，到 $z = u/w$ 时才转向。代入 $z(t)$，移项得 $\ln(1 + wt/L_0) = wz_0/u - 1$，再取指数得到

$$t_{\text{turn}} = \frac{L_0}{w}\left[\exp\left(\frac{wz_0}{u} - 1\right) - 1\right].$$

若 $z_0 \le u/w$，则虫初始速度不向右，随后向左，不存在正的转向时刻。为在同一幅图上清楚显示出发位置、向右移动和返回左端，图 3.46 取 $x_0 = 0.2L_0$、$u/w = 0.1$ 这一初始位置作为示例。其曲线从 $x_0 > 0$ 出发，先增加再减至零。

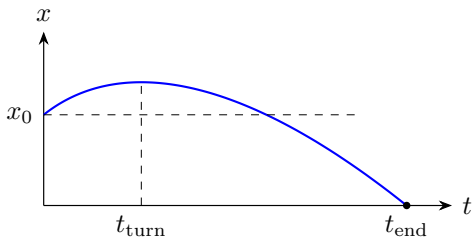


图 3.46: 初始位置 $x_0/L_0 = 0.2$ 时，对地位置先增后减

细线不伸长时，可令 $w \to 0$，用 $e^{\varepsilon} - 1 \sim \varepsilon$，上式给出 $t_{\text{end}} \to x_0/u$；令 $u \to 0^+$，到达时间发散。均匀伸长给出材料速度 wx/L，虫的对地速度由它与向左爬行的速率合成；随着材料比例 z 减小，虫最终向左到达固定端。自由端出发时 $z_0 = 1$，转向时间由同一公式给出 $100(e^9 - 1)\,\text{s}$，早于到达时间 $100(e^{10} - 1)\,\text{s}$。

运动学

物理竞赛一轮讲义

第四讲

抛体运动

2026

目录

第四讲　抛体运动 **1**

4.1　抛体运动的两个分运动 1

4.2　斜面上的抛射 7

4.3　发射方向与可达范围 9

4.4　反弹前后的运动 13

4.5　例题与分析 15

4.6　本讲小结 22

4.7　练习 23

练习解答 25

第四讲　抛体运动

4.1　抛体运动的两个分运动

4.1.1　沿初速度前进与同时下落

水平抛出的球一面前进，一面下落。把它与从同一高度同时由静止释放的球比较，在每一个相同时刻，两球下降的高度相同；水平初速度使抛出的球逐渐离开原来的竖直线。对于斜向抛出的球，也可以这样看：它沿初速度方向前进的同时，重力使它逐渐偏离原来的直线。

在地面附近的一小片区域，取重力加速度为恒矢量 $\boldsymbol{g}$，忽略空气阻力。发射时刻为 $t=0$，初位置和初速度分别为 $\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{v}_0$。先积累速度的变化，再积累位移：

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=\int_0^t \boldsymbol{g}\,\mathrm{d}\tau=[\boldsymbol{g}\tau]_0^t=\boldsymbol{g}t,$$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0=\int_0^t (\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{g}\tau)\,\mathrm{d}\tau=[\boldsymbol{v}_0\tau+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}\tau^2]_0^t=\boldsymbol{v}_0 t+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2.$$

第一项 $\boldsymbol{v}_0 t$ 沿初速度方向，第二项 $\boldsymbol{g}t^2/2$ 竖直向下。图 4.1 把这两项画在同一时刻：若沿初速度匀速运动本应到达 Q，实际位置 P 就在 Q 的正下方，下落量为 $gt^2/2$。

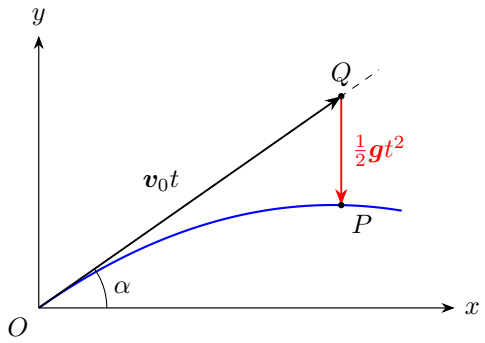


图 4.1: 同一时刻的匀速位移与竖直下落合成实际位置

取水平向右为 x 正向、竖直向上为 y 正向，发射角为 α，便有

$$v_x = v_0\cos\alpha, \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt,$$
$$x - x_0 = v_0\cos\alpha\, t, \qquad y - y_0 = v_0\sin\alpha\, t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

两个坐标合起来描述同一个球的位置。图 4.2 把等时间隔的位置标在曲线上，横向间距相同，而竖直间距随速度改变。落地、碰墙或落到斜面的时刻，由相应位置条件求出，实际轨迹取到这一时刻为止。

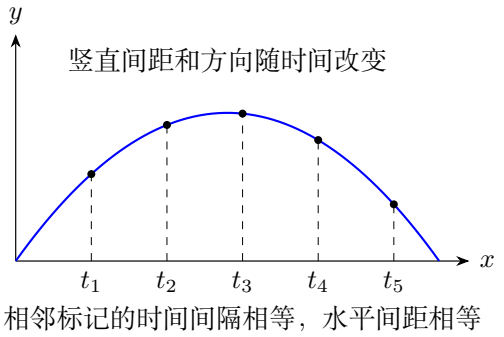


图 4.2: 同一组时刻在水平、竖直方向产生对应的位置

4.1.2 分运动共用同一个时间

水平与竖直分运动描述同一物体在同一时刻的位置。可以把一次斜抛分成连续相等的时间段 Δt：每段水平位移都为 $v_{0x}\Delta t$；竖直方向上，相邻两段位移的差为 $-g(\Delta t)^2$。后一个结论直接由位置方程作差得到：

$$\begin{aligned}\Delta y_n &= y(n\Delta t) - y((n-1)\Delta t)\\ &= v_{0y}\Delta t - \frac{g}{2}[n^2-(n-1)^2](\Delta t)^2\\ &= v_{0y}\Delta t - g\left(n-\frac{1}{2}\right)(\Delta t)^2,\\ \Delta y_{n+1} - \Delta y_n &= -g(\Delta t)^2.\end{aligned}$$

图 4.3 把 $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, 4\Delta t$ 的五个位置同时画出。横向等距与纵向位移的等差变化共同形成曲线。最高点由竖直速度降到零确定，落到某个目标则同时满足目标的横、纵坐标。

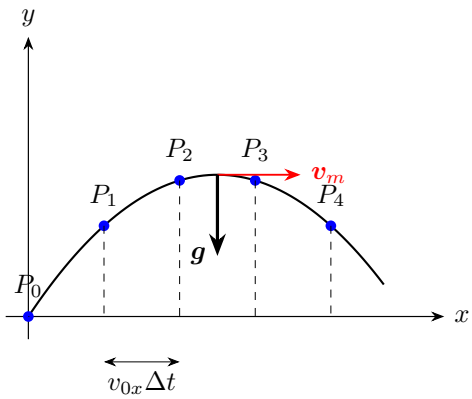


图 4.3: 等时间记录把两个分运动合成一条轨迹

这种合成方法也说明了坐标的选择：沿任一固定方向投影，位移和速度都按同一方向投影，加速度取 $\boldsymbol{g}$ 在该方向的分量。水平坐标最适合说明抛物线的基本形状；沿斜面和法向取坐标，则使“再次到达斜面”成为一个法向位置条件。后面的斜面抛射和反弹由此自然接续。

4.1.3 从时间方程得到抛物线

设发射点为原点，且 $v_0\cos\alpha>0$。由水平运动得到 $t=x/(v_0\cos\alpha)$，代入竖直坐标：

$$y=v_0\sin\alpha\frac{x}{v_0\cos\alpha}-\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

一次项是发射方向所在的直线，二次项给出球在前进中逐渐增加的下落。竖直发射时，水平坐标保持 x_0，位置由竖直运动方程直接给出。

设目标最初在 $M_0=(X,Y)$，球从原点 O 沿 OM_0 方向以速率 v_0 发射，目标同时由静止释放。令初始距离 $L=OM_0=\sqrt{X^2+Y^2}$，沿视线的单位矢量为 $\boldsymbol{e}=(X,Y)/L$。图 4.4 左侧画出相遇前的同一时刻：球的无重力位置为 $Q=v_0t\boldsymbol{e}$，目标的无重力位置仍为 M_0，两者实际位置分别在它们下方 $gt^2/2$ 处。

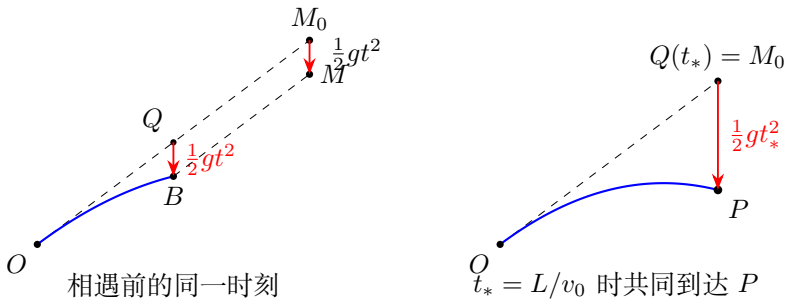


图 4.4: 同一重力位移与沿初始视线缩短的相对位置

两物体的位置方程和相对位置为

$$\boldsymbol{r}_B = v_0 t\boldsymbol{e} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2, \qquad \boldsymbol{r}_M = L\boldsymbol{e} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2,$$
$$\boldsymbol{r}_M - \boldsymbol{r}_B = (L - v_0 t)\boldsymbol{e}.$$

共同的重力位移在作差时消去，相对位置始终沿初始视线缩短，相对速率为 v_0。由 $L - v_0 t_* = 0$，得

$$t_* = \frac{L}{v_0}, \qquad P = \left(X,\ Y - \frac{gL^2}{2v_0^2}\right).$$

图 4.4 右侧的 P 就是相遇位置。相遇发生在地面上方时，$Y - gL^2/(2v_0^2) > 0$；这个高度条件把相对运动求出的时间与实际飞行过程联系起来。

对一般非零恒加速度 $\boldsymbol{a}$，沿 $\boldsymbol{a}$ 和垂直 $\boldsymbol{a}$ 取轴，也分别得到匀加速与匀速两个分运动。横向初速度非零时，消去时间得到抛物线；初速度沿加速度方向时，轨迹为直线。轨迹形状与沿轨迹运动的快慢分别由空间关系和时间方程描述，后面的例题将比较同一空间方程配上不同时间规律的情形。

4.1.4 速度、最高点与同高两点

图 4.5 中，速度始终沿轨迹切线，重力加速度始终竖直向下。到最高点时 $v_y = 0$，球以水平分速度继续前进，因此

$$t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad H - y_0 = v_0 \sin\alpha\, t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

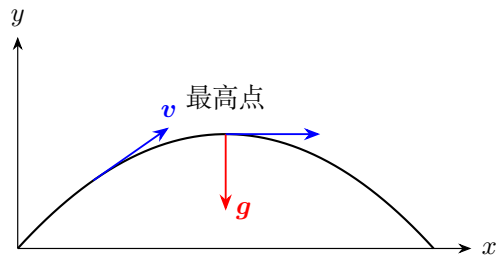


图 4.5: 轨迹切线与恒定重力加速度

从 $v_y = v_{0y} - gt$ 与竖直位移式相消时间，

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2g(y - y_0), \qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0).$$

所以同一高度的速率相同。图 4.6 所示的上升点和下降点，水平分速度相同，竖直分速度等大反向。

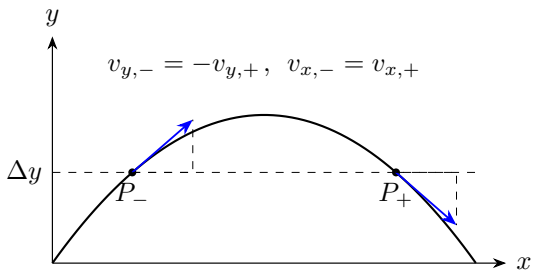


图 4.6: 同高两点的速度竖直分量反号，水平分量相同

目标高度比发射点高 Δy 时，解 $gt^2 - 2v_{0y}t + 2\Delta y = 0$，得到

$$t_\pm = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g\Delta y}}{g}, \qquad v_y(t_\pm) = \mp\sqrt{v_{0y}^2 - 2g\Delta y}.$$

当 $v_{0y} > 0$ 且 $0 < \Delta y < v_{0y}^2/(2g)$ 时，两根分别是上升和下降经过该高度的时刻，它们关于 t_m 对称。点目标还给出横坐标 X，取满足 $x_0 + v_{0x}t_\pm = X$ 的那个时刻。

4.1.5 飞行时间与射程

落点水平面为 y_b 时，将竖直方程配方：

$$(gt - v_{0y})^2 = v_{0y}^2 + 2g(y_0 - y_b).$$

起点高于落点时，平方根大于 $|v_{0y}|$，未来的落地时刻为

$$T=\frac{v_{0y}+\sqrt{v_{0y}^2+2g(y_0-y_b)}}{g}.$$

水平抛射取 $v_{0y}=0$，即 $T=\sqrt{2H/g}$。同高起落、向上发射时，竖直坐标的两个零点为 0 和 $2v_0\sin\alpha/g$，于是

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g},\qquad S=v_0\cos\alpha\,T=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

在 $0<\alpha<\pi/2$ 内，$\alpha=\pi/4$ 使射程最大。互余的两个发射角有相同射程，其中高射的飞行时间长、顶点高。起落高度改变时，先用新的高度求 T，再算水平位移。

4.1.6 恒加速度下的最小速率

若加速度为 (a,a)、初速度为 $(-v_0,0)$，两个速度分量为 $v_x=at-v_0$，$v_y=at$。图 4.7 中速度端点沿直线移动，离速度原点最近的点给出最小速率。配方计算为

$$v^2=(at-v_0)^2+(at)^2=2a^2\left(t-\frac{v_0}{2a}\right)^2+\frac{v_0^2}{2}.$$

因此 $t_m=v_0/(2a)$，$v_{\min}=v_0/\sqrt{2}$。此时 $\boldsymbol{v}=(-v_0/2,v_0/2)$ 与 $\boldsymbol{a}=(a,a)$ 垂直，对应图中的垂足。

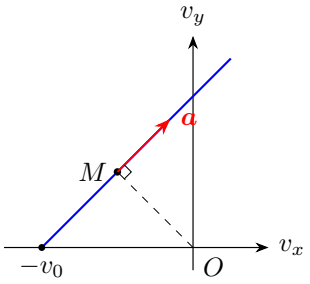


图 4.7: 速度平面上的垂足决定速率最小值

水平速度在较晚的 $t=v_0/a$ 归零，球在这一时刻改变水平运动方向；速率最小则由两个分量共同决定。

4.2 斜面上的抛射

4.2.1 沿斜面与法向的运动

斜面向右下方倾斜 θ，取沿面向右下的坐标 s、朝面外的坐标 n。图 4.8 中两个坐标轴正交，重力在沿面方向使球加速，在法向方向使球返回斜面：

$$s = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad n = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

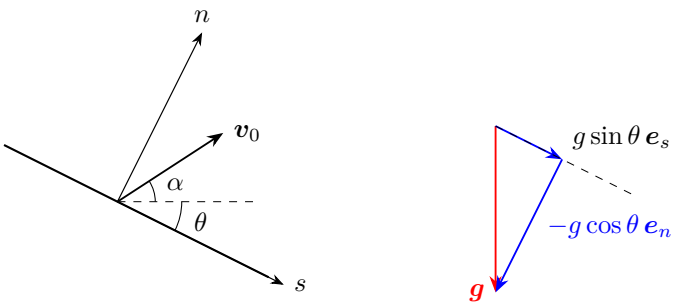


图 4.8: 斜面坐标、发射角与重力的两个分量

初速度与沿面正向夹角为 $\alpha+\theta$，记 $u_s = v_0\cos(\alpha+\theta)$、$u_n = v_0\sin(\alpha+\theta)$。沿面加速度为 $g\sin\theta$，法向加速度为 $-g\cos\theta$，分别从初速度积分：

$$\dot s - u_s = \int_0^t g\sin\theta\ \mathrm{d}\tau = [g\sin\theta\,\tau]_0^t = g\sin\theta\, t,$$
$$\dot n - u_n = \int_0^t (-g\cos\theta)\ \mathrm{d}\tau = [-g\cos\theta\,\tau]_0^t = -g\cos\theta\, t.$$

再用 $s(0) = n(0) = 0$ 积累两方向的位移：

$$s = \int_0^t (u_s + g\sin\theta\,\tau)\,\mathrm{d}\tau = [u_s\tau + \tfrac12 g\sin\theta\,\tau^2]_0^t = u_s t + \tfrac12 g\sin\theta\, t^2,$$
$$n = \int_0^t (u_n - g\cos\theta\,\tau)\,\mathrm{d}\tau = [u_n\tau - \tfrac12 g\cos\theta\,\tau^2]_0^t = u_n t - \tfrac12 g\cos\theta\, t^2.$$

离面发射要求 $v_{0n} = v_0\sin(\alpha+\theta) > 0$，向右飞行要求 $\cos\alpha > 0$，合起来为 $-\theta < \alpha < \pi/2$。这个区间包括一些相对水平线向下、仍在斜面上方的发射方向。

由 $n = 0$ 的正根求再次落面时间：

$$T = \frac{2v_{0n}}{g\cos\theta}.$$

到斜面的距离就是 n。令 $\dot{n}=0$，得 $t_m=T/2$，代入可得

$$n_{\max}=v_{0n}\frac{v_{0n}}{g\cos\theta}-\frac{g\cos\theta}{2}\left(\frac{v_{0n}}{g\cos\theta}\right)^2=\frac{v_{0n}^2}{2g\cos\theta}.$$

图 4.9 中，P_mH 沿斜面法线量出最大距离。P_m 处速度沿轨迹切线，又因法向分量为零而平行斜面；球在这一瞬间由远离斜面转为接近斜面。沿面射程由 $s(T)$ 给出，也等于水平位移 $x(T)$ 除以 $\cos\theta$。

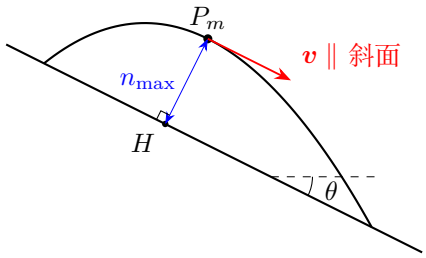


图 4.9: 最远位置的法向距离与平行斜面的速度

在例 4.2 中，把水平初速度和竖直重力各取一个法向分量。沿斜面外法线的速度减到零时，球到斜面的距离达到最大。

4.2.2 初位置与落面状态

若起点已在斜面外 $n_0>0$ 处，法向位置改为 $n=n_0+v_{0n}t-g\cos\theta\,t^2/2$。距离最大时刻仍由 $\dot{n}=0$ 确定，而落面正根变为

$$T=\frac{v_{0n}+\sqrt{v_{0n}^2+2gn_0\cos\theta}}{g\cos\theta}.$$

图 4.10 把增加的初始高度画在距离图中。上升所需时间保持原值，下降到斜面所需时间延长，最大距离相应增加 n_0。

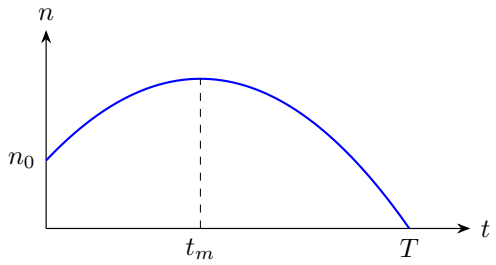


图 4.10: 初始法向高度与落面时间

起落都在同一斜面时，把 $T=2v_{0n}/(g\cos\theta)$ 代入速度式，得 $v_{n,T}=-v_{0n}$。沿面分速度则增加 $gT\sin\theta$。图 4.11 同时画出两种变化：法向速度在落面前指向面内，沿面运动因重力沿面分量而加快。

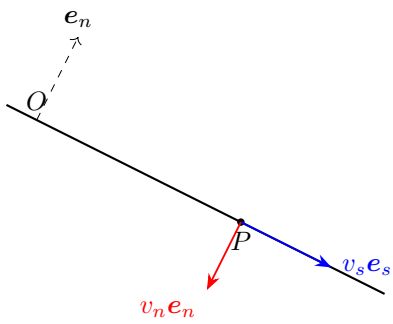


图 4.11: 斜面坐标下，法向速度反号而沿面速度增加

4.3 发射方向与可达范围

4.3.1 同一目标的高射与低射

目标为 $P(X,Y)$、$X>0$。给定初速 v_0，令 $p=\tan\alpha$ 并取 $\cos\alpha>0$。命中条件为

$$Y=Xp-\frac{gX^2}{2v_0^2}(1+p^2).$$

令 $A=gX^2/(2v_0^2)>0$，整理为 $Ap^2-Xp+Y+A=0$，由求根公式得到

$$p_\pm=\frac{X\pm\sqrt{X^2-4A(Y+A)}}{2A}.$$

图 4.12 用高低两条轨迹表现这两个根。分别取 $\alpha_\pm=\arctan p_\pm$，飞行时间为 $T_\pm=X\sqrt{1+p_\pm^2}/v_0$。每个方向都与自己的时间相配，给出经过目标前的整段轨迹。

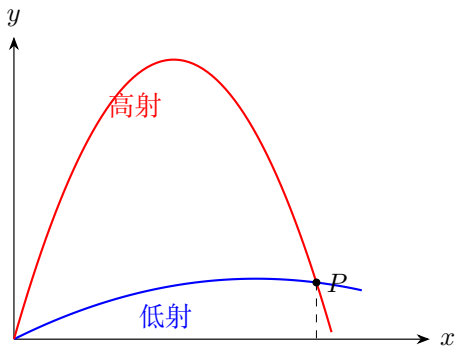


图 4.12: 固定初速时，高低两条轨迹可经过同一目标

4.3.2 目标所需的最小初速

把初速平方记为 z，命中方程成为

$$gX^2p^2 - 2zXp + gX^2 + 2zY = 0.$$

方向参数存在实根，要求判别式

$$\Delta = 4X^2(z^2 - 2gYz - g^2X^2) \geq 0.$$

括号中二次式的根为 $g(Y \pm \sqrt{X^2+Y^2})$。由于 $X > 0$，其中一根负、一根正；结合 $z > 0$，得到

$$v_0^2 \geq g(Y + \sqrt{X^2+Y^2}).$$

取等号时两个角度根合并，故

$$v_{\min}^2 = g(Y + \sqrt{X^2+Y^2}), \qquad \tan\alpha_m = \frac{Y + \sqrt{X^2+Y^2}}{X}.$$

目标在左侧时，可将水平坐标反向后使用同样的推导。对竖直目标，直接用竖直抛射方程。

还可把到达时间作为参数，让几何距离直接进入最值。设 $r = \sqrt{X^2+Y^2}$，则

$$v_{0x} = \frac{X}{T}, \quad v_{0y} = \frac{Y}{T} + \frac{gT}{2}, \quad v_0^2 = \frac{r^2}{T^2} + gY + \frac{g^2T^2}{4}.$$

两正项之和满足

$$\frac{r^2}{T^2} + \frac{g^2T^2}{4} - gr = \left(\frac{r}{T} - \frac{gT}{2}\right)^2 \geq 0.$$

这个方法用一个平方同时给出初速下界和实现时间 $T^2 = 2r/g$。到达速度的竖直分量为 $v_y = (Y-r)/T < 0$，临界射法在经过目标时已经下降。后面的高处目标题将画出顶点与目标的相对位置。

图 4.13 把高处点目标改为同位置的墙顶。允许掠过时，临界射法刚好经过墙顶；要求正净空时，选比临界值更大的初速。

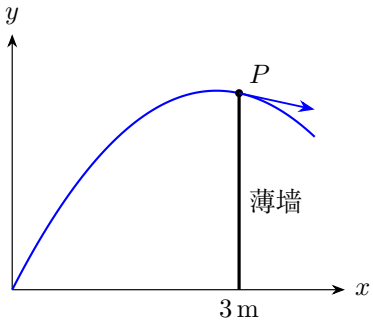


图 4.13: 点目标的临界射法也对应掠过同位置墙顶

4.3.3 固定初速的一族轨迹

在同一水平位置 $x>0$，令 $K=gx^2/(2v_0^2)>0$，将高度对角度参数配方：

$$\begin{aligned} y &= -K\left[p^2-\frac{x}{K}p+\frac{x^2}{4K^2}\right]+\frac{x^2}{4K}-K \\ &= \frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-K\left(p-\frac{v_0^2}{gx}\right)^2. \end{aligned}$$

固定 x 时最高可达的高度由平方项为零给出；让 x 变化，这些最高点组成包络

$$y_{\mathrm{env}}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

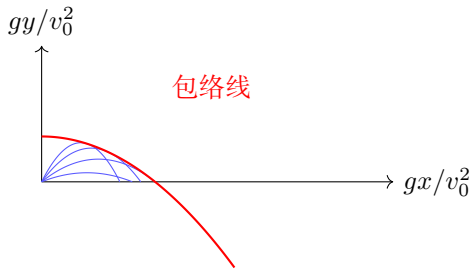


图 4.14: 固定初速的一族轨迹共同受包络线限制

图 4.14 中的每条实际轨迹有自己的发射角；各位置的包络点由相应发射方向达到。包络下方的点有高低两种射法，包络上两种射法合并。第六讲会把自由抛射的可达范围与有墙遮挡的实际路径联系起来。

4.3.4　宽屋顶的高度与跨度

在轨迹顶点 $M(x_m, H)$ 附近，速度水平，写成顶点式

$$y = H - \frac{g(x - x_m)^2}{2v_x^2}.$$

图 4.15 中，两条曲线的顶点一样高，水平分速度较大的轨迹更平缓，能覆盖更宽的屋顶。距顶点水平距离 b 的屋沿高度为 h 时，条件为

$$H - \frac{gb^2}{2v_x^2} \geq h, \qquad v_x^2 \geq \frac{gb^2}{2(H-h)}.$$

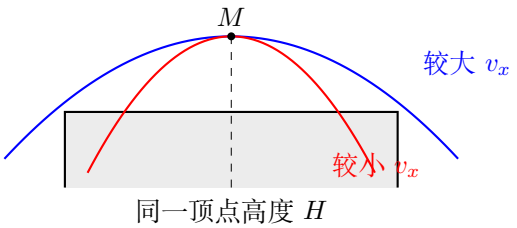


图 4.15: 顶点同高时，水平速度决定轨迹能覆盖多宽的屋顶

顶点处加速度 g 沿法线，因而 $\rho = v_x^2/g$。第五讲将从相邻速度方向的变化推导这一曲率关系。这里，顶点高度控制上升量，水平速度控制曲线宽窄，两者共同决定越过仓库所需的初速。

图 4.16 的水平屋顶占 $a \leq x \leq b$、高 h，取净空 $q(x) = y(x) - h$。对开口向下的抛物线，任意内点 $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ 满足

$$q(x) = (1-\lambda)q(a) + \lambda q(b) + \frac{g}{2v_x^2}\lambda(1-\lambda)(b-a)^2, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

因此，两条屋沿的高度条件 $q(a), q(b) \geq 0$ 保证整个屋顶上方都有净空。图 4.17 中的曲线位于两端连线之上，正是这一公式的几何表现。

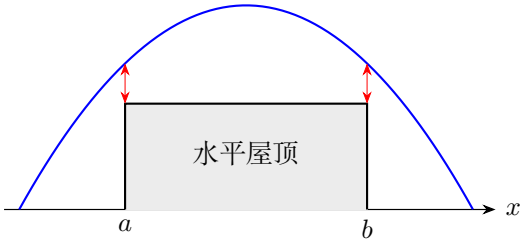


图 4.16: 水平屋顶的两端条件与区间内的净空

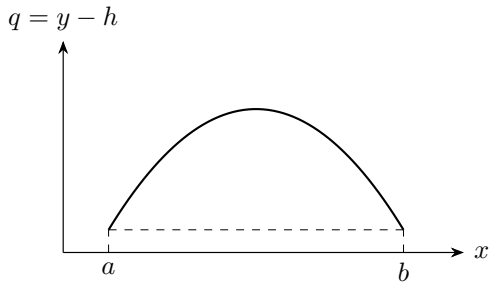


图 4.17: 水平屋顶上方的凹净空函数由两端控制

直斜屋顶减去的是一次函数，净空仍为凹二次函数；分段直线屋顶逐段使用两端条件。对曲面障碍，还要求净空函数内部驻点，再与各段端点比较。

允许掠过时，净空可为零，临界轨迹能够取到。要求严格正净空时，初速从允许值逼近临界值，临界值是下确界。球的尺寸和墙的厚度若由题目给出，应把它们加入球心与障碍的几何关系。

4.4 反弹前后的运动

4.4.1 由碰撞点接续新的初值

固定光滑面上完全弹性反射保持切向分速度，使法向分速度反号。图 4.18 中，水平地面对应 $(v_x, v_y) \mapsto (v_x, -v_y)$，竖直墙对应 $(v_x, v_y) \mapsto (-v_x, v_y)$。前后速率相同，速度方向随法向分量改变。

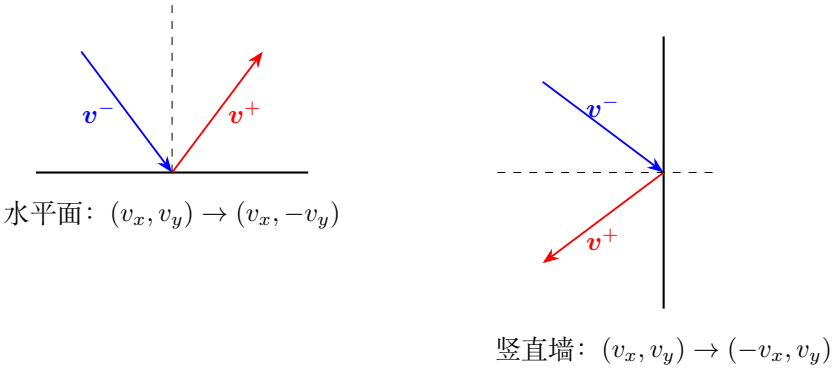


图 4.18: 固定光滑面上的速度反射

设首次触地点为 $(x_1,0)$、时刻为 t_1，碰前竖直速度为 $-W$。碰后取 $\tau=t-t_1$，带初值积分：

$$\begin{aligned} v_y &= W+\int_0^{\tau}(-g)\,\mathrm{d}s = W-g\tau,\\ y &= \int_0^{\tau}(W-gs)\,\mathrm{d}s = [Ws-\tfrac12 gs^2]_0^{\tau} = W\tau-\tfrac12 g\tau^2,\\ x &= x_1+v_x\tau. \end{aligned}$$

下一次触地由正根 $\tau=2W/g$ 确定。对竖直墙展开镜像时，重力仍沿原来的竖直方向，水平方向的折返被相邻镜像空间中的前进代替。

4.4.2　水平抛射后的连续反弹

从高 H 处水平抛出，首次触地时间 $T=\sqrt{2H/g}$，碰前速率 $W=gT$。以后每段离地到再次触地用时 $2T$，所以触地时刻为 $T,3T,5T,\ldots$。以每段顶点为中心可统一写成

$$y(t)=H-\frac{g}{2}(t-2kT)^2.$$

初段 $k=0$ 取 $0\le t\le T$；以后 $k\ge1$ 取 $(2k-1)T\le t\le(2k+1)T$。图 4.19 显示位置连续、竖直速度在触地时由 $-gT$ 变为 $+gT$。

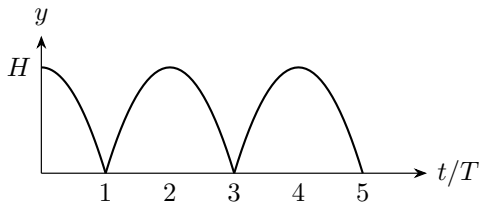


图 4.19: 反弹高度函数的分段与顶点时刻

水平速度为 u 时，把墙址 x 化成 $t=x/u$，就能在对应的一段求墙处高度。两球速度不同，同一面墙对应各自不同的时间和反弹段；后面的矮墙题会先列这些时间区间，再联立高度。

若法向恢复系数为 $e<1$，每次反弹的离地法向速率依次乘 e，相邻飞行时间也随之改变。运动墙面则先取相对墙面的法向速度，按碰撞规律求反射，再加回墙速。每一段都由碰撞位置和碰后速度开始。

4.4.3　两个方向的周期

两竖直墙之间的弹跳同时有水平往返和竖直反弹。回到原位置、恢复原速度，要求两个方向的状态在同一时刻恢复；每周期触地次数又把连续的时间条件变成

整数关系。先写两个方向各自的运动，再以共同的事件时刻连接，就能求允许的初速度。

固定位置处的触地、墙面接触和返回事件各有自己的时间。把它们按实际先后排列，保留每个方程所描述的时间段，计算便始终对应球在图中的飞行弧段。

4.5 例题与分析

例 4.1 (从时间方程到轨迹再返回)**.** 取 $a, v_0, v > 0$。(1) $x = v_0 t + at^2/2, y = at^2/2$，$t \geq 0$，求轨迹。(2) 已知轨迹 $(x-y)^2 = 2yv^2/a$，且 $y = vt$，求可能的 $x(t)$，说明能否唯一确定运动。

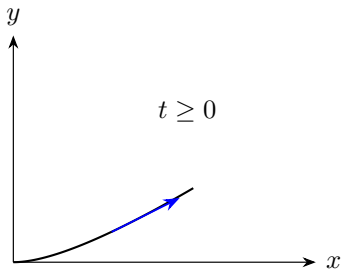


图 4.20: 相同时间下的横纵坐标与消元后的轨迹

解　由两个坐标消去时间　图 4.20 的两个分运动使用同一个 t。第一问作差得 $x - y = v_0 t$，所以

$$t = \frac{x-y}{v_0}, \qquad y = \frac{a}{2}\left(\frac{x-y}{v_0}\right)^2.$$

由于 $t \geq 0$ 且 $v_0 > 0$，实际轨迹为

$$\boxed{(x-y)^2 = \frac{2v_0^2}{a}y, \qquad x-y \geq 0, \quad y \geq 0}.$$

图 4.21 中的曲线分支由 $x - y \geq 0$ 选定；任取其上一点，$t = (x-y)/v_0$ 都能还原为对应的非负时间。

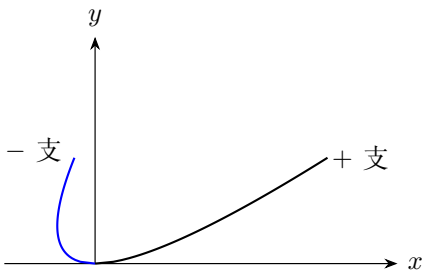


图 4.21: 时间消元后对应的抛物线分支

给轨迹配上新的时间规律　第二问令 $y = vt$，代入所给空间方程：

$$(x - vt)^2 = \frac{2v^3 t}{a}, \qquad \boxed{x(t) = vt \pm v\sqrt{\frac{2vt}{a}}}, \quad t \geq 0.$$

两个符号对应图中两支，给定 $y(t)$ 后仍有两种 $x(t)$。对 $t > 0$ 分别求导，

$$\dot{x} = v \pm v\frac{1}{2\sqrt{2vt/a}}\frac{2v}{a} = v \pm v\sqrt{\frac{v}{2at}}.$$

图 4.21 的两支都从原点出发，原点处的切线水平。沿任一分支，$x - y$ 随 $\sqrt{t}$ 变化，而 y 随 t 变化，因此在 $t \to 0^+$ 时，水平变化率的大小趋于无穷。空间曲线给出位置之间的关系，$y = vt$ 再规定经过各高度的时刻，两者合起来确定这里的运动。

例 4.2 (水平抛出后离斜面最远)**.** 从向右下倾角 $\theta \in (0, \pi/2)$ 的斜面上一点，以水平速率 v_0 抛出小球。求再次落到斜面前，小球到斜面的最大垂直距离及出现时刻。

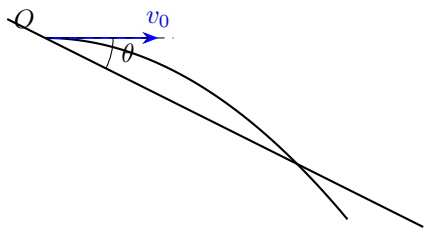


图 4.22: 水平初速度与向下倾斜的斜面

解　沿斜面外法线求位移

图 4.22 中，沿斜面外法线量出的 n 就是所求距离。初速度的法向分量为 $u_n = v_0\sin\theta$，重力法向分量为 $-g_n = -g\cos\theta$。由 $n(0)=0$、$\dot n(0)=u_n$ 积分：

$$\dot n = u_n + \int_0^t (-g_n)\,\mathrm{d}\tau = u_n + [-g_n\tau]_0^t = u_n - g_n t,$$

$$n = \int_0^t (u_n - g_n\tau)\,\mathrm{d}\tau = [u_n\tau - \tfrac{1}{2}g_n\tau^2]_0^t = u_n t - \tfrac{1}{2}g_n t^2.$$

在飞行区间内取法向位移的最高点

落回斜面时 $n=0$，正根 $T = 2u_n/g_n$ 确定飞行区间。令 $\dot n = 0$，得

$$\boxed{t_m = \frac{u_n}{g_n} = \frac{v_0\tan\theta}{g}} = \frac{T}{2}.$$

因为 $\ddot n = -g_n < 0$，在此处达到最大值。代入距离：

$$n_{\max} = \frac{u_n^2}{g_n} - \frac{u_n^2}{2g_n} = \boxed{\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\cos\theta}}.$$

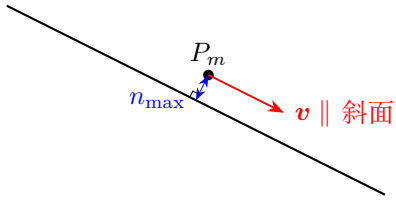


图 4.23: 最远位置的法线距离与沿面速度

图 4.23 的蓝线沿斜面法线。此时实际速度 $\boldsymbol{v} = (v_0, -gt_m) = (v_0, -v_0\tan\theta)$，其方向平行斜面：球沿斜面前进，到斜面的距离在这一瞬间由增加转为减小。

例 4.3 (斜面上的最大射程)**.** 从向右下倾角 θ 的无限长斜面上一点，以给定速率 v_0 发射小球。发射角 α 相对水平线计，取能离开斜面并向右飞行的分支。求沿斜面的最大射程及最优发射角。

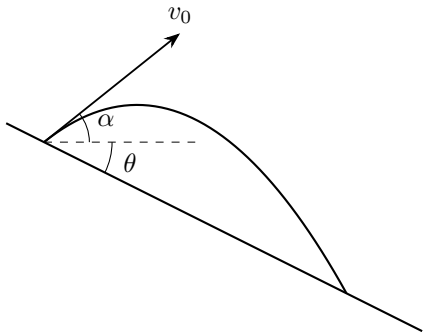


图 4.24: 发射方向、倾斜地面和沿面射程

解 联立轨迹与斜面并排除零时刻

取图 4.24 的发射点为原点，向右、向上为正。在落到斜面之前，$x = v_0\cos\alpha\, t$、$y = v_0\sin\alpha\, t - gt^2/2$。落面条件 $y = -x\tan\theta$ 给

$$t\left[v_0(\sin\alpha + \cos\alpha\tan\theta) - \frac{gt}{2}\right] = 0.$$

零根是发射时刻，应取另一个正根。用 $\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta = \sin(\alpha+\theta)$，得到

$$T = \frac{2v_0\sin(\alpha+\theta)}{g\cos\theta}.$$

把水平位移换成沿面射程

水平位移为 $v_0\cos\alpha\, T$，而沿面射程是它除以 $\cos\theta$，因此

$$S = \frac{2v_0^2\cos\alpha\sin(\alpha+\theta)}{g\cos^2\theta}.$$

为把含 α 的因子化为一个三角函数，用和差公式逐项相加：

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha+\theta) + \sin\theta &= \sin[(\alpha+\theta)+\alpha] + \sin[(\alpha+\theta)-\alpha]\\ &= 2\sin(\alpha+\theta)\cos\alpha.\end{aligned}$$

因此

$$S = \frac{v_0^2[\sin(2\alpha+\theta) + \sin\theta]}{g\cos^2\theta}.$$

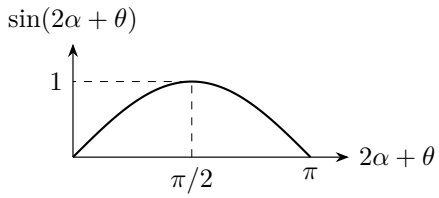


图 4.25: 正弦项随发射角变化并取得最大值

在可行角区间取得三角函数的上界

题设离面且向右的条件给 $-\theta<\alpha<\pi/2$。在此区间内，$\sin(2\alpha+\theta)\le 1$ 且等号确能达到，所以

$$\boxed{\alpha_m=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}},\qquad \boxed{S_{\max}=\frac{v_0^2}{g(1-\sin\theta)}}.$$

最后一步使用 $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ 约去 $1+\sin\theta$。图 4.25 中正弦项取到 1，对应初速度与斜面夹角 $\pi/4+\theta/2$，与水平夹角为 $\pi/4-\theta/2$。

$\theta=0$ 时两种角度才重合；向下的斜面使球可以多飞一段时间，因此最优水平仰角降低而最大射程增加。上述最优角位于可行区间，故这是可取得的最大值。

例 4.4 (两种射法共越一面矮墙)**.** 同一高度 H 处水平抛球，地面落点距抛出点水平距离为 X。第一球直接落在该点；第二球先与地面完全弹性碰撞一次，再落在同一点。求两球初速之比及两球均恰好掠过同一个中间墙顶时，该墙的高度与位置。

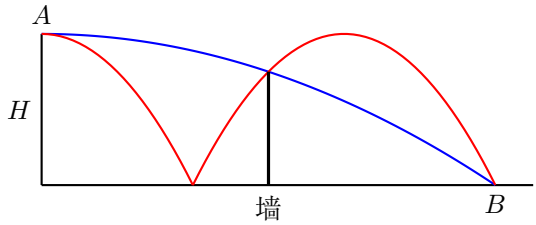


图 4.26: 同一终点对应直接落地与一次反弹两条球路

解　用首次落地与反弹周期确定两球初速

首次落地时间 $T=\sqrt{2H/g}$。图 4.26 中第一球总飞行时间为 T，第二球为 $3T$，故 $v_1=X/T$、$v_2=X/(3T)$，$\boxed{v_1:v_2=3:1}$。

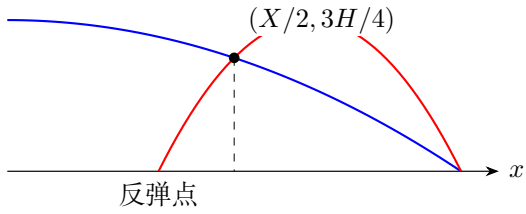


图 4.27: 两条实际轨迹共同经过的中间墙顶

按各自飞行阶段联立墙顶高度

在墙处令 $z = x/X$。两球到达该横坐标的时间分别为 $t_1 = zT$、$t_2 = 3zT$。第一球仍在初落段，因此 $y_1 = H - g(zT)^2/2 = H(1 - z^2)$，用到了 $gT^2/2 = H$。

第二球若仍在初落段，则 $y_2 = H(1 - 9z^2)$，与 y_1 相等只给出发点 $z = 0$，故中间墙只能在它反弹以后。反弹后的竖直初速度为 gT，当地时间为 $\tau = t_2 - T = (3z - 1)T$，于是

$$\begin{aligned} y_2 &= gT\tau - \frac{g}{2}\tau^2 = H[2(3z-1) - (3z-1)^2] \\ &= H[1 - (3z-2)^2], \qquad \frac{1}{3} < z < 1. \end{aligned}$$

两球都掠过同一墙顶，故联立 $y_1 = y_2$。用平方差因式分解，

$$z^2 - (3z-2)^2 = [z - (3z-2)][z + (3z-2)] = (2 - 2z)(4z - 2) = 0.$$

得到 $z = 1/2, 1$，其中共同落点 $z = 1$ 不作中间墙。代入内部根，$x = X/2$，$h = H(1 - 1/4) = 3H/4$，所以 $\boxed{x = X/2,\ h = 3H/4}$。图 4.27 标出相交前后谁的轨迹较低，两球在同一横坐标的高度相等，确定题设共同掠过的墙顶。

例 4.5 (打到高处目标的最小初速)**.** 从地面原点发射质点，使其经过水平距离 3m、高度 4m 的目标点。忽略空气阻力，求最小初速与对应发射方向，取 $g = 10\mathrm{m/s}^2$。

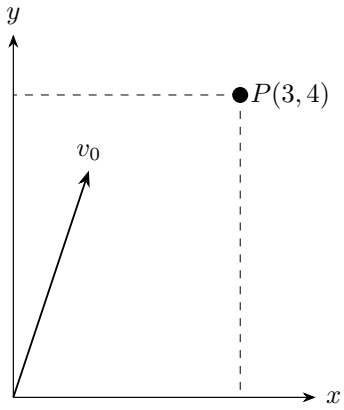


图 4.28: 地面发射点与高处目标

解　将命中条件写成发射角正切的二次方程

取图 4.28 目标坐标为 $(x, y) = (3, 4)\mathrm{m}$，发射角为 α，初速为 v_0。由于目标在右方，取 $\cos\alpha > 0$ 并令 $p = \tan\alpha$。用水平式消去时间后，目标坐标满足

$$y = xp - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + p^2).$$

整理为 $gx^2p^2 - 2v_0^2xp + gx^2 + 2v_0^2y = 0$。关于 p 的实根给出可用的发射方向。其判别式为

$$\Delta = 4x^2(v_0^4 - 2gyv_0^2 - g^2x^2).$$

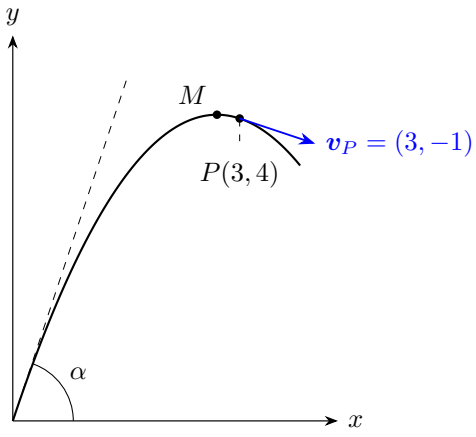


图 4.29: 临界轨迹的顶点及目标处向右下的速度

由有实根的条件求初速下界

令 $z = v_0^2 > 0$，需解 $z^2 - 2gyz - g^2x^2 \geq 0$。先求二次式的两个零点：

$$z_{\pm} = \frac{2gy \pm \sqrt{4g^2y^2 + 4g^2x^2}}{2} = g\left(y \pm \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

因 $x > 0$，有 $\sqrt{x^2 + y^2} > |y|$，故 $z_- < 0 < z_+$。二次式开口向上，非负区间为 $z \leq z_-$ 或 $z \geq z_+$，再与 $z > 0$ 相交，只剩 $z \geq z_+$。本题 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m}$，$z_+ = 10(4 + 5) = 90\,\text{m}^2/\text{s}^2$，故

$$\boxed{v_{\min}^2 = 90\ \text{m}^2/\text{s}^2}, \qquad \boxed{v_{\min} = 3\sqrt{10}\ \text{m/s}}.$$

恢复唯一发射方向并回代目标坐标

等号时二次方程只有一个角度根，由此确定发射方向：

$$p = \frac{v_{\min}^2}{gx} = 3, \qquad \boxed{\alpha = \arctan 3 \approx 71.6^\circ}.$$

用 $v_{\min}/\sqrt{1 + p^2}$ 求得初速度分量 $v_{0x} = 3\,\text{m/s}$、$v_{0y} = 9\,\text{m/s}$。水平到达时间为 $t_P = 3/3 = 1\,\text{s}$，竖直位移为 $9 \times 1 - 5 \times 1^2 = 4\,\text{m}$，确实通过目标 P。

目标处的速度与轨迹顶点

到达目标时的竖直分速度为 $v_y(t_P) = 9 - 10 \times 1 = -1\,\text{m/s}$，所以球已在下降。图 4.29 中最高点记为 M，其时刻为 $t_M = 9/10 = 0.9\,\text{s}$，坐标为

$$x_M = 3 \times 0.9 = 2.7\,\text{m}, \qquad y_M = \frac{9^2}{2 \times 10} = 4.05\,\text{m}.$$

最高点 M 位于目标 P 的左上方。球经过顶点后向右下方到达目标，此处速度为 $(3, -1)\,\text{m/s}$。

4.6　本讲小结

抛体的水平匀速与竖直匀加速运动共享同一时间。速度沿轨迹切线，最高点竖直分速度为零；在斜面坐标中，距离最大值由法向速度为零确定。给定目标的命中条件联系发射角、初速与时间，一族轨迹的包络给出自由抛射的可达高度。

反弹前后的轨迹在碰撞点相接，碰后速度决定下一段初值。有限宽屋顶用两条屋沿共同限制轨迹，周期弹跳则要求水平与竖直状态在同一时刻恢复。

4.7 练习

练习 4.1 (越过有限宽仓库)**.** 水平地面上一座仓库高 20m、宽 40m。球从仓库前的地面发射，越过水平屋顶后落回仓库后方地面。发射点位置可选，求所需最小初速、发射点到前墙的距离及发射角。取 $g = 10\text{m/s}^2$，允许临界掠过屋沿。

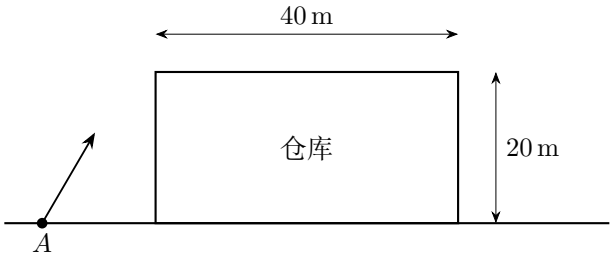


图 4.30: 仓库高宽与可选的地面发射位置

练习 4.2 (两面矮墙与多次反弹)**.** 从高 $H = 5\text{m}$ 的平台水平抛球，终点距平台水平 9m。第一球先反弹一次，第二球先反弹两次，都恰落到终点。途中设有两面矮墙，每面墙的墙顶都位于两条轨迹上。求两球初速、各墙顶所有可能的位置与高度，并列出两面墙的可能组合。地面碰撞完全弹性，取 $g = 10\text{m/s}^2$。

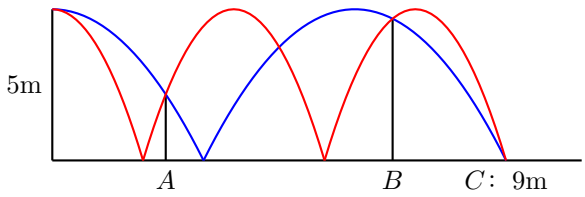


图 4.31: 平台、共同终点及一种两墙布置

练习 4.3 (瞄准点的空间轨迹)**.** 枪口位于原点，子弹初速大小固定为 v_0。靶平面为 $x = d > 0$，靶上需要击中的水平线为 $y = h$，z 沿水平线。枪口直线指向在靶平面的交点称为瞄准点 $B = (d, Y, Z)$。求所有能击中该水平线的瞄准点的轨迹。y 轴竖直向上。

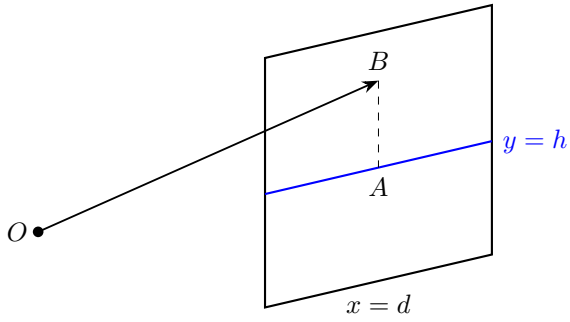


图 4.32: 靶平面、实际命中线与直线瞄准点

练习 4.4 (两墙之间的周期抛射)**.** 两竖直墙相距 L，地面水平。球从左墙高 $h > 0$ 处向右上方发射，与右墙、地面均发生光滑完全弹性碰撞，再回到左墙原位置、恢复碰撞后相同的速度，周期重复。要求每周期一次触地，且触地点在两墙之间。求最小初速，并讨论不同 h/L 时是否能达到。

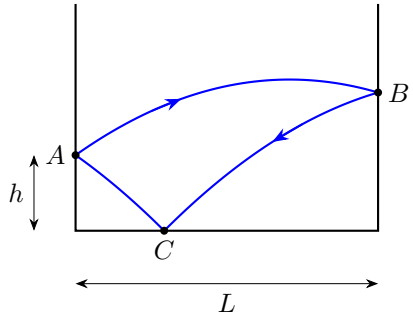


图 4.33: 两墙之间的发射点、墙面与触地位置

练习解答

练习 4.1

解　用任意顶点位置同时约束两条屋沿

以图 4.30 屋顶中点为水平原点，设抛物线顶点横坐标为 s、高度为 H，令 $p = v_x^2/g > 0$。轨迹可写成 $y = H - (x-s)^2/(2p)$。两个屋沿 $x = \pm 20$ 都需不低于 20m，因此

$$H \geq 20 + \frac{\max\{(20-s)^2, (-20-s)^2\}}{2p} = 20 + \frac{(20+|s|)^2}{2p}.$$

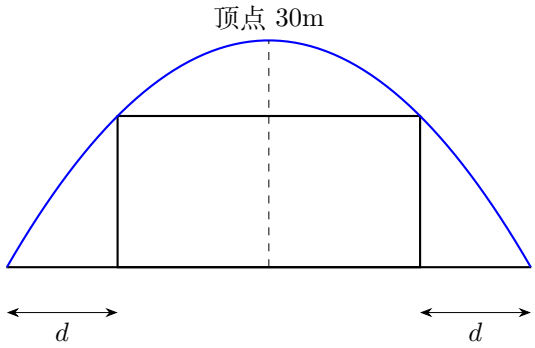


图 4.34: 最优顶点在屋顶中线上，两屋沿同时取等号

求所有可行轨迹共同满足的初速下界

因为从地面起抛，在顶点竖直速度为零，故由 $0 = v_{0y}^2 - 2gH$ 得到 $v_{0y}^2 = 2gH$。水平速度恒定，$v_x^2 = gp$，因此 $v_0^2/g = p + 2H$。将图 4.34 中两屋沿给出的高度下界代入，

$$\frac{v_0^2}{g} \geq p + 40 + \frac{(20+|s|)^2}{p} \geq p + 40 + \frac{400}{p}.$$

第二个不等式使用 $|s| \geq 0$，等号只在 $s = 0$ 时成立。对剩下的正参数 p，写成一个平方：

$$p + \frac{400}{p} - 40 = \left(\sqrt{p} - \frac{20}{\sqrt{p}}\right)^2 \geq 0.$$

所以 $v_0^2/g \geq 80$，等号还须 $p = 20$。两个等号共同确定 $s = 0, p = 20$，即顶点位于屋顶中线且水平分速度满足 $v_x^2 = 20g$。

恢复实现下界的发射位置与角度

在 $s=0, p=20$ 时，屋沿约束取等号要求 $H=20+20^2/(2\times 20)=30$，因此轨迹确实关于屋顶中点对称。由 $v_0^2=80g=800$，得到 $\boxed{v_{\min}=20\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}}$。

设顶点到发射点的水平距离为 $q>0$。发射点在地面，代入轨迹 $0=30-q^2/40$，得到 $q^2=1200$、$q=20\sqrt{3}$。前墙在屋顶中点左侧 20m，故 $d=q-20$，即 $\boxed{d=20(\sqrt{3}-1)\ \mathrm{m}}$。发射角满足

$$\tan\alpha=\frac{v_{0y}}{v_x}=\sqrt{\frac{2gH}{gp}}=\sqrt{\frac{60}{20}}=\sqrt{3},\qquad \boxed{\alpha=60^\circ}.$$

两屋沿高均为 20m，落点在后墙之外同样距离，等号构形可以实现。

代回屋顶整个区间与地面交点

等号构形的轨迹为 $y=30-x^2/40$，其中 x 仍从屋顶中点计。代入前后屋沿 $x=\pm 20$ 均得 20m；区间内 $y\geq 20\mathrm{m}$，所以整个屋顶净空满足条件。两个地面交点为 $x=\pm 20\sqrt{3}$，确在仓库之外。

练习 4.2

解 由反弹次数求两球初速

图 4.31 中，起抛高度 $H=5\,\mathrm{m}$，$g=10\,\mathrm{m/s^2}$。首次触地时间由 $H-gT^2/2=0$ 确定：

$$T=\sqrt{\frac{2H}{g}}=1\,\mathrm{s}.$$

触地前竖直速度为 $-gT$，弹性反弹后恢复为 gT。从触地开始计局部时间 τ，高度为

$$y=gT\tau-\frac{1}{2}g\tau^2=H\left[2\frac{\tau}{T}-\left(\frac{\tau}{T}\right)^2\right].$$

下一次触地的正根为 $\tau=2T$，所以各次触地在 $T, 3T, 5T, \ldots$。第一球在途中反弹一次，以 $3T$ 到达终点；第二球在途中反弹两次，以 $5T$ 到达终点。水平分速度恒定，故

$$\boxed{v_1=\frac{9}{3T}=3\,\mathrm{m/s}},\qquad \boxed{v_2=\frac{9}{5T}=1.8\,\mathrm{m/s}}.$$

令 $z=x/9$，两球到横坐标 x 时的无量纲时间分别为 $t_1/T=3z$、$t_2/T=5z$。初落、反弹一次、反弹两次的高度依次为 $H(1-s^2)$、$H[1-(s-2)^2]$、$H[1-(s-4)^2]$，其中 $s=t/T$。

在同一横坐标比较两球的实际运动段

第一球在 $x=3\,\mathrm{m}$ 首次触地，第二球在 $x=1.8\,\mathrm{m}$ 和 $5.4\,\mathrm{m}$ 触地。图 4.35 按这三个位置分段，两球的高度函数为

z的区间	y_1/H	y_2/H
$(0,1/5)$	$1-(3z)^2$	$1-(5z)^2$
$(1/5,1/3)$	$1-(3z)^2$	$1-(5z-2)^2$
$(1/3,3/5)$	$1-(3z-2)^2$	$1-(5z-2)^2$
$(3/5,1)$	$1-(3z-2)^2$	$1-(5z-4)^2$

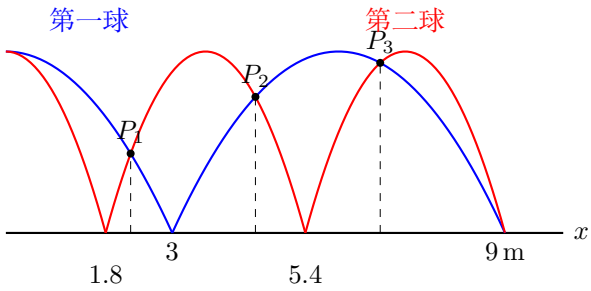


图 4.35: 全部反弹段及三个正高度的内部交点

逐段求共同高度的位置

在 $0<z<1/5$ 内，等高条件为 $9z^2=25z^2$，只给 $z=0$，即发射点。

在 $1/5<z<1/3$ 内，

$$(3z)^2-(5z-2)^2=[2-2z](8z-2)=0.$$

两根为 $z=1,1/4$，本段取 $z=1/4$。图 4.35 中的 P_1 为

$$x_1=9\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\,\mathrm{m},\qquad h_1=5\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]=\frac{35}{16}\,\mathrm{m}.$$

在 $1/3<z<3/5$ 内，两球均已反弹一次，

$$(3z-2)^2-(5z-2)^2=(-2z)(8z-4)=0.$$

本段取 $z=1/2$，得到中间交点 P_2：

$$x_2=\frac{9}{2}\,\mathrm{m},\qquad h_2=5\left[1-\left(\frac{3}{2}-2\right)^2\right]=\frac{15}{4}\,\mathrm{m}.$$

在 $3/5<z<1$ 内，

$$(3z-2)^2-(5z-4)^2=(2-2z)(8z-6)=0.$$

本段取 $z=3/4$，得到 P_3：

$$x_3=\frac{27}{4}\,\mathrm{m},\qquad h_3=5\left[1-\left(\frac{9}{4}-2\right)^2\right]=\frac{75}{16}\,\mathrm{m}.$$

另一根 $z=1$ 是共同终点，其高度为零。三个触地分段处分别只有一球高度为零，也无正高度的共同点。

由三个候选墙顶组成两墙布置

两面墙各取图 4.35 中的一个候选墙顶，按从左到右排列，共有

$$\boxed{(P_1,P_2),\qquad (P_1,P_3),\qquad (P_2,P_3)}.$$

图 4.31 中两面墙的墙顶 A,B 分别对应 P_1,P_3。三个候选墙顶的位置、高度依次为

$$\boxed{\left(\frac{9}{4},\frac{35}{16}\right),\quad \left(\frac{9}{2},\frac{15}{4}\right),\quad \left(\frac{27}{4},\frac{75}{16}\right)}\quad(\mathrm{m}).$$

两球经过同一墙址的时刻各由 x/v_1、x/v_2 确定，墙顶同时属于两条空间轨迹。

练习 4.3

解　以瞄准线确定到靶时间和重力下落量

图 4.32 中瞄准线长 $OB=\sqrt{d^2+Y^2+Z^2}$，故初速度 x 分量为 v_0d/OB，到靶时间为 $t=OB/v_0$。弹丸相对瞄准点只产生竖直下落，击中水平线要求 $Y-gt^2/2=h$，因此

$$d^2+Y^2+Z^2=\frac{2v_0^2}{g}(Y-h).$$

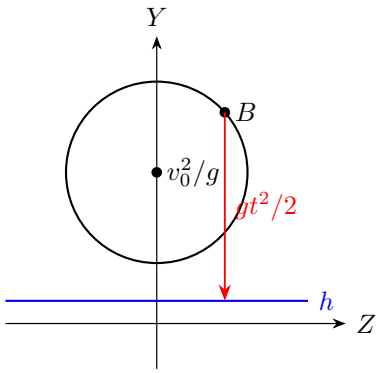


图 4.36: 瞄准点轨迹在靶平面内形成圆

在靶平面识别圆及其存在条件

把含 Y 的一次项移到左边，再在两边同时加上 $(v_0^2/g)^2$：

$$Y^2-2\frac{v_0^2}{g}Y+Z^2=-2h\frac{v_0^2}{g}-d^2,$$

$$Y^2-2\frac{v_0^2}{g}Y+\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2+Z^2=\frac{v_0^4}{g^2}-2h\frac{v_0^2}{g}-d^2.$$

左边前三项成为完整平方，得到

$$\boxed{(Y-v_0^2/g)^2+Z^2=v_0^4/g^2-2hv_0^2/g-d^2}.$$

图 4.36 所示瞄准点在靶平面内构成圆，圆心为 $(d,v_0^2/g,0)$。右边为正时有圆，为零时退化为一点，为负时没有可行瞄准方向。圆上的 B 给出枪口瞄准方向，子弹在重力作用下落到相同 Z、高度 h 的命中线上。

瞄准高度与到靶时间

瞄准点与命中线的高度差由原方程直接给出。由未配方的式子，$Y-h=g(d^2+Y^2+Z^2)/(2v_0^2)>0$，所以瞄准点总高于实际命中线；又因 $d>0$，初速度水平指向靶面，$t=OB/v_0>0$。因此圆上的每个点都给出一个朝靶面发射、在正时间到达的方向。圆半径趋零时也仍有一个有限的临界瞄准方向。

练习 4.4

解　分别求水平与竖直状态的恢复时间

设图 4.33 的发射点为 $A=(0,h)$，初速度分量为 $u>0,w>0$。右墙碰撞只使水平分量反号，地面碰撞只使竖直分量反号。从 h 下降到地面，竖直位置条件为 $h+wt-gt^2/2=0$，配方求根：

$$(gt-w)^2=w^2+2gh,\qquad t=\frac{w\pm\sqrt{w^2+2gh}}{g}.$$

记 $W=\sqrt{w^2+2gh}>w$，负号根小于零，故实际触地时刻为 $t_g=(w+W)/g$。触地前 $v_y=w-gt_g=-W$，反弹后为 $+W$。

回到高度 h 且竖直速度恢复为 w 时，$W-g\tau=w$，所以 $\tau=(W-w)/g$。这个时刻的高度为：

$$W\tau-\frac{g}{2}\tau^2=\frac{W(W-w)}{g}-\frac{(W-w)^2}{2g}=\frac{W^2-w^2}{2g}=h.$$

因此位置和速度均恢复，竖直状态恢复所需时间为

$$T_y=t_g+\tau=\frac{2W}{g}.$$

水平方向从左墙到右墙 B 再回左墙，时间为 $T_x = 2L/u$。

用周期相等消去一个初速度分量

两者同周期且每周期一次触地，有

$$\frac{2L}{u} = \frac{2W}{g}, \qquad uW = gL, \qquad u^2 = \frac{g^2L^2}{w^2 + 2gh}.$$

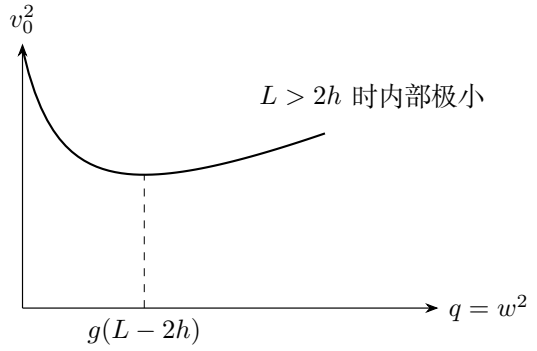


图 4.37: 初速平方随竖直初速度平方的变化

在正竖直初速度范围内优化

由此将初速的最小化化为单变量问题。令 $q = w^2 > 0$，则

$$v_0^2 = F(q) = q + \frac{g^2L^2}{q + 2gh},$$

把分式写成 $g^2L^2(q+2gh)^{-1}$，内层对 q 的导数为 1，逐次求导得

$$F'(q) = 1 + g^2L^2[-(q+2gh)^{-2}] \cdot 1 = 1 - \frac{g^2L^2}{(q+2gh)^2},$$

$$F''(q) = -g^2L^2[-2(q+2gh)^{-3}] \cdot 1 = \frac{2g^2L^2}{(q+2gh)^3} > 0.$$

图 4.37 画出 $L > 2h$ 时的内部极小值。令 $F' = 0$，由于 $q+2gh > 0$，有 $q+2gh = gL$。当 $L > 2h$ 时，该根 $q_* = g(L-2h) > 0$ 属于允许区间，故

$$\boxed{w^2 = g(L-2h), \quad u^2 = gL, \quad v_{\min} = \sqrt{2g(L-h)}}.$$

讨论先碰墙后触地及触地点位置

下面求实际的触地点。到右墙的时刻为 $t_B = L/u = W/g$，而 $t_g = (w+W)/g > t_B$，故球先撞右墙再触地。触地前水平方向已向左，触地点 C 的坐标为

$$x_C = L - u(t_g - t_B) = L - \frac{uw}{g} = L\left(1 - \frac{w}{W}\right).$$

因为 $0<w<W$，所以 $0<x_C<L$，内部触地条件确实满足；回到左墙前向上运动，不会再次触地。

向水平发射逼近的情形

当 $L\le 2h$ 时，对任意 $q>0$ 都有 $q+2gh>gL$，所以 $F'(q)>0$。此时初速平方的下确界在 $q\to 0^+$ 取得极限

$$\inf v_0^2=\frac{gL^2}{2h},\qquad \boxed{\inf v_0=L\sqrt{\frac{g}{2h}}}.$$

当 $w\to 0$ 时 $x_C\to L$，触地点逼近右墙与地面的角点。题设要求向右上发射并在两墙内部触地，因此该极限不属于允许构形，只有下确界而没有达到它的最小初速。

运动学

物理竞赛一轮讲义

第五讲

曲线运动与平面滚动

2026

目录

第五讲　曲线运动与平面滚动 **1**

5.1　圆周运动 1

5.2　沿曲线运动的加速度 3

5.3　刚体的平动、转动与滚动 5

5.4　相对转动与重复构形 11

5.5　例题与分析 12

5.6　本讲小结 32

5.7　练习 33

练习解答 34

第五讲　曲线运动与平面滚动

5.1　圆周运动

5.1.1　转角与角速度

转动的车轮上，靠近轮轴的点与轮缘点在同一时间转过相同角度，所走弧长却随半径增加。描述这种共同转动，先选定轴和正向，再用转角 φ 记录物体的朝向及已经转过的圈数。以下平面转动取逆时针为正，角度用弧度：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}.$$

图 5.1 的蓝线记录连续累积的转角，一圈后继续从 2π 增加。红线记录一圈以内的方位，转完一圈就回到零。求角速度时，用蓝线的斜率；判断朝向时，相差 2π 整数倍的方位相同。

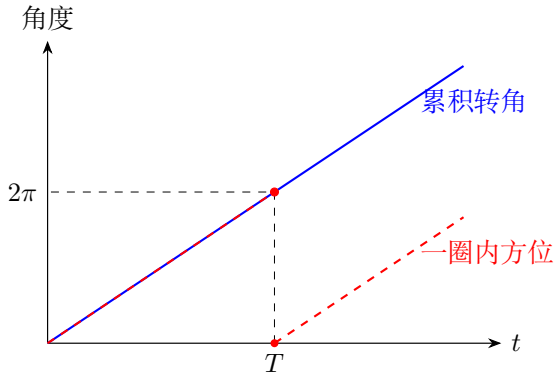


图 5.1: 连续累积的转角与只记录一圈内方位的角度

匀速转动一周的时间为 $T = 2\pi/|\omega|$，频率为 $f = 1/T$。距轴 r 的点走过弧长 $\mathrm{d}s = r|\,\mathrm{d}\varphi|$，故速率 $v = r|\omega|$。转过角度 $\Delta\varphi$ 而全程转向相同时，路程为 $r|\Delta\varphi|$；发生反转时，分别累加各段的弧长。

若角加速度 β 恒定，由初值 ω_0, φ_0 依次积分：

$$\omega - \omega_0 = \int_0^t \beta\,\mathrm{d}\tau = [\beta\tau]_0^t = \beta t,$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^t (\omega_0 + \beta\tau)\,\mathrm{d}\tau = [\omega_0\tau + \tfrac{1}{2}\beta\tau^2]_0^t = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\beta t^2.$$

再由 $\omega^2-\omega_0^2=2\omega_0\beta t+\beta^2t^2$，得到 $\omega^2-\omega_0^2=2\beta(\varphi-\varphi_0)$。角量带正负，$\omega$ 的零点给出可能的转向时刻。

5.1.2　圆周运动的速度变化

匀速圆周运动中，速率保持不变，速度方向随半径一起转动。图 5.2 把相邻位置 P,Q 的两个速度移到共同起点，两矢量的夹角等于半径转角 $|\Delta\varphi|$；连接它们末端的红箭头为 $\Delta\boldsymbol{v}$。

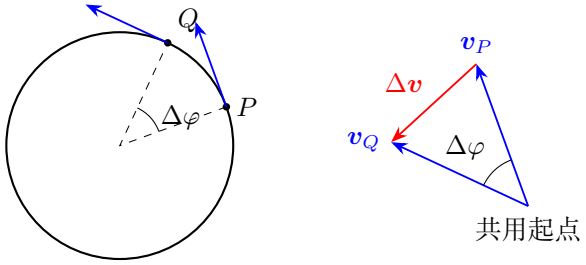


图 5.2: 半径转角等于速度方向转角，差矢量指向弯曲内侧

等腰三角形给出

$$|\Delta\boldsymbol{v}|=2v\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}.$$

除以时间间隔 $\Delta t>0$，取极限：

$$a_n=v\lim_{\Delta t\to0^+}\frac{\sin(|\Delta\varphi|/2)}{|\Delta\varphi|/2}\frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}=v|\omega|=\frac{v^2}{r}.$$

当 Q 向 P 靠近，差矢量的方向趋向圆心。因此圆周运动的法向加速度指向圆心，其大小由速率和半径决定。

若转动快慢也改变，另有沿切线的加速度。设圆心固定，$\boldsymbol{r}=r(\cos\varphi,\sin\varphi)$，逐分量求导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=r\omega(-\sin\varphi,\cos\varphi),\\ \boldsymbol{a}&=r\beta(-\sin\varphi,\cos\varphi)+r\omega(-\cos\varphi\,\dot\varphi,-\sin\varphi\,\dot\varphi)\\ &=r\beta(-\sin\varphi,\cos\varphi)-r\omega^2(\cos\varphi,\sin\varphi).\end{aligned}$$

第一项沿角度增加的切线，第二项沿半径向内。沿实际速度取切向正向时，$a_t=\mathrm{d}(r|\omega|)/\,\mathrm{d}t=r\ \mathrm{sgn}(\omega)\beta$；在 $\omega>0$ 的区间，它就是 $r\beta$。

5.2 沿曲线运动的加速度

5.2.1 从轨道的局部形状看法向加速度

圆周运动把半径与加速度直接联系起来。一般光滑轨道上，在某点附近取一段足够短的弧，总能用一个与轨道同切向、同弯曲程度的圆弧逼近它，这个圆称为该点的曲率圆，半径为 ρ。沿轨道走过弧长 $\mathrm{d}s$ 时，切线转过 $\mathrm{d}\psi$，由圆弧几何有 $\mathrm{d}s = \rho|\,\mathrm{d}\psi|$。

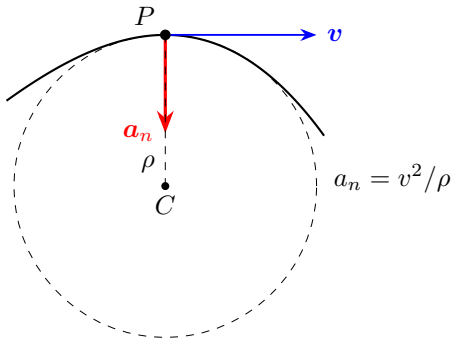


图 5.3: 轨道上一小段由曲率圆给出弯曲程度

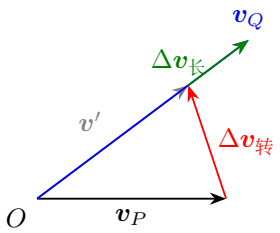
图 5.3 中，速度沿轨道切线，法向加速度朝曲率圆心 C。在极短时间内，速度方向转过 $|\,\mathrm{d}\psi|$，转向引起的速度增量大小为 $v|\,\mathrm{d}\psi|$。于是

$$a_n = v\frac{|\,\mathrm{d}\psi|}{\mathrm{d}t} = v\frac{|\,\mathrm{d}\psi|}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{\rho}.$$

轨道的局部弯曲程度决定同一速率下需要多大的法向加速度；沿轨道速率的变化则另由 $a_t = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$ 描述。下文从单位切向量的导数合并这两项，并说明怎样由坐标运动方程求 ρ。

5.2.2 速度大小的改变与切线的转动

沿一条弯曲轨道前进时，相邻两点的速度一般既有大小差，也有方向差。可以先保持大小而转动方向，再沿新方向改变大小。图 5.4 把这两种增量画在同一个速度图中：$\Delta\boldsymbol{v}_{\text{转}}$ 趋向凹侧法向，$\Delta\boldsymbol{v}_{\text{长}}$ 趋向切线。



$|\boldsymbol{v}'| = |\boldsymbol{v}_P|$，$\boldsymbol{v}'$ 与 $\boldsymbol{v}_Q$ 同向

图 5.4: 先转动速度方向，再改变速度大小

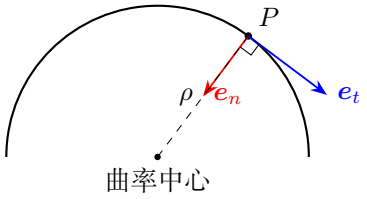
沿轨迹取弧长 s，沿速度取单位切向量 $\boldsymbol{e}_t$，则 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t$。设切线方向角为 ψ，有

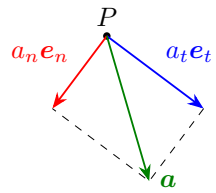
$$\boldsymbol{e}_t = (\cos\psi, \sin\psi), \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}s}(-\sin\psi, \cos\psi).$$

曲线在小弧段内转过的角度越大，弯曲就越急。定义曲率半径 ρ 使 $|\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}s| = 1/\rho$，并以 $\boldsymbol{e}_n$ 指向凹侧，于是

$$\dot{\boldsymbol{e}}_t = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{\rho}\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n.$$

图 5.5 把切向和法向两项放在轨迹上的同一点。切向分量 $a_t = \dot{v}$ 带正负，法向大小 $a_n = v^2/\rho$ 非负，两方向垂直，故 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$。





图示取 $a_t > 0$

图 5.5: 曲率圆上的基矢与同一点的加速度分解

匀速沿曲线运动时 $a_t = 0$；速率增加时切向加速度沿前进方向，速率减少时沿相反方向。局部曲率圆在所取点与轨迹具有相同切线和弯曲程度，其半径就是 ρ。圆周上各点的 $\rho = r$，一般曲线的 ρ 随位置改变。

5.2.3　从坐标分量求曲率

已知 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$、$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ 且 $v > 0$ 时，先投影到切线：

$$a_t = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{v}.$$

二维叉积的大小给垂直分量 $|v_x a_y - v_y a_x| = v a_n$，于是

$$a_n = \frac{|v_x a_y - v_y a_x|}{v}, \qquad \rho = \frac{v^3}{|v_x a_y - v_y a_x|}.$$

对 $y = y(x)$，可让一个辅助质点按 $x = ut$、$u > 0$ 沿曲线前进。链式法则给 $\boldsymbol{v} = (u, uy')$、$\boldsymbol{a} = (0, u^2 y'')$，所以

$$\rho = \frac{[u^2(1+y'^2)]^{3/2}}{u^3|y''|} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}.$$

辅助速率相消，留下纯粹的几何关系。$v > 0$ 而叉积为零时，曲率为零。速度为零的点，先从邻近轨迹判断切线与曲率的极限，例如摆线的触地尖点。

抛体的重力加速度竖直向下。顶点处速度水平，整个 g 都是法向加速度，得 $\rho = v_x^2/g$；其他位置先取 g 在法线方向的投影，再求 ρ。后面的抛物线题将把这种投影和坐标法放在同一推导中说明。

5.3 刚体的平动、转动与滚动

5.3.1 从两个位置看平动与转动

刚体上两点间的距离保持不变。平动时，任意线段在前后时刻保持平行，所有点具有相同速度和加速度；转动时，各点绕共同的轴转过相同角度。一般平面运动可先平移一个选定点，再绕它转动，将整个刚体送到新的位置。

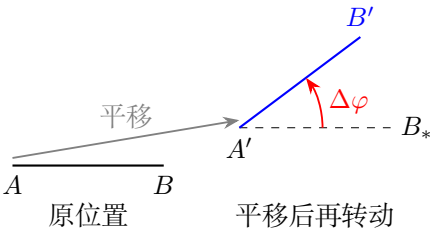


图 5.6: 以杆的一端为基点，将位移分成平移和转动

图 5.6 先将 A 平移到 A'，得到与原杆平行的 $A'B_*$，再转过 $\Delta\varphi$ 到 $A'B'$。改选 B 为基点也得到相同的转角；各基点的平动不同，刚体的角速度相同。

选刚体上的物质点 C 为基点，令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r}_C$。相对位矢随刚体转动，有

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

再对两个因子求导：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} \\ &= \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}.\end{aligned}$$

最后一步用了平面内位矢垂直转轴。图 5.7 中，角加速度项垂直 CP，向心项沿 PC，再与基点加速度相加，得到 P 的对地加速度。

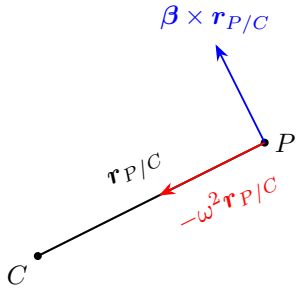


图 5.7: 刚体相对加速度的垂杆项与沿杆项

这些关系追踪固定在刚体上的点。杆与曲线的几何交点则由联立位置方程确定；交点沿杆移动的情形，将在后面的例题中直接求坐标导数。

5.3.2　水平地面上的纯滚动

轮心 C 向右速度为 U。本小节用顺时针转角 q 描述向右滚动，记 $\omega = \dot{q} > 0$、$\beta = \dot{\omega}$；对应的转动矢量为 $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_z$、$\boldsymbol{\beta} = -\beta \boldsymbol{e}_z$。图 5.8 中，底部物质点的平动速度向右 U，转动速度向左 $R\omega$；无滑动给出

$$U - R\omega = 0, \qquad U = R\omega.$$

顶部两部分同向，速度为 $2U$；左右两侧则合成为斜向速度。

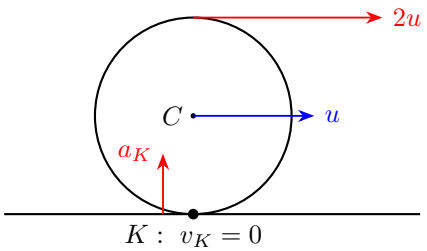


图 5.8: 平动与转动合成轮缘点的速度

邻近时刻也保持纯滚动时，$\dot U = R\beta$。对当前底部物质点，圆心加速度 $(R\beta, 0)$ 与相对切向项 $(-R\beta, 0)$ 相消，留下

$$\boldsymbol{a}_{\text{底}} = (0, R\omega^2).$$

当前接触的物质点随后抬离地面，新材料点进入接触位置。底部向上的加速度说明这一离地趋势。轮心匀速时，顶部的加速度向下，大小同为 U^2/R。

5.3.3 两移动表面与卷绕绳

圆柱上下两处无滑动时，分别将轮上接触点速度与对应板速相等。图 5.9 取上、下板有符号速度为 V_+, V_-，圆心速度为 U，顺时针角速度为 ω、$\beta = \dot\omega$：

$$U + r\omega = V_+, \qquad U - r\omega = V_-.$$

相加、相减分别消去转动、平动，得到

$$U = \frac{V_+ + V_-}{2}, \qquad \omega = \frac{V_+ - V_-}{2r}.$$

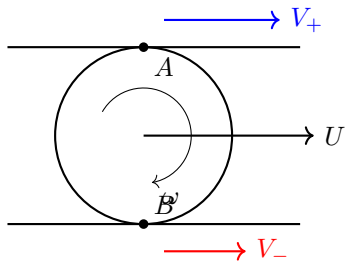


图 5.9: 两个接触点分别给出速度约束，平动与自转由联立确定

两板同速时圆柱平动，等速反向时圆心静止而自转。板速随时间变化时，再对这两个式子求导便得 $\dot U, \beta$；轮缘点的完整加速度还含朝向圆心的 $r\omega^2$。

线轴在地面滚动时，外半径 R 给 $U = R\omega$，内半径 r 决定绳切点的转动速度。设沿绳拉动速率为 v、绳与水平夹角为 α。圆心平动投影为 $U\cos\alpha$，上侧、下侧切点的转动贡献分别为 $\pm r\omega$，于是

$$v = U(\cos\alpha \pm r/R).$$

固定出绳方向和恒定 v 给出恒定 U。若出绳方向改变，逐项求导：

$$\dot v = \dot U(\cos\alpha \pm r/R) - U\sin\alpha\,\dot\alpha.$$

绳路的几何关系还给 $\dot\alpha$，两式联立即可求圆心加速度。在下侧 $\cos\alpha = r/R$ 的构形，原速度式要求 $v = 0$；两侧分母的正负则决定圆心方向。

绳系在指定物质点时，先用刚体关系求该点速度，再向绳投影。其转动速度方向由系点位置决定。卷绕切点的转动速度与绳平行，指定系点的转动速度则取相应投影；后面的两类线轴题将分别画出这些方向。

5.3.4　瞬心与速度场

角速度非零的平面运动，可找到速度场中瞬时速度为零的位置 I。已知两点的速度方向时，分别作速度的垂线，相交处即为瞬心。图 5.10 中滑杆端点 A 速度竖直，故 IA 水平；端点 B 速度水平，故 IB 竖直。任一点的速度垂直 IP，大小为 $|\omega|IP$。

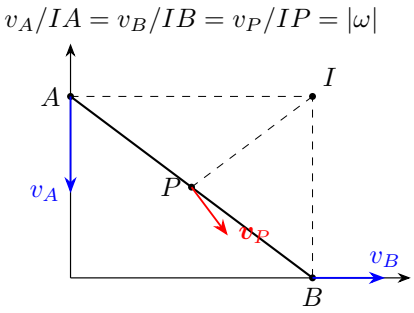


图 5.10: 由两点速度的垂线作瞬心，再用到瞬心的距离比较速度

下一时刻，滑杆位置和两条垂线都改变，瞬心也随之移动。求加速度时仍用刚体物质点关系，以已知的轮心或固定铰为基点，保留基点、角加速度和向心三个贡献。纯平动时各点速度相同，直接按共同速度处理。

5.3.5　曲线接触与几何交点

一根水平杆以恒速 u 向下平移，与半径 R 的固定圆相交。取圆心为原点，跟踪右侧交点 $P=(x,y)$。图 5.11 中，杆给出 $\dot{y}=-u$，圆给出 $x^2+y^2=R^2$；两条位置关系共同确定交点运动。

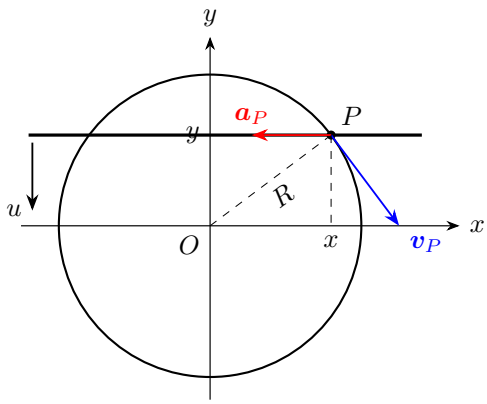


图 5.11: 下降水平杆与固定圆的交点沿圆周运动

对圆方程求导时，R 恒定，x, y 都随时间变：

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0, \qquad v_x = -\frac{y}{x}\dot{y} = \frac{uy}{x}, \quad v_y = -u.$$

位矢 (x, y) 与速度的点积为零，所以图中的速度垂直 OP，沿圆周切线。水平杆上的物质点竖直下降，交点还沿杆横向移动，其横向速度由圆的位置关系确定。

再对 $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$ 逐项用乘积法则：

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

本例 $\ddot{y} = 0$，代入已求速度，并用 $x^2 + y^2 = R^2$ 合并：

$$a_x = -\frac{v_x^2 + u^2}{x} = -\frac{u^2y^2 + u^2x^2}{x^3} = -\frac{u^2R^2}{x^3}, \qquad a_y = 0.$$

因此图 5.11 中加速度水平向左。把一般的二阶圆约束写为 $xa_x + ya_y = -v^2$，再除以 R，可得向心方向的加速度投影 v^2/R。总加速度的切向部分则改变交点速率。

一般固定曲线写为 $F(x, y) = 0$。像圆方程一样，对位置约束用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = 0.$$

在 $\nabla F \neq 0$ 处，梯度给出曲线法向，故速度沿切线。再次求导时，F_x, F_y 也随位置变化：

$$\begin{aligned} 0 = {} & (F_{xx}v_x + F_{xy}v_y)v_x + F_x a_x \\ & + (F_{yx}v_x + F_{yy}v_y)v_y + F_y a_y. \end{aligned}$$

合并混合偏导项，得到

$$F_x a_x + F_y a_y + F_{xx}v_x^2 + 2F_{xy}v_x v_y + F_{yy}v_y^2 = 0.$$

对固定圆取 $F=x^2+y^2-R^2$，有 $F_x=2x, F_y=2y, F_{xx}=F_{yy}=2, F_{xy}=0$，代入即回到前面的二阶圆约束。

曲线移动时，它的位置方程还显含时间。例如两个等半径圆的圆心间距为 $d(t)$，上侧交点相对圆心连线的高度满足 $Y^2+d^2/4=R^2$。一阶求导给 $2Y\dot{Y}+d\dot{d}/2=0$，二阶再求导给 $2\dot{Y}^2+2Y\ddot{Y}+(\dot{d}^2+d\ddot{d})/2=0$。因此圆心匀速移动时，交点仍可有加速度。后面的练习将结合上侧交点图，展开 $Y>0$、$0<d<2R$ 这一分支的求解。

5.3.6　轮缘标记的摆线轨迹

初始标记在触地点，取顺时针累积转角 q。轮心在 (Rq, R)，标记相对轮心在 $(-R\sin q, -R\cos q)$，相加得

$$x=R(q-\sin q),\qquad y=R(1-\cos q).$$

图 5.12 在 $q=\pi/2$ 画出轮子和标记：标记位于轮心左侧，平动向右、转动向上，合速度向右上。到 $q=\pi$ 升到顶部，到 $q=2\pi$ 再次触地。

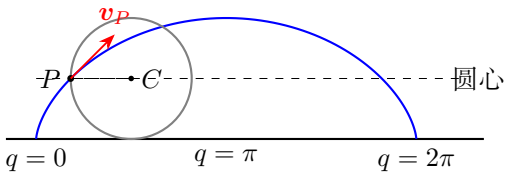


图 5.12: 同一轮缘标记的轨迹为摆线，圆心轨迹为直线

对两个坐标求导，记 $U=R\dot{q}$：

$$\dot{x}=R(1-\cos q)\dot{q}=U(1-\cos q),\qquad \dot{y}=R\sin q\,\dot{q}=U\sin q.$$

因此

$$v^2=U^2[(1-\cos q)^2+\sin^2 q]=2U^2(1-\cos q)=4U^2\sin^2(q/2),\quad v=2|U\sin(q/2)|.$$

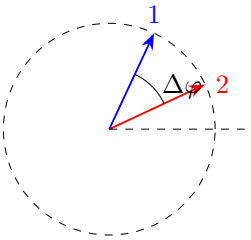
顶部速率为 $2|U|$，触地时为零。相邻触地点间距为 $2\pi R$；轮缘标记走过的是拱形曲线。第六讲将用这组时间方程继续求加速度、曲率与一拱路程。

5.4 相对转动与重复构形

5.4.1 相对转角与重复周期

两个方向绕同一轴转动，统一正向后，角差为 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$，其变化率为 $\omega_1 - \omega_2$。图 5.13 从一次重合开始计角差，到下一次同向重合时，角差改变了一整圈。因此匀速时

$$(\omega_1 - \omega_2)T_{\mathrm{rel}} = \pm 2\pi, \qquad T_{\mathrm{rel}} = \frac{2\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}.$$



始终采用同一角度正向

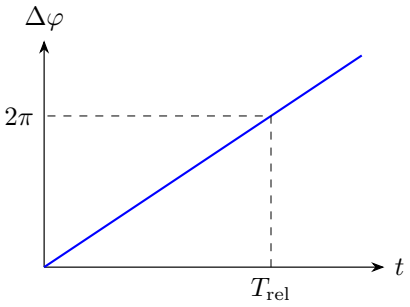


图 5.13: 同一惯性方向下比较两个转角，再对角差计圈

同向转动，角差的变化慢于转得较快的方向；反向转动，其中一个角速度为负，差的大小就等于两个速率之和。卫星经过同一地面点、月相重复，都可转成两个方向重新重合的问题。

对正八面转镜，转过 $2\pi/8$ 就出现等价镜面，构形的重复角为一周的八分之一。计数时，从第一次记录到第九次记录经过八个间隔；题目给九个完整周期时，经过的就是九个间隔。重复构形与记录间隔确定后，时间关系随之明确。

例 5.3 以卫星和地面标记的相对转角为变量。每当这两个方向再次重合，卫星便再次经过该地面点的上空。相邻两次重合之间，相对转角恰好增加或减少一周。

5.5　例题与分析

例 5.1 (八面转镜测光速)**.** 光从匀速旋转的正八面镜射出，经远处反射装置返回，同一光路单程长度为 L。从镜静止逐渐提高转频，首次重新观察到同样的返回光斑时转频为 f_0。求光速，忽略装置内其他光程。

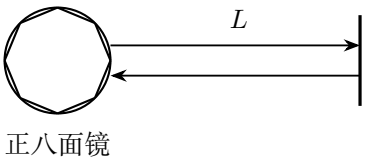


图 5.14: 正八面镜与光的往返路程

解　从等价镜面确定最小重复转角

图 5.14 的八个镜面等价，同样光路的最小非零重复转角为 $2\pi/8$。光往返用时 $2L/c$，在转频 f_0 时镜面转角为 $2\pi f_0(2L/c)$，故

$$2\pi f_0\frac{2L}{c}=\frac{2\pi}{8},\qquad \boxed{c=16Lf_0}.$$

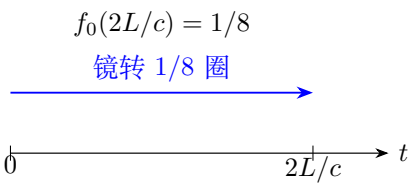


图 5.15: 光返回时相邻等价镜面进入原来位置

往返传播与镜面重现

图 5.15 中，光走完往返路程时，相邻等价镜面恰好补到原来的光路位置。其构形周期为 $1/(8f_0)$，与 $2L/c$ 相等。

更高次重现时，光返回前转过 k 个镜面间隔，k 为正整数，相应条件为 $2Lf/c=k/8$。题设首次重现取 $k=1$。

例 5.2 (旋转探照灯的光斑)**.** 探照灯距直线海岸 500m，以每分钟一周匀速转动。光束与海岸成 60° 时，求光斑沿岸的速率。

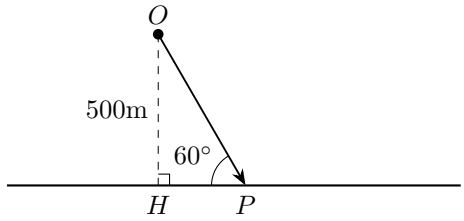


图 5.16: 灯到岸的垂距、光束与岸上交点

解　对光束与海岸的交点坐标求导

设图 5.16 中垂足到光斑的沿岸坐标为 x，光束与海岸夹角为 θ，则 $x = 500\cot\theta$。把余切写成商并求导，

$$\dot{x} = 500\frac{(-\sin\theta)\sin\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\dot{\theta} = -500\csc^2\theta\,\dot{\theta}.$$

角速度大小 $|\dot{\theta}| = \omega = 2\pi/60\text{rad/s}$，因此

$$|\dot{x}| = 500\omega\csc^2\theta, \quad \boxed{|\dot{x}|_{60^\circ} = \frac{2000\pi}{90} \approx 69.8\ \text{m/s}}.$$

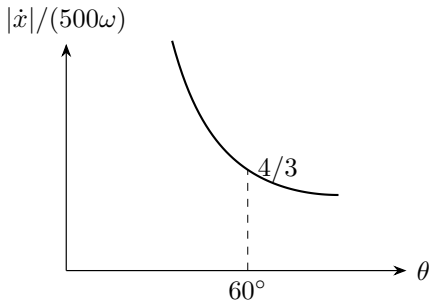


图 5.17: 光斑速率随光束与岸线夹角的变化

讨论投影放大及角度参照

图 5.16 的直角三角形给出 $x = 500\cot\theta$，求导后得到投影因子 $\csc^2\theta$。图 5.17 画出这一因子随夹角的变化：光束越贴近岸线，同样的小转角对应的沿岸位移越大。

若改用光束与海岸法线的角 $\varphi = \pi/2 - \theta$，便有 $x = 500\tan\varphi$，$|\dot{x}| = 500\omega\sec^2\varphi$，与原式相同。图上的 500m 为灯到海岸的垂距，两个互余角分别从岸

线和岸线法线量起。光束正对垂足时光斑速率最小，为 500ω，斜射时再由投影因子放大。

例 5.3 (卫星经过同一地面点)**.** 卫星沿赤道上空圆轨道运动。地球自转周期为 1 天，5 天内完成 9 个相对地面的重复周期。分别求顺行和逆行卫星的轨道周期。这里 9 指完整重复间隔数。

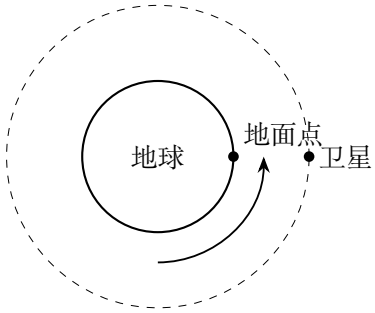


图 5.18: 同一正向下的地球与卫星转动

解 由相对周期求两个有符号角速度

图 5.18 中，以地球自转方向为正，地球角速度为 $\omega_E = 2\pi/(1\text{天})$。五天内经历九个完整重复周期，故

$$T_{\text{rel}} = \frac{5}{9}\text{天}, \qquad |\omega_s - \omega_E| = \frac{2\pi}{T_{\text{rel}}} = \frac{9}{5}\omega_E.$$

依次取角速度差的两个符号，得到

$$\omega_s - \omega_E = \pm\frac{9}{5}\omega_E, \qquad \omega_s = \left(1 \pm \frac{9}{5}\right)\omega_E = \frac{14}{5}\omega_E \quad \text{或} \quad -\frac{4}{5}\omega_E.$$

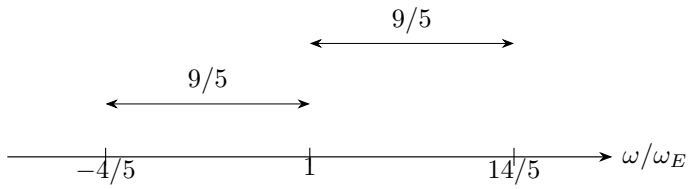


图 5.19: 相对角差每增加一周发生一次地面重合

图 5.19 把两个解放在角速度数轴上，它们到地球角速度 ω_E 的距离均为 $9\omega_E/5$。正根为顺行，负根为逆行。轨道周期由一周转角除以角速度大小求得：

$$T_{\text{顺}} = \frac{2\pi}{14\omega_E/5} = \frac{5}{14}\frac{2\pi}{\omega_E} = \boxed{\frac{5}{14}\text{天} = \frac{60}{7}\text{小时}},$$

$$T_{\text{逆}} = \frac{2\pi}{4\omega_E/5} = \frac{5}{4}\frac{2\pi}{\omega_E} = \boxed{\frac{5}{4}\text{天}}.$$

例 5.4 (恒星月与朔望月)**.** 把月球和地球绕各自中心的相关公转近似为共面匀速同向圆周运动。月球绕地球的恒星周期为 28 天，地球绕太阳周期为 365 天。求月相重复的朔望周期。

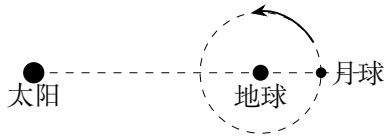


图 5.20: 地月方向与日地方向共同改变

解　以地月方向相对日地方向转过一圈计周期

图 5.20 中月相由地月方向与日地方向的相对角度决定。月球每绕地球一周时，地球也沿绕日轨道前进，因而同一月相的重复需要比 28 天更久。设重复时间为 T，把两个方向的累积转角之差设为一整圈：

$$\frac{2\pi T}{28} - \frac{2\pi T}{365} = 2\pi \quad\Longrightarrow\quad T\frac{365-28}{28\times 365} = 1.$$

因此

$$\boxed{T_{\text{syn}} = \frac{28\times 365}{365-28} = \frac{10220}{337} \approx 30.33\text{天}}.$$

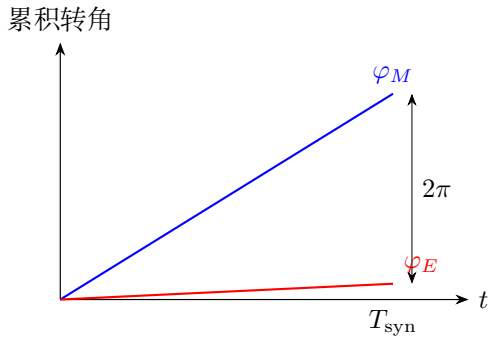


图 5.21: 月相重复时两方向的累计角差为一周

朔望周期的角度图像

图 5.21 将一个重复周期中的月球转角和地球转角画在同一正向下，其差为 2π。月球的转向追赶着缓慢移动的日地方向，因而用两个角速度之差计圈。

所得 $T > 28$ 天符合月球还要追上已经转动的日地方向；若两个角速度趋于相同，重复周期应趋于无穷，与相对转动减慢相对应。

例 5.5 (角加速度恒定的圆周运动)**.** 质点在半径 r 的圆周上从静止开始，转角为 $\varphi = At^2/2$，$A > 0$。求角速度、切向加速度、法向加速度与总加速度大小，并判断加速度是否恒定。

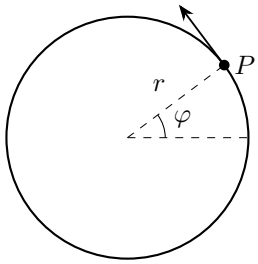


图 5.22: 给定转角的圆周运动

解　逐次对转角求导并分解线加速度

图 5.22 的 A 为常量，对转角连续求导：

$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{A}{2}t^2\right) = \frac{A}{2}(2t) = At, \qquad \beta = \frac{\mathrm{d}(At)}{\mathrm{d}t} = A.$$

在 $t > 0$ 时沿运动方向的速率为 $v = r\omega = rAt$，所以

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(rAt)}{\mathrm{d}t} = \boxed{rA}, \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2A^2t^2}{r} = \boxed{rA^2t^2}.$$

两者正交，先平方相加，再提取正因子 rA，得到

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{r^2A^2 + r^2A^4t^4} = \boxed{rA\sqrt{1 + A^2t^4}}.$$

在 $t = 0$ 处，初始加速度沿质点即将前进的切线，大小为 rA。

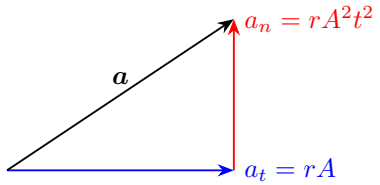


图 5.23: 切向和法向加速度合成为总加速度

用分量比判断合加速度大小和方向的改变

图 5.23 中切向分量大小虽恒定，它的方向仍随质点转动；法向分量还随时间增大，因此总加速度既非恒大小，也非恒方向。初始时 $a_n = 0$，加速度纯切向；到 $t = 1/\sqrt{A}$ 时两分量相等，此后法向分量占优。

由 $a_n/a_t = At^2$ 可得合加速度偏离切线向内的角满足 $\tan\gamma = At^2$，这比只给大小更能说明方向如何随时间改变。其中 At^2 无量纲；图中的切向、法向随质点位置一起转动。

例 5.6 (圆筒内壁上的下落轨迹)**.** 质点在竖直光滑圆筒内壁上运动，圆筒半径 R、高度 H。从顶部以水平切向速率 v_0 出发，始终保持贴壁，忽略摩擦。求绕一周的时间及各周下落距离，说明何时能在落地前绕完一周。

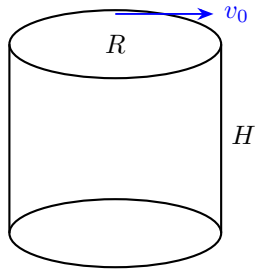


图 5.24: 圆筒内壁上的周向运动与竖直下落

解　分清周向匀速与竖直自由落体

在图 5.24 中，以圆筒轴线为竖直轴。筒壁的法向力沿水平径向，重力沿竖直方向，两者均没有周向分量。因此周向速率始终为 v_0，角速度 $\omega = v_0/R$，每绕一周所需时间为

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v_0}}.$$

初始竖直速度为零，取向下为正，从初值 $v_z(0) = z(0) = 0$ 依次积分：

$$v_z(t) = \int_0^t g\,\mathrm{d}\tau = [g\tau]_0^t = gt, \qquad z(t) = \int_0^t g\tau\,\mathrm{d}\tau = [g\tau^2/2]_0^t = \frac{1}{2}gt^2.$$

将圆筒沿母线展开，周向弧长为 $s = v_0 t$；消去时间后有

$$z = \frac{g}{2}\left(\frac{s}{v_0}\right)^2 = \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

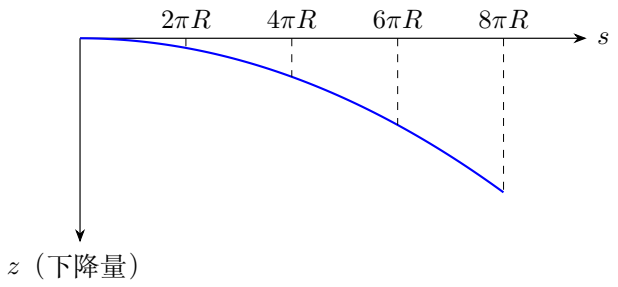


图 5.25: 沿筒壁展开后各等时周段的下落量

将等时周段换成下落距离差

图 5.25 横轴取弧长 s，所以完成第 n 周的刻度应为 $2\pi Rn$，对应时间才是 nT。

展开后的轨迹是抛物线，图中相邻竖虚线之间各代表一周。第 n 周从 $(n-1)T$ 开始、到 nT 结束，下落量为

$$\begin{aligned}\Delta h_n &= z(nT) - z((n-1)T) \\ &= \frac{1}{2}gT^2\left[n^2-(n-1)^2\right] = \boxed{\frac{1}{2}gT^2(2n-1)}.\end{aligned}$$

因此 $\Delta h_{n+1} - \Delta h_n = gT^2$，各周下落量按奇数比增加，轨迹不是等距螺旋线。

用实际高度截断可完成的圈数

落地时 $z = H$，可用时间为 $t_H = \sqrt{2H/g}$。若允许恰在完成一周时触地，条件为 $T \le t_H$；若严格要求落地前绕完，则应取 $T < t_H$。完成 n 周同理要求 $nT \le t_H$，并应按题意处理等号。上述运动还满足径向加速度 v_0^2/R 恒定，符合始终贴壁的条件。

例 5.7 (两平板之间的圆柱)**.** 半径 r 的圆柱夹在水平地面和上方平板之间，与二者均无滑动。地面固定，上板向右匀速 v_0。求圆心速度、角速度及顶部、底部物质点的速度与加速度。

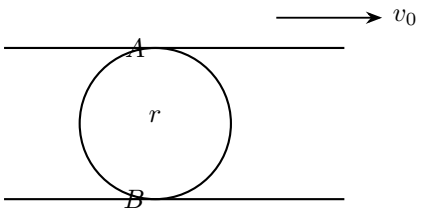


图 5.26: 固定地面与匀速上板夹住圆柱

解　分别在上板和地面写无滑动方程

设圆心向右速度为 u，顺时针角速度大小为 ω。图 5.26 的底部无滑动给 $u-r\omega=0$，顶部给 $u+r\omega=v_0$。两式相加消去转动，得 $2u=v_0$；两式相减消去平动，得 $2r\omega=v_0$。因此 $\boxed{u=v_0/2,\ \omega=v_0/(2r)}$。

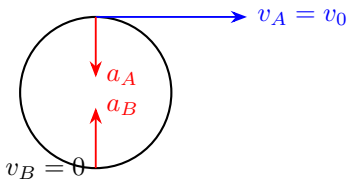


图 5.27: 顶部与底部物质点的速度及向心加速度

以圆心为基点求两个物质点的加速度

由于驱动速度恒定，$\boldsymbol{a}_C=\mathrm{d}(v_0/2,0)/\,\mathrm{d}t=0$，$\beta=\mathrm{d}[v_0/(2r)]/\,\mathrm{d}t=0$。以圆心为基点，图 5.27 中顶部位矢是 $(0,r)$、底部是 $(0,-r)$，顺时针角速度对应 $\boldsymbol{\omega}=-(v_0/2r)\boldsymbol{e}_z$。用 $\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{e}_y=-\boldsymbol{e}_x$，分别计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_A&=(v_0/2,0)+(v_0/2,0)=(v_0,0),\\ \boldsymbol{v}_B&=(v_0/2,0)+(-v_0/2,0)=(0,0).\end{aligned}$$

加速度公式只剩 $-\omega^2\boldsymbol{r}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_A&=-\frac{v_0^2}{4r^2}(0,r)=\left(0,-\frac{v_0^2}{4r}\right),\\ \boldsymbol{a}_B&=-\frac{v_0^2}{4r^2}(0,-r)=\left(0,\frac{v_0^2}{4r}\right).\end{aligned}$$

顶部物质点加速度向下，底部向上。底部物质点具有向上的加速度，随后抬离地面，由新的轮缘点进入接触位置。

例 5.8 (纯滚动车轮轮缘点)**.** 半径 R 的车轮向右以恒速 u 纯滚动。轮缘物质点 P 位于圆心左侧，其半径与向上竖直线夹角为 $\theta \in (0,\pi)$，即 $\boldsymbol{r}_{P/C} = R(-\sin\theta, \cos\theta)$。求速度和加速度。

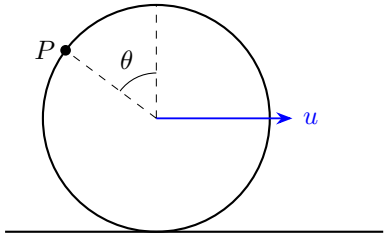


图 5.28: 左侧轮缘点的半径方向与轮心平动

解　合成圆心平动与轮缘转动速度

图 5.28 中角速度矢量为 $-(u/R)\boldsymbol{e}_z$。先算相对圆心的转动速度，再加平动：

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{P/C} = -u\boldsymbol{e}_z \times (-\sin\theta \boldsymbol{e}_x + \cos\theta \boldsymbol{e}_y) = u(\cos\theta, \sin\theta),$$
$$\boldsymbol{v}_P = (u, 0) + u(\cos\theta, \sin\theta) = \boxed{u(1+\cos\theta, \sin\theta)}.$$

求速率时将两个分量平方相加，

$$|\boldsymbol{v}_P|^2 = u^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2u^2(1+\cos\theta) = 4u^2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

给定 $0 < \theta < \pi$ 保证半角余弦为正，故 $|\boldsymbol{v}_P| = 2u\cos(\theta/2)$。

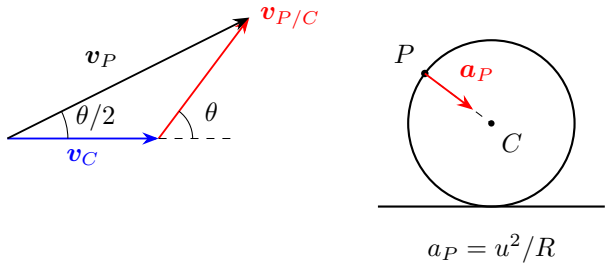


图 5.29: 轮缘点速度的合成及朝圆心的加速度

轮缘点的加速度

图 5.29 中的合速度向右上，与水平夹角 $\theta/2$。圆心无加速度、角速度恒定，只有相对圆心的向心项，$\boxed{\boldsymbol{a}_P = (u^2/R)(\sin\theta, -\cos\theta)}$。顶部极限给速度 $2u$、加速度向下；底部极限给速度零、加速度向上，两者均与平地纯滚动接触条件一致。

速度方向由 $v_y/v_x = \sin\theta/(1+\cos\theta) = \tan(\theta/2)$ 确定。对地的曲率半径可进一步由法向加速度求得，此处合加速度在轨迹法线上的投影决定曲率，切向投影则描述速率的变化。

例 5.9 (线轴的上下出绳)**.** 线轴外半径 R、内半径 $r < R$，在水平地面纯滚动。绳从内轴的上侧或下侧沿水平方向引出，向右以恒速 v 拉动。分别求圆心速度，以及外轮顶部 C、左端 D 的速度和加速度。再讨论绳与水平成 α 时的速度关系。

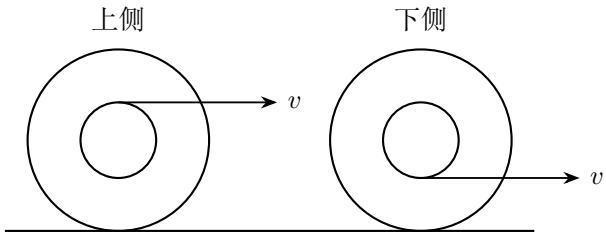
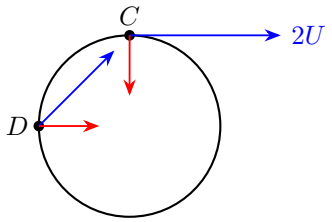


图 5.30: 同一线轴的上侧与下侧水平出绳

解　按上侧与下侧切点分别确定绳速符号

令圆心向右速度为 U，顺时针角速度大小为 U/R。图 5.30 上侧出绳有 $v = U+(r/R)U$，下侧有 $v = U-(r/R)U$，因此 $\boxed{U_{上} = Rv/(R+r),\ U_{下} = Rv/(R-r)}$，均向右。



红：加速度；蓝：速度

图 5.31: 外轮顶部与左端的速度和加速度

把各自圆心速度代入轮缘速度和加速度

恒定水平绳速使 U 恒定，所以圆心加速度与角加速度均为零。按图 5.31，顶部位矢为 $(0,R)$、左端位矢为 $(-R,0)$，且 $\boldsymbol{\omega}=-(U/R)\boldsymbol{e}_z$。分别代入刚体速度式和加速度式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_C &= (U,0)+\boldsymbol{\omega}\times(0,R)=(U,0)+(U,0)=(2U,0),\\
\boldsymbol{a}_C &= -\frac{U^2}{R^2}(0,R)=(0,-U^2/R),\\
\boldsymbol{v}_D &= (U,0)+\boldsymbol{\omega}\times(-R,0)=(U,0)+(0,U)=(U,U),\\
\boldsymbol{a}_D &= -\frac{U^2}{R^2}(-R,0)=(U^2/R,0).
\end{aligned}$$

上侧出绳取 $U=Rv/(R+r)$，下侧取 $U=Rv/(R-r)$；同一组轮缘关系分别配上两种 U，便得到上侧和下侧出绳时的运动。

倾斜出绳的投影

若绳沿与水平成 α 的方向被拉，圆心的沿绳分量为 $U\cos\alpha$，上侧、下侧转动贡献分别为 $\pm Ur/R$，所以 $\boxed{U=v/(\cos\alpha\pm r/R)}$。下侧的原关系在 $\cos\alpha=r/R$ 时要求 $v=0$；两侧分母的正负决定圆心运动方向。绳角随时间改变时，按知识正文中的乘积求导求圆心加速度。

上、下两种结果在 $r\to 0$ 时都回到 $U=v$，因为内轴的转动沿绳贡献消失。下侧在 $r\uparrow R$ 时，切点逐渐接近地面瞬心，有限圆心速度能提供的绳速趋零，所以为维持非零拉速，所需 U 急剧增大。

例 5.10 (拉绳系在线轴的指定点)**.** 外半径 R 的线轴向右纯滚动。绳的一端系在内轴左侧物质点 A，当时 $\boldsymbol{r}_{A/C}=(-r,0)$；绳从 A 向右上方延伸，与水平成 α，沿绳拉动的速率为 v_0。绳不在内轴上卷绕。求圆心速率。

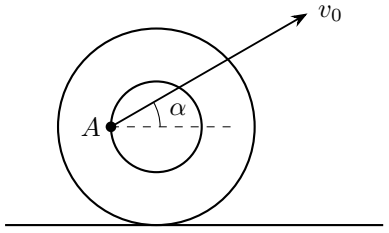


图 5.32: 左侧固定系点与右上方拉绳方向

解　求系点速度并投向绳方向

图 5.32 中，系点 A 固定在内轴左侧。设圆心向右速度为 U，纯滚动给 $\boldsymbol{\omega} = -(U/R)\boldsymbol{e}_z$。由 $\boldsymbol{r}_{A/C} = (-r, 0)$，转动速度为

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{A/C} = -\frac{U}{R}\boldsymbol{e}_z \times (-r\boldsymbol{e}_x) = \frac{Ur}{R}\boldsymbol{e}_y.$$

它竖直向上，与向右的平动速度合成图 5.33 中的 $\boldsymbol{v}_A = (U, Ur/R)$。

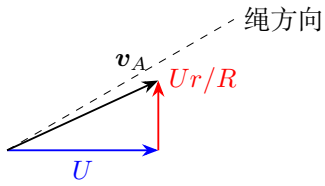


图 5.33: 系点平动和转动速度向绳投影

沿绳单位方向为 $\boldsymbol{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$。绳段长度保持不变，两端沿绳的速度相等，所以

$$v_0 = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{e} = U\cos\alpha + \frac{Ur}{R}\sin\alpha, \qquad \boxed{U = \frac{v_0}{\cos\alpha + (r/R)\sin\alpha}}.$$

竖直转动速度向斜绳投影产生 $\sin\alpha$ 因子；上一题卷绕切点的转动速度沿绳，其贡献直接为 $\pm Ur/R$。水平拉绳时 $\alpha = 0$，本题系点的转动速度垂直绳，故 $U = v_0$。

例 5.11 (两个圆环驱动四个滚子)**.** 中心圆半径 r，外圆环内半径 $3r$，四个半径 r 的滚子夹在其间。各接触均无滑动。在同一时间内，中心圆顺时针 5 周，外环逆时针 7 周。求每个滚子圆心的公转与自身对地自转圈数。

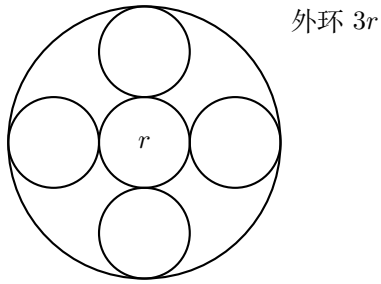


图 5.34: 中心轮、外环与四个滚子的接触位置

解　按内外接触半径建立同一时段的圈数方程

统一逆时针为正，设圆心公转角为 θ、滚子自转角为 ϕ，中心圆和外环角分别为 ϕ_i, ϕ_o。图 5.34 中滚子圆心轨道半径为 $2r$，两个接触点的瞬时无滑动条件为

$$2r\dot{\theta} - r\dot{\phi} = r\dot{\phi}_i, \qquad 2r\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 3r\dot{\phi}_o.$$

从共同起始时刻 t_0 积分到终止时刻 t_1，各项用角坐标作变量。以第一式为例，

$$2r\int_{\theta_0}^{\theta_1} \mathrm{d}\theta - r\int_{\phi_0}^{\phi_1} \mathrm{d}\phi = r\int_{\phi_{i0}}^{\phi_{i1}} \mathrm{d}\phi_i,$$

原函数均为对应的角坐标，代入端点后得到 $2r\Delta\theta - r\Delta\phi = r\Delta\phi_i$。第二式同理给出 $2r\Delta\theta + r\Delta\phi = 3r\Delta\phi_o$。

设滚子公转为 N 圈、自转为 n 圈，则 $\Delta\theta = 2\pi N$、$\Delta\phi = 2\pi n$；题给 $\Delta\phi_i = -10\pi$、$\Delta\phi_o = 14\pi$。两式约去 $2\pi r$，得到

$$2N - n = -5, \qquad 2N + n = 21.$$

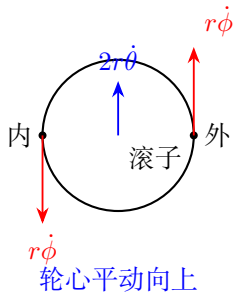


图 5.35: 单个滚子两处接触的平动与相对转动速度

消元后用累计切向位移说明

两式相加得 $4N = 16$，所以 $N = 4$；第二式减第一式得 $2n = 26$，所以 $n = 13$。两者为正，得到 $\boxed{N = 4\text{圈，逆时针；}\quad n = 13\text{圈，逆时针}}$。图 5.35 在一个滚子上标出内外切向速度：内外接触对应的半径分别为 r 与 $3r$，在圈数关系中保留了不同的系数。四个滚子由对称性具有相同结果；这里的积分位移关系要求各接触始终保持无滑动。

例 5.12 (变速滚动车轮的加速度)**.** 车轮半径为 r，向右纯滚动。以顺时针角速度 ω 及角加速度 β 为正，轮缘点相对圆心的位置为 $r(\sin\theta,\cos\theta)$。求该物质点加速度，并求底部接触位置的加速度。

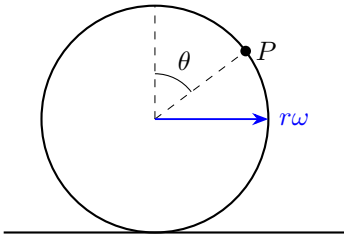


图 5.36: 变速滚动车轮上的轮缘物质点

解　合成平动、切向和向心加速度

图 5.36 中的角参数沿物质点运动满足 $\dot\theta=\omega$。圆心加速度为 $(r\beta,0)$，点相对圆心的速度为 $(r\omega\cos\theta,-r\omega\sin\theta)$。对两个乘积逐项求导，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\omega\cos\theta)=r\beta\cos\theta-r\omega\sin\theta\,\dot\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-r\omega\sin\theta)=-r\beta\sin\theta-r\omega\cos\theta\,\dot\theta.$$

代入 $\dot\theta=\omega$ 并加圆心项，得到

$$\boxed{a_x=r\beta(1+\cos\theta)-r\omega^2\sin\theta},$$

$$\boxed{a_y=-r\beta\sin\theta-r\omega^2\cos\theta}.$$

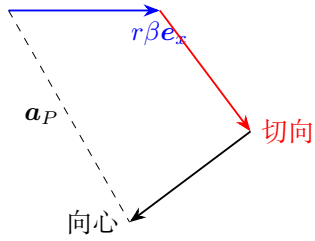


图 5.37: 平动、角加速度项和向心项的矢量合成

底部物质点的加速度

在底部 $\theta=\pi$ 处，图 5.37 中的圆心项与相对切向项分别为 $(r\beta,0)$、$(-r\beta,0)$，向心项为 $(0,r\omega^2)$。相加得到

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{\text{底}}=(r\beta,0)+(-r\beta,0)+(0,r\omega^2)=(0,r\omega^2)}.$$

当前底部物质点有向上的加速度，随后抬离地面，新物质点进入接触位置。若该瞬间 $\omega = 0$ 而 $\beta \neq 0$，底部加速度为零，顶部却有水平加速度 $2r\beta$；两个位置显示了角速度平方项与角加速度项各自的作用。

例 5.13 (圆外滚动时轮缘轨迹的曲率)**.** 半径 r 的圆沿固定半径 R 的圆外侧纯滚动，圆心以顺时针公转角速度大小 Ω、角加速度 $B = \dot{\Omega}$ 运动。取小圆最外侧的物质点 P，即它位于两圆心连线的外延长线上。求其速度、加速度及轨迹曲率半径，设 $\Omega \neq 0$。

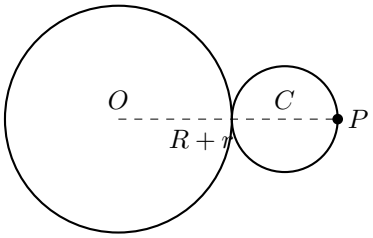


图 5.38: 外滚小圆的轮心轨道及最外侧材料点

解　由无滑动求自转并合成最外点瞬时速度

令 $b = R + r$，径向外为 $\boldsymbol{e}_r$、逆时针切向为 $\boldsymbol{e}_\theta$。图 5.38 的接触点静止给小圆顺时针自转大小 $b\Omega/r$。圆心速度为 $-b\Omega\boldsymbol{e}_\theta$，最外点转动速度同向同大，所以 $\boxed{\boldsymbol{v}_P = -2b\Omega\boldsymbol{e}_\theta}$。

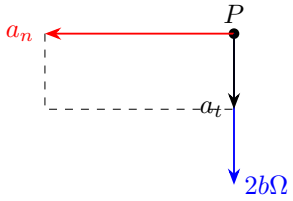


图 5.39: 公转与自转共同给出的速度和加速度

分别计算圆心及物质点相对加速度

圆心的公转角沿顺时针变化，故 $\dot{\boldsymbol{e}}_r = -\Omega\boldsymbol{e}_\theta$、$\dot{\boldsymbol{e}}_\theta = \Omega\boldsymbol{e}_r$。对圆心速度使用乘积法则：

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\mathrm{d}(-b\Omega\boldsymbol{e}_\theta)}{\mathrm{d}t} = -bB\boldsymbol{e}_\theta - b\Omega(\Omega\boldsymbol{e}_r) = -b\Omega^2\boldsymbol{e}_r - bB\boldsymbol{e}_\theta.$$

小圆的对地自转矢量为 $\boldsymbol{\omega}=-(b\Omega/r)\boldsymbol{e}_z$，角加速度为 $\boldsymbol{\beta}=-(bB/r)\boldsymbol{e}_z$。当前 $\boldsymbol{r}_{P/C}=r\boldsymbol{e}_r$，所以

$$\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r}_{P/C}=-bB\boldsymbol{e}_\theta,$$
$$-\omega^2\boldsymbol{r}_{P/C}=-\frac{b^2\Omega^2}{r^2}r\boldsymbol{e}_r=-\frac{b^2}{r}\Omega^2\boldsymbol{e}_r.$$

将这两项与圆心加速度相加，因此

$$\boxed{\boldsymbol{a}_P=-b(1+b/r)\Omega^2\boldsymbol{e}_r-2bB\boldsymbol{e}_\theta}.$$

由法向加速度求轨迹曲率

图 5.39 中径向项垂直速度，正是轨迹法向加速度。由 $\Omega\neq0$，可以约去 Ω^2，得到

$$\rho=\frac{|\boldsymbol{v}_P|^2}{a_n}=\frac{4b^2\Omega^2}{b(1+b/r)\Omega^2}=\frac{4b}{1+b/r}=\boxed{\frac{4br}{b+r}=\frac{4r(R+r)}{R+2r}}.$$

切向加速度改变速率，不进入该瞬间曲率的计算；结果中的 $R+r$ 来自圆心公转，r 来自轮缘自转，两项共同决定对地轨迹的弯曲。

所考察瞬间 P 位于最外侧；随后它相对小圆心的位矢随自转改变方向，圆心也沿半径 $R+r$ 的圆周前进。前面的加速度正是跟踪这个固定材料点，将两种运动合成得到的。

例 5.14 (转杆与地面的交点)**.** 长杆绕高出地面 h 的固定点 O 转动，与地面右侧交于 P。杆向右下倾角为 θ，顺时针角速度为 ω、角加速度为 β。求几何交点 P 的速度与加速度，并与杆上当时处于该位置的物质点比较。

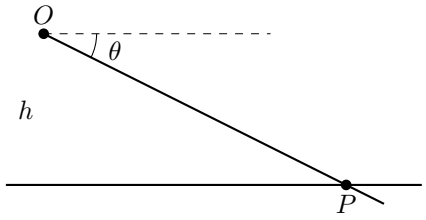


图 5.40: 高处转轴、斜杆与地面几何交点

解　对几何交点坐标连续求两次导数

图 5.40 中 $x_P=h\cot\theta$，且 $\dot\theta=\omega$。由 $(\cot\theta)'=-\csc^2\theta$ 和链式法则，$\dot x_P=-h\csc^2\theta\,\dot\theta=-h\omega\csc^2\theta$。再对乘积求导，

$$\ddot x_P=-h\beta\csc^2\theta-h\omega(-2\csc^2\theta\cot\theta)\dot\theta.$$

代入 $\dot\theta=\omega$ 整理得

$$\boxed{\dot x_P=-h\omega\csc^2\theta},\qquad \boxed{\ddot x_P=2h\omega^2\csc^2\theta\cot\theta-h\beta\csc^2\theta}.$$

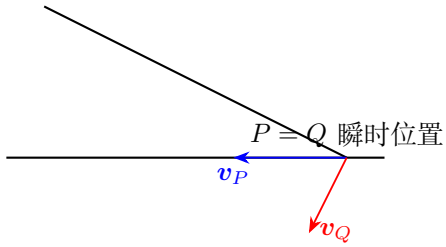


图 5.41: 几何交点与当前重合材料点的速度

与当前重合的杆上物质点比较方向

恒定角速度时 $\beta=0$，交点向左运动而加速度向右。图 5.41 标出的杆上物质点 Q 在此瞬间与 P 重合，但它的速度垂直杆，有竖直分量；P 始终在地面，速度只能水平，二者不相同。杆长若为有限 l，还须满足 $OP=h/\sin\theta\le l$，这给出实际杆段与地面的相交角度范围。

杆上当前重合物质点相对轴位矢为 $(h\cot\theta,-h)$，速度为 $(-h\omega,-h\omega\cot\theta)$，确有向下分量；几何交点却始终留在地面。

例 5.15 (恒速收绳时小船的加速度)**.** 岸上滑轮高出船的系绳点 h，以恒定速率 v 收绳。船只作水平运动，绳与水平成 θ。求船向岸的速率与加速度大小，并说明为何船不是匀速运动。

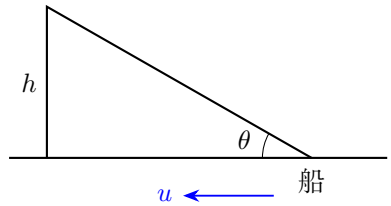


图 5.42: 船到岸的水平距离与斜绳长度

解　对绳长约束求两次导数

以图 5.42 中离岸水平距离 $x>0$ 为坐标，$\ell^2=x^2+h^2$，$\dot\ell=-v$。一次微分给 $2\ell\dot\ell=2x\dot x$，即 $\dot x=-v\ell/x$，因此船速 $u=v\sec\theta$。再用商法则，$\ddot x=-v(\dot\ell/x-\ell\dot x/x^2)$；使用 $\dot\ell=-v$ 与 $\dot x=-v\ell/x$，有

$$\ddot x=-v\left(-\frac{v}{x}+\frac{v\ell^2}{x^3}\right)=-\frac{v^2h^2}{x^3}.$$

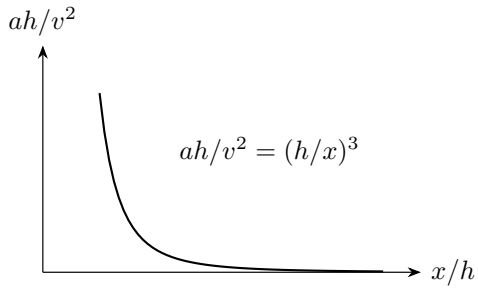


图 5.43: 向岸加速度随离岸距离的变化

由几何比例解释加速方向并讨论端点

所以加速度指向岸，$\boxed{a=v^2h^2/x^3=(v^2/h)\tan^3\theta}$。由图 5.42，船越近岸，绳越陡，同样的收绳量对应更大的水平位移，故船速增加。图 5.43 则画出向岸加速度随 x/h 的变化。$x\to\infty$ 时加速度趋零，近乎水平绳恢复近似匀速；在 $x>0$ 的收绳过程中，x 减小使速率和向岸加速度都增大。

例 5.16 (内滚圆轮缘点的加速度)**.** 大圆半径 R，小圆半径 $r\in(0,R)$，小圆在大圆内侧无滑动滚动。大圆圆心 O 固定，某瞬间小圆心 C 在 O 正上方，轮缘物质点 P 位于 C 正下方。大小圆对地角速度、角加速度分别为 ω_1,β_1 和 ω_2,β_2，均以逆时针为正。求 P 的加速度，并讨论大圆固定和 $r=R/2$ 的情形。

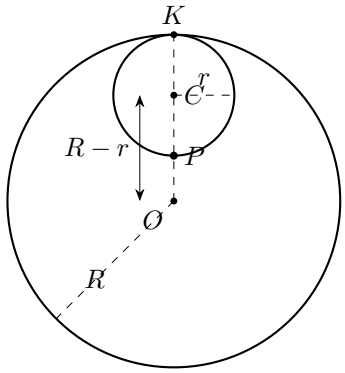


图 5.44: 内滚圆的实际接触点及指定轮缘点

解　由顶部接触条件求圆心公转与加速度

取图 5.44 中 x 向右、y 向上。记圆心绕行的有符号角速度为 Ω，圆心轨道半径为 $d=R-r$。顶部接触点 K 的速度由圆心平动和小圆自转相加，两项均以向左为正的大小表示，故无滑动条件为

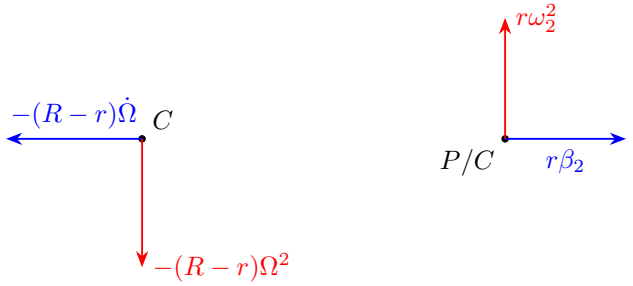
$$d\Omega+r\omega_2=R\omega_1,\qquad \Omega=\frac{R\omega_1-r\omega_2}{R-r}.$$

这一关系在邻近时刻也成立。当 R, r 固定时，逐项求导给出

$$(R-r)\dot{\Omega} = R\dot{\omega}_1 - r\dot{\omega}_2 = R\beta_1 - r\beta_2, \qquad \dot{\Omega} = \frac{R\beta_1 - r\beta_2}{R-r}.$$

此时 $\overrightarrow{OC} = (0, d)$，因此圆心的切向、向心加速度为

$$\boldsymbol{a}_C = (-d\dot{\Omega}, -d\Omega^2).$$



角加速度分项的方向随其符号改变

图 5.45: 轮心与轮缘相对加速度在两个方向相加

叠加轮缘相对项并代回公转关系

图 5.45 右侧中 $\boldsymbol{r}_{P/C} = (0, -r)$，相对圆心的切向加速度为 $(r\beta_2, 0)$，向心加速度为 $(0, r\omega_2^2)$。逐方向相加，得到

$$\boldsymbol{a}_P = (r\beta_2 - d\dot{\Omega},\ r\omega_2^2 - d\Omega^2).$$

代入 $d, \Omega, \dot{\Omega}$ 并整理，最终为

$$\boxed{a_{P,x} = 2r\beta_2 - R\beta_1}, \qquad \boxed{a_{P,y} = r\omega_2^2 - \frac{(R\omega_1 - r\omega_2)^2}{R-r}}.$$

讨论固定大圆与二比一半径的抵消

若大圆固定，$\omega_1 = \beta_1 = 0$，有

$$a_{P,x} = 2r\beta_2, \qquad a_{P,y} = \frac{r(R-2r)}{R-r}\omega_2^2.$$

小圆匀速自转时 $\beta_2 = 0$，但竖直项一般仍存在；它的方向随 $R - 2r$ 改变。只有 $r = R/2$，圆心的向下向心项与 P 相对圆心的向上向心项才恰好抵消。

大小圆均转动时的二比一半径

再取 $r = R/2$ 且大圆也可转动，先得到 $\Omega = 2\omega_1 - \omega_2$、$\dot{\Omega} = 2\beta_1 - \beta_2$。横向项为 $r[\beta_2 - (2\beta_1 - \beta_2)] = R(\beta_2 - \beta_1)$；竖直项展开为

$$r[\omega_2^2 - (2\omega_1 - \omega_2)^2] = 4r\omega_1(\omega_2 - \omega_1) = 2R\omega_1(\omega_2 - \omega_1).$$

所以这个特殊半径比恢复

$$\boldsymbol{a}_P = R(\beta_2 - \beta_1)\boldsymbol{e}_x + 2R\omega_1(\omega_2 - \omega_1)\boldsymbol{e}_y.$$

图 5.44 中 $OC = R - r$、$CP = r$，所以一般半径下 $OP = |R - 2r|$；当 $r = R/2$ 时，P 在所考察瞬间恰好经过 O。它的加速度仍由上述平动与相对转动共同确定。

例 5.17 (抛物线的曲率半径)**.** 曲线为 $y = -kx^2$，$k > 0$ 且量纲为长度的倒数。用运动学方法求任一点的曲率半径。再写出选定长度单位后 $k = 1$ 时的形式。

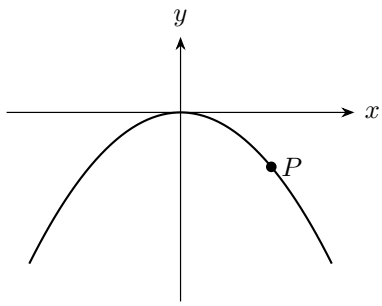
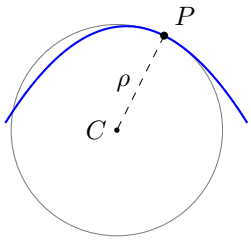


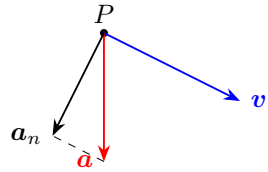
图 5.46: 开口向下的抛物线与所取位置

解　选辅助匀速横坐标求速度与加速度

让辅助质点沿图 5.46 曲线运动，选 $x = ut$，$u > 0$。由 $y = -kx^2$ 逐次求导，$\dot{y} = -2kx\dot{x} = -2kux, \ddot{y} = -2ku\dot{x} = -2ku^2$。因此 $\boldsymbol{v} = (u, -2kux), \boldsymbol{a} = (0, -2ku^2)$，速率为 $u\sqrt{1 + 4k^2x^2}$，叉积大小为 $2ku^3$。



相同的局部弯曲



竖直加速度的法向投影

图 5.47: 抛物线的局部曲率圆与加速度的法向投影

先由点积求切向分量：

$$a_t = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{v} = \frac{(-2kux)(-2ku^2)}{u\sqrt{1+4k^2x^2}} = \frac{4k^2u^2x}{\sqrt{1+4k^2x^2}}.$$

因为切向、法向正交，

$$a_n^2 = a^2 - a_t^2 = 4k^2u^4 - \frac{16k^4u^4x^2}{1+4k^2x^2} = \frac{4k^2u^4}{1+4k^2x^2}.$$

法向大小取正根，$a_n = 2ku^2/\sqrt{1+4k^2x^2}$。在 $x \neq 0$ 处，图 5.47 中的竖直加速度分成切向、法向两项，法向投影产生分母中的 $\sqrt{1+4k^2x^2}$；曲率由这一法向分量确定。

由法向加速度求曲率半径

沿图 5.47 中的凹侧法线，$a_n = v^2/\rho$。将上面求出的速率平方与法向加速度代入，辅助速率 u 消去：

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{u^2(1+4k^2x^2)}{2ku^2/\sqrt{1+4k^2x^2}} = \boxed{\frac{(1+4k^2x^2)^{3/2}}{2k}}.$$

在选定单位使系数数值 $k=1$ 时，可写为 $(1+4x^2)^{3/2}/2$，结果的长度单位由坐标单位给出。顶点处 $\rho = 1/(2k)$ 最小；沿两侧远离顶点，曲线逐渐平缓，曲率半径增大。辅助速率 u 完全相消，体现了曲率只依赖几何形状。

5.6　本讲小结

角速度描述转动快慢，重复构形由相对转角确定。曲线上的加速度分成沿切线改变速率的一项和朝凹侧改变方向的一项，局部曲率由速度与法向加速度联系。

刚体平面运动由基点平动与相对转动合成。无滑动条件在各接触处分别列出，轮缘物质点的加速度保留角加速度与向心两项。几何交点的运动则由位置方程求导，滑块、线轴与内外滚轮都有各自的图中关系。

5.7 练习

练习 5.1 (曲柄滑块机构)**.** 曲柄 $OB = r$，连杆 $AB = l > r$，滑块 A 沿过 O 的水平线运动且位于左侧。曲柄向左上方，与向左水平线夹角为 α；顺时针角速度为 ω。连杆从 A 到 B 向右上方倾角为 θ。求滑块向右速度。

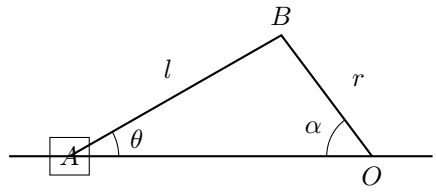


图 5.48: 左侧滑块与曲柄、连杆的装配位置

练习 5.2 (转杆通过绳牵引悬物)**.** 定滑轮 B 在固定转轴 O 正上方，高差为 h。杆端 A 位于 O 右侧，绳从 A 经 B 向下连悬物 M。杆以顺时针角速度大小 ω 转动，BA 与向下竖直线夹角为 α。求悬物上升速率。

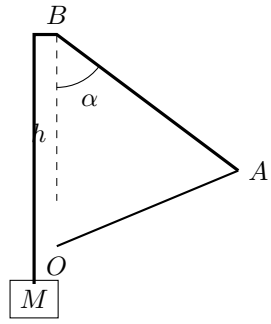


图 5.49: 转杆端、上方滑轮与竖直悬物

练习 5.3 (水平杆与圆的移动交点)**.** 固定圆半径为 r，水平长杆以恒速 v 向下平移。右侧几何交点 M 相对圆心的位置为 $r(\sin\varphi, \cos\varphi)$，$0 < \varphi < \pi$。求 M 的速度、加速度。

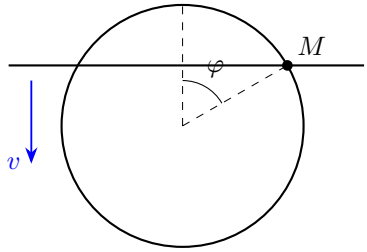


图 5.50: 下降水平杆与固定圆的右侧交点

练习 5.4 (两移动圆的交点加速度)**.** 两个半径均为 r 的圆，其圆心沿同一水平线运动，坐标为 x_1, x_2，速度为 v_1, v_2、加速度为 a_1, a_2。令 $d = x_2 - x_1 \in (0, 2r)$，求上侧几何交点 P 的速度和加速度。

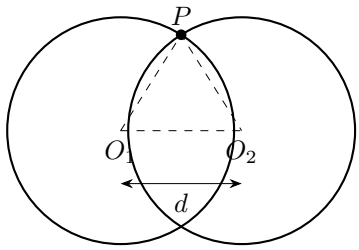


图 5.51: 圆心间距与上侧交点的高度

练习解答

练习 5.1

解　按左侧装配选择连杆水平投影的根号符号

以图 5.48 的 O 为原点，曲柄端为 $B = (-r\cos\alpha, r\sin\alpha)$。滑块位于左侧，所以杆的水平投影取正根

$$AB_x = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$$

于是

$$x_A = -r\cos\alpha - \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$$

用链式法则求滑块速度

顺时针转动在本角度定义下给 $\dot\alpha=\omega$。第一项求导为 $r\omega\sin\alpha$；根号项求导时要保留内函数导数，故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}=\frac{-2r^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot\alpha}{2\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}=-\frac{r^2\omega\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}.$$

代入 x_A 的导数得到

$$\boxed{v_A=r\omega\sin\alpha\left(1+\frac{r\cos\alpha}{\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}}\right)}.$$

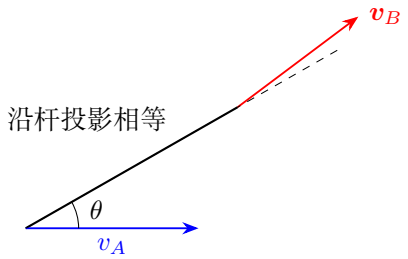


图 5.52: 连杆两端沿杆速度投影相等

沿杆投影的几何解释

图 5.52 给出另一种计算：杆的单位方向为 $(\cos\theta,\sin\theta)$，曲柄端速度为 $(r\omega\sin\alpha,r\omega\cos\alpha)$。定长杆要求两端沿杆投影相同，因此

$$v_A\cos\theta=r\omega(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta),\quad v_A=\frac{r\omega\sin(\alpha+\theta)}{\cos\theta}.$$

由 $l\sin\theta=r\sin\alpha$ 及 $l\cos\theta=\sqrt{l^2-r^2\sin^2\alpha}$，可逐项恢复前式。$l>r$ 保证根号在图示构形有定义；$\alpha\to0$ 时滑块到达死点、瞬时速度趋零。右侧装配则对应另一条位置分支，其根号项取正号。

练习 5.2

解　对斜绳长度取两端相对速度的投影

取图 5.49 的 $O=(0,0)$、$B=(0,h)$、$A=(x,y)$，令 $\ell=BA=\sqrt{x^2+(y-h)^2}$。杆端速度为 $(\omega y,-\omega x)$，h 恒定。用链式法则求斜段长度导数：

$$\dot\ell=\frac{2x\dot x+2(y-h)\dot y}{2\ell}=\frac{x(\omega y)+(y-h)(-\omega x)}{\ell}$$
$$=\frac{\omega xy-\omega xy+\omega hx}{\ell}=\frac{\omega hx}{\ell}=\omega h\sin\alpha.$$

最后一步由图中的水平投影 $x=\ell\sin\alpha$ 得到。

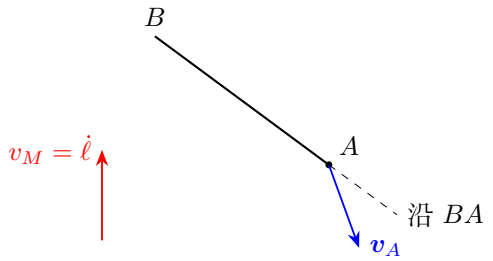


图 5.53: 杆端速度沿斜绳的投影给斜段增长率

斜段增长与悬物上升

绳长 $BA+BM$ 恒定，斜段增长多少，悬挂段便缩短多少，因此 $\boxed{v_M=\omega h\sin\alpha}$，向上。图 5.53 把长度导数画成杆端速度的沿绳投影；比值 $x/\ell=\sin\alpha$ 使结果只含高差 h 和绳角 α。反转杆的转向时，斜段改为缩短，悬物随之下降。

$h=0$ 时滑轮与转轴重合，BA 就是固定杆长，悬物不动；$\alpha=0$ 时杆端沿绳投影瞬间为零，悬物也瞬间静止，均与答案一致。

练习 5.3

解　以杆的纵坐标驱动圆周参数

图 5.50 中交点纵坐标随杆下降，$\dot y=-v$。由 $y=r\cos\varphi$，链式求导给 $-r\sin\varphi\,\dot\varphi=-v$，即 $\dot\varphi=v/(r\sin\varphi)$。横坐标 $x=r\sin\varphi$ 给 $\dot x=r\cos\varphi\,\dot\varphi=v\cot\varphi$。再对余切用链式法则，

$$\ddot x=-v\csc^2\varphi\,\dot\varphi=-\frac{v^2}{r\sin^3\varphi},\qquad \ddot y=0.$$

所以

$$\boxed{\boldsymbol{v}_M=(v\cot\varphi,-v)},\qquad \boxed{\boldsymbol{a}_M=(-v^2/(r\sin^3\varphi),0)}.$$

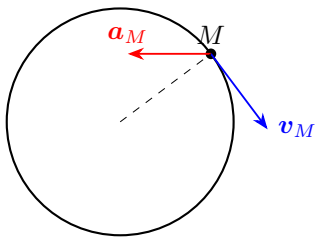


图 5.54: 几何交点沿圆运动的速度和水平加速度

区分交点与杆上物质点，并说明二阶约束

图 5.54 中交点沿圆周切向运动，但杆上各物质点只向下平移。上半圆交点向右，下半圆向左，经过最右端 $\varphi=\pi/2$ 时速度竖直向下、加速度指向圆心。加速度沿水平方向，其在圆周法线上的投影指向圆心，切向投影描述速率的改变。

将速度代入圆的切向条件 $x\dot{x}+y\dot{y}=0$，将加速度代入 $x\ddot{x}+y\ddot{y}+\dot{x}^2+\dot{y}^2=0$，两式都成立，说明交点确实持续在固定圆上。上、下切触位置对应 $\sin\varphi\to 0$，构成此相交分支的两个端点。

练习 5.4

解　由对称性确定交点位置再求一阶导数

由图 5.51 的左右对称关系，上交点 $P=(X,Y)$ 位于两圆心连线的垂直平分线上，故

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad Y^2+\frac{d^2}{4}=r^2,\qquad Y=\sqrt{r^2-d^2/4}>0.$$

记 $w=\dot{d}=v_2-v_1$、$b=\ddot{d}=a_2-a_1$。第一式给 $\dot{X}=(v_1+v_2)/2$；对第二式求导，有

$$2Y\dot{Y}+\frac{dw}{2}=0,\qquad \dot{Y}=-\frac{dw}{4Y}.$$

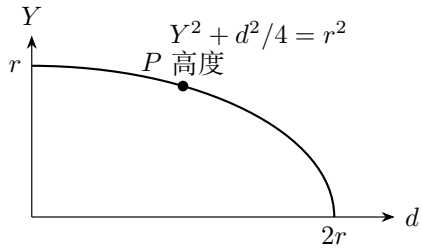


图 5.55: 交点高度对圆心间距的变化

用高度随间距的斜率解释竖直速度

图 5.55 的曲线给出交点高度如何随间距改变，其斜率 $-d/(4Y)$ 再乘间距变化率 w 便是竖直速度。因此

$$\boxed{\boldsymbol{v}_P=((v_1+v_2)/2,-dw/(4Y))}.$$

对未相除的约束二次求导

从原来的位置约束求第二次导数，Y, d 均随时间改变：先分别对两个乘积求导，$\dot d = w$、$\dot w = b$：

$$\frac{\mathrm{d}(2Y\dot Y)}{\mathrm{d}t} = 2\dot Y^2 + 2Y\ddot Y, \qquad \frac{\mathrm{d}(dw/2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot d\, w + d\dot w}{2} = \frac{w^2 + db}{2}.$$

两项相加为零，得到 $2Y\ddot Y + 2\dot Y^2 + (w^2 + db)/2 = 0$。代入一阶结果，再用 $4Y^2 + d^2 = 4r^2$ 合并，得到

$$\begin{aligned}\ddot Y &= -\frac{w^2 + db}{4Y} - \frac{d^2 w^2}{16Y^3} \\ &= -\frac{(4Y^2 + d^2)w^2}{16Y^3} - \frac{db}{4Y} = -\frac{r^2 w^2}{4Y^3} - \frac{db}{4Y}.\end{aligned}$$

横向加速度为两圆心加速度的平均，故

$$\boxed{\boldsymbol{a}_P = \big((a_1 + a_2)/2, -r^2 w^2/(4Y^3) - db/(4Y)\big)}.$$

若 $w = b = 0$，交点随圆心中点整体平移。

讨论匀速驱动和内外切退化端点

若 $b = 0, w \neq 0$，竖直加速度恒向下；两圆接近时交点向上减速，两圆远离时向下加速。趋近外切 $Y \to 0$ 时出现几何奇异；而 $d = 0$ 时两圆重合，交点不再唯一。上侧唯一交点的运动由 $0 < d < 2r$ 这一相交区间描述。

运动学

物理竞赛一轮讲义

第六讲

运动学综合

2026

目录

第六讲　运动学综合 **1**

6.1　从运动方程到相对运动与刚体运动 1

6.2　位置、连接与运动过程 2

6.3　刚体机构的速度与加速度 5

6.4　单条轨迹与可达范围 8

6.5　对称追逐 10

6.6　例题与分析 12

6.7　本讲小结 34

6.8　练习 35

练习解答 36

第六讲　运动学综合

6.1　从运动方程到相对运动与刚体运动

运动学的几种描述都围绕同一个位置函数展开。直角坐标把位置投影到固定方向；自然坐标沿轨迹分解速度和加速度；相对运动改变描述所依据的参考物；刚体运动再利用各材料点之间距离保持不变的条件。这些关系合在一起，就能研究由多个物体组成的运动过程。

6.1.1　一条运动规律的三种观察方式

设小球 P 相对车厢沿直线 $x' = u_0 t$ 运动，车厢从静止开始以恒加速度 A 向右平移，初始两原点重合。地面与车厢的轴始终平行，位矢相加给出

$$x = X + x', \qquad X = \frac{1}{2}At^2, \qquad x = \frac{1}{2}At^2 + u_0 t.$$

逐次求导，$v = At + u_0$、$a = A$；相对车厢则有 $v' = u_0$、$a' = 0$。图 6.1 用 $OP = OO' + O'P$ 表示位置相加，每一段位矢都有确定的起点和终点。

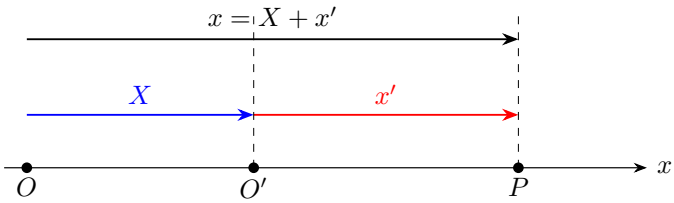


图 6.1: 选定参考物以后，位置关系逐次给出速度和加速度关系

若 P 改为刚杆上的点，$\boldsymbol{r}_{P/O'}$ 的长度固定而方向转动。在平面内令 $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{r}_{P/O'}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_P &= \boldsymbol{R} + \boldsymbol{\rho}, \\
\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{V} + \omega \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\rho}, \\
\boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{A} + \dot{\omega}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\rho} + \omega \boldsymbol{e}_z \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \\
&+= \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{\rho} - \omega^2 \boldsymbol{\rho}.
\end{aligned}$$

第二次求导中，$\dot{\omega}=\beta$ 产生切向项，$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\omega\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{\rho}$ 产生向心项。这使质点的位矢求导与刚体的平动、转动成为同一套描述。后面的共同铰、接触轮和滑轮切点问题，将分别为图上的材料点或几何点建立相应的位置函数。

6.1.2　用初始状态和事件连接整个过程

一段运动由运动规律与初始状态确定。取某阶段初始时刻 t_i，已知 $\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i$，局部时间 $\tau=t-t_i$，恒加速度 $\boldsymbol{a}_i$ 给出

$$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_i=\int_0^{\tau}\boldsymbol{a}_i\,\mathrm{d}s=[\boldsymbol{a}_i s]_0^{\tau}=\boldsymbol{a}_i\tau,$$
$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i=\int_0^{\tau}(\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{a}_i s)\,\mathrm{d}s=[\boldsymbol{v}_i s+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_i s^2]_0^{\tau}=\boldsymbol{v}_i\tau+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_i\tau^2.$$

终点由具体事件给出，例如到达斜面、绳段拉直或两个点相遇。求得事件时刻以后，把到达的位置和速度传给下一阶段；碰撞带来的速度变化则由题设碰撞规律给出。下面先区分图上追踪的对象，再把这种接续用于反弹、机构和追逐。

6.2　位置、连接与运动过程

6.2.1　物质点与几何位置

车轮向前滚动时，轮缘上的一个标记会经历抬起、升高和重新触地的过程。若每一时刻只看轮子最下方的位置，它又始终位于轮心正下方。图 6.2 分别用 P 追踪固定材料标记，用 K 记录当前的几何接触位置。

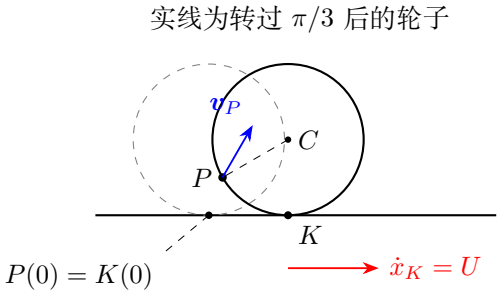


图 6.2: 原接触物质点离开地面，新的几何接触位置随圆心前进

对轮缘标记，先写轮心平动和相对轮心的转动，再求导；对几何位置 $K=(x_C,0)$，其坐标随轮心前进。纯滚动时，当下经过 K 的轮缘物质点速度为零，下一瞬间由新的材料点接替。两个追踪对象有各自的位置函数和速度。

机构中的杆端、销和共同铰属于指定物质点，刚体关系可以沿它们逐杆传递。两杆交点、圆与杆的交点、不断移动的绳切点，则从几何方程确定。先在图上给对象分别命名，写出的坐标就有明确含义。

6.2.2 把每一段接到前一段的末状态

球碰到固定光滑面时，位置连续，法向分速度按碰撞规律改变。图 6.3 中，球在 t_i 碰到墙面；碰后取 $\tau = t - t_i$，以碰撞位置和碰后速度积分：

$$\boldsymbol{v}(\tau) = \boldsymbol{v}(t_i^+) + \int_0^\tau \boldsymbol{a}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad \boldsymbol{r}(\tau) = \boldsymbol{r}(t_i) + \int_0^\tau \boldsymbol{v}(s)\,\mathrm{d}s.$$

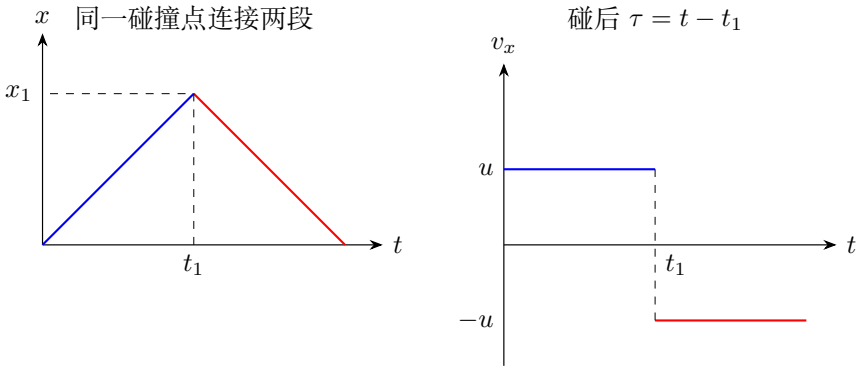


图 6.3: 碰壁处位置连续，速度跳变；碰后用局部时间重新起算

当前阶段的终点可以由地面高度、墙面位置、绳长变化或杆端位置给出。分别求出候选正时间，最先发生的事件结束这一阶段，随后以新的位置和速度建立下一段。

在斜面反弹中，沿面与法向坐标尤其方便。取沿上斜面为 s、朝面外为 n，重力分量为 $-g\sin\theta, -g\cos\theta$。每次离面法向速度为 $w > 0$，则

$$n(\tau) = w\tau - \tfrac{1}{2}g\cos\theta\,\tau^2, \qquad T = \frac{2w}{g\cos\theta}.$$

固定光滑斜面上完全弹性反射把 $-w$ 变回 $+w$，所以法向飞行重复。沿面速度在碰撞中保持连续，始终受 $-g\sin\theta$ 改变。图 6.4 把连续的法向位置和跳变的法向速度并列画出。

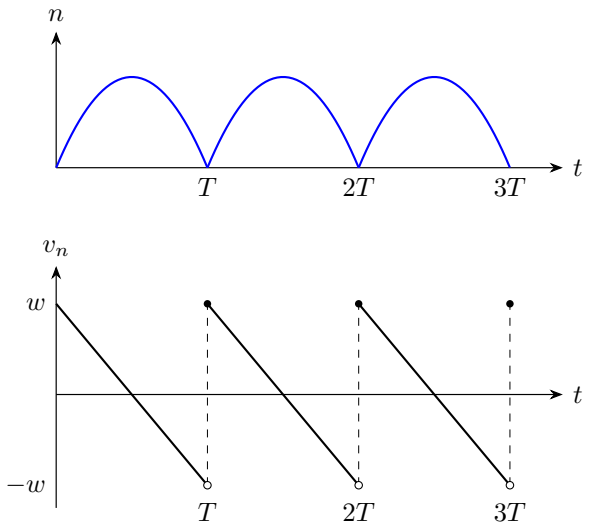


图 6.4: 连续的法向位置与碰撞时跳变的法向速度

回到斜面原点，要求 $s=0$ 与 $n=0$ 发生在同一时刻。法向归零的时刻为 NT，沿面返回时间由 $s(t)=0$ 求出，联立便出现碰撞次数 N 的整数条件。

6.2.3　从轨迹图读出时间与加速度

斜冰面上，沿等高线方向的重力分量为零，冰球在这个方向的速度恒定；沿斜面向上则有加速度 $-g\sin\alpha$。因此图上任意两点的横向间隔都能给出用时，即使它们处于飞行中途。

设 B 是沿面方向的最高点，A 到 B 用时 Δt，上升量 $\Delta\eta$。由末速度为零，$v_{\eta A}=g\sin\alpha\,\Delta t$，再积分得

$$\Delta\eta=\int_0^{\Delta t}(v_{\eta A}-g\sin\alpha\,\tau)\,\mathrm{d}\tau=[v_{\eta A}\tau-\tfrac{1}{2}g\sin\alpha\,\tau^2]_0^{\Delta t}=\tfrac{1}{2}g\sin\alpha\,\Delta t^2.$$

这把图中的长度与运动方程联系起来。读取网格时分别按两个坐标的标尺换成长度，速度与位移都使用这两个面内坐标。

6.3 刚体机构的速度与加速度

6.3.1 沿共同铰传递运动

从已知驱动杆的固定铰开始，先求端点速度。若两根杆在 B 处铰接，分别以各自已知端点为基点，写出同一个 $\boldsymbol{v}_B$：

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \omega_{AB}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}_{B/A}, \qquad \boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_C + \omega_{CB}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}_{B/C}.$$

比较水平、竖直分量，便可求从动杆的角速度。图 6.5 中的相对速度垂直杆，反映两端间距离保持不变。

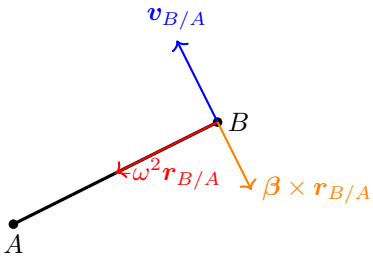


图 6.5: 相对速度垂直杆，相对加速度还含沿杆向内的分量

求加速度时，对位矢和角速度同时求导：

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \beta_{AB}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}_{B/A} - \omega_{AB}^2\boldsymbol{r}_{B/A}.$$

图中的橙箭头来自角速度变化，红箭头来自相对速度方向改变。再对另一根杆写 $\boldsymbol{a}_B$ 并联立，求出从动角加速度。驱动杆匀速时，它的 $\beta = 0$，从动杆的 β 由机构构形随时间改变来确定。

例如图示杆的相对位矢为 (a, b)，相对速度为 $\omega(-b, a)$，相对加速度为

$$\beta(-b, a) - \omega^2(a, b).$$

纵横分量把切向项和沿杆向内的项同时保留下来，四杆机构题会逐项使用这组表达式。固定铰的速度与加速度为零，共同铰两侧给出同一个矢量，沿杆的相对加速度投影为 $-\omega^2 l$。

例 6.4 的四杆机构把各铰接点联系在同一个瞬时构形中，由杆长不变确定各点速度的投影关系。

6.3.2 两处接触怎样共同限制运动

光滑接触让两物体在接触法向保持相同速度，切向则允许相对滑动。若题设规定无滑动，两处物质点的完整速度也相同。不同的接触条件对应不同方程。

图 6.6 中，两个对称斜面以相同速率 $v>0$ 相向移动。若假定两处都无滑动，轮上左右接触点就分别具有 $(v,0)$ 和 $(-v,0)$ 的速度。接触点连线水平，速度差也水平，而刚体定长关系要求

$$(\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A)\cdot\overrightarrow{AB}=0.$$

代入得到非零点积，说明这一组相向速度与两处无滑动条件互相冲突。

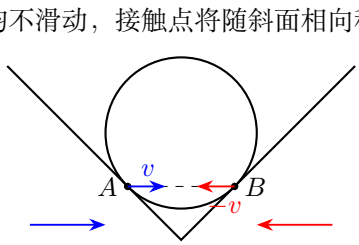


图 6.6: 对称斜面相向挤升时，两处无滑动速度与定长关系的冲突

若两处光滑，仅列法向条件，可求圆心的挤升速度；圆轮的自转还由初始转动和所受力矩决定。后面的例题分别求这两种接触模型，使每个结论对应题设的连接方式。

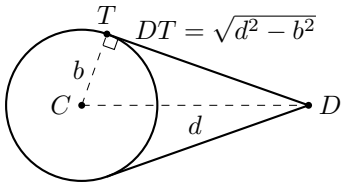
6.3.3　有限半径滑轮的切线几何

图 6.7 中，外点 D 到滑轮圆心的距离为 d，轮半径 b，绳与轮相切于 T。半径 CT 垂直绳，直角三角形给出

$$DT=\sqrt{d^2-b^2}.$$

轮心移动时，d 随时间改变而 b 固定，链式求导为

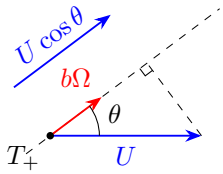
$$\frac{\mathrm{d}(DT)}{\mathrm{d}t}=\frac{2d\dot{d}}{2\sqrt{d^2-b^2}}=\frac{d\dot{d}}{\sqrt{d^2-b^2}}.$$



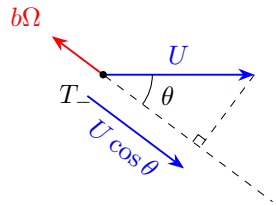
$CT\perp DT$，要求 $d>b$

图 6.7: 有限半径滑轮的切线段与圆心距离

再看上下两支绳关于水平线对称的绳路。轮心记为 P，向右速度为 U，小滑轮顺时针角速度为 Ω。绳从上切点 T_+ 向右上方伸出，从下切点 T_- 向右下方伸出，与水平的锐角均为 θ。图 6.8 把每个切点的平动速度与转动速度分开画出，并将水平平动速度投向实际绳向。



沿绳投影：$U\cos\theta + b\Omega$



沿绳投影：$U\cos\theta - b\Omega$

图 6.8: 上下切点的平动、转动速度与沿绳投影

沿两支绳向右取单位矢量 $\boldsymbol{e}_\pm = (\cos\theta, \pm\sin\theta)$，对应的切点半径为 $\boldsymbol{r}_\pm = b(-\sin\theta, \pm\cos\theta)$。由 $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega\boldsymbol{e}_z$，叉乘给出

$$\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_+ = b\Omega\boldsymbol{e}_+, \qquad \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_- = -b\Omega\boldsymbol{e}_-.$$

因此上、下切点的转动速度分别顺着、逆着所选绳向。将材料点的总速度 $U\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_\pm$ 点乘 $\boldsymbol{e}_\pm$，得到

$$v_{\text{绳},+} = U\cos\theta + b\Omega, \qquad v_{\text{绳},-} = U\cos\theta - b\Omega.$$

固定端所连绳支的沿绳流速为零，拉动端所连绳支的流速等于拉速。这两个条件共同确定轮心平动和轮的自转。若用总绳长计算，还需计入轮上的包覆圆弧及其包角变化；切点投影把这些局部几何关系直接联系到绳速。

求顶部、底部指定物质点的加速度，先由绳速与切线几何求 $\boldsymbol{a}_P, \omega, \beta$，再代入 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_P + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{r} - \omega^2\boldsymbol{r}$。轮半径明确保留在转动项中。点滑轮近似只用来处理题设允许忽略轮尺寸的绳路。

6.3.4 位置范围与最早相遇

长杆与落球相遇时，先用共同时间求球的位置与杆的方向。球落在杆所在直线上给一个方程，球到转轴的距离不超过杆长给另一个条件。朝向正确、距离合适的候选根中，最小正时间就是再次相遇。

同样，圆的上侧交点用正根给高度，绳长取正值，周期反弹的次数取整数。这些条件直接来自图中的对象和运动过程，随对应方程一起使用。

6.4　单条轨迹与可达范围

6.4.1　从摆线的相位求导

取初始轮缘标记在地面接触位置，顺时针累积转角 $q = ut/R$。轮心在 (Rq, R)，标记相对轮心在 $(-R\sin q, -R\cos q)$，因而

$$x = R(q - \sin q), \qquad y = R(1 - \cos q).$$

图 6.9 中，$q = 0, 2\pi$ 为触地点，$q = \pi$ 为高 $2R$ 的顶部。它们确定所用相位，并给随后各个导数以具体位置含义。

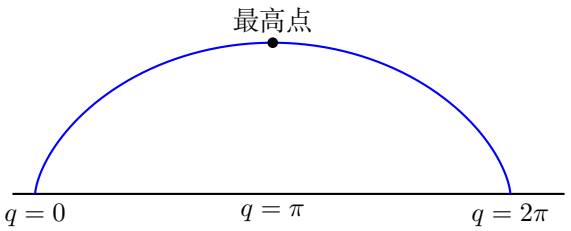


图 6.9: 摆线的相位和两个触地点

匀速滚动有 $\dot q = u/R$、$\ddot q = 0$。先对位置用链式法则，再对速度求导：

$$v_x = R(1-\cos q)\dot q = u(1-\cos q), \qquad v_y = R\sin q\,\dot q = u\sin q,$$
$$a_x = u\sin q\,\dot q = \frac{u^2}{R}\sin q, \qquad a_y = u\cos q\,\dot q = \frac{u^2}{R}\cos q.$$

在触地处，速度为零而加速度向上；在顶部，速度为 $2u$ 而加速度向下。正则点的曲率用 $v^3/|v_x a_y - v_y a_x|$ 求出，触地尖点则取邻近弧段的曲率极限。后面的摆线题将展开三角恒等式与路程积分。

6.4.2　自由抛射的包络与障碍

固定速率 v_0、改变发射方向，在固定 $x > 0$ 处用 $p = \tan\alpha$ 作参数。记 $K = gx^2/(2v_0^2)$，则

$$\begin{aligned} y &= xp - K(1+p^2) \\ &= -K\left[\left(p - \frac{x}{2K}\right)^2 - \frac{x^2}{4K^2}\right] - K \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - K\left(p - \frac{v_0^2}{gx}\right)^2. \end{aligned}$$

平方项给出所有轨迹的共同高度上界。目标低于包络时，角参数有两个根；恰在包络上，两根合并。对 $x<0$ 选择朝左发射的代表角，竖直方向则用竖直抛射。

图 6.10 取 $v_0^2/g=4$，目标 $P=(2,1)$ 低于包络高度 $3/2$。命中条件为 $1=2p-(1+p^2)/2$，即 $p^2-4p+3=0$，解得 $p=1,3$。这两条轨迹在墙址 $x=1/2$ 处的高度分别为

$$y_1=\frac{1}{2}-\frac{2}{32}=\frac{7}{16},\qquad y_2=\frac{3}{2}-\frac{10}{32}=\frac{19}{16}.$$

二者都低于墙高 $7/5$，实际过程先发生碰墙。这一例子把目标的自由可达条件与飞到目标之前的路径条件接在一起。

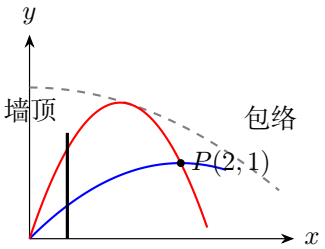


图 6.10: 前方墙截断两条自由抛射的命中轨迹

6.4.3 两种运动方式的时间分配

人先沿岸跑，再下水游泳。设跑速为 u、游速为 w，$u>w>0$，岸线为 x 轴，水面在 $y>0$ 一侧。两段持续时间为 t_1,t_2，游泳单位方向为 $\boldsymbol{e}$。总位移是两段位移之和，除以总时间 $T=t_1+t_2$：

$$\overline{\boldsymbol{u}}=\frac{ut_1\boldsymbol{e}_x+wt_2\boldsymbol{e}}{T}=\lambda u\boldsymbol{e}_x+(1-\lambda)w\boldsymbol{e},\qquad \lambda=\frac{t_1}{T}.$$

在图 6.11 的速度平面中，跑速端点固定在 $R=(u,0)$，游速端点 S 在以 O 为心、半径 w 的上半圆上。平均速度端点 V 在线段 RS 上，$SV:VR=\lambda:(1-\lambda)$。改变游向和时间比例，就得到各种可实现的平均速度。

船与人同时同地出发，追上时位移相同，因此船速等于人的全程平均速度。给定船的驶离方向，船速端点沿从 O 发出的射线移动，射线上最远的可实现端点决定最大船速。

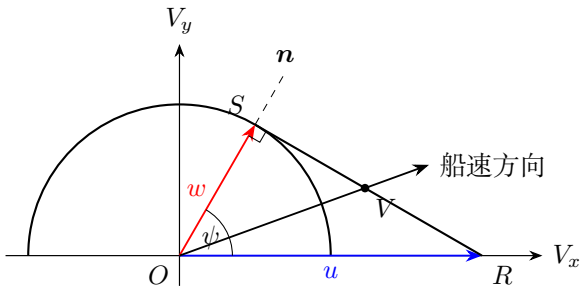


图 6.11: 从跑速端点作游速圆的切线，确定平均速度的最远端点

从 R 向游速圆作上方切线 RS，半径 OS 垂直 RS。直角三角形 OSR 给出

$$\cos\psi = \frac{OS}{OR} = \frac{w}{u}.$$

取 $\boldsymbol{n}$ 沿 OS。跑步速度在该方向的投影为 $u\cos\psi = w$；任一游泳速度的投影为 $w\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} \le w$，等号对应沿 OS 游泳。于是所有方案都满足

$$\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n} = \lambda u\cos\psi + (1-\lambda)w\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} \le w.$$

图中的切线 RS 正是投影等于 w 的直线。船速射线与线段 RS 相交于 V 时，沿 OS 游泳，再取由 V 在线段上位置确定的时间比例，即可实现该最大船速。若射线在 OS 的远岸一侧，射线与可选区域的最远交点落在游速圆弧上，直接游泳实现该方向的最大速率。这个几何构造把速度上界和实际跑游方案接在一起。

6.5　对称追逐

6.5.1　等边构形的缩小与旋转

三只等速物体从等边三角形顶点循环追逐，每一只始终朝下一只的即时位置运动。将图形转过 120° 并重新编号，运动规则保持相同；所以相遇前的构形始终等边，中心 O 固定。其运动可用到中心距离 ρ 与整体转角 φ 描述。

图 6.12 中，顶点 A 的速度沿 AB，与向心方向夹角 30°。投影得到

$$\dot\rho = -u\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt3}{2}u, \qquad \rho\dot\varphi = u\sin 30^\circ = \frac{u}{2}.$$

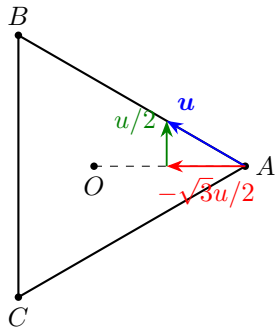


图 6.12: 等边追逐的速度同时缩小半径并转动构形

径向分量使构形缩小，切向分量使构形旋转。以 $\rho(0)=\rho_0$ 积分：

$$\rho-\rho_0=-\frac{\sqrt{3}u}{2}\int_0^t \mathrm{d}s=-\frac{\sqrt{3}u}{2}[s]_0^t=-\frac{\sqrt{3}u}{2}t.$$

故 $\rho=\rho_0(1-t/T)$，相遇时间 $T=2\rho_0/(\sqrt{3}u)$。每只走过的路程是 uT，速度方向随图形转动。

6.5.2 对数螺线的获得

将两个分量方程相除，消去时间：

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{-\sqrt{3}u/2}{u/(2\rho)}=-\sqrt{3}\rho.$$

在相遇前 $\rho>0$ 的区间分离变量，带入初值积分：

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}r}{r}=-\sqrt{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{d}\psi,\qquad [\ln r]_{\rho_0}^{\rho}=-\sqrt{3}[\psi]_{\varphi_0}^{\varphi}.$$

代入上下限并取指数，

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0}=-\sqrt{3}(\varphi-\varphi_0),\qquad \rho=\rho_0\mathrm{e}^{-\sqrt{3}(\varphi-\varphi_0)}.$$

这是一条对数螺线。将径向解代回切向方程，还得到

$$\varphi-\varphi_0=\frac{u}{2\rho_0}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{1-s/T}=-\frac{uT}{2\rho_0}[\ln(1-s/T)]_0^t=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(1-t/T).$$

接近相遇时，转角不断增加，每一圈的尺度同时缩小；剩余路程 $u(T-t)$ 趋零，所有物体仍在有限时间到达中心。

6.6　例题与分析

例 6.1 (斜冰面上的网格轨迹)**.** 光滑斜冰面倾角为 α。冰球以 10m/s 沿面抛出，初速度方向与沿面等高线成 60°。图中横轴沿等高线，纵轴沿斜面向上，网格每格均为 2.5m；轨迹上 A 至最高点 B 横向前进 2 格、向上 1 格。取 $g = 10\mathrm{m/s^2}$，求 α。

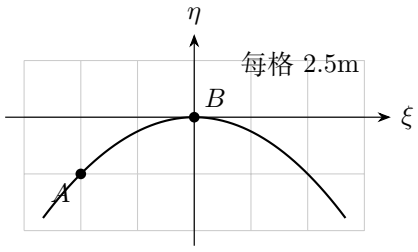


图 6.13: 沿等高线与沿斜面的网格标尺

解　用等高线方向的恒速读取两点间时间

沿图 6.13 等高线方向的重力分量为零，故 $v_\xi = 10\cos 60^\circ = 5\mathrm{m/s}$。$A$ 至 B 的横向距离为 $2 \times 2.5 = 5\mathrm{m}$，用时 $\Delta t = 5/5 = 1\mathrm{s}$。

B 为沿面轨迹的最高点，$v_{\eta B} = 0$。以经过 A 为当地时间 $\tau = 0$，沿面向上加速度为 $-g\sin\alpha$，因此

$$0 = v_{\eta A} - g\sin\alpha\,\Delta t \quad\Longrightarrow\quad v_{\eta A} = g\sin\alpha\,\Delta t.$$

用这个末速度条件消去未知的 $v_{\eta A}$，再计算向上位移：

$$\begin{aligned}\Delta\eta &= \int_0^{\Delta t} (v_{\eta A} - g\sin\alpha\,\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \left[v_{\eta A}\tau - \frac{g\sin\alpha}{2}\tau^2\right]_0^{\Delta t} = \frac{1}{2}g\sin\alpha\,\Delta t^2.\end{aligned}$$

图中上升一格，即 $\Delta\eta = 2.5\mathrm{m}$。

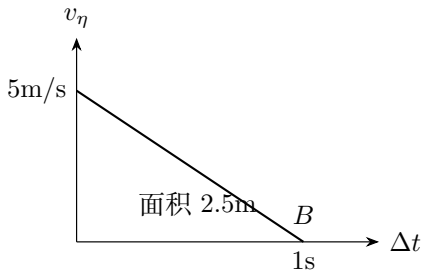


图 6.14: 到最高点的沿面速度图面积给出上升量

从到顶点的竖直面积反求沿面加速度

得到 $\boxed{\sin\alpha = 1/2,\ \alpha = 30^\circ}$。图 6.14 中的速度图从 A 计时，三角形面积为沿面上升量 2.5m。初始发射角给出恒定的等高线速度，A 处的沿面分速度则由它到顶点的运动求出。

代回得到 $v_{\eta A} = 10 \times (1/2) \times 1 = 5\text{m/s}$。$A$ 位于飞行中途，其沿面分速度已从发射时的 $10\sin 60^\circ\text{m/s}$ 减小到 5m/s。

例 6.2 (斜面弹跳后回到原点)**.** 斜面向右上倾角 θ，球从斜面上原点以 v_0 发射，方向比斜面再向上抬 θ。与斜面每次碰撞均光滑完全弹性。求球恰在第 N 次碰撞回到原点的条件及总时间。

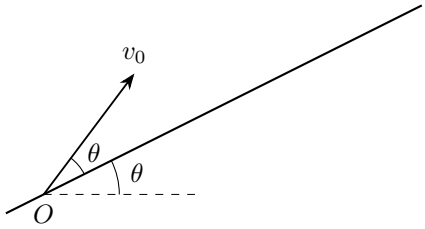


图 6.15: 相对斜面的发射方向与重力分量

解　按法向反弹确定重复碰撞间隔

沿图 6.15 斜面向上取 s，外法向取 n。初速度分量为 $(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$，加速度为 $(-g\sin\theta, -g\cos\theta)$。每段从刚离开斜面起取局部时间 τ，法向位置为

$$n(\tau) = v_0\sin\theta\,\tau - \frac{1}{2}g\cos\theta\,\tau^2.$$

令 $n(\tau) = 0$，除去刚离面的 $\tau = 0$，得 $T = 2v_0\sin\theta/(g\cos\theta) = 2v_0\tan\theta/g$。碰前法向速度为 $v_0\sin\theta - g\cos\theta\,T = -v_0\sin\theta$；完全弹性反射将它反号，所以各次离面法向初速度相同，碰撞间隔恒为这个 T。

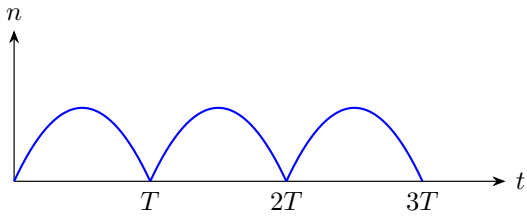


图 6.16: 等间隔的法向反弹与触地时刻

将沿面返回时间与整数次碰撞同步

切向运动不受反射改变，所以从发射开始的切向坐标可跨越碰撞使用：

$$s(t) = v_0\cos\theta\, t - \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2 = t\left(v_0\cos\theta - \frac{1}{2}g\sin\theta\, t\right).$$

回到 $s = 0$ 时排除零根，解括号为零，得到 $t_r = 2v_0\cos\theta/(g\sin\theta) = 2v_0\cot\theta/g$。图 6.16 要求此时法向也归零，即取第 N 次碰撞时刻 NT。将两个时间式相除，

$$N = \frac{t_r}{T} = \frac{2v_0\cos\theta}{g\sin\theta}\frac{g\cos\theta}{2v_0\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta.$$

所以条件为 $\boxed{N = \cot^2\theta \in \mathbb{N}^+}$，总时间为 $\boxed{t_r = 2v_0\cot\theta/g}$。正整数 N 使沿面返回与法向触地在同一时刻发生，从而球的位置真正回到原点。

例 6.3 (到达斜面的最短滑行时间)**.** 点 A 在倾角 $\theta \in [0, \pi/2)$ 的斜面上方，沿竖直方向到斜面的距离为 h。斜面向右上方延伸。从 A 铺一条光滑直木板至斜面任一点，物块由静止沿板滑下。木板方向可选，求到达斜面的最短时间及木板方向。

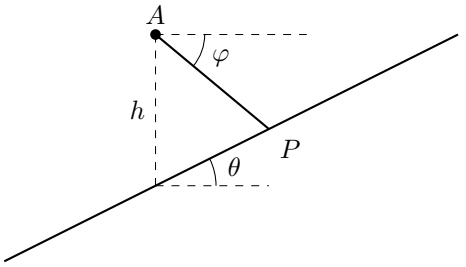


图 6.17: 高处起点至斜面的直板方向

解　用板长和竖直落差建立滑行时间

如图 6.17，取木板向右下方与水平夹角 φ，长为 s。交点条件为 $s\sin\varphi + s\cos\varphi\tan\theta = h$，所以 $s = h\cos\theta/\sin(\varphi+\theta)$。沿板加速度为 $g\sin\varphi$，由静止滑下时间满足

$$t^2 = \frac{2h\cos\theta}{g\sin\varphi\sin(\varphi+\theta)}.$$

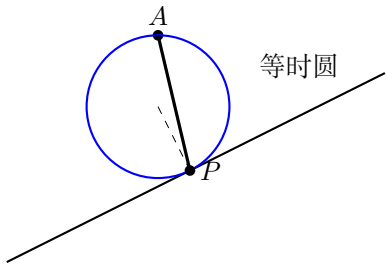


图 6.18: 扩大到首次接触斜面的等时圆

优化角度并确认可行方向

由 $2\sin\varphi\sin(\varphi+\theta)=\cos\theta-\cos(2\varphi+\theta)$，最大分母在 $2\varphi+\theta=\pi$ 取得，$\boxed{\varphi=\pi/2-\theta/2}$，$\boxed{t_{\min}=2\sqrt{h\cos\theta/[g(1+\cos\theta)]}}$。图 6.18 把这些最优关系画成等时圆：圆逐渐扩大到首次与斜面相切，对应木板的最优方向。下面求出这个圆，说明角度最值的几何意义。

以等时圆首次相切证明全局最优

等时圆可由坐标直接证明：向下取竖直坐标 z，静止滑行时间 t 后有 $s=\frac{1}{2}g\sin\varphi\,t^2$，所以 $x=K\sin\varphi\cos\varphi$、$z=K\sin^2\varphi$，其中 $K=gt^2/2$。先算平方和，

$$x^2+z^2=K^2\sin^2\varphi(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=K^2\sin^2\varphi=Kz.$$

再将 z^2-Kz 配方，得到 $x^2+(z-K/2)^2=(K/2)^2$。随时间增大圆才首次碰到斜面，相切给全局最短时间；$\theta=0$ 时最优板竖直，时间退化为 $\sqrt{2h/g}$，与自由落体一致。

例 6.4 (四杆机构的速度与加速度)**.** $A=(0,0)$、$B=(4l,0)$ 为固定铰。某瞬间 $C=(0,2l)$、$D=(l,3l)$，故 $CD=\sqrt{2}l$ 且 $CD\perp BD$。杆 AC 以恒定角速度大小 ω 顺时针转动。求 D 点的速度与加速度。

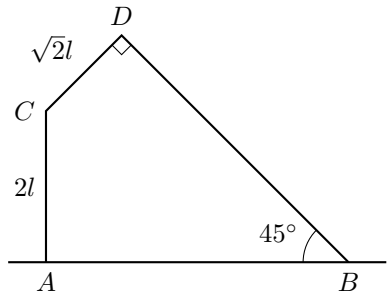


图 6.19: 给定瞬时构形的四杆机构与固定铰

解 先由驱动杆求共同铰的速度

取图 6.19 的 x 向右、y 向上，逆时针角量为正。驱动杆 AC 以恒定顺时针角速度转动，所以

$$\boldsymbol{v}_C = (2l\omega, 0), \qquad \boldsymbol{a}_C = (0, -2l\omega^2).$$

位矢为 $\boldsymbol{r}_{D/C} = (l, l)$、$\boldsymbol{r}_{D/B} = (-3l, 3l)$。分别记杆 CD, BD 的有符号角速度为 p, q，共同铰 D 的两个速度表达式为

$$\boldsymbol{v}_D = (2l\omega - pl, pl) = (-3ql, -3ql).$$

比较纵分量得 $p = -3q$，再比较横分量得 $2\omega - p = -3q = p$，所以 $p = \omega$、$q = -\omega/3$，$\boxed{\boldsymbol{v}_D = (l\omega, l\omega)}$。

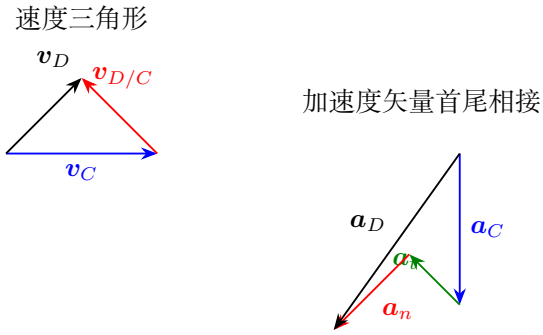


图 6.20: 共同铰的速度与加速度矢量合成

联立两根从动杆的加速度

分别记从动杆 CD, BD 的角加速度为 b, c。图 6.20 左侧是速度三角形，右侧把 $\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$ 首尾相接。

其中 $\boldsymbol{a}_t = b(-l, l)$，$\boldsymbol{a}_n = -\omega^2(l, l)$。杆的构形继续改变，$p, q$ 相应变化，其导数分别记为 b, c。利用两个刚体表达式得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_D &= \boldsymbol{a}_C + b(-l, l) - \omega^2(l, l) \\
&= (-lb - l\omega^2,\ lb - 3l\omega^2), \\
\boldsymbol{a}_D &= c(-3l, -3l) - \frac{\omega^2}{9}(-3l, 3l) \\
&= (-3lc + l\omega^2/3,\ -3lc - l\omega^2/3).
\end{aligned}$$

比较分量消去未知角加速度

第二个表达式的纵横分量之差为 $-2l\omega^2/3$；第一个为 $2lb-2l\omega^2$。因此 $2lb-2l\omega^2=-2l\omega^2/3$，移项并除以 $2l$，得 $b=2\omega^2/3$。代回第一式的横分量，$a_{Dx}=-5l\omega^2/3$；再与第二式横分量相等，有 $-3lc+l\omega^2/3=-5l\omega^2/3$，所以 $c=2\omega^2/3$。于是

$$\boxed{\boldsymbol{a}_D=(-5l\omega^2/3,-7l\omega^2/3)},\qquad |\boldsymbol{a}_D|=\frac{\sqrt{74}}{3}l\omega^2.$$

共同铰的沿杆加速度

将结果分别代回两根杆的加速度式均一致，且沿杆 CD 有 $(\boldsymbol{a}_D-\boldsymbol{a}_C)\cdot(1,1)/\sqrt{2}=-\sqrt{2}l\omega^2$，恢复该杆向心项。

两根从动杆均有角加速度 $2\omega^2/3$，由它们与驱动杆的位置关系共同确定。

例 6.5 (有限半径滑轮的速度与加速度)**.** 半径 r 的圆柱在水平地面纯滚动，圆心同轴装有可独立转动的小滑轮 P。(1) 已知圆柱顺时针角速度 ω、角加速度 β，求中心 P 的速度、加速度。(2) 小滑轮半径为 $0<b<r/\sqrt{2}$，绳绕其左侧且无滑动。下绳端固定于地面点 D，上绳经定滑轮 C 后水平向右以恒速 v 拉动；C 在 D 正上方，$CD=2r$。上下切线绳段当下分别向右上、右下与水平成 $45°$。定滑轮按点滑轮处理，求小滑轮当下顶部 B、底部 A 的物质速度与加速度；再求当下位于绳切点 $T_\pm$ 的轮缘材料点的速度与加速度。

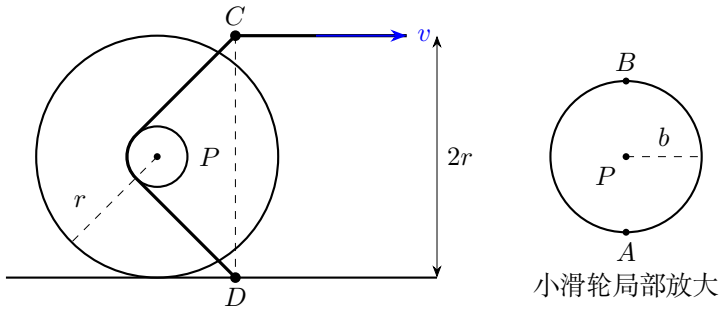


图 6.21: 同轴小滑轮与上下对称的实际切线绳路

解　圆柱中心的纯滚动关系

图 6.21 中圆柱与地面无滑动，中心高度保持为 r。顺时针角量为正时，纯滚动关系为 $x_P-r\varphi=$ 常量。逐次求导得

$$\boxed{\boldsymbol{v}_P=(r\omega,0),\qquad \boldsymbol{a}_P=(r\beta,0)}.$$

小滑轮可独立自转，故其自转角速度另由绳的条件确定。

分别在上下切点列绳速条件

设中心向右速率为 u，小滑轮顺时针角速度为 Ω。由于 C, D 在同一竖线上，且中心 P 的高度始终为 $CD/2 = r$，上下两条切线关于过 P 的水平线对称。在邻近时刻也可用同一个角 θ 表示两绳与水平的锐角。

图 6.22 中，两个切点的平动速度均向右，投向绳后都是 $u\cos\theta$。顺时针自转在上切点产生沿右上绳向的 $b\Omega$，在下切点产生逆着右下绳向的 $b\Omega$。这些方向也可由 $\boldsymbol{r}_{\pm} = b(-\sin\theta, \pm\cos\theta)$ 与 $\boldsymbol{\Omega} = -\Omega\boldsymbol{e}_z$ 的叉乘得到。

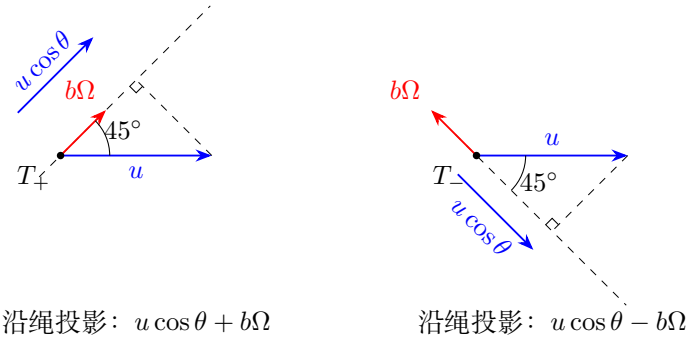


图 6.22: 上下切点的平动、转动速度与沿绳投影

下绳端固定，沿绳流速为零；上绳的流速等于恒定拉速 v。分别把两切点的平动、转动投影相加，得

$$u\cos\theta - b\Omega = 0, \qquad u\cos\theta + b\Omega = v.$$

两式相加和相减，分别得到

$$u = \frac{v}{2\cos\theta}, \qquad \Omega = \frac{v}{2b}, \qquad \dot{\Omega} = 0.$$

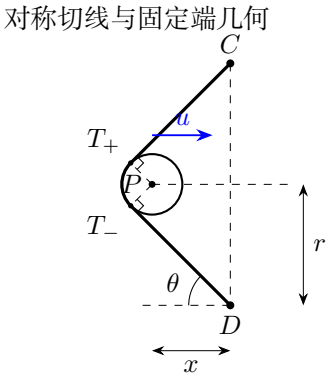


图 6.23: 切线角、轮心到固定竖线的距离与轮半径

对切线几何求导求中心加速度

图 6.23 中 x 是中心 P 到固定竖线 CD 的水平距离。下绳的方向为 $(\cos\theta,-\sin\theta)$，取与它垂直的单位法向 $(\sin\theta,\cos\theta)$。位矢 $\overrightarrow{PD}=(x,-r)$ 在该法向上的投影为 $x\sin\theta-r\cos\theta$；切线离圆心的距离是 b，且位于左侧，所以

$$r\cos\theta-x\sin\theta=b,\qquad \dot{x}=-u.$$

对几何关系逐项求导：

$$-r\sin\theta\dot{\theta}-\dot{x}\sin\theta-x\cos\theta\dot{\theta}=0,$$

整理得

$$\dot{\theta}=\frac{u\sin\theta}{r\sin\theta+x\cos\theta}.$$

再对中心速率求导；v 恒定而 θ 变化，所以

$$a_P=\frac{v\sin\theta}{2\cos^2\theta}\dot{\theta}=u\tan\theta\dot{\theta}.$$

当 $\theta=45^\circ$ 时，几何式给 $x=r-\sqrt{2}b>0$，进而

$$u=\frac{v}{\sqrt{2}},\qquad r\sin\theta+x\cos\theta=\sqrt{2}r-b,$$

$$\dot{\theta}=\frac{v/2}{\sqrt{2}r-b},\qquad \boxed{a_P=\frac{v^2}{4r-2\sqrt{2}b}}.$$

合成顶部与底部物质点的速度和加速度

计算题目指定的两个轮缘物质点。顶部 B、底部 A 的相对位矢为 $(0,b)$、$(0,-b)$；顺时针自转使它们相对中心的速度分别向右、向左，大小均为 $b\Omega=v/2$。由图 6.24 的分解，得到

$$\boxed{\boldsymbol{v}_B=(v/\sqrt{2}+v/2,0),\qquad \boldsymbol{v}_A=(v/\sqrt{2}-v/2,0)}.$$

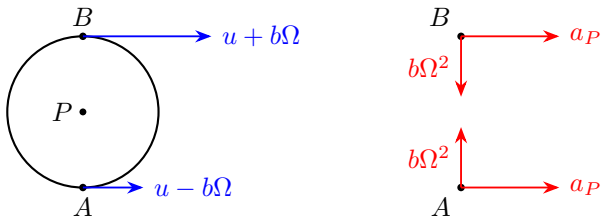


图 6.24: 顶部、底部物质点的平动与向心加速度

由于 $\dot{\Omega}=0$，两点没有相对圆心的切向加速度，但仍有向心加速度 $b\Omega^2=v^2/(4b)$。顶部指向下方，底部指向上方，再加中心的向右加速度，得

$$\boxed{\boldsymbol{a}_B=(a_P,-v^2/(4b)),\qquad \boldsymbol{a}_A=(a_P,v^2/(4b))}.$$

图中的 A,B 是当下的顶部、底部物质点；绳在左侧的 $T_\pm$ 处与轮相切。

向心项 $v^2/(4b)$ 保留了轮半径 b，表明轮缘加速度与具体滑轮尺寸有关。

切点处的轮缘材料运动

区分轮缘最高、最低点与两处绳切点。图 6.25 中 $T_\pm$ 的相对位矢为 $(-b\sin\theta,\pm b\cos\theta)$，它们在轮的左上、左下侧，与顶部 B、底部 A 分别标出。对顺时针自转，$\boldsymbol{\omega}=(0,0,-\Omega)$，所以当下处于切点的轮缘物质点速度为

$$\boldsymbol{v}_{T_+}=(u+b\Omega\cos\theta,b\Omega\sin\theta),$$

$$\boldsymbol{v}_{T_-}=(u-b\Omega\cos\theta,b\Omega\sin\theta).$$

在 $\theta=45^\circ$ 代入 $u=v/\sqrt{2}$、$b\Omega=v/2$，分别为 $(3v/(2\sqrt{2}),v/(2\sqrt{2}))$ 和 $(v/(2\sqrt{2}),v/(2\sqrt{2}))$。

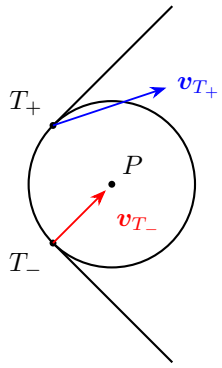


图 6.25: 绳切点处的轮缘物质速度与绳向投影

把下切点速度投向下绳方向 $(\cos\theta,-\sin\theta)$，得到 $u\cos\theta-b\Omega=0$；上切点投向上绳方向则为 $u\cos\theta+b\Omega=v$，恰好恢复绳速约束。下切点处轮缘物质速度垂直于下段绳，沿绳投影为零；上切点沿绳投影为 v。

因 $\dot{\Omega}=0$，切点处轮缘物质加速度为 $\boldsymbol{a}_P-\Omega^2\boldsymbol{r}_{T_\pm/P}$，所以

$$\boldsymbol{a}_{T_\pm}=\left(a_P+\frac{v^2}{4\sqrt{2}b},\ \mp\frac{v^2}{4\sqrt{2}b}\right)\quad(\theta=45^\circ).$$

这一加速度追踪当下位于切点的材料标记。几何切点的位置则由随时间改变的切线方向确定。

例 6.6 (两转杆的几何交点)**.** 固定点 A, B 相距 l。两长杆分别绕 A, B 以顺时针角速度大小 $\omega, 2\omega$ 转动。某瞬间 ABP 为等边三角形，P 是两杆交点且在 AB 上方。求 P 的速度。

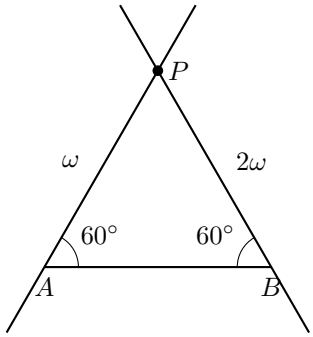


图 6.26: 等边瞬间的两根转杆与上方几何交点

解　分别沿两根杆的法向约束交点速度

取图 6.26 中 $A=(0,0), B=(l,0), P=(l/2, \sqrt{3}l/2)$。交点在每根杆的法线方向随该杆运动，沿杆方向则可相对滑动。左杆法向单位矢量取 $\boldsymbol{n}_1=(-\sqrt{3}/2, 1/2)$，右杆取 $\boldsymbol{n}_2=(-\sqrt{3}/2, -1/2)$。两杆的顺时针转动使当前材料点沿各自负法向运动，速率为 $l\omega$、$2l\omega$。图 6.27 将这两个法向投影分别画出，因而

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}v_x+\frac{1}{2}v_y=-l\omega, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}v_x-\frac{1}{2}v_y=-2l\omega.$$

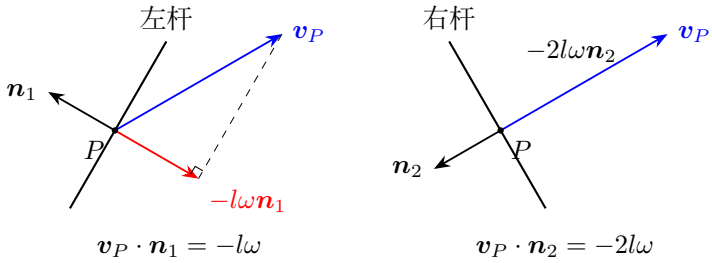


图 6.27: 交点速度在左右两杆法线上的投影

合成速度并讨论沿杆相对滑动

两条法向方程相加，消去 v_y，得 $-\sqrt{3}v_x=-3l\omega$，故 $v_x=\sqrt{3}l\omega$；用第一式减第二式得 $v_y=l\omega$。因此

$$\boxed{\boldsymbol{v}_P=(\sqrt{3}l\omega, l\omega)}, \qquad |\boldsymbol{v}_P|=\sqrt{3l^2\omega^2+l^2\omega^2}=2l\omega.$$

两个分量均正，且 $v_y/v_x=1/\sqrt{3}$，所以向右上与水平成 30°。

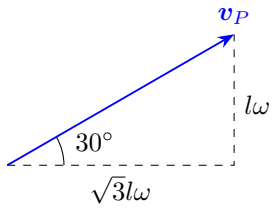


图 6.28: 求得的交点速度及其水平、竖直分量

图 6.28 把求得的速度分成水平、竖直两项；图 6.27 中的斜向投影则用于建立两根杆的运动条件。

将答案分别减去两杆当前材料点速度 $(\sqrt{3}l\omega/2, -l\omega/2)$ 与 $(\sqrt{3}l\omega, l\omega)$，所得相对速度各自沿对应杆，第一杆允许滑动、第二杆在此瞬间相对滑动恰为零。这种零滑动是题设等边构形的瞬时结果；邻近时刻的交点仍由两杆的位置共同确定。

例 6.7 (水平端匀速的滑杆)**.** 杆长 l，$A = (l\cos\theta, 0)$ 沿水平导轨向右匀速 v_0，$B = (0, l\sin\theta)$ 沿竖直导轨运动，$0 < \theta < \pi/2$。杆上 C 满足 $AC = \lambda l$，求 B, C 的速度，并给出 C 的轨迹。

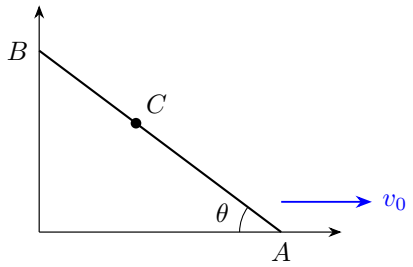


图 6.29: 水平端匀速驱动的滑杆与固定分点

解　由水平端驱动确定角速度和竖直端速度

由图 6.29 的 $x_A = l\cos\theta$ 和已知 $\dot{x}_A = v_0$，先得到参数的变化率

$$-l\sin\theta\dot{\theta} = v_0, \qquad \dot{\theta} = -\frac{v_0}{l\sin\theta}.$$

再对 $y_B = l\sin\theta$ 求导，有

$$\dot{y}_B = l\cos\theta\dot{\theta} = -v_0\cot\theta, \qquad \boxed{\boldsymbol{v}_B = (0, -v_0\cot\theta)}.$$

在题设角度区间内，B 沿竖直导轨向下。

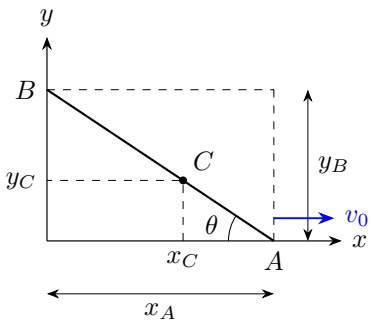


图 6.30: 固定分点的坐标分别取自两端的水平和竖直投影

对固定分点坐标求速度

图 6.30 的分点满足 $\boldsymbol{r}_C = (1-\lambda)\boldsymbol{r}_A + \lambda \boldsymbol{r}_B$，所以

$$x_C = (1-\lambda) l\cos\theta, \qquad y_C = \lambda l \sin\theta.$$

由于 λ 固定，对分点关系求导等价于对上述坐标分别求导，得到

$$\boldsymbol{v}_C = (1-\lambda)(v_0, 0) + \lambda(0, -v_0\cot\theta) = \boxed{((1-\lambda)v_0, -\lambda v_0\cot\theta)}.$$

消去角参数后限定椭圆弧范围

当 $0<\lambda<1$，将两个坐标分别除以 $(1-\lambda)l$、λl，平方相加便消去 θ，有

$$\boxed{\frac{x_C^2}{[(1-\lambda)l]^2} + \frac{y_C^2}{(\lambda l)^2} = 1}.$$

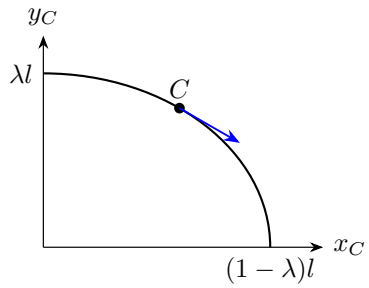


图 6.31: 固定分点的第一象限椭圆轨迹及切向速度

图 6.31 画出第一象限椭圆弧，速度沿它的切线。端点 $\lambda = 0, 1$ 分别沿水平、竖直直线运动，应直接使用端点关系。本题水平端匀速，给出 C 的恒定水平分速度；第三讲竖直端给定速度时，同一椭圆由另一时间规律通过。

例 6.8 (两斜面间圆轮的运动)**.** 左斜面向右下倾角 θ_1，以 $v_1 > 0$ 向右平移；右斜面向右上倾角 θ_2，以 $v_2 > 0$ 向左平移。圆轮同时接触二者。(1) 判断两处能否同时无滑动。(2) 若改为两接触均光滑且持续保持接触，求圆心速度。

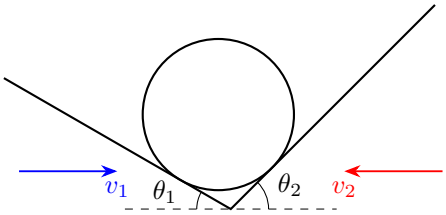


图 6.32: 相向平移的两个斜面及圆轮接触位置

解　两处无滑动的速度条件

设图 6.32 两接触处指向圆心的单位法线为 $\boldsymbol{n}_1 = (\sin\theta_1, \cos\theta_1)$、$\boldsymbol{n}_2 = (-\sin\theta_2, \cos\theta_2)$。设圆心速度为 (V_x, V_y)、逆时针角速度为 Ω，则两个接触点相对圆心的位矢分别为 $-r\boldsymbol{n}_1, -r\boldsymbol{n}_2$。若两处均无滑动，将两个物质点的速度分别等于斜面速度，有

$$(V_x + r\Omega\cos\theta_1,\ V_y - r\Omega\sin\theta_1) = (v_1, 0),$$
$$(V_x + r\Omega\cos\theta_2,\ V_y + r\Omega\sin\theta_2) = (-v_2, 0).$$

两式竖直分量相减得 $\Omega r(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) = 0$。两个斜面倾角均为锐角，正弦和非零，故 $\Omega = 0$；此时水平分量又要求 $V_x = v_1 = -v_2$，与 $v_1, v_2 > 0$ 矛盾。因此相向移动时两处同时无滑动不可能。

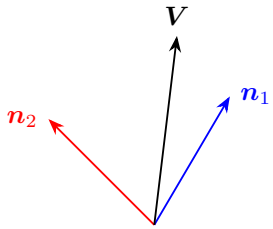


图 6.33: 两条接触法线与圆心速度的投影

改用两个法向条件求圆心速度

若只要求光滑接触，图 6.33 的法向相对速度为零给 $V_y = (v_1 - V_x)\tan\theta_1 = (v_2 + V_x)\tan\theta_2$。将两个表达式相等，含 V_x 的项移到同一侧：

$$V_x(\tan\theta_1 + \tan\theta_2) = v_1\tan\theta_1 - v_2\tan\theta_2.$$

正切和为正，可以相除，再代回任一个 V_y 式，解得

$$\boxed{V_x=\frac{v_1\tan\theta_1-v_2\tan\theta_2}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}},$$

$$\boxed{V_y=\frac{(v_1+v_2)\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1+\tan\theta_2}}.$$

对称斜面、等速相向时，圆心水平速度为零、竖直向上，符合挤升的几何变化；自转的变化由初始转动和力矩决定。

例 6.9 (圆上端点与圆的切点)**.** 固定圆半径为 r，地面滑块 B 向左速率 v。(1) 杆端 A 沿圆周运动，OA 与右向水平线成 θ_1，从 B 指向 A 的杆与左向水平线成 θ_2，求端点 A 速度。(2) 长杆始终与圆相切，求几何切点的速度，并与杆上当下处于切点的物质点速度比较。取接触在右上侧。

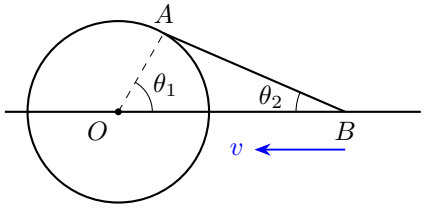


图 6.34: 圆周上的固定杆端和沿地面移动的滑块

解　固定杆端沿圆运动：用沿杆投影相等

(1) 取图 6.34 中沿圆周逆时针的端点速度为 u_A。圆周切线与半径垂直，因此

$$\boldsymbol{v}_A=u_A(-\sin\theta_1,\cos\theta_1),\qquad \boldsymbol{v}_B=(-v,0).$$

从 B 指向 A 的杆方向单位矢量为 $\boldsymbol{e}=(-\cos\theta_2,\sin\theta_2)$。杆长不变，故 $(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{e}=0$，即

$$u_A\sin\theta_1\cos\theta_2+u_A\cos\theta_1\sin\theta_2=v\cos\theta_2.$$

用正弦和角公式整理，得到

$$\boxed{u_A=\frac{v\cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}}.$$

在题设右上侧构形中两角均为锐角，分母为正，端点速度沿圆周切向左上。这里 A 是杆上固定的物质端点，沿杆的速度投影相等直接适用。

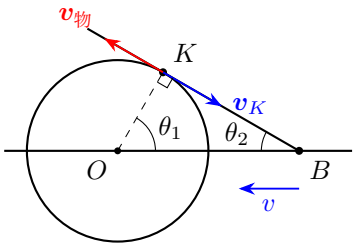


图 6.35: 圆的几何切点与杆上重合材料点

几何切点：对切线几何求导

（2）图 6.35 中几何切点记为 K。由于 $OK \perp BK$，有 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$；直角三角形 OKB 又给出

$$OB = \frac{r}{\cos\theta_1}.$$

滑块向左，所以 $\dot{OB} = -v$。对上式求导，保留角度的变化，得到

$$-v = r\sec\theta_1\tan\theta_1\dot{\theta}_1 = \frac{r\sin\theta_1}{\cos^2\theta_1}\dot{\theta}_1,$$

$$\dot{\theta}_1 = -\frac{v\cos^2\theta_1}{r\sin\theta_1} < 0.$$

几何切点沿圆周顺时针移动，速率为

$$\boxed{u_K = r|\dot{\theta}_1| = \frac{v\cos^2\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{v\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2}},$$

方向在图中为右下。

另算当前重合的物质点速度并比较方向

再看杆上当时位于 K 的物质点。杆始终与固定圆相切，该点的法向速度为零，故速度只能沿切线杆。刚杆两点沿杆的速度投影相等，取沿 BK 的左上方向 $\boldsymbol{e} = (-\cos\theta_2, \sin\theta_2)$，则

$$\boldsymbol{v}_{物}\cdot\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{e} = v\cos\theta_2.$$

所以物质点速率为 $\boxed{u_{物} = v\cos\theta_2}$，方向左上，与蓝色几何切点箭头相反。沿固定圆移动的 K 不断对应新的杆上材料，几何位置向右下移动，当前材料则沿杆向左上滑动。以上公式限定 $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi/2$，端点退化构形需另作极限分析。

例 6.10（圆盘驱动两类从动机构）. 圆盘连同支架作为一个刚体绕固定轴 C 转动，圆心为 O。某瞬间 $CO = l$ 向右水平，角速度为逆时针 ω；圆盘半径为 r，左上侧点 M 满足 $\boldsymbol{r}_{M/O} = r(-\cos\theta, \sin\theta)$。比较：（甲）只能水平移动的细杆，端点在固定高度与圆盘光滑接触；（乙）圆盘物质销 M 嵌在水平移动框的竖直槽内。分别求杆和框的水平速度。

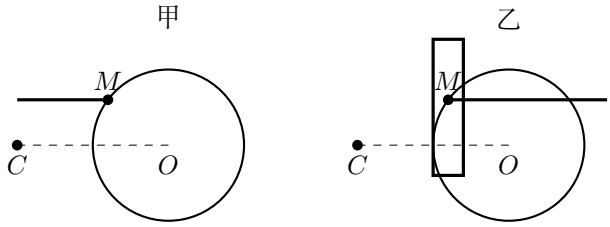


图 6.36: 同一圆盘分别驱动光滑杆端和竖槽框

解　先求圆盘指定物质点的速度

两机构在图 6.36 中虽然接触位置相同，约束不同。圆心速度由 $\omega\boldsymbol{e}_z \times (l, 0)$ 得到 $(0, l\omega)$；相对圆心的转动速度为

$$\omega\boldsymbol{e}_z \times r(-\cos\theta, \sin\theta) = (-r\omega\sin\theta, -r\omega\cos\theta).$$

两矢量相加，圆盘当下物质点 M 的速度为 $\boldsymbol{v}_M = (-r\omega\sin\theta, \omega(l - r\cos\theta))$。



图 6.37: 法向投影与水平分量对应两种连接方式

光滑接触：约束法向相对速度

甲杆端速度为 $(U_A, 0)$，光滑接触只要求相对法向速度为零。法线沿半径方向。将相对速度向 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 投影，逐项展开：

$$\begin{aligned} 0 &= (U_A + r\omega\sin\theta)(-\cos\theta) - \omega(l - r\cos\theta)\sin\theta \\ &= -U_A\cos\theta - r\omega\sin\theta\cos\theta - l\omega\sin\theta + r\omega\cos\theta\sin\theta \\ &= -U_A\cos\theta - l\omega\sin\theta. \end{aligned}$$

两个含 r 的项抵消。移项并除以 $\cos\theta > 0$，解得

$$\boxed{U_A = -l\omega\tan\theta}.$$

销槽连接：约束水平坐标

乙框的竖直槽允许销上下滑动，但两者横坐标相同，故

$$\boxed{U_B = v_{M,x} = -r\omega\sin\theta}.$$

图 6.37 分别用法向投影与水平分量表示两个条件。负号均表示向左。甲的杆端沿圆盘表面滑动，乙的固定销在竖直槽中滑动；图中的法线和槽方向分别给出它们的速度关系。

解释两式中不同半径的消去

甲的法向投影中，圆盘自转速度与半径垂直，因此不贡献法向分量，只有圆心向上的 $l\omega$ 进入结果；乙的竖直槽则直接约束水平分量，自转的水平分量保留在框速中。这解释了甲式中半径 r 消失、乙式中轨道半径 l 消失的原因。在 $\theta = 0$ 的特殊位置，两个水平分速度都为零。

例 6.11 (摆线的速度与加速度)**.** 半径 R 的圆轮以圆心恒速 u 向右纯滚动。轮缘标记在 $t = 0$ 时位于原点、与地面接触。求标记轨迹、速度、加速度与正则点曲率半径，并求再次触地的位置与一拱路程。

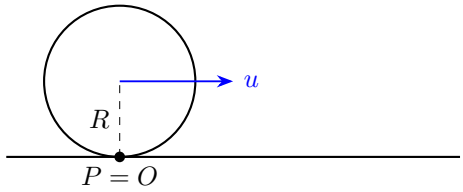


图 6.38: 从地面触点开始追踪同一轮缘标记

解　按初始触地相位写标记位置

设图 6.38 从初始接触构形转过的顺时针角为 $q = ut/R$。圆心为 (Rq, R)，标记相对圆心为 $(-R\sin q, -R\cos q)$，故

$$\boxed{x = R(q - \sin q),\ y = R(1 - \cos q)}.$$

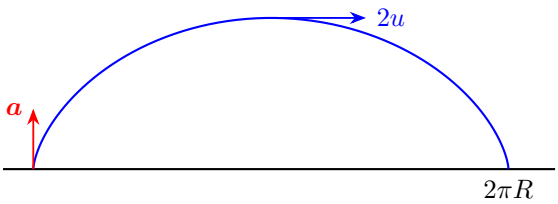


图 6.39: 一拱摆线的速度、加速度与触地位置

求速度和加速度并讨论三个特殊位置

由于 $q=ut/R$，有 $\dot q=u/R$、$\ddot q=0$。每次对三角函数求时间导数，都要乘 $\dot q$：

$$v_x=R(1-\cos q)\dot q=u(1-\cos q),\qquad v_y=R\sin q\,\dot q=u\sin q,$$
$$a_x=u\sin q\,\dot q=\frac{u^2}{R}\sin q,\qquad a_y=u\cos q\,\dot q=\frac{u^2}{R}\cos q.$$

图 6.39 中 $q=0,2\pi$ 均触地且速度为零，加速度向上；$q=\pi$ 到达高 $2R$ 处，速度为 $2u$。正则点的曲率由这些速度、加速度分量计算，下面逐项展开。触地位置形成尖点，以下在速率非零的弧段上求曲率，并讨论弧段接近尖点时的极限。相邻触地点距离为 $2\pi R$。

在正则点求曲率并积分一拱路程

先由分量平方和求速率：

$$v^2=u^2[(1-\cos q)^2+\sin^2 q]=2u^2(1-\cos q)=4u^2\sin^2(q/2).$$

所以 $v=2u|\sin(q/2)|$。曲率分母逐项计算为

$$\begin{aligned}|v_xa_y-v_ya_x|&=\frac{u^3}{R}|(1-\cos q)\cos q-\sin^2 q|\\&=\frac{u^3}{R}|\cos q-1|=\frac{2u^3}{R}\sin^2(q/2).\end{aligned}$$

对 $\sin(q/2)\neq 0$ 的正则点，

$$\rho=\frac{v^3}{|v_xa_y-v_ya_x|}=\frac{8u^3|\sin(q/2)|^3}{2u^3\sin^2(q/2)/R}=4R|\sin(q/2)|.$$

在一拱 $0\le q\le 2\pi$ 内，$\sin(q/2)\ge 0$，并且 $\mathrm{d}t=(R/u)\,\mathrm{d}q$，故路程为

$$s=\int_0^{2\pi}2u\sin(q/2)\frac{R}{u}\,\mathrm{d}q=2R[-2\cos(q/2)]_0^{2\pi}=2R[2-(-2)]=8R.$$

它大于两触地点间距 $2\pi R$，也与曲线路径相符。

例 6.12 (落体再次碰到转杆)**.** 长杆初始水平，绕左端 O 以恒定顺时针角速度 ω 向下转动。杆上距 O 为 a 处的小球同时由静止脱离，不受杆的初始冲量，随后自由下落。求再次与杆相遇的角度方程，并给出小角度近似。杆长为 $l > a$，相遇点应落在实际杆段内。

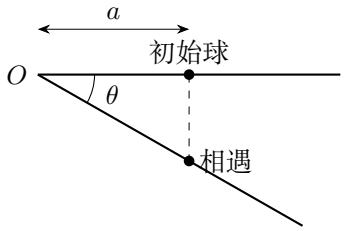


图 6.40: 自由下落小球与顺时针转杆

解　从同一时间的球、杆位置建立相遇方程

按图 6.40 取 x 向右、y 向上，球由静止释放，故 $x = a$、$y = -gt^2/2$。令杆连续累积的顺时针角为 $\theta = \omega t$。球在杆所在直线上要求

$$-\frac{gt^2}{2} = -a\tan\theta, \qquad \boxed{\frac{2a\omega^2}{g} = \frac{\theta^2}{\tan\theta}}.$$

杆的朝向与有限长度

球在右下方，杆朝这一方向伸出时有 $\cos\theta > 0$、$\sin\theta > 0$，所以候选角落在

$$2k\pi < \theta < 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

此外，球到轴距离是 $a/\cos\theta$，有限杆要求 $a/\cos\theta \le l$。在这些重复出现的角度区间内，取满足杆长条件的最小正时间。

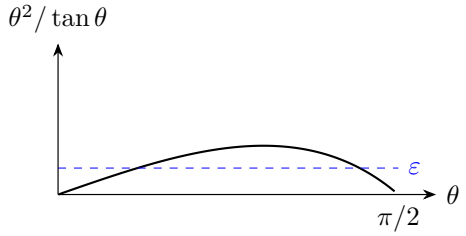


图 6.41: 首个向下转动区间内的相遇方程与小根

求首个小根的渐近表达

图 6.41 画的是首个向下转动区间。若 $\varepsilon = 2a\omega^2/g \ll 1$，最早的小根就在该区间，并有

$$\begin{aligned}\frac{\theta^2}{\tan\theta} &= \theta\,\frac{1-\theta^2/2+O(\theta^4)}{1-\theta^2/6+O(\theta^4)}\\ &= \theta[1-\theta^2/2+O(\theta^4)][1+\theta^2/6+O(\theta^4)]\\ &= \theta-\frac{\theta^3}{3}+O(\theta^5).\end{aligned}$$

设 $\theta=\varepsilon+c\varepsilon^3+O(\varepsilon^5)$，代回上式后，$\varepsilon=\varepsilon+(c-1/3)\varepsilon^3+O(\varepsilon^5)$，比较三次项系数得 $c=1/3$，故 $\boxed{\theta=\varepsilon+\varepsilon^3/3+O(\varepsilon^5)}$。小根对应的杆内碰撞还要求 $a/\cos\theta \le l$，由具体的 l 确定。

用杆长截断最晚有效时间并筛选后续转角

还可由球到轴距离的单调增加筛去过晚的根：有限杆要求 $\sqrt{a^2+g^2t^4/4}\le l$，即 $t\le\sqrt{2\sqrt{l^2-a^2}/g}$。这个时间上限把求根范围限制为有限区间。初始重合根 $t=0$ 则始终不计入“再次相遇”。

图 6.42 把允许相遇的转角区间画在累积角轴上。杆每转一周，朝向右下的区间重复一次；在杆长给出的时间上限以内，依次求这些区间中的候选根。图中空档对应杆的其他朝向。



图 6.42: 累积转角中重复出现的允许相遇区间

例 6.13（竖直滑块与曲柄的瞬时角速度）. 曲柄端 B 相对固定轴 O 的位置为 $r(-\sin\varphi, \cos\varphi)$。连杆从 B 指向竖直滑块 P，与向上竖直线向右成 α，即沿杆单位方向为 $(\sin\alpha, \cos\alpha)$。P 向下速率为 v，求曲柄有符号角速度，取逆时针为正。

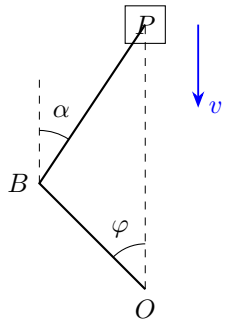


图 6.43: 曲柄端坐标、连杆方向与竖直滑块

解　统一角速度符号后求两端沿杆投影

图 6.43 中的参数 φ 沿逆时针转动增加，$\dot\varphi = \omega$。对曲柄端坐标分别求导：

$$\dot x_B = -r\cos\varphi\,\dot\varphi = -r\omega\cos\varphi, \qquad \dot y_B = -r\sin\varphi\,\dot\varphi = -r\omega\sin\varphi.$$

滑块速度为 $(0, -v)$。连杆长度不变，要求 $(\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{v}_B)\cdot(\sin\alpha, \cos\alpha) = 0$。先写两个沿杆投影：

$$\boldsymbol{v}_P \cdot \boldsymbol{e}_{BP} = -v\cos\alpha,$$
$$\boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{e}_{BP} = -r\omega(\cos\varphi\sin\alpha + \sin\varphi\cos\alpha) = -r\omega\sin(\alpha+\varphi).$$

两者相等，故 $-v\cos\alpha + r\omega\sin(\alpha+\varphi) = 0$。

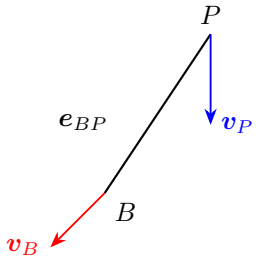


图 6.44: 两端沿连杆的速度投影相等

解出角速度并讨论死点

于是 $\boxed{\omega = v\cos\alpha/[r\sin(\alpha+\varphi)]}$，在图示锐角构形中为逆时针。图 6.44 所画沿杆投影相等，连杆长度不进入瞬时速度结果。若 $\sin(\alpha+\varphi)=0$ 而分子非零，原来的投影方程左侧曲柄贡献为零、滑块贡献非零，两者互相冲突，这就是该给定驱动下的死点情形。

连杆两端的沿杆投影相等，垂杆分量的差则使杆转动。两个沿杆投影均为负，两负号相等才得到正的逆时针角速度。图上曲柄端向左下运动，与这个符号一致。

例 6.14 (斜绳牵引上侧出绳线轴)**.** 线轴外半径 R、内半径 r，在地面向右纯滚动。绳从内轴上侧沿切线向右上方引出，与水平成 α，沿绳拉动速率为 v_0。求线轴圆心速度，并与下侧出绳比较。

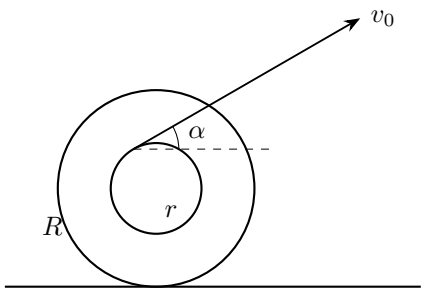
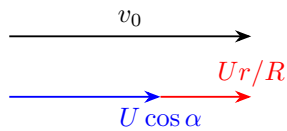


图 6.45: 地面纯滚动线轴的上侧切线出绳

解　合成圆心平动与上侧切点沿绳贡献

设图 6.45 圆心向右速度为 U，顺时针角速度为 U/R。上侧切点的转动速度沿绳向右上方，大小 Ur/R；圆心平动沿绳投影为 $U\cos\alpha$。由无滑动绳速约束，$v_0 = U\cos\alpha + Ur/R$，得到

$$\boxed{U = \frac{Rv_0}{R\cos\alpha + r}}.$$



沿绳方向的分量相加

图 6.46: 轮心平动与内轴转动的沿绳贡献

下侧出绳与圆心换向

下侧切点的转动速度逆着向右上的绳向，沿绳条件成为

$$v_0 = U\cos\alpha - \frac{Ur}{R}, \qquad U = \frac{Rv_0}{R\cos\alpha - r}.$$

当 $0 \le \alpha < \arccos(r/R)$ 时，圆心向右；当 $\arccos(r/R) < \alpha \le \pi/2$ 时，所求 $U < 0$，对应圆心向左、轮子逆时针滚动。在 $\cos\alpha = r/R$ 的构形，平动与转动的沿绳贡献相消，沿绳速度为零，所以非零拉速所对应的滚动状态在这里中断。

图 6.46 所示上侧出绳的两项始终同向，$0 \le \alpha \le \pi/2$ 内圆心向右；水平拉绳时 $U = Rv_0/(R+r)$，竖直向上拉绳时 $U = Rv_0/r$。下侧竖直拉绳则给 $U = -Rv_0/r$，两种切点位置产生相反的圆心方向。

6.7　本讲小结

多阶段运动用每段末位置和碰后速度接续，返回事件要求各坐标在共同时间满足位置条件。刚体机构沿共同铰传递速度与加速度，接触面法线、连杆方向和槽方向分别给出对应的运动关系。

包络描述一族自由轨迹，障碍条件进一步限制具体路径。先跑后游的平均速度由时间比例组成；对称追逐则把构形变化分成径向缩小与整体旋转，分别决定相遇时间和轨迹。

6.8 练习

练习 6.1 (转杆牵引悬物的速度与加速度)**.** 定滑轮 B 在固定轴 O 正上方，高差 h。杆端 A 位于右侧，绳从 A 经 B 连接竖直悬物。杆顺时针角速度大小为 ω，BA 与向下竖直线夹角为 α。分别用速度投影和绳长微分求悬物速度，并说明反转转向后怎样变化。若该时刻杆的顺时针角加速度为 $\beta = \dot{\omega}$，再求悬物的有符号加速度，取竖直向上为正。

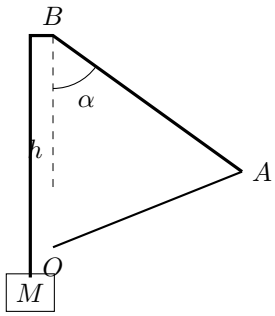


图 6.47: 转杆、定滑轮与绳两端的连接

练习 6.2 (给定初速的抛射包络)**.** 从原点在竖直平面内以固定速率 v_0 发射质点，发射方向可变，x 向右、y 向上。求所有抛物线轨迹的上包络，说明包络、可达区域和发射角数目的关系。

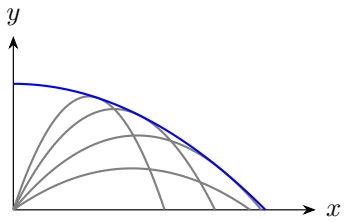


图 6.48: 不同发射角的抛物线与空间包络

练习 6.3 (先跑后游追赶离岸小船)**.** 船从岸边 A 出发，以恒速沿与直岸成 15° 的方向驶离。人同时从 A 出发，可先沿岸以 4m/s 跑一段，再沿直线以 2m/s 游泳追船。求还能追上的最大船速，并给出达到临界值的跑、游时间比例。

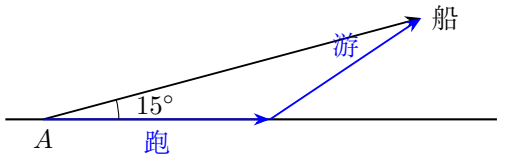


图 6.49: 沿岸跑步、入水点与小船行进方向

练习 6.4 (三只蜗牛的对称追逐)**.** 三只蜗牛位于边长 60cm 的等边三角形顶点，从同一时刻以 5cm/min 分别朝下一只蜗牛的即时位置爬行，循环追逐。求相遇时间、每只走过的路程和轨迹形状。

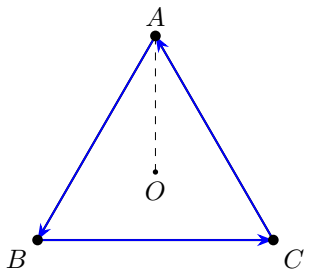


图 6.50: 三只蜗牛从等边三角形顶点循环追逐

练习解答

练习 6.1

解　在实际斜绳上求杆端速度的投影

投影法：设图 6.47 的 $A=(x,y)$，则杆端速度为 $(\omega y,-\omega x)$，沿 $B\to A$ 的单位方向为 $(x,y-h)/\ell$。点积逐项相乘，斜段增长率为

$$\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{e}_{BA}=\frac{\omega xy-\omega x(y-h)}{\ell}=\frac{\omega hx}{\ell}=\omega h\sin\alpha.$$

最后一步使用 $x/\ell=\sin\alpha$。悬挂段相应缩短，悬物向上。

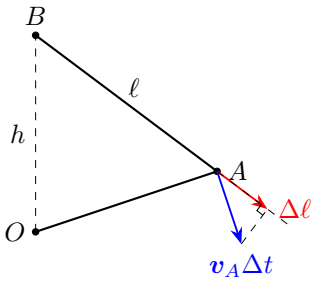


图 6.51: 微小杆端位移向斜绳投影

绳长微分法

绳长法：$\ell^2 = x^2 + (y-h)^2$，h 恒定，链式求导得

$$2\ell\dot{\ell} = 2x\dot{x} + 2(y-h)\dot{y}.$$

除以正的 2ℓ，再代入 $\dot{x} = \omega y, \dot{y} = -\omega x$，

$$\dot{\ell} = \frac{x(\omega y) + (y-h)(-\omega x)}{\ell} = \frac{\omega xy - \omega xy + \omega hx}{\ell} = \frac{\omega hx}{\ell}.$$

因此 $\boxed{v_{上} = \omega h \sin\alpha}$。图 6.51 把杆端微小位移沿 BA 投影，红色投影就是斜绳增长量；用坐标展开这一投影便得到长度微分式，两种写法分别显示几何投影和坐标展开。若转向改为逆时针，$\dot{x}, \dot{y}$ 同时反号，悬物改为向下同速。

角速度变化与绳方向变化共同产生加速度

取悬物向上为正，则 $v_M = \dot{\ell} = \omega hx/\ell$，$a_M = \ddot{\ell}$。$h$ 恒定，而 ω, x, ℓ 均随时间变化，逐项求导：

$$\begin{aligned} a_M &= h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega x \ell^{-1}) \\ &= h\left(\frac{\beta x + \omega\dot{x}}{\ell} - \frac{\omega x\dot{\ell}}{\ell^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{h\beta x}{\ell} + \frac{h\omega^2 y}{\ell} - \frac{h^2\omega^2 x^2}{\ell^3}}. \end{aligned}$$

这里代入了 $\dot{x} = \omega y$ 和 $\dot{\ell} = \omega hx/\ell$。图 6.52 中的杆端加速度由角加速度项与向心项组成；它们通过正在改变方向的斜绳联系到悬物运动。

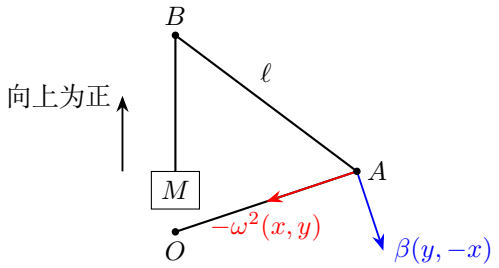


图 6.52: 杆端的切向、向心加速度与悬物的正方向

利用 $x=\ell\sin\alpha$、$y=h-\ell\cos\alpha$，将结果中的几何量换为绳角：

$$a_M = h\beta\sin\alpha + h\omega^2\left(\frac{h}{\ell}-\cos\alpha-\frac{h}{\ell}\sin^2\alpha\right)$$
$$= \boxed{h\beta\sin\alpha + h\omega^2\cos\alpha\left(\frac{h\cos\alpha}{\ell}-1\right)}.$$

第一项来自杆的角速度变化，第二项来自斜绳方向的变化。因此恒定角速度 $\beta=0$ 时，悬物仍可有加速度；结果为正、负时分别表示加速度向上、向下。

练习 6.2

解　固定横坐标后优化发射角参数

对图 6.48 的 $x\neq 0$，令 $p=\tan\alpha$，轨迹为 $y=xp-gx^2(1+p^2)/(2v_0^2)$。在固定 x 处对 p 求导时，x, v_0, g 均为常量：

$$\frac{\partial y}{\partial p} = x-\frac{gx^2}{2v_0^2}(2p) = x-\frac{gx^2}{v_0^2}p,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = -\frac{gx^2}{v_0^2} < 0.$$

令一阶导数为零，得到唯一最大值的参数 $p_*=v_0^2/(gx)$。代回高度时分别计算一次项、平方项和常数项：

$$y(p_*) = x\frac{v_0^2}{gx}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{gx^2}{2v_0^2}\frac{v_0^4}{g^2x^2}$$
$$= \frac{v_0^2}{g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}-\frac{v_0^2}{2g}.$$

合并同类项，得到

$$\boxed{y_{\text{env}} = \frac{v_0^2}{2g}-\frac{gx^2}{2v_0^2}}.$$

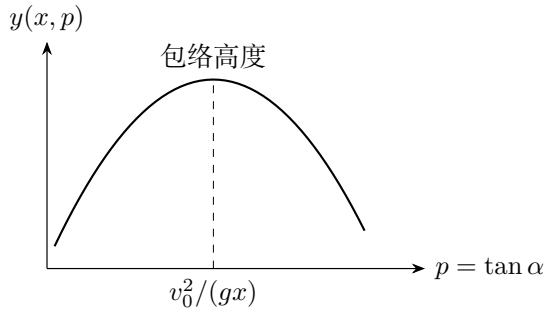


图 6.53: 固定横坐标处高度随角度参数的凹二次关系

区分角度参数曲线与空间包络

图 6.53 的横轴是发射角参数 p，它画的是固定 x 处高度随角度的变化；顶点的纵坐标才给这一 x 处的包络高度。把各 x 对应的顶点高度连起来，得到题设图 6.48 中的蓝色空间包络，每条发射轨迹与它相切。包络下方的点通常对应判别式为正的两种发射角，包络上为一个临界角，上方不可达。$x=0$ 需单独使用竖直抛射，最高可达 $v_0^2/(2g)$，与公式连续。若落地结束运动，可达区域取地面以上、首次触地前的部分。

练习 6.3

解　用跑游时间比例建立平均速度

取图 6.49 的岸线为 x 轴，向水面为 y 正向。若在总时间 T 后追上，跑步占比为 $\lambda\in[0,1)$，游泳方向为单位矢量 $\boldsymbol{e}$，两者总位移相等给

$$UT(\cos 15^\circ,\sin 15^\circ)=4\lambda T\boldsymbol{e}_x+2(1-\lambda)T\boldsymbol{e}.$$

从切线构造共同的投影方向

在图 6.54 的速度平面中，$R=(4,0)$ 是跑速端点，游速端点在半径为 2 的圆上。从 R 作上方切线 RS，则 $OS\perp SR$。由直角三角形 OSR，

$$\cos\angle ROS=\frac{OS}{OR}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\qquad \angle ROS=60^\circ.$$

因此 $S=(2\cos 60^\circ,2\sin 60^\circ)=(1,\sqrt{3})$。沿 OS 取单位方向 $\boldsymbol{n}=(1/2,\sqrt{3}/2)$。图中船速方向与岸成 15°，与 $\boldsymbol{n}$ 夹角为 $60^\circ-15^\circ=45^\circ$。

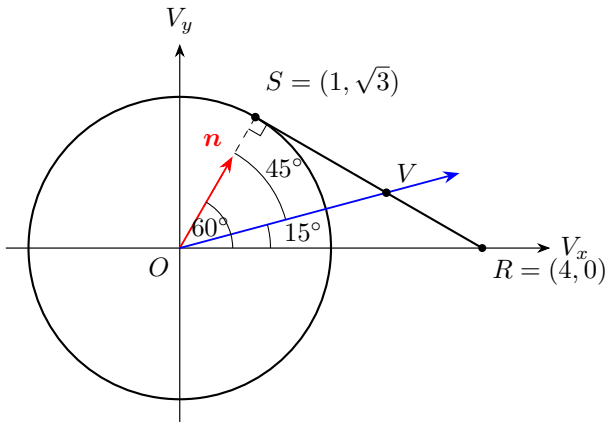


图 6.54: 切点直角确定投影方向，船速射线与切线相交于 V

约去两人位移式中共同的 $T>0$。跑步速度在 $\boldsymbol{n}$ 方向投影为 $4\cos 60^\circ = 2$；任一游泳速度的投影为 $2\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}\le 2$。两种速度按时间比例平均后，仍有

$$U\cos 45^\circ = 4\lambda \boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{n} + 2(1-\lambda)\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} \le 2\lambda + 2(1-\lambda) = 2.$$

于是 $U \le 2/\cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$，图中的 V 给出达到此上界时的船速端点。

构造达到上界的游向及时间比例

现在还须构造达到上界的方案：取游泳方向 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{n}$，即与岸成 60°。由纵分量要求 $2\sqrt{2}\sin 15^\circ = \sqrt{3}(1-\lambda)$。先用差角公式计算

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \qquad 2\sqrt{2}\sin 15^\circ = \sqrt{3}-1.$$

因此 $\sqrt{3}(1-\lambda) = \sqrt{3}-1$，移项得 $\sqrt{3}\lambda = 1$，即 $\lambda = 1/\sqrt{3}$。再代入横分量：$4\lambda + (1-\lambda) = 1+\sqrt{3} = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ$，也恰好满足，且 $0<\lambda<1$。所以给出的跑、游阶段都具有正时间，确实能到同一相遇点。最终

$$\boxed{U_{\max} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{m/s}}, \qquad \boxed{t_{\text{跑}} : t_{\text{游}} = 1 : (\sqrt{3}-1)}.$$

这一比例与总时间无关；题目没有限定相遇距离时，任取正总时间即可按比例实现。

练习 6.4

解　由对称规则求边长缩短率和相遇时间

由图 6.50 的循环追逐规则及等边初始构形，三只蜗牛的运动在旋转 120° 并重新编号后保持不变，所以相遇前始终构成等边三角形，中心 O 固定。记边长为 $a(t)$，爬速为 u，沿边 $A\to B$ 取单位矢量 $\boldsymbol{e}$。边长变化率是两端相对速度的投影：

$$\dot a=(\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A)\cdot\boldsymbol{e}.$$

A 正朝 B 运动，投影为 u；B 朝 C 运动，与 $A\to B$ 成 120°，投影为 $-u/2$。

因此 $\dot a=-3u/2$。用初值 $a(0)=a_0$ 积分：

$$a(t)-a_0=-\frac{3u}{2}\int_0^t \mathrm{d}s=-\frac{3u}{2}[s]_0^t=-\frac{3ut}{2},$$

即 $a=a_0-3ut/2$。令边长为零，得到

$$\boxed{T=\frac{2a_0}{3u}=8\text{分钟}},\qquad \boxed{s=uT=40\text{厘米}}.$$

每只蜗牛走过 40cm，介于起点到中心的直线距离 $60/\sqrt{3}$cm 和初始边长 60cm 之间，图 6.55 画出它逐渐转向中心的弯曲路径。

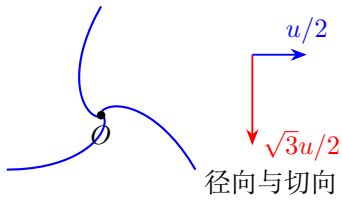


图 6.55: 径向缩小与切向旋转共同形成螺线

在径向与切向分解速度

图 6.55 中，到中心距离 $\rho=a/\sqrt{3}$，方位角沿追逐方向增加。速度的径向、切向分量分别给出

$$\dot\rho=-\frac{\sqrt{3}}{2}u,\qquad \rho\dot\varphi=\frac{u}{2}.$$

积分轨迹并讨论有限时间与无限转角

相除消去时间得到 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi=-\sqrt{3}\rho$。相遇前 $\rho>0$，分离变量，并从初始状态作定积分：

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}s}{s}=-\sqrt{3}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{d}\psi,\qquad [\ln s]_{\rho_0}^{\rho}=-\sqrt{3}[\psi]_{\varphi_0}^{\varphi}.$$

代入上下限，再取指数，得到

$$\ln\frac{\rho}{\rho_0}=-\sqrt{3}(\varphi-\varphi_0),\qquad \boxed{\rho=\rho_0 e^{-\sqrt{3}(\varphi-\varphi_0)}}.$$

故轨迹为对数螺线。由 $\rho=\rho_0(1-t/T)$ 和 $\dot{\varphi}=u/(2\rho)$，令 $w=1-s/T,\mathrm{d}s=-T\ \mathrm{d}w$，从时间方程也可直接积分：

$$\begin{aligned}\varphi-\varphi_0&=\frac{u}{2\rho_0}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{1-s/T}=-\frac{uT}{2\rho_0}\int_1^{1-t/T}\frac{\mathrm{d}w}{w}\\&=-\frac{1}{\sqrt{3}}[\ln w]_1^{1-t/T}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(1-t/T).\end{aligned}$$

当 $t\to T^-$ 时，转角持续增大，半径和剩余路程同时趋零，蜗牛在有限时间内到达中心。

牛顿运动定律

物理竞赛一轮讲义

第一讲

牛顿运动定律与相互作用

2026

目录

第一讲　牛顿运动定律与相互作用 **1**

1.1　惯性与运动的改变 1

1.2　牛顿第二定律与动量 2

1.3　相互作用与受力图 4

1.4　整体运动与运动约束 7

1.5　摩擦与瞬时变化 9

1.6　例题与分析 11

1.7　本讲小结 42

练习解答 43

第一讲　牛顿运动定律与相互作用

1.1　惯性与运动的改变

1.1.1　从斜面上的运动认识惯性

把小球放在图 1.1 左侧斜面的某一高度，由静止释放。小球沿斜面下降，又沿右侧斜面上升。斜面越光滑，小球在右侧达到的高度就越接近原来的高度。逐渐减小右侧斜面的倾角，为达到同一高度，小球需要通过的路程随之增大。右侧最后成为水平面时，这段路程向远处延伸；在理想光滑的水平面上，小球将以原有速度继续运动。

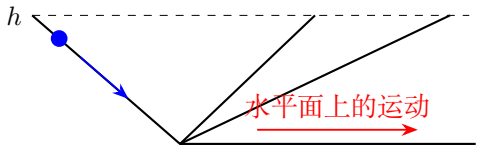


图 1.1: 右侧斜面逐渐放平，小球上升到原高度所需的路程逐渐增大

这个实验把摩擦的影响同运动本身分开了。水平面上的摩擦使小球减速；减小摩擦，小球保持运动的时间和路程就增长。惯性是物体保持原有运动状态的性质。静止与匀速直线运动都属于速度保持不变的运动状态；力使速度发生变化。

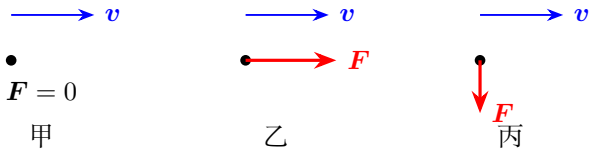


图 1.2: 同样向右运动的三个物体，在不同合力作用下具有不同的速度增量

图 1.2 中，甲的合力为零，速度保持不变；乙受到向右的合力，经过短时间后速度沿原方向增大；丙受到向下的合力，速度获得向下的增量，轨迹开始弯曲。在足够短的时间 Δt 内，速度增量近似为

$$\Delta \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}\Delta t.$$

这里的 $\boldsymbol{F}$ 是物体所受各力的矢量和。合力的方向就是速度增量的方向。

1.1.2 惯性参考系与加速度

牛顿第一定律指出：存在这样的参考系，不受外力的质点保持静止或匀速直线运动。这种参考系称为惯性参考系。实验室中研究时间较短、空间范围较小的力学过程，通常把地面近似看作惯性系。

设另一个参考系以恒定速度 $\boldsymbol{V}$ 相对地面平移。两系的坐标关系为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}t + \boldsymbol{r}'$。对时间逐次求导，得到

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}', \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'.$$

两系测得的加速度相同，因而相对于惯性系作匀速直线平移的参考系仍为惯性系。

车厢加速时，位置关系仍可写为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'$，求导后则有 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'$。图 1.3 中的小球始终相对车厢静止，故 $\boldsymbol{r}'$ 为常量，$\boldsymbol{a}' = 0$，小球对地的加速度就是车厢的加速度 $\boldsymbol{a}_0$。

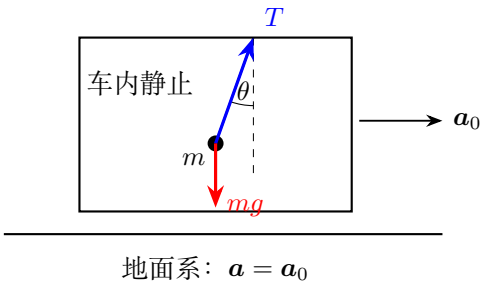


图 1.3: 小球随车厢加速，悬线同竖直方向成角度 θ

以小球为研究对象，竖直方向有 $T\cos\theta = mg$，水平方向有 $T\sin\theta = ma_0$，其中 θ 为悬线同竖直方向的夹角。因此

$$\tan\theta = \frac{a_0}{g}, \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

悬线的偏斜反映加速度；小球在某一时刻的速度还取决于此前的运动。这一受力模型也适用于后面车厢悬球和吊篮的例题。

1.2 牛顿第二定律与动量

1.2.1 由相互作用比较质量，认识动量

在光滑水平面上，让两个小车只通过一根压缩弹簧相互推开。释放后，两车沿相反方向获得速度。改变弹簧的压缩程度，会改变两车速度变化的大小；对于给定

的两车，它们速度变化大小之比保持相同。用这一比值可以比较两车的惯性大小，定义质量比为

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta \boldsymbol{v}_2|}{|\Delta \boldsymbol{v}_1|}.$$

质量较大的车，在同一次相互作用中速度改变较小。图 1.4 把两车的速度变化画在同一直线上；质量比与速度增量的反比关系，合写成 $m_1\Delta \boldsymbol{v}_1+m_2\Delta \boldsymbol{v}_2=0$。

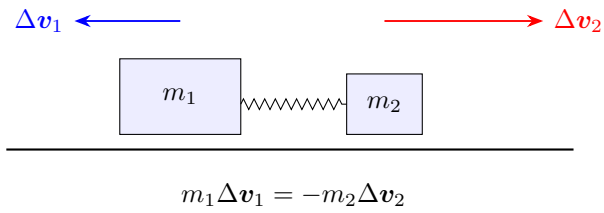


图 1.4: 相互推开的两车获得等大反向的动量增量

定义质点动量 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$，上式就是 $\Delta \boldsymbol{p}_1=-\Delta \boldsymbol{p}_2$，即两车总动量保持不变。这里把两车和弹簧看作系统，弹簧质量取可忽略，水平方向只保留系统内部的相互作用。不同惯性系测得的初速度可以不同，在同一时间段内测得的速度增量相同。

把这次相互作用分成越来越短的时间间隔，就得到动量交换的快慢。作用在物体上的合力给出它的动量变化率 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\,\mathrm{d}t$。对于质量恒定的物体，这个关系化为 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$。这样，质量、相互作用、动量变化和加速度连在了一起；下面再用具体受力求运动，并由时间积分研究冲量。

1.2.2 质量、合力和运动方程

在惯性系中，质量不变的质点满足

$$\boldsymbol{F}=\sum_i \boldsymbol{F}_i=m\boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

质量表征惯性。相同合力作用下，质量越大，加速度越小。式中各力和加速度取同一时刻的值，因此它也描述变力作用下的运动。选定坐标后，可写成

$$\sum F_x=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\qquad \sum F_y=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}.$$

受力给出加速度，初始位置和初始速度给出运动方程的初始条件。例如水平恒力 F 作用于光滑水平面上的物块，取向右为正，便有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{F}{m},\qquad \int_{v_0}^{v(t)}\mathrm{d}v=\frac{F}{m}\int_0^t\mathrm{d}\tau,\qquad [v]_{v_0}^{v(t)}=\frac{F}{m}[\tau]_0^t,\quad v(t)=v_0+\frac{F}{m}t.$$

再由 $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t = v(t)$ 积分：

$$x(t) - x_0 = \int_0^t \left(v_0 + \frac{F}{m}\tau\right)\mathrm{d}\tau = \left[v_0\tau + \frac{F}{2m}\tau^2\right]_0^t = v_0 t + \frac{F}{2m}t^2.$$

若 $v_0 < 0$ 而 $F > 0$，物块先向左减速，在 $t = -mv_0/F$ 时速度为零，随后向右加速。整个过程的合力和加速度始终向右。

1.2.3　由瞬时关系到一段时间内的变化

质点的动量为 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$。质量恒定时，

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.$$

将上式从 t_1 积分到 t_2，得到

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(t)\,\mathrm{d}t.$$

图 1.5 把这一关系画在 $F_x - t$ 图中。阴影面积给出 x 方向的动量变化；同面积矩形的高度就是该时间段内的平均合力 $\overline{F}_x$。

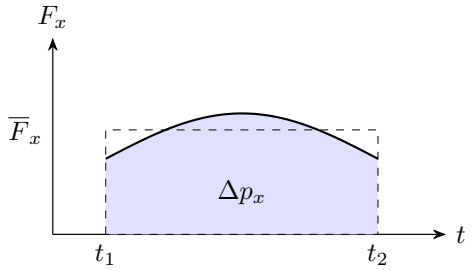


图 1.5: 力随时间变化时，曲线下的面积给出动量变化

于是 $\overline{\boldsymbol{F}} = \Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$，而瞬时合力由 $\boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}/\,\mathrm{d}t$ 给出。例 1.1 将进一步研究接收物质的装置：进入装置的物质携带动量，选择一组确定的物质并比较短时间前后的总动量，就能把这部分贡献写入运动方程。

1.3　相互作用与受力图

1.3.1　从接触和引力寻找力

受力图围绕一个确定的研究对象来画。地球对物体的引力在近地面写为 $m\boldsymbol{g}$；光滑表面的支持力沿接触处的法线；绳对物体的拉力沿绳指向悬挂端；弹簧力沿弹簧轴线，伸长时把两端拉近，压缩时把两端推开。

图 1.6 取放在粗糙斜面上的物块为研究对象。沿斜面向下取 t 轴，垂直斜面向外取 n 轴。将重力投影到两轴，得到 $mg\sin\theta$ 和 $-mg\cos\theta$。设摩擦力沿斜面向上，则运动方程为

$$mg\sin\theta - f = ma_t, \qquad N - mg\cos\theta = ma_n.$$

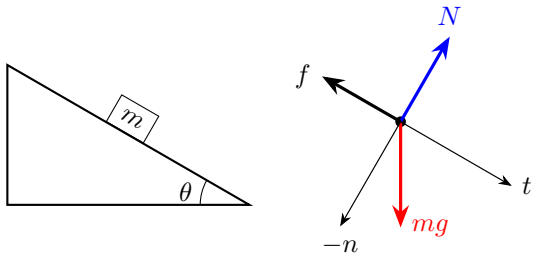


图 1.6: 斜面物块的受力与所选坐标

重力的两个分量来自同一个力，分别进入相应的分量方程。物块放在固定直斜面上时，法向位置保持不变，$a_n = 0$；斜面本身加速时，法向加速度由接触关系给出。例 1.4 正是把水平加速度向 t, n 两轴投影，再求支持力和摩擦力。

1.3.2 作用与反作用

两物体之间的相互作用满足牛顿第三定律：

$$\boldsymbol{F}_{A\to B} = -\boldsymbol{F}_{B\to A}.$$

两个力分别作用于 B 和 A。例如图 1.7 中的书受到桌面的支持力，桌面同时受到书的压力，这两个接触力等大反向。

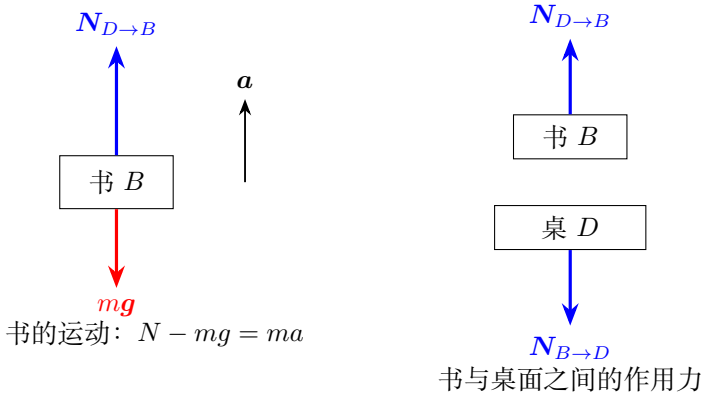


图 1.7: 加速上升的书，以及书与桌面之间的接触力

电梯以加速度 a 上升时，对书列式为 $N-mg=ma$，所以 $N=m(g+a)$。桌面对书的支持力随加速度增大，书对桌面的压力也同时增大，二者仍保持等大反向。秤盘承受的正是这种压力。悬挂式测力计则通过敏感元件所受的拉力显示读数，后面悬挂滑轮的题目要从滑轮受到的绳拉力求读数。

1.3.3 轻绳和轻滑轮

取直绳的一小段，长度为 $\mathrm{d}s$，线密度为 λ，如图 1.8。沿绳向右取正，两端张力分别为 $T(s)$ 和 $T(s+\mathrm{d}s)$。该段绳的运动方程为

$$T(s+\mathrm{d}s)-T(s)=\lambda\,\mathrm{d}s\,a_t.$$

在轻绳模型中令 $\lambda\to 0$，加速度保持有限，便得到两端张力相等。跨过光滑轻滑轮的同一根轻绳，由于绳与轮间的切向作用可略，各段张力具有同一大小 T。

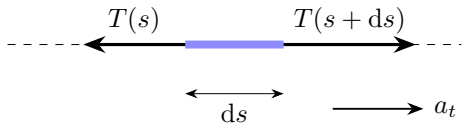


图 1.8: 一小段绳的两端张力差使这段绳产生加速度

对悬挂在测力计下的轻滑轮，再把两股绳对轮的拉力相加。两股绳均竖直向下时，总拉力为 $2T$，测力计的拉力 S 满足 $S=2T$。两股绳对称地张开、夹角为 γ 时，各自沿对称轴的分量为 $T\cos(\gamma/2)$，于是 $S=2T\cos(\gamma/2)$。图 1.9 显示这两个分量怎样相加。

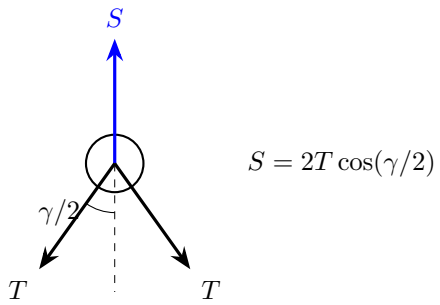


图 1.9: 两股绳的拉力沿对称轴相加

1.4 整体运动与运动约束

1.4.1 由两个物体的方程得到整体方程

图 1.10 中，水平恒力 F 推动相接触的两块在光滑水平面上运动。取向右为正，对两块分别列式：

$$F - N = m_A a, \qquad N = m_B a.$$

两式相加，接触力的两个分量 $-N$ 和 N 相消，得到 $F = (m_A + m_B)a$。因此

$$a = \frac{F}{m_A + m_B}, \qquad N = \frac{m_B F}{m_A + m_B}.$$

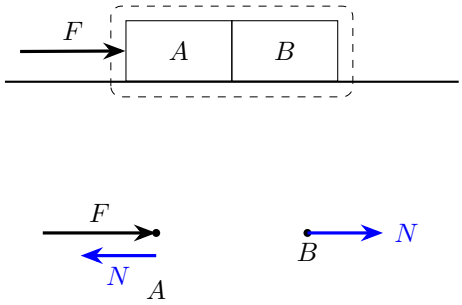


图 1.10: 两块的水平受力与整体运动

先取整体可直接求共同加速度，再取其中一块可求接触力。例 1.3 中，各段绳的张力拉动不同的子系统；相应的质量同共同加速度相乘，就给出该段张力。

一般地，对确定的一组质点逐个写 $m_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{F}_i$，再相加。每对内力由第三定律抵消，因而

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i = M \boldsymbol{a}_C. \tag{1.2}$$

其中质心位置 $\boldsymbol{r}_C = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i / M$。质量恒定时逐次求导，便得 $\boldsymbol{v}_C = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i / M$ 和 $\boldsymbol{a}_C = \sum_i m_i \boldsymbol{a}_i / M$。各部分具有不同加速度时，整体方程右端保留这个质量加权和。

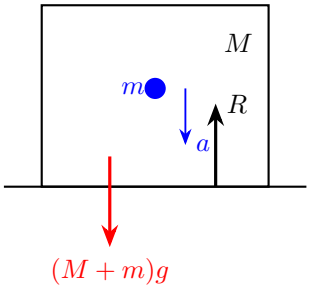


图 1.11: 箱体静止而内部物体向下加速时，整体的竖直运动

图 1.11 中箱体静止，内部物体的向下加速度为 a。取竖直向上为正，整体方程为

$$R-(M+m)g=M\times 0+m(-a),\qquad R=(M+m)g-ma.$$

内部物体向下加速时，地面支持力比总重力小 ma。例 1.22 至例 1.24 也用各部分加速度的竖直或水平分量求地面对装置的作用力。

1.4.2 从绳长求速度和加速度关系

图 1.12 中一端固定的绳绕过水平动滑轮，另一端连接物块。动滑轮和物块的位置分别用 x_P, x_1 表示，向右为正。绳的两段直线长度分别含有 x_P 和 x_P-x_1，绕轮部分的长度恒定，所以

$$L=2x_P-x_1+C.$$

对时间求导，$0=2\dot{x}_P-\dot{x}_1$；再求一次导数，$0=2\ddot{x}_P-\ddot{x}_1$。于是 $v_1=2v_P$，$a_1=2a_P$。

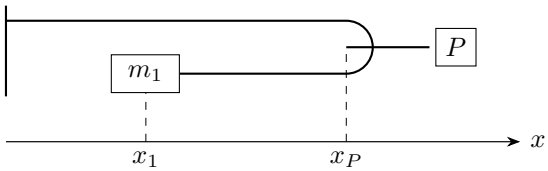


图 1.12: 两段绳随动滑轮的位置改变，绳端的位移为动滑轮位移的两倍

动力学中，绳端物块受到一个 T，动滑轮受到两个向左的 T。运动关系中的倍数与受力中的倍数分别进入方程，例 1.28 将得到组合质量 $4m_1+m_2$。

1.4.3 直斜面的法向联系

对作平移的直斜面，物块相对斜面的位移沿斜面。设斜面加速度为 $\boldsymbol{A}$，物块对地加速度为 $\boldsymbol{a}_m$，则相对加速度也沿斜面，满足

$$(\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

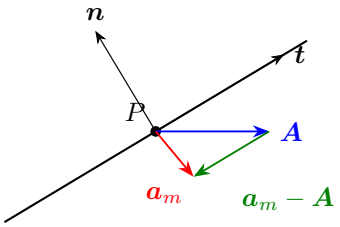


图 1.13: 两物体的加速度之差沿直斜面的切线方向

图 1.13 中，从蓝箭头末端指向红箭头末端的绿色箭头就是 $\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{A}$，它平行于斜面。若斜面向右上方倾斜 θ，可取 $\boldsymbol{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$，接触关系便写成

$$-(a_x - A)\sin\theta + a_y \cos\theta = 0.$$

自由斜面例 1.29 把这一关系同物块、斜面各自的受力方程联立，求出斜面的反冲和物块的运动。

1.5 摩擦与瞬时变化

1.5.1 静摩擦怎样随外力改变

水平面上的物块从静止开始，受到逐渐增大的水平拉力。在静止阶段，摩擦力同拉力平衡，$f = F$。静摩擦的最大值为 $\mu_s N$；当 F 达到这个值，物块开始滑动。滑动时摩擦力大小取 $\mu_k N$，方向同接触面的相对速度相反。

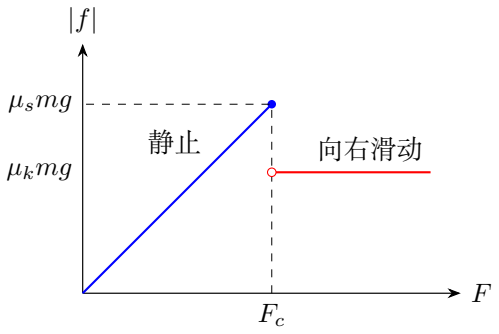


图 1.14: 由静止到滑动，摩擦力随拉力的变化

图 1.14 中，斜线段对应 $f=F$，最高点对应 $F_c=\mu_s mg$。图示取 $\mu_k<\mu_s$，起滑后摩擦力降为 $\mu_k mg$。若题设近似取二者相等，两段图线在临界点相接。

对叠块，先根据共同运动求所需摩擦。例如质量为 m 的上块放在质量为 M 的下块上，地面光滑，力 F 拉下块。共同加速度 $a=F/(M+m)$，上块所需摩擦 $f=ma$。由 $ma\le\mu_s mg$ 得到

$$F\le\mu_s(M+m)g.$$

起滑以后，上块向右受到 $\mu_k mg$，下块受到其反作用力，分别有 $a_m=\mu_k g$、$a_M=(F-\mu_k mg)/M$。这个从共同运动到相对滑动的过程，是例 1.17、例 1.18 和例 1.25 分段讨论的依据；有地面摩擦时，还要先求整个装置从地面起滑的条件。

1.5.2 弹簧与绳在剪断瞬间的响应

弹簧力由形变决定：伸长为 x 时，拉力为 kx。剪断发生的短时间内，物体的位置连续，因而弹簧形变从剪断前的值开始演化。绳的拉力由绳对运动的约束决定；被剪断的一段绳撤去拉力，仍保留的绳段则通过新的运动方程确定张力。

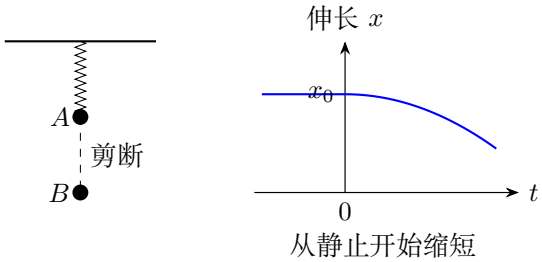


图 1.15: 剪断连接绳后，上方弹簧的伸长随时间变化

图 1.15 中，上方弹簧原来支承 A,B 两物体，总伸长为 $x_0=(m_A+m_B)g/k$。剪断两物体间的绳，B 开始自由下落；上方弹簧仍以 kx_0 向上拉 A。取向上为正，剪断瞬间

$$kx_0-m_Ag=m_Aa_A,\qquad a_A=\frac{m_B}{m_A}g.$$

弹簧随后缩短，其拉力随形变改变。图中曲线在 $t=0$ 处从 x_0 连续接出；初速度为零时，曲线在该点的切线水平。有限加速度在时间段 $[0,\Delta t]$ 内产生的速度变化为 $\Delta v=\int_0^{\Delta t}a(t)\,\mathrm{d}t$，随 $\Delta t\to 0$ 趋于零。因此，剪断瞬间可出现加速度的改变，速度则从原值继续变化。

对仍由定长绳牵引的小球，绳长联系还给出向心加速度 v^2/l。小球位于偏离竖直方向 θ 的位置时，沿绳指向悬点列式为

$$T-mg\cos\theta=m\frac{v^2}{l}.$$

初速度为零的瞬间有 $T=mg\cos\theta$；带有初速度时，张力还包含 mv^2/l。这一径向关系同切向的 $ma_t=mg\sin\theta$ 一起，连接剪绳例题与本讲最后的摆动练习。

1.6 例题与分析

例 1.1 (合力与动量的变化率)**.** 比较 $\boldsymbol{F}=\Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$、$\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\,\mathrm{d}t$ 与 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，说明三者相互转化的条件，以及接收物质的装置为何需要额外分析。

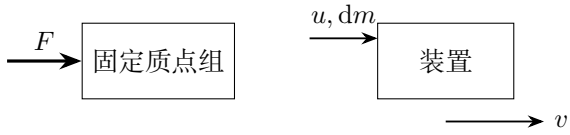


图 1.16: 固定质点组与有物质流入的装置

解　先写固定质点组的冲量与动量关系

图 1.16 左侧的研究对象始终由同一组质点构成。其动量定律在有限区间内先写为

$$\int_t^{t+\Delta t}\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{p}(t+\Delta t)-\boldsymbol{p}(t).$$

除以 Δt，得到的是区间平均力 $\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{ext}}=\Delta\boldsymbol{p}/\Delta t$；取 $\Delta t\to 0$ 才得到瞬时关系。若质量恒定，$\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\,\mathrm{d}t=m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\,\mathrm{d}t=m\boldsymbol{a}$，三式便在各自的平均或瞬时意义下相容。

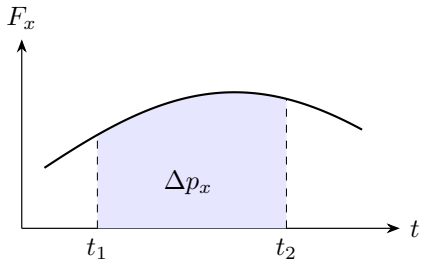


图 1.17: 动量增量对应同一条力曲线下的时间面积

由时间面积区分平均力与瞬时力

图 1.17 中曲线下的面积是动量增量；面积除以时间间隔给出平均力，曲线在某时刻的高度给出瞬时力。

把即将流入的物质并入短时闭合系统

右侧装置若以速率 $\dot m$ 接收速度为 u 的物质，两个速度均相对于地面惯性系。考察从 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 的短时间，流入质量为 $\mathrm{d}m$。取装置及这团即将进入的物质为同一研究对象，如图 1.18。

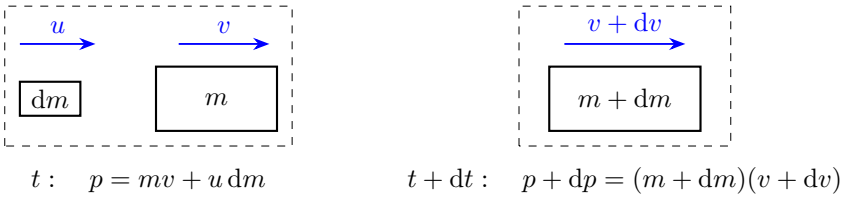


图 1.18: 同一组物质在接收前分成两部分，接收后一起运动

图 1.18 的虚线圈始终包含同一组物质。初态动量由装置和流入物质两项相加；末态它们共同以 $v+\mathrm{d}v$ 运动。把外力在这段时间内的冲量写为 $F\,\mathrm{d}t$，在一维情形有

$$mv + u\,\mathrm{d}m + F\,\mathrm{d}t = (m+\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v).$$

右边展开为 $mv + m\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}m + \mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$。先消去共同的 mv 项，再略去二阶小量 $\mathrm{d}m\,\mathrm{d}v$，得到

$$m\,\mathrm{d}v = F\,\mathrm{d}t + (u-v)\,\mathrm{d}m.$$

除以 $\mathrm{d}t$ 并取瞬时极限，得到 $m\dot v = F + (u-v)\dot m$。式中的 $(u-v)\dot m$ 来自流入物质相对装置的运动。对装置自身的动量用乘积法则求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = m\dot v + v\dot m = F + u\dot m,$$

右端的 $u\dot{m}$ 是每单位时间由流入物质带入的动量。

例 1.2 (悬挂滑轮的弹簧秤)**.** 质量为 $m_1 > m_2$ 的两物体由跨过光滑轻定滑轮的轻绳连接，滑轮挂在竖直弹簧秤下，运动中轮心位置保持固定。求两物体运动时的加速度、绳张力及秤的读数，忽略秤下滑轮的自重。

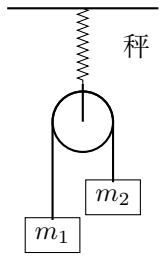


图 1.19: 弹簧秤悬挂整个滑轮

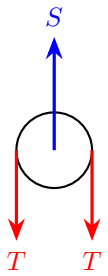
解　由绳长约束写两悬物方程

图 1.19 中，轻绳绷紧且滑轮中心固定，两物体加速度大小相等、方向相反。以 m_1 向下、m_2 向上为各自正向，分别列式

$$m_1 g - T = m_1 a, \qquad T - m_2 g = m_2 a.$$

消去张力求加速度，再代回

两式相加得 $a = (m_1 - m_2)g/(m_1 + m_2)$；代回第二式得 $T = m_2(g + a) = 2m_1 m_2 g/(m_1 + m_2)$。



$$S - 2T = 0$$

图 1.20: 滑轮受到测力计拉力和两股绳的拉力

由滑轮受力求秤的读数

滑轮受力如图 1.20。秤的拉力 S 同两股向下的绳张力平衡，因此

$$S = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

当 $m_1 = m_2 = m$ 时读数为 $2mg$，等于静止悬挂的总重力；两物体质量不等时，系统质心向下加速，秤的读数相应小于两物体的总重力。

例 1.3 (增加中间物体质量后的张力)**.** 三个物体按 B, C, A 的顺序放在光滑水平面上，相邻物体用轻绳连接，恒力 F 向右拉 A。在 C 上增加质量 m 的小物体，且小物体同 C 共同运动。比较 A, C 间张力 T_a 和 C, B 间张力 T_b 的变化。

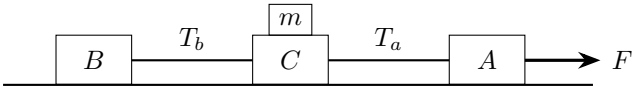


图 1.21: 拉力作用在最右端，附加质量放在中间

解　先算增加质量后的共同加速度和远端张力

令三物体原总质量 $M_0 = m_A + m_B + m_C$。整体水平合力始终为 F，增加质量前后分别有 $a = F/M_0$、$a' = F/(M_0 + m)$。图 1.21 中 T_b 仅拉动 B，因此 $T_b = m_B a$、$T_b' = m_B a'$，后者减小。

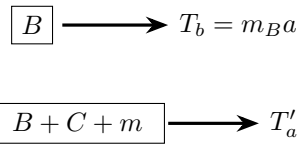


图 1.22: 对张力左侧的子系统分别列式

扩大子系统求近端张力的改变量

对图 1.22 下方的左侧整体，$T_a' = F(m_B + m_C + m)/(M_0 + m)$。原来的张力为 $T_a = F(m_B + m_C)/M_0$。记原来张力左侧的质量为 $Q = m_B + m_C$，则 $M_0 - Q = m_A$。相减时先通分：

$$\begin{aligned} T_a' - T_a &= F\left(\frac{Q+m}{M_0+m} - \frac{Q}{M_0}\right) \\ &= F\frac{M_0(Q+m) - Q(M_0+m)}{M_0(M_0+m)} \\ &= F\frac{m(M_0-Q)}{M_0(M_0+m)} = \frac{Fm_A m}{M_0(M_0+m)} > 0. \end{aligned}$$

所以靠近拉力的一段张力增大，另一段减小。远端绳拉动的质量仍为 m_B，其张力随加速度减小；近端绳拉动的质量增大，占总质量的比例也增大，因而张力增大。

例 1.4 (加速斜面上的摩擦方向)**.** 斜面向右下方倾斜，倾角 θ，斜面体以水平向右加速度 a 运动，物块 m 与斜面保持相对静止。求支持力和静摩擦力，讨论摩擦方向。

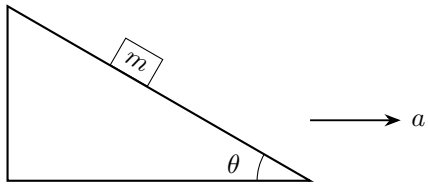


图 1.23: 物块与向右加速的斜面共同平移

解　把水平加速度投影到斜面坐标

以图 1.23 中沿斜面向下为切向 t，垂直斜面向外为法向 n，先令摩擦 f 沿斜面向上。物块的加速度水平向右，分量为 $a_t = a\cos\theta$、$a_n = a\sin\theta$。第二定律给出

$$mg\sin\theta - f = ma\cos\theta, \qquad N - mg\cos\theta = ma\sin\theta.$$

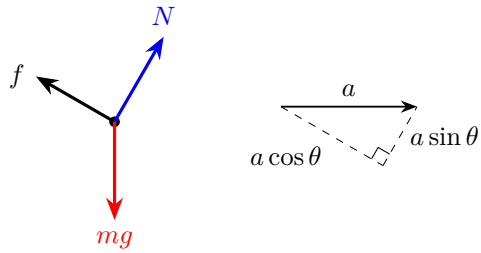


图 1.24: 水平加速度沿斜面和法线的两个分量

求接触力并划分摩擦方向

由图 1.24 对应的两个分量方程，$N = m(g\cos\theta + a\sin\theta)$，$f = m(g\sin\theta - a\cos\theta)$。因此 $a < g\tan\theta$ 时摩擦向上，等号时为零，大于时向下。

相对静止时的摩擦条件

上述相对静止状态满足 $|g\sin\theta - a\cos\theta| \le \mu_s(g\cos\theta + a\sin\theta)$。摩擦方向随 a 改变，正是为物块提供所需切向加速度的结果。

例 1.5 (由吊篮悬线判断运动)**.** 两条平行钢索向右下方倾斜,倾角均为 θ。吊篮与各自滑轮保持相对静止,悬线相对竖直向左偏角为 φ。两装置分别测得 $\varphi_{\text{明}} > \varphi_{\text{红}} \geq 0$。求此时加速度与悬线张力,并说明比较全程时间和末速还需要什么条件。

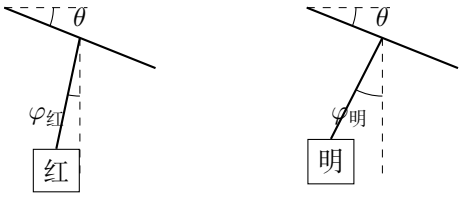


图 1.25: 沿同样倾斜的钢索运动,两个吊篮的悬角不同

解 由悬线方向建立两个分量方程

图 1.25 中,悬线对吊篮的张力指向右上。沿水平向右、竖直向上列式,令沿索向下的加速度大小为 a,有

$$T\sin\varphi = ma\cos\theta, \qquad T\cos\varphi - mg = -ma\sin\theta.$$

先将第一式乘 $\cos\varphi$、第二式乘 $\sin\varphi$ 后相减,消去 T:

$$mg\sin\varphi = ma(\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi) = ma\cos(\theta-\varphi).$$

再将第一式乘 $\sin\theta$、第二式乘 $\cos\theta$ 后相加,消去 a:

$$T(\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\cos\theta) = mg\cos\theta.$$

两式的三角组合都等于 $\cos(\theta-\varphi)$,在它为正的可实现范围内相除,所以

$$a = \frac{g\sin\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}, \qquad T = \frac{mg\cos\theta}{\cos(\theta-\varphi)}.$$

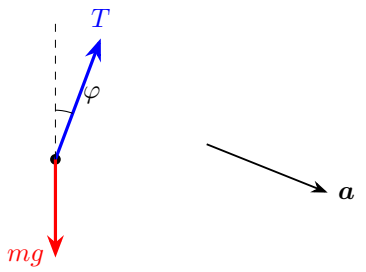


图 1.26: 重力与张力的合力沿钢索向右下方

比较加速度以及恒加速全程的运动

在图 1.26 的可实现范围 $\cos(\theta-\varphi)>0$ 内，分母的导数为 $\mathrm{d}\cos(\theta-\varphi)/\mathrm{d}\varphi=\sin(\theta-\varphi)$。再用商法则和余弦和角公式，

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\varphi}=g\frac{\cos\varphi\cos(\theta-\varphi)-\sin\varphi\sin(\theta-\varphi)}{\cos^2(\theta-\varphi)}=\frac{g\cos\theta}{\cos^2(\theta-\varphi)}>0.$$

故小明在测量时刻的加速度较大。若稳定阶段可视作由静止开始的全程恒加速度，且索长同为 L，再由 $t=\sqrt{2L/a}$、$v=\sqrt{2aL}$ 判断小明用时较短、末速较大。保持相对静止且悬线竖直时，沿索加速度为零。

例 1.6 (车厢中的悬球)**.** 车厢沿水平方向作匀变速运动，质量 1 kg 的小球相对车厢静止，悬线相对竖直向左偏 37°。取 $g=10\,\mathrm{m/s^2}$，$\sin37^\circ=0.6$，$\cos37^\circ=0.8$。求加速度、张力，并讨论车厢的速度方向。

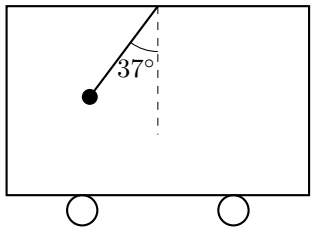


图 1.27: 悬线向后倾斜的匀加速车厢

解　沿竖直与水平分别列第二定律

图 1.27 的球没有竖直加速度，故 $T\cos37^\circ=mg$；水平方向随车共同加速，$T\sin37^\circ=ma$。

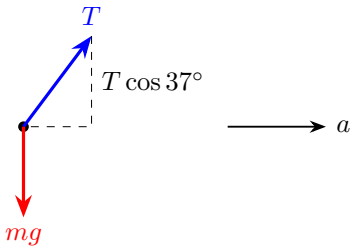


图 1.28: 由张力的两个分量分别确定加速度与大小

求张力、加速度和可能的运动状态

由图 1.28，先得 $T=10/0.8=12.5\,\mathrm{N}$，再得 $a=g\tan37^\circ=7.5\,\mathrm{m/s^2}$，方向向右。取向右为正，车厢速度为 $v(t)=v_0+at$。$v_0>0$ 时向右加速；$v_0<0$ 时先向左减速，到 $t=-v_0/a$ 时转向，随后向右加速。

例 1.7 (光滑斜面上的相对静止)**.** 倾角为 α、质量为 M 的光滑斜面向右上方升高，位于光滑水平面上。用水平力向左推斜面，使质量为 m 的物块同斜面相对静止。求共同加速度、支持力和所需推力。

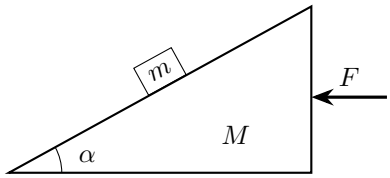


图 1.29: 向左推动上升斜面

解 隔离物块求使它不沿面滑动的加速度

图 1.29 中物块只受 mg 与斜面支持力 N。共同运动为水平平移，所以竖直加速度为零，水平加速度等于斜面的加速度。分别沿竖直和水平向左写

$$N\cos\alpha = mg, \qquad N\sin\alpha = ma.$$

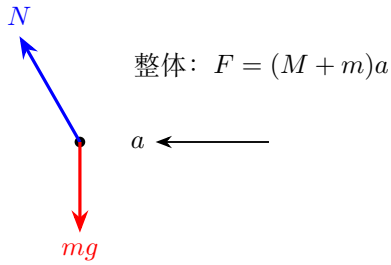


图 1.30: 支持力的水平分量使物块随斜面加速

由图 1.30 中物块的方程，$N = mg/\cos\alpha$、$a = g\tan\alpha$。

以整体方程求外推力

再取斜面和物块整体，水平外力只有 F，故 $F = (M+m)g\tan\alpha$。当 $\alpha \to 0$ 时，所需加速度趋于零，支持力趋于 mg，符合水平面的极限。

例 1.8 (沿斜轨运动的车厢)**.** 小车沿倾角 α 的直斜轨向左下方加速。悬球相对车厢静止，悬线相对竖直向右偏 β，如图所示。求小车沿轨道的加速度大小。

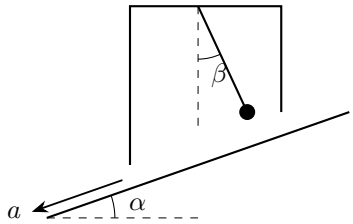


图 1.31: 车厢沿斜轨向左下方加速，悬球向右偏斜

解　保留沿轨道加速度的两个投影

由图 1.31，张力对球向左上，加速度向左下。取水平向左、竖直向上为正，得到 $T\sin\beta = ma\cos\alpha$ 与 $T\cos\beta - mg = -ma\sin\alpha$。

消去张力得到沿轨道加速度

第二式写成 $T\cos\beta = m(g - a\sin\alpha)$，两式相除，得到 $a\cos\alpha = (g - a\sin\alpha)\tan\beta$。将含 a 的项移到同一侧，再乘 $\cos\beta$，

$$a(\cos\alpha + \sin\alpha\tan\beta) = g\tan\beta,$$
$$a(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = g\sin\beta.$$

括号内为 $\cos(\alpha-\beta)$，所以 $a = g\sin\beta/\cos(\alpha-\beta)$。

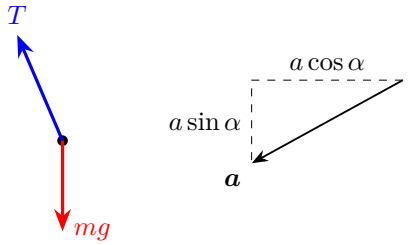


图 1.32: 沿轨道加速度的水平、竖直投影

张力与两个特殊角度

图 1.32 中的竖直加速度分量使张力变为 $T = m(g - a\sin\alpha)/\cos\beta$，代入所求 a 得 $T = mg\cos\alpha/\cos(\alpha-\beta)$。取题图所示 $0 \le \alpha, \beta < 90°$，张力为正。当 $\alpha = 0$ 时，结果化为 $a = g\tan\beta$。当 $\beta = \alpha$ 时，$a = g\sin\alpha$，对应沿光滑斜轨的自由下滑。

例 1.9 (水平台阶上的静摩擦)**.** 自动扶梯沿与水平面成 37° 的方向，以 $5\,\mathrm{m/s^2}$ 向右上方加速，台阶表面水平。质量 $60\,\mathrm{kg}$ 的人相对台阶静止。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求摩擦力、支持力及防止滑动所需的最小静摩擦因数。

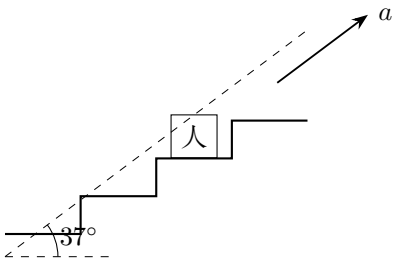


图 1.33: 运动方向倾斜，实际接触面水平

解　按水平台阶画力，按轨道分解加速度

接触面是图 1.33 的水平台阶，故 N 竖直向上、f 水平。人的加速度分量为 $a_x = 5\times 0.8 = 4\,\mathrm{m/s^2}$、$a_y = 5\times 0.6 = 3\,\mathrm{m/s^2}$。分别列 $f = ma_x$、$N - mg = ma_y$。

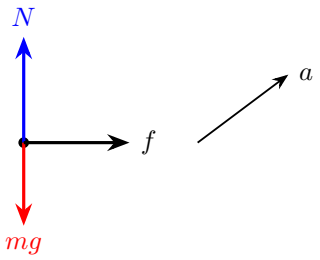


图 1.34: 按接触面方向画力，再分解加速度

计算所需接触力及静摩擦阈值

图 1.34 给出 $f = 240\,\mathrm{N}$，方向向右；$N = 60(10+3) = 780\,\mathrm{N}$。由 $f \le \mu_s N$，$\mu_{s,\min} = 240/780 = 4/13 \approx 0.308$。人的竖直加速度向上，支持力比重力大 $ma_y = 180\,\mathrm{N}$；水平方向的加速度则完全由静摩擦提供。

例 1.10 (刚离地时剪断提绳)**.** 上下两物体质量分别为 m_1, m_2，由轻弹簧连接。缓慢向上提起 m_1，至 m_2 刚要离开地面时剪断提绳，求剪断瞬间两物体的加速度。

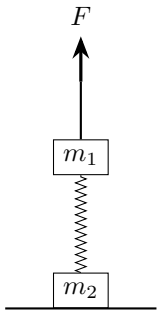


图 1.35: 下方物体处于地面支持力降为零的临界

解　由刚离地条件保存剪断前弹簧力

剪断前图 1.35 的下方物体准静态，且地面支持力恰为零，因此弹簧拉力 $F_s = m_2 g$。剪断瞬间形变连续，这个弹簧力仍不变。

重画上物体剪断后的受力

上方物体失去提绳拉力，只剩重力和向下的弹簧力，所以

$$m_1 a_1 = m_1 g + F_s = (m_1 + m_2)g, \quad a_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} g \quad \text{向下.}$$

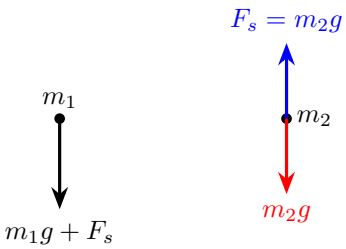


图 1.36: 弹簧对上下物体的作用方向相反

下物体的瞬时运动

图 1.36 右侧的两力在该瞬间仍平衡，故 $a_2 = 0$，地面支持力也为零。随后上物体向下运动，弹簧缩短，拉力减小，地面对下物体的支持力由零开始增大。

例 1.11 (剪断三球系统的上方悬线)**.** 三个等质量小球 A,B,C 自上而下连接：天花板与 A 间为轻绳，A,B 间为轻弹簧，B,C 间为轻绳。系统静止后剪断最上方轻绳，求瞬时加速度。

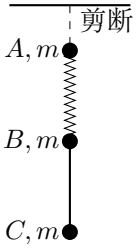


图 1.37: 上绳、弹簧与下绳分别承担不同约束

解　原有弹簧力与上球的瞬时加速度

图 1.37 中弹簧原来悬挂 B,C 两球，故弹力 $F_s = 2mg$。剪断后弹力瞬时不变，取向下为正，对 A 有 $ma_A = mg + 2mg$，即 $a_A = 3g$ 向下。

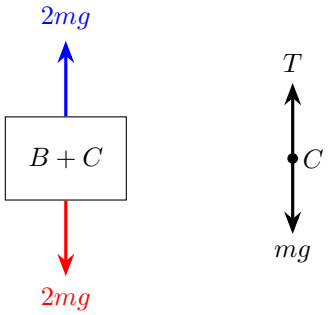


图 1.38: 对下方两球整体求加速度，再隔离求张力

由下两球的共同运动求下绳张力

下方轻绳仍绷紧，两球加速度相同。按图 1.38 对 $B+C$ 列 $2ma = 2mg - F_s = 0$，得到 $a_B = a_C = 0$；再隔离 C，$mg - T = 0$，故下绳张力仍为 mg。

例 1.12 (改变弹簧和绳的位置)**.** 三个质量均为 m 的小球自上而下为 A, B, C。天花板与 A 间为轻弹簧，A, B 间为轻绳，B, C 间为另一轻弹簧。系统静止后剪断 A, B 间的绳，求瞬时加速度。

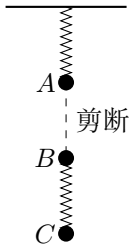


图 1.39: 两根弹簧分别承受三球和一球的重量

解　由剪断前平衡确定两根弹簧的形变

剪断前逐级向上隔离可知，下弹簧弹力 $F_2 = mg$，上弹簧弹力 $F_1 = 3mg$。图 1.39 的两根弹簧在剪断瞬间均保持原形变，而被剪轻绳的张力变为零。

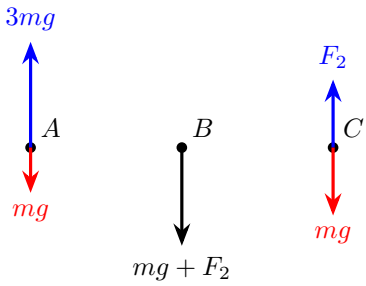


图 1.40: 分别画出三球的瞬时合力

将连续的弹簧力代入三个独立方程

图 1.40 给出 $ma_A = F_1 - mg = 2mg$，$ma_B = mg + F_2 = 2mg$，$ma_C = F_2 - mg = 0$。所以 A 向上加速度 $2g$，B 向下加速度 $2g$，C 瞬时加速度为零。剪断后的三球在原位置由静止开始，随后分别沿各自合力的方向运动。

例 1.13 (斜绳与斜弹簧的不同响应)**.** 质量 m 的小球由向左上方的连接件及向右的水平轻绳共同保持静止。斜连接件与竖直夹角为 θ，分别取不可伸长轻绳和轻弹簧两种情况。剪断水平绳，求瞬时加速度。

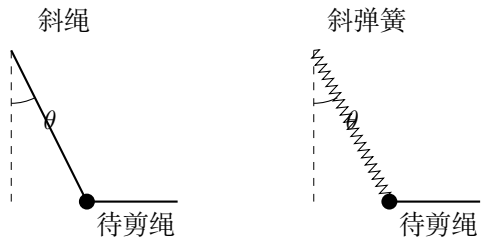


图 1.41: 分别用斜绳和斜弹簧连接的小球

解 先由原平衡确定两种连接件的受力

图 1.41 两装置剪断前均满足斜向力 $Q\cos\theta = mg$，水平绳张力 $H = Q\sin\theta = mg\tan\theta$。剪断后，左侧定长绳通过径向运动关系确定张力；右侧弹簧则由原形变确定瞬时弹力。

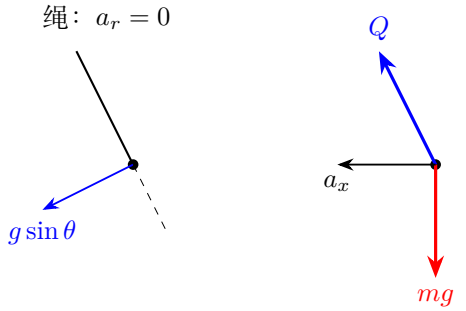


图 1.42: 斜绳下的切向加速度与斜弹簧下的水平加速度

按绳长约束和弹簧连续性分别求加速度

对图 1.42 左图，球初速为零，定长绳径向加速度 $v^2/l = 0$，所以 $T = mg\cos\theta$；切向只剩重力分量，$a = g\sin\theta$，沿切线向左下。

另用连续的弹簧力求水平加速度

对右图，弹簧力仍为 $Q = mg/\cos\theta$，竖直分量恰抵消重力，剩下水平向左合力 $mg\tan\theta$，故 $a = g\tan\theta$ 向左。二者在 $\theta \to 0$ 时均趋于零，但方向与大小一般不同。

例 1.14 (三球与水平弹簧的瞬时运动)**.** 图示三个等质量小球静止，三根弹簧均水平。上球 A 用与竖直成 θ 的轻绳悬挂，A, B 之间为竖直轻绳，B, C 间轻绳也与竖直成 θ。剪断 A, B 间的绳，求三球瞬时加速度。

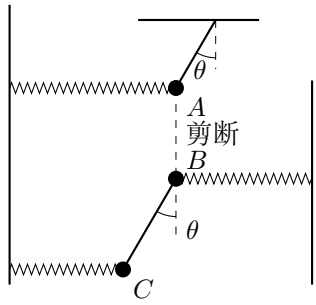


图 1.43: 上、下斜绳平行，三根弹簧均保持水平

解　逐球还原剪断前的三个弹簧力

先由图 1.43 剪断前的平衡逐球求弹簧力。下球 C 的斜绳拉力为 $mg/\cos\theta$，其水平分量为 $mg\tan\theta$。因此 C 的弹簧向左拉 $mg\tan\theta$；再平衡 B，其向右弹簧力也是 $mg\tan\theta$；平衡 A，上绳承担三球竖直重量，A 弹簧向左拉 $3mg\tan\theta$。

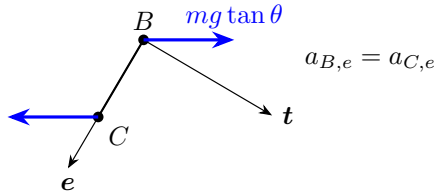


图 1.44: 沿下斜绳与垂直下斜绳建立局部坐标

用下绳零初速约束建立径向方程

取图 1.44 的 $\boldsymbol{e} = (-\sin\theta, -\cos\theta)$ 沿 B 指向 C，$\boldsymbol{t} = (\cos\theta, -\sin\theta)$ 与其垂直。剪断瞬间下绳两端初速均为零，故沿绳的加速度相同。

设下绳张力为 T，则

$$ma_{B,e} = mg\cos\theta - mg\tan\theta\sin\theta + T,$$

$$ma_{C,e} = mg\cos\theta + mg\tan\theta\sin\theta - T.$$

将两式右端相等，消去共同重力项，得到

$$-mg\tan\theta\sin\theta + T = mg\tan\theta\sin\theta - T, \qquad 2T = 2mg\tan\theta\sin\theta.$$

因此 $T = mg\sin^2\theta/\cos\theta$。回代任一个径向式，弹簧的投影与张力抵消，均剩 $ma_e = mg\cos\theta$，故共同分量为 $g\cos\theta$。

分别计算切向分量和上球加速度

垂直绳方向不受张力影响。沿 $\boldsymbol{t}$ 逐球投影，

$$ma_{B,t} = mg\sin\theta + mg\tan\theta\cos\theta = 2mg\sin\theta,$$

$$ma_{C,t} = mg\sin\theta - mg\tan\theta\cos\theta = 0.$$

对上球，沿上绳的瞬时径向加速度为零，切向合力为 $mg\sin\theta - 3mg\tan\theta\cos\theta = -2mg\sin\theta$，故 $\boldsymbol{a}_A = -2g\sin\theta\,\boldsymbol{t}$。最终

$$\boldsymbol{a}_B = g\cos\theta\,\boldsymbol{e} + 2g\sin\theta\,\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{a}_C = g\cos\theta\,\boldsymbol{e}.$$

下两球的相对运动

两下球沿绳的分量相同，相对加速度为 $\boldsymbol{a}_B - \boldsymbol{a}_C = 2g\sin\theta\,\boldsymbol{t}$，沿绳的垂线。这正是轻绳从初静止状态开始转动的运动形式。

例 1.15 (由接触力反求质量比)**.** 光滑水平面上，水平力 F 向右推物块 A，A 再推动相邻物块 B。已知 A 对 B 的推力为 $2F/3$，求质量比。

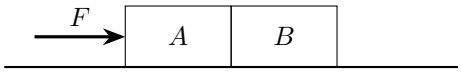


图 1.45: 外力与内部推力作用于不同对象

解 对两个物块分别写相同加速度的方程

图 1.45 中两物块保持接触，水平加速度相同。隔离 B，有 $(2F/3) = m_B a$；隔离 A，其合力为 $F - 2F/3 = F/3$，因此 $(F/3) = m_A a$。



图 1.46: 同一接触力在两物体上方向相反

由加速度相同求质量比

将图 1.46 对应的方程相除，$m_A/m_B = 1/2$。B 的水平合力是 A 的两倍，而两者加速度相同，因此 B 的质量也为 A 的两倍。

例 1.16 (撤去中层拉力后的共同减速)**.** 三个相同物块自上而下为 A, B, C，各质量 m。原来用水平力 F 拉中层 B，三者在地面上共同匀速向右运动。撤去 F 后仍不相对滑动，求 A, B 及 B, C 间的水平摩擦力。

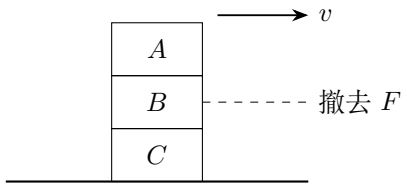


图 1.47: 撤力后，唯一水平外力来自地面

解　由撤力前匀速运动确定地面摩擦

图 1.47 中，撤力前匀速运动给出地面动摩擦力大小 $f_0 = F$。撤力后物块仍向右滑动，地面法向力未变，故该摩擦仍为 F、向左。整体方程为 $3ma = -F$，取向右为正，$a = -F/(3m)$。

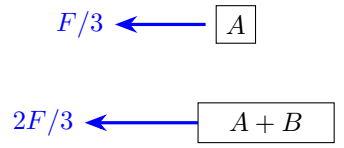


图 1.48: 按上层与上两层分别截取系统

按上层和上两层逐次求层间摩擦

对图 1.48 上层，$f_{B\to A} = ma = -F/3$；对上两层整体，$f_{C\to B} = 2ma = -2F/3$。故两接触面的水平作用力大小分别为 $F/3$ 与 $2F/3$，都使上方子系统减速。两个接触面分别使质量为 m 和 $2m$ 的上方子系统产生相同的向左加速度，所需摩擦力也成 $1:2$。

例 1.17 (拉动三层叠块的分段状态)**.** 三个质量均为 m 的物块 A, B, C 自上而下叠放。各接触面最大静摩擦和动摩擦均取 μN，系统初静止，用恒力 $F \geq 0$ 向右拉中层 B。讨论各物块加速度。

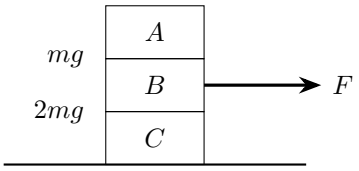


图 1.49: 三个接触面的正压力不同

解 逐个接触面比较摩擦上限

图 1.49 中 A,B 间正压力为 mg，B,C 间为 $2mg$，地面为 $3mg$。C 所受向右摩擦最多 $2\mu mg$，地面可提供到 $3\mu mg$ 的静摩擦，故 C 能始终静止。系统起动的限制首先出现在 B,C 接触面。

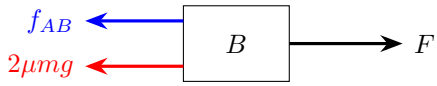


图 1.50: 中块同时受到上、下两个接触面的摩擦

确定全静止区间

当 $0 \le F \le 2\mu mg$，B,C 间静摩擦与 F 平衡，A 不需水平力，三者都静止。

上两块共同运动的拉力范围

当 $F > 2\mu mg$，先设 A,B 共同滑过静止的 C。由图 1.50 取 $A+B$ 得

$$2ma = F - 2\mu mg, \qquad f_{AB} = ma = \frac{F - 2\mu mg}{2}.$$

要求 $f_{AB} \le \mu mg$，故 $2\mu mg < F \le 4\mu mg$ 时 $a_A = a_B = (F - 2\mu mg)/(2m)$，$a_C = 0$。

两接触面均滑动时的加速度

当 $F > 4\mu mg$，B 相对 A 向右滑动。此时 A 仅受向右摩擦 μmg，B 同时受上方 μmg 和下方 $2\mu mg$ 的向左摩擦，因而

$$a_A = \mu g, \qquad a_B = F/m - 3\mu g, \qquad a_C = 0.$$

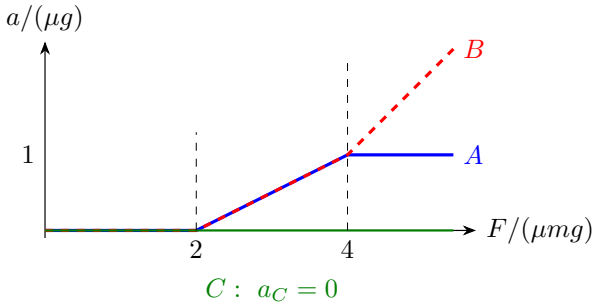


图 1.51: 拉中层时，三个物体的加速度在两个阈值处衔接

图 1.51 以无量纲拉力为横轴。$F = 2\mu mg$ 后上两块才开始共同加速；$F = 4\mu mg$ 后中块斜率增大，上块加速度封顶为 μg。绿色线与横轴重合，表示 C 在各段均保持静止。

在最后一段，$a_B - a_A = F/m - 4\mu g > 0$，中块相对上块向右运动。在 $F = 4\mu mg$ 处，两块的加速度均为 μg，两段曲线在此相接。

例 1.18 (拉上层的悬重与共同运动阈值)**.** 质量 $m_1 = 0.5\,\mathrm{kg}$ 的小块放在 $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$ 的木板上。地面光滑，小块由水平轻绳经固定滑轮连接悬重 m_3。小块与木板间的最大静摩擦及滑动摩擦均取 $\mu m_1 g$，$\mu = 0.5$。由静止释放，讨论加速度与 m_3 的关系。

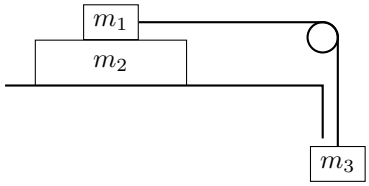


图 1.52: 绳拉上层小块，下层由摩擦带动

解　两块共同运动时所需的摩擦

先假设图 1.52 的两块共同向右，悬重向下，加速度大小均为 a。整体沿各运动方向相加得 $m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a$；单独对下板，所需摩擦为 $f = m_2 a$。共同运动要求

$$\frac{m_2 m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} \le \mu m_1 g.$$

约去 g，因分母为正，可交叉相乘整理为

$$(m_2 - \mu m_1) m_3 \le \mu m_1 (m_1 + m_2).$$

代入 $m_1 = 0.5\mathrm{kg}$、$m_2 = 1\mathrm{kg}$、$\mu = 0.5$，有 $(0.75\,\mathrm{kg})m_3 \le 0.375\,\mathrm{kg}^2$，所以 $m_3 \le 0.5\,\mathrm{kg}$。这一范围 $a_1 = a_2 = a_3 = m_3 g/(1.5\,\mathrm{kg} + m_3)$。

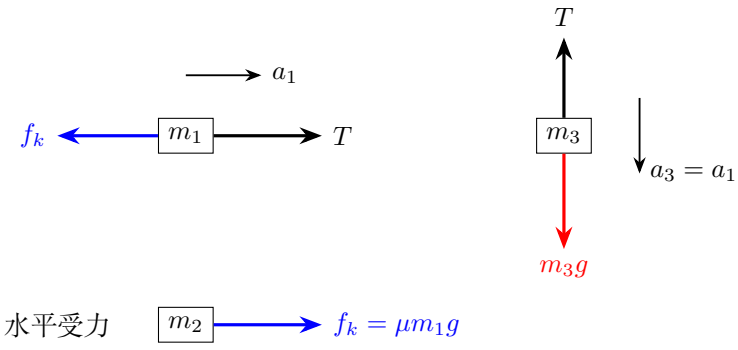


图 1.53: 滑动后张力沿绳关联上块与悬重，下板仅由摩擦加速

分别计算层间滑动后的加速度

当 $m_3 > 0.5\,\mathrm{kg}$，图 1.53 中上块相对木板向右滑动，所受摩擦向左。对上块沿水平向右、对悬重沿竖直向下分别列式：

$$T - \mu m_1 g = m_1 a_1, \qquad m_3 g - T = m_3 a_3.$$

定滑轮两侧绳段的长度变化相反，故两物体沿所取正向的加速度大小相等，$a_3 = a_1$。两式相加消去张力；下方木板另由摩擦加速，得到

$$(m_1 + m_3)a_1 = m_3 g - \mu m_1 g, \quad a_2 = \frac{\mu m_1 g}{m_2} = \frac{g}{4}, \quad a_3 = a_1.$$

滑动后的相对运动与临界值

在 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ 时，$a_2 = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$，$a_1 = 10(m_3 - 0.25\,\mathrm{kg})/(m_3 + 0.5\,\mathrm{kg})\,\mathrm{m/s^2}$，且 $a_1 > a_2$，上块相对下板向右加速。临界值处两式都给出 $2.5\,\mathrm{m/s^2}$。

例 1.19 (与推车侧壁保持接触的悬块)**.** 光滑水平面上的车体质量 m_3，顶部放 m_1，右侧靠有 m_2。一根轻绳从 m_1 水平绕过车顶光滑轻滑轮后竖直连接 m_2，接触面均光滑。求使三者相对静止的向右推力。

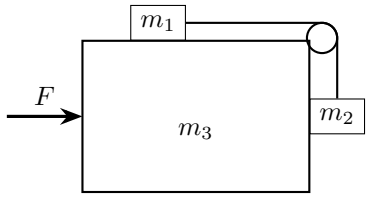


图 1.54: 侧壁为悬块提供水平支持力

解　隔离悬块和顶部块求共同加速度

图 1.54 中 m_2 不升降，故 $T = m_2 g$；侧壁对它的向右支持力满足 $N_2 = m_2 a$。顶部物块水平方向只受张力，所以 $T = m_1 a$，联立得 $a = m_2 g/m_1$。

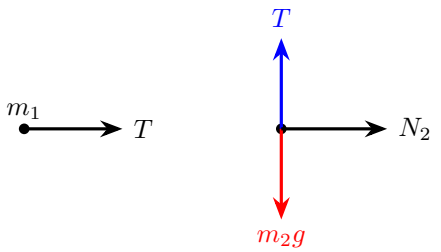


图 1.55: 侧壁提供水平推力，竖直绳承担悬块重力

对三物体整体求推力

再对图 1.55 所代表的三物体整体列水平式，内力相消，$F=(m_1+m_2+m_3)a$，于是

$$F=\frac{(m_1+m_2+m_3)m_2g}{m_1}.$$

此时侧壁推力为 $N_2=m_2^2g/m_1$，它使悬块具有同样的水平加速度；竖直张力承担悬块重力。

例 1.20 (取消侧壁后的悬块)**.** 将上一装置右侧挖空，使 m_2 能自由偏斜且不与车体接触。允许预先把悬绳放到稳定倾角，问能否用恒定向右推力使三物体保持相对静止？求条件和推力。

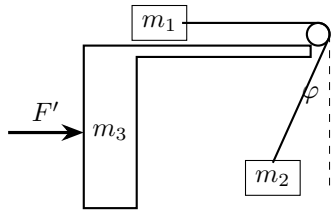


图 1.56: 悬绳倾斜，张力提供悬块的水平加速度

解　把倾斜张力分量与共同加速度对应

取图 1.56 悬绳与竖直夹角 φ，球位于滑轮的左下方。相对车体静止要求三者共同水平加速度为 a。隔离悬块与顶部物块分别有

$$T\cos\varphi=m_2g,\quad T\sin\varphi=m_2a,\quad T=m_1a.$$

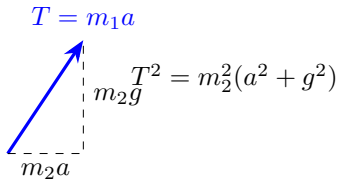


图 1.57: 张力三角形与顶部物块方程共同限制质量比

消去张力并确定质量比的可行条件

按图 1.57 将张力的两个分量平方相加，

$$T^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=m_2^2g^2+m_2^2a^2.$$

左边为 T^2，再代入顶部物块给出的 $T=m_1a$，得到 $m_1^2a^2=m_2^2g^2+m_2^2a^2$。移项得 $(m_1^2-m_2^2)a^2=m_2^2g^2$。右边严格为正，故只有 $m_1>m_2$ 才存在有限正解；取 $a>0$ 的根，并回代张力方程：

$$a=\frac{m_2g}{\sqrt{m_1^2-m_2^2}},\quad F'=(m_1+m_2+m_3)a,\quad \sin\varphi=\frac{m_2}{m_1}.$$

保持这一相对静止状态的初始条件

按题设预先将悬绳置于 $\varphi=\arcsin(m_2/m_1)$，并令三个物体的初始相对速度为零。施加所求恒力后，它们保持这一构形共同加速。

例 1.21 (加速车厢中的地板与悬重)**.** 车厢以 $a>0$ 向右加速，车顶轻滑轮两侧轻绳分别连接地板上的 m_1 与自由悬挂的 m_2，$m_1>m_2$。在相对平衡构形中，连到 m_1 的绳段竖直，悬重偏到滑轮左下方。求张力及地板所需最小静摩擦因数。

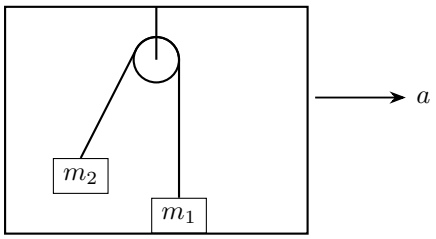


图 1.58: 地板物块的绳段竖直，倾斜绳段与轮缘相切

解　由悬重的水平加速度求张力

图 1.58 的悬重相对车厢静止，在地面系只有水平加速度。它的张力分量为 $T_x=m_2a$、$T_y=m_2g$，所以 $T=m_2\sqrt{g^2+a^2}$。

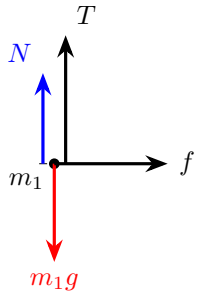


图 1.59: 地板物块的竖直支持力与竖直张力并列示意

隔离地板物块求支持力和摩擦

由图 1.59，地板物块的水平加速度由摩擦提供，$f = m_1 a$；竖直平衡给出 $N = m_1 g - T$。因此

$$\mu_{s,\min} = \frac{m_1 a}{m_1 g - m_2\sqrt{g^2 + a^2}}.$$

地板物块保持接触时的加速度范围

此式首先要求分母为正。因两边均正，平方不改变不等号方向：

$$m_1 g > m_2\sqrt{g^2 + a^2} \quad \Longleftrightarrow \quad m_1^2 g^2 > m_2^2(g^2 + a^2).$$

移项、除以 m_2^2，得到 $a^2 < g^2[(m_1/m_2)^2 - 1]$。题设 $a > 0$，故 $a < g\sqrt{(m_1/m_2)^2 - 1}$。当 a 接近此上限时，张力接近 $m_1 g$，地板支持力趋于零，所需的最小静摩擦因数随之趋于无穷大。

例 1.22 (固定斜面的地面作用力)**.** 质量 m 的物块从倾角 θ 的光滑斜面上滑下，斜面质量 M，依靠地面静摩擦保持静止。斜面向右下方倾斜。求地面对斜面的摩擦力与支持力。

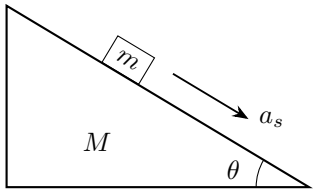


图 1.60: 斜面静止，滑块沿面向右下方运动

解　先将滑块加速度投影到地面坐标

图 1.60 的斜面不动，沿面加速度为 $a_s = g\sin\theta$。以向右、向上为正，物块 $a_x = g\sin\theta\cos\theta$、$a_y = -g\sin^2\theta$。取物块和斜面整体，设地面摩擦为有符号的 f，则

$$f = ma_x, \qquad N - (M + m)g = ma_y.$$

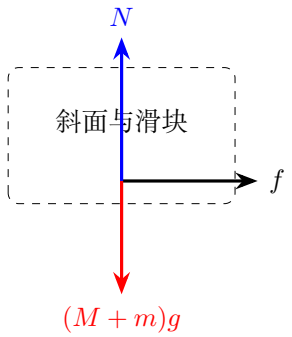


图 1.61: 取滑块和斜面整体，地面作用力改变总动量

求地面支持力和摩擦力

按图 1.61 的外力方向，$f = mg\sin\theta\cos\theta$ 向右，$N = (M+m)g - mg\sin^2\theta = Mg + mg\cos^2\theta$。再隔离滑块得斜面压力 $mg\cos\theta$，其对斜面的水平分量向左、竖直分量向下，恰与上述结果相符。维持斜面静止所需的地面摩擦因数满足 $\mu_s \geq mg\sin\theta\cos\theta/(Mg + mg\cos^2\theta)$。

例 1.23 (箱内圆环的运动与地面支持力)**.** 质量 M 的箱体固定在地面上，箱内质量 m 的圆环沿竖直杆向下运动，测得向下加速度为 a。在无其他竖直外力时求地面支持力；进一步说明若杆完全光滑、圆环仅受重力和杆的作用，a 可以怎样取值。

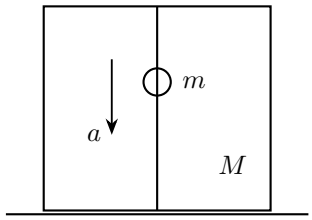


图 1.62: 箱体静止，圆环沿箱内竖直杆下落

解　从整个箱体系统的动量变化求支持力

以图 1.62 中的箱体和圆环为整体，竖直向上列式。箱体加速度为零，圆环加速度为 $-a$，于是 $N - (M+m)g = -ma$，得到 $N = (M+m)g - ma$。该式反映整体竖直动量变化，暂不依赖内部接触力的具体形式。

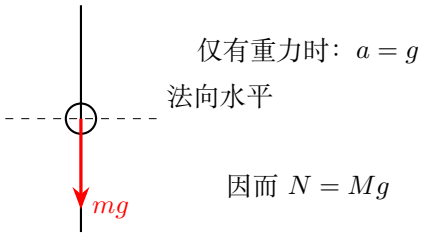


图 1.63: 光滑竖直杆对圆环的作用力水平

光滑竖直杆上的圆环

图 1.63 中光滑竖直杆对圆环的作用力水平。圆环的竖直运动由重力决定，$ma=mg$，即 $a=g$。代回整体方程得 $N=Mg$。

因此，圆环沿光滑竖直杆下落时，它的竖直动量随重力改变，箱底承担的是箱体自身的重力。

例 1.24 (斜面滑轮系统的地面反力)**.** 质量 $4m$ 的斜面保持静止，倾角 $30°$。质量 $8m$ 的物块在光滑斜面上，由轻绳跨过顶端光滑轻滑轮连接竖直悬挂的 $2m$ 物体。求地面对斜面的竖直支持力及水平静摩擦力。

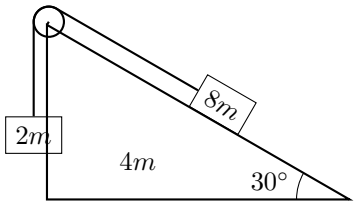


图 1.64: 悬重与斜面物块的竖直加速度不同

解　沿绳消去内张力求两物体加速度

取图 1.64 的 $8m$ 沿面向右下、$2m$ 向上为正向。两者加速度大小均为 a。隔离两个物体，绳张力均记为 T，分别有

$$8mg\sin 30°-T=8ma,\qquad T-2mg=2ma.$$

图中张力对沿面下滑的物块向上、对悬重向上；按各自所选的正向，它在两式中的符号相反。两式相加消去张力，得到

$$8mg\sin 30°-2mg=(8m+2m)a,\quad a=g/5.$$

用竖直加速度的质量加权和求支持力

取斜面、滑轮和两物体整体，竖直向上为正。只有悬重的 $+a$ 和斜面物块的 $-a\sin 30^\circ$ 进入质量加权和：

$$N_y - 14mg = 2ma - 8ma\sin 30^\circ = -2ma.$$

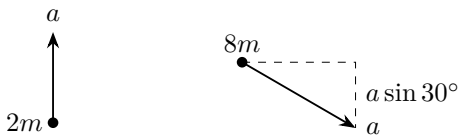


图 1.65: 两物体加速度在地面坐标中的投影

由图 1.65，$N_y = 14mg - 2mg/5 = 68mg/5$。

由水平投影求地面摩擦

水平外力须提供 $8m$ 物块的向右加速度分量，故 $f_x = 8ma\cos 30^\circ = 4\sqrt{3}mg/5$ 向右。维持斜面静止所需静摩擦因数至少为 $f_x/N_y = \sqrt{3}/17$。这一静摩擦使装置的水平总动量向右增加，斜面本身保持静止。

例 1.25 (粗糙地面上拉上层物块)**.** 上层 A 质量 5 kg，下层 B 质量 2 kg。A, B 间摩擦因数 0.2，B 与地面间为 0.1，各处最大静摩擦均近似等于动摩擦。由静止对 A 加水平向右恒力 $F \geq 0$。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求各阶段加速度。

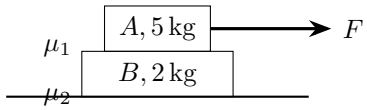


图 1.66: 地面摩擦与层间摩擦对应两个起滑条件

解　两物块均静止时的拉力范围

图 1.66 地面最大静摩擦为 $0.1(5+2)10 = 7\,\mathrm{N}$，层间上限为 $0.2\times 5\times 10 = 10\,\mathrm{N}$。当 $0 \leq F \leq 7\,\mathrm{N}$，层间摩擦和地面摩擦均可平衡 F，两块静止。

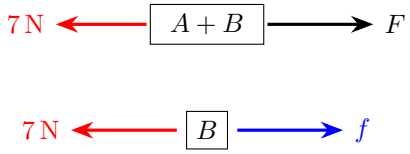


图 1.67: 共同运动时先用整体，再用下层求所需摩擦

求共同滑动区间的加速度与所需摩擦

当 $F > 7\,\mathrm{N}$，若共同运动，图 1.67 给出 $a = (F - 7\,\mathrm{N})/(7\,\mathrm{kg})$，而下层方程 $f - 7\,\mathrm{N} = (2\,\mathrm{kg})a$，故 $f = (2F + 35\,\mathrm{N})/7$。令 $f \le 10\,\mathrm{N}$，得到 $F \le 17.5\,\mathrm{N}$。因此中间区间两块加速度均为上述 a。

层间滑动后的运动

当 $F > 17.5\,\mathrm{N}$，层间滑动，$f = 10\,\mathrm{N}$，分别列式得 $a_A = (F - 10\,\mathrm{N})/(5\,\mathrm{kg})$，$a_B = (10 - 7)\,\mathrm{N}/(2\,\mathrm{kg}) = 1.5\,\mathrm{m/s^2}$。在临界处两者也等于 $1.5\,\mathrm{m/s^2}$，且高于临界时 $a_A > a_B$，滑动方向正确。

例 1.26 (叠块的起滑与滑动加速度)**.** 质量 $1\,\mathrm{kg}$ 的 A 放在质量 $2\,\mathrm{kg}$ 的 B 上，地面光滑，层间最大静摩擦为 $5\,\mathrm{N}$。用水平向右恒力拉 B，分别取 $F = 10\,\mathrm{N}$、$20\,\mathrm{N}$，求加速度。若滑动摩擦未知，说明结果应怎样表达。

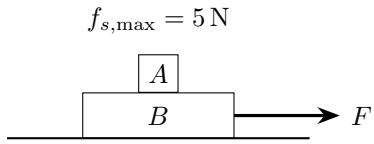


图 1.68: 恒力直接拉下层，摩擦加速上层

解　用上层所需摩擦确定共同运动阈值

共同加速度为 $a = F/(3\,\mathrm{kg})$，图 1.68 上层所需摩擦为 $f = (1\,\mathrm{kg})a = F/3$。故临界拉力为 $F_c = 15\,\mathrm{N}$。$F = 10\,\mathrm{N}$ 时，所需摩擦 $10/3\,\mathrm{N} < 5\,\mathrm{N}$，两块均为 $a = 10/3\,\mathrm{m/s^2}$。



图 1.69: 滑动后的两个方程需要滑动摩擦力作为参数

层间滑动时的两个物块

当 $F = 20\,\mathrm{N}$，共同运动所需摩擦为 $20/3\,\mathrm{N}$，已超上限，必滑动。按图 1.69 记滑动摩擦为 f_k，两块分别满足 $a_A = f_k/(1\,\mathrm{kg})$、$a_B = (20\,\mathrm{N} - f_k)/(2\,\mathrm{kg})$。

取滑动摩擦为给定值的数值例子

滑动阶段的加速度随 f_k 改变。若进一步取 $f_k = 5\,\mathrm{N}$，得到 $a_A = 5\,\mathrm{m/s^2}$、$a_B = 7.5\,\mathrm{m/s^2}$。

例 1.27 (切开长方体后的离地阈值)**.** 把长方体沿与水平面成 θ 的切面分成左上块 m 与右下块 M，两块底部起初都接触光滑水平面，切面也光滑。向右水平推左上块，求它刚开始相对另一块向上滑动所需的临界推力。

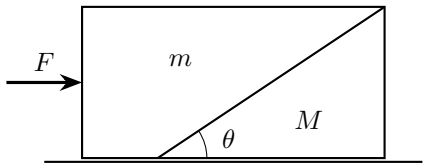


图 1.70: 推力作用于左块，两块先沿地面共同移动

解　从上块地面支持力降为零确定临界

临界前两块均由地面支承，竖直位置不变，彼此保持接触，故图 1.70 中两块共同水平加速度为 a。设切面对 m 的支持力为 N，地面对它的支持力为 R，则 $N\cos\theta + R = mg$。刚要上滑时 $R = 0$，所以 $N = mg/\cos\theta$。

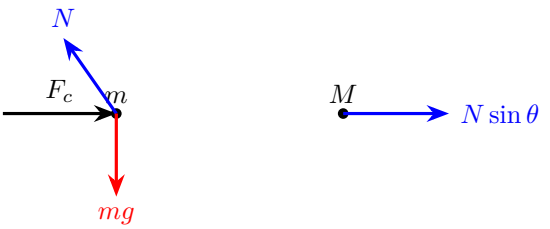


图 1.71: 临界时上块的受力与下块的水平反作用

依次隔离下块、取整体求临界推力

按图 1.71，下块的水平式为 $Ma = N\sin\theta = mg\tan\theta$，整体水平式为 $F_c = (M+m)a$。联立得到

$$F_c = \frac{(M+m)mg\tan\theta}{M}.$$

地面支持力随推力的变化

在离地之前，整体给 $a = F/(M+m)$，下块给 $N\sin\theta = Ma$。代入上块的竖直方程，得到

$$R = mg - N\cos\theta = mg - \frac{MF\cot\theta}{M+m}.$$

R 随 F 线性减小，到 $F = F_c$ 恰为零；继续增大推力，上块便离开地面，沿切面向上运动。

例 1.28 (水平动滑轮与等效惯量)**.** 光滑水平面上有 m_1, m_2 两物体。轻绳一端固定在左墙，向右绕过连接在 m_2 上的轻动滑轮，再向左连接 m_1。用水平恒力 F 向右拉 m_2，求两物体加速度。

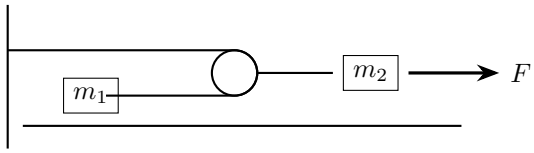


图 1.72: 绳的两段长度都随滑轮中心位置改变

解　写总绳长并求两块的加速度比

图 1.72 中统一向右取坐标，动滑轮中心与 m_2 同坐标。轻绳长度为 $L = x_2 + (x_2 - x_1) + C$，对时间先后求导得 $0 = 2\dot{x}_2 - \dot{x}_1$、$0 = 2\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$，故 $2a_2 - a_1 = 0$。设绳张力 T，上式给 $a_1 = 2a_2$，物块 m_1 水平式为 $T = m_1 a_1 = 2m_1 a_2$。

$$a_1 = 2a_2$$

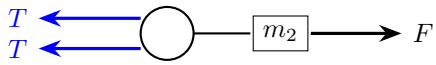


图 1.73: 动滑轮受到两股向左张力

计入动滑轮两股张力，联立动力学

按图 1.73 把轻滑轮与 m_2 合并，$F - 2T = m_2 a_2$。代入张力后得

$$a_2 = \frac{F}{4m_1 + m_2}, \qquad a_1 = \frac{2F}{4m_1 + m_2}.$$

解释分母中的倍数来自位移比与传力关系

动滑轮移动一段距离时，绳端物块移动两倍距离；而动滑轮又承受两股张力。因此，代入 $T = 2m_1 a_2$ 后，$2T = 4m_1 a_2$，得到分母中的 $4m_1$。

例 1.29 (自由斜面的反冲加速度)**.** 光滑水平面上放置质量 M 的斜面，斜面向右上方升高、倾角 θ。质量 m 的物块从斜面静止释放，各处无摩擦，求斜面及物块对地加速度。

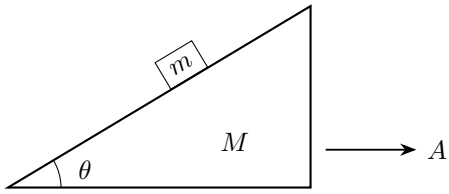


图 1.74: 滑块沿面下滑，斜面向右反冲

解 分别列滑块和自由斜面的真实力方程

令图 1.74 中斜面向右加速度为 A，物块受支持力为 N。向右、向上分别列物块方程 $ma_x = -N\sin\theta$、$ma_y = N\cos\theta - mg$；斜面水平式为 $MA = N\sin\theta$。

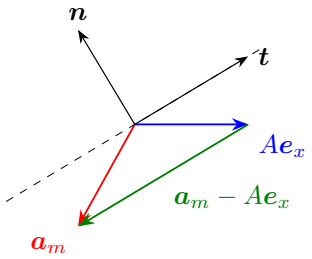


图 1.75: 物块对地加速度与斜面加速度之差平行于斜面

由法向接触关系联立求解

斜面仅平移且是直面，图 1.75 的法向 $\boldsymbol{n} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ 不转动。接触条件给 $-a_x\sin\theta + a_y\cos\theta = -A\sin\theta$。将两条物块方程代入左边，

$$-\left(-\frac{N}{m}\sin\theta\right)\sin\theta + \left(\frac{N}{m}\cos\theta - g\right)\cos\theta = \frac{N}{m} - g\cos\theta.$$

所以 $N/m - g\cos\theta = -A\sin\theta$。再用斜面方程 $A = N\sin\theta/M$ 消去 A，把含 N 的项移到同一侧：

$$N\left(\frac{1}{m} + \frac{\sin^2\theta}{M}\right) = g\cos\theta, \qquad \frac{1}{m} + \frac{\sin^2\theta}{M} = \frac{M + m\sin^2\theta}{mM}.$$

因此

$$N = \frac{mMg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}, \qquad A = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}.$$

求物块对地的两个加速度分量

记共同分母 $D = M + m\sin^2\theta > 0$。将支持力回代，水平分量为 $a_x = -N\sin\theta/m = -Mg\sin\theta\cos\theta/D$；竖直分量需先通分，

$$a_y = \frac{N\cos\theta}{m} - g = \frac{Mg\cos^2\theta - g(M + m\sin^2\theta)}{D} = -\frac{(M+m)g\sin^2\theta}{D}.$$

故物块对地分量为

$$a_x = -\frac{Mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}, \qquad a_y = -\frac{(M+m)g\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}.$$

$MA + ma_x = 0$，符合整体无水平外力；$M \to \infty$ 时 $A \to 0$，物块回到固定斜面的结果。

例 1.30 (固定斜面上的水平顶面楔块)**.** 质量 M 的三角楔块 A 在倾角 $\theta = 30^\circ$ 的固定光滑斜面上，楔块顶面保持水平，顶上放质量 m 的物块 B。两者初静止且接触光滑，求释放后 A 的加速度，并检查 B 是否保持接触。

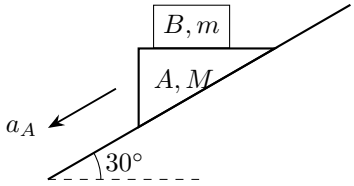


图 1.76: 楔块沿固定斜面运动，上方物块与水平顶面保持接触

解　用水平顶面的竖直运动联系两物体

由图 1.76，A 只能沿固定斜面向左下移动，而 B 不受水平力。因此只要接触，B 向下加速度等于顶面竖直加速度 $a_B = a_A \sin\theta$。设顶面支持力为 N_2，有 $mg - N_2 = ma_A \sin\theta$。

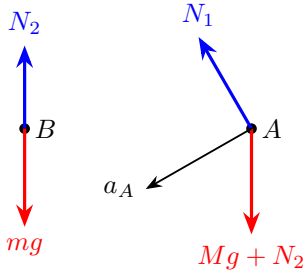


图 1.77: 用顶面的竖直运动连接两物体

沿固定斜面投影楔块方程并消去支持力

对图 1.77 右侧楔块沿固定斜面投影，支持力 N_1 没有沿面分量，故 $Ma_A = (Mg + N_2)\sin\theta$。代入 $N_2 = m(g - a_A \sin\theta)$ 并展开，

$$Ma_A = Mg\sin\theta + mg\sin\theta - ma_A \sin^2\theta,$$
$$(M + m\sin^2\theta)a_A = (M + m)g\sin\theta.$$

移项后 a_A 的系数为正，可以相除，得

$$a_A = \frac{(M+m)g\sin\theta}{M + m\sin^2\theta} = \frac{2(M+m)g}{4M+m},$$

方向沿固定斜面向下。

水平顶面上的支持力

将 a_A 代入 $N_2 = m(g - a_A \sin\theta)$，

$$N_2 = mg\left[1 - \frac{(M+m)\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta}\right]$$
$$= mg\frac{M + m\sin^2\theta - M\sin^2\theta - m\sin^2\theta}{M + m\sin^2\theta} = \frac{mMg\cos^2\theta}{M + m\sin^2\theta} > 0.$$

所以在 B 尚未滑出水平顶面范围内接触能够维持。B 只受竖直方向的重力和支持力，故水平加速度为零，竖直加速度为 $a_A \sin\theta$，方向向下。

1.7 本讲小结

牛顿运动定律把研究对象的外力同其加速度联系起来。整体方程给出各部分加速度的质量加权和，隔离方程给出内部的接触力或张力；绳长与接触关系将这些运动联系起来。

练习 1.1 (竖直加速中的叠块)**.** 电梯以 a_0 向上加速，地板光滑，下层板质量 M、上层块质量 m，层间最大静摩擦因数 μ_s。用水平力 F 拉下层板，求两者共同运动的最大 F 以及地板支持力。

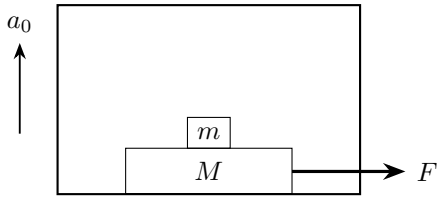


图 1.78: 竖直共同加速度改变层间法向力

练习 1.2 (由秤读数反推质量差)**.** 两物体由跨过轻定滑轮的绳连接，滑轮用弹簧秤悬挂，轮心位置保持固定。已知总质量 M、运动时秤读数 S，求两物体的质量及加速度大小，忽略滑轮自重，并求两质量为正时的读数范围。

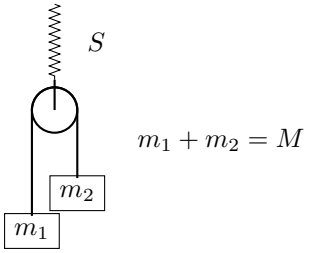


图 1.79: 质量未知，读数与总质量已知

练习 1.3 (摆动中小球的加速度与绳张力)**.** 定长轻绳长 l，连接固定悬点和质量 m 的小球。小球摆动到绳与竖直方向夹角为 θ（$0 \le \theta < 90°$）的位置时，速率为 v，绳保持绷紧。求径向、切向加速度及绳张力，并比较 $v = 0$ 与 $v > 0$ 时的运动。

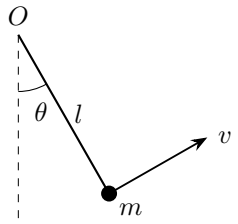


图 1.80: 绳保持绷紧，小球速度沿圆弧切线

练习 1.4 (规定加速度的光滑斜面)**.** 斜面向右上方升高，倾角 α，在外力作用下以规定加速度 a_0 向左平移。质量 m 的物块与斜面光滑接触，求支持力及相对斜面的沿面加速度，讨论物块可能相对静止的条件。

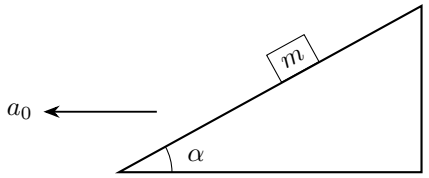


图 1.81: 斜面以给定加速度向左平移，物块可沿面滑动

练习解答

练习 1.1

解　先求层间法向力与共同水平加速度

图 1.78 中上下两物体竖直加速度都为 a_0。设层间支持力 N，对上层写 $N - mg = ma_0$，故 $N = m(g + a_0)$。水平方向地面光滑，整体 $F = (M + m)a_x$；上层需要的摩擦为 $f = ma_x = mF/(M + m)$。

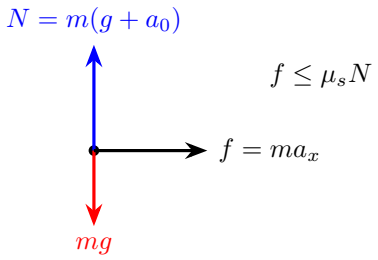


图 1.82: 水平加速所需摩擦与竖直运动决定的上限

由静摩擦求最大水平拉力

由图 1.82 所示上限，$mF/(M+m) \le \mu_s m(g+a_0)$，得到 $F_{\max} = \mu_s(M+m)(g+a_0)$。地板支持力 R 对整体提供竖直加速度，$R-(M+m)g = (M+m)a_0$，故 $R = (M+m)(g+a_0)$。竖直向上加速使层间压力增大，所能提供的最大静摩擦也相应增大。

练习 1.2

解　由秤读数恢复张力与两悬物方程

图 1.79 中的理想滑轮静止，故 $T = S/2$。约定 $m_1 \ge m_2$，分别取 m_1 向下、m_2 向上为正，写出

$$m_1 g - T = m_1 a, \qquad T - m_2 g = m_2 a.$$

相加后，$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)a = Ma$，所以 $a = (m_1 - m_2)g/M$。再由第二式求张力：

$$T = m_2(g+a) = m_2 g\left(1 + \frac{m_1 - m_2}{M}\right) = \frac{2m_1 m_2 g}{M}.$$

于是 $S = 2T = 4m_1 m_2 g/M$。

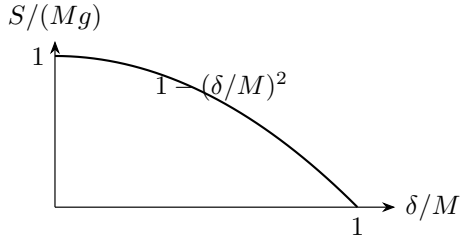


图 1.83: 用质量差表示不对称程度

用总质量和质量差解出两质量

令质量差 $\delta = m_1 - m_2 \geq 0$。由 $M = m_1 + m_2$，先计算

$$M^2 - \delta^2 = (m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2 = 4m_1 m_2.$$

按图 1.83 将它代入读数式 $S = 4m_1 m_2 g/M$，得 $SM/g = M^2 - \delta^2$，即 $\delta^2 = M^2 - SM/g$。质量差取非负根，得到 $\delta = M\sqrt{1 - S/(Mg)}$。再联立和、差，$m_1 = (M + \delta)/2$、$m_2 = (M - \delta)/2$，而加速度大小为 $a = g\delta/M$，所以

$$m_{1,2} = \frac{M}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{S}{Mg}}\right), \qquad a = g\sqrt{1 - \frac{S}{Mg}}.$$

两质量为正时的读数范围

两质量均为正时须 $0 < S \leq Mg$，等号对应两质量相等；$S = 0$ 仅为其中一质量趋于零的极限。读数最大值 Mg 对应静止的等质量悬物。

练习 1.3

解　按圆周曲率列径向方程求张力

图 1.80 的速度沿切线，方向随时间改变。由圆周几何，径向加速度大小 $a_r = v^2/l$，指向悬点。向悬点列式为 $T - mg\cos\theta = mv^2/l$，从而 $T = m(g\cos\theta + v^2/l)$。

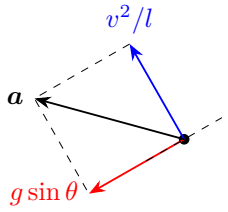


图 1.84: 径向加速度指向悬点，切向加速度指向最低点

沿切线求加速度，再合成完整矢量

图 1.84 的切向不含张力，重力沿向最低点方向的分量为 $mg\sin\theta$，所以 $a_t = g\sin\theta$。完整加速度为这两个正交分量的矢量和，大小 $\sqrt{v^4/l^2 + g^2\sin^2\theta}$。当 $v = 0$ 时，$a_r = 0$，加速度沿切线指向最低点；当 $v > 0$ 时，径向分量 v^2/l 使速度方向不断转动。图示 $0 \leq \theta < 90°$ 时，所求张力为正，绳保持绷紧。

练习 1.4

解 由斜面平移确定接触所需的法向加速度

图 1.81 沿斜面向右上取单位矢量 $\boldsymbol{t} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$，向左上法向为 $\boldsymbol{n} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$。斜面加速度为 $-a_0\boldsymbol{e}_x$，法向投影为 $a_0\sin\alpha$。直面接触要求物块具有相同法向加速度，故 $N - mg\cos\alpha = ma_0\sin\alpha$。

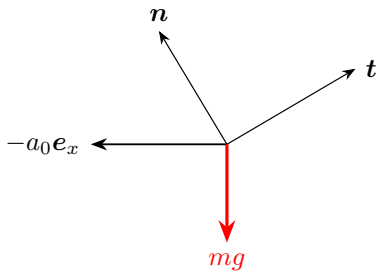


图 1.85: 相对加速度只沿直斜面，法向由斜面平移确定

求支持力并相减得到沿面相对加速度

因此 $N = m(g\cos\alpha + a_0\sin\alpha) > 0$。沿 $\boldsymbol{t}$ 的对地加速度由重力给出 $\boldsymbol{a}_m \cdot \boldsymbol{t} = -g\sin\alpha$。根据图 1.85 减去斜面沿面分量 $-a_0\cos\alpha$，得相对沿面加速度 $a_{\text{rel}} = a_0\cos\alpha - g\sin\alpha$。

当 $a_0 = g\tan\alpha$ 时，相对加速度为零，相对速度保持初值。初始相对速度为零时，物块保持相对静止；初始相对速度非零时，物块沿斜面匀速滑动。

牛顿运动定律

物理竞赛一轮讲义

第二讲

摩擦、约束与加速参考系

2026

目录

第二讲　摩擦、约束与加速参考系 **1**

2.1　参考系与动力学规律 1

2.2　平移加速系中的运动 2

2.3　摩擦与共同运动 4

2.4　移动滑轮与绳长 6

2.5　导轨与接触面的运动 8

2.6　杆的平移和转动 9

2.7　支承载荷与翻转 11

2.8　例题与分析 13

2.9　本讲小结 38

练习解答 39

第二讲　摩擦、约束与加速参考系

2.1　参考系与动力学规律

2.1.1　匀速平移的参考系怎样描述同一次相互作用

在光滑水平轨道上，弹簧推动小车。地面观察者与沿轨道匀速前进的观察者，测得小车的速度相差一个常矢量 $\boldsymbol{V}$。两次测量采用相同时间，位置关系为 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t$，所以

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}, \qquad \boldsymbol{a}' = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}.$$

弹簧的形变量由两端距离决定，在两系中相同；近地面重力与接触几何也相同。因而同一小车的牛顿方程在两系中具有相同形式。图 2.1 将两次观察并排画出，右图只有整体的速度平移，形变量与力的方向保持原样。

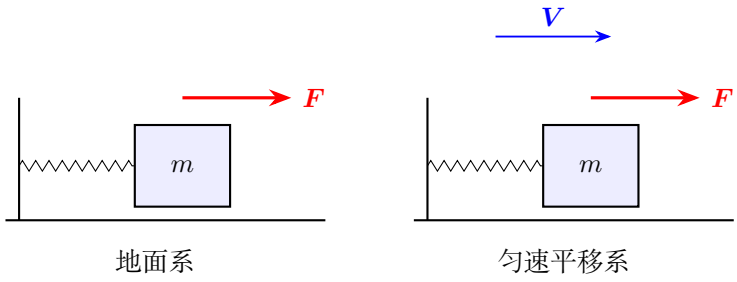


图 2.1: 同一弹簧形变在匀速平移的两系中给出同一加速度

对于一组确定的物体，两个惯性系中的系统总动量满足 $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} - M\boldsymbol{V}$。总质量 M 与 $\boldsymbol{V}$ 恒定，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{P}'/\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{P}/\,\mathrm{d}t$。系统动量变化率与外力的关系也保持同样形式。这就是在经典力学范围内，各惯性系采用相同动力学规律的含义。

2.1.2　加速参考系把哪一部分运动移入方程

车厢加速以后，观察者的原点本身具有加速度，坐标变换的二阶导数随之多出一项。处理这类题目，可以在地面惯性系中研究物体的实际加速度，也可以在随车平移系中研究相对运动，并把原点加速度移到受力一侧。下节从位置矢量开始推导这个关系，再用悬球说明有效重力，随后讨论摩擦怎样维持相对静止。

2.2 平移加速系中的运动

2.2.1 位置关系怎样变成加速度关系

坐在加速车厢里观察悬球，小球可以始终停在车内同一个位置，悬线却倾斜了。地面上的观察者看到小球随车加速；车内观察者看到小球相对静止。这两个描述可以从同一条位置关系得到。

如图 2.2，地面原点为 O，车内原点为 O'，两组坐标轴始终平行。设 $\overrightarrow{OO'} = \boldsymbol{R}(t)$，物体相对车厢的位置为 $\boldsymbol{r}'$，则

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{r}'.$$

第一次对时间求导，得到 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v}'$；第二次求导，得到

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{R}} + \ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}'.$$

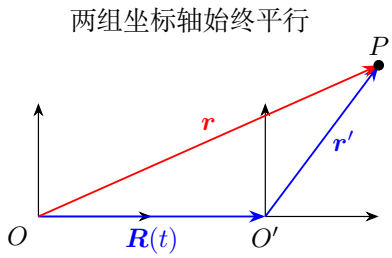


图 2.2: 两个原点与同一个物体构成位置矢量三角形

这里 $\boldsymbol{a}_0$ 是车厢的平移加速度，$\boldsymbol{a}'$ 是物体相对车厢的加速度。小球相对车厢静止时 $\boldsymbol{a}' = 0$，所以对地加速度为 $\boldsymbol{a}_0$；物块沿车内斜面滑动时，$\boldsymbol{a}'$ 就沿斜面。

在地面惯性系中写 $\sum \boldsymbol{F} = m(\boldsymbol{a}_0 + \boldsymbol{a}')$，把 $m\boldsymbol{a}_0$ 移到左侧，得到

$$\sum \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 = m\boldsymbol{a}'. \tag{2.1}$$

在随车平移系中，把 $-m\boldsymbol{a}_0$ 称为平移惯性力。它把车厢加速对相对运动的影响写在方程左侧，使方程保持熟悉的形式。图 2.3 中，同一个物体在地面系用真实合力求对地加速度，在车厢系则把惯性力一同列入，求相对加速度。

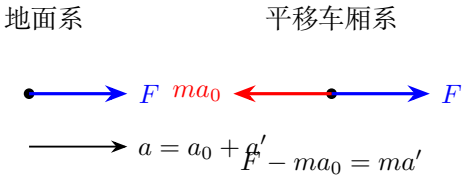


图 2.3: 同一水平加速过程的两种受力描述

例如质量 m 的小球相对向右加速的车厢静止，车内系中有 $T\sin\theta - ma_0 = 0$、$T\cos\theta - mg = 0$。于是 $\tan\theta = a_0/g$，同地面系的计算结果相同。选择参考系时，可根据运动的几何关系来决定：相对位置简单的车厢问题，用随车系往往更方便。

2.2.2 有效重力的方向和大小

把重力与平移惯性力合并，定义

$$\boldsymbol{g}_{\text{eff}} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0.$$

车内相对静止的悬球满足 $\boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}_{\text{eff}} = 0$，悬线因此沿有效重力的方向下垂。向右加速的车厢中，$\boldsymbol{g}_{\text{eff}}$ 向左下，大小为 $\sqrt{g^2 + a_0^2}$。竖直向上加速的电梯中，有效重力向下，大小为 $g + a_0$，支持力相应增大。

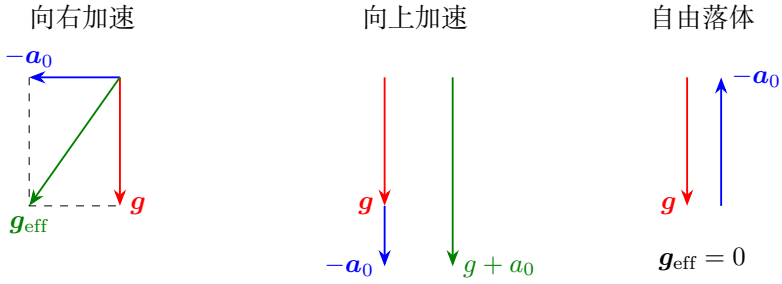


图 2.4: 水平加速、竖直加速和自由落体对应不同的有效重力

图 2.4 的自由落体情形有 $\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{g}$，所以 $\boldsymbol{g}_{\text{eff}} = 0$。车内的自由小球与车厢具有同样的对地加速度，初始相对速度为零时，它保持原有相对位置。这就是平移自由落体系统中的失重现象。

若车内的光滑斜面向右上方倾斜 θ，车以加速度 a_0 向左运动，则有效重力为向右的 a_0 与向下的 g 的矢量和。沿面向右上取正，投影得到

$$a_{\text{rel}} = a_0\cos\theta - g\sin\theta, \qquad N = m(g\cos\theta + a_0\sin\theta).$$

当 $a_0 > g\tan\theta$ 时，从相对静止释放的物块沿斜面上升。例 2.6 将进一步积分求出上升到顶端的时间。

2.3　摩擦与共同运动

2.3.1　所需的静摩擦随加速度改变

图 2.5 中的物块由弹簧向右拉住，弹簧右端固定在车壁上。物块相对车厢静止时，弹簧伸长保持不变，弹力为确定的 F_s。取向右为正，在地面系有

$$F_s + f = ma_0, \qquad f = ma_0 - F_s.$$

车厢加速度较小时，弹簧向右的拉力超过所需合力，摩擦向左；当 $a_0 = F_s/m$ 时摩擦为零；再增加加速度，摩擦转向右方，同弹簧力一起使物块加速。

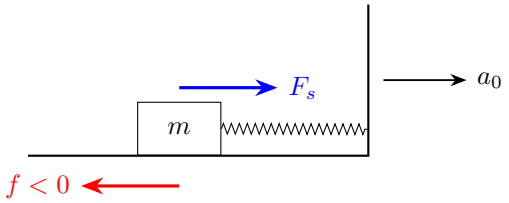


图 2.5: 弹簧力保持不变，摩擦力随车厢加速度改变

静摩擦的允许值为 $-\mu_s N \le f \le \mu_s N$。把所需摩擦代入，便得到

$$\frac{F_s - \mu_s N}{m} \le a_0 \le \frac{F_s + \mu_s N}{m}.$$

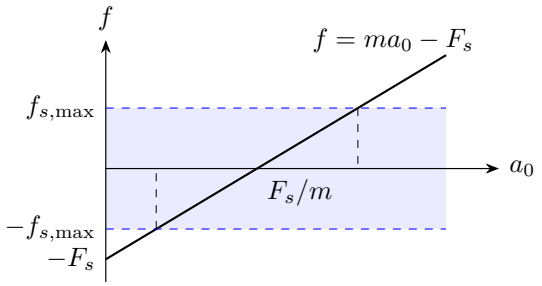


图 2.6: 所需摩擦同静摩擦允许范围的交点确定加速度范围

图 2.6 中，直线落在浅色带内的部分对应相对静止。若给定加速度的变化区间，比较直线在该区间两端的值，就能求出所需摩擦大小的最大值。例 2.1 利用初始静止已经能够提供的摩擦，判断整个缓慢调节过程。

2.3.2 把切向和法向条件放在同一张图中

对向右下方倾斜的斜面，车向右加速 A。沿面向上取摩擦正向，物块相对静止时

$$f = m(g\sin\theta - A\cos\theta), \qquad N = m(g\cos\theta + A\sin\theta).$$

这里 N 随 A 增大，而所需的向上摩擦逐渐减小，在 $A = g\tan\theta$ 时为零，随后变为向下。例 2.3 讨论的正是物块和斜面共同向左运动、斜面受地面摩擦向右减速的阶段。

把接触合力写为 $\boldsymbol{R} = N\boldsymbol{n} + f\boldsymbol{t}$，则 $|f| \le \mu_s N$ 可写成 $|\tan\varphi| \le \mu_s$，其中 φ 是 $\boldsymbol{R}$ 同法线的夹角。图 2.7 中的允许角域半角为 $\varphi_s = \arctan\mu_s$。

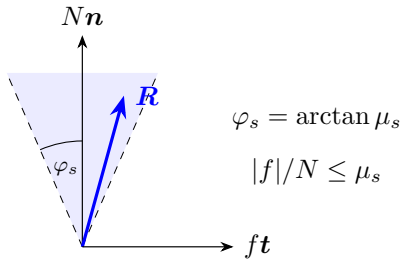


图 2.7: 半角 φ_s 由法线量到接触合力的极限方向

在平移系内相对静止时，接触合力等于 $-m\boldsymbol{g}_{\text{eff}}$。随着车厢加速度改变，这个方向在图中转动；达到角域的一侧时，对应一个方向的起滑临界，达到另一侧时对应反向起滑。练习 2.1 将把这两个条件分别写成不等式，求出完整的加速度区间。

2.3.3 多层物块中的摩擦怎样传递加速度

下块受到水平拉力时，上块通过接触面的摩擦随它加速。先看图 2.8 的两层物块：上块质量为 m，下块质量为 M，拉力 F 作用于下块，地面对下块的阻力大小为 f_g。两块共同向右加速时，上块的水平合力完全由层间摩擦提供。

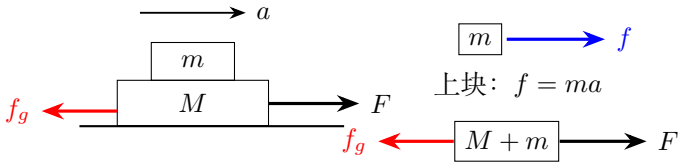


图 2.8: 上块的摩擦带来加速度，整体方程再联系外部拉力

按图 2.8 隔离上块，写 $f = ma$；再取两块整体，层间作用相消，得到

$$F - f_g = (M + m)a.$$

因此所需层间摩擦为 $f = m(F - f_g)/(M + m)$。若接触面的法向力为 N，共同运动的范围由 $|f| \le \mu_s N$ 确定。拉力或地面阻力改变时，层间摩擦也随所需加速度改变。

有多个接触面时，可以先找水平受力最简单的物体，求它随整体加速所需的摩擦；再把这个反作用力放进相邻物体的方程。各接触面分别与自己的最大静摩擦比较，最先达到上限的接触面决定共同运动能够持续到哪里。例 2.2 将这一办法用于由绳连接的两组叠块。例 2.14 还含地面摩擦，层间开始滑动后，改用该处的动摩擦重新求下块所需的地面摩擦，便能继续描述各阶段的运动。

2.4 移动滑轮与绳长

2.4.1 固定墙端和移动支点

图 2.9 中，绳一端固定在右墙，另一端沿斜面连接物块，滑轮随斜面一起平移。设斜面向右的位置为 X，滑轮同右墙的水平绳段长为 $d - X$，沿面的绳段长为 s。绳长恒定，因而

$$s + d - X + C = L.$$

第一次求导得到 $\dot{s} - \dot{X} = 0$；再求一次导数得到 $\ddot{s} - \ddot{X} = 0$，即沿面相对加速度 $b = \ddot{s}$ 等于斜面向右加速度 A。

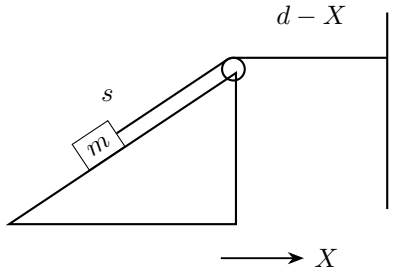


图 2.9: 固定墙端与移动滑轮共同决定沿面相对位移

沿面向左下的单位矢量为 $\boldsymbol{t} = (-\cos\theta, -\sin\theta)$，物块的对地加速度为

$$\boldsymbol{a}_m = A\boldsymbol{e}_x + b\boldsymbol{t} = (A - b\cos\theta, -b\sin\theta).$$

代入 $b = A$ 后，得到 $\boldsymbol{a}_m = (A(1 - \cos\theta), -A\sin\theta)$。例 2.11 由这个加速度写整体水平动力学，再同沿面方程联立求斜面反冲。

若固定墙在左侧、斜面向右下方倾斜，则水平绳段长随 X 增大，绳长改写为 $X + s + C = L$。逐次求导给 $\dot{X} + \dot{s} = 0$、$\ddot{X} + \ddot{s} = 0$，即沿面向下的相对加速度为 $-A$。例 2.10 将用这一关系求向上收缩的绳段怎样牵引物块。

2.4.2 定长绳的瞬时约束

圆环在斜杆上运动，用绳悬挂小球。释放瞬间绳竖直、两物体速度都为零，绳的两个端点具有相同的竖直加速度。若圆环沿杆向下的加速度大小为 b，杆倾角为 θ，其竖直分量为 $b\sin\theta$，所以球的向下加速度也是 $b\sin\theta$。例 2.7 由此把环和球的动力学联系起来。

这个联系可以从完整的绳长条件求出。设两端位置差为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=l\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=l^2$。第一次求导：

$$2\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=0.$$

再对乘积求导：

$$2\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+2\boldsymbol{r}\cdot\ddot{\boldsymbol{r}}=0.$$

由 $\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A$、$\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}_A$，分别整理得到

$$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A)=0,\qquad \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}_B-\boldsymbol{a}_A)=-\frac{|\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A|^2}{l}.$$

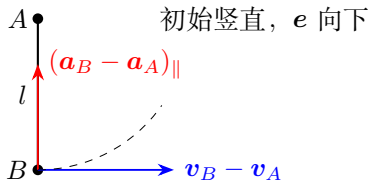


图 2.10: 横向相对速度使绳转动，沿绳相对加速度指向上端

图 2.10 中的蓝色相对速度垂直于绳，使绳方向转动；相应的沿绳相对加速度指向上端 A，大小为 $|\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A|^2/l$。从初静止释放时，这一项为零，便回到两端沿绳加速度相同的关系。

2.4.3 两根绳分别联系运动和张力

双层阿特伍德装置中，上绳连接动滑轮中心 P 与悬物 C，下绳绕过动滑轮并连接 A,B。图 2.11 用两色区分这两根绳。统一向下量坐标，长度关系为

$$y_P+y_C=C_1,\qquad y_A+y_B-2y_P=C_2.$$

逐次对时间求导，得到

$$v_P+v_C=0,\quad v_A+v_B-2v_P=0;\qquad a_P+a_C=0,\quad a_A+a_B-2a_P=0.$$

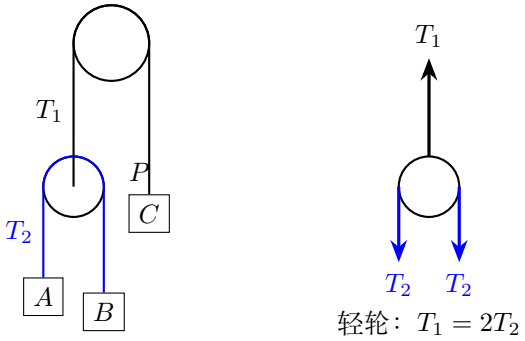


图 2.11: 上下两根轻绳给出不同张力与两条长度约束

下绳张力记为 T_2，上绳记为 T_1。隔离轻动滑轮，向上的 T_1 与向下的两股 T_2 平衡，给出 $T_1 = 2T_2$。因此三悬物的方程为

$$m_A g - T_2 = m_A a_A, \quad m_B g - T_2 = m_B a_B, \quad m_C g - T_1 = m_C a_C.$$

同两条加速度关系联立，就可求每个物体的运动。例 2.18 作数值计算，练习 2.2 则反求使动滑轮中心保持静止的质量。

2.5 导轨与接触面的运动

2.5.1 竖直导向块与水平移动斜面

图 2.12 中，固定导轨使物块的水平位置保持不变。斜面向右下方倾斜 θ，向右位移 X 后，导轨处的面高度增加 $X\tan\theta$，所以

$$y = y_0 + X\tan\theta, \quad \dot{y} = \dot{X}\tan\theta, \quad b = \ddot{y} = A\tan\theta.$$

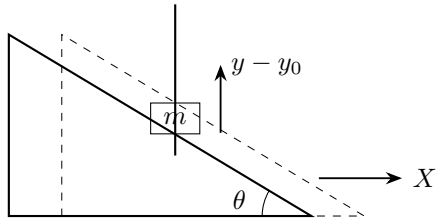


图 2.12: 斜面右移，固定竖直导轨处的接触点升高

斜面对物块的支持力有向右、向上的分量，导轨提供水平方向的作用力。对斜面和物块分别写

$$F - N\sin\theta = MA, \qquad N\cos\theta - mg = mb.$$

用 $b = A\tan\theta$ 联立后可求加速度和接触力。接触力降到零时，物块开始同斜面分离，随后按重力和导轨的作用继续运动。例 2.16 取向右推力，练习 2.4 取向左拉力，分别研究升降和分离。

2.6 杆的平移和转动

2.6.1 固定姿态时的力矩平衡

杆具有一定长度，力的作用位置也影响运动。对绕参考点的力矩，在平面内取逆时针为正，力矩大小等于力同垂直力臂的乘积。杆在车内保持固定姿态时，随车平移系中既有合力为零，也有合力矩为零。

图 2.13 中，均匀杆长 l、质量 M，与竖直后壁夹角为 θ。后壁光滑，给上端向右的 N_A；底部给向上的 N_B 和水平摩擦 f。重力与平移惯性力均作用于中点。向右取正，合力方程为 $N_A + f = Ma$、$N_B = Mg$。

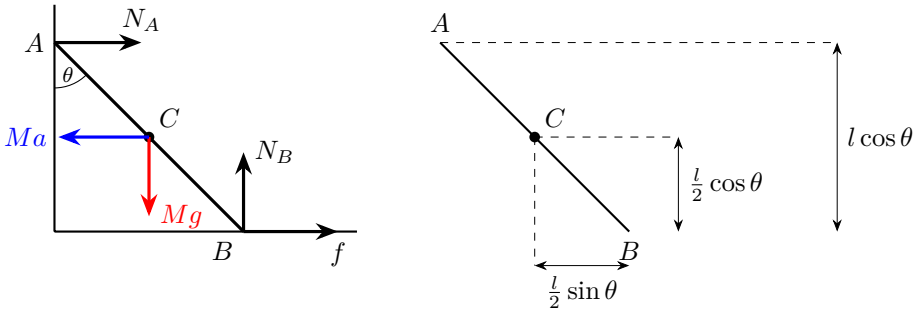


图 2.13: 杆的各外力及绕下端取矩时的三个垂直力臂

绕下端 B 取矩，N_A 的力臂为 $l\cos\theta$，重力的力臂为 $l\sin\theta/2$，惯性力的力臂为 $l\cos\theta/2$，所以

$$N_A l\cos\theta = \frac{Mgl\sin\theta}{2} + \frac{Mal\cos\theta}{2}.$$

得到 $N_A = M(a + g\tan\theta)/2$，再由水平合力得 $f = M(a - g\tan\theta)/2$。把它同 $|f| \le \mu_s Mg$ 联系起来，就得到例 2.12 中杆能保持的角度范围。

2.6.2 力矩怎样改变转动

让一根带有小球的刚杆在水平面内运动。图 2.14 取释放瞬间的杆方向为 x 轴、横向为 y 轴，原点在质心 C。质心的横向加速度为 $a_{C,y}$，角加速度为 α，逆时针取正。杆上坐标为 x_i 的小球随杆平移，又因转动得到横向加速度 αx_i，所以

$$a_{i,y} = a_{C,y} + \alpha x_i.$$

$$a_{i,y} = a_{C,y} + \alpha x_i$$

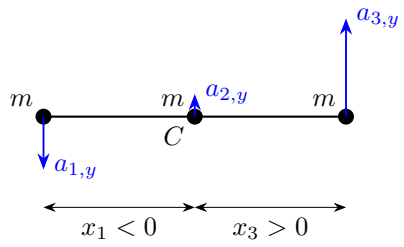


图 2.14: 横向加速度随到质心的带符号距离改变

将各小球的牛顿方程乘以它到 C 的带符号距离 x_i，再相加。内部作用的总力矩相消，留下外力关于 C 的力矩之和：

$$\begin{aligned}\sum \tau_C &= \sum_i x_i m_i a_{i,y} = a_{C,y}\sum_i m_i x_i + \alpha \sum_i m_i x_i^2 \\ &= \alpha \sum_i m_i x_i^2 .\end{aligned}$$

最后一步用了质心定义 $\sum_i m_i x_i = 0$。这表明质量分布通过 $\sum_i m_i x_i^2$ 影响转动，把它称为关于质心的转动惯量，记为 I_C。于是

$$I_C = \sum_i m_i x_i^2, \qquad \sum \tau_C = I_C \alpha .$$

同样大小的力矩作用下，质量离质心越远，转动惯量越大，产生的角加速度越小。杆已有角速度时，向心加速度沿杆指向质心，关于质心的力矩为零，横向方程仍给出上式。

均匀细杆可看作许多小质量元。以中点为原点，$\mathrm{d}m = (M/l)\,\mathrm{d}x$，从左端积到右端，

$$I_C = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{M}{l}\frac{l^3/8 + l^3/8}{3} = \frac{Ml^2}{12}.$$

质心平动由合力决定，绕质心的转动由力矩决定。两部分一起确定杆上各点的加速度；下面把这两个方程用于沿墙滑动的杆。

2.6.3　开始滑动时的角加速度

若底端开始沿地板滑动，杆的角度随时间改变。杆中点坐标为 $x_C = (l/2)\sin\theta$、$y_C = (l/2)\cos\theta$。求导得到

$$\dot{x}_C = \frac{l}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y}_C = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

再用乘积法则求导，得到

$$\ddot{x}_C = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\,\dot{\theta}^2), \quad \ddot{y}_C = -\frac{l}{2}(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2).$$

初始角速度为零时，右端只保留含 $\ddot{\theta}$ 的项。质心平动满足 $\sum \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a}_C$；绕质心的转动满足 $\sum \tau_C = I_C\ddot{\theta}$。

将上面求得的 $I_C = Ml^2/12$ 代入转动方程，再用墙面与地板给出的接触关系，就能联立求质心和杆端的运动。例 2.13 把质心的两个分量方程与转动方程联立，求杆开始向后壁转动时的角加速度。

2.7 支承载荷与翻转

2.7.1 汽车加速时前后轴载荷的变化

汽车向右加速，驱动力作用在地面，低于质心，产生逆时针力矩。车身保持水平时，前后轮的支持力重新分配，使这一力矩平衡。取轴距 $2l$，质心位于两轴中间、高 h，图 2.15 给出

$$f = ma, \qquad N_f + N_r = mg, \qquad fh + N_f l - N_r l = 0.$$

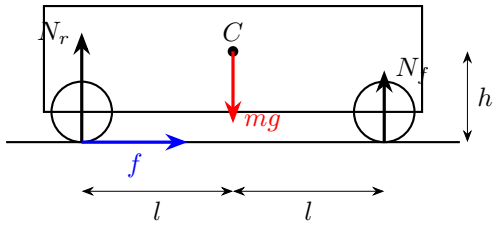


图 2.15: 加速时前轮减载，后轮增载

由和、差两式，得到

$$N_r = \frac{mg}{2} + \frac{mah}{2l}, \qquad N_f = \frac{mg}{2} - \frac{mah}{2l}.$$

后轮驱动时，用 $ma \le \mu_s N_r$ 求不打滑条件；前轮驱动时，则用 $ma \le \mu_s N_f$。例 2.19 与练习 2.3 分别研究这两种情形。前轮载荷随加速度减小，到 $a = gl/h$ 时降为零。

2.7.2　沿光滑斜槽下降的速率

滑块从静止沿光滑斜槽下降，沿轨迹的支持力垂直于切线。图 2.16 取沿槽向前的弧长为 s、从释放点向下量的高度差为 h。重力的切向分量为 $mg\,\mathrm{d}h/\,\mathrm{d}s$，而切向加速度用链式法则写成 $\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}s$。于是

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = mg\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}, \qquad mv\,\mathrm{d}v = mg\,\mathrm{d}h.$$

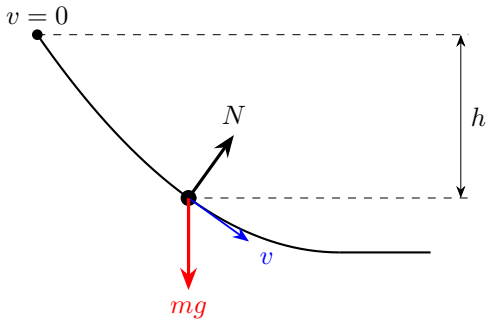


图 2.16: 支持力垂直轨迹切线，下降高度决定速率的增加

图 2.16 所示位置的下降高度为 h。从初态的零速率、零高度差分别积分，

$$m\int_0^v w\,\mathrm{d}w = mg\int_0^h \mathrm{d}\eta, \qquad m\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^v = mg[\eta]_0^h, \qquad \frac{1}{2}mv^2 = mgh.$$

取向前运动的正速率，$v = \sqrt{2gh}$。例 2.20 先用下降高度求入板速率，再由板上摩擦求位置随时间的变化。

2.7.3　摩擦作用的位置也进入翻转力矩

滑块沿高支架顶端的水平板向右滑动时，对板施加向下的压力和向右的摩擦力。图 2.17 中支点为 O，板中点在 O 上方，高度 R；滑块距左端的位移为 s，左半板长 L。压力产生逆时针矩 $mg(L-s)$，摩擦产生顺时针矩 μmgR。

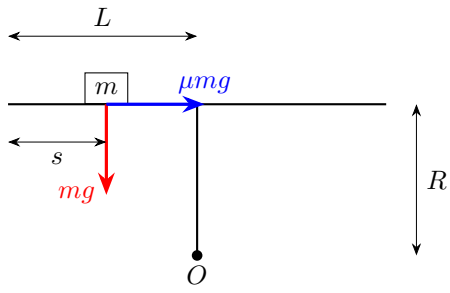


图 2.17: 高支架上，压力和水平摩擦都对底轴产生力矩

随着滑块右移，压力矩逐渐减小，摩擦矩在滑动阶段保持恒定。达到 $s = L-\mu R$ 时，两者相等；继续右移便产生顺时针的合力矩。例 2.20 先由滑块运动求 $s(t)$，再把它代入力矩条件，计算单块和两块先后到达时的翻转时刻。

2.8 例题与分析

例 2.1 (弹簧牵引下的摩擦反向)**.** 车内 10 kg 的物块被水平弹簧向右拉 5 N，开始随静止车厢保持静止。车厢向右加速度从零缓慢增至 $1\,\mathrm{m/s^2}$。弹簧形变在相对静止时不变，判断物块能否一直随车静止，并求摩擦变化。

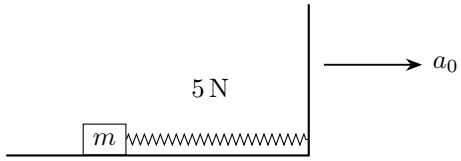


图 2.18: 弹簧右端固定在车厢右壁

解　用初始平衡确定静摩擦至少能提供多大值

图 2.18 中初始所需静摩擦为向左 5 N，已经说明最大静摩擦不小于这一数值。若物块随车，水平式为 $5\,\mathrm{N} + f = ma_0$，所以 $f = (10\,\mathrm{kg})a_0 - 5\,\mathrm{N}$。

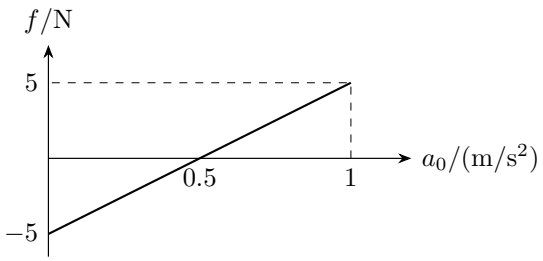


图 2.19: 摩擦分量过零，大小先减小再增大

摩擦随加速度的连续变化

由图 2.19，所需摩擦从 -5 变到 $+5\,\mathrm{N}$，绝对值全程不超过初始已经能提供的 $5\,\mathrm{N}$，故相对静止可以维持。$a_0 < 0.5\,\mathrm{m/s^2}$ 时摩擦向左，等于时为零，之后向右。

例 2.2 (两组叠块之间的连接绳)**.** 两块质量均为 $2m$ 的底块 D, A 在光滑地面上，各放一质量 m 的上块 C, B，两上块用水平轻绳连接。各层间最大静摩擦均为 μmg，向右拉右底块 A，使四块共同加速。求绳张力最大值。

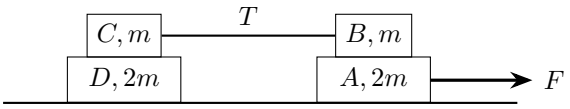


图 2.20: 绳连接两个上块，外力作用在右下块

解　从左下块逐个求连接绳与层间摩擦

设共同加速度为 a。图 2.20 左下块 D 只受层间摩擦而水平加速，因此

$$f_D = 2ma \quad \text{向右}.$$

反作用于 C 的摩擦向左。隔离 C 后，沿向右方向列式：

$$T - f_D = ma \quad \Longrightarrow \quad T = 3ma.$$

求另一个接触面所需摩擦

再看右上块 B，其受右向摩擦 f_B 与左向张力，$f_B - T = ma$，故 $f_B = 4ma$。

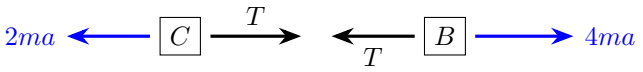


图 2.21: 右侧接触面先达到摩擦上限

取两个不滑条件的交集求最大张力

按图 2.21 逐面限制，$2ma \le \mu mg$，$4ma \le \mu mg$，后者更严格，得 $a \le \mu g/4$。所以 $T_{\max} = 3\mu mg/4$。整体 $F = 6ma$ 给出临界驱动力 $F_c = 3\mu mg/2$，可作为同一状态的另一种表达。

例 2.3 (共同向左运动的物块与斜面)**.** 粗糙地面上的斜面向右下方倾斜，倾角 θ，上有原本能静止的物块。给两者共同向左初速度后，地面摩擦使斜面减速。讨论物块压力如何变化，以及可能沿面向哪一方向相对滑动。

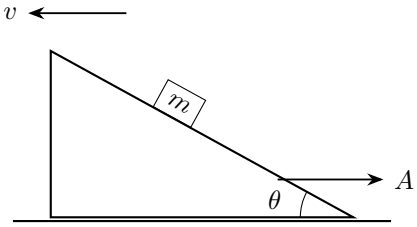


图 2.22: 速度向左，减速阶段的斜面加速度向右

解　用法向接触条件确定压力增加

在图 2.22 的接触阶段，直斜面只平移，法向相对加速度为零。设斜面向右加速度 $A>0$，则无论切向是否已经滑动，法向式都给 $N=m(g\cos\theta+A\sin\theta)>mg\cos\theta$，压力增大。

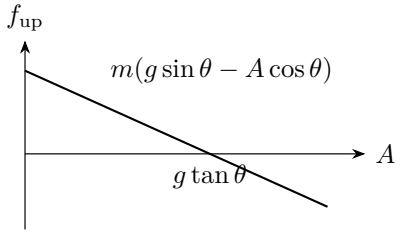


图 2.23: 维持相对静止所需的摩擦方向可以反转

求相对静止所需的带符号摩擦

假设物块相对静止，图 2.23 向上沿面的所需摩擦为 $f_{\text{up}}=m(g\sin\theta-A\cos\theta)$。其与压力之比

$$\frac{f_{\text{up}}}{N}=\frac{g\sin\theta-A\cos\theta}{g\cos\theta+A\sin\theta}$$

据摩擦与压力之比判断可能失稳方向

令上式为 $q(A)$，并记分母 $D=g\cos\theta+A\sin\theta$，则 $D'=\sin\theta$。用商法则逐项整理：

$$\begin{aligned}q'(A)&=\frac{-\cos\theta\,D-(g\sin\theta-A\cos\theta)\sin\theta}{D^2}\\&=\frac{-g\cos^2\theta-A\sin\theta\cos\theta-g\sin^2\theta+A\sin\theta\cos\theta}{D^2}\\&=-\frac{g}{(g\cos\theta+A\sin\theta)^2}<0.\end{aligned}$$

因此所需的带符号摩擦与压力之比随 A 增大严格减小。初始已经能平衡向下滑动趋势，故新增的向右加速度不会引起向下失稳；它可能仍相对静止，或需要过大的向下摩擦而改为沿面向上滑动。

上述运动发生在斜面向左滑动、向右减速的接触阶段。

例 2.4 (串联两球的悬线方向)**.** 上、下小球质量分别为 m_1, m_2，由两段轻绳串联悬挂。悬点向右作加速度 a 的水平平移，两球均相对悬点静止。求两绳方向和张力，质量不同是否使倾角不同?

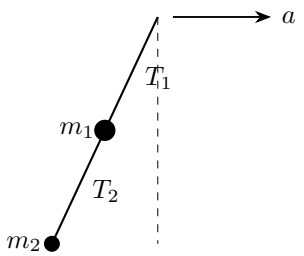


图 2.24: 上绳悬挂两球，下绳只直接拉下球

解　隔离下球求下绳张力和方向

图 2.24 下球的张力分量为 $T_{2x} = m_2 a$、$T_{2y} = m_2 g$，故下绳向上向右，与竖直夹角满足 $\tan\beta_2 = a/g$，大小 $T_2 = m_2\sqrt{g^2 + a^2}$。

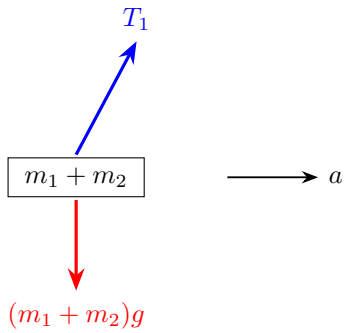


图 2.25: 取两球整体可以直接确定上绳方向

取两球整体求上绳张力

对图 2.25 整体，$T_{1x} = (m_1 + m_2)a$、$T_{1y} = (m_1 + m_2)g$，因此 $\tan\beta_1 = a/g$、$T_1 = (m_1 + m_2)\sqrt{g^2 + a^2}$。两绳平行且同向，质量的改变体现为张力大小的改变。再隔离上球，$\boldsymbol{T}_1 - \boldsymbol{T}_2 + m_1\boldsymbol{g} = m_1\boldsymbol{a}$，也恰好满足其受力方程。

例 2.5 (加速斜面上的悬球脱离)**.** 质量 10 kg 的球由沿斜面向右上方的轻绳牵住，接触倾角 37° 的光滑斜面。分别考察装置以 $a_1 = g/2$ 和 $a_2 = \sqrt{3}g$ 向右平移时可实现的相对平衡构形，求绳张力和斜面压力。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。

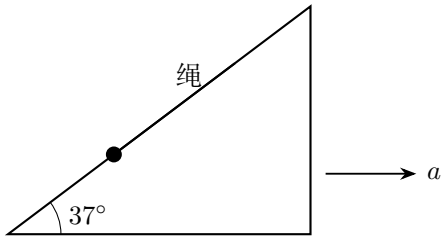


图 2.26: 球接触光滑斜面，绳沿斜面向右上方牵引

解　球与斜面接触时的张力和压力

图 2.26 有接触时，绳力沿面向右上，支持力沿法向向左上，写

$$T\cos\theta - N\sin\theta = ma, \quad T\sin\theta + N\cos\theta = mg.$$

将水平式乘 $\cos\theta$、竖直式乘 $\sin\theta$ 后相加，含 N 的项抵消，得 $T = m(a\cos\theta + g\sin\theta)$。用竖直式乘 $\cos\theta$ 减去水平式乘 $\sin\theta$，含 T 的项抵消，得 $N = m(g\cos\theta - a\sin\theta)$。所以接触要求 $N \geq 0$，即 $a \leq g\cot\theta = 4g/3$。

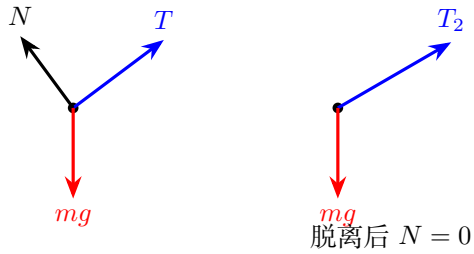


图 2.27: 接触和悬空时的两种相对静止构形

第一种加速度下的接触力

$a_1 < 4g/3$，仍可保持接触。代入 $m = 10\mathrm{kg}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ 和 $\sin 37° = 0.6$、$\cos 37° = 0.8$：

$$T_1 = mg(0.5\times 0.8 + 0.6) = 100\,\mathrm{N}, \qquad N_1 = mg(0.8 - 0.5\times 0.6) = 50\,\mathrm{N}.$$

第二种加速度下的悬空构形

当 a 增大到 $4g/3$ 时，接触压力降到零。$a_2 > 4g/3$ 时，球处于悬空的相对平衡位置。按图 2.27 右图取 $N_2 = 0$，相对平衡须 $T_{2x} = ma_2$、$T_{2y} = mg$，故 $T_2 = m\sqrt{a_2^2 + g^2} = 200\,\mathrm{N}$，绳与水平夹角 30°。将绳预先置于这一方向并令球相对装置静止，便得到题设第二种相对平衡构形。

例 2.6 (车内沿光滑斜面上升)**.** 车内固定向右上方升高、倾角 37°、高 H 的光滑斜面，物块初静止在底部。车突然以恒加速度 a_0 向左运动。求使物块上升的加速度条件；当 $a_0 = g$ 时，求压力和到顶时间。

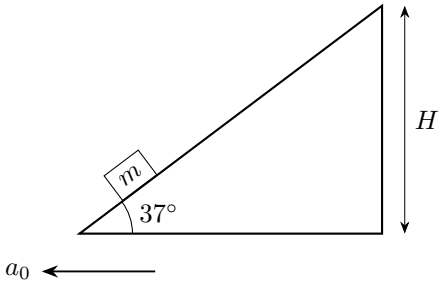


图 2.28: 车厢系中惯性力向右

解　在随车系投影有效重力并确定上滑阈值

选图 2.28 中的车为平移系，沿面向右上为正。物块受向右惯性力 ma_0，故相对加速度 $b = a_0\cos\theta - g\sin\theta$；法向式为 $N = mg\cos\theta + ma_0\sin\theta$。从相对静止开始上升时有 $b > 0$，即 $a_0 > g\tan 37^\circ = 0.75g$，等号只是阈值。

$$b = a_0\cos\theta - g\sin\theta$$

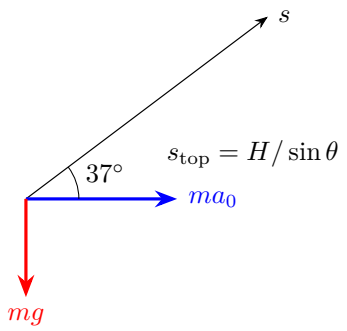


图 2.29: 有效重力沿斜面的分量给出相对加速度

将沿面距离代入相对运动方程求时间

当 $a_0 = g$，图 2.29 给出 $b = g(0.8-0.6) = 0.2g$、$N = mg(0.8+0.6) = 1.4mg$。以释放时刻为零，相对初速度和相对位移均为零。先后积分恒定相对加速度，

$$v_{\mathrm{rel}}(t) = \int_0^t b\,\mathrm{d}\tau = [b\tau]_0^t = bt,$$
$$s(t) = \int_0^t b\tau\,\mathrm{d}\tau = \left[\frac{b}{2}\tau^2\right]_0^t = \frac{1}{2}bt^2.$$

到顶沿面距离为 $H/0.6 = 5H/3$，故 $t^2 = 2(5H/3)/(0.2g) = 50H/(3g)$，取正根得 $t = \sqrt{50H/(3g)}$。法向力保持正值，且相对加速度恒定，所以这一积分过程在到顶以前有效。

例 2.7 (斜杆圆环与竖直悬球)**.** 质量 m 的圆环套在倾角 θ 的光滑固定杆上，用初始竖直轻绳悬挂质量 M 的球。手托圆环使系统静止后松手，求释放瞬间绳张力。

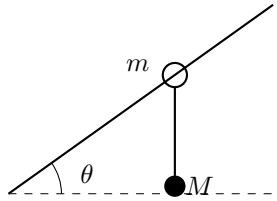


图 2.30: 初始绳竖直，杆向右上方倾斜

解　先建立释放瞬间的绳向加速度约束

设图 2.30 圆环沿杆向左下加速度为 b，悬球向下分量为 a。初速度为零且绳初始竖直，定长约束沿绳二阶求导给 $a = b\sin\theta$，这个竖直分量把两个物体的运动联系起来。悬球方程为 $Mg - T = Ma$；环沿杆方程为 $(mg+T)\sin\theta = mb$。

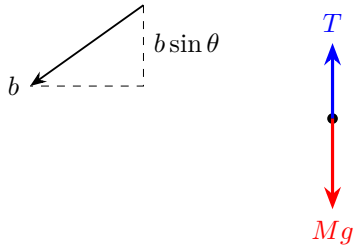


图 2.31: 环沿杆加速度的竖直投影联系悬球

代入动力学消元求张力

用图 2.31 的投影关系代入：$Mg - T = M(g + T/m)\sin^2\theta$。先展开右边，再将含 T 的项移到同一侧，

$$Mg(1-\sin^2\theta) = T\left(1 + \frac{M}{m}\sin^2\theta\right).$$

左边为 $Mg\cos^2\theta$，右边括号为 $(m + M\sin^2\theta)/m > 0$，所以

$$T = \frac{mMg\cos^2\theta}{m + M\sin^2\theta}.$$

杆倾角对张力的影响

当杆水平时 $T = Mg$，环没有沿杆驱动力；杆竖直时 $T \to 0$，两物体一起自由落体。经过有限时间绳可能不再竖直，因此此结果只用于释放瞬间。

例 2.8 (使滑轮悬线恰好无张力)**.** 轻定滑轮两侧分别悬挂质量 M 的物体与质量 m' 的梯子，质量 m 的人抓住梯子。求人相对梯子的竖直加速度，才能使滑轮上方悬线张力瞬时降到零，假定两侧绳在该临界瞬间仍绷紧。

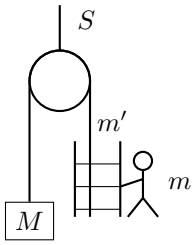


图 2.32: 人对梯子的作用可以改变两侧绳张力

解　由悬线零张力推到两侧绳的临界运动

图 2.32 轻滑轮受力平衡给 $S = 2T$，因此 $S = 0$ 要求两侧绳张力 $T = 0$。物体 M 此时向下自由落体，加速度 g；绳长约束使梯子加速度向上 g。

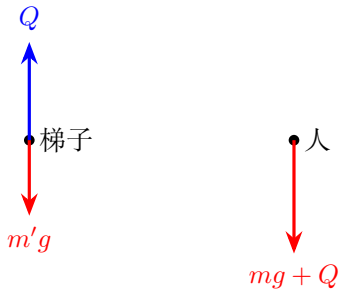


图 2.33: 零绳张力时，梯子向上运动由人的反作用提供

由梯子受力求人与梯子的相互作用

设人对梯子的向上力为 Q，按图 2.33 对梯子列 $Q-m'g=m'g$，得 $Q=2m'g$。梯子反向向下拉人，因此人对地向下加速度 $a_p=(mg+Q)/m=g+2m'g/m$。

求人相对梯子的加速度

相对向上加速的梯子，人向下加速度为

$$a_{p/\text{梯}}=a_p+g=2g\left(1+\frac{m'}{m}\right).$$

人在这一瞬间向上推梯子，梯子向下反作用于人，使人相对梯子向下加速。所求值对应 T 恰降到零的临界状态。

例 2.9 (剪断绳端支承的动滑轮)**.** 一根轻绳右端固定在天花板，向下绕过连接质量 m 的物块 B 的轻动滑轮，再向上连接同质量物块 A。A 最初另用上方短绳悬住。分别讨论：剪断该短绳时两物块的瞬时加速度；保留短绳而剪断 A 下方长绳时 B 的加速度。

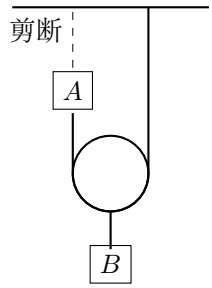


图 2.34: 剪断的是支承 A 的短绳，绕轮长绳仍在

解　对未断长绳写长度约束与两个受力方程

统一向下取 y_A, y_B。图 2.34 的长绳长度为 $2y_B-y_A+C$；先求导得 $2v_B-v_A=0$，再求导得 $2a_B-a_A=0$，所以 $a_A=2a_B$。受力方面，长绳向下拉 A，以两股张力向上拉动滑轮和 B，因此

$$mg+T=ma_A,\qquad mg-2T=ma_B.$$

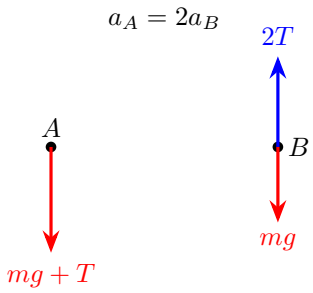


图 2.35: 绳端和动滑轮的张力方向、股数都不同

由两物体方程联立求加速度

把 $a_A = 2a_B$ 代入图 2.35 的第一式，$T = 2ma_B - mg$；再代第二式，$3mg = 5ma_B$。于是 $a_B = 3g/5$ 向下，$a_A = 6g/5$ 向下，$T = mg/5 > 0$。A 的下降加速度是 B 的两倍，正好补偿动滑轮两侧绳段的长度变化。

剪断绕轮长绳后的自由下落

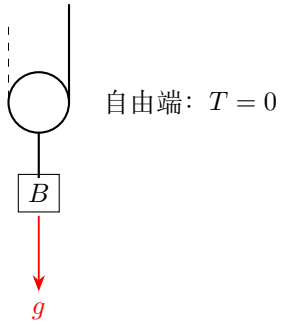


图 2.36: 剪断长绳后自由端无拉力，整个长绳张力为零

第二种剪法保留 A 的上方悬线，却破坏绕轮长绳的闭合长度约束。图 2.36 自由端不受外拉，理想轻绳的张力为零，B 与轻滑轮仅受自身重力，故 $a_B = g$ 向下。此时 A 由短绳保持原位置，B 与动滑轮自由下落。

例 2.10 (固定墙端与向右平移的斜面)**.** 向右下方倾斜、倾角 α 的光滑斜面以规定加速度 $a_0 \geq 0$ 向右平移。轻绳一端固定在左墙，水平绕过斜面顶端轻滑轮，再沿斜面连接质量 m 的物块。求绳张力和支持力。

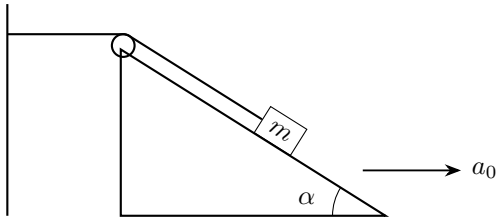


图 2.37: 墙到滑轮的绳段变长，沿面绳段相应缩短

解　从移动滑轮引起的绳长变化求相对加速度

图 2.37 取斜面向右位移 X，沿面向右下的绳段长度 s。由 $X+s+C=L$ 依次求导，$\dot{X}+\dot{s}=0$、$\ddot{X}+\ddot{s}=0$，所以 $\ddot{s}=-a_0$，即物块相对斜面向上加速度 a_0。在车架系内，沿面向上投影：$T+ma_0\cos\alpha-mg\sin\alpha=ma_0$。

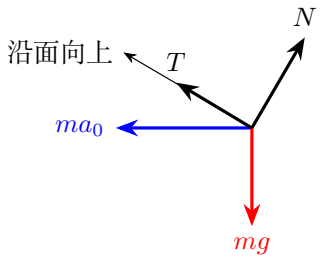


图 2.38: 上坡方向的相对加速度与惯性力分量

求绳张力和支持力

按图 2.38，$T=m[g\sin\alpha+a_0(1-\cos\alpha)]$。法向没有相对加速度，故 $N=m(g\cos\alpha+a_0\sin\alpha)$。二者在给定范围均非负；取 $a_0=0$ 时，两个力分别为 $T=mg\sin\alpha$、$N=mg\cos\alpha$。斜面保持静止、物块初速度为零时，绳使物块保持静止。

例 2.11 (由沿面滑动驱动斜面)**.** 质量 M 的光滑斜面向右上方升高，倾角 θ，在光滑水平面上可自由平移。轻绳一端固定于右墙，水平绕过斜面顶端轻滑轮后连接斜面上的物块 m。由静止释放，求保持接触时的加速度及其条件。

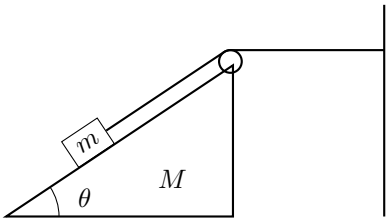


图 2.39: 固定右墙，沿面绳段增长对应斜面右移

解　由固定墙端绳长建立相对加速度关系

令图 2.39 斜面向右加速度为 A，物块相对斜面沿面向左下加速度为 b。绳长为 $s+d-X+C$，先求导得 $\dot{s}-\dot{X}=0$，再求导得 $\ddot{s}-\ddot{X}=0$，故 $b=A$。在斜面系沿面向下列 $mg\sin\theta-T+mA\cos\theta=mb$，所以 $T=mg\sin\theta-mA(1-\cos\theta)$。

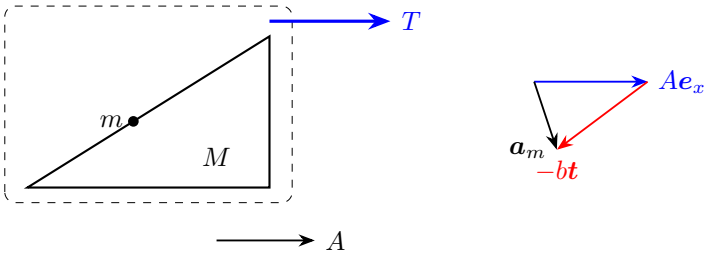


图 2.40: 墙端张力是整体的水平外力，平移与沿面相对加速度首尾相接

取整体求斜面加速度并恢复滑块运动

图 2.40 右侧先把平移加速度与沿面相对加速度首尾相接，得到 $a_{m,x}=A-b\cos\theta$。左侧整体的水平外力只有墙端张力，因此 $T=MA+m(A-b\cos\theta)$。代入 $b=A$，整体水平式给 $T=[M+m(1-\cos\theta)]A$。将它与沿面方程的张力式相等，

$$[M+m(1-\cos\theta)]A=mg\sin\theta-mA(1-\cos\theta).$$

含 A 的项移到左边，得 $[M+2m(1-\cos\theta)]A=mg\sin\theta$。求出 A 后回代整体式，联立得

$$A=b=\frac{mg\sin\theta}{M+2m(1-\cos\theta)},\qquad T=\frac{mg\sin\theta[M+m(1-\cos\theta)]}{M+2m(1-\cos\theta)}.$$

物块完整加速度为 $(A(1-\cos\theta), -A\sin\theta)$，支持力 $N = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$。把求出的 A 代回，记 $D = M + 2m(1-\cos\theta) > 0$，

$$N = mg\frac{D\cos\theta - m\sin^2\theta}{D},$$

$$\begin{aligned} D\cos\theta - m\sin^2\theta &= M\cos\theta + 2m\cos\theta(1-\cos\theta) - m(1-\cos^2\theta) \\ &= M\cos\theta - m(1-\cos\theta)^2. \end{aligned}$$

因此 $N \geq 0$ 恰给出接触条件 $m(1-\cos\theta)^2 \leq M\cos\theta$。

另建释放瞬间的分离方程

若上述不等式不成立，释放瞬间应取 $N = 0$。此时物块只受重力和沿原绳向的张力，其对地加速度为 $(-T\cos\theta/m, T\sin\theta/m - g)$。沿下坡单位矢量 $(-\cos\theta, -\sin\theta)$ 投影相对斜面的加速度，得到 $g\sin\theta - T/m + A\cos\theta$。初速度为零，绳长的二阶约束仍令这一绳向分量等于 A，于是 $T = m[g\sin\theta - A(1-\cos\theta)]$。斜面上的轻滑轮受到水平右向 T 及沿面左下的 T，故 $MA = T(1-\cos\theta)$。两式联立得

$$A = \frac{mg\sin\theta(1-\cos\theta)}{M + m(1-\cos\theta)^2}.$$

分离瞬间的法向相对运动

此时物块相对斜面的法向加速度为 $A\sin\theta - g\cos\theta > 0$，沿法线向外，物块开始离开斜面。释放以后，绳的方向随运动改变，后续加速度也随之变化。

例 2.12 (光滑后壁与粗糙车底之间的杆)**.** 均匀杆质量 M、长 l，上端 A 靠在车厢光滑后壁，下端 B 接触粗糙车底，静摩擦因数为 μ_s。车向右加速度为 a，杆与竖直后壁夹角为 θ。求杆能相对车厢保持静止的角度范围。

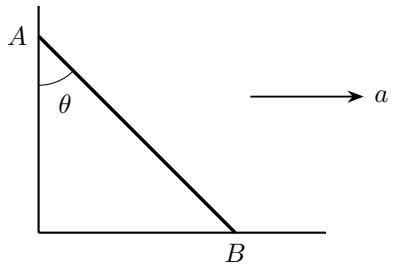


图 2.41: 后壁无摩擦，角度从竖直量起

解　在随车系列合力平衡方程

在图 2.41 车厢系，质心受向左惯性力 Ma。设后壁法向力 N_A 向右，车底法向力 N_B 向上，底部摩擦 f 向右为正。相对平衡给 $N_A + f = Ma$、$N_B = Mg$。

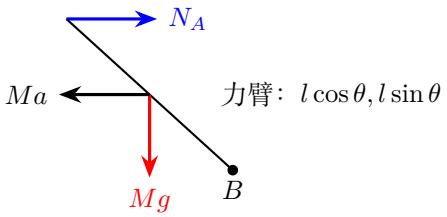


图 2.42: 绕下端取矩，底部两个未知力均无力矩

绕下端取矩确定后壁压力和底部摩擦

按图 2.42 绕 B 取矩，$N_A l\cos\theta = (Mgl\sin\theta + Mal\cos\theta)/2$，故 $N_A = M(a + g\tan\theta)/2$，$f = M(a - g\tan\theta)/2$。

静摩擦所能维持的角度范围

将 $f = M(a - g\tan\theta)/2$、$N_B = Mg$ 代入 $|f| \le \mu_s N_B$，先约去 $M/2$，

$$|a - g\tan\theta| \le 2\mu_s g \quad\Longleftrightarrow\quad -2\mu_s g \le a - g\tan\theta \le 2\mu_s g.$$

分别解左右两个线性不等式，得到 $a/g - 2\mu_s \le \tan\theta \le a/g + 2\mu_s$。再同锐角条件 $\tan\theta > 0$ 取交集，得到

$$\max\{0, a/g - 2\mu_s\} \le \tan\theta \le a/g + 2\mu_s, \qquad 0 < \theta < \pi/2.$$

下界若为零，表示不存在额外的正角度下限，仍须排除端点接触方式改变的退化构形。后壁提供水平支持力，车底摩擦的大小和方向则随杆的倾角改变。

例 2.13 (杆开始向后壁转动的条件)**.** 沿用同一杆与车厢，杆初始相对静止、夹角 θ_0。车突然取较大向右加速度 a，底面最大静摩擦与动摩擦均为 μN_B。求下端开始向后壁滑动的条件，并求释放瞬间的角加速度。

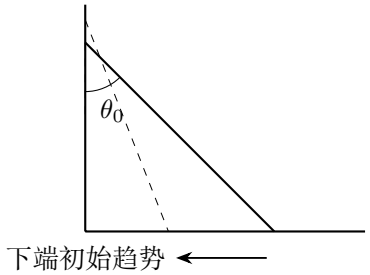


图 2.43: 下端向左滑动对应与竖直夹角减小

解　下端向后壁滑动的起始条件

由图 2.43 的相对平衡分析，底部向右摩擦的最大值对应 $a - g\tan\theta_0 = 2\mu g$。当 $a > g\tan\theta_0 + 2\mu g$，维持静止所需向右摩擦超限，下端有向左滑动趋势。

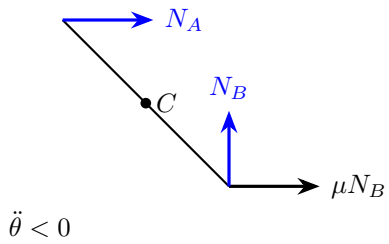


图 2.44: 初始角加速度同质心加速度的联系

用初始角加速度写质心与转动方程

下面求这一滑动开始时的角加速度。记 $b = \ddot\theta(0)$，杆长 l。两端保持接触时，质心相对车厢坐标为 $x_C = (l/2)\sin\theta$、$y_C = (l/2)\cos\theta$。第一次求导为 $\dot x_C = (l/2)\cos\theta\,\dot\theta$、$\dot y_C = -(l/2)\sin\theta\,\dot\theta$；对两个乘积再求导，

$$\ddot x_C = \frac{l}{2}(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2), \qquad \ddot y_C = -\frac{l}{2}(\sin\theta\,\ddot\theta + \cos\theta\,\dot\theta^2).$$

初始 $\dot\theta = 0$，才化为 $a_{C,x} = lb\cos\theta_0/2$、$a_{C,y} = -lb\sin\theta_0/2$。图 2.44 假设底部向左滑，故摩擦向右，列

$$N_A + \mu N_B - Ma = Mlb\cos\theta_0/2, \quad N_B - Mg = -Mlb\sin\theta_0/2,$$

$$\frac{Ml^2}{12}b = \frac{l}{2}\{N_B\sin\theta_0 + (\mu N_B - N_A)\cos\theta_0\}.$$

求初始转动方向并保留接触条件

先由竖直式求 $N_B = M(g - lb\sin\theta_0/2)$，由水平式求 $N_A = Ma + Mlb\cos\theta_0/2 - \mu N_B$。为展开代入过程，暂记 $s = \sin\theta_0$、$c = \cos\theta_0$。将二者代入力矩式并除以 $Ml/2$，

$$\begin{aligned}\frac{lb}{6} &= \frac{N_B}{M}s + \left(\mu\frac{N_B}{M} - \frac{N_A}{M}\right)c \\ &= \left(g - \frac{lbs}{2}\right)(s + 2\mu c) - ac - \frac{lbc^2}{2} \\ &= g(s + 2\mu c) - ac - \frac{lb}{2}(s^2 + c^2 + 2\mu sc).\end{aligned}$$

用 $s^2+c^2=1$，将全部含 b 的项移到左侧，系数为 $1/6+1/2+\mu sc=2/3+\mu sc$。恢复角度记号，得到

$$lb\left(\frac{2}{3}+\mu\sin\theta_0\cos\theta_0\right)=g(\sin\theta_0+2\mu\cos\theta_0)-a\cos\theta_0.$$

于是

$$b=\frac{g(\sin\theta_0+2\mu\cos\theta_0)-a\cos\theta_0}{l(2/3+\mu\sin\theta_0\cos\theta_0)}.$$

分母为正，上述阈值恰使 $b<0$，杆与竖直方向的夹角开始减小，下端向后壁运动。

由 $b<0$ 得 $N_B=M(g-lb\sin\theta_0/2)>Mg$。$N_A$ 可将求得的 b 代入水平式确定；两端接触持续的阶段按上述平动和转动方程演化。

例 2.14 (绕动滑轮的叠块与地面摩擦)**.** 上块 A、下块 B 质量均为 m，悬块 C 质量 $2m$。一根轻绳两端分别系 A,B，通过两个固定转向滑轮后绕过悬挂 C 的轻动滑轮。地面摩擦因数 μ_1，层间为 μ_2，各处最大静摩擦等于动摩擦。先求层间不滑时摩擦；再在层间确实滑动时分支求 C 的加速度。

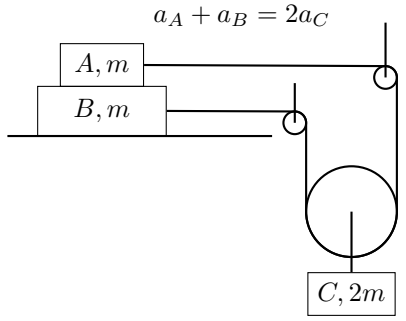


图 2.45: 两绳端分别牵引上、下两块

解　全静止与层间共同运动的条件

图 2.45 取两桌上块向右、悬块向下为正。若 A,B 共同运动，绳长给 $a_A=a_B=a_C=a$。地面能保持全系统静止时，$T=mg$、层间摩擦为 mg，地面则需平衡下块所受 $T+mg=2mg$，故全静止须同时满足 $\mu_1\ge1$ 与 $\mu_2\ge1$。当地面滑动而层间不滑，分别写

$$T-f=ma,\quad T+f-2\mu_1mg=ma,\quad 2mg-2T=2ma.$$

相减得 $f=\mu_1mg$，再解得 $a=(1-\mu_1)g/2$；这一运动分支要求 $\mu_1<1$ 且 $\mu_2\ge\mu_1$。

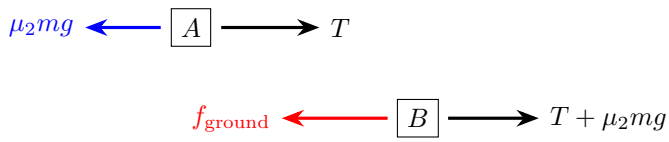


图 2.46: 层间滑动后，地面仍可能保持静止

层间滑动、下块仍静止时求悬块加速度

现在取层间确实相对滑动的情形 $0 \le \mu_2 < \min\{\mu_1, 1\}$，图 2.46 中 A 相对 B 向右。若 B 仍静止，$a_A = 2a_C$，由 $T - \mu_2 mg = 2ma_C$、$2mg - 2T = 2ma_C$，先从后式解出 $T = m(g - a_C)$。代回前式，

$$m(g - a_C) - \mu_2 mg = 2ma_C \quad \Longrightarrow \quad 3ma_C = (1 - \mu_2)mg.$$

所以

$$a_C = \frac{1 - \mu_2}{3} g, \qquad T = \frac{2 + \mu_2}{3} mg.$$

地面所需摩擦为 $T + \mu_2 mg = 2(1+2\mu_2)mg/3$，故该分支的条件为 $\mu_1 \ge (1+2\mu_2)/3$。

地面也滑动时重新列三物体方程

若 $\mu_2 < \mu_1 < (1 + 2\mu_2)/3$，下块也向右运动，将地面摩擦改为 $2\mu_1 mg$，三方程与绳长关系为

$$ma_A = T - \mu_2 mg, \quad ma_B = T + \mu_2 mg - 2\mu_1 mg,$$

$$2ma_C = 2mg - 2T, \qquad a_A + a_B = 2a_C.$$

先将前两条物块方程相加，得到 $m(a_A + a_B) = 2T - 2\mu_1 mg$。用绳长式把左边改为 $2ma_C$，再与悬块方程的左边相同，故

$$2T - 2\mu_1 mg = 2mg - 2T \quad \Longrightarrow \quad 4T = 2(1 + \mu_1)mg.$$

所以 $T = (1 + \mu_1)mg/2$，依次回代三个物体方程，得到

$$a_C = \frac{1 - \mu_1}{2} g, \quad a_A = \frac{1 + \mu_1 - 2\mu_2}{2} g, \quad a_B = \frac{1 - 3\mu_1 + 2\mu_2}{2} g.$$

两接触面的相对运动

该区间保证 $a_B > 0$、$a_A - a_B = 2(\mu_1 - \mu_2)g > 0$，且在地面起动阈值处 $a_B \to 0$，两分支连续。层间开始滑动后，地面所需摩擦由新的张力和层间动摩擦共同决定。

例 2.15（不等质量叠块的摩擦必要量）. 与前一动滑轮装置相同，现地面光滑，A, B, C 的质量分别为 m_1, m_2, m，层间静摩擦因数 μ_s。求两桌上块不相对滑动的条件。

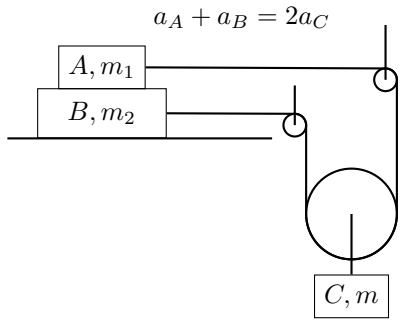


图 2.47: 两块虽受相同张力，质量不同仍需要摩擦调整

解　由共同加速度写三个物体的方程

若图 2.47 两块共同向右，绳长令 $a_C = a$。取作用在 A 上的摩擦向右为正，方程为 $m_1 a = T + f$、$m_2 a = T - f$、$ma = mg - 2T$。相加得到 $(m_1 + m_2 + m)a = mg$，相减得到 $2f = (m_1 - m_2)a$。

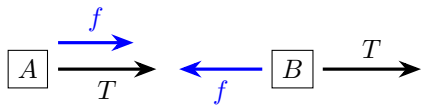


图 2.48: 摩擦方向随质量差改变

由质量差求保持共同运动所需的摩擦

由图 2.48 的符号约定，

$$f = \frac{mg(m_1 - m_2)}{2(m_1 + m_2 + m)}, \qquad \mu_s \geq \frac{m|m_1 - m_2|}{2m_1(m_1 + m_2 + m)}.$$

解释符号反转及等质量特例

若 $m_1 < m_2$，$f < 0$ 表示图中摩擦箭头应反向，实际摩擦对较轻的上块向左。取绝对值是因为摩擦上限限制大小。两质量相等时所需摩擦为零，即使接触面光滑也可共同运动。

例 2.16 (竖直导向块与水平斜面)**.** 质量 m 的滑块只能沿固定光滑竖直导轨运动，底部接触质量 M、向右下方倾斜的光滑斜面，倾角 θ。地面光滑，用水平力 $F \geq 0$ 向右推斜面。求斜面与滑块的加速度。

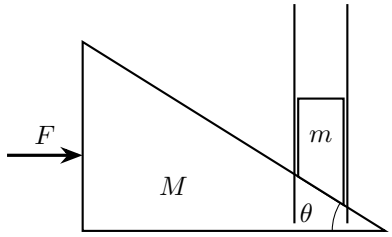


图 2.49: 固定竖直导轨使滑块没有水平加速度

解　由导轨处斜面高度写加速度约束

图 2.49 斜面向右位移 X 时，固定导轨位置处的面高度上升 $X\tan\theta$，所以滑块向上加速度 $b = A\tan\theta$，其中 $A = \ddot{X}$ 可带符号。设斜面支持力为 N，分别列

$$F - N\sin\theta = MA, \qquad N\cos\theta - mg = mb = mA\tan\theta.$$

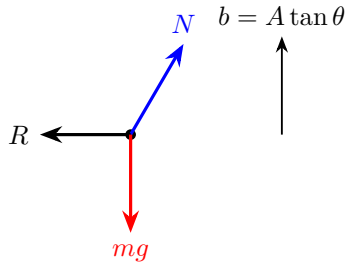


图 2.50: 竖直导轨承担滑块的水平受力平衡

联立受力方程求带符号的运动

由竖直式得 $N\cos\theta = m(g + A\tan\theta)$。将它乘 $\tan\theta$，就得到水平式所需的 $N\sin\theta = m(g + A\tan\theta)\tan\theta$。代入图 2.50 中斜面的水平式，

$$F - mg\tan\theta - mA\tan^2\theta = MA, \qquad (M + m\tan^2\theta)A = F - mg\tan\theta.$$

系数为正，解出 A 后再用 $b = A\tan\theta$，得到

$$A = \frac{F - mg\tan\theta}{M + m\tan^2\theta}, \qquad b = \frac{(F - mg\tan\theta)\tan\theta}{M + m\tan^2\theta}.$$

推力大小对升降方向和支持力的影响

固定导轨给滑块水平向左的作用力 $R = N\sin\theta$，它参与整个装置的水平受力。$F < mg\tan\theta$ 时，计算值为负，表示斜面向左、滑块向下。法向力 $N = m(Mg + F\tan\theta)/[(M + m\tan^2\theta)\cos\theta]$ 对 $F \geq 0$ 保持正值，接触分支成立。

例 2.17 (平台边缘的双楔块)**.** 两直角楔块 ABC, ADC 质量均为 m，沿斜面 AC 接触，倾角 α。BC, AD 水平，ABC 由光滑平台支承，ADC 可向平台边缘下落，其水平顶面另有质量 m 的小块 E。各处光滑，从静止释放，求保持斜面接触时下楔块加速度。

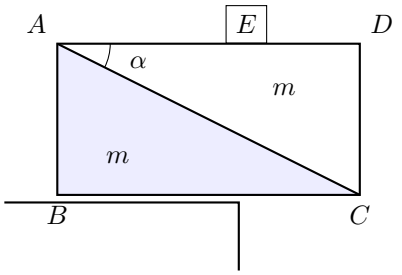
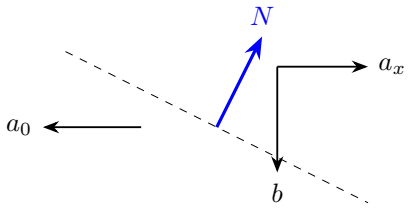


图 2.51: 上楔块与顶块竖直运动相同，水平运动不同

解　以水平整体方程联系两个楔块

图 2.51 下楔块只能水平运动，设其向左加速度 a_0，上楔块向右加速度 a_x，两上方物体共同向下加速度为 b。顶面光滑，E 不受水平力，所以它水平加速度为零。整体没有水平外力，$-ma_0 + ma_x = 0$，即 $a_x = a_0$。



$$b\cos\alpha = (a_0 + a_x)\sin\alpha$$

图 2.52: 接触法向关系联系相向水平运动与竖直下落

用法向接触关系关联竖直下落

图 2.52 接触法向相对加速度为零，故 $b = 2a_0\tan\alpha$。下楔块水平式为 $N\sin\alpha = ma_0$；取上楔块与 E 的竖直整体，$2mg - N\cos\alpha = 2mb$。消去 N, b 后得到

$$2g - a_0\cot\alpha = 4a_0\tan\alpha, \quad a_0 = \frac{2g}{4\tan\alpha + \cot\alpha} \quad \text{向左.}$$

顶块和平台上的支持力

上楔块向下加速度 $b = 4g\sin^2\alpha/(\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha) < g$，因此对 E 的支持力 $m(g-b) > 0$。下楔块地面支持为 $mg + N\cos\alpha > 0$。结果适用于未越出平台、两斜面仍有接触的阶段。

例 2.18 (双层阿特伍德装置)**.** 上方固定轻滑轮一侧悬挂质量 3 kg 的 C，另一侧悬挂下方轻动滑轮。下滑轮绳两端质量分别为 A : 1 kg、B : 2 kg。两绳均轻、滑轮光滑，求三物体加速度。

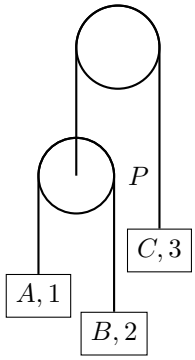
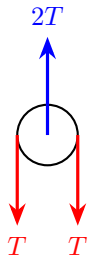


图 2.53: 两根绳分别给出一条独立约束

解　分开两根绳写约束，再隔离轻动滑轮

统一向下为正，图 2.53 上绳给 $a_P + a_C = 0$，下绳给 $a_A + a_B = 2a_P$，合并为 $a_A + a_B = -2a_C$。设下绳张力为 T，轻动滑轮平衡要求上绳张力为 $2T$。



$$a_P = -a_C$$

$$a_A + a_B = 2a_P$$

图 2.54: 上绳张力等于下绳两股张力之和

把不同张力代入三个物体方程

由图 2.54，以质量的千克数代入，各物体方程为 $a_A = g - T/(1\,\mathrm{kg})$、$a_B = g - T/(2\,\mathrm{kg})$、$a_C = g - 2T/(3\,\mathrm{kg})$。代入约束：

$$2g - \frac{3T}{2\,\mathrm{kg}} = -2g + \frac{4T}{3\,\mathrm{kg}}.$$

将含张力的项移到同一侧，先通分系数：

$$4g = \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right)\frac{T}{1\,\mathrm{kg}} = \frac{17}{6}\frac{T}{1\,\mathrm{kg}}, \qquad T = \frac{24}{17}(1\,\mathrm{kg})g.$$

各物体加速度的大小和方向

所以 $a_A = -7g/17$，即向上；$a_B = 5g/17$ 向下；$a_C = g/17$ 向下。此时 $a_A + a_B = -2g/17 = -2a_C$，下滑轮向上加速 $g/17$，两侧绳端的加速度之和等于轮心加速度的两倍。

例 2.19 (后轮驱动汽车的载荷转移)**.** 汽车质量 m，前后轮距 $2l$，质心在两轴中间、离地高 h。后轮驱动，汽车向右加速度 a，忽略前轮水平摩擦和车身俯仰角加速度。求后轮所需最小静摩擦因数及维持前轮接触的条件。

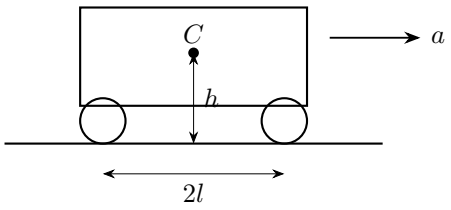


图 2.55: 驱动力低于质心，前后轴载荷随之改变

解　列整体合力和无俯仰的力矩方程

图 2.55 后轮摩擦 f 向右，整体水平方程为 $f = ma$，竖直方程为 $N_f + N_r = mg$。绕质心列无俯仰角加速度的力矩式，$fh + N_f l - N_r l = 0$。

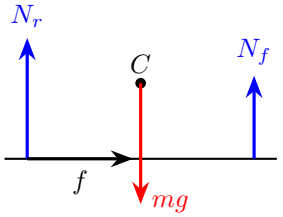


图 2.56: 前轴减载、后轴增载共同抵消驱动力矩

求前后轴载荷并限制驱动轮摩擦

由图 2.56 两支持力之和、差，得 $N_r = mg/2 + mah/(2l)$，$N_f = mg/2 - mah/(2l)$。后轮不滑要求 $ma \le \mu_s N_r$，所以

$$\mu_{s,\min} = \frac{2al}{gl + ah}.$$

前轮接触与重心高度的作用

与此同时，$N_f \ge 0$ 要求 $a \le gl/h$；等号对应前轮支持力刚降为零。$h \to 0$ 时 $\mu_{s,\min} \to 2a/g$，对应驱动轮只承担一半总载荷。

例 2.20 (滑块对高支架平板的翻转作用)**.** 均匀水平平板长 $2L$，中点 C 固定在高为 R 的支架顶端，支架底部绕 O 转动。左半板由平台限制，只能顺时针翻转。滑块从光滑斜槽下降高度 h 后平滑进入板左端 a，板面动摩擦因数 μ。取 $L = R = 1\,\mathrm{m}$、$\mu = 0.2$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。求单块不翻转的最大 h；若两等质量块从 $0.45\,\mathrm{m}$ 高处先后释放、到板时刻相差 $0.2\,\mathrm{s}$，求第二块上板后多久首次翻转。

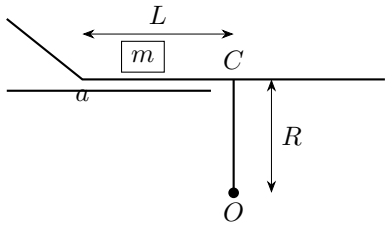


图 2.57: 水平摩擦通过支架高度也产生翻转力矩

解　由入板速度求滑行距离并辨认两种力矩

图 2.57 中，滑块从静止沿光滑斜槽下降高度 h。按知识部分图 2.16 的切向方程积分，$mgh = mv_0^2/2$，故入板速率 $v_0 = \sqrt{2gh}$。上板后取向右为正，$\dot v = -\mu g$。从入板时刻积分：

$$v(t) = v_0 - \mu g t, \qquad s(t) = \int_0^t (v_0 - \mu g\tau)\,\mathrm{d}\tau = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2.$$

停止时刻 $t_0 = v_0/(\mu g)$，代入得到

$$s_0 = \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{h}{\mu}.$$

平板与支架自重作用线通过 O，不产生翻转力矩。块在距左端 s 处滑动时，对板向下压力 mg 产生逆时针矩 $mg(L-s)$，向右摩擦 μmg 产生顺时针矩 μmgR。

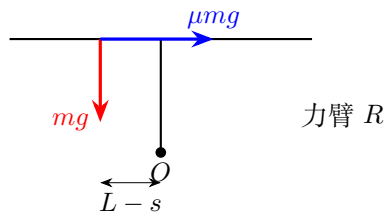


图 2.58: 绕底轴比较压力矩和摩擦矩

对单块的全过程求不翻转高度

由图 2.58，滑动全过程需 $s \le L-\mu R$。最大位移出现在停下前，故 $h/\mu \le L-\mu R$，$h_{\max}=\mu(L-\mu R)=0.16\,\mathrm{m}$。停止后摩擦消失，不会比停止前更容易顺时针翻转。

为两块各设运动时钟并列总力矩条件

两块进入板时均有 $v_0=3\,\mathrm{m/s}$。令第二块上板后时间为 t，在两块均向右滑动的阶段，

$$s_A=3(t+0.2)-(t+0.2)^2,\qquad s_B=3t-t^2,$$

各长度以米、时间以秒计。翻转临界为 $mg(2L-s_A-s_B)=2\mu mgR$，即 $s_A+s_B=1.6\,\mathrm{m}$。先展开两位置之和：

$$s_A+s_B=6t+0.6-(2t^2+0.4t+0.04)=-2t^2+5.6t+0.56.$$

令其等于 1.6 并移项，得到 $2t^2-5.6t+1.04=0$。除以 2 后配方，

$$(t-1.4)^2=1.4^2-0.52=1.44,\qquad t=1.4\pm1.2.$$

因此两根为 0.2 s、2.6 s。

确定首次翻转的时刻

两块在板上的滑动分别持续 1.5 s，所以两块均滑动的计算区间为 $0\le t<1.3\,\mathrm{s}$。其中的根为 $t=0.2\,\mathrm{s}$。第一根时 $v_A=3-2(0.4)=2.2\,\mathrm{m/s}$、$v_B=3-2(0.2)=2.6\,\mathrm{m/s}$，均为正；第一块在第二块上板前只到 $s_A=0.56\,\mathrm{m}<0.8\,\mathrm{m}$，未先翻转。因此首次到达翻转临界为第二块上板后 0.2 s，再后力矩向顺时针。

例 2.21 (有空气阻力时的吊篮悬角)**.** 质量 M 的滑轮沿向右下方倾角 θ 的钢索滑动，吊篮及人质量为 m。滑轮与索间滑动摩擦为 μN，人受沿索向上的空气阻力 kmg，滑轮空气阻力忽略。二者相对平衡时，悬线向左偏离竖直角 α。求加速度及 α，判断能否有 $\alpha=\theta$ 而 $a<g\sin\theta$。

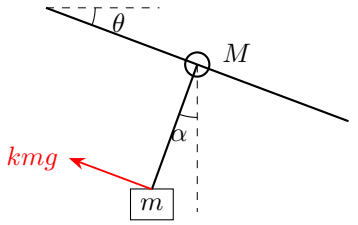


图 2.59: 空气阻力作用于吊篮，滑动摩擦作用于滑轮

解　沿索和垂直索取轴，先求整体加速度

沿图 2.59 钢索向下取 t 轴，垂直索向外取 n 轴。吊篮无 n 向加速度，所以 $T\cos(\theta-\alpha)=mg\cos\theta$。取滑轮与吊篮整体，$N=(M+m)g\cos\theta$；沿索外力为总重力分量减去两处阻力，因此

$$a=g\left(\sin\theta-\mu\cos\theta-\frac{km}{M+m}\right).$$

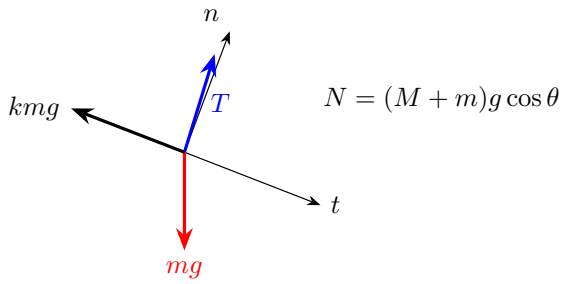


图 2.60: 吊篮与整体分别给出悬角和加速度

隔离吊篮求悬角

吊篮沿索方程为 $ma=mg\sin\theta-T\sin(\theta-\alpha)-kmg$。用图 2.60 的法向式 $T\cos(\theta-\alpha)=mg\cos\theta$ 消去张力，先写

$$T\sin(\theta-\alpha)=mg\sin\theta-ma-kmg.$$

将两式相除，并代入整体加速度，

$$\begin{aligned}\tan(\theta-\alpha)&=\frac{g\sin\theta-a-kg}{g\cos\theta}\\&=\frac{\mu g\cos\theta+kgm/(M+m)-kg}{g\cos\theta}.\end{aligned}$$

最后合并两个含 k 的项，$km/(M+m)-k=-kM/(M+m)$，于是

$$\tan(\theta-\alpha)=\mu-\frac{kM}{(M+m)\cos\theta},$$

求悬角等于钢索倾角时的运动

取与图示构形相符的角度分支。当 $\mu=kM/[(M+m)\cos\theta]$ 且 $k>0$ 时，确有 $\alpha=\theta$，但 $a=g(\sin\theta-k)<g\sin\theta$。若还要求从静止沿索向下加速，应取 $k<\sin\theta$；已在下滑且 k 更大时，则可能是沿索减速阶段。悬角为 θ 时，空气阻力和索摩擦的上述配合使加速度减为 $g(\sin\theta-k)$。

2.9 本讲小结

平移加速系把车厢的加速度写成惯性力；绳长和接触关系给出相对运动的联系。求出张力、压力和摩擦后，将它们同题图中的受力方向及允许的静摩擦范围联系起来，便可确定相应的运动阶段。

练习 2.1 (相对静止的完整加速度区间)**.** 斜面向右下方倾斜、倾角 θ，水平向右加速度 $A \geq 0$。其上物块质量 m，静摩擦因数 $\mu_s < \cot\theta$。求可保持相对静止的全部 A，并说明低端区间何时可以包括零。

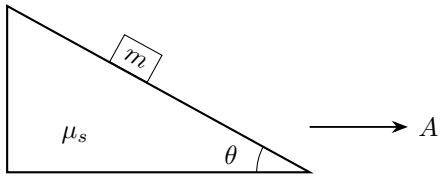


图 2.61: 同一接触面可能分别阻碍上滑和下滑

练习 2.2 (下滑轮保持不动的质量条件)**.** 双层阿特伍德装置的下绳两端质量 m_A, m_B，上绳另一端质量 m_C。问 m_C 应取何值，下滑轮中心及 C 才能保持静止，而 A, B 仍可相对运动？求此时 A, B 的加速度。

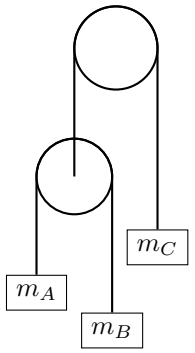


图 2.62: 静止的下滑轮仍可有绳从其上经过

练习 2.3 (前轮驱动的加速上限)**.** 车的质量、轴距和重心位置同例题中的汽车，但改为前轮驱动，后轮水平摩擦忽略。前轮静摩擦因数 μ_s，求不打滑且两轮保持接触时最大加速度。

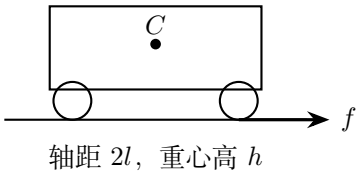


图 2.63: 驱动轮处在加速时减载的一侧

练习 2.4 (竖直导向块的分离阈值)**.** 竖直导向块 m 与向右下方倾角 θ 的斜面 M 光滑接触，地面光滑。现向左拉斜面，拉力大小 P。由静止释放，求保持接触的 P 范围；超过阈值时求释放瞬间两物体的加速度。

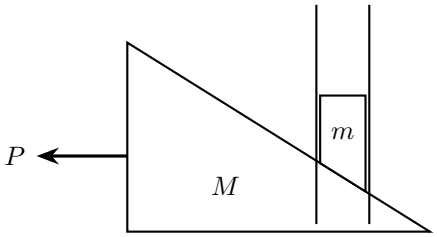


图 2.64: 左拉使固定导轨处的斜面高度下降

练习解答

练习 2.1

解　从共同运动求所需的压力和摩擦

图 2.61 物块随斜面共同水平加速时，$N = m(g\cos\theta + A\sin\theta) > 0$，所需沿面向上摩擦 $f = m(g\sin\theta - A\cos\theta)$。因此条件为

$$-\mu_s(g\cos\theta + A\sin\theta) \le g\sin\theta - A\cos\theta \le \mu_s(g\cos\theta + A\sin\theta).$$

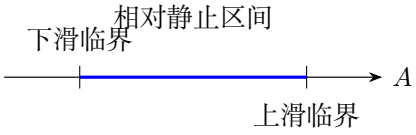


图 2.65: 两侧临界对应相反的相对滑动趋势

解两侧静摩擦条件，求加速度区间

先解右侧不等式，将常量与含 A 的项分别移到两侧：

$$g(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)\le A(\cos\theta+\mu_s\sin\theta).$$

右边系数为正，故 $A\ge g(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta+\mu_s\sin\theta)$。再解左侧不等式，同样整理得

$$A(\cos\theta-\mu_s\sin\theta)\le g(\sin\theta+\mu_s\cos\theta).$$

题设 $\mu_s<\cot\theta$ 保证左边系数也为正，相除得到 $A\le g(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)/(\cos\theta-\mu_s\sin\theta)$。最后与 $A\ge 0$ 取交集，得到图 2.65 的区间

$$\max\left\{0,\frac{g(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}\right\}\le A\le\frac{g(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}.$$

区间包括零加速度的条件

当 $\mu_s\ge\tan\theta$ 时零加速度也在区间内，正对应斜面静止时摩擦能够防止下滑。题设 $\mu_s<\cot\theta$ 使上限的分母为正。

练习 2.2

解　令下滑轮不动，先解下绳两个物体

图 2.62 若下滑轮中心不动，下绳加速度满足 $a_A=-a_B$。约定 A 向下为正，列 $m_Ag-T=m_Aa$、$T-m_Bg=m_Ba$，相加得 $a=(m_A-m_B)g/(m_A+m_B)$，代回得 $T=2m_Am_Bg/(m_A+m_B)$。

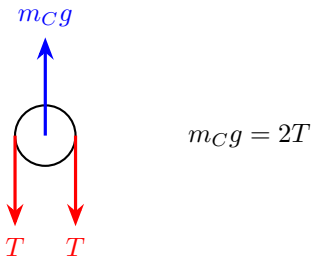


图 2.66: 上绳平衡条件决定所需悬重

用轻轮的张力倍数确定上绳悬重

由图 2.66 隔离轻动滑轮，上绳张力 $T_1=2T$；再隔离静止的 C，$m_Cg=T_1=2T$。代入下绳张力并约去 g，得 $m_C=4m_Am_B/(m_A+m_B)$。取此值且初始滑轮与 C 静止，它们可保持静止，而下绳两球反向加速。若 $m_A<m_B$，上述 $a<0$，表示实际是 A 向上，质量条件不变。$m_A=m_B$ 时三物体均可静止。

练习 2.3

解　用前轴实际载荷限制驱动力

图 2.63 不俯仰时，前后载荷仍满足 $N_f+N_r=mg$、$N_r-N_f=mah/l$，故 $N_f=mg/2-mah/(2l)$。前轮摩擦提供 $f=ma$，不打滑条件 $ma\le\mu_sN_f$。

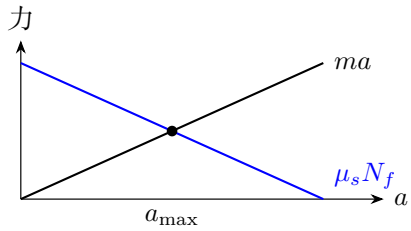


图 2.67: 前轮驱动同时受到驱动力需求和前轴减载限制

由驱动力与最大静摩擦的交点求上限

由图 2.67 两线交点，$a(2l+\mu_sh)\le\mu_sgl$，所以 $a_{\max}=\mu_sgl/(2l+\mu_sh)$。这个值小于 gl/h，因而在摩擦上限达到之前前轮不会先失去接触。相同 μ_s 下，前轮驱动加速时载荷减小，所能提供的驱动力随之降低。

练习 2.4

解　先求保持接触时的加速度与支持力

图 2.64 向右为正，水平力 $F=-P$。先分别对斜面和导向块列式：

$$-P-N\sin\theta=MA,\qquad N\cos\theta-mg=mb.$$

固定导轨处的斜面高度为 $z=z_0+X\tan\theta$，依次求导得 $\dot z=\dot X\tan\theta$、$b=\ddot z=A\tan\theta$。由竖直式 $N\cos\theta=m(g+A\tan\theta)$，乘 $\tan\theta$ 后代入水平式，得到 $-P-mg\tan\theta=(M+m\tan^2\theta)A$。所以 $A=(-P-mg\tan\theta)/(M+m\tan^2\theta)$；再回代竖直式，支持力为

$$N=\frac{m(Mg-P\tan\theta)}{(M+m\tan^2\theta)\cos\theta}.$$

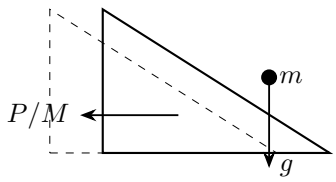


图 2.68: 斜面在导轨处下降更快，滑块同斜面分离

确定失去接触阈值并重建分离运动

$N \geq 0$ 给 $0 \leq P \leq Mg\cot\theta$。超过阈值后，图 2.68 滑块与斜面分离，释放瞬间 $A = -P/M$，滑块 $b = -g$。

分离后间隙的变化

斜面在导轨处的高度加速度为 $A\tan\theta = -P\tan\theta/M < -g$，因此表面下降比滑块快，两者间隙从零开始增加。

牛顿运动定律

物理竞赛一轮讲义

第三讲

分离、轻物与连续介质

2026

目录

第三讲　分离、轻物与连续介质 **1**

3.1　从一个物体到物体内部的一小段 1

3.2　轻物与刚杆的运动 2

3.3　匀速转动中的受力 4

3.4　从接触到分离 7

3.5　液体的压强与有效重力 9

3.6　旋转液体与流出的水流 11

3.7　有质量弹簧的形变 13

3.8　例题与分析 15

3.9　本讲小结 42

练习解答 43

第三讲　分离、轻物与连续介质

3.1　从一个物体到物体内部的一小段

3.1.1　隔离截面怎样把内力变成外力

牛顿定律既可以用于整个物体，也可以用于其中选定的一部分。把一根绳在某截面处想象切开，两侧原来的相互作用就成为各自受力图上的张力。研究整体时，这一对内力相消；研究其中一段时，截面张力与这一段的重力、惯性一起进入方程。连续介质的局部方程就从这种隔离方法得到。

图 3.1 是一根竖直的不可伸长均匀绳，长 L，线密度 λ，下端自由，整根绳以向上加速度 a 作平移。坐标 z 从下端向上量，截面高度为 z。隔离该截面以下的绳段，质量为 λz，沿向上方向有

$$T(z) - \lambda z g = \lambda z a, \qquad T(z) = \lambda(g+a)z.$$

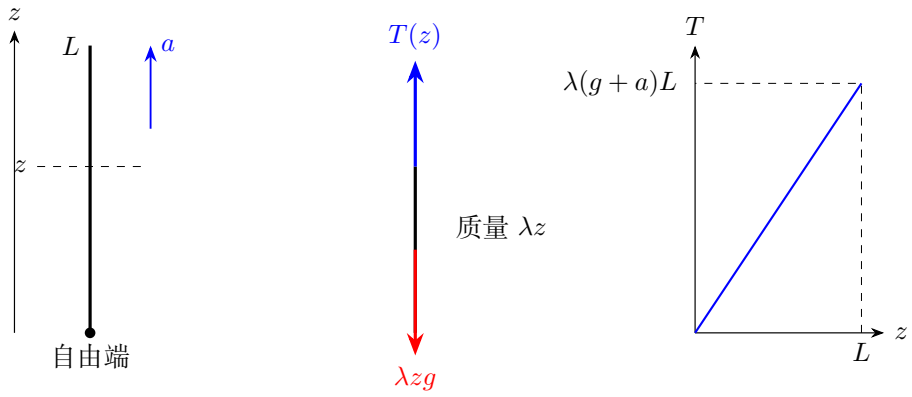


图 3.1: 截面张力推动并支承截面以下的整段绳

图 3.1 右侧表明张力由下到上逐渐增大。若下端另挂一个随绳共同加速的物体，质量为 M，则下端张力变为 $M(g+a)$，整条张力图相应上移：$T(z) = (M + \lambda z)(g+a)$。端部条件确定张力的起始值，绳自身的质量确定沿绳的增量。

3.1.2　质量微元与局部牛顿方程

对图中 z 到 $z+\mathrm{d}z$ 的一小段，两端张力差承担这一段的重力并产生加速度：

$$T(z+\mathrm{d}z)-T(z)-\lambda g\,\mathrm{d}z=\lambda a\,\mathrm{d}z.$$

两边除以 $\mathrm{d}z$ 并取极限，得到 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}z=\lambda(g+a)$。从下端 $T(0)=0$ 积分，

$$T(z)=\int_0^z \lambda(g+a)\,\mathrm{d}\zeta=\lambda(g+a)[\zeta]_0^z=\lambda(g+a)z.$$

整体隔离与逐段积分给出同一个张力分布。把线密度取为可忽略，有限加速度下相邻截面的张力差随之趋于零，得到轻绳模型；保留质量分布，再加入材料的形变规律，就会得到有质量弹簧的运动方程。液体微元同样以 $\mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V$ 记录质量，以各表面的压力差与重力决定加速度。下文按轻物、曲线运动、接触分离与连续介质依次展开。

3.2　轻物与刚杆的运动

3.2.1　轻物怎样传递力和运动

轻绳、轻带和轻滑轮可看作质量很小的连接元件。设某轻物质量为 ε，加速度为有限的 a，则它所受合力为 εa。令 $\varepsilon\to 0$，合力趋于零，得到连接元件各作用力之间的关系；它的运动则由相连的有质量物体和几何约束一起决定。

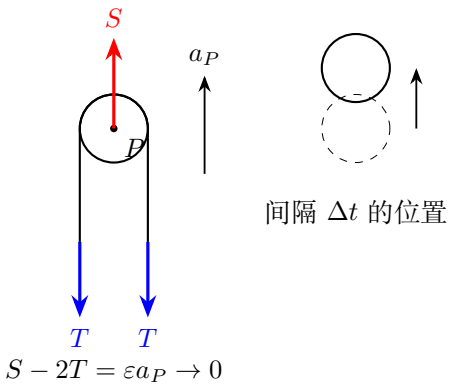


图 3.2: 轻轮的力关系与轮心运动

图 3.2 中，上方的拉力 S 向上，下方两段竖直绳各以 T 向下拉轮。轮心 P 的加速度取向上为正，牛顿方程为 $S-2T=\varepsilon a_P$，轻轮极限给 $S=2T$。右图画出轮心的两处位置。若两段绳保持竖直，绳两端高度为 y_1,y_2，轮心高度为 y_P，则两段直绳的长度分别为 y_P-y_1、y_P-y_2。加上不变的绕轮弧长，有 $2y_P-y_1-y_2=$ 常量。

先求导得到 $2v_P = v_1 + v_2$，再求导得到 $2a_P = a_1 + a_2$。例 3.6 同样先对轻连接件写力的关系，再用接触几何联系运动。

轻杆的转动惯量也随质量趋于零，因此轻杆的合力和合力矩均为零。将有质量的小球固定在轻杆上，杆内的作用力把各球运动联系起来；小球仍分别满足 $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$。例 3.6 利用轻楔水平受力平衡求楔的加速度，例 3.7 至例 3.10 则把小球、轻杆或均匀杆作为刚体研究。

3.2.2 轻带上的摩擦

轻带跨在光滑固定双斜面上。斜面对带的作用沿法线，沿带展开方向的两端摩擦互相平衡。因此图 3.3 中两物块受到的摩擦大小相等，方向分别同各自的相对滑动趋势相反。

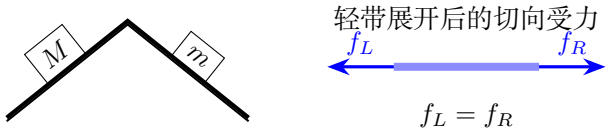


图 3.3: 两物块对轻带的切向作用，沿带展开后相反等大

设两侧倾角均为 α、质量为 $M > m$，两块都随带运动。重块向下、轻块向上，以各自运动方向为正，有

$$Mg\sin\alpha - f = Ma, \qquad f - mg\sin\alpha = ma.$$

相加得 $a = (M-m)g\sin\alpha/(M+m)$，代回得 $f = 2Mmg\sin\alpha/(M+m)$。轻块的最大静摩擦较小，先用 $f \le \mu_s mg\cos\alpha$ 确定共同运动的范围。超过这个范围，轻块同带相对滑动，其动摩擦又决定重块和轻带的运动。例 3.5 按这一过程讨论轻块的升降。

3.2.3 刚杆各点的加速度

刚杆的运动可以分为质心平移和绕质心转动。设杆上某点相对质心的位矢为 $\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

对时间求导，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$，所以

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_C + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).$$

由静止释放的瞬间，$\omega = 0$，剩下质心平动和角加速度两项。以释放瞬间的杆方向为 x 轴，左端为 $x = 0$，杆长 l，质心坐标为 x_C。杆上位置 x 相对质心的带符号距离为 $x - x_C$，横向加速度为

$$a_y(x) = a_{C,y} + \dot{\omega}(x - x_C).$$

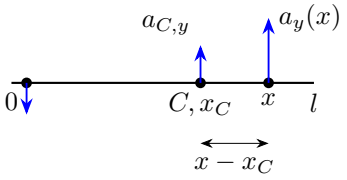


图 3.4: 质心平动与转动共同确定各点的横向加速度

图 3.4 中，加速度箭头随 x 线性变化，某个点的瞬时加速度可以为零。质心平动方程给出 $a_{C,y}$，绕质心的转动方程给出 $\dot{\omega}$，两者共同确定这条直线。

对于均匀杆，质心位于中点，$x_C = l/2$，上式成为 $a_y(x) = a_{C,y} + \dot{\omega}(x - l/2)$。质量微元为 $\mathrm{d}m = (M/l)\,\mathrm{d}x$。取质心为坐标原点，转动惯量为

$$I_C = \frac{M}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{M}{l}\frac{l^3/8 + l^3/8}{3} = \frac{Ml^2}{12}.$$

杆端受横向力 F 时，$a_{C,y} = F/M$，$\dot{\omega} = (Fl/2)/I_C = 6F/(Ml)$。于是 $a_y(x) = (F/M)(6x/l - 2)$。例 3.9 还将按质量微元积分，说明这个分布怎样给出整体的合力和力矩。

3.3　匀速转动中的受力

3.3.1　从转动坐标求加速度

运动学中的极坐标已经说明，随方向一起转动的单位矢量本身也有时间导数。现在把这两条转动基矢固定在转盘上，如图 3.5。取地面基矢为 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$，转盘基矢为 $\boldsymbol{e}'_x, \boldsymbol{e}'_y$，转角 ψ 从地面 x 轴逆时针量起，角速度为 $\Omega = \dot{\psi}$。

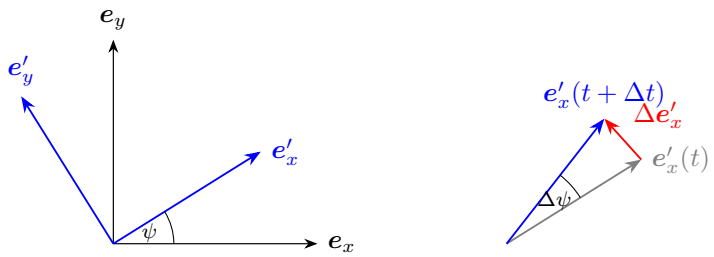


图 3.5: 转盘基矢的方向改变，使基矢本身产生增量

图 3.5 左图给出两个转盘基矢在地面坐标中的分量：

$$\boldsymbol{e}'_x = \cos\psi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\psi\,\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{e}'_y = -\sin\psi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\psi\,\boldsymbol{e}_y.$$

地面基矢固定，分别对分量使用链式法则，

$$\dot{\boldsymbol{e}}'_x = (-\sin\psi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\psi\,\boldsymbol{e}_y)\dot{\psi} = \Omega\boldsymbol{e}'_y,$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}'_y = (-\cos\psi\,\boldsymbol{e}_x - \sin\psi\,\boldsymbol{e}_y)\dot{\psi} = -\Omega\boldsymbol{e}'_x.$$

右图的基矢增量正沿着转动方向。对平面内矢量 $\boldsymbol{A} = A'_x\boldsymbol{e}'_x + A'_y\boldsymbol{e}'_y$，分量和基矢分别求导：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{地}} = \dot{A}'_x\boldsymbol{e}'_x + \dot{A}'_y\boldsymbol{e}'_y + A'_x\Omega\boldsymbol{e}'_y - A'_y\Omega\boldsymbol{e}'_x.$$

前两项是转盘上所测的分量变化，后两项来自坐标方向的转动。把角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 指向转轴正向，后一部分就是 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}$。沿转轴的分量也按同样方式加入，得到矢量求导关系

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{地}} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{转}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{A}.$$

物体位置为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}'$。先求一次地面系导数，得到

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'.$$

再分别求导：

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{v}'/\,\mathrm{d}t)_{\text{地}} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}',$$
$$[\mathrm{d}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}')/\,\mathrm{d}t]_{\text{地}} = \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}').$$

两处 $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'$ 相加，得到

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}' + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}').$$

代入地面系第二定律后，将相对加速度 $m\boldsymbol{a}'$ 留在右边，得到转动系的运动方程。匀速转盘上相对静止时，$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}' = 0$、$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$，真实力同径向向外的离心惯性力 $m\Omega^2 r$ 平衡。

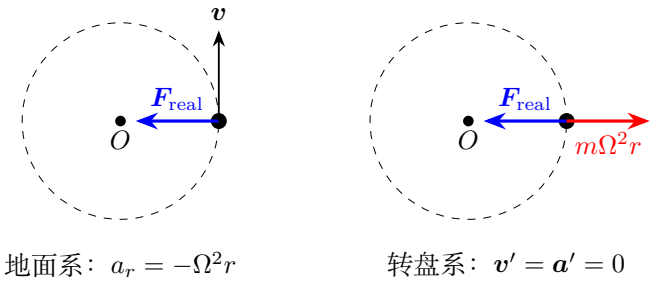


图 3.6: 同一圆周运动在地面系与转盘系中的表示

图 3.6 左图用向内的真实合力产生向心加速度，右图在转盘系中用离心惯性力写相对平衡。两个描述给出同一个径向方程。若物体沿转盘相对运动，方程还含 $-2m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}'$，称为科里奥利惯性力。图 3.7 取逆时针转盘、相对速度径向向外，按右手法则得到该力沿转盘的顺时针切向。

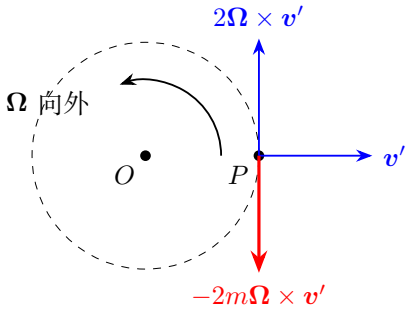


图 3.7: 从上方看逆时针转盘：相对径向运动还带来横向加速度变换项

3.3.2　共同转动时的张力与摩擦

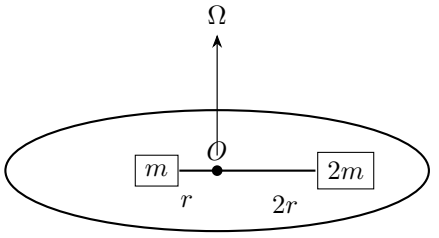


图 3.8: 转盘上两物块由张力和静摩擦共同作圆周运动

图 3.8 中，绳连接转轴两侧的两个物块，每个物块的张力都指向转轴，摩擦可以沿径向向内或向外。各自朝转轴取正，写成

$$T + f_A = m\Omega^2 r, \qquad T + f_B = 4m\Omega^2 r.$$

再由 $T \geq 0$、$|f_A| \leq \mu_s mg$、$|f_B| \leq 2\mu_s mg$ 得到张力的允许区间。低角速度时，张力下限可为零，而上限随向心力需求增大，允许区间先变宽。角速度较高时，外侧物块所需的向心力使张力下限提高得更快，区间转而变窄；达到共同转动的最大角速度时，两端重合，两处摩擦同时达到相应极限。例 3.11 将完整求出这个区间，也说明指定一种受力分配后怎样画出相应曲线。

轻杆上固定多个球作圆锥摆时，各球到转轴的半径不同，向心力也不同。对球和杆整体，在共同转动系中绕固定端取矩，重力矩按球到支点距离的一次方加权，离心力矩按距离的平方加权。例 3.12 用这一方法求两个球的共同角速度。

3.4 从接触到分离

3.4.1 接触力怎样随运动改变

弹簧托着踏板，踏板上站着人。弹簧由压缩状态逐渐伸长，弹力减小，人和踏板一起向上运动，接触压力也随之减小。取人质量为 M、踏板质量为 m，弹簧压缩量为 x，向上为正。整体的运动方程是

$$kx - (M+m)g = (M+m)a.$$

对人单独列式，$N - Mg = Ma$。代入整体加速度，得到

$$N = M(g+a) = M\left(g + \frac{kx-(M+m)g}{M+m}\right) = \frac{Mkx}{M+m}.$$

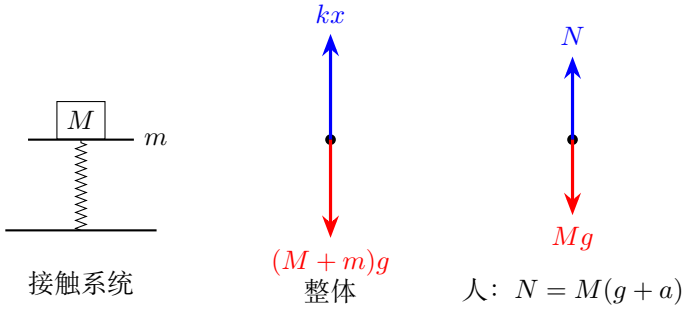


图 3.9: 整体方程确定加速度，隔离人后才能得到支持力

图 3.9 中，弹簧向上推踏板，踏板向上推人。在压缩量 $x>0$ 的阶段，$N>0$，两者保持接触；到弹簧恢复原长时，N 降为零，人和踏板的共同加速度恰为向下的 g。若两者继续向上运动，弹簧开始拉住踏板向下，人则仅受重力，二者间的间隙由此增大。

这个过程还取决于初始运动。人和踏板可能在弹簧恢复原长之前已经停止并返回。因此，先由受力求出 $N=0$ 对应的位置，再根据运动方程求到达该处的速度，就能判断这次运动是否发生分离。例 3.1、例 3.2 给定一部分物体的加速度，由接触力随时间的变化求分离；例 3.3 则同时研究摩擦造成的停止和返回。

3.4.2 速度怎样随位置改变

沿直线运动时，把速度看作位置的函数。用链式法则，

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

将它代入 $ma=F_x$，得到 $mv\,\mathrm{d}v=F_x\,\mathrm{d}x$。从初态 (x_0,v_0) 积到 (x,v)：

$$m\int_{v_0}^{v}w\,\mathrm{d}w=\int_{x_0}^{x}F_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi,\qquad \frac{m}{2}(v^2-v_0^2)=\int_{x_0}^{x}F_x(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

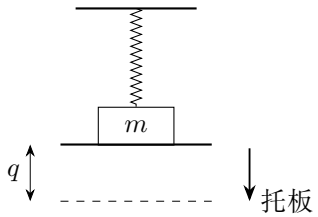
积分变量 w,ξ 分别沿速度和位置变化。对弹簧力 $-kx$，位移积分为

$$\int_{x_0}^{x}(-k\xi)\,\mathrm{d}\xi=-k\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_{x_0}^{x}=\frac{k}{2}(x_0^2-x^2).$$

若物块在同一阶段沿正向滑动，受到大小为 D 的恒定阻力，则还要加上 $\int_{x_0}^{x}(-D)\,\mathrm{d}\xi=-D(x-x_0)$。这样便得到速度平方与位置的关系。速度降到零时，这一段向前运动结束；反向运动时，摩擦也随相对速度改变方向。

3.4.3 分离以后间隙怎样增大

用 q 表示两表面的间隙，向分开方向取正。接触时 $q=0$，分离以后 $q>0$。若在某时刻 $N=0$、$q=\dot q=0$，可将后续两物体各自的自由运动写出，再求 $q(t)$。



分离后的 $q=x_B-x_P$

图 3.10: 下降托板与悬挂物块分离后，托板向下离开物块

图 3.10 中取竖直向下为正，物块、托板坐标为 x_P, x_B，所以 $q = x_B - x_P$。在例 3.1 的分离时刻，物块和托板加速度恰好相同，$\ddot{q} = 0$；托板随后继续按给定加速度下降，弹簧拉力则继续增大。求 q 的下一阶时间变化，就能得到开始分开的过程。

曲面接触还包含曲率的作用。例如两个圆柱接触时，两中心间距为 $2R$，水平、竖直距离满足 $x^2 + h^2 = 4R^2$。两次求导为

$$x\dot{x} + h\dot{h} = 0, \qquad \dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{h}^2 + h\ddot{h} = 0.$$

平方速度项给出中心连线转动所需的向心加速度。例 3.4 把这个几何关系同分离瞬间的受力相联系，求出分离角。

3.5 液体的压强与有效重力

3.5.1 同一点的压强和空间中的压强变化

静止液体对小面元的压力沿面元法线。为了比较同一点不同取向的压强，取图 3.11 的楔形液体微元，沿垂直纸面方向取相同厚度。斜面面积为 $\mathrm{d}S$，外法线与 x 轴成锐角 β；两个坐标面的面积分别为 $\mathrm{d}S_x, \mathrm{d}S_y$。斜面的面积向两个坐标面投影，得到

$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}S\cos\beta, \qquad \mathrm{d}S_y = \mathrm{d}S\sin\beta.$$

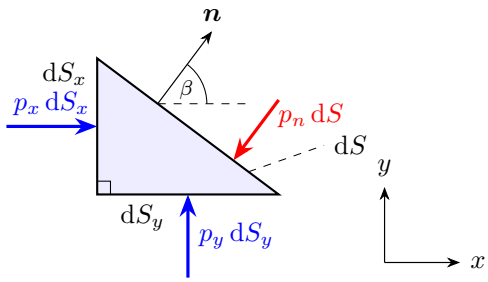


图 3.11: 楔形微元各面的压力及斜面面积的投影

图 3.11 中的各压力指向微元内部，分别记压强为 p_x, p_y, p_n。在液体相对静止的参考系中，单位质量所受有效体积力为 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}$，微元体积为 $\mathrm{d}V$。两个方向的平衡式为

$$p_x\,\mathrm{d}S_x - p_n\,\mathrm{d}S\cos\beta + \rho g_{\mathrm{eff},x}\,\mathrm{d}V = 0,$$
$$p_y\,\mathrm{d}S_y - p_n\,\mathrm{d}S\sin\beta + \rho g_{\mathrm{eff},y}\,\mathrm{d}V = 0.$$

代入面积投影关系，再除以 $\mathrm{d}S$，得到

$$(p_x - p_n)\cos\beta = -\rho g_{\mathrm{eff},x}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}, \qquad (p_y - p_n)\sin\beta = -\rho g_{\mathrm{eff},y}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}.$$

微元的线度缩小时，体积按三次方、面积按二次方缩小，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 随线度趋于零。于是同一点有 $p_x = p_y = p_n$。斜面的取向可以任意改变，同一点的压强因此与小面元的取向无关；在空间中对各坐标面作同样比较，可得同样的结论。下面再研究位置改变时的压强变化。

要研究不同位置的压强，取有微小体积 $\mathrm{d}V$ 的长方体。图 3.12 中，左右两面压力的合力为

$$[p(x) - p(x+\mathrm{d}x)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}V.$$

液体随容器向右加速 a_0，在容器系中，水平方向惯性力为 $-\rho\,\mathrm{d}V a_0$。水平与竖直平衡分别给

$$-\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}V - \rho\,\mathrm{d}V a_0 = 0, \qquad -\frac{\partial p}{\partial z}\,\mathrm{d}V - \rho\,\mathrm{d}V g = 0.$$

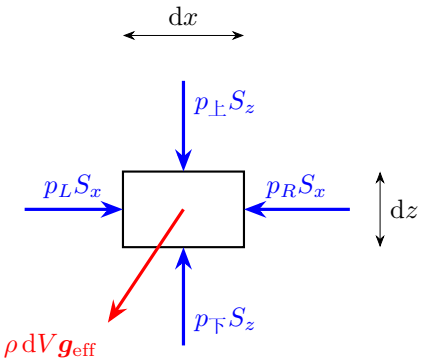


图 3.12: 微元各面压强差逐分量平衡有效体积力

约去体积，得到

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho a_0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \qquad \nabla p = \rho\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}. \tag{3.1}$$

压强沿有效重力方向增大。沿水平从 A 到右侧的 B 积分，得到

$$p_B - p_A = \int_{x_A}^{x_B}(-\rho a_0)\,\mathrm{d}x = -\rho a_0(x_B - x_A).$$

因此向右加速的容器中，同高位置越向右，压强越小。

3.5.2 自由液面和浮力

开口液面各处压强等于大气压。沿液面移动，$\mathrm{d}p=0$，由压强梯度得

$$0=-\rho a_0\,\mathrm{d}x-\rho g\,\mathrm{d}z,\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{a_0}{g}.$$

图 3.13 中的液面左高右低，等压面与它平行，都垂直于有效重力。

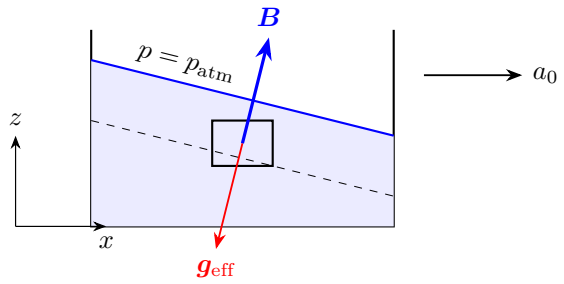


图 3.13: 等压面、有效重力和浮力的方向由同一个压强场确定

用同体积的一团液体替代浸入部分，这团液体在容器系内相对平衡，周围压力的合力为 $\boldsymbol{B}=-\rho V_i\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}$。换回物体，同一压强场给出同样的浮力。质量为 m 的漂浮物满足

$$\boldsymbol{B}+m\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}}=0,\qquad \rho V_i=m.$$

若物体总体积为 V、密度为 ρ_b，则 $V_i/V=\rho_b/\rho$。浮力的水平分量为 $\rho V_i a_0=ma_0$，使浮体同容器一起向右加速；竖直分量为 $\rho V_i g=mg$，承担重力。例 3.15 据此分析液面、等高压差和木块漂浮。

电梯竖直向上加速时，只需把有效重力大小换成 $g+a_0$。自由落体容器的有效重力为零，液体内部重力造成的压强梯度也随之为零。例 3.16 将这些关系同中性悬浮物和水杯小孔联系起来。

3.6 旋转液体与流出的水流

3.6.1 径向压强与抛物面

液体以恒定角速度 Ω 绕竖直轴作整体旋转。在随液体转动的系中，离心体积力径向向外，重力竖直向下。由微元平衡得到

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\Omega^2 r,\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

以轴心底部压强为 p_*，先在底部径向积分，再沿竖直方向积分：

$$p(r,0)-p_* = \rho\Omega^2\int_0^r s\,\mathrm{d}s = \rho\Omega^2[s^2/2]_0^r = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2,$$
$$p(r,z)-p(r,0) = -\rho g\int_0^z \mathrm{d}\zeta = -\rho g z.$$

相加得 $p(r,z)=p_*+\rho\Omega^2r^2/2-\rho gz$。在自由液面上 $p=p_{\mathrm{atm}}$。用任意液面点的压强减去轴心液面点的压强，得到

$$z(r) = z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}.$$

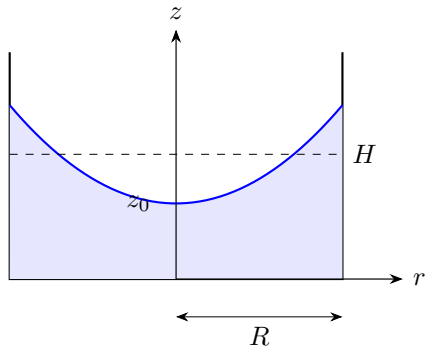


图 3.14: 液面为旋转抛物面，轴心高度由液量确定

图 3.14 中，圆柱桶静止液深为 H，总液量为 πR^2H。旋转后以半径 r、宽 $\mathrm{d}r$ 的圆环为底，其液柱体积为 $2\pi r z(r)\,\mathrm{d}r$。例 3.17 将这些圆环积分，由液量守恒求常数 z_0。

U 形管中也用同一个压强场：距轴 r_1, r_2 的两支管底部压差为 $\rho\Omega^2(r_2^2-r_1^2)/2$；又因上端都开口，底部压差等于 $\rho g(h_2-h_1)$。因此

$$h_2 - h_1 = \frac{\Omega^2(r_2^2-r_1^2)}{2g}.$$

再将这一高度差同液量守恒结合，便得到例 3.14 和练习 3.2 的液面高度与轴处压强。

3.6.2 离开加速容器后的水滴

水滴离开水平加速的桶以后，在地面系中仅受重力，在随桶平移系中相对加速度为 $(-a,-g)$。图 3.15 取桶口为原点，向右为 x、向上为 z，水滴相对初速度为 $(0,-v_e)$。以离口后经过的时间为 τ，积分得

$$v'_x=\int_0^\tau(-a)\,\mathrm{d}t=-a\tau,\qquad v'_z=-v_e+\int_0^\tau(-g)\,\mathrm{d}t=-v_e-g\tau,$$
$$x'=\int_0^\tau(-at)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}a\tau^2,\qquad z'=\int_0^\tau(-v_e-gt)\,\mathrm{d}t=-v_e\tau-\frac{1}{2}g\tau^2.$$

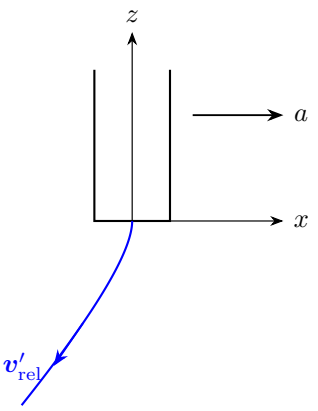


图 3.15: 桶向右加速，离口后的水流相对桶向左下方弯曲

稳定出流时，相邻水滴的离口时间差为 $\mathrm{d}\tau$，对应质量 $\mathrm{d}m=Q\,\mathrm{d}\tau$；沿实际水流的距离为 $\mathrm{d}s=|\boldsymbol{v}'|\,\mathrm{d}\tau$。因此线密度

$$\lambda=\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s}=\frac{Q}{|\boldsymbol{v}'|}.$$

例 3.16 取可忽略的离口速率，练习 3.3 保留 v_e，分别求指定高度处的实际线密度。

3.7 有质量弹簧的形变

3.7.1 用自然坐标标记材料

弹簧的上部承担下部的重量，各截面的拉力随位置变化。为了把质量分布和形变同时写清，设均匀弹簧自然长为 L_0、质量为 m_0、整体劲度系数为 k，从一端按自然长度标记材料坐标 u。自然长度为 $\mathrm{d}u$ 的一小段，质量为 $(m_0/L_0)\,\mathrm{d}u$。

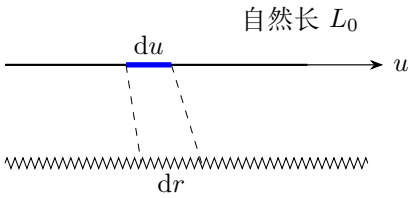


图 3.16: 材料坐标标记同一段弹簧，伸长后位置由 $r(u)$ 给出

图 3.16 中，同一小段伸长后的长度为 $\mathrm{d}r$。均匀弹簧截取长度 $\mathrm{d}u$ 后，其劲度为 $kL_0/\,\mathrm{d}u$；各段串联，柔度相加仍给出原来的 $1/k$。若轴力为 $T(u)$，则该段伸长为

$$\mathrm{d}r-\mathrm{d}u=\frac{T(u)}{kL_0}\,\mathrm{d}u,\qquad T=kL_0\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}-1\right).$$

总伸长由各段相加：

$$\Delta L=\frac{1}{kL_0}\int_0^{L_0}T(u)\,\mathrm{d}u.$$

例如竖直自重弹簧的截面 u 下方质量为 $m_0(1-u/L_0)$，故 $T(u)=m_0g(1-u/L_0)$。例 3.18 将这个线性分布积分，求总伸长；练习 3.1 再加上末端重物和电梯加速度。

3.7.2　轴力的差怎样推动质量微元

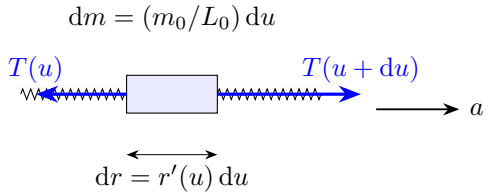


图 3.17: 同一材料微元两端轴力之差决定它的加速度

图 3.17 向右取正，微元左端受 $-T(u)$，右端受 $T(u+\mathrm{d}u)$。若单位质量所受轴向体力为 b，共同加速度为 a，则

$$T(u+\mathrm{d}u)-T(u)+\frac{m_0}{L_0}b\,\mathrm{d}u=\frac{m_0}{L_0}a\,\mathrm{d}u.$$

除以 $\mathrm{d}u$ 并取极限，得到 $T'(u)=(m_0/L_0)(a-b)$。水平弹簧在不等端力 F_1,F_2 下作共同加速，$b=0$，整体给出 $a=(F_2-F_1)/m_0$。从左端积分：

$$T(u)-F_1=\int_0^u\frac{m_0a}{L_0}\,\mathrm{d}s=\frac{m_0a}{L_0}u,\quad T(u)=F_1+\frac{F_2-F_1}{L_0}u.$$

端力之差决定共同加速度，轴力的平均值决定总伸长。例 3.20 用这一轴力分布求形状在共同加速系中保持不变时的伸长。

3.7.3 稳定旋转的弹簧为何出现微分方程

弹簧水平径向旋转时，材料点 u 的实际半径为 $r(u)$，向心加速度为 $-\Omega^2 r(u)$。微元受力关系给出

$$T'(u) = -\frac{m_0}{L_0}\Omega^2 r(u).$$

对局部胡克关系 $T = kL_0(r' - 1)$ 求导，得到 $T' = kL_0 r''$。将两式联立，得到

$$r'' + \frac{m_0\Omega^2}{kL_0^2} r = 0.$$

半径影响向心加速度，加速度决定轴力的变化，轴力又决定局部伸长；这三个关系在同一个材料坐标 u 中相联系。固定端给 $r(0) = 0$；自由端给 $T(L_0) = 0$，即 $r'(L_0) = 1$。若末端加挂质量 M 的球，则端点关系改为 $T(L_0) = M\Omega^2 r(L_0)$。例 3.19 和练习 3.4 将分别写出特征方程、实数通解、常数的确定以及总长度。

3.8 例题与分析

例 3.1 (下降托板与悬挂弹簧)**.** 轻弹簧上端固定，劲度系数 k，下端系质量 m 的物块。托板起初使弹簧保持原长，随后从静止以恒加速度 $0 < a < g$ 向下运动。求物块与板分离的时刻。

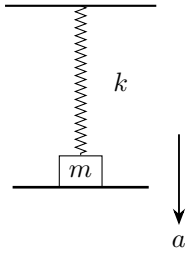


图 3.18: 接触期间弹簧伸长等于托板下降量

解　由共同下降求接触力

接触时图 3.18 的物块随板向下加速度 a，弹簧伸长 $x = at^2/2$。向下列 $mg - kx - N = ma$，所以 $N = m(g - a) - kat^2/2$。

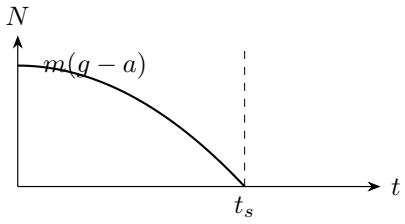


图 3.19: 接触力先为正，到零后切换为自由弹簧运动

由接触力降到零求分离时刻

图 3.19 零点给 $x_s = m(g-a)/k$，进而

$$t_s = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}}.$$

在 $0 \le t < t_s$ 时，$N > 0$，物块随托板共同下降。下面求它们从 t_s 开始的相对运动。

取托板与物块间的间隙为变量。取物块坐标为 x_P、托板坐标为 x_B，均向下为正，间隙为 $q = x_B - x_P$，分离时刻有 $q = \dot q = 0$。取消支持力后，物块有 $\ddot x_P = g - kx_P/m$，托板仍有 $\ddot x_B = a$；在 $x_P = x_s$ 处两者加速度相同，故 $\ddot q = 0$。再求时间导数，

$$\dddot q = \frac{k}{m}\dot x_P, \qquad \dddot q(t_s^+) = \frac{k}{m}at_s > 0.$$

记 $J = kat_s/m > 0$，并以 $\tau = t - t_s$ 从分离时刻重新计时。由 $q(0) = \dot q(0) = \ddot q(0) = 0$，在足够短的时间内逐次积分：

$$\ddot q = \int_0^\tau [J + O(s)]\,\mathrm{d}s = J\tau + O(\tau^2),$$

$$\dot q = \int_0^\tau [Js + O(s^2)]\,\mathrm{d}s = \frac{J}{2}\tau^2 + O(\tau^3),$$

$$q = \int_0^\tau \left[\frac{J}{2}s^2 + O(s^3)\right]\mathrm{d}s = \frac{J}{6}\tau^3 + O(\tau^4) > 0.$$

所以托板向下离开物块，二者开始分离。$a \to 0^+$ 时所需时间趋于无穷，$a \to g^-$ 时趋于零。题设 $0 < a < g$ 对应先接触、后分离的过程。

例 3.2 (向上匀加速提离弹簧秤盘)**.** 秤盘质量 $m_1 = 1.5\,\mathrm{kg}$，盘内物体 P 质量 $m_2 = 10.5\,\mathrm{kg}$，下方轻弹簧劲度系数 $k = 800\,\mathrm{N/m}$，系统初静止。用向上力 $F(t)$ 使 P 从静止以加速度 b 匀加速上升。求接触阶段的 $F(t)$ 和分离时刻；分别计算 $b = 6\,\mathrm{m/s^2}$ 时的分离时间，以及分离时间 $0.2\,\mathrm{s}$ 时的 b 和最大拉力。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。

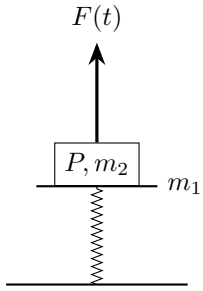


图 3.20: 弹簧承受盘和物体的初始总重量

解　隔离秤盘求支持力

初始压缩量 $x_0 = (m_1 + m_2)g/k = 0.15\,\mathrm{m}$。图 3.20 接触阶段共同上升 $y = bt^2/2$，弹簧向上力为 $k(x_0 - y)$。隔离盘：$k(x_0 - y) - m_1 g - N = m_1 b$，得到

$$N = m_2 g - m_1 b - ky = m_2 g - m_1 b - \tfrac{1}{2} k b t^2.$$

由物体方程求所需拉力

隔离 P：$F + N - m_2 g = m_2 b$，代入得 $F = (m_1 + m_2)b + kbt^2/2$。

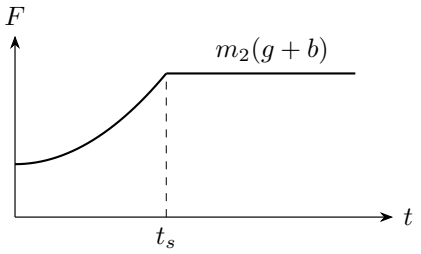


图 3.21: 分离前拉力上升，分离后保持恒定

分离时刻与此后的拉力

令 $N = 0$ 得 $t_s = \sqrt{2(m_2 g - m_1 b)/(kb)}$，要求 $0 < b < m_2 g/m_1$。分离后物体仍按题设加速，故 $F = m_2(g + b)$，恰与图 3.21 分离前的极限值连续。

代入数值并反算加速度

$b=6$ 时，$m_2g-m_1b=96\,\mathrm{N}$，$t_s=\sqrt{192/4800}=0.2\,\mathrm{s}$。反过来，给定 t_s，有 $b=m_2g/(m_1+kt_s^2/2)$；代入 $0.2\,\mathrm{s}$ 仍得 $b=6\,\mathrm{m/s^2}$。最大拉力 $F_{\max}=10.5(10+6)=168\,\mathrm{N}$，最小拉力为初始值 $F_{\min}=72\,\mathrm{N}$。分离以后，外力只牵引质量为 m_2 的 P，保持 $F=m_2(g+b)$。

例 3.3 (粗糙地面上弹簧双块的分离位置)**.** 轻弹簧劲度系数 k，右端连物块 A，B 靠在 A 右侧。质量分别为 M_A,M_B，各自地面摩擦因数为 μ_A,μ_B，最大静摩擦等于动摩擦。弹簧初压缩 $x_0>0$，由静止释放。以原长时 A 的位置为 $q=0$、向右为正，讨论分离候选位置及其可达条件。

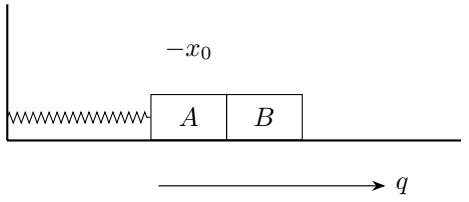


图 3.22: 弹簧推动左块，左块再通过接触力推动右块

解　先判断能否起动

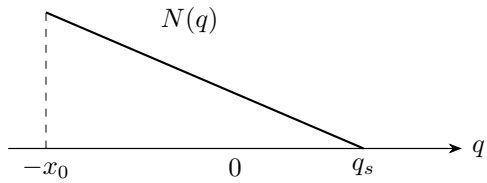
取向右为正。记总滑动阻力 $D=(\mu_AM_A+\mu_BM_B)g$。若 $kx_0\le D$，可以由两地面静摩擦与接触力保持静止，没有必然分离事件。以下取 $kx_0>D$，两块先共同向右运动。

在共同向右阶段求接触力

图 3.22 中弹簧作用为 $-kq$，共同加速度 $b=(-kq-D)/(M_A+M_B)$。隔离 B，接触力 $N-\mu_BM_Bg=M_Bb$，因此

$$N=\frac{M_B}{M_A+M_B}\{-kq+M_Ag(\mu_B-\mu_A)\}.$$

候选分离位置为 $q_s=M_Ag(\mu_B-\mu_A)/k$：$\mu_A>\mu_B$ 时在原长左侧，相等时在原长，$\mu_A<\mu_B$ 时在右侧。



图示 $\mu_B>\mu_A$，$q_s>0$

图 3.23: 接触力降到零的位置，同速度降到零的位置相比较

求运动停止的位置，再比较分离位置

为求图 3.23 零点处的速度，在共同向右运动段用 $b = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}q$，从静止初态 $q = -x_0$ 积分：

$$\begin{aligned}(M_A + M_B)\int_0^v w\,\mathrm{d}w &= \int_{-x_0}^{q}(-k\xi - D)\,\mathrm{d}\xi,\\ \frac{M_A + M_B}{2}v^2 &= \left[-\frac{k\xi^2}{2} - D\xi\right]_{-x_0}^{q}\\ &= \frac{k}{2}(x_0^2 - q^2) - D(q + x_0)\\ &= (q + x_0)\left[\frac{k}{2}(x_0 - q) - D\right].\end{aligned}$$

令乘积为零，除初始根 $q = -x_0$，下一速度零点为 $q_t = x_0 - 2D/k$。若 $q_s < q_t$，两块在仍向右运动时以 $N = 0$ 分离。这个条件还可用初始压缩量表示。将 q_s, q_t 的表达式代入 $q_s < q_t$，因 $k > 0$，得到

$$M_A g(\mu_B - \mu_A) < kx_0 - 2D.$$

移项并代入 $D = (\mu_A M_A + \mu_B M_B)g$，右侧应满足的阈值为

$$\begin{aligned}kx_0 &> 2D + M_A g(\mu_B - \mu_A)\\ &= g\{M_A(\mu_A + \mu_B) + 2\mu_B M_B\}.\end{aligned}$$

停止后重新判断静止或反向分离

若 $q_s \geq q_t$，两块先同时停在 q_t，接下来根据该位置的弹簧力和静摩擦决定停留或返回。

此时分两种情形：$q_t \leq 0$ 时压缩弹簧力已小于总静摩擦上限，可停住；$q_t > 0$ 时弹簧向左拉 A，若 $kq_t \leq \mu_A M_A g$ 也可停住，若 $kq_t > \mu_A M_A g$，则 A 开始向左返回而 B 可静止，两块在转向点 q_t 分离。等号时，静摩擦恰好平衡弹簧拉力，两块可保持静止。这给出停止以后两块保持静止或在转向点分开的条件。

例 3.4 (光滑圆柱的接触解除)**.** 两个等半径 R、等质量 m 的圆柱，在光滑地面与竖直光滑墙之间相互接触。下圆柱中心只水平移动，上圆柱中心沿墙竖直移动。中心连线同水平夹角初为 θ_0，由静止释放，求两圆柱分离时的 θ。

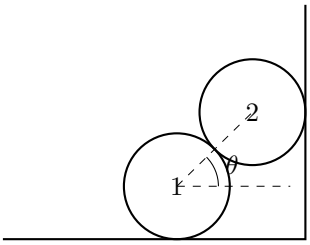
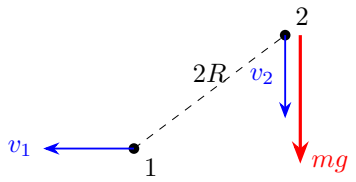


图 3.24: 两中心间距固定为 $2R$

解　由中心距约束关联两圆柱速度

设图 3.24 下圆柱向左速率 v_1、上圆柱向下速率 v_2。两中心水平距离 $x = 2R\cos\theta$，竖直距离 $h = 2R\sin\theta$，因而 $x^2+h^2 = 4R^2$。对时间求导，$2x\dot{x}+2h\dot{h} = 0$；代入 $\dot{x} = v_1$、$\dot{h} = -v_2$，得 $v_1\cos\theta = v_2\sin\theta$。记相对速率 $v_r = \sqrt{v_1^2+v_2^2}$，便有 $v_1 = v_r\sin\theta$、$v_2 = v_r\cos\theta$。各接触力均沿圆柱法线、通过中心，没有转动力矩，初始不转的圆柱无需计入转动动能。



$$g\sin\theta = v_r^2/(2R)$$

图 3.25: 分离瞬间下圆柱无水平力，上圆柱自由下落

沿实际下降路径求相对速率

上圆柱中心下降 $2R(\sin\theta_0-\sin\theta)$，重力做功等于两圆柱动能增加，得

$$2mgR(\sin\theta_0-\sin\theta) = \tfrac{1}{2}m(v_1^2+v_2^2) = \tfrac{1}{2}mv_r^2.$$

用零接触力与二阶距离约束联立

在图 3.25 分离瞬间 $N = 0$，下圆柱水平加速度为零，上圆柱向下加速度为 g。将 $x\dot{x}+h\dot{h} = 0$ 再求导，乘积法则给

$$\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{h}^2+h\ddot{h} = 0.$$

此时 $\ddot{x}=0$、$\ddot{h}=-g$，所以 $v_r^2-gh=0$，即 $g\sin\theta=v_r^2/(2R)$。把上一段的 $v_r^2=4gR(\sin\theta_0-\sin\theta)$ 代入，得到 $g\sin\theta=2g(\sin\theta_0-\sin\theta)$，整理即

$$\sin\theta_s=\frac{2}{3}\sin\theta_0.$$

初始角对分离角的影响

θ_s 随初始角 θ_0 改变。初态从接近竖直的位置释放时，$\theta_0\to 90^\circ$，分离角趋于 $\arcsin(2/3)$。

例 3.5 (光滑双斜面上的轻绸带)**.** 固定等腰斜面两侧倾角均为 α，轻绸带跨过顶端，带同斜面无摩擦。质量 $M>m$ 的两物块分别放在左右绸带上，物块与带间最大静摩擦和动摩擦均为 μN。由静止释放，讨论两物块是否随带、摩擦大小是否相等及轻块能否向上运动。

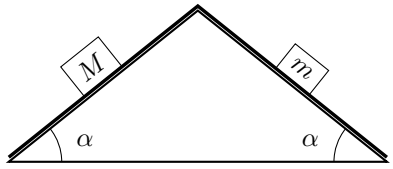


图 3.26: 带质量忽略，左右物块质量不同

解　利用轻带平衡关联两侧摩擦

图 3.26 绸带没有切向外部阻力且质量忽略，所以两块对带的切向作用相反等大，由第三定律，两物块受到的摩擦大小相等，记 f。先假设两块都随带，重块沿左侧向下加速度 a，轻块沿右侧向上同为 a。

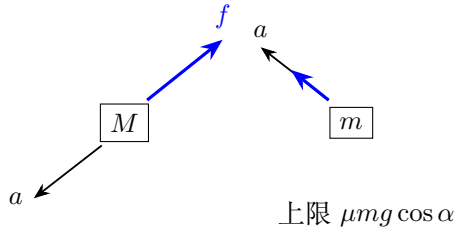


图 3.27: 同一摩擦需求须先同轻块的较小上限比较

两块随带共同运动时的摩擦条件

两块的正方向分别沿带的运动方向，方程为

$$Mg\sin\alpha-f=Ma,\qquad f-mg\sin\alpha=ma.$$

相加消去摩擦得加速度，再代回轻块方程求摩擦：

$$a=\frac{M-m}{M+m}g\sin\alpha,\qquad f=m(g\sin\alpha+a)=\frac{2Mm}{M+m}g\sin\alpha.$$

按图 3.27，较严格的轻块摩擦上限给

$$\tan\alpha\le\frac{\mu(M+m)}{2M}.$$

在这个范围内，两块均相对带静止，重块向下牵引轻带，轻块随带沿右斜面上升。

轻块滑动后重新列两块方程

超过该区间，轻块相对带滑动，摩擦大小 $f=\mu mg\cos\alpha$。重块仍可随带，因为这一摩擦小于它自己的上限 $\mu Mg\cos\alpha$；重块沿面向下加速度 $a_M=g(\sin\alpha-\mu m\cos\alpha/M)$。轻块沿右面向下加速度 $b_m=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$，可正可负；相对带的向下加速度为 $b_m+a_M>0$，与所取滑动方向一致。在此理想模型中，重块不会先相对带滑动，但轻块可能对斜面上升、静止或下降。

例 3.6 (等质量双滑块与轻直角楔)**.** 质量忽略的直角楔置于光滑水平面，两斜面与水平分别成 θ 和 $90^\circ-\theta$，各放质量均为 m 的滑块，两接触均光滑。求释放后楔的水平加速度。

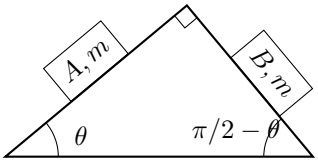


图 3.28: 两斜面互相垂直，倾角互余

解　由滑块法向加速度求支持力

设图 3.28 轻楔向右加速度 A，左右支持力分别为 N_A,N_B。两物块法向加速度同各自斜面，分别列 $N_A=mg\cos\theta-mA\sin\theta$、$N_B=mg\sin\theta+mA\cos\theta$。

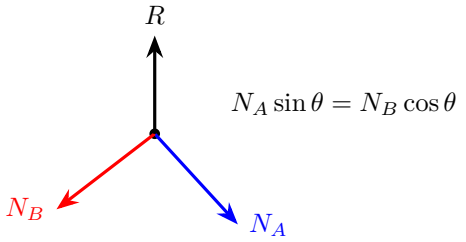


图 3.29: 轻楔水平受力平衡，法向力由滑块运动确定

把两侧反作用代入轻楔平衡条件

图 3.29 轻楔水平合力为零，即 $N_A\sin\theta - N_B\cos\theta = 0$。代入后重力项恰消去，剩下 $-mA(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$，所以 $A=0$。等质量和互余斜角使两侧水平作用恰好抵消，因此轻楔在本题中保持静止。

例 3.7 (剪去一端支绳的轻杆双球)．长 l 的轻杆上固定两个质量均为 m 的球，位置分别距左端 $l/3, 2l/3$。杆两端用竖直轻绳悬挂，初始水平静止。剪断右绳，求两球瞬时加速度和左绳张力。

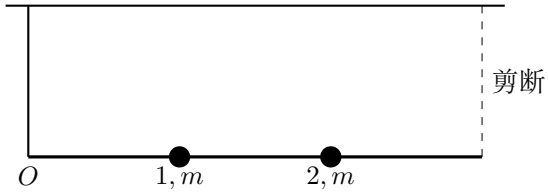


图 3.30: 两球位置均为三等分点，左端竖直绳保留

解　利用保留悬绳确定瞬时运动约束

图 3.30 左端竖直绳在初速为零时约束该端竖直加速度为零。又因没有水平外力，杆上各点此时水平加速度相同且为零，因此左端瞬时加速度为零。记顺时针角加速度大小为 β，两球向下加速度为 $a_1=\beta l/3$、$a_2=2\beta l/3$。

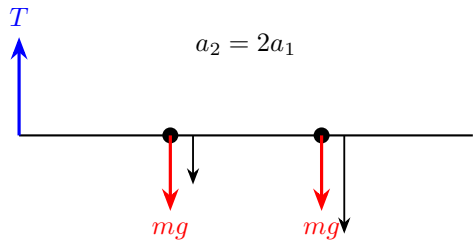


图 3.31: 关于瞬时零加速度端点求矩，再由整体竖直方程求张力

求角加速度与两球加速度

在图 3.31 该瞬间绕左端的惯量为 $I_O = m(l/3)^2 + m(2l/3)^2 = 5ml^2/9$，重力矩为 $mg(l/3+2l/3)=mgl$。因此 $\beta = 9g/(5l)$，$a_1=3g/5$、$a_2=6g/5$，均向下。

回到整体平动方程求悬绳张力

整体竖直式 $2mg - T = m(a_1+a_2)$ 给 $T=mg/5$。保留的悬绳给出左端在释放瞬间的零径向加速度；此后左端随悬绳方向改变而沿圆弧运动。

例 3.8 (水平面内轻杆三球的横向响应)**.** 光滑水平面上的三个等质量球 m 固定在轻杆的左端、中点、右端，相邻距离 l，初静止。对右球施加水平面内、垂直杆且指向图上方的力 F，求三球瞬时加速度。

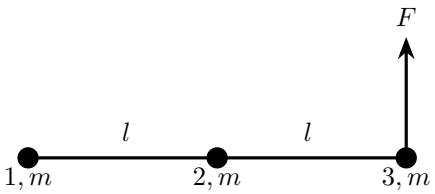


图 3.32: 俯视图中的向上箭头表示平面内方向

解　分别求质心平动与角加速度

图 3.32 的重力与桌面支持力竖直平衡，不进入纸面内方程。以图上方为正，质心在中球位置，整体平动给 $a_C = F/(3m)$。绕质心力矩为 Fl，转动惯量 $I_C = 2ml^2$，故角加速度 $\beta = F/(2ml)$，逆时针。

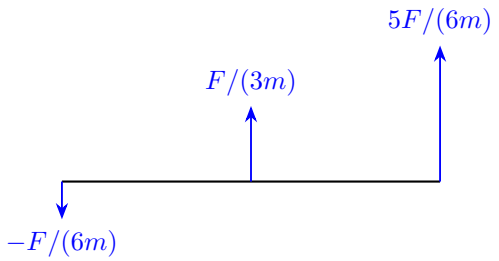


图 3.33: 质心平动与转动分量叠加后，左球加速度反向

叠加质心平动和绕质心转动

初始角速度为零，各点没有向心项。图 3.33 分别为 $a_1 = a_C - \beta l = -F/(6m)$，$a_2 = a_C = F/(3m)$，$a_3 = a_C + \beta l = 5F/(6m)$。三加速度之和为 F/m，乘 m 后正好等于外力。沿左端到右端的横向加速度线性变化，零点在距左端 $l/3$ 处，即整杆长度的六分之一；这个位置的加速度在释放瞬间为零。

例 3.9 (均匀杆的连续加速度分布)**.** 均匀杆质量 m、长 l，初静止放在光滑水平面上。右端受水平面内、垂直杆的力 F。以左端为 $x=0$，求任意位置 x 的瞬时横向加速度，并求各微元质量乘加速度的总和与关于左端的力矩。

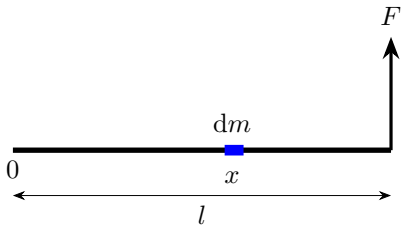


图 3.34: 均匀杆各位置的质量微元参与同一刚性运动

解　由质心与转动方程建立线性分布

图 3.34 质心加速度 $a_C = F/m$，绕质心力矩 $Fl/2$，均匀杆惯量 $ml^2/12$，故角加速度 $\beta = 6F/(ml)$。初始角速度为零，任意位置的横向加速度为

$$a(x) = a_C + \beta(x - l/2) = \frac{F}{m}\left(\frac{6x}{l} - 2\right).$$

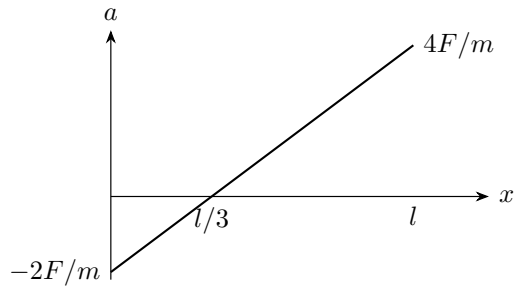


图 3.35: 杆各点的横向加速度随位置线性改变

由微元积分求合力和关于左端的力矩

图 3.35 给出左端向下、右端向上，零点在 $x = l/3$。取 $\mathrm{d}m = (m/l)\,\mathrm{d}x$，各质量元乘加速度再相加：

$$\int_0^l a(x)\,\mathrm{d}m = \frac{F}{l}\int_0^l (6x/l - 2)\,\mathrm{d}x = \frac{F}{l}\left[\frac{3x^2}{l} - 2x\right]_0^l = \frac{F}{l}(3l - 2l) = F.$$

再乘到左端的距离 x，求关于左端的力矩：

$$\int_0^l xa(x)\,\mathrm{d}m = \frac{F}{l}\int_0^l \left(\frac{6x^2}{l} - 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{F}{l}\left[\frac{2x^3}{l} - x^2\right]_0^l = \frac{F}{l}(2l^2 - l^2) = Fl,$$

同外力矩相等。第一项积分给出合力 F，第二项给出力矩 Fl；质心平动与绕质心转动在同一加速度分布中同时体现。

例 3.10 (桌边支承轻杆的滑动临界)**.** 轻杆两端分别固定质量 $2m$ 的 A 和质量 m 的 B，杆的中点 O 接触桌边。杆向右下方倾斜，与水平成 θ，桌边接触力分解为垂直杆的支持与沿杆的摩擦，静摩擦因数 0.5。由静止释放，求不沿桌边滑动的角度条件。

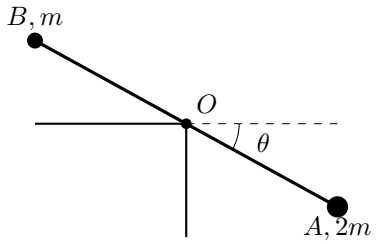


图 3.36: 支点在几何中点，质心却偏向重端

解　假设接触点不滑并求瞬时转动

先按图 3.36 假设 O 不滑。记杆半长 l，则 $I_O = 3ml^2$，重力关于 O 的净顺时针力矩为 $mgl\cos\theta$。角加速度 $\beta = g\cos\theta/(3l)$，两端法向加速度大小均为 $\beta l = g\cos\theta/3$，方向相反；初速为零，没有沿杆向心加速度。

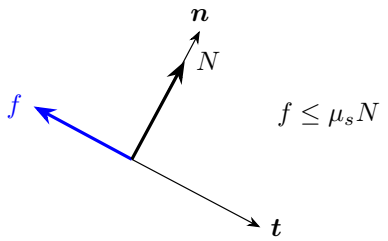


图 3.37: 接触摩擦限制沿杆滑动，支持力沿法向

沿杆与法向分别求接触力

沿图 3.37 重端方向 $\boldsymbol{t}$，整体加速度质量加权分量为零，故摩擦大小 $f = 3mg\sin\theta$，向上沿杆。法向上，重端向下、轻端向上，质量加权加速度为 $-mg\cos\theta/3$，所以 $N - 3mg\cos\theta = -mg\cos\theta/3$，即 $N = 8mg\cos\theta/3$。

由摩擦与支持力之比求角度范围

于是 $f/N=(9/8)\tan\theta\le 0.5$，得 $\tan\theta\le 4/9$。超过 $\arctan(4/9)$，所需沿杆摩擦超限，中点不再是固定支点，须改用滑动接触的平动与转动方程。图中的桌边接触按题设分为垂直杆的支持力和沿杆的摩擦力，两分量共同决定上述起滑条件。

例 3.11 (转盘两物体的静摩擦分配)**.** 转盘水平匀速转动，左物块质量 m、距轴 r，右物块质量 $2m$、距轴 $2r$，两者用跨过转轴方向的轻绳连接，静摩擦因数均为 μ_s。求共同转动的最大角速度，并说明仅凭这些条件能否唯一求出左块摩擦随角速度的函数。

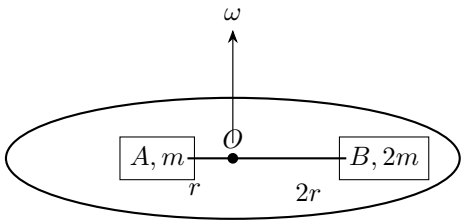


图 3.38: 两物块在转轴两侧，张力都指向转轴

解　把径向方程写成张力的允许区间

图 3.38 分别朝转轴取径向正方向，记左、右块摩擦分量为 f_A,f_B，可带正负。令 $q=m\omega^2 r$，两径向式为 $T+f_A=q$、$T+f_B=4q$，限制 $T\ge 0$、$|f_A|\le\mu_s mg$、$|f_B|\le 2\mu_s mg$。因此可行张力区间为

$$\max\{0,q-\mu_s mg,4q-2\mu_s mg\}\le T\le\min\{q+\mu_s mg,4q+2\mu_s mg\}.$$

在 $q\ge 0$ 下可简化为 $\max\{0,4q-2\mu_s mg\}\le T\le q+\mu_s mg$。

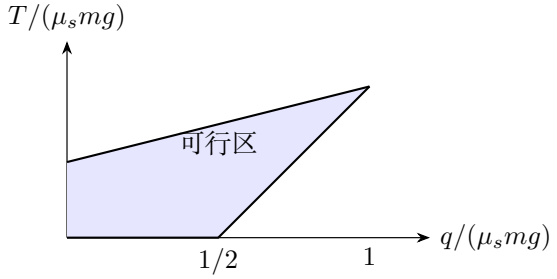


图 3.39: 允许张力区间在共同转动上限处收缩为一点

令允许区间收缩求临界角速度

图 3.39 非空要求 $4q-2\mu_s mg \le q+\mu_s mg$，得 $q \le \mu_s mg$，所以 $\omega_c = \sqrt{\mu_s g/r}$。极限处 $T = 2\mu_s mg$、$f_A = -\mu_s mg$ 向外、$f_B = 2\mu_s mg$ 向内。

区分可行受力分配与唯一解

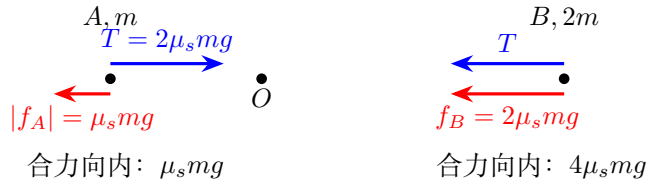


图 3.40: 共同转动上限处，左块的静摩擦径向向外

图 3.40 把临界受力代回原来的两个物块：左块张力超过它的向心需求，静摩擦向外抵消一部分；右块则需张力与静摩擦共同向内。两处摩擦同张力相加，分别提供各物块所需的向心合力。

低于极限时，可行区间通常不止一点，相应的 $f_A = q - T$ 可随张力在区间内变化。若另加特定的加载分配：低速阶段张力为零，右块到达摩擦上限后保持在该极限值，则可取 $T = \max\{0, 4q - 2\mu_s mg\}$，从而 $f_A = q$（$q \le \mu_s mg/2$），或 $f_A = 2\mu_s mg - 3q$（其后至临界）。这条曲线对应上述指定的加载分配。题设只给刚绳和静摩擦范围时，T 可在允许区间内取值，相应的 $f_A = q - T$ 也在一个区间内变化。

例 3.12 (轻杆双球的圆锥摆)**.** 轻杆上距固定端分别为 $l, 2l$ 处固定两个等质量球 m。杆与竖直夹角 θ，绕通过固定端的竖直轴匀速转动。求整体匀速转动的角速度，并说明两球的受力怎样通过轻杆联系。

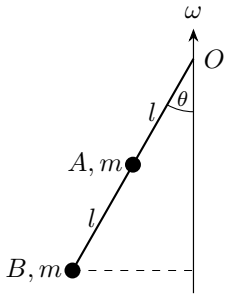


图 3.41: 两球在同一轻杆上转动，距悬点分别为 l 和 $2l$

解　在转动系中选取整体并绕悬点求矩

图 3.41 两个球在杆系内静止，分别受向外离心力 $m\omega^2 l\sin\theta$ 和 $m\omega^2(2l)\sin\theta$。绕固定端取垂直于杆摆动平面的力矩，支点力无矩，重力与离心力矩平衡。

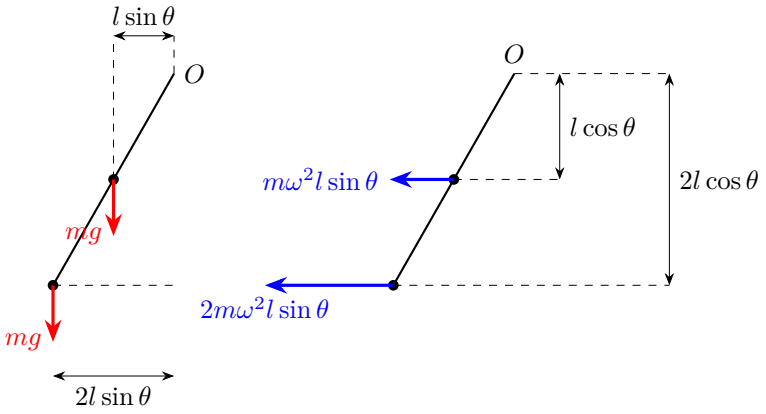


图 3.42: 重力取水平力臂，离心力取竖直力臂

计算两种力矩并求共同角速度

图 3.42 左图中，两球的重力力臂分别为 $l\sin\theta$、$2l\sin\theta$，重力矩总和为

$$\tau_g = mg(l\sin\theta) + mg(2l\sin\theta) = 3mgl\sin\theta.$$

右图中，两离心力的力臂分别为 $l\cos\theta$、$2l\cos\theta$，因而

$$\begin{aligned}\tau_{\text{cf}} &= (m\omega^2 l\sin\theta)(l\cos\theta) + (2m\omega^2 l\sin\theta)(2l\cos\theta)\\ &= 5m\omega^2 l^2\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

令两种力矩大小相等，在 $0<\theta<\pi/2$ 时消去公共因子，得到

$$3g = 5\omega^2 l\cos\theta, \qquad \omega^2 = \frac{3g}{5l\cos\theta}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{3g}{5l\cos\theta}}.$$

分别观察轻杆对两球的作用

回到地面系，记杆对两球的作用力为 $\boldsymbol{R}_A, \boldsymbol{R}_B$，水平向转轴、竖直向上为正。图 3.43 中，两球的高度保持不变，水平加速度分别为 $\omega^2 l\sin\theta$ 和 $2\omega^2 l\sin\theta$。所以

$$R_{A,y} = R_{B,y} = mg, \qquad R_{A,x} = m\omega^2 l\sin\theta, \quad R_{B,x} = 2m\omega^2 l\sin\theta.$$

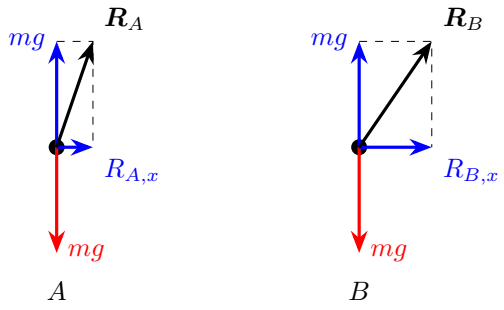


图 3.43: 杆对球的作用有竖直和水平分量，两球的水平需求不同

将已求得的 ω^2 代入水平分量，

$$R_{A,x} = m\frac{3g}{5l\cos\theta}\, l\sin\theta = \frac{3}{5}mg\tan\theta, \qquad R_{B,x} = \frac{6}{5}mg\tan\theta.$$

图 3.43 中，两个作用力的竖直分量相同，水平分量则按半径之比 $1:2$ 配合。轻杆受到两球的反作用 $-\boldsymbol{R}_A, -\boldsymbol{R}_B$，悬点作用为 $\boldsymbol{R}_O = \boldsymbol{R}_A + \boldsymbol{R}_B$；这些力共同满足轻杆的合力与合力矩为零。杆通过不同方向和大小的作用维持两球的共同转动。

例 3.13 (给上球或下球水平初速)**.** 上绳长 l_1，下绳长 l_2，依次悬挂质量 m_1, m_2 的球，初始两绳竖直。分别只给下球或只给上球水平初速 v_0，另一球初速为零。冲量结束后求上绳的瞬时张力 T_1。

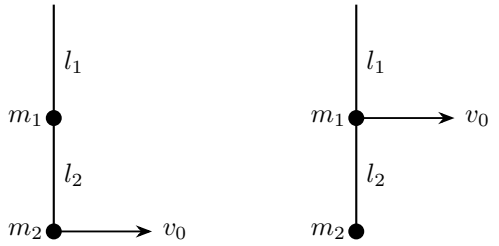


图 3.44: 两种赋速改变的是不同绳段的相对速度

解　对两段绳分别使用相对速度约束

图 3.44 在赋速后瞬间两绳仍竖直。对于任一绳段，记由上端指向下端的矢量为 $\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = l^2$。连续求导得到

$$2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = 0, \qquad 2\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + 2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = 0.$$

此时 $\boldsymbol{r} = (0, -l)$，所以向上相对加速度为 $a_{\mathrm{rel},y} = v_{\mathrm{rel}}^2/l$。上绳给 $a_{1,y} = v_1^2/l_1$，下绳给 $a_{2,y} - a_{1,y} = (v_2 - v_1)^2/l_2$，均取向上为正。下绳的转动由两球之间的相对速度 $v_2 - v_1$ 决定。

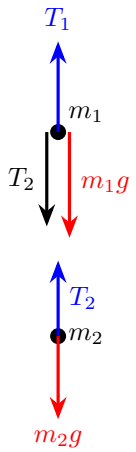


图 3.45: 上绳同时承担上球的重力、加速度和下绳拉力

由两球受力建立张力递推式

图 3.45 先隔离下球，再隔离上球，得到

$$T_2 - m_2g = m_2a_{2,y}, \qquad T_1 - T_2 - m_1g = m_1a_{1,y}.$$

因此 $T_2 = m_2(g + a_{2,y})$，$T_1 = m_1(g + a_{1,y}) + m_2(g + a_{2,y})$，上绳承担的是两球各自所需的竖直作用之和。

代入下球赋速的加速度

只给下球初速时，$a_{1,y} = 0$、$a_{2,y} = v_0^2/l_2$，所以 $T_1 = (m_1 + m_2)g + m_2v_0^2/l_2$。

计入上球运动对下球的影响

只给上球初速时，$a_{1,y} = v_0^2/l_1$，下绳相对速率仍是 v_0，所以 $a_{2,y} = v_0^2/l_1 + v_0^2/l_2$。于是

$$T_1 = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)\frac{v_0^2}{l_1} + m_2\frac{v_0^2}{l_2}.$$

下球即使此时绝对速度为零，也会有向上的加速度，因为上绳支点所在的上球正在改变运动方向。

例 3.14 (旋转 U 形管的轴处压强)**.** 等截面 U 形管绕竖直轴匀速转动，左、右竖直支管分别距轴 $l, 2l$，底部水平管经过转轴。液体密度 ρ，静止时两液面高度均为 h，两端开口压强 p_0。求角速度 ω 时的两液面高度与底部轴处压强。

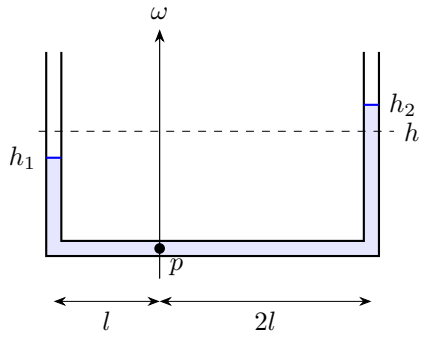


图 3.46: 两竖直支管到转轴的距离分别为 l 和 $2l$

解　分别连接径向压强差与竖直液柱

图 3.46 液体在旋转系内平衡，底部微元给 $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}r = \rho\omega^2 r$，所以从轴向外积分得

$$p(r) - p(0) = \rho\omega^2 \int_0^r s\ \mathrm{d}s = \rho\omega^2[s^2/2]_0^r = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

竖直支管以底部为 $z = 0$，从液面 $z = h_i$ 向下积分，$p_{\text{bottom}} - p_0 = -\rho g[z]_{h_i}^0 = \rho g h_i$，所以

$$p_0 + \rho g h_1 - p = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 l^2, \qquad p_0 + \rho g h_2 - p = 2\rho\omega^2 l^2.$$

两支管等截面且底管体积不变，液量守恒给 $h_1 + h_2 = 2h$。

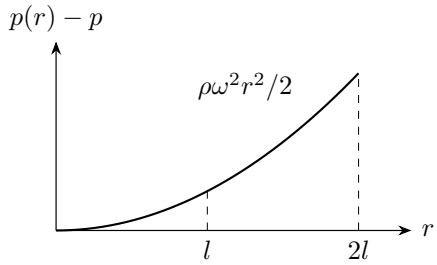


图 3.47: 同高底管压强随半径平方增加

结合液量守恒求液高和轴处压强

两压强式相减，按图 3.47 得 $\rho g(h_2-h_1)=(2-1/2)\rho\omega^2 l^2$，约去 ρg 即 $h_2-h_1=3\omega^2 l^2/(2g)$。再与和式 $h_1+h_2=2h$ 相加、相减，分别除以 2，得到两液高。轴处压强由左支管回代：

$$p=p_0+\rho g h_1-\frac{1}{2}\rho\omega^2 l^2=p_0+\rho g h-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\rho\omega^2 l^2.$$

因此

$$h_1=h-\frac{3\omega^2 l^2}{4g},\quad h_2=h+\frac{3\omega^2 l^2}{4g},\quad p=p_0+\rho g h-\frac{5}{4}\rho\omega^2 l^2.$$

两支管均有液柱时的角速度范围

角速度增大时，内侧液面降低，保持 $h_1\geq 0$ 给出 $\omega^2\leq 4gh/(3l^2)$。题设两支管均有液柱、外侧未溢出的阶段，液高和轴处压强由上述三式确定。

例 3.15 (加速水杯的等压面与浮体)**.** 开口水杯随车以恒加速度 a_0 向右平移，液体晃动衰减后相对车静止。求自由液面斜率；比较同高两点 A,B（B 在右）的压强，并分析密度 $\rho_b<\rho$ 的刚性木块怎样随车漂浮。

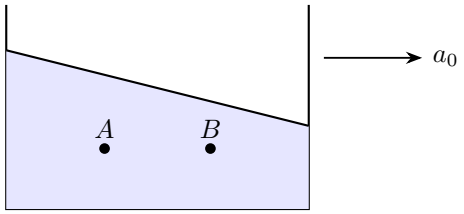


图 3.48: 自由液面左高右低，同高右侧的压强较小

解　由压强梯度求液面和同高压差

在图 3.48 车厢系取向右 x、向上 z，压强梯度为 $\partial_x p=-\rho a_0$、$\partial_z p=-\rho g$。自由面等压，故 $0=\mathrm{d}p=-\rho a_0\,\mathrm{d}x-\rho g\,\mathrm{d}z$，得到 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x=-a_0/g$。同高两点沿水平路径积分：

$$p_B-p_A=-\rho a_0\int_{x_A}^{x_B}\mathrm{d}x=-\rho a_0[x]_{x_A}^{x_B}=-\rho a_0(x_B-x_A)<0.$$

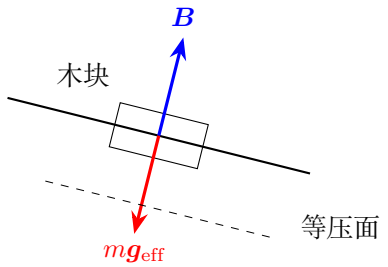


图 3.49: 浮力反向于有效重力，具有水平分量

用倾斜浮力求浸入体积

所有等压面满足 $a_0x + gz =$ 常量，与自由面平行。图 3.49 木块浸入体积 V_i 时，浮力 $\boldsymbol{B} = -\rho V_i \boldsymbol{g}_{\text{eff}}$。车厢系平衡给 $\rho V_i = m = \rho_b V$，故浸入体积分数 $V_i/V = \rho_b/\rho$。浮力水平分量向右，$B_x = \rho V_i a_0 = ma_0$，使木块随车加速；竖直分量 $B_z = \rho V_i g = mg$。木块的漂浮姿态由这一压力合力与重力的力矩平衡确定。

例 3.16 (有效重力、失重与加速桶水流)**.** 分别分析三个过程：初始中性悬浮的鱼随鱼缸在电梯中向上加速时是否上浮；有孔水杯在自由落体中是否仍因静水压流出；质量流率为 Q 的细水流从水平加速度为 a 的桶底流出，若离口竖直相对初速可忽略，求距桶底竖直距离 h 处、沿实际水流的质量线密度。忽略空气阻力。

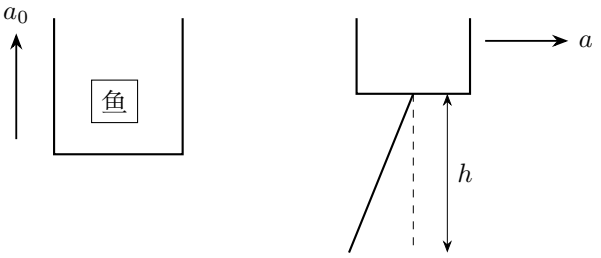


图 3.50: 前两问考察有效重力，第三问考察离口后的自由运动

解　电梯中的中性悬浮物

对图 3.50 左侧，若鱼与水均近似不可压缩、鱼体积不变，初始中性浮力说明 $m_f = \rho V_f$。电梯向上加速后，有效重力大小 $g + a_0$，浮力和有效重量同步变为 $\rho V_f(g + a_0)$ 与 $m_f(g + a_0)$，仍相等，鱼保持原来的中性悬浮状态。

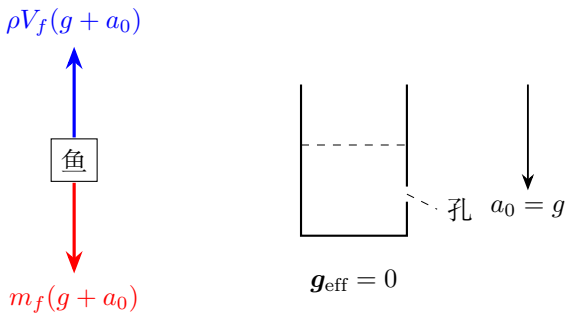


图 3.51: 中性浮体与自由落体水杯各自对应的有效重力

图 3.51 左图显示两有效力同倍数变化；右图用相同容器系描述自由落体水杯。

自由落体水杯中的压强梯度

自由落体水杯的有效重力近似为零，因而重力维持的静水压梯度消失；若孔两侧气压相同、初始无相对流动且忽略表面张力，水相对杯保持静止。

在桶系中求水滴位移与切向速率

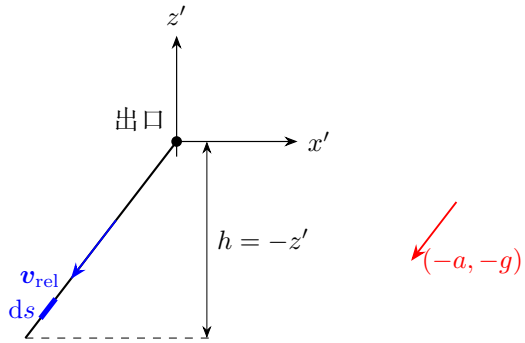


图 3.52: 向上的坐标轴与向后下的水流方向分别标明

第三问在图 3.52 桶系内，以某滴水离口时为当地时间零点，相对初速度近似为零，相对加速度为 $(-a, -g)$。先积分得到速度，再积分位置：

$$
\begin{aligned}
v_x'(\tau) &= \int_0^\tau (-a)\,\mathrm{d}s = [-as]_0^\tau = -a\tau, \\
v_z'(\tau) &= \int_0^\tau (-g)\,\mathrm{d}s = [-gs]_0^\tau = -g\tau, \\
x'(\tau) &= \int_0^\tau (-as)\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{a}{2}s^2\right]_0^\tau = -\frac{a\tau^2}{2}, \\
z'(\tau) &= \int_0^\tau (-gs)\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{g}{2}s^2\right]_0^\tau = -\frac{g\tau^2}{2}.
\end{aligned}
$$

两坐标之比恒定，所以水流沿直线 $x' = az'/g$。由 $h = -z' = g\tau^2/2$ 取正时间根，得 $\tau = \sqrt{2h/g}$；两个速度分量平方相加，得到 $v_{\mathrm{rel}} = \sqrt{a^2 + g^2}\,\tau$。

按实际流线长度换算质量线密度

长度微元 $\mathrm{d}s = v_{\mathrm{rel}}\,\mathrm{d}\tau$ 内质量 $\mathrm{d}m = Q\,\mathrm{d}\tau$，故

$$\lambda = \frac{Q}{v_{\mathrm{rel}}} = Q\sqrt{\frac{g}{2h(g^2+a^2)}}.$$

这里线密度按倾斜水流的实际长度计，若按竖直高度计则为 $Q/\sqrt{2gh}$，两者相差投影因子。

例 3.17 (旋转水桶的液面与液量约束)**.** 半径 R 的直圆柱开口桶盛不可压缩液体，静止液深 H。液体最终以角速度 ω 绕竖直轴整体旋转，未溢出也未露底。求液面方程及轴心、桶壁液面高度，并说明桶停转时为何液面不必立即变平。

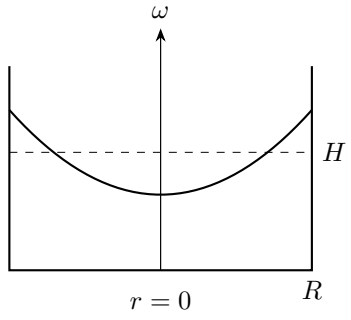


图 3.53: 桶壁动作与液体自身旋转状态应分别判断

解　对圆环液柱积分并使用液量守恒

图 3.53 中，沿自由液面 $\mathrm{d}p = 0$，由径向和竖直压强梯度得到 $g\,\mathrm{d}z = \omega^2 r\,\mathrm{d}r$。从轴心液面 $(0, z_0)$ 积到半径 r 处：

$$g\int_{z_0}^{z(r)} \mathrm{d}z = \omega^2 \int_0^r s\,\mathrm{d}s, \qquad g[z]_{z_0}^{z(r)} = \omega^2[s^2/2]_0^r.$$

所以 $z(r) = z_0 + \omega^2 r^2/(2g)$。以圆环面积 $2\pi r\,\mathrm{d}r$ 乘该处液深，再由液量守恒确定 z_0：

$$\pi R^2 H = \int_0^R \left(2\pi z_0 r + \frac{\pi\omega^2}{g} r^3\right)\mathrm{d}r = \left[\pi z_0 r^2 + \frac{\pi\omega^2 r^4}{4g}\right]_0^R = \pi R^2 z_0 + \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}.$$

确定轴心与桶壁的液面高度

所以 $z_0 = H - \omega^2 R^2/(4g)$，液面为

$$z(r) = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

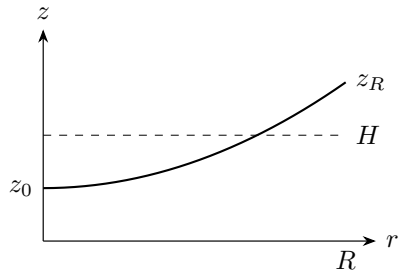


图 3.54: 轴心下降量与桶壁上升量在此圆柱模型中相等

图 3.54 桶壁高度 $z_R = H + \omega^2 R^2/(4g)$，未露底要求 $\omega^2 R^2 \le 4gH$，未溢出还要求 z_R 不超过桶高。

区分桶壁运动和液体自身转动

液面形状由液体对惯性系的向心加速度决定：桶刚启动而液体尚未跟转时仍可近似平；桶停下但液体保留旋转时仍可暂时凹下。待黏滞作用使液体转速衰减，液面才逐渐回平。

例 3.18 (弹簧自身重力造成的伸长)**.** 均匀弹簧自然长 L_0、质量 m_0、整体劲度系数 k，竖直悬挂，上端固定，下端自由。在线弹性近似内求总伸长及轴力沿材料坐标的分布。

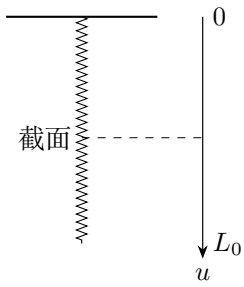


图 3.55: 上方截面承受更多下方弹簧的重量

解　截取下方弹簧求截面轴力

按图 3.55 从上端向下取自然坐标 u，下方质量为 $m_0(1-u/L_0)$，因此轴力 $T(u)=m_0g(1-u/L_0)$。

用局部劲度把轴力转换为伸长

取自然微元 $\mathrm{d}u$，局部劲度 $kL_0/\,\mathrm{d}u$，所以伸长微元为 $T(u)\,\mathrm{d}u/(kL_0)$。

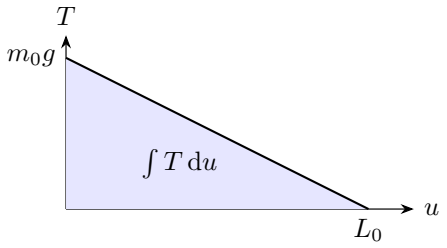


图 3.56: 线性轴力图的平均值为上端轴力的一半

图 3.56 三角形面积给

$$\Delta L=\frac{m_0g}{kL_0}\int_0^{L_0}(1-u/L_0)\,\mathrm{d}u=\frac{m_0g}{kL_0}\left[u-\frac{u^2}{2L_0}\right]_0^{L_0}=\frac{m_0g}{kL_0}\left(L_0-\frac{L_0}{2}\right)=\frac{m_0g}{2k}.$$

轴力从上端的 m_0g 线性减到下端的零，平均值为 $m_0g/2$，因而总伸长为平均轴力除以 k。下端再挂质量 M 时，每个截面的轴力均增加 Mg，总伸长相应增加 Mg/k。

例 3.19 (水平旋转的有质量弹簧)**.** 均匀弹簧自然长 L_0、质量 m_0、整体劲度系数 k，在光滑水平面上一端固定于转轴，以角速度 ω 稳定径向旋转，另一端自由。求长度及伸长，假设线弹性模型有效。

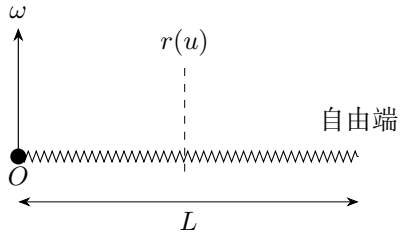


图 3.57: 微元向心加速度取决于伸长后的半径

解　隔离材料微元建立向心力方程

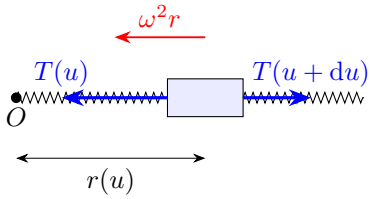


图 3.58: 内侧较大的张力提供旋转弹簧微元的向心力

图 3.58 以径向向外为正，内侧轴力向内、外侧轴力向外，所以两者之差为负，恰提供向心加速度。以自然长度计的质量保持不变，实际半径却须随形变求出。

图 3.57 用自然坐标 $u \in [0, L_0]$ 标记材料点，实际半径为 $r(u)$。局部胡克关系为 $T = kL_0(r' - 1)$。微元质量 $(m_0/L_0)\,\mathrm{d}u$，外侧张力比内侧小，故 $\mathrm{d}T/\,\mathrm{d}u = -(m_0/L_0)\omega^2 r$。联立得到

$$r'' + \frac{m_0\omega^2}{kL_0^2} r = 0.$$

由两端条件求各材料点的位置

令 $\beta = \omega\sqrt{m_0/k}$。当 $\beta > 0$，试取 $r = e^{\lambda u}$，则 $r' = \lambda e^{\lambda u}$、$r'' = \lambda^2 e^{\lambda u}$。代入方程并约去非零的指数因子，

$$[\lambda^2 + (\beta/L_0)^2]e^{\lambda u} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = -\frac{\beta^2}{L_0^2}.$$

两根为 $\lambda = \pm i\beta/L_0$。用欧拉公式组合成实数通解，

$$r = C\sin(\beta u/L_0) + D\cos(\beta u/L_0).$$

固定端 $r(0) = 0$ 给 $D = 0$。链式求导得 $r'(u) = C(\beta/L_0)\cos(\beta u/L_0)$；自由端 $T(L_0) = kL_0[r'(L_0) - 1] = 0$ 给 $C(\beta/L_0)\cos\beta = 1$，所以 $C = L_0/(\beta\cos\beta)$。当 $\beta = 0$ 时，方程直接为 $r'' = 0$。设 $r'(0) = C_0$、$r(0) = D_0$，逐次积分为

$$r'(u) - C_0 = \int_0^u 0\,\mathrm{d}s = 0, \qquad r(u) - D_0 = \int_0^u C_0\,\mathrm{d}s = [C_0 s]_0^u = C_0 u.$$

固定端条件给 $D_0 = 0$，自由端 $r'(L_0) = 1$ 给 $C_0 = 1$，即未伸长的 $r = u$，也等于上述解的连续极限。

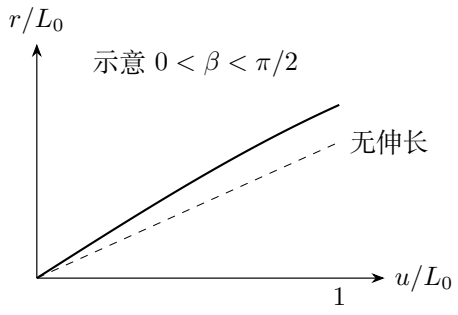


图 3.59: 固定端的位置和自由端的轴力确定径向形变

弹簧总长与拉伸范围

由图 3.59 的末端值，

$$L = L_0\frac{\tan\beta}{\beta}, \qquad \Delta L = L_0\left(\frac{\tan\beta}{\beta}-1\right).$$

由求出的映射，$r'(u)=\cos(\beta u/L_0)/\cos\beta$，轴力为

$$T(u) = kL_0\left[\frac{\cos(\beta u/L_0)}{\cos\beta}-1\right].$$

物理拉伸分支取 $0\le\beta<\pi/2$，此时 $r'>0$ 且 $T\ge 0$。小角速度时，将正弦、余弦展开代入长度比：

$$\begin{aligned}\frac{\tan\beta}{\beta} &= \frac{1-\beta^2/6+O(\beta^4)}{1-\beta^2/2+O(\beta^4)}\\ &= [1-\beta^2/6+O(\beta^4)][1+\beta^2/2+O(\beta^4)]\\ &= 1+\frac{\beta^2}{3}+O(\beta^4).\end{aligned}$$

所以 $\Delta L = L_0\beta^2/3+O(L_0\beta^4)$，再用 $\beta^2=m_0\omega^2/k$，得到 $\Delta L\simeq m_0\omega^2L_0/(3k)$。在这一拉伸分支内，$\beta$ 增大时长度随之增大；$\beta\to\pi/2$ 时，线弹性方程给出的长度趋于无穷。

例 3.20 (不等端力下弹簧的共同加速)**.** 均匀弹簧自然长 L_0、质量 m_0、整体劲度系数 k，放在光滑水平面上，左端受向左拉力 F_1，右端受向右拉力 F_2，均为恒力。考察轴向振动已可忽略、形状在共同加速系中不变的状态，求加速度与总伸长。

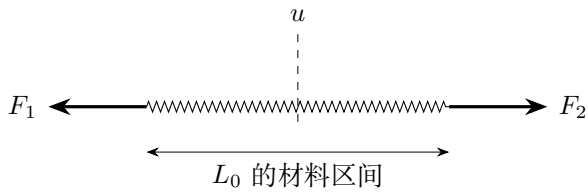


图 3.60: 净拉力决定加速度，平均轴力决定伸长

解　整体净力决定共同加速度

取图 3.60 向右为正，整体给 $a=(F_2-F_1)/m_0$。

由局部质量求轴力分布

截取左端到自然坐标 u 的材料段，外力为 $T(u)-F_1$，质量 m_0u/L_0，所以

$$T(u)-F_1=(m_0u/L_0)a,\quad T(u)=F_1+(F_2-F_1)u/L_0.$$

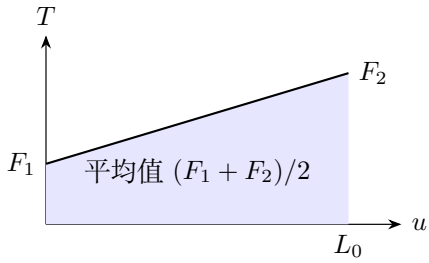


图 3.61: 轴力在两个端力之间线性变化

积分轴力分布，求总伸长

图 3.61 梯形面积给总伸长

$$\begin{aligned}\Delta L&=\frac{1}{kL_0}\int_0^{L_0}\left[F_1+(F_2-F_1)\frac{u}{L_0}\right]\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{kL_0}\left[F_1u+\frac{F_2-F_1}{2L_0}u^2\right]_0^{L_0}=\frac{F_1L_0+(F_2-F_1)L_0/2}{kL_0}=\frac{F_1+F_2}{2k}.\end{aligned}$$

差 F_2-F_1 决定整体加速，和 F_1+F_2 决定平均拉伸。特别地，$F_1=F_2=F$ 时 $a=0$ 而 $\Delta L=F/k$；只拉一端时 $\Delta L=F/(2k)$。这两个情形分别对应均匀轴力和从零到 F 线性变化的轴力，其平均值为 F 和 $F/2$。

3.9　本讲小结

对连续介质取小段或微元，先写受力，再将局部关系积分为总量。材料坐标联系质量和形变，压强梯度联系流体不同位置的压力；积分中的范围和端点条件都由题图给出。

练习 3.1 (电梯中的有质量弹簧)**.** 自然长 L_0、质量 m_0、劲度系数 k 的均匀弹簧上端固定在电梯顶，末端挂质量 M。电梯以恒加速度 a_0 向上运动，系统相对电梯静止。求轴力分布和总伸长。

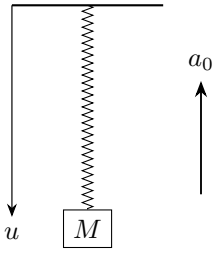


图 3.62: 末端重物与弹簧自重同时贡献轴力

练习 3.2 (不等截面旋转 U 形管)**.** 旋转 U 形管两支管截面分别为 S_1, S_2，距轴分别 $r_1 < r_2$，静止时液深均为 h。求旋转后两液深之差、轴处压强和内侧支管刚好见底的角速度，假定未溢出。

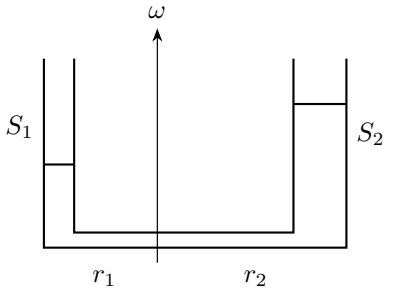


图 3.63: 两支管液量的转移由截面积和液面升降共同给出

练习 3.3 (非零离口速率的加速桶水流)**.** 水平向右加速度为 a 的桶，向下射出质量流率 Q 的细水流，相对桶的离口竖直速率 $v_e > 0$。求距桶底竖直距离 h 处的水流实际线密度，说明水流相对桶是否仍为直线。

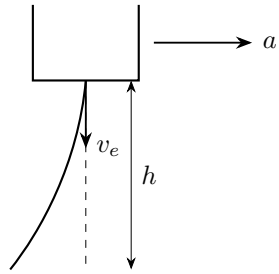


图 3.64: 水滴离口时继承桶的水平速度，并有额外竖直速度

练习 3.4 (旋转弹簧末端加挂小球)**.** 均匀有质量弹簧自然长 L_0、质量 m_0、劲度系数 k，水平旋转，一端固定，另一端连接质量 M 的球，角速度 ω。在稳定线弹性分支内求长度，并求 $M \to 0$ 与 $m_0 \to 0$ 两个极限。

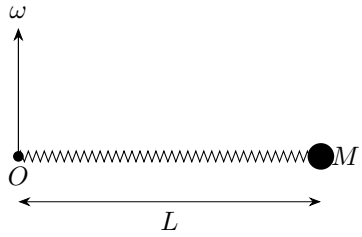


图 3.65: 末端轴力给小球提供向心力

练习解答

练习 3.1

解　在电梯系中求截面以下的有效重量

图 3.62 电梯系有效重力 $g_e = g + a_0$ 向下。自然坐标从顶端向下取，截面以下总质量为 $M + m_0(1 - u/L_0)$，所以 $T(u) = [M + m_0(1 - u/L_0)]g_e$。

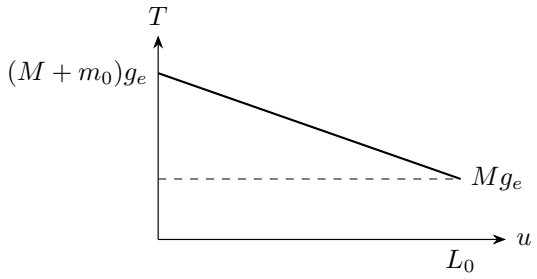


图 3.66: 末端载荷使整个轴力图提高同一个常量

将各段伸长积分相加

按图 3.66，自然微元 $\mathrm{d}u$ 的局部劲度为 $kL_0/\,\mathrm{d}u$，伸长为 $T(u)\,\mathrm{d}u/(kL_0)$。从上端积到下端：

$$\begin{aligned}\Delta L &= \frac{g+a_0}{kL_0}\int_0^{L_0}\left[M+m_0-\frac{m_0u}{L_0}\right]\mathrm{d}u\\ &= \frac{g+a_0}{kL_0}\left[(M+m_0)u-\frac{m_0u^2}{2L_0}\right]_0^{L_0}\\ &= \frac{g+a_0}{kL_0}\left[(M+m_0)L_0-\frac{m_0L_0}{2}\right]=\frac{(M+m_0/2)(g+a_0)}{k}.\end{aligned}$$

上端力为 $(M+m_0)(g+a_0)$，下端轴力为 $M(g+a_0)$。这个分布从上端的总有效重量，线性减到下端重物的有效重量。轴力图的平均值为 $(M+m_0/2)(g+a_0)$，同积分结果一致。

练习 3.2

解　由径向压差求两液面高度差

图 3.63 中径向微元满足 $\mathrm{d}p=\rho\omega^2 r\,\mathrm{d}r$，同高底管两端的压差为

$$p(r_2)-p(r_1)=\rho\omega^2\int_{r_1}^{r_2} r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho\omega^2[r^2]_{r_1}^{r_2}=\frac{1}{2}\rho\omega^2(r_2^2-r_1^2).$$

各支管从液面向下积分给 $p(r_i)-p_0=-\rho g[z]_{h_i}^0=\rho g h_i$，两式相减，故 $\delta h=h_2-h_1=\omega^2(r_2^2-r_1^2)/(2g)$。

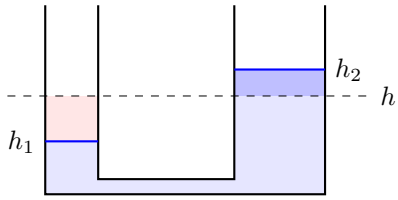


图 3.67: 等体积转移使窄管下降多、宽管上升少

用等体积交换确定各液面

图 3.67 中 $S_1h_1+S_2h_2=(S_1+S_2)h$，代入 $h_2=h_1+\delta h$，解得 $h_1=h-S_2\delta h/(S_1+S_2)$、$h_2=h+S_1\delta h/(S_1+S_2)$。从轴积分到内侧支管底部，$p(r_1)-p(0)=\rho\omega^2[r^2/2]_0^{r_1}$，故轴处压强为

$$\begin{aligned} p &= p_0+\rho g h_1-\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r_1^2 \\ &= p_0+\rho g h-\frac{\rho\omega^2}{2}\left[\frac{S_2(r_2^2-r_1^2)}{S_1+S_2}+r_1^2\right] \\ &= p_0+\rho g h-\frac{\rho\omega^2}{2}\frac{S_1r_1^2+S_2r_2^2}{S_1+S_2}. \end{aligned}$$

最后一步将括号内通分，$-S_2r_1^2$ 与 $(S_1+S_2)r_1^2$ 中的 $S_2r_1^2$ 相消。

内侧支管液面降到底部时的角速度

将 $h_1=h-S_2\delta h/(S_1+S_2)$ 置为零，先得 $\delta h=h(S_1+S_2)/S_2$。代入上面的液面差：

$$\frac{\omega_{\text{dry}}^2(r_2^2-r_1^2)}{2g}=\frac{h(S_1+S_2)}{S_2},\qquad \omega_{\text{dry}}^2=\frac{2gh(S_1+S_2)}{S_2(r_2^2-r_1^2)}.$$

题设取外侧未溢出的阶段，内侧液面从 h 连续降到零。

练习 3.3

解 用离口时间表示水滴位置

图 3.64 随桶平移系中，以离口为当地时间零点，水滴初速度为 $(0,-v_e)$、相对加速度为 $(-a,-g)$。逐分量积分得到

$$
\begin{aligned}
v_x'(\tau) &= 0+\int_0^\tau (-a)\,\mathrm{d}s = -a\tau,\\
v_z'(\tau) &= -v_e+\int_0^\tau (-g)\,\mathrm{d}s = -v_e-g\tau,\\
x'(\tau) &= \int_0^\tau (-as)\,\mathrm{d}s = [-as^2/2]_0^\tau = -a\tau^2/2,\\
z'(\tau) &= \int_0^\tau (-v_e-gs)\,\mathrm{d}s = [-v_es-gs^2/2]_0^\tau = -v_e\tau-g\tau^2/2.
\end{aligned}
$$

令 $h=-z'$，整理为 $g\tau^2+2v_e\tau-2h=0$，配方得到 $(g\tau+v_e)^2=v_e^2+2gh$。由于 $\tau\geq 0$，取正号分支，

$$\tau=\frac{\sqrt{v_e^2+2gh}-v_e}{g}.$$

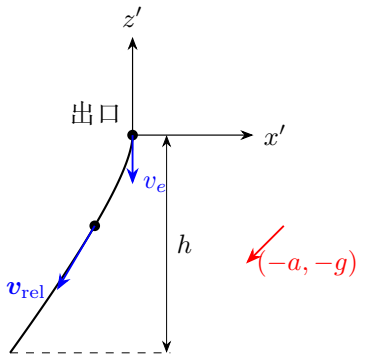


图 3.68: 水流切向速度随离口时间改变，坐标仍取竖直向上

由实际水流速率求线密度

按图 3.68，$|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|=\sqrt{a^2\tau^2+(v_e+g\tau)^2}$，所以 $\lambda=Q/\sqrt{a^2\tau^2+(v_e+g\tau)^2}$，其中 τ 取上式。由于 x' 与 z' 不再保持固定比例，$a\neq 0$、$v_e>0$ 时流线为曲线。$v_e\to 0$ 回到例题的斜直线与线密度；$a\to 0$ 则回到竖直水流 $\lambda=Q/\sqrt{v_e^2+2gh}$。

练习 3.4

解　保留材料方程并改变末端受力

图 3.65 取自然坐标 u，微元质量为 $(m_0/L_0)\,\mathrm{d}u$，向外为正时 $T'(u) = -(m_0/L_0)\omega^2 r$。把 $T = kL_0(r'-1)$ 求导得 $T' = kL_0 r''$，所以 $r'' + (\beta/L_0)^2 r = 0$，其中 $\beta = \omega\sqrt{m_0/k}$。对 $\beta > 0$ 试解 $r = e^{\lambda u}$，逐次求导为 $r' = \lambda e^{\lambda u}$、$r'' = \lambda^2 e^{\lambda u}$。代入微分方程并约去指数因子，得到特征方程 $\lambda^2 + (\beta/L_0)^2 = 0$；先移项为 $\lambda^2 = -\beta^2/L_0^2$，两根为 $\pm i\beta/L_0$，故实数通解为

$$r = C\sin(\beta u/L_0) + D\cos(\beta u/L_0).$$

固定端 $r(0) = 0$ 给 $D = 0$，求导得 $r' = C(\beta/L_0)\cos(\beta u/L_0)$。现在末端球要求的轴力是 $M\omega^2 L$，不再为零。

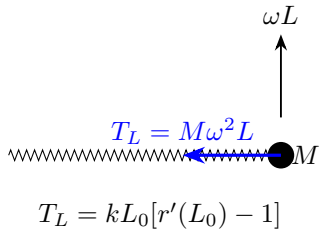


图 3.69: 末端球的向心力联系轴力与末端半径

由末端球的向心力求积分常数与长度

由图 3.69，末端半径 $L = r(L_0) = C\sin\beta$，末端受力条件为 $kL_0(C\beta\cos\beta/L_0 - 1) = M\omega^2 C\sin\beta$。把含 C 的项移到同侧，

$$C\left[k\beta\cos\beta - M\omega^2\sin\beta\right] = kL_0.$$

由此求得 C，再代入 $L = C\sin\beta$ 并使用 $\omega^2/k = \beta^2/m_0$，得

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\sin\beta}{\beta\cos\beta - (M/m_0)\beta^2\sin\beta}.$$

正拉伸分支与两个质量极限

取分母首次变零之前的正拉伸分支。$M \to 0$ 时，分母的含 M 项消失，$L/L_0 = \sin\beta/(\beta\cos\beta) = \tan\beta/\beta$。

$m_0 \to 0$ 时 $\beta \to 0$，但 $(M/m_0)\beta^2 = M\omega^2/k$ 不趋零。先将分子、分母同时除以 β，再取极限：

$$\frac{L}{L_0} = \frac{\sin\beta/\beta}{\cos\beta - (M\omega^2/k)(\sin\beta/\beta)} \longrightarrow \frac{1}{1 - M\omega^2/k}.$$

这里分别使用 $\sin\beta/\beta\to 1$、$\cos\beta\to 1$，要求 $M\omega^2<k$。轻弹簧端球方程 $k(L-L_0)=M\omega^2 L$ 也给 $(k-M\omega^2)L=kL_0$，恢复同一结果。

若 $\omega=0$，应直接解 $r''=0$。积分得 $r'(u)-r'(0)=\int_0^u 0\,\mathrm{d}s=0$，故 $r'=C$；再积分 $r(u)-r(0)=\int_0^u C\,\mathrm{d}s=Cu$。固定端给 $r(0)=0$，末端零轴力给 $kL_0(C-1)=0$，所以 $C=1$、$L=L_0$，与零角速度的连续极限一致。

牛顿运动定律

物理竞赛一轮讲义

第四讲

动力学过程与综合

2026

目录

第四讲　动力学过程与综合 **1**

4.1　力、初始状态与整个运动过程 1

4.2　受力改变时怎样连接前后运动 2

4.3　从运动图像读出受力与位移 4

4.4　按力的变化选择积分变量 5

4.5　相对运动和重复碰撞 7

4.6　下滑时间中的路程与加速度 10

4.7　例题与分析 11

4.8　本讲小结 30

4.9　练习 30

练习解答 31

第四讲　动力学过程与综合

4.1　力、初始状态与整个运动过程

4.1.1　运动方程怎样确定后来的状态

对于质量恒定的物体，在惯性系中有

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F},\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}.$$

力由具体相互作用给出，可以随时间、位置或速度改变。给定初始位置和速度，就能从这两条方程逐步求出运动。对于多个物体，先为各物体列式，再用绳长、接触或共同运动的条件联系各加速度；对于整体，则由外力改变系统总动量。

4.1.2　同一运动方程的时间累积与空间累积

沿直线取 x 轴，合力为 F。把 $\mathrm{d}p=F\,\mathrm{d}t$ 从 t_0 积到 t，得到

$$mv(t)-mv_0=\int_{t_0}^{t}F\,\mathrm{d}\tau.$$

这一积分按每段持续的时间累积作用，适合研究冲量和速度随时间的改变。若关心经过不同位置后速率怎样变化，把 $F=m\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$ 两边乘以微位移 $\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t$，得到

$$F\,\mathrm{d}x=mv\,\mathrm{d}v=\mathrm{d}\!\left(\frac{1}{2}mv^2\right).$$

其中 $\mathrm{d}(v^2)=2v\,\mathrm{d}v$。沿实际运动从 (x_0,v_0) 积到 (x,v)，便有

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x}F\,\mathrm{d}\xi&=m\int_{v_0}^{v}u\,\mathrm{d}u=m\left[\frac{u^2}{2}\right]_{v_0}^{v}\\&=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2.\end{aligned}$$

合力沿位移所作的功，等于动能的增量。图 4.1 把时间积分与位置积分分别画出：左图的窄条面积为 $F\,\mathrm{d}t$，右图为 $F\,\mathrm{d}x$，两种横轴使同一个力以不同方式累积。

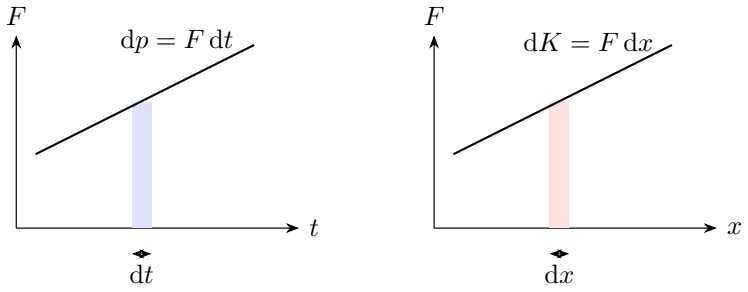


图 4.1: 冲量累积动量变化，功累积动能变化

在曲线运动中，微功为 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t$ 及 $\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(v^2)$，同样得到 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}(mv^2/2)$。沿轨道求速率时可以使用这一关系，法向受力则仍由当地曲率和 v^2/ρ 确定。后面的变力积分、轨道受力和下滑时间，由这两方面共同建立。

4.2　受力改变时怎样连接前后运动

4.2.1　从撤去拉力的瞬间说起

水平面上的物块先受向右拉力，随后撤去拉力。撤力前，拉力与摩擦力共同决定加速度；撤力后，摩擦力使它减速。撤力的时间很短，且这个操作给物块的冲量可忽略，因此物块带着原来的位置和速度进入后一段。它的速度连续，加速度随合力改变。

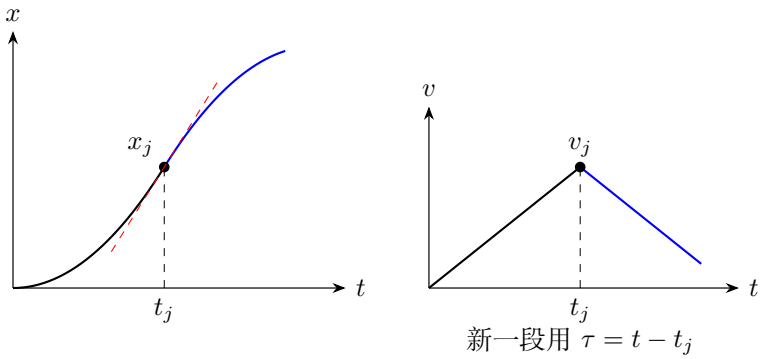


图 4.2: 前后位置曲线共用切线，速度连续而加速度改变

图 4.2 左图中的两段位置曲线在交接点共用一条切线，这条切线的斜率就是右图中的 v_j。设交接时刻为 t_j，位置为 x_j，后一段取局部时间 $\tau = t - t_j$。恒加速度 a_j 下，从这组初值逐次积分，得到

$$v(\tau) - v_j = \int_0^\tau a_j \,\mathrm{d}s = a_j\tau,$$
$$x(\tau) - x_j = \int_0^\tau (v_j + a_j s)\,\mathrm{d}s = \left[v_j s + \frac{1}{2}a_j s^2\right]_0^\tau = v_j\tau + \frac{1}{2}a_j\tau^2.$$

这样，每一段都从它实际开始时的状态出发。例 4.5 从停车前的减速段反求撤力时的状态，例 4.8 则在拉力两次改变后继续跟踪板和物块的速度。

4.2.2 速度改变方向时的阻力

飞行器的运动阻力若近似具有恒定大小 f，其方向与速度相反。向上取正，无动力上升时合力为 $-mg - f$；下落时为 $-mg + f$。若下降途中恢复向上升力 F，此时阻力仍向上，合力变为 $F - mg + f$。

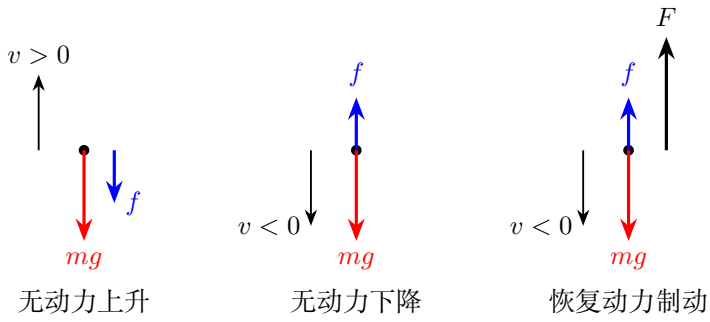


图 4.3: 飞行器上升、下降与恢复动力制动时的受力

图 4.3 右图中，速度向下而合力向上，飞行器在继续下降的同时减速。恢复动力的位置到最低点之间，还有一段制动距离。例 4.6 将最高点至恢复动力、恢复动力至零速度这两段下降合在一起，求允许的延迟时间。

地面物块到达零速度后，接触面的摩擦可以转为静摩擦。以向右恒力 P 拉动物块为例，若滑动时 $0 < P < \mu_k mg$，物块向右减速；停下后，若 $P \le \mu_s mg$，向左的静摩擦取大小 P，物块保持静止。

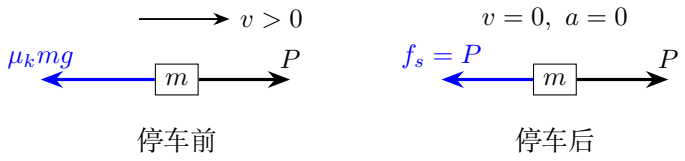


图 4.4: 滑动时摩擦使物块减速，停车后静摩擦平衡拉力

图 4.4 把停车前后的接触作用分开画出。例 4.7 中，先停下的物块就在原处等待后块追来；下一次碰撞以这个静止状态作为碰前条件。

4.3　从运动图像读出受力与位移

4.3.1　斜率给变化率，面积给累积量

在固定坐标轴上，速度图线的斜率是 $a = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t$。对质量恒定的物体，合力为 ma。从 t_1 到 t_2 的位移为

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t.$$

图线在横轴上方的面积计正，在下方的面积计负。加速度图的面积则给出 $\Delta v = \int a\,\mathrm{d}t$；力随时间、随位置的图，分别给出冲量 $\int F\,\mathrm{d}t$ 和功 $\int F\,\mathrm{d}x$。

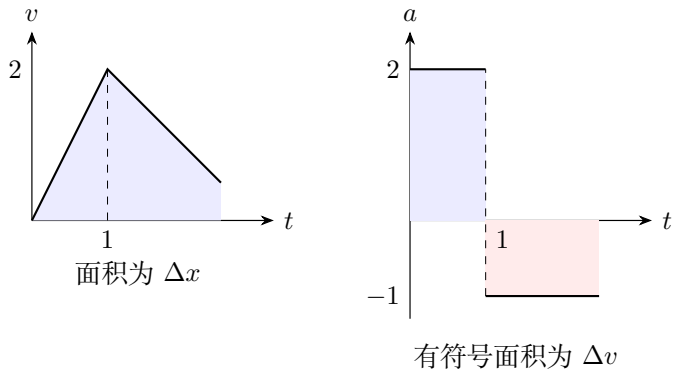


图 4.5: 速度图的斜率与加速度图的高度逐段一致

图 4.5 中，速度第一段由零增加到 2，历时 1，对应加速度 2；后一段历时 1.5，速度减小 1.5，对应加速度 -1。右图的有符号面积之和为 $2 - 1.5 = 0.5$，恰是末速度减初速度。每种面积的物理含义都由它的纵、横坐标共同决定。

例 4.2 的物块先在光滑固定斜面上运动，后在粗糙水平面上运动，两段合力分别恒定。因此可分别用同一段中的采样点求速度直线，再由两直线的交点找到换面的时刻。例 4.3 则用改变拉力前后的两条斜率，列出含同一动摩擦力的两个方程。

4.3.2 速度方向也进入合力

沿固定直线测得有符号速度 $v(t)$ 时，求导就得到这条直线方向上的加速度。若物体沿曲线运动，速度矢量的大小和方向都随位置变化，合力也同时含改变速率和改变方向的作用。

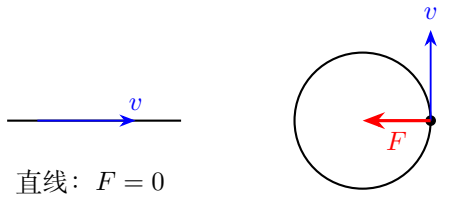


图 4.6: 直线匀速运动与匀速圆周运动的合力

图 4.6 两物体的速率都保持为 v。左图沿直线匀速运动，合力为零；右图沿半径 R 的圆周运动，合力向圆心，大小为 mv^2/R。例 4.1 用速度矢量的改变量确定发动机方向；例 4.16 明确给出固定轴上的速度函数，因此可以逐项求导求合力。

4.4 按力的变化选择积分变量

4.4.1 时间积分与位置积分

若合力给成 $F(t)$，牛顿方程为 $m\,\mathrm{d}v = F(t)\,\mathrm{d}t$。从初态 (t_0, v_0) 到 (t, v) 积分，

$$m\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}w = \int_{t_0}^{t}F(s)\,\mathrm{d}s, \qquad m(v-v_0) = \int_{t_0}^{t}F(s)\,\mathrm{d}s.$$

若合力随位置给定，在一段单向运动中把速度写成 $v(x)$。链式法则给

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

代入 $ma = F(x)$，从 (x_0, v_0) 积分，

$$m\int_{v_0}^{v} w\,\mathrm{d}w = \int_{x_0}^{x}F(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$
$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x}F(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

左边来自原函数 $mw^2/2$ 在两速度端点的差，右边是沿该运动段所做的功。这是例 4.4 的变力积分和例 4.14 弹簧压缩计算的共同出发点。

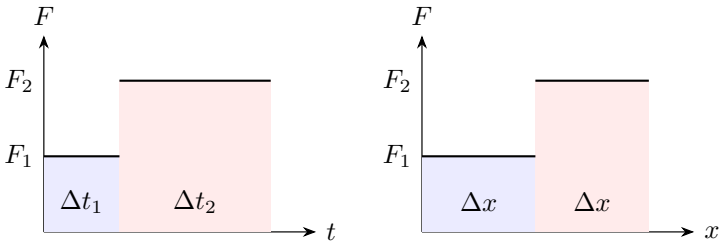


图 4.7: 按时间和按位移分别累加力的作用

图 4.7 左图按作用时间累加，时间平均力为 $\overline{F}_t = (F_1\Delta t_1 + F_2\Delta t_2)/(\Delta t_1 + \Delta t_2)$；右图的两段位移相等，空间平均力为 $\overline{F}_x = (F_1 + F_2)/2$。两个平均值的权重不同，分别用于求动量变化和动能变化。

4.4.2　线性阻力下的速度衰减

在水平面上，物体初速度 $v_0 > 0$，唯一水平作用为 $-kv$。以出发时刻为零，方程为 $m\dot{v} = -kv$。令 $\tau = m/k$，分离变量并利用初值：

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s,$$

$$[\ln w]_{v_0}^{v} = -\frac{t}{\tau}, \qquad \ln\frac{v}{v_0} = -\frac{t}{\tau},$$

$$v(t) = v_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

以 $x(0) = 0$ 再积分一次，

$$x(t) = v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-s/\tau}\,\mathrm{d}s = v_0[-\tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t = v_0\tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

同一运动也可按位置求解。实际过程中 $v > 0$，用 $mv\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x = -kv$ 约去 v 后，

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}w = -\frac{k}{m}\int_0^x \mathrm{d}\xi, \qquad v - v_0 = -\frac{kx}{m}.$$

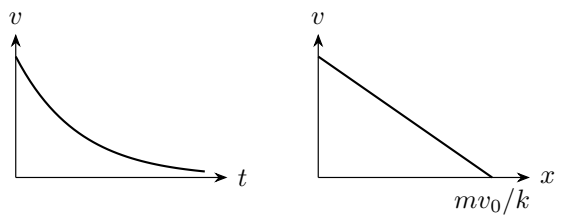


图 4.8: 速度随时间指数衰减，随位置则为直线

图 4.8 左图显示速度随时间指数衰减，右图显示同一速度随位置线性减小。任意有限 t 都有 $v>0$；当 $t\to\infty$，速度趋零，位置趋于 $x_*=mv_0/k$。例 4.15 将用这两种变量关系讨论停车时间与极限位置；例 4.13 把线性阻力的全程冲量写成 $-k\int v\,\mathrm{d}t$，由返回同一高度的条件直接求总时间。

还可以由位置关系判断到达终点所需时间。若临近 x_* 时，$v\simeq C(x_*-x)^p$，其中 $C>0$，则从 $x_*-\varepsilon$ 走到 $x_*-\delta$ 的时间为

$$\Delta t\simeq\frac{1}{C}\int_{x_*-\varepsilon}^{x_*-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{(x_*-x)^p}.$$

取 $y=x_*-x$，$\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}y$，两端分别为 ε,δ。反转积分次序后，

$$p\neq1:\quad \Delta t\simeq\frac{1}{C}\int_{\delta}^{\varepsilon}y^{-p}\,\mathrm{d}y=\frac{\varepsilon^{1-p}-\delta^{1-p}}{C(1-p)},$$
$$p=1:\quad \Delta t\simeq\frac{1}{C}[\ln y]_{\delta}^{\varepsilon}=\frac{1}{C}\ln\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

令 $\delta\to0^+$，$p<1$ 时剩余时间有限，$p\geq1$ 时趋于无穷。恒定反向合力使 v^2 随剩余距离线性减小，对应 $p=1/2$；线性阻力对应 $p=1$。它们分别给出有限时间停车和渐近零速两类过程。

4.5 相对运动和重复碰撞

4.5.1 最近距离与质心运动

设前物体位置为 x_A，后物体为 x_B，间距 $D=x_A-x_B$。求导得

$$\dot D=v_A-v_B,\qquad \ddot D=a_A-a_B.$$

当 $\dot D$ 由负转正时，两者由接近转为远离，D 取得这一阶段的最小值。此时 $v_A=v_B$，这个共同速度由整体运动决定。

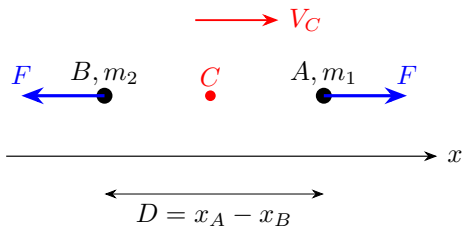


图 4.9: 两物体的斥力改变相对运动，质心保持匀速

图 4.9 中，斥力对前物体向右，对后物体向左。因此

$$\ddot D=F\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

两力属于系统内部相互作用，总动量保持不变，质心以 $V_C = (m_1 v_{A0} + m_2 v_{B0})/(m_1 + m_2)$ 匀速运动。相对速度降到零时，两物体的速度都等于 V_C。例 4.10 据此解释最近时两物体仍向同一方向运动的情形。

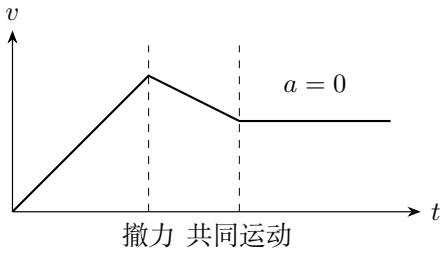


图 4.10: 连续速度与分段加速度分别承担不同的衔接条件

图 4.10 中的每个折点对应一次受力改变。求全程最小间距时，把各阶段的间距驻点和起末位置一同列入比较；每一段使用继承下来的间距与相对速度。对于先停车再碰撞的问题，停车时刻把接近过程分成两段。

4.5.2　用碰前、碰后速度建立下一段初值

设 A 在左、B 在右，两物体质量均为 m，碰前 A 以较大的速度追上 B。碰撞期间，两物体先发生形变，再相互推开；完全弹性碰撞中，形变储存的能量全部回到运动中，碰后的总动能等于碰前的总动能。碰撞期间外力冲量相对碰撞冲量可忽略，总动量也保持不变。

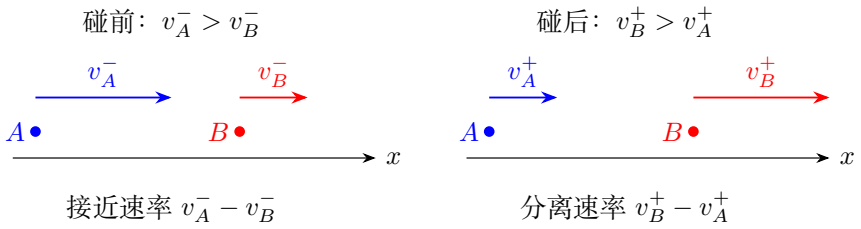


图 4.11: 碰前的接近与碰后的分离，对应速度差的两个相反方向

图 4.11 以向右为正，上标 $-,+$ 分别表示碰前、碰后。约去动量式中的 m 和动能式中的 $m/2$，得到

$$v_A^- + v_B^- = v_A^+ + v_B^+,$$
$$(v_A^-)^2 + (v_B^-)^2 = (v_A^+)^2 + (v_B^+)^2.$$

两速度的平方和与和的平方可以组成速度差的平方。对碰前、碰后分别用 $(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)-(a+b)^2$，有

$$\begin{aligned}(v_A^- - v_B^-)^2 &= 2[(v_A^-)^2 + (v_B^-)^2] - (v_A^- + v_B^-)^2 \\ &= 2[(v_A^+)^2 + (v_B^+)^2] - (v_A^+ + v_B^+)^2 \\ &= (v_B^+ - v_A^+)^2.\end{aligned}$$

图中的接近速率与分离速率都取正值，因而

$$v_B^+ - v_A^+ = v_A^- - v_B^-.$$

把这个关系与动量式相加，得 $2v_B^+ = 2v_A^-$；相减则得 $2v_A^+ = 2v_B^-$。所以等质量物体交换瞬时速度。碰撞后的加速度仍分别由各自外力决定。

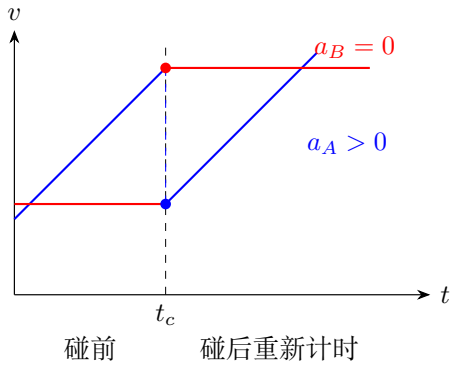


图 4.12: 碰撞交换瞬时速度，碰后加速度由各自外力决定

图 4.12 以 A 滑动时受恒定下滑合力、B 滑动时合力为零为例。碰撞时两条线交换高度，碰后蓝线仍以原斜率上升，红线仍保持水平。令从这次碰撞开始的局部时间为 τ，两者再次接触的条件是

$$\int_0^\tau [v_A(s) - v_B(s)]\,\mathrm{d}s = 0, \qquad \tau > 0.$$

例 4.7 先比较停车与追撞的时刻，再建立速度或位移递推。练习 4.2 中，相对加速度从零开始随时间增加，逐次积分后滑动量按时间三次方增长。有限次运动求清之后，才能把相同的递推用于次数趋于无穷的极限。

无穷叠层也从有限层开始处理。上方若有一组相同结构，在向下加速度为 a 的支承上运动，可在该平移系中用有效重力 $g-a$ 计算它对下层的压力。例 4.12 先用这一缩放联系相邻层数，再由递推证明支持力序列有界收敛；练习 4.3 改变每层两块的质量比，保留同一几何和受力思路。

4.6　下滑时间中的路程与加速度

从高处定点沿固定直槽下滑，槽方向同时决定重力沿槽分量和到目标直线的行程。图 4.13 中，$AP = h$ 是到目标直线的垂距，槽长 $AB = s$，槽与竖直向下成角 β，与向下法线 AP 成角 γ。

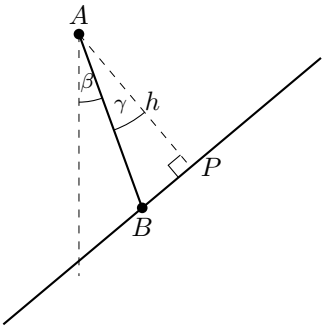


图 4.13: 槽长由法向投影确定，沿槽加速度由重力投影确定

由图中垂直投影，$s\cos\gamma = h$；光滑直槽中，沿槽加速度为 $g\cos\beta$。从静止运动，$s = g\cos\beta\, t^2/2$，所以

$$t^2 = \frac{2h}{g\cos\beta\cos\gamma}.$$

在 $\cos\beta > 0, \cos\gamma > 0$ 的下滑方向内，使时间最小等价于使这两个余弦的乘积最大。例 4.11 由目标斜面的倾角联系 γ 与 β，将几何与动力学合为一个角度函数；练习 4.4 再加入法向力所决定的摩擦，求相应最优方向。

4.7 例题与分析

例 4.1 (保持速率的航向改变)**.** 质量近似恒为 m 的探测器初速度为 $v_0\boldsymbol{e}_x$，欲改为与正 x 轴向下成 60° 的速度，速率仍为 v_0。四发动机 P_1, P_2, P_3, P_4 的推力方向分别为 $-x, +y, +x, -y$，大小均为 f，不引起转动。求依次开动的发动机及时间。

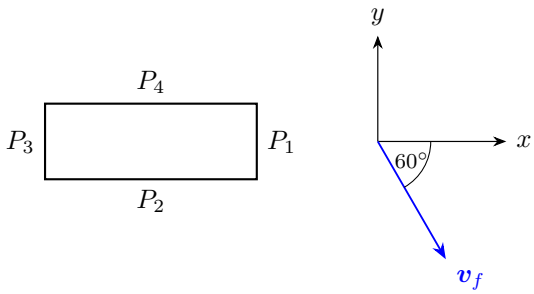


图 4.14: 发动机的推力沿固定坐标轴，目标速度向右下方

解　把目标速度分解为所需的两分量增量

图 4.14 目标速度分量为 $v_{f,x} = v_0/2$、$v_{f,y} = -\sqrt{3}v_0/2$，所以需要的速度增量是 $\Delta v_x = -v_0/2$、$\Delta v_y = -\sqrt{3}v_0/2$。应减小正 x 速度，同时增加负 y 速度，因此选 P_1 与 P_4。

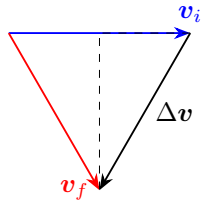


图 4.15: 两个速度矢量相减得到所需速度增量

逐方向求发动机工作时间

由图 4.15 两分量的冲量，$ft_1 = mv_0/2$、$ft_4 = \sqrt{3}mv_0/2$，所以 $t_1 = mv_0/(2f)$、$t_4 = \sqrt{3}mv_0/(2f)$。两发动机分别改变一个速度分量，质量和推力恒定时，两次作用的顺序可以互换。

例 4.2 (采样速度与换面时刻)**.** 物块由光滑斜面顶端静止下滑，经 B 后进入粗糙水平面，过 B 时速率连续。测得下表数据，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求斜面倾角、水平面摩擦因数及 $t = 0.6\,\mathrm{s}$ 的速度。

t/s	0	0.2	0.4	1.2	1.4
$v/(\mathrm{m/s})$	0	1.0	2.0	1.1	0.7

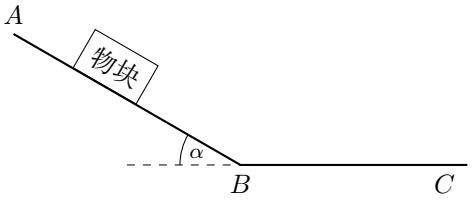


图 4.16: 倾角为 α 的斜面与粗糙水平面在 B 处平滑转接

解　从同一运动阶段的采样点求加速度

图 4.16 前段的三个采样点给 $a_1 = (2-1)/(0.4-0.2) = 5\,\mathrm{m/s^2}$。光滑斜面有 $g\sin\alpha = a_1$，所以 $\alpha = 30^\circ$。后段 $a_2 = (0.7-1.1)/(1.4-1.2) = -2\,\mathrm{m/s^2}$，故 $\mu = |a_2|/g = 0.2$。

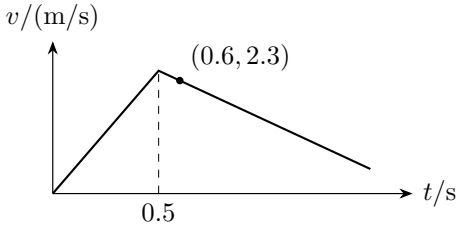


图 4.17: 两段速度直线在真实换面时刻相交

用两速度函数的交点找真实换面时刻

斜面速度为 $v = 5t$，水平面速度从采样点反推为 $v = 1.1 - 2(t-1.2) = 3.5 - 2t$。图 4.17 交点满足 $5t_B = 3.5 - 2t_B$，所以 $t_B = 0.5\,\mathrm{s}$。所求 $0.6\,\mathrm{s}$ 已进入水平段，$v = 3.5 - 1.2 = 2.3\,\mathrm{m/s}$。这一时刻的速度由水平段的减速直线决定。

例 4.3 (拉力改变后的速度三角形)**.** 质量 4 kg 的物体在水平拉力 F 下从静止运动，10 s 时速度达 10 m/s，此后拉力减为 $F/3$，到 30 s 恰停下。两段速度图线均为直线，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求 F 与动摩擦因数。

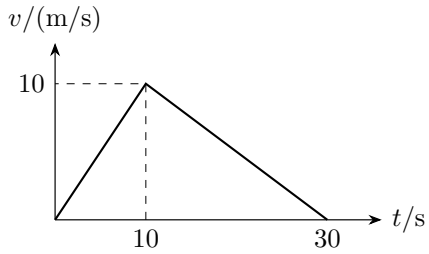


图 4.18: 速度图像给出改变拉力前后的加速度

解　读出两段斜率并保持摩擦方向

图 4.18 第一段 $a_1 = 1\,\mathrm{m/s^2}$，第二段 $a_2 = -0.5\,\mathrm{m/s^2}$。两段速度都向右，摩擦均向左且大小相同，记为 f，故 $F - f = 4\,\mathrm{N}$、$F/3 - f = -2\,\mathrm{N}$。



图 4.19: 两段摩擦大小相同，减小的是仍然向右的拉力

消去摩擦求拉力，再求摩擦因数

图 4.19 对应的两式相减，$2F/3 = 6\,\mathrm{N}$，所以 $F = 9\,\mathrm{N}$、$f = 5\,\mathrm{N}$，$\mu = f/(mg) = 5/40 = 0.125$。

例 4.4 (力随位置变化与等位移分段)**.** 质量 m 的物体初速 $v_0 \geq 0$，沿正 x 方向运动，水平合力从 $x = 0$ 处的 F_0 线性变为 $x = l$ 处的 F_l。求末速。再讨论：把总位移等分成 n 段，每段合力恒定，各段力大小组成首项 F_0、末项 F_l 的等差数列时，末速是否相同。

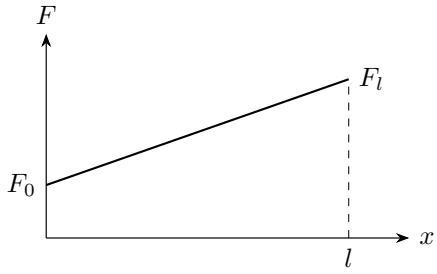


图 4.20: 连续直线与等位移阶梯力采用不同的局部模型

解　把连续合力曲线下的面积转换为动能变化

图 4.20 描述的是合力随位移的函数，应该累积功。直线力函数为 $F(x) = F_0 + (F_l - F_0)x/l$，由 $mv\,\mathrm{d}v = F(x)\,\mathrm{d}x$ 得

$$\begin{aligned} m\int_{v_0}^{v_l} w\,\mathrm{d}w &= \int_0^l \left[F_0 + \frac{F_l - F_0}{l}x\right]\mathrm{d}x, \\ \frac{m}{2}(v_l^2 - v_0^2) &= \left[F_0 x + \frac{F_l - F_0}{2l}x^2\right]_0^l \\ &= F_0 l + \frac{F_l - F_0}{2}l = \frac{F_0 + F_l}{2}l. \end{aligned}$$

这与图中的梯形面积相符，因此

$$v_l = \sqrt{v_0^2 + \frac{(F_0 + F_l)l}{m}}.$$

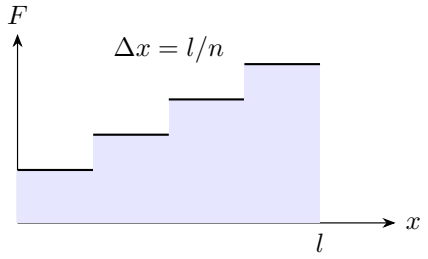


图 4.21: 等位移分段的功等于每段矩形面积之和

等位移各段的功相加

图 4.21 给出了有限段的力。取 $n \geq 2$，第 j 段两端速度记为 v_{j-1}, v_j，每段精确满足 $v_j^2 - v_{j-1}^2 = 2F_j(l/n)/m$。相加后中间速度平方逐项消去：

$$(v_1^2 - v_0^2) + \cdots + (v_n^2 - v_{n-1}^2) = v_n^2 - v_0^2 = \frac{2l}{mn}\sum_{j=1}^{n} F_j.$$

等差序列的第 j 项为 $F_j = F_0 + (j-1)(F_l - F_0)/(n-1)$，因此

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} F_j &= nF_0 + \frac{F_l - F_0}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(j-1) \\ &= nF_0 + \frac{F_l - F_0}{n-1}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(F_0 + F_l)}{2}. \end{aligned}$$

代回后 $v_n^2 - v_0^2 = (F_0 + F_l)l/m$，所以末速仍为同一表达式。相同末速来自两过程具有相同的总功。各段的加速度不同，所需时间可各自计算。$n = 1$ 对应

$F_0 = F_l$ 的恒力过程。以上取物体能沿正 x 方向走完各段的情形；沿途的动能由 $mv_0^2/2 + \int_0^x F(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ 给出，其最先降为零的位置就是这一前进过程的停止位置。

例 4.5 (由撤力后的时间反推驱动力)**.** 质量 1.5 kg 的物块在水平恒力 F 下从 A 静止出发，撤力后再滑行 2 s 停在 B。总位移 5 m，动摩擦因数 0.2，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。求 F 及撤力时的位置和速度。

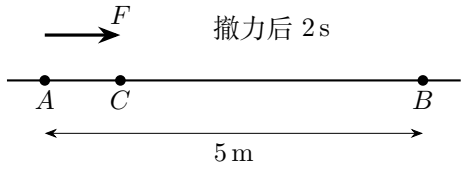


图 4.22: 撤力事件把全程分成两段

解　从撤力后的减速段反推速度和位移

图 4.22 撤力后减速度大小为 $\mu g = 2\,\mathrm{m/s^2}$，所以撤力时 $v_C = 2 \times 2 = 4\,\mathrm{m/s}$，此后位移 $s_2 = (v_C + 0) \times 2/2 = 4\,\mathrm{m}$。前段位移因而只有 $s_1 = 5 - 4 = 1\,\mathrm{m}$。

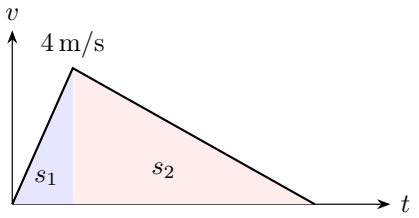


图 4.23: 速度图下两块三角形面积对应两段位移

用剩余位移求前段加速度及驱动力

前段由静止匀加速，$v_C^2 = 2a_1 s_1$，故 $a_1 = 8\,\mathrm{m/s^2}$。图 4.23 前段受力方程 $F - \mu mg = ma_1$ 给 $F = 1.5(8 + 2) = 15\,\mathrm{N}$。前段时间 $v_C/a_1 = 0.5\,\mathrm{s}$，图像面积 $4 \times 0.5/2 = 1\,\mathrm{m}$，与位置计算一致。

例 4.6 (飞行器失去与恢复升力)**.** 飞行器质量 2 kg，动力提供向上恒力 28 N，运动阻力大小恒定且反向于速度。第一次由地面静止竖直上升，8 s 升高 64 m。第二次在上升 6 s 后失去升力。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求阻力、最大高度，以及从开始下落到恢复升力的最长允许延迟。

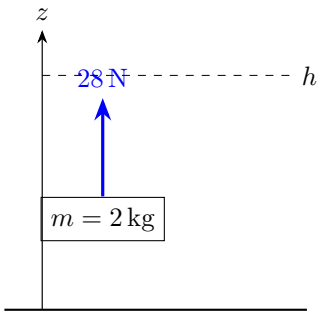


图 4.24: 上升、无动力下降、恢复动力制动的受力不同

解　用第一次上升数据确定阻力

按图 4.24 的竖直过程，第一次的上升加速度为 $a_1 = 2H/t^2 = 2\,\mathrm{m/s^2}$，受力 $28 - 20 - f = 2 \times 2$，故 $f = 4\,\mathrm{N}$。

计算失去升力后还能上升的高度

第二次失去动力时高度 $s_1 = 2 \times 6^2/2 = 36\,\mathrm{m}$，向上速度 $v_1 = 12\,\mathrm{m/s}$。继续上升时重力与阻力都向下，减速度 $a_2 = (20 + 4)/2 = 12\,\mathrm{m/s^2}$，再上升 $s_2 = 12^2/(2 \times 12) = 6\,\mathrm{m}$，所以最高点 $h = 42\,\mathrm{m}$。

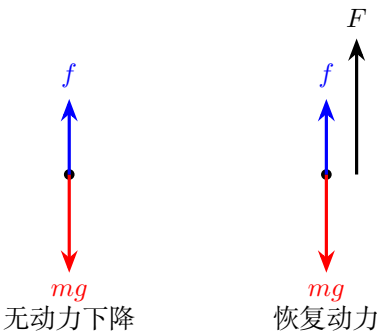


图 4.25: 下降时阻力向上，恢复升力后与动力共同制动

按下降方向重画受力并求恢复时状态

自最高点下落后，图 4.25 左侧向下加速度 $a_3 = (20 - 4)/2 = 8\,\mathrm{m/s^2}$。延迟 t 恢复动力，已下降 $4t^2$、向下速率 $8t$。恢复时还在下降，阻力也向上，因此制动加速度为 $a_4 = (28 + 4 - 20)/2 = 6\,\mathrm{m/s^2}$。

把延迟下落与制动下落合并限制

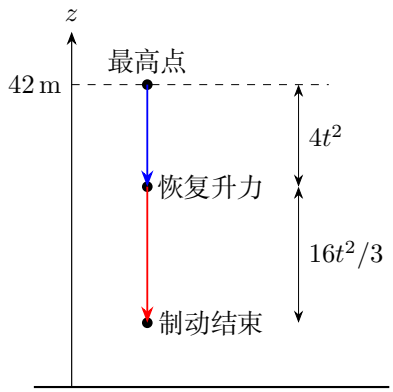


图 4.26: 总下降高度由延迟下落和恢复动力后的制动距离组成

图 4.26 中，恢复动力是中间事件，物体此时仍有向下速度；允许延迟由两段下降距离之和确定。

制动到零还需向下距离 $(8t)^2/(2\times 6)=16t^2/3$。不触地要求

$$4t^2+\frac{16t^2}{3}<42 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{28}{3}t^2<42 \quad\Longleftrightarrow\quad t^2<\frac{9}{2}.$$

由于 $t\ge 0$，得到 $t<3/\sqrt{2}\,\mathrm{s}$。临界延迟为 $3/\sqrt{2}\approx 2.12\,\mathrm{s}$，等号对应飞行器恰在地面达到零速度。最低点保持在地面上方时，延迟取上述严格不等式给出的范围。

例 4.7 (不同摩擦下的重复弹性碰撞)**.** 倾角 30° 的长斜面上，两等质量物块 A,B 初静止，A 在上、间距 $L=0.3\,\mathrm{m}$。取 $g=10\,\mathrm{m/s^2}$，$\mu_A=2\sqrt{3}/9$，各处最大静摩擦等于动摩擦。每次碰撞时间忽略、两块交换速度。求第一次碰后 B 速率，并分别对 $\mu_B=\sqrt{3}/3$、$\sqrt{3}/2$ 求第 n 次碰撞时 A 的累计路程。

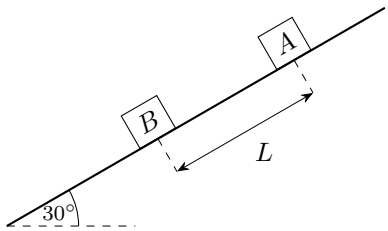


图 4.27: 两物块沿斜面下滑，初始间距沿斜面量取

解　求第一次碰前速度并应用速度交换

沿图 4.27 斜面向下取正。A 的滑动加速度 $a = g(\sin 30^\circ - \mu_A \cos 30^\circ) = 5/3\,\mathrm{m/s^2}$。两种 μ_B 都足以让 B 初始静止，所以第一次接触前 A 速度 $u_1 = \sqrt{2aL} = 1\,\mathrm{m/s}$，碰后 B 得到此速度，A 瞬时速度为零。

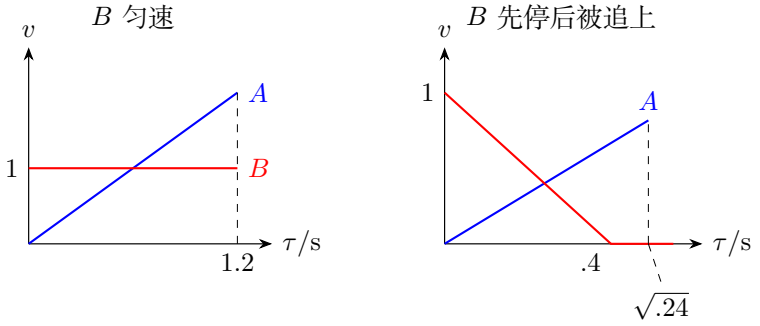


图 4.28: 第一次碰后的速度线明确显示追撞与停车的先后

不减速情形用相对位移求碰撞间隔

先取 $\mu_B = \sqrt{3}/3$，B 一旦滑动便匀速。第一次碰后 A 从零加速，B 以 $u_1 = 1$ 匀速，下一次接触满足 $a\tau^2/2 = u_1\tau$，故间隔 $\tau = 2u_1/a = 1.2\,\mathrm{s}$。第二次碰前速度为 $2, 1$，交换后成为 $1, 2$。此后每次速度差仍为 $1\,\mathrm{m/s}$，所以间隔恒为 $1.2\,\mathrm{s}$，第 j 次碰后 B 速度为 $j\,\mathrm{m/s}$。到第 n 次碰撞，B 位移为 $1.2\sum_{j=1}^{n-1} j = 0.6n(n-1)\,\mathrm{m}$。两块碰撞时在同一位置，因此

$$s_{A,n} = 0.3 + 0.6n(n-1) \quad (\mathrm{m}).$$

强摩擦下先求停车和追撞的先后

再取 $\mu_B = \sqrt{3}/2$，运动中的 B 以 $b = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$ 减速。设某次碰后 A 静止、B 速度 u_j。B 停下需 u_j/b，移动 $d_j = u_j^2/(2b)$；在这段时间 A 只移动 $au_j^2/(2b^2) = (a/b)d_j < d_j$。所以图 4.28 右图的事件顺序确为 B 先停下，随后 A 再追到它。

建立速度递推并累加碰撞位置

下次碰前 A 走过 d_j，速度 $u_{j+1} = \sqrt{2ad_j} = u_j\sqrt{a/b} = u_j\sqrt{2/3}$；$B$ 此时静止，交换速度后又回到同类初态。将递推式平方，$u_{j+1}^2 = (2/3)u_j^2$，由 $u_1 = 1\,\mathrm{m/s}$

得到 $u_j^2=(2/3)^{j-1}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$。再用 $d_j=u_j^2/(2b)$，有 $d_j=0.2(2/3)^{j-1}\,\mathrm{m}$。从首次接触位置开始累计：

$$\begin{aligned}s_{A,n}&=L+\sum_{j=1}^{n-1}d_j\\&=0.3+0.2\frac{1-(2/3)^{n-1}}{1-2/3}\quad(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

等比求和中的分母为 $1/3$，所以

$$s_{A,n}=0.3+0.6\left[1-(2/3)^{n-1}\right]\quad(\mathrm{m}).$$

首碰位置与累计路程的极限

两式在 $n=1$ 都回到 $0.3\,\mathrm{m}$。后一模型的无穷次碰撞路程趋于 $0.9\,\mathrm{m}$。

例 4.8 (分段拉力下长板与物块的速度追平)**.** 质量 m 的物块放在质量 $2m$ 的长板上，地面光滑，层间动摩擦因数 0.2，最大静摩擦近似等于动摩擦。整体初静止，拉板的右向力在 0–1 s 为 mg，1–1.5 s 为 $0.4mg$，之后为零。取 $g=10\,\mathrm{m/s^2}$，求关键时刻两速度及 0–3 s 的相对滑动距离。

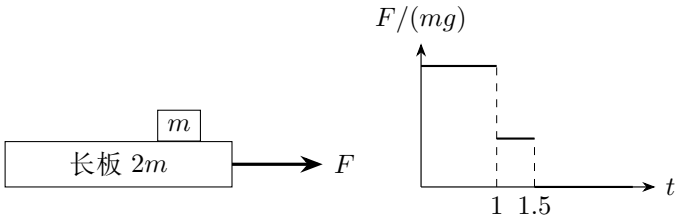


图 4.29: 拉力撤去后，板与块仍可继续相对滑动

解　起始拉力与层间摩擦

共同运动所能提供的最大驱动力为 $(3m)\mu g=0.6mg$，所以图 4.29 第一段必滑动。上块向右加速度 $a_m=\mu g=2$，长板 $a_P=(mg-0.2mg)/(2m)=4$，单位为 $\mathrm{m/s^2}$。$t=1$ 时 $v_m=2$、$v_P=4\,\mathrm{m/s}$。

沿既有滑动方向逐段更新速度

第二段虽然外力降低，但板仍比块快，摩擦方向不变。此段 $a_m=2$、$a_P=(0.4mg-0.2mg)/(2m)=1$，到 1.5 s 有 $v_m=3$、$v_P=4.5\,\mathrm{m/s}$。之后外力为零，仍在滑动时 $a_m=2$、$a_P=-1$，速度差以 $3\,\mathrm{m/s^2}$ 减小，从 1.5 降到零需 0.5 s。

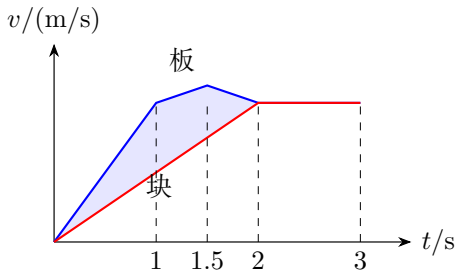


图 4.30: 两速度图之间的面积是相对位移

速度追平后的共同运动

在 $t=2\,\mathrm{s}$ 两者均为 $4\,\mathrm{m/s}$。此时若共同运动，所需摩擦为零，静摩擦可以维持，故 $t=3\,\mathrm{s}$ 两速度仍为 $4\,\mathrm{m/s}$。长板在 $1, 1.5, 2, 3\,\mathrm{s}$ 的速度依次为 $4, 4.5, 4, 4\,\mathrm{m/s}$。

用速度差面积计算实际滑动距离

图 4.30 中直到 $2\,\mathrm{s}$ 板始终比块快，故相对滑动距离等于速度差的积分。以下时间以秒、速度以米每秒计；每段另取当地时间 τ，保留该段的初始速度差：

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \int_0^{1} 2\tau\,\mathrm{d}\tau = [\tau^2]_0^1 = 1\,\mathrm{m},\\
s_2 &= \int_0^{0.5} (2-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[2\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^{0.5} = 0.875\,\mathrm{m},\\
s_3 &= \int_0^{0.5} (1.5-3\tau)\,\mathrm{d}\tau = \left[1.5\tau - \frac{3}{2}\tau^2\right]_0^{0.5} = 0.375\,\mathrm{m}.
\end{aligned}
$$

共同运动后的速度差为零，所以 0–3 s 总滑动距离为 $s_1+s_2+s_3 = 2.25\,\mathrm{m}$。撤力后两物体继续滑动半秒，到 $2\,\mathrm{s}$ 速度追平，相对滑动结束。

例 4.9 (两变力驱动相邻物块的分离)**.** 光滑水平面上左块 A 质量 $1\,\mathrm{kg}$，右块 B 质量 $2\,\mathrm{kg}$，初静止并接触。两者各受右向外力 $F_1 = (9-2t)\,\mathrm{N}$、$F_2 = (3+2t)\,\mathrm{N}$，t 以秒计。求分离时刻、此时加速度、分离后两秒内的加速度图像及两秒后的相对速度。

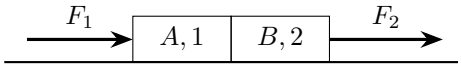


图 4.31: 两个外力都向右，压力能否保持取决于各自加速需求

解　接触阶段由整体加速度求内部压力

图 4.31 接触期间整体受力 $F_1+F_2 = 12\,\mathrm{N}$，共同加速度 $a = 12/3 = 4\,\mathrm{m/s^2}$。隔离 A，$F_1 - N = (1\,\mathrm{kg})a$，故 $N = (5-2t)\,\mathrm{N}$，到 $t_s = 2.5\,\mathrm{s}$ 恰为零。在 $0 \le t \le 2.5\,\mathrm{s}$ 内压力非负，随后两物体按各自外力分开运动。

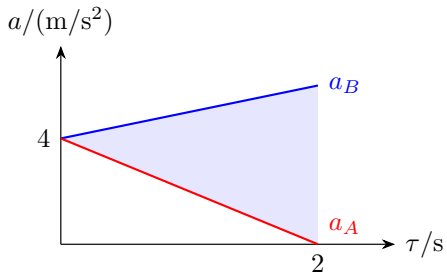


图 4.32: 以分离时刻为局部时间零点画加速度

以分离时刻为零点重建两加速度

令 $\tau = t - 2.5$，图 4.32 分离后 $a_A = 4 - 2\tau$、$a_B = 4 + \tau$，单位为 $\mathrm{m/s^2}$。两者在 $\tau = 0$ 都为 4，相对加速度为 3τ，故 B 逐渐领先，符合分离假设。

由相对加速度求速度差和间隙

加速度图下的有符号面积为速度增量，两曲线间面积为相对速度增量。分离时相对速度和间隙均为零，因而

$$v_B - v_A = \int_0^\tau 3s \,\mathrm{d}s = [3s^2/2]_0^\tau = \frac{3}{2}\tau^2.$$

代入 $\tau = 2\,\mathrm{s}$ 得 $6\,\mathrm{m/s}$。再积分一次，

$$\Delta x = \int_0^\tau \frac{3}{2}s^2 \,\mathrm{d}s = [s^3/2]_0^\tau = \frac{\tau^3}{2},$$

在此段始终增加，不会重新接触。

例 4.10 (有限作用范围内的恒定斥力)**.** 光滑直线上，视为质点的 A 质量 $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$，初静止；质点 B 质量 $m_2 = 3\,\mathrm{kg}$，以 $v_0 = 0.20\,\mathrm{m/s}$ 从左侧接近。间距不小于 $d = 0.10\,\mathrm{m}$ 时无相互作用，小于 d 时有大小 $F = 0.60\,\mathrm{N}$ 的相互斥力。求相互作用阶段两加速度、最近时两速度和最小间距。

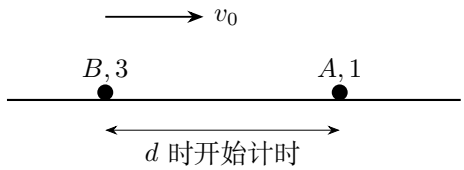


图 4.33: 相互作用从间距达到 d 后开始

解　进入作用范围后求速度相等时刻

在图 4.33 作用开始后取向右为正，$a_A = F/m_1 = 0.60\,\mathrm{m/s^2}$，$a_B = -F/m_2 = -0.20\,\mathrm{m/s^2}$。局部时间 τ 内，$v_A = 0.60\tau$、$v_B = 0.20 - 0.20\tau$。最近条件是两速度相等，故 $\tau_* = 0.25\,\mathrm{s}$，共同速度 $0.15\,\mathrm{m/s}$。

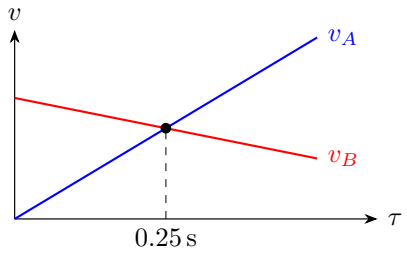


图 4.34: 最近时相对速度为零，质心仍向右运动

由速度差面积求接近距离

按图 4.34，从作用开始到速度相等时，接近距离为速度差的积分：

$$\int_0^{0.25} (0.20 - 0.80\tau)\,\mathrm{d}\tau = [0.20\tau - 0.40\tau^2]_0^{0.25} = 0.050 - 0.025 = 0.025\,\mathrm{m}.$$

因此最小间距 $d_{\min} = 0.10 - 0.025 = 0.075\,\mathrm{m}$。最近时两物体共同以 $0.15\,\mathrm{m/s}$ 向右运动，质心速度保持不变；随后斥力使间距增大。

例 4.11 (从定点到斜面的最短下滑时间)**.** 定点 A 位于倾角为 α 的直斜面上方，垂直于斜面的距离为 h。从 A 沿一条光滑直槽静止下滑到斜面，直槽与竖直向下方向向右夹角为 β。求最短时间对应的槽方向，$0 < \alpha < \pi/2$。

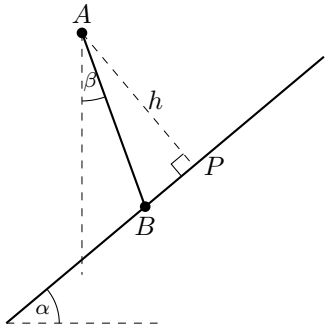


图 4.35: 槽 AB 到达斜面，AP 是到斜面的垂线

解　槽长与重力沿槽的分量

图 4.35 槽方向为 $(\sin\beta, -\cos\beta)$，同指向斜面的法向夹角为 $\alpha-\beta$。在 $\cos(\alpha-\beta)>0$ 的相交方向内，路径长为 $s=h/\cos(\alpha-\beta)$。沿槽受重力分量，$a=g\cos\beta>0$，由 $s=at^2/2$ 得

$$t^2=\frac{2h}{g\cos\beta\cos(\alpha-\beta)}.$$

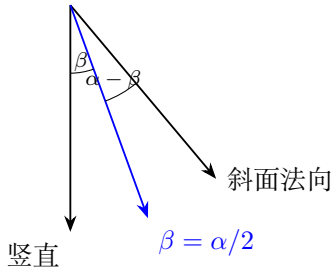


图 4.36: 最优槽方向平分竖直向下与斜面向下法线的夹角

把时间最小化转为余弦乘积最大化

利用 $\cos\beta\cos(\alpha-\beta)=[\cos\alpha+\cos(2\beta-\alpha)]/2$，最大值在 $2\beta-\alpha=0$ 取得。所以图 4.36 最优 $\beta=\alpha/2$，$t_{\min}=\sqrt{2h/g}/\cos(\alpha/2)$。该角位于可达区间内部，槽向下且同斜面正向相交。竖直槽虽有最大加速度，却未同时取得最合适的路径长度。

例 4.12（无穷叠层楔块的有限层极限）. 每一层由两个质量均为 m 的直角三角块拼成正方形，斜接触面与水平成 45°，所有斜面方向相同；相邻层间为水平光滑接触，底层在光滑地面上。各块由静止释放。先求 n 层时底部支持力的递推关系，再定义并求无穷层极限。

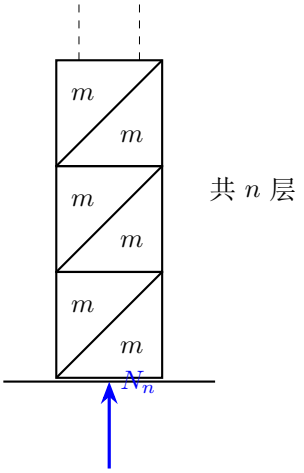


图 4.37: 把无穷叠层定义为有限层初始动力学的极限

解　用有限层支持力定义递推量

定义图 4.37 中 $N_n = c_n mg$，空叠层取 $c_0 = 0$。分析最下面一层：下三角块只能水平运动，上三角块向下加速度为 a，它承受上方 $n-1$ 层的压力 N_1。上方系统的底部随它向下加速，内部有效重力由 g 改为 $g-a$，所以 $N_1 = c_{n-1} m(g-a)$。

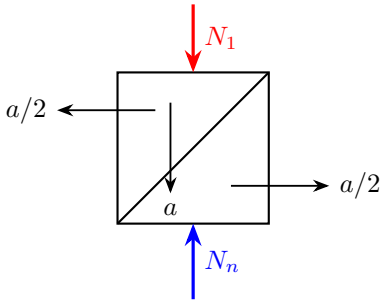


图 4.38: 底层的两个水平加速度相反，竖直下降量由斜面约束给出

由底层几何约束关联三方向受力

两块水平只受相互作用，等质量给反向等大的水平加速度；45° 约束使图 4.38 这两个大小均为 $a/2$。

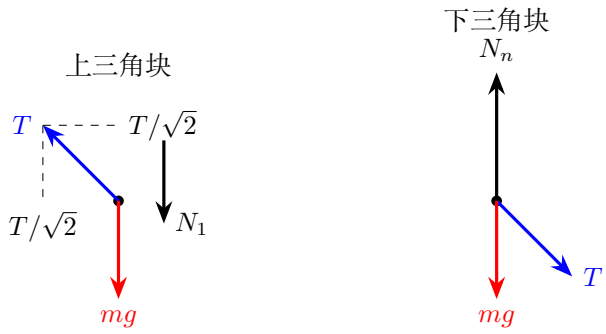


图 4.39: 底层两三角块的斜面压力具有相等的水平、竖直分量

图 4.39 中，斜面法向力为 T，它的水平、竖直分量大小同为 $T/\sqrt{2}$。从下块的水平运动得 $T/\sqrt{2} = ma/2$；上块和下块的竖直方程分别为

$$mg + N_1 - \frac{T}{\sqrt{2}} = ma, \qquad N_n = mg + \frac{T}{\sqrt{2}}.$$

消去加速度建立有限层递推

令 $c = c_{n-1}$，代入得 $(1+c)g = (c+3/2)a$，从而

$$c_n = 1 + \frac{a}{2g} = \frac{3c_{n-1}+4}{2c_{n-1}+3}, \qquad c_0 = 0.$$

证明有界收敛再求无限层极限

第一层为 $c_1 = 4/3$。记映射为 $f(c) = (3c+4)/(2c+3)$，在 $0 \le c < \sqrt{2}$ 时，下一项与 $\sqrt{2}$ 及本项的差分别为：

$$\sqrt{2} - f(c) = \frac{(2\sqrt{2}-3)c + 3\sqrt{2} - 4}{2c+3} = \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2}-c)}{2c+3} > 0,$$
$$f(c) - c = \frac{3c+4-c(2c+3)}{2c+3} = \frac{4-2c^2}{2c+3} > 0.$$

因此数列递增且始终小于 $\sqrt{2}$，极限存在。令极限 c_∞ 满足同一递推，交叉相乘得 $c_\infty(2c_\infty+3) = 3c_\infty + 4$，约去共同一次项，得到 $2c_\infty^2 = 4$。取正根，得到

$$N_\infty = \sqrt{2}\, mg.$$

这个支持力是各有限层系统释放瞬间的底部反力所趋近的值。层数增加时，上层越来越接近自由落体，其传给下层的压力迅速减小，因而底部支持力趋于有限值。

例 4.13 (线性阻力下返回同一高度的总时间)**.** 质量 m 的物体以竖直向上速度 v_0 抛出，运动阻力为 $-kv$，v 为向上正的有符号速度。返回出发高度时向下速率为 v_f。求总时间，并解释为何结果可以不用显式求解指数方程。

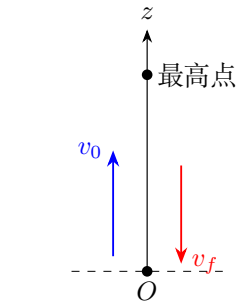


图 4.40: 上升和下降的速度符号相反，阻力始终为 $-kv$

解　对有符号速度方程作全程积分

图 4.40 向上为正，全程方程统一为 $m\dot{v} = -mg - kv$，其中 v 在上升时为正、下降时为负。由初态到返回时刻 T 积分，速度端点为 v_0 与 $-v_f$：

$$m\int_{v_0}^{-v_f} \mathrm{d}w = -mg\int_0^T \mathrm{d}t - k\int_0^T v\,\mathrm{d}t.$$

左边为 $m[w]_{v_0}^{-v_f}$，重力项为 $-mg[t]_0^T$，因此

$$m(-v_f - v_0) = -mgT - k\int_0^T v\,\mathrm{d}t.$$

用零位移消去阻力总冲量

因为返回同一高度，$\int_0^T v\,\mathrm{d}t = \Delta z = 0$，所以

$$T = \frac{v_0 + v_f}{g}.$$

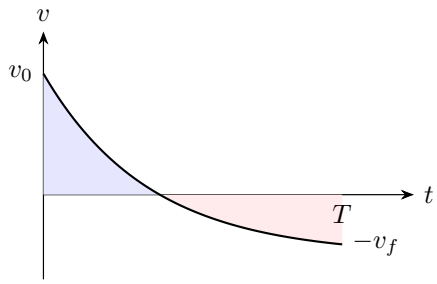


图 4.41: 速度图的正、负面积相抵，线性阻力的总冲量因此为零

返回速率与阻力做功

图 4.41 的正、负面积相抵，使线性阻力的总冲量为零。与此同时，阻力每一小段的功为 $(-kv)\,\mathrm{d}z = -kv^2\,\mathrm{d}t$，全程功为 $-k\int_0^T v^2\,\mathrm{d}t < 0$。因此返回同一高度时速率减小，$v_f < v_0$，相应地 $T < 2v_0/g$。

例 4.14 (竖直弹簧压缩过程的最大速率)**.** 质量 m 的物体放在竖直轻弹簧上，弹簧劲度系数 k、下端固定，初始原长、物体由静止释放。忽略阻力，求最大速率及其出现位置，并求最大压缩量。

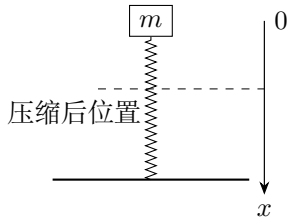


图 4.42: 向下位移从弹簧原长位置起算

解　用合力变号判断最大速率位置

按图 4.42 向下取 x，合力为 $mg - kx$，加速度在 $x = mg/k$ 变号。物体从零速度向下加速，越过该位置后仍向下但减速，所以最大速率出现在 $x_* = mg/k$。

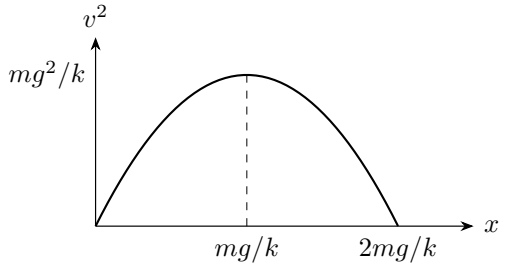


图 4.43: 速度平方是位移的开口向下二次函数

由速度平方曲线求极值和最大压缩量

用 $a = (\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t) = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，从初态 $(0,0)$ 积分：

$$m\int_0^v w\,\mathrm{d}w = \int_0^x (mg - k\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad \frac{1}{2}mv^2 = [mg\xi - k\xi^2/2]_0^x = mgx - \frac{1}{2}kx^2.$$

所以 $v^2 = 2gx - kx^2/m$。把 $x_* = mg/k$ 代入，图 4.43 顶点处 $v_{\max}^2 = 2mg^2/k - mg^2/k = mg^2/k$，因此 $v_{\max} = g\sqrt{m/k}$。令 $v^2 = x(2g - kx/m) = 0$，除初始根 $x = 0$ 外，下一个零速点为 $x_{\max} = 2mg/k$。量纲 $g\sqrt{m/k}$ 为速度，最大速率位置 mg/k 对应加速度为零，最大压缩位置 $2mg/k$ 对应速度为零。

例 4.15 (线性阻力下速度随位移的变化)**.** 质量 m 的物体在水平面上以 $v_0>0$ 向右运动，唯一水平作用为线性阻力 $-kv$。从出发位置 $x=0$ 起求 $v(x)$，并说明何时、何处达到零速度。

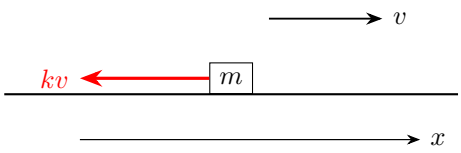


图 4.44: 物体沿水平面向右运动，线性阻力向左

解　在正速度区间转换微分变量

图 4.44 在速度仍正的区间，链式法则给 $\dot v = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)\dot x = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，故 $mv\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -kv$。约去非零的 v，并从 $(0,v_0)$ 积分，

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}w = -\frac{k}{m}\int_0^x \mathrm{d}\xi, \qquad [w]_{v_0}^{v} = -\frac{k}{m}[\xi]_0^x,$$

得到 $v(x)=v_0-kx/m$。

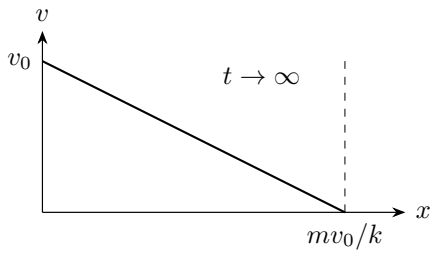


图 4.45: 有限的极限位移对应无限长的衰减时间

沿已求出的速度曲线计算到达时间

图 4.45 中，走到位置 x 所需时间可由 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/v(x)$ 直接积分。取 $0\le x<mv_0/k$，令 $q=v_0-k\xi/m$，则 $\mathrm{d}\xi=-(m/k)\,\mathrm{d}q$；$\xi=0,x$ 对应 $q=v_0,v_0-kx/m$。因此

$$\begin{aligned} t(x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{v_0-k\xi/m} = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v_0-kx/m}\frac{\mathrm{d}q}{q} \\ &= -\frac{m}{k}[\ln q]_{v_0}^{v_0-kx/m} = \frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v_0-kx/m}. \end{aligned}$$

当 $x\to mv_0/k$，分母趋于零，$t\to\infty$。反过来，将对数式指数化，

$$\mathrm{e}^{-kt/m} = \frac{v_0-kx/m}{v_0}, \qquad x(t)=\frac{mv_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt/m}).$$

再代入前面已求出的 $v(x)$，得 $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-kt/m}$。因此物体在任意有限时刻仍向右运动，零速与极限位置 mv_0/k 都对应 $t\to\infty$。

例 4.16 (从有符号速度测量求合力)**.** 质量 m 的质点沿固定直线运动，测得两种过程的有符号速度分别为 $v(t)=v_0+\beta t^3$ 和 $v(t)=v_0\sin(\omega t)$。求各自合力随时间的函数，说明合力图与速度图的关系。

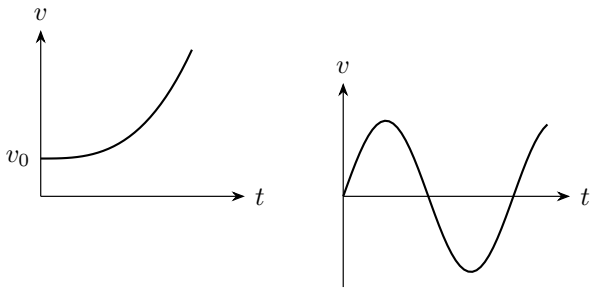


图 4.46: 两种有符号速度随时间的变化

解　多项式速度的变化率与合力

图 4.46 第一种过程中，v_0,β 均为常量。逐项对时间求导，

$$a=\frac{\mathrm{d}(v_0+\beta t^3)}{\mathrm{d}t}=0+\beta(3t^2)=3\beta t^2,\qquad F(t)=ma=3m\beta t^2.$$

v_0 只改变初始速度，不改变该过程给定的加速度。若 β 单位为 $\mathrm{m/s^4}$，乘 mt^2 后力单位正确。

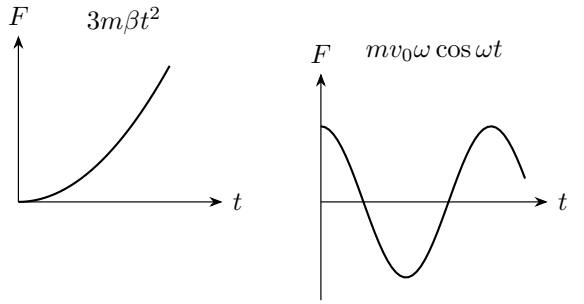


图 4.47: 正弦速度的合力比速度在相位上提前四分之一周期

对正弦速度求导并解释相位关系

第二种过程令 $\phi=\omega t$，链式法则给

$$a=\frac{\mathrm{d}(v_0\sin\phi)}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=(v_0\cos\phi)\omega=v_0\omega\cos\omega t.$$

故图 4.47 合力为 $mv_0\omega\cos\omega t$。在速度达到极值时合力为零，在速度过零时合力大小最大。正弦速度的负半周表示物体沿所选坐标轴的负方向运动。速度图在该半周仍可按同一求导关系确定合力。

4.8　本讲小结

每次受力改变后，继承当时的位置和速度，重新求该段运动。积分变量随给定力的形式选择，速度差与加速度差分别决定相对位移和相对速度。重复过程先确定停车、追撞或分离的先后，再建立有限次递推并讨论极限。

4.9　练习

练习 4.1 (平方阻力下的往返时间)**.** 质量为 m 的物体以初速 $v_0>0$ 竖直向上抛出，阻力为 $-cv|v|$，$c>0$，向上为速度 v 的正方向。记速度尺度 $u=\sqrt{mg/c}$。求上升时间、从最高点下落到出发点的时间及返回速率 v_f，判断总时间是否仍等于 $(v_0+v_f)/g$。

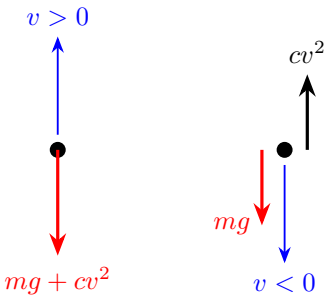


图 4.48: 平方阻力在上升与下降时使用不同的速度分支

练习 4.2 (缓慢增加拉力后的滑离时间)**.** 上块质量 m、长板质量 $2m$，地面光滑，层间最大静摩擦和动摩擦均为 μmg。两者初静止，拉板的水平力为 $F(t)=\gamma t$，$\gamma>0$。求开始滑动时刻，以及从开始滑动到上块从板左端滑出的时间；初始上块到板左端的相对距离为 ℓ。

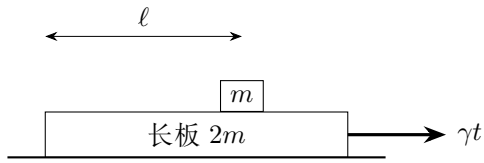


图 4.49: 板加速更快，上块相对板向左滑动

练习 4.3 (不等质量楔块的无穷层极限)**.** 沿用例题的光滑 45° 叠层，每层下三角块质量为 m，上三角块为 ηm，$\eta > 0$。求有限层底部支持系数的递推及无穷层极限，比较 $\eta = 1$、$\eta \to 0$ 和 $\eta \to \infty$。

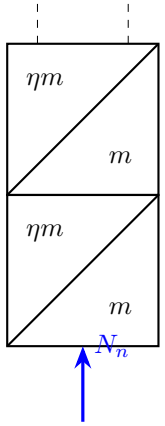


图 4.50: 每层上、下三角块的质量比固定

练习 4.4 (粗糙直槽的最短下滑时间)**.** 定点到倾角 α 斜面的法向距离为 h，直槽与竖直向下的右偏角限定为 $\beta \geq 0$。槽内最大静摩擦与动摩擦均为 μN，物块从静止向下滑。求最优槽角，说明为何可能出现 $\beta = 0$ 的竖直最优方向。

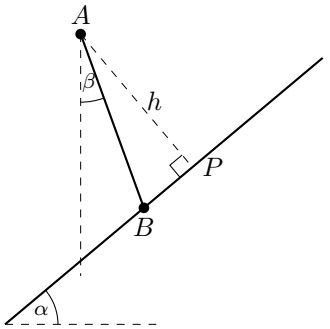


图 4.51: 粗糙直槽的方向 β 同时改变行程和摩擦

练习解答

练习 4.1

解　分离上升段变量求时间和最高点

图 4.48 上升段用向上速度 $v>0$，$\dot v=-g(1+v^2/u^2)$。令 $r=v_0/u$，速度由 v_0 降到零，分离变量给

$$t_\uparrow=\int_0^{v_0}\frac{\mathrm{d}v}{g(1+v^2/u^2)}=\frac{u}{g}\int_0^{r}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{u}{g}[\arctan y]_0^{r}=\frac{u}{g}\arctan r.$$

这里换元 $y=v/u$，$\mathrm{d}v=u\,\mathrm{d}y$，速度端点 $0,v_0$ 对应 $y=0,r$；原函数来自 $(\arctan y)'=1/(1+y^2)$。同一上升段用 $v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}z=\dot v$，得

$$H=\int_0^{v_0}\frac{v\,\mathrm{d}v}{g(1+v^2/u^2)}=\frac{u^2}{2g}\int_1^{1+r^2}\frac{\mathrm{d}q}{q}=\frac{u^2}{2g}[\ln q]_1^{1+r^2}=\frac{u^2}{2g}\ln(1+r^2).$$

第二个积分换元 $q=1+v^2/u^2$，所以 $\mathrm{d}q=2v\,\mathrm{d}v/u^2$，上下限变为 1 与 $1+r^2$。两个积分的分母相同，分子多出的 v 来自位移微元 $\mathrm{d}z=v\,\mathrm{d}t$。

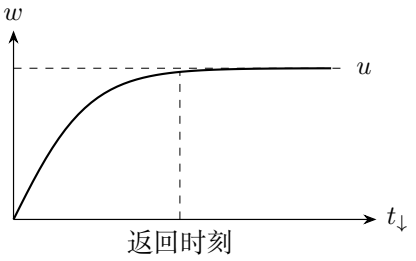


图 4.52: 下落速率渐近终端值，返回速率由有限高度确定

从最高点重新积分下降运动

从最高点另起计时，记下降用时为 τ，向下速率为 w、下降距离为 s。阻力向上，故 $\dot w=g(1-w^2/u^2)$，初始条件为 $w(0)=s(0)=0$。在 $0\le w<u$ 的实际分支上分离变量，令 $z=w/u$，得

$$\frac{g\tau}{u}=\int_0^{w/u}\frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}=\frac{1}{2}[-\ln(1-z)+\ln(1+z)]_0^{w/u}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+w/u}{1-w/u}.$$

这里用了 $1/(1-z^2)=[1/(1-z)+1/(1+z)]/2$。将对数式指数化，记 $E=\mathrm{e}^{2g\tau/u}$、$z=w/u$，则 $E=(1+z)/(1-z)$。逐步解出 z：

$$E(1-z)=1+z\quad\Longrightarrow\quad E-1=(E+1)z\quad\Longrightarrow\quad z=\frac{E-1}{E+1}.$$

乘以 u，得到

$$w=u\frac{\mathrm{e}^{2g\tau/u}-1}{\mathrm{e}^{2g\tau/u}+1}=u\tanh\frac{g\tau}{u}.$$

定义 $\cosh x = (\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})/2$、$\tanh x = (\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})/(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$。链式求导给 $\mathrm{d}\ln\cosh x/\,\mathrm{d}x = (\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})/(2\cosh x) = \tanh x$。位移积分中换元 $q = g\tau'/u$，有 $\mathrm{d}\tau' = (u/g)\,\mathrm{d}q$，原上下限 $0,\tau$ 对应 $0, g\tau/u$，所以

$$s = \int_0^{\tau} w(\tau')\,\mathrm{d}\tau' = \frac{u^2}{g}\int_0^{g\tau/u} \tanh q\ \mathrm{d}q = \frac{u^2}{g}[\ln\cosh q]_0^{g\tau/u} = \frac{u^2}{g}\ln\cosh\frac{g\tau}{u}.$$

图 4.52 中的 w 从零单调增大，却始终低于终端速率 u；这个渐近值对应重力与平方阻力相等。

由返回高度确定下降时间与末速

令 $s = H$，并记 $x = gt_{\downarrow}/u \geq 0$，则

$$\ln\cosh x = \frac{1}{2}\ln(1+r^2), \qquad \cosh x = \sqrt{1+r^2}.$$

把 $\cosh x = (\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})/2$ 代入，令 $Y = \mathrm{e}^{x} \geq 1$，可得 $Y^2 - 2\sqrt{1+r^2}Y + 1 = 0$。用求根公式先得到

$$Y = \sqrt{1+r^2} \pm \sqrt{(1+r^2)-1} = \sqrt{1+r^2} \pm r.$$

两个根互为倒数；下降时间非负，且 $r = v_0/u > 0$，故应取 $Y \geq 1$ 的根 $Y = \sqrt{1+r^2}+r$。再由 $\tanh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1}/\cosh x$ 求返回速率，

$$v_f = u\tanh x = u\frac{\sqrt{(1+r^2)-1}}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{ur}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{v_0}{\sqrt{1+r^2}}.$$

图 4.52 的返回状态为

$$t_{\downarrow} = \frac{u}{g}\ln\left(r+\sqrt{1+r^2}\right), \qquad v_f = \frac{v_0}{\sqrt{1+r^2}}.$$

总时间与返回速率的关系

下降时间只从最高点算起；从发射到返回的总时间是

$$T = t_{\uparrow} + t_{\downarrow} = \frac{u}{g}\left[\arctan r + \ln\left(r+\sqrt{1+r^2}\right)\right].$$

把已经求出的返回速率 $v_f = ur/\sqrt{1+r^2}$ 代入待比较的时间，得

$$\frac{v_0+v_f}{g} = \frac{u}{g}\left(r + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right).$$

为比较这两段时间，记

$$D(r) = r + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} - \arctan r - \ln\left(r+\sqrt{1+r^2}\right),$$

则 $(v_0+v_f)/g - T = (u/g)D(r)$。下面固定 u, g，对无量纲初速 r 求导。令 $q = \sqrt{1+r^2}$，链式法则给

$$q' = \frac{1}{2}(1+r^2)^{-1/2}\cdot 2r = \frac{r}{q}.$$

比值和对数两项的导数分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r}{q} = \frac{q - rq'}{q^2} = \frac{q^2 - r^2}{q^3} = \frac{1}{q^3},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\ln(r+q) = \frac{1+q'}{r+q} = \frac{1+r/q}{r+q} = \frac{1}{q}.$$

再用 $(\arctan r)' = 1/(1+r^2) = 1/q^2$，得到

$$\begin{aligned} D'(r) &= 1 + \frac{1}{q^3} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} \\ &= \frac{q^3 - q^2 - q + 1}{q^3} = \frac{(q-1)^2(q+1)}{q^3}. \end{aligned}$$

当 $r > 0$ 时 $q > 1$，所以 $D'(r) > 0$。又有 $D(0) = 0$，故 $D(r) > 0$，从而

$$T < \frac{v_0 + v_f}{g} \qquad (v_0 > 0,\ c > 0).$$

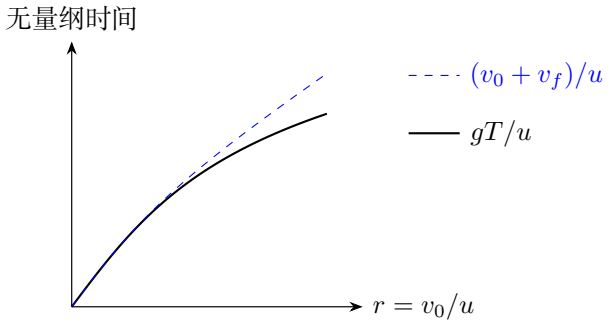


图 4.53: 平方阻力下的总时间与由初、末速率组成的时间随初速的变化

图 4.53 中，两曲线从原点出发；正初速下，平方阻力的总时间始终小于 $(v_0+v_f)/g$。$c \to 0$、$r \to 0$ 时，$\arctan r \simeq r$、$\ln(r+\sqrt{1+r^2}) \simeq r$，两段时间都趋于 v_0/g，且 $v_f \to v_0$，回到真空抛体。

练习 4.2

解　以静摩擦上限确定开始滑动的时刻

图 4.49 共同运动时 $a = F/(3m)$，上块所需摩擦 $f = ma = F/3$。达到 μmg 时 $F_c = 3\mu mg$，所以 $t_c = 3\mu mg/\gamma$。

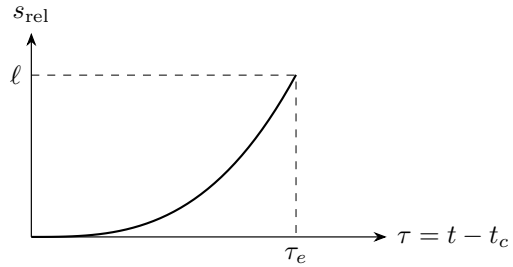


图 4.54: 滑动后的相对位移从零以三次方增长

在局部时间内积分相对加速度

滑动后上块加速度 $a_m = \mu g$，板加速度 $a_P = [\gamma t - \mu m g]/(2m)$。令 $\tau = t - t_c$，两者之差 $a_P - a_m = \gamma\tau/(2m)$。临界时相对速度为零，以从临界位置新增的滑动量定义 $s_{\mathrm{rel}}(0) = 0$，逐次积分：

$$v_P - v_m = \int_0^\tau \frac{\gamma s}{2m}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{\gamma s^2}{4m}\right]_0^\tau = \frac{\gamma\tau^2}{4m},$$
$$s_{\mathrm{rel}} = \int_0^\tau \frac{\gamma s^2}{4m}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{\gamma s^3}{12m}\right]_0^\tau = \frac{\gamma\tau^3}{12m}.$$

上块到达板左端的时刻

图 4.54 取 $s_{\mathrm{rel}} = \ell$，得滑动后到左端时间 $\tau_e = (12m\ell/\gamma)^{1/3}$，总时刻 $t_e = t_c + \tau_e$。整个滑动阶段相对速度为正且递增，因此摩擦方向一致，板对块的速度差与滑动量分别按二次和三次规律增长。

练习 4.3

解　由质量比与斜面约束求接触力分量

定义图 4.50 的 $N_n = c_n m g$，$c_0 = 0$。设上块向下加速度 a，接触斜面力水平与竖直分量大小相同，记为 P。两块水平加速度大小分别为 P/m、$P/(\eta m)$，45° 约束给两者之和等于 a，所以 $P = bma$，$b = \eta/(1+\eta)$。

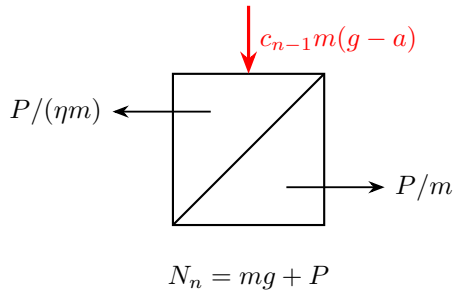


图 4.55: 质量比改变水平分配，但上层仍由有效重力缩放

使用上层有效重力建立递推

图 4.55 上块竖直式为 $\eta ma = \eta mg + c_{n-1}m(g-a) - P$，得到 $a/g = (\eta + c_{n-1})/(\eta + c_{n-1} + b)$。因此

$$c_n = 1 + b\frac{\eta + c_{n-1}}{\eta + c_{n-1} + b}.$$

递推的收敛与质量比的三个取值

记递推映射为 $f(c) = 1 + b(\eta + c)/(\eta + c + b)$。商法则给

$$f'(c) = b\frac{(\eta + c + b) - (\eta + c)}{(\eta + c + b)^2} = \frac{b^2}{(\eta + c + b)^2} > 0.$$

因 $\eta > 0, c \geq 0$，此导数小于 1。而 $c_1 > c_0 = 0$，递增映射使 $c_{n+1} > c_n$；又有 $f(c) < 1 + b$，故有限层序列递增有界，极限存在。令 c 为极限，固定点式给 $(c-1)(\eta + c + b) = b(\eta + c)$。整理成 $(c-1)(c+\eta) = b(\eta+1) = \eta$，即 $c^2 + (\eta - 1)c - 2\eta = 0$。用二次方程求根公式，

$$c = \frac{-(\eta-1) \pm \sqrt{(\eta-1)^2 + 8\eta}}{2} = \frac{1 - \eta \pm \sqrt{\eta^2 + 6\eta + 1}}{2}.$$

两根乘积为 $-2\eta < 0$，一正一负；支持系数非负，舍去负根，所以

$$N_\infty = \frac{1 - \eta + \sqrt{\eta^2 + 6\eta + 1}}{2}\, mg.$$

$\eta = 1$ 给 $\sqrt{2}mg$；$\eta \to 0$ 直接代入给 mg。为计算 $\eta \to \infty$，将正根有理化，

$$c = \frac{4\eta}{\sqrt{\eta^2 + 6\eta + 1} + \eta - 1} = \frac{4}{\sqrt{1 + 6/\eta + 1/\eta^2} + 1 - 1/\eta} \longrightarrow 2,$$

所以支持力趋于 $2mg$。以上先对层数取极限，再改变每层的质量比，得到从 mg 到 $2mg$ 的底部支持力变化。

练习 4.4

解　隔离槽内物块并结合路径几何

图 4.51 直槽不弯曲，物块法向加速度为零，故 $N = mg\sin\beta$，摩擦沿槽向上。沿槽加速度 $a_s = g(\cos\beta - \mu\sin\beta)$，要求括号为正。槽长仍为 $s = h/\cos(\alpha-\beta)$，所以

$$t^2 = \frac{2h}{g(\cos\beta - \mu\sin\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

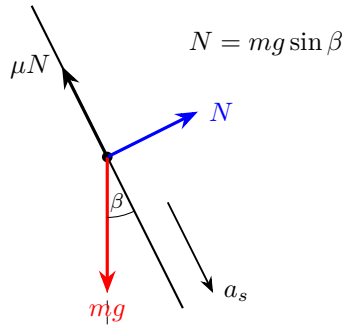


图 4.56: 重力沿槽驱动下滑，法向分量决定摩擦大小

图 4.56 中槽与竖直夹角为 β, 支持力与槽垂直; 于是重力沿槽分量为 $mg\cos\beta$, 法向分量为 $mg\sin\beta$。摩擦随 β 增大而增大，这解释了下面最优方向为何向竖直靠拢。

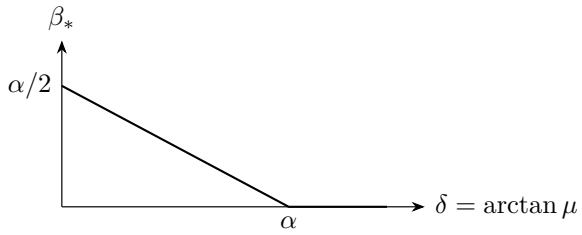


图 4.57: 最优槽角随摩擦角增大而减小，最后保持竖直

最优角的内部取值与竖直取值

令 $\delta = \arctan\mu$，则 $\cos\delta = 1/\sqrt{1+\mu^2}$、$\sin\delta = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$，所以

$$\cos\beta - \mu\sin\beta = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\beta+\delta).$$

分母除去正常数 $\sqrt{1+\mu^2}$ 后，令其余部分为

$$Q(\beta) = \cos(\beta+\delta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{\cos(\alpha+\delta) + \cos(2\beta+\delta-\alpha)}{2}.$$

下滑加速度为正的角度范围是 $0 \le \beta < \pi/2 - \delta$，在此区间 $\cos(\alpha - \beta) > 0$ 也成立。对 β 求导，内层角的导数为 2：

$$Q'(\beta) = \frac{1}{2}[-\sin(2\beta + \delta - \alpha)] \cdot 2 = -\sin(2\beta + \delta - \alpha).$$

当 $\alpha > \delta$，取 $2\beta + \delta - \alpha = 0$ 得到 $\beta_* = (\alpha - \delta)/2$，在允许区间内部，且余弦项达到全局上界 1。

当 $\alpha \le \delta$，上述候选角非正；对允许的 $\beta > 0$，有 $0 < 2\beta + \delta - \alpha < \pi$，所以 $Q' < 0$，分母随 β 增大严格减小。因此图 4.57 的最优角为 $\beta_* = 0$，包括 $\alpha = \delta$ 时两种取值相接的情形。

最短时间与光滑槽的极限

内部解满足 $\cos(\beta_* + \delta) = \cos[(\alpha + \delta)/2] > 0$，故确能下滑并到达斜面。最优槽竖直时法向力为零，也就没有该模型中的摩擦，时间为 $\sqrt{2h/(g\cos\alpha)}$。$\mu \to 0$ 时回到光滑直槽的 $\alpha/2$，与光滑槽结果相接。

静力学

物理竞赛一轮讲义

第一讲

质心与力的等效

2026

目录

第一讲　质心与力的等效 **1**

1.1　用一个点描述质量的分布 1

1.2　合力与力矩怎样一起等效 4

1.3　把几何微元变成质量微元 6

1.4　组合、挖孔与系统重排 10

1.5　弹簧、轻绳和支承的关系 11

1.6　例题与分析 13

1.7　本讲小结 21

1.8　练习 22

练习解答 24

第一讲　质心与力的等效

1.1　用一个点描述质量的分布

1.1.1　从离散质点到连续物体

对由许多质点组成的系统，定义质量加权的平均位置为质心 C。总质量 $M=\sum_i m_i$，三个坐标分别为

$$x_C=\frac{\sum_i m_i x_i}{M},\quad y_C=\frac{\sum_i m_i y_i}{M},\quad z_C=\frac{\sum_i m_i z_i}{M}.$$

用位置矢量合写，就是 $M\boldsymbol{r}_C=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i$。连续物体可划成许多小块，每块质量趋小时，求和转为积分：

$$M=\int \mathrm{d}m,\qquad M\boldsymbol{r}_C=\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m. \tag{1.1}$$

坐标乘质量的和称为质量一阶矩。质心是质量一阶矩与总质量的比，因此每部分的贡献同时取决于它的质量和它所在的位置。

把物体分成几部分，第 j 部分质量为 M_j、质心为 $\boldsymbol{r}_{Cj}$。分别在各部分中使用定义，有

$$\int_j \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m=M_j\boldsymbol{r}_{Cj}.$$

将这些积分相加，得到整个物体的 $M\boldsymbol{r}_C=\sum_j M_j\boldsymbol{r}_{Cj}$。这就是分块求质心的依据：先求各部分的质量和质心，再对这些点按质量加权。例 1.2 将三根均匀杆分别集中在各自中点；练习 1.6 直接对球心位置和奇数质量加权。

1.1.2　质心把总动量与整体运动联系起来

质心的质量加权定义也有直接的动力学意义。对质量恒定的一组质点，把 $M\boldsymbol{r}_C=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i$ 逐次求时间导数，得到

$$M\boldsymbol{v}_C=\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{P},$$

$$M\boldsymbol{a}_C=\sum_i m_i\boldsymbol{a}_i=\sum_i \boldsymbol{F}_i.$$

系统内每一对相互作用力在求和时相消，留下外力：

$$M\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}.$$

质心因而像一个集中了系统全部质量的质点那样，由外力合力决定加速度。各部分同时还可以绕质心转动或相互运动。

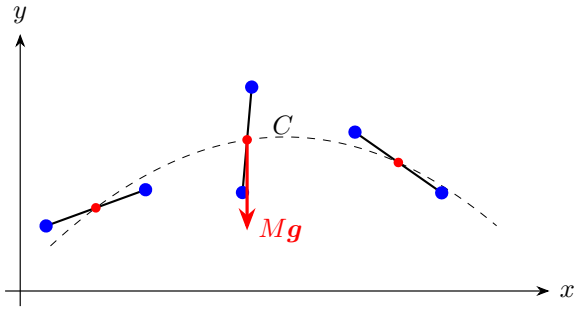


图 1.1: 两端点绕质心转动时，质心仍按总外力规定的轨迹运动

例如图 1.1 中，两球由轻杆连接后被抛出，忽略空气阻力。两球的位置随杆转动而改变，质心却满足 $\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{g}$，沿抛物线运动。这个共同代表点由质量分布确定。下面回到静力学，用两球在支点上的平衡说明怎样从支承位置找到它，再讨论连续物体及分布重力的等效。

1.1.3　两个质点的质量中心

一根质量可忽略的直杆两端分别固定质量 m_1, m_2 的小球。要把它水平托住，支点应放在哪里？设两球坐标为 x_1, x_2，支点为 x_C。关于支点的重力矩平衡，给出

$$m_1 g(x_C - x_1) = m_2 g(x_2 - x_C).$$

约去 g，把含 x_C 的项移到左边，便得

$$(m_1 + m_2)x_C = m_1 x_1 + m_2 x_2, \qquad x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

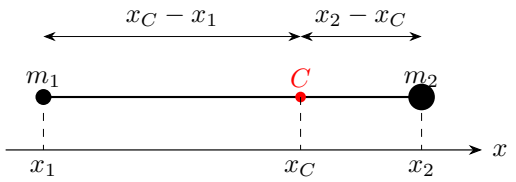


图 1.2: 质量加权使质心偏向较重的一端

图 1.2 中，较重的球离支点较近。令两球间距为 $l = x_2 - x_1$，则

$$x_C - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l, \qquad x_2 - x_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l.$$

距离按质量的反比分配。把所有质量都乘同一个倍数，这个点的位置保持不变；交换两端质量，它向另一端作对称移动。

1.1.4 对称性、坐标原点与重力

均匀圆环的每个质量元，都能找到圆心另一侧等质量的质量元。两者的一阶矩相消，所以质心在圆心。对于关于某平面对称的质量分布，平面两侧的质量成对出现，质心落在对称面上。多条对称轴相交时，交点就确定了质心。这里的对称同时包含形状与密度。

把坐标原点平移 $\boldsymbol{a}$，各点的新位矢为 $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}$。由式(1.1)，

$$M\boldsymbol{r}'_C = \int (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a})\,\mathrm{d}m = M\boldsymbol{r}_C - M\boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{r}'_C = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{a}.$$

质心坐标与其他点一起平移，所代表的物理位置保持原样。

在地面附近，把重力场近似为均匀场，各元都受 $\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}m$。总重力为 $M\boldsymbol{g}$，关于原点的总重力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_O &= \int \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{g}\,\mathrm{d}m) = \left(\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m\right) \times \boldsymbol{g} \\ &= M\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_C \times M\boldsymbol{g}.\end{aligned}$$

因此把总重力画在质心处，既保留合力，也保留力矩。按重力等效定义的重心，在这一近似下与质心重合。

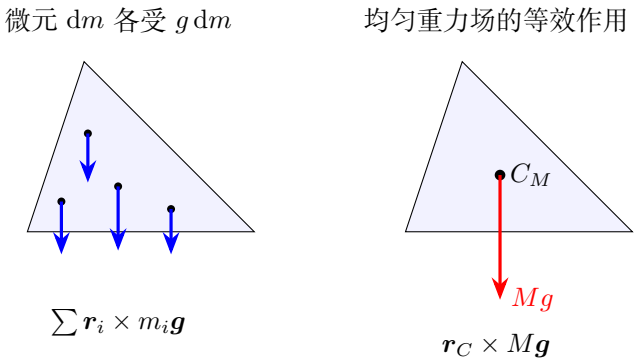


图 1.3: 分布重力与集中重力保持相同的合力和力矩

图 1.3 左侧分布在各处的重力，换成右侧的一个 $M\boldsymbol{g}$。这个等效点由一阶矩确定，可以在物体内部，也可以在圆环一类物体的空隙中。悬挂一块刚板使其静止，关于悬点的重力矩为零，质心便落在经过悬点的竖直线上；改变悬点，第二条竖直线与第一条的交点给出质心。

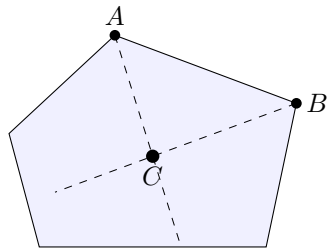


图 1.4: 两次悬挂得到两条在板上相交的重力作用线

图 1.4 将两次悬挂时的竖直方向都记录在板上。两条线分别经过 A, C 和 B, C；板在两次实验中的空间姿态不同，记录交会后得到同一个质量中心。

1.2　合力与力矩怎样一起等效

对质点，合力是所有外力的矢量和。对刚体，位置不同的力还可能产生不同转动作用，因此同时保留合力和合力矩，才得到相同的刚体受力效果。

设力 $\boldsymbol{F}$ 作用于 A。若移到同一作用线上的 B，则 $\overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{F} = 0$，关于任意点的力矩保持不变，这称为力沿作用线的滑移。

把力移到另一条平行作用线时，可以从图 1.5 的添力过程看清转动作用怎样保留下来。在 B 点同时添加 $\boldsymbol{F}$ 和 $-\boldsymbol{F}$，它们在同一点相互抵消。留下 B 点的 $\boldsymbol{F}$ 后，原来 A 点的力与新增的 B 点反向力组成一对等大、反向、异线的力，称为力偶。

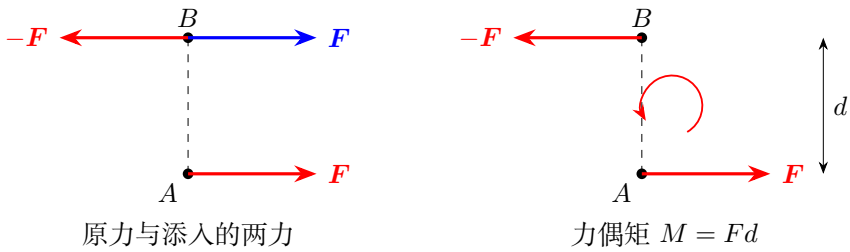


图 1.5: 在 B 点添入一对相消的力，红色两力组成力偶，蓝色力留在新作用点

图 1.5 中红色两力的合力为零，关于原点 O 的总力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= \overrightarrow{OA} \times \boldsymbol{F} + \overrightarrow{OB} \times (-\boldsymbol{F}) \\ &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \times \boldsymbol{F} = \overrightarrow{BA} \times \boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

最后的表达式只含 A, B 的相对位置，取矩点改变时保持相同。两条作用线的垂距为 d，力偶矩大小为 Fd；图中的上力向左、下力向右，转动方向为逆时针。

所以把原力换成 B 点的同向力时，同时留下这个力偶，便保持原来的合力与合力矩。关于 O，新的总力矩为

$$\overrightarrow{OB}\times\boldsymbol{F}+\overrightarrow{BA}\times\boldsymbol{F}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA})\times\boldsymbol{F}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}.$$

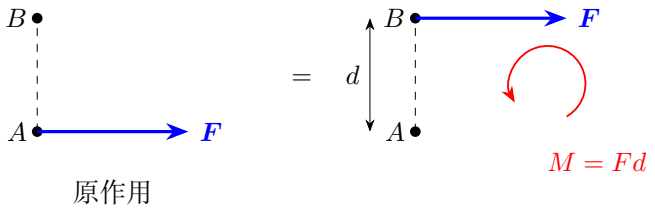


图 1.6: 把力移到平行作用线时，同时补上保持原力矩的力偶

图 1.6 中，原来的水平力经过 A，关于 A 的矩为零。移到上方 B 后，力产生顺时针矩 Fd，所补的逆时针力偶正好抵消它。下一讲将在这一等效关系上建立刚体的三个平衡方程。

分块求质心保留的是质量及一阶矩，均匀重力的集中表示保留的是合力及合力矩。质量在离轴距离上的分布，还决定转动惯量。

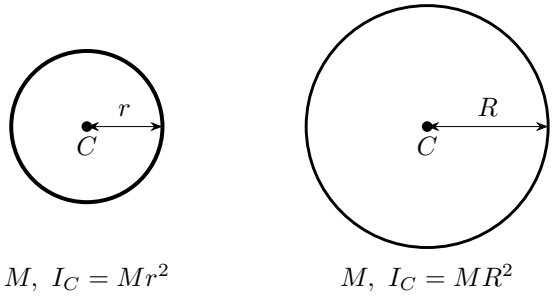


图 1.7: 同质量、同质心的两圆环可以具有不同转动惯量

图 1.7 的两个圆环质量相同，质心都在圆心。绕圆心且垂直纸面的轴，全部质量分别距轴 r 和 R，由 $I=\int s^2\,\mathrm{d}m$ 得 $I_1=r^2\int \mathrm{d}m=Mr^2, I_2=R^2\int \mathrm{d}m=MR^2$。相同质心的物体可以具有不同的转动惯量，这使完整质量分布在转动问题中继续发挥作用。

1.3　把几何微元变成质量微元

1.3.1　线、面、体的质量权重

细杆或细弧用线密度 λ，长度元 $\mathrm{d}s$ 携带质量 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}s$；薄板用面密度 σ，$\mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}S$；实体用体密度 ρ，$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$。均匀材料的密度可从分子、分母中约去，剩下的仍是弧长、面积或体积的加权。

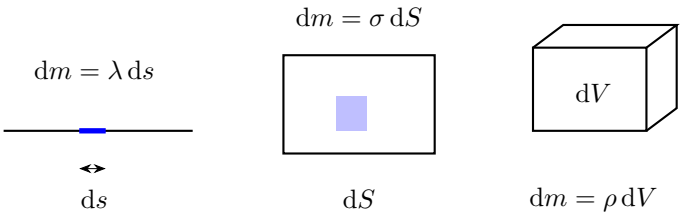


图 1.8: 质量微元同时包含几何尺寸和材料密度

图 1.8 中的三种微元，分别适合一维、二维和三维质量分布。例 1.4 将半圆弧与半圆板放在一起计算，它们的材料分别沿弧和面分布，微元也随之改变。

对于均匀三角板，取平行底边的细条可以把二维积分化为沿高度的一维积分。底长 b、高 h，在高度 y 处由相似三角形得条长 $w(y) = b(1 - y/h)$，条宽 $\mathrm{d}y$，所以

$$\mathrm{d}S = w(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \mathrm{d}m = \sigma b(1 - y/h)\,\mathrm{d}y.$$

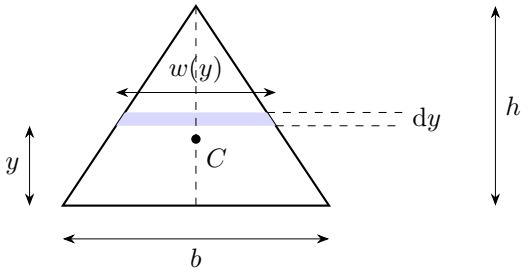


图 1.9: 三角板的等高条带具有不同质量权重

图 1.9 中，相同的 $\mathrm{d}y$ 对应不同条长。较低的条带质量较大，质量中心也因此低于半高。例 1.1 将在一般斜三角形中写出条带两端坐标及条带中心，分别完成两个方向的一阶矩积分。

圆板还可以用极坐标描述。半径 r 到 $r + \mathrm{d}r$、极角 θ 到 $\theta + \mathrm{d}\theta$ 之间的小块，径向长度为 $\mathrm{d}r$，切向长度为 $r\,\mathrm{d}\theta$，故 $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$。弧上所有点的半径固定为 R，弧长元则是 $R\,\mathrm{d}\theta$。例 1.4 的两幅微元图分别使用这两种关系。

1.3.2 密度沿杆长改变时

取长 L 的细杆，左端为原点，线密度为 $\lambda(x)=\lambda_0(1+\eta x/L)$，其中 $\eta>-1$。取宽 $\mathrm{d}x$ 的一小段，它的质量为 $\lambda(x)\,\mathrm{d}x$。质量和一阶矩分别为

$$M=\lambda_0\int_0^L\left(1+\frac{\eta x}{L}\right)\mathrm{d}x=\lambda_0\left[x+\frac{\eta x^2}{2L}\right]_0^L=\lambda_0 L(1+\eta/2),$$
$$J_x=\lambda_0\int_0^L\left(x+\frac{\eta x^2}{L}\right)\mathrm{d}x=\lambda_0\left[\frac{x^2}{2}+\frac{\eta x^3}{3L}\right]_0^L=\lambda_0 L^2(1/2+\eta/3).$$

两者相除，得

$$x_C=L\frac{3+2\eta}{3(2+\eta)},\qquad x_C-\frac{L}{2}=\frac{\eta L}{6(2+\eta)}.$$

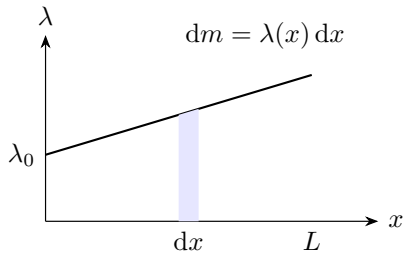
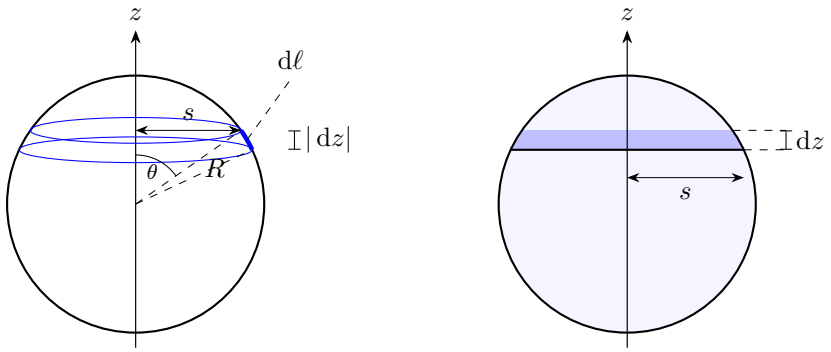


图 1.10: 非均匀杆的线密度与质量微元

图 1.10 中，窄条的面积是 $\lambda(x)\,\mathrm{d}x$，也就是相应杆段的质量。$\eta>0$ 时右端更密，质心偏向右端；$\eta=0$ 时恢复均匀杆的中点。几何条长相等时，密度的改变直接改变了质量权重。

1.3.3　球面细带与实心薄片



薄壳：$\mathrm{d}S = 2\pi s\,\mathrm{d}\ell$　　实体：$\mathrm{d}V = \pi s^2\,\mathrm{d}z$

图 1.11: 薄球面的纬圈带与实心球的水平薄片，分别按面积和体积计质量

图 1.11 左图取薄球面的纬圈带。以球心为原点，极角 θ 从竖直向上量，纬圈半径 $s = R\sin\theta$，高度 $z = R\cos\theta$。对角度求导，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = -R\sin\theta, \qquad |\,\mathrm{d}z| = R\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta|.$$

图 1.12 把纬圈带在经线上的两端 Q, Q' 放大画出。极角增加 $\mathrm{d}\theta > 0$ 时，点从 Q 移到较低的 Q'，球面上的路程为 $R\,\mathrm{d}\theta$，竖直高度的减小量为 $R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。

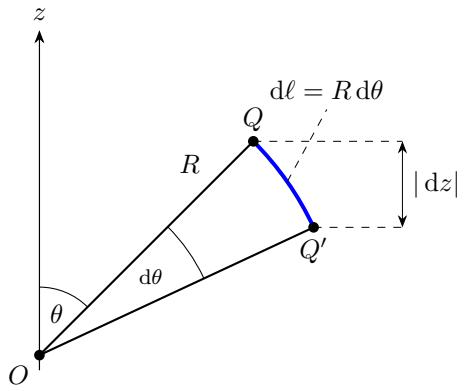


图 1.12: 同一极角增量决定球面弧宽和竖直高度差

因此小带宽为 $\mathrm{d}\ell = R|\,\mathrm{d}\theta|$。纬圈周长乘带宽，给出

$$\mathrm{d}S = 2\pi s\,\mathrm{d}\ell = 2\pi R^2\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta| = 2\pi R|\,\mathrm{d}z|.$$

纬圈越靠近球顶，周长越短，相同竖直高度所对应的斜向带宽越大，两者的乘积保持为 $2\pi R|\,\mathrm{d}z|$。因此等高球带具有相等面积。例 1.5 利用这点，把球冠面积和质心都化成沿高度的积分。

右图材料填满球体，高度 z 处的截面是半径 $s=\sqrt{R^2-z^2}$ 的圆盘，厚度 $\mathrm{d}z$，所以

$$\mathrm{d}V=\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z.$$

例如均匀实心上半球的质量与一阶矩为

$$M=\rho\pi\int_0^R(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\rho\pi\left[R^2z-\frac{z^3}{3}\right]_0^R=\frac{2\rho\pi R^3}{3},$$
$$J_z=\rho\pi\int_0^R(R^2z-z^3)\,\mathrm{d}z=\rho\pi\left[\frac{R^2z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right]_0^R=\frac{\rho\pi R^4}{4}.$$

故 $z_C=J_z/M=3R/8$。薄半球面的质量沿高度均匀分布，其质心为 $R/2$。两者的高低差来自质量分布本身：实体内部较低位置的圆盘承载了更多质量。

1.3.4 球面面积与立体角

平面角可用圆弧长度除以半径定义；立体角描述一束射线向空间张开的程度。以射线起点为球心，取半径 R 的球面，射线截下的球面面积为 S，定义立体角为 $\Omega=S/R^2$。若把球面半径放大 a 倍，相同射线束截下的面积放大 a^2 倍，所以这个比值只与射线束的张开方向有关。

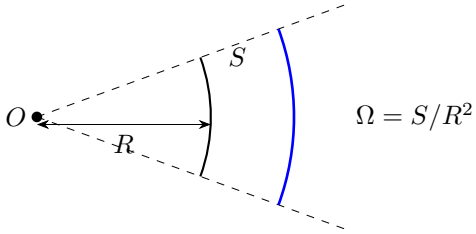


图 1.13: 从同一顶点出发的射线束在球面上截出面积

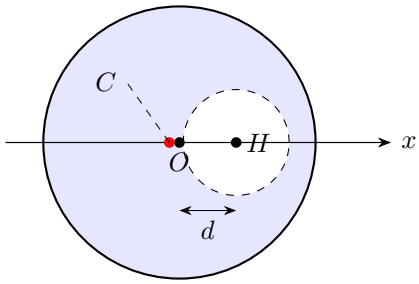
图 1.13 画出射线束的一个剖面。截取整个球面时，面积为 $4\pi R^2$，相应立体角为 4π；半球的立体角为 2π。例 1.5 先求球冠面积，再除以 R^2，就得到它在球心所张的立体角。

1.4　组合、挖孔与系统重排

1.4.1　质量和一阶矩分别相加减

把挖去的部分补回去，剩余板与被挖部分就组成原来的完整板。若完整板质量 M_0、质心 $\boldsymbol{r}_0$，被挖部分质量 m、质心 $\boldsymbol{r}_h$，则

$$(M_0-m)\boldsymbol{r}_C+m\boldsymbol{r}_h=M_0\boldsymbol{r}_0,\qquad \boldsymbol{r}_C=\frac{M_0\boldsymbol{r}_0-m\boldsymbol{r}_h}{M_0-m}.$$



完整：$M_0,\ x_0=0$

孔：$m,\ x_h=d$

剩余：$M_0-m,\ x_C<0$

图 1.14: 孔的一阶矩从完整板中扣除，剩余质心向反侧偏移

图 1.14 取完整板圆心为原点，孔在右方 d 处。补回后的一阶矩为零，所以 $(M_0-m)x_C+md=0$；剩余质心向左偏。例 1.3 把质量换成同密度圆板的面积，练习 1.7 则对完整半圆、挖去半圆和补入半圆分别列出两个坐标。

连续挖补时，同样分别累加带符号的质量和一阶矩。练习 1.8 中，各级圆盘按面积缩小，圆心由共同切点确定；质量级数和一阶矩级数因此有各自的公比。先对有限级数求和，再取级数极限，最后用剩余一阶矩除以剩余质量。

1.4.2　由各部分的位移求质心位移

系统各部分质量保持不变时，初、末两式相减，

$$M\boldsymbol{r}_C'=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i',\quad M\boldsymbol{r}_C=\sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\quad\Longrightarrow\quad M\Delta\boldsymbol{r}_C=\sum_i m_i\Delta\boldsymbol{r}_i.$$

所以只要知道各部分相对同一地面参考系的位移，就能直接求质心位移。练习 1.1 固定最右木块，其余各块的位移由右侧空隙数决定，长度不同的木块仍可按同一质量权重处理。

1.4.3　无穷分布的质量与一阶矩

相似立体的各长度缩为 a 倍，体积及同材质质量缩为 a^3 倍；相似薄板的质量缩为 a^2 倍，细杆缩为 a 倍。这三个比例来自体积、面积和长度的不同几何维度。

若第 n 个物体质量为 m_n、位置为 x_n，先取前 K 个，写 $x_{C,K}=\sum_{n=0}^{K-1} m_n x_n/\sum_{n=0}^{K-1} m_n$。当质量和一阶矩都收敛，$K\to\infty$ 就给出整个分布的质心。练习 1.2 中的立方块边长公比为 $1/2$，质量公比为 $1/8$，高度又包含一个 $1/2$ 的等比项，因此要分别计算两个级数。

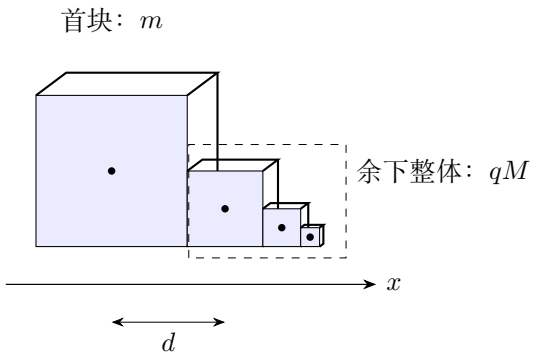


图 1.15: 余下立方块整体缩小并平移，质量和坐标使用不同缩放因子

图 1.15 还展示了直接使用自相似关系的办法。首块质量 m、质心在原点；余下整体相当于把整个原系统按 $x=d+ax'$ 映过去，质量缩为 q 倍。若总质量和质心是 M, x_C，则余项质量为 qM、质心为 $d+ax_C$。由质量及一阶矩的可加性，

$$M=m+qM,\qquad Mx_C=qM(d+ax_C).$$

先解质量 $M=m/(1-q)$，再整理第二式，

$$(1-qa)x_C=qd,\qquad x_C=\frac{qd}{1-qa}.$$

对于图中的同材质实心块，$q=a^3$。长度缩放进入坐标，体积缩放进入质量，两者在一阶矩中相乘。

1.5 弹簧、轻绳和支承的关系

1.5.1 弹力与位移各由什么决定

在线性弹性范围内，一根轻弹簧的轴向弹力与伸长成正比。沿伸长方向取位移 x，弹簧对端点的回复力为 $-kx$。柔绳沿自身方向提供拉力，光滑面沿公法线提供压力；铰链的反力可在平面中分成两个分量。画出这些相互作用后，再分别使用平衡方程和装置的几何关系。

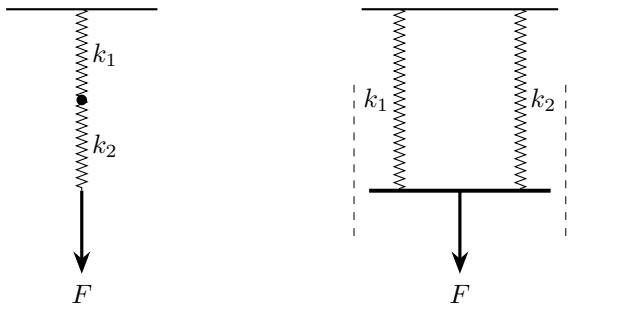


图 1.16: 串联使用相同轴力，并联使用被约束的相同端点位移

图 1.16 左侧，两轻弹簧的连接点平衡，使两段轴力同为 F。胡克定律和位移相加给

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad x = x_1 + x_2 = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right).$$

因此串联的 $1/k_{\mathrm{eq}} = 1/k_1 + 1/k_2$。右侧刚板由导向约束保持水平，只作竖直平移，两端弹簧的伸长同为 x，板的平衡给

$$F = k_1 x + k_2 x, \qquad k_{\mathrm{eq}} = k_1 + k_2.$$

这两种装置分别用相同轴力和相同位移把各弹簧联系起来。例 1.6 中的动滑轮还使绳两端位移与轴位移满足 $2x = x_1 + x_2$，从而得到另一种等效劲度。

均匀弹簧切取原长为整体 a 倍的一段，它包含 a 倍的串联弹性单元，柔度为整体的 a 倍，劲度为 k/a。长度 $\mathrm{d}s$ 的小段因而具有劲度 $kL_0/\,\mathrm{d}s$。若它承受轴力 $T(s)$，伸长为

$$\mathrm{d}\ell = \frac{T(s)}{kL_0}\,\mathrm{d}s, \qquad \Delta L = \frac{1}{kL_0}\int_0^{L_0} T(s)\,\mathrm{d}s.$$

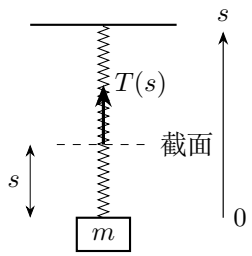


图 1.17: 按原长坐标统计截面下方的弹簧重量

图 1.17 中，弹簧质量为 M_s，下端悬挂质量 m。原长坐标 s 从下端向上量。每个截面的轴力支承下方物体与弹簧段的重量，$T(s) = g(m + M_s s/L_0)$，因而沿

s 线性增大。将各段伸长相加，就等于用轴力图面积除以 kL_0。练习 1.4 改从上端向下量坐标，逐项写出同一质量分布下的轴力和伸长积分。

轻绳绕过轻且光滑的滑轮时，各绳段张力同为 T。动滑轮承受的绳力由实际绳段的方向相加。练习 1.3 中，人手还受到一股绳的向上拉力；选人与平台整体、再单独选人，可依次求拉绳力和脚下压力。例 1.7 则利用零原长弹簧，把每根弹力直接写成从质点指向固定端的位移矢量。

1.6 例题与分析

例 1.1 (均匀三角板的质心)**.** 均匀薄三角板顶点为 $A(0,0), B(b,0), C(p,h)$。求质心，证明它在三条中线交点。

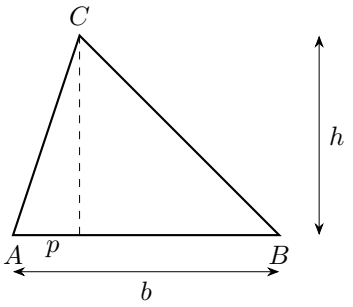


图 1.18: 均匀三角板的质心

解　由相似关系确定水平细条及其中心

图 1.18 给出三个顶点。取距底边高 y、宽 $\mathrm{d}y$ 的水平细条，如图 1.19 中的 LQ。由两侧斜边上的相似关系，左端横坐标为 $x_L = py/h$，右端为 $x_Q = b + (p-b)y/h$。两者相减得条长 $b(1-y/h)$，相加后除以二，得条中心 K 的横坐标 $x_{\mathrm{strip}} = b/2 + (p-b/2)y/h$。

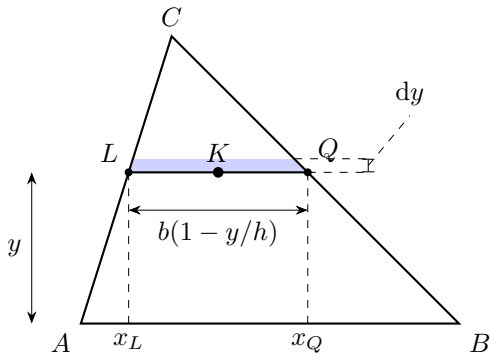


图 1.19: 高 y 处的细条宽为 $\mathrm{d}y$，两端坐标确定条长与条中心

先求竖直一阶矩

图 1.19 中总面积 $S = bh/2$，因此

$$\int_0^h yb(1-y/h)\,\mathrm{d}y = b\int_0^h \left(y - \frac{y^2}{h}\right)\mathrm{d}y = b\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right]_0^h = \frac{bh^2}{6}.$$

再除以总面积，$y_C = (bh^2/6)/(bh/2) = h/3$。

横坐标与三条中线的交点

细条中心的坐标可写为 $x_{\text{strip}} = b/2 + (p - b/2)y/h$，面积微元为 $\mathrm{d}S = b(1 - y/h)\,\mathrm{d}y$。将两者一同代入横向一阶矩，按常数项和一次项分开积分：

$$\begin{aligned} J_x &= \int_0^h \left[\frac{b}{2} + \frac{p - b/2}{h}y\right] b(1-y/h)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{b^2}{2}\left[y - \frac{y^2}{2h}\right]_0^h + \frac{b(p-b/2)}{h}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h}\right]_0^h \\ &= \frac{b^2 h}{4} + \frac{b(p-b/2)h}{6} = \frac{bh(b+p)}{6}. \end{aligned}$$

除以总面积 $S = bh/2$，得 $x_C = (b+p)/3$。结合 $y_C = h/3$，质心坐标等于三个顶点坐标的算术平均。

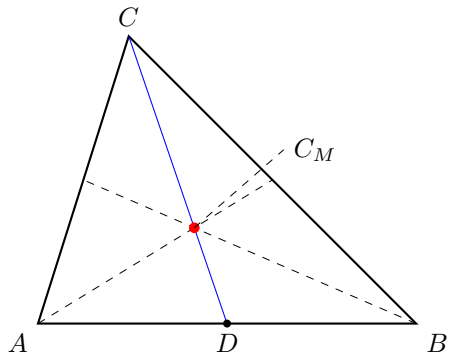


图 1.20: 积分得到的整体质心位于三条中线的交点

图 1.20 中，底边中点 D 的坐标为 $(b/2,0)$。沿 D 指向顶点 (p,h) 的中线前进全长的 $1/3$，坐标为

$$\left(\frac{b}{2},0\right)+\frac{1}{3}\left(p-\frac{b}{2},h\right)=\left(\frac{b+p}{3},\frac{h}{3}\right),$$

正是刚求出的整体质心。它距顶点为中线长度的 $2/3$；对另外两边同样取中点，所得中线也经过这个点。

例 1.2 (三根杆组成的三角框)**.** 三根相同线密度的均匀细杆围成三角形，边 $a=BC, b=CA, c=AB$。求质心的矢量表达式；直角情形取 $A=(0,0), B=(b_0,0), C=(0,a_0)$。

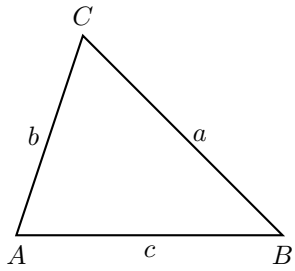


图 1.21: 三根杆组成的三角框

解　把三根杆分别集中在各自中点

图 1.21 每根杆可等效集中在其中点，质量分别为 $\lambda a, \lambda b, \lambda c$。各边中点分别为 $(\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C)/2$、$(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_A)/2$、$(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B)/2$。总质量为 $\lambda(a+b+c)$，一阶矩为对应的质量与中点位矢相乘后相加。约去各项共同的 λ，令周长 $P=a+b+c$，得到

$$\boldsymbol{r}_M=\frac{a(\boldsymbol{r}_B+\boldsymbol{r}_C)+b(\boldsymbol{r}_C+\boldsymbol{r}_A)+c(\boldsymbol{r}_A+\boldsymbol{r}_B)}{2P}.$$

各杆均匀，质心在各自中点；质量则分别按各自杆长分配。

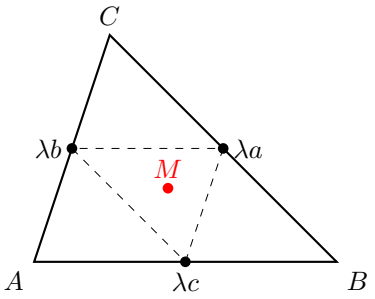


图 1.22: 各杆的中点是等效质量点，质量权重仍按杆长分配

解释边长权重与中位三角形的关系

图 1.22 中的三个中点以对应边长为质量权重。它们组成的中位三角形，其对边长度分别为 $a/2, b/2, c/2$，小三角形内心到三边的距离相等，以它为顶点的三个子三角形面积便与对应边长成正比，给出相同的 $a:b:c$ 加权。因此这个质量中心也是小三角形的内心。

直角三角框的两个质心坐标

直角情形 $c_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$，三根杆的质量权重依次为 b_0, a_0, c_0，对应中点为 $(b_0/2, 0), (0, a_0/2), (b_0/2, a_0/2)$。因此横向一阶矩是 $[b_0^2 + b_0 c_0]/2$，纵向一阶矩是 $[a_0^2 + a_0 c_0]/2$；分别除以总权重 $a_0 + b_0 + c_0$，得到 $x_M = b_0(b_0 + c_0)/[2(a_0 + b_0 + c_0)]$，$y_M = a_0(a_0 + c_0)/[2(a_0 + b_0 + c_0)]$。当 $a_0 = b_0$，两坐标相等，符合对称性。

例 1.3 (偏心圆孔薄板)**.** 半径 R 的均匀圆板挖去半径 r 的圆孔，孔心在原圆心右方 d 处，$d + r \le R$。求剩余板质心。

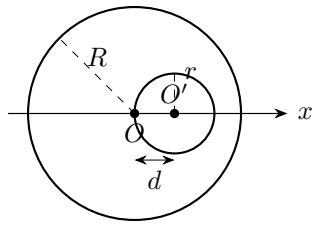


图 1.23: 偏心圆孔薄板

解　统一原点并区分完整板、孔与剩余板

图 1.23 取完整圆心为原点。完整板质量 $\sigma\pi R^2$，孔的质量 $\sigma\pi r^2$、坐标 d。对称性给 $y_C = 0$。设剩余质量为 M_r、孔质量为 M_h。补回圆孔后完整板的质心在原

点，因此 $M_r x_C + M_h d = 0$。所求剩余板的一阶矩由完整板的一阶矩减去圆孔的一阶矩得到。

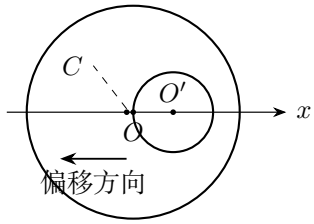


图 1.24: 偏心圆孔薄板

用补回后的零一阶矩求剩余质心

图 1.24 按“剩余加孔等于完整”写一阶矩：

$$\sigma\pi(R^2 - r^2)x_C + \sigma\pi r^2 d = 0, \qquad x_C = -\frac{r^2 d}{R^2 - r^2}.$$

负号表示向孔的反侧移动。$d = 0$ 时仍居圆心；$r \to 0$ 时偏移趋零。题给 $d + r \le R$ 使所减圆孔完整包含在原板内。

例 1.4 (均匀半圆弧与半圆板)**.** 分别求半径 R 的均匀上半圆细弧和上半圆薄板质心距直径的高度。

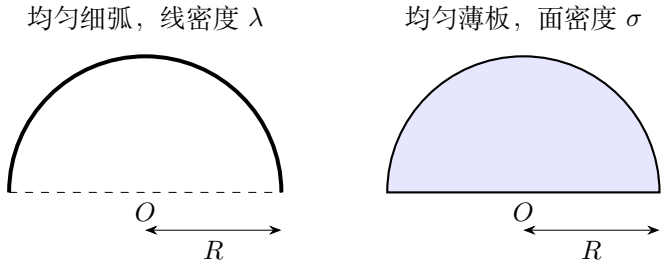


图 1.25: 相同外轮廓分别承载线质量和面质量

解　沿半圆弧采用弧长质量微元

图 1.25 关于竖直轴对称。弧上取角度 θ，$y = R\sin\theta$，$\mathrm{d}m = \lambda R\,\mathrm{d}\theta$，故

$$\int y\ \mathrm{d}m = \lambda R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\ \mathrm{d}\theta = \lambda R^2[-\cos\theta]_0^{\pi} = 2\lambda R^2.$$

弧长为 πR，质量为 $\lambda\pi R$，因此

$$y_{\mathrm{arc}} = \frac{2\lambda R^2}{\lambda\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

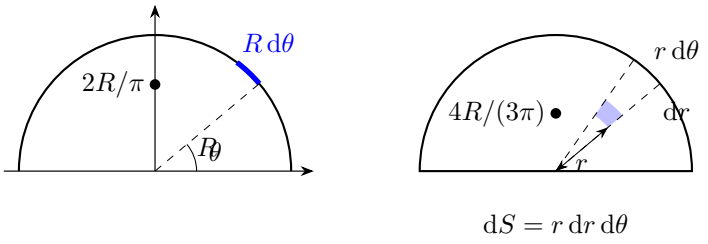


图 1.26: 弧元固定半径，板的极坐标微元还要沿半径积分

改用面积微元计算半圆板

图 1.26 右图的质量分布沿半径从圆心一直延伸到圆周。取 $0 \le r \le R$、$0 \le \theta \le \pi$，每个面积元的高度为 $r\sin\theta$，$\mathrm{d}m = \sigma r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$，于是

$$\begin{aligned}\int y\,\mathrm{d}m &= \sigma\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{R} r^2\,\mathrm{d}r \\ &= \sigma[-\cos\theta]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{R} = \sigma\cdot 2\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{2\sigma R^3}{3}.\end{aligned}$$

薄板质量为 $\sigma\pi R^2/2$，故

$$y_{\text{plate}} = \frac{2\sigma R^3/3}{\sigma\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

薄板的质量更多地分布在靠近直径的内部，故其质心低于半圆弧，结果顺序合理。

例 1.5 (薄球冠的质心)**.** 半径 R 的均匀薄球面，取顶端向下高度为 H 的球冠。求其面积和质心位置，并求它在球心所张的立体角。

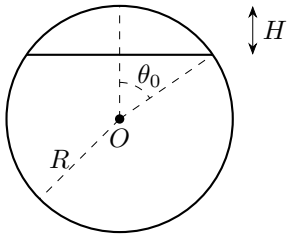


图 1.27: 薄球冠的质心

解　由纬圈几何确定等高球带的面积

图 1.27 以球心为 $z = 0$，球冠范围为 $R - H \le z \le R$。沿用图 1.12 的纬圈几何，球面弧宽与竖直高度元满足 $\mathrm{d}\ell = R|\,\mathrm{d}\theta|$、$|\,\mathrm{d}z| = R\sin\theta|\,\mathrm{d}\theta|$，纬圈半径为 $s = R\sin\theta$。因此 $\mathrm{d}S = 2\pi s\,\mathrm{d}\ell = 2\pi R|\,\mathrm{d}z|$。计算球冠面积时让高度 z 从下缘向顶端递增，取正的 $\mathrm{d}z$，就有 $\mathrm{d}S = 2\pi R\,\mathrm{d}z$。

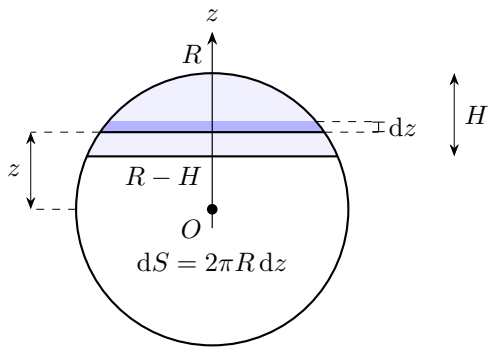


图 1.28: 球冠由高 z 处的球带组成，积分从下缘 $R-H$ 到顶端 R

积分球带的一阶矩求面积与质心

图 1.28 等高球带面积相等，因此

$$S = 2\pi R \int_{R-H}^{R} \mathrm{d}z = 2\pi R[z]_{R-H}^{R} = 2\pi RH.$$

面积一阶矩中的积分为

$$\int_{R-H}^{R} z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{R-H}^{R} = \frac{R^2-(R-H)^2}{2} = RH - \frac{H^2}{2}.$$

面密度 σ 在质量与一阶矩中约去，因此

$$z_C = \frac{2\pi R(RH - H^2/2)}{2\pi RH} = R - \frac{H}{2}.$$

用径向面积换算立体角

球冠边缘满足 $H = R(1-\cos\theta_0)$。因球面上每个面元都与径向垂直，球心立体角 $\Omega = S/R^2 = 2\pi H/R = 2\pi(1-\cos\theta_0)$。球带面积沿高度均匀分配，所以薄球冠的质心恰位于其高度的中点。

例 1.6 (动滑轮与两弹簧的静伸长)**.** 两轻弹簧劲度 k_1, k_2，由跨过轻动滑轮的轻绳连接。初始无载荷，轴下挂重物 G，求滑轮下降距离及等效劲度。

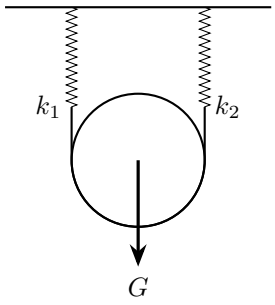


图 1.29: 动滑轮与两弹簧的静伸长

解　隔离轻滑轮求张力和两弹簧伸长

图 1.29 中滑轮受两段张力支持，$2T = G$。两弹簧伸长分别为 $x_1 = T/k_1$、$x_2 = T/k_2$。张力求出后先分别应用胡克定律，$x_1 = G/(2k_1)$、$x_2 = G/(2k_2)$。这两个伸长就是绳两端的下降量，接下来用绳长关系求滑轮轴的下降量 x。

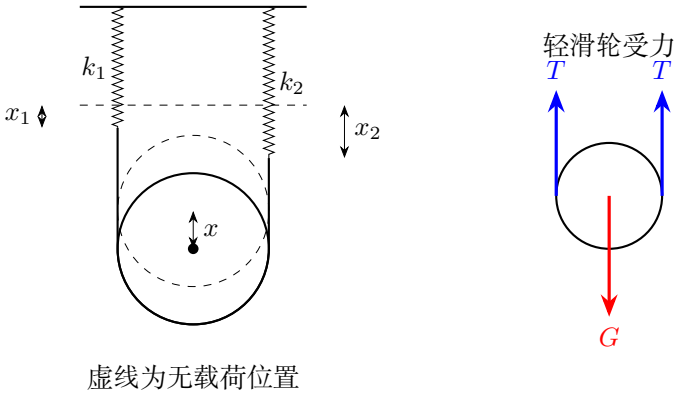


图 1.30: 两端下降量的和补偿滑轮下降引起的两段绳长增加

把端点位移与轴心位移联系起来

图 1.30 由绳长约束，轴下降 x 使两绳直段总长度增加 $2x$，须由两弹簧端下降补偿，所以 $2x = x_1 + x_2$。于是

$$x = \frac{G}{4}\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right), \qquad k_{\text{eq}} = \frac{G}{x} = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

系数四由 $G = 2T$ 和 $2x = x_1 + x_2$ 这两种二倍关系共同给出。

例 1.7 (三个零原长弹簧的合力)**.** 三个劲度均为 k、原长可忽略的轻弹簧，固定端在圆周三等分点 A, B, C，另一端连在圆内质点 P。求弹簧合力。

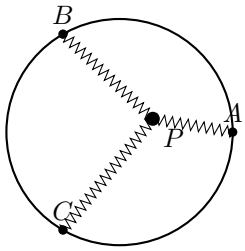


图 1.31: 三个零原长弹簧的合力

解　利用零原长把弹力写成位移矢量

图 1.31 以圆心为原点，固定端的位置矢量记为 $\boldsymbol{r}_i$，质点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_P$。设第 i 根弹簧长度为 ℓ_i、从 P 指向固定端的单位向量为 $\boldsymbol{e}_i$。零原长时 $\boldsymbol{F}_i = k\ell_i\boldsymbol{e}_i$，而 $\ell_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_P$，所以长度和单位向量的乘积可直接合并为位移矢量。三等分固定点关于圆心对称，其位置矢量和为零。

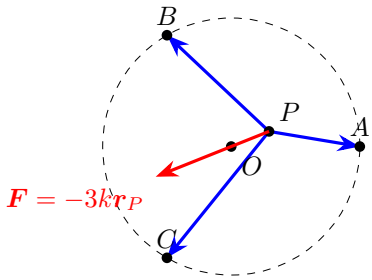


图 1.32: 三根弹力从同一点作矢量和，合力指向圆心

用固定端对称性合成三弹力

图 1.32 中三等分点满足 $\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C = 0$，故

$$\boldsymbol{F} = k(\boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_B + \boldsymbol{r}_C - 3\boldsymbol{r}_P) = -3k\boldsymbol{r}_P.$$

合力始终指向圆心。相应的合力大小为 $3k\,OP$，在 $P = O$ 时为零。

1.7　本讲小结

质心由质量及一阶矩确定。先识别质量沿线、面还是体分布，选对应微元；分块与挖补分别累加质量和一阶矩。弹性装置再用受力平衡和几何约束联系力与位移。

1.8 练习

练习 1.1 (移动木块的质心变化)**.** N 个等质量木块从左到右排列，相邻端面间空隙均为 l，长度可不同。保持最右木块不动，其余向右移到无空隙相接。求系统质心位移。

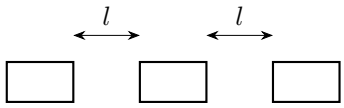


图 1.33: 初态各相邻木块的端面空隙均为 l

练习 1.2 (无限叠放立方块的质心)**.** 同材质立方块依次叠放，边长为 $l, l/2, l/4, \ldots$，各块水平中心对齐。求系统质心距底面的高度。

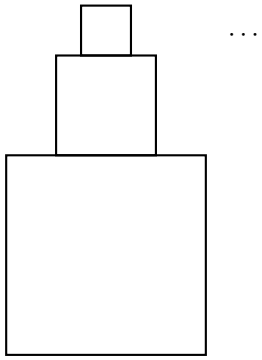


图 1.34: 实心立方块边长逐次减半，各块水平中心对齐

练习 1.3 (升降平台上的人拉绳)**.** 人质量 60 kg，平台质量 30 kg。绳一端固定天花板，向下绕过平台上的轻动滑轮，再向上跨过天花板轻定滑轮，自由端由平台上的人向下拉。系统静止，求手的拉力及人对平台压力。

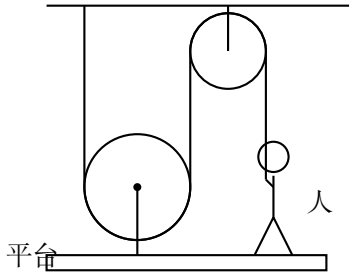


图 1.35: 动滑轮连在平台上，自由绳端由人手拉住

练习 1.4 (弹簧自重引起的伸长)**.** 均匀弹簧质量 m、原长 l、整体劲度 k，竖直悬挂，下端自由。求自重伸长；若再挂质量 M 的物体，伸长变为多少?

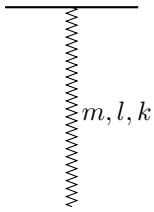


图 1.36: 上端固定、下端自由的有质量弹簧

练习 1.5 (正六边形中的五个力)**.** 从正六边形顶点 O 向其余五个顶点作矢量，五个力与这些矢量成同一比例。到对顶点的力为 $F_3 = 10\,\mathrm{N}$，求合力。

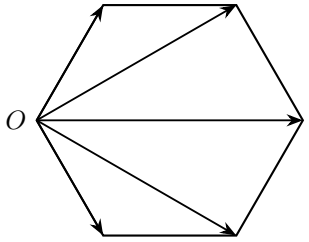


图 1.37: 五个力与从 O 出发的五条有向线段成同一比例

练习 1.6 (奇数质量列球的质心)**.** N 个直径 d 的球相切排成一线，质量依次 $m, 3m, \ldots, (2N-1)m$。取第一个球心为原点，求质心；代入 $N = 500, d = 3\,\mathrm{cm}$。

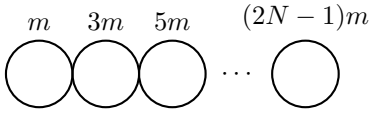


图 1.38: 球心间距为 d，质量从左到右依次增加

练习 1.7 (阴阳形组合板的质心)**.** 半径 $2r$ 的均匀下半圆板，以直径左半段为直径，挖去半径 r 的下半圆，再在直径右半段上补入半径 r 的上半圆。求组合板质心，原点取大圆心。

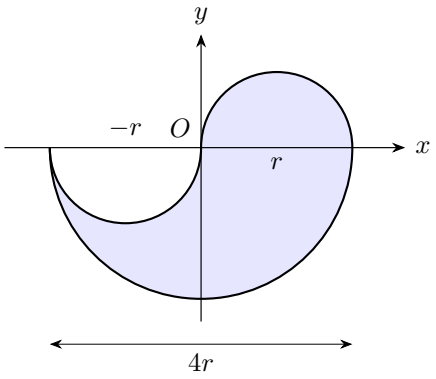


图 1.39: 阴阳形组合板中留下的材料用浅色表示

练习 1.8 (逐次内切挖补的圆板)**.** 均匀圆板半径 R、圆心原点。向右内切一半径 $R/2$ 的圆盘并挖去，再在其中放回右内切、半径 $R/4$ 的同密度圆盘，如此交替挖补。求剩余图形的质心。

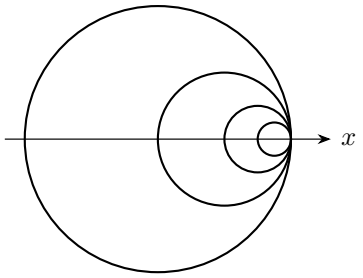


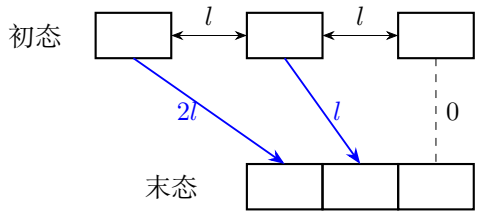
图 1.40: 各级圆盘半径逐次减半，并在右端相切

练习解答

练习 1.1

解　由右侧空隙确定各块位移

图 1.33 中固定最右块。从右向左数，第 j 块的右侧有 $j-1$ 个空隙；把这些空隙闭合，它向右的位移就是 $\Delta x_j = (j-1)l$。这个计数由端面之间的空隙确定。



$N=3$ 时质心右移 l

图 1.41: 固定右端后的三块示意：各块位移分别为两个、一个和零个空隙

把各块位移按质量平均

图 1.41 将初、末位置放在一起。设每块质量为 m，初、末质心式相减，原来各块的坐标项逐项消去：

$$\begin{aligned}\Delta x_C &= \frac{\sum_{j=1}^{N} m(x_j+\Delta x_j)-\sum_{j=1}^{N} m x_j}{Nm}\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\Delta x_j = \frac{l}{N}\sum_{j=1}^{N}(j-1)\\ &= \frac{l}{N}\frac{N(N-1)}{2} = \frac{(N-1)l}{2}.\end{aligned}$$

所以质心向右移动 $(N-1)l/2$。

练习 1.2

解　分别写出高度序列与质量序列

图 1.34 第 n 块从 $n=0$ 编号，边长为 $l/2^n$。第 n 块以下各块的总高为有限等比和

$$l\sum_{j=0}^{n-1}2^{-j} = l\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 2l(1-2^{-n}).$$

再加本块半高 $l/2^{n+1}$，得到 $z_n = 2l-\frac{3}{2}l\,2^{-n}$。质量依体积缩小，$m_n/m_0=(2^{-n})^3=8^{-n}$；因此高度与质量使用的是不同公比。

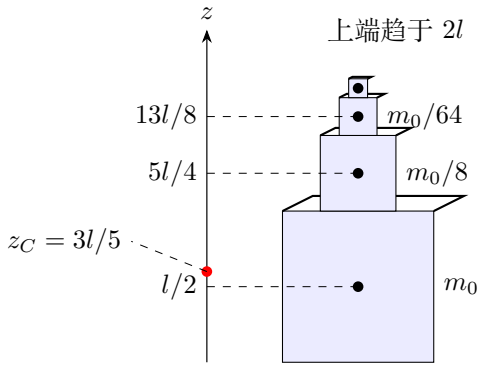


图 1.42: 逐层高度与立方体积质量分别进入一阶矩

对两个收敛级数分别求和

图 1.42 中，先对前 K 块求和再取极限。记 $S_K(q)=1+q+\cdots+q^{K-1}$，两边乘以 $1-q$ 后中间项抵消，得到 $S_K(q)=(1-q^K)/(1-q)$。这里的两个公比分别为 $1/8, 1/16$，均在零与一之间，故 $q^K\to 0$。因此

$$M = m_0 \lim_{K\to\infty} S_K(1/8) = \frac{m_0}{1-1/8} = \frac{8m_0}{7},$$

$$\begin{aligned} J_z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_0}{8^n}\left(2l - \frac{3l}{2\cdot 2^n}\right) \\ &= 2lM - \frac{3m_0 l}{2}\lim_{K\to\infty} S_K(1/16) = 2lM - \frac{3m_0 l}{2}\frac{16}{15}. \end{aligned}$$

最后用一阶矩除以质量：$z_C = J_z/M = 2l - \frac{3}{2}l(16/15)(7/8) = 2l - 7l/5 = 3l/5$。质心稍高于底块中心 $l/2$，且远低于总高度 $2l$，符合上层质量迅速减小的特点。

练习 1.3

解　人与平台整体受到的三股绳力

图 1.35 动滑轮给平台 $2T$ 向上，人手受绳 T 向上。将人与平台整体选为对象，外部总向上力为 $3T$。对人与平台整体，脚与平台间的相互作用作为内力相消。动滑轮两侧各有一股向上的 T，人手另受向上的 T，三股力共同支承 $90g$。随后隔离人，以脚下支持力、手上绳力和重力三个力求压力。

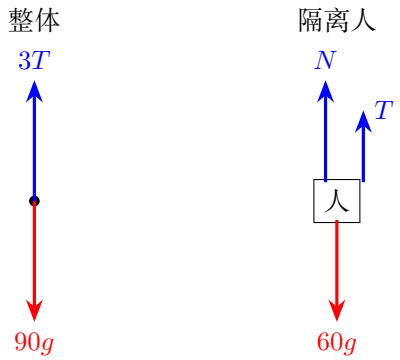


图 1.43: 先取人与平台整体，再隔离人，两个对象承受的绳力不同

先求绳力，再隔离人求脚下支持力

图 1.43 得 $3T=(60+30)g$，所以 $T=30g$，取 $g=10$ 得 300 N。再单独取人，$N+T=60g$，故 $N=30g=300\,\mathrm{N}$。平台方程 $2T=N+30g$ 也满足。三股外部绳力及人脚处的一对相互作用，在两个受力图中各有明确的归属。

练习 1.4

解　在原长坐标中求截面轴力与局部劲度

图 1.36 用未伸长坐标 s 从顶端向下量，截面张力为 $T(s)=[M+m(1-s/l)]g$。长度 $\mathrm{d}s$ 的小段劲度为 $kl/\,\mathrm{d}s$，所以伸长 $\mathrm{d}x=T(s)\,\mathrm{d}s/(kl)$。均匀弹簧切成许多串联小段，总柔度为各段柔度之和；原长 $\mathrm{d}s$ 的小段柔度为整体的 $\mathrm{d}s/l$ 倍，故 $1/k_s=\mathrm{d}s/(kl)$。截面下方弹簧质量为 $m(l-s)/l$，将这一质量与末端所挂 M 相加，得到随 s 线性变化的张力。

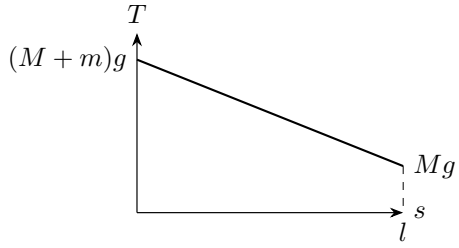


图 1.44: 弹簧自重引起的伸长

用轴力图面积积分伸长

图 1.44 将张力沿长度积分，

$$\begin{aligned}\Delta l &= \frac{g}{kl}\int_0^l \left(M+m-\frac{ms}{l}\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{g}{kl}\left[(M+m)s-\frac{ms^2}{2l}\right]_0^l \\ &= \frac{g}{kl}\left[(M+m)l-\frac{ml}{2}\right] = \frac{Mg}{k}+\frac{mg}{2k}.\end{aligned}$$

不挂物体时 $M=0$，得到 $mg/(2k)$。弹簧上端承担全部重力、下端张力为零，平均张力为 $mg/2$，其面积给出同一伸长。

练习 1.5

解　由对顶点确定力与线段的比例

图 1.37 中，设六边形边长为 a，每个力与对应有向线段的比例为 c_F。从 O 到对顶点的长度是 $2a$，故 $c_F(2a)=F_3$，得到 $c_F=F_3/(2a)$。

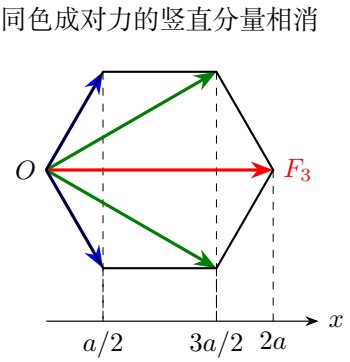


图 1.45: 五个有向线段先作正交投影，再按同一比例换算为力

合成竖直分量与水平分量

图 1.45 以 O 为原点，沿对顶点方向取 x 轴。四个斜向力两两关于 x 轴对称，竖直分量相消。五条有向线段的横投影依次为 $a/2, 3a/2, 2a, 3a/2, a/2$，因此

$$\begin{aligned}F_x &= c_F\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}+2a+\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}\right) \\ &= 6ac_F = 6a\frac{F_3}{2a} = 3F_3 = 30\,\mathrm{N}.\end{aligned}$$

合力沿 O 指向对顶点。

练习 1.6

解　统一球心坐标并求总质量

图 1.38 第 i 球心 $x_i=(i-1)d$，质量 $(2i-1)m$。分母 $\sum(2i-1)m=N^2m$。

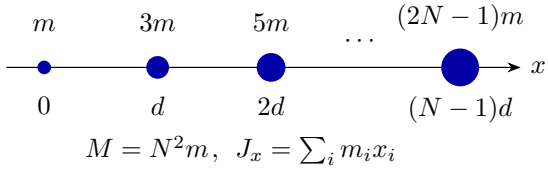


图 1.46: 球心间距相同，质量权重从左到右增加

展开位置与奇数质量的乘积再求和

在图 1.46 的一阶矩中，先展开 $(2i-1)(i-1)=2i^2-3i+1$。把 $\sum i=N(N+1)/2$ 和 $\sum i^2=N(N+1)(2N+1)/6$ 代入，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)(i-1)&=2\sum_{i=1}^{N}i^2-3\sum_{i=1}^{N}i+N\\&=\frac{N(N+1)(2N+1)}{3}-\frac{3N(N+1)}{2}+N\\&=\frac{N}{6}[2(N+1)(2N+1)-9(N+1)+6]\\&=\frac{N}{6}(4N^2-3N-1)=\frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.\end{aligned}$$

分子还须乘 md，分母为 N^2m，约去 mN，因此 $x_C=d(N-1)(4N+1)/(6N)$。给定数值为 $998.499\,\mathrm{cm}$。这里的距离从第一个球心量起，朝质量增加的方向为正。

练习 1.7

解　列出三部分的带符号面积和质心

图 1.39 中大半圆面积 $2\pi r^2$，质心 $(0,-8r/(3\pi))$；挖去小半圆面积 $\pi r^2/2$，质心 $(-r,-4r/(3\pi))$；补上小半圆面积相同，质心 $(r,4r/(3\pi))$。

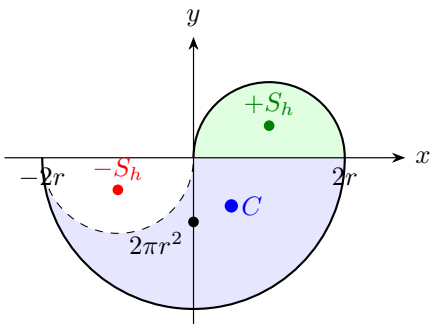


图 1.47: 在同一坐标系标出完整半圆、被挖半圆和补入半圆的一阶矩位置

组合板的两个一阶矩与质心坐标

图 1.47 对面积一阶矩加减，总面积为 $S = 2\pi r^2 - \pi r^2/2 + \pi r^2/2 = 2\pi r^2$。先分别计算两个一阶矩：

$$\begin{aligned} J_x &= 0 - \frac{\pi r^2}{2}(-r) + \frac{\pi r^2}{2} r = \pi r^3, \\ J_y &= 2\pi r^2 \left(-\frac{8r}{3\pi}\right) - \frac{\pi r^2}{2}\left(-\frac{4r}{3\pi}\right) + \frac{\pi r^2}{2}\frac{4r}{3\pi} \\ &= -\frac{16r^3}{3} + \frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3} = -4r^3. \end{aligned}$$

再除以总面积，得到

$$x_C = \frac{J_x}{S} = \frac{\pi r^3}{2\pi r^2} = \frac{r}{2}, \qquad y_C = \frac{J_y}{S} = \frac{-4r^3}{2\pi r^2} = -\frac{2r}{\pi}.$$

横向结果向补入侧偏移。挖去下方的小半圆和补入上方的小半圆，都使纵向一阶矩增加，质心也随之升高。

练习 1.8

解　从共同切点确定各级圆心与面积符号

图 1.40 第 n 个圆盘半径 $R/2^n$，圆心 $x_n = R(1 - 2^{-n})$，带符号面积 $\pi R^2(-1/4)^n$。同材质薄板的质量随面积按 4^{-n} 缩小。从 $n = 0$ 的完整大圆开始，奇数级挖去、偶数级补回，所以符号为 $(-1)^n$。每级圆心到右端公共切点 $x = R$ 的距离等于本级半径，故 $x_n = R - R/2^n$。乘上一阶矩时，一个因子来自面积 4^{-n}，另一个来自坐标中的 2^{-n}，这正是第二个公比 $-1/8$ 的原因。

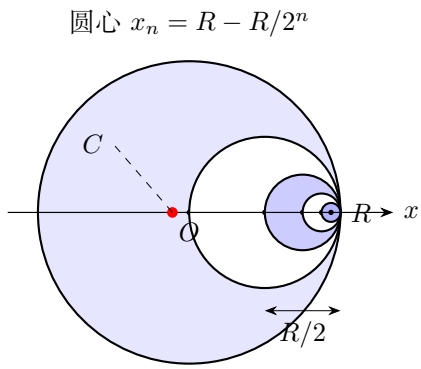


图 1.48: 逐级半径、圆心和符号均由共同内切点确定

求两个等比级数并除以剩余面积

图 1.48 中，对 $0 < q < 1$ 先计算前 $K+1$ 项，

$$\sum_{n=0}^{K}(-q)^n = \frac{1-(-q)^{K+1}}{1+q} \longrightarrow \frac{1}{1+q}.$$

取 $q = 1/4$，总面积为 $S = \pi R^2/(1+1/4) = 4\pi R^2/5$。面积与坐标相乘产生的两个公比为 $-1/4, -1/8$，分别使用同一极限公式，一阶矩为

$$J = \pi R^3\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1/4)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1/8)^n\right] = \pi R^3\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{9}\right).$$

括号内通分为 $4/5 - 8/9 = -4/45$，故 $x_C = J/S = R(-4/45)/(4/5) = -R/9$，$y_C = 0$。挖去区域主要在右侧，负的偏移方向合理；两级数均绝对收敛。

静力学

物理竞赛一轮讲义

第二讲

共点力与刚体平衡

2026

目录

第二讲　共点力与刚体平衡 **1**

2.1　外力与外力矩怎样决定刚体的平衡 1

2.2　力臂与取矩点 3

2.3　三力平衡与节点受力 5

2.4　最小外力的几何意义 6

2.5　接触几何与球、杆体系 8

2.6　匀速相对滑动中的摩擦 9

2.7　多点支承与形变条件 10

2.8　例题与分析 11

2.9　本讲小结 22

2.10 练习 22

练习解答 24

第二讲　共点力与刚体平衡

2.1　外力与外力矩怎样决定刚体的平衡

2.1.1　分别研究平动与转动

静止刚体保持位置和姿态。由质心运动定理，合外力为零时质心速度保持不变，初始静止的质心就保持静止。为了同时维持姿态，还要使外力对转动的总作用为零。对固定轴转动，动力学方程为 $I\,\mathrm{d}\omega/\,\mathrm{d}t = M$；初始角速度为零且合外力矩为零时，角速度持续为零。

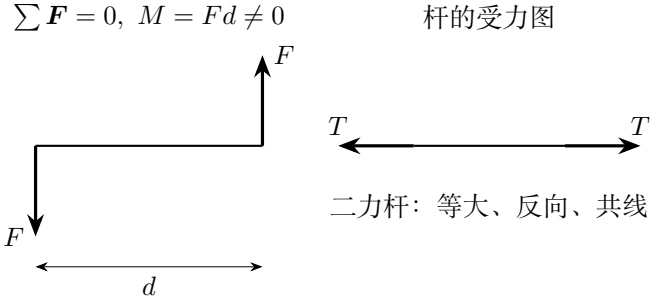


图 2.1: 异线反向力组成力偶，共线反向力使二力杆平衡

图 2.1 左图的两个力等大反向，合力为零，作用线相隔 d，仍形成逆时针力偶矩 Fd。右图两个力等大反向且共线，它们的合力和合力矩同时为零。若一根杆仅在两端受力、杆重可忽略，它的平衡就要求端部两力沿同一条杆轴线，这样的杆称为二力杆。杆上另有中间载荷时，把各载荷和端部反力都画出，再用刚体条件求解。

所有外力及其作用点位于同一平面时，取平面中的 x, y 轴，逆时针力矩为正，有

$$\sum_i F_{ix} = 0, \qquad \sum_i F_{iy} = 0, \qquad \sum_i (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \tag{2.1}$$

第三式中，x_i, y_i 都是相对所选取矩点的坐标。这三式分别规定两个平动方向和一个转动方向的平衡。

2.1.2　把实际装置化为可解的受力模型

力来自物体间的作用。铰链、光滑接触面、粗糙面和绳各有确定的传力方向或取值范围；把装置中的这些作用画在隔离物体上，才得到具体平衡方程。选择整体可以先消去内部接触力，选择某一部分则能求出这些接触力。

图 2.2 给出最基本的梯子模型：均匀杆 AB 靠在光滑竖墙上，地面粗糙，杆与水平夹角为 θ，重 G。墙对杆的力 N_B 水平向右，地面提供竖直支持 N_A 和水平向左的摩擦 f。关于 A 取矩，地面两力的力臂为零：

$$N_B - f = 0, \qquad N_A - G = 0,$$
$$G\frac{L}{2}\cos\theta - N_B L\sin\theta = 0.$$

由后式得 $N_B = (G/2)\cot\theta$，再得 $f = (G/2)\cot\theta$、$N_A = G$。静摩擦可提供 $f \le \mu_s N_A$，因而 $\tan\theta \ge 1/(2\mu_s)$。杆越接近竖直，墙的推力与所需地面摩擦越小。

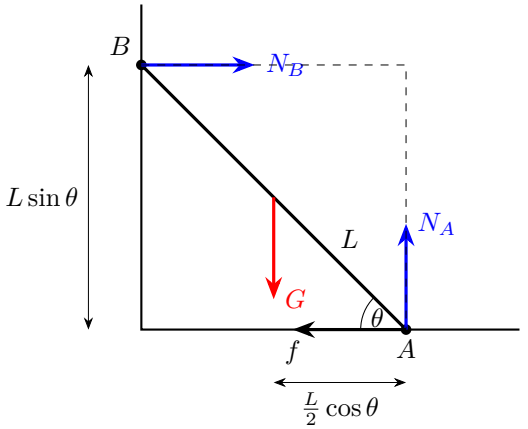


图 2.2: 梯子受力及重力、墙力关于地面接触点的力臂

图 2.2 中的竖直虚线和尺寸线分别对应两个力臂。后面的三力平衡、最小外力及多点接触，继续使用同样的合力与力矩条件；几何关系和接触条件使各题具有不同的反力分配。

2.1.3　整体、节点和单个物体

选几个相互接触的物体为整体时，它们之间的内力成对相消；选其中一个物体时，接触处的作用力就成为这个物体的外力。两种选取把同一相互作用放在不同方程中，常可前后配合求解。

例如例 2.7，先隔离悬挂物块，用重力和水平外力求绳力的两个分量；再隔离节点，把绳在节点一端的作用画成相反方向，求两根杆的拉压。练习 2.7 先取三个圆柱求墙的反力，再把板也纳入整体，用力矩平衡求拉绳力。

柔绳的张力沿绳指向另一端，接触面的压力沿公法线指向物体内部，二力杆则可沿轴线拉，也可沿轴线推。计算中若把杆力统一设为拉力，正值给出拉伸，负值给出受压。对于保持接触的表面，法向力取 $N \geq 0$；静摩擦由平衡所需值决定，并满足 $|f| \leq \mu_s N$。这些力的取值范围与平衡方程共同确定可实现的构型。

2.2 力臂与取矩点

2.2.1 从作用线作垂直力臂

力的作用点相对 O 的位矢为 $\boldsymbol{r}$，力矩为 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$。在平面中，若夹角为 γ，力矩的大小是 $rF|\sin\gamma|$。把 $r|\sin\gamma|$ 写成从 O 到力作用线的垂距 $d_\perp$，便得到熟悉的 $Fd_\perp$。

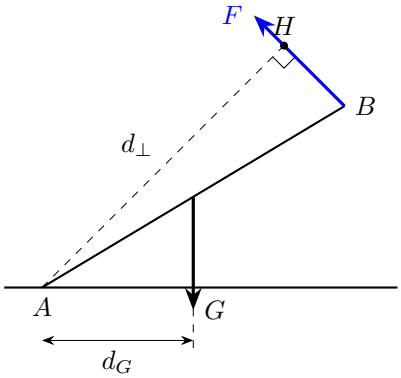


图 2.3: 斜拉力的力臂是垂距，重力的力臂是水平投影

图 2.3 的 AH 垂直于拉力作用线，所以拉力关于 A 的矩为 $F\,AH$。重力作用线竖直，其力臂为 A 到质心竖线的水平距离 d_G。例 2.1 的绳力和重力都竖直，两个力臂因此分别是整杆和半杆的水平投影。

取矩点可以放在未知反力的作用线上，该力的力臂随之为零。若两股未知反力的作用线相交，选交点取矩，两者可同时从力矩式中消去。靠墙梯子的求解也用这一方法：先由水平、竖直平衡联系反力，再选合适的取矩点，写出重力与接触力的力臂。

2.2.2　改变取矩点的关系

从原点 O 改到 O'，记 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OO'}$。各力作用点的新位矢为 $\boldsymbol{r}_i'=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{a}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{O'}&=\sum_i(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{F}_i\\&=\sum_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i-\boldsymbol{a}\times\sum_i\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{M}_O-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{R},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{R}=\sum_i\boldsymbol{F}_i$。平衡时 $\boldsymbol{R}=0$，故关于各点的总力矩相同；关于其中一点为零，就关于各点都为零。实际列式时仍配合式(2.1)的两个力分量条件。

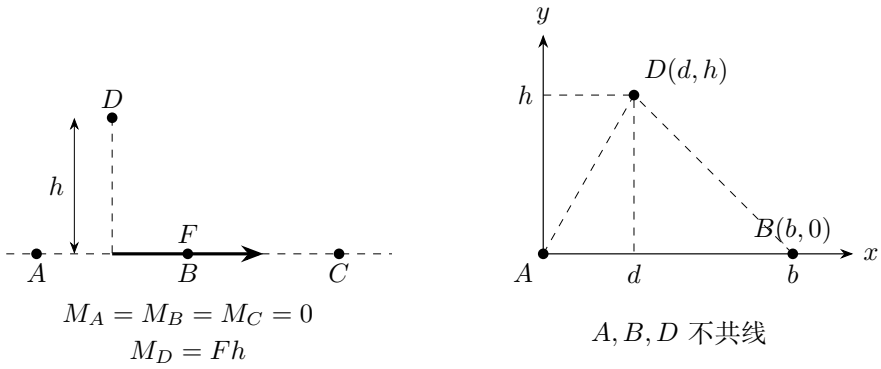


图 2.4: 共线点的取矩关系与三个不共线的取矩点

图 2.4 左图的合力沿 A,B,C 所在直线。关于这三个点的矩都为零，关于线外 D 的矩却是 Fh。右图选 A,B,D 三个不共线点，下面用它们说明三个取矩条件怎样同时确定合力与合力矩。

对一般平面力系，记合力为 $\boldsymbol{R}=(R_x,R_y)$，关于 A 的总矩为 M_A。以 A 为原点，取 $B=(b,0),D=(d,h)$，其中 $b\neq0,h\neq0$。由换点关系，

$$\begin{aligned}M_B&=M_A-(b,0)\times(R_x,R_y)=M_A-bR_y,\\M_D&=M_A-(d,h)\times(R_x,R_y)=M_A-dR_y+hR_x.\end{aligned}$$

这里的叉积取垂直纸面的带符号分量。若三点的总矩都为零，第一式给 $bR_y=0$，所以 $R_y=0$；再代入第二式，得到 $hR_x=0$，所以 $R_x=0$。这样两个合力分量与总力矩同时为零。反过来，合力与关于一点的总矩为零时，换点关系使其余各点的总矩也为零。因此，关于三个不共线点的取矩条件，与式(2.1)的三个平衡条件等价。

在特殊姿态下，某些力臂会消失。例 2.1 的杆处于非竖直位置时，可由水平投影求出绳力和地面反力；杆恰竖直时，三股竖直力的作用线重合，静力关系只留下竖直力之和。支承形变或预紧等装置条件，才会进一步分配这些力。

2.3 三力平衡与节点受力

2.3.1 作用线的交点与力三角形

平面刚体受三个非平行力而平衡时，任选两力作用线的交点 P。关于 P 取矩，这两力的矩为零，第三力的矩也为零，故第三力的作用线通过 P。这样先由刚体的转动条件找到了作用线共点关系。

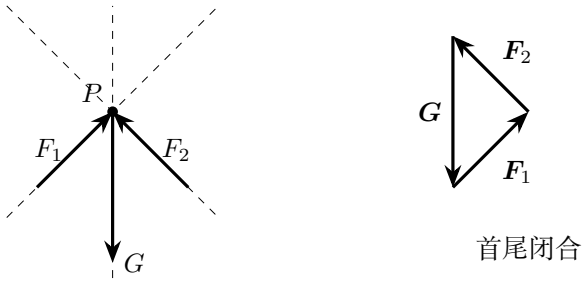


图 2.5: 作用线共点，闭合力三角形确定各力大小

图 2.5 左图给出三条作用线的共同交点，右图把三力按首尾相接画成闭合三角形，对应

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{G} = 0.$$

前者确定方向间的几何联系，后者确定力的大小。三个力都竖直时，可直接用水平力臂求其大小分配，例 2.1 就是这种情形。

球与光滑面接触，法向力沿接触处的公法线；球与球接触，法向力沿两球心连线。例 2.4 先将左右斜面的倾角转成法线与竖直的夹角，再用两个投影消去支持力。例 2.8 的接触力还含摩擦，把法向与切向合成后，其作用线需与重力的作用线重合，这个条件给出偏心球的空间姿态。

2.3.2　从一个节点把杆力传到另一个节点

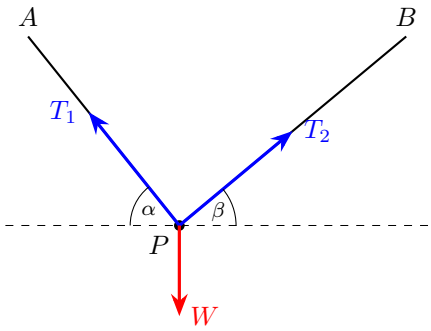


图 2.6: 两杆的水平分量相消，竖直分量共同支承节点载荷

图 2.6 中，两轻杆在节点 P 支承向下的载荷 W。先取杆对节点的作用沿 PA, PB，角度 α, β 均从水平线量起。两个方向的平衡是

$$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta, \qquad T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = W.$$

由第一式 $T_2 = T_1 \cos\alpha / \cos\beta$，代入第二式，并乘 $\cos\beta$，

$$T_1(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = W\cos\beta,$$
$$T_1 \sin(\alpha+\beta) = W\cos\beta.$$

因此

$$T_1 = \frac{W\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad T_2 = \frac{W\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

两角相等时，两力相等；杆越接近水平，同一轴力的竖直分量越小，支承给定载荷所需轴力便越大。这个几何解释直接对应式中的小分母。

杆 AP 对节点的力沿 PA，节点对杆的力沿 AP。将这一对作用反作用分别画到节点和杆的图上，就可把一个节点求出的轴力传给相邻节点。例 2.2 先解节点 C 的水平杆力，再在 D 点求维持装置的最小外力。

2.4　最小外力的几何意义

2.4.1　从固定方向的反力出发

若已知合外力为 $\boldsymbol{G}$，另一股作用沿固定单位向量 $\boldsymbol{e}$，大小为 λ，为平衡而增加的力是

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{G} - \lambda\boldsymbol{e}.$$

把 $\overrightarrow{OK} = -\boldsymbol{G}$ 画定，$\lambda\boldsymbol{e}$ 的端点沿给定方向移动，端点到 K 的有向线段就是 $\boldsymbol{F}$。最小外力对应这条线段最短。

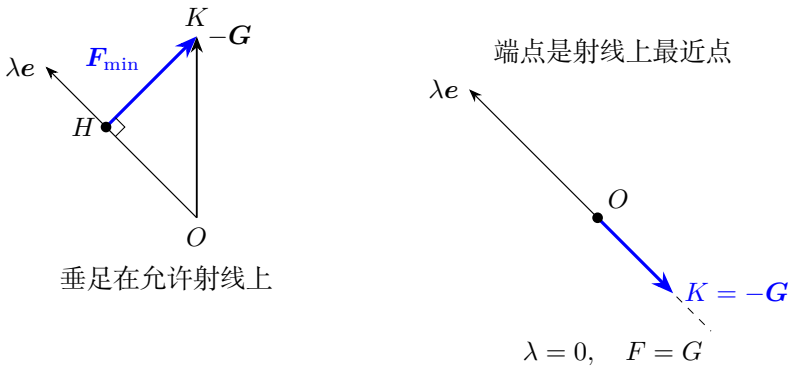


图 2.7: 允许方向上的最近点决定最小外力

图 2.7 左图中，垂足 H 位于允许射线上，故最小外力垂直于反力方向。右图中，K 在反向延长线上，射线上离它最近的是起点 O，对应反力为零。这两种几何情形都可以从同一个代数式得到。

平方并展开，固定 $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{e}$，对 λ 求导，

$$F^2 = G^2 + 2\lambda \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e} + \lambda^2,$$
$$\frac{\mathrm{d}F^2}{\mathrm{d}\lambda} = 2\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e} + 2\lambda, \qquad \frac{\mathrm{d}^2F^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = 2 > 0.$$

极小点为 $\lambda_* = -\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}$。若反力为绳张力或光滑面的压力，取值限定为 $\lambda \geq 0$：$\lambda_* \geq 0$ 时取垂足，$\lambda_* < 0$ 时取端点 $\lambda = 0$。若杆件允许拉压，λ 则可随轴向作用取正或取负。

2.4.2 固定投影与最优方向

把已知重力分解到某一允许方向及其法线，常能先找出另一股力所提供的固定投影。矢量大小至少等于这个投影的绝对值，方向与投影方向重合时取得等号。练习 2.6 中，斜面支持力垂直斜面，挡板力要提供全部的沿面上坡分量 $G\sin\beta$，其最小值由这一固定投影确定。

若施力点 P 固定，绕 O 需要提供力矩 M，有 $F\,OP|\sin\gamma| = |M|$。施力方向可自由选择时，力垂直 OP 使力臂最大，所需力为 $|M|/OP$。求得该方向后，将它的分量代回其余约束的平衡式，就得到相应支承力。练习 2.5 中的斜向拉箱，则由法向力与摩擦的共同改变形成另一个角度最优化问题。

2.5 接触几何与球、杆体系

2.5.1 从球心连线确定方向

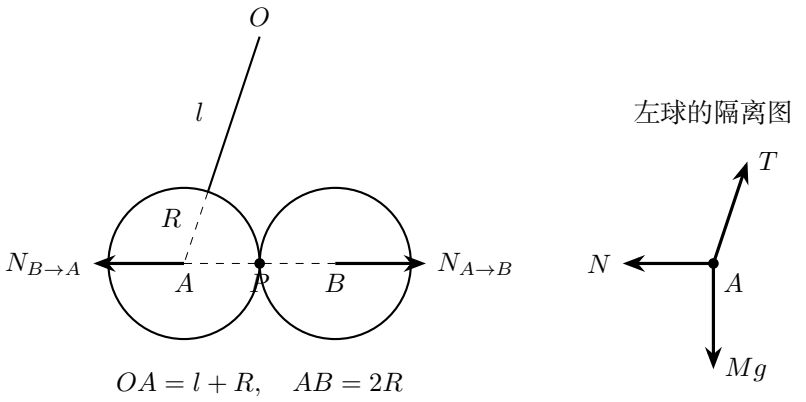


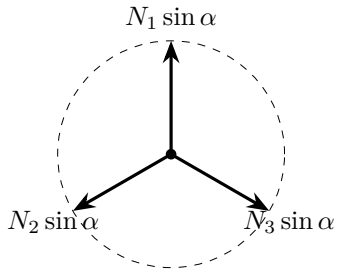
图 2.8: 球面系绳先换算球心距离，再沿连心线画接触力

图 2.8 中，绳的实线段长为 l，终点在球面上，沿作用线延伸一个半径 R 才到球心，因此 $OA = l + R$。两球接触时 $AB = 2R$，球间压力沿 AB。左球被右球向左推，悬绳向悬点拉，重力竖直向下；这三条方向直接进入右侧的隔离受力图。

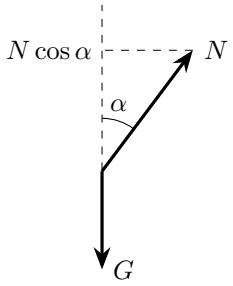
例 2.3 再加入半径 $R/2$ 的小球。大、小球的连心距离为 $3R/2$，悬点至大球心为 $3R$。把它们的水平投影相等写成几何方程，再与各球平衡联立，就能区分大球相接和分开两种构型。相接时保留球间压力 $H \geq 0$，分开时取 $H = 0$；每种构型都使用它自己的球心距离。

例 2.6 把球和绕球细绳合为整体，悬点一侧的绳力通过取矩点，其力矩为零；另一侧竖直绳的作用线与球心相隔 R，留下可直接读取的水平力臂。整体与局部的选取，把复杂接触转成了已知方向的少数外力。

2.5.2 对称空间受力的两个视图



俯视：三个水平投影相消



竖直：$3N\cos\alpha = G$

图 2.9: 对称的三个接触力：俯视图消去水平分量，剖面保留竖直分量

图 2.9 取三个围绕竖直轴等间隔、载荷相同的接触方向。俯视图中，三个水平投影相差 120°，矢量和为零；每股力的竖直投影为 $N\cos\alpha$，三个投影相加，

$$3N\cos\alpha = G, \qquad N = \frac{G}{3\cos\alpha}.$$

左图说明水平方向怎样相消，右图说明一股力的竖直投影怎样进入方程。一般空间刚体则按三个力分量和三个力矩分量列出平衡条件。

2.6 匀速相对滑动中的摩擦

2.6.1 先确定接触面之间的速度差

下板向北运动，上块向东运动。取东为 x、北为 y，块相对板的速度为 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_{\text{块}} - \boldsymbol{v}_{\text{板}}$。滑动摩擦沿相对速度的反方向，其总大小为 μN，所以

$$\boldsymbol{f} = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}.$$

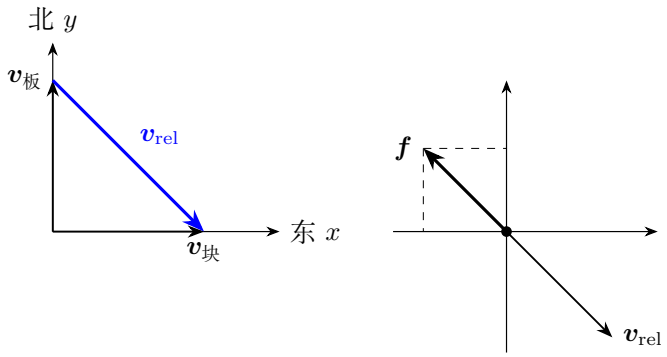


图 2.10: 先减速度，再把总摩擦沿反方向分解

图 2.10 左图从板速度箭头的末端指向块速度箭头的末端，得到向东南的相对速度。右图摩擦向西北。两速率同为 v 时，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = (v, -v)$，单位方向为 $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$，摩擦的两个分量因而为 $(-\mu N/\sqrt{2}, \mu N/\sqrt{2})$。练习 2.3 用这一分解求木块所受摩擦，练习 2.4 再把其中一分量交给光滑挡板平衡。

相对速度为零时，接触改用静摩擦，由平衡或加速所需值以及 $|f| \le \mu_s N$ 决定。对于匀速滑动，沿运动方向的驱动力恰与相应摩擦分量平衡。

2.6.2　接触切平面内的正交分量

圆柱沿轴向移动，同时支承小柱的表面沿圆周切向运动，这两个方向相互垂直。若大柱相对接触面的速度分量为轴向 v、切向 $-w$，相对速率为 $q = \sqrt{v^2 + w^2}$，则摩擦分量分别为

$$f_{\text{轴}} = -\frac{\mu N v}{q}, \qquad f_{\text{切}} = \frac{\mu N w}{q}.$$

例 2.9 先在这个切平面中分解摩擦，再把切向分量投影到横截面的竖直方向。两处接触的水平投影由对称性相消，竖直投影共同支承圆柱，轴向摩擦则共同决定拉力。

2.7　多点支承与形变条件

一根水平刚梁在 A, B, C 三处受竖直支承，$AB = BC = \ell$，中点受向下力 W。竖直平衡及关于 A 的矩为

$$N_A + N_B + N_C = W, \qquad N_B \ell + 2N_C \ell = W\ell.$$

第二式除以 ℓ 后与第一式相减，得 $N_A = N_C$。令两端反力为 R，则

$$N_A = N_C = R, \qquad N_B = W - 2R.$$

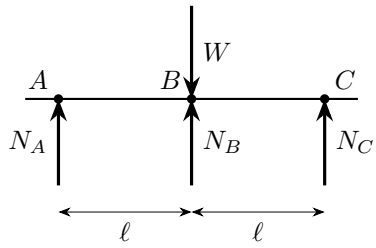


图 2.11: 三点竖直支承需要形变条件才能分配反力

图 2.11 中，各支承只向上推，允许的分配为 $0 \le R \le W/2$。刚体的平衡关系确定了两端相等和反力总和，也保留了一个待由装置决定的参数。

若三处支承都换成初始高度相同、劲度相同且无预紧的竖直弹簧，对称加载使刚梁保持水平。三弹簧压缩相同，胡克定律再给出 $N_A = N_B = N_C$，所以每处为 $W/3$。这里新增的等式来自形变。若刚度或初始高度改变，相应形变关系也随之改变。这说明平衡方程与具体支承结构是相互配合的两部分。

2.8 例题与分析

例 2.1 (竖直细线支承斜杆)**.** 均匀杆 AB 重 G，A 接触水平地面，B 由竖直细线悬挂，杆与水平夹角为 $\alpha < 90^\circ$。求地面反力和绳张力，地面是否一定有摩擦?

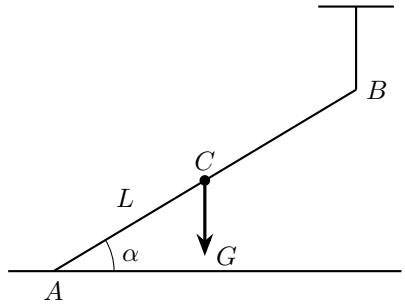


图 2.12: 斜杆的长度、倾角与竖直悬线

解　斜杆的水平平衡

图 2.12 外力只有重力、竖直张力 T 以及地面反力。水平平衡直接给 $f_A = 0$，此构型的地面作用只含竖直支持力。

从图中读取垂直力臂

对 A 取矩可同时消去未知的地面法向力和摩擦力。张力的力臂是 B 到 A 的水平距离 $L\cos\alpha$，重力的力臂是杆中点到 A 的水平距离 $(L/2)\cos\alpha$；这两个水平投影就是图中的垂直力臂。

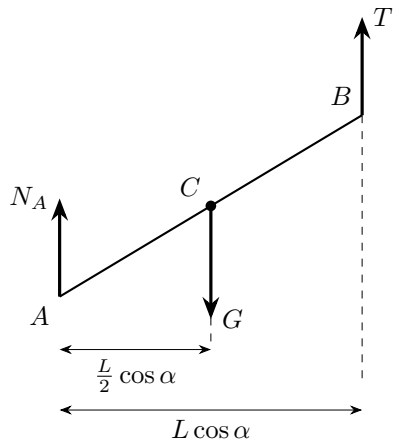


图 2.13: 分别读取张力与重力的水平力臂

非竖直杆的支承力

图 2.13 对 A 取矩，$TL\cos\alpha = G(L/2)\cos\alpha$。非竖直时 $\cos\alpha \neq 0$，得 $T = G/2$；竖直平衡 $N_A + T = G$，所以 $N_A = G/2$。若杆恰好竖直，此取矩方程退化为 $0 = 0$，仅有 $N_A + T = G$ 不足以唯一分配两力，需补充弹性或约束信息。

例 2.2 (三轻杆支架的最小维持力)**.** AC, CD, DB 三根轻杆长均为 l，A, B 固定在水平天花板且 $AB = 2l$。CD 水平，C 处挂质量 m 的物体。求在 D 施力使体系平衡的最小力。

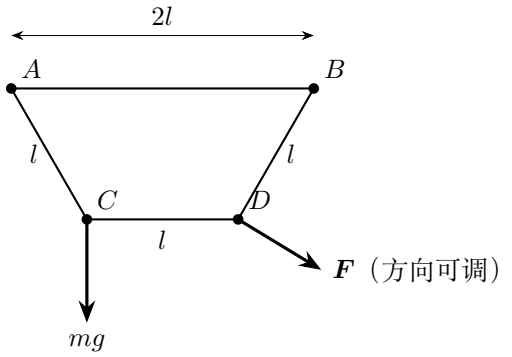


图 2.14: 等长三杆的水平投影确定两侧的倾角

解　由几何及节点 C 求水平杆力

图 2.14 的水平投影各为 $l/2$，斜杆与水平成 60°。在 C 点，AC 拉力 T_1 的竖直分量平衡 mg，故 $T_1\sin 60^\circ = mg$；CD 的拉力 $H = T_1\cos 60^\circ = mg/\sqrt{3}$。

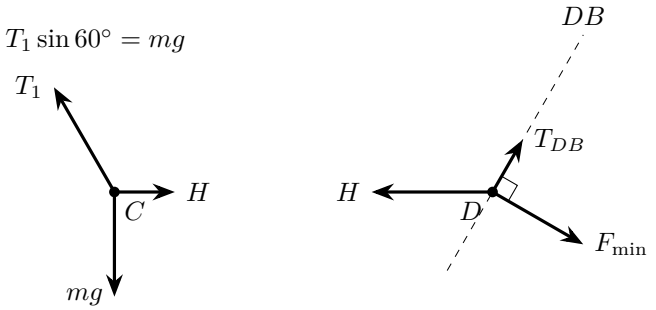


图 2.15: 先解节点 C，再在节点 D 对杆方向作正交分解

在节点 D 消去沿杆分量

图 2.15 在 D 点，已知力为向左的 H，另一杆力沿 DB 与水平成 60°。图中先把向左的 H 沿 DB 及其法线分解。杆力只能抵消第一分量，法向分量大小恒为 $H\sin 60^\circ$，由外力的法向分量平衡。若外力还含沿杆分量，其总大小只会增大；故最小外力垂直 DB，大小 $F_{\min} = H\sin 60^\circ = mg/2$。此时 DB 力沿右上方为正拉力，允许状态成立。

例 2.3 (三球悬挂的两种接触分支)**.** 两质量 M、半径 R 的光滑球，由长 $2R$ 且作用线过球心的绳悬于同点。上方放质量 nM、半径 $R/2$ 的小球。绳与竖直夹角 θ，讨论对称平衡的可能状态。

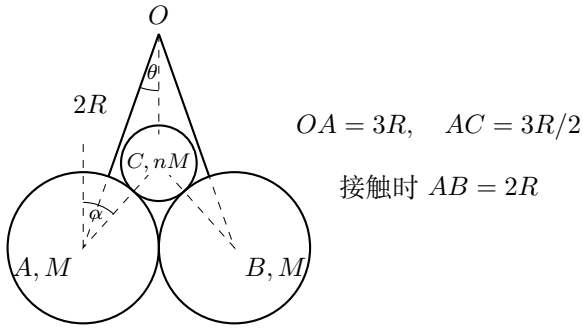


图 2.16: 大球相接构型：悬线倾角 θ 与接触法线倾角 α

解 先建立球心几何和局部受力方程

图 2.16 悬点到大球心为 $3R$。令大球到小球的接触法线与竖直夹角为 α，若两大球分离，几何关系为 $\sin\alpha = 2\sin\theta$。小球平衡得 $2N\cos\alpha = nMg$；大球得 $T\cos\theta = (1+n/2)Mg$，$T\sin\theta = N\sin\alpha$。悬点到大球心的长度为绳长加半径 $2R+R=3R$，而大、小球心距为 $R+R/2=3R/2$。两者具有相同水平投影 $3R\sin\theta$，所以 $(3R/2)\sin\alpha = 3R\sin\theta$。绳长、球半径和连心距在图中分别对应这些线段。

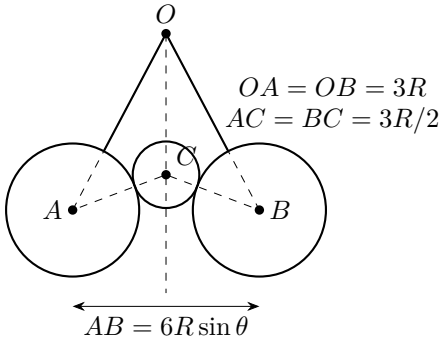


图 2.17: 两大球分离时的球心三角形

分离分支：令大球接触力为零

图 2.17 显示分离构型中 $AB > 2R$，此时两大球之间没有接触力，应令 $H=0$；接触构型才保留图 2.18 中的 H。两种构型各自满足的几何条件和力方程须分别代入。

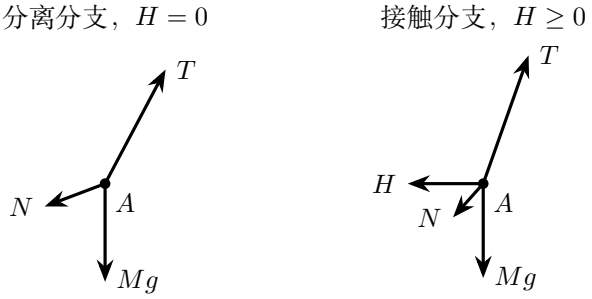


图 2.18: 左大球在分离与接触两分支中的受力不同

图 2.18 左图对应 $H=0$，消去 T, N，得到 $(n+2)\tan\theta = n\tan\alpha$。写 $s=\sin\theta$，利用 $\sin\alpha = 2s$，由 $\tan\theta = s/\sqrt{1-s^2}$、$\tan\alpha = 2s/\sqrt{1-4s^2}$，当 $s>0$ 时约去 s，得

$$\frac{n+2}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{2n}{\sqrt{1-4s^2}}.$$

两边均正，平方后得到等价关系。交叉相乘，

$$(n+2)^2(1-4s^2)=4n^2(1-s^2),\quad 16(n+1)s^2=(n+2)^2-4n^2.$$

于是

$$s^2=\frac{4+4n-3n^2}{16(1+n)}.$$

两大球不重叠要求 $3R\sin\theta\geq R$，即 $s\geq 1/3$，严格分离时取严格大于。将求出的 s^2 代入，因 $n>0$ 时分母为正，

$$\frac{4+4n-3n^2}{16(1+n)}\geq\frac{1}{9}\quad\Longleftrightarrow\quad 9(4+4n-3n^2)\geq 16(1+n).$$

展开并移项得到 $27n^2-20n-20\leq 0$。求对应二次式的两个根，

$$n_\pm=\frac{20\pm\sqrt{400+2160}}{54}=\frac{20\pm 16\sqrt{10}}{54}=\frac{10\pm 8\sqrt{10}}{27}.$$

开口向上的二次式在两根之间非正；负号根小于零，再与 $n>0$ 取交集，因此

$$0<n\leq n_c=\frac{10+8\sqrt{10}}{27}.$$

两大球接触时的互推力

还存在两大球相接的分支：$\sin\theta=1/3$，$\sin\alpha=2/3$。接触时 $\tan\theta=1/(2\sqrt{2})$，$\tan\alpha=2/\sqrt{5}$。左大球的水平平衡为 $T\sin\theta=N\sin\alpha+H$，代入 $T\cos\theta=(1+n/2)Mg$ 和 $N\cos\alpha=nMg/2$，即得大球互推力

$$H=Mg\left[\frac{1+n/2}{2\sqrt{2}}-\frac{n}{\sqrt{5}}\right].$$

接触构型中，互推力 $H\geq 0$ 决定能维持两大球接触的质量比。约去 Mg，把含 n 的项移到右侧：

$$\frac{1+n/2}{2\sqrt{2}}\geq\frac{n}{\sqrt{5}}\quad\Longleftrightarrow\quad 2\sqrt{5}\geq n(4\sqrt{2}-\sqrt{5}).$$

系数 $4\sqrt{2}-\sqrt{5}>0$，相除后有理化，

$$n\leq\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}(4\sqrt{2}+\sqrt{5})}{32-5}=\frac{10+8\sqrt{10}}{27}=n_c.$$

$0<n<n_c$ 时有两个对称平衡构型；等号时两分支重合；超过阈值两者均不可实现。两种构型及其适用的质量比由各自几何与接触力共同给出。

例 2.4 (两光滑斜面之间的球)**.** 重 G 的球置于 V 形光滑槽内，左右斜面分别与水平成 α,β，$0<\alpha,\beta<90^\circ$。求两支持力。

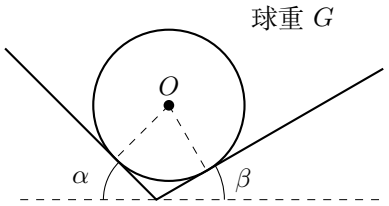


图 2.19: 两斜面的倾角从水平线量起，接触法线过球心

解　把斜面倾角换成法线倾角

图 2.19 中左法线向右上，与竖直夹角 α；右法线向左上，与竖直夹角 β。水平、竖直平衡给 $N_L\sin\alpha=N_R\sin\beta$，$N_L\cos\alpha+N_R\cos\beta=G$。

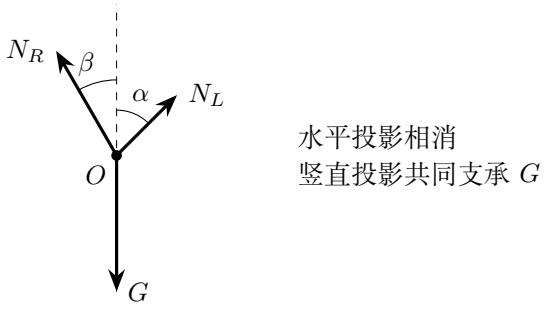


图 2.20: 两法线与竖直的夹角分别等于对应斜面倾角

两个支持力的大小与对称取值

图 2.20 由水平式 $N_R=N_L\sin\alpha/\sin\beta$，代入竖直式后乘 $\sin\beta$，得 $N_L(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)=G\sin\beta$。分母出现 $\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)$，所以

$$N_L=\frac{G\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},\qquad N_R=\frac{G\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

当 $\alpha=\beta$ 时，利用 $\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$，两式都给 $N_L=N_R=G/(2\cos\alpha)$，两侧支持力相等。

例 2.5 (水平杆上两环的最大间距)**.** 质量均为 m 的两环套在水平杆上，由总长 a 的轻绳连接，绳中点挂质量 M。环与杆的静摩擦系数 μ。求对称平衡时两环最大间距。

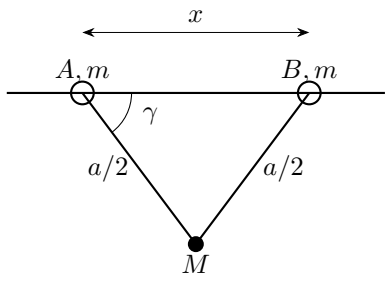


图 2.21: 两段绳等长，水平投影之和为两环间距

解　分别求重物绳力与环的法向力

图 2.21 令绳与水平夹角 γ。重物平衡 $2T\sin\gamma = Mg$。每环所需水平摩擦 $T\cos\gamma = (Mg/2)\cot\gamma$，法向支持 $N = (m + M/2)g$。以左环为对象，绳拉力指向右下，所以摩擦指左、杆支持力指上；竖直平衡为 $N = mg + T\sin\gamma$。利用重物方程 $T\sin\gamma = Mg/2$ 后，才得到所列法向力。

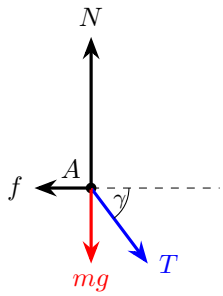


图 2.22: 左环受绳的右下拉力、杆的向上支持和向左摩擦

用静摩擦不等式限制几何间距

图 2.22 由 $f \le \mu N$ 得到 $\cot\gamma \le \mu(2m+M)/M$。令 $C = \mu(2m+M)/M$，两环间距 $x = a\cos\gamma$，随 $\cot\gamma$ 增大而增大，因为 $0 < \gamma \le \pi/2$，$\cos\gamma = \cot\gamma/\sqrt{1+\cot^2\gamma}$，令 $z = \cot\gamma \ge 0$，固定 a，对比例函数求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z(1+z^2)^{-1/2}\right] = (1+z^2)^{-1/2} + z\left[-\frac{1}{2}(1+z^2)^{-3/2}\cdot 2z\right] = \frac{1}{(1+z^2)^{3/2}} > 0.$$

所以间距随 $\cot\gamma$ 单调增加。最大间距对应静摩擦恰达上限 $\cot\gamma = C$，故

$$x_{\max} = \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}.$$

$\mu \to 0$ 时 $x_{\max} \to 0$，$\mu \to \infty$ 时趋近 a，均符合几何。

例 2.6 (绕球细绳的整体取矩)**.** 质量 m_1、半径 R 的球由长 l 的绳悬挂，绳作用线过球心；同一悬点另有轻绳绕过光滑球并在另一侧竖直悬挂 m_2。悬点至球心距离 $l+R$，球心偏离竖直线角 θ。求 θ。

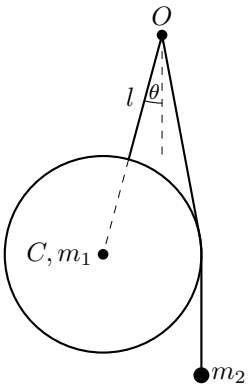


图 2.23: 悬球绳沿球心方向，绕球绳沿切线进入并竖直离开

解　选取整体并确定两个力臂

图 2.23 把球和绕球绳的受力合并，绳在悬点一侧的拉力对 O 无力矩，竖直端张力为 $m_2 g$。球心到 O 的水平距离为 $(l+R)\sin\theta$，竖直绳作用线距球心为 R。

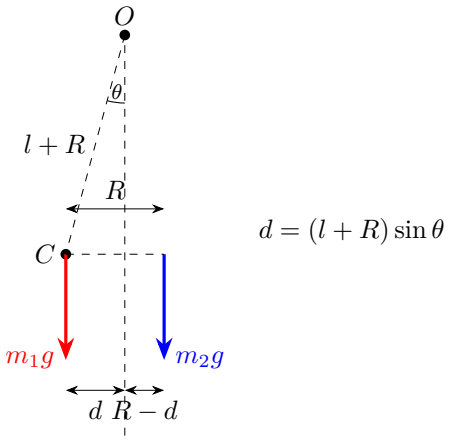


图 2.24: 关于悬点 O 的两个竖直力臂为 d 和 R−d

关于悬点的重力矩平衡

图 2.24 对 O 取矩，$m_1g(l+R)\sin\theta = m_2g[R-(l+R)\sin\theta]$。先约去公共 g 并展开右侧：

$$m_1(l+R)\sin\theta = m_2R - m_2(l+R)\sin\theta.$$

将含 $\sin\theta$ 的项移至左边，再除以 $(m_1+m_2)(l+R)$，整理得

$$\sin\theta = \frac{m_2R}{(m_1+m_2)(l+R)}.$$

这样避开了球面上分布接触力的逐段积分；当 $m_2\to 0$，$\theta\to 0$。

例 2.7 (铰接支架中的力随外力变化)**.** 节点 P 由一水平轻杆和一与水平成 α 的斜轻杆固定。轻绳从 P 悬挂重 G 物块，对物块施水平力 F 使其缓慢平衡。求杆力和绳张力随 F 的变化。

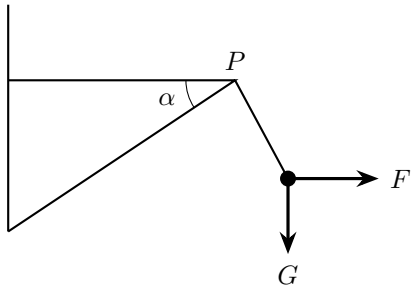


图 2.25: 水平杆、斜杆与受水平拉力的悬挂物块

解　由物块将绳力分量传到节点

先对图 2.25 中的物块列两个正交方向的平衡：绳在物块处的水平分量向左、大小为 F，竖直分量向上、大小为 G。所以张力平方为 $T^2=(-F)^2+G^2$，取非负根得 $T=\sqrt{F^2+G^2}$。同一轻绳在节点端沿相反方向拉节点，故 P 受到的绳力为 $(F,-G)$，这给出了节点端绳力的两个分量。这两个分量再分别进入节点的水平和竖直平衡。

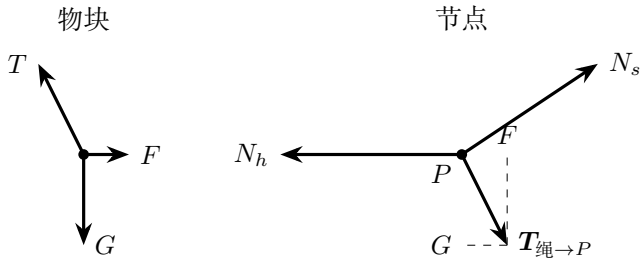


图 2.26: 物块与节点分开画，绳端力按作用与反作用传递

在节点上求杆力并判断变化趋势

图 2.26 斜杆提供向右上方的压力 N_s，其竖直分量 $N_s\sin\alpha = G$，故 $N_s = G/\sin\alpha$ 不变。水平杆拉力 $N_h = F + N_s\cos\alpha = F + G\cot\alpha$，随 F 线性增大。绳张力也增大。图中左下方的斜杆受压，沿右上方支承节点；左侧水平杆受拉，平衡随 F 增大的水平载荷。

例 2.8 (偏心球在两平面上的接触)**.** 半径 R 的偏心球，球心为 O、重心为 C。球在水平面上平衡时接触固连于球的点 A，在粗糙 30° 斜面上平衡时接触点为 B。球体标记满足 $\angle AOB = 30^\circ$，取图示 C 位于 OA 内部的构型，求偏心距 OC。

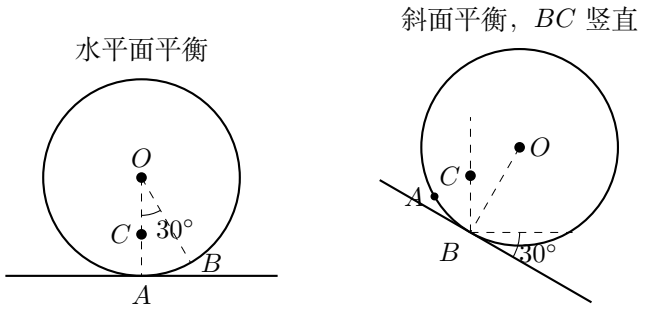


图 2.27: 同一球的两个接触构型；O 为球心，C 为重心，A, B 为固连接触标记

解　在两个接触构型中确定重力作用线

在图 2.27 的球体固连图中，水平面平衡要求 C 在 OA 上。斜面时支持力与摩擦力的合力作用于 B，要与重力平衡，其合力和重力都应竖直，故 BC 是第二构型的竖直方向。

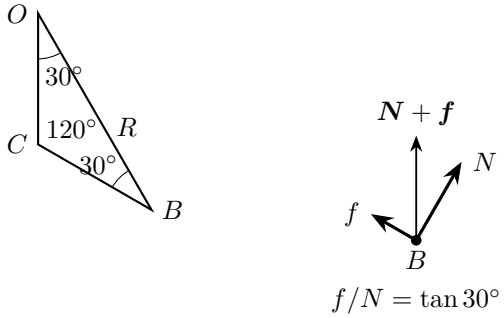


图 2.28: 固连三角形确定偏心距，接触合力须沿 BC

固连三角形中的偏心距

图 2.28 中法线 BO 与竖直 BC 成 30°，又 $\angle AOB = 30°$，所以 $\triangle OBC$ 在 O, B 的角分别为 30° 和 30°，其余角为 120°。在三角形中，OC 对着 B 角 30°，$OB = R$ 对着 C 角 120°。所以正弦定理给 $OC/R = \sin 30°/\sin 120° = 1/\sqrt{3}$。因此 $OC = R/\sqrt{3}$。斜面平衡还需 $\mu \geq \tan 30°$。

例 2.9 (两转轴支承圆柱的轴向摩擦)**.** 质量 M 的大圆柱由两个反向转动的小圆柱支承，两接触法线与竖直均成 θ。小柱接触面的圆周速度大小 w，方向均沿接触切线向上；大柱沿轴以速度 v 匀速移动而不转动，摩擦系数 μ。求轴向拉力。

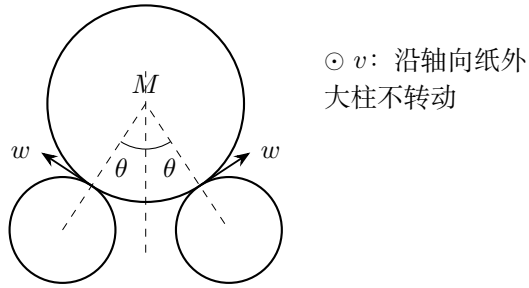


图 2.29: 横截面中的接触切向运动与垂直截面的轴向运动

解　在接触切平面分解相对速度与摩擦

图 2.29 每处相对滑动具有轴向 v 和接触切向 w 两个正交分量，故摩擦总量 μN 的轴向分量为 $\mu N v/\sqrt{v^2+w^2}$，切向向上分量为 $\mu N w/\sqrt{v^2+w^2}$。

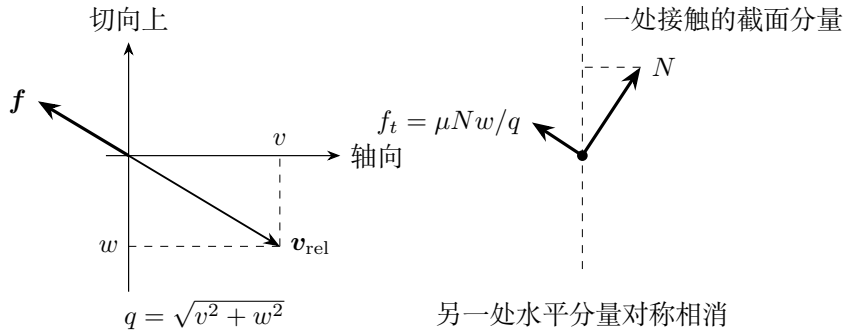


图 2.30: 接触切平面分解摩擦，再合成两处竖直支持

利用两接触的竖直平衡求法向力

图 2.30 左图中大柱相对小柱的切向速度向下，故摩擦的切向分量向上；右图显示这一分量的竖直投影为 $f_t \sin\theta$，法向力的竖直投影为 $N\cos\theta$。两接触竖直平

衡为 $2N\cos\theta + 2\mu N[w/\sqrt{v^2+w^2}]\sin\theta = Mg$。令 $q=\sqrt{v^2+w^2}$，先从竖直平衡求

$$N = \frac{Mgq}{2(q\cos\theta + \mu w\sin\theta)}.$$

两接触摩擦共同决定轴向拉力

沿轴向两处摩擦均阻碍大柱运动，故拉力等于两轴向分量之和，代入 N 后约去 $2q$，解得

$$F = \frac{2\mu N v}{q} = \frac{\mu M g v}{q\cos\theta + \mu w\sin\theta}.$$

当 $v=w$，两种摩擦分量各为总摩擦的 $1/\sqrt{2}$，因而 $F = \mu Mg/(\sqrt{2}\cos\theta + \mu\sin\theta)$。当 $w\to 0$，小柱表面静止，回到 $F=\mu Mg/\cos\theta$。

2.9　本讲小结

平面刚体平衡同时要求两个合力分量和一个合力矩为零。受力方向由绳、杆及接触几何确定；取矩可消去反力，局部与整体配合可逐步求出其余未知力。最小外力由固定投影或最短矢量段决定。

2.10　练习

练习 2.1 (不均匀杆的重心位置)**.** 长 l、质量 m 的杆由两端轻绳悬挂成水平，左绳与竖直夹角 θ，右绳与竖直夹角 φ。两绳分别向左上、右上，求重心距右端距离 d。

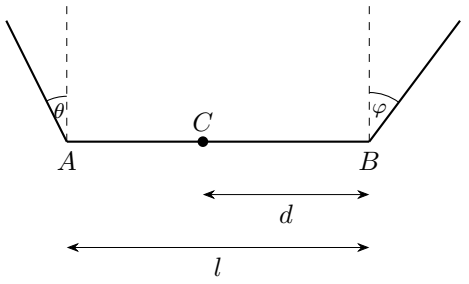


图 2.31: 两绳方向、杆长与待求重心位置

练习 2.2 (相斥悬球的质量比)**.** 两等长轻绳从同点悬挂质量 m_1, m_2 的球，两球相互排斥，绳与竖直分别成 $45°, 30°$。求质量比。

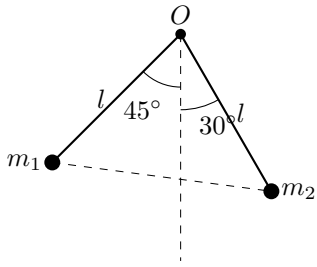


图 2.32: 等长悬线造成两球不等高，斥力沿连心线

练习 2.3 (两运动板间的滑动摩擦)**.** 下板以速率 v 向北运动，质量为 m 的上木块以同速率 v 向东运动，两者间动摩擦系数 μ。求木块所受摩擦的大小和方向。

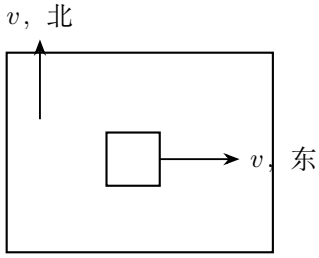


图 2.33: 两运动板间的滑动摩擦

练习 2.4 (传送带与光滑挡板)**.** 传送带向右速度 v，木块质量 m 受光滑直挡板约束，沿与带速垂直的方向以 v' 匀速运动。驱动力沿挡板，摩擦系数 μ，求驱动力。

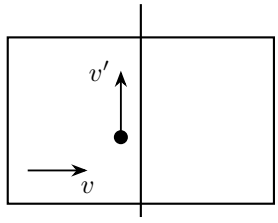


图 2.34: 传送带与光滑挡板

练习 2.5 (斜向拉箱的最小力)**.** 重 G 的箱在水平面上匀速滑动，动摩擦系数 μ。拉力与水平成 α 向上，求最小拉力及角度。

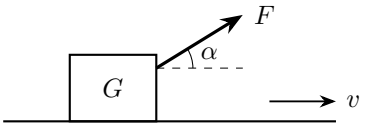


图 2.35: 斜向拉箱的最小力

练习 2.6 (挡板支持力的最小值)**.** 重 G 的小球位于倾角 β 的光滑斜面和可转动光滑挡板之间。保持接触，挡板法线可在允许方向内变化。求挡板力最小时的方向和大小。

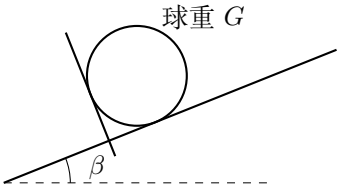


图 2.36: 挡板支持力的最小值

练习 2.7 (斜板上三个相切圆柱)**.** 轻板长 l，下端铰接于竖直墙，板与墙夹角 θ，上端由水平绳向墙拉。三个半径 r、各重 G 的光滑圆柱依次相切放在板上，最下圆柱还接触墙。求水平绳力。

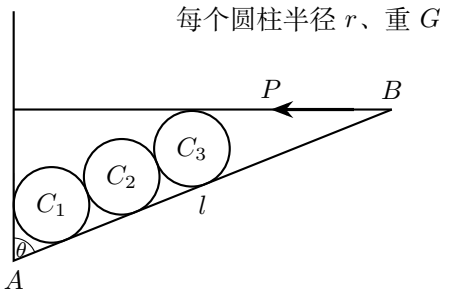


图 2.37: 墙、斜板与三个等半径圆柱的接触几何

练习解答

练习 2.1

解　用水平平衡联系两端张力

图 2.31 中，记左、右绳的张力为 T_L, T_R。水平平衡使两绳的水平分量相等，记为 H：

$$T_L \sin\theta = T_R \sin\varphi = H.$$

将竖直分量写成水平分量乘余切，得到

$$T_L \cos\theta = (T_L \sin\theta)\cot\theta = H\cot\theta, \qquad T_R \cos\varphi = H\cot\varphi.$$

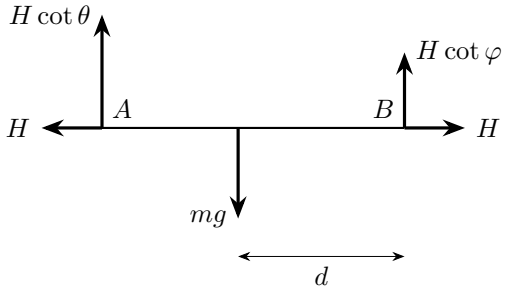


图 2.38: 水平分量相消，竖直分量分别带入对 B 的力矩

由竖直平衡和重力矩求位置

图 2.38 中的两股竖直分量共同支承杆重，因而

$$H(\cot\theta + \cot\varphi) = mg, \qquad H = \frac{mg}{\cot\theta + \cot\varphi}.$$

关于右端 B 取矩，左端竖直分量的力臂为 l，重力的力臂为 d，所以

$$(H\cot\theta)l = mgd.$$

代入 H 并约去 mg，得

$$d = \frac{l\cot\theta}{\cot\theta + \cot\varphi} = \frac{l\tan\varphi}{\tan\theta + \tan\varphi}.$$

两角相等时 $d = l/2$；左绳更接近竖直时，它承担的竖直分量较大，重心相应靠近左端。

练习 2.2

解　对两球整体取悬点的力矩

图 2.32 中，两球高度不同，斥力沿倾斜的连心线。取两球整体，两股斥力等大、反向、共线，关于悬点 O 的力矩相消；两条悬绳的张力作用线也都经过 O。于是整体关于 O 的力矩只由两个重力组成。

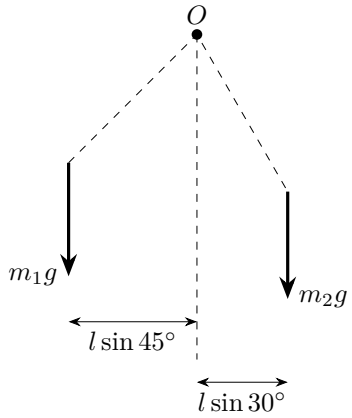


图 2.39: 对共同悬点取矩，仅保留两个重力的水平力臂

用两条水平力臂求质量比

图 2.39 中，两重力的力臂分别为 $l\sin 45^\circ$ 和 $l\sin 30^\circ$，产生相反方向的力矩。平衡给

$$m_1 g l \sin 45^\circ = m_2 g l \sin 30^\circ.$$

约去共同的 gl，得到

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

等长悬绳使相同的长度因子约去，偏离竖直较多的一侧具有较小质量。

练习 2.3

解　用矢量相减求相对滑动方向

图 2.33 取东为 x、北为 y。相对速度 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = (v, -v)$，方向东南，大小 $\sqrt{2}v$。

归一化方向后求摩擦分量

法向方向没有其他力且无加速度，所以 $N = mg$。动摩擦沿相对速度的反方向，矢量式为 $\boldsymbol{f} = -\mu N\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}/|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|$。将 $(v, -v)$ 除以 $\sqrt{2}v$ 得到单位向量 $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$，再乘 $-\mu mg$，得到摩擦的两个分量。

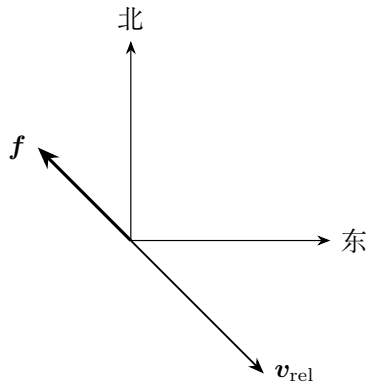


图 2.40: 两运动板间的滑动摩擦

图 2.40 摩擦反向指西北，大小 μmg，分量为 $(-\mu mg/\sqrt{2}, \mu mg/\sqrt{2})$。两个分量的平方和为 $(\mu mg)^2$，合成后仍是接触面的总摩擦大小。

练习 2.4

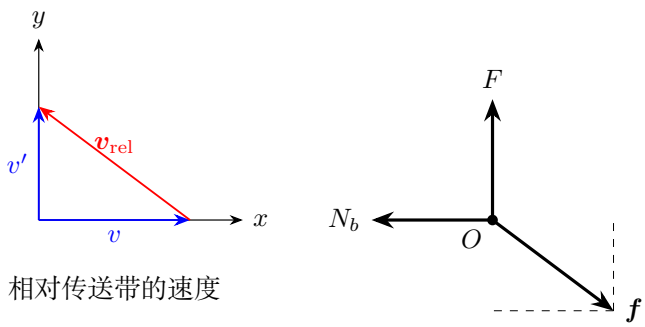
解　由速度差确定摩擦的方向与分量

图 2.34 中，取水平面内向右为 x、沿挡板向上为 y。木块速度为 $(0, v')$，传送带速度为 $(v, 0)$，相减得

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = (-v, v'), \qquad q = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}| = \sqrt{v^2 + v'^2}.$$

带面支持力与重力平衡，大小为 $N = mg$。摩擦反向于相对速度，其分量由单位方向给出：

$$\boldsymbol{f} = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}{q} = \frac{\mu mg}{q}(v, -v').$$



相对传送带的速度　　水平面内的受力

图 2.41: 速度差确定摩擦方向，沿挡板与横向的平衡分别确定两股力

沿挡板求驱动力，横向求支持力

图 2.41 左图的速度差向左上，右图的摩擦向右下。右侧挡板给木块向左的支持力，驱动力沿挡板向上。两个方向的平衡分别为

$$F-\frac{\mu mgv'}{q}=0,\qquad \frac{\mu mgv}{q}-N_b=0.$$

因此

$$F=\frac{\mu mgv'}{\sqrt{v^2+v'^2}},\qquad N_b=\frac{\mu mgv}{\sqrt{v^2+v'^2}}.$$

当沿挡板的速率 $v'\to 0$ 时，驱动力趋于零，横向摩擦仍由挡板支持力平衡。

练习 2.5

解　将法向支持代入水平平衡

图 2.35 中 $N=G-F\sin\alpha$，水平平衡 $F\cos\alpha=\mu N$。将法向式代入水平式，$F\cos\alpha=\mu(G-F\sin\alpha)$，把含 F 的项移到左边，

$$F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)=\mu G,\qquad F=\frac{\mu G}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

在保持接触的范围内，拉力最小对应分母最大。

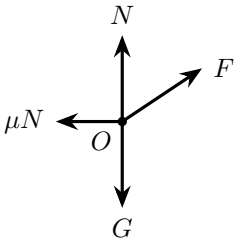


图 2.42: 斜向拉箱的最小力

最优拉力方向与此时支持力

图 2.42 中令 $\delta=\arctan\mu$，则 $\cos\delta=1/\sqrt{1+\mu^2}$、$\sin\delta=\mu/\sqrt{1+\mu^2}$。用差角公式展开，

$$\sqrt{1+\mu^2}\cos(\alpha-\delta)=\sqrt{1+\mu^2}(\cos\alpha\cos\delta+\sin\alpha\sin\delta)=\cos\alpha+\mu\sin\alpha.$$

余弦不超过 1，故分母最大值为 $\sqrt{1+\mu^2}$，在 $\alpha=\delta$ 取得，得到 $F_{\min}=\mu G/\sqrt{1+\mu^2}$。代回竖直平衡，求此时支持力，

$$N=G-F_{\min}\sin\delta=G-\frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}=\frac{G}{1+\mu^2}>0.$$

因此最优方向在保持接触的允许范围内。

练习 2.6

解　挡板力在沿面方向的投影

图 2.36 斜面的法向力方向固定。把 G 分解为沿该法线和沿斜面的两个分量，沿斜面向下的分量为 $G\sin\beta$，由挡板力的沿斜面分量平衡。沿斜面上坡取正，令挡板法线与这个方向夹角为 δ。图中的两支持力分别沿各自接触法线，接下来用沿面投影求 N_b 随 δ 的变化。

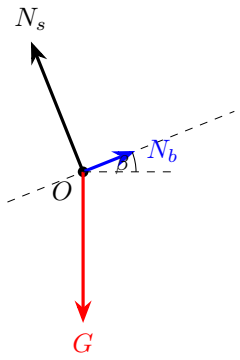


图 2.43: 最小时挡板力沿上坡，斜面支持力沿法线

由投影不等式求最小值及可行条件

图 2.43 若挡板力与上坡方向夹角 δ，$N_b\cos\delta = G\sin\beta$，因此 $N_b \geq G\sin\beta$，在 $\delta = 0$ 时取等号。即挡板法线沿斜面向上，挡板本身与斜面垂直。此时斜面支持力 $G\cos\beta > 0$，接触有效。

练习 2.7

解　对三球整体沿板投影求墙反力

图 2.37 取三个圆柱整体，沿板方向平衡：墙反力 N 的投影 $N\sin\theta = 3G\cos\theta$，故 $N = 3G\cot\theta$。墙与板夹角为 θ，板上坡方向单位向量为 $(\sin\theta, \cos\theta)$，因此墙水平推力的上坡投影是 $N\sin\theta$。三个重力的下坡投影相加为 $3G\cos\theta$。最下球心位于墙右 r 处，其到两边等距，处于夹角平分线上，所以高度为 $r\cot(\theta/2)$。

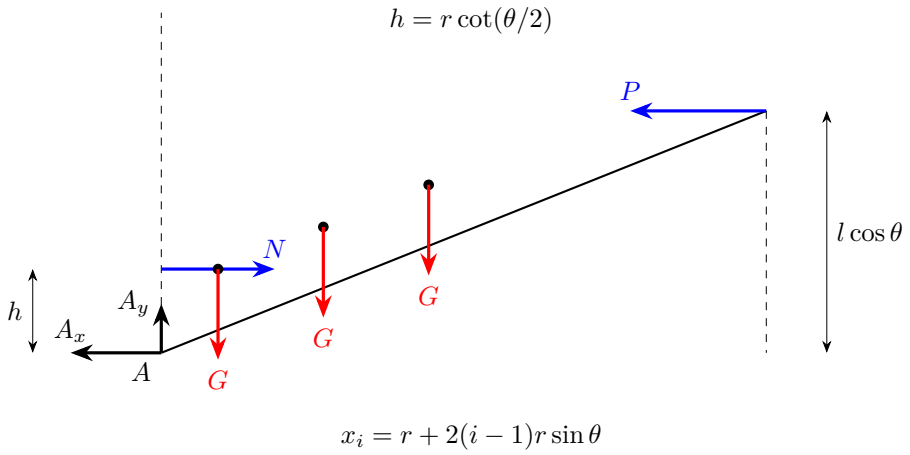


图 2.44: 板与三柱整体的外力，以及墙反力和水平绳力的力臂

扩大对象为板和三球，取矩求绳力

图 2.44 中的铰链反力 A_x, A_y 均通过 A，取矩时消去。墙反力 N 向右，关于 A 产生顺时针力矩，与三个重力矩同号；绳力 P 向左，产生逆时针力矩。最下球心到墙距离 r、到铰点高度 $r\cot(\theta/2)$；三球中心的水平坐标依次为 $r, r+2r\sin\theta, r+4r\sin\theta$。再取板及三球整体对铰点的矩，得到

$$Pl\cos\theta = Nr\cot(\theta/2) + 3Gr(1+2\sin\theta),$$

所以 $P = \frac{3Gr}{l\cos\theta}[\cot\theta\cot(\theta/2) + 1 + 2\sin\theta]$。球与球的力已作为内力消去，墙反力的力矩仍须保留。

三个圆柱同时放在有限长板上时，各接触点都落在板段内。最下圆柱在板上的接触点距铰点 $s_1 = r\cot(\theta/2)$，相邻接触点沿板相距 $2r$，所以第三个接触点在 $s_3 = r\cot(\theta/2) + 4r$。上述解要求 $0 < \theta < \pi/2$ 且

$$l \geq r\cot(\theta/2) + 4r.$$

这个长度条件使最上一个接触点恰好落在板端以内。

静力学

物理竞赛一轮讲义

第三讲

摩擦与约束平衡

2026

目录

第三讲　摩擦与约束平衡 **1**

3.1　从接触实验认识摩擦规律 1

3.2　接触面怎样提供静摩擦 2

3.3　拉力改变时的平衡范围 4

3.4　自锁怎样产生 5

3.5　多个接触点怎样共同维持平衡 7

3.6　斜面内缓慢牵引的轨迹 9

3.7　摩擦做功与接触处的能量变化 9

3.8　例题与分析 10

本讲小结 23

3.9　练习 24

练习解答 26

第三讲　摩擦与约束平衡

3.1　从接触实验认识摩擦规律

3.1.1　静摩擦与滑动摩擦分别由什么决定

接触表面的微观形变与黏着，使表面之间可以传递切向作用。用逐渐增大的水平拉力 F 拉桌上的物块，物块起初保持静止，切向平衡给出 $f = F$。增加 F 时，静摩擦随之增大；在给定材料和表面状况下，最大静摩擦近似满足 $f_{s,\max} = \mu_s N$。

物块开始相对桌面滑动以后，摩擦方向与相对滑动速度相反。在常用的干摩擦模型中，滑动摩擦大小取 $f_k = \mu_k N$。μ_s, μ_k 由接触材料与表面状况确定；它们分别用于将要滑动的临界状态和已经滑动的过程。

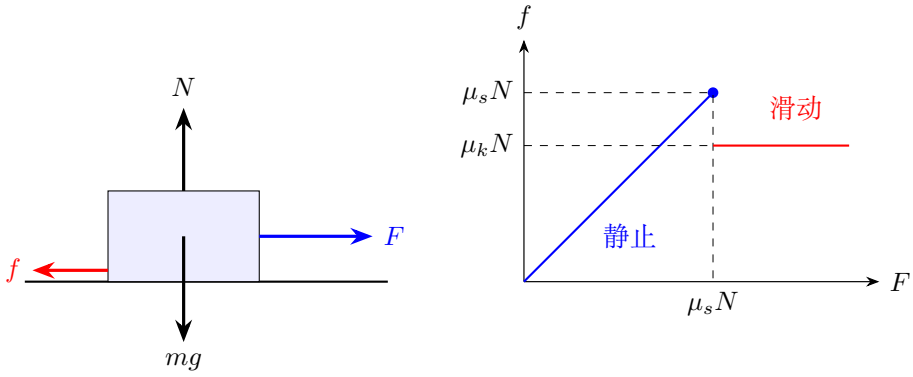


图 3.1: 静止阶段所需摩擦随拉力增加，滑动阶段采用滑动摩擦模型

图 3.1 蓝线由平衡方程得到，红线由滑动摩擦模型给出，图中示意 $\mu_k < \mu_s$。在静力学中，先求平衡所需的 f 和 N，再与最大静摩擦比较；在运动问题中，先确定两表面的相对滑动方向，再把 $\mu_k N$ 放进运动方程。下面从平衡范围继续讨论全反力的方向、翻倒及多个接触点之间的相互联系。

3.2　接触面怎样提供静摩擦

把木块放在水平桌面上，用逐渐增大的水平力推它。木块保持静止时，桌面对它的摩擦力与推力等大反向；推力增大，所需的静摩擦也随之增大。接触材料和表面状况给定后，静摩擦有一个近似与正压力成正比的最大值。因此平衡时的关系是

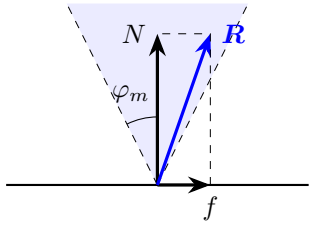
$$f = F, \qquad N = G, \qquad |f| \le \mu_s N.$$

前两式决定本次受力中需要多大的摩擦，末式说明接触面能够提供多大的摩擦。逐渐增大推力，达到 $F = \mu_s G$ 时木块将向右滑动，摩擦向左达到最大值。例 3.1 中抬杆的力随倾角变化，杆脚所需的摩擦也沿全过程变化，所求系数由其中最大的 f/N 确定。

支持力和摩擦力分别沿接触面的法线与切线，合在一起称为全反力。图 3.2 以向上的法线为基准，记全反力与法线夹角为 φ，则

$$\boldsymbol{R} = N\boldsymbol{n} + f\boldsymbol{t}, \qquad \tan\varphi = \frac{f}{N}, \qquad |\varphi| \le \varphi_m, \quad \tan\varphi_m = \mu_s.$$

这里 f 按图中向右为正。平面问题中，全反力可在左右两条极限方向之间调整；空间接触中，这些方向绕法线形成一个圆锥，称为摩擦锥。



$$|f| \le \mu_s N$$

$$\tan\varphi_m = \mu_s$$

图 3.2: 支持力与摩擦合成为全反力，极限方向与法线夹角为摩擦角

图 3.2 中蓝色全反力的切向分量小于极限值。外力改变时，它的方向随新的平衡要求改变；到达两条极限方向时，分别对应向左或向右的滑动趋势。两面夹持物体的例 3.4 将用法向、切向分量之比确定允许的开口角。

3.2.1　支持力的作用点与翻倒

矩形物块底宽 b、重 G，受到高度 h 处向右的水平推力 F。地面上各处的压力一般不同。把单位宽度的接触压力记为 $p(x)$，底面中点为 $x = 0$，它们的合力及作用点满足

$$N = \int_{-b/2}^{b/2} p(x)\,\mathrm{d}x, \qquad Ne = \int_{-b/2}^{b/2} x\,p(x)\,\mathrm{d}x.$$

$p(x) \geq 0$，所以合力作用点位于底面内。图 3.3 中的支持力向右偏移 e，它相对底面中点的力矩与推力的力矩相反。平衡方程为

$$N = G, \qquad f = F, \qquad Ne = Fh,$$

由此得到 $e = Fh/G$。

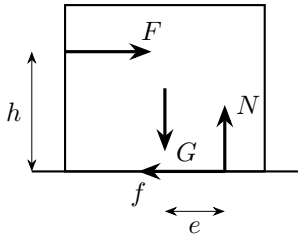


图 3.3: 底面支持力作用点随水平推力向边缘移动

随 F 增大，图 3.3 中支持力作用点逐渐移向右侧。静止所需条件同时包括 $f \leq \mu G$ 和 $e \leq b/2$，于是滑动与翻倒分别在

$$F_s = \mu G, \qquad F_t = \frac{Gb}{2h}$$

发生。从零开始缓慢加力，两个值中较小者先到达。施力点越高，翻倒所需推力越小；滑动所需推力则由摩擦系数和总压力决定。

若物体由相距 b 的两个支点承托，以两支点中点为原点，整体支持力为 N，作用点为 e，则

$$N_A + N_B = N, \qquad N_B b = N(e + b/2).$$

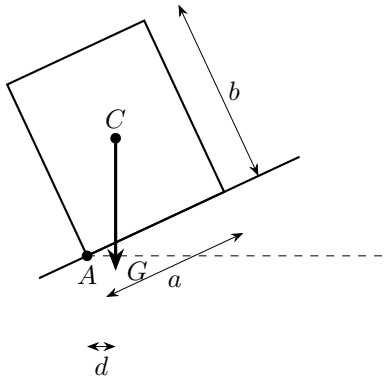
因而 $N_A = N(1/2 - e/b)$、$N_B = N(1/2 + e/b)$。当 e 达到右支点时，左支点的反力恰好降为零。这把分布压力的作用点与两点支承的反力联系起来。

3.2.2 斜面上滑动与翻倒的先后

图 3.4 中，均匀长方体沿面的底长为 a、法向高度为 b，下坡角为 A。质心在斜面坐标中的位置是 $(a/2, b/2)$。斜面转过 θ 后，质心相对 A 的水平坐标为

$$d = \frac{a}{2}\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta.$$

重力的竖直作用线在 A 的上坡一侧时，底面可以提供所需支持；作用线移到 A 时，物块将绕下坡边缘翻倒。



$d = \frac{a}{2}\cos\theta - \frac{b}{2}\sin\theta$
$d = 0$：重力线通过 A
$\tan\theta = \mu$：摩擦达到上限

图 3.4: 重力作用线到下坡角的水平距离决定翻倒趋势

由图 3.4 的 $d = 0$ 得到 $\tan\theta_t = a/b$。沿斜面的平衡给 $f = G\sin\theta$、$N = G\cos\theta$，所以将下滑时 $\tan\theta_s = \mu$。比较 μ 与 a/b，便得到先滑、先翻或二者同时开始的条件。例 3.9 沿此关系讨论完整的倾角变化，例 3.6 则把球对圆筒的挤压力偶与筒重的回复力矩比较。

3.3　拉力改变时的平衡范围

摩擦方向随外力变化的情形，可以用一个带正负号的切向力贯穿计算。图 3.5 中，斜面倾角为 θ，物体重 G，拉力 F 相对上坡方向向外偏 δ。沿上坡为切向正方向，离开斜面为法向正方向，平衡为

$$F\cos\delta + f - G\sin\theta = 0, \qquad N + F\sin\delta - G\cos\theta = 0.$$

所以

$$f = G\sin\theta - F\cos\delta, \qquad N = G\cos\theta - F\sin\delta.$$

拉力的切向分量减小上坡摩擦的需求，向外分量则减小支持力。

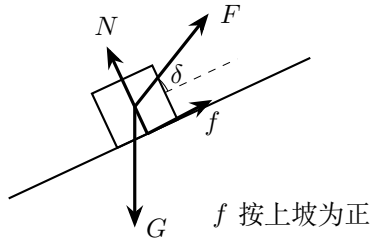


图 3.5: 同一拉力改变切向平衡和法向约束

取 $\mu>0$、$0\le\delta<\arctan(1/\mu)$。图 3.5 中保持接触要求 $N\ge 0$，静摩擦的两个方向分别给出

$$G\sin\theta-F\cos\delta\le\mu(G\cos\theta-F\sin\delta),$$
$$G\sin\theta-F\cos\delta\ge-\mu(G\cos\theta-F\sin\delta).$$

把含 F 的项移到一侧，

$$F(\cos\delta-\mu\sin\delta)\ge G(\sin\theta-\mu\cos\theta),$$
$$F(\cos\delta+\mu\sin\delta)\le G(\sin\theta+\mu\cos\theta).$$

在所取角度范围内两个系数都为正，因此

$$\max\left(0,\frac{G(\sin\theta-\mu\cos\theta)}{\cos\delta-\mu\sin\delta}\right)\le F\le\frac{G(\sin\theta+\mu\cos\theta)}{\cos\delta+\mu\sin\delta},$$

并与 $G\cos\theta-F\sin\delta\ge 0$ 共同使用。正的下限对应物体将下滑、摩擦向上；上限对应将上滑、摩擦向下。

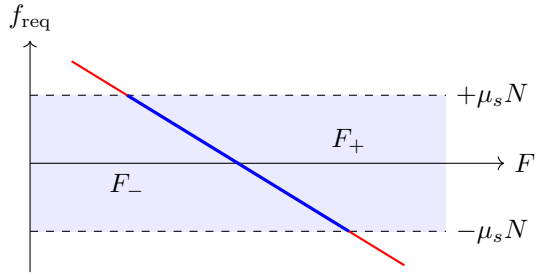


图 3.6: 平衡所需摩擦随外力改变，正负上限分别对应两种滑动趋势

图 3.6 专取 N 保持不变的情形，纵轴为所需摩擦。随着 F 增大，红线向下穿过 $f=0$，物体仍可静止，摩擦则由向上变成向下。蓝色线段的两个端点分别是两种滑动的起始状态。若 N 也变化，允许的正、负极限随 F 一起变化，直接使用前面的两个不等式即可。

一般的拉力方向下，可保留未除以系数的不等式。对 $AF\ge B$，$A>0$ 给下限，$A<0$ 给上限；$A=0$ 时由 $0\ge B$ 决定这一个条件是否满足。这样，系数经过零的情形也与实际施力方向相联系。

3.4 自锁怎样产生

沿右下方推动桌面物块，推力与水平夹角为 α。图 3.7 中，向下的分量增加正压力，向右的分量要求接触面提供向左的摩擦：

$$N=G+F\sin\alpha,\qquad f=F\cos\alpha.$$

所需摩擦随 F 增加的斜率是 $\cos\alpha$，最大静摩擦随 F 增加的斜率是 $\mu\sin\alpha$。若后者不小于前者，增大的正压力始终能提供足够的摩擦，这种指定受力方式下的锁住现象称为自锁。

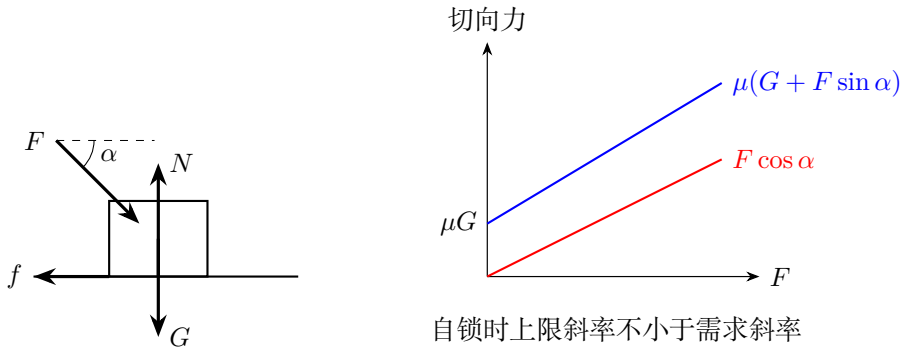


图 3.7: 向下推力同时增大滑动需求与摩擦上限

图 3.7 右图把两者画成直线。摩擦条件整理为

$$F(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)\le\mu G.$$

当 $\cos\alpha-\mu\sin\alpha\le 0$ 时，对任意 $F\ge 0$ 都满足这一滑动条件；当该系数为正时，启动推力为

$$F_c=\frac{\mu G}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}.$$

这一模型取物块保持平面接触。有限底宽物体的转动还由推力作用点决定，可以用前述支持力作用点求出翻倒条件。例 3.3 处理固定施力方向，例 3.2 和练习 3.2 中，外力通过杆的力矩改变张力和正压力，自锁条件还含载荷位置或施力高度。

两筷夹住圆物体时，两股法向力有沿开口方向的分量，摩擦沿筷反向抵住它。把每处的两个分量代入轴向平衡，得到所需 f/N；增大夹持力使 f 和 N 同比增加，所以开口角本身决定夹持能否维持。这是例 3.4 的出发点。

3.4.1 力的大小受限时怎样选择方向

若物块沿斜面向上缓慢滑动，动摩擦沿下坡，系数为 μ。消去支持力后有

$$F(\cos\delta+\mu\sin\delta)=G(\sin\theta+\mu\cos\theta).$$

记 $\gamma=\arctan\mu$，则 $\cos\gamma=1/\sqrt{1+\mu^2}$、$\sin\gamma=\mu/\sqrt{1+\mu^2}$。展开差角公式，

$$\sqrt{1+\mu^2}\cos(\delta-\gamma)=\cos\delta+\mu\sin\delta.$$

因此在施力方向自由、该方向仍保持接触时，$\delta=\gamma$ 使给定 F 的上坡能力最大。练习 3.1 在力的总大小有限的条件下求最大载重，求出方向后再代回 $N=G\cos\theta-F\sin\delta$，确定实际压力。

3.5 多个接触点怎样共同维持平衡

两处粗糙接触可以分担力和力矩。平面刚体有两个力分量方程和一个力矩方程，若接触分量多于三个，平衡方程往往保留一个参数。各处摩擦条件进一步限定参数范围；实际反力在这一范围中的分配与接触形变和加载方式有关。

图 3.8 中的梯子重 G、长 L，下端为 A，上端 B 靠右侧墙。墙的支持力 H 向左，墙摩擦 j 向上为正，地面摩擦 f 向右为正。平衡关系为

$$f=H,\qquad N+j=G,\qquad jL\cos\theta+HL\sin\theta=\frac{GL}{2}\cos\theta.$$

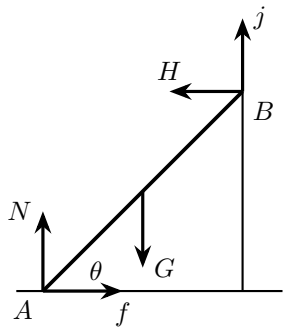


图 3.8: 两处粗糙接触各有独立的摩擦限制

图 3.8 中，关于 A 取矩消去了地面两股力。约去 $L\cos\theta$，由第三式得到

$$j=\frac{G}{2}-H\tan\theta,\qquad N=\frac{G}{2}+H\tan\theta.$$

于是只剩 H 一个参数，它的允许范围由

$$H\ge0,\qquad N\ge0,\qquad H\le\mu_AN,\qquad |G/2-H\tan\theta|\le\mu_BH$$

共同确定。例如 $\theta=45^\circ$、$\mu_A=\mu_B=1/2$，地面摩擦条件为

$$H\le\tfrac12(G/2+H)\quad\Longrightarrow\quad H\le G/2.$$

墙摩擦条件分成

$$G/2-H\le H/2,\qquad G/2-H\ge-H/2,$$

分别给 $H \ge G/3$ 与 $H \le G$。取共同范围，得到

$$\frac{G}{3} \le H \le \frac{G}{2}, \qquad 0 \le j \le \frac{G}{6}.$$

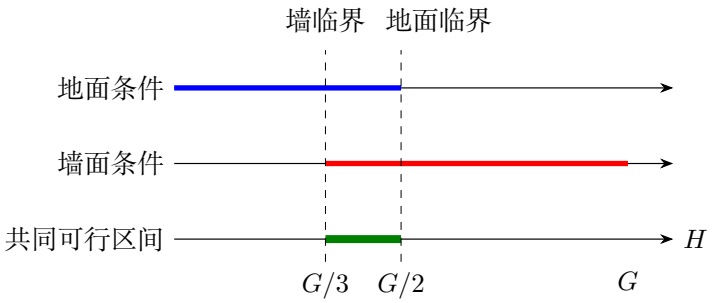


图 3.9: 地面与墙面给出的允许范围在蓝绿色区间重合

图 3.9 中，$H = G/3$ 时墙摩擦达到极限，$H = G/2$ 时地面摩擦达到极限，中间各值都满足平衡。例 3.5 进一步求两处具有相同摩擦系数时的最小系数，这时要寻找允许范围首次出现的位置。例 3.8 则用同一思路求圆柱两接触处的摩擦范围。

3.5.1 运动接触面的相对速度

圆柱接触处的材料点速度由平移与转动合成：

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CP}.$$

若接触面上的材料点速度为 $\boldsymbol{u}_P$，则相对速度是 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{u}_P$。相对速度为零的一面粘着；发生滑动的一面，摩擦沿相对速度的反方向。图 3.10 在墙面和板面分别写接触条件，两个条件使用各自的接触点。

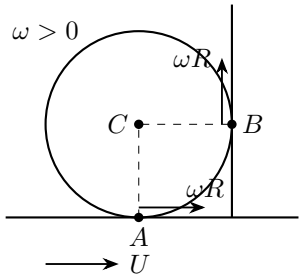


图 3.10: 墙与板的接触点分别满足各自的速度条件

图 3.10 中圆心固定，底部接触点速度为 ωR 向右，右侧接触点速度为 ωR 向上；相对底板速度为 $\omega R - U$，相对墙速度为 ωR。木板开合时，同样先由两面相

切确定圆心运动，再由粘着面确定角速度。把这个角速度代到另一接触点，即得到该处的滑动方向。例 3.10 依次讨论墙粘着与板粘着，受力平衡给出两种情形各自能够维持的摩擦系数范围。

3.6 斜面内缓慢牵引的轨迹

绳在斜面内牵引木块，绳力指向固定点 O，摩擦沿轨迹切线的反方向。图 3.11 以 O 为极点，ρ 为绳长，φ 从下坡方向量起；速度与径向单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$ 夹角为 ψ。

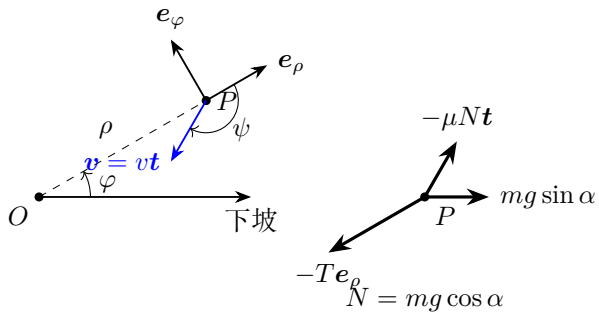


图 3.11: 极坐标的径向、角向和实际速度方向

图 3.11 右图中，绳力只有径向分量。斜面倾角为 α，动摩擦系数为 μ，则 $N=mg\cos\alpha$，重力沿坡分量在极坐标中为 $mg\sin\alpha(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi)$。沿 $\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向平衡，

$$-mg\sin\alpha\sin\varphi-\mu mg\cos\alpha\sin\psi=0,\qquad \sin\psi=-\frac{\tan\alpha}{\mu}\sin\varphi.$$

收绳时 $\dot\rho<0$，相应选择 $\cos\psi<0$。再由速度分解

$$\dot\rho=v\cos\psi,\qquad \rho\dot\varphi=v\sin\psi$$

相除，得到 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi=\rho\cot\psi$。给定初态后，分离变量积分可求轨迹。径向平衡同时给绳力

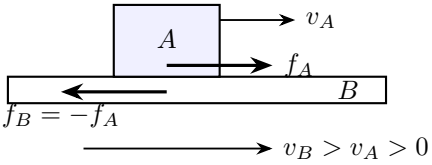
$$T=mg\sin\alpha\cos\varphi-\mu mg\cos\alpha\cos\psi.$$

所选缓慢牵引过程取 $T\ge0$、$|\sin\psi|\le1$ 的范围。练习 3.5 专取 $\mu=\tan\alpha$，将速度方向关系代入极坐标微分方程，完整求出圆弧轨迹。

3.7 摩擦做功与接触处的能量变化

物体缓慢移动时，惯性项可以很小，而重力势能和摩擦产生的热仍随位移积累。求每一时刻的外力可以使用准静态平衡，求一段过程的功则沿实际位移计算。

图 3.12 中，底板 B 以比木块 A 更大的速度向右运动。木块相对底板向左滑，因此底板对木块的摩擦向右。它对木块做正功，木块对底板的摩擦则做负功。



$$P_A = f_A v_A > 0$$
$$P_B = -f_A v_B < 0$$
$$P_A + P_B = -\mu N(v_B - v_A)$$

图 3.12: 运动底板可对木块做正功，但两接触体的总摩擦功率为负

以接触处材料点的速度为 $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$，定义 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B$。滑动时

$$\boldsymbol{f}_A = -\mu N \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}, \qquad \boldsymbol{f}_B = -\boldsymbol{f}_A.$$

两股摩擦的功率相加，

$$\begin{aligned} P_A + P_B &= \boldsymbol{f}_A \cdot \boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{f}_A \cdot \boldsymbol{v}_B \\ &= \boldsymbol{f}_A \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = -\mu N |\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|. \end{aligned}$$

图 3.12 中两功率的差额就是每秒转化的机械能。物体在静止面上纯滚动时，接触点的瞬时速度为零，静摩擦的瞬时功率为零；它仍可提供力矩，联系质心平移与转动。若接触面运动，功率直接由相应作用点的对地速度计算。

空间接触有两个切向分量时，静摩擦条件写成 $\sqrt{f_1^2 + f_2^2} \le \mu_s N$。它是全切向力的大小限制，与本讲开头的摩擦锥相对应。

3.8 例题与分析

例 3.1 (垂直于杆的抬升力)**.** 均匀杆重 G，一端在地面上不滑动，另一端受始终垂直杆的力而缓慢抬起。求完成全过程所需的最小静摩擦系数。

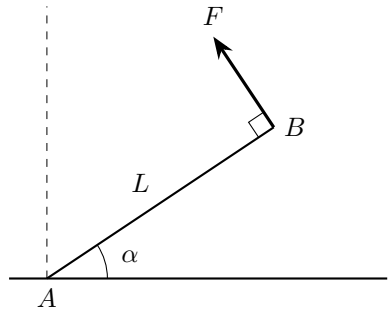


图 3.13: 抬升力保持垂直于杆，倾角由水平逐渐增至竖直

解　用力矩平衡求各倾角所需的抬升力

图 3.13 设杆与地面夹角 α，绕下端取矩，$FL = G(L/2)\cos\alpha$，两边约去 L，所以 $F = G\cos\alpha/2$。抬升力的水平分量向左 $F\sin\alpha$，竖直分量向上 $F\cos\alpha$；为保持杆脚不动，水平摩擦 $f = F\sin\alpha$，支持力 $N = G - F\cos\alpha$。

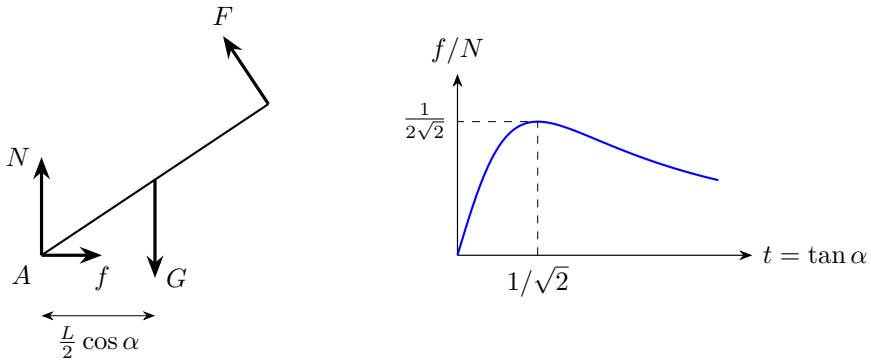


图 3.14: 力矩先确定抬升力，再由杆脚受力求摩擦需求

把全过程化为摩擦比的最大值

图 3.14 因此要求

$$\mu \geq \frac{f}{N} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} = \frac{t}{1+2t^2}, \quad t = \tan\alpha.$$

将 $\sin\alpha\cos\alpha = t/(1+t^2)$、$1+\sin^2\alpha = (1+2t^2)/(1+t^2)$ 相除，得 $t/(1+2t^2)$。令 $h(t) = t/(1+2t^2)$，按商的求导法则，

$$h'(t) = \frac{1\cdot(1+2t^2) - t\cdot 4t}{(1+2t^2)^2} = \frac{1-2t^2}{(1+2t^2)^2}.$$

分母恒正；当 $0 \leq t < 1/\sqrt{2}$ 时导数为正，当 $t > 1/\sqrt{2}$ 时导数为负。因此峰值位于 $t = 1/\sqrt{2}$，代回得到

$$h_{\max} = \frac{1/\sqrt{2}}{1+2(1/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

图 3.14 右图的峰值给出全过程所需的最小系数 $\mu_{\min} = 1/(2\sqrt{2})$。两端 $\alpha = 0, \pi/2$ 所需摩擦均为零，最危险状态位于中途；支持力 $N = G(1+\sin^2\alpha)/2 > 0$，因此全过程没有法向脱离。

例 3.2 (水平杆上的任意大载荷)**.** 重 G、长 l 的均匀水平杆，一端 A 顶住粗糙墙，另一端 B 以与杆夹角 θ 的绳悬挂。墙摩擦系数 μ。求空杆平衡条件，以及悬挂任意大重物也不失衡的载荷位置。

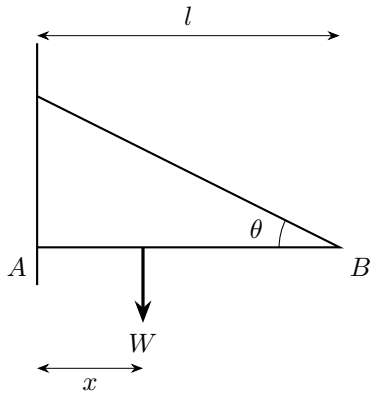


图 3.15: 载荷位置从墙端量起，绳倾角相对水平杆定义

解　保留载荷位置，列三个刚体平衡方程

图 3.15 在距 A 为 x 处加重 W。对 A 取矩，$T\sin\theta = G/2 + Wx/l$；水平平衡 $N = T\cos\theta$；竖直平衡给 $f = G/2 + W(1 - x/l)$。

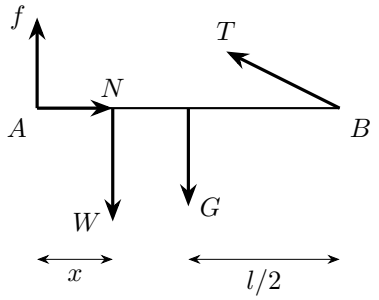


图 3.16: 完整受力图中张力、杆重、载荷分别有不同力臂

求空杆条件和载荷位置

图 3.16 的摩擦应向上，条件为

$$\frac{G}{2} + W(1 - x/l) \le \mu\cot\theta\left(\frac{G}{2} + \frac{Wx}{l}\right).$$

令 $W = 0$，约去正的 $G/2$，得 $1 \le \mu\cot\theta$，即空杆需 $\mu \ge \tan\theta$。在此条件下，对所有 $W \ge 0$ 成立还需移项后 W 的系数不为正：

$$1 - \frac{x}{l} - \mu\cot\theta\frac{x}{l} \le 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x}{l}(1 + \mu\cot\theta) \ge 1.$$

因 $0<\theta<\pi/2$，括号为正，除后再把分子、分母同乘 $\tan\theta$，得到

$$x \geq x_c = \frac{l\tan\theta}{\mu+\tan\theta}.$$

求不能自锁时的有限临界载荷

把不等式移项可写为

$$W[1-(1+\mu\cot\theta)x/l] \leq \frac{G}{2}(\mu\cot\theta-1).$$

空杆条件确保右侧非负。若 $x<x_c$，左侧系数为正，有限临界载荷为

$$W_c = \frac{G(\mu\cot\theta-1)}{2[1-(1+\mu\cot\theta)x/l]}.$$

当 $x<x_c$ 时，允许载荷为 $0\leq W\leq W_c$；当 $x\geq x_c$ 且空杆满足平衡条件时，任意 $W\geq 0$ 均满足摩擦条件。$x=x_c$ 处的摩擦比在 W 增大时趋向极限值。

例 3.3 (推力方向造成的自锁)**.** 将重 G 的物块视为质点 P，它与水平面的静摩擦系数为 $\mu>0$。沿与水平成 α 的右下方向施力 F，其中 $0<\alpha<\pi/2$，并使 F 从零缓慢增大。求沿水平面滑动的自锁条件，以及发生滑动时的临界推力。

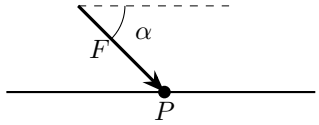


图 3.17: 质点受到右下方向的推力，角度从水平向右量起

解　比较摩擦需求与可用上限

图 3.17 中 $N=G+F\sin\alpha$，维持静止需 $f=F\cos\alpha$。向下的推力分量提高了正压力，因此静摩擦的最大值为 $\mu(G+F\sin\alpha)$。

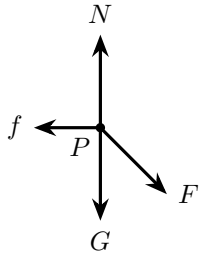


图 3.18: 推力的水平分量由向左摩擦平衡，竖直分量增加支持力

按外力系数的符号区分自锁与启动

图 3.18 中，水平推力由静摩擦平衡，故静止条件为

$$F\cos\alpha \le \mu(G + F\sin\alpha), \qquad F(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \le \mu G.$$

当 $\cos\alpha - \mu\sin\alpha \le 0$ 时，左侧始终小于或等于零，全部 $F \ge 0$ 都满足静止条件。这时正压力带来的摩擦上限增长得足够快，质点处于自锁状态。由于 $\sin\alpha > 0$，自锁条件可写成

$$\cos\alpha \le \mu\sin\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \tan\alpha \ge \frac{1}{\mu}.$$

当 $\tan\alpha < 1/\mu$ 时，系数 $\cos\alpha - \mu\sin\alpha > 0$。两边除以这个系数，得到静止时允许的推力范围

$$0 \le F \le F_c, \qquad F_c = \frac{\mu G}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

推力增至 F_c 时，摩擦达到 μN；继续增大推力，质点便向右滑动。

例 3.4 (筷子的摩擦夹持条件)**.** 两对称直筷形成总夹角 2θ，夹持可视为圆的物体。忽略物体重力对夹持平面内运动的影响，摩擦系数 μ。求物体不从开口一侧滑出的自锁条件。

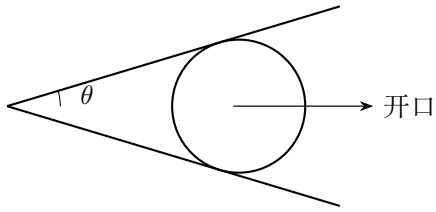


图 3.19: 两筷关于开口轴线对称，总夹角为两倍半角

解　在真实接触点确定法向与摩擦方向

图 3.19 中两法向力均把物体推向开口方向，每个法向沿轴分量为 $N\sin\theta$。若物体将向开口滑出，两个摩擦沿筷向尖端，其轴向分量各为 $f\cos\theta$。两处接触关于轴线对称，法向和摩擦的横向分量分别相消。下面沿开口方向列平衡方程。

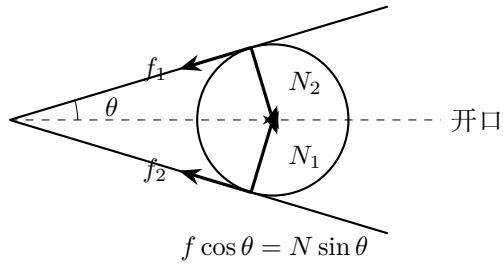


图 3.20: 摩擦沿筷指向尖端，两个法向分量共同推向开口

以方向比判断夹持是否可行

图 3.20 沿对称轴平衡要求 $f\cos\theta = N\sin\theta$，即 $f/N = \tan\theta$。可静止条件为 $\tan\theta \le \mu$，总夹角 $2\theta \le 2\arctan\mu$。所需摩擦与法向力之比由开口角决定。

例 3.5 (靠墙梯子的三种摩擦条件)**.** 均匀梯重 G，与水平夹角 θ，墙和地面静摩擦系数分别为 μ_1, μ_2。分别求光滑墙、光滑地面、两处相同系数时的最低要求。

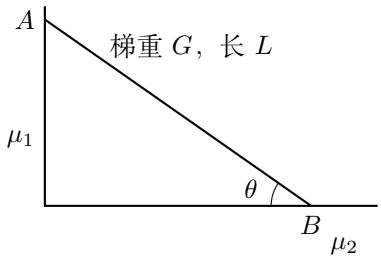


图 3.21: 梯子两端分别接触竖墙与水平地面

解　列两接触点的完整受力与力矩关系

图 3.21 下滑趋势使墙摩擦 f_1 向上，地面摩擦 f_2 向墙。平衡为 $N_1 = f_2$，$N_2 + f_1 = G$；对下端取矩得

$$N_1 L\sin\theta + f_1 L\cos\theta = \frac{GL}{2}\cos\theta.$$

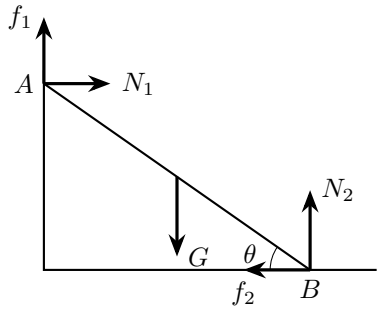


图 3.22: 墙面与地面的两组反力共同支承梯重

分别讨论一个接触面光滑的情况

图 3.22 若墙光滑，$f_1 = 0$，故 $N_1 = (G/2)\cot\theta$，$N_2 = G$，要求 $\mu_2 \ge \cot\theta/2$。

若地面光滑，$f_2 = 0$ 进而 $N_1 = 0$；墙摩擦也必须为零，无法抵消重力矩，所以对 $0 < \theta < \pi/2$ 不存在有限 μ_1 可使其静止。

让可行反力区间刚好出现以求最小系数

若两处均为 μ，令 $t=f_1/G$、$a=N_1/G$，力矩式化为 $a\tan\theta+t=1/2$，竖直式为 $N_2/G=1-t$。摩擦不等式要求 $t\le\mu a$、$a\le\mu(1-t)$。消去 $t=1/2-a\tan\theta$ 后，

$$a\ge\frac{1}{2(\mu+\tan\theta)},\qquad a(1-\mu\tan\theta)\le\frac{\mu}{2}.$$

先在 $\mu\tan\theta<1$ 内寻找允许范围首次出现的条件。第二个不等式给 $a\le\mu/[2(1-\mu\tan\theta)]$，与下界相容须

$$\frac{1}{2(\mu+\tan\theta)}\le\frac{\mu}{2(1-\mu\tan\theta)}.$$

分母均为正，交叉相乘，得

$$1-\mu\tan\theta\le\mu(\mu+\tan\theta)\quad\Longleftrightarrow\quad(\mu+\tan\theta)^2\ge1+\tan^2\theta=\sec^2\theta.$$

因 $\mu+\tan\theta>0$，取正平方根，得到

$$\mu\ge\sec\theta-\tan\theta=\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}.$$

该候选值满足 $\mu\tan\theta=\sin\theta/(1+\sin\theta)<1$，确在所讨论区间内。在等号处上下界相等，两处摩擦同时取极限；由 $N_2=G-\mu N_1$ 和 $N_1=\mu N_2$ 得

$$N_1=\frac{\mu G}{1+\mu^2}>0,\qquad N_2=\frac{G}{1+\mu^2}>0,\qquad f_1=\mu N_1>0.$$

所以此临界条件可以实现，$\mu_{\min}=\sec\theta-\tan\theta$。在最小系数处，两处所需的摩擦恰好同时达到各自上限。

例 3.6 (轻圆筒何时翻倒)**.** 半径 a、高 $4a$、重 w 的两端开口薄圆筒置于光滑地面。筒内两相同光滑球半径 r、各重 G，一球落地且分别靠左右筒壁，$a/2<r<a$。求圆筒不翻倒条件。

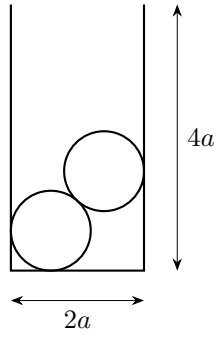


图 3.23: 两球交错接触筒壁，下球同时接触地面

解　用球心三角形求筒壁水平挤压力

图 3.23 中两球心水平差 $2(a-r)$，竖直差 $2q$，其中 $q=\sqrt{r^2-(a-r)^2}=\sqrt{a(2r-a)}$。上球竖直平衡使球间力的竖直分量为 G，其水平分量为 $G(a-r)/q$。

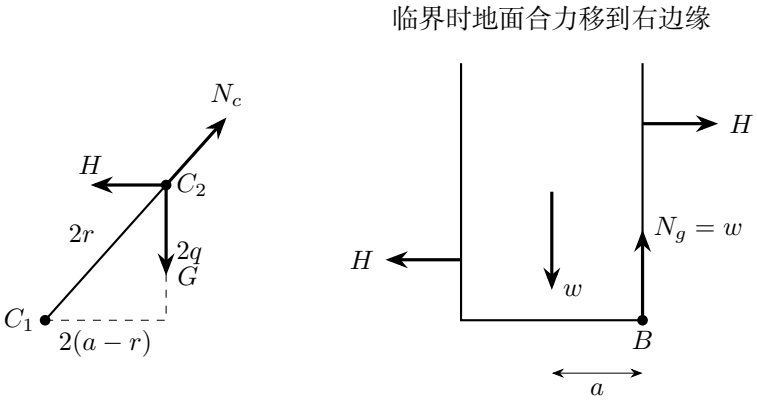


图 3.24: 球心三角形确定水平挤压力，筒壁所受两力构成力偶

以边缘取矩比较挤压力偶与回复力矩

图 3.24 筒壁受两相反水平力，作用点高度差 $2q$，形成力偶，矩为

$$M_{\text{balls}}=\frac{G(a-r)}{q}\,(2q)=2G(a-r).$$

这对水平力使圆筒产生顺时针翻倒的趋势。圆筒自身重力的最大回复力矩为 wa，所以不翻倒需

$$2G(a-r)\le wa,\qquad r\ge a\left(1-\frac{w}{2G}\right).$$

若右侧小于 $a/2$，全部题设半径均满足。上球最高点为 $2r+2q$；由 $r<a$ 及 $q=\sqrt{a(2r-a)}<a$，有 $2r+2q<4a$，所以题设范围内上球始终低于筒口。

例 3.7 (大圆柱越过小圆柱)**.** 两圆柱半径 $r_1 < r_2$、重 G_1, G_2，置于水平地面。在大柱顶端切向向左拉绳，使其将绕小柱上升。所有接触静摩擦系数 μ，求临界抬离地面时不打滑的条件。

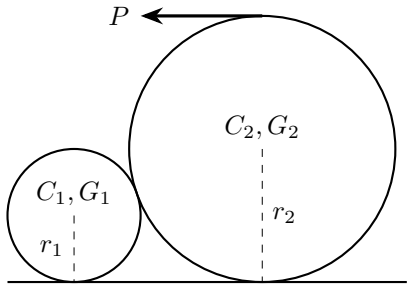


图 3.25: 连心线的水平距离由两半径及相切条件确定

解　在离地瞬间分别列两柱转矩平衡

图 3.25 大柱地面反力为零时，两柱中心的水平距离为 $2\sqrt{r_1 r_2}$。对小柱转动平衡，地面摩擦与两柱间切向摩擦相等，均为 f；对大柱中心取矩，顶端拉力满足 $P = f$。

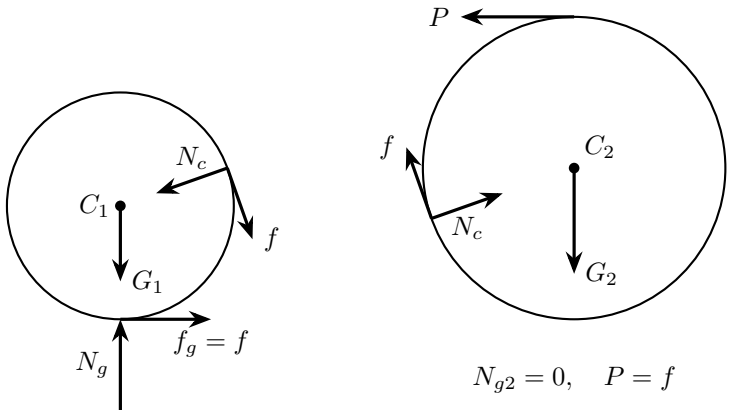


图 3.26: 临界时大柱离地；两柱接触力在各自图上等大反向

用整体取矩求拉力与摩擦

图 3.26 左图中地面摩擦向右，小柱所受接触切向力向右下；二者关于小柱中心的转矩相反。对两柱整体，以小柱最低接触点对整个系统取矩，$P(2r_2) = G_2\, 2\sqrt{r_1 r_2}$，所以 $P = f = G_2\sqrt{r_1/r_2}$。

恢复局部接触力并比较两处摩擦约束

设连心线向右上方的单位向量为 (c,s)，其中

$$c=\frac{2\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2},\qquad s=\frac{r_2-r_1}{r_1+r_2}.$$

大柱接触切向力为 $f(-s,c)$，平衡顶端拉力的转矩，且 $f=P$。水平平衡给 $N_cc-fs-P=0$，故

$$N_c=\frac{P(1+s)}{c}=P\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}=G_2.$$

整体竖直平衡给小柱地面反力 $N_g=G_1+G_2$。

$$f\le\mu N_c,\qquad f\le\mu N_g.$$

前者更严格，故 $\mu\ge\sqrt{r_1/r_2}$。此条件对应大柱刚离地的起越瞬间。

例 3.8 (两斜面上的摩擦为何不唯一)**.** 圆柱重 G，接触左右倾角 $60°,30°$ 的固定粗糙斜面，摩擦系数 μ_1,μ_2。仅给出静止条件，能否唯一求两处摩擦?

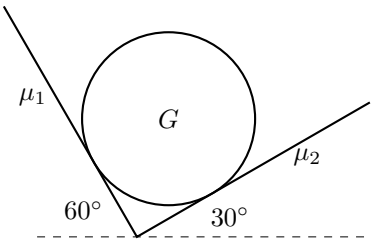


图 3.27: 圆柱同时接触左侧陡面和右侧缓面

解　用转矩方程联系两个有向摩擦

图 3.27 取两切向方向均沿各斜面向上，记左摩擦为 T、右摩擦为 T_2。关于圆心的力矩平衡给 $T_2=T$，两力的转矩方向相反。法向平衡分量为

$$\tfrac{\sqrt3}{2}N_1-\tfrac12N_2-\tfrac12T+\tfrac{\sqrt3}{2}T=0,\quad \tfrac12N_1+\tfrac{\sqrt3}{2}N_2+\tfrac{\sqrt3}{2}T+\tfrac12T=G.$$

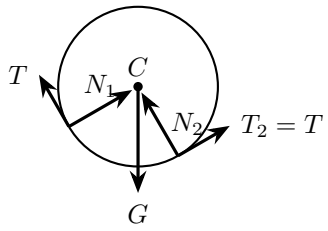


图 3.28: 两股法向力通过圆心，沿面摩擦的力矩互相抵消

以摩擦参数表示法向力并保留可行区间

图 3.28 第一式与第二式的法向力系数构成正交投影。以 $\sqrt{3}/2$ 乘水平式、$1/2$ 乘竖直式后相加，得 $N_1 + T = G/2$；以 $-1/2$ 乘水平式、$\sqrt{3}/2$ 乘竖直式后相加，得 $N_2 + T = \sqrt{3}G/2$。因此 $N_1 = G/2 - T$、$N_2 = \sqrt{3}G/2 - T$。故允许的 T 满足

$$N_1, N_2 \geq 0, \quad |T| \leq \mu_1 N_1, \quad |T| \leq \mu_2 N_2.$$

当两摩擦系数均为正时，$T = 0$ 和一段正 T 都能满足条件。具体地，正 T 可取

$$0 \leq T \leq \min\left(\frac{\mu_1 G}{2(1+\mu_1)}, \frac{\sqrt{3}\mu_2 G}{2(1+\mu_2)} \right).$$

这已给出一族不同的平衡反力。若任一接触面光滑，则相应摩擦为零，力矩式给另一处也为零，反力随之唯一。对于两面都粗糙的情况，实际分配还与接触形变或加载过程有关。

例 3.9 (斜面上先滑还是先翻)**.** 均匀长方体沿斜面的底边长 a、法向高度 b，静摩擦系数 μ。斜面倾角从零缓慢增加，求首先发生的失稳类型及临界角。

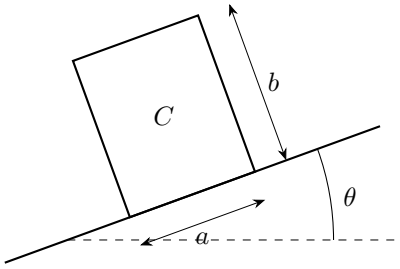


图 3.29: 斜面倾角逐渐增大，物块底长和高度分别沿面与法线量取

解　求沿斜面滑动的临界角

图 3.29 静止时 $f = G\sin\theta$，$N = G\cos\theta$，所以滑动临界条件 $\theta_s = \arctan\mu$。

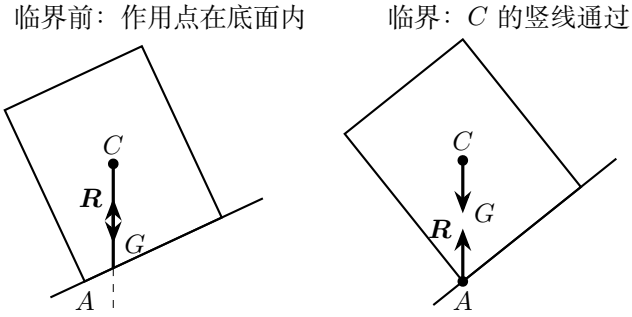


图 3.30: 支承合力先向下坡边缘移动，临界时与重力竖线共线

求倾覆临界条件并比较先后顺序

图 3.30 对下坡底边取矩，重力力臂从质心的水平投影决定，倾覆临界满足 $(a/2)\cos\theta = (b/2)\sin\theta$，即 $\theta_t = \arctan(a/b)$。重力竖线落在底面内时，可由底面某处的法向反力提供平衡；到下坡边缘时力臂为零，再偏转便需要底面外的支点，原接触构型失效。两种临界均从 $\theta = 0$ 随角度增加达到，故比较两角：$\mu < a/b$ 先滑；$\mu > a/b$ 先翻；相等时两临界条件同时达到。支持力作用点在倾覆临界前逐渐移向下坡边缘，其位置由当前倾角确定。

例 3.10 (开合木板夹持圆柱的转向)**.** 圆柱半径 R、重 G，位于竖直墙与下端铰于墙脚的木板之间。板与竖直夹角 $\theta < 90^\circ$ 缓慢增大，墙、板摩擦系数分别 μ_w, μ_b。在准静态近似下，讨论哪一面粘着及转向，忽略转换瞬间惯性层。

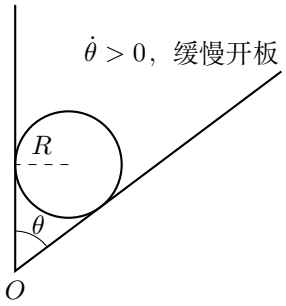


图 3.31: 圆心到墙和木板的距离均为圆柱半径

解　由两处相切几何求中心下降速度

图 3.31 中圆心到墙的距离恒为 R。设圆心高 Y，它到板直线的垂距亦为 R，故

$$Y\sin\theta - R\cos\theta = R, \qquad Y = \frac{R(1+\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{2R\cos^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)} = R\cot\frac{\theta}{2}.$$

圆心位于 $(R, R\cot(\theta/2))$。先对余切函数求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cot u = \frac{(-\sin u)\sin u - \cos u\cos u}{\sin^2 u} = -\frac{1}{\sin^2 u}.$$

再令 $u = \theta(t)/2$，用链式法则得到中心竖直速度

$$V_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[R\cot(\theta/2)\big] = -\frac{R}{\sin^2(\theta/2)}\frac{\dot\theta}{2} < 0.$$

因此圆心向下移动。取逆时针角速度 ω 为正，墙接触相对速度为 $V_y - R\omega$，板接触沿板向上分量为 $V_y\cos\theta + R\omega$。两处同时粘着只在 $\dot\theta = 0$ 时可能。几何式决定圆心的运动方向，接触点的刚体速度再确定滑动方向。

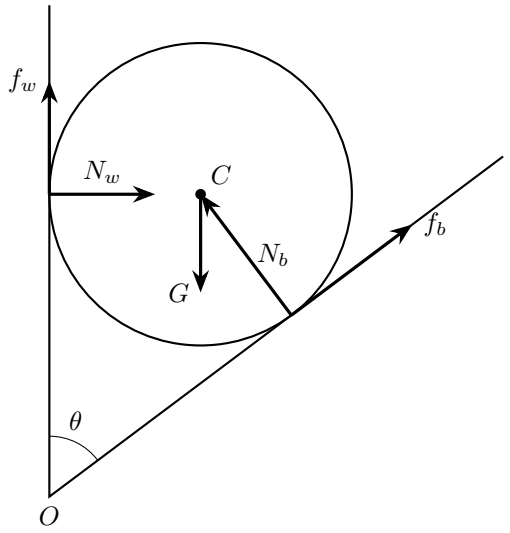


图 3.32: 在墙、板实际接触点分别标法向力与切向力

列准静态受力及转矩关系

图 3.32 记板法向力 N_b、墙法向力 N_w，两切向力均按向上为正。准静态力矩给 $f_b = f_w = f$，力平衡给

$$N_w = N_b\cos\theta - f\sin\theta, \quad G = N_b\sin\theta + f(1+\cos\theta).$$

分别求墙粘着与板粘着的条件

若墙粘着，$\omega = V_y/R < 0$，圆柱顺时针；板向下滑，$f = \mu_b N_b$。代入力平衡式，先求

$$N_b = \frac{G}{\sin\theta + \mu_b(1+\cos\theta)}, \qquad N_w = N_b(\cos\theta - \mu_b\sin\theta).$$

墙须提供同样大小的 f，因此 $\mu_b N_b \le \mu_w N_w$。约去正的 N_b，墙能粘着的条件为

$$\mu_b \le \mu_w(\cos\theta - \mu_b\sin\theta).$$

若板粘着，$\omega = -V_y\cos\theta/R > 0$，圆柱逆时针；墙处向下滑，$f = \mu_w N_w$。先代入水平平衡式，得到

$$N_w = N_b\cos\theta - \mu_w N_w\sin\theta, \qquad \frac{N_w}{N_b} = \frac{\cos\theta}{1+\mu_w\sin\theta}.$$

板摩擦须满足 $f \le \mu_b N_b$，故

$$\frac{\mu_w\cos\theta}{1+\mu_w\sin\theta} \le \mu_b \quad \Longleftrightarrow \quad \mu_w\cos\theta \le \mu_b(1+\mu_w\sin\theta).$$

其中 $N_b = G/\{\sin\theta + \mu_w \cos\theta(1+\cos\theta)/(1+\mu_w \sin\theta)\} > 0$，且 $N_w > 0$，接触未被破坏。

比较分支临界条件并说明转向切换条件

墙粘着分支中，板接触的相对速度为 $V_y(1+\cos\theta) < 0$，故板摩擦沿板向上；板粘着分支中，墙接触的相对速度也为 $V_y(1+\cos\theta) < 0$，故墙摩擦向上。把板分支不等式整理为 $\mu_w(\cos\theta - \mu_b \sin\theta) \le \mu_b$，恰与墙分支互补，两条件在相同临界角相接。因此当初态满足第一不等式时，开板可由顺时针分支转入逆时针分支；若初态已位于另一侧，则从板粘着的逆时针情形开始。

两种准静态运动在临界角相接；题设忽略的转换过程由圆柱的转动惯量决定。

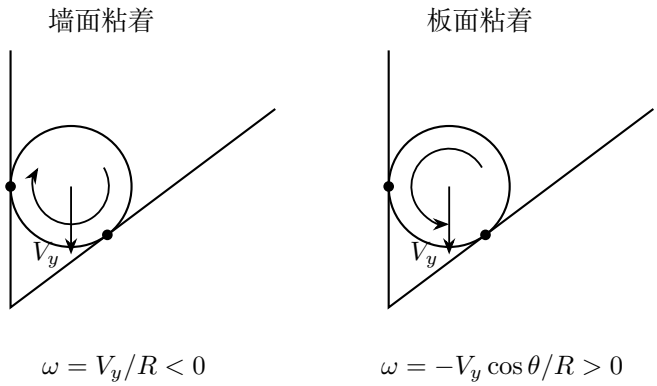


图 3.33: 墙与板两种粘着分支：中心同向下移，转向相反

图 3.33 把两支中的无滑动方程与转向并列。中心始终向下，而转向取决于哪一个接触点相对其接触面静止；开板过程中至少有一面滑动。

本讲小结

静摩擦先由平衡方程求出，再与各接触处的最大值比较。支持力的作用点由力矩确定，随着载荷变化可以移向支承边缘；滑动、翻倒和脱离分别有各自的条件。

多接触系统可以保留一个反力参数，用各处摩擦条件求共同允许范围。自锁来自外力增大时正压力及摩擦上限的同步增加，施力方向和力臂都参与这一关系。运动接触中，摩擦方向由接触材料点的相对速度确定；缓慢牵引的轨迹则由受力方向与速度分解共同给出。

3.9 练习

练习 3.1 (抬举能力有限的斜面推物)**.** 斜面倾角 15°，动摩擦系数 $1/\sqrt{3}$。人的最大施力等于质量为 m 的物体的重力，施力方向可自由选择，使物块缓慢上移并保持接触。求最大物块质量。

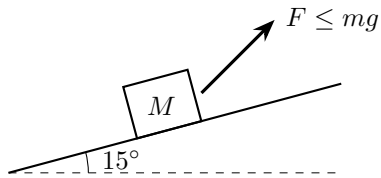


图 3.34: 拉力方向自由选择，大小受人的施力上限限制

练习 3.2 (竖杆拉绳的自锁高度)**.** 竖直杆高 l、重 G，下端在静摩擦系数 μ 的地面，上端由向左下、与水平夹角 θ 的绳拉住。在高 h 处施水平向右力 F，$0 < h \le l$。求任意大 F 也不滑的条件。

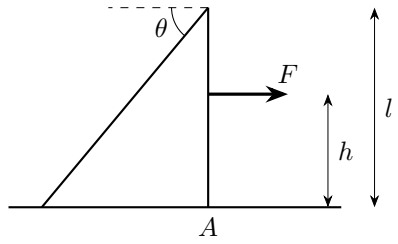


图 3.35: 绳固定杆顶，水平推力作用在高度 h 处

练习 3.3 (抽屉式双角接触的卡紧)**.** 忽略重力的刚性滑块在水平平行导轨中对角接触，两接触点水平间距 L。水平拉力 F 的作用线离中线距离 e，两处切向力等量分配，法向反力形成的力偶与 Fe 抵消，两处摩擦系数 μ。求自锁条件。

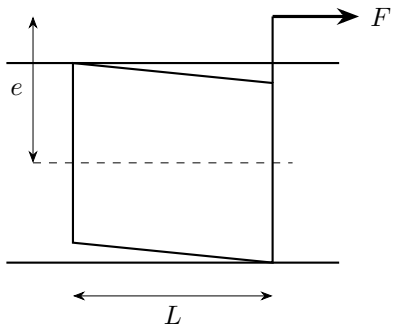


图 3.36: 偏心拉力使滑块与上下导轨形成对角接触

练习 3.4 (人字梯两脚的摩擦裕度)**.** 轻质对称人字梯两脚为 A, B，地面静摩擦系数均为 μ，顶部为光滑铰链，无横向拉杆。考察梯形状保持不变的准静态平衡：人沿靠近 A 的一边向上，人在地面的投影位于 A 与两脚中点之间。比较两脚的摩擦裕度，并判断上行是否必然使某一脚从静止进入滑动。

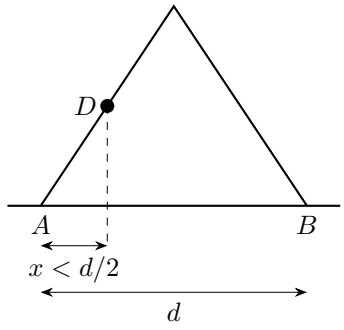


图 3.37: 人位于 A 侧梯腿，两脚间距保持为 d

练习 3.5 (斜面缓拉轨迹)**.** 倾角 θ 的平面内，木块受指向固定滑轮 O 的轻绳缓慢拉动，动摩擦系数 $\mu = \tan\theta$。绳力平行斜面。初态木块与滑轮等高、相距 ρ_0。求平面内轨迹。

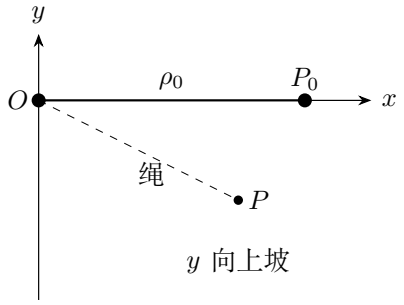


图 3.38: 初始绳段沿等高线，竖直图轴取上坡方向

练习 3.6 (墙角圆球的偏心下压力)**.** 重 G、半径 r 的球接触左墙和地面，两处静摩擦系数 $0 < \mu < 1$。在球心左侧水平距离 s 处施竖直向下力 F。求刚开始逆时针转动时的偏心距。

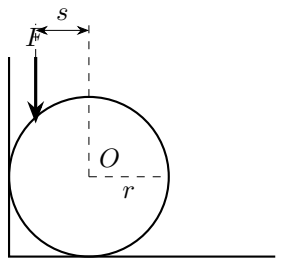


图 3.39: 向下作用力的竖线位于球心左侧

练习解答

练习 3.1

解　用法向分量减轻摩擦并列上坡平衡

图 3.34 令外力相对上坡方向向斜面外侧偏 δ，则 $N = Mg\cos 15^\circ - F\sin\delta$。上坡平衡为 $F\cos\delta = Mg\sin 15^\circ + \mu N$。物块向上缓慢滑动，摩擦沿下坡。外力向外的分量减小支持力，上坡分量直接推动物块。图中分别列出这两个方向的作用。

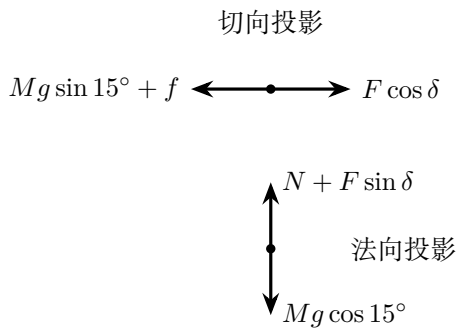


图 3.40: 切向分量用于上移，法向分量减小正压力

在总力限制内求最优方向

图 3.40 整理得

$$M = \frac{F(\cos\delta + \mu\sin\delta)}{g(\sin 15^\circ + \mu\cos 15^\circ)}.$$

因 $\mu = 1/\sqrt{3}$，用差角公式写成

$$\cos\delta + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\delta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\delta - 30^\circ) \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

等号在 $\delta = 30^\circ$ 成立。质量又与 F 成正比，故取 $F = mg$。分母的角函数也先化简：

$$\sin 15^\circ + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos 15^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(15^\circ + 30^\circ) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

因此

$$M_{\max} = \frac{mg(2/\sqrt{3})}{g\sqrt{2/3}} = \sqrt{2}m.$$

此时力与水平成 45°。代回法向平衡，并用 $\cos 15^\circ = (\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$，有

$$N = \sqrt{2}mg\cos 15^\circ - mg\sin 30^\circ = mg\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}mg > 0.$$

最优方向的支持力为正，物块保持接触。

练习 3.2

解　由施力高度确定绳力

图 3.35 中，绳的水平分量在高度 l 处向左，推力 F 在高度 h 处向右。对杆脚 A 取矩，

$$(T\cos\theta)l = Fh, \qquad T\cos\theta = \frac{Fh}{l}.$$

水平平衡要求地面摩擦向左，大小为 $f = F - T\cos\theta$；绳的向下分量增加正压力。

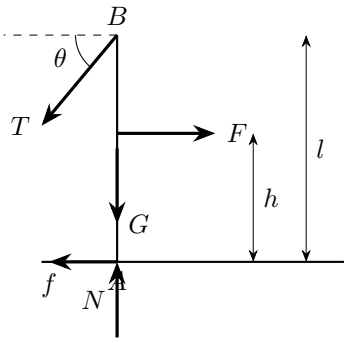


图 3.41: 杆顶绳力与推力的力臂分别为杆长和施力高度

由静摩擦条件求自锁高度

图 3.41 中 $0 < h \le l$，所以

$$f = F\left(1 - \frac{h}{l}\right) \ge 0, \qquad N = G + T\sin\theta = G + \frac{Fh}{l}\tan\theta.$$

将 $f \le \mu N$ 逐项移到两侧，得到

$$F - \frac{Fh}{l} \le \mu G + \mu\frac{Fh}{l}\tan\theta, \qquad F\left[1 - \frac{h}{l}(1 + \mu\tan\theta)\right] \le \mu G.$$

在题设几何保持不变、$F \ge 0$ 的条件下，方括号不大于零就能使所有 F 满足摩擦条件。因此

$$h \ge \frac{l}{1 + \mu\tan\theta}.$$

此时 $T = Fh/(l\cos\theta) \ge 0$，$N \ge G > 0$，绳与地面都能提供所求的约束力。

练习 3.3

解　用偏心力矩求法向力

图 3.36 采用题设的对角接触，两个接触点关于中线对称。忽略重力，竖直平衡给两法向力等大，记为 N。法向力偶与偏心拉力矩相抵，因而

$$NL = F|e|, \qquad N = \frac{F|e|}{L}.$$

按题设的力偶关系，两处摩擦的合力通过中线；由水平平衡，每处所需摩擦均为 $F/2$。

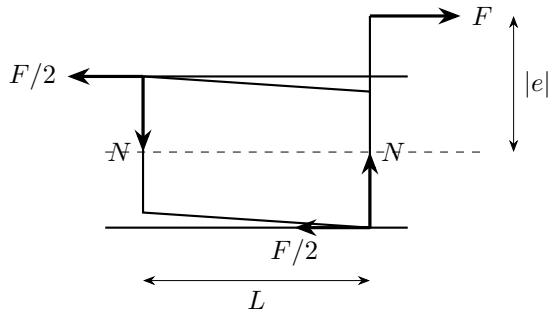


图 3.42: 偏心拉力与法向力偶相反；两摩擦在中线两侧等量分配

比较摩擦需求与两处上限

图 3.42 中，两股摩擦均向左，其大小条件为

$$\frac{F}{2} \le \mu N = \frac{\mu F|e|}{L}.$$

对 $F>0$ 约去 F，得到自锁条件

$$2\mu|e| \ge L.$$

满足此条件时，增大拉力会按相同比例增加法向力和可提供的静摩擦。e 变号时，相应采用另一对对角接触。

练习 3.4

解　由整体平衡比较两脚法向力

图 3.37 以整个梯和人为对象，水平外力只有两脚摩擦，故两者大小相等为 f，方向相向。令两脚间距为 d，人重为 G，人在地面的竖直投影距 A 为 x。忽略梯重后，整体竖直平衡 $N_A+N_B=G$；关于 A 取矩，地面摩擦均与地面共线，没有力矩，故 $N_B d = Gx$。这就给出两脚承重的差异，不需先求铰链内力。

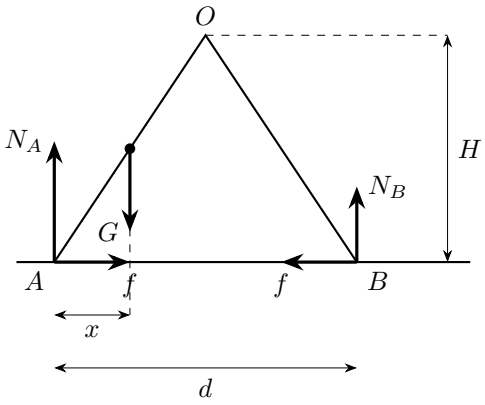


图 3.43: 整体取矩确定两脚支持力，再比较同一摩擦需求

隔离未载人的梯腿求实际摩擦需求

图 3.43 中，设铰链 O 离地高度为 H。未载人的轻梯腿 OB 仅受铰链力和地面接触力。对 O 取矩，铰链力没有力矩，故

$$N_B\frac{d}{2}-fH=0,\qquad f=\frac{d}{2H}N_B.$$

结合整体平衡，得到

$$N_B=\frac{Gx}{d},\qquad N_A=\frac{G(d-x)}{d},\qquad f=\frac{Gx}{2H}.$$

人上行时，N_B 与 f 按相同比例增大。

比较摩擦裕度并判断是否会失稳

对题设 $0<x<d/2$，两脚所需的摩擦比为

$$\frac{f}{N_B}=\frac{d}{2H},\qquad \frac{f}{N_A}=\frac{d}{2H}\frac{x}{d-x}<\frac{d}{2H}.$$

因此 B 脚的摩擦裕度较小，整架梯能够平衡的条件是 $\mu\geq d/(2H)$。在梯形状保持不变的前提下，若 $\mu>d/(2H)$，人向上移动至中点前两脚始终满足静摩擦约束；若 $\mu=d/(2H)$，B 脚在所有这些位置都处于临界状态；若 $\mu<d/(2H)$，任意 $x>0$ 都不能维持题设的静平衡。因此 B 脚的摩擦条件较严格，而上行是否发生滑动由 μ 与固定的 $d/(2H)$ 决定。

练习 3.5

解　由实际滑动方向建立斜面内三力平衡

图 3.38 中，取 y_d 沿下坡为正。重力的沿坡分量与滑动摩擦大小相等，均记为 $K = G\sin\theta$。设速度方向为单位矢量 $\boldsymbol{t}$，由 O 指向木块的径向单位矢量为 $\boldsymbol{e}_r$，三力平衡写成 $-T\boldsymbol{e}_r + K(\boldsymbol{e}_{y_d} - \boldsymbol{t}) = 0$。

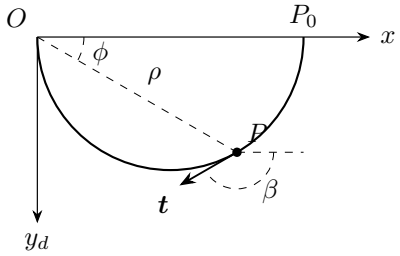


图 3.44: 从初始点向固定滑轮收绳，速度沿圆弧切线

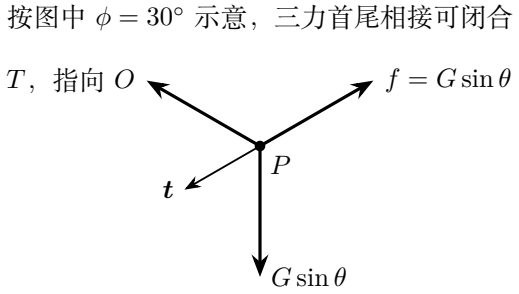


图 3.45: 斜面内三力闭合，摩擦始终反向于实际切向速度

图 3.45 把重力沿坡分量与滑动摩擦画成等长矢量，它们的合力必须与绳力反向。它们合成的方向确定速度切线与径向的夹角，进而联系绳长变化与极角变化。

把力三角形转换为极坐标微分方程

图 3.44 由等大两力合成关系，径向收缩方向平分重力与摩擦的夹角。为展开轨迹计算，令 y_d 沿下坡为正，极角 ϕ 从正 x 向下量。设速度方向与正 x 夹角为 β，力的两个分量为 $T\cos\phi = -G\sin\theta\cos\beta$、$T\sin\phi = G\sin\theta(1-\sin\beta)$。当 $\phi > 0$ 时相除，并用半角恒等式化简：

$$\tan\phi = \frac{1-\sin\beta}{-\cos\beta} = -\frac{\cos\beta}{1+\sin\beta} = \tan\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

初态 $\phi \to 0^+$ 时，木块从沿下坡方向开始缓动，即 $\beta \to \pi/2$。选择与此初态连续且绳长逐渐减小的分支，得到 $\beta/2 - \pi/4 = \phi$，即 $\beta = \pi/2 + 2\phi$；起点分量式相除时出现的零比零由该连续极限处理。速度与径向的夹角为 $\beta - \phi = \pi/2 + \phi$，所以

$$\frac{\dot\rho}{\rho\dot\phi} = \cot(\beta - \phi) = \cot(\pi/2 + \phi) = -\tan\phi.$$

由此得到 $\mathrm{d}\rho/\rho = -\tan\phi\ \mathrm{d}\phi$。用初态 $\rho(0) = \rho_0$ 确定积分上下限：

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int_0^{\phi} \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\ \mathrm{d}\psi.$$

左侧为 $[\ln r]_{\rho_0}^{\rho} = \ln(\rho/\rho_0)$。右侧令 $u = \cos\psi$，则 $\mathrm{d}u = -\sin\psi\ \mathrm{d}\psi$，当 $\psi = 0, \phi$ 时分别有 $u = 1, \cos\phi$，所以

$$-\int_0^{\phi} \frac{\sin\psi}{\cos\psi}\ \mathrm{d}\psi = \int_1^{\cos\phi} \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_1^{\cos\phi} = \ln\cos\phi.$$

在 $0 \le \phi < \pi/2$ 的运动分支上 $\rho > 0$、$\cos\phi > 0$，两侧取指数，得到 $\rho = \rho_0\cos\phi$。再把 $\beta = \pi/2 + 2\phi$ 代入水平力平衡，利用 $\cos\beta = -\sin 2\phi$，得到

$$T\cos\phi = G\sin\theta\sin 2\phi = 2G\sin\theta\sin\phi\cos\phi.$$

因 $\cos\phi > 0$ 可约去，故 $T = 2G\sin\theta\sin\phi \ge 0$，与绳只能施加拉力一致。

解释圆弧分支与端点适用范围

将 $\rho = \rho_0\cos\phi$ 两边同乘 ρ，再用 $\rho^2 = x^2 + y_d^2$、$\rho\cos\phi = x$，得 $x^2 + y_d^2 = \rho_0 x$。换回题设向上坡为正的 $y = -y_d$，配方得

$$\left(x - \frac{\rho_0}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\rho_0^2}{4}, \qquad y \le 0.$$

轨迹为直径 OP_0 的下半圆。木块先下移，经过圆弧最低点后再上移；速度方向沿圆弧连续改变。起点处绳力趋零，是从微小缓动建立的极限；终点接近滑轮时实际装置尺寸会限制轨迹。

练习 3.6

解　判断旋转趋势对应的两处摩擦方向

图 3.39 逆时针趋势使地面摩擦向左、墙摩擦向上。记地面摩擦 f、墙摩擦 h，水平平衡 $N_w = f$，竖直 $N_g + h = G + F$，抵抗力矩 $r(f + h)$。

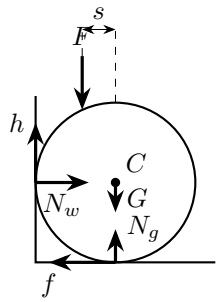


图 3.46: 地面向左的摩擦与墙面向上的摩擦共同抵抗转动

在摩擦可行域内求最大抵抗力矩

图 3.46 静摩擦约束是 $f \le \mu(G+F-h)$、$h \le \mu f$，且两者均非负。先将两个约束联立：

$$h \le \mu f \le \mu^2(G+F-h) \quad \Longrightarrow \quad h \le \frac{\mu^2(G+F)}{1+\mu^2}.$$

另一方面，

$$f + h \le \mu(G+F-h) + h = \mu(G+F) + (1-\mu)h.$$

因 $0 < \mu < 1$，右侧随 h 增大而增大；代入上式的 h 上限，得到

$$f + h \le \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}(G+F).$$

当 $f = \mu N_g$、$h = \mu N_w = \mu f$ 时等号同时成立，且

$$N_g = \frac{G+F}{1+\mu^2} > 0, \qquad N_w = f = \frac{\mu(G+F)}{1+\mu^2} > 0.$$

两支持力均为正，所求最大抵抗力矩可以由这组反力实现。令偏心力矩 $Fs_c = r(f+h)_{\max}$，故临界

$$s_c = \frac{\mu(1+\mu)}{1+\mu^2}\,\frac{G+F}{F}\,r.$$

球面上的偏心距取 $0 \le s \le r$。若 $s_c < r$，在 $s = s_c$ 达到将转状态，继续增大偏心距便开始转动；若 $s_c = r$，最大偏置处恰为临界；若 $s_c > r$，球面内的全部施力位置均可由静摩擦维持。

静力学

物理竞赛一轮讲义

第四讲

连续体与平衡稳定性

2026

目录

第四讲　连续体与平衡稳定性 **1**

4.1　从功与势能认识平衡稳定性 1

4.2　平衡构形与回复作用 2

4.3　连续体中的局部平衡 4

4.4　离散链环与连续绳的区别 6

4.5　弹性圈与曲率约束 10

4.6　虚位移与曲面设计 11

4.7　稳定平衡与小振动的衔接 12

4.8　例题与分析 14

本讲小结 26

4.9　练习 26

练习解答 28

第四讲　连续体与平衡稳定性

4.1　从功与势能认识平衡稳定性

4.1.1　势能曲线怎样给出回复作用

先用一个坐标 q 描述允许的构形。对于保守力，沿微小位移所作的功等于势能的减少：$\mathrm{d}W=-\mathrm{d}U$。若 q 是直线位移，$\mathrm{d}W=F_q\,\mathrm{d}q$，于是 $F_q=-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q$；若 q 为绕固定铰的转角，$\mathrm{d}W=M_q\,\mathrm{d}q$，于是 $M_q=-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q$。用角度求导时得到力矩，用长度求导时得到力。

图 4.1 左侧是一条开口向上的势能曲线。平衡点 q_0 处切线水平；偏到右侧时斜率为正，回复作用朝负向，偏到左侧则朝正向。右侧的势能曲线向下弯，偏离顶点后相应的作用使偏离继续增大。

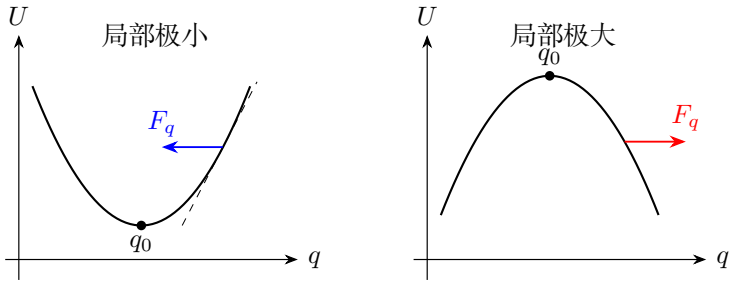


图 4.1: 势能的斜率决定作用方向，局部极小值对应回复趋势

以沿直线运动的质点为例，若 $U(q)=U_0+kq^2/2, k>0$，逐项求导得 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}q=kq$，回复力为 $-kq$。位于右侧的物体向左加速，越过最低点后因惯性继续运动，随后在回复力作用下转回。若初始 $q=A,\dot{q}=0$，质量为 m，则

$$\frac{1}{2}m\dot{q}^2+\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2}kA^2.$$

这个关系把平衡附近的运动与势能曲线联系起来。下面先用悬挂杆和允许滚动的构形研究稳定性，再保留高阶项讨论临界情形；连续绳和弹性圈则从各小段的受力建立相应的平衡构形。

4.2　平衡构形与回复作用

静力方程确定可能保持静止的构型。把物体沿约束允许的方向稍稍移开，回复作用使它趋向原位，促使偏离增大的作用则使它离开原位。对保守系统和理想约束，可以沿允许构型比较势能。图 4.2 把同一根铰接杆放在悬点下方和上方：质心偏移方向相似，重力矩的作用却相反。

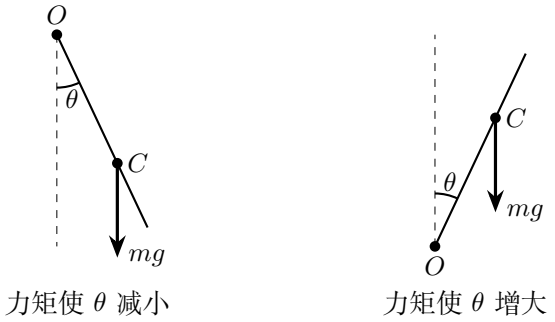


图 4.2: 下垂杆偏转后质心升高；倒立杆偏转后质心降低

设质心到悬点距离为 d，转角 θ 由各自的竖直平衡位置量起。图 4.2 左图的质心升高 $d(1-\cos\theta)$，右图的质心降低同样的高度。因此

$$M_{\theta,\text{下垂}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big[mgd(1-\cos\theta)\big] = -mgd\sin\theta,$$
$$M_{\theta,\text{倒立}} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big[mgd(\cos\theta-1)\big] = +mgd\sin\theta.$$

对图示 $\theta>0$，左侧力矩使 θ 减小，右侧使 θ 增大。取小角度，$\sin\theta\simeq\theta$，力矩的大小与偏角成正比。

一般地，在内部平衡位置 $q=0$，先有 $U'(0)=0$，再展开

$$U(q)-U(0)=\frac{1}{2}U''(0)q^2+\cdots.$$

二阶系数为正时局部势能极小，为负时局部极大；若二阶为零，稳定性由首个非零高阶项决定。随遇平衡对应势能在一段允许构型中保持恒定。稳定平衡附近，动能与势能相互转换，物体往复运动；阻尼使振幅逐渐衰减。

4.2.1　滚动时应先确定允许构型

纯滚动把接触处的两段弧长联系起来。物体位置改变时，当前接触点也改变，势能应由新构型中的质心高度计算。图 4.3 中圆轮由碗底移到右侧，轮心 O 沿半径 $a-R$ 的圆运动，当前接触点 P 也随之移动。

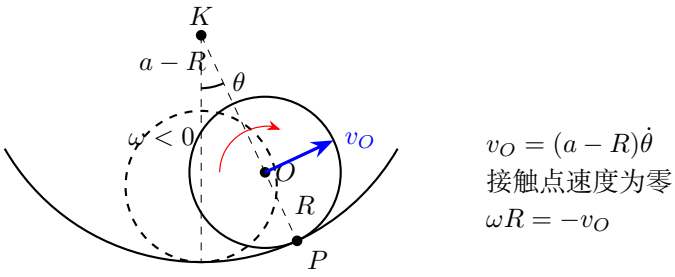


图 4.3: 内滚时轮心绕行与轮自身转动方向相反，接触点随位置改变

以逆时针为正，图中轮心向右绕行时 $\dot{\theta} > 0$，轮自转满足 $\omega = -(a-R)\dot{\theta}/R$。偏心质心相对轮心的方向由自转角决定；轮心高度则由绕行角决定，练习 4.5 把这两部分高度相加。长方体在圆柱顶滚动则要跟踪底面材料点与接触点的距离 $R\theta$，具体几何见例题。

4.2.2 临界二阶项为零时的实际运动

势能的最低阶非零项决定回复作用的形式。二阶项对应与位移成正比的回复作用；二阶项为零时，高阶项决定稳定性及运动快慢。

图 4.4 比较 $U - U_0 = aq^4$ 与 $-aq^4$，其中 $a > 0$。两者二阶导数在 $q = 0$ 都为零，但前者离开原点需要增加势能，后者则释放势能。若首个非零项为奇数次，例如 aq^3，一侧下降就足以破坏双向扰动下的稳定；对于只允许 $q \geq 0$ 的接触运动，平衡处附近的势能变化取 $q > 0$ 的一侧；若最低阶项为 aq^3 且 $a > 0$，这一侧的势能上升，物体受到指向原位的回复作用。

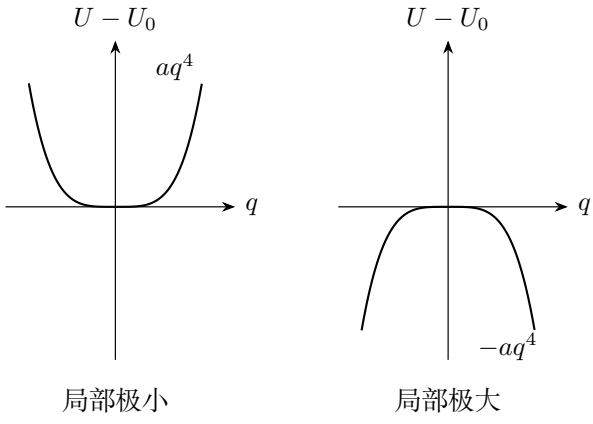


图 4.4: 二阶项同为零的两种势能具有不同稳定性

在 $U=aq^4$ 的稳定情形，回复力为 $-4aq^3$，正比于位移的三次方。设惯性参数为常数 M、振幅为 $A>0$。质点到达端点 $q=A$ 时速度为零，所以总能量为 aA^4。从原点向正端点运动时，能量守恒给出

$$\frac{1}{2}M\dot q^2+aq^4=aA^4,\qquad \dot q^2=\frac{2a}{M}(A^4-q^4).$$

这段运动中 q 增大，取速度的正根，再由 $\dot q=\mathrm{d}q/\,\mathrm{d}t$ 分离变量：

$$\dot q=\sqrt{\frac{2a}{M}}\sqrt{A^4-q^4},\qquad \mathrm{d}t=\sqrt{\frac{M}{2a}}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{A^4-q^4}}.$$

积分时 q 从 0 增至 A，对应的用时为 $T/4$。势能关于原点对称，在同一位置的速率又由能量唯一确定，因此从原点到两端、从两端回到原点的四段运动用时相等。于是

$$\int_0^{T/4}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{M}{2a}}\int_0^A\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{A^4-q^4}},$$

左侧为 $[t]_0^{T/4}=T/4$，完整周期为

$$T=4\sqrt{\frac{M}{2a}}\int_0^A\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{A^4-q^4}}=\frac{4}{A}\sqrt{\frac{M}{2a}}\int_0^1\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}}.$$

最后一步令 $q=As$，则 $\mathrm{d}q=A\,\mathrm{d}s$，$q=0,A$ 分别变为 $s=0,1$，分母变为 $A^2\sqrt{1-s^4}$，故整体提出因子 $1/A$。在 $s\to1^-$ 时，$1-s^4=(1-s)(1+s+s^2+s^3)\sim 4(1-s)$；对应的原函数比较式为 $\int \mathrm{d}s/[2\sqrt{1-s}]=-\sqrt{1-s}$，端点积分有限。因此无量纲积分为有限常数，$T\propto 1/A$，振幅越小，回复越慢。这种运动的周期随振幅变化，例 4.6 和例 4.7 中的临界情形也要由四阶项的符号决定。

4.3　连续体中的局部平衡

重绳各截面承担的载荷不同，张力大小会变化；绳被弯成曲线时，张力方向也会变化。图 4.5 截取凸曲面上的一小段绳：两端张力均沿当地切线向外，重力竖直向下，光滑面的支持力沿法线。沿绳逐段观察，可以把张力的变化分成大小变化与方向变化。设绳的线密度为 λ，即单位长度的质量为 λ；弧长为 $\mathrm{d}s$ 的小段质量为 $\lambda\,\mathrm{d}s$，重力为 $\lambda g\,\mathrm{d}s$。

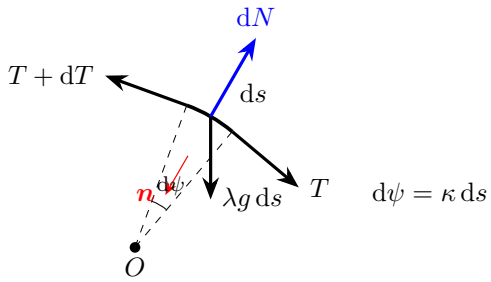


图 4.5: 微绳段两端沿切线受拉，张力的方向变化产生向心合力

取弧长坐标 s 朝高处增加，$\boldsymbol{t}$ 为切向单位矢量，$\boldsymbol{n}$ 指向曲率中心。切线方向在弧长 $\mathrm{d}s$ 内转过小角 $\mathrm{d}\psi$，曲率定义为 $\kappa = \mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}s$，表示切线方向随弧长改变的快慢。对于半径为 R 的圆弧，$\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\psi$，所以 $\kappa = 1/R$。两端张力合力的一阶表达为

$$\mathrm{d}(T\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\;\mathrm{d}T + T\kappa\boldsymbol{n}\;\mathrm{d}s.$$

第一项来自大小差，第二项来自切线转过的小角 $\mathrm{d}\psi = \kappa\,\mathrm{d}s$。当弧长增加 $\mathrm{d}s$ 时，切线方向转过 $\mathrm{d}\psi$，单位切向量的变化为 $\mathrm{d}\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\psi$。上式由乘积微分 $\mathrm{d}(T\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}T + T\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$ 得到。两端张力因此保留一个沿曲率法线的一阶合力。

光滑支持力没有切向分量。取 z 向上，重力在 $\boldsymbol{t}$ 上的投影是 $-\lambda g\,\mathrm{d}s\,(\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}s)$，所以

$$\mathrm{d}T = \lambda g\,\mathrm{d}z.$$

从已知截面 (z_0, T_0) 积分，使用哑变量 ζ 区分积分变量与上限：

$$\int_{T_0}^{T(z)} \mathrm{d}\mathcal{T} = \lambda g \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\zeta = \lambda g[\zeta]_{z_0}^{z}, \qquad \boxed{T(z) = T_0 + \lambda g(z - z_0)}.$$

这里 T_0 是高度 z_0 处的已知端点张力。关系决定的是张力差：自由端给 $T_0 = 0$，若末端挂质量 M 的静止物体，则给 $T_0 = Mg$。图 4.6 把同样的高度变化与两种不同端部条件分开表示。

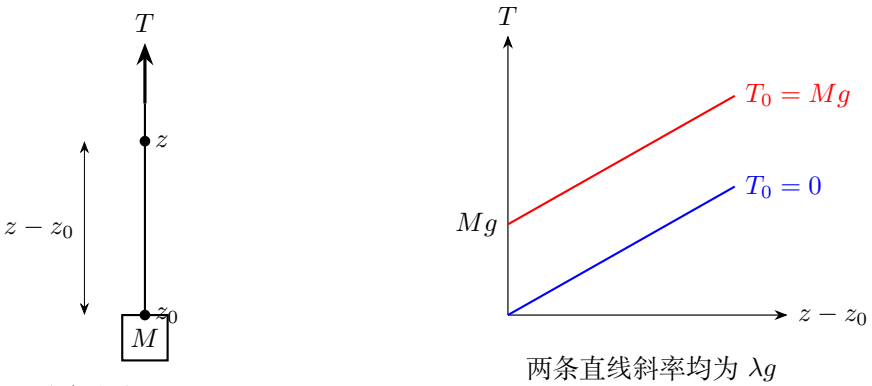


图 4.6: 张力的变化取决于高度差，绝对值还取决于端部条件

这一关系适用于线密度恒定、仅受重力及光滑面法向支持的同一连续绳段，所以同高处张力相同。集中外力给张力的跃变条件，粗糙面还提供切向摩擦；遇到这些作用时，从相应受力继续建立局部方程。

再看图 4.5 的法向：在凸圆柱上，张力曲率合力与重力的向心分量同向，支持力向外。若半径为 R、当地半径与竖直夹角为 θ，则

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = \frac{T}{R} + \lambda g \cos\theta .$$

式中的支持力取沿半径向外，凸面接触要求 $\mathrm{d}N \geq 0$。若绳位于凹槽内，支持力朝曲率中心，按新的方向列法向平衡即可。例 4.1 将同时求张力与单位长度支持力。

4.4　离散链环与连续绳的区别

铰接的每一链节是有长度的小刚体。它的重量作用在自身中点，两端铰链传递力。整体平衡先给端点反力，再对端节的一端取矩，便能联系反力与端节倾角。节数增加、每节长度缩短时，离散链逐渐接近柔绳；有限节长时，中点重力对铰链的力矩仍参与平衡。

均匀绳跨光滑滑轮，两边自由悬垂且对称时，竖直段端部张力等于该段重量，轮顶张力还要增加从接触边缘到顶端的高度差所对应的 $\lambda g R$。接触弧的重力与分布支持力共同平衡，切向投影决定从接触边缘到轮顶的张力增量。例 4.3 分别计算悬垂段和接触弧的作用。

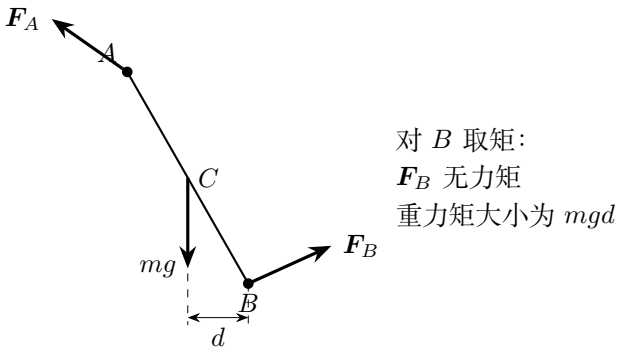


图 4.7: 刚性链节的中点重力参与关于端铰的力矩平衡

图 4.7 中，铰链 B 传递端力，作用在 A 的端力与中点重力共同满足力矩平衡。柔绳沿当地切线传递张力，刚性链节由两端力与中点重力保持平衡，端部方向还与有限节长有关。

4.4.1 自由悬绳从整体分量到局部曲线

均匀柔绳不接触支承面而自由悬挂时，绳内张力大小虽变，水平分量却保持不变。以最低点为 $x=0, y=0$，线密度 λ，最低处水平张力为 $H>0$。取最低点到右侧某点的一段，弧长 s，整体平衡给 $T_x=H$、$T_y=\lambda g s$。张力沿该点切线，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{T_y}{T_x}=\frac{\lambda g}{H}s.$$

令 $a=H/(\lambda g)$，上式为 $y'=s/a$。对 x 求导，并代入弧长关系，得到

$$y''=\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{a}\sqrt{1+y'^2}.$$

图 4.8 的重力与端点张力对应这一段绳，并与端点方向联系。

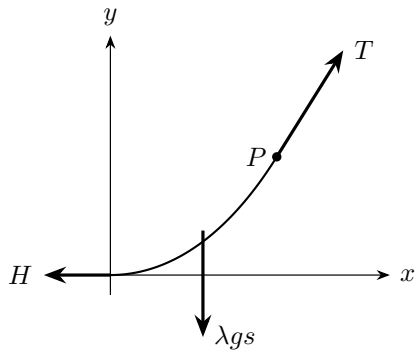


图 4.8: 最低点至任一点的绳段平衡

这里 $\sinh z=(e^z-e^{-z})/2$、$\cosh z=(e^z+e^{-z})/2$。对指数中的 $-z$ 使用链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sinh z=\frac{e^z-(-e^{-z})}{2}=\cosh z,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cosh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\sinh z.$$

令 $p=y'$，分离变量 $\mathrm{d}p/\sqrt{1+p^2}=\mathrm{d}x/a$，并从最低点初值 $p(0)=0$ 积分：

$$\int_0^{p(x)}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\xi}{a}=\frac{x}{a}.$$

左侧令 $u=\sinh v$，则 $\mathrm{d}u=\cosh v\,\mathrm{d}v$，且 $\sqrt{1+\sinh^2 v}=\cosh v>0$；上下限由 $0,p(x)$ 变为 $0,\operatorname{arsinh}p(x)$，于是该积分为 $[v]_0^{\operatorname{arsinh}p(x)}$。所以 $p(x)=\sinh(x/a)$。再由 $y(0)=0$ 积分，令 $v=\xi/a$，$\mathrm{d}\xi=a\,\mathrm{d}v$，上下限变为 $0,x/a$：

$$y(x)=\int_0^x\sinh(\xi/a)\,\mathrm{d}\xi=a\int_0^{x/a}\sinh v\,\mathrm{d}v=a[\cosh v]_0^{x/a}.$$

因此

$$y=a\left(\cosh\frac{x}{a}-1\right),\qquad T=H\sqrt{1+y'^2}=H\cosh\frac{x}{a}.$$

所求曲线满足 $y'=a\sinh(x/a)/a=\sinh(x/a)$ 及 $y''=\cosh(x/a)/a=\sqrt{1+y'^2}/a$，也满足两个最低点初值。由 $y/a=\cosh(x/a)-1$，得

$$T=H\left(1+\frac{y}{a}\right)=H+\lambda g y.$$

这与光滑接触绳的张力高度差规律一致，自由悬绳的最低点张力为 H。端部条件确定相应的积分常数。

悬链线在 $|x|\ll a$ 时有 $y\simeq x^2/(2a)$，局部近似抛物线。这个近似来自小斜率展开；完整曲线仍由真实弧长上的均匀载荷决定。

4.4.2　悬绳的长度和端点怎样确定张力

悬链线中的 $a=H/(\lambda g)$ 由悬点和绳长共同确定。图 4.9 中，两悬点等高、水平间距 d，绳总长 $L>d$，取最低点为原点。对称性给两端横坐标 $\pm d/2$，弧长微元为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\sinh^2(x/a)}\,\mathrm{d}x=\cosh(x/a)\,\mathrm{d}x.$$

因此半条绳长由积分确定。令 $u=x/a$，$\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}u$，上下限 $0,d/2$ 变为 $0,d/(2a)$，得

$$\frac{L}{2}=\int_0^{d/2}\cosh(x/a)\,\mathrm{d}x=a\int_0^{d/(2a)}\cosh u\,\mathrm{d}u=a[\sinh u]_0^{d/(2a)}=a\sinh\frac{d}{2a}.$$

先解

$$L=2a\sinh\frac{d}{2a},$$

再由 $H=\lambda g a$ 求最低处张力，由 $h=a[\cosh(d/(2a))-1]$ 求垂度，端点张力则为 $T_A=H\cosh[d/(2a)]$。端点张力的竖直分量为 $H\sinh[d/(2a)]=\lambda g L/2$，恰等于半条绳重，承担了这一段绳的全部竖直载荷。

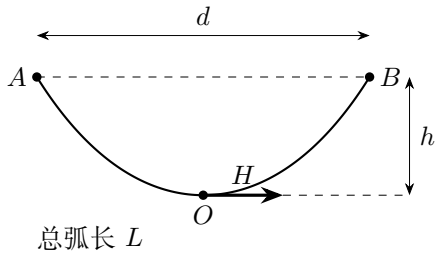


图 4.9: 等高悬点、跨度、垂度与最低点张力

令 $z=d/(2a)>0$，绳长方程化为 $L/d=\sinh z/z$。当 $z\to 0$，右侧趋 1。按商法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\sinh z}{z}=\frac{z\cosh z-\sinh z}{z^2}.$$

记分子为 $f(z)$，乘积法则给 $f'(z)=\cosh z+z\sinh z-\cosh z=z\sinh z>0$，且 $f(0)=0$，所以该比值严格增加；当 $z\to\infty$ 时它趋于无穷。故每个 $L/d>1$ 对应唯一正 a。自由悬挂的曲绳长度大于跨度；当 $L\to d^{+}$ 时，$z\to 0$、$a\to\infty$，水平张力随之增大，绳形趋向水平直线。

小垂度下 $z=d/(2a)\ll 1$。把 $\cosh z=1+z^2/2+O(z^4)$、$\sinh z=z+z^3/6+O(z^5)$ 分别代入高度和长度：

$$h=a(\cosh z-1)=\frac{az^2}{2}+O(az^4)\simeq\frac{d^2}{8a},$$
$$L-d=2a(\sinh z-z)=\frac{az^3}{3}+O(az^5)\simeq\frac{d^3}{24a^2}.$$

第二式乘 $3d/8$ 后为 $d^4/(64a^2)$，恰是第一式平方的主项，因而 $h^2\simeq 3d(L-d)/8$。这两个近似由同一个小参数控制，小垂度时，两式共同描述绳长超过跨度的部分怎样改变悬垂高度。

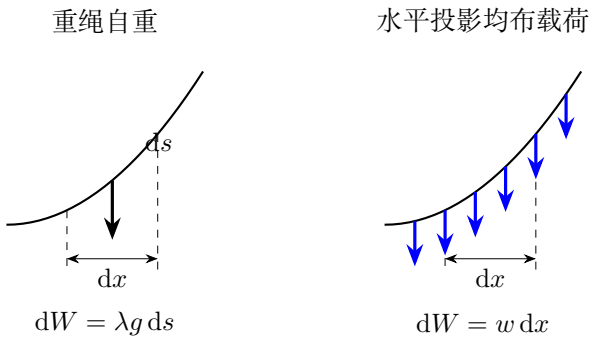


图 4.10: 相同水平宽度内，按弧长均匀与按水平投影均匀是两种载荷模型

图 4.10 左侧微段有 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$，右侧载荷直接按 $\mathrm{d}x$ 计量。相同 $\mathrm{d}x$ 内，左图越陡，包含的绳越长、重量越大；右图的载荷则不随斜率改变。

如果载荷按水平长度均匀分布、每单位水平长度重 w，最低点到 x 的竖直载荷为 wx，切线斜率为 $y'=wx/H$。由最低点 $y(0)=0$ 积分，

$$y(x)=\frac{w}{H}\int_0^x \xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{w}{H}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x=\frac{wx^2}{2H},$$

这时严格为抛物线。悬链线的载荷则是 $\lambda g s(x)$，因为真实弧长随斜率增大；两种模型只在小垂度时近似接近。载荷按哪一种长度计量，直接决定局部方程中的重力项。

4.5　弹性圈与曲率约束

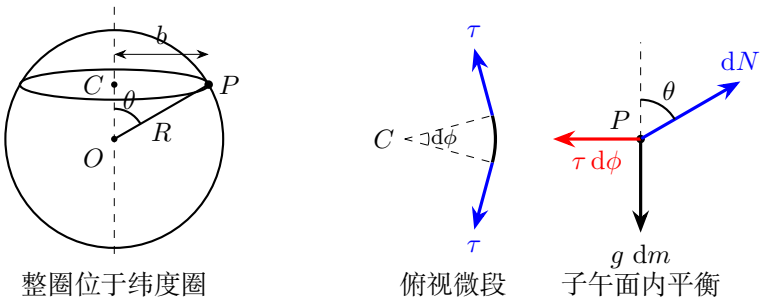


图 4.11: 球面上的弹性圈：整圈几何、水平微段张力与子午面内的微段受力

图 4.11 左图以 O 为球心、C 为圈心，R 为球半径，故 $b = R\sin\theta$。中图两端张力沿各自切线向微段外拉。沿微弧中点切线的分量相消，沿半径指向 C 的分量相加，合力为

$$2\tau \sin\frac{\mathrm{d}\phi}{2} = \tau\,\mathrm{d}\phi + O(\mathrm{d}\phi^3).$$

保留关于 $\mathrm{d}\phi$ 的一阶项，微弧所受张力合力为 $\tau\,\mathrm{d}\phi$。

右图取圈在光滑球面外侧的构型，支持力沿 OP 向外，和竖直方向成 θ 角。设整圈质量为 M，则 $\mathrm{d}m = M\,\mathrm{d}\phi/(2\pi)$。分别沿竖直与水平径向平衡：

$$\mathrm{d}N\cos\theta = g\ \mathrm{d}m, \qquad \mathrm{d}N\sin\theta = \tau\,\mathrm{d}\phi.$$

消去支持力后 $\tau = Mg\tan\theta/(2\pi)$，再与整圈弹性关系联立。微段受力中的 $\mathrm{d}m, \mathrm{d}N, \tau\,\mathrm{d}\phi$ 均为同阶小量；整圈伸长则由周长变化计算。

图 4.11 给出的张力与整圈的周长伸长相联系。若整体劲度定义为 $\tau = k\Delta L$，自然半径为 a，则初始周长 $L_0 = 2\pi a$，当前周长 $L = 2\pi b$，所以 $\Delta L = L - L_0 = 2\pi(b-a)$。例 4.5 将这一材料关系与微段平衡联立求 k。

图 4.11 中的两个中心有不同作用：CP 确定两端张力合力的水平径向，OP 确定球面支持力的方向。上半球处 $\cos\theta > 0$，支持力的竖直分量可向上支承圈重。

4.5.1 细绳的伸长与整体劲度

若细绳的杨氏模量为 E、截面积为 S、原长为 L_0，则轴向张力 $\tau = ES\Delta L/L_0$，整体劲度为 ES/L_0。这里 ES 的单位是力，ES/L_0 的单位才是力除以长度；自然长度明确给出了材料参数与整体劲度之间的换算。

4.6 虚位移与曲面设计

虚位移是在同一时刻、满足几何约束的一次假想微小位移，各点的位移由同一组约束联系。光滑固定面上的接触点只能沿切向作允许位移，而支持力沿法线，因此 $\boldsymbol{N}\cdot\delta\boldsymbol{r} = 0$。不伸长的轻杆两端约束力成对出现，它们在相容虚位移中的总功也为零，故可以用虚功消去某些未知反力。

$$x^2 + Y^2 = L^2 \;\Rightarrow\; x\delta x + Y\delta Y = 0$$

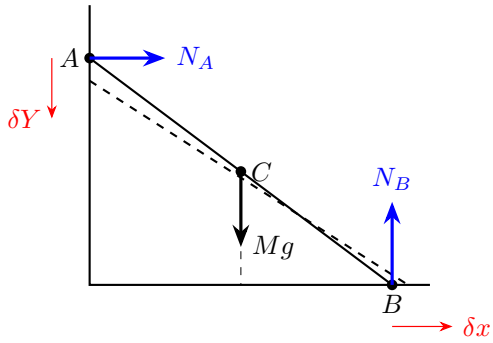


图 4.12: 允许虚位移沿各自接触面的切线，杆长约束把两端位移联系起来

图 4.12 以两端靠光滑墙、地面的杆说明“相容”：端点 B 向右时，A 同时下降。两支持力与各自位移垂直，虚功为零；质心下降时，重力作正虚功，杆由这一倾斜构形开始下滑。正的总虚功指出构形的下降方向。

设系统只有一个自由坐标 q，各作用点位置为 $\boldsymbol{r}_i(q)$，则 $\delta\boldsymbol{r}_i = (\partial\boldsymbol{r}_i/\partial q)\delta q$。平衡条件 $\sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0$ 变成 q 方向的一个标量关系。若仅有重力和理想约束，重力虚功为 $-Mg\delta z_C = -Mgz_C'(q)\delta q$，所以内部平衡要求 $z_C'(q) = 0$。要在一段连续构型中都平衡，必须在该段保持 z_C 恒定，这才可以反求支承曲线。

求得构型后，支持力与张力由力平衡恢复，并取能由实际接触与绳提供的方向。对滑动摩擦或移动支承，力沿允许位移的分量参与虚功，和重力等项一起列入方程。

例 4.8 以有质量的均匀杆为对象，让质心沿连续构型保持等高，由此反求支承曲线；求出的曲线斜率再确定支持力方向。

4.7　稳定平衡与小振动的衔接

若一个保守系统在稳定平衡附近只有一个独立坐标 q，势能增量可写成 $\kappa q^2/2$，动能可写成 $M_q\dot{q}^2/2$，其中此近似下 M_q, κ 均为正常数。能量守恒逐项求导给

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}M_q\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\kappa q^2\right) = M_q\dot{q}\ddot{q} + \kappa q\dot{q} = \dot{q}(M_q\ddot{q} + \kappa q).$$

在 $\dot{q} \neq 0$ 的运动区间约去 $\dot{q}$，并由运动方程的连续性延伸到转折时刻，得到 $M_q\ddot{q} + \kappa q = 0$。广义回复力 $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q = -\kappa q$ 也给出同一运动方程。令 $\omega_0^2 = \kappa/M_q$，试取 $q = \mathrm{e}^{rt}$。逐次求导并代入，

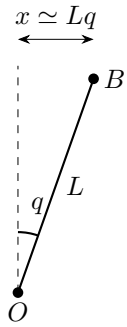
$$\dot{q} = r\mathrm{e}^{rt}, \qquad \ddot{q} = r^2\mathrm{e}^{rt}, \qquad (r^2 + \omega_0^2)\mathrm{e}^{rt} = 0.$$

因 $\mathrm{e}^{rt}\neq 0$，特征方程为 $r^2+\omega_0^2=0$，两根为 $r=\pm\mathrm{i}\omega_0$。由 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega_0 t}=\cos\omega_0 t\pm\mathrm{i}\sin\omega_0 t$ 组成实通解 $q=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$。若 $q(0)=q_0,\dot q(0)=v_q$，则

$$\dot q=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t,\qquad A=q_0,\quad B=\frac{v_q}{\omega_0}.$$

再求导即有 $\ddot q=-\omega_0^2 q$，满足方程与初值。因此，把静力学求出的二阶势能系数与同一坐标对应的惯性参数相除、再取平方根，就得到邻近平衡位置的小振动角频率 $\sqrt{\kappa/M_q}$。

均匀杆绕端点转动时，q 若取转角，惯性参数是 $I=mL^2/3$；若改取杆顶水平位移 $x\simeq Lq$，有效质量变为 I/L^2，有效劲度也同时按 $1/L^2$ 转换。两种坐标下，势能系数和惯性参数同时转换，周期保持相同。



$$K=\tfrac12 I\dot q^2=\tfrac12\tfrac{I}{L^2}\dot x^2$$
$$\Delta U=\tfrac12\kappa q^2=\tfrac12\tfrac{\kappa}{L^2}x^2$$
$$\omega^2=\kappa/I$$

图 4.13: 同一偏转可用转角或端点位移描述，惯性参数与势能系数随坐标一起变换

图 4.13 中的两个表达描述同一运动，因此有效惯性与有效刚度都除以 L^2，频率比值保持不变。位移坐标的有效质量为 I/L^2。

若有两个独立坐标，小扰动的稳定性由二次型共同决定。沿每个坐标轴看都上升，仍可能沿某个混合方向下降，例如 $U=x^2+y^2-3xy$ 在 $x=y$ 方向为负。因此多自由度物体的稳定性取决于所有允许扰动方向。题目说摩擦足够大时，正是通过滚动约束减少了独立运动方式。

接触约束限制允许位移。平面上的物体可沿面移动或向上离开，进入支承面的方向被排除。使用纯滚动构型时，所需法向反力与静摩擦分别满足 $N\geq 0$、$|f|\leq\mu N$，使这一约束持续。

临界参数附近，二阶回复系数趋零，高阶项对小幅运动的作用相对增大。先根据完整势能确定稳定性，再选择二阶或高阶的运动近似，就能将静力平衡与邻近运动联系起来。

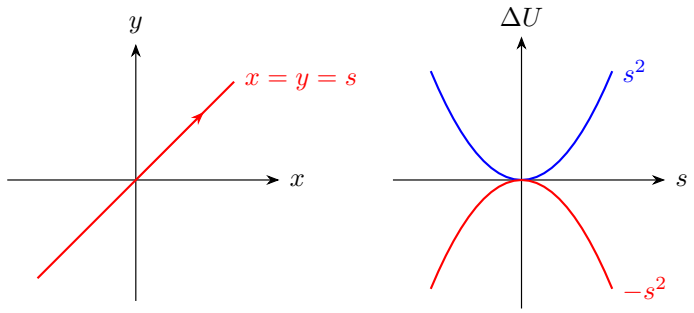


图 4.14: 沿两个坐标轴上升的势能，仍可能沿混合方向下降

图 4.14 蓝线对应 $x = s, y = 0$ 或 $x = 0, y = s$，红线对应 $x = y = s$。沿 $x = y = s$ 代入 $U = x^2 + y^2 - 3xy$，得到 $U = -s^2$；任意小的这种扰动都会降低势能，因此原点不稳定。沿两个坐标轴分别代入则均为 s^2，图中的两种截面共同说明方向选择的作用。

4.8　例题与分析

例 4.1 (半圆柱面上的均匀链条)**.** 半径 R 的固定光滑半圆柱面上覆盖长 πR、质量 m 的均匀链，两端恰到水平面且端点张力为零。求张力分布和最大值。

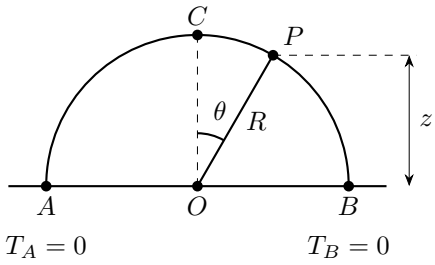


图 4.15: 两自由端等高，圆柱顶点是链条的最高处

解　从自由端确定张力

图 4.15 线密度 $\lambda = m/(\pi R)$。取链上从端点升至高度 z 的一段，切向微元平衡 $\mathrm{d}T = \lambda g\,\mathrm{d}z$，端点 $z = 0, T = 0$。图 4.16 左图中，支持力没有切向分量，重力的切向投影由高度增量 $\mathrm{d}z$ 确定。端点条件 $T(0) = 0$ 将张力差关系转化为绝对张力。

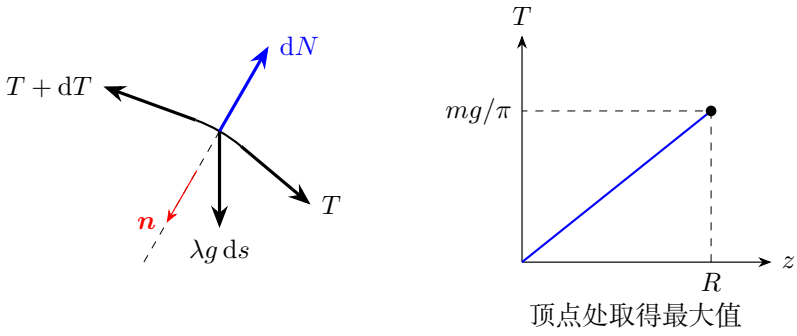


图 4.16: 切向分量决定张力变化，法向分量决定是否保持接触

由高度求张力与最大值

沿图 4.16 从自由端积分至高度 z，

$$T(z)-T(0)=\lambda g\int_0^z \mathrm{d}\zeta=\lambda g[\zeta]_0^z=\lambda g z.$$

用端点条件 $T(0)=0$ 得到 $T(z)=\lambda g z$。若以顶点到微元的圆心角 θ 计，$z=R\cos\theta$，故 $T(\theta)=(mg/\pi)\cos\theta$，最大张力 $T_{\max}=mg/\pi$ 位于顶部。

求圆柱面提供的支持力

按图 4.16 左图向心法线 $\boldsymbol{n}$ 投影，张力和重力的法向分量都指向圆心，因此面支持力密度为 $T/R+\lambda g\cos\theta=2\lambda g\cos\theta\geq 0$，绳与圆柱保持接触。

例 4.2 (四分之一圆柱上的链条拉力)**.** 质量 m、长 $\pi R/2$ 的均匀链覆盖光滑圆柱从顶端到侧面底端的四分之一圆弧，底端自由。顶端沿水平切线施力 F，求平衡力。

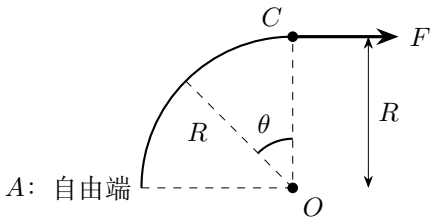


图 4.17: 底端自由，顶端外力沿水平切线；积分所用高度差为半径

解　确定自由端与顶端的高度差

图 4.17 最低端到顶部的高度差为 R，线密度为 $\lambda=2m/(\pi R)$。光滑面支持力没有切向分量，因此从切向平衡出发有 $\mathrm{d}T=\lambda g\,\mathrm{d}z$；自由端给端点条件 $T_{\text{bottom}}=0$。

沿圆弧积分得到张力分布

参数 θ 从顶端竖直半径向侧面量，链上高度 $z = R\cos\theta$，$0 \le \theta \le \pi/2$，微分为 $\mathrm{d}z = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。从底端 $\theta = \pi/2$ 积至当前角度，

$$T(\theta) - T(\pi/2) = -\lambda g R \int_{\pi/2}^{\theta} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \lambda g R[\cos\varphi]_{\pi/2}^{\theta} = \lambda g R\cos\theta.$$

用 $T(\pi/2) = 0$ 得到张力分布；在 $\theta = 0$ 处取值 $\lambda g R$，才是外力 F 所需平衡的顶端张力。

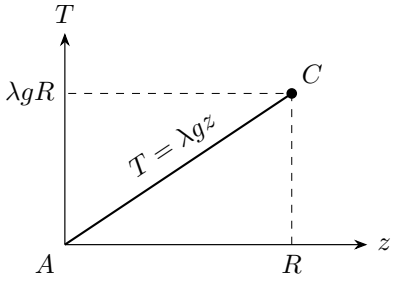
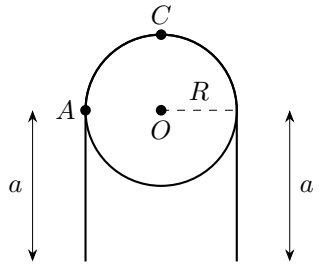


图 4.18: 自由端是张力直线的零点，顶端高度确定外力

把顶端张力转化为外力

图 4.18 顶端拉力沿切线且等于该截面张力，故 $F = 2mg/\pi$。结果与把整条链重量投到一个固定方向不同，因为切向方向沿圆弧连续改变。

例 4.3 (跨滑轮重绳的最大张力)**.** 均匀绳质量 m、总长 $l \ge \pi R$，对称跨过半径 R 的光滑固定滑轮，两端自由，外侧为等长竖直段。求最大张力。



$l = 2a + \pi R$，两端自由

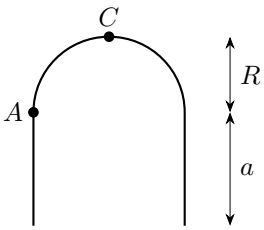
图 4.19: 总绳长由半圆弧与两段竖直悬绳组成

解　由总长分配两侧悬垂段

图 4.19 每侧竖直段长 $a=(l-\pi R)/2$，接触边缘的张力为 $T_A=(m/l)ga$。再从边缘升到轮顶，高度增加 R。

分别计入竖直段重量和弧段高度差

自由端张力为零，长度 a 的竖直段受到自身重力 $(m/l)ga$，其上端因此承担同样大小的张力。接触边缘到轮顶升高 R，在张力高度关系中对应增量 $(m/l)gR$；弧长 πR 则用于分配总绳长。



自由端取 $z=0$

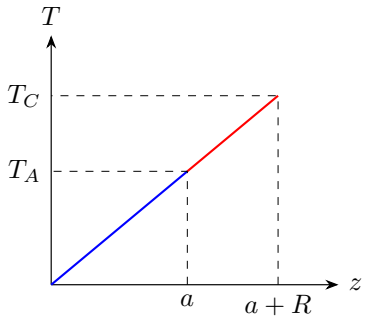


图 4.20: 同一高度坐标贯穿竖直段与接触弧，张力在接触边缘连续

求轮顶最大张力

图 4.20 取自由端高度为零，边缘 A 和顶点 C 的高度依次为 $a, a+R$。利用 $\mathrm{d}T=(mg/l)\,\mathrm{d}z$，

$$T_C-T_A=\frac{mg}{l}\int_a^{a+R}\mathrm{d}z=\frac{mg}{l}[z]_a^{a+R}=\frac{mgR}{l}.$$

张力随高度增加，所以最大值在顶端，得

$$T_{\max}=T_C=T_A+\frac{mgR}{l}=\frac{mg}{2l}[l+(2-\pi)R].$$

当 $R\to 0$ 时趋于 $mg/2$；当 $l=\pi R$ 时竖直段消失，顶端张力为 mg/π。这两种情形分别接回对称悬绳与半圆柱面链条的结果。

例 4.4 (端点可滑的离散链). $2n$ 个等长均匀刚性链节、每节重 mg，铰接组成对称悬链，两端搭在同高水平细杆上，端点静摩擦系数 μ。求端节与竖直夹角 θ 的临界值。

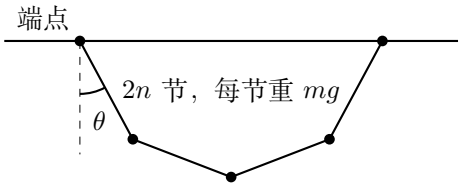


图 4.21: 对称离散悬链的端节倾角从竖直方向量起

解　整体平衡求端点反力

图 4.21 整体竖直平衡给每个端点支持力 $N = nmg$,临界水平摩擦 $H = \mu nmg$。取最左端一节，对其下端铰链取矩，内部铰接力不产生力矩。

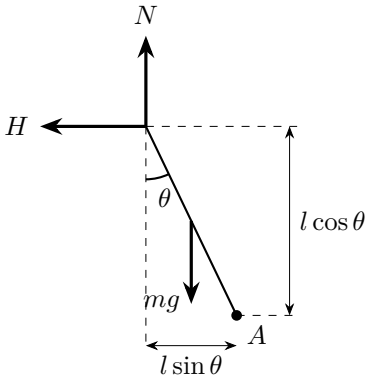


图 4.22: 左端摩擦力向外，关于下端铰链计算各力矩

隔离端节，对下端铰链取矩

图 4.22 中端点支持力的力臂为 $l\sin\theta$，水平摩擦力臂为 $l\cos\theta$，自身重力力臂为 $(l/2)\sin\theta$。故

$$Nl\sin\theta - Hl\cos\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta = 0.$$

由最大静摩擦求临界倾角

将 $N = nmg$、$H = \mu nmg$ 代入力矩式，约去 mgl，得 $(n-\frac{1}{2})\sin\theta = \mu n\cos\theta$。因 $n \geq 1$ 且 $0 \leq \theta < \pi/2$，可以除以 $(n-\frac{1}{2})\cos\theta$，得到临界值

$$\tan\theta = \frac{n\mu}{n-1/2} = \frac{2n\mu}{2n-1}.$$

允许静止时以 $H \le \mu n m g$ 代入同一力矩式，故 $\tan\theta \le 2n\mu/(2n-1)$，等号对应开始滑动。当 n 很大时趋于 $\tan\theta = \mu$，有限节长的自重力矩带来分母中的 -1。

例 4.5 (球面上的水平弹性绳圈)**.** 半径 R 的固定光滑球上放质量 M 的均匀弹性圈，原长 $2\pi a$，$R = 2a$。静止时圈半径 $b = \sqrt{2}a$ 且在上半球，整圈张力定义为 $\tau = k\,2\pi(b-a)$。求 k。

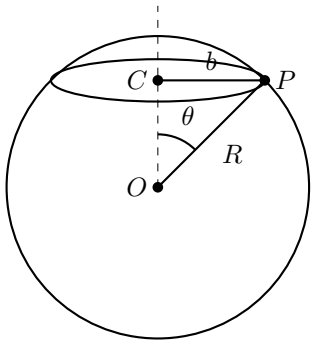


图 4.23: 球心半径与水平圈半径分别为 R 与 b，纬度由两者之比确定

解　由圈半径确定球面法线方向

图 4.23 中 $b = R\sin\theta$，所以 $\theta = 45°$。取圆心角 $\mathrm{d}\phi$ 的小段，质量 $\mathrm{d}m = M\,\mathrm{d}\phi/(2\pi)$。支持力沿球面法线，其竖直分量平衡 $\mathrm{d}mg$，径向分量平衡张力合力。

对同一角元列两个方向的平衡

图 4.24 左图的两端张力合力为 $2\tau\sin(\mathrm{d}\phi/2) \simeq \tau\,\mathrm{d}\phi$，方向指向圈心 C；右图的支持力沿球心 O 到微段 P 的方向。两个方向不同，分别列出 $\mathrm{d}N\cos\theta = g\,\mathrm{d}m$ 与 $\mathrm{d}N\sin\theta = \tau\,\mathrm{d}\phi$。

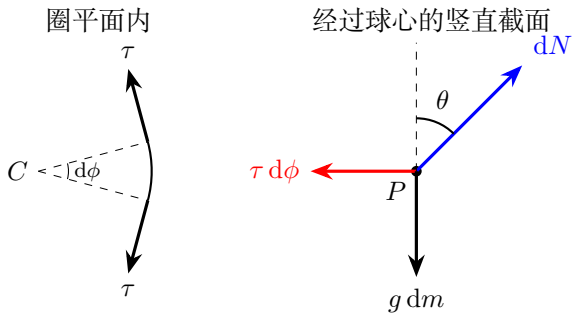


图 4.24: 先合成微弧两端张力，再在球面法线与竖直方向间分解

由张力反求整圈劲度

图 4.24 得 $\tau\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}mg\tan\theta$，即 $\tau = Mg\tan\theta/(2\pi) = Mg/(2\pi)$。代入周长伸长，

$$k = \frac{\tau}{2\pi(b-a)} = \frac{Mg}{4\pi^2(b-a)} = \frac{Mg}{2\pi^2 R(\sqrt{2}-1)}.$$

k 的单位为 N/m。τ 是绳截面上的张力，整圈周长伸长为 $2\pi(b-a)$。

例 4.6 (半圆柱顶的长方体稳定性)**.** 高 h 的均匀长方体以水平底面接触半径 R 的固定半圆柱顶端，摩擦足够大保证纯滚动。讨论小扰动稳定性，特别检查 $h = 2R$。

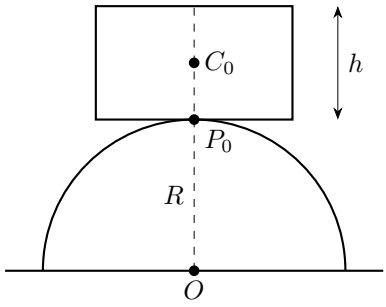


图 4.25: 初始底面水平，质心位于接触点上方 $h/2$

解　跟踪接触点和底面材料点

图 4.25 初始接触在圆柱顶。令接触法线偏离竖直 θ，纯滚动使长方体底面上从初始接触点到新接触点的长度为 $R\theta$。

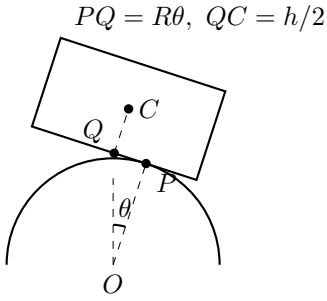


图 4.26: 当前接触点的法线转过角度，底面滚过长度为 $R\theta$

逐项计算质心高度

图 4.26 中的 P 为当前接触点，Q 为初始接触的底面材料点，C 为质心。$PQ = R\theta$ 沿底面，$QC = h/2$ 垂直底面。新接触点的高度为 $R\cos\theta$，其法线上从底面

到质心的高度分量为 $(h/2)\cos\theta$。纯滚动使质心相对新接触点还具有切向距离 $R\theta$，该距离的竖直分量为 $R\theta\sin\theta$。三项相加，几何给质心高度

$$z_C = (R + h/2)\cos\theta + R\theta\sin\theta.$$

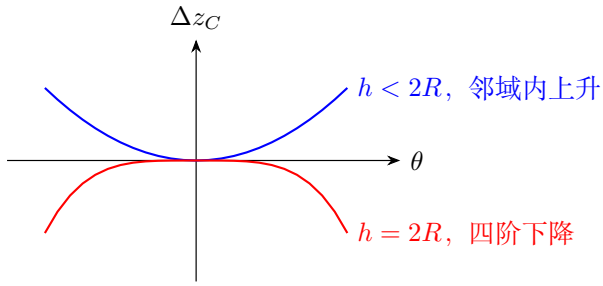


图 4.27: 临界高度时二阶变化消失，四阶降低仍使平衡不稳定

图 4.27 比较零点附近的最低阶变化，具体符号由完整高度式展开决定。

用二阶及临界四阶项判断稳定性

分别使用 $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \theta^4/24 + O(\theta^6)$ 与 $\theta\sin\theta = \theta^2 - \theta^4/6 + O(\theta^6)$，减去初始高度，得到

$$\begin{aligned} z_C - z_C(0) &= (R + h/2)\left(-\frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}\right) + R\left(\theta^2 - \frac{\theta^4}{6}\right) + O(\theta^6) \\ &= \left(\frac{R}{2} - \frac{h}{4}\right)\theta^2 + \left(\frac{h}{48} - \frac{R}{8}\right)\theta^4 + O(\theta^6). \end{aligned}$$

因此 $h < 2R$ 稳定，$h > 2R$ 不稳定。$h = 2R$ 时二阶项消失，四阶系数为 $2R/48 - R/8 = -R/12$，质心在任一侧的小偏转中都降低，因此仍不稳定。

例 4.7 (弹簧支承倒立杆)**.** 均匀杆质量 m、长 L，下端铰接，两等劲度 k 的弹簧通过水平导向机构作用于杆顶，合水平力为 $-2kx$。求竖直平衡的稳定条件。

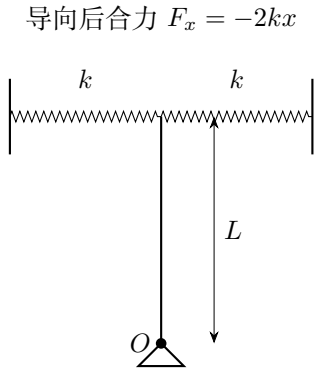


图 4.28: 导向机构使两弹簧在杆顶产生水平合力，杆绕下端铰链转动

解　由真实导向关系写总势能

图 4.28 杆偏角 θ 时，顶端水平位移 $x=L\sin\theta$，弹簧势能为 $kL^2\sin^2\theta$；重力势能为 $(mgL/2)\cos\theta$。

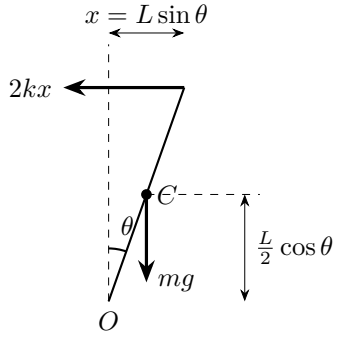


图 4.29: 顶端水平位移决定弹簧势能，质心竖直高度决定重力势能

展开至临界判别所需的四阶

图 4.29 使用 $\sin^2\theta=\theta^2-\theta^4/3+O(\theta^6)$ 和 $\cos\theta=1-\theta^2/2+\theta^4/24+O(\theta^6)$，减去竖直构型常量后，

$$\Delta U=\left(kL^2-\frac{mgL}{4}\right)\theta^2+\left(-\frac{kL^2}{3}+\frac{mgL}{48}\right)\theta^4+O(\theta^6).$$

区分严格稳定与临界不稳定

二阶项为正时竖直位置稳定，条件为 $k > mg/(4L)$。在等号处四阶项为 $-mgL\theta^4/16$，质心与弹簧的总势能在小偏转中降低，所以临界位置仍不稳定。

例 4.8 (任意位置平衡的支承曲线)**.** 长 L 的均匀有质量杆，一端靠光滑竖直墙，另一端靠光滑曲线。要求杆在一族位置均平衡，且曲线经过 $(0,0)$、杆在那里竖直。求曲线。

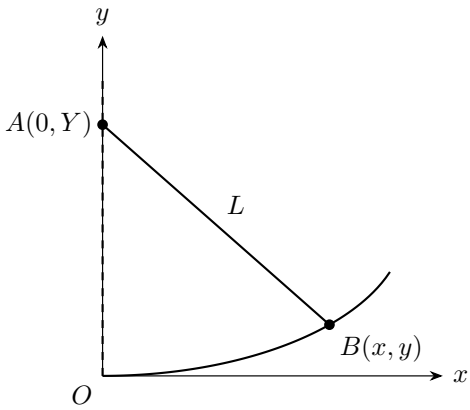


图 4.30: 杆长固定，墙端与曲线端的高度随构型共同改变

解　由连续平衡要求质心等高

图 4.30 记杆重为 G。只有重力对允许虚位移做功，连续每一位置都平衡要求质心高度恒为 $L/2$。若曲面接触端为 (x,y)，墙端为 $(0,Y)$，则 $(Y+y)/2 = L/2$，所以 $Y = L - y$。

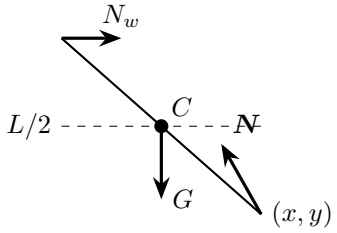


图 4.31: 质心保持等高，曲线法线给出端点支持力的方向

联立杆长约束选取曲线分支

图 4.31 杆长约束 $x^2 + (Y-y)^2 = L^2$ 给 $x^2 + (L-2y)^2 = L^2$。在 $x < L$ 时，解平方关系得到

$$L - 2y = \pm\sqrt{L^2 - x^2}, \qquad y = \frac{L}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - x^2}.$$

在 $x=0$ 处，两支分别给 $y=0, L$；要求经过原点且墙端在曲线端上方，应取 $L-2y>0$，故

$$y=\frac{L}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-x^2},\quad 0\le x<L.$$

由曲线斜率求支持力

下面求接触反力。记杆重为 G，令 $s=\sqrt{L^2-x^2}=Y-y$。对曲线的平方根使用链式法则，

$$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{L^2-x^2}}(-2x)=\frac{x}{2s}.$$

令反力的竖直分量为 V，则反力为 $(-Vy', V)$。对上端取矩要求 $xV-sVy'=Gx/2$；代入斜率，左侧化为 $xV/2$，故在 $x>0$ 时有 $V=G$，墙反力水平向右 $Gy'>0$。因此在 $0<x<L$ 所选接触侧确能提供正反力。$x=0$ 时杆竖直，取连续极限有 $V=G$、墙反力为零；当 $x\to L^-$ 时，墙反力随斜率增大。所求曲线是通过原点的椭圆下支，$0\le x<L$ 对应墙端位于曲线端上方的构型。

例 4.9 (空间斜杆的静摩擦范围)**.** 均匀杆重 G，一端 A 为固定球铰，另一端 B 接触竖直墙。墙距 A 为 a，B 在墙内距垂足 O 为 b，令 $q=b/a=\tan\alpha$。OB 与竖直夹角 θ，墙静摩擦系数 μ，取 $0\le\theta<\pi/2$ 且 $a,b>0$。求静止的角度条件，并区分缓慢滑动模型。

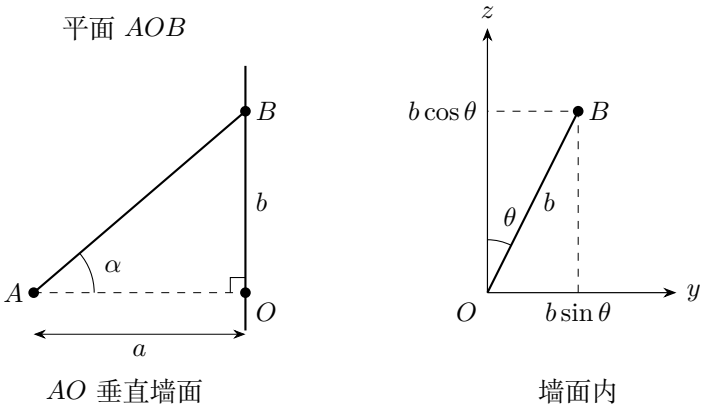
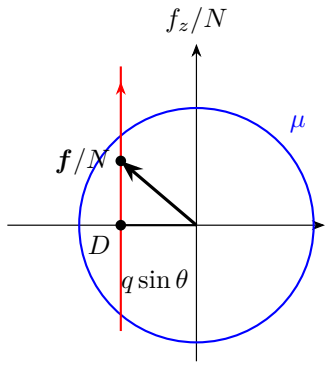


图 4.32: 左图在含杆与墙法线的平面内定义倾角，右图在墙面内定义方位角

解　选空间坐标，对球铰取矩

图 4.32 取 A 为原点、墙为 $x=a$，$B=(a, b\sin\theta, b\cos\theta)$。墙对杆的力为 $(-N, f_y, f_z)$。杆重力等效在 AB 中点，对 A 取矩：

$$\boldsymbol{r}_B\times[(-N,f_y,f_z)-(G/2)\boldsymbol{e}_z]=0.$$



$$f_y/N = -q\sin\theta$$
$$f_z/N = u_N - q\cos\theta$$
$$u_N = G/(2N) > 0$$

D 对应 $f_z = 0$

$u_N = q\cos\theta$

图 4.33: 归一化摩擦矢量的端点落在一条直线上，静止要求它进入摩擦圆盘

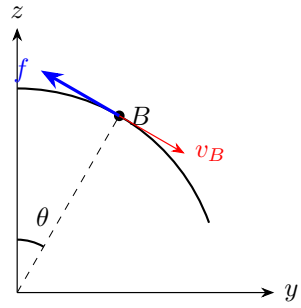
求摩擦分量并写摩擦圆盘条件

力矩为零要求方括号与 $\boldsymbol{r}_B$ 平行，令方括号为 $c\boldsymbol{r}_B$。由第一分量 $-N = ca$ 得 $c = -N/a$；依次代入第二、第三分量，$f_y = -Nq\sin\theta$，$f_z = G/2 - Nq\cos\theta$。故静摩擦条件为

$$q^2\sin^2\theta + \left(\frac{G}{2N} - q\cos\theta\right)^2 \le \mu^2.$$

以最短矢量确定静止范围

图 4.33 中，静摩擦条件是矢量端点位于半径 μ 的圆盘内；点 D 到原点最近。对 $N > 0$ 允许调整时，令 $u_N = G/(2N) > 0$，左边是 $q^2\sin^2\theta + (u_N - q\cos\theta)^2$。当 $0 \le \theta < \pi/2$ 时，允许选 $u_N = q\cos\theta$，即 $N = G/(2q\cos\theta) > 0$，从而最小左边为 $q^2\sin^2\theta$，所以 $0 \le \theta < 90^\circ$ 可静止的必要充分条件为 $q\sin\theta \le \mu$。当 $\mu < q$，最大角 $\arcsin(\mu/q)$，该临界 $N = G/[2\sqrt{q^2-\mu^2}]$。



$$f_y = -f\cos\theta$$
$$f_z = f\sin\theta$$

图 4.34: 另加沿墙圆弧下滑的条件后，摩擦必须沿轨道切线向上

沿墙内圆弧缓慢下滑时的摩擦

图 4.34 指定了滑动方向，因而给摩擦分量增加了关系。

若另规定杆端正沿墙内圆弧极慢下滑，可忽略惯性项，摩擦沿圆弧切线向上。由图中的方向，$f_y = -f\cos\theta, f_z = f\sin\theta$。代入前面的力矩分量式，

$$f\cos\theta = Nq\sin\theta, \qquad f\sin\theta = \frac{G}{2} - Nq\cos\theta.$$

第一式乘 $\sin\theta$、第二式乘 $\cos\theta$ 后消去 f，得 $Nq = G\cos\theta/2$；再代回得 $f = G\sin\theta/2$。若这一滑动模型的动摩擦系数为 μ_k，由 $f = \mu_k N$ 得到 $\tan\theta = \mu_k/q$；只有另设 $\mu_k = \mu$ 时，才写成 $\tan\theta = \mu/q$。静止时摩擦矢量可在圆盘内调整；指定下滑后，它沿轨道切线，因而多出一个方向关系，得到上述滑动角度。

本讲小结

绳链的局部平衡同时包含张力大小与方向的变化。光滑接触绳的切向式给 $\mathrm{d}T = \lambda g\,\mathrm{d}z$，端点条件确定张力的绝对值；自由悬绳的水平张力不变，竖直张力随所截绳段重量变化，因而形成悬链线。刚性链节还保留中点重力的力矩，弹性圈则将角元受力与整圈周长伸长相联系。

势能沿约束允许的构型变化。内部平衡位置的一阶导数为零，二阶项决定通常的稳定性；二阶项消失时继续看首个非零高阶项。纯滚动把轮心绕行和物体自转联系起来，质心高度应同时计入两种运动。求得构型后，接触力和张力的方向使相应约束得以维持。

4.9 练习

练习 4.1 (六杆铰接支架)**.** 六根等长轻杆 AC, CB, BO, OA, AE, AB 构成支架，O, E 固定在墙上。取 $A = (0,0), B = (0,l), C = (-\sqrt{3}l/2, l/2), O = (\sqrt{3}l/2, l/2), E = (\sqrt{3}l/2, -l/2)$，$C$ 处挂重 G。求 AB 杆受拉还是受压。

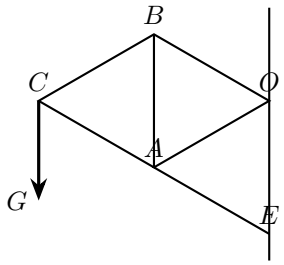


图 4.35: 六根杆铰接成架，外载荷作用在左侧节点

练习 4.2 (碗中的长杆平衡范围)**.** 半径 r 的光滑半球碗内放长 l 的均匀杆，杆的一端接触碗内面，另一部分越过右侧碗口。杆与水平夹角 $\theta > 0$。求这一接触构型的平衡关系和允许杆长范围。

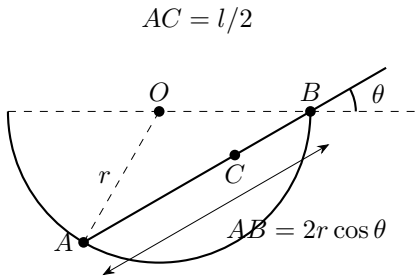


图 4.36: 倾角从碗口水平线量起，杆在 B 处伸出碗口

练习 4.3 (五球在半球碗内的平衡)**.** 四个半径 R、重 G 的光滑球，两两相邻相切、球心构成水平正方形并接触半球碗。第五个相同球放在正中央上方且与四球相切。求允许对称平衡的碗半径上限。

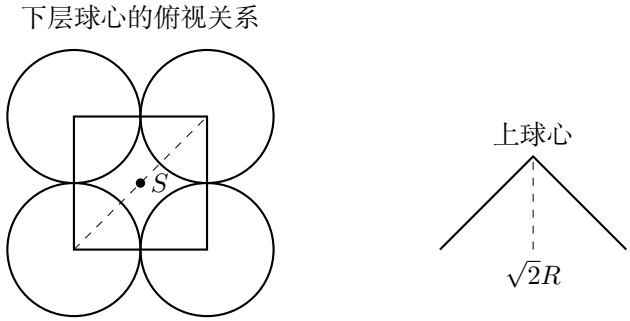


图 4.37: 下层球心构成正方形，上球心到四角的距离均为 $2R$

练习 4.4 (两环连在固定圆周上)**.** 质量 m_1, m_2 的小环在半径 R 的竖直光滑圆环上，由细线连接。细线绷紧时两环的圆心夹角为 $0 < \alpha < \pi$，两环均位于下半圈。判断这一构型能否静平衡；若能，求弦与水平的倾角。

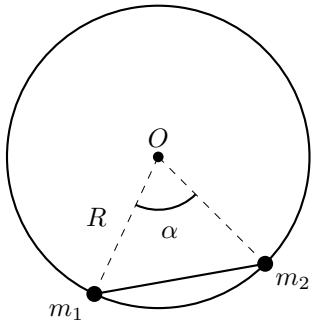


图 4.38: 两环所在半径夹角为 α，弦中点半径垂直于弦

练习 4.5 (偏心圆轮在碗内的滚动稳定)**.** 圆轮半径 R, 质心在轮心正下方 h, $h > 0$ 表示下偏，$h < 0$ 表示上偏。轮在内半径 $a > R$ 的固定圆弧碗底纯滚动。求小扰动稳定条件。

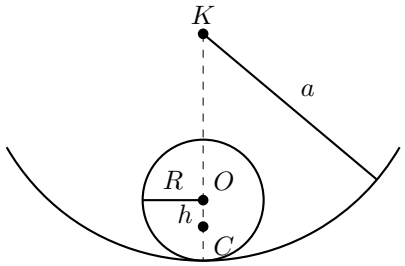


图 4.39: 初始轮心位于碗心正下方，偏心量 h 从轮心竖直向下计

练习解答

练习 4.1

解　从载荷节点求相邻杆力

图 4.35 中，各轻杆只在两端受力，端力沿杆。取拉力为正，在节点 C 向右、向上分别列式：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(T_{CA} + T_{CB}) = 0, \qquad -\frac{1}{2}T_{CA} + \frac{1}{2}T_{CB} - G = 0.$$

第一式给 $T_{CA}=-T_{CB}$，代入第二式得 $T_{CB}=G$、$T_{CA}=-G$。因此 CB 受拉、CA 受压，大小都为 G。

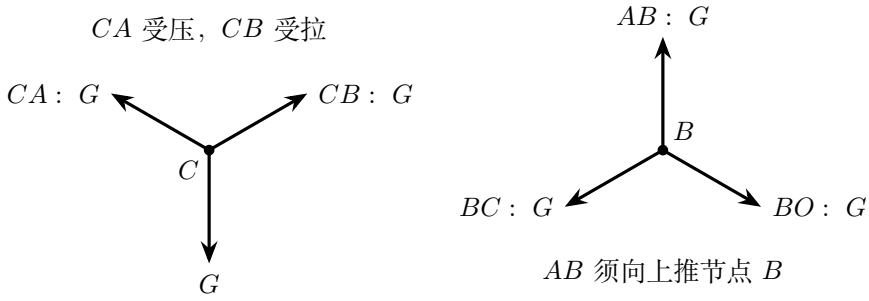


图 4.40: 先隔离载荷节点 C，再把杆力传到节点 B；箭头为求出后的实际方向

由节点 B 确定竖杆受压

图 4.40 左图画求出后的节点 C 受力，右图把 BC 杆力传到 B。BC 向左下拉节点 B，其水平、竖直分量分别为 $-\sqrt{3}G/2$、$-G/2$。BO 在 B 处沿右下方，水平平衡给

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}G+\frac{\sqrt{3}}{2}T_{BO}=0,\qquad T_{BO}=G.$$

这两斜杆合有向下的力 G，所以 AB 对节点 B 的力向上。按拉力为正的约定，

$$-T_{AB}-\frac{G}{2}-\frac{G}{2}=0,\qquad T_{AB}=-G.$$

故 AB 杆受压，压力为 G。

练习 4.2

解　由弦长求质心相对碗口的高度

图 4.36 中，杆从内端 A 经碗口 B 伸出。记杆重为 G，在图 4.41 中从圆心 O 向内部杆段 AB 作垂线，垂足为 M。半径 $OA=OB=r$，所以 M 平分弦 AB。BO 水平向左，BM 沿杆向左下，二者夹角为 θ。在直角三角形 OMB 中，半径 OB 沿 BM 的投影为

$$BM=OB\cos\theta=r\cos\theta,\qquad AB=2BM=2r\cos\theta.$$

均匀杆的质心 C 距杆端 A 为 $l/2$，所以沿杆有向距离 $BC=AC-AB=l/2-2r\cos\theta$。以碗口 B 的高度为零，BC 的竖直分量给出

$$z_C=BC\sin\theta=(l/2-2r\cos\theta)\sin\theta.$$

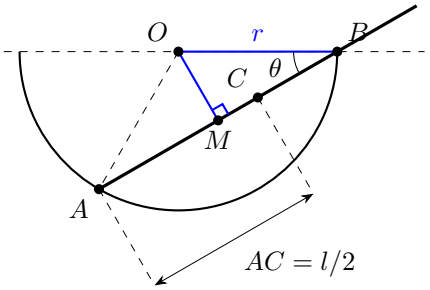


图 4.41: 垂足 M 平分内部弦，直角三角形 OMB 给出半弦长

令势能一阶变化为零

对图 4.41 中的高度式用乘积法则，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z_C}{\mathrm{d}\theta} &= 2r\sin^2\theta + (l/2 - 2r\cos\theta)\cos\theta \\ &= \frac{l}{2}\cos\theta - 2r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \frac{l}{2}\cos\theta - 2r\cos 2\theta.\end{aligned}$$

令此式为零，得 $(l/2)\cos\theta = 2r\cos 2\theta$，所以 $l = 4r\cos 2\theta/\cos\theta$。

用接触构型限制杆长范围

还需 $l \geq AB = 2r\cos\theta$，把 $l = 4r\cos 2\theta/\cos\theta$ 代入 $l \geq 2r\cos\theta$，由于 $\cos\theta > 0$，得 $2\cos 2\theta \geq \cos^2\theta$。再用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，整理为 $3\cos^2\theta \geq 2$，即 $\cos^2\theta \geq 2/3$。题设要求杆严格伸出碗口，因而这一构型允许

$$\sqrt{\frac{8}{3}}\,r < l < 4r.$$

确定杆长范围及稳定性

在允许角度内，$l(\theta) = 4r(2\cos\theta - \sec\theta)$。先对余弦的倒数求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos\theta)^{-1} = -(\cos\theta)^{-2}(-\sin\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

所以 $l'(\theta) = 4r[-2\sin\theta - \sin\theta/\cos^2\theta] < 0$，杆长随角度严格减小。下限的等号对应杆的外端恰到碗口，属于伸出长度趋零的极限；上限对应 $\theta \to 0$。判断给定杆长的稳定性时应固定 l，对高度再求一次导数：

$$\begin{aligned}z_C'' &= -\frac{l}{2}\sin\theta - 2r(-\sin 2\theta)\cdot 2 \\ &= -\frac{l}{2}\sin\theta + 4r\sin 2\theta.\end{aligned}$$

在驻点代入 $l/2 = 2r\cos 2\theta/\cos\theta$，得到

$$z_C'' = 2r\tan\theta[-\cos 2\theta + 4\cos^2\theta] = 2r\tan\theta(2\cos^2\theta + 1) > 0.$$

因此这一分支在题设允许的角度内稳定。

求两处接触的支持力

图 4.42 中，碗内端 A 的支持力沿 AO 指向圆心，碗口 B 的支持力垂直杆。由三角形 OAB 的两个底角均为 θ，AO 与水平向右方向成 2θ。B 处支持力与竖直方向成 θ。

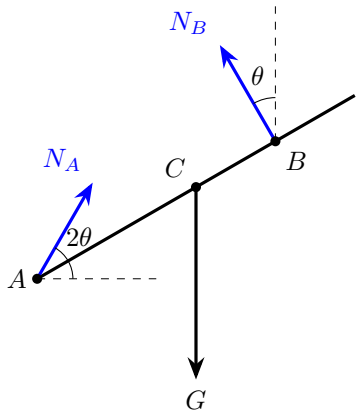


图 4.42: A 处支持力沿半径，B 处支持力垂直杆，重力通过质心 C

按图中两力方向，水平、竖直平衡分别给出

$$N_A\cos 2\theta = N_B\sin\theta, \qquad N_A\sin 2\theta + N_B\cos\theta = G.$$

由水平式先写 $N_B = N_A\cos 2\theta/\sin\theta$，代入竖直式，

$$G = N_A\frac{\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta}{\sin\theta} = N_A\frac{\cos(2\theta-\theta)}{\sin\theta} = N_A\cot\theta.$$

所以 $N_A = G\tan\theta$，再回代得到

$$N_B = \frac{G\tan\theta\cos 2\theta}{\sin\theta} = \frac{G\cos 2\theta}{\cos\theta}.$$

题设的角度范围内 $\cos^2\theta > 2/3$，故 $\cos 2\theta > 1/3 > 0$。图 4.42 中两支持力均沿所画方向，杆保持这两处接触。

练习 4.3

解　确定球心几何

图 4.37 的四个下球球心构成边长 $2R$ 的正方形，其中心到顶点距离为 $\rho = \sqrt{2}R$。

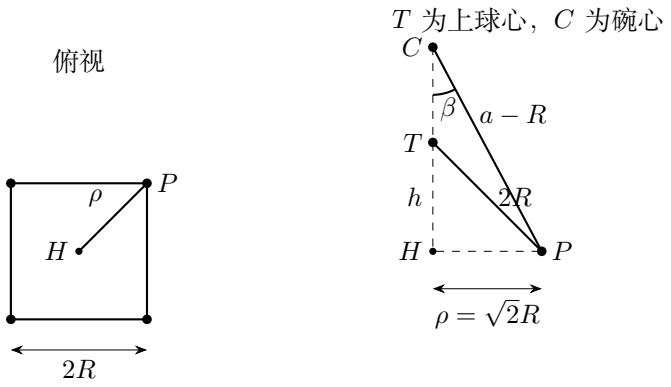


图 4.43: 左为下层球心的俯视图，右为经过上球和一个下球球心的竖直截面

图 4.43 右侧三角形 THP 给出

$$h=\sqrt{(2R)^2-\rho^2}=\sqrt{2}R=\rho.$$

因此上、下球的连心线与竖直成 45°。设球间法向力大小为 Q，上球竖直平衡：

$$4Q\cos 45^\circ=G,\qquad Q\cos 45^\circ=Q\sin 45^\circ=\frac{G}{4}.$$

这两个分量分别成为一个下球所受的向下和径向向外作用。

下球受力与接触条件

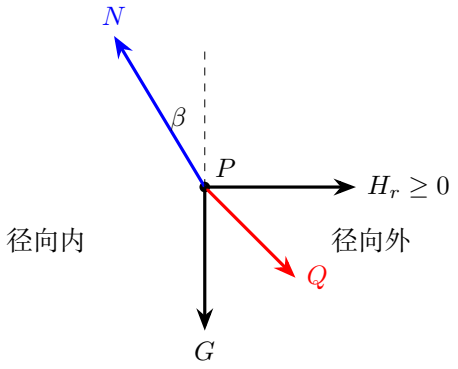


图 4.44: 取一个下球为研究对象；相邻下球的压力合力 H_r 只能向径向外侧

图 4.44 中碗反力沿 PC，与竖直成 β 角。竖直与径向平衡分别为

$$N\cos\beta=G+\frac{G}{4}=\frac{5G}{4},\qquad N\sin\beta=\frac{G}{4}+H_r.$$

相邻下球的接触为向外的压力，故 $H_r\ge 0$，从而

$$\tan\beta\ge\frac{1}{5}.$$

碗越平缓，β 越小，维持竖直支承所伴随的向内分量也越小。最大碗半径对应 H_r 降为零。

求碗半径上限

由图 4.43 的 CHP 三角形，

$$\sin\beta=\frac{\rho}{a-R}=\frac{\sqrt{2}R}{a-R}.$$

增大 a 会减小 β，允许的最大 a 对应 $H_r=0$、$\tan\beta=1/5$。此时 $\sin\beta=1/\sqrt{26}$，所以

$$a-R=\sqrt{2}R\sqrt{26}=2\sqrt{13}R,\qquad \boxed{a_{\max}=(1+2\sqrt{13})R}.$$

结果给出允许半径的上限；在几何构型可实现的范围内，较陡的碗还可由非零下球间压力共同平衡。

练习 4.4

解　在两环处沿圆轨切线列平衡

图 4.38 取从竖直向下半径量起的有向角 $\theta_1<\theta_2$，两个角都在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 内。令 $\alpha=\theta_2-\theta_1$、$\gamma=(\theta_1+\theta_2)/2$，绷紧细线从环 1 指向环 2 的单位矢量为 $(\cos\gamma,\sin\gamma)$。

角度增大方向的单位切向为 $\boldsymbol{e}_{t,i}=(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$。两环受细线拉力相反，其切向分量分别为 $T\cos(\alpha/2)$ 和 $-T\cos(\alpha/2)$；重力的切向分量为 $-m_ig\sin\theta_i$。图 4.45 以等质量构型画出各力方向。

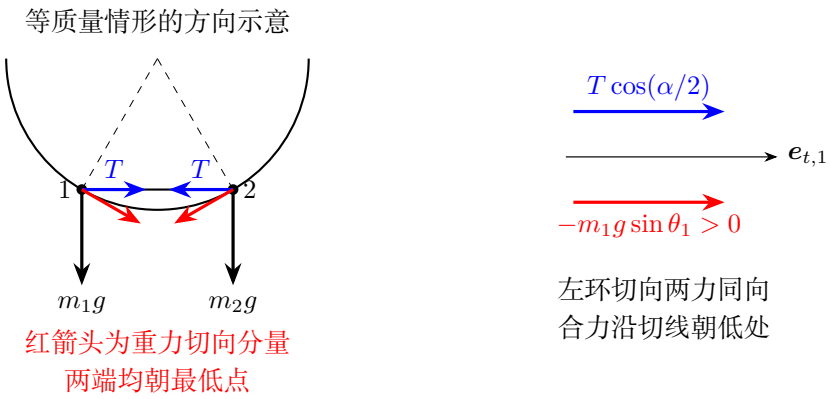


图 4.45: 在等质量示意构型中，重力切向分量和细线拉力均朝向最低点

由细线的拉力方向判断平衡

光滑圆轨的支持力沿半径，切向平衡为

$$T\cos\frac{\alpha}{2}=m_1g\sin\theta_1,\qquad -T\cos\frac{\alpha}{2}=m_2g\sin\theta_2.$$

题设为两个分开的下半圈位置，所以 $0<\alpha<\pi$，$\cos(\alpha/2)>0$。细线取 $T\geq 0$，第一式要求 $\sin\theta_1\geq 0$，即 $\theta_1\geq 0$；第二式要求 $\sin\theta_2\leq 0$，即 $\theta_2\leq 0$。这与 $\theta_1<\theta_2$ 相矛盾。

因此，两环分开位于下半圈且细线绷紧的构型没有静平衡，所问的平衡弦倾角不存在。图 4.45 中，细线把两环都拉向彼此，重力也使两环向最低点移动；实际松弛后的细线不再维持原先的夹角。

练习 4.5

解　由无滑动关系求轮自身转角

图 4.39 令轮心连线偏角 θ，轮的自身转角为 φ，二者均以逆时针为正。轮心沿半径 $a-R$ 的圆移动，高度增加 $(a-R)(1-\cos\theta)$；自身转角须另由无滑动条件求出。内滚的几何约束可由接触点速度为零得到。轮心沿轨道切向速度为 $(a-R)\dot\theta$，轮缘相对轮心的切向速度应与它抵消，因此轮的自转角速度为 $\dot\varphi=-(a-R)\dot\theta/R$。取初态 $\theta=0,\varphi=0$，积分得到

$$\varphi=\int_0^\theta -\frac{a-R}{R}\,\mathrm{d}\eta=-\frac{a-R}{R}[\eta]_0^\theta=-\frac{a-R}{R}\theta,$$

轮自身转角与轮心绕行角方向相反，比例由两半径决定。

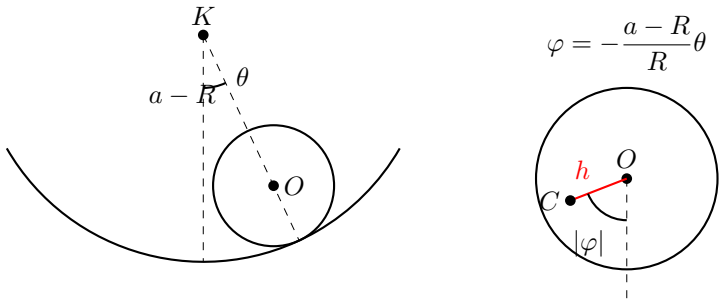


图 4.46: 左图确定轮心轨道，右图放大偏心矢量相对竖直方向的转动

合成轮心与偏心矢量的高度变化

图 4.46 中，轮心的升高为第一项，偏心矢量转动引起的升高为第二项。质心初始低于轮心 h，因此

$$\Delta z_C=(a-R)(1-\cos\theta)+h\left[1-\cos\frac{(a-R)\theta}{R}\right].$$

先判断非临界参数的稳定性

令 $d=a-R>0$。由 $1-\cos u=u^2/2-u^4/24+O(u^6)$，分别代入 $u=\theta$ 与 $u=d\theta/R$，得到

$$\Delta z_C=\frac{d}{2}\left(1+\frac{hd}{R^2}\right)\theta^2-\frac{d}{24}\left(1+\frac{hd^3}{R^4}\right)\theta^4+O(\theta^6).$$

二阶系数为 $d(1+hd/R^2)/2$。下偏 $h>0$ 总稳定；上偏令 $h=-b<0$，严格二阶稳定条件为 $d<R^2/b$，即 $a<R+R^2/b=R(R+b)/b$。超过此值时二阶项为负；等号需继续检查。

由四阶项讨论临界情形

临界 $d=R^2/b$ 时，四阶系数代入 $h=-b$ 后为

$$-\frac{d}{24}+\frac{bd^4}{24R^4}=-\frac{R^2}{24b}+\frac{R^4}{24b^3}=\frac{R^2}{24b}\left(\frac{R^2}{b^2}-1\right).$$

因此高度增量为

$$\Delta z_C=\frac{R^2}{24b}\left(\frac{R^2}{b^2}-1\right)\theta^4+O(\theta^6).$$

因此通常质心在轮内的 $0<b<R$ 情形，临界仍为较弱的稳定平衡；$b=R$ 时完整高度式恒定，才是随遇平衡；若允许附加外部质量使 $b>R$，临界不稳定。平地极限 $a\to\infty$ 时上偏轮不稳定。

静力学

物理竞赛一轮讲义

第五讲

流体静力学与力学综合

2026

目录

第五讲　流体静力学与力学综合 **1**

5.1　静止流体中的压力与压强 1

5.2　静水压强与参考压强 2

5.3　浮力及两层液体中的平衡 5

5.4　分布压力的合力与作用点 6

5.5　漂浮姿态与分层浮力的作用线 9

5.6　液体分层与形状效应 11

5.7　浮体稳定与质心优化 13

5.8　加速容器内的相对静止液体 13

5.9　综合问题中的几何关系与尺度 16

5.10 例题与分析 19

本讲小结 27

5.11 练习 27

练习解答 30

第五讲　流体静力学与力学综合

5.1　静止流体中的压力与压强

5.1.1　流体面元上的力

液体和气体都能流动。静止流体中的相邻部分沿接触面的法线相互挤压，取面积为 ΔS 的小面，面上压力大小为 ΔF_n，在面缩小时定义压强

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta S}.$$

压强的单位为帕斯卡，$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2}$。压强描述某处压力的分布强弱，作用于一小面元的压力为 $p\,\mathrm{d}S$，方向沿该面指向所研究的流体内部。

5.1.2　同一点的压强与面的方向

液体密度记为 ρ，在其中取图 5.1 的直角三棱柱，截面两直角边长为 a, b，斜边 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$，垂直纸面的厚度为 ℓ。三个侧面上的平均压强分别记为 p_x, p_y, p_n，斜面向内的单位法向在 x, y 方向的分量是 $-b/c, -a/c$。

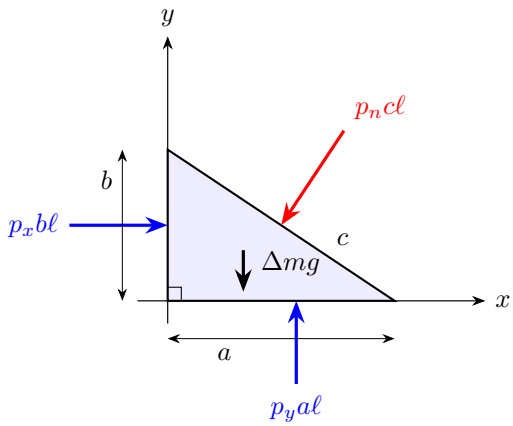


图 5.1: 微小三棱柱的三个面压强由水平、竖直平衡联系起来

水平、竖直方向的平衡分别为

$$p_x b\ell - p_n c\ell\frac{b}{c} = 0,$$
$$p_y a\ell - p_n c\ell\frac{a}{c} - \rho g\frac{ab\ell}{2} = 0.$$

约去面积因子，得 $p_x = p_n$ 及 $p_y - p_n = \rho g b/2$。让三棱柱各边同时缩短，体积所带来的重量比表面压力更快减小，末项随 $b \to 0$ 趋于零，于是同一点有 $p_x = p_y = p_n$。改变斜面的方向，结论保持相同；在另一个坐标平面取微元，也得到第三方向的同一压强。

因此静止流体中某一点由一个标量 p 描述压强，各方向的小面受到相同压强，压力方向则随面法线而变。空间不同位置的 p 可以不同，这个差异恰好用来支承液体重量。下面用竖直液柱确定它随深度的变化，继而建立帕斯卡原理与浮力。

5.2　静水压强与参考压强

静止流体中，压力沿每个接触面元的法线作用，流体各层之间保持静止。图 5.2 截取一个竖直液柱，侧面压力的水平合力为零，顶面压力向下、底面压力向上。深度 z 从已知压强的液面向下量，微元厚度为 $\mathrm{d}z$。

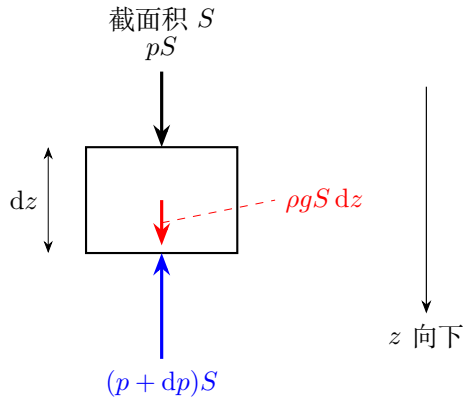


图 5.2: 用微元上下表面压力差支承微元重量，确定压强梯度的符号

由图 5.2 的竖直平衡，

$$(p+\mathrm{d}p)S - pS - \rho g S\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \rho g.$$

密度恒定且液面条件为 $p(0) = p_0$ 时，从液面积至深度 z：

$$\int_{p_0}^{p(z)} \mathrm{d}P = \rho g \int_0^z \mathrm{d}\zeta = \rho g[\zeta]_0^z, \qquad p(z) = p_0 + \rho g z.$$

若密度随深度变化，每层的压强增量为 $\rho(z)g\,\mathrm{d}z$，沿深度累加得到 $p(z)-p_0=g\int_0^z\rho(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$。例如 $\rho(z)=\rho_0(1+az)$，a 为常数，则

$$p(z)-p_0=\rho_0 g\int_0^z(1+a\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\rho_0 g[\zeta+a\zeta^2/2]_0^z=\rho_0 g(z+az^2/2).$$

同一连通、静止、密度相同的液体在同一水平面压强相等。不同液体之间无表面张力的静止界面两侧压强连续，但压强随高度的斜率不同。计算多层液体时，沿路径经过哪一层，就按该层实际厚度增加 $\rho_i g h_i$。

表压是绝对压强与外界参考压强的差。物体外侧也受大气压时，均匀大气压在闭合表面上合力为零，可改用表压；一侧真空、另一侧大气时，净压强还包含大气压 p_0。容器底部压力由底部压强和面积决定，侧壁压力的竖直分量与底面压力共同平衡液体重量。

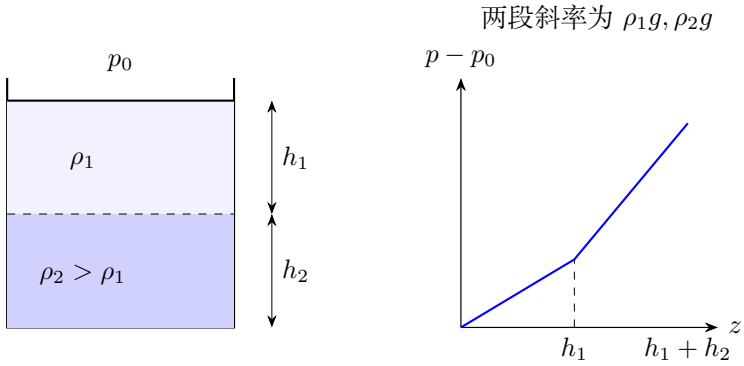


图 5.3: 各层厚度确定分段压强增量，界面处压强连续而斜率改变

图 5.3 的界面压强为 $p_1=p_0+\rho_1 g h_1$，下层从这个值继续累加，底压为 $p_b=p_0+\rho_1 g h_1+\rho_2 g h_2$。右图的下层折线从界面压强 p_1 继续上升，承接上层液体的压力。求容器底部净力时，再按实际外侧压强计算压差。

5.2.1 连通液体、侧壁反力与静水悖论

对于静止连通液体，从一个已知压强点沿竖直方向积分到另一个点，压强差只取决于密度分布与高度差，不取决于所选路径。若同一均匀液体同高处压强不同，就会出现水平加速度，与静止假设矛盾。隔着不连通的密闭气室或不同液体界面时，则要把各段已知压强一起保留。

上宽下窄的容器中，液体受倾斜侧壁的法向力可以含向上分量，底面所承受的总压力便小于液体重量；上窄下宽时，侧壁可对液体施向下分量，底压力反而大于水重。侧壁竖直分量与底面作用力一起支承液重。若求的是容器压在台秤上的总

力，应取容器和液体整体，自重与液重全部由台秤承担，侧壁压力作为整体内力成对相消。

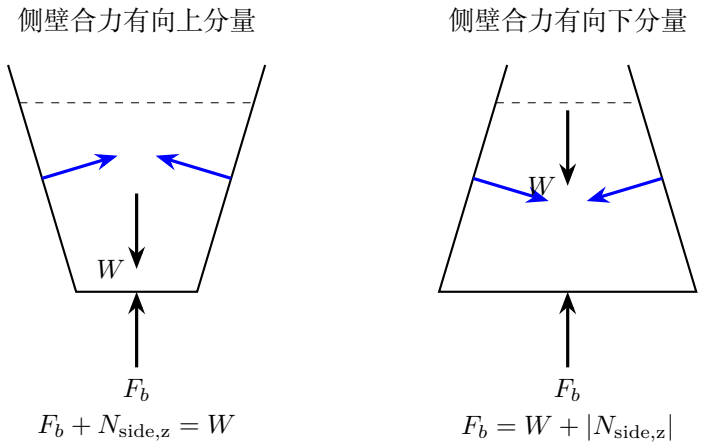


图 5.4: 侧壁法向力的竖直分量决定底压力与液体重量的差别

图 5.4 的研究对象是液体，F_b 为底面对液体的向上力，其大小等于液体对底面的向下力。蓝色箭头垂直各侧壁，所以两种容器的竖直分量方向相反。若改取容器与液体整体，侧壁力成为内力，台秤读数仍由总重量决定。

帕斯卡原理描述密闭静止液体中额外压强的传递。液压活塞以小面积 S_1 施力 F_1，理想同高大活塞可给 $F_2 = F_1 S_2/S_1$；位移相反按体积守恒满足 $S_1\Delta x_1 = S_2\Delta x_2$，因此输入和输出功相同。面积放大力，同时按相同比例缩短行程。两活塞高度不同时还要加入静水压差。

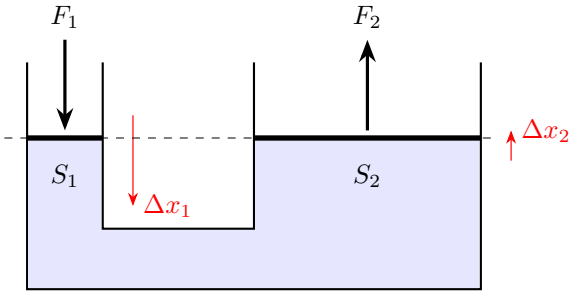


图 5.5: 液压装置以大面积换取大力，同时以小行程保持体积与功的关系

图 5.5 画的是活塞同高、忽略活塞自重和摩擦的瞬时状态。由液体得到的额外压强 $F_1/S_1 = F_2/S_2$ 与体积约束 $S_1\Delta x_1 = S_2\Delta x_2$ 相乘，得到 $F_1\Delta x_1 = F_2\Delta x_2$，即输入、输出功相等；有限行程造成高差后，应同时计入液体重力势能的变化。

5.3 浮力及两层液体中的平衡

把物体占据的空间暂时换成静止液体，同一闭合表面上的压力合力应平衡这部分液体的重力。因此物体受到的净浮力为排开流体的重力，均匀液体中 $B = \rho g V_{\text{sub}}$。在多层液体中，每层排液分别贡献 $\rho_i g V_i$，总浮力为它们之和。

浮力作用线通过排液体积的质心，即浮心。漂浮物平衡还要求重力、浮力及其他支承力的力矩平衡。物体倾斜会改变排液形状和浮心位置，新的重力与浮力作用线决定回复或倾倒的趋势。底面与容器密封的物体按实际受压表面求合力，例 5.4 的开口半球壳就采用这种处理。

5.3.1 把排开的液体补回原处

图 5.6 左侧给出完全浸没的固体，右侧将它占据的空间换回同种静止液体。周围液体在对应表面各处的压强保持相同，因此两个图中的表面压力合力相同。右侧液体块的重力为 $\rho g V$，它处于平衡，周围液体对它的压力合力便是竖直向上的 $\rho g V$。

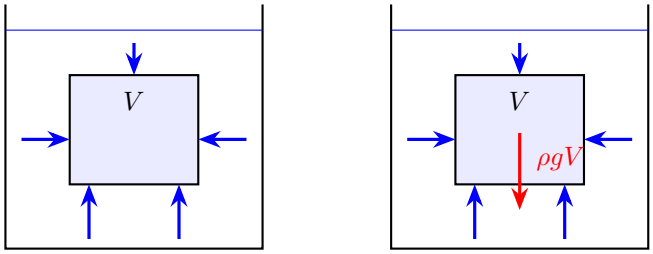


图 5.6: 用同体积静止液体的平衡求固体所受的浮力

据此得到阿基米德原理：物体所受浮力等于排开流体的重力。部分浸没时，V 取浸入液体的体积 V_{sub}；物体漂浮且只受重力与浮力时，$mg = \rho g V_{\text{sub}}$，所以浸没体积由物体质量与液体密度确定。浮力作用线通过排液质量的质心，因而研究漂浮姿态时，还要在图上保留浮心与固体质心的位置。

5.4　分布压力的合力与作用点

平面受液面下分布压强作用，合力大小为 $F=\int p\,\mathrm{d}S$，作用点需由力矩匹配确定。对上边缘在液面的竖直矩形闸门，宽 b、高 h，取深度 z 的小条，$\mathrm{d}F=\rho g z b\,\mathrm{d}z$。分别对力和关于液面的力矩积分：

$$F=\rho g b\int_0^h z\,\mathrm{d}z=\rho g b\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h=\frac{1}{2}\rho g b h^2,$$

$$M=\rho g b\int_0^h z^2\,\mathrm{d}z=\rho g b\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h=\frac{1}{3}\rho g b h^3.$$

再用 $Fz_P=M$ 得到 $z_P=M/F=2h/3$。合力作用点低于面积中心，因为下部压强更大。若上边缘位于深度 z_0，压强图变为梯形，作用点随之上移，下面由同样的积分求它的位置。曲面压力则要投影积分，或用一个假想封闭液体体积的整体平衡间接求竖直分力。

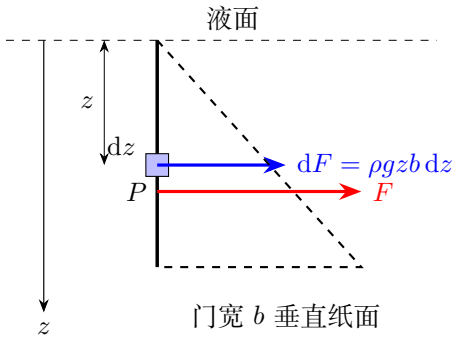


图 5.7: 对同一条带分别累加力与力矩，才能确定压力中心

图 5.7 中蓝色条带的合力为 $\mathrm{d}F$，其对液面横轴的力矩为 $z\,\mathrm{d}F$。红色合力同时替代全部条带的力与力矩，故应以 $Fz_P=\int z\,\mathrm{d}F$ 确定作用点。图中的三角形表示各深度压强的大小，蓝色条带则表示门上的面积元。

对开口向下、贴在水平底面上的薄壳，内侧注水，顶部小孔与大气相通。用表压计算各面的压力，先取壳内液体为研究对象。液体受到自身重力、底面的向上压力，以及壳壁施加的压力；三者的竖直分量相平衡。由底部压强求出底面压力，再减去液体重量，就得到壳壁对液体向下的合力大小。液体对壳的力与它等大反向，例 5.4 按这两个研究对象依次求壳的受力。

5.4.1 压力中心的一般表达与曲面投影

压力中心由各面元力的力矩确定。对完全湿润的倾斜平面，面积为 S，面积中心深度为 $h_C>0$，平面与水平夹角 β。取平面内坐标 η 沿下坡从面积中心量起，深度为 $h=h_C+\eta\sin\beta$。均匀液体的表压为 $\rho g h$，所以

$$F=\rho g\int_S (h_C+\eta\sin\beta)\,\mathrm{d}S=\rho g h_C S,$$

其中 $\int_S \eta\,\mathrm{d}S=0$ 由面积中心定义保证。各微元力都垂直同一平面，方向平行；其关于面积中心横向轴的总力矩为

$$M_C=\rho g\int_S \eta(h_C+\eta\sin\beta)\,\mathrm{d}S=\rho g\sin\beta\, I_C,\quad I_C=\int_S \eta^2\,\mathrm{d}S.$$

令等效合力下移 η_P，由 $F\eta_P=M_C$ 才得到 $\eta_P=I_C\sin\beta/(h_C S)$；对应的竖直深度为 $h_P=h_C+I_C\sin^2\beta/(h_C S)$。$I_C$ 是面积二次矩，量纲为长度四次，记录面积沿 η 方向的分布。

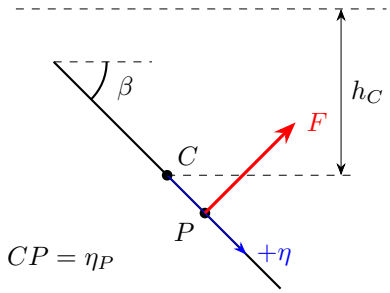


图 5.8: 沿斜面的位移与竖直深度不同，压力中心偏移沿斜面量取

图 5.8 中 C 是面积中心、P 是压力中心。沿面下移 η 只增加竖直深度 $\eta\sin\beta$，因此 η_P 和 h_P-h_C 相差一个 $\sin\beta$。水平平板 $\beta=0$ 上压强均匀，压力中心与面积中心重合。

对图 5.9 的竖直矩形闸门，顶边深度 z_0、高 h、宽 b，有 $h_C=z_0+h/2$、$S=bh$。面积二次矩为

$$I_C=b\int_{-h/2}^{h/2}\eta^2\,\mathrm{d}\eta=b\left[\frac{\eta^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2}=\frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3-\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]=\frac{bh^3}{12}.$$

代入一般式得到

$$z_P=z_0+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12(z_0+h/2)}.$$

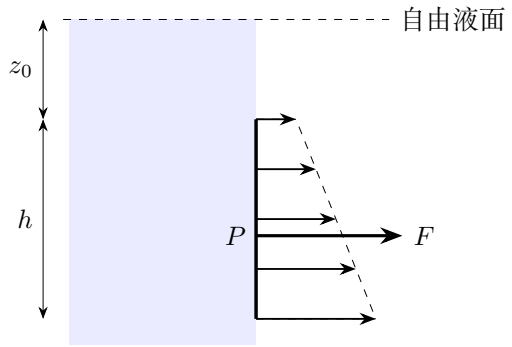


图 5.9: 顶边已浸没时压强呈梯形分布，合力作用点由总力矩确定

令 $z_0 = 0$，才恢复 $z_P = 2h/3$；若 $z_0 \gg h$，压强分布相对接近均匀，压力中心便接近面积中心。图中梯形包含一部分均匀压强，它使合力作用点比顶边在液面时更接近门的中心。若闸门两侧承受不同压强，应先对净压强积分；只在一侧大气压已被另一侧抵消时，才能直接采用上述表压关系。

对曲面，水平分力等于曲面在竖直投影上的压强积分，竖直分力可用曲面上方（或下方）的假想液体重量来求，方向由所选流体体积平衡确定。积分范围取曲面的实际湿润部分。

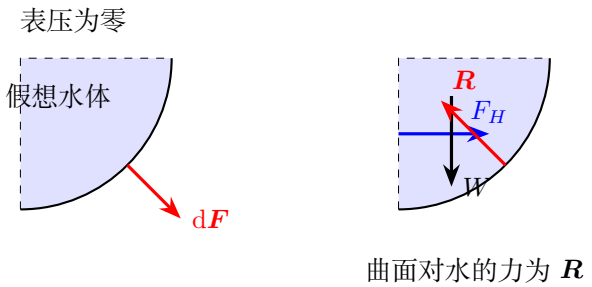


图 5.10: 曲面上方的假想液体把曲面压力分解为投影压力和液体重量

图 5.10 右图只分析假想水体。竖直投影面上的压力向右，曲面对水的反力 $\boldsymbol{R}$ 以向左分量平衡水平压力，以向上分量支承重量 W。故水对曲面的力方向相反，水平向右、竖直向下，竖直分力大小为 W。若液体位于曲面的另一侧，应重新画控制体和压力方向。

计算开口壳体时，均匀压强对闭合面总合力为零的结论可以用来补上虚拟封口面，再减去它的压力。虚拟封口与实际曲面一起组成闭合面，求出封口压力的合力后，用闭合面的总平衡求回实际曲面受力。各面统一采用同一参考压强。例 5.4 从壳内水体的整体受力求向上的壳体压力。

5.5 漂浮姿态与分层浮力的作用线

5.5.1 漂浮约束与浮心的移动

若浮体只受重力和浮力，静止要求两者大小相等且作用线重合。质心由固体质量分布决定，浮心由浸没形状决定。物体转动后，即使总体浸没体积仍由重量固定，浸没形状可以改变，浮心也会水平移动。部分漂浮物的稳定性由浮心移动后形成的力矩决定，下面从两侧排液的变化求这一移动。

自由漂浮体的小倾角稳定性，可以从新浸入与露出的小楔形体积推导。先限定均匀液体、体积不变的刚体、无自由液面舱内流动，且初始水线关于倾斜轴对称。取浮体自身坐标，x 沿水线横向，向右倾倒的小角 $\theta>0$ 使水面在浮体坐标中升高约 $x\theta$。图 5.11 右侧新浸入、左侧露出；水线面积元 $\mathrm{d}A$ 对应的排液体积变化为 $\mathrm{d}(\Delta V)=x\theta\,\mathrm{d}A$，允许它带符号。

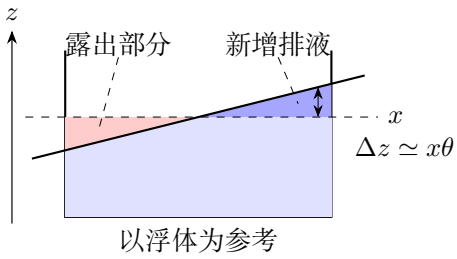
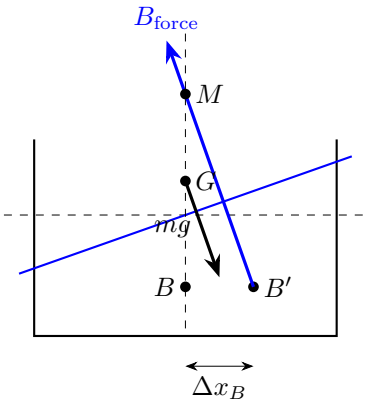


图 5.11: 浮体坐标中水线两侧的楔形体积变化

水线关于倾斜轴对称，故 $\Delta V=\theta\int x\,\mathrm{d}A=0$，与漂浮排液总量不变相符。但排液的一阶矩增加 $\Delta J_x=\theta\int x^2\,\mathrm{d}A=\theta I_{\mathrm{wp}}$。排液体积 V_{sub} 不变，所以浮心相对浮体的横向移动为

$$\Delta x_B=\frac{\Delta J_x}{V_{\mathrm{sub}}}=\frac{I_{\mathrm{wp}}}{V_{\mathrm{sub}}}\theta.$$

延长新的浮力作用线，它与原竖直中轴的交点为定倾中心 M。小角几何给 $BM\,\theta\simeq\Delta x_B$，从而 $BM=I_{\mathrm{wp}}/V_{\mathrm{sub}}$。若 $BG=z_G-z_B$ 按向上为正，便有 $GM=BM-BG$。设浮体质量为 m，回复力矩的大小约为 $mg\,GM\,\theta$。$GM>0$ 时反抗倾倒，$GM<0$ 时促进倾倒；等于零时，稳定性由势能的高阶项决定。



图在浮体坐标中
$BM \simeq \Delta x_B/\theta$
$GM > 0$：力偶回复

图 5.12: 浮心横移后，新的浮力作用线与原中轴交于定倾中心

图 5.12 保留浮体的竖直中轴，真实竖直方向在此坐标中已倾斜。蓝色浮力经过移动后的浮心 B'，重力经过固体质心 G；两者等大反向，但作用线分开。M 在 G 上方时，这个力偶反抗原来的倾倒。计算 BM 所用的是浮心横移，它随浸没形状的变化而产生。

以水线宽 b、纵向长 ℓ、浸深 d 的直立长方体为例，绕纵向轴倾斜，

$$I_{\text{wp}} = \ell \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \,\mathrm{d}x = \ell \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{\ell}{3}\left[\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{\ell b^3}{12}.$$

又有 $V_{\text{sub}} = \ell b d$，故 $BM = b^2/(12d)$。在浸深固定的比较中，水线越宽，浮心移动产生的回复作用越强。这里使用水线面积的二次矩，它来自两侧小楔形排液体积的一阶矩。

例 5.2 的细杆还受悬绳张力，取悬挂端为取矩点，张力的力矩为零；重力与浮力的作用点共同决定倾斜角。

5.5.2　分层液体中的浮力作用线

均匀液体中浮力作用线通过排液体积的几何质心；分层液体密度不同，各层单位排液体积提供的浮力分别为 $\rho_i g$。设排开各层体积 V_i，各部分几何质心为 $\boldsymbol{r}_i$。把被排开的分层液体暂时补回，周围液体作用在它外表面上的压力合力与它的重力平衡，因此

$$B = g\sum_i \rho_i V_i, \qquad \boldsymbol{r}_B = \frac{\sum_i \rho_i V_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i \rho_i V_i}.$$

作用线通过排液质量的质心，各层密度提供相应权重。界面处的内部压力在补回的液体整体中互相抵消；界面压强连续，是这一整体比较成立的条件。

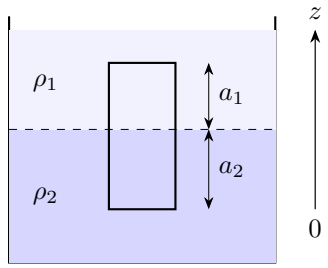


图 5.13: 跨界直柱中两段排液的密度权重

例如图 5.13 的直柱截面积 S，在下、上两液体内的高度分别为 a_2, a_1。以柱底为 $z=0$，两段排液质心高度为 $a_2/2$、$a_2+a_1/2$，所以

$$z_B=\frac{\rho_2 a_2(a_2/2)+\rho_1 a_1(a_2+a_1/2)}{\rho_2 a_2+\rho_1 a_1}.$$

截面积 S 在分子分母约去。若 $\rho_2=\rho_1$，化为 $(a_1+a_2)/2$；若下层更密，作用点比同样浸没形状的均匀液体情形更低。总浮力相等只给一个力条件，作用线的位置仍需由这个加权关系确定。

当求力矩平衡时，各层浮力也可以分别画在对应排液部分的质心上，再将力矩相加；其结果与上述单一合浮力相同。分层浮力的合成同时保留大小与作用线，例 5.1 先按界面分开两段排液，再用总浮力求钢块位置。

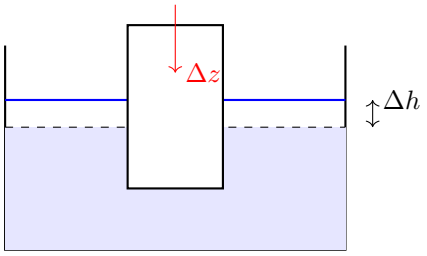
5.6 液体分层与形状效应

液体分层保持总质量和总体积，压强变化则还与容器各高度的截面积有关。此处令 z 为距自由液面的深度，液体总深度为 H。底压表压为 $g\int_0^H \rho(z)\,\mathrm{d}z$，质量却为 $\int_0^H \rho(z)S(z)\,\mathrm{d}z$；截面积 S 随高度变化时，两种加权不同。上宽下窄的容器中，浓密层占据较小截面，固定体积对应较厚层，因此底压可以增加。

例 5.3 取分层前后总质量、总体积均保持不变的液体，比较容器形状对底压的影响。物体在液体中移动时，液面位置还与排液体积有关。下面用水量保持不变的直壁容器说明这一关系。

5.6.1 液面变化的体积约束

设容器有足够的高度，物体浸入时水留在容器内。自由漂浮物通过竖直平衡确定排液体积；受外力控制位置的物体，其浸没长度由相对液面的几何位置确定。先看图中一根由外力缓慢压入水中的等截面柱体。



容器截面积 A，浸入物截面积 a

图 5.14: 受控浸入物多排开的体积，由容器其余自由液面上升补偿

图 5.14 取等截面浸入物向下移动 $\Delta z>0$、液面上升 $\Delta h>0$。相对物体，新增浸没高度为 $\Delta z+\Delta h$，所以液体体积不变给

$$A\Delta h = a(\Delta z+\Delta h), \qquad \Delta h = \frac{a}{A-a}\Delta z.$$

式中 $A-a$ 是物体之外的液面面积，新增浸没部分包括受控下降和液面上升两项。自由漂浮且质量不变的物体随液面一起升降，其排液体积由重量固定。

5.6.2　移动浮体与固定浸入物的液面方程

把前面的体积比较写成一般形式。设直壁容器横截面积为 S_c，水面高度为 h，所有物体在水下占据的总体积为 V_{sub}。液面以下的容积由水和物体共同占据，因此水体积为 $V_w = S_c h - V_{\text{sub}}$。前后水量相同，两式相减给出 $0 = S_c\Delta h - \Delta V_{\text{sub}}$，即 $S_c\Delta h = \Delta V_{\text{sub}}$。物体随水面漂浮或由外界固定时，分别按相应的浸没形状求 ΔV_{sub}。

若一根固定竖柱水线截面积为 S_b，液面上升 Δh 使柱的浸没体积增加 $S_b\Delta h$。另外放入体积 V_0 的完全浸没物体时，方程为 $S_c\Delta h = S_b\Delta h + V_0$，故 $\Delta h = V_0/(S_c-S_b)$。如果原物体是质量不变的自由浮体，其排液体积由重量固定，液面升高时浮体随之上升，原浮体的浸没体积不增加；同样加入 V_0 时则有 $\Delta h = V_0/S_c$。两种分母的区别来自原物体随液面移动与否。

例如，将原来放在浮板上的铁块移入同一容器，铁块完全沉入水中并落到底部。浮板减少的排液体积为 m/ρ_w，铁块占据的水下空间为 m/ρ_{Fe}，所以 $S_c\Delta h = m/\rho_{\text{Fe}} - m/\rho_w < 0$。同一铁块原先通过浮板按水的密度排液，沉底后按自身几何体积占据水中空间，二者之差使液面降低。练习 5.1 用前后两幅图列出各部分体积。

5.7 浮体稳定与质心优化

细杆由一端悬挂并逐渐浸水时，绳拉力仍竖直，但浮力的力臂会随浸没长度改变。可对悬点取矩，比较重力和浮力对小偏角的一阶项，找出竖直构型失稳条件。若进一步求倾斜平衡，应将浸没长度与悬点离水面的距离通过三角关系联系，按倾斜构型确定水上、水下的实际杆长。

向杯中加水时，杯与水的总质心可能先降后升。设水深 x，新加入的薄层位于水面 x，如果 x 低于当前总质心，加入质量使总质心下降；高于则上升。最低点由水面与总质心等高给出，对完整质心式求导会得到同一条件；例 5.5 还用导数的正负说明它是最低点。

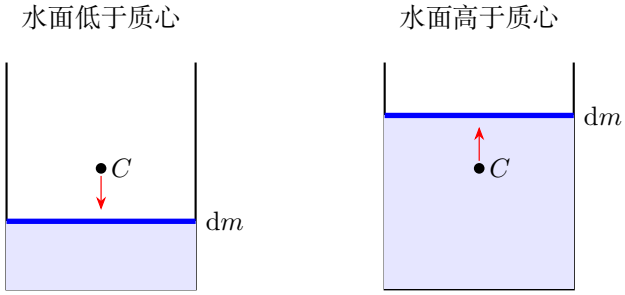


图 5.15: 新加薄层位于原质心下方时降低总质心，位于上方时提高总质心

图 5.15 是质量增加问题。原系统总质量 M_t、质心高 z_C，在水面高度 x 处加入 $\mathrm{d}m$ 后，有

$$z_C + \mathrm{d}z_C = \frac{M_t z_C + x\,\mathrm{d}m}{M_t + \mathrm{d}m},$$

先通分减去原来的 z_C，再保留关于新增质量的一阶量：

$$\mathrm{d}z_C = \frac{M_t z_C + x\,\mathrm{d}m - z_C(M_t + \mathrm{d}m)}{M_t + \mathrm{d}m} = \frac{x - z_C}{M_t + \mathrm{d}m}\,\mathrm{d}m \simeq \frac{x - z_C}{M_t}\,\mathrm{d}m.$$

所以极值候选条件为 $x = z_C$。这一条件来自新增质量的一阶矩：水面低于质心时质心下降，高于质心时质心上升。

5.8 加速容器内的相对静止液体

容器匀加速运动时，液体可相对容器静止，每个液体微元相对地面都有容器的加速度。取随容器平移的参考系，对每个液体微元加入惯性力密度 $-\rho\boldsymbol{a}$，局部平衡变为 $\boldsymbol{\nabla} p = \rho(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a})$。这里 $\boldsymbol{g}$ 是竖直向下的重力加速度矢量，$\boldsymbol{a}$ 是容器对惯性系的加速度。

若容器水平向右加速 a，取 x 向右、z 向上，则 $\partial p/\partial x = -\rho a$，$\partial p/\partial z = -\rho g$。自由液面上压强相同，所以 $-a\,\mathrm{d}x - g\,\mathrm{d}z = 0$，得到 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x = -a/g$。液面左高右低，坡度由加速度决定，与容器当前速度无关。液体体积守恒再确定直线的截距。

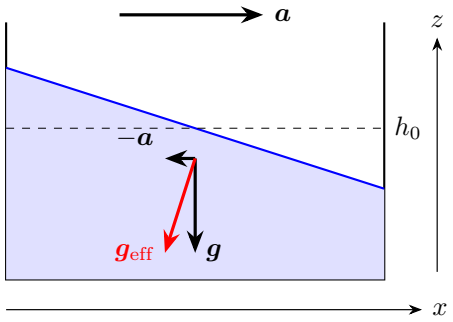


图 5.16: 向右加速时有效重力向左下，等压自由液面与它垂直

图 5.16 的虚线是未加速时液面，实线是相对静止后的液面。先从 $x = 0$ 积分坡度：

$$z_s(x) - z_s(0) = \int_0^x -\frac{a}{g}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{a}{g}[\xi]_0^x = -\frac{a}{g}x.$$

对宽 L 的直壁容器，若无溢流且底部仍全部有水，按单位纵向长度写体积守恒，

$$Lh_0 = \int_0^L \left[z_s(0) - \frac{a}{g}x\right]\mathrm{d}x = \left[z_s(0)x - \frac{a}{2g}x^2\right]_0^L = Lz_s(0) - \frac{aL^2}{2g}.$$

解得 $z_s(0) = h_0 + aL/(2g)$，于是

$$z_s(x) = h_0 + \frac{a}{g}\left(\frac{L}{2} - x\right), \qquad 0 \le x \le L.$$

左、右端高度差为 aL/g。当右端水深减至零时，湿润区域从矩形底面的一端开始缩短；此后的体积积分取新的液面与底面交点为端点。

同一密度液体中的等压面垂直于有效重力 $\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$。若容器竖直向上加速 a_z，压强梯度相当于 $g + a_z$；在自由下落参考系中，$\boldsymbol{g}_{\mathrm{eff}} = 0$，相对静止液体内部的压强为常量。

在这种相对静止液体中，压力合力可由排液微元的有效重量计算。物体本身在这个参考系中同时受真实重力、惯性力和其他约束力，所有这些作用共同满足平衡。若回到地面惯性系，则保留真实重力与压力，右侧写物体的加速度，两种方法应给相同结果。

5.8.1 匀速转动时为何形成抛物面

液体以角速度 Ω 绕竖直轴整体转动时，在随转参考系中径向体力为 $\rho\Omega^2 r$ 向外，竖直体力为 $-\rho g$。因此

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\rho\Omega^2 r,\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g.$$

自由液面上 $\mathrm{d}p=0$，即 $\rho\Omega^2 r\,\mathrm{d}r-\rho g\,\mathrm{d}z_s=0$，所以 $\mathrm{d}z_s/\,\mathrm{d}r=\Omega^2 r/g$。从轴线积分到半径 r，

$$z_s(r)-z_s(0)=\frac{\Omega^2}{g}\int_0^r \xi\,\mathrm{d}\xi=\frac{\Omega^2}{g}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^r=\frac{\Omega^2 r^2}{2g}.$$

图 5.17 中外侧斜率更大，正对应离心项随 r 增加。

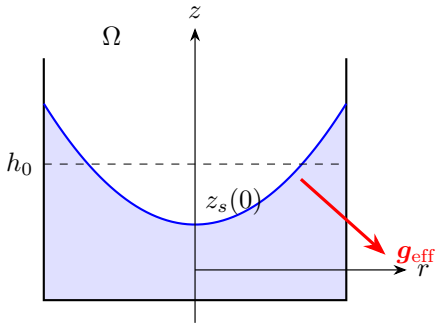


图 5.17: 径向有效体力随半径增加，自由液面高度按 r^2 增加

若圆筒半径为 R_c、原液深 h_0，且不溢流、不露底，圆环面积元为 $\mathrm{d}A=2\pi r\,\mathrm{d}r$，因此体积守恒为

$$\begin{aligned}\pi R_c^2 h_0&=2\pi\int_0^{R_c}\left[z_s(0)+\frac{\Omega^2 r^2}{2g}\right]r\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\left[\frac{z_s(0)r^2}{2}+\frac{\Omega^2 r^4}{8g}\right]_0^{R_c}=\pi R_c^2 z_s(0)+\frac{\pi\Omega^2 R_c^4}{4g}.\end{aligned}$$

除以底面积，解得 $z_s(0)=h_0-\Omega^2 R_c^2/(4g)$。相应边缘液深为 $h_0+\Omega^2 R_c^2/(4g)$；轴线液深非负且边缘不超过杯高，才符合积分时采用的全底湿润、无溢流条件。平移加速与转动的共同方法是局部平衡，但有效体力的空间分布不同，液面形状也不同。

5.9　综合问题中的几何关系与尺度

5.9.1　重力运动的缩尺

同样重力加速度下，把一段自由下落高度缩小为原来的 λ 倍，相应时间由 $h=gt^2/2$ 确定。设实物、模型下落相应高度的时间分别为 t, t_m，则

$$\frac{h_m}{h}=\frac{gt_m^2/2}{gt^2/2}=\left(\frac{t_m}{t}\right)^2=\lambda,\qquad \frac{t_m}{t}=\sqrt{\lambda}.$$

相应时刻的速度 $v=gt$ 给 $v_m/v=\sqrt{\lambda}$。图 5.18 将长度与时间分别标出，模型动作放大后要按时间比调整播放速度，练习 5.3 用帧数守恒确定拍摄帧率。

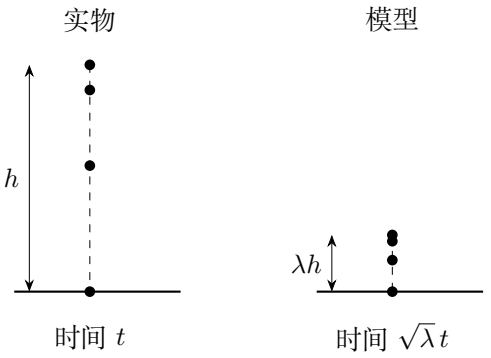


图 5.18: 相应下落位置的高度按长度比缩小，时间按其平方根缩小

5.9.2　移动观察者看到的速度方向

雨滴对车的速度由雨的对地速度减去车速得到：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}.$$

图 5.19 把 $\boldsymbol{v}$、$-\boldsymbol{u}$ 首尾相接，蓝色合矢量就是车内看到的雨线方向。遮挡关系中的角度由这条合矢量与车篷边缘决定。若雨对地速度为 $(v_x,-v_y)$、车速为 $(u,0)$，则相对分量为 $(v_x-u,-v_y)$。

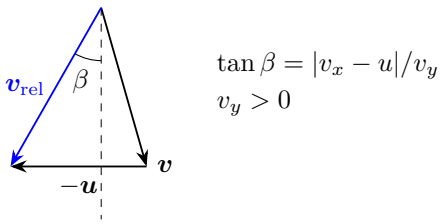


图 5.19: 对地速度减去车速形成相对雨速，角度相对竖直方向量取

图 5.19 中的 β 从竖直向下量起，所以水平与竖直分量的比值为 $\tan\beta$。练习 5.4 先利用相对竖直的条件求 v_x，再由第二条雨线求 v_y。

5.9.3 从圆柱展开的绳与渐开线

绷紧的细绳从固定圆柱上逐渐展开时，自由绳段始终沿切点的切线。绳端质点的位置因此同时取决于切点移到了哪里，以及已经解开了多长的绳。图 5.20 取圆心 O 为原点，初始切点在 x 轴正向，切点 Q 沿逆时针方向转过 $\phi \geq 0$。圆周上解开的弧长为 $R\phi$，它成为自由绳 QP 的长度。

半径 OQ 与 x 轴的夹角为 ϕ，所以切点坐标为

$$\boldsymbol{r}_Q = R(\cos\phi, \sin\phi).$$

沿 Q 指向 P 的自由绳方向，是把径向单位矢量 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 顺时针转过直角，得到单位矢量 $(\sin\phi, -\cos\phi)$。图中右侧的分量图以绳段向右下方伸出的位置为例，标出两个方向的位置增量。绳长乘单位方向，给出

$$\overrightarrow{QP} = R\phi(\sin\phi, -\cos\phi).$$

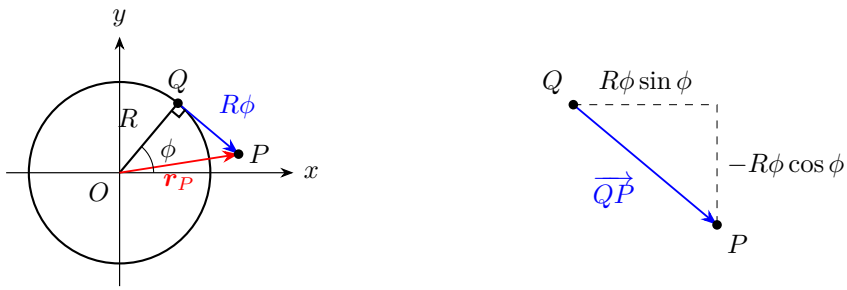


图 5.20: 左图把切点半径与自由绳相接，右图分解自由绳的位置增量

沿 OQ 再沿 QP 到达质点，两段位移相加得到

$$\boldsymbol{r}_P = \boldsymbol{r}_Q + \overrightarrow{QP}.$$

将两段位移的水平、竖直分量分别相加，得到

$$x(\phi) = R\cos\phi + R\phi\sin\phi,$$
$$y(\phi) = R\sin\phi - R\phi\cos\phi.$$

这条曲线称为圆的渐开线。固定 R，对两个坐标分别求导，含 ϕ 的乘积各产生两项：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} = R[-\sin\phi + \sin\phi + \phi\cos\phi] = R\phi\cos\phi,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = R[\cos\phi - \cos\phi + \phi\sin\phi] = R\phi\sin\phi.$$

因此轨迹在 P 处的切线沿 $(\cos\phi, \sin\phi)$，与自由绳方向 $(\sin\phi, -\cos\phi)$ 垂直。轨迹弧长微元为

$$\mathrm{d}s_{\text{path}} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi}\right)^2}\,\mathrm{d}\phi = R\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

切点的移动、自由绳长度和轨迹弧长由同一个展开角联系起来。练习 5.5 以总可展开绳长确定积分上限，再连接全展开后的圆周运动和另一侧卷回，求完整周期。

5.9.4　杆秤的刻度与零点力矩

杆秤的刻度由关于支点的力矩平衡确定。图 5.21 中，物体质量 M、力臂 a，秤砣质量 m，零刻度距支点 c，每单位读数对应长度 ℓ，杆盘的固定重力矩为 K。单秤砣平衡为

$$Mga + K = mg(c + q\ell).$$

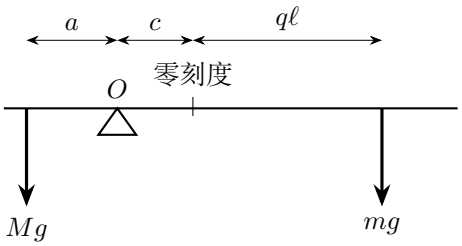


图 5.21: 秤砣力臂由零点距离和刻度增量共同组成

准确标定使任意读数 q 都与对应质量一致，因此这个关于 q 的一次关系同时确定刻度间距与零点力矩。练习 5.6 把秤砣加倍，分别追踪这两项的变化。

最后一题练习 5.7 把前讲的接触速度用于抽车：圆柱持续接触两固定法向位置的平面时，圆心固定；各处相对切向速度由同一个角速度和车速确定。先由速度判断粘着与滑动，再以平衡及转动方程求相应接触力，便可联系几何约束与摩擦条件。

5.10 例题与分析

例 5.1 (钢块浮在水银与水中)． 边长 l 的钢立方体密度 $7.89\,\mathrm{g/cm^3}$，水银密度 $13.6\,\mathrm{g/cm^3}$。先求露出水银的高度；再在水银上加水，水面恰与钢块顶面平齐，求水层厚度。

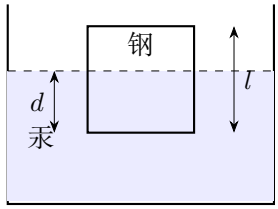


图 5.22: 钢块部分浸入水银，浸深与钢块密度由浮力平衡联系

解 先求只有水银时的浸没比例

图 5.22 先设水银浸没深度 d。浮力 $\rho_{\mathrm{Hg}}gl^2d$ 平衡 $\rho_s gl^3$，所以露出比例为 $1-d/l=1-\rho_s/\rho_{\mathrm{Hg}}=0.41985$。

加水后按界面分出两段排液体积

第二阶段水面与顶面齐平，图 5.23 中的水层厚 x 就是水内钢块的高度；剩余 $l-x$ 浸在水银中。应先按界面分出两段排液体积，再分别乘各自密度。

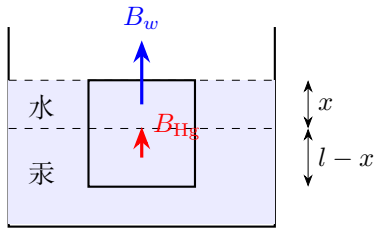


图 5.23: 水面与钢块顶面齐平，两段排液分别位于水和水银中

合成分层浮力并比较前后高度

图 5.23 的两段浮力为 $B_w=\rho_w gl^2x$、$B_{\mathrm{Hg}}=\rho_{\mathrm{Hg}}gl^2(l-x)$。竖直平衡除以 gl^2，得 $\rho_w x+\rho_{\mathrm{Hg}}l-\rho_{\mathrm{Hg}}x=\rho_s l$，把含 x 的项移到同一边得 $(\rho_{\mathrm{Hg}}-\rho_w)x=(\rho_{\mathrm{Hg}}-\rho_s)l$，解得

$$\frac{x}{l}=\frac{\rho_{\mathrm{Hg}}-\rho_s}{\rho_{\mathrm{Hg}}-\rho_w}=\frac{5.71}{12.6}=0.45317.$$

水的浮力使块体上浮，所需水层厚度大于初始露出高度。

例 5.2 (悬杆入水后的倾斜)**.** 均匀细杆长 l、截面积 S、密度 $\rho_b < \rho$，上端由轻绳悬挂，缓慢进入密度 ρ 的水。杆上端 A 高于液面 d，取 $0 < d < l$，求竖直构型的失稳条件及倾斜平衡角。

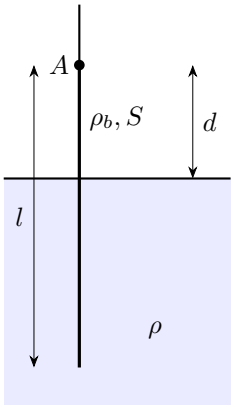


图 5.24: 初始杆竖直，杆上端 A 在液面上方，绳在 A 处施向上拉力

解　以液面交点确定水上段和浮心

图 5.24 中，杆重 $G = \rho_b Slg$。令杆与竖直夹角为 θ。水上杆长 $a = d/\cos\theta$，浸没杆长 $l - a$。重力作用于 $l/2$，浮力作用于距上端 $(l + a)/2$ 处。

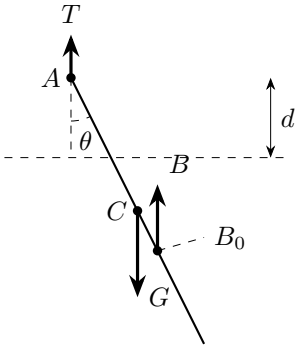


图 5.25: 倾斜杆的水上长度决定浸没段中点与浮力力臂

对杆上端取矩求倾斜平衡

图 5.25 中的液面交点把杆分成 a 与 $l - a$ 两段。B_0 是浸没杆段中点，浮力 B 通过此点，重力通过整杆中点 C。对上端 A 取矩，非竖直平衡要求

$$\rho_b Slg\frac{l}{2}\sin\theta = \rho S(l-a)g\frac{l+a}{2}\sin\theta,$$

因为倾斜分支有 $\sin\theta \neq 0$，可约去 $Sg\sin\theta/2$，得 $\rho_b l^2 = \rho(l-a)(l+a) = \rho(l^2-a^2)$。取水上杆长 $a > 0$，所以 $a = l\sqrt{1-\rho_b/\rho}$，即 $\cos\theta = d/[l\sqrt{1-\rho_b/\rho}]$。

保留净力矩判断竖直与倾斜分支

竖直构型对应 $\theta=0$，下面保留整个角度因子，考察小偏转后的净力矩。取促进正偏角的力矩为正，保留 $a=d/\cos\theta$，净力矩为

$$\tau_\theta=\frac{\rho Sg}{2}\left(d_c^2-d^2\sec^2\theta\right)\sin\theta,\qquad d_c=l\sqrt{1-\rho_b/\rho}.$$

小角度下 $\sec^2\theta=1+O(\theta^2)$、$\sin\theta=\theta+O(\theta^3)$，故一次力矩系数为 $(\rho Sg/2)(d_c^2-d^2)$。在悬绳张力允许的竖直构型上，$d>d_c$ 时产生线性回复，$d<d_c$ 时促进偏转。此时非零平衡分支由 $\cos\theta=d/d_c$ 给出。为判断倾斜分支，先对乘积求导，并保留 $\sec^2\theta$ 的链式导数：

$$\frac{\mathrm{d}\tau_\theta}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\rho Sg}{2}\left[-2d^2\sec^2\theta\tan\theta\sin\theta+\left(d_c^2-d^2\sec^2\theta\right)\cos\theta\right].$$

在非零平衡角处第二项为零，所以导数为 $-\rho Sgd^2\sec^2\theta\tan\theta\sin\theta<0$，该分支局部稳定。下面还需检查所有候选构型的绳张力。

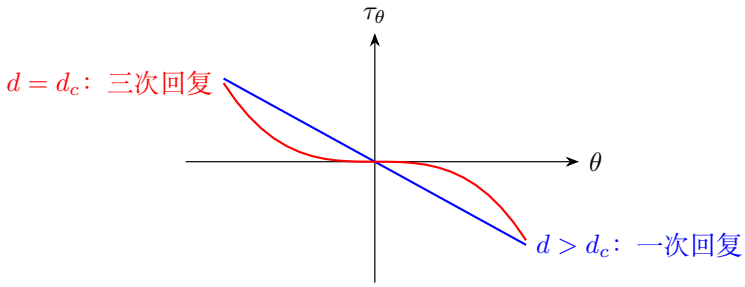


图 5.26: 临界点的一次回复项消失，三次项仍指向平衡位置

临界状态的回复力矩与悬绳张力

图 5.26 显示两种回复项在原点附近的差别。

当 $d=d_c$ 时，$\tau_\theta=-(\rho Sgd_c^2/2)\tan^2\theta\sin\theta\simeq-(\rho Sgd_c^2/2)\theta^3$，仍然回复，属于较弱的稳定平衡；倾斜分支上 $a=d_c$，绳张力为

$$T=\rho Sg\left[d_c-l(1-\rho_b/\rho)\right]>0,$$

因为 $0<1-\rho_b/\rho<1$ 时其平方根大于它本身，倾斜分支的绳张力为正，且 $a=d_c<l$ 保证确有浸没部分。竖直构型的张力另由竖直力平衡给出

$$T_{\mathrm{vert}}=\rho_b Slg-\rho S(l-d)g=\rho Sg(d-d_T),\qquad d_T=l(1-\rho_b/\rho).$$

由于 $0<d_T<d_c$，$d>d_c$ 的竖直分支线性稳定，$d=d_c$ 仍有三次回复；$d_T<d<d_c$ 的竖直分支虽可绷紧平衡，但不稳定。$d=d_T$ 时张力降为零，悬绳开始松弛；$0<d<d_T$ 时，竖直杆的浮力大于重力，向上的净力使杆离开竖直悬挂状态。对

于 $0 < d < d_c$，前述倾斜平衡均有正张力。图 5.27 分别标出张力降零和回复力矩改变的两个位置。

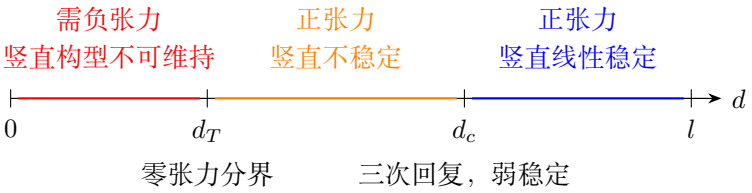


图 5.27: 沿竖直候选构型，张力降零与回复力矩改变发生在不同水上高度

例 5.3 (上宽下窄容器中液体分层)**.** 容器横截面积随高度严格增加。初始均匀混合液体密度 $\bar{\rho}$，后来分成上层 ρ_1、下层 $\rho_2 > \rho_1$，体积分别 V_1, V_2，总体积不变且无收缩。比较底压。

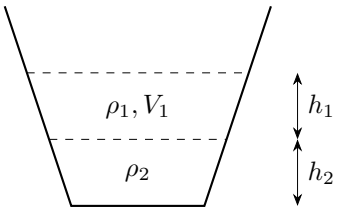


图 5.28: 容器向上逐渐变宽，较密液体位于下层

解　用平均截面区分质量与高度权重

图 5.28 层厚为 h_1, h_2，令平均截面积 $S_1 = V_1/h_1$、$S_2 = V_2/h_2$，上宽下窄给 $S_1 > S_2$。总质量守恒 $\bar{\rho} = (\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2)/(V_1 + V_2)$。

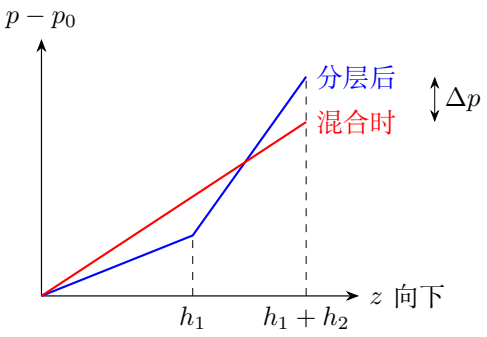


图 5.29: 同一液面深度下，分层改变压强折线斜率；底压差由平均截面决定

写出两状态底压差

图 5.29 分层前后液面相同，底压差

$$\Delta p = g[\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 - \bar{\rho}(h_1 + h_2)] = g[(\rho_1 - \bar{\rho})h_1 + (\rho_2 - \bar{\rho})h_2].$$

利用截面单调性判断符号

将质量平均密度分别从两密度中减去，先通分：

$$\rho_1 - \bar{\rho} = \frac{\rho_1(V_1+V_2) - \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{V_1+V_2} = -\frac{(\rho_2-\rho_1)V_2}{V_1+V_2},$$
$$\rho_2 - \bar{\rho} = \frac{\rho_2(V_1+V_2) - \rho_1 V_1 - \rho_2 V_2}{V_1+V_2} = \frac{(\rho_2-\rho_1)V_1}{V_1+V_2}.$$

再代入 $h_i = V_i/S_i$ 并提取公共因子，

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p}{g} &= \frac{\rho_2-\rho_1}{V_1+V_2}\left(-V_2\frac{V_1}{S_1} + V_1\frac{V_2}{S_2}\right)\\ &= (\rho_2-\rho_1)\frac{V_1V_2}{V_1+V_2}\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_1}\right) > 0.\end{aligned}$$

正号来自 $S_1 > S_2 > 0$，所以分层后底压增大。直筒容器两平均截面相同，差为零；上窄下宽则反号。总质量按各层体积计量，底压按各层厚度累加；两种权重的差别给出了容器形状的影响。

例 5.4 (半球壳何时被水顶起)**.** 半径 R 的薄半球壳开口向下贴在水平桌面上，顶部小孔注水。当水面到顶部时壳刚开始抬起。忽略孔面积，水密度 ρ，求壳质量。

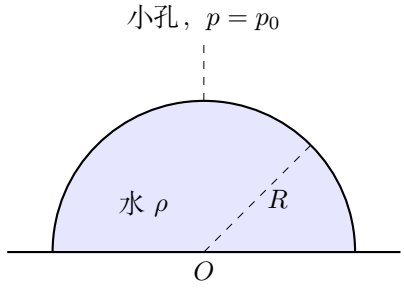


图 5.30: 半球内注满水，顶部小孔连通大气；底部与桌面围成水体

解　先隔离水体求壳水之间的合力

图 5.30 的孔口连通大气，故底部表压 $p_b = \rho g R$。内外大气压抵消后，取壳内水体为研究对象：底面的向上压力 $F_b = p_b \pi R^2$，水重 $W_w = 2\pi\rho g R^3/3$。设壳对水的竖直压力合力为向下的 F，由图 5.31 左图，$F_b - W_w - F = 0$。

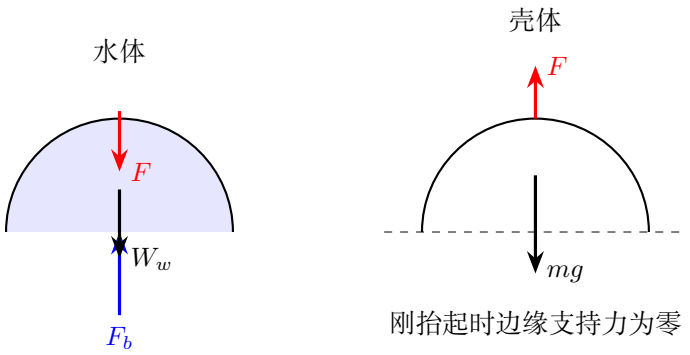


图 5.31: 水体与壳体分别受力，接触压力大小相等、方向相反

在边缘支持力降为零时列壳的平衡

图 5.31 右图中，水对壳的力为向上的 F；刚抬起时边缘支持力降为零，故 $F = mg$。把它代入水体方程，得

$$\rho g\pi R^3 = mg + \frac{2}{3}\rho g\pi R^3, \quad m = \frac{1}{3}\pi\rho R^3.$$

这也等于壳受到的净向上水压力除以 g。

例 5.5 (注水杯的最低总质心)**.** 空圆柱杯质量 M，空杯质心高 h，底面积 S，水密度 ρ。杯足够高，忽略壁厚。求加水时系统质心最低的位置。

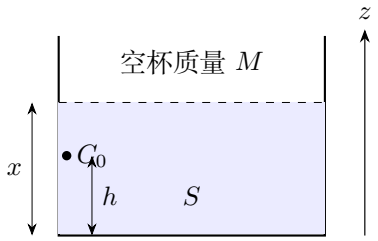


图 5.32: 水面高度与空杯质心高度均从杯底量取

解　按杯与水两部分写总质心

图 5.32 水深 x，水质量 ρSx、质心高 $x/2$，所以

$$z(x) = \frac{Mh + \rho Sx^2/2}{M + \rho Sx}.$$

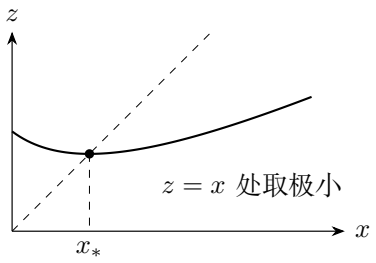


图 5.33: 总质心随水深先降后升，极小处与水面等高

求导并解唯一非负驻点

图 5.33 对分式使用商法则，

$$z'(x)=\frac{\rho Sx(M+\rho Sx)-\rho S(Mh+\rho Sx^2/2)}{(M+\rho Sx)^2}.$$

展开分子并合并 $\rho^2S^2x^2$ 项，分子化为 $\rho S[Mx+\rho Sx^2/2-Mh]$。驻点满足 $\rho Sx^2+2Mx-2Mh=0$，用求根公式，

$$x_\pm=\frac{-2M\pm\sqrt{(2M)^2-4\rho S(-2Mh)}}{2\rho S}=\frac{-M\pm\sqrt{M^2+2M\rho Sh}}{\rho S}.$$

负号根小于零，不在 $x\geq 0$ 的注水范围；取正号根 $x_*=[\sqrt{M^2+2M\rho Sh}-M]/(\rho S)$。

证明水面等于最低质心高度

驻点条件又给 $Mh=Mx_*+\rho Sx_*^2/2$，代回 z 的分子，得到 $Mh+\rho Sx_*^2/2=x_*(M+\rho Sx_*)$，所以

$$z(x_*)=\frac{x_*(M+\rho Sx_*)}{M+\rho Sx_*}=x_*.$$

令导数分子中括号内的函数为 $Q(x)=Mx+\rho Sx^2/2-Mh$，则 $Q'(x)=M+\rho Sx>0$。又 $Q(0)=-Mh<0$，在唯一正根 x_* 后为正，因此 z' 先负后正，确有 $z_{\min}=x_*$。水面与总质心等高也能从“新加薄层不再使质心下降”理解。

例 5.6 (锥形活塞的均匀压力合力)**.** 重力可忽略的浅液体，表压均匀为 P。锥台活塞的斜侧面与液体接触，两水平截面半径分别为上 R、下 r 且 $R > r$，液体位于斜面外侧。求侧面压力合力。

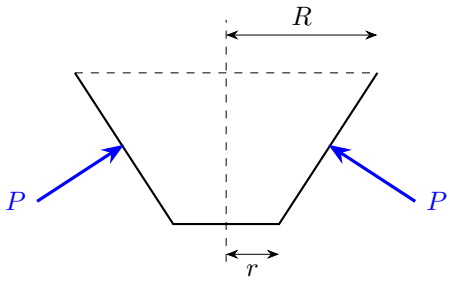


图 5.34: 锥台上大下小，液体从斜面外侧沿法线压向活塞

解　把窄环压力投影到竖直方向

图 5.34 的锥面关于轴线对称，水平方向的压力分量成对相消。取侧面上半径从 s 增至 $s+\mathrm{d}s$ 的一条窄环。设该处法线与竖直夹角为 β，窄环面积为 $\mathrm{d}S$，压力竖直分量为

$$\mathrm{d}F_z = P\cos\beta\ \mathrm{d}S.$$

图 5.35 中，窄环的水平投影是内半径 s、外半径 $s+\mathrm{d}s$ 的圆环。保留关于 $\mathrm{d}s$ 的一阶项，投影面积为

$$\mathrm{d}S_z = \pi(s+\mathrm{d}s)^2 - \pi s^2 = 2\pi s\,\mathrm{d}s + \pi(\mathrm{d}s)^2 \simeq 2\pi s\,\mathrm{d}s.$$

面积投影还给出 $\mathrm{d}S_z = \cos\beta\ \mathrm{d}S$，所以 $\mathrm{d}F_z = P\,2\pi s\,\mathrm{d}s$。外侧液体对上大下小的锥面沿法线向内压，竖直分量向上。

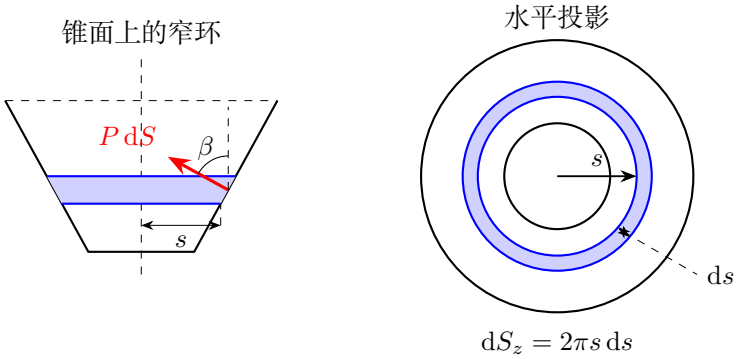


图 5.35: 窄环的水平投影具有内半径 s 和径向宽度 $\mathrm{d}s$

从小圆半径积至大圆半径

窄环半径从下缘 r 增至上缘 R。因表压 P 恒定，

$$\begin{aligned} F_z &= \int_r^R P\,2\pi s\,\mathrm{d}s = 2\pi P\left[\frac{s^2}{2}\right]_r^R \\ &= \pi P(R^2 - r^2). \end{aligned}$$

故侧面压力合力沿轴线向上，大小为 $P\pi(R^2 - r^2)$。图 5.35 的水平投影是上下圆之间的圆环，这也解释了结果只含两圆面积之差。

本讲小结

静水压强由微液柱上下压力差支承其重量而得到。分层液体的压强逐层累加，压力合力及作用点分别由力与力矩积分确定。浮力可由补回排液的整体平衡求得；分层排液按密度加权，浮心随浸没形状改变。

液面变化由水量与实际排液体积共同确定。漂浮物的排液量由重量固定，受控浸入物的排液量由几何位置决定。悬杆取悬挂端的力矩，浮体小倾角取浮心移动后的回复力矩，注水杯的总质心则按新增质量的一阶矩变化。

综合题把这些受力、几何与微元方法接到相对速度、运动缩尺、绳的展开和杆秤力矩中。每一关系都使用同一对象、同一参考系及题设给定的约束。

5.11 练习

练习 5.1 (铁块从浮板移入水中)**.** 浮板托着质量 m、密度 $\rho_i > \rho$ 的铁块漂浮。将铁块移入容器并沉底，浮板仍漂浮，无溢流。容器截面积恒为 S，求液面高度变化。

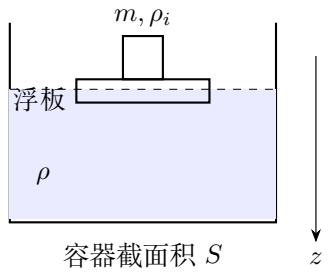


图 5.36: 铁块由漂浮板承托，前后均保持水量不变

练习 5.2 (竖直闸门的压力中心)**.** 宽 b、高 h 的竖直矩形闸门，上边缘在深度 z_0，一侧为密度 ρ 的水，另一侧大气。求合力及作用点深度。

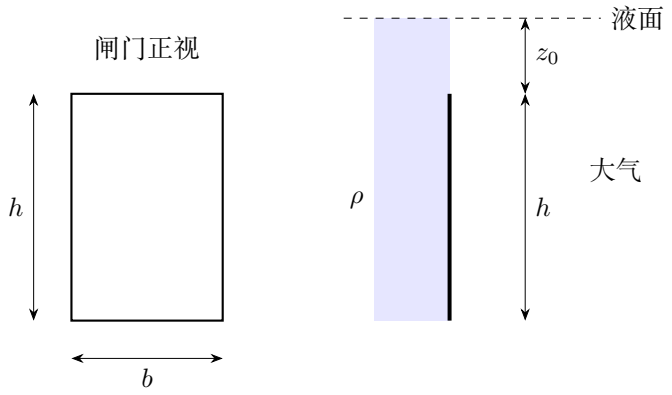
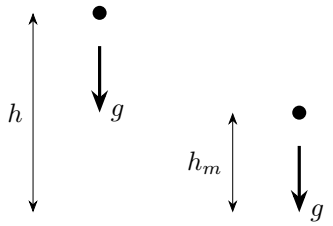


图 5.37: 正视图定义门宽和门高，侧视图定义液面深度与湿润范围

练习 5.3 (缩尺模型的摄影速率)**.** 自由下落的模型线度是实物的 $1/49$，重力加速度相同。播放速率为每秒 24 帧，要让放大后的下落运动逼真，求拍摄帧率和对应速度比。



两图采用不同绘图比例，$h_m = h/49$

图 5.38: 模型与实物的下落高度之比给定，重力加速度相同

练习 5.4 (车篷挡雨的速度三角形)**.** 车向右行驶, 车篷后缘 A 正下方为 C, 后座边缘 B 在 C 左方, AB 与竖直成 30°。车速 6 km/h 时雨相对车竖直, 车速 18 km/h 时雨线沿 AB。求雨对地速度。

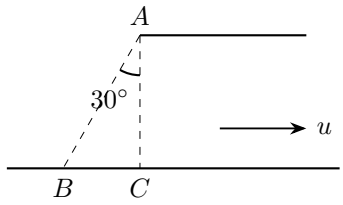


图 5.39: 篷缘到后座边缘的雨线与竖直方向成三十度

练习 5.5 (细线从圆柱展开的轨迹)**.** 半径 R 的固定圆柱上绕轻绳, 总可展开长度 L, 一端固定于表面。质点从绳全绕紧处以速度 v 沿柱面外法线出发, 绳始终绷紧。忽略重力, 柱面碰撞完全弹性。求轨迹和一个完整往复周期。

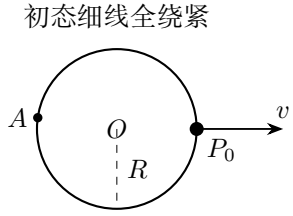


图 5.40: 从全绕紧的起点沿外法线出发，细线固定在柱面

练习 5.6 (双秤砣称重的零点影响)**.** 杆秤用单秤砣读数准确。双秤砣称 8 kg 物体时读数 3 kg，再用双秤砣称西瓜读数 6.5 kg。求西瓜质量。

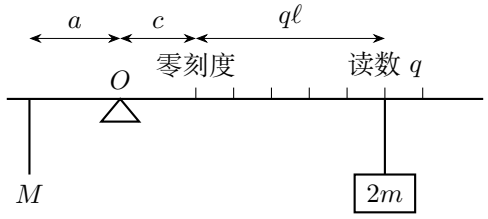


图 5.41: 双秤砣在同一读数处，力臂包含零点距离与刻度长度

练习 5.7 (抽动小车时的圆柱接触)**.** 圆柱同时接触固定斜墙和水平小车，斜墙与水平成 θ 且位于圆柱左上侧，车面向左抽动，速度 $U<0$。圆柱重 G、半径 R、对轴转动惯量 I，初始静止；墙、车面摩擦系数为 μ_1,μ_2，在本模型中各处最大静摩擦系数与滑动摩擦系数取相同值。取 $0<\theta<\pi/2$，讨论双接触时的运动约束和初始粘着条件。

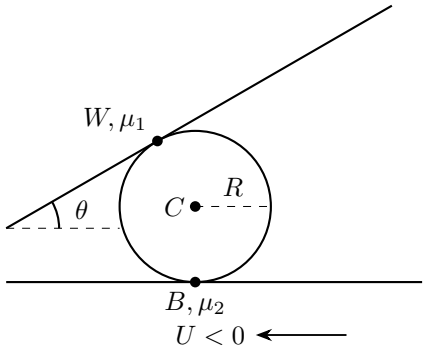


图 5.42: 上方斜墙固定，下方车面左移；两个接触点的法向位置均固定

练习解答

练习 5.1

解　分别求沉底前后的排水体积

图 5.36 中，记浮板质量为 M。铁块在板上时，浮板承担两者重量，排水体积为 $(M+m)/\rho$。铁块沉底后，板只承担自身重量，排水体积为 M/ρ；铁块占据水中的几何体积为 m/ρ_i。

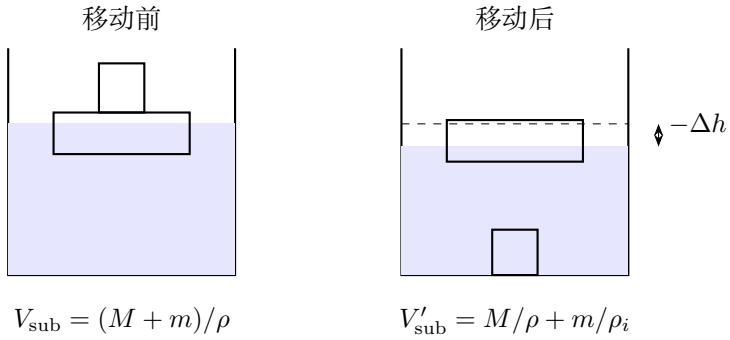


图 5.43: 比较移动前后实际排液体积，浮板自身的排液量在差值中抵消

把排水体积差换算为液面高度

图 5.43 的虚线保留原液面。设液面变化为 Δh，水量固定，容器总体积的增量等于物体在水中占据体积的增量：

$$S\Delta h = \left(\frac{M}{\rho} + \frac{m}{\rho_i}\right) - \frac{M+m}{\rho} = m\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho}\right).$$

因此

$$\Delta h = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho_i} - \frac{1}{\rho}\right) < 0.$$

液面下降；同一铁块质量原先使浮板按水密度排液，沉底后则以自身几何体积占据水中空间。

练习 5.2

解　在深度 z 处取水平条带

图 5.37 中，门两侧的大气压相消。深度为 z、厚度为 $\mathrm{d}z$ 的条带面积 $b\,\mathrm{d}z$，其净压力为 $\mathrm{d}F = \rho g b z\,\mathrm{d}z$，方向垂直门面。

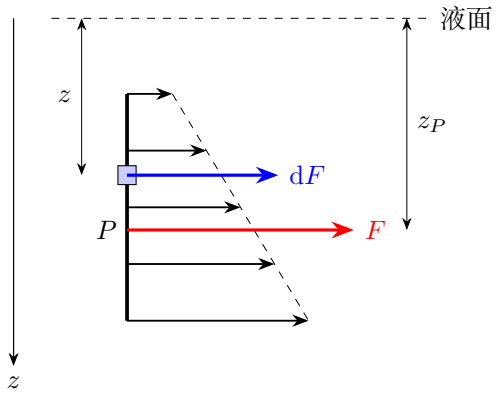


图 5.44: 条带积分求力，关于液面的力矩积分求作用点

分别累加压力和关于液面的力矩

图 5.44 蓝色条带到液面横轴的力臂为 z。门顶、门底的深度分别为 z_0, z_0+h，所以

$$\begin{aligned} F &= \rho g b \int_{z_0}^{z_0+h} z\,\mathrm{d}z = \rho g b \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z_0}^{z_0+h} \\ &= \frac{\rho g b}{2}[(z_0+h)^2 - z_0^2] = \rho g b h(z_0 + h/2), \\ M &= \rho g b \int_{z_0}^{z_0+h} z^2\,\mathrm{d}z = \rho g b \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z_0}^{z_0+h} \\ &= \frac{\rho g b}{3}[(z_0+h)^3 - z_0^3]. \end{aligned}$$

由等效合力的力矩确定作用点

红色合力作用在 P，令它的力矩 Fz_P 等于刚求的 M。将三次差展开，

$$z_P = \frac{3z_0^2 h + 3z_0 h^2 + h^3}{3h(z_0 + h/2)} = \frac{z_0^2 + z_0 h + h^2/3}{z_0 + h/2}.$$

分子可写成 $(z_0 + h/2)^2 + h^2/12$，所以

$$z_P = z_0 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{12(z_0 + h/2)}.$$

压力中心低于门的面积中心。$z_0 = 0$ 时为 $2h/3$；浸没很深时，门上下的相对压强差减小，压力中心趋近面积中心。

练习 5.3

解　用相应高度确定模型运动的时间

图 5.38 中 $h_m/h = 1/49$，两者重力加速度相同。由静止自由下落，

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \qquad h_m = \frac{1}{2}gt_m^2, \qquad \frac{t_m}{t} = \sqrt{\frac{h_m}{h}} = \frac{1}{7}.$$

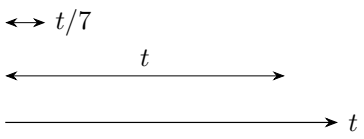


图 5.45: 同一动作中模型实际用时是实物的七分之一

图 5.45 中，模型完成相应动作只需实物的 1/7 时间。以帧率 f_c 拍摄模型，获得的总帧数为 $f_c t_m$；按每秒 24 帧播放，耗时为 $f_c t_m/24$。令播放时间等于实物时间 $t = 7t_m$，

$$\frac{f_c t_m}{24} = 7t_m, \qquad f_c = 168 \text{ 帧/秒}.$$

相应时刻速度为 $v = gt$、$v_m = gt_m$，故实际运动的速度比 $v_m/v = 1/7$。

练习 5.4

解　先求雨对地的水平速度

图 5.39 取向右、向上为坐标正方向，雨对地速度记为 $(v_x, -v_y)$，$v_y > 0$。车速为 6 时，雨相对车竖直，

$$v_x - 6 = 0, \qquad v_x = 6 \text{ km/h}.$$

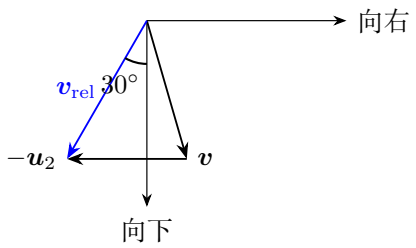


图 5.46: 雨对地速度与负车速首尾相接，得到车内看到的雨速

用第二车速的雨线确定竖直分量

图 5.46 用雨的对地速度减去车速 18，得到相对分量 $(-12, -v_y)$。雨线沿 AB，与竖直成 30°，因此

$$\frac{12}{v_y} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad v_y = 12\sqrt{3} \text{ km/h}.$$

雨对地速度为 $(6, -12\sqrt{3})$ km/h，大小为

$$v = \sqrt{6^2 + (12\sqrt{3})^2} = 6\sqrt{13} \text{ km/h}.$$

方向相对竖直向下朝右偏 γ，其中 $\tan\gamma = 6/(12\sqrt{3}) = 1/(2\sqrt{3})$。

练习 5.5

解　由切线约束确定展开轨迹

图 5.40 在每一段绳仍与圆柱相切的阶段，质点速度垂直自由绳，张力不做功，速率为 v。用展开角 ϕ 计自由绳长 $R\phi$，切点位置为 $\boldsymbol{r}_Q = R(\cos\phi, \sin\phi)$；

沿所选展开方向的自由绳单位向量为 $(\sin\phi, -\cos\phi)$。因此质点位置为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_Q + R\phi(\sin\phi, -\cos\phi)$，分量相加得到一条渐开线分支：

$$\boldsymbol{r}(\phi) = R(\cos\phi + \phi\sin\phi,\ \sin\phi - \phi\cos\phi).$$

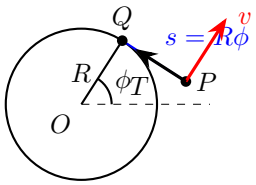


图 5.47: 自由绳始终沿切点的切线，质点位置是半径矢量与自由绳矢量之和

图 5.47 中 $OQ \perp QP$，质点速度又垂直 QP。因此张力只改变速度方向，且展开角与自由绳长由同一个 ϕ 联系。

求轨迹导数并积分路径长

对刚得到的坐标逐项求导，特别保留每个含 ϕ 的乘积产生的两项，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\phi} = R[-\sin\phi + \sin\phi + \phi\cos\phi] = R\phi\cos\phi,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\phi} = R[\cos\phi - \cos\phi + \phi\sin\phi] = R\phi\sin\phi.$$

因此 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}\phi| = R\phi$，其中展开过程 $\phi \geq 0$。由自由绳长 $R\phi$ 从 0 变为 L，积分上下限为 $0, L/R$，路径长为

$$s_{\text{path}} = \int_0^{L/R} R\phi\,\mathrm{d}\phi = R\left[\frac{\phi^2}{2}\right]_0^{L/R} = \frac{L^2}{2R}.$$

当 $\phi \to 0^+$，渐开线的切线方向趋向初始点的柱面外法线，正与图 5.40 的初速度方向一致；

连接展开后的各段轨迹

每一阶段张力都垂直质点速度，弹性碰撞也不改变速率，因此全程才可用路径长除以同一 v。

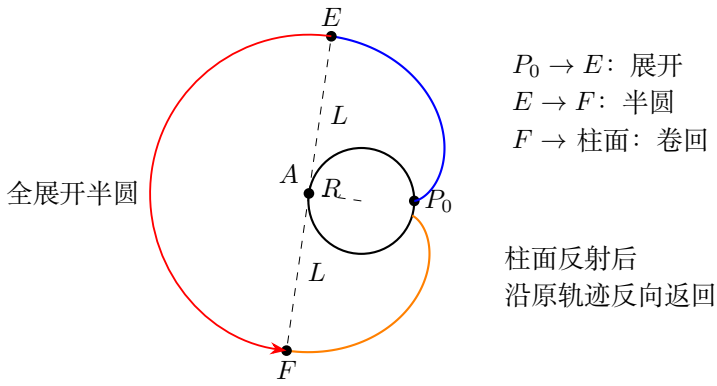


图 5.48: 蓝色为展开渐开线，红色为全展开半圆，另一侧卷回后在柱面反射

计入全展开半圆、卷回和反射返程

图 5.48 的一段展开耗时为已求路径长除以速率，即 $L^2/(2Rv)$。绳完全展开后，质点还要以固定端为圆心、半径 L 绕行半周，才从另一侧重新接触圆柱；这段路径长为 πL。随后另一侧卷回渐开线耗时同前。到柱面弹性反射后逆程返回，故完整相空间周期为

$$T = \frac{2}{v}\left(2\cdot\frac{L^2}{2R} + \pi L\right) = \frac{2L^2}{Rv} + \frac{2\pi L}{v}.$$

全展开时固定端仍位于柱面，质点沿圆柱外侧的半圆接到另一侧卷回轨迹。

练习 5.6

解　保留支点到零刻度的力矩偏置

图 5.41 令单秤砣质量 m，物体力臂 a，每千克刻度长度 ℓ，零刻度距支点 c，杆盘自身力矩记为 K。先由单秤砣的准确读数确定这些量的关系。

利用单秤砣标定关系消去秤的参数

单秤砣读数 q 时，标定要求任意物体质量 $M = q$ 均满足 $Mga + K = mg(c + q\ell)$。分别比较 q 的系数和常数项，得 $a = m\ell$、$K = mgc$。双秤砣改变右侧的整个力矩，既改变 $q\ell$ 项也改变 c 项，故须保留未知常量 mc/a，用已知称重数据消去。

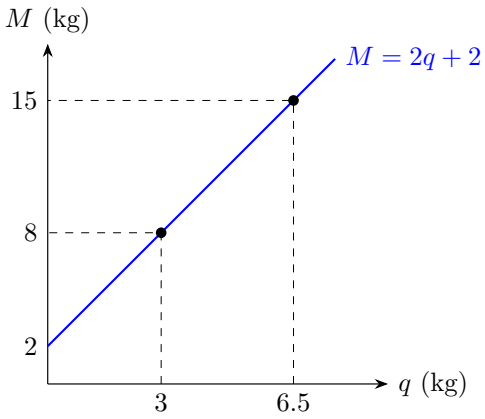


图 5.49: 双秤砣的质量关系既改变斜率，也改变零点截距

用已知称重确定新零点并求质量

图 5.49 用双秤砣读数 q 时，物体质量 M 满足 $Mga + K = 2mg(c + q\ell)$。代入标定得 $M = 2q + mc/a$。已知 $8 = 2 \times 3 + mc/a$，所以偏置 $mc/a = 2\,\mathrm{kg}$。西瓜质量 $M = 2 \times 6.5 + 2 = 15\,\mathrm{kg}$。其中 2 千克的常量项来自秤砣加倍后改变的零点力矩。

练习 5.7

解　由两处法向约束确定圆心和角速度

图 5.42 两面法向位置固定，持续双接触时圆心固定。若墙处无滑动则 $\omega = 0$；若车面无滑动则 $R\omega = U$。$U \neq 0$ 时两处不能同时粘着。

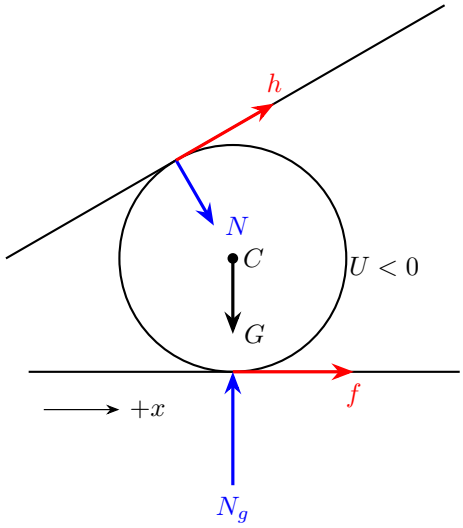


图 5.50: 箭头规定接触力的正方向；地面反力沿其作用线从图下方画出

保留两处接触力与转动方程

图 5.50 的箭头先规定各力正方向：墙法向力 N 向右下，墙摩擦 h 沿上坡，车面摩擦 f 向右，反力 N_g 向上；角速度取逆时针为正。求得 $h, f < 0$ 时，实际摩擦均与对应箭头相反。平动及转动方程为

$$N\sin\theta + h\cos\theta + f = 0, \quad N_g - N\cos\theta + h\sin\theta = G, \quad I\dot{\omega} = R(f - h).$$

求墙面保持粘着的条件

初始若墙保持粘着，$\omega = \dot{\omega} = 0$，所以 $h = f$。车向左滑，$f = -\mu_2 N_g$。把 $h = f$ 代入水平式，$N\sin\theta + h(1 + \cos\theta) = 0$，所以

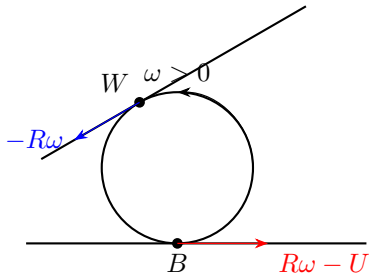
$$h = -N\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = -N\tan(\theta/2).$$

再代入竖直式，$N_g = G + N\cos\theta + N\tan(\theta/2)\sin\theta$。利用 $\tan(\theta/2)\sin\theta = 1 - \cos\theta$，得到 $N_g = G + N$。最后将 $h = f = -\mu_2 N_g$ 代入，

$$N = \frac{\mu_2 G}{\tan(\theta/2) - \mu_2}.$$

当 $\mu_2 > 0$ 且要求墙面有正压力时，该粘着分支要求 $\tan(\theta/2) > \mu_2$ 且 $\mu_1 \geq \tan(\theta/2)$。若 $\mu_2 = 0$，可有 $N = h = f = 0$、$N_g = G$、$\omega = 0$ 的退化解，墙面只是无压力接触，不需要上述墙摩擦下界。

粘着失效后的切换条件



墙面正切向取右上
车面正切向取右
摩擦与相对滑动反向

图 5.51: 固定圆心时，两接触点的相对切向速度由同一个角速度决定

图 5.51 中，墙面相对切向速度为 $-R\omega$，车面为 $R\omega - U$；这些符号才决定切换后各处摩擦的方向。

墙面开始滑动时，h 沿 $-R\omega$ 的反方向，车面摩擦沿 $R\omega - U$ 的反方向。持续双接触的阶段保留转动方程 $I\dot{\omega} = R(f - h)$；达到 $R\omega = U$ 时车面相对滑动为零，达到 $N = 0$ 时墙面压力消失。题目所求的初始墙面粘着条件就是前面两个不等式共同给出的范围。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第一讲

动量与冲量

2026

目录

第一讲　动量与冲量 **1**

1.1　相互作用中的动量传递 1

1.2　力、冲量与动量定理 2

1.3　平均冲击力与接触时间 3

1.4　弹性接触过程与力的峰值 4

1.5　系统动量与多阶段运动 5

1.6　绳突然绷紧时的速度关系 7

1.7　连续接入物质的动量方程 8

1.8　喷流转向与链条落盘 9

1.9　例题与分析 11

1.10 本讲小结 32

1.11 练习 33

练习解答 34

第一讲　动量与冲量

1.1　相互作用中的动量传递

在光滑水平面上，让一个运动小球撞向另一个静止小球。接触期间，两个球受到大小相等、方向相反的力，各自的速度随之改变。质量相同的两球，速度矢量的改变量等大反向；质量不同时，质量较大的球速度改变量较小。实验给出的关系是

$$m_A(\boldsymbol{v}_A^+ - \boldsymbol{v}_A^-) = -m_B(\boldsymbol{v}_B^+ - \boldsymbol{v}_B^-).$$

上标 $-$、$+$ 分别表示相互作用前后。质量在这里反映物体运动状态改变的难易程度。把两边移项，就有

$$m_A\boldsymbol{v}_A^+ + m_B\boldsymbol{v}_B^+ = m_A\boldsymbol{v}_A^- + m_B\boldsymbol{v}_B^-.$$

相互作用使两个球之间发生了某种运动量的传递。这种运动量就是**动量**，质量为 m、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的质点的动量定义为

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}.$$

它的方向与速度相同，单位为 kg m/s。若把两球合起来研究，两个动量的矢量和在这次相互作用中保持不变；若分别研究，每个球的动量都发生了变化。

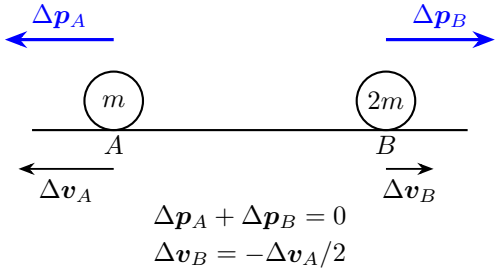


图 1.1: 两个小球相互作用时传递等大反向的动量；质量较大的球速度改变量较小

图 1.1 取两球质量为 m 与 $2m$。两支蓝色箭头表示等大反向的动量改变量，而下方速度改变量箭头长度之比为 $2:1$。质量把速度的变化与动量的变化联系起来。分析多个物体时，先把各物体的动量写在同一个参考系中，再作矢量相加。

1.2　力、冲量与动量定理

力描述动量传递的快慢。在惯性系中，质点所受合力满足

$$\boldsymbol{F}_{\text{合}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}.$$

对质量保持不变的物体，$\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\,\mathrm{d}t = m\boldsymbol{a}$，这就回到熟悉的牛顿第二定律。知道各时刻的合力，可以求加速度；研究一段作用前后的速度变化时，可以把力对时间积分。

取 x 分量为例，在 t_1 到 t_2 之间有

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = [p_x(t)]_{t_1}^{t_2} = p_x(t_2) - p_x(t_1).$$

对另外两个分量作同样处理，再合成矢量，得到**动量定理**

$$\boxed{\boldsymbol{I}_{\text{合}} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{\text{合}}\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1}. \tag{1.1}$$

积分 $\boldsymbol{I} = \int \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t$ 叫做力的**冲量**，单位为 N s。合力的冲量等于这段时间内物体动量的增量。几个力同时作用时，它们的冲量按矢量相加。

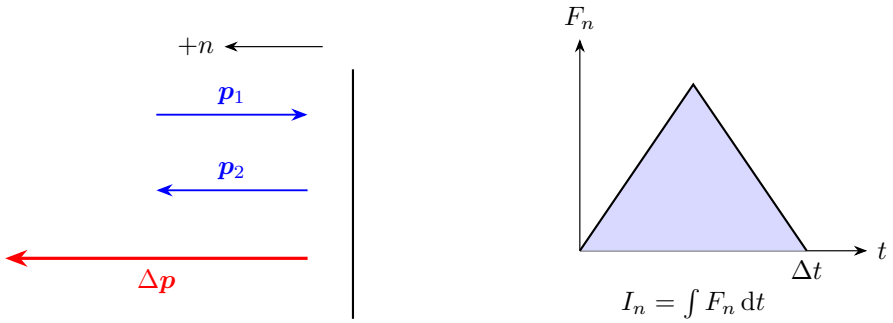


图 1.2: 反弹前后的动量方向与接触力的冲量面积

图 1.2 中的小球沿法线撞墙，并以相同速率反弹。取离墙方向为正，初动量为 $-mv$，末动量为 mv，因而 $\Delta p_n = mv - (-mv) = 2mv$。右图的力时曲线在横轴上方，曲线下的面积正好等于这一法向冲量。反弹过程中速度方向转变，矢量相减也把这个方向变化包含在内。

力的方向固定时，先沿该方向写带符号的分量，再求力时图线下的有向面积。力的方向随时间转动时，分别求各分量的积分：

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x\,\mathrm{d}t = m(v_{2x} - v_{1x}), \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y\,\mathrm{d}t = m(v_{2y} - v_{1y}).$$

在某方向合冲量为零时，该方向动量保持原值。这个分量关系也适用于后面的折线绳与槽内运动问题。

1.3 平均冲击力与接触时间

用一个恒力在相同时间内产生相同冲量，便得到这段时间的**平均力**：

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}t = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t}, \qquad \Delta t = t_2 - t_1.$$

运动员接球时手臂随球后退，缓冲材料受压时逐渐变形，都延长了停止过程。初末动量相同时，作用时间越长，平均冲击力越小。

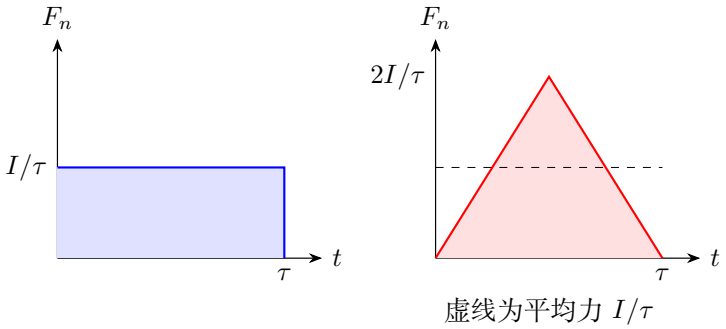
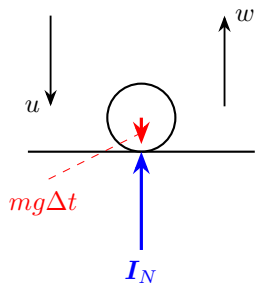


图 1.3: 同样面积的矩形与三角形脉冲有相同冲量，但峰值不同

图 1.3 的矩形与三角形脉冲都持续 τ，面积都为 I。矩形的峰值就是 I/τ；三角形由 $I = F_{\max}\tau/2$ 得 $F_{\max} = 2I/\tau$。相同的冲量和接触时间给出相同平均力，峰值还取决于力随时间变化的形状。

落球反弹时，地面对球的支持力和重力在接触期间共同作用。设球到地面前向下速率为 u，离开地面后向上速率为 w，接触时间为 τ。取竖直向上为正：

$$\overline{N}\tau - mg\tau = mw - (-mu) = m(w+u), \qquad \overline{N} = mg + \frac{m(w+u)}{\tau}.$$



向上为正

$$I_N - mg\Delta t = m(w+u)$$

$$\overline{N} = mg + \frac{m(w+u)}{\Delta t}$$

图 1.4: 对球列冲量方程时，支持力与重力分别进入同一个时间区间

图 1.4 把两种冲量分别画在球上：支持力冲量向上，重力冲量向下。重力项与动量变化的比值为 $g\tau/(u+w)$。当这个比值远小于 1 时，平均支持力近似为 $m(u+w)/\tau$。例 1.1 先用自由飞行求 u, w，再处理这段接触过程；例 1.2 则利用接触时间随抽纸速度的变化计算摩擦冲量。

1.4　弹性接触过程与力的峰值

要进一步求接触时间和最大力，可以把小球与墙面之间的弹性形变等效为劲度系数 k 的轻弹簧。设小球质量为 m，以速率 v 水平入射，接触开始时压缩量 $x=0$。以压向墙面为正，接触阶段满足

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad x(0)=0, \qquad \dot{x}(0)=v.$$

令 $\omega^2 = k/m$，试取 $x = \mathrm{e}^{st}$。逐次求导为 $\dot{x} = s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot{x} = s^2\mathrm{e}^{st}$，代回方程：

$$(s^2+\omega^2)\mathrm{e}^{st} = 0, \qquad s = \pm i\omega.$$

由 $\mathrm{e}^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$，实数通解可写为

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$$

初始条件依次给出 $A=0$、$B=v/\omega$，于是

$$x(t) = \frac{v}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x}(t) = v\cos\omega t.$$

从 0 到 $\pi/(2\omega)$，小球减速，压缩量增大；随后弹簧恢复，小球反向加速。到 $t=\pi/\omega$ 时，x 首次回到零，$\dot{x}=-v$，小球离开墙面。因此接触时间为 $\tau=\pi/\omega$，最大压缩量为 v/ω。

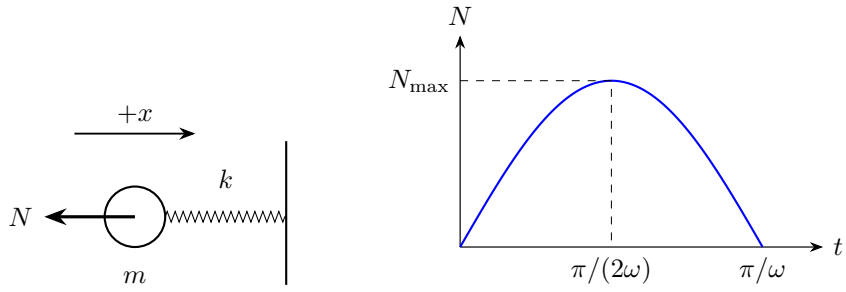


图 1.5: 弹性接触只取非负形变的半周期，支持力按半个正弦变化

图 1.5 中的支持力大小为

$$N(t) = kx = mv\omega \sin \omega t, \qquad 0 \le t \le \pi/\omega.$$

求冲量时令 $\phi = \omega t$，于是 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\phi/\omega$，积分限由 $0, \pi/\omega$ 变为 $0, \pi$：

$$\begin{aligned} I_N &= mv\omega \int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \ \mathrm{d}t = mv \int_0^{\pi} \sin \phi \ \mathrm{d}\phi \\ &= mv[-\cos \phi]_0^{\pi} = mv[1 - (-1)] = 2mv. \end{aligned}$$

支持力在压缩量最大时达到峰值，故

$$N_{\max} = mv\omega = v\sqrt{mk}, \qquad \overline{N} = \frac{I_N}{\tau} = \frac{2mv\omega}{\pi} = \frac{2}{\pi} N_{\max}.$$

把接触变硬，即增大 k，接触时间按 $k^{-1/2}$ 缩短，峰值按 $k^{1/2}$ 增大，而冲量仍为 $2mv$。接触时间远小于其余运动阶段时，可以用一个瞬时冲量连接接触前后的速度；要研究形变和最大力时，就沿图中的半个正弦继续分析。

1.5 系统动量与多阶段运动

把相互作用的两个物体合起来研究，可以消去它们之间未知的冲量。设 A 受到外冲量 $\boldsymbol{I}_A$ 和 B 给它的冲量 $\boldsymbol{J}$，B 受到外冲量 $\boldsymbol{I}_B$ 和 A 给它的冲量 $-\boldsymbol{J}$，则

$$\Delta \boldsymbol{p}_A = \boldsymbol{I}_A + \boldsymbol{J}, \qquad \Delta \boldsymbol{p}_B = \boldsymbol{I}_B - \boldsymbol{J}.$$

两式相加得到

$$\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_A + \boldsymbol{I}_B = \boldsymbol{I}_{外}, \qquad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B.$$

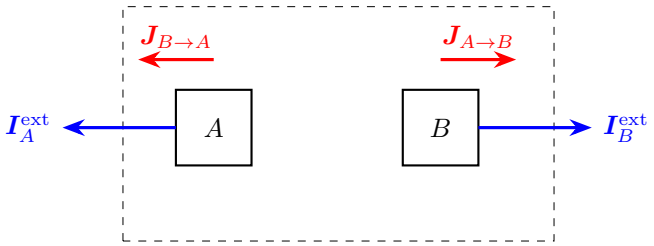


图 1.6: 同一对内冲量在系统总动量方程中相消，各物体的速度仍会改变

图 1.6 的红色箭头是同一对内冲量，在总动量方程中相消；蓝色箭头是系统所受外冲量，决定总动量的改变。各物体的速度变化仍可由它们各自的冲量方程求出。下一讲将从这个关系展开动量守恒和质心运动。

对连续的几段运动，把各段的动量变化依次相加，中间动量自动消去。例如三段运动有

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_0, \quad \boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1, \quad \boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_2,$$

所以 $\boldsymbol{I}_1 + \boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{I}_3 = \boldsymbol{p}_3 - \boldsymbol{p}_0$。这使我们能够先从全过程求某个恒定外力，再回到局部运动求中间速度。

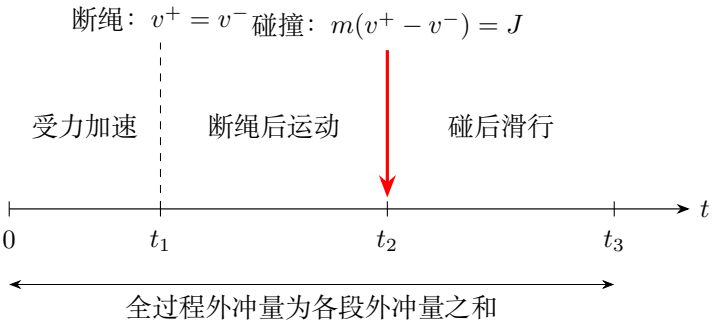


图 1.7: 连续段与冲击事件在同一时间轴上衔接，冲击前后位置连续而速度可突变

图 1.7 按时间把连续运动、断绳和碰撞连起来。理想断绳撤去张力，物体随后以新的加速度运动，断绳时速度连续。碰撞阶段用前后两个速度连接。例 1.3 用全过程冲量消去中间速度；例 1.6 把断绳后的两个物体仍作为一个系统；例 1.7 则分别计算接近、碰撞和滑行三个阶段。

1.6 绳突然绷紧时的速度关系

轻绳拉直后，两端距离保持为 L。记端点位置为 $\boldsymbol{r}_A, \boldsymbol{r}_B$，从 B 指向 A 的单位矢量为 $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B)/L$。由几何关系

$$(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) \cdot (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) = L^2$$

对时间求导，乘积两项各贡献一次：

$$(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) \cdot (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) + (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) \cdot (\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) = 0.$$

除以 $2L$，得到

$$(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

这表示两端沿绳的速度分量相等。垂直绳的运动改变绳的方向，因此两端可以具有不同的横向速度。

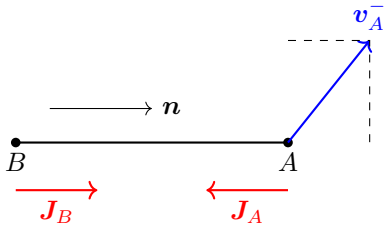


图 1.8: 绳冲量只调整沿绳分量，垂直分量可以保留

图 1.8 中的两球在绳绷紧前沿绳相互远离。设分离速度为 $u_n = (\boldsymbol{v}_A^- - \boldsymbol{v}_B^-) \cdot \boldsymbol{n} > 0$，拉力冲量大小为 J。沿绳方向，A 的速度改变 $-J/m_A$，B 的速度改变 J/m_B。绷紧后的沿绳相对速度为零，故

$$0 = u_n - J\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right), \qquad J = \mu_r u_n, \quad \mu_r = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}.$$

μ_r 称为约化质量。两球总动量保持原值，垂直绳的速度分量也保持原值，沿绳的相对运动则在拉紧过程中消失。

将冲击后的沿绳分量 $v_{An}^- - J/m_A$、$v_{Bn}^- + J/m_B$ 分别平方，并与原动能相减：

$$\begin{aligned} K^+ - K^- &= \frac{m_A}{2}\left[-\frac{2Jv_{An}^-}{m_A} + \frac{J^2}{m_A^2}\right] + \frac{m_B}{2}\left[\frac{2Jv_{Bn}^-}{m_B} + \frac{J^2}{m_B^2}\right] \\ &= -Ju_n + \frac{J^2}{2}\left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B}\right) = -Ju_n + \frac{J^2}{2\mu_r}. \end{aligned}$$

代入 $J = \mu_r u_n$，可得动能减少量

$$K^- - K^+ = \frac{1}{2}\mu_r u_n^2.$$

这对应绷紧后沿绳分离速度降为零的接入过程。例 1.8 把这个速度关系分别用于两根方向不同的绳；例 1.9 还要加入槽对小球的垂直冲量，沿槽动量仍保持不变。

1.7 连续接入物质的动量方程

飞船吸附微尘、链条从静止堆中被拉起，都有新的物质连续加入运动。分析一个很短的时间 $\mathrm{d}t$，把装置和这段时间内即将加入的物质作为同一批物质研究，就仍可使用动量定理。

设装置现有质量为 M、速度为 $\boldsymbol{V}$，将加入的质量为 $\mathrm{d}m>0$，它在原惯性系中的速度为 $\boldsymbol{u}$。加入后装置质量为 $M+\mathrm{d}m$，共同速度为 $\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V}$。同一批物质的初、末动量分别为

$$\boldsymbol{P}_{-}=M\boldsymbol{V}+\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}m,\qquad \boldsymbol{P}_{+}=(M+\mathrm{d}m)(\boldsymbol{V}+\mathrm{d}\boldsymbol{V}).$$

展开两式之差：

$$\boldsymbol{P}_{+}-\boldsymbol{P}_{-}=M\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}+(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}m+\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}.$$

其中 $\mathrm{d}m$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{V}$ 都是一阶小量，它们的乘积是二阶小量。保留一阶项，令动量变化等于外冲量，可得

$$\boxed{M\,\mathrm{d}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{F}_{\text{外}}\,\mathrm{d}t+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{V})\,\mathrm{d}m}. \tag{1.2}$$

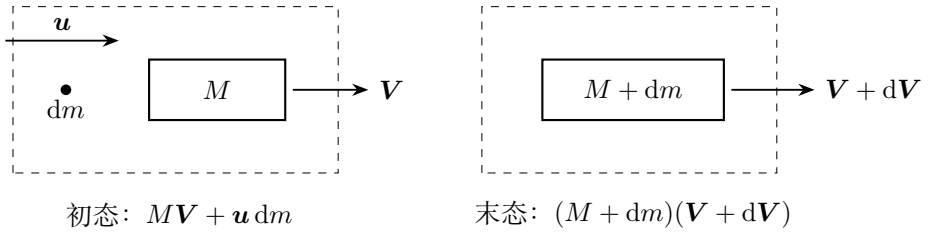


图 1.9: 用同一批物质比较并入前后的动量，质量流率由物质相对于装置的接近速度确定

图 1.9 的虚线圈出加入前后的同一批物质。每一项动量都用原惯性系中的速度计算，而加入多少质量取决于物质与装置之间的相对运动。这样，速度变化与质量增加在方程中各有明确的位置。

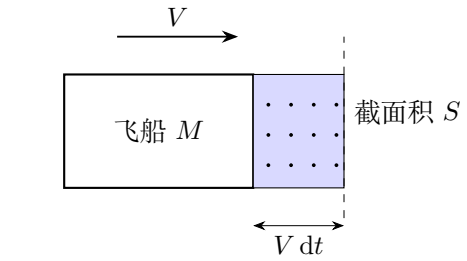


图 1.10: 静止尘区中的流入量由飞船扫过的体积确定

图 1.10 中飞船以速率 V 穿过原来静止、密度为 ρ 的尘区。正面截面积为 S，在 $\mathrm{d}t$ 内扫过长度 $V\,\mathrm{d}t$，故 $\mathrm{d}m=\rho SV\,\mathrm{d}t$。维持匀速时 $\mathrm{d}\boldsymbol{V}=0$，流入物质的速度为零，式(1.2)沿飞行方向化为

$$F\,\mathrm{d}t=V\,\mathrm{d}m,\qquad F=\rho SV^2.$$

一个 V 来自每秒加入的质量，另一个 V 来自每单位质量所增加的动量。例 1.4 据此求附加推力，例 1.14 至例 1.16 把同一思路用于连续链条和逐次粘合的圆环。

1.8 喷流转向与链条落盘

固定导流板使水流转向时，每秒到达的水质量为 $\dot m$，入口、出口速度为 $\boldsymbol{v}_{\text{入}},\boldsymbol{v}_{\text{出}}$。取很短时间 Δt 内经过转向部分的同一批水，它的质量为 $\dot m\Delta t$，动量变化为 $\dot m\Delta t(\boldsymbol{v}_{\text{出}}-\boldsymbol{v}_{\text{入}})$。稳定流动时，相邻水团重复同样的运动过程，因而水在转向部分所受合外力为

$$\boldsymbol{F}_{\text{外}}=\dot m(\boldsymbol{v}_{\text{出}}-\boldsymbol{v}_{\text{入}}).$$

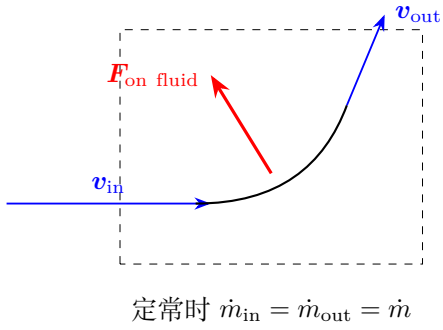


图 1.11: 固定控制区中物质进出，区域内动量不变仍可存在非零外力

图 1.11 的入口、出口动量沿各自速度方向。入、出口均通大气且其他力可忽略时，上式给出导流板对水的力；水对板的力方向相反。例 1.17 中的板在移动，到板质量流率为 $\rho S(u-V)$，反射关系先在板的参考系中写出，再把初末速度换回同一个惯性系。

分子束撞击平面也可以逐个计数。数密度为 n、分子质量为 m，分子以速率 v 垂直入射并原速反弹。在 Δt 内到达面积 S 的分子来自厚度 $v\Delta t$ 的柱体，数目为 $nSv\Delta t$。每个分子使平面获得冲量 $2mv$，因此

$$F\Delta t=(nSv\Delta t)(2mv),\qquad p=\frac{F}{S}=2nmv^2.$$

这把单个分子的冲量与整个分子束的压强连在一起。例 1.5 给出具体数值，例 1.13 进一步把斜入射时的质量流率与法向动量变化结合起来。

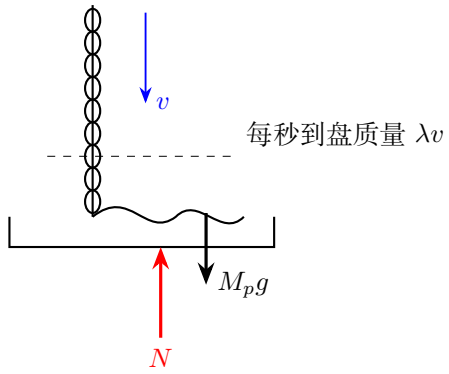


图 1.12: 盘内链条已静止，入盘链节仍带来额外的动量流

图 1.12 中的秤盘接收线密度 λ、到盘速率 v 的链条。已经堆在盘上的质量为 M_p，它的重量为 M_pg；在 $\mathrm{d}t$ 内新到链条质量为 $\mathrm{d}m=\lambda v\,\mathrm{d}t$，向下动量大小为 $v\,\mathrm{d}m$。盘使这段链条停止，所需向上冲量为 $v\,\mathrm{d}m$，相应附加力为

$$\frac{v\,\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=\lambda v^2.$$

所以盘对链条的支持力为 $N=M_pg+\lambda v^2$。第一项支承已静止链条，第二项改变新到链条的动量。例 1.10 把到盘速率与下落距离联系起来；例 1.11 研究链条绕轮时动量方向的转变；例 1.12 则把接水冲击与空中水的重量放在同一时刻分析。

1.9 例题与分析

例 1.1 (落球反弹的平均冲击力)**.** 质量为 m 的小球从高度 H 自由落下，与水平地面碰撞 τ 后反弹至高度 h。忽略空气阻力，求地面对球的平均支持力，并讨论何时可以忽略碰撞期间的重力。

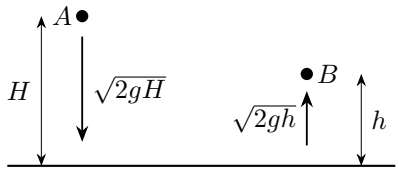


图 1.13: 题设：落球反弹的平均冲击力

解　由两段自由飞行确定接触前后速度

按图 1.13 取竖直向上为正。落地前 $v_- = -\sqrt{2gH}$，离地后 $v_+ = \sqrt{2gh}$。这两个速率分别由下落段 $mgH = mv_-^2/2$ 和上升段 $mv_+^2/2 = mgh$ 求出。下落和上升阶段由重力决定速率，接触阶段则由支持力与重力共同改变动量。

对接触阶段保留支持力和重力冲量

碰撞中支持力冲量为 $\overline{N}\tau$，重力冲量为 $-mg\tau$，所以

$$\overline{N}\tau - mg\tau = m(v_+ - v_-) = m\big(\sqrt{2gh} + \sqrt{2gH}\big).$$

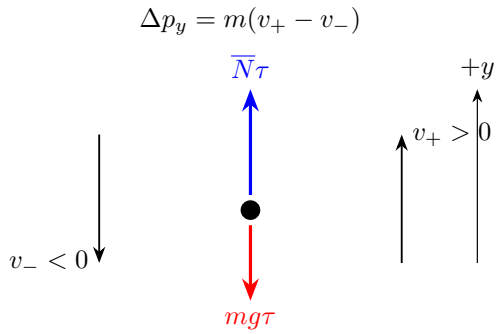


图 1.14: 只对接触阶段列冲量方程，重力项与支持力项分别保留

平均支持力与重力项的大小

图 1.14 中支持力冲量向上、重力冲量向下，初末速度又分别带负、正号。由此

$$\boxed{\overline{N} = mg + \frac{m}{\tau}\big(\sqrt{2gH} + \sqrt{2gh}\big)}.$$

若 $g\tau \ll \sqrt{2gH}+\sqrt{2gh}$，第一项可忽略。固定 H,τ 时，反弹高度越大，平均冲击力越大；固定两高度和碰撞时间时，它与质量成正比。球对地面的平均力等大而向下。$h=0$ 时球到地面后停止，接触阶段的向上冲量使原来的向下动量降为零。

例 1.2 (抽纸时的作用时间)**.** 一小铁块原来静置于紧邻桌边的水平纸条上，纸条匀速抽出后，铁块立即失去支承。铁块与纸间动摩擦因数为 μ，纸条相对铁块移动 ℓ 后接触结束；抽纸速度远大于铁块获得的速度，接触结束位置可近似视为同一桌边。桌高为 h。比较抽纸速率 u 与 $2u$ 时铁块落地点距桌边的距离。

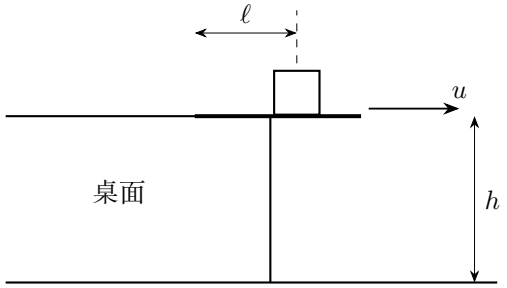


图 1.15: 模型中纸条抽离后铁块立即离开支承，ℓ 为脱离前的相对移动距离

解　以相对抽离距离估算接触时间

图 1.15 中纸对铁块的摩擦力向右。抽纸很快时，接触时间近似为 $\tau=\ell/u$；铁块位移相对 ℓ 很小，正是这一近似的依据。由水平方向冲量方程

$$\mu mg\tau = mV, \qquad V \simeq \frac{\mu g\ell}{u}.$$

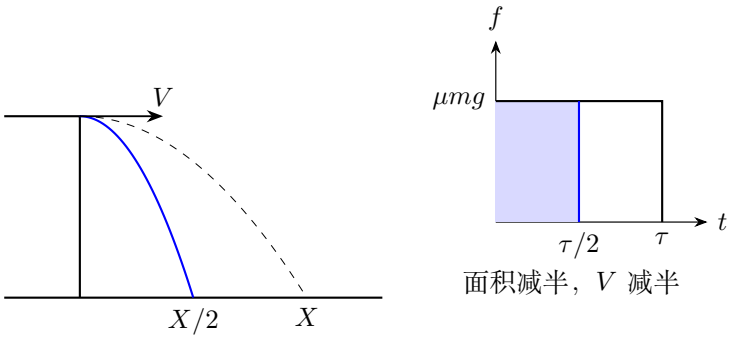


图 1.16: 接触冲量先决定抛出速度；加倍抽纸速度使接触时间约减半

接触期间铁块的水平位移

接触时间很短，铁块在这段时间内的位移为：铁块在接触期间移动约 $\Delta x = \mu g\tau^2/2$，故 $\Delta x/\ell \simeq \mu g\ell/(2u^2) \ll 1$。它与 $V/u \simeq \mu g\ell/u^2 \ll 1$ 给出相同的小量条件，正对应题设快速抽纸。

用抛出速度求平抛距离

铁块离开桌边后按图 1.16 作平抛，飞行时间 $T = \sqrt{2h/g}$，故 $X = VT \simeq (\mu g\ell/u)\sqrt{2h/g}$。速率变为 $2u$ 时，X 约减半，落地点更靠近桌边。铁块的抛出速度由摩擦冲量决定；纸抽得越快，接触时间越短，铁块获得的水平速度越小。

例 1.3 (分段推力与全过程冲量)**.** 质量 2 kg 的物体从静止开始，在水平恒力 8 N 作用下运动 5 s，再在同向恒力 5 N 作用下运动 4 s；撤力后又经 6 s 停止。全过程滑动摩擦力大小不变。求摩擦力及各阶段的速度变化。

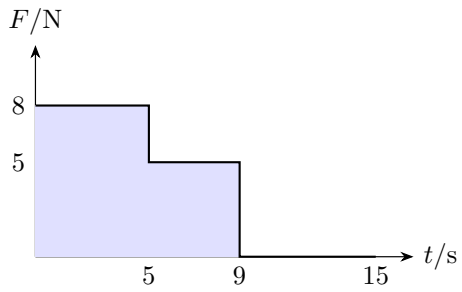


图 1.17: 两段推力持续时间不同，全过程推力冲量为两矩形面积之和

解　以全过程始末动量相同求摩擦力

初、末动量都为零。图 1.17 所示两段推力产生正冲量，摩擦在总计 15 s 内产生负冲量，故

$$8\times 5 + 5\times 4 - f(5+4+6) = 0, \qquad \boxed{f = 4\,\mathrm{N}}.$$

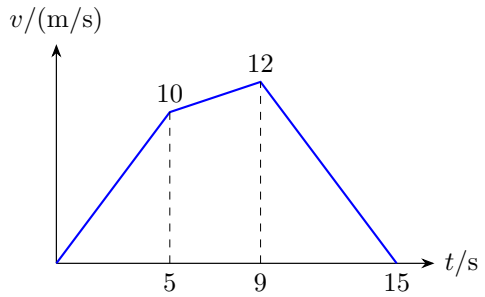


图 1.18: 三个阶段的速度变化及停止时刻

各段冲量与中间速度

将三段分别写成 $mv_1=(8-f)5$、$m(v_2-v_1)=(5-f)4$、$m(0-v_2)=-6f$，相加时中间速度项恰好抵消，才得到上面的全过程冲量式。摩擦在三段内保持同一大小和方向，因此它的总冲量为 $-15f$。

三个阶段的速度变化

由图 1.18 求各阶段速度：第一段加速度 $(8-4)/2=2\,\mathrm{m/s^2}$，末速度为 $10\,\mathrm{m/s}$；第二段加速度 $0.5\,\mathrm{m/s^2}$，末速度为 $12\,\mathrm{m/s}$；第三段加速度 $-2\,\mathrm{m/s^2}$，恰经 $6\,\mathrm{s}$ 降为零。各段停止前始终向右，摩擦方向没有改变，故全过程方程成立。

例 1.4（飞船吸附微尘）. 飞船以 $V=10\,\mathrm{km/s}$ 进入相对地面静止、密度 $\rho=10^{-7}\,\mathrm{kg/m^3}$ 的微尘区，正横截面积 $S=2\,\mathrm{m^2}$，撞上的微尘全部附着。求保持速度所需增加的推力。

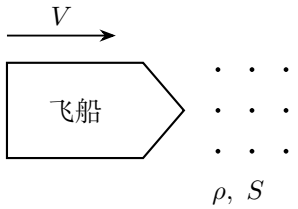


图 1.19: 题设：飞船吸附微尘

解　吸附微尘所需的动量

图 1.19 中，飞船在 $\mathrm{d}t$ 内扫过横截面积为 S、长为 $V\,\mathrm{d}t$ 的微尘柱，吸附质量为

$$\mathrm{d}m=\rho SV\,\mathrm{d}t.$$

取这一小段开始时质量为 M 的飞船和即将吸附的微尘为系统。微尘原先对地静止，吸附后与飞船同以 V 运动，初、末状态如图 1.20 所示。

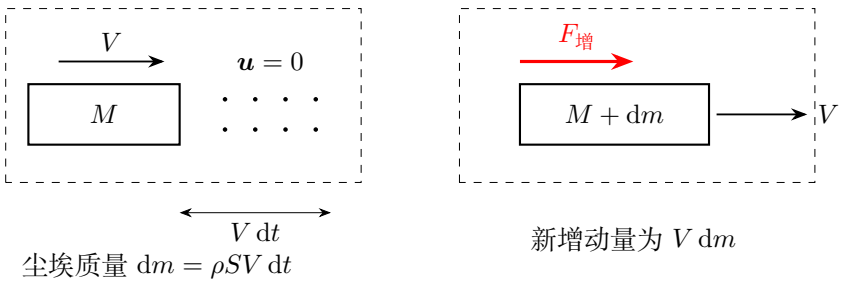


图 1.20: 飞船扫过的尘埃初态静止，末态并入飞船后以同一速度运动

保持飞船匀速所增加的推力，用于给新吸附的微尘提供动量。由系统的动量定理，

$$F_{\text{增}}\,\mathrm{d}t = (M+\mathrm{d}m)V - MV = V\,\mathrm{d}m = \rho S V^2\,\mathrm{d}t.$$

两边除以 $\mathrm{d}t$，代入 $V = 10^4\,\mathrm{m/s}$，得到

$$\boxed{F_{\text{增}} = \rho S V^2 = 10^{-7}\times 2\times (10^4)^2 = 20\,\mathrm{N}}.$$

飞船每秒吸附的微尘越多、所需增加的速度越大，附加推力也越大。$\rho S V^2$ 的单位为 $\mathrm{kg\,m/s^2}$。

例 1.5 (反射分子束的压强)**.** 分子质量为 $5.4\times 10^{-26}\,\mathrm{kg}$、速度为 $460\,\mathrm{m/s}$ 的单向分子束垂直打在平面上，以原速率反向弹回。束中数密度为 $1.5\times 10^{20}\,\mathrm{m^{-3}}$，求压强。

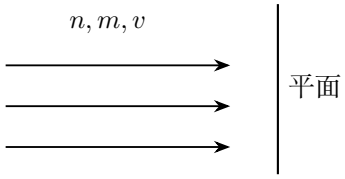


图 1.21: 题设：反射分子束的压强

解　反射冲量与分子的到达率

取图 1.21 中指向平面的方向为正。图 1.22 中一个分子的动量从 mv 变为 $-mv$，改变量为 $-2mv$，因而平面从每个分子获得正冲量 $2mv$。

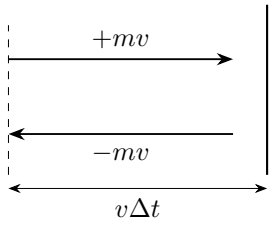


图 1.22: 解答过程：反射分子束的压强

在 Δt 内能到达面积 S 的分子，原先位于图中厚度为 $v\Delta t$ 的柱体内。数密度为 n，所以到达数为

$$N_{\text{碰}} = nSv\Delta t.$$

把各分子给予平面的冲量相加，再除以接触时间，得到平均力：

$$\overline{F}\Delta t = 2mvN_{\text{碰}} = 2nmv^2S\Delta t, \qquad \overline{F} = 2nmv^2S.$$

压强是单位面积所受的力，因此

$$p = \frac{\overline{F}}{S} = 2nmv^2$$
$$= 2 \times 1.5 \times 10^{20} \times 5.4 \times 10^{-26} \times 460^2 \approx \boxed{3.43\,\mathrm{Pa}}.$$

速度的两个因子分别来自单个分子的反射冲量和单位时间内的到达数。

例 1.6 (断绳后的整体动量)**.** 质量为 m_1, m_2 的物体 A, B 在同一斜面上由轻绳连接，受到沿斜面向上的恒力 F，由静止共同以加速度 a 上行。经 t_1 绳断，再经 t_2，B 恰好停止。绳断后拉力不变，各物体上滑时的外界阻力保持原值，求此时 A 的速度。

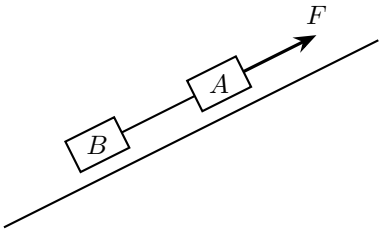


图 1.23: 题设：断绳后的整体动量

解　沿斜面使用整体的动量定理

沿图 1.23 的斜面向上取正。设两物体上滑时各自受到的向下外力合计为 R_1, R_2，绳断前有

$$F - R_1 - R_2 = (m_1 + m_2)a.$$

绳断后，到 B 刚停止的这段时间内，两物体所受外力仍保持原值；绳力是系统内力，断绳不改变上述合外力。图 1.24 中的两条速度线从共同速度 at_1 出发，在同一末时刻分别达到 v_A 和零。

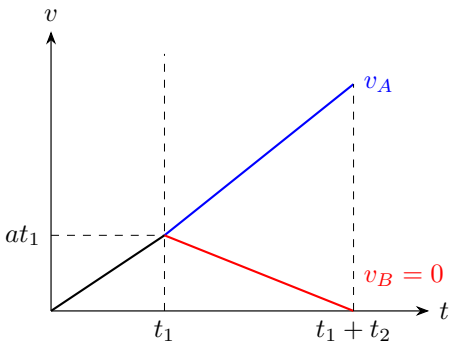


图 1.24: 断绳时速度连续，之后两物体分别加速和减速；终态取同一时刻

从断绳起取时间 t_2，系统初、末动量及外冲量为

$$P_- = (m_1+m_2)at_1, \qquad P_+ = m_1 v_A, \qquad I_{外} = (m_1+m_2)at_2.$$

代入 $P_+ - P_- = I_{外}$ 并整理，

$$m_1 v_A - (m_1+m_2)at_1 = (m_1+m_2)at_2,$$
$$m_1 v_A = (m_1+m_2)a(t_1+t_2).$$

于是

$$\boxed{v_A = \frac{m_1+m_2}{m_1}a(t_1+t_2)}.$$

终态 B 的动量为零，系统的末动量全部由 A 承担，方向沿斜面向上。

例 1.7 (碰撞前后滑行的时间)**.** A, B 两物体质量为 $2\,\mathrm{kg}, 1\,\mathrm{kg}$，与水平面的动摩擦因数都为 0.10，初始相距 $9.5\,\mathrm{m}$。A 以 $10\,\mathrm{m/s}$ 向静止的 B 运动，正碰后仍向前。从开始到 A 停止共 $6\,\mathrm{s}$。碰撞时间可忽略，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，求 B 碰后运动时间。

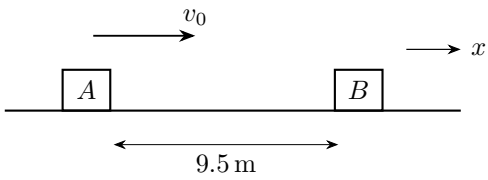


图 1.25: 题设：碰撞前后滑行的时间

解　碰撞前的接近过程

图 1.25 中两物体滑动减速度大小均为 $\mu g = 1\,\mathrm{m/s^2}$。碰前 B 静止，设接近所需时间为 t，由 A 的位移等于初始间距，得 $10t - \frac{1}{2}t^2 = 9.5$。

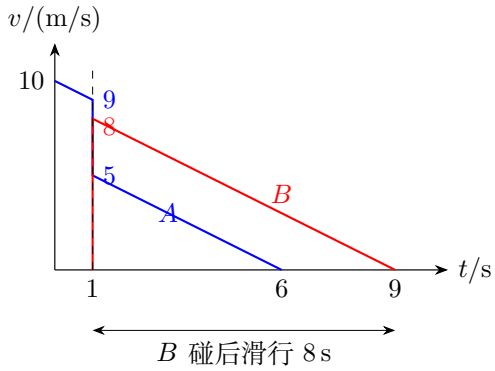


图 1.26: 碰撞使速度瞬时跳变，碰后两物体以相同减速度分别滑行至停止

首次到达 B 处的时刻

把位移式乘 -2 并移项，得 $t^2-20t+19=0$，因式分解为 $(t-1)(t-19)=0$，所以 $t=1\,\mathrm{s}$ 或 $19\,\mathrm{s}$。取首次到达对应的 $t=1\,\mathrm{s}$，碰前速度 $u_A=10-(\mu g)t=9\,\mathrm{m/s}$，接近距离也确实为 $10-0.5=9.5\,\mathrm{m}$。

由碰后滑行反推速度，再用碰撞动量

图 1.26 中碰后 A 还有 $5\,\mathrm{s}$ 的减速段，因而 $v_A=5\,\mathrm{m/s}$。在瞬时碰撞段，地面摩擦冲量可略，水平方向有 $2\times 9=2\times 5+v_B$，得到 $v_B=8\,\mathrm{m/s}$。因此

$$\boxed{t_B=v_B/(\mu g)=8\,\mathrm{s}}.$$

碰后 B 速度较大，两物体间距先增大；A 停止后 B 仍继续向前滑行。

例 1.8 (折线绳的冲量传递)**.** 光滑水平面上三个质量均为 m、初始静止的小球 A,B,C 用两条不可伸长轻绳 AB,BC 相连，绳已拉直，$\angle ABC=120^\circ$。沿 BA 方向向 A 施加瞬时冲量 I。求 C 刚受冲击后的速度。

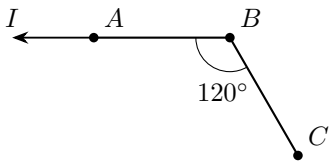


图 1.27: 题设：折线绳的冲量传递

解　按两根绳的方向分别列各球冲量

按图 1.27 令 $\boldsymbol{e}_1$ 沿 $B\to A$，$\boldsymbol{e}_2$ 沿 $B\to C$，则 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-1/2$。设两绳拉力冲量分别为 J_1,J_2。对各球写矢量式：

$$m\boldsymbol{v}_A=(I-J_1)\boldsymbol{e}_1,\quad m\boldsymbol{v}_B=J_1\boldsymbol{e}_1+J_2\boldsymbol{e}_2,\quad m\boldsymbol{v}_C=-J_2\boldsymbol{e}_2.$$

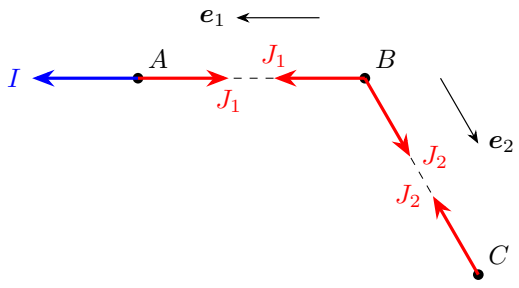


图 1.28: 在各球上分别画冲量，同一根绳的两端冲量等大反向

将速度约束投影到各自绳方向

图 1.28 中每根拉直绳的两端沿绳速度相等，故分别有 $(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{e}_1=0$ 与 $(\boldsymbol{v}_C-\boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{e}_2=0$。先用 $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=-1/2$ 展开投影，再求两绳冲量。

沿 $\boldsymbol{e}_1$，有 $m\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{e}_1=J_1-J_2/2$、$m\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{e}_1=I-J_1$；沿 $\boldsymbol{e}_2$，有 $m\boldsymbol{v}_C\cdot\boldsymbol{e}_2=-J_2$、$m\boldsymbol{v}_B\cdot\boldsymbol{e}_2=-J_1/2+J_2$。分别令两端投影相等，移项后得到

$$I-2J_1+\tfrac{1}{2}J_2=0,\qquad \tfrac{1}{2}J_1-2J_2=0.$$

夹角的余弦通过这两个投影进入方程。

末速度与两根绳的拉力冲量

第二式给 $J_1=4J_2$，第一式给 $J_2=2I/15$，所以

$$\boxed{\boldsymbol{v}_C=-\frac{2I}{15m}\boldsymbol{e}_2}.$$

C 沿 CB 方向运动。由 $J_1=4J_2$ 还得 $J_1=8I/15$。两根绳的冲量均为拉力冲量，与图中方向相符。

例 1.9 (松绳绷紧与槽的约束冲量)**.** 质量均为 m 的 A,B 由长 L 的轻绳相连。B 只能在水平直槽内运动，A 位于同一光滑水平面上，距槽 $L/2$，初始绳松弛且两球静止。给 A 一个平行槽的速度 v_0。求绳第一次绷紧后 B 的速度，并说明可守恒的动量分量。

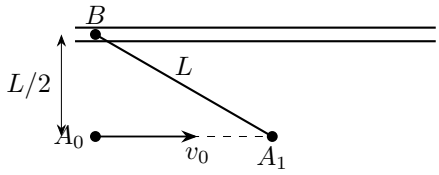


图 1.29: 题设：松绳绷紧与槽的约束冲量

解　由第一次绷紧的几何确定绳方向

图 1.29 中绳绷紧时，令从 B 指向 A 的单位矢量为 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}/2,-1/2)$，$x$ 轴沿槽。设绳冲量大小为 J。冲击后

$$v_{Ax}=v_0-\frac{\sqrt{3}J}{2m},\quad v_{Ay}=\frac{J}{2m},\quad v_B=\frac{\sqrt{3}J}{2m}.$$

B 的 y 速度始终为零，这由槽壁额外提供的约束冲量保证。

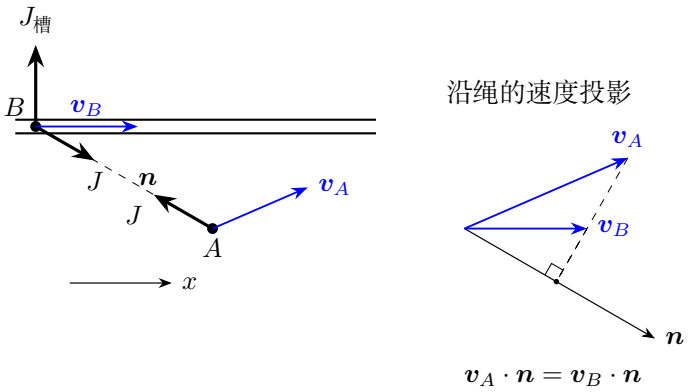


图 1.30: 左图标出冲量与碰后速度；右图中两速度沿绳的投影相等

展开沿绳相对速度的投影

由图 1.29 的直角三角形有 $n_y=-(L/2)/L=-1/2$、$n_x=\sqrt{1-n_y^2}=\sqrt{3}/2$。将三个速度分量代入沿绳相对速度，左边展开为 $[v_0-\sqrt{3}J/m](\sqrt{3}/2)-(J/2m)(1/2)$。两项分别来自平行槽的相对速度和 A 垂直槽的速度分量。

解绳冲量并区分两个动量分量

由图 1.30 的绷紧约束 $(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{n}=0$，得到

$$\frac{\sqrt{3}}{2}v_0-\frac{7J}{4m}=0,\quad J=\frac{2\sqrt{3}}{7}mv_0,\quad \boxed{v_B=\frac{3}{7}v_0}.$$

进而 $v_{Ax}=4v_0/7$、$v_{Ay}=\sqrt{3}v_0/7$。沿槽的总动量仍为 mv_0；垂直槽的总动量增加了 $\sqrt{3}mv_0/7$，正是槽给系统的外冲量。把两球各分量平方求和，碰后动能为

$$K_+=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{4v_0}{7}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}v_0}{7}\right)^2+\left(\frac{3v_0}{7}\right)^2\right]=\frac{mv_0^2}{98}(16+3+9)=\frac{2}{7}mv_0^2.$$

故损失为 $mv_0^2/2-2mv_0^2/7=3mv_0^2/14>0$，符合松绳突然绷紧的耗能性质。

例 1.10 (下落链条对秤盘的作用)**.** 长 ℓ、线密度 λ 的柔软链条竖直悬于秤盘上方，下端恰接触盘面。由静止释放，假定链节落到盘后立即静止，尚未到盘的部分自由下落且互不牵制。求已有长度 x 堆在秤盘上时的示数。

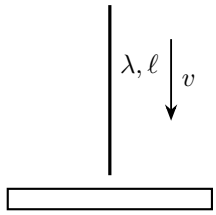


图 1.31: 题设：下落链条对秤盘的作用

解　将到盘速率与已堆积长度联系

图 1.31 的链条在时刻 t 下落 $x = gt^2/2$，速度 $v = gt$，因此 $v^2 = 2gx$。已静止的链条重为 $\lambda x g$。同时每秒有质量 λv 到盘，每单位质量的竖直速度由 v 降为零，盘还要提供 λv^2 的向上动量变化率。

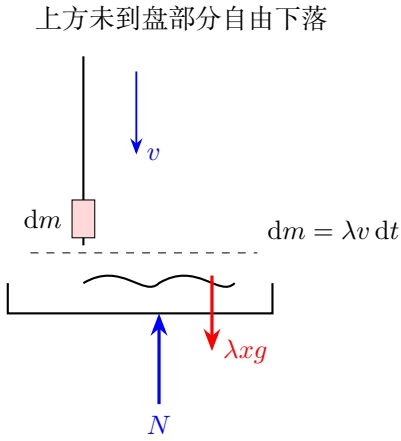


图 1.32: 秤盘既支承已静止链条，又把新到链节的向下动量消去

由新到链节的制动冲量求额外载荷

在很短时间 $\mathrm{d}t$ 内跟踪新到链节：落入盘的质量 $\mathrm{d}m = \lambda v\,\mathrm{d}t$，由向下速度 v 变为零，需要向上冲量 $v\,\mathrm{d}m$。除以 $\mathrm{d}t$ 便得附加支持力 λv^2。这一小团自身的重力冲量为高阶小量，而已经堆积的质量 λx 还受到重量 $\lambda x g$。

下落过程中与全部落定后的示数

按图 1.32 把静态承重和接收冲量分开，得到

$$\boxed{N = \lambda x g + \lambda v^2 = 3\lambda g x}, \qquad 0 < x < \ell.$$

在最后一段链节到盘前，示数趋向 $3\lambda\ell g$；全部落定后流入项消失，示数降为 $\lambda\ell g$。这个突变属于理想的立即停止模型，实际秤盘弹性会把它平滑化。

例 1.11 (链条跨轮的支承力)**.** 一条长 ℓ、线密度 λ 的柔软链条绕过光滑小定滑轮，两侧最初等长。给很小扰动后右侧下行。忽略轮半径，求左右链长为 $\ell/2 \mp x$ 时的速度与滑轮所受竖直向下的力。

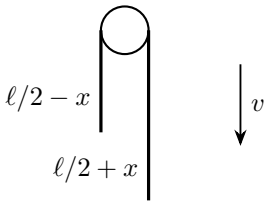


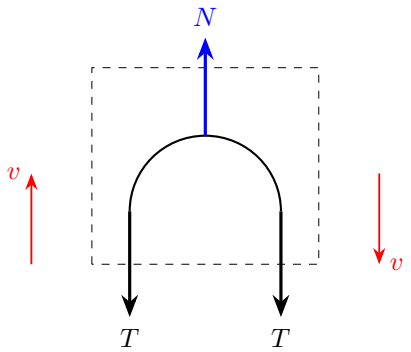
图 1.33: 题设：链条跨轮的支承力

解　由两侧重力差求速度与加速度

以图 1.33 两侧链条为系统，右侧相对左侧多出的重力为 $2\lambda g x$，整条链的质量为 $\lambda\ell$，故切向加速度 $a = 2gx/\ell$。链式法则给 $a = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)\dot{x} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$。先取一个小的初始偏移 $x = \varepsilon > 0$，由静止释放，则

$$\int_0^v w\,\mathrm{d}w = \frac{2g}{\ell}\int_\varepsilon^x \xi\,\mathrm{d}\xi, \qquad \left[\frac{w^2}{2}\right]_0^v = \frac{g}{\ell}[\xi^2]_\varepsilon^x, \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{g}{\ell}(x^2 - \varepsilon^2).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，得到题设微小扰动极限 $v^2 = 2gx^2/\ell$。这里取初始偏移趋于零时，到达给定 $x > 0$ 位置的速度极限。



每秒通过质量 λv
向上取正
$N - 2T = \lambda v(-v - v)$

图 1.34: 弯曲段不断把上行链的动量反转，需保留有限的动量流差

两侧直链段的张力

对图 1.34 的上行左链和下行右链分别考虑动量流，记小滑轮两切点处张力为 T。先对两直段写动量方程，保留因链长改变产生的项。对左直段取向上为正，$P_L=\lambda(\ell/2-x)v$。乘积求导并用 $\dot{x}=v,\dot{v}=a$，得

$$\dot{P}_L=\lambda(-\dot{x})v+\lambda(\ell/2-x)\dot{v}=-\lambda v^2+\lambda(\ell/2-x)a.$$

其上端每秒流出向上动量 λv^2，故 $\dot{P}_L=T-\lambda(\ell/2-x)g-\lambda v^2$。两式中的流出项抵消，留下 $T-\lambda(\ell/2-x)g=\lambda(\ell/2-x)a$。右段取向下为正时，由 $P_R=\lambda(\ell/2+x)v$ 求导得 $\dot{P}_R=\lambda\dot{x}\,v+\lambda(\ell/2+x)\dot{v}=\lambda v^2+\lambda(\ell/2+x)a$，而外力与流入项给 $\dot{P}_R=\lambda(\ell/2+x)g-T+\lambda v^2$。消去流入项后，两个直段依次给出

$$T=\lambda(\ell/2-x)(g+a),\qquad T=\lambda(\ell/2+x)(g-a).$$

代入 $a=2gx/\ell$，例如左段有

$$T=\lambda g\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\left(1+\frac{2x}{\ell}\right)=\lambda g\left(\frac{\ell}{2}+x-x-\frac{2x^2}{\ell}\right)=\lambda g\left(\frac{\ell}{2}-\frac{2x^2}{\ell}\right).$$

两段所得张力相同；动量导数中的质量变化项分别与流入、流出动量相消。

转弯链节与滑轮的相互作用

图 1.34 的弯曲段质量虽趋于零，却把上行速度 $+v$ 变为下行速度 $-v$。向上取正，故 $N-2T=(\lambda v)(-2v)$。轮对链的向上力为 $2T-2\lambda v^2$，轮承受的向下力

$$\boxed{N=\lambda\ell g-\frac{8\lambda g x^2}{\ell}}.$$

贴轮运动时，轮对链的支持力向上，故 $N\geq 0$。令上式 $N=0$，得 $x=\ell/(2\sqrt{2})$，此时链条开始离开滑轮。所求贴轮阶段对应 $0<x\leq\ell/(2\sqrt{2})$。

例 1.12 (漏水容器与秤盘的总示数)**.** 手托容器、全部水的总重恒为 300 N，这里全部水包括容器内、空中和已落入秤盘的水。下方接水秤盘本身重量已去皮。容器以恒定质量流率 q 从相对静止状态释放水，水自由下落高度 h 后在盘内立即静止；忽略液面变化和出口初速。求连续水流建立后，手的支持力与秤盘示数之和。

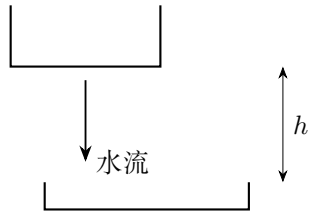


图 1.35: 题设：漏水容器与秤盘的总示数

解　确定稳定水流中空中水的质量

图 1.35 每团水的下落时间 $T=\sqrt{2h/g}$，入盘速率 $u=\sqrt{2gh}=gT$。稳态飞行中的水质量为 qT，它的重量 qgT 暂时既不由手直接承受，也不属于盘内静止水的重量。

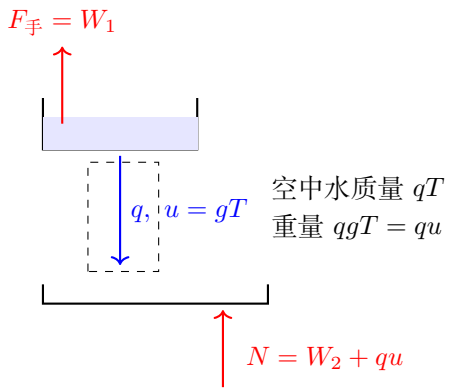


图 1.36: 空中水的重量与接水冲量造成的额外载荷相补偿

分别写手力与接水盘示数

令当时容器与剩余水重为 W_1、盘中已接水重为 W_2。全部物质的重量满足 $W_1+W_2+qTg=300\,\mathrm{N}$。在题设零出口初速近似下手力为 W_1，接水盘示数为 W_2+qu；代入 $u=gT$ 即可看见两项怎样精确补偿。

利用入盘冲击与空中水重的补偿

图 1.36 秤盘除承受已接住水的重量外，还增加冲击力 $qu=qgT$，恰等于空中水的重量。因此手所承受的剩余容器与水重，加盘内水重，再加这项冲击力，正好补回全部总重，得到

$$\boxed{F_{手}+N=300\,\mathrm{N}}.$$

这个结果对应题设连续水流建立后的阶段：空中水的质量和到盘速率保持恒定。

例 1.13 (逆风航行的帆角优化)**.** 密度为 ho 的均匀风以速率 u 沿 $+y$ 方向吹，风速远大于船速。船受水的侧向约束，只能沿与 $+x$ 夹角 $-\alpha$ 的方向航行，沿航向阻力为 kV。帆面积 S，法线与 $+y$ 成 β 角、偏向 $+x$，气流在法向理想反射，$0<\alpha<\beta<\pi/2$。对每一组帆角与航向，船均达到匀速航行状态。求稳定速度的逆风分量 $V\sin\alpha$ 的最大值，并比较同一距离内它与同帆正对风顺风航行的用时。

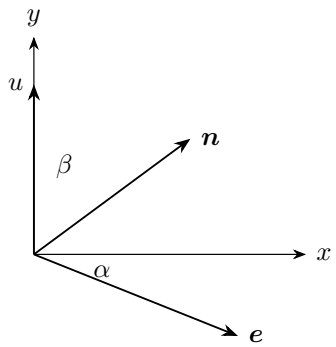


图 1.37: 题设：逆风航行的帆角优化

解　由法向入流求帆力并投影到航向

按图 1.37 帆法向入射速度 $u\cos\beta$，质量流率 $\rho Su\cos\beta$，每单位质量法向速度改变量 $2u\cos\beta$，故帆受力 $N=2\rho Su^2\cos^2\beta$。航向单位矢量 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha,-\sin\alpha)$，帆法线 $\boldsymbol{n}=(\sin\beta,\cos\beta)$，投影 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}=\sin(\beta-\alpha)$。匀速航行时，帆力的航向分量与水的阻力平衡，因而

$$kV=N\sin(\beta-\alpha),\quad V\sin\alpha=\frac{2\rho Su^2}{k}\cos^2\beta\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha.$$

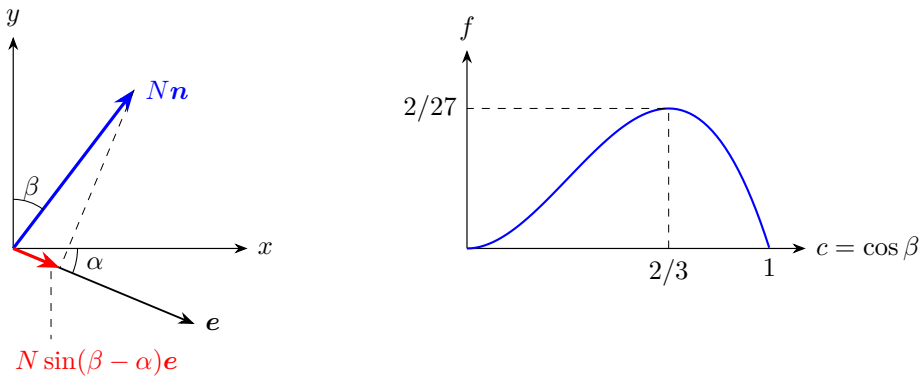


图 1.38: 对固定帆角先优化航向，再优化剩下的单变量角度因子

先在固定帆角下优化航向

图 1.38 左图先将法向力投影到航向。对固定 β，所需角度乘积可写为 $\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha=[\cos(\beta-2\alpha)-\cos\beta]/2$。对固定 β，第一项至多为 1，且在 $\alpha=\beta/2$ 取到，因此最大值为 $(1-\cos\beta)/2$。

优化帆角并比较顺逆风用时

再按图 1.38 右图令 $c=\cos\beta\in(0,1)$，角度因子为 $f(c)=c^2(1-c)/2$。乘积求导：

$$f'(c)=\frac{1}{2}[2c(1-c)-c^2]=\frac{c(2-3c)}{2}.$$

因此 $0<c<2/3$ 时递增、$2/3<c<1$ 时递减，端点极限均为零；内部最大值在 $c=2/3$，值为 $(4/9)(1/3)/2=2/27$。所以

$$\boxed{(V\sin\alpha)_{\max}=4\rho Su^2/(27k)}.$$

顺风正对帆速度 $V_d=2\rho Su^2/k$，跨相同顺、逆风距离时，最短逆风时间与顺风时间之比为 $\boxed{27/2}$。水的侧向约束使船沿给定航向运动，侧向约束力与船速垂直；题设 $u\gg V$ 使帆处来流可近似取原风速。

例 1.14 (从地面连续拉起链条)**.** 一条柔软均匀长链堆在地面上，线密度 λ，已被提起的竖直长度初始为 $x_0>0$、速度为零。在上端施加恒定向上力 $F>\lambda g x_0$，下端不断从链堆中接入，接入前静止。忽略链节间预先牵连，求竖直长度为 x 时的速度，并求接入耗散率。

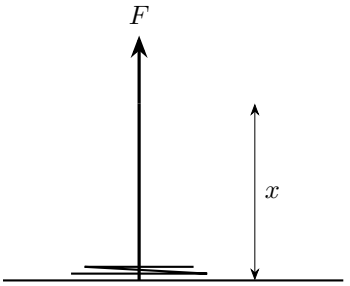


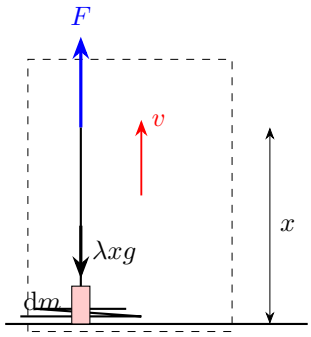
图 1.39: 题设：从地面连续拉起链条

解　保留静止链节接入带来的动量项

按图 1.39 移动部分质量为 λx，下端以速率 $v=\dot{x}$ 接入原来静止的链节。在 $\mathrm{d}t$ 内选原运动链及即将接入的 $\lambda\,\mathrm{d}x$ 为封闭系统，初动量为 $\lambda x v$。末动量展开并舍去二阶量，

$$(\lambda x+\lambda\,\mathrm{d}x)(v+\mathrm{d}v)-\lambda x v=\lambda x\,\mathrm{d}v+\lambda v\,\mathrm{d}x+O(\mathrm{d}t^2).$$

重力新增部分的冲量也是二阶量，故一阶动量式为 $(F-\lambda x g)\,\mathrm{d}t=\lambda x\,\mathrm{d}v+\lambda v\,\mathrm{d}x$。代入 $\mathrm{d}x=v\,\mathrm{d}t$，除以 $\mathrm{d}t$ 得到 $F-\lambda x g=\lambda x\dot v+\lambda v^2$。令 $y(x)=v(x)^2$，有 $y'=2v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$；同时链式法则给 $\dot v=(\mathrm{d}v/\mathrm{d}x)\dot x=v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x=y'/2$。代入再除以 $\lambda x/2$，得到 $y'+2y/x=2F/(\lambda x)-2g$。



接入前：$u=0$
接入后：速率 v
$\mathrm{d}m=\lambda\,\mathrm{d}x$

图 1.40: 下端新接入链节原来静止，加入后与竖直链段一起向上运动

解速度平方方程并使用初始条件

按图 1.40，为把左边凑成乘积导数，取积分因子 $I(x)$ 满足 $I'/I=2/x$。因 $x>0$，可选正的积分因子。取参考点 $x_0>0$，分离后

$$\int_{I(x_0)}^{I(x)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=2\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}s}{s},\qquad [\ln\xi]_{I(x_0)}^{I(x)}=2[\ln s]_{x_0}^{x}.$$

故 $\ln[I(x)/I(x_0)]=2\ln(x/x_0)$，即 $I(x)=I(x_0)x^2/x_0^2$。积分因子的非零常数倍不改变方程，取 $I(x_0)=x_0^2$，便有 $I=x^2$。乘上后

$$x^2y'+2xy=\frac{\mathrm{d}(x^2y)}{\mathrm{d}x}=\frac{2F}{\lambda}x-2gx^2.$$

从初始长度 x_0 积到 x：

$$\begin{aligned}x^2y-x_0^2y(x_0)&=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{2F}{\lambda}\xi-2g\xi^2\right)\mathrm{d}\xi\\&=\left[\frac{F}{\lambda}\xi^2-\frac{2g}{3}\xi^3\right]_{x_0}^{x}\\&=\frac{F}{\lambda}(x^2-x_0^2)-\frac{2g}{3}(x^3-x_0^3).\end{aligned}$$

初速度为零，故 $y(x_0)=0$；再除以 x^2 可得速度平方。

代入初始条件并整理，得

$$\boxed{v^2=\frac{F}{\lambda}\left(1-\frac{x_0^2}{x^2}\right)-\frac{2g}{3}\left(x-\frac{x_0^3}{x^2}\right).}$$

由动能和势能增长率求接入耗散

只取 $v^2 \ge 0$ 且仍在向上接入的区间。运动链的动能 $K = \lambda x v^2/2$；以地面为零势面，$U = \int_0^x \lambda g z \,\mathrm{d}z = \lambda g[z^2/2]_0^x = \lambda g x^2/2$。动能同时随运动质量和速度变化。用乘积与链式法则求导：

$$\dot K = \frac{\lambda}{2}(\dot x\, v^2 + x\cdot 2v\dot v) = \frac{\lambda v^3}{2} + \lambda x v\dot v, \qquad \dot U = \frac{\lambda g}{2}(2x\dot x) = \lambda g x v.$$

将动量方程乘 v 得 $\lambda x v\dot v = Fv - \lambda g x v - \lambda v^3$，再代入上式，

由动力学式算得 $\dot K + \dot U = Fv - \lambda v^3/2$，故接入耗散率

$$\boxed{\dot Q = \lambda v^3/2}.$$

初始 $x_0 > 0$ 给出质量为 λx_0 的起始运动链段。

例 1.15 (匀速收拢水平链条的功率)**.** 线密度 λ 的柔软长链原来静止堆在光滑水平面上，其一端被以恒定速率 v 拉走，使链节不断从静止堆中接入水平运动的直链。忽略重力功和链节的提前牵制，求拉力、外力功率、动能增长率及耗散率。

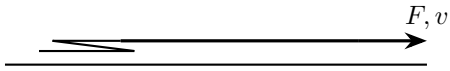


图 1.41: 题设：匀速收拢水平链条的功率

解　从每秒接入质量求匀速拉力

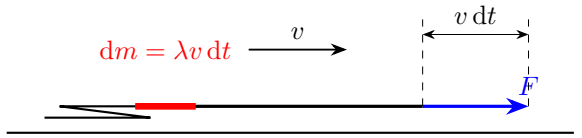
图 1.41 每秒接入质量 $\dot m = \lambda v$，每单位质量速度由零变为 v，所以

$$\boxed{F = \dot m v = \lambda v^2}.$$

以作用点速度计算输入功率

拉力作用点以 v 运动，外力功率为

$$\boxed{P = Fv = \lambda v^3}.$$



红段由静止加入，新增动能为 $\frac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m$

拉力输入功为 $Fv\,\mathrm{d}t = v^2\,\mathrm{d}m$

图 1.42: 在同一时间间隔内跟踪新加入的链节和拉力作用点的位移

跟踪新增链节的动能

若在 $\mathrm{d}t$ 内新接入 $\mathrm{d}m=\lambda v\,\mathrm{d}t$，新增运动链节的动能为 $v^2\,\mathrm{d}m/2$，与此同时拉力输入功 $Fv\,\mathrm{d}t=v^2\,\mathrm{d}m$。输入功的另一半在链节的非弹性接入过程中转为内能。

接入过程的耗散率

图 1.42 运动部分质量增加，速率不变，故 $\dot{K}=\dot{m}v^2/2=\lambda v^3/2$，剩余部分为

$$\boxed{\dot{Q}=P-\dot{K}=\lambda v^3/2}.$$

正在运动的质量持续增加，动能以 $\lambda v^3/2$ 的速率增长。动量关系给出维持接入所需拉力，外力功率与动能增长率之差给出耗散率。

例 1.16 (恒力牵引逐个粘合的圆环)**.** 许多质量均为 m 的小环，沿光滑直线等间距 ℓ 静置。第一个环从静止受恒力 F 向前运动，依次与前方环碰撞粘合，碰撞极短。求第 n 个环刚加入后共同速度，以及下一次碰撞前的速度。

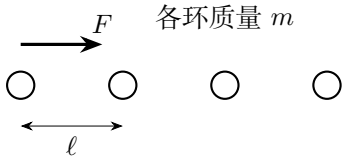


图 1.43: 题设：恒力牵引逐个粘合的圆环

解　区分相邻碰撞之间加速与瞬间粘合

令图 1.43 第 n 个环刚加入后的速度为 V_n，再前进 ℓ、碰第 $n+1$ 环前速度为 U_n。连续加速段动能定理给 $U_n^2=V_n^2+2F\ell/(nm)$；粘合瞬间动量给 $V_{n+1}=nU_n/(n+1)$。

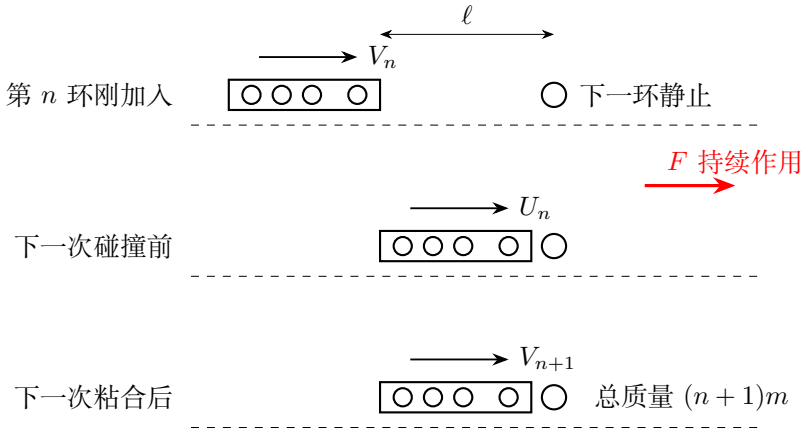


图 1.44: 连续加速段积累外力功，粘合瞬间用动量关系连接前后速度

把两种规律联立为速度递推

按图 1.44 两式联立，$(n+1)^2V_{n+1}^2 = n^2V_n^2 + 2nF\ell/m$。

累加相邻两次粘合的递推式

令 $A_n = n^2V_n^2$，递推成为 $A_{n+1} - A_n = 2nF\ell/m$。从 1 累加到 $n-1$，左边只剩 $A_n - A_1$，右边为 $(2F\ell/m)\sum_{j=1}^{n-1} j = (F\ell/m)n(n-1)$。由 $V_1 = 0$ 得 $A_1 = 0$，再除以 n^2，并代回连续加速段：

$$V_n^2 = \frac{F\ell}{m}\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{F\ell}{m}\frac{n-1}{n}, \qquad U_n^2 = \frac{F\ell}{m}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{2}{n}\right) = \frac{F\ell}{m}\frac{n+1}{n}.$$

两速度均向前，取非负平方根，所以

$$\boxed{V_n = \sqrt{\frac{F\ell}{m}\frac{n-1}{n}}, \qquad U_n = \sqrt{\frac{F\ell}{m}\frac{n+1}{n}}}.$$

$n \to \infty$ 时二者都趋于 $\sqrt{F\ell/m}$。粘合使速度瞬时降低，随后恒力又使整体加速；两种过程交替出现，速度逐渐趋近上述共同极限。

例 1.17 (移动反射板受到的水流推力)**.** 水平水流相对地面速度 u、密度 ρ、截面积 S，追上一块以 $V < u$ 同向匀速移动的光滑板。板将水相对板完全反向，忽略损失。求水对板的力，并说明两个速度应怎样使用。

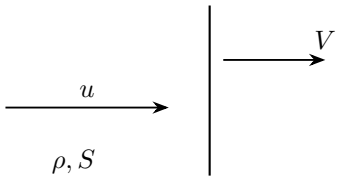


图 1.45: 题设：移动反射板受到的水流推力

解　每秒追上移动板的水质量

图 1.45 单位时间追上板的质量为 $\dot{m} = \rho S(u - V)$。在板系中入、出速度为 $u - V$ 和 $-(u - V)$，转换回地面系，出流速度为 $2V - u$。每单位质量的地面动量变化为 $(2V - u) - u = -2(u - V)$。

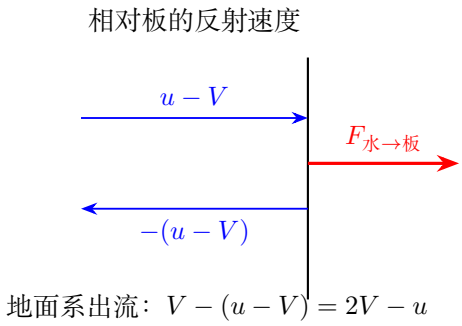


图 1.46: 反射关系在板系中表示，板上力由水流动量变化反向得到

在地面系计算动量流变化

对水流写 $F_{板\to水}=\dot{m}(v_{出}-u)=-2\rho S(u-V)^2$，这个负号表示板使水向后改变动量。由牛顿第三定律，水对板的力等大反向，沿原水流方向。

移动板所受推力

按图 1.46 水对板的反作用力

$$\boxed{F=2\rho S(u-V)^2},$$

沿水流方向。到板流率由相对接近速度 $u-V$ 决定；每单位质量的地面动量变化由反射前后速度相减决定。$V\to u$ 时碰撞流量消失，推力也趋零。板得到机械功率 FV，相应射流能量流减少，静板 $V=0$ 则可以受力而不获功。

例 1.18 (有阻力的风帆小车)**.** 小车只可沿水平直线运动，正对来流的帆把密度 ρ、有效截面积 S、地面流速 u 的气流理想反射。小车所受其他阻力为 kV，$k>0$。求终极速度，并判断是否可能追上气流。

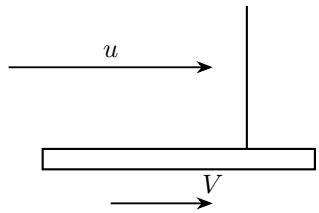


图 1.47: 题设：有阻力的风帆小车

解　将迎流推力与阻力相等作为终速条件

按图 1.47 移动反射帆受向前推力 $2\rho S(u-V)^2$，阻力向后为 kV。终极速度满足 $2\rho S(u-V)^2=kV$。令 $A=2\rho S$，方程 $AV^2-(2Au+k)V+Au^2=0$。

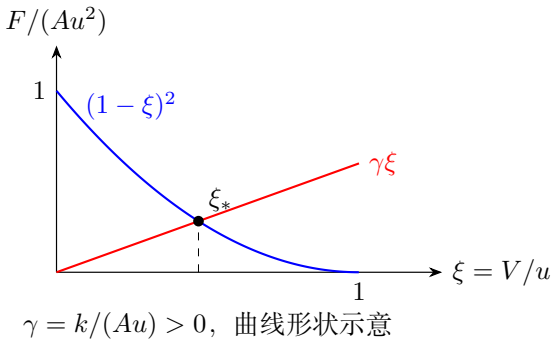


图 1.48: 在迎流区间，推力递减、阻力递增，唯一交点给出终极速度

筛选处于迎流区间的代数根

二次方程判别式为 $(2Au+k)^2 - 4A^2u^2 = k^2 + 4Aku$，所以两根为 $[2Au + k \pm \sqrt{k^2+4Aku}]/(2A)$。由于 $\sqrt{k^2+4Aku} > k$，较小根小于 u；又因 $(2Au+k)^2 - (k^2+4Aku) = 4A^2u^2 > 0$，有 $2Au + k > \sqrt{k^2+4Aku}$，较小根大于零。较大根则大于 u，不满足迎流条件。

两力曲线的交点与终极速度

图 1.48 取位于 $0 < V < u$ 的根，得

$$\boxed{V_* = \frac{2Au + k - \sqrt{k^2+4Aku}}{2A}}.$$

从图中两力曲线也能看出：推力在 $V = 0$ 为正、到 u 为零，阻力单调增加，故只有一个可行交点。$k > 0$ 时终速始终小于 u；当 $k \to 0$ 时，该终速的极限为 u。

1.10 本讲小结

动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 把物体的质量和速度联系起来。相互作用传递动量，力给出传递的瞬时快慢，冲量给出一段时间内的累积量。对质量不变的质点，$\int \boldsymbol{F}_{\text{合}}\,\mathrm{d}t = m(\boldsymbol{v}_+ - \boldsymbol{v}_-)$，初末速度在同一参考系中作矢量相减。

平均冲击力由冲量与接触时间之比确定；最大力还与接触形变和力时曲线有关。对多个物体相加动量方程，内冲量相消；对多个阶段相加，中间动量相消。绳突然绷紧时，冲量方程与沿绳速度相等的几何条件共同确定末速度。

连续接入或转向的物质，每秒都携带动量。先由相对运动确定每秒到达多少质量，再跟踪同一批物质在同一个惯性系中的初末动量，就能求出吸附推力、喷流作用力和链条冲击载荷。题设图给出速度方向，过程图把受力物体与动量变化逐一对应起来。

1.11 练习

练习 1.1 (斜碰墙面的冲量)**.** 质量 m 的小球以速率 v 撞上光滑墙面，入射速度与墙面法线夹角为 α；法向恢复系数为 $0 \le e \le 1$，切向速度不变，$0 \le \alpha < \pi/2$。求墙给球的冲量、末速率及冲击损失的动能。

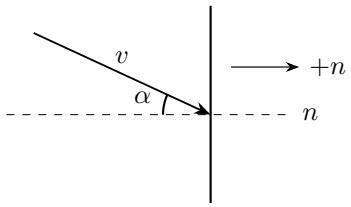


图 1.49: 题设：斜碰墙面的冲量

练习 1.2 (线性阻力下的返回时刻)**.** 质量 m 的物体从地面以竖直初速 u 上抛，空气阻力为 $-kv$，以向上为正。设落回出发高度时速率为 w，飞行时间为 T。不用求完整轨迹，建立 T, u, w 的关系。

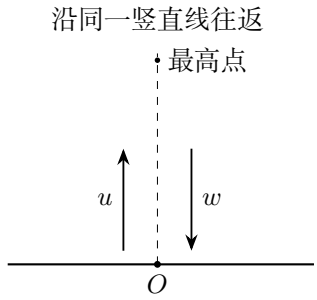


图 1.50: 题设：线性阻力下的返回时刻

练习 1.3 (匀速喷流的偏转力)**.** 密度 ρ、横截面积 S、速率 u 的水平水流，被固定光滑导流板偏转 θ，出流速率不变。忽略高度差，求水对导流板的力，并讨论其大小。

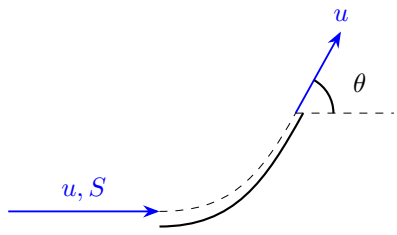


图 1.51: 固定导流板使入、出流速率相同，方向转过 θ

练习 1.4 (绳突然绷紧后的速度与动能)**.** 两个质量均为 m 的小球由松弛轻绳连接，处于光滑水平面内。绳刚绷紧前，A 的速度大小为 u、方向与从 B 指向 A 的绳方向成 $0 \le \alpha < \pi/2$，B 静止。求刚绷紧后的速度，并求动能减少量。

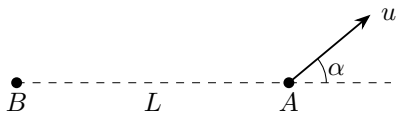


图 1.52: 题设：绳突然绷紧后的速度与动能

练习解答

练习 1.1

解　沿墙面法线和切线分别确定末速度

按图 1.49 法线取向墙为正，入射分量为 $v_n = v\cos\alpha$、$v_t = -v\sin\alpha$。光滑墙只有法向冲量，且恢复系数规定 $v_n' = -ev_n$，所以

$$I_n = m(v_n' - v_n) = -(1+e)mv\cos\alpha, \qquad I_t = 0.$$

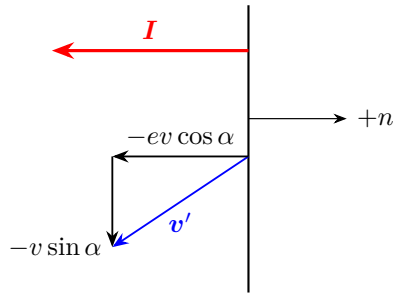


图 1.53: 切向分量不变，法向分量反向并乘恢复系数；冲量沿离墙方向

合成末速率并计算法向动能损失

由图 1.53 的两个正交分量，先平方相加：

$$v'^2 = (-ev\cos\alpha)^2 + (-v\sin\alpha)^2 = v^2(e^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha).$$

取非负平方根，末速率为

$$\boxed{v' = v\sqrt{e^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}},$$

初末动能相减时，先用 $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$ 展开：

$$Q=\frac{1}{2}mv^2[\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-e^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha].$$

切向平方项相消，剩下法向动能的损失。

损失动能为

$$\boxed{Q=\tfrac{1}{2}mv^2(1-e^2)\cos^2\alpha}.$$

弹性反弹与近切向入射

$e=1$ 时速率不变而冲量仍一般不为零；$\alpha=\pi/2$ 时法向入射分量为零，理想模型不产生冲击。

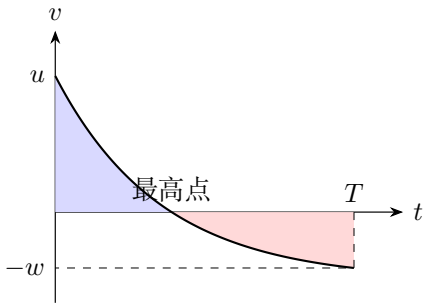
练习 1.2

解　上升与下降阶段的阻力冲量

图 1.50 的整个飞行过程，重力冲量为 $-mgT$。线性阻力的冲量为

$$-k\int_0^T v\,\mathrm{d}t=-k\int_{y(0)}^{y(T)}\mathrm{d}y=-k[y]_{y(0)}^{y(T)}=-k[y(T)-y(0)]=0,$$

因为初、末高度相同。上升时阻力向下，下降时阻力向上；线性阻力的有符号冲量由初末高度之差决定。



蓝、红面积大小相等，符号相反

图 1.54: 返回原高度使速度图的有向面积为零；正、负阻力冲量相消

使用有符号始末速度列动量变化

返回时末速度为 $-w$，故全过程动量变化为 $-m(w+u)$。图 1.54 的有向面积为零，使线性阻力的全过程冲量为零；阻力功为 $-k\int_0^T v^2\,\mathrm{d}t<0$，运动过程同时损失机械能。

求飞行时间并区别冲量与功

图 1.54 中上升段阻力向下、下降段向上，其积分恰好相抵。动量定理给 $-mgT = m(-w-u)$，故 $\boxed{T = (u+w)/g}$。阻力始终做负功，所以 $w < u$；由此 $T < 2u/g$。

练习 1.3

解 求质量流率和入出速度分量

图 1.51 中每秒流过质量 $\dot{m} = \rho S u$，入、出速度分别为 $(u, 0)$ 与 $(u\cos\theta, u\sin\theta)$。导流板给水的力是动量流出率减流入率。反向后得到水对板的力

$$\boxed{F_x = \rho S u^2(1-\cos\theta), \qquad F_y = -\rho S u^2 \sin\theta}.$$

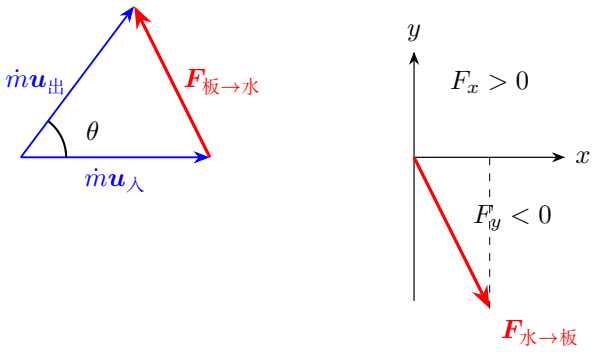


图 1.55: 相减的动量流给板对水的力，再反向得到水对板的力

合成受力大小并判断方向

将两个分量平方相加，得到 $F^2 = (\rho S u^2)^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta]$。括号内为 $2-2\cos\theta = 4\sin^2(\theta/2)$；取非负平方根，绝对值便自然出现。分量结果中的 $F_y < 0$ 与图中水向上出流相对应。

图 1.55 中的两个动量矢量长度相等，夹角为 θ，所以力的大小为

$$\boxed{F = 2\rho S u^2 |\sin(\theta/2)|}.$$

偏转角与板的受力大小

不偏转时力为零，完全反向时为 $2\rho S u^2$。导流板静止，受力点无位移，板对理想水流不做功，但仍能改变水的动量方向。

练习 1.4

解　分别列两球沿绳的冲量方程

按图 1.52 取 x 轴沿绳从 B 指向 A。绳冲量只改变 x 分量，故 $v_{Ay}=u\sin\alpha$、$v_{By}=0$。设拉力冲量为 J，则 $mv_{Ax}=mu\cos\alpha-J$、$mv_{Bx}=J$。

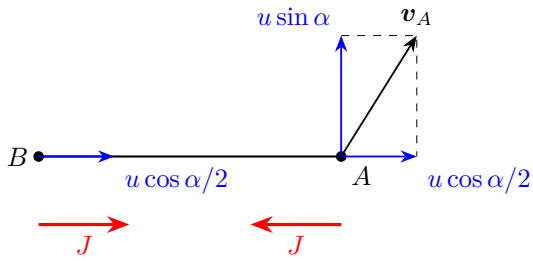


图 1.56: 两球沿绳速度分量相同，A 垂直绳的速度分量保持不变

施加沿绳速度约束求冲量和末速度

由图 1.56 绷紧后的 $v_{Ax}=v_{Bx}$，得到 $J=mu\cos\alpha/2$，因此 $\boldsymbol{v}_A=(u\cos\alpha/2,u\sin\alpha)$、$\boldsymbol{v}_B=(u\cos\alpha/2,0)$。末动能应把两球的两个分量分别平方相加：$K_f=(m/2)[u^2\cos^2\alpha/4+u^2\sin^2\alpha+u^2\cos^2\alpha/4]$，即 $K_f=mu^2\sin^2\alpha/2+mu^2\cos^2\alpha/4$。初动能中的垂直绳分量完全保留，只有沿绳的相对运动能量减少。

只对被消去的沿绳相对运动求损失

动能损失

$$\boxed{Q=\frac{1}{2}mu^2-\frac{m}{2}(v_A^2+v_B^2)=\frac{1}{4}mu^2\cos^2\alpha}.$$

初始分离速度与拉力冲量

题设 $0\le\alpha<\pi/2$，故沿绳分离速度 $u\cos\alpha>0$，求得 $J>0$，对应绳绷紧时的拉力冲量。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第二讲

动量守恒与质心

2026

目录

第二讲　动量守恒与质心 **1**

2.1　质点组的动量守恒 1

2.2　参考系与动量中心 2

2.3　质心运动定理与位移 3

2.4　连续体质心的积分计算 5

2.5　质心高度与均匀重力场 6

2.6　相对速度与质量加权平均 7

2.7　内部摩擦与动量交换 9

2.8　变质量喷射与封闭系统 10

2.9　例题与分析 11

2.10 本讲小结 35

2.11 练习 36

练习解答 37

第二讲　动量守恒与质心

2.1　质点组的动量守恒

相互作用使物体彼此传递动量。选择几个物体组成一个系统以后，系统内物体间的作用称为内力，系统外物体施加的作用称为外力。对第 i 个质点写牛顿第二定律：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i^{外} + \sum_{j\neq i} \boldsymbol{F}_{ji}.$$

把所有质点的方程相加，同一对内力 $\boldsymbol{F}_{ji}$ 与 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 等大反向，逐对相消。定义总动量 $\boldsymbol{P} = \sum_i \boldsymbol{p}_i$，便有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \boldsymbol{F}_i^{外} = \boldsymbol{F}_{外}.$$

因此，当合外力为零时，$\mathrm{d}\boldsymbol{P}/\,\mathrm{d}t = 0$，各时刻总动量相同；在 t_1 到 t_2 内积分，还得到

$$\boldsymbol{P}(t_2) - \boldsymbol{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{外}\,\mathrm{d}t.$$

某段时间合外冲量为零，该段始末总动量就相等。这是**动量守恒定律**在力学中的条件。

$$F_{外,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_x = 常量$$

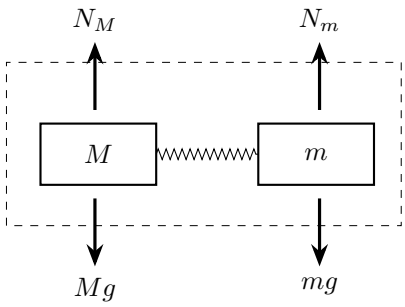
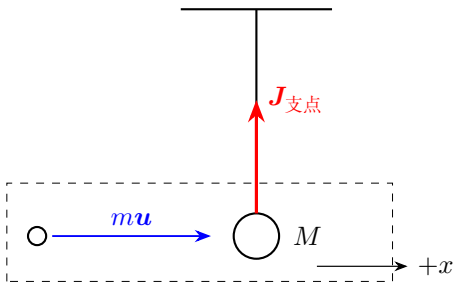


图 2.1: 整体、子系统与可守恒分量

图 2.1 把两物体与弹簧一起选入虚线框，弹簧相互作用归入内力。重力和支持力来自框外，仍是外力。光滑水平面上，这些外力沿竖直方向，系统的水平动量保持不变。沿某方向合外力为零，就可以独立使用这一方向的动量守恒。



碰撞系统包括入射物和摆球，不包括固定支点

图 2.2: 固定支点能传外冲量：竖直绳在最低点约束竖直运动，水平分量仍可守恒

图 2.2 中，碰撞发生在摆绳竖直的最低点。绳给球的冲量竖直，球与入射物组成的系统沿水平方向总动量守恒；竖直方向则由绳冲量改变动量。例 2.4 和例 2.12 都利用这个方向关系。若碰撞期间还有大小为 f 的普通摩擦力，且碰撞时间为 τ，在 $f\tau$ 远小于所研究动量变化的条件下，可把摩擦冲量作为小量略去。

2.2　参考系与动量中心

动量中的速度相对于选定的参考系。设另一个惯性系相对于原系以恒定速度 $\boldsymbol{U}$ 平动，各质点速度变为 $\boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{U}$。对总质量固定为 $M_\Sigma = \sum_i m_i$ 的系统，

$$\boldsymbol{P}' = \sum_i m_i(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{U}) = \boldsymbol{P} - M_\Sigma \boldsymbol{U}.$$

变换前后相差一个常矢量，所以原系中守恒的总动量，在新惯性系中也守恒。

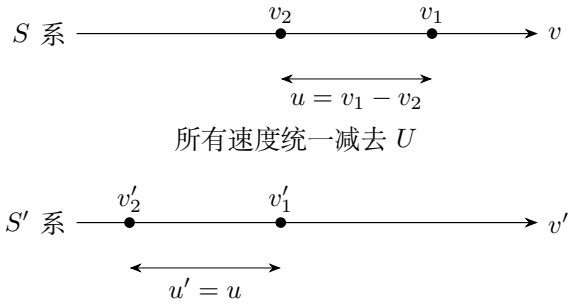


图 2.3: 更换惯性系使两速度同时减去 U，速度差保持不变

图 2.3 把各速度同时平移 $-U$，速度之差保持原值。特别地，取 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{P}/M_\Sigma$，就得到总动量为零的参考系，称为**动量中心系**。在这个系中观察两个物体的相互作用，两者动量始终等大反向，往往能更直接地看出相对运动。

定义系统的**质心**位置为

$$\boldsymbol{R}_C = \frac{1}{M_\Sigma}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i.$$

各质量不变时，对时间逐项求导：

$$\boldsymbol{V}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M_\Sigma}\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{M_\Sigma}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \frac{\boldsymbol{P}}{M_\Sigma}.$$

质心速度正好等于动量中心系相对于原系的速度。因此这个参考系通常也称为**质心系**。合外力为零时，质心匀速运动，质心系是惯性系。

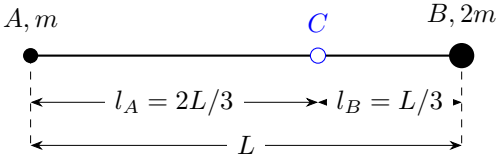


图 2.4: 两个质点的质心在连线上，距两端的长度与两质量成反比

图 2.4 中的质心靠近质量较大的 B。以 A 为原点，$x_C = (m\cdot 0 + 2mL)/(3m) = 2L/3$。一般地，两质点到质心的距离满足 $m_A l_A = m_B l_B$，并且 $l_A + l_B = L$，所以

$$l_A = \frac{m_B}{m_A + m_B}L, \qquad l_B = \frac{m_A}{m_A + m_B}L.$$

这个点随整个系统一起运动，其位置由全部质量的分布决定。

2.3 质心运动定理与位移

对 $M_\Sigma \boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{P}$ 再求一次时间导数，并用系统动量定理：

$$M_\Sigma \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_{外}, \qquad \boxed{M_\Sigma \boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{F}_{外}}.$$

这就是**质心运动定理**。系统可以发生转动、形变或分离，质心的加速度始终由合外力决定。炮弹在空中爆炸时，各碎片只受重力，合外力仍为 $M_\Sigma \boldsymbol{g}$，质心就继续沿原来的抛物线运动。

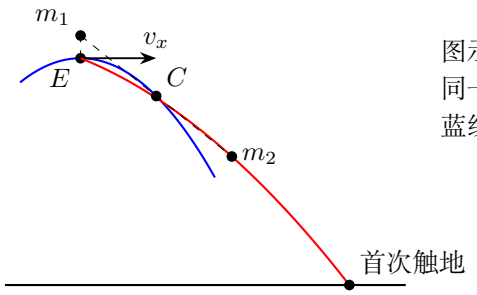


图 2.5: 爆炸只改变内部相对运动，触地前两碎片的质心仍沿原抛物线运动

图 2.5 连接同一时刻的两块等质量碎片，其中点 C 落在原抛物线上。各碎片沿自己的抛体轨迹运动，质心把它们的共同平移表现出来。图中的这段分析持续到第一片触地；触地后的地面作用进入合外力，随后按新的外力关系计算。

水平方向无合外力时，V_C 保持初值。在时间 T 内，若两个物体质量为 m, M，对地位移为 $\Delta x, \Delta X$，对质心定义取初末位置之差，有

$$m\Delta x + M\Delta X = (m+M)\Delta X_C = (m+M)V_C T.$$

若两物体的相对位移为 ℓ，即 $\Delta x - \Delta X = \ell$，代入 $\Delta x = \Delta X + \ell$，逐步整理：

$$(M+m)\Delta X + m\ell = (M+m)V_C T,$$

$$\boxed{\Delta X = V_C T - \frac{m\ell}{M+m}}, \qquad \boxed{\Delta x = V_C T + \frac{M\ell}{M+m}}.$$

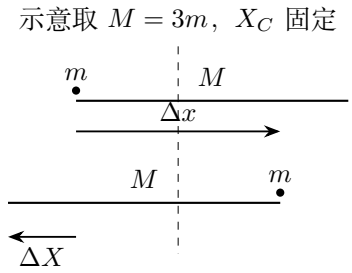


图 2.6: 质心匀速运动与相对位移

图 2.6 用同一地面坐标表示两个物体的位置。$V_C T$ 给出质心的平移，另两项给出内部移动所引起的位移分配。初始静止时 $V_C = 0$，船向人的行走方向反向移动；船最初航行时，质心保留原有匀速平移。例 2.8 和例 2.10 分别对应这两种情况。

多个物体在共同基体上移动时，设基体位移为 X，第 i 个物体相对基体位移为 ℓ_i，其对地位移便是 $X+\ell_i$。于是质心关系写为

$$M_\Sigma X+\sum_i m_i\ell_i = M_\Sigma V_C T.$$

每个 ℓ_i 沿同一正方向取符号。例 2.16 中两人交换板端，两个相对位移方向相反；例 2.19 把这个关系用于任意给定的两个相对位移。

2.4 连续体质心的积分计算

质心定义中的质量加权和，对连续分布应写成 $\boldsymbol{R}_C = M^{-1}\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m$。积分前先确定质量微元：细杆用 $\mathrm{d}m=\lambda(x)\,\mathrm{d}x$，薄片用 $\mathrm{d}m=\sigma(x,y)\,\mathrm{d}A$，立体用 $\mathrm{d}m=\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V$。密度分布关于某个平面对称时，质心在该平面上，可以先确定一个坐标。密度随位置变化时，把各处的质量微元按位置加权积分。

例如长 ℓ 的细杆沿 $x\in[0,\ell]$ 放置，线密度 $\lambda(x)=\lambda_0(1+x/\ell)$。右端更重，质心应在中点右侧。总质量和关于左端的一阶矩分别为

$$M=\lambda_0\int_0^\ell (1+x/\ell)\,\mathrm{d}x=\lambda_0\left[x+\frac{x^2}{2\ell}\right]_0^\ell=\lambda_0(\ell+\ell/2)=\frac{3}{2}\lambda_0\ell,$$

$$Mx_C=\lambda_0\int_0^\ell (x+x^2/\ell)\,\mathrm{d}x=\lambda_0\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3\ell}\right]_0^\ell=\lambda_0\ell^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}\lambda_0\ell^2.$$

所以 $x_C=5\ell/9$，满足先前的方向判断。总质量与一阶矩由同一个密度函数求出，再取两者之比，便得到质心位置。

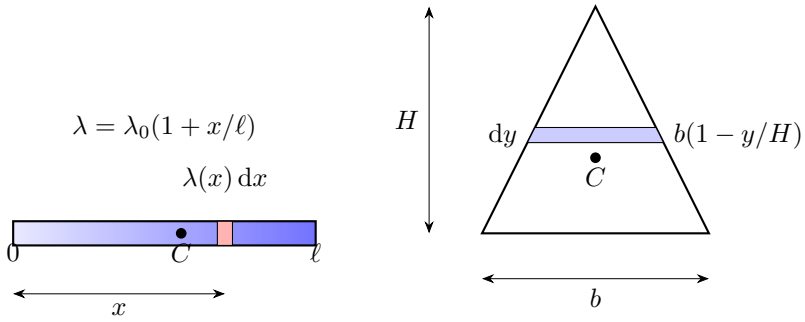


图 2.7: 非均匀杆按当地线密度取微元，三角薄片按随高度变化的条带取微元

图 2.7 右侧的均匀三角薄片，底边位于 $y=0$、顶点位于 $y=H$。高度 y 处条带宽度为 $b(1-y/H)$，质量微元 $\mathrm{d}m=\sigma b(1-y/H)\,\mathrm{d}y$。从底边积到顶点，

$$M=\sigma b\int_0^H (1-y/H)\,\mathrm{d}y=\sigma b[y-y^2/(2H)]_0^H=\frac{\sigma bH}{2},$$
$$My_C=\sigma b\int_0^H (y-y^2/H)\,\mathrm{d}y=\sigma b[y^2/2-y^3/(3H)]_0^H$$
$$=\sigma bH^2(1/2-1/3)=\frac{\sigma bH^2}{6}.$$

两式相除，$y_C=(H^2/6)/(H/2)=H/3$。条带的宽度进入质量微元，这一方法也适用于密度随高度改变的薄片。

组合物体也可把各部分当成位于自身质心的质量来计算总质心。对挖孔薄片，数学上可以用完整薄片减去被挖去部分的一阶矩，分母取剩余总质量。完整薄片的一阶矩减去孔内部分的一阶矩，再除以剩余质量，就得到剩余薄片的质心。

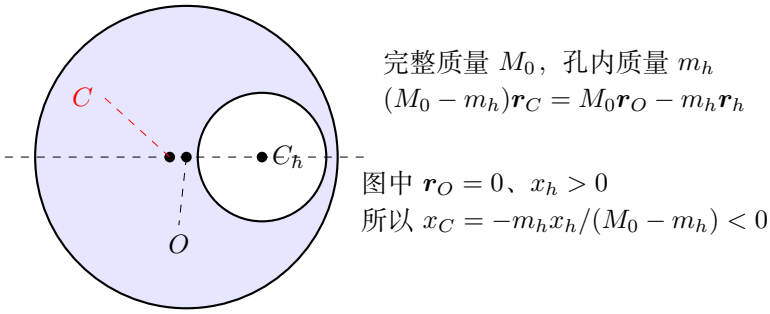


图 2.8: 挖去右侧质量后，剩余质心向左偏移；负号表示扣除一阶矩

图 2.8 先把完整圆片和孔内圆片分别归结到各自质心，分母则使用剩余质量 M_0-m_h。质心向孔的反侧移动，与扣除右侧质量的实际分布一致。对不规则孔，先求被去掉部分自身的质心，再按同样方法相减。

2.5　质心高度与均匀重力场

在均匀重力场中，各质元重力相同方向，重力势能总和为 $U_g=\int gy\,\mathrm{d}m=MgY_C$。因此整体变形或内部移动的重力功，可以只由质心高度变化计算：$W_g=-Mg\Delta Y_C$。均匀重力场中势能与高度成正比，各质元势能相加后正好由质心高度表示。

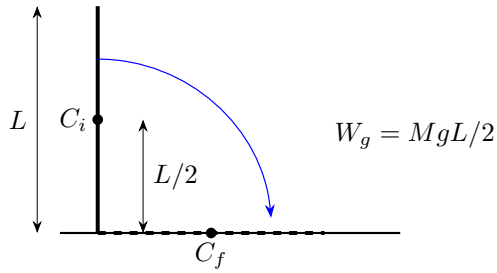


图 2.9: 均匀杆放倒时端点降低 L，全杆质心只降低 $L/2$

图 2.9 中每个质元的下降高度不同。以杆下端为原点，初态 $Y_C = L/2$，末态 $Y_C = 0$，故重力作功 $MgL/2$。上端下降 L，各质元的下降量从 0 连续增加到 L，均匀杆的平均下降量为 $L/2$。

链条被提起、液体被排出、杆由竖直到水平，都可以先求质心高度变化，再计算重力功。各质元上升高度不同，质心将这些高度按质量作了加权平均。

2.6 相对速度与质量加权平均

把相对速度换算为同一惯性系中的速度，就可以写出总动量。人从车上跳下时，“相对车的速度”为 u，设车对地末速度为 V，则人的对地末速度为 $V+u$。若人、车初始共同以 v 运动，便有 $(M+m)v = MV+m(V+u)$，由此 $V = v-mu/(M+m)$。推导中质量较大的物体速度变化较小，正体现了相同反向冲量对不同质量的作用。

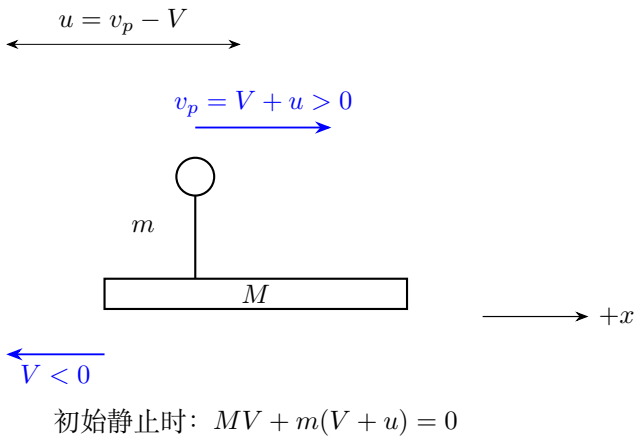


图 2.10: 初始静止的车与人反冲，人的对地速度与相对车速度不同

图 2.10 选取初始静止的情形，车向后、人与车的相对运动向前。两者对地速度代入动量式；给定的 u 则用来联系两个末速度。相对车的跳出速度与车的对地速度相加，才是人的对地末速度。

两物体最终相对静止时，共同速度由 $V=(m_1v_1+m_2v_2)/(m_1+m_2)$ 决定。这是有符号速度的质量加权平均。这个结果与内部经历几次碰撞、摩擦多久无关，只要求相应方向的外冲量可忽略。若从相向运动开始，先规定正方向，再把反向初速度写成负值，便可直接判定共同运动方向。

相对速度降为零时，两物体共同运动。永久粘合使这个状态持续下去；弹簧压缩到最短时也出现瞬时共速，随后弹簧恢复，两个物体再次产生相对速度。

两物体的速度可统一分成“质心运动”和“相对运动”。设 $M_\Sigma=m_1+m_2$、$u=v_1-v_2$，由 $m_1v_1+m_2v_2=M_\Sigma V_C$ 及 $v_1-v_2=u$ 联立，先将 $v_1=v_2+u$ 代入第一式，得 $v_2=V_C-m_1u/M_\Sigma$，再得

$$v_1=V_C+\frac{m_2}{M_\Sigma}u,\qquad v_2=V_C-\frac{m_1}{M_\Sigma}u.$$

这两个表达把速度分成质心平移与相对运动两部分；内部作用改变 u，外部合冲量决定 V_C 怎样变化。两者在解题中的作用因而可以分开。



弹簧最压缩，$u=0$　　永久粘合，$u=0$

相对运动能量暂存为弹性势能　　相对运动能量转为内能等

图 2.11: 同速条件相同，弹簧储能与非弹性粘合的能量去向不同

图 2.11 中若合外冲量为零，V_C 始终固定。把前面的两个速度表达代入 $K=m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2$，逐项展开：

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)V_C^2+\left(\frac{m_1m_2}{M_\Sigma}-\frac{m_2m_1}{M_\Sigma}\right)V_Cu+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2^2+m_2m_1^2}{M_\Sigma^2}u^2.$$

交叉项为零，最后一项的系数中 $m_1m_2^2+m_2m_1^2=m_1m_2M_\Sigma$，约去一个 M_Σ，得到

$$K=\frac{1}{2}M_\Sigma V_C^2+\frac{1}{2}\mu_ru^2,\qquad \mu_r=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

第一项是质心运动的动能，第二项随相对速度改变。弹簧压缩时第二项可变成弹性势能，粘合时它可转为内能；各项的具体变化由相应相互作用决定。

把各速度同时减去 U，总动能变化为

$$K' = \frac{1}{2}\sum_i m_i(v_i - U)^2 = K - U\sum_i m_i v_i + \frac{U^2}{2}\sum_i m_i = K - UP + \frac{1}{2}M_\Sigma U^2.$$

对总动量相同的碰撞初末状态取差，有

$$K'_i - K'_f = (K_i - K_f) - U(P_i - P_f) = K_i - K_f.$$

因此，整个孤立碰撞的动能损失在相互匀速平动的惯性系中相同。后面用质心系研究碰撞时，可以直接追踪相对运动动能的变化。

2.7 内部摩擦与动量交换

物块滑上自由木板时，摩擦对物块向后、对木板向前。两摩擦冲量在整体动量式中抵消，却分别改变两个速度。设物块质量 m、初速度 v_0，木板质量 M、初始静止，滑动摩擦力大小 $f = \mu mg$。在物块仍相对木板向前滑动的阶段，

$$v_m = v_0 - \frac{f}{m}t, \qquad v_M = \frac{f}{M}t, \qquad u(t) = v_m - v_M = v_0 - f\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)t.$$

令 $u(t_*) = 0$，得共速时间 $t_* = mMv_0/[f(M+m)]$。在此之前 $u > 0$，物块始终相对木板向前滑动。到 t_* 时，它们以共同速度 $mv_0/(M+m)$ 运动。

物块相对木板前进的距离，由相对速度积分得到：

$$\ell_{\text{相}} = \int_0^{t_*}\left(v_0 - \frac{v_0}{t_*}t\right)\mathrm{d}t = \left[v_0 t - \frac{v_0 t^2}{2t_*}\right]_0^{t_*} = v_0 t_* - \frac{1}{2}v_0 t_* = \frac{1}{2}v_0 t_*.$$

当板上可用长度不小于 $\ell_{\text{相}}$ 时，物块在滑出以前达到共速；板较短时，则先算到达板端的时刻，再衔接离板后的运动。图 2.12 将摩擦方向与这一面积判据放在同一组图中。

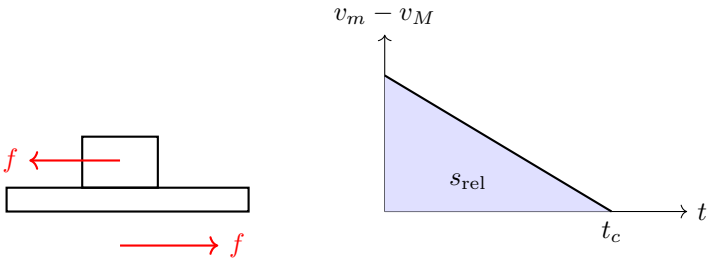


图 2.12: 摩擦反向交换动量，相对速度图的面积决定是否滑出木板

图 2.12 左侧两摩擦力属于不同物体，所以在整体动量式中相消，在各自方程中却都要保留。右侧画的是相对速度，蓝色面积 $s_{\text{rel}} = \int_0^{t_c}(v_m - v_M)\,\mathrm{d}t$ 才是物块

在板上走过的长度。物块对地位移包含随板移动的部分，板长则与相对滑程比较。物块先到板端时，就在离板时刻衔接下一阶段。

2.8　变质量喷射与封闭系统

火箭的推力来自喷出物的动量变化。设火箭质量为 M、速度为 V，短时间内喷出正质量 δm，喷气相对火箭向后速度为 u。忽略二阶量，在地面系中，喷气的速度为 $V-u$。选“喷气前的整个火箭”为封闭系统，有

$$MV=(M-\delta m)(V+\mathrm{d}V)+\delta m(V-u).$$

把右边的两个乘积展开，$MV+M\,\mathrm{d}V-V\delta m-\delta m\,\mathrm{d}V+V\delta m-u\delta m$ 中，两项 $V\delta m$ 相消；再约去 MV，得

$$M\,\mathrm{d}V-u\delta m-\delta m\,\mathrm{d}V=0.$$

舍去二阶乘积 $\delta m\,\mathrm{d}V$，所以 $M\,\mathrm{d}V=u\delta m$。因 $\mathrm{d}M=-\delta m$，故 $\mathrm{d}V=-u\,\mathrm{d}M/M$。若无外力、$u$ 为常量，质量从 M_0 降到 M，速度从 V_0 升到 V，有

$$\int_{V_0}^{V}\mathrm{d}W=-u\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}.$$

换元 $q=\mu/M_0$，则 $\mathrm{d}\mu/\mu=\mathrm{d}q/q$，上下限变为 $1, M/M_0$，所以

$$V-V_0=-u[\ln q]_1^{M/M_0}=-u\ln(M/M_0)=u\ln(M_0/M).$$

初始条件与积分端点已确定常数。有外力时，将同一时间内的外冲量加入短时动量方程即可。

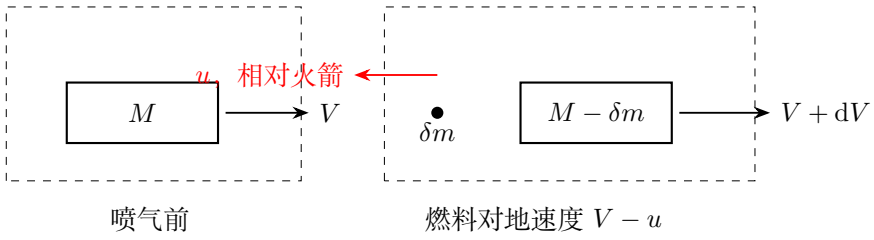


图 2.13: 在短时间内把喷出燃料也保留在封闭系统中，统一使用地面速度

图 2.13 中的虚线前后圈住同一批物质。喷气后的火箭质量减少，而燃料仍有对地动量 $\delta m(V-u)$；相对喷速 u 联系燃料与火箭速度，对地速度 $V-u$ 则进入燃料动量。

“系统”也可以包含外部装置。风扇向本船的帆吹风时，风扇和帆都与空气交换动量。气流从周围进入船上装置，最后离开，船获得的总动量由空气的最终动量与初始动量之差决定。练习 2.4 分别计算两处作用，再求全船的推力。

比较连续喷射与一次抛出时，取相同的相对喷速约定。假设初始质量 M_0，一次抛出燃料 $M_0 - M$，燃料相对最终火箭向后速率仍为 u，则燃料对地速度为 $V - u$。动量式 $M_0V_0 = MV + (M_0 - M)(V - u)$ 给

$$V - V_0 = u\left(1 - \frac{M}{M_0}\right).$$

连续喷射则给 $u\ln(M_0/M)$。令质量比 $r = M_0/M > 1$，比较函数 $D(r) = \ln r - 1 + 1/r$。有

$$D(1) = 0, \qquad D'(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = \frac{r-1}{r^2} > 0.$$

所以 $D(r) > 0$，即 $\ln r > 1 - 1/r$。在这项相同相对喷速的约定下，连续喷射的速度增量较大。这里比较的是给定质量比和相对喷速时的速度增量。例 2.15 把连续喷射与有限次等质量喷射进一步联系起来。

2.9 例题与分析

例 2.1 (车厢内的多次碰撞)**.** 质量 M 的车厢静止在光滑水平面上，厢内质量 m 的物体以对地速度 v_0 向右运动。经历若干次碰撞后物体静止于厢内，求最终车厢速度。

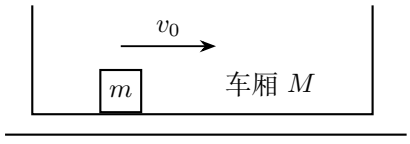


图 2.14: 题设：车厢内的多次碰撞

解　整体的水平动量

取图 2.14 中的车厢和物体为系统。地面光滑，重力与支持力均竖直，系统总水平动量保持初值 mv_0。物体最后静止于厢内，即它与车厢的相对速度为零。图 2.15 中的两支箭头因此具有同一个对地速度 V。

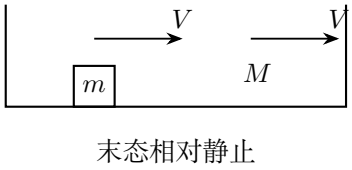


图 2.15: 解答过程：车厢内的多次碰撞

碰前动量仅由物体贡献，碰后两者共同运动，故

$$mv_0 = MV + mV = (M+m)V, \qquad \boxed{V = \frac{mv_0}{M+m}}.$$

碰撞使内部相对运动逐渐衰减；车厢长度和碰撞次数影响达到共速所需的过程。共同速度介于 0 与 v_0 之间。

例 2.2 (迎面碰撞的方向判断)**.** 质量 1500 kg 的客车以 20 m/s 向南运动，与质量 3000 kg、向北运动的卡车碰撞后连在一起，并先向南滑行。忽略碰撞期间道路阻力冲量，求卡车碰前速率的范围。

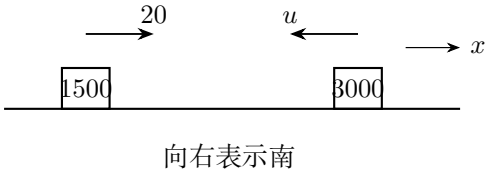


图 2.16: 题设：迎面碰撞的方向判断

解　规定南向为正并列带符号的动量式

按图 2.16 取向南为正，设卡车速率 $u > 0$，碰后共同速度为 V。动量守恒给 $1500 \times 20 - 3000u = 4500V$。

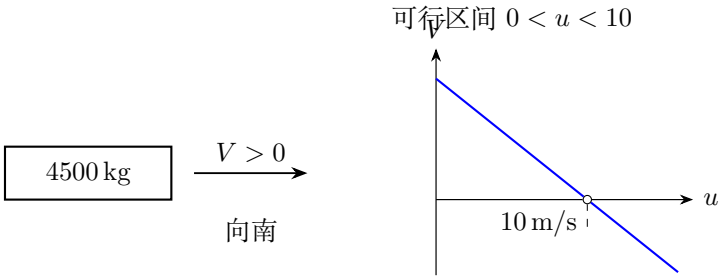


图 2.17: 碰后共同速度的符号由两初动量之差决定，临界值 $u = 10$ 对应两车刚碰后静止

将碰后方向化为分子符号条件

把速度显式解出，$V=(30000-3000u)/4500$。分母始终为正，因此碰后方向由分子唯一决定；当 $u=10\,\mathrm{m/s}$ 时两车刚碰后恰静止，不符合“先向南滑行”，所以所求速率取严格小于该值。

卡车速率的取值范围

图 2.17 的斜线表示 V 随 u 增大而减小。刚碰后向南的区间在横轴上方，对应 $30000-3000u>0$。结合题设卡车向北，$u>0$，得

$$\boxed{0<u<10\,\mathrm{m/s}}.$$

例 2.3 (车内敲击能否持续推进)**.** 人、锤和平板车组成的系统最初静止在光滑水平面上。人不断用锤敲打车的一端，能否在每个内部运动完全复原的循环后，使车获得持续向同一方向的位移或非零速度?

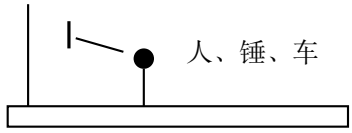


图 2.18: 题设：车内敲击能否持续推进

解　把挥锤与敲击都纳入同一物质系统

图 2.18 整个系统无水平外力，总动量始终为零，质心固定。挥锤时锤向左，人与车可以向右；敲击时又通过内部冲量重新分配动量，挥锤与敲击之间车随内部动量交换而移动。

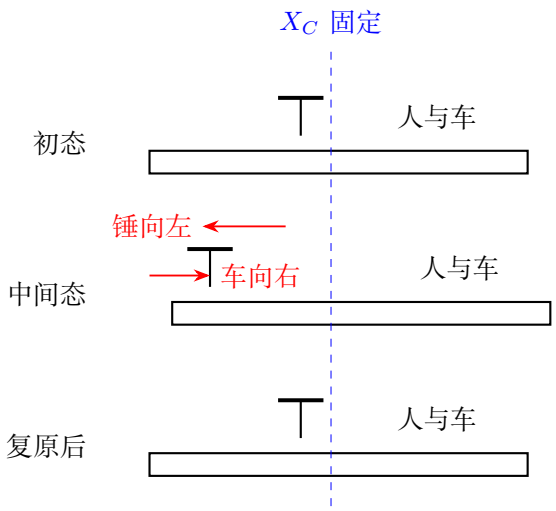


图 2.19: 内部挥锤可使车暂时移动，完全复原后位置与速度都恢复

用质心位置求循环后的位移

设车在一个循环后移动了 ΔX。人和锤都回到车内原来的相对位置，因此系统每一部分的位移都是 ΔX，质心位移也为 ΔX。初始总动量为零，质心保持在图中的竖直线上，所以 $\Delta X = 0$。

用末态总动量求车速

图 2.19 末态的人和锤都相对车静止。记共同对地速度为 V，系统总质量为 M_{tot}。由水平动量 $M_{\text{tot}}V = 0$，得 $V = 0$。车在一个完整循环后回到原位置并静止。

例 2.4 (车内单摆的瞬时碰撞)**.** 车架质量 M，车内悬挂质量 m_0 的单摆，摆线最初竖直。车与摆一起以 v 运动，车架与正前方静止的质量 m 木块发生极短碰撞。求摆球的瞬时水平速度，并分别写出一般碰撞及车、木块粘合时的水平动量关系。

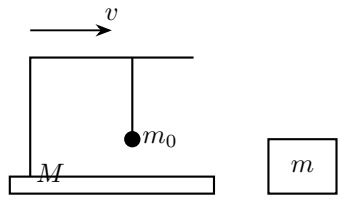


图 2.20: 题设：车内单摆的瞬时碰撞

解　利用竖直绳确定摆球水平冲量为零

图 2.20 中绳竖直。碰撞时间趋于零时，有限摆角变化趋于零，绳的约束冲量沿竖直方向，摆球水平动量保持原值，所以 $\boxed{v'_{0x}=v}$。这是碰撞刚结束时的水平速度；随后绳转动，摆球开始相对于车架摆动。

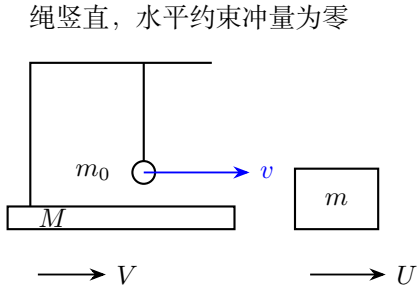


图 2.21: 碰撞刚结束时摆球仍保留原水平速度，车架与木块另有末速度

摆球与车块的水平冲量

对摆球单独取水平分量，有 $m_0(v'_{0x}-v)=I_{\text{绳},x}=0$。对车架与木块组成的子系统，摆绳在该瞬间也不传递水平冲量，故这一子系统的水平动量也可单独守恒；摆球在总动量方程中具有相同的初末水平动量，因而两项相消。

写一般碰撞关系，再加入粘合条件

设图 2.21 车架、木块末速度为 V,U。整个系统水平方向动量守恒为 $(M+m_0)v=MV+mU+m_0v$，消去摆球相同的初、末动量得 $\boxed{Mv=MV+mU}$。若车和木块粘合，$V=U$，故 $V=Mv/(M+m)$。碰撞结束时，摆球保留 v，而粘合的车块以 $Mv/(M+m)$ 运动，两者产生相对运动。

例 2.5 (从滑板车上向前跳出)**.** 质量 m 的人与质量 M 的滑板车以速度 v 向前运动。人以相对车的水平速度 u 向前跳离，忽略外部水平冲量。求人和车的对地末速度，并判断车何时后退。

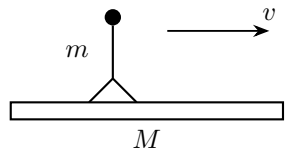


图 2.22: 题设：从滑板车上向前跳出

解　将相对车的跳速换成对地末速度

图 2.22 的共同初动量为 $(M+m)v$。设车对地速度为 V，则人对地速度为 $V+u$。所以

$$(M+m)v = MV + m(V+u), \qquad \boxed{V = v - \frac{m}{M+m}u}.$$

$u = v_{人} - V$，相对速度向前

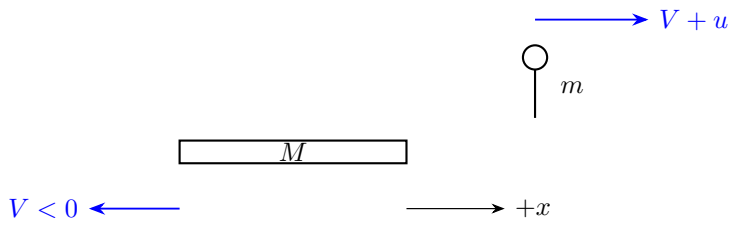


图 2.23: 对地速度按同一正方向取符号；图示跳速足够大时车后退的情形

求车与人的两个速度表达式

展开动量式右边为 $(M+m)V+mu$，移项得 $(M+m)(V-v) = -mu$。人的对地速度则由 $V+u = v - mu/(M+m) + u$ 得到；合并 u 项后系数为 $M/(M+m)$。

以车速符号判断是否真正后退

图 2.23 示出车已后退的一种情形，通式中的 V 始终是有符号的对地速度。速度相加，人的末速度为

$$\boxed{v_{人} = v + Mu/(M+m)}.$$

当 $u > (M+m)v/m$ 时车相对地面后退；否则仍向前或恰好静止。跳离使车速减小 $mu/(M+m)$，只有这项减小量大于原速度 v 时，车才相对地面后退。

例 2.6 (抛沙袋避免相撞)**.** 甲质量 45 kg，携带 5 kg 沙袋，以 1 m/s 向右滑行；乙质量 40 kg，以 0.5 m/s 向左滑行。甲把沙袋向右抛给乙并被接住。忽略冰面阻力，求使两人此后不再接近的沙袋最小对地速度，以及乙接袋后的速度。

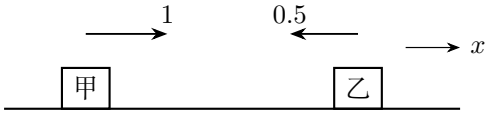


图 2.24: 题设：抛沙袋避免相撞

解　对抛袋与接袋两个阶段分别列式

按图 2.24 取向右为正，设沙袋对地速度为 u。抛袋瞬间 $50\times 1=45V_A+5u$；乙接袋时 $40(-0.5)+5u=45V_B$。故 $V_A=(50-5u)/45$，$V_B=(-20+5u)/45$。

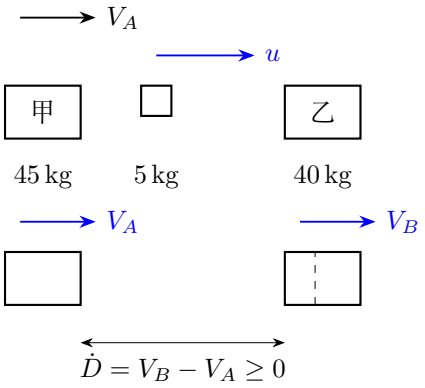


图 2.25: 先抛出、再接住分别涉及不同系统；接袋后比较两人的速度差

区分两次冲量对应的研究对象

两个动量式对应不同时间段：甲抛袋时乙尚未受到冲量，乙接袋时甲已与袋分离；因此应分别求 V_A,V_B，再比较二人距离的变化率 $\dot{D}=V_B-V_A$。这一变化率非负才表示接袋后不再接近。

使二人间距停止减小的最小抛速

在图 2.25 中甲仍在乙左侧，不再接近要求 $V_A\leq V_B$。于是 $50-5u\leq -20+5u$，即

$$\boxed{u_{\min}=7\,\mathrm{m/s}};$$

临界时两人速度同为

$$\boxed{V_A=V_B=1/3\,\mathrm{m/s}}.$$

沙袋相对于甲的速度

最小对地抛速为 $7\,\mathrm{m/s}$。抛袋前甲对地速度为 $1\,\mathrm{m/s}$，抛袋后为 $1/3\,\mathrm{m/s}$，故沙袋相对这两个匀速参考系的速率分别为 $7-1=6\,\mathrm{m/s}$ 和 $7-1/3=20/3\,\mathrm{m/s}$。飞行中沙袋向右、乙向左，两者相向接近。

例 2.7 (物块滑上自由木板)**.** 质量 m 的小物块以 v_0 滑上静止、质量 M 的长木板。板下光滑，块板间动摩擦因数 μ，木板足够长。求共速时间、共同速度及保证物块不滑出的最小板长。

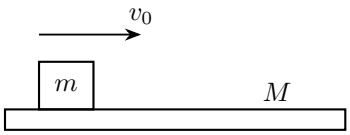


图 2.26: 题设：物块滑上自由木板

解　由两物体加速度求相对减速率

图 2.26 中滑动时摩擦力 $f=\mu mg$，对块向左、对板向右。两者加速度分别为 $-\mu g$、$\mu mg/M$，相对加速度为 $-\mu g(1+m/M)$。先用各自的初速度积分，再确定何时相对速度降为零。

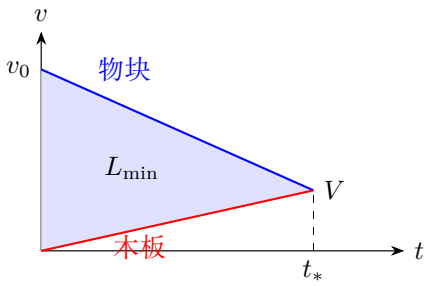


图 2.27: 共速前两速度之差始终为正，两条速度线之间的面积是相对滑程

共速时刻与共同速度

在共速前，分别由初值 $v_m(0)=v_0$、$v_M(0)=0$ 积分，

$$v_m-v_0=\int_0^t -\mu g\,\mathrm{d}\tau=-\mu g[\tau]_0^t=-\mu g t,\qquad v_M=\int_0^t \frac{\mu mg}{M}\,\mathrm{d}\tau=\frac{\mu mg}{M}t.$$

令两速度相等，得 $v_0=\mu g(1+m/M)t_*$，因而

$$t_*=\frac{v_0}{\mu g(1+m/M)}=\frac{Mv_0}{\mu g(M+m)}.$$

在 $0\le t<t_*$，相对速度 $u(t)=v_0[1-t/t_*]>0$，故摩擦方向与假设一致。代入板的速度式，得共同速度 $V=(\mu mg/M)t_*=mv_0/(M+m)$。

以两速度线间的面积求最小板长

图 2.27 中两条速度线之间的面积为相对位移。按刚求出的 $u(t)$ 积分，

$$L_{\min}=\int_0^{t_*} v_0\left(1-\frac{t}{t_*}\right)\mathrm{d}t=v_0\left[t-\frac{t^2}{2t_*}\right]_0^{t_*}=v_0\left(t_*-\frac{t_*}{2}\right)=\frac{1}{2}v_0t_*.$$

因此

$$\boxed{L_{\min}=\frac{1}{2}v_0t_*=\frac{Mv_0^2}{2\mu g(M+m)}}.$$

物块恰在板右端达到共速时取得这个最小长度。板在接收动量的同时向前移动，所以板长对应两物体对地位移之差。

例 2.8 (活动半圆槽中的位移)**.** 质量 M 的半圆槽放在光滑水平面上，半径 R，槽内无摩擦。质量 m 的小球从左侧槽口由静止开始滑下，求它第一次到达右侧最高位置时槽的速度和小球对地水平位移。

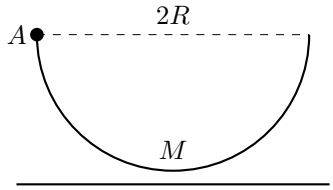


图 2.28: 题设：活动半圆槽中的位移

解　右侧转折点的状态

图 2.28 中的球与槽初始静止，总水平动量为零。小球到达右侧最高位置时，相对槽的速度为零，两者具有共同的水平速度 V。于是

$$(M+m)V=0,\qquad \boxed{V=0}.$$

两者在这一瞬间都静止，初末总动能均为零。槽面光滑，系统机械能守恒，所以小球回到与左侧槽口相同的高度，相对槽跨过了直径 $2R$。

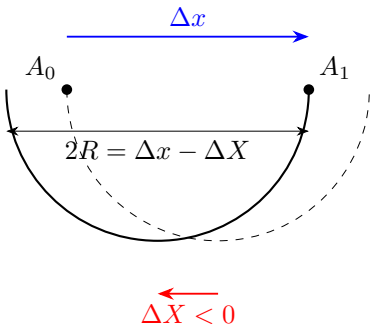


图 2.29: 槽向左平移而小球相对槽跨过直径，两个对地位移的差为 $2R$

由质心位置求对地位移

取向右为正。图 2.29 中槽的对地位移为 ΔX，球的对地位移为 Δx。两者位移之差给相对位移，质心水平位置保持不变，故

$$\Delta x - \Delta X = 2R, \qquad m\Delta x + M\Delta X = 0.$$

将 $\Delta x = \Delta X + 2R$ 代入第二式，

$$(M+m)\Delta X + 2mR = 0.$$

因此

$$\boxed{\Delta X = -\frac{2mR}{M+m}, \qquad \Delta x = \frac{2MR}{M+m}}.$$

槽向左移动，小球的对地水平位移因而小于它相对槽走过的直径。

例 2.9 (弹簧释放与悬绳张力)**.** 水平长板长 L、质量 $M_{板}$，其质心距左端 $x_{板}$；左端在 O 铰接、右端由竖直轻绳悬住，板保持水平。板上质量 m_A, m_B 的两物块间有压缩轻弹簧，释放后分别向两端运动。板面光滑，忽略物块滑出前的振动，判断悬绳张力怎样变化。

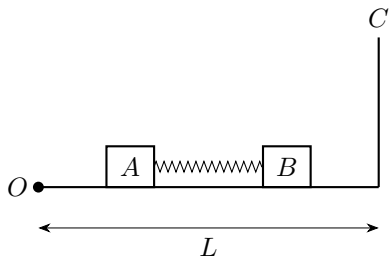


图 2.30: 题设：弹簧释放与悬绳张力

解　隔离两物块，确定给板的竖直载荷

图 2.30 的弹簧力水平且内部成对，板面对物块没有水平力，故两物块的总水平动量守恒。它们没有竖直加速度，各自给板的向下作用力分别为 m_Ag, m_Bg。

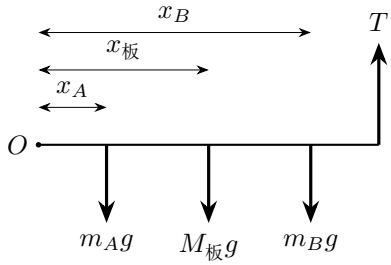


图 2.31: 解答过程：弹簧释放与悬绳张力

由水平总动量零证明加权位置不变

若弹簧释放前两块均静止，水平合动量为零，故对任意时刻都有 $m_A\dot{x}_A + m_B\dot{x}_B = 0$。从初始时刻积至 t，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t (m_A\dot{x}_A + m_B\dot{x}_B)\,\mathrm{d}\tau \\ &= m_A[x_A(\tau)]_0^t + m_B[x_B(\tau)]_0^t. \end{aligned}$$

把初始位置项移到右侧，得 $m_Ax_A(t) + m_Bx_B(t) = m_Ax_A(0) + m_Bx_B(0)$。这项加权和恰好出现在两块重力对铰点的力矩中，因此不需要求弹簧力的具体变化。

将加权位置代入板的力矩方程

按图 2.31 对保持水平的板绕 O 列力矩平衡：$TL = m_Agx_A + m_Bgx_B + M_{板}gx_{板}$。右端是 $g(m_Ax_A + m_Bx_B)$ 加固定板重力矩，均不变，故 $\boxed{T\text{保持不变}}$。个别物块离铰点的距离在变，但两者的质量加权位置不变。结论仅适用于两块仍在板上、板保持水平的阶段。

例 2.10 (航行中的人船位移)**.** 质量 m 的人站在质量 M、长 L 的船尾，人与船以 v 在无阻力水面匀速航行。人用时间 T 走到船头，求这段时间船的对地位移。

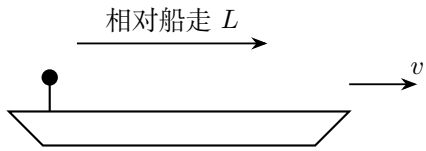
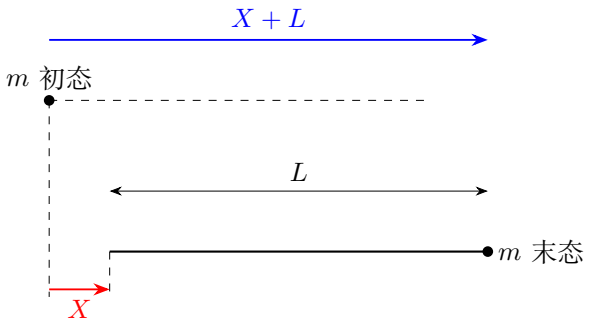


图 2.32: 题设：航行中的人船位移

解　用质心位移联系人的行走与船的移动

取图 2.32 中船头方向为正，设船在时间 T 内的对地位移为 X。人在船上从尾走到头，相对船的位移为 L，所以图 2.33 中人的对地位移为 $X+L$。



$$MX + m(X+L) = (M+m)vT$$

图 2.33: 用同一地面参考系比较船和人的初末位置，质心保留原有匀速位移

人与船组成的系统没有水平外力，质心以原有速度 v 匀速前进，位移为 vT。由质量加权的位移关系，

$$MX + m(X+L) = (M+m)vT,$$
$$(M+m)X + mL = (M+m)vT.$$

移项并除以总质量，得到

$$\boxed{X = vT - \frac{mL}{M+m}}.$$

船的位移比质心位移少 $mL/(M+m)$，这一差值来自人的向前行走。人的加速、减速会改变船的瞬时速度，初末位移关系由行走总距离确定。$v=0$ 时船后退 $mL/(M+m)$；$vT > mL/(M+m)$ 时，船对地仍向前移动。

例 2.11 (移动半球上的轨迹)**.** 质量 M、半径 R 的光滑半球置于光滑水平面上。质量 m 的小球从顶端受微小扰动后沿外表面下滑。以半球初始球心为原点，求小球离开球面以前的轨迹方程。

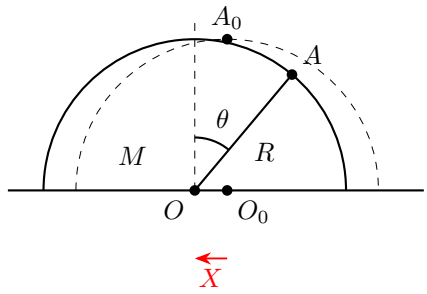
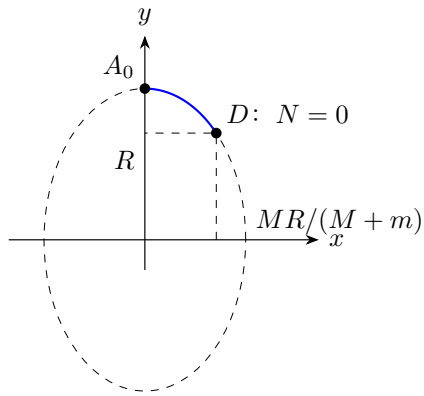


图 2.34: 球沿移动球面下滑，球心 O 相对初始位置 O_0 向左平移

解　用接触几何和质心不动写参数方程

按图 2.34 令半球球心横坐标为 X，小球相对竖直轴转角为 θ。球的坐标是 $x = X + R\sin\theta$、$y = R\cos\theta$。水平质心不动，$MX + mx = 0$，所以

$$X = -\frac{m}{M+m}R\sin\theta, \qquad x = \frac{M}{M+m}R\sin\theta.$$



虚线是几何延拓，蓝线才是接触轨迹

图 2.35: 接触几何给出椭圆，真正运动只取到支持力第一次降为零的部分

消去参数得到接触轨迹的几何形状

消去图 2.35 中的参数 θ，得到椭圆弧

$$\boxed{\frac{x^2}{[MR/(M+m)]^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1}.$$

同时计入球与半球的动能

这段椭圆弧描述小球与半球保持接触的阶段。为确定图 2.35 中蓝线的终点 D，令 $\eta = m/(M+m)$。坐标依赖时间是通过 $\theta(t)$ 实现的，链式法则给 $\mathrm{d}(\sin\theta)/\,\mathrm{d}t = \cos\theta\,\dot\theta$、$\mathrm{d}(\cos\theta)/\,\mathrm{d}t = -\sin\theta\,\dot\theta$。代入前面的位移式，

$$\dot X = -\eta R\cos\theta\dot\theta, \quad \dot x = (1-\eta)R\cos\theta\dot\theta, \quad \dot y = -R\sin\theta\dot\theta.$$

把球与半球的动能一起写出。先代入各速度，

$$K = \frac{1}{2}R^2\dot\theta^2\left\{[M\eta^2 + m(1-\eta)^2]\cos^2\theta + m\sin^2\theta\right\}.$$

括号中余弦项的系数可先合并为

$$\begin{aligned} M\eta^2 + m(1-\eta)^2 &= \frac{Mm^2 + mM^2}{(M+m)^2} \\ &= \frac{mM}{M+m} = m(1-\eta). \end{aligned}$$

再与正弦项相加，利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，

$$m[(1-\eta)\cos^2\theta + \sin^2\theta] = m(1-\eta\cos^2\theta).$$

所以两物体的总动能为

$$K = \frac{1}{2}M\dot X^2 + \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot\theta^2(1-\eta\cos^2\theta).$$

能量守恒 $K = mgR(1-\cos\theta)$，所以

$$R\dot\theta^2 = \frac{2g(1-\cos\theta)}{1-\eta\cos^2\theta}.$$

以单向接触条件截取实际轨迹

为确定何时首次失去接触，先保留图中球面支持力 N。半球的水平运动方程为 $M\ddot X = -N\sin\theta$。对小球沿球心指向小球的径向向外投影，绝对加速度在该方向为 $\ddot X\sin\theta - R\dot\theta^2$，故

$$m(\ddot X\sin\theta - R\dot\theta^2) = N - mg\cos\theta.$$

代入 $\ddot X = -N\sin\theta/M$ 并收集 N 项，

$$N\left(1 + \frac{m}{M}\sin^2\theta\right) = m(g\cos\theta - R\dot\theta^2).$$

括号始终为正，故脱离时 $N = 0$ 要求 $R\dot\theta^2 = g\cos\theta$；此时半球水平加速度也为零。令 $c = \cos\theta_d$，与能量式联立，交叉相乘得 $2(1-c) = c(1-\eta c^2)$。

所以离开角满足

$$\eta\cos^3\theta_d - 3\cos\theta_d + 2 = 0.$$

当 $0<\eta<1$ 时，令 $f(c)=\eta c^3-3c+2$。求导得 $f'(c)=3\eta c^2-3<0$，因为 $0<c<1$ 使 $\eta c^2<1$。又有 $f(0)=2>0, f(1)=\eta-1<0$，故恰有一个物理解。$M\to\infty$ 时椭圆恢复圆，且 $\cos\theta_d\to 2/3$，与固定球面结果一致。

例 2.12 (斜射入摆球的子弹)**.** 质量 20 g 的子弹以 400 m/s 的速度射入静止、质量 980 g 的摆球并留在其中。碰撞时摆绳竖直，入射方向与竖直方向成 30°、斜向下。求碰后球与子弹共同速度。

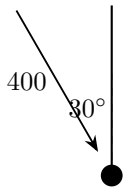


图 2.36: 题设：斜射入摆球的子弹

解　确定绳冲量方向和入射水平分量

图 2.36 中摆线在极短碰撞中保持竖直，其冲量竖直。水平方向没有外冲量，而子弹的水平速度为 $400\sin 30^\circ=200\,\mathrm{m/s}$。

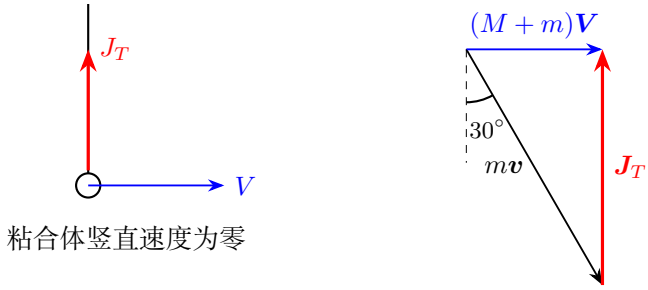


图 2.37: 绳冲量补足竖直动量变化，水平方向动量直接传给粘合体

把速度约束与可守恒分量对应

绳不伸长使粘合体在最低点的速度沿水平方向，其竖直分量为零，绳冲量使子弹的竖直动量降为零；在水平方向则总质量为 1.000 kg，入射水平动量为 4.0 kg m/s。

共同水平速度与绳冲量

按图 2.37 仅对水平方向写守恒：$0.020\times 200=(0.020+0.980)V$，得到

$$\boxed{V=4.0\,\mathrm{m/s}},$$

方向沿入射水平分量。由图 2.37 的竖直动量变化，还可求出 $J_T = mv\cos 30^\circ = 4\sqrt{3}\,\mathrm{N\,s}$，方向向上。竖直绳提供向上的有限冲量，而水平方向的速度由水平动量守恒确定。

例 2.13 (二维散射的分量合成)**.** 质量 m 的粒子以 v_0 沿 x 轴正方向撞向静止、质量 $2m$ 的粒子。碰后第一粒子以 $v_0/2$、偏向 x 轴上方 45° 运动。求第二粒子的速率与偏转角。

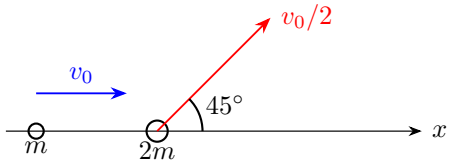


图 2.38: 两粒子初态只有入射粒子具有动量，末态第一粒子偏向上方

解　对两粒子整体分解水平与竖直动量

对图 2.38 两粒子取整体，没有外冲量。第一粒子末速度分量均为 $v_0/(2\sqrt{2})$，所以

$$mv_0 = m\frac{v_0}{2\sqrt{2}} + 2mV_x, \qquad 0 = m\frac{v_0}{2\sqrt{2}} + 2mV_y.$$

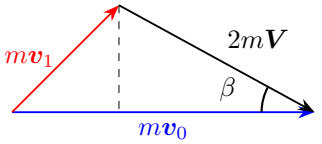


图 2.39: 末态两个动量矢量首尾相接，应等于原来的水平总动量

先求第二粒子的两个速度分量

于是 $V_x = v_0(1 - 1/(2\sqrt{2}))/2$，$V_y = -v_0/(4\sqrt{2})$。先把分量统一写成 $V_x = v_0(2\sqrt{2}-1)/(4\sqrt{2})$、$V_y = -v_0/(4\sqrt{2})$。于是 $V^2 = v_0^2[(2\sqrt{2}-1)^2+1]/32 = v_0^2(5-2\sqrt{2})/16$；角度由 $\tan\beta = |V_y|/V_x$ 求出，负的 V_y 确定偏向下方。

合成速率并由符号确定偏转方向

依图 2.39 合成得到

$$\boxed{V = \frac{v_0}{4}\sqrt{5-2\sqrt{2}}}, \qquad \boxed{\tan\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}-1}}.$$

第二粒子偏向 x 轴下方，$\beta \approx 28.7^\circ$。方向与第一粒子的横向动量相反，才能使总横向动量为零。给定第一粒子的末速度后，两个动量分量方程便确定了第二粒子的速度。

例 2.14 (给定末速度与粘合碰撞)**.** 光滑水平面上，质量 2 kg 的 A 以 10 m/s 撞向静止、质量 1 kg 的 B。分别求：(1) 碰后 A 速度为 5 m/s 时 B 速度；(2) 两箱粘合时共同速度。

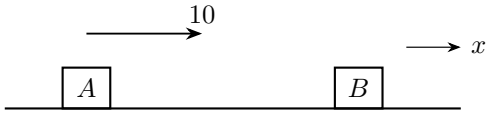


图 2.40: 题设：给定末速度与粘合碰撞

解　在给定第一粒子末速度时求另一速度

图 2.40 初始水平总动量为 20 kg m/s。若 A 碰后仍向前且速度为 5 m/s，则 $20 = 2 \times 5 + v_B$，得到

$$\boxed{v_B = 10\,\mathrm{m/s}}.$$

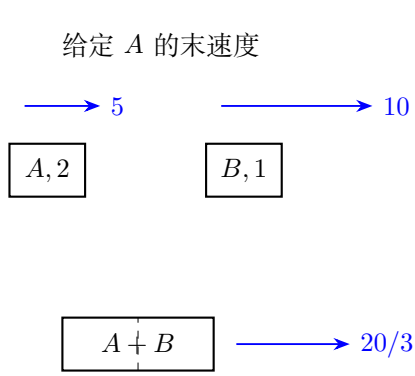


图 2.41: 同一初始状态分别对应给定末速度与粘合两种末态

区分给定速度与永久粘合两个末态

两种末态分别补充了不同的一条关系：第一问给定 $v_A = 5$，第二问给定 $v_A = v_B$。每问以相应末态条件配合总动量方程求速度。

粘合速度与两种末态动能

若按图 2.41 粘合，则 $20 = 3V$，得到

$$\boxed{V = 20/3\,\mathrm{m/s}}.$$

两个问法的共同依据是总动量守恒，但附加末态条件不同。第一问碰后动能为 75 J，第二问为 200/3 J，都小于初始 100 J，分别对应不同的动能损失。

例 2.15 (火箭的质量比)**.** 火箭初始质量 M_0，相对惯性系初始速度 V_0。燃气以相对火箭恒定速率 u 向后喷出，忽略外力。求质量降到 M 时火箭速度，并与分为 N 次等质量喷射、一次抛出全部燃料比较。有限次抛出时，约定每团燃料相对该次抛出后的火箭向后速率为 u，且均无外力。

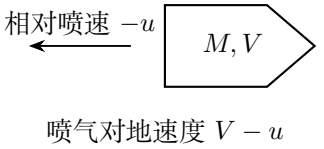


图 2.42: 题设：火箭的质量比

解　保留喷出燃料，写封闭微元动量式

对图 2.42 喷出一小团质量 δm 的过程，取喷出前全部火箭物质为系统。动量式为 $MV = (M - \delta m)(V + \mathrm{d}V) + \delta m(V - u)$，舍去 $\delta m\,\mathrm{d}V$，得到 $M\,\mathrm{d}V = u\delta m = -u\,\mathrm{d}M$。

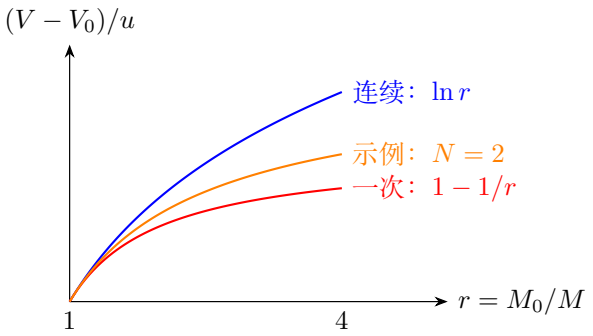


图 2.43: 相同相对喷速约定下，有限次喷射介于一次抛出与连续喷射之间

由质量变化积分求速度增量

按图 2.43 从初始质量 M_0 积分至 M，以 $\mathcal{M}$ 作质量积分变量，

$$\int_{V_0}^{V} \mathrm{d}W = -u \int_{M_0}^{M} \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathcal{M}}.$$

右侧令 $q=\mathcal{M}/M_0$，则 $\mathrm{d}\mathcal{M}=M_0\,\mathrm{d}q$，上下限由 M_0,M 变为 $1,M/M_0$，所以

$$V-V_0=-u\int_1^{M/M_0}\frac{\mathrm{d}q}{q}=-u[\ln q]_1^{M/M_0}=-u[\ln(M/M_0)-\ln 1].$$

因此

$$\boxed{V=V_0+u\ln(M_0/M)}.$$

质量下降时 $\ln(M/M_0)<0$，所以速度增量为正。对数的自变量是无量纲质量比。若只喷出很少燃料 $\Delta M\ll M_0$，有 $\ln(M_0/M)\simeq\Delta M/M_0$，速度增量近似为 $u\Delta M/M_0$。

按末态相对喷速逐次列动量关系

按题设，每团燃料的末速度都比该次喷出后的火箭速度小 u。令 $\delta m=(M_0-M)/N$、$M_j=M_0-j\delta m$，第 j 次前后速度为 V_{j-1},V_j。该次动量守恒为

$$M_{j-1}V_{j-1}=M_jV_j+\delta m(V_j-u),\quad V_j-V_{j-1}=\frac{u\delta m}{M_{j-1}}.$$

逐次累加得

$$\Delta V_N=u\delta m\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{M_0-(j-1)\delta m}.$$

比较一次、有限次与连续喷射

一次抛出对应 $N=1$，所以 $\Delta V_1=u(1-M/M_0)$。把总燃料细分时，每一后续小团都从质量更小、已经加速的火箭上离开。由递增函数 $1/(M_0-s)$ 的左端点和与积分比较，

$$\Delta V_1\le\Delta V_N<u\int_0^{M_0-M}\frac{\mathrm{d}s}{M_0-s}.$$

在右端积分中令 $z=M_0-s$，$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}s$，上下限依次由 $0,M_0-M$ 变为 M_0,M，故

$$u\int_0^{M_0-M}\frac{\mathrm{d}s}{M_0-s}=-u\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-u\left[\ln\frac{z}{M_0}\right]_{M_0}^{M}=u\ln\frac{M_0}{M}.$$

其中 $N>1$ 时有 $\Delta V_N>\Delta V_1$；$N\to\infty$ 时有限和趋于连续结果。图 2.43 还画出 $N=2$ 作为中间情形。相同的质量比和相对喷速下，等质量喷射分得越细，速度增量越接近连续喷射结果。

例 2.16 (木板上两人互换位置)**.** 质量 M、长 L 的木板在光滑水平面上静止，左端站质量 m_1 的人，右端站质量 m_2 的人。两人缓慢互换到对方初始所占的板端，最后相对板静止。求木板位移，讨论两人质量相等时的结果。

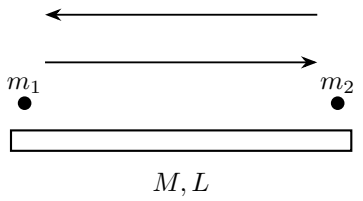


图 2.44: 题设：木板上两人互换位置

解　把两人的位移写到地面系中

按图 2.44 取向右为正，设板的位移为 X。左端的 m_1 向右走一个板长，右端的 m_2 向左走一个板长；两人的对地位移分别为 $X+L$ 和 $X-L$，如图 2.45 所示。

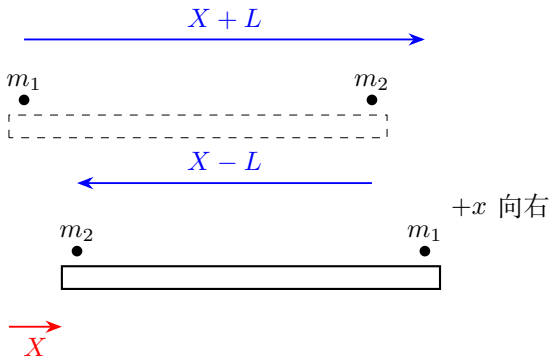


图 2.45: 对同一板端跟踪平移，再给两人分别加上有符号的相对位移

全系统没有水平外力，初始静止，故质心水平位置保持不变。三个物体的质量乘对地位移之和为零：

$$MX + m_1(X+L) + m_2(X-L) = 0,$$
$$(M + m_1 + m_2)X + (m_1 - m_2)L = 0.$$

于是

$$\boxed{X = \frac{(m_2 - m_1)L}{M + m_1 + m_2}}.$$

右端的人较重时，向左行走的质量较多，板最终向右移。$m_1 = m_2$ 时，两人的质量加权相对位移相消，板的最终位移为零；两人若不同步行走，板可以在途中移动，最后回到原位。

例 2.17 (接收竖直落雨的小车)**.** 质量 M_0 的小车在光滑水平面以 v_0 运动，雨滴相对地面的水平速度为零，以恒定质量流率 q 被车接住而不流走。忽略其他水平作用，求时间 t 时车速及保持 v_0 所需的推力。

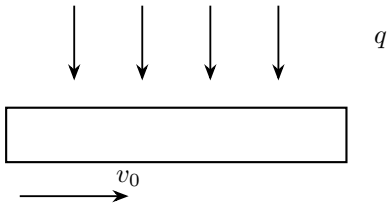


图 2.46: 题设：接收竖直落雨的小车

解　将已接雨水计入车的运动质量

图 2.46 雨滴进入前不带水平动量，车与已接收雨水的水平动量始终等于 M_0v_0。质量为 $M(t)=M_0+qt$，所以

$$\boxed{V(t)=M_0v_0/(M_0+qt)}.$$

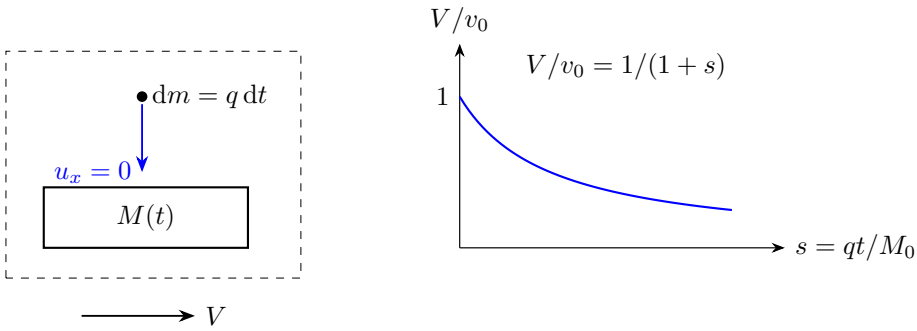


图 2.47: 雨滴入车前没有水平动量，车把它加速后自身速度降低

短时间内的动量方程

在 $\mathrm{d}t$ 内取车、已有水和即将落入的 $q\,\mathrm{d}t$ 雨滴为封闭系统，水平式为 $MV+F\,\mathrm{d}t=(M+q\,\mathrm{d}t)(V+\mathrm{d}V)$。展开后舍去 $q\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V$，得到 $M\,\mathrm{d}V+qV\,\mathrm{d}t=F\,\mathrm{d}t$。对前面的自由小车速度求导，常分子与倒数的链式法则给

$$\dot{V}=-M_0v_0(M_0+qt)^{-2}q=-\frac{qV}{M_0+qt}=-\frac{qV}{M}.$$

这恰好满足 $F=0$ 时的微元动量方程。

求匀速推力并解释自由车减速

按图 2.47 微元动量式，若另有推力 F，则 $M\dot{V} = F - qV$。要保持 $V = v_0$，需 $\boxed{F = qv_0}$。自由小车不断把原来没有水平速度的雨滴加速，已有车水部分的速度随质量增加而减小。若把车和将来接入的雨一起研究，总水平动量保持初值。

例 2.18 (最高点爆炸的抛体)**.** 质点以水平分量 u、竖直分量 w 从水平地面抛出。在最高点瞬时爆炸为两个等质量碎片，其中一片爆炸后相对地面瞬时静止，另一片水平运动。忽略空气阻力，求两碎片落地点，并求两片触地前的质心位置。

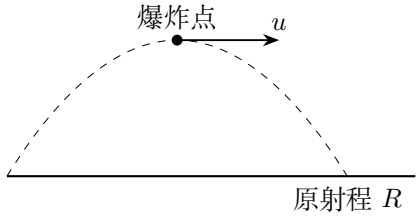


图 2.48: 题设：最高点爆炸的抛体

解　在爆炸瞬间守恒动量，确定两片速度

图 2.48 原射程 $R = 2uw/g$，最高点在 $x = R/2$，余下自由落体时间为 $T = w/g$。爆炸外冲量可忽略，水平方向 $2mu = m \times 0 + mv_2$，所以另一碎片速度为 $2u$；两片竖直初速度均为零。

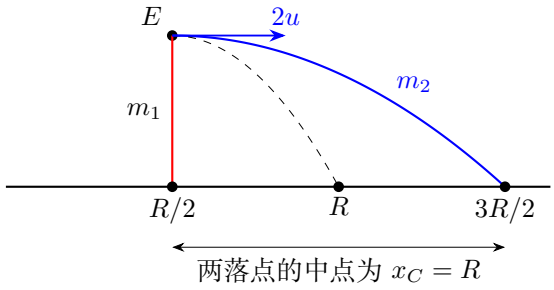


图 2.49: 两碎片竖直初速度相同，故同时落地；同一时刻质心仍在原轨迹上

两片的下落时间

最高点的高度为 $H = w^2/(2g)$，从该高度竖直初速度为零落下需 $\sqrt{2H/g} = w/g$。两片在爆炸后都没有竖直速度，因此确实同时触地；两片触地前处于同一时刻，可以把它们的位置按质量加权，求出质心位置。

落地点与同一时刻的质心位置

按图 2.49 两片同时落地，第一片在 $\boxed{x_1 = R/2}$，第二片在

$$\boxed{x_2 = R/2 + 2uT = 3R/2}.$$

落地前质心水平位置为 $(x_1 + x_2)/2 = R$，正好在未爆炸抛体落地点。从爆炸到触地前，全部碎片只受重力，质心继续沿原抛物线运动。

例 2.19 (两个物块在板内移动的统一位移式)**.** 光滑水平面上一块质量 M 的长板，板上两物块质量为 m_1, m_2，全体最初以 v 匀速运动。时间 T 内两块相对板的位移分别为 ℓ_1, ℓ_2，取向右为正，之后相对板静止。求板的对地位移及最终速度。

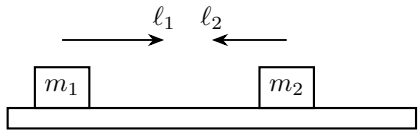
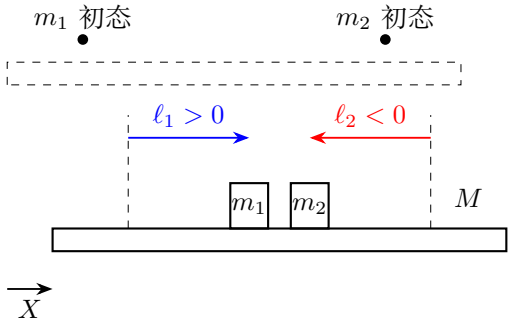


图 2.50: 题设：两个物块在板内移动的统一位移式

解　质心位移与板的位移

图 2.50 中的系统没有水平外力，质心在时间 T 内前进 vT。令板的对地位移为 X，图 2.51 中两块的对地位移分别为 $X + \ell_1$、$X + \ell_2$；向左的相对位移取负值。



$$\Delta x_1 = X + \ell_1, \quad \Delta x_2 = X + \ell_2$$

图 2.51: 先随板平移 X，再按各物块相对位移的方向到达实际末位置

按各质量对位移加权，

$$MX + m_1(X + \ell_1) + m_2(X + \ell_2) = (M + m_1 + m_2)vT,$$
$$(M + m_1 + m_2)X + m_1\ell_1 + m_2\ell_2 = (M + m_1 + m_2)vT.$$

把相对位移项移到右边，再除以总质量，

$$\boxed{X = vT - \frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2}{M + m_1 + m_2}}.$$

若 $m_1\ell_1 + m_2\ell_2 = 0$，板前进的距离恰为 vT；质量加权的相对位移向左时，板比质心多向右移动一段距离。

相对运动停止后的速度

末态三者相对静止，具有共同对地速度 V_f。总动量守恒给

$$(M + m_1 + m_2)V_f = (M + m_1 + m_2)v, \qquad \boxed{V_f = v}.$$

内部移动改变了板的末位置，最终共同速度则回到系统原有的质心速度。

例 2.20 (匀速整体中的相对速度突变)**.** 位于左、右两侧的物体质量分别为 m_1, m_2，原来共同以 V 匀速运动。内部装置瞬时释放能量 E，全部转化为两物体的平动动能，使它们沿原运动直线分离。无外冲量，求两者末速度，并说明为何释放能量与 V 无关。

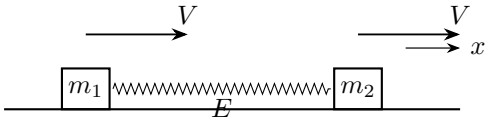


图 2.52: 题设：匀速整体中的相对速度突变

解　固定质心速度，使用分离速率表示末速度

图 2.52 初始相对速度为零，质心速度始终为 V。令两者的末相对分离速率为 $u > 0$，则 $v_1 = V - m_2u/(m_1 + m_2)$、$v_2 = V + m_1u/(m_1 + m_2)$，这些表达已满足动量守恒。



质心系：$m_1(v_1 - V) + m_2(v_2 - V) = 0$

图 2.53: 解答过程：匀速整体中的相对速度突变

展开动能并消去质心与相对运动交叉项

令 $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$。总动能展开时，V^2 项为 $(m_1+m_2)V^2/2$，两个交叉项为 $-\mu Vu$ 与 $+\mu Vu$，恰好相消；u^2 项的系数为 $\mu/2$。这样才得到只含相对速率的新增动能。

由释放能量求相对速率和两个末速度

按图 2.53 把速度代入总动能，新增部分为 $\mu u^2/2$，所以 $u=\sqrt{2E/\mu}$，$\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$。最终

$$\boxed{v_1 = V - \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2E}{\mu}},\quad v_2 = V + \frac{m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{2E}{\mu}}.}$$

质心匀速平移的动能保持原值，释放能量全部增加相对运动动能；V 只平移两个末速度。当左物体末速度仍为正时，两物体都向前运动，右物体速度较大，间距仍在增大。

2.10 本讲小结

质点组的合外力决定总动量的变化。相互作用内力成对相消，某方向合外力为零时，该方向总动量守恒。碰撞与分离题先选系统和时间段，再把给定相对速度换成同一惯性系中的速度，便可把动量关系与末态条件联立。

质心位置是各质点位置的质量加权平均，$M_\Sigma \boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{P}$，$M_\Sigma \boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{F}_{外}$。合外力为零时，质心保持初始速度：初始总动量非零时作匀速直线运动，为零时保持原位置。人船、活动槽和多人木板问题由初末位置的质心关系直接联系对地位移与相对位移。

连续分布的质心从当地质量微元积分求得。均匀重力场中的总势能为 $M_\Sigma g Y_C$；两物体的总动能可分成质心平移动能与相对运动动能。火箭喷射则在短时间内把喷出燃料与火箭一起研究，用动量定理建立微分式，再按初始质量和末质量积分。

2.11 练习

练习 2.1 (摆球粘到车上的泥团)**.** 光滑水平面上的小车最初静止，车上轻杆一端铰接，另一端固定小球。杆从水平位置释放，小球到最低点时与固定在车上的泥团粘合，并立即相对车静止。问此后车怎样运动，释放到粘合之间车是否一直静止?

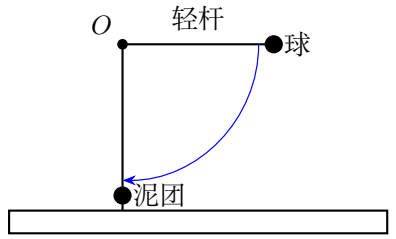


图 2.54: 水平杆释放后绕车上铰点转动，最低点正好对应泥团所在位置

练习 2.2 (反复向墙抛球)**.** 人和车总质量 $M = 16m$，球质量 m，整个系统最初静止在光滑水平面上。人每次把球以固定对地速率 v 向前方固定墙抛出，球在墙上以原速率反弹，再由人接住。求首次使反弹球追不上人车的抛出次数。

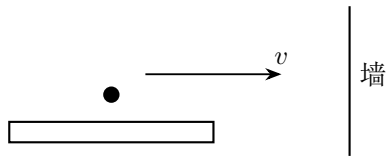


图 2.55: 题设：反复向墙抛球

练习 2.3 (相向弹簧碰撞的速度区间)**.** A, B 质量为 $3\,\mathrm{kg}, 2\,\mathrm{kg}$，初速度分别为向右 $4\,\mathrm{m/s}$、向左 $5\,\mathrm{m/s}$。两物体在光滑水平面上通过轻弹簧相互作用。以下均研究从开始接触到最大压缩的阶段。求谁先停止、此时另一物体速度；求最大压缩时的速度；并求 B 加速运动时 A 速度的范围。

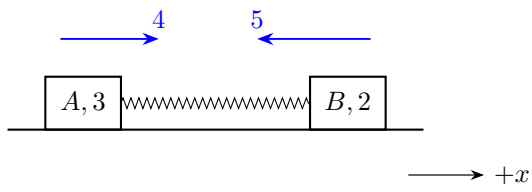


图 2.56: 初接触时弹簧连接两物体；压缩阶段它对两物体施相反方向的力

练习 2.4 (风扇、船帆与动量流)**.** 船上风扇向本船的帆吹出水平气流，单位时间喷出空气质量 q，气流相对岸的入帆速度为 u。船速很小，忽略迎风阻力。假设风扇从周围吸入水平速度为零的空气，气流经帆改变方向后离开船体，此后自由流走。分别讨论气流离帆后水平速度为零，以及完全反向、末速率仍为 u 时，船获得的水平推力。

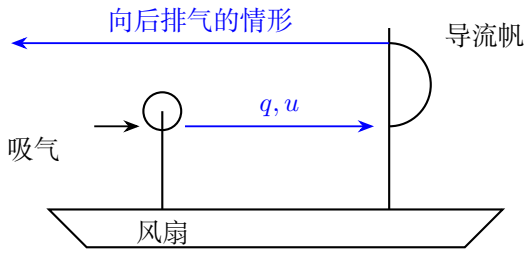


图 2.57: 船上同时有风扇与导流帆，末态气流离开船后不再与船接触

练习解答

练习 2.1

解　整体的水平动量与质心位置

取图 2.54 中的车、杆、球和泥团为系统。重力与地面支持力均竖直，系统没有水平外力，且初始总动量为零。球落到泥团中粘合后，各部分相对静止。设共同水平速度为 V_f、总质量为 M_Σ，由动量守恒有

$$M_\Sigma V_f = 0, \qquad \boxed{V_f = 0}.$$

因此粘合以后车静止。

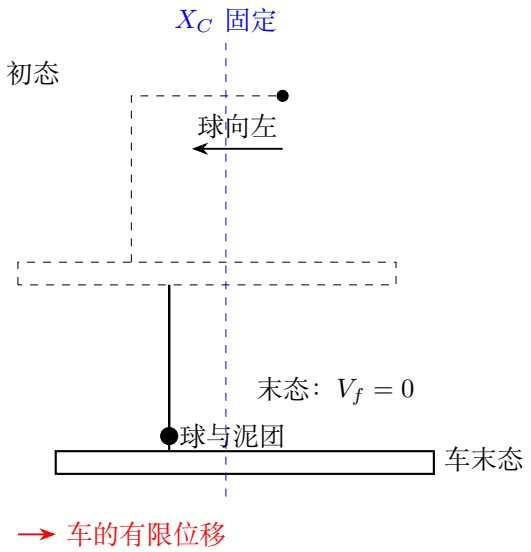


图 2.58: 球相对车向左摆下时车向右移动；粘合后各部分共同静止于新位置

图 2.58 中，球摆下时相对车向左移动。为使质心水平位置保持不变，车在摆动阶段向右移动。粘合使相对运动停止，车便停在这个向右移动后的新位置。

练习 2.2

解　分开抛出、墙上反弹和接回三个阶段

令图 2.55 中向墙为正，记第 n 次抛出后人车速度为 V_n。第一次由静止抛球，$MV_1 + mv = 0$，故 $V_1 = -mv/M$。若第 n 次仍能接回球，则接球前总动量为 $MV_n - mv$；下一次抛出后为 $MV_{n+1} + mv$，所以 $V_{n+1} = V_n - 2mv/M$。

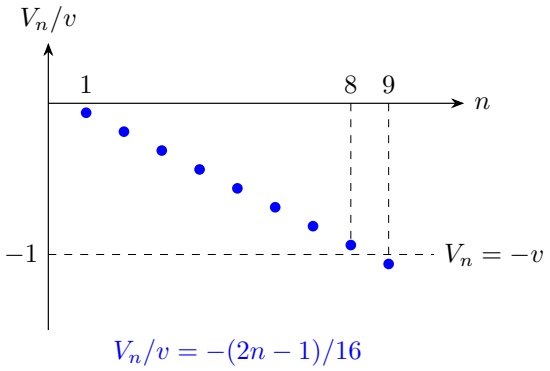


图 2.59: 每次抛出后的车速构成离散数列，第 9 次抛出后车向左的速率大于反弹球

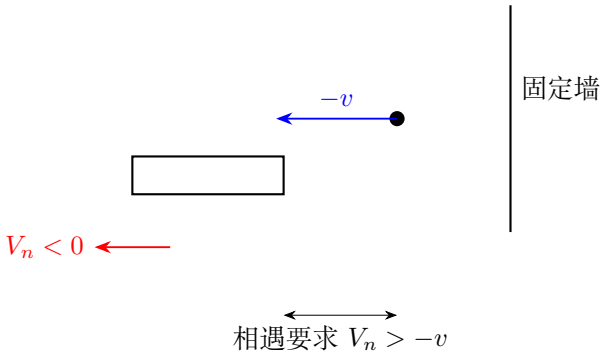


图 2.60: 反弹球从车的前方向左追赶，只有它比车向左更快时才能接回

由反弹球与车的追赶关系建立接回条件

图 2.60 表示球从人车前方向左追赶。每次成功接回后才能完成下一次抛出，所以下面计算首次失去追赶条件的次数。

把递推从第 1 次到第 n 次相加：$V_n = V_1 + (n-1)(-2mv/M) = -[1+2(n-1)]mv/M$。接球前人车速度保持 V_n，球向左速度为 $-v$；球要从人前方向左追到人，以比人更大的向左速率运动，即 $-v < V_n$。

首次失去追赶条件的抛出次数

由图 2.59 逐次累积得 $V_n = -(2n-1)mv/M$。反弹球以 $-v$ 运动，只有 $|V_n| < v$ 才能追上人车；若 $|V_n| \geq v$，不再相遇。因此 $2n-1 \geq 16$ 的最小整数为 $\boxed{n=9}$。球在固定墙上反弹时，墙给它向后的冲量 $-2mv$，这也是每轮人车与球总动量减少的来源。

练习 2.3

解　由弹簧力方向确定两个速度的单调性

按图 2.56 取向右为正，两物体的总动量为 $P = 3\times 4 + 2\times(-5) = 2\,\mathrm{kg\,m/s}$。弹簧压缩时对 A 的力向左、对 B 的力向右，所以 v_A 连续减小、v_B 连续增大，并始终满足

$$3v_A + 2v_B = 2.$$

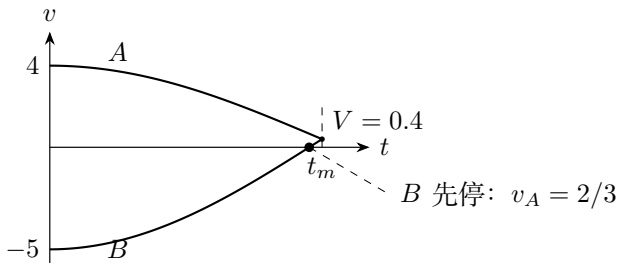


图 2.61: 解答过程：相向弹簧碰撞的速度区间

先求最大压缩速度，再判断谁先过零

图 2.61 的两条曲线在最大压缩时相交，这时相对速度为零，故共同速度为 $V = 2/(3+2) = 0.4\,\mathrm{m/s}$。在此之前，$v_A$ 从 4 减到 0.4，保持向右运动；v_B 从 -5 增到 0.4，必先经过零。令 $v_B = 0$ 代回动量式，得此时

$$\boxed{v_A = 2/3\,\mathrm{m/s}}.$$

区分向右加速度与速率真正增加

B 的加速度在压缩段一直向右。它向左运动时速率减小，只有越过零、向右运动后才是加速；这段 v_B 范围为 $0 < v_B \le 0.4$。由 $v_A = (2 - 2v_B)/3$，得到

$$\boxed{0.4 \le v_A < 2/3\,\mathrm{m/s}}.$$

图中的速度曲线斜率随弹簧压缩量改变，对应随时间变化的弹簧力。

练习 2.4

解　同时计入风扇反力与帆受力

图 2.57 风扇把初始近似静止空气加速到 u，船受到向后反作用力 $-qu$。若帆将气流变为水平静止，帆受到 $+qu$，二者相加为 $\boxed{F = 0}$。

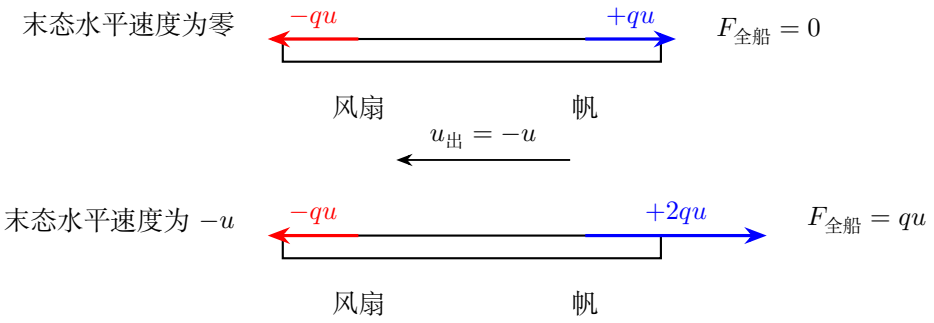


图 2.62: 先分别标出船上风扇与帆的反作用，再对全船相加

空气初末水平动量相同的情形

对于从近似水平静止进入风扇、最终又变为水平静止的空气，整体的水平动量流出率与流入率相等，故它对全船不提供净推力。把空气进入风扇到离帆的全过程合起来，风扇与帆对同一批气流的中间动量作用相消。

对反向出流相加两处反作用力

若按图 2.62 气流被帆完全反向，帆得到的向前力为 $2qu$，加上风扇的 $-qu$，总推力为 $\boxed{F=qu}$。这个结果也等于最终向后排出动量流的反作用。计算局部帆受力时可以得到较大的 $2qu$，全船推力则由风扇和帆两处受力相加得到。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第三讲

功与动能

2026

目录

第三讲　功与动能 **1**

3.1　运动物体的能量 1

3.2　力做功与动能定理 2

3.3　作用点的运动与系统的功 3

3.4　冲量与功所描述的过程 4

3.5　变力积分与弹簧做功 5

3.6　理想约束的内力总功 6

3.7　功率与速度传动 7

3.8　恒功率牵引与实际起步过程 8

3.9　速度与持续接触的条件 10

3.10 功率极值与临界能量 11

3.11 例题与分析 12

3.12 本讲小结 35

3.13 练习 36

练习解答 37

第三讲　功与动能

3.1　运动物体的能量

小球沿光滑轨道上升时逐渐减速，到达最高位置后又可以沿轨道滑回。初速越大，上升高度越大。运动状态与能够克服重力上升的高度之间，有一个由牛顿定律决定的定量关系。

设质量 m 的小球从高度为零处以速率 u 沿固定光滑轨道上升。取轨道弧长 s 沿运动方向增加，轨道切线与水平线夹角为 θ。支持力沿法线，重力的切向分量为 $-mg\sin\theta$，故

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg\sin\theta.$$

沿轨道的一小段有 $\mathrm{d}y = \sin\theta\,\mathrm{d}s$，又有 $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$。将运动方程乘以 $\mathrm{d}s$，得到

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,v\,\mathrm{d}t = -mg\sin\theta\,\mathrm{d}s, \qquad mv\,\mathrm{d}v = -mg\,\mathrm{d}y.$$

从初态 $(y=0, v=u)$ 积到转折点 $(y=h, v=0)$：

$$m\int_u^0 v\,\mathrm{d}v = -mg\int_0^h \mathrm{d}y, \qquad m\left[\frac{v^2}{2}\right]_u^0 = -mg[y]_0^h,$$

因而 $mu^2/2 = mgh$。小球运动所具有的能量，可以用它上升时转化成的重力势能来度量。质量 m、速率 v 的质点的**动能**为

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}.$$

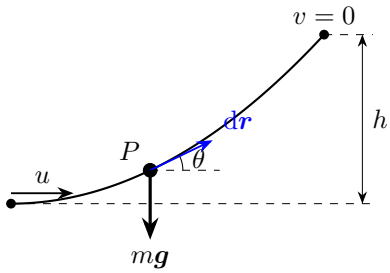


图 3.1: 沿固定光滑轨道上升，用切向运动方程把速率变化与高度变化联系起来

图 3.1 中的切向微位移把重力分量与高度微元联系起来。不同轨道只改变 θ 随位置的变化，积分后都得到相同的初速与上升高度关系。动能由物体当时的质量和速率确定，轨道形状则决定运动的具体过程。

3.2　力做功与动能定理

把前面的推导用于任意力。由 $m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}_{\text{合}}$，两边点乘 $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，有

$$\boldsymbol{F}_{\text{合}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

因为 $v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$，乘积微分给出

$$\mathrm{d}(v^2)=\mathrm{d}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}.$$

于是 $\boldsymbol{F}_{\text{合}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}(mv^2/2)$。把一个力在微位移上的点积定义为它做的**元功**：

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=F\cos\alpha\,\mathrm{d}s.$$

这里 α 是力与微位移的夹角，$\mathrm{d}s$ 为弧长微元。从位置 A 沿实际路径积到 B，力做的功为 $W=\int_A^B\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。

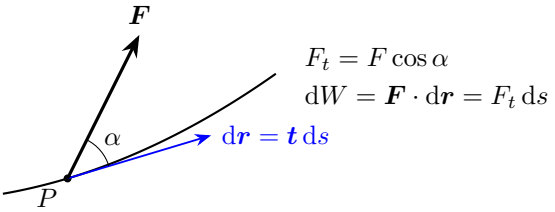


图 3.2: 力与切向微位移的夹角进入元功，只有沿切线的分量贡献功

图 3.2 中沿切线的分量 $F\cos\alpha$ 进入功的计算。沿位移的分量作正功，反向分量作负功，法向分量在这一微小过程内作功为零。恒力的方向和大小保持不变时，可写为 $W=\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A)$；变力则沿路径逐段积分。

对合力积分，令 $q=v^2$，始末速率 v_A,v_B 对应积分限 v_A^2,v_B^2：

$$\int_A^B\boldsymbol{F}_{\text{合}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{m}{2}\int_{v_A^2}^{v_B^2}\mathrm{d}q=\Big[\frac{m}{2}q\Big]_{v_A^2}^{v_B^2}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2.$$

这就是**动能定理**：

$$\boxed{W_{\text{合}}=K_B-K_A},\qquad K=\frac{1}{2}mv^2. \tag{3.1}$$

几个力同时作用时，分别计算它们的功，再相加得到 $W_{\text{合}}$。例 3.1 分别用初末高度与沿圆弧积分计算拉力功；例 3.7 先由冲量求末速度，再由同一个末态求合力功。

3.3 作用点的运动与系统的功

功把力与它的作用点位移联系起来。对质点，作用点与质点位置相同；对多个物体组成的装置，则逐个跟踪各力作用点。在动滑轮上，载荷的上升距离与拉绳自由端的移动距离不同，两处的力也不同，传递的能量通过各自的力与位移对应起来。

固定光滑轨道上的支持力垂直质点速度，作功为零。光滑轨道本身移动时，质点对地速度等于轨道速度与相对轨道速度之和：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}_{槽} + \boldsymbol{v}_{相}.$$

支持力 $\boldsymbol{N}$ 与相对速度垂直，所以它对质点的功率为

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V}_{槽} + \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{v}_{相} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{V}_{槽}.$$

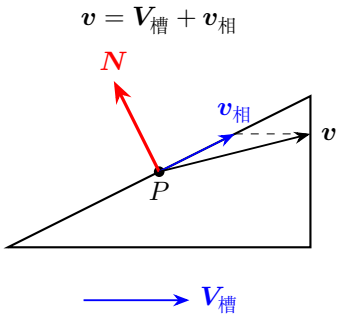


图 3.3: 支持力垂直相对运动方向，却一般不垂直受力点的对地速度

图 3.3 中斜槽向右运动，支持力指向左上，对球的功率为负；球给槽的反作用力则对槽作正功。光滑接触使这对内力的总功率相消，球与槽之间通过接触交换能量。

对系统内每个质点应用动能定理，再相加：

$$\Delta K_{\Sigma} = W_{外} + W_{内}, \qquad K_{\Sigma} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

内力总功包含各力与各自作用点位移的点积。两个内力虽等大反向，作用点可以向不同方向移动。

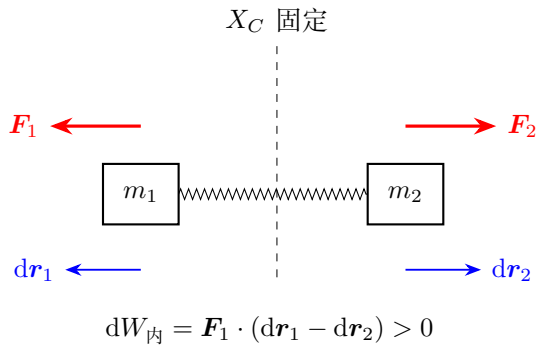


图 3.4: 弹簧推开两物体时，两内力冲量相消，但各自都能做正功

图 3.4 中，压缩弹簧把两个物体向相反方向推开，两力分别沿各物体位移方向，都作正功。系统的质心保持静止，增加的总动能来自弹簧储能。若用合外力对质心位移积分，则从质心运动定理得到

$$\int \boldsymbol{F}_{外} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{R}_C = \int M_\Sigma \boldsymbol{V}_C \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{V}_C = \Delta\left(\frac{1}{2} M_\Sigma V_C^2\right),$$

它描述质心平移动能的变化。系统总动能还包含各部分相对质心的运动，这一点在弹簧推开物体时表现得很清楚。

3.4　冲量与功所描述的过程

力对时间的积分给出冲量，力对作用点位移的积分给出功。固定光滑墙使球原速率反弹时，球的动量方向反转，墙给球有限冲量；速率恢复原值，接触阶段的合力净功为零。向心力持续改变速度方向时，速度与力垂直，功率也为零。

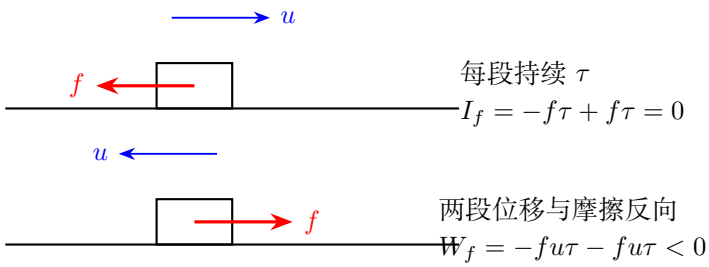


图 3.5: 受外部驱动的等时往返中，摩擦冲量相消，摩擦功仍相加

图 3.5 中，外部驱动使物块沿水平面以相同速率作等时往返。摩擦力在两段中方向相反，冲量相消；每一段摩擦力又都与位移反向，两段摩擦功相加为负值。驱动力在这个过程中提供能量，维持图示的往返运动。

功随参考系中作用点的位移而变化。例如物块被匀速传送带加速，在地面系中它的动能增加；在与传送带共速的惯性系中，它的相对速率减小，相应摩擦功为负。块与带的总摩擦功则由两者相对滑程决定，例 3.15 将把这一过程的输入功、动能和耗散分别算出。

3.5 变力积分与弹簧做功

理想弹簧相对自然长的有符号伸长量为 x，弹力为 $-kx$，所以从 x_1 到 x_2 弹力所做的功为

$$W_s = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,\mathrm{d}x = -k[x^2/2]_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2.$$

压缩和伸长均由平方量描述储能。物块只顶在弹簧上时，弹簧恢复自然长后双方分离；物块与弹簧连接时，恢复自然长后还能继续拉伸。例 3.3 按接触阶段和分离阶段分别求功。

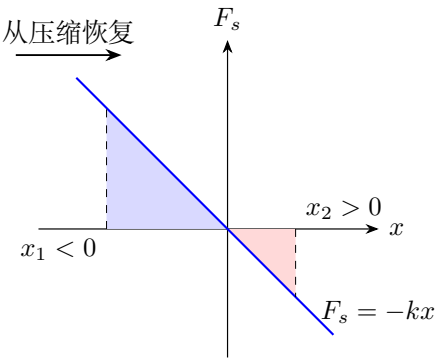


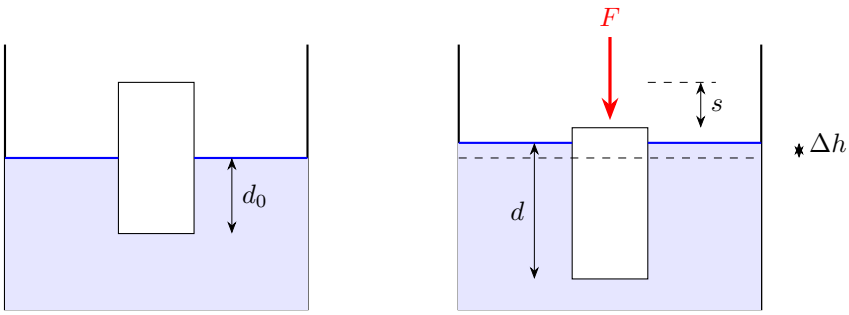
图 3.6: 弹力关于有符号形变量的图线，压缩恢复与继续拉长的功具有相反符号

图 3.6 从 $x_1 < 0$ 运动到 $x_2 > 0$，先积蓝色正面积，再积红色负面积。两部分的有向和给 $W_s = k(x_1^2 - x_2^2)/2$。若物块只是顶在弹簧上而没有连接，运动到 $x = 0$ 便分离，红色部分不属于它的真实过程。

缓慢拉伸理想弹簧时，物体的加速度很小，外拉力与弹力近似平衡；从一个位置移动到相邻位置，就经历了一系列相邻的平衡状态，这样的过程称为准静态过程。若忽略耗散，物体的动能变化也很小，外力所做的功便转化为弹簧势能的增加。

缓慢压沉浮木时，可把木块和液体一起作为计算势能的系统。忽略液体流动的动能和粘滞损失，外力功转化为它们重力势能的增加。用力的位移积分计算时，积分变量要与外力作用点的位移相对应。图 3.7 中，木块下降和液面上升共同增加浸深；先写体积关系，再把压入力表示成木块下降量的函数。

选积分变量时，应使力和作用点位移都能由同一变量表示。若阻力随总进入深度 x 增加，第二次推动从已有深度 d 开始，功积分的下限也取 d。若沿圆弧用角度 θ 积分，应先代入 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$；若液面随压入距离 s 上升，应先用体积守恒把浸深写成 s 的函数，再把浮力代入功积分。例 3.4 和例 3.6 分别对应这两种变量关系。



初始漂浮　　容器面积 A，木块截面积 a

图 3.7: 木块下降与液面上升共同增加浸深，外力功须对木块下降量积分

图 3.7 取直壁容器和等截面木块、无溢流。木块下降 s、液面上升 Δh，浸深成为 $d = d_0 + s + \Delta h$。水体积守恒给 $A\Delta h = a(s + \Delta h)$，所以

$$d - d_0 = \frac{A}{A-a}s, \qquad F = B - mg = \rho g a \frac{A}{A-a}s.$$

准静态压入所需外力向下，与木块位移同向，故在仍部分浸没的范围内

$$W_{\text{ext}} = \int_0^s F(s')\,\mathrm{d}s' = \frac{\rho g a A}{A-a}\left[\frac{s'^2}{2}\right]_0^s = \frac{\rho g a A}{2(A-a)}s^2.$$

积分中的 s' 表示木块下降距离。上式用于部分浸没、未触底且无溢流的阶段；例 3.6 在完全浸没时分段，继续计算到刚触底。

3.6　理想约束的内力总功

两质点之间用不可伸长轻杆相连，令沿杆单位矢量为 $\boldsymbol{n}$，两端内力为 $T\boldsymbol{n}$ 与 $-T\boldsymbol{n}$。其瞬时总功率是 $T\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)$。杆长不变给 $(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{n} = 0$，所以内力总功率为零。两端分别交换能量，总功率为零；杆某端固定时，该端作用点静止，其功也为零。

若改成弹簧，两端沿弹簧方向的相对速度可以非零，内力总功率等于弹性势能变化率的负值。若改成滑动摩擦，内力总功率为 $-f|v_{A,\text{切}} - v_{B,\text{切}}|$，对应耗散。不可伸长约束、弹性形变和相对滑动，分别对应能量传递、弹性储能和耗散。将作用力与相对运动配合起来，就能确定内力总功。

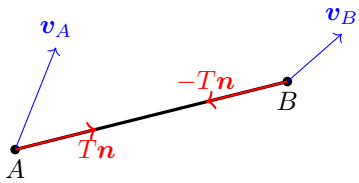


图 3.8: 同一杆内力可以分别做功，总功率由沿杆相对速度决定

图 3.8 的杆长条件限制的是 $(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)\cdot\boldsymbol{n} = 0$。两端内力的总功率因而为零，尽管各自与端点速度的点积不必为零。若杆可伸长，这个投影一般不再为零，内力便可改变弹性储能。分别对某个物体和整个系统列动能定理时，相应保留单个作用力的功与全部内力的总功。

3.7 功率与速度传动

瞬时功率为 $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{作用点}}$。恒定拉力的功率随作用点速度而变；匀速牵引时，推力可以持续作功，补偿摩擦造成的能量损失。对无质量、无摩擦的理想绳轮装置，可以用绳长约束求自由端速度，再算外拉力的功率，也可以把各段绳对被拉物体的合力与物体速度点乘。两条路线应给出相同结果。

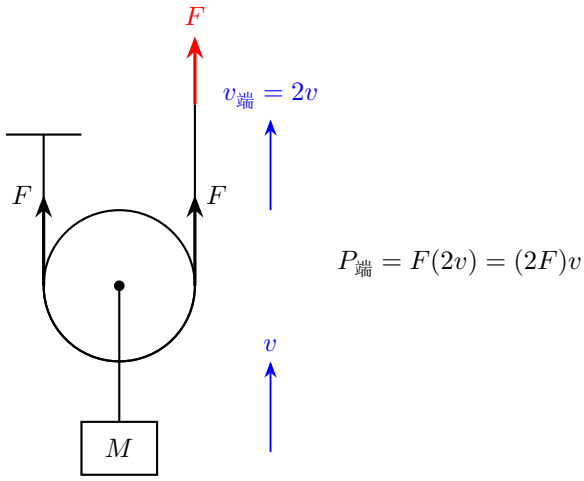


图 3.9: 绳长约束使自由端速度为动滑轮速度的两倍，两端功率计算一致

图 3.9 的两段竖直绳长之和不变，因此自由端每上移 $2\,\mathrm{d}y$，动滑轮上移 $\mathrm{d}y$。在无质量、无摩擦的绳轮模型中，物体受到的向上合拉力为 $2F$，对应的功率正好等于自由端输入功率。自由端输入功率为 $F(2v)$，也等于载荷所受合拉力的功率 $(2F)v$。

连续喷流的动力输入同样要按能量流计算。若原来近似静止的液体被喷成速率 v 的流束，单位时间喷出质量 $\rho S v$，则动能流为 $P=\tfrac12\rho S v^3$。固定喷嘴受到反冲力，作用点速度为零；泵通过压力对流体作功，输入能量转为喷流动能。

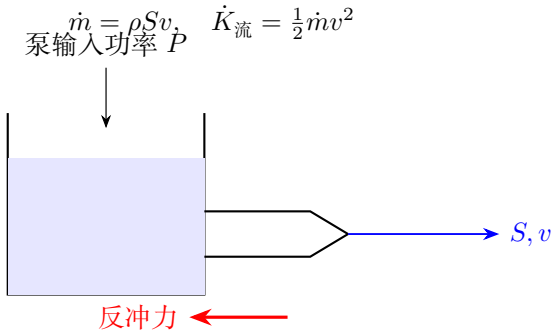


图 3.10: 固定喷嘴可以受反冲力而不作平移功，流体动能由泵的输入功提供

图 3.10 忽略入口速率、高度差和损失时，泵对每单位体积提供的压力功为 Δp。由 $\Delta p=\rho v^2/2$、体积流量 $Q=Sv$，得 $P=\Delta pQ=\rho S v^3/2$。图中的 v 是出口流体速度，喷嘴则固定在原处。流体获得的功率由压力功求出。

3.8　恒功率牵引与实际起步过程

若动力装置始终以功率 P 作用于质量 m 的质点，且没有其他力做功，则 $mv\dot v=P$。从静止计时，

$$m\int_0^v w\,\mathrm{d}w=P\int_0^t \mathrm{d}\tau,\qquad m\left[\frac{w^2}{2}\right]_0^v=P[\tau]_0^t.$$

代入两个端点，得 $mv^2/2=Pt$，所以

$$v=\sqrt{\frac{2P}{m}}\,t^{1/2}.$$

初始速度取正向增长的根。令 $s(0)=0$，再对速度积分：

$$s(t)=\sqrt{\frac{2P}{m}}\int_0^t \tau^{1/2}\,\mathrm{d}\tau=\sqrt{\frac{2P}{m}}\left[\frac23\tau^{3/2}\right]_0^t=\frac23\sqrt{\frac{2P}{m}}\,t^{3/2}.$$

速度图的切线斜率就是加速度。对 $v(t)$ 求导，常系数 $\sqrt{2P/m}$ 保持不变：

$$a(t)=\sqrt{\frac{2P}{m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}t^{1/2}=\frac12\sqrt{\frac{2P}{m}}\,t^{-1/2}\qquad(t>0).$$

随时间增大，速度继续上升，图线的斜率逐渐变小。

实际牵引装置同时具有最大牵引力 $F_{\max}$ 与额定功率 P。起步时速率很小，先以最大牵引力工作，功率随速率增加；到 $v_c = P/F_{\max}$ 时达到额定功率，随后保持恒功率，牵引力按 $F = P/v$ 减小。

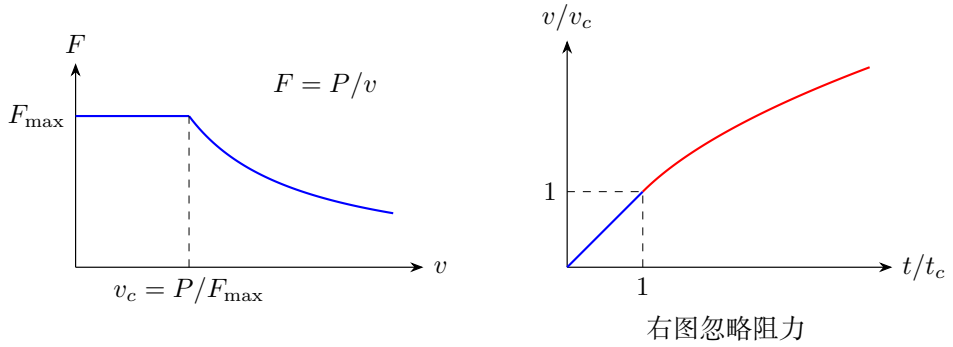


图 3.11: 有限牵引力先使速度线性增加，达到额定功率后才转入平方根规律

图 3.11 右图在无阻力时以 $t_c = mv_c/F_{\max} = mP/F_{\max}^2$ 为切换时刻。第一段 $v = F_{\max}t/m$；第二段需从已有速度 v_c 继续积分，故

$$m\int_{v_c}^{v} w\,\mathrm{d}w = P\int_{t_c}^{t}\mathrm{d}\tau, \qquad m\left[\frac{w^2}{2}\right]_{v_c}^{v} = P[\tau]_{t_c}^{t},$$

代入切换处的下限，得到

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_c^2) = P(t - t_c).$$

所以 $v^2 = v_c^2 + 2P(t - t_c)/m$，只用于 $t \geq t_c$。两段在切换处具有相同速度 v_c，加速度也同为 $F_{\max}/m$，因此运动连续衔接。

若还有恒定阻力 $f > 0$，需先保证最大牵引力足以克服阻力；已经进入向前运动的恒功率阶段满足 $m\dot{v} = P/v - f$。由此直接看出，速度趋于 $v_\infty = P/f$ 时加速度趋于零。对 $0 < v < v_\infty$ 分离变量，得到

$$\mathrm{d}t = \frac{mv}{P - fv}\,\mathrm{d}v,$$

从切换状态 (t_0, v_0) 积到 (t, v)。将被积函数拆开，

$$\frac{v}{P - fv} = \frac{P}{f(P - fv)} - \frac{1}{f}.$$

对第一项换元 $q = P - fw$，$\mathrm{d}q = -f\,\mathrm{d}w$，速度端点 v_0, v 对应 $q_0 = P - fv_0, q_1 = P - fv > 0$，因此

$$\begin{aligned} t - t_0 &= m\int_{v_0}^{v} \frac{w\,\mathrm{d}w}{P - fw} \\ &= -\frac{mP}{f^2}\int_{q_0}^{q_1}\frac{\mathrm{d}q}{q} - \frac{m}{f}\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}w \\ &= -\frac{mP}{f^2}\left[\ln q\right]_{q_0}^{q_1} - \frac{m}{f}\left[w\right]_{v_0}^{v}. \end{aligned}$$

合并为无量纲对数比，得到

$$t - t_0 = \frac{m}{f^2}\left[P\ln\frac{P - fv_0}{P - fv} - f(v - v_0)\right].$$

图 3.11 表示外力与速度关系；上式中对数在 $v \to P/f$ 时发散，说明理想终极速度是渐近值。有限时间内速度由上面的积分关系确定，长期极限则由牵引力与阻力平衡给出。

3.9　速度与持续接触的条件

由动能定理写出 $K(x) = K_0 + W(0 \to x)$，便能沿运动方向追踪速率。一维运动中，物体先到达图上第一个 $K = 0$ 的位置。该处若净力指向运动的反方向，物体随即转回；若净力为零，则结合平衡附近的受力和到达所需时间判断后续运动。

沿曲面运动时，速度还决定所需向心加速度。先从能量关系求 $v(\theta)$，再代入径向动力学方程求支持力 $N(\theta)$ 或张力 $T(\theta)$，就能确定接触或绳拉紧所持续的范围。后面的圆环、链绳和钉摆问题，都将速度与约束力这两方面联系起来。

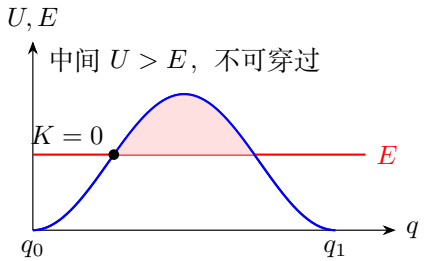


图 3.12: 一维运动首先在能量曲线与势能曲线的交点转回；首先到达的零速点决定实际运动

图 3.12 的初态与目标处都满足 $K = E - U > 0$，但运动到第一个 $U = E$ 的位置便转回，因为后面的红色区域要求 $K < 0$。物体沿 $K \geq 0$ 的连通区间运动，

首先在图中的左交点转回。例 3.10 中的分段摩擦长绳，也由运动方向上首先出现的零动能点确定停止位置。

对单侧支承的圆轨道，$N=0$ 给出脱离时刻；对柔绳，$T=0$ 给出松绳时刻；有限木板则以物块到达板端为阶段终点。例 3.17 先求沿球面的速度与支持力，脱离后再接抛体运动。

3.10 功率极值与临界能量

功率是某一瞬间的点积，功则沿整段路径累积。求极值前，应先把力与作用点速度写成同一位置参数的函数，并由图确定该参数的允许范围。

求最大功率时，力沿速度方向的分量与速率共同决定结果。功率是力与速度的点积，摆球到最低点速度最大，重力与速度却垂直，重力功率为零。应先把 P 写成位置参数的函数，再在物理区间求导或对 P^2 求极值，再比较端点值。圆周运动的摩擦功则沿路径积分，其累计量由整段压力和滑程共同决定。

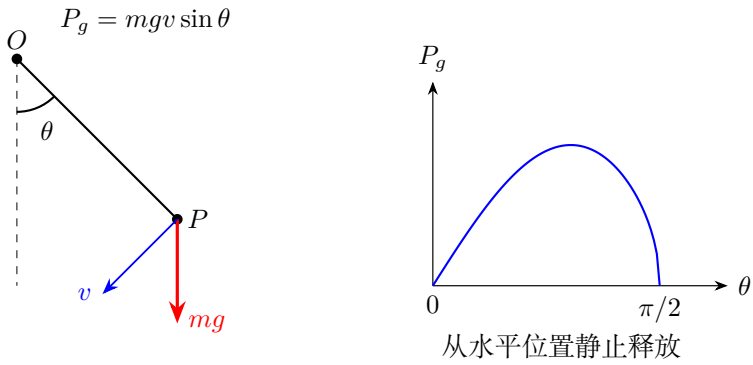


图 3.13: 摆球速度最大处重力功率为零，最大功率出现在中间位置

图 3.13 取从水平位置静止释放的单摆。能量给 $v^2=2gL\cos\theta$，所以 $P_g=mg\sqrt{2gL\cos\theta}\sin\theta$。释放点速度为零，最低点重力与速度垂直，两端功率均为零；应在 $0<\theta<\pi/2$ 求内部极值，这正是例 3.16 所求的位置。

讨论“最小初速”还要区分可达到的最小值与极限下界。若能量恰好等于光滑势垒顶点势能，物体可能无限接近顶点而需无限时间。此时要真正越过，初能量应略大于势垒；等号仅给临界值。下列链条越拱的问题保留这一差别，由势能随位置的变化展开临界附近的时间积分。

3.10.1　闭路功与势能

弹簧功 $k(x_1^2 - x_2^2)/2$ 由初末形变量决定，可以写成 $U(x_1) - U(x_2)$，其中 $U(x) = kx^2/2$。在一维中，微小过程有 $F_x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}U$，所以 $F_x = -\,\mathrm{d}U/\,\mathrm{d}x$。在平面中，同一个势能函数对应 $F_x = -\partial U/\partial x$、$F_y = -\partial U/\partial y$。

若一个力的功只由初末位置决定，这个力称为保守力。沿任意闭合路径一周，初末势能相同，它作的总功为零。例 3.18 把圆周路径参数化，逐项求力与位移的点积，以闭路功判断力的性质。下一讲将在这套关系上继续讨论机械能与碰撞。

3.11　例题与分析

例 3.1 (沿圆弧缓慢提升)**.** 质量 m 的物块沿固定光滑圆弧，由最低点 A 缓慢拉到与圆心等高的 B，圆弧半径为 R，拉力始终切向。分别用动能定理与力的位移积分求拉力功。

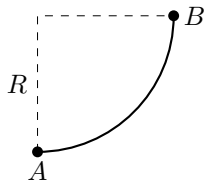


图 3.14: 题设：沿圆弧缓慢提升

解　由高度差列动能定理

图 3.14 的最低点比圆心低 R，因此从 A 到与圆心等高的 B，高度增加 R。缓慢运动使初、末动能均可忽略，支持力不做功，故 $W_F - mgR = 0$，得到 $\boxed{W_F = mgR}$。

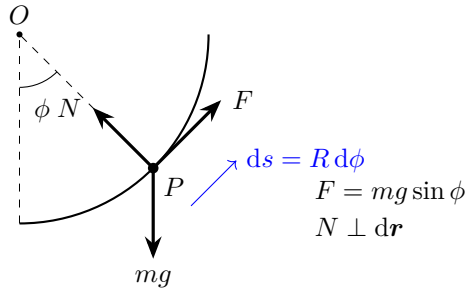


图 3.15: 切线微位移只计入拉力与重力的切向分量

若初、末仍保留相同的很小速率，动能差也趋于零，因此这里的“缓慢”可以理解为准静态极限。圆弧支持力与切线位移垂直，功为零；重力功只由升高 R 决定，为 $-mgR$。这样动能定理中的每一项都有明确的作用力与符号。

沿圆弧积分切向拉力

在图 3.15 中以最低点半径为转角起点，$0 \le \phi \le \pi/2$，弧长微元 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\phi$。切向平衡给 $F = mg\sin\phi$，于是

$$W_F = mgR\int_0^{\pi/2} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi = mgR[-\cos\phi]_0^{\pi/2} = mgR(0+1) = mgR.$$

两种方法分别使用始末状态与局部力，说明功的积分只累计切向分量。

例 3.2 (弹簧小球下落到竖直位置)**.** 弹簧一端固定于 O，自然长 ℓ_0、劲度系数 k，另一端连质量 m 的小球。球从与 O 等高、弹簧自然长的位置 A 静止释放。到 O 正下方 B 时，弹簧伸长 ℓ_0/n，其中 $n > 0$。求该瞬间速率，并说明所得表达式的必要条件。

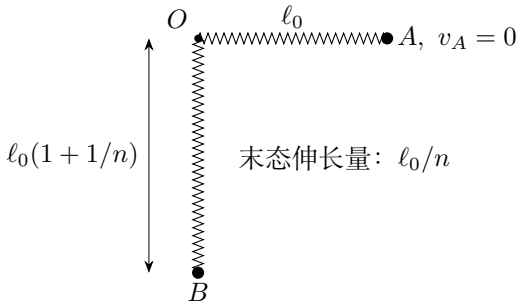


图 3.16: 初态弹簧水平且为自然长，末态位于悬点正下方

解　区分下降高度与弹簧伸长

按图 3.16，球下降的高度等于末端弹簧长度 $\ell_0(1+1/n)$，弹簧伸长量才是 ℓ_0/n。重力做正功，弹力做负功，故

$$mg\ell_0\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{k\ell_0^2}{2n^2} = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

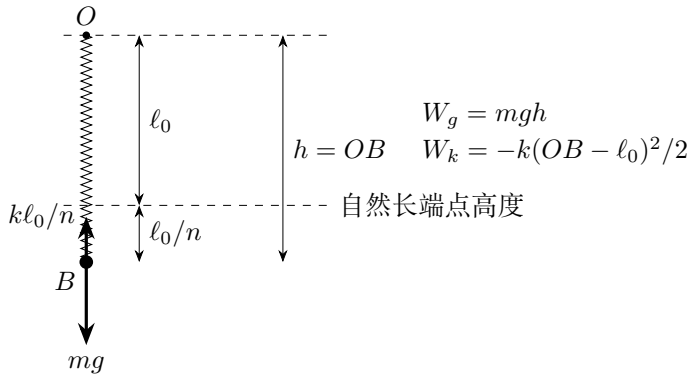


图 3.17: 重力功使用整个下降高度，弹力功使用相对自然长的伸长量

末态速率与给定伸长量

把方程两边乘 $2/m$，得 $v_B^2 = 2g\ell_0(1+1/n) - (k/m)(\ell_0/n)^2$。第一项使用球的下降高度，第二项使用弹簧相对自然长的形变量；图中 OB 给出下降高度，$OB-\ell_0$ 给出弹簧伸长量。

由图 3.17 的能量转化得到

$$\boxed{v_B = \sqrt{2g\ell_0(1+1/n) - k\ell_0^2/(mn^2)}}.$$

弹簧的长度随运动变化，球在 B 处还可以具有沿弹簧方向的速度分量。上式给出总速率，根号内非负是该末态出现的必要条件。题设 n 表示真实轨迹到达竖直线时的伸长量，具体取值由这条轨迹确定。

例 3.3 (两物块被弹簧推开)**.** 光滑水平面上，弹簧左端固定，右端连质量 m_A 的物块 A。将弹簧压缩 x_1，再把质量 m_B 的物块 B 紧贴放在 A 右侧，两块不粘连。由静止释放，求 A 相对初始位置向右运动的最大距离。

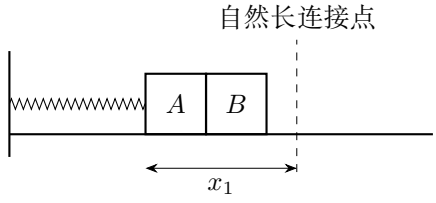


图 3.18: 以弹簧连接点的自然长位置为位移零点

解　用接触力判定自然长处分离

图 3.18 中弹簧压缩时，两物块共同向右加速。弹簧到自然长前接触力为正；到自然长时弹簧力变为零，随后弹力转为向左拉 A，而 B 继续向右运动，双方在自然长处分离。由共同运动段的动能定理

$$\frac{1}{2}kx_1^2=\frac{1}{2}(m_A+m_B)v_*^2,\quad v_*=x_1\sqrt{\frac{k}{m_A+m_B}}.$$

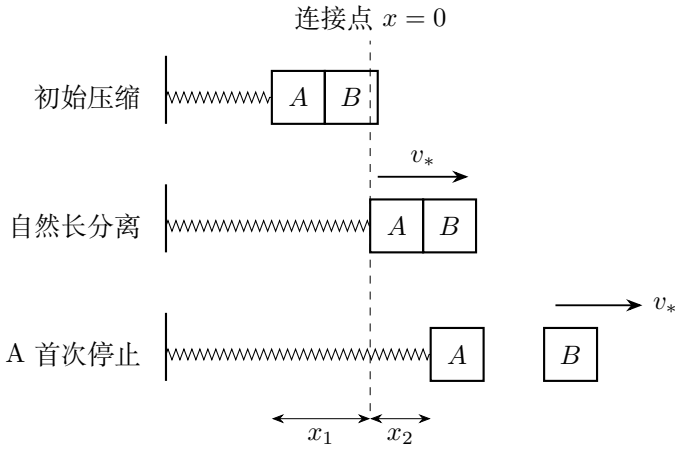


图 3.19: 先共同恢复自然长，再由物块 A 独自拉伸弹簧

在共同加速段设压缩量为 $x>0$，有 $a=kx/(m_A+m_B)$，B 所受接触力为 $N=m_Ba=m_Bkx/(m_A+m_B)>0$。到 $x=0$ 时 $N=0$；此时 A 开始独自拉伸弹簧，B 失去接触力后保持分离瞬间的速度。分离点由 N 首先降为零确定。

由 A 的独立运动求最远位置

图 3.19 中 B 匀速离开，A 独自拉伸弹簧。到 A 第一次停止时，$\frac{1}{2}m_Av_*^2=\frac{1}{2}kx_2^2$，所以 $x_2=x_1\sqrt{m_A/(m_A+m_B)}$。从初始压缩位置算起

$$\boxed{s_{A,\max}=x_1+x_2=x_1\left(1+\sqrt{\frac{m_A}{m_A+m_B}}\right).}$$

应把到自然长的 x_1 也计入位移。$m_B\to 0$ 时最大位移趋于 $2x_1$，与单个弹簧振子相符。

例 3.4 (阻力随深度增加的钉入过程)**.** 钉子水平进入固定木板时受到阻力，大小为 $F = kx$，x 为进入总深度。每次敲击后传给钉子的机械能相同，钉子在两次敲击间静止。第一次进入深度为 $d = 1\,\mathrm{cm}$。求第二次新增的进入深度。

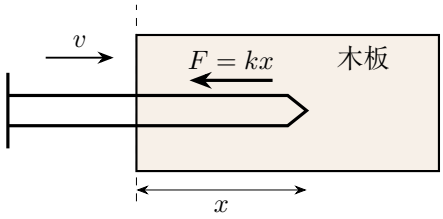


图 3.20: 总深度从木板表面计起，阻力始终与钉子的运动方向相反

解　分别计算两次敲击的阻力功

图 3.20 中，钉子水平进入，重力不做功。每一击开始和结束均静止，输入能量全部用于克服阻力。第一击克服阻力做功 $E = k\int_0^d x\,\mathrm{d}x = k[x^2/2]_0^d = kd^2/2$。设第二击后总深度为 D，从已有深度 d 积起，第二击耗功为 $k\int_d^D x\,\mathrm{d}x = k[x^2/2]_d^D = k(D^2 - d^2)/2$。第二击同样输入能量 E，因此

$$\frac{k}{2}(D^2 - d^2) = \frac{k}{2}d^2.$$

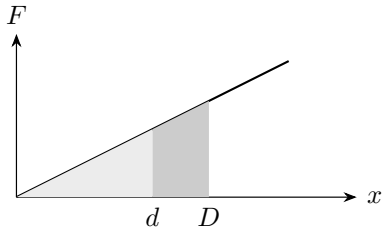


图 3.21: 解答过程：阻力随深度增加的钉入过程

由总深度减去第一击深度

将两击能量相等式约去 $k/2 > 0$，得 $D^2 - d^2 = d^2$，即 $D^2 = 2d^2$。因总深度 $D > d > 0$，取正根 $D = \sqrt{2}d$；最后再减去已有深度 d 才是本次新增量。

图 3.21 中第二段的积分面积等于第一段，但力已更大，故新增深度

$$\boxed{\Delta d = (\sqrt{2} - 1)d \approx 0.414\,\mathrm{cm}}.$$

第二次从已有深度 d 开始，遇到的阻力较大；同样的输入能量对应较短的新增距离。

例 3.5 (双小环下滑与悬绳松弛)**.** 质量 M、半径 R 的大圆环由顶端竖直轻绳悬挂，环上穿有两个质量均为 m 的小环。从大环顶端经微小对称扰动后同时释放，小环沿两侧无摩擦滑下。以小环半径与向上竖直线的夹角为 θ，求悬绳首次张力降到零所需的质量条件及对应角度。

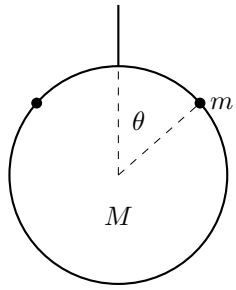


图 3.22: 题设：双小环下滑与悬绳松弛

解　在大环固定阶段求小环径向力

在悬绳尚绷紧阶段，图 3.22 的大环不动。能量给 $v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$。以指向圆心为正，小环的径向约束力 f 满足 $f+mg\cos\theta = mv^2/R$，所以 $f = mg(2-3\cos\theta)$，它允许为负，因为小环套在环上。

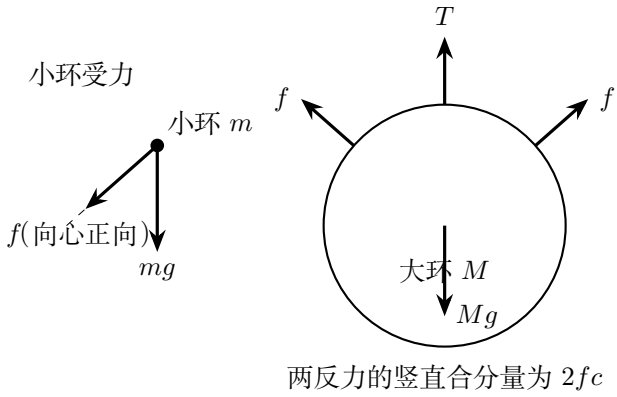


图 3.23: 小环的径向力与作用在大环上的反力方向相反，f 为有符号量

对大环列竖直平衡式

小环受到的径向约束力为 $-f\boldsymbol{e}_r$，所以它对大环的反力为 $+f\boldsymbol{e}_r$，竖直向上分量为 $f\cos\theta$。两小环给大环的向下总力因此是 $-2f\cos\theta = -2mg(2-3c)c$，符号应由作用与反作用关系确定。代入大环的竖直平衡式 $T - Mg + 2fc = 0$，得到以下张力。

图 3.23 把两小环对大环的力分解，水平分量抵消，竖直向下的合分量为 $2mg(3c^2-2c)$，其中 $c=\cos\theta$。于是

$$T = Mg + 2mg(3c^2-2c) = Mg - \frac{2}{3}mg + 6mg(c-\tfrac{1}{3})^2.$$

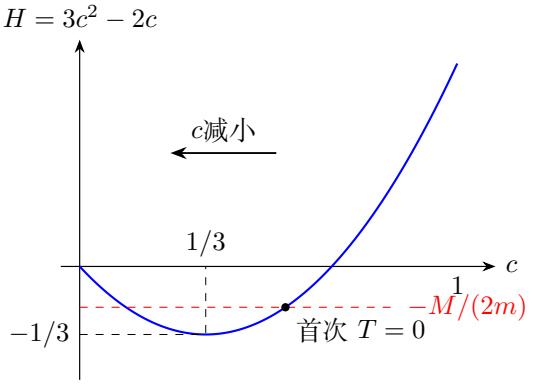


图 3.24: 张力随余弦的抛物线给出最低值，下降时由右向左读图

用张力最小值与首次零点判定条件

图 3.24 中抛物线的最低值为 $T_{\min}=Mg-2mg/3$，故张力能到零要求 $Mg-2mg/3\le 0$，即 $\boxed{m/M\ge 3/2}$。令张力式为零，移项并除以 $6mg$，

$$\left(c-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}-\frac{M}{6m} = \frac{1}{9}\left(1-\frac{3M}{2m}\right).$$

当根号实数时，两根为 $c=1/3\pm\sqrt{1-3M/(2m)}/3$。下降时 c 从 1 减小，先遇到较大根，因此

$$\boxed{\cos\theta_* = \frac{1+\sqrt{1-3M/(2m)}}{3}}.$$

当 $m/M>3/2$ 时，悬绳在这个首次零点开始松弛，大环随后运动。临界 $m/M=3/2$ 时，张力在 $c=1/3$ 处恰好触及零。

例 3.6 (有限容器中压沉浮木)**.** 边长 $a = 10\,\mathrm{cm}$、密度为水一半的立方木块浮于横截面积 $A = 200\,\mathrm{cm}^2 = 2a^2$ 的直壁容器中，初始水深为 a。取水密度 $1000\,\mathrm{kg/m^3}$、$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$，把木块缓慢压到刚触底，求外力功。

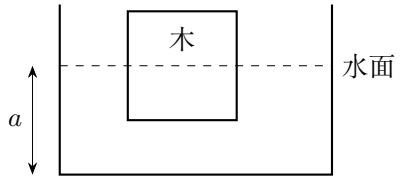


图 3.25: 题设：有限容器中压沉浮木

解　由水量守恒确定完全浸没位置

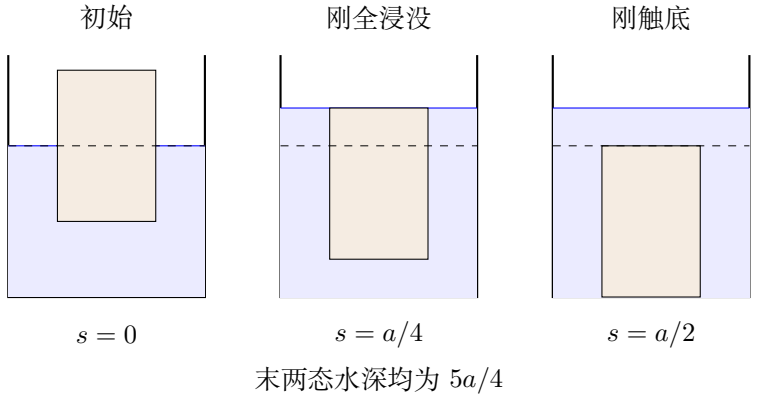


图 3.26: 完全浸没时转入第二阶段；此后液面不再随木块下降

图 3.26 以容器底为固定高度零点。令木块相对图 3.25 下降 s。部分浸没时，液面上升 δh，水体积不变给 $(A - a^2)\delta h = a^2 s$，所以 $\delta h = s$。初始木块底面在 $y = a/2$，下降后位于 $a/2 - s$，液面为 $a + \delta h$，两者之差给出浸深 $a/2 + s + \delta h = a/2 + 2s$。令浸深等于 a，得 $s = a/4$，木块完全浸没。在这一阶段，向下外力大小 $F = \rho g a^2(a/2 + 2s) - \frac{1}{2}\rho g a^3 = 2\rho g a^2 s$。

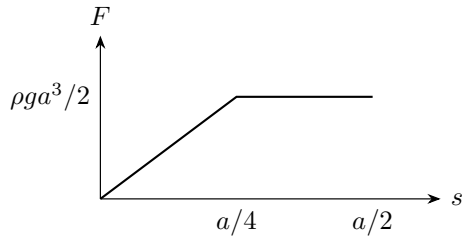


图 3.27: 解答过程：有限容器中压沉浮木

对两阶段的外力分别积分

按图 3.27，完全浸没后液面停在 $5a/4$，木块下表面还需从 $a/4$ 降到零，故第二段再下降 $a/4$，外力恒为 $\rho g a^3/2$。于是

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{a/4} 2\rho g a^2 s\,\mathrm{d}s + \int_{a/4}^{a/2} \frac{1}{2}\rho g a^3\,\mathrm{d}s \\ &= \rho g a^2 [s^2]_0^{a/4} + \frac{1}{2}\rho g a^3 [s]_{a/4}^{a/2} \\ &= \frac{1}{16}\rho g a^4 + \frac{1}{8}\rho g a^4 = \frac{3}{16}\rho g a^4 = \boxed{0.1875\,\mathrm{J}}. \end{aligned}$$

第一段液面上升与木块下降共同增加浸深，第二段木块完全浸没，浮力保持不变。两段外力功相加，给出刚触底时的总功。

例 3.7 (三角形脉冲力的功)**.** 质量 m 的静止质点仅受同向水平力。力在 0 到 $\tau/2$ 内由零线性增加到 F_0，随后在 τ 时线性减为零。求末速率和总功，说明 $F-t$ 图面积与功之间的关系。

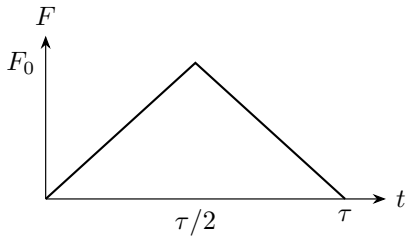


图 3.28: 题设：三角形脉冲力的功

解　用力时图面积先求末动量

图 3.28 的面积给冲量 $I = F_0\tau/2$。由动量定理 $mv = I$，得

$$\boxed{v = F_0\tau/(2m)}.$$

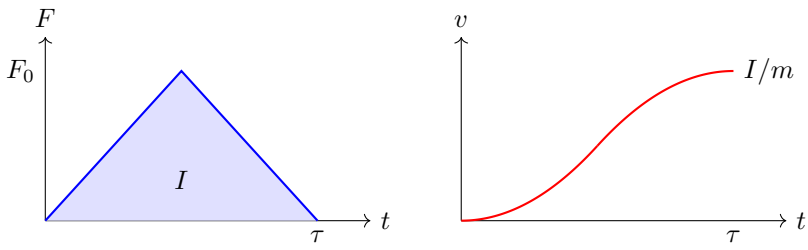


图 3.29: 力时图先累积为速度，再由速度平方求末态动能

由末动能求力做的总功

脉冲结束时质点质量不变，初动能为零，故总功可以通过末速度直接求出。代入 $v = F_0\tau/(2m)$ 时，应平方整个分式：$mv^2/2 = (m/2)F_0^2\tau^2/(4m^2)$，化简后得到下面的结果。

接着按图 3.29 以相同末态应用动能定理，

$$\boxed{W = \tfrac{1}{2}mv^2 = F_0^2\tau^2/(8m)}.$$

若直接积分功率，利用 $F(t)\,\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}v$ 换元，时刻端点 $0,\tau$ 对应速度端点 $0, F_0\tau/(2m)$，得到

$$W = \int_0^{\tau} F(t)v(t)\,\mathrm{d}t = m\int_0^{F_0\tau/(2m)} v\,\mathrm{d}v = m[v^2/2]_0^{F_0\tau/(2m)} = \frac{F_0^2\tau^2}{8m}.$$

冲量单位为 $\mathrm{N\,s}$，功为 $\mathrm{N\,m}$，分别对应时间积分与位移积分。

例 3.8 (竖直圆轨道上的摩擦功)**.** 质量 m 的小车沿固定竖直圆轨道内侧以恒定速率 v 从最低点到最高点。半径 R，动摩擦因数 μ，且 $v^2 \geq gR$ 保证保持内侧接触。驱动力沿切向，求摩擦功。

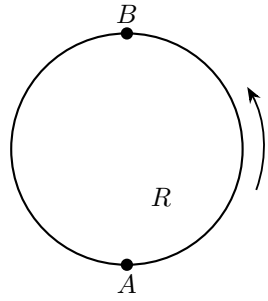


图 3.30: 题设：竖直圆轨道上的摩擦功

解　由恒速圆周运动求各处压力

按图 3.30 从最低点起计转角 θ。径向向心方程为 $N - mg\cos\theta = mv^2/R$，故 $N = m(v^2/R + g\cos\theta)$。保持接触时 $N \geq 0$，其最小值在顶部，正给出题设速度条件。

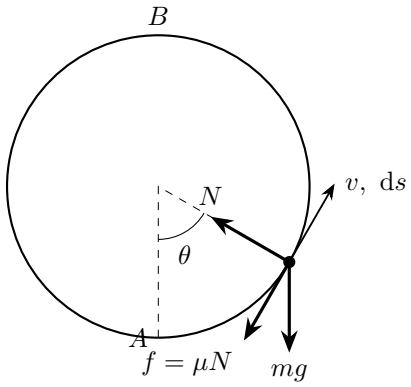


图 3.31: 法向力进入摩擦力大小，切线微位移决定摩擦功的负号

沿半周积分摩擦功

由图 3.31 弧长微元 $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\theta$，摩擦力始终逆运动方向，故

$$W_f = -\int_0^{\pi} \mu N R\,\mathrm{d}\theta = -\mu m \int_0^{\pi} (v^2 + gR\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

解释重力修正项为何相消

积分的两部分须分别代入上下限：

$$\int_0^{\pi} v^2\,\mathrm{d}\theta = v^2[\theta]_0^{\pi} = \pi v^2, \qquad \int_0^{\pi} gR\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = gR[\sin\theta]_0^{\pi} = 0.$$

所以 $\boxed{W_f = -\pi\mu m v^2}$。重力对法向压力的修正，在下半段与上半段积分相消。球从最低点升到最高点，重力本身作功为 $-2mgR$。

摩擦力随位置改变，半周累计功由上述积分给出。小车动能不变，驱动力功为 $2mgR + \pi\mu m v^2$，补偿重力势能增加与摩擦耗散。

例 3.9 (动滑轮拉力的瞬时功率)**.** 水平物块与轻动滑轮固定连接。轻绳一端固定于右侧墙面，另一端受恒拉力 F，该自由绳段与向右水平方向成 60°；靠墙固定段水平。物块向右速度为 v。求外拉力的瞬时功率。

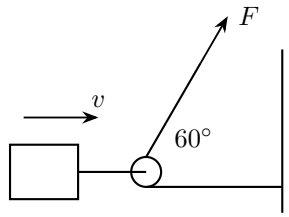


图 3.32: 题设：动滑轮拉力的瞬时功率

解　计算两段绳张力对动滑轮的功率

图 3.32 两段绳张力均为 F，对动滑轮的水平合力为 $F + F\cos 60^\circ = 3F/2$。滑轮与物块一起水平移动，所以这两个张力对动滑轮的功率和为 $\boxed{P = 3Fv/2}$。

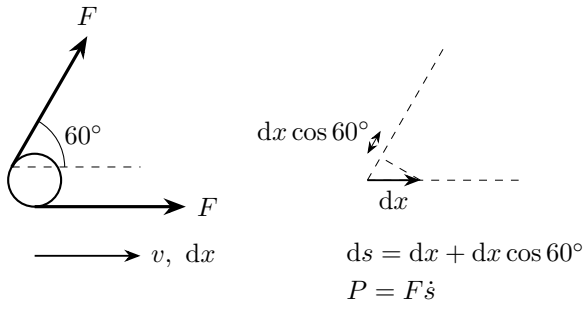


图 3.33: 动滑轮的虚位移缩短两段绳，自由端须补足相同总长度

把滑轮功率与自由端输入联系起来

这个合功率通过轻绳等于自由端外力输入的功率，因为绳无质量、无伸长储能、轮轴无损耗。这里 v 是动滑轮与物块的速度；自由端沿受力方向的速度由两绳段长度的变化确定。

由绳长微分求自由端速度

图 3.33 给出同一功率关系的作用点位移解释。动滑轮向右位移 $\mathrm{d}x$，水平固定段缩短 $\mathrm{d}x$，斜段因轮端运动缩短 $\mathrm{d}x\cos 60^\circ$，因此自由端沿绳补入长度 $\mathrm{d}s = (1+\cos 60^\circ)\,\mathrm{d}x$。于是 $P = F\,\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t = 3Fv/2$。角度随运动变化时，这个关系是该瞬间的微分关系。

例 3.10 (悬垂长绳与分段粗糙桌面)**.** 长 $6L$、质量 $6m$ 的匀质绳，连接质量 M 的物块。水平路径 $AB=BC=CD=DE=L$，绳从 E 处垂下，初始物块在 A，悬垂绳长 $2L$。AB 光滑，BE 有滑动摩擦，绳与桌面无摩擦，桌高大于 $6L$。释放后物块最终停在 C。求到 B 的速度及摩擦因数；若改为 $21m/(4M)$ 求首次停止点；是否可选择摩擦因数使物块从 A 一路到 E 才首次停止?

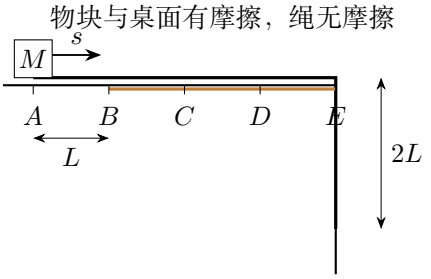


图 3.34: 绳长 6L 中初始水平部分为 4L，悬垂部分为 2L

解　把悬垂长度变化转为重力功

设图 3.34 物块向右移动 s，绳线密度为 m/L，悬垂长度变成 $2L+s$。以桌面为零势面、向下距离为 y，悬垂长度为 h 时

$$U(h)=-\frac{mg}{L}\int_0^h y\,\mathrm{d}y=-\frac{mg}{L}[y^2/2]_0^h=-\frac{mg}{2L}h^2.$$

初末分别取 $h=2L$ 与 $2L+s$，绳的重力势能减少

$$W_g=\frac{mg}{2L}\left[(2L+s)^2-(2L)^2\right]=mg\left(2s+\frac{s^2}{2L}\right).$$

系统总动能为 $K=\frac{1}{2}(M+6m)v^2$。在 B 处 $s=L$ 且尚无摩擦功，故

$$\boxed{v_B=\sqrt{5mgL/(M+6m)}}.$$

从 A 到 B，粗糙段尚未开始，因此只累计悬垂绳势能减少；从 B 继续到 s 时，物块相对固定桌面的粗糙滑程才是 $s-L$。所以粗糙段一般能量式为 $\frac{1}{2}(M+6m)v^2=mg(2s+s^2/2L)-\mu Mg(s-L)$，这也是后面各次选根的共同依据。

用到 C 的停止条件确定摩擦因数

在 C 处 $s=2L$ 且 $K=0$，所以 $6mgL-\mu MgL=0$，得到 $\boxed{\mu=6m/M}$。

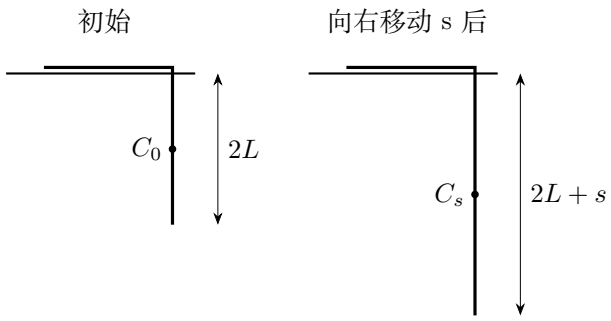


图 3.35: 总势能降低由新、旧悬垂绳段的重心变化确定

改变摩擦因数时取第一个可达零点

图 3.35 给出重力功 $W_g=U_0-U_s$。再令 $z=s/L$，粗糙段有 $K/(mgL)=2z+z^2/2-(\mu M/m)(z-1)$。改用 $\mu'=21m/(4M)$，展开并分解：

$$\frac{K}{mgL}=\frac{z^2}{2}-\frac{13z}{4}+\frac{21}{4}=\frac{(2z-7)(z-3)}{4}=\frac{1}{2}(z-3)\left(z-\frac{7}{2}\right).$$

如图 3.36，从 B 的 $z=1$ 向右运动，首先遇到的零点为 $z=3$，故首次停在 $\boxed{D}$；另一根 $z=7/2$ 在中间负动能区域之后，不可到达。此处悬垂重力 $5mg$ 小于 $\mu' Mg=5.25mg$，若最大静摩擦不小于动摩擦，则可保持停止。

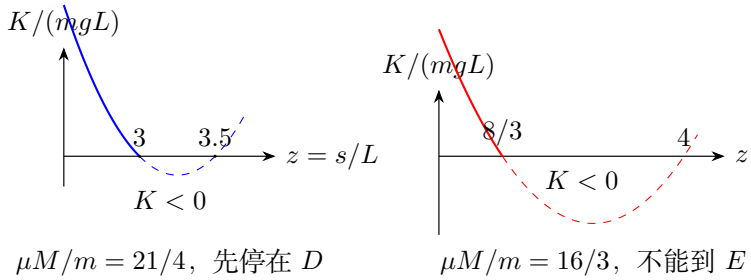


图 3.36: 放大首次零点附近；虚线负动能段不属于实际运动

排除能量等式成立却无法到达 E 的根

若强令 E 处 $z=4$ 为零，将其代入一般能量式，有 $0=8+8-3\mu M/m$，解得 $\mu=16m/(3M)$。相应途中动能为：

$$\frac{K}{mgL}=\frac{z^2}{2}-\frac{10z}{3}+\frac{16}{3}=\frac{(3z-8)(z-4)}{6}=\frac{1}{2}\left(z-\frac{8}{3}\right)(z-4).$$

从 B 继续运动，首先到达 $z=8/3$ 的零动能位置，随后区间要求负动能。因此这项摩擦因数使物块在 E 以前停止，所问一路到 E 才首次停止的摩擦因数不存在。

例 3.11 (船上抛球与内力做功)**.** 人和船总质量 M，另有质量 m 的球，最初共同以 v 运动。球以相对抛球后船的速度 u 水平抛出，分别沿船前进方向与反方向。忽略水阻，求系统所需增加的机械能，并求球和船各自的动能变化。

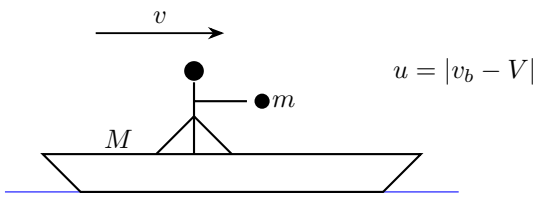


图 3.37: 抛球前人、船、球具有同一地面速度

解　用地面动量与相对速度求两个末速度

设抛球方向符号为 $\sigma=\pm1$。按图 3.37 在地面系写 $(M+m)v=MV+m(V+\sigma u)$，所以船速 $V=v-\sigma mu/(M+m)$，球速 $v_b=v+\sigma Mu/(M+m)$。

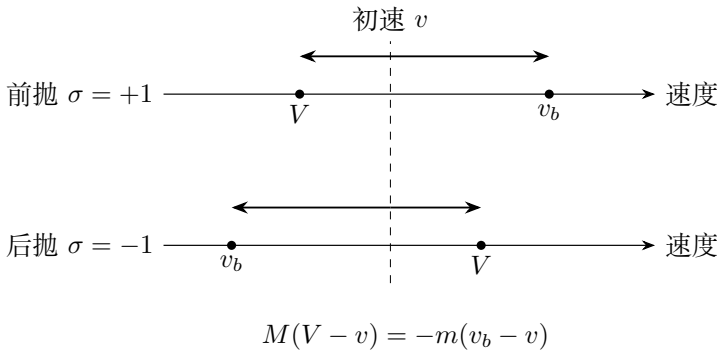


图 3.38: 同一速度轴上比较前抛与后抛；两部分的动量增量相反

分别展开球和船的动能变化

例如球的动能差展开为 $\Delta K_b=(m/2)[(v+\sigma Mu/(M+m))^2-v^2]$, 其中 $\sigma^2=1$, 故交叉项与 u^2 项分别保留。对船作同样展开，交叉项大小相等、符号相反；只有相加后才能消去整体平移速度 v。

代入图 3.38 各部分动能，分别得到

$$\Delta K_b=\sigma\frac{mM}{M+m}vu+\frac{mM^2}{2(M+m)^2}u^2,$$

$$\Delta K_M=-\sigma\frac{mM}{M+m}vu+\frac{Mm^2}{2(M+m)^2}u^2.$$

合并为系统需要增加的机械能

相加后含 v 项抵消，故人的肌肉对机械运动输入的总能量为

$$\boxed{\Delta K=\tfrac{1}{2}\dfrac{mM}{M+m}u^2},$$

两种方向相同。若 $m=1\,\mathrm{kg}, u=4\,\mathrm{m/s}$，得到 $8M/(M+1)\,\mathrm{J}$，大船极限趋于 $8\,\mathrm{J}$。球与船各自的动能变化随初速和抛出方向改变；两项相加后，新增机械能由相对抛速 u 决定。

例 3.12 (喷漆装置的理想功率)**.** 静止喷漆装置把密度 ρ 的油漆从面积 S 的喷口以速率 v 喷出。入口油漆速度可忽略，出、入口高度相同，忽略粘滞和其他损失，求最低机械功率。

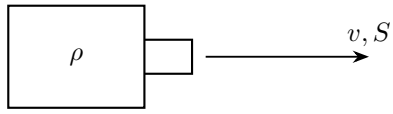


图 3.39: 题设：喷漆装置的理想功率

解　从喷出油漆的动能求功率

图 3.39 中的油漆从近似静止加速到 v。在 $\mathrm{d}t$ 内，喷口流出的油漆形成图 3.40 中截面积 S、长 $v\,\mathrm{d}t$ 的微柱，质量为 $\mathrm{d}m=\rho Sv\,\mathrm{d}t$。

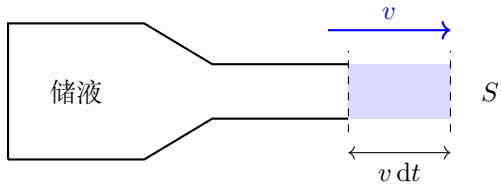


图 3.40: 同一时间内喷出质量为密度乘射流微柱体积

入口与出口等高，油漆的重力势能变化为零。忽略损失，泵输入的功等于这部分油漆的动能增量：

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}K=\frac{1}{2}v^2\,\mathrm{d}m=\frac{1}{2}\rho Sv^3\,\mathrm{d}t.$$

除以同一时间 $\mathrm{d}t$，得到所需最低机械功率

$$\boxed{P_{\min}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\rho Sv^3}.$$

喷出的质量流量为 $\dot{m}=\rho Sv$，所以也可将上述结果写成 $P_{\min}=\dot{m}v^2/2$。泵通过压力对流体做功；固定喷嘴的反冲力为 ρSv^2，其作用点速度为零。

例 3.13 (理想虹吸的排水时间)**.** 很大的平底水槽装有 4 kg 的水，水深相对出口落差可忽略。虹吸管出口比槽底低 $h = 0.8\,\mathrm{m}$，截面积 $S = 0.01\,\mathrm{cm}^2$。忽略阻力，取 $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$，求排空所需时间。

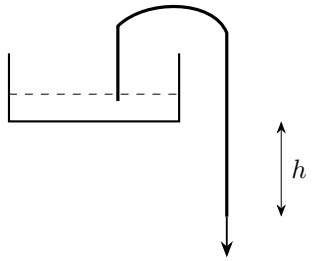


图 3.41: 题设：理想虹吸的排水时间

解　由液面与出口的能量关系确定流速

取图 3.41 沿管流动的一小团水。自由液面与出口均为大气压，大水槽液面速度可忽略，每单位质量下降 h 所减少的重力势能转为出口动能：$gh = v^2/2$，所以 $v = \sqrt{2gh} = 4\,\mathrm{m/s}$。

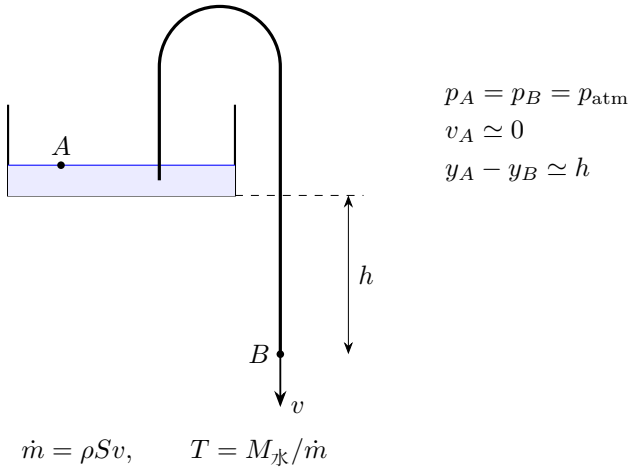


图 3.42: 沿流线比较自由液面与出口，压强相同而高度不同

统一面积、体积和质量流量的单位

面积单位由长度单位的平方换算：$1\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$，所以 $0.01\,\mathrm{cm}^2 = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$。总水体积为 $4/1000 = 0.004\,\mathrm{m}^3$；用它除以体积流量，与用总质量除以质量流量应得到同一时间。

由恒定流量求排水时间并说明近似

按图 3.42，$S = 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$，体积流量 $Q = Sv = 4\times10^{-6}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，质量流量 $\rho Q = 0.004\,\mathrm{kg/s}$，因此

$$\boxed{T = 4/0.004 = 1000\,\mathrm{s}}.$$

落差近似不变使流量近似恒定。

例 3.14 (均匀链条越过半圆拱)**.** 长 πR、质量 m 的均匀链条原来平铺在水平面上，以初速 v_0 被送入固定光滑半圆拱形导槽。导槽两端与水平面等高、半径 R，能从两侧约束链条且无摩擦。求能越过拱的临界初速，并区分临界值与有限时间越过条件。

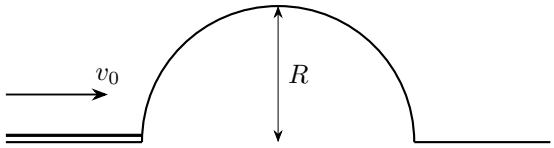


图 3.43: 题设：均匀链条越过半圆拱

解　积分链条各微段的高度求最高势能

按图 3.43 导槽约束只改变运动方向，不做功，链条各部分速率相同。链长恰等于半圆弧长，全链都在拱上时质心最高。取从左端起的角度 $0 \le \phi \le \pi$，高度 $y = R\sin\phi$，线密度 $\lambda = m/(\pi R)$，故该状态势能

$$U_{\max} = \lambda g R^2 \int_0^{\pi} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi = \lambda g R^2[-\cos\phi]_0^{\pi} = 2\lambda g R^2 = \frac{2mgR}{\pi}.$$

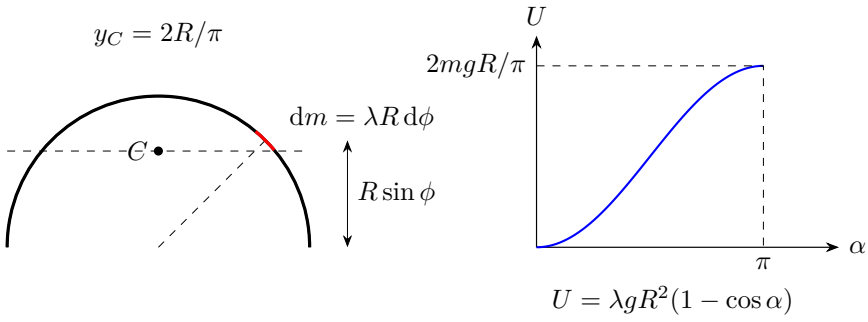


图 3.44: 进入阶段势能递增；链条刚好铺满拱时质心最高

由能量势垒求临界初速

图 3.44 临界能量要求 $mv_c^2/2 = U_{\max}$，所以

$$\boxed{v_c = \sqrt{4gR/\pi}}.$$

由能量式，接入时全链总动能为 $mv_0^2/2 - \lambda gR^2(1-\cos\alpha)$。全链速率虽相同，各段高度却不同，所以势能由各微段高度按质量积分。到 $\alpha = \pi$ 时全链恰好铺满半圆拱，势能达到上式最大值。

进入阶段的势能变化与临界到达时间

沿接入阶段，设进入弧角 α，同一积分改取上限 α，得到

$$U(\alpha) = \lambda gR^2[-\cos\phi]_0^{\alpha} = \lambda gR^2(1-\cos\alpha).$$

因为 $U'(\alpha) = \lambda gR^2\sin\alpha > 0$，进入时势能单调增加至全链在拱上；离开后则下降，因此没有更早的势垒。

严格要在有限时间越过，应取 $v_0 > v_c$。等号时 $mv^2/2 = U_{\max} - U = \lambda gR^2(1+\cos\alpha)$。令 $\delta = \pi - \alpha$，则 $1+\cos\alpha = 1-\cos\delta \simeq \delta^2/2$，从而 $v \simeq C\delta$，其中 $C = \sqrt{gR/\pi}$。由 $R\dot{\alpha} = v$，在顶点附近从 $\delta = \varepsilon$ 到更小的 δ 所需时间为

$$\Delta t \simeq \frac{R}{C}\int_{\delta}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}q}{q} = \frac{R}{C}[\ln q]_{\delta}^{\varepsilon} = \frac{R}{C}\ln(\varepsilon/\delta) \longrightarrow \infty.$$

因此等号只给出临界下界。题设双侧导槽保持链条沿给定半圆路径运动。

例 3.15 (传送带加速物块的能量分配)**.** 水平传送带由电机维持速率 U，把质量 m、初速度为零的物块轻放在带上，动摩擦因数 μ。求物块共速前的时间、物块位移、皮带相对滑程、电机为克服这项作用额外做的功及耗散。

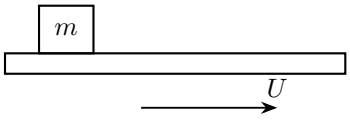


图 3.45: 题设：传送带加速物块的能量分配

解　由加速过程求物块位移与带面滑程

图 3.45 物块受向右摩擦 $f = \mu mg$，加速度 μg。从初速度零积分，

$$v(t) = \int_0^t \mu g\,\mathrm{d}\tau = \mu g[\tau]_0^t = \mu gt.$$

共速条件 $v(t_*)=U$ 给 $t_*=U/(\mu g)$。再分别积分物块和带面的速度，

$$x=\int_0^{t_*}\mu g t\,\mathrm{d}t=\mu g\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{t_*}=\frac{\mu g}{2}\frac{U^2}{\mu^2 g^2}=\frac{U^2}{2\mu g},$$
$$s_B=\int_0^{t_*}U\,\mathrm{d}t=U[t]_0^{t_*}=Ut_*=\frac{U^2}{\mu g}.$$

在 $t<t_*$ 时 $U-v(t)>0$，所用摩擦方向始终有效；相对滑程为 $s_{相}=s_B-x=U^2/(2\mu g)$。

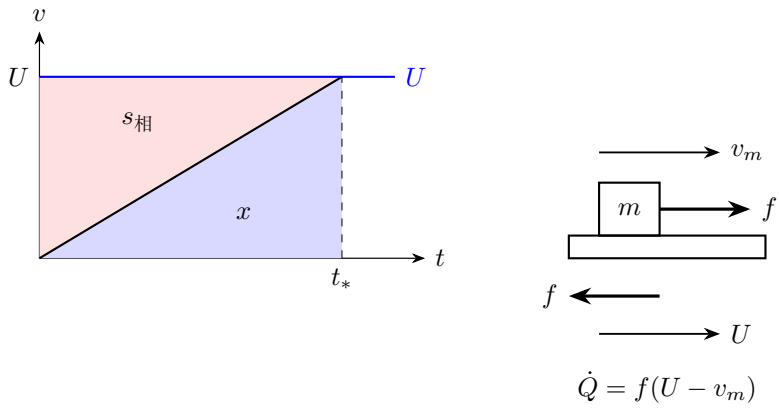


图 3.46: 速度图的两个三角形分别给出物块位移和相对滑程

分别使用两个受力点的实际位移

由于滑动摩擦大小不变，物块自身获得的功是 fx；皮带受到物块向左的等大摩擦，电机沿皮带运动距离 s_B 输入 fs_B，补偿这项反作用。两个功相减为 $f(s_B-x)$，这正是相对滑动造成的耗散。

电机输入功与能量分配

按图 3.46 电机为保持带速补偿的反作用力也为 f，额外做功

$$\boxed{W_{电机}=fs_B=mU^2}.$$

物块动能增加

$$\boxed{\Delta K=mU^2/2},$$

耗散

$$\boxed{Q=fs_{相}=mU^2/2},$$

二者之和等于输入功。电机补偿的是带面所受反作用，因此输入功使用带面的位移 s_B；物块获得的摩擦功则使用它自身的位移 x。

例 3.16 (摆球重力的最大功率)**.** 长 ℓ 的轻绳悬挂质量 m 小球，从水平位置静止释放。忽略阻力。以摆线与向下竖直方向夹角 θ 表示位置，求下摆过程中重力功率的最大值及对应位置。

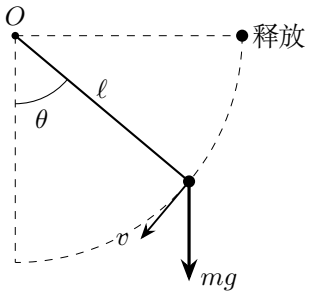


图 3.47: 摆长不变；下摆时速度沿切线，重力的切向分量为正

解　由下降高度与切向重力写出功率

图 3.47 小球从水平位置下降 $\ell\cos\theta$，能量给 $v=\sqrt{2g\ell\cos\theta}$。重力沿速度方向的分量为 $mg\sin\theta$，故 $P=mg\sqrt{2g\ell}\sin\theta\sqrt{\cos\theta}$。

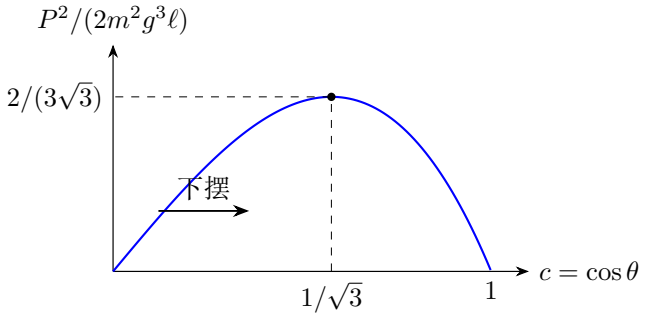


图 3.48: 精确函数 c−c³ 的内部极值与两个端点共同确定最大功率

用余弦变量化为多项式极值

最大化 P^2 与最大化非负的 P 具有同一位置。令 $c=\cos\theta\in[0,1]$，将 $\sin^2\theta=1-c^2$ 代入，有

$$\frac{P^2}{2m^2g^3\ell}=f(c)=c(1-c^2)=c-c^3,\qquad f'(c)=1-3c^2.$$

令 $f'=0$，得 $c=\pm1/\sqrt{3}$；负根不在物理区间内，只保留 $c_*=1/\sqrt{3}$。

比较内部极值与两个端点

按图 3.48，f' 在 $c<c_*$ 时为正、$c>c_*$ 时为负；又 $f(0)=f(1)=0$，故 c_* 给全局最大值。代入计算

$$f(c_*)=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

再由 $P\geq 0$ 取平方根，所以

$$\boxed{P_{\max}=mg\sqrt{2g\ell}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}},\quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

最低点速度最大，但重力与速度垂直，功率反而为零。绳张力始终沿半径，与球速垂直，功率为零。

例 3.17 (固定球面上的脱离与落点)**.** 小质点从固定光滑球面顶端由微小扰动滑下，球半径 R，球心位于水平地面上。求脱离球面的位置与速度，并用抛体方程表示落地点。忽略空气阻力。

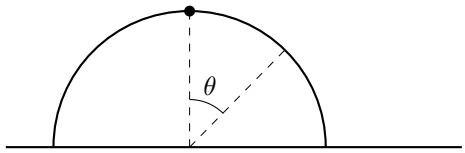


图 3.49: 题设：固定球面上的脱离与落点

解　联立能量和非负支持力条件求脱离

按图 3.49 从顶端计转角 θ，能量式 $v^2=2gR(1-\cos\theta)$，径向式 $mg\cos\theta-N=mv^2/R$。支持力只能非负，首次 $N=0$ 给

$$\boxed{\cos\theta_d=2/3,\ v_d=\sqrt{2gR/3}}.$$

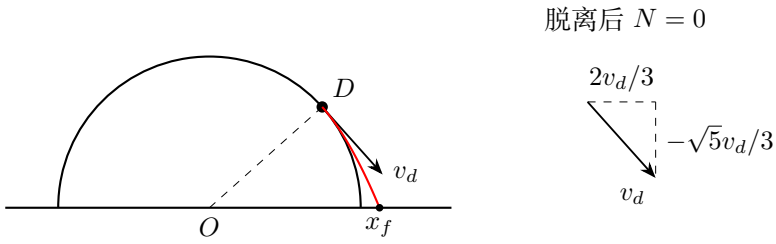


图 3.50: 先沿球面到脱离点，再用切线速度的两个分量求抛体落点

由半径方向确定飞出速度分量

将能量速度代入径向式，$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$。由顶端向下运动时余弦单调减小，第一次 $N = 0$ 为 $\cos\theta = 2/3$。速度方向沿半径 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 的右下切线 $(\cos\theta, -\sin\theta)$，因此后面的两速度分量都有明确的几何依据。

从脱离点切换到抛体运动并求落地根

在图 3.50 取球心为原点，脱离点 $(x_d, y_d) = (\sqrt{5}R/3, 2R/3)$，沿右下切线飞出，速度分量为 $(2v_d/3, -\sqrt{5}v_d/3)$。令 $b = \sqrt{5}v_d/3 > 0$，后续竖直位置为 $y = y_d - bt - gt^2/2$。落地条件 $y = 0$ 乘 $2g$ 并配方，

$$g^2t^2 + 2gbt = 2gy_d, \qquad (gt+b)^2 = b^2 + 2gy_d.$$

两根为 $t = (-b \pm \sqrt{b^2 + 2gy_d})/g$。因为 $y_d > 0$，只有正号给正时间，故

$$t_f = \frac{-\sqrt{5}v_d/3 + \sqrt{5v_d^2/9 + 4gR/3}}{g}, \qquad \boxed{x_f = \frac{\sqrt{5}R}{3} + \frac{2v_d}{3}t_f}.$$

在 N 首次降为零的脱离点，球以当时的切向速度飞出，随后仅受重力，按上述抛体方程运动。

例 3.18 (平面旋转力场的闭路功)**.** 质点在平面力场 $\boldsymbol{F} = (-ky, kx)$ 中沿半径 R 圆周绕原点逆时针一周，$k > 0$。求该力做功，判断它是否为保守力，并讨论沿相反方向运动的功。

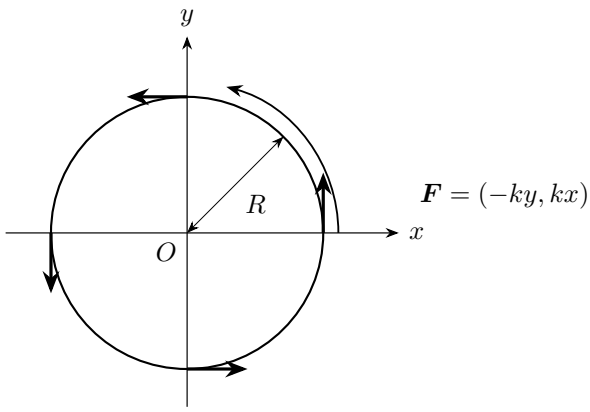


图 3.51: 力场沿以原点为圆心的圆周切向，方向始终逆时针

解　参数化圆周并写出位移微元

按图 3.51 参数化 $x = R\cos\phi, y = R\sin\phi$，逐项微分得到 $\mathrm{d}x = -R\sin\phi\,\mathrm{d}\phi$、$\mathrm{d}y = R\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$。因此 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (-R\sin\phi, R\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi$；力也沿逆时针切向，大小为 kR。

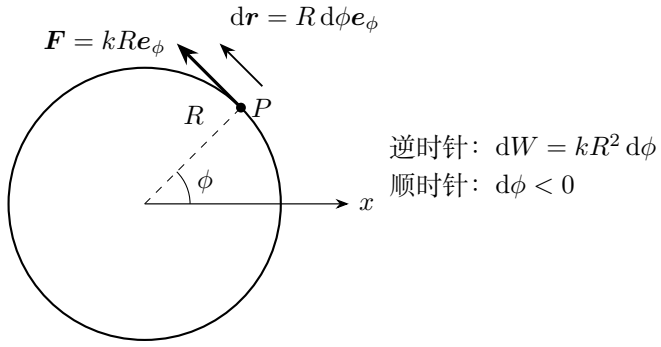


图 3.52: 在任意角度点积均为正；反向路径只改变位移微元方向

利用切向力积分闭路功

图 3.52 中，点积展开为

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [(-kR\sin\phi)(-R\sin\phi) + (kR\cos\phi)(R\cos\phi)]\,\mathrm{d}\phi = kR^2\,\mathrm{d}\phi.$$

利用 $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ 后，被积函数为常量。逆时针一周对应 $\phi : 0 \to 2\pi$，故

$$W = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = kR^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = kR^2[\phi]_0^{2\pi} = \boxed{2\pi kR^2}.$$

沿同一闭合路径一周，力作了正功，表明其功与路径有关。

用闭路功判定保守性和反向功

图 3.52 起点终点相同而功不为零，因此该力为非保守力。顺时针一周则 $W = -2\pi kR^2$。这个力始终沿逆时针切向，顺时针运动时力与位移反向，闭路功相应变号。

3.12　本讲小结

动能 $mv^2/2$ 度量质点运动所具有的能量。力沿作用点位移的积分给出功，合力总功等于动能增量。变力做功先把力与位移微元写成同一变量的函数，再按实际过程的初末位置积分。

对系统求和时，各内力的功取决于各自作用点位移。光滑接触与不可伸长约束可以传递能量，弹性形变储存能量，相对滑动使机械能转为内能。功率 $P = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{作用点}}$ 描述能量传递的快慢，绳轮传动中的速度关系由绳长微分确定。

由能量得到速度后，再用局部受力方程确定持续接触、松绳或分离的位置。分段运动在相应事件处衔接；求临界初速或最大功率时，既计算内部极值，也比较区间端点，并沿运动顺序确定首先到达的状态。

3.13　练习

练习 3.1 (运动员对传送带的功率)**.** 运动员腰部由轻绳经左侧的定滑轮连接悬挂质量 m_2 的重物，重物和运动员重心均保持静止。传送带在脚下以速率 v 向左运动，运动员对带的水平作用力向左。忽略绳轮损耗，求运动员对带做功的功率。

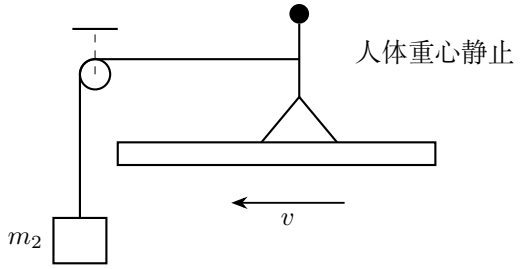


图 3.53: 绳拉力向左，运动员在带面上施加的水平力也向左

练习 3.2 (偏置钉子的完整圆周条件)**.** 长 L 轻绳一端固定于 A，A 在水平轴 Ox 上方 $L/2$。小球从 A 右侧与 A 等高的位置静止释放。钉子 P 在 $x>0$ 处，绳下摆时被其阻挡。绳最大张力为 $7mg$，求球能绕 P 完整一周而不断绳的 x 范围。

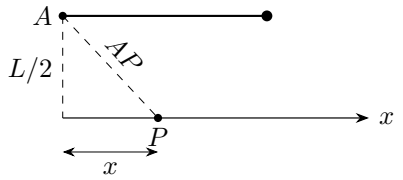


图 3.54: 题设：偏置钉子的完整圆周条件

练习 3.3 (绳松弛后击中钉子)**.** 长 ℓ 的单摆悬于 O。钉子 C 在 O 正下方距离 $x<\ell$ 处。球从左侧不高于 O 的位置静止释放，经过最低点后绳绕钉，随后松弛，球作抛体运动并恰好击中 C。求 x 的最小值。

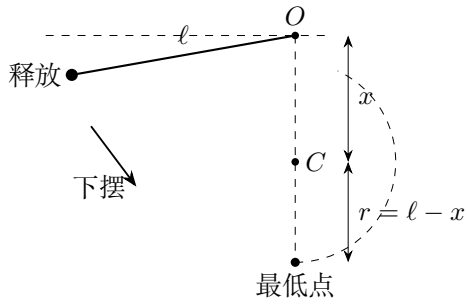


图 3.55: 原摆长 ℓ 不变，绕钉后的运动半径为 $\ell-x$

练习解答

练习 3.1

解　先用重物静止与人体水平平衡求力

图 3.53 的重物静止，绳张力 $T=m_2g$。图中绳把人体向左拉，人体的水平平衡要求传送带对人的摩擦力向右，大小也为 m_2g。由反作用关系，人对带的力向左。

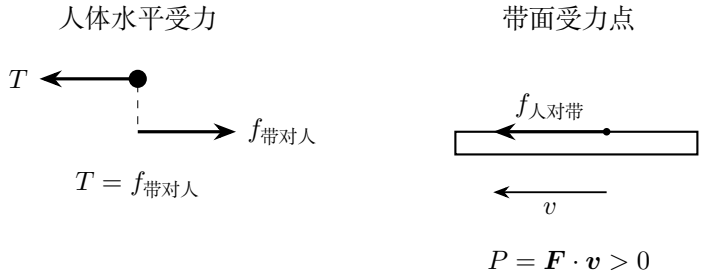


图 3.56: 人体平衡决定力的大小，带面受力点的速度决定功率

在带面上选取做功对象和作用点

人水平方向的绳拉力与带面摩擦平衡；重物静止保证绳张力等于其重力。这两步分别使用人的水平平衡和重物的竖直平衡，才把人的作用力大小与 m_2g 联系起来。人对带的力和带面速度均向左，点积为正。

由同向力与速度求正功率

图 3.56 中带的受力点速度同样向左，故 $\boxed{P = m_2 g v}$，为正。力作用在运动的带面质点上，以该处速度与力作点积，便得到上述正功率。能量来自运动员的化学能。

练习 3.2

解 绕钉后的半径与碰钉时的速度

图 3.54 绳绕钉后有效半径 $r = L - AP = L - \sqrt{x^2 + L^2/4}$。绳第一次碰钉时方向沿 AP，球速度与绳垂直，故没有沿球速度的冲击损失。以 P 为高度零点，初始球高为 $L/2$。

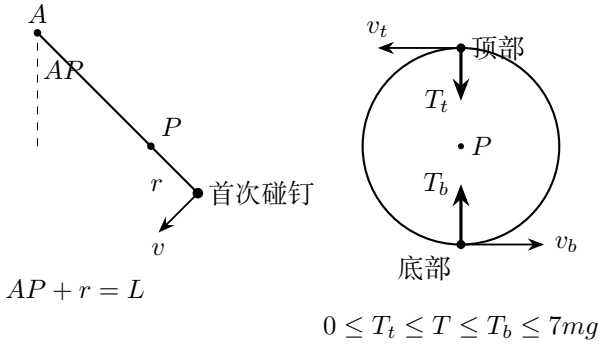


图 3.57: 偏置钉将原摆长分成 AP 和新半径 r，顶部与底部是张力极值位置

用顶部不松绳和底部不断绳限制半径

图 3.57 中，以钉子 P 为高度零点。小球初始高度为 $L/2$，绕钉运动到高度 y 时，能量关系给出

$$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + mgy, \qquad v^2 = gL - 2gy.$$

令球的位置与向上竖直半径的夹角为 φ，则 $y = r\cos\varphi$。沿半径向内列式，

$$T + mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{r}.$$

将速度式代入，

$$T = \frac{m(gL - 2gr\cos\varphi)}{r} - mg\cos\varphi = \frac{mgL}{r} - 3mg\cos\varphi.$$

因此顶部 $\cos\varphi = 1$ 时张力最小，底部 $\cos\varphi = -1$ 时张力最大。

在顶部，由 $y=r$ 得到

$$v_t^2=g(L-2r),\qquad T_t=\frac{mv_t^2}{r}-mg=mg\left(\frac{L}{r}-3\right).$$

整周保持绳拉紧要求 $T_t\geq 0$，即 $r\leq L/3$。在底部，由 $y=-r$ 得到

$$v_b^2=g(L+2r),\qquad T_b=mg+\frac{mv_b^2}{r}=mg\left(3+\frac{L}{r}\right).$$

绳能承受的最大张力为 $7mg$，故

$$3+\frac{L}{r}\leq 7,\qquad r\geq\frac{L}{4}.$$

两项条件合在一起，给出 $L/4\leq r\leq L/3$。

将半径范围转回钉子的水平位置

由 $r=L-AP$，半径范围反向转成 $2L/3\leq AP\leq 3L/4$。再代入 $AP=\sqrt{x^2+L^2/4}$，两端非负，可以平方：

$$\frac{4L^2}{9}\leq x^2+\frac{L^2}{4}\leq\frac{9L^2}{16}\quad\Longrightarrow\quad\frac{7L^2}{36}\leq x^2\leq\frac{5L^2}{16}.$$

由题设 $x>0$ 取正平方根，得到

$$\boxed{\sqrt{7}L/6\leq x\leq\sqrt{5}L/4}.$$

阻挡前旧圆弧的张力不超过 $3mg$，故真正上限来自新小圆底部。

练习 3.3

解　在松绳点联立几何与零张力条件

令图 3.55 绕钉后的半径 $r=\ell-x$，从向下竖直方向向右计角 θ。松绳处令 $c=\cos\theta<0$、$s=\sin\theta>0$，坐标相对 C 为 $(rs,-rc)$，切向速度为 (vc,vs)。张力为零给 $v^2=-grc$。

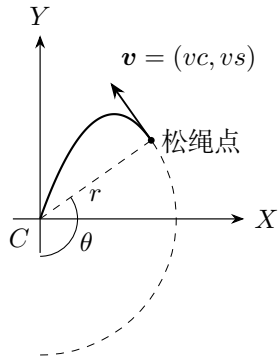


图 3.58: 解答过程：绳松弛后击中钉子

要求抛体横纵坐标同时到达钉子

按图 3.58 飞到 C 需同时满足 $0=rs+vct$ 及 $0=-rc+vst-gt^2/2$。第一式给 $t=-rs/(vc)>0$；代入第二式时，$vst=-rs^2/c$，而 $-gt^2/2=-gr^2s^2/(2v^2c^2)=rs^2/(2c^3)$。再除以 r，得到 $-c-s^2/c+s^2/(2c^3)=0$；利用 $c^2+s^2=1$ 合并前两项，得 $-1/c+s^2/(2c^3)=0$，所以 $2c^2=s^2$，即 $c=-1/\sqrt{3}$。

用允许的释放高度求钉距下限

图 3.58 中小球松绳后仅受重力，以松绳点的切向速度作初速度，沿抛物线到达钉子。由所得 $c=-1/\sqrt{3}$，松绳点相对 O 的高度为 $-x+r/\sqrt{3}$，速率平方为 $gr/\sqrt{3}$。因此所需初始释放高度 h_0 满足

$$gh_0=g(-x+r/\sqrt{3})+\frac{1}{2}\frac{gr}{\sqrt{3}}=g\left(-x+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right).$$

释放点不高于 O，要求 $h_0\le 0$，于是 $2x\ge\sqrt{3}(\ell-x)$。把 x 项收集在左边，$(2+\sqrt{3})x\ge\sqrt{3}\ell$，除以正系数并有理化：

$$x\ge\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\ell=\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\ell=(2\sqrt{3}-3)\ell.$$

因此

$$\boxed{x_{\min}=(2\sqrt{3}-3)\ell}.$$

临界时从与 O 等高的水平位置释放；其松绳点和飞行初速度满足前面的横、纵位置方程，经过同一个正时间 t 到达 C。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第四讲

能量转化与碰撞

2026

目录

第四讲　能量转化与碰撞 **1**

4.1　保守力与势能 1

4.2　机械能守恒与能量转化 2

4.3　势能曲线与平衡附近的运动 3

4.4　质心平动与相对运动的动能 5

4.5　恢复系数与一维碰撞 6

4.6　弹簧接触的有限过程 7

4.7　光滑斜碰与粗糙接触 8

4.8　逐次碰撞与运动衔接 10

4.9　理想流体中压力功与机械能流 10

4.10 例题与分析 12

4.11 本讲小结 34

4.12 练习 34

练习解答 35

第四讲　能量转化与碰撞

4.1　保守力与势能

重力使下落物体加速，弹簧恢复形变时也能把物体推开。运动动能增加的同时，物体间相对位置或弹簧形变发生变化。把相互作用中与位置有关的能量称为势能，就可以用动能与势能的转化描述这类运动。

先看重力。物体从 A 移到 B，近地重力恒为 $-mg\boldsymbol{e}_y$，所以

$$W_g = \int_A^B (-mg)\,\mathrm{d}y = -mg[y]_{y_A}^{y_B} = mg(y_A - y_B).$$

任意路径连接这两个位置，重力功都相同；沿闭合路径回到原高度，重力功为零。一般地，功只由初末位置决定的力称为**保守力**。选定一个参考位置 O，定义势能差为

$$U(\boldsymbol{r}) - U(O) = -\int_O^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad W_{A\to B} = U(A) - U(B).$$

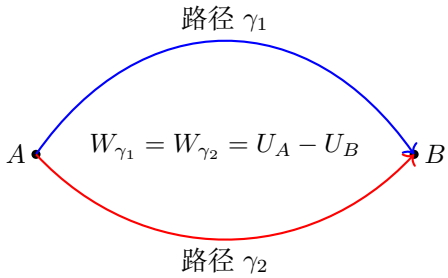


图 4.1: 同端点的两条路径功相等，才能建立单值势能

图 4.1 中的两条路径都从 A 指向 B，保守力在两条路径上的功相等。沿第一条去、第二条返回，闭路功为 $W_{\gamma_1} - W_{\gamma_2} = 0$。势能属于相互作用：重力势能联系物体与地球，弹性势能联系弹簧形变。选取零势能位置只给全部势能加上一个常数，势能差保持不变。

取 $y = 0$ 为重力零势面、弹簧自然长为弹性零势能位置，分别有

$$U_g(y) = -\int_0^y (-mg)\,\mathrm{d}\eta = mg[\eta]_0^y = mgy,$$

$$U_s(x) = -\int_0^x (-k\xi)\,\mathrm{d}\xi = k\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}kx^2.$$

离地球较远时，万有引力随距离变化。径向分量 $F_r = -GMm/r^2$，从有限参考半径 b 积到 r：

$$U(r) - U(b) = GMm\int_b^r s^{-2}\,\mathrm{d}s = GMm[-s^{-1}]_b^r = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{b}\right).$$

再令 $b \to \infty$，取无穷远势能为零，得到 $U(r) = -GMm/r$。从地表半径 R 上升 h 的势能增量为

$$\Delta U = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMmh}{R(R+h)} = mgh\frac{R}{R+h}, \quad g = \frac{GM}{R^2}.$$

当 $h \ll R$ 时，因子 $R/(R+h)$ 近似为 1，就得到近地表达式 mgh。

4.2　机械能守恒与能量转化

动能与势能之和称为**机械能**。对选定的系统，把保守力的功写成 $-\Delta U$，其余力的功记为 $W_{\text{其他}}$。动能定理依次变为

$$\Delta K = W_{\text{保守}} + W_{\text{其他}} = -\Delta U + W_{\text{其他}},$$

$$\boxed{\Delta(K+U) = W_{\text{其他}}}.$$

当其余作用的总功为零时，机械能守恒，$K + U = E$。弹簧推开物体时，弹性势能转为动能；摆球上升时，动能转为重力势能。物体与活动光滑轨道组成整体时，光滑接触内力只在两者间传递能量，其总功相消。例 4.3 利用车与摆球整体的动量和能量，确定碰撞后再摆动的过程。

滑动摩擦使机械能转为物体的内能、不可恢复形变和声等。设两物体沿 x 方向滑动，$v_1 > v_2$，摩擦力大小为 f。在 $\mathrm{d}t$ 内，两摩擦力分别作功 $-f\,\mathrm{d}x_1$ 与 $f\,\mathrm{d}x_2$，相加：

$$\mathrm{d}W_f = -f(\mathrm{d}x_1 - \mathrm{d}x_2) = -f(v_1 - v_2)\,\mathrm{d}t = -f\,\mathrm{d}s_{\text{相}}.$$

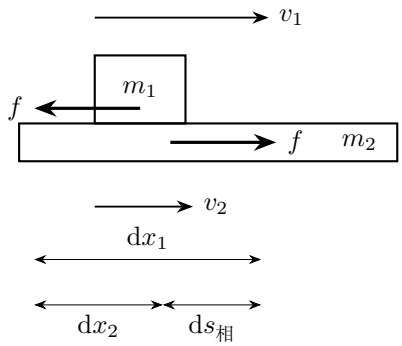


图 4.2: 摩擦力成对，但作用点位移不同；差出的功转为耗散

图 4.2 中，上方物体受向后摩擦，下方物体受向前摩擦。两个作用点在同一时间内移动的距离不同，总摩擦功由两距离之差决定。相对滑动造成的机械能减少量为

$$Q = \int f \,\mathrm{d}s_{相} \geq 0;$$

恒定摩擦力时 $Q = f s_{相}$。例 4.2 中子弹相对木块的深入量就是 $s_{相}$；例 4.5 把往返滑动的两段相对路程分别累计。

无外界能量输入、且其余能量变化均归入 Q 时，能量关系写为

$$K_i + U_i = K_f + U_f + Q.$$

碰撞与弹簧运动相接时，按各阶段的实际作用写这条关系。例 4.1 先求子弹射入木块后的速度和碰撞耗散，再把粘合体的动能转为弹簧势能；固定端弹簧在后一阶段给系统外冲量，动量方程相应改变。

4.3 势能曲线与平衡附近的运动

一维保守力满足 $F_x = -U'(x)$。在总机械能 E 已知时，$K = E - U(x) \geq 0$ 先给出允许位置；实际运动还只能留在初态所在的连通允许区间内。图 4.3 用 $U/U_0 = [(x/a)^2 - 1]^2$ 展示两个势阱，中间势垒高 U_0。

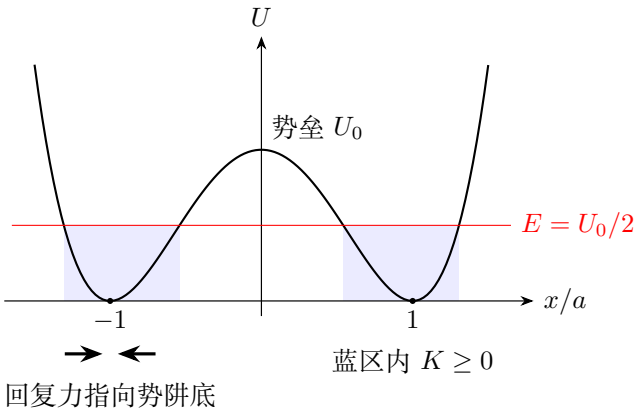


图 4.3: 相同能量线可对应两个互不连通的允许区间，初态决定实际处在哪个势阱

能量线与势能曲线相交处有 $K = 0$，是运动的候选转折位置。若当地 $U' \neq 0$，净力使速度随即反向。平衡位置则同时满足 $U'(x_0) = 0$。令 $\xi = x - x_0$，考察平衡位置附近的小位移，势能展开为

$$U(x_0 + \xi) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2.$$

对位置求导时，$\mathrm{d}\xi/\,\mathrm{d}x = 1$，因此

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} \simeq -\frac{1}{2}U''(x_0)\cdot 2\xi\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = -U''(x_0)\xi.$$

当 $U''(x_0) > 0$ 时，偏向右侧便受到向左的力，偏向左侧便受到向右的力，物体在势阱底附近来回运动。代入牛顿第二定律，得到

$$\ddot{\xi} + \omega^2\xi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{U''(x_0)}{m} > 0.$$

为求出这个方程的解，试取 $\xi = \mathrm{e}^{st}$。连续求导并代入，

$$\dot{\xi} = s\mathrm{e}^{st}, \qquad \ddot{\xi} = s^2\mathrm{e}^{st}, \qquad (s^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{st} = 0.$$

指数函数始终非零，故 $s^2 + \omega^2 = 0$，两个根为 $s = \pm i\omega$。用 $\mathrm{e}^{\pm i\omega t} = \cos\omega t \pm i\sin\omega t$ 组合两个指数解，实通解和速度分别为

$$\xi = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \dot{\xi} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$$

若初始位移为 ξ_0、初始速度为 w_0，令 $t = 0$，得到

$$A = \xi_0, \qquad B\omega = w_0, \qquad \xi = \xi_0\cos\omega t + \frac{w_0}{\omega}\sin\omega t.$$

位移围绕平衡位置作有界的小振动，该平衡稳定，角频率为 $\sqrt{U''(x_0)/m}$。二阶导数为零时，平衡附近的势能形状由首个非零高阶项确定。

对图中的势能 $U = U_0[(x/a)^2 - 1]^2$，链式法则逐项给出

$$U'(x) = 2U_0\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)\frac{2x}{a^2} = \frac{4U_0 x}{a^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

$$U''(x) = \frac{4U_0}{a^2}\left[\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) + x\frac{2x}{a^2}\right] = \frac{4U_0}{a^2}\left(\frac{3x^2}{a^2} - 1\right).$$

所以 $x = \pm a$ 为稳定平衡，$U'' = 8U_0/a^2$；$x = 0$ 为不稳定平衡，$U'' = -4U_0/a^2$。在两个稳定位置附近，小振动角频率均为 $\sqrt{8U_0/(ma^2)}$。练习 4.1 用净力随位置的斜率描述平衡失稳，与势能曲线的曲率判据相对应。

4.4 质心平动与相对运动的动能

设两物体总质量 $M = m_1 + m_2$，质心速度 $\boldsymbol{V}_C = (m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2)/M$，相对速度 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$。先解出

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V}_C + \frac{m_2}{M}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V}_C - \frac{m_1}{M}\boldsymbol{u}.$$

图 4.4 把同一时刻的两速度作共同平移；速度间距不变，质心系内两物体的动量等大反向。

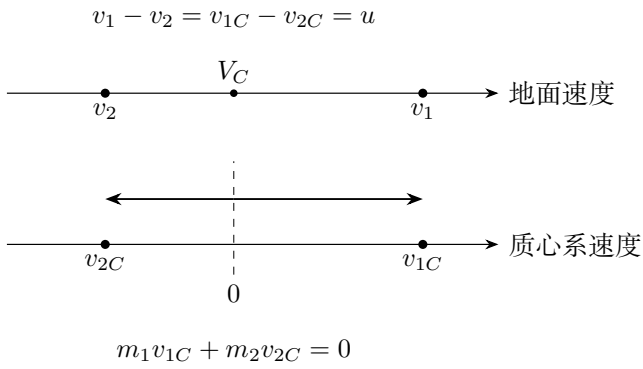


图 4.4: 共同减去质心速度不改变两物体速度之差

将上述两式代入 $K = m_1 v_1^2/2 + m_2 v_2^2/2$，保留两个平方中的所有项，

$$K = \frac{1}{2}MV_C^2 + \left(\frac{m_1 m_2}{M} - \frac{m_2 m_1}{M}\right)\boldsymbol{V}_C \cdot \boldsymbol{u} + \frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{2M^2}u^2.$$

交叉项相消；最后一项的分子提取 m_1m_2 后剩 $m_1+m_2=M$，因此 u^2 的系数化为 $m_1m_2/(2M)=\mu/2$，得到

$$K=\frac{1}{2}MV_C^2+\frac{1}{2}\mu u^2,\qquad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}. \tag{4.1}$$

第一项是整体平动动能，第二项是相对运动动能。忽略外冲量时，V_C 不变；内部碰撞、弹簧形变和内耗只能重新分配相对运动的能量。完全非弹性碰撞末态共速，相对动能全部转走，所以在给定总动量下动能损失最多，为 $\mu u_i^2/2$。弹簧最大压缩也共速，但能量可暂存为弹性势能，随后重新释放，这部分能量随后可以重新转为相对动能。

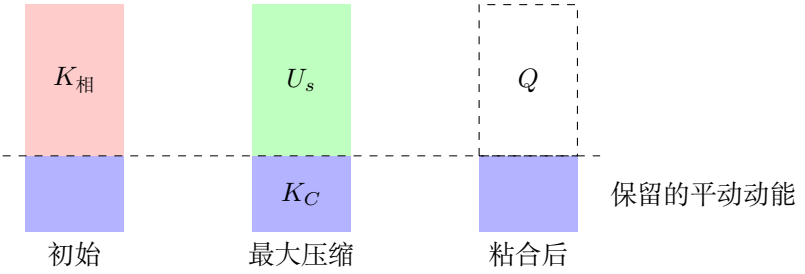


图 4.5: 共速时整体平动仍存在；相对动能可以储存在弹簧中，也可以转为耗散

自由木块与子弹的相互摩擦不改变总动量，因而 $\mu(u_i^2-u_f^2)/2=f\ell_{相}$。木块固定时，固定装置提供外冲量，子弹的动能变化与固定木块中的穿入阻力功相联系。

4.5　恢复系数与一维碰撞

取从物体 1 指向物体 2 为正方向，碰前接近要求 $u_1-u_2>0$。恢复系数用分离相对速率与接近相对速率之比定义：

$$e=\frac{v_2-v_1}{u_1-u_2},\qquad v_2-v_1=e(u_1-u_2)\geq 0.$$

通常无额外释能时 $0\leq e\leq 1$。将恢复关系写成 $v_2=v_1+e(u_1-u_2)$，代入动量式 $m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$，得 $Mv_1=m_1u_1+m_2u_2-em_2(u_1-u_2)$。除以 M 求 v_1，再代回恢复关系求 v_2，得到

$$v_1=\frac{(m_1-em_2)u_1+(1+e)m_2u_2}{M},$$
$$v_2=\frac{(1+e)m_1u_1+(m_2-em_1)u_2}{M}.$$

这两式把总动量守恒与材料的恢复规律联系起来。碰后相对速度反号，分离速率为原接近速率的 e 倍。由式(4.1)，质心动能保持不变，动能损失为

$$Q=\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2-\frac{1}{2}\mu[e(u_1-u_2)]^2=\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u_1-u_2)^2.$$

图 4.5 的粘合极限对应 $e=0$，弹性碰撞则 $e=1$、$Q=0$。

等质量弹性正碰时，速度交换。若只联立动量和动能，还会得到末速度保持 $(u,0)$ 的原状根；原状对应接近阶段，真正的碰后状态由分离条件 $v_2-v_1>0$ 确定。固定墙作为极大质量目标的极限，可给出小球速度反号的结果；对小球单独研究时，墙的作用进入外冲量。

4.6 弹簧接触的有限过程

瞬时碰撞只保留前后速度，弹簧模型还能描述接触力和形变。设左右两物体间弹簧压缩量 $x=\ell_0-(x_2-x_1)$，故 $\dot{x}=v_1-v_2$。压缩时两端受力为 $-kx,+kx$，于是

$$\ddot{x}=-k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)x=-\frac{k}{\mu}x.$$

图 4.6 中的两物体在最大压缩时以质心速度 V_C 共同运动。

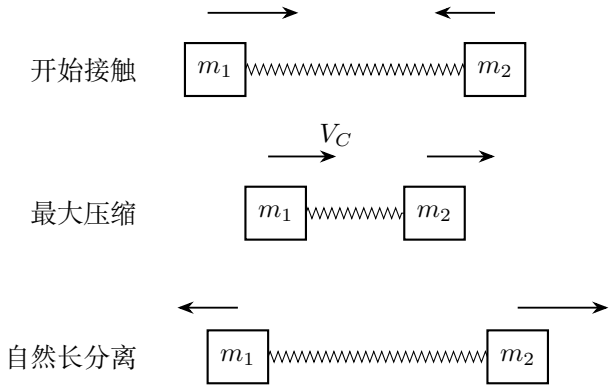


图 4.6: 最大压缩时相对速度为零，恢复自然长后两物体正在分离

以自然长接触、相对接近速率 $u>0$ 为初态，令 $\omega=\sqrt{k/\mu}$。在 $x''+\omega^2x=0$ 中试取 $x=\mathrm{e}^{st}$，依次求导为 $x'=s\mathrm{e}^{st}$、$x''=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入后 $(s^2+\omega^2)\mathrm{e}^{st}=0$，指数不为零，故 $s^2+\omega^2=0$，根为 $\pm i\omega$；将两指数解组合成实函数，通解为

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\qquad \dot{x}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t.$$

初始条件 $x(0)=0,\dot{x}(0)=u$ 给 $A=0,B=u/\omega$，于是 $x=(u/\omega)\sin\omega t$、$\dot{x}=u\cos\omega t$。再求导得 $\ddot{x}=-u\omega\sin\omega t=-\omega^2x$，满足运动方程。由图 4.7，最大压缩在

首次 $\dot{x}=0$，即 $t_m=\pi/(2\omega)$；第一次恢复自然长在 $t_c=\pi/\omega$，此时 $\dot{x}=-u<0$；后者才是只接触、不连接的弹簧结束作用时刻。

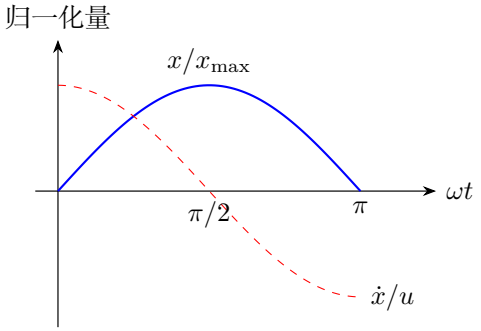


图 4.7: 压缩量与相对速度共同确定接触阶段

最大压缩量 $x_{\max}=u\sqrt{\mu/k}$，弹性势能 $kx_{\max}^2/2=\mu u^2/2$。任意时刻的地面速度是 $v_1=V_C+(m_2/M)\dot{x}$、$v_2=V_C-(m_1/M)\dot{x}$。求某个物体先停止，应令对应 $v_i=0$；求最大压缩才令 $\dot{x}=0$。两种事件一般不重合。

若初始已有压缩 x_0，且相对速度 u_0，仍从同一通解求常数：$x(0)=A=x_0$，$\dot{x}(0)=B\omega=u_0$。因此 $x=x_0\cos\omega t+(u_0/\omega)\sin\omega t$。把它合成为 $x=\mathcal{A}\cos(\omega t-\phi)$，比较两系数得 $\mathcal{A}\cos\phi=x_0$、$\mathcal{A}\sin\phi=u_0/\omega$，平方相加给振幅 $\mathcal{A}=\sqrt{x_0^2+(u_0/\omega)^2}$。两端均连接时可以继续拉伸；只接触时只能取 $x\geq 0$ 且接触力非负的一段。有耗散时，恢复系数可概括碰前后关系，但接触时间和力峰值仍须具体弹性、阻尼模型。

4.7 光滑斜碰与粗糙接触

光滑碰撞的接触冲量只沿法线，因此只改变各物体的法向速度，切向速度各自不变。恢复系数也只用于法向分量。固定光滑平面、完全弹性且在平面惯性系中观察时，法向反号、切向不变才给出入射角等于反射角；活动平面需先作速度变换。

对固定粗糙平面，先把受碰物体视为不计自转的质点。设入射法向速率 $u_n>0$、切向速度 $u_t>0$，忽略其他冲量。法向冲量 $J_n=m(1+e)u_n$，分离法向速率为 eu_n。若全程沿原方向滑动，切向冲量 $J_t=-\mu J_n$，于是 $v_t=u_t-\mu(1+e)u_n$。这条滑动关系用于 $v_t\geq 0$ 的阶段。

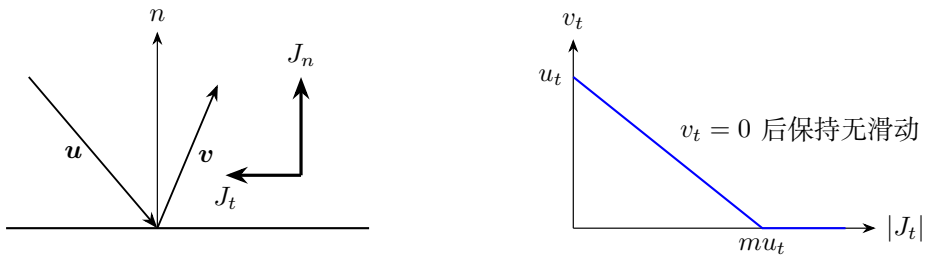


图 4.8: 切向速度随摩擦冲量减小，到零速时转入无滑动状态

若接触中到达零切向速度后能维持不滑动，则实际 $|J_t| = \min[\mu J_n, mu_t]$，结果为 $v_t = \max[u_t - \mu(1+e)u_n, 0]$。图 4.8 右图的横轴是累计切向冲量大小，折点后接触点保持无滑动。设入射角 θ 与法线夹角满足 $\tan\theta = u_t/u_n$，$e > 0$ 且碰后仍滑动时，

$$\tan\alpha = \frac{\tan\theta - \mu(1+e)}{e}.$$

若 $\mu(1+e) \geq \tan\theta$，则出射沿法线、$\alpha = 0$。这里采用题设中忽略自转、无其他切向冲量的质点模型。考虑自转时，切向相对速度由两物体接触点的实际速度决定。

在两个自由物体的弹性斜碰中，回到地面系相当于把 $\boldsymbol{V}_C$ 加到可旋转的质心系末速度上，速度端点因而位于圆上。若原点在圆外，最大偏转方向是从原点向速度圆作出的切线；圆心、半径与速度原点的位置共同确定允许偏转方向。

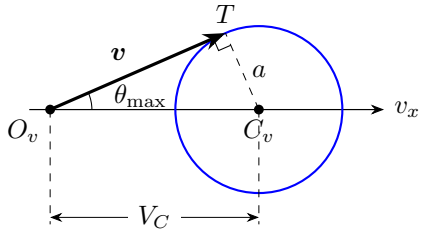


图 4.9: 重入射粒子的末速度端点在质心速度圆上，极端偏转方向对应从原点作的切线

图 4.9 对应质量 m 的粒子撞向静止的质量 M 粒子、且 $m > M$ 的弹性散射。$V_C = mu/(m+M)$，入射粒子在质心系中的速率为 $a = Mu/(m+M)$。把质心系末速度加上 $V_C\boldsymbol{e}_x$，末速度端点就在图示圆上。原点到切点的速度方向给出最大偏转角，直角三角形满足 $\sin\theta_{\max} = a/V_C = M/m$。例 4.13 进一步讨论两质量相等与入射粒子较轻的情形。

4.8　逐次碰撞与运动衔接

多物体的总动量和总能量通常不足以确定各自末速度。图 4.10 给出三个等质量球的一个确定过程：1 先碰 2，2 再碰 3。每次都是弹性正碰且速度交换，所以中间状态决定下一次是否接触。

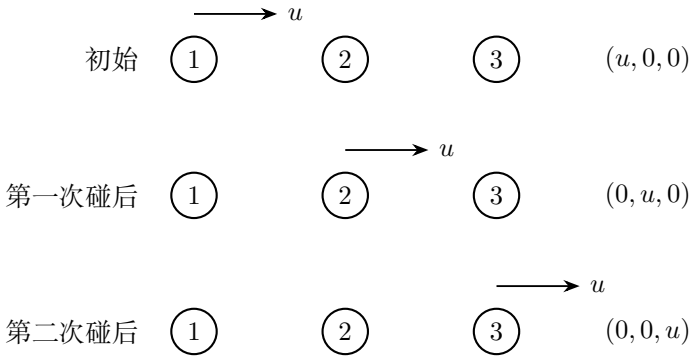


图 4.10: 三个等质量球依次接触，每次弹性正碰交换速度

每次碰撞后，用新的速度计算两物体间距的变化率，便能判断下一对何时接触。图中第一个球停止，第二个球向第三个球运动，随后交换速度。例 4.7 依次追踪振子内部回弹与球间碰撞；例 4.8 则先按题设处理一轮对称同时冲击，再计算后续正碰。

弹簧压缩、瞬时粘合和摩擦共速可有相同的“相对速度为零”末态，但能量去向不同。各阶段按实际过程衔接：弹簧储能随后释放，粘合与滑动则把相对机械能转为内能。例 4.16 中水平滑动逐次减弱，归零后小球仍沿竖直方向弹跳。

4.9　理想流体中压力功与机械能流

沿流管持续流动的流体，通过入口和出口压力交换能量。对定常、不可压缩、无粘滞流动，沿同一流线取截面 1 和 2。短时间两端流过同体积 $\mathrm{d}V = S_1 v_1 \,\mathrm{d}t = S_2 v_2 \,\mathrm{d}t$；图 4.11 的入口压力做正功 $p_1 \,\mathrm{d}V$，出口压力做负功 $-p_2 \,\mathrm{d}V$。

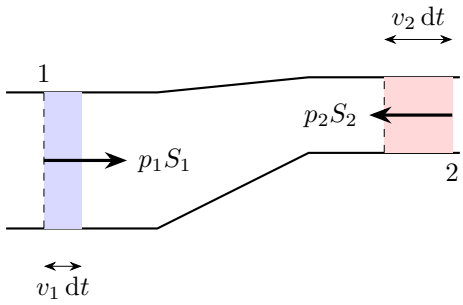


图 4.11: 同一时间两端的流体微柱体积相等，净压力功补充动能与重力势能变化

净压力功等于流入、流出部分机械能之差，

$$(p_1 - p_2)\,\mathrm{d}V = \tfrac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)\,\mathrm{d}V + \rho g(h_2 - h_1)\,\mathrm{d}V.$$

消去 $\mathrm{d}V$ 便得到伯努利方程

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{常量}. \tag{4.2}$$

三项都是单位体积的能量。对这里同一流线上的理想定常流动，同高度处流速较大时，静压较小。

皮托管在驻点把来流速度降到零，同高比较给出 $p_0 - p = \rho v^2/2$。图 4.12 区分迎流驻点口与侧向静压口，因此驻点读数较高。侧孔给出静压 p，迎流口把来流减速到零，给出驻点压强 p_0。

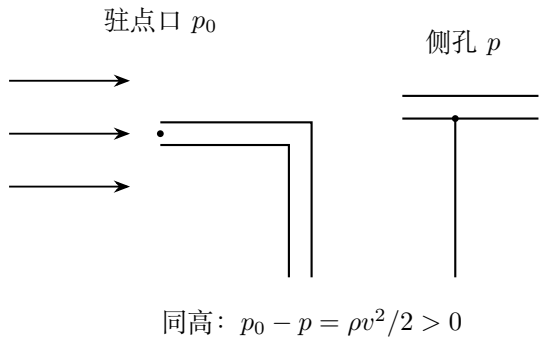


图 4.12: 迎流口测驻点压强，平行来流的侧孔测静压，二者差值用于测速

若两测口同高并接到密度为 ρ_m 的测压液，来流密度为 ρ，液面差 Δh 给出 $p_0 - p = (\rho_m - \rho)g\Delta h$。气体密度远小于测压液密度时，可把 $\rho_m - \rho$ 近似为 ρ_m；两密度接近时使用完整密度差。流速需结合测口高度、液柱几何与流体能量式共同求出。

4.10　例题与分析

例 4.1 (子弹、弹簧与系统守恒)**.** 质量 m 的子弹以 v_0 射入光滑桌面上的质量 M 木块并留在其中。木块右侧连接劲度系数 k 的轻弹簧，弹簧另一端固定在墙上。初始弹簧为自然长，木块静止，碰撞很短。判断从射入开始到弹簧长度最短这一全过程的动量、机械能是否守恒，并求最大压缩量。

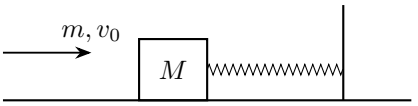


图 4.13: 题设：子弹、弹簧与系统守恒

解　全过程中的外冲量与碰撞耗散

图 4.13 弹簧固定端承受墙的外力。整个压缩过程存在有限水平外冲量，故子弹、块和弹簧的总动量不守恒；射入碰撞又耗散机械能，故全过程机械能也不守恒。

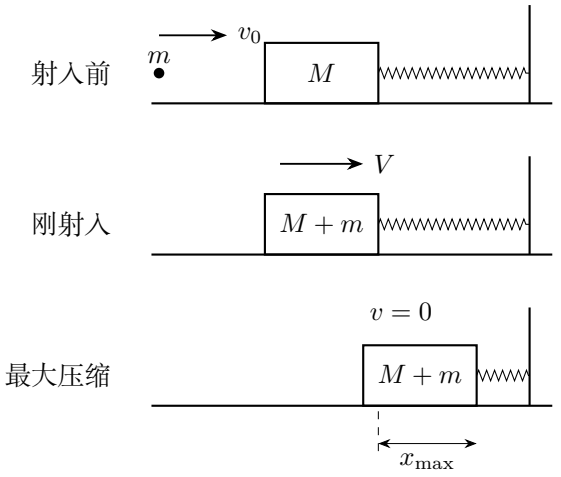


图 4.14: 射入时近似守恒动量，随后粘合体压缩固定端弹簧

先求射入共速，再求弹簧最大压缩

按图 4.14 分两段。射入时间极短，弹簧形变几乎不变，其冲量可略，得到 $mv_0 = (M+m)V$。随后粘合体与弹簧之间只作可恢复的能量转化：$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2$。所以

$$\boxed{x_{\max} = \frac{mv_0}{\sqrt{k(M+m)}}}.$$

最大压缩量与射入损失的能量

消元时先用 $V = mv_0/(M+m)$，代入第二段得到 $kx_{\max}^2 = m^2v_0^2/(M+m)$；压缩量取非负根。还可算第一段耗散 $Q = mv_0^2/2 - (M+m)V^2/2 = mMv_0^2/[2(M+m)]$，它恰是全过程机械能不守恒的那一部分。

射入阶段的动量关系给出弹簧运动的初速度，随后能量关系给出最大压缩量，两段由共同速度 V 衔接。

例 4.2 (子弹入木的相对位移)**.** 质量 m 的子弹以 v_0 射入静止、质量 M 的自由木块。水平面光滑，子弹在木块中受到恒定阻力 f，最终没有穿出，相对深入距离为 D。求木块在射入期间的对地位移和机械能损失。

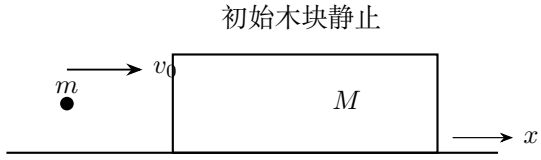


图 4.15: 自由木块可反冲，子弹的相对深入量从开始接触木块时计起

解　用相对减速度确定共速时间和深入量

按图 4.15 整体水平动量守恒，共速 $V = mv_0/(M+m)$。记约化质量 $\mu = mM/(m+M)$，相对速度为 u。子弹、木块的加速度分别为 $-f/m$、f/M，所以 $\dot{u} = -f(1/m + 1/M) = -f/\mu$。从开始射入的 $u(0) = v_0$ 积分，

$$u(\tau) - v_0 = -\frac{f}{\mu}\int_0^\tau \mathrm{d}\eta = -\frac{f}{\mu}[\eta]_0^\tau = -\frac{f}{\mu}\tau.$$

在首次共速时 $u(t) = 0$，故 $t = \mu v_0/f$。

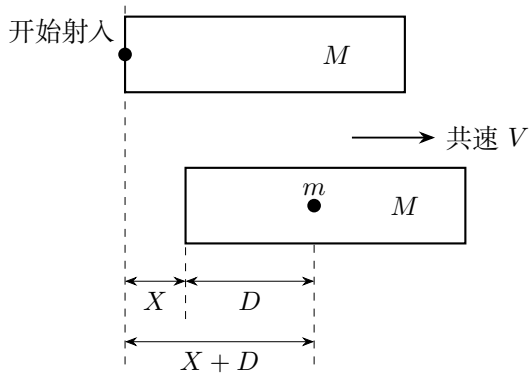


图 4.16: 在固定地面坐标中比较木块端面与子弹的位置，位移之差等于穿入深度

把两物体的对地位移相减

由图 4.16，相对深入量应积相对速度：

$$D=\int_0^t\left(v_0-\frac{f}{\mu}\tau\right)\mathrm{d}\tau=\left[v_0\tau-\frac{f}{2\mu}\tau^2\right]_0^t=v_0t-\frac{ft^2}{2\mu}=\frac{\mu v_0^2}{2f}.$$

木块起初静止，在子弹相对它滑动的阶段受向右的恒力 f。先积加速度求速度，再积速度求位移：

$$V_M(\tau)-V_M(0)=\int_0^\tau\frac{f}{M}\,\mathrm{d}s=\frac{f}{M}[s]_0^\tau=\frac{f\tau}{M}.$$

$$X=\int_0^t\frac{f}{M}\tau\,\mathrm{d}\tau=\frac{f}{M}\left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t=\frac{ft^2}{2M}=\frac{\mu^2v_0^2}{2Mf}.$$

将这两个位移式相除，$X/D=\mu/M=m/(m+M)$，所以 $\boxed{X=mD/(M+m)}$。

由两个作用点的位移求耗散

图 4.16 中，子弹向右走了 $X+D$，木块向右走了 X。阻力对子弹做负功 $-f(X+D)$，对木块做正功 fX。两者相加为 $-fD$，于是

$$\boxed{Q=fD=\tfrac{1}{2}\mu v_0^2}.$$

例 4.3 (两车碰撞后的车内摆动)**.** 质量均为 M 的两车 A,B 在光滑水平面以相同速率 $u=1.8\,\mathrm{m/s}$ 相向运动。B 上竖直悬挂质量 $M/4$ 的摆球，绳长 $0.4\,\mathrm{m}$。两车短时碰撞后粘合，求摆球第一次到相对车的最高点时对地速度。

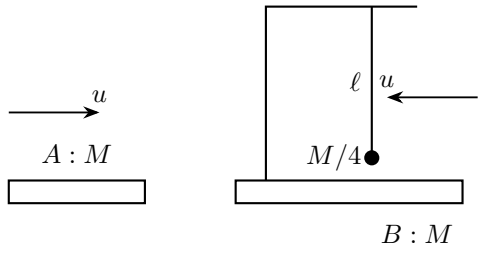


图 4.17: 摆球随 B 车一起向左运动；碰撞瞬间摆绳竖直

解　短碰撞与随后的摆动

按图 4.17 取 A 的初运动方向为正。两车碰撞时摆绳竖直，绳的冲量沿竖直方向，摆球保留原有的水平速度 $-u$。两车初水平动量相消，粘合车架碰后瞬时静止。随后把车架与摆球合为系统，总水平动量为 $P=-(M/4)u$。

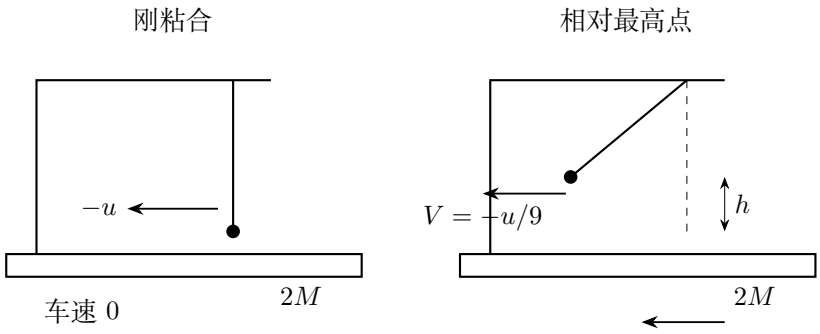


图 4.18: 短碰撞后车架暂时静止；摆角转折时球与车以同一对地速度运动

图 4.18 中，摆球到相对车的最高点时，摆角变化率为零，球与车具有同一对地速度 V。由水平动量守恒，

$$\left(2M + \frac{M}{4}\right) V = -\frac{M}{4}u, \qquad \boxed{V = -\frac{u}{9} = -0.20\,\mathrm{m/s}}.$$

负号说明球此时沿 B 车原来的方向运动。

摆球的上升高度

碰后只有摆球运动，初动能为 $K_0 = \frac{1}{2}(M/4)u^2 = Mu^2/8$。在相对最高点，系统仍有共同平动动能

$$K_f = \frac{1}{2}\left(2M + \frac{M}{4}\right)\left(\frac{u}{9}\right)^2 = \frac{Mu^2}{72}.$$

减少的动能转化为摆球的重力势能，故

$$\frac{M}{4}gh = K_0 - K_f = Mu^2\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{72}\right) = \frac{Mu^2}{9},$$

$$h = \frac{4u^2}{9g} \approx 0.144\,\mathrm{m} \quad (g = 10\,\mathrm{m/s^2}).$$

这个高度小于绳长 $0.4\,\mathrm{m}$，转折点处摆球仍在悬点以下，绳保持拉紧。

例 4.4 (落块与竖直弹簧钢板)**.** 质量 m 的钢板连在竖直弹簧上，静平衡时压缩 x_0，自然长位置为 O，比平衡板面高 x_0。物块从平衡板面上方 $3x_0$ 处释放，与板短时碰撞后共同向下运动但不粘连。若物块质量 m，恰好回到 O 停止；改为 $2m$，求物块最后超过 O 的最高高度。

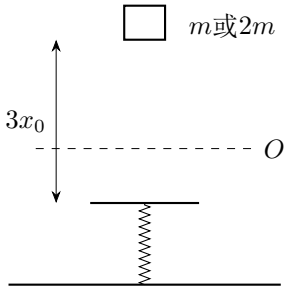


图 4.19: 题设：落块与竖直弹簧钢板

解　从下落与短碰撞求共同下行初速

由图 4.19 平衡条件 $kx_0 = mg$。物块落到板前速率 $u = \sqrt{6gx_0}$。质量为 $2m$ 时，短碰撞中 $2mu = 3mV$，故 $V = 2u/3$。以平衡板面为重力势能零点，碰后总机械能为 $\frac{1}{2}(3m)V^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$。

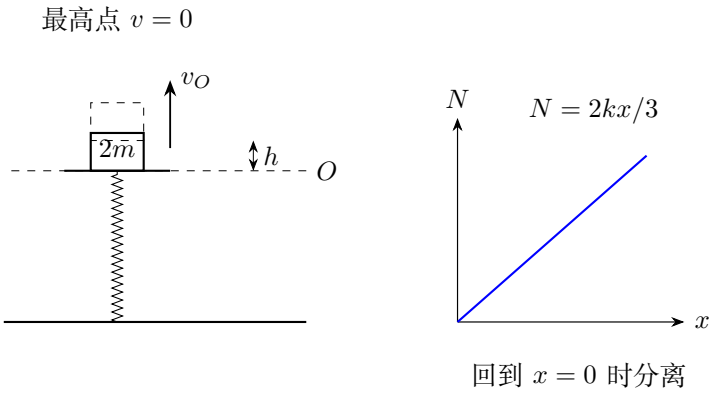


图 4.20: 接触力随弹簧压缩量归零，物块从自然长位置继续自由上抛

回到自然长时计算剩余动能

在图 4.20 回到自然长位置 O 时，弹簧势能为零，重力势能增加 $3mgx_0$，因此

$$\frac{1}{2}(3m)v_O^2 = \frac{1}{2}(3m)\frac{4}{9}(6gx_0) + \frac{1}{2}mgx_0 - 3mgx_0 = \frac{3}{2}mgx_0.$$

故 $v_O^2 = gx_0$。共同接触时板与物块具有相同的向下加速度 a。整体有 $3mg - kx = 3ma$，物块有 $2mg - N = 2ma$；将 $a = g - kx/(3m)$ 代入物块方程，得到 $N = 2kx/3$。

因此当压缩量由正值减到零时，接触力确实先减到零；到 O 以后，弹簧拉钢板向下，钢板的下行加速度大于 g，物块则以重力加速度运动，双方分离。

自然长处分离后的上抛高度

接触阶段法向力为 $N=(2/3)kx$，其中 x 为弹簧压缩量；到 O 时 $N=0$，再向上需弹簧向下拉板，物块便与板分离。物块随后上抛，故

$$\boxed{h=v_O^2/(2g)=x_0/2}.$$

原来质量为 m 时，碰后共同速度为 $u/2$。到 O 的能量式为

$$\frac{1}{2}(2m)v_O^2=\frac{1}{2}(2m)\frac{u^2}{4}+\frac{1}{2}mgx_0-2mgx_0=\frac{3}{2}mgx_0+\frac{1}{2}mgx_0-2mgx_0=0,$$

与题设恰在 O 停止的条件相符。

例 4.5 (车板弹簧的往返过程)**.** 质量 $M=4\,\mathrm{kg}$ 的小车置于光滑水平面，质量 $m=1\,\mathrm{kg}$ 的块从车左端受向右冲量 $I=10\,\mathrm{N\,s}$。块在动摩擦因数均匀的粗糙板上滑到右端轻弹簧，将其压缩后返回，恰在左端与车相对静止。求最大压缩时车的动量、返回左端时块的动能、弹簧最大势能。

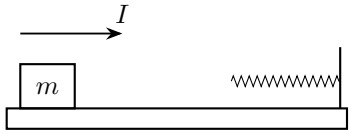


图 4.21: 题设：车板弹簧的往返过程

解　由总动量求两次共速事件的速度

图 4.21 冲量后块速 $v_0=I/m=10\,\mathrm{m/s}$。系统水平总动量为 I，最大压缩时块与车同速 $V=I/(M+m)=2\,\mathrm{m/s}$，故车动量

$$\boxed{P_M=8\,\mathrm{kg\,m/s}}.$$

返回左端并相对静止时共同速度仍是 $2\,\mathrm{m/s}$，块动能

$$\boxed{K_m=2\,\mathrm{J}}.$$

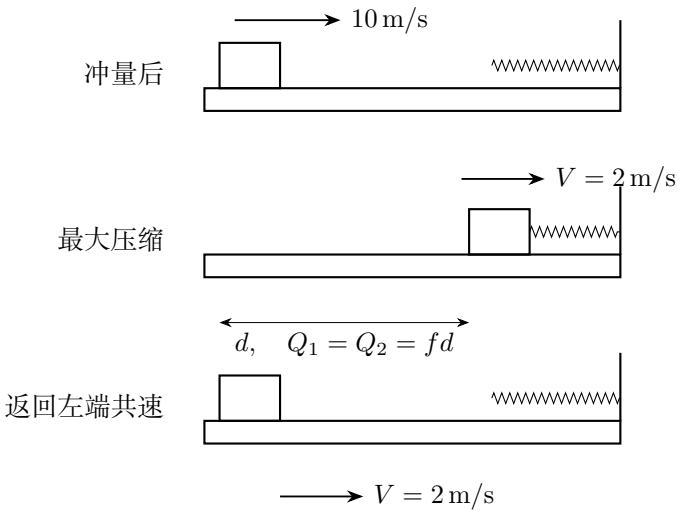


图 4.22: 最大压缩点是相对位位置的转折点，来回相对路程相等

用往返相对路程平分摩擦耗散

按图 4.22 设块从左端到最大压缩点的相对滑程为 d，来回均滑过 d，摩擦耗散分别相同。初始总动能 50 J，最后总动能 10 J，所以 $2fd = 40\,\mathrm{J}$。前半程能量式 $50 = 10 + U_{s,\max} + fd$，得到

$$\boxed{U_{s,\max} = 20\,\mathrm{J}}.$$

最大压缩与返回左端的能量变化

最大压缩时，系统还以 2 m/s 平移，这项动能与弹簧储能分别计入。返程释放弹簧储能，并在返回左端的滑动中耗散，最后只留下共速平移。

过程图只标示块相对车板的三个位置，车对地还在平移。这里 d 包括压缩弹簧时的相对移动；两段滑程都包括弹簧形变阶段的相对移动。

例 4.6 (弹簧连接的等质量两球)**.** 光滑水平轨道上，两质量均为 m 的小球由自然长轻弹簧连接。突然给左球向右速度 u_0，右球仍静止。求弹簧第一次恢复自然长时两球速度及最大弹簧势能。

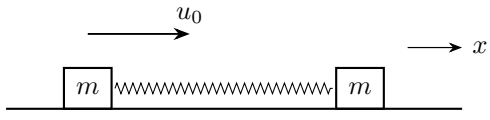


图 4.23: 题设：弹簧连接的等质量两球

解　列自然长末态的两个守恒式

图 4.23 中总动量为 mu_0，质心速度 $u_0/2$，相对速度由 u_0 先减为零再反向。弹簧第一次恢复自然长时势能重新为零，所以 $v_1+v_2=u_0$、$v_1^2+v_2^2=u_0^2$。先联立这两式，再用分离方向筛选末态。

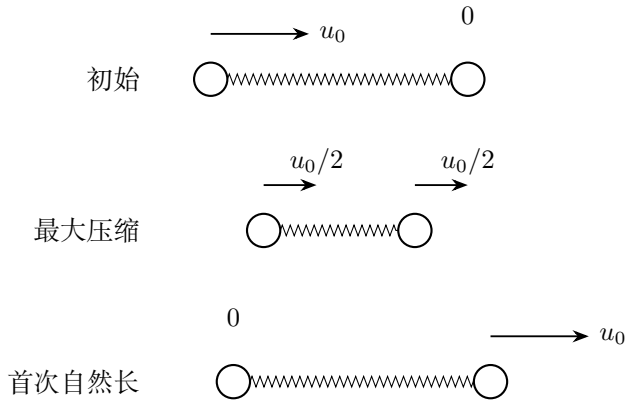


图 4.24: 等质量双球在半个相对周期后第一次回到自然长并交换速度

用恢复自然长时的分离方向舍根

将第一条式子平方，得 $v_1^2+v_2^2+2v_1v_2=u_0^2$，与第二条相减得 $v_1v_2=0$。若 $v_1=0$，由和式得 $v_2=u_0$；若 $v_2=0$，则 $v_1=u_0$。两个候选态为 $(0,u_0)$ 与 $(u_0,0)$。首次恢复自然长时，两球已由接近转为分离，即 $v_2-v_1>0$。

按图 4.24 的压缩、回弹顺序，左球减速、右球加速，第一次返回应取

$$\boxed{v_1=0,\ v_2=u_0}.$$

扣除质心平动动能求最大储能

最大压缩时同速，储能为

$$\tfrac{1}{2}mu_0^2-\tfrac{1}{2}(2m)(u_0/2)^2=\boxed{mu_0^2/4}.$$

另一组速度对应初始接近状态。首次返回自然长时已经分离，所以取 $(0,u_0)$。

例 4.7 (一列双球振子的碰撞传递)**.** $N \geq 2$ 个振子排在光滑直线上，每个由两等质量 m 小球和轻弹簧组成。第一个预压锁定、储能 E_0，其余静止且自然长。释放第一个，每个振子右球在弹簧首次恢复自然长时恰碰到下一个的左球；等质量球碰撞交换速度，之后不再重碰。求全部碰撞结束后各振子继续振动的最大弹簧势能。

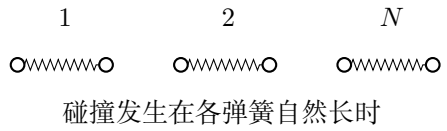


图 4.25: 题设：一列双球振子的碰撞传递

解　求首振子传出速度后的相对运动能量

按图 4.25 第一个弹簧恢复自然长时，两球速度为 $(-a, a)$，其中 $ma^2 = E_0$。它的右球碰下一个静止左球后变为零，故第一个剩余两球速度为 $(-a, 0)$。其总动能为 $E_0/2$，质心动能为 $E_0/4$，两者之差 $E_0/4$ 可在相对振动中变为最大弹簧势能。

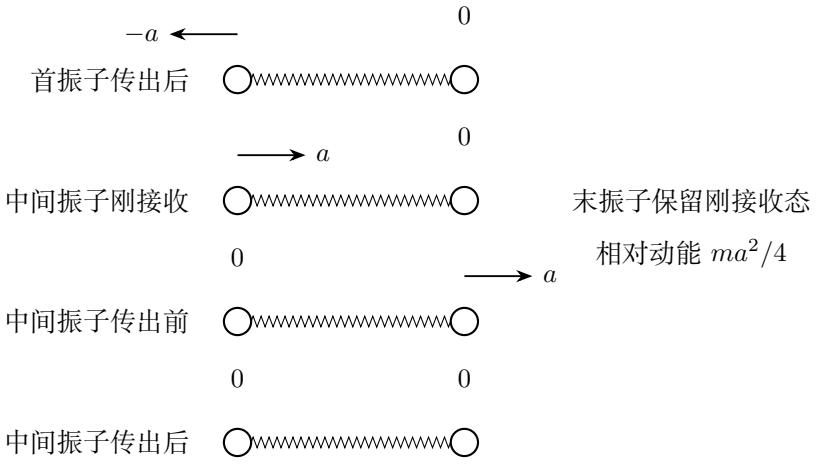


图 4.26: 速度传入、内部压缩回弹与速度传出是三个先后事件

分别计算首、末振子保留的振动能

相对速度直接给出留下的振动能。第一个振子碰后速度为 $(-a, 0)$，约化质量为 $m/2$，故相对运动能量为 $\frac{1}{2}(m/2)a^2 = ma^2/4 = E_0/4$；最后一个接收 $(a, 0)$，给出同样结果。中间振子在再次交出速度后是 $(0, 0)$ 且弹簧自然长，剩余内部运动能量为零。

追踪中间振子先接收再传出的状态

图 4.26 中中间振子接收到 $(a,0)$，经一次压缩回弹成为 $(0,a)$，再将右球速度传给下一个，于是两球均为零，弹簧自然长。最后一个接收到 $(a,0)$，无后续碰撞，保留相对振动能 $E_0/4$。因此全部碰撞结束后

$$\boxed{U_{1,\max}=U_{N,\max}=E_0/4,\qquad U_{j,\max}=0\ (2\le j<N)}.$$

传递途中，每个中间弹簧也曾储存 $E_0/4$；题问的是全部碰撞结束后的剩余振动，最终留下的振动能由传出速度之后的状态确定。

例 4.8 (菱形方块之间的碰撞顺序)**.** 光滑水平面内，两个边长 a、质量 m 的正方形块 C,D，分别以一条对角线垂直于图中 x 轴对称放置，两块相邻顶点在原点接触。质量均为 $2m$、半径 $a/2$ 的小球 A,B 的球心分别在 x 轴的正、负半轴上，分别同时接触两方块的两侧面中点。B 静止，A 以 v 向左入射。各接触光滑、碰撞完全弹性；将 A 与两块的首轮冲击作为对称同时冲击。求其后 A,B 的碰撞及 B 最终速度。

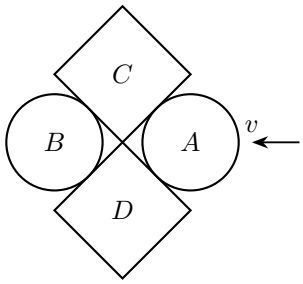


图 4.27: 题设：菱形方块之间的碰撞顺序

解　根据接触法线和对称性确定首轮冲量

图 4.27 每个接触法线通过方块中心，所以首轮冲击不使块转动。由对称性，设 C,D 速度分别为 $(-w,w),(-w,-w)$，A 的末速度为 u（向右为正）。两块初始给 B 的法向相对速度为零，首轮中块沿与 B 接触的面切向离开，B 此时不获得冲量。

以上方块为例，令它所受冲量为 $(-j,j)$，则 $m\boldsymbol{v}_C=(-j,j)$，即 $j=mw$。下方块对称地获得 $(-j,-j)$，A 受到两者反冲量之和 $(2j,0)$，所以 $2m(u+v)=2j$，同样给出 $u=w-v$。首轮冲击中 B 的法向接近速度保持为零，因而初始速度仍为零。

联立首轮动量、能量并取非零冲击根

首轮水平动量守恒给 $-2mv = 2mu - 2mw$，与冲量关系 $u = w - v$ 一致。两方块的速度大小均为 $\sqrt{2}w$，完全弹性碰撞的能量方程为 $mv^2 = mu^2 + 2mw^2$。代入 $u = w - v$ 并约去 m，逐项展开：

$$v^2 = (w - v)^2 + 2w^2 = v^2 - 2wv + 3w^2, \qquad w(3w - 2v) = 0.$$

碰撞结束时接触点已分离，对应非零冲量根。取 $w = 2v/3$，得到 $u = w - v = -v/3$。图 4.28 据此画出首轮后的速度方向。

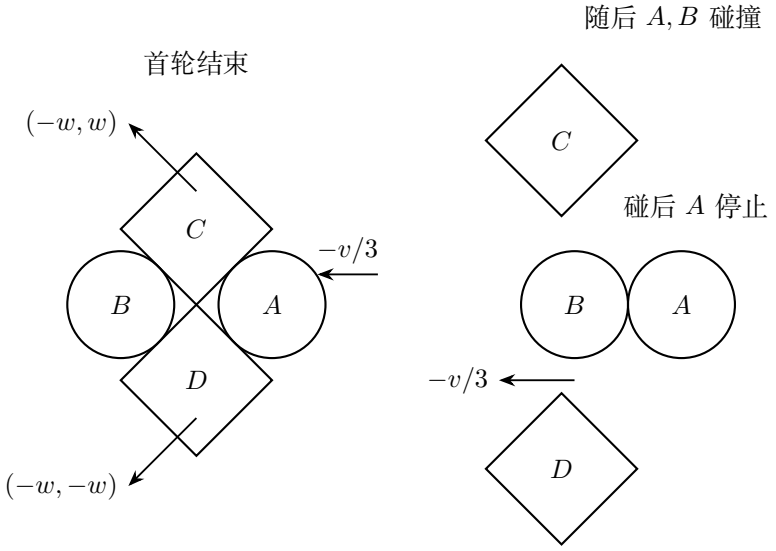


图 4.28: 首轮冲击后方块斜向离开，A 仍向左运动并随后与 B 正碰

图 4.28 左图中，A 仍向左，上、下方块则斜向离开轴线。由题设几何，初态两球心分别为 $(a/\sqrt{2}, 0)$ 与 $(-a/\sqrt{2}, 0)$，两球表面间隙为 $(\sqrt{2} - 1)a$。首轮后两球的接近速率为 $v/3$，所以球球碰撞发生在

$$t_{AB} = \frac{(\sqrt{2} - 1)a}{v/3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)a}{v}.$$

在此以前，方块相对于 B 沿接触面切向移动，法向相对速度为零。接触点最初在面中点，沿面移动 $a/2$ 后到达顶点。切向相对速率为 $\sqrt{2}w$，因此

$$t_{\text{端}} = \frac{a/2}{\sqrt{2}w} = \frac{3a}{4\sqrt{2}v} < t_{AB}.$$

方块越过面端点后斜向远离 B，这段运动中 B 始终保持静止。

方块离开后的 A, B 正碰

由上述先后时刻可知，两方块已离开后，A 才以 $v/3$ 与静止的等质量 B 正碰。两球交换速度，A 停止，

$$\boxed{v_B = v/3，\text{向左}}.$$

两方块继续以 $(-2v/3, \pm 2v/3)$ 运动。总动量为 $-2mv$，总动能为 $mv^2/9 + 2(4mv^2/9) = mv^2$，均与初态一致。首轮后 A 保留向左速度，随后这次球球正碰把该速度传给 B。

例 4.9 (皮托管的流速测量)**.** 密度 ρ 的气体作近似不可压缩定常流动。皮托管前向开口测驻点压强 p_0，侧孔测静压 p。两孔近似等高，U 形管内液体密度 ρ_l，液面差 h。求来流速率，并说明忽略气柱压强差时的近似。

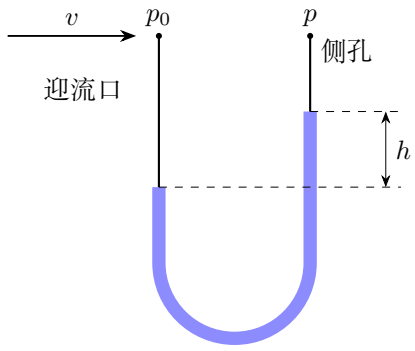
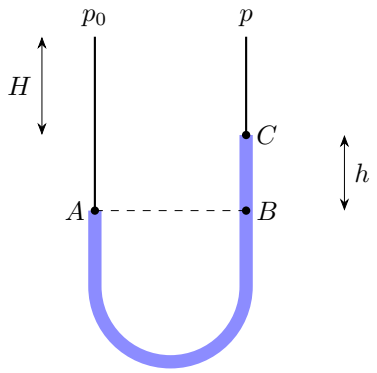


图 4.29: 同高测压口接 U 形管：高压侧液面较低，h 是两液面高度差

解　把驻点压强差写成来流动能密度

沿图 4.29 进入前向开口的流线使用伯努利方程，驻点速度为零，所以 $p_0 - p = \rho v^2/2$。U 形管静力关系在两孔等高时给 $p_0 - p = (\rho_l - \rho)gh$。



$$p_A = p_0 + \rho g(H+h)$$
$$p_C = p + \rho g H$$
$$p_B = p_C + \rho_l g h = p_A$$

图 4.30: 同一测压液内的 A 与 B 等高，压强相等；气柱修正给出密度差

在同高液面逐段累积气柱与液柱压强

U 形管中在同一水平液面取等压点，沿测压气柱和液柱逐段增减 $\rho g\Delta h$，气柱修正会扣去 $\rho g h$，液柱增加 $\rho_l g h$，因此压差是 $(\rho_l-\rho)gh$。将它等于 $\rho v^2/2$，两边乘 $2/\rho$ 后取正平方根。

由两种压差关系求流速

按图 4.30 联立得

$$\boxed{v = \sqrt{2(\rho_l-\rho)gh/\rho}}.$$

若 $\rho \ll \rho_l$，可近似为 $\sqrt{2\rho_l g h/\rho}$。前向孔使来流在驻点减速到零，侧孔测来流静压，两孔压差等于来流动能密度 $\rho v^2/2$。上述表达用于题设近似不可压缩的定常流动。

例 4.10 (质量比与弹性碰撞速度)**.** 一维完全弹性碰撞中，质量 m_1 物体以 u 撞向静止、质量 m_2 的物体。推导两物末速度，并讨论等质量、重物撞轻物、轻物撞重物三个极限。

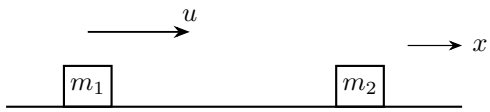


图 4.31: 题设：质量比与弹性碰撞速度

解　联立动量守恒与相对速度反号

图 4.31 动量守恒 $m_1u = m_1v_1 + m_2v_2$；弹性碰撞相对速度反号，$v_2 - v_1 = u$。代入 $v_2 = u + v_1$ 得 $m_1u = (m_1+m_2)v_1 + m_2u$，所以

$$\boxed{v_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u, \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u}.$$

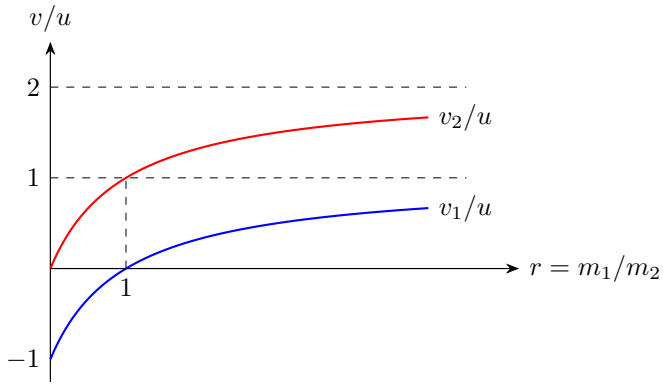


图 4.32: 精确速度比随质量比变化，重入射粒子的速度始终不超过初速

目标速度与传入的动能比例

由 $v_2 = u+v_1$，再代入刚求出的 v_1，分子为 $(m_1+m_2)+(m_1-m_2) = 2m_1$，因此 $v_2 = 2m_1u/(m_1+m_2)$。其速度可能大于 u，但目标动能比例 $4m_1m_2/(m_1+m_2)^2 \le 1$，等号仅在质量相等时成立。

按质量比讨论三种极限

图 4.32 以质量比 $r = m_1/m_2$ 展示 $v_1/u = (r-1)/(r+1)$、$v_2/u = 2r/(r+1)$。$r = 1$ 时交换速度；$r \gg 1$ 时重物近似不变，轻物约得 $2u$；$r \ll 1$ 时轻物反弹，重物近似静止。重物撞轻物时，轻物末速可以大于入射速率；它所获动能由质量和速度平方共同决定，传入比例仍满足上式。

例 4.11 (恢复系数与损失动能)**.** 物体 1 在左、物体 2 在右，质量分别为 m_1, m_2，沿直线运动，按向右为正记速度，碰前 $u_1 > u_2$，两者接近，碰撞恢复系数为 e。求碰撞冲量大小及损失动能，说明恢复系数在求解中的作用。

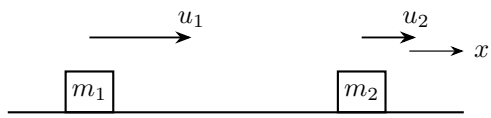


图 4.33: 题设：恢复系数与损失动能

解　用冲量与恢复系数求碰后相对速度

取图 4.33 中向右为正。接触时左物体获得向左冲量 J，右物体获得向右冲量 J，如图 4.34 所示，因此

$$v_1 = u_1 - \frac{J}{m_1}, \qquad v_2 = u_2 + \frac{J}{m_2}.$$

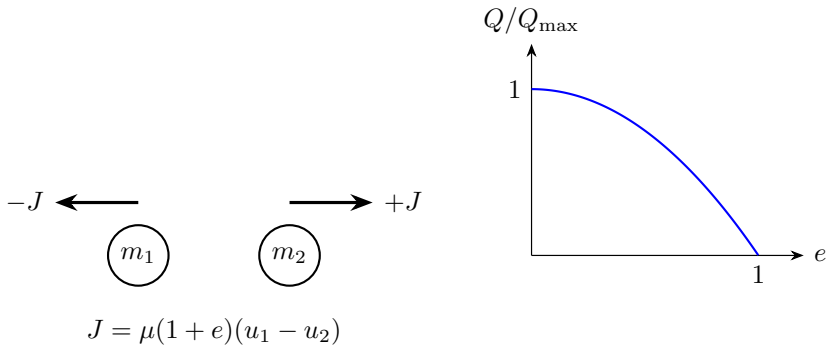


图 4.34: 相反的接触冲量保持总动量，恢复系数控制相对动能损失

恢复系数给出分离速率与接近速率的比值：$v_2-v_1=e(u_1-u_2)$。将两速度式相减后代入，

$$u_2-u_1+J\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=e(u_1-u_2).$$

令约化质量 $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$，则

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}=\frac{1}{\mu},\qquad \boxed{J=\mu(1+e)(u_1-u_2)}.$$

动量关系将两物体速度的变化联系起来，恢复关系进一步确定它们分开的相对速度，两者一起决定冲量。

从相对动能求碰撞损失

系统质心速度保持不变，所以损失的动能全部来自相对运动。碰前相对动能为 $\mu(u_1-u_2)^2/2$，碰后分离速率为原来的 e 倍，故

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{2}\mu(u_1-u_2)^2-\frac{1}{2}\mu[e(u_1-u_2)]^2\\&=\boxed{\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u_1-u_2)^2}.\end{aligned}$$

图 4.34 右图给出这一损失随 e 的变化：$e=0$ 时相对运动能量全部损失，$e=1$ 时保持不变。

例 4.12 (光滑斜碰的法向与切向)**.** 两光滑小球质量 m_1, m_2，接触瞬间以从球 1 指向球 2 的方向为法向 $\boldsymbol{n}$，切向为 $\boldsymbol{t}$。碰前法向速度满足 $u_{1n} > u_{2n}$，法向恢复系数 e。给出完整的二维碰后速度计算方法及耗能。

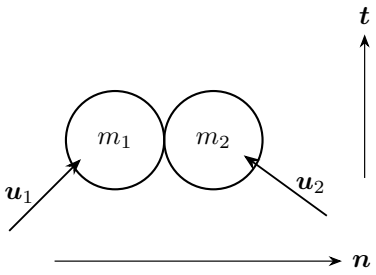


图 4.35: 正法线由球 1 指向球 2，切向取向上，图中两入射速度均有向上分量

解　沿接触法线和切线分解冲击

图 4.35 接触光滑，冲量沿法线，因此各球切向速度不变：$v_{1t} = u_{1t}$、$v_{2t} = u_{2t}$。记法向冲量大小为 J，先用各球的法向动量定理和恢复条件求它。

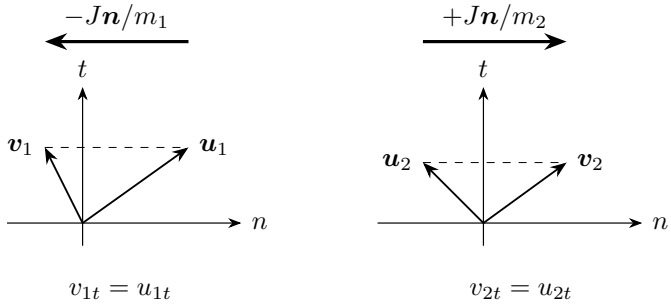


图 4.36: 在各球的速度平面上，冲量仅平移法向分量，切向分量不变

由恢复条件确定法向冲量

法向分量分别满足 $m_1(v_{1n} - u_{1n}) = -J$、$m_2(v_{2n} - u_{2n}) = J$。先除以各自质量，再相减，

$$v_{2n} - v_{1n} = u_{2n} - u_{1n} + J\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right).$$

用恢复条件 $v_{2n} - v_{1n} = e(u_{1n} - u_{2n})$ 替换左边，把初始速度差移到同一边，

$$\frac{J}{\mu} = (1+e)(u_{1n} - u_{2n}), \qquad J = \mu(1+e)(u_{1n} - u_{2n}) > 0.$$

切向无冲量，各自分量不变；最后应将两个正交分量合成为完整速度矢量。

合成完整速度并计算法向耗散

按图 4.36 分别加减冲量得到 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 - (J/m_1)\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 + (J/m_2)\boldsymbol{n}$。能量损失来自法向相对运动部分：

$$\boxed{Q = \tfrac{1}{2}\mu(1-e^2)(u_{1n}-u_{2n})^2}.$$

切向分量保持不变，能量损失由法向相对速度的改变确定。

例 4.13 (弹性散射的最大偏转角)**.** 质量 m 的粒子以速率 u 撞向静止、质量 M 的粒子，碰撞完全弹性、无外冲量。求当 $m > M$ 时入射粒子的最大偏转角，并讨论 $m = M$ 和 $m < M$。

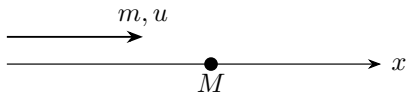


图 4.37: 题设：弹性散射的最大偏转角

解　在速度平面中作质心速度圆

图 4.37 中，系统质心沿入射方向运动，速度为 $V = mu/(m+M)$。入射粒子在质心系中的初速度大小为

$$a = u - V = \frac{Mu}{m+M}.$$

完全弹性碰撞保持质心系内的速率。把碰后质心系速度 $\boldsymbol{v}^*$ 加上 $V\boldsymbol{e}_x$，得到地面速度 $\boldsymbol{v} = V\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{v}^*$。因此 $\boldsymbol{v}$ 的端点落在图 4.38 中以 $(V, 0)$ 为圆心、a 为半径的圆上。

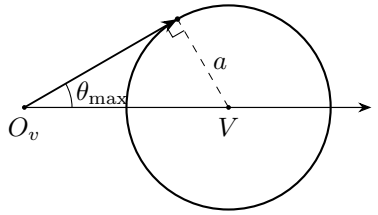


图 4.38: 解答过程：弹性散射的最大偏转角

从原点与速度圆的位置关系求偏转范围

当 $m > M$ 时，$V > a$，速度原点在圆外。从原点引圆的切线，便得到与入射轴夹角最大的速度方向。图中切点处半径垂直切线，直角三角形给出

$$\sin\theta_{\max} = \frac{a}{V} = \frac{Mu/(m+M)}{mu/(m+M)} = \frac{M}{m},$$

$$\boxed{\theta_{\max} = \arcsin(M/m)}.$$

$m = M$ 时，圆经过原点，非零末速度的偏转角小于 90°；偏转角趋于 90° 时，末速趋于零。$m < M$ 时，圆包围原点，允许反向散射。速度圆给出守恒量允许的方向范围，某次具体碰撞的接触几何决定圆上实际到达的点。

例 4.14 (中间球怎样提高能量传递)**.** 光滑直线上入射球质量 m、速度 u，目标球质量 M 静止。在中间放一个静止、质量 x 的小球。先由 m 球与 x 球完全弹性正碰，再由 x 球与 M 球完全弹性正碰，暂不计后续再碰撞。求使目标球所获速度最大的 x 及其速度。



图 4.39: 题设：中间球怎样提高能量传递

解　依次求两次碰撞的速度传递系数

按图 4.39 两次一维弹性碰撞，第一次中间球获速 $u_x = 2mu/(m+x)$，第二次目标球获速

$$V_M = \frac{2x}{x+M}u_x = \frac{4mx}{(m+x)(x+M)}u.$$

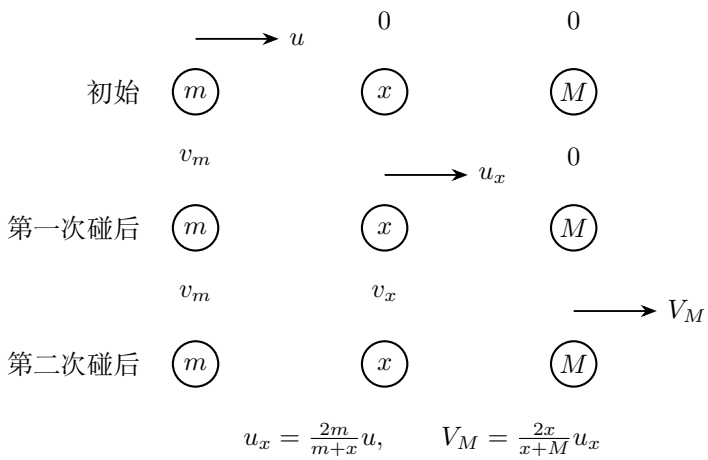


图 4.40: 分别在两次碰撞后更新中间球与目标球的速度

把目标速度化为正乘积的优化问题

两次速度传递的系数相乘：第一次是 $2m/(m+x)$，第二次是 $2x/(x+M)$。在指定两次碰撞的模型内，目标质量固定，最大化它的速度等价于最大化它的动能；因此只需优化这个正的乘积。

用均值不等式确定最优中间质量

在图 4.40 把分母除以 $x>0$，得到 $V_M=4mu/[m+M+x+mM/x]$。分母中只有 $x+mM/x$ 随中间质量改变，而且

$$x+\frac{mM}{x}-2\sqrt{mM}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{mM}{x}}\right)^2\geq 0.$$

等号要求 $x=mM/x$，因 $x>0$，故 $x=\sqrt{mM}$。此时分母为 $m+M+2\sqrt{mM}=(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2$，所以

$$\boxed{x_{\text{opt}}=\sqrt{mM},\qquad V_{M,\max}=\frac{4m}{(\sqrt{m}+\sqrt{M})^2}u}.$$

目标动能占初始动能的比例为 $16mM/(\sqrt{m}+\sqrt{M})^4$。这个最优质量使题设两次传递后目标球的速度最大。

例 4.15 (移动墙面的弹性反射)**.** 一光滑平面墙由外部装置保持沿法线速度 U，小球质量 m、法向入射速度 $u>U$，正方向指向墙的运动方向。碰撞完全弹性，求小球末速度、所受冲量和动能变化，计算墙对球的功。

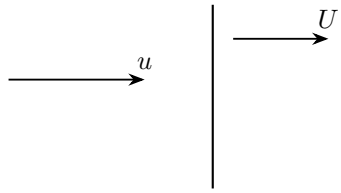


图 4.41: 题设：移动墙面的弹性反射

解　到墙系反射后换回地面速度

在图 4.41 墙的惯性系中，入射速度为 $u-U$，弹性反射后为 $-(u-U)$；换回地面系得 $\boxed{v=2U-u}$。球所受冲量

$$\boxed{J=m(v-u)=2m(U-u)}.$$

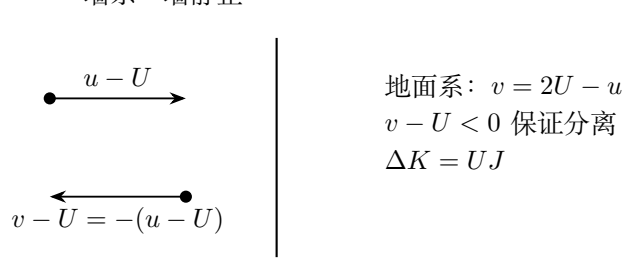


图 4.42: 墙系中速度反号，换回地面系后球可能仍向右运动但已相对墙分离

计算动能变化并讨论墙的运动方向

展开平方可得 $(2U-u)^2-u^2=4U^2-4Uu=4U(U-u)$，乘 $m/2$ 即得动能变化。这个值可正可负：$0<U<u$ 时墙退让，小球损失动能；$U<0$ 时墙迎面运动，小球增加动能。墙系中球的反射速率保持原值，地面系中球与运动墙交换能量。

由墙面作用点速度计算功

由图 4.42 动能变化 $\Delta K=\frac{1}{2}m[(2U-u)^2-u^2]=2mU(U-u)=JU$。碰撞中墙的作用点以 U 移动，墙对球的功正是 $\int FU\,\mathrm{d}t=UJ$。$U=0$ 时功为零而冲量非零；墙向球迎面运动时，球可增加动能，额外能量由维持墙运动的外部装置提供。

例 4.16 (粗糙水平面上的反复弹跳)**.** 将小球视为不计自转的质点。它第一次撞击水平面前水平速度 $u>0$、竖直向下速率 w。法向碰撞完全弹性，动摩擦因数 $\mu>0$；每次冲击中若水平速度先降至零则转为无滑动，忽略空气阻力。求第几次碰撞后水平运动停止，以及从第一次接触起到水平停止的总水平路程。

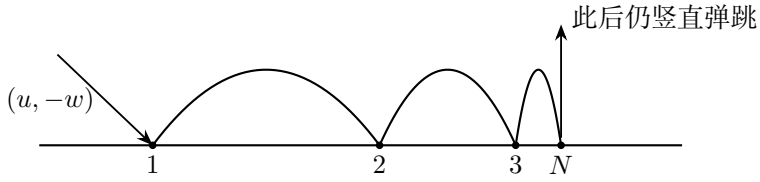


图 4.43: 法向弹性使每次弹跳高度相同，水平速度与每跳跨度逐次减小

解　逐次累积受限切向冲量求停止次数

按图 4.43 每次法向冲量为 $2mw$，滑动时水平速度减少 $2\mu w$。因此第 n 次碰后水平速度 $u_n=\max(u-2n\mu w,0)$，首次归零的次数为

$$\boxed{N=\lceil u/(2\mu w)\rceil}.$$

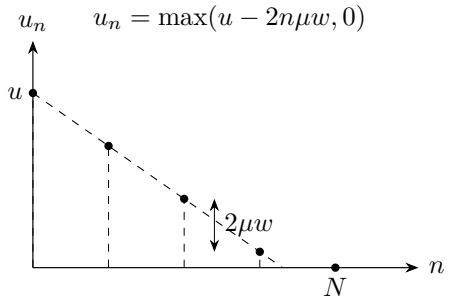


图 4.44: 碰后水平速度离散下降，最后一次冲量只消除剩余值

最后一次使水平速度归零的冲量

第 n 次到来前尚未停止时，剩余水平速度为 $u-2(n-1)\mu w$。如果这一速度不大于 $2\mu w$，本次只需冲量 $m[u-2(n-1)\mu w]$ 便可使水平速度归零；否则继续减少 $2\mu w$。所以求停止次数应取使 $n \geq u/(2\mu w)$ 的最小整数。

对停止前的各段飞行求和

图 4.44 每两次碰撞之间飞行时间均为 $T = 2w/g$。第 N 次碰撞后水平速度为零，故所求路程只包括前 $N-1$ 段飞行：

$$S = \frac{2w}{g}\sum_{n=1}^{N-1}(u - 2n\mu w).$$

当 $N \geq 2$ 时，分别求常数项和等差项之和，

$$\sum_{n=1}^{N-1}(u - 2n\mu w) = (N-1)u - 2\mu w\frac{(N-1)N}{2} = (N-1)(u - \mu wN).$$

故 $\boxed{S = \frac{2w}{g}(N-1)(u-\mu wN)}$。$N = 1$ 时 $S = 0$，即第一次冲击就消除了水平滑动。以后竖直弹跳仍继续；最后一次的实际切向冲量只取消除剩余水平速度所需值，其大小为最后一次入射水平动量。

例 4.17 (碰撞耗散与惯性系变换)**.** 两物体质量 m_1, m_2 在直线上发生孤立碰撞，初末总动量均为 P。另一个惯性系相对原系以速度 U 运动。证明总动能损失在两个惯性系中相同，并说明个体动能变化是否也不变。

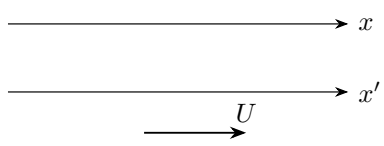


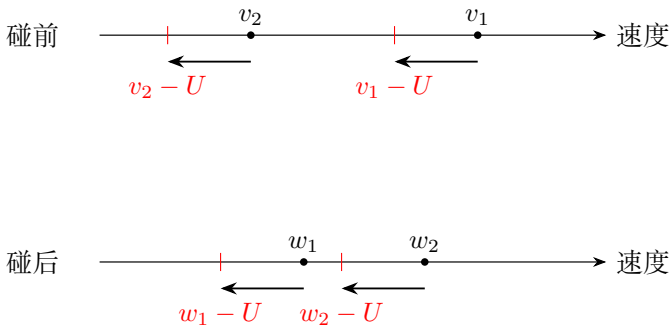
图 4.45: 题设：碰撞耗散与惯性系变换

解　比较两个惯性系中的总动能损失

按图 4.45，新惯性系中各物体的速度为 $v_j' = v_j - U$。把同一状态的总动能展开，

$$\begin{aligned} K' &= \sum_j \frac{1}{2} m_j (v_j - U)^2 \\ &= \sum_j \frac{1}{2} m_j v_j^2 - U \sum_j m_j v_j + \frac{U^2}{2} \sum_j m_j \\ &= K - UP + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) U^2. \end{aligned}$$

图 4.46 中，碰前与碰后的每个速度都减去同一 U。对这两个状态分别使用上述变换式，再相减：



每个速度都减去同一 U，两物体动量变化仍相消

图 4.46: 对前后两个状态使用同一个速度平移，才可比较能量变化

$$K_i' - K_f' = (K_i - K_f) - U(P_i - P_f).$$

总质量对应的 U^2 项在相减时消去。孤立碰撞又满足 $P_i = P_f$，故

$$\boxed{K_i' - K_f' = K_i - K_f}.$$

系统在碰撞中损失的动能与惯性系的选择无关。

单个物体的动能变化

对物体 j 单独使用同一变换，碰后减碰前得到

$$\Delta K_j' = \Delta K_j - U \Delta p_j.$$

接触冲量使 Δp_j 改变，所以单个物体的动能变化通常随参考系改变。两物体的动量改变量互为相反数，求和时这两项修正相消，便得到上面的总损失不变。

4.11　本讲小结

保守力的功由初末位置决定，等于势能减少量。把这部分功移入势能，动能定理就写成 $\Delta(K+U)=W_{\text{其他}}$。滑动摩擦的总功由相对路程决定，机械能减少量 Q 转为内能等能量形式。势能曲线的高度给出允许运动区间，斜率决定力，平衡附近的曲率决定小位移后的回复或偏离。

两体运动分成质心平移与相对运动后，碰撞的能量转化更加清楚。无外冲量时质心速度保持原值，恢复系数决定碰后相对速率，动能损失为 $\mu(1-e^2)u_{\text{相}}^2/2$。弹簧的最大压缩、碰后分离和滑动共速分别按对应速度条件确定。

斜碰沿接触法线与切线分解；光滑碰撞只改变法向分量，粗糙接触还通过摩擦冲量减小切向相对速度。多次碰撞依次更新速度与位置。理想定常流动则把入口与出口压力功转化为流体动能和重力势能，得到伯努利关系，并可用于皮托管测速。

4.12　练习

练习 4.1 (磁吸平衡的失稳条件)**.** 质量 m 的小磁铁由长 $\ell=1\,\mathrm{m}$ 的轻绳悬挂，另一磁铁缓慢靠近且始终同高，吸力大小为 K/d^n。在小位移近似下，悬挂磁铁离初始竖线水平位移 $s=1\,\mathrm{cm}$、两磁铁间距 $d=4\,\mathrm{cm}$ 时平衡恰失稳。求整数 n，并求改为竖直同极相对、只允许竖直平移时的平衡间距；排斥力的大小仍按同一 K/d^n 计算。

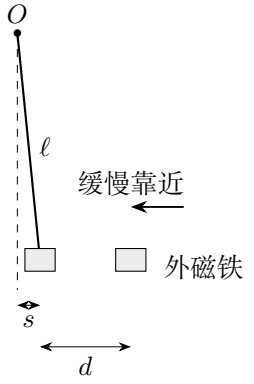


图 4.47: 外磁铁缓慢靠近；示意图放大摆角以区分水平位移 s 与磁铁间距 d

练习 4.2 (粘合后再释放弹簧)**.** 三块质量均为 m 的 A,B,C 在光滑直线上，B,C 间有被锁定的压缩弹簧。A 以 v_0 撞上 B，三块短时共速后 A,B 粘合，锁线断开，弹簧释放，最终 C 速度为 v_0。(1) 求弹簧释放能量；(2) 若 A 初速改为 v、要求 C 末速为 $2v_0$，求所需能量；(3) 若仍用原弹簧，求可行 v。

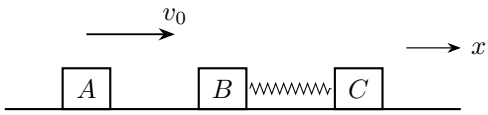


图 4.48: 题设：粘合后再释放弹簧

练习 4.3 (带挡板木板上的往返滑动)**.** 质量 $M=3m$、长 $L=1\,\mathrm{m}$ 的木板静止于光滑水平面，右端有挡板。质量 m 的块以 $v_0=4\,\mathrm{m/s}$ 从左端滑上，与挡板完全弹性碰撞后返回，恰在左端相对板停止。求最后共同速度及块板间动摩擦因数，取 $g=10\,\mathrm{m/s^2}$。

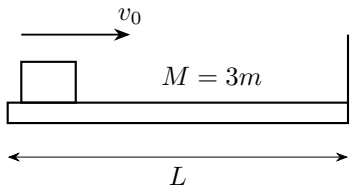


图 4.49: 题设：带挡板木板上的往返滑动

练习解答

练习 4.1

解　把平衡和斜率条件联立求幂指数

图 4.47 小角度下绳的水平回复力为 mgs/ℓ。平衡时 $K/d^n=mgs/\ell$。固定外部磁铁位置，记其到初始竖线距离为 d_0，则 $d=d_0-s$，$\mathrm{d}d/\,\mathrm{d}s=-1$。吸力对位移的链式导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[K(d_0-s)^{-n}\right]=-nK(d_0-s)^{-n-1}(-1)=\frac{nK}{d^{n+1}}.$$

恰失稳时此增长率等于回复力斜率 mg/ℓ，所以

$$\frac{nK}{d^{n+1}}=\frac{mg}{\ell},\quad \frac{ns}{d}=1,\quad \boxed{n=4}.$$

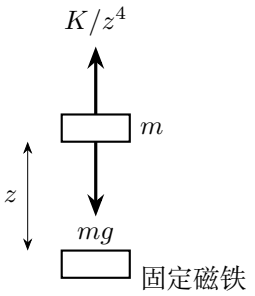


图 4.50: 解答过程：磁吸平衡的失稳条件

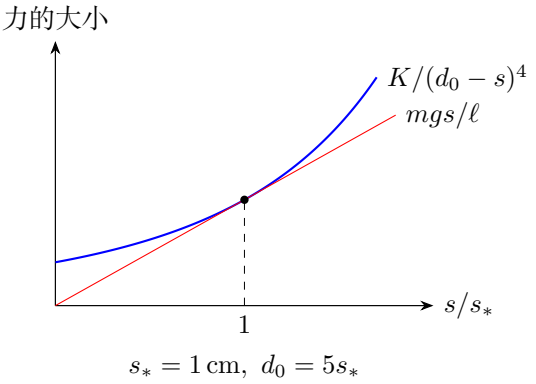


图 4.51: 临界平衡处吸力曲线与线性回复力相切，一阶斜率相同

用净力导数解释恰失稳

图 4.51 用相切关系表示临界。失稳条件也可以从净力说明：向右净力 $F(s)=K/(d_0-s)^n-mgs/\ell$，平衡点有 $F=0$。小位移稳定要求 $F'(s)<0$，恰失稳对应 $F'=0$。把导数条件除以平衡条件，常量 K,m,g 都消去，才得到 $ns/d=1$。

由同一作用力模型求竖直平衡间距

图 4.50 的竖直排斥平衡满足 $K/z^4=mg$。由水平实验 $K=mgsd^4/\ell$，得到

$$\boxed{z=d(s/\ell)^{1/4}=1.3\,\mathrm{cm}}.$$

竖直平衡附近的力导数为 $-4K/z^5<0$，故在题设的一维竖直模型内有回复作用。此处“恰失稳”提供了导数条件，仅知道某次静态平衡不足以确定幂指数。

练习 4.2

解　从短碰撞后的共速态计算原弹簧储能

图 4.48 锁定期间三块先共速，$U = v_0/3$；此后弹簧释放只改变相对运动。最终 $2mV_{AB} + mv_0 = mv_0$，所以 $V_{AB} = 0$，释放能量 $\boxed{E = mv_0^2/3}$。

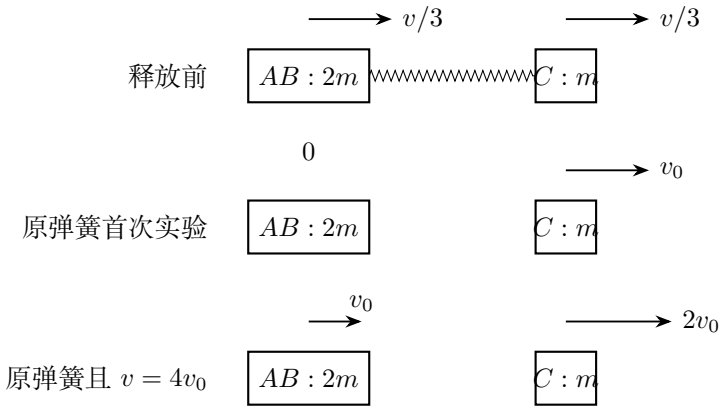


图 4.52: 先形成共速态再释放弹簧，弹簧释放使 C 相对 AB 向右分离

以碰后的共速态为弹簧释放初态

第一问释放前动能为 $(3m)(v_0/3)^2/2 = mv_0^2/6$，释放后为 $mv_0^2/2$，两者相差 $mv_0^2/3$。弹簧在三块形成共速态之后释放，所需储能就是释放后总动能与这时总动能之差。

对指定 C 末速写出所需储能

按图 4.52 第二种情况，释放前共同速度 $v/3$，释放后 $V_{AB} = v/2 - v_0$。因此

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}(2m)(v/2 - v_0)^2 + \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{1}{2}(3m)(v/3)^2 \\ &= m(v^2/4 - vv_0 + v_0^2) + 2mv_0^2 - \frac{1}{6}mv^2 \\ &= m(v^2/12 - vv_0 + 3v_0^2) = \boxed{\frac{m}{12}(v - 6v_0)^2}. \end{aligned}$$

先限定分离方向，再筛选初速度根

所需能量虽是平方式，但压缩弹簧把 C 向右推出，给出 C 快于 AB 的分离状态：$2v_0 > v/2 - v_0$，即 $v < 6v_0$（若要求 A 向右入射，再取 $v > 0$）。$v = 6v_0$ 仅是零储能、无相对分离的退化情形。令 $E' = E$，先约去 $m > 0$，再乘 12，

$$\frac{m}{12}(v - 6v_0)^2 = \frac{m}{3}v_0^2 \quad \Longrightarrow \quad (v - 6v_0)^2 = 4v_0^2.$$

所以 $v - 6v_0 = \pm 2v_0$，给出 $v = 4v_0$ 或 $8v_0$。弹簧向右推 C、向左推 AB，相应末态满足 $V_C > V_{AB}$。$v = 8v_0$ 时 $V_{AB} = 3v_0 > 2v_0$，与分离方向矛盾；故只有 $\boxed{v = 4v_0}$。能量方程给出两个代数根，弹簧释放后的分离方向确定实际根。

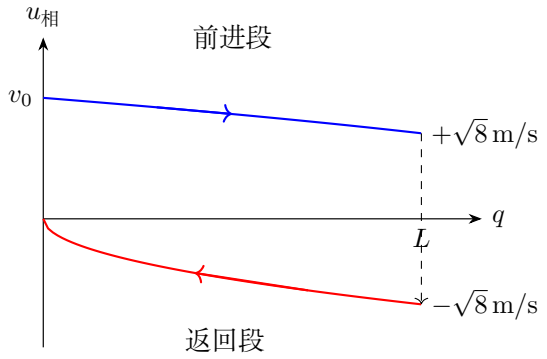
练习 4.3

解　由总动量确定最后共同速度

图 4.49 中挡板属于木板系统，碰撞时也会反冲。全过程水平动量守恒，最后块与板共速，故

$$V = \frac{mv_0}{M + m} = \boxed{1\,\mathrm{m/s}}.$$

把相对运动单独分出，约化质量 $\mu_r = mM/(m + M) = 3m/4$。初始相对动能 $\mu_r v_0^2/2$，最后为零；挡板处完全弹性碰撞不损失相对动能，只有两段滑动耗散。



q 是块相对木板左端的位置

图 4.53: 挡板处相对速度瞬时反号；返程从负相对速度逐渐回到零

用两段相对滑程求摩擦因数

由图 4.53，相对路程为 $L + L = 2L$，因此

$$\tfrac{1}{2}\mu_r v_0^2 = 2\mu mgL, \qquad \mu = \frac{M}{M + m}\frac{v_0^2}{4gL} = \boxed{0.30}.$$

对整个系统取初末动能之差：初动能减去末动能为 $mv_0^2/2 - (M + m)V^2/2$，数值等于 $(6\,\mathrm{J/kg})m$，与 $2\mu mgL$ 一致。

到达挡板与返回左端的相对速度

沿往返过程继续求相对动能。前进段的耗散为 $\mu mgL=(3\,\mathrm{J/kg})m$，小于初始相对动能 $(6\,\mathrm{J/kg})m$，到挡板仍有正相对动能，碰前相对速率为 $\sqrt{8}\,\mathrm{m/s}$。弹性碰撞把相对速度反号；返程再耗散同样能量，恰在 $q=0$ 处共速。图中两支满足前进段 $u_{\text{相}}^2=v_0^2-2\mu g(1+m/M)q$，返回段 $u_{\text{相}}^2=2\mu g(1+m/M)q$，两支分别衔接挡板处的弹性反射与左端共速。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第五讲

角动量与力学综合

2026

目录

第五讲　角动量与力学综合 **1**

5.1　从扫过面积认识角动量 1

5.2　力矩与角动量定理 2

5.3　参考点选择与守恒分量 2

5.4　角动量的原点平移与质心分解 3

5.5　把三维角动量投影到固定轴 5

5.6　中心力、面积速度与径向变化 6

5.7　中心力圆轨道的稳定性 7

5.8　多个守恒量的配合 10

5.9　活动约束中的功与角动量交换 11

5.10 分离后用新的动力学衔接 13

5.11 例题与分析 14

5.12 本讲小结 35

5.13 练习 35

练习解答 36

第五讲　角动量与力学综合

5.1　从扫过面积认识角动量

一个质点沿直线匀速运动，相对于直线外的固定点，它的位置方向不断转动。取相等时间 Δt，质点走过的路程都是 $v\Delta t$。从固定点 O 连接这些位置，所形成的小三角形有相等的底和共同的高，面积也相等。单位时间扫过的面积叫做**面积速度**。

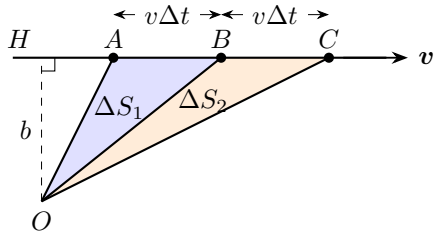


图 5.1: 自由质点在等时间内沿直线走过等长线段，相对于固定点扫过相等面积

图 5.1 中，$OH = b$ 是 O 到运动直线的垂距。两块三角形面积均为 $bv\Delta t/2$，所以 $\dot{S} = bv/2$。把这项几何量乘以 $2m$，就得到与质点质量和运动共同相关的量 mvb。以位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 与动量 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ 表示，定义质点关于 O 的**角动量**

$$\boxed{\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}}, \qquad |\boldsymbol{L}_O| = mrv\sin\alpha = mvb.$$

这里 α 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 之间的夹角，$b = r\sin\alpha$。角动量方向垂直于二者张成的平面，由右手定则确定；单位为 $\mathrm{kg\,m^2/s}$。

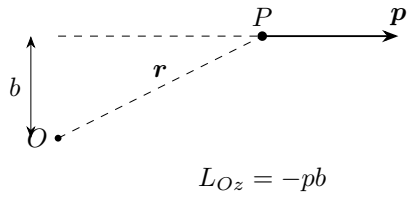


图 5.2: 角动量与力矩使用相应作用线的垂距

图 5.2 中，质点在 O 上方水平向右运动，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 指向纸面里。在平面问题中取逆时针为正，因而 $L_{Oz}=-pb$。斜段 r 通过叉积提供垂直于运动直线的分量 b。质点沿直线飞过时，同样具有关于这一直线外固定点的角动量。

5.2　力矩与角动量定理

力描述动量改变的快慢，力矩描述角动量改变的快慢。对固定惯性点 O，将 $\boldsymbol{L}_O=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}$ 对时间求导，乘积两项分别为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\&=\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

第一项中两矢量平行，叉积为零。定义力关于 O 的力矩为 $\boldsymbol{\tau}_O=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$，就有 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O/\,\mathrm{d}t=\boldsymbol{\tau}_O$。平面内，$\tau_z=xF_y-yF_x$，大小也等于力乘 O 到力作用线的垂距。

对系统内各质点相加。一对沿两质点连线作用的内力，其合力矩为

$$\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{r}_j\times\boldsymbol{F}_{ij}=(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\times\boldsymbol{F}_{ji}=0.$$

各对共线内力矩相消后，系统满足

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\tau}_{O,\text{外}}}.$$

合外力矩为零时，总角动量保持不变；合外力矩的某个分量为零时，相应角动量分量守恒。

把这个微分关系从 t_- 积分到 t_+：

$$\int_{t_-}^{t_+}\boldsymbol{\tau}_{O,\text{外}}\,\mathrm{d}t=\int_{t_-}^{t_+}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=[\boldsymbol{L}_O]_{t_-}^{t_+}=\boldsymbol{L}_+-\boldsymbol{L}_-.$$

左边叫做角冲量。短时冲击中，若外力矩的时间积分可以忽略，就可用碰前、碰后的角动量直接连接速度。固定铰点的约束冲量关于铰点的力臂为零，因此绕该点取矩可以消去未知铰点冲量。

5.3　参考点选择与守恒分量

角动量随参考点而变化，守恒关系也对应选定的点或轴。固定轴承提供约束冲量，同时对轴的力矩为零，适合用绕轴角动量关系求冲击后的转动。对绕竖直轴运动的物体，重力和竖直支持力关于参考点的力矩沿水平方向，它们绕竖直轴的力矩分量为零，相应竖直角动量分量守恒。

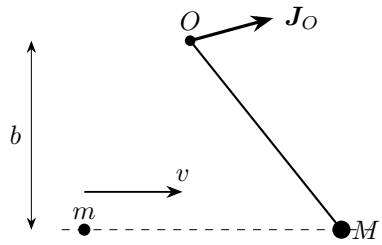


图 5.3: 固定铰点的冲量不改变绕铰点角动量，却通常改变线动量

图 5.3 中，铰点冲量的力臂为零，但入射动量的力臂为 b。例 5.1 正是利用这两个力臂连接碰前动量与碰后转动。参考点取固定惯性点或系统质心时，角动量变化由关于该点的外力矩决定。关于质心，外力矩等于相对质心角动量的变化率，这使自由刚体的偏心冲击可以避开平动的干扰。本讲例 5.3 中的自由双球杆便可这样处理：墙的冲量改变质心速度，同时使杆绕质心转动。

平面绕定轴的质点系有 $L_O = \sum m_i r_i^2 \omega = I_O \omega$。这里 I_O 由质量到轴的距离决定。转动惯量 $I_O = \sum_i m_i r_i^2$ 把各点质量按到轴距离的平方加权。轻杆的质量忽略后，转动惯量由杆上各球贡献；粘合后按新的质量分布重新计算 I_O。

5.4 角动量的原点平移与质心分解

取两个固定点 O, A，从 O 到 A 的矢量为 $\boldsymbol{a}$。同一质点相对两点的位置满足 $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_O - \boldsymbol{a}$，所以 $\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p}$。对系统求和，便有

$$\boldsymbol{L}_A = \boldsymbol{L}_O - \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}.$$

因此系统总动量为零时，关于任意两个固定原点的总角动量相同；总动量不为零时，角动量数值会随原点改变。取同一参考点比较碰撞前后角动量；需要平移参考点时，就用上式中的 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{P}$ 换算。

进一步把每个质点位置写成 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho}_i$，速度写成 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{u}_i$。把每个叉积的四项分别求和，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{R}_C \times \left(\sum_i m_i\right) \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{R}_C \times \sum_i m_i \boldsymbol{u}_i \\ + \left(\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i\right) \times \boldsymbol{V}_C + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \boldsymbol{u}_i.\end{aligned}$$

由质心定义 $\sum_i m_i \boldsymbol{\rho}_i = 0$、$\sum_i m_i \boldsymbol{u}_i = 0$，中间两项为零，得到

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{R}_C \times M\boldsymbol{V}_C + \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \boldsymbol{u}_i.$$

第一项是质心绕 O 运动的角动量，第二项是相对质心的内部角动量。例 5.3 的自由杆受到墙的偏心冲量时，质心平动与绕质心转动同时改变。对全杆用线冲量关系求质心速度，对质心用角冲量关系求转动，再合成两端速度，正是这一分解的应用。

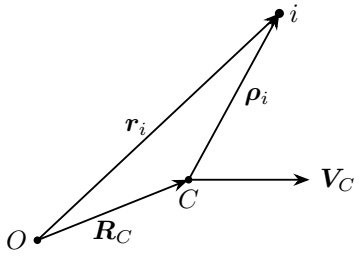


图 5.4: 位置矢量的三角形分解：先到质心，再到第 i 个质点

图 5.4 中从 O 到质点 i，既可直接沿 $\boldsymbol{r}_i$，也可先到质心 C 再沿 $\boldsymbol{\rho}_i$。两条路径给出 $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{\rho}_i$，正是前述角动量展开的位置分解；$\boldsymbol{V}_C$ 箭头则对应整体平动项。

参考点 A 移动时，仍用各质点对惯性系的动量定义 $\boldsymbol{L}_A$，位置矢量变化会带来一个附加项。先对 $\boldsymbol{r}_{iA} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R}_A$ 求导，得 $\dot{\boldsymbol{r}}_{iA} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_A$。再对 $\boldsymbol{L}_A = \sum_i \boldsymbol{r}_{iA} \times m_i \boldsymbol{v}_i$ 使用乘积求导：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{L}}_A &= \sum_i (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}_A) \times m_i \boldsymbol{v}_i + \sum_i \boldsymbol{r}_{iA} \times m_i \dot{\boldsymbol{v}}_i \\ &= -\boldsymbol{V}_A \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{\tau}_A .\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i = 0$，成对共线内力矩也相消，因此

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_A - \boldsymbol{V}_A \times \boldsymbol{P}.$$

附加项来自移动原点的位置变化。若 A 取系统质心，$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{V}_C$ 与 $\boldsymbol{V}_C$ 平行，附加项为零，因此绕质心仍可使用 $\dot{\boldsymbol{L}}_C = \boldsymbol{\tau}_C$。这解释了自由杆碰撞为何可同时对质心用线冲量、对质心轴用角冲量，质心的平移与绕质心的转动由这两组关系分别确定。

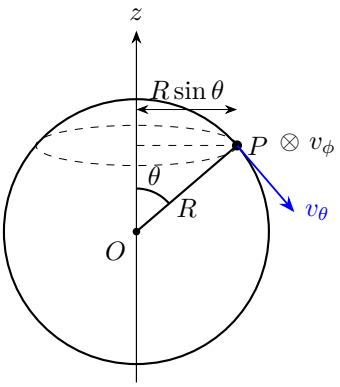
5.4.1　双球刚杆的平动与转动

轻刚杆连接两个质点时，各点相对于质心以同一个角速度转动。平面内取 $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$，质点相对质心的位置为 $\boldsymbol{\rho}_i = (x_i, y_i)$，转动速度由切线方向给出：

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i, \qquad v_{ix} = V_{Cx} - \omega y_i, \quad v_{iy} = V_{Cy} + \omega x_i .$$

关于质心的角动量为 $L_C=\sum_i m_i\rho_i^2\omega=I_C\omega$。两个等质量 m 的小球由长 ℓ 轻杆连接时，质心位于中点，$I_C=2m(\ell/2)^2=m\ell^2/2$。例 5.3 先用墙的冲量求 $\boldsymbol{V}_C$ 与 ω，再按上述分量式合成两球速度。接触点的法向速度进入恢复关系。

5.5 把三维角动量投影到固定轴



ϕ 沿纬圈计，θ 沿子午线计

图 5.5: 球面运动的子午面投影；方位速度垂直该截面

图 5.5 中，关于 z 轴的力臂是水平距离 $R\sin\theta$，方位速度为 $v_\phi=R\sin\theta\,\dot\phi$；子午速度 $v_\theta=R\dot\theta$ 在截面内，对 L_z 没有贡献。因此

$$L_z=m(R\sin\theta)v_\phi=mR^2\sin^2\theta\,\dot\phi.$$

图中 $\otimes$ 表示所选位置的正方位速度向纸面里。极角的转折只令 $v_\theta=0$，若 $L_z\neq0$，方位运动仍然存在。下面讨论守恒条件时，始终取同一固定轴。

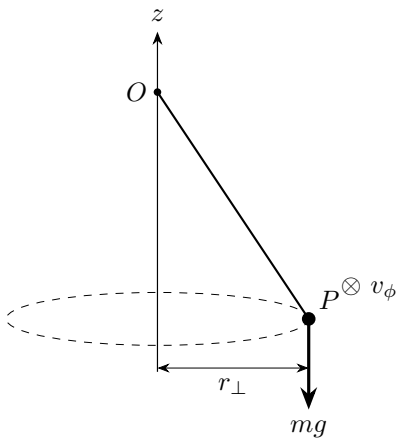


图 5.6: 悬点到摆球的水平距离决定竖直角动量，重力矩本身却沿水平方向

三维运动中，力矩为零的某个分量就足以产生相应角动量分量的守恒。取固定竖直轴 z，有 $\dot{L}_z = \tau_z$。重力沿竖直方向，关于任意点的力矩沿水平方向，其竖直分量为零。若其他约束力也没有绕该轴的力矩，L_z 便守恒。这正是球碗中方位运动、自由转台以及可转动螺旋导线的共同依据。

由图 5.5 的轴向角动量表达式可见，在非零 L_z 保持不变时，小球靠近竖直轴会使方位速度增大，形成阻止继续靠轴的等效势垒。极角转折时 $\dot{\theta} = 0$，方位速度仍由非零 L_z 确定。

关于一个点的角动量矢量，可以沿固定轴取分量。图 5.6 中的圆锥摆，关于悬点的角动量有不断旋转的水平分量，重力力矩恰好维持它的方向变化；其竖直分量才守恒。若改对轨道圆心取矩，合力始终径向，完整的竖直角动量反而可以保持不变。这两种描述分别对应悬点和轨道圆心，反映同一运动的不同角动量。

5.6　中心力、面积速度与径向变化

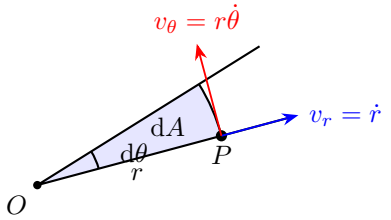


图 5.7: 径向、切向速度与半径扫过的微小面积

图 5.7 把速度分为沿半径与垂直半径的两部分。径向分量不产生关于 O 的角动量，也不扫出一阶面积；微小扇形面积为 $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$。所以 $L = mrv_\theta$ 与 $\dot{A} = L/(2m)$ 来自同一几何关系。半径变化时，仍在当前 r 处把速度分解，角动量中使用其中的切向分量。

中心力始终指向或背离固定点 O，故对 O 力矩为零，图 5.7 中的角动量保持不变。半径变化时，把速度分成径向 $\dot{r}$ 与切向 v_θ，总速率 $v = \sqrt{\dot{r}^2 + v_\theta^2}$，角动量为 $L = mrv_\theta$。小孔绳长变化及三维碗内纬圈运动，都需要把径向、经向或方位速度分开。

图中面积速度保持不变。半径缩小时，$\dot{\theta} = L/(mr^2)$ 增大，切向速率 $L/(mr)$ 也增大。所需增加的动能可以来自拉绳者的功或重力势能转化，能量的具体变化由这些力所作的功决定。

对具有势能 $U(r)$ 的中心力，单个质点的机械能守恒。图 5.7 中的径向速度与切向速度互相垂直，动能为两部分之和：

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mv_\theta^2 + U(r).$$

角动量守恒给 $v_\theta = L/(mr)$。代入切向动能，

$$\frac{1}{2}mv_\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{mr}\right)^2 = \frac{L^2}{2mr^2},$$

于是

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \qquad U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

固定 L 后，切向动能也成为 r 的函数，把它与势能合在一起，径向运动便具有一维能量方程的形式，这就是有效势能。径向转折点处 $\dot{r} = 0$，能量曲线与 U_{eff} 相交，切向速率仍为 $L/(mr)$。

例 5.2 中，桌上球半径增加时，悬挂物以同样的速率上升。列能量时，两物体各贡献 $m\dot{r}^2/2$，径向动能合为 $m\dot{r}^2$；再加桌上球的切向动能和悬挂物的重力势能，便得到该题的有效势能图。

5.7 中心力圆轨道的稳定性

中心力作用下，半径和极角可以同时改变。图 5.8 中的单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 沿半径向外，$\boldsymbol{e}_\theta$ 沿极角增大的方向；质点转动时，这两个方向也随之转动。

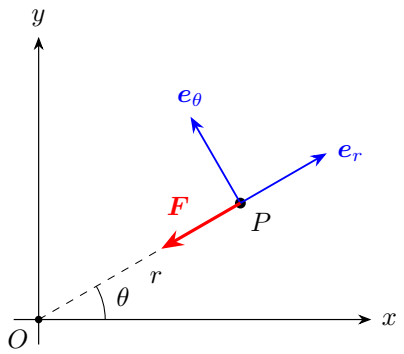


图 5.8: 径向与切向单位矢量随极角转动，吸引力沿半径向内

在固定的直角坐标中，两个单位矢量为

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta).$$

对时间求导，链式法则给出

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_r &= (-\sin\theta, \cos\theta)\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,\\ \dot{\boldsymbol{e}}_\theta &= (-\cos\theta, -\sin\theta)\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{e}_r.\end{aligned}$$

位置为 $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$，先求速度，再对两个乘积求导得到加速度：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,\\ \boldsymbol{a} &= \ddot{r}\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{e}_r\\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\boldsymbol{e}_\theta.\end{aligned}$$

图 5.8 中，径向力的分量 F_r 沿向外为正，牛顿第二定律的径向分量为

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r.$$

把守恒的 $L = mr^2\dot{\theta}$ 代入角速度项，

$$mr\dot{\theta}^2 = mr\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = \frac{L^2}{mr^3}, \qquad m\ddot{r} = F_r + \frac{L^2}{mr^3}.$$

现在取吸引力 $F_r = -kr^{-n}$ $(k > 0)$，便有

$$m\ddot{r} = -kr^{-n} + \frac{L^2}{mr^3}.$$

圆轨道 $r = r_0$ 的半径保持不变，$\ddot{r} = 0$，因而 $L^2/(mr_0^3) = kr_0^{-n}$。保持同一角动量，使半径稍微偏离 r_0，上式右边的两项随 r 的变化就决定偏离是否会被拉回。

令 $r = r_0 + \xi$ 且 $|\xi| \ll r_0$，记净径向力 $f(r) = -kr^{-n} + L^2 r^{-3}/m$。在固定 L 下逐项求导，

$$f'(r) = nkr^{-n-1} - \frac{3L^2}{m} r^{-4}.$$

圆轨道条件给 $L^2/m = kr_0^{3-n}$，所以 $f'(r_0) = (n-3)kr_0^{-n-1}$。一阶展开 $f(r_0+\xi) \simeq f(r_0) + f'(r_0)\xi$ 中第一项为零，得到

$$m\ddot{\xi} = -(3-n)kr_0^{-n-1}\xi.$$

当 $n < 3$ 时，令 $\omega_r^2 = (3-n)k/(mr_0^{n+1})$，小位移方程为

$$\ddot{\xi} + \omega_r^2 \xi = 0.$$

试取 $\xi = \mathrm{e}^{st}$，连续求导后代入方程，

$$\dot{\xi} = s\mathrm{e}^{st}, \qquad \ddot{\xi} = s^2\mathrm{e}^{st}, \qquad (s^2 + \omega_r^2)\mathrm{e}^{st} = 0.$$

约去非零指数，特征方程 $s^2 + \omega_r^2 = 0$ 给出 $s = \pm i\omega_r$。由 $\mathrm{e}^{\pm i\omega_r t} = \cos\omega_r t \pm i\sin\omega_r t$ 组合成实函数，得到通解及其速度：

$$\xi = A\cos\omega_r t + B\sin\omega_r t, \qquad \dot{\xi} = -A\omega_r \sin\omega_r t + B\omega_r \cos\omega_r t.$$

给定 $\xi(0) = \xi_0, \dot{\xi}(0) = w_0$，代入 $t = 0$ 便有

$$A = \xi_0, \qquad B = \frac{w_0}{\omega_r}, \qquad \xi = \xi_0 \cos\omega_r t + \frac{w_0}{\omega_r}\sin\omega_r t.$$

径向偏离有界，物体在圆轨道附近作小振动。

当 $n > 3$ 时，令 $\kappa^2 = (n-3)k/(mr_0^{n+1})$，方程改为 $\ddot{\xi} - \kappa^2\xi = 0$。仍试取 $\xi = \mathrm{e}^{st}$，求导、代入并约去非零指数，依次得到

$$\dot{\xi} = s\mathrm{e}^{st}, \quad \ddot{\xi} = s^2\mathrm{e}^{st}, \quad (s^2 - \kappa^2)\mathrm{e}^{st} = 0,$$

$$s^2 - \kappa^2 = (s-\kappa)(s+\kappa) = 0.$$

两个根为 $\pm\kappa$，因此

$$\xi = A\mathrm{e}^{\kappa t} + B\mathrm{e}^{-\kappa t}, \qquad \dot{\xi} = \kappa A\mathrm{e}^{\kappa t} - \kappa B\mathrm{e}^{-\kappa t}.$$

由初值求两个常数：

$$A + B = \xi_0, \qquad \kappa(A - B) = w_0,$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \frac{w_0}{\kappa}\right), \qquad B = \frac{1}{2}\left(\xi_0 - \frac{w_0}{\kappa}\right).$$

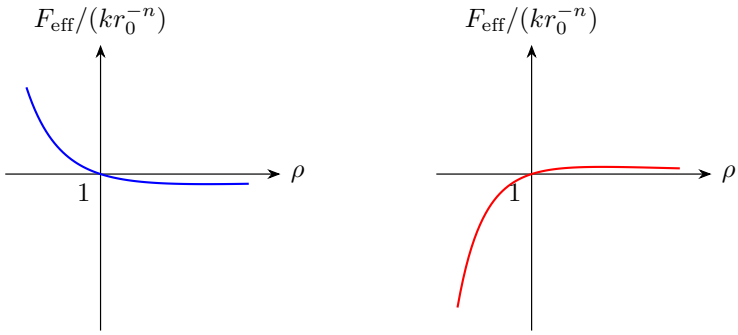
一般微扰含随时间增长的指数项，圆轨道不稳定。

当 $n=3$ 时，圆轨道条件为 $L^2=mk$。代回完整径向方程，两项对所有 r 恰好相消，得到 $\ddot r=0$。以 $\dot r(0)=w_0, r(0)=r_0+\xi_0$ 作两次积分，

$$\dot r - w_0 = \int_0^t 0\,\mathrm{d}\tau = 0,$$

$$r-(r_0+\xi_0) = \int_0^t w_0\,\mathrm{d}\tau = [w_0\tau]_0^t = w_0 t.$$

纯位置偏移没有回复力，径向初速度会使半径持续漂移。小扰动过程中 L 保持不变，角速度随 r 按 $L/(mr^2)$ 变化。



$n=2<3$：回复　　$n=4>3$：偏离增大

图 5.9: 固定角动量时，圆轨道附近净径向力的符号；横坐标 $\rho=r/r_0$

图 5.9 中正力指向半径增大方向。左图在 $\rho>1$ 时力为负、在 $\rho<1$ 时力为正，均指回圆轨道；右图的力与偏离方向相同。两图在 r_0 处的斜率正是展开式中 $-(3-n)kr_0^{-n-1}$ 的符号。沿同一守恒角动量分析时，切向动能对应的径向项 $L^2/(mr^3)$ 也随 r 改变。

圆轨道角频率满足 $\Omega^2=k/(mr_0^{n+1})$，因此 $\omega_r=\sqrt{3-n}\,\Omega$。平方反比吸引力 $n=2$ 使两频率相同；这个频率关系由给定力律下的径向方程作小位移展开得到。

5.8　多个守恒量的配合

复杂题中，线动量、角动量和机械能分别承担不同任务。线动量约束质心运动，角动量处理力矩和偏心作用，机械能联系速度大小、势能和耗散。是否使用某条方程取决于所选系统的受力与约束，各方程分别联系相应的运动量。

图 5.10 把刚粘合与碰后上摆分开：冲击阶段的 ω_+ 成为摆动阶段的初始角速度，随后质心上升 Δh 才进入重力势能变化。碰撞与连续运动常须分开：固定轴处的粘合冲击使用绕轴角动量守恒，碰撞损失一部分机械能；随后轴无摩擦的摆动阶

段，剩余机械能在转动与重力势能之间转化。自由车上的发射，水平方向线动量守恒、竖直方向一般不守恒；发射器储能转化为球和车两部分动能。先在图上标出参考系中的速度，再用几何关系把相对速度转成对地速度，各物体的动能就由同一参考系中的速度逐项计算。

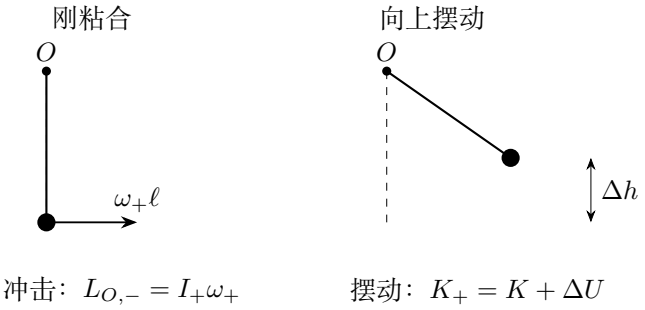


图 5.10: 绕固定轴的粘合冲击与随后的摆动使用不同的能量条件

5.9 活动约束中的功与角动量交换

固定光滑约束上的接触力垂直物体速度，作功为零。导线、槽或曲面运动时，接触力可以在两个物体间传递能量。可转动螺旋导线上的小环，在相对导线的速度方向上不受约束力分量，但导线自身正在转动，约束力可以分别改变小环和导线的动能。把两者合为系统，接触作用的总功抵消，机械能才可整体守恒。

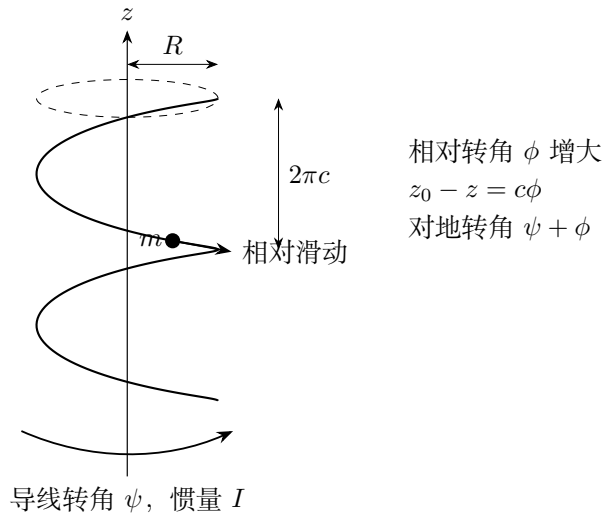


图 5.11: 相对螺旋转角决定下降高度，导线反向转动使绝对方位角速度减小

图 5.11 给出具体模型。螺旋半径 R、螺距 $2\pi c$，可绕固定竖直轴无摩擦转动，转动惯量 I；小环质量 m。令导线转角为 ψ，小环相对导线沿下降方向的转角为 ϕ。几何给出 $z = z_0 - c\phi$，小环对地角速度为 $\dot\psi + \dot\phi$。系统从静止释放，绕轴无外力矩，故

$$I\dot\psi + mR^2(\dot\psi + \dot\phi) = 0, \qquad \dot\psi = -\frac{mR^2}{I + mR^2}\dot\phi.$$

记 $\eta = I/(I + mR^2)$，则 $\dot\psi = -(1-\eta)\dot\phi$，小环对地角速度为 $\dot\psi + \dot\phi = \eta\dot\phi$，竖直速度为 $\dot z = -c\dot\phi$。先将三部分动能写全：

$$K = \frac{1}{2}I\dot\psi^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot\psi + \dot\phi)^2 + \frac{1}{2}mc^2\dot\phi^2.$$

角向两项的系数为 $I(1-\eta)^2 + mR^2\eta^2 = ImR^2/(I + mR^2) = mR^2\eta$，所以 $K = m(c^2 + \eta R^2)\dot\phi^2/2$。下降 h 时，由机械能守恒得到

$$\tfrac{1}{2}m(c^2 + \eta R^2)\dot\phi^2 = mgh.$$

这时下降速率 $c\dot\phi$ 比导线固定时更大，但小环的对地总速率平方为 $(c^2 + \eta^2 R^2)\dot\phi^2 < 2gh$，因为导线也分得一部分动能。三种速度分别描述小环的对地运动、下降运动与沿导线的相对运动。例 5.14 将进一步求出三个方向的支持力分量。

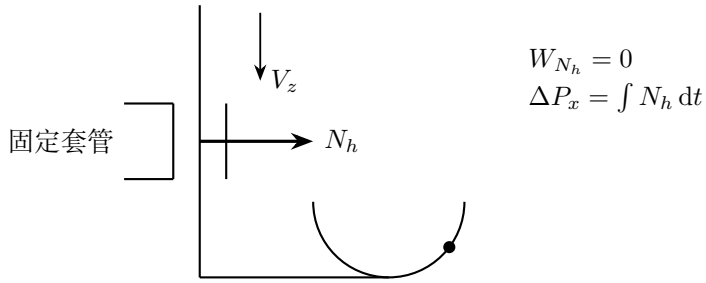
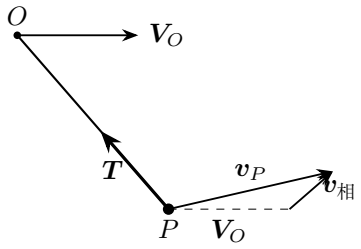


图 5.12: 固定套管提供水平外力，杆的允许速度却是竖直方向

图 5.12 中固定套管限制竖直杆，情况又不同。套管对杆、槽系统的水平约束力可产生外冲量，使水平动量不守恒；但杆的受力点沿竖直方向移动，水平约束力的功率为零，对系统输入的机械功为零。例 5.8 和例 5.15 用接触几何与能量求速度或加速度，同时由套管作用解释水平动量的改变。



$\boldsymbol{v}_{相} \perp OP, \quad \boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{V}_O + \boldsymbol{v}_{相}$

图 5.13: 活动支点的等长约束限制相对速度，张力功率仍取对地速度

图 5.13 中绳长不变只给 $(\boldsymbol{v}_P - \boldsymbol{V}_O)\cdot\boldsymbol{n} = 0$，因此张力对质点的功率为 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}_O$。移动支点以功率 $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{V}_O$ 把能量传给质点。关于移动点 O 的角动量，则按前面导出的 $\dot{\boldsymbol{L}}_O = \boldsymbol{\tau}_O - \boldsymbol{V}_O \times \boldsymbol{P}$ 计算，其位置变化项同时进入方程。

5.10 分离后用新的动力学衔接

细绳在张力为正时维持拉紧，未粘连物体在支持力为正时维持接触。弹簧托住物块上升，恢复自然长时支持力降为零；若物块继续向外运动，双方分离，随后按各自受力求运动。

设分离瞬间物块相对托盘向上的速度为 $w > 0$，以此刻接触高度差为相对坐标零点。若随后物块自由下落、托盘的向上加速度为常量 a_T，图 5.14 的相对加速度为 $\ddot{\zeta} = -(g + a_T)$。先从 $\dot{\zeta}(0) = w$ 积分，

$$\dot{\zeta}(t) - w = -(g + a_T)\int_0^t \mathrm{d}\tau = -(g + a_T)t.$$

再用 $\zeta(0) = 0$ 积分相对速度，

$$\zeta(t) = \int_0^t [w - (g + a_T)\tau]\,\mathrm{d}\tau = \left[w\tau - \frac{1}{2}(g + a_T)\tau^2\right]_0^t.$$

代入上下限，得到

$$\zeta(t) = wt - \tfrac{1}{2}(g + a_T)t^2.$$

令 $\zeta = 0$，可分解为 $t[w - (g + a_T)t/2] = 0$。除去分离时刻 $t = 0$，只有 $g + a_T > 0$ 时才有正的再次相遇根 $t = 2w/(g + a_T)$；这个相遇时间用于托盘加速度在飞行阶段保持 a_T 的情形；加速度变化时，则从各物体的实际运动方程求相对位置。

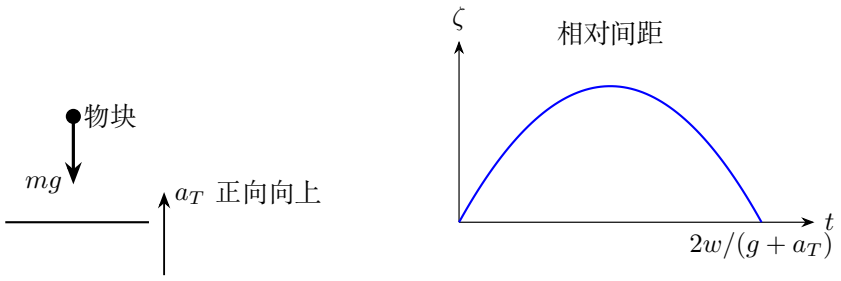


图 5.14: 分离后间距先增后减，相遇时间取相对位移的第二个零点

衔接时保留三组信息：分离的位置、各物体对地速度、各自下一阶段的受力。能量给出的可能是系统速度组合，须先用约束关系分配给各物体；相遇后若发生冲击，再换用新的冲量和恢复条件。例 5.11 用分离时两物体的速度和分离后的相对加速度，完整连接接触、飞行与再次相遇三个阶段。

5.11　例题与分析

例 5.1 (撞到轻杆末端的小球)**.** 长 $2a$ 的轻杆竖直悬于固定铰点 O，中点 A 固定质量 $2m$ 的小球，末端 B 固定质量 m 的小球。另一质量 m 的小球 C 以水平速度 v 撞到 B 并粘合，求碰后 A 速度。

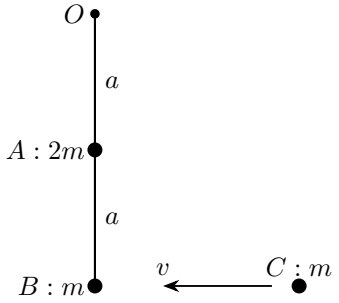


图 5.15: 题设：撞到轻杆末端的小球

解　绕固定铰点的角动量守恒

图 5.15 中，铰点冲量的作用线经过 O，关于 O 的角冲量为零；重力在短碰撞中的角冲量可略。碰前只有 C 贡献角动量，其大小为 $mv\cdot 2a$。入射球向左运动，位置矢量从 O 向下指向 B，所以 $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 指向纸内，碰后杆顺时针转动。记顺时针角速度的大小为 ω，图 5.16 中的速度箭头均向左。

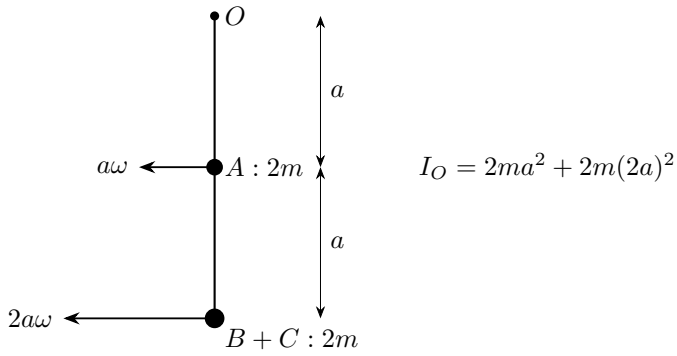


图 5.16: 碰后两处均为质量 2m 的点质量，速度大小正比于到铰点的距离

碰后 B, C 粘合为质量 $2m$ 的点质量，转动半径为 $2a$；A 的质量为 $2m$，转动半径为 a。两部分的转动惯量相加，

$$I_O = 2ma^2 + 2m(2a)^2 = 10ma^2.$$

碰前、碰后的角动量方向相同，令它们的大小相等，

$$2mva = 10ma^2\omega, \qquad \omega = \frac{v}{5a}.$$

于是

$$\boxed{v_A = a\omega = v/5},$$

方向向左，与入射球相同。碰后转动动能为

$$K_+ = \frac{1}{2}I_O\omega^2 = \frac{1}{2}(10ma^2)\frac{v^2}{25a^2} = \frac{mv^2}{5}.$$

它小于碰前的 $mv^2/2$，减少的动能在粘合过程中转化为内能。

例 5.2 (小孔两侧的相连物体)**.** 光滑水平桌上的质量 m 小球经小孔与桌下质量 m 物体用轻绳相连。初始桌上绳长 r_0，球切向速率 $v_0 = \frac{3}{2}\sqrt{2gr_0}$，桌下物体被握住。放手后求桌上绳长的最大、最小值，假定绳始终绷紧且桌下有足够空间。

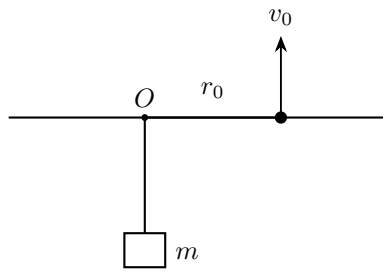


图 5.17: 题设：小孔两侧的相连物体

解 用竖直轴角动量和绳长约束列能量

图 5.17 张力对孔的竖直角动量矩为零，故 $rv_\theta = r_0 v_0$。桌上球的径向速率与悬挂物竖直速率大小同为 $|\dot r|$，总径向动能为 $m\dot r^2$；r 增加时桌下物体上升 $r - r_0$。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = m\dot r^2 + \frac{1}{2}m\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + mg(r - r_0).$$

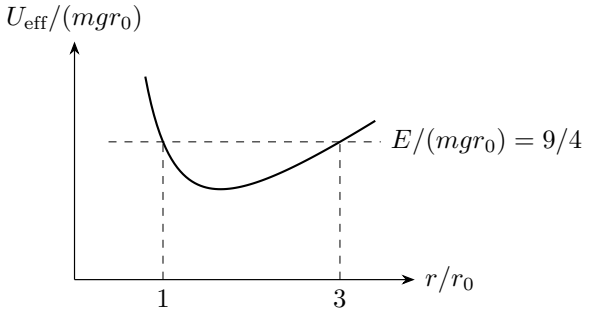


图 5.18: 解答过程：小孔两侧的相连物体

求径向能量方程的候选零点

在径向转折点令 $\dot r = 0$，取 $z = r/r_0 > 0$，代入 $v_0^2 = 9gr_0/2$ 并除以 mgr_0，得 $9/4 = 9/(4z^2) + z - 1$。再乘 $4z^2$ 并移项，

$$4z^3 - 13z^2 + 9 = 0.$$

初始位置 $z = 1$ 已是一个根，除去因子 $z - 1$，

$$4z^3 - 13z^2 + 9 = (z - 1)(4z^2 - 9z - 9).$$

余下二次方程的根为

$$z = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{8} = \frac{9 \pm 15}{8},$$

即 $3, -3/4$。负绳长不允许，故两个候选径向转折为 $z = 1, 3$。

由初始径向加速度确定运动区间

图 5.18 中的两个正转折点，分别对应绳长的两端。为判断释放后先向哪一侧运动，对桌上球沿径向向外、对悬挂物竖直向上列式：

$$m(\ddot r - v_\theta^2/r) = -T, \qquad T - mg = m\ddot r.$$

相加消去张力，得 $2\ddot r = v_\theta^2/r - g$。初始 $v_\theta = v_0$、$r = r_0$，所以

$$\ddot r(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{9gr_0/2}{r_0} - g\right) = \frac{7g}{4} > 0.$$

绳长先从 r_0 增大，达到另一正转折点 $3r_0$ 后缩短，故

$$\boxed{r_{\min}=r_0,\qquad r_{\max}=3r_0}.$$

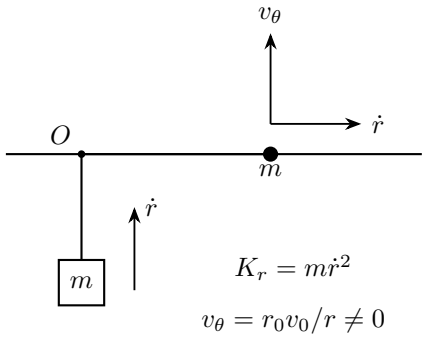


图 5.19: 径向伸长时悬挂物上升，两个径向速度大小相同

图 5.19 中，径向和切向应分别计入动能；转折处径向动能为零，切向动能由守恒角动量确定。

例 5.3 (斜置双球杆撞墙)**.** 两个质量均为 m 的小球由长 ℓ 的轻刚杆连接，整体以速度 v 垂直撞向光滑竖直墙面。杆与墙成 45°，较低的右端球 B 先触墙。碰撞完全弹性，求首轮冲击刚结束时两球速度。

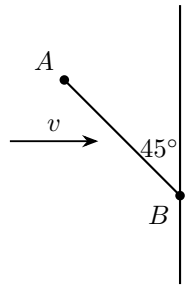


图 5.20: 题设：斜置双球杆撞墙

解　将墙冲量分成质心平动与绕质心转动

按图 5.20 取向墙为 $+x$、向上为 $+y$，角速度以逆时针为正。设墙给 B 向左冲量 J，由线冲量得 $2m(V_x-v)=-J$，故 $V_x=v-J/(2m)$。B 相对质心的位置为 $(\ell/(2\sqrt2),-\ell/(2\sqrt2))$，对质心的角冲量为

$$I_C\omega=r_{Bx}J_y-r_{By}J_x=0-\left(-\frac{\ell}{2\sqrt2}\right)(-J)=-\frac{J\ell}{2\sqrt2}.$$

用 $I_C=2m(\ell/2)^2=m\ell^2/2$ 相除，得 $\omega=-J/(\sqrt2 m\ell)<0$，即顺时针转动。

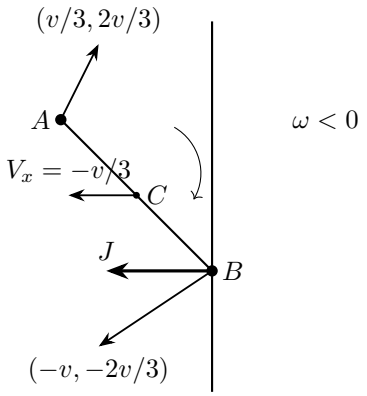


图 5.21: 首轮墙冲量使质心反向并引起顺时针转动，两个端点速度需分别合成

接触点的法向恢复关系

用平面刚体速度公式展开 B 的分量：$v_{Bx} = V_x - \omega r_{By} = v - J/(2m) + \omega\ell/(2\sqrt{2}) = v - 3J/(4m)$。最后一项来自刚杆转动，与质心平移共同决定接触点 B 的法向速度。

合成两端点速度并求总动能

固定墙完全弹性要求接触点法向速度反号，$v_{Bx} = -v$，得到 $J = 8mv/3$。于是 $V_x = -v/3$、$\omega = -4\sqrt{2}v/(3\ell)$。按图 5.21 用 $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$，得

$$\boxed{\boldsymbol{v}_A = (v/3,\ 2v/3), \qquad \boldsymbol{v}_B = (-v,\ -2v/3)}.$$

另一个端点 A 的相对坐标与 B 相反，故 $v_{Ax} = V_x - \omega\ell/(2\sqrt{2}) = v/3$、$v_{Ay} = -\omega\ell/(2\sqrt{2}) = 2v/3$；$B$ 的竖直分量为 $\omega\ell/(2\sqrt{2}) = -2v/3$。这样图中四个分量均由同一角速度符号得到。

两球速率分别为 $\sqrt{5}v/3$、$\sqrt{13}v/3$，总动能仍为 mv^2。上式给出首轮墙冲击刚结束的瞬时速度，随后刚杆按这一平动和转动状态继续运动。

例 5.4 (运动系统中弹簧的功)**.** 质量 M, m 的两箱被压缩轻弹簧推开，初始共同以 v_1 匀速运动。无外力，弹簧恢复自然长时小箱向右的速度为 $v_2 > v_1$。求弹簧释放能量，以及弹簧对两箱分别做的功；最后取 $M \gg m$ 近似。

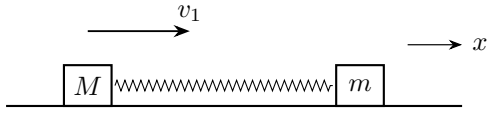


图 5.22: 题设：运动系统中弹簧的功

解　由总动量求大箱末速度与个体功

设 $\delta = v_2 - v_1$。按图 5.22 总动量守恒，$MV + mv_2 = (M+m)v_1$，所以 $V = v_1 - (m/M)\delta$。弹簧对各箱的功等于各自动能变化：

$$W_m = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2), \qquad W_M = \frac{1}{2}M\big[(v_1 - m\delta/M)^2 - v_1^2\big].$$

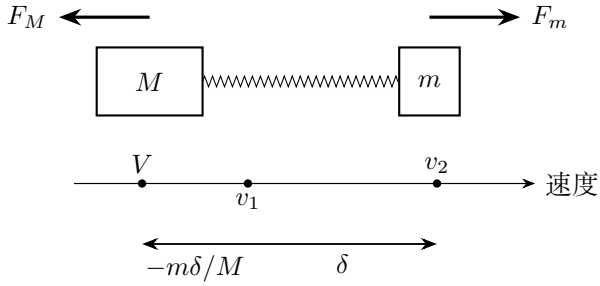


图 5.23: 弹簧推开两箱时，对地速度可增可减，两个功相加才等于释放能量

相加时消去依赖整体平动的交叉项

展开大箱功，$W_M = -mv_1\delta + m^2\delta^2/(2M)$；小箱功为 $W_m = mv_1\delta + m\delta^2/2$。相加后只剩二次项 $[m/2 + m^2/(2M)]\delta^2$。两箱各自的功由各自的动能变化给出，正负取决于相应的初末速度；二者之和等于弹簧释放的能量。

释放能量与重箱的功

按图 5.23 相加后，含 $v_1\delta$ 的交叉项相消，得到

$$\boxed{E_s = W_m + W_M = \tfrac{1}{2}m(1 + m/M)\delta^2}.$$

大质量极限给 $E_s \simeq m(v_2 - v_1)^2/2$、$W_M \simeq -mv_1\delta$。重箱速度变化随 $1/M$ 减小，而动能差还含初速 v_1 与动量增量的乘积，因而保留有限的功 $-mv_1\delta$。

例 5.5 (赤道发射的最低有用能量)**.** 在忽略空气阻力、发射损失及轨道高度相对地球半径的变化时，赤道地面相对地轴速率 0.46 km/s，近地圆轨道速率 7.9 km/s。将 1000 kg 航天器顺地球自转方向送入该轨道，至少需增加多少机械能?

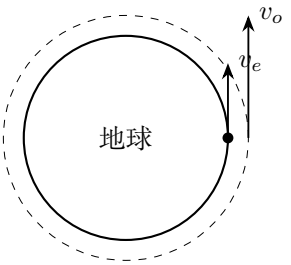
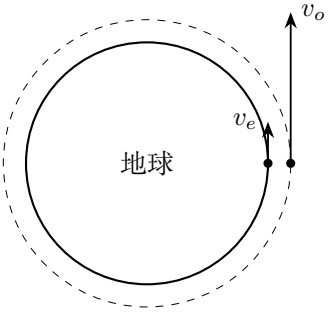


图 5.24: 题设：赤道发射的最低有用能量

解　在地心惯性系比较同一质量的两个状态

在图 5.24 地心惯性系中，航天器初始已随地球转动，具有动能 $mv_e^2/2$。在忽略高度变化的近地极限下，引力势能的初、末差可忽略，所需最低有用能量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}m(v_o^2 - v_e^2) = \frac{1}{2}(1000)\big(7900^2 - 460^2\big) = \boxed{3.11 \times 10^{10}\,\mathrm{J}}.$$



$K_i = mv_e^2/2$
$K_f = mv_o^2/2$
$\Delta E = K_f - K_i$

图 5.25: 在地心惯性系中画出初末速度，能量增加是两个动能之差

区分动能差与相对速度平方

速度须先统一换算成 m/s 再平方。v_e 和 v_o 都是地心惯性系中的速率，初末动能分别由各自速率平方计算，再作差。地球自转已给航天器初始动能 $mv_e^2/2$。

说明高度近似和最低有用能量的含义

图 5.25 用同一参考系画出两速度。所求有用机械能是航天器从初态到题设近地轨道末态所增加的机械能，这里按题设略去引力势能差与发射损失。

例 5.6 (自由小车上的弹簧发射器)**.** 小车与发射器总质量 $3m$，发射筒与水平成 $45°$，置于光滑水平面。质量 m 小球压缩弹簧 L 后由静止弹出，抛出后相对出射点最高上升 H。忽略筒内重力势能变化，求弹簧劲度系数。

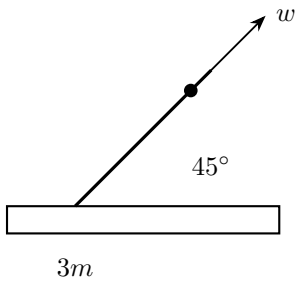
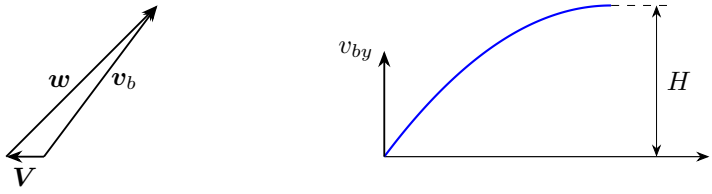


图 5.26: 题设：自由小车上的弹簧发射器

解　由相对出射速度与水平动量求对地速度

按图 5.26 令球相对筒的出射速率为 w、车对地速度为 V，则球对地速度为 $(V + w/\sqrt{2}, w/\sqrt{2})$。水平方向动量守恒 $3mV + m(V + w/\sqrt{2}) = 0$，故 $V = -w/(4\sqrt{2})$。球的水平分量为 $3w/(4\sqrt{2})$，竖直分量为 $w/\sqrt{2}$。



$v_{bx} : v_{by} = 3 : 4$　　$v_{by}^2 = 2gH$

图 5.27: 水平反冲只改变球的水平分量，最高上升高度由竖直分量决定

水平反冲与球的对地出射方向

这里 $V + w/\sqrt{2} = -w/(4\sqrt{2}) + w/\sqrt{2} = 3w/(4\sqrt{2})$。球的水平和竖直分量比为 3/4，所以对地出射方向与筒轴 $45°$ 不同；过程图的矢量三角形正表示水平反冲怎样改变出射方向，而不改变其竖直速度。

由抛体高度确定速度并计算总储能

图 5.27 抛体最高点给 $H=(w/\sqrt{2})^2/(2g)$，所以 $w^2=4gH$。弹簧能量变为球、车的总动能：

$$\frac{1}{2}kL^2=\frac{1}{2}(3m)\frac{w^2}{32}+\frac{1}{2}m\left(\frac{9w^2}{32}+\frac{w^2}{2}\right)=\frac{7}{16}mw^2.$$

因此

$$\boxed{k=7mgH/(2L^2)}.$$

筒轴角度规定相对车的速度方向，水平反冲使球的对地出射方向变陡；能量式分别计入车与球的对地动能。

例 5.7 (大炮反冲对射程的影响)**.** 质量 M 的炮车发射质量 m 的炮弹，炮口仰角 θ，发射前静止。固定炮车时射程为 s。若炮车改置于光滑水平面，假定每次发射转为炮车、炮弹机械能的总量相同，忽略筒内高度变化，求新射程。

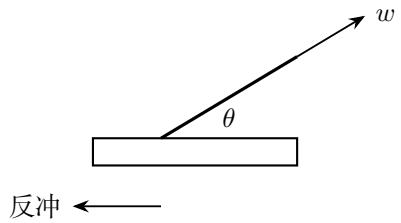
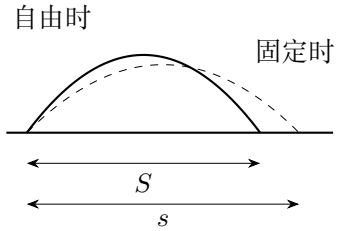


图 5.28: 题设：大炮反冲对射程的影响

解　以相同总有用能量比较固定和自由炮车

固定炮车时，炮弹以速率 u 出射，射程为 $s=u^2\sin 2\theta/g$，机械能增量为 $E=mu^2/2$。自由炮车的发射也使系统机械能增加同样的 E。按图 5.28，令炮弹相对炮筒的出速为 w，炮车对地速度为 V；炮弹对地水平、竖直速度分别为 $V+w\cos\theta$ 和 $w\sin\theta$。



示意取 $M=3m,\ \theta=45°$

图 5.29: 解答过程：大炮反冲对射程的影响

由水平反冲和飞行时间写出新射程

水平方向动量为 $MV+m(V+w\cos\theta)=0$，因而 $V=-mw\cos\theta/(M+m)$；炮弹水平速度随之为 $Mw\cos\theta/(M+m)$。炮弹仍以 $w\sin\theta$ 竖直分量起飞，落回同高处所需时间为 $2w\sin\theta/g$。结合图 5.29 的起落位置，新射程为 $S=Mw^2\sin 2\theta/[(M+m)g]$。

由能量分配消去相对出速

由图 5.29，把炮车与炮弹的速度分别代入动能，

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}M\frac{m^2w^2\cos^2\theta}{(M+m)^2}+\frac{1}{2}m\left[\frac{M^2w^2\cos^2\theta}{(M+m)^2}+w^2\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{2}mw^2\left[\frac{M(m+M)}{(M+m)^2}\cos^2\theta+\sin^2\theta\right]\\&=\frac{1}{2}mw^2\frac{M\cos^2\theta+(M+m)\sin^2\theta}{M+m}=\frac{1}{2}mw^2\frac{M+m\sin^2\theta}{M+m}.\end{aligned}$$

令它等于固定炮车时的 $mu^2/2$，约去 $m/2$，得到 $w^2=u^2(M+m)/(M+m\sin^2\theta)$。代入水平速度与飞行时间的乘积，新射程为

$$S=\frac{M}{M+m}\frac{w^2\sin 2\theta}{g}=\boxed{\frac{M}{M+m\sin^2\theta}s}.$$

相同的总有用能量下，一部分能量进入炮车反冲，炮弹的对地水平速度相应减小，射程按上式缩短。

例 5.8 (竖直杆与活动半球碗)**.** 半球碗质量 $m_B=2m_A$、半径 R，由理想导轨限制为在光滑水平面上平动，碗口始终水平。细杆 A 被固定光滑套管约束，只能竖直平动；杆下端从碗口边缘静止释放并沿碗内面运动。以球心到接触点的半径与竖直向下方向夹角 θ 描述位置，求杆与碗的速率。

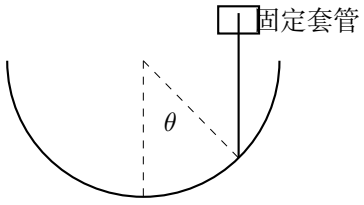
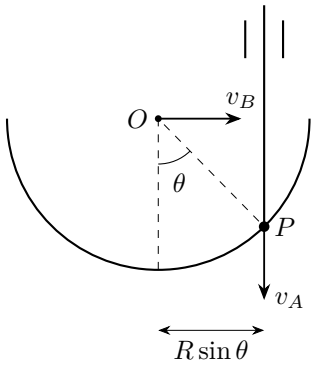


图 5.30: 题设：竖直杆与活动半球碗

解　分别判断套管外力对动量和能量的作用

图 5.30 固定套管对杆有水平外力，故杆碗整体的水平动量不守恒。不过此力垂直杆位移，不做功。接触点相对球心坐标为 $(R\sin\theta,-R\cos\theta)$，先把杆横坐标固定的条件微分，求两部分速度。



$X_B + R\sin\theta = $ 常量
$v_A/v_B = \tan\theta$

图 5.31: 杆横坐标固定，碗心右移与杆端下降由同一个角度变化决定

由接触几何微分得到两部分速度

将固定的杆横坐标写成 $x_A = X_B + R\sin\theta$，微分得 $\dot{X}_B = -R\cos\theta\dot{\theta}$；杆下端高度 $y_A = -R\cos\theta$，故 $\dot{y}_A = R\sin\theta\dot{\theta}$。下降过程中 $\dot{\theta} < 0$，这同时给出杆向下、碗向右的方向。题目求速率时才取这些速度的绝对值。

杆与碗的速率及碗底位置

按图 5.31 杆下降 $R\cos\theta$，能量式为 $m_A gR\cos\theta = \frac{1}{2}m_A R^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)$。所以

$$\boxed{v_A = \sin\theta\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}, \qquad v_B = \cos\theta\sqrt{\frac{2gR\cos\theta}{1+\cos^2\theta}}}.$$

碗口 $\theta = \pi/2$ 时均为零；到碗底 $\theta = 0$ 时杆速率为零而碗速率为 $\sqrt{gR}$。到碗底时，杆的竖直位移对角度的一阶变化为零，而碗仍沿水平方向平移。

例 5.9 (跳到自由小车另一端)**.** 质量 m 的人站在质量 M、长 L 小车左端，整个系统最初静止于光滑水平面。人跳起后刚好落到车右端，起落时质心等高，忽略空气阻力。求人的最小对地起跳速率。

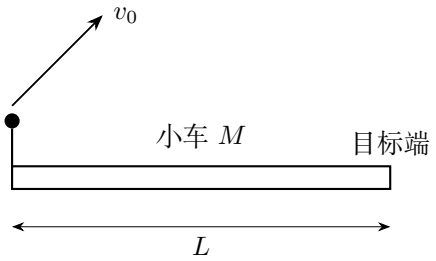


图 5.32: 起落高度相同，落点是运动小车的右端

解　人在飞行中相对车跨过的距离

设图 5.32 中人的对地水平、竖直初速度为 $u, w>0$，车的水平速度为 V。起跳后系统水平动量保持为零，故

$$mu+MV=0, \qquad V=-\frac{m}{M}u.$$

人以竖直速度 w 起跳，回到同一高度时满足 $0=wT-gT^2/2$，取正的飞行时间 $T=2w/g$。图 5.33 中车向左退，人落到向左移动后的右端，因而

$$uT=VT+L, \qquad L=(u-V)T.$$

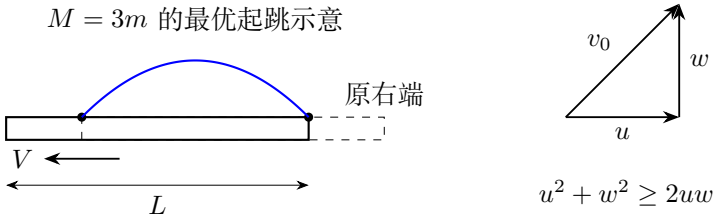


图 5.33: 小车后退使人的对地射程小于 L，最小起跳速率要求 u 等于 w

将 V 和 T 代入，

$$L=\left(1+\frac{m}{M}\right)u\frac{2w}{g}, \qquad 2uw=\frac{MLg}{M+m}.$$

由速度分量求最小起跳速率

落点条件固定了乘积 uw。把起跳速率平方写成

$$v_0^2=u^2+w^2=2uw+(u-w)^2\geq\frac{MLg}{M+m}.$$

当 $u=w$ 时等号成立，所以

$$\boxed{v_{0,\min}=\sqrt{\frac{MLg}{M+m}}},$$

对应对地起跳角 45°。图中人的对地射程为 uT，它与小车位移 VT 之差为车长 L。

例 5.10 (活动板上倒下的轻杆)**.** 质量 M 的水平板在光滑水平面上，板上铰接长 L 轻杆，杆端质量 m 的小球最初在铰点正上方。由微小扰动使杆倒下，求杆第一次水平时对球的拉力。板只平动，忽略杆重。

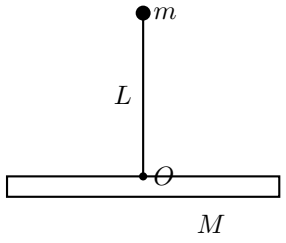


图 5.34: 题设：活动板上倒下的轻杆

解　杆水平时的速度

取图 5.34 中向右为正，板上铰点横坐标为 X，球心横坐标为 x_B。整个系统没有水平外力，故

$$M\dot{X} + m\dot{x}_B = 0.$$

杆转到水平时，球相对铰点的速度竖直，所以 $\dot{x}_B = \dot{X}$。联立得到 $(M+m)\dot{X} = 0$，即球和板在这一瞬间的水平速度均为零。球下降高度为 L，重力势能转为球的竖直动能，故

$$mgL = \frac{1}{2}mv_{\text{相}}^2, \qquad v_{\text{相}}^2 = 2gL.$$

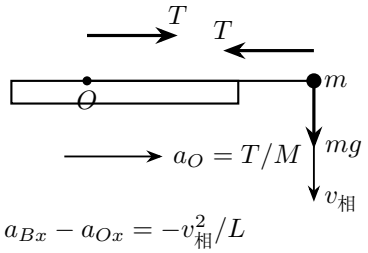


图 5.35: 水平瞬间铰点速度为零但加速度向右，球相对铰点的径向加速度由两者加速度之差给出

由相对径向加速度求杆力

图 5.35 中，杆对球的拉力向左，杆对板的反作用力向右。两者的水平加速度分别为

$$a_{Bx} = -\frac{T}{m}, \qquad a_{Ox} = \frac{T}{M}.$$

此时球相对铰点作半径为 L 的转动，向心加速度向左，因而

$$a_{Bx}-a_{Ox}=-\frac{v_{\text{相}}^2}{L}=-2g.$$

代入各自的动力学方程，

$$-\frac{T}{m}-\frac{T}{M}=-2g,\qquad \boxed{T=\frac{2mMg}{M+m}}.$$

板在这一瞬间速度为零，同时受杆的向右作用力而具有加速度。M 很大时，铰点的加速度趋于零，上式趋于固定铰点的结果 $2mg$。

例 5.11 (滑轮托盘与弹簧分离)**.** 一根轻绳经两定滑轮并绕过中间动滑轮，两端各悬挂质量 m 的砝码；动滑轮连接质量 m 的托盘，托盘内竖直弹簧上放质量 m 的砝码 1。弹簧劲度系数 k，初始被内部锁线压缩 ℓ_0，系统静止。烧断锁线，砝码 1 被推出，假定 $k\ell_0>2mg$，且不碰托盘顶部。求从砝码 1 脱离弹簧到再次接触弹簧的时间。

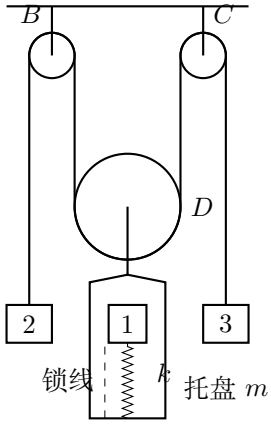


图 5.36: 一根绳连续绕过两个定滑轮和中间动滑轮，托盘与两侧砝码反向同速率

解　由绳长和三个受力方程确定速度分配

在图 5.36 对称运动中，托盘向上位移 Y 时两侧砝码各向下同样距离，故它们与托盘的动能和为 $\frac{1}{2}(3m)\dot{Y}^2$。设弹簧压缩量为 x，砝码 1 的向上坐标可写 $Z=Y+\ell-x$。令绳张力为 T、弹簧对砝码 1 向上弹力为 F_s。侧砝码向下加速度为 $\ddot{Y}$，托盘与砝码 1 向上加速度分别为 $\ddot{Y},\ddot{Z}$，逐个列式：

$$mg-T=m\ddot{Y},\qquad 2T-mg-F_s=m\ddot{Y},\qquad F_s-mg=m\ddot{Z}.$$

后两式相加并用第一式消去 T，得 $3\ddot{Y}+\ddot{Z}=0$。几何式 $Z=Y+\ell-x$ 连续求导给 $\dot{Z}=\dot{Y}-\dot{x}$、$\ddot{Z}=\ddot{Y}-\ddot{x}$，代入得到 $4\ddot{Y}-\ddot{x}=0$。从释放时刻 0 积到 t：

$$\int_0^t (4\ddot{Y}-\ddot{x})\,\mathrm{d}\tau=[4\dot{Y}-\dot{x}]_0^t=0.$$

由初始 $\dot{Y}(0)=\dot{x}(0)=0$，才得到 $4\dot{Y}-\dot{x}=0$。

这里 ℓ 表示弹簧自然长，x 表示压缩量。将 $4\dot{Y}=\dot{x}$ 代入前面的速度关系，得 $\dot{Z}=-3\dot{x}/4$。因此分离时两速度方向相反，托盘向下而砝码 1 向上，分离图分别沿向下与向上标出这两个速度。

用整体能量求自然长处分离速率

令分离时相对上升速率 $w=-\dot{x}>0$，于是托盘速度 $-w/4$，砝码 1 速度 $3w/4$，总动能为 $3mw^2/8$。弹簧由压缩 ℓ_0 回到自然长，砝码 1 相对托盘上升 ℓ_0，系统重力势能净增加 $mg\ell_0$，所以

$$\frac{3}{8}mw^2=E_*=\frac{1}{2}k\ell_0^2-mg\ell_0>0.$$

把各物体动能逐项相加：托盘和两侧砝码三份质量的速率大小相同，合计 $3m$，其动能为 $3mw^2/32$；砝码 1 动能为 $9mw^2/32$，和为 $3mw^2/8$。重力势能变化为 $mgZ-mgY=mg(\ell-x)$ 加常量，故从 $x=\ell_0$ 到 0 恰增加 $mg\ell_0$。

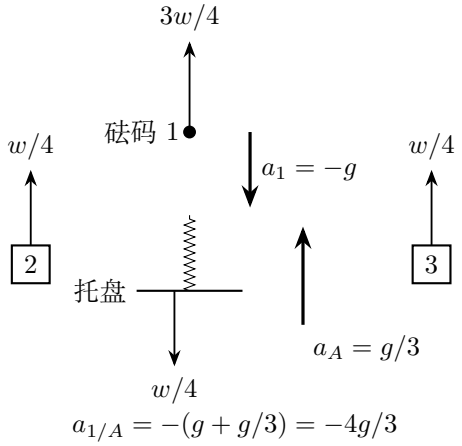


图 5.37: 分离瞬间托盘向下、砝码 1 向上；分离后的加速度使两者重新接近

重新列托盘动力学并求相对返回时间

分离后，图 5.37 砝码 1 加速度向下 g；托盘与两侧砝码组成质量 m 对 $2m$ 的约束系统。若托盘向上加速度为 a，侧砝码向下加速度也是 a，由 $mg-T=ma$、$2T-mg=ma$，将第一式的 $T=m(g-a)$ 代入第二式，得 $2mg-2ma-mg=ma$，所

以 $a=g/3$。因此砝码 1 相对托盘的加速度为 $-4g/3$。令分离时相对位置 $z(0)=0$、向上相对速度 $\dot z(0)=w$，两次积分得

$$\dot z(t)-w=\int_0^t -\frac{4g}{3}\,\mathrm{d}\tau=-\frac{4g}{3}t,$$

$$z(t)=\int_0^t\left(w-\frac{4g}{3}\tau\right)\mathrm{d}\tau=\left[w\tau-\frac{2g}{3}\tau^2\right]_0^t=wt-\frac{2}{3}gt^2.$$

再次相遇要求 $t(w-2gt/3)=0$，排除分离时刻 $t=0$，得 $T=3w/(2g)$。前面能量式给 $w^2=8E_*/(3m)$，代入后 $T^2=9[8E_*/(3m)]/(4g^2)=6E_*/(mg^2)$，取正时间，故

$$\boxed{T=\frac{3w}{2g}=\frac{1}{g}\sqrt{\frac{6E_*}{m}}}.$$

题设 $k\ell_0>2mg$ 使 $E_*>0$，砝码 1 以正相对速度脱离弹簧，飞行后在上述时刻重新接触。

例 5.12 (半球碗内的三维回转)**.** 固定光滑半球碗半径 R，质量 m 的小球从碗口一点以水平沿碗口切向速率 $v_0>0$ 进入碗内。以从向下竖直线计的极角 θ 描述位置，求小球达到的最小极角及全过程最大速率。

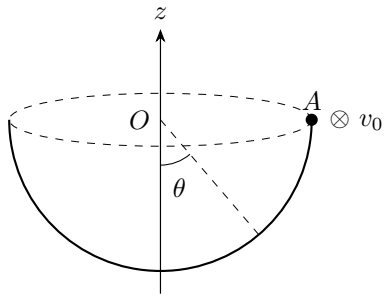
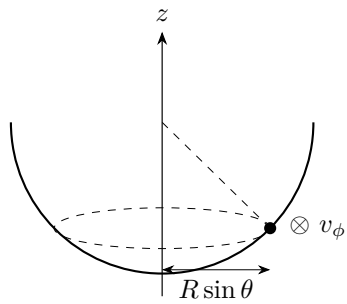


图 5.38: 初速度沿水平碗口切向；纸面内的子午运动与纸面法向的方位运动要区分

解　只守恒竖直角动量并分解球面速度

按图 5.38 碗心为 O、竖直轴为 z。支持力过 O，重力没有竖直轴力矩，故 $L_z=mRv_0$ 守恒。任意纬圈半径 $r=R\sin\theta$，方位速度 $v_\phi=v_0/\sin\theta$；沿经线速度记 $v_\theta=R\dot\theta$。能量给

$$v_\theta^2+v_\phi^2=v_0^2+2gR\cos\theta.$$



转折仅要求 $v_\theta = 0$，仍有 $L_z = mRv_0$

图 5.39: 最低高度处经向速度为零，沿水平纬圈的方位速度仍然非零

说明极角转折时仍有方位运动

守恒角动量给 $m(R\sin\theta)v_\phi = mRv_0$，所以 $\sin\theta$ 越小，方位速度越大。在高度最低处只要求经向速度 $v_\theta = 0$，球仍沿该纬圈切向运动；非零的竖直角动量对应这项持续存在的方位运动。

联立极角转折条件与能量选取正根

图 5.39 高度最低处 $\dot\theta = 0$，但 v_ϕ 非零。令 $c = \cos\theta_{\min} > 0$，代入 $v_\phi = v_0/\sqrt{1-c^2}$，转折方程为 $v_0^2/(1-c^2) = v_0^2 + 2gRc$。两边同乘 $1-c^2 > 0$ 并移项，

$$v_0^2 c^2 = 2gRc(1-c^2).$$

初始碗口 $c = 0$ 也是一个转折。所求的最低高度对应 $c > 0$，约去 c 并收集幂次，得 $2gRc^2 + v_0^2 c - 2gR = 0$。按求根公式，

$$c_\pm = \frac{-v_0^2 \pm \sqrt{(v_0^2)^2 - 4(2gR)(-2gR)}}{4gR} = \frac{-v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 + 16g^2R^2}}{4gR}.$$

负号根小于零，取正号根。二次多项式在 $c = 0$ 为 $-2gR < 0$、$c = 1$ 为 $v_0^2 > 0$，其正根确在 $(0,1)$ 内，因此

$$\boxed{c = \frac{\sqrt{v_0^4 + 16g^2R^2} - v_0^2}{4gR}}.$$

最大总速率与球面支持力

小球在该处高度最低，能量式说明总速率最大。将刚求出的 c 代回，

$$v_{\max}^2 = v_0^2 + 2gRc = v_0^2 + \frac{\sqrt{v_0^4 + 16g^2R^2} - v_0^2}{2} = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 16g^2R^2}}{2}.$$

取速率的非负平方根，故

$$\boxed{v_{\max}=\sqrt{\frac{v_0^2+\sqrt{v_0^4+16g^2R^2}}{2}}}.$$

球面内侧支持力 $N=m(v^2/R+g\cos\theta)>0$，接触可维持。非零 L_z 使小球靠轴时方位动能增加，极角在 $\theta_{\min}>0$ 处转回。

例 5.13 (圆锥摆关于不同点的角动量)**.** 质量 m 的小球由长 ℓ 的轻绳悬于固定点 O，以半顶角 $0<\theta<\pi/2$ 作圆锥摆。水平轨道圆心为 B。求角速度、相对 O 和 B 的角动量大小及竖直分量，并判断哪些量守恒。

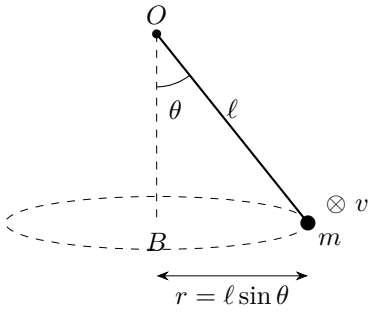
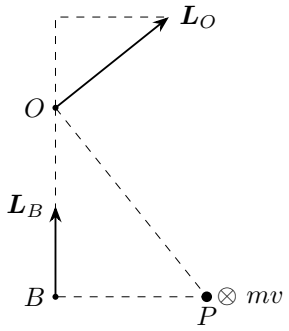


图 5.40: 圆锥摆绕固定竖直轴回转，右端位置的正方位速度指向纸面里

解　用竖直平衡和水平向心力求角速度

按图 5.40 轨道半径 $r=\ell\sin\theta$，竖直平衡 $T\cos\theta=mg$，水平向心 $T\sin\theta=m\omega^2 r$。



$$L_{Oz}=L_{Bz}=mrv$$
$$L_{Ox}=m\ell v\cos\theta$$

图 5.41: 同一位置关于 O 和 B 的角动量，竖直分量相等而完整矢量不同

消元过程为 $T = mg/\cos\theta$，代入水平式得 $mg\tan\theta = m\omega^2\ell\sin\theta$；对非退化的 $0 < \theta < \pi/2$ 约去 $m\sin\theta$，得到

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{\ell\cos\theta}}, \qquad v = \omega\ell\sin\theta.$$

后面的角动量均使用这一水平速率。

分别计算两参考点的角动量并判断矢量守恒

图 5.41 速度垂直 O 到球的半径，因此 $|\boldsymbol{L}_O| = m\ell v$，竖直分量 $L_{Oz} = mrv = m\ell^2\sin^2\theta\omega$。关于 B，半径水平，$\boldsymbol{L}_B = mrv\,\boldsymbol{e}_z$。球的合力水平指向 B，所以 $\boldsymbol{L}_B$ 完整矢量守恒；$\boldsymbol{L}_O$ 的水平分量随球转动，完整矢量不守恒，只有 L_{Oz} 保持不变。关于 O 的角动量大小 $|\boldsymbol{L}_O| = m\ell v$ 也保持不变。

例 5.14 (可转动螺旋导线上的小环)**.** 均匀螺旋形细导线质量 m，各点到竖直轴距离均为 R，螺距为 $H = \pi R$。导线由支架限制在固定高度，可绕该轴无摩擦转动。质量也为 m 的小环套在导线上，由静止释放，接触光滑。求小环相对地面下落 h 时的竖直速率、导线角速度及导线对环的支持力。

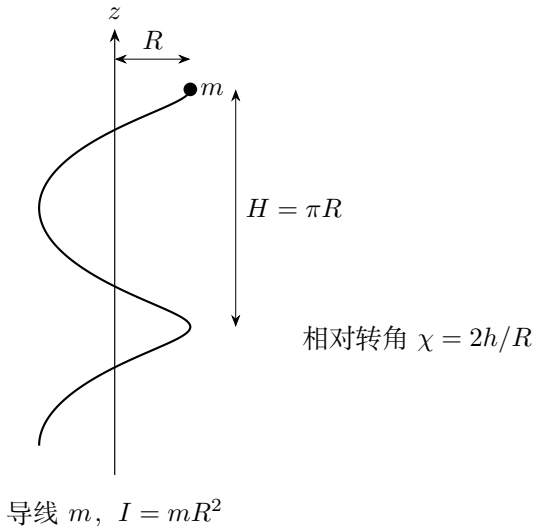


图 5.42: 螺旋半径 R、每转下降 πR，小环与导线可相对转动

解　用螺距与轴向角动量确定两个角速度

按图 5.42 导线转动惯量 $I = mR^2$。令小环向下位移 z，相对导线绕轴转角为 χ，螺距约束给 $z = R\chi/2$。设小环绝对角速度为 ω、导线为 Ω，则 $\dot z = R(\omega - \Omega)/2$。绕轴无外力矩且初始静止，$mR^2\omega + mR^2\Omega = 0$，故 $\Omega = -\omega$、$\dot z = R\omega$。

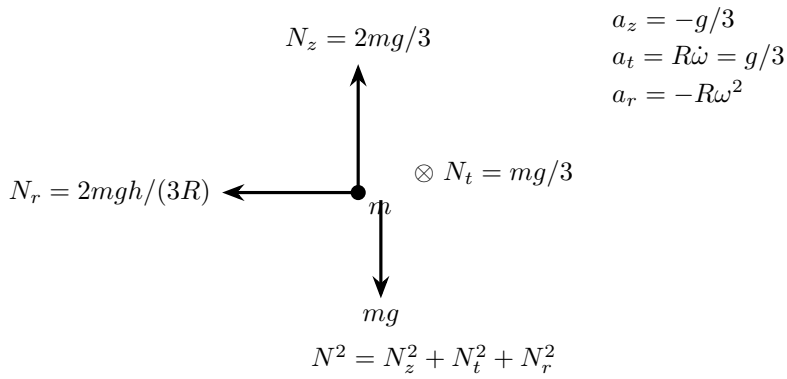


图 5.43: 在小环的局部柱坐标中分解支持力，水平切向用纸面法向表示

把三部分动能与下降势能联立

按图 5.43 总动能含小环竖直、环的水平回转、导线自转三项，各为 $m\dot{z}^2/2$，所以 $mgh = 3m\dot{z}^2/2$，得到

$$\boxed{\dot{z} = \sqrt{2gh/3}, \quad |\Omega| = R^{-1}\sqrt{2gh/3}}.$$

由能量也可写 $\dot{z}^2 = 2gz/3$，对时间求导，$2\dot{z}\ddot{z} = (2g/3)\dot{z}$，在下落段约去 $\dot{z}$ 得 $\ddot{z} = g/3$。又因 $\omega = \dot{z}/R$，切向加速度为 $R\dot{\omega} = \ddot{z}$，向心加速度为 $R\omega^2 = \dot{z}^2/R$。因此三个支持力分量分别来自三个相互垂直的加速度方程。

支持力的竖直、切向与径向分量

由 $\ddot{z} = g/3$，小环支持力的竖直向上分量 $N_z = 2mg/3$；水平切向分量 $N_t = mR|\dot{\omega}| = mg/3$；水平向心分量 $N_r = mR\omega^2 = 2mgh/(3R)$。相对螺旋切线的速度分量为水平 $2\dot{z}$ 与竖直向下 $\dot{z}$，而 $2N_t - N_z = 0$，给出支持力与螺旋相对切线垂直的关系。三分量互相垂直，故

$$\boxed{N = \frac{mg}{3}\sqrt{5 + \frac{4h^2}{R^2}}}.$$

导线上的光滑接触力分别交换环与导线的能量，小环和导线的总机械能守恒，导线的转动动能已计入上述能量式。

例 5.15 (竖直滑杆与自由斜面)**.** 质量 m 的细杆只能在固定光滑竖直套管内平动，杆下端支在倾角 α、质量 M 的斜面上。斜面在光滑水平面上自由移动，初始全体静止。杆与斜面接触光滑，求斜面与杆的加速度及支持力。

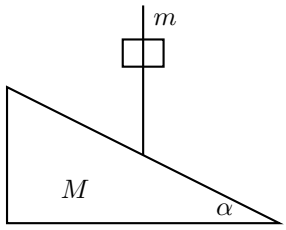


图 5.44: 题设：竖直滑杆与自由斜面

解　用位移约束消去杆的独立坐标

图 5.44 固定套管给杆水平外力，改变杆与斜面的总水平动量。设斜面向左位移为 X、杆下降 q，几何给 $q = X\tan\alpha$。能量为 $mgX\tan\alpha = \frac{1}{2}(M + m\tan^2\alpha)\dot{X}^2$。

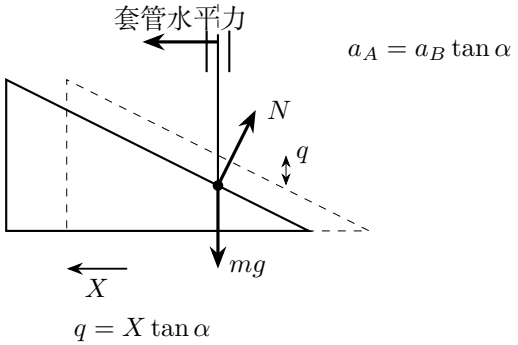


图 5.45: 斜面左移使固定横坐标处的杆端下降，法向力对杆向右上而对斜面向左下

由能量导数求恒加速度

令 $M_{等} = M + m\tan^2\alpha$，它是常量。能量式求导时 $\mathrm{d}(\dot{X}^2)/\,\mathrm{d}t = 2\dot{X}\ddot{X}$，故 $mg\tan\alpha\,\dot{X} = (M_{等}/2)(2\dot{X}\ddot{X})$。在开始运动后的区间消去 $\dot{X}$；由连续性可将所得恒定加速度延续到初始时刻。再由 $q = X\tan\alpha$ 依次求导，$\dot{q} = \dot{X}\tan\alpha$、$\ddot{q} = \ddot{X}\tan\alpha$，得到杆加速度 $a_A = a_B\tan\alpha$。

由杆与斜面的受力求支持力

对图 5.45 等式求时间导数并在连续运动段消去 $\dot{X}$，得

$$\boxed{a_B = \frac{mg\tan\alpha}{M + m\tan^2\alpha}, \qquad a_A = \frac{mg\tan^2\alpha}{M + m\tan^2\alpha}}.$$

以上 a_B 向左、a_A 向下。杆竖直方程 $mg - N\cos\alpha = ma_A$，故

$$\boxed{N = mgM/[\cos\alpha(M + m\tan^2\alpha)]}.$$

斜面水平式 $N\sin\alpha = Ma_B$ 给出同一支持力。套管作用点沿竖直方向移动，其水平力功率为零；杆下落的重力势能转为杆与斜面的动能。

5.12 本讲小结

角动量 $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ 把动量与相对于参考点的空间分布联系起来。质点的面积速度为 $L/(2m)$；关于固定惯性点，角动量变化率等于合外力矩。外力矩为零的分量对应守恒的角动量分量，冲击阶段则用角冲量连接前后状态。

系统角动量可分为质心绕参考点运动的部分与相对质心转动的部分。固定轴冲击选择轴上点取矩，自由双球杆分别求质心平动与绕质心转动；三维碗内回转沿竖直轴取角动量分量，再用能量求经向转折。

中心力使关于力心的角动量守恒，切向动能可并入径向等效势能。活动约束通过接触交换能量，接触几何给出各物体速度关系。发生分离后，保留分离位置与各物体速度，再按新的受力求相对运动，便能继续确定相遇和后续冲击。

5.13 练习

练习 5.1 (落球在运动车面上的摩擦冲量)**.** 将小球视为不计自转的质点。质量 M 的小车以速率 v 向左运动，质量 m 的小球由高 h 处自由落下，碰车后反弹到相同高度。碰撞中支持力远大于重力，接触动摩擦因数 μ，若相对水平速度消失后不再滑动。求球的水平末速度。

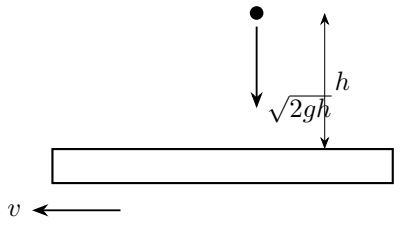


图 5.46: 题设：落球在运动车面上的摩擦冲量

练习 5.2 (桌边麦管与两只苍蝇)**.** 均匀细杆质量 M、长 L，初始一半伸出光滑水平桌边，另一半在桌内。质量 $m < M$ 的苍蝇从桌内杆端缓慢爬到桌外端，杆始终水平且不倾覆。随后另一只质量 m' 的苍蝇缓慢竖直降落到第一只身上，着陆冲击可忽略。忽略水平冲量，求仍不倾覆的 m' 上限。

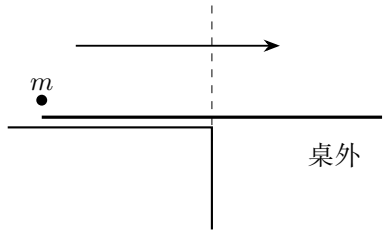


图 5.47: 题设：桌边麦管与两只苍蝇

练习 5.3 (叠放弹性小球的反弹)**.** 两小球沿同一竖线下落，下面质量 M、上面质量 m（$M > m$）。从高 h 处静止释放，忽略两球尺寸，假定下球先与地面完全弹性碰撞，再立即与仍向下的上球完全弹性碰撞。求上球首次弹起最高高度，并取 $M \gg m$ 极限。

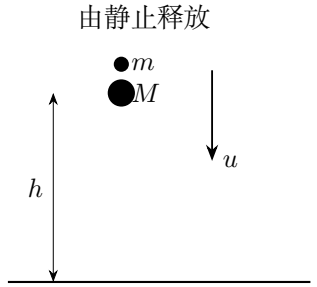


图 5.48: 球间距作放大示意，计算忽略球尺寸及两次碰撞之间的高度变化

练习解答

练习 5.1

解　用竖直速度反号求法向总冲量

按图 5.46 取向左为正，球竖直落地、反弹速率均为 $u = \sqrt{2gh}$，法向总冲量 $J_n = 2mu$。若全程滑动，水平摩擦冲量 $J_t = \mu J_n$，球可获得 $2\mu u$ 的水平速度。

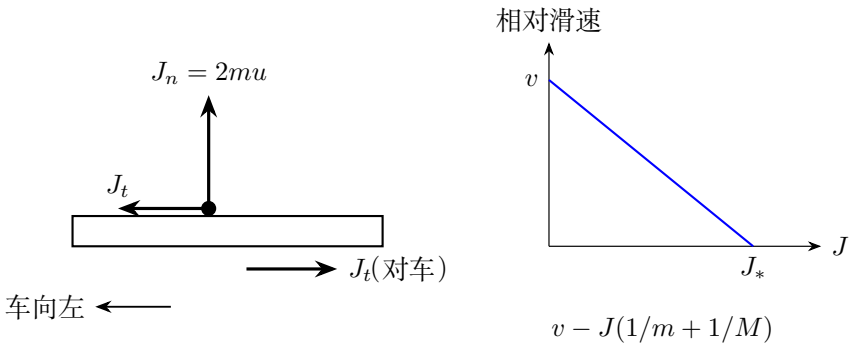


图 5.49: 球的摩擦冲量向左，车的反冲量向右；共速点限制可累积的摩擦冲量

求消除水平相对滑动所需的冲量

若给球向左的切向冲量 J，球水平速度为 J/m，车速变为 $v - J/M$。相对滑速降为零的条件为 $J/m = v - J/M$，所需冲量 $J_* = mMv/(M+m)$。实际冲量取 $\min(\mu J_n, J_*)$，除以 m 便得到下式。

比较摩擦上限与共速上限得到分段结果

图 5.49 中若球先与车水平共速，便转入题设无滑动阶段。达到共速所需球速度由水平动量给 $V = Mv/(M+m)$。因此

$$\boxed{v_{bx} = \min\left(2\mu\sqrt{2gh},\, \frac{Mv}{M+m}\right)}$$

方向向左。对应条件为 $2\mu\sqrt{2gh} \leqslant Mv/(M+m)$。滑动阶段切向冲量按 μJ_n 累计，到共速时转入无滑动，实际冲量以 J_* 为限。

练习 5.2

解　由水平质心不变确定杆的后退量

取图 5.47 桌边为 $x = 0$、向桌外为正。初始杆心为零，第一只苍蝇在 $-L/2$。无水平外力，质心水平位置固定。设杆后退 d，末态杆心为 $-d$，苍蝇在 $L/2 - d$，于是

$$-Md + m(L/2 - d) = -mL/2.$$

移项得 $(M+m)d = mL$，故 $d = mL/(M+m)$。

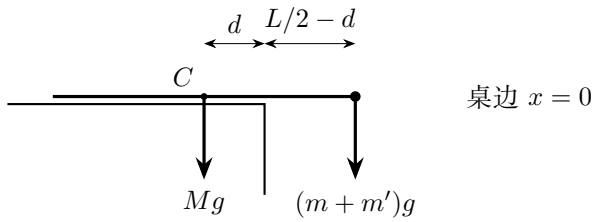


图 5.50: 关于固定桌边比较重力矩，两只苍蝇的位置均由爬行后的杆位置确定

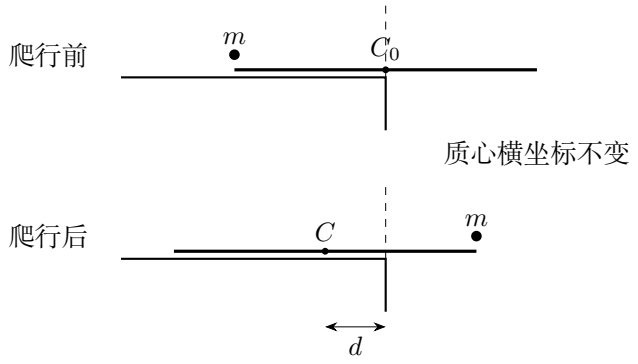


图 5.51: 光滑桌面不提供水平外力，苍蝇向外爬时杆向内退

在爬行后位置应用静态倾覆条件

图 5.51 把杆心从 C_0 移到 C 的向内位移标为 d。苍蝇相对杆向外爬了 L，它对地的位移却是 $L-d$；因而质心位移条件也可写成 $-Md+m(L-d)=0$，与前面的坐标方程相同。爬行期间，杆与第一只苍蝇的总质心始终在 $x_C=-mL/[2(M+m)]<0$，保持在桌边内侧，与尚未倾覆的假设相符。

在图 5.50 中，杆重作用线位于桌内、两只苍蝇位于桌外，两力臂分别为 d 和 $L/2-d$。第二只苍蝇缓慢竖直降落，落在同一横坐标处。此时物体接近静止，以桌边为轴比较两侧重力矩，杆保持水平的条件是

$$(m+m')(L/2-d)\le Md.$$

第二只苍蝇的质量上限

代入 d 并乘以 $2(M+m)/L$，得 $(m+m')(M-m)\le 2Mm$，即 $m'(M-m)\le m(M+m)$。题设 $M>m$，可除以正的 $M-m$，所以

$$\boxed{m'\le\frac{m(M+m)}{M-m}}.$$

同时 $L/2-d=L(M-m)/[2(M+m)]>0$，爬行后的杆端仍在桌边外侧。等号表示总重力作用线恰通过桌边，是静态倾覆的临界位置。

练习 5.3

解　先处理下球与地面的弹性碰撞

在图 5.48 取竖直向上为正，两球落地前速率均为 $u=\sqrt{2gh}$。下球与地面完全弹性碰撞后，速度变为 $+u$，上球仍为 $-u$。地面碰撞给出随后两球碰撞的初速度 $(+u,-u)$；两球接触时再把它们合起来写动量守恒。

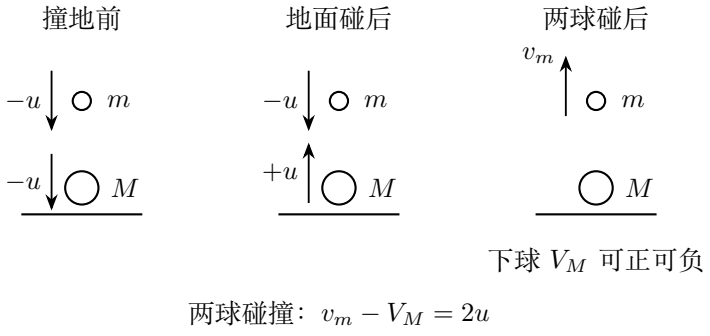


图 5.52: 地面碰撞先改变下球速度，随后两球碰撞再交换动量和能量

联立动量守恒与相对速度关系

按图 5.52 的事件顺序，设随后两球末速度为 V_M,v_m。两球碰撞守恒动量，且相对分离速率等于原接近速率 $2u$，所以

$$Mu-mu=MV_M+mv_m,\qquad v_m-V_M=2u.$$

由上球末速度求首次反弹高度与质量极限

由第二式得 $V_M=v_m-2u$，代入第一式，$(M+m)v_m=(3M-m)u$。因 $M>m$，上球速度为正，随后上升到

$$\boxed{H=\frac{v_m^2}{2g}=\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 h}.$$

在 $M\gg m$ 时，$v_m\to 3u$、$H\to 9h$；上球增加的能量来自下球的运动。图中两次碰撞按题设先后发生，忽略二者之间的高度变化。

能量与动量

物理竞赛一轮讲义

第六讲

刚体动力学

2026

目录

第六讲　刚体动力学 **1**

6.1　刚体的转动与转动惯量 1

6.2　转动惯量的积分与移轴 2

6.3　挖孔组合体的质心与惯量 4

6.4　转矩做功与复摆 5

6.5　质心平动与绕质心转动 6

6.6　平动、转动与约束方程 8

6.7　静摩擦怎样联系平动与转动能量 8

6.8　静摩擦、滑动与纯滚动的转变 9

6.9　纯滚动中的能量与摩擦上限 10

6.10 角冲量与刚体碰撞 11

6.11 惯量、有效质量与接触点 12

6.12 例题与分析 13

6.13 本讲小结 35

6.14 练习 36

练习解答 37

第六讲　刚体动力学

6.1　刚体的转动与转动惯量

推开一扇门时，推力的大小、方向和作用位置共同决定门的转动。门上离铰链较远的点走过的路程较长，各点在相同时间内转过的角度却相同。讨论这种运动，需要同时描述物体的位置和取向。

刚体模型把物体内任意两点的距离看作常量，适用于形变对所求运动影响很小的过程。刚体作平动时，各点的速度、加速度分别相同；绕固定轴转动时，各点绕该轴作圆周运动。若角位移为 θ，则角速度 $\omega = \mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t$、角加速度 $\alpha = \mathrm{d}\omega/\,\mathrm{d}t$。到轴垂距为 $r_\perp$ 的质元，其线速度大小为 $r_\perp|\omega|$。

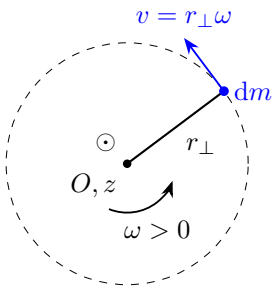


图 6.1: 定轴转动中，质元速度沿圆周切向，质元到轴的垂距进入角动量和惯量

图 6.1 中 z 轴垂直纸面向外，质元在垂直转轴的圆周上运动，切向速度与半径垂直。

先取转轴为 z 轴。质元对该轴的角动量分量为 $r_\perp v\,\mathrm{d}m = r_\perp^2\omega\,\mathrm{d}m$，其中 ω 按规定的转动正方向取符号。将各质元相加，得到

$$L_z = \omega\int r_\perp^2\,\mathrm{d}m = I_O\omega, \qquad I_O = \int r_\perp^2\,\mathrm{d}m.$$

I_O 是刚体绕这条轴的转动惯量。把同样的质量移到离轴更远的位置，I_O 增大，同一角速度对应的角动量也增大。外力矩的轴向分量满足

$$\tau_O = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(I_O\omega)}{\mathrm{d}t} = I_O\alpha.$$

这里刚体的质量分布与固定轴都保持不变，因而 I_O 为常量。绕轴外力矩为零时，$I_O\omega$ 保持不变。例 6.6 用这一关系处理弹丸粘合，例 6.8 则由系统的总角动量求转台角位移。

6.2　转动惯量的积分与移轴

绕指定轴的转动惯量定义为 $I=\int r_\perp^2\,\mathrm{d}m$，这里 $r_\perp$ 是图中质元到所选轴的垂距，质量分布与转轴的位置共同进入积分。图 6.2 左侧的均匀细杆取线密度 M/ℓ，微元质量为 $(M/\ell)\,\mathrm{d}x$。以质心为坐标原点时，杆两端是 $-\ell/2,\ell/2$；以端点为原点时，两端是 $0,\ell$。由 $\mathrm{d}(x^3/3)/\,\mathrm{d}x=x^2$，分别有

$$I_C=\frac{M}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\ell/2}^{\ell/2}=\frac{M}{3\ell}\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^3-\left(-\frac{\ell}{2}\right)^3\right]=\frac{M\ell^2}{12},$$

$$I_O=\frac{M}{\ell}\int_0^{\ell}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{M}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell}=\frac{M}{\ell}\frac{\ell^3-0}{3}=\frac{M\ell^2}{3}.$$

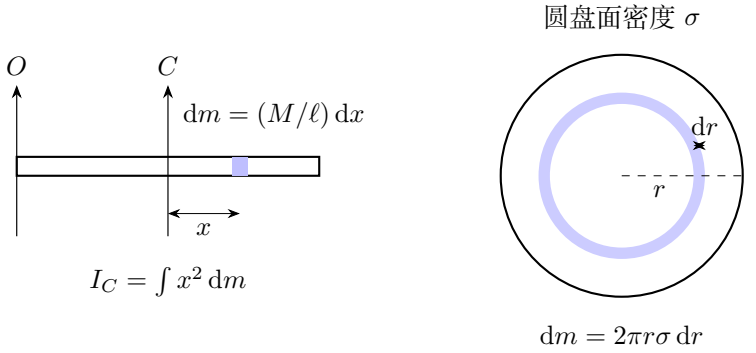


图 6.2: 细杆按长度微元积分，圆盘按同心细环积分，距离均取到所求轴的垂距

对两条相距 d 的平行轴，一条过质心，把质元坐标写成 $\boldsymbol{r}_\perp=\boldsymbol{r}_{C\perp}+\boldsymbol{d}$。平方积分为

$$I_O=\int|\boldsymbol{r}_{C\perp}+\boldsymbol{d}|^2\,\mathrm{d}m=I_C+2\boldsymbol{d}\cdot\int\boldsymbol{r}_{C\perp}\,\mathrm{d}m+Md^2.$$

由于第一条轴过质心，积分一阶矩为零，故 $I_O=I_C+Md^2$。图 6.2 中 $OC=\ell/2$，端轴惯量为 $M\ell^2/12+M(\ell/2)^2=M\ell^2/3$，与直接积分一致。两轴的方向相同，位移 d 量取它们之间的最短距离。平面薄片还满足 $I_z=I_x+I_y$，因为每个质元有 $r_z^2=x^2+y^2$，其中 x,y 轴在片面内且相交，z 轴垂直片面。

圆盘的同心细环积分。图 6.2 右侧圆盘的面密度为 $\sigma = M/(\pi R^2)$。半径 r、宽 $\mathrm{d}r$ 的细环面积是 $2\pi r\,\mathrm{d}r$，所以 $\mathrm{d}m = 2Mr\,\mathrm{d}r/R^2$，到垂直盘面的中心轴距离都是 r。从盘心 $r=0$ 累加到边缘 $r=R$，由 $\mathrm{d}(r^4/4)/\,\mathrm{d}r = r^3$ 得

$$I_z = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{2M}{R^2}\frac{R^4-0}{4} = \frac{1}{2}MR^2.$$

对称性使两条互相垂直的过心直径轴惯量相等，结合 $I_z = I_x + I_y$ 才有 $I_x = I_y = MR^2/4$。

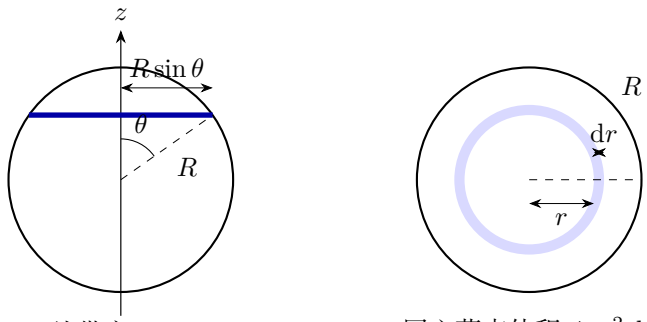


图 6.3: 球壳的纬带到转轴距离为 $R\sin\theta$，实心球再由同心球壳累加

薄球壳的纬带积分。图 6.3 左侧以极角 θ 标记纬带，其周长为 $2\pi R\sin\theta$、沿球面的宽为 $R\,\mathrm{d}\theta$。乘面密度 $M/(4\pi R^2)$，得到 $\mathrm{d}m = (M/2)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$；到 z 轴的垂距为 $R\sin\theta$，它随纬带位置改变。因此

$$I_z = \frac{MR^2}{2}\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $u = \cos\theta$，$\mathrm{d}u = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$，且 $\sin^2\theta = 1-u^2$；北极 $\theta=0$ 对应 $u=1$，南极 $\theta=\pi$ 对应 $u=-1$。换元并代入端点：

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\int_1^{-1}(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1}\\ &= \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(-1+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}, \qquad I_z = \frac{2}{3}MR^2.\end{aligned}$$

这里原函数的导数 $\mathrm{d}(u-u^3/3)/\,\mathrm{d}u = 1-u^2$，使纬带积分转为多项式积分。

实心球的同心薄壳积分。图 6.3 右侧实心球的体密度为 $3M/(4\pi R^3)$，故半径 r 的薄壳质量为 $\mathrm{d}m = 3Mr^2\,\mathrm{d}r/R^3$。每个薄壳可用刚求出的球壳结果 $\mathrm{d}I_z = (2/3)r^2\,\mathrm{d}m$，但此处半径随积分微元变化。由 $\mathrm{d}(r^5/5)/\,\mathrm{d}r = r^4$，

$$I_z = \frac{2M}{R^3}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = \frac{2M}{R^3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{2M}{R^3}\frac{R^5-0}{5} = \frac{2}{5}MR^2.$$

同质量、同半径的球壳比实心球有更多质量分布在远离轴的位置，因而转动惯量较大。

若两条平行轴都偏离质心，可分别写 $I_1 = I_C + Md_1^2$、$I_2 = I_C + Md_2^2$，相减得 $I_2 - I_1 = M(d_2^2 - d_1^2)$。对挖孔物体，质心会因扣除质量而移动，更需要先计算剩余质心，再把惯量移到所求轴。

6.3　挖孔组合体的质心与惯量

组合体计算需要先统一密度，再区分“完整物体质量”与“剩余质量”。以半径 R、完整质量 M_0 的均匀圆盘为例，从中挖去半径 $R/2$、圆心在原盘心右侧 $R/2$ 处的小圆。被挖圆质量为 $M_0/4$，剩余质量为 $3M_0/4$。关于原盘心的一阶矩减少 $M_0R/8$，所以剩余质心向左偏移 $R/6$。

关于原盘心垂直轴，先计算被挖部分的惯量。用小圆自身中心轴惯量，加上平行轴位移项，得到

$$I_{\text{孔},O} = \frac{1}{2}\frac{M_0}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{M_0}{4}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{32}M_0R^2.$$

从完整盘的 $M_0R^2/2$ 中扣除，得到 $I_O = 13M_0R^2/32$。最后若要求剩余物体自身质心轴惯量，还需再减去剩余质量乘质心偏移平方：

$$I_C = I_O - \frac{3M_0}{4}\left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{37}{96}M_0R^2.$$

若题目把剩余质量记为 M，则 $M_0 = 4M/3$，应改写 $I_C = 37MR^2/72$。完整盘与剩余部分的质量分别用 M_0, M 表示，质量换算也相应进入惯量。

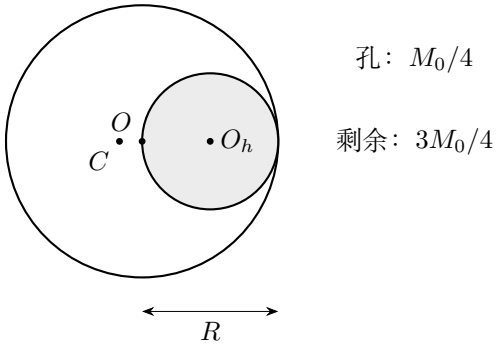


图 6.4: 扣除质量时同时扣除一阶矩与惯量

图 6.4 把孔洞看成负质量分布。总质量、一次矩、关于指定轴的惯量都应扣除同一孔洞贡献；扣除孔洞后，质心移至 C，再将关于 O 的惯量移到过 C 的轴。

6.4 转矩做功与复摆

定轴刚体转过 $\mathrm{d}\theta$ 时，外力对各质元的总功为 $\mathrm{d}W = \tau_O\,\mathrm{d}\theta$。在运动段用链式法则 $\alpha = \mathrm{d}\omega/\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}\omega/\,\mathrm{d}\theta)\dot{\theta} = \omega\ \mathrm{d}\omega/\,\mathrm{d}\theta$，转动方程化为 $\tau_O\,\mathrm{d}\theta = I_O\omega\,\mathrm{d}\omega$。因此从状态 (θ_1, ω_1) 到 (θ_2, ω_2)，

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_O\,\mathrm{d}\theta = I_O \int_{\omega_1}^{\omega_2} \omega\,\mathrm{d}\omega = I_O\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_{\omega_1}^{\omega_2} = \frac{1}{2}I_O(\omega_2^2 - \omega_1^2).$$

若过程包含转向，可分运动段积分，功和动能变化仍可相加。在只有重力做功的定轴转动中，重力势能的减少等于转动动能 $I_O\omega^2/2$ 的增加。自由平面运动的动能包含质心平动和绕质心转动两项，下面将把这两项一起导出。

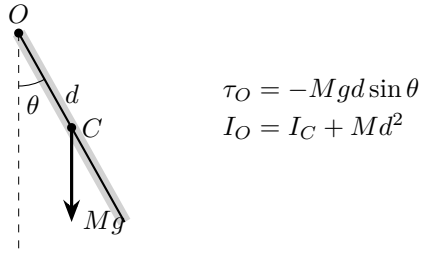


图 6.5: 复摆的重力作用在质心，回复力矩使用轴到质心的距离 d

图 6.5 中重力作用于质心 C，对固定轴 O 的力臂是 $d\sin\theta$，从而回复力矩为 $-Mgd\sin\theta$。质量 M 的刚体悬于固定水平轴，质心在轴下距离 $d>0$。转角 θ 满足 $I_O\ddot{\theta}=-Mgd\sin\theta$。小角度近似 $\sin\theta\simeq\theta$ 后，记 $\omega_p^2=Mgd/I_O$，得到

$$\ddot{\theta}+\omega_p^2\theta=0.$$

为求解而试取 $\theta=e^{\lambda t}$，两次求导分别给 $\dot{\theta}=\lambda e^{\lambda t}$、$\ddot{\theta}=\lambda^2 e^{\lambda t}$，代入得 $\lambda^2+\omega_p^2=0$，两个根为 $\lambda=\pm i\omega_p$。等价的实通解及其导数为

$$\theta=A\cos\omega_p t+B\sin\omega_p t,\qquad \dot{\theta}=-A\omega_p\sin\omega_p t+B\omega_p\cos\omega_p t.$$

这里三角函数求导中的因子 ω_p 来自相位 $\omega_p t$ 的导数。若初始摆角为 θ_0、初始角速度为 w_0，代入 $t=0$ 给 $A=\theta_0$、$B=w_0/\omega_p$，所以

$$\theta(t)=\theta_0\cos\omega_p t+\frac{w_0}{\omega_p}\sin\omega_p t,\qquad T=\frac{2\pi}{\omega_p}=2\pi\sqrt{\frac{I_O}{Mgd}}.$$

小角度条件应覆盖整个振动，亦即振幅 $\sqrt{\theta_0^2+(w_0/\omega_p)^2}\ll 1$。转轴过质心时 $d=0$，原方程是 $\ddot{\theta}=0$，无回复力矩；积分初值得 $\dot{\theta}=w_0$、$\theta=\theta_0+w_0 t$，此时刚体保持初始角速度。较大摆角的运动保留 $\sin\theta$，其周期随振幅改变。

6.5　质心平动与绕质心转动

车轮沿地面滚动时，轮心向前移动，轮上各点同时绕轮心转动。将质心 C 的速度与 P 相对 C 的速度相加，平面刚体上任一点 P 的速度为 $\boldsymbol{v}_P=\boldsymbol{V}_C+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}$。这是一条同时适用于接触点、端点与内部质点的运动学关系；纯滚动、偏心冲击和滑倒杆，只是对其中某些点再附加约束。虽然 CP 的长度不变，图 6.6 中的矢量 $\boldsymbol{r}_{CP}$ 仍随刚体转向，其惯性系导数为 $\dot{\boldsymbol{r}}_{CP}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}$。对速度式用乘积法则求导，先有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP})=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_{CP}+\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}_{CP},\qquad \boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\omega}},$$

再代入相对位置的导数，得到

$$\boldsymbol{a}_P=\boldsymbol{A}_C+\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{r}_{CP}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{CP}).$$

最后一项是向心加速度，方向指向质心。在刚从静止释放的瞬间 $\omega=0$，这一项消失；在已有角速度的运动中，它与切向加速度共同决定各点的加速度。剪绳题只在初瞬间使用简化关系，倒杆题则要保留随姿态变化的速度和加速度。

由各质元速度的平方求和，先保留交叉项：

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sum_i m_i|\boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{Ci}|^2 \\ &= \frac{1}{2}MV_C^2 + \boldsymbol{V}_C\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times\sum_i m_i\boldsymbol{r}_{Ci}\right) + \frac{1}{2}\sum_i m_i|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_{Ci}|^2. \end{aligned}$$

质心定义使 $\sum_i m_i\boldsymbol{r}_{Ci}=0$，平面运动中最后一项为 $\frac{1}{2}\omega^2\sum_i m_i r_{Ci}^2=\frac{1}{2}I_C\omega^2$，于是

$$K=\frac{1}{2}MV_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2. \tag{6.1}$$

这称质心动能分解，也常称柯尼希定理。定轴转动时，质心可能绕轴运动，动能可直接写 $K=I_O\omega^2/2$，其中 $I_O=I_C+Md^2$，d 为质心到固定轴的距离，两种写法由 $V_C=d|\omega|$ 联系。

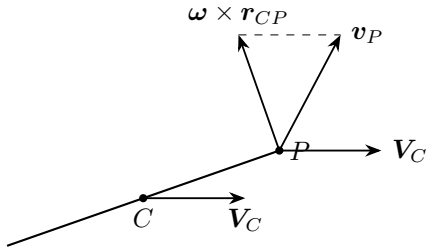
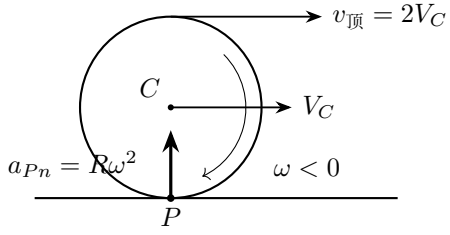


图 6.6: 刚体各点速度等于质心平动加相对转动

图 6.6 的相对转动箭头垂直于各点到质心的连线，再与共同平动速度作矢量和。选质心作参考点使一阶矩为零，因而动能分解中的交叉项恰好相消。

纯滚动车轮的底点 P 在接触瞬间对地速度为零。纯滚动圆轮有 $K=I_P\omega^2/2$，其中 $I_P=I_C+mR^2$；这是将 $v_C=R|\omega|$ 代入质心分解的结果。图 6.7 显示底点的法向加速度为 $R\omega^2$，这一加速度来自轮上该材料点的圆周运动。动力学在这里取质心为矩心，用 $I_C\alpha=\tau_C$ 与质心平动方程共同求解，例 6.3、例 6.4 将分别给出水平面与斜面上的应用。



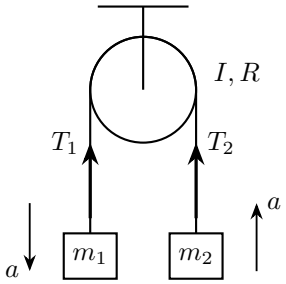
$$\begin{aligned} v_P &= V_C + R\omega = 0 \\ a_{Px} &= A_C + R\alpha = 0 \\ a_{Py} &= R\omega^2 \end{aligned}$$

图 6.7: 纯滚动的接触点速度为零，法向加速度仍指向轮心

6.6　平动、转动与约束方程

平面刚体动力学可用 $M\boldsymbol{A}_C=\boldsymbol{F}_{外}$ 和 $I_C\alpha=\tau_{C,外}$ 描述。若绕固定轴转动，则可用 $I_O\alpha=\tau_{O,外}$。把轴承反力的作用点选为矩心，能消掉它的未知力矩，但其力仍可能影响质心平动和轴承受力。

绳绕有惯量的滑轮时，两侧张力一般不同。两侧张力之差对轮轴产生净力矩，使滑轮获得角加速度。轻绳不可伸长且不打滑给 $a=r\alpha$，它把两物体的线加速度与滑轮的角加速度联系起来。



$$m_1>m_2,\quad (T_1-T_2)R=I\alpha,\quad a=R\alpha$$

图 6.8: 绳不打滑只给加速度约束，滑轮转动还需两张力的差产生力矩

图 6.8 中分别列 $m_1g-T_1=m_1a$、$T_2-m_2g=m_2a$ 和滑轮转动式。前两式给 $T_1=m_1(g-a)$、$T_2=m_2(g+a)$，代入 $(T_1-T_2)R=I\alpha$ 并用 $\alpha=a/R$，有

$$(m_1-m_2)g-(m_1+m_2)a=\frac{I}{R^2}a.$$

把各项加速度移到同侧，得到

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+I/R^2}.$$

分母中的 I/R^2 表现为额外惯性；$I\to 0$ 时回到轻滑轮模型，两侧张力趋于相等。

纯滚动的约束是接触点相对地面速度为零。若 x 向右、逆时针角速度为正，则 $v_C+R\omega=0$，相应加速度切向条件为 $a_C+R\alpha=0$。这个加速度约束沿地面切向成立；底点的法向加速度仍为 $R\omega^2$。

6.7　静摩擦怎样联系平动与转动能量

在固定地面上纯滚动时，静摩擦作用点的瞬时速度为零，摩擦对刚体的总功率为零。将这一作用分到质心平动和绕质心转动中，可以看出两部分的能量怎样交换。取圆轮向右速度 v_C，逆时针角速度 ω，摩擦力有符号值 f，其对质心平动部

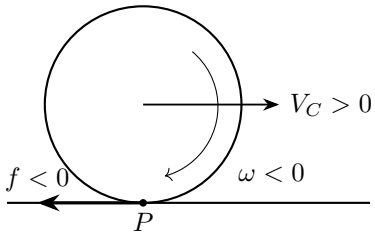
分的功率为 fv_C，对绕质心转动部分的功率为 $(fR)\omega$。纯滚动约束 $v_C + R\omega = 0$ 使两者之和恰为零。

因此在某个过程中，摩擦可以减少平动动能、增加相同数量的转动动能，也可以反过来分配，而不产生总机械能耗散。滑动时则 $v_C + R\omega$ 不为零，摩擦力与此接触点滑速相反，总摩擦功率 $f(v_C + R\omega) < 0$，转入内能。因此摩擦产生的内能增量可写成 $Q = \int \mu N|u_s|\,\mathrm{d}t$，积分用的是接触滑速 u_s。

若圆轮还受作用于质心的水平外力 F 与外力偶矩 τ，把平动式 $m\dot{v}_C = F + f$、转动式 $I_C\dot{\omega} = \tau + fR$ 分别乘 v_C, ω。利用平方函数求导，有

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \frac{m}{2}(2v_C\dot{v}_C) + \frac{I_C}{2}(2\omega\dot{\omega}) \\ &= (F + f)v_C + (\tau + fR)\omega \\ &= Fv_C + \tau\omega + f(v_C + R\omega).\end{aligned}$$

式中的最后一项把摩擦的能量作用归结为接触点滑速：纯滚动时 $v_C + R\omega = 0$，这一项为零；滑动时摩擦与滑速反向，这一项为负。其余两项分别是作用于质心的水平力和外力偶提供的功率。



$P_{平} = fV_C < 0$
$P_{转} = fR\omega > 0$
$V_C + R\omega = 0$

图 6.9: 向后摩擦时平动功率为负、转动功率为正，无滑动时两项恰好相消

图 6.9 保持逆时针角速度为正，因此向右纯滚动时 $\omega < 0$。摩擦向左时 $f < 0$，平动功率 fV_C 为负，绕质心转动功率 $fR\omega$ 为正，二者相加等于实际作用点的功率 $f(V_C + R\omega) = 0$。这里地面固定，接触点的瞬时速度为零，静摩擦只在平动能与转动能之间重新分配能量。

6.8 静摩擦、滑动与纯滚动的转变

滑动和纯滚动的转换由接触点的运动决定。图 6.10 取向右、逆时针为正，接触滑速为 $u_s = v_C + R\omega$。图示 $u_s > 0$，底部相对地面向右滑，动摩擦向左；$u_s < 0$ 时，动摩擦向右。高速顺时针自转的轮子放上地面时，质心可以向右运动而底部仍向左滑，因而摩擦也可向右。

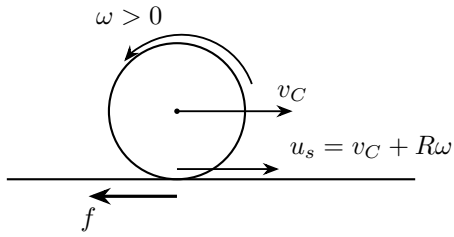


图 6.10: 用接触点速度决定摩擦方向

对水平面上没有其他水平外力和外力偶的圆轮，滑动时 $f = -\mu mg\,\mathrm{sgn}(u_s)$。平动与转动方程给出 $\dot v_C = f/m$、$\dot\omega = fR/I_C$，于是接触滑速的变化率为

$$\dot u_s = \dot v_C + R\dot\omega = f\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I_C}\right).$$

右侧始终与 u_s 反向，所以滑速大小持续减小。设滑动开始时 $v_C(0) = v_0$、$\omega(0) = \omega_0$，且 $u_0 = v_0 + R\omega_0 \neq 0$。在接触滑速首次到零前，记常量 $s = \mathrm{sgn}(u_0)$，则 $f = -s\mu mg$。分别作有初值的定积分：

$$\int_{v_0}^{v_C(t)} \mathrm{d}v = -s\mu g\int_0^t \mathrm{d}\tau, \qquad v_C(t) - v_0 = -s\mu g t,$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)} \mathrm{d}w = -\frac{s\mu mgR}{I_C}\int_0^t \mathrm{d}\tau, \quad \omega(t) - \omega_0 = -\frac{s\mu mgR}{I_C}t.$$

这里 $\int \mathrm{d}v = v$、$\int \mathrm{d}w = w$，上下限保留了初始速度。将两式组合得到

$$u_s(t) = u_0 - s\mu g\left(1 + \frac{mR^2}{I_C}\right)t, \qquad t_* = \frac{|u_0|}{\mu g(1 + mR^2/I_C)}.$$

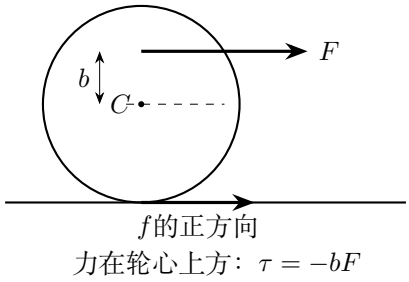
上述时间要求 $\mu > 0$，且公式只用于 $0 \le t \le t_*$。$u_0 = 0$ 时从初态便按纯滚动方程求解；$\mu = 0$ 且 $u_0 \neq 0$ 时，滑速保持不变。质心速度先归零时，只是平动方向改变；只要 u_s 还未过零，摩擦方向就保持不变。

到 $u_s = 0$ 以后，应重新按静摩擦约束求所需 f。水平面上若没有其他水平力和外力偶，纯滚动只需 $f = 0$；存在其他外力时，联立平动、转动与滚动关系求出 f，$|f| \le \mu_s N$ 给出保持纯滚动的条件。例 6.10 与例 6.14 分别从反向自转和原地自转出发，展示接触滑速怎样降到零。

6.9　纯滚动中的能量与摩擦上限

对半径 R、$I_C = \beta mR^2$ 的圆轮，纯滚动使总动能为 $\frac{1}{2}m(1+\beta)v_C^2$。这一表达把转动贡献写成等效质量的增加，适合用能量求速度；能量先给出速率，平动与转动方程再给出静摩擦。将所需摩擦与 $\mu_s N$ 比较，就得到纯滚动所需的粗糙程度。

外力作用在轮心、轮缘或内部卷轴上时，同样大小的外力会产生不同力矩。摩擦力甚至可以在外拉力朝右时指向左，也可以与拉力同向。图 6.11 将作用线、力臂与所取正方向一起标出。若假设纯滚动算出的 $|f|$ 超过 $\mu_s N$，应转为滑动方程，摩擦方向改由接触点滑速决定。



$$ma = F + f$$
$$I_C\alpha = \tau + Rf$$
$$a + R\alpha = 0$$

图 6.11: 相同水平外力放在不同高度时，转矩与所需静摩擦不同

若圆轮还受水平力 F 和有符号的外力矩 τ，由图 6.11 的平动式先取 $f = ma - F$，再由滚动约束取 $\alpha = -a/R$。代入转动式并除以 R，得到

$$-\frac{I_C}{R^2}a = \frac{\tau}{R} + ma - F, \qquad \left(m + \frac{I_C}{R^2}\right)a = F - \frac{\tau}{R}.$$

用 $I_C = \beta m R^2$ 求出 a 并回代 $f = ma - F$，三个方程给出

$$a = \frac{F - \tau/R}{m(1+\beta)}, \qquad f = -\frac{\beta F + \tau/R}{1+\beta}, \qquad I_C = \beta m R^2.$$

这里 f 可正可负，图上的向右箭头仅定义正方向。若 F 沿轮心上方 b 处向右，$\tau = -bF$，则 $f = F(b/R - \beta)/(1+\beta)$，在 $b = \beta R$ 两侧改变方向。$|f| \le \mu_s N$ 时，静摩擦足以维持这一滚动；所需摩擦超出此范围后，接触点开始滑动。

对撞击后立即纯滚动的球，还可以反过来设计冲击高度，使线冲量与角冲量的比例恰满足 $v_C + R\omega = 0$。这类问题不需要先经历摩擦耗散，冲击后的接触速度由线冲量和角冲量共同确定。图 6.11 中的 b 从质心向上计，离地高度为 $H = R + b$。冲量 J 造成 $V_C = J/m$、$\omega = -bJ/I_C$，使 $V_C + R\omega = 0$ 的条件为 $b = \beta R$，即 $H = (1+\beta)R$。例 6.17 把这一关系用于实心台球。

6.10 角冲量与刚体碰撞

刚体冲击中位置和姿态近似不变，速度与角速度可突变。对自由刚体，$M(\boldsymbol{V}_C^+ - \boldsymbol{V}_C^-) = \boldsymbol{J}$。平面运动的有符号角冲量式为 $I_C(\omega^+ - \omega^-) = (\boldsymbol{r}_{CP} \times \boldsymbol{J}) \cdot \boldsymbol{e}_z$，其中 P 为受冲击点，$\boldsymbol{e}_z$ 指向规定的转动正轴。接触点速度由质心平动与自转共同决定，因此恢复系数应作用在两个接触点的法向相对速度上，其中转动贡献由接触点到质心的位置矢量确定。

对固定轴刚体受弹丸粘合冲击，轴承冲量对轴力矩为零，可以守恒绕轴角动量；碰后转动惯量应包含粘上的弹丸。例 6.7 中的两个固定轴圆柱分别受到轴承约束，对各自轴写摩擦角冲量，再用接触点末速相等连接两者的角速度。

接触面在冲击中给出压缩方向的冲量 $J \geq 0$，碰后法向分离速度由恢复系数决定。碰后质心速度和角速度共同确定杆上各点的运动；例 6.11 将它们代回端点速度，说明冲击点与质心怎样分别运动。

6.11　惯量、有效质量与接触点

图 6.12 中，水平冲量 J 作用于高于质心 C 的点 P，作用线到质心的垂距为 b。质心向右获得速度 J/M，顺时针转动又使 P 向右增加 Jb^2/I_C。两项在接触点相加，速度增量为 $J/M + Jb^2/I_C$。因此沿该方向可定义接触点的有效逆质量 $1/M_{\text{eff}} = 1/M + b^2/I_C$。它将同一冲量产生的平动和转动响应合成一个系数。打在质心时只有平动；打得越偏，越容易通过自转改变接触点速度。

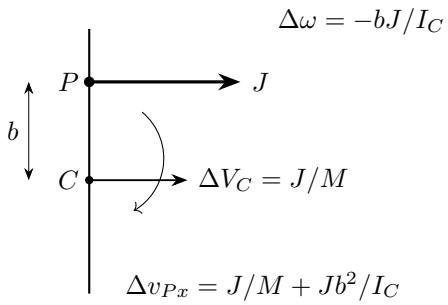


图 6.12: 偏心冲量使受冲击点的速度变化同时包含平动与转动

这一关系还能解释自由杆端点碰撞中出现的 $4/M$：长 2ℓ 的均匀杆有 $I_C = M\ell^2/3$，端点 $b = \ell$，故 $1/M + \ell^2/I_C = 4/M$。其中 J/M 来自质心平动，$3J/M$ 来自绕质心转动。例 6.11 将这两项一起代入弹性碰撞的恢复条件。

固定轴与自由刚体的区别也由此清楚。自由刚体允许质心动量改变；固定轴则通过外约束冲量去掉某些平动自由度，接触点响应由绕轴惯量决定。对同一杆同一入射粒子，这两种约束给出不同的接触点响应，恢复方程也随之改变。

6.12 例题与分析

例 6.1 (细杆绕不同轴的转动惯量)**.** 均匀细杆质量 m、长 ℓ，求绕垂直于杆的质心轴、端点轴的转动惯量，并用平行轴定理说明两结果的联系。

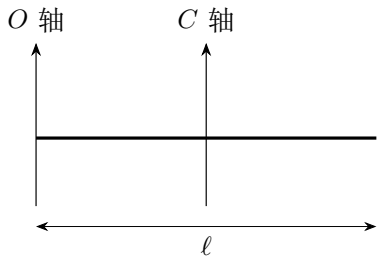


图 6.13: 题设：细杆绕不同轴的转动惯量

解　由质量微元积分，再平移转轴

按图 6.13，线密度为 $\lambda = m/\ell$，宽 $\mathrm{d}x$ 的杆段质量为 $\mathrm{d}m = \lambda\,\mathrm{d}x$。图 6.14 中，质心轴与端点轴分别取 x_C 和 x_O 为坐标。质元到轴的距离分别是 $|x_C|$ 和 $|x_O|$，两者的平方进入相应的积分。

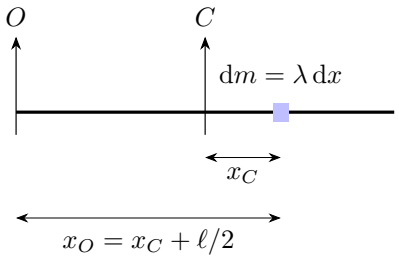


图 6.14: 以两条平行轴为原点时，同一微元的有向坐标相差 $\ell/2$

由 $\int x^2\,\mathrm{d}x = x^3/3$，以质心为原点，$x_C$ 从 $-\ell/2$ 变到 $\ell/2$，故

$$I_C = \frac{m}{\ell}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{3\ell}\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\ell}{2}\right)^3\right] = \boxed{\frac{m\ell^2}{12}}.$$

改用端点坐标并联系平行轴定理

以端点为原点，x_O 从 0 变到 ℓ，故

$$I_O = \frac{m}{\ell}\int_0^{\ell} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{m}{\ell}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\ell} = \boxed{\frac{m\ell^2}{3}}.$$

两条轴平行、相距 $\ell/2$，由平行轴定理也得到

$$I_O = I_C + m(\ell/2)^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) m\ell^2 = \frac{m\ell^2}{3}.$$

端点轴使质元到轴的平均平方距离增大，转动惯量相应增大。

例 6.2 (剪断一端悬绳的瞬间)**.** 质量 m、长 ℓ 的均匀细杆，两端由竖直轻绳悬挂，初始水平静止。突然剪断右绳，求左绳瞬间张力。绳不可伸长且当时保持绷紧。

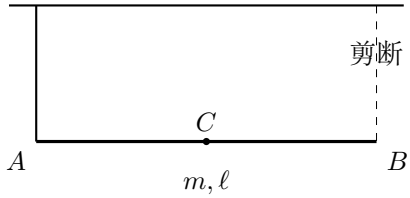


图 6.15: 题设：剪断一端悬绳的瞬间

解　剪绳瞬间的端点约束与受力

图 6.15 中的左绳竖直，杆的初速度为零。左端 A 绕绳上端运动，在这个瞬间沿绳方向的加速度为零。杆也有 $\omega = 0$，各点相对质心的加速度仅含角加速度项。设质心向下加速度为 a、顺时针角加速度大小为 α，则

$$a_A = a - \frac{\ell}{2}\alpha = 0, \qquad \alpha = \frac{2a}{\ell}.$$

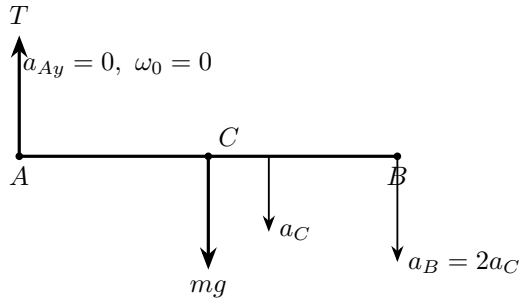


图 6.16: 初瞬间无向心加速度，绳长约束与质心受力共同确定张力

图 6.16 中，张力 T 对质心的力矩使杆顺时针转动。平动和转动方程分别为

$$mg - T = ma, \qquad T\frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{12}\alpha.$$

将 $\alpha = 2a/\ell$ 代入第二式，得 $T = ma/3$。再代入第一式，$mg = (4/3)ma$，所以

$$\boxed{a = \frac{3g}{4}, \qquad T = \frac{mg}{4}}.$$

左端沿绳的零加速度是剪断初瞬间的条件，随后端点随绳摆动。

例 6.3 (水平纯滚动所需的摩擦力)**.** 圆轮质量 m、半径 R、质心转动惯量 I_C，在固定水平地面上纯滚动。只有重力、支持力和接触摩擦，无空气阻力、形变或滚动阻力。求维持纯滚动所需的摩擦力与加速度。

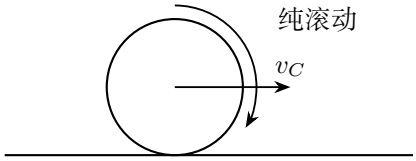


图 6.17: 题设：水平纯滚动所需的摩擦力

解　联立平动、转动与滚动约束

按图 6.17 取向右、逆时针为正。先设摩擦力的有符号值为 f，由质心平动与绕质心转动，

$$ma = f, \qquad I_C\alpha = fR.$$

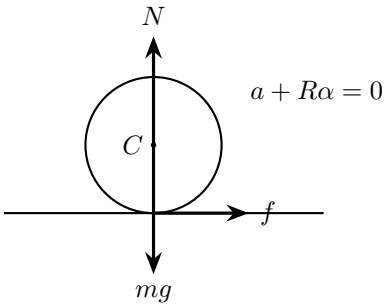


图 6.18: 解答过程：水平纯滚动所需的摩擦力

图 6.18 中，纯滚动的切向约束为 $a + R\alpha = 0$。代入 $a = f/m$、$\alpha = fR/I_C$，得到

$$f\left(\frac{1}{m} + \frac{R^2}{I_C}\right) = 0.$$

括号内各项均为正，故

$$\boxed{f = 0, \qquad a = 0, \qquad \alpha = 0}.$$

在题给的理想固定水平面上，维持已有纯滚动所需的静摩擦为零，圆轮保持原来的线速度和角速度。

例 6.4 (实心球沿斜面滚下)**.** 质量 m、半径 R 的均匀实心球，在倾角 θ 的固定粗糙斜面上由静止纯滚下。求质心加速度、静摩擦力及不打滑所需的最小静摩擦因数。

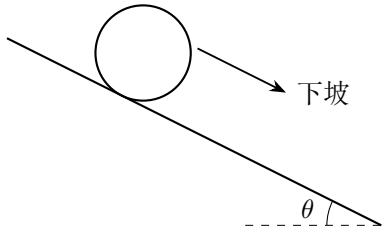


图 6.19: 题设：实心球沿斜面滚下

解　重力沿斜面的分量怎样分配给平动与转动

图 6.19 取下坡方向为平动正向，取滚下的角加速度大小为 α。向上坡的静摩擦 f 对球心产生自转力矩，故

$$mg\sin\theta - f = ma, \qquad fR = I_C\alpha, \qquad a = R\alpha.$$

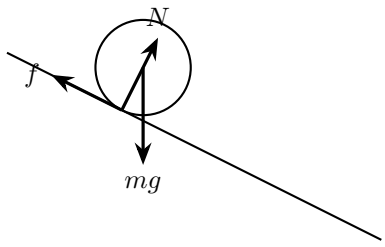


图 6.20: 解答过程：实心球沿斜面滚下

将实心球的 $I_C = 2mR^2/5$ 代入图 6.20 的转动方程，

$$fR = \frac{2}{5}mR^2\frac{a}{R}, \qquad f = \frac{2}{5}ma.$$

于是 $mg\sin\theta = (1 + 2/5)ma$，得到

$$\boxed{a = \frac{5}{7}g\sin\theta}, \qquad \boxed{f = \frac{2}{7}mg\sin\theta}.$$

沿斜面法线方向，$N = mg\cos\theta$。地面所能提供的静摩擦至少等于上式所需的 f，所以

$$\mu_s mg\cos\theta \geq \frac{2}{7}mg\sin\theta, \qquad \boxed{\mu_s \geq \frac{2}{7}\tan\theta}.$$

摩擦使球获得自转，法向力与摩擦上限共同给出题设纯滚动的适用范围。

例 6.5 (有惯量滑轮的阿特伍德装置)**.** 半径 r、转动惯量 I 的定滑轮，两侧轻绳各连质量 m_1, m_2 的物体，$m_2 > m_1$。轴无摩擦，绳不伸长且不打滑。求加速度、角加速度和两侧张力。

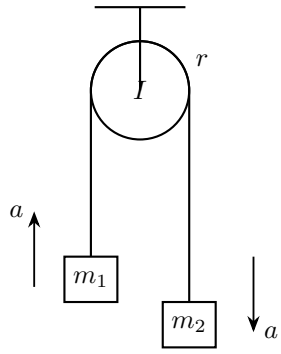
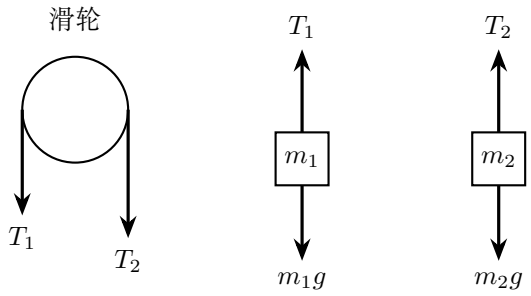


图 6.21: 右侧较重物体下降，滑轮顺时针加速，两侧绳均不打滑

解　两端张力之差使滑轮转动

按图 6.21，右侧 m_2 向下、左侧 m_1 向上，线加速度大小同为 a。取顺时针角加速度大小为 α，分别对两物体和滑轮列式：

$$T_1 - m_1 g = m_1 a, \quad m_2 g - T_2 = m_2 a, \qquad (T_2 - T_1) r = I\alpha.$$



$$(T_2 - T_1) r = I\alpha, \quad a = r\alpha$$

图 6.22: 单独画滑轮与两悬挂物的受力，绳张力在不同对象上方向相反

图 6.22 中的绳不打滑，故 $\alpha = a/r$。代入 $T_1 = m_1(g + a)$、$T_2 = m_2(g - a)$，转动方程化为

$$(m_2 - m_1) g - (m_1 + m_2) a = \frac{I}{r^2} a.$$

移项得到

$$\boxed{a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_1 + m_2 + I/r^2}}, \qquad \boxed{\alpha = \frac{a}{r}},$$

$$\boxed{T_1 = m_1(g+a), \qquad T_2 = m_2(g-a)}.$$

I/r^2 具有质量量纲，体现滑轮转动对加速的惯性贡献。$I \to 0$ 时回到两侧张力相等的轻滑轮结果。

例 6.6 (弹丸粘在悬杆末端)**.** 质量 m、长 ℓ 的均匀细杆竖直向下悬于端点固定轴。质量 M 的小球以速度 v 垂直杆撞到下端并粘合。求碰后角速度和碰撞损失的动能。

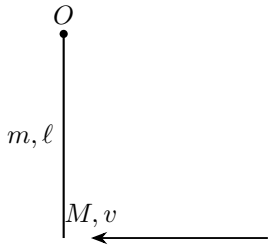


图 6.23: 题设：弹丸粘在悬杆末端

解　碰撞中的角动量与动能变化

短碰撞中，轴承冲量的作用线通过固定轴 O，对该轴力矩为零。按图 6.23 的入射方向取转动正向，初角动量为 $Mv\ell$；小球粘在杆端后，转动惯量为

$$I = \frac{1}{3}m\ell^2 + M\ell^2 = \ell^2(M + m/3).$$

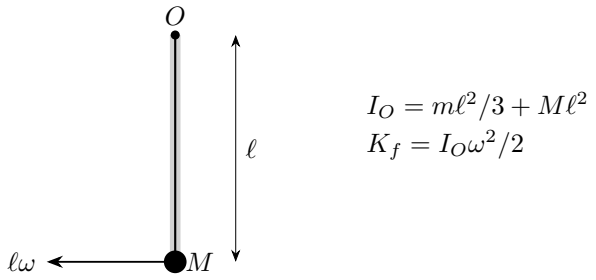


图 6.24: 碰后转动惯量同时计入均匀杆与粘在末端的球

图 6.24 中小球与杆具有共同角速度，故

$$Mv\ell = I\omega, \qquad \boxed{\omega = \frac{Mv}{\ell(M + m/3)}}.$$

碰后动能为

$$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{M^2v^2}{2(M + m/3)}.$$

从初动能中扣除这一部分，

$$Q = \frac{1}{2}Mv^2 - K_f = \frac{1}{2}Mv^2\left[1 - \frac{M}{M+m/3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}Mv^2\frac{m/3}{M+m/3} = \boxed{\frac{Mmv^2}{2(3M+m)}}.$$

$Q > 0$ 体现粘合碰撞的机械能耗散；绕轴角动量保持不变。

例 6.7 (两固定轴圆柱的摩擦同步)**.** 两均匀圆柱转轴固定且平行，质量、半径为 M_1, R_1 和 M_2, R_2。以同一观察方向的逆时针为正，初角速度为 ω_1, ω_2。使它们外切接触，摩擦至接触点不再相对滑动，求最终角速度和机械能损失。

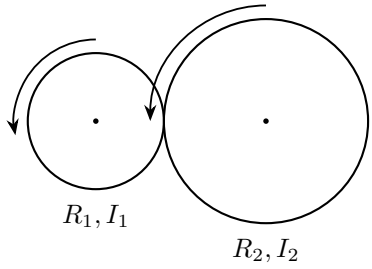


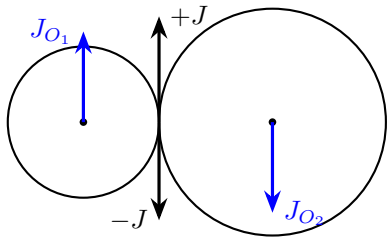
图 6.25: 题设：两固定轴圆柱的摩擦同步

解　按接触滑速方向规定摩擦角冲量

图 6.25 接触点的切向相对速度为 $u = R_1\omega_1 + R_2\omega_2$。设摩擦冲量的有符号大小为 J，取 $u > 0$ 时第一圆柱接触点受向下冲量，则两个圆柱的角动量变化分别为 $-JR_1, -JR_2$。

$$\omega_1' = \omega_1 - \frac{JR_1}{I_1}, \qquad \omega_2' = \omega_2 - \frac{JR_2}{I_2}.$$

示意 $u > 0$



$$R_1\omega_1' + R_2\omega_2' = 0$$

图 6.26: 接触冲量互反，两轴承提供外冲量；各自绕轴积分后再应用无滑动条件

用接触点无滑动条件求有符号冲量

图 6.26 末态不滑动要求 $R_1\omega_1' + R_2\omega_2' = 0$，于是

$$\boxed{J = \frac{R_1\omega_1 + R_2\omega_2}{R_1^2/I_1 + R_2^2/I_2}}, \quad I_i = M_iR_i^2/2.$$

记 $D = R_1^2/I_1 + R_2^2/I_2$。将碰前后动能作差，对每个圆柱分别展开平方：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}I_i(\omega_i^2 - \omega_i'^2) &= \frac{1}{2}I_i\left[\omega_i^2 - \left(\omega_i - \frac{JR_i}{I_i}\right)^2\right] \\ &= JR_i\omega_i - \frac{J^2R_i^2}{2I_i}.\end{aligned}$$

两式相加给 $Q = J(R_1\omega_1 + R_2\omega_2) - J^2D/2 = Ju - J^2D/2$。代入 $J = u/D$，得到 $Q = u^2/D - u^2/(2D) = u^2/(2D)$。

代入圆柱惯量求末角速度

将 $I_i = M_iR_i^2/2$ 代入 D，得 $D = 2/M_1 + 2/M_2$，故 $J = M_1M_2u/[2(M_1+M_2)]$。再代入两条角冲量式，分别得到

$$\begin{aligned}\omega_1' &= \omega_1 - \frac{M_2u}{(M_1+M_2)R_1} = \frac{M_1R_1\omega_1 - M_2R_2\omega_2}{(M_1+M_2)R_1}, \\ \omega_2' &= \omega_2 - \frac{M_1u}{(M_1+M_2)R_2} = \frac{M_2R_2\omega_2 - M_1R_1\omega_1}{(M_1+M_2)R_2}.\end{aligned}$$

负 J 自动表示摩擦方向相反，耗散始终为非负值：

$$\boxed{Q = \tfrac{1}{2}u^2/(R_1^2/I_1 + R_2^2/I_2)}.$$

轴承分别约束两圆柱的轴心，摩擦冲量分别改变它们关于各自轴的角动量；两柱接触点的末速相等连接这两个变化。

例 6.8 (人在自由转台边缘走一周)**.** 均匀圆盘转台质量 M、半径 R，可绕竖直中心轴无阻力转动。质量 m 的人视为质点，站在边缘，初始人、台均静止。人相对转台沿边缘走一整周，求人和台相对地面的角位移。

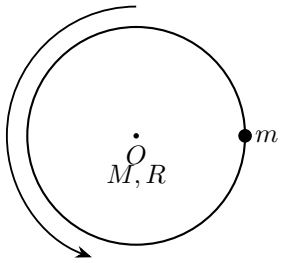


图 6.27: 题设：人在自由转台边缘走一周

解　零总角动量与相对一周

图 6.27 中，人与转台绕竖直轴的外力矩为零。取人的行走方向为正，设人与台的累计对地角位移为 ϕ,ψ，初始均为零。圆盘惯量为 $I=MR^2/2$，角动量关系为

$$I\dot{\psi}+mR^2\dot{\phi}=0.$$

从初态积分到 t，

$$I\int_0^t\dot{\psi}\,\mathrm{d}\tau+mR^2\int_0^t\dot{\phi}\,\mathrm{d}\tau=0,\qquad I[\psi]_0^t+mR^2[\phi]_0^t=0,$$

所以 $I\psi+mR^2\phi=0$。

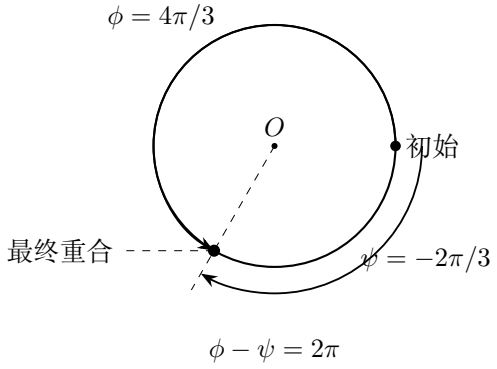


图 6.28: 一整周相对角位移可由不同的对地角位移组成；示意取 $M=4m$

图 6.28 中，人走完相对一周后回到台上原标记，累计角位移满足 $\phi-\psi=2\pi$。代入 $\phi=\psi+2\pi$，

$$(I+mR^2)\psi=-2\pi mR^2.$$

约去 R^2，再求人的位移，得到

$$\boxed{\psi=-\frac{4\pi m}{M+2m}},\qquad \boxed{\phi=\psi+2\pi=\frac{2\pi M}{M+2m}}.$$

台向后转，人对地转过的角度小于一整周。结果取决于质量分布与相对行程，与走路快慢无关。

例 6.9 (不同质量分布的滚动速度)**.** 同质量 m、同半径 R 的均匀实心圆柱、薄球壳、实心球，从同一高度 h 沿固定斜面由静止纯滚下。斜面足够粗糙，忽略耗散。求三者到底部的质心速度并比较。

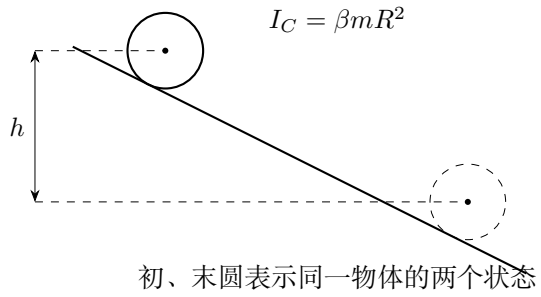


图 6.29: 同样的初末质心高度差 h，分别用各物体的惯量系数计算

解　以同一高度差比较平动与自转的分配

图 6.29 中，静摩擦在固定接触点的总功为零，三种物体的重力势能都转为质心平动与自转动能。记 $I_C = \beta m R^2$，用 $v_C = R|\omega|$，得

$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}\beta m R^2 \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{1}{2}m(1+\beta)v_C^2, \qquad v_C = \sqrt{\frac{2gh}{1+\beta}}.$$

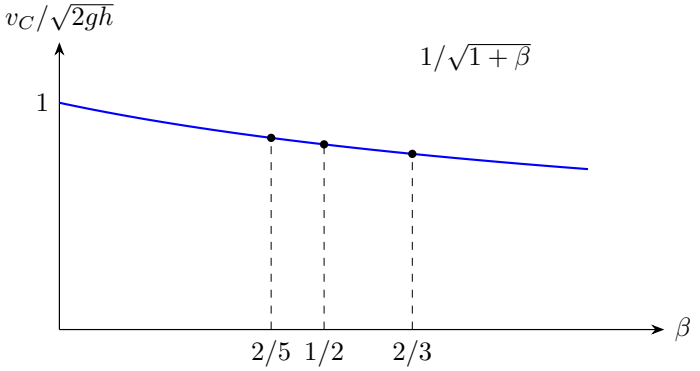


图 6.30: 精确速度比随惯量系数单调减小，三个质量分布对应曲线上不同点

图 6.30 中三个惯量系数依次代入，得到

$$\text{实心圆柱：}\quad \beta=\frac{1}{2},\quad v_{\text{柱}}=\sqrt{\frac{4gh}{3}},$$
$$\text{薄球壳：}\quad \beta=\frac{2}{3},\quad v_{\text{壳}}=\sqrt{\frac{6gh}{5}},$$
$$\text{实心球：}\quad \beta=\frac{2}{5},\quad v_{\text{球}}=\sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

因此 $v_{\text{球}}>v_{\text{柱}}>v_{\text{壳}}$。惯量系数越大，分给自转的能量比例越高，质心到达底部的速度越小。

例 6.10 (反向自转乒乓球的滑动与回滚)**.** 薄球壳乒乓球质量 m、半径 R，初始质心以 $v_0>0$ 向右，角速度 $\omega_0>0$ 逆时针，且 $v_0<2R\omega_0/3$。水平面动摩擦因数 μ，忽略滚动阻力。求运动各阶段及最终纯滚动速度。

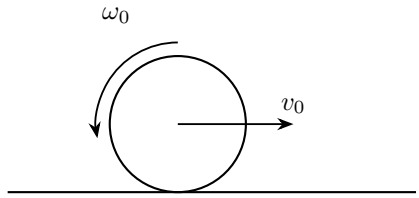


图 6.31: 题设：反向自转乒乓球的滑动与回滚

解　由底点滑速确定全过程初始摩擦方向

按图 6.31 取右、逆时针为正。初始底部滑速 $u_s(0)=v_0+R\omega_0>0$，故摩擦向左。本题取 $\mu>0$，薄球壳的 $I_C=2mR^2/3$，所以滑动阶段 $\dot v=-\mu g$、$\dot\omega=-\mu mgR/I_C=-3\mu g/(2R)$。保留两个初值积分：

$$\int_{v_0}^{v(t)}\mathrm{d}v'=-\mu g\int_0^t\mathrm{d}\tau,\qquad v(t)-v_0=-\mu gt,$$
$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)}\mathrm{d}w=-\frac{3\mu g}{2R}\int_0^t\mathrm{d}\tau,\quad \omega(t)-\omega_0=-\frac{3\mu g}{2R}t.$$

从而

$$v=v_0-\mu gt,\qquad \omega=\omega_0-\frac{3\mu g}{2R}t.$$

本题分段的两个事件分别为质心速度归零和接触滑速归零，后者给出开始纯滚动的时刻。

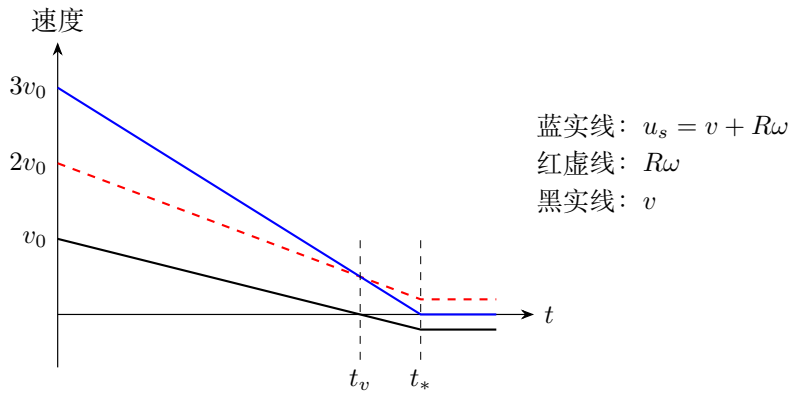


图 6.32: 示意取 $R\omega_0 = 2v_0$：质心先反向，接触点滑速到零后才结束滑动

比较质心停止与接触停止的先后

将两速度式相加，接触滑速为 $u_s = v_0 + R\omega_0 - (5/2)\mu g t$。令它首次为零，得到

$$t_* = \frac{2(v_0 + R\omega_0)}{5\mu g}.$$

而 $v = 0$ 给质心停止时刻 $t_v = v_0/(\mu g)$。比较 $t_v < t_*$ 等价于 $5v_0 < 2v_0 + 2R\omega_0$，即题设 $3v_0 < 2R\omega_0$。因此 $0 \le t < t_v$ 时质心向右减速，$t_v < t < t_*$ 时质心向左加速，两段底点都向右滑；到 t_* 才开始纯滚动。

求回滚速度并切换到无摩擦纯滚动

图 6.32 中，质心在 $t_v = v_0/(\mu g)$ 停止后继续向左加速，接触点却仍向右滑，所以摩擦方向暂不改变。把 $t_* = 2(v_0 + R\omega_0)/(5\mu g)$ 分别代回两速度式，

$$v_* = v_0 - \frac{2}{5}(v_0 + R\omega_0) = \frac{3v_0 - 2R\omega_0}{5},$$
$$\omega_* = \omega_0 - \frac{3}{5R}(v_0 + R\omega_0) = \frac{2R\omega_0 - 3v_0}{5R}.$$

因此

$$\boxed{v_* = (3v_0 - 2R\omega_0)/5 < 0, \quad \omega_* = (2R\omega_0 - 3v_0)/(5R) > 0}.$$

两者满足 $v_* = -R\omega_*$，此后摩擦为零，向左匀速纯滚。

例 6.11 (自由细杆的端点弹性冲击)**.** 均匀细杆质量 M、长 2ℓ，静止在光滑水平面上。质量 m 的小球以 v 垂直杆撞到端点，碰撞光滑且完全弹性，杆可自由平动转动。求球末速度、杆质心速度及角速度。

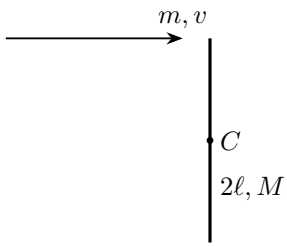


图 6.33: 题设：自由细杆的端点弹性冲击

解　由线冲量与偏心角冲量求杆的运动

图 6.33 以入射为 $+x$，设球给杆冲量 J。球末速度 $v' = v - J/m$，杆质心速度 $V = J/M$。关于质心的冲量矩为 $-J\ell$，而 $I_C = M\ell^2/3$，所以 $\omega = -3J/(M\ell)$。恢复条件还需要用这一平动与转动合成杆端的速度。

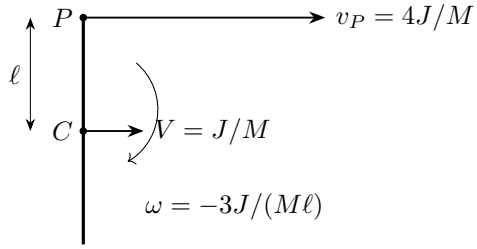


图 6.34: 杆端速度增量是质心的四倍，恢复条件作用于球与杆端之间

合成受击端点速度

上端接触点相对质心的位置为 $(0, \ell)$，其转动速度水平分量为 $-\omega\ell$，所以接触点速率 $V - \omega\ell = J/M + 3J/M = 4J/M$。接触恢复关系使用球速与这个端点的合速度。

在端点应用弹性恢复条件并求末速度

图 6.34 恢复条件是接触点速度差反号：$v' - (4J/M) = -v$。恢复式展开为 $v - J/m - 4J/M = -v$，所以 $J(1/m + 4/M) = 2v$。

故 $J = 2mMv/(M + 4m)$，得到

$$\boxed{v' = \frac{4m - M}{M + 4m}v, \quad V = \frac{2m}{M + 4m}v, \quad \omega = -\frac{6m}{(M + 4m)\ell}v}.$$

角速度负号表示顺时针。若 $m = M/4$，球碰后停止；小球很轻时近似反弹。球的末动能加上杆的平动、自转动能，可写成：

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2 \\ &= \frac{v^2}{(M+4m)^2}\left[\frac{m}{2}(4m-M)^2 + 2Mm^2 + 6Mm^2\right] \\ &= \frac{mv^2}{2(M+4m)^2}\left[(4m-M)^2 + 16Mm\right] = \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

最后一步用到 $(4m-M)^2 + 16Mm = M^2 + 8Mm + 16m^2 = (M+4m)^2$，与碰前动能相等。

例 6.12 (无摩擦地面上倒下的细杆)**.** 均匀细杆质量 m、长 ℓ，从几乎竖直的位置静止释放，下端与光滑水平地面接触，允许水平滑动。以杆与向上竖直方向夹角 θ 表示姿态，求角速度与地面对杆的支持力，并判断下降时杆端与地面的接触情况。

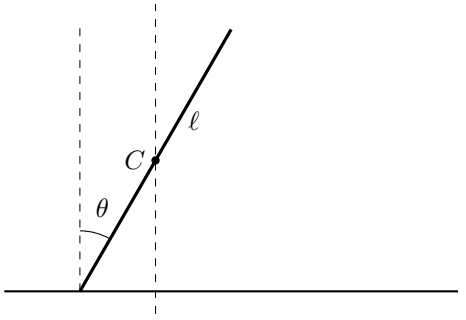


图 6.35: 图示运动中的姿态 θ，下端可在地面滑动，质心横坐标保持固定

解　利用固定质心横坐标与能量求角速度

按图 6.35 地面无水平力，杆质心水平坐标保持不变。质心高度 $y_C = \ell\cos\theta/2$，竖直速度 $\dot{y}_C = -\ell\sin\theta\dot{\theta}/2$。用 $I_C = m\ell^2/12$，能量式给

$$\frac{1}{2}mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{m\ell^2}{24}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2,$$

所以

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 12g(1-\cos\theta)/[\ell(1+3\sin^2\theta)]}.$$

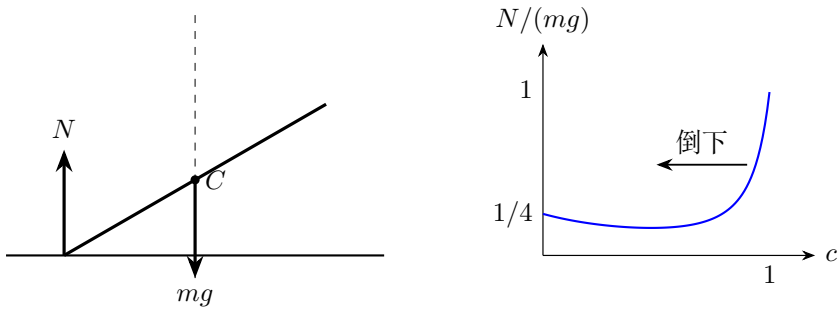


图 6.36: 同一长度的杆继续倒下，支持力虽变化但始终为正

对能量速度关系求导得到角加速度

为求图 6.36 中的支持力，令 $c=\cos\theta$、$D=4-3c^2$，并将已得速度关系记为 $\dot\theta^2=f(\theta)$。先对时间使用链式法则：

$$2\dot\theta\ddot\theta=f'(\theta)\dot\theta.$$

运动段 $\dot\theta\neq0$ 时可约去它，得到 $\ddot\theta=f'(\theta)/2$；端点由连续极限求得。再对角度求导，

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\theta}=-\sin\theta,\qquad \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}\theta}=-6c\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\theta}=6c\sin\theta.$$

按商的求导法则，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\frac{1-c}{D}&=\frac{\sin\theta\,D-(1-c)6c\sin\theta}{D^2}\\&=\frac{\sin\theta[D-6c(1-c)]}{D^2},\\\ddot\theta&=\frac{6g}{\ell}\frac{\sin\theta[D-6c(1-c)]}{D^2}.\end{aligned}$$

最后对质心竖直速度再用乘积法则，保留两个贡献：

$$\ddot y_C=-\frac{\ell}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\theta\dot\theta)=-\frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\dot\theta^2+\sin\theta\ddot\theta\right).$$

本题从微小倾角静止释放，取该倾角趋零的能量极限。

由质心竖直加速度求支持力

代入 $\ddot y_C=-\ell(c\dot\theta^2+\sin\theta\ddot\theta)/2$ 及 $N-mg=m\ddot y_C$，先将两项加速度分别代入，得

$$\frac{N}{mg}=1-\frac{6c(1-c)}{D}-\frac{3(1-c^2)[D-6c(1-c)]}{D^2}.$$

统一分母为 D^2，分子为 $D^2-6c(1-c)D-3(1-c^2)[D-6c(1-c)]$。将 $D=4-3c^2$ 代入，三部分分别展开为

$$\begin{aligned} D^2 &= 16-24c^2+9c^4,\\ -6c(1-c)D &= -24c+24c^2+18c^3-18c^4,\\ -3(1-c^2)[D-6c(1-c)] &= -12+18c+3c^2-18c^3+9c^4. \end{aligned}$$

相加时三次、四次项均抵消，剩下 $4-6c+3c^2$，因此得到

$$\boxed{N=mg\frac{4-6c+3c^2}{(4-3c^2)^2}}.$$

支持力在整个下降区间的变化

分子 $3(c-1)^2+1>0$，故从竖直到水平一直保持接触；到水平瞬间 $N=mg/4$。下端沿地面滑动，质心竖直下降和绕质心转动共同决定上式。

例 6.13 (球沿大球外表面纯滚下)**.** 小实心球质量 m、半径 r，从固定大球顶端由微小扰动纯滚下，大球半径 R。先在理想始终无滑动的模型中求脱离角；再讨论有限静摩擦因数时，能否一直纯滚到该点。

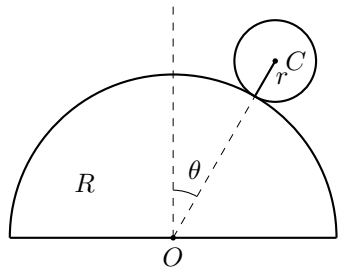


图 6.37: 题设：球沿大球外表面纯滚下

解　由下降高度求滚动速度与支持力

图 6.37 中，小球质心绕大球心运动的轨迹半径为 $a=R+r$。转过从竖直方向量起的角 θ 后，质心高度由 a 降为 $a\cos\theta$，下降量为

$$\Delta h=a(1-\cos\theta).$$

小球从顶端近于静止开始运动。设 $I_C=\beta mr^2$，接触点无滑动给 $v=r|\omega|$；重力势能转化为质心平动和绕质心转动的动能，因此

$$\begin{aligned} mga(1-\cos\theta) &= \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2\\ &= \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\beta mr^2\frac{v^2}{r^2}=\frac{1}{2}m(1+\beta)v^2. \end{aligned}$$

约去 m 并解出速率，得到

$$v^2 = \frac{2ga(1-\cos\theta)}{1+\beta}.$$

在图 6.38 中，支持力 N 沿两球心连线向外，重力沿径向向内的分量为 $mg\cos\theta$。以指向大球心为正，径向方程为

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{a}.$$

将上面的速率代入，依次整理为

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\theta - \frac{2mg(1-\cos\theta)}{1+\beta} \\ &= \frac{mg}{1+\beta}\big[(3+\beta)\cos\theta - 2\big]. \end{aligned}$$

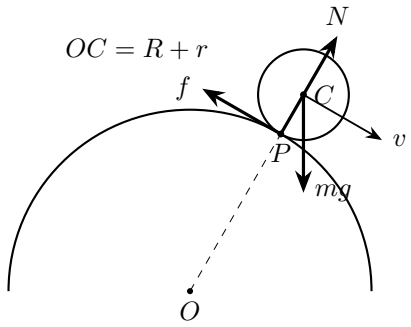


图 6.38: 摩擦在接触点提供自转力矩，法向力沿两球心连线不提供绕小球心的力矩

单独求维持自转所需的上坡摩擦

纯滚动的切向方程为 $mg\sin\theta - f = ma_t$，转动方程为 $fr = I_C\alpha$，并有 $a_t = r\alpha$。于是 $f = \beta ma_t$，$a_t = g\sin\theta/(1+\beta)$，从而得到 $f = \beta mg\sin\theta/(1+\beta)$。

比较形式脱离点与有限摩擦的可实现范围

形式上令图 6.38$N = 0$，对实心球 $\beta = 2/5$，得到

$$\boxed{\cos\theta_d = 10/17}.$$

但纯滚动所需上坡摩擦为 $f = \beta mg\sin\theta/(1+\beta)$，故

$$\mu_s \geq \frac{f}{N} = \frac{\beta\sin\theta}{(3+\beta)\cos\theta - 2}.$$

接近上述脱离角时分母趋零而分子不为零，任何有限 μ_s 都会先发生滑动。所以 10/17 是无限制无滑动约束下的形式结果；真实库仑摩擦模型应在先滑动的角度切

换方程，再求最终脱离。滑动开始后，切向摩擦改为动摩擦，平动与自转的速率关系随之改变。

例 6.14 (自转圆盘落到粗糙地面)**.** 均匀圆盘质量 m、半径 R，初始质心静止，角速度大小 Ω 为顺时针。把它轻放到水平粗糙地面，动摩擦因数 μ，求到纯滚动时的质心速度、角速度、时间及损失动能。

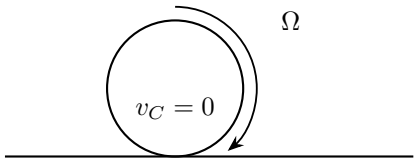


图 6.39: 题设：自转圆盘落到粗糙地面

解　从负底点滑速确定向右摩擦

按图 6.39, 初始底点向左滑, 摩擦向右。取向右、逆时针为正, 初态为 $v(0) = 0$、$\omega(0) = -\Omega$。应分别求出平动与转动变化，直到 $v + R\omega = 0$，再切换为纯滚动。

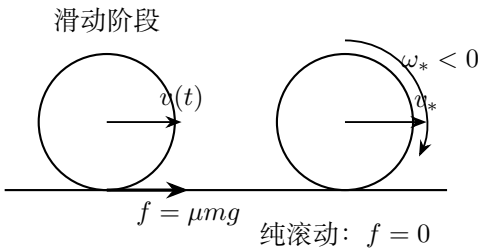


图 6.40: 解答过程：自转圆盘落到粗糙地面

分别积分平动与转动直到接触滑速为零

取 $\mu > 0$, 取 $\mu > 0$, 滑动期间 $N = mg$, 摩擦恒为 μmg 向右, 所以 $a_C = \mu g$。它对质心的力矩为 $+\mu mgR$, 由 $I_C = mR^2/2$ 得 $\alpha = 2\mu g/R$。以 $v(0) = 0$、$\omega(0) = -\Omega$ 作定积分：

$$\int_0^{v(t)} \mathrm{d}v' = \mu g \int_0^t \mathrm{d}\tau, \qquad v(t) = \mu g t,$$

$$\int_{-\Omega}^{\omega(t)} \mathrm{d}w = \frac{2\mu g}{R} \int_0^t \mathrm{d}\tau, \quad \omega(t) + \Omega = \frac{2\mu g}{R} t.$$

角速度因此从负值逐渐增大。接触滑速为 $u_s = v + R\omega = -R\Omega + 3\mu g t$，令 $u_s = 0$，首次达到纯滚动的时刻为 $t_* = R\Omega/(3\mu g)$。

纯滚动末态与损失的动能

图 6.40 由此得到

$$\boxed{t_* = R\Omega/(3\mu g),\ v_* = R\Omega/3,\ \omega_* = -\Omega/3}.$$

初能量 $mR^2\Omega^2/4$，末能量 $\frac{1}{2}m(R\Omega/3)^2 + \frac{1}{4}mR^2(\Omega/3)^2 = mR^2\Omega^2/12$，故

$$\boxed{Q = mR^2\Omega^2/6}.$$

圆盘将部分自转动能转为质心平动动能，余下的 Q 转为内能。

例 6.15 (沿固定绳下落的圆盘)**.** 均匀圆盘质量 m、半径 R，轻绳绕在圆盘外缘，绳上端固定。圆盘由静止释放，绳不滑动，盘竖直下落并转动，求加速度、张力以及下落 h 后的速度。

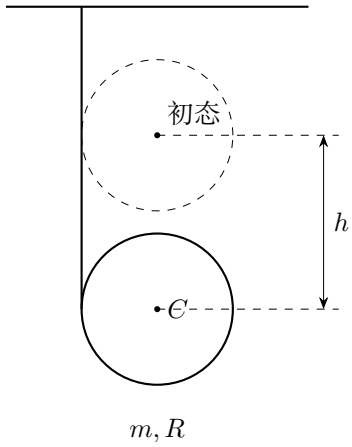


图 6.41: 绳上端固定，圆盘沿绳下落；h 表示质心相对初态的高度变化

解　联立下落、转动与绳不滑动方程

按图 6.41 向下为正，$mg - T = ma$，绳张力对质心的力矩 $TR = I_C\alpha$，取 α 为顺时针角加速度大小，无滑动给 $a = R\alpha$。用 $I_C = mR^2/2$，得到 $T = ma/2$。

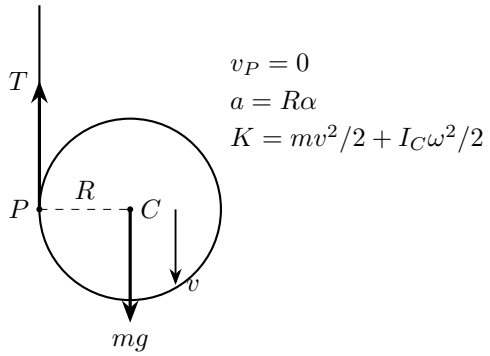


图 6.42: 张力的作用点瞬时静止，轮心下移与顺时针转动共同满足不滑动

求恒加速度和绳张力

按图 6.42 联立得

$$\boxed{a = 2g/3,\ T = mg/3}.$$

张力小于重力，圆盘保持向下加速。设向下位移为 y，则 $\dot{y} = v$。链式法则给 $a = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}y)\dot{y} = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}y$，故 $v\,\mathrm{d}v = (2g/3)\,\mathrm{d}y$。从初始 $y = 0, v = 0$ 积分到 $y = h, v$，

$$\int_0^v v'\,\mathrm{d}v' = \frac{2g}{3}\int_0^h \mathrm{d}y, \qquad \left[\frac{v'^2}{2}\right]_0^v = \frac{2g}{3}[y]_0^h, \qquad \frac{v^2}{2} = \frac{2gh}{3}.$$

下落后的速度与张力作用点

下降 h 后

$$\boxed{v = \sqrt{4gh/3}}.$$

相应能量式为 $mgh = mv^2/2 + I_C(v/R)^2/2$，其中平动和转动各占一项。绳的受力点相对固定绳瞬时静止，张力对盘总功为零，但它使平动、转动的能量分配发生变化。

例 6.16 (线轴的滚动方向)**.** 线轴总质量 m，外半径 R，内轴半径 $r<R$，质心惯量 I_C。放于粗糙水平面，绳从内轴下侧引出，与水平成向右上方 $0\le\theta\le\pi/2$ 角，用力 F 沿绳拉。绳对轴的力矩取逆时针 $+Fr$，假设不打滑，求质心加速度、摩擦力和方向改变条件。

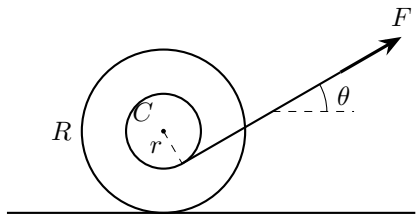


图 6.43: 题设：线轴的滚动方向

解　为拉力和摩擦写有符号转矩

按图 6.43 向右为正、逆时针为正，设摩擦 f 向右为正。平动式 $ma=F\cos\theta+f$，转动式 $I_C\alpha=Fr+fR$，纯滚动要求 $\alpha=-a/R$。

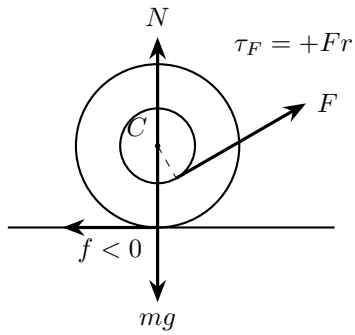


图 6.44: 解答过程：线轴的滚动方向

用无滑动约束消去角加速度

把图 6.44 的平动、转动和滚动约束联立。将 $\alpha=-a/R$ 代入转动式，再除以 R，得到

$$-\frac{I_C}{R^2}a=\frac{Fr}{R}+f.$$

由平动式取 $f=ma-F\cos\theta$，代入后把加速度项移到同侧：

$$-\frac{I_C}{R^2}a=\frac{Fr}{R}+ma-F\cos\theta,$$

$$\left(m+\frac{I_C}{R^2}\right)a=F\left(\cos\theta-\frac{r}{R}\right).$$

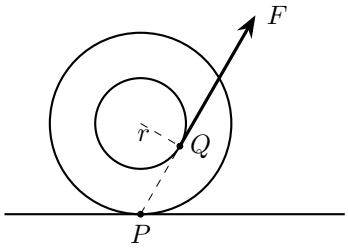
因此

$$\boxed{a=\frac{F(\cos\theta-r/R)}{m+I_C/R^2}}.$$

再回到平动式求摩擦力：

$$\begin{aligned} f &= ma - F\cos\theta \\ &= \frac{mF(\cos\theta - r/R) - F\cos\theta(m + I_C/R^2)}{m + I_C/R^2} \\ &= -\frac{F\big[mr/R + (I_C/R^2)\cos\theta\big]}{m + I_C/R^2}. \end{aligned}$$

题设 $0 \le \theta \le \pi/2$ 时，上式为负，摩擦沿图 6.44 中的向左方向。



$\tau_P = F(r - R\cos\theta)$
临界：$\cos\theta_c = r/R$

图 6.45: 临界角时拉力作用线通过地面接触点，图示取内半径为外半径的一半

拉力作用线、运动方向与保持接触的条件

加速度的方向由分子 $\cos\theta - r/R$ 决定：$\cos\theta > r/R$ 向右加速，$\cos\theta < r/R$ 向左加速，图 6.45 中临界 $\cos\theta = r/R$ 时拉力作用线通过接触点，质心不加速。法向力 $N = mg - F\sin\theta$ 还需为正，且 $|f| \le \mu_s N$。满足上述接触与静摩擦条件时，这一加速度对应题设的纯滚动；超过静摩擦上限后，按底点滑速确定动摩擦方向。

例 6.17 (使台球立即纯滚动的击打高度)**.** 实心球质量 m、半径 R，静止于水平桌面。球杆给予水平短冲量 J，作用线位于球心上方 h，忽略击球期间桌面的切向冲量。求使球刚受击后立即纯滚动的 h，以及球杆作用线离桌面的高度。

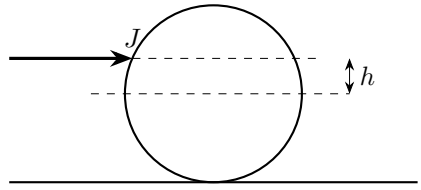
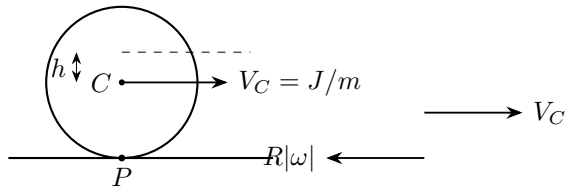


图 6.46: 题设：使台球立即纯滚动的击打高度

解　使击打后的底点速度为零

按图 6.46 取向右、逆时针为正。球杆的线冲量与关于球心的角冲量分别给出

$$mv_C = J, \qquad I_C\omega = -Jh, \qquad v_C = \frac{J}{m}, \quad \omega = -\frac{Jh}{I_C}.$$



$$v_P = V_C - R|\omega| = 0$$

图 6.47: 底点的平动与自转速度恰好抵消，所求偏置 h 从球心算起

图 6.47 中，底点的转动速度水平分量为 $R\omega$。立即纯滚动要求它与质心平动速度相消：

$$v_C + R\omega = \frac{J}{m} - \frac{RJh}{I_C} = 0.$$

将 $I_C = 2mR^2/5$ 代入，约去非零冲量 J，得

$$\boxed{h = \frac{I_C}{mR} = \frac{2R}{5}}, \qquad \boxed{H = R + h = \frac{7R}{5}}.$$

h 从球心量起，H 从桌面量起。较低击点的自转贡献较小，底点初始向右滑；较高击点则使底点初始向左滑。

6.13　本讲小结

转动惯量将质量分布与所选转轴联系起来。定轴转动满足 $L_z = I_O\omega$、$\tau_O = I_O\alpha$，力矩做功改变转动动能。平面运动则分解为质心平动与绕质心转动，动能为 $MV_C^2/2 + I_C\omega^2/2$。

滚动问题用平动、转动和接触点速度约束共同求解。滑动摩擦与接触滑速反向，接触滑速降到零后，由无滑动条件求静摩擦。偏心冲击通过线冲量、角冲量共同改变接触点速度，恢复关系就写在这些接触点之间。复摆的回复力矩由质心到悬轴的距离决定，惯性由绕悬轴的转动惯量决定。

6.14　练习

练习 6.1 (任意刚体的复摆周期)**.** 一刚体重为 G，关于固定悬轴的转动惯量为 J，质心位于轴下距离 h。求在重力作用下小幅摆动的周期，并给出适用条件。

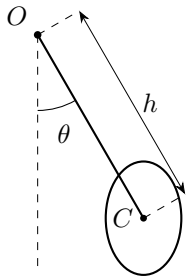


图 6.48: 质心 C 偏离最低位置的转角为 θ，悬轴到质心的距离为 $OC = h$

练习 6.2 (复合双圆盘滑轮)**.** 质量 m、半径 r 的小均匀圆盘，与质量 $2m$、半径 $2r$ 的大均匀圆盘同轴粘接，绕水平光滑轴转动。小盘左侧、大盘右侧各绕一轻绳，各悬质量 m 的重物。绳不滑动，求组合惯量、角加速度和两侧张力。

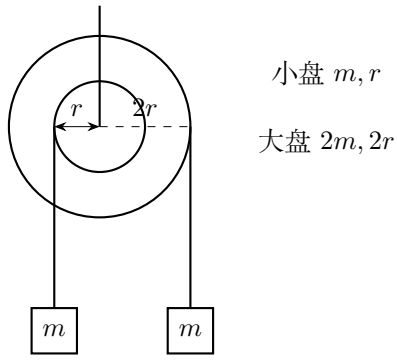


图 6.49: 同一刚性双圆盘上，两条绳分别作用于 r 和 2r 的半径

练习 6.3 (半圆细线框的质心与摆动)**.** 均匀半圆细线框质量 m、半径 R，用质量可忽略的刚性支架连接到圆心处垂直线框平面的水平悬轴，圆弧位于轴下方。求质心到轴的距离及小幅摆动周期。

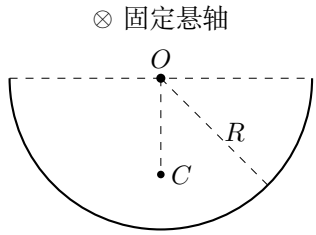


图 6.50: 刚性支架质量忽略，只有半圆弧参与质心和转动惯量计算

练习解答

练习 6.1

解　用实际重力臂写出非线性转动方程

图 6.48 重力对悬轴的回复力矩为 $-Gh\sin\theta$，所以 $J\ddot{\theta} = -Gh\sin\theta$。小角度时 $\sin\theta \simeq \theta$，有 $\ddot{\theta} + (Gh/J)\theta = 0$。

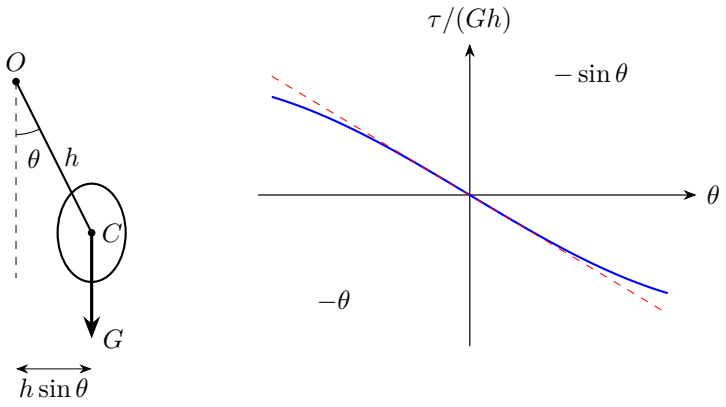


图 6.51: 重力臂为 h 乘摆角正弦，力矩曲线在原点附近才近似直线

按图 6.51，在线性化范围内记 $\omega = \sqrt{Gh/J}$。试取 $\theta = e^{\lambda t}$，依次求导得 $\dot{\theta} = \lambda e^{\lambda t}$、$\ddot{\theta} = \lambda^2 e^{\lambda t}$。代入微分方程得到 $(\lambda^2+\omega^2)e^{\lambda t} = 0$，所以特征根为 $\lambda = \pm i\omega$，实通解为

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \dot{\theta}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$$

三角函数求导时的 ω 来自相位 ωt 的时间导数。题目没有指定初始摆角和角速度，可分别记作 θ_0, w_0；代入 $t=0$ 给 $A=\theta_0$、$B=w_0/\omega$，故

$$\theta(t)=\theta_0\cos\omega t+\frac{w_0}{\omega}\sin\omega t.$$

相位增加 2π 后，角位移和角速度同时复原，因此 $\omega T=2\pi$，周期

$$\boxed{T=2\pi\sqrt{J/(Gh)}}.$$

这里 $h>0$ 对应质心悬在轴下的稳定姿态；转轴摩擦可忽略，且摆动振幅足够小，使 $\sin\theta\simeq\theta$ 适用于全程。

练习 6.2

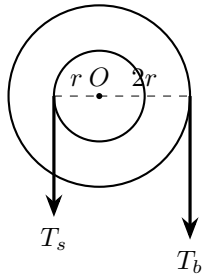
解　先将同轴两盘惯量相加

图 6.49 组合惯量

$$I=mr^2/2+(2m)(2r)^2/2=\boxed{9mr^2/2}.$$

按两个绕绳半径分别列物体平动式

大半径一侧下降，取顺时针角加速度大小 α，小重物向上加速度 $r\alpha$，大侧重物向下加速度 $2r\alpha$。因此 $T_s-mg=mr\alpha$、$mg-T_b=2mr\alpha$。



$a_s=r\alpha$ 向上
$a_b=2r\alpha$ 向下
$2rT_b-rT_s=I\alpha$

图 6.52: 两侧张力乘各自力臂，重物的线加速度也分别乘各自绕绳半径

选择同一顺时针正方向累加转矩

小盘左侧张力使圆盘逆时针，故其力矩记 $-rT_s$；大盘右侧张力使圆盘顺时针，记 $+2rT_b$。两条绳不滑动只要求各自线加速度等于各自半径乘 α，分别给出 $r\alpha$ 和 $2r\alpha$。

消去张力求角加速度后再回代

按图 6.52 转矩式 $2rT_b - rT_s = I\alpha$，先代入 $T_b = mg - 2mr\alpha$、$T_s = mg + mr\alpha$，

$$2r(mg - 2mr\alpha) - r(mg + mr\alpha) = I\alpha.$$

展开左边并移项，得 $mgr = (I + 5mr^2)\alpha = (19/2)mr^2\alpha$，所以

$$\boxed{\alpha = 2g/(19r)},$$

$$\boxed{T_s = 21mg/19,\ T_b = 15mg/19}.$$

两边质量虽相等，力臂不同，所以仍可加速；大半径侧的线加速度是小半径侧的两倍。

练习 6.3

解　圆弧质量微元决定质心位置

按图 6.50 取圆心为原点，向下为 y 正向，圆弧参数为 $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$，故 $y = R\cos\phi$。线密度为 $\lambda = m/(\pi R)$，角宽 $\mathrm{d}\phi$ 对应弧长 $R\,\mathrm{d}\phi$，所以

$$\mathrm{d}m = \lambda R\,\mathrm{d}\phi = \frac{m}{\pi}\,\mathrm{d}\phi.$$

左右对称使质心横坐标为零，向下距离为

$$d = \frac{1}{m}\int y\,\mathrm{d}m = \frac{R}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi.$$

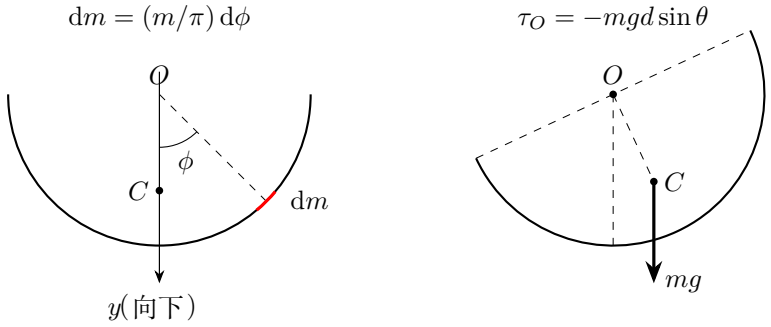


图 6.53: 先沿未偏转圆弧求质心，再用质心重力矩求小振动周期

图 6.53 中的积分覆盖整个半圆。原函数 $\sin\phi$ 的导数是 $\cos\phi$，因此

$$d = \frac{R}{\pi}[\sin\phi]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{R}{\pi}[1 - (-1)] = \boxed{\frac{2R}{\pi}}.$$

由圆心轴惯量求小摆周期

各质元到圆心轴的距离恒为 R，所以 $I_O=\int R^2\,\mathrm{d}m=mR^2$。重力回复力矩为 $-mgd\sin\theta$，小角近似后，

$$I_O\ddot{\theta}=-mgd\theta,\qquad \ddot{\theta}+\frac{2g}{\pi R}\theta=0.$$

试取 $\theta=e^{st}$，依次求导为 se^{st}、s^2e^{st}，代入得 $s^2+2g/(\pi R)=0$。两根为 $\pm i\omega_p$，其中 $\omega_p=\sqrt{2g/(\pi R)}$，实通解为 $\theta=C\cos\omega_p t+D\sin\omega_p t$。相位每增加 2π 重复一次，故

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_p}=2\pi\sqrt{\frac{\pi R}{2g}}}.$$

题目只求周期，常数 C,D 由实际释放角与角速度决定。

振动与波

物理竞赛一轮讲义

第一讲

机械振动

2026

目录

第一讲　机械振动 **1**

1.1　回复力与平衡位置 1

1.2　运动方程、初始条件与相位 2

1.3　能量与有效参数 5

1.4　小振动与单摆 9

1.5　接触、摩擦与分段运动 10

1.6　参数改变与振动测量 11

1.7　阻尼振动与受迫振动 12

1.8　例题与分析 15

1.9　本讲小结 25

1.10 练习 26

练习解答 27

第一讲　机械振动

1.1　回复力与平衡位置

将弹簧上的小球轻轻拉离静止位置后释放，小球会来回经过原来的静止位置。弹簧力与其他外力的合力，使偏离的小球趋向这一位置，运动中又因惯性越过它。平衡位置、回复作用与惯性共同形成了振动。

取平衡位置为 $x=0$。稳定平衡附近的势能有极小值，设 $U'(0)=0$、$U''(0)=K>0$，泰勒展开为

$$U(x)=U(0)+U'(0)x+\frac{1}{2}U''(0)x^2+\cdots\simeq U(0)+\frac{1}{2}Kx^2.$$

对 x 求导，$\mathrm{d}(Kx^2/2)/\,\mathrm{d}x=(K/2)\,2x=Kx$，所以回复力 $F_x=-\,\mathrm{d}U/\,\mathrm{d}x\simeq -Kx$。近似保留到这一阶，运动便由同一个线性方程描述。理想胡克弹簧在弹性范围内恰好满足这个关系；摆和浮体则须结合位移范围决定近似程度。

把平衡位置记为 $x=0$，若在所讨论的整个区间有

$$F_x=-Kx,\qquad m\ddot{x}+Kx=0,\qquad K>0,$$

则物体作简谐振动。负号表明力和位移方向相反，K 是对该坐标而言的有效劲度系数，未必等于装置中某一根弹簧的劲度。例如回复力中还含 $-cx^3$ 时，$|cx^3|\ll K|x|$ 给出线性近似所用的振幅范围。

竖直弹簧振子最能说明坐标选择的作用。设向下为正，总伸长为 z，则 $m\ddot{z}=mg-kz$。静止伸长 $z_0=mg/k$，令 $x=z-z_0$，代入后得到 $m\ddot{x}=-kx$。重力改变平衡位置，却不改变理想线性弹簧振子的角频率。这一结果适用于弹簧保持胡克定律、阻力可忽略的振动。

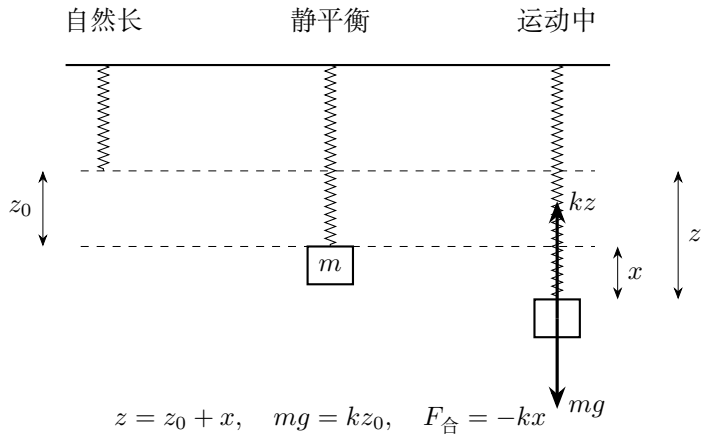


图 1.1: 用同一个弹簧连接点比较自然长、静平衡与运动中的位置

图 1.1 把自然长位置和平衡位置分开：静伸长满足 $kz_0 = mg$，以平衡位置为零点的位移 x 才满足 $F = -kx$。从自然长量起的坐标 z 对应弹力 $-kz$，从平衡位置量起的 x 对应合力 $-kx$。例 1.1 就从这两个坐标的转换入手。

1.2 运动方程、初始条件与相位

先求解 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$，其中 $\omega = \sqrt{K/m}$。试取指数形式 $x = e^{\lambda t}$，则 $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$、$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$；代入并约去不为零的指数因子，得到特征方程 $\lambda^2 + \omega^2 = 0$，两根为 $\lambda = \pm \mathrm{i}\omega$。由 $e^{\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t$，实数运动的通解可写为

$$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t.$$

将常数取成 $C = A\cos\varphi$、$D = -A\sin\varphi$，由余弦和角公式合并为 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$。相位增加 2π 时位置和速度同时复原，故 $T = 2\pi/\omega$。求导时令 $\psi = \omega t + \varphi$，先求外层三角函数再乘 $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}t = \omega$：

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = (-A\sin\psi)\omega, \qquad a = \frac{\mathrm{d}(-A\omega\sin\psi)}{\mathrm{d}\psi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = (-A\omega\cos\psi)\omega.$$

于是

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi), \qquad a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

速度在平衡位置的大小最大，加速度则与偏离平衡的位移成正比、方向相反。振幅 A 取非负值；相位 $\omega t + \varphi$ 说明振子处于一个周期的什么阶段。同一位移在一周期内通常经过两次，速度符号不同，两次经过的运动状态由位移与速度共同区分。

图 1.2 用匀速圆周运动的投影表示简谐振动，圆周点的转角就是振动相位。

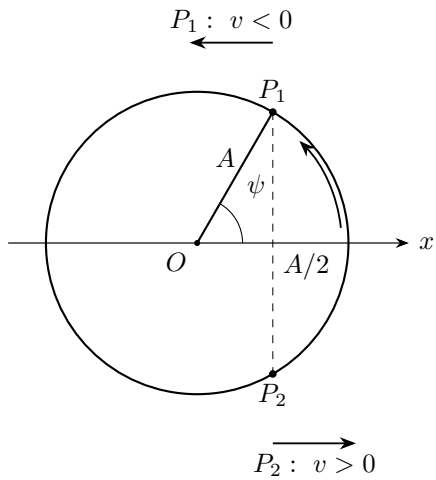


图 1.2: 余弦投影时相位逆时针增加，上下两点投影相同而速度相反

图 1.2 中参考圆半径给振幅，转角给相位，投影点的位置给位移。图中的 P_1、P_2 投影到同一位置：P_1 沿圆周向左运动，投影速度为负；P_2 沿圆周向右运动，投影速度为正。振子的实际轨迹沿 x 轴，参考圆同时显示它的位置和运动方向。

1.2.1 从初态到完整运动的确定

给定初始位置 x_0 和初速度 v_0 后，通解中的两个常数便能确定。对前面的通解逐项求导，得到

$$\dot{x} = -\omega C\sin\omega t + \omega D\cos\omega t.$$

在 $t=0$ 分别代入位置和速度初值：

$$x_0 = C\cos 0 + D\sin 0 = C, \qquad v_0 = -\omega C\sin 0 + \omega D\cos 0 = \omega D.$$

所以 $C = x_0$、$D = v_0/\omega$，运动为

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

与 $A\cos(\omega t+\varphi)$ 比较，$C = A\cos\varphi$、$D = -A\sin\varphi$。两式平方相加求振幅，再分别求初相的正弦、余弦：

$$A^2 = C^2 + D^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A}, \qquad \sin\varphi = -\frac{v_0}{A\omega}.$$

当 $A>0$ 时，正弦与余弦的符号共同选定初相的象限。$x_0 = v_0 = 0$ 时，运动为 $x(t)=0$。例 1.7 将用位置和速度选定参考圆上的起点，再沿相位增加方向求到达时间。

给定初态后，运动在理想模型中是唯一的。改变计时起点会改变初相，振幅与角频率保持不变。图中统一采用 $x = A\cos\psi$，逆时针转动对应相位增加。

例如从 $x = A/2$ 向右开始，接下来到右端点的相位增量为 $\pi/3$；从同一位置向左开始，下一次到右端点却要走 $5\pi/3$。两个时刻的位移相同，未来到达时间相差很大。求到达时间时，先用位置和方向定出起点，再沿相位增加方向数到所求位置。

把位移 x 和速度 v 分别作为横、纵坐标，就得到相图。图 1.3 将两轴分别除以 A 和 ωA，使轨迹化为单位圆；每一点同时记录振子的位置与速度。

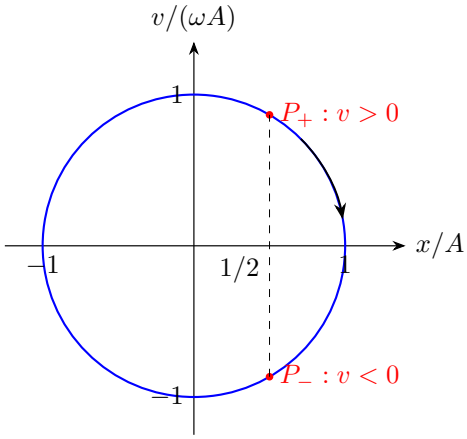


图 1.3: 相图以速度为纵坐标，时间增加时按顺时针沿状态圆运动

图 1.3 的两轴均已按振幅归一化，圆上的每一点代表一个瞬时状态。$x = A\cos\psi$、$v = -\omega A\sin\psi$ 给出 $x^2/A^2 + v^2/(\omega^2 A^2) = 1$；右半圆的上、下两点位移相同，速度却反向。图上最右点 $(1,0)$ 对应物理状态 $(x,v) = (A,0)$，此时加速度指向负 x 方向，随后速度变负，因而时间增大时状态点顺时针转动；振子在实际空间中沿 x 轴往复。

参考圆的纵坐标是 $A\sin\psi = -v/\omega$，相图的纵坐标却是 v/ω，二者反号。因此图 1.2 的参考点逆时针转动，图 1.3 的状态点顺时针转动；这两个转向对应同一振动在两种纵坐标下的表示。

1.2.2 位移区间、相位区间与停留时间

振子的速度随位置改变，相同长度的路程所需时间并不相等。若质点正向左运动，由 x_1 到 x_2，其中 $A \geq x_1 > x_2 \geq -A$，可在参考圆上取 $0 \leq \psi \leq \pi$。由 $x = A\cos\psi$，起、末相位分别为 $\arccos(x_1/A)$、$\arccos(x_2/A)$，所以

$$\Delta t = \frac{1}{\omega}\left[\arccos\frac{x_2}{A} - \arccos\frac{x_1}{A}\right].$$

图 1.4 的同一水平投影可对应上、下两个圆周点，因此先确定速度方向，再选择相位区间；若路径经过端点，将到端点前后的两段相位相加。

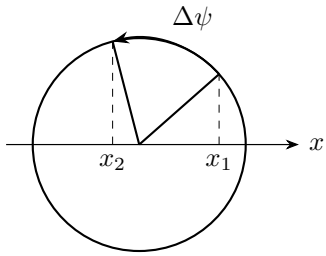


图 1.4: 向左运动支上的两个位置与相位增量

例如在一个周期内统计 $|x| < b$ 的总时间，$0 < b < A$。向左的一次穿越从 $+b$ 到 $-b$，相位差为 $\arccos(-b/A) - \arccos(b/A) = 2\arcsin(b/A)$；向右还有完全相同的一次。因此总停留时间

$$\Delta t_{\text{middle}} = \frac{4}{\omega}\arcsin\frac{b}{A}, \qquad \frac{\Delta t_{\text{middle}}}{T} = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{b}{A}.$$

当 $b = A/2$ 时，中间一半长度区间只占全周期的 $1/3$，其余 $2/3$ 时间在两端。端点附近速度较小，因而停留时间较长。$b \to 0$ 时这段时间趋零，$b \to A$ 时趋于 T。

若从速度式积分，向左支路有 $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x/[\omega\sqrt{A^2 - x^2}]$，所以

$$\Delta t = \frac{1}{\omega}\int_{x_2}^{x_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

作换元 $x = A\sin u$，取 $-\pi/2 \le u \le \pi/2$，则 $\mathrm{d}x = A\cos u\,\mathrm{d}u$ 且根号为 $A\cos u$；上下限相应变为 $u_i = \arcsin(x_i/A)$。因此

$$\Delta t = \frac{1}{\omega}\int_{u_2}^{u_1} \mathrm{d}u = \frac{1}{\omega}[u]_{u_2}^{u_1} = \frac{1}{\omega}\left[\arcsin\frac{x_1}{A} - \arcsin\frac{x_2}{A}\right].$$

再用 $\arcsin z = \pi/2 - \arccos z$ 便恢复前面的相位式。根号来自能量式，负号来自向左支路；端点处分母为零，但换元后的积分仍有限。这种方法与参考圆结果一致，参考圆同时标出转向前后的运动方向。

1.3 能量与有效参数

振子的速度随位置改变，能量式可以从运动方程直接得到。在一段单调运动中，链式求导给出 $\ddot{x} = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t) = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，所以 $mv\,\mathrm{d}v = -Kx\,\mathrm{d}x$。从初态 (x_0, v_0) 积分到任一状态 (x, v)，分别以 w, ξ 作积分变量：

$$m\int_{v_0}^{v} w\,\mathrm{d}w = -K\int_{x_0}^{x} \xi\,\mathrm{d}\xi, \qquad m\left[\frac{w^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = -K\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_{x_0}^{x}.$$

代入上下限并移项，有

$$\frac{m}{2}(v^2-v_0^2)=-\frac{K}{2}(x^2-x_0^2),\qquad \frac12 mv^2+\frac12 Kx^2=E.$$

转向处 $v=0$，能量关系由两侧连续性延伸到这一状态。把端点 $x=\pm A, v=0$ 代入，得 $E=KA^2/2$，继而 $v^2=\omega^2(A^2-x^2)$。向左运动取 $v=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$，向右运动取正根。平衡位置速率最大而加速度为零，端点速率为零而加速度大小最大，这是能量分配与回复力共同决定的。

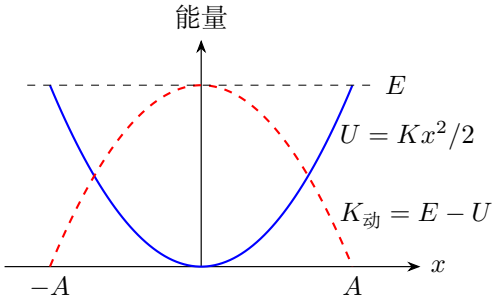


图 1.5: 位置只决定动能大小；同一动能仍可对应两个速度方向

图 1.5 中势能与动能相加恒为 E，同一个位置具有相同动能，往返方向则由运动的相位确定。若复杂装置只有一个独立坐标 q，应先写每个物体的速度和每根弹簧的形变，再合成系统能量。例如 $v_i=b_i\dot q$、$\Delta\ell_j=a_jq$ 时，

$$K=\frac12\Big(\sum_i m_ib_i^2\Big)\dot q^2,\quad U=\frac12\Big(\sum_j k_ja_j^2\Big)q^2.$$

于是 $M_{\text{eff}}=\sum m_ib_i^2$、$K_{\text{eff}}=\sum k_ja_j^2$。转动物体还要加 $I_i\dot\theta_i^2/2$。几何传动比平方进入惯性系数与势能系数。在上述传动比为常量的近似中，对能量逐项求导，

$$0=\frac{\mathrm d(K+U)}{\mathrm dt}=\frac{M_{\text{eff}}}{2}(2\dot q\ddot q)+\frac{K_{\text{eff}}}{2}(2q\dot q)=\dot q(M_{\text{eff}}\ddot q+K_{\text{eff}}q).$$

在运动区间约去 $\dot q$ 后，再由连续性延伸到转向瞬间，得到完整运动方程。

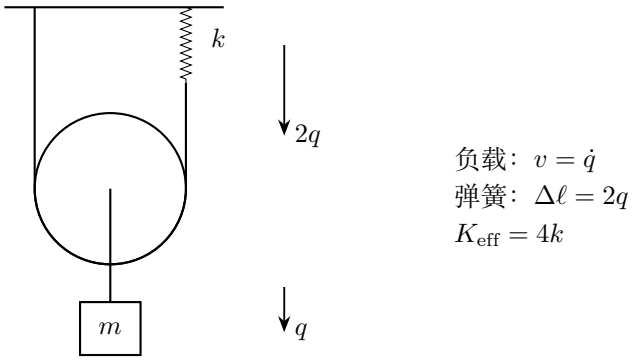


图 1.6: 以负载下移 q 为坐标，动滑轮使弹簧伸长增量为 2q

例如图 1.6 中，绳轮均无质量且无摩擦，负载相对静平衡下移 q。两支承绳段合计增加 $2q$，弹簧下端随之下移 $2q$。于是动能为 $m\dot{q}^2/2$，弹簧相对平衡的二次势能为 $k(2q)^2/2$，得到 $\omega=\sqrt{4k/m}$。重力与静态弹力的一次项在平衡处相消。若改以弹簧端位移 $Q=2q$ 为坐标，则有效质量变为 $m/4$、有效劲度为 k，频率完全相同。

这些有效参数应对应同一坐标。若改用 $Q=cq$，则 $M_Q=M_{\text{eff}}/c^2$、$K_Q=K_{\text{eff}}/c^2$，比值及周期不变。若速度传动比随 q 改变，动能系数一般也随位置改变；只有在平衡位置附近取其最低阶，并同时把势能展开到二次，才可直接套用小振动频率。

对质量可忽略的弹簧和连接件，图 1.7 中的串联连接点净力为零，两弹簧受力相同，形变量相加，故 $1/k_{\text{eq}}=1/k_1+1/k_2$；并联弹簧形变量相同，力相加，故 $k_{\text{eq}}=k_1+k_2$。例 1.4 中的动滑轮还引入位移倍数，需要将绳长约束与弹簧形变一起使用。

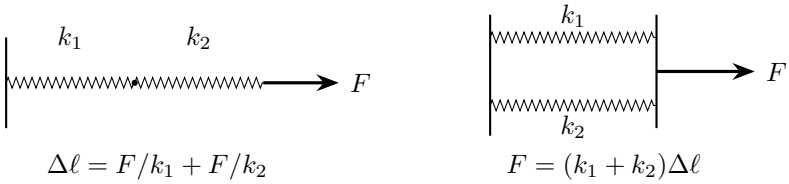


图 1.7: 串联相加的是形变量，并联相加的是对同一物体的弹力

1.3.1 平衡势能、重力做功与有效质量

竖直振子若以原长位置向下的坐标 z 计算，总势能为 $U=kz^2/2-mgz$。配方得 $U=k(z-mg/k)^2/2-m^2g^2/(2k)$。后一项为与位置无关的常数，不影响运

动。因而相对平衡位置的 $kx^2/2$ 是重力势能与弹性势能合成后、去掉常量的结果。这解释了“重力只改变平衡位置”在能量表达中的具体含义。

两物块用一根弹簧相连、在光滑水平面自由运动时，质心平移与弹簧伸长对应两种独立运动。图 1.8 取 x 向右，弹簧原长为 ℓ_0，相对伸长 $q = x_2 - x_1 - \ell_0$。记 $M = m_1 + m_2$，则质心速度和伸长速率分别满足

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = M V_C, \qquad v_2 - v_1 = \dot{q}.$$

由第二式 $v_2 = v_1 + \dot{q}$ 代入第一式，逐步得到

$$v_1 = V_C - \frac{m_2}{M}\dot{q}, \qquad v_2 = V_C + \frac{m_1}{M}\dot{q}.$$

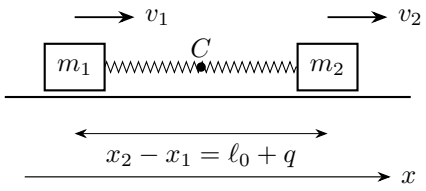


图 1.8: 质心平移与弹簧相对伸长的两个运动部分

图中 C 的运动描述整体平移，q 的变化描述两端相互靠近或远离。将两个速度代入动能，交叉项系数为 $-m_1 m_2/M + m_2 m_1/M = 0$；相对运动二次项的系数则为

$$m_1 \frac{m_2^2}{M^2} + m_2 \frac{m_1^2}{M^2} = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} = \frac{m_1 m_2}{M}.$$

因此 $K = M V_C^2/2 + \mu_r \dot{q}^2/2$，其中 $\mu_r = m_1 m_2/M$ 称为约化质量。水平外力为零使 V_C 恒定，平移能量不与弹簧交换；内部运动满足 $\mu_r \ddot{q} + kq = 0$，故周期为 $2\pi\sqrt{\mu_r/k}$。

从两物块各自的弹簧力也能得到相对运动方程：$m_1 \ddot{x}_1 = kq$、$m_2 \ddot{x}_2 = -kq$，相减得 $\ddot{q} = -k(1/m_1 + 1/m_2)q$，与能量法一致。两质量相等时 $\mu_r = m/2$，两端同时移动使相对伸长变化更快；$m_2 \to \infty$ 时 $\mu_r \to m_1$，才趋近固定端振子。若将第二物块固定，其速度变为零，弹簧伸长由第一物块单独决定，相应惯性系数就是 m_1。

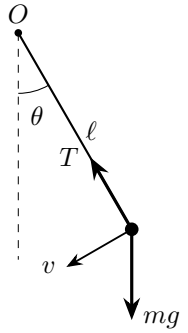
用能量识别频率时，还应区分系统是否有耗散。摩擦在运动中做负功时，端点逐次靠近，相图也随能量减少而向内收缩。平衡位置突然改变时，位置、速度连续传递到新中心的运动方程，具体计算将在参数改变一节展开。

1.4 小振动与单摆

对摆这样的可转动系统，以转角为坐标，切向位移便由摆长和转角共同确定。单摆的切向方程为 $ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$。当 $|\theta| \ll 1$ 且用弧度表示时，$\sin\theta \simeq \theta$，于是

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \qquad T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

小角近似简化了切向回复力。径向还满足 $T_s - mg\cos\theta = mv^2/l$，它给出绳张力。摆长是悬点至质点的距离，圆弧槽的小振动则由局部曲率半径决定。



切向：$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$
径向：$T - mg\cos\theta = mv^2/\ell$

图 1.9: 小摆近似线性化的是切向重力，径向向心加速度仍然存在

图 1.9 把切向与径向分开：周期来自切向线性化，张力则要由径向方程另求。更普遍地，若势能在平衡位置 q_0 附近可展开为 $U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}U''(q_0)(q-q_0)^2 + \cdots$，则稳定条件是 $U''(q_0) > 0$，小振动角频率为 $\sqrt{U''(q_0)/M_{\text{eff}}}$。若二阶项为零，平衡性质由最低阶的非零高阶项决定。

1.4.1 近似精度与周期的适用范围

单摆中 $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \cdots$，将三次项相对一次项比较，可用 $\theta_{\max}^2/6$ 估计回复力线性化的相对误差量级。此展开式中的 θ 以弧度表示。较大摆角保留三次及更高项，周期会随振幅增加。圆弧槽也应以最大弧长与曲率半径的比值作为小参数。

当一个振动系统包含刚体转动时，动能中的惯性参数是转动惯量 I。设回复力矩 $M = -\kappa\theta$，则 $I\ddot{\theta} + \kappa\theta = 0$，周期为 $2\pi\sqrt{I/\kappa}$。复摆中 $\kappa = mgd$，d 为悬点到质心距离，因此 $T = 2\pi\sqrt{I/(mgd)}$。均匀杆的惯量与质心距离分别进入这个表达式，这与质量集中于杆端的单摆有所不同。

判断周期是否与振幅无关时，要先确认运动方程的线性和约束的持续性。线性回复力可以给出严格等时性；几何非线性的小摆只在一阶近似下等时。振子越过

接触位置后，接触阶段与自由飞行阶段分别计时，完整往返时间会依赖释放高度，见例 1.5。

1.5 接触、摩擦与分段运动

理想简谐方程只在约束不变的区间成立。小球放在弹簧托盘上，共同运动的阶段由向上的支持力维持，支持力降到零时进入可能脱离的状态。存在库仑摩擦时，摩擦方向由速度决定，向右、向左两个阶段的平衡位置不同，每段仍可能是简谐形式，但整个运动不是等振幅的简谐运动。转向处速度为零，还须比较弹力和最大静摩擦力，决定是否能够再次启动。

处理阶段变化时，先确定切换条件，再把前一段末态的位移和速度作为下一段初始条件。接触与脱离通常连续传递位置、速度；碰撞则要先用冲量或恢复系数决定速度变化。各段持续时间由相应的运动方程和切换条件确定，相加得到全过程时间。

1.5.1 支持力限制与干摩擦的阶段连接

托盘承托小球时，先讨论二者共同运动是否成立。以共同平衡位置为 $x=0$、向上为正，若共同运动的角频率为 ω，则小球的竖直方程为 $N-mg=m\ddot{x}=-m\omega^2 x$，所以 $N=m(g-\omega^2 x)$。图 1.10 中的支持力只能向上，因而共同运动只在 $x\le g/\omega^2$ 内可能。振幅 $A<g/\omega^2$ 时全程满足；$A>g/\omega^2$ 时，小球在上行途中到达这一位置便脱离，速度由 $v^2=\omega^2A^2-g^2/\omega^2$ 确定。

恰有 $A=g/\omega^2$ 时，支持力只在最高点瞬时为零，速度也为零；此后小球向下运动，支持力恢复为正，二者保持接触。进入脱离阶段后，小球仅受重力，托盘的受力和振动中心也随载荷减少而改变。下一次接触发生在两者位置重合且相互靠近的时刻，接触前的两速度给出随后运动的初态。

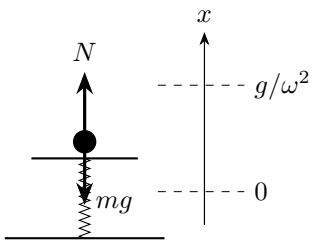


图 1.10: 承托接触中的真实受力与共同运动端点

干摩擦造成的分段平衡位置可以用同样的坐标方法处理。水平振子从原长右侧 $x=a>0$ 静止释放，弹力足以克服最大静摩擦，动摩擦大小为 f_k。向左运动时摩擦向右，因而

$$m\ddot{x}=-kx+f_k=-k(x-c),\qquad c=\frac{f_k}{k}.$$

令 $y=x-c$，得到 $\ddot{y}+\omega^2 y=0$、$\omega^2=k/m$。用前面已经求出的简谐通解，$y=C\cos\omega t+D\sin\omega t$。初态分别给出

$$C=y(0)=a-c,\qquad \omega D=\dot{y}(0)=0.$$

所以回到原坐标后，位置与速度为

$$x=c+(a-c)\cos\omega t,\qquad \dot{x}=-(a-c)\sin\omega t\cdot\omega.$$

下一次速度为零对应 $\omega t=\pi$，因此转向位置为

$$x_1=c+(a-c)\cos\pi=c-(a-c)=2c-a.$$

若 $a>2c$，左侧端点离原长的距离为 $a-2c$，较原来减少 $2f_k/k$。

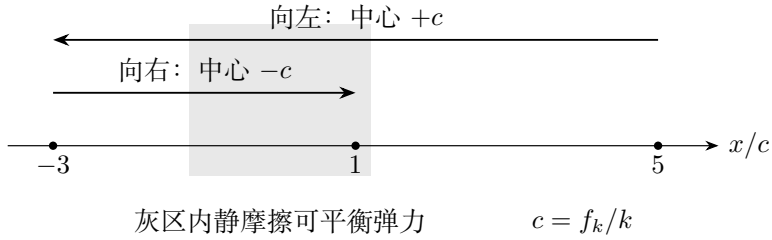


图 1.11: 示意取初端点 $a=5c$，最大静摩擦为 $1.2f_k$，振子在第二次转向时停住

图 1.11 将端点的推进与最终停止分开。振子到达 x_1 后，$|kx_1|\le f_{s,\max}$ 时静摩擦足以平衡弹力，振子停住；$|kx_1|>f_{s,\max}$ 时弹力使它反向启动，摩擦随之反向，振动中心也换到另一侧。在连续跨越两侧的运动阶段，每整周期的端点幅度减少 $4f_k/k$；末次转向则按静摩擦条件决定是否停住。这里的每段角频率相同，分段中心、机械能和后续是否还能振动却不同。

1.6 参数改变与振动测量

实验中测量周期，宜记录若干完整振动的总时间再除以次数，减少起止反应误差。以沿同一方向经过同一位置作为一次计数；相邻两次同方向过平衡位置之间恰为一个周期。由位移图读出振幅和周期后，还要由初始斜率判定速度方向，初始位移与曲线斜率共同给出初相。

竖直弹簧可由静伸长测得 $k/m = g/\delta_0$，从而预测 $T = 2\pi\sqrt{\delta_0/g}$。这个预测要求静态和振动中使用同一段线性弹性范围。弹簧质量、连接件质量或支承运动会改变动能中的惯性参数，也就影响实测周期。质量分布在弹簧内时，弹簧不同部分速度不同，参与动能的有效质量也不是简单等于整个弹簧质量。

突然增加恒力会平移平衡位置。若旧平衡点为零，新增向右恒力 F_0，新平衡为 $x_e = F_0/k$；切换瞬间旧位置 x_i 与速度 v_i 连续，新振幅为 $\sqrt{(x_i - x_e)^2 + v_i^2/\omega^2}$。若原来在旧平衡位置静止，则新振幅是 $|F_0|/k$。这是改变初态相对新中心的位置，角频率仍为原来的 ω。突然改变劲度时，新角频率和新能量关系随之改变，切换瞬间的位置与速度仍作为新运动的初始条件。

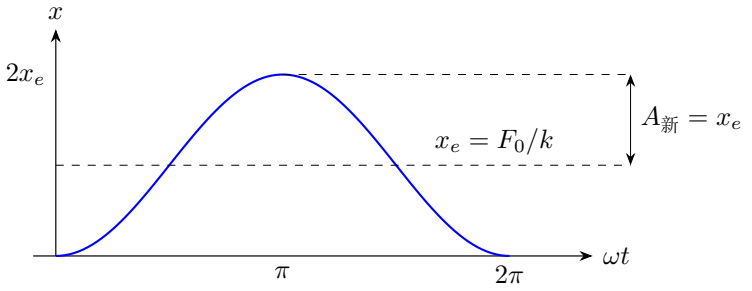


图 1.12: 突然加恒力后运动中心移到 x_e，初态相对新中心的偏离决定新振幅

图 1.12 取 $F_0 > 0$、旧平衡位置静止的初态。切换后 $m\ddot{x} = -kx + F_0 = -k(x - x_e)$，令 $y = x - x_e$ 后得到 $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$。通解 $y = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ 的初值为 $y(0) = -x_e$、$\dot{y}(0) = 0$，所以 $C = -x_e, D = 0$，恢复原坐标得 $x = x_e(1 - \cos\omega t)$。第一个端点在旧坐标 $2x_e$ 处；相对新中心的振幅为 x_e。曲线的周期仍为 $2\pi/\omega$。若外力随后撤去，就须以撤力瞬间的 x, v 再建立下一段初态。

真实振动受到小阻力时，振幅会缓慢衰减。用相邻多个周期比较振幅，可以区分能量损耗和单次初态误差。若阻力与速度近似成正比，线性方程还含 $\dot{x}$ 项；干摩擦则是按速度符号切换的恒力，两者的衰减规律不同。下面分别从速度阻力与周期驱动建立相应方程。

1.7 阻尼振动与受迫振动

1.7.1 速度阻力怎样使振幅衰减

将速度阻力写为 $-b\dot{x}$，取 $b > 0$，振子满足

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \qquad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

试取 $x=e^{st}$，则 $\dot{x}=se^{st}$、$\ddot{x}=s^2e^{st}$。代入并除以 me^{st}，得到

$$s^2+2\gamma s+\omega_0^2=0,\qquad s=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}.$$

弱阻尼 $\gamma<\omega_0$ 时，记 $\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$，两根为 $-\gamma\pm i\omega_d$，实通解为

$$x=e^{-\gamma t}(C\cos\omega_d t+D\sin\omega_d t).$$

保留乘积求导的两项，

$$\dot{x}=e^{-\gamma t}\left[-\gamma(C\cos\omega_d t+D\sin\omega_d t)-C\omega_d\sin\omega_d t+D\omega_d\cos\omega_d t\right].$$

初态 $x(0)=x_0$、$\dot{x}(0)=v_0$ 给 $C=x_0$、$-\gamma C+\omega_d D=v_0$，故 $D=(v_0+\gamma x_0)/\omega_d$。包络按 $e^{-\gamma t}$ 减小，相邻同向峰值间隔为 $T_d=2\pi/\omega_d$，峰值之比为 $e^{\gamma T_d}$。

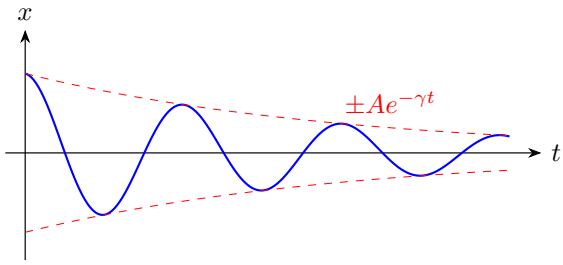


图 1.13: 弱阻尼振动的位移与指数包络；相邻同向峰值具有相同的衰减比

图 1.13 中，振子仍往返经过平衡位置，端点逐次靠近中心。其机械能的变化由原方程乘 $\dot{x}$ 直接给出：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=m\dot{x}\ddot{x}+kx\dot{x}=-b\dot{x}^2.$$

阻力持续将机械能转为内能。临界阻尼 $\gamma=\omega_0$ 时，两根重合；令 $x=e^{-\gamma t}z$，乘积求导得

$$\dot{x}=e^{-\gamma t}(\dot{z}-\gamma z),\quad \ddot{x}=e^{-\gamma t}(\ddot{z}-2\gamma\dot{z}+\gamma^2 z).$$

代入得到 $\ddot{z}=0$。从 $\dot{z}(0)=D$ 积分，$\dot{z}=D$，再从 $z(0)=C$ 积分，$z=C+Dt$，所以 $x=(C+Dt)e^{-\gamma t}$。过阻尼 $\gamma>\omega_0$ 时，两根 $s_\pm$ 均为负，解为 $x=Ce^{s_+t}+De^{s_-t}$。这两种情况由衰减指数控制，缺少弱阻尼解中的往复周期因子。

1.7.2 周期驱动、稳态振幅与共振

外力 $F_0\cos\Omega t$ 不断向系统输入能量，运动方程成为

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\Omega t.$$

稳态随驱动力同频，取 $x_p = a\cos\Omega t + c\sin\Omega t$。逐项求导，

$$\dot{x}_p = -a\Omega\sin\Omega t + c\Omega\cos\Omega t, \qquad \ddot{x}_p = -a\Omega^2\cos\Omega t - c\Omega^2\sin\Omega t.$$

代入并分别比较正、余弦系数，记 $D_0 = \omega_0^2 - \Omega^2$，得

$$D_0 a + 2\gamma\Omega c = F_0/m, \qquad D_0 c - 2\gamma\Omega a = 0.$$

第一式乘 D_0、第二式乘 $2\gamma\Omega$ 后相减，得到 $[D_0^2 + 4\gamma^2\Omega^2]a = (F_0/m)D_0$；反向消去 a，得到 $[D_0^2 + 4\gamma^2\Omega^2]c = (F_0/m)2\gamma\Omega$。因此可写成 $x_p = B\cos(\Omega t - \delta)$，其中

$$B = \sqrt{a^2 + c^2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}},$$

$$\cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{D_0^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}, \qquad \sin\delta = \frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{D_0^2 + 4\gamma^2\Omega^2}}.$$

从启动到稳态的完整解为 $x = x_p + x_h$，x_h 是前面求出的自由衰减解，系数由启动初态确定。经过若干衰减时间后，x_h 减小，留下由驱动持续维持的 x_p。

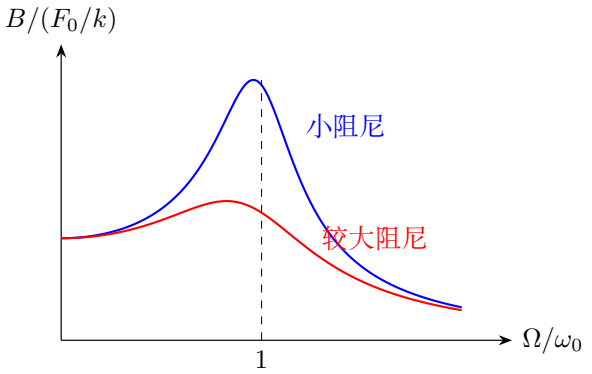


图 1.14: 驱动频率改变时的稳态振幅；阻尼较小时共振峰较高

图 1.14 的峰位由振幅分母最小确定。对分母平方 $H(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2$ 求导，

$$H' = 2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\gamma^2\Omega = 4\Omega(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2).$$

$\omega_0^2 > 2\gamma^2$ 时，正频率共振峰位于 $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$；阻尼很弱时它接近 ω_0。在 $\Omega = \omega_0$ 处，位移落后驱动力四分之一周期，振幅为 $F_0/(2m\gamma\omega_0)$。自由振动的频率由系统决定，稳态受迫振动的频率由外力决定，振幅则由系统对该频率的响应决定。

1.8 例题与分析

例 1.1 (竖直弹簧上的小球)**.** 质量 m 的小球由劲度系数 k 的竖直轻弹簧托着，上下振动。求周期，并求始终不脱离弹簧的振幅条件。

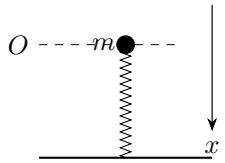


图 1.15: 题设：竖直弹簧上的小球

解　由静压缩量消去重力常量项

以图 1.15 中小球的静止位置 O 为原点，向下取 x 正方向。先求静压缩量：静止时 $k\delta_0 = mg$，故 $\delta_0 = mg/k$。小球下移 x 后压缩量是 $\delta_0 + x$，弹簧向上的支持力为 $N = k(\delta_0 + x)$。对小球列牛顿第二定律，

$$m\ddot{x} = mg - N = mg - k\delta_0 - kx = -kx.$$

方程可写成 $\ddot{x}+(k/m)x = 0$，与简谐方程比较得到 $\omega = \sqrt{k/m}$，因此 $T = 2\pi\sqrt{m/k}$。这一步成立的前提是球和弹簧保持接触。

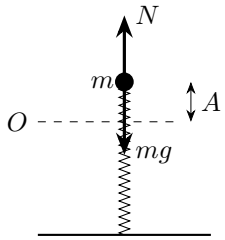


图 1.16: 解答过程：竖直弹簧上的小球

最高点的最小支持力与接触条件

图 1.16 画出最高点的受力，此时 $x = -A$。由于 N 随 x 单调增加，全程的最小支持力在最高点，

$$N_{\min} = k(\delta_0 - A) = mg - kA.$$

弹簧只能向上推球，故要求 $N_{\min} \geq 0$，解得 $A \leq mg/k$。等号表示最高点瞬时恰无支持力，随后球向下运动仍可恢复接触；若 $A > mg/k$，在到达上述最高点之前便已脱离，随后进入自由飞行阶段。周期不含 g，但允许振幅含 g，分别对应运动方程与单向接触约束。

例 1.2 (浮块的竖直小振动)**.** 密度 $\rho_b < \rho$、高 H、水平截面积 S 的均匀直柱浮在密度 ρ 的液体中。忽略液体随动惯性、液面变化及阻力，浮力始终按瞬时静水浸深计算。稍向下压后释放，求周期和保持部分浸没的振幅范围。

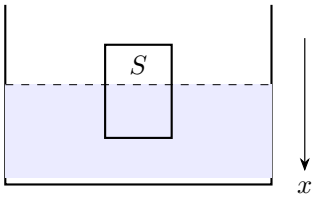


图 1.17: 题设：浮块的竖直小振动

解　由静浮力确定平衡浸深

在图 1.17 中取静止浸深为 d_0。浮块质量 $m = \rho_b SH$，静止时 $\rho g S d_0 = mg$，所以 $d_0 = \rho_b H/\rho$。令相对平衡位置向下位移为 x，此时浸深变为 $d_0 + x$，向上的浮力为 $B = \rho g S(d_0 + x)$。

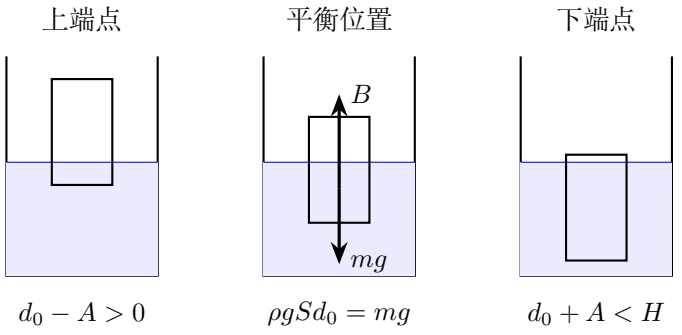


图 1.18: 液面近似固定时，三个位置的浸深分别为 $d_0 - A$、d_0、$d_0 + A$

由浸深增量得到线性回复力和周期

沿图 1.18 的向下方向列方程，

$$m\ddot{x} = mg - B = \rho g S d_0 - \rho g S(d_0 + x) = -\rho g S x.$$

两边除以 $m = \rho_b SH$，得 $\ddot{x} + [\rho g/(\rho_b H)]x = 0$，于是

$$\omega^2 = \frac{\rho g}{\rho_b H}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_b H}{\rho g}}.$$

始终部分浸没的振幅范围

上、下端点分别有浸深 $d_0 - A$、$d_0 + A$。要在整个周期内保持部分浸没，应同时满足 $d_0 - A > 0$ 和 $d_0 + A < H$，故 $A < \min(d_0, H - d_0)$。等号处刚好露出或全浸；再增大振幅，排液体积与位移的关系就要分段。截面积 S 同时进入惯性与浮力增量，约去后周期与 S 无关。

例 1.3 (静止三角框中的移动物体)**.** 三根相同均匀杆组成边长 l 的正三角框，顶点 C 铰接于固定水平轴。质量 m 的小物体可通过自身驱动调节与底杆的水平相互作用，沿底杆 AB 运动且不另受外部水平力，而框架始终静止。求物体的运动规律。

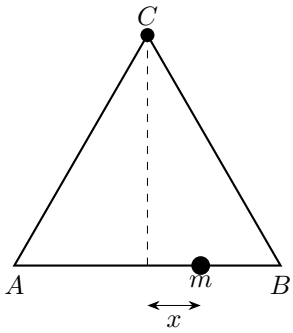


图 1.19: 题设：静止三角框中的移动物体

解　分清静止框架与运动物体的研究对象

在图 1.19 中记底边中点为 O，物体相对 O 向右位移 x，$CO = h = \sqrt{3}l/2$。框架保持静止，三根相同杆的总重力作用线通过 C，对悬点无力矩。设框架对物体的竖直力为 N，水平力的带符号分量为 f_x；物体无竖直加速度，故 $N = mg$。

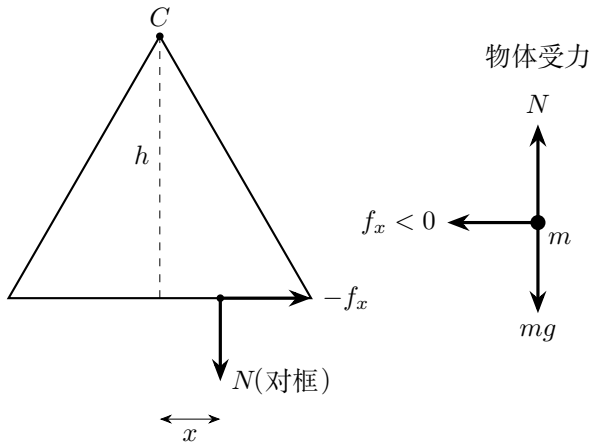


图 1.20: 先对静止框架取矩求相互作用，再对物体列平动方程

用框架零力矩求所需水平相互作用

图 1.20 右图对物体规定水平力 f_x 向右为正，在 $x > 0$ 时它实际向左。左图中物体对框架的反作用力为向下 N 及向右 $-f_x$。以逆时针力矩为正，对框架绕 C 取矩，

$$-Nx - hf_x = 0, \qquad f_x = -\frac{N}{h}x = -\frac{mg}{h}x.$$

由平动方程确定振动规律与运动范围

对图 1.20 右图的物体沿 AB 列平动方程：

$$m\ddot{x} = f_x = -\frac{mg}{h}x, \qquad \ddot{x} + \frac{g}{h}x = 0.$$

令 $\omega^2 = g/h$，用指数试解 $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$，两次求导分别为

$$\dot{x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}, \qquad \ddot{x} = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

代入运动方程，得到 $(\lambda^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0$。约去指数因子后，特征方程及其根为

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0, \qquad \lambda = \pm \mathrm{i}\omega.$$

两独立实解给出

$$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t, \qquad \dot{x} = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t.$$

将计时起点的状态记为 $x(0) = x_0$、$\dot{x}(0) = v_0$，分别代入上面两式：

$$x_0 = C, \qquad v_0 = \omega D, \qquad C = x_0, \quad D = \frac{v_0}{\omega}.$$

于是运动规律和周期为

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

振幅 $A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$ 须满足 $A \le l/2$，使物体不越过杆端。框架转动平衡给出驱动所需的水平力 $f_x = -mgx/h$；物体的平动方程据此给出上面的运动规律。题设主动驱动需要持续实现这一随位置改变的水平相互作用。

例 1.4 (弹簧和动滑轮的等效劲度)**.** 两竖直轻弹簧劲度为 k_1, k_2，下端由跨过轻动滑轮的不可伸长轻绳连接。滑轮轴悬质量 m 的物体。求竖直振动周期。

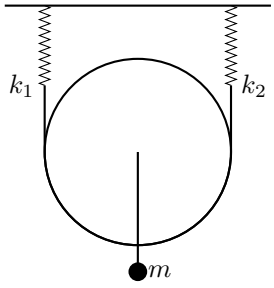


图 1.21: 题设：弹簧和动滑轮的等效劲度

解　先对两直绳段作长度变化分析

在图 1.21 中先以静平衡状态为基准。记绳张力为 $T_0 + \Delta T$，平衡时 $2T_0 = mg$。滑轮轴向下位移 x，两弹簧下端向下位移 x_1, x_2。两直绳段的长度增量分别为 $x - x_1$、$x - x_2$，包绕弧长不变，所以

$$(x - x_1) + (x - x_2) = 0, \qquad x_1 + x_2 = 2x.$$

由等张力求两个弹簧端点的位移分配

轻绳和轻滑轮使两侧张力相同，胡克定律给 $k_1x_1 = k_2x_2 = \Delta T$。代入约束，

$$\Delta T\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = 2x, \quad \Delta T = \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2}x.$$

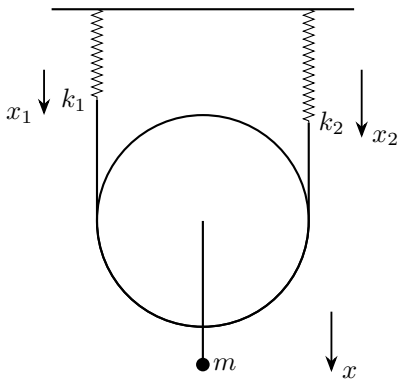


图 1.22: 两弹簧的端点位移相加为滑轮轴位移的两倍，恢复力则是两股张力增量之和

从支持力增量确定有效劲度和周期

图 1.22 中的两股绳各增加 ΔT 张力，支持力总增量为 $2\Delta T$。对轴和重物沿向下方向列方程，$m\ddot{x} = mg - 2(T_0 + \Delta T) = -2\Delta T$，故

$$K_{\text{eff}} = \frac{4k_1k_2}{k_1 + k_2}, \qquad T_{\text{osc}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{4k_1k_2}}.$$

$k_2 \to \infty$ 时 $x_1 = 2x$，得到 $K_{\text{eff}} = 4k_1$，弹簧形变倍数的平方进入了有效劲度。

例 1.5 (落球与弹簧的接触时间)**.** 质量 m 的小球从劲度系数 k 的理想竖直轻弹簧原长顶端上方 $h > 0$ 处静止释放，落到弹簧上后被弹回。小球不与弹簧连接。求接触时间随 h 如何变化。

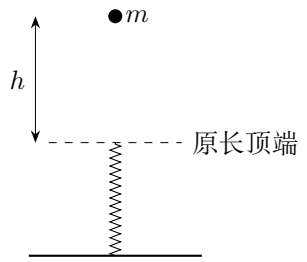


图 1.23: 题设：落球与弹簧的接触时间

解　用自由落体初速确定接触振动的振幅

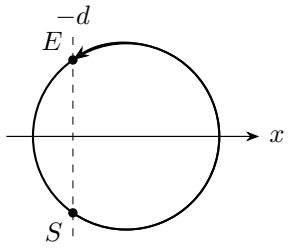
从图 1.23 释放点到原长顶端作自由落体，由 $v_0^2 = 2gh$ 得接触初速度 $v_0 = \sqrt{2gh}$，向下。接触后以压缩量 z 为坐标，$m\ddot{z} = mg - kz$。令 $d = mg/k$、$x = z - d$，方程变为 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$，其中 $\omega = \sqrt{k/m}$。由简谐方程的通解 $x = C\cos\omega t + D\sin\omega t$，

求导有 $\dot{x} = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$。以首次接触为 $t = 0$，初态 $x(0) = -d$、$\dot{x}(0) = v_0$ 给 $C = -d$、$D = v_0/\omega$，因此

$$x = -d\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

与 $A\cos(\omega t + \varphi)$ 比较，$A\cos\varphi = -d$、$-A\sin\varphi = v_0/\omega$。两式平方相加，得到

$$A^2 = x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} = d^2 + \frac{2gh}{\omega^2}.$$



S 接触，经右端到 E 脱离

图 1.24: 解答过程：落球与弹簧的接触时间

用进出接触时的速度方向选长相位弧

在图 1.24 参考圆中，接触和脱离都满足 $x = -d$，但 S 的速度向下为正，E 的速度向上为负。令 $\alpha = \arccos(d/A)$，其中 $0 \le \alpha < \pi/2$。采用 $x = A\cos\psi$、$\dot{x} = -A\omega\sin\psi$，两点相位依次可取 $\psi_S = -\pi + \alpha$、$\psi_E = \pi - \alpha$，故

$$\Delta\psi = 2\pi - 2\alpha, \qquad t_c = \frac{2(\pi - \alpha)}{\omega}.$$

释放高度怎样影响接触时间

从 S 到 E 沿相位增加方向经过最大压缩位置，对应图中的长弧。h 增大使 A 增大，d/A 减小，α 增大，故接触时间减小。$h \to 0^+$ 时 $\alpha \to 0, t_c \to T$；$h \to \infty$ 时 $\alpha \to \pi/2, t_c \to T/2$。所求 t_c 对应图中的接触阶段；从释放到分离的总时间还包括先前自由下落的 $\sqrt{2h/g}$。

例 1.6 (相向转轴上的木板)**.** 均匀木板放在间距 $2l$ 的两个转轴上。两轴接触点的表面速度相向，动摩擦系数为 μ。木板质心偏离中线 x，证明其作简谐运动并说明条件。将木板视为厚度可忽略的细板，两轴面速率足够大以维持图示滑动方向。

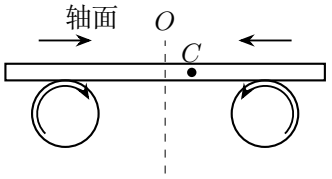


图 1.25: 题设：相向转轴上的木板

解 由薄板竖直平衡和零力矩求两反力

按图 1.25 令左右轴到中线距离均为 l，木板质心在中线右方 x。忽略板厚引起的摩擦力矩，板无竖直加速度且不转动。于是

$$N_L + N_R = mg, \quad N_L(l+x) = N_R(l-x).$$

将 $N_R = mg - N_L$ 代入第二式，得 $2lN_L = mg(l-x)$；再由总力式求得

$$N_L = \frac{mg(l-x)}{2l}, \qquad N_R = \frac{mg(l+x)}{2l}.$$

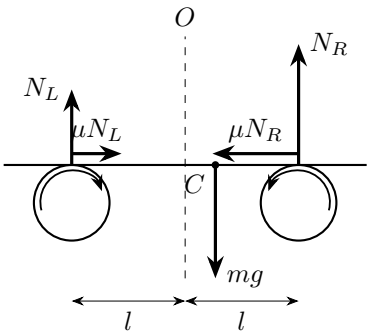


图 1.26: 质心右偏时右轴承重较多，左向摩擦占优；左右顶面的相对滑动方向必须持续不变

按相对滑动方向求净摩擦回复力

图 1.26 中两轴顶面向中间运动，且相对板始终滑动，所以左摩擦向右，右摩擦向左。向右取正，

$$m\ddot{x} = \mu N_L - \mu N_R = \frac{\mu mg}{2l}[(l-x) - (l+x)] = -\frac{\mu mg}{l}x.$$

运动周期及保持接触、相对滑动的条件

约去 m，$\omega^2=\mu g/l$，$T=2\pi\sqrt{l/(\mu g)}$。$x>0$ 时右侧承重更大，左向摩擦占优，确有回复作用。还须 $A<l$ 以保持两反力为正；若两轴面速率均为 w，充分条件是 $w>A\omega$，确保板速度不使滑动方向反转。若轴转向相反，合力变为正比于 x，中间平衡不稳定。

例 1.7 (初相、速度与到达时间)**.** 质点振幅 $A=0.06\,\mathrm{m}$，周期 $T=2\,\mathrm{s}$，初态 $x_0=0.03\,\mathrm{m}$ 且向正方向运动。求初相；再求其在同一位置向负方向运动时的速度、加速度，并从这次向负方向经过该位置起计，求到达平衡位置的最短时间。

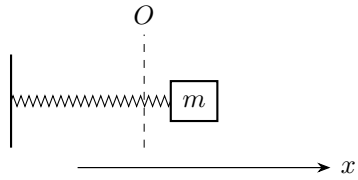


图 1.27: 题设：初相、速度与到达时间

解　用初态的位置和速度共同确定相位象限

图 1.27 取向右为正，角频率为 $\omega=\pi\,\mathrm{s}^{-1}$。由 $x_0=A\cos\varphi$ 得 $\cos\varphi=0.03/0.06=1/2$；又 $v_0=-A\omega\sin\varphi>0$，所以 $\sin\varphi<0$。余弦为正、正弦为负，初相位于第四象限，可取 $\varphi=-\pi/3$。

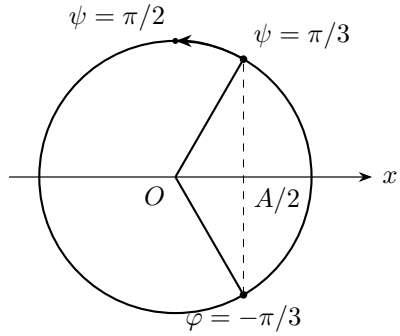


图 1.28: 先由速度正号选初相下半圆，再从向左经过 A/2 的上半圆状态计到平衡点的相位差

在向负方向经过该位置时计算速度和加速度

在图 1.28 中，向负方向经过 $x=A/2$ 对应相位 $\psi=\pi/3$。于是

$$v=-\frac{\sqrt{3}}{2}A\omega=-0.03\sqrt{3}\pi\,\mathrm{m/s},\quad a=-0.03\pi^2\,\mathrm{m/s^2}.$$

从本次经过时刻起累计最短相位差

接下来第一次到 O 时相位为 $\pi/2$，故 $\Delta t=(\pi/2-\pi/3)/\pi=1/6\,\mathrm{s}$。到达 O 前速度与加速度同为负，速率继续增加。

例 1.8（由衰减曲线测量振子参数）. 质量 $m=0.040\,\mathrm{kg}$ 的弹簧振子受线性速度阻力。图 1.29 给出相邻两个正向位移极大值，分别为 $10.0\,\mathrm{mm}$ 和 $8.0\,\mathrm{mm}$，相隔 $0.400\,\mathrm{s}$。求阻尼常量 γ 与弹簧劲度 k；若用角频率等于 $\omega_0=\sqrt{k/m}$ 的周期力维持 $10.0\,\mathrm{mm}$ 稳态振幅，求驱动力振幅。

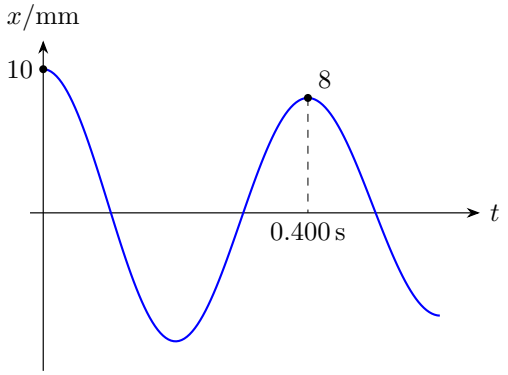


图 1.29: 相邻同向极大位移与衰减振动周期

解　同向峰值之比给出阻尼

图 1.29 中相邻正峰相隔一个衰减振动周期 T_d。振子方程为 $\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$，取 $x=e^{st}$，代入 $\dot{x}=se^{st}$、$\ddot{x}=s^2e^{st}$，特征根为

$$s=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}=-\gamma\pm i\omega_d,\qquad \omega_d^2=\omega_0^2-\gamma^2.$$

所以 $x=e^{-\gamma t}(C\cos\omega_d t+D\sin\omega_d t)$。用乘积法则求导，保留指数与三角函数的两项变化：

$$\dot{x}=e^{-\gamma t}\big[-\gamma(C\cos\omega_d t+D\sin\omega_d t)-C\omega_d\sin\omega_d t+D\omega_d\cos\omega_d t\big].$$

取首个正峰为 $t=0$，此时 $x(0)=x_0=10\,\mathrm{mm}$、$\dot{x}(0)=0$，分别代入位置、速度式得

$$C=x_0,\qquad -\gamma C+\omega_d D=0,\qquad D=\frac{\gamma x_0}{\omega_d}.$$

下一正峰相位增加 2π，括号内重复，故

$$\frac{x(0)}{x(T_d)}=e^{\gamma T_d},\qquad \gamma=\frac{1}{T_d}\ln\frac{10}{8}=\boxed{0.558\,\mathrm{s^{-1}}}.$$

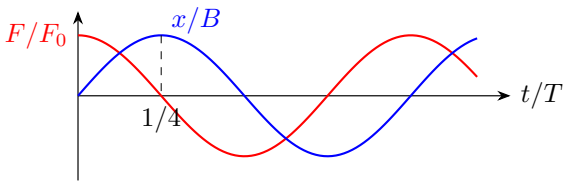


图 1.30: 在 $\Omega=\omega_0$ 的稳态中，位移落后驱动力四分之一周期

恢复固有频率，再求稳态驱动力

由测得周期，$\omega_d=2\pi/T_d=5\pi\,\mathrm{s}^{-1}$。于是

$$\omega_0=\sqrt{\omega_d^2+\gamma^2},\qquad k=m\omega_0^2=0.040[(5\pi)^2+(0.558)^2]=\boxed{9.88\,\mathrm{N/m}}.$$

图 1.30 中取 $x=B\sin\omega_0 t$。逐次求导得 $\dot{x}=B\omega_0\cos\omega_0 t$、$\ddot{x}=-B\omega_0^2\sin\omega_0 t$。代入 $m\ddot{x}+2m\gamma\dot{x}+kx=F_0\cos\omega_0 t$，惯性项与弹簧项相消，余下

$$2m\gamma B\omega_0\cos\omega_0 t=F_0\cos\omega_0 t.$$

比较系数，取 $B=0.0100\,\mathrm{m}$，得到

$$\boxed{F_0=2m\gamma\omega_0 B\simeq 7.01\times10^{-3}\,\mathrm{N}}.$$

稳态中驱动力补偿速度阻力，每周期输入的能量等于耗散的机械能。

1.9 本讲小结

稳定平衡附近的二次势能给出线性回复力，惯性系数与回复系数的比值确定角频率。初始位移、速度共同确定振幅和相位；能量描述速率随位置的变化，参考圆把运动方向与到达时间联系起来。

复杂装置先把各物体速度和弹簧形变写成同一坐标的函数，再求有效质量和有效劲度。脱离、碰撞和摩擦换向在各段之间传递初态。速度阻力使自由振动的包络衰减，周期外力则维持同频稳态响应，共振峰由系统的惯性、回复作用与阻尼共同形成。

1.10　练习

练习 1.1 (两物块和弹簧的离地条件)**.** 上物块质量 m_1、下物块质量 m_2，两者由劲度系数 k 的竖直轻弹簧连接，下物块起初在地面上。向下按上物块，待静止后撤去压力 F。求下物块开始离地的临界压力。

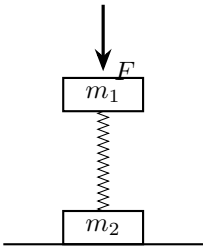


图 1.31: 题设：两物块和弹簧的离地条件

练习 1.2 (有干摩擦的弹簧振子)**.** $m = 2\,\mathrm{kg}$、$k = 400\,\mathrm{N/m}$，水平面静、动摩擦系数均为 0.2，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。弹簧自原长压缩 7 cm 后释放，求最大速度、最终位置及运动时间。

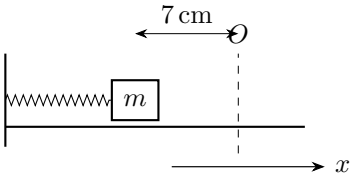


图 1.32: 题设：有干摩擦的弹簧振子

练习 1.3 (圆弧槽与自由落球)**.** 光滑圆弧槽曲率半径 R，弧长远小于 R。槽边缘小球 A 和最低点正上方高 h 处小球 B 同时静止释放。在小角近似下求它们在最低点相遇的全部 h。

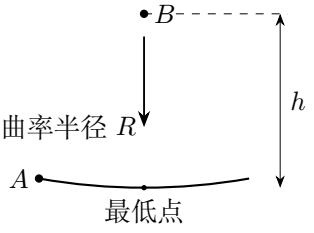


图 1.33: 小球 A 沿浅圆弧往复，小球 B 竖直下落，h 从槽的最低点起算

练习 1.4 (两弹簧夹持的水平振子)**.** 物块 m 在光滑水平面上，左右分别连接劲度 k_1, k_2 的弹簧。求相对平衡位置的小振动周期，并分析两弹簧初始预拉伸的影响。

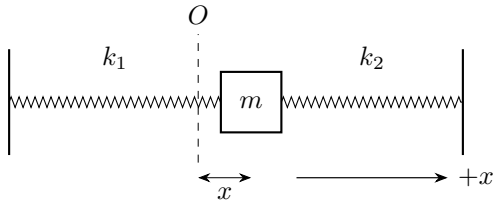


图 1.34: 以真实平衡位置 O 为零点，向右位移 x 使左弹簧变长、右弹簧变短

练习 1.5 (由位置和速度求振幅)**.** 振子角频率 $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$，某时刻 $x = 3\,\mathrm{cm}$，$v = -16\,\mathrm{cm/s}$。求振幅、能量中动能所占比例及下一次到右端点的时间。

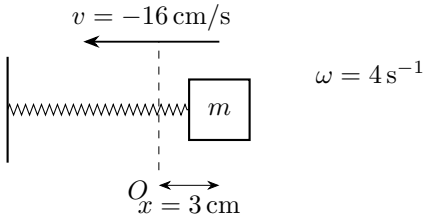


图 1.35: 同一时刻的正位移与负速度共同给出振幅和相位支路

练习解答

练习 1.1

解　在下物块未离地阶段确定上物块振幅

在下物块尚未离地的阶段，图 1.31 中下端固定，只有上物块振动。以弹簧压缩量 z 向下为正，撤去压力后的平衡压缩为 $z_0 = m_1 g/k$；施压静止时 $kz_i = m_1 g + F$，故 $z_i = (m_1 g + F)/k$。释放时速度为零，所以释放点是相对于新平衡位置的下端点，振幅

$$A = z_i - z_0 = \frac{F}{k}.$$

求最大伸长及对下物块的最大拉力

上物块到最高点时，压缩量最小，$z_{\min} = z_0 - A = (m_1 g - F)/k$。若 $F > m_1 g$，该处弹簧已经伸长，伸长量 $\Delta l = -z_{\min} = (F - m_1 g)/k$。

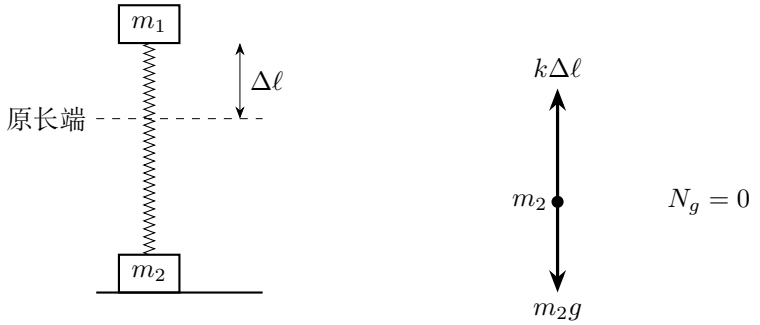


图 1.36: 临界时上物块位于最高点，弹簧伸长使下物块的地面支持力恰好归零

由地面支持力求离地临界压力

图 1.36 中下物块受到地面支持力 N_g、重力 m_2g 以及弹簧向上的拉力 $k\Delta l$。尚未离地时 $N_g = m_2g - k\Delta l$；最大拉力出现在上述最高点，所以最高点恰好达到零支持力的状态满足

$$N_g = 0, \quad k\Delta l = m_2g, \quad F - m_1g = m_2g.$$

所以临界压力为

$$\boxed{F_c = (m_1 + m_2)g}.$$

$F = F_c$ 对应上物块到达最高点时，下物块的支持力恰好降至零。$F > F_c$ 时，支持力在上升过程中先降至零，下物块随即离地。

练习 1.2

解　先比较初始弹力与静摩擦判断能否启动

图 1.32 取弹簧原长为 $x = 0$、向右为正。静、动摩擦大小均为 $f = \mu mg = 4\,\mathrm{N}$，相应位移尺度 $d = f/k = 1\,\mathrm{cm}$，固有角频率 $\omega = \sqrt{k/m} = 10\sqrt{2}\,\mathrm{s}^{-1}$。初态 $x_0 = -7\,\mathrm{cm}$ 处弹力为 $28\,\mathrm{N} > 4\,\mathrm{N}$，所以物块确实向右启动。

以右行阶段的新中心求全程最大速度

向右滑动时摩擦向左，平动方程为

$$m\ddot{x} = -kx - f = -k(x + d).$$

该段的平衡位置在 $-d = -1\,\mathrm{cm}$。令 $y = x + d$，方程化为 $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$。取指数试解 $y = \mathrm{e}^{st}$，逐次求导并代入：

$$\dot{y} = s\mathrm{e}^{st}, \qquad \ddot{y} = s^2\mathrm{e}^{st}, \qquad (s^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{st} = 0.$$

特征根为 $s=\pm\mathrm{i}\omega$，因而实通解和速度为

$$y=C\cos\omega t+D\sin\omega t,\qquad \dot y=-\omega C\sin\omega t+\omega D\cos\omega t.$$

初态给 $y(0)=x_0+d=-6\,\mathrm{cm}$、$\dot y(0)=0$，所以 $C=-6\,\mathrm{cm}$、$\omega D=0$。回到 $x=y-d$，得到

$$x=-d-(6\,\mathrm{cm})\cos\omega t,\qquad \dot x=(6\,\mathrm{cm})\omega\sin\omega t.$$

第一段经过中心时达到全程最大速率

$$\boxed{v_{\max}=0.06\omega=0.6\sqrt{2}\,\mathrm{m/s}}.$$

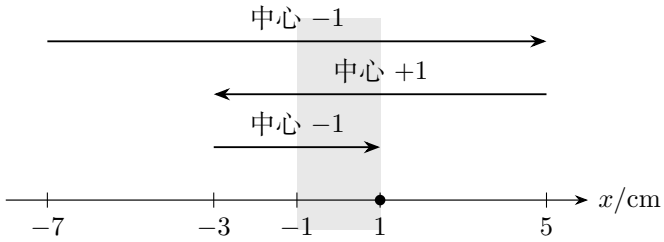


图 1.37: 逐段更换中心，从负 7 到正 5、再到负 3、最后到正 1 厘米

逐次更新方向、中心和端点

图 1.37 中，第一段从左端点到右端点，历时 π/ω，到 $x_1=-1+6=5\,\mathrm{cm}$。此处 $|kx_1|=20\,\mathrm{N}>f$，随后向左启动。向左滑动时中心改为 $+1\,\mathrm{cm}$，振幅为 $4\,\mathrm{cm}$，再过 π/ω 到 $x_2=1-4=-3\,\mathrm{cm}$。那里弹力大小 $12\,\mathrm{N}>f$，又向右启动；中心回到 $-1\,\mathrm{cm}$，该段振幅为 $2\,\mathrm{cm}$，到 $x_3=-1+2=1\,\mathrm{cm}$。

用静摩擦判停并累加三个半周期

末态速度为零且 $|kx_3|=4\,\mathrm{N}$，静摩擦恰能平衡弹力，因此之后保持静止：

$$\boxed{x_f=+1\,\mathrm{cm}},\qquad \boxed{t_{\text{运动}}=3\pi/\omega=\frac{3\pi}{10\sqrt{2}}\,\mathrm{s}}.$$

后两段的振幅分别为 4 厘米与 2 厘米，小于第一段的 6 厘米，所以前面计算的最大速率确为全程最大值。

练习 1.3

解 由圆弧曲率建立小振动方程

图 1.33 以槽的最低点为 $s=0$，沿弧向右为正。弧长位移为 $s=R\theta$，小角运动中 $\sin\theta\simeq\theta=s/R$，所以切向方程为

$$m\ddot{s}=-mg\sin\theta\simeq-\frac{mg}{R}s.$$

在线性近似中令 $\omega=\sqrt{g/R}$，有 $\ddot{s}+\omega^2 s=0$。取 $s=\mathrm{e}^{\lambda t}$，分别求导：

$$\dot{s}=\lambda\mathrm{e}^{\lambda t},\qquad \ddot{s}=\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

代入后约去指数因子，得到 $\lambda^2+\omega^2=0$，根为 $\lambda=\pm\mathrm{i}\omega$，因此

$$s=C\cos\omega t+D\sin\omega t,\qquad \dot{s}=-C\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t.$$

从左端点静止释放，初态为

$$s(0)=-a=C,\qquad \dot{s}(0)=0=\omega D.$$

故 $C=-a$、$D=0$，在线性模型中的运动和周期为

$$s=-a\cos\omega t,\qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

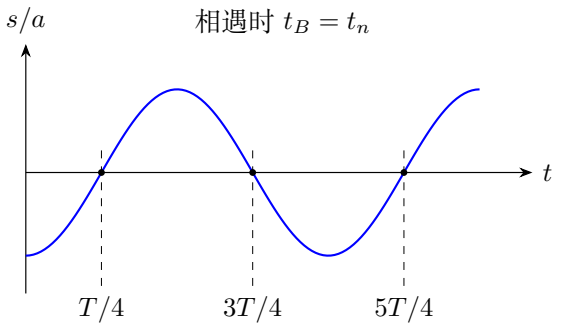


图 1.38: 槽内小球每隔半个周期经过最低点，各次过零分别与自由落体到达时刻比较

列出经过最低点的各次时刻

图 1.38 中，最低点对应 $s=0$ 的各次过零。令 $\cos\omega t=0$，得到

$$t_n=\frac{T}{4}+\frac{nT}{2}\simeq\frac{(2n+1)\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

将自由落球时刻与过零时刻相接

B 从静止自由落下，以向下位移 y 为正。由 $\ddot{y}=g$ 和 $\dot{y}(0)=0$，有

$$\dot{y}(t)=\int_0^t g\,\mathrm{d}\tau=gt,\qquad y(t)=\int_0^t g\tau\,\mathrm{d}\tau=\left[\frac{1}{2}g\tau^2\right]_0^t=\frac{1}{2}gt^2.$$

到槽底时 $y=h$，所以 $t_B=\sqrt{2h/g}$。令 $t_B=t_n$ 并平方，得到小角近似下的各个高度

$$\boxed{h_n\simeq\frac{\pi^2R}{8}(2n+1)^2},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

其中 $n=0$ 对应 A 第一次到最低点，$n=1,2,\ldots$ 对应以后每隔半个周期的再次经过。

练习 1.4

解　分别写出两根弹簧实际拉力的变化

图 1.34 以真实平衡位置为 $x=0$。设平衡时两弹簧拉力均为 F_0，向右位移 x 后，左弹簧的实际左向拉力为 $F_L=F_0+k_1x$，右弹簧的实际右向拉力为 $F_R=F_0-k_2x$。因此

$$F_x=F_R-F_L=(F_0-k_2x)-(F_0+k_1x)=-(k_1+k_2)x.$$

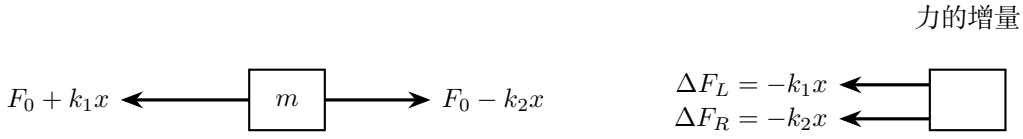


图 1.39: 实际拉力仍分居两侧；扣去平衡值后，两个力的变化量都向左

由增量合力确定有效劲度与周期

图 1.39 左图画实际拉力，右图画相对于平衡状态的力增量。向右位移 x 时，左向拉力增加 k_1x，右向拉力减少 k_2x，两项合起来给有效劲度 k_1+k_2。运动方程为

$$\ddot{x}+\omega^2x=0,\qquad \omega^2=\frac{k_1+k_2}{m}.$$

取试解 $x=\mathrm{e}^{\lambda t}$，其一、二阶导数为 $\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$、$\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$，代入后得到

$$(\lambda^2+\omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t}=0,\qquad \lambda=\pm\mathrm{i}\omega.$$

所以实通解为 $x = C\cos\omega t + D\sin\omega t$。初态 $x(0) = x_0$、$\dot{x}(0) = v_0$ 分别给 $C = x_0$、$D = v_0/\omega$，运动为

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}}.$$

区分平衡位置改变与周期改变

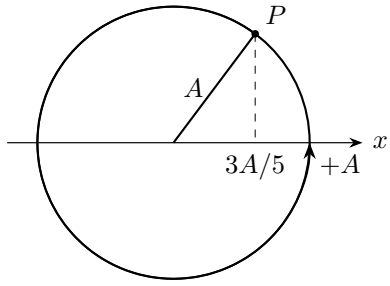
两弹簧持续与物块连接并服从线性弹性关系时，预拉伸影响平衡位置，回复力对偏移的斜率仍为 $-(k_1 + k_2)$。例如原参考位置的左右拉力分别为 F_{L0}, F_{R0}，在该坐标中合力为 $F_x = F_{R0} - F_{L0} - (k_1 + k_2)x$。令 $F_x = 0$ 可得新平衡位置 $x_e = (F_{R0} - F_{L0})/(k_1 + k_2)$；以 $x - x_e$ 为振动坐标，周期仍为上式。

练习 1.5

解　把位置和速度统一单位后共同求振幅

图 1.35 给出 $x = 3\,\mathrm{cm}$、$v = -16\,\mathrm{cm/s}$ 和 $\omega = 4\,\mathrm{s}^{-1}$，故 $v/\omega = -4\,\mathrm{cm}$。总能量 $E = m\omega^2A^2/2$ 等于动能 $mv^2/2$ 与势能 $m\omega^2x^2/2$ 之和，因而

$$A = \sqrt{x^2 + v^2/\omega^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2}\,\mathrm{cm} = \boxed{5\,\mathrm{cm}},$$
$$\frac{E_k}{E} = \frac{mv^2/2}{m\omega^2A^2/2} = \frac{(-4)^2}{5^2} = \boxed{\frac{16}{25}}.$$



$$\Delta\psi = 2\pi - \arccos(3/5)$$

图 1.40: 从已知上半圆状态沿相位增加方向走长弧，下一次才到右端点

用速度负号选相位并求下一次右端点时间

图 1.40 中 $x/A = 3/5$ 而 $v < 0$，相位 $\psi = \arccos(3/5)$ 位于第一象限。下一次右端点相位为 2π，故 $\Delta t = [2\pi - \arccos(3/5)]/4$。相位从第一象限继续增大到 2π，路径依次经过左端点与平衡位置，最后到达右端点。

振动与波

物理竞赛一轮讲义

第二讲

行波与波的传播

2026

目录

第二讲　行波与波的传播 **1**

2.1　从局部振动到波的传播 1

2.2　延迟时间与行波表达式 3

2.3　波形图与振动图的转换 3

2.4　相位差与波长的确定 5

2.5　相邻振子的耦合与波动方程 6

2.6　反射、折射与衍射的几何解释 10

2.7　例题与分析 13

2.8　本讲小结 18

2.9　练习 18

练习解答 20

第二讲　行波与波的传播

2.1　从局部振动到波的传播

轻抖长绳的一端，可以看见一个隆起沿绳前进；在绳上作一个标记，标记随当地绳段上下运动。沿绳前进的是各绳段依次出现的振动状态。相邻绳段通过张力相互作用，使这种状态从振源传到远处，形成机械波。空气中的压缩与稀疏则通过相邻气层间的压强作用传播。

描述这两个过程，要同时使用质点的振动速度与波形的传播速度。前者描述一个材料点怎样运动，后者描述某一相位怎样到达其他位置。图 2.1 将振动方向与传播方向放在同一张图中。

横波的振动方向垂直于传播方向，纵波的振动方向平行于传播方向。纵波也能用位移随平衡位置的函数表示，纵坐标 ξ 记录沿传播方向的有符号位移。相邻点位移的差别改变它们的间距，进而改变密度与压强；后面的纵波小节将从这一间距变化推导压缩量。

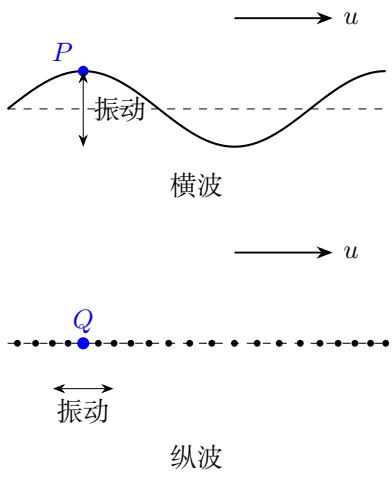


图 2.1: 横波沿横向往复，纵波沿传播方向往复；标记的是同一材料点

图 2.1 中，横波的 P 沿竖直线往复，纵波的 Q 沿水平线往复；箭头 u 追踪相位的传播。横波的材料点位移与 u 垂直，纵波的位移与 u 平行。

在线性小振幅模型中，材料点在各自平衡位置附近往复，振动状态及能量向外传播。练习 2.6 将用浮球说明这一近似中的往复运动。

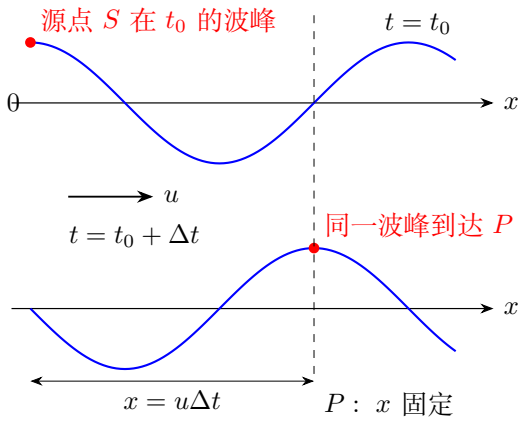


图 2.2: 同一波形的两个时刻；红点追踪同一相位，虚线标出固定观察位置

图 2.2 比较整条介质在两个时刻的形状。源点 S 与观察点 P 的平衡位置各自固定，红色标记追踪波峰的传播，源点 S 和观察点 P 分别作当地的振动。下图 P 的状态等于上图 S 的状态，因此相同的振动历程到达 P 时整体延迟 x/u。这一对应关系将在建立行波表达式时使用。

2.1.1　振源、媒质与波形之间的因果联系

将介质想象为许多有弹性联系的小单元，先运动的单元通过相互作用推动相邻单元。相互作用逐步传递，远处单元的启动晚于近处。一个质点的完整振动历程与某时刻整条介质的形状是不同截面：前者追踪一个位置随时间的变化，后者比较同一时刻不同位置的位移。两幅图看起来都像正弦曲线，横轴却记录不同信息。

振幅小到使介质响应近似线性时，连续正弦驱动可形成同频率行波。对于球面波，即使没有耗散，能量也分散到不断增大的球面上，振幅通常随传播距离减小；平面波式中取常数 A 相当于忽略几何扩散。双源干涉计算中所用的振幅，是每一列波到达观察点时的振幅。

波形是否保持不变也有条件。无色散近似下，不同频率成分以相同速率前进，任意波包可以写成 $f(x-ut)$。如果介质存在色散，不同成分逐渐分离，单一相速度仍可对简谐分量定义，但整个波包不再是刚性平移。竞赛中的基础弦波通常采用无色散模型；浅水波在波长远大于水深 h 时可取 $u \simeq \sqrt{gh}$，较深水中的波速还依赖波长。

2.2 延迟时间与行波表达式

设原点的振动为 $y_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，波沿正 x 方向以速率 u 传播。图 2.2 所标同一相位从源点到位置 x 所需时间为 $\Delta t=x/u$。因此该处质点在时刻 t 重现的是源在 $t-x/u$ 时刻的状态，应把源函数中的 t 替换为 $t-x/u$：

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-x/u)+\varphi_0]=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0),\quad k=\omega/u=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

这一步替换的物理意义是，x 处此刻重现振源在较早时刻的状态。它同时给出 $u=\lambda/T=f\lambda$。向负方向传播时用 $t+x/u$，于是相位为 $\omega t+kx+\varphi_0$。若将整个相位乘以负一，余弦函数不变，求传播方向时令相位不变，$\omega\,\mathrm{d}t-k\,\mathrm{d}x=0$ 给出 $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t=\omega/k=u>0$。

对任意不变形波包，同样有 $y=f(x-ut)$ 或 $f(x+ut)$。若振源从 $t=0$ 才开始振动，正向传播区域为 $0\le x\le ut$，波前之外的介质保持启动前的状态。练习 2.1 将写出这两段运动。

2.3 波形图与振动图的转换

固定 $t=t_0$ 得到波形图，横轴是各质点的平衡位置 x；固定 $x=x_0$ 得到振动图，横轴是时间 t。从波形图读波长，从振动图读周期，两种横轴分别给出空间周期与时间周期。把波形稍向传播方向平移，就能看出某一固定位置的下一时刻位移。

图 2.3 中，正向波的波形向右平移，固定点在下一瞬间取得它左侧的位移。取正向波 $y=f(\xi)$、$\xi=x-ut$。对 t 求偏导时固定 x，对 x 求偏导时固定 t，所以

$$\partial_t y=f'(\xi)(-u),\qquad \partial_x y=f'(\xi),\qquad \partial_t y=-u\partial_x y.$$

图中的上升斜率于是对应向下的质点速度。若波向左传播，$\xi=x+ut$，时间偏导的系数改为 $+u$。波峰与波谷处空间斜率为零，两处的质点速度也为零。

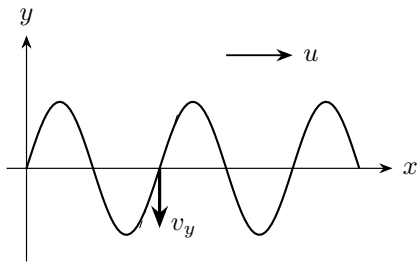


图 2.3: 正向波中波形斜率和质点速度反号

图中竖直箭头标出这个材料点的瞬时速度，水平箭头 u 则指示波形的传播方向。

2.3.1　波形斜率与材料点速度

对 $y = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$，令 $\psi = \omega t - kx + \varphi_0$。固定位置时 $\partial_t \psi = \omega$，固定时间时 $\partial_x \psi = -k$；分别用链式法则，

$$v_y = (-A\sin\psi)\partial_t\psi = -A\omega\sin\psi, \qquad \partial_x y = (-A\sin\psi)\partial_x\psi = Ak\sin\psi.$$

再固定 x 对 v_y 求导，得到 $a_y = (-A\omega\cos\psi)\partial_t\psi = -A\omega^2\cos\psi = -\omega^2 y$。因此，简谐波的波形图上，同一点的斜率给出速度方向，带符号的位移给出加速度方向。例 2.1 将从 P 处的上升斜率读出它初始向下的速度。

如果题目给的是一张任意形状的瞬时波形，只要确认它向右不变形传播，上述斜率关系仍成立，无需先把它拟合成正弦函数。位移处在局部最大处时，一阶斜率为零，下一步可由曲率和波动方程判断加速度。对于简谐波 $a_y = -\omega^2 y$；一般不变形波包的加速度为 $a_y = u^2\partial_{xx} y$，由波形的局部曲率确定。

从某一瞬时波形写出波动方程时，可以先求空间式 $y(x, t_0) = f(x)$，再把 x 替换为 $x - u(t - t_0)$。从某点振动图写波动方程时，则先写 $g(t)$，再替换为 $t - (x - x_0)/u$。两个入口等价，但替换的变量不同。例 2.1 从瞬时波形出发，例 2.4 从振源初态出发，两种表示都由传播延迟联系。

2.3.2　有限波列的前缘、后缘和空间长度

连续简谐波的公式默认振源已经持续工作；若振源只在 $0 \le t \le \tau_s$ 内振动，停止信息也随波向前传播。向右传播时，某点开始运动的条件是 $t - x/u = 0$，停止条件是 $t - x/u = \tau_s$。因此在时刻 t，已经受到扰动且尚未接到停止信息的区域满足

$$0 \le t - \frac{x}{u} \le \tau_s, \qquad u(t - \tau_s) \le x \le ut.$$

图 2.4 中前缘在 ut，后缘在 $u(t - \tau_s)$，两者均以相同波速前进；当 $t > \tau_s$ 时，波列总长为 $u\tau_s$，即使源已停，远处仍可能尚在振动。若 $t < \tau_s$，后缘尚未形成，实际受扰区域应与绳的范围 $x \ge 0$ 取交集。

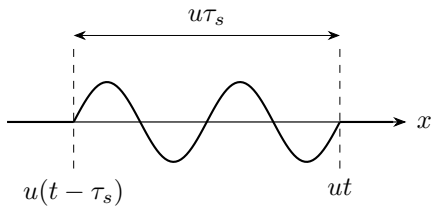


图 2.4: 源停止后的有限波列及前后端点

若源完成 N 个完整振动才停止，则 $\tau_s = NT$，波列空间长度为 $uNT = N\lambda$。波列内包含多少个周期，取决于源振动次数；某个质点经历多少次振动，也等于这个次数，每一个振动周期在空间中占据一个波长。介质点的横向运动距离与波列沿绳的长度是两种量。

在前、后缘恰好出现位移不连续，会使理想弦斜率或速度含奇异变化。实际振源总有有限启动和停止过程，波列边缘因而较平滑；基础计算可使用分段函数，但应说明它是理想化。若源停止在非零位移处，停止后的端点位置随同停止信息向外传递；因此有限波列的分段函数应包含给定的停止状态。

有限波列遇到端点后，反射波列与入射波列只在时空重叠区域内叠加。反射波的前缘到达某点以后，该点才开始叠加入射与反射扰动。处理启动题时，先由边缘定位受扰区，再在区内使用相位公式，端点处的位移和速度再与相应约束相接，这一顺序与无限波的参数识别不同。

2.4 相位差与波长的确定

在同一时刻，正向波两点的相位差为 $\psi_2 - \psi_1 = -k(x_2 - x_1)$。振动图给出相位差模 2π 的值，另以整数 n 记录中间的完整波长数。若两点相距 d，测得相位滞后 δ，则 $kd = \delta + 2\pi n$，从而 $\lambda = 2\pi d/(\delta + 2\pi n)$。只保留使 $\lambda > 0$ 的整数分支，并根据波向重新判断相位先后。

“两点同相”只说明 $d = n\lambda$；其中 n 是两点之间的完整波长数。“两点反相”给出 $d = (n + \frac{1}{2})\lambda$。知道周期仍可能对应多组波长和波速。额外的传播距离、到达时间、介质波速范围可以帮助选取唯一分支，例 2.2 将分别列出左右两种传播方向的全部分支。

若两次瞬时波形相隔 Δt，对应波峰的平移量看似为 Δx，实际还可能多传播了 $n\lambda$，所以 $u = (\Delta x + n\lambda)/\Delta t$。若两图形状相反，还可能是半周期相位差。题给波峰对应关系、传播距离上界或短时间范围后，即可筛选整数 n。它和两点振动图的整数分支来自同一相位周期性。

设由图像已知 λ、波向，而某点在 Δt 内从零位移向上运动到正端点，首次到达时取 $\Delta t = T/4$；经过额外的整周期后还有 $\Delta t = T/4 + nT$。从正端点到负端点同样可能历经多个周期。重建运动过程应先列事件顺序，把额外整周数保留到可由条件排除时再删除。

2.5　相邻振子的耦合与波动方程

弹性联系可以用一串等质量 m_0 的小球和劲度系数 κ 相同的轻弹簧表示。平衡间距为 a，第 j 个小球的纵向位移为 ξ_j。图 2.5 中右弹簧的伸长增量为 $\xi_{j+1}-\xi_j$，左弹簧的伸长增量为 $\xi_j - \xi_{j-1}$，两侧弹力给出

$$m_0\ddot{\xi}_j = \kappa(\xi_{j+1}-\xi_j) - \kappa(\xi_j - \xi_{j-1}) = \kappa(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}).$$

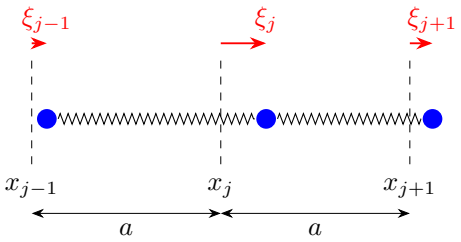


图 2.5: 相邻弹簧的伸长之差决定中间小球的合力，扰动由此逐段传递

波长远大于间距 a 时，位移随位置缓慢变化，可将 $\xi_j(t)$ 写成连续函数 $\xi(x,t)$。在 x 附近展开两侧位移，

$$\xi(x \pm a, t) = \xi(x,t) \pm a\xi_x + \frac{a^2}{2}\xi_{xx} + \cdots .$$

两式相加后一次项抵消，$\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1} \simeq a^2\xi_{xx}$，所以

$$\xi_{tt} = u^2\xi_{xx}, \qquad u^2 = \frac{\kappa a^2}{m_0}.$$

这就是一维无色散波动方程。弹簧的回复作用与小球的惯性共同给出波速。下面对柔弦直接取微元，建立同一形式的方程，并求出弦波对应的 u。

2.5.1　柔弦微元与横波波速

波速由相邻介质微元之间的作用及其惯性决定。对平衡张力为 $\mathcal{T}$、线密度为 μ_ℓ 的柔软细弦，取图 2.6 中从 x 至 $x + \mathrm{d}x$ 的微元。它受到左端向左下的张力、右端沿切线的张力，两者应分别画在微元的两个端点。小斜率时，真实弧长 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y_x^2}\,\mathrm{d}x \simeq \mathrm{d}x$，微元质量为 $\mu_\ell\,\mathrm{d}x$。

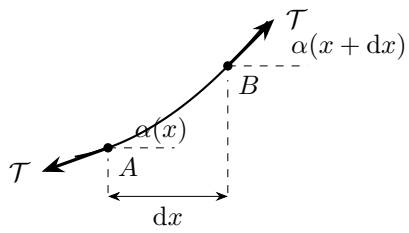


图 2.6: 弦微元两端张力的方向差产生横向合力

沿竖直方向使用牛顿第二定律，

$$\mu_\ell \,\mathrm{d}x\, y_{tt} = \mathcal{T}[\sin\alpha(x+\mathrm{d}x) - \sin\alpha(x)].$$

将 $\sin\alpha \simeq \tan\alpha = y_x$ 代入，再将两端斜率之差写为 $y_{xx}\,\mathrm{d}x$，约去 $\mathrm{d}x$，得到 $y_{tt} = (\mathcal{T}/\mu_\ell)y_{xx}$。对不变形波 $y = f(\eta)$、$\eta = x - ut$，有 $\partial_t\eta = -u$、$\partial_x\eta = 1$，因此

$$y_t = -uf'(\eta), \quad y_{tt} = (-u)f''(\eta)(-u) = u^2 f''(\eta), \qquad y_x = f'(\eta), \quad y_{xx} = f''(\eta).$$

代入微元方程得 $[u^2 - \mathcal{T}/\mu_\ell]f'' = 0$；对有非零曲率的扰动，系数须为零，才得到 $u = \sqrt{\mathcal{T}/\mu_\ell}$。张力提供回复作用，线密度提供惯性；量纲 $[\mathcal{T}/\mu_\ell] = \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ 也与速率平方相符。

这里把张力视为已存在的近似恒量，并忽略弦的弯曲刚度和耗散。大振幅引起明显伸长时，张力变化会反过来改变传播；杆的弯曲刚度则产生另一种回复机制，相应波速还可随频率变化。振源频率给定时，增加张力使 u 增大，波长 $\lambda = u/f$ 随之增大，频率仍由驱动决定。

2.5.2 弦微元方程中的近似与平均功率

弦元的动能为 $\mathrm{d}K = \mu_\ell y_t^2\,\mathrm{d}x/2$。其弯曲使真实长度比水平投影增加

$$\mathrm{d}s - \mathrm{d}x = \left(\sqrt{1+y_x^2} - 1\right)\mathrm{d}x \simeq \tfrac{1}{2}y_x^2\,\mathrm{d}x.$$

在恒定预张力近似下，增加的势能为张力乘这段长度增量，故每单位水平长度 $u_U = \mathcal{T}y_x^2/2$。对正向简谐行波，$y_t = -A\omega\sin\psi$、$y_x = Ak\sin\psi$，再用 $\mathcal{T}k^2 = \mu_\ell\omega^2$，可见动能与势能密度在同一点同时相等。求周期平均时，在固定位置取起始相位为 ψ_0，换元 $\psi = \omega t + \psi_0$、$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\psi/\omega$，得到

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\psi_0)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi}\frac{1-\cos 2\psi}{2}\,\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\psi}{2} - \frac{\sin 2\psi}{4}\right]_{\psi_0}^{\psi_0+2\pi} = \frac{1}{2}.$$

所以平均总密度为 $\overline{u}_E = \mu_\ell\omega^2A^2/2$，动能和势能各自的平均值均为 $\mu_\ell\omega^2A^2/4$。

弦张力在位置 x 传递的横向功率可写成 $P = -\mathcal{T}(\partial_x y)(\partial_t y)$。代入正向行波，得 $P = \mathcal{T}k\omega A^2 \sin^2\psi \geq 0$，时间平均为 $\overline{P} = \mathcal{T}k\omega A^2/2$。利用 $\mathcal{T} = \mu_\ell u^2$ 和 $\omega = uk$，化为 $\overline{P} = \mu_\ell u\omega^2 A^2/2$，与能量密度乘波速一致。

改变振幅到两倍，平均功率变为四倍；频率到两倍而振幅、张力、线密度保持不变，功率也变为四倍。上述比较均取其余参数固定。若振源输出功率本身固定，改变频率后振幅会相应变化，此时应由给定功率重新求振幅。

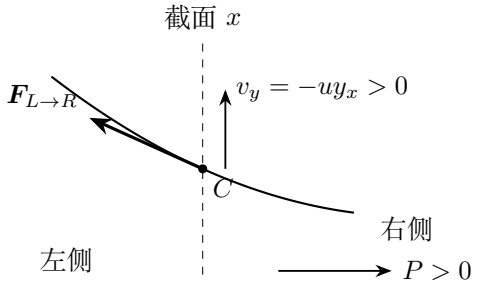


图 2.7: 左侧弦通过截面向右侧传力；右行波的横向力与本地点速度同向

图 2.7 取 $y_x < 0$ 的一个瞬间。左侧对右侧的张力指向左上，其竖直分量为 $-\mathcal{T}y_x > 0$；右侧端点此刻也向上，所以左侧向右侧做正功。若 $y_x > 0$，力与速度的竖直分量同时变负，功率仍为正。截面右侧材料受到的这个力与其速度相乘，便给出从左侧输入右侧的功率。

由弦元的牛顿方程，还可直接判断局部能量守恒。令 $u_E = \mu_\ell y_t^2/2 + \mathcal{T}y_x^2/2$，则

$$\begin{aligned}\partial_t u_E &= \frac{\mu_\ell}{2}(2y_t y_{tt}) + \frac{\mathcal{T}}{2}(2y_x y_{xt}) \\ &= \mathcal{T}(y_t y_{xx} + y_x y_{xt}) = \mathcal{T}\partial_x(y_t y_x) = -\partial_x P.\end{aligned}$$

第二行先代入 $\mu_\ell y_{tt} = \mathcal{T}y_{xx}$，再用 $\partial_x(y_t y_x) = y_{tx}y_x + y_t y_{xx}$ 与混合偏导 $y_{tx} = y_{xt}$ 合并为乘积导数。因此一小段弦内能量的增加等于左端流入功率减去右端流出功率。对单一右行波还有 $P = uu_E$。含入射与反射的叠加场中，两方向的能流相互抵消，净功率由总位移的时间导数和空间导数的乘积给出；两列等强反向波形成驻波时，平均净功率为零。

2.5.3 纵波的位移、密度和压强

纵波的图像要先分清横坐标是介质的平衡位置，纵坐标是沿传播方向的位移。记平衡位置为 x，纵向位移为 $\xi(x,t)$，质点真实位置为 $X=x+\xi$。原来相邻的两个质点间隔 $\mathrm{d}x$，扰动后间隔变为

$$\mathrm{d}X=[1+\partial_x\xi]\,\mathrm{d}x.$$

横截面积固定时，质量守恒给出 $\rho(x,t)[1+\partial_x\xi]=\rho_0$。令 $\varepsilon=\partial_x\xi$，先从精确密度减去平衡密度，

$$\Delta\rho=\frac{\rho_0}{1+\varepsilon}-\rho_0=-\frac{\rho_0\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

在 $|\varepsilon|\ll 1$ 时，分母用 1 代替造成的误差为二阶量，因此一阶密度变化为 $\Delta\rho\simeq-\rho_0\partial_x\xi$。图 2.8 中右端位移比左端更小，间距缩短，正对应 $\partial_x\xi<0$、密度增加；正是相邻位移之差决定了这一处的疏密。

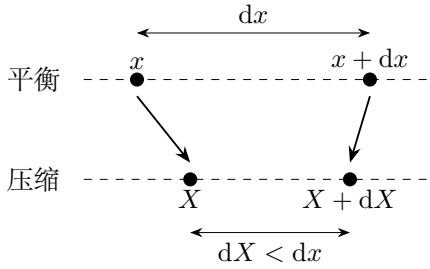


图 2.8: 相邻质点的间距变化决定压缩和稀疏

介质的体积弹性模量记为 B。小压缩引起的压强增量 $p'=-B\partial_x\xi$，其中声波中的 B 应采用相应热过程的有效模量。截面积 S 的微元受到的纵向合力为 $-S\partial_x p'\,\mathrm{d}x$，质量为 $\rho_0 S\,\mathrm{d}x$，于是

$$\rho_0\partial_{tt}\xi=-\partial_x p'=B\partial_{xx}\xi,\qquad u=\sqrt{B/\rho_0}.$$

柔弦和纵波的回复机制不同，但都由局部形变产生相邻微元的合力，再与惯性比较得到波速。这里未考虑黏滞耗散；对于气体的较快声学扰动，压缩通常接近绝热，此时采用绝热压缩对应的体积弹性模量。

若 $\xi=A\cos(\omega t-kx)$，在固定 t 时对 x 用链式法则，

$$\partial_x\xi=[-A\sin(\omega t-kx)](-k)=Ak\sin(\omega t-kx).$$

代入 $p'=-B\partial_x\xi$，得到 $p'=-BkA\sin(\omega t-kx)$。位移波峰处空间斜率为零，密度与压强扰动为零；位移过零且斜率最负处才是最强压缩。两类图相差四分之一波长。刚性闭端处空气的纵向位移为零，故位移为零而压强可最大；开端近似与外界等压，情况相反，这为下一讲的声管振型提供依据。

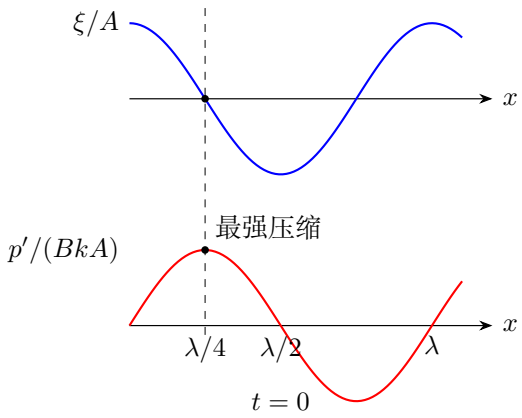


图 2.9: 同一时刻的纵向位移与压强；压缩峰在位移过零处

图 2.9 中竖虚线处，左邻点向右、右邻点向左，因而相邻点挤近。此处 $\xi=0$，却有 $p'=BkA$。用斜率解释压缩，说明了位移与压强相差四分之一波长的原因。

2.6　反射、折射与衍射的几何解释

波阵面是同相位点组成的曲面，波线在各向同性均匀介质中与波面垂直。惠更斯作图把旧波面上的点看作子波中心，以 $u\Delta t$ 为半径作子波，新波面取其前向包络。这种构造说明传播几何，波面给出同相位各点的位置，振幅则由振源、介质和传播几何确定。

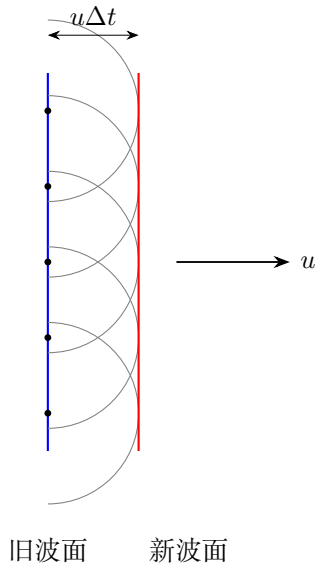


图 2.10: 平面波面上各子波的共同前向包络仍为平面

图 2.10 中各圆弧半径相同，新波面是它们最右侧的公切线；垂直波面的间距才是 $u\Delta t$。画斜入射时，子波在两介质中的半径分别为 $u_1\Delta t$ 与 $u_2\Delta t$，速度差便转化为波面的转向。

斜入射到静止平直界面时，可沿两介质分界面取坐标 s。入射和透射波在界面上的相位分别写成 $\omega_1 t - k_1 s\sin i + \varphi_1$、$\omega_2 t - k_2 s\sin r + \varphi_2$，其中角均从法线量起。两侧的连接条件要在所有 t, s 同时成立，时间系数首先要求 $\omega_1 = \omega_2$，空间系数再要求 $k_1\sin i = k_2\sin r$。因此

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{u_1}{u_2}.$$

频率连续源于静止界面的时间相位一致性，波长改变则源于介质中波速不同。反射波仍在原介质，波数大小不变，切向分量相等便给出反射角等于入射角。这里界面保持静止，故两侧使用同一频率。

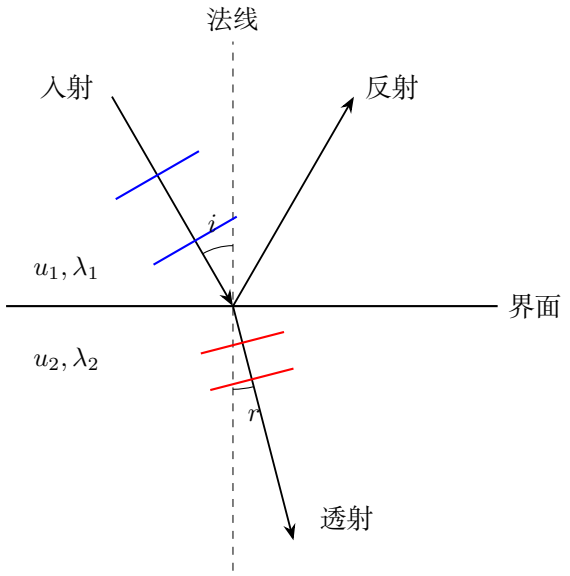


图 2.11: 射线相对法线转向，波面与各自射线垂直；图取 $u_2 = u_1/2$

图 2.11 中蓝、红短线是波面截线。沿同一界面移动一段 s，相位分别改变 $-k_1 s \sin i$ 和 $-k_2 s \sin r$；两侧须保持同样的切向相位变化，才导出折射定律。进入慢介质后，同频率要求 $\lambda_2 = \lambda_1/2$，因此红色波面更密，透射线更靠近法线。

波由慢介质进入快介质时 $r > i$；当 $\sin r = (u_2/u_1)\sin i > 1$ 时，不再有满足该几何关系的传播透射方向。反射与透射的振幅还由界面处的动力学连接条件决定。绕障碍或穿缝后的衍射同样要求波的叠加分析；孔宽与波长相近时展开明显，开口较宽时，前方的传播方向分布较集中。

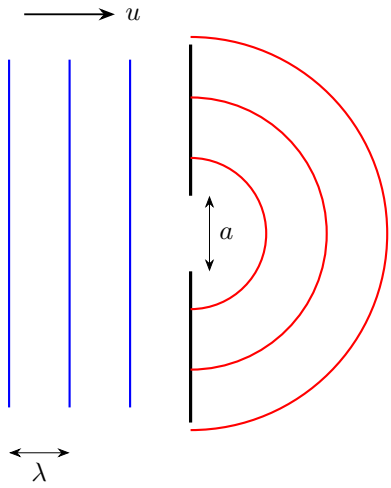


图 2.12: 窄缝后各子波面向外展开，抵达同一点的子波相互叠加

图 2.12 中缝内不同点发出的子波在缝后叠加。a 与 λ 相近或更小时，出射方向范围较宽；$a \gg \lambda$ 时主要集中在前方，边缘仍有展开。示意圆弧表示子波面，实际强度由各子波叠加决定。

2.7 例题与分析

例 2.1 (由瞬时波形求一点振动)**.** 正向简谐横波速率为 $2\,\mathrm{m/s}$，$t = 0$ 的波形为 $y = -A\sin(\pi x/2)$，$A = 10\,\mathrm{cm}$，x 以米计。求 $x = 2\,\mathrm{m}$ 处质点的振动方程并画图。

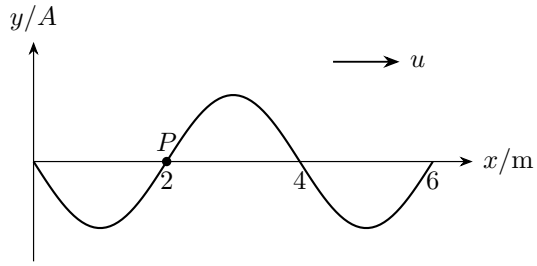


图 2.13: 题设：由瞬时波形求一点振动

解　平移已知波形，再固定观察位置

图 2.13 中的 $y(x,0) = -A\sin(\pi x/2)$ 每隔 $4\,\mathrm{m}$ 重复，故 $\lambda = 4\,\mathrm{m}$，$T = \lambda/u = 2\,\mathrm{s}$。右行波在时间 t 内平移 $ut = 2t$，因此

$$y(x,t) = y(x-2t,0) = -A\sin\left[\frac{\pi}{2}(x-2t)\right] = A\sin(\pi t - \pi x/2).$$

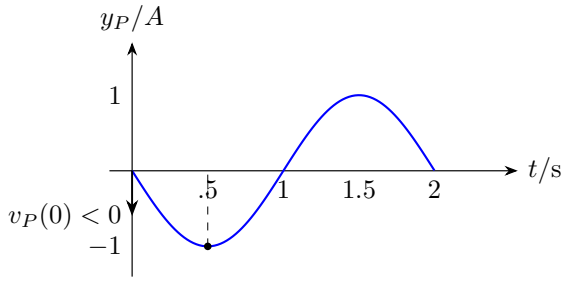


图 2.14: 质点 P 的振动图从平衡位置向下，半秒后到达负端点

固定材料点，求竖直速度

图 2.14 取材料点 P 的固定坐标 $x=2\,\mathrm{m}$，得到

$$\boxed{y_P(t)=A\sin(\pi t-\pi)=-A\sin\pi t},\qquad A=10\,\mathrm{cm}.$$

固定 $x=2\,\mathrm{m}$，对正弦函数用链式法则，内层相位 πt 的导数是 π。于是

$$v_P(t)=(-A\cos\pi t)\pi=-A\pi\cos\pi t,\qquad v_P(0)=-A\pi<0.$$

故振动图从零位移向下开始，在 0.5 s 到负端点，1 s 向上经过平衡位置。这与原波形 P 处正斜率、右行波对应向下速度的关系一致。

例 2.2 (两振动图的波长分支)**.** 波上 P,Q 分别位于 $x_P=12\,\mathrm{cm}$、$x_Q=18\,\mathrm{cm}$。两点振幅 4 cm、周期 1.2 s；P 在 $t=0.3\,\mathrm{s}$ 向上过零，Q 在 $t=0$ 向上过零。求可能的波长和波速。

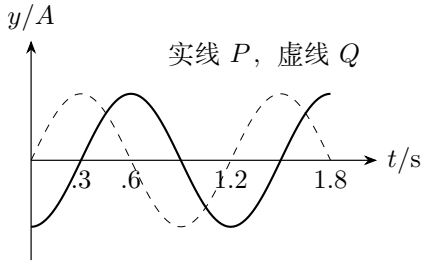


图 2.15: 题设：两振动图的波长分支

解　把两点向上过零条件转换为相位差

图 2.15 表明 Q 相位比 P 超前 $\pi/2$（模 2π），频率确定为 $f=1/1.2=5/6\,\mathrm{Hz}$，但波向未知。同样可把两点写为 $y_Q=A\sin\omega t$ 和 $y_P=A\sin(\omega t-\pi/2)$，其中 $\omega=2\pi/1.2$。固定各材料点，分别对时间求导，

$$v_Q=A\omega\cos\omega t,\qquad v_P=A\omega\cos(\omega t-\pi/2).$$

在 Q 的 $t=0$ 处相位为零；在 P 的 $t=0.3\,\mathrm{s}$ 处，相位为 $(2\pi/1.2)\times0.3-\pi/2=0$，故两者在指定过零时刻都有 $v=A\omega>0$，确是向上过零。两曲线给出相位差的余数，P,Q 之间的整波长数另用整数 n 表示。

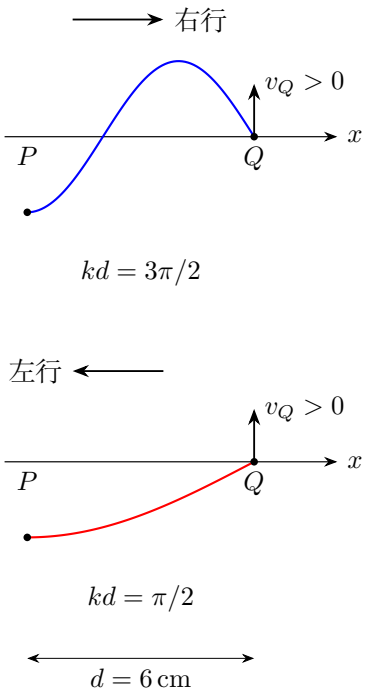


图 2.16: 两种波向的最短相位间隔分支；图中均取 $n = 0$，再添整周仍满足两点初态

右行时把较右点的相位滞后保留到整周

若向右传播，图 2.16 中 P 到 Q 的相位应滞后 kd，故 $-kd \equiv \pi/2 \pmod{2\pi}$。取 $d = 6\,\mathrm{cm}$，得到 $kd = 3\pi/2 + 2n\pi$，

$$\lambda = \frac{24}{4n+3}\,\mathrm{cm}, \quad u = \frac{20}{4n+3}\,\mathrm{cm/s}.$$

左行时重新选空间相位符号并列出全部分支

若向左传播，空间相位随 x 增加而增加。图 2.16 下图给出 $kd = \pi/2$ 的分支；一般为 $kd = \pi/2 + 2n\pi$，得到 $\lambda = 24/(4n+1)\,\mathrm{cm}$，$u = 20/(4n+1)\,\mathrm{cm/s}$。两种结果都由 $\lambda = 2\pi d/(kd)$ 及 $u = \lambda/T$ 得到。两种情况均有 $n = 0, 1, \ldots$。不同整数对应同一组两点振动图，题给条件允许这些波长与波速。

例 2.3 (波动方程中的单位与参数). 已知 $y = (5\,\mathrm{cm})\cos\{\pi[(2.50\,\mathrm{s^{-1}})t - (0.01\,\mathrm{cm^{-1}})x]\}$，求振幅、周期、波长和传播速度。

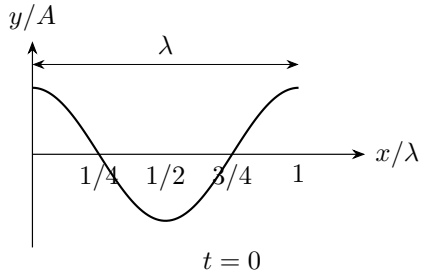


图 2.17: 题设：波动方程中的单位与参数

解 由时间与空间相位分别求周期

比较图 2.17 对应的表达式 $y = A\cos(\omega t - kx)$，得到

$$A = 5\,\mathrm{cm}, \quad \omega = 2.50\pi\,\mathrm{s^{-1}}, \quad k = 0.01\pi\,\mathrm{cm^{-1}}.$$

固定位置时，相位增加 2π 所需时间为 T；固定时刻时，相位相差 2π 的两同相点相距 λ。因此

$$T = \frac{2\pi}{2.50\pi} = \boxed{0.80\,\mathrm{s}}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{0.01\pi} = \boxed{200\,\mathrm{cm}}.$$

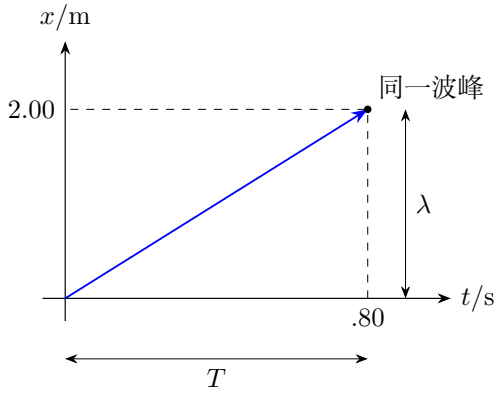


图 2.18: 同一波峰的时空轨迹；横坐标经过一个周期，纵坐标前进一个波长

图 2.18 的等相位线满足 $\omega\,\mathrm{d}t - k\,\mathrm{d}x = 0$，故

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = 250\,\mathrm{cm/s} = \boxed{2.50\,\mathrm{m/s}},$$

方向为正 x。这里 kx 采用厘米配合 $\mathrm{cm^{-1}}$，ωt 采用秒配合 $\mathrm{s^{-1}}$，两项均无量纲。

例 2.4（由振源初态写出波动方程）. 正向平面简谐波 $A = 1.0\,\mathrm{m}$，$T = 2.0\,\mathrm{s}$，$\lambda = 2.0\,\mathrm{m}$。$t = 0$ 时原点位于平衡位置并向正 y 方向运动，求波动方程。

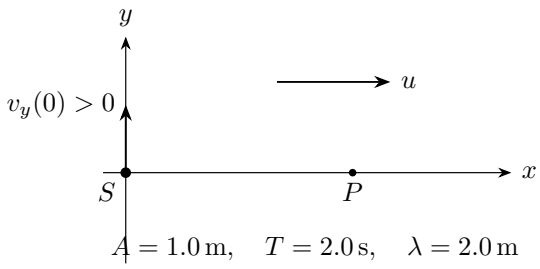


图 2.19: 振源在 $t = 0$ 向上过平衡，扰动沿正 x 传播

解 由振源初态加入传播延迟

图 2.19 中原点在 $t = 0$ 过平衡位置且向上运动，选 $y_0 = A\sin\omega t$，其中 $\omega = 2\pi/T = \pi\,\mathrm{s}^{-1}$。波速为 $u = \lambda/T = 1.0\,\mathrm{m/s}$，波数为 $k = 2\pi/\lambda = \pi\,\mathrm{m}^{-1}$。

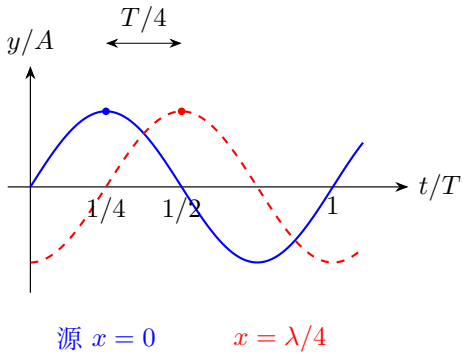


图 2.20: $x = \lambda/4$ 处振动比源滞后 $T/4$；两点平衡位置固定

图 2.20 中较右位置的振动比原点延迟 x/u，将源函数中的 t 换成 $t - x/u$，得到

$$\boxed{y(x,t) = (1.0\,\mathrm{m})\sin[(\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - (\pi\,\mathrm{m}^{-1})x]}.$$

固定原点求时间导数，有 $v_y(0,0) = A\omega\cos 0 = A\omega > 0$；固定相位则有 $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t = \omega/k > 0$。源初态与传播方向都由这个表达式给出。

2.8　本讲小结

机械波由相邻介质单元的相互作用传递振动状态。行波表达式从传播延迟得到，固定时间观察空间波形，固定位置观察时间振动。材料点速度与波形斜率的联系来自同一延迟关系。

弹性回复作用与介质惯性确定波速，振源周期确定波列的时间周期。纵波的压缩量由相邻材料点间距变化给出；波的能流来自相邻介质之间的做功。双点或双时刻观测中的整周期数须与题给距离、时间一同确定。反射、折射和衍射的几何图像与界面处的相位关系相接。

2.9　练习

练习 2.1 (波前到达前后的位移)**.** 绳端 $x=0$ 从 $t=0$ 起按 $y_0=A\sin\omega t$ 运动，此前整根绳静止。波速 u。写出 $x>0$ 处运动规律，并求该点启动后的第一次正端点时刻。

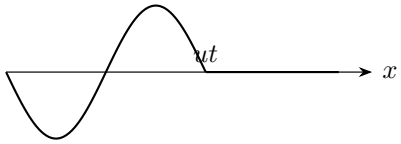


图 2.21: 题设：波前到达前后的位移

练习 2.2 (质点速度与波速)**.** 波 $y=A\cos(\omega t-kx)$ 向右传播。在 $t=0$、$x=\lambda/8$ 处求位移、横向速度及加速度，并比较最大振动速度和波速。

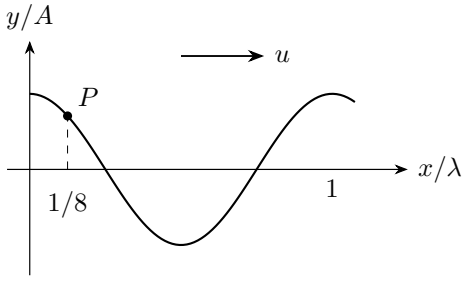


图 2.22: 题设：$t=0$ 的余弦波形及 $x=\lambda/8$ 处的材料点

练习 2.3 (改变弦张力后的波长)**.** 弦线密度 $\mu_\ell = 0.01\,\mathrm{kg/m}$，张力 $16\,\mathrm{N}$，振源频率 $20\,\mathrm{Hz}$。求波速和波长；张力增到原来的四倍后再求这两量。

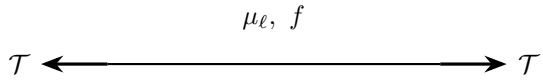


图 2.23: 题设：改变弦张力后的波长

练习 2.4 (纵波的压缩位置)**.** 纵向位移 $\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$，平衡线密度 μ_0，$Ak \ll 1$。求密度变化，并指出位移最大处和压缩最强处的相位关系。

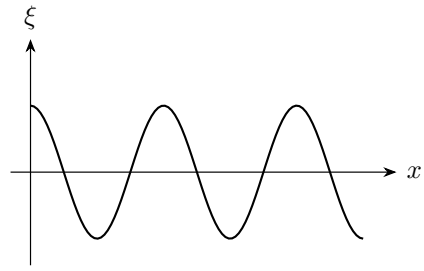


图 2.24: 题设：纵波的压缩位置

练习 2.5 (波的折射作图)**.** 平面波从波速 $u_1 = 2u_2$ 的介质入射到另一介质，入射角 $30°$。求折射角和波长比。频率是否改变?

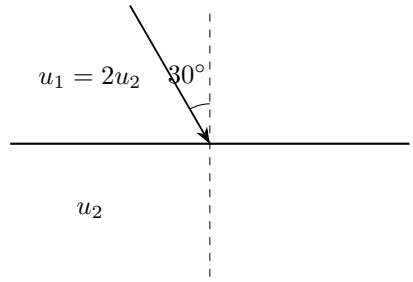


图 2.25: 题设：波的折射作图

练习 2.6 (水波能否把浮球送到岸边)**.** 在平静池塘中，小浮球随小振幅波运动。连续向水中投入石块，能否仅凭线性波传播保证浮球一直向岸移动？请说明模型限制。

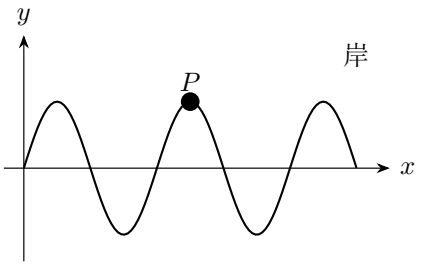


图 2.26: 题设：水波能否把浮球送到岸边

练习解答

练习 2.1

解　先由波前求到达时间，再定义本地时间

图 2.21 中波前位于 $x = ut$。固定 $x > 0$, 先求信息从源到该点的时间 $t_a = x/u$, 再在本地点累计振动时间。把源的时间写成局部时间 $\tau = t - x/u$。$\tau < 0$ 时源尚未启动，该点位移为零；$\tau \geq 0$ 时按源函数随局部时间振动。因而

$$y(x,t) = \begin{cases} 0, & t < x/u, \\ A\sin[\omega(t - x/u)], & t \geq x/u. \end{cases}$$

在已到达区间内选择首次正端点

启动后第一正端点要求位移为 $+A$ 且首次到达，即相位第一次增至 $\pi/2$。

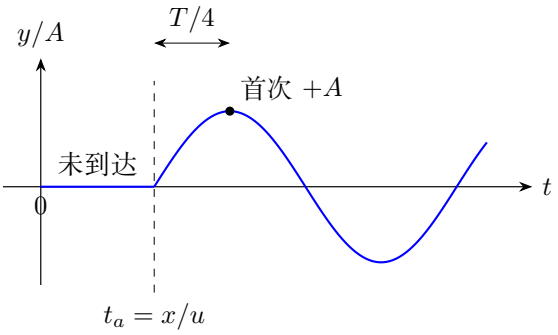


图 2.27: 固定 x 处的完整时间图：到达前平直，到达后才开始正弦振动

图 2.27 在到达时刻 t_a 之后标出第一个正端点。其条件为 $\omega\tau = \pi/2$，故 $t = x/u + T/4$。在波前处位移连续为零，但理想化瞬时启动会使速度发生突变，这由源启动方式决定。

练习 2.2

解　用波形斜率和位移预判速度、加速度方向

图 2.22 中 P 在正位移、负斜率处。右行波应使它向上运动，而回复加速度向下；先用图判断符号，再进行求导。

固定材料点求时间导数并代入相位

先算相位 $\psi = 0 - (2\pi/\lambda)(\lambda/8) = -\pi/4$。材料点的平衡坐标 x 保持不变，对 t 求偏导：

$$\partial_t y = (-A\sin\psi)\underbrace{\partial_t\psi}_{\omega} = -A\omega\sin\psi, \qquad \partial_t^2 y = (-A\omega\cos\psi)\omega = -A\omega^2\cos\psi.$$

分别代入 $\sin(-\pi/4) = -1/\sqrt{2}$、$\cos(-\pi/4) = 1/\sqrt{2}$，得 $y = A/\sqrt{2}$、$v_y = A\omega/\sqrt{2}$、$a_y = -A\omega^2/\sqrt{2}$，与图上的符号判断一致。

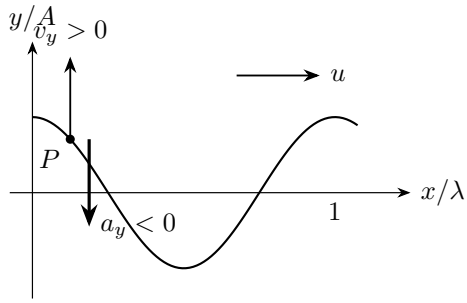


图 2.28: 同一材料点此刻向上运动、向下加速；波形仍沿水平方向平移

图 2.28 的箭头向上，和波形负斜率一致。

用振幅与波长构成两种速率的比值

最大振动速度为 $A\omega$，波速为 ω/k，二者之比 $Ak = 2\pi A/\lambda$。小斜率近似要求 $Ak \ll 1$，所以此时最大振动速度远小于波速；它们的单位虽相同，含义和决定因素不同。

练习 2.3

解　张力决定波速，振源周期决定波长

按图 2.23，均匀柔弦的波速为 $u=\sqrt{\mathcal{T}/\mu_\ell}$。初始张力为 16 N，故

$$u=\sqrt{\frac{16}{0.01}}=\boxed{40\,\mathrm{m/s}},\qquad \lambda=uT=\frac{u}{f}=\frac{40}{20}=\boxed{2\,\mathrm{m}}.$$

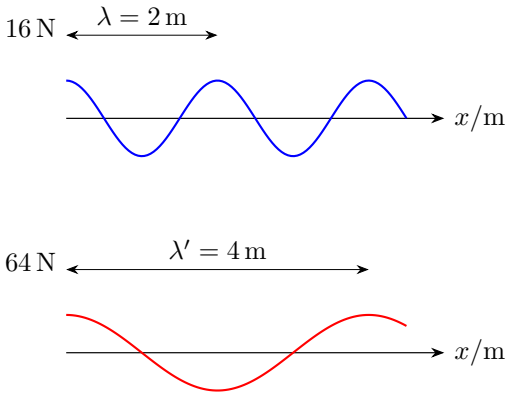


图 2.29: 相同振源周期内，张力变为四倍后波峰前进距离加倍；图示同一时刻的两种波长

图 2.29 以同一个振源周期 $T=1/20\,\mathrm{s}$ 比较两种张力。张力变为 64 N 后，

$$u'=\sqrt{\frac{64}{0.01}}=\boxed{80\,\mathrm{m/s}},\qquad \lambda'=u'T=\frac{80}{20}=\boxed{4\,\mathrm{m}}.$$

张力增至四倍使波速增至两倍，在同一振源周期内波峰前进的距离也增至两倍。

练习 2.4

解　追踪同一材料微段并建立质量守恒

图 2.24 的 x 为平衡坐标，实际位置是 $X(x,t)=x+\xi(x,t)$。

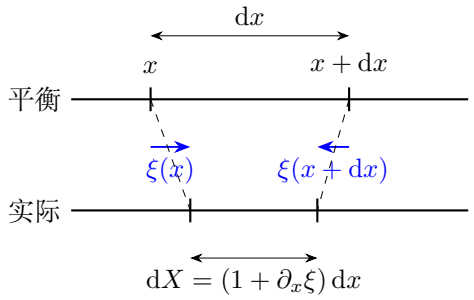


图 2.30: 微段两端可以有不同位移；图示压缩时实际长度缩短

图 2.30 中两端属于同一块材料，形变前后质量不变。设 μ 为按实际长度计的线密度，则微分极限下

$$\mathrm{d}X = \frac{\partial X}{\partial x}\,\mathrm{d}x = (1+\partial_x\xi)\,\mathrm{d}x, \qquad \mu\ \mathrm{d}X = \mu_0\ \mathrm{d}x,$$

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\partial_x\xi}.$$

在小应变条件下展开密度题设 $|\partial_x\xi| \le Ak \ll 1$ 保证长度映射为正。令 $\varepsilon = \partial_x\xi$，先将精确密度与平衡密度相减：

$$\mu - \mu_0 = \frac{\mu_0}{1+\varepsilon} - \mu_0 = -\frac{\mu_0\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\mu_0\varepsilon + \frac{\mu_0\varepsilon^2}{1+\varepsilon}.$$

最后一项是二阶小量，舍去后，一阶密度变化为

$$\delta\mu = \mu - \mu_0 = -\mu_0\partial_x\xi.$$

图中的压缩对应 $\partial_x\xi < 0$，由此得到 $\delta\mu > 0$，与材料微段缩短的图像一致。

行波中的密度变化与最强压缩令 $\psi = \omega t - kx$。对位移求空间导数后，

$$\partial_x\xi = (-A\sin\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x} = (-A\sin\psi)(-k) = Ak\sin\psi, \qquad \boxed{\delta\mu = -\mu_0 Ak\sin\psi}.$$

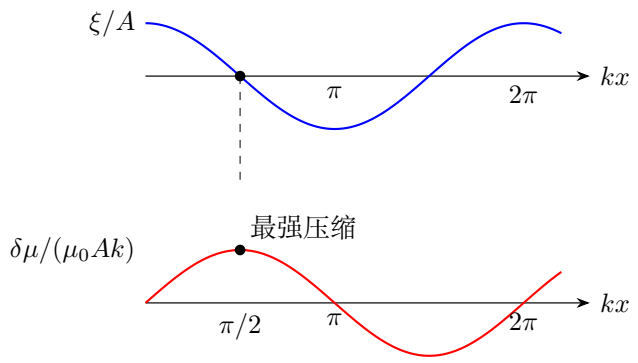


图 2.31: 固定 $t=0$ 时的位移和密度；同一竖虚线连接位移过零与最强压缩

图 2.31 中压缩最强处满足 $\sin\psi=-1$，位移恰为零；位移极大处 $\sin\psi=0$，密度扰动为零。两者相差四分之一周期。密度峰值反映相邻材料点挤近，其峰值对应位移图中斜率最负的位置。

练习 2.5

解　从静止界面的时间相位匹配确定同频

图 2.25 中的界面静止，两侧的振动通过界面处的连接条件持续耦合。先匹配时间相位，再匹配沿界面的空间相位。在固定界面上比较同一位置、不同时刻的相位，时间变化率相同，故 $\omega_1=\omega_2$。

匹配切向波数并计算法线夹角

再沿界面比较两位置，得 $k_1\sin i=k_2\sin r$。由 $k_j=\omega/u_j$ 约去公共 ω，

$$\frac{\sin i}{u_1}=\frac{\sin r}{u_2},\quad \sin r=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}.$$

角度从法线量起，$r\simeq 14.48^\circ$，比入射角小。

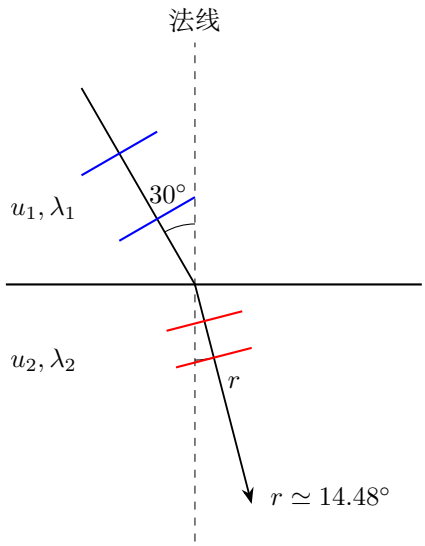


图 2.32: 角度从法线量起；慢介质中的波面间距减半，传播方向靠近法线

图 2.32 的折射线更靠近法线，因为 $u_2 < u_1$。

由同频率下的速度比求波长比

频率不变，$\lambda_1/\lambda_2 = u_1/u_2 = 2$。入射角与折射角均从图中的法线量起。

练习 2.6

解　浮球的局部往复与波纹的向外传播

在线性小振幅、无背景流的近似中，图 2.26 中的浮球随当地水质点往复，波纹向岸传播。

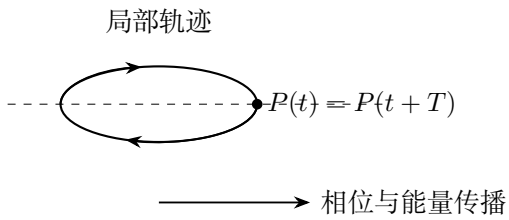


图 2.33: 线性水波中同一浮球的往复轨迹示意；一个周期后回到原位置，波峰仍继续向前

比较同一个浮球在一周期前后的位置

图 2.33 把浮球的一次往复画在它的平衡位置附近。若平衡位置为 $\boldsymbol{r}_0$，则时刻 t 的位置为 $\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\xi}(t)$。一个周期后，相位回到原值，$\boldsymbol{\xi}(t+T)=\boldsymbol{\xi}(t)$，因此

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\xi}(t+T)-\boldsymbol{\xi}(t)=0.$$

振动与波

物理竞赛一轮讲义

第三讲

波的叠加与多普勒效应

2026

目录

第三讲　波的叠加与多普勒效应 **1**

3.1　同频振动的合成 1

3.2　传播相位与双源干涉 2

3.3　拍的包络与相位 3

3.4　驻波的空间振幅与相位 4

3.5　端点反射与固有频率 5

3.6　多普勒效应的发射与接收时间 9

3.7　回声、反射与多次传播 10

3.8　例题与分析 12

3.9　本讲小结 16

3.10 练习 16

练习解答 18

第三讲　波的叠加与多普勒效应

3.1　同频振动的合成

观察一个同时受到两种周期作用的振动量，可以先分别写出两种作用对应的简谐分量。在线性近似下，它们在同一时刻的代数和给出总振动。两分量同频时，参考圆上的两个振幅矢量以相同角速度转动，夹角保持不变，它们的矢量和也以同一角速度转动。因此合振动仍是这个频率的简谐振动，振幅与初相由矢量和确定。

把某观察点处的两振动写成 $y_1 = A_1\cos\omega t$、$y_2 = A_2\cos(\omega t+\delta)$。展开第二项后，

$$y = (A_1 + A_2\cos\delta)\cos\omega t - A_2\sin\delta\sin\omega t.$$

令合振动为 $B\cos(\omega t+\Phi)$，分别比较正弦与余弦项的系数，得到

$$B\cos\Phi = A_1 + A_2\cos\delta, \quad B\sin\Phi = A_2\sin\delta.$$

两式平方相加给 $B^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta$；两式中正弦、余弦的符号共同确定合初相 Φ 的象限；$B = 0$ 时总位移恒为零。图 3.1 将这两个正交分量直接画出。

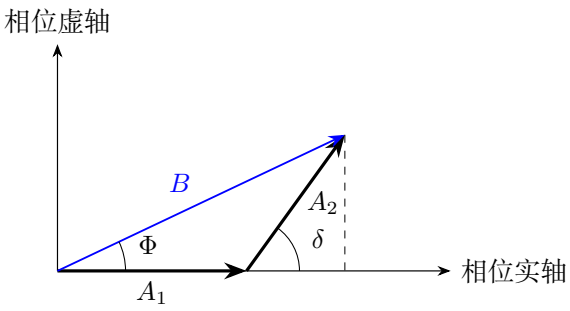


图 3.1: 在余弦相位平面内首尾相接；合矢量的两个投影确定初相象限

当两振幅相等而 $\delta = \pi$ 时，两个矢量完全抵消；若振幅不同，即使反相也有 $B = |A_1 - A_2|$。这里的 A_1, A_2 是抵达观察点时的振幅，已包含传播中的几何扩散与衰减。

叠加的是位移，能量通常与位移、速度的平方相关，故包含交叉项。例如合振幅平方中的 $2A_1A_2\cos\delta$ 可正可负，它描述相干时空间能流重新分配。固定相位差使交叉项保留，形成稳定的强弱差别；相位差在观察时间内均匀经历各个相位时，$\overline{\cos\delta} = 0$，平均强度成为两独立强度之和。

3.2　传播相位与双源干涉

在线性介质中，各列波可以独立传播，总位移是同一位置、同一时刻各位移的代数和。位移取同一方向为正，再用前节的合振幅式确定总振动。

两列同方向振动的合成，既要确定幅度，也要确定相位。稳定干涉要求频率相同、相位差在观察期间稳定；相位差无规则变化时，强弱位置也随时间变化。下面先把相位沿传播路径写清，再用正交分量求合振动。两列波到达振幅相等并且反相时，总位移为零。

从两点源传播到 P 时，若源初相为 φ_1,φ_2，则

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-k(r_2-r_1).$$

同相源才可以直接用整波长程差判增强、半奇数波长程差判减弱。反相源的结论正好交换；源初相与传播延迟共同决定抵达相位。

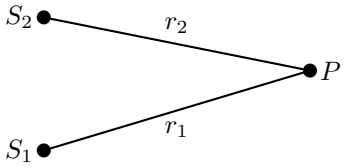


图 3.2: 两源初相差与传播程差共同决定合相位

图 3.2 中的两条路长 r_1,r_2 分别从对应波源量到同一观察点 P。先把各源初相与传播相位相加，再取差；只有两源初相相同时，增强条件才可单独写成整波长程差。

3.2.1　干涉条纹是相位条件的空间解

对同相点源，增强位置满足 $r_2-r_1=m\lambda$，在二维平面中是以两源为焦点的一族双曲线，中央 $m=0$ 退化为两源连线的垂直平分线。在远场、小角度的平直观察屏上，这些曲线与屏的交点才近似等间距。有限源间距 d 还限制 $|r_2-r_1|\le d$，故允许级次满足 $|m\lambda|\le d$。

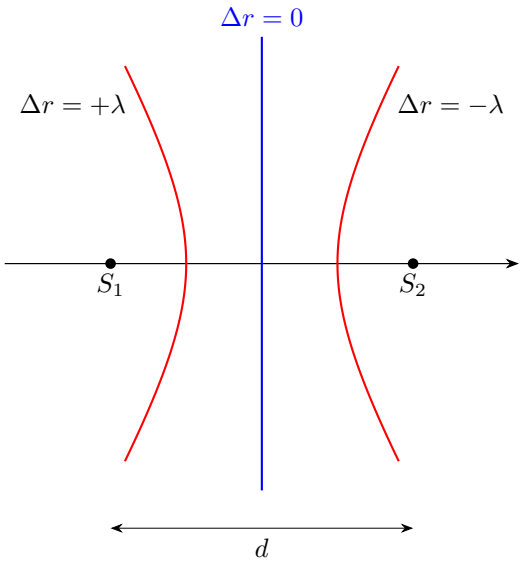


图 3.3: 同相双源的部分增强线；图取 $d = 2\lambda$，非零程差线向两侧弯曲

图 3.3 取 $\Delta r = r_2 - r_1$。观察点偏向 S_2 时 r_2 较短，故右支程差为负。图中只画 $0, \pm\lambda$ 三级；$|\Delta r| = d$ 的极限只能出现在两源连线向外延伸的射线上，不再是普通双曲线。若传播到达振幅不等，这些线仍表示同相增强，各条线的最大强度还取决于当地的到达振幅。

观察点移动时，程差连续改变，增强与减弱交替。两列波在该点反相时，最小振幅为 $|A_1 - A_2|$；振幅相等时降至零。干涉使空间能流重新分布，相消位置减弱的同时，其他位置增强。区域的总功率由穿过其外表面的能流积分给出。

对同初相的两源，令传播时间差 $\Delta t = (r_2 - r_1)/u$，则抵达相位差为 $\Delta\varphi = -\omega\Delta t = -k\Delta r$：较长路径意味着较多相位滞后。这里采用同一无色散介质。若两路经过不同介质，应分别求相位延迟 $k_1 l_1 + k_2 l_2 + \cdots$，各段使用所在介质的波数。再加入反射附加相位，才得到完整的相位差。

3.3 拍的包络与相位

先前同频振动的相位差是常量。若两个频率略有差别，相位差变为 $(\omega_1 - \omega_2)t + \Delta\varphi_0$，振幅矢量的夹角缓慢改变。同一点处初相相同的等振幅振动叠加，利用和差化积得

$$y = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t.$$

记 $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$、$\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$。当 $|\Delta\omega| \ll \bar{\omega}$ 时，平均角频率 $\bar{\omega}$ 给出快振动，半差角频率 $|\Delta\omega|/2$ 给出缓慢调制。图 3.4 把两种时间尺度画在同一条曲线上。

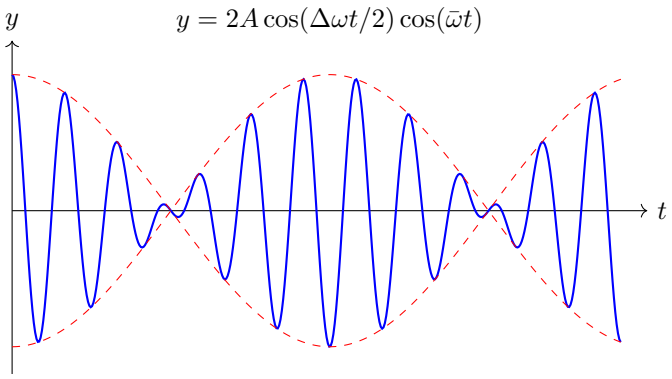


图 3.4: 慢变因子的绝对值决定振幅，其符号变化使快振动相位翻转

图 3.4 中的红色虚线随慢变因子起伏，蓝色快振动始终位于两条虚线之间。振幅是从平衡位置到端点的距离，因此

$$A_{\mathrm{env}}(t) = 2A\left|\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|.$$

慢变因子过零时，振幅降到零；过零后因子变号，相当于快振动增加了 π 的相位。相邻两次强音分别对应慢余弦取 $+1$ 和 -1，慢相位只需增加 π，因而

$$\frac{|\Delta\omega|}{2}T_b = \pi, \qquad T_b = \frac{2\pi}{|\Delta\omega|}, \qquad f_b = \frac{1}{T_b} = |f_1 - f_2|.$$

这就是拍：振动的强弱以两频率之差为频率缓慢变化。练习 3.3 将沿包络求相邻强音间隔和首次消声时刻。两振幅不等时，合振幅在 $|A_1 - A_2|$ 与 $A_1 + A_2$ 之间变化，最弱时仍保留差振幅。

3.4　驻波的空间振幅与相位

两列等振幅、等频率、反向传播的波取为 $A\sin(\omega t - kx)$ 与 $-A\sin(\omega t + kx)$，相加得到

$$y = -2A\sin kx\cos\omega t.$$

时间因子与空间因子分离，说明各位置仍作简谐振动，但振幅为 $2A|\sin kx|$。$kx = n\pi$ 为波节，$kx = (n+\frac{1}{2})\pi$ 为波腹，相邻波节间距为 $\lambda/2$，相邻波节和波腹间距为 $\lambda/4$。同一节间各点同相，跨过一个波节后空间因子变号，振动反相。空间系数变号对应相位改变 π，振幅取其绝对值。

驻波的状态要由形状与各点速度一起描述。整弦经过直线形状时，各点位移为零，除波节外速度达到各自的最大值；极端形状时，各点速度为零。图 3.5 同时画出这两种状态。

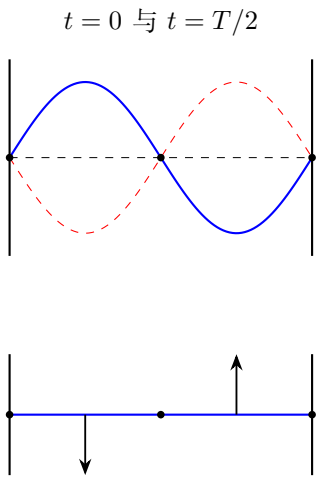


图 3.5: 同一驻波的两个极端形状与过零瞬间；相邻节间的速度方向相反

图 3.5 为两端固定的第二模态；示意取 $y=B\sin(2\pi x/L)\cos\omega t$，整体初相与前式可相差 π。节点 $0, L/2, L$ 位置不动；下图在 $T/4$ 时左段向下、右段向上，直接显示相邻节间反相。波腹是空间振幅最大的地方，其瞬时位移还随共同的时间因子变化。

3.5 端点反射与固有频率

反射的相位应由端点条件确定。把端点放在 $x=0$，弦位于 $x\le 0$，入射波向右，取 $y_i=A\cos(\omega t-kx)$，反射波为 $y_r=RA\cos(\omega t+kx)$。R 为带符号的位移反射系数。固定端要求对任意时刻 $y_i(0,t)+y_r(0,t)=A(1+R)\cos\omega t=0$，故 $R=-1$。理想自由端则要求横向张力合力为零，即 $\partial_x(y_i+y_r)=0$；在端点代入得 $Ak(1-R)\sin\omega t=0$，故 $R=1$。

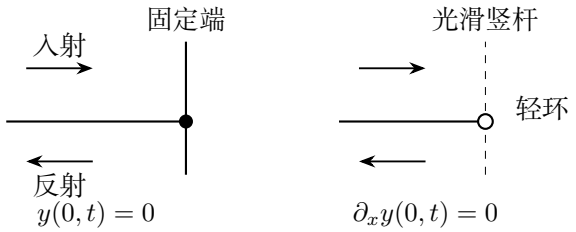
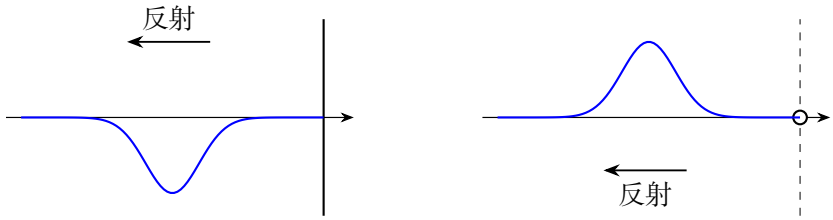


图 3.6: 固定端限制位移，自由端限制弦的横向张力

图 3.6 右侧的轻环可沿光滑竖杆自由上下移动，端点横向惯性可忽略，竖杆只提供水平反力，所以弦的竖直分力为零，相应地，弦在自由端的斜率为零。固定端两波位移反号，对位移而言有相位差 π；自由端同号。端点若带有有限质量或弹性，反射幅度、相位一般还依赖频率，相应反射系数由端点的具体运动方程确定。



固定端：$R=-1$　　自由端：$R=+1$

图 3.7: 同一正脉冲反射后的形状：固定端反号，自由端同号；两图均画反射后

图 3.7 用正脉冲代替连续正弦波，便于看见位移是否反号。反射方向在两种端点都反转；反号则只由端点条件决定。固定端在入射与反射相遇时需位移抵消，自由端需斜率抵消，两种端点分别限制位移与切线方向，因而给出不同的反射相位。

从波动方程求空间振型。对长 L、左端固定的弦，一种固有振型可写为 $y=X(x)\cos\omega t$。固定位置后对时间求导，或固定时间后对空间求导，分别得到

$$y_t=-\omega X\sin\omega t,\quad y_{tt}=-\omega^2X\cos\omega t,$$
$$y_x=X'\cos\omega t,\qquad y_{xx}=X''\cos\omega t.$$

代入 $y_{tt}=u^2y_{xx}$，比较各时刻共同的时间因子，得到

$$X''+k^2X=0,\qquad k=\frac{\omega}{u}.$$

试取 $X=e^{sx}$，则 $X'=se^{sx}$、$X''=s^2e^{sx}$。特征方程 $s^2+k^2=0$ 给 $s=\pm\mathrm{i}k$，故实数通解为

$$X=C\sin kx+D\cos kx.$$

让固定端筛选波数。左端 $X(0)=0$ 使 $D=0$。图 3.8 左列两端均固定，右端还要求 $X(L)=C\sin kL=0$。排除整弦不动的 $C=0$，剩余条件给

$$kL=n\pi,\qquad \lambda_n=\frac{2L}{n},\qquad f_n=\frac{nu}{2L},\qquad n=1,2,\ldots.$$

模态振幅 C 由实际激励确定，不由齐次端点条件确定。$n=0$ 在这里仅给平凡静止状态，对应整弦的平衡状态。

自由端改用零斜率条件。图 3.8 右列的末端可偏离平衡线，但 $X'(L) = Ck\cos kL = 0$。在非零振动模态中 $Ck \neq 0$，因此

$$kL = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \qquad f_n = \frac{(2n-1)u}{4L}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

同样长度和波速下，这两种端点条件使基频相差一倍，原因是它们允许的空间振型不同。声管闭端是空气位移波节，开端近似是压强波节。由上一讲 $p' = -B\partial_x \xi$ 可知，位移为正弦的模态对应余弦型压强分布，位移波腹恰为压强波节。实际开口还可有端部修正，上式采用理想一维开口模型。

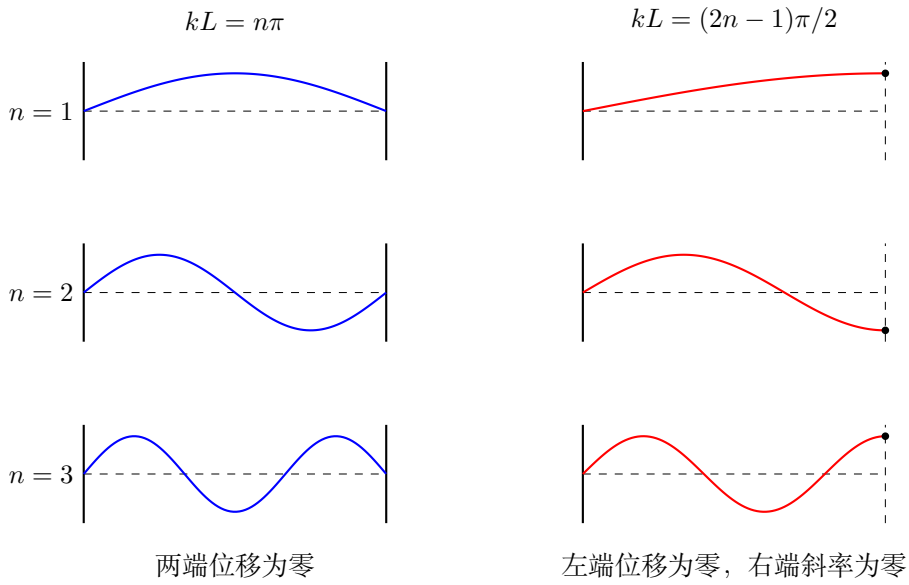


图 3.8: 端点筛选允许的空间形状；左右分别为固定—固定与固定—自由的前三模态

图 3.8 右列末端可以偏离平衡线，端点切线保持水平。每升一级，左列多容纳半个波长；右列从四分之一个波长起，每次也增加半个波长，因此只保留同一基频的奇数倍。声管的空气位移满足相应的端点条件；由 $p' = -B\partial_x \xi$ 求出压强分布。

两列行波能流相反，理想等振幅驻波的周期平均净能流为零，但局部瞬时能量可在相邻区域交换。弦的功率为 $P = -\mathcal{T}(\partial_x y)(\partial_t y)$，驻波中它通常不是恒为零。能流在各个周期内往复交换，周期平均后净输运为零。

3.5.1 驻波的能量分布与交换

写成 $y = B\sin kx\cos\omega t$ 时，固定 x 求导，$y_t = B\sin kx(-\sin\omega t)\partial_t(\omega t) = -B\omega\sin kx\sin\omega t$；固定 t 求导，$y_x = B\cos\omega t\cos kx\,\partial_x(kx) = Bk\cos kx\cos\omega t$。位

移与速度在时间上相差四分之一周期。$t=0$ 整弦处于极端形状，各点速度为零；$t=T/4$ 整弦经过直线形状，斜率为零而速度除波节外非零。此时分别以弹性势能、动能为主，能量转换应在全弦积分后讨论。

单位长度动能和势能分别为

$$u_K=\tfrac12\mu_\ell B^2\omega^2\sin^2 kx\sin^2\omega t,\quad u_U=\tfrac12\mathcal{T}B^2k^2\cos^2 kx\cos^2\omega t.$$

动能在波腹附近较集中，弹性势能则与局部斜率的平方成正比。利用倍角公式求空间积分，

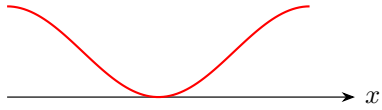
$$\int_0^L\sin^2 kx\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^L,\qquad \int_0^L\cos^2 kx\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2kx}{4k}\right]_0^L.$$

两端固定时 $kL=n\pi$，一端固定一端自由时 $kL=(2n-1)\pi/2$，两者都使 $\sin 2kL=0$，所以上述积分均为 $L/2$。再用 $\mathcal{T}k^2=\mu_\ell\omega^2$，全弦动能和势能相加为

$$E=\frac{\mu_\ell LB^2\omega^2}{4}(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)=\frac{\mu_\ell LB^2\omega^2}{4}.$$

因此能量恒定是把空间分布积分并应用端点条件后的结论。

$t=0:\quad u_U\propto\cos^2(\pi x/L),\ u_K=0$



$t=T/4:\quad u_K\propto\sin^2(\pi x/L),\ u_U=0$

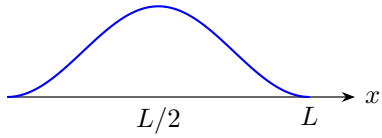


图 3.9: 驻波能量在全弦守恒，但动能和势能的空间分布不同

图 3.9 取两端固定的基模。极端形状时，波腹虽位移大，局部斜率却为零，弹性势能主要在两端附近；四分之一周期后，动能主要在中部。前四分之一周期存在从两端朝中部的瞬时能流，随后四分之一周期反向交换。两曲线积分相等，表现出守恒总能量在不同弦段之间的周期性交换。

若两列反向波振幅不同，合波含有驻波成分和净行波成分。设振幅为 A_+、A_-，平均净功率正比 $A_+^2-A_-^2$；当两者不等时，空间最小振幅为 $|A_+-A_-|>0$，各点均随时间振动。等振幅时 $A_+=A_-$，才得到静止波节与零平均净能流。

3.6 多普勒效应的发射与接收时间

经典声波的传播速度以介质为参照，声源和接收者的速度也在同一介质参考系中表示。沿从声源到接收者的传播方向取单位向量 $\boldsymbol{n}$，设两者速度在该方向的分量为 v_S, v_D。相邻波面发射间隔 T 内，声源前进 $v_S T$，前一波面前进 uT，波面间距因而为 $(u - v_S)T$。接收者与波面的相对速度为 $u - v_D$。下面用两次发射与接收的时间图，将这两个因素一起列入方程。

若空气整体以速度 w 运动，应先将声源、接收者的地面速度减去 w，声速 u 仍取相对空气的值。真空光的频移在相对论专题中由光速不变关系求得。

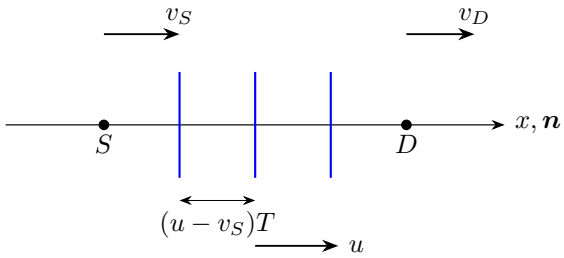


图 3.10: 同一接收时刻的相邻波面：声源前进压缩间距，接收者运动改变遇波速度

图 3.10 先以箭头规定这一路声波在介质中的传播方向，再沿该方向取声源和接收者的有符号速度。声源速度改变相邻波面的间距，接收者速度改变穿过这些波面的速率，两种作用进入分母和分子的原因不同。

3.6.1 相邻信号的发射与接收事件

用事件时间推导可以把分子、分母的物理作用分开。设 $t = 0$ 声源在 $x = 0$、接收者在 $x = D > 0$，两者速度为 v_S, v_D，均相对空气取向右为正，且考察向右传播的同一支路。首个波面在 $t = 0$ 发射、t_1 接收；第二个在 $t = T$ 发射、t_2 接收。图 3.11 中的两条传播线应具有相同斜率，因为声音在空气中的速率都是 u。

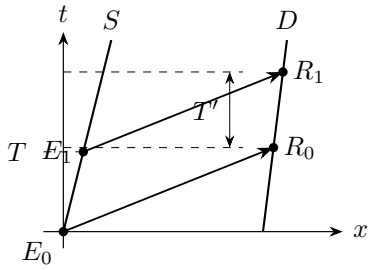


图 3.11: 两个发射事件和两个接收事件的时间关系

两个传播方程分别为

$$ut_1 = D + v_D t_1, \qquad u(t_2 - T) = D + v_D t_2 - v_S T.$$

第二式的 $v_S T$ 确定第二个波面出发的位置。两式相减并整理，得到 $(u - v_D)(t_2 - t_1) = (u - v_S)T$。令 $T' = t_2 - t_1$，得到

$$T' = \frac{u - v_S}{u - v_D} T, \qquad f' = \frac{1}{T'} = \frac{u - v_D}{u - v_S} f.$$

这组式子适用于图中的亚声速、共线匀速过程。声源静止、接收者向源运动时 $v_D < 0$，分子增大；接收者静止、声源朝它运动时 $v_S > 0$，分母减小，两种情形都提高接收频率，却对应不同的波面几何。

如果源和接收者不共线，应使用每个传播支路上实际连线方向的速度投影。距离和方向在传播过程中变化明显时，需要先求迟滞发射时刻，再在相邻事件间求导；传播方向由迟滞发射位置与实际接收位置的连线确定。基础题常给远场或短时间近似，允许把方向视为不变。

在本讲讨论的亚声速运动中，声源向前运动使前方波面靠拢，接收者沿波的传播方向运动则减慢遇到波面的速率。两者都相对空气静止时，波面间距为 u/f，接收者每秒遇到 f 个波面，接收频率便等于发射频率。

若接收者沿路径 $x(t)$ 移动，接收相位为 $\psi(t) = \omega t - kx(t) + \varphi_0$，沿实际接收路径使用链式法则，$\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}t = \partial_t \psi + (\partial_x \psi)\dot{x} = \omega - k\dot{x}$。这直接给出静止声源时的接收者频移：空气中的波长由声源确定，接收者运动改变遇到波面的速率。若声源运动，则要从相邻发射事件求波面间距，两类运动分别改变发射事件与接收事件。

3.7　回声、反射与多次传播

静止墙面反射时，墙面观察到的频率等于反射频率，反射只改变传播方向。移动接收者听回声，应先求墙面收到的频率，再按反射后的传播方向求接收频率。若反射体移动，它先充当接收者，再充当发射者，两次频移均要计算。

静止墙面每次反射保持空气中的频率。波在空气中的频率只由最初发射时的传播方向决定，最终接收时再由末段传播方向决定。例 3.3 将按初段与末段方向逐路计算。

3.7.1　运动反射体的两次频率转换

设声源和最终接收者都相对空气静止，反射板沿入射方向以 V 远离声源，$|V| < u$。入射方向取向右，板先作为接收者，遇到波面的频率为 $f_m = (u - V)f/u$。

若反射过程在板的参考系中保持相邻波面的时间周期，板再作为向左发波的等效声源；这段传播方向已反转，板速度的有向分量应改为 $-V$，故静止接收者收到

$$f_r = \frac{u}{u+V} f_m = f\frac{u-V}{u+V}.$$

板远离时两次作用均使频率降低，板靠近时令 $V<0$ 便得到升频。$V=0$ 恢复 $f_r=f$。求低速近似时，先减去原频率，令 $\varepsilon = V/u$，有

$$\frac{f_r - f}{f} = \frac{u-V-(u+V)}{u+V} = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} = -2\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon}.$$

当 $|\varepsilon| \ll 1$ 时，最后一项为二阶小量，保留一阶得到 $(f_r - f)/f \simeq -2V/u$。这里的二倍来自两段传播都受运动板影响，静止墙对应 $V=0$，反射前后的频率相等。

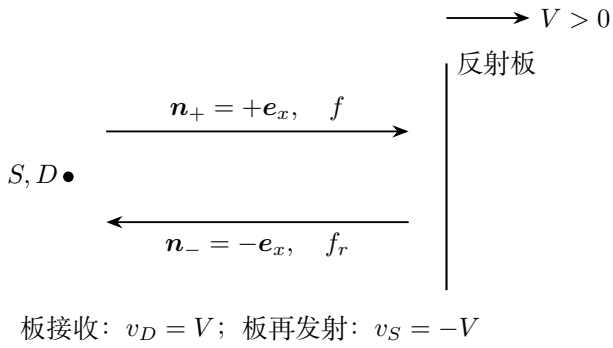


图 3.12: 运动板先接收、再反射；回程须重新规定传播方向

图 3.12 中板向右远离，入射波追板较慢；板再向左发出的相邻波面间距又被拉大。这两种几何变化分别给出 $u-V$ 与 $u+V$，同时造成降频。把板改为向左靠近，只需令同一有向速度 $V<0$，反射后波向反转，板速的投影也相应改变。

相邻脉冲的飞行时间显示了接收间隔怎样随反射板运动而改变。设发射时板到静止声源的距离为 D，往返时间 τ 满足去程 $ut_m = D + Vt_m$，回程 $u(\tau - t_m) = D + Vt_m$，故 $\tau = 2D/(u-V)$。连续两次发射相隔 T，第二次发射时初距离增加 VT，接收间隔变为 $T' = T + 2VT/(u-V) = T(u+V)/(u-V)$，其倒数与波面法相同。飞行时间决定信号何时到达，飞行时间随发射时刻的变化才决定频率改变。

3.8　例题与分析

例 3.1 (反向行波合成驻波)．两列波 $y_1 = A\cos(\omega t - kx)$、$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$ 叠加。求合波、波节波腹位置和相邻节间的相位关系。

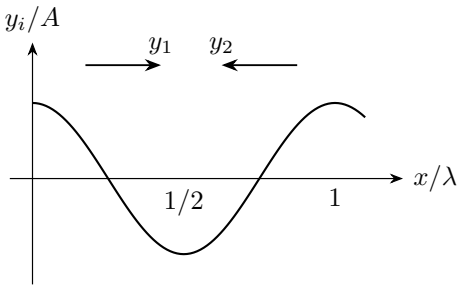


图 3.13: 题设：两列波在 $t = 0$ 形状相同，之后分别向右、向左传播

解　分离时间因子与空间因子

图 3.13 中两列波在同一 x, t 处的位移相加。用 $\cos(a - b) + \cos(a + b) = 2\cos a \cos b$，取 $a = \omega t$、$b = kx$，得

$$\boxed{y = 2A\cos kx \cos \omega t}.$$

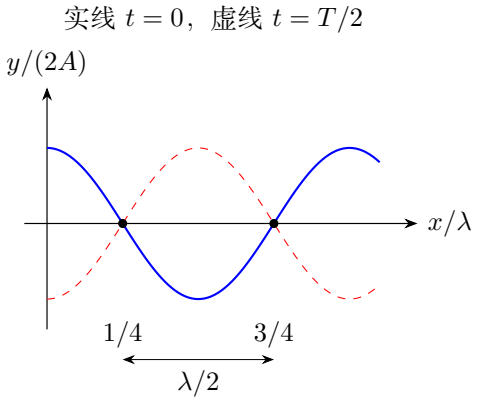


图 3.14: 波节始终位于四分之一波长的奇数倍处；相邻节间的时间相位相反

图 3.14 中，固定 x 后，空间系数 $2A\cos kx$ 的绝对值给出振幅，故

$$A(x) = 2A|\cos kx|.$$

波节处 $\cos kx = 0$，波腹处 $|\cos kx| = 1$，于是

$$\boxed{x_{\text{节}} = \frac{(2n+1)\lambda}{4}}, \qquad \boxed{x_{\text{腹}} = \frac{n\lambda}{2}}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

相邻波节相距 $\lambda/2$。同一节间 $\cos kx$ 符号不变，各点同相；越过一个波节，空间系数变号，可用 $-\cos\omega t=\cos(\omega t+\pi)$ 写出相位改变，故相邻节间反相。本题在 $x=0$ 取波腹，与正文正弦空间因子的驻波相比，空间分布平移了 $\lambda/4$。

例 3.2 (两声信号的接收间隔)**.** 静止空气中，声源 S 和前方接收者 D 均沿正 x 方向匀速运动，速率分别为 $v_S,v_D<u$。声源发出两个相隔 Δt 的短信号，求接收间隔。



图 3.15: 题设：两声信号的接收间隔

解　固定同一传播支路并求第一信号飞行时间

按图 3.15 取第一次发射时源为 $x=0$、接收者为 $x=d>0$。两个信号均沿正 x 传播，且第二次发射时接收者仍在源前方。首信号的追及方程是 $u\tau_1=d+v_D\tau_1$，解得 $\tau_1=d/(u-v_D)$。

由第二次发射时的真实间距求第二飞行时间

第二次发射时，源位置为 $v_S\Delta t$，接收者位置为 $d+v_D\Delta t$，两者距离变为 $d+(v_D-v_S)\Delta t$，所以 $\tau_2=[d+(v_D-v_S)\Delta t]/(u-v_D)$。两次传播时长从各自发射时刻开始量，第二个信号的接收时刻还须加上 Δt。

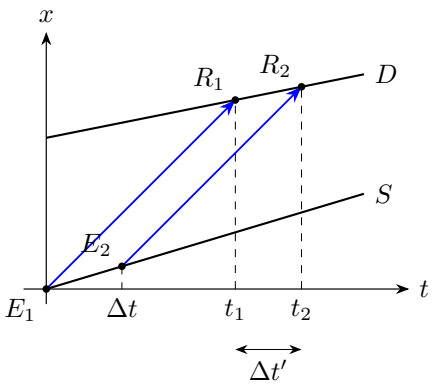


图 3.16: 两条声信号轨迹平行；两次飞行时长分别从 E_1,E_2 量起

把飞行时间加回各自发射时刻后再相减

图 3.16 中接收时刻分别为 τ_1 和 $\Delta t+\tau_2$，相减得

$$\Delta t' = \Delta t + \tau_2 - \tau_1 = \frac{u - v_S}{u - v_D}\Delta t, \quad f' = \frac{u - v_D}{u - v_S} f.$$

若 $v_S = v_D$，间隔不变；若仅声源更快，波长缩短、频率升高，与直观一致。

例 3.3 (两崖之间的火车回声)**.** 火车以 $v < u$ 沿两面静止平行崖壁的公法线向右匀速行进并持续鸣笛，笛声频率 f，空气静止、声速 u。只考虑沿这条法线往返的声波，计入多次反射，司机可能听见哪些回声频率?

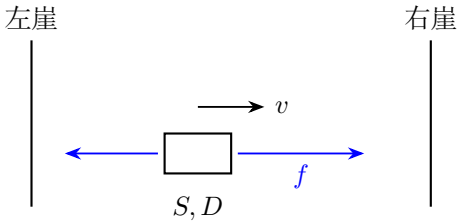


图 3.17: 题设：两崖之间的火车回声

解　分别求向前、向后发射到空气中的频率

图 3.17 中向前发出的声音在空气中的频率为 $f_+ = uf/(u-v)$，向后发出的为 $f_- = uf/(u+v)$。静止墙面反射不改变这两个空气频率。

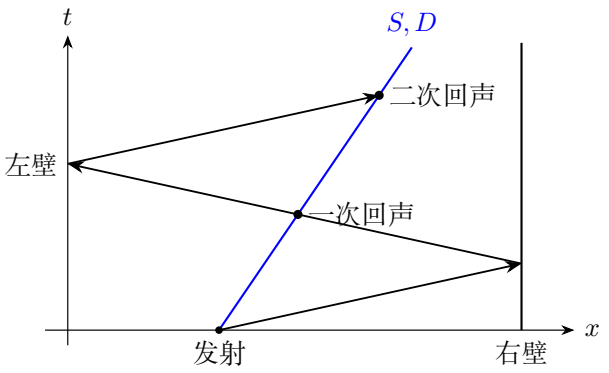


图 3.18: 一束向前发射的声信号经一次、两次反射回到运动火车；斜线斜率在反射时只改变符号

只按最后一段方向转换为司机接收频率

图 3.18 中同一向前发射支路，在一次回声处向后传播，在二次回声处向前传播。每次反射只改变波向，不改变空气中的频率；最终再用司机遇波的速率转换。若回声迎面向后传播，司机遇波速度为 $u+v$，听得 $(u+v)f_{\pm}/u$；若回声从后向前追上，遇波速度 $u-v$，听得 $(u-v)f_{\pm}/u$。可按“初段、末段”两个方向列出四个值：

	末段向后	末段向前
初段向前	$(u+v)f/(u-v)$	f
初段向后	f	$(u-v)f/(u+v)$

不同反射路径给出的频率

其中对角项之外的两个 f 重复，四种组合化简后只有

$$\frac{u+v}{u-v}f,\qquad f,\qquad \frac{u-v}{u+v}f.$$

偶数次反射的初段与末段同向，接收到的回声频率恰为 f。

例 3.4 (反相双源的合振幅)**.** 两相干点源初相相差 π，到 P 的波程差 $r_2-r_1=3\lambda/2$，两列波在 P 处振幅分别为 A 和 $2A$。求合振幅，并判断是否相消。

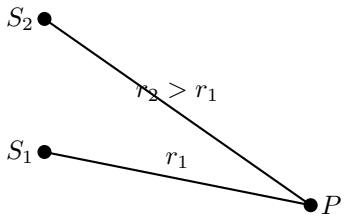


图 3.19: 题设：反相双源的合振幅

解　先求抵达相位差，再合成振幅

按图 3.19 所取顺序，$\Delta r=r_2-r_1=3\lambda/2$，源初相差为 $\varphi_2-\varphi_1=\pi$。两路传播各引入相位延迟 kr_i，因此抵达相位差为

$$\Delta\varphi=(\varphi_2-\varphi_1)-k(r_2-r_1)=\pi-\frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{2}=-2\pi.$$

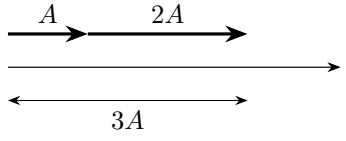


图 3.20: 解答过程：反相双源的合振幅

图 3.20 中两振幅矢量同向，相差一整周，故

$$B^2 = A^2 + (2A)^2 + 2A(2A)\cos(-2\pi) = 9A^2, \qquad \boxed{B = 3A}.$$

该点为同相增强。初相差 π 与传播产生的 3π 延迟相合，得到整周的抵达相位差。

3.9　本讲小结

同频振动的振幅矢量相加，同时给出合振幅与合初相。两路抵达相位包括源初相、传播延迟及反射相位；固定相位差给出稳定干涉，缓慢改变的相位差产生拍。

等振幅反向行波合成驻波，空间振幅和两端的运动条件决定振型及固有频率。驻波的平均净能流为零，各弦段之间仍存在周期性的能量交换。多普勒效应以介质为参考系：声源运动改变波面间距，接收者运动改变遇波速率。回声逐路计算，移动反射体依次承担接收与再发射两种作用。

3.10　练习

练习 3.1 (固定弦的模态识别)**.** 弦长 $L = 1.2\,\mathrm{m}$，波速 $u = 120\,\mathrm{m/s}$，两端固定。观察到弦有三个波腹，求频率、波长与全部波节位置。

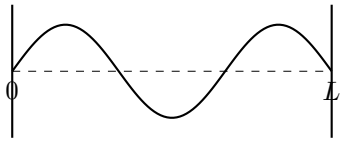


图 3.21: 题设：固定弦的模态识别

练习 3.2 (开闭管的频率)**.** 理想声管长 L，一端封闭另一端开口。以空气位移为变量，求固有频率；若测得相邻两次共振频率相差 $200\,\mathrm{Hz}$，声速 $340\,\mathrm{m/s}$，求管长。

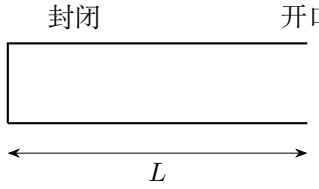


图 3.22: 题设：开闭管的频率

练习 3.3 (拍频与消声时刻)**.** 两音叉频率 440 Hz 与 444 Hz，在某点产生等振幅同向振动且初相相同。求拍频、相邻强音间隔及拍包络第一次降到零的时刻。

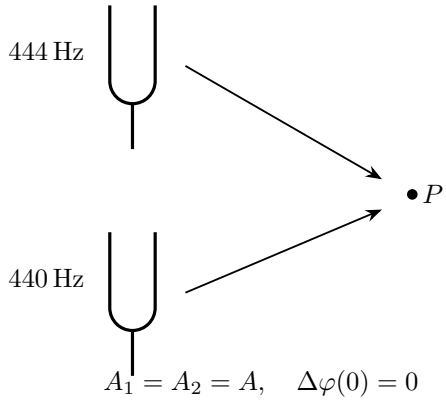


图 3.23: 两音叉在同一观察点形成同向振动，初始相位相同

练习 3.4 (相向运动的声源与接收者)**.** 静止空气中声速 340 m/s，声源以 20 m/s 接近接收者，接收者以 10 m/s 迎向声源。发射频率 640 Hz，求接收频率。

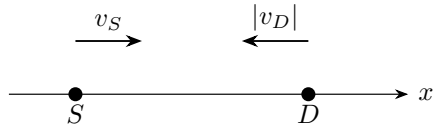


图 3.24: 题设：相向运动的声源与接收者

练习 3.5 (移动反射体的回声频率)**.** 声源和接收器同处固定位置，频率 f，声速 u。平面反射体以速度 $V < u$ 沿法线朝它们匀速运动。求回声频率。

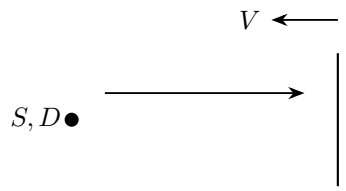


图 3.25: 题设：移动反射体的回声频率

练习 3.6 (驻波的瞬时能流)．弦上驻波 $y = B\sin kx\cos\omega t$，张力 $\mathcal{T}$。求位置 x 处瞬时功率和周期平均功率，说明波节的作用。

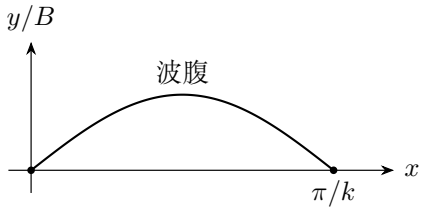


图 3.26: 驻波一段在 $t = 0$ 的极端形状；两端所标位置均为波节

练习解答

练习 3.1

解　由三个波腹确定半波长数

图 3.21 中，两固定端都是位移波节，每个节间容纳半个波长并含一个波腹。三个波腹对应三个节间，所以

$$L = \frac{3}{2}\lambda, \qquad \lambda = \frac{2(1.2)}{3} = \boxed{0.8\,\mathrm{m}}, \qquad f = \frac{u}{\lambda} = \frac{120}{0.8} = \boxed{150\,\mathrm{Hz}}.$$

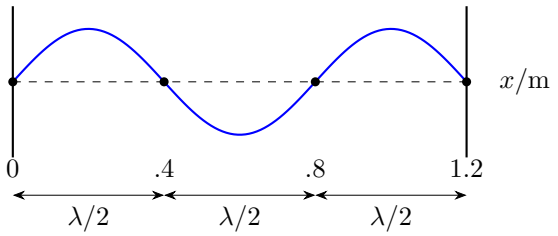


图 3.27: 三个节间各含一个波腹；四个波节把全长分成三个等长段

图 3.27 中相邻波节间距为 $\lambda/2 = 0.4\,\mathrm{m}$。取左端为 $x = 0$，全部波节为

$$\boxed{x = 0,\ 0.4,\ 0.8,\ 1.2\,\mathrm{m}}.$$

这是基频 $u/(2L) = 50\,\mathrm{Hz}$ 的第三模态。

练习 3.2

解　分别确定空气位移与压强的端点条件

图 3.22 的封闭端取 $x=0$，开口取 $x=L$。刚性封闭端空气位移为零，开口端近似与外界等压；这两端限制的变量不同。

先用闭口条件消去余弦，再用开口条件筛选波数

令空气位移为 $y=X(x)\cos\omega t$。求时间导数时固定 x，求空间导数时固定 t，分别得到

$$y_t=-\omega X\sin\omega t,\qquad y_{tt}=-\omega^2X\cos\omega t,\qquad y_{xx}=X''\cos\omega t.$$

代入波动方程 $y_{tt}=u^2y_{xx}$，比较共同时间因子的系数，空间振幅满足 $X''+k^2X=0$，其中 $k=\omega/u$。试取 $X=e^{sx}$，两次求导为 $X'=se^{sx}$、$X''=s^2e^{sx}$，代回得到

$$(s^2+k^2)e^{sx}=0.$$

约去指数因子，特征方程为 $s^2+k^2=0$，两根 $s=\pm\mathrm{i}k$ 给出实数通解

$$X(x)=C\sin kx+D\cos kx.$$

闭端 $x=0$ 处的空气位移为零，代入通解得

$$X(0)=C\sin0+D\cos0=D=0,\qquad X(x)=C\sin kx.$$

对空间求导时，链式法则给

$$X'(x)=C\cos(kx)\frac{\mathrm{d}(kx)}{\mathrm{d}x}=Ck\cos kx.$$

开端 $x=L$ 处与外界等压，压强扰动为零。记气体的体积弹性模量为 B，由 $p'=-B\partial_xy=-BX'(x)\cos\omega t$，空间因子满足

$$X'(L)=Ck\cos kL=0.$$

对于 $C\neq0$ 的振动，$\cos kL=0$，故允许波数为

$$k_nL=\frac{(2n-1)\pi}{2},\qquad k_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L},\qquad n=1,2,\ldots.$$

从允许波数求频率序列和相邻间隔

将 $\omega=uk_n$ 代入 $f=\omega/(2\pi)$，得到

$$f_n=\frac{uk_n}{2\pi}=\frac{u}{2\pi}\frac{(2n-1)\pi}{2L}=\frac{(2n-1)u}{4L}.$$

相邻两个模态相减，频率间隔为

$$f_{n+1}-f_n=\frac{[2(n+1)-1-(2n-1)]u}{4L}=\frac{u}{2L}.$$

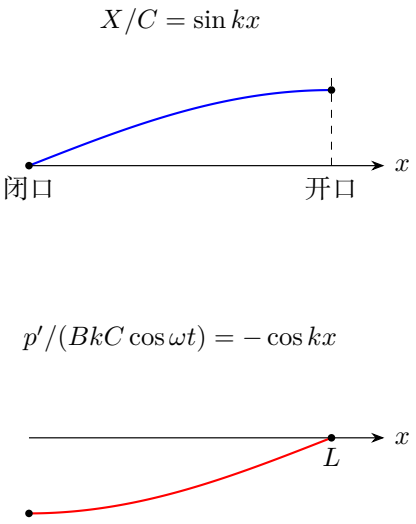


图 3.28: 同一基模的位移与压强空间因子；闭口位移节对应压强腹，开口相反

由相邻共振频率反求管长

图 3.28 的位移与压强分别满足两端条件。相邻共振频率差 $u/(2L) = 200\,\mathrm{Hz}$，所以 $L = 340/400 = 0.85\,\mathrm{m}$。此结果忽略端部修正，闭端为位移波节，开端为压强波节，上述序列由这两种端点条件共同确定。

练习 3.3

解　由和差化积读出拍的包络

图 3.23 中的两振动为 $A\cos(880\pi t)$、$A\cos(888\pi t)$。半差为 4π、半和为 884π，所以

$$y = 2A\cos(4\pi t)\cos(884\pi t).$$

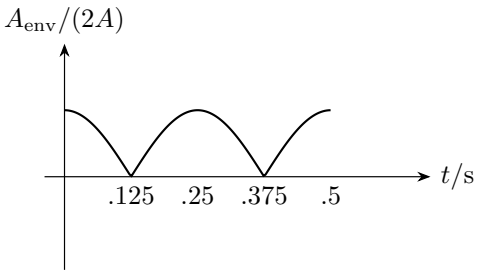


图 3.29: 拍的包络与消声时刻

图 3.29 中快振动的包络为 $2A|\cos 4\pi t|$。强音对应 $|\cos 4\pi t| = 1$，即 $4\pi t = n\pi$，相邻解相差

$$\boxed{T_b = \frac{1}{4}\,\mathrm{s}}, \qquad \boxed{f_b = \frac{1}{T_b} = 4\,\mathrm{Hz}}.$$

包络首次为零满足 $4\pi t = \pi/2$，故

$$\boxed{t_{\text{首个零包络}} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}}.$$

等振幅与反相在这一时刻同时满足，两个振动的合振幅降到零。

练习 3.4

解　以波面间距与遇波速率计算频率

沿图 3.24 从源到接收者取正向，声源速度 $v_S = 20\,\mathrm{m/s}$，接收者速度 $v_D = -10\,\mathrm{m/s}$。相邻波面发射间隔 $T = 1/640\,\mathrm{s}$，在这个时间内前一波面前进 $340T$，源前进 $20T$，故

$$\lambda' = (340 - 20)T = \frac{320}{640} = 0.5\,\mathrm{m}.$$

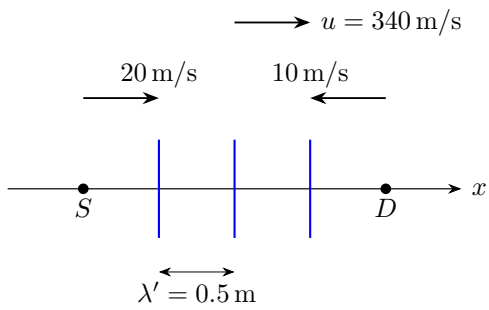


图 3.30: 声源前进使空气中的波面间距缩短；接收者迎向这些向右传播的波面

图 3.30 中，接收者迎向波面，遇波速率为 $u - v_D = 340 - (-10) = 350\,\mathrm{m/s}$。每秒遇到的波面数为

$$\boxed{f' = \frac{u - v_D}{\lambda'} = \frac{350}{0.5} = 700\,\mathrm{Hz}}.$$

源的前进缩短波长，接收者迎向波面的运动增加遇波速率，两种作用都使接收频率升高。

练习 3.5

解　把移动板视为入射声波的接收者

图 3.25 入射向右，反射体以 $v_D=-V$ 接收，故其自身测得 $f_1=(u+V)f/u$。在反射体自身位置上，入射与反射扰动以同一时间周期满足反射条件，因此 f_1 也是反射体再发射的频率。

反射后的传播方向改为向左，反射体速度在新方向投影为 $+V$；第二次公式的分母故为 $u-V$，对应反射体朝最终接收器运动而缩短的反射波长。

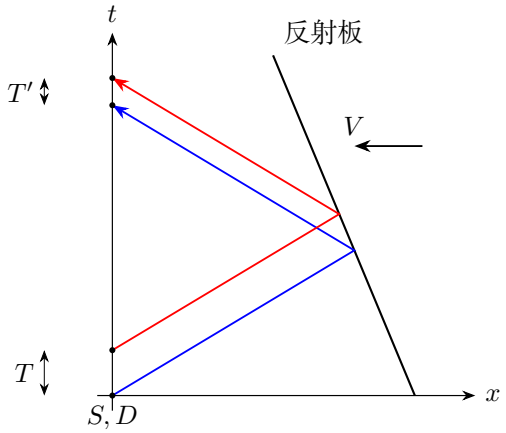


图 3.31: 同一移动板反射相邻信号的时空图：靠近时，接收间隔比发射间隔短

回声频率及低速近似

图 3.31 反射波向左，反射体沿该方向速度为 $+V$，固定接收者速度为零。第二次频移给 $f_{\text{echo}}=uf_1/(u-V)$，所以

$$f_{\text{echo}}=\frac{u+V}{u-V}f.$$

求低速近似前，先写相对频移的精确式。令 $\varepsilon=V/u$，则

$$\frac{f_{\text{echo}}-f}{f}=\frac{u+V-(u-V)}{u-V}=\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}=2\varepsilon+\frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon}.$$

当 $V\ll u$ 时，舍去最后的二阶小量，才得到相对频移近似 $2V/u$。两个因子分别来自反射体的接收与再发射，两者共同给出一阶频移的系数 2。

练习 3.6

解　固定截面分别求空间斜率和材料点速度

在图 3.26 取正 x 为功率正方向，$P=-\mathcal{T}(\partial_x y)(\partial_t y)$。空间求导时 $\cos\omega t$ 为常数，时间求导时 $\sin kx$ 为常数，因此

$$\partial_x y = B\cos\omega t\,\cos kx\,\underbrace{\partial_x(kx)}_{k} = Bk\cos kx\cos\omega t,$$

$$\partial_t y = B\sin kx\,(-\sin\omega t)\,\underbrace{\partial_t(\omega t)}_{\omega} = -B\omega\sin kx\sin\omega t.$$

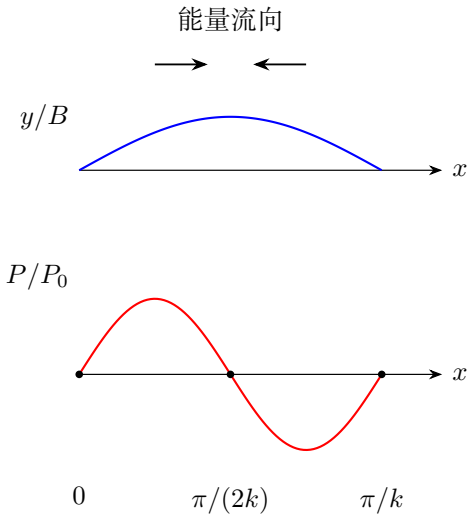


图 3.32: 取 $t=T/8$；瞬时能流从两侧流向波腹，功率在波节与波腹处均为零

把张力做功改写成通过截面的瞬时功率

把同一截面的两导数代入功率式，得到

$$\begin{aligned} P &= -\mathcal{T}(Bk\cos kx\cos\omega t)(-B\omega\sin kx\sin\omega t)\\ &= \mathcal{T}B^2k\omega(\cos kx\sin kx)(\cos\omega t\sin\omega t)\\ &= \frac{\mathcal{T}B^2k\omega}{4}\sin 2kx\sin 2\omega t. \end{aligned}$$

图 3.32 取 $P_0=\mathcal{T}B^2k\omega/4$，在 $t=T/8$ 时 $\sin 2\omega t=1$，故左半段 $P>0$、右半段 $P<0$，能量都流向中部。式中 $\cos kx\sin kx=\frac{1}{2}\sin 2kx$、$\cos\omega t\sin\omega t=\frac{1}{2}\sin 2\omega t$，故系数出现 $1/4$。

用时间平均与波节条件区分瞬时交换和净输运

对一个周期积分，固定 x 后的空间系数不参与积分。令 $z = 2\omega t$，则 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}z/(2\omega)$，$t = 0, T$ 分别对应 $z = 0, 4\pi$，所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \sin 2\omega t \ \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\omega T}\int_0^{4\pi} \sin z \ \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\omega T}[-\cos z]_0^{4\pi} \\ &= \frac{-\cos 4\pi + \cos 0}{2\omega T} = \frac{-1+1}{2\omega T} = 0.\end{aligned}$$

因此时间平均功率为零，但一般位置的瞬时值不为零。波节 $\sin kx = 0$，故截面速度及功率恒为零；节间能量则通过内部截面周期性交换。

热学

物理竞赛一轮讲义

第一讲

物质的热性质

2026

目录

第一讲　物质的热性质 **1**

1.1　温度、热平衡与物态 1

1.2　理想气体状态方程与液柱平衡 2

1.3　固体的热膨胀与仪器读数 4

1.4　表面张力与弯曲液面 7

1.5　活塞、轻绳与分段过程 10

1.6　例题与分析 13

1.7　本讲小结 28

1.8　练习 29

练习解答 30

第一讲　物质的热性质

1.1　温度、热平衡与物态

把温度计放入一杯水，温度计的读数起初会改变，经过一段时间才稳定下来。测温时利用的就是温度计与水之间的热接触：热量由温度较高的一方向较低的一方传递，直到两者达到热平衡。

若物体 A、B 分别与处于同一确定状态的物体 C 达到热平衡，则 A 与 B 也处于热平衡。这称为热力学第零定律。把 C 用作温度计，就能比较两个物体的温度：图 1.1 中，两次平衡时温度计的读数相同，因而 $T_A = T_C = T_B$。这使先后进行的测量有了共同的温度标准。

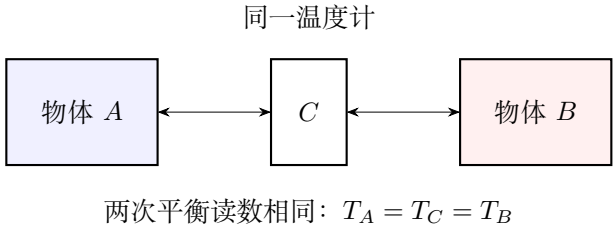


图 1.1: 两次热平衡时温度计读数相同，物体 A 与 B 具有相同温度

温度计选择一种随温度改变的物理量作示温量，例如液柱长度、电阻或定容稀薄气体的压强。选取两个固定温度作标定，并规定示温量与温度读数之间的对应关系，便建立温标。若以冰点与标准大气压下水的沸点为两个标定点，并在线性刻度中使用示温量 X，则经验读数写成

$$\frac{t}{^\circ\mathrm{C}} = 100\frac{X - X_0}{X_{100} - X_0}.$$

稀薄气体测温显示出趋向共同标度的规律，热力学温度为后续状态方程提供统一的温度变量。摄氏温度与热力学温度的换算为

$$\frac{T}{\mathrm{K}} = \frac{t}{^\circ\mathrm{C}} + 273.15.$$

温差用 K 与摄氏度差表示时数值相同；温度之比使用热力学温度。例如 300 K 与 600 K 之比为 $1:2$，相应的摄氏温度则分别为 $26.85^\circ\mathrm{C}$ 和 $326.85^\circ\mathrm{C}$。

温度给出热平衡所对应的状态，内能还取决于物质种类、质量和物态。由温差传递的能量称为热量。对给定加热条件、无相变的过程，吸收微小热量 δQ 引起温升 $\mathrm{d}T$，热容量为 $C=\delta Q/\,\mathrm{d}T$，比热容为 $c=C/m$。恒定比热时，

$$Q=m\int_{T_1}^{T_2}c\,\mathrm{d}T=mc[T]_{T_1}^{T_2}=mc(T_2-T_1).$$

同样的温升需要多少热量，由热容量决定。气体的加热条件还影响热量向内能与对外功的分配，下一讲将结合分子运动展开这一关系。

1.1.1 状态量与实验过程

用气缸中的一团气体作对象，可分别测量压强 p、体积 V 和温度 T。活塞上的负载给出气体压强，活塞位置给出体积，外部恒温环境决定达到热平衡后的温度。三个量之间满足物质的状态关系：固定其中两个，第三个随之确定。将一个量保持不变，再观察另外两个量怎样联系，就得到等温、等容或等压过程的实验曲线。

1.2 理想气体状态方程与液柱平衡

1.2.1 状态量、绝对压强与理想气体近似

描述定量平衡气体通常使用压强 p、体积 V 和绝对温度 T。压强是气体对器壁单位面积的法向作用，体积是气体实际占据的空间，温度反映热运动状态。理想气体模型忽略分子自身占有的体积及分子间势能；气体稀薄且远离凝结时，通常较为适用。

理想气体状态方程为

$$pV=nRT=NkT,\qquad n=\frac{m}{\mu},\quad N=nN_A,\quad k=\frac{R}{N_A}. \tag{1.1}$$

其中 n 是物质的量，N 是分子数，μ 是摩尔质量，各自表示气体量的不同计数方式。使用 SI 单位时 p 用 Pa，V 用 m^3，μ 用 kg/mol，$R=8.314\,\mathrm{J/(mol\,K)}$。

式(1.1)中的 p 是相对于真空的绝对压强。若压力计给的是表压 p_g，应换成 $p=p_0+p_g$；活塞受到的净压力则由两侧绝对压强之差乘面积求得。例 1.4 同时使用气体状态方程与水银柱的压差关系。

固定气体量时，状态方程给出三种基本过程：等温 $pV=$ 常量，等容 $p/T=$ 常量，等压 $V/T=$ 常量。每一种关系都还包含“气体量固定”这一条件，充气或漏气时，物质的量 n 随过程变化，应在各状态中分别计入。

在 p–V 图上，等温线是双曲线，等容线竖直、等压线水平。在 p–T 图上，等容线是过原点的射线，斜率 nR/V；在 V–T 图上，等压线是过原点的射线，斜率 nR/p。若横轴采用摄氏温度，直线一般不再过坐标原点。

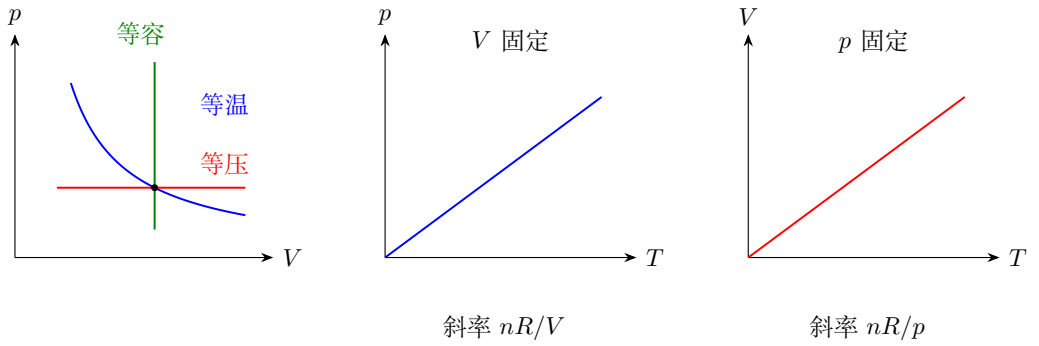


图 1.2: 固定气体量时的过程图；温度坐标必须使用热力学温度

图 1.2 左图三种过程可经过同一状态，但它们的后续路径不同。中图、右图的直线通过 $T=0$ 的坐标原点是理想气体关系的数学外推；实际气体在极低温可能凝结，曲线在实验所用的稀薄气体温区内代表状态关系。用摄氏温度作横坐标时，只平移横轴，其横轴截距随之移到 $-273.15\,^{\circ}\mathrm{C}$。

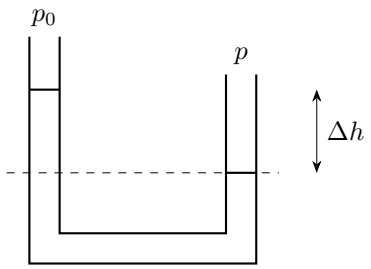
对同一定量的理想气体，两个平衡态之间有 $p_1V_1/T_1=p_2V_2/T_2$，中间过程的压强与体积怎样变化，还由活塞负载、挡板等机械条件确定。例 1.5 中三个阶段共用同一端点状态方程，却分别由不同机械约束确定路径。

1.2.2 液柱压强与多液面联动

静止液体中，取底面积 S、高度 $\mathrm{d}z$ 的竖直薄层，向上为正。底面压力、顶面压力与重力平衡给出 $p(z)S-p(z+\mathrm{d}z)S-\rho g S\,\mathrm{d}z=0$，除以 $S\,\mathrm{d}z$ 并取极限得 $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}z=-\rho g$。若密度均匀，从 z_1 积分到 z_2，

$$\int_{p_1}^{p_2}\mathrm{d}p=-\rho g\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z,\qquad p_2-p_1=-\rho g(z_2-z_1),$$

故 $p+\rho g z=$ 常量。沿同一连续液体向下走高度 h，压强增加 $\rho g h$；向上走则减小。同种连通静止液体中的水平面上，z 相同，因而压强相同。



$$p = p_0 + \rho g \Delta h$$

图 1.3: 同一液体内从开口端到气体端的压强传递

图 1.3 中先从左液面向下到辅助水平面，再沿该水平面走到右液面，得到 $p = p_0 + \rho g \Delta h$。若气体侧液面更高，$\Delta h$ 应取负。两侧液面高度的差直接确定压强差的符号。

液面发生位移时，还要满足液体体积守恒。若一 U 管两臂截面为 S_1, S_2，带符号液面位移满足 $S_1 \delta h_1 + S_2 \delta h_2 = 0$。等截面才有两侧位移大小相等；由此得到的液面高度差变化常为单侧位移的两倍。例 1.3 用两组体积守恒再联系同一封闭气体，例 1.4 还须把管顶固定转化为空气柱长度变化。

理想混合气体中，每种组分可用其物质的量定义分压：$p_i V = n_i R T$，总压 $p = \sum_i p_i$。其中各组分共用混合气体的体积 V 与温度 T。

若多个刚性容器等温连通且连通管体积可忽略，气体总量守恒，得到 $p_f \sum V_i = \sum p_i V_i$。若初温不同，应先列总内能守恒或与环境的能量交换，求出末温后再用状态方程。饱和蒸气还可能凝结或汽化，气相物质的量未必固定，这将在第四讲单独处理。

1.3　固体的热膨胀与仪器读数

温度升高时，固体微观粒子的平均间距通常增大，宏观长度随之改变。在一段温区内，实验发现长度变化近似正比于原长与温差：

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T, \qquad L = L_0(1 + \alpha \Delta T).$$

其中 L_0 是基准温度 T_0 下的长度，α 的单位是 K^{-1}。此公式含两个近似：材料可自由膨胀，且该温区内 α 变化不明显。若杆被刚性支架固定，长度未必按上式实际增加，而可能产生热应力，此时还须结合弹性关系求解。

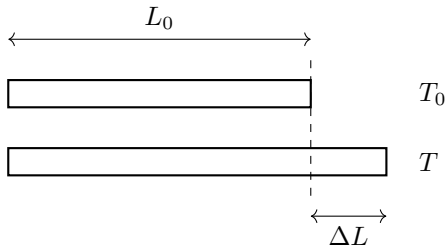


图 1.4: 自由杆的原长与伸长分开标记；图中伸长夸张绘制

图 1.4 中两次长度共用同一左端基准，虚线保留原右端的位置，向右多出的一段为 ΔL。相对伸长以原长 L_0 为基准，故为 $\Delta L/L_0$。两端固定时，热伸长受到限制，材料内部形成应力，具体关系见后面的热应力分析。

从相对变化看，$\Delta L/L_0=\alpha\Delta T$。多数金属的 α 很小，所以在常见温差下可以保留一阶小量。若长度的变化进入周期、密度等非线性表达式，应先写精确的量之间关系，再统一展开，周期、密度或面积的幂次关系分别给出各自的一阶变化率。

热膨胀系数给出的是材料的响应，题目要求的往往是装置的响应。以摆钟为例，温度先改变摆长，摆长再改变一次摆动所需的时间，最后才改变一天内完成的摆动次数。例 1.1 将依次计算这三个环节。

对于随长度的幂次变化的量 $Y\propto L^q$，令 $\varepsilon=\alpha\Delta T$，先写 $Y/Y_0=(1+\varepsilon)^q$。对 $F(\varepsilon)=(1+\varepsilon)^q$ 求导，

$$F'(\varepsilon)=q(1+\varepsilon)^{q-1},\qquad F(0)=1,\quad F'(0)=q.$$

在 $|\varepsilon|\ll 1$ 时，一阶展开 $F(\varepsilon)=F(0)+F'(0)\varepsilon+O(\varepsilon^2)$ 才给出 $\Delta Y/Y_0\simeq q\alpha\Delta T$。比较实际时间与仪器读数时，还须由计数方式判断应用的是周期本身，还是周期的倒数。

若膨胀系数显著依赖温度，可用微分定义 $\alpha=(1/L)(\mathrm{d}L/\,\mathrm{d}T)$。将变量分离为 $\mathrm{d}L/L=\alpha(T)\,\mathrm{d}T$，并把基准状态 $L(T_0)=L_0$ 作为积分下限，得到

$$\int_{L_0}^{L}\frac{\mathrm{d}\ell}{\ell}=\int_{T_0}^{T}\alpha(\vartheta)\ \mathrm{d}\vartheta,\qquad [\ln\ell]_{L_0}^{L}=\ln\frac{L}{L_0}.$$

对两边取指数，才有 $L/L_0=\exp[\int_{T_0}^{T}\alpha(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta]$。常系数时右侧积分为 $\alpha(T-T_0)$，再展开 $e^{\alpha\Delta T}=1+\alpha\Delta T+O((\alpha\Delta T)^2)$，便得到本讲使用的一阶模型。

1.3.1 面积、体积、孔洞与复合结构

对各向同性材料，三个方向按同一长度比例变化。因此面积与体积分别满足

$$\frac{A}{A_0}=(1+\alpha\Delta T)^2\simeq 1+2\alpha\Delta T,\qquad \frac{V}{V_0}=(1+\alpha\Delta T)^3\simeq 1+3\alpha\Delta T.$$

令 $\varepsilon=\alpha\Delta T$，平方与立方的实际展开为 $1+2\varepsilon+\varepsilon^2$ 和 $1+3\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3$。舍去二阶及更高项，才得到面积膨胀系数约为 2α、体膨胀系数约为 3α；前提是材料各向同性。质量不变时，先用 $\rho V=\rho_0 V_0$ 得 $\rho/\rho_0=(1+\varepsilon)^{-3}$，再在上面的幂函数展开中取 $q=-3$，得到 $\rho\simeq\rho_0(1-3\alpha\Delta T)$。

孔洞随整体的几何尺度扩大。可把孔暂时用同种材料填满，整体自由、均匀膨胀后再取出填充部分；孔缘会移动到相同的放大位置。这里金属环处处可以自由移动，孔的大小随整体位移场改变。

也可以从坐标来理解孔洞膨胀。若以任意一点为原点，自由均匀膨胀使每个材料点的坐标都乘 $1+\alpha\Delta T$。孔缘各点服从相同的位移规律，因此孔半径也乘这一因子。它说明“孔变大”是整个位移场的结果，与孔内有没有填充物无关。若外缘受固定约束，位移场已经改变，应由该约束与材料弹性共同求位移。



图 1.5: 自由圆环的内、外轮廓按同一比例放大；两端固定的杆则建立压应力

图 1.5 左图中，材料点的位移沿半径向外，孔半径随整体尺度一同增加。右图中杆的两端固定，长度保持不变：若再采用线弹性模型、杨氏模量为 E，总应变由热应变与弹性应变相加，

$$0=\alpha\Delta T+\frac{\sigma_m}{E},\qquad \sigma_m=-E\alpha\Delta T.$$

这里约定拉应力为正，故升温后的应力为压应力。这个结果来自固定端的几何限制；自由杆的端点随温度移动，固定杆则以压缩弹性应变抵消热应变。

复合杆、双金属结构和有间隙的装置应逐段写变化量，再列几何约束。串联自由杆的总长变化为 $\sum_i \alpha_i L_i\Delta T$；两个端点的间距变化则可能是两段伸长之差。解题时应在图上标出比较的两个端点，按图中端点的位置关系取伸长量的和或差。

若尺本身膨胀，每个刻度对应的实际长度也随之增加，读数应由“被测长度除以实际刻度长度”求出。尺与被测物同时升温时，一阶读数变化取决于两者膨胀系数之差，即 $\alpha_{\text{物}}-\alpha_{\text{尺}}$。例 1.1 和练习 1.1 分别讨论时间测量与孔洞几何。

1.4 表面张力与弯曲液面

1.4.1 表面张力的方向与两个表面的计数

液体内部分子四周都有邻近分子，表层分子朝向气体一侧的环境则不同。把液体内部分子移到表层，需要改变它与邻近分子的相互作用；新建液面因此需要能量。恒温时，表面自由能随面积增加，液面具有减小面积的趋势。沿液面内任取一条分界线，邻侧液面对该线的作用力位于液面切平面内，方向垂直于该分界线。

对长度为 ℓ 的直边，一个液面贡献 $\sigma\ell$ 的拉力。肥皂膜由两面构成，若两面表面张力系数均为 σ，活动边受到的总拉力为 $2\sigma\ell$。这两个贡献分别来自薄膜正、反两面的气液界面。

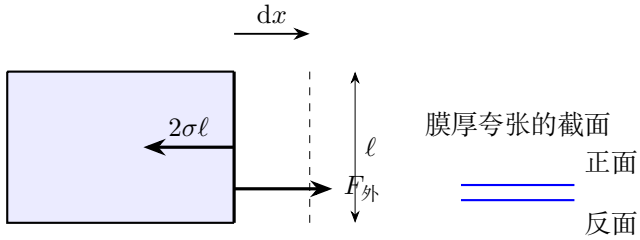


图 1.6: 双面膜活动边的受力与面积变化

图 1.6 的活动边向右移动 $\mathrm{d}x$ 时，每面面积增加 $\ell\,\mathrm{d}x$，总面积增加 $2\ell\,\mathrm{d}x$。外力准静态做功 $2\sigma\ell\,\mathrm{d}x$，恰等于表面自由能的增加 $\sigma\,\mathrm{d}A_{\text{总}}$。因此 σ 既可用 $\mathrm{N/m}$ 表示，也可用 $\mathrm{J/m^2}$ 表示；活动边的受力与液面面积的增加由同一个系数 σ 联系。

恒温且 σ 近似不变时，$\Delta F_{\text{表}} = \sigma\Delta A_{\text{总}}$。若温度变化明显或界面成分变化，$\sigma$ 也会变化，表面自由能还受到这些变量的影响。

1.4.2 由局部受力确定曲率与压差

受均匀膜张力作用的轻细线，平衡时曲率与张力有关。在光滑圆弧上取长度 $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$ 的微元，线两端张力的法向合力为 $\tau\,\mathrm{d}\varphi$；双面膜的横向拉力为 $2\sigma\,\mathrm{d}s$。因此

$$\frac{\tau}{r} = 2\sigma.$$

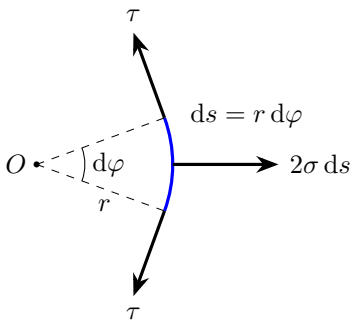


图 1.7: 弧形细线微元的两端张力合力向曲率中心，膜力沿法向向外

图 1.7 把 “沿细线的张力 τ” 与 “膜对细线的分布拉力 2σ” 分开。前者在两端分别沿切线，后者垂直线元；两端张力的方向差才提供 $\tau\,\mathrm{d}\varphi$，沿法线的合力由两端切线的微小夹角决定。

上述微元平衡还说明自由段为什么是圆弧。轻线处处无切向分布力，张力的大小沿线不变；膜的单位长度拉力也是常量，所以 $1/r = 2\sigma/\tau$ 处处相同。曲率恒定的平面曲线就是圆弧。应先确定这条局部关系，再用全局长度和容许区域确定圆弧的位置。在受到容器限制时，继续增加的线长可进入贴边段。

圆弧半径由局部受力确定，弧的位置和贴边长度则由端点与线长确定。例 1.2 中，自由弧与贴边段须同时满足上下两条光滑边的几何关系。

球形液面也可由整体受力求附加压强。图 1.8 取上半球，向上的压差合力作用在圆形截面，沿边缘向下的表面张力作用于整个圆周。取半球，截面上的压差合力是 $\Delta p\,\pi r^2$，圆周表面张力合力是 $2\pi r\sigma$，所以

$$\boxed{\Delta p = \frac{2\sigma}{r}}.$$

对液滴或液体中的单界面气泡，内侧压强均比紧邻外侧高 $2\sigma/r$；薄肥皂泡有两个表面，近似为 $\Delta p = 4\sigma/r$。判断压差符号时，应先画出表面张力对半球的作用方向，再列平衡方程。压差方向由表面曲率及张力指向决定。

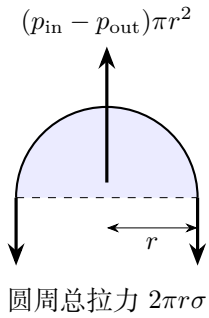


图 1.8: 半球截面上的压差合力，与截面圆周上的表面张力相平衡

1.4.3 润湿、接触角与毛细高度

液体与固体接触时，界面形状取决于几种界面的相互作用。接触角 θ 在液体一侧量取：$\theta < 90^\circ$ 为润湿，弯月面通常凹向气体；$\theta > 90^\circ$ 为不润湿，弯月面通常凸向气体。画接触角时，角的顶点取三相接触点，两边分别沿固体表面与液面切线，角弧画在液体一侧。

取半径 r 的润湿毛细管中高于槽面的液柱，如图 1.9 左侧；右侧将这段液柱的剩余竖直作用单独画出。接触线总长 $2\pi r$，表面张力的竖直合力为 $2\pi r\sigma\cos\theta$。忽略弯月面体积，液柱重力为 $\rho g\pi r^2 h$，故

$$\boxed{h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}}.$$

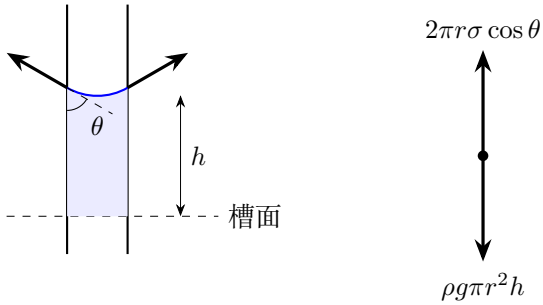


图 1.9: 润湿液柱的高度与等效竖直受力；左图以 $\theta = 60^\circ$ 示意

图 1.9 左图接触线处的箭头沿界面切线，两个箭头是整个圆周拉力的截面示意。以方位角 φ 参数化接触圆周，$\mathrm{d}\ell = r\,\mathrm{d}\varphi$；每段竖直拉力为 $\sigma\cos\theta\ \mathrm{d}\ell$，所以

$$F_z = \int_0^{2\pi} \sigma r\cos\theta\ \mathrm{d}\varphi = \sigma r\cos\theta[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r\sigma\cos\theta.$$

右图将这个圆周合力画成一支竖直向上的箭头。忽略弯月面体积时，液柱体积近似为 $\pi r^2 h$，所以周长与面积不同的尺度依赖给出 $h \propto 1/r$。

h 是带符号的液面相对高度，润湿时为正，不润湿时为负。由公式可见管越细、毛细效应越显著；这来自张力随周长变化、重力随面积变化，这个尺度差给出细管中更明显的液面升降。

从液面压差也能求出毛细高度。润湿液面的曲率半径约为 $r/\cos\theta$，气体一侧压强比液面下方高 $2\sigma\cos\theta/r$。从槽面沿液体向上走 h，液体压强降低 $\rho g h$，两种压差相等，仍得到同一高度。受力法取的是整段液柱，压强法比较的是液面两侧；两种取法描述同一液面的表面作用，分别用液柱受力或液面压差建立方程。

上述静态关系取液槽足够宽、槽面近似不动，且液面已经达到平衡；忽略弯月面体积后，高出槽面的液柱体积为管截面积与高度的乘积。

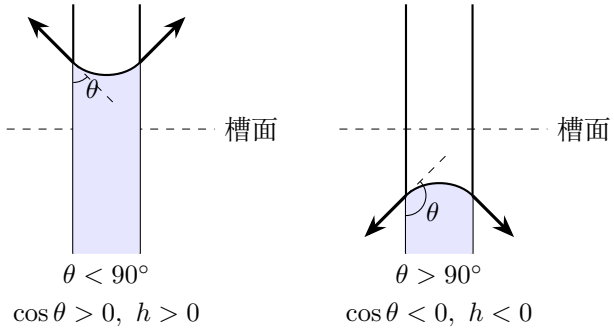


图 1.10: 接触角从液体一侧量取，界面切线决定张力竖直分量；弯月面作局部示意

图 1.10 中，箭头表示接触线处作用于液体的张力方向，沿气液界面的切线指向管壁。润湿时其竖直分量向上，不润湿时向下；张力系数 $\sigma > 0$，竖直分量的方向由 $\cos\theta$ 的符号给出。对不润湿的下降液面，宜用压强法统一处理：

$$p_0 - p_{\text{液面下}} = \frac{2\sigma\cos\theta}{r}, \qquad p_0 - p_{\text{液面下}} = \rho g h.$$

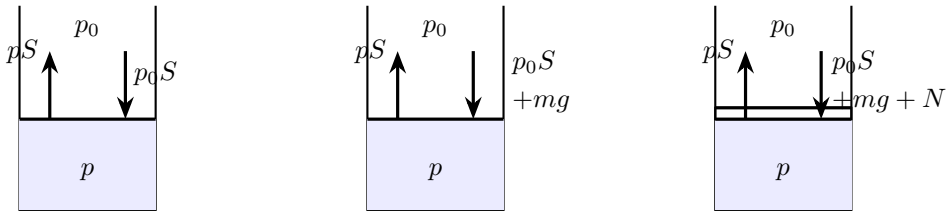
两式都按同一方向取压差，因而给出同一个带符号高度公式。图中的槽面是固定参考高度，$h < 0$ 表示管内液面低于它。

1.5　活塞、轻绳与分段过程

1.5.1　机械平衡怎样确定气体路径

状态方程只能联系 p, V, T，还需要机械条件确定过程。轻活塞在恒定外压下自由、缓慢运动时，两侧压强相等，因而气体可近似等压；重活塞竖直放置时，平

衡压强为 $p = p_0 + mg/S$；水平弹簧活塞则满足 $p = p_0 + kx/S$，通常不是等压过程。



轻活塞 $p = p_0$

重活塞 $p = p_0 + mg/S$

重活塞接触上挡板 $p = p_0 + (mg + N)/S$

图 1.11: 负载与挡板反力共同确定活塞压强；挡板反力只在接触时存在

图 1.11 显示同一气体方程对应不同机械路径。上挡板接触时，挡板可向下提供支持力，因此气体压强可超过自由平衡值而活塞仍不动。挡板撤去或支持力降为零，才切换到自由运动段。

绷直轻绳的张力满足 $\tau \geq 0$；张力减到零后，装置可进入绳松弛的阶段。挡板的支持力沿阻止活塞继续移动的方向，支持力降到零则与自由运动段相接。

加热或冷却时，活塞位置决定气体体积，受力平衡决定压强，气态方程将它们与温度联系起来。活塞移到挡板后体积固定，支持力随压强改变；细绳绷紧时两活塞位移受绳长约束，张力降至零后它们分别满足各自的受力关系。例题将沿这些实际过程逐段求出状态变化。

在同一段中应消去不必要的未知量。例如两个活塞由绳连接且同时自由，分别列平衡后消去张力，往往可以先确定压强；再由绳长守恒把两个位移归结为一个坐标。台阶管中，两个活塞同向移动也可能使气体体积减小，体积应按各段截面积乘长度重新求和。

“接触挡板”与“自由运动”应由受力连续地衔接。例如重活塞靠在上挡板上时，$N = (p - p_0)S - mg \geq 0$，压强可以高于自由平衡值。冷却使 N 逐渐减小，只有减到零，活塞才开始离开；此后活塞随冷却向下移动。反过来，自由运动段中位置达到挡板是几何临界条件，此刻支持力尚为零，随后升温才逐渐建立支持力。临界状态同时满足相邻两段的条件，因此相邻两段在这一状态中连续连接。

同理，对连接两活塞的绳，应先标清气体在哪一侧。气体对两活塞的压力未必同向，两个压差力也未必使用同一面积。先逐个活塞列式再消去张力，才能判断共同移动是等压过程还是变压过程。

例 1.8 训练“自由平移—接触台阶”的转换；例 1.9 包含“共同移动—固定体积—绳松弛”三段。各转折点都与图中的接触或松绳事件一一对应。

1.5.2　可逆绝热过程中的临界状态

绝热气体在缓慢膨胀中对外做功，温度随之降低；缓慢压缩时，外界做功使温度升高。对同一定量、热容近似恒定的理想气体，缓慢无摩擦的绝热过程满足

$$pV^{\gamma}=\text{常量},\qquad \gamma=\frac{C_p}{C_V}>1.$$

这里 C_p 和 C_V 分别是同一份气体在等压、等容条件下的热容量，即相应过程中吸收微小热量与温升之比。等压加热时，气体升温同时膨胀做功，所以同样的温升需要更多热量，$C_p>C_V$。热学第三讲将从热力学第一定律推导这条绝热关系；下面由它求出本讲气缸问题所需的温压关系。

设初、末两态为 (p_1,V_1,T_1) 和 (p_2,V_2,T_2)。由绝热关系，先得到体积比

$$p_1V_1^{\gamma}=p_2V_2^{\gamma},\qquad \frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}.$$

再由理想气体状态方程 $T=pV/(nR)$，同一气体的物质的量 n 约去，因而

$$\begin{aligned}\frac{T_2}{T_1}&=\frac{p_2V_2}{p_1V_1}=\frac{p_2}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma}\\&=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.\end{aligned}$$

图 1.12 从同一初态 A 画出膨胀时的绝热线和等温线。等温过程有 $p/p_1=V_1/V$；绝热过程有 $p/p_1=(V_1/V)^{\gamma}$。膨胀时 $0<V_1/V<1$，且 $\gamma>1$，所以绝热线上的压强低于同体积的等温状态。沿 $A\to B$，体积增大、压强下降、温度降低。

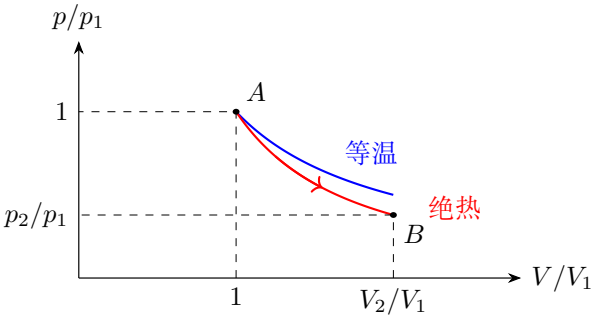


图 1.12: 从同一初态膨胀到相同体积时，绝热过程比等温过程有更低的压强和温度

例 1.7 中，先对气缸壳体列竖直受力平衡，地面支持力降至零时得到临界压强 p_2；再沿上述绝热路径将 p_2/p_1 换算成 T_2/T_1。图中的 A 对应初态，B 对应支持力恰好归零的状态，力学条件与热学路径在这个末态相接。

1.6 例题与分析

例 1.1 (钢摆钟的日差)**.** 一钢制单摆在 0°C 时周期 $P_0 = 1.000\,\mathrm{s}$，线膨胀系数 $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$。温度升至 25°C，重力加速度不变。求新周期，以及实际经过一天时钟面少走的时间。见图 1.13。

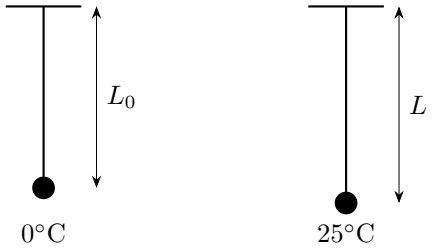


图 1.13: 钢摆钟的日差：题设

解　先求自由热伸长，再由摆长求周期

图 1.13 中两根摆线表示同一钢摆在不同温度下的长度。支点不变、重力加速度不变，温度只通过摆长影响周期。由自由线膨胀关系，

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T), \qquad \alpha\Delta T = 1.2 \times 10^{-5} \times 25 = 3.0 \times 10^{-4}.$$

单摆周期随摆长的平方根变化，将上式代入小振幅周期公式，得

$$\frac{P}{P_0} = \sqrt{\frac{L}{L_0}} = \sqrt{1.00030}, \qquad \boxed{P \simeq 1.000150\,\mathrm{s}}.$$

用振动计数定义钟面时间

接下来需要区分实际经过的时间与钟面计数。设实际经过 t，摆共完成 $N = t/P$ 次周期，钟的刻度机构仍按每次 P_0 秒累计，因此钟面显示 $t_{\text{钟}} = NP_0$。图 1.14 用相邻峰的间隔表示周期，并用同一条竖线比较实际经过相同时间后的振动计数；周期增长后计数较少。

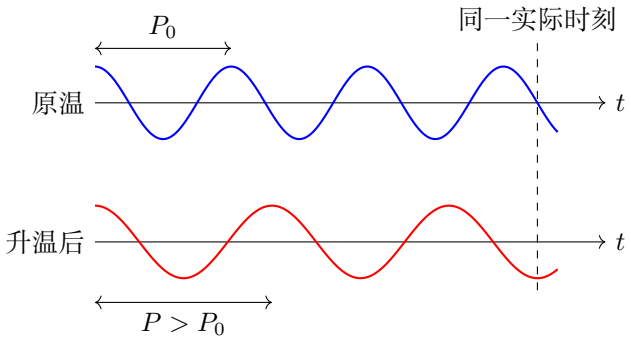


图 1.14: 周期增大后，同一实际时长内完成的振动次数减少；周期差夸张绘制

由实际时间与钟面读数之差求日差

实际一天取 $t = 86400\,\mathrm{s}$，故少走的时间为

$$\Delta t = t - t_{\text{钟}} = t\left(1 - \frac{P_0}{P}\right) = 86400\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1.00030}}\right) \simeq \boxed{12.96\,\mathrm{s}}.$$

用 $\varepsilon = \alpha\Delta T$ 表示摆长的相对增量。在 $\varepsilon = 0$ 处，$f(\varepsilon) = \sqrt{1+\varepsilon}$ 的导数为 $f'(0) = \frac{1}{2}(1+0)^{-1/2} = \frac{1}{2}$，故 $P/P_0 = 1 + \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$。温度小幅上升时，周期的相对增加约为摆长相对增量的一半。

例 1.2 (平行框边内的肥皂膜细线)**.** 两条光滑水平平行边相距 d，不可伸长的轻细线两端固定在左侧 A, B，长度 $\ell > \pi d/2$。细线两侧最初有肥皂膜，刺破左侧膜，右侧膜保留，表面张力系数为 σ。允许细线贴着光滑框边，求平衡形状和张力。见图 1.15。

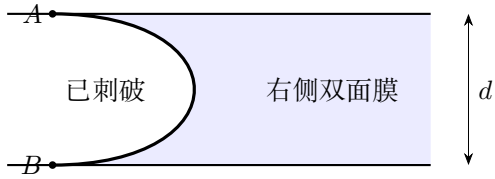


图 1.15: 刺破左侧后保留右侧双面膜；图示细线尚未达到平衡

解　在自由弧上用微元平衡确定恒定曲率

刺破左侧膜后，细线自由段只受到右侧双面膜的分布拉力。在自由段取一小段 $\mathrm{d}s$：两端张力大小相等，切向分量相互抵消；法向合力为 $\tau\,\mathrm{d}\varphi$。两面膜对这一段的合力为 $2\sigma\,\mathrm{d}s$，因此

$$\tau\,\mathrm{d}\varphi = 2\sigma\,\mathrm{d}s, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{2\sigma}{\tau}.$$

张力沿光滑轻线不变，自由段的曲率也不变，因而是圆弧。

用上下框边筛选相切半圆与贴边段

还须使用图 1.15 的上下框边：细线可在两条水平边之间弯曲，或沿框边接触。由于 $\ell > \pi d/2$，连接上下框边的半圆弧长小于总线长，平衡形状应包含贴边直线段。在图 1.16 中，圆弧与框边光滑相切于 C, D，两点间竖直距离为 d，所以 CD 为右半圆弧，$r = d/2$。

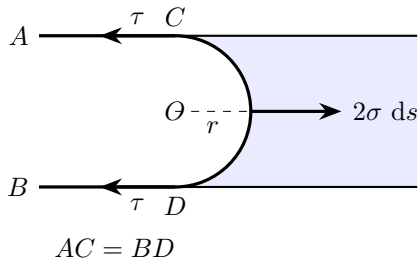


图 1.16: 平行框边内的肥皂膜细线：解答过程

由半径求张力，再由总线长求贴边长度

由微元平衡式立即得到

$$\boxed{\tau = 2\sigma r = \sigma d}.$$

圆弧长为 $\pi d/2$。其余部分由 AC, DB 分担；上下对称且圆弧两端位于同一竖线上，故

$$\boxed{AC = BD = \frac{\ell - \pi d/2}{2}}.$$

膜的整体受力与细线长度

图中蓝色膜仅在圆弧右侧，贴着上下框边的两段直线内侧已无膜，自由弧上的膜力与端点张力构成其水平平衡。取整个半圆弧，其水平方向的受力为：膜力的水平合力为 $2\sigma d$ 向右，C, D 处各有一个向左的张力，故 $2\tau = 2\sigma d$，与局部推导一致。线长增大只使两段贴边线等量变长，半径和张力均保持不变。

例 1.3 (双 U 形管的液面联动)**.** 四根等截面竖管 a,b,c,d 构成双 U 形装置：a,b 下端由水银连通，c,d 下端由水银连通，b,c 顶端封有同一团气体，a,d 开口。温度降低后 c 中水银上升 Δh。求其余液面位移与气体压强变化。见图 1.17，大气压恒定。

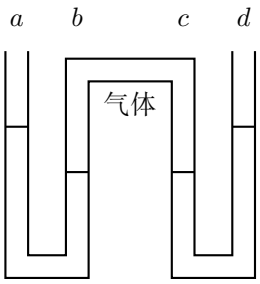


图 1.17: 双 U 形管的液面联动：题设

解 对两组独立水银分别列体积守恒

以竖直向上为正，设四液面位移为 $\delta h_a,\delta h_b,\delta h_c,\delta h_d$。图 1.17 中左、右两组水银彼此独立，每组的水银量都不变；又因四管等截面，分别有

$$\delta h_a+\delta h_b=0,\qquad \delta h_c+\delta h_d=0.$$

以同一气体压强联系两组液面高度差

两外侧液面承受同一大气压，两内侧液面承受同一团气体的压强。沿左、右水银各从开口面走到气体面，得到

$$p=p_0+\rho g(h_a-h_b)=p_0+\rho g(h_d-h_c).$$

因此两组高度差的变化相等，即 $\delta h_a-\delta h_b=\delta h_d-\delta h_c$。题给 $\delta h_c=\Delta h$，依次代入上述关系，便确定图 1.18 中的四个箭头。

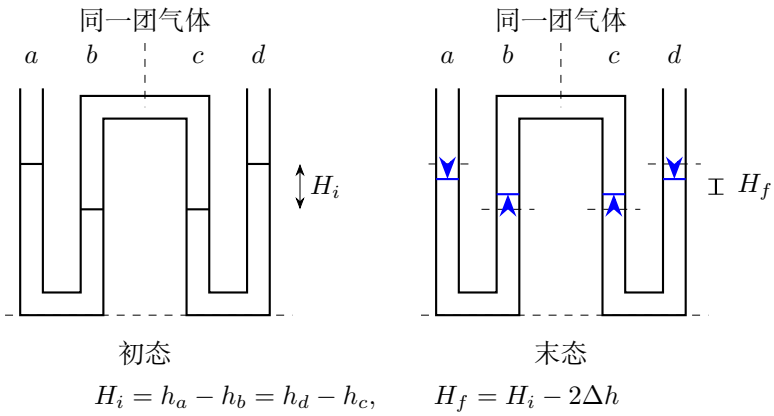


图 1.18: 双 U 形管的液面联动：解答过程

解出四液面位移，再求压强增量

结果为

$$\boxed{\delta h_b = \delta h_c = \Delta h, \qquad \delta h_a = \delta h_d = -\Delta h}.$$

图 1.18 中虚线保留各液面的初始位置，蓝色短线表示末位置；两幅图共用同一零高度。左组气体侧液面升高 Δh，大气侧液面降低 Δh，所以 $H_f = (h_a - \Delta h) - (h_b + \Delta h) = H_i - 2\Delta h$。右组也给出同样变化，故

$$\boxed{p_f - p_i = -2\rho g \Delta h}.$$

高度差减少 $2\Delta h$，来自内、外两侧液面各移动 Δh。结论也符合降温后的趋势：气体压强降低，外侧大气把水银推入气体侧。

例 1.4 (漏气水银气压计)**.** 气压计顶部有少量空气。大气压为 76 cmHg 时读数为 74 cm，顶部空气柱长 8 cm；后来读数为 72 cm，温度不变。槽面高度不变，求后来的真实大气压。见图 1.19。

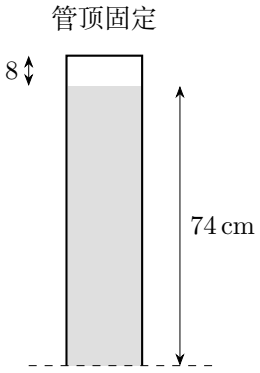


图 1.19: 漏气水银气压计：题设

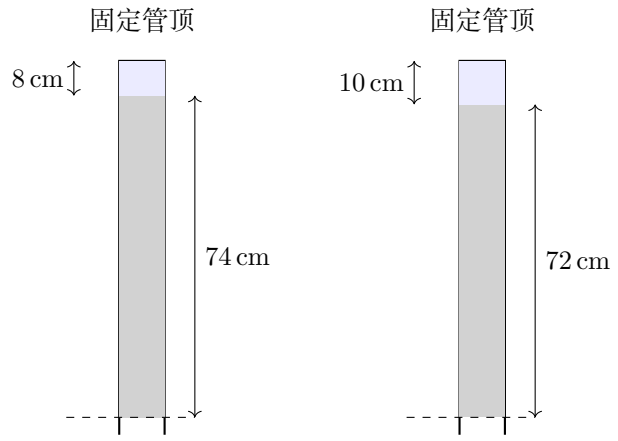
解　用初读数求顶部空气压强与固定管顶高度

先从初态确定顶部空气的压强与管顶位置。图 1.19 中槽面作为固定零高度，管顶高度为 $H = 74 + 8 = 82\,\text{cm}$。水银柱只承担两端压差，所以初态满足

$$p_{01} = p_{a1} + 74\,\text{cmHg}, \qquad p_{a1} = 2\,\text{cmHg}.$$

由固定几何求第二次空气柱长度

读数变为 72 cm 时，管顶相对槽面的高度仍为 82cm，因而空气柱长为 $\ell_2 = 82 - 72 = 10\,\text{cm}$。图 1.20 把两次空气柱长度及其对应压强并列表示。



$$p_{01} = p_{a1} + 74, \qquad p_{02} = p_{a2} + 72\ (\text{cmHg})$$

图 1.20: 管顶和槽面固定，读数降低使顶部空气柱增长

用顶部空气的等温关系求真实大气压

顶部空气量不变、温度不变，且管截面相同，因而 $p_a\ell$ 不变。取压强单位为 cmHg、长度单位为 cm，有

$$p_{a2}\times 10 = 2\times 8, \qquad p_{a2} = 1.6\,\mathrm{cmHg}.$$

由第二次水银柱的平衡关系，真实大气压等于顶部空气压强与水银柱压强之和：

$$\boxed{p_{02} = p_{a2} + 72 = 73.6\,\mathrm{cmHg}}.$$

水银柱降至 72cm 后，顶部空气柱由 8cm 伸长至 10cm，空气压强随等温膨胀而减小；实际大气压等于此时水银柱与顶部空气共同承担的压强。

例 1.5 (双挡板之间的加热)**.** 水平气缸内轻活塞初始靠左挡板 B，气体体积 V_0、压强 $0.9p_0$、温度 297K，外压 p_0。右挡板 A 对应体积 $1.1V_0$。缓慢加热到 399.3K，求离开 B、到达 A 的温度和末压，画出 p–V 路径。见图 1.21。

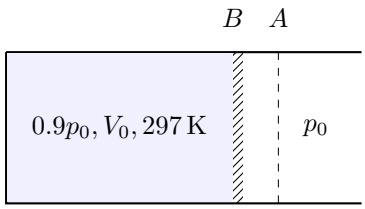


图 1.21: 双挡板之间的加热：题设

解　活塞靠左挡板时，以支持力归零确定离开温度

图 1.21 中，初态气压小于外压，活塞被大气压在左挡板 B 上。加热初期，B 提供向右支持力 $N_B = (p_0 - p)S$，$p < p_0$ 时，活塞保持贴在 B 上，体积为 V_0。当 N_B 首次减为零，$p_2 = p_0$，气体由等容关系给出

$$\boxed{T_2 = 297\frac{p_0}{0.9p_0} = 330\,\mathrm{K}}.$$

活塞自由运动时，以等压膨胀确定接触右挡板温度

离开 B 后，轻活塞无摩擦地缓慢移动，不再有挡板支持力，故两侧气压相等。此段等压，直至体积由 V_0 增大到 $1.1V_0$，有

$$\boxed{T_3 = T_2\frac{1.1V_0}{V_0} = 363\,\mathrm{K}}.$$

图 1.22 中的点 2、3 分别对应 “刚离开 B” 和 “刚接触 A”；水平段 $2\to 3$ 才是自由运动段。

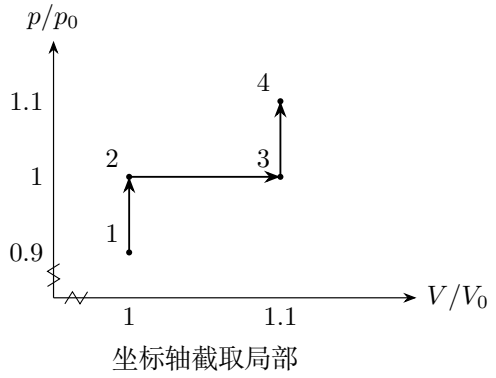


图 1.22: 双挡板之间的加热：解答过程

接触右挡板后，以等容升压求末压

由于 $399.3\,\mathrm{K} > 363\,\mathrm{K}$，末态已在右挡板上。继续加热时体积固定为 $1.1V_0$，于是

$$\boxed{p_4 = p_3\frac{T_4}{T_3} = p_0\frac{399.3}{363} = 1.1p_0}.$$

两挡板在各段中的支持力

图中 $1\to 2$、$3\to 4$ 两条竖线分别是两个挡板建立的等容约束。后一段右挡板向左的支持力为 $(p-p_0)S$，从零增加到 $0.1p_0S$，始终非负；前一段左挡板的支持力则由 $0.1p_0S$ 减到零。左挡板的支持力向右，右挡板的支持力向左，分别对应图中的两个等容段。

例 1.6 (沙袋活塞与温度反推)**.** 轻活塞压着气体并承受沙袋，初始靠在支环上，气柱高 H_0、压强 p_0。加热 60K 时活塞恰能离环，再继续加热使其上升到 $1.5H_0$。保持此时温度，逐渐移去全部沙袋，气柱最终高 $1.8H_0$。外压恒为 p_0，求初温及末温。见图 1.23。

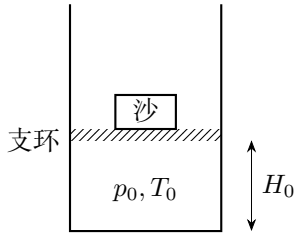


图 1.23: 沙袋活塞与温度反推：题设

解　区分支环承托状态与带沙袋的自由平衡压强

设沙袋质量为 m、活塞面积为 S。只要活塞带着全部沙袋自由上升，平衡压强就是常量 $P = p_0 + mg/S$。图 1.23 的初态由支环承担沙袋重力，气压为 p_0；离环时支环支持力降至零，气压才升到 P。

利用移沙等温段反求带载压强

从末两态反推 P 最直接：移沙时温度保持 T_1，活塞下气体量不变，而体积正比于气柱高度。按图 1.24 中的等温段 $C \to D$，

$$P\,(1.5SH_0) = p_0(1.8SH_0), \qquad P = 1.2p_0.$$

用离环前等容关系反求初温

再回到最初的加热阶段。活塞离环前高度仍是 H_0；加热 60K 后支环支持力恰降至零，此时才达到自由平衡压强 P。

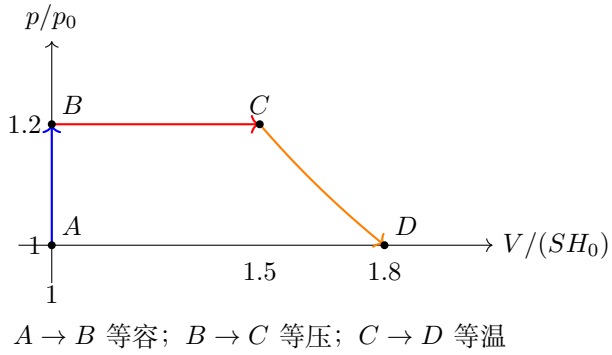


图 1.24: 局部放大的状态路径，轴上数字保留实际无量纲取值

等容状态关系给出

$$\frac{T_0 + 60}{T_0} = \frac{P}{p_0} = 1.2, \qquad \boxed{T_0 = 300\,\mathrm{K}}.$$

带沙袋的等压升温与最终温度

因此离环温度为 360K。此后保留全部沙袋继续加热，气体等压膨胀到原高度的 1.5 倍：

$$\boxed{T_1 = 360\frac{1.5H_0}{H_0} = 540\,\mathrm{K}}.$$

随后逐渐移沙，气体在 540 K 下等温膨胀。高度增至 $1.8H_0$，压强由 $1.2p_0$ 降至 p_0，与前面 $C \to D$ 段的压强、体积关系相合。三阶段分别保持体积、压强和温度，图中同一高度或同一温度的对应关系正是反推未知初温的依据。

例 1.7 (提起气缸的临界压强)**.** 质量 M 的绝热竖直气缸放在地面，截面 A。轻活塞下气体初态为 p_0, T_0，外压为 p_0。气缸由小支脚承托，缸底外表面始终与大气相通；忽略壁厚、活塞摩擦及气体质量，气缸足够长且活塞始终密封。缓慢上提活塞，直到气缸恰离地。气体满足 $pV^\gamma =$ 常量。求离地温度及必要条件。见图 1.25。

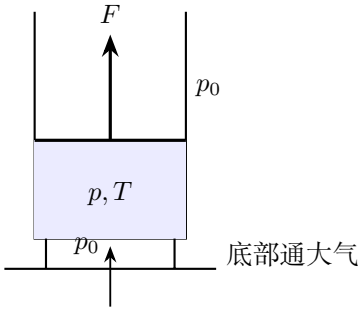


图 1.25: 上提活塞使气体膨胀；缸底由支脚架空，大气能够作用于底板外侧

解　以气缸壳体为对象，用地面反力归零求临界压强

图 1.25 中，上提轻活塞使气体膨胀、压强下降，底板内外的向上压差作用随之增大。先以气缸壳体为研究对象求离地条件，再用气体状态关系求温度。图 1.26 中底板外侧大气压向上作用，内侧气压向下作用。壳体竖直平衡为

$$N + p_0 A - pA - Mg = 0.$$

刚离地时地面对壳体的支持力 $N = 0$，故临界压强为

$$\boxed{p_f = p_0 - \frac{Mg}{A}}.$$

这一步只依赖壳体受力，与气体的绝热指数无关。

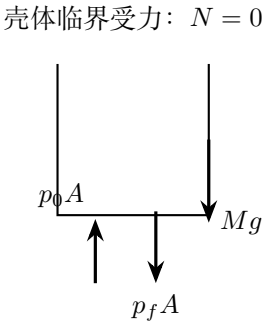


图 1.26: 提起气缸的临界压强：解答过程

由准静态绝热路径把临界压强转换为温度

再对封闭气体使用题给的准静态绝热关系。由 $pV^\gamma = p_0V_0^\gamma$ 得 $V_f/V_0 = (p_0/p_f)^{1/\gamma}$；结合状态方程，

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{p_fV_f}{p_0V_0} = \left(\frac{p_f}{p_0}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

代入临界压强，得

$$\boxed{T_f = T_0\left(1 - \frac{Mg}{p_0A}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}}.$$

气缸能够离地的质量范围

离地时气体仍占有限体积，其压强 $p_f > 0$，因此气缸质量满足 $\boxed{Mg < p_0A}$。随质量增大，所需压差增大，临界压强降低；$Mg \to p_0A$ 时，临界状态趋向无限膨胀、压强趋零。过程中气体膨胀做功，温度由 T_0 降至 T_f。

例 1.8 (三截面管与不可伸长细线)**.** 水平管的三个区段面积依次为 $2S, S/2, S$，中段长 2ℓ。两轻活塞 A, B 分别在左右宽段，距相邻台阶均为 ℓ，用长 4ℓ 的轻绳连接。初态 p_0, T_0，外压 p_0。缓慢升温到 $T \geq T_0$，求压强的分段表达式。活塞不能通过较窄的台阶。见图 1.27。

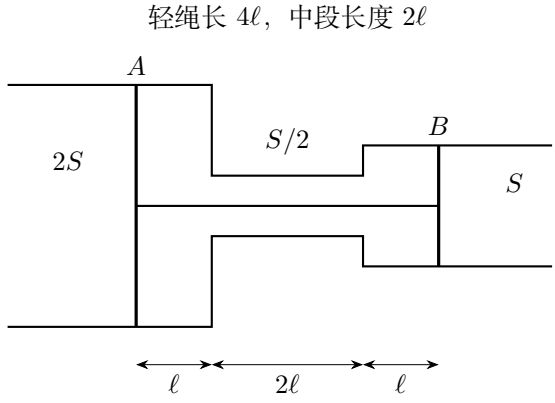


图 1.27: 两活塞间气体占据三个截面不同的区段；各轴向长度按同一比例画出

解　按截面分段求初始体积

图 1.27 中两活塞之间的初体积要逐段计算：

$$V_0 = 2S\ell + \frac{S}{2}(2\ell) + S\ell = 4S\ell.$$

分别列自由活塞平衡并消去同一绳张力

先考察两活塞都未接触台阶的阶段。若绳保持伸直，A 上的压差力要求 $\tau = 2S(p-p_0)$，B 上则要求 $\tau = S(p-p_0)$。同一轻绳的张力相同，故只能有 $p = p_0, \tau = 0$；这是准静态运动的极限，升温引起的体积增加决定移动方向。

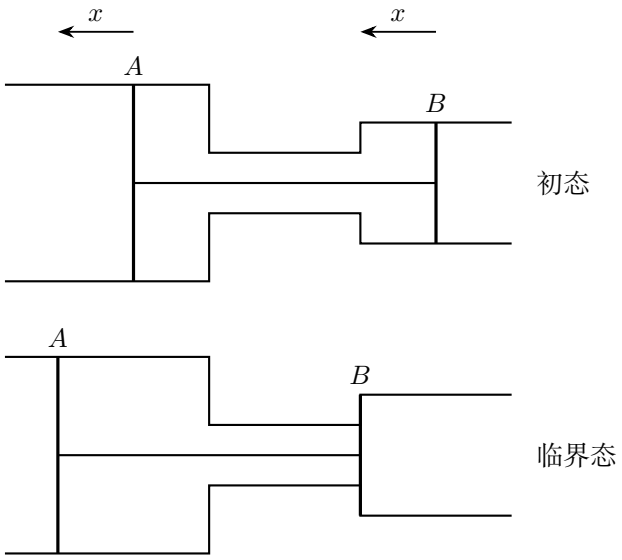
用共同位移求体积，确定首先接触的活塞

取两活塞共同向左移动的距离为 x。

左侧宽段长度增加 x，右侧宽段长度减少 x，中段不变，因此

$$V(x) = 2S(\ell + x) + S\ell + S(\ell - x) = 4S\ell + Sx.$$

可见向左移动反而使体积增大。升温时正沿此方向运动；首先到达台阶的是 B，其临界位移 $x = \ell$，对应 $V_* = 5S\ell$。



$$V = 4S\ell + Sx, \quad 0 \le x \le \ell$$

图 1.28: 共同左移使左侧增容超过右侧减容；B 到达右台阶后两活塞均固定

在接触事件处衔接等压和等容两段

图 1.28 中共同左移至 $x = \ell$ 时压强仍为 p_0，所以

$$T_* = T_0 \frac{V_*}{V_0} = \frac{5}{4} T_0.$$

到达图 1.28 下部的位置后，台阶阻止 B 继续左移；若 A 再向左，绳长便会增加，因此 A 也固定。继续加热属于等容过程，最终得到

$$\boxed{\frac{p}{p_0}=\begin{cases}1, & 1\le T/T_0\le 5/4,\\ 4T/(5T_0), & T/T_0\ge 5/4.\end{cases}}$$

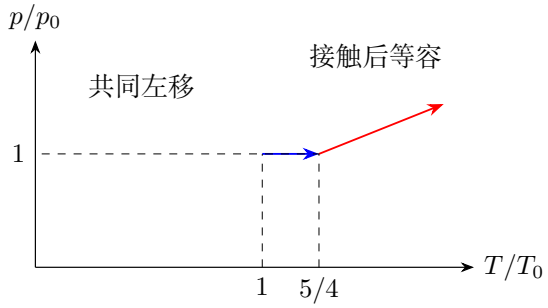
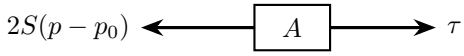


图 1.29: 共同移动段保持 $p=p_0$；B 接触台阶后沿等容直线升压

图 1.29 的两段在 $(T/T_0, p/p_0)=(5/4,1)$ 连续衔接。接触后体积不变，所以 p/T 为常量，这条红线的反向延长线通过原点；它与蓝色等压段代表不同约束。



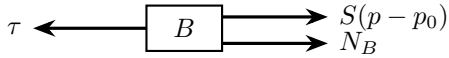


图 1.30: 图取接触后的 $p>p_0$；压力已合并成内外压差力，台阶只在 B 上提供向右反力

图 1.30 将两个活塞分开，绳对 A 向右、对 B 向左。台阶接触前没有 N_B，两个平衡式只能共同给出 $p=p_0, \tau=0$；接触后多出一个允许的向右反力，才可维持 $p>p_0$ 的静止状态。

接触台阶后的张力与支持力

后段的受力见图 1.30。A 平衡要求 $\tau=2S(p-p_0)\ge 0$；在 B 上，绳向左拉，压差力和台阶支持力向右，因此 $N_B=\tau-S(p-p_0)=S(p-p_0)\ge 0$。图中 N_B 的方向正能阻止 B 穿过台阶。两段在 T_* 处压强连续，张力与支持力均由零开始增加。

例 1.9 (双活塞冷却的三段路径)**.** 竖直台阶管下段面积 $2S = 20\,\mathrm{cm}^2$，上段面积 $S = 10\,\mathrm{cm}^2$。A 质量 1kg，初高 L；台阶高 $2L$；B 质量 0.5kg，初高 $4L$。两活塞用长 $3L$ 的绳相连，B 还经定滑轮连接质量 M 的砝码。初气压 $1.2\times10^5\mathrm{Pa}$、温度 800K，外压 $10^5\mathrm{Pa}$，$g = 10\,\mathrm{m/s}^2$。缓慢冷却到 210K，求 M 和各阶段状态。见图 1.31。

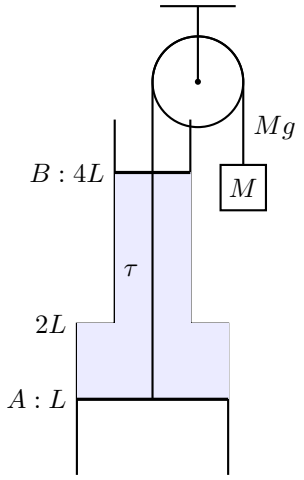


图 1.31: 两活塞间为独立轻绳；上方另一根绳从 B 绕过定滑轮连接外侧砝码

解　分开画两活塞受力，利用初态反求砝码质量

先取竖直向上为正，并记 $\Delta p = p - p_0$。图 1.31 中气体位于 A 上方、B 下方，两个气体压力的方向相反。两活塞间绳张力为 τ，上方经定滑轮的绳张力为 Mg，分别列平衡得

$$A:\quad \tau = 10 + 2S\Delta p, \qquad B:\quad \tau = S\Delta p + Mg - 5.$$

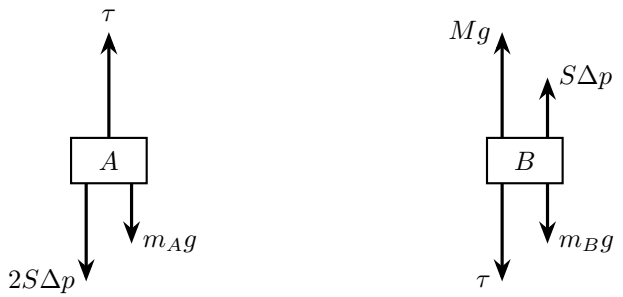


图 1.32: 初段两活塞均自由：气体净压力对 A 向下、对 B 向上，绳的两端拉力相反

图 1.32 中 $\Delta p = p - p_0$，只把内外压力合并，两个重力和两根绳的张力仍分别保留。若后续 A 接触台阶，须在其图中另加向下反力；两活塞间的绳松弛时，则应把两图中的 τ 同时置零。

初态 $S = 10^{-3}\,\mathrm{m}^2$、$\Delta p = 2 \times 10^4\,\mathrm{Pa}$，所以 $\tau = 50\,\mathrm{N}$，再由 B 的方程得 $Mg = 35\,\mathrm{N}$，即 $\boxed{M = 3.5\,\mathrm{kg}}$。

共同上移的等压冷却，直到下活塞接触台阶

两活塞同时自由且绳绷直时，联立平衡方程使 $p = 1.2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$ 固定。设共同上移 x，则下段气体缩短 x、上段气体增长 x，

$$V = 2S(L - x) + S(2L + x) = 4SL - Sx.$$

因此冷却时两活塞上移。A 首先在 $x = L$ 时接触台阶，此时 $z_A = 2L, z_B = 5L, V = 3SL$，由等压关系得 $T = 800 \times 3/4 = 600\,\mathrm{K}$。图 1.33 将这一步的装置位置与状态路径对应起来。

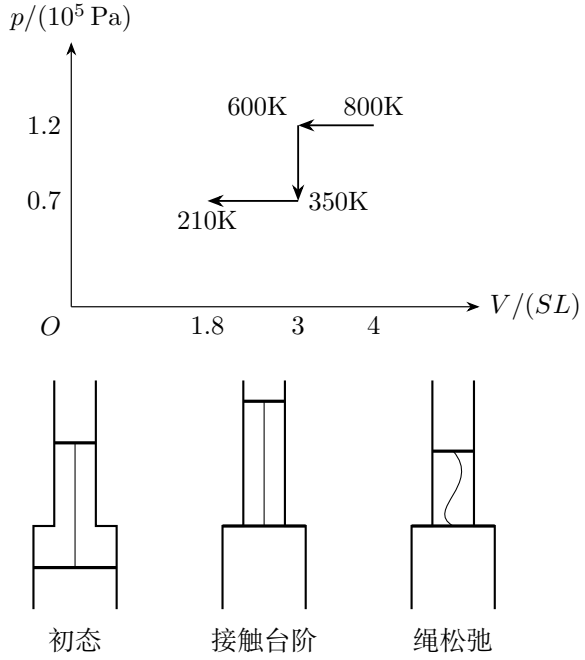


图 1.33: 双活塞冷却的三段路径：解答过程

固定体积冷却，直到两活塞间的绳张力归零

接触后，A 的上移受台阶阻挡，绳长约束将 B 的上移也限制在当前高度。此时 B 的自由平衡仍要求 $\tau = S\Delta p + 30$。该张力为正时，B 在绳绷直的状态中保持平衡，两活塞的位置与气体体积暂时固定。冷却使 p 和 τ 同时降低，到

$$\tau = 0 \quad \Longrightarrow \quad p = 0.7 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$$

时绳恰松弛，对应温度

$$T = 800\frac{(0.7)(3)}{(1.2)(4)} = 350\,\mathrm{K}.$$

在这一等容段，A 上台阶向下的支持力为 $N = \tau - 10 - 2S\Delta p = 20 - S\Delta p$，由 0 增至 50N，方向始终可行。

绳松弛后重新列上活塞平衡并求末位置

继续冷却时两活塞间绳已松弛。B 由上绳拉力、重力和压差力平衡，使 p 保持 $0.7 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$；$A$ 则仍贴台阶。于是末体积与位置为

$$\boxed{V_f = 3SL\frac{210}{350} = 1.8SL, \quad z_{Af} = 2L, \quad z_{Bf} = 2L + \frac{V_f}{S} = 3.8L}.$$

末态两活塞间距 $1.8L < 3L$，绳确已松弛；A 的支持力仍为 50N。

各转折状态与末态位置

关键状态如下，其中 τ 指两活塞间绳张力。

T/K	$p/(10^5\mathrm{Pa})$	$V/(SL)$	z_A/L	z_B/L	τ/N
800	1.2	4	1	4	50
600	1.2	3	2	5	50
350	0.7	3	2	5	0
210	0.7	1.8	2	3.8	0

1.7　本讲小结

热平衡使温度测量具有共同依据，温标将示温量转换为温度读数。理想气体状态方程联系绝对压强、体积与热力学温度；液柱平衡再将压强差转为高度差。

热膨胀从材料的线尺度变化传到面积、体积和仪器读数。表面张力沿液面切线作用，液面曲率决定附加压强，接触角决定毛细作用的方向。活塞装置中，受力确定压强，几何关系确定体积，气态方程联系温度；接触、离开和松绳事件将不同过程连续接起来。

1.8 练习

练习 1.1 (金属环孔的变化)**.** 各向同性金属圆环在 T_0 时内半径为 a、外半径为 b，在可自由膨胀的条件下均匀升温 ΔT。线膨胀系数为 α，求孔面积与环材料面积的一阶变化。见图 1.34。

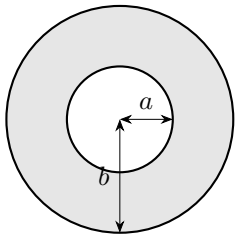


图 1.34: 金属环孔的变化：题设

练习 1.2 (润湿与毛细高度)**.** 两根内半径分别为 $r, 2r$ 的细管插入同一液体。液体密度 ρ、表面张力 σ，接触角均为 $60°$。忽略弯月面体积，求液面高度及高度比。见图 1.35。

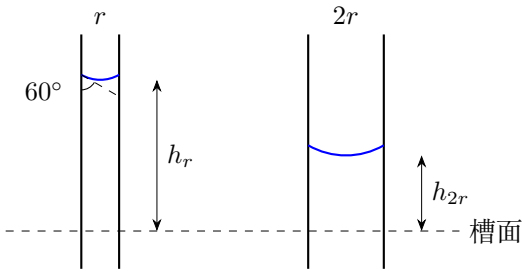


图 1.35: 题设：两根管的半径比为 $1:2$，两弯月面与管壁的液体内接触角同为 $60°$

练习 1.3 (两室等温连通)**.** 刚性容器两室体积分别为 $V, 2V$，初压分别为 $3p_0, p_0$，内含同种理想气体。始末温度均为 T_0。打开阀门后求平衡压强，以及由第一室净流出的物质的量。见图 1.36。

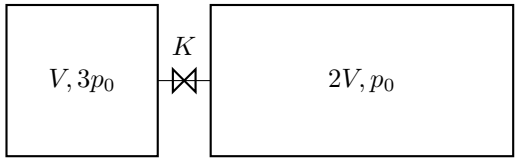


图 1.36: 两室等温连通：题设

练习 1.4 (重活塞接触上挡板)**.** 竖直活塞面积 S、质量 m，初始自由平衡，气柱高 h_0、温度 T_0，外压 p_0。上挡板在 $2h_0$。缓慢加热到 $3T_0$，求末压与挡板支持力。见图 1.37。

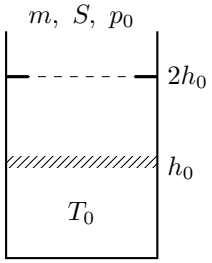


图 1.37: 重活塞接触上挡板：题设

练习解答

练习 1.1

解　用自由膨胀的位移场同时确定内外半径

图 1.34 中的圆环自由、均匀受热，各点相对于中心 O 的距离按同一比例变化。图 1.38 的虚线为初始轮廓、蓝线为加热后的轮廓，故

$$a' = a(1+\alpha\Delta T), \qquad b' = b(1+\alpha\Delta T).$$

孔缘也是金属上的材料点，因而内半径同样增加。可以想象先用同种材料填孔，整体膨胀后再取出填充部分；这一操作不会改变原圆环孔缘的位置。

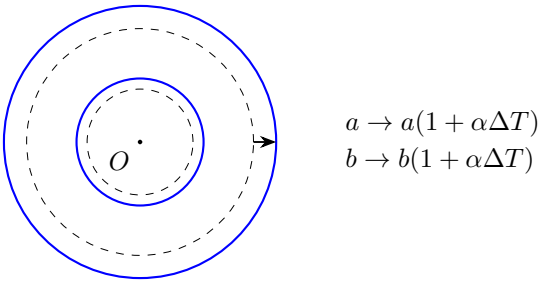


图 1.38: 金属环孔的变化：解答过程

先对内外半径平方，再统一舍去二阶量

分别写两种面积，得到

$$A_h' = \pi a^2(1+\alpha\Delta T)^2, \qquad A_m' = \pi(b^2-a^2)(1+\alpha\Delta T)^2.$$

令 $\varepsilon = \alpha\Delta T$。先扣除初面积，并完整展开平方差，

$$\Delta A_h = \pi a^2[(1+\varepsilon)^2-1] = \pi a^2(2\varepsilon+\varepsilon^2),$$
$$\Delta A_m = \pi(b^2-a^2)[(1+\varepsilon)^2-1] = \pi(b^2-a^2)(2\varepsilon+\varepsilon^2).$$

在 $|\varepsilon| \ll 1$ 时舍去二阶项 ε^2，才有一阶变化

$$\boxed{\Delta A_h = 2\alpha\Delta T\,\pi a^2, \qquad \Delta A_m = 2\alpha\Delta T\,\pi(b^2-a^2)}.$$

孔与材料面积的相对变化

孔面积与材料面积的相对变化相同，都是 $2\alpha\Delta T$；各自的绝对增量等于初面积乘这一相对变化率。

练习 1.2

解　隔离高于槽面的液柱并对圆周张力取竖直分量

图 1.35 中的两管接触角相同、半径相差一倍。取图 1.39 中每根管内高于槽面的液柱为研究对象。将液柱底部压力与自由表面处的均匀大气压部分合并后，均匀 p_0 的合力抵消，剩下的向上作用是接触线处表面张力的竖直合力。对半径为 r 的管，接触线长度为 $2\pi r$，且液体内接触角为 60°，故

$$F_z = \int_0^{2\pi} \sigma\cos 60^\circ\, r\ \mathrm{d}\varphi = \sigma r\cos 60^\circ[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi r\sigma\cos 60^\circ.$$

把圆周张力与液柱重力平衡，求细管高度

忽略弯月面的体积，液柱重力为 $\rho g\pi r^2 h_r$。两者平衡给出所求的高度。

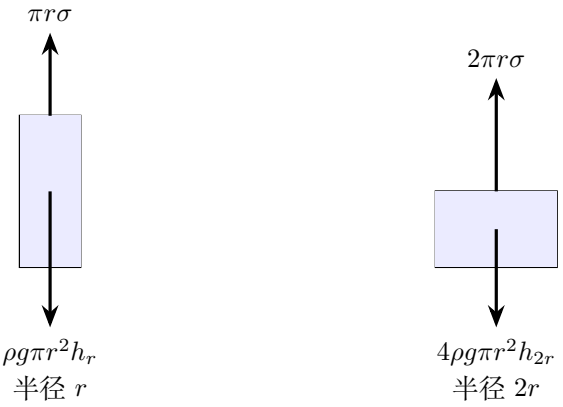


图 1.39: 把两根液柱分别隔离；圆周张力随半径一次变化，单位高度重力随半径平方变化

$$\boxed{h_r = \frac{2\sigma\cos 60^\circ}{\rho g r} = \frac{\sigma}{\rho g r}}.$$

由粗管的周长与截面积求高度比

把半径换成 $2r$，同样列式，得

$$\boxed{h_{2r} = \frac{\sigma}{2\rho g r}, \qquad h_r : h_{2r} = 2:1}.$$

图中细管的液面更高，弯月面更弯曲。半径加倍时，张力只增大到 2 倍，单位高度液柱重力却增大到 4 倍，故平衡高度减半。接触角从液体一侧量取，$\cos 60^\circ > 0$，接触线处的张力有向上的竖直合力，两管内的液面均高于槽面。

练习 1.3

解　对整个封闭系统列总物质的量守恒

阀门打开后，两室达到同一末温和公共末压。图 1.36 中两室始终刚性，总体积为 $3V$；流动只是在内部重新分配分子，总物质的量保持不变。初态分别有

$$n_{1i} = \frac{3p_0 V}{RT_0}, \qquad n_{2i} = \frac{2p_0 V}{RT_0}.$$

在公共末温和总体积下求公共末压

末态整个系统为 $n_f = p_f(3V)/(RT_0)$。令 $n_f = n_{1i} + n_{2i}$，得

$$\boxed{p_f = \frac{3p_0 V + p_0(2V)}{3V} = \frac{5}{3}p_0}.$$

这正是初压按各室体积加权的平均值。

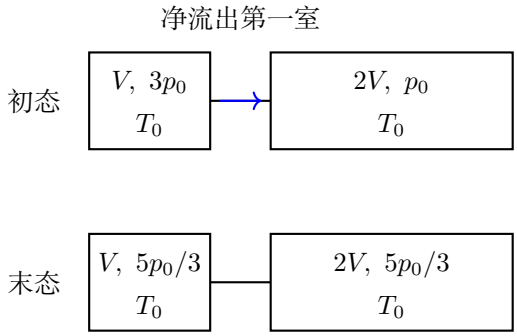


图 1.40: 阀门两侧的气体重新分配，总量与总体积保持不变

第一室净流出的气体量

图 1.40 中第一室末态仍占体积 V，所以 $n_{1f}=5p_0V/(3RT_0)$。由第一室净流出的量为

$$\boxed{\Delta n_1=n_{1i}-n_{1f}=\frac{4p_0V}{3RT_0}}.$$

第一室压强由 $3p_0$ 降至 $5p_0/3$，第二室由 p_0 升至 $5p_0/3$，方向与净流动一致。第二室增加的气体量恰为 Δn_1，而末态物质的量之比为 $1:2$，与两个容器的体积比相同。

练习 1.4

解　由自由平衡压强确定接触挡板的温度

图 1.37 中，初态活塞在下方位置自由平衡，气体向上推力、大气向下压力和活塞重力满足

$$p_*S=p_0S+mg,\qquad p_*=p_0+\frac{mg}{S}.$$

在碰到上挡板前，活塞缓慢上升，负载不变，故气体保持压强 p_*。由 $V\propto h$ 和等压关系，气柱高从 h_0 增至 $2h_0$ 时温度为 $2T_0$。题给末温 $3T_0$ 更高，因此后半段气柱体积由挡板固定。

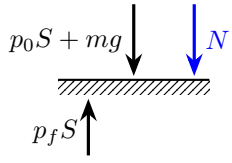


图 1.41: 上挡板向下压住活塞，气体推力须同时平衡外压、重力和挡板反力

保持接触后的体积不变，求末压

从刚接触态到末态，$V = 2Sh_0$ 不变，有

$$\boxed{p_f = p_* \frac{3T_0}{2T_0} = \frac{3}{2}\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)}.$$

对末态活塞列受力平衡，求挡板支持力

再按图 1.41 的末态受力图求支持力。上挡板向下压住活塞，故

$$p_f S = p_0 S + mg + N, \qquad \boxed{N = \frac{1}{2}(p_0 S + mg)},$$

支持力方向竖直向下。上挡板将后段气柱高度保持为 $2h_0$，刚接触时 $N = 0$，继续加热使气压与支持力一起增加。

热学

物理竞赛一轮讲义

第二讲

理想气体的内能

2026

目录

第二讲　理想气体的内能 **1**

2.1　分子运动与气体压强 1

2.2　温度与分子的平均动能 2

2.3　自由度、内能与定容热容 3

2.4　热量、功与第一定律 4

2.5　气体做功与状态图 5

2.6　热容怎样包含过程中的功 7

2.7　溢液装置的平衡与过程方向 8

2.8　例题与分析 10

2.9　本讲小结 25

2.10 练习 26

练习解答 27

第二讲　理想气体的内能

2.1　分子运动与气体压强

气体压在器壁上的力，来自大量分子不断与器壁交换动量。单次碰撞持续时间很短，对足够多的分子和足够长的时间取平均，便得到稳定的宏观压强。下面从分子的运动求出压强，再把这个结果与上一讲的状态方程联系起来。

取边长 L 的立方容器，内有 N 个质量为 m 的分子。理想气体模型忽略分子间作用势能；平衡气体的无规则运动在各个方向上具有相同的统计性质。以静止容器为参考系，图 2.1 中的一个分子与垂直 x 轴的器壁弹性碰撞时，v_x 反向，器壁得到动量 $2m|v_x|$。

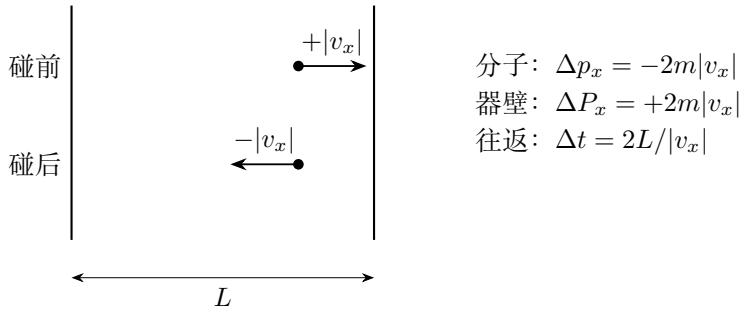


图 2.1: 只画分子运动在 x 方向的投影：撞右壁后反向，两次撞同一壁须走过 $2L$

先看图 2.1 中这一个分子。撞右壁后，它在 x 方向先向左走 L，再向右走 L。这段时间内，右壁共得到一次 $2m|v_x|$ 的冲量。用这一次冲量除以往返时间 $2L/|v_x|$，得到分子对右壁的平均力

$$\overline{F}_x = \frac{2m|v_x|}{2L/|v_x|} = \frac{mv_x^2}{L}.$$

把所有分子的贡献相加，再除以壁面积 L^2：

$$p = \frac{m}{L^3}\sum_{j=1}^{N} v_{xj}^2 = \frac{Nm}{V}\langle v_x^2\rangle.$$

各向同性给出 $\langle v_x^2\rangle = \langle v_y^2\rangle = \langle v_z^2\rangle$，而三个分量平方之和为 v^2，因此

$$\boxed{p = \frac{1}{3}n_N m\langle v^2\rangle = \frac{1}{3}\rho\langle v^2\rangle}, \qquad n_N = \frac{N}{V}. \tag{2.1}$$

这里 n_N 为分子数密度，$\rho = n_N m$ 为质量密度。分子间碰撞不断改变各自的运动方向；上述平均力反映的是动量穿过单位面积的平均速率，所以也能用于真实的平衡碰撞运动。

压强中的速度平方有两重作用：分子运动越快，每次撞壁传递的动量越大，单位时间内发生的碰撞也越多。三分之一来自三个方向的等价性。气体的数密度和均方速率由此分别进入压强式。

2.2 温度与分子的平均动能

将式(2.1)与 $p = n_N kT$ 比较，约去数密度，得到

$$\frac{1}{3}m\langle v^2\rangle = kT, \qquad \boxed{\bar{\varepsilon}_{\text{平动}} = \frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = \frac{3}{2}kT}.$$

温度决定每个分子的平均平动动能。同温时氦原子与氮分子的平均平动动能相同；氦原子的质量较小，均方速率便较大。定义方均根速率 $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2\rangle}$，有

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

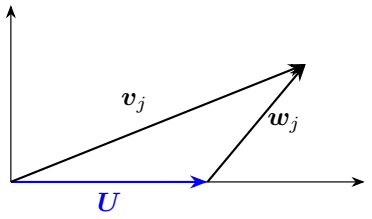
其中 $\mu = N_A m$ 是摩尔质量，$R = N_A k$。练习 2.1 用这两种计数方式比较同温气体的分子能量、速率和压强。

气体中的分子具有不同速率。平衡时，正负方向的速度分量相互抵消，$\langle \boldsymbol{v}\rangle = 0$；速度平方的平均仍为正，因而气体具有热运动能量。统计量 $\langle v^2\rangle$ 记录速率分布的二阶平均。

2.2.1 整体运动与热运动

流动气体还具有整体速度。记局部平均流速为 $\boldsymbol{U}$，第 j 个分子的速度为

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{w}_j, \qquad \boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{v}\rangle, \qquad \langle \boldsymbol{w}\rangle = 0.$$



$\langle \boldsymbol{w}\rangle = 0$
$\langle w^2\rangle > 0$

图 2.2: 实验室速度由整体流速与相对整体的无规则速度组成

图 2.2 中，$\boldsymbol{U}$ 描述气体整体移动，$\boldsymbol{w}_j$ 描述分子相对整体的无规则运动。将速度平方展开，再取平均：

$$\begin{aligned}\langle v^2\rangle &= U^2 + 2\boldsymbol{U}\cdot\langle \boldsymbol{w}\rangle + \langle w^2\rangle \\ &= U^2 + \langle w^2\rangle.\end{aligned}$$

所以平动能量分解为

$$\sum_j \frac{1}{2}mv_j^2 = \frac{1}{2}NmU^2 + \sum_j \frac{1}{2}mw_j^2.$$

第一项是宏观运动的动能，第二项是平动热内能。在局部平衡、热运动各向同性的气体中，$p=\rho\langle w^2\rangle/3$、$m\langle w^2\rangle/2 = 3kT/2$。静止密闭容器的平衡气体有 $\boldsymbol{U}=0$，便回到前面的压强和温度公式。

2.3 自由度、内能与定容热容

分子除质心平动外，还可通过转动和内部振动储存能量。经典能量均分适用时，每个以二次形式进入能量的独立项平均贡献 $kT/2$。设参与储能的二次项数为 f，则 n 摩尔理想气体有

$$U = \frac{f}{2}NkT = \frac{f}{2}nRT, \qquad C_V = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T} = \frac{f}{2}R.$$

本讲用 C_V 表示摩尔定容热容，整份气体相应的热容量为 nC_V。单原子气体通常有三个平动项，取 $f=3$；刚性双原子分子有三个平动项和两个转动项，取 $f=5$。

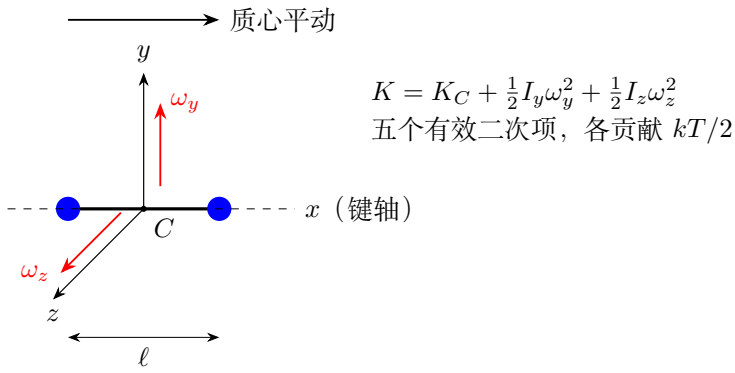


图 2.3: 刚性双原子模型：三维质心平动之外，还有绕两条垂直键轴的转动

图 2.3 把分子质心的移动和分子轴的转向分开。将两原子近似为质点时，绕分子轴转动的惯量很小，常温下主要有垂直于分子轴的两个转动自由度参与。相应的刚性分子模型给出

模型	f	C_V	C_p
单原子	3	$3R/2$	$5R/2$
刚性双原子	5	$5R/2$	$7R/2$
非线性刚性分子	6	$3R$	$4R$

表中 C_p 是摩尔定压热容，下面将由膨胀功说明它与 C_V 的差值。

若双原子键长也可振动，以伸长量 q 为坐标，振动能量为 $\mu_r\dot{q}^2/2+\kappa q^2/2$，含动能和势能两个二次项。这个模式充分激发时平均贡献 kT。各模式的激发随温区改变，因而实际热容也会随温度变化；题给热容或刚性模型确定本讲计算所用的温区近似。

理想气体忽略分子间势能，同种、定量气体的内能是温度的函数。对可能随温度变化的热容，

$$\mathrm{d}U = nC_V(T)\,\mathrm{d}T, \qquad \Delta U = n\int_{T_i}^{T_f} C_V(T)\ \mathrm{d}T.$$

热容近似恒定时，积分为

$$\Delta U = nC_V[T]_{T_i}^{T_f} = nC_V(T_f-T_i) = \frac{C_V}{R}(p_fV_f-p_iV_i).$$

这个内能差由端点温度决定，可用于等容、等压及其他路径。若给出质量 m 和恒定的比定容热容 c_V，可写成 $\Delta U = mc_V\Delta T$，其中 $C_V=\mu c_V$。

同种气体的物质的量发生改变时，先用同一个参考状态确定摩尔内能 $u(T)$。设参考温度为 T_*，则

$$u(T) = u(T_*) + \int_{T_*}^{T} C_V(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \Delta U = n_fu(T_f) - n_iu(T_i).$$

若在所用温区将 C_V 看作常量，积分等于 $C_V[\tau]_{T_*}^{T} = C_V(T-T_*)$。采用 $u(T_*)=C_VT_*$ 这一参考值时，便有 $u=C_VT$。第三讲计算充气时，容器内气体和流入气体都用这个内能参考值。

2.4　热量、功与第一定律

气体吸热和外界对它做功，都能改变内能。取气体吸热 Q 为正、气体对外做功 W 为正，固定物质的量且只有体积功时，第一定律写成

$$\boxed{\Delta U = Q - W}, \qquad Q = \Delta U + W.$$

热量和功记录过程中能量传递的方式，内能记录系统的状态。相同初末态对应相同的 ΔU；不同路径中的 Q 和 W 可同时改变。

电阻、活塞、弹簧也参与能量交换时，选取的研究对象决定各能量项怎样写入方程。

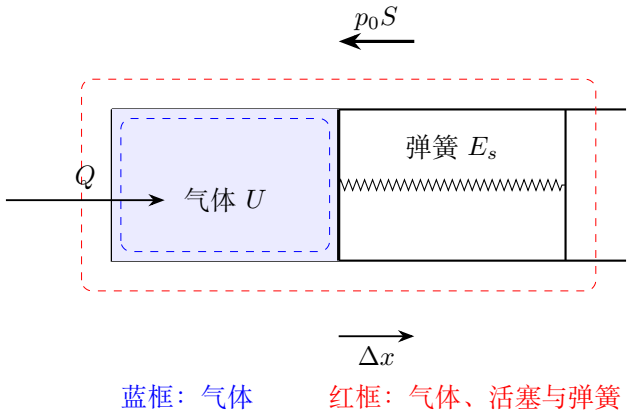


图 2.4: 弹簧活塞装置的两个研究对象：气体，以及气体、活塞和弹簧

图 2.4 中，热量 Q 从左侧传入。蓝框只取气体，气体推动活塞的功是能量输出；红框把活塞和弹簧也纳入，这部分功便在内部传递，弹簧储能和活塞动能进入整体的能量式。大气在红框之外，整体仍通过移动的活塞对大气做功。

例如固定气体量且有电功输入时，可写

$$\Delta U = Q + W_{\text{电入}} - W_{\text{体积}}.$$

若活塞还抬高或压缩弹簧，整体的能量式相应包含重力势能、弹性势能和宏观动能。例 2.4 把两室气体合起来求电能分配，例 2.5 把弹簧、活塞和气体合起来比较初末能量，练习 2.3 讨论刚性绝热容器中的电功输入。

2.5 气体做功与状态图

截面积为 S 的活塞缓慢外移 $\mathrm{d}x$，体积增加 $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$。气体对活塞的力为 pS，所以

$$\delta W = pS\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{d}V, \qquad W = \int_{V_i}^{V_f} p(V)\,\mathrm{d}V.$$

这里 p 是活塞两侧接近机械平衡时的气体压强。若实际运动较快，气体内部压强不均匀，则从外负载及活塞运动求功；初末活塞动能为零、外压恒定时，外压功为 $p_{\text{ext}}(V_f - V_i)$。

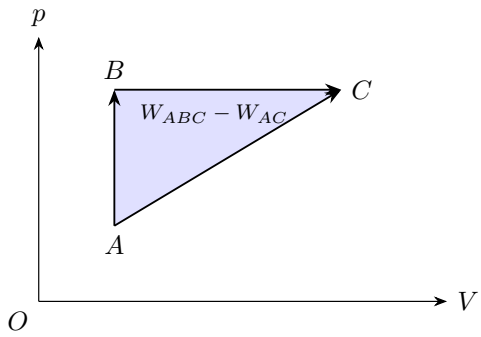


图 2.5: 相同端点的两条路径及其功之差

图 2.5 中，p–V 曲线下面的有向面积给出功。等压路径的积分是 $p(V_f - V_i)$；压强随体积线性改变时，积分成为梯形面积 $(p_i + p_f)(V_f - V_i)/2$。上方的 ABC 路径做功较多，两条路径内能差相同，因而 $Q_{ABC} - Q_{AC} = W_{ABC} - W_{AC}$。练习 2.2 据此比较两条路径。

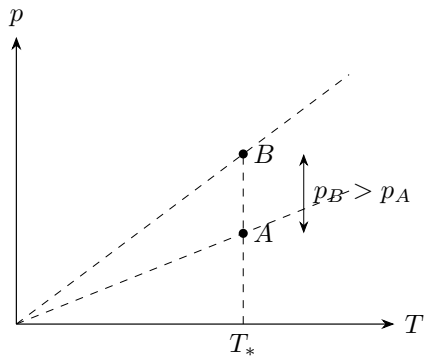
定温 T 的准静态膨胀有 $p = nRT/V$，积分为

$$W = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT \left[\ln \frac{V}{V_i} \right]_{V_i}^{V_f} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

膨胀时上限较大，功为正；压缩时上下限反向，功为负。闭合循环中 $\Delta U = 0$，各段热量之和等于净功，顺时针循环输出正功，逆时针循环接受外界功。例 2.6 逐段计算等容、等压与等温三段循环。

2.5.1　压强温度图中的体积变化

在 p–T 图上，$V = nRT/p$。从绝对温度原点引向一个状态点，射线斜率 $p/T = nR/V$；同一条射线上的状态具有相同体积。



$$V_B/V_A = p_A/p_B < 1$$

图 2.6: 同温两状态从原点引出的射线斜率不同，较高压强对应较小体积

图 2.6 中 A, B 温度相同，内能相同；比较两条原点射线的斜率，便能比较体积。若路径为 $p = aT + b$，对 $V = nRT/(aT + b)$ 用商法则求导：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = nR\frac{(aT+b) - aT}{(aT+b)^2} = \frac{nRb}{(aT+b)^2}.$$

于是截距 b 的符号确定升温时体积的增减。例 2.3 将同温、同压和斜直线三种信息分别用于判断温度、体积与内能。横轴使用摄氏温度时，先换成 $T = t + 273.15$ 再作原点射线。

2.6 热容怎样包含过程中的功

定容且只有体积功时，$W = 0$，吸热为 $Q_V = nC_V\Delta T$。同样温升的等压过程还要对外做功：

$$W = p\Delta V = nR\Delta T, \qquad Q_p = nC_V\Delta T + nR\Delta T = nC_p\Delta T.$$

比较系数得到 $C_p - C_V = R$，它正是每摩尔气体升高 1 K 时多输出的等压膨胀功。

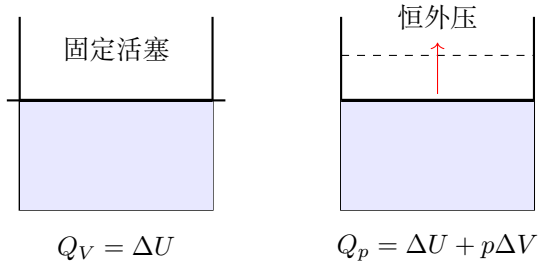


图 2.7: 相同温升下，定压过程还要向外推动活塞

图 2.7 左侧固定活塞，右侧活塞外移，虚线表示末位置。两份同量气体有相同温升，内能增量相同，右侧多吸收的热量传给了外界。例 2.8 分别从两次实验的末压、末体积求温升，再比较输入能量。

其他路径的过程热容由实际功决定。例如 $p = kV$ 时，$\mathrm{d}p = k\,\mathrm{d}V$，对 $pV = nRT$ 作乘积微分：

$$nR\,\mathrm{d}T = V\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V = 2p\,\mathrm{d}V.$$

因此 $\delta W = nR\,\mathrm{d}T/2$，而

$$\delta Q = n\left(C_V + \frac{R}{2}\right)\mathrm{d}T, \qquad Q = n\left(C_V + \frac{R}{2}\right)\int_{T_i}^{T_f}\mathrm{d}T = n\left(C_V + \frac{R}{2}\right)(T_f - T_i).$$

例 2.9 的直线路径和例 2.10 的液柱装置都产生这个系数；后者先由固定管顶与静液压关系得到 $p \propto V$，再用上述能量分配。

2.7　溢液装置的平衡与过程方向

缓慢加热管内气体时，气态方程与液柱受力共同确定平衡曲线。能否连续沿着曲线前进，还要看位移后合力的方向。设原气柱长 ℓ、压强 p，上移 x 并溢出等高液柱后，等温气压为 $p_g(x) = p\ell/(\ell + x)$。以 p, ℓ 为常量，对 x 求导：

$$p_g'(x) = -\frac{p\ell}{(\ell + x)^2}, \qquad p_g'(0) = -\frac{p}{\ell}.$$

一阶展开给 $p_g(x) - p \simeq -px/\ell$，液柱负载压强则减少 $\rho g x$。合力对单位面积的变化为

$$\delta(F/S) = \left(\rho g - \frac{p}{\ell}\right)x.$$

系数为负时，上移后出现向下恢复力；系数为正时，上移扰动继续扩大。例 2.1 中剩余汞柱高与气柱长同时改变，恢复系数降至零的位置也对应平衡温度的极大值。

上述扰动取足够缓慢，使气体与环境保持同温。扰动很快、来不及传热时，气压随体积的响应改用绝热关系，第四讲将继续讨论。已经溢出的液体留在管外，恢复力在这里判断的是该方向的位移会收敛还是继续扩大。

自由膨胀从另一角度显示过程的方向性。

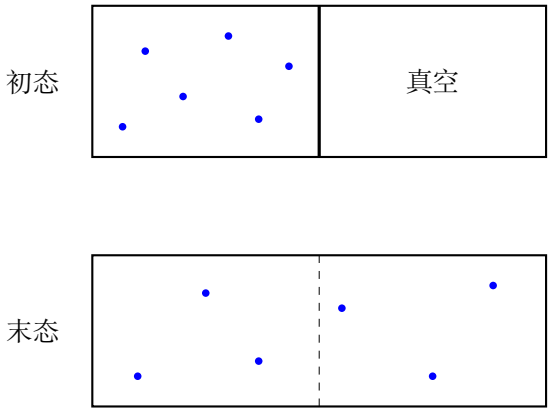


图 2.8: 刚性隔离容器中的自由膨胀：粒子数与总能量不变，可占据空间增大

图 2.8 撤去隔板，气体占据的空间增至两倍，刚性绝热容器中的总内能保持不变。按稀薄气体的独立位置计数，每个分子的可用空间加倍，N 个分子的状态数约增至 2^N 倍。玻尔兹曼关系 $S = k\ln\Omega$ 给出

$$\Delta S = k\ln\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = k\ln 2^N = Nk\ln 2 > 0.$$

内能相同而熵增加，反映了宏观状态对应的微观排列数发生变化。下一讲将从热力学过程求熵差，并把气体和换热物体一起计入总熵变化。

2.8　例题与分析

例 2.1 (开口管溢汞的临界温度)**.** 上端开口、下端封闭的等截面竖管长 100cm，管内空气柱 50cm，其上有 20cm 水银，水银上方通大气。初温 27°C，大气压 76cmHg，取初温 300K。缓慢加热，求水银开始溢出的温度，以及使剩余水银全部排出的临界温度。见图 2.9。

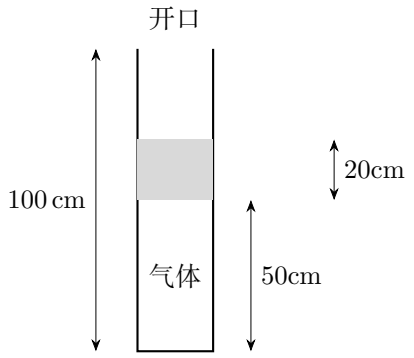


图 2.9: 开口管溢汞的临界温度：题设

解　开始溢出

图 2.9 中水银尚未溢出时，汞柱高保持 20cm，故气体承受的压强一直是 $76+20=96\,\mathrm{cmHg}$。到汞柱上端刚达管口，空气柱长度为 $100-20=80\,\mathrm{cm}$。等压膨胀给出开始溢出的温度

$$\boxed{T_a = 300\frac{80}{50} = 480\,\mathrm{K}}.$$

剩余液柱的平衡关系

溢出后，汞柱变短，气体的平衡压强也随之减小。设剩余汞柱高度为 h，下式中长度数值均以 cm 计，则气柱长为 $100-h$，压强为 $(76+h)\,\mathrm{cmHg}$。对固定气体量列状态方程，

$$\frac{(76+h)(100-h)}{T} = \frac{96\times 50}{300}, \quad T(h) = \frac{300}{4800}(76+h)(100-h).$$

图 2.10 的实线从 $h=20$ 向左表示升温时剩余汞柱逐渐缩短，曲线的最高点给出这一段平衡所能维持的最高温度。

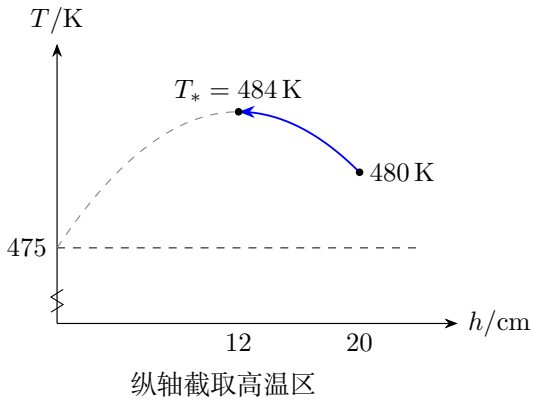


图 2.10: 溢汞平衡曲线有温度极大值；从 $h=20$ 出发的升温路径先到 $h=12$ 失去稳定性

平衡温度的最高点

对 $T(h)$ 中的两个一次因子使用乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}h}=\frac{300}{4800}\big[(100-h)\cdot 1+(76+h)(-1)\big]=\frac{300}{4800}(24-2h).$$

令一阶导数为零得 $h=12\,\mathrm{cm}$；二阶导数 $\mathrm{d}^2T/\,\mathrm{d}h^2=-600/4800<0$，确认这是极大值。临界温度为

$$\boxed{T_*=\frac{300\times 88\times 88}{4800}=484\,\mathrm{K}}.$$

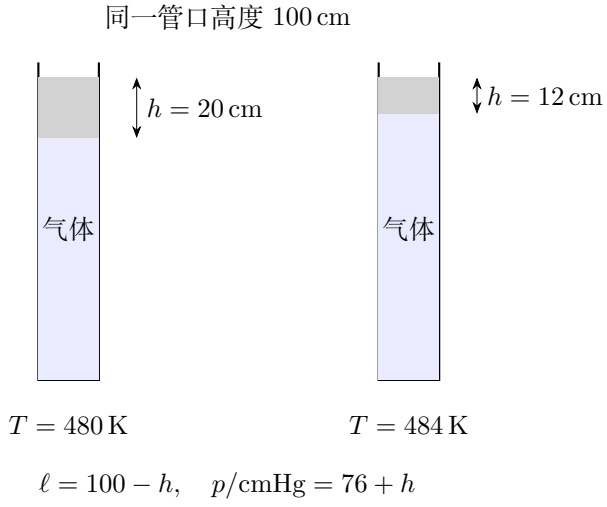


图 2.11: 溢出时汞面保持在管口；剩余汞柱变短，同时气柱变长、负载压强变小

图 2.11 中的两个变化共同决定稳定性。后一个状态的气柱更长，所以继续膨胀同样距离所产生的气压降比例更小；汞柱每减少同样高度，外负载的下降比例却不变。这两个压降的差决定界面偏移后净力的方向。

气压与负载的小位移变化

温度曲线的最高点也对应恢复力的消失。在某平衡态上，设气体把汞柱再向上推 $x>0$，同时有等高汞柱溢出。记原气柱长 $\ell=100-h$，等温气压为 $p_g(x)=p\ell/(\ell+x)$。先求精确压差，

$$p_g(x)-p=\frac{p\ell-p(\ell+x)}{\ell+x}=-\frac{px}{\ell+x}\simeq-\frac{p}{\ell}x.$$

最后一步只保留 x/ℓ 的一阶量。负载压强则因汞柱变短而改变 $-\rho g x$。因此单位面积净推力的一阶变化为 $[\rho g-p/(100-h)]x$。统一采用 cm 和 cmHg 的数值时，气压降的斜率为 $(76+h)/(100-h)$，汞负载压降的斜率为 1；当 $h>12$ 时，前者大于 1，净力转向下方，界面被推回，平衡具有恢复作用。

临界温度的意义

$h=12$ 时一阶恢复能力消失，继续略微升温便不再有相连的稳定平衡，剩余水银被排出。在图中的虚线段，$h<12$ 时上移会得到同向净推力，溢出继续扩大。$h=0$ 对应 475K，属于这一失稳段；从 480K 开始缓慢升温，先在 484K 到达实线段的终点。因而全部排汞的临界加热温度为 484K，略高于它或在临界处加一个上移微扰，都会引起继续排汞。

例 2.2 (连杆双缸的等温平衡)**.** 水平相向气缸截面分别为 $S_A=0.8\,\mathrm{m}^2$、$S_B=0.2\,\mathrm{m}^2$，两轻活塞以刚性杆相连。初始两气柱长度均为 0.3m，左室有气体，右室真空，外界压强 p_0。打开连通两室的阀门，忽略连通管容积，活塞无摩擦，始末温度相同，求连杆位移。见图 2.12。

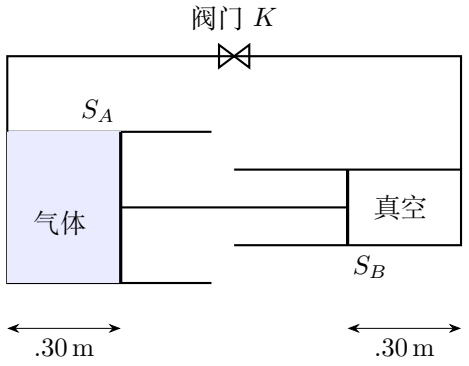


图 2.12: 两气柱初长相同，连杆使两活塞位移相同；外大气对不等面积活塞的合力不抵消

解　初态连杆的受力

图 2.12 的初、末两次平衡由连杆受力确定，气体量守恒再把两个同温端点联系起来。取两活塞及连杆为整体，规定向右为正。左室气体推左活塞向右；大气对两个不同面积活塞的合力为 $-p_0(S_A-S_B)$。初态右室真空，故

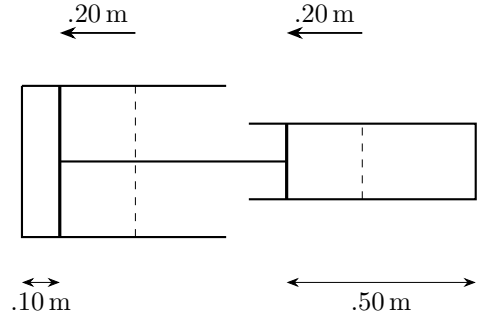
$$p_{Ai}S_A - p_0S_A + p_0S_B = 0, \qquad p_{Ai} = p_0\left(1-\frac{S_B}{S_A}\right) = 0.75p_0.$$

共同末压

末态两室气压相同为 p_f，整体平衡为 $(p_f-p_0)(S_A-S_B)=0$。由于 $S_A \neq S_B$，得 $p_f = p_0$。

位移与两室体积

再用位移联系总体积。设连杆向右位移 x，左气柱增长为 $0.3+x$，右气柱缩短为 $0.3-x$；两室分别从相反的封闭端量取长度，因此一个增长，另一个缩短。



虚线为两活塞初位置；两气室末压均为 p_0

图 2.13: 末态固定封闭端仍在原处；两活塞都左移 0.20 m，连杆长度保持不变

气体量守恒与位移

气体总量守恒、始末温度相同，所以

$$p_0[0.8(0.3+x)+0.2(0.3-x)] = 0.75p_0 \times 0.8 \times 0.3.$$

消去 p_0 后得 $0.30+0.60x = 0.18$，故

$$\boxed{x = -0.20\,\mathrm{m}},$$

即连杆向左移动 20cm。图 2.13 中末态左气柱长 0.10m、右气柱长 0.50m，均为正，满足活塞未越过封闭端的条件。虽然气体进入了原来的真空室，整体占据体积却由 0.24 减到 $0.18\mathrm{m}^3$。末温与初温相同，末压提高到初压的 4/3，总体积相应缩到原来的 3/4；不等面积上的大气作用使连杆向左移动。

例 2.3 (从压强温度图判断变化)**.** 定量理想气体经历图 2.14 中的 $a \to b \to c \to d \to a$。$bc$ 的延长线过原点，$da \parallel bc$，ab 竖直，cd 水平。判断每段体积、平均平动动能和内能的增减。

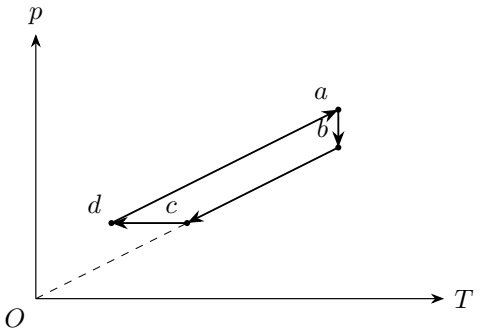


图 2.14: 从压强温度图判断变化：题设

解　温度和体积怎样从图中读出

图 2.14 横轴为绝对温度 T、纵轴为压强 p，竖直段上的状态具有相同温度。先用 $\bar{\varepsilon}_{\text{平动}} = 3kT/2$ 和 $U = nC_VT$ 判断能量，再用 $V = nRT/p$ 判断体积。

等温降压段

$a \to b$ 的温度不变，平均平动动能、内能都不变；压强下降使 T/p 增大，所以体积增大。

等容段与等压段

$b \to c$ 位于同一过原点射线上，p/T 不变，因此体积不变；温度下降，平均平动动能和内能均减小。$c \to d$ 是等压降温，故体积、两种能量都减小。

斜线段与变化汇总

剩下 $d \to a$ 需要比较同一斜直线上 T/p 的变化。图 2.15 把该直线反向延长，标出了正的纵截距 b_0；它与 bc 平行，截距为正。

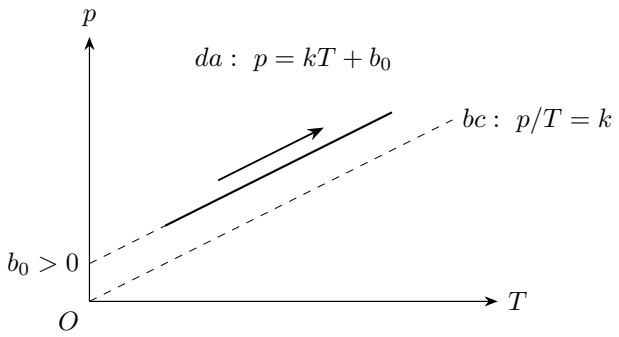


图 2.15: 从压强温度图判断变化：解答过程

设该段 $p = kT + b_0$，其中 $b_0 > 0$，则

$$V(T) = \frac{nRT}{kT + b_0}, \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = nR\frac{(kT + b_0) \cdot 1 - T \cdot k}{(kT + b_0)^2} = \frac{nRb_0}{(kT + b_0)^2} > 0.$$

所以 $d \to a$ 升温的同时体积增加，平均平动动能和内能也增加。也可比较图中从原点引出的射线：沿 da 向右，$p/T = k + b_0/T$ 减小，意味着体积增大。

过程	温度	体积	平均平动动能	内能
$a \to b$	不变	增大	不变	不变
$b \to c$	降低	不变	减小	减小
$c \to d$	降低	减小	减小	减小
$d \to a$	升高	增大	增大	增大

表中的能量变化来自横坐标温度，体积变化来自 $p/T = nR/V$；两种读图关系分别对应分子运动和气体所占空间。

例 2.4 (两室加热的能量分配)**.** 绝热水平气缸内有固定导热隔板 a 和可自由移动的轻活塞 b，两室各有 n mol 同种理想气体。左室体积固定，右室活塞外为大气。初态温度相同，给左室电阻通电，最后两室重新热平衡，温度均升高 ΔT。求两室内能变化与输入电能。忽略隔板、电阻及活塞的储能变化。见图 2.16。

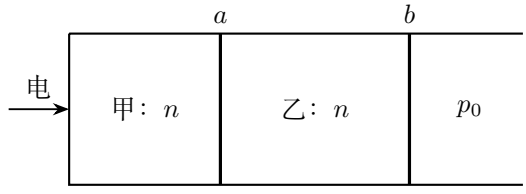


图 2.16: 两室加热的能量分配：题设

解 两室的内能变化

导热隔板固定，能在两室间传热，却不传递体积功。最终热平衡使甲、乙温升同为 ΔT，且两室气体种类、物质的量相同，所以

$$\boxed{\Delta U_{甲} = \Delta U_{乙} = nC_V\Delta T}.$$

图 2.16 中电阻先加热甲室，甲再通过固定导热隔板向乙传能。乙室从隔板收到的能量还要用于推动外活塞。

整体的能量交换

取两室气体与电阻为整体，隔板传热便在系统内部抵消。图 2.17 中输入电能最后分成整体内能增加与右室对大气的膨胀功两部分。

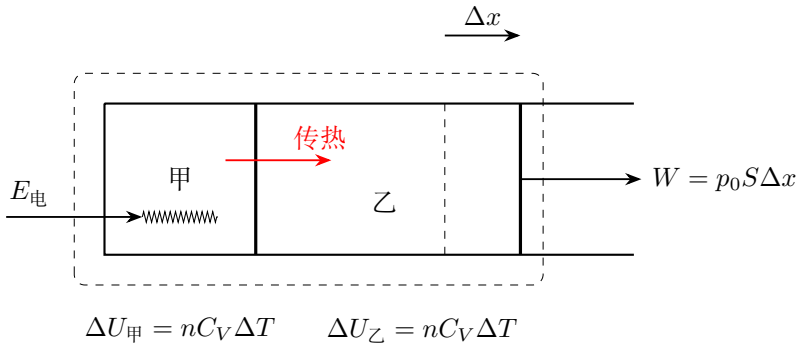


图 2.17: 电源向气缸输入能量，隔板在两室间传热，右室活塞推动大气

膨胀功与输入电能

乙室外活塞轻、无摩擦，外压恒定，故乙室等压，状态方程给出 $p_0\Delta V_{乙} = nR\Delta T$。因此

$$W_{外} = p_0\Delta V_{乙} = nR\Delta T,$$

$$\boxed{E_{电} = \Delta U_{甲} + \Delta U_{乙} + W_{外} = n(2C_V + R)\Delta T}.$$

甲室定容，升温表现为压强上升；乙室等压，升温表现为体积增大。两者内能只看相同温升，所以增加量相等，但外界收到的膨胀功只由乙室提供。输入电能因此同时增加两室内能，并通过乙室活塞传给大气。

例 2.5 (弹簧释放后的能量去向)**.** 绝热竖直缸内重活塞上方封有气体，下方真空；活塞下连竖直弹簧。初始弹簧压缩、储能 E_p，活塞被细线固定。剪断细线，经气体内部耗散后停在新平衡位置。设活塞升高 Δh，末态弹簧储能为 E_{sf}，求气体内能变化与能量分配。见图 2.18。

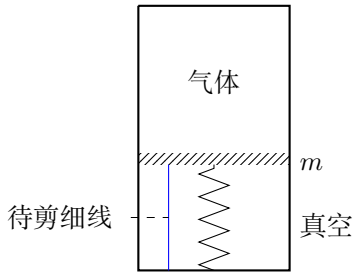


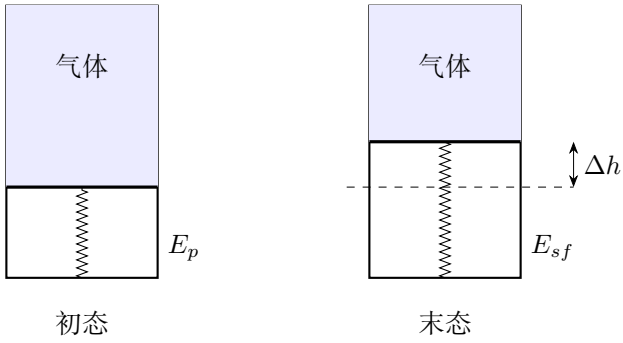
图 2.18: 弹簧释放后的能量去向：题设

解　选取气体、活塞和弹簧的整体

图 2.18 中剪断细线后，弹簧推动活塞上升，压缩上方气体。气体压力和弹簧力在运动中随位置改变。取气体、活塞、弹簧与地球为整体，可直接比较初末总能量。

初末能量

图 2.19 在同一高度基准下对比初、末状态，虚线保留活塞初位置。装置外壁绝热，下方为真空；剪断细线以后，整体能量在气体、活塞和弹簧之间转换。初末活塞均静止，动能变化为零。以初态活塞重力势能为零，则末态机械能包含 $mg\Delta h$ 和 E_{sf}。



$$U_i + E_p = U_f + mg\Delta h + E_{sf}$$

图 2.19: 弹簧伸长释放储能，活塞升高使上方气体受压；末态弹簧仍可保持压缩

内能增量

整体能量守恒为

$$U_i + E_p = U_f + mg\Delta h + E_{sf},$$

故

$$\boxed{\Delta U = E_p - mg\Delta h - E_{sf}}.$$

若气体量固定且 C_V 不变，还可写 $nC_V(T_f - T_i) = E_p - mg\Delta h - E_{sf}$，由给定的升高量和剩余弹性势能确定温升。

末态弹簧受力

末态弹簧一般仍被压缩，因为它须向上平衡活塞重力与上方气体压力，即 $F_{sf} = mg + p_f S$。活塞静止时，弹簧保留压缩量，弹性势能为 E_{sf}；气体内部耗散使运动中的机械能逐渐转入内能，最后到达题设的新平衡。

例 2.6（等容等压等温三段循环）. 单原子理想气体从 $a(p_1, V_1)$ 等容冷却至 $b(p_1/4, V_1)$，再等压膨胀至 $c(p_1/4, 4V_1)$，最后等温压缩回到 a。求每段的功和热量以及循环净功。见图 2.20。

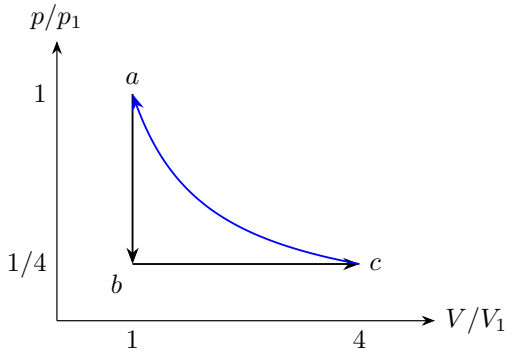


图 2.20: 三段过程首尾相接，a, c 具有相同的 pV 并处在同一等温线上

解　三个顶点的温度与内能

令 $E_* = p_1V_1$。图 2.20 的三个顶点满足 $p_aV_a = E_*$、$p_bV_b = E_*/4$、$p_cV_c = E_*$，所以 a, c 温度相同，末段确为等温。单原子气体有 $U = 3pV/2$，可先独立确定各段内能差。

等容和等压两段

$a \to b$ 等容，$W_{ab} = 0$，故 $\Delta U_{ab} = Q_{ab} = \frac{3}{2}(E_*/4 - E_*) = -9E_*/8$。$b \to c$ 等压膨胀，

$$W_{bc} = \frac{p_1}{4}(4V_1 - V_1) = \frac{3}{4}E_*, \quad \Delta U_{bc} = \frac{3}{2}(E_* - E_*/4) = \frac{9}{8}E_*.$$

由 $Q=\Delta U+W$，得 $Q_{bc}=15E_*/8>0$。

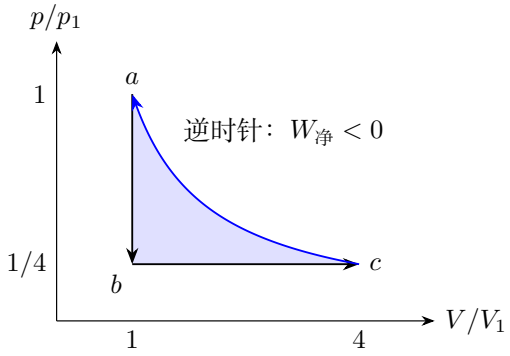


图 2.21: 膨胀位于低压水平线，压缩位于高压双曲线；阴影面积的负值是循环净功

等温压缩的功

图 2.21 中 $c\to a$ 沿上方双曲线向左，是等温压缩。$\Delta U_{ca}=0$，从 $4V_1$ 压到 V_1，积分上限小于下限：

$$\begin{aligned}W_{ca}&=E_*\int_{4V_1}^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{V}=E_*\left[\ln\frac{V}{V_1}\right]_{4V_1}^{V_1}\\&=E_*(\ln 1-\ln 4)=-E_*\ln 4.\end{aligned}$$

由于 $\Delta U_{ca}=0$，第一定律给出 $Q_{ca}=W_{ca}<0$。

一周的功和热量

各段合并如下：

过程	$\Delta U/E_*$	W/E_*	Q/E_*
$a\to b$	$-9/8$	0	$-9/8$
$b\to c$	$9/8$	$3/4$	$15/8$
$c\to a$	0	$-\ln 4$	$-\ln 4$

故 $\boxed{W_{净}=Q_{净}=E_*(3/4-\ln 4)<0}$。内能差相加为零；压缩发生在较高压强，输入功超过膨胀输出功，图中逆时针阴影的负面积与代数结果相符。

例 2.7 (电磁制动与膨胀做功)**.** 质量 m 的导体棒以初速 v 进入磁场并最终静止，全部焦耳热传入绝热水平缸中的 1mol 理想气体，气体 $C_V = 5R/2$。轻液塞截面 S，外压 p_0 恒定，液塞缓慢移动，忽略其他储能。求末态温升和液塞位移。见图 2.22。

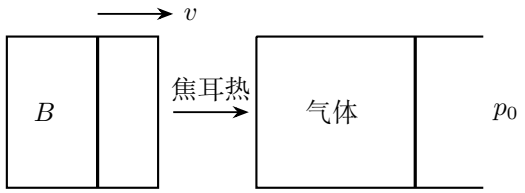


图 2.22: 电磁制动与膨胀做功：题设

解　制动释放的能量

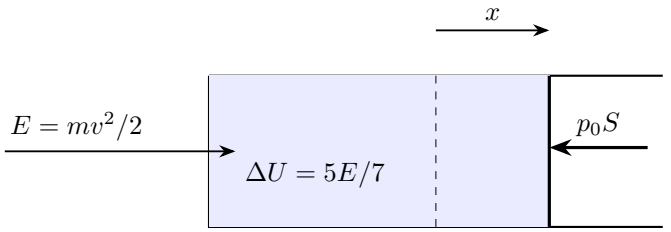
图 2.22 中导体棒最终停止，动能减少 $E = mv^2/2$。题设规定这部分能量全部以焦耳热传入气体，故气体吸收的能量已知；磁场过程的细节不再影响最终能量关系。

液塞位移与膨胀功

液塞轻、缓慢运动，气体压强保持 p_0。设液塞向外移动 x，则 $\Delta V = Sx$，定量气体的状态方程给出

$$p_0 Sx = R\Delta T.$$

该式既是几何与状态的联系，也确定气体对大气所做的功。图 2.23 把这项膨胀功与气体内能增加并列，二者之和等于传入的焦耳热。



$$\Delta V = Sx, \quad W = p_0 Sx = 2E/7$$

图 2.23: 焦耳热传入后气体膨胀，液塞的位移对应对大气的功；两项能量相加才等于棒的动能损失

温升和位移

第一定律为

$$\frac{1}{2}mv^2 = \Delta U + W = \frac{5}{2}R\Delta T + p_0 Sx = \frac{7}{2}R\Delta T.$$

于是

$$\boxed{\Delta T = \frac{mv^2}{7R}, \qquad x = \frac{R\Delta T}{p_0 S} = \frac{mv^2}{7p_0 S}}.$$

图中两条能量条的比例为 $\Delta U/E = 5/7$、$W/E = 2/7$，和为 1。分母出现 $7R$ 是因为对气体实际执行的是等压加热，$C_p = C_V + R = 7R/2$，其中 $5R/2$ 对应内能项，R 对应每摩尔每开尔文的膨胀功。

例 2.8 (同一加热器的两次实验)**.** 定量理想气体的 $C_V = 5R/2$，初态 p_0, V_0。实验一固定活塞，输入能量 E_1 后压强为 p_1；实验二允许轻活塞等压移动，输入能量 E_2 后体积为 V_1。求 E_1/E_2。忽略加热器储能与散热。见图 2.24。

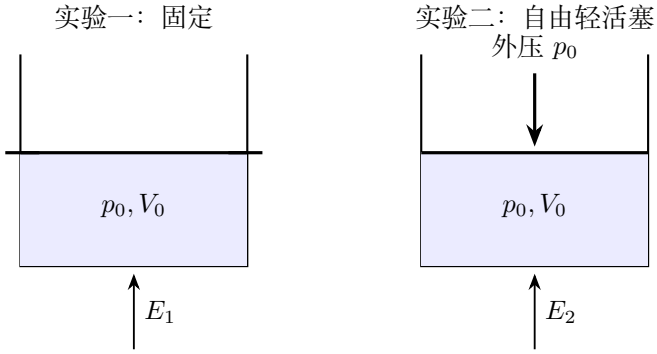


图 2.24: 相同初态分别进行两次实验；固定活塞只升压，自由轻活塞在恒压下移动

解　固定活塞的输入能量

图 2.24 的两次实验各自从 p_0, V_0 出发，固定活塞与自由活塞给出不同的功。实验一固定活塞，故 $V = V_0, W_1 = 0$。由状态方程，

$$nR\Delta T_1 = p_1 V_0 - p_0 V_0 = V_0(p_1 - p_0),$$

所以输入能量为 $E_1 = \Delta U_1 = (5/2)V_0(p_1 - p_0)$。

自由活塞的输入能量

实验二活塞自由且轻，压强保持 p_0。此时 $nR\Delta T_2 = p_0(V_1 - V_0)$，除内能增加外还有 $W_2 = p_0(V_1 - V_0)$。这正是图 2.25 中两种能量式的差别。

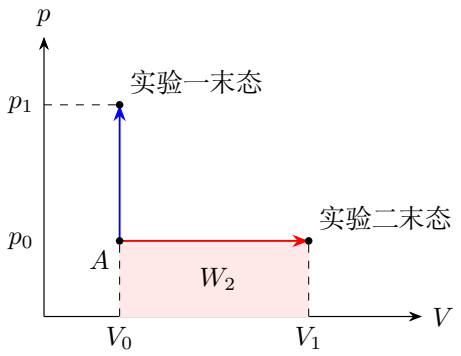


图 2.25: 两实验从同一初态 A 沿不同路径进行；只有右行等压段有矩形面积所示的体积功

$$E_2 = \frac{5}{2}p_0(V_1 - V_0) + p_0(V_1 - V_0) = \frac{7}{2}p_0(V_1 - V_0),$$

故

$$\boxed{\frac{E_1}{E_2} = \frac{5V_0(p_1 - p_0)}{7p_0(V_1 - V_0)}}.$$

两次温升与能量比

式中 n 被状态方程消去，不需要另求气体量。两次温升之比为 $\Delta T_1/\Delta T_2 = V_0(p_1 - p_0)/[p_0(V_1 - V_0)]$，所以能量比也可读成 $(5/7)(\Delta T_1/\Delta T_2)$：热容系数和各自温升共同确定输入。

例 2.9 (过原点直线过程的热量)**.** n mol 氧气视为刚性双原子理想气体，沿 $p = kV$ $(k > 0)$ 从 V_1 膨胀到 $V_2 > V_1$。求 $W, \Delta U, Q$，见图 2.26。

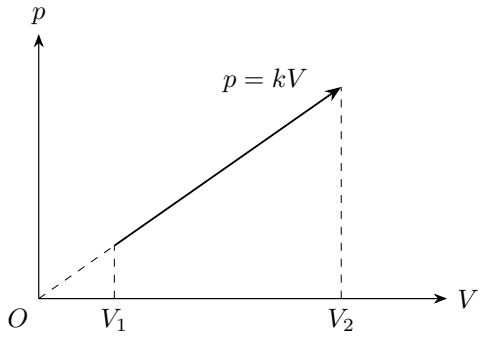


图 2.26: 过原点直线过程的热量：题设

解　过程关系与内能表达式

图 2.26 中路径是随体积增大的斜直线，压强随体积线性增加，功由这条直线下的面积给出。刚性双原子氧气的摩尔定容热容为 $5R/2$，对任意两个平衡态都成立

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{C_V}{R}\Delta(pV).$$

端点温度

沿 $p = kV$ 有 $pV = kV^2$，因此 $\Delta(pV) = k(V_2^2 - V_1^2)$。图 2.27 中，梯形的两条竖边分别高 $p_1 = kV_1$ 和 $p_2 = kV_2$，两边相距 $V_2 - V_1$。梯形面积是平均压强乘体积增量。

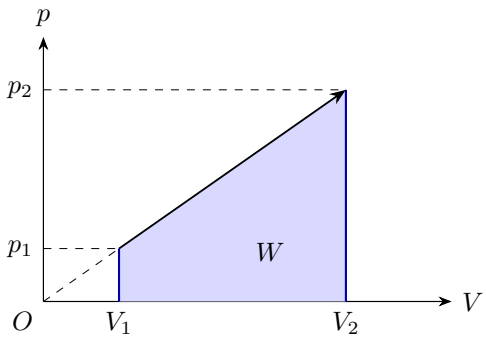


图 2.27: 过原点的直线路径与做功面积

路径积分与吸热量

$$\boxed{W = \int_{V_1}^{V_2} kV\,\mathrm{d}V = k\left[\frac{V^2}{2}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{k}{2}(V_2^2 - V_1^2)},$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{5k}{2}(V_2^2 - V_1^2), \qquad Q = \Delta U + W = 3k(V_2^2 - V_1^2)}.$$

能量分配

温度也随 V^2 增加，故本题同时升温、膨胀、吸热。输入热量的 5/6 增加内能、1/6 用于做功，这一分配来自 $p = kV$。k 的量纲为 $\mathrm{Pa/m^3}$，kV^2 具有能量单位；气体量已通过 $pV = nRT$ 包含在端点数据中。

例 2.10 (短管中空气的非等压冷却)**.** 竖直细玻璃管上端封闭，上端距外部水银槽面高 76cm，管内空气量 $n = 10^{-3}$mol，大气压 76cmHg。$C_V = 20.5\,\mathrm{J/(mol\,K)}$。缓慢降温 10K，求空气放出的热量，取 $R = 8.31\,\mathrm{J/(mol\,K)}$，忽略槽面移动。见图 2.28。

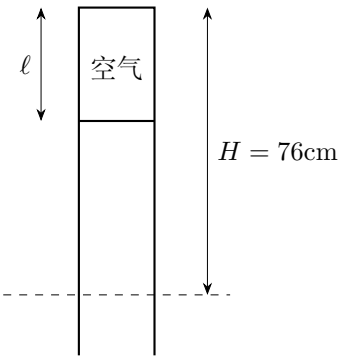


图 2.28: 短管中空气的非等压冷却：题设

解　静水压与气柱长度

令管截面为 S，空气柱长为 ℓ。图 2.28 中管顶距外槽面固定为 $H = 76\,\mathrm{cm}$，所以内水银面高于外槽面 $H - \ell$。从槽面沿水银向上到内液面，压强减小，故

$$p = p_0 - \rho g(H - \ell).$$

压强随体积的关系

题给大气压恰为 76cmHg，即 $p_0 = \rho g H$，因此得到图 2.29 中的特殊路径关系

$$p = \rho g \ell, \qquad V = S\ell, \qquad p = \frac{\rho g}{S} V.$$

空气降温时 p, V 同时降低，水银面上升，内外液面的高度差随之增大。

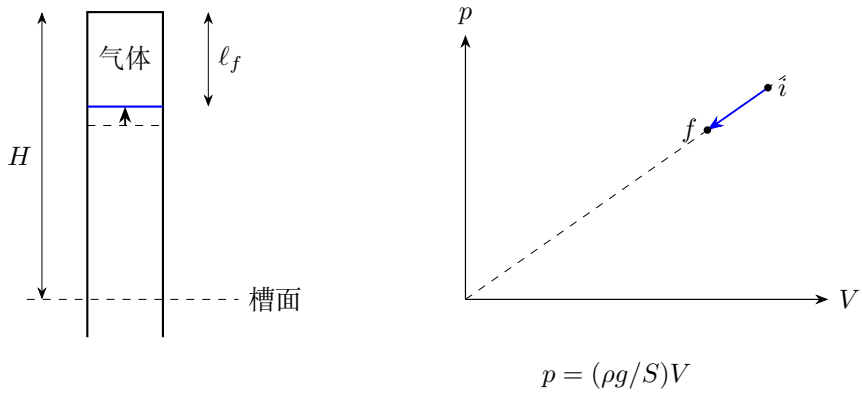


图 2.29: 冷却使内液面上升、气柱缩短；对应 p–V 图上沿过原点直线向左下方移动

压缩功和热量

记 $k=\rho g/S$，以 V_i, V_f 表示降温前后的体积。压缩时 $V_f<V_i$，因此按真实方向积分：

$$W=k\int_{V_i}^{V_f} V\,\mathrm{d}V=k\left[\frac{V^2}{2}\right]_{V_i}^{V_f}=\frac{1}{2}(kV_f^2-kV_i^2)=\frac{1}{2}\Delta(pV)=\frac{1}{2}nR\Delta T.$$

冷却 10K 有 $\Delta T=-10\,\mathrm{K}$，所以

$$W=-0.04155\,\mathrm{J},\qquad \Delta U=nC_V\Delta T=-0.20500\,\mathrm{J},$$

$$\boxed{Q=n\left(C_V+\frac{R}{2}\right)\Delta T=-0.24655\,\mathrm{J}}.$$

放热的物理意义

故空气放出的热量为 $\boxed{0.247\,\mathrm{J}}$。水银上升压缩气体，对气体做正功，所以放热的绝对值比内能减少量更大；三个数的符号符合 $\Delta U=Q-W$，也与图中气柱缩短一致。

2.9 本讲小结

分子与器壁交换动量形成压强，各向同性把三个速度分量的贡献联系起来。温度决定分子的平均平动动能，内能还包含参与储能的转动和振动；固定气体量的内能差由热容对温度的积分给出。

第一定律把输入热量、外功与内能变化联系起来。活塞位移决定体积功，图中路径决定功的积分，初末状态决定内能差。定压与定容热容的差值来自膨胀功；其

他路径的热量则由相应的受力、几何和状态关系求出。平衡曲线上的恢复力与自由膨胀中的熵增进一步说明过程怎样进行。

2.10　练习

练习 2.1 (方均根速率与温度)**.** 氦与氮气处于同一温度 T。摩尔质量分别为 4g/mol 与 28g/mol。求二者平均平动动能之比、方均根速率之比；若氮气的数密度是氦的两倍，求压强比。见图 2.30。

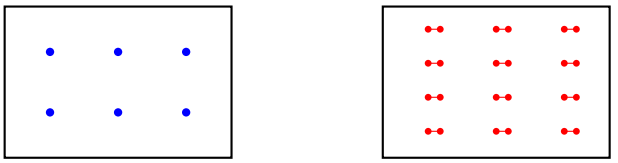


图 2.30: 相同体积、同温度的示意比较；每个单点为一个氦原子，每个双点为一个氮分子

练习 2.2 (同一初末态的两条路径)**.** 1mol 单原子气体从 $A(V_0, p_0)$ 到 $C(2V_0, 2p_0)$。路径一先等容到 $B(V_0, 2p_0)$ 再等压到 C；路径二沿直线 AC。求两条路径的内能变化、功与热量。见图 2.31。

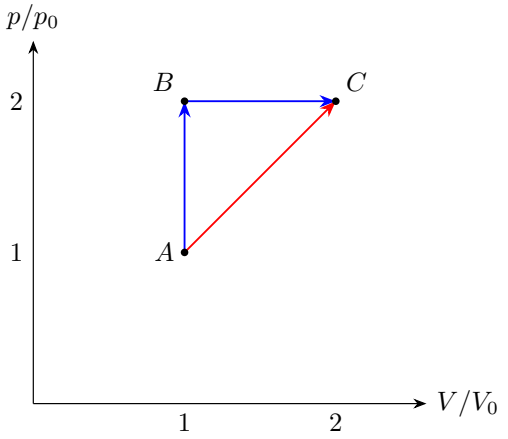


图 2.31: 题设：两条从 A 到 C 的路径，一条经 B，一条为直线

练习 2.3 (刚性绝热容器中的电功)**.** 绝热刚性容器中有 2mol 单原子理想气体，内部电阻由外部电源输入 600J，忽略电阻储能。求气体温升、压强比及体积功；初温为 300K，取 $R = 8.31$。见图 2.32。

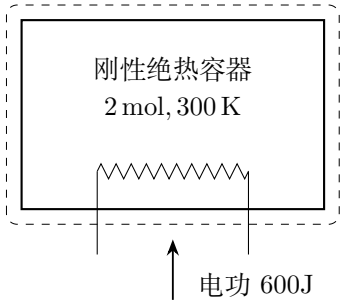


图 2.32: 刚性绝热容器中的电功：题设

练习 2.4 (混合气体的绝热末温)**.** 两个刚性绝热容器由阀相连，分别装有 1mol 氦气、300K 和 1mol 氮气、600K，体积均为 V。打开阀门，忽略反应和分子间作用，氮气按刚性双原子处理。求末温与末压。见图 2.33。

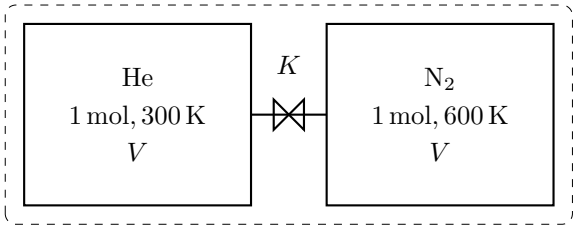


图 2.33: 两个刚性绝热容器由阀门连通；氦与氮的初温、物质的量和所占体积分别给出

练习解答

练习 2.1

解　平均平动动能

图 2.30 给出两种气体的温度和数密度，分别用它们比较单个分子的运动与整份气体的压强。

同温约束的是每个分子的平均平动动能。氦和氮气均满足 $\bar{\varepsilon} = 3kT/2$，所以能量之比为 $\boxed{1:1}$。这里比较的是质心平动，能量由同一温度 T 确定。

方均根速率

由 $\frac{1}{2}m\langle v^2\rangle = 3kT/2$ 得方均根速率与分子质量的平方根成反比；分子质量比与摩尔质量比相同。图 2.34 在固定温度下画出这一反平方根关系，两个点分别代入氦与氮气的摩尔质量；纵轴为方均根速率，将每种气体的速率分布归结为一个均方平均值。

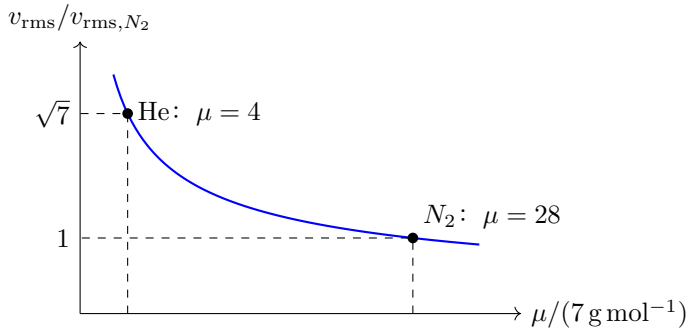


图 2.34: 同温时方均根速率按摩尔质量平方根的倒数变化

$$\boxed{\frac{v_{\mathrm{rms,He}}}{v_{\mathrm{rms,N_2}}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}}.$$

压强与数密度

再用数密度形式的状态方程 $p = n_N kT$。由图 2.34 的速率比代回微观压强式：氮分子质量是氦原子的 7 倍，同温时均方速率却只有氦的 1/7，二者在 $m\langle v^2\rangle$ 中恰好抵消。剩下的差别仅是数密度，故

$$\boxed{p_{\mathrm{N_2}} : p_{\mathrm{He}} = 2:1}.$$

练习 2.2

解　两条路径的共同内能差

图 2.31 中两条路径都从 A 到 C，内能差由相同端点确定，功则由各自曲线下的面积确定。

先从两个端点求与路径无关的内能差。对 1mol 单原子气体，$U = 3pV/2$；A 点 $pV = p_0V_0$，C 点 $pV = 4p_0V_0$，所以两条路径都有

$$\boxed{\Delta U = \frac{3}{2}(4-1)p_0V_0 = \frac{9}{2}p_0V_0}.$$

矩形与梯形面积

路径一的 AB 等容，功为零；BC 压强恒为 $2p_0$，故 $W_1 = 2p_0(2V_0 - V_0) = 2p_0V_0$。路径二是直线，其功为梯形面积，

$$W_2 = \frac{p_0 + 2p_0}{2}(2V_0 - V_0) = \frac{3}{2}p_0V_0.$$

图 2.35 的阴影正是两条路径所围的三角形，给出 $W_1 - W_2 = p_0V_0/2$。

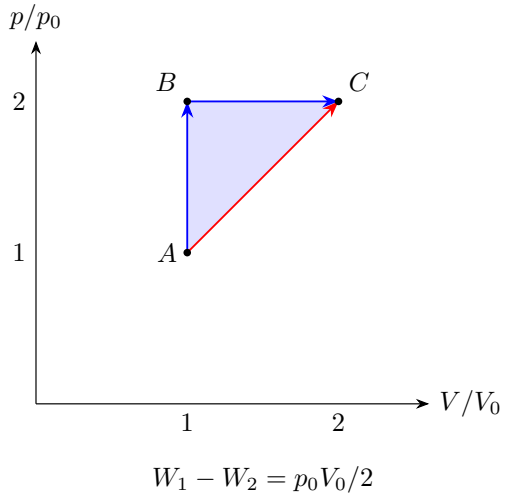


图 2.35: 蓝色三角形的面积给出两条路径的功之差

吸热量及其差值

分别代入 $Q = \Delta U + W$，得

$$\boxed{Q_1 = \frac{13}{2}p_0V_0, \qquad Q_2 = 6p_0V_0}.$$

路径一在更多体积变化范围内保持较高压强，因此做功更多；末态内能相同，这部分额外输出只能由额外吸热补偿。故 $Q_1 - Q_2 = W_1 - W_2 = p_0V_0/2$，与阴影面积完全一致。

练习 2.3

解　电功怎样进入容器

取气体与电阻为系统，外部电源不在系统内。图 2.32 所示容器刚性，器壁固定，故 $W_{\text{体积}} = 0$；外壁绝热，故 $Q_{\text{壁}} = 0$。导线把电源提供的 600J 电功输入系统，电阻将它传给气体。

输入电能与内能增加

图 2.36 中容器刚性且绝热，电源通过导线输入电功。忽略电阻的储能变化，电功等于气体内能的增量：

$$nC_V\Delta T = 600\,\mathrm{J}.$$

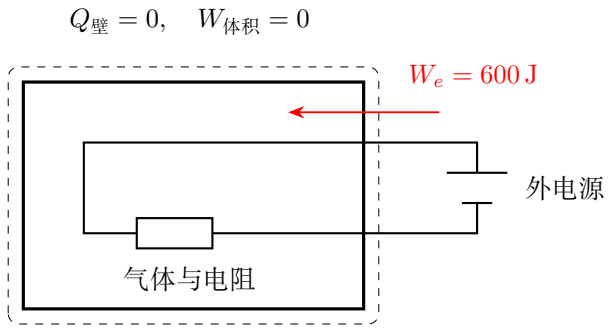


图 2.36: 电源经导线向刚性绝热容器内的电阻输入电功

温升与压强比

单原子气体 $C_V = 3R/2$、$n = 2\,\mathrm{mol}$，因此

$$\boxed{\Delta T = \frac{600}{2(3R/2)} = 24.07\,\mathrm{K}}.$$

体积和气体量都不变，压强比只需按绝对温度比计算：

$$\boxed{\frac{p_f}{p_i} = \frac{300+24.07}{300} = 1.0802, \qquad W_{体积} = 0}.$$

能量传递的两种研究对象

只取气体时，这 600J 由电阻传来，记为气体吸热；把电阻也纳入时，同一份能量经导线以电功输入。两种研究对象描述同一传递过程，均得到上面的温升。

练习 2.4

解　整个装置的能量守恒

图 2.33 中的阀门打开后，两种气体在两个相连容器的总体积 $2V$ 中混合。

打开阀门后，两个容器的外壁刚性、绝热，故没有外部体积功和热量交换。氦与氮气可以互相传能并扩散，但两者总内能不变。两种气体各自的热容确定它们对共同末温的贡献。

两种气体的热容

氦的 $C_{V,\mathrm{He}}=3R/2$，氮气按刚性双原子模型取 $C_{V,\mathrm{N_2}}=5R/2$。两者各 1mol，末态同温 T_f，所以

$$\frac{3}{2}R\times 300+\frac{5}{2}R\times 600=\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)RT_f.$$

图 2.37 画出气体在两室之间的扩散；达到平衡后，两种组分都分布在全部空间。

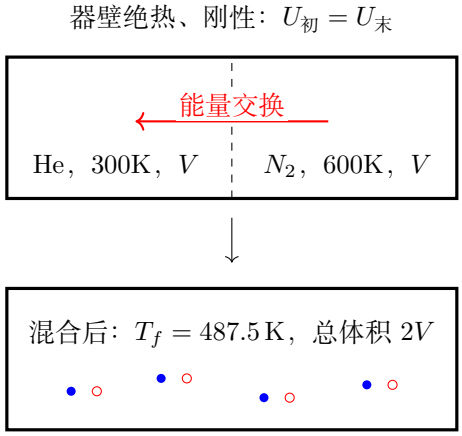


图 2.37: 冷热气体在刚性绝热容器中交换能量并混合

共同末温

$$\boxed{T_f=\frac{(3/2)300+(5/2)600}{4}=487.5\,\mathrm{K}}.$$

末温处于 300K 与 600K 之间，且更靠近热容较大的氮气初温。

末态总压

整个末态体积为 $2V$，总物质的量 2mol，因此

$$\boxed{p_f=\frac{2RT_f}{2V}=\frac{487.5R}{V}}.$$

两种气体都占据整个 $2V$ 空间，各贡献分压 $RT_f/(2V)$。总压是这两项之和。

热学

物理竞赛一轮讲义

第三讲

热力学过程与循环

2026

目录

第三讲　热力学过程与循环 **1**

3.1　从状态变化到过程中的能量交换 1

3.2　等容、等压和等温过程 2

3.3　可逆绝热过程 2

3.4　多方过程与弹簧活塞 4

3.5　流入气体怎样携带能量 5

3.6　循环中的功、热量与效率 6

3.7　第二定律与卡诺循环 7

3.8　熵怎样描述过程方向 8

3.9　例题与分析 12

3.10 本讲小结 26

3.11 练习 26

练习解答 28

第三讲　热力学过程与循环

3.1　从状态变化到过程中的能量交换

把一份气体从一个平衡态带到另一个平衡态，可以加热，可以推动活塞，也可以同时进行。初末态决定内能差，实际经历的过程决定热量和功。本讲沿用气体吸热为正、对外做功为正的约定：

$$\Delta U = Q - W, \qquad Q = \Delta U + W. \tag{3.1}$$

对定量、热容恒定的理想气体，$\Delta U = nC_V(T_f - T_i)$。用状态方程消去温度，还可写成 $\Delta U = (C_V/R)(p_f V_f - p_i V_i)$。接下来由装置确定气体怎样做功，便能求出交换的热量。

3.1.1　准静态过程和可逆过程

外界条件改变得很慢，气体内部有足够时间恢复平衡，过程便可近似为一串平衡态。这样的过程称为准静态过程，途中每个状态都具有确定的 p, V, T。活塞两侧接近机械平衡时，微小体积变化所输出的功为 $\delta W = p\,\mathrm{d}V$。

可逆过程还要求系统和环境能够沿原来的过程反向变化，并共同恢复原状。缓慢、无摩擦的机械运动和温差趋近于零的传热，提供了可逆过程的理想模型。摩擦和有限温差传热产生耗散，过程反向时需要额外的外界作用。

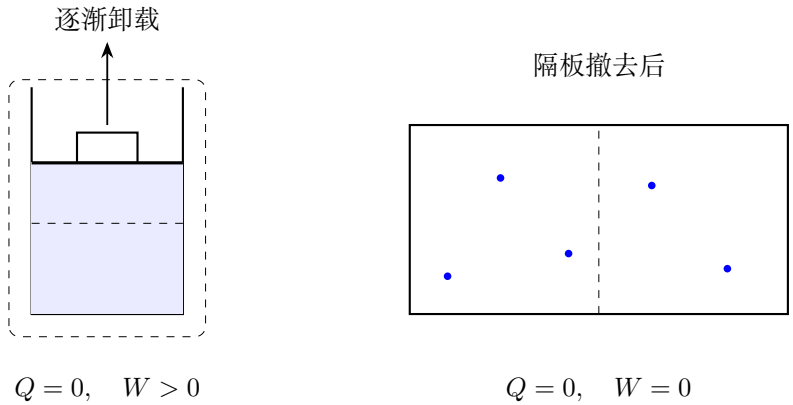


图 3.1：两种绝热过程：推动活塞膨胀与向真空自由膨胀

图 3.1 比较两种绝热装置。左图缓慢改变外负载，气体推动活塞，输出功来自内能，膨胀时温度降低。右图撤去隔板，气体进入真空；容器外壁固定，$Q = W = 0$，理想气体的初末温度相同。两图的绝热条件都给出 $Q = 0$，它们的功由各自的受力和运动决定。

3.2　等容、等压和等温过程

等容过程中 V 固定，$p/T = nR/V$ 保持不变。只有体积功时，$W = 0$，于是

$$Q_V = \Delta U = nC_V(T_f - T_i).$$

等压过程中 p 固定，$V/T = nR/p$ 保持不变。对外功为

$$W = \int_{V_i}^{V_f} p\,\mathrm{d}V = p[V]_{V_i}^{V_f} = p(V_f - V_i) = nR(T_f - T_i),$$

故 $Q_p = n(C_V + R)\Delta T = nC_p\Delta T$。例 3.2 比较相同温升的这两种加热方式，多吸收的热量正好成为膨胀功。

定量理想气体等温变化时，$p = nRT/V$，内能保持不变。沿准静态路径，

$$\begin{aligned} W &= nRT\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT\left[\ln\frac{V}{V_i}\right]_{V_i}^{V_f} \\ &= nRT\ln\frac{V_f}{V_i}, \qquad Q = W. \end{aligned}$$

等温膨胀持续从热源吸热，并把等量能量以功的形式输出；等温压缩把外界输入的功传给热源。例 3.1 把等容升温和等温压缩接起来，比较通往同一末态的两条路径。

3.3　可逆绝热过程

绝热气缸中的无摩擦活塞缓慢移动，取 C_V 为常量。第一定律的微分式为

$$nC_V\,\mathrm{d}T = -p\,\mathrm{d}V = -\frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V.$$

把温度和体积变量分开，再按各自端点积分：

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C_V}\frac{\mathrm{d}V}{V}, \qquad \int_{T_i}^{T_f}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\frac{R}{C_V}\int_{V_i}^{V_f}\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

将对数原函数代入两组端点，

$$\left[\ln\frac{T}{T_i}\right]_{T_i}^{T_f} = -\frac{R}{C_V}\left[\ln\frac{V}{V_i}\right]_{V_i}^{V_f}, \qquad \ln\frac{T_f}{T_i} = -\frac{R}{C_V}\ln\frac{V_f}{V_i}.$$

记 $\gamma = C_p/C_V = 1 + R/C_V$，取指数并整理：

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{常量}}.$$

再用 $T = pV/(nR)$ 消去温度，便有 $pV^\gamma =$ 常量；用 $V = nRT/p$ 消去体积，得到 $T^\gamma p^{1-\gamma} =$ 常量。这些关系描述定量、恒定热容的理想气体沿可逆绝热路径的变化。

绝热过程的功由内能减少给出：

$$W = nC_V(T_i - T_f) = \frac{p_iV_i - p_fV_f}{\gamma - 1}.$$

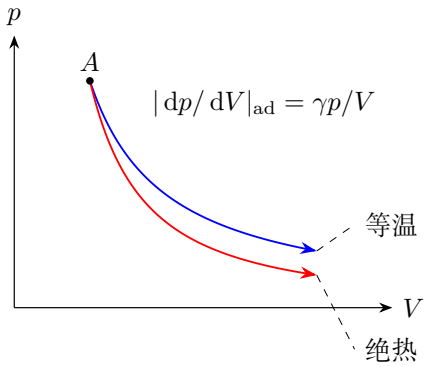


图 3.2: 同一初态出发的等温与可逆绝热膨胀；图取 $\gamma = 7/5$

图 3.2 中，从同一点 A 出发，等温线与绝热线的斜率分别由乘积求导得到：

$$V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} + p = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_T = -\frac{p}{V},$$

$$V^\gamma\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} + \gamma pV^{\gamma-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_S = -\frac{\gamma p}{V}.$$

在同一个状态点，绝热线斜率的绝对值是等温线的 γ 倍。两条路径从 A 出发，分别有 $p_{\text{等温}} = p_A(V_A/V)$ 和 $p_{\text{绝热}} = p_A(V_A/V)^\gamma$。膨胀时 $V > V_A$、$\gamma > 1$，所以绝热线位于等温线下方。膨胀到同一体积，绝热过程的末温更低，做功面积也更小。

3.3.1 自由膨胀之后再压缩

绝热刚性容器中的自由膨胀满足 $\Delta U = 0$，理想气体温度保持原值。达到平衡后，再用活塞缓慢绝热压缩，外界的功转为内能，温度随压缩升高。因此体积恢复到原值时，气体可处于更高温度。例 3.6 和练习 3.4 分别从能量和熵描述这两个阶段。

3.4　多方过程与弹簧活塞

3.4.1　幂函数路径的功和热量

许多准静态过程可用 $pV^m = K$ 近似描述，m 称为多方指数。将 $p = KV^{-m}$ 代入功的积分。$m \neq 1$ 时，

$$W = K\int_{V_i}^{V_f} V^{-m}\,\mathrm{d}V = K\left[\frac{V^{1-m}}{1-m}\right]_{V_i}^{V_f}$$
$$= \frac{p_fV_f - p_iV_i}{1-m} = \frac{nR(T_f - T_i)}{1-m}.$$

再由第一定律得到

$$Q = n\left(C_V + \frac{R}{1-m}\right)(T_f - T_i).$$

$m = 0$ 给出等压过程，$m = \gamma$ 给出可逆绝热过程；$m = 1$ 对应等温过程，功的积分为前面的对数式。括号中的系数是沿这条指定路径的摩尔热容。它包含伴随温升发生的功，因而取值随路径而变。

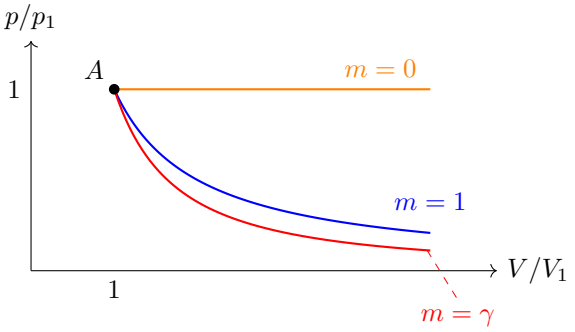


图 3.3: 经过同一初态的不同路径，具有不同斜率与曲线下面积

图 3.3 把不同指数的曲线画在同一坐标中。对 $pV^m = K$ 逐项求导，

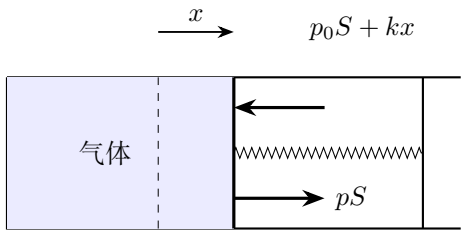
$$V^m\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} + mpV^{m-1} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\frac{mp}{V}.$$

指数决定同一状态处的曲线斜率，也决定膨胀过程中压强下降的快慢。例 3.9 中的吸热直线 $p = kV$ 对应 $m = -1$，可直接从它的受热过程理解上述热容。

3.4.2　由活塞位置确定路径

图 3.4 中的弹簧初始无形变，活塞向右移动 x，气体体积增加 Sx。力平衡给出

$$pS = p_0S + kx, \qquad V = V_i + Sx, \qquad p = p_0 + \frac{k}{S^2}(V - V_i).$$



$$\Delta V = Sx, \quad W = p_0\Delta V + kx^2/2$$

图 3.4: 弹簧压缩随活塞位移增加；压力路径的斜率由 k/S^2 决定

沿这条直线路径，气体做功为

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} \left[p_0 + \frac{k}{S^2}(V - V_i)\right] \mathrm{d}V \\ &= \left[p_0(V - V_i) + \frac{k}{2S^2}(V - V_i)^2\right]_{V_i}^{V_f} \\ &= p_0\Delta V + \frac{1}{2}kx_f^2. \end{aligned}$$

第一项用于推动大气，第二项转为弹簧能量。将端点 pV 代入内能差，便得到加热量。例 3.3 按这一装置关系展开计算。

连通双缸还可同时包含气体向真空区扩散和外活塞受压移动。将两室气体作为整体，内部流动只在整体内部交换能量，外负载的功由外活塞的实际位移计算。例 3.4 据此求连通后的温度与活塞位置。

3.5 流入气体怎样携带能量

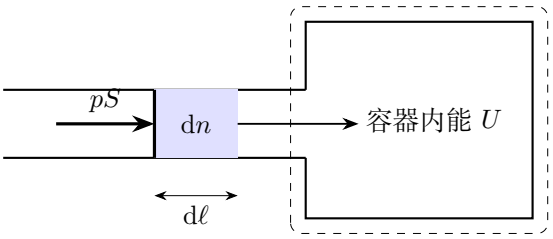
固定容器与气库连通后，进入的气体带来内能，上游气体还要做功把它推进入口。取一小份 $\mathrm{d}n$ 摩尔气体，入口处温度为 T_s、体积为 $\mathrm{d}V_{入}$。由状态方程，推动功为

$$p_s\,\mathrm{d}V_{入} = RT_s\,\mathrm{d}n.$$

这小份气体携带的内能为 $C_VT_s\,\mathrm{d}n$，两项合起来为

$$(C_VT_s + RT_s)\,\mathrm{d}n = C_pT_s\,\mathrm{d}n.$$

每摩尔的 $h = u + p\bar{V}$ 称为摩尔焓，理想气体有 $h = C_pT$，相应的零点与 u 一致。



$$pS\,\mathrm{d}\ell = p\,\mathrm{d}V_{\text{入}} = RT\,\mathrm{d}n$$

图 3.5: 入口微团受上游压力推动；内能和推动功随同一批物质进入刚性容器

图 3.5 用入口前的小气柱显示推动功的来源。容器壁固定，气柱由外面的压力推入；进入的能量最终成为容器内气体的内能。取容器绝热，忽略壁的热容量和入口气流的宏观动能，便有

$$n_f C_V T_f - n_i C_V T_i = \int_0^{n_f - n_i} C_p T_s\,\mathrm{d}n_{\text{入}}.$$

气库温度恒定时，积分为

$$C_p T_s [n_{\text{入}}]_0^{n_f-n_i} = (n_f - n_i) C_p T_s.$$

末态再由停止流入的压强条件和 $p_f V = n_f R T_f$ 确定。例 3.5 的容器原有气体，n_i 保留在内能和流入量中；练习 3.2 初始为真空，令 $n_i = 0$ 便得 $T_f = (C_p/C_V)T_s$。升高的温度体现了入口推动功转成内能的作用。

3.6　循环中的功、热量与效率

工作物质经历一周回到初态，$\Delta U_{\text{周}} = 0$。把各吸热段热量相加记为 $Q_h > 0$，把各放热段热量的绝对值相加记为 $Q_c > 0$，则

$$W_{\text{净}} = Q_h - Q_c, \qquad \boxed{\eta = \frac{W_{\text{净}}}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h}}.$$

p–V 图中顺时针闭合曲线的有向面积给出净功。各段吸放热则由 $\delta Q = nC_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V$ 确定：升温且膨胀的段吸热，降温且压缩的段放热；两项异号时按具体路径比较。例 3.8 利用两条绝热线联系两条等压段的温度，例 3.9 将三角形面积与斜直线段的吸热量相除。

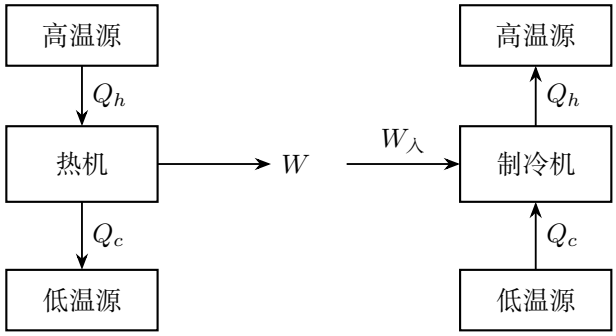


图 3.6: 热机与制冷机的热量和功的方向

图 3.6 将同一能量关系画成热流与功的箭头。逆向运行的制冷机需要输入功 $W_{入} = Q_h - Q_c$，制冷系数和热泵供热系数分别为

$$\varepsilon = \frac{Q_c}{W_{入}}, \qquad \mathrm{COP}_h = \frac{Q_h}{W_{入}} = \varepsilon + 1.$$

高温端收到的热量由低温端搬来的热量和输入功共同组成，因此供热系数可大于 1。练习 3.3 分别计算这两种工作目的对应的系数。

3.7 第二定律与卡诺循环

两块温度不同的物体接触，热量自发从高温物体流向低温物体。热力学第二定律的克劳修斯表述说，若把热量从冷源送到热源，周围还要发生其他变化；制冷机的功输入就是这种变化。开尔文表述从热机出发：循环装置从单一热源吸取的热量，无法在没有其他变化的条件下全部转为功。

把两台机器合在一起，就能看出两种表述的联系。设一台热机能从热源吸取 W 并全部输出为功，用这个功带动制冷机。制冷机从冷源吸取 Q_c，向同一热源送回 $Q_c + W$。合起来，热源净得 Q_c，冷源净失 Q_c，外界的净功为零，恰与克劳修斯表述相冲突。反过来，若有一台装置能在无功输入时把 Q_c 从冷源送回热源，用它搬回普通热机排出的 Q_c，两者合起来便只从高温源取热 $Q_h - Q_c$ 并输出等量功，与开尔文表述相冲突。

在给定的两个恒温热源之间，可逆热机具有相同的效率，也是这些热源之间热机效率的上限。可以用一部热机驱动反向可逆机来理解这一结论：若前者效率高于后者，将两者的功调为相等，组合装置便会在没有净功输入时只把热量从冷源送到热源，与自发传热方向相反。

3.7.1　四个过程怎样闭合

卡诺循环依次为高温 T_h 下等温膨胀、可逆绝热膨胀、低温 T_c 下等温压缩、可逆绝热压缩。图 3.7 中的两条等温线承载热交换，两条绝热线把气体在两个温度之间送回。

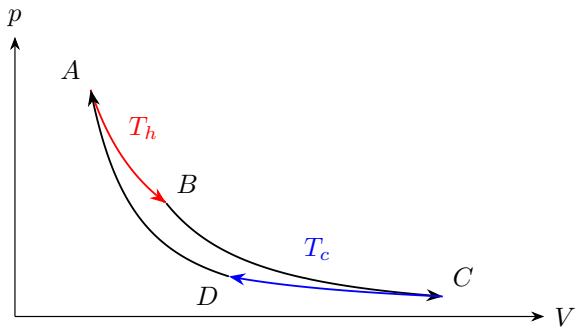


图 3.7: 卡诺循环的四条实际可逆路径；图取 $\gamma = 5/3, T_c/T_h = 1/2$ 示意

等温两段的热量大小由功的积分得到：

$$Q_h = nRT_h \int_{V_A}^{V_B} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_h \left[\ln \frac{V}{V_A}\right]_{V_A}^{V_B} = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A},$$

$$Q_c = -nRT_c \int_{V_C}^{V_D} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT_c \left[\ln \frac{V}{V_C}\right]_{V_C}^{V_D} = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}.$$

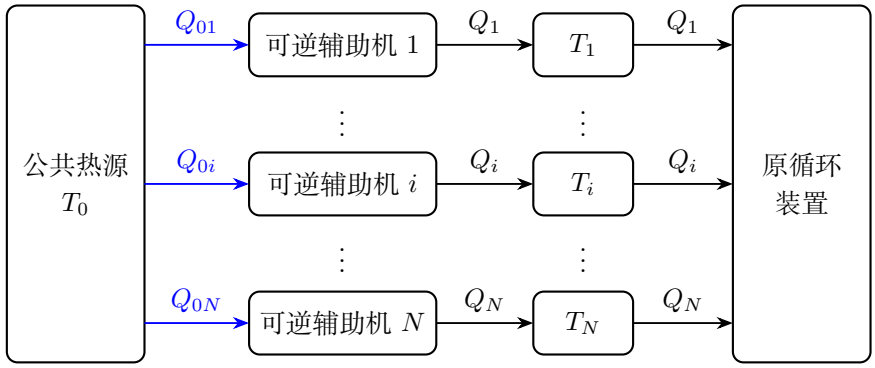
两绝热线分别给出 $T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$ 和 $T_h V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$。相除并取 $1/(\gamma-1)$ 次幂，得到 $V_B/V_A = V_C/V_D$。两热量的对数因子相同，所以

$$\frac{Q_c}{Q_h} = \frac{T_c}{T_h}, \qquad \boxed{\eta_C = 1 - \frac{T_c}{T_h}}.$$

温度用热力学温标 K 表示。这里 T_h, T_c 是两个恒温热源的温度；其他循环的变温换热按各段实际吸放热计算。

3.8　熵怎样描述过程方向

卡诺循环的两段等温换热满足 $Q_h/T_h - Q_c/T_c = 0$。现在考虑一台可逆循环装置，它依次与温度为 $T_1, \ldots, T_N$ 的热源交换热量。记装置从热源 T_i 吸收的有符号热量为 Q_i，放热时 $Q_i < 0$。



热量按图中箭头取正，负值表示热流反向

图 3.8: 各台可逆辅助机与同一个热源换热，补回原循环在各中间热源取走的热量

图 3.8 中，第 i 台可逆辅助机从公共热源 T_0 吸热 Q_{0i}，向 T_i 送入 Q_i。原装置从 T_i 取走的热量恰由辅助机补回。对辅助机，两个吸热量分别为 Q_{0i} 与 $-Q_i$，卡诺关系给出

$$\frac{Q_{0i}}{T_0}-\frac{Q_i}{T_i}=0,\qquad Q_{0i}=T_0\frac{Q_i}{T_i}.$$

各机器完成一周后，中间热源的净热交换为零。整个组合只同 T_0 交换净热量 $Q_0=\sum_i Q_{0i}$，第一定律给出净输出功 $W=Q_0$。若 $Q_0>0$，组合就从单一热源吸热并全部转为功，违反第二定律。若 $Q_0<0$，把所有可逆过程反向运行，便会得到正的净吸热和等量输出功。因此 $Q_0=0$，也就是

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{T_i}=0.$$

对温度连续变化的可逆换热，将一周划成短段，分别用该段的热量和换热温度构成热温比。把分段取细，和式的极限为

$$\oint\frac{\delta Q_{\text{可逆}}}{T}=0.$$

取两条连接同一对平衡态的可逆路径，沿一条去、沿另一条返回，便构成这样的循环。两个正向积分相等，因此积分只由端点决定。将它定义为熵差，微分形式为 $\mathrm{d}S=\delta Q_{\text{可逆}}/T$。

对定量、热容恒定的理想气体，代入可逆过程的第一定律，得到

$$\mathrm{d}S=\frac{nC_V\,\mathrm{d}T+p\,\mathrm{d}V}{T}=nC_V\frac{\mathrm{d}T}{T}+nR\frac{\mathrm{d}V}{V}.$$

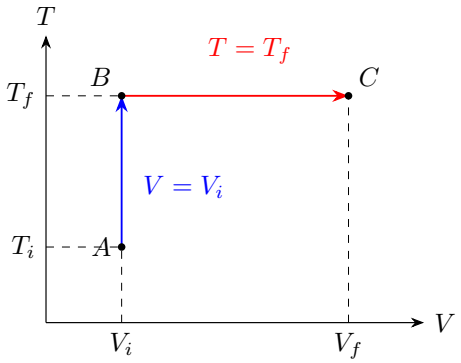


图 3.9: 连接相同端点的假想可逆路径：先等容调温，再等温改变体积

图 3.9 先沿 AB 等容变温，再沿 BC 等温变体积。分别积分：

$$\Delta S_{AB} = nC_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{T} = nC_V \left[\ln \frac{T}{T_i}\right]_{T_i}^{T_f} = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i},$$

$$\Delta S_{BC} = nR \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nR \left[\ln \frac{V}{V_i}\right]_{V_i}^{V_f} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

相加得

$$\boxed{\Delta S = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}}.$$

它也给出相同端点间不可逆过程的熵差。实际过程的功和热量仍由实际装置确定；此处的两段路径用来计算状态量。

可逆绝热过程有 $\mathrm{d}S = 0$，熵保持不变。图 3.10 因此把卡诺循环画成矩形。等温段的热量为 $T\Delta S$，两条竖直段为等熵过程；矩形面积 $(T_h - T_c)\Delta S$ 等于循环净功。

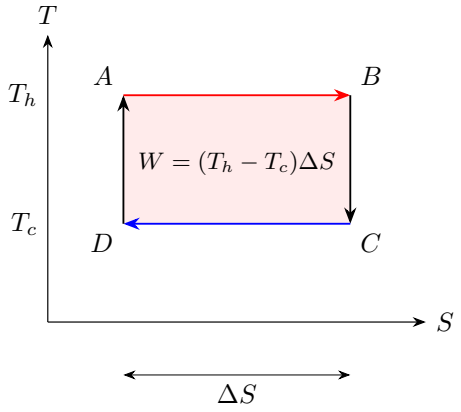


图 3.10: 卡诺循环在 T–S 图中为矩形，等温段的面积给热量，竖直段为等熵过程

3.8.1 把气体和热源的熵变相加

若气体从温度为 T_s 的恒温热源吸收热量 Q，热源的熵变为 $-Q/T_s$。图 3.11 中的虚线把二者合起来；整体与外界绝热、无物质交换，外界可通过机械功交换能量。功本身不传递熵，故有

$$\Delta S_{\text{总}} = \Delta S_{\text{气体}} - \frac{Q}{T_s} \geq 0.$$

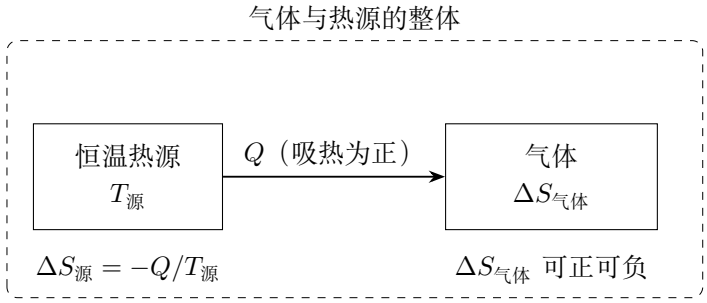


图 3.11: 气体与热源之间的传热，以及二者各自的熵变

可逆过程取等号；摩擦、气体自由扩散和有限温差传热等过程使总熵增加。若有多个热源，则分别计入各自的 $-Q_j/T_j$。

例如 $Q > 0$ 从 T_h 传给 $T_c < T_h$ 时，

$$\Delta S_{\text{总}} = -\frac{Q}{T_h} + \frac{Q}{T_c} = Q\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_h}\right) > 0.$$

理想气体自由膨胀的 $T_f = T_i$、$V_f > V_i$，因而 $\Delta S = nR\ln(V_f/V_i) > 0$。把它压回原体积并恢复原温度，需要与外界交换功和热量。例 3.7 把双缸气体及其热源的熵变相加，用这一过程方向规律判断题给末态能否达到。

3.9　例题与分析

例 3.1 (不同初压的两条加热路径)**.** 同种同量理想气体初温均为 T_a，初态分别为 a, a'。路径一 $a \to b$ 等容；路径二 $a' \to c$ 等容后 $c \to b$ 等温。$T_b > T_a$，且路径二的等容体积大于路径一。比较两路径的功与总热量。见图 3.12。

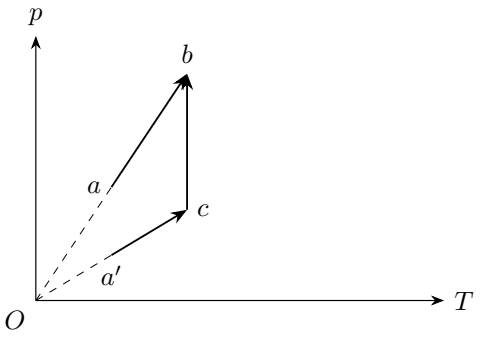


图 3.12: 不同初压的两条加热路径：题设

解　相同的内能差

图 3.12 中两初态温度相同，且气体种类、物质的量相同，所以两路径的初内能相同。末态又同为 b，因而

$$\Delta U_1 = \Delta U_2 = nC_V(T_b - T_a) > 0.$$

路径二的等温压缩功

接下来比较功。路径一等容，$W_1 = 0$。路径二先等容升温，功仍为零；再从 c 到 b 保持 T_b，但由较大的 V_c 压缩到较小的 V_b。图 3.13 将两条路径转为 p–V 图，末段箭头明确向左，因此

$$W_2 = nRT_b \int_{V_c}^{V_b} \frac{\mathrm{d}V}{V} = nRT_b \left[\ln \frac{V}{V_c}\right]_{V_c}^{V_b} = nRT_b \ln \frac{V_b}{V_c} < 0.$$

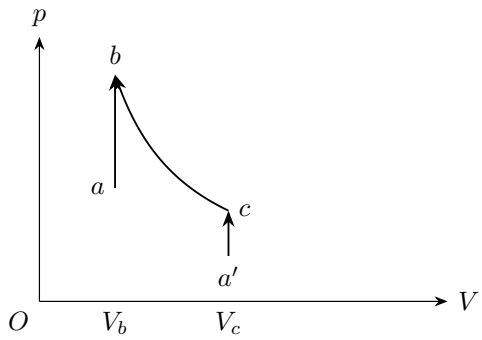


图 3.13: 不同初压的两条加热路径：解答过程

总热量的比较

由 $Q=\Delta U+W$ 得

$$Q_1=nC_V(T_b-T_a)>0,$$

$$Q_2=nC_V(T_b-T_a)-nRT_b\ln\frac{V_c}{V_b}.$$

所以

$$\boxed{W_1>W_2,\qquad Q_1>0,\qquad Q_1>Q_2}.$$

路径二在等容升温时吸热，在等温压缩时放热。总热量 Q_2 的符号取决于这两部分的大小：当 $C_V(T_b-T_a)>RT_b\ln(V_c/V_b)$ 时为正，反之为负。两部分相等时 $Q_2=0$。图中的压缩面积正对应路径二比路径一少吸收的热量。

例 3.2 (氮气的两种加热方式)**.** 氮气初压 $10^5\mathrm{Pa}$，初体积 $0.0082\,\mathrm{m}^3$，从 300K 升至 400K。按刚性双原子理想气体处理，分别求等容和等压加热所需热量，并解释差值。见图 3.14。

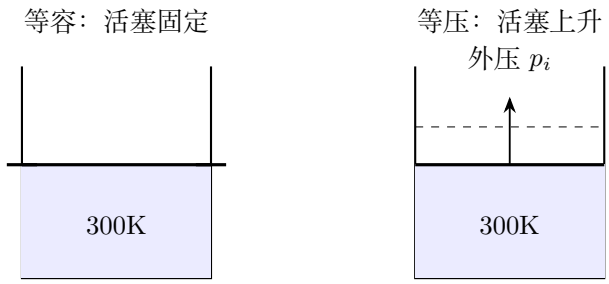


图 3.14: 同样的氮气从 300K 升至 400K：固定活塞与恒外压自由活塞对应不同的活塞位移

解　气体量与共同温升

图 3.14 中的两种加热从同一初态出发，气体量相同、温升也同为 100K。先由初态求出组合量 nR，无需分别求 n 和代入 R：

$$nR = \frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{10^5 \times 0.0082}{300} = \frac{820}{300}\,\mathrm{J/K}.$$

刚性双原子氮气取 $C_V = 5R/2$。两种过程的内能增量因此相同，均为

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR\Delta T = 683.33\,\mathrm{J}.$$

两种加热中的功

等容时活塞固定，$W_V = 0$；等压时体积增大，$W_p = p_i \Delta V = nR\Delta T$。图 3.15 画出两实际路径及同温末态，阴影对应等压过程中多输出的机械功。

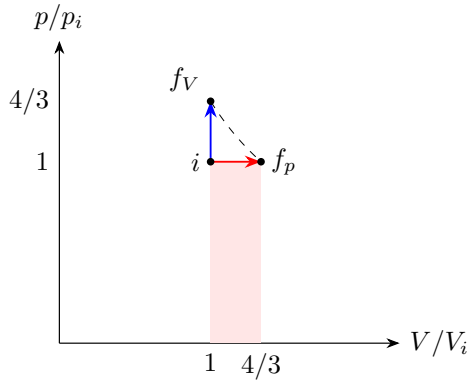


图 3.15: 同一初态出发，两末态在 400K 等温线上；等压段的矩形面积表示等压过程多做的功

额外热量的去向

$$\boxed{Q_V = 683.33\,\mathrm{J}}, \qquad \boxed{Q_p = \Delta U + W_p = 956.67\,\mathrm{J}},$$

$$\boxed{Q_p - Q_V = W_p = nR\Delta T = 273.33\,\mathrm{J}}.$$

等压末体积为 $V_i(400/300)$，等容末压为 $p_i(400/300)$，两种末态的 pV 相等，因此温度和内能相等，体积却不同。多吸收的 273.33J 全部通过活塞传给大气，两个末态的内能相同。

例 3.3 (弹簧活塞的加热量)**.** 水平缸中双原子理想气体推动轻活塞，外压 $p_0 = 10^5\mathrm{Pa}$，活塞面积 $S = 0.05\,\mathrm{m}^2$，外接劲度 $k = 5\times10^4\,\mathrm{N/m}$ 的弹簧，初始无形变。缓慢加热使体积从 0.015 变为 $0.020\,\mathrm{m}^3$，求外功和热量。见图 3.16。

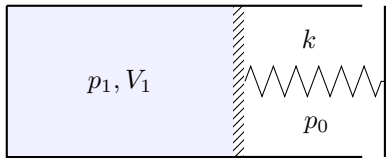


图 3.16: 弹簧活塞的加热量：题设

解　弹簧位移确定过程

图 3.16 中的弹簧初始无形变，故初压 $p_1 = p_0$。设活塞向外移动 x，则 $V - V_1 = Sx$；活塞缓慢平衡满足 $pS = p_0S + kx$。两式消去 x，得到完整路径

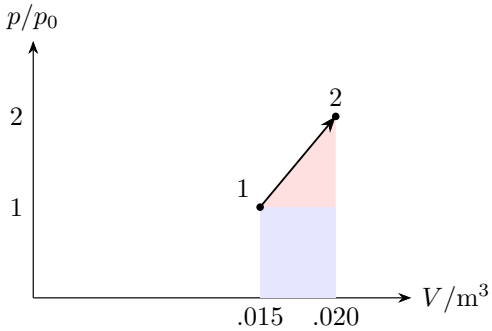
$$p = p_0 + \frac{k}{S^2}(V - V_1).$$

末位移与末压

末位移与末压分别为

$$x_f = \frac{0.020 - 0.015}{0.05} = 0.10\,\mathrm{m}, \qquad p_2 = p_0 + \frac{kx_f}{S} = 2.0\times10^5\,\mathrm{Pa}.$$

图 3.17 的斜直线来自弹簧负载逐渐增大，阴影梯形给出气体总外功。



$$W = p_0\Delta V + kx_f^2/2$$

图 3.17: 矩形面积对应大气功，额外三角形对应弹簧储能；两者构成总外功

膨胀功

沿图中的直线积分，固定 p_0, k, S, V_1：

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_1}^{V_2} \left[p_0 + \frac{k}{S^2}(V - V_1) \right] \mathrm{d}V \\ &= \left[p_0(V - V_1) + \frac{k}{2S^2}(V - V_1)^2 \right]_{V_1}^{V_2} \\ &= p_0 \Delta V + \frac{k}{2S^2}(\Delta V)^2 = 500 + 250 = \boxed{750\,\mathrm{J}}. \end{aligned}$$

积分中的 500J 用于推动大气，250J 储存在弹簧中，对应图中梯形面积的矩形和三角形两部分。

内能增量与吸热量

刚性双原子气体的内能差只由端点决定，故

$$\Delta U = \frac{5}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{5}{2}(4000 - 1500) = 6250\,\mathrm{J}.$$

由第一定律，$\boxed{Q = \Delta U + W = 7000\,\mathrm{J}}$。加热时压强从 p_0 增至 $2p_0$，温升由两个端点的 pV 求得，吸热量由这一内能增量与直线路径的功相加得到。

例 3.4 (绝热双缸连通与活塞压缩)**.** 两等截面绝热缸由阀相连，左缸有单原子理想气体，初气柱高 H、温度 T_0，活塞承受恒定外压 p_i；右缸刚性、初为真空，容积也为 SH。打开阀门后重新平衡，求左气柱高度 h 和末温。忽略连通管容积和活塞摩擦，活塞初末动能均为零。见图 3.18。

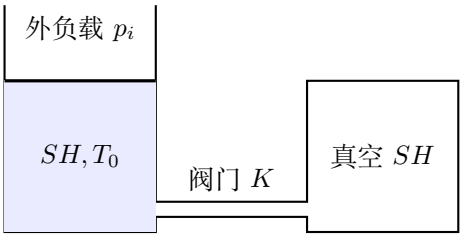


图 3.18: 左缸受恒定外负载，右缸为固定真空容积；连接阀使两侧气体可互通

解　整个气体的热量和功

取图 3.18 中两缸的全部气体为研究对象。阀门内的流动属于系统内部，外壁绝热，所以 $Q = 0$。右缸刚性，左活塞是唯一移动的外壁；忽略初末动能与摩擦后，外界恒压 p_i 对气体所做的功可由实际位移计算。

末态体积与温度

末态左活塞平衡，气压仍为 p_i；气体总体积却是左室 Sh 加右室 SH。与初态 SH, T_0 比较，

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{S(h+H)}{SH} = 1 + \frac{h}{H}.$$

这个比值由初末公共压强 p_i 和气体量守恒得到。图 3.19 中左活塞实际向下，气体对外的功为 $W = p_i S(h-H) < 0$。

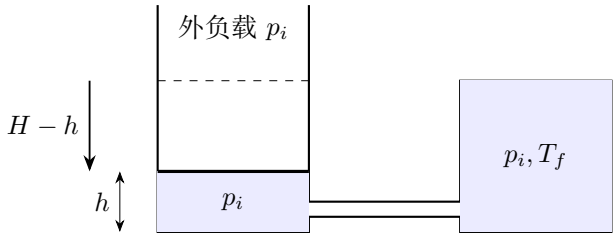


图 3.19: 左活塞下移，气体向右缸扩散；外压通过左活塞向气体做功

外压功与内能增加

单原子气体有 $\Delta U = 3nR(T_f - T_0)/2$。代入 $Q = 0$ 和初态 $nRT_0 = p_i SH$，得

$$\frac{3}{2} p_i SH \left(\frac{T_f}{T_0} - 1 \right) = p_i S(H-h).$$

再代温度关系，化为 $3h/2 = H - h$，因此

$$\boxed{h = \frac{2}{5}H, \qquad T_f = \frac{7}{5}T_0}.$$

活塞位移的能量意义

外界压缩活塞所输入的功为 $3p_i SH/5$，内能增加同为 $3p_i SH/5$。气体占据体积增至 $7SH/5$，其中右室容纳扩散气体。外压作用在左活塞上，左活塞从 H 降到 $2H/5$。这一压入功使整体气体升温。

例 3.5 (大气库向小容器充气)**.** 小刚性绝热容器 A 与巨大气库 B 装有同种刚性双原子理想气体，初温均为 30°C，初压 $p_B = 2p_A$。缓慢开阀充气至两边压强相等，B 的温度、压强视为恒定。忽略入口动能和容器壁热容，求 A 的末温和气体量之比。见图 3.20。

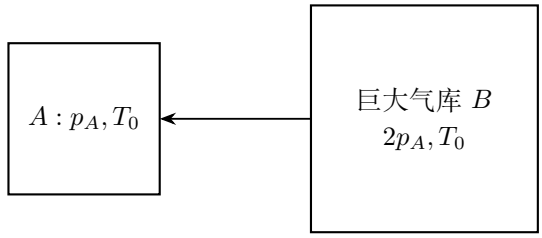


图 3.20: 大气库向小容器充气：题设

解　容器接收流入气体

图 3.20 中的 A 容器体积固定、外壁绝热，阀门打开后，流入气体使它的物质的量与内能同时增加。按图 3.21 取包围 A 的固定控制体，气体通过入口把焓带入，成为容器内的内能。

入口焓的累计积分

每摩尔入口气体的内能为 $C_V T_0$，上游还做 RT_0 的推动功，所以流入能量为 $C_p T_0$。气库巨大，$T_0 = 303.15\,\mathrm{K}$ 恒定，进入量为 $n_f - n_i$，故

$$n_f C_V T_f - n_i C_V T_0 = \int_0^{n_f - n_i} C_p T_0 \, \mathrm{d}n_{\text{入}} = C_p T_0 [n_{\text{入}}]_0^{n_f - n_i} = (n_f - n_i) C_p T_0.$$

停止充气的压强条件

停止充气时末压为 $2p_A$，而 A 体积不变，状态方程还给出 $n_f T_f = 2n_i T_0$。

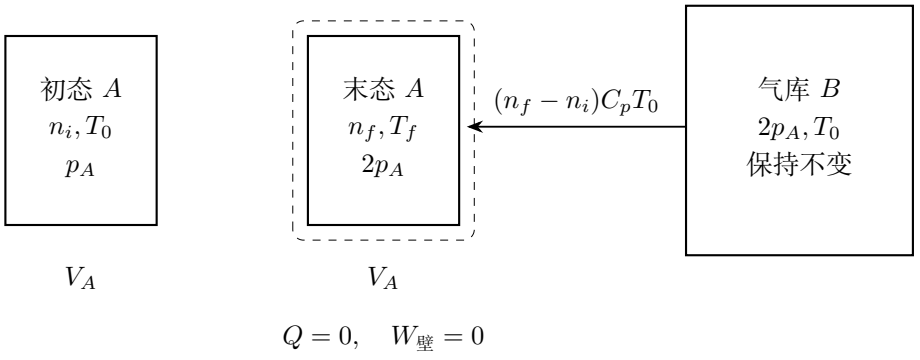


图 3.21: 小容器体积不变，固定控制体内气体量增加；气库以同一入口温度持续供给焓

气体量与末温

令 $r = n_f/n_i$，利用端点关系将能量式左边化为 $n_i C_V T_0$，得到

$$C_V = (r-1)C_p, \qquad r = 1 + \frac{C_V}{C_p}.$$

对刚性双原子气体 $C_V/C_p = 5/7$，所以

$$\boxed{\frac{n_f}{n_i} = \frac{12}{7}, \qquad T_f = \frac{2}{12/7}T_0 = \frac{7}{6}T_0 = 353.675\,\mathrm{K} \simeq 80.5^\circ\mathrm{C}}.$$

末态气体量只增加到 12/7 倍，温度却增加到 7/6 倍，两因素乘积恰为 2，符合末压加倍。入口焓包括推动功，气体在进入容器后将这部分能量转入内能，使 A 达到高于气库的末温。

例 3.6 (自由膨胀后再绝热压缩)**.** 绝热刚性容器分为等容的两室，左室氦气初态为 $V_0, T_0 = 273.15\mathrm{K}$，右室真空。撤掉隔板，自由膨胀平衡后，将一侧壁改为绝热活塞，再可逆绝热压缩到 V_0。求最终温升。见图 3.22。

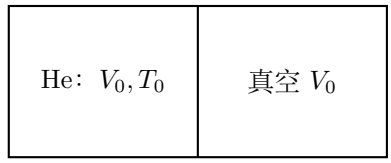


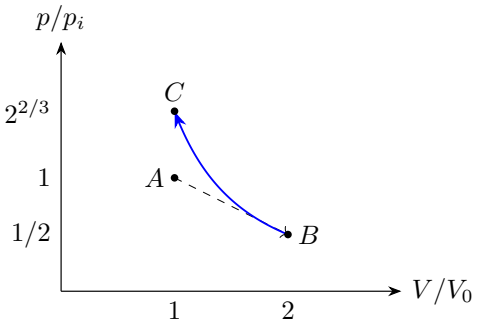
图 3.22: 自由膨胀后再绝热压缩：题设

解　自由膨胀后的温度

图 3.22 中先撤去隔板，整个外容器仍刚性绝热；气体扩散进入真空，外界阻力为零，故第一步 $Q_1 = W_1 = 0$。理想气体内能不变，平衡后仍为 T_0，体积为 $2V_0$，压强降为初压的一半。

两步过程在图中的表示

图 3.23 的虚线只连接第一步的两个平衡态，第一步的气体在扩散中逐渐趋于平衡。随后装上活塞，可逆绝热压缩由一串平衡态组成，图中用实线描出这一段。



虚线连接自由膨胀的两个平衡态

图 3.23: 自由膨胀只连接初末平衡态；从 B 起的实线才是可逆绝热压缩路径

绝热压缩的末温

氦为单原子气体，$\gamma = 5/3$。从体积 $2V_0$ 压回 V_0，

$$T_f V_0^{2/3} = T_0 (2V_0)^{2/3}, \qquad T_f = 2^{2/3} T_0.$$

所以

$$\boxed{T_f - T_0 = (2^{2/3} - 1) \times 273.15\,\mathrm{K} \simeq 160.5\,\mathrm{K}}.$$

最终温度约为 433.6K。图中压缩末点位于同体积初态之上，其压强同样增至初压的 $2^{2/3}$ 倍；外界输入的压缩功全部成为内能增加。

整个过程的熵变化

第一步熵增加 $nR\ln 2$，第二步可逆绝热熵不变，故最后并未恢复初态。外界的压缩功增加内能，第一步自由扩散产生的熵也保留在最终气体中。

例 3.7 (双缸给定末态的能量与熵变化)**.** 两等截面的水平相向气缸以轻杆连接活塞，外部真空，活塞最初固定且静止，随后释放。两室装同种理想气体。初始左室为 4 g、20 L、1 atm、300 K，右室为 12 g、20 L、300 K。左壁绝热，右室与 300K 恒温热源接触；气体比定容热容为 $4\,\mathrm{J/(g\,K)}$。有人给出末态：左室 15L、右室 25L，杆最终静止。取 1atm 为 10^5Pa。按这些端点求右室所需吸热量，并由两室和热源的总熵变化判断这一末态能否达到。见图 3.24。

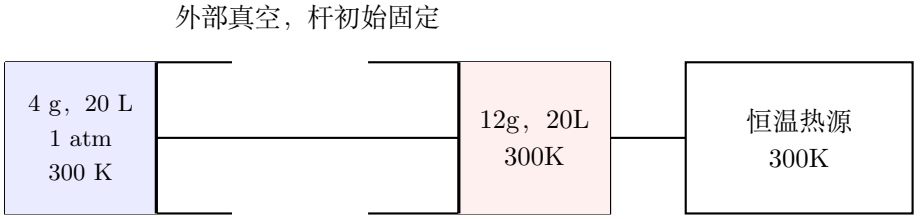


图 3.24: 两活塞由同一根杆连接，外部真空；右气室与 300K 恒温热源接触

解　题给末态的压强与温度

图 3.24 中，右室气体质量是左室的 3 倍，初体积和温度相同，因此右初压为 3 atm。末态右室与 300 K 热源达到热平衡，按给定末体积 25 L，其压强为

$$p_{Rf} = 3\frac{20}{25} = 2.4\,\mathrm{atm}.$$

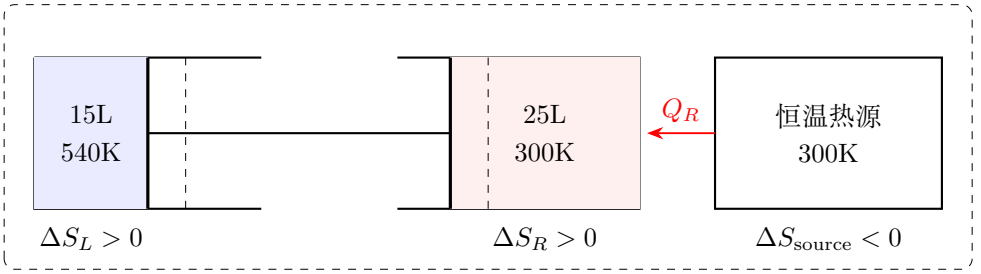
两活塞等面积，外侧真空，连杆静止要求两室末压相等。左室温度由自身气体量守恒确定：

$$\frac{(1)(20)}{300} = \frac{(2.4)(15)}{T_{Lf}}, \qquad T_{Lf} = 540\,\mathrm{K}.$$

这些端点所需的热量

左气体内能增加为 $\Delta U_L = 4 \times 4 \times (540 - 300) = 3840$ J，右气体初末同温，$\Delta U_R = 0$。把两室、活塞和杆合起来，外侧真空且初末杆静止，外界输入只有右室接收的热量，故这些端点要求

$$Q_R = \Delta U_L + \Delta U_R = 3840\,\mathrm{J}.$$



虚线为两活塞初位置，实线为题给末位置

图 3.25: 按给定端点绘制的两缸与热源；气体、杆和热源共同构成外界无交换的整体

图 3.25 中这份热量由 300 K 热源流向双缸。接着将热源与两室的熵变相加，讨论整个过程的方向。

两室的熵差

左室总定容热容量为 $m_L c_V = 16$ J/K，由初态求得 $n_L R = p_i V_i/T_i = 20/3$ J/K。沿先等容调温、再在末温下改变体积的可逆参考路径，分别积分：

$$\begin{aligned}\Delta S_L &= 16\int_{300\,\mathrm{K}}^{540\,\mathrm{K}}\frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{20}{3}\int_{20\,\mathrm{L}}^{15\,\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}V}{V}\\ &= 16\left[\ln\frac{T}{300\,\mathrm{K}}\right]_{300\,\mathrm{K}}^{540\,\mathrm{K}} + \frac{20}{3}\left[\ln\frac{V}{20\,\mathrm{L}}\right]_{20\,\mathrm{L}}^{15\,\mathrm{L}}\\ &= 16\ln 1.8 + \frac{20}{3}\ln 0.75 = 7.4867\,\mathrm{J/K}.\end{aligned}$$

右室 $n_R R = 3n_L R = 20$ J/K，初末同温，沿可逆等温参考路径有

$$\begin{aligned}\Delta S_R &= 20\int_{20\,\mathrm{L}}^{25\,\mathrm{L}}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 20\left[\ln\frac{V}{20\,\mathrm{L}}\right]_{20\,\mathrm{L}}^{25\,\mathrm{L}}\\ &= 20\ln 1.25 = 4.4629\,\mathrm{J/K}.\end{aligned}$$

两式由初末态计算熵差，实际释放过程中各室的温度和压强可随时间改变。

总熵与末态能否达到

热源失去 3840 J，其熵变为 $\Delta S_s = -3840/300 = -12.8$ J/K。全部参与物体的熵变相加为

$$\Delta S_{\text{总}} = 7.4867 + 4.4629 - 12.8 = \boxed{-0.8504\,\mathrm{J/K}}.$$

这个整体与外界绝热、无外界做功，总熵应增加或保持不变。题给端点却要求总熵减少，因此 15 L、25 L 并非这一释放过程能够达到的最终平衡态；3840 J 是这组端点所要求的能量变化。

例 3.8 (两等压两绝热的循环)**.** 理想气体作图 3.26 中的循环：$A \to B$ 高压等压吸热，$B \to C$ 可逆绝热膨胀，$C \to D$ 低压等压放热，$D \to A$ 可逆绝热压缩。$T_B = 400\text{K}$，$T_C = 300\text{K}$，热容恒定。求效率。

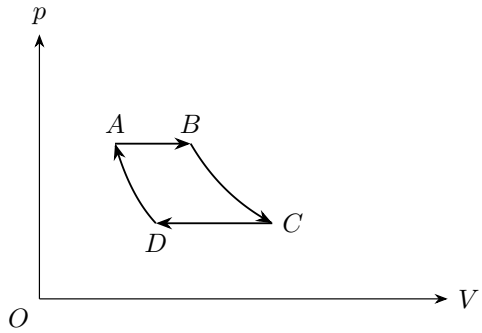


图 3.26: 两等压两绝热的循环：题设

解　各段吸热与放热

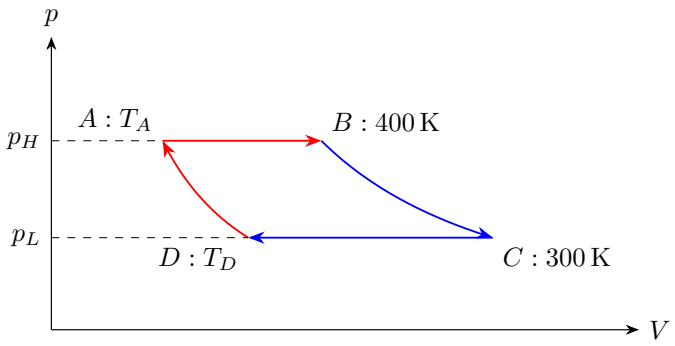
图 3.26 中两条等压线对应两段热交换。AB 等压升温，吸热 $Q_h = nC_p(T_B - T_A)$；CD 等压降温，放热绝对值 $Q_c = nC_p(T_C - T_D)$。另两段可逆绝热，均不交换热量，故效率为 $1 - Q_c/Q_h$。

绝热线的共同温度倍率

记两等压线分别为 p_H, p_L。由 $T^\gamma p^{1-\gamma} =$ 常量，BC 和 DA 跨越同一对压强，因而

$$\frac{T_C}{T_B} = \left(\frac{p_L}{p_H}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{T_D}{T_A}.$$

题给 $T_C/T_B = 300/400 = 3/4$。图 3.27 中这一共同倍率把高压段的两个端点温度分别映到低压段端点。



$$T_C/T_B = T_D/T_A = 3/4$$

图 3.27: 两绝热线给相同温度倍率，分别把高压等压段的两端映到低压段

效率

于是 $T_C = 3T_B/4, T_D = 3T_A/4$，两等压段的温差也成相同比例：

$$T_C - T_D = \frac{3}{4}(T_B - T_A), \qquad \frac{Q_c}{Q_h} = \frac{3}{4}.$$

故

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = \frac{1}{4} = 25\%}.$$

例 3.9 (相似三角循环的效率)**.** 同一种理想气体作两个循环 $A_i \to B_i \to C_i \to A_i$，$i = 1, 2$。其中 $A_i = (V_1, k_i V_1)$、$B_i = (V_2, k_i V_2)$、$C_i = (V_2, k_i V_1)$，$V_2 > V_1$、$k_1 > k_2 > 0$。求两循环效率并比较。见图 3.28，C_V 恒定。

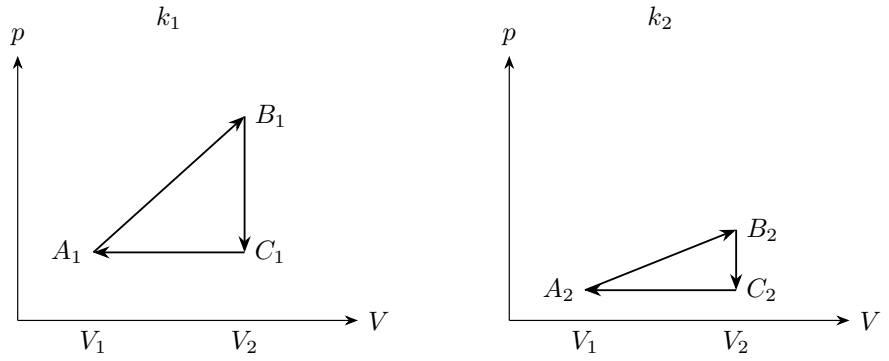


图 3.28: 相同体积区间内的两个三角循环分开绘制，左右使用同一压强尺度

解　哪几段吸热

求效率前先确认哪些边吸热。在斜边 A_iB_i 上，$p = k_iV$，随 V 增加，$pV = k_iV^2$ 增加，故 $\Delta U > 0, W > 0, Q > 0$。在 B_iC_i 上体积不变、压强降低，故放热；在 C_iA_i 上等压压缩且降温，$\Delta U, W$ 均负，也放热。因此吸热量只来自斜边。

三角形面积与净功

图 3.28 的循环为顺时针，净功等于三角形面积。底边长 $V_2 - V_1$，竖直高为 $k_i(V_2 - V_1)$，所以

$$W_i = \frac{1}{2}k_i(V_2 - V_1)^2.$$

图 3.29 将纵轴改为 p/k_i，两个三角形重合，表明净功和吸热量都可能按 k_i 同比变化；相应的吸热量可由斜边过程求出。

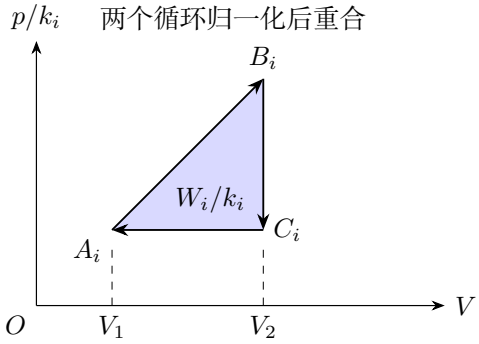


图 3.29: 相似三角循环的效率：解答过程

斜边吸热量

斜边的功与内能差分别为

$$W_{A_iB_i} = k_i \int_{V_1}^{V_2} V \,\mathrm{d}V = k_i \left[\frac{V^2}{2}\right]_{V_1}^{V_2} = \frac{k_i}{2}(V_2^2 - V_1^2), \qquad \Delta U_{A_iB_i} = \frac{C_V}{R}k_i(V_2^2 - V_1^2).$$

因此

$$Q_{hi} = k_i\left(\frac{C_V}{R} + \frac{1}{2}\right)(V_2^2 - V_1^2).$$

两个循环的效率

将 $V_2^2 - V_1^2 = (V_2 - V_1)(V_2 + V_1)$ 约去，得到

$$\boxed{\eta_1 = \eta_2 = \frac{V_2 - V_1}{(2C_V/R + 1)(V_2 + V_1)}}.$$

虽然 $k_1 > k_2$ 使第一个循环每周输出功更大，但它每周吸热量也按同一倍数增加，故效率相等。若 $V_2 \to V_1$，净功相对于吸热量更快趋零，效率趋零；这一极限也与图中逐渐收缩的三角形一致。

3.10　本讲小结

状态方程联系每个平衡态的 p, V, T，装置受力和传热条件确定路径，第一定律联系热量、功和内能变化。等温过程通过吸放热维持温度，可逆绝热过程通过内能与功的转换改变温度；流入气体则以焓携带内能和入口推动功。

循环效率由净功与全部吸热量之比确定。卡诺循环用两个等温过程和两个等熵过程联系热源温度与热量比。熵差可沿可逆路径计算，气体与参与换热的物体合起来的熵变，进一步给出过程发生的方向。

3.11　练习

练习 3.1 (可逆绝热膨胀与功)**.** 1mol 单原子理想气体从 T_0, V_0 可逆绝热膨胀到 $2V_0$，求末温、功及熵变。见图 3.30。

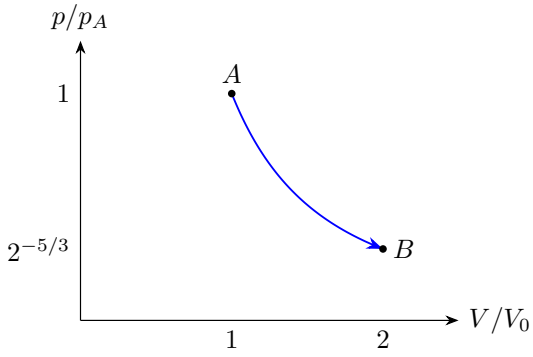


图 3.30: 题设：单原子理想气体沿可逆绝热线膨胀，$p_A = RT_0/V_0$

练习 3.2 (真空容器的绝热充气)**.** 体积 V 的绝热刚性容器初为真空，从恒压恒温气库 p_s, T_s 充入单原子理想气体，直到容器压强为 p_s，随后关阀。忽略入口动能和壁热容，求末温与末气体量。见图 3.31。

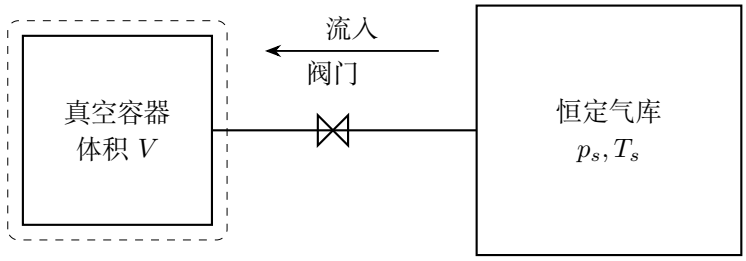


图 3.31: 真空刚性容器通过阀门接收气库气体；停止时公共压强为 p_s

练习 3.3 (卡诺制冷与热泵)**.** 可逆卡诺机在 270K 与 300K 热源间逆向运行，从低温端每周取走 900J，求输入功、排向高温端的热量、制冷系数与供热系数。见图 3.32。

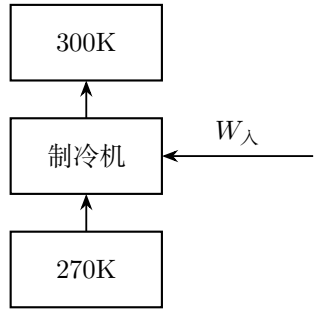


图 3.32: 卡诺制冷与热泵：题设

练习 3.4 (自由膨胀的熵变)**.** 1mol 理想气体在绝热刚性容器内向等体积真空自由膨胀，始末平衡体积比为 2。求 $Q, W, \Delta U, \Delta S$，并说明能否只用该容器自发恢复初态。见图 3.33。

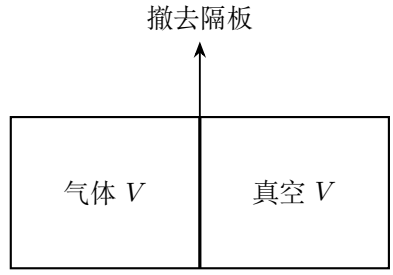


图 3.33: 自由膨胀的熵变：题设

练习解答

练习 3.1

解　绝热膨胀末温

图 3.30 以初压 $p_A = RT_0/V_0$ 归一化，A 点坐标为 $(1,1)$。单原子气体 $\gamma = 5/3$，题给可逆绝热，故 $TV^{\gamma-1}$ 不变。将初、末体积代入，

$$T_f(2V_0)^{2/3} = T_0 V_0^{2/3}, \qquad \boxed{T_f = 2^{-2/3}T_0}.$$

末温降低，对外做功由内能减少提供。图 3.34 的阴影是实际绝热线下的有向面积，可用第一定律直接求出。

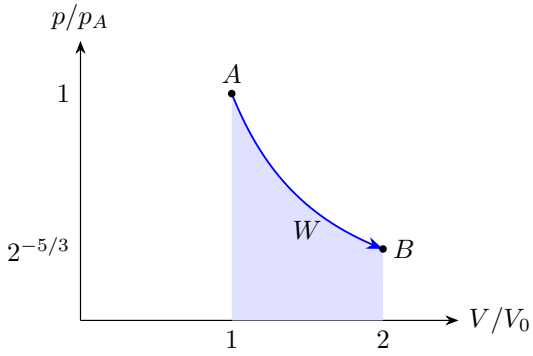


图 3.34: 绝热线下的有向面积为气体所做的正功，由内能减少提供

内能减少与对外功

绝热 $Q = 0$，因此

$$\boxed{W = -\Delta U = \frac{3}{2}R(T_0 - T_f) = \frac{3}{2}RT_0(1 - 2^{-2/3}) > 0}.$$

温度项和体积项的熵差

沿这条可逆路径，温度项与体积项分别积分：

$$\begin{aligned}\Delta S &= \frac{3}{2}R\int_{T_0}^{T_f}\frac{\mathrm{d}T}{T} + R\int_{V_0}^{2V_0}\frac{\mathrm{d}V}{V}\\ &= \frac{3}{2}R\left[\ln\frac{T}{T_0}\right]_{T_0}^{T_f} + R\left[\ln\frac{V}{V_0}\right]_{V_0}^{2V_0}\\ &= \frac{3}{2}R\left(-\frac{2}{3}\ln 2\right) + R\ln 2 = 0.\end{aligned}$$

故 $\boxed{\Delta S = 0}$。降温项与膨胀项恰好相抵，符合可逆绝热过程中熵保持不变的结论。

练习 3.2

解　进入容器的能量

取图 3.31 中刚性容器为固定控制体。容器起初真空，$U_i = 0$；外壁绝热、不动，分别排除热交换和外壁体积功。流入的每摩尔单原子气体仍携带 C_pT_s 的焓，因为入口推动功与分子内能同时进入控制体。

气流推动功与焓

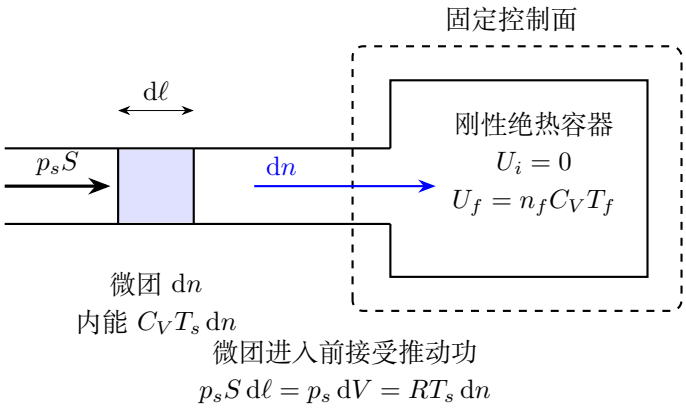


图 3.35: 真空容器的绝热充气：解答过程

图 3.35 的推动力作用于微团后端，位移沿入口方向，故推动功为正。每摩尔流入能量是内能 C_VT_s 加推动功 RT_s，合为 C_pT_s；这份功发生在入口气团的后端，容器外壁保持固定。忽略入口动能、势能，且 T_s 不变，累计进入量从 0 增至 n_f，因此

$$n_fC_VT_f = \int_0^{n_f} C_pT_s\ \mathrm{d}n_{\text{入}} = C_pT_s[n_{\text{入}}]_0^{n_f} = n_fC_pT_s.$$

末温

取 $C_V = 3R/2, C_p = 5R/2$，消去非零的 n_f，得

$$\boxed{T_f = \frac{5}{3}T_s}.$$

末态气体量

关阀时末压等于气库压强，故状态方程又给出

$$\boxed{n_f = \frac{p_sV}{RT_f} = \frac{3p_sV}{5RT_s}}.$$

入口内能与推动功一同被容器接收，解释了末温为气库温度的 5/3；将这一温度与相同末压代入状态方程，就确定实际流入的气体量。

练习 3.3

解　两个热源的熵变化

按图 3.32 的箭头，机器从低温源取热，接受外界功，再向高温源放热。设低温取热 $Q_c = 900\,\mathrm{J}$、高温排热为 Q_h，两者均用正的绝对值表示。机器可逆且只与两恒温源交换热量，因此机器循环熵变为零、两热源总熵变也为零：

$$\frac{Q_h}{300} - \frac{Q_c}{270} = 0, \qquad Q_h = 900\frac{300}{270} = 1000\,\mathrm{J}.$$

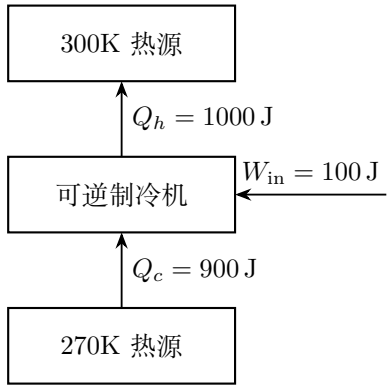


图 3.36: 每周从低温源搬运 900J，加上 100J 输入功，向高温源送出 1000J

一周输入的功

由图 3.36 的能量分配，$Q_h = Q_c + W_{入}$，故

$$\boxed{W_{入} = 100\,\mathrm{J}, \qquad Q_h = 1000\,\mathrm{J}}.$$

制冷与供热系数

制冷目标是取走低温热量，热泵目标是向高温端供热，两个系数分别为

$$\boxed{\varepsilon = \frac{Q_c}{W_{入}} = 9, \qquad \mathrm{COP}_h = \frac{Q_h}{W_{入}} = 10}.$$

两系数相差 1，正对应输入功本身也转入高温端。高温端收到的 1000J 由低温端取来的 900J 和输入的 100J 功组成。

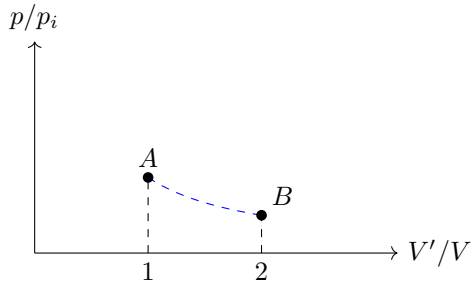
练习 3.4

解　实际过程的热量与功

取整个容器内的气体为研究对象。图 3.33 中外壁刚性、绝热，气体扩散前方是真空，所以既无外部热量输入，也无抵抗外界负载所做的功。因此

$$\boxed{Q=0,\qquad W=0,\qquad \Delta U=0}.$$

理想气体量不变，$\Delta U=C_V(T_f-T_i)$ 给出 $T_f=T_i$。扩散占据的空间增大，气体初末内能相同，因此初末温度相同。



实际：$Q=W=0$

参考路径：$T=T_i$，$\Delta S=R\ln 2$

图 3.37: 实际自由膨胀只给初末平衡态，虚线是计算熵差的可逆参考路径

由可逆参考路径求熵差

熵差只看端点。另选一条连接相同端点的假想可逆等温路径；沿它有 $\mathrm{d}U=0$、$\delta Q_{\mathrm{rev}}=p\,\mathrm{d}\mathcal{V}$，而 1mol 气体满足 $p=RT/\mathcal{V}$。温度为常量，因此

$$\begin{aligned}\Delta S&=\int_V^{2V}\frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T}=R\int_V^{2V}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathcal{V}}\\&=R\left[\ln\frac{\mathcal{V}}{V}\right]_V^{2V}=R(\ln 2-\ln 1)=\boxed{R\ln 2>0}.\end{aligned}$$

图 3.37 显示内能保持不变与熵增加可以同时发生。若容器孤立，要求气体自行退回原半边并恢复初温，就会使整体熵减少 $R\ln 2$，与孤立系统熵增加的方向相反。

借助外界恢复初态

外界借助活塞将气体缓慢等温压回 V 时，对气体做功 $RT\ln 2$，气体向热源放出相同热量。气体熵减少 $R\ln 2$，热源熵增加 $R\ln 2$，共同完成恢复过程。

热学

物理竞赛一轮讲义

第四讲

相变与饱和蒸汽

2026

目录

第四讲　相变与饱和蒸汽 **1**

4.1　物质的相态与相变 1

4.2　潜热、体积功与内能差 2

4.3　冰与水混合后的相态 4

4.4　蒸发、饱和与有限水量 5

4.5　湿度和冷却凝结 7

4.6　沸腾与液柱中的分压 8

4.7　冷热容器中的蒸气重新分配 8

4.8　溢液装置的小位移 9

4.9　绝热喷管中的焓和流速 10

4.10 例题与分析 11

4.11 本讲小结 26

4.12 练习 27

练习解答 28

第四讲　相变与饱和蒸汽

4.1　物质的相态与相变

分子热运动倾向于使物质分散，分子间的吸引作用使它们聚集。改变温度或压强，就改变了这两种作用的相对重要性，同一种物质由此可呈现气、液、固等相态。研究相变时，既要给出温度、压强，也要说明哪些相存在、各有多少。

活塞缸内封有一定量纯物质，将它保持在适合气液共存的温度，从较大体积的气态开始缓慢压缩。起初蒸气压强随压缩上升，达到一定值后开始凝结。在气液共存的阶段，继续压缩使更多蒸气变为液体，温度和压强保持原值。这个压强就是该温度的饱和蒸气压 $p_s(T)$。液体全部形成后，再压缩主要改变液体本身的密度，过程进入单一液相区。

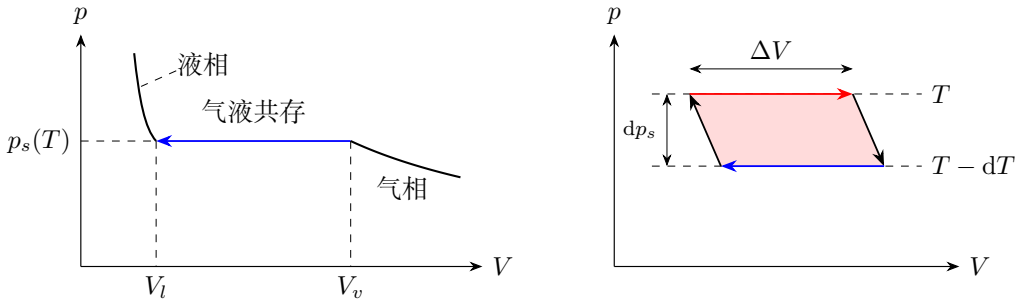


图 4.1: 纯物质的气液共存等温段，以及相邻共存段之间的微小卡诺循环

图 4.1 左图沿箭头压缩，V_v 处刚出现液滴，V_l 处蒸气刚凝结完。气液共存段的水平宽度来自两相摩尔体积的差，水平线的高度由温度决定。

随温度升高，气液共存时两相密度逐渐接近，共存段缩短；在临界点，气液密度差和分界面一起消失。低于临界温度时，饱和蒸气压描述气液共存；高于临界温度时，气体和液体之间连续过渡。气、液、固三相可平衡共存的温度和压强则对应三相点。

4.1.1　加热曲线中的潜热

在给定外压下加热纯物质，单相区的温升需要显热，熔化或汽化则需要潜热。以液体汽化为例，从 T_i 升到该压强下沸点 T_b，再汽化质量 m，吸热为

$$Q = mc_l(T_b - T_i) + mL_v.$$

若继续加热所得蒸气，再加上蒸气升温所需的热量。比潜热 L 以 J/kg 计，摩尔潜热 L_m 以 J/mol 计，二者由 $L_m = \mu L$ 联系。

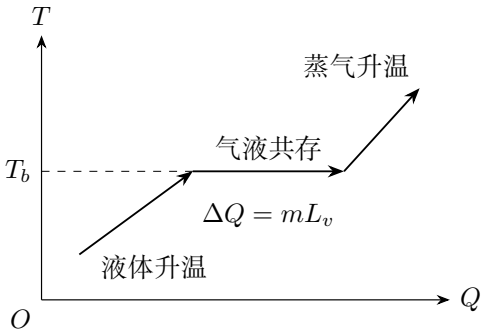


图 4.2: 恒定外压下加热跨越汽化区的分段关系

图 4.2 的横轴是累计输入热量。斜段中的热量提高温度；平台中的热量改变两相比例。进入平台后，若已有热量 $Q_{\text{相变}}$ 用于汽化，汽化质量就是 $Q_{\text{相变}}/L_v$。平台长度由需要汽化的质量决定，全部汽化以后曲线才再次升高。

4.2　潜热、体积功与内能差

恒压汽化时，液体吸收的能量一部分改变分子运动和相互作用能，另一部分推动外界。取 1 mol 物质，气、液摩尔体积分别为 $\bar{V}_v, \bar{V}_l$，第一定律给出

$$L_m = \Delta u + p_s(\bar{V}_v - \bar{V}_l) = \Delta h.$$

因此恒压潜热等于两相摩尔焓之差。蒸气稀薄、可视为理想气体，且液体体积很小时，$p_s\bar{V}_v = RT$，有

$$\boxed{\Delta u_{\text{汽化}} \simeq L_m - RT}.$$

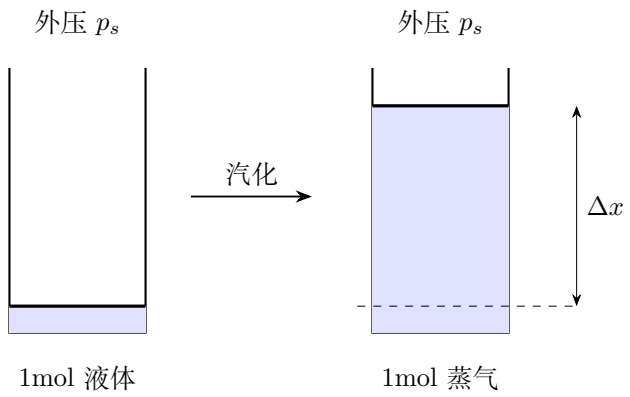


图 4.3: 恒温恒压汽化时活塞向外移动；潜热同时供给内能增加和膨胀功

图 4.3 的着色区域表示物质占据的空间。截面积为 S 的活塞向外移动 Δx，体积增加 $\Delta V = S\Delta x$，所以气体对外做功为 $p_s S\Delta x$，每摩尔做功为 $p_s(\bar{V}_v - \bar{V}_l)$。凝结时活塞内移，外界对系统做压缩功，放出的热量便大于内能的减少量。例 4.1 计算 1 kg 水蒸气凝结时的功和热量。练习 4.3 把恒压装置与固定容积装置并列，比较两种装置的吸热量。

4.2.1 饱和蒸气压为什么随温度升高

在图 4.1 右图，沿温度 T 与 $T - \mathrm{d}T$ 的两条气液共存等温段作一个微小可逆卡诺循环。两条斜边为可逆绝热过程。设高温等温段汽化 $\mathrm{d}n$ 摩尔，则吸热为 $L_m\,\mathrm{d}n$，体积增量为 $(\bar{V}_v - \bar{V}_l)\,\mathrm{d}n$。两条共存线压强相差 $\mathrm{d}p_s$，微小循环面积给出净功

$$\delta W = \mathrm{d}p_s(\bar{V}_v - \bar{V}_l)\,\mathrm{d}n.$$

卡诺效率为 $\mathrm{d}T/T$，所以

$$\frac{\mathrm{d}p_s(\bar{V}_v - \bar{V}_l)\,\mathrm{d}n}{L_m\,\mathrm{d}n} = \frac{\mathrm{d}T}{T}, \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}p_s}{\mathrm{d}T} = \frac{L_m}{T(\bar{V}_v - \bar{V}_l)}}.$$

这就是气液相变的克拉珀龙方程。汽化时 $L_m > 0$、$\bar{V}_v > \bar{V}_l$，饱和压因而随温度上升。

进一步用 $\bar{V}_v \simeq RT/p_s$、$\bar{V}_l \ll \bar{V}_v$，并在所取温区把 L_m 看作常量，将变量分开：

$$\frac{\mathrm{d}p_s}{p_s} = \frac{L_m}{R}\frac{\mathrm{d}T}{T^2}.$$

从 (T_1, p_{s1}) 积分到 (T_2, p_{s2})，

$$\int_{p_{s1}}^{p_{s2}} \frac{\mathrm{d}p_s}{p_s} = \left[\ln \frac{p_s}{p_{s1}}\right]_{p_{s1}}^{p_{s2}} = \ln \frac{p_{s2}}{p_{s1}},$$

$$\ln \frac{p_{s2}}{p_{s1}} = \frac{L_m}{R} \int_{T_1}^{T_2} T^{-2}\,\mathrm{d}T = \frac{L_m}{R} \left[-\frac{1}{T}\right]_{T_1}^{T_2}$$

$$= \frac{L_m}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

这一近似式解释饱和压对温度的敏感变化。题目给出饱和压表时，就用表中数值建立相平衡条件；例 4.5 将饱和压与空气分压相加，求装置达到指定总压时的温度。

4.3　冰与水混合后的相态

在熔点 T_m 附近，热水降温释放的能量先用于使冷冰升到熔点，余量再改变冰水比例。设初有冰 m_i、温度 $T_i < T_m$，水 m_w、温度 $T_w > T_m$，忽略外界传热和量热器热容量。定义

$$E = m_w c_w (T_w - T_m) - m_i c_i (T_m - T_i).$$

第一项为热水降到熔点放出的热量，第二项为冰升到熔点需要的热量。$E > 0$ 时能量有富余，可熔化冰；$E < 0$ 时能量有不足，由一部分水凝固供给。

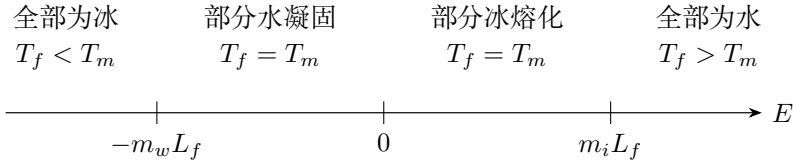


图 4.4: 冰水混合的相态由能量差额所在区间确定

图 4.4 将这份能量沿横轴排列。中间两个区间的末态都是冰水共存，$T_f = T_m$：

$$-m_w L_f \le E < 0: \quad m_{\text{凝固}} = -E/L_f,$$
$$0 \le E \le m_i L_f: \quad m_{\text{熔化}} = E/L_f.$$

若 $E > m_i L_f$，全部冰熔化还余 $E - m_i L_f$，这部分能量使总质量 $m_i + m_w$ 的液水升温：

$$(m_i + m_w) c_w (T_f - T_m) = E - m_i L_f, \quad T_f = T_m + \frac{E - m_i L_f}{(m_i + m_w) c_w}.$$

若 $E < -m_w L_f$，全部水凝固后仍缺能量，最终全部为冰。以熔点的全冰态比较，

$$(m_i + m_w) c_i (T_f - T_m) = E + m_w L_f, \quad T_f = T_m + \frac{E + m_w L_f}{(m_i + m_w) c_i}.$$

两个端点 $E = m_i L_f$ 和 $E = -m_w L_f$ 分别对应最后一份冰熔化、最后一份水凝固，代入两侧表达式都得到 $T_f = T_m$。这样，温度计算与相变量由同一能量关系连续衔接。

4.4 蒸发、饱和与有限水量

液面分子不断逸入气相，蒸气分子也不断回到液体。封闭空间达到饱和时，单位时间蒸发和凝结的物质量相等，宏观水量保持稳定。给定温度下，纯液体与蒸气通过近似平直界面达到相平衡，蒸气分压就是 $p_s(T)$。

设总水量为 n_w，气体空间体积 V，液水体积忽略，水蒸气按理想气体处理。在这个空间维持饱和需要

$$n_s = \frac{p_s(T)V}{RT}.$$

水量足够时，气相取 n_s，剩余部分留在液相；水量较少时，全部成为未饱和蒸气。于是

$$\boxed{n_v = \min\left(n_w, \frac{p_s V}{RT}\right)}, \qquad \boxed{p_v = \min\left(\frac{n_w RT}{V}, p_s\right)}. \tag{4.1}$$

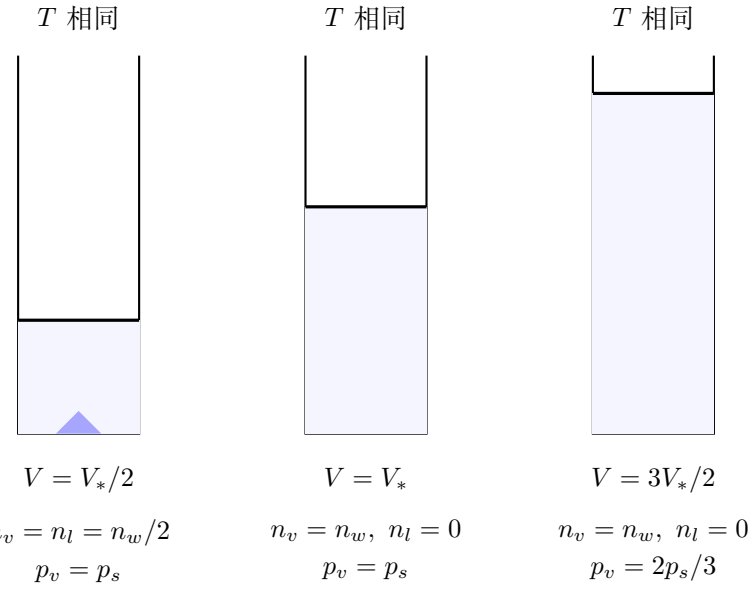


图 4.5: 同温扩大气体空间：液水补充蒸气，液体刚尽后再无分子来源

图 4.5 中，从左图到中图，液水蒸发补充扩大的气体空间，蒸气分压保持 p_s。中图液水刚尽，体积为 $V_* = n_w RT/p_s$；继续扩张到右图，蒸气量固定，分压按 $1/V$ 下降。

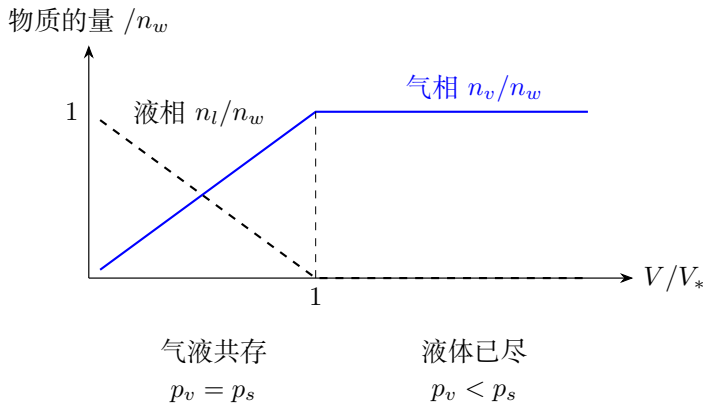


图 4.6: 定温改变气体空间时，气相与液相水量之和保持不变

图 4.6 显示同一过程的水量分配。共存段有 $n_v/n_w = V/V_*$、$n_l/n_w = 1 - V/V_*$；到 V_* 时，气相份额增至 1、液相份额降至 0。每一步都满足 $n_v + n_l = n_w$，把相平衡和总水量联系起来。例 4.2 和练习 4.2 分别用具体数值和一般符号描述这个转折。

4.4.1　加入空气后的总压

不凝结空气量 n_a 固定，其分压为 $p_a = n_a RT/u$，这里 u 表示当前体积。总压由两组分相加：

$$\boxed{p(u) = \begin{cases} n_a RT/u + p_s, & u \le V_*, \\ (n_a + n_w)RT/u, & u \ge V_*. \end{cases}}$$

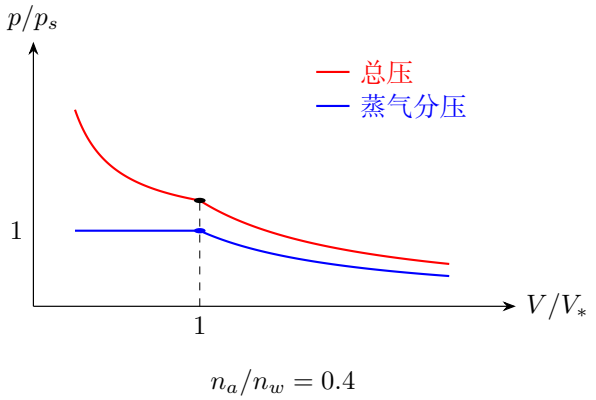


图 4.7: 空气与有限水量在定温下共同膨胀；总压和水蒸气分压在同一体积处切换分支

图 4.7 中，共存段的蒸气分压固定，空气分压随体积增大而减小；全气态段的两种分压都按 $1/u$ 变化。两式在 V_* 处同为 $p_s(1+n_a/n_w)$，压强连续。固定 T, n_a, n_w 分别求导：

$$p'_-(u) = -\frac{n_a RT}{u^2}, \qquad p'_+(u) = -\frac{(n_a+n_w)RT}{u^2}.$$

折点后的斜率更陡，反映液水耗尽后停止向气相补充分子的变化。

4.5 湿度和冷却凝结

相对湿度比较实际水蒸气分压与同温饱和压：$\varphi = p_v/p_s(T)$。例如 $\varphi = 75\%$，就是实际蒸气压为同温饱和压的四分之三。水蒸气在混合气体中的摩尔分数则为 $p_v/p_{总}$，由另一个压强比给出。

刚性容器封闭冷却，开始凝结以前水蒸气量和体积固定，故 $p_v(T) = p_{vi}T/T_i$。降温使 $p_s(T)$ 迅速降低，两线相交时开始凝结：

$$p_s(T_d) = p_{vi}\frac{T_d}{T_i}.$$

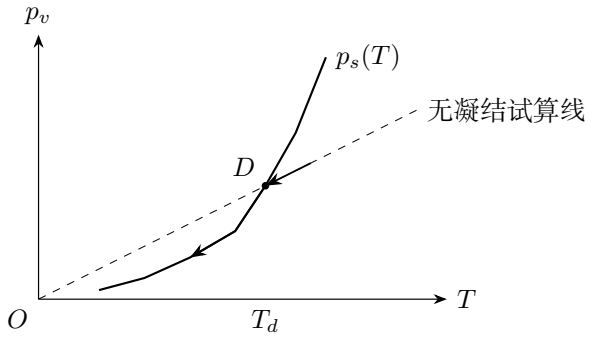


图 4.8: 定容冷却时，试算蒸气分压与饱和压在凝结起点相交

图 4.8 从右向左表示冷却。到 D 点以前沿固定气相水量的直线，到 D 以后沿饱和压曲线，气相量减为 $p_s(T)V/(RT)$，差额凝结。练习 4.1 据此求末态气相水量与凝结量。

在保持总压的冷却过程中，凝结以前各组分比例固定，水蒸气分压也固定；这时露点由 $p_s(T_d) = p_{vi}$ 确定。容器的机械约束决定降温过程中分压怎样改变，露点条件随之确定。

4.6　沸腾与液柱中的分压

蒸发发生在液面，沸腾则在液体内部形成并长大气泡。深度 h 处半径 r 的近似球形气泡，内外压强平衡给出

$$p_s(T) + p_{a,\text{泡}} = p_{\text{表面}} + \rho g h + \frac{2\sigma}{r}.$$

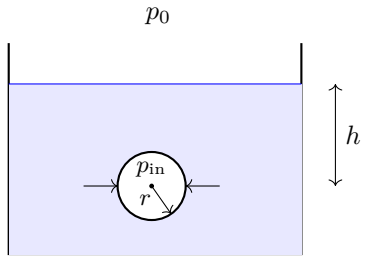


图 4.9: 体内气泡能否增长，取决于蒸气压能否抵住局部外压

图 4.9 把深度和曲率两项分开：深处液压较高，小泡曲率附加压强较大。对足够大的纯蒸气泡，忽略液柱压差和表面张力，就得到 $p_s(T_b) = p_{\text{外}}$。外压较低时，较低温度就能维持气泡长大。

倒扣管和封气管中的静水关系同样使用气体总压。例如内液面比槽面高 z，有 $p_a + p_v = p_0 - \rho g z$。液水尚存、同温平衡时取 $p_v = p_s(T)$，空气守恒给 $p_a V/T =$ 常量。例 4.3 将这一关系与液面位置结合；例 4.4 把同样的分压方法用于恒温水银封气管。

两种互不相溶液体都可向同一气泡供给蒸气时，两种分压分别取各自的饱和压。按例 4.7 给定的液柱和曲率近似，气泡平衡条件为

$$p_{s1}(T) + p_{s2}(T) = p_0.$$

每一种蒸气都贡献一部分压力，因而总压达到 p_0 时的温度低于两种纯液体各自的正常沸点。

4.7　冷热容器中的蒸气重新分配

两个容器由各自恒温装置维持 T_A, T_B，连通后温度保持各自的值，机械平衡使压强相同。忽略连接管容积与高度差，公共压强 p 对应的总气相量为

$$n_g = \frac{p}{R}\left(\frac{V_A}{T_A} + \frac{V_B}{T_B}\right).$$

气相量按 $V_A/T_A : V_B/T_B$ 分配。将全部水量代入这一式求出的压强若超过冷端饱和压，冷端就凝结，公共压强降到 $p_s(T_B)$，热端在相同压强下保持未饱和。

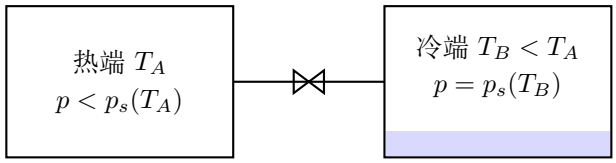


图 4.10: 冷热容器的共同压强及冷端凝结条件

图 4.10 中的冷端起着凝结水蒸气的作用。气相量由公共压强确定，液相量由总水量减去气相量确定。例 4.6 中，第一次连通以后再抽走冷端的全部水，第二次连通的起点是热端实际剩下的水量；按这个水量重新分配两室蒸气。

4.8 溢液装置的小位移

管中气体托住上方液柱。设气柱原长 ℓ、压强 p，液面已到管口，气液界面向上微移 $x > 0$，气体体积增加 Sx，溢液后液柱缩短 x。气体的压力响应由扰动时的传热情况决定。

等温变化的 $pV =$ 常量 给出 $V\,\mathrm{d}p + p\,\mathrm{d}V = 0$；可逆绝热变化的 $pV^\gamma =$ 常量 给出 $V^\gamma\,\mathrm{d}p + \gamma p V^{\gamma-1}\,\mathrm{d}V = 0$。令 $\kappa = 1$ 或 γ，两式可写成

$$\delta p_g = -\frac{\kappa p}{V}\delta V = -\frac{\kappa p}{\ell}x.$$

液柱的压强减少 $\rho g x$，所以净力一阶变化为

$$\delta F = S\left(\rho g - \frac{\kappa p}{\ell}\right)x.$$

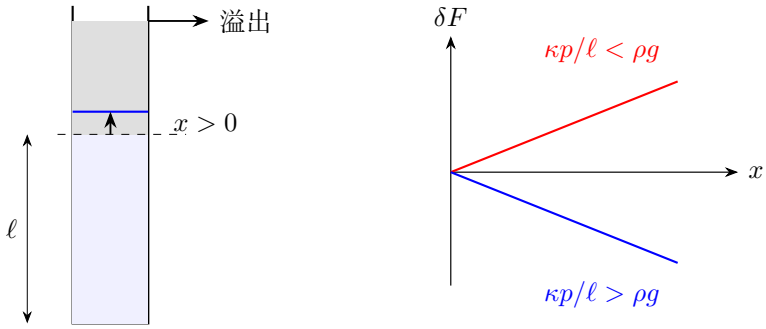


图 4.11: 只考察向上溢液的微小位移；气压下降与负载下降的竞争决定单侧恢复性

图 4.11 比较气体压降和负载压降。若 $\kappa p/\ell > \rho g$，上移后净力向下，具有恢复作用；若小于，净力推动界面继续上升。等号时一阶项为零，需要再求更高阶变化。例 4.8 和练习 4.4 分别计算具体装置与一般条件。

缓慢等温加热的平衡温度还可写成 $T(h) = C(p_0 + \rho g h)(L - h)$。固定总长 L 和气体量，对液柱高 h 用乘积法则求导：

$$T'(h) = C[\rho g(L-h) - (p_0 + \rho g h)], \qquad T''(h) = -2C\rho g.$$

最高温度处 $T' = 0$，即 $\rho g \ell = p$，恰好对应等温恢复力的一阶系数变为零。它把第二讲的溢液温度极值与这里的小位移联系起来。

4.9　绝热喷管中的焓和流速

气体连续通过喷管，入口和出口都有压力功。以单位质量计，将内能与推动功合并为焓 $h = C_p T/\mu$；稳态、绝热、无轴功且高度变化很小时，能量关系为

$$\frac{C_p T_1}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{C_p T_2}{\mu} + \frac{v_2^2}{2}.$$

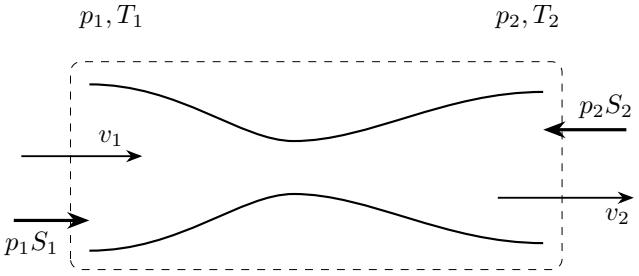


图 4.12: 喷管控制面两端都有压力功；焓的减少可以转化为流体宏观动能

图 4.12 中的入口压力把气体推入，出口压力阻碍流出。气体沿管道降温，流速相应增大，焓差转为宏观动能。若流动可逆，沿流线的熵保持不变，由 $T^{\gamma} p^{1-\gamma} =$ 常量 得到

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/C_p}.$$

入口速度很小时，先由 $v_2^2 = 2C_p(T_1 - T_2)/\mu$，再代入上式：

$$v_2 = \sqrt{\frac{2C_p T_1}{\mu}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/C_p}\right]}.$$

这里 μ 以 kg/mol 计，C_pT/μ 为 J/kg。例 4.9 从给定出口压强求温度和速度，说明入口推动功在气流加速中的作用。

4.10 例题与分析

例 4.1 (水蒸气凝结的内能变化)**.** 1kg 水蒸气在 100°C、约 101kPa 下恒压凝结为水。该温度汽化潜热 $L_m = 40.668\,\mathrm{kJ/mol}$，水的摩尔质量 $0.018\,\mathrm{kg/mol}$。忽略液体体积，蒸气按理想气体，求 $Q, W, \Delta U$。取 $R = 8.31$。见图 4.13。

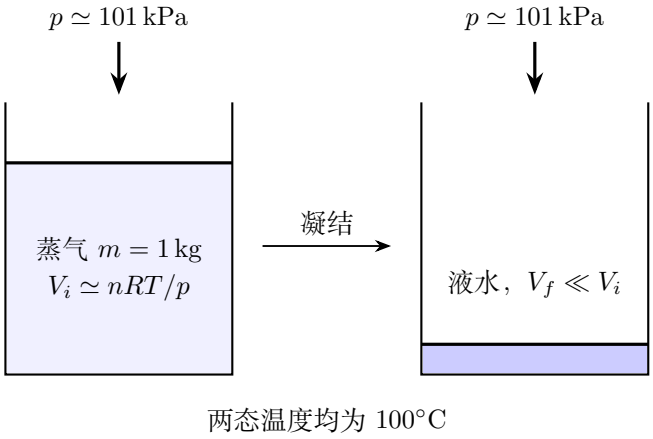


图 4.13: 同一份水在恒压下由蒸气凝结为液水；活塞下移，示意不按体积比例

解　凝结水量与放热

图 4.13 中取 1kg 水蒸气及其凝结液为同一封闭系统。100°C 恒压凝结时，系统放热，故热量为负。摩尔数为 $n = m/\mu = 1/0.018 = 55.5556\,\mathrm{mol}$，于是

$$Q = -nL_m = -55.5556 \times 40668 = -2.259333 \times 10^6\,\mathrm{J}.$$

收缩过程的功

凝结时体积明显减小，气体对外做功也为负。忽略液体末体积，初态水蒸气近似理想气体，有 $pV_i = nRT$，所以 $W = p(V_f - V_i) \simeq -nRT$。图 4.14 中热量与体积功两条箭头应同时计入。

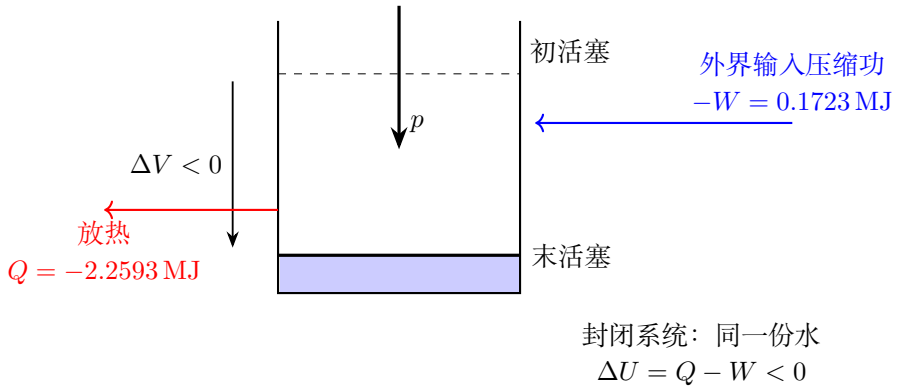


图 4.14: 凝结时活塞向内移动，水蒸气向外放热

取 $T = 373.15\,\mathrm{K}$、$R = 8.31\,\mathrm{J/(mol\,K)}$，

$$W \simeq -55.5556 \times 8.31 \times 373.15 = -1.72271 \times 10^5\,\mathrm{J}.$$

内能变化

第一定律给

$$\boxed{\Delta U = Q - W = -2.08706 \times 10^6\,\mathrm{J} \simeq -2.087\,\mathrm{MJ}}.$$

内能减少量小于放热量的绝对值，因为外界在凝结收缩中又向系统输入约 0.1723MJ 压缩功。恒压潜热对应焓差，扣除凝结过程的体积功后，得到上面的内能差。

例 4.2 (液体刚尽前后的总压)**.** 活塞缸中有 2mol 空气、少量水及水蒸气，温度恒定。体积为 V 时总压 3atm，膨胀到 $2V$ 时水恰好全部汽化，总压 2atm。求温度、初体积，以及体积为 $V/2, 4V$ 时总压。已知水在约 100°C 时饱和压为 1atm，取 1atm 为 1.01×10^5Pa。见图 4.15。

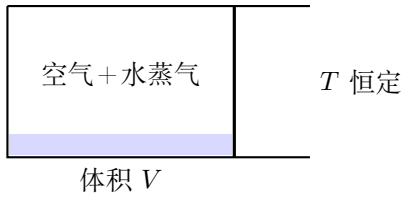


图 4.15: 液体刚尽前后的总压：题设

解　两个体积下的分压

图 4.15 中的两个已知状态分别为液水尚存和液水刚好汽化完，它们的蒸气分压都为同温饱和压。

设初态空气分压为 p_{a0}、饱和蒸气压为 p_s。初体积为 V，总压 3atm，故 $p_{a0}+p_s=3\,\mathrm{atm}$。定温膨胀到 $2V$ 时液体恰好耗尽，蒸气仍恰好饱和，而固定空气量的分压减半；于是

$$\frac{1}{2}p_{a0}+p_s=2\,\mathrm{atm}.$$

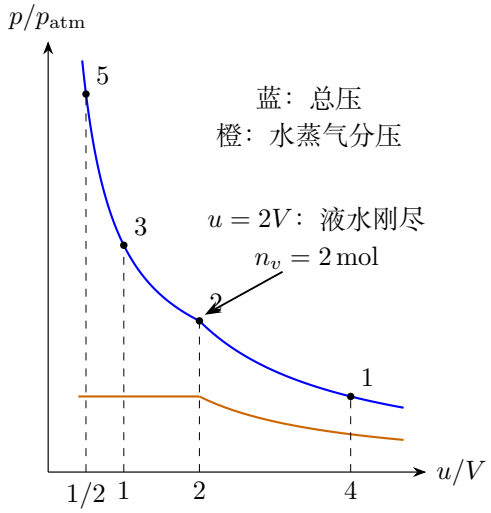
相减得 $p_{a0}=2\,\mathrm{atm}$、$p_s=1\,\mathrm{atm}$。

温度与总水量

水的正常沸点对应 $T\simeq 373.15\,\mathrm{K}$。由题给空气为 2mol，

$$V=\frac{2RT}{2p_{\mathrm{atm}}}=\frac{RT}{p_{\mathrm{atm}}}\simeq 3.07\times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3.$$

初态蒸气量为 1mol，而在 $2V$ 时全部水为 2mol 气态，故初液水为 1mol。这个分配说明液体耗尽的折点为何位于 $2V$。



左段：蒸发补充气相；右段：气相水量固定

图 4.16: 总压曲线在最后一滴液水消失处改变斜率，水蒸气分压随之改变

液体耗尽前后的压强

图 4.16 中体积减到 $V/2$ 时液水仍存在，蒸气分压保持 1atm，空气分压增到 4atm，故 $\boxed{p(V/2) = 5\,\mathrm{atm}}$。体积增到 $4V$ 时，超过液体耗尽点；空气 2mol 与水蒸气 2mol 都固定，所以 $\boxed{p(4V) = 1\,\mathrm{atm}}$。若用 u 表示当前体积，全过程写成

$$\boxed{\frac{p(u)}{p_{\mathrm{atm}}} = \begin{cases} 2V/u + 1, & u \le 2V, \\ 4V/u, & u \ge 2V. \end{cases}}$$

在 $u = 2V$ 处两式均给 2，压强连续；左边通过汽化维持蒸气分压，右边通过固定气体量稀释，斜率因物理条件改变而发生变化。

例 4.3 (倒扣气管加热后的液面)**.** 一端封闭的细管倒扣水槽，管顶高出槽面 $2H$；初温 T_0 时管内空气柱长 H，忽略初态水蒸气。大气压 p_0，$\rho g H < p_0$。加热到正常沸点 T_b，此时 $p_s(T_b) = p_0$。管口浸没足够深，槽面不变，求末态管内水面相对槽面的高度。见图 4.17。

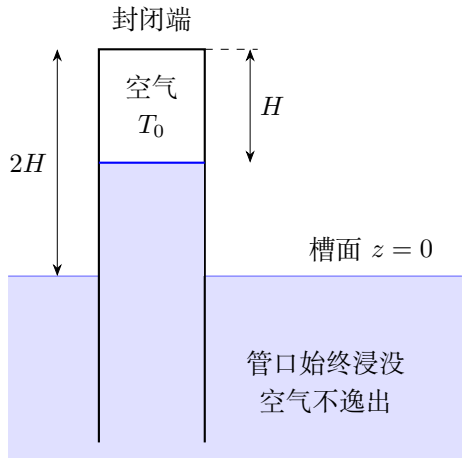


图 4.17: 同一静水槽内，初始空气柱位于槽面上方；管口预留足够浸没深度

解　液面高度与静水压

以槽面为高度零点。图 4.17 初态管顶在 $2H$，空气柱长 H，故内液面位于 $z_i = H$。沿同一静水向上走，初空气压强为 $p_{a0} = p_0 - \rho g H$。末态设气体空间总长为 x，则内液面高度 $z = 2H - x$。气液接触面处水蒸气饱和，且题给 $p_s(T_b) = p_0$。管内气体的总压承受液柱：

$$p_a + p_s = p_0 - \rho g z, \qquad p_a = \rho g (x - 2H).$$

末态液面的方向

空气分压应为正，因此 $x > 2H$，液面已降到槽面下方。这一方向由方程决定，图 4.18 相应标出下凹深度 $h = x - 2H$。

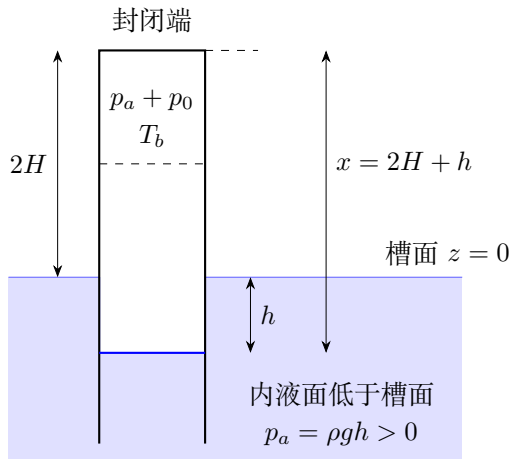


图 4.18: 末态水面与槽面之间的深度决定空气分压，初液面用虚线标出

空气量守恒

空气量固定、管截面不变，故对空气单独使用状态方程：

$$\frac{(p_0 - \rho g H)H}{T_0} = \frac{\rho g (x - 2H)x}{T_b}.$$

整理为

$$x^2 - 2Hx - H\left(\frac{p_0}{\rho g} - H\right)\frac{T_b}{T_0} = 0.$$

气柱长度与液面深度

为看清两根与物理范围，记 $C = H[p_0/(\rho g) - H]T_b/T_0 > 0$，把二次方程配方：

$$x^2 - 2Hx = C, \qquad (x - H)^2 = H^2 + C, \qquad x = H \pm \sqrt{H^2 + C}.$$

由于 $\sqrt{H^2 + C} > H$，负号根小于零；正号根大于 $2H$，符合空气分压为正的条件。再用图中的 $h = x - 2H$，得到

$$\boxed{h = \sqrt{H^2 + H\left(\frac{p_0}{\rho g} - H\right)\frac{T_b}{T_0}} - H}.$$

若以向上高度表示，末态 $z = -h$。图中管口位于末液面以下，题给浸没深度使空气始终封存在管内。加热进入气相的水量由饱和压确定，而上面的状态关系跟踪始终保留的空气。

例 4.4 (水银封气管与蒸气分压)**.** 等截面细管一端封闭，10cm 长水银柱封住空气与饱和水银蒸气。管水平时气柱长 17cm，竖直且开口向下时气柱长 20cm。温度恒定，始终有液态水银，大气压 76cmHg。求该温度下水银饱和蒸气压。见图 4.19。

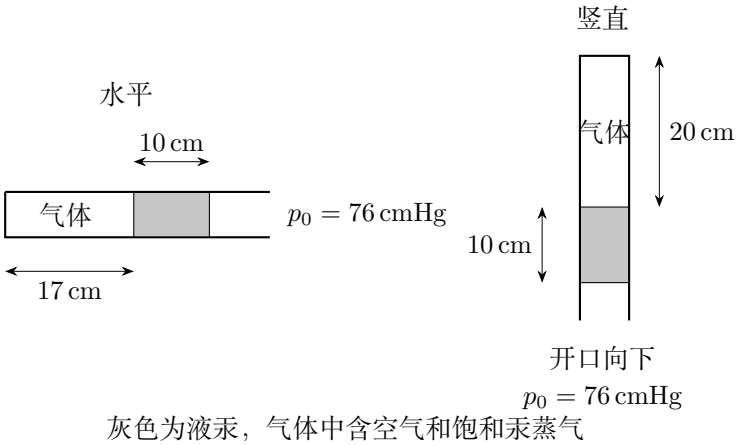


图 4.19: 同一支管的两种姿态；同一比例尺表示气柱和汞柱长度

解　两种姿态的总压

图 4.19 中，竖直后的开口位于汞柱下方，气体接触汞柱的上端，这一高度顺序决定压强差的符号。

先分别求两姿态的气体总压。水平放置时水银柱两端没有高度差，封闭气体总压等于大气压 76cmHg。竖直且开口向下时，气体在水银柱上方、开口在下方，沿汞柱从下往上压强减少 10cmHg，所以气体总压为 66cmHg。

空气分压

温度恒定且始终有液汞，两姿态的水银蒸气分压均为未知常量 p_s。空气的分压分别为 $76 - p_s$、$66 - p_s$，它们分别进入空气的等温状态关系。图 4.20 中，水平汞柱没有高度差，竖直汞柱的上端总压比下端开口压强低 10cmHg；两姿态均保留同一饱和蒸气分压。

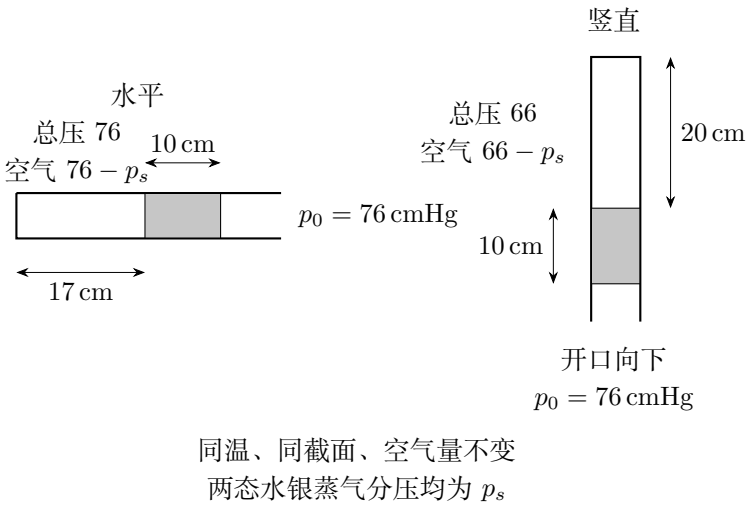


图 4.20: 分别从开口沿汞柱求总压，再扣除同一蒸气分压

由长度变化求饱和压

等截面意味着空气与蒸气共同占据的体积正比于气柱长，空气自身的量不变，因此

$$(76-p_s)\times 17 = (66-p_s)\times 20.$$

解得 $3p_s = 28$，即

$$\boxed{p_s = \frac{28}{3}\,\mathrm{cmHg}}.$$

相应的空气分压为：水平为 200/3cmHg，竖直为 170/3cmHg，均为正，且二者与 17cm、20cm 相乘相等。蒸气量则随气相体积增大而增加，来自液汞的蒸发。液汞蒸发补充扩大的气体空间，使两种姿态的蒸气分压维持同值。

例 4.5 (含空气时的压力阈值)**.** 刚性容器内有液水和水蒸气。初温 10°C, 封入空气后总压 101 kPa。缓慢均匀加热, 液水始终足量, 气体空间体积视为恒定。总压达到 $P_* = 200$ kPa 时调压阀开启，此后继续加热，阀门排出混合气体并维持这一总压。给定 $p_s(10) = 1.2$、$p_s(80) = 47.4$、$p_s(90) = 70.1$、$p_s(100) = 101$、$p_s(110) = 143$、$p_s(120) = 200$，单位 kPa。估计首次达到阈值的温度，并解释随后排出空气时温度如何变化。见图 4.21。

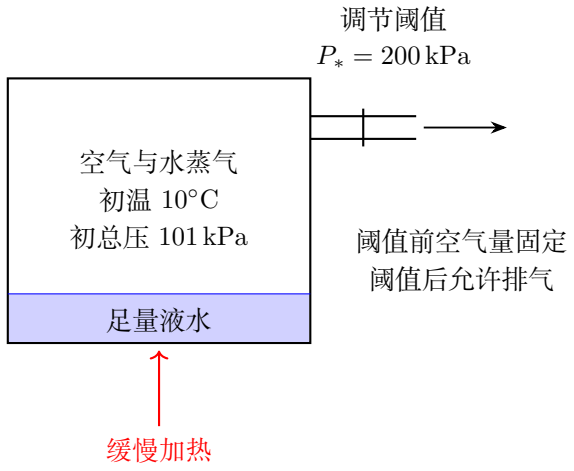


图 4.21: 密闭刚性容器内液水持续供给饱和蒸气，达到阈值后调节阀才开启

解　阀门开启前的空气分压

图 4.21 中阀门开启前容器密闭，空气量固定；液水足量使水蒸气沿给定饱和压曲线变化。

最初总压 101kPa 包含空气与水蒸气，故空气分压为 $p_{a0} = 101 - 1.2 = 99.8\,\mathrm{kPa}$。在首次达到阈值前，容器密闭、刚性，空气量不变，空气分压按绝对温度增加：

$$p_a(t) = 99.8\frac{t + 273.15}{283.15}\,\mathrm{kPa}.$$

水始终足量，所以蒸气分压取给定的 $p_s(t)$，达到阈值的条件是 $p_a(t) + p_s(t) = 200\,\mathrm{kPa}$。

达到总压 200 kPa 的温区

在 90°C 时，总压约为 $128.0 + 70.1 = 198.1\,\mathrm{kPa}$，尚略低于阈值；100°C 时约 232.5kPa，已经超过。因此首次达到阈值在 90 至 100°C 之间且靠近 90°C。

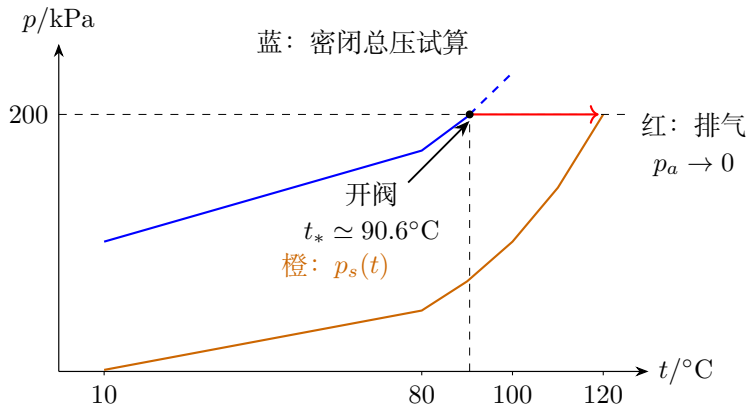


图 4.22: 密闭总压先达到阈值；排气阶段沿等总压线升温，水蒸气分压逐渐占满总压

饱和压插值

在该区间把表中饱和压作线性插值，斜率为 $(101-70.1)/(100-90) = 3.09\,\mathrm{kPa/°C}$，所以 $p_s(t) \simeq 70.1 + 3.09(t-90)$。令 $\delta = t - 90$ 表示比 90°C 高出的摄氏温度数值，则绝对温度为 $363.15+\delta$，阈值方程变为

$$99.8\frac{363.15+\delta}{283.15} + 70.1 + 3.09\delta = 200.$$

分别合并常数项与一次项，得到

$$\left(\frac{99.8}{283.15} + 3.09\right)\delta = 200 - 70.1 - \frac{99.8\times 363.15}{283.15}.$$

于是 $\delta = 1.90293/3.44246 \simeq 0.5528$，再加回 90°C，得

$$\boxed{t_* \simeq 90.6\text{°C}}.$$

用表中数据作线性插值，由此得到开阀温度。图 4.22 中蓝色总压曲线先达到 200kPa，纯蒸气曲线到 120°C 附近才达到同一高度。

排气后的升温

阀门把总压维持在 200 kPa。排出的混合气体逐渐带走空气，p_a 随之下降。液水尚存时，饱和蒸气压 $p_s = 200\,\mathrm{kPa} - p_a$ 逐渐上升；当 p_a 趋近于零，液水温度趋近于 200 kPa 下的沸点，约 120°C。

例 4.6（冷热两容器与二次连通）. 连通管容积忽略，两个刚性容器体积均 821L，A 保持 57°C、B 保持 27°C，按 330K 与 300K 计算。两者最初仅有各自的饱和水蒸气、无液水，饱和压分别为 0.1708atm、0.0352atm。先连通至平衡，求凝结量；再关阀，把 B 中所有水（含凝结液）抽走至真空，然后重新连通，求最后压强及是否仍有凝结。取 $R = 0.0821\,\mathrm{L\,atm/(mol\,K)}$。见图 4.23。

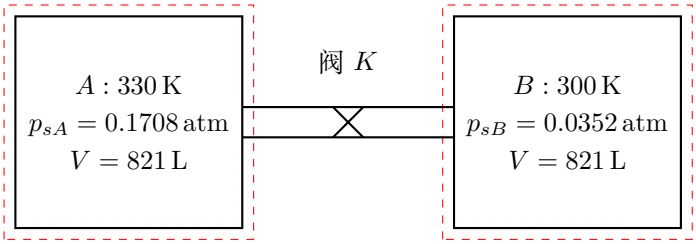


图 4.23: 两只等容刚性容器分别恒温，初态均只有饱和蒸气；阀门控制连通

解　初始两室水量

图 4.23 中两个恒温装置分别维持 330 K 和 300 K。连通后的公共压强由这两个温度下的气体量共同确定。利用 $V/R = 821/0.0821 = 10000\,\mathrm{mol\,K/atm}$，初态蒸气量为

$$n_{Ai} = \frac{0.1708 \times 10000}{330} = 5.17576\,\mathrm{mol}, \quad n_{Bi} = \frac{0.0352 \times 10000}{300} = 1.17333\,\mathrm{mol}.$$

冷端是否出现液水

若全部水保持气态，共同压强试算为 $p^* = (n_{Ai} + n_{Bi})/[10000(1/330 + 1/300)] \simeq 0.09977\,\mathrm{atm}$，高于冷端饱和压 0.0352atm，故冷端 B 必有凝结。

第一次连通的气液分配

第一次平衡压强因此为 $p_1 = 0.0352\,\mathrm{atm}$。气相量分别为 $n_{A1} = 1.06667\,\mathrm{mol}$、$n_{B1} = 1.17333\,\mathrm{mol}$，凝结量为

$$\boxed{n_{\text{凝}} = n_{Ai} + n_{Bi} - n_{A1} - n_{B1} = 4.10909\,\mathrm{mol}},$$

约 73.96g。图 4.24 第一行显示冷端液水保留、热端蒸气不饱和；沿箭头进入下一行时，关闭阀门才把保留的 A 与待抽空的 B 分开。

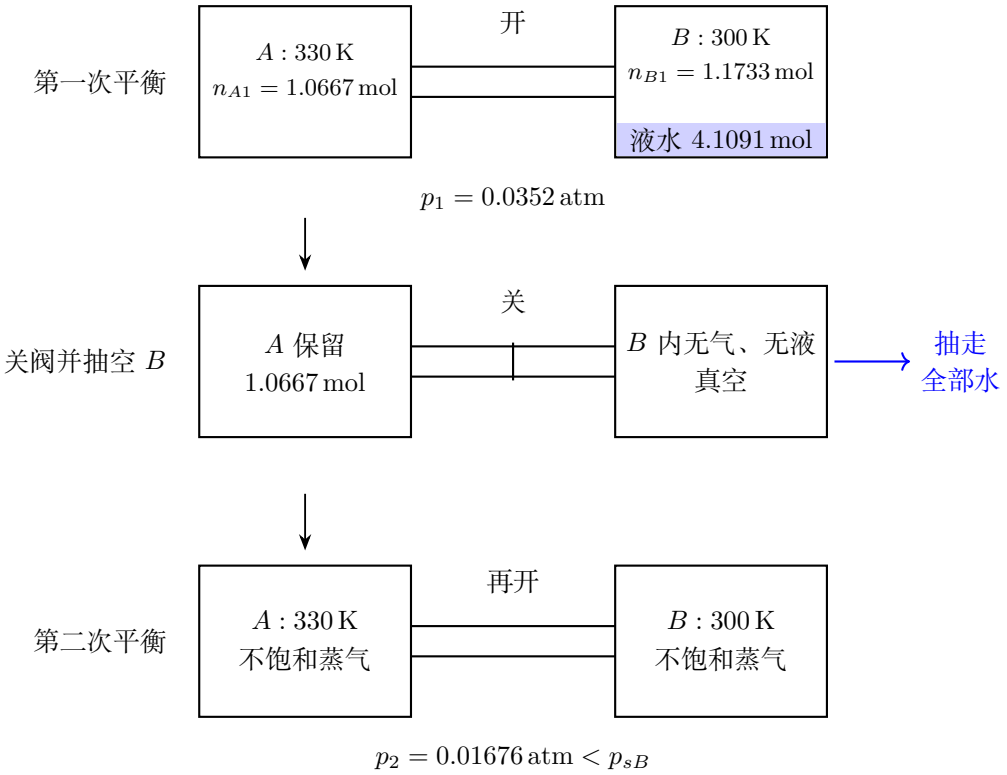


图 4.24: 逐次操作后的水量分配；第二次连通只使用抽空后保留下来的水量

抽走冷端水后的第二次连通

关闭阀门并抽走 B 中全部水后，系统只保留 A 中的 1.06667mol 水蒸气。这份气体量由第一次连通后的 A 室状态确定。第二次开阀，先假定无凝结，按总水量守恒求公共压强：

$$n_{A1}=\frac{p_2V}{R}\left(\frac{1}{330}+\frac{1}{300}\right),$$

$$\boxed{p_2=0.0352\frac{300}{330+300}=0.0167619\,\text{atm}}.$$

该值低于冷端 0.0352atm，也低于热端 0.1708atm，两端均不饱和，假设成立，故 无新凝结。两端都保持气态，第二次分配的总水量就是抽空操作后保留下来的 1.06667 mol。

例 4.7（互不相溶液体的界面沸腾）. 两种互不相溶液体分层，缓慢均匀加热。忽略液柱和气泡曲率压差，两种液体在界面均可供给蒸气。解释为何界面处可能先出现持续长大的气泡，并写出平衡温度的条件。两种液体的饱和压为 $p_{s1}(T), p_{s2}(T)$，外压 p_0。见图 4.25。

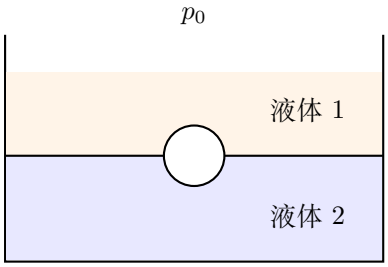


图 4.25: 互不相溶液体的界面沸腾：题设

解　气泡中的两种蒸气

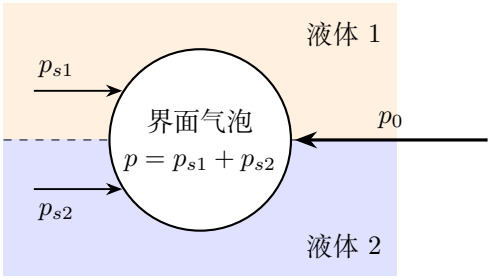
图 4.25 中的气泡位于两种液体接触的界面，分别接受两边蒸发的分子。

界面处的气泡可同时与两种互不相溶液体交换分子。两种液体都足量、且各自蒸发凝结达到平衡时，气泡内两组分的分压分别为 $p_{s1}(T)$、$p_{s2}(T)$；互不相溶使每种液体可近似保持自身纯液体的饱和压关系。

总分压与泡外压强

图 4.26 用两条供给箭头表示两种蒸气进入同一气泡，总蒸气压为两分压之和。忽略液柱与曲率压差，气泡能够持续长大的临界条件为

$$\boxed{p_{s1}(T) + p_{s2}(T) = p_0}.$$



临界：$p_{s1}(T) + p_{s2}(T) = p_0$

图 4.26: 界面气泡与两种液体接触，两种蒸气共同承担泡内压强

界面处沸腾的温度

在这一温度，两分压都为正且各自小于 p_0。若两饱和压均随温度单调增大，该温度便低于两种纯液体各自满足 $p_{si}(T)=p_0$ 的正常沸点。界面远处若只能由一种液体持续供给蒸气，要单靠该种蒸气克服外压，通常需要更高温度，所以界面处可能先沸腾。

题设的界面同时供给两种蒸气，使它们共同承担泡内压强，这就是较低温度形成并维持气泡的原因。

例 4.8 (管口水银柱的小位移稳定性)**.** 开口向上的等截面管下端封闭，气柱长 30cm，其上水银柱高 60cm，水银上表面恰到管口。外压 75cmHg，气体在小位移过程中保持等温。若气体使水银界面向上微移 $x>0$，水银溢出，分析是否有恢复作用；再说明向下微移时的区别。见图 4.27。

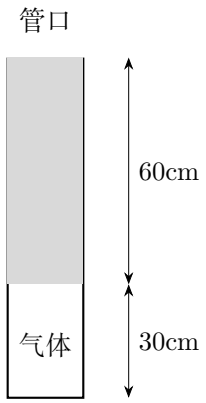


图 4.27: 管口水银柱的小位移稳定性：题设

解　初态气压

图 4.27 中初态气体托住 60cm 水银柱，故气压为 $p_i=75+60=135\,\mathrm{cmHg}$。规定气液界面向上位移为 $x>0$，下式以 cm 表示长度、cmHg 表示压强。

界面上移后的两种压强

图 4.28 中管口固定，向上移动会使水银溢出，故气柱长由 30 变成 $30+x$，剩余汞柱高由 60 变成 $60-x$。等温时气体压强与负载要求的压强分别为

$$p_g(x)=\frac{135\times 30}{30+x},\qquad p_\ell(x)=75+(60-x)=135-x.$$

两者相减才决定界面的净推力方向。

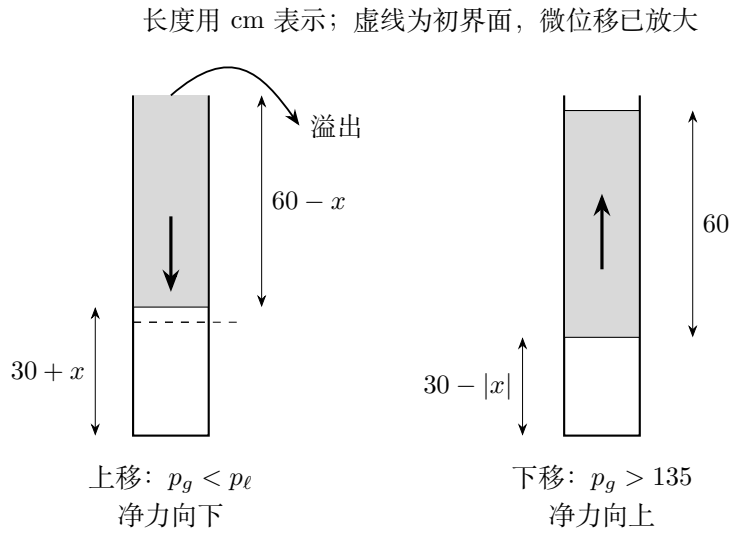


图 4.28: 分别从初态施加向上或向下的微扰；仅向上分支有汞溢出

一阶恢复力

求气压导数时，原状态的 135×30 为常量，只有分母随 x 改变。用链式法则，

$$p_g'(x) = 135\times 30\,[-(30+x)^{-2}]\frac{\mathrm{d}(30+x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{135\times 30}{(30+x)^2}.$$

因此 $p_g'(0) = -135/30 = -4.5$；负载斜率为 $p_\ell'(x) = -1$。对小 x 保留一阶项，

$$p_g - p_\ell \simeq 135\left(1-\frac{x}{30}\right) - 135 + x = -3.5x < 0.$$

向上偏离后气体压降比水银负载压降更大，净力向下，因此具有恢复趋势。

界面下移时的液柱

再单独考虑初态向下微移。这时水银不溢出，整段汞柱长度仍为 60cm，上表面也随之下降，所以负载压强仍为 135cmHg；气体受压使压强升高，净力向上，也有恢复趋势。

两种初始偏移都引起反向净力。上移伴随汞的流失，回落时按剩余汞量重新确定液柱高度；下移时全部汞留在管内，上下两液面共同下降。这里的恢复力由两种不同的几何过程产生。

例 4.9 (绝热喷管的出口速度)**.** 大容器内理想气体入口温度 T_1、压强 p_1、速度可忽略，经绝热无摩擦喷管稳态流出。给定可实现的等熵出口压强 $p_2 < p_1$，气体摩尔质量 μ、摩尔定容热容 C_V 为常量。忽略势能变化和轴功，求出口温度与速率。见图 4.29。

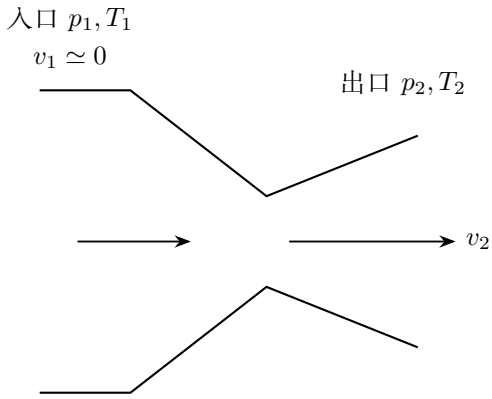


图 4.29: 绝热喷管的出口速度：题设

解　入口与出口的能量

取入口到出口之间的喷管为固定稳态控制体。图 4.29 中的管壁不移动，气体却持续流入流出，入口和出口压力功与气体内能合并为焓，随质量流一起通过两个截面。

等熵出口温度

气体无摩擦且绝热，沿流线可用等熵状态关系，$C_p = C_V + R$，故

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/C_p}.$$

因此 $\boxed{T_2 = T_1(p_2/p_1)^{R/(C_V+R)}}$。出口低压对应降温。

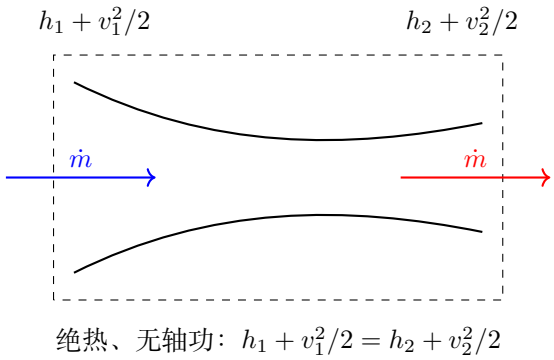


图 4.30: 稳态控制体的焓流与动能流在入口、出口处同时计入

焓差转为动能

图 4.30 中 $\dot{m}$ 是质量流率，$h_i = C_pT_i/\mu$ 是单位质量的焓，两端焓流与动能流均按同一质量流率计入。除以 $\dot{m}$ 后，稳态能量式为

$$\frac{C_pT_1}{\mu} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{C_pT_2}{\mu} + \frac{v_2^2}{2}.$$

忽略 v_1，代入温度比得

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2(C_V + R)T_1}{\mu}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{R/(C_V+R)}\right]}}.$$

降压与加速

摩尔质量 μ 以 kg/mol 计，C_pT/μ 就是单位质量焓，单位为 J/kg。$p_2 \to p_1$ 时速度趋零；压强下降越多，焓转化为动能越多。较低出口压强对应较低出口温度，入口焓中更多的能量转为气体流动的动能。

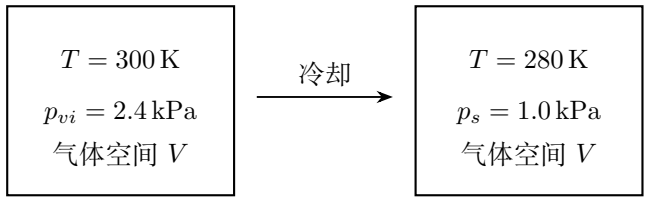
4.11　本讲小结

相变过程同时涉及能量变化和物质在两相间的分配。恒压潜热为焓差，扣除体积功才得到内能差；有限水量的气液共存由饱和压和总水量共同决定。含空气时，空气量守恒确定空气分压，相平衡确定蒸气分压，静水或活塞受力使用两者相加的总压。

冷却、膨胀和容器连通改变气相容量，液体出现或耗尽的时刻使过程关系随之改变。把每一步的相态、水量和温度放在同一物理图景中，便能连贯地求出压强、热量和相变量。

4.12 练习

练习 4.1 (相对湿度与开始凝结)**.** 刚性容器内空气及水蒸气初温 300K，水蒸气分压 2.4kPa，$p_s(300\,\mathrm{K}) = 3.2\mathrm{kPa}$。冷却到 280K，已知 $p_s(280\,\mathrm{K}) = 1.0\mathrm{kPa}$，体积 V 固定。求初相对湿度、末态水蒸气物质的量及凝结量。见图 4.31，水蒸气按理想气体。



初温饱和压 $p_s(300\,\mathrm{K}) = 3.2\,\mathrm{kPa}$

图 4.31: 同一密闭刚性容器由初温冷却到末温；先判断是否出现液相

练习 4.2 (定温蒸发到液体刚尽)**.** 定温 T 的缸中初有 n_a mol 不凝结空气与总计 n_w mol 水，水蒸气饱和压为 p_s。液体体积忽略，活塞缓慢膨胀。求液体刚好全汽化的体积 V_* 和任意体积 u 下总压。见图 4.32。

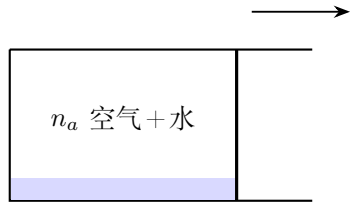


图 4.32: 定温蒸发到液体刚尽：题设

练习 4.3 (汽化潜热与内能差)**.** $n = 1\,\mathrm{mol}$ 液体在温度 T、外压 $p_s(T)$ 下完全汽化，摩尔汽化潜热为 L_m。求这段恒压过程的对外功和内能增量。
另有容积为 V_c 的密闭刚性容器，装有同样物质 n 摩尔，只有器壁传热。加热前后温度分别为 T_i, T_f，两态均为气液共存。已知这两个温度的饱和蒸气压 $p_s(T_i), p_s(T_f)$ 和摩尔汽化潜热 $L_m(T_i), L_m(T_f)$，液体的摩尔热容 C_l 视为常量。求该容器内物质吸收的热量。两种装置中蒸气均视为理想气体，液体体积可忽略。见图 4.33。

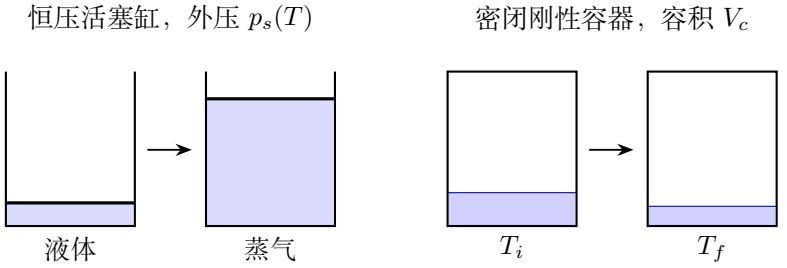


图 4.33: 同种物质在恒压活塞缸与定容刚性容器中的两组初末态

练习 4.4 (一般溢液平衡的稳定条件)**.** 开口向上细管中气柱长 ℓ，上方液柱恰到管口，液体密度 ρ，气体平衡压强 p。向上微移 x 后液体溢出，气体压力响应为 $\delta p_g = -\kappa p x/\ell$，其中等温 $\kappa = 1$，可逆绝热 $\kappa = \gamma$。求向上扰动具有恢复性的条件。见图 4.34。

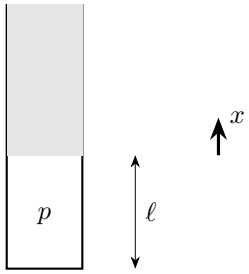


图 4.34: 一般溢液平衡的稳定条件：题设

练习解答

练习 4.1

解　初相对湿度

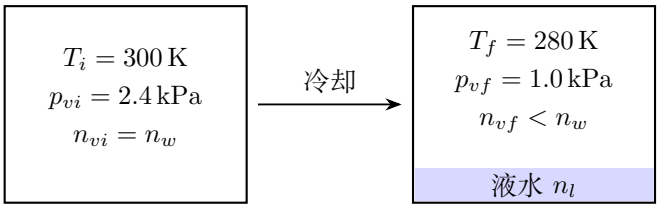
图 4.31 的初态只有气相水，体积固定，冷却过程中出现的液水来自这份蒸气。

初相对湿度比较的是蒸气分压与同温饱和压，故

$$\boxed{\varphi_i = \frac{2.4}{3.2} = 75\%}.$$

冷却后的凝结

冷却初期，气相水量固定，分压随绝对温度按比例下降。将这一关系延伸到 280 K，得到 $p_v^* = 2.4 \times 280/300 = 2.24\,\mathrm{kPa}$，高于该温度的饱和压 1.0 kPa。因此降温途中会达到饱和，再冷却便有一部分水凝结。图 4.35 的末态出现液水，水蒸气分压等于 280 K 时的饱和压 1.0 kPa。



水的总量不变：$n_{vi} = n_{vf} + n_l$

图 4.35: 定容冷却后的气液分配；液体体积忽略，容器气体空间相同

末态气相水量与凝结量

用 SI 单位分别求初、末气相水量，

$$n_{vi} = \frac{2400V}{R \times 300}, \qquad \boxed{n_{vf} = \frac{1000V}{R \times 280}}.$$

水的总量守恒，故

$$\boxed{n_{凝} = n_{vi} - n_{vf} = \frac{2400V}{R \times 300} - \frac{1000V}{R \times 280} > 0}.$$

初末水量分别按各自温度计算。将它们相除，还可得到与容积无关的凝结比例：

$$\frac{n_{vf}}{n_{vi}} = \frac{1000/280}{2400/300} = \frac{25}{56}, \qquad \frac{n_{凝}}{n_{vi}} = \frac{31}{56} \approx 55.4\%.$$

约 55.4

练习 4.2

解　蒸发补充气体空间

图 4.32 中的空气量始终固定为 n_a，水的总量也固定为 n_w，气相水量随液体蒸发而增加。液水尚存时，蒸发补充扩大的气体空间，水蒸气分压保持 p_s，气相水量为 $n_v = p_s u/(RT)$。

液体刚尽的体积

在液体恰好耗尽的临界体积 V_*，全部水都在气相且刚好饱和，所以

$$p_s V_* = n_w RT, \qquad \boxed{V_* = \frac{n_w RT}{p_s}}.$$

图 4.36 中的折点对应这一实际事件，它是气相水量达到总水量的时刻。

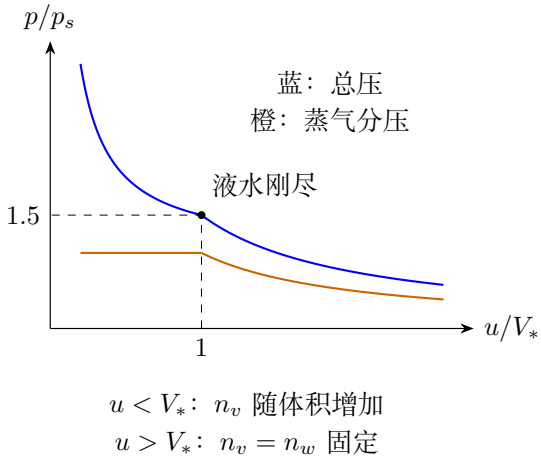


图 4.36: 总压在临界体积连续，斜率改变；图取 $n_a/n_w = 1/2$

两段总压

空气全程占据体积 u，分压为 $n_a RT/u$。因此

$$\boxed{p(u) = \begin{cases} n_a RT/u + p_s, & u \le V_*, \\ (n_a + n_w)RT/u, & u \ge V_*. \end{cases}}$$

在第一段，液体剩余量为 $n_w - p_s u/(RT) \ge 0$；在第二段，蒸气分压 $n_w RT/u \le p_s$，均与相态假设相容。代入 $u = V_*$，两式同为 $p_s(1 + n_a/n_w)$，所以压强连续。图取 $n_a/n_w = 1/2$，折点总压为 $1.5p_s$。折点两侧的斜率不同，来自第一段水量向气相转移、第二段所有气体量均固定；这正是饱和分支与不饱和分支的区别。

练习 4.3

解　恒压汽化的功

取题给 $n = 1\,\mathrm{mol}$ 的物质为封闭系统，并在中间推导中保留带单位的 n。图 4.33 中活塞从液态端点移动到蒸气端点；摩尔体积是 $\bar{V}$，系统总体积则为 $V = n\bar{V}$，两者由 $V = n\bar{V}$ 联系。理想蒸气有 $V_v = nRT/p_s$，因而

$$\boxed{W = p_s(V_v - V_l) = np_s(\bar{V}_v - \bar{V}_l) \simeq nRT}.$$

图 4.37 的阴影面积给出汽化的体积功，液体端点的微小体积在图中放大表示。

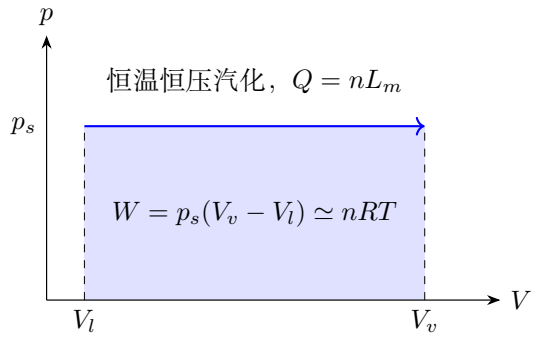


图 4.37: 恒压汽化路径下的面积表示气体推动活塞的功

潜热和内能差

恒压吸热的总量为 $Q = nL_m$，由第一定律得到

$$\boxed{\Delta U = Q - W \simeq n(L_m - RT)}.$$

其中 L_m 与 RT 的单位均为 J/mol，乘 n 后得到以 J 为单位的能量。

定容装置中的两态蒸气量

图 4.38 中的刚性容器在加热前后体积相同。两态均有液体和蒸气共存，所以压强分别为 $p_s(T_i)$ 和 $p_s(T_f)$。液体体积很小，蒸气在两态都占据约 V_c 的空间。对蒸气使用状态方程，

$$n_{v,i} = \frac{p_s(T_i)V_c}{RT_i}, \qquad n_{v,f} = \frac{p_s(T_f)V_c}{RT_f}.$$

其余物质在液相，物质的量分别为 $n - n_{v,i}$ 和 $n - n_{v,f}$。

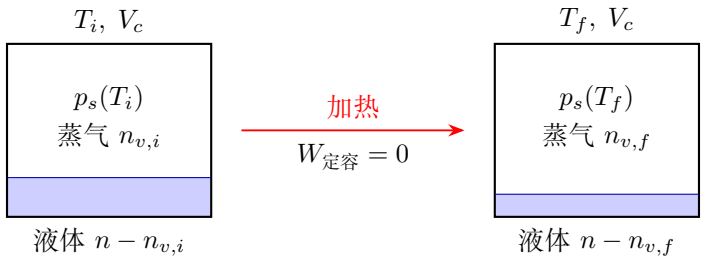


图 4.38: 刚性容器的初末容积相同，气液比例由各态温度与饱和蒸气压决定

用初末两态的内能求热量

记液体和蒸气的摩尔内能为 $u_l(T)$、$u_v(T)$。在任一端点 $j=i,f$，把两相的内能相加，

$$\begin{aligned} U_j &= (n-n_{v,j})u_l(T_j)+n_{v,j}u_v(T_j) \\ &= nu_l(T_j)+n_{v,j}\big[u_v(T_j)-u_l(T_j)\big]. \end{aligned}$$

在温度 T_j 下，摩尔汽化潜热包含体积功，因而 $u_v(T_j)-u_l(T_j)\simeq L_m(T_j)-RT_j$。液体体积忽略时，摩尔内能随温度的增量可用 $C_l\,\mathrm{d}T$ 计算，

$$u_l(T_f)-u_l(T_i)\simeq\int_{T_i}^{T_f}C_l\,\mathrm{d}T=C_l[T]_{T_i}^{T_f}=C_l(T_f-T_i).$$

刚性容器的器壁固定，外功为零，所以

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{\text{定容}}=U_f-U_i\simeq{}& nC_l(T_f-T_i) \\ &+n_{v,f}[L_m(T_f)-RT_f] \\ &-n_{v,i}[L_m(T_i)-RT_i]. \end{aligned}}$$

第一项相当于把全部物质按液态计算的升温内能，再用后两项计入初末两态已有蒸气的内能。

练习 4.4

解　上移与溢液

初平衡时，气压等于外压与液柱压强之和。按图 4.34 的方向令界面向上微移 $x>0$；管口已满，新增气体体积为 Sx，相同体积的液体从管口溢出，所以负载液柱缩短 x。

气压和液柱负载的变化

气体自身的响应由题给条件确定：$\delta p_g = -\kappa p x/\ell$；液柱负载的响应则为 $\delta p_\ell = -\rho g x$。图 4.39 中两条线的斜率给出这两个压降，差值确定净力。

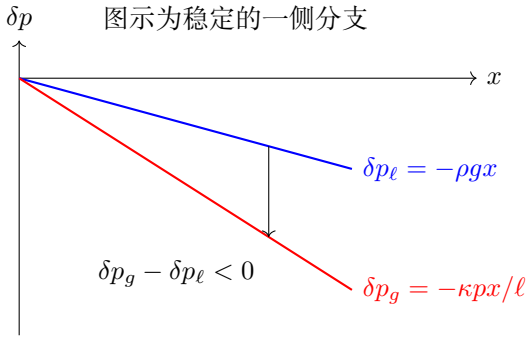


图 4.39: 向上扰动后，气体压降大于负载压降才产生向下的恢复力

恢复条件

净推力变化为

$$\delta F = S\delta(p_g - p_\ell) = S\left(\rho g - \frac{\kappa p}{\ell}\right)x.$$

向上偏离后若要求净力向下，须有

$$\boxed{\frac{\kappa p}{\ell} > \rho g}.$$

即气体压强随位移降低得比液柱负载更快。若不等号反向，位移后净力继续向上，扰动被放大；若两者相等，一阶项消失，需继续求压强差的高阶项。

扰动时的传热

缓慢扰动充分换热时取 $\kappa = 1$，快速扰动来不及传热时取 $\kappa = \gamma$；后一种气体压降更大，上移时的恢复作用更强。

静电

物理竞赛一轮讲义

第一讲

电场与电场力

2026

目录

第一讲　电场与电场力 **1**

1.1　从电荷间的作用到电场 1

1.2　连续电荷分布与微元积分 3

1.3　电通量与高斯定律 6

1.4　叠加法中的补形和偶极子 8

1.5　带电面受力与小振动 10

1.6　例题与分析 11

1.7　本讲小结 26

1.8　练习 27

练习解答 30

第一讲　电场与电场力

1.1　从电荷间的作用到电场

摩擦使电子从一种物质转移到另一种物质，接触使电荷重新分配，静电感应使导体内正负电荷发生相对分离。这些过程改变局部的带电状况，封闭系统的总电荷保持不变。宏观物体所带电荷，是其中正负电荷数量失衡的结果。

真空中两个静止点电荷间的作用服从库仑定律。记从 q_1 指向 q_2 的单位矢量为 $\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$，有

$$\boldsymbol{F}_{1\to 2} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}, \qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.$$

电荷量保留正负号，$q_1q_2 > 0$ 给出排斥，$q_1q_2 < 0$ 给出吸引。带电体尺度相对考查距离很小时，可将它近似为点电荷。

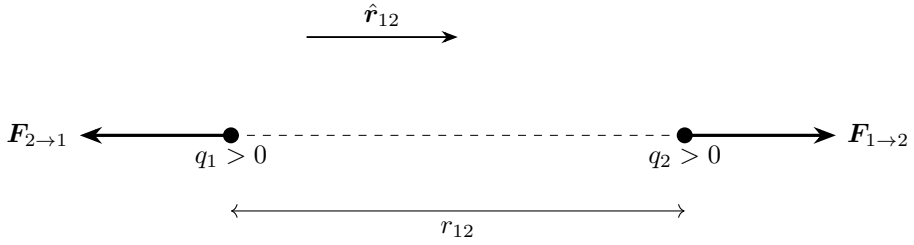


图 1.1: 两正电荷的相互作用沿连线；对指定受力对象单独画力

图 1.1 中的两支力箭头分别画在两个受力物体上。它们大小相等、方向相反，各自进入相应物体的动力学方程。例 1.1 对三个电荷分别列平衡关系，正是这种受力分析的直接应用。

1.1.1　场强怎样从受力定义

带电体在周围空间产生电场，另一个电荷放入这个空间，就受到电场力。取尺寸和电量都很小的试探电荷 q_0，使它对原分布的扰动趋于零，定义

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \lim_{q_0\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})}{q_0}.$$

同一场点的力随 q_0 成比例变化，比值描述该处电场本身的性质。正试探电荷的受力方向定义场强方向，负电荷的受力与场反向。场强单位为 N/C，也可写成 V/m。

点电荷 q 在距它 $\boldsymbol{r}$ 处产生的场为 $\boldsymbol{E} = kq\boldsymbol{r}/r^3$。多个源电荷同时存在时，它们在同一场点的贡献按矢量相加：$\boldsymbol{E}(P) = \sum_i \boldsymbol{E}_i(P)$，再以 $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ 求放在该处的小电荷受力。

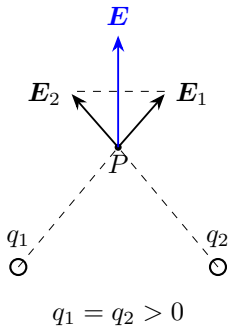


图 1.2: 先构造外电场，再求给定电荷受力

图 1.2 将两个源在 P 点的场分解。等量同号电荷对称放置，横向分量成对抵消，竖直分量相加。因此先找对称微元、再求保留下来的分量，能把矢量叠加化成一个分量的计算。

1.1.2　用电场线表示方向和强弱

电场线在每一点的切线沿当地电场方向，箭头从正电荷指向负电荷或延向无穷远，也可由无穷远进入负电荷。按每束线具有相同通量的方式绘图时，线密处场强较大，线疏处场强较小。在场强非零的点，方向唯一，场线彼此分开。

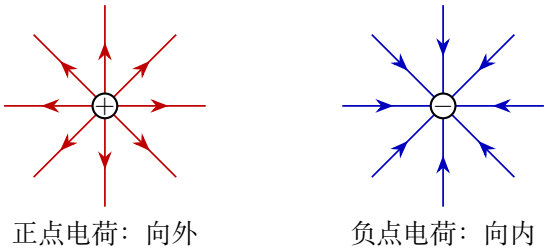


图 1.3: 正、负点电荷的径向电场线

图 1.3 把正、负点电荷的径向场分开画出。改变电荷符号，$kq\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 的方向反转，场线箭头随之反向。

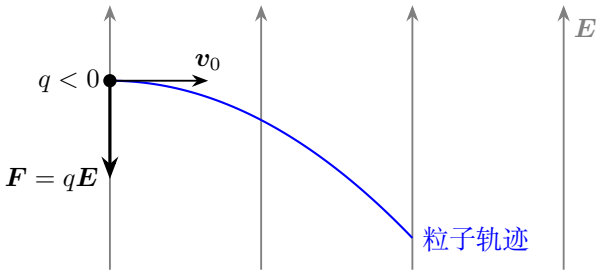


图 1.4: 匀强电场中负电荷的加速度向下；初速度水平时轨迹为抛物线

图 1.4 中，粒子的初速度沿水平方向，匀强电场沿竖直方向。电场力改变竖直速度，水平速度保持原值，粒子轨道因此弯曲。场线切向给出当地场强方向。图中粒子带负电，电场向上，力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$ 向下。这个力与初速度共同决定轨道。例 1.2 用场线比较电荷量和场强，再结合电子负电性分析受力。

1.2 连续电荷分布与微元积分

宏观带电体包含大量微观电荷，常用连续密度描述。线、面、体分布分别有

$$\mathrm{d}q=\lambda\,\mathrm{d}l,\qquad \mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}S,\qquad \mathrm{d}q=\rho\,\mathrm{d}V.$$

设源点为 $\boldsymbol{r}'$，固定场点为 $\boldsymbol{r}$，电荷微元在场点的贡献为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}=k\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}q,\qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int \mathrm{d}\boldsymbol{E}.$$

积分变量描述源点在带电区域中的位置，场点坐标作为参数保留。先由图中的距离和夹角投影，便能看清哪些分量抵消、哪些分量相加。

1.2.1 圆环轴线上的电场

半径 R、均匀带电 Q 的圆环，轴上场点坐标为 x。每个微元到场点的距离都是 $s=\sqrt{R^2+x^2}$，对径微元的环面内分量抵消，轴向投影因子为 x/s。

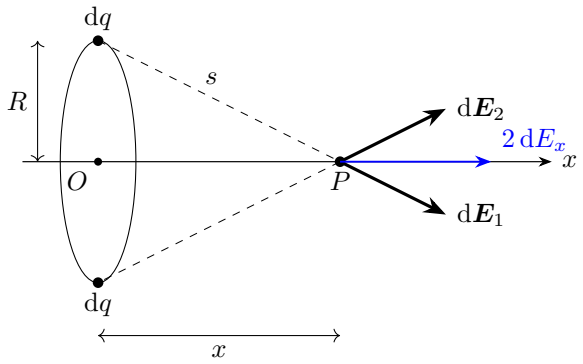


图 1.5: 两个对径微元到场点距离相同，横向分量抵消，轴向分量相加

图 1.5 中的方位角 φ 绕环一周，$\mathrm{d}q = \lambda R\,\mathrm{d}\varphi = Q\,\mathrm{d}\varphi/(2\pi)$，于是

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^{2\pi} \frac{kx}{(R^2+x^2)^{3/2}} \frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{kQx}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

环心处各方向相互抵消，$E_x(0)=0$；远处 $|x| \gg R$ 时，电场趋于总电荷的点电荷场。例 1.4 继续求轴向场强的最大值，练习 1.2 用环心附近的线性场研究小振动。

1.2.2　圆盘与环形平面

把面密度为 σ 的圆盘分成同心细环，半径 s、宽 $\mathrm{d}s$ 的电荷为 $\mathrm{d}Q = 2\pi\sigma s\,\mathrm{d}s$。对轴上 $x>0$ 的固定场点，叠加圆环结果：

$$E_x = 2\pi k\sigma x \int_0^R \frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+x^2)^{3/2}}.$$

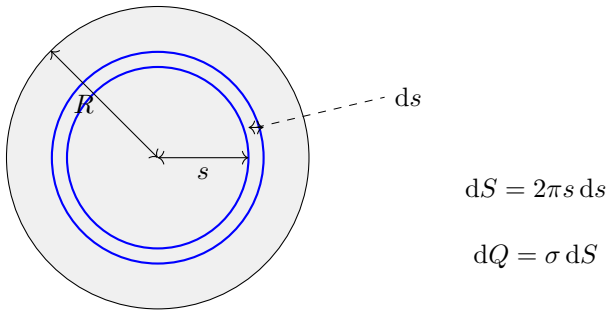


图 1.6: 圆盘按同心细环分割；细环面积由周长与宽度相乘

图 1.6 中的细环从中心扫到外缘。令 $u = s^2 + x^2$，$\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$，上下限由 $0, R$ 变为 $x^2, x^2 + R^2$：

$$\int_0^R \frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_{x^2}^{x^2+R^2} u^{-3/2}\,\mathrm{d}u = \left[-u^{-1/2}\right]_{x^2}^{x^2+R^2}$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

故 $E_x = 2\pi k\sigma[1 - x/\sqrt{x^2+R^2}]$。例 1.5 只保留 $R_1 \le s \le R_2$，得到环形区域的场；令外半径增至无穷，则得到无限薄面的单侧场 $2\pi k\sigma = \sigma/(2\varepsilon_0)$。

1.2.3 有限直线的投影积分

均匀线电荷位于 y 轴 $-\ell \le y \le \ell$，场点 $P = (x, 0)$、$x > 0$。关于原点对称的源点消去 y 分量，剩余分量为

$$E_x = 2k\lambda \int_0^{\ell} \frac{x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

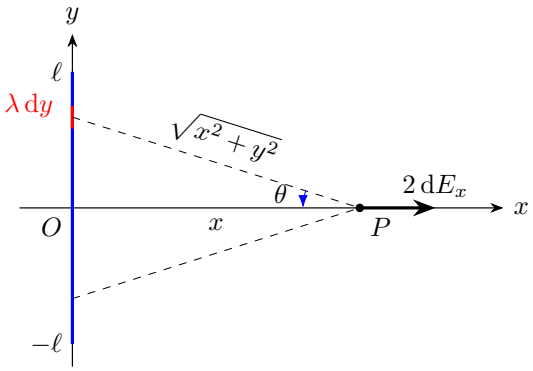


图 1.7: 有限线电荷的源点、距离和积分角

图 1.7 中，θ 在 P 处量取，是 PO 与指向源点的连线之间的锐角，$y = x\tan\theta$。所以 $\mathrm{d}y = x\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，分母为 $x^3\sec^3\theta$；上限为 $\theta_0 = \arctan(\ell/x)$。换元后

$$E_x = \frac{2k\lambda}{x}\int_0^{\theta_0} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2k\lambda}{x}\left[\sin\theta\right]_0^{\theta_0}$$
$$= \frac{2k\lambda\ell}{x\sqrt{x^2+\ell^2}}.$$

练习 1.5 进一步由这条线段求无限长线极限和有限总电荷的远场。

1.3 电通量与高斯定律

电场穿过一个有向面元的通量定义为 $\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = E\cos\theta\,\mathrm{d}S$。这里 θ 量取电场与面法线的夹角。闭合面取外法向，穿出贡献正通量，穿入贡献负通量。

现在取点电荷 q 为源，令 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 从源点指向面元 P，r 为两者的距离。记 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 与面元法向的夹角为 α。面元在径向垂直平面上的有向投影为 $\mathrm{d}S\cos\alpha$，对应的有向立体角为

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{r^2} = \frac{\cos\alpha\,\mathrm{d}S}{r^2}.$$

点电荷的场 $\boldsymbol{E} = kq\hat{\boldsymbol{r}}/r^2$ 中，q 带符号。将它点乘面元矢量，

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{kq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = kq\,\mathrm{d}\Omega.$$

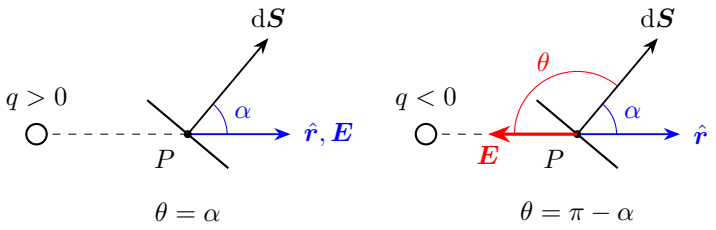


图 1.8: 面元几何给出有向立体角，点电荷的符号决定场沿径向或反向

图 1.8 的两个面元取相同朝向，α 及 $\mathrm{d}\Omega$ 相同。左边 $q>0$，$\theta=\alpha$，通量为正。右边 $q<0$，$\theta=\pi-\alpha$，电场与外法向成钝角，通量为负。若按场方向投影，使用场强大小 $E = k|q|/r^2$ 与 $\cos\theta$；若按源点径向投影，则使用带符号的 q 与 $\cos\alpha$。

包围点电荷的闭合面对源点张满 4π 的有向立体角，故总通量为 $4\pi kq = q/\varepsilon_0$。电荷在闭合面外时，从源点出发的同一小束射线穿入、穿出曲面的有向立体角相消，总通量为零。把各点电荷的贡献相加，得到

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_{\text{内}}}{\varepsilon_0}}.$$

面上的 $\boldsymbol{E}$ 由内外全部电荷产生，而整个闭合面的净通量由内部净电荷决定。取同一束场线围出的细管，侧面与场相切，通量为零。若细管内无电荷，两垂直截面的通量大小相等：$E_1\Delta S_1 = E_2\Delta S_2$。截面较窄处场强较大，这给出了场线疏密与场强的联系。

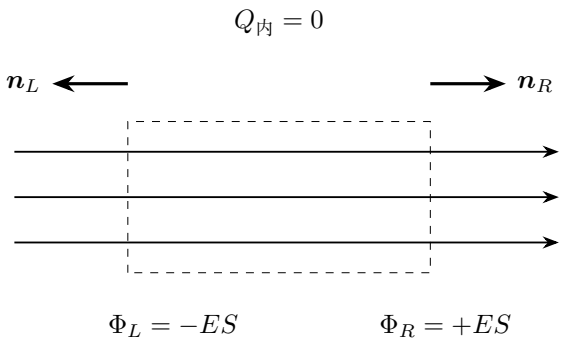


图 1.9: 匀强场穿过空盒：左面负通量、右面正通量，净通量为零而场不为零

图 1.9 中匀强电场穿过无电荷的长方体。两端面的通量分别为 $-ES$ 和 ES，侧面通量为零，总量相消；各处的场仍保持原值。这幅图把局部场强与整个面的通量联系起来。

1.3.1 球对称电荷分布

均匀球壳绕任一直径旋转都保持原状，所以场只能沿径向，同心球面上场强大小相等。高斯定律因此化为 $4\pi r^2 E_r = Q_{内}/\varepsilon_0$。球壳半径为 R、总电荷为 Q 时，

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < R, \\ kQ/r^2, & r > R. \end{cases}$$

对体密度为 ρ 的均匀实心球，球内所包电荷是 $4\pi\rho r^3/3$，代入同一通量式，得

$$E_r = \begin{cases} \rho r/(3\varepsilon_0), & r \le R, \\ \rho R^3/(3\varepsilon_0 r^2), & r \ge R. \end{cases}$$

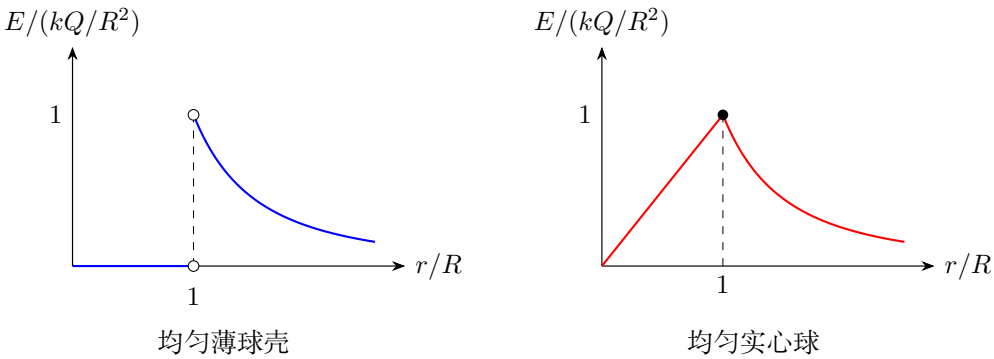


图 1.10: 球壳与实心球的无量纲径向场；球壳表面两侧极限不同，实心球表面连续

图 1.10 中，薄壳的场从内侧零值跳到外侧 σ/ε_0；实心球只有体电荷，场在表面连续，并在这里达到最大值。例 1.8 展开球壳证明，练习 1.8 比较实心球半径改变后的场强。

1.3.2 柱对称与平面对称

无限长均匀线电荷的场垂直轴线，且只随距轴 r 变化。取同轴圆柱面，长 h，两端面与场平行，侧面通量为 $E2\pi rh$。包围电荷 λh，于是 $E=\lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$。练习 1.7 把线扩为均匀实心圆柱，分别求柱内和柱外的包围电荷。

无限大均匀薄面的场垂直面，两侧大小相等、方向相反。跨面取两端面积为 S 的柱形高斯面，有 $2ES=\sigma S/\varepsilon_0$，故每侧 $E=\sigma/(2\varepsilon_0)$。均匀厚板占 $-d\le x\le d$ 时，板内取端点 $\pm x$，给出 $2E_xS=2\rho xS/\varepsilon_0$，得到

$$E_x=\begin{cases}\rho x/\varepsilon_0, & |x|\le d,\\ (\rho d/\varepsilon_0)\operatorname{sgn}x, & |x|\ge d.\end{cases}$$

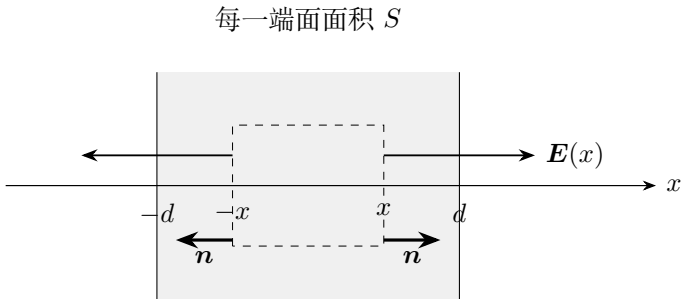


图 1.11: 厚板内高斯面端面位于 $\pm x$，两端通量同号，侧面通量为零

图 1.11 的两端场矢量反向，外法向也反向，所以两个标量积都为正，通量相加。例 1.10 将板内线性场转为负电荷的回复力。

1.4 叠加法中的补形和偶极子

1.4.1 去掉一块电荷的计算

挖去固定带电体中的一部分，相当于从完整分布的场中减去这一部分原有的场。因此可以叠加完整正分布与同形的负分布，充分利用球、环等已知模型。例 1.3 的小孔球壳与例 1.5 的环形面，都属于这种减法。

均匀绝缘球中有偏心球形空腔，设大球心 O、空腔心 O'，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OO'}$。对腔内任一点 P，正球和负补球都使用球内线性场：

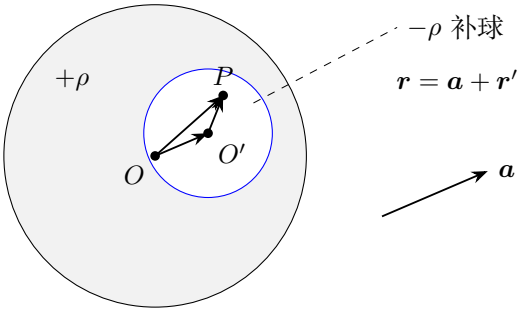


图 1.12: 负密度球恰补去空腔；点 P 同时位于正球和补入的负球内部

图 1.12 的几何关系是 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}+\overrightarrow{O'P}$，故

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{O'P})=\frac{\rho\boldsymbol{a}}{3\varepsilon_0}.$$

场点坐标在相减后消去，腔内成为匀强场。例 1.9 把图中的两个径矢逐一带入这一叠加。

1.4.2 电偶极子的远场

相距 $2a$ 的等量异号电荷构成电偶极子，定义 $\boldsymbol{p}=2aq\hat{\boldsymbol{x}}$，从负电荷指向正电荷。

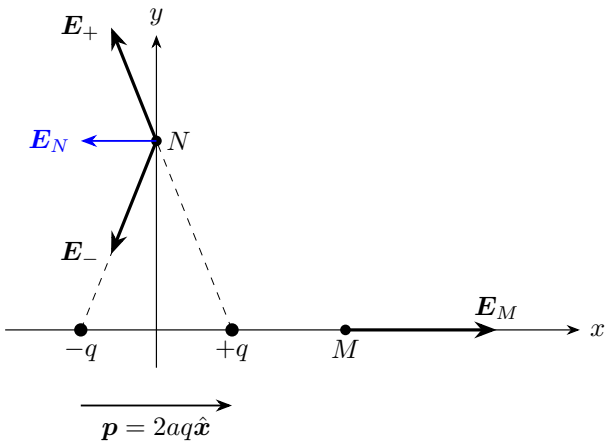


图 1.13: 等量异号电荷的轴线与中垂线投影；偶极矩从负端指向正端

图 1.13 中，$M=(L,0)$ 的两场反向，$N=(0,L)$ 的竖直分量抵消。精确分量为

$$E_{Mx}=kq\left[\frac{1}{(L-a)^2}-\frac{1}{(L+a)^2}\right]=\frac{4kqaL}{(L^2-a^2)^2},\qquad E_{Nx}=-\frac{2kqa}{(L^2+a^2)^{3/2}}.$$

提出 L 的幂，并令 $z=a^2/L^2$，两式分别含 $(1-z)^{-2}$ 和 $(1+z)^{-3/2}$。求导得

$$[(1-z)^{-2}]'=2(1-z)^{-3},\qquad [(1+z)^{-3/2}]'=-\tfrac{3}{2}(1+z)^{-5/2}.$$

因此在 $z=0$ 附近，两个因子分别为 $1+2z+O(z^2)$ 和 $1-3z/2+O(z^2)$。当 $L\gg a$ 时保留首项，

$$E_{Mx}\simeq\frac{2kp}{L^3},\qquad E_{Nx}\simeq-\frac{kp}{L^3}.$$

总电荷为零使远场的 L^{-2} 项相消，保留下来的偶极场按 L^{-3} 衰减。例 1.6 继续比较同距离处的方向和大小。

1.5　带电面受力与小振动

1.5.1　面电荷的相互作用力

计算一个物体受力，使用其余电荷在该物体处产生的电场。两块大平板分别带 $\pm\sigma$，各板单独产生的单侧场为 $\sigma/(2\varepsilon_0)$。板间合场为 σ/ε_0，正板受负板吸引的单位面积力则为

$$p_{\text{电}}=\sigma E_{\text{负板}}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

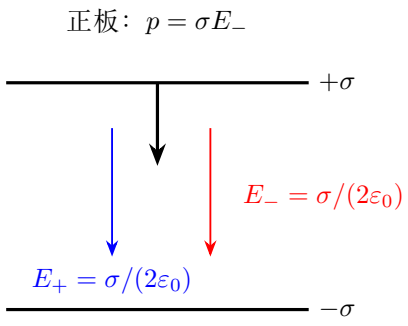


图 1.14: 总场由两板场叠加；正板受力只用负板产生的场

图 1.14 把作用在试探电荷上的板间合场，与作用在正板上的负板外场分别画出。例 1.12 由此求两板吸引力。

导体表面内侧场为零、外侧法向场为 $E_{\text{外}}$。取一个很小面元，它自身在两侧产生 $\pm\sigma/(2\varepsilon_0)$；其余电荷的场在两侧趋于同一值 $E_{\text{他}}$。两式相加给出

$$E_{\text{外}}=E_{\text{他}}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\quad 0=E_{\text{他}}-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},\quad E_{\text{他}}=\frac{E_{\text{外}}}{2}.$$

结合 $\sigma=\varepsilon_0E_{\text{外}}$，便得向外电压力 $\varepsilon_0E_{\text{外}}^2/2$，练习 1.4 展开这一局部受力模型。

1.5.2 从场的变化判断轴向运动

平衡点附近，先指定允许的运动方向，再考察小位移产生的力。正带电圆环的轴心附近，令 $z = x^2/R^2 \ll 1$，由 $(1+z)^{-3/2} = 1 - 3z/2 + O(z^2)$，有

$$E_x = \frac{kQx}{R^3}\left[1 - \frac{3x^2}{2R^2} + O(x^4/R^4)\right] \simeq \frac{kQ}{R^3}x.$$

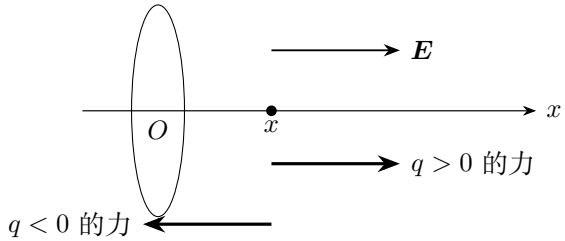


图 1.15: 同一个零场点对两种试探电荷有相反的轴向稳定性；图示微小位移 $x > 0$

图 1.15 中的正电荷受力与位移同向，沿轴偏离；负电荷受回复力。若限制它只沿轴运动，就有 $m\ddot{x} = -(kQ|q|/R^3)x$，成为简谐振动。练习 1.2 从这个方程求通解、初始常量和小振动周期。约束确定运动自由度，其他方向的运动由相应方向的场变化另行决定。

1.6 例题与分析

例 1.1 (三个共线点电荷的同时平衡)**.** 点电荷 q_1, q_2, q_3 依次位于 $x = 0, L, 3L$，$q_2 > 0$，三个电荷均受力平衡。求带符号的电荷量之比。

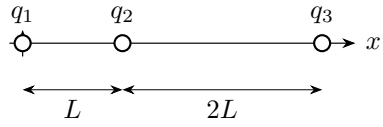


图 1.16: 题设：三个共线点电荷的同时平衡

解　三个电荷的符号

图 1.16 中，q_2 两侧的力要反向，q_1, q_3 应同号。对左端 q_1，右边两个电荷的作用也要相互平衡，因此 q_2 与 q_3 异号。由 $q_2 > 0$，得到 $q_1, q_3 < 0$。

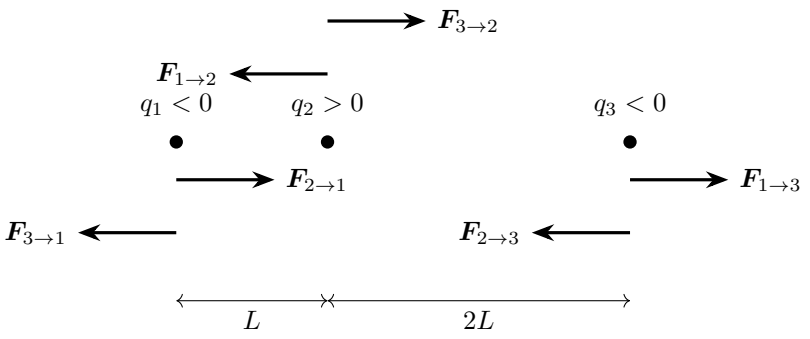


图 1.17: 分别画三个电荷的两项受力；箭头按平衡条件画成等长，位置间距仍为 $L, 2L$

中间电荷的平衡

图 1.17 对中间正电荷，左右吸引力相等，

$$\frac{|q_1|q_2}{L^2}=\frac{|q_3|q_2}{(2L)^2}\quad\Rightarrow\quad |q_3|=4|q_1|.$$

左端电荷的平衡

再对左侧电荷，来自 q_2 的向右吸引与来自 q_3 的向左排斥平衡：

$$\frac{|q_1|q_2}{L^2}=\frac{|q_1q_3|}{(3L)^2}\quad\Rightarrow\quad |q_3|=9q_2.$$

电荷比例

由 $|q_3|=9q_2$ 和 $|q_1|=|q_3|/4$，保留符号，得到 $\boxed{q_1:q_2:q_3=-9:4:-36}$。图中的右端负电荷受中间正电荷向左吸引、左端负电荷向右排斥，两力也恰好等大。

例 1.2 (电场线与电荷量的判断)**.** 图中两固定电荷分别为 $+Q_+$、$-Q_-$，$Q_\pm > 0$，场线中有一部分从正电荷通往无穷远。P 处场线明显较密，Q 处较疏。比较 E_P, E_Q 及 Q_+, Q_-，并说明可否据此把场线当作电子轨迹。

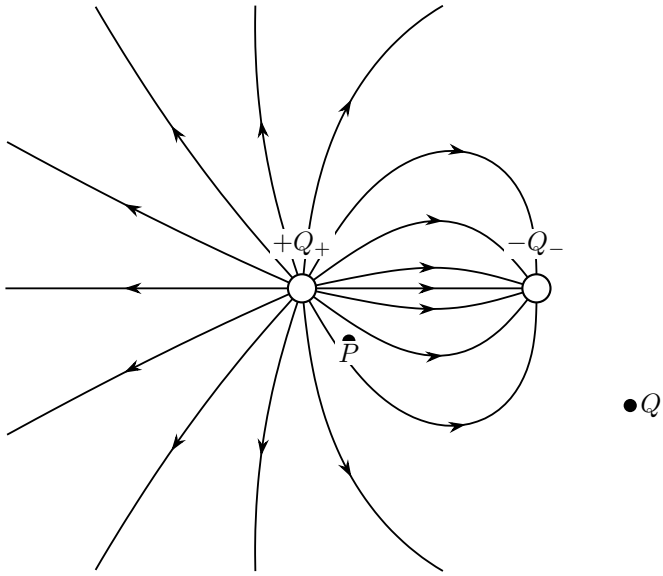


图 1.18: 部分电场线从正电荷通向负电荷，其余向外延伸

解　场线的起止与疏密

图 1.18 中场线箭头从正电荷出发，一部分终止于负电荷，另一些通向无穷远。按统一通量约定，正电荷发出的总通量大于负电荷吸收的总通量，因此 $Q_+ > Q_-$。P 的邻近场线较密，故 $E_P > E_Q$。

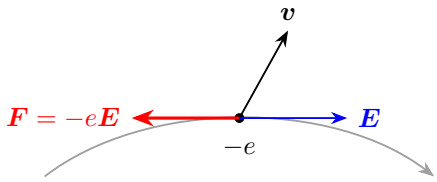


图 1.19: 电子处的场强沿场线切向，受力反向，速度由运动状态确定

电子的受力和速度

图 1.19 中，电子所在处的蓝箭头沿场线切向。电子带负电，因此红箭头 $\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E}$ 指向切线的反向，加速度为 $\boldsymbol{F}/m$。从图示的斜向初速度出发，轨道的起始切向由 $\boldsymbol{v}$ 给定，随后速度逐渐向受力方向偏转。

例 1.3 (均匀球壳开小孔后的中心场)**.** 半径 R 的绝缘薄球壳均匀带电 $+Q$，球心放正电荷 q。球壳上去掉一个半径 $a \ll R$ 的小圆孔，求中心电荷受力的首阶近似及方向。

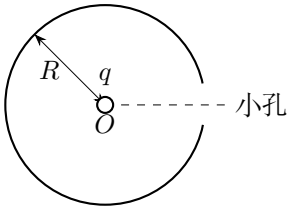


图 1.20: 题设：均匀球壳开小孔后的中心场

解　缺口的电荷量

图 1.20 的完整球壳在球心场为零。将开孔后的分布写成完整球壳加上孔位置的一小块负电荷。孔面积首阶为 πa^2，原面密度 $\sigma = Q/(4\pi R^2)$，故被移除电荷大小

$$\Delta Q \simeq \sigma \pi a^2 = \frac{Q a^2}{4R^2}.$$

中心合场的方向

取孔轴从球心指向孔心为 $+x$。被去掉的正面元原本在球心产生向 $-x$ 的场，因此移去它会留下向 $+x$ 的合场。余下分布向 $+x$ 的场，正好补偿完整球壳中原小片向 $-x$ 的贡献。

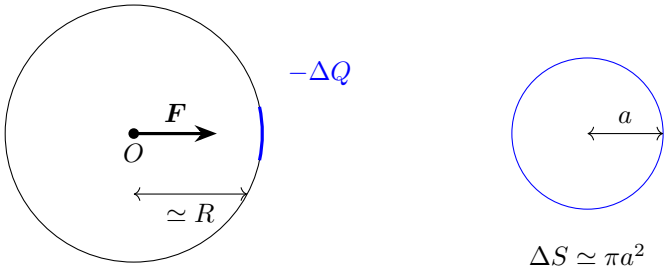


图 1.21: 完整球壳加上负补片；右图放大小孔的局部面积，不按全图比例

小孔近似下的受力

图 1.21 的等效负补片在距球心近似为 R 的位置，对中心正电荷产生指向孔的吸引。因而

$$E_O \simeq k\frac{\Delta Q}{R^2} = \frac{kQa^2}{4R^4}, \qquad F \simeq \frac{kQqa^2}{4R^4}.$$

孔径与力的变化

力指向小孔。极限 $a \to 0$ 时结果趋零。小孔电荷量随 a^2 变化，到中心的距离近似为 R，所以受力也随 a^2 增加；这是 $a/R \ll 1$ 时的首个非零项。

例 1.4 (圆环轴线上的场强与极值)**.** 均匀圆环半径 R、总电荷 $Q > 0$。求轴线上 x 处的场强，并求 $x > 0$ 区域最大场强及其位置。

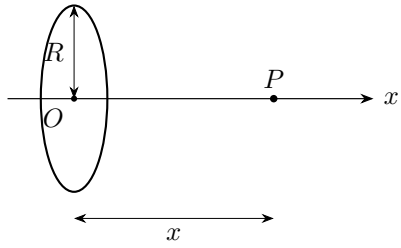


图 1.22: 题设：圆环轴线上的场强与极值

解　圆周微元的轴向场

图 1.22 中各微元到 P 的距离为 $s = \sqrt{R^2 + x^2}$，轴向投影因子为 x/s。对径微元的环面内分量抵消，所以

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^{2\pi} \frac{kx}{(R^2+x^2)^{3/2}} \frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{kQx}{2\pi(R^2+x^2)^{3/2}}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

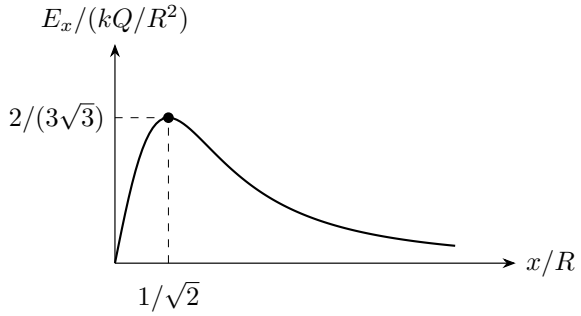


图 1.23: 轴向场以 kQ/R^2 为单位；正半轴有一个极大点

场强对位置的导数

图 1.23 给出轴向场的变化。对 $x>0$ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}x}=kQ\left[(R^2+x^2)^{-3/2}+x\left(-\frac{3}{2}\right)(R^2+x^2)^{-5/2}(2x)\right]$$
$$=kQ\frac{R^2+x^2-3x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}=kQ\frac{R^2-2x^2}{(R^2+x^2)^{5/2}}.$$

最大场强及两侧变化

导数分母为正，令分子 $R^2-2x^2=0$，在 $x>0$ 中得 $x=R/\sqrt{2}$；其两侧导数由正变负。将该位置代回原场强，

$$E_{\max}=\frac{kQ(R/\sqrt{2})}{(R^2+R^2/2)^{3/2}}=\frac{kQ}{R^2}\frac{1/\sqrt{2}}{(3/2)^{3/2}}=\frac{2kQ}{3\sqrt{3}R^2}.$$

$x=0$ 时场为零；$x\gg R$ 时 $E_x\simeq kQ/x^2$，与总电荷点模型一致。带符号表达式 $E_x=kQx/(R^2+x^2)^{3/2}$ 同样适用于负轴，$E_x(-x)=-E_x(x)$；若只求大小，分子应取 $kQ|x|$。

例 1.5 (环形平面电荷的轴向电场)**.** 内外半径 R_1,R_2 的环形平面均匀带面电荷密度 $\sigma>0$。求垂直轴线上 $x>0$ 处电场，并求内外半径相同、轴上远处两种情况下的变化。

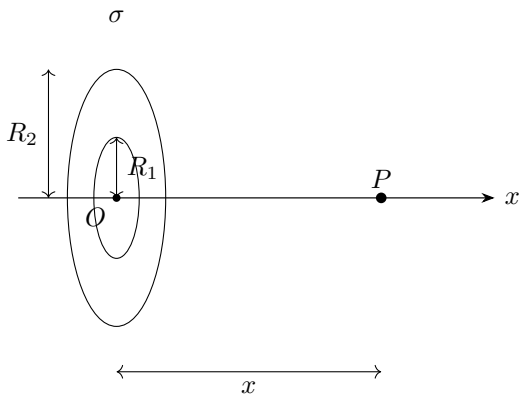


图 1.24: 环形面电荷的内缘、外缘与轴上场点；内外半径分别为 R_1,R_2

解　同心细环微元

在图 1.24 的环形区域中取半径 s、宽度 $\mathrm{d}s$ 的细环，其电荷 $\mathrm{d}q=2\pi\sigma s\,\mathrm{d}s$。由圆环轴向结果，

$$E_x=2\pi k\sigma x\int_{R_1}^{R_2}\frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+x^2)^{3/2}}.$$

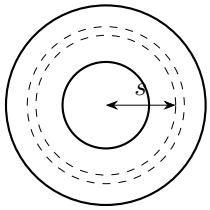
积分上下限与换元

令 $u=s^2+x^2$，则 $\mathrm{d}u=2s\,\mathrm{d}s$，上下限分别为 $R_1^2+x^2$ 和 $R_2^2+x^2$。把换元与原函数代入连续写出：

$$\begin{aligned}\int_{R_1}^{R_2}\frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+x^2)^{3/2}}&=\frac{1}{2}\int_{R_1^2+x^2}^{R_2^2+x^2}u^{-3/2}\,\mathrm{d}u\\&=\left[-u^{-1/2}\right]_{R_1^2+x^2}^{R_2^2+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}.\end{aligned}$$

乘回 $2\pi k\sigma x$，得到

$$E_x=2\pi k\sigma x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R_1^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+R_2^2}}\right)>0.$$



$\mathrm{d}q=2\pi\sigma s\,\mathrm{d}s$

$R_1\le s\le R_2$

图 1.25: 解答过程：环形平面电荷的轴向电场

场的方向和远场

图 1.25 中的细环从内缘 R_1 扫到外缘 R_2；也可把整个区域理解为外圆盘减内圆盘。$k\sigma$ 已有场强量纲，括号乘 x 为无量纲量。令 $R_2=R_1$，电荷区域消失，场为零；$x\to0$ 且 $R_1>0$ 时场也趋零。

在远处 $x\gg R_2$。令 $z_i=R_i^2/x^2$，由 $F(z)=(1+z)^{-1/2}$、$F'(z)=-\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}$ 知 $F(0)=1$、$F'(0)=-1/2$，所以

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+R_i^2}}=\frac{1}{x}\left(1-\frac{R_i^2}{2x^2}+O\left(\frac{R_i^4}{x^4}\right)\right).$$

两式相减时 $1/x$ 项抵消，括号中首个非零项为 $(R_2^2-R_1^2)/(2x^3)$。乘回 $2\pi k\sigma x$，得 $E_x\simeq k[\pi\sigma(R_2^2-R_1^2)]/x^2$，回到总电荷的点电荷场。

例 1.6（偶极轴线与中垂线的远场）. 电荷 $-q,+q$ 位于 $x=-a,+a$。$M=(L,0), N=(0,L)$，$L\gg a$。求两点电场首阶远场、大小比与方向。

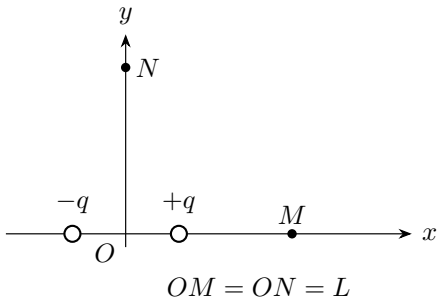


图 1.26: 题设：偶极轴线与中垂线的远场

解 轴线上的反向叠加

图 1.26 中偶极矩 $\boldsymbol{p}=2aq\,\hat{\boldsymbol{x}}$。在 M，正电荷场向右、负电荷场向左，

$$E_M = kq\left[\frac{1}{(L-a)^2}-\frac{1}{(L+a)^2}\right]=\frac{4kqaL}{(L^2-a^2)^2}.$$

中垂线上的分量叠加

在 N 两电场竖直分量抵消，水平分量都向左，

$$E_{Nx}=-\frac{2kqa}{(L^2+a^2)^{3/2}}.$$

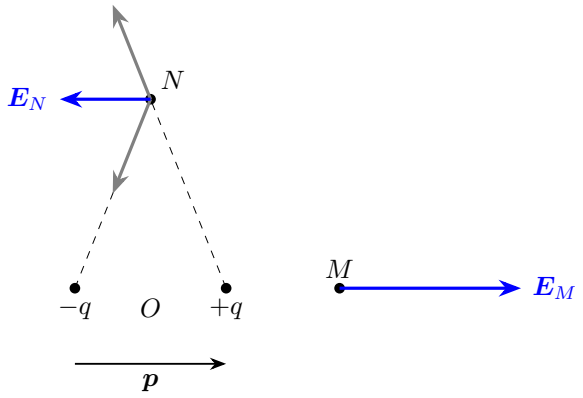


图 1.27: 两点距偶极中心相同，远场合矢量的长度按 2 : 1 示意；分量图先于远场近似

远场的方向和比例

先令 $z=a^2/L^2\ll 1$，将精确式写成无量纲小参数的函数，分别求出小参数函数在零点的导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1-z)^{-2}=2(1-z)^{-3},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z)^{-3/2}=-\frac{3}{2}(1+z)^{-5/2}.$$

两因子在零点都为 1，一阶系数分别为 2 和 $-3/2$，所以

$$E_M=\frac{4kqa}{L^3}(1-z)^{-2}=\frac{4kqa}{L^3}[1+2z+O(z^2)],$$
$$E_{Nx}=-\frac{2kqa}{L^3}(1+z)^{-3/2}=-\frac{2kqa}{L^3}[1-3z/2+O(z^2)].$$

保留首项，$E_M\simeq 4kqa/L^3$、$E_{Nx}\simeq -2kqa/L^3$。图 1.27 中 M 场沿 $\boldsymbol{p}$，N 场反向于 $\boldsymbol{p}$，所以大小比为 $2:1$，方向相反。两者都随 a 成正比、随 L^{-3} 衰减。$a=0$ 时两个电荷在同一点抵消，电场趋零。两个点电荷的 L^{-2} 项相消，保留下来的 L^{-3} 项反映正负电荷之间的有限间距。

例 1.7 (加速金属板中的电荷分离)**.** 一块初始不带电的孤立大金属板厚度为 h，沿法线 $+x$ 以加速度 a 平动。板外无外加电场，忽略边缘效应和板的形变。电子质量为 m、电荷为 $-e$，已达到相对晶格无漂移的状态。求板内电场和两大面的电荷面密度。

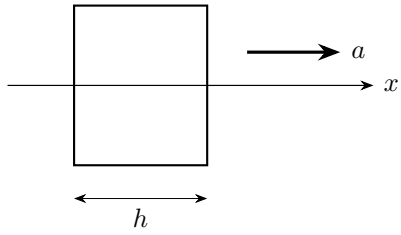


图 1.28: 题设：加速金属板中的电荷分离

解　随板加速的电子

图 1.28 中电子与晶格有相同加速度 a，在实验室系对电子列力学方程：$-eE_x=ma$，故 $E_x=-ma/e$，内部电场与加速度反向。

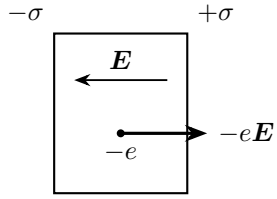


图 1.29: 解答过程：加速金属板中的电荷分离

两表面的电荷密度

按图 1.29，两个大面近似为平行无限平面，设左、右面电荷密度分别为 $\sigma_{左}$ 和 $\sigma_{右}$。板内在左面的右侧、右面的左侧，所以两面场的 x 分量相减。整板中性给出另一个关系，

$$E_x = \frac{\sigma_{左} - \sigma_{右}}{2\varepsilon_0} = -\frac{ma}{e}, \qquad \sigma_{左} + \sigma_{右} = 0.$$

联立得

$$\sigma_{右} = \frac{\varepsilon_0 ma}{e}, \qquad \sigma_{左} = -\frac{\varepsilon_0 ma}{e}.$$

右面带正电，左面带负电，板内场从右指向左。

电势差与参考系

板内场均匀，两端电势差 $V_{右} - V_{左} = mah/e$。在板的参考系，电子相对静止，电场力 ma 与向左的惯性力 $-ma$ 平衡；实验室系的同一受力对应随板加速度 a。

例 1.8 (球壳内外的电场与通量)**.** 绝缘薄球壳半径 R，均匀带电 $Q > 0$。证明球内处处零场，求球外电场，再举一例，说明无电荷的闭合面上可以有非零电场。

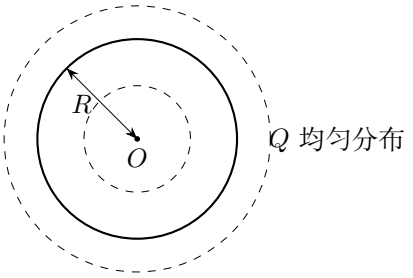


图 1.30: 题设：球壳内外的电场与通量

解　球对称与球内零场

图 1.30 的完整球壳具有球对称性，因此任意同心球面上的场强大小相等、方向径向。取半径 $r < R$ 的高斯面，包围电荷为零，故 $4\pi r^2 E_r = 0$，得到该球面上每点 $E_r = 0$。对任意 $0 < r < R$ 都成立，球心再由对称性为零，所以整个内部零场。

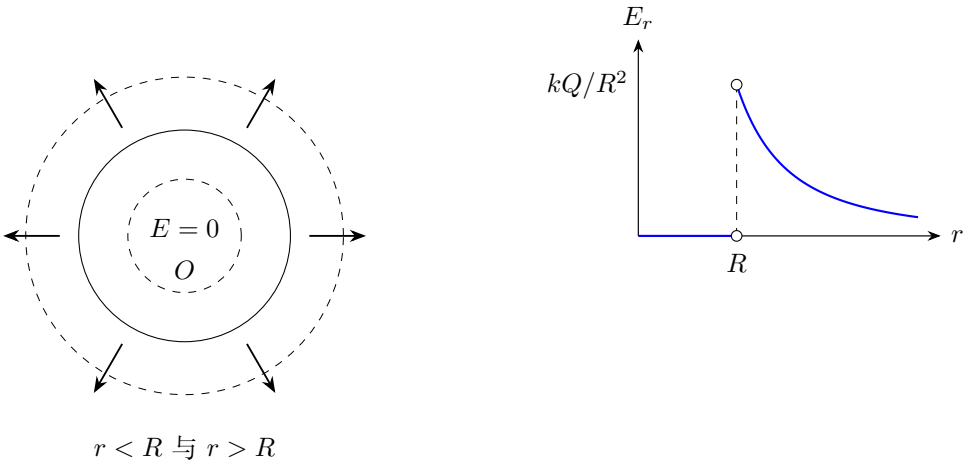


图 1.31: 球壳内外高斯面与表面两侧的径向场；外部图线表示 $Q > 0$ 时的向外场

壳面两侧的场

图 1.31 右图在理想电荷面处标出两个单侧极限。内部 $E_r(R^-) = 0$，外部 $E_r(R^+) = kQ/R^2$，跳变恰为 σ/ε_0，两个单侧值分别描述紧贴理想面电荷的内外区域。

球外场与零净通量

图 1.31 的外部高斯面包围全部 Q，有 $4\pi r^2 E_r = Q/\varepsilon_0$，即 $E_r = kQ/r^2$ 向外。匀强电场穿过一个无电荷球面时，一半球面的场线穿入，另一半穿出，净通量为零而局部场处处为原来的匀强场。薄球壳内部的零场则同时来自球对称性和零包围电荷：对称性使 E_r 能提出积分，零包围电荷再使其值为零。

例 1.9 (均匀带电球中的偏心空腔)**.** 半径 R、体密度 $\rho>0$ 的绝缘球中挖去半径 R' 的球形空腔。大球心 O，空腔心 O'，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OO'}$。求腔内电场，证明其均匀。

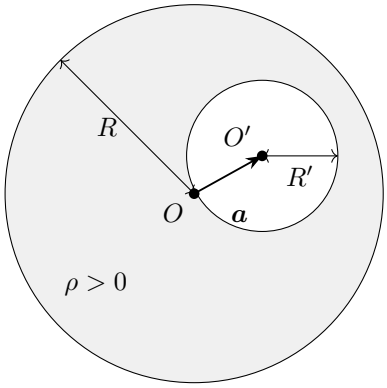


图 1.32: 固定体电荷中挖去偏心球形空腔；两球心和内外半径分别标出

解　完整球与负补球

把图 1.32 的余下分布分成以 O 为心的完整正球与以 O' 为心、体密度 $-\rho$ 的补充球。先由高斯定律，均匀实心球内部的场为 $\rho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0)$。

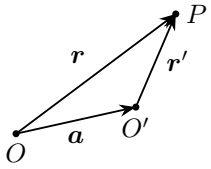


图 1.33: 解答过程：均匀带电球中的偏心空腔

同一场点的两个径矢

对图 1.33 的任意腔内点 P，它同时处于这两个完整球内部，所以

$$\boldsymbol{E}(P)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OP}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O'P}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{OO'}=\frac{\rho\boldsymbol{a}}{3\varepsilon_0}.$$

腔内匀强场

用的是矢量关系 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$。结果与 P 无关，故腔内为匀强场，方向从大球心指向空腔心。若空腔同心，$\boldsymbol{a}=0$，场退化为零；与同心挖球后的球对称情形相符。题给绝缘球的体电荷固定，两个完整球的线性场相减后，只留下心距矢量。

例 1.10 (均匀厚板内的场与振动时间)**.** 一块厚度为 $2d$ 的板沿板面方向无限延伸，均匀正体电荷密度 ρ 分布在 $-d \le x \le d$ 内。求全空间电场。质量 m、电荷 $-q$ 的质点从 $x = d$ 静止释放，求首次到达 $x = 0$ 的时间。

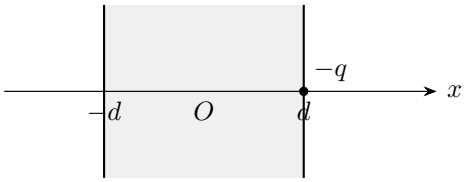


图 1.34: 题设：均匀厚板内的场与振动时间

解　厚板的分段电场

图 1.34 的平面对称性给出电场沿 x，关于原点反向。取半厚为 $|x|$、面积 S 的柱形高斯面，板内有 $2E_xS = 2\rho xS/\varepsilon_0$（先取 $x > 0$），故

$$E_x = \begin{cases} \rho x/\varepsilon_0, & |x| \le d, \\ (\rho d/\varepsilon_0)\,\operatorname{sgn} x, & |x| \ge d. \end{cases}$$

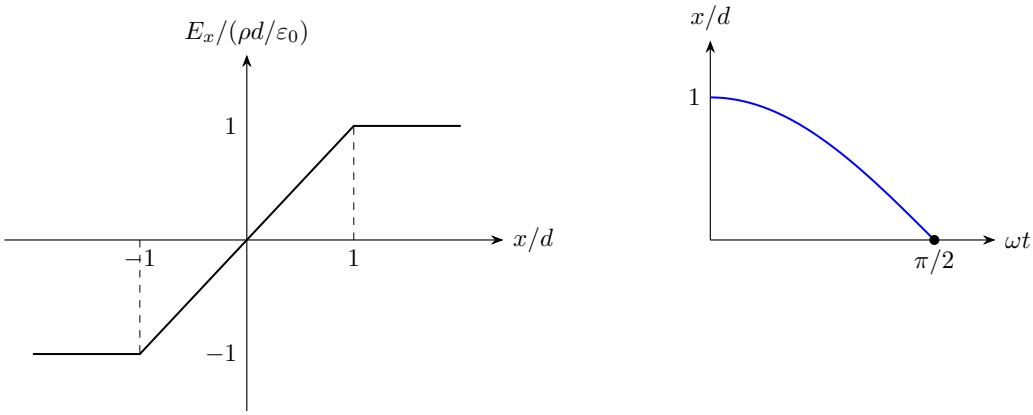


图 1.35: 左图保留电场在正负两侧的方向；右图负电荷从板面运动四分之一周期到达中面

负电荷的回复力

图 1.35 中板内电场随 x 线性增长，负电荷受力指向原点，

$$m\ddot{x} = -qE_x = -\frac{q\rho}{\varepsilon_0}x, \qquad \omega = \sqrt{\frac{q\rho}{m\varepsilon_0}}.$$

运动方程、初值与时间

运动方程为 $\ddot{x}+\omega^2 x=0$。取指数试解 $x=e^{st}$，两次求导为 $\dot{x}=se^{st}$、$\ddot{x}=s^2e^{st}$，代入得 $(s^2+\omega^2)e^{st}=0$，所以 $s=\pm i\omega$，实通解为

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\qquad \dot{x}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t.$$

由 $x(0)=d$ 得 $A=d$，由 $\dot{x}(0)=0$ 得 $B\omega=0$、$B=0$，故 $x=d\cos\omega t$。首次到 0 时 $\omega t=\pi/2$，故 $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{m\varepsilon_0/(q\rho)}$。

到达中面时的运动

从 d 到 0 的整个区间位于板内，受力始终为 $-q\rho x/\varepsilon_0$。到达中面时相位增加 $\pi/2$，即完成四分之一周期，此时速度向左、大小为 $d\omega$。

例 1.11 (均匀半球面在球心的电场)**.** 半径 R 的上半球薄壳均匀带正面电荷密度 σ，对称轴为 z。求球心电场。

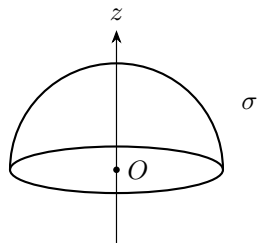


图 1.36: 题设：均匀半球面在球心的电场

解　纬线窄带的电荷

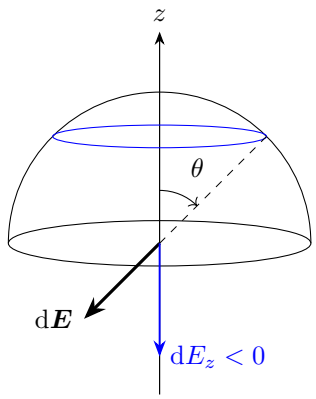
在图 1.36 中按极角 θ 取纬线窄带，宽度为 $R\,\mathrm{d}\theta$，周长 $2\pi R\sin\theta$，电荷

$$\mathrm{d}q=2\pi\sigma R^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta.$$

竖直分量

窄带各微元到球心距离均为 R，水平分量抵消，竖直分量向下，故

$$\mathrm{d}E_z=-\frac{k\,\mathrm{d}q}{R^2}\cos\theta=-2\pi k\sigma\sin\theta\cos\theta\ \mathrm{d}\theta.$$



$$\mathrm{d}q = 2\pi\sigma R^2 \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

$$0 \le \theta \le \pi/2$$

图 1.37: 纬线窄带上微元的水平场抵消，轴向投影均为负；极角从正 z 轴量起

上半球的极角积分

按图 1.37，上半球对应 $\theta : 0 \to \pi/2$。令 $u = \sin\theta$，$\mathrm{d}u = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，新上下限为 $0, 1$，所以

$$\begin{aligned} E_z &= -2\pi k\sigma \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= -2\pi k\sigma \int_0^1 u \,\mathrm{d}u = -2\pi k\sigma \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = -\pi k\sigma = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

半径和总电荷

方向向下、远离上半球电荷。R^2 在面积与距离平方中抵消，所以固定面密度时结果不依赖 R；若固定总电荷 $Q = 2\pi R^2\sigma$，则 $E = Q/(8\pi\varepsilon_0 R^2)$，仍随 R^{-2} 变化。

例 1.12 (两带电平板间的场与相互吸引力)**.** 两大平行薄板面积 S、相距 d，上板带 $+Q$、下板带 $-Q$，d 远小于板的线度。求板间、板外电场及两板吸引力。



图 1.38: 题设：两带电平板间的场与相互吸引力

解　两板电场的叠加

图 1.38 中令 $\sigma = Q/S$。每板独自产生大小 $\sigma/(2\varepsilon_0)$ 的场，正板场远离正板、负板场指向负板。在板间两场都向下，故 $E_{\text{内}} = \sigma/\varepsilon_0 = Q/(\varepsilon_0 S)$；板外方向相反，近似抵消。

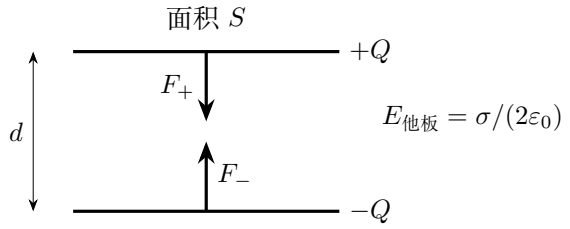


图 1.39: 解答过程：两带电平板间的场与相互吸引力

负板对正板的作用力

求上板受力时，图 1.39 只保留下板在上板处的外场，大小 $\sigma/(2\varepsilon_0)$，所以

$$F = Q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}.$$

两板相互吸引

下板受力大小相同、向上，满足相互作用力成对。题给 Q, S 固定，在间距远小于板尺度的近似下，每板产生的场由面密度 Q/S 确定，吸引力也由这一面密度确定。图中两块板的受力分别来自另一块板，因而大小相等、方向相向。

1.7　本讲小结

电场把源电荷与受力电荷联系起来，场强按矢量叠加。连续分布先取电荷微元，用距离和夹角求分量，再沿带电区域积分。高斯定律把闭合面通量与所包净电荷联系；球、柱、平面对称性进一步把通量积分化成场强的代数关系。

补形法利用电场叠加，将缺口或空腔转为已知分布的相减。分布电荷的受力由其他电荷的场计算；平衡点附近的场变化决定小位移的受力方向。这些模型把场的空间分布与平衡、振动及压力联系起来。

1.8 练习

练习 1.1 (同号双电荷中垂线上的最大场)**.** 两相同正点电荷 q 相距 $2a$。求其中垂线上电场大小的最大值及位置。

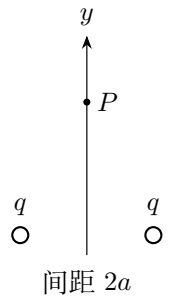


图 1.40: 题设：同号双电荷中垂线上的最大场

练习 1.2 (绝缘球环中的轴向小振动)**.** 均匀绝缘圆环半径 R、总电荷 $Q > 0$。质量 m 的点电荷 q 被约束只沿垂直环面的轴线运动。要使它在环心附近小振动，q 应取什么符号？求周期与小振动条件。

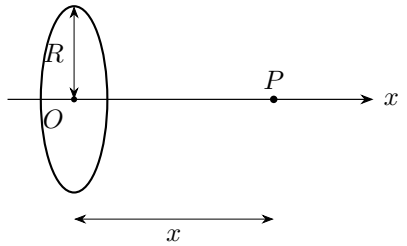


图 1.41: 题设：绝缘球环中的轴向小振动

练习 1.3 (圆环外两个点电荷同时平衡)**.** 圆环半径 R，固定均匀带电 $Q>0$。轴线上 $x=r>R$ 放非零电荷 q_1，问能否在 $x>0$ 的另一位置放非零电荷 q_2，使两个点电荷都平衡？求位置及电荷关系。

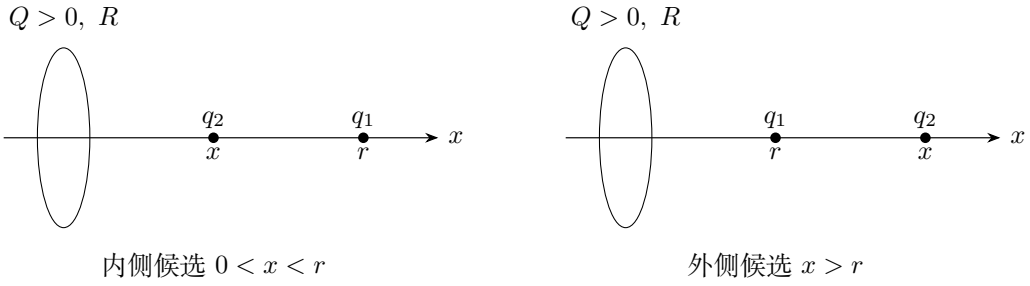


图 1.42: 圆环正半轴上的内、外两类候选位置；固定的 q_1 坐标均为 r

练习 1.4 (导体表面的电压力)**.** 静电平衡导体表面外侧法向场强为 E。求表面电荷受到的向外电压力，并说明为什么有效受力场只有外侧总场的一半。

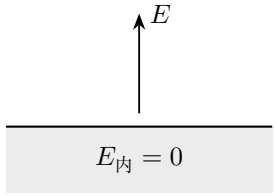


图 1.43: 题设：导体表面的电压力

练习 1.5 (均匀有限直线的中垂面电场)**.** 均匀带电直线段长 $2l$、线密度 $\lambda>0$，位于 y 轴 $-l\le y\le l$。求 $P=(x,0), x>0$ 处电场，并讨论 $l\to\infty$ 及 $x\gg l$。

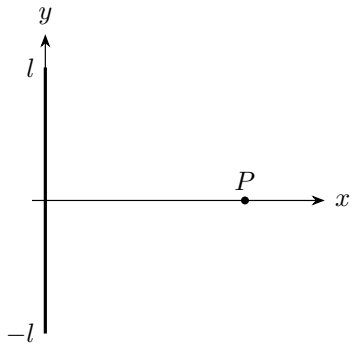


图 1.44: 题设：均匀有限直线的中垂面电场

练习 1.6 (带电圆弧在圆心的电场)**.** 半径 R 的圆弧关于 x 轴对称，覆盖极角 $-\alpha \le \theta \le \alpha$，$0 < \alpha \le \pi$，线密度 $\lambda > 0$。求圆心场，并给出半圆弧情形。

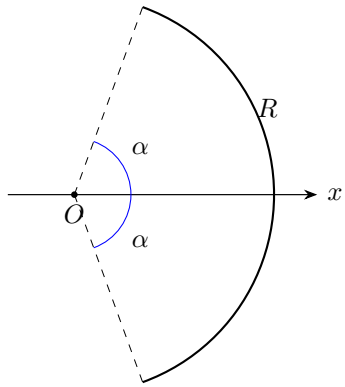


图 1.45: 题设：带电圆弧在圆心的电场

练习 1.7 (无限均匀带电圆柱的内外电场)**.** 无限长绝缘圆柱半径 R、体电荷密度 $\rho > 0$。求距轴 r 处电场，并比较表面两侧的场强。

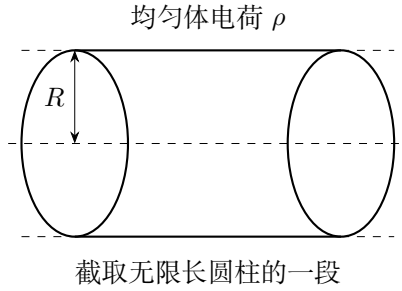


图 1.46: 题设：无限均匀带电圆柱的内外电场

练习 1.8 (均匀实心球的内外场与最大值)**.** 绝缘球半径 R, 均匀体电荷密度 $\rho > 0$。求内外电场，判断场强最大位置；若半径变为 $2R$，分别讨论保持 ρ 与保持总电荷的变化。

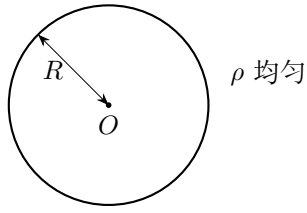


图 1.47: 题设：均匀实心球的内外场与最大值

练习解答

练习 1.1

解　合场及其变化率

图 1.40 中距中点 y 的点，两电场横向分量抵消，竖直分量相加。对 $y>0$，

$$E_y=\frac{2kqy}{(a^2+y^2)^{3/2}}.$$

这里导数的计算须对 $y(a^2+y^2)^{-3/2}$ 同时求两因子的导数：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}y}&=2kq\left[(a^2+y^2)^{-3/2}-3y^2(a^2+y^2)^{-5/2}\right]\\&=2kq\frac{a^2-2y^2}{(a^2+y^2)^{5/2}}.\end{aligned}$$

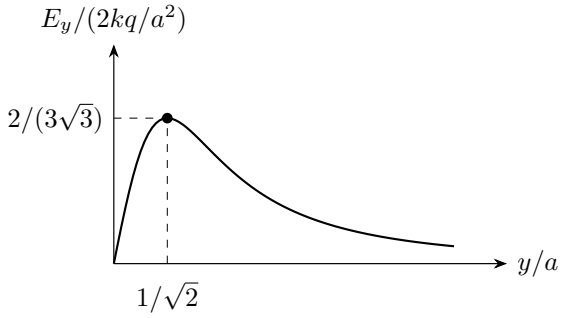


图 1.48: 用两点电荷的合场作无量纲曲线，最大点由导数符号改变确定

最大场强的位置

导数的分母为正，令 $a^2-2y^2=0$，正侧得 $y=a/\sqrt{2}$；两侧导数由正变负，符合图 1.48 的峰值。代回合场，

$$E_{\max}=\frac{2kq(a/\sqrt{2})}{(a^2+a^2/2)^{3/2}}=\frac{2kq}{a^2}\frac{1/\sqrt{2}}{(3/2)^{3/2}}=\frac{4kq}{3\sqrt{3}a^2}.$$

中垂线负侧有对称位置 $y=-a/\sqrt{2}$，场方向向下、大小相同。

曲线两端

$y\to 0$ 时对称抵消，$|y|\to\infty$ 时回到总电荷 $2q$ 的远场，分别对应曲线的中点零值和远处衰减。

练习 1.2

解　小位移展开和电荷符号

图 1.41 的轴向场为 $E_x = kQx/(R^2+x^2)^{3/2}$。先提出 R^3，令 $z = x^2/R^2$，得到 $E_x = (kQx/R^3)(1+z)^{-3/2}$。对 $F(z) = (1+z)^{-3/2}$ 求导为 $F'(z) = -\frac{3}{2}(1+z)^{-5/2}$，所以 $F(0) = 1$、$F'(0) = -3/2$，从而

$$E_x = \frac{kQx}{R^3}\left[1 - \frac{3x^2}{2R^2} + O\left(\frac{x^4}{R^4}\right)\right].$$

当 $|x| \ll R$ 时，仅保留关于 x 的一次项，才有 $E_x \simeq kQx/R^3$。力为 $F_x = qE_x$，要成为指向原点的回复力，需 $q < 0$。

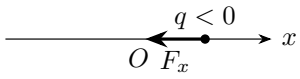


图 1.49: 解答过程：绝缘球环中的轴向小振动

运动方程与周期

图 1.49 对小位移写出 $m\ddot{x} = -(kQ|q|/R^3)x$，令 $\omega^2 = kQ|q|/(mR^3)$，方程写成 $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$。试取 $x = e^{st}$，两次求导为 $\dot{x} = se^{st}$、$\ddot{x} = s^2e^{st}$；代回得到 $(s^2+\omega^2)e^{st} = 0$。指数不为零，故特征方程为 $s^2 + \omega^2 = 0$，根为 $\pm i\omega$。因此实通解及速度为

$$x = C\cos\omega t + D\sin\omega t, \qquad \dot{x} = -C\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t.$$

若初始位置、速度为 x_0, v_0，代入 $t = 0$ 得 $C = x_0$、$D\omega = v_0$，所以 $D = v_0/\omega$。两项都在相位增加 2π 后恢复，故

$$\omega = \sqrt{\frac{kQ|q|}{mR^3}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{kQ|q|}}.$$

初始条件对应的小振幅

将通解写为 $x = A\cos(\omega t - \varphi)$ 并展开余弦，比较系数得 $A\cos\varphi = C$、$A\sin\varphi = D$；平方相加，$A^2 = C^2 + D^2 = x_0^2 + (v_0/\omega)^2$。因此小振动条件应落实为 $\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \ll R$。轴向约束使这一回复力控制全部允许运动，振幅远小于 R 时，高阶力相对线性力很小，所得周期适用于整个小振动。

练习 1.3

解　两个电荷各自的平衡

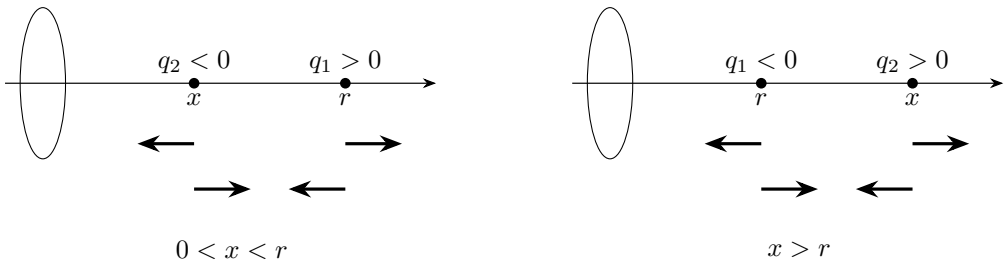
令图 1.42 中另一位置为 $x \neq r$。环在正轴上的场为 $E(s) = kQs/(R^2+s^2)^{3/2} > 0$。对两点电荷分别除以非零的受力电荷，外场抵消条件为

$$E(r) + kq_2\frac{r-x}{|r-x|^3} = 0, \qquad E(x) + kq_1\frac{x-r}{|x-r|^3} = 0.$$

带符号的参数关系

因此严格的参数关系为

$$q_1 = Q\frac{x(r-x)|r-x|}{(R^2+x^2)^{3/2}}, \qquad q_2 = -Q\frac{r(r-x)|r-x|}{(R^2+r^2)^{3/2}}.$$



$0 < x < r$　　$x > r$

上排箭头为环的力，下排为另一个点电荷的力

图 1.50: 两个分支中环场均指向正轴；受力方向随点电荷符号改变，相互吸引力成对出现

内侧位置的受力

图 1.50 左图对应 $0 < x < r$ 分支：外侧 $q_1 > 0$、内侧 $q_2 < 0$。外侧正电荷受环向右排斥及内负电荷向左吸引，内侧负电荷受环向左吸引及外正电荷向右吸引，方向可以平衡。令

$$f(x) = \frac{x(r-x)^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \quad (0 < x < r).$$

内侧位置的解数

其两端都趋零，且在区间内 $f > 0$，可先写

$$\ln f = \ln x + 2\ln(r-x) - \frac{3}{2}\ln(R^2+x^2).$$

逐项求导，并保留内函数导数 -1、$2x$，得

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f} &= \frac{1}{x} + \frac{2(-1)}{r-x} - \frac{3}{2}\frac{2x}{R^2+x^2} \\ &= \frac{(r-x)(R^2+x^2) - 2x(R^2+x^2) - 3x^2(r-x)}{x(r-x)(R^2+x^2)} \\ &= \frac{rR^2 - 3R^2x - 2rx^2}{x(r-x)(R^2+x^2)}.\end{aligned}$$

分母在 $0 < x < r$ 为正。记分子为 $N(x) = rR^2 - 3R^2x - 2rx^2$，其导数 $N'(x) = -3R^2 - 4rx < 0$；又 $N(0) = rR^2 > 0$、$N(r) = -2r(R^2+r^2) < 0$，故区间内恰有一次变号。解 $N(x) = 0$，即 $2rx^2 + 3R^2x - rR^2 = 0$，二次公式给

$$x = \frac{-3R^2 \pm \sqrt{9R^4 + 8r^2R^2}}{4r}.$$

负号根小于零；正号根由上述变号判断确在 $(0, r)$ 内，故唯一极大点为

$$x_* = \frac{R\sqrt{9R^2 + 8r^2} - 3R^2}{4r}.$$

故当 $0 < q_1 < Qf(x_*)$ 时有两个内侧位置；相等时一个；大于时没有。每个位置对应的 q_2 由上式确定。

外侧位置的解数

若 $x > r$，图 1.50 右图则要求 $q_1 < 0, q_2 > 0$。函数 $g(x) = x(x-r)^2/(R^2+x^2)^{3/2}$ 从 0 严格增至 1，为验证单调性，先写 $\ln g = \ln x + 2\ln(x-r) - \frac{3}{2}\ln(R^2+x^2)$，逐项求导、通分得

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-r} - \frac{3x}{R^2+x^2} = \frac{2rx^2 + 3R^2x - rR^2}{x(x-r)(R^2+x^2)}.$$

在 $x > r$ 时，分母为正，分子中 $2rx^2 > 0$、$3R^2x - rR^2 > 2rR^2 > 0$，故 $g' > 0$。因此 $-Q < q_1 < 0$ 时有唯一外侧位置；$q_1 \le -Q$ 时没有有限解。

从水平线读出平衡位置

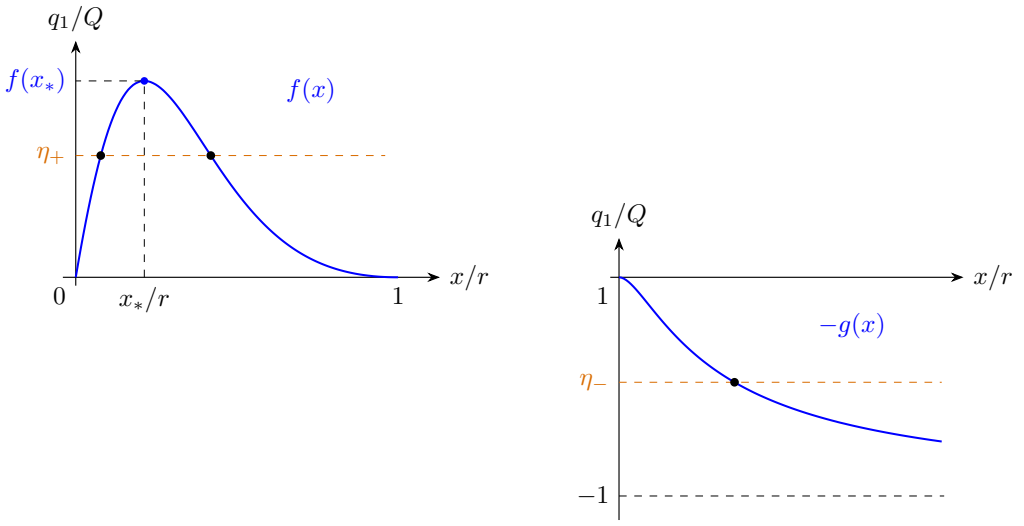


图 1.51: 取 $R/r = 1/2$ 示意，水平线与曲线的交点给出平衡位置

图 1.51 取 $R/r = 1/2$，横轴为 x/r，纵轴为按平衡条件所需的 q_1/Q。左图画 $f(x)$，右图画 $-g(x)$。给定 q_1 后，横线的高度随之确定。每一个交点都给出一个可取的 x，再把该位置代入上面的参数式求 q_2。当正的横线抬到左图峰顶时，两个位置合为一个。右图的曲线趋近 -1，在 $-1 < q_1/Q < 0$ 时恰有一个交点。

练习 1.4

解　面电荷和两侧场

图 1.43 的导体内外电场法向分量满足 $E_{外} - E_{内} = \sigma/\varepsilon_0$，所以 $\sigma = \varepsilon_0 E$。把极小表面元的场与其余电荷的场分开：面元自身在两侧的场为 $\pm\sigma/(2\varepsilon_0)$，其余电荷的场在跨越该面元时连续，记为 $E_{他}$。

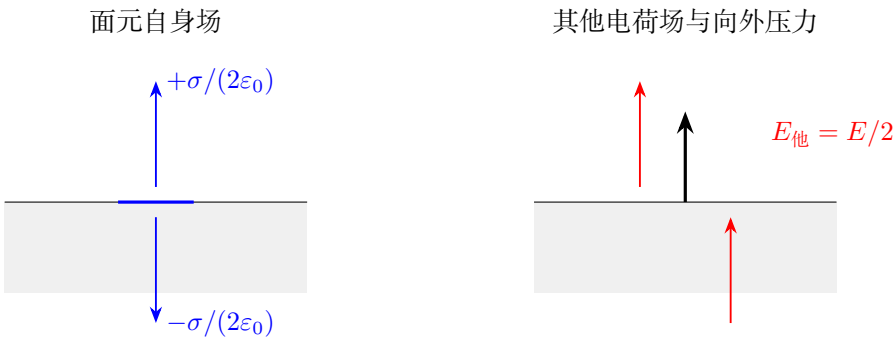


图 1.52: 在一个小面元两侧分开表示自身场与其他电荷场，取外法线向上

表面元所受的外场

按图 1.52，外侧 $E = E_{他} + \sigma/(2\varepsilon_0)$，内侧 $0 = E_{他} - \sigma/(2\varepsilon_0)$，因此 $E_{他} = E/2$。

向外电压力

单位面积力为 $\sigma E_{他} = \varepsilon_0 E^2/2$，沿外法线。表面元的受力由其余电荷的场 $E_{他} = E/2$ 决定，因而压力中的二分之一来自两侧场的平均。

练习 1.5

解　源点与轴向投影

图 1.44 中 y 与 $-y$ 两微元的竖直分量抵消。位于 y 的微元 $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}y$，到 P 距离 $\sqrt{x^2+y^2}$，水平方向投影为 $x/\sqrt{x^2+y^2}$。

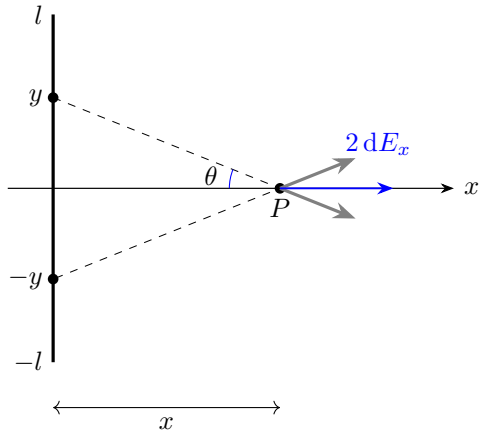


图 1.53: 对称微元的横向投影相加；积分上下限在原线段两端

按线段积分

由图 1.53，

$$E_x = k\lambda x \int_{-l}^{l} \frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

令 $y = x\tan\theta$，则 $\mathrm{d}y = x\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，分母为 $x^3\sec^3\theta$。上下限成为 $-\theta_0, \theta_0$，其中 $\theta_0 = \arctan(l/x)$，于是

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{k\lambda}{x}\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \cos\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{k\lambda}{x}[\sin\theta]_{-\theta_0}^{\theta_0} \\ &= \frac{2k\lambda}{x}\sin\theta_0 = \frac{2k\lambda l}{x\sqrt{x^2+l^2}}. \end{aligned}$$

最后一步的正弦由图中两直角边 x, l 与斜边 $\sqrt{x^2+l^2}$ 给出。

无限线与远场

$l \to \infty$ 时 $E_x = 2k\lambda/x = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 x)$；$x \gg l$ 时 $E_x \simeq k(2\lambda l)/x^2$，总电荷为 $2\lambda l$。两个极限分别回到无限直线和有限总电荷点模型。

练习 1.6

解　圆弧微元与方向

图 1.45 中角度 θ 的正微元在圆心产生的场指向微元的反方向。电荷 $\mathrm{d}q = \lambda R\,\mathrm{d}\theta$，故轴向分量 $\mathrm{d}E_x = -k\lambda\cos\theta\ \mathrm{d}\theta/R$，竖直分量关于 x 轴抵消。

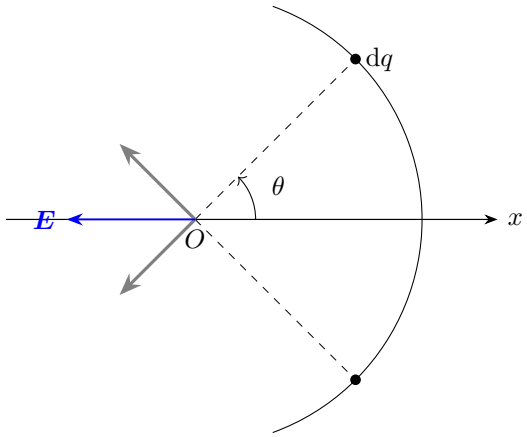


图 1.54: 正微元在圆心的场背离该微元；对称的两个微元只留下负 x 分量

极角积分

按图 1.54，

$$E_x = -\frac{k\lambda}{R}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{k\lambda}{R}[\sin\theta]_{-\alpha}^{\alpha} = -\frac{k\lambda}{R}\big(\sin\alpha - \sin(-\alpha)\big).$$

使用 $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ 后，

$$E_x = -\frac{2k\lambda}{R}\sin\alpha, \qquad E_y = 0.$$

半圆与整圆

半圆弧对应 $\alpha = \pi/2$，场大小 $2k\lambda/R$，指向没有电荷的一侧。整圆 $\alpha = \pi$ 时场为零，符合对称性；$\alpha \to 0$ 时圆弧电荷量趋零，场也趋零。半圆弧的总电荷为 $Q = \pi R\lambda$，也可将半圆结果写成 $E = 2kQ/(\pi R^2)$。

练习 1.7

解　柱对称和侧面通量

图 1.46 的无限长及轴对称使电场径向，且仅依赖 r。选同轴半径 r、长 h 的柱形高斯面，两端面无通量，侧面通量为 $E2\pi rh$。

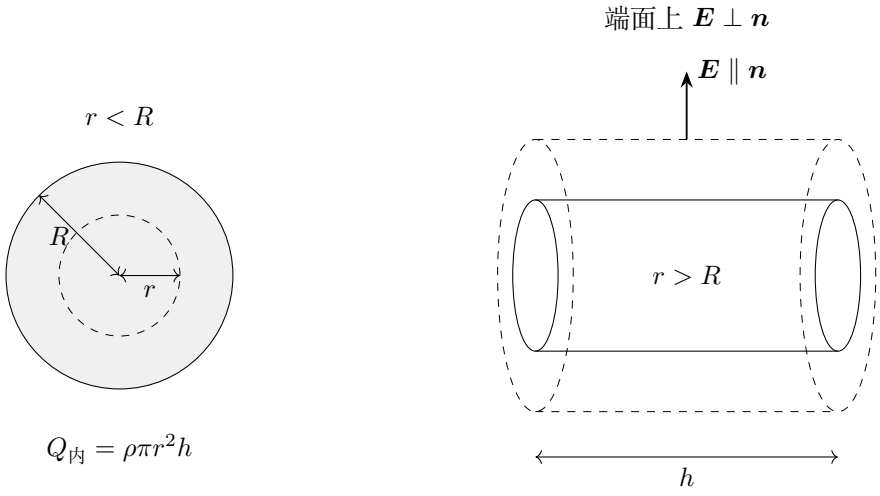


图 1.55: 左图为柱内高斯面的横截面；右图为柱外高斯面，端面无通量、侧面有通量

柱内与柱外

图 1.55 中当 $r < R$ 时包围电荷 $\rho\pi r^2 h$，故 $E = \rho r/(2\varepsilon_0)$；当 $r > R$ 时包围 $\rho\pi R^2 h$，故 $E = \rho R^2/(2\varepsilon_0 r)$，均向外。

表面与远处

两式在 $r = R$ 都给 $\rho R/(2\varepsilon_0)$，场连续。中心 $r = 0$ 场为零；远处相当于线密度 $\lambda = \rho\pi R^2$ 的无限线电荷，$E = \lambda/(2\pi\varepsilon_0 r)$。

练习 1.8

解　球内和球外电场

对图 1.47 作同心高斯面。球内包围电荷 $Q_r = 4\pi\rho r^3/3$，所以 $4\pi r^2 E = Q_r/\varepsilon_0$，得到 $E_{\text{内}} = \rho r/(3\varepsilon_0)$。球外包围 $Q = 4\pi\rho R^3/3$，故 $E_{\text{外}} = kQ/r^2 = \rho R^3/(3\varepsilon_0 r^2)$。

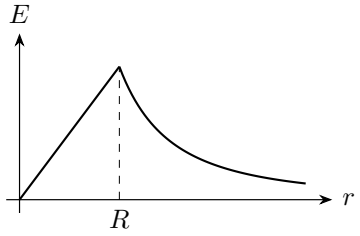


图 1.56: 解答过程：均匀实心球的内外场与最大值

表面最大值

图 1.56 中场在球内线性上升、球外按平方反比下降，最大值在表面 $r = R$，为 $E_{\max} = \rho R/(3\varepsilon_0) = kQ/R^2$。

两种保持量下的半径变化

保持 ρ 且半径加倍，最大场加倍；保持 Q 且半径加倍，最大场变为四分之一。同一公式 $E_{\max} = \rho R/(3\varepsilon_0) = kQ/R^2$，分别在固定 ρ 和固定 Q 时给出这两种变化。

静电

物理竞赛一轮讲义

第二讲

电势与静电能

2026

目录

第二讲　电势与静电能 **1**

2.1　电场力的功与电势差 1

2.2　从电势的空间变化求电场 2

2.3　电势的叠加与常见分布 4

2.4　对称、等距与导体等势 7

2.5　静电能来自装配电荷的功 8

2.6　中心电场中的能量与角动量 10

2.7　例题与分析 11

2.8　本讲小结 24

2.9　练习 25

练习解答 28

第二讲　电势与静电能

2.1　电场力的功与电势差

上一讲用场强描述电荷在空间各点怎样受力。本讲从移动电荷时的功出发，引入电势，把矢量场的许多计算转化为标量的叠加和求导。

先取位于 O 的点电荷 Q，把试探电荷 q 沿任意路径从 A 移到 B。场力沿径向，路径微元在径向的投影为 $\mathrm{d}r = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，所以

$$\delta W = \frac{kQq}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{kQq}{r^2}\,\mathrm{d}r.$$

沿路求和后，

$$W_{A\to B} = kQq\int_{r_A}^{r_B} r^{-2}\,\mathrm{d}r = kQq[-r^{-1}]_{r_A}^{r_B} = kQq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right).$$

结果只含两个端点的距离。任意固定电荷分布可分成微元，每个微元的功都有这一性质，叠加以后仍与路径无关。因此静电场为保守场，沿闭合回路有 $\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$。

$$\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = V_A - V_B$$

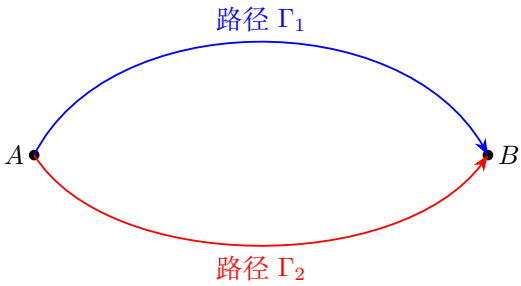


图 2.1: 两条路径连接同一对端点；静电场中功由端点电势差确定

图 2.1 的两条路径都从 A 指向 B，两个积分相等。沿 Γ_1 去、反向沿 Γ_2 返回，便组成环量为零的闭合回路。电势差定义为单位电荷的功：

$$U_{AB} = V_A - V_B = \frac{W_{A\to B}}{q} = \int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

选定参考点 O、规定 $V_O = 0$，就得到各点的电势 $V_A = U_{AO}$。参考点改变时，各处电势加同一常数，任意两点电势差保持原值。电势的单位为伏特，$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{J/C}$。

2.1.1　电势能与动能怎样变化

固定外场中的小电荷有势能 $U_{\mathrm{e}} = qV$，电场力做功等于势能减少：

$$W = q(V_A - V_B) = -\Delta U_{\mathrm{e}}.$$

仅受静电力时，这份功转为动能；缓慢搬运且初末动能相同时，外力功等于势能增加。

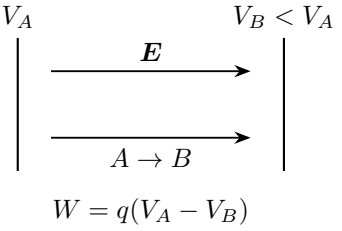


图 2.2: 同一电势差对应两种电荷的不同做功

图 2.2 中从 A 到 B 电势降低。正电荷的 qV 降低，释放势能；负电荷的 qV 升高，沿这一路径运动需要原有动能或外界做功。电子由静止释放后，受力沿电场反向，起初向较高电势运动，势能 $-eV$ 随之降低。练习 2.9 据此写电子的速度关系。

2.2　从电势的空间变化求电场

取很小的位移，$\mathrm{d}V = -\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。沿 x 轴移动，保持 y, z 不变，便有 $\mathrm{d}V = -E_x\,\mathrm{d}x$；其余方向同理，得到

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \boxed{\boldsymbol{E} = -\nabla V}.$$

电势梯度给出电势上升最快的方向和变化率，电场沿相反方向。沿等势面任意切向移动都有 $\mathrm{d}V = 0$，故电场沿该面的法向。

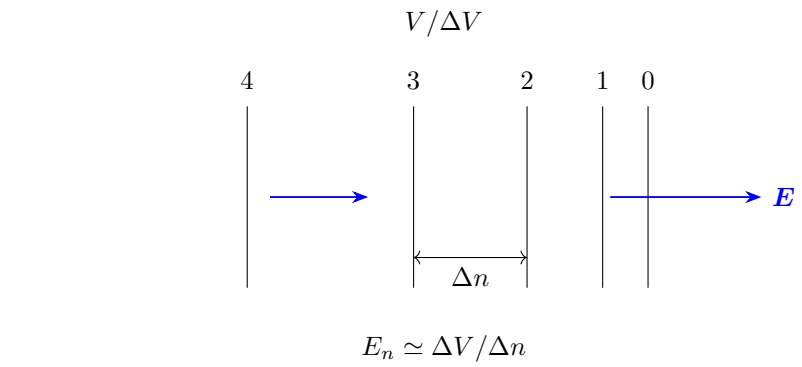


图 2.3: 相邻等势线均相差同一电势；右侧更密，法向场更强

图 2.3 中，相邻等势面的电势差固定为 ΔV，法向间距为 Δn，局部场强近似为 $|\Delta V|/\Delta n$，间距小处场强大。沿图中的同一等势线移动，切向分量为零；垂直该线方向的电势变化给出法向场。

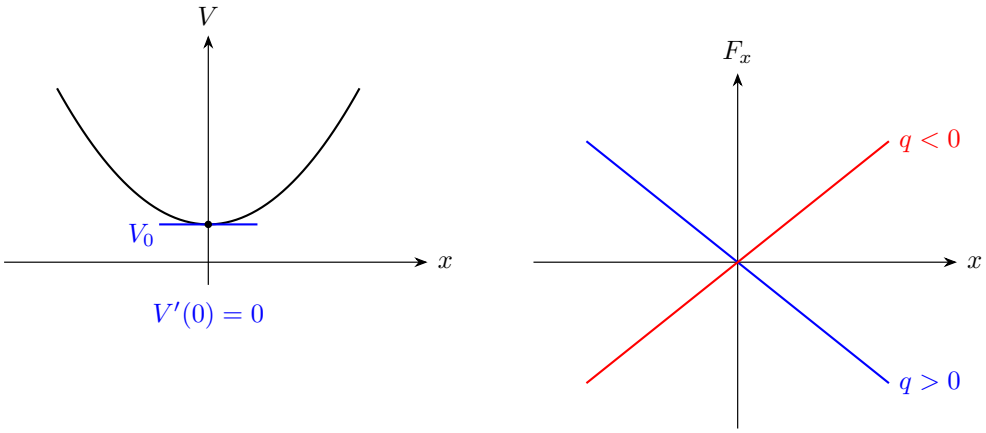


图 2.4: 同一电势曲线的斜率决定场；稳定性则由电荷的势能曲率决定

图 2.4 在给定方向上取 $V(x) = V_0 + cx^2/2$、$c > 0$。固定其他坐标求导，有 $E_x = -cx$，小正电荷受力 $F_x = -qcx$，沿这个方向有回复作用；负电荷则受到与位移同向的力。图像的斜率确定场分量，电势的常数项 V_0 只决定零点。

2.3　电势的叠加与常见分布

2.3.1　点电荷与连续分布

有限电荷分布通常以无穷远为零点。点电荷的电势沿径向积分，先用有限上限 L：

$$V(r)=\lim_{L\to\infty} kq\int_r^L s^{-2}\,\mathrm{d}s=\lim_{L\to\infty} kq[-s^{-1}]_r^L$$
$$=\lim_{L\to\infty} kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{L}\right)=\frac{kq}{r}.$$

各个电荷在同一场点的电势作代数相加，连续分布则化成积分：

$$V(P)=k\sum_i\frac{q_i}{r_i},\qquad V(P)=k\int\frac{\mathrm{d}q}{s}.$$

电荷的正负号决定各项的正负，距离作为正量进入分母。例 2.2 用单根棒的电势相减处理移去一棒，练习 2.6 展开有限线段的电势积分。

2.3.2　圆环轴上的等距

轴上距环心 x 的点到半径 R 的圆环各微元等距，所以

$$V(x)=\frac{k}{\sqrt{R^2+x^2}}\int\mathrm{d}q=\frac{kQ}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

固定 Q,R 对 x 用链式法则求导，

$$E_x=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-kQ\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2+x^2)^{-3/2}(2x)=\frac{kQx}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

均匀分布时，横向分量由对称性抵消，合场沿轴。任意分布仍有相同的轴上电势和轴向分量，横向场由各方位电荷的矢量和决定。例 2.3 比较离散电荷的不同分布，例 2.4 将余弦密度分布逐项积分，说明轴上等距与横向不对称怎样同时出现。

2.3.3　球壳与实心球的电势

均匀球壳半径 R、总电荷 Q。外场等效为点电荷，$V(r)=kQ/r$；内部场为零，从表面移到内部任一点的电势差也为零，所以壳内 $V=kQ/R$。

均匀实心球外部同样有 $V(R)=kQ/R$，球内场为 $E_r=kQr/R^3$。由表面继续向内积分，

$$V(r)=V(R)+\int_r^R\frac{kQs}{R^3}\,\mathrm{d}s=\frac{kQ}{R}+\frac{kQ}{R^3}\left[\frac{s^2}{2}\right]_r^R$$
$$=\frac{kQ}{2R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right),\qquad r\le R.$$

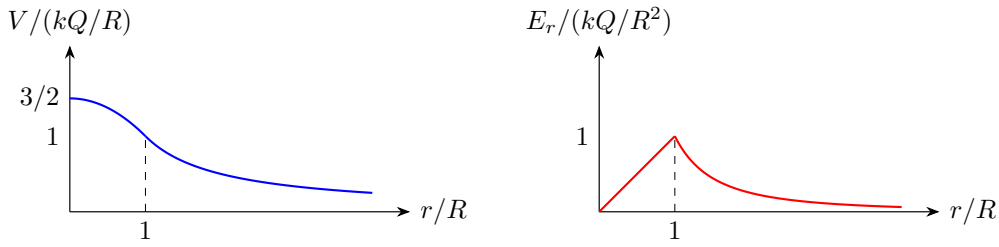


图 2.5: 实心球的电势和径向场随距离的变化

图 2.5 中，实心球的电势在球心为 $3kQ/(2R)$，到表面接上球外的 kQ/r。内外电势值和斜率连续，分别对应电势连续和电场连续；薄球壳的内侧斜率为零、外侧斜率有限，法向场在壳面跃变。

2.3.4 无限线电荷的有限参考点

图 2.6 左侧是垂直于线电荷的截面。选半径 r_0 的圆为参考等势面，沿径向从 r_0 走到 r。用 s 表示路径上各点的半径，有 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=[\lambda/(2\pi\varepsilon_0 s)]\,\mathrm{d}s$，从而

$$\begin{aligned} V(r)-V(r_0) &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{s}{r_0}\right]_{r_0}^{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}. \end{aligned}$$

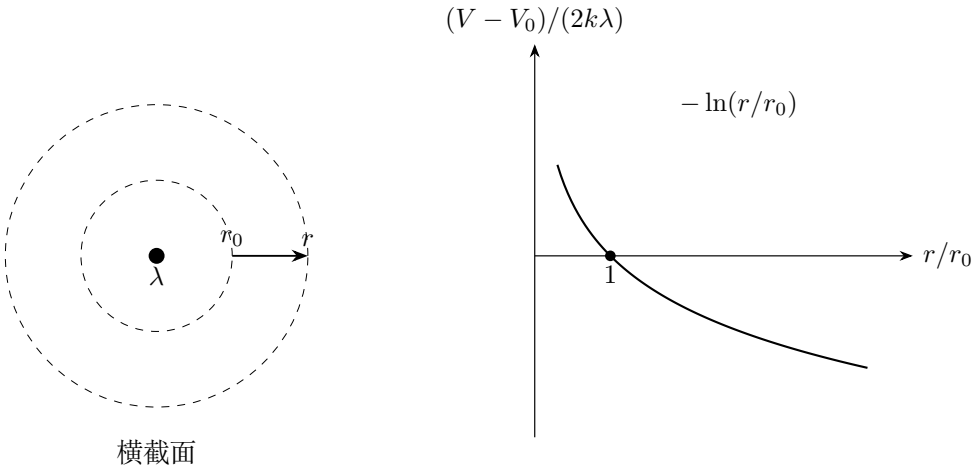


图 2.6: 无限线电荷取有限参考半径 r_0；电势差取决于半径比而非绝对零点

图 2.6 以 r_0 处为零，正线电荷的电势向外降低。任意两个有限距离的势差有限，向无穷远积分则对数发散，因此用有限位置规定参考电势。例 2.1 在无限平板间选中面为零点，依次求出三个区域的电势常数。

2.3.5　电偶极子远处的电势

从偶极中心 O 向场点 P 量出距离 r，OP 与偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的夹角为 θ。图 2.7 中，正、负电荷到中心的距离都是 a，到场点的距离分别为 r_+, r_-。由余弦定理，

$$r_\pm^2 = r^2 + a^2 \mp 2ar\cos\theta, \qquad V = kq\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right).$$

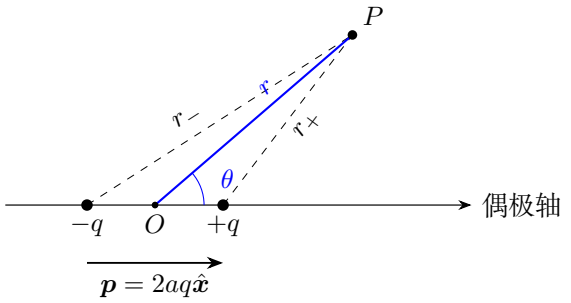


图 2.7: 偶极矩、场点的极角和两个源点到场点的距离

当 $r \gg a$ 时，令 $z_\pm = a^2/r^2 \mp 2(a/r)\cos\theta$，有 $r_\pm^{-1} = r^{-1}(1+z_\pm)^{-1/2}$。函数 $f(z) = (1+z)^{-1/2}$ 的导数为 $f'(z) = -\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}$，因此 $f(0) = 1$、$f'(0) = -1/2$。两项在一阶展开中分别为

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left[1 \pm \frac{a}{r}\cos\theta + O\left(\frac{a^2}{r^2}\right)\right].$$

相减时常数项抵消，首个非零项给出 $V \simeq kp\cos\theta/r^2$。这一电势沿偶极轴为正或负，在中垂面为零。

把首阶电势记为 $V_{\mathrm{dip}} = kp\cos\theta/r^2$。沿径向求导时固定 θ，沿极角方向求导时固定 r，极角的微小改变对应位移 $r\,\mathrm{d}\theta$。由此得到场的首阶项

$$E_r \simeq -\frac{\partial V_{\mathrm{dip}}}{\partial r} = -kp\cos\theta(-2r^{-3}) = \frac{2kp\cos\theta}{r^3},$$

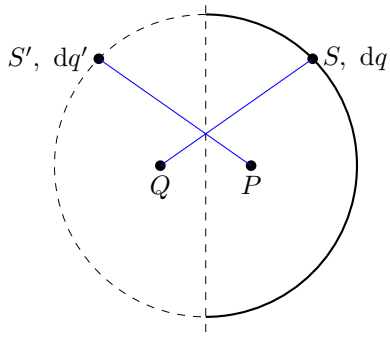
$$E_\theta \simeq -\frac{1}{r}\frac{\partial V_{\mathrm{dip}}}{\partial \theta} = -\frac{kp}{r^3}(-\sin\theta) = \frac{kp\sin\theta}{r^3}.$$

练习 2.7 由这个几何模型求轴线和中垂线的远场，和上一讲直接叠加所得的方向、大小联系起来。

2.4 对称、等距与导体等势

2.4.1 镜像点的电势关系

空间反射同时变换源点与场点时，两者距离保持相等，每一项 $k\,\mathrm{d}q/s$ 也就相等。这给出了用镜像补成完整分布的方法。



$$PS' = QS$$

$$V_{全}(P) = V_{半}(P) + V_{半}(Q)$$

图 2.8: 补成完整球壳后，镜像微元到镜像场点的距离相同；真实半球的两个势之和可由全壳得到

图 2.8 把带电半球补成完整均匀球壳。设半球总电荷为 q，球内的镜像点 P, Q 满足：镜像半球在 P 的贡献等于真实半球在 Q 的贡献。因此

$$V(P) + V(Q) = \frac{2kq}{R}.$$

在开口圆盘平面内，场点反射后与自身重合，两半球贡献相等，所以半球电势为 kq/R，在整个圆盘内部恒定。例 2.7 求另一镜像点的电势，例 2.9 再由平面内的电势变化求切向场。

2.4.2 导体内的零场与共同电势

导体中可移动的电荷受到电场力后会重新分布，直到均匀导体内部总场为零，达到静电平衡。内部任意路径的电势差积分为零，连通导体因而等势。导体表面也是等势面，外侧场沿表面法线。

外部点电荷使中性金属球的表面电荷重排。对球心，每个表面微元距离都是 R，感应电荷的净量为零，因而

$$V_{感}(O) = \frac{k}{R}\int \mathrm{d}q_{感} = 0.$$

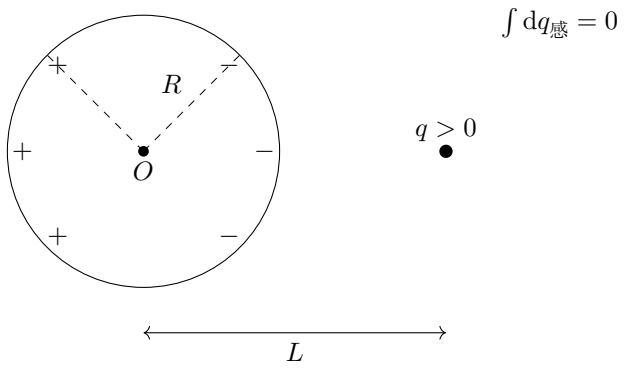


图 2.9: 以外电荷 $q > 0$ 示意感应；所有球面微元到球心等距，总感应电荷仍为零

图 2.9 中，外点电荷 q 距球心 L，它贡献 kq/L，于是 $V_O = kq/L$。再由金属等势推广到整个金属球，便得到例 2.5 的结果。这里用到的是球心等距与电荷守恒，表面的非均匀密度可以保留在积分中而自然消去。

若金属壳内腔含总电荷 q，在金属内部取包围空腔的高斯面，零场使内部净电荷为零，内表面总量就是 $-q$。壳净量为 Q 时，外表面总量为 $Q + q$。例 2.8 进一步利用两个球面对球心的等距，将点电荷、内表面和外表面三项电势相加；练习 2.2 则按连接次序求三个同心导体的电荷转移。

2.5　静电能来自装配电荷的功

2.5.1　点电荷组的相互作用能

把相距很远的电荷依次缓慢搬到指定位置。先放 q_1，接着放 q_2 时做功 kq_1q_2/r_{12}；再放 q_3 时，外力功为 $q_3[kq_1/r_{13} + kq_2/r_{23}]$。

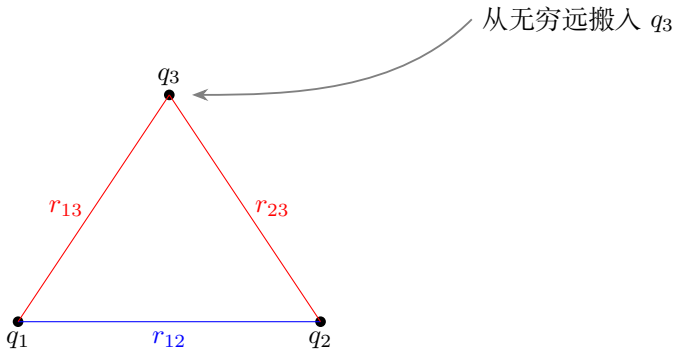


图 2.10: 逐个装配三个点电荷；最后搬入的电荷与已放置的两者各增加一对相互作用能

图 2.10 中每条边表示一对相互作用。装配完成时每一对恰计一次，故

$$W_{\mathrm{e}}=\sum_{i<j}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_i q_iV_{\text{他}}(i).$$

$V_{\text{他}}(i)$ 是其他电荷在第 i 个位置产生的电势。逐点求和时每对出现两次，所以乘 $1/2$；逐对求和时每对出现一次。练习 2.4 将三个电荷的装配能与释放后仍保留的一对能量联系。

小电荷 q 置于已经建立的固定外场，势能为 $qV_{\text{外}}$。若讨论随电量建立的感应场，令其响应 $V_{\text{感}}(q')=Cq'$，沿充电过程做功为

$$\int_0^q V_{\text{感}}(q')\,\mathrm{d}q'=C\int_0^q q'\,\mathrm{d}q'=C\left[\frac{q'^2}{2}\right]_0^q=\frac{qV_{\text{感}}(q)}{2}.$$

这个二分之一来自充电时电势从零逐渐增至末值的过程。

2.5.2 带电球壳和实心球的自能

连续带电体还包含其各部分之间的作用能，称为自能。对半径固定的球壳，已充电量为 Q' 时，表面电势 kQ'/R；再从远处加入 $\mathrm{d}Q'$，外力功为 $kQ'\,\mathrm{d}Q'/R$。从零积到 Q：

$$W_{\text{壳}}=\frac{k}{R}\int_0^Q Q'\,\mathrm{d}Q'=\frac{k}{R}\left[\frac{Q'^2}{2}\right]_0^Q=\frac{kQ^2}{2R}.$$

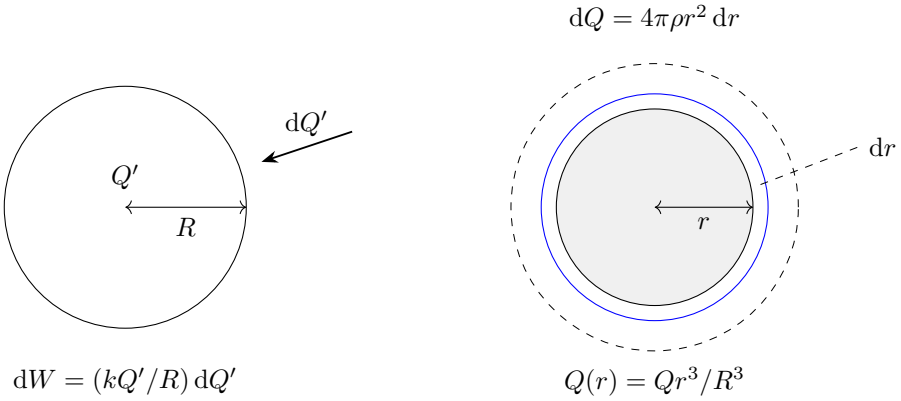


图 2.11: 固定半径球壳逐渐加电荷，与均匀实心球逐层增加半径是两种不同装配过程

图 2.11 右图按半径从小到大装配均匀实心球。已形成的内球电荷为 $Q(r)=Qr^3/R^3$，加入的薄壳电荷为 $\mathrm{d}Q=3Qr^2\,\mathrm{d}r/R^3$，两者相互作用给出

$$W_{\text{球}}=\int_0^R\frac{kQ(r)}{r}\,\mathrm{d}Q(r)=\frac{3kQ^2}{R^6}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{3kQ^2}{R^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R=\frac{3kQ^2}{5R}.$$

每个新壳只与已有内球相互作用一次。练习 2.8 按相同半径和末态各壳电荷比较重新分配前后的自能。

2.6　中心电场中的能量与角动量

带电质点在固定球对称电场中受中心力，关于球心的角动量 $\ell=mrv_\perp$ 保持不变。将动能分成径向和切向两项，机械能为

$$E=\frac{1}{2}m\dot r^2+\frac{\ell^2}{2mr^2}+qV(r).$$

把后两项合称为有效势 $U_{\text{eff}}(r)$，则 $E-U_{\text{eff}}$ 就是径向动能。$E=U_{\text{eff}}$ 处径向速度为零，给出轨迹的转向半径。

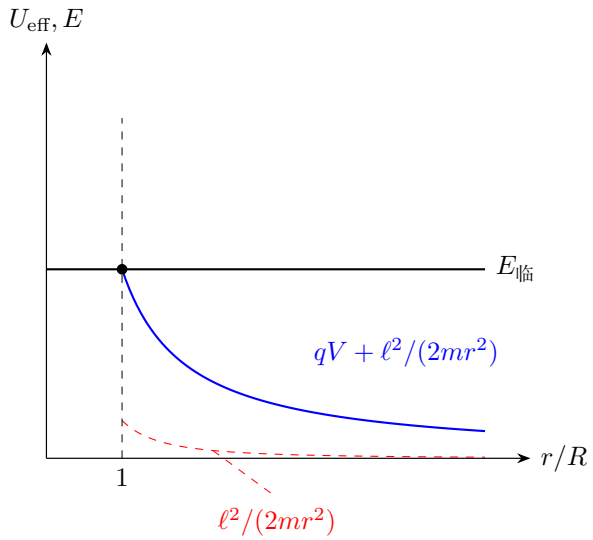


图 2.12: 排斥库仑场的有效势示意：总能量与有效势相交处为径向转折点

图 2.12 中，可达区域满足 $E\ge U_{\text{eff}}$。对正电荷入射正带电球，$V(r)=V_sR/r$，固定 ℓ 求导：

$$U'_{\text{eff}}(r)=\frac{\ell^2}{2m}(-2)r^{-3}+qV_sR(-1)r^{-2}=-\frac{\ell^2}{mr^3}-\frac{qV_sR}{r^2}<0.$$

从远处向球面靠近，有效势不断升高；能碰到表面时，表面径向动能非负，擦碰时恰为零。例 2.10 将入射线距球心的距离 b 写入 $\ell = mv_\infty b$，从这一临界条件求最大 b。

2.7 例题与分析

例 2.1 (无限异号平面之间的电势)**.** 两无限平面位于 $x = -a, +a$，面密度分别为 $-\sigma, +\sigma$。取 $V(0) = 0$，求全空间电场和电势图。

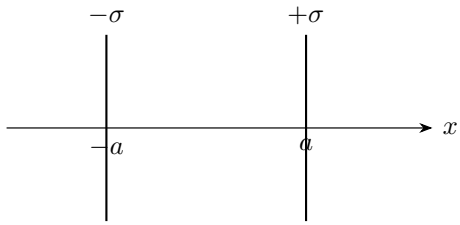


图 2.13: 题设：无限异号平面之间的电势

解　分区电场与板间电势

图 2.13 中两面之间电场从右侧正面指向左侧负面，$E_x = -\sigma/\varepsilon_0$；外部两场抵消，$E_x = 0$。由 $-\mathrm{d}V/\mathrm{d}x = E_x$，板间 $\mathrm{d}V = (\sigma/\varepsilon_0)\,\mathrm{d}x$。参考点 $V(0) = 0$ 与场点 x 都在板间时，

$$V(x) - V(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^x \mathrm{d}s = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}[s]_0^x = \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}.$$

这相当于把不定积分中的常数 C 用 $V(0) = 0$ 确定为零。

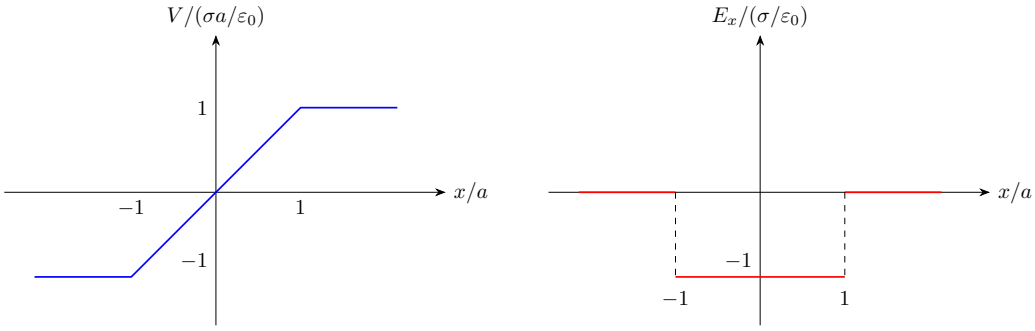


图 2.14: 左图电势连续而斜率分段；右图电场在两个带电面处跳变

两侧常电势

图 2.14 两板面处的电势连续，外部又为常数，因此

$$V(x)=\begin{cases}-\sigma a/\varepsilon_0, & x\le -a,\\ \sigma x/\varepsilon_0, & -a\le x\le a,\\ \sigma a/\varepsilon_0, & x\ge a.\end{cases}$$

电势斜率与场方向

场向左而电势向右升高，符号一致。板面电势没有跳变，跳变的是电场；外部的常电势分别延续左、右板面的数值，两个区域之间保留电势差 $2\sigma a/\varepsilon_0$。

例 2.2 (移去正三角形的一根带电棒)**.** 三根相同绝缘棒组成正三角形 abc，每根均匀带等量电荷。中心 A，B 为 A 关于边 bc 所在直线的镜像。原电势为 V_A, V_B。移去 bc 棒，保持其余分布不变，求新电势。

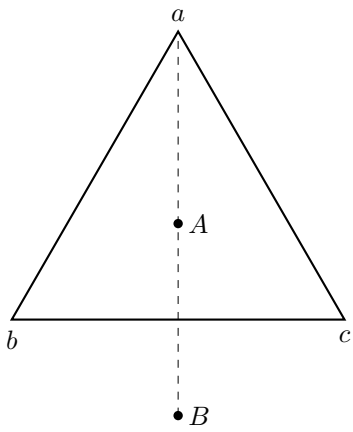


图 2.15: 题设：移去正三角形的一根带电棒

解　中心的旋转对称

在图 2.15 的中心 A，三棒可由 120° 旋转互换，因此每棒电势贡献为 $V_A/3$。移去 bc 后，A 剩余电势 $V_A'=2V_A/3$。

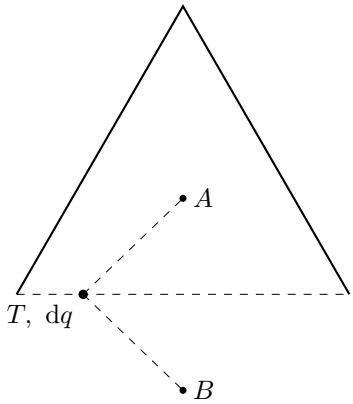


图 2.16: 解答过程：移去正三角形的一根带电棒

被移去棒与镜像点

在图 2.16 中，把被移去棒上的源点记为 T。反射保持 $TA = TB$，因而先有逐微元的 $\mathrm{d}V_{bc}(A) = k\,\mathrm{d}q/TA = k\,\mathrm{d}q/TB = \mathrm{d}V_{bc}(B)$，再积分才得到两点同一根棒的贡献相等。

两点的新电势

由上面的逐微元等距，bc 棒在 B 的贡献同为 $V_A/3$。由电势代数叠加，$V_B' = V_B - V_A/3$。两问用了不同对称：三棒在中心的旋转等价，以及两场点关于被移去棒的反射等距。中心 A 用旋转对称分成三等份，镜像点 B 则减去已经由等距确定的 bc 棒贡献。

例 2.3 (圆周电荷的随机与均匀分布)**.** $N \geq 2$ 个同电荷 q 均位于半径 R 的圆周，一种均匀分布，一种位置任意。比较轴线上 z 处的电势、轴向场分量和完整电场。

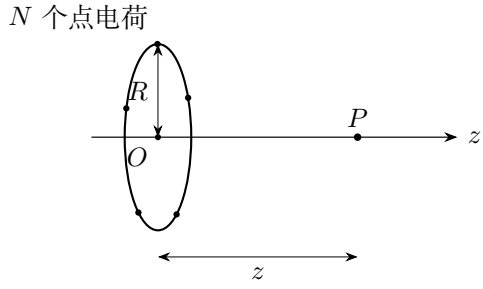


图 2.17: 题设：圆周电荷的随机与均匀分布

解　轴上等距与电势

图 2.17 的轴线上场点到每个电荷距离都为 $s=\sqrt{R^2+z^2}$，因此无论方位怎样分布，电势 $V=kNq/s$。两种分布沿轴具有同一电势函数，接下来由它的导数求轴向场。

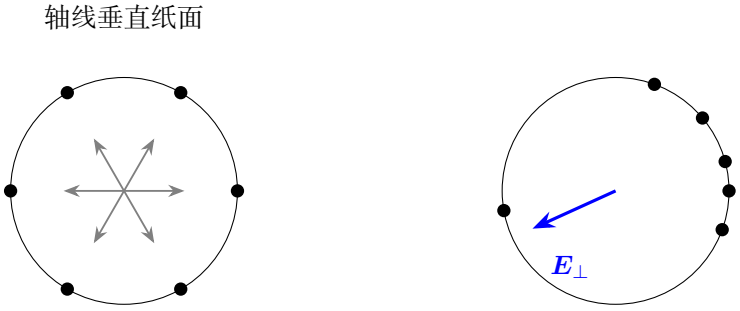


图 2.18: 以环面正视图比较两种分布；均匀分布的横向矢量和为零，任意分布不保证抵消

横向矢量的叠加

图 2.18 均匀分布的横向分量成对或按旋转矢量和抵消，完整场仅有轴向分量；任意分布的横向分量通常不为零，所以完整电场一般不同。

轴向电势的导数

固定 R,N,q，沿轴求导：

$$E_z=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[kNq(R^2+z^2)^{-1/2}]=-kNq\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2+z^2)^{-3/2}(2z)=\frac{kNqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

横向场则由各电荷的方位矢量求和。均匀分布使这一矢量和为零，任意分布保留自己的横向合场。

例 2.4 (圆环电势与非均匀分布)**.** 圆环半径 R、线电荷密度均匀为 λ。求轴线 x 处电势；若密度改为 $\lambda(\theta)=\lambda_0(1+\eta\cos\theta)$，$|\eta|\le 1$，求轴上电势与环心场。

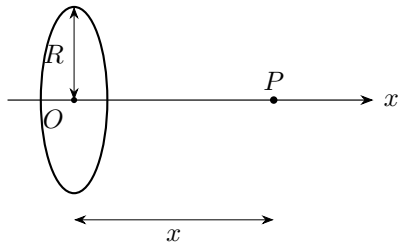


图 2.19: 题设：圆环电势与非均匀分布

解　均匀圆环的电势积分

图 2.19 均匀环上取方位角 φ，微元电荷 $\mathrm{d}q=\lambda R\,\mathrm{d}\varphi$，每个微元到轴上场点的距离均为 $\sqrt{R^2+x^2}$。以无穷远为零电势，

$$V(x)=\int_0^{2\pi}\frac{k\lambda R}{\sqrt{R^2+x^2}}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{k\lambda R}{\sqrt{R^2+x^2}}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{2\pi kR\lambda}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

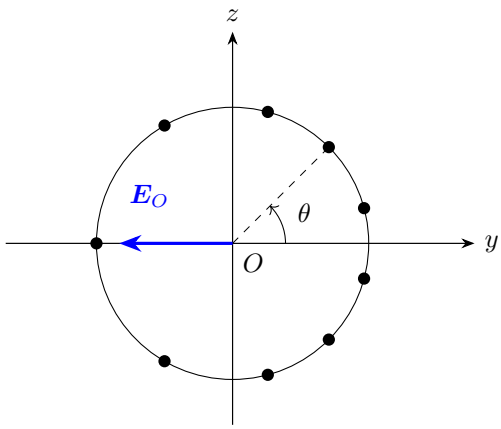


图 2.20: 环面坐标为 y,z；以 $\lambda_0>0,\eta>0$ 示意右半周电荷较多，环心场指向负 y

余弦密度的总电荷

先把非均匀密度沿圆周积分：

$$Q=\lambda_0 R\int_0^{2\pi}(1+\eta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta=\lambda_0 R[\theta+\eta\sin\theta]_0^{2\pi}=2\pi R\lambda_0.$$

余弦项改变方位分配，却不改变总电荷；轴上每个微元分母仍为同一距离，因此轴上电势不含 η。

环心的横向场

图 2.20 以 x 为轴，圆环位于 yz 面，源点写成 $(0, R\cos\theta, R\sin\theta)$。轴上电势为 $2\pi kR\lambda_0/\sqrt{R^2+x^2}$；环心的 (y,z) 场分量为

$$\boldsymbol{E}_O = -\frac{k\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi}(1+\eta\cos\theta)(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

三角函数积分与场方向

将矢量积分分为 y,z 两分量，需要以下四个定积分：

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = [-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

第三式用 $\mathrm{d}(\sin^2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$，第四式用倍角公式再逐项积分。于是 $E_y = -(k\lambda_0/R)(0+\eta\pi)$，$E_z = -(k\lambda_0/R)(0+\eta\,0) = 0$。因此只有密度余弦项的 y 投影保留下来。

环心的场由 $E_y = -\pi k\lambda_0\eta/R$ 决定。$\lambda_0\eta > 0$ 时指向 $-y$，$\lambda_0\eta < 0$ 时指向 $+y$，乘积为零时场为零。图 2.20 取 $\lambda_0 > 0, \eta > 0$，正电荷较多的右半环在环心产生向左的合场。

例 2.5 (外点电荷旁中性金属球的电势)**.** 中性金属球半径 R，距球心 O 为 $L > R$ 处固定点电荷 q。求球心与整个金属球的电势，取无穷远为零点。

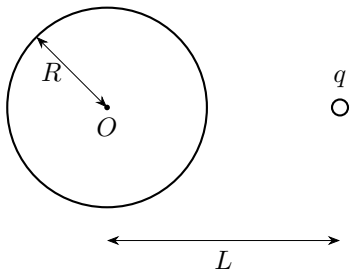


图 2.21: 题设：外点电荷旁中性金属球的电势

解　感应电荷在球心的电势

图 2.21 的外电荷使球表面重排，但中性球的感应电荷总量为零。对球心而言，每个感应面元距球心同为 R，所以它们的总电势是 $k\int \mathrm{d}q/R = 0$，无须知道面密度。

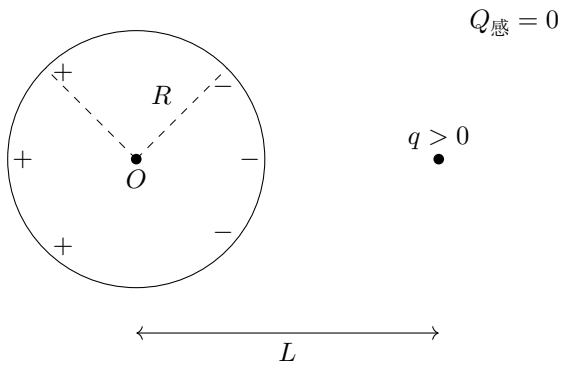


图 2.22: 以外电荷为正示意；球面微元到球心均为 R，感应电势由总量决定

连通金属的共同电势

图 2.22 因此外点电荷在球心的贡献 kq/L 就是总电势 V_O。静电平衡连通金属球内部场为零，电势处处相同，故整个球表面、内部都为 kq/L。

球心的场与势

在球心，感应场与外点电荷场反向相等，二者使金属内部总场为零。感应电势的零值则来自同半径上的感应总量为零；加上外电荷贡献后，总势为 kq/L。

例 2.6 (从电势曲线反求两个点电荷)**.** 两点电荷都在 x 轴，正半轴电势 $V(x)$ 在 $x\to 0^+$ 时趋 $+\infty$, $x\to\infty$ 时从负值趋零; 于 x_0 过零, 于 αx_0 达极小 $-V_0$, $\alpha>2$。求电荷及位置。

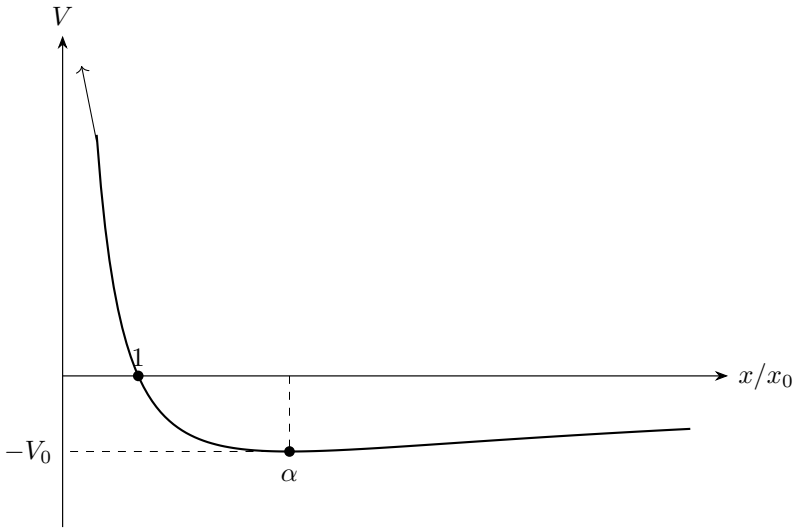


图 2.23: 满足题设形状的一条示意曲线，取 $\alpha=3$ 绘制；纵坐标仅作示意比例

解　奇点与电荷位置

图 2.23 的正无穷奇点要求原点有正电荷 q；正半轴没有别的奇点，另电荷应在负轴。远处电势为负，故另一电荷是绝对值更大的负电荷 $-Q$，位置 $-d$。于是 $V=k[q/x-Q/(x+d)]$。

零点和驻点方程

零点给 $Q/q=1+d/x_0$。对电势的两个倒数逐项求导，

$$V'(x)=k\left[-qx^{-2}+Q(x+d)^{-2}\right].$$

第二项的两个负号分别来自原电荷 $-Q$ 和倒数求导。令 $V'(\alpha x_0)=0$，便有 $q/(\alpha x_0)^2=Q/(\alpha x_0+d)^2$。设 $s=\sqrt{Q/q}>1$，代入 $d/x_0=s^2-1$，得 $\alpha s=\alpha+s^2-1$，即 $(s-1)(s+1-\alpha)=0$。因此 $s=\alpha-1$，$d=\alpha(\alpha-2)x_0$。

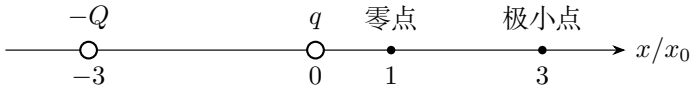


图 2.24: 与题图同取 $\alpha=3$，负电荷位于 $-3x_0$，电势在 x_0 过零、在 $3x_0$ 取极小值

由极小值求电荷量

题图取 $\alpha=3$ 时，$d=3x_0$。图 2.24 按同一横轴比例标出两个电荷的位置以及电势的零点和极小点。对一般的 $\alpha>2$，代入极小值，

$$-V_0=\frac{kq}{\alpha x_0}-\frac{kq(\alpha-1)^2}{\alpha(\alpha-1)x_0}=-\frac{kq(\alpha-2)}{\alpha x_0}.$$

位置与电势曲线

故 $q=\alpha x_0V_0/[k(\alpha-2)]$，$Q=(\alpha-1)^2q$。另一电荷在负轴 $-\alpha(\alpha-2)x_0$。$\alpha>2$ 保证 $d>0,q>0$，原点正电荷产生 $x\to0^+$ 的正发散；总电荷 $q-Q<0$ 使远处电势从负值趋零，分别对应图像两端。

例 2.7 (半球面在镜像点的电势关系)**.** 半径 R 的均匀薄半球面总电荷为 q，P,Q 是对称轴上关于球心的镜像点，且都位于完整球面以内。已知 V_P，求 V_Q。

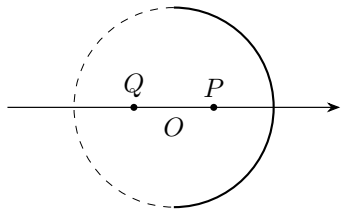
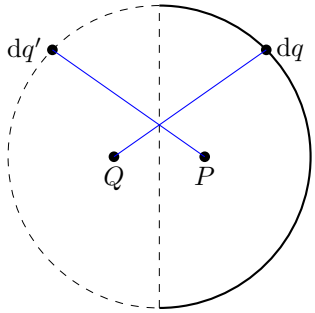


图 2.25: 题设：半球面在镜像点的电势关系

解　补成完整球壳

图 2.25 的半球面与镜像半球面合成完整均匀球壳，总电荷 $2q$。由于 P,Q 关于中平面反射，镜像半球在 P 产生的电势等于真实半球在 Q 产生的电势。



$$V_{全}(P)=V_P+V_Q$$

$$V_{全}=2kq/R$$

图 2.26: 镜像同时变换源点和场点，蓝线段等长；完整球壳内电势恒定

镜像点的电势和

图 2.26 因此完整球壳在 P 的电势为 $V_P + V_Q$。二点都在壳内，全壳电势是 $2kq/R$，故

$$V_Q = \frac{2kq}{R} - V_P.$$

球内点的共同关系

两个点都位于完整球壳内部，完整壳的贡献处处为 $2kq/R$，因此两点的电势和与它们沿轴的位置无关。

例 2.8 (球形导体空腔的球心电势)**.** 同心金属球壳内外半径 R_1, R_2，壳净电荷 Q。内腔放点电荷 q，距球心 d，$0 < d < R_1$。无外部电荷。求球心电势。

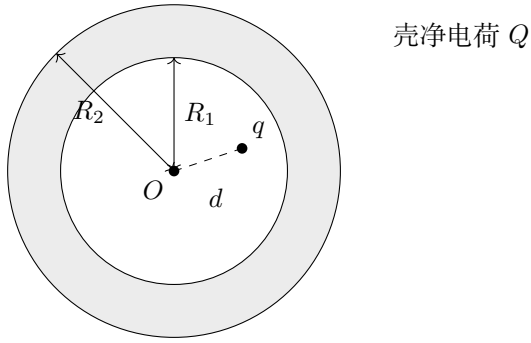


图 2.27: 金属位于两同心球面之间，点电荷在空腔内，球心不属于金属区域

解　两表面的感应总量

在图 2.27 的金属内部取包围内腔的高斯面，场为零，包围电荷总和也为零，因此内表面总电荷为 $-q$。壳总电荷守恒，外表面总量为 $Q + q$。外表面球形、无外部电荷且等势，故外部电场为球对称，外表面电势为 $k(Q + q)/R_2$。

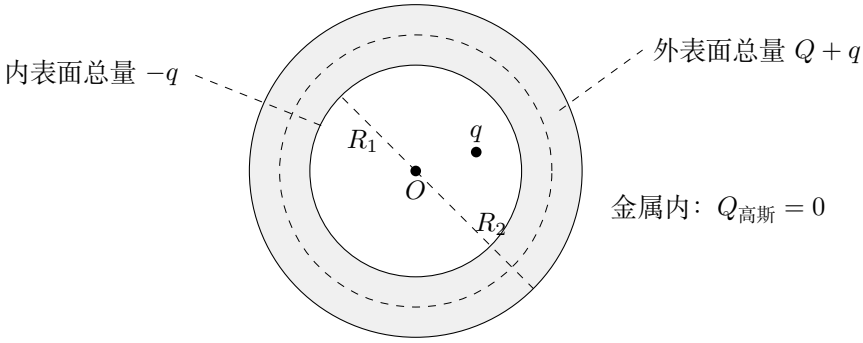


图 2.28: 金属内高斯面确定内表面总量；球心到同一球面上各面元等距，逐面相加电势

球心的三项电势

图 2.28 在球心，内表面所有电荷距它同为 R_1，即使分布不均匀，其总电势仍为 $-kq/R_1$；外表面贡献 $k(Q+q)/R_2$；腔内点电荷贡献 kq/d。因此

$$V_O = k\left[\frac{q}{d} - \frac{q}{R_1} + \frac{Q+q}{R_2}\right].$$

球心与金属壳的电势差

金属壳电势为 $V_{壳} = k(Q+q)/R_2$，腔内球心比它多出 $kq(1/d - 1/R_1)$。这一差值由腔内点电荷及内表面共同给出，体现空腔中的场。

例 2.9 (半球开口圆盘的电势)**.** 半径 R 的薄半球面均匀带正面密度 σ。求开口圆盘平面内、且在圆周以内任一点的电势，并判断该平面内的场分量。

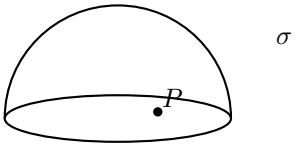


图 2.29: 题设：半球开口圆盘的电势

解　开口平面内的镜像点

图 2.29 的上半球面加上关于开口平面的镜像，组成总电荷 $4\pi R^2\sigma$ 的完整球壳。在开口圆盘平面内，P 关于镜像不动，上下两个半球在该点电势相同。

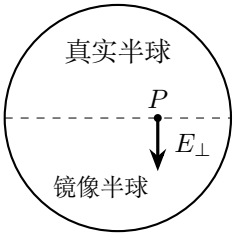


图 2.30: 解答过程：半球开口圆盘的电势

完整球壳的一半电势

由图 2.30，半球电势为全壳电势一半，

$$V_P = \frac{1}{2}\frac{k(4\pi R^2\sigma)}{R} = 2\pi k\sigma R = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

平面内电场分量

它在圆盘内部恒定，故平面内切向电场为零；法向场一般不为零。沿开口平面有 $\partial_x V = \partial_y V = 0$，而法向场由 $-\partial_z V$ 给出。例如圆心的法向场为 $-\sigma/(4\varepsilon_0)$，指向背离正带电上半球的一侧；它与平面内的等势同时成立。

例 2.10 (带电球表面的质子擦碰条件)**.** 固定均匀带正电球半径 R，表面电势 $V_s = 1000\,\mathrm{V}$。质子从远处以动能 $K_\infty = 2000\,\mathrm{eV}$ 入射，入射直线渐近线距球心 b。求能碰到表面的最大 b。

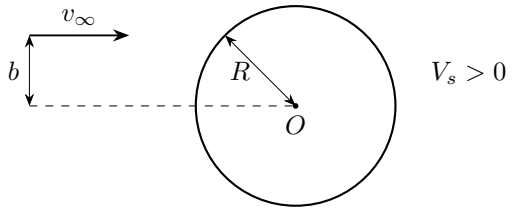


图 2.31: 题设：带电球表面的质子擦碰条件

解　表面的径向和切向动能

图 2.31 球外电场为中心场。入射角动量 $\ell = m v_\infty b$ 守恒，能量 $K + eV = K_\infty$。在表面 $r = R$，切向动能为 $\ell^2/(2mR^2) = K_\infty b^2/R^2$，因此到达表面时，径向动能满足

$$K_\infty - eV_s - \frac{K_\infty b^2}{R^2} \geq 0.$$

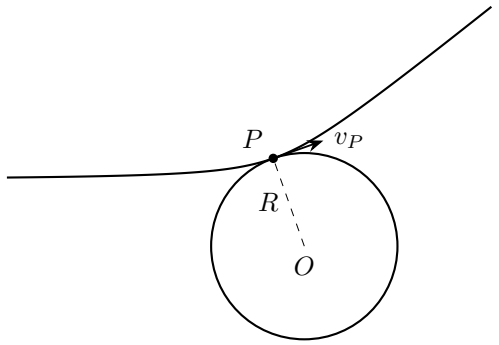


图 2.32: 解答过程：带电球表面的质子擦碰条件

球外有效势

球外有效势为 $U_{\mathrm{eff}} = \ell^2/(2mr^2) + eV_s R/r$，把两项分别写为 r^{-2}、r^{-1} 后求导，

$$\frac{\mathrm{d}U_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r} = \frac{\ell^2}{2m}(-2)r^{-3} + eV_s R(-1)r^{-2} = -\frac{\ell^2}{mr^3} - \frac{eV_s R}{r^2} < 0,$$

沿 $r \geq R$ 从远处接近球面，有效势不断上升，到表面取得入射区间的最大值。因此令表面径向动能为零，就得到临界擦碰。

临界擦碰

图 2.32 的临界轨道在表面径向速度零、瞬时速度沿切线，取等号得到

$$b_{\max} = R\sqrt{1 - \frac{eV_s}{K_\infty}} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

能量数值与几何意义

能量单位统一用电子伏特时 $eV_s = 1000\,\mathrm{eV}$。本题总初能的一半用于克服表面电势能，剩下一半为临界轨道的切向动能，于是 $b^2/R^2 = 1/2$。令 $V_s = 0$ 时，公式变为 $b_{\max} = R$，对应直线入射的几何相切。

例 2.11 (异号不等电荷的零势球面)**.** 电荷 $+nq$、$-q$ 位于 $x = 0, d$，$n > 1$，无穷远势为零。证明零势面为球面，求球心和半径；再讨论 $n = 1$。

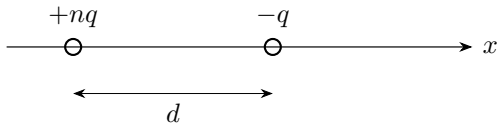


图 2.33: 题设：异号不等电荷的零势球面

解　零势条件的距离比

图 2.33 的任一点 $P = (x, y, z)$ 到两电荷距离为 r_1, r_2。零势条件 $nq/r_1 - q/r_2 = 0$ 等价于 $r_1 = nr_2$。平方后

$$x^2 + y^2 + z^2 = n^2[(x - d)^2 + y^2 + z^2].$$

平方距离与配方

先展开右侧 $(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$，移项得到

$$(n^2 - 1)(x^2 + y^2 + z^2) - 2n^2 dx + n^2 d^2 = 0.$$

因 $n > 1$，可除以 $n^2 - 1$，再把常数项移到右侧：

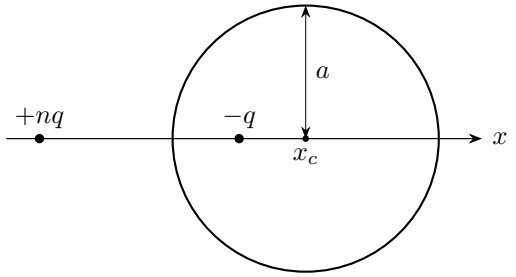
$$x^2 - \frac{2n^2 d}{n^2 - 1}x + y^2 + z^2 = -\frac{n^2 d^2}{n^2 - 1}.$$

两边同加 $[n^2 d/(n^2 - 1)]^2$ 以配成完全平方；右边通分后为

$$\frac{n^4 d^2 - n^2 d^2 (n^2 - 1)}{(n^2 - 1)^2} = \frac{n^2 d^2}{(n^2 - 1)^2}.$$

因此得到

$$\left(x-\frac{n^2d}{n^2-1}\right)^2+y^2+z^2=\left(\frac{nd}{n^2-1}\right)^2.$$



图示 $n=2$，取 $d=3$ 的比例

图 2.34: 解答过程：异号不等电荷的零势球面

球面位置与等量情形

图 2.34 的球心位于小电荷后侧 $x_c=n^2d/(n^2-1)$，半径 $a=nd/(n^2-1)$。等量情形 $n=1$ 直接给出 $r_1=r_2$，其几何轨迹为垂直平分面 $x=d/2$。球心与半径在 $n\to1$ 时均趋无穷，局部球面趋于该平面，几何与代数一致。

2.8　本讲小结

静电场力的功只由端点决定，电势差把这份功按电荷量归一化。电势按标量叠加，空间导数给出电场分量；等势面与场线正交。等距、旋转和镜像关系常可在积分前简化电势计算，再由相应空间方向的变化求场。

静电能等于缓慢装配电荷的外力功。点电荷组按对计入相互作用，连续体可按电量或半径逐步装配。粒子在中心电场中的运动同时受能量和角动量约束，有效势把切向动能与电势能合在一起，便于求转向和擦碰条件。

2.9 练习

练习 2.1 (电子流轰击接地金属球)**.** 半径 a 的金属球置于绝缘支架上，经电阻 R 接地；忽略导线和电阻对球外电场的影响。电子从很远处以速率 v 落到球上，稳态每秒实际到达 N 个。求球电荷、电阻发热功率和球吸收碰撞能的功率，忽略其他能量交换。

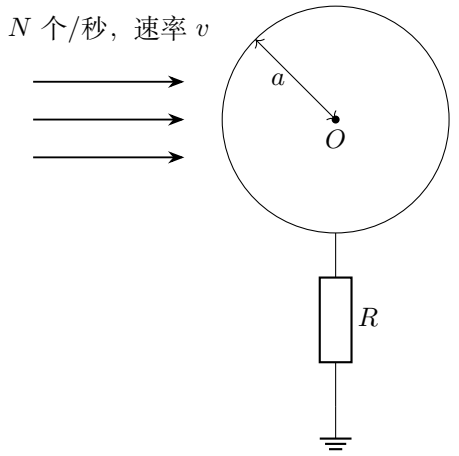


图 2.35: 电子落到半径 a 的球上，球经电阻 R 接地

练习 2.2 (三层同心球体依次连接)**.** 半径依次为 $a < b < c$ 的导体球 A、球壳 B, C 同心。初始 A 电势 V_A，B 净电荷零，C 净电荷 Q_C。球壳视为理想薄壳，忽略导线的几何影响。先接通 A, B，断开后再接通 B, C。求两次 A 电势增量。

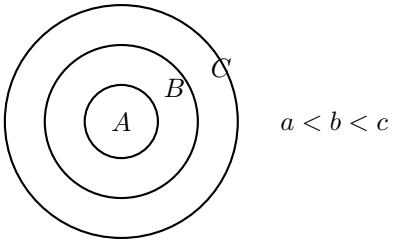


图 2.36: 题设：三层同心球体依次连接

练习 2.3 (电势为零与电场为零)**.** 等量电荷 $+q, -q$ 固定于 $x = -a, +a$。求原点电势和电场。若改为两个 $+q$，再求这两个量，并解释结论。

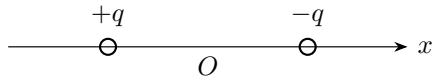


图 2.37: 题设：电势为零与电场为零

练习 2.4 (三点电荷的装配与释放)**.** 边长 a 的等边三角形三顶点各带正电荷 q。先固定其中两电荷，将第三个质量 m 的电荷从静止释放。求初始系统相互作用能，以及该电荷到无穷远的速率。

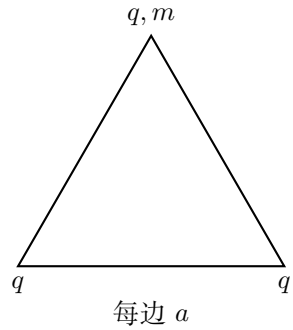


图 2.38: 题设：三点电荷的装配与释放

练习 2.5 (圆盘轴线上的电势与场跳变)**.** 半径 R 的圆盘均匀带面密度 $\sigma > 0$。以无穷远为零，求轴线全体 x 的电势；用导数求两侧电场，并说明电势是否跳变。

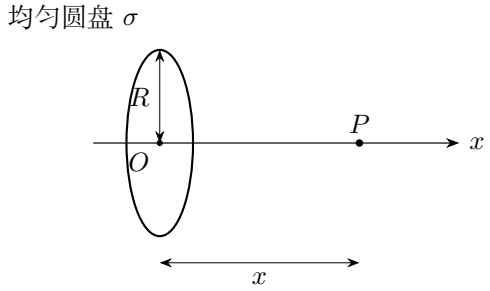


图 2.39: 题设：圆盘轴线上的电势与场跳变

练习 2.6 (有限线段的中垂面电势)**.** 长 $2l$ 的线段位于 y 轴，线密度 λ，求 $P = (x, 0), x > 0$ 处电势；对电势求导，得到中垂线电场，并讨论无限长极限的零点。

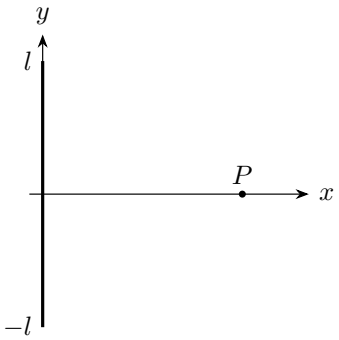


图 2.40: 题设：有限线段的中垂面电势

练习 2.7 (电偶极子的远场电势)**.** 等量异号电荷间距 $2a$，偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 从负指向正。场点距中点 $r \gg a$，与偶极轴夹角 θ。求电势首阶远场，并由球坐标方向导数得到轴线、中垂线场。

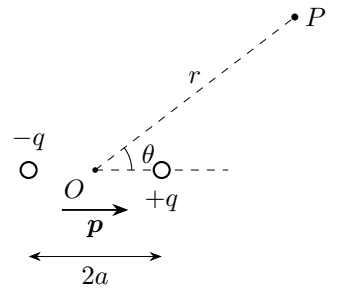


图 2.41: 题设：电偶极子的远场电势

练习 2.8 (带电球壳分裂后的能量比较)**.** 一个绝缘薄球壳半径 R、总电荷 Q，均匀分布。若外界将其电荷重新均匀分配到两个相距无限远、半径也为 R 的相同球壳上，每壳 $Q/2$，求静电能变化和外界缓慢做功。

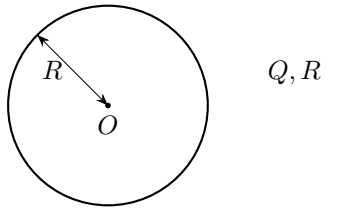


图 2.42: 题设：带电球壳分裂后的能量比较

练习 2.9 (电子在电势差中的速度)**.** 电子质量 m、电荷 $-e$，从电势 V_A 处以速率 v_0 运动到 V_B，仅受静电力。求末速及沿途动能应满足的条件；若初静止，判断电子趋向高势还是低势。

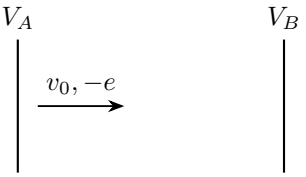


图 2.43: 题设：电子在电势差中的速度

练习解答

练习 2.1

解　稳态电流与球电势

图 2.35 稳态每秒进入球的负电荷大小 Ne，通过接地电阻的常规电流大小也为 Ne。球电势低于地，$V = -NeR$。在题给忽略导线和电阻场影响的球对称近似下，球的自电容关系为 $Q = 4\pi\varepsilon_0 aV$，所以 $Q = -4\pi\varepsilon_0 aNeR$。

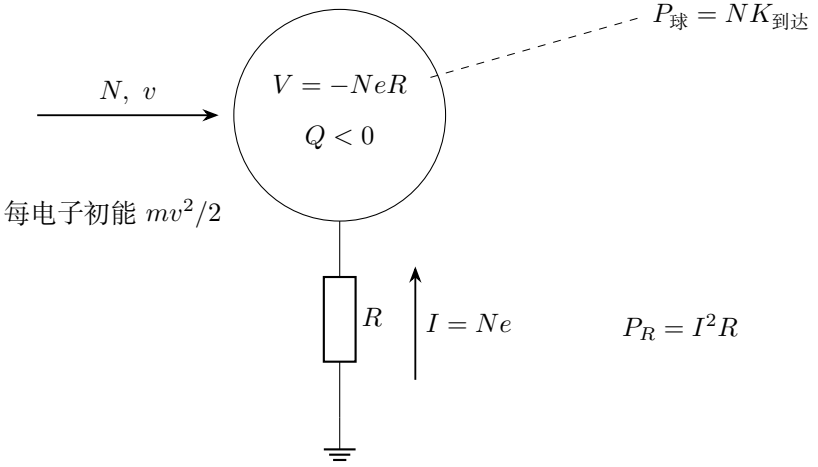


图 2.44: 稳态电子输入与流出相抵；常规电流从地流向负电势球，电阻与球表面分别发热

常规电流的方向

稳态球上没有继续积累净电荷，所以电阻输送到球的正电荷率恰为 Ne。图 2.44 箭头是常规电流方向，沿导线向上；电子的实际漂移方向相反。球表面与地的电压降按这个方向为 $0-V=IR$，确定负号。

两处的发热功率

图 2.44 的电阻热功率 $P_R=(Ne)^2R$。每个电子从远处到球面，电场做功 $q(V_\infty-V)=-Ne^2R$，到达时动能为 $mv^2/2-Ne^2R$，故球接受的碰撞功率

$$P_{\text{球}}=N\left(\frac{1}{2}mv^2-Ne^2R\right).$$

能量分配和到达动能

二者之和等于远处电子流总动能输入 $Nmv^2/2$。题给电子实际到达球面，要求 $mv^2/2-Ne^2R\geq 0$。其中 Ne^2R 为每个电子接近负球时减少的动能，随后通过稳态接地电流转为电阻热；剩余动能在球面碰撞中释放。

练习 2.2

解　初始中心球的电荷

图 2.36 初始设中心球电荷为 Q_A。中壳净量为零，各球面在中心球区域的贡献按球对称相加，$V_A=k(Q_A/a+Q_C/c)$，所以 $Q_A=a(V_A-kQ_C/c)/k$。

两球壳的初态贡献

题给球壳按理想薄壳处理，导线的几何影响忽略。初态中壳内表面为 $-Q_A$、外表面为 $+Q_A$，两项对中心区域的电势在同一半径 b 相消；外壳两表面的总贡献只剩净量 kQ_C/c。这解释了初态式中为什么没有额外的 Q_A/b 项。

第一次连接后的电势

接通 A,B 后它们等势，间隙中无净自由电荷，中心球电荷移到 B 的外表面，A 净量为零，二者共同电势 $V_1=k(Q_A/b+Q_C/c)$。因此

$$\Delta V_1=kQ_A\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\left(V_A-\frac{kQ_C}{c}\right)\left(\frac{a}{b}-1\right).$$

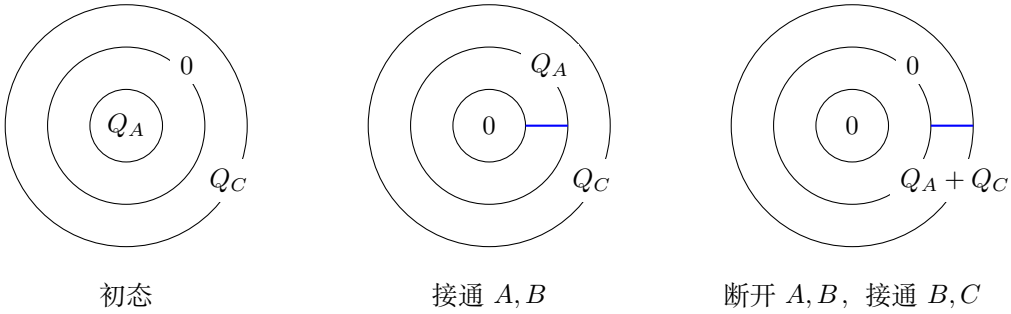


图 2.45: 各阶段直接在同心球面上标净量，连接后总电荷只移到相连导体的最外表面

第二次连接后的电势

图 2.45 再接通 B,C，总量 Q_A+Q_C 移到最外表面，A 在内部无场区，$V_2=k(Q_A+Q_C)/c$。第二次增量为

$$\Delta V_2 = kQ_A\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right).$$

断开后的中心球

第一次连接后，A 的电荷为零；断开 AB 以后，这一净量保留。第二次连接使 B,C 的电荷聚集到半径 c 的外表面，内部区域等势，中心球随之处于 V_2。

练习 2.3

解　异号电荷的场与势

图 2.37 的原点到两电荷等距，电势为 $kq/a-kq/a=0$。正电荷在原点的场向右，负电荷在原点的场也向右，所以 $E_x=2kq/a^2$。

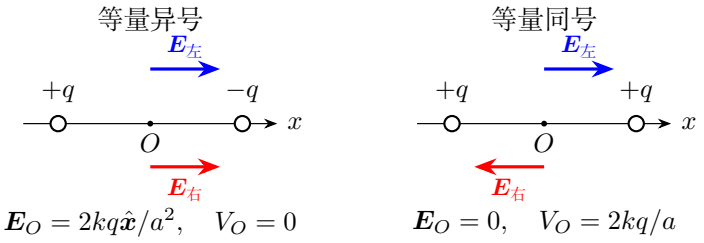


图 2.46: 两种符号组合在中点的电场叠加与电势

同号电荷的场与势

图 2.46 改为同号电荷时，两场相反且等大，故 $\boldsymbol{E}_O = 0$，电势却为 $2kq/a$。

两种叠加的区别

电势是带符号的标量相加，场强则连同方向作矢量相加，原点的两种结果分别体现这两种叠加。异号情况的中垂面是零势面，电场仍垂直穿过该面；同号情况原点场零但附近场一般非零。

练习 2.4

解　初末相互作用能

图 2.38 共有三对不同电荷，每对相互作用能为 kq^2/a，总初能 $W_i = 3kq^2/a$。释放后固定两电荷间距离仍为 a，它们保留能量 kq^2/a；移动电荷到无穷远时与二者的相互作用能趋零。

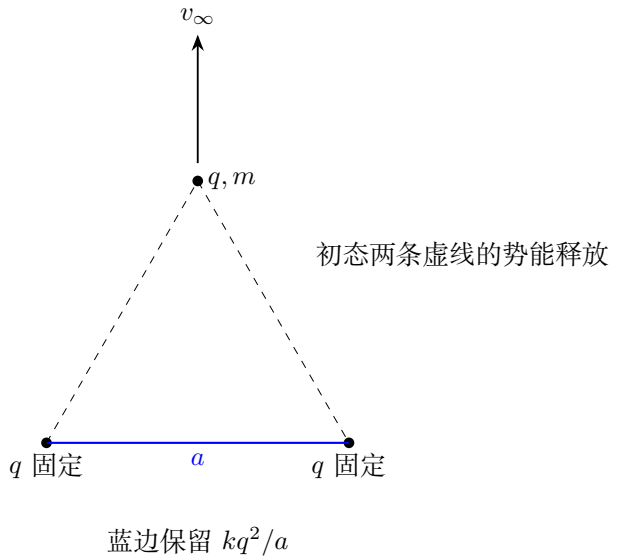


图 2.47: 释放电荷沿垂直平分线远离固定电荷；两固定电荷间仍保留一对能量

释放的能量与速度

图 2.47 因此转为移动电荷动能的只有两对相互作用能，

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = W_i - W_f = \frac{2kq^2}{a}, \qquad v_\infty = \sqrt{\frac{4kq^2}{ma}}.$$

固定电荷之间的能量

固定两电荷的约束力因位移为零不做功。两个固定电荷之间保留 kq^2/a，移动电荷与它们之间的两对能量释放为动能。图中三角形的一条边保持原长，另外两条边对应的距离逐渐增至无穷。

练习 2.5

解　细环的电势积分

在图 2.39 中取半径 s 的细环，$\mathrm{d}q = 2\pi\sigma s\,\mathrm{d}s$。电势积分为

$$V(x) = 2\pi k\sigma \int_0^R \frac{s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{x^2+s^2}}.$$

令 $u = x^2 + s^2$，$\mathrm{d}u = 2s\,\mathrm{d}s$，上下限变成 x^2, x^2+R^2，于是

$$V(x) = \pi k\sigma \int_{x^2}^{x^2+R^2} u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = 2\pi k\sigma[\sqrt{u}]_{x^2}^{x^2+R^2} = 2\pi k\sigma(\sqrt{x^2+R^2} - |x|).$$

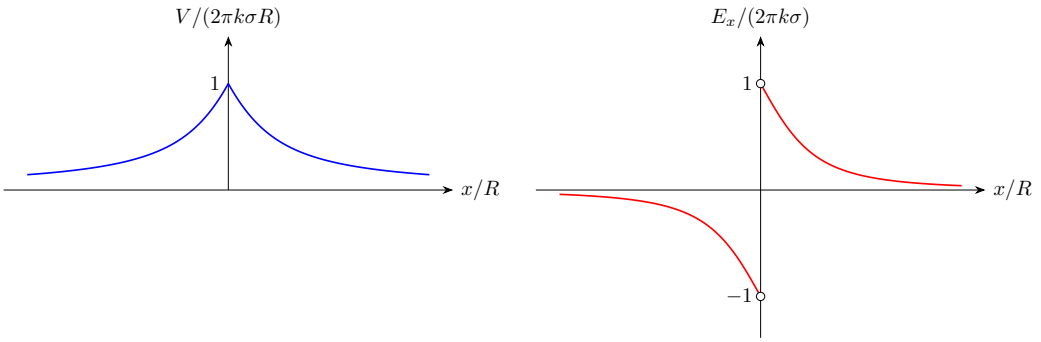


图 2.48: 电势在电荷面连续但有尖点；场的两个单侧极限相差 σ/ε_0

两侧电势与场

图 2.48 的电势左右对称，在 $x = 0$ 连续取 $2\pi k\sigma R$。分别使用 $\mathrm{d}\sqrt{x^2+R^2}/\,\mathrm{d}x = (2x)/(2\sqrt{x^2+R^2})$ 以及 $\mathrm{d}|x|/\,\mathrm{d}x = 1$ $(x>0)$、-1 $(x<0)$。因此对两侧的光滑函数求导，得

$$E_x = 2\pi k\sigma\left(\operatorname{sgn} x - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right), \quad x \neq 0.$$

法向场的跳变

因此 $E_x(0^+)=\sigma/(2\varepsilon_0)$、$E_x(0^-)=-\sigma/(2\varepsilon_0)$，跳变量为 σ/ε_0。电势连续而法向导数跳变，对应有限面电荷。$|x|$ 来自积分下限的 $\sqrt{x^2}$，使电势关于盘面镜像对称，导数则在两侧给出相反的法向场。

练习 2.6

解　有限线段的电势积分

图 2.40 中距 y 微元的距离为 $\sqrt{x^2+y^2}$，故

$$V=k\lambda\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

三角换元与上下限

图 2.49 以 P 为角顶点，取 PO 与连向源点的线段之间的有向角 θ。令 $y=x\tan\theta$，其中 $-\theta_0\le\theta\le\theta_0$、$\theta_0=\arctan(l/x)<\pi/2$。则 $\mathrm{d}y=x\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，$\sqrt{x^2+y^2}=x\sec\theta$，被积式化为 $\sec\theta\,\mathrm{d}\theta$。它的原函数可由乘一个相同因子构造：

$$\sec\theta=\frac{\sec^2\theta+\sec\theta\tan\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\ln(\sec\theta+\tan\theta).$$

故记 $s=\sqrt{x^2+l^2}$，有

$$\begin{aligned}V&=k\lambda\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\sec\theta\;\mathrm{d}\theta=k\lambda[\ln(\sec\theta+\tan\theta)]_{-\theta_0}^{\theta_0}\\&=k\lambda\ln\frac{s+l}{s-l}=k\lambda\ln\frac{(s+l)^2}{x^2}=2k\lambda\ln\frac{s+l}{x}.\end{aligned}$$

端点代入时，$\sec\theta_0=s/x$、$\tan\theta_0=l/x$，而 $\sec(-\theta_0)=s/x$、$\tan(-\theta_0)=-l/x$，故上下限之差是 $\ln[(s+l)/x]-\ln[(s-l)/x]$。随后用了 $(s-l)(s+l)=x^2$ 合并；对数参数为无量纲的距离比。

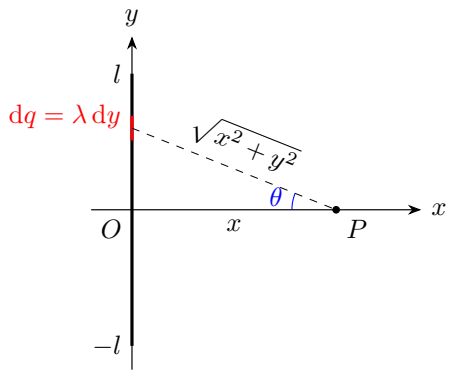


图 2.49: 线段电荷微元到场点的距离和三角换元所用的角

无限线的参考电势

本式是有限线段以无穷远为零的电势。取两个有限场点先作电势差，再让线段延长，公共的长度项相消，便得到无限线的有限势差。

求导得到场与有限势差

图 2.49 求导时 l 固定，$s=\sqrt{x^2+l^2}$ 满足 $s'=2x/(2s)=x/s$，所以

$$\begin{aligned}V'(x)&=2k\lambda\left(\frac{s'}{l+s}-\frac{1}{x}\right)=2k\lambda\left(\frac{x}{s(l+s)}-\frac{1}{x}\right)\\&=2k\lambda\left(\frac{s-l}{xs}-\frac{s}{xs}\right)=-\frac{2k\lambda l}{xs}.\end{aligned}$$

因此 $E_x=-V'=2k\lambda l/[x\sqrt{x^2+l^2}]$，与直接场积分一致。$l\to\infty$ 时 $V\simeq 2k\lambda\ln(2l/x)$ 发散，但两个有限距离处的 $V(x_1)-V(x_2)$ 趋于 $2k\lambda\ln(x_2/x_1)$。选其中一个有限场点为参考点，就得到无限线电荷的电势。

练习 2.7

解　精确距离与远场展开

图 2.41 中，先由余弦定理写场点到正、负电荷的精确距离平方，$r_\pm^2=r^2+a^2\mp 2ar\cos\theta$。令 $\varepsilon=a/r\ll 1$、$z_\pm=\varepsilon^2\mp 2\varepsilon\cos\theta$，则

$$\frac{1}{r_\pm}=\frac{1}{r}(1+z_\pm)^{-1/2}.$$

对 $F(z)=(1+z)^{-1/2}$ 求导，$F'(z)=-\frac{1}{2}(1+z)^{-3/2}$，故 $F(0)=1$、$F'(0)=-1/2$。在零点展开，再按 ε 保留一阶，

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_\pm}&=\frac{1}{r}[1-\tfrac{1}{2}z_\pm+O(z_\pm^2)]\\&=\frac{1}{r}[1\pm\varepsilon\cos\theta+O(\varepsilon^2)].\end{aligned}$$

相减时两个 $1/r$ 项抵消，留下 $(1/r)\,2\varepsilon\cos\theta=2a\cos\theta/r^2$，故

$$V=kq\left(\frac{1}{r_+}-\frac{1}{r_-}\right)\simeq\frac{kp\cos\theta}{r^2},\qquad p=2aq.$$

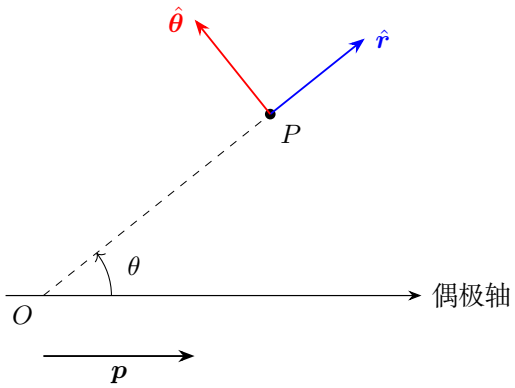


图 2.50: 球坐标的极角从偶极轴量起；增大 θ 的单位方向垂直于径向

径向和角向的场分量

把上式的首阶项记为 $V_{\text{dip}} = kp\cos\theta/r^2$。图 2.50 中，径向求导固定 θ，角向求导固定 r，

$$\partial_r V_{\text{dip}} = kp\cos\theta(-2r^{-3}), \qquad \partial_\theta V_{\text{dip}} = \frac{kp}{r^2}(-\sin\theta).$$

沿极角方向的实际小位移为 $r\,\mathrm{d}\theta$，电势对该方向距离的变化率等于角度导数除以 r。于是电场的首阶分量为

$$E_r \simeq -\partial_r V_{\text{dip}} = \frac{2kp\cos\theta}{r^3}, \qquad E_\theta \simeq -\frac{1}{r}\partial_\theta V_{\text{dip}} = \frac{kp\sin\theta}{r^3}.$$

两个特殊方向

在偶极轴正半轴上，$\theta = 0$，$E_r \simeq 2kp/r^3$，$\hat{\boldsymbol{r}}$ 沿偶极矩。负半轴上 $\theta = \pi$，$E_r \simeq -2kp/r^3$，当地的 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 反向于偶极矩，所以两侧的实际电场都沿偶极矩，首阶大小相同。

在中垂面上，$\theta = \pi/2$，径向分量为零，$E_\theta \simeq kp/r^3$。沿图中增大 θ 的方向走，就朝偶极轴的负向，因此中垂面上的场反向于偶极矩。

练习 2.8

解　球壳自能与重新分配

图 2.42 中，球壳半径固定为 R。已装入电量 Q' 时，表面电势为 kQ'/R；从远处再移入 $\mathrm{d}Q'$ 的外力功为 $(kQ'/R)\,\mathrm{d}Q'$。因此初球壳的自能为

$$W_i = \frac{k}{R}\int_0^Q Q'\,\mathrm{d}Q' = \frac{k}{R}\left[\frac{Q'^2}{2}\right]_0^Q = \frac{kQ^2}{2R}.$$

图 2.51 最终两壳相距无限远，无相互作用能，每壳自能 $k(Q/2)^2/(2R)$，总和

$$W_f = 2\frac{k(Q/2)^2}{2R} = \frac{kQ^2}{4R}.$$

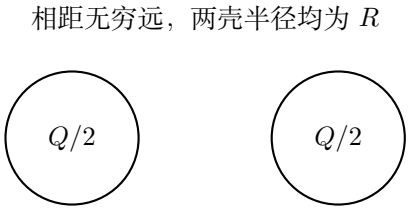


图 2.51: 解答过程：带电球壳分裂后的能量比较

静电能变化和外力功

所以 $\Delta W = -kQ^2/(4R)$。忽略其他能量变化且缓慢进行，外界对电荷系统做功 $W_{外} = \Delta W < 0$，表示可从电场释放能量中取出正的机械功 $kQ^2/(4R)$。

电荷平方带来的变化

两球壳半径都为 R，每壳电量为原来的一半。自能随电荷平方变化，所以每壳为原自能的 $1/4$，两壳相加为原来的 $1/2$；减少的另一半由外界取走。

练习 2.9

解　电子的末速

图 2.43 的能量守恒为 $mv^2/2 - eV_B = mv_0^2/2 - eV_A$，整理得

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2e}{m}(V_B - V_A)}.$$

沿途的动能条件

对已指定的连续运动路径，以路径坐标 s 标记各点，还须有

$$K(s) = \frac{1}{2}mv_0^2 + e[V(s) - V_A] \geq 0$$

在途中始终成立；等价于电子的势能 $-eV(s)$ 不超过总能量。端点末速公式只给出这一条件在 B 点的取值。

初始加速方向

电子从 A 静止释放时，初加速度由当地的场决定，

$$\boldsymbol{a}(0) = -\frac{e}{m}\boldsymbol{E}(A) = \frac{e}{m}\nabla V(A).$$

图 2.52 中，A 点的场指向左侧较低电势，电子受力向右，起初朝当地电势升高的方向运动。若 $\boldsymbol{E}(A) = 0$，从该点精确静止释放的电子保持静止。

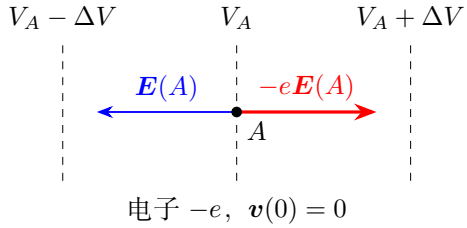


图 2.52: 静止电子在 A 点的初加速度指向当地电势升高的一侧

静电

物理竞赛一轮讲义

第三讲

导体、静电屏蔽与电像法

2026

目录

第三讲　导体、静电屏蔽与电像法 **1**

3.1　导体怎样达到静电平衡 1

3.2　空腔中的电荷与静电屏蔽 2

3.3　远隔导体球的电荷分配 4

3.4　由给定表面条件确定电场 5

3.5　接地平面的电像法 6

3.6　球面的电像法 8

3.7　叠加与互易关系 11

3.8　例题与分析 14

3.9　本讲小结 34

3.10 练习 35

练习解答 38

第三讲　导体、静电屏蔽与电像法

3.1　导体怎样达到静电平衡

前两讲把电荷分布看作已知条件，再求它产生的场。金属中的自由电子能够移动，把金属放入电场后，电荷分布本身也随之改变。自由电子最初受到外场作用，逐渐在一侧积累，另一侧留下正电。新分布产生的感应场与外场叠加，直到金属内部总场为零，宏观电荷分布才稳定下来。

均匀金属达到静电平衡时，内部 $\boldsymbol{E}=0$。沿金属内部从 A 走到 B，

$$V_A - V_B = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0.$$

因此同一个连通导体内部和表面处于共同电势。沿表面移动自由电荷也没有切向电场力，紧贴表面的电场沿法线。

3.1.1　净电荷分布在表面

在金属内部取任意小闭合面，各处场为零，高斯定理给出所包净电荷为零。净电荷因而分布在金属表面。对空心导体，表面包括外表面和面向空腔的内表面。

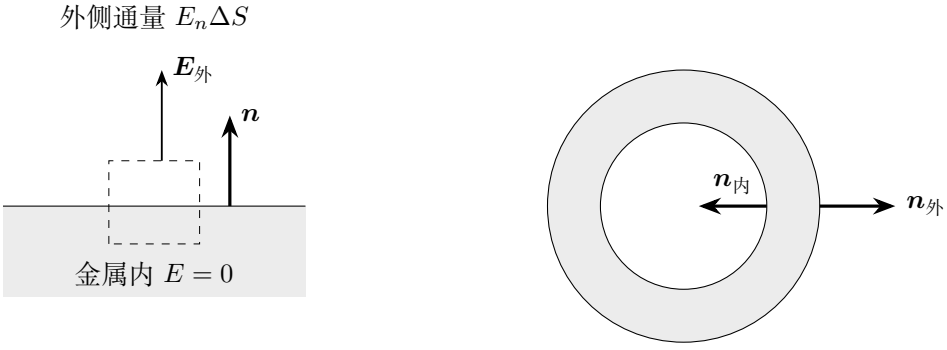


图 3.1: 薄柱跨越导体表面；法向由金属指向相邻空间，外表面与内腔表面的几何方向不同

图 3.1 左图用小柱跨过一个面元。小柱内端面处于金属中，通量为零，侧面通量随厚度趋零而消失。外端面的通量等于 $E_n\Delta S$，所以

$$E_n\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}, \qquad E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

这里法向由金属指向相邻空间。右图的内表面法向指向空腔，外表面法向指向球外。σ 的正负与按这一法向计算的场分量同号。

3.1.2 孤立与接地

孤立导体的净电荷由电荷守恒确定，静电感应改变各处面密度。接地把导体与大地连成整体，地线可以传入或传出电荷，使导体电势保持在地的电势。以下以大地为零势，接地导体便有 $V = 0$。

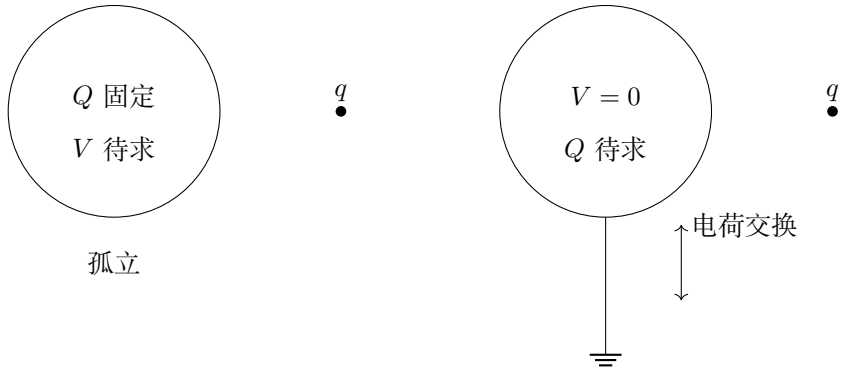


图 3.2: 孤立导体固定净电荷，接地导体固定电势；地线允许感应电荷交换

图 3.2 左图给定净量 Q，需要由平衡分布求电势。右图给定零电势，需要求从大地流入的净量。放在附近的正电荷使导体近侧积累负电，远侧分布随孤立或接地条件而变。例 3.2 按接地、断线和移走电荷的次序计算各导体的净量。

3.2 空腔中的电荷与静电屏蔽

3.2.1 腔内没有电荷

闭合金属壳的整个内壁等势。若空腔中有一条从内壁正电区通向负电区的场线，沿该线积分电场将得到正的电势降，而两端的电势相同。静电场的环路定律因而要求腔内没有这样的电场。空腔内的电势等于内壁电势，内壁面密度为零。

外部带电体靠近时，外表面电荷重新分布，共同电势可以改变，空腔仍处于等势状态。这是闭合导体壳的静电屏蔽作用。下文的唯一性定理也将从电势方程说明这个结果。

3.2.2 腔内有独立电荷

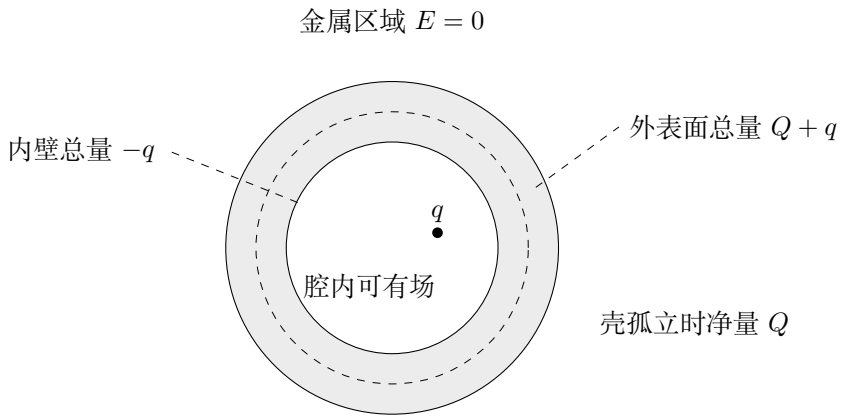


图 3.3: 在金属中取虚线高斯面，腔内电荷由内壁总量抵消，外表面承担剩余净量

图 3.3 在金属中画出包围空腔的高斯面。面上的总场为零，所包净量为零，故

$$q + Q_{\text{内壁}} = 0.$$

若壳本身原有净量 Q，则

$$Q_{\text{内壁}} = -q, \qquad Q_{\text{外表面}} = Q + q.$$

q 偏心时，内壁近处的感应电荷更集中，内壁的总量仍为 $-q$。壳孤立时，外表面保留 $Q+q$，它决定外部场的总通量。壳接地且外部无其他电荷时，外表面为零势，外部场为零。例 3.1 把这一感应过程与小球接触内壁后的电荷转移作比较。

在腔内保持电荷的位置和电量不变，外部物体的变化只会使整个腔壁电势增加一个共同常数。因此腔内电势的空间变化和各电荷所受的力保持原值。例 3.3 用这个性质判断悬球的偏转。

3.2.3 接触和断开

带电小球与内壁接触后，小球、内壁和外壳成为同一个等势导体。小球表面也成为空腔壁的一部分，平衡时电荷全部转到最外表面。随后在腔内将小球分离，小球保持分离时的零净电量。法拉第圆筒利用这种过程收集带电体的全部电荷。

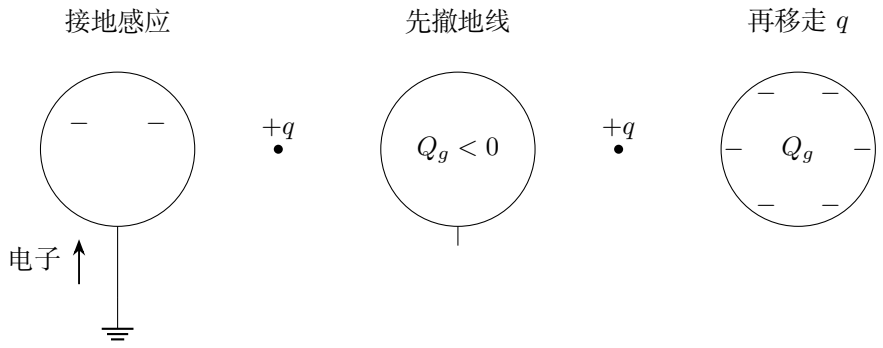


图 3.4: 外正电荷仍在时先撤地线，再移走外电荷，导体已取得的负净量被保留

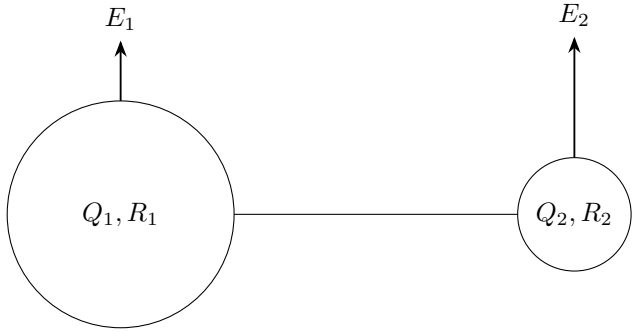
图 3.4 中，外正电荷靠近时先接地，电子从地流入导体。先断地线，再移走外电荷，所得负净量留在孤立导体上，最后均匀分布在球面。若一直保留地线直到外电荷移走，电子便可流回大地。两种次序对应不同的电荷交换过程。例 3.4 将接触和接地用于带罩验电器。

3.3　远隔导体球的电荷分配

两金属球相距远大于各自半径，用细线连接。忽略相互电势和导线电荷，各球表面电势为 kQ_i/R_i。连接后的共同电势与总量满足

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}, \qquad Q_1 + Q_2 = Q.$$

消去 Q_2 得 $Q_1 = QR_1/(R_1 + R_2)$，再得 $Q_2 = QR_2/(R_1 + R_2)$。



$V_1 = V_2$，忽略相互电势与导线电荷

图 3.5: 远隔且用细线相连的两球等势；小球电量较少，面密度和表面场却较大

图 3.5 取 $R_1 = 2R_2$。大球取得两倍电荷，表面积却为四倍，因而小球面密度与表面场大小都是大球的两倍：

$$\sigma_i = \frac{Q_i}{4\pi R_i^2}, \qquad |E_i| = \frac{|\sigma_i|}{\varepsilon_0}, \qquad \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1|} = \frac{|E_2|}{|E_1|} = \frac{R_1}{R_2}.$$

在近似球形、共同电势的条件下，较小曲率半径对应较强表面场。一般导体的电荷分布还由整个形状和周围物体共同决定。例 3.5 求远隔两球的完整分配，例 3.6 则处理同心导体及其间隙场。

3.4 由给定表面条件确定电场

3.4.1 电势解的唯一性

在无体电荷区域，电场的高斯定理给出 $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，代入 $\boldsymbol{E} = -\nabla V$ 得到 $\nabla^2 V = 0$，称为拉普拉斯方程。导体表面给定电势，再给出无穷远的参考值，这些条件共同确定解。

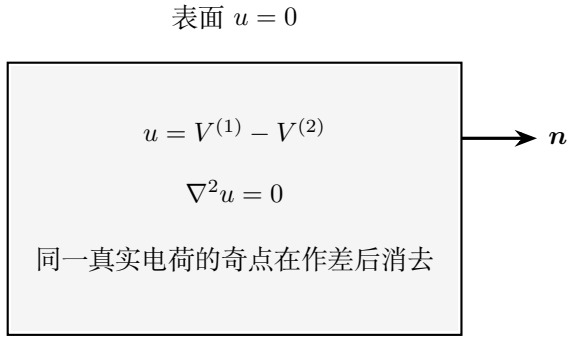


图 3.6: 比较两个解时，真实电荷的奇点相同，差函数在整个求解区域内无源

图 3.6 将两个满足相同条件的候选电势作差，记为 $u = V^{(1)} - V^{(2)}$。相同的真实点电荷奇点相消，u 在整个求解区域内满足 $\nabla^2 u = 0$，各给定电势面上 $u = 0$。

先对一个方向使用乘积法则，

$$\partial_x(u\partial_x u) = (\partial_x u)^2 + u\partial_x^2 u.$$

把三个方向相加并对区域 Ω 积分，用散度定理得到

$$\oint_{\partial\Omega} u\,\partial_n u \,\mathrm{d}S = \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}v + \int_\Omega u\nabla^2 u \,\mathrm{d}v.$$

左端因 $u = 0$ 而为零，右端第二项因 $\nabla^2 u = 0$ 而为零，故 $\int |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}v = 0$。被积式处处非负，只能有 $\nabla u = 0$。再用表面的 $u = 0$ 得 $u = 0$，两个解处处相同。

外部区域无界时，先取半径 L 的大球面。若导体和电荷集中在有限范围，且无穷远势为零，则在大球面上 $u = O(L^{-1})$、$\partial_n u = O(L^{-2})$。球面面积正比于 L^2，所以这部分面积分为 $O(L^{-1})$，随 $L \to \infty$ 趋零。对于接地无限平面的半空间，可用大半球面截出有限区域。调和函数的最大值原理给出，区域内的 $|u|$ 至多等于外半球面上的最大 $|u|$，令 $L \to \infty$ 也得到 $u = 0$。

若某导体孤立且给定净量，两个候选解在该导体上的 u 为常数。该面的法向通量差由净量差决定，等于零，所以上述积分中的表面项也为零。给定净量的孤立导体与给定电势的导体均可纳入这一方法。它使我们能够通过满足表面条件的简便电荷分布，求出真实空间内的场。

3.5　接地平面的电像法

3.5.1　平面的对称性与镜像电荷

图 3.7 把实际金属区域画在左侧，右半空间才是需要求解的真空区域。真实点电荷 q 位于接地无限平面 $x = 0$ 的右侧 $(d, 0, 0)$。在不属于真实求解区域的左侧放像电荷 $-q$ 于 $(-d, 0, 0)$，两者在平面任一点等距，电势代数和为零。右半空间又有相同真实奇点和无穷远条件，所以由唯一性，这两个点电荷产生的场等于真实右半空间的场。

像电荷把连续的感应电荷分布换成便于计算的等效源。在右半空间，感应电荷的场等于像电荷的场；在金属内部，静电平衡给出 $\boldsymbol{E}_{\text{感}} = -\boldsymbol{E}_q$。这两条关系分别用于例题中外部场和金属内部感应场的计算。

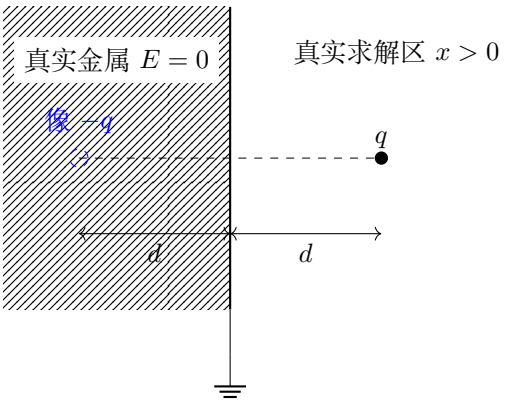
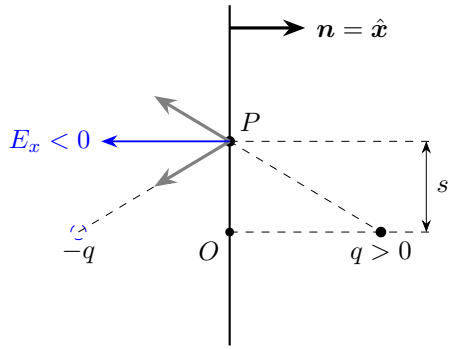


图 3.7: 左侧辅助像只用于表示右半空间的解；真实导体内部的总场仍为零



$$\sigma=\varepsilon_0 E_x<0$$

图 3.8: 在平面点 P，两电荷的切向场抵消，法向场叠加并指向导体

图 3.8 中，O 是真电荷在平面上的垂足，P 距 O 的长度为 s。取从导体指向真空的 $+x$ 为法向，合场沿 $-x$，所以 $\sigma<0$。每个场的法向投影都为 $-kqd/(d^2+s^2)^{3/2}$，两项相加产生面密度中的因子二。这里的因子二来自真电荷与像电荷法向场的相加。

3.5.2 面密度、合力与能量

在距垂足横向距离 s 的平面点，真实与镜像电荷的切向分量抵消，法向场为 $E_x=-2kqd/(s^2+d^2)^{3/2}$，因此

$$\sigma(s)=-\frac{qd}{2\pi(s^2+d^2)^{3/2}}.$$

按图中的平面圆环积分总感应量，先以半径 S 截断：

$$Q_g(S)=-qd\int_0^S\frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+d^2)^{3/2}}.$$

令 $u=s^2+d^2$，$\mathrm{d}u=2s\,\mathrm{d}s$，则

$$Q_g(S)=-\frac{qd}{2}\int_{d^2}^{S^2+d^2}u^{-3/2}\,\mathrm{d}u=qd\left[u^{-1/2}\right]_{d^2}^{S^2+d^2}=\frac{qd}{\sqrt{S^2+d^2}}-q.$$

最后令 $S\to\infty$，得到 $Q_g=-q$，满足总感应量。真实电荷受感应电荷的合力等于它与像电荷间的库仑力，方向指向平面，大小 $kq^2/(4d^2)$。

把电荷从 d 缓慢移到无穷远，外力随当前位置 x 变化。由图 3.9 中每一位置的真像间距 $2x$，

$$W_{外}=\frac{kq^2}{4}\lim_{L\to\infty}\int_d^L x^{-2}\,\mathrm{d}x=\frac{kq^2}{4}\lim_{L\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_d^L$$
$$=\frac{kq^2}{4}\lim_{L\to\infty}\left(-\frac{1}{L}+\frac{1}{d}\right)=\frac{kq^2}{4d}.$$

取电荷在无穷远时的相互作用能为零，初态能量就是 $U(d)=-W_{外}=-kq^2/(4d)$。

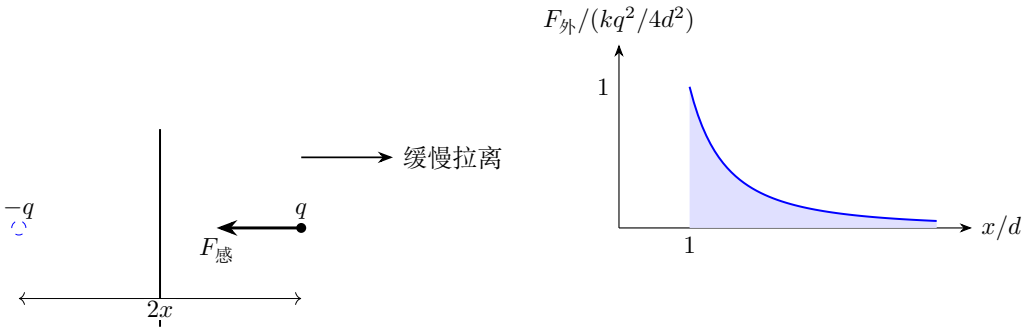


图 3.9: 真电荷移到 x 时镜像也移到 $-x$，受力距离始终为 $2x$；右图阴影为拉离功

图 3.9 左图画出移动中间态：真电荷位于 x 时，像电荷位于 $-x$，间距随之变为 $2x$。右图曲线与横轴之间从 d 到无穷远的面积是拉离功。若采用充电过程，令真实电荷从 0 增至 q，感应电势也按同一比例建立，中间电量为 ξ 时，$V_{感}(\xi)=-k\xi/(2d)$，充电功为

$$U=\int_0^q V_{感}(\xi)\,\mathrm{d}\xi=-\frac{k}{2d}\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^q=-\frac{kq^2}{4d}=\tfrac{1}{2}qV_{感}(q).$$

这与沿位移积分的结果一致。

3.6　球面的电像法

3.6.1　接地球的几何比例

半径 R 的接地球，外点电荷 q 距球心 $d>R$。把像放在同一径向、距心 b 处。若真、像电势在整个球面上恰好抵消，则球面任一点到两电荷的距离之比必须固定。

本节先求球外电场，像电荷放在球内；求球形空腔内的电场时，实电荷与像电荷的位置分居球面两侧。两种情形都由球面等势决定像的位置和大小。

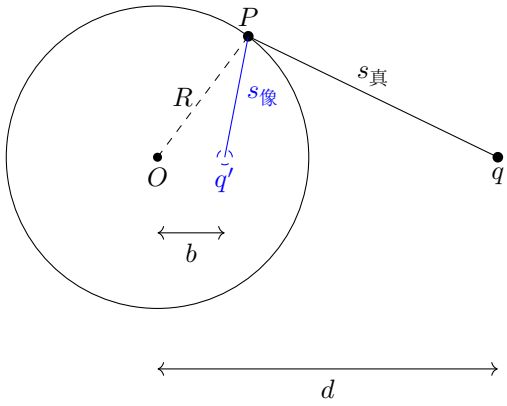


图 3.10: 球面点到真电荷与像电荷的距离保持固定比例，像在真实球外区域之外

图 3.10 中，若 P 极角为 θ，两段距离平方分别为 $d^2+R^2-2dR\cos\theta$ 与 $b^2+R^2-2bR\cos\theta$。设像距平方是真距平方的 λ 倍。比较 $\cos\theta$ 项得 $\lambda=b/d$，再比较常数项，

$$d(b^2+R^2)=b(d^2+R^2) \quad\Longrightarrow\quad (b-d)(bd-R^2)=0.$$

像在球内，$b<R<d$，故 $b=R^2/d$。此时 $\lambda=R^2/d^2$，像距为真距的 R/d 倍。取 $q'=-qR/d$，于是 $q/s_{真}+q'/s_{像}=0$ 对所有极角成立，整个球面为零势。

外点电荷受到的接地球吸引力为

$$F_r=k\frac{qq'}{(d-b)^2}=-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}.$$

像电荷总量 q' 等于球的总感应电荷。正的外点电荷吸引电子由大地进入球面，感应净电荷为负。外电荷越靠近，球从大地取得的电荷量越大。

3.6.2 孤立球需增加中心像

若球净电荷指定为 Q，保留接地球像 $q'=-qR/d$，再在球心加像 $q_0=Q+qR/d$。中心像在球面产生常数势，不破坏等势；总像量 $q'+q_0=Q$，满足净量约束。球电势为 $kq_0/R=kQ/R+kq/d$，外点力为两个像的库仑力之和，

$$F_r=k\frac{qq_0}{d^2}-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}.$$

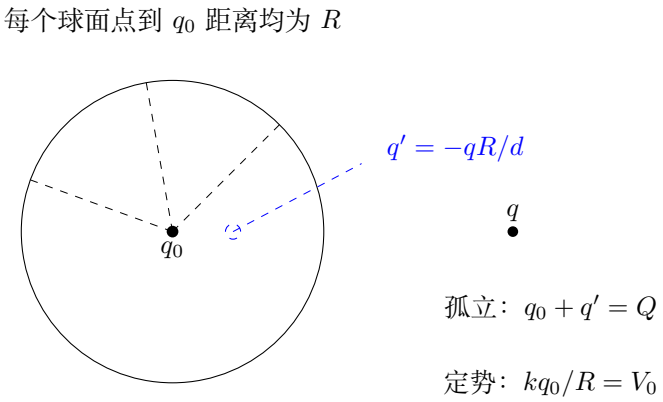


图 3.11: 加中心像只使球面电势整体平移，偏心像仍负责抵消外点电荷在球面上的位置变化

图 3.11 把两种约束分开：指定孤立净量时，中心像由 Q 决定；指定电势时，中心像由 V_0 决定。中心像和偏心像共同表示实际球面电荷在球外的作用。

求表面电荷密度时，先求球外电势对径向坐标的导数，再取场点趋近球面。令极角 θ 从指向外电荷的方向量起，偏心像距球心为 $b = R^2/d$。图 3.12 中的场点 M 先取在球外 $r > R$，它到真电荷和偏心像的距离分别为

$$L_d = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta}, \qquad L_b = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta}.$$

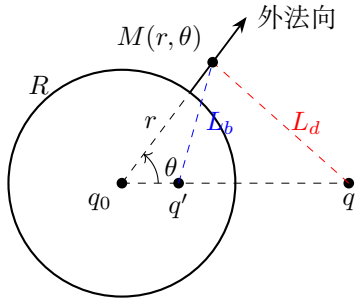


图 3.12: 先在球外写电势，再固定极角沿径向求导，最后取球面外侧极限

三个等效电荷给出球外电势

$$V(r,\theta) = k\left(\frac{q}{L_d} + \frac{q'}{L_b} + \frac{q_0}{r}\right).$$

固定 θ 对 r 求导。对任意固定轴向距离 s，先把倒数距离写为 $(r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta)^{-1/2}$，链式法则给出

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{L_s} = -\frac{1}{2}(r^2 + s^2 - 2rs\cos\theta)^{-3/2}(2r - 2s\cos\theta) = -\frac{r - s\cos\theta}{L_s^3}.$$

分别取 $s=d,b$，并用 $\partial(r^{-1})/\partial r=-r^{-2}$，由 $E_r=-\partial V/\partial r$ 可得

$$E_r=k\left[\frac{q(r-d\cos\theta)}{L_d^3}+\frac{q'(r-b\cos\theta)}{L_b^3}+\frac{q_0}{r^2}\right].$$

现在才令 $r\to R^+$。记 $L=\sqrt{R^2+d^2-2Rd\cos\theta}$，由电像位置有 $L_b=(R/d)L$。代入 $q'=-qR/d$ 后，前两项合并为

$$\frac{q}{L^3}\left[R-d\cos\theta-\frac{d^2}{R^2}\left(R-\frac{R^2}{d}\cos\theta\right)\right]=-\frac{q(d^2-R^2)}{RL^3}.$$

球内导体场为零，外法向由球心向外，所以 $\sigma=\varepsilon_0E_r(R^+,\theta)$，最终得到

$$\sigma(\theta)=\frac{q_0}{4\pi R^2}-\frac{q(d^2-R^2)}{4\pi R(d^2+R^2-2dR\cos\theta)^{3/2}}.$$

第一项补足净电荷，第二项是接地球的感应分布。将面密度沿球面相加，球面带的面积为 $2\pi R^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。第一项均匀分布积分为 q_0；第二项的积分记为 Q_g：

$$Q_g=-\frac{qR(d^2-R^2)}{2}\int_0^\pi\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{(d^2+R^2-2dR\cos\theta)^{3/2}}.$$

令 $u=d^2+R^2-2dR\cos\theta$，$\mathrm{d}u=2dR\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$。$\theta=0,\pi$ 对应 $u=(d-R)^2,(d+R)^2$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{u^{3/2}}&=\frac{1}{2dR}\int_{(d-R)^2}^{(d+R)^2}u^{-3/2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{dR}[-u^{-1/2}]_{(d-R)^2}^{(d+R)^2}\\&=\frac{1}{dR}\left(\frac{1}{d-R}-\frac{1}{d+R}\right)=\frac{2}{d(d^2-R^2)}.\end{aligned}$$

因 $d>R$，根式的两个端点均可直接取正数 $d-R,d+R$。于是 $Q_g=-qR/d$，总量 $q_0+Q_g=Q$。外电荷为正时，靠近它的一侧接地感应项最负。再把该项与中心像对应的均匀面密度相加，便得到孤立球各处的实际面密度。

3.7 叠加与互易关系

3.7.1 从接地导体到孤立导体

电势方程是线性的，但叠加两个解时，导体的电势和净电荷也随之叠加。例如同一外点电荷下，孤立导体的解可以写成“接地感应解”与“没有外点电荷、导体另带一定电荷的解”之和。第二项不增加外点电荷，却把导体电势由零变为某常数，并补足指定净量。孤立球中的中心像正是这种附加解，例题中的有限圆盘也将采用同一思路。

两个电荷分布的相互作用积分满足

$$\int \rho_1 V_2 \,\mathrm{d}v = \int \rho_2 V_1 \,\mathrm{d}v.$$

把 $V_2(\boldsymbol{r}) = k\int \rho_2(\boldsymbol{r}')/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\,\mathrm{d}v'$ 代入左端，保留两个独立源点变量：

$$\begin{aligned}\int \rho_1 V_2 \,\mathrm{d}v &= k\iint \frac{\rho_1(\boldsymbol{r})\rho_2(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}v \\ &= \int \rho_2(\boldsymbol{r}')\left[k\int \frac{\rho_1(\boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\,\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}v' = \int \rho_2 V_1 \,\mathrm{d}v'.\end{aligned}$$

在相互作用积分收敛的条件下交换次序，括号内正是 V_1；表面电荷应作为面分布加入。这个互易关系比较同一空间中的两种静电状态。表面电荷的贡献写成相应的面积分。

设第一状态只有一个电势为 V_0 的导体，其外部某点电势为 ϕ_0。第二状态把导体接地，并在该点放电荷 q，导体取得净量 Q_g。互易关系给出 $0 = Q_g V_0 + q\phi_0$，因此 $Q_g = -q\phi_0/V_0$。这在难求局部分布、却能求总感应电荷时很有用。

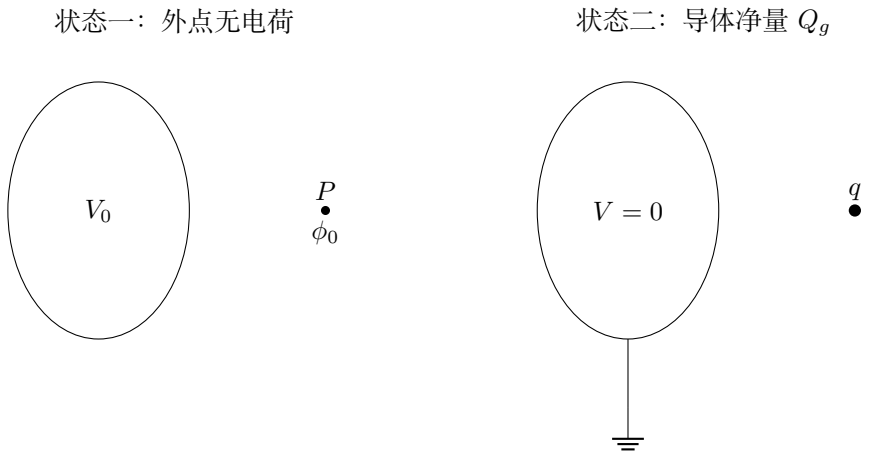


图 3.13: 同一几何上的两种独立状态：先求已知导体势在外点的值，再求该点电荷诱导的接地总量

图 3.13 第一状态在导体表面是常数 V_0，第二状态导体电势为零。互易式左侧第一状态电荷乘第二状态的势为零，右侧为 $Q_g V_0 + q\phi_0$，所以无需求每处面密度即可确定 Q_g。两状态采用相同的导体形状，并以无穷远为电势零点。

3.7.2 局部平面近似与整体电荷约束

点电荷距有限金属面很近时，附近曲率与边缘可以忽略，局部面密度和近距离作用力可用接地平面近似。这个近似的条件是观察距离、离面高度都远小于金属面的横向尺度。有限导体的总感应电荷还取决于整体形状，可由互易关系求出。

有限导体的附加净电荷按其平衡分布重新分配，随导体形状而变化。薄圆盘的自由表面电荷在边缘增强；尖端与边缘处的电荷集中由导体整体形状决定。处理近轴点电荷与孤立圆盘时，应先求接地感应总量，再用圆盘自身的平衡分布补足指定电荷，附加电荷的分布仍由圆盘等势条件决定。

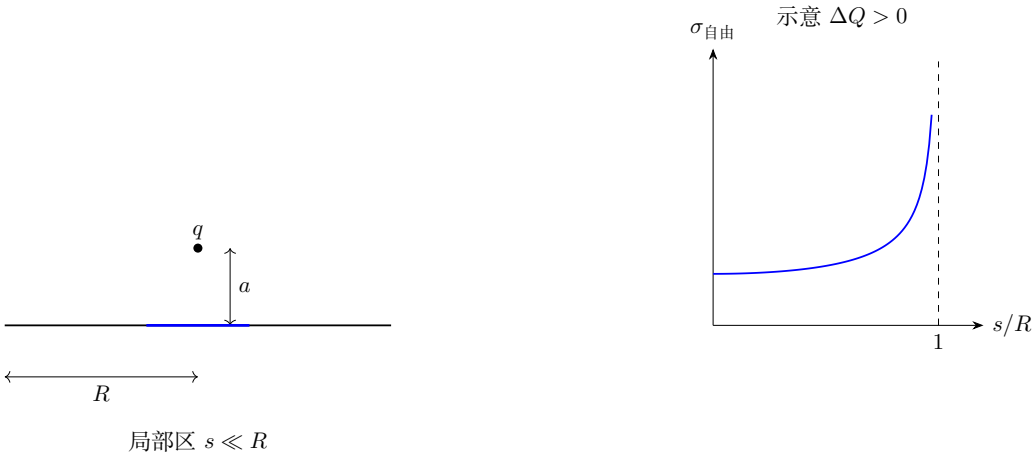


图 3.14: 局部近轴尺度 a, s 远小于盘半径 R；补足孤立净量的自由电荷分布在边缘增强

图 3.14 左图的平面近似只控制近轴局部的主要感应项；右图的边缘增强属于整个有限盘的平衡分布，互易关系给出全盘的感应总量。求孤立盘时，应先求接地感应的总量，再叠加满足实际几何的自由带电解；两部分相加后，盘面仍等势，总电荷等于题设的指定值。

3.8　例题与分析

例 3.1 (小球放入空腔的接触与未接触)**.** 带正电 q 的小球放入原中性的闭合金属空腔。分别讨论保持绝缘、不接触腔壁，以及接触后再分离两种过程的内外表面总电荷。

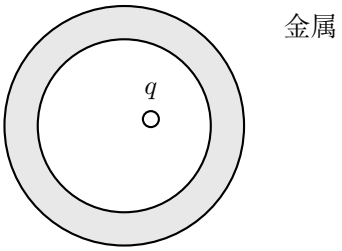


图 3.15: 小球放入空腔的接触与未接触

解

小球与壳保持绝缘

图 3.15 中，在金属内取包围空腔的闭合高斯面。面上电场为零，穿出电通量为零，因而

$$q + Q_{\text{内}} = 0, \qquad Q_{\text{内}} = -q.$$

壳原来中性且始终绝缘，$Q_{\text{内}} + Q_{\text{外}} = 0$，所以 $Q_{\text{外}} = q$。小球位置改变时内壁电荷重新分布，以上总量保持。

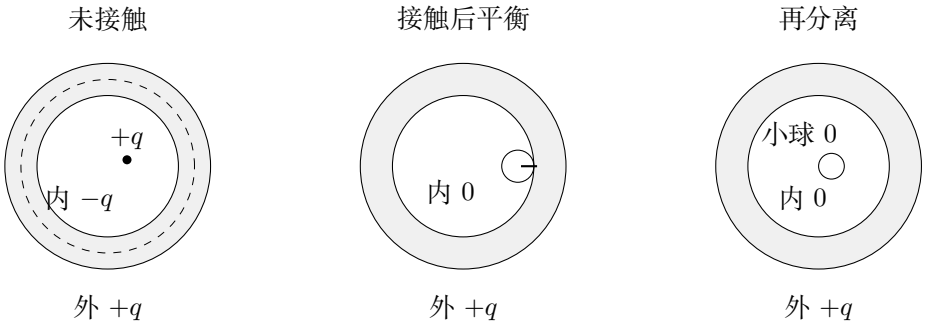


图 3.16: 未接触时内外感应相反；接触达到平衡后，净量只在最外表面，腔内小球分离后无净量

接触后再分离

图 3.16 中，小球接触腔壁后与壳成为一个导体。空腔内没有独立电荷，腔内为等势区域，内壁及小球的腔内表面电荷密度为零。整个导体的净电荷 q 分布在最外表面。平衡后在腔内将小球分离，小球保持中性，壳的内表面电荷为零，外表面仍带 q。

例 3.2 (两个导体依次接地后的净电荷)**.** 电荷量为 $q>0$ 的小球 C 固定在空腔导体 A 内而不接触。外部另有中性导体 B。先短暂接地 A 后撤去地线，再短暂接地 B 后撤线，最后移走 C。判断 A,B 的最终净电荷，忽略小孔漏场。

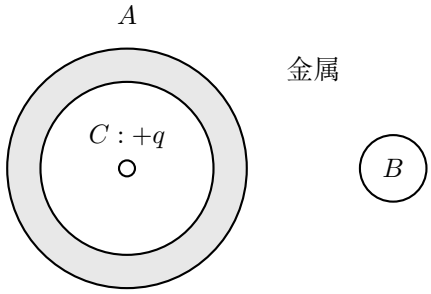


图 3.17: 两个导体依次接地后的净电荷

解

先接地空腔导体

图 3.17 中，设 C 的电荷量为 $q>0$。金属内的高斯面给出 A 内壁总电荷 $-q$。A 接地时为零势，外部没有其他带电物体；外部场的零势解使 A 外表面和 B 都无电荷。因此 A 从大地取得 $-q$，撤去地线后保持这一净电荷。

再接地外部导体

此时外部电场仍为零，B 接地后仍保持中性。撤去第二根地线，B 的净电荷固定为零。

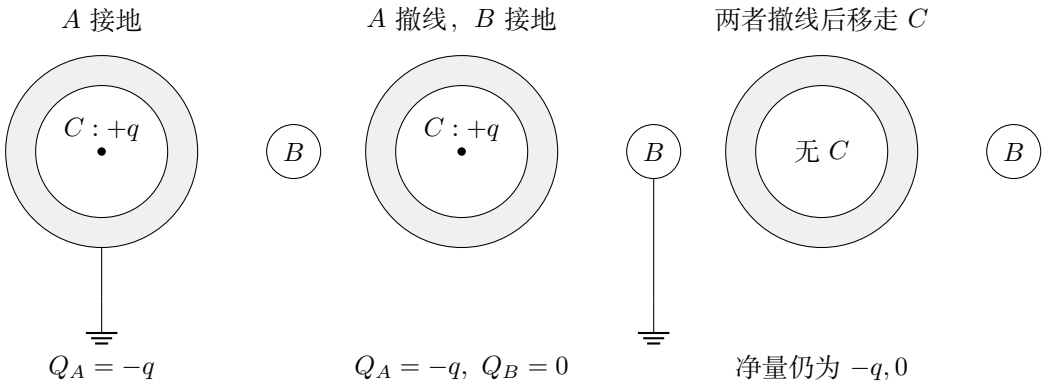


图 3.18: 按地线状态逐阶段记录；撤线后的净量固定，最后移走内电荷只引起重新分布

移走腔内小球

图 3.18 中，两导体均已与大地断开。移走 C 后，A 的内腔成为空腔，内壁电荷转移到外表面，A 的最终净电荷为 $-q$。B 在 A 的外场下出现正负感应电荷，最终净电荷仍为零。

例 3.3 (外部带电球靠近屏蔽腔)**.** 正电小球 A 悬于中性闭合球壳 C 的球心，另一悬挂负电小球 B 从外靠近。壳固定且不接地，忽略穿线孔。判断 A 是否发生新的水平偏转、B 是否被吸向壳。

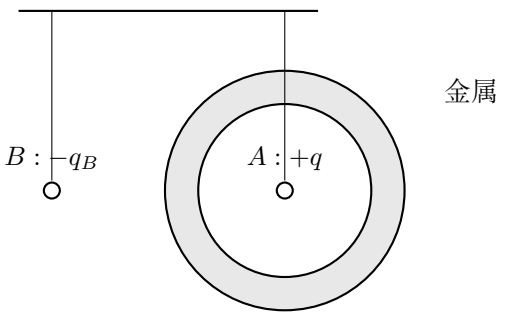


图 3.19: 外部带电球靠近屏蔽腔

解

腔内小球的平衡

图 3.19 中，设 A 的电荷量为 $q > 0$。它在球心时，球腔内壁均匀带电 $-q$，在 A 处产生的合场为零。外部 B 靠近使腔壁的常数电势改变，腔内原有电势加上同一常数；空间导数保持，腔内电场也保持。因此 A 仍在原位置平衡。

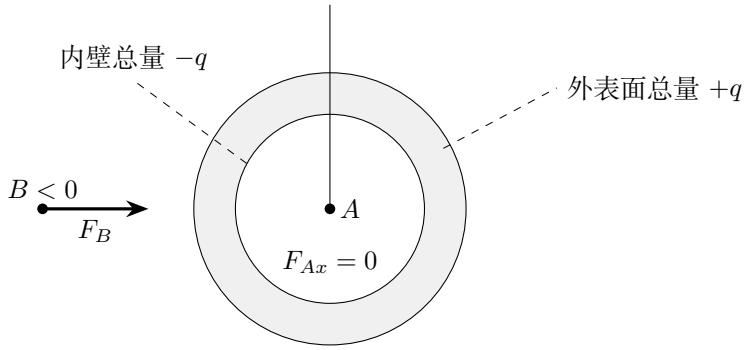


图 3.20: 内壁的球对称感应使中心电荷无水平合力；外部负电荷仍受吸引

外部小球的受力

图 3.20 中，壳保持中性，外表面的总电荷为 $+q$。负电小球 B 靠近后，外表面电荷向近侧集中。正的净电荷与这种极化都使 B 受到指向球壳的吸引力，故 B 向球壳偏转。

例 3.4 (带罩验电器的三阶段变化)**.** 验电器的小球 A、金属杆 B 与金箔 C 相连，与金属罩 D 绝缘。整体置绝缘座上。给 A 正电；再用绝缘柄金属叉连接 A, D；撤叉后用手触 A。判断各阶段金箔变化，忽略小穿线孔漏场。

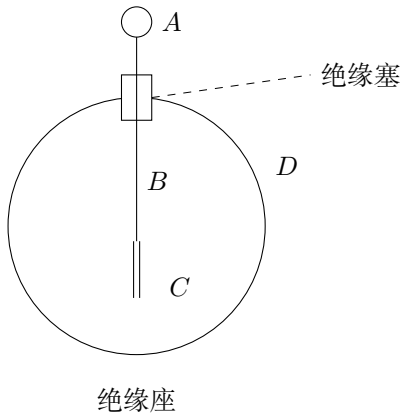


图 3.21: 金属杆穿过绝缘塞，与罩 D 不接触；图示给电前的结构

解　给内电极充电

在图 3.21 第一步，正电进入小球—杆—金箔的连通体，两片金箔带同号正电，张开。金属罩与内电极绝缘，内电极保留所带的正电荷，罩的内外表面分别出现负、正感应电荷。

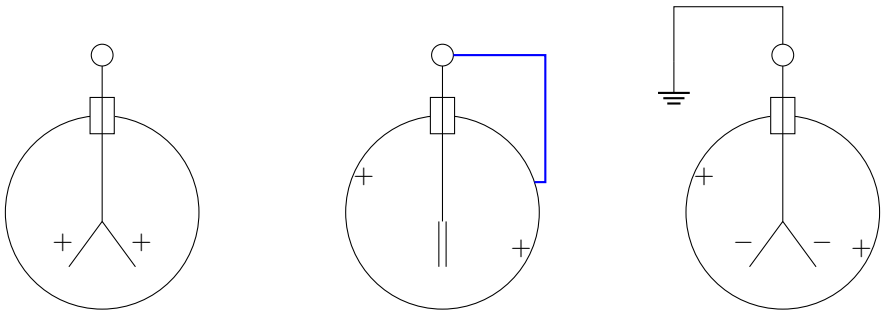


图 3.22: 左图正电金箔张开；中图金属叉把内外连通，金箔闭合；右图撤叉后内电极接地，金箔带负电再张开

连接内外导体

图 3.22 第二步连接 A, D，两者成为一个连通导体。静电平衡后内腔没有独立电荷，内腔场零，金箔上不保留同号排斥电荷，闭合；净正电分布于整个连通体的外表面。撤叉使两部分各保留分离时状态。

撤叉后接地

最后手触 A 使杆和金箔接地，外罩仍孤立并带正电，内部接地电极与外罩不再等势。外罩正电使内电极感应负电，金箔再次带同号负电，张开。

例 3.5 (远隔两球连线后的分配)**.** 两金属球半径 R_1, R_2，相距远大于两半径，用细导线连接，总电量 Q。忽略导线电荷和相互电势，且 $Q \neq 0$。求电量、面密度、表面场大小之比与共同电势。

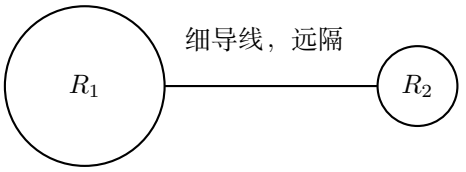


图 3.23: 远隔两球连线后的分配

解　用等势与总量守恒联立求电荷分配

图 3.23 连接后电势相同，$Q_1/R_1 = Q_2/R_2$，总量 $Q_1 + Q_2 = Q$。联立得 $Q_i = QR_i/(R_1 + R_2)$，共同电势 $V = kQ/(R_1 + R_2)$。

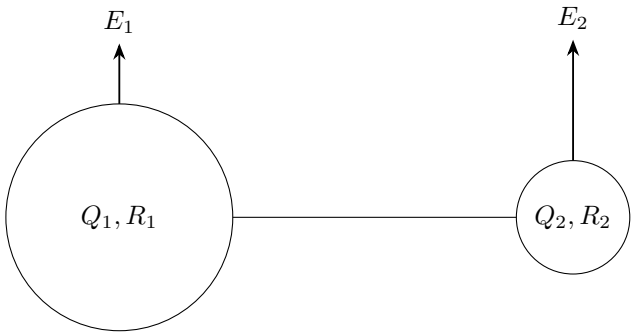


图 3.24: 共同电势下以 $R_1 = 2R_2$ 示意；场箭头长度按正电情况下的 $E_2 = 2E_1$ 绘制

再按表面积换算面密度和表面场

图 3.24 每球面密度 $\sigma_i = Q_i/(4\pi R_i^2)$, 故 $Q_1 : Q_2 = R_1 : R_2$, $\sigma_1 : \sigma_2 = R_2 : R_1$, 表面场大小比同为 $R_2 : R_1$。

表面场的大小

小球分得的总电荷较少，局部面密度和表面场却较大。在题给远隔条件下，每球近似具有球对称分布，较小的球具有较大的表面场。

例 3.6 (同心小球与厚球壳)**.** 半径 r 的金属球与内外半径 R_1, R_2 的金属壳同心，$r < R_1$。小球电量 q、壳净量 Q，无外部电荷。求小球电势、两壳面的电量及两导体电势差；再将壳接地，重求。

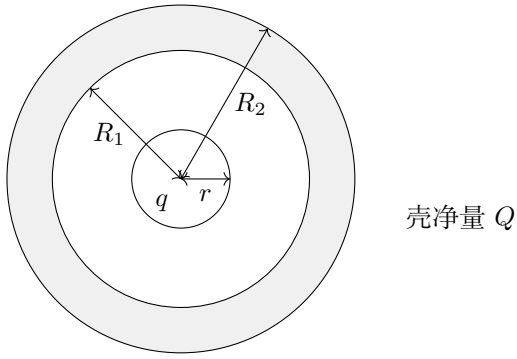


图 3.25: 同心几何中三个半径分开标记，壳净量为 Q，中央球净量为 q

解　三个球面的电荷

在图 3.25 中，从金属壳内部取高斯面，得到内表面带电 $-q$。壳的净电荷为 Q，所以外表面带电 $Q+q$。球对称使三处电荷各自在所在球面上均匀分布。

间隙场与电势

记 s 为从球心量起的径向坐标。间隙的高斯面只包围 q，故径向场为 $E_s = kq/s^2$。从小球表面到壳内壁积分，

$$V_{\text{球}} - V_{\text{壳}} = \int_r^{R_1} \frac{kq}{s^2}\,\mathrm{d}s = kq[-s^{-1}]_r^{R_1} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1}\right).$$

外部总电荷为 $Q+q$，壳的电势为 $k(Q+q)/R_2$。把这个共同电势与间隙势差相加，得

$$V_{\text{球}} = k\left[\frac{q}{r} - \frac{q}{R_1} + \frac{Q+q}{R_2}\right].$$

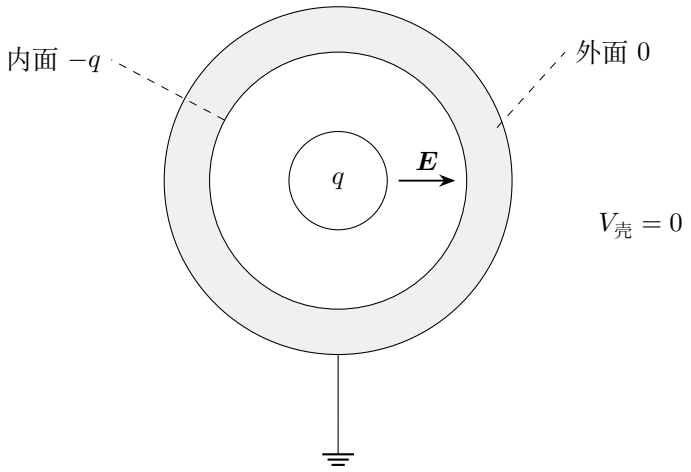


图 3.26: 接地只消去共同外部电势项；间隙仍由中心球电荷 q 决定

球壳接地

图 3.26 中，壳的电势降为零，壳外没有其他电荷，所以外表面电荷为零。小球的净电荷仍为 q，内壁仍带 $-q$，间隙场及势差也保持原值。因而接地后小球电势为 $kq(1/r - 1/R_1)$，球壳的净电荷变为 $-q$。图中的间隙箭头按 $q>0$ 绘制。

例 3.7 (点电荷与接地平面的场和功)**.** 正电荷 q 位于接地无限大导体平面右侧，距面 d。求右侧电场、金属内部感应电荷的场、表面面密度、总感应电荷、作用力，以及将 q 缓慢移至无穷远的外力功。

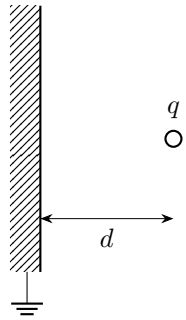


图 3.27: 点电荷与接地平面的场和功

解　镜像电荷与右侧电势

在图 3.27 中以平面为 $x=0$，真电荷在 $x=d$。在真实求解区域之外、金属一侧，图 3.28 的像电荷 $-q$ 放在 $x=-d$，平面上到两电荷距离相同，两势相消，且无穷远势为零。因此真实右半空间的电势为

$$V(x,s)=kq\left[\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+s^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+s^2}}\right],\quad x>0.$$

由电势分别求轴向和横向电场

令 $r_1=\sqrt{(x-d)^2+s^2}$、$r_2=\sqrt{(x+d)^2+s^2}$，先分别计算两个倒数距离的偏导。以第一项为例，

$$\partial_x(r_1^{-1})=-\frac{1}{2}r_1^{-3}\,2(x-d)=-\frac{x-d}{r_1^3},\qquad \partial_s(r_1^{-1})=-\frac{1}{2}r_1^{-3}\,2s=-\frac{s}{r_1^3}.$$

第二项将 $x-d$ 换为 $x+d$。再用 $E_x=-\partial_x V$、$E_s=-\partial_s V$，并保留电势中第二项的负号，右侧电场的轴向、横向分量为

$$E_x=kq\left(\frac{x-d}{r_1^3}-\frac{x+d}{r_2^3}\right),\qquad E_s=kqs\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right),\quad E_\varphi=0.$$

在金属内另用总场为零求感应场

金属内部总场为零，故感应电荷的场与点电荷的场大小相等、方向相反。对金属内 $x<0$ 的点 $\boldsymbol{r}$，感应场应另写为

$$\boldsymbol{E}_{\text{感}}(\boldsymbol{r})=-kq\frac{\boldsymbol{r}-d\hat{\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{r}-d\hat{\boldsymbol{x}}|^3}.$$

该式逐点满足金属中的静电平衡关系 $\boldsymbol{E}_{\text{真点}}+\boldsymbol{E}_{\text{感}}=0$。

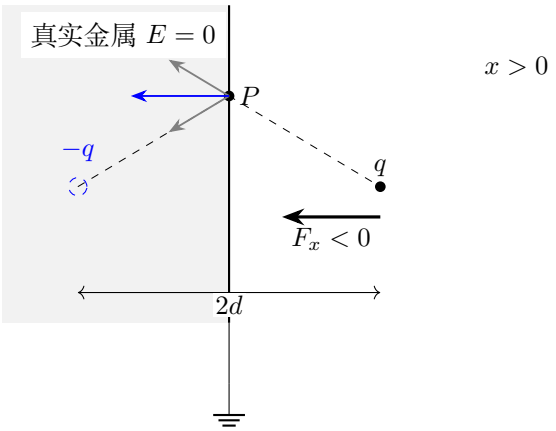


图 3.28: 像在真实求解区之外；在导体表面 P 作法向投影，切向分量抵消，电荷受力朝向平面

由法向场求面密度并积分总量

在表面取向右法向，$E_x(0^+,s)=-2kqd/(d^2+s^2)^{3/2}$，所以

$$\sigma(s)=-\frac{qd}{2\pi(d^2+s^2)^{3/2}},\qquad Q_g=\int_0^\infty \sigma(s)2\pi s\,\mathrm{d}s=-qd\int_0^\infty \frac{s\,\mathrm{d}s}{(d^2+s^2)^{3/2}}.$$

这里的原函数由 $u=d^2+s^2$、$\mathrm{d}u=2s\,\mathrm{d}s$ 得到：

$$\int_0^S \frac{s\,\mathrm{d}s}{(d^2+s^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int_{d^2}^{d^2+S^2} u^{-3/2}\,\mathrm{d}u=\left[-u^{-1/2}\right]_{d^2}^{d^2+S^2}=\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{d^2+S^2}}.$$

取 $S\to\infty$ 后，再乘 $-qd$，即得总感应量

$$Q_g=-qd\left(\frac{1}{d}-0\right)=-q.$$

用真像间距求力并积分缓慢拉离功

真电荷受到的力由距它 $2d$ 的像计算，方向朝向平面，$F_x=-kq^2/(4d^2)$。从 d 缓慢拉到无穷远，外力作功

$$W_{外}=\frac{kq^2}{4}\lim_{L\to\infty}\int_d^L x^{-2}\,\mathrm{d}x=\frac{kq^2}{4}\lim_{L\to\infty}\left[-x^{-1}\right]_d^L=\frac{kq^2}{4}\left(0+\frac{1}{d}\right)=\frac{kq^2}{4d}.$$

解释相互作用能中的二分之一

因而相互作用能为 $U=-kq^2/(4d)$，等于 $\frac{1}{2}qV_{感}$。在逐渐充电的过程中，令电荷为 ξ，感应电势为 $-k\xi/(2d)$，于是 $U=\int_0^q[-k\xi/(2d)]\,\mathrm{d}\xi=-(k/2d)[\xi^2/2]_0^q=-kq^2/(4d)$。

例 3.8 (接地金属球的像、力与拉离功)**.** 半径 R 的接地金属球，外点电荷 q 在距球心 $d > R$ 处。求像电荷位置与大小、球面感应总量、对 q 的力与缓慢拉离功。

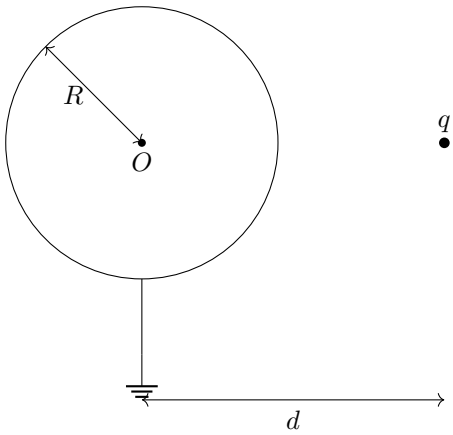


图 3.29: 球接地，外电荷距球心 $d > R$；球面半径与源点距离分别标明

解　要求整个球面上真像距离保持固定比例

沿图 3.29 的球心—电荷轴取像于球内距心 b 处。球面点 P 到真、像的距离分别为 ℓ, ℓ'。要求两者比值在整个球面恒定，比较

$$\ell^2 = d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta, \quad \ell'^2 = b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta$$

的常数项和 $\cos\theta$ 项。若 $(\ell')^2 = \lambda\ell^2$，则 $\lambda = b/d$，且 $b^2 + R^2 = (b/d)(d^2 + R^2)$。乘 d 并移项，得 $(b-d)(bd - R^2) = 0$。图中像在球内，所以取 $b = R^2/d$，得到 $\ell' = (R/d)\ell$。因此 $q' = -qR/d$ 时，$q/\ell + q'/\ell' = 0$，球面满足接地条件。

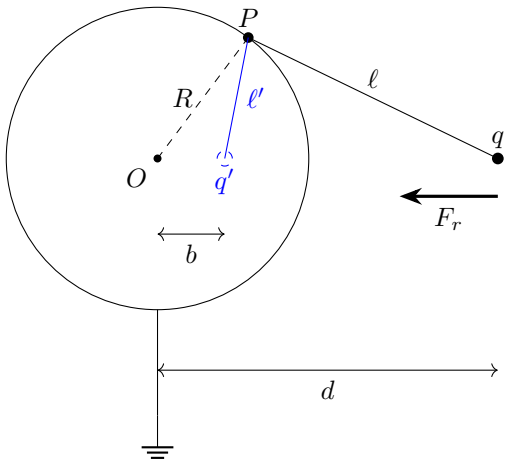


图 3.30: 球面所有点都满足距离比；力由真像间距 $d - b$ 决定，像位于球内

球的总感应电荷

图 3.30 的球内像不在真实外区域产生额外奇点，故外场等效成立。远处 $V\sim k(q+q')/r$，比较真实外点电荷与球的总量，球感应净量即 q'。

按实际间距计算径向吸引力

真、像间距 $d-b=(d^2-R^2)/d$，所以径向向外取正时

$$F_r=\frac{kqq'}{(d-b)^2}=-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}.$$

沿每个新位置的力积分外功

缓慢拉离需克服此力，

$$W_{外}=kq^2R\int_d^\infty\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-R^2)^2}.$$

为计算此反常积分，令 $u=x^2-R^2$，$\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x$；下限 $x=d$ 对应 $u=d^2-R^2>0$，上限趋无穷。于是

$$\begin{aligned}\int_d^\infty\frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2-R^2)^2}&=\frac12\int_{d^2-R^2}^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u=\frac12[-u^{-1}]_{d^2-R^2}^\infty\\&=\frac12\left(0+\frac{1}{d^2-R^2}\right)=\frac{1}{2(d^2-R^2)}.\end{aligned}$$

$$W_{外}=\frac{kq^2R}{2(d^2-R^2)}.$$

比较近壁平面极限和远处衰减

近壁时先令 $d=R+a$，$d^2-R^2=(d-R)(d+R)=a(2R+a)$，因此

$$F_r=-\frac{kq^2R(R+a)}{a^2(2R+a)^2}=-\frac{kq^2}{4a^2}\frac{1+a/R}{(1+a/(2R))^2}.$$

当 $a/R\ll1$，最后的无量纲因子趋于 1，才回到局部平面力 $-kq^2/(4a^2)$。远处同样先提出 d 的幂，$F_r=-(kq^2R/d^3)(1-R^2/d^2)^{-2}$，所以 $d\gg R$ 时按 d^{-3} 衰减。接地球的净电荷 $-qR/d$ 随距离改变，远处吸引力的这一主项对应它从大地取得的净电荷。

例 3.9 (孤立带电球的力为零条件)**.** 半径 R 的孤立金属球净量 Q，点电荷 $q \neq 0$ 位于距球心 $d > R$ 处。求点电荷受力；求合力为零时 q, Q, d 的关系，并判断径向平衡稳定性。

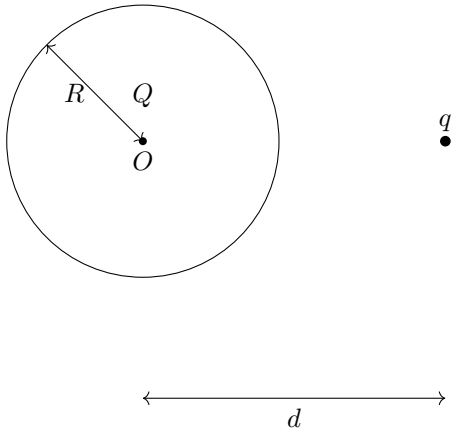


图 3.31: 球孤立且净量为 Q；点电荷位置由球心距离 d 定义

解　按指定球净量增加中心像

图 3.31 的球给定净量，除接地球像 $q' = -qR/d$ 外，还需图 3.32 的中心像 $q_0 = Q + qR/d$。中心像只给球面加常电势，总像量回到 Q。于是

$$F_r = \frac{kqQ}{d^2} + \frac{kq^2R}{d^3} - \frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2} = \frac{kq}{d^2}\left[Q - qh(d)\right], \quad h(d) = \frac{R^3(2d^2-R^2)}{d(d^2-R^2)^2}.$$

整理力式并求同号电荷的零力条件

通分时用 $d^4 - (d^2-R^2)^2 = R^2(2d^2-R^2)$。因此非零 q 的零力条件为

$$q = \frac{Qd(d^2-R^2)^2}{R^3(2d^2-R^2)}.$$

右侧因子为正，只有 q, Q 同号才可能抵消极化吸引；$Q = 0$ 的孤立中性球始终吸引外点电荷。

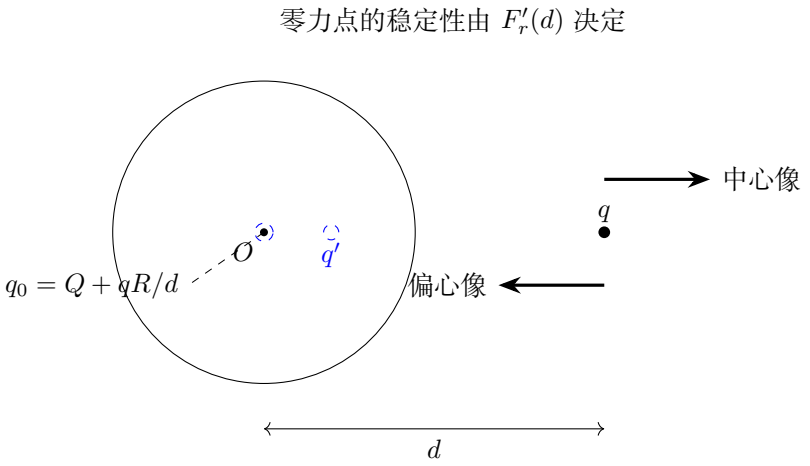


图 3.32: 在可能的零力配置中 q, Q 同号，中心像作用向外、偏心像作用向内；微小偏移后需重算两像

用单调性计算零力位置的力斜率

令 $t = d/R > 1$，则 $h = (2t^2-1)/[t(t^2-1)^2]$。因 $t > 1$，$h > 0$，先写 $\ln h = \ln(2t^2-1) - \ln t - 2\ln(t^2-1)$。三项内函数的导数依次是 $4t, 1, 2t$，因此其对数导数为

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{4t}{2t^2-1} - \frac{1}{t} - \frac{4t}{t^2-1} = -\frac{1}{t} - \frac{4t^3}{(2t^2-1)(t^2-1)} < 0.$$

判断径向偏移后是否有回复力

对 $F_r = kqd^{-2}[Q - qh(d)]$ 使用乘积法则：

$$\frac{\mathrm{d}F_r}{\mathrm{d}d} = -\frac{2kq}{d^3}[Q - qh(d)] - \frac{kq^2}{d^2}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}d}.$$

零力位置满足 $Q - qh = 0$，第一项消失；又有 $\mathrm{d}h/\,\mathrm{d}d = (\mathrm{d}h/\,\mathrm{d}t)/R < 0$，故此处 $F_r' = -kq^2h'(d)/d^2 > 0$。由于 $h(d)$ 从近壁的正无穷单调降到远处的零，给定同号的非零 Q, q 时只有一个径向零力距离。该点的力斜率为正，

稍向外偏移，力向外；稍向内偏移，力向内，故径向不稳定。

例 3.10 (三个空腔与外部电荷)**.** 中性球形导体外半径 R，有三个半径均为 r 的球腔。前两腔内各有偏心点电荷 q_1, q_2，第三腔中心有 q_3。外点电荷 Q 距球心 $L > R$。求各内壁总量、导体电势、第三腔中心除 q_3 自场以外的电势。若从零缓慢增加 q_3，其余保持，求建立此电荷所需功，不计点电荷的理想自能。最后移走 q_1, q_2，求内壁和外表面分布。

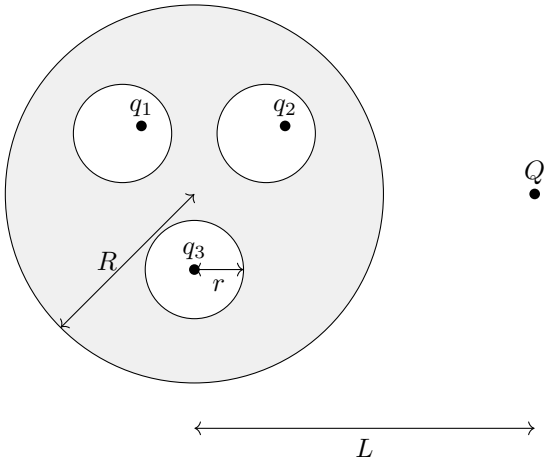


图 3.33: 三个球腔与外部电荷；前两点偏心，第三点准确位于第三腔中心

解　逐腔用高斯面求内壁与外表面总量

在图 3.33 各腔外、金属内分别取高斯面，三个内壁总量依次为 $-q_i$。导体总量零，故外表面总量 $S = q_1 + q_2 + q_3$。从外部看，球面等势、净量 S；用孤立球像解，中心补充像为 $S + QR/L$，所以

$$V_C = kS/R + kQ/L.$$

从共同金属电势分离第三腔的反作用势

第三腔中心电荷使该腔内壁均匀带 $-q_3$，其中心电势贡献为 $-kq_3/r$，其他导体部分在腔内只贡献常数。因此中心除自场外电势是 $V_C - kq_3/r$。

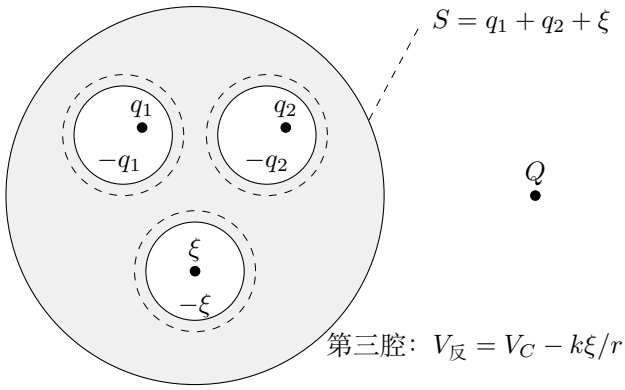


图 3.34: 逐腔高斯面确定内壁总量；第三腔中心充电时外表面总量与共同电势随 ξ 改变

在充电中间态积分，区分固定项与自诱导项

图 3.34 将中心电量从 0 增至 q_3 的中间值 ξ 时，反作用电势为

$$V_{反}(\xi) = k\left[\frac{q_1+q_2}{R} + \frac{Q}{L}\right] + k\xi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

故建立电荷的外功为

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{q_3} V_{反}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= k\left[\frac{q_1+q_2}{R} + \frac{Q}{L}\right][\xi]_0^{q_3} + k\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^{q_3} \\ &= kq_3\left[\frac{q_1+q_2}{R} + \frac{Q}{L}\right] + \frac{kq_3^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

固定电荷产生的电势贡献一次项；随 ξ 增长的感应电势贡献二次项，并由充电积分产生系数 $1/2$。

按新的外表面总量重建各区域分布

移走前两电荷后，两空腔零场，内壁密度零；第三腔内壁仍为 $-q_3/(4\pi r^2)$。外表面净量变为 q_3。令 θ 从指向 Q 的轴量起，其面密度为

$$\sigma_{外}(\theta) = \frac{q_3 + QR/L}{4\pi R^2} - \frac{Q(L^2-R^2)}{4\pi R(L^2+R^2-2LR\cos\theta)^{3/2}}.$$

外部 Q 改变外表面分布与共同电势，却不改变中心电荷在第三腔产生的球对称场。

例 3.11 (薄金属圆盘的近轴感应)**.** 半径 R 的薄金属圆盘，轴线上距盘 $a \ll R$ 处有正点电荷 q。求圆盘接地时的总感应电荷。再设圆盘孤立且净量为 Q，求中心附近两面电荷密度的近似式并估计误差。无外电荷时，圆盘电势为 V_0 的轴线势已知为 $\phi(z) = 2V_0 \arctan(R/|z|)/\pi$；净电荷为 Q_0 的自由圆盘，距轴 $s < R$ 处每一面的平衡密度已知为 $\sigma_0(s) = Q_0/[4\pi R\sqrt{R^2 - s^2}]$。

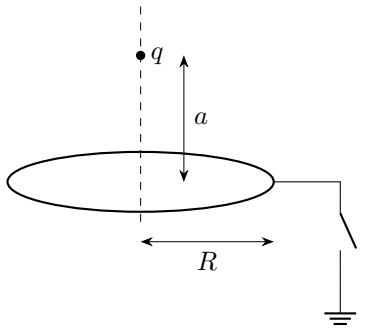


图 3.35: 薄金属圆盘的近轴感应

解　用互易关系先求有限盘的接地总感应量

图 3.35 中先比较无外电荷而盘电势为 V_0 的状态，和有外点电荷、盘接地的状态。互易关系给

$$Q_g V_0 + q\phi(a) = 0, \qquad Q_g = -\frac{2q}{\pi} \arctan \frac{R}{a}.$$

当 $a/R \to 0$，$Q_g \to -q$。随 a/R 增大，圆盘感应的负电荷总量逐渐减少。

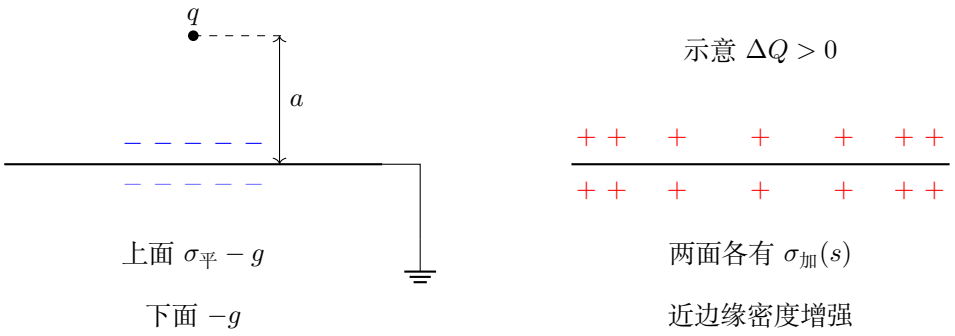


图 3.36: 左图为接地盘两面的分布，右图为补足净电荷的自由盘分布

接地盘的两面

图 3.36 左图中，靠点电荷的一面记为上面，取圆盘所在平面为 $z=0$。若整个平面接地，上半空间中的电像解给出面密度

$$\sigma_{\text{平}}(s)=-\frac{qa}{2\pi(s^2+a^2)^{3/2}}.$$

接地有限盘在盘外平面上有实际电势 f，在盘上 $f=0$。由于 $q>0$，由最大值原理知 $f\geq 0$。从上半空间的实际电势减去无限接地平面的电像势，得到无源的电势 w，其平面值为 f。将下半空间的实际电势反射到上半空间，得到的也是以 f 为平面值、远处趋零的无源电势。由唯一性，这两个电势相同。记 $g(s)=\varepsilon_0\partial_z w(s,0^+)$，则接地盘的上面为 $\sigma_{\text{平}}-g$，下面为 $-g$。这是因为两面各自的外法向都指向所在的半空间。

叠加自由盘解补足指定净量

接地解使整个圆盘为零势；孤立后仍须使整个盘面等势，只是常数势不再限定为零。在线性静电问题中，叠加一个无外电荷的自由圆盘解，只会给盘面增加常数势，不会改变外点电荷 q。取附加净量为 $\Delta Q=Q-Q_g$，总净量便回到题设的 Q。使用题给自由盘的平衡密度，将 Q_0 换成 ΔQ，得到每一面

$$\sigma_{\text{加}}(s)=\frac{\Delta Q}{4\pi R\sqrt{R^2-s^2}}.$$

附加电荷在两面的分布

代入每一面的面密度，先保留两个面的因子：

$$Q_{\text{加}}=2\int_0^R 2\pi s\sigma_{\text{加}}\,\mathrm{d}s=\frac{\Delta Q}{R}\int_0^R\frac{s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{R^2-s^2}}.$$

令 $z=R^2-s^2$，则 $\mathrm{d}z=-2s\,\mathrm{d}s$；$s=0,R$ 对应 $z=R^2,0$。于是

$$\int_0^R\frac{s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{R^2-s^2}}=-\frac{1}{2}\int_{R^2}^0 z^{-1/2}\,\mathrm{d}z=-\big[\sqrt{z}\big]_{R^2}^0=R,\qquad Q_{\text{加}}=\Delta Q.$$

边缘的密度虽发散，这个反常积分的极限有限。图 3.36 右图中，自由圆盘解在上下两面各分配 $\Delta Q/2$，并保持整个盘面等势。

有限盘修正的大小

把无限平面的面密度积分到半径 R。沿用同心圆环换元 $u=s^2+a^2$，有 $\mathrm{d}u=2s\,\mathrm{d}s$，两端分别为 a^2 和 R^2+a^2：

$$\begin{aligned}Q_{\text{平},R}&=-qa\int_0^R\frac{s\,\mathrm{d}s}{(s^2+a^2)^{3/2}}=-\frac{qa}{2}\int_{a^2}^{R^2+a^2}u^{-3/2}\,\mathrm{d}u\\&=qa\big[u^{-1/2}\big]_{a^2}^{R^2+a^2}=-q+\frac{qa}{\sqrt{R^2+a^2}}.\end{aligned}$$

接地盘两面合计比这个圆域多出 $-2\int_{盘} g\,\mathrm{d}S$。代入前面算得的 Q_g，令 $\eta = a/R$，则

$$\int_{盘} g\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{平,R} - Q_g}{2} = \frac{q}{2}\left[\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} - \frac{2}{\pi}\arctan\eta\right].$$

当 $\eta \ll 1$ 时，$0 \le \arctan\eta \le \eta$，方括号各项均为 $O(\eta)$，故上式为 $O(qa/R)$。

要从全盘的总量估计中心附近的面密度，可再次使用平面电像解。以 w 为状态一，以 $(\boldsymbol{s}, z)$ 处电量 q_t 的试探电荷和接地平面为状态二。记状态二的电势为 V_t，平面的感应密度为 σ_t。像唯一性证明中那样，在半空间对 $\nabla\cdot(w\nabla V_\mathrm{t} - V_\mathrm{t}\nabla w)$ 用散度定理。由于 w 在内部无源，体积分只留下点电荷项 $-q_\mathrm{t}w(\boldsymbol{s}, z)/\varepsilon_0$。在平面上 $V_\mathrm{t} = 0$，从半空间向外的法向导数为 $\sigma_\mathrm{t}/\varepsilon_0$，所以面积分为 $\int f\sigma_\mathrm{t}\,\mathrm{d}S/\varepsilon_0$。两端相等，得到 $q_\mathrm{t}w(\boldsymbol{s}, z) = -\int f\sigma_\mathrm{t}\,\mathrm{d}S$。代入平面电像的密度公式，

$$w(\boldsymbol{s}, z) = \frac{z}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{u}|\ge R} \frac{f(\boldsymbol{u})}{(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s}|^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}^2u.$$

在 $|\boldsymbol{s}| \le R/2$ 处，积分区与 $\boldsymbol{s}$ 至少相距 $R/2$。将上式除以 z 后取 $z \to 0^+$，乘 ε_0 得

$$g(\boldsymbol{s}) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi}\int_{|\boldsymbol{u}|\ge R} \frac{f(\boldsymbol{u})}{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{s}|^3}\,\mathrm{d}^2u \ge 0.$$

对每个 $|\boldsymbol{u}| \ge R$，内侧半径 $R/2$ 的圆域各点到 $\boldsymbol{u}$ 的距离介于 $|\boldsymbol{u}|/2$ 与 $3|\boldsymbol{u}|/2$ 之间。由于 $f \ge 0$，这个圆域内任一点的 g 至多是另一点的 27 倍。故任一点的 g 至多是内侧圆域平均值的 27 倍。该圆域面积为 $\pi R^2/4$，其中的 g 积分至多等于全盘积分 $O(qa/R)$，所以中心附近 $g = O(qa/R^3)$。

孤立盘两面的面密度

保留 $\Delta Q = Q - Q_g$，把图 3.36 两图的分布相加，得到

$$\sigma_+(s) = -\frac{qa}{2\pi(s^2+a^2)^{3/2}} + \frac{\Delta Q}{4\pi R\sqrt{R^2-s^2}} - g(s),$$
$$\sigma_-(s) = \frac{\Delta Q}{4\pi R\sqrt{R^2-s^2}} - g(s).$$

在 $a \ll R$、$s \le R/2$ 时，略去 g 的绝对误差为 $O(qa/R^3)$。例如 $Q = -q$ 时，$\Delta Q = -(2q/\pi)\arctan(a/R)$，它产生的面密度也在这个量级。若进一步求这时背面的首个非零项，须同时求出 g 的系数。

例 3.12 (内球接地而外壳附近有点电荷)**.** 同心薄金属球壳半径 $R_A < R_B$，内壳接地、外壳原中性且孤立。外点电荷 q 距球心 $d > R_B$。求内球感应净量及外壳电势。忽略地线小孔的漏场。

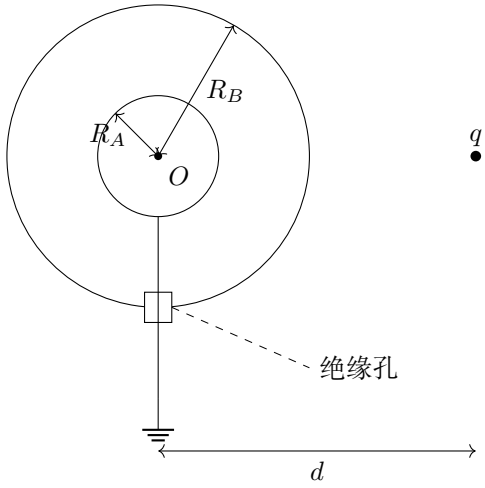


图 3.37: 内球地线穿过外壳的绝缘小孔，外壳保持孤立；半径 R_A, R_B 分别标明

解　用外壳中性条件建立三个表面总量

图 3.37 中令内球取得净量 Q_A。外壳内表面为 $-Q_A$，外表面为 Q_A，外壳净量仍零。外区域等效于净量 Q_A 的等势球壳受外点电荷作用，故壳电势 $V_B = kQ_A/R_B + kq/d$。

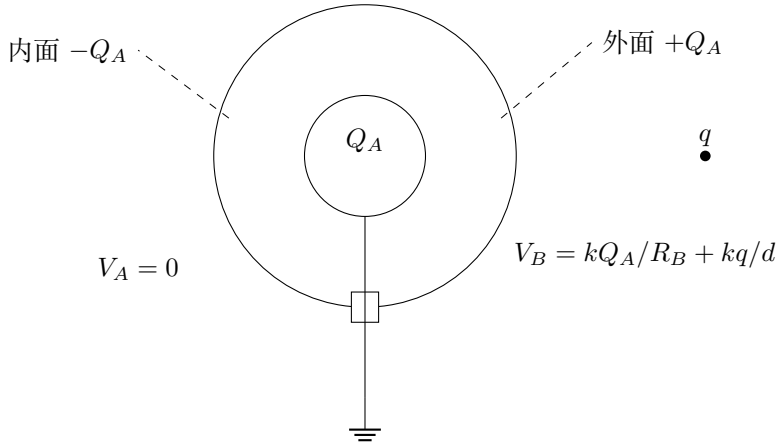


图 3.38: 内球接地而外壳净量为零；外壳两个表面的总量相反，腔内球对称场由 Q_A 决定

将内球接地条件与间隙电势差联立

图 3.38 内外球间没有别的电荷，球对称场使 $V_A - V_B = kQ_A(1/R_A - 1/R_B)$。内球接地 $V_A = 0$，联立得

$$0 = \frac{kQ_A}{R_A} + \frac{kq}{d}, \qquad Q_A = -\frac{qR_A}{d}, \quad V_B = \frac{kq}{d}\left(1 - \frac{R_A}{R_B}\right).$$

解释外部共同电势如何引起接地内球电荷变化

外点电荷通过外壳的共同电势影响接地内球的电荷量。接地内球可通过地线交换电荷，改变的是腔内球对称场的幅度。

例 3.13 (金属球与轴线上均匀带电环)**.** 金属球半径 R，球心到均匀带电细环圆心的轴向距离为 $a > R$，环半径 b、总量 q，各点到球心等距 $D = \sqrt{a^2 + b^2}$。求球接地、孤立中性、保持电势 U 时的净量与电势；比较保持 U 和接地时环受力的改变量。

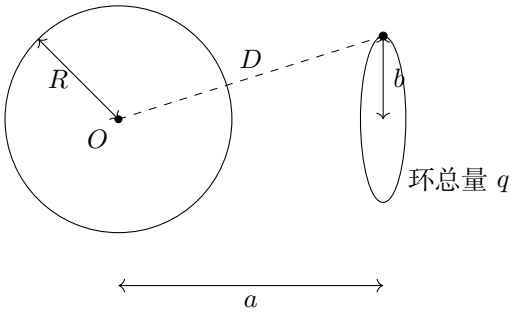


图 3.39: 球心位于圆环轴线上；轴向距离为 a，环点到球心的等距为 D

解　对环的每个等距微元叠加接地球像量

把图 3.39 的环分为微元 $\mathrm{d}q$，每个微元都距球心 D。接地球对该微元的像量是 $-R\,\mathrm{d}q/D$。由于 R/D 在整环上不变，对所有微元求和：

$$Q_g = \oint_{\text{环}} -\frac{R}{D}\,\mathrm{d}q = -\frac{R}{D}\oint_{\text{环}} \mathrm{d}q = -\frac{qR}{D}.$$

这里 $\oint_{\text{环}} \mathrm{d}q = q$ 就是整环的总电荷；球面电势由每对真实微元与像微元分别抵消，故总球电势仍为零。

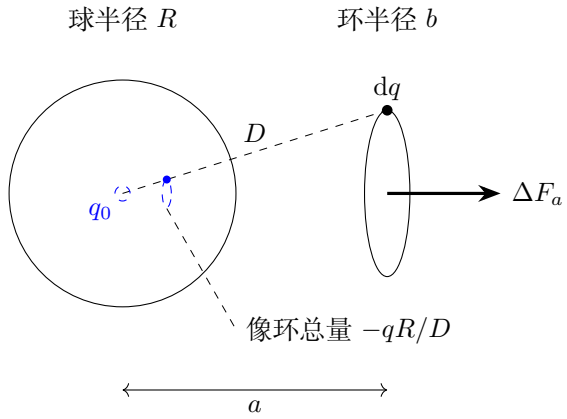


图 3.40: 等距环经球面反演形成像环；增加中心像只改变球面共同电势及环的轴向受力

分别按零净量和指定电势补中心像

图 3.40 孤立中性球需补中心像 $q_0 = qR/D$，所以净量零、球电势 $V = kq/D$。指定球电势为 U 时，补中心像 $q_0 = RU/k$，球净量

$$Q_U = \frac{RU}{k} - \frac{qR}{D}.$$

只对新增中心像的力作轴向投影

由接地改成电势 U，偏心像分布保持，只增加中心像 RU/k。环每微元因中心像增加的力沿球心到该微元方向，其轴向分量积分为

$$\Delta F_a = \frac{RUa}{D^3}\int_0^{2\pi}\frac{q}{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{RUa}{D^3}\frac{q}{2\pi}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{qRUa}{(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

力的改变量的方向

向远离球心取正。$qU > 0$ 时斥力增加，$qU < 0$ 时吸引增加。

3.9　本讲小结

导体达到静电平衡后，金属内电场为零，整个连通导体等势。包围空腔的高斯面确定内壁总电荷；导体与大地的连接、导体自身的净电荷，再决定外表面的分布。闭合空腔使内外电场分开，接地则进一步固定导体的电势。

电像法以少数等效电荷表示感应电荷在指定区域内的作用。平面像由对称性确定，球面像由距离的几何比例确定。孤立球通过增加中心像保持净电荷，定势球

通过中心像设定球面电势。场和力可直接由这些等效电荷计算，感应能量则由实际移动或逐渐充电的过程积分得到。

有限导体的近处感应分布可采用局部平面近似，总感应电荷可由互易关系求出。再叠加导体自身的平衡带电解，便从接地模型过渡到指定净电荷的孤立模型。

3.10 练习

练习 3.1 (四面体金属面的中心电势)**.** 正四面体四个金属面彼此绝缘，分别保持电势 V_1, V_2, V_3, V_4。忽略接缝，求几何中心电势。

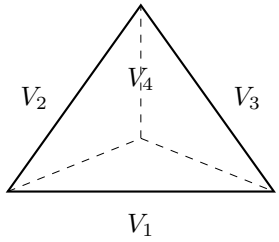


图 3.41: 四面体金属面的中心电势

练习 3.2 (球壳连接远处小球)**.** 同心薄金属球壳半径 $R_1 < R_2$,净量分别为 Q_1, Q_2。将内壳用穿过绝缘小孔的细线连接远处半径 r 的原中性小金属球，忽略小孔漏场、导线电荷与远球的相互电势。求远球所得电量。

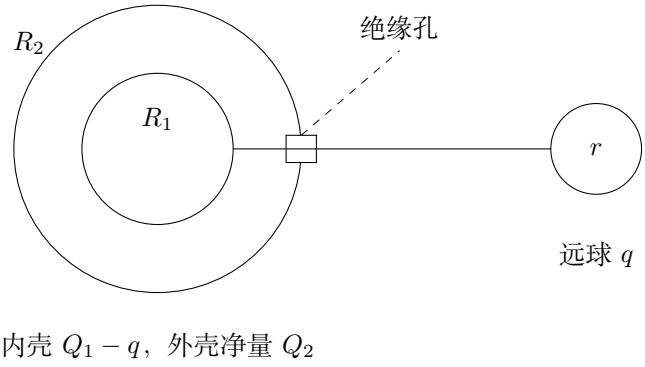


图 3.42: 内壳通过绝缘小孔接远球，外壳与导线保持绝缘；只在连通的内壳与远球之间守恒电量

练习 3.3 (孤立中性球与远处点电荷)**.** 中性金属球半径 R，外点电荷 q 距球心 $d > R$。求力及 $d \gg R$ 时的主要项，并与接地球比较。

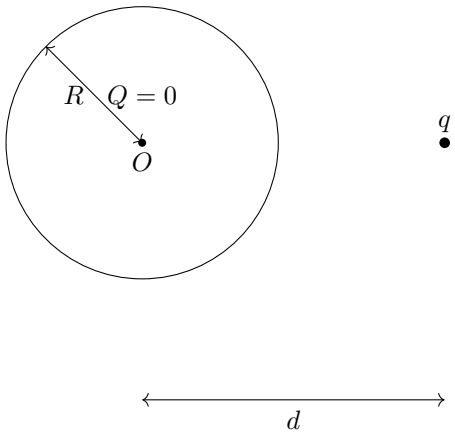


图 3.43: 孤立中性球与外点电荷，球心距离 $d > R$，球面半径为 R

练习 3.4 (球腔内偏心点电荷)**.** 球形接地空腔半径 R，点电荷 q 距腔心 $b < R$。求电荷所受力，并判断球心位置的稳定性。

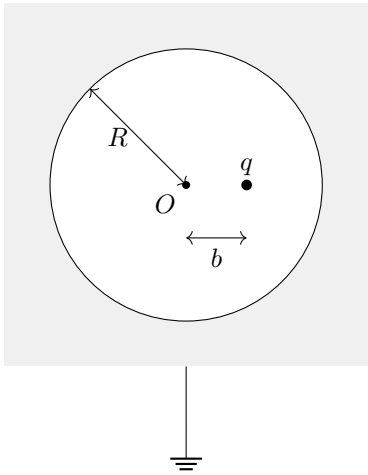


图 3.44: 接地球腔内的真实点电荷距中心为 $b < R$；金属区域在腔外

练习 3.5 (两垂直接地平面的镜像)**.** 两无限接地导体平面垂直相交，取截面为坐标轴，真实区域 $x>0, y>0$。电荷 q 在 (a,b)，求镜像体系和两个方向的力。

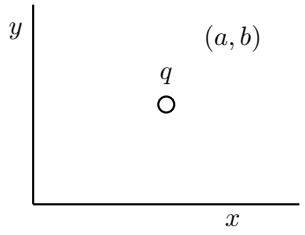


图 3.45: 两垂直接地平面的镜像

练习 3.6 (保持指定电势的金属球)**.** 金属球半径 R，由电源保持电势 V_0，外点电荷 q 距球心 $d>R$。求球净电量及点电荷所受力。

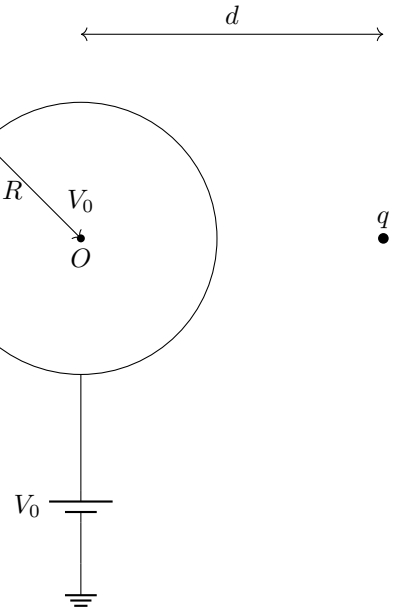


图 3.46: 外电源固定球电势 V_0；外点电荷距球心 $d>R$

练习 3.7 (感应面密度的半量半径)**.** 点电荷 $q>0$ 距接地平面 d。以垂足为圆心，在平面取半径 s 的圆域，求圆域内感应电量；多大半径的圆域包含总感应量的一半?

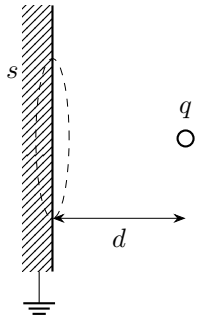


图 3.47: 感应面密度的半量半径

练习 3.8 (孤立细环靠近接地球)**.** 孤立金属细环半径 a，远离其他导体时电势 U_0，其孤立电容为 C_r。将它移近半径 b 的接地金属球，球心在环轴线上，距环心 h，且 $D=\sqrt{a^2+h^2}>b$。求球感应总量，并说明只给 a, U_0 是否足够。

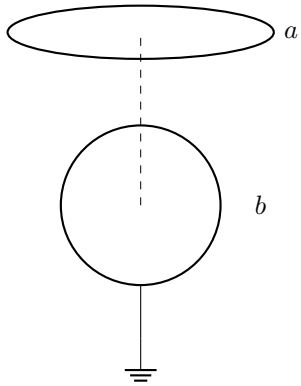


图 3.48: 孤立细环靠近接地球

练习解答

练习 3.1

解　电势的线性叠加

图 3.41 中腔内电势对各面的电势线性，中心可写为 $V_O=\sum_i c_i V_i$。四面体的转动对称性使中心对各面的响应系数相同，即 $c_i=c$。

用常势解把四个相等权重归一化

把四面同时置为同一电势 V，腔内常势解为 V，所以 $4cV = V$，得 $c = 1/4$。

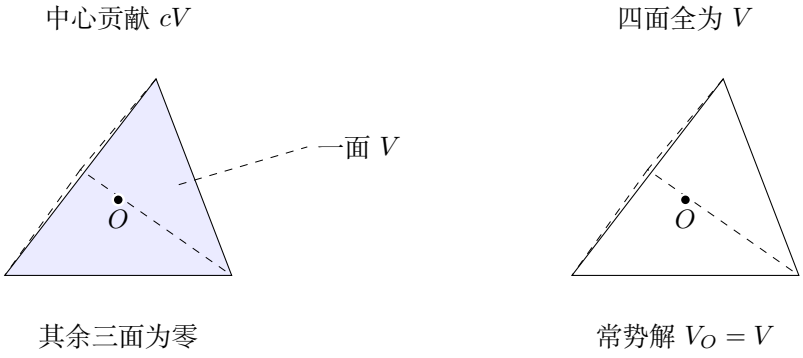


图 3.49: 左图仅一面置为 V，其余三面为零；右图四面同势给出中心响应权重的归一化

叠加四个单面解并说明对称性的作用范围

图 3.49 分别只令一面电势为 V_i、其余为零，四个解在中心的贡献相加，得到 $V_O = (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)/4$。四个面的对称地位使中心电势等于四个面电势的平均值。

练习 3.2

解　只对内壳与远球组成的连通体守恒电荷

按图 3.42 令远球取得 q，内壳剩 $Q_1 - q$，外壳净量仍 Q_2。球壳叠加使内壳电势为 $k[(Q_1 - q)/R_1 + Q_2/R_2]$，远球电势为 kq/r。导线连通要求两势相等。

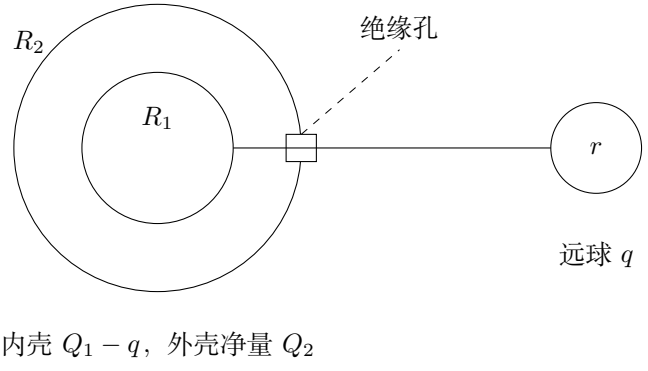


图 3.50: 内壳通过绝缘小孔接远球，外壳与导线保持绝缘；只在连通的内壳与远球之间守恒电量

用等势联立解远球所得电量

由图 3.50 的守恒与等势关系，

$$\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2}=q\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{r}\right),\qquad q=\frac{r}{R_1+r}\left(Q_1+\frac{R_1Q_2}{R_2}\right).$$

外壳电势对电荷转移的影响

q 可以与 Q_1 异号，外壳常电势项也参与电荷转移。取 $Q_2=0$ 可回到远隔两球的半径比分配；$r\to 0$ 时远球电量趋零。

练习 3.3

解　先用两像满足中性约束并求精确合力

图 3.43 的球净量为零，偏心像为 $-qR/d$，中心像为 $+qR/d$。将两像产生的库仑力相加，得

$$F_r=\frac{kq^2R}{d^3}-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}=-\frac{kq^2R^3(2d^2-R^2)}{d^3(d^2-R^2)^2}<0.$$

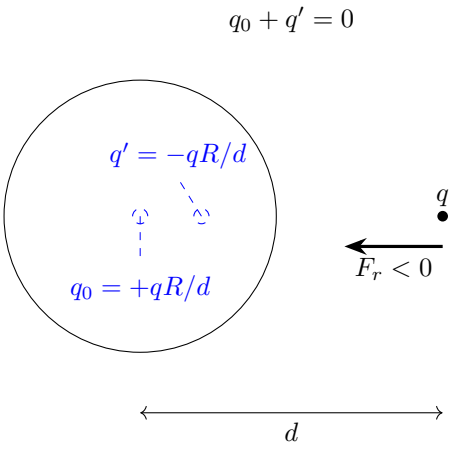


图 3.51: 中性条件由两像总量为零实现；对外点电荷，两项力的首阶远处部分相消

把首阶相消后的远距离主项保留下来

在图 3.51 中两个像合量为零，远场主要表现为极化。$d\gg R$ 时分子主要为 $2d^2$，分母主要为 d^7，故 $F_r\simeq -2kq^2R^3/d^5$。

与接地球比较衰减幂次并解释物理来源

接地球允许取得净量，力主要为 $-kq^2R/d^3$。两种条件都吸引，却有不同的衰减幂次；孤立球中两个像的净电荷为零，远处的主要作用来自极化。

练习 3.4

解　把像放在真实空腔区域之外

在图 3.44 球腔内，像需放在真实求解区域之外，即沿电荷方向距心 R^2/b 处，像量为 $-qR/b$。球面上的像点距离等于真点距离的 R/b 倍，两电势相消。像虽位于金属一侧，只用于求腔内场。

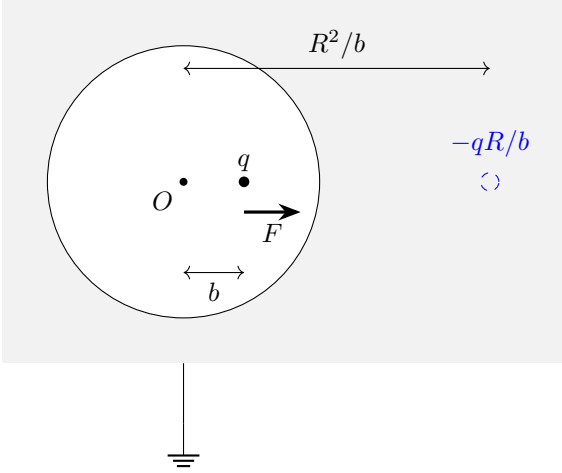


图 3.52: 球腔内像法：像点位于腔外，真像间距由 $R^2/b-b$ 给出，实际力指向近侧腔壁

按真像实际距离求近壁方向的力

图 3.52 真、像间距为 $(R^2-b^2)/b$，吸引方向从腔心指向近侧腔壁，力大小

$$F=\frac{kq^2R/b}{[(R^2-b^2)/b]^2}=\frac{kq^2Rb}{(R^2-b^2)^2}.$$

球心附近与近壁处的力

在 $b=0$ 时，内壁电荷球对称，点电荷受力为零。对 $0<b<R$，先把 R 提出分母，

$$F=\frac{kq^2b}{R^3}(1-b^2/R^2)^{-2}.$$

当 $b/R\ll 1$，括号的因子为 $1+O(b^2/R^2)$，所以关于位移的一次项为 $F\simeq kq^2b/R^3$，与偏移同向，球心零力位置不稳定。

近壁时令 $b = R - a$，则 $R^2 - b^2 = a(2R - a)$，代回得到

$$F = \frac{kq^2 R(R-a)}{a^2(2R-a)^2} = \frac{kq^2}{4a^2}\frac{1 - a/R}{(1 - a/(2R))^2}.$$

当 $a/R \ll 1$，最后的因子趋于 1，回到平面吸引 $kq^2/(4a^2)$，方向指向近侧腔壁。

练习 3.5

解　逐次镜像并补上对角像，使两平面零势

图 3.45 中先对 $x = 0$ 反射，需 $-q$ 于 $(-a, b)$；再对 $y = 0$ 反射，需 $-q$ 于 $(a, -b)$。为同时抵消第一像在另一平面产生的势，还需 $+q$ 于 $(-a, -b)$。任一轴上，关于该轴的两对电荷各自相消，故两平面均为零势。

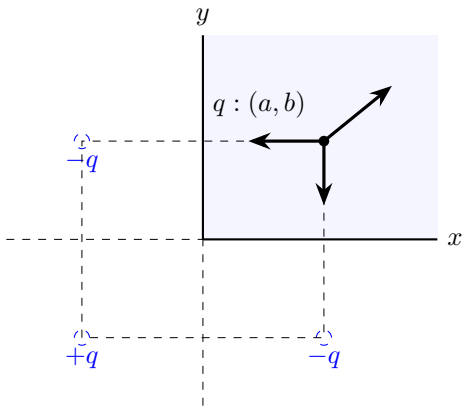


图 3.53: 三个像均在真实第一象限之外；两负像分别吸引，对角同号像产生斜向排斥

把三个像的库仑力分别投影到两轴

图 3.53 的水平负像距真电荷 $2a$，只给负 x 力；竖直负像只给负 y 力；对角正像给斥力，其分量用位移 $(2a, 2b)$ 除以距离 $2\sqrt{a^2 + b^2}$ 投影。因此

$$F_x = -\frac{kq^2}{4a^2} + \frac{kq^2 a}{4(a^2+b^2)^{3/2}}, \quad F_y = -\frac{kq^2}{4b^2} + \frac{kq^2 b}{4(a^2+b^2)^{3/2}}.$$

合力的方向

两个分量均为负，电荷受力趋向两平面。$b \to \infty$ 时与另一平面有关的分量趋零，剩下单平面的吸引力。

练习 3.6

解　以中心像把接地零势解升到指定电势

图 3.46 中接地球像 $q'=-qR/d$ 已使表面零势。向图 3.54 的球心加像 $q_0=RV_0/k$，就使球面整体升至 V_0，且不破坏等势。因此球净量

$$Q=q_0+q'=\frac{RV_0}{k}-\frac{qR}{d}.$$

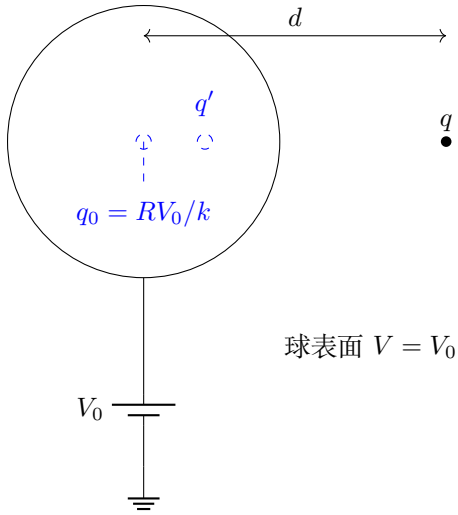


图 3.54: 指定电势由外电源维持；球外的等效解仍由偏心像与中心像共同组成

分别计算两像作用力并求和

真电荷受到中心像与偏心像的力之和为

$$F_r=\frac{kqq_0}{d^2}-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}=\frac{qRV_0}{d^2}-\frac{kq^2Rd}{(d^2-R^2)^2}.$$

电势与电荷量的关系

它可正可负。$V_0=0$ 回到接地球；d 改变时 Q 随之改变，外电源与球交换电荷。净电荷由给定的球面电势与外点电荷的位置共同决定。

练习 3.7

解　按同心圆环积分局部面密度

图 3.47 的圆域利用面密度 $\sigma(\rho)=-qd/[2\pi(d^2+\rho^2)^{3/2}]$，按同心圆环积分，

$$Q(s)=-qd\int_0^s\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(d^2+\rho^2)^{3/2}}.$$

换元时 s 为固定圆域半径，ρ 为积分变量。令 $u=d^2+\rho^2$、$\mathrm{d}u=2\rho\,\mathrm{d}\rho$，可逐步算得

$$\int_0^s \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{(d^2+\rho^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\int_{d^2}^{d^2+s^2} u^{-3/2}\,\mathrm{d}u=\left[-u^{-1/2}\right]_{d^2}^{d^2+s^2}=\frac{1}{d}-\frac{1}{\sqrt{d^2+s^2}}.$$

将该结果乘 $-qd$，便得到

$$Q(s)=-q+\frac{qd}{\sqrt{d^2+s^2}}.$$

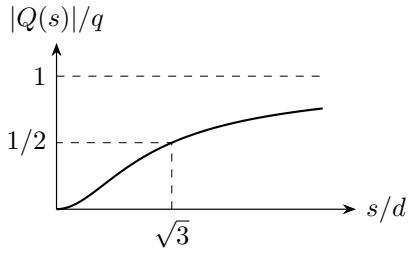


图 3.55: 感应面密度的半量半径

由累计一半电量反求半径

图 3.55 要求 $Q(s)=-q/2$，即 $d/\sqrt{d^2+s^2}=1/2$，平方得到 $s^2=3d^2$，所以 $s=\sqrt{3}d$。

圆域内的电荷分布

$s=0$ 电量零、$s\to\infty$ 电量 $-q$，感应电荷主要集中在垂足附近。面密度的绝对值随到垂足的距离增大而减小。

练习 3.8

解　先由孤立电容与原势确定环的守恒电量

图 3.48 环原电量 $q=C_rU_0$，孤立移动使净量不变。按细线模型把电荷分布在圆周上。各带电微元到球心的距离同为 D，因此每个微元的接地球像量都是 $-b\,\mathrm{d}q/D$，求和时可把比例 $-b/D$ 提到积分号外。

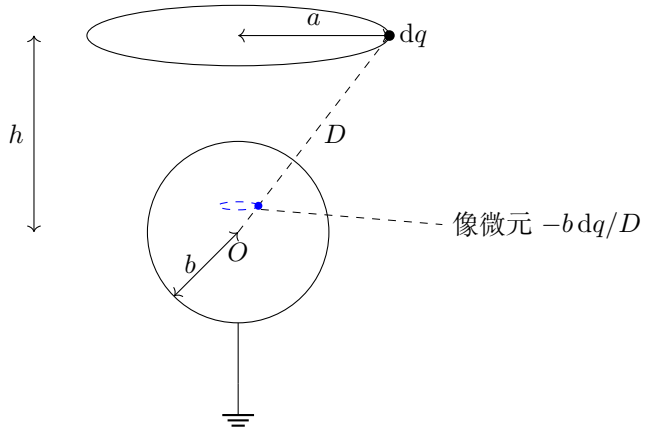


图 3.56: 环上每个微元到球心距离均为 D；其球面像按同一比例缩放，形成球外真环对应的球内像环

用等距微元的同一像量比例积分

由图 3.56 微元像量积分，

$$Q_g = -\frac{b}{D}\int_{\text{环}} \mathrm{d}q = -\frac{bC_rU_0}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

初始电荷量与环的电容

初始电荷量由 $q = C_rU_0$ 决定。细环电容 C_r 与环半径和导线粗细都有关，因此答案保留题给的 C_r；若改给初始总电荷 q，则可直接写为 $Q_g = -bq/\sqrt{a^2+h^2}$。

静电

物理竞赛一轮讲义

第四讲

电容与电容器网络

2026

目录

第四讲　电容与电容器网络 **1**

4.1　电容的定义与几何决定 1

4.2　多导体的电荷约束 3

4.3　重接、充电与能量 4

4.4　网络方程、时序与测量 7

4.5　可变几何与实际器件 9

4.6　例题与分析 9

4.7　本讲小结 21

4.8　练习 22

练习解答 26

第四讲　电容与电容器网络

4.1　电容的定义与几何决定

4.1.1　电量与电压描述状态，电容描述比例

给一个与外界绝缘的金属球逐渐充电，球面电势随电荷量增加而升高。半径较大的球达到同一电势时容纳的电荷量较多。这个实验把两个问题分开：电荷量与电势说明导体当前的状态，电容说明同一导体在充电时二者怎样成比例变化。

固定导体的形状、周围环境和线性介质，把激发电荷同时加倍，电场与电势也加倍。对于附近没有其他导体和外电荷的孤立导体，以无穷远为零势，因而有

$$Q = CV, \qquad C = \frac{Q}{V}.$$

电容 C 表示导体电势每升高一个单位时增加的电荷量。半径 R 的金属球满足 $V = kQ/R$，所以 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$。图 4.1 中两次充电的 Q, V 同比例变化，球的电容保持不变。

将两导体靠近，并从一极向另一极转移电荷，两极便带等量异号电荷，电场主要集中在它们之间。这种装置构成电容器。取 A 极电荷为 Q，定义 $U = V_A - V_B$，则 $Q = CU$。电容由两极形状、相对位置及其间介质决定，改变 Q 只使 U 按比例改变。单位为 $\mathrm{F} = \mathrm{C/V}$，常用 μF 和 pF，分别为 $10^{-6}\,\mathrm{F}$ 和 $10^{-12}\,\mathrm{F}$。

电容器极板还有初始净电荷、或邻近另有固定带电物体时，端口电量可能包含附加项。此时先写 $Q_A = CU + Q_{\mathrm{ind}}$，保持外部条件不变，电压增加 $\mathrm{d}U$ 引起 $\mathrm{d}Q_A = C\,\mathrm{d}U$。后面的带电中板和带初始电荷的电容桥，将具体说明这种关系。

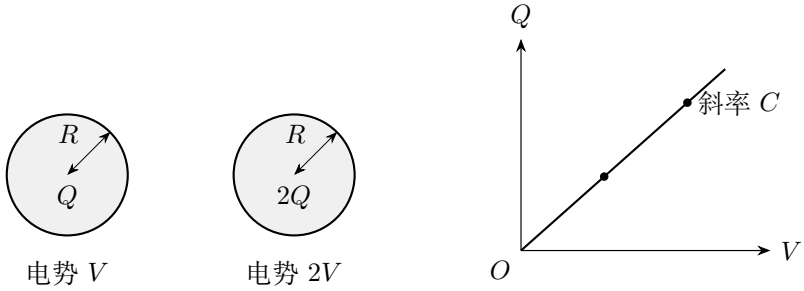


图 4.1: 同一金属球的两种状态与电荷—电势直线

4.1.2　先由场求势差，再求电容

试放 $+Q,-Q$，在两电极间求场，沿从 A 指向 B 的路径计算 $U=\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，最后取 Q/U。图 4.2 中三种积分路径都与对称场同向，各积分路径连接两电极的相对表面。

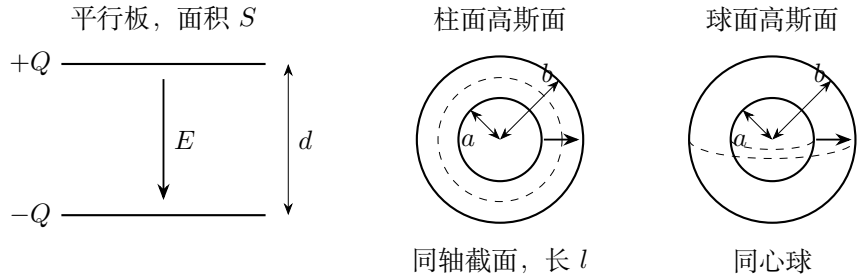


图 4.2: 三种几何的电极、半径与势差积分路径

平行板的横向尺寸远大于间隙 d，忽略边缘且两板净量相反时，电荷主要分布于相对内表面。间隙 $E=Q/(\varepsilon_0 S)$，故 $U=Ed$，$C=\varepsilon_0 S/d$。例题中的两块同号带电板还具有外侧场。那时从金属内部零场出发，先分配四个表面的电荷，再求间隙电场。

同轴圆柱长度 $l\gg b$，图中半径 r 的柱面侧面积为 $2\pi rl$，高斯定理给 $E(r)=Q/(2\pi\varepsilon_0 lr)$。于是

$$U=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}[\ln r]_a^b=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a},\qquad C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

同心球的高斯面面积为 $4\pi r^2$，故

$$U=\int_a^b\frac{Q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=kQ[-r^{-1}]_a^b=kQ\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

用 $C=Q/U$ 消去试放电量，得到

$$C=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.$$

当 $b-a=d\ll a$，球形结果趋于 $\varepsilon_0(4\pi a^2)/d$；当 $b\to\infty$，则趋于孤立球电容。薄隙处的球面接近局部平面；外球半径趋于无穷时，内球周围恢复孤立球的场。

4.2 多导体的电荷约束

4.2.1 一个间隙对应一只电容

平行多板的金属内部场零，相邻间隙的电势沿法线线性变化。图 4.3 中，左间隙在 M 面上的电量为 $C_1(V_M - V_A)$，右间隙在 M 面上的电量为 $C_2(V_M - V_B)$；沿 $A \to M \to B$ 取坐标，左间隙场为 $(V_A - V_M)/d_1$，中板左面的外法向向左，故该面电荷为 $-\varepsilon_0 S(V_A - V_M)/d_1$。右面同理。两面相加就是中板净电荷，因此

$$Q_M = C_1(V_M - V_A) + C_2(V_M - V_B), \qquad V_M = \frac{Q_M + C_1V_A + C_2V_B}{C_1 + C_2}.$$

原带电的悬浮板两面电荷通常不等量。当中板中性，即 $Q_M = 0$ 时，两面电荷等量异号，这就得到通常的串联模型。导线相连的几块板须先合并为等势组，对整组守恒净量，电荷可沿导线在组内各板之间转移。

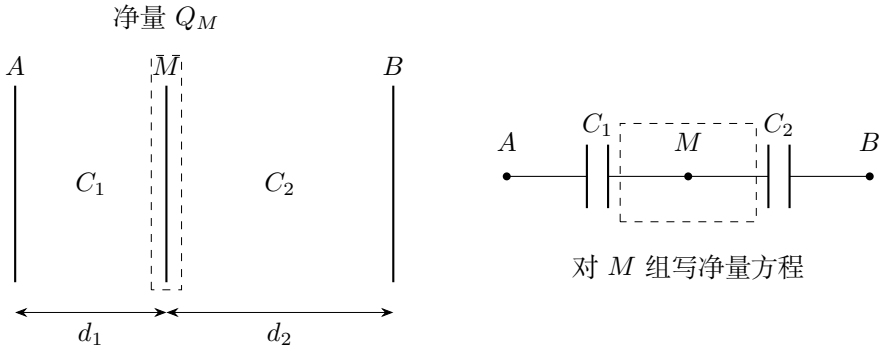


图 4.3: 中板的两面分别属于两个间隙，净电量是两面之和

例 4.2 的两块外板接地，因此它们给同一个零电势。中板两面的电荷由同一个中板电势决定，把这两项相加即可使用中板给定的净电荷。

4.2.2 串并联来自共同端点和中间净量

并联电容跨同一对节点，电压相同，端口电量相加，故 $C_{\parallel} = C_1 + C_2$。图 4.4 左侧串联的中间组若原中性，两侧电量为 $-Q, +Q$，两电容的电量大小才同为 Q。总压 $U = Q/C_1 + Q/C_2$，所以 $C_{\text{串}}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$。

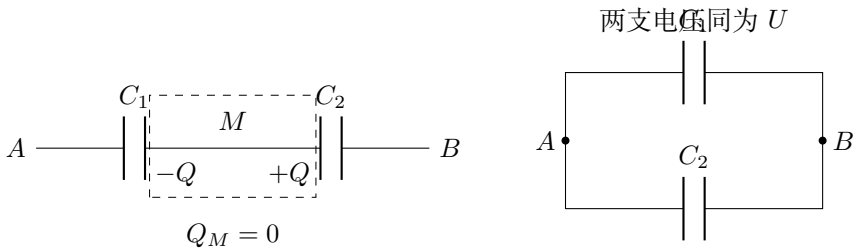


图 4.4: 串联看中间组净量，并联看两个共同端点

静电平衡时没有持续传导电流，节点方程来自电荷约束。接地指定电势为零，电量待求；电源指定两端势差，可转移电荷。对称电容桥中，交换两中点同时保持电容、连接和初始净电荷不变，二者电势便相同，桥支电压为零。非对称桥则逐节点列式。

4.3　重接、充电与能量

4.3.1　先画最终导体组，再求分配

图 4.5 中，两只断电电容同极连接，将合并的上端组原电量为 $C_1U_1 + C_2U_2$，最终各电容电压同为 U_f，故

$$U_f = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

反极相连时，对同一个最终节点给初电量带符号。原来属于不同极板的电荷沿导线流动，直到同一组达到共同电势；各组净电荷在这一过程中保持。

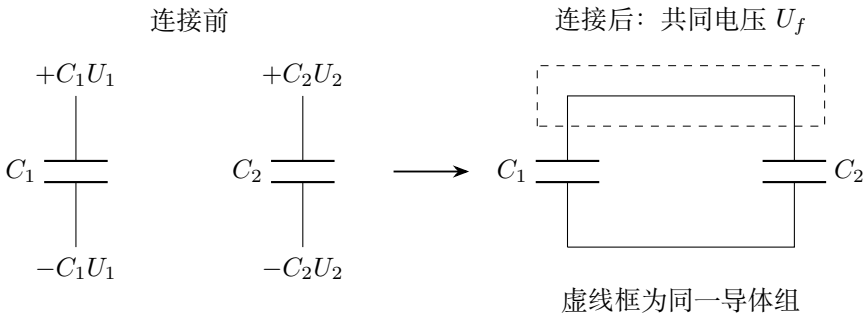


图 4.5: 连接前各自保存电荷，连接后只守恒合并组总量

初、末场能之差为

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2}C_1U_1^2+\frac{1}{2}C_2U_2^2-\frac{1}{2}(C_1+C_2)U_f^2\\ &= \frac{(C_1+C_2)(C_1U_1^2+C_2U_2^2)-(C_1U_1+C_2U_2)^2}{2(C_1+C_2)}\\ &= \frac{C_1C_2(U_1^2+U_2^2-2U_1U_2)}{2(C_1+C_2)}\\ &= \frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}(U_1-U_2)^2.\end{aligned}$$

它非负，原来等势时才为零。小电阻影响耗散速度，不改变最终能量差；实际连接中的焦耳热、辐射等承接这部分能量。本讲讨论连接后达到静电平衡的末态，以初、末储能之差计算释放的能量。

4.3.2 从逐渐充电的功理解储能

固定几何的线性电容，瞬时电量为 q 时电压 $u=q/C$，继续输入微量电荷需要电功 $u\,\mathrm{d}q$。图 4.6 蓝色三角形是逐渐充电的可逆功：

$$W=\frac{1}{C}\int_0^Q q\,\mathrm{d}q=\frac{1}{C}\left[\frac{q^2}{2}\right]_0^Q=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU.$$

图中直线斜率 $u/q=1/C$，电容越大，同样电荷量所对应的电压越低。恒压电源一直以电压 U 输送电量 Q，作功为整块矩形 $UQ=CU^2$，其中一半成为场能，另一半在充电线路释放。

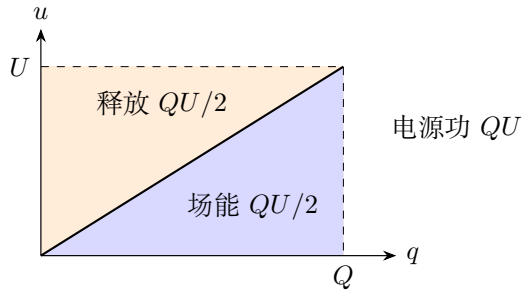


图 4.6: 固定电容的场能为直线下三角形，恒压源功为整个矩形

真空平行板满足 $Q=\varepsilon_0SE$，故 $W=\varepsilon_0E^2Sd/2$，场能密度为 $w=\varepsilon_0E^2/2$。如果充电时几何也变化，$\int u\,\mathrm{d}q$ 仍是电端输入功，却不一定等于场能增加，差额可成为机械功。场能是当前 Q,C 决定的状态量，电源功则须沿实际充电路径积分。

4.3.3　改变几何时的电场力

设机械坐标 x 增加使电容变为 $C(x)$。孤立电容的 Q 不变，无电源输送能量，所以先固定 Q，对 $C(x)^{-1}$ 用链式法则：

$$F_x = -\frac{Q^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C(x)^{-1} = -\frac{Q^2}{2}\left[-C(x)^{-2}C'(x)\right] = \frac{Q^2 C'(x)}{2C(x)^2}.$$

接恒压源时，固定的是 U，而 $Q(x) = UC(x)$ 随几何改变。分别求导有 $\mathrm{d}Q/\,\mathrm{d}x = UC'(x)$ 与 $\mathrm{d}W_{\text{场}}/\,\mathrm{d}x = U^2C'(x)/2$。图 4.7 右侧的能量平衡应写为电源微功等于场能增加与机械功之和：

$$\begin{aligned} F_x\,\mathrm{d}x &= U\,\mathrm{d}Q - \mathrm{d}W_{\text{场}} \\ &= U^2C'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}U^2C'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}U^2C'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

约去同一个坐标微量，得到 $F_x = U^2C'(x)/2$。

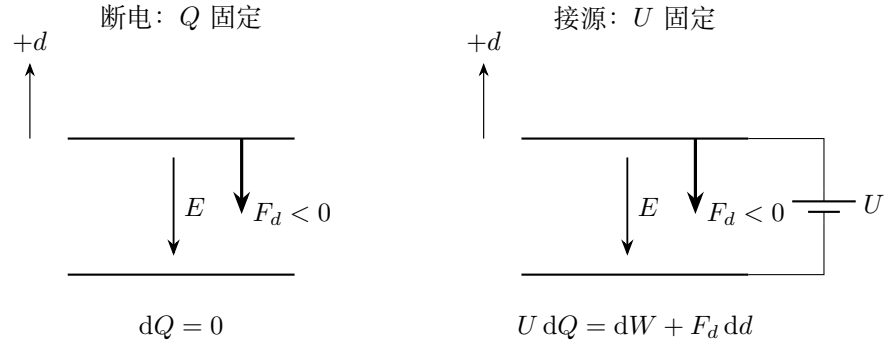


图 4.7: 上板沿间距增大方向运动：孤立时电荷固定，恒压时还有电源支路

对板间距 d，先写 $C(d) = \varepsilon_0 S d^{-1}$，保持面积不变求导，

$$C'(d) = \varepsilon_0 S(-1)d^{-2} = -\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}.$$

所以力指向减小间距的方向。两约束在同一瞬时状态满足 $Q = CU$ 时都给

$$|F_d| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S E^2.$$

用受力法求同一结果时，一块板受到另一块板的场 $E/2$ 作用，故 $|F| = Q(E/2)$。场力与能量方法在此给出相同关系。

4.4 网络方程、时序与测量

4.4.1 电容矩阵是节点方程的展开

几何固定、介质线性时，多导体满足 $Q_i = \sum_j C_{ij} V_j$。在图 4.8 的两节点网络中，$Q_1 = c_{10}V_1 + c_{12}(V_1 - V_2)$，$Q_2 = c_{20}V_2 + c_{12}(V_2 - V_1)$。因此对角元是与该节点相连的间隙电容之和，互电容系数为 $-c_{12}$；同一间隙对两节点贡献相反电量，保证总量守恒。

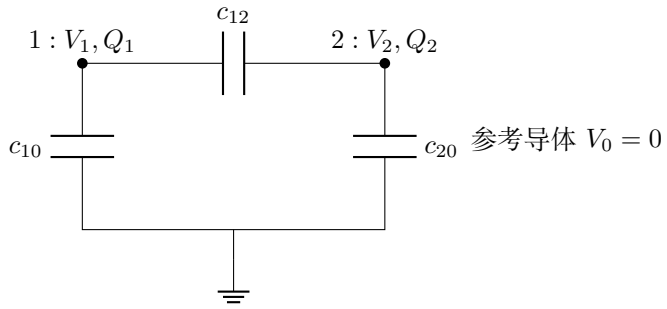


图 4.8: 正的支路电容展开后给出负的非对角系数

一般导体选无穷远为零势时，矩阵还包含对无穷远的耦合；封闭屏蔽腔则可取外壳为参考。系数满足互易性 $C_{ij} = C_{ji}$。解题时按图把每条支路在本节点上的电荷相加，再令其等于该组给定的净电荷；求得各节点电势后，再算接地节点从大地取得的电荷。

4.4.2 接通与撤线改变约束

两组连线前可各自守恒电量；连线后只守恒合并组总量并增加等势条件。撤线后，分离瞬间各自取得的净量成为新的初始条件。图 4.9 显示接地再撤地：接地时 $V_M = 0$、可与地交换电荷；撤线后 $Q_M = Q_*$ 固定，随后外部电势改变时 V_M 可以变化。每次接通或撤线都建立下一阶段的条件。若连接的是有限大小的金属球，就把它画为有电容的节点，与其他导体共同分配电荷。

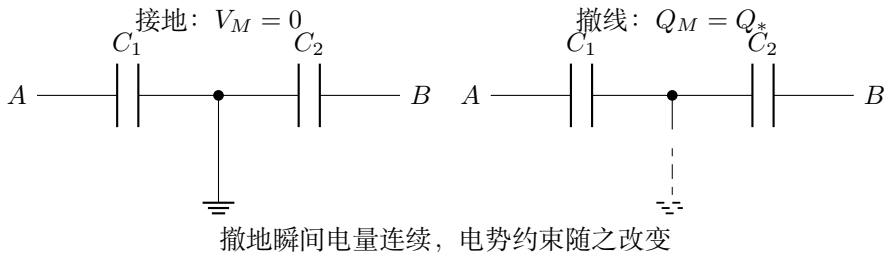


图 4.9: 接地阶段确定电量，撤地后保存该电量

4.4.3 测量仪器本身属于网络

普通电压表的有限内阻 R_V 跨接孤立电容，形成图 4.10 左侧放电回路，电流由电压表支路流走，故 $C\,\mathrm{d}U/\,\mathrm{d}t = -U/R_V$。对 $U_0 \neq 0$，分离变量并从 $t = 0, U = U_0$ 积至当前状态：

$$\begin{aligned}\int_{U_0}^{U(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\frac{1}{R_V C}\int_0^t \mathrm{d}t',\\ [\ln|u|]_{U_0}^{U(t)} &= -\frac{1}{R_V C}[t']_0^t,\\ \ln|U(t)| - \ln|U_0| &= -\frac{t-0}{R_V C}.\end{aligned}$$

解在有限时间内不换号，故取指数后 $U(t)/U_0 = e^{-t/(R_V C)}$，即 $U(t) = U_0 e^{-t/(R_V C)}$。若 $U_0 = 0$，原方程的解恒为零，也包含在最终表达式中。读数时间应远小于 $R_V C$。理想静电计输入电阻极大，却仍有右侧输入电容 C_m；若其初始未充电，接入后由上端组电量守恒得 $U_f = CU_0/(C + C_m)$。高输入电阻防止长期放电，小输入电容减小瞬时分配，两条件作用不同。

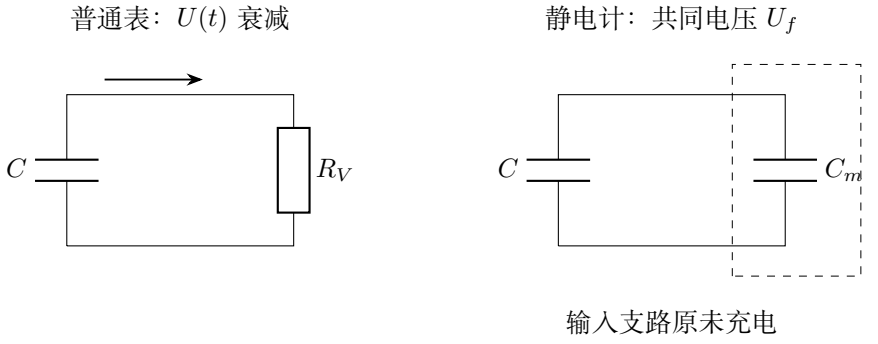


图 4.10: 有限电阻造成持续放电，输入电容造成连接时的分配

4.5 可变几何与实际器件

图 4.11 左侧平移极片的有效重叠长度为 x，宽 b、间距 d 固定，忽略边缘时 $C(x)=\varepsilon_0 bx/d$，近似线性。右侧保持面积 S、把间隙减为 d_0-x，则 $C(x)=\varepsilon_0 S/(d_0-x)$，临近接触时增长加快。两种模型分别改变重叠面积和真空间隙，求电容时由图中的相对表面确定 S,d。

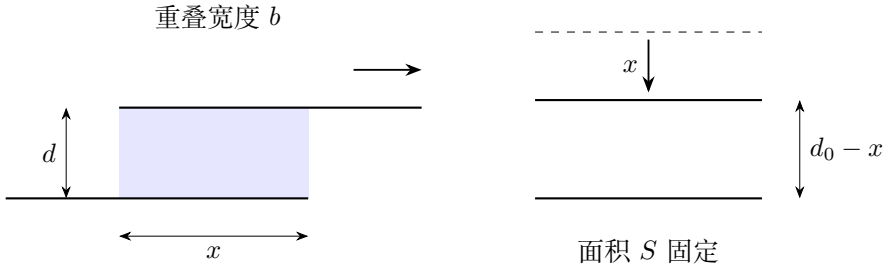


图 4.11: 改变重叠面积与改变间距对应不同的电容函数

多片交错结构通过增加跨同一端口的有效间隙提高容量，外侧表面主要产生较小的边缘和杂散效应。实际器件的额定工作电压还受介质击穿和工艺限制，与标称容量是不同参数。耐压串联题先用 $|Q_i|\le C_i U_{i\max}$ 求允许的电量，再算总电压；研究漏电保持时间时，可把漏电电阻画为并联支路。

4.6 例题与分析

例 4.1 (净电荷同号的两金属板)**.** 两足够大的平行薄金属板 A,B 面积 S，间距 d，净量分别为 $Q_1>Q_2>0$。忽略边缘，求四个表面电荷、三区电场及 V_A-V_B。

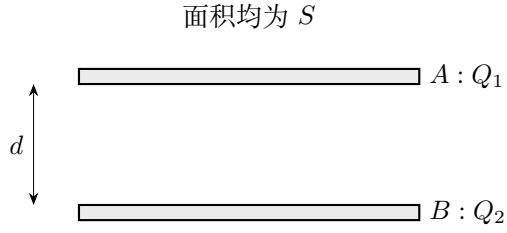


图 4.12: 两块薄金属板的净量、面积与间距

解　由金属内零场确定内外表面的关系

图 4.12 两板从上到下记四面为 $1,2,3,4$。金属内零场要求相邻内面总量相反，设 $q_2=q, q_3=-q$；由净量得 $q_1=Q_1-q, q_4=Q_2+q$。无限板近似下最外两侧

的场由全部电荷面叠加，在上侧向上、下侧向下，大小均为 $(Q_1+Q_2)/(2\varepsilon_0 S)$，所以两外面各有 $(Q_1+Q_2)/2$。

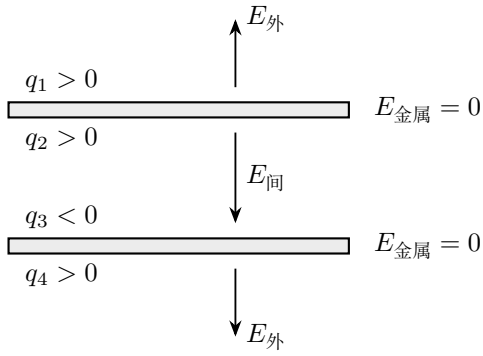


图 4.13: 四面电荷及三区的实际场方向（$Q_1>Q_2>0$）

用净量约束求四面电荷

于是图 4.13 中

$$q_1=q_4=\frac{Q_1+Q_2}{2},\quad q_2=\frac{Q_1-Q_2}{2},\quad q_3=-\frac{Q_1-Q_2}{2}.$$

间隙电场与电势差

间隙场向下，$E_{间}=(Q_1-Q_2)/(2\varepsilon_0 S)$，故 $V_A-V_B=E_{间}d$。当 $Q_1=Q_2$ 时内面电荷和间隙场均为零，正电荷都在外面；将同一公式用于等量异号的 $Q_2=-Q_1$，外面电荷为零，回到常用等量异号电容器。

例 4.2 (两侧接地的三板系统)**.** 三板从左至右为 C, A, B，面积均为 $200\,\mathrm{cm}^2$，$CA = 2.0\,\mathrm{mm}$、$AB = 4.0\,\mathrm{mm}$。B, C 接地，A 带 $3.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$。三板彼此平行且正对，板宽远大于间距，忽略边缘场。求两接地板电量及 A 电势。

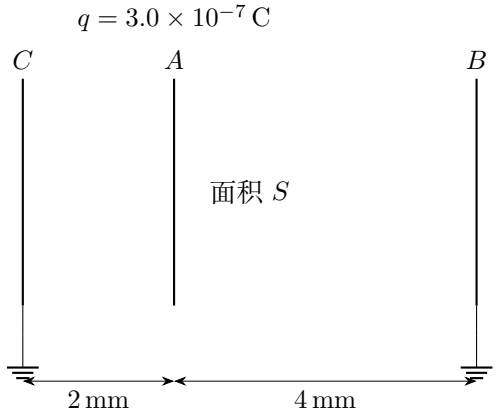


图 4.14: 按题干从左向右排列的接地三板

解　把两个几何间隙化为对地并联支路

将图 4.14 的两个间隙看成 A 对地的并联电容。左、右电容分别为 $C_L = \varepsilon_0 S/(2.0 \times 10^{-3})$ 和 $C_R = \varepsilon_0 S/(4.0 \times 10^{-3})$，所以 $C_L = 2C_R$。A 的总量 $q = (C_L + C_R)V_A$。

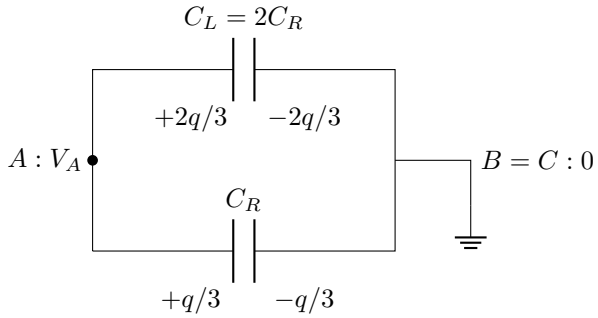


图 4.15: 两个间隙并联接在中板与同一地节点之间

按支路电容分配感应电量

图 4.15 左、右内表面分得 $2q/3, q/3$，两接地板面对 A 的电量分别为 $Q_C = -2q/3 = -2.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$，$Q_B = -q/3 = -1.0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}$。两块接地外板的外侧场为零，故其外面不带电。

统一单位计算中板电势

代入 $S = 0.0200\,\mathrm{m}^2$，得

$$V_A = \frac{3.0 \times 10^{-7}}{8.854 \times 10^{-12} \times .0200(500 + 250)} \simeq 2.26 \times 10^3\,\mathrm{V}.$$

近侧间隙电容较大，分得电量较多；两间隙电压相同而场强不同。

例 4.3 (定势两板间插入带电薄板)**.** 上板 A 与下板 B 平行正对，面积均为 S，间距为 d，$V_A = U_0 > 0$、$V_B = 0$。在距 A 为 $d/3$ 处插入平行的极薄金属板 C，它与两板完全重叠，带净电荷 Q。板宽远大于 d，忽略边缘场。求 V_C 及两间隙场。

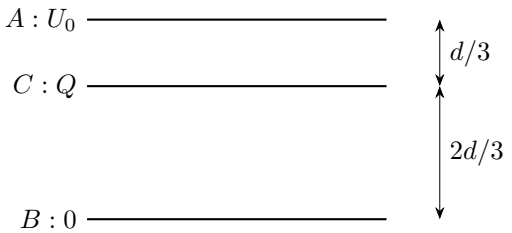
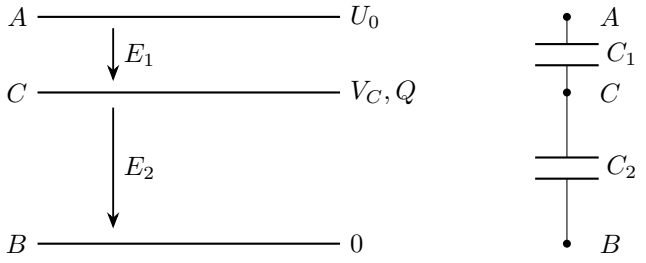


图 4.16: 定势两板间插入带电薄板

解　对带电中板写净量方程

在图 4.16 中令 $C_1 = 3\varepsilon_0 S/d$、$C_2 = 3\varepsilon_0 S/(2d)$。中板两面电荷的代数和等于给定的净电荷，故 $Q = C_1(V_C - U_0) + C_2 V_C$。移项后

$$V_C = \frac{C_1 U_0 + Q}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3}U_0 + \frac{2Qd}{9\varepsilon_0 S}.$$



E_1, E_2 为带符号分量，负值表示实际反向

图 4.17: 向下为电场的参考正方向，右侧网络保持同一上下次序

用各间隙的势差计算带符号场强

沿图 4.17 向下为正，两间隙场分别为

$$E_1=\frac{U_0-V_C}{d/3}=\frac{U_0}{d}-\frac{2Q}{3\varepsilon_0 S},\quad E_2=\frac{V_C}{2d/3}=\frac{U_0}{d}+\frac{Q}{3\varepsilon_0 S}.$$

中板电荷与场强的变化

两式相减给出 $\varepsilon_0 S(E_2-E_1)=Q$，与中板净电荷相联系。$Q=0$ 时薄板不改变均匀场，只在原线性势中取得 $2U_0/3$。Q 增大到 $3\varepsilon_0 SU_0/(2d)$ 后，E_1 变为负值，上侧间隙场转而指向 A。

例 4.4 (四块平行板的两种接线)**.** 四块相同板按 $1,2,3,4$ 排列，相邻间距 d、正对面积 S。板宽远大于 d，忽略边缘场。第一种把 $1,3$ 相连，在 $2,4$ 间测电容；第二种把 $1,4$ 相连，在 $2,3$ 间测电容。连接组原中性，求两种等效电容。

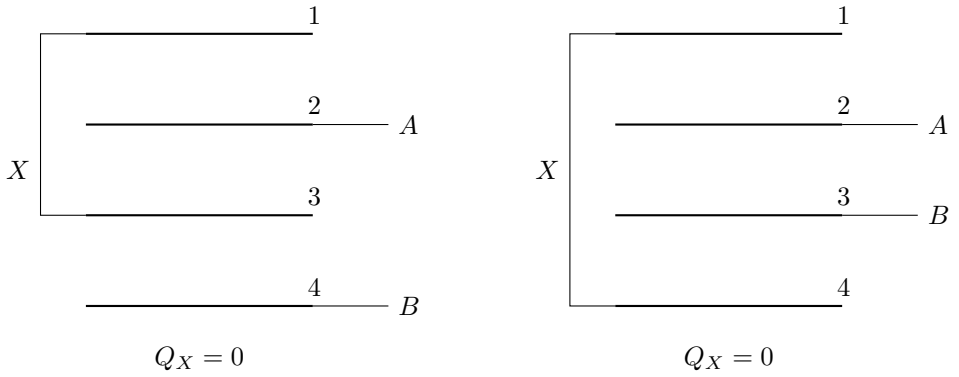


图 4.18: 两种接线中的真实接点与测量端口

解　合并第一种接线的节点并识别支路

图 4.18 每一相邻间隙电容均为 $C_0=\varepsilon_0 S/d$。第一种中，板 $1,3$ 合为浮置节点 X，端口 $A=2,B=4$。间隙 $1-2$ 与 $2-3$ 均跨 A,X，并联为 $2C_0$；间隙 $3-4$ 为 X,B 间 C_0。两段串联得 $C_{AB}^{(1)}=2C_0/3$。

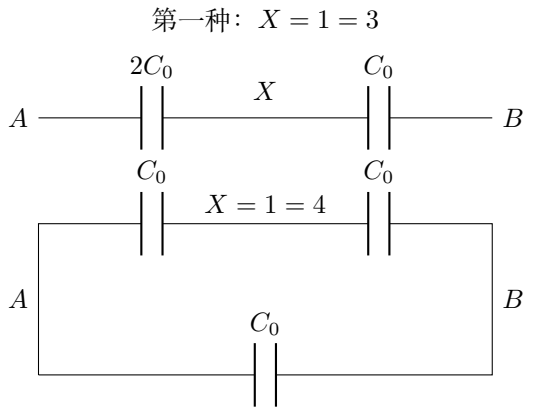


图 4.19: 第一种为并联后串联，第二种有直接跨端口的中间间隙

按第二种接线重新建立网络

图 4.19 第二种令 $X=1=4, A=2, B=3$。中间间隙直接跨 A, B，贡献 C_0；另外两间隙组成 $A-X-B$ 的两个 C_0 串联，贡献 $C_0/2$。故 $C_{AB}^{(2)}=3C_0/2$。

两种连接的电容

两种连接分别给出 $2C_0/3$ 与 $3C_0/2$。电容差异来自图中间隙跨接的节点不同。

例 4.5 (油滴逐次落入水平电容器)**.** 水平板间距 $d=1.0\,\mathrm{cm}$、电容 $C=2.0\,\mu\mathrm{F}$，上板接地有小孔，下板原不带电。正油滴从孔上方 $h=10\,\mathrm{cm}$ 处静止释放，$q=2.0\times10^{-8}\,\mathrm{C}$、$m=2.0\times10^{-3}\,\mathrm{g}$，落到下板即转移全部电荷。忽略小孔漏场、油滴之间的作用及油滴对板间场的扰动，$g=10\,\mathrm{m/s^2}$。第几滴在板间匀速？最多几滴能到达下板？

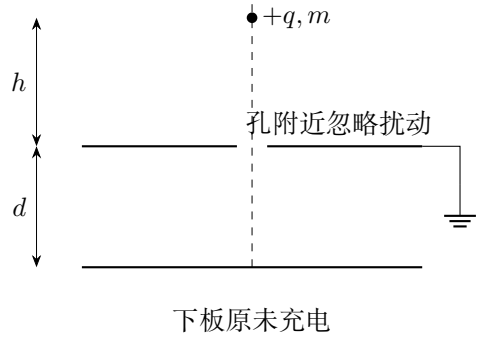


图 4.20: 正油滴的释放高度、小孔与板间距离

解　先确定第 n 滴进入前的电场

第 n 滴进入图 4.20 间隙前，下板已有 $(n-1)q$，电压为 $(n-1)q/C$，场向上，大小 $E_n=(n-1)q/(Cd)$。

由合力为零求匀速的滴数

匀速要求电力向上恰等于重力，$qE_n=mg$，所以 $n-1=mgCd/q^2=1000$，即第 1001 滴。

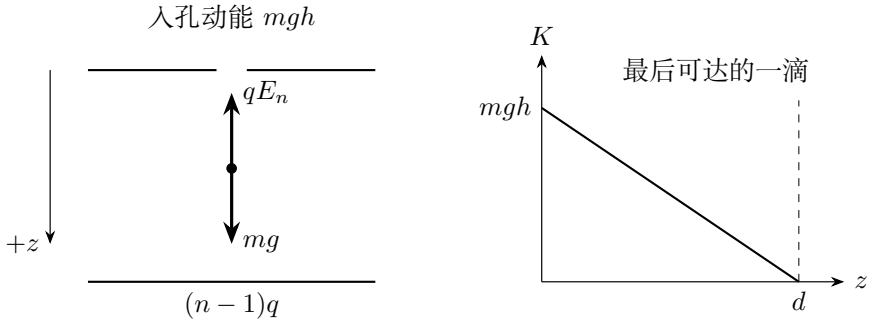


图 4.21: 第 n 滴的实际受力与从孔向下的动能变化

由全过程能量求能否到达下板

按图 4.21 油滴到孔时已有动能 mgh。从孔到下板重力作功 mgd，电场作功 $-(n-1)q^2/C$。到达下板的动能为

$$K_n=mg(h+d)-\frac{(n-1)q^2}{C}.$$

板间力恒定，若 $K_n\geq 0$ 则整个向下路径可达，若为负则在板间转向。

最后一滴的接触

代入 $m=2.0\times10^{-6}\,\mathrm{kg}$，得

$$n-1\leq\frac{mg(h+d)C}{q^2}=11000,$$

所以最多 11001 滴到达，其中最后一滴到板时速度恰为零。题目约定到板即转移电荷，故仍计入。第 1001 滴在板间合力为零，仍以在孔处获得的速度运动；其后油滴虽在板间减速，仍可凭入射动能到达下板。

例 4.6 (均匀带电实心球两半的排斥)**.** 半径 R、总电荷 Q 的均匀带电绝缘实心球，沿过心平面分成两半但保持原位置。至少施加多大相向力才能使两半不分开?

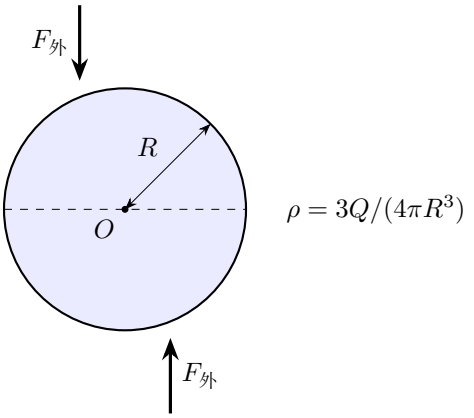


图 4.22: 绝缘球的体电荷分布与两半球所需的相向外力

解　利用上半球自身内力相消确定积分对象

图 4.22 的体密度 $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$，球内总场 $\boldsymbol{E} = \rho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon_0)$。上半球所有电荷对自身的内力成对抵消，因此把上半球中的 $\rho\boldsymbol{E}$ 积分，所得净力正是下半球对它的力。水平方向对称相消，只需竖直分量。

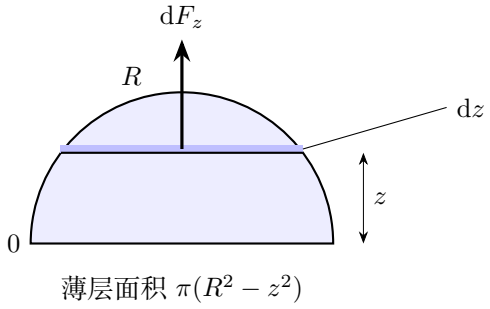


图 4.23: 上半球薄层的体积、电荷与竖直场分量

用水平薄层积分竖直净力

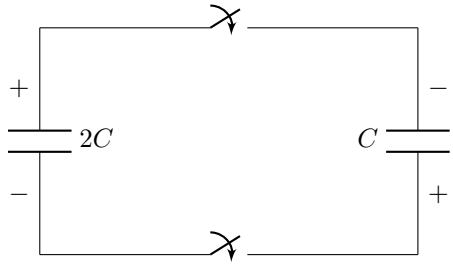
在图 4.23 高度 z 的薄层，面积 $\pi(R^2-z^2)$，电量 $\rho\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z$，竖直场为 $\rho z/(3\varepsilon_0)$。所以

$$\begin{aligned} F &= \frac{\rho^2\pi}{3\varepsilon_0}\int_0^R (R^2z - z^3)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\rho^2\pi}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R^2z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right]_0^R = \frac{\rho^2\pi}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) \\ &= \frac{\rho^2\pi R^4}{12\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{64\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{3kQ^2}{16R^2}. \end{aligned}$$

维持两半球平衡的外力

外力至少取此大小并指向分割平面。球内的体电荷保持均匀，薄层积分把各高度不同的电场与电量都计入了合力。

例 4.7 (反向连接两个已充电电容器)．电容 $C_1 = 2C, C_2 = C$，原电压均为 U。将 C_1 正端与 C_2 负端相连，另两端相连。求最终电压及释放能量。



两只初电压大小均为 U

图 4.24: 接通前的反向极性：两个开关将同时闭合

解　按最终上节点给初电荷带符号

在图 4.24 指定最终上节点 A 相对下节点 B 的电压为 V。连接前将进入上节点的净电量为 $2CU - CU = CU$；最终是 $(2C + C)V$，所以 $V = U/3$，末态极性与原 C_1 的极性相同。

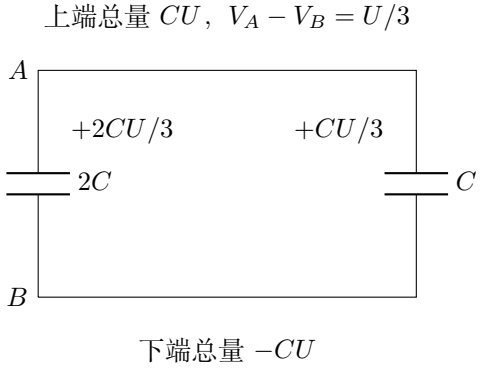


图 4.25: 最终上端组为正，两只电容均跨相同的上、下节点

求各极板末电量并判断极性

图 4.25 最终 C_1 的上端电量 $2CU/3$，C_2 上端电量 $CU/3$，后者相对原正极已反号。

比较初末储能

初能 $W_i = 3CU^2/2$，末能 $W_f = 3C(U/3)^2/2 = CU^2/6$，释放 $W_i - W_f = 4CU^2/3$。这部分能量来自两只电容器储能的共同减少。

例 4.8 (带初始电荷的串联中点)**.** A 电势 U、B 电势零。A 经 $2C$ 接中点 M，M 经 C 接 B；中点导体组净量 Q_0。求 V_M、两电容电荷及 A 端对 U 的微分电容。

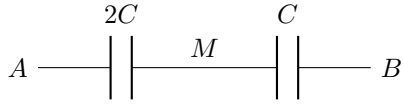


图 4.26: 带初始电荷的串联中点

解　把中点两侧电荷代数相加

图 4.26 的中点净量是它两侧极板电荷之和，$Q_0 = 2C(V_M - U) + CV_M$，解得 $V_M = (2CU + Q_0)/(3C)$。

分别计算两支路的电量

A 端电量

$$Q_A = 2C(U - V_M) = \frac{2C}{3}U - \frac{2Q_0}{3},$$

右电容的 M 端电量 $Q_{MB} = CV_M = 2CU/3 + Q_0/3$。按图中的极板归属，$Q_{MB} - Q_A = Q_0$，其中左电容在 M 端的电荷为 $-Q_A$。

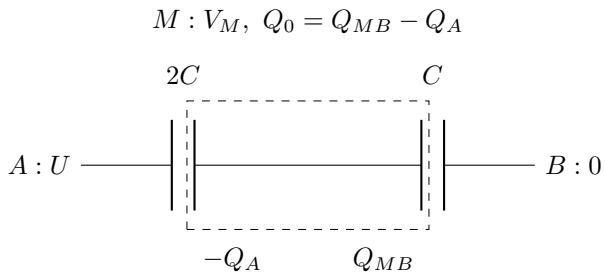


图 4.27: 虚线框中的中点组包含左侧负电量与右侧正电量的代数和

固定中点净量求微分电容

图 4.27 保持 Q_0 不变微调 U 时，C 也由固定几何确定，故

$$\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}U} = \frac{2C}{3}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}U} - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}U} = \frac{2C}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{2C}{3}.$$

这与无初始电量时串联等效电容相同。初始净电荷 Q_0 使 Q_A 随 U 变化的直线平移，斜率仍为 $2C/3$。

例 4.9 (连接顺序改变的三电容系统)**.** 三只相同电容 C，第一只初电压 U_0，其余未充电。先把第一、二只同极连接并平衡，再断开二者；然后把第二、三只同极连接并平衡。求最终各电压和全过程释放能量。

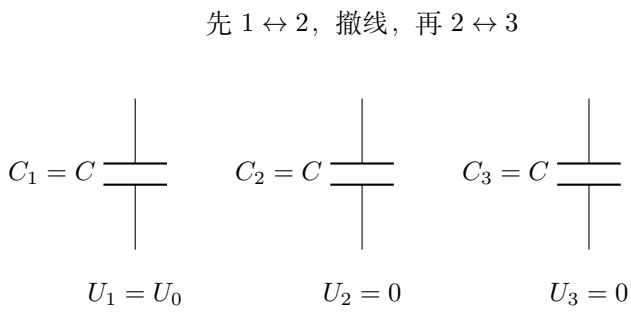


图 4.28: 三只电容的初始电压与规定的连接顺序

解　对第一阶段的连接组守恒电荷

图 4.28 第一阶段连接组初电量 CU_0，平衡后两只各为 $U_0/2$。

撤线后重设第二阶段的初始条件

撤线后第一只保持 $U_0/2$，第二只也以电量 $CU_0/2$ 进入下一阶段。第二、三只平衡后各为 $U_0/4$。

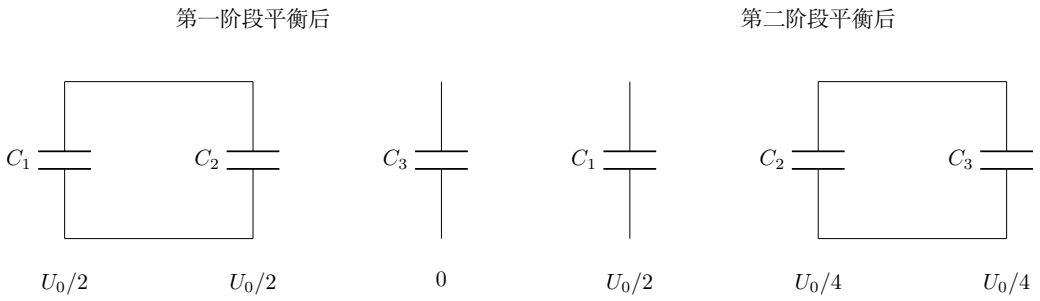


图 4.29: 两阶段的实际连线：第二阶段第一只已被隔离

全过程释放的能量

图 4.29 最终 $(U_1, U_2, U_3) = (U_0/2, U_0/4, U_0/4)$。初储能 $CU_0^2/2$，末能

$$W_f = \frac{C}{2}\left(\frac{U_0^2}{4} + \frac{U_0^2}{16} + \frac{U_0^2}{16}\right) = \frac{3CU_0^2}{16}.$$

因此全过程释放 $CU_0^2/2 - 3CU_0^2/16 = 5CU_0^2/16$。第一阶段连接后总储能为 $CU_0^2/4$；第二阶段再释放 $CU_0^2/16$，两段相加即为上述结果。撤线使第一只保留第一阶段的电荷；第二阶段只在第二、三只之间重新分配。

例 4.10 (电容桥的非对称中点)**.** A 电势 $U > 0$、B 零势，上支 $A - M - B$ 电容分别为 $C, 2C$，下支 $A - N - B$ 为 $2C, C$，桥支 M, N 间为 C。两中点原中性。求中点势和端口电容。

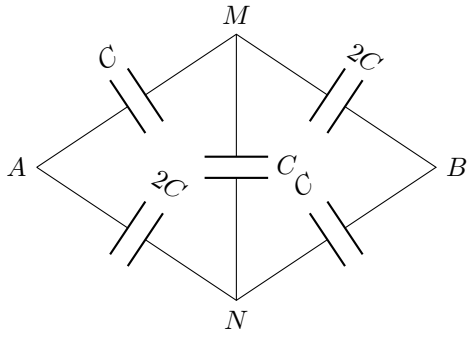


图 4.30: 电容桥的非对称中点

解　对两个中性浮置组逐项列电荷方程

图 4.30 中，浮置组 M 原中性，故 $C(V_M - U) + 2CV_M + C(V_M - V_N) = 0$；对 N 同理有 $2C(V_N - U) + CV_N + C(V_N - V_M) = 0$。各项都是相应支路在本节点上的电量。方程除以 C 得 $4V_M - V_N = U$、$4V_N - V_M = 2U$。

联立求中点势与桥支极性

第一式乘四再加第二式，得 $15V_M = 6U$，所以 $V_M = 2U/5$；代入得 $V_N = 3U/5$。

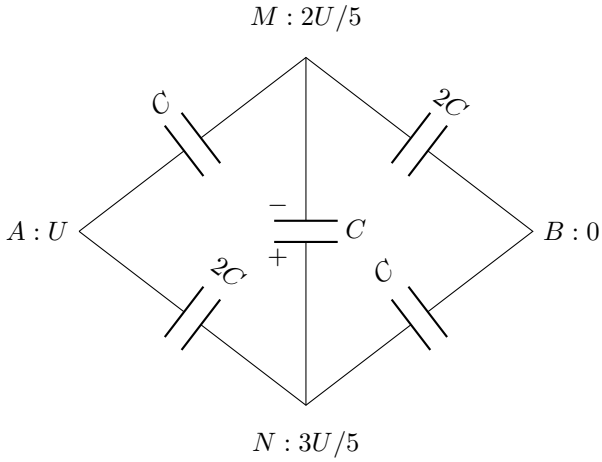


图 4.31: 实际电容桥的中点势与桥支带电极性（$U > 0$）

图 4.31 桥支的 M 端电量为 $C(V_M - V_N) = -CU/5$。该电容中的电场从较高电势的 N 面指向较低电势的 M 面。

端口电量与储能

高势端总量

$$Q_A = C(U - V_M) + 2C(U - V_N) = \frac{7}{5}CU,$$

故端口电容 $7C/5$。储能按图中五条支路逐项计算，

$$\begin{aligned} W &= \frac{C}{2}\left[(3U/5)^2 + 2(2U/5)^2 + 2(2U/5)^2 + (3U/5)^2 + (U/5)^2\right] \\ &= \frac{CU^2}{50}(9+8+8+9+1) = \frac{35CU^2}{50} = \frac{7}{10}CU^2. \end{aligned}$$

它与端口关系 $W = \frac{1}{2}C_{\text{eq}}U^2$ 相同，五条支路均已计入储能。

4.7 本讲小结

电容由导体形状、相对位置及介质决定。计算时先求间隙电场，再沿连接两极的路径积分电势差，最后由 $C = Q/U$ 得到电容。平面、圆柱面和球面对应不同的场分布与积分。

多板与网络题中，导线连接的极板组成同一等势组。每一间隙提供支路关系 $Q_{ij} = C_{ij}(V_i - V_j)$，每个浮置组再由各面电荷相加写出净电荷方程。接线与撤线使电荷约束逐阶段改变，重新连接后的共同电压由连接组的总电荷决定。

逐渐充电给出储能 $W = Q^2/(2C)$。孤立电容改变几何时，场力功来自场能减少；恒压过程则由电源功减去场能增量得到机械功。两种过程在同一瞬时状态下给出同一个电场力。

4.8　练习

练习 4.1 (球形电容器的薄隙极限)**.** 球形电容器内半径 R、间隙 d。推导电容并求 d/R 很小时的一阶修正。

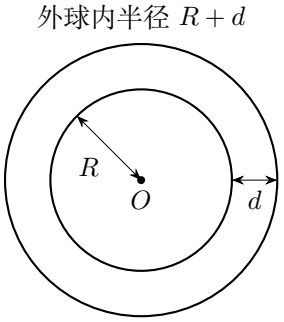


图 4.32: 内球半径为 R，真空间隙宽度为 d

练习 4.2 (中性浮板的位移)**.** 真空平行板间距 d、面积 S，插入厚度可忽略的中性浮板，距上板 x。求等效电容及浮板受力，忽略边缘。

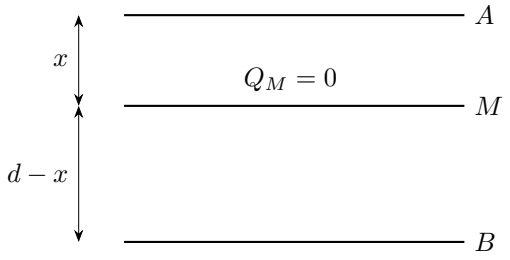
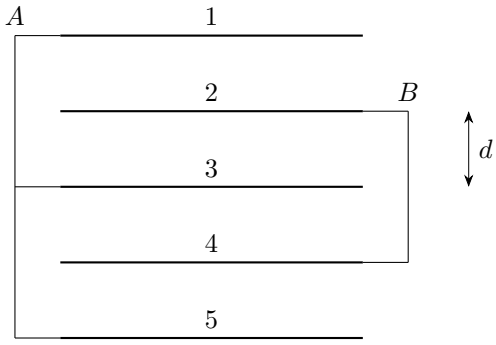


图 4.33: 中性薄浮板与两侧真实间隙

练习 4.3 (交错多片电容器)**.** 共有 n 块相同金属板，依次交替连接到端口 A, B，每个相邻间隙的正对面积为 S，宽为 d。板宽远大于 d，忽略边缘场和引线的杂散电容。求端口电容。



以 $n = 5$ 示意交错接线，间隙面积均为 S

图 4.34: 奇数片与偶数片分别相连，板号与端口名分开标注

练习 4.4 (两只电容串联的耐压限制)**.** 电容 $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$、$C_2 = 3\,\mu\mathrm{F}$，耐压分别 $100\,\mathrm{V}$、$80\,\mathrm{V}$。中点原中性，求串联后最大安全电压及储能。

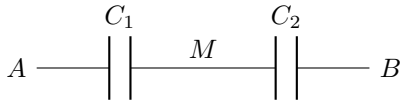


图 4.35: 两只电容串联的耐压限制

练习 4.5 (两个等电容的连接耗散)**.** 两只电容均为 C，一只电压 U，另一只未充电，同极相连。求末电压、连接释放能量和原充电电容的电量变化。

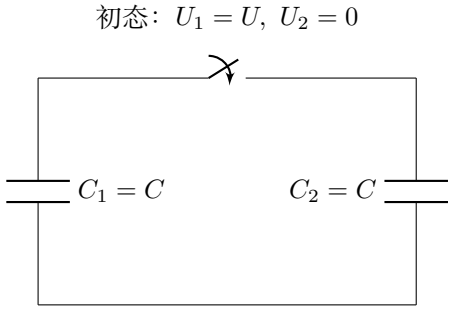


图 4.36: 接通前一只已充电，另一只未充电

练习 4.6 (对称电容桥)**.** 菱形桥四边电容均为 C，上下中点之间另接 C_0，左右为端口 A, B。所有中间导体组原中性。求等效电容。

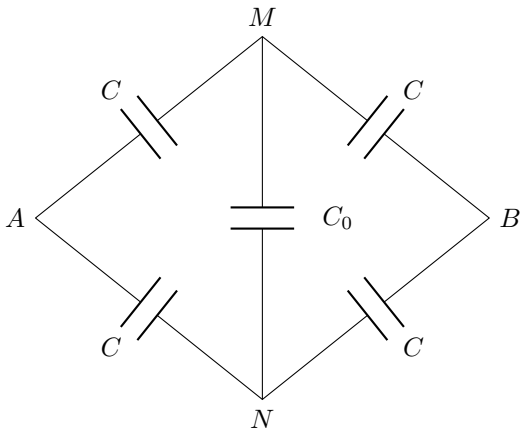


图 4.37: 四条相同电容支路与中点之间的桥支

练习 4.7 (有限输入电容的电压测量)**.** 电容 C 初电压 U_0，断电后接入原未充电、输入电容 C_m 的理想静电计，无漏电。求读数与相对扰动；要扰动不超过 1%，需什么条件?

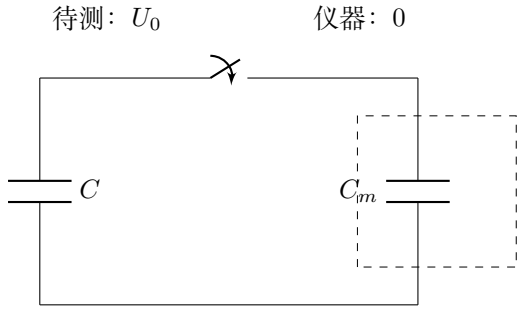


图 4.38: 接入前输入电容未充电，开关尚未闭合

练习 4.8 (孤立电容器变间距的受力与功)**.** 真空平行板面积 S、间距缓慢从 d_1 增至 d_2，孤立后电量为 $\pm Q$。板宽远大于 d_2，忽略边缘场。求吸引力及外力功，再由电场能密度积分求场能增加。

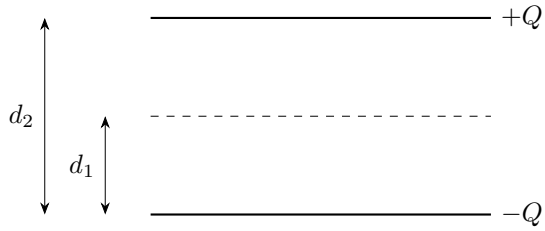


图 4.39: 上板由虚线位置移到实线位置，电量保持不变

练习 4.9 (十电容梯形的非相邻端口)**.** 双轨有四列节点 $n=0,1,2,3$，相邻列上下各接电容 C，每一列上下也接 C，共十只。端口 A 为第 0 列下节点，B 为第 3 列上节点，其他导体组原中性。求等效电容。

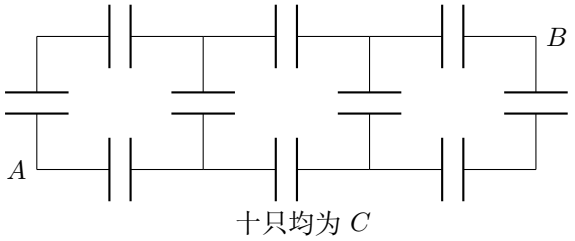


图 4.40: 十电容梯形的非相邻端口

练习解答

练习 4.1

解　沿实际径向间隙积分势差

图 4.32 间隙的径向场为 kQ/r^2，以 r 为径向积分变量，电极端点为 $R, R+d$:

$$U = kQ\int_R^{R+d} r^{-2}\,\mathrm{d}r = kQ[-r^{-1}]_R^{R+d} = kQ\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right) = \frac{kQd}{R(R+d)}.$$

故 $C = 4\pi\varepsilon_0 R(R+d)/d$。

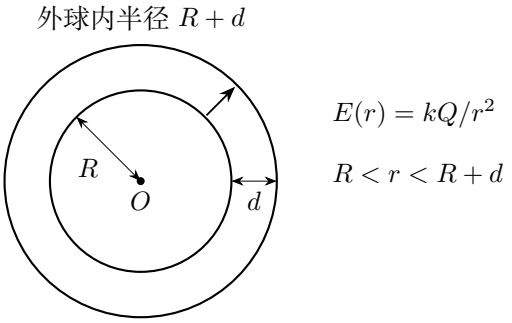


图 4.41: 从内球到外球沿径向积分势差

提出平行板主项并解释修正所用的面积

按图 4.41 提出平面主项，$C = [\varepsilon_0(4\pi R^2)/d](1+d/R)$。对球形结构这是以所选内球面积表示的精确分解；相对平面主项的一阶修正为 d/R。这里以题给内球面积 $4\pi R^2$ 作为平面近似的面积。

练习 4.2

解　由中性浮板确定串联电荷关系

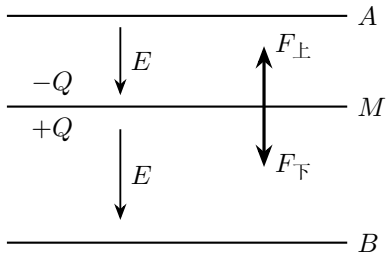
图 4.33 两间隙电容分别为 $C_1 = \varepsilon_0 S/x$ 和 $C_2 = \varepsilon_0 S/(d-x)$。浮板中性使它们的电量等大，可以按串联求端口电容。

消去浮板位置求端口电容

将两个实际间隙长度代入倒数相加式，

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d-x}{\varepsilon_0 S} = \frac{d}{\varepsilon_0 S}, \qquad C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

两段长度相加始终为 d，所以等效电容与浮板位置无关。



图示取上板正、下板负

图 4.42: 浮板两侧场强相同，电压力相反

两侧压力与浮板受力

在图 4.42 浮板两面的电荷等量异号，两侧场大小相同，电场在两面产生的压力都是 $\varepsilon_0 E^2/2$。两面面积相同，所受电场力大小相等、方向相反，净力为零。在本题的中性、薄板、忽略边缘条件下，浮板位移只重新划分两段间隙长度，两侧压力始终相等。

练习 4.3

解　按相邻间隙逐一识别共同端口

在图 4.34 中每一个间隙都跨同一对端口，故有 $n-1$ 个 $C_0 = \varepsilon_0 S/d$ 并联。总电容 $C = (n-1)\varepsilon_0 S/d$。

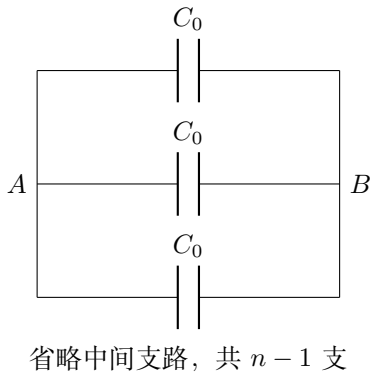


图 4.43: 每一相邻间隙都跨同一对端口

各极片参与的间隙

图 4.43 对内板，两侧分别面对相反端口，每面各贡献相应电荷；外侧两板各只有一面参与主要间隙场。从第一块板到第 n 块板共有 $n-1$ 个间隙，每个间隙贡献一只 C_0。

练习 4.4

解　先把每只耐压换成允许电量

图 4.35 中串联电量相同，分别受 $Q \le C_1U_{1\max} = 200\,\mu\mathrm{C}$、$Q \le C_2U_{2\max} = 240\,\mu\mathrm{C}$ 限制，因此先达到第一只耐压。最大电量 $200\,\mu\mathrm{C}$。

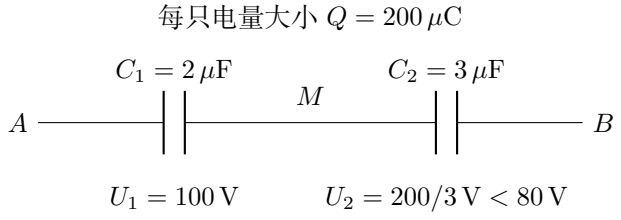


图 4.44: 相同串联电量下，第一只先达到额定电压

用同一电量求两只实际分压

图 4.44 此时 $U_1 = 100\,\mathrm{V}$、$U_2 = 200/3\,\mathrm{V}$，总压为 $500/3\,\mathrm{V}$。

串联总储能

等效电容 $6/5\,\mu\mathrm{F}$，储能

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right) \\ &= \frac{(200\times10^{-6})^2}{2}\left(\frac{1}{2\times10^{-6}}+\frac{1}{3\times10^{-6}}\right) \\ &= (2.0\times10^{-8})\left(\frac{5}{6}\times10^{6}\right)=\frac{1}{60}\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

此时第一只恰达额定电压，第二只电压约为 $66.7\,\mathrm{V}$，低于它的 $80\,\mathrm{V}$ 额定值。

练习 4.5

解　对最终上端组守恒电荷

图 4.36 合并正端的电量守恒：$CU = 2CV_f$，故 $V_f = U/2$。

求转移电量

原带电电容由 CU 变为 $CU/2$，向另一只转移 $CU/2$。

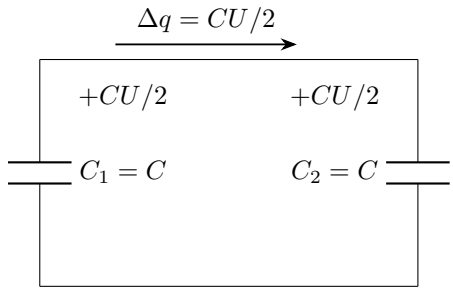


图 4.45: 连接后同一上端组的电荷在两只电容间分配

比较两只电容各自与总储能的变化

图 4.45 初储能 $CU^2/2$，末储能 $2[C(U/2)^2/2] = CU^2/4$，释放 $CU^2/4$。第二只获得的储能只有 $CU^2/8$，不等于第一只减少的 $3CU^2/8$，差额正是连接过程释放的能量。连接过程释放的能量可转化为线路中的焦耳热等，具体分配取决于接线方式和线路元件。

练习 4.6

解　上下中点的对称性

图 4.37 对上下中点的交换保持端口与所有电容不变，两中点原净量也同为零，唯一性使其电势相同。因此桥支 C_0 上无电压、无电荷，不参与端口电量。

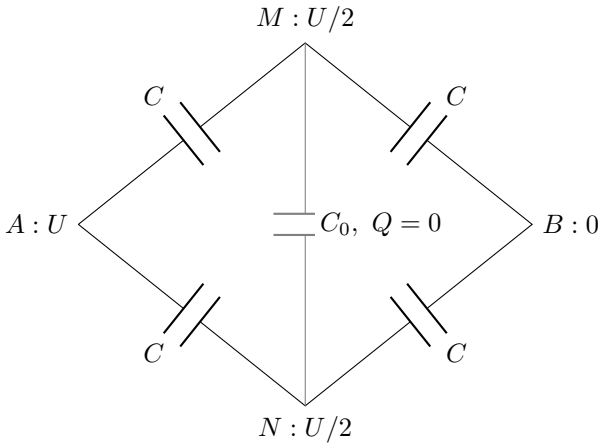


图 4.46: 对称桥中两中点电势相同，桥支电压为零

去掉无电压桥支后化简两条支路

图 4.46 剩上、下两条各为两个 C 串联，每条 $C/2$，再并联得 $C_{AB} = C$。

练习 4.7

解　把仪器输入电容纳入最终节点

图 4.38 接入后两者并联，正端组守恒 $CU_0 = (C + C_m)U_f$，所以 $U_f = CU_0/(C + C_m)$。

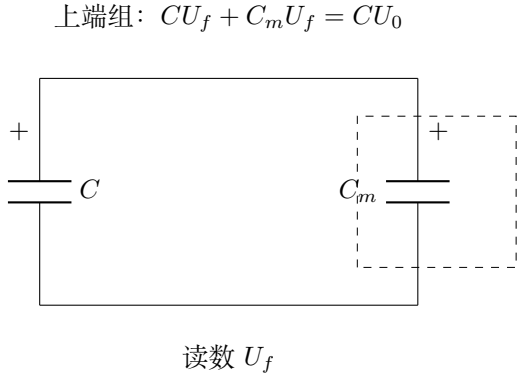


图 4.47: 闭合后两电容共享同一电压，上端组总量仍为 CU_0

由精确相对扰动求输入电容上限

在图 4.47 相对扰动 $(U_0 - U_f)/U_0 = C_m/(C + C_m)$。要求不超过 0.01，整理为 $0.99C_m \le 0.01C$，即 $C_m \le C/99$。近似 $C_m/C \le 1\%$ 在小扰动时可用，本题的精确条件为 $C_m/C \le 1/99$。

区分瞬时分配与长期放电

在题给无漏电条件下，接线完成后的读数保持 U_f；读数与初始电压的差来自接线时两电容之间的电荷转移。

练习 4.8

解　只取另一板产生的场计算吸引力

图 4.39 每板仅受另一板场 $Q/(2\varepsilon_0 S)$ 的作用，故吸引力 $F = Q^2/(2\varepsilon_0 S)$，在忽略边缘条件下与间距无关。

由准静态外力求机械功

缓慢拉开时外力沿间距增大的方向，且大小 F 恒定，故

$$W_{外} = \int_{d_1}^{d_2} F \,\mathrm{d}d = F[d]_{d_1}^{d_2} = F(d_2 - d_1).$$

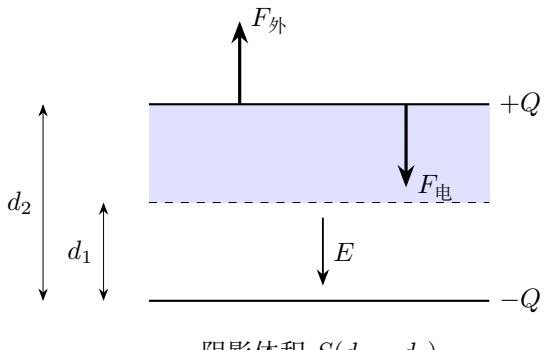


图 4.48: 阴影为新增场区域，外力与电场吸引力方向相反

新增区域的电场能

在图 4.48 间隙场 $E=Q/(\varepsilon_0 S)$，能量密度 $w=\varepsilon_0 E^2/2$，对图中的新增场区域逐层积分，每层厚 $\mathrm{d}z$、体积 $S\,\mathrm{d}z$。由于 w 和 S 都不随 z 变化，

$$\Delta W_{场}=\int_{d_1}^{d_2} wS\ \mathrm{d}z = wS[z]_{d_1}^{d_2}=\frac{Q^2(d_2-d_1)}{2\varepsilon_0 S},$$

与外功一致。拉开时新增的真空区域填入相同强度的电场，外力功恰等于这部分场能。

练习 4.9

解　标全节点并建立旋转后的互补关系

图 4.40 取 $V_A=0, V_B=U$。将电势除以 U，按从左到右记上轨为 $u_0,u_1,u_2,1$，下轨为 $0,w_1,w_2,w_3$。旋转 180 度交换端口使 $u_0=1-w_3, u_1=1-w_2, u_2=1-w_1$。

对三个独立浮置组列净量方程

对左上、上轨中间两点写净量零，

$$2u_0-u_1=0,\quad 3u_1-u_0-u_2-w_1=0,\quad 3u_2-u_1-1-w_2=0.$$

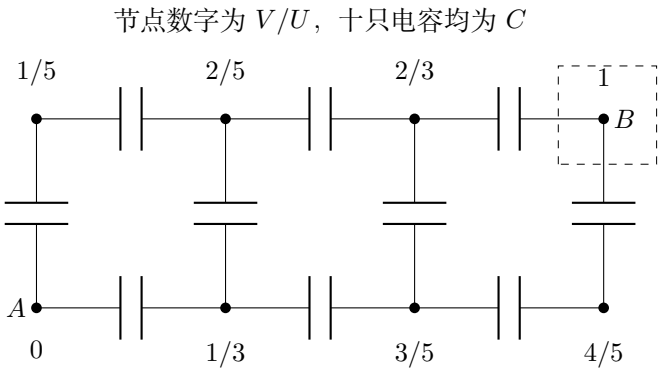


图 4.49: 所有节点的电势与端口 B 相连的两只电容

消元求全网节点势

在图 4.49 用 $w_1 = 1 - u_2$ 代入第二式，得到 $3u_1 - u_0 - u_2 - (1 - u_2) = 0$，即 $3u_1 - u_0 - 1 = 0$。第一式给 $u_1 = 2u_0$，再代入有 $3(2u_0) - u_0 - 1 = 0$，所以 $5u_0 = 1$，得 $u_0 = 1/5, u_1 = 2/5$。

对第三式代入 $w_2 = 1 - u_1$，有 $3u_2 - u_1 - 1 - (1 - u_1) = 0$，化为 $3u_2 - 2 = 0$，故 $u_2 = 2/3$。最后按互补关系逐点回代，$w_1 = 1 - 2/3 = 1/3$、$w_2 = 1 - 2/5 = 3/5$、$w_3 = 1 - 1/5 = 4/5$。

只累计实际接到端口的两支电量

端口 B 只接上轨相邻电容和末竖档，电量

$$Q_B = C(U - u_2U) + C(U - w_3U) = \frac{8}{15}CU.$$

所以等效电容为 $8C/15$。图中端口 B 相连的两条支路分别提供 $CU/3$ 和 $CU/5$，相加得到端口总电荷。

静电

物理竞赛一轮讲义

第五讲

电介质与电场中的能量

2026

目录

第五讲　电介质与电场中的能量 **1**

5.1　极化与电场的自洽 1

5.2　分区介质的电容 4

5.3　插入过程的约束与能量 5

5.4　极化电荷的整体分布 7

5.5　球形介质与非均匀场 10

5.6　例题与分析 13

5.7　本讲小结 29

5.8　练习 30

练习解答 33

第五讲　电介质与电场中的能量

5.1　极化与电场的自洽

5.1.1　从插入玻璃板的实验说起

把平行板电容器充电后与电源断开，再向板间插入玻璃板，静电计的偏角减小，说明两极电势差下降。极板上的自由电荷量保持不变，由 $C = Q/U$ 可知电容增大。这一变化来自玻璃内部电荷在电场中的重新排列。

图 5.1 把实验的前后状态与微观图像相连：介质中正、负电荷略微分离，靠正极的一面出现负束缚电荷，靠负极的一面出现正束缚电荷。它们产生与原场反向的附加场，使总场减弱。在完全填满间隙的均匀介质中，Q 固定给出 $E = Q/(\kappa\varepsilon_0 S)$，电压降为原来的 $1/\kappa$，电容增为原来的 κ 倍。

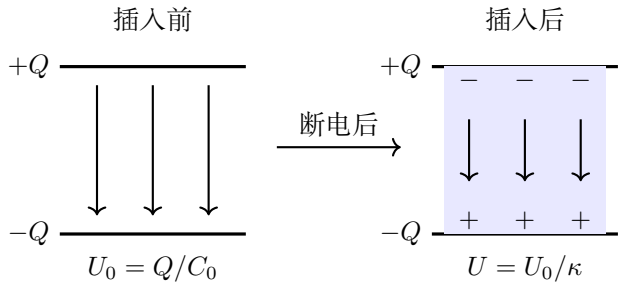


图 5.1: 固定自由电荷量时，介质极化使板间电场和电压降低。

绝缘介质中的电荷受分子结构束缚，外场使正负电荷中心发生微小相对位移，或使原有电偶极子转向。单位体积的电偶极矩定义为极化强度 $\boldsymbol{P}$。均匀极化介质内部相邻偶极子的正负端相互抵消，表面留下束缚电荷；非均匀极化时内部也可出现净束缚电荷。

先看介质的表面：单位面积上没有被邻近偶极端抵消的电荷，等于极化强度沿外法向的分量，所以表面密度为 $\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 从介质指向外部。以沿右方向极化的平板为例，左表面负、右表面正；束缚电荷形成的场通常与原外场相反，使介质中的总场减弱。极板自由电荷保持原量，介质表面另外出现等量异号的束缚电荷。

图 5.2 把介质看成一列列偶极子。内部相邻的正负端抵消，左、右表面留下与外法向对应的束缚电荷；箭头 $\boldsymbol{E}_b$ 指向左，体现极化反馈。

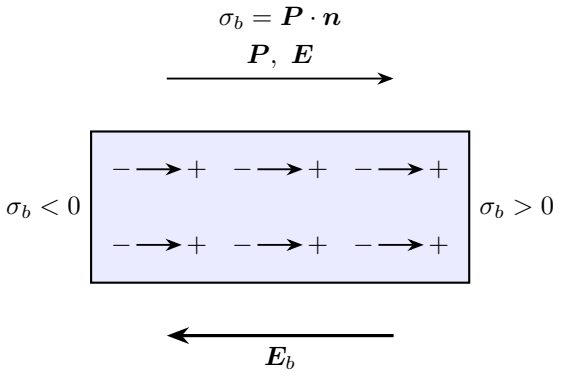


图 5.2: 沿右极化的介质：内部偶极端电荷相消，两端留下负、正束缚电荷

再看介质内部，设 $\boldsymbol{P} = P_x(x)\boldsymbol{e}_x$ 随 x 缓慢变化。图 5.3 取截面积为 S、厚度为 Δx 的薄柱。两端相邻偶极子的端电荷存在差额，留在薄柱内部的净束缚电荷为

$$\Delta Q_b = S[P_x(x) - P_x(x+\Delta x)], \qquad \rho_b = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta Q_b}{S\Delta x} = -\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}x}.$$

薄柱内部留下的电荷由两端穿出束缚电荷的差决定；除以体积后便得到体密度。

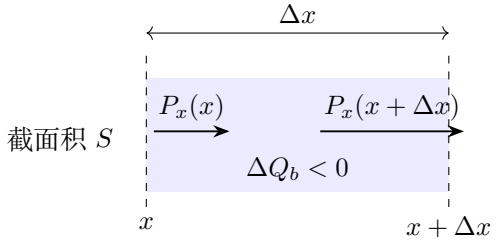


图 5.3: 极化端电荷的抵消差：右端极化较强时，薄柱内部留下负束缚电荷

若 P_x 沿 x 增大，上式为负，与图中的剩余负端电荷一致。对三维小长方体的三对面分别作同样的相消计算，再除以体积，得到

$$\rho_b = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \equiv -\nabla\cdot\boldsymbol{P}.$$

括号内称为极化强度的散度，比较的是各分量沿自身方向的变化，它同时包含极化强度的大小、方向和几何形状。例如纯球对称径向极化 $\boldsymbol{P} = P_r(r)\boldsymbol{e}_r$，薄球壳两面的面积也随 r 改变，故

$$\Delta Q_b = 4\pi r^2 P_r(r) - 4\pi(r+\Delta r)^2 P_r(r+\Delta r), \qquad \rho_b = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2 P_r)}{\mathrm{d}r}.$$

因此 $P_r \propto r^{-2}$ 时，远离原点的体束缚电荷仍为零；真实内、外表面的束缚电荷应另用外法向公式计算。

线性、各向同性介质在适当场强和温度范围内可写 $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$，从而 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi_e) = \kappa \varepsilon_0$。这里 $\boldsymbol{E}$ 是极化建立后的总场。总场使介质极化，极化电荷又产生附加场；将二者联立，便可求最终状态。以下采用均匀或分区均匀的线性、各向同性、无损介质，渐变介质另在例题中讨论。

5.1.2 电位移与介质交界处的场

把 $\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho_f + \rho_b$ 与束缚电荷关系合并，得到 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f$，积分形式 $\oint \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_f$。电位移的通量只对应自由电荷，而电场的高斯通量对应全部电荷。球对称、柱对称或平面分层时，可先由自由电荷和对称性确定 $\boldsymbol{D}$。在线性各向同性介质中，再用当地的 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon$ 求场。介电常数随位置变化时，就代入该处的 ε。

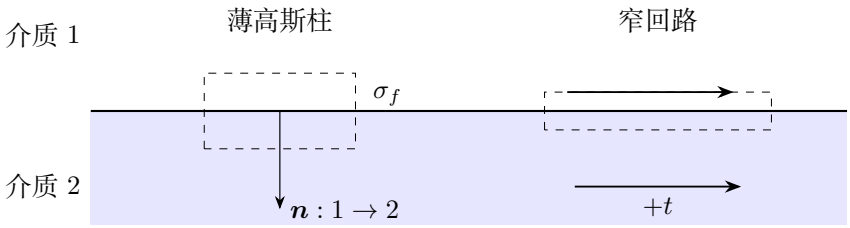


图 5.4: 跨界面高斯柱确定法向跳变，窄回路确定切向连续

按图 5.4 把 $\boldsymbol{n}$ 从介质 1 指向介质 2。高斯柱两端通量为 $D_{2n}\Delta S - D_{1n}\Delta S$，所以 $D_{2n} - D_{1n} = \sigma_f$；沿界面取窄闭合回路，静电场环流零，得 $E_{2t} = E_{1t}$。若界面无自由面电荷，法向 D 连续，切向 E 连续，但法向 E 一般不连续。例如场垂直两层介质时 $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$；场平行界面时两侧 E 相同而 D 不同。固定自由电荷的均匀平板模型中，$D = Q/S$ 保持，填入介质后 E 降为原来的 $1/\kappa$；接恒压源时，则由 $E = U/d$ 保持，电源向极板补充自由电荷。

金属表面与介质相邻时，金属内部场零，介质侧 $D_n = \sigma_f$；金属面的自由电荷为 σ_f，相邻介质表面的束缚电荷为 σ_b，分别用从本材料指向外部的法向确定符号。

5.2　分区介质的电容

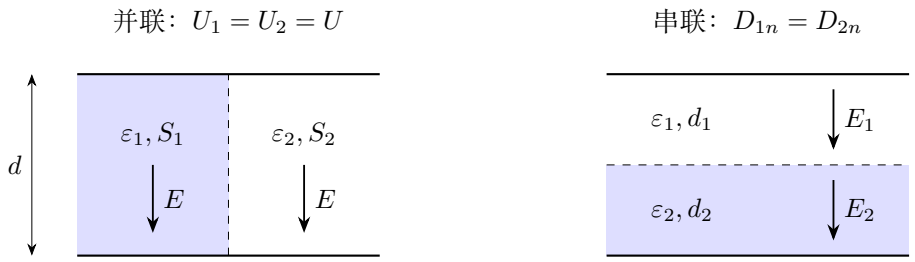


图 5.5: 场平行分区界面时同电压，场垂直分层界面时同法向电位移

5.2.1　平行于场的界面与并联分区

图 5.5 左图中，不同介质各占极板的一部分面积，并都贯穿同一间距 d，各部分跨同一电势差 U，所以场同为 $E = U/d$。第 i 区自由电量为 $Q_i = \varepsilon_i S_i E$，总量相加给 $C = \sum_i \varepsilon_i S_i / d$。介电常数较大的区域在相同电压下分得更多自由电荷，极板面对各区的自由面密度随 ε_i 而变化。

这相当于各区电容并联，但其依据是每区电压相同，且忽略交界附近的边缘效应。界面与场平行时，均匀极化的 $\boldsymbol{P}$ 与界面法向垂直，该界面没有由 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$ 产生的束缚面电荷；介质与极板相接的端面则有束缚电荷。

5.2.2　垂直于场的界面与串联分层

图 5.5 右图中，介质沿厚度分层，各层面积 S、厚 d_i，界面无自由面电荷，则各层 $D = Q/S$ 相同，$E_i = Q/(\varepsilon_i S)$。电压逐层相加，

$$U = \frac{Q}{S}\sum_i \frac{d_i}{\varepsilon_i}, \qquad C = \frac{S}{\sum_i d_i/\varepsilon_i}.$$

介电常数小的一层承担更大的场强。薄空气隙即使厚度很小，也可能先达到击穿场；因此耐压由各层局部场 E_i 与各自击穿场的比较决定。

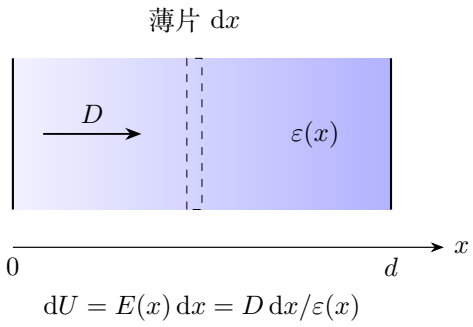


图 5.6: 连续分层的薄片微元与沿法向变化的电场

图 5.6 中每片共享相同 D，其微小电压降相加形成总电压。

若介电常数沿法向连续变化，分层极限给

$$C = \frac{S}{\int_0^d \mathrm{d}x/\varepsilon(x)}, \qquad V(0) - V(x) = \frac{Q}{S}\int_0^x \frac{\mathrm{d}x'}{\varepsilon(x')}.$$

连续变化时还可由 $P = D - \varepsilon_0 E$ 求 $\rho_b = -\,\mathrm{d}P/\,\mathrm{d}x$，这展示了体束缚电荷与非均匀场之间的联系。

5.3 插入过程的约束与能量

5.3.1 先判断电源是否仍相连

一只电容从 C_0 变为 $C_1 > C_0$，若断开电源，Q 固定，电压按 Q/C 降低，场能由 $Q^2/(2C_0)$ 降到 $Q^2/(2C_1)$。若始终接恒压源，U 固定，电量由 C_0U 增至 C_1U，场能反而增加 $\frac{1}{2}(C_1 - C_0)U^2$；但电源作功 $(C_1 - C_0)U^2$，另一半可转为机械功。两种情况下，场对介质都作正功，介质沿插入方向受到吸引。

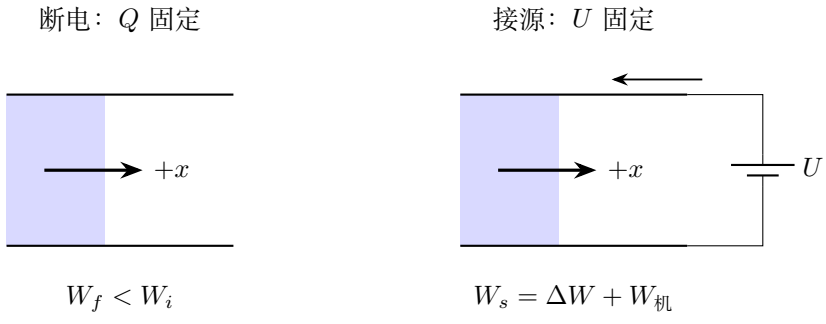


图 5.7: 同样插入介质，断电和接源决定不同的电荷流动

图 5.7 右侧源向正极补充电荷；两种条件下 C 都增大，故都可吸入介质，但场能变化的符号不同。

对理想刚性、无损介质，建立场的微功密度为 $\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{D}$。对于各向同性线性介质，固定介电常数 ε，并沿固定方向从零缓慢建立电位移，则 $E'=D'/\varepsilon$，所以

$$w=\int_0^D E'\,\mathrm{d}D'=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^D D'\,\mathrm{d}D'=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{D'^2}{2}\right]_0^D=\frac{D^2}{2\varepsilon}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}.$$

一半的乘积来自线性关系下的这个积分；非线性介质须使用实际的 $E(D)$。这个表达式同时包含建立电场和介质极化所需的能量。

5.3.2　用电容随位置的变化求吸入力

介质沿 x 方向插入，令插入深度增大对应 x 增大。理想平行板矩形板宽 b、长 L、间距 d，厚度恰填满间隙的介质相对介电常数 κ，忽略边缘后

$$C(x)=\frac{\varepsilon_0 b}{d}[L+(\kappa-1)x],\qquad C'(x)=\frac{\varepsilon_0 b}{d}[0+(\kappa-1)\cdot 1]=\frac{\varepsilon_0 b(\kappa-1)}{d}>0.$$

定压时 $F_x=U^2C'/2$ 为常数，定量时 $F_x=Q^2C'/(2C^2)$ 随插入逐渐减小。这个受力虽由电容整体变化求得，真实力主要与入口附近的非均匀场有关；在计算总电容时采用均匀场近似，在解释力的来源时则关注入口附近的非均匀场。

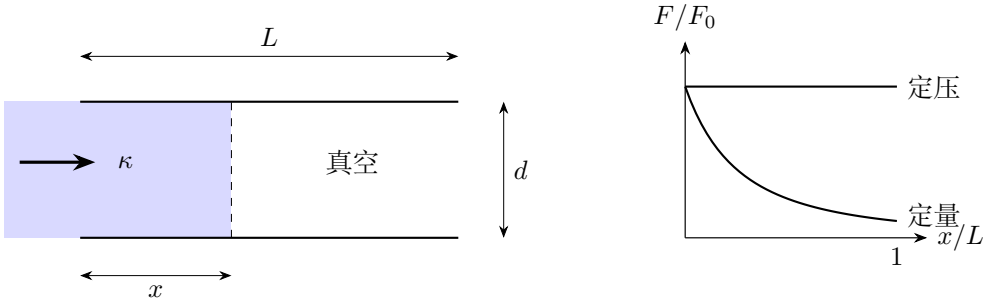


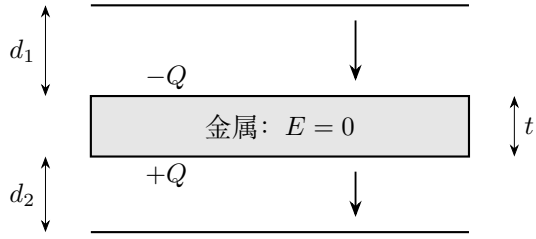
图 5.8: 插入几何决定电容的导数，定量与定压的力沿不同曲线变化

图 5.8 以相同初态比较，示意取 $\kappa=3$；定电压时力保持不变，定电量时力随 $C(x)$ 增大而减小。入口附近的非均匀场承担实际吸入力。

准静态拉出时外力与吸入力反向，外功可由对应势能或电源功求得。若将刚性介质从静止释放，在忽略摩擦、辐射和电阻损耗的准静电模型中，场力功转为介质的动能。练习将分别计算断电与恒压过程的速度。

5.3.3 导体插片与介质插片的区别

导体内部静电场为零，厚度 t 的中性金属板完全插入板间且不接触两极时，电压只降在剩余总厚度 $d-t$ 的真空间隙上，故 $C=\varepsilon_0 S/(d-t)$。它可视为 $\kappa\to\infty$ 的理想分层极限，但其自由电荷会迁移到两面，与有限 κ 介质的微观极化机制不同。



$d_1+d_2=d-t$，两隙场同为 E

图 5.9: 中性金属片的两面感应电荷与剩余真空间隙

图 5.9 中金属片内不承担电压，$U=E(d_1+d_2)$，因此只剩两侧真空厚度之和进入电容。

只要金属插片保持中性、面积与极板相同、忽略边缘，插片在法向的位置不改变两真空间隙厚度之和，也不改变电容。若插片带净电荷，两侧电场不等，位置可影响势差与受力；横向只插入部分面积时，已插入区的有效间隙为 $d-t$，未插入区仍为 d，两区并联。

5.4 极化电荷的整体分布

5.4.1 束缚总电荷与各界面符号

原来中性的有限介质发生极化时，内部正负电荷分离，总电荷保持为零。由 $\rho_b=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ 与 $\sigma_b=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$，体束缚电荷与全部表面束缚电荷之和为零。下面的一维渐变模型展示它们怎样相互补足。

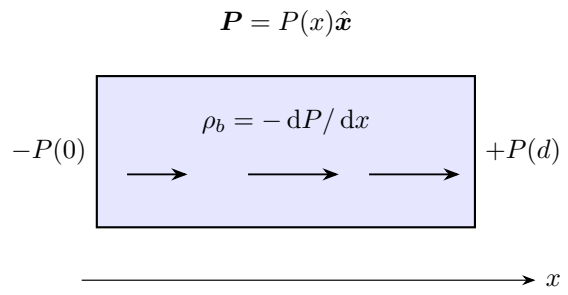


图 5.10: 一维非均匀极化中，体内与两端面的束缚电荷相加为零

图 5.10 中，截面积为 S，沿 x 方向把体密度逐层相加：

$$Q_{b,\text{体}} = \int_0^d \rho_b(x) S \,\mathrm{d}x = -S\int_0^d P'(x)\,\mathrm{d}x = -S[P(x)]_0^d = -S[P(d) - P(0)].$$

左端外法向沿 $-x$，面电量为 $-SP(0)$；右端外法向沿 $+x$，面电量为 $SP(d)$。两端面之和与体电量恰好相消。

均匀介质的极化强度随当地电场而变化。带点电荷的均匀介质中，$\boldsymbol{P}$ 随半径变化；在无自由体电荷的区域，$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$，均匀 ε 又使 $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$，因此 ρ_b 在该区域为零，尽管 $P(r)$ 不恒定。这与一维渐变介质的体束缚密度不同，这里球面面积随半径变化，其影响已包含在散度中。

计算相接触的两个面的电荷时，先各自标出材料的外法向。金属自由电荷公式用从金属指向介质的法向，介质束缚面电荷用从介质指向金属的法向，两者方向相反。正极板附近常出现正自由电荷与负束缚电荷，它们的数值一般不同，把两者带符号相加，得到交界处的总面电荷，除以 ε_0 即为电场法向分量的跳变量。

5.4.2　等效介电常数依赖场的方向

将两种材料作细密层状复合时，场平行分层面，两种材料同 E，平均 D 给 $\varepsilon_{\parallel} = f\varepsilon_1 + (1-f)\varepsilon_2$；场垂直层面，两者同 D，平均 E 给 $1/\varepsilon_{\perp} = f/\varepsilon_1 + (1-f)/\varepsilon_2$。即使每种材料各自各向同性，层状组合的整体响应仍可具有方向差异。

本讲按面积和厚度的电容公式就是这两种平均的直接表现。电场沿层面时采用算术平均，垂直层面时采用调和平均。练习中两种半填充方式的比较，就是这一方向差异的具体例子。

5.4.3 机械运动中的能量函数选择

把场能写为 $W(Q,x)=Q^2/[2C(x)]$。分别固定另一个自变量求偏导：

$$\left(\frac{\partial W}{\partial Q}\right)_x=\frac{2Q}{2C(x)}=\frac{Q}{C(x)}=U,$$
$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_Q=\frac{Q^2}{2}\left[-C(x)^{-2}C'(x)\right]=-\frac{Q^2C'(x)}{2C(x)^2}.$$

因此

$$\mathrm{d}W=U\ \mathrm{d}Q-\frac{Q^2C'(x)}{2C(x)^2}\ \mathrm{d}x=U\ \mathrm{d}Q-F_x\ \mathrm{d}x.$$

第一项是电源输入，第二项是场对机械的输出。定量时第一项为零。定压时令 $G=W-UQ$，逐项微分得

$$\mathrm{d}G=\mathrm{d}W-U\ \mathrm{d}Q-Q\ \mathrm{d}U=-F_x\ \mathrm{d}x-Q\ \mathrm{d}U.$$

代入 $Q=CU$，有 $G=-C(x)U^2/2$；固定 U 后，

$$F_x=-\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_U=-\left[-\frac{U^2}{2}C'(x)\right]=\frac{U^2}{2}C'(x).$$

有效能量 G 把电源交换的能量计入，从它对位置的导数直接得到恒压条件下的机械力。

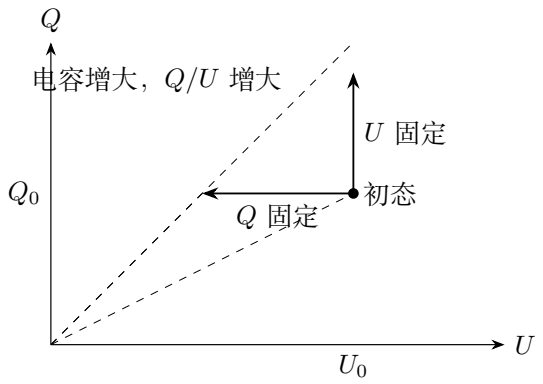


图 5.11: 相同初态出发的两种约束在电荷—电压平面上的路径

图 5.11 显示，定量路径上电压降低，定压路径上电量增加；两条路径各自由题设接线方式确定。

在同一位置、同一电气状态 $Q=C(x)U$ 下，定量与定压的力式给出相同的瞬时力。沿不同过程求功时，定量过程的电压随 $U(x)=Q/C(x)$ 变化，恒压过程的电量随 $Q(x)=UC(x)$ 变化。

5.5　球形介质与非均匀场

5.5.1　介质球的退极化作用

均匀、线性、各向同性介质球放入均匀外场后，可先从均匀极化的电荷分布求它产生的附加场。沿极化轴取极角 θ，若 $\boldsymbol{P}$ 均匀，则体束缚电荷为零，球面有 $\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = P\cos\theta$。球面正负电荷产生一个反向的球内场，其大小由球形几何决定。

为求这个场，将均匀极化球表示成两个半径 R、体密度分别为 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的球，球心由同一点分别平移 $+\boldsymbol{\delta}/2$ 和 $-\boldsymbol{\delta}/2$。图 5.12 将位移放大画出。重叠区域正负电荷抵消；表面沿法向留下的薄层厚度为 $\boldsymbol{\delta}\cdot\boldsymbol{n}$，因此在 $\delta\to 0$、$\rho\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{P}$ 保持不变的极限中，恰好得到 $\sigma_b = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$。

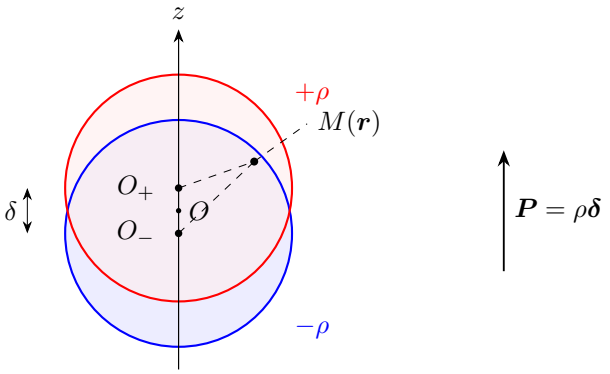


图 5.12: 微小错位的均匀正负带电球构成均匀极化球

均匀带电实心球内的场可由高斯定理得到：半径 s 的高斯面包围电荷 $\rho(4\pi s^3/3)$，故 $E\,4\pi s^2 = \rho(4\pi s^3/3)/\varepsilon_0$，即 $\boldsymbol{E} = \rho\boldsymbol{s}/(3\varepsilon_0)$。对图中的内部任意点 M，相对两个球心的位矢分别为 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\delta}/2$、$\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}/2$，叠加得到

$$\boldsymbol{E}_b = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{\delta}/2) - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\delta}/2) = -\frac{\boldsymbol{P}}{3\varepsilon_0}.$$

位置 $\boldsymbol{r}$ 被消去，所以该场在球内均匀；负号表示它反抗极化，系数 $1/3$ 来自实心球的体积与高斯面的面积之比。这就是球面几何的退极化场。

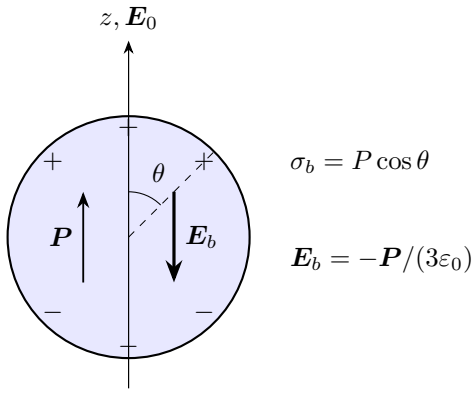


图 5.13: 介质球的极化方向、表面正负区域与反向退极化场

图 5.13 中外法向沿径向，因此正、负半球由 $\cos\theta$ 的符号区分；该表面分布的球内场与极化相反。

内部总场为 $\boldsymbol{E}_{\text{内}} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_b$。代入线性介质关系 $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\kappa-1)\boldsymbol{E}_{\text{内}}$，得到

$$\left[1 + \frac{\kappa-1}{3}\right]\boldsymbol{E}_{\text{内}} = \boldsymbol{E}_0, \qquad \boldsymbol{E}_{\text{内}} = \frac{3\boldsymbol{E}_0}{\kappa+2}.$$

所得内部场均匀，确实产生起初采用的均匀极化，所得场与采用的均匀极化相互符合。球的退极化因子为 $1/3$，平板为 1，因此两种形状给出不同的内部总场。

同一个构造还能确定球外势的形式。每个均匀带电球在球外等效为球心点电荷 $\pm Q$，其中 $Q = 4\pi R^3\rho/3$。两球心间距趋零时，电势差的一阶项为偶极势：

$$V_b = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{\delta} = \frac{4\pi R^3}{3}\boldsymbol{P}.$$

因此外部总势由均匀外场势 $-E_0 r\cos\theta$ 与 $\cos\theta/r^2$ 项组成；内部均匀场势正比于 $r\cos\theta$。这里的形式来自电荷构造，内部势在原点有限，外部附加势在远处趋于零。例 5.11 将把这两种形式代入球面电势连续和法向电位移连续条件，求出系数。在线性介电常数为正的静电边值问题中，满足场方程、表面条件和远处条件的场是唯一的，因而这一自洽构造足以确定实际解。

5.5.2 电场力与弹性、重力的竞争

当 $C'(x) > 0$ 时，电场力指向 x 增大的方向。力的大小还要由 $C'(x)$、$C(x)$ 及电源条件决定。例如均匀介质逐渐插入时，$C'(x)$ 恒定，定电量时的吸力随 $C(x)$ 增大而减小。若有弹簧或重力，沿 x 的反向作用可与电场力达到平衡。平衡要求两力相等，稳定还要求稍偏离后合力指向平衡位置。恒压平行板的吸力按隙宽平方的倒数增加，可能比弹簧恢复力增长更快，导致静态失稳；例题将求出稳定平衡所允许的电压范围。

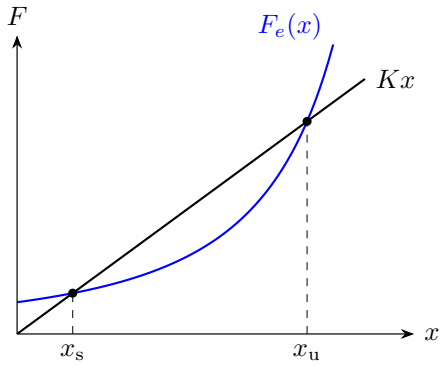


图 5.14: 电力与弹簧力的两个交点，左侧平衡稳定，右侧平衡不稳定

图 5.14 中，x_s 附近弹簧力增长得更快。向右稍移时弹簧力超过电力，合力向左，平衡稳定。x_u 附近电力增长得更快，向右稍移时合力继续向右，平衡不稳定。

若介质液体被吸进板间，电场机械功转成液柱重力势能。求升高量时，以外部大液池液面为高度零点。板间截面积为 bd，高度 z 处的薄层质量为 $\mathrm{d}m = \rho bd\,\mathrm{d}z$，从液池进入该处增加势能 $gz\,\mathrm{d}m$。把 0 到 x 的各薄层相加：

$$W_g = \int_0^x \rho g b d\, z\,\mathrm{d}z = \rho g b d \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2}\rho g b d x^2.$$

图中的液柱由不同高度的薄层组成，逐层积分得到重力势能。以下忽略液面曲率、表面张力及大液池液面下降，以电场力与液柱重力求升高量。

5.6 例题与分析

例 5.1 (半面积填充的自由电荷与极化电荷)**.** 平行板面积 S、间距 d，一半面积为真空，另一半填满相对介电常数 κ 的介质。两板自由电量为 $\pm Q$。求两区场、自由电荷分配以及介质两端的束缚电荷。

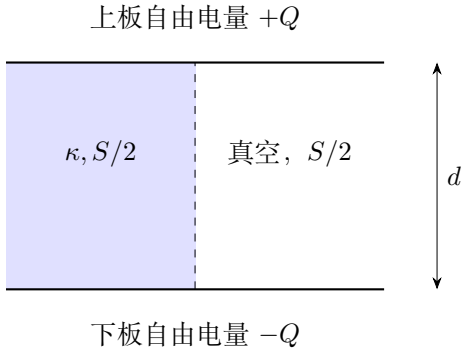


图 5.15: 相同间距、各占半面积的真空区与介质区

解　由共同电压确定两区同场

图 5.15 两区并联，电势差相同，场同为 E。正极自由电量分别为 $Q_v = \varepsilon_0 ES/2$、$Q_d = \kappa\varepsilon_0 ES/2$，故 $Q = \varepsilon_0 ES(1+\kappa)/2$。

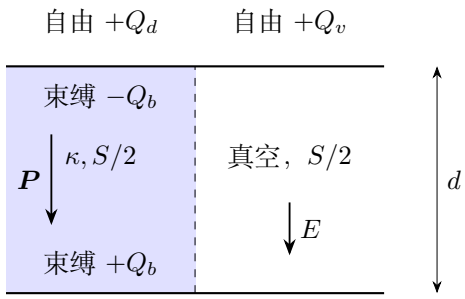


图 5.16: 金属自由电荷与介质端面束缚电荷分别标注

用总自由电量求场强及分配

由图 5.16 得

$$E = \frac{2Q}{\varepsilon_0 S(1+\kappa)}, \quad Q_v = \frac{Q}{1+\kappa}, \quad Q_d = \frac{\kappa Q}{1+\kappa}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 S(1+\kappa)}{2d}.$$

按介质外法向求束缚面电荷

介质极化强度 $P=\varepsilon_0(\kappa-1)E$。若场从上板指向下板，介质上端法向向上，所以其上端束缚电荷为 $-PS/2=-Q(\kappa-1)/(1+\kappa)$，下端相反。介质与真空的竖直界面法向水平，$P_n=0$，无束缚面电荷。正极板上自由电荷分配不均匀，但两区电场相同。

例 5.2 (抽出介质后平衡质子的运动)**.** 两水平极板带固定的等量异号自由电荷，半面积填入介质 $\kappa>1$。真空区中正电质子原在重力与电力作用下平衡，下板正、上板负。将质子固定在原位置，缓慢抽出介质后从静止释放。忽略质子自身对场的扰动，求释放后的加速度。

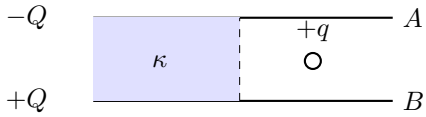


图 5.17: 抽出介质后平衡质子的运动

解　先用初始平衡确定电场与重力的关系

在图 5.17 初态真空区 $E_i=2Q/[(1+\kappa)\varepsilon_0 S]$ 向上，平衡给 $qE_i=mg$。

由断电约束求抽出后的场

两板电量固定，抽出后 $E_f=Q/(\varepsilon_0 S)=(1+\kappa)E_i/2$，比初场强。

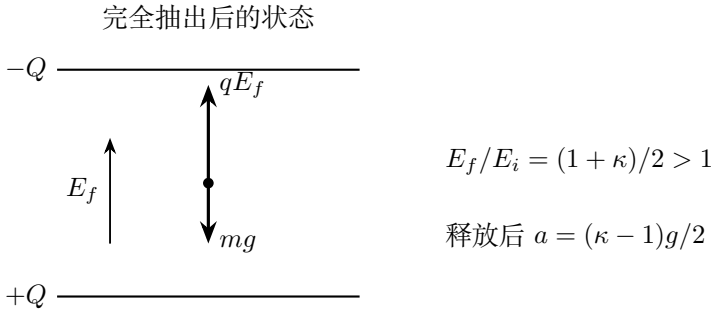


图 5.18: 抽出后质子的向上电力增大，重力保持不变

比较电力与重力并说明运动阶段

图 5.18 最终向上合力 $qE_f-mg=mg(\kappa-1)/2>0$，故向上加速。抽出期间质子由外力固定。完全抽出后撤去外力，其初速度为零，故 $a=(\kappa-1)g/2$，位移为 $y=\frac{1}{2}at^2$，直到到达上板。自由电荷量保持，使电容减小时电压升高，真空区电场随之增强。

例 5.3 (并联电容器接电源后插入介质)**.** 两电容器 C_1, C_2 并联接恒压源 U，在第一只中完全插入介质使电容变为 κC_1，第二只不变。求各自电量变化、电源输送电量、场能增量和可输出机械功。

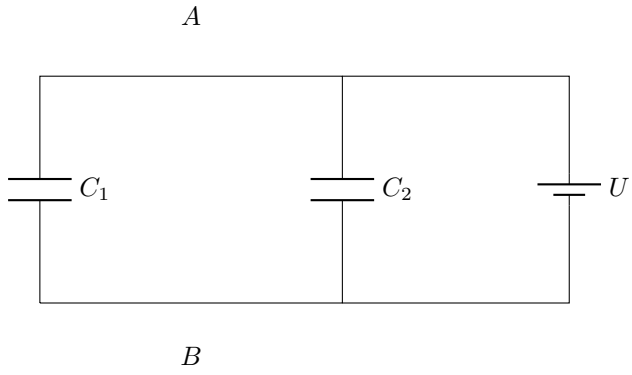
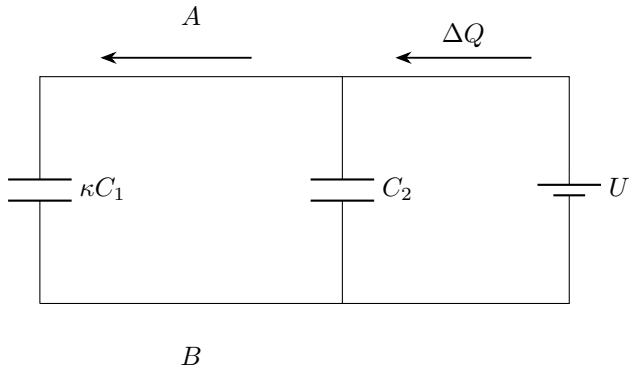


图 5.19: 两只电容与恒压电源的实际并联接线

解　按实际接源条件求两支电量变化

图 5.19 两电容电压始终为 U。第一只电量由 C_1U 增到 κC_1U，第二只仍为 C_2U；所以电源向正极组输送 $\Delta Q = (\kappa - 1)C_1U$。



第二支电量不变

图 5.20: 第一支电容增大，所需额外电荷由电源补充

分别计算电源功与场能变化

在图 5.20 电源功 $W_s = U\Delta Q = (\kappa - 1)C_1U^2$，场能增加 $\Delta W = \frac{1}{2}(\kappa - 1)C_1U^2$。

用能量差求场力输出的机械功

理想缓慢插入时，场力向外输出的机械功为 $W_s-\Delta W=\frac{1}{2}(\kappa-1)C_1U^2$；外力作等值负功。第二只虽与第一只相连，其电荷量保持 C_2U，电源补充了所需电荷。

例 5.4 (断电后插入厚金属片)**.** 平行板电容器面积 S、间距 d，先充至 U_0 后断电。插入厚 $t<d$、面积同极板的中性金属片，不接触两极。求电容、场、电压与场能变化，并讨论金属片位置。



图 5.21: 中性金属片不接触两极，厚度 t 小于原间距 d

解　保留断电后的自由电量

图 5.21 初电量 $Q=\varepsilon_0SU_0/d$，断电后保持。

由中性与片内零场确定两隙场

金属片两面感应等量异号电荷，片内场零，两个真空间隙仍有同样场 $E=Q/(\varepsilon_0S)=U_0/d$。

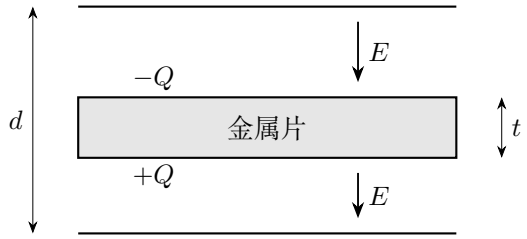


图 5.22: 电压只降在两侧真空间隙，片内场为零

求电压、电容及能量并讨论位置

图 5.22 电压只跨剩余总厚度 $d-t$，所以 $U=U_0(d-t)/d$，电容 $C=\varepsilon_0S/(d-t)$，储能 $W=Q^2(d-t)/(2\varepsilon_0S)$。场能减少 $Q^2t/(2\varepsilon_0S)$，与片在法向放置的位置无关。

改变插片的法向位置时，两间隙厚度分别变化，但总厚度始终为 $d-t$；因此电压和电容都保持上述数值。

例 5.5 (孤立平行板拉开到原来的多倍)**.** 电容为 C 的真空平行板充至 U 后断电，准静态将间距变为原来的 $n>1$ 倍，整个过程中板宽均远大于间距，忽略边缘场。求末态电容、电压与外力功。

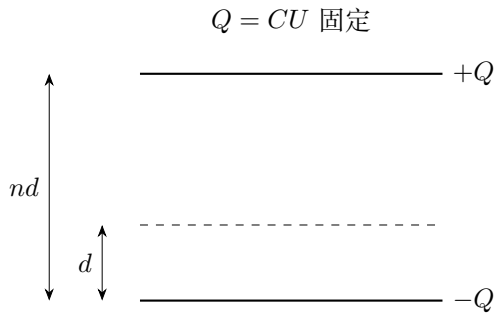


图 5.23: 上板从初始虚线位置准静态移到最终实线位置

解　把初态和末态的电容与电压分别列出

图 5.23 保持 $Q=CU$，间距增大使末电容 $C_f=C/n$，末电压 $U_f=nU$。外力克服吸引，所作功等于场能增加。

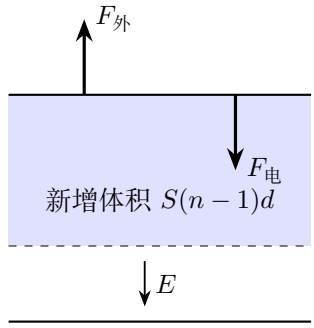


图 5.24: 拉开时场强与力不变，新增体积带来场能增加

在同一状态内使用储能公式

图 5.24 中 $W_i=Q^2/(2C)$，$W_f=Q^2/(2C_f)=nQ^2/(2C)$，故

$$W_{外}=\frac{1}{2}(n-1)CU^2.$$

在图中的固定电量条件下，板间场保持原值，极板吸力恒定。因此把间距再增大相同长度，外力所作的功也相同。

例 5.6 (两层介质的场与界面束缚电荷)**.** 两板面积 S、间距 d，厚度各 $d/2$ 的两层介质相对介电常数为 κ_1, κ_2，两极电压 U，界面无自由电荷。求各层场、自由电量及界面束缚密度。

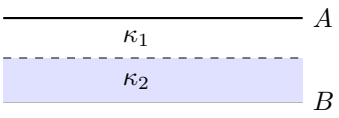


图 5.25: 两层介质的场与界面束缚电荷

解　用界面无自由电荷确定共同电位移

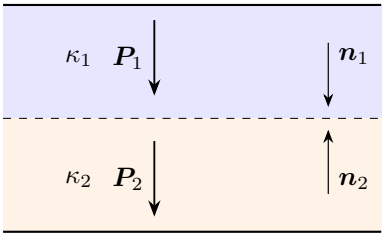
图 5.25 沿场方向从第一层指向第二层。界面法向电位移连续，$D = \kappa_1\varepsilon_0 E_1 = \kappa_2\varepsilon_0 E_2$。

把两层电压相加求场和自由电量

电压 $U = (E_1 + E_2)d/2$，故

$$D = \frac{2\varepsilon_0 U}{d(1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)}, \quad E_i = \frac{D}{\kappa_i \varepsilon_0}, \quad Q_f = DS.$$

两层共享 D，各厚 $d/2$



界面总束缚密度 $P_1 - P_2$

图 5.26: 贴邻端面的外法向相反，界面束缚密度为两项之和

用两侧相反外法向合计束缚密度

图 5.26 界面第一层的外法向顺场，第二层外法向逆场。各层先由本构关系求极化，$P_i = \varepsilon_0(\kappa_i - 1)E_i = D(1 - 1/\kappa_i)$；两个贴邻束缚面电荷代数相加，

$$\begin{aligned}\sigma_b = P_1 - P_2 &= D\left[\left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right) - \left(1 - \frac{1}{\kappa_2}\right)\right] \\ &= D\left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_1}\right) = \varepsilon_0(E_2 - E_1).\end{aligned}$$

交界处的自由面电荷为零，束缚面电荷则由两种材料的极化差形成。取 $\kappa_1 = \kappa_2$，界面束缚电荷相消、两层场相同，回到均匀介质。

例 5.7 (部分插入介质的两种受力过程)**.** 矩形极板长 L、宽 b、间距 d，介质 κ 恰填满间隙，已从一侧插入 x。分别在定电压 U、定电量 Q 下求吸入力和从 0 插到 L 的场力功。

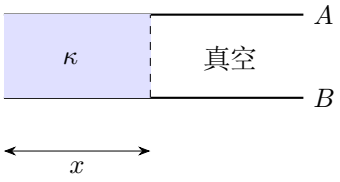


图 5.27: 部分插入介质的两种受力过程

解　由已插入与未插入面积建立电容函数

图 5.27 已插入与未插入部分并联，$C(x) = \alpha[L + (\kappa - 1)x]$，其中 $\alpha = \varepsilon_0 b/d$。图 5.28 将 x 增加作为吸入方向。

在恒压条件下计算力与功

保持板的尺寸、κ 与 α 不变，先对电容求导，$C'(x) = \alpha[0+(\kappa-1)\cdot 1] = \alpha(\kappa-1)$。再代入包含电源功的恒压场力式，定压时

$$F_U = \tfrac{1}{2}U^2\alpha(\kappa - 1).$$

从完全未插入 $x = 0$ 到完全插入 $x = L$，恒力作功为

$$W_U = \int_0^L F_U \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}U^2\alpha(\kappa - 1)[x]_0^L = \frac{1}{2}U^2\alpha(\kappa - 1)L.$$

恒压过程中，电源功为 $U^2[C(L) - C(0)]$，其中一半增加场能，另一半成为这里的机械功。

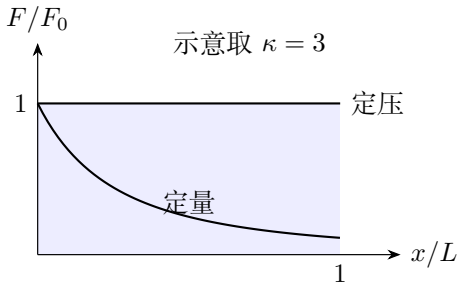


图 5.28: 以相同初态比较定压恒力与定量递减力，曲线面积表示功

在固定电量条件下积分或取能量差

定量时 $F_Q = Q^2\alpha(\kappa-1)/(2C(x)^2)$，沿插入方向为正，且随 x 增大而减小。这次力随位置变化。令 $u = C(x)$，则 $\mathrm{d}u = \alpha(\kappa-1)\,\mathrm{d}x$；当 x 从 0 变到 L 时，u 从 αL 变到 $\alpha\kappa L$。于是

$$\begin{aligned} W_Q &= \int_0^L \frac{Q^2\alpha(\kappa-1)}{2C(x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Q^2}{2}\int_{\alpha L}^{\alpha\kappa L} u^{-2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{Q^2}{2}[-u^{-1}]_{\alpha L}^{\alpha\kappa L} = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{1}{\alpha L} - \frac{1}{\alpha\kappa L}\right] = \frac{Q^2(\kappa-1)}{2\alpha\kappa L}. \end{aligned}$$

结果也等于定量条件下场能的减少。

同一状态的力与两种过程

同一瞬时状态若 $Q = C(x)U$，两种力式给出相同数值；两条过程从此以后因约束不同而沿不同的 $U(x)$ 演化。

例 5.8 (介电常数渐变的平板)**.** 介质填满间隙，$\varepsilon(x) = \varepsilon_0(1+\alpha x/d)$，$0 < x < d$、$\alpha > 0$。板面积 S、自由电量 $\pm Q$，求电容、场、势及体束缚电荷密度。

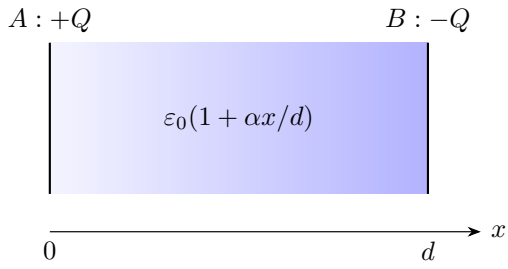


图 5.29: 坐标从正极指向负极，介电常数沿 x 递增

解　先求不随位置变化的电位移

图 5.29 介质体内无自由电荷，$D = Q/S$ 为常数，所以 $E(x) = Q/[\varepsilon_0 S(1+\alpha x/d)]$。

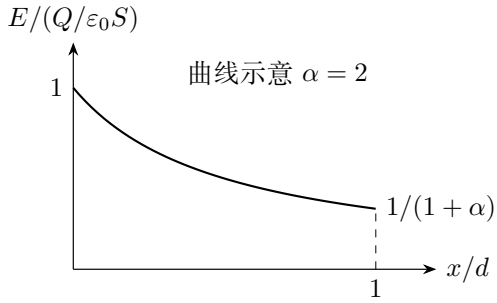
积分电场求电压、电容与电势

沿图 5.30 的 $+x$ 方向积分。用 s 表示积分变量，令 $u = 1+\alpha s/d$，则 $\mathrm{d}s = (d/\alpha)\,\mathrm{d}u$，两端对应 $u = 1$ 和 $u = 1+\alpha x/d$：

$$\begin{aligned} V(0) - V(x) &= \int_0^x \frac{Q\,\mathrm{d}s}{\varepsilon_0 S(1+\alpha s/d)} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S\alpha}\int_1^{1+\alpha x/d}\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \frac{Qd}{\varepsilon_0 S\alpha}[\ln u]_1^{1+\alpha x/d} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S\alpha}\ln(1+\alpha x/d). \end{aligned}$$

令 $x=d$ 得两板电压，再用 $C=Q/U$：

$$U=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S\alpha}\ln(1+\alpha),\qquad C=\frac{\varepsilon_0 S\alpha}{d\ln(1+\alpha)}.$$



$\rho_b<0$，末端正面电荷补足总量

图 5.30: D 不变，E 递减，增加的极化对应负体束缚电荷

由极化梯度求体束缚密度

极化 $P=D-\varepsilon_0 E=(Q/S)[1-1/(1+\alpha x/d)]$，固定 Q,S,d,α，对倒数项使用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{Q}{S}\left[-(-1)(1+\alpha x/d)^{-2}\frac{\alpha}{d}\right]=\frac{Q\alpha}{Sd(1+\alpha x/d)^2}.$$

所以 $\rho_b=-\,\mathrm{d}P/\,\mathrm{d}x=-Q\alpha/[Sd(1+\alpha x/d)^2]$。

两端面与体内的束缚电荷

上端 $P(0)=0$，下端束缚密度 $P(d)=Q\alpha/[S(1+\alpha)]$；体束缚量仍用 $u=1+\alpha x/d$ 积分：

$$Q_{b,\text{体}}=\int_0^d \rho_b S\,\mathrm{d}x=-Q\int_1^{1+\alpha}u^{-2}\,\mathrm{d}u=Q[u^{-1}]_1^{1+\alpha}=-\frac{Q\alpha}{1+\alpha}.$$

下端面电量为 $SP(d)=Q\alpha/(1+\alpha)$，上端面为零，三者之和为零，满足电荷守恒。当 $\alpha\to 0$ 时，令 $F(\alpha)=\ln(1+\alpha)$，有 $F(0)=0$、$F'(\alpha)=1/(1+\alpha)$，故 $F'(0)=1$。一阶展开为 $\ln(1+\alpha)=\alpha+O(\alpha^2)$，因而 $C=(\varepsilon_0 S/d)/[1+O(\alpha)]\to\varepsilon_0 S/d$，回到真空结果。

例 5.9 (连续介质参数改变的定量与定压能量)**.** 采用无损、可逆的电机械模型，参数变化引起的能量交换由电源、场能和机械功承担。电容器几何不变，介电常数缓慢从 ε_0 增至 $\kappa\varepsilon_0$，初电容 C_0、初电压 U_0。分别在孤立和始终接电源的条件下，求电场能、电源功与可对外作的机械功。

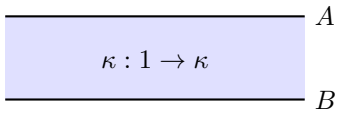


图 5.31: 连续介质参数改变的定量与定压能量

解　固定电量时由场能降低求理想输出

图 5.31 孤立时 $Q = C_0U_0$，末电压 U_0/κ，初末场能为 $W_0 = C_0U_0^2/2$ 与 W_0/κ。无电源功，在题给可逆电机械模型下，场对外作功为 $W_0(1 - 1/\kappa)$。

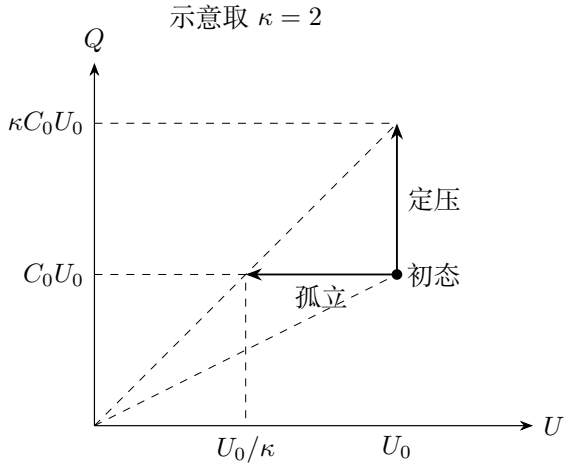


图 5.32: 两条实际约束路径：同电量时降压，同电压时补充电荷

固定电压时同时计入电源功

在图 5.32 定压时末电量 κC_0U_0，场能变为 κW_0；电源功 $C_0U_0^2(\kappa - 1) = 2W_0(\kappa - 1)$，可输出机械功为 $W_0(\kappa - 1)$。两者差别来自电源。

两种过程的能量分配

固定电量时机械功来自场能减少；保持电压时，电源供给的能量一半增加场能，一半向机械系统输出。两种理想过程中，能量收支分别为 $W_{\text{mech}} = -\Delta W$ 与 $W_{\text{mech}} = W_s - \Delta W$。

例 5.10 (同轴分层介质的电容与耐压)**.** 同轴电容长度 l，内外半径 a, b，介质 1 在 $a < r < c$、介质 2 在 $c < r < b$，介电常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$，击穿场 E_{b1}, E_{b2}。求电容及最大安全电压。

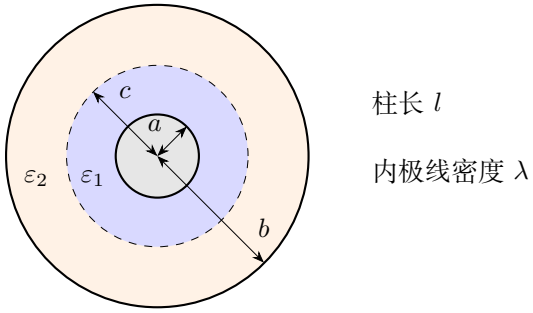


图 5.33: 两层同轴介质的真实半径与分区

解　由同轴高斯面求各层径向场

图 5.33 由圆柱高斯面 $D(r) = \lambda/(2\pi r)$。两区场分别为 $\lambda/(2\pi\varepsilon_i r)$。

分段积分建立电容

沿图中从内极 a 到外极 b 的径向路径，分界 c 两侧的介电常数不同，分别按各层介电常数积分：

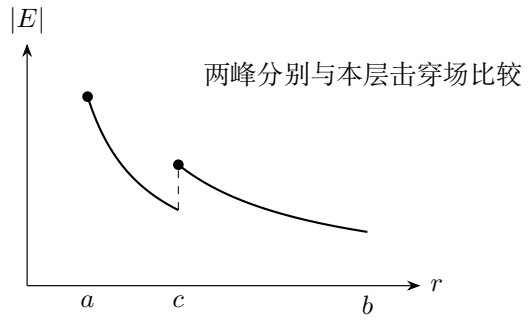
$$U = \int_a^c \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r}\,\mathrm{d}r + \int_c^b \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r}\,\mathrm{d}r.$$

因 $r > 0$，$1/r$ 的原函数为 $\ln r$，两项分别给出

$$[\ln r]_a^c = \ln c - \ln a = \ln(c/a), \qquad [\ln r]_c^b = \ln b - \ln c = \ln(b/c).$$

因此用内极总电量 $Q = \lambda l$ 求得

$$U = \frac{\lambda}{2\pi}\left[\frac{\ln(c/a)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(b/c)}{\varepsilon_2}\right], \quad C = \frac{2\pi l}{\ln(c/a)/\varepsilon_1 + \ln(b/c)/\varepsilon_2}.$$



图示 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，跳变方向由实际材料决定

图 5.34: 分区内按 $1/r$ 衰减，两层的峰值分别在 a、c 的右侧

各层最大场强与耐压

图 5.34 各区最大场分别在其最小半径处，即第一层 $r = a$、第二层 $r = c$，所以

$$|\lambda| \le 2\pi\varepsilon_1 a E_{b1}, \qquad |\lambda| \le 2\pi\varepsilon_2 c E_{b2}.$$

同时满足两层条件，允许的最大线电荷密度大小为 $\lambda_{\max} = 2\pi \min(\varepsilon_1 a E_{b1}, \varepsilon_2 c E_{b2})$。势差大小随 $|\lambda|$ 单调增加，代入前面的势差积分，所求耐压上限为

$$\boxed{U_{\max} = \min(\varepsilon_1 a E_{b1}, \varepsilon_2 c E_{b2}) \left[\frac{\ln(c/a)}{\varepsilon_1} + \frac{\ln(b/c)}{\varepsilon_2} \right]}.$$

等号表示至少一层刚达到击穿阈值；严格不发生击穿时应取 $|U| < U_{\max}$。两层界面的 D_n 连续，但 E 可跳变；两层分别在 $r = a$ 和 $r = c$ 处达到各自最大场，耐压由其中较先达到击穿场的一层决定。

例 5.11 (介质球在均匀外场中的极化)**.** 半径 R、相对介电常数 κ 的均匀绝缘球放在真空中，远处均匀电场 $E_0\hat{\boldsymbol{z}}$，无自由表面电荷。求内场、外势、偶极矩和束缚面密度。

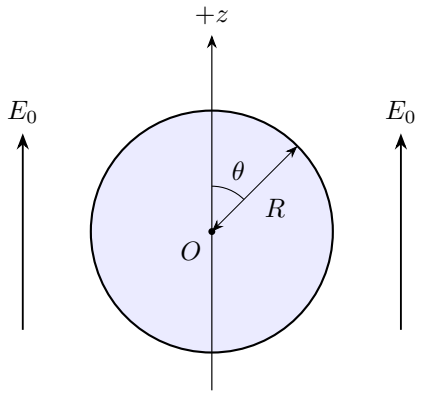


图 5.35: 外场与 $+z$ 轴向上，极角从 $+z$ 轴起算

解　由均匀极化球的电荷构造确定势函数形式

图 5.35 的外场沿 $+z$。知识正文图 5.12 的移位球构造说明：均匀极化在球内产生均匀场，在球外产生沿 z 的偶极势。因此可试取内部均匀总场与外部 “均匀场加偶极场”，写成

$$V_{\text{外}} = -E_0 r\cos\theta + A\cos\theta/r^2, \qquad V_{\text{内}} = -Br\cos\theta.$$

其中 $r\cos\theta = z$，所以内部电场为 $B\hat{\boldsymbol{z}}$，并在原点有限；外部修正项随 r^{-2} 衰减，不改变远处外场。均匀场和源位于球内的偶极场在各自使用区域均无体电荷。接下来由球面的电势连续和法向电位移连续条件确定 A, B。

球面上的电势与法向电位移

在 $r = R$ 处令两个势相等，并比较 $\cos\theta$ 的系数：

$$-E_0 R + \frac{A}{R^2} = -BR, \qquad B = E_0 - \frac{A}{R^3}.$$

求法向场时固定 θ，对 r 求偏导：

$$E_{r,\text{外}} = -\frac{\partial V_{\text{外}}}{\partial r} = -\left[-E_0\cos\theta - 2Ar^{-3}\cos\theta\right] = \left(E_0 + \frac{2A}{r^3}\right)\cos\theta,$$
$$E_{r,\text{内}} = -\frac{\partial V_{\text{内}}}{\partial r} = B\cos\theta.$$

球面没有自由面电荷，故 $\varepsilon_0 E_{r,\text{外}} = \kappa\varepsilon_0 E_{r,\text{内}}$；比较角度系数得到 $\kappa B = E_0 + 2A/R^3$。把第一式代入第二式，得 $(\kappa+2)A/R^3 = (\kappa-1)E_0$。

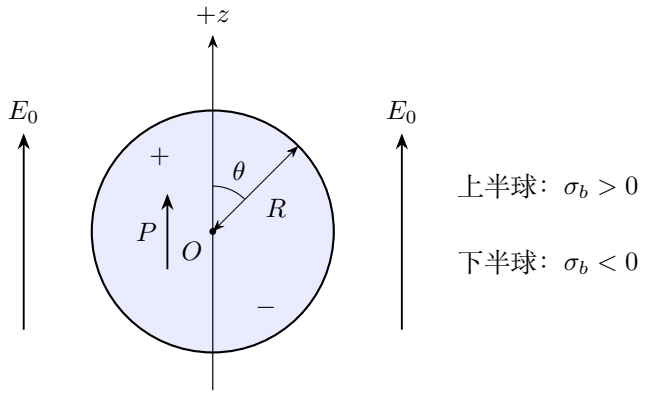


图 5.36: 球内极化均匀，但球面电荷按极角变化

求内部场、偶极矩与表面极化电荷

由图 5.36

$$A = E_0 R^3 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}, \quad \boldsymbol{E}_{\text{内}} = \frac{3E_0}{\kappa + 2}\hat{\boldsymbol{z}}, \quad p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}.$$

内部 $\boldsymbol{P}$ 均匀，体束缚电荷零，表面 $\sigma_b = 3\varepsilon_0(\kappa - 1)E_0 \cos\theta/(\kappa + 2)$。

球面总电荷与介电常数的影响

正负半球总量相消。$\kappa = 1$ 时附加偶极场消失；$\kappa \to \infty$ 时内场趋零、外势趋于导体球解，这两个极限分别对应真空和静电平衡的导体。

例 5.12 (电容器吸起介质液体)**.** 竖直平行板宽 b、间距 d，下部浸入大液槽，液体密度 ρ、相对介电常数 $\kappa > 1$。恒压 U 使板间液面比槽面升高 x，忽略表面张力、边缘、液槽液面下降与上端限制。求 x，再讨论定电量时的平衡和稳定性。

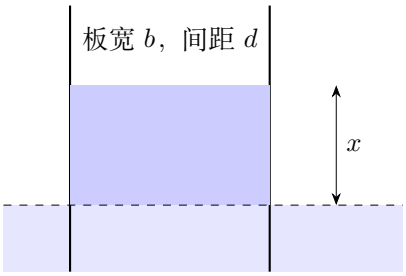


图 5.37: 电容器吸起介质液体

解　由液面位移求电容增量和电吸力

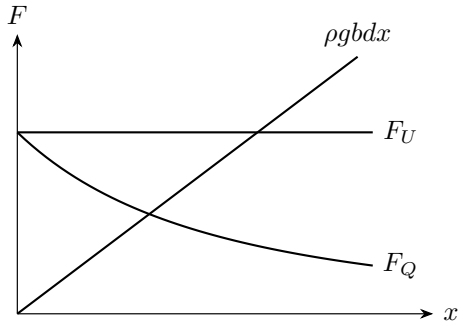
图 5.37 液面升高 $\mathrm{d}x$，一段真空被介质替换，$\mathrm{d}C=\varepsilon_0(\kappa-1)b\,\mathrm{d}x/d$。恒压吸入力向上，$F_e=U^2C'/2=\varepsilon_0(\kappa-1)bU^2/(2d)$。

积分液柱重力势能建立恢复力

以外部大液池液面为零高度，图中的液柱截面积为 bd，高度 z 处薄层的质量为 $\rho bd\,\mathrm{d}z$。其势能为 $\rho gbdz\,\mathrm{d}z$，所以

$$W_g=\int_0^x \rho gbd\,z\,\mathrm{d}z=\rho gbd\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}\rho gbdx^2.$$

恢复力的大小为 $\mathrm{d}W_g/\,\mathrm{d}x=(\rho gbd/2)\cdot 2x=\rho gbdx$，方向向下。



位移增大时，合力向下恢复

图 5.38: 电力与液柱恢复力的交点：定压电力恒定，定量电力递减

求恒压平衡并由斜率判断稳定

图 5.38 两力平衡得

$$x=\frac{\varepsilon_0(\kappa-1)U^2}{2\rho gd^2}.$$

电力在此模型下恒定，恢复力随 x 增大，故平衡稳定。

重新按固定电量约束求唯一稳定平衡

固定非零电量 Q 时，记液面未抬升时的电容为 C_b，则 $C(x)=C_b+\alpha x$，$\alpha=\varepsilon_0(\kappa-1)b/d$。平衡条件为

$$\rho gbdx=\frac{Q^2\alpha}{2(C_b+\alpha x)^2}.$$

左侧的导数为 $\rho gbd>0$。右侧电力的导数由链式法则给出：

$$F_e'(x)=\frac{Q^2\alpha}{2}[-2(C_b+\alpha x)^{-3}\alpha]=-\frac{Q^2\alpha^2}{(C_b+\alpha x)^3}<0.$$

所以电力减去重力的导数为 $F_e' - \rho g b d < 0$。在 $x = 0$ 时电力为正，恢复力为零。随 x 增大，电力趋近零，恢复力一直增大，所以两条曲线有且只有一个交点。交点两侧的合力都指向交点，因而平衡稳定。

例 5.13 (弹簧支撑的极板失稳)**.** 平行板面积 S，初始间距 d_0，一板固定，另一板由劲度 K 的弹簧支撑。位移 x 朝向固定板，弹簧恢复力 Kx，忽略重力。接恒压 U，求平衡条件、稳定区与最大稳定电压。

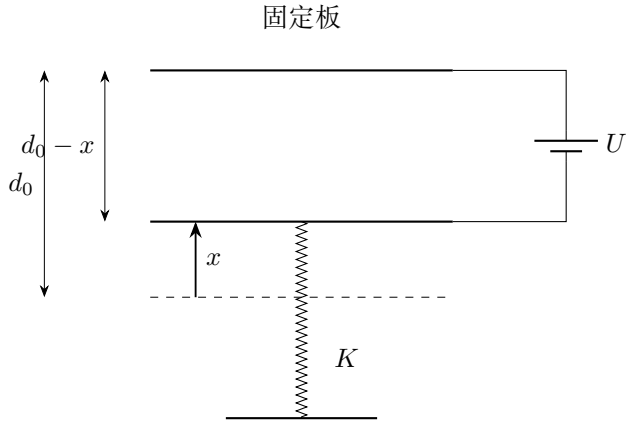


图 5.39: 下板向上位移 x，弹簧向下恢复，电源保持两板电压

解　用实际间隙建立恒压平衡方程

图 5.39 实际间距为 $d_0 - x$，吸力 $F_e = \varepsilon_0 S U^2/[2(d_0 - x)^2]$。平衡要求 $Kx = \varepsilon_0 S U^2/[2(d_0 - x)^2]$，即 $U^2 = 2Kx(d_0 - x)^2/(\varepsilon_0 S)$。

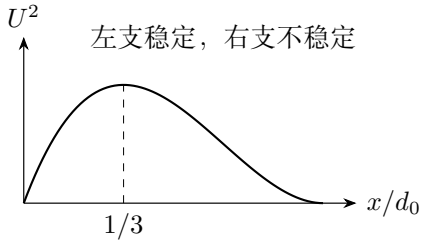


图 5.40: 弹簧支撑的极板失稳

比较电力增长率与弹簧恢复率

按图 5.40 合力 $F_e - Kx$ 在稳定平衡点的导数为负。固定 U，逐项求导得

$$F_e'(x) = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2}\big[-2(d_0 - x)^{-3}(-1)\big] = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{(d_0 - x)^3}.$$

平衡处代入 $\varepsilon_0 S U^2 = 2Kx(d_0 - x)^2$，于是

$$F_e' - K = \frac{2Kx}{d_0 - x} - K < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < d_0/3.$$

在稳定分支端点求临界电压

对 $f(x) = x(d_0 - x)^2$ 使用乘积法则与链式法则：

$$f'(x) = (d_0 - x)^2 + x \cdot 2(d_0 - x)(-1) = (d_0 - x)(d_0 - 3x).$$

它在稳定支上升，极值出现在 $x = d_0/3$。将该位置代回平衡式，先求电压平方，

$$U_c^2 = \frac{2K}{\varepsilon_0 S}\frac{d_0}{3}\left(d_0 - \frac{d_0}{3}\right)^2 = \frac{2K}{\varepsilon_0 S}\frac{d_0}{3}\frac{4d_0^2}{9} = \frac{8Kd_0^3}{27\varepsilon_0 S}.$$

取电压的非负大小，得到临界电压

$$U_c = \sqrt{\frac{8Kd_0^3}{27\varepsilon_0 S}}.$$

临界电压与吸合

稳定平衡存在于 $|U| < U_c$。在 $|U| = U_c$、$x_c = d_0/3$ 处，合力 $F_{\text{合}} = F_e - Kx$ 及其一阶导数都为零。固定 U，继续求导，

$$F_{\text{合}}''(x) = \varepsilon_0 S U^2 (-3)(d_0 - x)^{-4}(-1) = \frac{3\varepsilon_0 S U^2}{(d_0 - x)^4} > 0.$$

因此临界点右侧的小位移 $\delta x > 0$ 产生沿吸合方向的合力 $F_{\text{合}} \simeq F_{\text{合}}''(x_c)(\delta x)^2/2$，临界点也不稳定。$|U| > U_c$ 时已没有静态交点，活动极板会向内吸合。若断电固定 Q，忽略边缘的吸力恒为 $Q^2/(2\varepsilon_0 S)$，由 $Kx = Q^2/(2\varepsilon_0 S)$ 得平衡位移 $x = Q^2/(2K\varepsilon_0 S)$，在 $x < d_0$ 时合力斜率为 $-K$，平衡稳定。

5.7 本讲小结

介质极化表现为正负电荷的微小分离或分子偶极子的取向。极化强度 $\boldsymbol{P}$ 连接微观电偶极矩与宏观束缚电荷，表面密度为 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$，体密度为 $-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$。原来中性的介质中，两者积分之和保持为零。

电位移 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ 的通量由自由电荷决定。介质交界处，切向电场连续，法向电位移的差由自由面电荷确定。由此得到面积分区的并联模型与厚度分层的串联模型，也能逐层确定局部场强和耐压。

介质插入使电容增大。固定电量时场能降低，保持电压时电源继续供能；在这两种过程中，介质都受到吸入力。用位置相关的 $C(x)$ 求导和积分，可进一步分析介质运动、液面上升和弹簧极板的平衡。

5.8　练习

练习 5.1 (半厚度填充与半面积填充比较)**.** 同一真空电容器 C_0，分别用介质 κ 填充一半面积并贯穿间隙，或填充全部面积的一半厚度。求电容并比较。



图 5.41: 半厚度填充与半面积填充比较

练习 5.2 (两只孤立并联电容的电荷转移)**.** 两只电容原为 C_1, C_2，并联充至 U_0 后整体断开电源但保持并联。把第一只填满介质使之为 κC_1。求末电压及两只电量变化。

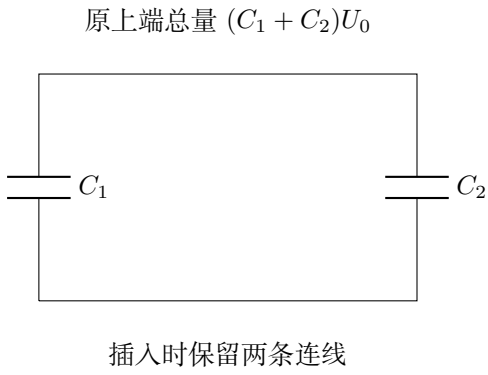


图 5.42: 两只原电压同为 U_0，整个并联组与电源断开

练习 5.3 (介质中的电击穿)**.** 两层介质厚度 d_1, d_2、介电常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$，击穿场分别 E_{b1}, E_{b2}。无界面自由电荷，求最大安全电压。

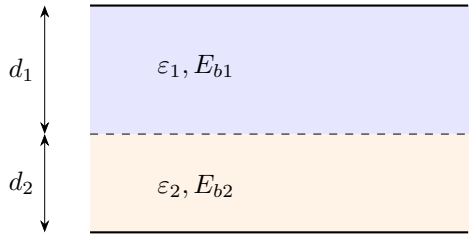


图 5.43: 两层厚度与各自击穿参数

练习 5.4 (介质球壳填充的球形电容)**.** 内外金属球半径 a, b, 介质 κ 填在 $a < r < c$, 其余为真空。求电容及 $r = c$ 介质端面的束缚密度，内球电量 $+Q$。

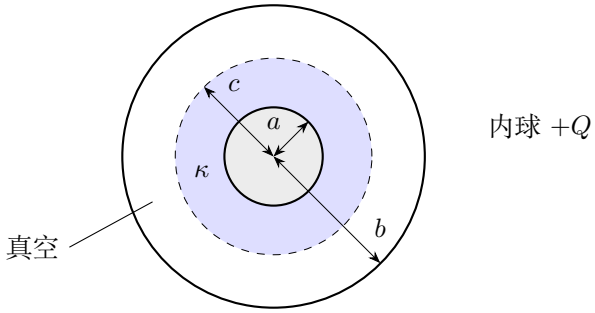


图 5.44: 介质只占内球外的 $a < r < c$，外段仍是真空

练习 5.5 (导体片横向部分插入)**.** 矩形极板长 L、宽 b、间距 d，厚 $t < d$ 的中性金属片横向插入长度 x，不接触两极。求电容和恒压 U 下的吸入力。

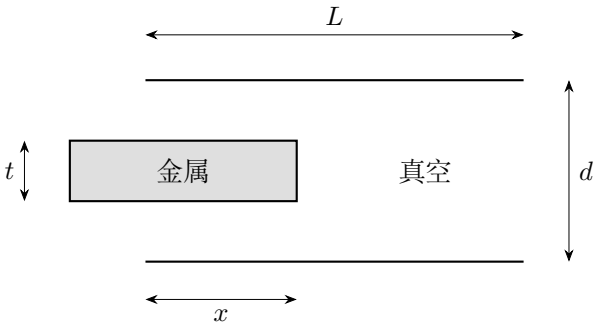


图 5.45: 金属片厚度只占部分间隙，仍与两极绝缘

练习 5.6 (介质吸入后获得的速度)**.** 介质块质量 M、相对介电常数 κ，从刚进入平行板处静止释放，完全填入后电容由 C_0 变为 κC_0。忽略摩擦与损耗。分别求断电定量 Q 和接恒压 U 时的末速度。

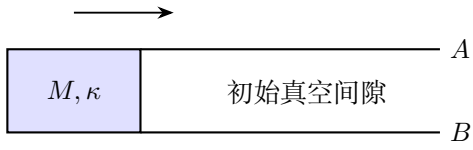


图 5.46: 介质吸入后获得的速度

练习 5.7 (界面电场方向的折转)**.** 两均匀介质界面无自由电荷。场在介质 1 中与法线夹角 θ_1，在介质 2 中夹角 θ_2，介电常数为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$。求角度关系并判断进入高介电常数侧时的折转。

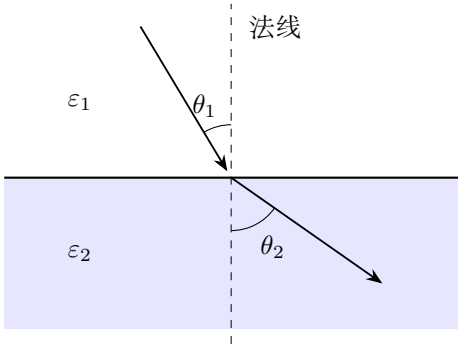


图 5.47: 两个角都相对法线，图示进入较高介电常数一侧

练习 5.8 (介质板拉出所需外功)**.** 真空电容为 C_0 的电容器已完全填入介质 κ，初电压 U_0。分别在此时断电和始终接恒压源两种情况下，缓慢把介质完全拉出，求外功。

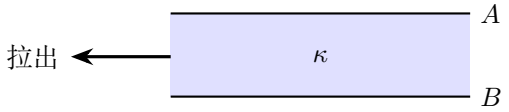


图 5.48: 介质板拉出所需外功

练习 5.9 (点电荷外的同心介质壳)**.** 点电荷 q 位于球心，$a < r < b$ 有介电常数 $\kappa\varepsilon_0$ 的球壳，其余真空。求三段电场、壳两面的束缚电量及介质在球心产生的反作用电势。

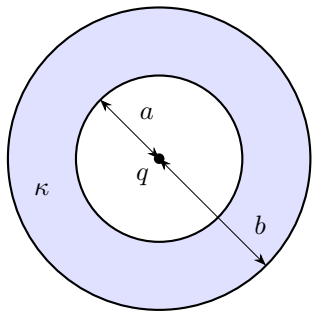


图 5.49: 球心点电荷与两侧真空中的同心介质壳

练习解答

练习 5.1

解　分别按共同电压和共同电位移建立电容

图 5.41 左图按面积并联，$C_A = (1+\kappa)C_0/2$；右图按厚度串联，$C_T = 2\kappa C_0/(1+\kappa)$。

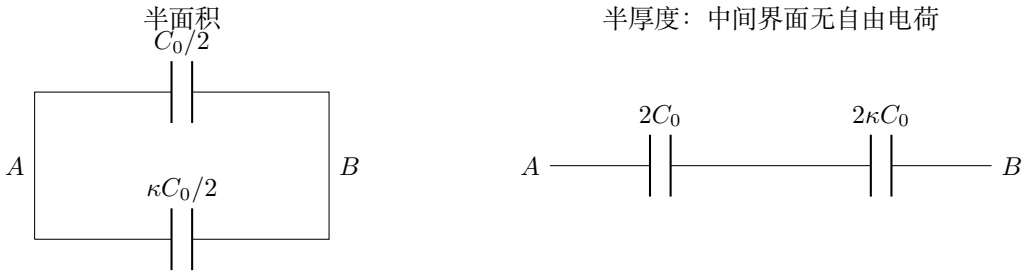


图 5.50: 左侧两个半面积电容并联，右侧两个半厚度电容串联

两种填充方式的比较

按图 5.50 通分，

$$\begin{aligned} C_A - C_T &= C_0\left(\frac{1+\kappa}{2} - \frac{2\kappa}{1+\kappa}\right) \\ &= C_0\frac{(1+\kappa)^2 - 4\kappa}{2(1+\kappa)} = C_0\frac{\kappa^2 - 2\kappa + 1}{2(1+\kappa)} \\ &= C_0\frac{(\kappa-1)^2}{2(\kappa+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

仅 $\kappa = 1$ 相等。两种情况下介质体积相同，却因场的约束不同而电容不同。面积分区对应同电压，厚度分层对应同电位移。

练习 5.2

解　对整个并联极板组保留断电后的总电量

图 5.42 合并极板组净量为 $(C_1 + C_2)U_0$，保持不变。末态共同电压

$$U_f = \frac{C_1 + C_2}{\kappa C_1 + C_2}U_0 < U_0.$$

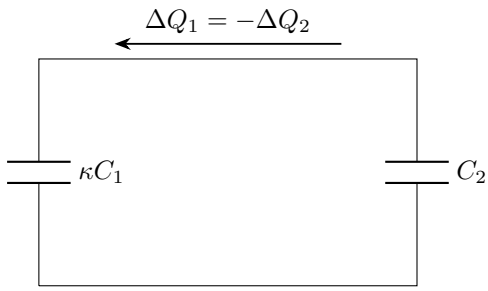


图 5.51: 第一支容量增加，正电荷从第二支沿上导线转入第一支

计算各支电量变化和实际转移方向

图 5.51 第一只的初、末电量之差为

$$\begin{aligned}\Delta Q_1 &= \kappa C_1 U_f - C_1 U_0 \\ &= C_1 U_0 \frac{\kappa(C_1+C_2) - (\kappa C_1 + C_2)}{\kappa C_1 + C_2} \\ &= \frac{C_1 C_2 (\kappa - 1) U_0}{\kappa C_1 + C_2}.\end{aligned}$$

第二只的变化 $\Delta Q_2 = C_2(U_f - U_0) = -\Delta Q_1$，总转移量相抵。若 $U_0 > 0$ 且 $\kappa > 1$，第一只正极电量增加，第二只减少。整体断电后，正电荷从第二只正极转移到第一只正极，两者的变化量等大反号。

整体场能的变化

末场能由总固定电量与总电容决定，因总电容增大而降低。

练习 5.3

解　把每层击穿场换成允许的共同电位移

图 5.43 各层 $E_i = D/\varepsilon_i$，所以分别限制 $D \le \varepsilon_1 E_{b1}$、$D \le \varepsilon_2 E_{b2}$。取较小者 $D_{\max}$。

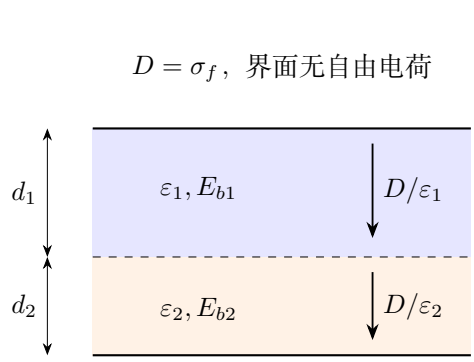


图 5.52: 两层电位移相同，耐压由各层局部场强决定

逐层积分电压并选择较严限制

在图 5.52 的每层内，电场均为常量；分别从各层入口起取局部坐标 s：

$$U_i=\int_0^{d_i}\frac{D}{\varepsilon_i}\,\mathrm{d}s=\frac{D}{\varepsilon_i}[s]_0^{d_i}=\frac{Dd_i}{\varepsilon_i}.$$

两层电压相加，再代入 $D_{\max}$，得

$$U_{\max}=\min(\varepsilon_1E_{b1},\varepsilon_2E_{b2})\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}\right).$$

首先击穿哪层由 ε_iE_{bi} 判断，它同时包含材料介电常数与击穿场的影响。即使高介电常数层较厚，薄低介电常数层仍可能承担更大场强。

练习 5.4

解　在两个径向分区分别积分势差

图 5.44 球对称使 $D=Q/(4\pi r^2)$，图中 $a<r<c$ 为介质，$c<r<b$ 为真空，因而

$$\begin{aligned}U&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa}\int_a^c r^{-2}\,\mathrm{d}r+\int_c^b r^{-2}\,\mathrm{d}r\right]\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^c+\left[-\frac{1}{r}\right]_c^b\right]\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right].\end{aligned}$$

令 $A=\kappa^{-1}(1/a-1/c)+1/c-1/b$，则 $U=QA/(4\pi\varepsilon_0)$，故 $C=4\pi\varepsilon_0/A$。

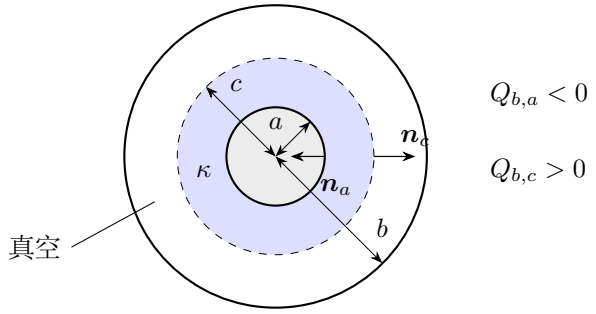


图 5.53: 介质内端外法向向心，外端外法向离心

按介质两端外法向求束缚密度

在图 5.53 介质外表面法向沿径向，$P = (1 - 1/\kappa)D$，故 $\sigma_b(c) = (1 - 1/\kappa)Q/(4\pi c^2)$。介质内表面法向相反，$\sigma_b(a) = -(1 - 1/\kappa)Q/(4\pi a^2)$。

球面与体内的束缚电荷

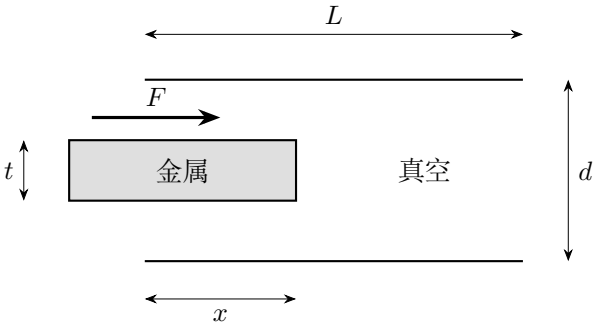
两面束缚电量相消，介质总量仍中性；体内 r^2P 恒定，$\rho_b = 0$。

练习 5.5

解　把插入区与未插入区分别建模

图 5.45 未插入区面积 $b(L - x)$、有效隙宽 d，插入区面积 bx、有效真空厚 $d - t$。两区并联，

$$C(x) = \varepsilon_0 b \left[\frac{L - x}{d} + \frac{x}{d - t} \right].$$



插入区有效隙宽 $d - t$，未插入区为 d

图 5.54: 插入区两真空层串联，再与未插入区并联

用电容对插入深度的导数求力

沿图 5.54 的插入方向增加 x，保持 d,t,L,b 不变：

$$C'(x)=\varepsilon_0 b\left[-\frac{1}{d}+\frac{1}{d-t}\right]=\varepsilon_0 b\frac{d-(d-t)}{d(d-t)}=\frac{\varepsilon_0 bt}{d(d-t)}.$$

代入恒压场力公式得

$$F=\frac{U^2}{2}C'(x)=\frac{\varepsilon_0 bU^2t}{2d(d-t)}>0.$$

插片厚度的影响

它吸入金属片。$t\to 0$ 力趋零；在 $0<t<d$ 且两侧保有真空间隙时，增大厚度 t 会增大吸入力。

练习 5.6

解　断电时把场能减少计入介质动能

图 5.46 定量过程没有电源功，场能减少变为动能，

$$\frac{1}{2}Mv_Q^2=\frac{Q^2}{2C_0}\left(1-\frac{1}{\kappa}\right),\quad v_Q=\frac{|Q|}{\sqrt{MC_0}}\sqrt{1-\frac{1}{\kappa}}.$$

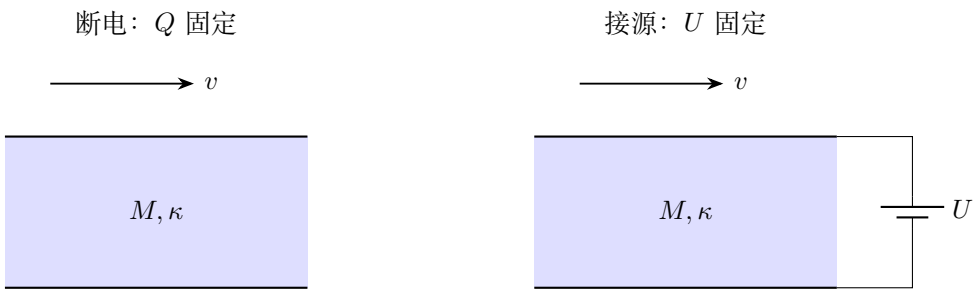


图 5.55: 完全进入的瞬间仍在运动，接源支路决定额外输入能量

接源时先扣除场能增量再求动能

在图 5.55 定压过程电源功为 $(\kappa-1)C_0U^2$，场能只增加其一半，所以

$$\frac{1}{2}Mv_U^2=\frac{1}{2}(\kappa-1)C_0U^2,\quad v_U=|U|\sqrt{\frac{(\kappa-1)C_0}{M}}.$$

比较相同初态并说明速度对应的瞬间

若以相同初态 $Q = C_0U$ 比较，$v_U = \sqrt{\kappa}\, v_Q$，额外动能来自电源。两式所求都是介质刚完全进入板间时的速度，采用题给无损和准静电近似。

练习 5.7

解　场的切向与法向分量

图 5.47 中的切向场连续，$E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$。法向电位移连续，$\varepsilon_1 E_1 \cos\theta_1 = \varepsilon_2 E_2 \cos\theta_2$。

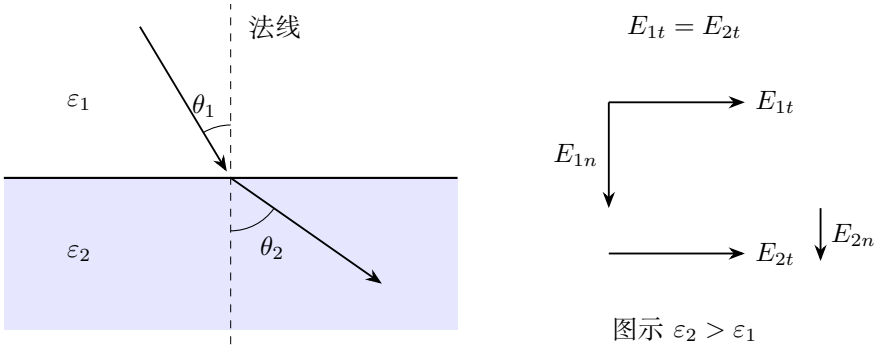


图 5.56: 切向分量相同，法向分量按介电常数反比改变

以切向和法向分量之比求角度关系

对图 5.56 所示的斜向电场，用切向场除以法向电位移，得到

$$\frac{\tan\theta_1}{\varepsilon_1} = \frac{\tan\theta_2}{\varepsilon_2}.$$

若场垂直界面，切向分量在两侧均为零。若场平行界面，法向分量在两侧均为零。

由分量变化判断折转方向

斜向电场进入较高介电常数的一侧时，法向分量的大小减小，切向分量保持原值，场方向与法线的夹角因而增大。

练习 5.8

解　从完全填充时确定断电保存的初电量

图 5.48 断电时初电量 $Q = \kappa C_0 U_0$，初能 $W_i = \kappa C_0 U_0^2/2$，末能 $W_f = Q^2/(2C_0) = \kappa^2 C_0 U_0^2/2$。所以外功 $W_Q = \kappa(\kappa-1) C_0 U_0^2/2 > 0$。

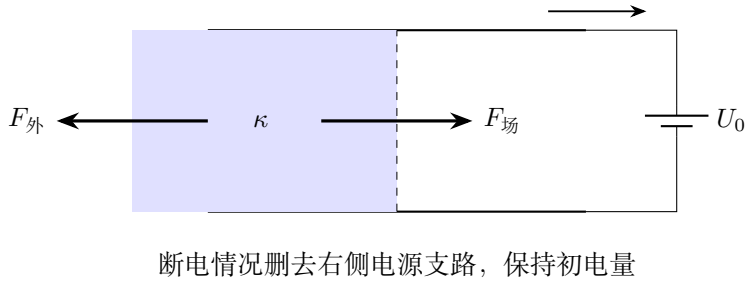


图 5.57: 拉出时外力向外、场力向内；定压时电荷回送电源

定压拉出时同时计入电源吸收的能量

图 5.57 定压时，场能变化 $\Delta W = -(\kappa-1)C_0U_0^2/2$，电源取得电荷，作功 $W_s = -(\kappa-1)C_0U_0^2$。由 $\Delta W = W_s + W_{外}$ 得 $W_U = (\kappa-1)C_0U_0^2/2 > 0$。

外力功的去向

两种拉出都需正外功，虽然场能变化符号相反；定压过程一部分外功与场能减少共同回送电源。

练习 5.9

解　按球对称逐段求场和极化

图 5.49 各半径 $D = q/(4\pi r^2)$，所以真空内、外两区均为 kq/r^2，介质壳内为 $kq/(\kappa r^2)$，方向随 q 号改变。介质极化 $P = (1-1/\kappa)q/(4\pi r^2)$，内表面法向向心、外表面向外。

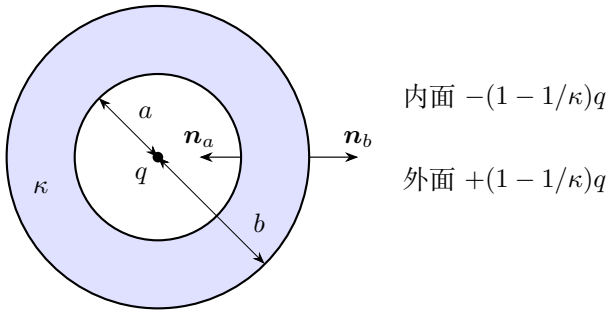


图 5.58: 球壳内外端面带等量异号束缚电荷（图示 $q > 0$）

用两端球面面积求束缚总量

由图 5.58 两面束缚总量为 $Q_{b,a}=-(1-1/\kappa)q$、$Q_{b,b}=+(1-1/\kappa)q$，体束缚密度零。

只叠加束缚电荷在球心的电势

两均匀球面在球心的电势相加，

$$V_{反}=kq(1/\kappa-1)(1/a-1/b).$$

解释线性建立的反作用能与极限

若中心电量从零逐渐建立，用 ξ 表示中间电量，令

$$A=k(1/\kappa-1)(1/a-1/b),\qquad V_{反}(\xi)=A\xi.$$

再加入 $\mathrm{d}\xi$ 时，已有极化电荷对它的反作用势为 $A\xi$，因此

$$W_{反}=\int_0^q A\xi\,\mathrm{d}\xi=A\left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^q=\frac{1}{2}Aq^2=\frac{1}{2}qV_{反}(q).$$

对于 $\kappa>1$，$A<0$，这个能量为负；这里计算介质束缚电荷产生的反作用能。壳厚趋零或 $\kappa\to1$ 时反作用势趋零。

静电

物理竞赛一轮讲义

第六讲

带电物体在电场中的运动

2026

目录

第六讲　带电物体在电场中的运动 **1**

6.1　由电场到运动方程 1

6.2　匀强场中的分运动 3

6.3　中心力、系统与约束 5

6.4　有限极板中的运动范围 7

6.5　轨迹参数的进一步求解 8

6.6　电压波形与运动时间 9

6.7　例题与分析 11

6.8　本讲小结 34

6.9　练习 35

练习解答 37

第六讲　带电物体在电场中的运动

6.1　由电场到运动方程

6.1.1　受力方向与轨迹弯曲

电子从阴极出发，经过加速电极取得速度，进入偏转板后改变运动方向，最后在荧光屏上形成光点。这个过程把电场的两个作用连在一起：沿速度的力改变速率，垂直速度的力改变运动方向。求解时先用极板电势确定电场，再由电荷符号确定力，最后把力带入运动方程。

对于质量 m、电荷量 q 的粒子，电力为 $\boldsymbol{F}_e = q\boldsymbol{E}$。正电荷顺场受力，负电荷逆场受力。只有电力时，运动方程为 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{E}$。已知受力后，可沿轨迹切线和曲率法线分解合力。取单位切向 $\boldsymbol{t}$ 沿速度方向，单位法向 $\boldsymbol{n}_\mathrm{c}$ 指向曲率中心。图 6.1 左图的切向和法向分量分别满足

$$F_\parallel = \boldsymbol{F}_\text{合} \cdot \boldsymbol{t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \qquad F_\perp = \boldsymbol{F}_\text{合} \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{c} = \frac{mv^2}{\mathcal{R}}.$$

切向分量改变速率，法向分量改变速度方向。只有电力时，曲率由 $F_\perp = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}_\mathrm{c}$ 决定。同一法向力下，速率越小，曲率半径 $\mathcal{R}$ 越小。

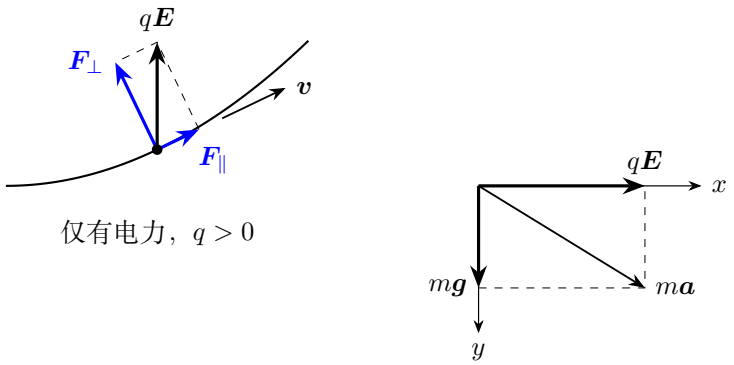


图 6.1: 左图沿轨迹切向和法向分解电力，右图合成电力与重力

等势面的法线用来确定电场。沿等势面的法向坐标 s，$E_s = -\partial V/\partial s$，电场指向电势降低的一侧。当相邻等势面很近时，可用 $E_s \simeq -\Delta V/\Delta s$ 估计该处分量。若图中的相邻等势面具有相同电势差，则间距较小处场较强。求粒子的轨迹曲率时，再把这个电场投影到轨迹的曲率法线上。

若另有重力、弹力或约束力，先求合力。图 6.1 右图中，电力与重力分别水平向右和竖直向下，平行四边形的对角线给出 $m\boldsymbol{a}$。在重力和电场均恒定的区域，合加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{g}+q\boldsymbol{E}/m$ 为常矢量，可沿两个固定方向分别求速度与位置。

6.1.2　静电场中的功与运动可达性

在不随时间变化的电场中，电力作功 $W_{AB}=q(V_A-V_B)$。仅有电力时 $K+qV$ 守恒；有重力时再加 mgy。一维运动的转向点满足动能为零；二维中心场中，径向和切向动能由角动量联系，转向点由径向有效势决定。圆轨道或擦边轨迹需要把径向动力学或有效势一起使用。

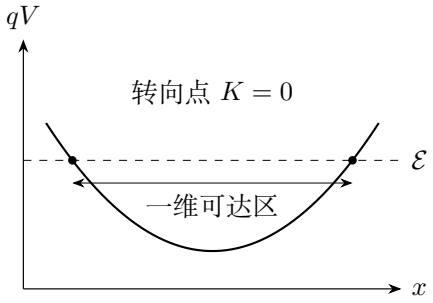


图 6.2: 一维转向由势能决定，带角动量的径向运动还需加入离心项

图 6.2 中允许 $qV\le\mathcal{E}$，沿一维轨迹才能到达相应区间。中心场的同类图须把纵轴换成径向有效势。

均匀带电实心球的静电自能可按逐层组装求得。体密度 ρ 固定，半径 r 时已放入 $Q(r)=4\pi\rho r^3/3$，再加薄壳 $\mathrm{d}Q=4\pi\rho r^2\,\mathrm{d}r$，功为 $kQ(r)\,\mathrm{d}Q/r$。积分到 R，

$$W_{\text{自}}=\frac{16\pi^2k\rho^2}{3}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi^2k\rho^2}{3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R=\frac{16\pi^2k\rho^2R^5}{15}.$$

再代入 $\rho=3Q/(4\pi R^3)$，得到

$$W_{\text{自}}=\frac{16\pi^2kR^5}{15}\frac{9Q^2}{16\pi^2R^6}=\frac{3kQ^2}{5R}.$$

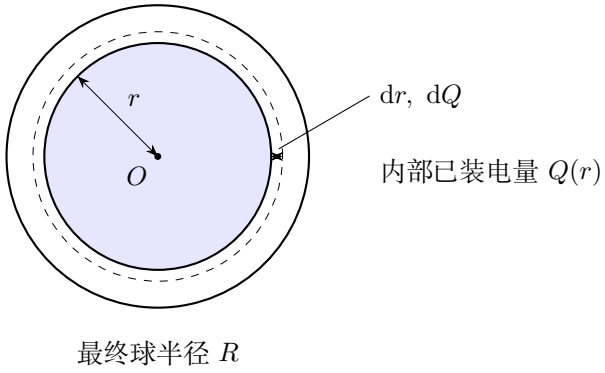


图 6.3: 逐层组装实心球：只把新薄壳与已装球的相互作用计一次

图 6.3 中薄壳自身的二阶微小能量不计入一阶微功，$\mathrm{d}W = kQ(r)\,\mathrm{d}Q/r$。

多个有限带电体的总能量含各自自能和体间相互作用能；理想点电荷运动中，用体间相互作用能的变化求动能；各小球自身的形状保持时，自能为常量。这个区分在两个小球分开、三球受约束运动中尤其重要。

6.2 匀强场中的分运动

6.2.1 加速、偏转与离场漂移

粒子先由加速电压 U_a 从静止加速，若非相对论且电荷量大小为 $|q|$，则 $v_0^2 = 2|q|U_a/m$。水平进入长度 L、间距 d 的平行板，偏转电压为 U_d，取竖直加速度带符号为 $a_y = qE_y/m$。以入场点和入场时刻为位置、时间零点，水平无力，故 $v_x = v_0$，而 $v_y(0) = 0$。恒加速度逐次积分给出

$$\begin{aligned} v_y(t) &= \int_0^t a_y\,\mathrm{d}s = a_y[s]_0^t = a_y t, \\ x(t) &= \int_0^t v_0\,\mathrm{d}s = v_0[s]_0^t = v_0 t, \\ y(t) &= \int_0^t a_y s\,\mathrm{d}s = a_y\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^t = \frac{1}{2}a_y t^2. \end{aligned}$$

由 $t = x/v_0$ 消去时间，场内轨迹为抛物线 $y = a_y x^2/(2v_0^2)$。

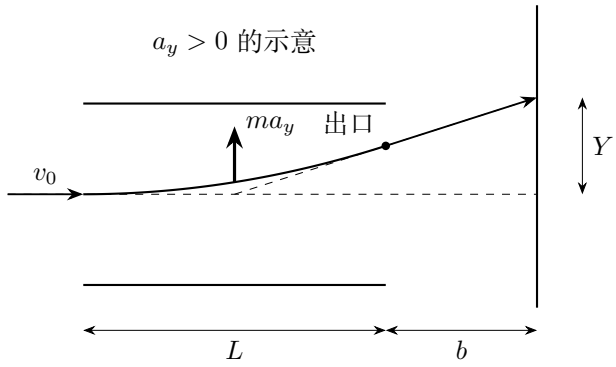


图 6.4: 实际场内轨迹、出口切线与屏上漂移

图 6.4 中的板内轨迹为曲线，离场后才沿出口速度作直线运动。

出场时 $t_L = L/v_0$，$y_L = a_y L^2/(2v_0^2)$，$v_{yL} = a_y L/v_0$。距出口 b 的屏上还要加漂移 $v_{yL}b/v_0$，总位移

$$Y = \frac{a_y L}{v_0^2}\left(b + \frac{L}{2}\right).$$

等效上可以把出场切线看成从板长中点延长，这个等效出发点来自出口切线向后的延长，场内的实际路径仍为抛物线。入射中线时，未撞板要求整个场内 $|y(x)| < d/2$；本节的单向加速度使偏移量沿板长单调增加，因而出口条件为 $|qU_d|L^2/(mv_0^2 d) < d$。

负电荷的偏转方向与场相反。对电子应先由板电势判断场，再取 $q = -e$，最后给出屏上方向。下文的加速电压取正的大小，偏转电压按题设两极的电势差带符号。

6.2.2　电场随时间变化时要逐段接续

若极板电压随时间变化，在电准静态近似下可写 $a(t) = qE(t)/m$，指定每段起始时刻 t_0 后，用带上下限的积分保留初值：

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s, \qquad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,\mathrm{d}s.$$

若某段 a 为常量，先积出 $v(s) = v(t_0) + a(s - t_0)$，再代入位置积分：

$$x(t) - x(t_0) = \Big[v(t_0)(s - t_0) + \frac{a}{2}(s - t_0)^2\Big]_{t_0}^{t} = v(t_0)(t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

若 a 随时间变化，则使用具体函数完成相应积分。电压突变时，理想模型中加速度可跳变，但位置和速度连续。每一段的末位置、末速度都是下一段初条件，换向后的速度从上一段末值继续变化。

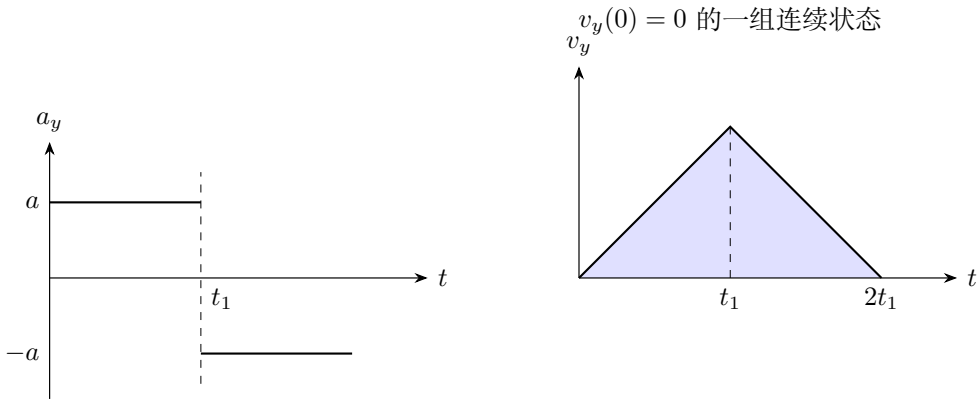


图 6.5: 换场时加速度跳变，速度连续；位移由速度图面积累加

图 6.5 中第二段从速度 at_1 接续；两段位移都为正，周期末速度回到零时，两段正位移已经累加。

时变电场对粒子与电源之间的能量交换，体现为机械能的显式时间变化。沿粒子轨迹对势 $V(\boldsymbol{r}(t),t)$ 使用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}(qV)}{\mathrm{d}t}=q\nabla V\cdot\boldsymbol{v}+q\frac{\partial V}{\partial t},$$
$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\frac{m}{2}(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})=q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}.$$

这里用 $m\dot{\boldsymbol{v}}=q\boldsymbol{E}$，再以 $\boldsymbol{E}=-\nabla V$ 改写为 $\mathrm{d}K/\,\mathrm{d}t=-q\nabla V\cdot\boldsymbol{v}$。两式相加，空间梯度项抵消，得到

$$\frac{\mathrm{d}(K+qV)}{\mathrm{d}t}=q\frac{\partial V}{\partial t}.$$

右侧描述外电源改变电势分布带来的能量交换。时变过程的电场功沿粒子的实际路径逐段计算：

$$W=\int_{t_A}^{t_B}q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(t),t)\cdot\boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t.$$

6.3 中心力、系统与约束

6.3.1 中心电场中的径向有效能

绕固定电荷 Q 运动的粒子受中心力，角动量大小 $\ell=mr^2\dot{\theta}$ 守恒。把速度分成径向与切向，能量为

$$\mathcal{E}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{\ell^2}{2mr^2}+\frac{kqQ}{r}.$$

后两项构成径向有效势。最近点满足 $\dot r=0$，切向速度仍为 $\ell/(mr)$。入射速度 v_∞、瞄准距 b 给 $\ell=mv_\infty b$，几何信息正是通过角动量进入能量式。

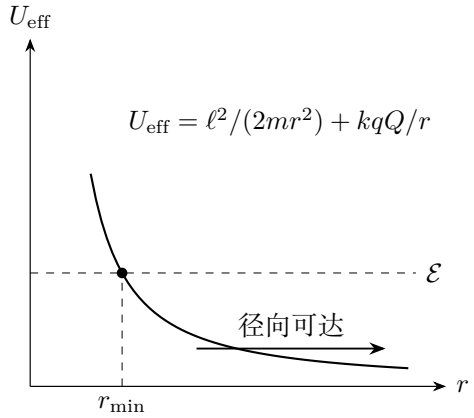


图 6.6: 斥力中心场的最近点由有效势与总能量的交点确定

图 6.6 示意 $qQ>0$。最近点径向动能为零，切向动能仍包含在有效势中；只有正碰 $\ell=0$ 才能把最近点总速度设为零。

两球自由运动且所受外力合力为零时，质心匀速运动。相对运动的约化质量为 $\mu=m_1m_2/(m_1+m_2)$。在质心系中，$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0$，故两球动量大小相同，记为 p。用 $K_i=p^2/(2m_i)$，得 $K_1/K_2=m_2/m_1$。轻球在质心系中取得的动能份额较大。若两球原来都静止，质心也静止，图 6.7 给出的分配可以直接用于实验室系。图中 r_1,r_2 是两球到质心 C 的距离，由质心定义有 $m_1r_1=m_2r_2$。例 6.9 将比较单球释放和双球释放。

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=0,\quad m_1r_1=m_2r_2$$

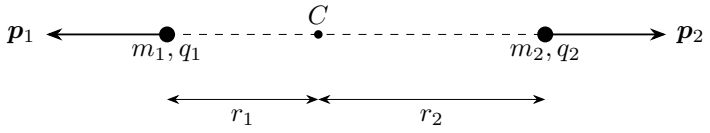


图 6.7: 质心系中两球动量等大反向

6.3.2　约束先约速度，再写动能

带电小球通过不可伸长细线连接时，势能的变量可以由几何关系表示，动能由各个可动小球的动能相加。先写出位置与约束参数的关系，再求导得到各球速度，最后求和 $K=\sum m_iv_i^2/2$。这样便把各球速度之间的联系写入总动能，再由势能变化求指定小球的速度。

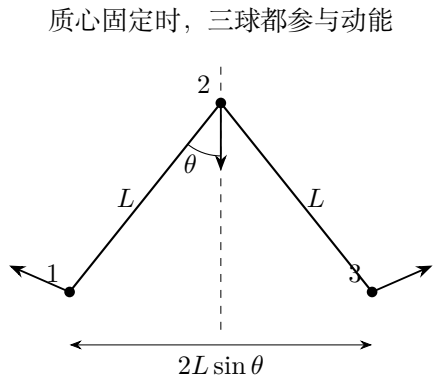


图 6.8: 先由几何写位置，再对同一参数求导得到每个速度

图 6.8 中两绳长度固定，但端球间距可变；端球既有水平速度也有竖直速度，共同进入总动能。

在三球题中，用绳角 θ 表示位置，对各球坐标求导得到速度，再将指定球的速度平方写成 $\sin\theta$ 的函数。由导数确定最大值，同时用沿绳方向的牛顿方程求张力；在张力为正的运动段，绷直的绳长关系成立。

6.4 有限极板中的运动范围

6.4.1 出口条件与场内转向

有限极板将场内运动限制在 $-d/2 < y < d/2$。水平速率为 v_x、板长为 L 时，粒子在场内的时间区间是 $0 \le t \le L/v_x$。在这一段上求 $y(t)$ 的最大值和最小值，便可确定粒子能否穿过极板。斜入射时，最高点可能位于板内，出口偏移量与板内最大偏移量需分别求出。

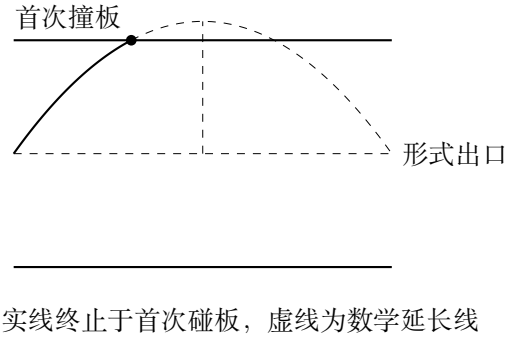


图 6.9: 出口在板内仍可能先撞上板，由场内最高点确定通过条件

图 6.9 中抛物线顶点超过上板，真实运动在第一次碰板时已终止，虚线表示同一运动方程的延长线。

方波题还给出接触后的吸收条件。粒子从出发板附近释放后，先求第一次向前的最远位置，再接续返程；若在下一次向前运动前已返回出发板，它便被吸收。题设把零速接触也算作到达，因此“均未到达”的条件采用严格小于板间距。

6.4.2　速度图与加速度图

轨迹图中的点对应粒子在各时刻的位置，切线对应速度方向。速度图的斜率是加速度，有向面积是位移；加速度图的有向面积则是速度变化。方波电压使加速度分段恒定，速度图由连续相接的直线段组成，位移由各段面积累加。

进入运动方程的电场可以由题设给出，也可以先由电荷和导体求得。例 6.3 用对称性判断若干点的电场，只有电力的粒子在零场点瞬时加速度为零。例 6.4 用曲面投影计算匀强场通量，联系场方向与曲面法向。例 6.5 再从随时间改变的极板间距求电容和电流。

6.5　轨迹参数的进一步求解

6.5.1　场力做功之外还需要方向信息

同样的能量变化可以对应不同方向的速度。电场偏转题要由恒定水平动量或分运动确定方向，中心场则由角动量把瞄准距与最近点连接。库仑散射中，粒子远处初末速率相同；由中心力轨道的两条渐近线求速度方向的偏转角。

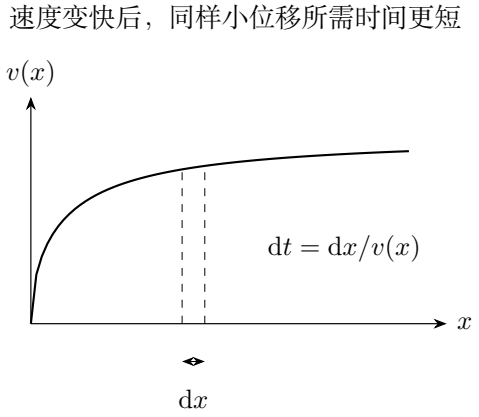


图 6.10: 从位置函数求时间：先定正向速度，再逐段积分 $\mathrm{d}x/v(x)$

图 6.10 中 $v > 0$ 表示向右运动；有转向时应在各方向分支重新选择速度符号。

非均匀一维场可先由功求 $v(x)$，再用 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v(x)$ 求时间。这种先降阶再积分的做法可避免直接解二阶非线性方程，向右运动取 $v(x) > 0$，向左运动取 $v(x) < 0$，在每个单向运动段分别积分，时间始终随实际运动增加。

6.6 电压波形与运动时间

6.6.1 电压波形与粒子实际遇到的电场

偏转板给出的电压可能随外部时间变化，而一粒电子在入场和出场之间只经历其中一小段。若过板时间远小于电压变化的时间尺度，可以把该电子通过期间的偏转电压视为常量，不同电子再使用各自进入时刻对应的电压。若两个时间尺度可比，就把 $E(t)$ 带入运动方程，按实际过板时间积分。

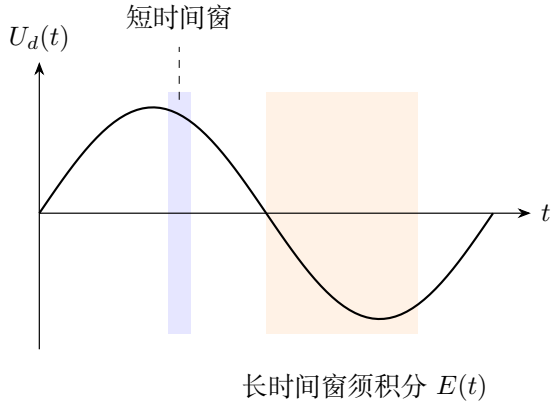


图 6.11: 粒子只在入场至出场的时间窗内取样外加电压

图 6.11 中短窗内电压近似不变时才可用恒场偏转式；长窗内要积分粒子实际遇到的电场。

加速段与偏转段也应分开。电子先经过加速电压得到水平速率，随后进入偏转场时，初速度已经不为零。若加速电压随时间缓慢变化，电子通过加速区的时间仍足够短，可以把它作为某一入射批次的初速参数；加速区电压变化较快时，入射速度也由加速段的时变运动方程确定。

对给定的快速开关电压，本讲采用电准静态近似：装置尺寸与电压变化时间内电磁影响传播的距离相比很小，板间场可近似由当时电压除以间距给出。这个条件与粒子飞行时间是否短于周期不同。一个粒子可以经历很多电压周期，而每一个时刻的板间场仍可近似均匀；方波逐周期运动题正属于这种情况。

6.6.2　固定源与自由两体

固定源电荷的支架可吸收动量，所以试探粒子与源电荷的机械总动量未必守恒，但静止支架不作功时粒子仍可使用固定静电势的能量关系。两带电小球都解除固定后，忽略外力的整个系统动量才守恒。固定源模型由支架承受动量变化，自由两体模型则由两球的动量变化相互补偿。

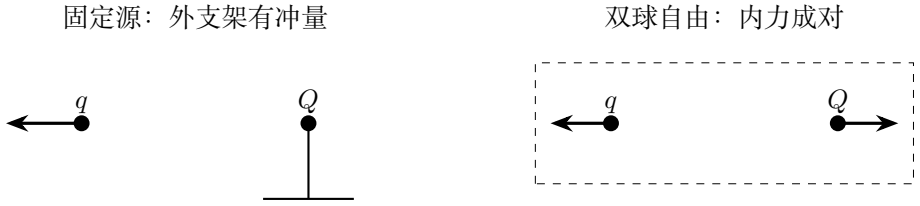


图 6.12: 固定源的支架吸收动量，双球自由系统才整体守恒动量

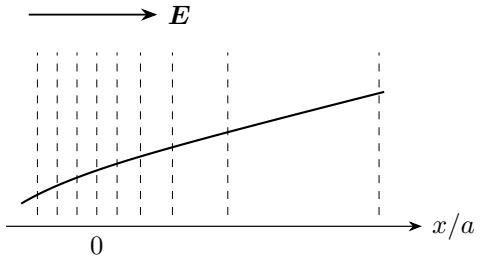
图 6.12 两种模型都可满足能量守恒，但允许使用的动量守恒式不同。

带电粒子在电容器中运动时，若其电量足够小，可忽略它对极板电荷和电势的反作用，把场当作已知背景。若粒子在两板间反复搬运有限电荷，极板电量和电压会改变，就应把电容器的场能及电源也纳入系统。逐滴充电题与普通试探粒子题的区别正是前一滴已经改变下一滴遇到的场。

细线、轨道和固定轴的约束力可能不作功，却仍改变动量方向；有摩擦或阻力时还要保留耗散。例如固定圆轨道的支持力沿法向，与瞬时速度垂直，因而只改变动量方向；光滑水平面上的绳联三球则作为整体写能量和动量关系，绳张力在系统内部传递作用。

6.7 例题与分析

例 6.1 (非均匀电场中的运动判断)**.** 在 $x<0$ 区电场为 $E_0\hat{\boldsymbol{x}}$, $x>0$ 区为 $E_0\hat{\boldsymbol{x}}/[1+(x/a)^2]$。粒子由左向右射入，初始 $v_x>0, v_y>0$，轨迹切线随前进逐渐偏向 $+x$。求电荷符号，并判断加速度、速度大小及电势能如何变化。



等势差相同；轨迹按 $q>0$ 的一组初态计算

图 6.13: 场方向、等势线与向右逐渐变平的实际轨迹

解　用恒定的竖直速度判断水平加速度符号

图 6.13 中 y 方向无力，所以 v_y 恒定。轨迹逐渐偏向 $+x$ 表示 v_x 增大，$a_x>0$；给定电场向右，因此 $q>0$，电荷符号由加速度与电场的相对方向确定。

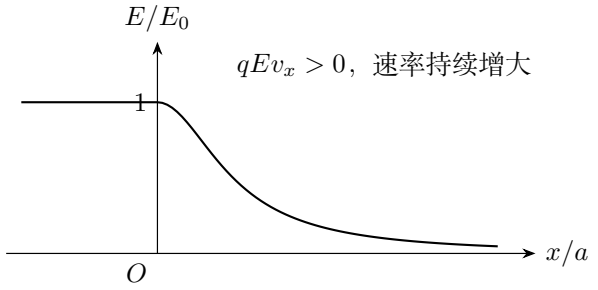


图 6.14: 场强在原点连续，正半轴衰减；速度仍因正功率而增长

按空间场强变化判断加速度大小

图 6.14 的 $a_x=qE(x)/m$ 在 $x<0$ 恒定，$x>0$ 随前进而减小。

以功率和电势梯度判断速率与势能

功率 $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t=qE(x)v_x>0$，故速度大小一直增大，尽管加速度变小。静电势满足 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x=-E<0$，所以 qV 单调减小。在 $x>0$，电场沿前进方向逐渐减弱，粒子仍持续获得动能，但单位时间获得的速度增量逐渐减小。

例 6.2 (静电除尘中的电荷与漂移)**.** 放电电极保持负高压，集尘板接地，负尘粒由电极附近向集尘板漂移。判断电场与电力方向。若用线性阻力 $-bv$、恒定场近似，求从静止开始的速度与位移。

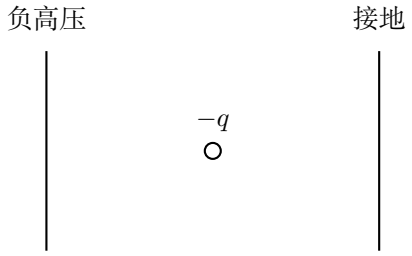


图 6.15: 静电除尘中的电荷与漂移

解　先由板电势确定场方向，再由负电性确定电力

图 6.15 电场由零势集尘板指向负势电极，即向左；尘粒为负电，电力向右，迁移方向与电场相反。尘粒在迁移阶段保持负电，到达集尘板后将电荷交给极板。

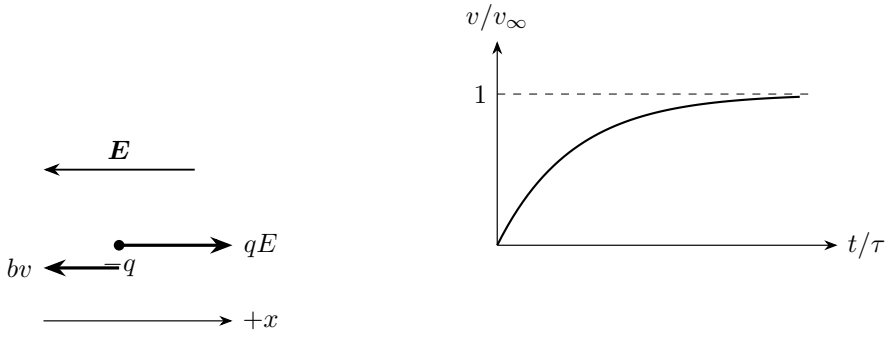


图 6.16: 负尘粒的电力顺迁移方向，阻力反向，速度逐渐趋于终值

按迁移方向列含线性阻力的运动方程

按图 6.16 向右为正，以 $E>0$ 表示场强大小，则电力大小 $F_0=|q|E$，方程为 $m\dot{v}=F_0-bv$。

积分因子与初始静止条件

令 $\tau=m/b$、$v_\infty=F_0/b$，方程化为

$$\dot{v}+\frac{v}{\tau}=\frac{v_\infty}{\tau}.$$

乘积分因子 $e^{t/\tau}$。因 $\mathrm{d}(e^{t/\tau})/\,\mathrm{d}t=e^{t/\tau}/\tau$，乘积法则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{t/\tau}v)=e^{t/\tau}\dot{v}+\frac{1}{\tau}e^{t/\tau}v=e^{t/\tau}\left(\dot{v}+\frac{v}{\tau}\right).$$

因此方程左侧确实可以合成乘积导数：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{t/\tau}v) = \frac{v_\infty}{\tau}e^{t/\tau}.$$

先作不定积分，右侧的原函数为

$$\int \frac{v_\infty}{\tau}e^{t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{v_\infty}{\tau}\,\tau e^{t/\tau} + C = v_\infty e^{t/\tau} + C.$$

故 $e^{t/\tau}v = v_\infty e^{t/\tau} + C$，通解为 $v = v_\infty + Ce^{-t/\tau}$。初条件 $v(0) = 0$ 给 $C = -v_\infty$，即

$$v(t) = v_\infty(1 - e^{-t/\tau}).$$

再令初位置为零，对速度积分：

$$\begin{aligned} x(t) &= v_\infty \int_0^t (1 - e^{-s/\tau})\,\mathrm{d}s \\ &= v_\infty[s + \tau e^{-s/\tau}]_0^t = v_\infty[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})]. \end{aligned}$$

对速度再求导，$\dot{v} = -v_\infty e^{-t/\tau}(-1/\tau) = (F_0/m)e^{-t/\tau}$。加速度 $F_0e^{-t/\tau}/m$ 逐渐减小；这是恒场与线性阻力模型的结果。随速度增大，阻力逐渐接近恒定电力，速度趋于 F_0/b。

例 6.3 (正负交错立方体的零场点)**.** 立方体八顶点交错放置 $\pm q$，任一棱两端异号。判断体心、六个面心和十二条棱中点哪些为零场点，忽略重力。

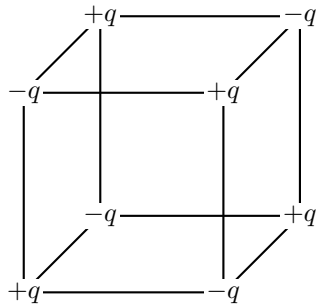
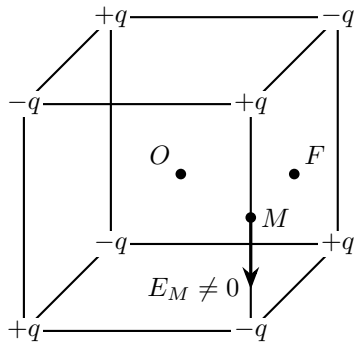


图 6.17: 正负交错立方体的零场点

解　用顶点坐标的符号求和证明体心零场

图 6.17 中以体心为原点，顶点坐标为 (sa, ta, ua)，$s, t, u = \pm 1$，电荷可写 $qstu$。在体心，每个场分量都含一个独立符号的求和，例如 $E_x \propto \sum_{s,t,u} stu\, s = \sum tu = 0$，所以体心零场。



O：体心；F：面心；M：棱中点

图 6.18: 三个代表点的实际几何位置与棱中点非零场

对同一面的等距离四电荷分组求和

在图 6.18 面心 $(a,0,0)$，固定 s 的四个顶点距该点相同；x 分量含 $\sum_{t,u} tu = 0$，y,z 分量分别含 $\sum u$、$\sum t$，也为零，故各面心零场。

对代表棱中点累计全部八个场分量

棱中点如 $(a,a,0)$，该棱两电荷在 $z=\pm a$ 且异号，对中点的场同向而不相消；其余六个顶点的场由下式一并求和。对源点 (sa,ta,ua)，到场点的位移为 $a(1-s,1-t,-u)$，所以单个源的 z 分量为

$$E_z^{(s,t,u)} = -\frac{kq}{a^2}\frac{st}{[(1-s)^2+(1-t)^2+1]^{3/2}}.$$

它不依赖 u，每个固定 s,t 的上下两源贡献相同。其余两个符号的四种取值为

$$(s,t) = (1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

四组的距离平方分别为 $a^2, 5a^2, 5a^2, 9a^2$，按电荷符号相加，

$$E_z = -\frac{2kq}{a^2}\left(\frac{1}{1^{3/2}} - \frac{1}{5^{3/2}} - \frac{1}{5^{3/2}} + \frac{1}{9^{3/2}}\right),$$

合并两项相同的分母，得到

$$E_z = -\frac{2kq}{a^2}\left(1 - \frac{2}{5^{3/2}} + \frac{1}{9^{3/2}}\right) \neq 0$$

（总符号取决于起始顶点正负）。括号内为正，所以棱中点不是零场。

区分零电势与零电场

结论为体心和面心。异号电荷对在中点产生同向电场，棱中点处各组贡献的大小又由它们的距离决定。

例 6.4 (匀强场穿过半球面的通量)**.** 半球面半径 R，底面位于水平面，匀强电场沿底面内的 x 正方向。求穿过曲面的有向电通量；再求只计 $E_n > 0$ 部分的通量。

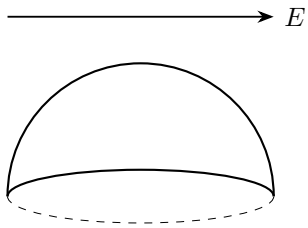


图 6.19: 匀强场穿过半球面的通量

解　把曲面与底面闭合使用高斯定理

图 6.19 的半球曲面加底面构成闭曲面，内部无净电荷，总通量零。底面法向竖直，电场水平，底面通量也零，所以曲面的有向通量为零。

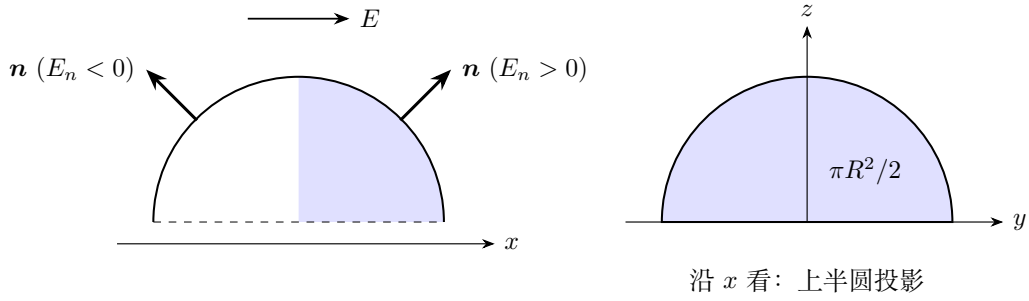


图 6.20: 左图区分流入与流出，右图为流出部分在 yz 面上的投影

把流出部分投影到垂直电场的平面

图 6.20 右半曲面有向外通量，左半曲面有向内通量，数值相反。右半曲面向垂直电场的平面投影为半圆，面积 $\pi R^2/2$，故只计正法向部分的通量为 $E\pi R^2/2$。

区分有向通量、正向通量与无符号总量

若求穿过曲面的无符号通量，应为两者绝对值之和 $E\pi R^2$。有向通量包含流入、流出的相消，正向通量只累加流出的部分。

例 6.5 (电容压力传感器中的电流)**.** 电容传感器由面积为 S 的两块平行金属板组成。上板固定，下板为刚性活动板，压力缓慢增大时保持平行向上移动，间距 $d(t)$ 减小。忽略边缘场。传感器经电阻 R 接恒压源 U，正极经电阻接上板。求电容变化、电流方向和缓慢移动时的电流。

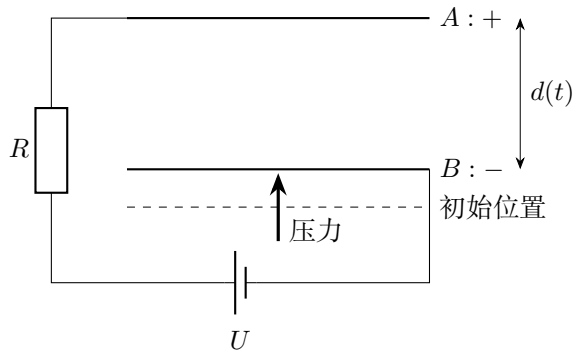


图 6.21: 电源正极经电阻接上板，下板受压后平行上移

解　由实际间距变化判断几何电容和充电方向

图 6.21 中，下板整体上移，板间处处具有同一间距 $d(t)$。忽略边缘场时 $C = \varepsilon_0 S/d$，因而上移使电容增大。电路达到随几何缓慢变化的状态后，电容两端的电压近似为 U，上板电量 $Q \simeq CU$ 随电容增加。常规电流经电阻流向上板。

$$\dot{d} < 0 \Rightarrow \dot{C} > 0$$

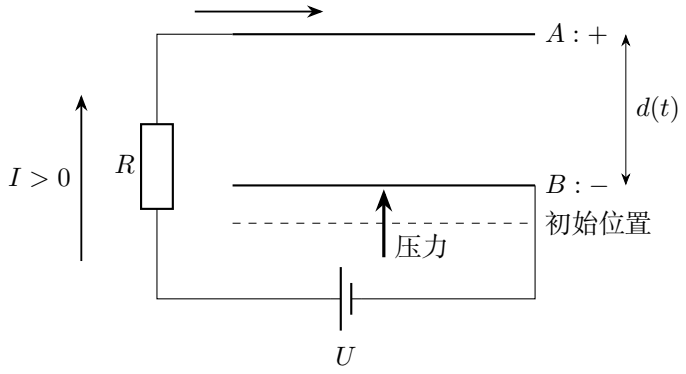


图 6.22: 缓慢受压时常规电流从正极经电阻流向上板

在慢变化近似下求电流大小与正负

图 6.22 取电源正端指向上板为正。保持 U,S 不变，而 $d=d(t)$，用乘积与链式法则：

$$I=\dot{Q}\simeq\frac{\mathrm{d}(CU)}{\mathrm{d}t}=U\dot{C},\qquad \dot{C}=\varepsilon_0 S\frac{\mathrm{d}(d^{-1})}{\mathrm{d}t}=\varepsilon_0 S(-d^{-2})\dot{d}.$$

所以 $I\simeq-\varepsilon_0 SU\dot{d}/d^2$；受压时 $\dot{d}<0$，故 $I>0$。

有限电阻下的电路方程

更精确的电路关系为 $U=RI+Q/C(t)$、$I=\dot{Q}$。当几何变化时间远长于电路调整时间 RC 时，RI 相对 U 很小，就得到前面的近似式。压力保持不变并达到新平衡后，电流为零，传感器可通过瞬态电流反映压力变化。

例 6.6 (奇对称电场图像的电势比较)**.** 一维电场 $E(x)=E_0(x/a)e^{-x^2/(2a^2)}$，其中 $E_0>0$、$a>0$。取 $V(\infty)=0$。求电势及其极值，比较 x 与 $-x$ 两点。

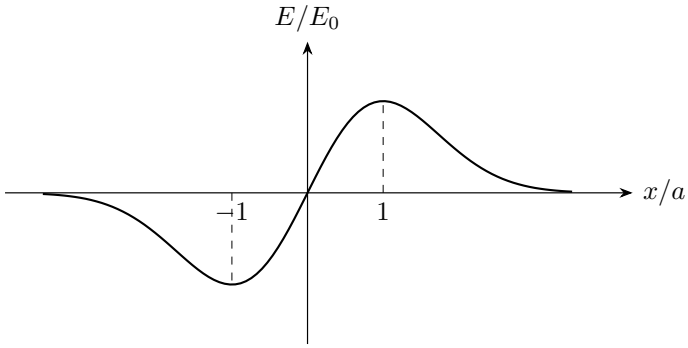


图 6.23: 奇对称电场的完整正、负半轴，极值在 $x=\pm a$

解　从无穷远零势沿带符号电场积分

图 6.23 电场关于原点奇对称。由零势参考点得 $V(x)=\int_x^\infty E(s)\,\mathrm{d}s$。先求原函数：令 $u=s^2/(2a^2)$，则 $\mathrm{d}u=(s/a^2)\,\mathrm{d}s$，于是

$$\int E_0\frac{s}{a}e^{-s^2/(2a^2)}\,\mathrm{d}s=E_0a\int e^{-u}\,\mathrm{d}u=-E_0ae^{-u}+C=-E_0ae^{-s^2/(2a^2)}+C.$$

这个原函数对全实轴连续可导，因此即使积分跨过 $s=0$，也可直接代入端点：

$$V(x)=\lim_{M\to\infty}[-E_0ae^{-s^2/(2a^2)}]_x^M=E_0ae^{-x^2/(2a^2)}.$$

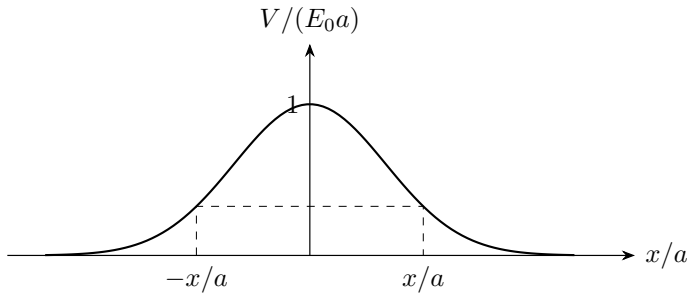


图 6.24: 电势为偶函数，最大值在零场点 $x=0$

用电势导数与对称性确定极值

图 6.24 电势为偶函数，$V(x)=V(-x)$；在 $x<0$ 有 $E<0$、$V'>0$，在 $x>0$ 有 $E>0$、$V'<0$，因此原点是电势最大点，$V(0)=E_0a$。

区分场强极值与电势极值

对电场使用乘积法则与链式法则：

$$E'(x)=\frac{E_0}{a}\left[e^{-x^2/(2a^2)}+xe^{-x^2/(2a^2)}\left(-\frac{x}{a^2}\right)\right]=\frac{E_0}{a}e^{-x^2/(2a^2)}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

驻点为 $x=\pm a$；由导数变号，$x=a$ 处是电场的最大值，$x=-a$ 处是最小值，均不是电势极值处。由 $V(x)$ 的偶对称性，两侧对称点电势相等；它们的电场则大小相等、方向相反。

例 6.7 (示波器的正弦信号与锯齿扫描)**.** 水平偏转使光点在一个扫描周期 T 内由左到右匀速移动，$X=X_m(2t/T-1)$；竖直信号 $Y=-Y_m\sin(2\pi t/T)$。回扫消隐。画出一周期屏上轨迹，标出四分之一周期位置，并说明回扫不消隐的影响。

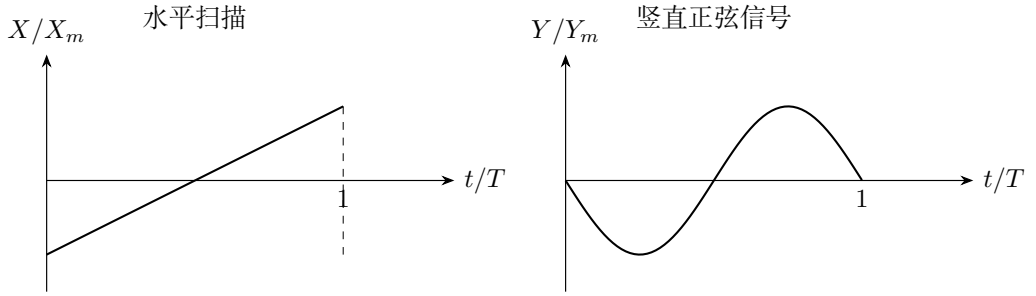


图 6.25: 同一周期的水平扫描与竖直信号，回扫段不显示

解　由水平扫描反解时间再消去参数

图 6.25 的扫描使 $t/T = (X/X_m + 1)/2$，代入竖直信号，得 $Y = Y_m \sin(\pi X/X_m)$，$-X_m \le X < X_m$。

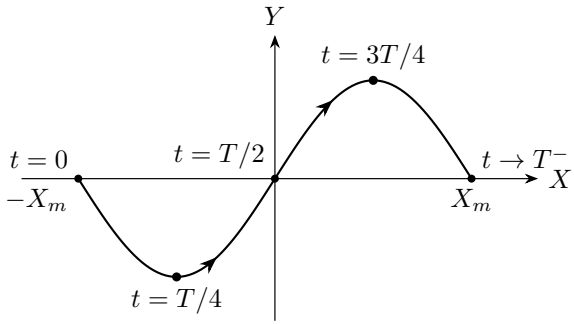


图 6.26: 横纵轴给屏上坐标，曲线旁标出对应时刻

按四分之一周期逐点确定扫描方向

在图 6.26 依次标出 $t = 0$ 的 $(-X_m, 0)$、$T/4$ 的 $(-X_m/2, -Y_m)$、$T/2$ 的 $(0, 0)$、$3T/4$ 的 $(X_m/2, Y_m)$，临近 T 为 $(X_m, 0)$。它从左侧先向下，再穿过中心向上。若水平扫描方向相反或信号相位变号，曲线会左右或上下翻转，这些变化可由带符号的参数方程直接读出。

解释有限回扫时间产生的附加轨迹

回扫若不消隐，有限回扫时间会画出额外连接轨迹，回扫路径由回扫阶段的 $X(t), Y(t)$ 共同确定。

例 6.8 (沿圆弧和延长线移动试探电荷)**.** A, B 相距 $2L$，分别固定 $+q, -q$。O, D 位于 B 左右，$BO = BD = L$，沿以 B 为心的上半圆弧把单位正电荷由 O 移到 D，再把单位负电荷从 D 沿右方延长线移到无穷远。分别求电场功。

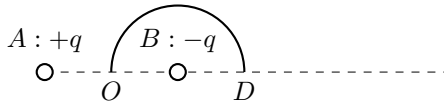


图 6.27: 沿圆弧和延长线移动试探电荷

解　按到两源电荷的距离求端点电势

图 6.27 中 O 到 A, B 距离均为 L，故 $V_O = kq/L - kq/L = 0$。D 到 A 为 $3L$、到 B 为 L，故 $V_D = kq/(3L) - kq/L = -2kq/(3L)$。

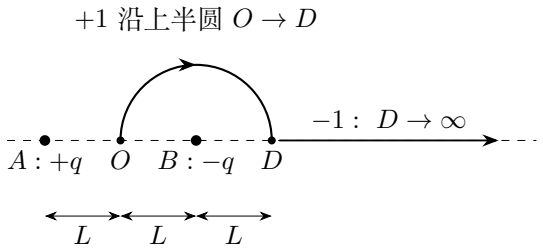


图 6.28: 两段使用不同符号的试探电荷，分别按端点电势算功

分别代入正、负试探电荷计算两段功

图 6.28 第一段电场功 $W_1 = (+1)(V_O - V_D) = 2kq/(3L)$，与所选圆弧路径无关。第二段试探电荷为单位负电荷，$W_2 = (-1)(V_D - 0) = 2kq/(3L)$。

两段电场功的符号

两段中 q_{test} 和 $V_{\text{初}} - V_{\text{末}}$ 的符号同时改变，所以功同为正。若“单位电荷”用库仑作单位，结果单位为焦耳。

例 6.9 (两带电小球解除固定)**.** 同号小球 q_1, q_2、质量 m_1, m_2，相距 L 静止。分别只释放第一球，或同时释放两球。求各自可获得的最大动能，并说明势能属于哪个系统。

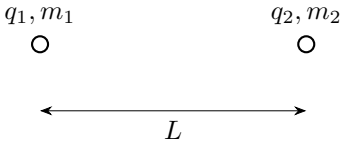


图 6.29: 两带电小球解除固定

解　只释放一球时先确定支架是否作功

图 6.29 初相互作用能 $W_0 = kq_1q_2/L > 0$。只释放第一球，第二球的固定力不作功，第一球到无穷远时取得 $K_{1\max} = W_0$，第二球动能零。

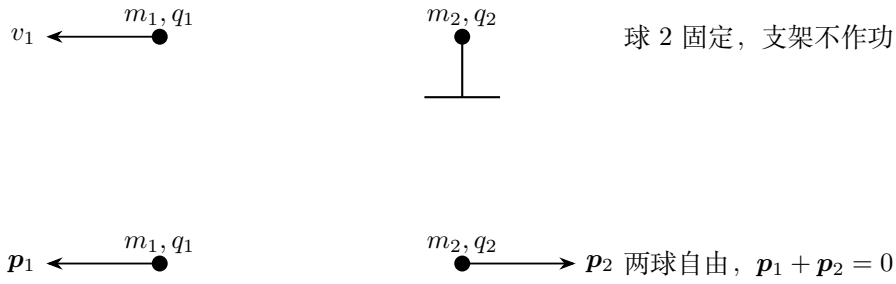


图 6.30: 只放一球与同时释放两球的系统受力条件不同

同时释放时用系统总动量约束能量分配

图 6.30 同时释放时，总动量原为零，始终有 $m_1 v_1 = m_2 v_2$。因此 $K_1/K_2 = m_2/m_1$，且两球分离到无穷远时 $K_1 + K_2 = W_0$。

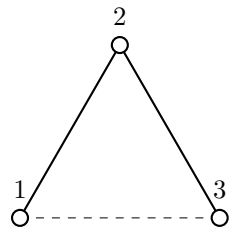
两球最大动能

联立得

$$K_{1\max} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} W_0, \qquad K_{2\max} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} W_0.$$

初始相互作用能 W_0 属于两球系统，分离后转为两球动能之和。质量小的球获得更大速度与更大动能，等质量时才各为一半。

例 6.10 (三带电球剪断一根细线)**.** 三个小球质量均为 m、电量均为 q，用三根长 L 的轻绳组成正三角形，静置光滑水平面。剪断 $1,3$ 间细线，另两根保持绷直。求中间球 2 的最大速度。



剪断 $1-3$，另两绳长 L

图 6.31: 三带电球剪断一根细线

解　用对称性与质心固定统一表示三球位置

图 6.31 关于球 2 的竖直对称轴对称，设每根绳与该轴夹角 θ，初值 $\pi/6$。取质心静止，三球坐标可写

$$\boldsymbol{r}_2 = (0, \tfrac{2}{3} L\cos\theta), \quad \boldsymbol{r}_{1,3} = (\mp L\sin\theta, -\tfrac{1}{3} L\cos\theta).$$

对位置求导，把三球动能全部计入

因为 $\theta=\theta(t)$，求导时每个三角函数都要乘 $\dot\theta$：

$$\boldsymbol{v}_2=\left(0,-\frac{2}{3}L\sin\theta\,\dot\theta\right),\qquad \boldsymbol{v}_{1,3}=\left(\mp L\cos\theta\,\dot\theta,\frac{1}{3}L\sin\theta\,\dot\theta\right).$$

把每个速度的两个分量平方相加，得 $v_2^2=4L^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2/9$，两端球各有 $v_1^2=L^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta/9)\dot\theta^2$。三球动能相加为

$$K=\frac{m}{2}\left[2L^2\left(\cos^2\theta+\frac{\sin^2\theta}{9}\right)+\frac{4}{9}L^2\sin^2\theta\right]\dot\theta^2.$$

用 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ 整理，得到总动能

$$K=mL^2(1-\tfrac{2}{3}\sin^2\theta)\dot\theta^2.$$

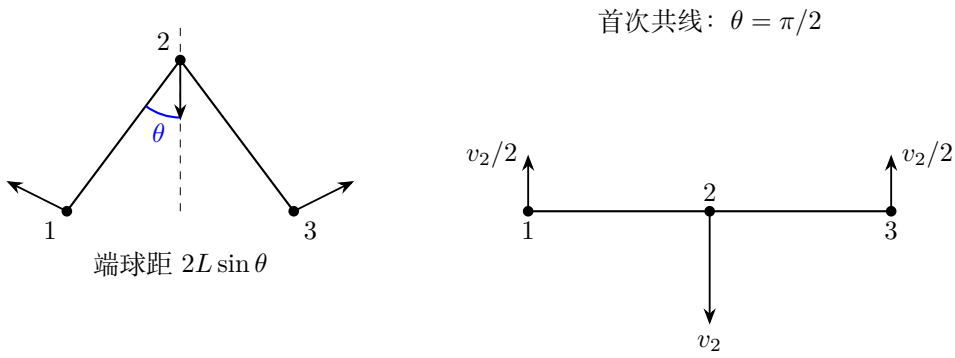


图 6.32: 一般位置先由质心约束求速度，共线时三球仍同时运动

只让可变的端球距离进入势能变化

图 6.32 两绳边距离仍为 L，端球距离 $2L\sin\theta$，所以势能减少 $K=(kq^2/L)[1-1/(2\sin\theta)]$。令 $s=\sin\theta\in[1/2,1]$，消去 $\dot\theta$，

$$v_2^2=\frac{4kq^2}{3mL}\frac{s^2-s/2}{3-2s^2}.$$

速度函数的最大值

记 $f(s)=(s^2-s/2)/(3-2s^2)$。按商法则求导：

$$\begin{aligned}f'(s)&=\frac{(2s-\frac{1}{2})(3-2s^2)-(s^2-\frac{s}{2})(-4s)}{(3-2s^2)^2}\\&=\frac{6s-\frac{3}{2}-4s^3+s^2+4s^3-2s^2}{(3-2s^2)^2}=\frac{-s^2+6s-\frac{3}{2}}{(3-2s^2)^2}.\end{aligned}$$

分子 $g(s)=-s^2+6s-3/2$ 的导数为 $g'(s)=6-2s>0$，且 $g(1/2)=5/4>0$，所以整个允许区间上 $f'(s)>0$。故最大值在 $s=1$，即三球第一次共线时，

$$v_{2\max}=\sqrt{\frac{2kq^2}{3mL}}.$$

此时两端球各以中球速度一半沿反向运动，$K=3mv_2^2/4=kq^2/(2L)$，这与前面总动能的表达式相同。

两根绳的张力

再求运动过程中每根绳的张力。记 $A_0=kq^2/L^2$，取从中球 2 指向左端球 1 的单位矢量 $\boldsymbol{n}=(-s,-\cos\theta)$。端球沿 $\boldsymbol{n}$ 的电力与张力合分量为 $A_0-T+A_0/(4s)$，其中最后一项来自另一端球的排斥力。中球加速度沿竖直方向为 $2(A_0-T)\cos\theta/m$，投影到 $\boldsymbol{n}$ 后为 $-2(A_0-T)\cos^2\theta/m$。

相对位置为 $L\boldsymbol{n}$，绳长 L 固定。对 $\boldsymbol{n}=(-\sin\theta,-\cos\theta)$ 逐次求导，

$$\dot{\boldsymbol{n}}=\dot\theta(-\cos\theta,\sin\theta),$$
$$\ddot{\boldsymbol{n}}=\ddot\theta(-\cos\theta,\sin\theta)+\dot\theta^2(\sin\theta,\cos\theta).$$

第一项垂直于绳，第二项沿 $-\boldsymbol{n}$。所以相对加速度沿 $\boldsymbol{n}$ 的分量为 $(L\ddot{\boldsymbol{n}})\cdot\boldsymbol{n}=-L\dot\theta^2$。将两球的受力分别除以质量，相减后取同一方向的投影，得到

$$-mL\dot\theta^2=(A_0-T)(1+2\cos^2\theta)+\frac{A_0}{4s}=(A_0-T)(3-2s^2)+\frac{A_0}{4s}.$$

移项并除以正数 $3-2s^2$，每根绳的张力为

$$T=A_0+\frac{mL\dot\theta^2+A_0/(4s)}{3-2s^2}>0\qquad(1/2\le s\le 1).$$

因此所用绷直约束在这段运动中可以实现。首次共线后构型仍可继续变化，但 $s\le 1$，速度平方的同一上界已由 $s=1$ 取得。

例 6.11 (方波电压下的逐周期运动)**.** 两板 B, A 相距 $d = 5.0\,\mathrm{cm}$，B 接地。A 电势在每周期前半为 $-U_0$、后半为 $+U_0$，$U_0 = 2.5\,\mathrm{V}$。正粒子 $m = 2.0 \times 10^{-23}\,\mathrm{kg}$、$q = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$，取 B 的内侧表面为 $x = 0$。粒子在 $t = 0$ 由该表面从静止发射，忽略重力。离开 B 后，粒子接触任一极板即被吸收，零速接触也计为到达。若释放时加速度朝向 B，粒子留在 B 上。求初加速度；当 $T = 1.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$ 时到 A 的动量。若改在任意 $t_0 \in [T/4, T/2]$ 由 B 内侧从静止释放，什么频率范围使所有粒子都到不了 A?

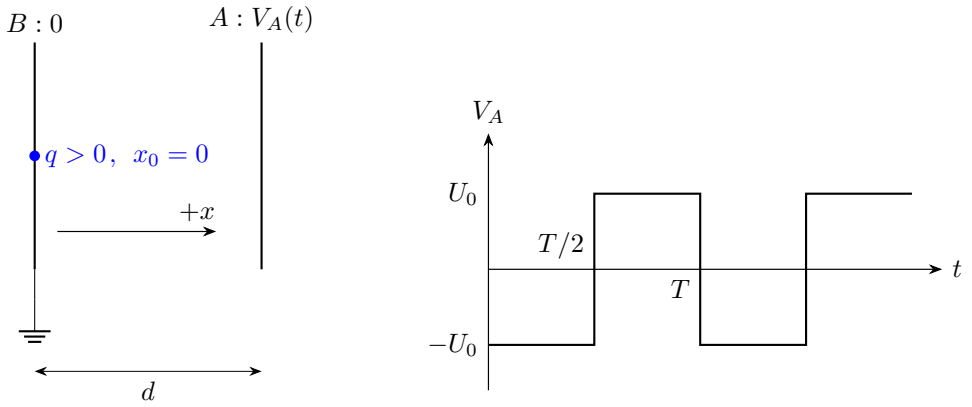


图 6.33: 实际极板、释放位置与电压波形共同确定加速度方向

解　由实际板电压确定分段加速度

按图 6.33 从 B 向 A 取正方向，前半周加速度 $+a$，后半周 $-a$，其中 $a = qU_0/(md) = 4.0 \times 10^5\,\mathrm{m/s^2}$。

逐段接续速度并累计单周期位移

令 $H = T/2$。前半周从静止开始，$v_1(t) = \int_0^t a\,\mathrm{d}s = at$；后半周以换向后的经过时间 s 计，$v_2(s) = aH - as$。两个半周分别积分位移，

$$x_1 = \int_0^H at\,\mathrm{d}t = [at^2/2]_0^H = aH^2/2,$$
$$x_2 = \int_0^H (aH - as)\,\mathrm{d}s = [aHs - as^2/2]_0^H = aH^2/2.$$

一个完整周期内，速度先由零升至 aH，再降至零，但位移始终增加，

$$\Delta x = \frac{1}{2}aH^2 + \left[aH^2 - \frac{1}{2}aH^2\right] = aH^2 = \frac{aT^2}{4} = 1.0 \times 10^{-5}\,\mathrm{m}.$$

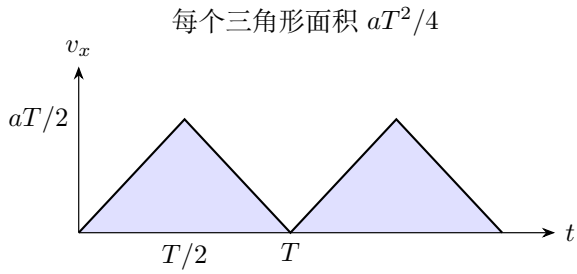


图 6.34: 零相位释放时每周期都向前累积位移，半周期换向只改变加速度

首次到达时刻与动量

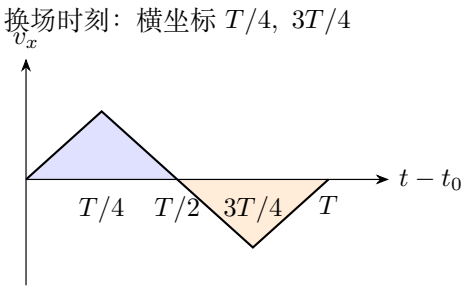
在图 6.34 周期末速度虽为零，位置并未返回原处。$d/\Delta x = 5000$ 恰为整数，粒子于 $5000T = 0.050\,\mathrm{s}$ 在周期末第一次到达 A，故到达瞬间动量为零。

对任意释放相位求第一次向前最远位置

第二问令从释放到下一换向的时长 $\delta = T/2 - t_0 \in [0, T/4]$。若 $\delta = 0$，换场后力朝向出发板，粒子留在 B 上。对 $\delta > 0$，第一段末速度、位移为 $a\delta, a\delta^2/2$。换向后以 s 计时，先保留该初值再积分：

$$
\begin{aligned}
v_2(s) &= a\delta + \int_0^s (-a)\,\mathrm{d}u = a\delta - as,\\
x_2(s) &= \frac{a\delta^2}{2} + \int_0^s (a\delta - au)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{a\delta^2}{2} + [a\delta u - au^2/2]_0^s = \frac{a\delta^2}{2} + a\delta s - \frac{as^2}{2}.
\end{aligned}
$$

令 $v_2 = 0$ 得 $s = \delta$，代回 $x_2(\delta) = a\delta^2$，这才是第一次向前的最大位移。随后转向返回；是否跨过下一次换场要继续接续速度。



正、负面积相等时回到 B，此后吸收

图 6.35: 最早允许相位 $t_0 = T/4$ 的速度接续：先前进，再返回出发板

返程中接触出发板的时刻

图 6.35 表明，返回 B 的过程可能跨过下一次换场，下面将该阶段继续接续。令 $H = T/2$，若粒子到 $t = T$ 尚未返回，则在上段公式中代 $s = H$，有 $x(T) = a\delta^2/2 + a\delta H - aH^2/2$、$v(T) = a\delta - aH$，整理为

$$x(T) = \tfrac{a}{2}(\delta^2 + 2H\delta - H^2), \qquad v(T) = -a(H - \delta).$$

下一正加速度阶段，以经过时间 u 计，速度 $v_3(u) = -a(H - \delta) + au$，停止需 $u_* = H - \delta$。停止前的有符号位移为

$$\begin{aligned}\Delta x_3 &= \int_0^{H-\delta} [-a(H - \delta) + au]\,\mathrm{d}u \\ &= [-a(H - \delta)u + au^2/2]_0^{H-\delta} = -\frac{a}{2}(H - \delta)^2.\end{aligned}$$

所需向左距离减去距 B 的位置，

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}(H - \delta)^2 - x(T) &= \frac{a}{2}[(H - \delta)^2 - \delta^2 - 2H\delta + H^2] \\ &= aH(H - 2\delta) \geq 0.\end{aligned}$$

因此所有 $0 \leq \delta \leq H/2$ 的粒子都先接触 B，接触后即被吸收；等号恰零速回板，也按题设吸收。

全部释放相位的最大前进距离

要让所有给定释放时刻均不到 A，需最大可能值 $aT^2/16 < d$，即

$$T < 4\sqrt{d/a}, \qquad f > \frac{1}{4}\sqrt{a/d} = 7.07 \times 10^2\,\mathrm{Hz}.$$

等号时最早释放的粒子可零速到板，按“到达”定义这一等号对应到达 A，所求频率范围取严格大于。

例 6.12 (中性微粒分裂后的两体运动)**.** 均匀场沿 $+x$，静止中性微粒在 $(d,0)$ 分成质量均为 m 的两粒，粒 1 带电 q，粒 2 带电 $-q$。忽略两粒的相互作用。粒 1 初沿 $-y$ 运动并到达 $(0,-d)$，求分裂速度、到达时电力瞬时功率以及两粒间距。

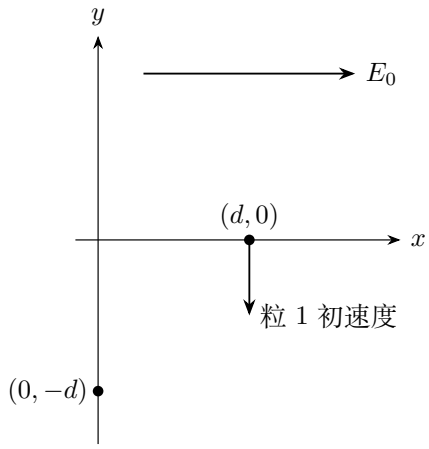


图 6.36: 分裂点、已知到达点与匀强场方向

解　由到达点的横坐标判断粒 1 电荷符号

图 6.36 粒 1 要从 $x=d$ 移到 0，横向加速度向左，所以 $q<0$。令 $a=|q|E_0/m$，初竖直速度大小为 u，则 $x_1=d-at^2/2$、$y_1=-ut$。

用两个坐标分别求时间与初速

到达时 $t_*=\sqrt{2d/a}$、$u=d/t_*=\sqrt{ad/2}$。

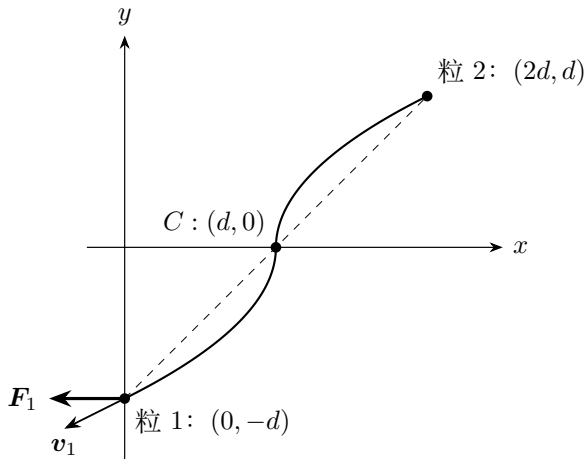


图 6.37: 两条实际抛物线关于固定质心对称，图中坐标按 d 缩放

用分裂瞬间动量确定另一粒初速

图 6.37 分裂瞬间外场有限力的冲量可忽略，初总动量零，第二粒初速度为 $+u\hat{\boldsymbol{y}}$。

以瞬时速度点乘电力求功率

到达时 $v_{1x}=-at_*$，电力也向左，瞬时功率

$$P_1=(-ma)(-at_*)=ma\sqrt{2ad}>0.$$

同一时刻的两粒间距

第二粒位置 $x_2=d+at_*^2/2=2d$、$y_2=ut_*=d$，而第一粒为 $(0,-d)$，间距 $\sqrt{(2d)^2+(2d)^2}=2\sqrt{2}d$。两粒质心始终在 $(d,0)$，与电场力总和零一致。

例 6.13 (并联电容器面积改变与粒子加速度)**.** 两相同水平电容器各面积 S、间距相同，上下板分别相连，充电后整体断电。左边小电荷最初与重力平衡。把右电容器重叠面积减为 S'，左边不变，使小电荷加速度为 $g/2$，求 S'/S。忽略小电荷对电场的扰动。

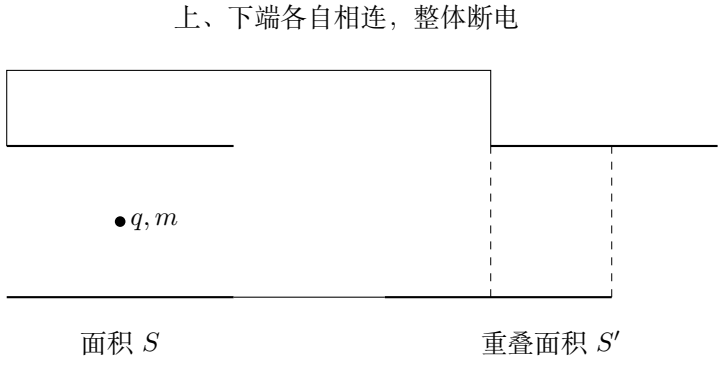
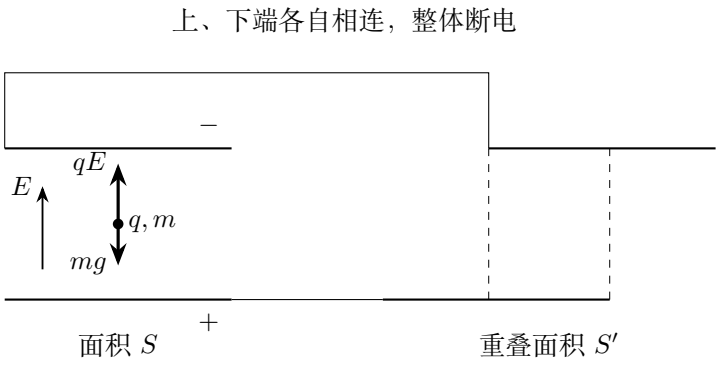


图 6.38: 右电容通过平移改变重叠面积，左边间距与面积保持

解　对断电后的整个并联组守恒电荷

图 6.38 初总电容 $2C_0$，电量 $Q_{\text{总}}=2C_0U_0$。右面积改变后总电容为 $C_0(1+S'/S)$，所以共同电压与左场均按比例 $E/E_0=U/U_0=2/(1+S'/S)$ 增大。



图示选 $q>0$，两板极性相应保证电力向上

图 6.39: 面积减小使共同电压升高，左侧电力超过重力

用原平衡与新加速度确定场强倍率

图 6.39 初态电力向上平衡 mg，场增大后加速度向上，$qE-mg=mg/2$，故 $E/E_0=3/2$。

所需的重叠面积

于是 $2/(1+S'/S)=3/2$，解得 $S'/S=1/3$。断电并联组的总电荷固定，右侧电容减小引起共同电压升高，从而增强左侧电场。

例 6.14 (水平电场中的带电单摆)**.** 摆长 l，小球质量 m、电量 $q>0$，匀强电场水平向右，重力向下。求平衡角、绳张力及小振动周期。

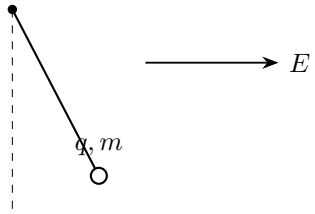


图 6.40: 水平电场中的带电单摆

解　合成重力与电力，求实际平衡方向

图 6.40 把重力与电力合成有效重力 $m\boldsymbol{g}_{\text{eff}}=mg\hat{\boldsymbol{y}}+qE\hat{\boldsymbol{x}}$，其中向下为 $+y$。大小 $g_{\text{eff}}=\sqrt{g^2+(qE/m)^2}$，平衡时绳沿该合力方向，向右偏角满足 $\tan\theta_0=qE/(mg)$，张力 $T_0=mg_{\text{eff}}$。

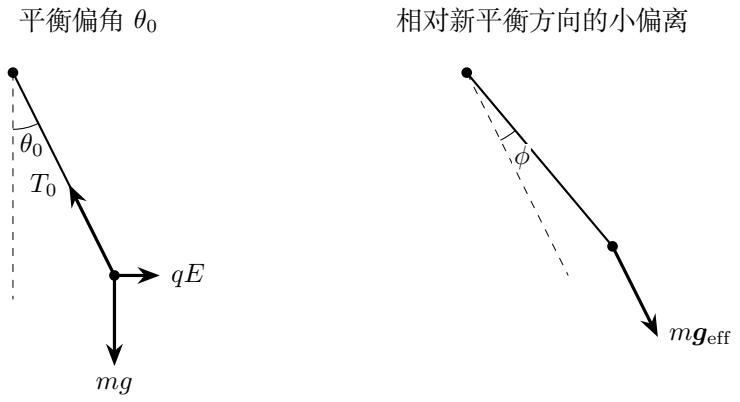


图 6.41: 左侧为平衡三力，右侧角度从有效重力方向起算

相对新平衡方向写切向运动方程

图 6.41 以平衡方向为角度零点，偏离角 ϕ 的切向方程 $ml\ddot{\phi} = -mg_{\text{eff}}\sin\phi$。

小振动方程与周期

当 $|\phi| \ll 1$，取 $\sin\phi \simeq \phi$，方程成为 $\ddot{\phi} + \omega^2\phi = 0$，其中 $\omega^2 = g_{\text{eff}}/l$。试取 $\phi = e^{\lambda t}$，两次求导为 $\dot{\phi} = \lambda e^{\lambda t}$、$\ddot{\phi} = \lambda^2 e^{\lambda t}$，代入得 $(\lambda^2 + \omega^2)e^{\lambda t} = 0$，特征根为 $\lambda = \pm i\omega$。实通解为

$$\phi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

若初偏角和初角速度为 $\phi_0, \dot{\phi}_0$，则 $\phi(0) = A = \phi_0$；对通解求导，$\dot{\phi} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$，所以 $B = \dot{\phi}_0/\omega$。相位增加 2π 后运动重复，因此周期为 $2\pi/\omega$，即

$$\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + (qE/m)^2}}}.$$

振动变量 ϕ 从新的平衡方向量起，因此切向回复力在 $\phi = 0$ 时为零。$E = 0$ 回到普通单摆，改变电荷符号只改变偏转方向，不改变同场强下的小振动周期。

例 6.15 (反平方衰减电场的飞行时间)**.** 一维正电场 $E(x)=E_0/(1+x/a)^2$, $x\geq 0$。正粒子 q,m 从原点静止释放，求到 $x=X$ 的速度和时间，忽略其他力。

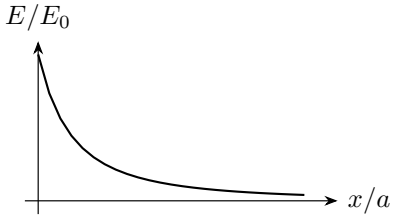


图 6.42: 反平方衰减电场的飞行时间

解　先由带符号电场积分求正向速度

图 6.42 沿图中从 0 到 X 的路径，令 $u=1+x/a$，则 $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}u$，积分上下限为 1 与 $1+X/a$:

$$\begin{aligned} W &= qE_0\int_0^X (1+x/a)^{-2}\,\mathrm{d}x = qE_0a\int_1^{1+X/a} u^{-2}\,\mathrm{d}u \\ &= qE_0a[-u^{-1}]_1^{1+X/a} = qE_0a\left(1-\frac{a}{a+X}\right) = \frac{qE_0aX}{a+X}. \end{aligned}$$

由 $mv^2/2=W$，得

$$v(X)=v_\infty\sqrt{\frac{X}{a+X}},\qquad v_\infty=\sqrt{2qE_0a/m}.$$

粒子一直向右，速度取正根；虽电场趋零，速率仍趋于非零的有限极限。

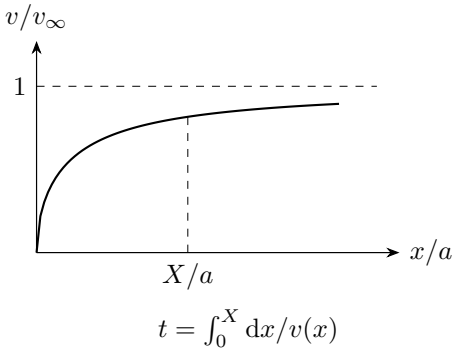


图 6.43: 正向速率随位置增长并趋于有限值，时间积分取正分支

由速度降阶为时间积分

沿图 6.43 时间由

$$t(X)=\frac{1}{v_\infty}\int_0^X\sqrt{\frac{a+x}{x}}\,\mathrm{d}x$$

求出。

用双曲代换完成积分

原时间积分在 $x=0$ 处是反常积分，先从正下限 $\epsilon>0$ 积起，最后令 $\epsilon\to0^+$。令 $x=a\sinh^2u$，并选 $u\geq0$。此时

$$\mathrm{d}x=2a\sinh u\cosh u\,\mathrm{d}u,\qquad\sqrt{\frac{a+x}{x}}=\frac{\cosh u}{\sinh u}.$$

下限 $x=\epsilon$ 对应 $u=\operatorname{arsinh}\sqrt{\epsilon/a}$，随 $\epsilon\to0^+$ 趋于 0。约去 $\sinh u$ 后，被积式为 $2a\cosh^2u$，在 $u=0$ 连续，因此新积分可直接以下限 0 计算。当 $x=X$ 时 $u=u_X=\operatorname{arsinh}\sqrt{X/a}$。乘积中 $\sinh u$ 抵消，利用 $2\cosh^2u=1+\cosh2u$：

$$\begin{aligned}t(X)&=\frac{2a}{v_\infty}\int_0^{u_X}\cosh^2u\,\mathrm{d}u=\frac{a}{v_\infty}\int_0^{u_X}(1+\cosh2u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{a}{v_\infty}\left[u+\frac12\sinh2u\right]_0^{u_X}=\frac{a}{v_\infty}(u_X+\sinh u_X\cosh u_X).\end{aligned}$$

由 $\sinh u_X=\sqrt{X/a}$、$\cosh u_X=\sqrt{1+X/a}$，还原得到

$$t(X)=\frac{\sqrt{X(a+X)}+a\,\operatorname{arsinh}\sqrt{X/a}}{v_\infty}.$$

小位移与大位移时的飞行时间

小位移时分子主项 $2\sqrt{aX}$，回到恒加速度时间 $\sqrt{2mX/(qE_0)}$；大位移时 $t/X\to1/v_\infty$，与速度极限一致。

例 6.16 (同号库仑散射的偏转角)**.** 粒子从远处以速率 v、瞄准距 $b>0$ 射向固定同号点电荷 Q，粒子电量 q、质量 m。求散射偏转角，并讨论正碰与大瞄准距极限。

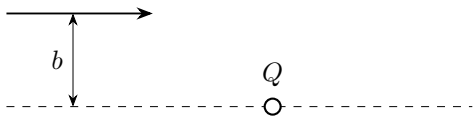


图 6.44: 同号库仑散射的偏转角

解　由入射几何确定能量与角动量

图 6.44 中，远处势能趋于零，故总能量 $\mathcal{E}=mv^2/2$。令 $\alpha=kqQ>0$，角动量大小为 $\ell=mvb$；取最近点为极角零，极角 φ 沿实际运动方向增大，于是 $\ell=mr^2\dot\varphi$。图 6.45 的 P 是最近点，速度在那里纯沿切向。

按最近点对称性求中心力轨道

令 $u=1/r$，撇号表示对极角 φ 求导。角动量关系先把时间导数换成极角导数：

$$\begin{aligned}\dot\varphi&=\frac{\ell u^2}{m},\\ \dot r&=-\frac{u'}{u^2}\dot\varphi=-\frac{\ell}{m}u',\\ \ddot r&=-\frac{\ell}{m}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}=-\frac{\ell}{m}u''\dot\varphi=-\frac{\ell^2}{m^2}u^2u''.\end{aligned}$$

径向向外为正，库仑斥力为 α/r^2。代入径向牛顿方程，得到

$$\begin{aligned}m(\ddot r-r\dot\varphi^2)&=\alpha u^2,\\ -\frac{\ell^2}{m}u^2(u''+u)&=\alpha u^2,\qquad u''+u=-\frac{m\alpha}{\ell^2}.\end{aligned}$$

令 $c=m\alpha/\ell^2$，先取常数特解 $u_p=-c$，再令 $w=u+c$，便有 $w''+w=0$。试取 $w=e^{s\varphi}$，两次对极角求导为 $w'=se^{s\varphi}$、$w''=s^2e^{s\varphi}$，代入得 $(s^2+1)e^{s\varphi}=0$，特征根为 $s=\pm i$。由 $e^{\pm i\varphi}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$ 合成两个独立实解，所以

$$w=A\cos\varphi+B\sin\varphi,\qquad u=A\cos\varphi+B\sin\varphi-c.$$

求导为 $u'=-A\sin\varphi+B\cos\varphi$。最近点处 $\dot r=0$，由前面的 $\dot r=-(\ell/m)u'$ 可知 $u'(0)=0$，代入即得 $B=0$。把剩余系数写为 $A=m\alpha e/\ell^2$，得

$$\frac{1}{r}=\frac{m\alpha}{\ell^2}(e\cos\varphi-1).$$

系数 e 还需由能量确定。将径向、切向速度分别写入动能：

$$\mathcal{E}=\frac{m}{2}(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2)+\frac{\alpha}{r}=\frac{\ell^2}{2m}(u'^2+u^2)+\alpha u.$$

记 $c=m\alpha/\ell^2$，则 $u=c(e\cos\varphi-1)$、$u'=-ce\sin\varphi$，从而

$$u'^2+u^2=c^2(e^2-2e\cos\varphi+1).$$

代回能量式后，含 $\cos\varphi$ 的两项相消，留下

$$\mathcal{E}=\frac{m\alpha^2}{2\ell^2}(e^2-1),\qquad e=\sqrt{1+\frac{2\mathcal{E}\ell^2}{m\alpha^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{mv^2b}{\alpha}\right)^2}>1.$$

图示 $kqQ/(mv^2)=b,\ \chi=\pi/2$

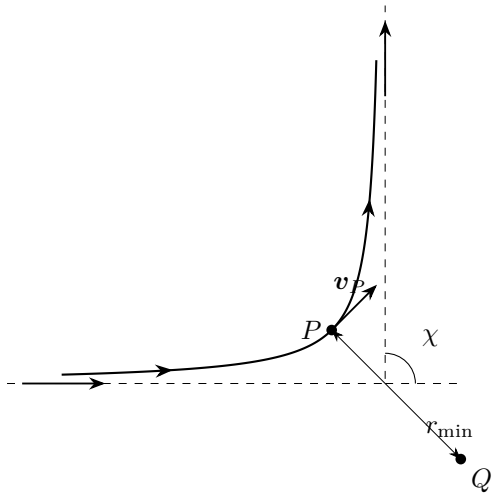


图 6.45: 精确斥力双曲线、最近点切向速度和入出渐近方向

由径向渐近线转成速度偏转角

图 6.45 的入、出渐近线满足 $1/r=0$，即 $\cos\varphi_\infty=1/e$。两条径向渐近线张角 $2\varphi_\infty$，速度偏转角是其补角 $\chi=\pi-2\varphi_\infty$，因此 $\sin(\chi/2)=1/e$。进一步

$$\tan\frac{\chi}{2}=\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}=\frac{kqQ}{mv^2b},\qquad \chi=2\arctan\frac{kqQ}{mv^2b}.$$

正碰与大瞄准距

$b\to 0$ 时 $\chi\to\pi$，正碰反弹；b 很大时 $\chi\simeq 2kqQ/(mv^2b)$，小角偏转。远处初末速率相同，斥力持续改变速度的方向。

6.8　本讲小结

带电粒子运动由 $m\ddot{\boldsymbol{r}}=q\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}_{\text{其他}}$ 决定。电势差给出功和速率，分运动确定位置、方向与时间；中心场中的角动量把入射几何与最近距离相连。多球系统再由总动量与几何约束确定各球速度。

匀强场中的加速、偏转与离场漂移分段接续。时变电场题中，每段末位置和末速度成为下一段初值。方波下的速度图可逐周期重复，位移则由图下面积逐次累加；任意相位释放的问题还需追踪第一次前进与返程。

有限极板的通过条件由实际在场时间内的位移最大值和最小值确定。喷滴的最短时间来自竖直方向，最大覆盖来自水平喷射极限；绳联多球的最大速度则由位置参数函数的单调性及绳张力共同确定。

6.9 练习

练习 6.1 (电子束的屏上范围与撞板限制)**.** 电子由变化加速电压 $0 < u \le 800\,\mathrm{V}$ 加速，从中线进入偏转板，$L = 0.20\,\mathrm{m}, d = 0.050\,\mathrm{m}$，出口至屏 $b = 0.10\,\mathrm{m}$。上板相对下板的电势差为 $U' \ge 0$，以不接触极板为通过条件。求至少有电子能通过并打屏的 U' 范围；$U' = 50\,\mathrm{V}$ 时求屏上纵向范围。忽略电子过场期间电压变化。

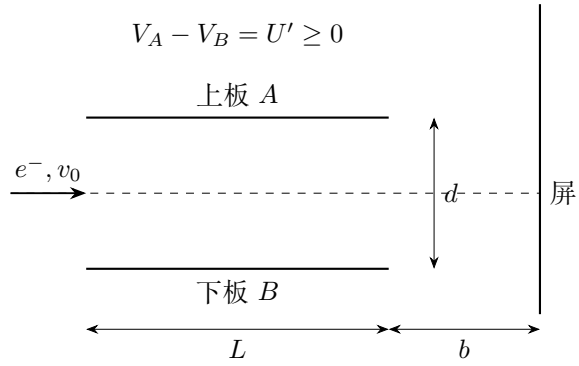


图 6.46: 电子的入场位置、偏转板极性与屏的几何位置

练习 6.2 (向下半空间喷出的带电漆滴)**.** 两水平板相距 $d = 0.30\,\mathrm{m}$，场由下板指向上板，$E = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{N/C}$。上板中心喷枪以速率 $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ 向下半空间各方向喷负漆滴，$m = 2.0 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg}$、$q = -2.0 \times 10^{-16}\,\mathrm{C}$。忽略重力与相互作用，下板足够大。求落到下板的动能、最短时间和覆盖圆面积。

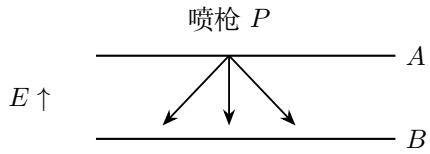


图 6.47: 向下半空间喷出的带电漆滴

练习 6.3 (匀强电场与重力的合加速度)**.** 质量 m、电量 $q>0$ 的小球由原点静止释放，电场水平向右，重力竖直向下。求轨迹、经过高度落差 h 时的位移与速度方向。

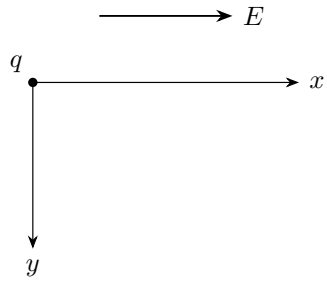


图 6.48: 匀强电场与重力的合加速度

练习 6.4 (线性回复电场中的振动)**.** 一维电场 $E_x=-\beta x$，$\beta>0$。正粒子 q,m 从 $x=A$ 静止释放，忽略其他力，求运动、周期与最大速度，并讨论负粒子。

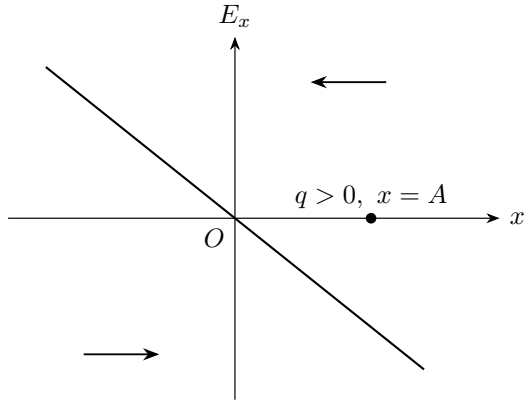


图 6.49: 回复电场在原点变号，两侧均指向原点

练习 6.5 (斥力散射的最近距离)**.** 粒子 q,m 从远处以速率 v、瞄准距 b 射向固定同号点电荷 Q。求最近距离 $r_{\min}$。

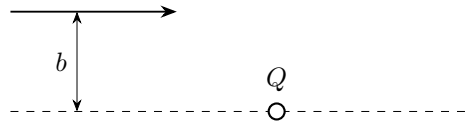


图 6.50: 斥力散射的最近距离

练习 6.6 (速度连续的两段电场)．正粒子从静止开始，前 t_0 受加速度 a，接着受 $-2a$，直到第一次停止。求停止时刻与总位移，并画速度图。

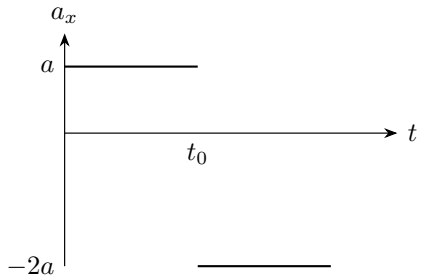


图 6.51: 速度连续的两段电场

练习 6.7 (斜入射偏转板的最危险位置)．板间允许 $-d/2 < y < d/2$，长 L。粒子入场 $y = 0$，$v_x = v > 0, v_y = u > 0$，竖直加速度恒为 $-a$，$a > 0$。给出不撞板的完整条件。

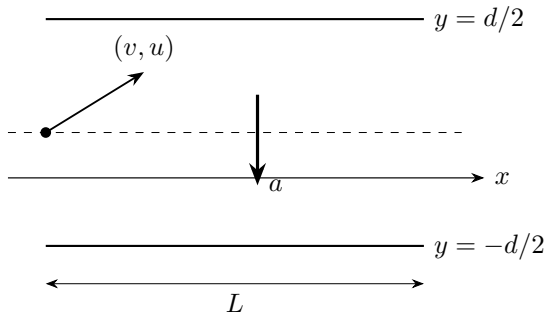


图 6.52: 只保留题给的两板位置、初速度与向下加速度

练习解答

练习 6.1

解　由加速电压求水平速率与出口偏移

在图 6.46 加速后 $v_x^2 = 2eu/m$，电子向上偏转，加速度 $eU'/(md)$。出口偏移 $y_L = U'L^2/(4du)$。不接触极板要求 $y_L < d/2$，所以 $u > U'L^2/(2d^2)$；单向向上弯曲时，出口确为场内最高点。

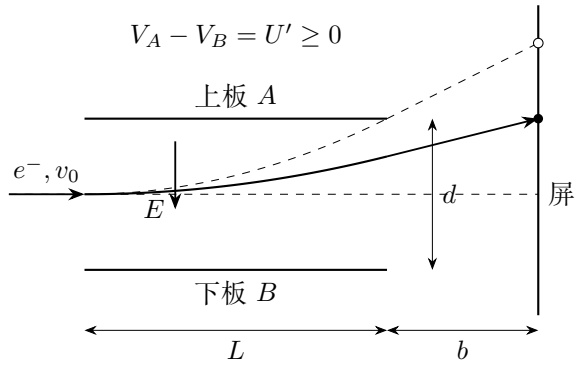


图 6.53: 虚线为恰触出口上边缘的极限，实际通过轨迹位于其下方

把通过条件与最大加速电压联合求范围

由图 6.53 中代入参数，$L^2/(2d^2) = 8$，因而 $u > 8U'$。至少有电子通过要求 $8U' < 800$，即 $0 \leq U' < 100\,\mathrm{V}$。等号时只有最大加速电压的电子恰触出口边缘，不符合题设通过条件。这个范围使允许加速电压区间 $(8U', 800]$ 非空。

只对实际通过的电子求屏上区间

屏位移 $Y = U'L(b + L/2)/(2du) = (20\,\mathrm{V}\cdot\mathrm{m})/u$。当 $U' = 50\,\mathrm{V}$，可通过的加速电压为 $400 < u \leq 800\,\mathrm{V}$，故屏上向上范围为 $0.025 \leq Y < 0.050\,\mathrm{m}$，下界由 $u = 800\,\mathrm{V}$ 的电子取得。u 从大于 $400\,\mathrm{V}$ 的一侧接近该值时，屏位移趋近上端。

练习 6.2

解　用固定高度差求所有落板漆滴的共同动能

图 6.47 负滴受力向下，$a = |q|E/m = 100\,\mathrm{m/s^2}$。各路径下降相同高度 d，电力作功相同，故落板动能 $K_f = mv_0^2/2 + |q|Ed = 4.6 \times 10^{-13}\,\mathrm{J}$。

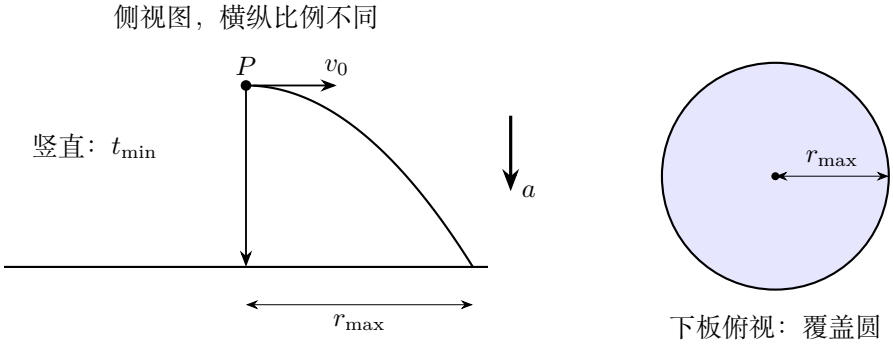


图 6.54: 竖直喷射取得最短时间，水平喷射极限取得最大覆盖范围

按初始竖直分量求到达时间并取最小值

在图 6.54 设初速度向下分量 $w \in [0, v_0]$，有 $d = wt + at^2/2$。两边乘 $2a$，把含时间的项配成平方，

$$a^2t^2 + 2awt = 2ad, \qquad (at + w)^2 = w^2 + 2ad.$$

时间 $t > 0$、$w \geq 0$，所以 $at+w > 0$，只能取正平方根，得到 $t = (\sqrt{w^2 + 2ad}-w)/a$。对初始向下速度 w 求导：

$$t'(w) = \frac{1}{a}\left[\frac{2w}{2\sqrt{w^2 + 2ad}} - 1\right] = \frac{1}{a}\left(\frac{w}{\sqrt{w^2 + 2ad}} - 1\right) < 0.$$

所以到达时间随 w 增大而减小。最短时间在竖直下喷，$t_{\min} = (\sqrt{460} - 20)/100 \simeq 1.45 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$。

分别优化水平射程并转成覆盖面积

水平射程 $r = \sqrt{v_0^2 - w^2}\, t(w)$，其中两个非负因子均随 w 增大而减小，故最大射程在 $w = 0$ 的水平喷射极限：$r_{\max} = v_0\sqrt{2d/a} = \sqrt{2.4}\,\mathrm{m}$。各方位与中间方向连续，覆盖圆面积 $A = \pi r_{\max}^2 = 2.4\pi\,\mathrm{m}^2$。最短时间和最大射程由不同喷射方向取得：竖直下喷使飞行时间最短，接近水平喷射使覆盖半径最大。

练习 6.3

解　沿固定坐标分解合加速度并消去时间

图 6.48 取向右 x、向下 y，加速度分量为 $qE/m, g$。由静止释放得 $x = qEt^2/(2m)$、$y = gt^2/2$，所以 $x/y = qE/(mg)$，轨迹为直线。

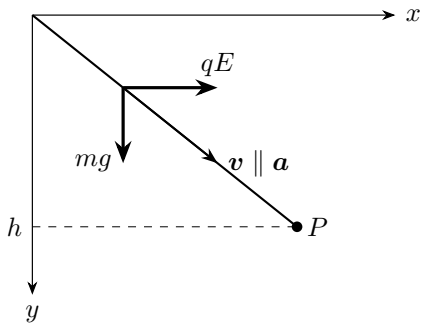


图 6.55: 静止释放时速度始终沿合加速度，落差 h 确定到达点

用给定落差求到达位置和速度方向

在图 6.55 当 $y=h$ 时 $t=\sqrt{2h/g}$、$x=qEh/(mg)$，速度分量 $v_x=(qE/m)\sqrt{2h/g}$、$v_y=\sqrt{2gh}$，方向始终与合加速度一致。

静止释放的轨迹

由静止开始时，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}t$、$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}t^2/2$，位移和速度都沿合加速度方向，因此得到图中的直线。

练习 6.4

解　按正电荷符号列回复力方程

图 6.49 正粒子受回复力 $-q\beta x$，方程 $\ddot{x}+\omega^2x=0$，$\omega=\sqrt{q\beta/m}$。试取指数解 $x=e^{\lambda t}$，则 $\dot{x}=\lambda e^{\lambda t}$、$\ddot{x}=\lambda^2e^{\lambda t}$，代回有 $(\lambda^2+\omega^2)e^{\lambda t}=0$，因指数不为零，得到特征方程 $\lambda^2+\omega^2=0$，两根为 $\lambda=\pm i\omega$。实通解为

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

对时间求导，$v=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$。初条件 $x(0)=A$、$v(0)=0$ 分别给 $C_1=A$、$C_2\omega=0$，故

$$x=A\cos\omega t,\qquad v=-A\omega\sin\omega t.$$

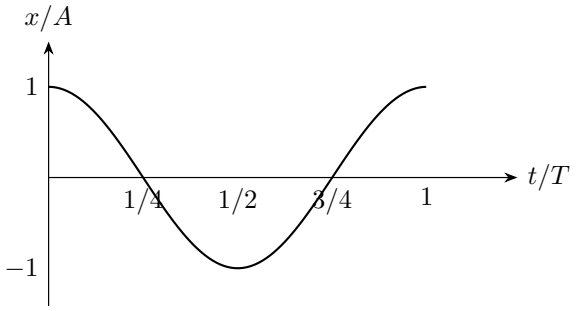


图 6.56: 一完整周期的位移图；过原点时速率最大，端点速度为零

周期与最大速率

图 6.56 周期 $T=2\pi/\omega$，最大速度 $A\omega$。电势差由场积分得到

$$V(x)-V(0)=-\int_0^x E(s)\,\mathrm{d}s=\beta\int_0^x s\,\mathrm{d}s=\beta\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}\beta x^2.$$

用能量也得 $mv_{\max}^2/2=q\beta A^2/2$。

改变电荷符号后重新判断稳定性

若为负粒子，令 $\Omega=\sqrt{|q|\beta/m}$，方程为 $\ddot{x}-\Omega^2x=0$。仍取 $x=e^{\lambda t}$ 及上述两次导数，代回为 $(\lambda^2-\Omega^2)e^{\lambda t}=0$。特征方程 $\lambda^2-\Omega^2=0$ 给实根 $\lambda=\pm\Omega$，故通解为 $x=C_+e^{\Omega t}+C_-e^{-\Omega t}$。同样的初条件给

$$C_++C_-=A,\qquad \Omega(C_+-C_-)=0,$$

所以 $C_+=C_-=A/2$，运动为

$$x=A\cosh(\Omega t),\qquad v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A\sinh(\Omega t)\cdot\Omega.$$

非零初偏离向外增长，位移随双曲余弦增长，原点平衡不稳定。

练习 6.5

解　由入射速度和瞄准距保留角动量

图 6.50 远处能量 $\mathcal{E}=mv^2/2$、角动量 $\ell=mvb$。

在最近点保留非零切向动能

最近点径向速度零，切向速度仍为 $\ell/(mr_{\min})$，于是

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{mv^2b^2}{2r_{\min}^2}+\frac{kqQ}{r_{\min}}.$$

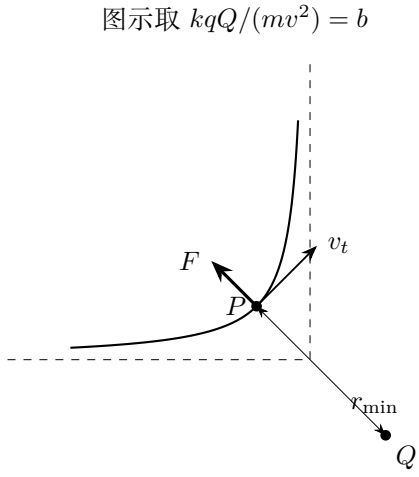


图 6.57: 最近点速度与半径垂直，斥力沿半径向外

最近距离的二次方程

在图 6.57 令 $\eta = kqQ/(mv^2) > 0$，将能量式乘 $2r_{\min}^2/(mv^2)$，得到 $r_{\min}^2 = b^2 + 2\eta r_{\min}$。移项配方，

$$(r_{\min} - \eta)^2 = \eta^2 + b^2, \qquad r_{\min} = \eta \pm \sqrt{\eta^2 + b^2}.$$

负号根不为正；物理距离取 $r_{\min} = \eta + \sqrt{\eta^2 + b^2}$。$b = 0$ 时最近点总速度才为零，距离 2η；$Q \to 0$ 则距离趋于几何瞄准距 b。

练习 6.6

解　先求第一段末状态作为下一段初态

图 6.51 第一段末速度 $v_0 = at_0$、位移 $x_0 = at_0^2/2$。

接续速度确定首次停止时刻

第二段令经过时间 τ，速度 $v = at_0 - 2a\tau$，首次零速在 $\tau = t_0/2$，所以绝对时刻为 $3t_0/2$。

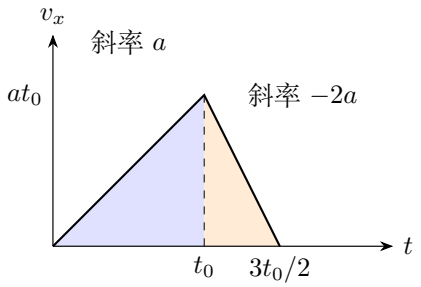


图 6.58: 换场前后速度连续，两块三角形面积相加给总位移

速度图的面积与总位移

图 6.58 速度图为两段相接直线，其面积给总位移

$$x = \frac{1}{2}at_0^2 + \frac{1}{2}(at_0)(t_0/2) = \frac{3}{4}at_0^2.$$

第二段的位移积分为 $\int_0^{t_0/2}(at_0 - 2a\tau)\,\mathrm{d}\tau = [at_0\tau - a\tau^2]_0^{t_0/2} = at_0^2/4$，它就是第二个三角形的面积。

练习 6.7

解　用水平运动确定实际在场时间

图 6.52 水平运动给飞行时间 $T = L/v$，竖直位置 $y(t) = ut - at^2/2$。

按曲线凹性确定最小值与最大值的位置

固定初速度 u 与加速度大小 a，逐次求导：

$$y'(t) = u - \frac{a}{2}(2t) = u - at, \qquad y''(t) = -a < 0.$$

因此曲线凹向下。由 $y'(t_*) = 0$ 解得 $t_* = u/a$；若它位于 $[0, T]$ 内，就是最大值点，代入得到 $y(t_*) = u(u/a) - (a/2)(u/a)^2 = u^2/(2a)$。最小值则在时间区间的两个端点之一。

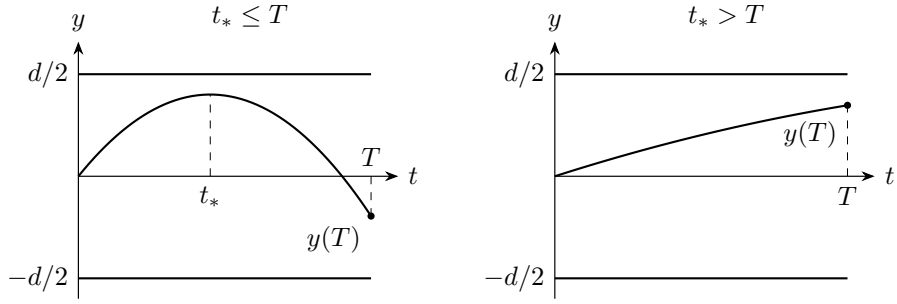


图 6.59: 比较板内顶点和出口高度，横线表示两块极板允许的位置范围

出口位置与场内最高点

在图 6.59 下板条件由出口 $y(T) > -d/2$，因为入口为零且曲线凹向下。上板条件分两种：若 $u/a \le T$，需 $u^2/(2a) < d/2$；若 $u/a > T$，整个场内仍上升，需 $uT - aT^2/2 < d/2$。这两项与出口下板条件共同构成完整条件。

场内顶点的作用

左图的最高点在 t_*，出口可能低于入射高度。右图的最高点就是出口。两图均以虚线标出 T 对应的出口位置。

电路

物理竞赛一轮讲义

第一讲

稳恒电流与导电模型

2026

目录

第一讲　稳恒电流与导电模型 **1**

1.1　电荷输运与局域导电规律 1

1.2　材料交界面与电流的重新分布 4

1.3　非均匀电流场的微元方法 5

1.4　电动势、电势差与功率 7

1.5　漂移、碰撞与惯性效应 10

1.6　例题与分析 13

1.7　本讲小结 29

1.8　练习 30

练习解答 33

第一讲　稳恒电流与导电模型

1.1　电荷输运与局域导电规律

1.1.1　电流由穿过截面的电荷定义

金属中的自由电子即使没有外加电场也在运动，但各个方向的热运动在宏观上相互抵消。外加电场使原有无规则运动叠加一个平均定向运动，电流由这种净电荷输运形成。先给截面选定正法向，在时间 Δt 内沿此方向通过的净电荷为 ΔQ，则瞬时电流为

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

这里的 I 是有正负的量。负电荷向正法向运动贡献负电流；负电荷反向运动贡献正电流。给支路指定电流箭头是在建立代数约定，求出负值后再说明实际方向，此后始终按同一箭头列代数方程。

接通电路时，电磁作用沿装置传播，各处已有的电子随当地电场建立定向运动。漂移速率描述载流子的平均净位移，电路响应则与电磁作用的传播相联系。后面的铜导线题将估算前一种速度及对应的漂移时间。

设同一种载流子的数密度为 n、单个电荷为 q、平均定向速度为 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$。在很短时间 $\mathrm{d}t$ 内，平均漂移扫过面积元 $\mathrm{d}S$ 的有向体积为 $(\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} \cdot \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$。乘以 nq 得到有符号的输运电荷，因而电流密度和截面电流为

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}, \qquad I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

若有多种载流子，应先求 $\boldsymbol{j} = \sum_s n_s q_s \boldsymbol{v}_s$，再对截面积分。电解液中正、负离子反向运动，两个电流贡献可以同向；金属中的正离子一般固定在晶格附近，通常只有自由电子贡献输运电流。

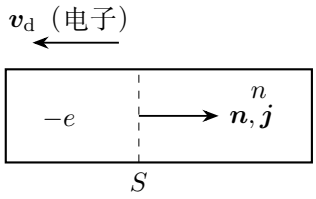


图 1.1: 截面法向与电子漂移

图 1.1 中电子漂移向左，而 $q=-e$，所以电流密度向右。若截面内的 n 和速度都均匀，且速度垂直截面，公式才可简化为 $I=neSv_{\mathrm{d}}$，其中 e、v_{d} 均取大小。导线弯曲或截面变化时仍应从通量定义判断面积，沿电流管取横截面，便可确定各处电流密度。

1.1.2 稳恒电流与导体内部的电场

任取导体中的一小段体积，若流入、流出的电流不相等，体积内就会积累电荷。电荷连续性写成

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\text{内}}}{\mathrm{d}t}=-\oint_{\partial V}\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

稳恒时左端为零，因此没有分支的一条导电通道各截面电流相同；但在截面不同处，电流密度可以不同。均匀细棒中 $j=I/S$，棒变细时 j 增大。维持稳恒电流需要电场持续对载流子做功，导体表面少量电荷的非均匀分布建立了适当的内部电场。

有电阻的载流导体中，电场持续对载流子作功，维持平均定向运动。对各向同性、处在欧姆区间内的材料，局域规律为

$$\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E},\qquad \rho=\frac{1}{\sigma}.$$

电导率 σ 的单位是 $\mathrm{S/m}$，电阻率 ρ 的单位是 $\Omega\cdot\mathrm{m}$。温度、杂质和材料方向都会影响它们。以下先取温度一定、材料参数稳定的欧姆模型；讨论非线性元件或温升时，再按实际工作点写电压与电流关系。

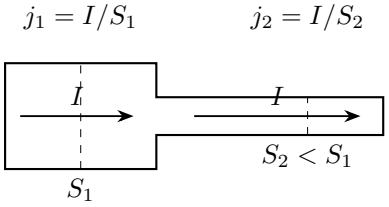


图 1.2: 无分支稳恒导体：相同电流通过不同截面，细段的电流密度更大

图 1.2 中，两截面间没有电荷持续积累，所以 $I_1=I_2$。材料电阻率相同时，$E_2/E_1=j_2/j_1=S_1/S_2$；面积较小的段中电流密度与场强较大。台阶附近存在端部效应，图中各段的均匀场关系只用于远离接合处的区域。

1.1.3 从局域规律得到整个导体的电阻

取长为 l、横截面积为 S 的均匀细棒，两端的等势截面分别为 A, B。忽略端部效应时，$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{E}$ 都沿棒轴，故

$$j = \frac{I}{S}, \qquad E = \rho\frac{I}{S}, \qquad U_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \rho\frac{Il}{S}.$$

因此 $R = U_{AB}/I = \rho l/S$。这里同时用了截面均匀、材料均匀、电流近似平行以及两端为等势面等条件。均匀细棒中 E 为常量，积分为 El。在缓慢变截面细棒中，稳恒条件仍给出同一 I，但 $j(x) = I/S(x)$ 与 $E(x) = \rho(x)I/S(x)$ 随位置变化。于是相邻截面之间的薄层电势降为 $\mathrm{d}U = E(x)\,\mathrm{d}x = I\rho(x)\,\mathrm{d}x/S(x)$，对应串联电阻为

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho(x)}{S(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad R = \int_0^l \frac{\rho(x)}{S(x)}\,\mathrm{d}x.$$

之所以是串联，是因为同一电流依次穿过每个薄层，而各层电势差相加。若微元两端属于同一对等势面，电压相同、通过的电流相加，则应把电导相加。微元怎样组合由电流路径和等势面决定，串联时积电阻，并联时积电导。

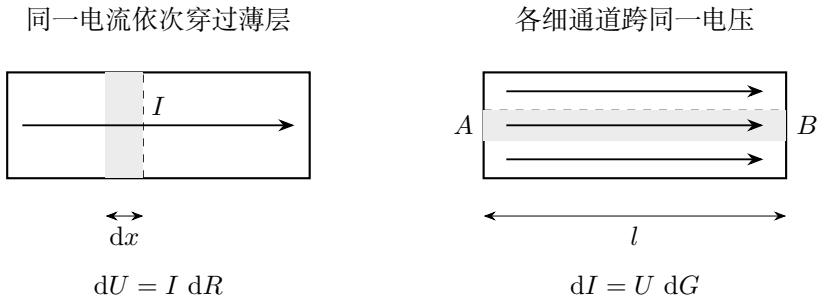


图 1.3: 微元的连接方式由等势面和电流路径确定：左串联，右并联

图 1.3 左侧的薄层是串联微元，电压逐层相加。右侧若材料性质随横向位置改变，每条轴向细通道连接同一对等势端面 A, B，则 $\mathrm{d}G = \sigma\,\mathrm{d}S/l$，于是

$$G = \frac{1}{l}\int_S \sigma\ \mathrm{d}S, \qquad R = \frac{l}{\int_S \sigma\ \mathrm{d}S}.$$

同样是非均匀材料，沿电流方向变化与沿横截面变化给出不同的积分；确定等势面应先于选择积分式。

例 1.3 的电流依次穿过一层层同轴圆柱面。稳恒条件使每层通过相同的电流，半径增大时通过面积增大，因此电流密度随半径减小。

1.2　材料交界面与电流的重新分布

1.2.1　同一电流可以对应不同的电场

两个不同电阻率的导体端面紧密接合，截面均为 S，稳恒电流垂直穿过界面。电荷守恒要求 $j_1 = j_2 = I/S$，局域欧姆关系却给出 $E_1 = \rho_1 I/S$、$E_2 = \rho_2 I/S$。当 $\rho_1 \neq \rho_2$ 时，界面两侧的法向电场不同。界面处少量电荷形成场强的变化，使两侧不同的导电率都对应同一法向电流密度。

在简化为两侧介电常数均为 ε_0 的模型中，用一小柱形闭合面跨过界面，法向取 $1 \to 2$。柱侧通量在厚度趋零时消失，两个端面通量之差为 $(E_2 - E_1)\Delta S$，由高斯定律等于界面电荷 $\Sigma \Delta S/\varepsilon_0$，故

$$\Sigma = \varepsilon_0 (E_2 - E_1) = \varepsilon_0 (\rho_2 - \rho_1) \frac{I}{S}.$$

若第二段电阻率更大，界面正电荷使右侧场强增加。电荷的具体建立过程属于接通后的暂态，而上式给出稳恒状态满足的表面电荷关系。两侧介电常数分别为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 时，自由面电荷相应写成 $D_{2n} - D_{1n}$。

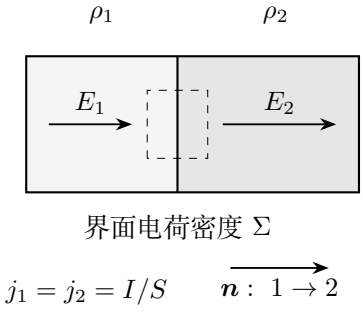


图 1.4: 相同法向电流穿过材料界面；跨界面的小柱形高斯面给出法向电场之差

图 1.4 的小柱左右端面的外法向相反，故通量是 $E_2 \Delta S - E_1 \Delta S$，左右两项的符号来自各端面的外法向。图中取 $\rho_2 > \rho_1$，右侧场较强、界面净电荷为正，电流仍连续。

这个例子把稳恒电流与静电场联系起来：电荷分布建立电场，电场经由局域欧姆规律确定电流。理想连接导线电阻很小，其电势降可忽略；研究有阻材料本身时，沿程电势降就是维持电流的驱动。

1.2.2　工作点电阻与微分电阻

对非线性元件，某工作点的 U/I 是连接原点与该点的割线斜率，$\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$ 则是该点切线斜率，二者一般不同。材料电阻率还需结合样品几何才能与端口电阻联

系。欧姆元件的 U-I 图线在所讨论的范围内为经过原点的直线，因此这两个斜率处处相等。非线性曲线上，某一点的割线和切线也可能恰好有相同斜率。若二者在一段非零电流区间上处处相等，按商法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}I}\left(\frac{U}{I}\right)=\frac{I(\mathrm{d}U/\mathrm{d}I)-U}{I^2}=0.$$

这段区间的 U/I 就是常量，图线在这段区间上落在经过原点的直线上。

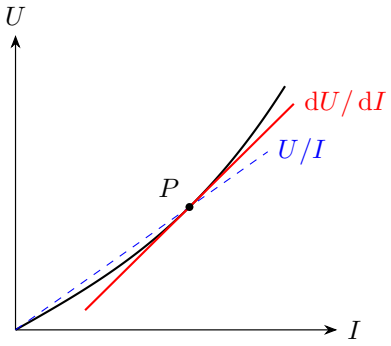


图 1.5: 同一工作点的割线斜率为工作点电阻，切线斜率为微分电阻

例如 $U=aI+bI^3$ $(a,b>0)$，在图 1.5 的工作点，先按定义求割线斜率，再把 a,b 作为常数对 I 求导：

$$R_{\mathrm{stat}}=\frac{aI+bI^3}{I}=a+bI^2,\qquad r_{\mathrm{diff}}=a\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}I}+b\frac{\mathrm{d}I^3}{\mathrm{d}I}=a+3bI^2.$$

前者描述该工作点的总电压与电流之比，后者描述在该点附近的小变化 $\mathrm{d}U\simeq r_{\mathrm{diff}}\,\mathrm{d}I$。只有当非线性项可忽略时，二者才近似相同。

1.3 非均匀电流场的微元方法

1.3.1 径向导电与同轴圆柱

两根同轴金属圆柱之间填充均匀导电材料，内、外半径为 a,b，有效长度为 h，金属端面的影响可忽略。圆柱对称性使电流沿径向流动，半径 r 处与电流垂直的面积是 $2\pi rh$。每个圆柱面都被总电流 I 穿过，故

$$j(r)=\frac{I}{2\pi rh},\qquad E(r)=\frac{\rho I}{2\pi rh}.$$

内圆柱电势较高时，电流和电场都指向外侧；电子漂移则反向。图 1.6 的虚线圆柱面半径为 r，面积为 $2\pi rh$；径向薄层厚度 $\mathrm{d}r$ 因而给 $\mathrm{d}R = \rho\,\mathrm{d}r/(2\pi rh)$。各薄层依次被同一电流穿过，形成串联，积分得到

$$U = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\rho I}{2\pi h}[\ln r]_a^b = \frac{\rho I}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}, \qquad R = \frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}.$$

半径越大，有效导电面积越大，单位径向长度的电势降越小，这正是积分产生对数的原因。若间隙 $d = b - a \ll a$，才可用 $\ln(1 + d/a) \simeq d/a$，得到平板近似 $R \simeq \rho d/(2\pi ah)$。

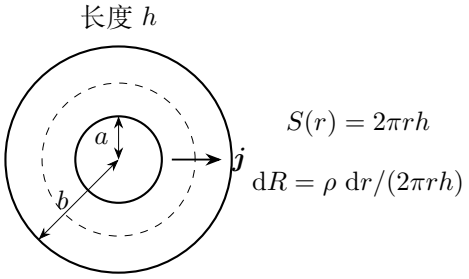


图 1.6: 径向电流穿过不同半径的等势面

1.3.2　接地电流的半球扩散与跨步电压

电流从地表小电极流入均匀大地。当地表可近似看成平面，观察距离远大于注入电极的尺寸、远小于回流电极的距离时，注入电流近似向地下半空间扩散。以注入点为球心的半球面面积为 $2\pi r^2$，故单个电极产生

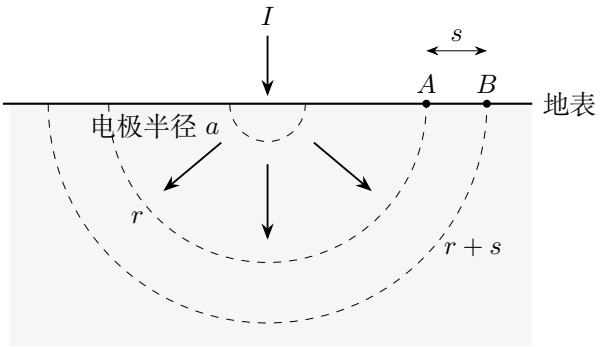
$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2}, \quad E(r) = \frac{\rho I}{2\pi r^2}, \quad V(r) = \frac{\rho I}{2\pi}\int_r^\infty s^{-2}\,\mathrm{d}s = \frac{\rho I}{2\pi}[-s^{-1}]_r^\infty = \frac{\rho I}{2\pi r}.$$

电势的零点选在无穷远，这只适用于回流足够远的单电极近似。半径为 a 的半球电极表面为等势面，从 $r = a$ 积分至无穷远，得到电极电势 $V(a) = \rho I/(2\pi a)$，从而接地电阻 $R = V(a)/I = \rho/(2\pi a)$。有限半径给出了积分的物理下限。

人两脚接触地面的位置不同，电势差应精确写成两接触点电势之差。两脚沿径向相距 s 时，

$$\Delta V = V(r) - V(r+s) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s}\right).$$

只有当 $s \ll r$ 时才可进一步写成 $E(r)s$。有一注入、一收集两电极时，各自产生的场按带符号电流叠加；位于两电极外侧和位于它们之间，两个场的方向关系不同，须先画方向再作代数相加。



$$V_A - V_B = \rho I[1/r - 1/(r+s)]/(2\pi)$$

图 1.7: 均匀大地半空间的轴截面；圆弧代表等势半球面，地表两点的电势不同

图 1.7 中，地表外法向没有电流，电流只向地下半空间扩散。A, B 分别位于半径 $r, r+s$ 的半球面上，先求各自电势再相减，便保留了场强随位置变化的影响。若加入近处回流电极，原先的同心等势面通常不再成立，但线性导电模型中各电极的电势贡献仍可叠加。

1.4 电动势、电势差与功率

1.4.1 沿闭合电路区别两种做功

稳恒电路中，静电场沿完整闭合路径所做的功为零。电阻中电场对电荷做正功，电源内部就存在一段电势上升过程，由化学作用等非静电作用把正电荷移向电势较高的一端。电动势定义为电源内部非静电力把单位正电荷从负端移到正端所做的功，

$$\mathcal{E} = \int_{\text{负端}}^{\text{正端}} \frac{\boldsymbol{f}_{\text{非静电}}}{q} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

电动势和电压单位相同，但一个表征能量转换作用，一个表征两点电势差。含内阻 r 的电源向外放电时，电流从正端流出，端电压为 $U = \mathcal{E} - Ir$；被外电路充电时，电流从正端流入，若把充电电流大小记为 I，则 $U = \mathcal{E} + Ir$。

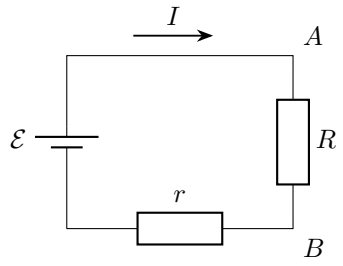


图 1.8: 电源放电与能量转换

图 1.8 中电源内阻 r 与外电阻 R 通过同一电流，端电压应跨外电阻的 A, B 两端定义。每秒非静电作用提供能量 $\mathcal{E}I$，其中 I^2r 在电源内耗散，外电路获得 UI，所以

$$\mathcal{E}I = UI + I^2r.$$

对于纯电阻，$P = UI = I^2R = U^2/R$；对于电动机、电解槽或充电电池，输入的 UI 分为机械能、化学能等能量与电阻发热，电阻部分的发热功率为 I^2R。

1.4.2 焦耳热与热平衡

体积元 $\mathrm{d}V$ 中每秒电场做功为 $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V$。各向同性欧姆材料有

$$p_V = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = \rho j^2 = \sigma E^2.$$

截面串联的两根同材质细棒电流相同，较细的一根电流密度更大，单位体积发热功率随 $1/S^2$ 增长；单位长度功率则随 $1/S$ 增长。初始温升速率由单位体积功率除以单位体积热容量得到，后续温度还受散热影响。

若电阻随温度变化，电路方程和热学方程需同时满足。例如设 $R(T) = R_0[1+\alpha(T-T_0)]$，散热功率近似为 $k(T-T_0)$。恒流条件下稳态应解 $I^2R(T) = k(T-T_0)$，恒压条件下则解 $U^2/R(T) = k(T-T_0)$，反馈方向不同。以下在线性电阻温度关系和线性散热适用的温度范围内，研究平衡点及温度偏离后的演化。

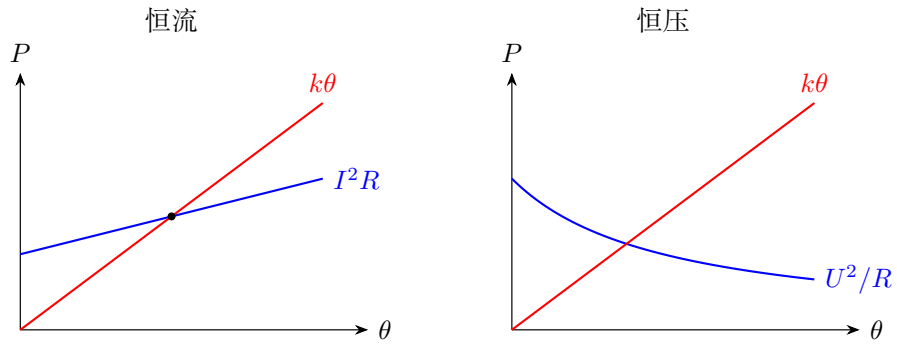


图 1.9: 正温度系数模型的热平衡；交点还须由净输入功率随温升的变化判断稳定性

图 1.9 取 $\alpha>0, k>0$，$\theta=T-T_0$。若总热容量为 C，恒流时的温升方程为

$$C\dot{\theta}=I^2R_0+(\alpha I^2R_0-k)\theta.$$

只有 $k>\alpha I^2R_0$，本线性模型才有正的稳定平衡温升 $\theta_*=I^2R_0/(k-\alpha I^2R_0)$。令 $k_{\text{eff}}=k-\alpha I^2R_0>0$，$\delta=\theta-\theta_*$，则 $C\dot{\delta}=-k_{\text{eff}}\delta$。若 $\delta(0)\neq 0$，分离变量积分为

$$\int_{\delta(0)}^{\delta(t)}\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{k_{\text{eff}}}{C}\int_0^t\mathrm{d}s,$$

$$[\ln|u|]_{\delta(0)}^{\delta(t)}=-\frac{k_{\text{eff}}}{C}[s]_0^t,$$

$$\ln\left|\frac{\delta(t)}{\delta(0)}\right|=-\frac{k_{\text{eff}}t}{C}.$$

指数化后先得 $|\delta(t)/\delta(0)|=\mathrm{e}^{-k_{\text{eff}}t/C}$。非零初值的解保持原符号，因此

$$\delta(t)=\delta(0)\mathrm{e}^{-k_{\text{eff}}t/C}.$$

初始偏差为零时原方程直接给 $\delta=0$。偏差随时间衰减，因此温升略高于交点时，散热超过发热，系统返回平衡。恒压时 U^2/R 随温升降低，与增大的散热构成负反馈；这里采用图中给定的正温度系数 $\alpha>0$。

1.5　漂移、碰撞与惯性效应

1.5.1　平均漂移速度为何能够保持稳定

电场使电子在两次碰撞之间加速，碰撞使有序动量传给晶格。长期平均后，电子的漂移速度可以稳定，而导体持续发热。可把平均阻碍作用表示成与漂移速度成正比的有效力。对电子有

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = -e\boldsymbol{E} - \frac{m}{\tau}\boldsymbol{v}_\mathrm{d}.$$

在稳恒状态中，$\boldsymbol{v}_\mathrm{d} = -e\tau\boldsymbol{E}/m$，因而

$$\boldsymbol{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\boldsymbol{E}, \qquad \rho = \frac{m}{ne^2\tau}.$$

这里 τ 是动量弛豫时间，其定义已经包含所用碰撞统计模型。若另设一个简化模型，规定每次碰撞把定向速度清零，且两次碰撞严格相隔 T，随机观察时的加速时间 t 在一个周期内均匀分布。因此

$$\bar{t} = \frac{1}{T}\int_0^T t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{T}{2}, \qquad \overline{\boldsymbol{v}} = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\bar{t} = -\frac{eT}{2m}\boldsymbol{E}.$$

再由 $\boldsymbol{j} = -ne\overline{\boldsymbol{v}}$，得到 $\rho = 2m/(ne^2T)$。固定间隔模型的平均加速时间为 $T/2$；弛豫模型用平均动量衰减时间 τ 描述同一宏观导电率。按照这两个具体模型比较，$\tau = T/2$ 对应相同的稳恒漂移。

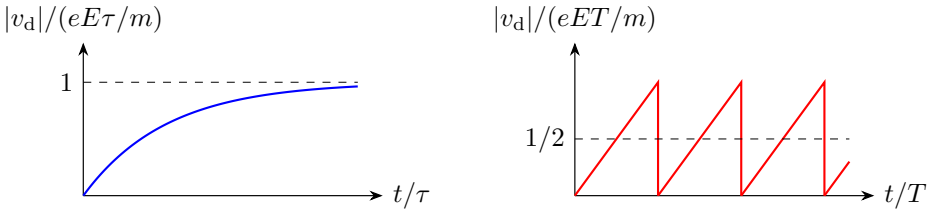


图 1.10: 左：阶跃电场后的平均漂移速率；右：严格定时清零模型，时间参数含义不同

图 1.10 左侧取初值 $\boldsymbol{v}_\mathrm{d}(0) = 0$。把平均运动方程写为 $\dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d} + \boldsymbol{v}_\mathrm{d}/\tau = -e\boldsymbol{E}/m$，乘积分因子 $\mathrm{e}^{t/\tau}$。由于其导数为 $\mathrm{e}^{t/\tau}/\tau$，乘积法则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{t/\tau}\boldsymbol{v}_\mathrm{d}) = \mathrm{e}^{t/\tau}\dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d} + \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{t/\tau}\boldsymbol{v}_\mathrm{d} = \mathrm{e}^{t/\tau}\left(\dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d} + \frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{d}}{\tau}\right).$$

于是原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{t/\tau}\boldsymbol{v}_\mathrm{d}) = -\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\mathrm{e}^{t/\tau}.$$

从 0 到 t 积分，

$$\begin{aligned}[\mathrm{e}^{s/\tau}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}(s)]_0^t &= -\frac{e\boldsymbol{E}}{m}\int_0^t \mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s \\ &= -\frac{e\boldsymbol{E}}{m}[\tau\mathrm{e}^{s/\tau}]_0^t = -\frac{e\tau\boldsymbol{E}}{m}(\mathrm{e}^{t/\tau}-1).\end{aligned}$$

除以积分因子并代入零初值，得到

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}(t) = -\frac{e\tau}{m}\boldsymbol{E}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

长期极限给出前面的稳恒漂移。右侧每个周期内定向速度线性增长后清零，平均值等于锯齿峰值的一半；平均值中的 $T/2$ 来自本节规定的固定碰撞间隔。

不必引入具体碰撞时间，也能由欧姆定律求稳恒时的有效阻力。取电子漂移速率大小为 v，由 $j = nev$ 与 $E = \rho j$，稳恒时阻力大小为

$$f_{\text{阻}} = eE = ne^2\rho v.$$

这里的 v 是平均漂移速率。微观上电子持续经历无规则运动与碰撞，电场提供的能量逐渐传给晶格，形成宏观焦耳热。

1.5.2 突然制动与加速导体中的电荷分离

金属棒和晶格突然停止时，自由电子因惯性仍有相对晶格的初速度。为说明惯性漂移，取一个理想模型，设全过程的平均轴向力为线性阻力，忽略电荷分离产生的附加电场和端部作用。电子速度满足 $m\dot{v} = -bv$，其中 $b = ne^2\rho$。记 $\tau = m/b$。对 $v_0 \neq 0$，分离变量并用初值，

$$\begin{aligned}\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} &= -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s, \\ [\ln|u|]_{v_0}^{v(t)} &= -\frac{1}{\tau}[s]_0^t, \\ \ln\left|\frac{v(t)}{v_0}\right| &= -t/\tau.\end{aligned}$$

速度在有限时间不变号，故 $v = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$；$v_0 = 0$ 时直接取零解。再积分位移，

$$x(t) - x(0) = v_0\int_0^t \mathrm{e}^{-s/\tau}\,\mathrm{d}s = v_0[-\tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t.$$

于是

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}, \qquad x(t) - x(0) = v_0\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}), \qquad \tau = \frac{m}{b}.$$

速度只在渐近意义上趋于零，相对总位移却有限，为 $v_0\tau$。在这个理想模型中，速度曲线下面积的极限就是总漂移位移。

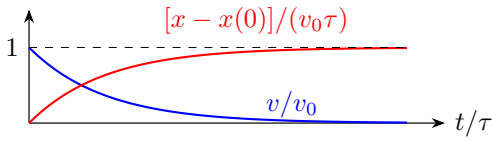


图 1.11: 忽略新生电场阶段的制动模型：速度渐近为零，累计相对位移趋于有限值

图 1.11 中的红线来自蓝线对时间的积分。速度衰减过程中仍有有限的净电荷输运，红色位移曲线逐渐接近 $v_0\tau$。

另一类问题考查导体达到无相对电流时的电场。竖直金属棒中的电子受到重力和电场力，简化为固定正离子背景且忽略晶格形变时，静止条件为 $-e\boldsymbol{E}+m\boldsymbol{g}=0$。由于电子带负电，电场须向下，电场力向上。旋转导体中自由电子若随晶格同速转动，需要向心力；在忽略其他径向作用的理想模型中，电场向外，电场力向内。沿径向写牛顿第二定律，先求提供向心力的电场，再积分得到电势差。

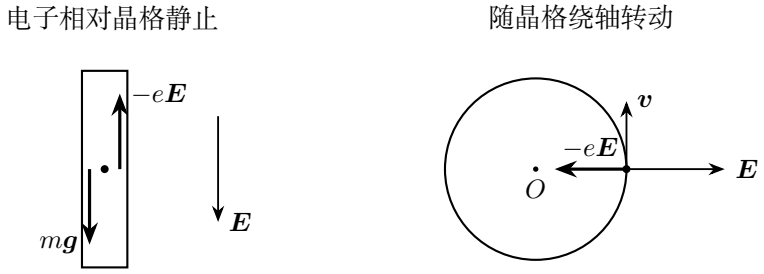


图 1.12: 固定正离子背景下的两个理想模型；电场力方向均与电子所受电场相反

图 1.12 左侧电子合力为零；右侧合力须向心，故 $eE_r = m\omega^2 r$。外侧电场指向外，而电势沿外向降低：

$$V(R)-V(0)=-\int_0^R \frac{m\omega^2 r}{e}\,\mathrm{d}r=-\frac{m\omega^2}{e}[r^2/2]_0^R=-\frac{m\omega^2R^2}{2e}.$$

这里采用固定正离子背景，电子所受重力或向心力由图示电场力平衡或提供。例题将沿相应方向写出带符号方程。

1.6 例题与分析

例 1.1 (铜导线中的漂移速度)**.** 铜导线直径 $d = 2.0\,\mathrm{mm}$，电流 $I = 7.6\,\mathrm{A}$。自由电子数密度 $n = 8.5 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}$，$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$。求漂移速率；电子平均漂移通过 $1.0\,\mathrm{m}$ 需多久?

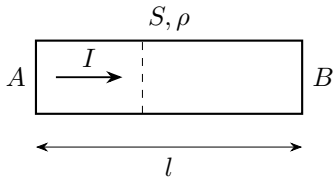


图 1.13: 铜导线中的漂移速度

解　按电流箭头确定电子漂移方向和截面积

取图 1.13 中 $A \to B$ 为电流正向。电子带负电，因此电子漂移方向是 $B \to A$，求速率时用 e 的大小。圆截面积为

$$S = \pi(d/2)^2 = \pi \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2.$$

以截面电荷输运求漂移速率

由时间 $\mathrm{d}t$ 内穿过截面的电子数 $nSv_\mathrm{d}\,\mathrm{d}t$ 得 $I = neSv_\mathrm{d}$，所以

$$v_\mathrm{d} = \frac{7.6}{8.5 \times 10^{28} \times 1.60 \times 10^{-19} \times \pi \times 10^{-6}} = 1.78 \times 10^{-4}\,\mathrm{m/s}.$$

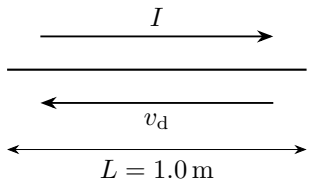


图 1.14: 铜导线中的漂移速度

计算平均净位移所需时间并区别电路响应

图 1.14 把电子位移和正电流方向分开画出。平均漂移通过距离 L 的时间为 $t = L/v_\mathrm{d} = 5.62 \times 10^3\,\mathrm{s}$，约 $94\,\mathrm{min}$。这个时间描述载流子的平均净位移。电路接通后的响应由电磁作用沿装置传播而建立。

例 1.2 (两种离子共同导电)**.** 电解液中正、负一价离子数密度均为 n。沿 $+x$ 的电场为 E，两种离子迁移率分别为 μ_+, μ_-，速率满足 $v_\pm = \mu_\pm E$。截面 S 垂直 x 轴。求电流、电导率和每单位体积的电功率。

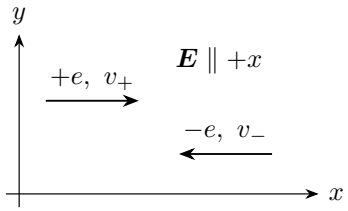


图 1.15: 两种离子共同导电

解　给两类离子的电荷和速度分别带符号

图 1.15 中正离子向右，负离子向左。分别代入带符号的 q 与速度，有

$$j_+ = ne\mu_+ E, \qquad j_- = n(-e)(-\mu_- E) = ne\mu_- E.$$

相加求电流密度和电导率

两项都为正，故 $j = ne(\mu_+ + \mu_-)E$，$I = jS$，而电导率为 $\sigma = j/E = ne(\mu_+ + \mu_-)$。

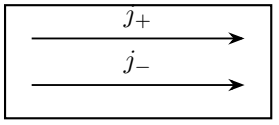


图 1.16: 正、负离子的输运对常规电流给出同向贡献

按两类载流子的总电流求局部功率

由图 1.16 中两股同向的电流密度，体积功率是

$$p_V = (j_+ + j_-)E = ne(\mu_+ + \mu_-)E^2.$$

迁移率单位 $\mathrm{m^2/(V\,s)}$，因而所得 σ 的单位是 S/m。当 $\mu_+ = \mu_- = \mu$ 时，两类离子各贡献 $ne\mu E$，总电流密度为 $2ne\mu E$。

例 1.3 (同轴圆柱间的导电材料)**.** 内外金属圆柱同轴，半径 a, b，长度 $h \gg b$，中间填充电阻率 ρ 的均匀材料。内圆柱电势比外圆柱高 U，忽略端部效应。求 $I, j(r), E(r)$ 及电阻，并求半径 r 处的体积发热功率。

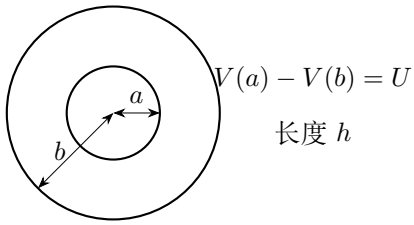


图 1.17: 同轴圆柱间的导电材料

解　由同轴对称性选径向串联薄层

在图 1.17 中取半径 r、厚 $\mathrm{d}r$ 的同轴薄层。由圆柱对称性，电流径向向外，各圆柱面通过同一总电流 I。图 1.18 标出径向电流所穿过的圆柱侧面积为 $2\pi rh$。

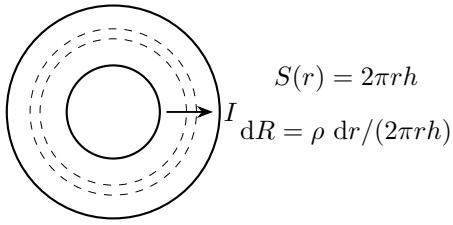


图 1.18: 同轴圆柱间的导电材料

由局域场积分求总电流和电阻

于是 $j = I/(2\pi rh)$，$E = \rho j$，薄层电压为 $\mathrm{d}U = \rho I\ \mathrm{d}r/(2\pi rh)$。积分得

$$U = \frac{\rho I}{2\pi h}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\rho I}{2\pi h}[\ln r]_a^b = \frac{\rho I}{2\pi h}\ln\frac{b}{a}, \qquad I = \frac{2\pi hU}{\rho\ln(b/a)}.$$

求径向电流密度和体积发热分布

故 $R = \rho\ln(b/a)/(2\pi h)$，并有

$$j(r) = \frac{U}{\rho r\ln(b/a)}, \quad E(r) = \frac{U}{r\ln(b/a)}, \quad p_V(r) = \frac{U^2}{\rho r^2\ln^2(b/a)}.$$

各薄层发热功率的积分

发热在内侧更强。求总功率时把体积元 $2\pi rh\,\mathrm{d}r$ 同时代入：

$$P=\frac{2\pi hU^2}{\rho\ln^2(b/a)}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}=\frac{2\pi hU^2}{\rho\ln^2(b/a)}[\ln r]_a^b=\frac{2\pi hU^2}{\rho\ln(b/a)}=UI.$$

当 $b-a\ll a$ 时所得电阻回到平板间隙近似，它与厚度 $b-a$、面积 $2\pi ah$ 的均匀薄层相对应。

例 1.4 (电阻率渐变的细棒)**.** 长 l、截面 S 不变的细棒，电阻率为 $\rho(x)=\rho_0(1+\beta x/l)$，$0\le x\le l$，$\beta>-1$。两端电势为 $V(0)=U,V(l)=0$。求电阻、电场和电势分布。

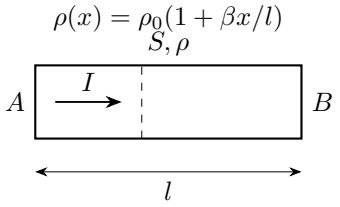


图 1.19: 电阻率渐变的细棒

解 用稳恒条件确定同一电流

图 1.19 中没有分支，故 I 与 x 无关，电流密度也保持 $j=I/S$。电阻率却随 x 变化，因而电场按 $\rho(x)$ 的比例变化。

积分渐变电阻率求电阻

微元串联给出

$$R=\int_0^l\frac{\rho_0}{S}\left(1+\frac{\beta x}{l}\right)\mathrm{d}x=\frac{\rho_0}{S}\left[x+\frac{\beta x^2}{2l}\right]_0^l=\frac{\rho_0 l}{S}\left(1+\frac{\beta}{2}\right).$$

由局域欧姆关系求位置相关电场

由 $I=U/R$，电场为

$$E(x)=\rho(x)\frac{I}{S}=\frac{U(1+\beta x/l)}{l(1+\beta/2)}.$$

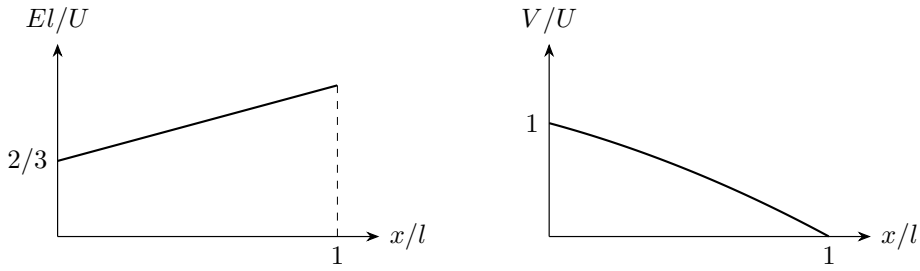


图 1.20: 取 $\beta = 1$ 示意电场和电势趋势；推导保留一般 $\beta > -1$

沿细棒的电势分布

图 1.20 的微元电势降为 $E(x)\,\mathrm{d}x$，所以从左端积分到 x，

$$V(x) = U - \int_0^x E(s)\,\mathrm{d}s = U - \frac{U}{l(1+\beta/2)}\left[s + \frac{\beta s^2}{2l}\right]_0^x = U - \frac{U}{1+\beta/2}\left(\frac{x}{l} + \frac{\beta x^2}{2l^2}\right).$$

代入 $x = 0, l$ 分别得到 $U, 0$。当 $\beta = 0$ 时，电场均匀、电势为直线；$\beta > 0$ 时右侧材料电阻率大，同一电流对应更大的场，电势曲线下降得更快。若 $-1 < \beta < 0$，场强则沿 $+x$ 减小，电势下降逐渐变缓；两种情况下 $\rho(x) > 0$ 都保证电势沿电流方向降低。

例 1.5 (半球电极与两脚间电势差)**.** 均匀大地电阻率 ρ。半径 a 的金属半球嵌入地面，向大地注入电流 I，回流电极非常远。地面两点距球心分别为 r 和 $r + s$，$r > a$。求接地电阻、两点电势差，并判断何时可用 Es 近似。

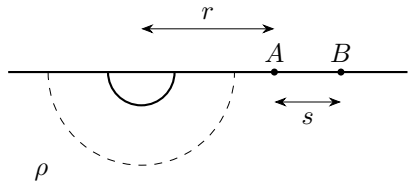


图 1.21: 半球电极与两脚间电势差

解　半球扩散的导电面积

图 1.21 地表沿法向无电流穿出，地下电流近似半球扩散。图 1.22 的半径 x 处有效面积是 $2\pi x^2$，故

$$E(x) = \rho\frac{I}{2\pi x^2}, \qquad V(x) = \frac{\rho I}{2\pi}\int_x^\infty u^{-2}\,\mathrm{d}u = \frac{\rho I}{2\pi}[-u^{-1}]_x^\infty = \frac{\rho I}{2\pi x}.$$

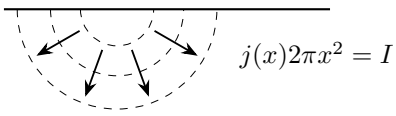


图 1.22: 半球电极与两脚间电势差

求电极电阻和两接触点电势差

电极的接地电阻 $R = V(a)/I = \rho/(2\pi a)$。两脚接触点间电势差为

$$U_{AB} = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+s}\right) = \frac{\rho I s}{2\pi r(r+s)}.$$

精确比较局部匀强场近似的相对误差

若用 $E(r)s = \rho I s/(2\pi r^2)$，近似值与精确值之比为 $(r+s)/r = 1 + s/r$，相对高估 s/r。因此要求相对误差小于 5% 时，应有 $s/r < 0.05$。该估计同时说明，远离电极时局部均匀场近似才可靠；两脚间距为 s，各自到电极中心的距离分别为 $r, r+s$。

例 1.6 (注入与收集电极外侧的电场)**.** 地表点电极 P, Q 相距 d，分别向大地注入和收集电流 I。在 Q 外侧同一直线上取点 A，$QA = r$，r、d 远大于电极尺寸，大地电阻率为 ρ。求 A 处电流密度、电场、电势，以及从 A 向外走短距离 s 的电势变化。

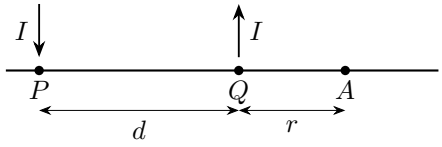


图 1.23: 注入与收集电极外侧的电场

解　在电极外侧分别画注入和收集贡献

取图 1.23 中 $P \to Q \to A$ 为 $+x$。注入电极在 A 产生向右的电流密度，收集电极产生向左的电流密度。图 1.24 用两个相反箭头表示这两个贡献。

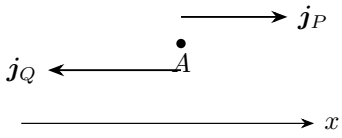


图 1.24: 注入与收集电极外侧的电场

带符号叠加电流密度与电势

设无穷远电势为零，利用线性叠加，

$$j_x(A)=\frac{I}{2\pi(d+r)^2}-\frac{I}{2\pi r^2}<0,\qquad E_x=\rho j_x,$$

$$V(A)=\frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{d+r}-\frac{1}{r}\right)<0.$$

先求有限步长的精确电势变化

向外移动 s 后的精确电势变化为

$$V(r+s)-V(r)=\frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{d+r+s}-\frac{1}{r+s}-\frac{1}{d+r}+\frac{1}{r}\right].$$

短距离内的电势变化

求小步长变化时，把 d,I,ρ 固定，对位置 r 求导。由幂函数和链式法则，

$$\begin{aligned}V'(r)&=\frac{\rho I}{2\pi}\left[-(d+r)^{-2}\frac{\mathrm{d}(d+r)}{\mathrm{d}r}+r^{-2}\right]\\&=\frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(d+r)^2}\right]=-E_x(A)>0.\end{aligned}$$

若 $s\ll r$ 且 $s\ll d+r$，在 r 处保留泰勒展开的一阶项，

$$V(r+s)=V(r)+V'(r)s+O(s^2),\qquad \Delta V\simeq -E_x(A)s>0.$$

即远离收集点时电势升高并趋近零。注意这里求的是“终点减起点”的电势变化；若求 $U_{A,A+s}$，符号应相反。这里按题设 r,d 远大于电极尺寸，用点电极的远处场相叠加。

例 1.7 (由宏观电阻率求电子的有效阻力)**.** 金属中自由电子数密度为 n，电阻率为 ρ。电子以速率 v 稳恒漂移。用宏观欧姆定律求单个电子所受平均阻力大小，并写出相应动量弛豫时间。

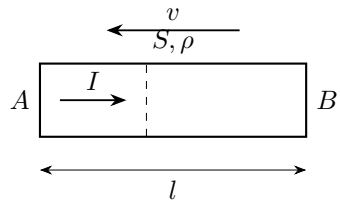


图 1.25: 由宏观电阻率求电子的有效阻力

解　从宏观电流密度反求平均驱动电场

图 1.25 中电流与电子漂移反向。先只取大小：$j = nev$，局域欧姆定律给 $E = \rho j = ne\rho v$。

由平均受力平衡求阻力

漂移稳恒意味着平均加速度为零，故阻力大小等于电场力大小，

$$f_{\text{阻}} = eE = ne^2\rho v.$$

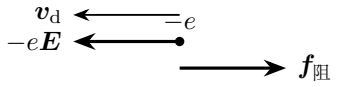


图 1.26: 由宏观电阻率求电子的有效阻力

写出阻力矢量并确定弛豫时间

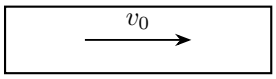
图 1.26 中电子向左，电场向右，所以电场力向左而平均阻力向右。写成矢量形式为 $\boldsymbol{f}_{\text{阻}} = -b\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$，其中 $b = ne^2\rho$。若把 $b = m/\tau$，则

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}.$$

阻力系数与弛豫时间

这说明增大电阻率对应更快的平均动量弛豫。由单位可见，b 的单位为 kg/s，所以 bv 为力。推导中的 v 是平均漂移速率，宏观电流由这个平均定向速度确定。

例 1.8 (金属棒突然停止后的简化漂移)**.** 金属棒的晶格突然停止，电子相对晶格的初速为 $v_0 > 0$。采用理想模型，设此后整个漂移过程中电子只受有效阻力 $-ne^2\rho v$，忽略端部作用。求 $v(t)$、相对位移的极限和速度趋近零的规律。



$t = 0$：晶格停止

图 1.27: 金属棒突然停止后的简化漂移

解　选正向并按给定初值解衰减方程

按图 1.27 取电子初速度方向为正，记 $\tau = m/(ne^2\rho)$。牛顿第二定律为 $\dot{v} = -v/\tau$。分离变量并代入 $v(0) = v_0$，

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s,$$

$$[\ln u]_{v_0}^{v(t)} = -t/\tau, \qquad \ln\frac{v(t)}{v_0} = -t/\tau,$$

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

积分累计相对位移

再对速度积分，

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_0\mathrm{e}^{-s/\tau}\,\mathrm{d}s = v_0[-\tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t = v_0\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

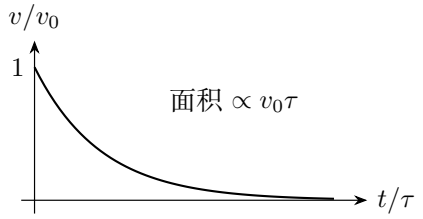


图 1.28: 金属棒突然停止后的简化漂移

用曲线面积解释渐近停止与有限位移

图 1.28 的速度在有限时刻始终为正，并以时间尺度 τ 指数衰减。令 $t \to \infty$，$e^{-t/\tau} \to 0$，所以速度曲线的累计面积趋于 $v_0\tau = mv_0/(ne^2\rho)$，这就是模型给出的总漂移位移。

例 1.9 (重力作用下竖直金属棒的电势差)**.** 一竖直金属棒长 l，上端 A、下端 B。采用固定正离子背景、忽略晶格形变的简化模型，电子质量 m，电荷 $-e$。达到无宏观电流的平衡后，求内部电场和 $V_A - V_B$。

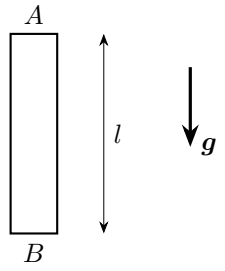


图 1.29: 重力作用下竖直金属棒的电势差

解 明确下向坐标中重力与电场力符号

图 1.29 中上端为 A、下端为 B。取竖直向下为 $+y$，电子重力为 $+mg$，电场力为 $-eE_y$。无相对漂移的条件为

$$mg - eE_y = 0, \qquad E_y = \frac{mg}{e} > 0.$$

电子受力的平衡

因此场向下，电子所受电场力向上，二者平衡。

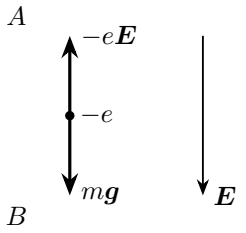


图 1.30: 重力作用下竖直金属棒的电势差

两端电势差及数量级

在图 1.30 中沿 $A \to B$ 积分，$V_A - V_B = (mg/e)\int_0^l \mathrm{d}y = (mg/e)[y]_0^l = mgl/e$。上端电势较高，电势沿向下的电场方向降低。若取 $l = 1\,\mathrm{m}$，数量级约 $5.6\times10^{-11}\,\mathrm{V}$。这里的微小电势差对应图中抵消电子重力所需的电场。

例 1.10 (旋转金属环的径向电势差)**.** 金属圆环盘的内、外半径为 a, b，绕轴以角速度 ω 匀速转动。自由电子与晶格共同转动，电子质量 m、电荷 $-e$。忽略磁力及其他径向作用。求 $E_r(r)$ 与 $V(b)-V(a)$。

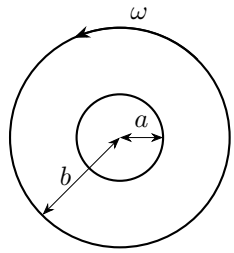


图 1.31: 旋转金属环的径向电势差

解　列随晶格转动电子的径向运动方程

按图 1.31 取径向向外为正。电子以角速度 ω 做圆周运动，径向加速度为 $-\omega^2 r$。由电场力提供向心力，

$$-eE_r = -m\omega^2 r, \qquad E_r(r) = \frac{m\omega^2 r}{e}.$$

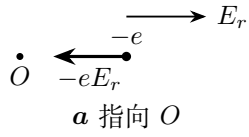


图 1.32: 旋转金属环的径向电势差

依据场向积分径向电势差

图 1.32 中电场向外，电子所受力向内，方向与向心加速度一致。由于 $E_r = -\,\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}r$，有

$$V(b)-V(a) = -\int_a^b E_r(r)\,\mathrm{d}r = -\frac{m\omega^2}{e}[r^2/2]_a^b = -\frac{m\omega^2}{2e}(b^2-a^2).$$

窄环的电势差

因此外缘电势较低。当环很窄、宽度 $d = b-a \ll a$ 时，电势差近似为 $-(m\omega^2 a/e)d$，等于用中间区域近似匀强场的结果。本题的径向电场提供电子共同转动所需的向心力，电势由这一静电场积分得到。

例 1.11 (串接粗细铜棒的电场与发热)**.** 两根同材质铜棒长度均为 l，截面积分别为 S 和 $2S$，串联接在恒定电压 U 两端。忽略接合处端部效应，电阻率为 ρ。求各棒的电场、两端电压、单位体积发热功率之比。

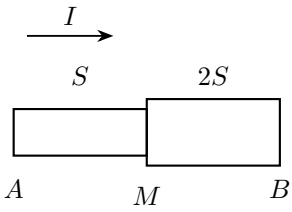


图 1.33: 串接粗细铜棒的电场与发热

解 由串联同电流求两段电压

图 1.33 的 M 为接合截面，稳恒电流要求两棒电流相同。两电阻为 $R_1 = \rho l/S$、$R_2 = \rho l/(2S)$，所以

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{2US}{3\rho l}, \quad U_{AM} = IR_1 = \frac{2U}{3}, \quad U_{MB} = \frac{U}{3}.$$

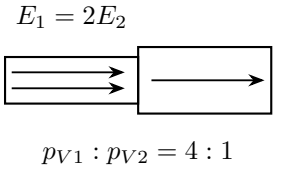


图 1.34: 同一电流通过粗细两棒，场强比为 2 : 1，单位体积功率比为 4 : 1

按各自面积求电流密度和电场

图 1.34 中细棒电流线较密，$j_1 = I/S = 2I/(2S) = 2j_2$。由 $E = \rho j$，

$$E_1 = \frac{2U}{3l}, \qquad E_2 = \frac{U}{3l}.$$

区分体积功率、总功率与初始温升速率

单位体积发热功率为 ρj^2，所以 $p_{V1} : p_{V2} = 4 : 1$；两棒总体积比为 1 : 2，总功率比则为 2 : 1。若隔热且单位体积热容量相同，初始温升速率比为 4 : 1。单位体积功率、总功率和初始温升速率分别由相应体积与热容量联系起来。

例 1.12 (电源的功率分配与效率)**.** 电源电动势 $\mathcal{E}$、内阻 r，接可变纯电阻 R。求电流、端电压、外电阻功率及供电效率；求外功率最大时的 R，并解释该点的效率。

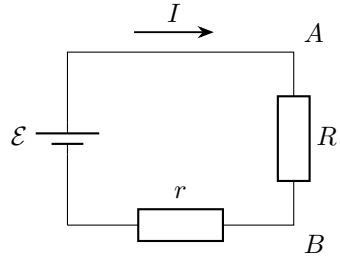


图 1.35: 电源的功率分配与效率

解　先确定放电电流与端电压

图 1.35 中外电流从电源正端流出，电源内阻和外电阻串联，故

$$I=\frac{\mathcal{E}}{R+r},\qquad U=IR=\frac{\mathcal{E}R}{R+r}.$$

用能量分配求外功率和效率

电源每秒转换能量 $\mathcal{E}I$，外电阻获得 $P_R=I^2R=\mathcal{E}^2R/(R+r)^2$，效率为

$$\eta=\frac{P_R}{\mathcal{E}I}=\frac{R}{R+r}.$$

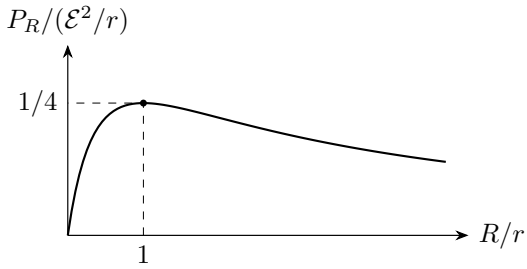


图 1.36: 归一化外功率随负载变化，峰值在 $R/r=1$，两侧极限均趋于零

求导确定最大外功率

图 1.36 的功率曲线先增后减。求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_R}{\mathrm{d}R}&=\mathcal{E}^2\left[(R+r)^{-2}-2R(R+r)^{-3}\right]\\&=\frac{\mathcal{E}^2[(R+r)-2R]}{(R+r)^3}=\frac{\mathcal{E}^2(r-R)}{(R+r)^3}.\end{aligned}$$

$R < r$ 时导数为正，$R > r$ 时为负，所以 $R = r$ 时 $P_{\max} = \mathcal{E}^2/(4r)$，此时 $\eta = 1/2$。

功率和效率随负载的变化

当 $R \to \infty$，效率趋近 1，但电流和外功率均趋于零；最大功率和最大效率是不同的设计要求。

例 1.13 (角加速导线圈中的惯性电流)**.** 细金属圆线圈半径 R，导线截面积 S，电阻率 ρ，自由电子数密度 n。线圈绕轴以角加速度 $\alpha > 0$ 转动。电子质量 m、电荷 $-e$，平均阻力系数 $b = ne^2\rho$。忽略自感，且考查相对漂移已近似稳定的阶段。求相对晶格的电子速度与电流。

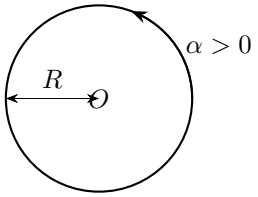


图 1.37: 角加速导线圈中的惯性电流

解 取正切向并列电子所需切向加速度

取图 1.37 的逆时针切向为正。相对漂移已稳定，电子的切向加速度近似等于晶格的 $R\alpha$。轴对称静电场沿整圈的环量为零，切向平均电场为零，因此电子所需的切向力由晶格的平均作用提供。

以晶格作用力求相对漂移方向

以相对速度 u 表示阻力，

$$mR\alpha = -bu, \qquad u = -\frac{mR\alpha}{ne^2\rho}.$$

负号表示电子相对晶格顺时针漂移，常规电流为逆时针。

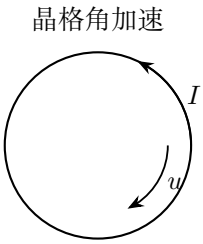


图 1.38: 角加速导线圈中的惯性电流

由负电荷输运求常规电流

由图 1.38 的方向关系，

$$I = neS|u| = \frac{mSR\alpha}{e\rho}.$$

惯性驱动的等效电动势

在线圈参考系中，电子所受切向惯性力为 $-mR\alpha$。将该力除以电子电荷 $-e$，得到沿正切向的单位电荷驱动力 $mR\alpha/e$。用弧长元 $R\,\mathrm{d}\varphi$ 沿线圈积分，得到等效电动势

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{mR\alpha}{e}\int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}\varphi = \frac{mR^2\alpha}{e}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2\pi mR^2\alpha}{e};$$

再除以线圈电阻 $2\pi R\rho/S$，得同一电流。此处能量来自使线圈加速的机械作用，采用题给相对漂移已稳定且忽略自感的阶段。

例 1.14 (径向不均匀材料的轴向导电)**.** 长直圆柱导体半径 a、长度 $l \gg a$，电导率只随径向变化：$\sigma(r) = \sigma_0(1 - r^2/(2a^2))$。两端为等势金属端面，相差电压 U。忽略端部效应，求总电流、电阻和半径 r 内通过的电流。

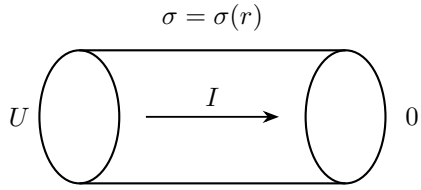


图 1.39: 径向不均匀材料的轴向导电

解　按公共等势端面确定轴向通道并联

图 1.39 的不同半径处可视作跨接同一对等势端面的细通道，它们是并联关系。各通道轴向电场相同，为 $E = U/l$，而电流密度 $j(r) = \sigma(r)U/l$ 随半径变化。

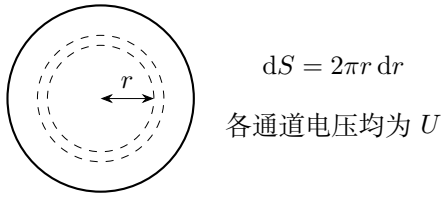


图 1.40: 径向不均匀材料的轴向导电

对圆环电导积分求总电流和电阻

图 1.40 中薄圆环截面积 $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$，故

$$I = \frac{\sigma_0 U}{l}\int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right) 2\pi r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{2\pi\sigma_0 U}{l}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8a^2}\right]_0^a = \frac{3\pi\sigma_0 a^2 U}{4l}.$$

因此 $R = U/I = 4l/(3\pi\sigma_0 a^2)$。

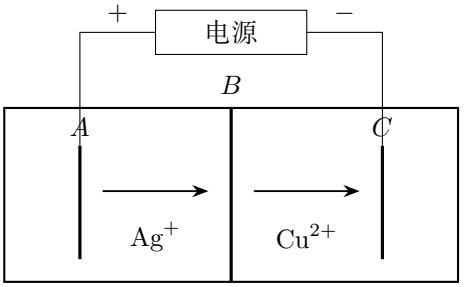
半径 r 内的电流

半径 r 内的电流为

$$I(<r) = \frac{2\pi\sigma_0 U}{l}\int_0^r \left(s - \frac{s^3}{2a^2}\right)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{2\pi\sigma_0 U}{l}\left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{8a^2}\right]_0^r = \frac{\pi\sigma_0 U}{l}\left(r^2 - \frac{r^4}{4a^2}\right).$$

令 $r = a$ 回到总电流，令 $r = 0$ 得零。这里的同轴薄通道是并联，而径向导电的同轴薄层是串联；前者的轴向通道共享端电压，后者的径向薄层通过同一电流。

例 1.15 (双槽电解中的净质量变化)**.** 三板从左到右为银板 A、铜板 B、银板 C，A 接电源正端、C 接负端，中间铜板 B 不接外线并把两槽溶液隔开。左槽含 Ag^+，右槽含 Cu^{2+}，两侧电极过程均按给定价态计量。铜板一侧析出银，另一侧铜进入溶液，净质量以 $7.6\,\mathrm{mg/s}$ 增加。银、铜摩尔质量为 $108,64\,\mathrm{g/mol}$，$N_A = 6.0\times10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$、$e = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，若用电压表测量两外板间电压，其电流可忽略。求电源电流。



B 左侧析银，右侧铜溶入溶液

图 1.41: 两外板接电源，中间铜板隔开两槽溶液；忽略电压表电流

解　从两槽串联和反应价态确定电量计数

图 1.41 中两槽串联，通过同一电量。银离子还原每摩尔需 $F = N_A e = 9.6\times10^4\,\mathrm{C/mol}$，铜溶出每摩尔释放 $2F$。电流 I 对中板每秒析银质量为 $108I/F$ 克，溶铜质量为 $64I/(2F)$ 克。

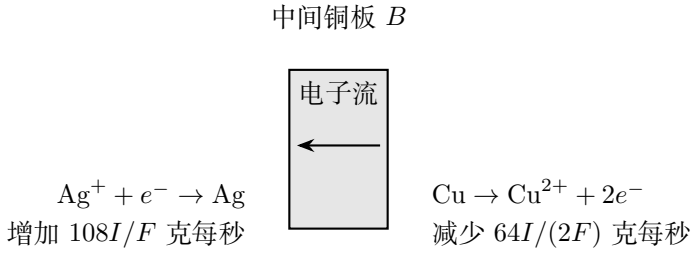


图 1.42: 中板两侧的反应与电子平衡；左侧增加银，右侧减少铜

把析银与溶铜质量相减

按图 1.42 净增加率等于析银率减去溶铜率：

$$\dot{m}=\frac{I}{F}(108-32)=\frac{76I}{96000}\,\mathrm{g/s}.$$

净增率与电源电流

代入 $\dot{m}=7.6\times10^{-3}\,\mathrm{g/s}$，得 $I=9.6\,\mathrm{A}$。中板左侧每转移 F 电量析银 $108\,\mathrm{g}$，右侧同时溶铜 $32\,\mathrm{g}$，因此每 F 电量使中板净增 $76\,\mathrm{g}$。这个计量关系直接把净增质量率与电流相连。

1.7 本讲小结

电流是有向电荷输运率，$\boldsymbol{j}=nq\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}}$ 同时包含电荷符号与平均漂移方向。稳恒电流满足电荷连续性，无分支通道各截面的电流相同；局域欧姆关系 $\boldsymbol{j}=\sigma\boldsymbol{E}$ 再把电流分布与材料中的电场联系起来。

沿同一电流管依次排列的薄层串联，共享两等势端面的通道并联。先由电流方向确定有效面积，再积电阻或电导，便可求变截面、同轴、同心球及半空间导电模型的端口关系。沿空间变化的电场积分，还可求任意两点的电势差。

碰撞使电子的有序动量传给晶格，电场持续供能以维持平均漂移。弛豫方程给出建立或衰减的时间过程；固定碰撞间隔模型则用每个周期的速度平均建立宏观电阻率。

电源以非静电作用补充能量，端电压由充放电方向和内阻决定。功率平衡把内阻发热、外部输出和储能相连；电阻受温度影响时，联立电路与热量方程求平衡温升，再由偏离后的演化判断稳定性。

1.8 练习

练习 1.1 (电子绕核运动的等效电流)**.** 电子以速率 v 沿半径 R 的圆轨道运动。求通过轨道上任一固定截面的平均等效电流及方向。

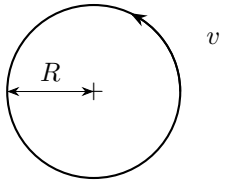


图 1.43: 电子绕核运动的等效电流

练习 1.2 (固定碰撞间隔与平均漂移)**.** 某简化碰撞模型规定电子两次碰撞严格相隔 T，碰撞后定向速度为零，热运动均值为零。电子质量为 m、电荷为 $-e$、数密度为 n，在均匀电场中运动。求平均漂移速度和电阻率，解释其中的因子 2。

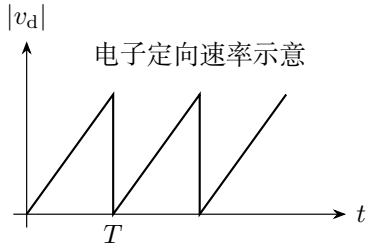


图 1.44: 固定碰撞间隔与平均漂移

练习 1.3 (圆台形细导体的电阻)**.** 均匀材料电阻率为 ρ。长 l 的细圆台两端半径为 a, b，半径沿轴线性变化，$|b-a| \ll l$。忽略端部效应，求轴向电阻。

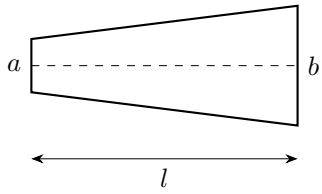


图 1.45: 圆台形细导体的电阻

练习 1.4 (同心球电极之间的电阻)**.** 两同心金属球面半径为 a, b，中间充满电阻率 ρ 的材料。求两球面间电阻及 $b \to \infty$ 的极限。

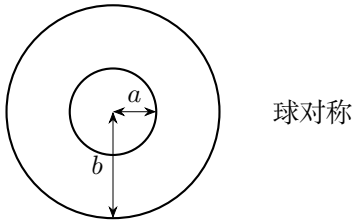
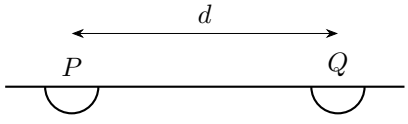


图 1.46: 同心球电极之间的电阻

练习 1.5 (两个半球电极的近似总电阻)**.** 均匀大地电阻率 ρ，两相同半球电极半径 a，球心在地表且相距 $d \gg a$。电流从 P 注入，从 Q 收集，求忽略电极表面非均匀修正时的两电极间电阻。



半径均为 a

图 1.47: 两个半球电极的近似总电阻

练习 1.6 (电阻丝拉长后的导电变化)**.** 一根电阻丝长度 l、面积 S、电阻 R。在载流子总数、体积与电阻率保持不变的理想条件下均匀拉长为 kl。若仍接同一理想电压源，求电阻、电流、漂移速率和总发热功率的变化。

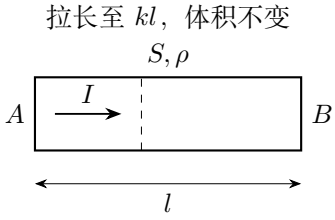


图 1.48: 电阻丝拉长后的导电变化

练习 1.7 (电池充电时的功率)**.** 电池电动势 $\mathcal{E} = 12\,\mathrm{V}$，内阻 $r = 0.50\,\Omega$。外装置使 $I = 2.0\,\mathrm{A}$ 的电流从电池正端流入。求端电压、输入功率、内部发热功率及理想化学储能速率。

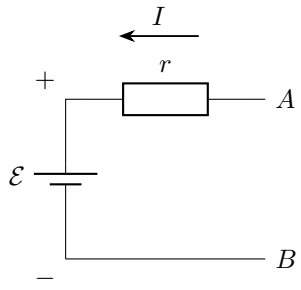


图 1.49: 电池充电时的功率

练习 1.8 (恒流加热的稳态与稳定性)**.** 导体电阻 $R(T) = R_0[1+\alpha(T-T_0)]$, $\alpha > 0$。环境温度 T_0，散热功率 $k(T-T_0)$，热容量 C 恒定。接恒流源 I。求可能的稳定温升，并说明何时线性模型没有正的稳态解。

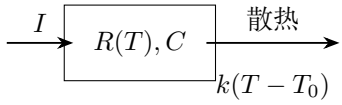


图 1.50: 恒流加热的稳态与稳定性

练习 1.9 (质子束中的线密度变化)**.** 采用非相对论模型，忽略束内相互作用。质子由近似静止开始在均匀场中加速，束电流恒为 $1.0\,\mathrm{mA}$。求每秒打靶粒子数；在离源 L 与 $4L$ 处取相同的很短空间段，求段内粒子数比。质子电荷 $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$。

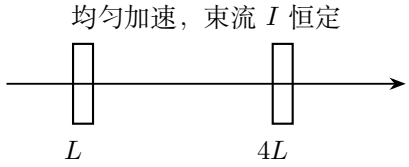


图 1.51: 质子束中的线密度变化

练习 1.10 (持续电流给出的电阻率上限)**.** 闭合细金属环初电流 $I_0 = 100\,\mathrm{A}$，一年内未观察到超过 $\Delta I = 1.0\,\mathrm{mA}$ 的衰减。先采用忽略几何自感的有效阻力模型，取载流子数密度 $n = 8.00 \times 10^{20}\,\mathrm{m}^{-3}$，求此模型下的电阻率上限。若把超导环的微弱耗散用恒定等效电阻描述，并计入几何自感，求观测量对环路参数的限制。

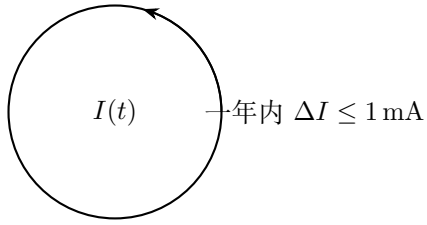


图 1.52: 持续电流给出的电阻率上限

练习解答

练习 1.1

解　以固定截面计算每周输运电荷

图 1.43 中电子沿逆时针运动，一周周期为 $T = 2\pi R/v$。固定截面每经过一个周期有电荷 $-e$ 沿电子方向通过一次，所以若以逆时针为正，$I = -e/T$。

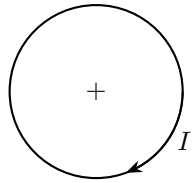


图 1.53: 电子绕核运动的等效电流

根据负电荷运动方向确定平均正电流

图 1.53 标出等效正电流沿顺时针，大小为 $ev/(2\pi R)$。这里是周期平均电流；若严格讨论单个点电荷经过截面的瞬时输运，会表现为离散脉冲。圆心电荷保持静止，轨道电流来自运动电子。

练习 1.2

解 按指定碰撞规则对一个周期取平均

图 1.44 示意一个周期内定向速率从零线性增大，取电子实际矢量加速度 $\boldsymbol{a} = -e\boldsymbol{E}/m$。一个碰撞周期内的平均速度是

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{a}t \,\mathrm{d}t = \frac{\boldsymbol{a}}{T}[t^2/2]_0^T = \frac{\boldsymbol{a}T}{2} = -\frac{eT}{2m}\boldsymbol{E}.$$

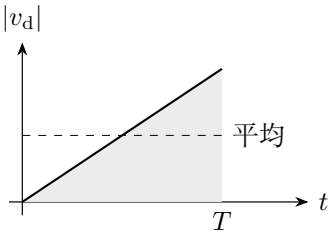


图 1.54: 固定碰撞间隔与平均漂移

由平均漂移求电导率和电阻率

由图 1.54 的三角形面积除以周期，亦得平均值为末速度的一半。于是 $\boldsymbol{j} = n(-e)\overline{\boldsymbol{v}} = ne^2T\boldsymbol{E}/(2m)$，$\rho = 2m/(ne^2T)$。

因子 2 的来源

固定碰撞间隔内，距上次碰撞的平均时间是 $T/2$，因子 2 就来自这里。用动量弛豫模型时，稳恒漂移由时间常量 τ 决定，对应的电阻率为 $\rho = m/(ne^2\tau)$，二者对应相同稳恒漂移时有 $\tau = T/2$。

练习 1.3

解 由细圆台条件确定近似等势薄片

图 1.45 的缓慢变截面条件允许近似把每个轴向薄片看成等势截面间的电阻。半径 $r(x) = a + (b-a)x/l$，面积 $S(x) = \pi r(x)^2$。

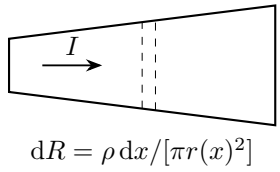


图 1.55: 圆台形细导体的电阻

沿轴把串联薄片电阻积分

由图 1.55 的薄片串联关系积分。先取 $a \neq b$，令 $u = a + (b-a)x/l$，则 $\mathrm{d}x = l\,\mathrm{d}u/(b-a)$，$x = 0, l$ 对应 $u = a, b$；于是

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho}{\pi}\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{[a+(b-a)x/l]^2} \\ &= \frac{\rho l}{\pi(b-a)}\int_a^b u^{-2}\,\mathrm{d}u = \frac{\rho l}{\pi(b-a)}[-u^{-1}]_a^b \\ &= \frac{\rho l}{\pi(b-a)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) \simeq \frac{\rho l}{\pi ab}. \end{aligned}$$

等半径时的结果

当 $a = b$ 时取连续极限，回到 $\rho l/(\pi a^2)$。本题缓变圆台的等效面积为 πab，来自沿轴向对 $1/r(x)^2$ 的积分。

练习 1.4

解　按完整球面面积求局域电场

图 1.46 的球对称性使电流径向流动，半径 r 的完整球面积为 $4\pi r^2$，故 $E(r) = \rho I/(4\pi r^2)$。

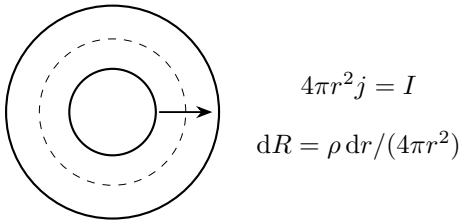


图 1.56: 同心球电极之间的电阻

沿径向积分球壳串联电阻

图 1.56 表示各球壳薄层串联，得到

$$U = \frac{\rho I}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\rho I}{4\pi}[-r^{-1}]_a^b = \frac{\rho I}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right), \quad R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

外球面趋于无穷远

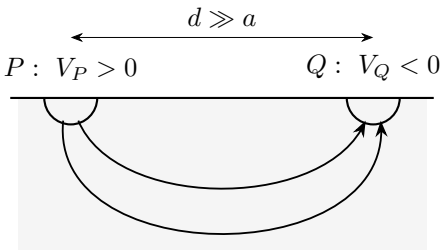
当外球面移到无穷远，$R_\infty = \rho/(4\pi a)$，有限且大于零。球面扩散电流的有效截面积随距离平方增长，故外部极远区域的附加电阻可积。与地表半球扩散比较，这里完整球面面积大一倍，同尺寸条件下电阻为其一半。

练习 1.5

解 在每个小电极表面叠加自身和远端电势

图 1.47 中每个电极附近的自身贡献用半径 a 截断，另一个远处电极的电势在该小表面上近似为常数。于是

$$V_P \simeq \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right), \qquad V_Q \simeq \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right).$$



$$U_{PQ} = V_P - V_Q > 0$$

图 1.57: 高电势电极向地下送出电流，低电势电极收集；流线只作方向示意

相减求两电极端电压和等效电阻

图 1.57 中 P 是高电势端、Q 是低电势端，两端差为

$$U_{PQ} \simeq \frac{\rho I}{\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right), \qquad R \simeq \frac{\rho}{\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right).$$

远隔两电极的相互影响

当 $d \to \infty$，得到两个单电极接地电阻之和 $\rho/(\pi a)$。因 $d \gg a$，右式为正。有限但很大的 d/a 下，另一个电极贡献近似常数电势，端电压比两个电极无限远隔时略小，电阻相应减小 $\rho/(\pi d)$。

练习 1.6

解 由体积不变求截面及电阻变化

由图 1.48 的体积约束 $Sl = S'kl$，得到 $S' = S/k$，所以

$$R' = \rho\frac{kl}{S/k} = k^2 R.$$

按固定端电压求电流与漂移速率

同电压下 $I'=U/R'=I/k^2$。载流子总数与体积均保持，因而数密度 n 保持，故

$$v'=\frac{I'}{neS'}=\frac{I/k^2}{neS/k}=\frac{v}{k}.$$

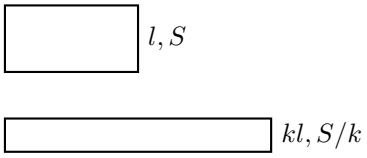


图 1.58: 电阻丝拉长后的导电变化

总发热功率

图 1.58 中拉长后的导体更细，而电流下降更快，所以漂移速率仍下降。总功率 $P'=U^2/R'=P/k^2$。取 $k=1$，所有比值均回到 1。这里各比例都采用题给体积与电阻率保持的条件。

练习 1.7

解　根据电流流入正端判断充电端电压

图 1.49 中电流从电池正端流入，电池吸收电能。为克服电动势并使内阻中有电流，外加端电压应为

$$U=\mathcal{E}+Ir=12+2.0\times0.50=13\,\mathrm{V}.$$

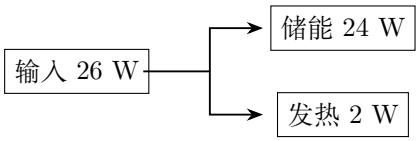


图 1.59: 电池充电时的功率

分别求输入、发热和化学储能功率

按图 1.59 的输入能量流向，输入功率 $P_{\text{入}}=UI=26\,\mathrm{W}$，内部焦耳热功率 $P_{\text{热}}=I^2r=2.0\,\mathrm{W}$，理想化学储能速率为 $\mathcal{E}I=24\,\mathrm{W}$。

输入功率的分配

三者满足 $26 = 2 + 24$。输入的 26 W 中，24 W 转为化学能，2 W 转为内阻发热。

练习 1.8

解　对导体列出随温升变化的热量方程

在图 1.50 中取整根导体为热学系统，令 $\theta = T - T_0$。输入焦耳热功率为 $I^2R_0(1+\alpha\theta)$，散热为 $k\theta$，因此

$$C\dot{\theta} = I^2R_0 - (k - \alpha I^2R_0)\theta.$$

求正温升平衡及其存在条件

若 $k > \alpha I^2R_0$，令右端为零得到

$$\theta_* = \frac{I^2R_0}{k - \alpha I^2R_0}.$$

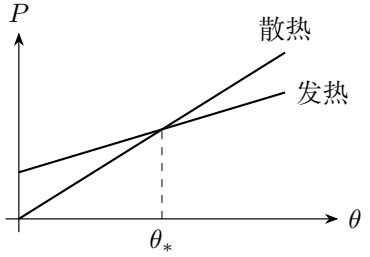


图 1.60: 恒流加热的稳态与稳定性

平衡附近的温升变化

图 1.60 中，令 $\delta\theta = \theta - \theta_*$，把稳态方程从温升方程中相减，得到 $C\delta\dot{\theta} = -(k - \alpha I^2R_0)\delta\theta$，记 $k_{\text{eff}} = k - \alpha I^2R_0 > 0$，非零初始偏差满足

$$\int_{\delta\theta(0)}^{\delta\theta(t)} \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{k_{\text{eff}}}{C}\int_0^t \mathrm{d}s,$$

$$[\ln|u|]_{\delta\theta(0)}^{\delta\theta(t)} = -\frac{k_{\text{eff}}}{C}[s]_0^t,$$

$$\ln\left|\frac{\delta\theta(t)}{\delta\theta(0)}\right| = -\frac{k_{\text{eff}}t}{C}.$$

取指数先得偏差绝对值之比为 $\mathrm{e}^{-k_{\text{eff}}t/C}$。解在有限时间内保持初始符号，所以 $\delta\theta(t) = \delta\theta(0)\mathrm{e}^{-k_{\text{eff}}t/C}$；初始偏差为零则保持零。偏差衰减，所以平衡稳定。

分析没有非负稳态的参数范围

若 $k=\alpha I^2R_0$，右端恒为正；若 $k<\alpha I^2R_0$，对任意 $\theta\geq 0$ 右端也为正，线性模型没有非负稳态。温度持续上升时材料规律和散热规律会改变，本题的线性范围内，温升持续增加；若研究更高温度，则由对应材料电阻与散热函数决定后续状态。

练习 1.9

解　以单位时间通过的电荷求粒子数率

图 1.51 电流是单位时间通过的电量，故每秒数率 $\dot N=I/e=6.25\times10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$。

由非相对论加速求两个位置的速率比

均匀场从静止加速给 $v(x)=\sqrt{2ax}$，所以 $v(4L)=2v(L)$。

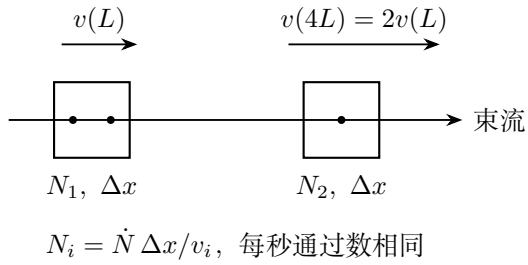


图 1.61: 相同短段长度内，快束流的驻留时间更短；图示粒子数之比为 2 : 1

用驻留时间求同长短段的粒子数比

图 1.61 空间短段长度 Δx 内的粒子数为 $\dot N\Delta x/v(x)$，因此 $N_1/N_2=v(4L)/v(L)=2$。每秒通过数相同而同长段内数目不同：速度大的位置驻留时间较短，线密度较小。题设从近似静止开始，$v\propto\sqrt{x}$，因此两个位置的线密度比为 $2:1$。

练习 1.10

解　把电流衰减模型换成电阻率衰减率

图 1.52 有效摩擦使电子平均速率满足 $m\dot v=-bv$，电流与漂移速度在本模型中成正比，故 $\dot I=-(b/m)I$。记 $\tau=m/b$，用 $I(0)=I_0>0$ 积分：

$$\int_{I_0}^{I(t)}\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t\mathrm{d}s,\qquad[\ln i]_{I_0}^{I(t)}=-t/\tau.$$

因此 $I=I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$。局部电阻率关系 $\rho=b/(ne^2)$ 给衰减率 $1/\tau=ne^2\rho/m$。

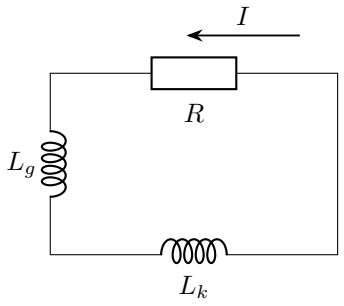
以最大未检出衰减量建立上限不等式

由 $I(T)\ge I_0-\Delta I$，先除以正数 I_0，再取单调递增的对数：

$$\mathrm{e}^{-ne^2\rho T/m}\ge 1-\frac{\Delta I}{I_0},\qquad -\frac{ne^2\rho T}{m}\ge \ln\left(1-\frac{\Delta I}{I_0}\right).$$

乘负数 $-m/(ne^2T)$ 时不等号反向，故

$$\rho\le -\frac{m}{ne^2T}\ln(1-\Delta I/I_0).$$



磁场能 $\frac{1}{2}L_gI^2$
电子定向动能 $\frac{1}{2}L_kI^2$

$R=\rho l/S$，热功率 I^2R

图 1.62: 无外电源的衰减环路：电阻耗散，几何电感与电子动能共同提供惯性

代入一年时间和观测精度求数值上限

图 1.62 用 $\Delta I/I_0=10^{-5}$、$T=3.156\times10^7\,\mathrm{s}$，以及 $m=9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$、$e=1.60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，得约 $1.41\times10^{-26}\,\Omega\mathrm{m}$。

从总漂移动能推导动能电感

还可把电子定向动能写成电路形式。环内载流子总数为 nSl，$v=I/(neS)$，故

$$K_{\mathrm{drift}}=\tfrac{1}{2}nSl\,mv^2=\tfrac{1}{2}\frac{ml}{ne^2S}I^2=\tfrac{1}{2}L_kI^2.$$

于是 $L_k/R=m/(ne^2\rho)$，正好等于忽略几何电感时的微观弛豫时间。图 1.62 将这份惯性与几何电感 L_g 分开列出。

计入几何自感

图 1.62 中，几何电感 L_g 对应磁场能 $L_gI^2/2$，动能电感 L_k 对应载流子的定向动能 $L_kI^2/2$。在无外电源、几何和材料参数固定的等效环路里，这两项能量的减少率等于电阻发热功率。保持 L_g,L_k 不变，对能量求时间导数，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(L_g+L_k)I^2\right]=\frac{1}{2}(L_g+L_k)\,2I\dot I=-I^2R.$$

在 $I>0$ 的衰减阶段约去 I，得到 $(L_g+L_k)\dot{I}+RI=0$。以 $I(0)=I_0$ 为初值，分离变量，

$$\int_{I_0}^{I(t)}\frac{\mathrm{d}i}{i}=-\frac{R}{L_g+L_k}\int_0^t \mathrm{d}s,$$

$$[\ln i]_{I_0}^{I(t)}=-\frac{R}{L_g+L_k}[s]_0^t,$$

$$\ln\frac{I(t)}{I_0}=-\frac{Rt}{L_g+L_k}.$$

这里 $I_0>0$，衰减解保持正号。两边取指数并乘 I_0，得到

$$I(t)=I_0\mathrm{e}^{-Rt/(L_g+L_k)}.$$

测得的衰减量在完整环路模型中给出

$$\frac{R}{L_g+L_k}\le-\frac{1}{T}\ln(1-\Delta I/I_0).$$

若已知环长 l、截面 S 和几何电感 L_g，由 $R=\rho l/S$ 可进一步求 ρ 的上限。这个关系把持续电流的观测量与实际环路参数联系起来。

电路

物理竞赛一轮讲义

第二讲

基尔霍夫定律与等效电源

2026

目录

第二讲　基尔霍夫定律与等效电源 **1**

2.1　从简单电路到支路方程 1

2.2　用节点电势求电路 3

2.3　叠加电源的作用 5

2.4　以端口描述一部分电路 6

2.5　电池组合、电桥与能量 7

2.6　例题与分析 10

2.7　本讲小结 31

2.8　练习 32

练习解答 36

第二讲　基尔霍夫定律与等效电源

2.1　从简单电路到支路方程

2.1.1　同一电流与同一电压

上一讲用局域欧姆规律求出一个导体的电阻。把这样的元件接成电路后，还需说明电荷怎样在各支路中分配，以及电源怎样维持电势差。两个电阻串联时，同一电流依次通过它们，电势降相加，因此

$$U = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2), \qquad R_{\text{串}} = R_1 + R_2.$$

两电阻并联时，各自连接同一对节点，承受同一电压 U。由电流相加，

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}, \qquad R_{\text{并}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

串联中的电压比等于电阻比，并联中的电流比等于电阻的反比。这些关系都由连接方式和欧姆定律得到。

理想导线连接的各点处于共同电势，称为同一节点。从一个分支点到另一个分支点，中间由电源、电阻串联组成的通路称为支路。一条支路的各处具有相同的稳恒电流。若干支路首尾相接形成闭合通路，便构成回路。支路在纸面上的弯曲形状可以改变，元件两端所接的节点决定实际连接。

2.1.2　节点的电荷守恒

用一个小闭合曲面包围节点，取各支路的流出电流为正。流出的净电荷使曲面内电荷减少，

$$\frac{\mathrm{d}Q_{\text{节点}}}{\mathrm{d}t} = -\sum_k I_k.$$

稳恒时节点电荷保持，故 $\sum_k I_k = 0$，这就是基尔霍夫第一定律。若某节点有两条支路流入、一条流出，取流入的大小为 I_1, I_2，便得到 $I_3 = I_1 + I_2$。连通电路有 N 个节点时，把所有节点方程相加，每条支路一次流出、一次流入，彼此抵消。因此只需在其中 $N-1$ 个节点列方程，余下一个由它们相加得到。

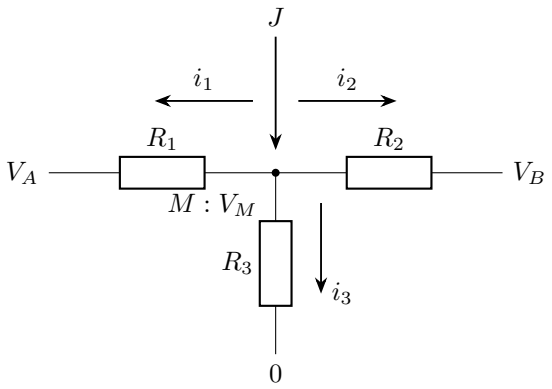


图 2.1: 给节点 M 的各电阻支路规定流出方向。外部注入电流为 J

图 2.1 中，三个电阻支路的正向都从 M 流出，外部电流源注入 J。以底部节点为零势，三项电流分别为

$$i_1 = \frac{V_M - V_A}{R_1}, \qquad i_2 = \frac{V_M - V_B}{R_2}, \qquad i_3 = \frac{V_M}{R_3}, \qquad i_1 + i_2 + i_3 = J.$$

负的支路电流对应实际流入 M。代数方程始终沿原箭头建立。

2.1.3　沿回路累加电势变化

稳恒电路中，电荷分布及磁场均不随时间改变，沿闭合回路的电势变化之和为零。沿电阻的参考电流方向移动，电势变化为 $-IR$。跨过理想电源由负端到正端，电势变化为 $+\mathcal{E}$。将各段相加，得到基尔霍夫第二定律。

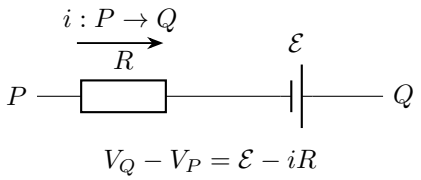


图 2.2: 同一支路的电流参考与电势变化

沿图 2.2 的 $P \to Q$ 方向，电源升势为 $\mathcal{E}$，电阻压降为 $i_{PQ}R$，所以

$$V_Q = V_P + \mathcal{E} - i_{PQ}R, \qquad i_{PQ} = \frac{V_P - V_Q + \mathcal{E}}{R}.$$

沿图 2.3 的 $A \to B \to C \to A$ 绕行。$A \to B$ 由电源负端到正端，升势 $\mathcal{E}$。$B \to C$ 与 $C \to A$ 分别沿电流越过 R_1, R_2，降势 IR_1, IR_2。于是

$$(V_B - V_A) + (V_C - V_B) + (V_A - V_C) = \mathcal{E} - IR_1 - IR_2 = 0.$$

沿同一回路反向绕行时，三项同时变号。

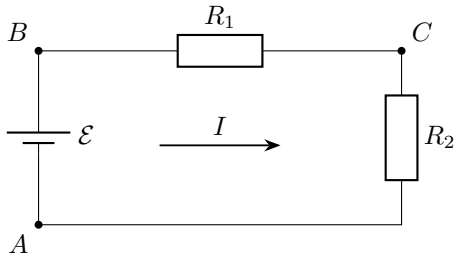


图 2.3: 沿顺时针闭合路径，电池升势，两只电阻各产生压降

例 2.1 在同一闭合路径中比较两个电源的极性。例 2.3 则把含源支路的电势关系用于两个未知节点。

2.2 用节点电势求电路

2.2.1 支路电流由两端电势确定

选一个节点作零势点，其他节点的电势作为未知数。纯电阻支路的电流为 $(V_P - V_Q)/R_{PQ}$。对节点 P 求和，就得到

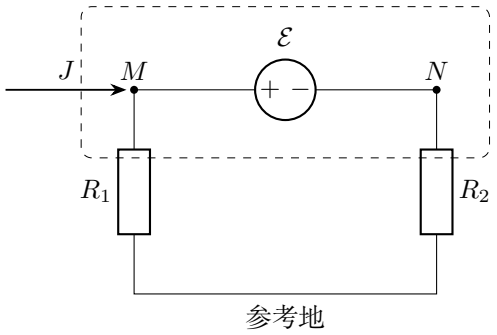
$$\sum_Q \frac{V_P - V_Q}{R_{PQ}} = J_P,$$

其中 J_P 为外部注入电流。含电源支路则代入上一节的带符号关系。每条支路中的电阻和电动势按实际串联情况组合。求出节点电势后，回代各支路关系即可得到电流。

理想电压源给定端电压，电流由外部网络决定。理想电流源给定电流，端电压由节点方程决定。例如从零势点向 M 注入电流 J 时，功率为 JV_M，它的符号说明电源的能量流向。例 2.12 求出的电流源端电压就来自全网的节点关系。

2.2.2 理想电压源两端的联合方程

当理想电压源接在两个未知节点 M, N 之间，先保留 $V_M - V_N = \mathcal{E}$。再把两个节点一起围入图 2.4 的虚线区域，对整个区域列电荷守恒。电源内部从一端送出的电流恰由另一端取得，在求和时消去，只剩穿出虚线的支路电流。



$$V_M/R_1 + V_N/R_2 = J, \quad V_M - V_N = \mathcal{E}$$

图 2.4: 虚线围出超节点，电源两端保留规定的电势差，外围电流服从电荷守恒

这种联合区域称为超节点。它使我们先求出两个节点电势，再回到其中一个节点求电压源电流。例 2.10 中，电势差方程和虚线区域的电流方程共同确定解。

2.2.3　断开支路的电势

断口使支路稳恒电流为零，其中的电阻压降也为零。电源的电势上升仍然存在。先求闭合部分的节点电势，再沿断支路依次累加，就得到悬空端的电势。

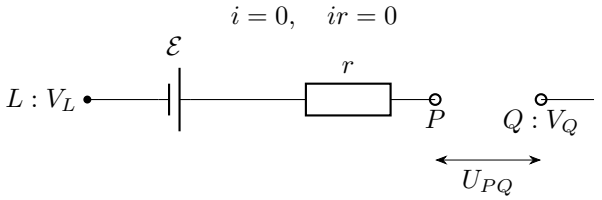


图 2.5: 断口使串联支路电流为零，电源仍改变浮置端 P 的电势

图 2.5 中，已知闭合网络的 V_L, V_Q，沿 $L \to P$ 有 $V_P = V_L + \mathcal{E}$，所以断口电压为 $V_L + \mathcal{E} - V_Q$。例 2.4 把两条断支路分别接回已有的电势分布。

2.2.4　以网孔电流求支路电流

平面电路还可为每个网孔取循环电流。图 2.6 中，两网孔都取顺时针，经过公共电阻时贡献方向相反，因此实际下向电流为 $i_1 - i_2$。

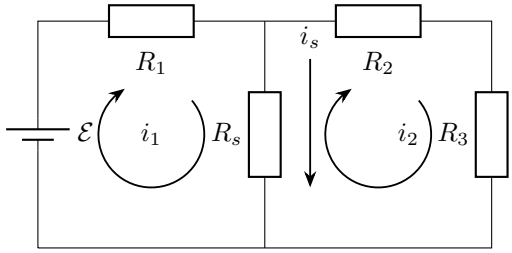


图 2.6: 两网孔电流都取顺时针，共用电阻中的下向实际电流为 $i_1 - i_2$

左网孔方程中这段压降为 $R_s(i_1 - i_2)$，右网孔反向经过它，压降为 $R_s(i_2 - i_1)$。其他只属于一个网孔的电阻，则通过该网孔电流。节点电势和网孔电流是两套求解变量，可按网络连接选择未知量较少的一套。

2.3 叠加电源的作用

两组电源依次接到同一个网络中，选相同的参考节点和支路正方向。以节点 A, B 间的电阻 R 为例，两组电源分别产生 $I^{(1)} = (V_A^{(1)} - V_B^{(1)})/R$ 和 $I^{(2)} = (V_A^{(2)} - V_B^{(2)})/R$。两式相加，

$$I^{(1)} + I^{(2)} = \frac{(V_A^{(1)} + V_A^{(2)}) - (V_B^{(1)} + V_B^{(2)})}{R}.$$

每个节点的电流守恒式也可以相加。因此两组电源同时工作时，各支路的电流由同一正方向下的两个电流相加得到。

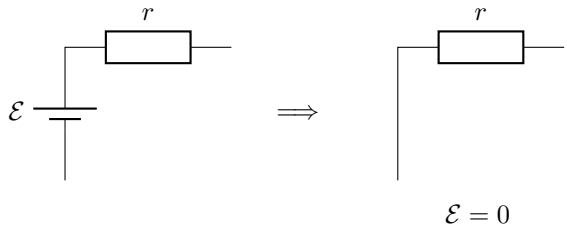


图 2.7: 关闭电源时保留内阻

图 2.7 中，求一个电源的作用时，把另一个独立电源的强度设为零。零电压的理想电压源成为导线，串联内阻仍在原处。零电流的理想电流源成为开路，其并联电阻仍保留。例 2.11 的两个子电路均沿 $M \to N$ 计算桥电流。

对电阻功率，先把实际电流合成，再取平方，

$$P = R(I^{(1)} + I^{(2)})^2 = R(I^{(1)})^2 + 2RI^{(1)}I^{(2)} + R(I^{(2)})^2.$$

中间项来自两组电流在同一电阻中的共同作用。练习 2.3 计算了这个交叉项。

2.4　以端口描述一部分电路

2.4.1　开路电压与看入电阻

在网络上选两个端子 A, B，把其余外接支路作为负载。取端电压 $U = V_A - V_B$，输出电流 I 从 A 流出。网络内部的方程线性，消去内部节点后，端口关系也是直线，可写为

$$U = U_{\mathrm{oc}} - R_{\mathrm{th}} I.$$

$I = 0$ 时的截距 U_{oc} 是开路电压。两种输出电流状态相减，独立电源强度在差分方程中相消，留下电阻网络，差电压与差电流的关系给出斜率 $-R_{\mathrm{th}}$。因此将所有独立电源强度置零后，从 A, B 看入的电阻就是 R_{th}。

原网络便可用电动势 U_{oc} 和串联内阻 R_{th} 表示，称为戴维南等效电源。接外负载 R_L 后，

$$U = R_L I, \qquad I = \frac{U_{\mathrm{oc}}}{R_{\mathrm{th}} + R_L}.$$

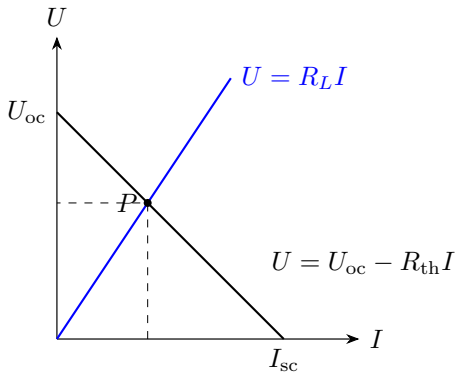


图 2.8: 端口直线与负载直线的交点给出实际工作点。截距分别为开路电压和短路电流

图 2.8 中，网络的端口直线与负载直线交于 P，给出实际电压和电流。改变负载，交点沿原端口直线移动。例 2.8 用两个负载的测量值确定这条直线。例 2.6 则把桥电阻取作负载，先求桥端的开路电压和看入电阻。

2.4.2 等效电流源

当 $R_{\mathrm{th}}>0$，把端口关系移项为

$$I=\frac{U_{\mathrm{oc}}}{R_{\mathrm{th}}}-\frac{U}{R_{\mathrm{th}}}=I_N-\frac{U}{R_{\mathrm{th}}}.$$

它对应注入 A 的电流源 I_N 与电阻 R_{th} 并联，称为诺顿等效。端口短路时 $U=0$，输出电流正好等于 I_N。

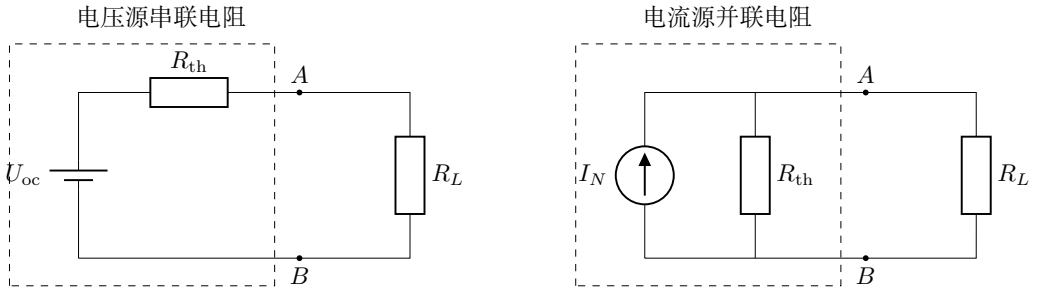


图 2.9: 两个端口等效表示接同一负载。虚线内为待等效网络，负载留在虚线外

图 2.9 右图中，电流源注入上节点的电流分成内部电阻中的 U/R_{th} 和负载中的 I。两图端口关系相同，因此接入同一负载就有相同的负载电压、电流。求原网络某一内部支路电流时，可由已知端电压回代该支路关系，见例 2.9。

2.5 电池组合、电桥与能量

2.5.1 并联电池中的电荷输运

多个同极性电池并联，设共同端电压为 U，第 k 节向外供给的电流为 $(\mathcal{E}_k-U)/r_k$。将各支路相加，

$$I=\sum_k\frac{\mathcal{E}_k}{r_k}-U\sum_k\frac{1}{r_k}.$$

与等效电源直线比较，

$$R_{\mathrm{th}}=\left(\sum_k\frac{1}{r_k}\right)^{-1},\qquad \mathcal{E}_{\mathrm{eq}}=\frac{\sum_k\mathcal{E}_k/r_k}{\sum_k 1/r_k}.$$

电导较大的支路对共同电压的作用更强。若共同电压高于某节电池的电动势，该电池的输出电流为负，即电流从它的正端流入，向电池输送能量。

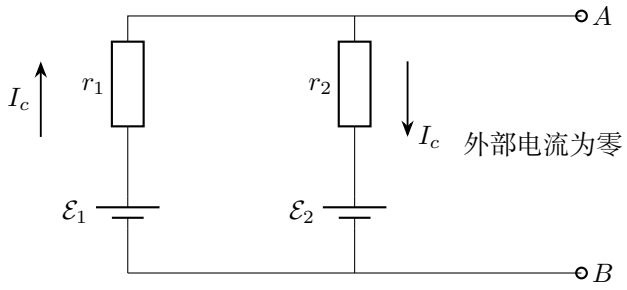


图 2.10: 开路并联的两节电池仍可有环流。图示 $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ 时的实际电流

图 2.10 的外端开路时，两支路电流代数和为零，但内部仍有闭合通路。沿图中方向，

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = I_c(r_1 + r_2), \qquad I_c = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2}.$$

较强电池供能，较弱电池吸能，其差额转成两内阻的热。例 2.2 与练习 2.2 分别计算外端开路和接负载两种状态。

串联电池的电动势按极性相加，内阻相加。N 节相同电池若每组串联 n 节、共 m 组并联，$mn = N$，则电动势为 $n\mathcal{E}$，内阻为 $nr/m = n^2 r/N$。例 2.7 由此求负载电流最大的组合。

2.5.2　电桥的两个中点

图 2.11 中，以 $V_A - V_B = U$ 供电。先设桥支电流为零，两条串联支路分压给出

$$V_M - V_B = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}, \qquad V_N - V_B = U\frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

令二者相等，交叉相乘并消去公共项 R_2R_4，得到

$$R_2(R_3 + R_4) = R_4(R_1 + R_2) \quad \Longrightarrow \quad R_1R_4 = R_2R_3.$$

满足此比例时，零桥电流与节点方程相容，电桥平衡。

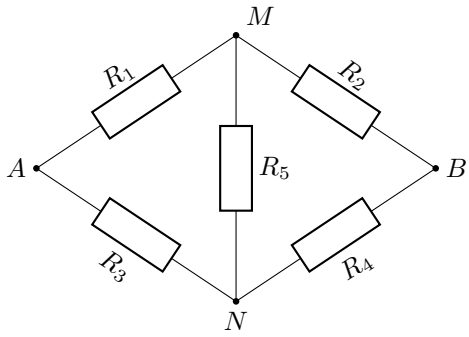


图 2.11: 桥臂两端的等效网络

电桥偏离平衡时，可把桥电阻 R_5 作为负载。端口开路电压就是两条分压支路的中点电势差，理想供电源置零后 A, B 合并，桥端看入电阻为 $(R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4)$。桥电流由开路电压除以看入电阻与 R_5 之和，方向由开路电压的正负确定。

2.5.3 电路中的能量转换

沿每条支路选定电流正向。若支路由 P 指向 Q，则电荷每秒从两端电势差获得的能量为 $(V_P - V_Q)I_{PQ}$。把各支路的这一项相加，同一个节点电势乘的是该节点的净流出电流。由节点电流守恒，

$$\sum_{P\to Q}(V_P - V_Q)I_{PQ} = \sum_{P} V_P I_{\text{净流出},P} = 0.$$

纯电阻支路的这一项为 I^2R。电压源以从负端到正端为支路正向，该项为 $-\mathcal{E}I$。电流源以箭头为正向，记 U_α 为箭头终点减起点的电势差，该项为 $-U_\alpha J_\alpha$。含有串联电阻和电源的支路，沿支路逐段分开计算。移项得到

$$\sum_k \mathcal{E}_k I_k + \sum_\alpha U_\alpha J_\alpha = \sum_j I_j^2 R_j.$$

左侧为各电源供能功率的代数和。电流从电池正端流入时，$\mathcal{E}I < 0$，电池吸收能量。图 2.10 中，较强电池供给的能量一部分进入较弱电池，另一部分在两只内阻中转为热。

2.6　例题与分析

例 2.1 (两电源相助与相抗)**.** 两理想电源电动势分别为 10 V、2 V，与 2 Ω 电阻串联。分别求相助接法和相抗接法的电流，并判断两种情况下第二电源的能量转换。

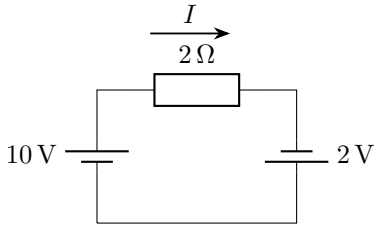


图 2.12: 相助接法中，沿箭头跨过两个电源均从负端到正端

解　相助接法

在图 2.12 的相助接法中，顺时针跨越两个电源均从负端到正端，总电动势 12 V。回路方程 $10 + 2 - 2I = 0$ 给出 $I = 6\,\mathrm{A}$。

电源供能

两个电源均供能，功率为 60 W 和 12 W，电阻功率为 $6^2 \times 2 = 72\,\mathrm{W}$。

相抗接法

图 2.13 将第二电源反接，沿同一回路有 $10 - 2 - 2I = 0$，故 $I = 4\,\mathrm{A}$。

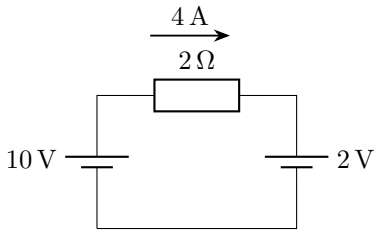


图 2.13: 反接右侧电源后，4 A 的电流进入它的正端

第二电源吸能

第二电源电流从正端流入，吸收功率 $2 \times 4 = 8\,\mathrm{W}$，第一电源供能 40 W，电阻耗能 32 W，满足 $40 = 8 + 32$。两种接法改变了电流相对于第二电源极性的方向，因而也改变了第二电源的能量转换。

例 2.2 (三个不同电池直接并联)**.** 三个电池同极性并联，电动势依次为 $1,2,3\,\mathrm{V}$，内阻依次为 $3,2,1\,\Omega$，没有外接负载。求共同端电压和各电池输出电流。

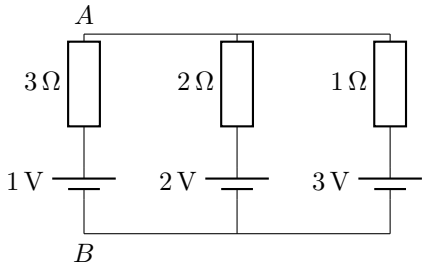


图 2.14: 题设：三个不同电池直接并联

解　电压与电流的正向

图 2.14 中电池正端连接 A，负端连接 B。令 $U = V_A - V_B$，各支路输出电流 I_k 都从下向上。图 2.15 固定了这些箭头，因此

$$I_1 = (1-U)/3, \quad I_2 = (2-U)/2, \quad I_3 = 3-U.$$

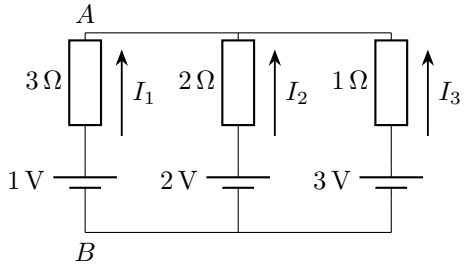


图 2.15: 三支路均取向上为电流正向。求出的负值对应实际电流向下

共同端电压

外部没有取电流，$I_1 + I_2 + I_3 = 0$。乘以 6 得

$$2 - 2U + 6 - 3U + 18 - 6U = 0, \qquad U = \frac{26}{11}\,\mathrm{V}.$$

各电池的电流

回代有 $I_1 = -5/11\,\mathrm{A}$、$I_2 = -2/11\,\mathrm{A}$、$I_3 = 7/11\,\mathrm{A}$，前两电池被充电，第三电池供能。

内阻发热

代数转换功率为

$$\sum \mathcal{E}_k I_k = \frac{-5-4+21}{11} = \frac{12}{11}\,\mathrm{W},$$

等于内阻总热功率 $3(5/11)^2 + 2(2/11)^2 + (7/11)^2 = 12/11\,\mathrm{W}$，第三节电池供给的能量分成前两节电池吸收的能量和各内阻的热。

例 2.3 (双电源网络中的节点法)**.** 电路如图，各电阻和电源数值已标出。取 $V_O = 0\,\mathrm{V}, V_B = 0\,\mathrm{V}$。求各未知节点电势与各有阻支路电流，并说明各节点的电流分配。底部 O, B 由理想导线相连。

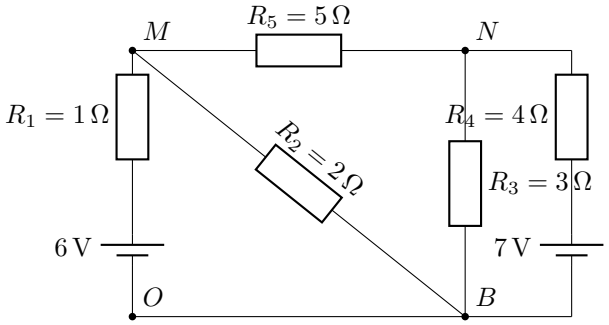


图 2.16: 题设：双电源网络中的节点法

解　支路关系

以图 2.16 的导线相连节点 O, B 为参考地，未知量只有 V_M, V_N。图 2.17 固定五条支路的参考方向。沿 $O \to M$ 与 $B \to N$ 分别跨过电势上升 6 V、7 V。

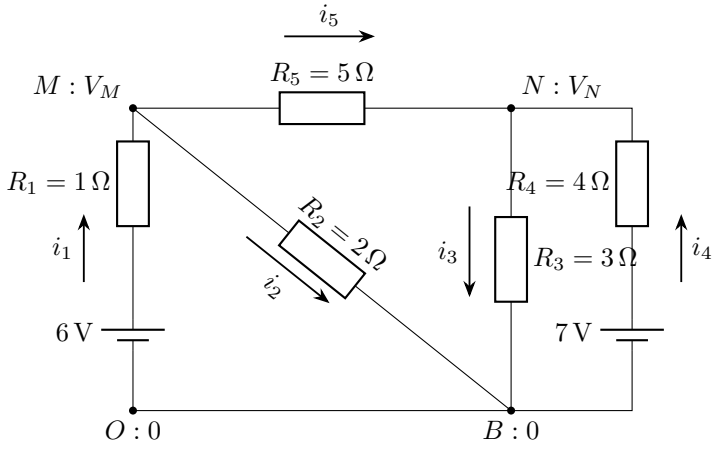


图 2.17: 五条支路分别规定参考方向。电源极性与原网络相同

节点方程

在 M,N 分别列流出电流代数和为零。各电阻数值以欧姆计，得到

$$\begin{cases}(V_M-6)+V_M/2+(V_M-V_N)/5=0,\\ V_N/3+(V_N-7)/4+(V_N-V_M)/5=0.\end{cases}$$

第一式的三项分别对应 MO,MB,MN，第二式对应 NB 的两条不同支路和 NM。虽然两支路端点都在 N,B，含电源的一条仍须保留其 $7\,\mathrm{V}$。

节点电势

分别乘以 $10,60$ 去分母：

$$17V_M-2V_N=60,\qquad -12V_M+47V_N=105.$$

第一式乘 47，第二式乘 2 后相加，得 $775V_M=3030$。回代得

$$\boxed{V_M=606/155\,\mathrm{V}},\qquad \boxed{V_N=501/155\,\mathrm{V}}.$$

支路电流

按原图的参考方向逐支路回算：

$$\begin{aligned}i_1\ (O\to M)&=(6-V_M)/1=324/155\,\mathrm{A},\\ i_2\ (M\to B)&=V_M/2=303/155\,\mathrm{A},\\ i_3\ (N\to B)&=V_N/3=167/155\,\mathrm{A},\\ i_4\ (B\to N)&=(7-V_N)/4=146/155\,\mathrm{A},\\ i_5\ (M\to N)&=(V_M-V_N)/5=21/155\,\mathrm{A}.\end{aligned}$$

电源功率与电阻发热

五项都为正，故实际方向与图中箭头相同。在两节点，流入和流出满足 $-i_1+i_2+i_5=0$、$i_3-i_4-i_5=0$。原电源供给的总功率为：

$$6i_1+7i_4=\frac{2966}{155}\,\mathrm{W}=i_1^2+2i_2^2+3i_3^2+4i_4^2+5i_5^2.$$

两电源的转换功率之和转化为五个电阻的热功率。

例 2.4 (断口两侧的电势差)**.** 上下两支路连接共同端点 L, R。上支路从 L 到 R 为电势上升 $1\,\mathrm{V}$ 的理想电源与 $1\,\Omega$ 电阻。下支路从 L 到 R 为电势上升 $3\,\mathrm{V}$ 的电源与 $1\,\Omega$ 电阻。另有断开支路：从 L 经电势上升 $10\,\mathrm{V}$ 的电源及 $2\,\Omega$ 电阻到 A。从 R 经电势下降 $5\,\mathrm{V}$ 的电源到 B。求 $V_A - V_B$。

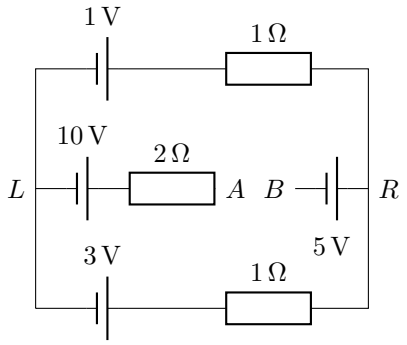


图 2.18: 题设：断口两侧的电势差

解　断开支路

图 2.18 的 A, B 没有接通，因此两个断开小支路电流为零，$2\,\Omega$ 电阻没有电势降。

闭合部分的电流

令 $V_L = 0, V_R = U$，闭合网络两支路从左到右的电流分别为 $I_1 = 1 - U$、$I_2 = 3 - U$。由 $I_1 + I_2 = 0$ 得 $U = 2\,\mathrm{V}$，故上支路实际向左 $1\,\mathrm{A}$、下支路向右 $1\,\mathrm{A}$。

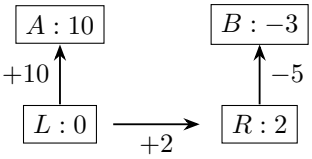


图 2.19: 依次沿箭头累加电势变化。方框内为节点电势，数值均以伏特计

断端电势

图 2.19 的电势路径先由 L 到 A，有 $V_A = 0 + 10 = 10\,\mathrm{V}$。由 R 到 B 有 $V_B = 2 - 5 = -3\,\mathrm{V}$。所以 $V_A - V_B = 13\,\mathrm{V}$。

电阻压降由支路电流决定，电源的升势则由极性和电动势决定，二者分别进入上述电势关系。

例 2.5 (不平衡电桥的桥电流)**.** 电桥 AM, MB, AN, NB, MN 的电阻依次为 $1, 2, 4, 5, 3\,\Omega$，A, B 间接理想电压 U，$V_A - V_B = U > 0$。求等效电阻及桥臂电流方向。

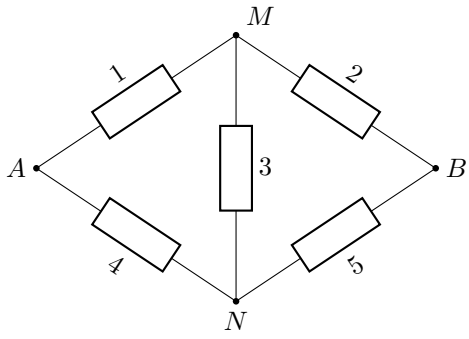


图 2.20: 题设：不平衡电桥的桥电流

解　带载节点方程

在图 2.20 中令 $V_A = U, V_B = 0$。两个中点的节点方程为

$$(V_M - U) + \frac{V_M}{2} + \frac{V_M - V_N}{3} = 0, \qquad \frac{V_N - U}{4} + \frac{V_N}{5} + \frac{V_N - V_M}{3} = 0.$$

中点电势

分别乘 6 与 60，得 $11V_M - 2V_N = 6U$、$-20V_M + 47V_N = 15U$。第一式乘 20、第二式乘 11 后相加消去 V_M，得 $477V_N = 285U$，所以

$$V_N = \frac{95}{159}U, \qquad V_M = \frac{104}{159}U.$$

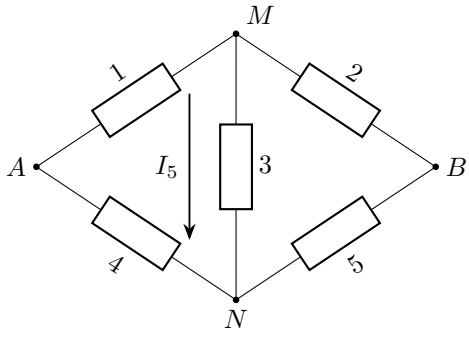


图 2.21: 解答过程：不平衡电桥的桥电流

桥电流

图 2.21 中 $V_M > V_N$，桥臂电流 $I_5 = (V_M - V_N)/3 = U/53$，由 M 流向 N。

输入电阻

电源总输出电流

$$I = \frac{U - V_M}{1} + \frac{U - V_N}{4} = \frac{55U}{159} + \frac{16U}{159} = \frac{71U}{159},$$

故 $R_{AB} = 159/71\,\Omega$。

电流分配

AM 电流在 M 分流，减去沿 MN 流出的部分，余下 $52U/159$ 流过 MB。NB 电流为 $19U/159$，等于 AN 电流加上 MN 电流。桥电流使两条分压支路互相输运电荷，求得的两中点电势包含这一作用。

例 2.6 (从桥臂端口作等效)**.** 电桥 AM, MB, AN, NB 的电阻分别为 $2, 4, 3, 3\,\Omega$，A, B 间电压 $12\,\mathrm{V}$。桥臂 MN 接 $5\,\Omega$。用等效电源求桥电流，并比较直接用无载中点电势差除以桥臂电阻的误差。

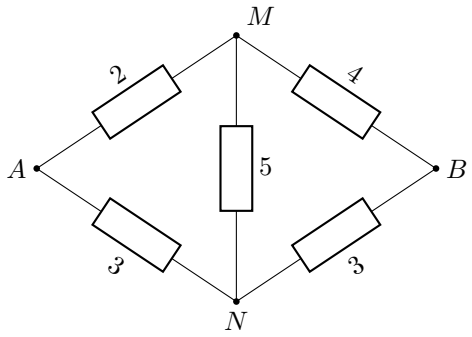


图 2.22: 题设：从桥臂端口作等效

解　桥端开路电压

先断开图 2.22 中的桥臂。以 $V_B = 0$，两支路分别分压得到 $V_M^{\mathrm{oc}} = 12 \times 4/(2+4) = 8\,\mathrm{V}$，$V_N^{\mathrm{oc}} = 12 \times 3/(3+3) = 6\,\mathrm{V}$，所以桥端开路电压 $U_{\mathrm{oc}} = 2\,\mathrm{V}$。

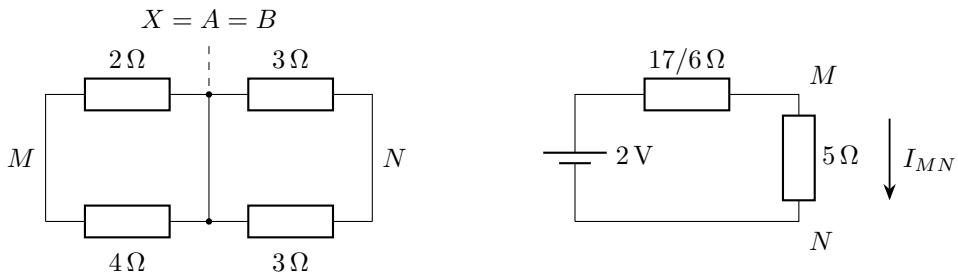


图 2.23: 左图将供电源置零、移去桥臂，A, B 合为 X。右图接回 $5\,\Omega$，桥电流从 M 流向 N

桥端看入电阻

在图 2.23 左图，把供电电压置零，A, B 合为 X。M 到 X 和 X 到 N 各有两条并联支路，因此

$$R_{\text{th}} = (2 \parallel 4) + (3 \parallel 3) = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}\,\Omega.$$

实际桥电流

沿右图回路接回 $5\,\Omega$ 桥臂，$I_{MN} = 2/(5 + 17/6) = 12/47\,\text{A}$，由 M 到 N。

无载估计的误差

若直接用 $I_{\text{app}} = 2/5 = 0.4\,\text{A}$，它是把桥端内阻取零时的估计值。以正确值为分母，计算相对误差：

$$\frac{I_{\text{app}} - I_{MN}}{I_{MN}} = \frac{2/5}{12/47} - 1 = \frac{47}{30} - 1 = \frac{17}{30} \approx 56.7\%.$$

实际桥端电压为 $5I_{MN} = 60/47\,\text{V}$，小于开路值 $2\,\text{V}$，说明负载确实改变了两中点电势。

例 2.7 (相同电池的串并联组合)**.** 有 N 节相同电池，每节电动势 $\mathcal{E}$、内阻 r。每组串联 n 节，共 m 组并联，$mn=N$，接负载 R。求负载电流。先把 n 视为连续变量求最优条件，再说明整数约束。

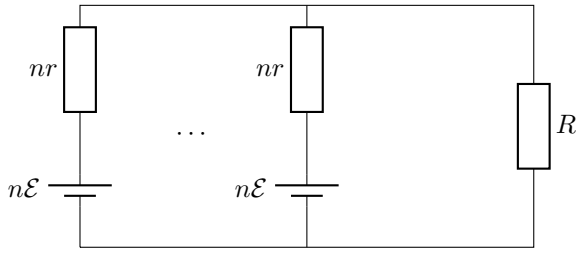


图 2.24: 每个相同串联组折合为 $n\mathcal{E}, nr$，共 m 组并联接同一负载

解　电池组的端口

图 2.24 每组电动势为 $n\mathcal{E}$、内阻为 nr。m 个相同组并联后等效电动势不变，内阻变为 $nr/m=n^2r/N$，因此

$$I(n)=\frac{n\mathcal{E}}{R+n^2r/N}=\frac{\mathcal{E}}{R/n+nr/N}.$$

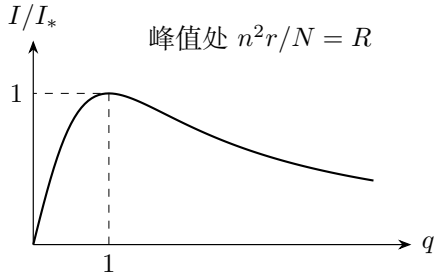


图 2.25: 连续变量下的电流曲线。$q=n/n_*$，$n_*=\sqrt{NR/r}$，整数可行点须另按 N 的因数选取

连续变量的极值

保持 $N,R,r,\mathcal{E}$ 不变，对电流按商法则求导，分子 n 的导数为 1，分母中 n^2r/N 的导数为 $2nr/N$。得到

$$I'(n)=\mathcal{E}\frac{(R+n^2r/N)-n(2nr/N)}{(R+n^2r/N)^2}=\mathcal{E}\frac{R-n^2r/N}{(R+n^2r/N)^2}.$$

分母为正，$I'(n)$ 的符号由 $R-n^2r/N$ 决定，所以连续最优值为 $n_*=\sqrt{NR/r}$，对应内阻 $n_*^2r/N=R$。把该值代入电流原式，分母变为 $2R$，因此

$$I_*=\frac{\mathcal{E}\sqrt{NR/r}}{2R}=\frac{\mathcal{E}\sqrt{N}}{2\sqrt{Rr}}.$$

再令 $q=n/n_*$，则 $n^2r/N=q^2R$，从而

$$\frac{I}{I_*}=\frac{qn_*\mathcal{E}/[R(1+q^2)]}{n_*\mathcal{E}/(2R)}=\frac{2q}{1+q^2}.$$

这就是图中的归一化曲线，其峰值位于 $q=1$。

整数串联组数

真实组合要求 n 为 N 的正因数且 $1\le n\le N$。当峰值位于允许范围内，只需比较 n_* 两侧离它最近的允许值。若 $R\ge Nr$，最优为全串联。若 $R\le r/N$，最优为全并联。内阻与负载匹配只在允许组合中可实现时成立。图 2.25 以 n/n_* 表示串联节数，峰值位于内阻 $n^2r/N=R$ 处。两侧曲线分别对应串联电动势增长占优、内阻增长占优的情形。

例 2.8 (端口的两次负载测量)**.** 线性有源网络的端口分别接 $3\,\Omega$、$9\,\Omega$ 负载，测得端电压依次为 $6\,\mathrm{V}$、$9\,\mathrm{V}$。求等效电动势、内阻、短路电流和最大可供给负载功率。

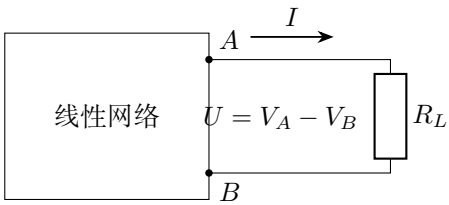


图 2.26: 题设：端口的两次负载测量

解　两次负载电流

由图 2.26 的两个负载，输出电流分别为 $I_1=6/3=2\,\mathrm{A}$、$I_2=9/9=1\,\mathrm{A}$。

端口参数

同一端口满足

$$6=\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}-2r_{\mathrm{eq}},\qquad 9=\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}-r_{\mathrm{eq}}.$$

第二式减第一式得 $r_{\mathrm{eq}}=3\,\Omega$，回代得 $\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}=12\,\mathrm{V}$。

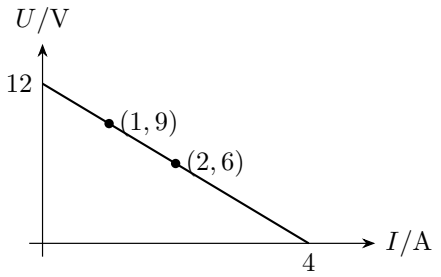


图 2.27: 解答过程：端口的两次负载测量

短路电流与最大功率

图 2.27 的端口直线斜率为 $-3\,\Omega$, 截距为 $12\,\mathrm{V}$。令 $U=0$ 得短路电流 $4\,\mathrm{A}$。用端口直线直接写负载功率 $P=UI=(12-3I)I=12I-3I^2$, 逐项求导得 $P'=12-6I$、$P''=-6<0$。故 $I=2\,\mathrm{A}$ 时功率最大，此时 $U=6\,\mathrm{V}$、$R_L=U/I=3\,\Omega$, $P_{\max}=12\,\mathrm{W}$。这与 $\mathcal{E}_{\mathrm{eq}}^2/(4r_{\mathrm{eq}})$ 相符。由两次负载测量得到的截距与斜率，就足以计算其他负载的工作状态。

例 2.9 (两端网络的等效电流源)**.** A,B 之间接两条内部支路：一条为 $1\,\mathrm{V}$ 电源串联 $1\,\Omega$，电源正端朝 A。另一条为 $2\,\Omega$ 电阻。求电流源等效。再接上 $2\,\mathrm{V}$ 电源串联 $3\,\Omega$ 的外支路，其正端同样朝 A，求三支路电流。

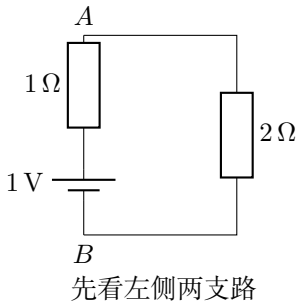


图 2.28: 题设：两端网络的等效电流源

解　短路电流

先将图 2.28 的 A,B 短路。内部 $2\,\Omega$ 两端电压为零，无电流。$1\,\mathrm{V}$ 电源经 $1\,\Omega$ 产生 $1\,\mathrm{A}$ 短路电流，由 A 流向外部。

并联等效电阻

因此等效电流源为从 B 指向 A 的 1 A 源，并联电阻 $1 \parallel 2 = 2/3\,\Omega$。等效开路电压为 $1 \times 2/3 = 2/3\,\mathrm{V}$。

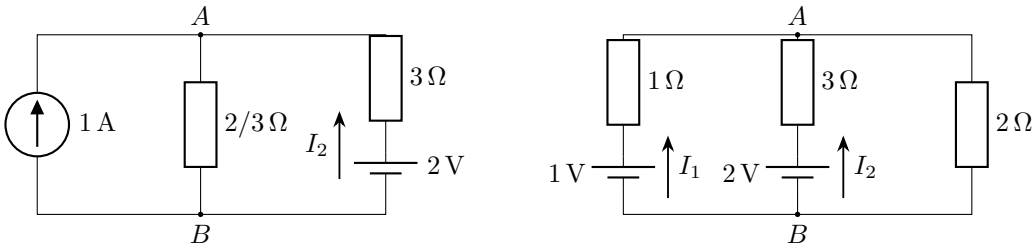


图 2.29: 左图用诺顿源求接入外支路后的端电压 U。右图保留三条原支路，用同一 U 分别求电流

外支路与端电压

图 2.29 左图中，1 A 诺顿源和外部电源都向上节点供电。令 $U = V_A - V_B$，外部电源电流为 $I_2 = (2-U)/3$，并联电阻向下的电流为 $U/(2/3)$。节点方程给出

$$1 + \frac{2-U}{3} = \frac{3U}{2}, \qquad 6 + 4 - 2U = 9U.$$

因此 $U = 10/11\,\mathrm{V}$，$I_2 = 4/11\,\mathrm{A}$。

原网络的电流分配

回到右图，内部 1 V 电池输出 $I_1 = (1-U)/1 = 1/11\,\mathrm{A}$，2 Ω 电阻电流 $I_R = U/2 = 5/11\,\mathrm{A}$ 向下。$I_1 + I_2 = I_R$，电流守恒。

例 2.10 (带理想电压源的超节点)**.** 节点 M, N 之间有理想电压源，$V_M - V_N = 6\,\mathrm{V}$。$M$ 经 2 Ω 接地，N 经 3 Ω 接地。理想电流源从地向 M 注入 2 A。求两节点电势和电压源电流。

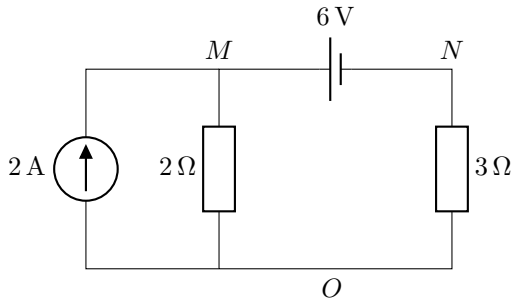


图 2.30: 题设：带理想电压源的超节点

解　超节点的两个条件

图 2.30 的理想电压源给定电势差，而电流待求。把 M, N 一起圈成超节点，内部电源电流从一端流出、另一端流入，在总守恒式中抵消。图 2.31 虚线处有两电阻电流流出，电流源 2 A 流入，故

$$\frac{V_M}{2}+\frac{V_N}{3}=2, \qquad V_M - V_N = 6.$$

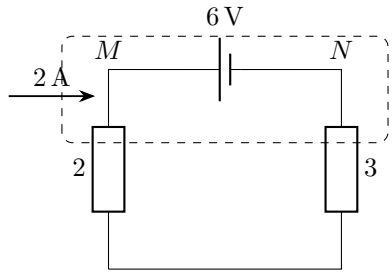


图 2.31: 解答过程：带理想电压源的超节点

节点电势

第一式乘 6 得 $3V_M + 2V_N = 12$，代入 $V_M = V_N + 6$，得 $5V_N = -6$，所以 $V_N = -6/5\,\mathrm{V}$，$V_M = 24/5\,\mathrm{V}$。

电压源电流

M 的电阻电流为 $12/5\,\mathrm{A}$ 向下，超过电流源输入的 $2\,\mathrm{A}$，因此还需从 N 经电压源流入 M，大小为 $2/5\,\mathrm{A}$。N 的电阻电流为 $-2/5\,\mathrm{A}$，实际从地流入 N，与上述方向相符。

例 2.11 (叠加时保留电源内阻)**.** 双电源网络 OM, MB, NB, BN, MN 与前面双电源例题相同，电阻为 $1, 2, 3, 4, 5\,\Omega$，电源在 $O \to M$ 提供 $6\,\mathrm{V}$、在 $B \to N$ 提供 $7\,\mathrm{V}$。O, B 等势。用叠加说明求 MN 支路电流的过程，并计算合成后的支路功率。

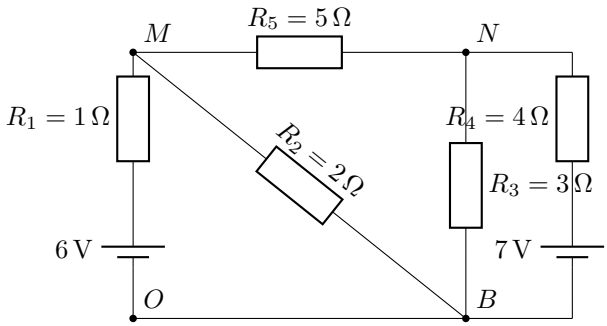


图 2.32: 题设：叠加时保留电源内阻

解　目标电流方向

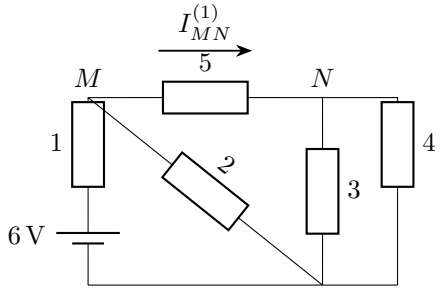
在图 2.32 中固定 MN 电流为从 M 到 N。

六伏电源的作用

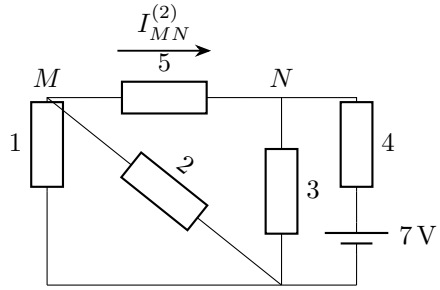
仅保留 $6\,\mathrm{V}$ 电源时，把 $7\,\mathrm{V}$ 电源短路，$4\,\Omega$ 仍在。两节点方程为

$$\frac{V_M - 6}{1} + \frac{V_M}{2} + \frac{V_M - V_N}{5} = 0, \quad \frac{V_N}{3} + \frac{V_N}{4} + \frac{V_N - V_M}{5} = 0.$$

去分母得 $17V_M - 2V_N = 60$、$-12V_M + 47V_N = 0$，第一式乘 47、第二式乘 2 后相加，$775V_M = 2820$，故 $V_M = 564/155$。第二式再给 $V_N = 12V_M/47 = 144/155$，故 $I_{MN}^{(1)} = 84/155\,\mathrm{A}$。



7 V 源短路，$4\,\Omega$ 保留



6 V 源短路，$1\,\Omega$ 保留

图 2.33: 分别关闭另一个理想电压源。各电阻均保留，两个子问题仍取 $M \to N$ 为参考正向

七伏电源的作用

图 2.33 左侧得到正的 $I^{(1)}_{MN}$，右侧沿同一 $M \to N$ 参考方向求第二项。仅保留 7 V 电源时，1 Ω 也保留，节点方程去分母为 $17V_M - 2V_N = 0$、$-12V_M + 47V_N = 105$，由第一式 $V_N = 17V_M/2$，代入第二式，$(-12+47\times 17/2)V_M = 105$，即 $775V_M = 210$。所以 $V_M = 42/155, V_N = 357/155$，故 $I^{(2)}_{MN} = -63/155\,\mathrm{A}$。

合成电流与功率

总电流

$$I_{MN} = \frac{84-63}{155} = \frac{21}{155}\,\mathrm{A}.$$

将合成电流代入桥臂热功率，得

$$P = (5\,\Omega)\left(\frac{21}{155}\,\mathrm{A}\right)^2 = \frac{441}{4805}\,\mathrm{W}.$$

两个子电流方向相反，平方展开时的交叉项为负，合成电流产生的热功率因此小于两个单独功率之和。

例 2.12 (电流源供电的三节点网络)**.** 如图，两个 1 Ω 支路各串联 2 V 电源，电势升高方向均从左向右。左右节点分别经 2 Ω 接地，另以 3 Ω 相连，电流源从地向中点注入 2 A。求电流源端电压与各电流。

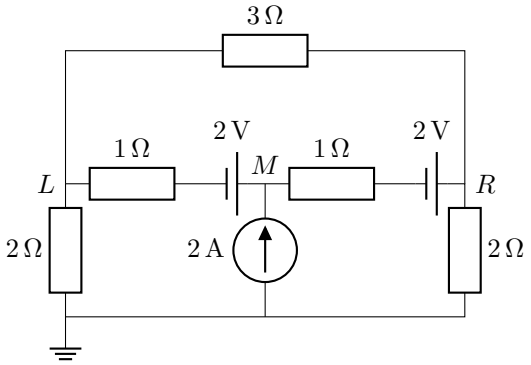


图 2.34: 题设：电流源供电的三节点网络

解　含源支路的电流

在图 2.34 令 $V_L = x, V_M = y, V_R = z$，电阻用欧姆。按支路电源从左向右升高 2 V，左右两个中间支路电流为 $x - y + 2$、$y - z + 2$。

三节点方程

在左节点、中节点、右节点分别写流出电流守恒：

$$\frac{x}{2}+(x-y+2)+\frac{x-z}{3}=0,\qquad (y-x-2)+(y-z+2)=2,$$

$$\frac{z}{2}+(z-y-2)+\frac{z-x}{3}=0.$$

中节点式右端为电流源注入量，左右式右端为零。左、右式乘 6 去分母，中式直接合并，得到

$$11x-6y-2z=-12,\quad -x+2y-z=2,\quad -2x-6y+11z=12.$$

消元

第一、三式相加得 $x+z=4y/3$。代入中式得 $2y-4y/3=2$，所以 $y=3$。再以第三式减第一式，得 $13(z-x)=24$，与 $x+z=4$ 联立得到 $x=14/13, z=38/13$。

$$V_L=14/13,\ V_M=3,\ V_R=38/13$$

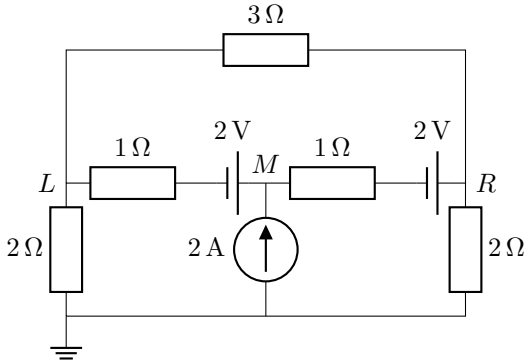


图 2.35: 解答过程：电流源供电的三节点网络

电流分配与电源供能

由图 2.35 电流源上端相对地电压为 3 V。$L\to M$ 电流 1/13 A，$M\to R$ 为 27/13 A，故中点净流出 $26/13=2$ A。顶部电流由 R 向 L 为 $(z-x)/3=8/13$ A。两个接地电阻向下电流分别为 $7/13, 19/13$ A，其和仍为 2 A。电流源向网络供能 $2\times 3=6$ W，这一端电压由电流源注入量与各支路的电阻、电动势共同决定。

例 2.13 (双电源网络的负载电流)**.** 电路如图，各电阻和电源数值已标出。取 $V_G = 0\,\mathrm{V}$。求各未知节点电势与各有阻支路电流，并说明各节点的电流分配。

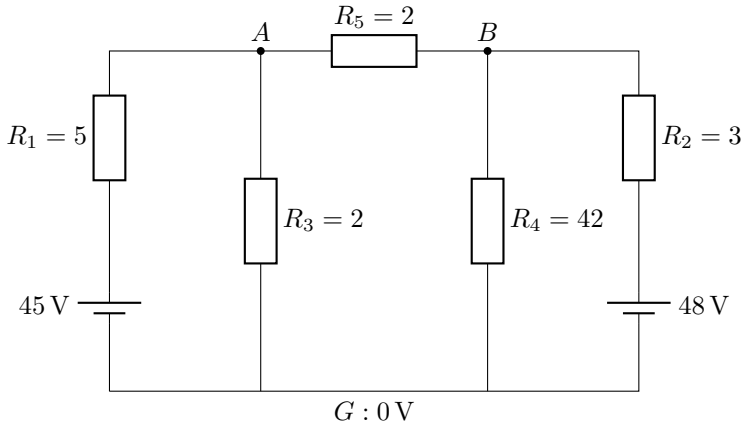


图 2.36: 两个电源通过跨接电阻共同影响 A, B 两节点，两个接地负载并不互相并联

解　参考方向

以图 2.36 的底部公共导线为参考地，未知量为 V_A, V_B。图 2.37 中 i_1, i_5 分别取电池向上输出为正，i_2, i_4 向下，跨接电流 i_3 取 $A \to B$。

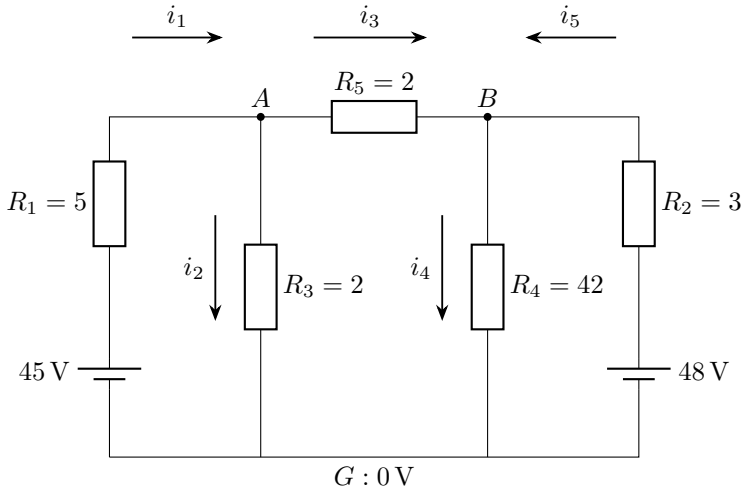


图 2.37: 固定全部支路参考方向。跨接支路电流 i_3 允许求得负值

节点方程

各电阻数值以欧姆计，分别对 A, B 写流出电流代数和为零：

$$\begin{cases}(V_A-45)/5+V_A/2+(V_A-V_B)/2=0,\\(V_B-48)/3+V_B/42+(V_B-V_A)/2=0.\end{cases}$$

两条含电源支路的另一端电势分别是 $45\,\mathrm{V}$、$48\,\mathrm{V}$，两负载下端则都是零，分别代入这些支路的端点电势便得到上面的两式。

节点电势

分别乘以 $10, 14$ 得

$$12V_A-5V_B=90,\qquad -7V_A+12V_B=224.$$

第一式乘 7，第二式乘 12 后相加，得到 $109V_B=3318$。回代：

$$\boxed{V_A=2200/109\,\mathrm{V}},\qquad \boxed{V_B=3318/109\,\mathrm{V}}.$$

支路电流

沿图中原参考方向逐项回算：

$$\begin{aligned}i_1&=(45-V_A)/5=541/109\,\mathrm{A},\\i_2&=V_A/2=1100/109\,\mathrm{A},\\i_3&=(V_A-V_B)/2=-559/109\,\mathrm{A},\\i_4&=V_B/42=79/109\,\mathrm{A},\\i_5&=(48-V_B)/3=638/109\,\mathrm{A}.\end{aligned}$$

两电池的供能

因此跨接电流实际由 B 流向 A，大小为 $559/109\,\mathrm{A}$，两电池仍均向外供能。节点电流关系为 $-i_1+i_2+i_3=0$、$-i_3+i_4-i_5=0$。功率也一致：

$$45i_1+48i_5=\frac{54969}{109}\,\mathrm{W}=5i_1^2+2i_2^2+2i_3^2+42i_4^2+3i_5^2.$$

节点电势较高的一侧经跨接电阻补给另一侧负载，负电流只是原参考箭头与实际方向相反。

例 2.14 (有源梯形网络的端口等效)**.** 左电源 15 V 串联 7 Ω 后接三个串联 1 Ω 轨段，两个中间节点各经 2 Ω 接公共回线，右末端为 16 V 电源串联 2 Ω 接回线，两电源正极均朝上。求左电源输出电流。

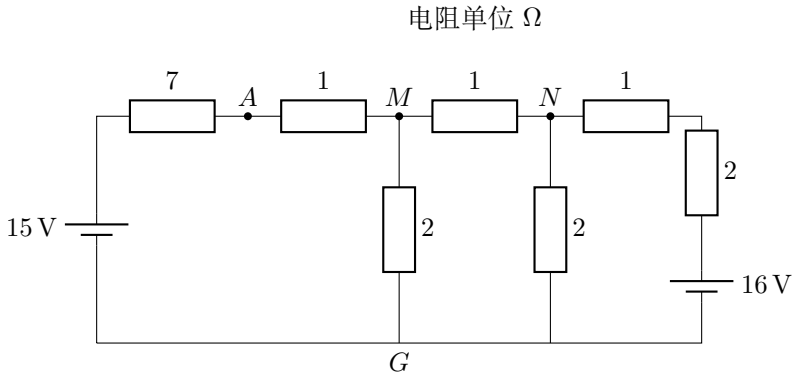


图 2.38: 两电源正端均朝上部轨道。A, G 是取出左电源与 7 Ω 后的右侧网络端口

解　开路端口

图 2.38 左端负载断开时，右侧电源经末端 $2+1=3\,\Omega$ 接至第二中点 N，N 接地 2 Ω，并经 1 Ω 到第一中点 M、再经 2 Ω 接地。左端开路使首个 1 Ω 无流，端口势即 V_M。

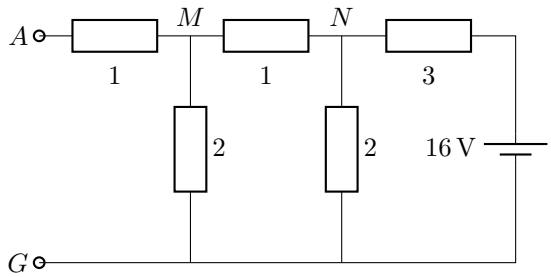


图 2.39: 从 A, G 看入右侧网络：开路时首个 1 Ω 无电流，右端两串联电阻合为 3 Ω

开路电压

图 2.39 的节点方程为 $(V_M-V_N)+V_M/2=0$、$(V_N-V_M)+V_N/2+(V_N-16)/3=0$。

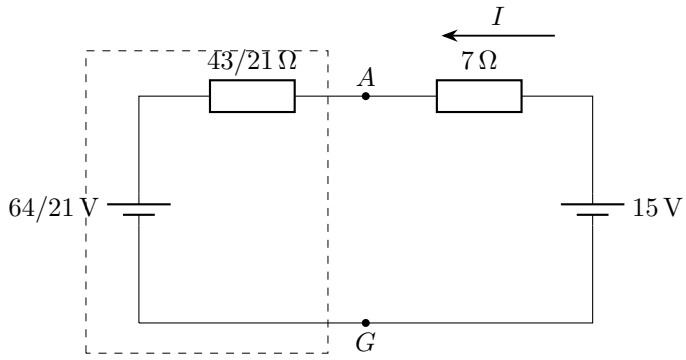


图 2.40: 右侧网络作端口等效后，接回 15 V 与 7 Ω 支路。两个电源在环路内相抗

由图 2.39 的第一式 $V_M = 2V_N/3$，代入第二式，$V_N(1/3+1/2+1/3) = 16/3$，所以 $V_N = 32/7$、$V_M = 64/21$。

看入电阻

将右电源的电动势置零后，端口看入电阻

$$R_{\text{th}} = 1 + [2 \parallel (1 + (2 \parallel 3))] = 1 + (2 \parallel 11/5) = \frac{43}{21}\,\Omega.$$

左电源电流

按图 2.40 接回左源与 7 Ω，输出电流 $I = [15-64/21]/[7+43/21] = 251/190$ A。右源虽较高，经分压后端口开路电压只有 64/21 V，仍允许左源向网络输出。

例 2.15 (利用局部电势和电流避开全网求解)**.** 稳恒网络的有关部分如图，未标电阻可不求。图中已略去处于稳态的电容支路。上导线已知向左 3 A，由 L 通往右上接点的两支路在右侧汇合，合流向上为 6 A。其余电势、电源与支流已标出。求 R_x 中电流，正方向向下。并说明无须求出所有电阻的原因。

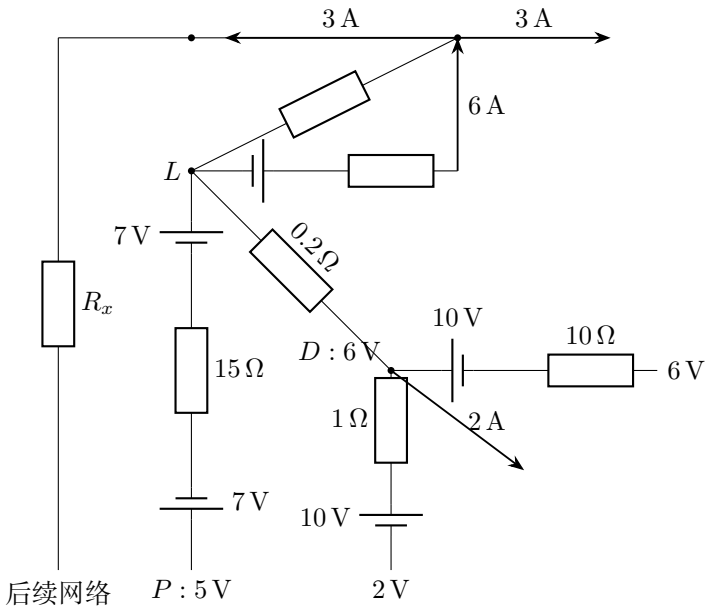


图 2.41: 题设：利用局部电势和电流避开全网求解

解　流入下节点的电流

图 2.41 中先从 D 节点求未知支流。由下方 2 V 节点经升势 10 V、1 Ω 到 D，电流 $(2+10-6)/1=6\,\mathrm{A}$ 流入 D。右侧 6 V 经 10 Ω 与正端朝 D 的 10 V 电源，电流 $(6+10-6)/10=1\,\mathrm{A}$ 也流入 D。另有 2 A 从 D 流出，因此流向 L 的电流为 $6+1-2=5\,\mathrm{A}$。

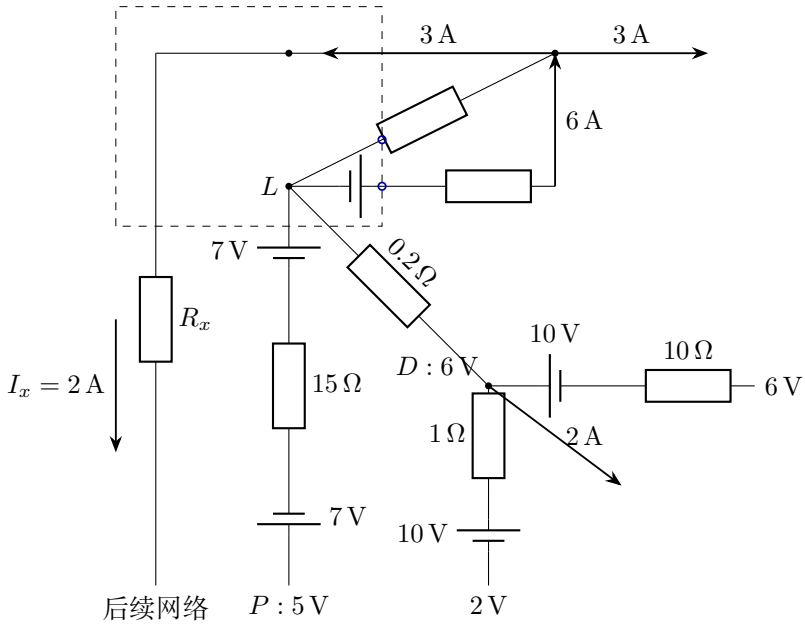


图 2.42: 虚框围住左上导线及节点 L。蓝色记号标出流向右侧合流点的两个截口

中间节点电势

图 2.42 的 0.2 Ω 支路给 $V_D - V_L = 5 \times 0.2 = 1\,\mathrm{V}$，所以 $V_L = 5\,\mathrm{V}$。

竖直支路

L, P 间两电源沿从 L 到 P 先降 7 再升 7，净电动势零，而两端同为 5 V，故该 15 Ω 支路电流为零。

目标支路电流

现在沿图 2.42 虚框数流入、流出的支路。它从上导线取得 3 A、从 D 支路取得 5 A，经右侧两条支路合计流出 6 A，向下方 P 支路送出零，余下只能经 R_x 流出，$I_x = 3 + 5 - 6 = 2\,\mathrm{A}$，向下。图 2.42 的虚框右侧切过的两条支路在框外汇合，所以列整个虚框的电流关系时，只用它们的合计值 6 A。

2.7 本讲小结

电路中每个节点的流入、流出电流满足电荷守恒。沿闭合回路，电势的升高与降低相加为零。选定参考地和电流方向后，电阻支路、电源支路都可写成节点电势之间的关系。负的计算电流给出实际流向与参考箭头的关系。

端口电压与输出电流的直线关系 $U = U_{\mathrm{oc}} - R_{\mathrm{th}} I$，把复杂线性电路化为等效电压源。同一关系也可写为等效电流源。开路电压决定截距，独立源置零后看入的电阻决定斜率，接回负载便得到工作点。原电路内部的电流由端口电势再逐支路求出。

独立电源的贡献可在线性电压、电流方程中相加，功率则用合成后的电流、电压计算。并联电源中的环流、反向电流和桥支路电流，都可以从节点电势高低及电源升势说明。

2.8　练习

练习 2.1 (等电阻分流中的电压表读数)**.** 理想电源电压 $4\,\mathrm{V}$。从 A 经 $1\,\Omega$ 到 M，M, B 间并联两支路：一支为两只 $1\,\Omega$ 串联，中点为 N。另一支为 $2\,\Omega$。理想电压表接在 A, N 间。求读数及各支路电流。

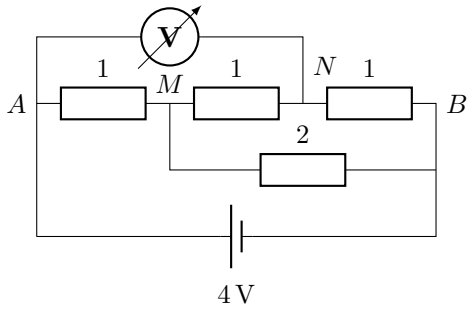


图 2.43: 题设：等电阻分流中的电压表读数

练习 2.2 (三并联电池接入负载)**.** 三个电池电动势依次为 $1, 2, 3\,\mathrm{V}$，内阻为 $3, 2, 1\,\Omega$，同极性并联后接 $2\,\Omega$ 负载。求等效电源、负载电流与各电池输出电流。

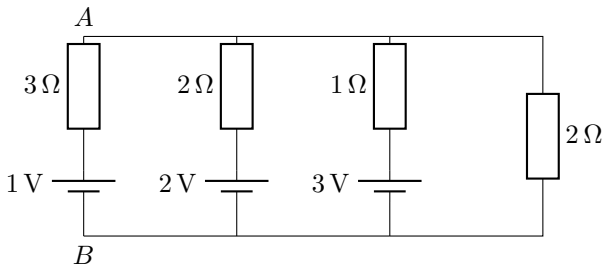


图 2.44: 题设：三并联电池接入负载

练习 2.3 (双电源电路的负载功率)**.** 某 $2\,\Omega$ 电阻在电源一单独作用时参考电流为 $3\,\mathrm{A}$，电源二单独作用时为 $-1\,\mathrm{A}$，网络为线性电路。求共同作用时的功率，并求平方电流展开式中的交叉项。

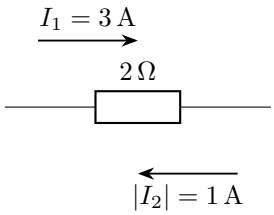


图 2.45: 题设：双电源电路的负载功率

练习 2.4 (惠斯登电桥的平衡与扰动)**.** 电桥 AM, MB, AN, NB 电阻为 $R, 2R, 3R, 6R$，桥臂为有限电阻 $r > 0$，两端电压 $V_A - V_B = U > 0$。求等效电阻。再将 NB 电阻增加 $\delta R > 0$，判断桥电流方向。

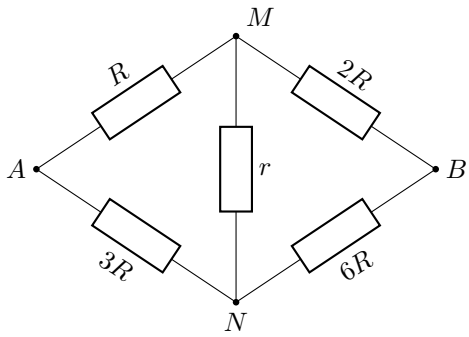


图 2.46: 题设：惠斯登电桥的平衡与扰动

练习 2.5 (两个电源的并联环流)**.** 两个电池同极性并联，电动势 $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$、内阻 $r_1, r_2 > 0$，没有外负载。求环流、共同端电压和能量关系。

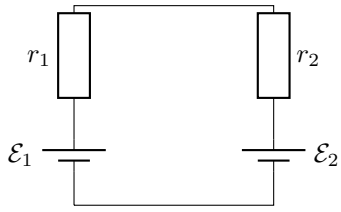


图 2.47: 题设：两个电源的并联环流

练习 2.6 (等效电源与内部电流)**.** 电源电动势 6 V、内阻 1 Ω，端口并联一个内部 2 Ω 电阻，再接外负载 3 Ω。求等效电源、负载电流、真实电池电流，说明二者为何不同。

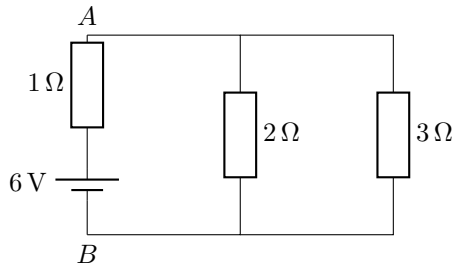


图 2.48: 题设：等效电源与内部电流

练习 2.7 (功率相同的两个负载)**.** 电源 $\mathcal{E}, r$ 接纯电阻 R_1, R_2 时，负载功率相同且 $R_1 \neq R_2$。证明 $R_1 R_2 = r^2$，并比较两次供电效率。

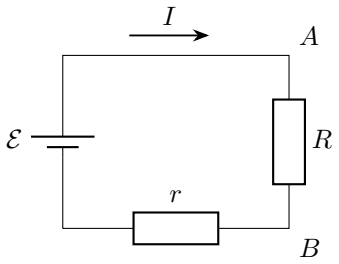


图 2.49: 题设：功率相同的两个负载

练习 2.8 (理想电流源的关闭方式)**.** 端口 A, B 内部有一个从 B 指向 A 的 I_0 理想电流源和并联电阻 r。外接负载 R。求端电压、负载电流及等效电压源，并说明求看入电阻时为何应断开电流源。

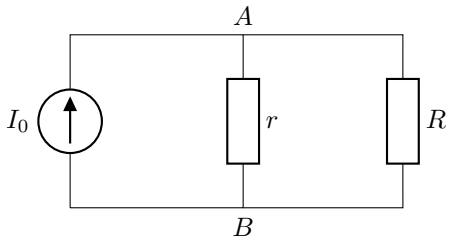


图 2.50: 题设：理想电流源的关闭方式

练习 2.9 (电桥中有限内阻电源的影响)**.** 平衡电桥四臂为 $R, 2R, 3R, 6R$，桥臂任意，电源电动势 $\mathcal{E}$、内阻 r，接在 A, B 两端。求总电流和两中点电势差。再说明内阻是否改变平衡条件。

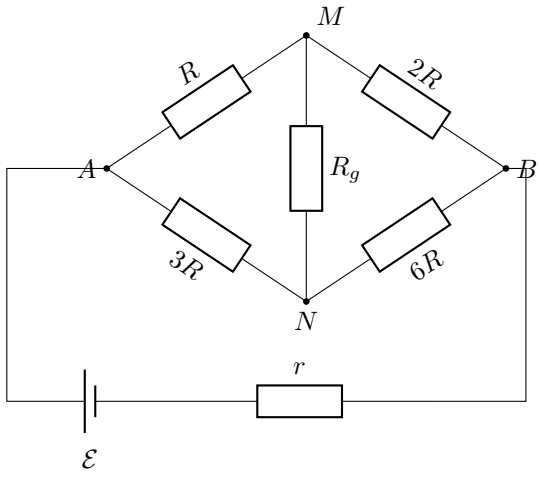


图 2.51: 题设：电桥中有限内阻电源的影响

练习 2.10 (整数电池组的选择)**.** 有 12 节相同电池，每节电动势 1.5 V、内阻 0.50 Ω，外电阻 2.0 Ω。所有电池须组成相同串联组再并联。选择负载电流最大的组合，并求该电流。

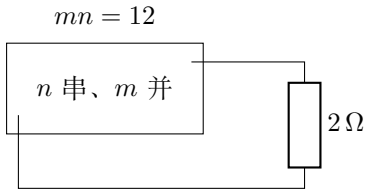


图 2.52: 题设：整数电池组的选择

练习 2.11 (两个电源支路的节点电势)**.** 电路如图，各电阻和电源数值已标出。取 $V_A = 0\,\mathrm{V}$。求各未知节点电势与各有阻支路电流，并说明各节点的电流分配。

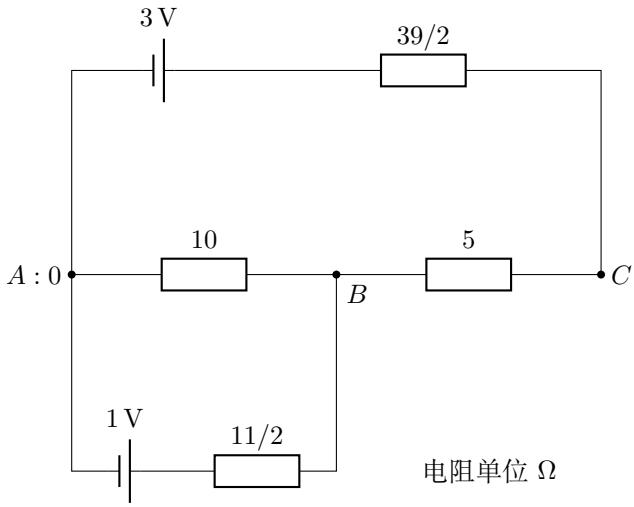


图 2.53: 两含源支路与两纯电阻支路共同确定 B, C 的电势

练习解答

练习 2.1

解　电阻的连接

图 2.43 的理想电压表不取电流，故 M, B 间两条电阻均为 $2\,\Omega$，并联为 $1\,\Omega$。总电阻 $2\,\Omega$，主电流 $2\,\mathrm{A}$，两并联支路各为 $1\,\mathrm{A}$。

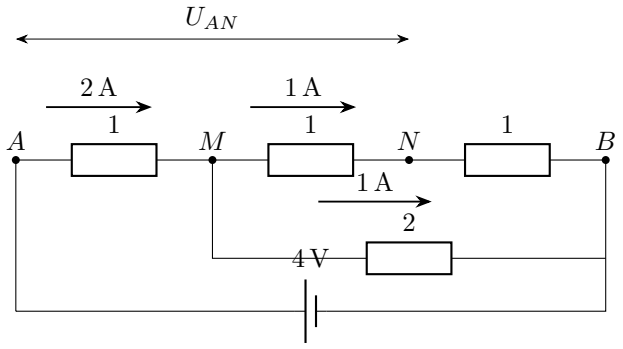


图 2.54: 电压表支路不取电流。主电流与两条并联支路的实际电流分别标出

电压表读数

图 2.54 沿 $A \to M \to N$ 计算：$U_{AM} = 2 \times 1 = 2\,\mathrm{V}$，$U_{MN} = 1 \times 1 = 1\,\mathrm{V}$，所以读数 $U_{AN} = 3\,\mathrm{V}$。

电压表跨越主干电阻与一段分支电阻，读数等于这两段电势降之和。

练习 2.2

解　三电池等效

图 2.44 的并联部分等效内阻为 $r_{\mathrm{eq}} = (1/3 + 1/2 + 1)^{-1} = 6/11\,\Omega$，等效电动势为

$$\mathcal{E}_{\mathrm{eq}} = \frac{1/3 + 2/2 + 3/1}{1/3 + 1/2 + 1} = \frac{26}{11}\,\mathrm{V}.$$

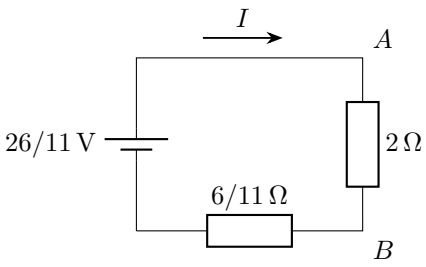


图 2.55: 解答过程：三并联电池接入负载

接入负载

图 2.55 中负载电流 $I_L = (26/11)/(2 + 6/11) = 13/14\,\mathrm{A}$，端电压 $U = 13/7\,\mathrm{V}$。

各电池的电流

各电池输出电流为 $I_1 = (1 - U)/3 = -2/7\,\mathrm{A}$、$I_2 = (2 - U)/2 = 1/14\,\mathrm{A}$、$I_3 = 3 - U = 8/7\,\mathrm{A}$。其和为 $13/14\,\mathrm{A}$，等于负载电流。第一电池被充电，而另两个电池供电。负载取走电流后，共同端电压降低，因而各节电池的输出量也随之改变。

练习 2.3

解　合成电流

按图 2.45 的同一参考方向叠加，$I = 3 + (-1) = 2\,\mathrm{A}$。

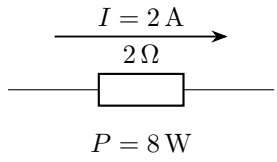


图 2.56: 解答过程：叠加电流后计算负载功率

电阻功率

图 2.56 的总电流沿第一电源贡献方向。单独功率之和是 $3^2 \times 2 + (-1)^2 \times 2 = 20\,\mathrm{W}$。

功率中的交叉项

平方展开的交叉项为 $2RI_1I_2 = 2 \times 2 \times 3 \times (-1) = -12\,\mathrm{W}$，故实际功率是 $20 - 12 = 8\,\mathrm{W}$。负的交叉项来自两个方向相反的电流贡献。

练习 2.4

解　平衡时的输入电阻

图 2.46 中两条分压支路给出相同中点电势：$V_M - V_B = 2U/3$，$V_N - V_B = 6U/9 = 2U/3$，所以桥臂无电流，总电阻为 $3R \parallel 9R = 9R/4$。

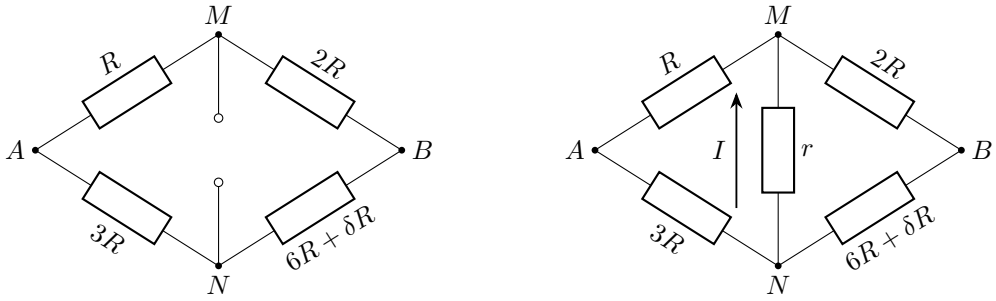


图 2.57: 左图断开桥臂，$V_N^{\mathrm{oc}} > V_M^{\mathrm{oc}}$。右图接回 r，桥电流从 N 流向 M

阻值改变后的中点电势

先断开桥臂，如图 2.57 左图。$V_M^{\mathrm{oc}} = 2U/3$ 不变，而

$$\begin{aligned} V_N^{\mathrm{oc}} &= U\frac{6R+\delta R}{9R+\delta R}, \\ V_N^{\mathrm{oc}} - V_M^{\mathrm{oc}} &= U\left(\frac{6R+\delta R}{9R+\delta R} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{U[3(6R+\delta R) - 2(9R+\delta R)]}{3(9R+\delta R)} \\ &= \frac{U\delta R}{3(9R+\delta R)} > 0. \end{aligned}$$

桥电流方向

按右图接回桥臂。取 $N \to M$ 为正，桥电流为 $(V_N^{\mathrm{oc}} - V_M^{\mathrm{oc}})/(R_{\mathrm{th}} + r)$。分子为正，分母也是正数，因此实际电流从 N 流向 M。

练习 2.5

解　环流

图 2.47 的两电源在闭合环路内相抗。取从电源一正端流向电源二正端为正，则 $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - I(r_1 + r_2) = 0$，所以 $I = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/(r_1 + r_2)$。

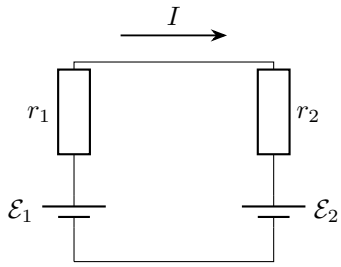


图 2.58: 解答过程：两个电源的并联环流

共同端电压

图 2.58 的端电压可分别由放电、充电关系计算，

$$U = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_2 + Ir_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}.$$

电池的能量转换

能量关系为 $\mathcal{E}_1 I = \mathcal{E}_2 I + I^2(r_1 + r_2)$。内部回路在外端开路时仍闭合。若内阻趋零而两电动势不同，电流发散，表明两个不同理想电压源直接并联的模型不相容。

练习 2.6

解　端口等效

先断开图 2.48 的 $3\,\Omega$ 外负载，内部 $2\,\Omega$ 保留。开路端电压 $U_{\text{oc}} = 6\times 2/(1+2) = 4\,\text{V}$，关闭电源后的内阻 $R_{\text{th}} = 1 \parallel 2 = 2/3\,\Omega$。

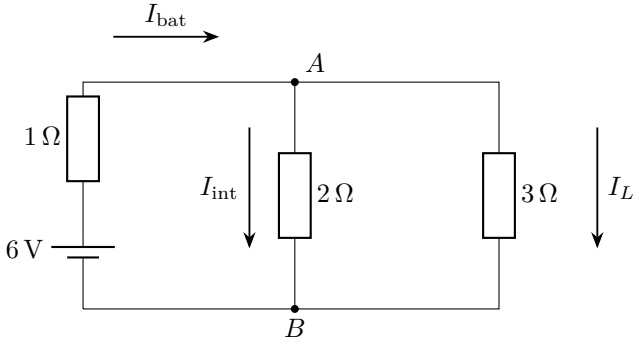


图 2.59: 回到原电路：电池电流在端口分成内部电阻电流与外负载电流

接回负载

先用端口等效求负载，再回到图 2.59 的原支路。得到 $I_L = 4/(3 + 2/3) = 12/11\,\text{A}$，端电压 $U = 36/11\,\text{V}$。

真实电池电流

内部电阻电流 $I_{\text{内}} = U/2 = 18/11\,\text{A}$，真实电池电流为二者之和 $30/11\,\text{A}$。

练习 2.7

解　相同功率的条件

由图 2.49，相同负载功率意味着

$$\frac{\mathcal{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2} = \frac{\mathcal{E}^2 R_2}{(R_2 + r)^2}.$$

两负载电阻的乘积

消去正数 $\mathcal{E}^2$ 后交叉相乘并展开，

$$R_1R_2^2 + 2rR_1R_2 + r^2R_1 = R_2R_1^2 + 2rR_1R_2 + r^2R_2.$$

整理为 $(R_1 - R_2)(r^2 - R_1R_2) = 0$。因 $R_1 \neq R_2$，故 $R_1R_2 = r^2$。

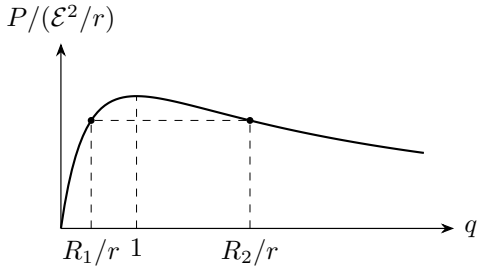


图 2.60: 横轴 $q = R/r$。两个等高点的横坐标互为倒数，分别位于峰值两侧

供电效率

图 2.60 的功率曲线中两电阻分处最大功率点两侧。若 $R_1 < r < R_2$，效率 $\eta_i = R_i/(R_i + r)$ 随 R_i 增大，故 $\eta_1 < 1/2 < \eta_2$。进一步用 $R_2 = r^2/R_1$，

$$\eta_2 = \frac{r^2/R_1}{r^2/R_1 + r} = \frac{r}{R_1 + r}, \qquad \eta_1 + \eta_2 = \frac{R_1}{R_1 + r} + \frac{r}{R_1 + r} = 1.$$

小负载电阻对应较大电流和较低效率，大负载电阻则有较高端电压和效率。

练习 2.8

解　节点分流

图 2.50 的注入电流分成内部电阻电流和负载电流，由节点守恒 $I_0 = U/r + U/R$，所以

$$U = I_0\frac{rR}{r + R}, \qquad I_R = \frac{U}{R} = \frac{I_0r}{r + R}.$$

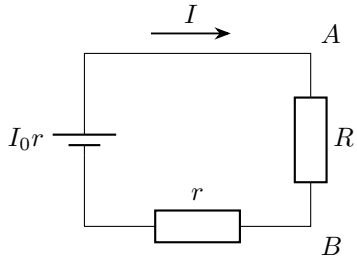
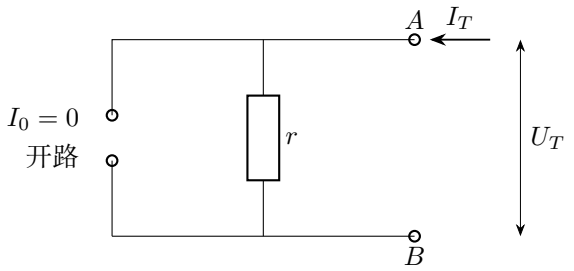


图 2.61: 解答过程：理想电流源的关闭方式



$$R_{\text{th}} = U_T/I_T = r$$

图 2.62: 求看入电阻时断开零电流源支路，移去负载。测试电压只在 r 中产生测试电流

等效电压源

图 2.61 的等效电压源电动势为 $I_0 r$、串联内阻为 r。

电流源强度为零时

图 2.62 先移去负载，再把电流源强度设为零。左侧断开的两个端点表示该支路在任何电压下电流都为零，因此应开路。在 A, B 端加测试电压 U_T 时，测试电流只流过电阻 r，故 $I_T = U_T/r$、$R_{\text{th}} = U_T/I_T = r$。

两种负载极限

开路负载 $R \to \infty$ 时 $U \to I_0 r$，短路负载 $R \to 0$ 时 $I_R \to I_0$，均符合端口条件。

练习 2.9

解　平衡电桥

图 2.51 的平衡只取决于四臂比例。桥臂无电流，外网络电阻 $R_L = (R+2R) \parallel (3R+6R) = 9R/4$。

电源电流

电源总电流

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + 9R/4}, \qquad U_{AB} = I\frac{9R}{4}.$$

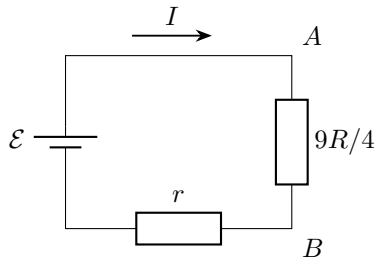


图 2.63: 解答过程：电桥中有限内阻电源的影响

中点电势差

图 2.63 给出实际端电压。回到图 2.51 沿两臂分压，两中点均比 B 高 $2U_{AB}/3$，所以 $V_M - V_N = 0$。电源内阻只改变实际端电压和总电流，分压比例未变，因此不改变理想电桥的平衡条件。

练习 2.10

解　允许的串联组数

图 2.52 中，n 节串联、$12/n$ 组并联的等效内阻为 n^2r/N。由例 2.7 对 $I(n) = n\mathcal{E}/(R + n^2r/N)$ 的求导，导数的符号与 $R - n^2r/N$ 相同。故连续最优串联数 $n_* = \sqrt{NR/r} = \sqrt{12 \times 2/0.5} = \sqrt{48} \approx 6.93$。允许的因数为 $1, 2, 3, 4, 6, 12$。电流在 $n < n_*$ 时增加、$n > n_*$ 时减少，只需比较相邻允许值 $6, 12$。

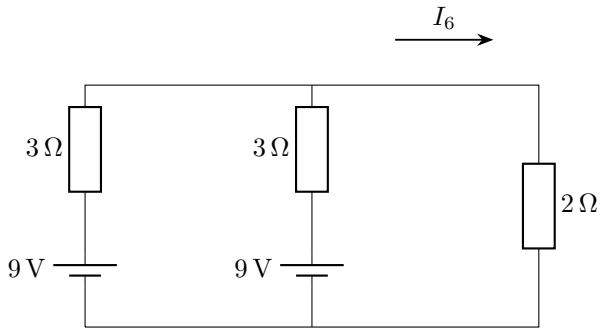


图 2.64: 最优可行组合：两组六节串联电池并联，每组折合 9 V 与 3 Ω

两种候选组合

图 2.64 中 $n = 6, m = 2$ 时，等效电动势 9 V、内阻 $6(0.5)/2 = 1.5\,\Omega$，故 $I_6 = 9/3.5 = 18/7\,\mathrm{A}$。$n = 12, m = 1$ 时，$I_{12} = 18/(2 + 6) = 9/4\,\mathrm{A}$。

选定组合

因 $18/7 > 9/4$，最优为每组六节串联、两组并联。

练习 2.11

解　支路方向

以 A 为参考地，未知量为 V_B, V_C。图 2.65 中，i_1, i_2 都取 $A \to B$，i_3 取 $A \to C$，i_4 取 $B \to C$。两个并联的 AB 支路分别提供一项节点电流。

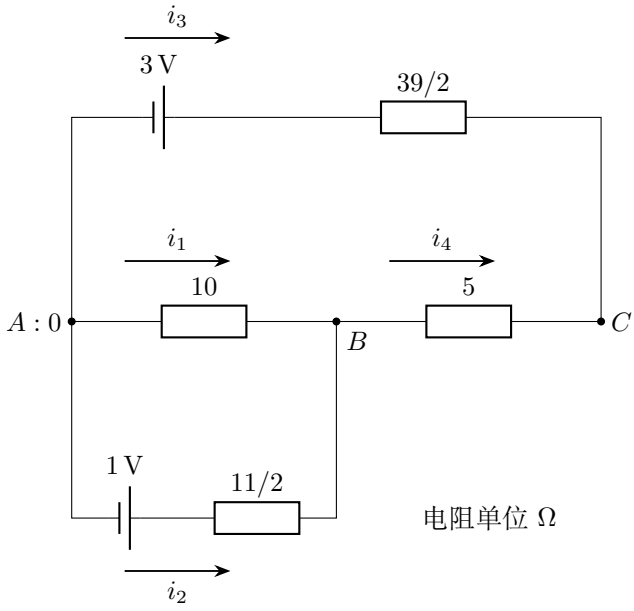


图 2.65: 全部电流参考方向固定。求得负数的纯电阻支路实际反向

节点方程

按图 2.53 的电源极性，两个升势后的支路端点电势分别为 1 V、3 V。在 B, C 写节点方程，电阻数值以欧姆计：

$$\begin{cases} V_B/10 + (V_B - 1)/(11/2) + (V_B - V_C)/5 = 0, \\ (V_C - V_B)/5 + (V_C - 3)/(39/2) = 0. \end{cases}$$

节点电势

分别乘以 $110, 195$：

$$53V_B - 22V_C = 20, \qquad -39V_B + 49V_C = 30.$$

第一式乘 39，第二式乘 53 后相加，得 $1739V_C = 2370$。回代得

$$\boxed{V_B = 1640/1739\,\mathrm{V}}, \qquad \boxed{V_C = 2370/1739\,\mathrm{V}}.$$

实际电流方向

按原参考方向回算四条支路：

$$\begin{aligned} i_1 &= -V_B/10 = -164/1739\,\mathrm{A}, \\ i_2 &= (1 - V_B)/(11/2) = 18/1739\,\mathrm{A}, \\ i_3 &= (3 - V_C)/(39/2) = 146/1739\,\mathrm{A}, \\ i_4 &= (V_B - V_C)/5 = -146/1739\,\mathrm{A}. \end{aligned}$$

电源功率与电阻热

故 $10\,\Omega$ 支路实际由 B 流向 A，$5\,\Omega$ 支路实际由 C 流向 B。图中的参考箭头不改，节点的电流关系为 $-i_1 - i_2 + i_4 = 0$、$-i_3 - i_4 = 0$。两电源供给的功率转为四条有阻支路中的焦耳热，含源支路也各自发热。

$$i_2 + 3i_3 = \frac{456}{1739}\,\mathrm{W} = 10i_1^2 + \frac{11}{2}i_2^2 + \frac{39}{2}i_3^2 + 5i_4^2.$$

电路

物理竞赛一轮讲义

第三讲

对称网络与星三角变换

2026

目录

第三讲　对称网络与星三角变换 **1**

3.1　从节点电势认识电阻网络 1

3.2　等势合并、支路断开与分裂 3

3.3　完全图与高维网络 4

3.4　星形与三角形的端口等效 6

3.5　耗散功率与电阻的变化 8

3.6　虚拟注入电流与有限网络 9

3.7　多端网络与棱中点端口 10

3.8　例题与分析 11

3.9　本讲小结 36

3.10 练习 37

练习解答 40

第三讲　对称网络与星三角变换

3.1　从节点电势认识电阻网络

3.1.1　连接关系与电势分布

上一讲用节点电势和电流连续关系求解电路。本讲沿着同一思路，研究网络的连接关系怎样决定电势分布。有些网络虽有很多电阻，独立的节点电势却很少。找到这些电势之间的关系，复杂网络就会化为少数串、并联通道。

理想导线连接的各点构成同一个节点，它们具有相同电势。电阻的两个端点决定它所在的支路：同跨两个节点的电阻并联，连接处只有两条支路时，这两只电阻通过相同电流，因而串联。

图中线段的长短和弯曲只是画法，电阻的阻值和接点才进入节点方程。重画时，给导线连通的各点标上同一字母，再把元件放到对应节点之间。三维网络采用平面投影时，以顶点和实心接点表示连接。跨越画出的交线保持各自的支路。

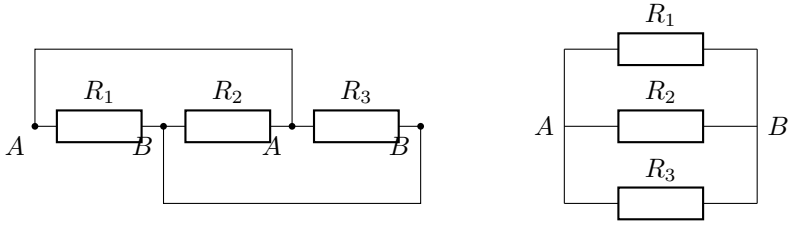


图 3.1: 追踪理想导线后，左侧三个电阻实际都跨接 A, B，重画后成为并联

图 3.1 中，沿左图上方导线到达的两点都标为 A，沿下方导线到达的两点都标为 B。R_2 虽画在中间，仍连接这同一对节点。其画法方向与另外两只相反，不影响并联关系。例题 1 和练习 5 都利用这一步把折叠、交叉的接线展开为并联支路。

3.1.2　几何对称为何能够推出等势

给纯电阻网络两端固定电势后，内部节点电势由线性守恒方程决定。若一种置换或空间变换使端点、每条连线及其电阻值都保持不变，变换后的电势分布仍满足同一端口条件和方程。解的唯一性使原分布与变换后的分布相同，所以变换相互对应的节点等势。

唯一性可以从能量角度说明。假设同一端口条件存在两组解，取各节点电势之差 w_i，端点的差为零。对差分电流的节点方程乘以 w_i 后求和。同一条边在两端节点各出现一次，两项合起来为

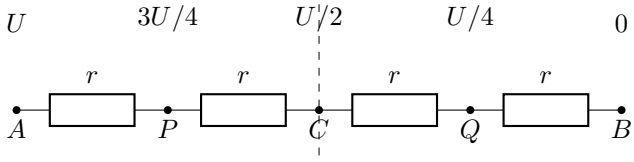
$$w_i\frac{w_i-w_j}{R_{ij}}+w_j\frac{w_j-w_i}{R_{ij}}=\frac{w_i^2-2w_iw_j+w_j^2}{R_{ij}}=\frac{(w_i-w_j)^2}{R_{ij}}.$$

端口处 $w_i=0$，其外部电流不产生额外项，因而全部边相加给出

$$\sum_{\langle i,j\rangle}\frac{(w_i-w_j)^2}{R_{ij}}=0.$$

所有电阻为正，各项非负，故连通边两端的 w 都相等。端点为零又使整个连通网络的 w 为零。因此解唯一。只要变换保持端口电势、连接关系和阻值，变换前后的节点电势就逐点相同。这给出了利用对称性合并节点的物理依据。

如果变换交换高、低电势端点而非分别保持，应把电势同时改成 $U-V$，才能得到同一端口条件。这时对应点满足 $V_P+V_{P'}=U$。位于反射面上的节点保持原位，故其电势满足 $V=U-V$，得到 $V=U/2$。例题 3 和例题 6 将利用这种端口互换的对称性。



反射交换 A,B 与 P,Q，C 不动

图 3.2: 端点交换时应同时反演电势。对应节点的电势和为 U，一般并不等势

图 3.2 的反射把高、低电势端互换，故 $V_P+V_Q=U$。沿四个串联电阻，电势依次下降 $U/4$，所以 P,Q 分别为 $3U/4,U/4$。中点 C 在反射下不动，满足 $V_C=U-V_C$，从而 $V_C=U/2$。这里电势关于中间值 $U/2$ 成对分布。

例 3.4 从立方体的体对角线两端接入电源。绕这条对角线转动，两个接线端位置都保持原样；每一组循环互换的三个顶点因而具有同一电势。

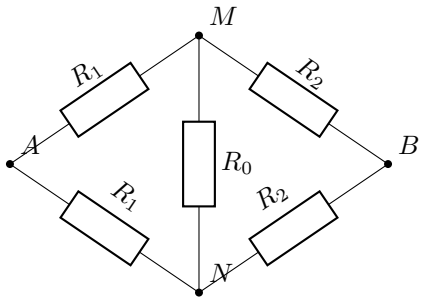
3.2 等势合并、支路断开与分裂

3.2.1 电势相同的节点与无流支路

两节点在当前端口激励下严格等势时，用理想导线连接二者不会引入额外电流，因此不改变该端口的电压电流关系。若它们之间原有有限电阻，原电流就是零，删除该电阻也不改变结果。这两种操作分别是等势合并与无流支路断开。

以两条分压支路为例，若两臂电阻比相同，它们的中点电势相同。在中点间接入任意有限电阻，这条电阻上的电流仍为零。把中点用导线连接，导线也保持零电流。因而同一个电势分布，可以分别画成桥支路、断开的两中点或合并节点。

等势组由接入电源后的整个电路决定。体对角线两端供电的立方体，围绕体对角线的转动保持端口，各层顶点因此等势。相邻顶点供电时，对称面和等势组随之改变。例题 4—6 依次讨论这三种端口，比较它们的电流分配。



$V_M = V_N$

$I_{MN} = 0$

可删 R_0 或合并 M, N

图 3.3: 反射保持 A, B 不动且互换 M, N。对称条件成立时中间支路无流

图 3.3 中，上下两臂的连接和阻值逐项对应。删去 R_0 后，两个中点仍分别由相同分压比决定，等势条件保持。改变一臂电阻后，两侧分压比改变，中点间的电势差就会驱动桥支路电流。这正是上一讲不平衡电桥的来源。

3.2.2 等势层中的并联数目

若网络被分为若干等势层，相邻两层之间共有 m 条相同电阻 r，它们跨接同一对电势，所以并联等效为 r/m。不同层之间通过同一总电流，层间等效电阻再串联。层间电阻由连接这些等势层的实际支路数决定。

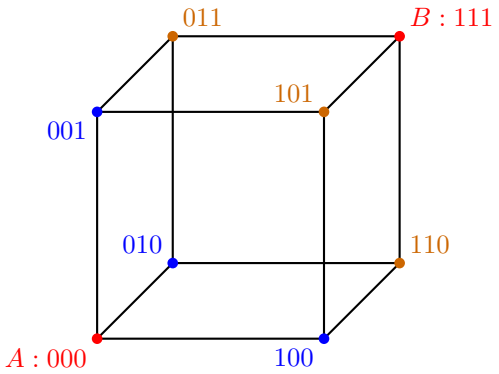


图 3.4: 体对角线端口的原立方体。每棱为 r，未标点的交叉处不连接，二进制数中 1 的个数决定分层

图 3.4 中，坐标置换保持 $000, 111$ 两端不动，三个蓝点互相对应，三个橙点也互相对应。A 到蓝层有三条边。每个蓝点分别通向两个橙点，中间共六条边。橙层到 B 又有三条边。等势分组来自网络对称，六条跨层边则来自实际连接的计数。

以立方体体对角线为端点，四层节点数为 $1, 3, 3, 1$，相邻层的边数为 $3, 6, 3$，所以图 3.5 的串联简化给出 $r/3 + r/6 + r/3 = 5r/6$。总电流 I 在首层分为三股，每股 $I/3$。到中间又各分为两股，每条跨层边通过 $I/6$。这也直接给出各层的电势降。

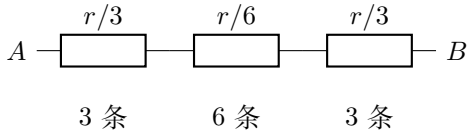


图 3.5: 立方体体对角线供电的等势层

3.3　完全图与高维网络

3.3.1　完全连接的节点群

在 N 个节点两两以电阻 r 连接的网络中，取其中两个节点 A, B 为端点，其余 $N-2$ 个节点在交换彼此时网络和端口都不变，故它们等势。交换 A, B 后它们的整体位置不变，又使电势变为 $U - V$，所以每个内部节点电势均为 $U/2$。

内部节点之间没有电流。A, B 的直接支路为 r，每个内部节点提供一个 $2r$ 的间接通道，这些通道并联，因而

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{N-2}{2r} = \frac{N}{2r}, \qquad R_{AB} = \frac{2r}{N}.$$

几何上可以把节点画成正多面体，也可画在圆周上。端点的连接关系和各边阻值共同决定结果。例题 2、例题 7 与练习 3 都由这些通道的电导相加得到结果。当一条边改变时，只需单独改变该通道的电导。

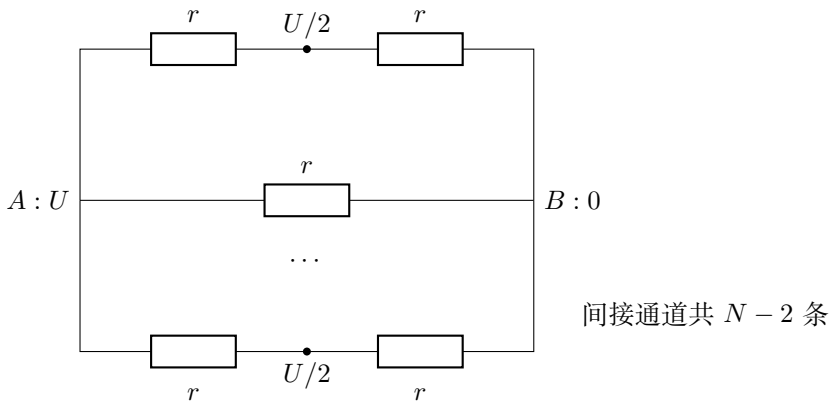


图 3.6: 内部节点等势后，它们之间的边无电流。保留直接通道和经内部节点的间接通道

图 3.6 的每条间接通道含两个 r 串联，且与直接的 r 同跨 A, B。原内部节点间的电阻已因零电流省去，它们对本端口的电流没有贡献。由通道电导相加得到 $N/(2r)$，也说明增加完全连接节点数会降低该端口电阻。

3.3.2 二进制标记与层间计数

d 维超立方体的节点可用 d 位二进制数标记，两节点仅一位不同就有一条电阻 r 相连。以全零和全一为端点，对坐标作任意置换不改变网络，因此含相同数量的 1 的节点等势。

第 k 层有 $\binom{d}{k}$ 个节点，每个节点有 $d-k$ 条边通向第 $k+1$ 层，故跨层边数是 $(d-k)\binom{d}{k}$。不同节点出发的边不会重复计数，因为每条跨层边都只有一个第 k 层端点。于是

$$R_d = r\sum_{k=0}^{d-1}\frac{1}{(d-k)\binom{d}{k}}.$$

该式是体对角线端口的结果。它把三维网络中的 “等势层—并联边—串联层” 方法推广到更高维，也提供了清晰的组合计数练习。例题 8 采用全零、全一两个端口，例题 16 采用相距两步的端口。后者将通过辅助电流重新组织对称分层。

在低维时，分层公式给出熟悉的串并联网络。$d=1$ 时只有一条边，$R_1 = r$。$d=2$ 时两条 $2r$ 路径并联，$R_2 = r$。$d=3$ 时跨层边数是 $3, 6, 3$，回到图 3.4 的

$5r/6$。例如 $d=4$ 时跨层边数为 $4,12,12,4$，故 $R_4=2r/3$。例题 8 将逐层数出五维网络的跨层边，并由此求单棱电流和层间电势降。

3.4　星形与三角形的端口等效

3.4.1　三个端口需要三个独立参数

网络中的三角形常使电流在各边分流，单靠串并联难以逐级化简。若保留三个外接端点，把内部改为一个中心节点和三条星臂，邻近电阻就可能形成串联。外部电路只通过这三个端点与内部交换电流。三个端点的电势与流入电流关系相同，外部接法就可以保持原样。对无源互易的三端电阻网络，可先比较第三端悬空时的三对等效电阻，求出三个星臂。

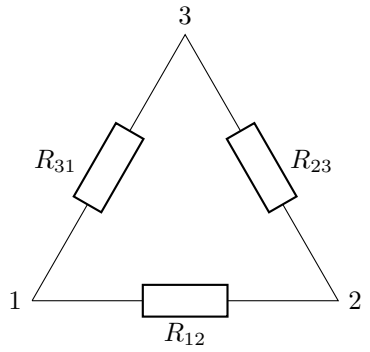


图 3.7: 三角形的三个端口

设三角形边为 R_{12},R_{23},R_{31}，总和为 S，星形三臂为 r_1,r_2,r_3。

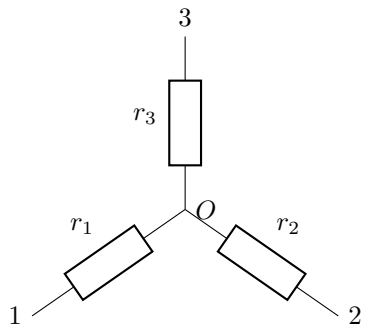


图 3.8: 保留相同端口的星形

图 3.7 与图 3.8 保留同样的 $1,2,3$ 三端。比较端口 $1,2$ 时，三角形的直接边 R_{12} 与串联路径 $1\to3\to2$ 并联。星形的第三端悬空，使 r_3 无电流，只剩 r_1,r_2 串联。

第三端悬空时，

$$r_1+r_2=\frac{R_{12}(R_{23}+R_{31})}{S},\quad r_2+r_3=\frac{R_{23}(R_{31}+R_{12})}{S},$$
$$r_3+r_1=\frac{R_{31}(R_{12}+R_{23})}{S}.$$

第一式与第三式相加再减第二式，左边为 $2r_1$。右边先保留共同分母，再逐项展开：

$$2r_1=\frac{1}{S}\big[R_{12}R_{23}+R_{12}R_{31}+R_{31}R_{12}+R_{31}R_{23}$$
$$-R_{23}R_{31}-R_{23}R_{12}\big]=\frac{2R_{12}R_{31}}{S}.$$

含 $R_{12}R_{23}$ 和 $R_{23}R_{31}$ 的项分别抵消。除以 2 后循环交换下标，得到

$$r_1=\frac{R_{12}R_{31}}{S},\quad r_2=\frac{R_{12}R_{23}}{S},\quad r_3=\frac{R_{23}R_{31}}{S}.$$

每个星臂对应的是原三角形中与该端口相邻的两边之积，分母是三边之和。在图中，r_1 邻接端点 1，对应的分子就是原来邻接端点 1 的两边之积。例题 9 直接使用这一对应关系。例题 10、11 利用它继续形成串并联。

3.4.2 反变换与使用位置

三个外端同时接入时，可直接从图 3.8 的星心消去内部电势。令星臂电导为 $g_i=1/r_i$，记 $G=g_1+g_2+g_3$。沿第 i 条臂从端点流向星心的电流为 $I_i=g_i(V_i-V_O)$，星心没有外部注入，故

$$\sum_{i=1}^{3}g_i(V_i-V_O)=0,\qquad V_O=\frac{g_1V_1+g_2V_2+g_3V_3}{G}.$$

代入第一端的电流，先乘开 GV_1，再把同类电势差合在一起，

$$I_1=\frac{g_1}{G}(GV_1-g_1V_1-g_2V_2-g_3V_3)=\frac{g_1g_2}{G}(V_1-V_2)+\frac{g_1g_3}{G}(V_1-V_3).$$

右边两项就是图 3.7 从端点 1 沿两条边流出的电流。对另外两端循环换下标，可得三角形边电导 $g_{ij}=g_ig_j/G$。这就给出了三个端点取任意电势时的全部电流关系。

由上述关系可反解三角形边。例如

$$\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{r_3}=r_1+r_2+\frac{r_1r_2}{r_3}=R_{12}.$$

把三角形到星形的表达式代入，$r_1r_2/r_3=R_{12}^2/S$，而 $r_1+r_2=R_{12}(R_{31}+R_{23})/S$，两项之和正好为 R_{12}。这样由同一组端口关系得到反变换。

循环交换下标即得到另两边。三条相等三角形电阻 R 对应三条 $R/3$ 星臂。三条相等星臂 r 对应三条 $3r$ 三角形边。例题 11 先把内层三角形化为星形，串联合并后再消去中心节点，两个方向的变换在同一道题中连续使用。

选择变换位置，可从相邻支路入手：消去一个三支路节点会形成三角形，引入星心则可使外部电阻串联。变换求得的三个端点电势同时也是原电路的端点电势，原支路电流再由原阻值与两端电势差求出。消去星心可直接少列一个节点方程。引入星心时，邻接电阻常能与星臂串联，化成更简单的网络。

3.5　耗散功率与电阻的变化

3.5.1　固定端电压时的功率

接入同一端电压时，增加导电通道会增大端口电流，等效电阻随之减小。这一熟悉的并联规律可推广到任意电阻网络。我们从焦耳热和节点电流连续关系推导它。记真实节点电势为 V_i，另取一组满足同一端口电势的试探值 $V_i + w_i$，其中端口处 $w_i = 0$。将每条边的功率展开，

$$P[V + w] - P[V] = 2\sum_{\langle i,j\rangle} \frac{(V_i - V_j)(w_i - w_j)}{R_{ij}} + \sum_{\langle i,j\rangle} \frac{(w_i - w_j)^2}{R_{ij}}.$$

第一项按节点收集后，是 $2\sum_i w_i \sum_j (V_i - V_j)/R_{ij}$。内部节点的电流和为零，端口的 w_i 为零，故这一项消失。剩下的是非负平方和，说明真实电势使固定端口电势下的总功率最小。

若在节点 p, q 之间添加电阻 $R_0 > 0$，任意同一组试探电势下均有

$$P_{\text{新}}[V] = P_{\text{原}}[V] + \frac{(V_p - V_q)^2}{R_0} \geq P_{\text{原}}[V].$$

因此最小值也满足 $P_{\text{新,min}} \geq P_{\text{原,min}}$。端口功率为 $UI = U^2/R_{\text{等效}}$，所以 $R_{\text{新}} \leq R_{\text{原}}$。若新增支路原本就连接两个等势点，例如图 3.3 中的 M, N，新增功率项为零，原电势继续满足全部节点方程，电阻恰好不变。这也给出单调性取等号的具体情形。

若一条支路原来就通过零电流，删去它后仍有原电势分布。若删去通电支路，电流需要改走其他路径，端口电阻增大。练习 1、2、6 分别改变完全图的内部边、立方体的直接边，给出这两种情形。

3.6 虚拟注入电流与有限网络

3.6.1 构造便于对称分析的辅助电流

一组假想电流可以在若干节点流入、另一些节点流出，只要流入和流出的总代数和为零，就能作为同一线性网络上的辅助问题。求出两个辅助问题后，电流与电势可相加。若不需要的节点注入恰好抵消，就得到真正的两端供电问题。每个辅助问题都使用原来的电阻和连接关系，变化的是各节点外部注入电流。

对具有 N 个等价节点的网络，先在 A 注入 I，从其余每个节点流出 $I/(N-1)$。再作另一辅助问题：在 B 流出 I，从其余每个节点注入 $I/(N-1)$。叠加后除了 A, B，其余节点外部电流都抵消，真实端口电流为

$$I_{\text{端}} = I + \frac{I}{N-1} = \frac{N}{N-1} I.$$

如果网络对称性使两个辅助问题的 A, B 电势差相同，真实电势差就是其中一个的两倍。因此相加电势差之后，用它除以 $NI/(N-1)$，就得到两端电阻。

超立方体适合这种方法。全零点注入电流后，同一汉明距离层节点等势。第 k 层到下一层的总电流，等于总注入电流减去前面已经流出的各节点电流。每层有多少外部抽取、跨层共有多少电阻，都应在过程图中标清。与两端直接供电相比，辅助问题恢复了围绕注入点的坐标置换对称性。

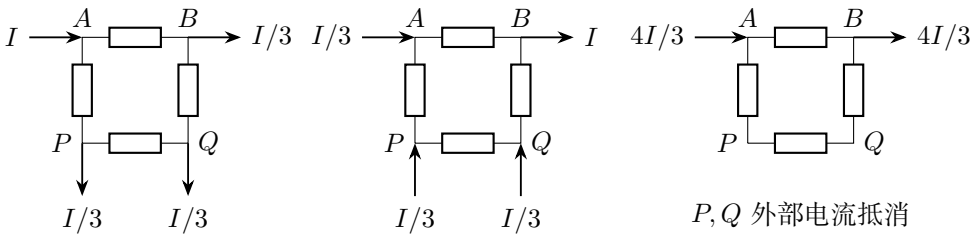


图 3.9: 图示同一个四节点环的两组辅助注入相加。电阻不变，只组合外部注入电流

图 3.9 取 $N = 4$，前两图叠加后，P, Q 不再有外部抽取或注入，A, B 的端口电流却增为 $4I/3$。两个辅助问题中的内部节点外部电流恰好抵消，端口的电势差则同向相加。例题 16 和练习 7 会把这一做法用到高维网络。

3.7　多端网络与棱中点端口

3.7.1　四端网络的电势—电流关系

四个外接端点可组成六对端口。一般四端电阻网络有六个独立的互易参数，而四条星臂只有四个参数。因此四端星形对应其中一类特定的电势—电流关系。完全对称的四面体就属于这一类，例题 17 将从任意端点电势出发求它的等效星臂。

多端子网络接入外电路后，各个端点都可能有电流流入或流出。等效模型应给出每个端点的电流怎样随各点电势而变。下讲的嵌套正方形便保留四个连接点，用相邻点、相对点两类电导描述内层。

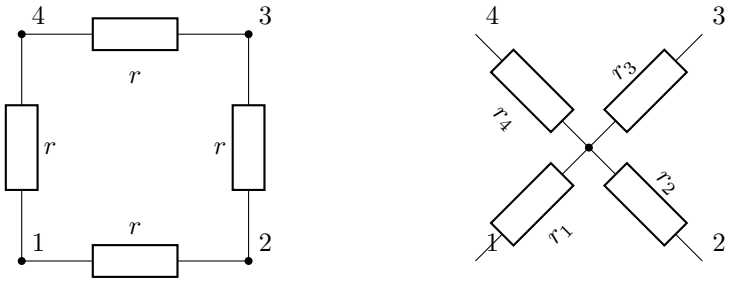


图 3.10: 四端环与四臂星形的端口关系比较

图 3.10 右侧若其余端悬空，任意两端测得 $R_{ij} = r_i + r_j$，因此满足

$$R_{12} + R_{34} = R_{13} + R_{24} = R_{14} + R_{23}.$$

左侧四边均为 r 时，相邻两端电阻为 $3r/4$，相对两端电阻为 r。于是第一组和为 $3r/2$，第二组为 $2r$，两种和不同，说明四边形需要保留比四条星臂更丰富的端口关系。

3.7.2　电流从棱中点流入

端口落在均匀电阻丝中点时，这一点成为新的节点，两侧各有 $r/2$。外部电流在此分流，分配比例由两侧网络决定。图 3.11 先画出两段电阻，再对端点电势作对称分析。练习 8 的两个中点端口采用同样的步骤。

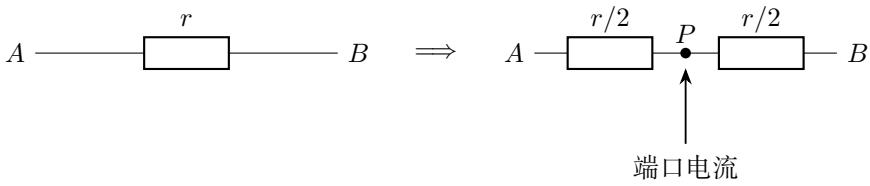


图 3.11: 均匀边上的中点端口形成新节点。两半边各为 $r/2$

图 3.11 中，注入 P 的电流等于流向 A, B 两侧电流之和。对称时两侧各通过总电流的一半，两个 $r/2$ 就可在对应等势节点间并联合成 $r/4$。

3.8 例题与分析

例 3.1 (导线跨接后的三个电阻)**.** 电阻链依次为 $A-R-P-R-Q-R-B$。另用理想导线连接 A, Q 及 P, B。求 A, B 间等效电阻。

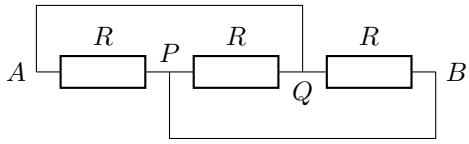


图 3.12: 题设：导线跨接后的三个电阻

解　辨认节点

沿图 3.12 的上跨线可知 Q 与 A 为同一节点。沿下跨线可知 P 与 B 为同一节点。因此第一只电阻跨接 A, B，第二只跨接 B, A，第三只跨接 A, B。

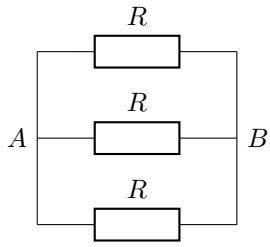


图 3.13: 解答过程：导线跨接后的三个电阻

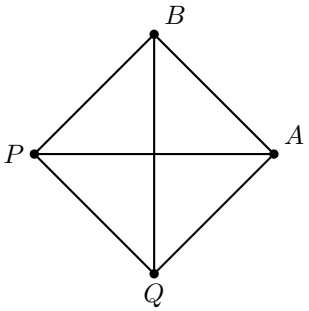
重画并联支路

图 3.13 依节点重新绘图，三只电阻均跨接同一对端口，属于并联。若端电压为 U，每支路电流大小为 U/R，总电流 $I = 3U/R$，所以 $R_{AB} = U/I = R/3$。

支路电流方向

取 $V_A > V_B$，电流均从 A 流向 B。因此原图中第一、三只电阻的电流向右，第二只向左。同一对节点之间的电势差使三支路同时导电。

例 3.2 (完全四节点网络)**.** 四个节点 A, B, P, Q 两两以电阻 r 相连。求 A, B 间等效电阻与 P, Q 间电流。



每条连线为电阻 r，交叉处不连接

图 3.14: 题设：完全四节点网络

解　内部两点等势

在图 3.14 中交换 P, Q，端点 A, B 和所有阻值都不变，故 $V_P = V_Q$。再交换 A, B，可知这两个内部节点电势为端电势中点。令 $V_A = U, V_B = 0$，即 $V_P = V_Q = U/2$。

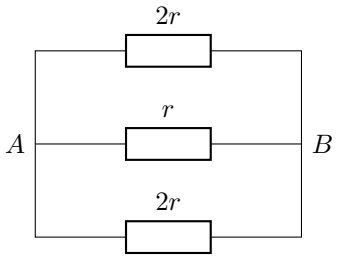


图 3.15: 解答过程：完全四节点网络

合成三条通道

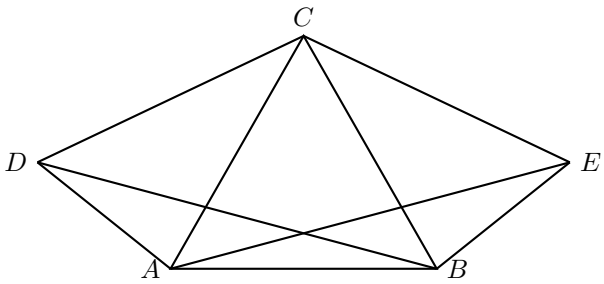
图 3.15 中 PQ 支路无电流，剩余 APB, AQB 两条 $2r$ 通道与直接支路 AB 的 r 并联，

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} = \frac{2}{r}, \qquad R_{AB} = \frac{r}{2}.$$

原支路电流

两内部通道电流均为 $U/(2r)$，直接支路为 U/r，流出 A 的总电流为 $2U/r$。PQ 两端电势相同，因而其电流为零。

例 3.3 (共底面双四面体)**.** 三角形 ABC 的每边均为电阻 r。顶点 D, E 分别与 A, B, C 各以电阻 r 相连，D, E 不直接连接。求 D, E 间及 A, B 间的等效电阻。



每条连线电阻为 r，交叉处不连接

图 3.16: 题设：共底面双四面体

解　以两顶点为端口

先以图 3.16 的 D, E 为端点。置换 A, B, C 不改变端口条件，三节点等势，底面三条边无电流。D 到中间层有三个 r 并联，E 到该层也有三个，故 $R_{DE} = r/3 + r/3 = 2r/3$。

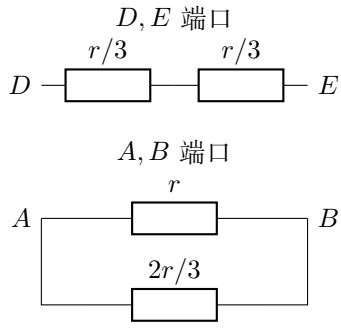


图 3.17: 上图把共用底面三点合并。下图的 $2r/3$ 是经 C, D, E 的三条 $2r$ 通道并联

以共用底边为端口

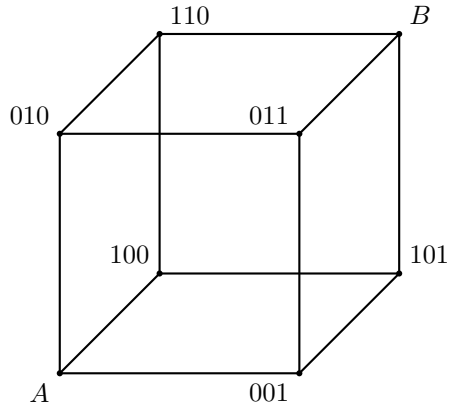
图 3.17 分别画出两种端口。改以 A, B 供电时，交换 A, B 并将电势变为 $U-V$ 后，C, D, E 的位置都保持，因此三者均为 $U/2$。A, B 直接边为 r，经 C, D, E 有三条 $2r$ 通道。内部等势边不通电，故

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{r} + \frac{3}{2r}\right)^{-1} = \frac{2r}{5}.$$

两种电势分布

以 D, E 供电时，电流先在三条棱上均分，再流向 E。以 A, B 供电时，三个内部点都处在 $U/2$，电流分成直接通道和三条绕行通道。等势分组随供电位置一同改变。

例 3.4 (立方体体对角线端口)**.** 立方体十二条棱各为电阻 r，A, B 为体对角线两端。求等效电阻和三类棱上的电流。

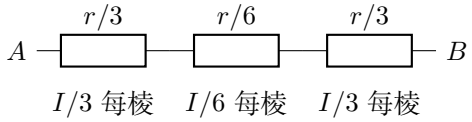


各棱电阻均为 r，未标点的交叉处不接通

图 3.18: 题设：立方体体对角线端口

解　划分等势层

在图 3.18 中从 A 出发，按最少经过的棱数分成 $0, 1, 2, 3$ 层。绕体对角线的转动可互换每层中的三个点，故各层等势。



$I/3$ 每棱　$I/6$ 每棱　$I/3$ 每棱

图 3.19: 每组等效电阻通过总电流 I，标在下方的是原立方体中每条棱的电流

计算层间电阻

图 3.19 按层间边数 $3,6,3$ 合并，对应电阻 $r/3, r/6, r/3$ 串联，得 $R_{AB} = 5r/6$。

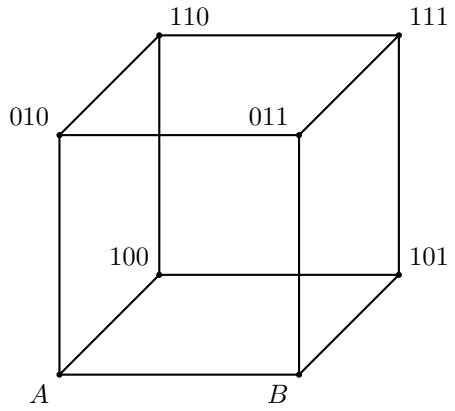
各棱电流

若总电流为 I，首尾三条棱各通过 $I/3$，中间六条棱各通过 $I/6$。各层电势降依次为 $Ir/3, Ir/6, Ir/3$，总和 $5Ir/6$。

节点电势

以 $V_B = 0, V_A = U$ 表示，$I = 6U/(5r)$，第一层电势为 $3U/5$，第二层为 $2U/5$。第一层每节点流入 $2U/(5r)$，再向第二层的两条边各流出 $U/(5r)$。

例 3.5 (立方体相邻顶点端口)**.** 立方体每棱电阻 r，$A = 000, B = 001$ 为相邻顶点。求等效电阻。



各棱电阻均为 r，未标点的交叉处不接通

图 3.20: 题设：立方体相邻顶点端口

解　节点分组

图 3.20 中把端点电势设为 $V_A = U, V_B = 0$。交换另两坐标，$010, 100$ 等势，记为 x。$011, 101$ 等势，记为 y。另外两节点为 110，电势 z，及 111，电势 w。交换端点所在坐标会互换两端，故 $y = U - x, w = U - z$。

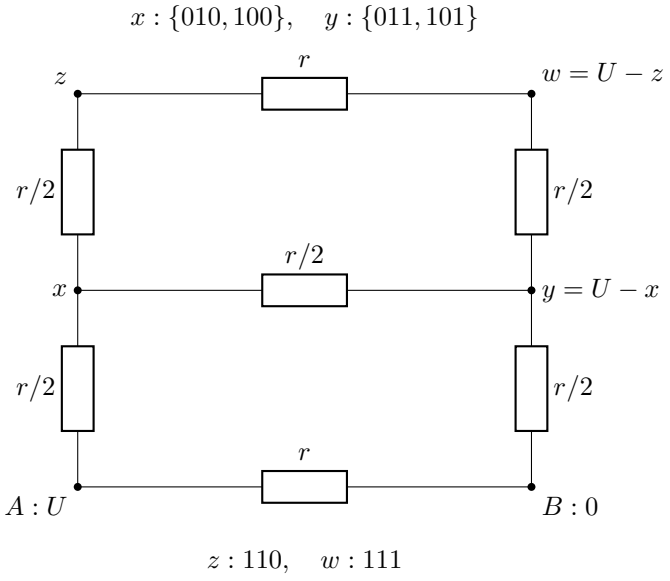


图 3.21: 相邻端口下的等势合并：两条相同跨组边并联为 $r/2$，单边仍为 r

列节点方程

图 3.21 把四类内部节点合并，同时保留各类之间的实际电导。例如两个 x 节点各有一条边通向 z，合并后为 $r/2$。z,w 间只有一条 r。对 010 有 $(x-U)+(x-y)+(x-z)=0$，即 $3x=U+y+z$。对 110 有 $2(z-x)+(z-w)=0$，即 $3z=2x+w$。代入互补关系得到

$$4x=2U+z,\qquad 4z=2x+U.$$

消元求电势

第二式给 $z=x/2+U/4$，代入第一式得 $7x/2=9U/4$，故 $x=9U/14, z=4U/7$。

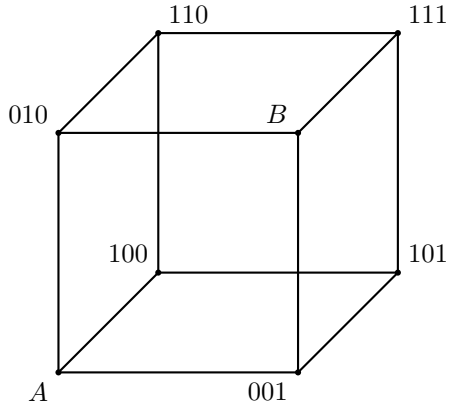
求端口电阻

A 流出电流包括直接边和通向两 x 节点的电流：

$$I=\frac{U}{r}+\frac{2(U-x)}{r}=\frac{12U}{7r},\qquad R_{AB}=\frac{U}{I}=\frac{7r}{12}.$$

直接边分得 U/r，两条相邻棱各分得 $5U/(14r)$。

例 3.6 (立方体面对角线端口)**.** 立方体每棱电阻 r，$A=000, B=011$ 为同一面对角线两端。求等效电阻。



各棱电阻均为 r，未标点的交叉处不接通

图 3.22: 题设：立方体面对角线端口

解　中间节点电势

在图 3.22 中令 $V_A=U, V_B=0$。交换后两个坐标，并结合将这两位同时取反的端点交换，可知同一面的另外两点 $001, 010$ 电势为 $U/2$，背面的 $101, 110$ 也为 $U/2$。背面的对应端点 $100, 111$ 分别记为 x, y，由互补关系 $x+y=U$。

$$H=\{001, 010, 101, 110\}$$

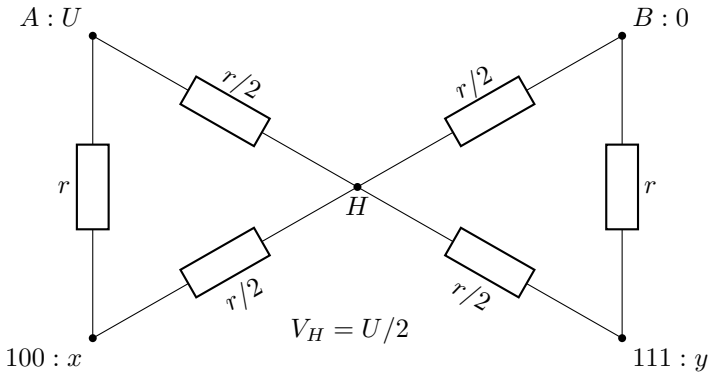


图 3.23: 四个中间节点电势均为 $U/2$，合并为 H。原无流边删去，其余支路按条数并联

背面节点电势

图 3.23 中，四个 $U/2$ 节点合并为 H，两条并行跨组边各折合为 $r/2$。原节点 100 与 A、两个电势为 $U/2$ 的背面节点相连，故 $3x = U + U/2 + U/2 = 2U$，即 $x = 2U/3$，$y = U/3$。

端口总电流

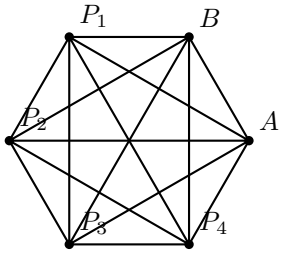
从 A 流出的三条棱电流为

$$I = \frac{U - U/2}{r} + \frac{U - U/2}{r} + \frac{U - 2U/3}{r} = \frac{4U}{3r}.$$

三种端口

由 $R_{AB} = U/I$ 得 $R_{AB} = 3r/4$。棱端点、面对角线端点、体对角线端点的电阻依次为 $7r/12, 3r/4, 5r/6$。三种接法的等势组分别由各自保持端口的对称变换确定。

例 3.7 (完全连接的任意多节点网络)**.** N 个节点两两由电阻 r 连接。任选两节点作为端口。求等效电阻。若端电压为 U，求直接边和其余通向端口的边的电流。



每条连线为电阻 r，交叉处不连接

图 3.24: 题设：完全连接的任意多节点网络

解　内部节点电势

图 3.24 用六节点示意一般连接规则，所有交叉处均不接通。交换任意两个内部节点而保持端口，说明内部节点等势。再用端点交换可知内部电势为 $U/2$。

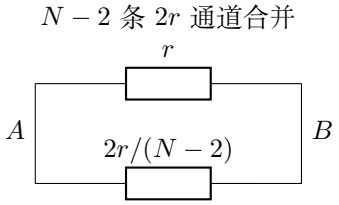


图 3.25: 解答过程：完全连接的任意多节点网络

叠加通道电流

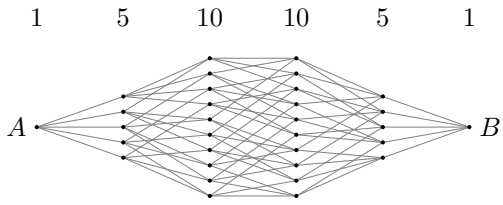
当 $N>2$ 时，图 3.25 中直接边电流为 U/r，经每个内部节点的两边通道电流为 $U/(2r)$，内部节点之间电流为零。总电流

$$I=\frac{U}{r}+(N-2)\frac{U}{2r}=\frac{NU}{2r},\qquad R=\frac{2r}{N}.$$

节点数的影响

$N=2$ 时仅有一条电阻，$R=r$。$N=4$ 时为四面体网络，$R=r/2$。每增加一个完全连接的内部节点，就多出一条 $2r$ 的导电通道，总电导增加 $1/(2r)$。

例 3.8 (五维超立方体的体对角线)**.** 节点用五位二进制数标记，仅相差一位的两个节点由电阻 r 相连。求全零节点 A 与全一节点 B 间电阻，并比较四维情形。



每条边为 r。上方为每层节点数

图 3.26: 题设：五维超立方体的体对角线

解　分层与计数

图 3.26 按二进制中 1 的数量将节点排列。任意坐标置换保持端口，因此同层等势，层节点数为 $1,5,10,10,5,1$。从第 k 层通向下一层的边数为 $(5-k)\binom{5}{k}$，依次为 $5,20,30,20,5$。

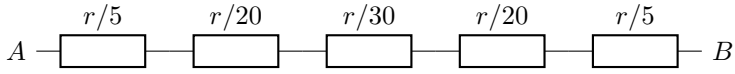


图 3.27: 解答过程：五维超立方体的体对角线

层间电阻串联

图 3.27 中各层间电阻依次为这些边数的倒数乘 r，串联得到

$$R_5=r\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\right)=\frac{8r}{15}.$$

四维情形

设五维网络的端口总电流为 I。每组并联棱共同通过 I，所以从第一组到最后一组，单棱电流依次为 $I/5, I/20, I/30, I/20, I/5$。各组的电势降是对应的单棱电流乘以 r，可直接从图 3.27 逐段读出。

四维时跨层边数为 $4, 12, 12, 4$，故 $R_4 = r(1/4 + 1/12 + 1/12 + 1/4) = 2r/3$。若注入总电流 I，这四组实际边的单边电流依次为 $I/4, I/12, I/12, I/4$，层间压降也按同一比例分配。

例 3.9 (不等电阻三角形的星形表示)**.** 三角形边 $R_{12} = 2\,\Omega, R_{23} = 3\,\Omega, R_{31} = 6\,\Omega$。求等效星形三臂。再把第三端悬空，分别用两种结构求 $1, 2$ 间电阻。

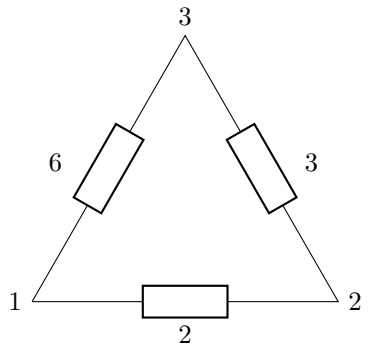


图 3.28: 题设：不等电阻三角形的星形表示

解　计算星臂

图 3.28 中与端口 1 相邻的边是 $2, 6$，与端口 2 相邻的边是 $2, 3$，三边之和为 $11\,\Omega$。故

$$r_1 = \frac{2\times 6}{11} = \frac{12}{11}\,\Omega, \quad r_2 = \frac{2\times 3}{11} = \frac{6}{11}\,\Omega, \quad r_3 = \frac{3\times 6}{11} = \frac{18}{11}\,\Omega.$$

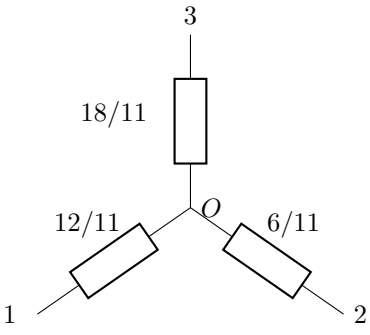


图 3.29: 星臂阻值以 Ω 为单位。端点 3 悬空时，上臂电流为零

第三端悬空

在图 3.29 中第三端悬空，r_3 无电流，$R_{12}^{\mathrm{eq}} = r_1 + r_2 = 18/11\,\Omega$。

原三角形的电流路径

第三端悬空时，原三角形中从 1 到 2 有直接的 $2\,\Omega$ 和绕经 3 的 $9\,\Omega$ 两条通道，其电流之比为 $9:2$，总电阻为 $18/11\,\Omega$。变换后的星形把这一端口响应表示为两臂串联。

例 3.10 (利用星三角化简非平衡桥)**.** 电桥 AM, MB, AN, NB, MN 的电阻分别为 $r, r, r, 2r, r$。求 A, B 间电阻。

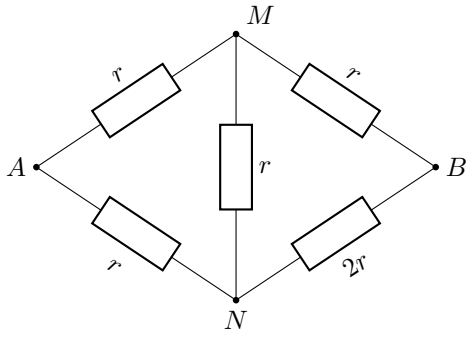


图 3.30: 题设：利用星三角化简非平衡桥

解　三角形化为星形

图 3.30 左侧三角形 AMN 三条边均为 r。将其换成以 O 为中心、三臂均为 $r/3$ 的星形，端口 A, M, N 保持对应。

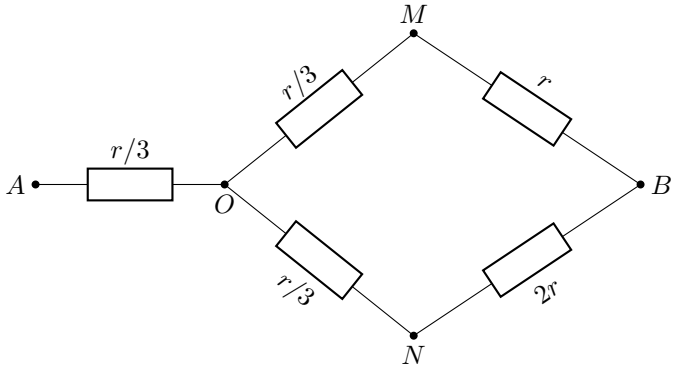


图 3.31: 只替换 AMN 三角形。M, B 与 N, B 两条原桥臂保留

合成外接支路

在图 3.31 中，M, N 各只连接两条有阻支路，两段电阻由同一股电流穿过。

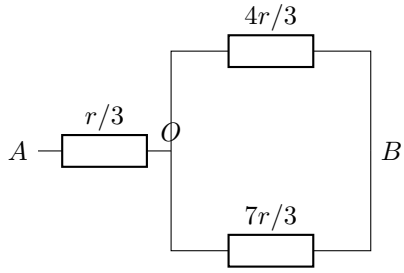


图 3.32: 解答过程：利用星三角化简非平衡桥

图 3.32 中从 O 经 M 到 B 为 $r/3+r=4r/3$，经 N 到 B 为 $r/3+2r=7r/3$，二者并联后再与 AO 的 $r/3$ 串联，

$$R_{AB}=\frac{r}{3}+\frac{(4r/3)(7r/3)}{4r/3+7r/3}=\frac{r}{3}+\frac{28r}{33}=\frac{13r}{11}.$$

端口电势的分配

若取 $V_A=U, V_B=0$，总电流为 $I=11U/(13r)$。图中 AO 上的电势降为 $Ir/3=11U/39$，故 $V_O=28U/39$。随后两通道按 $4r/3$ 和 $7r/3$ 分流。这说明星形的中心电势由外部负载共同决定。

例 3.11 (嵌套三角形的三端等效)**.** 外三角形 ABC 的三边 AC, BC, AB 分别为 $r, 2r, 3r$。内三角形三边均为 $3r$，内三个顶点各与对应外顶点用 $2r$ 电阻相连。求 A, B 间电阻。

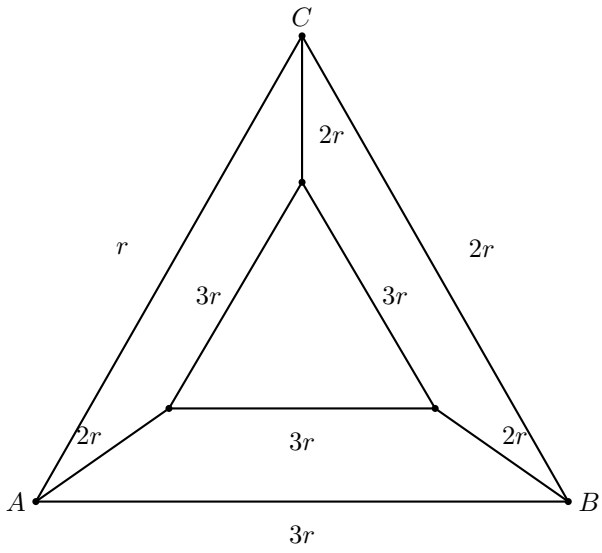


图 3.33: 题设：嵌套三角形的三端等效

解　内三角形化为星形

图 3.33 内三角形的每边 $3r$，等效星臂均为 $(3r)^2/(9r) = r$。各星臂再与连接对应外顶点的 $2r$ 串联，成为三臂各 $3r$ 的星形，三个外端仍为 A, B, C。

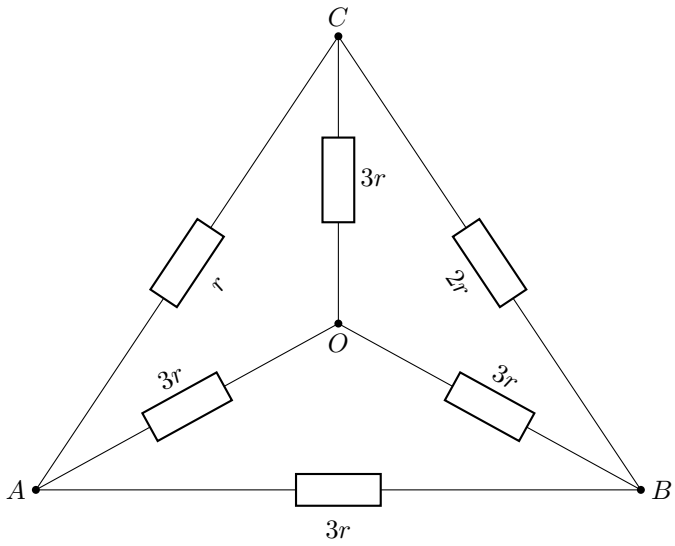
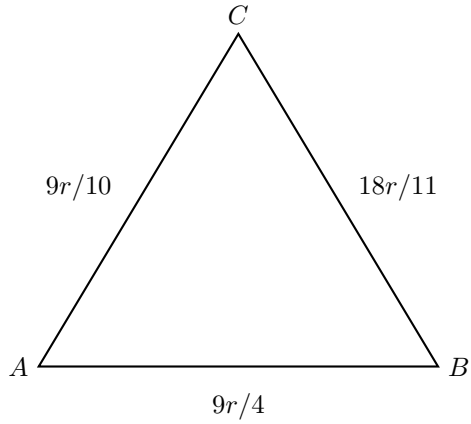


图 3.34: 内三角形先化成星形，再与三条外接 $2r$ 串联。外三角形保留

串联后恢复三角形

图 3.34 中，三条 $3r$ 星臂转回三角形后，各边为 $3r + 3r + (3r)^2/(3r) = 9r$。这三条新边分别与原外边跨接同一对节点，才可逐边并联。



每条线代表标注的电阻

图 3.35: 解答过程：嵌套三角形的三端等效

逐边并联

图 3.35 将两套跨同一端口的边分别并联，得 AC 边为 $r \parallel 9r = 9r/10$，BC 为 $2r \parallel 9r = 18r/11$，AB 为 $3r \parallel 9r = 9r/4$。

求两端电阻

因此

$$\begin{aligned} R_{AB} &= \left(\frac{9r}{10} + \frac{18r}{11}\right) \parallel \frac{9r}{4} = \frac{279r}{110} \parallel \frac{9r}{4} \\ &= \frac{(279r/110)(9r/4)}{279r/110 + 9r/4} = \frac{2511r^2/440}{(1116+990)r/440} \\ &= \frac{2511r}{2106} = \frac{31r}{26}. \end{aligned}$$

内层的作用

仅有外三角形时，A, B 间为 $3r \parallel (r + 2r) = 3r/2$。接入内层后变为 $31r/26$，内层为外端之间增加了导电通道。

例 3.12 (非均匀方格网络的等势对角线)**.** 九节点方格网络的各边阻值如图。求左上角 A 与右下角 B 间电阻，说明哪条对角线的节点等势。

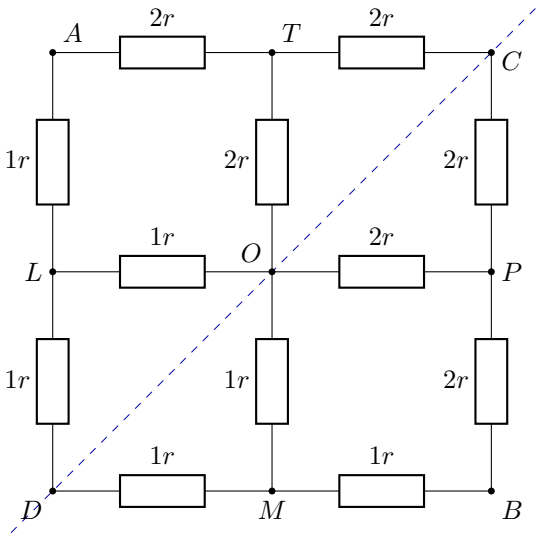
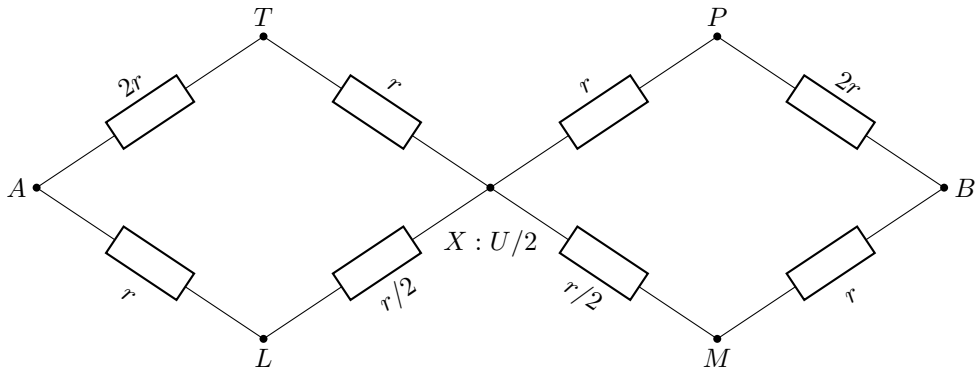


图 3.36: 题设：非均匀方格网络的等势对角线

解　反射轴上的电势

在图 3.36 中反射 $x = y$ 对角线会交换 A, B，但保留每条边的阻值。取 $V_A = U, V_B = 0$，位于反射轴上的 D, O, C 都满足 $V = U - V$，所以为 $U/2$。反射轴选取为交换端口并保持各边阻值的 $x = y$。

$$TX, XP:\ 2r \parallel 2r = r$$



$$LX, XM:\ r \parallel r = r/2$$

图 3.37: 合并 D, O, C 为 X 后保留上下两条分流路径。左右各等效为 r

合并等势节点

图 3.37 合并 D, O, C 为节点 X。由 A 经 T 到 X，电阻为 $2r + (2r \parallel 2r) = 3r$。经 L 到 X，为 $r + (r \parallel r) = 3r/2$。所以 A, X 间等效为 $3r \parallel (3r/2) = r$。另一侧由端点交换对称性得到同样的 r，故 $R_{AB} = 2r$。

两侧的分流

A, X 间电压为 $U/2$。经 T 的通道电流为 $U/(6r)$，经 L 的为 $U/(3r)$，总电流为 $U/(2r)$。两通道按 $1:2$ 分流，再分别在通向 D, O, C 的支路上分开。

例 3.13 (阻值比例与等势关系)**.** 九节点方格各边电阻如图。该图不具备交换 A, B 的几何等阻对称性。求 A, B 间电阻，并求 D, O, C 的电势。

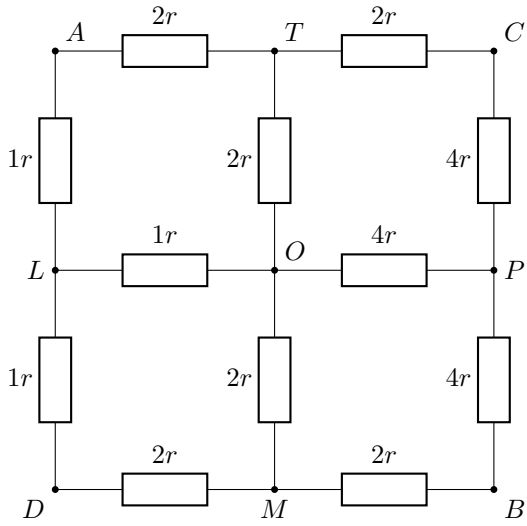
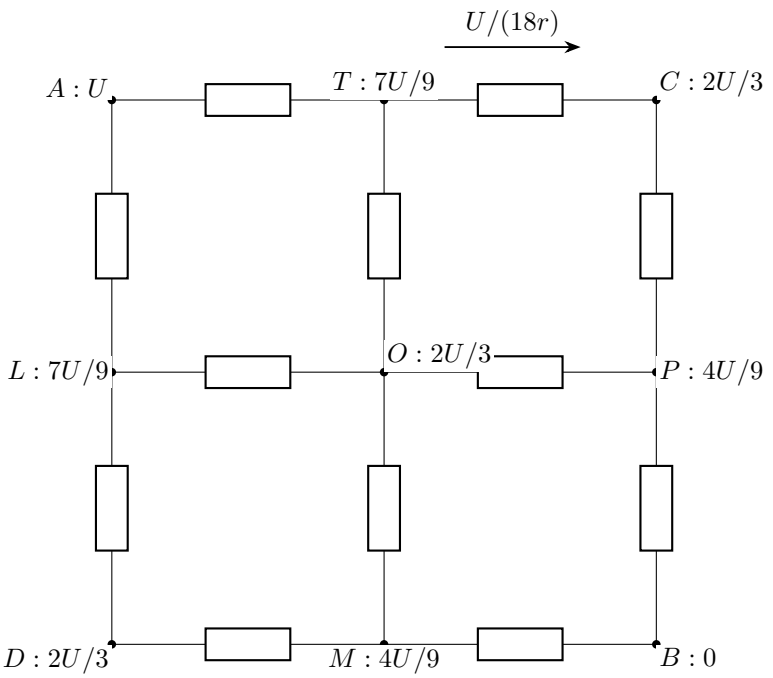


图 3.38: 题设：阻值比例与等势关系

解　按比例组织等势组

在图 3.38 中按两侧阻值比例选取等势组合 $D, O, C = X$。合并后 $A \to X$ 的两条通道为 $3r$、$3r/2$，并联为 r。$B \to X$ 的通道为 $6r$、$3r$，并联为 $2r$。若等势假设成立，应有 $V_X = 2U/3$、总电阻 $3r$。



支路阻值与题设图相同，由所标电势逐支路计算电流

图 3.39: 在原十二条支路中标出电势，逐点计算各支路电流

求各通道电势

图 3.39 给出回到真实网络的各节点电势。由各通道分压，$V_T = V_L = 7U/9$，$V_P = V_M = 4U/9$。

各节点的电流

逐点计算电流：C 从 T 流入 $(7U/9 - 2U/3)/(2r) = U/(18r)$，向 P 流出 $(2U/3 - 4U/9)/(4r) = U/(18r)$。$D$ 两侧相应电流均为 $U/(9r)$。O 从 T, L 流入总量 $U/(18r) + U/(9r) = U/(6r)$，流向 P, M 的总量也为 $U/(6r)$。

求端口电阻

其余节点已由分压满足电流连续关系，这组电势因而满足整个原网络的节点方程。由唯一性，它就是实际电势分布。总电流为 $U/(3r)$，得到 $R_{AB} = 3r$。等势关系来自两侧阻值比例的配合。

例 3.14 (九节点均匀方格的中心到边中点)**.** 九节点方格每边电阻 r。求中心 O 与下边中点 M 之间电阻。

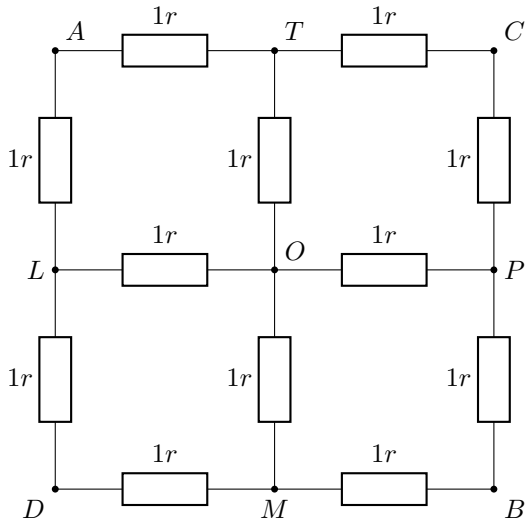


图 3.40: 题设：九节点均匀方格的中心到边中点

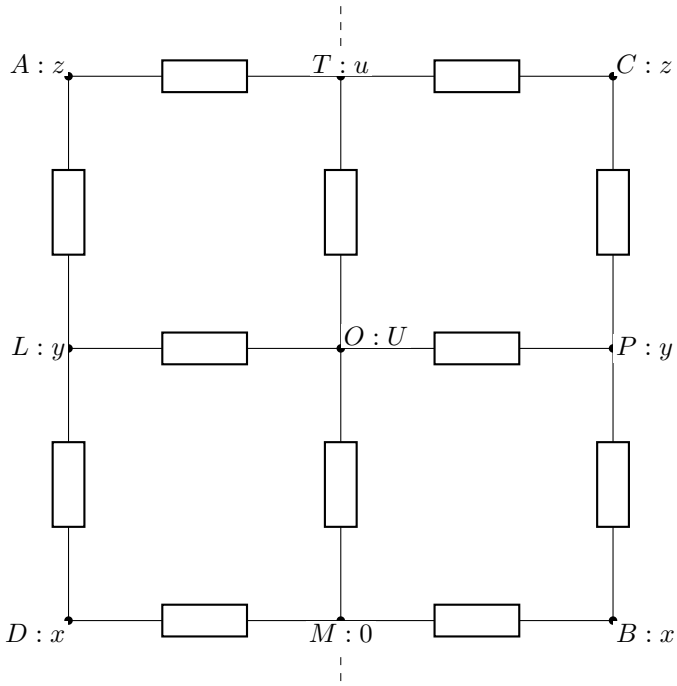
解　四类节点

图 3.40 在保持 O, M 的左右反射下，底角两点同电势 x、左右边中点同电势 y、顶角同电势 z，顶边中点为 u。取 $V_O = U, V_M = 0$，

列节点方程

由各类节点守恒，

$$2x = y, \quad 3y = U + x + z, \quad 2z = y + u, \quad 3u = U + 2z.$$



每条边电阻 r。左右反射保持 O, M 不动

图 3.41: 以实际九节点方格标记四类未知电势。每个节点仍按原有邻边列守恒式

消元求电势

按图 3.41，角点各有两条邻边，边中点各有三条。同一类节点的电势相等，并不把一个节点的方程额外乘上该类点数。先消去 $x = y/2$。后两式中用 $2z = y + u$ 代入 $3u = U + 2z$，有

$$3u = U + y + u, \qquad 2u = U + y, \qquad u = \frac{U + y}{2}.$$

再回代 $z = (y + u)/2 = [y + (U + y)/2]/2 = (U + 3y)/4$。代入第二式，

$$3y = U + \frac{y}{2} + \frac{U + 3y}{4} \implies 12y = 5U + 5y \implies y = \frac{5U}{7}.$$

进而 $x = 5U/14, z = 11U/14, u = 6U/7$。

端口总电流

从中心流出的电流为

$$I = \frac{U}{r} + \frac{2(U - y)}{r} + \frac{U - u}{r} = \frac{12U}{7r},$$

求端口电阻

端电压除以总电流，得到 $R_{OM}=7r/12$。中心流出的四股电流依次为 U/r、两股 $2U/(7r)$ 和 $U/(7r)$，经各条支路最终汇入端口 M。

例 3.15 (九节点均匀方格的一条外边)**.** 九节点方格每边电阻 r。求下边中点 M 与右下角 B 间电阻。

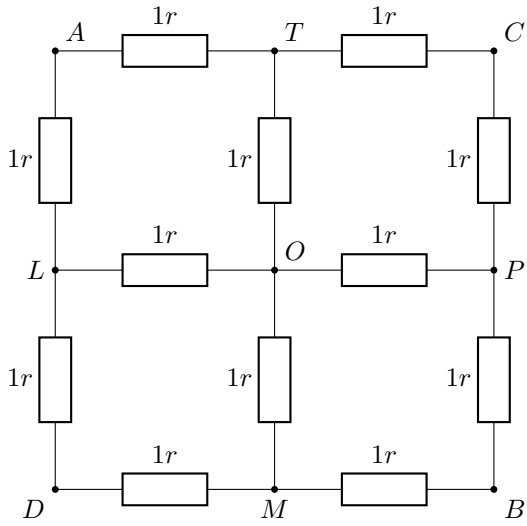


图 3.42: 题设：九节点均匀方格的一条外边

解　消去三个内部角点

图 3.42 中除端口 B 外，其他三个角点各只有两条边，可以消去为相邻边中点之间的 $2r$。取 $V_M=U, V_B=0$，右边中点 P 电势为 x，中心 O 为 y，上边中点 T 为 z，左边中点 L 为 w。

列节点方程

按图 3.43 列流出电流。以 P 为例，通向 B,O 的支路各为 r，通向 T 的是合并角点后得到的 $2r$，故

$$\frac{x-0}{r}+\frac{x-y}{r}+\frac{x-z}{2r}=0 \quad\Longrightarrow\quad 5x-2y-z=0.$$

在 O,T,L 按各自的三条或四条支路列式，连同上式得到

$$5x-2y-z=0,\quad 4y=U+x+z+w,\quad 4z=x+w+2y,\quad 4w=U+z+2y.$$

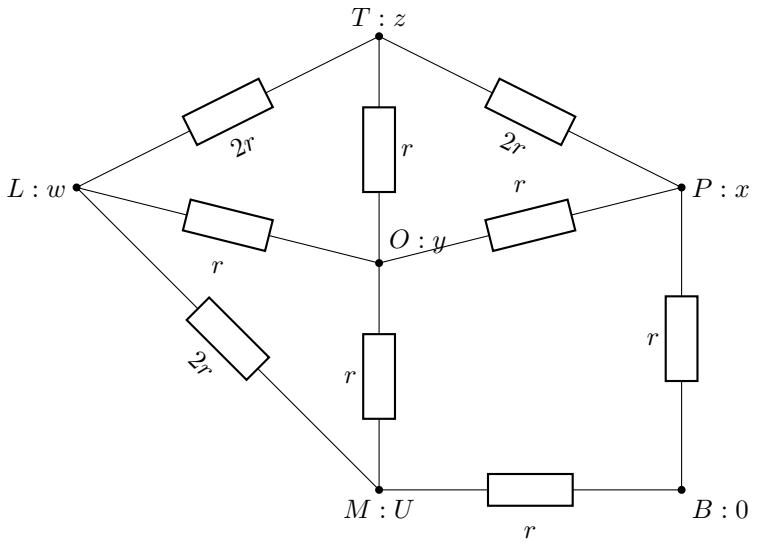


图 3.43: 保留端口角点 B。另三个角点消去后，外围三条边各为 $2r$，中心四条边仍为 r

消元求电势

先用第一、四式表示 $x=(2y+z)/5, w=(U+z+2y)/4$。代入第二、三式，分别得到

$$4y = U + \frac{2y+z}{5} + z + \frac{U+z+2y}{4},$$
$$4z = \frac{2y+z}{5} + \frac{U+z+2y}{4} + 2y.$$

两式都乘 20，逐项展开为

$$80y = 20U + 8y + 4z + 20z + 5U + 5z + 10y,$$
$$80z = 8y + 4z + 5U + 5z + 10y + 40y.$$

把未知量移到左侧并收集同类项：

$$62y = 25U + 29z, \qquad 71z = 58y + 5U.$$

用第一式的 $y=(25U+29z)/62$ 代入第二式，再乘 62：

$$\begin{aligned} 4402z &= 58(25U+29z) + 310U \\ &= 1450U + 1682z + 310U, \\ (4402-1682)z &= (1450+310)U. \end{aligned}$$

所以 $2720z = 1760U$，约分得 $z = 11U/17$。回代得到

$$y = \frac{25U + 29(11U/17)}{62} = \frac{12U}{17},$$
$$x = \frac{2(12U/17) + 11U/17}{5} = \frac{7U}{17},$$
$$w = \frac{U + 11U/17 + 2(12U/17)}{4} = \frac{13U}{17}.$$

端口总电流

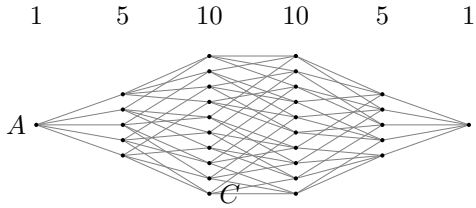
从 M 流出的电流为

$$I = \frac{U}{r} + \frac{U - y}{r} + \frac{U - w}{2r} = \frac{24U}{17r},$$

求端口电阻

因此 $R_{MB} = U/I = 17r/24$。外部电流在 B 流出，B 是端口节点。另外三个角点各连接两条支路，消去后对应两只串联电阻 $2r$。

例 3.16 (五维网络中相距两步的端口)**.** 五维超立方体每边电阻 r。$A = 00000, C = 00011$。用虚拟注入电流求 A, C 间电阻。



每条边为 r。上方为每层节点数
C 位于含两个 1 的一层

图 3.44: 题设：五维网络中相距两步的端口

解　均匀抽取的辅助问题

在图 3.44 上作第一辅助问题：A 注入 I，其余 31 点各流出 $I/31$。首层五条边各通过 $I/5$，所以第一层电压降为 $Ir/5$。

前两层的电势降

第一层五点共抽取 $5I/31$，流向第二层的总电流为 $26I/31$，这 20 条边并联为 $r/20$。故 A 到第二层任一点 C 的电势差为

$$U_{AC}^{(1)} = \frac{Ir}{5} + \frac{26I}{31}\frac{r}{20} = \frac{15Ir}{62}.$$

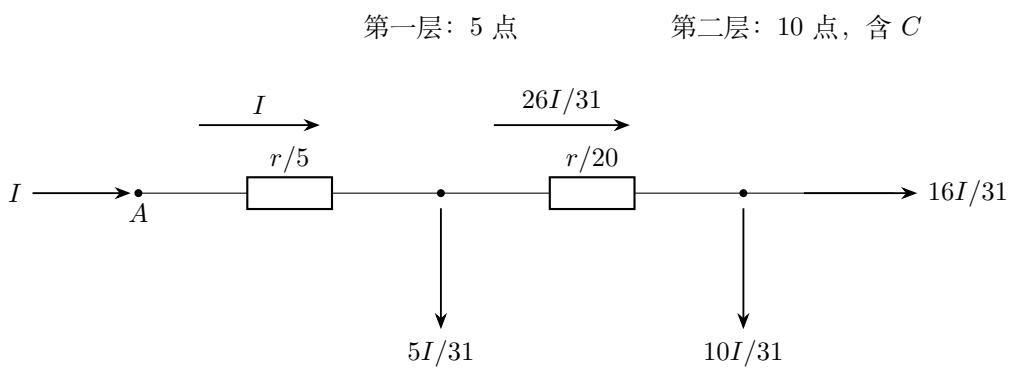


图 3.45: 第一辅助问题的前两层：5 个第一层节点共抽取 $5I/31$，跨下一层的电流因而减小

构造第二辅助问题

图 3.45 所示第一辅助问题中，两段等效电阻通过的总电流分别为 $I, 26I/31$，各层抽取电流之后，向下一层的总电流逐级减小。第二辅助问题将注入、流出位置关于 A, C 对换：C 流出 I，其余点各注入 $I/31$。由超立方体平移对称性，它给出的 $U_{AC}^{(2)}$ 与第一问题相同。

相加后求电阻

图 3.46 给出了两组外部电流在各点的代数和。A 的外部注入为 $I + I/31 = 32I/31$，C 流出同样的电流，其余 30 点各自流入与流出的 $I/31$ 相抵消。两组 U_{AC} 同向相加，所以

$$R_{AC} = \frac{2(15Ir/62)}{32I/31} = \frac{15r}{32}.$$

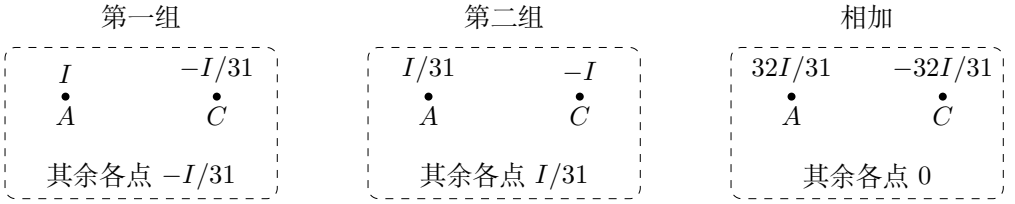


图 3.46: 三幅图只标外部注入。中间的 30 点在叠加后仍保留原电阻连接，各点的外部注入相消

例 3.17 (四角小四面体的四端等效)**.** 正四面体每条原棱均匀电阻 r。在每条棱从两端各量取比例 $0<t<1/2$ 的长度为分点。每个顶角的三个分点两两用同材质同截面导线连接，构成与原四面体相似的小四面体，接点均导通。求原顶点 A,B 间电阻，并算 $t=1/4$。

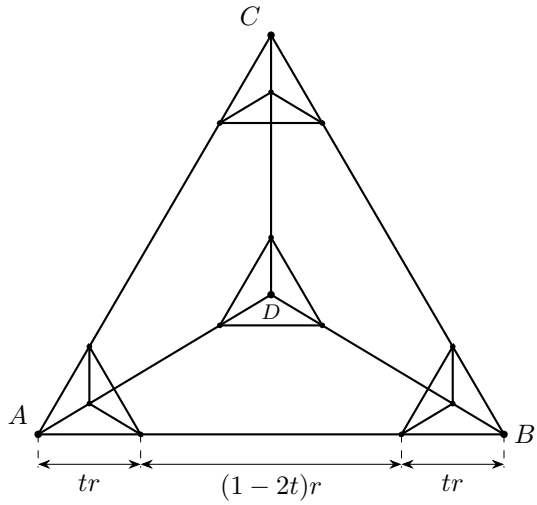


图 3.47: 正四面体的投影。以 AB 为例，两个分点把原棱分成 $tr,(1-2t)r,tr$ 三段

解　角部四面体的星形

图 3.47 每个角部小四面体六边电阻均为 tr。它是四端完全连接网络，特殊的全置换对称允许等效为四个相同星臂。对任意四端电势 V_i，原网络电流 $I_i=[4V_i-\sum_j V_j]/(tr)$。取星臂 $tr/4$、中心势 $\bar{V}=\sum V_j/4$，星形电流 $(V_i-\bar{V})/(tr/4)$ 与原式相同。因此这个四端等效对任意外接条件成立。

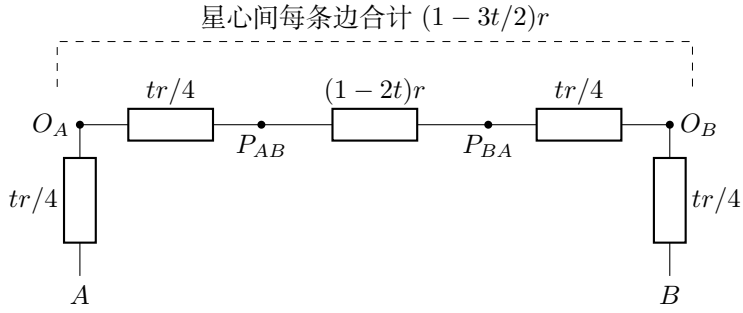


图 3.48: 沿一条原棱看两个角部星心：端部星臂、中段电阻与另一端星臂依次串联

合成中心网络

图 3.48 中的 P_{AB}, P_{BA} 是原棱上的两个分点，星心另记为 O_A, O_B。其余五条原棱同样处理，四个星心之间仍有六条边，构成完全连接网络。

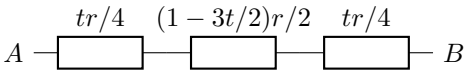


图 3.49: 解答过程：四角小四面体的四端等效

计算端口电阻

图 3.49 每个原顶点到其角部星心有 $tr/4$。相邻两星心之间还经过两条星臂与原棱中段，总阻为 $tr/4 + (1-2t)r + tr/4 = (1-3t/2)r$。四星心仍完全连接，$A, B$ 对应星心间电阻为此值的一半。再加两个外端星臂，

$$R_{AB} = \frac{tr}{4} + \frac{r}{2}\left(1 - \frac{3t}{2}\right) + \frac{tr}{4} = \frac{(2-t)r}{4}.$$

参数的变化

代入 $t = 1/4$, 得 $R_{AB} = 7r/16$。在 $0 < t < 1/2$ 的构型范围内，$R = (2-t)r/4$ 随 t 线性减小。角部网络逐渐增大时，四个中心之间的连接电阻 $(1-3t/2)r$ 减小，两端星臂的增加量小于中心网络的减少量。

3.9　本讲小结

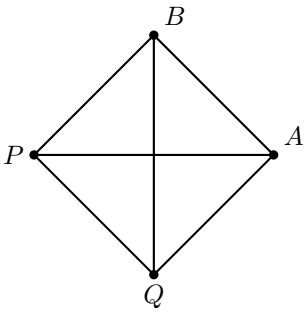
电阻网络的电势分布由连接关系、阻值和供电端口共同决定。保持端口的对称变换给出对应点等势。交换两端的变换给出关于平均电势的互补关系。借助这些关系，内部电势相同的节点可合并，无电流的内部边可省去。

立方体和高维网络以等势层组织支路，跨层的实际边数决定层间并联电阻。完全图以内部节点的置换组织通道。剩余未知电势再用节点方程求解，便能从每条实际支路的压降求总电流。

星三角变换保持三个端点的电势—电流响应，引入或消去中心节点后，常可继续串并联合并。辅助注入法则在同一组电阻上组合外部电流，让非目标节点的注入抵消，同时把电势差相加。两种方法都以原网络的端口关系为依据。

3.10 练习

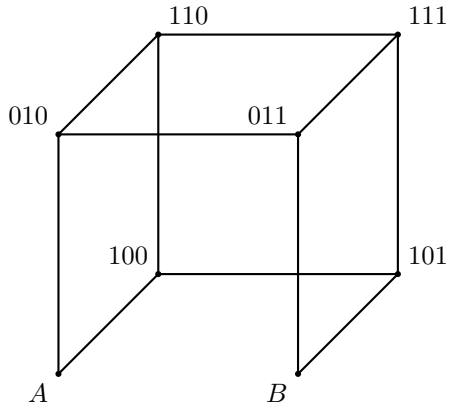
练习 3.1 (移除完全图中的两种边)**.** 四节点完全网络每边电阻 r，端口为 A, B。分别删去内部边 PQ 和直接边 AB，求两种情况下的端口电阻。



每条连线为电阻 r，交叉处不连接

图 3.50: 题设：移除完全图中的两种边

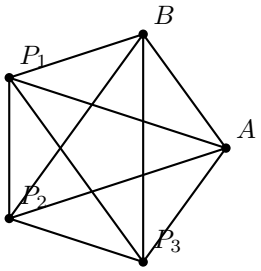
练习 3.2 (立方体一条端口棱断开)**.** 立方体各棱电阻 r，相邻顶点为 A, B。若直接连接两端的棱断开，其余十一条棱保持，求等效电阻。



各棱电阻均为 r，未标点的交叉处不接通
AB 直接棱已断开

图 3.51: 题设：立方体一条端口棱断开

练习 3.3 (完全图的一条边改变)**.** $N > 2$ 个节点两两连接，原阻值全为 r，现仅将端口 A, B 的直接边改为 R。求端口等效电阻，并讨论 $R \to 0, \infty$。



除 AB 外每条连线为 r，交叉处不连接
AB 边为 R

图 3.52: 题设：完全图的一条边改变

练习 3.4 (从端口测量反求星臂)**.** 三端无源网络可以表示为正电阻星形。第三端悬空时，测得 $R_{12} = 5\,\Omega, R_{23} = 7\,\Omega, R_{31} = 6\,\Omega$。求星臂。若测得的三对电阻为 $1, 2, 5\,\Omega$，能否仍以三个正星臂表示?

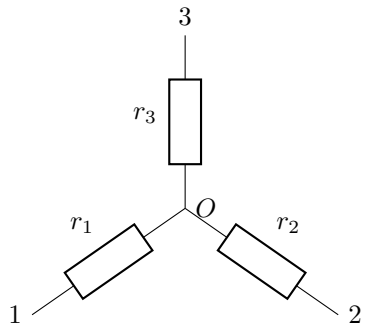
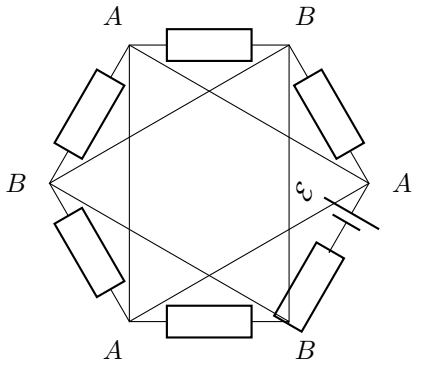


图 3.53: 题设：从端口测量反求星臂

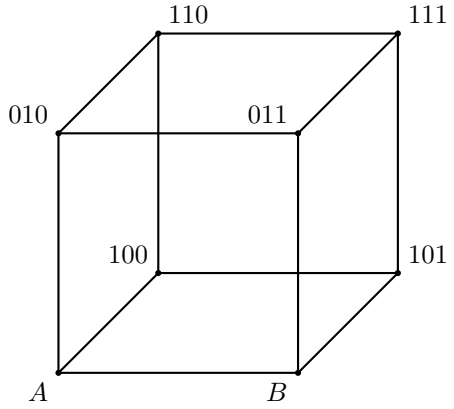
练习 3.5 (六边形交叉导线中的电源电流)**.** 正六边形六个顶点沿周向交替标为 A, B, A, B, A, B。同为 A 的三个顶点用理想导线相连，同为 B 的三个顶点也用理想导线相连，交叉处不连接。六条边各含电阻 r，其中一边另串联电动势 $\mathcal{E}$ 的电源。求通过电源的电流。



各边电阻均为 r，交叉处不接通

图 3.54: 题设：六边形交叉导线中的电源电流

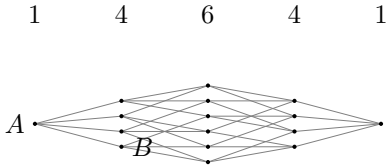
练习 3.6 (立方体一条棱变为两倍)**.** 立方体原每棱为 r。相邻端口 A, B 的直接棱改为 $2r$，其余保持。求等效电阻。



棱 AB 为 $2r$，其余棱均为 r，未标点的交叉处不接通

图 3.55: 题设：立方体一条棱变为两倍

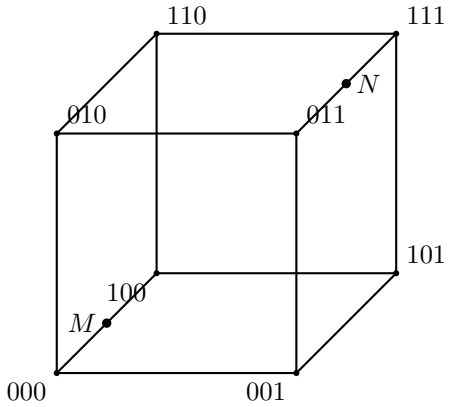
练习 3.7 (四维网络的相邻端口)**.** 四维超立方体每边电阻 r。求仅一位二进制不同的相邻节点间电阻。



每条边为 r。上方为每层节点数
端口为全零点及第一层某点

图 3.56: 题设：四维网络的相邻端口

练习 3.8 (相对两棱中点的立方体网络)**.** 立方体每棱均匀电阻为 r，端口取一对关于体心中心对称的平行棱的中点。求端口电阻。



各棱均匀电阻 r。端口在相对棱中点，未标点的交叉处不接通

图 3.57: 题设：相对两棱中点的立方体网络

练习解答

练习 3.1

解　内部两点等势

图 3.50 中交换 P, Q 保持端口，故二者等势。PQ 这条边原来就无电流。

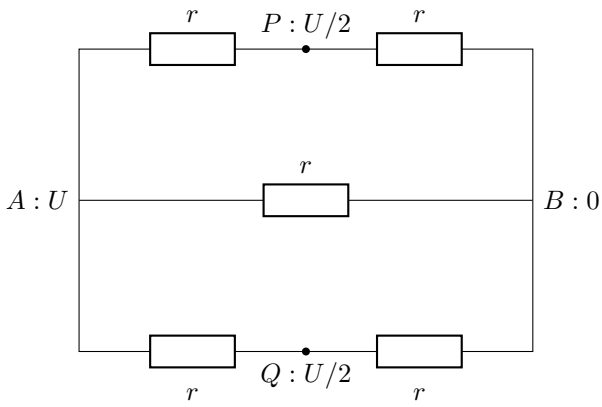


图 3.58: 删去内部边 PQ 后，直接通道与经 P,Q 的两条通道均保留

删去内部边

图 3.58 中三个通道的电导和为 $1/r+1/(2r)+1/(2r)=2/r$。取倒数得到这一情形的端口电阻 $r/2$。

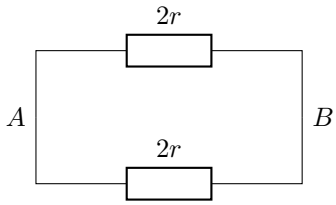


图 3.59: 解答过程：移除完全图中的两种边

删去直接边

图 3.59 删去的是直接边 AB，内部 PQ 仍等势无电流，留下两条 $2r$ 通道，等效为 r。

删边与电流路径

若保持端电压，删去 PQ 后两条间接通道和直接通道的电流都保持原值。删去 AB 后，少了直接通道的 U/r，总电流减半。

练习 3.2

解　补回直接棱

先在图 3.51 的断口补回直接棱，完整立方体相邻端口电阻为 $7r/12$。直接棱 r 与其余十一棱组成的网络跨接同一对端点，因此属于并联。记去掉直接棱后的电阻为 X。

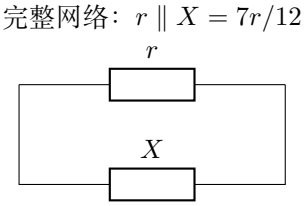


图 3.60: 解答过程：立方体一条端口棱断开

相减电导

图 3.60 的端口关系给出 $1/(7r/12) = 1/r + 1/X$，即 $12/(7r) - 1/r = 1/X = 5/(7r)$，所以 $X = 7r/5$。

绕行通道

绕行网络仍由十一条原棱组成。外加电压 U 时，总电流为 $U/X = 5U/(7r)$。原完整网络另有直接棱电流 U/r，二者相加为 $12U/(7r)$。

练习 3.3

解　内部节点电势

图 3.52 中其他 $N-2$ 个节点仍等势，电势为 $U/2$，每个提供一条 $2r$ 通道。它们合成 $2r/(N-2)$，再与直接边 R 并联。

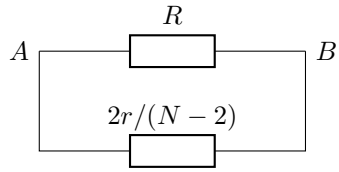


图 3.61: 解答过程：完全图的一条边改变

通道电导相加

由图 3.61，

$$R_{AB}=\left(\frac{1}{R}+\frac{N-2}{2r}\right)^{-1}=\frac{2rR}{2r+(N-2)R}.$$

端口边的变化

$R=r$ 时为完整网络，$R_{AB}=2r/N$。$R\to 0$ 时端口短接，$R_{AB}\to 0$。$R\to\infty$ 时只剩 $N-2$ 条间接通道，$R_{AB}\to 2r/(N-2)$。

练习 3.4

解　三对测量方程

按图 3.53 的第三端悬空测试，有 $r_1+r_2=5, r_2+r_3=7, r_3+r_1=6$。第一式加第三式减第二式得 $2r_1=4$，所以 $r_1=2\,\Omega$。再回代得 $r_2=3\,\Omega, r_3=4\,\Omega$。

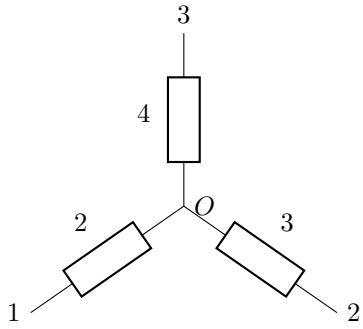


图 3.62: 第一组测量数据得到的三条星臂，阻值以 Ω 为单位

一般星臂公式

图 3.62 显示三个正星臂。一般测量值 $a=R_{12}, b=R_{23}, c=R_{31}$ 给出 $r_1=(a+c-b)/2, r_2=(a+b-c)/2, r_3=(b+c-a)/2$。若要求三臂严格为正，三组测量值须满足三角不等式。

第二组数据

第二组数据给出 $r_1=(1+5-2)/2=2\,\Omega$，$r_2=(1+2-5)/2=-1\,\Omega$，$r_3=(2+5-1)/2=3\,\Omega$。其中一臂为负，因此该组数据与题设的正电阻星形模型不相容。

练习 3.5

解　合并导线连接点

图 3.54 的跨接导线将六个顶点合成两个节点。含电源的一条边为电动势 $\mathcal{E}$ 串联内阻 r。其余五边各为 r，都跨接同一对 A, B。

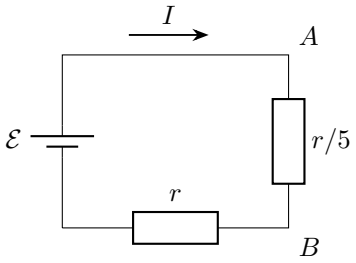


图 3.63: 解答过程：六边形交叉导线中的电源电流

电源电流

图 3.63 中五个负载并联为 $r/5$。电源电流大小

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + r/5} = \frac{5\mathcal{E}}{6r}.$$

各边电流

共同端电压 $U = I(r/5) = \mathcal{E}/6$。其余每边电流大小为 $U/r = \mathcal{E}/(6r)$，五股电流之和为 $5\mathcal{E}/(6r)$，回到含电源的支路。

练习 3.6

解　原网络的绕行电阻

图 3.55 中先把 AB 直接棱与其余十一条棱分开。完整等阻立方体端口电阻 $7r/12 = r \parallel X$，故 $1/X = 12/(7r) - 1/r = 5/(7r)$，$X = 7r/5$。

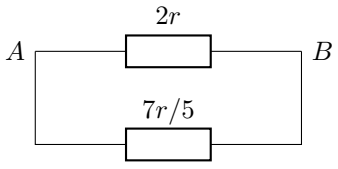


图 3.64: 解答过程：立方体一条棱变为两倍

改变直接棱

图 3.64 将直接边改为 $2r$，绕行部分不变，所以

$$R_{AB} = 2r \parallel \frac{7r}{5} = \frac{(2r)(7r/5)}{2r + 7r/5} = \frac{14r}{17}.$$

电流的重新分配

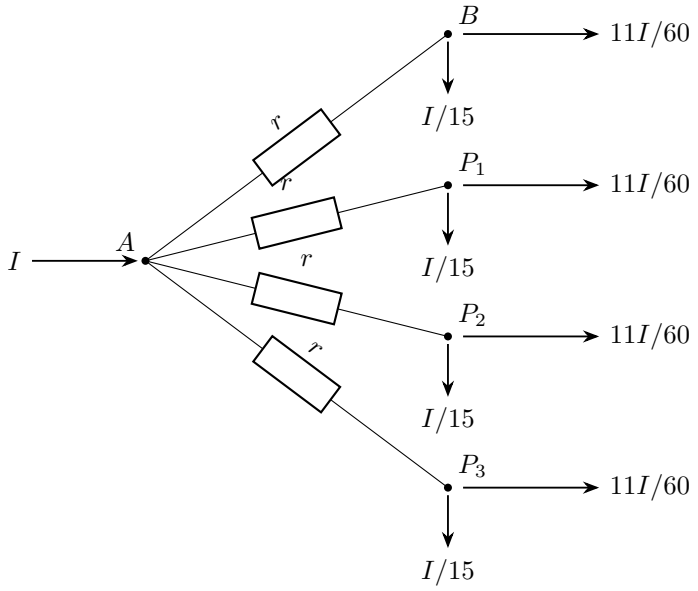
固定端电压 U，绕行网络电流保持 $5U/(7r)$，直接棱电流从 U/r 减为 $U/(2r)$，所以总电流为 $17U/(14r)$。端口电阻相应增为 $14r/17$。

练习 3.7

解　构造第一辅助问题

在图 3.56 上先向 A 注入 I，从其余 15 点各流出 $I/15$。由坐标置换对称，A 的四条边电流均为 $I/4$，第一层任一点与 A 的电势差为 $Ir/4$。

每条出 A 的边均通过 $I/4$



每个邻点其余三条边接入第二层，图中右箭头为这三边电流之和

图 3.65: 第一辅助问题中 A 的四条实际边等价。各邻点抽取 $I/15$ 后仍向后续网络送出电流

构造第二辅助问题

图 3.65 画出第一辅助问题在 A 附近的真实四条边，并保留各邻点抽取及后续电流。再以相邻节点 B 为流出端构造互补辅助问题：其余各点各注入 $I/15$，B 流出 I。合成方式与图 3.46 相同，只是本题有 16 个点。

相加后求电阻

两个辅助问题的 U_{AB} 都为 $Ir/4$，叠加后为 $Ir/2$，实际端口电流为 $I+I/15=16I/15$。因此

$$R_{AB}=\frac{Ir/2}{16I/15}=\frac{15r}{32}.$$

推广到高维

对 d 维网络有 2^d 个节点，每个节点有 d 条邻边。第一辅助问题的每条邻边电流为 I/d，第二问题贡献同样的相邻电势差。于是

$$U_{AB}=\frac{2Ir}{d},\qquad I_{\text{端}}=I+\frac{I}{2^d-1}=\frac{2^dI}{2^d-1}.$$

相除并约去 I，得

$$R_{\text{邻}}=\frac{2Ir/d}{2^dI/(2^d-1)}=\frac{2r}{d}(1-2^{-d}).$$

$d=3$ 时为 $7r/12$，$d=5$ 时为 $31r/80$。

练习 3.8

解　拆分端口棱

图 3.57 中端口所在两棱各被拆成两个 $r/2$。交换每条端口棱的两个端点而保持 M,N 的对称变换，使该棱两端等势。因此每一端口到其端点组的两个 $r/2$ 并联为 $r/4$。

$$G:\{000,100\}\quad H:\{011,111\}$$

$$Y:\{001,101\}\quad Z:\{010,110\}$$

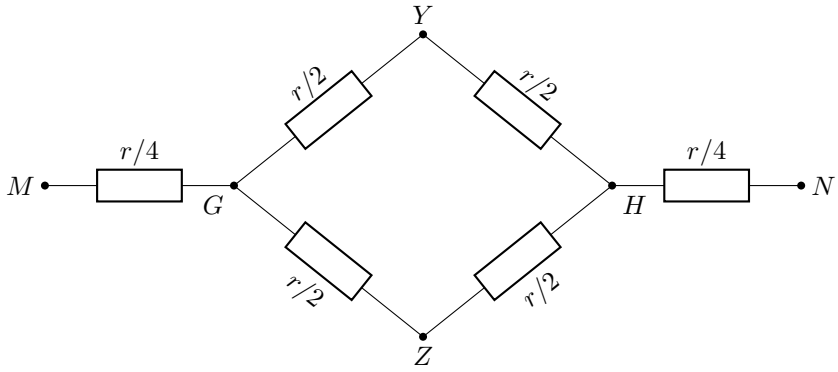


图 3.66: 端口半棱先并联为 $r/4$，八个顶点分为四个双节点组，再保留四条跨组通道

合并四组节点

图 3.66 中，八个原顶点按沿端口棱方向的反射分为四组，每组两点。G,H 分别含 M,N 所在棱的两个端点，Y,Z 是另两组。组内原棱无电流。四组之间每对相邻组有两条原棱并联，因而形成四边每边 $r/2$ 的环形网络。

合成端口电阻

两个端组位于环形的相对位置，两个总阻 r 的绕行通道并联为 $r/2$。加上端口处两个 $r/4$，总阻为 $r/4+r/2+r/4=r$。

中点电流的分配

在中点 M，注入电流平均流向所在棱的两个端点。在中点 N，两侧电流汇合后流出。两端各贡献 $I(r/4)$ 的电势降，中间四组节点间贡献 $I(r/2)$，总电势差为 Ir。

电路

物理竞赛一轮讲义

第四讲

无限网络与电流叠加

2026

目录

第四讲　无限网络与电流叠加 **1**

4.1　从逐节分流到无限网络 1

4.2　递推方程与电流的空间衰减 3

4.3　虚拟电流与平移网络 6

4.4　自相似平面网络与三端结构 7

4.5　多导轨网络的对称分解 9

4.6　例题与分析 11

4.7　本讲小结 39

4.8　练习 40

练习解答 42

第四讲　无限网络与电流叠加

4.1　从逐节分流到无限网络

4.1.1　输入电阻怎样随节数变化

把电压接在一节梯形网络的输入端，电流在横档和后续网络之间分流。接上第二节，便增加了一条通道。继续接入各节，远处新接支路对输入电流的影响逐渐减小。当输入电阻随节数增加趋于确定值时，这个极限就是相应无限梯形的输入电阻。这里仍使用欧姆定律与节点电流连续关系，只是把有限次串并联化简写成递推。

为具体描述这种过程，可以在第 N 节后开路，或把两条末端导线短接，分别求输入电阻。两种末端接法给出不同的有限序列。下面将看到，梯形网络的逐级分流使末端影响向输入端衰减，这两种序列会趋于同一极限。

在图 4.1 中，输入端 A 先经过一只 r，到达有横档的节点 P。从 P 再向右走，尾部又先经过一只 r，其结构与从 A 看入相同。因此可用同一个变量 X 表示这两个输入电阻。P 处本地横档则单独保留。

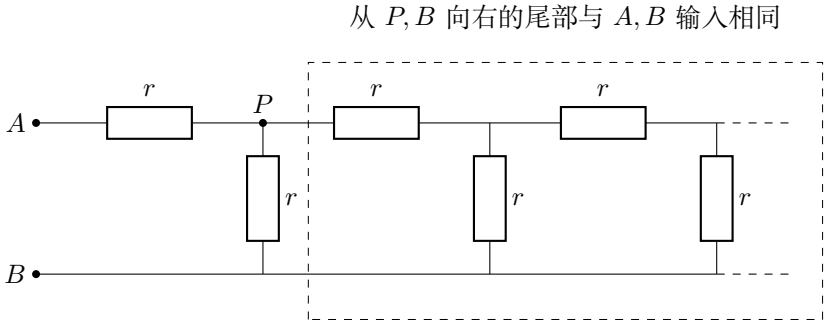


图 4.1: 单有阻导轨的输入切口：A 先经 r 到 P，下导线各点属于同一节点 B

图 4.1 的虚框以 P, B 为两个外接端点，包含向右的首段电阻和全部后续网络。P, B 间电压相同的两条通路是本地横档 r 与尾部 X，先并联合成，再与 A, P 间的 r 串联。例题 1、2 将分别研究一条、两条导轨有电阻的情形。

4.1.2　递推的固定值与收敛

例如单根有阻上导轨、理想下导线构成的梯形网络，每单元先串联 r，再接一个对下导线的横档 r。移去首单元后剩余输入电阻仍为 X，故

$$X = r + \frac{rX}{r+X}, \qquad X^2 - rX - r^2 = 0.$$

把二次式配成平方，

$$X^2 - rX + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4}, \qquad \left(X - \frac{r}{2}\right)^2 = \frac{5r^2}{4}.$$

开平方得到 $X = r/2 \pm \sqrt{5}r/2$。正根为 $(1+\sqrt{5})r/2$，无源电阻网络对应正根。再研究有限网络递推 $X_{n+1} = f(X_n) = r + rX_n/(r+X_n)$ 怎样逼近该根。对 X 求导时 r 为常量，按商的求导法则，

$$f'(X) = 0 + \frac{r(r+X) - rX\cdot 1}{(r+X)^2} = \frac{r^2}{(r+X)^2}.$$

在 $X \geq r$ 时有 $0 < f'(X) \leq 1/4$。设正固定点为 X_*，中值定理给出 $|X_{n+1} - X_*| = |f'(\xi_n)|\,|X_n - X_*| \leq |X_n - X_*|/4$，其中 ξ_n 位于 X_n 与 X_* 之间。第一节以后各值都落入该范围，故误差最多按 4^{-n} 衰减，固定点确实是有限网络的极限。

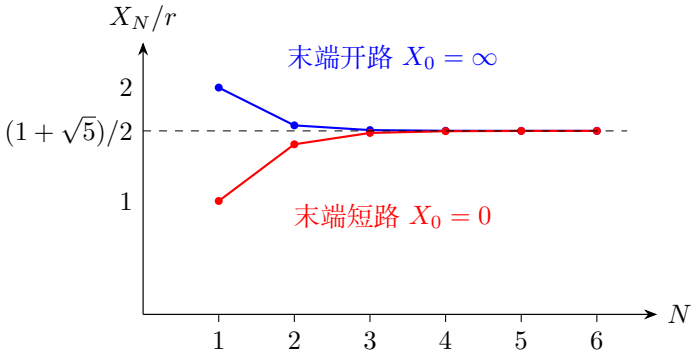


图 4.2: 相同的串并联递推作用于开路、短路两种末端，有限值从两侧夹逼同一个被动固定点

图 4.2 的两个序列使用同一个递推式。末端开路时，第一节的尾路无电流，输入端只经过两只串联的 r，所以 $X_1 = 2r$，再接一节给 $X_2 = f(2r) = 5r/3$。末端短路时，第一节横档两端等势，只剩输入串联电阻 $X_1 = r$，再接一节给 $X_2 = f(r) = 3r/2$。f 单调递增，蓝点始终在固定值上方，红点始终在下方。两列点之间的差随节数增加而缩小，都趋于 $X_*/r = \varphi = (1+\sqrt{5})/2$。

若输入端取在第一横档节点，本地输入为 $r \parallel X = X - r = (\sqrt{5}-1)r/2$。两个端口相隔一只串联电阻，因而输入电阻恰好相差 r。例题 1 的过程图同时标出两组端子和这两个电阻。

4.2 递推方程与电流的空间衰减

4.2.1 用节点电势建立差分方程

单上导轨网络中，每相邻节点间电阻 r，每节点经横档 R 接公共理想下导线。取下导线为零电势，在无外部注入的第 n 个节点列守恒：

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{r} + \frac{V_n - V_{n+1}}{r} + \frac{V_n}{R} = 0.$$

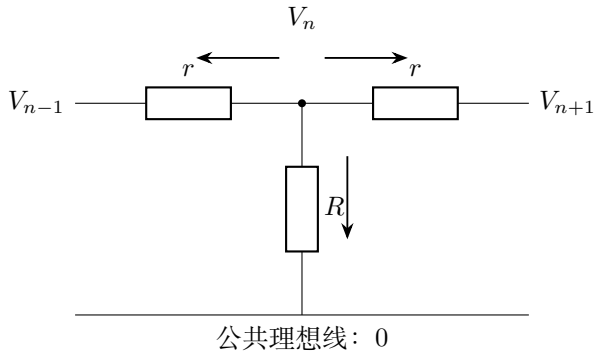


图 4.3: 在第 n 个上轨节点，把三条有阻支路均规定为流出方向

图 4.3 中三支路电流分别是 $(V_n - V_{n-1})/r, (V_n - V_{n+1})/r, V_n/R$。它们的代数和为零。对从源点向右衰减的电势，左支路参考电流为负，表示实际从左流入。递推关系因而同时保留了方向和局部电荷守恒。

整理为 $V_{n+1} - (2 + r/R)V_n + V_{n-1} = 0$。设 $V_n = C\lambda^n$，相邻两项分别为 $C\lambda^{n+1}, C\lambda^{n-1}$。代入后对非零模式除以 $C\lambda^{n-1}$，得到特征方程

$$\lambda^2 - (2 + r/R)\lambda + 1 = 0.$$

令 $a = r/R > 0$，配方得 $[\lambda - (1 + a/2)]^2 = a + a^2/4$，所以

$$\lambda_\pm = 1 + \frac{a}{2} \pm \sqrt{a + \frac{a^2}{4}}, \qquad \lambda_+\lambda_- = 1.$$

由于 $\lambda_+ > 1$，其倒数满足 $0 < \lambda_- < 1$。半无限网络远处电势趋向公共导线电势，保留衰减根，得到 $V_n = C\lambda_-^n$。有限网络两端各提供一个节点条件，通解为 $A\lambda_-^n + B\lambda_-^{-n}$，用两端节点方程求系数。例题 17 将展示这一求解过程。

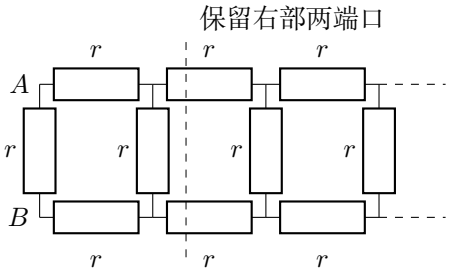


图 4.4: 两条有阻导轨的切口

图 4.4 的两条导轨都含电阻，电流在上下轨段中都产生压降。取同一列两点的电势差，可以把两条轨的方程合为一个差分方程。

双导轨网络中上、下每段均为 r，横档为 R。反向注入两导轨时，取差模电压 $V_n = V_n^{\text{上}} - V_n^{\text{下}}$，两导轨电势为 $\pm V_n/2$。图 4.4 中无源上节点的守恒式是

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{2r} + \frac{V_n - V_{n+1}}{2r} + \frac{V_n}{R} = 0.$$

乘以 $2r$ 并把相邻列项移到同一边，得到

$$V_{n+1} - (2 + 2r/R)V_n + V_{n-1} = 0.$$

与单导轨相比，多出的因子 2 来自上下两根轨段共同产生的电势降。单轨接理想公共导线时，一条轨段承担相邻节点的全部电势差。双轨反向激励时，上轨只承担相邻列差电势变化的一半。

有限网络的通解 $A\lambda^n + B\lambda^{-n}$ 中，远端方程决定两种模式的比例。例如例题 17 会得到 $B/A = \lambda^{2N+1}$。对固定的近端 n，随着 N 增大，第二项相对第一项按 $\lambda^{2N+1-2n}$ 衰减，这就说明有限网络怎样趋近半无限网络。

4.2.2　源节点决定电势幅度

对于双向无限双导轨，从第零横档上端注入 I、下端流出 I，左右对称给出 $V_n = V_0\lambda^{|n|}$，其中

$$\lambda = 1 + \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{r^2}{R^2} + \frac{2r}{R}}.$$

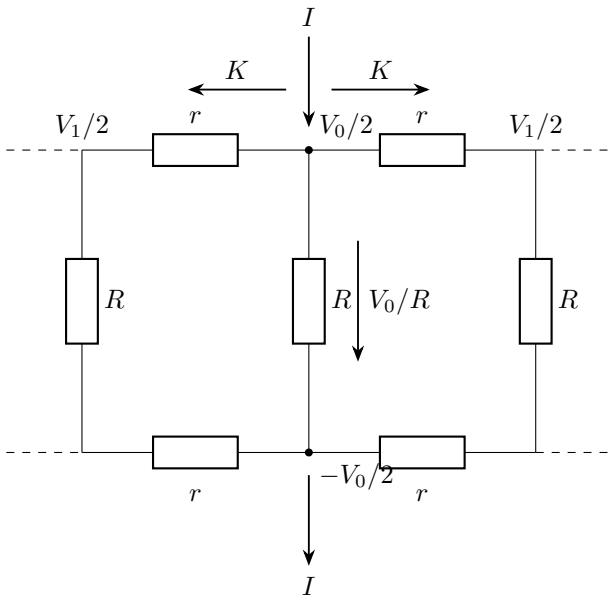


图 4.5: 双向双导轨的源节点。上下势差为 V_0，每条上轨压降只有差电势变化的一半

图 4.5 中，零列上节点向左右分别流出 $K = (V_0 - V_1)/(2r)$，向下横档流出 V_0/R，故 $I = 2K + V_0/R$。上轨两点的电势分别为 $V_0/2, V_1/2$，横档两端则为 $V_0/2, -V_0/2$。两个压降的不同正是式中系数的来源。

在上端源节点，两侧导轨分别流出 $(V_0 - V_1)/(2r)$，横档流出 V_0/R。因此

$$I = \frac{V_0(1-\lambda)}{r} + \frac{V_0}{R}.$$

将衰减根中的 $1 - \lambda = -r/R + \sqrt{r^2 + 2rR}/R$ 代入，

$$\frac{I}{V_0} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{r^2+2rR}}{rR} = \frac{\sqrt{r^2+2rR}}{rR}, \qquad \frac{V_0}{I} = \frac{rR}{\sqrt{r^2+2rR}}.$$

无源区的递推决定电势怎样衰减，源节点方程决定衰减曲线的幅度。幅度与 I 成正比，因而 V_0/I 是与电流大小无关的端口电阻。例题 4 将继续求每条横档和导轨的电流。

4.3　虚拟电流与平移网络

4.3.1　叠加抵消非目标节点的注入

先取一个 $m\times m$ 的方格。每行的首尾节点再用一只 r 连接，每列也这样连接，就得到周期方格。这样 $N=m^2$ 个节点仍有四条等价邻边，绕任一节点转过 90° 都保持连接。两次辅助供电都在这同一个电阻网络上进行。

先让 A 流入 I，其余各点均匀流出 $I/(N-1)$。这组条件绕 A 旋转不变，故它的四条邻边各流出 $I/4$。再让 B 流出 I，其余各点均匀流入 $I/(N-1)$。对第二组，B 的四条邻边各流入 $I/4$。因此 AB 上的两股贡献都指向 B。

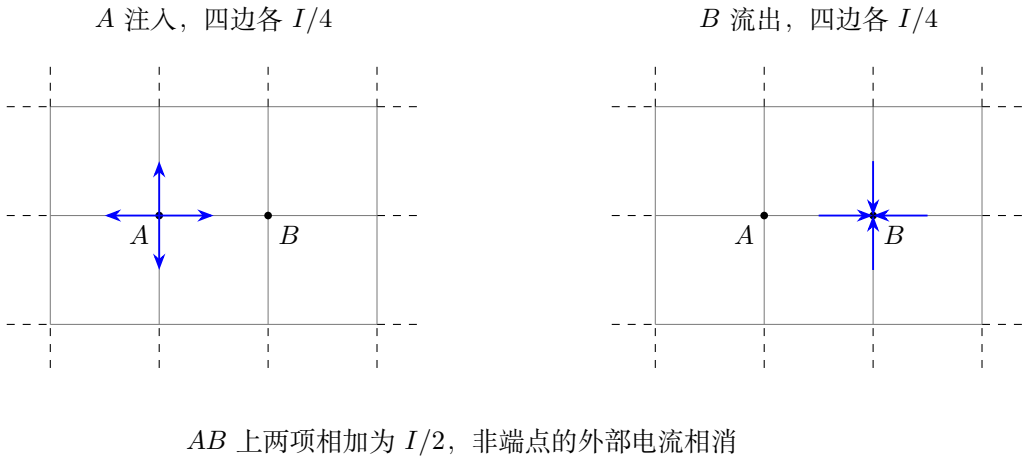


图 4.6: 同一个周期方格的两组辅助电流。图中画出端点附近，AB 上的两项都指向 B

图 4.6 左、右两幅图中的外部电流相加后，除了 A,B，其他节点的 $I/(N-1)$ 流入与流出逐点抵消。A 的实际注入量为 $I_{\text{端}}=I+I/(N-1)=NI/(N-1)$，$B$ 流出同量。直接边通过 $I/2$，故

$$R_{AB}^{(N)}=\frac{(I/2)r}{NI/(N-1)}=\frac{r}{2}\left(1-\frac{1}{N}\right).$$

让周期边远离 A,B，即 $m\to\infty$，得到无限方格的相邻电阻 $r/2$。整个计算只用相邻点的电势差。

有限周期电路向无限电路过渡时，可保持端口注入量固定。单位电流的总热功率就是端口电阻，由直接边可给出上界 r。因此在固定的任何局部区域，电流都有界，周期逐渐增大时的局部极限仍满足节点守恒，且全网的焦耳热有限。若有两组这样的局部解，取二者电势之差 w，它在每个点等于相邻电势的平均。把 w 沿任一格方向平移后与自身相减，得到的差仍满足平均关系，且它是平方可和的边电势

差，远处趋零。若该差有正最大值或负最小值，平均关系会把同一极值传到每个相邻点，与远处趋零矛盾。因此相邻电势差的解是唯一的，周期模型的极限给出这一源汇电路的电阻。

4.3.2 平移与局部旋转对称的条件

三角、蜂窝和简单立方晶格也可沿晶格的平移方向周期接合，取保持源点局部旋转对称的周期。若每点有 z 条等价邻边，从 A 注入 I 并由其余点均匀流出时，AB 通过 I/z。第二组在 B 流出 I，使同一条边再增加 I/z。因此有限周期晶格的相邻电阻为 $2r(1-1/N)/z$，极限是 $2r/z$。

蜂窝、方格、三角晶格和简单立方晶格的 z 分别为 $3,4,6,6$，相邻电阻分别为 $2r/3, r/2, r/3, r/3$。当端点隔两步时，还要从中间节点的对称分流求第二条边的电势降。例 4.8 将沿 $A\to B\to C$ 把两段电势降相加。

4.4 自相似平面网络与三端结构

4.4.1 缩放的是几何，也是电阻

用同材质、同截面的导线组成相似网络时，线段缩为 η 倍，各段电阻也同乘 η。给各端点保持同一电势差，所有支路电流就放大为原来的 $1/\eta$，故端口电阻缩为 η 倍。这样既有几何相似，也有电阻和端口关系的相似。

三角形内层通过三个顶点接入外层，适合用三条星臂描述。正方形内层保留四个外接点，则可按对称性组织多个端点同时注入的电流。例题 10 先利用反射使第三接点电流为零，例题 11 直接保留完整三端星形，例题 16 通过两组对角线电流求四端分组后的响应。

对具有三重对称、无源互易的三端子网络，可以选三条相等星臂为递推参数 s。星心电势由三个支路电流和为零确定：

$$V_O=\frac{V_1+V_2+V_3}{3},\qquad I_i=\frac{V_i-V_O}{s}.$$

这组关系同时规定了三个端点的响应，比单次第三端悬空测得的两端电阻 $2s$ 保留更多接线信息。

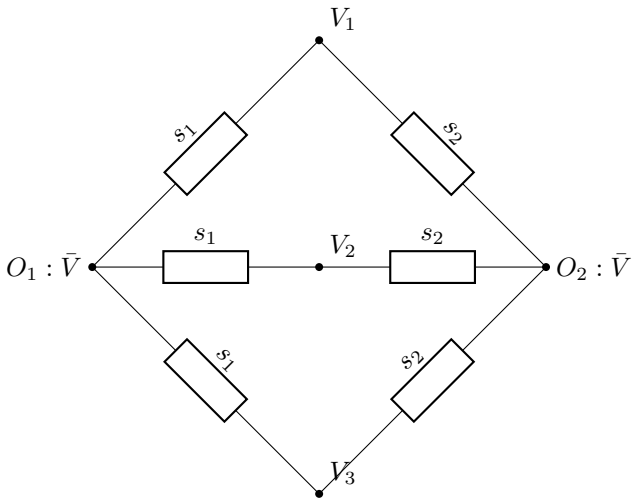


图 4.7: 两组三端等臂星形接在相同的三个端点。两个中心都处于三端电势的平均值

图 4.7 中，每套等臂星形的中心电势都等于三个端电势的平均值。两星心因而等势，可连接成一个中心。同一端点通向中心的两条星臂再并联。例题 18 利用这一关系求六边形环内部界面处的电阻。

4.4.2　有限层怎样趋近无限层

有限层递推把自相似关系与具体网络联系起来。先用只有最外层的电阻作为初值，再逐层接入内图，就得到一列可直接计算的输入电阻。若递推函数 f 在这列数所在区间内满足 $|f'| \le k < 1$，相邻两次迭代的差便至多缩小为原来的 k，网络随层数增加而趋于固定值。例题 11 与例题 19 都将求出这个缩小比例。

电阻网络中的空间衰减还帮助判断截断误差：衰减根越小，远处末端对输入端的影响越弱。它与时间暂态的指数衰减形式相似，但自变量分别是节点编号与时间，物理约束不同。后续暂态讲义将用初始条件代替这里的空间末端条件。

4.5 多导轨网络的对称分解

4.5.1 同向与反向电流分开处理

上下两导轨完全相同。对任意外部注入，可把电流分成两轨同向的一部分和反向的一部分。相同方向、相同大小的激励使两轨电势相等，横档无电流。反向激励使两轨电势互为相反数，可以用差电势递推。最后将两部分电势和电流相加，恢复实际注入电流。

例如上轨零号节点流入 I、上轨 n 号流出 I，可拆成：零号上下各流入 $I/2$、n 号上下各流出 $I/2$ 的同向部分。加上零号上流入下流出 $I/2$、n 号上流出下流入 $I/2$ 的反向部分。前者在两轨各产生 n 段、每段电流 $I/2$ 的压降。后者用一个横档源解及其平移负解表示。两组响应相加，便保留了上下轨段各自产生的电势降。

公共理想回流线使相隔很远的两端各能通过附近横档回流，端口电阻因此趋于有限值。双导轨的平均电势却保留沿轨道的线性变化：长距离电流仍产生随距离增加的压降。例题 5 和例题 12 的比较，将从具体公式说明这两种物理过程。

4.5.2 三条导轨的平均电势与偏差

三条相同导轨每段电阻 r，同一列的三个节点两两以 r 相连。令该列平均电势为 $\bar{V}_n$，各轨偏差为 $\delta_{a,n} = V_{a,n} - \bar{V}_n$，有 $\delta_{1,n} + \delta_{2,n} + \delta_{3,n} = 0$。列内流出某节点的横向电流为

$$\frac{V_a - V_b}{r} + \frac{V_a - V_c}{r} = \frac{3\delta_a}{r}.$$

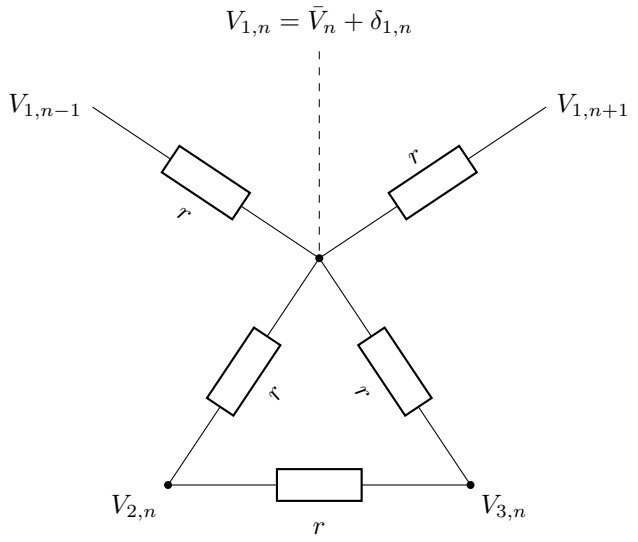


图 4.8: 三导轨的同一列构成完整三角形。图中只展开上轨节点的左右邻边

图 4.8 中，同列另外两点的电势和为 $3\bar V_n - V_{1,n}$，故上轨横向流出总量为 $3\delta_{1,n}/r$。左右纵向支路另外贡献 $(2\delta_{1,n}-\delta_{1,n-1}-\delta_{1,n+1})/r$，这两部分之和进入下面的偏差方程。

平均部分没有横向电流，相当于三条并联纵向通道。偏差部分的节点方程则为

$$5\delta_{a,n}-\delta_{a,n-1}-\delta_{a,n+1}=rJ_{a,n},$$

其中 $J_{a,n}$ 是从该节点注入的电流减去同列平均注入。对某一轨的偏差分量，令零列偏差注入为单位电流，并使其余分量的偏差注入和为零。把该轨的电势偏差除以此电流，记响应电阻为 G_n。无源区先代入 $G_n=C\lambda^n$，除以 $C\lambda^{n-1}$ 得到

$$5\lambda-1-\lambda^2=0,\qquad \lambda_\pm=\frac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}.$$

两根互为倒数。远处偏差趋零，故右半轴只保留 $\lambda=(5-\sqrt{21})/2<1$ 的解，左半轴由反射得到 $G_n=G_0\lambda^{|n|}$。源点的方程保留外部注入项：

$$5G_0-G_{-1}-G_1=r \quad\Longrightarrow\quad (5-2\lambda)G_0=r.$$

由于 $5-2\lambda=\sqrt{21}$，幅度为 $G_0=r/\sqrt{21}$，所以

$$G_n=\frac{r}{\sqrt{21}}\lambda^{|n|}.$$

对每一列的偏差电流乘以相应平移后的 G_n，再把各列贡献相加，就得到偏差电势。最后加回三轨共同的平均电势，恢复各轨的实际电势。例题 15 会列出两列的偏差注入向量，逐项求出两个端点的电势差。

4.6 例题与分析

例 4.1 (单导轨半无限梯形的输入电阻)**.** 上导轨由串联电阻 r 构成，下导线理想。每节上节点经横档 r 接下导线，输入端先经过一只上导轨电阻再到第一横档。求输入电阻及横档节点看入电阻。

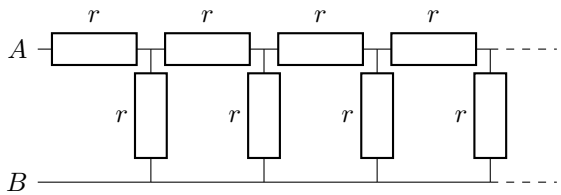


图 4.9: 题设：单导轨半无限梯形的输入电阻

解　首单元与尾部

图 4.9 的输入端明确位于第一串联电阻之前。按图 4.10 切开首单元后，余下部分与原输入结构相同，设输入电阻为 X，则 $X = r + (r \parallel X)$。

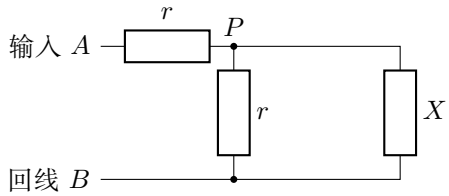


图 4.10: A, B 间为 X，横档节点 P 对 B 的电阻为 $Y = r \parallel X$

求输入电阻

去分母 $X(r + X) = r(r + X) + rX$，整理为 $X^2 - rX - r^2 = 0$。正根 $X = (1 + \sqrt{5})r/2$，负根舍去。

横档处的端口

第一横档节点到下导线的电阻为 $Y = r \parallel X = X - r = (\sqrt{5} - 1)r/2$。

有限节数的趋近

从末端开路的一节开始，$X_1 = 2r$，再递推得 $X_2 = r + r(2r)/(r+2r) = 5r/3$，$X_3 = r + r(5r/3)/(r+5r/3) = 13r/8$。这些值从上方趋近 $(1+\sqrt{5})r/2$。每多一节，末端变化传回输入的影响继续减小。

例 4.2 (双导轨半无限梯形)**.** 两条导轨每段电阻均为 r，相邻节点间的横档也为 r。输入端先经过上下各一只导轨电阻，再到第一横档。求输入电阻。

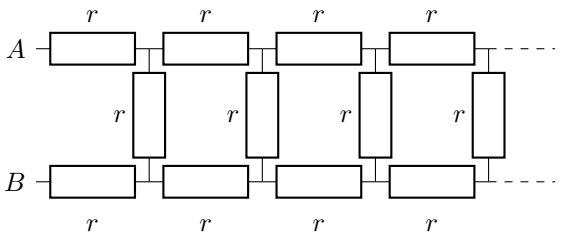


图 4.11: 题设：双导轨半无限梯形

解　上下轨段的压降

图 4.11 中上下两段导轨都属于首单元，每一段通过同一总电流，因此首单元的串联部分是 $2r$。设输入电阻为 X，图 4.12 给出 $X = 2r + (r \parallel X)$。

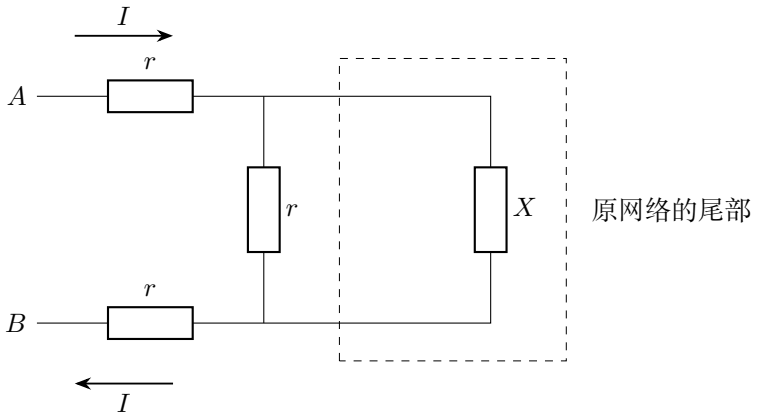


图 4.12: 保留首单元的上下两个 r。首横档与尾部 X 并联

解递推方程

乘以 $r + X$ 得 $Xr + X^2 = 2r^2 + 3rX$，所以 $X^2 - 2rX - 2r^2 = 0$，取正根 $X = (1+\sqrt{3})r$。

横档处的端口

第一横档节点处看入则为 $r \parallel X = X - 2r = (\sqrt{3}-1)r$。

两根引线的作用

注入电流 I 依次流过上下两根输入引线，每根都产生 Ir 的电势降。两引线共贡献 $2Ir$，之后才在横档与尾部之间分流。因此 $X = 2r + (\sqrt{3}-1)r$。

例 4.3 (双向无限梯形的横档端口)**.** 上下导轨和横档的每个电阻均为 r，网络向左右无限延伸。求同一横档两端 A, B 间电阻。

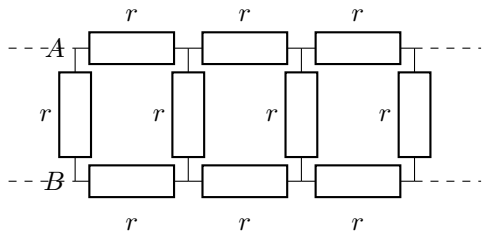


图 4.13: 题设：双向无限梯形的横档端口

解　三个并联通道

图 4.13 的中央横档为 r，左右各是一条先经过上下两段导轨的半无限支路，每条输入电阻 $X = (1+\sqrt{3})r$。图 4.14 将三条跨接同一端口的支路并列。

$$X = (1+\sqrt{3})r$$

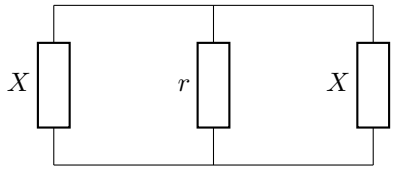


图 4.14: 解答过程：双向无限梯形的横档端口

求端口电阻

总电阻

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{(1+\sqrt{3})r}\right)^{-1} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

因为 $2/(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$，总电导为 $\sqrt{3}/r$。

电流的分配

若端口注入 I，中央横档通过 $I/\sqrt{3}$，左右支路各分得 $(1-1/\sqrt{3})I/2$。三股电流在下端 B 汇合，中央与两侧通道共用端电压 $Ir/\sqrt{3}$。

例 4.4 (双导轨中的电流空间分布)**.** 双向无限双导轨网络每边电阻 r，从第零横档上端注入 I、下端流出 I。求第 n 横档电流与第 n 到 $n+1$ 上导轨电流，$n \geq 0$。

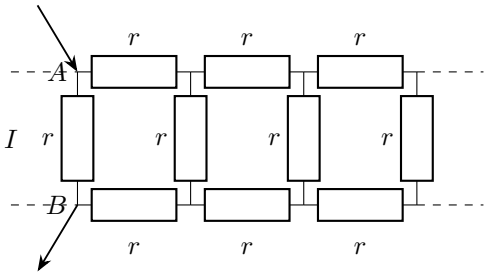


图 4.15: 题设：双导轨中的电流空间分布

解　差电势递推

图 4.15 中上下电势反对称，令差电压 $V_n = V_n^{\text{上}} - V_n^{\text{下}}$。图 4.16 画出相邻两列的电势。上轨电势是 $V_n/2$，无源上节点满足

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{2r} + \frac{V_n - V_{n+1}}{2r} + \frac{V_n}{r} = 0, \qquad V_{n+1} - 4V_n + V_{n-1} = 0.$$

代入 $V_n = C\lambda^n$ 并除以 $C\lambda^{n-1}$，得 $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$，两根为 $(4 \pm \sqrt{16-4})/2 = 2 \pm \sqrt{3}$。远处衰减选 $\lambda = 2 - \sqrt{3}$，左右对称得 $V_n = V_0 \lambda^{|n|}$。

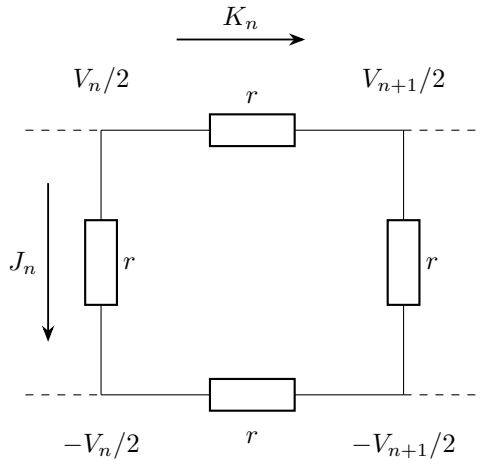


图 4.16: 第 $n, n+1$ 两列的局部电路。虚线表示左右两侧的导轨继续延伸

源点电势幅度

在图 4.5 的零号上节点，横档流出 V_0/r，左右上轨各流出 $V_0(1-\lambda)/(2r)$。所以

$$I = \frac{V_0}{r} + \frac{V_0(1-\lambda)}{r} = \frac{\sqrt{3}V_0}{r}, \quad V_0 = \frac{Ir}{\sqrt{3}}.$$

各支路电流

第 n 横档电流 $J_n = V_n/r = I\lambda^{|n|}/\sqrt{3}$，第 n 到下一节点的上轨电流 $K_n = (V_n - V_{n+1})/(2r) = I(1-\lambda)\lambda^n/(2\sqrt{3})$。

横档电流的总和

先对左右各 N 列求和。令 $S_N = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^N$，将 $S_N - \lambda S_N$ 逐项抵消，得到 $(1-\lambda)S_N = \lambda - \lambda^{N+1}$。于是

$$J_0 + 2\sum_{n=1}^{N} J_n = \frac{I}{\sqrt{3}}\left[1 + \frac{2\lambda(1-\lambda^N)}{1-\lambda}\right].$$

由 $0 < \lambda < 1$，取 $N \to \infty$ 后为 $I(1+\lambda)/[\sqrt{3}(1-\lambda)]$。再用 $\lambda = 2 - \sqrt{3}$，

$$\frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}, \qquad J_0 + 2\sum_{n\geq 1} J_n = I.$$

所有横档电流的总和正好把上轨注入的电流送到下轨。

例 4.5 (公共回流线上的任意距离端口)**.** 单有阻上导轨网络向左右无限延伸，每段上轨及每横档均为 r，下导线理想。上轨节点 A_0, A_n 间隔 n 段。求 R_n、相邻端口值和 $n \to \infty$ 极限。

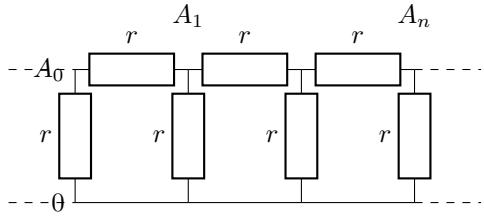


图 4.17: 题设：公共回流线上的任意距离端口

解　单源的电势响应

在图 4.17 中先向 A_0 注入 I、从公共下导线流出。无源节点的三支路守恒为 $(V_k - V_{k-1})/r + (V_k - V_{k+1})/r + V_k/r = 0$，即 $V_{k+1} - 3V_k + V_{k-1} = 0$。代入

$V_k = C\lambda^k$ 得 $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$，取小于 1 的根 $\lambda = (3-\sqrt{5})/2$。左右对称及远处趋零给 $V_k = V_0\lambda^{|k|}$。源节点另外保留注入 I，

$$I = \frac{V_0}{r} + \frac{2(V_0 - V_1)}{r} = \frac{V_0}{r}(3 - 2\lambda) = \frac{\sqrt{5}V_0}{r}.$$

因此 $V_0 = Ir/\sqrt{5}$，单源响应为 $V_k = Ir\lambda^{|k|}/\sqrt{5}$。

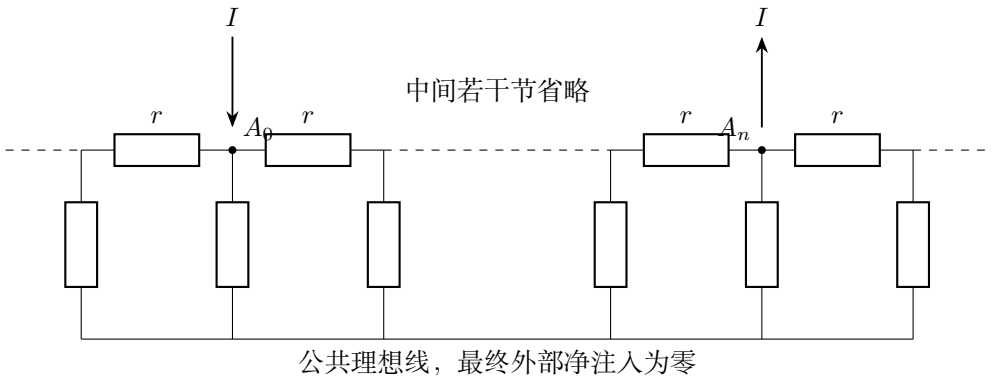


图 4.18: 两个上轨端口的实际源汇。各横档与公共理想回流线完整保留

平移后相减

图 4.18 再把一个平移到 A_n 的相同解取负叠加。公共导线的外部电流抵消，A_0, A_n 分别成为源汇。叠加后的任意节点电势为 $V_k = Ir[\lambda^{|k|} - \lambda^{|k-n|}]/\sqrt{5}$。分别代入 $k = 0, n$ 得 $V_0 = Ir(1-\lambda^n)/\sqrt{5}$、$V_n = -V_0$，于是

$$U_{0n} = \frac{2Ir}{\sqrt{5}}(1-\lambda^n), \qquad R_n = \frac{2r}{\sqrt{5}}(1-\lambda^n).$$

距离与端口电阻

$n = 1$ 时，$1 - \lambda = (\sqrt{5}-1)/2$，故 $R_1 = r(1 - 1/\sqrt{5})$。$n \to \infty$ 时，$\lambda^n \to 0$，得到 $R_n \to 2r/\sqrt{5}$。两个相隔很远的端点各通过附近横档到公共导线，端口电阻趋于这两部分之和。

例 4.6 (无限方格相邻节点的电阻)**.** 无限方格每边为电阻 r，A, B 为相邻节点。求端口电阻，并说明对无穷远电势的处理。

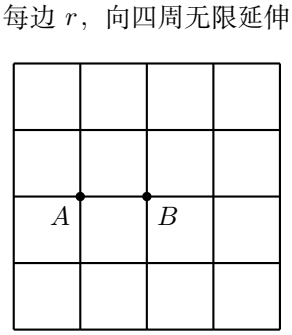


图 4.19: 题设：无限方格相邻节点的电阻

解　两组辅助电流

如图 4.19，A, B 是一条 r 电阻的两个端点。按图 4.6 的接法，在同一个 N 点周期方格上，从 A 注入 I、其余各点均匀流出 $I/(N-1)$。再从 B 流出 I、其余各点均匀流入 $I/(N-1)$。每个辅助问题都使 AB 从 A 向 B 通过 $I/4$。

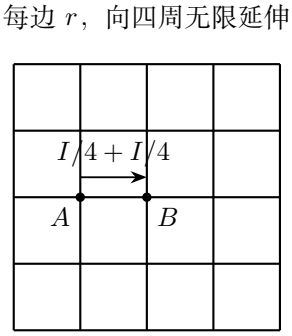


图 4.20: 解答过程：无限方格相邻节点的电阻

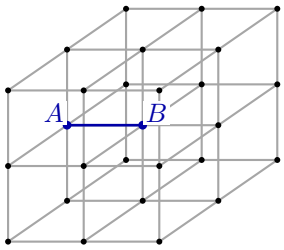
直接边的压降

图 4.20 的直接边通过 $I/2$，故 $U_{AB} = Ir/2$。其他节点的外部电流抵消后，A 处注入 $NI/(N-1)$，B 流出同样的电流。相除得 $R_{AB}^{(N)} = r(N-1)/(2N)$。

局部电势差

周期放大时，直接边的压降保持 $Ir/2$，端口电流趋于 I，所以 $R_{AB} = r/2$。取某一点作零势即可求节点电势，端口计算只需要 A, B 的电势差。

例 4.7 (无限简单立方晶格的相邻电阻)**.** 无限简单立方晶格每条最近邻边为 r。求相邻节点间电阻。

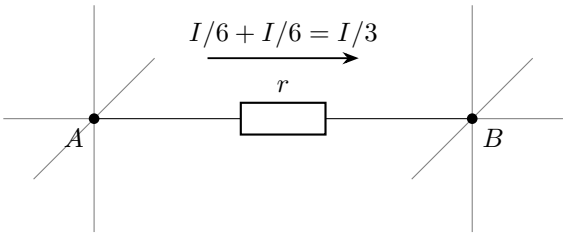


每段阻值为 r，三维点阵向外延伸

图 4.21: 三层点阵的局部投影。实心点是电阻相接的节点，穿越处的线段沿各自方向继续

解　六个等价方向

图 4.21 的每个节点有六个等价最近邻方向。对一个源点注入 I、在同一周期晶格的其余各点均匀流出的辅助问题，源点六条边各流 $I/6$。将相邻汇点的反向辅助问题叠加，直接边电流为 $I/3$。取无限极限时，实际端口电流趋于 I。



灰线仅画各邻边的起始段。未标点的交叉处不连接

图 4.22: 实际端口的直接边电流为 $I/3$。节点其余五个方向仍接入完整晶格

相加直接边电流

图 4.22 从直接电阻读出 $U = Ir/3$，所以 $R = r/3$。

电流分配的依据

第一辅助问题中，源点的六个方向可由立方晶格的旋转互换，各通过 $I/6$。第二问题在汇点作同样的分配。只有同一条 AB 边上的两项贡献在这里相加，所得压降就是两端的共同电势差。

例 4.8 (无限蜂窝的相邻与两步端口)**.** 无限蜂窝网络每边电阻 r。A, B, C 依次沿两条边相连，求 R_{AB} 与 R_{AC}。

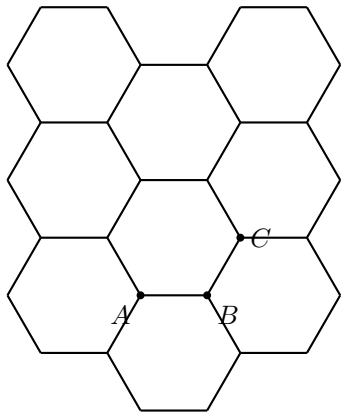


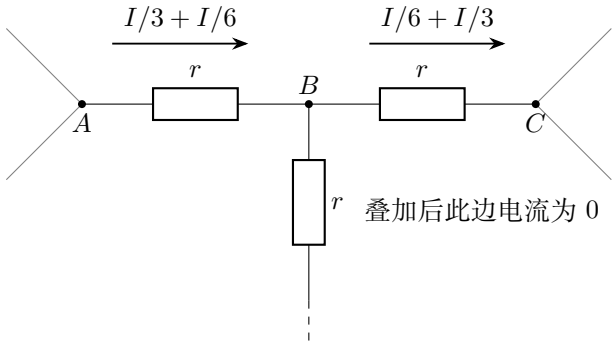
图 4.23: 题设：无限蜂窝的相邻与两步端口

解　相邻节点

图 4.23 的蜂窝每节点有三条等价边，故相邻源汇的直接边电流为 $2I/3$，得到 $R_{AB} = 2r/3$。

两步路径的分流

求两步端口时，在周期蜂窝上先向 A 注入 I、其余节点各流出 $I/(N-1)$。AB 通过 $I/3$。节点 B 自身流出 $I/(N-1)$，剩余电流沿可以反射互换的另外两条边各流一半，故 BC 通过 $[I/3 - I/(N-1)]/2$，在无限极限中为 $I/6$。



其余网络保持连接。路径压降由实际支路电流与各边 r 相乘后相加

图 4.24: 两组辅助电流在 AB, BC 上各自相加为 $I/2$。在 B 的第三条边上，两项方向相反

沿路径求电势差

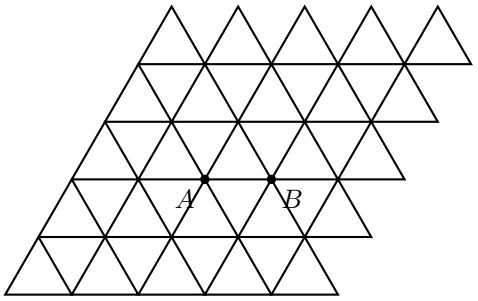
第二组在 C 流出 I，由相同的分流关系，取无限极限后 BC 流入 $I/3$、AB 流 $I/6$。图 4.24 中两组的路径电流，方向都为 $A\to B\to C$。两问题叠加后，AB, BC 各流 $I/2$，所以沿这条实际路径

$$U_{AC}=\frac{I}{2}r+\frac{I}{2}r=Ir,\qquad R_{AC}=r.$$

路径中的分流

在节点 B，两条已选路径边的电流各为 $I/2$，第三条边位于互换 A, C 的反射轴上，两端同势，因此没有电流。

例 4.9 (无限三角晶格的相邻电阻)**.** 无限正三角晶格每边为 r，求相邻节点间电阻，并与蜂窝网络比较。

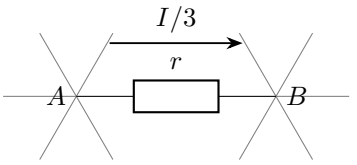


各节点六条最近邻边

图 4.25: 题设：无限三角晶格的相邻电阻

解　六重旋转

图 4.25 中每节点的六条边由 60° 旋转互换。在同一周期三角晶格上构造相邻源汇的两组均匀回流，各自对直接边贡献 $I/6$，所以直接边通过 $I/3$。周期趋于无穷时，源汇端的电流趋于 I。



灰线为其余五个方向的起始段，仍接完整晶格

图 4.26: 解答过程：无限三角晶格的相邻电阻

相邻电势差

由图 4.26 的边压降 $U = Ir/3$，端口电阻为 $r/3$。

与蜂窝网络比较

蜂窝在每个源点有三个等价方向，各分得 $I/3$。三角晶格有六个，各分得 $I/6$。两组辅助问题合成后，直接边分别通过 $2I/3$ 和 $I/3$，所以相邻电阻分别为 $2r/3$ 和 $r/3$。

例 4.10 (无限嵌套中点三角形)**.** 正三角形每边电阻 r。连接三边中点形成内三角形，再不断对内三角形作同样操作。所有线段用同材质、同截面导线构成，电阻与长度成正比，接触处均连接。求外顶点 A, B 间电阻。

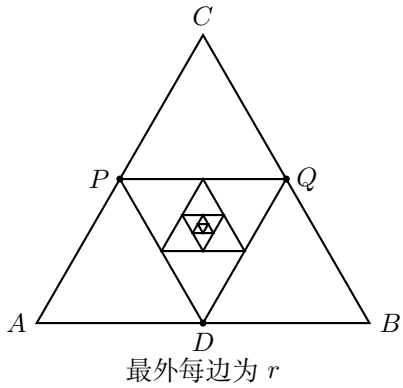


图 4.27: 题设：无限嵌套中点三角形

解　轴线上两点等势

记左、右边中点为 P, Q，底边中点为 D。图 4.27 关于外部 A, B 的垂直平分线反射并交换端口。各级位于反射轴上的中点电势为 $U/2$。在把底边中点与内三角形对应顶点拆开后，两个部分各自仍有该对称性，所以拆开不引入电流，可保留端口等效。

内层的缩放

设整个网络电阻为 X，内三角形尺度为一半，其两侧中点间等效为 $X/2$。外顶端绕行路径在这两个中点之间电阻为 r，故两中点间为 $r \parallel (X/2)$。经这一路径从外部 A 到 B，还需串联左右各 $r/2$。外底边本身为 r。

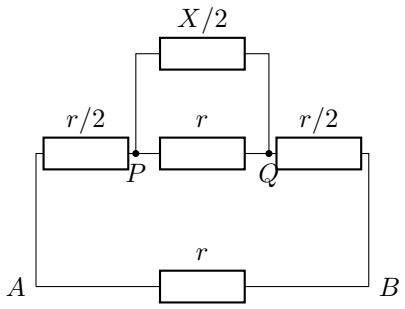


图 4.28: 断开轴线上的接点后，两侧各自仍为 $U/2$。内层在 P,Q 间的电阻为 $X/2$

输入电阻递推

图 4.28 得到

$$X = r \parallel \left[r + \left(r \parallel \frac{X}{2} \right) \right].$$

求解固定值

先算内层并联 $r \parallel (X/2) = rX/(2r+X)$，再与两个外侧半段相加，得 $r + rX/(2r+X) = 2r(r+X)/(2r+X)$。最后与底边 r 并联，

$$X = \frac{2r(r+X)}{4r+3X} \quad \Longrightarrow \quad 4rX + 3X^2 = 2r^2 + 2rX \quad \Longrightarrow \quad 3X^2 + 2rX - 2r^2 = 0.$$

二次公式给出 $X = [-2r \pm \sqrt{4r^2 + 24r^2}]/6$，保留正根 $X = (\sqrt{7}-1)r/3$。无内线时电阻为 $2r/3$，新增通道后所得约 $0.549r$ 更小，符合单调性。把阻值除以 r，有限层递推函数为 $f(x) = 2(1+x)/(4+3x)$。对 $x \geq 0$ 求导，

$$f'(x) = \frac{2(4+3x) - 6(1+x)}{(4+3x)^2} = \frac{2}{(4+3x)^2} \leq \frac{1}{8}.$$

只有外周时从 $x_0 = 2/3$ 开始。由中值定理，每次迭代到正固定点的距离至多为上一次的 $1/8$。

例 4.11 (角部递归三角形的星形等效)**.** 一个正三角形边长所对应的导线电阻为 $3r$。在三个角各保留一个尺度为三分之一的相似递归三角形，相邻角部之间用长度对应电阻 r 的中间线段连接。递归无限进行，连接规则如图。求外部任意两角间电阻。

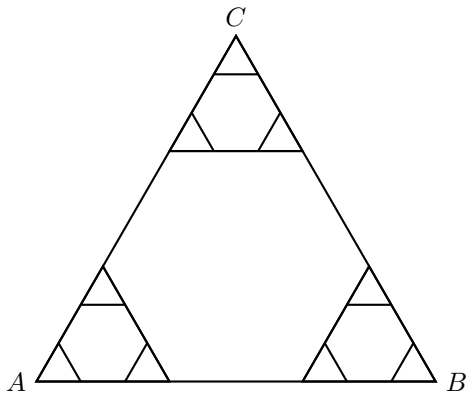


图 4.29: 题设：角部递归三角形的星形等效

解　等臂星形递推

图 4.29 三端完全对称，整个子网络可等效为三臂均为 s 的星形。每个角部的相似子图尺度缩为三分之一，故对应星臂是 $s/3$。三个角点可同时与下一段连线交换电流，三条星臂分别保留这三个接点。

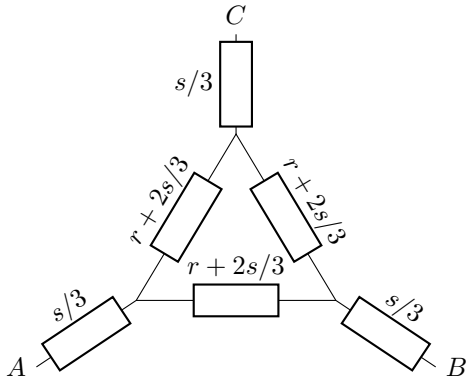


图 4.30: 解答过程：角部递归三角形的星形等效

中心间的连接

图 4.30 中三个角部中心之间，每条连接都含两段 $s/3$ 与中间的 r，所以中心三角形每边为 $r + 2s/3$。

恢复星形

把这个等边三角形转成星形，每臂为 $(r+2s/3)/3$。再与外端到角部中心的 $s/3$ 串联，应恢复原星臂 s，

$$s=\frac{s}{3}+\frac{1}{3}\left(r+\frac{2s}{3}\right)=\frac{5s}{9}+\frac{r}{3}.$$

求两端电阻

由 $s=5s/9+r/3$ 得 $4s/9=r/3$，所以 $s=3r/4$。任意两外端间有两条星臂串联，电阻为 $2s=3r/2$。只保留外周时，两端电阻为 $2r$。逐层接入角部内线后，星臂按斜率 $5/9$ 的递推趋于上述固定值。

例 4.12 (双导轨同一轨上的两端口)**.** 双向无限双导轨每边电阻 r。端口均在上轨，间隔 n 段。求等效电阻，并给出相邻情形。

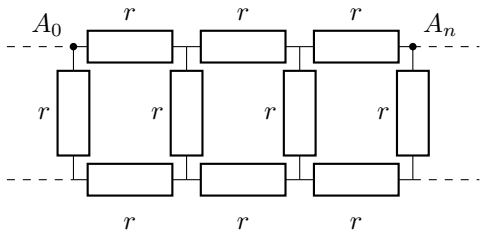


图 4.31: 题设：双导轨同一轨上的两端口

解　同向注入部分

按图 4.31 将实际源汇分成同向与反向两组。两轨同向激励在零列各注入 $I/2$、n 列各流出 $I/2$，两轨之间无电流，每轨的端口压降为 $nIr/2$。

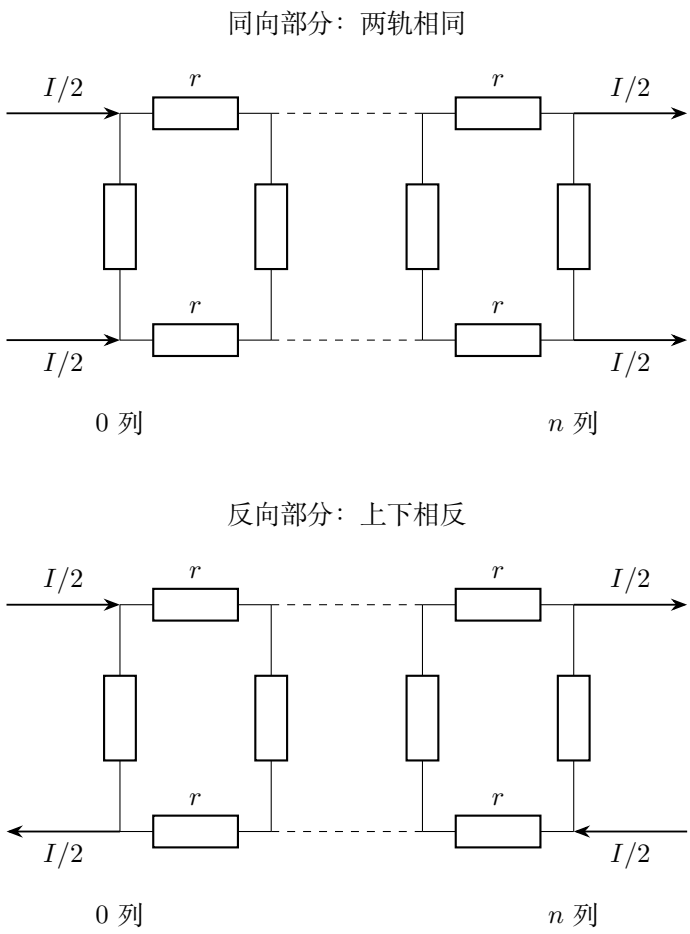


图 4.32: 同向与反向两组实际注入相加。中间若干单元省略，各横档仍保留

反向注入部分

图 4.32 的反向部分是零列强度 $I/2$ 的横档源与 n 列强度 $-I/2$ 的横档源。单个强度 J 的横档源差电势为 $(Jr/\sqrt{3})\lambda^{|k|}$，上轨电势是其一半，其中 $\lambda = 2-\sqrt{3}$。

相加端口压降

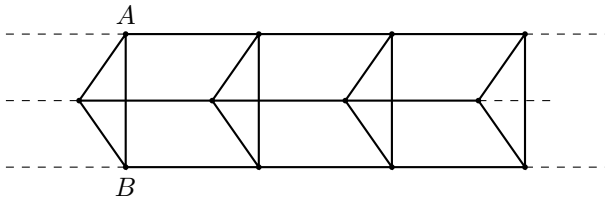
将两个源强分别代入，上轨零列的反向电势为 $V_0^{(-)} = \dfrac{Ir}{4\sqrt{3}}(1-\lambda^n)$，上轨第 n 列为 $V_n^{(-)} = \dfrac{Ir}{4\sqrt{3}}(\lambda^n - 1) = -V_0^{(-)}$。两者相减得到反向部分的端口压降 $Ir(1-\lambda^n)/(2\sqrt{3})$。再加同向部分的 $nIr/2$ 并除以实际端口电流 I，总电阻

$$R_n^{\text{同轨}} = \frac{nr}{2} + \frac{r}{2\sqrt{3}}(1-\lambda^n).$$

距离较大的情形

相邻时 $n=1$，$R_1 = r/2 + r(\sqrt{3}-1)/(2\sqrt{3}) = r - r/(2\sqrt{3})$。当 n 较大，λ^n 很小，$R_n \simeq nr/2 + r/(2\sqrt{3})$。随距离增加的部分来自两轨各承担 $I/2$ 的纵向压降。

例 4.13 (三导轨同列的不同轨端口)**.** 三条无限导轨每段电阻 r，同一列三个节点两两以 r 连接。求同列上、下两个节点间电阻。



每条线代表电阻 r，仅实心点相接，左右无限延伸

图 4.33: 题设：三导轨同列的不同轨端口

解　中轨电势

图 4.33 取上端注入 I、下端流出 I，中间轨的所有节点在交换上下端并反转电势后保持，因此电势为零。

合成横向通道

每列上、下直接电阻为 r，经中间节点的两电阻串联为 $2r$，同列两者并联为 $R = 2r/3$。

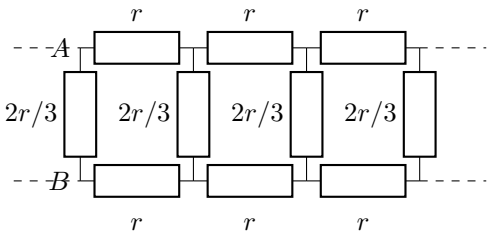


图 4.34: 解答过程：三导轨同列的不同轨端口

求端口电阻

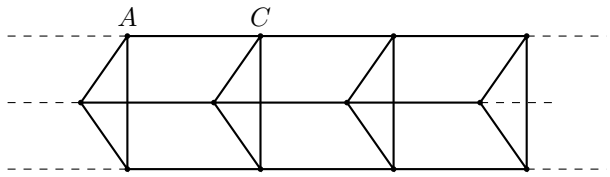
图 4.34 因此成为两条纵向每段 r、横档为 $2r/3$ 的双向梯形。代入一般横档输入式，

$$R_{AB} = \frac{r(2r/3)}{\sqrt{r^2 + 2r(2r/3)}} = \frac{2r}{\sqrt{21}}.$$

中轨电流

中间轨各节点都处于平均电势，纵向电流为零。同列上、下点之间，经中轨的两只 r 仍通过电流，组成 $2r$ 的横向通道。它与直接横档 r 并联为 $2r/3$，所以合成后的模型保留了全部横向电流。

例 4.14 (三导轨同轨相邻端口)**.** 三导轨网络规则与上一题相同。A, C 位于同一导轨的相邻两列，求端口电阻。



每条线代表电阻 r，仅实心点相接，左右无限延伸

图 4.35: 题设：三导轨同轨相邻端口

解　合并另两条轨

图 4.35 的端口都在上轨，另两轨可互换，因此对应节点等势，可以合并。合并后下导轨每段为 $r/2$，上下连接的两条 r 并联为横档 $r/2$，上导轨仍为 r。

两种输入端口

设从某一截面先经过上下导轨段再进入尾部的输入电阻为 X，把本列横档与该尾部并联后的看入电阻另记为 Y。先在下图中识别两种切口，再建立方程。

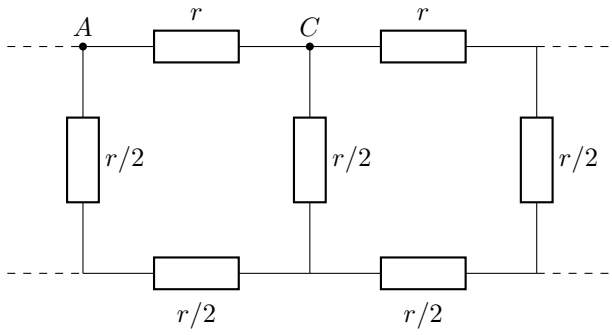


图 4.36: 另两条轨逐列等势合并后，上轨为 r，下轨与横档分别为两个 r 的并联

尾部递推

图 4.36 中，一对纵向轨段在差模回路中合计为 $r + r/2 = 3r/2$。尾部变量 X 从这对轨段之前看入，得到

$$X = \frac{3r}{2} + \frac{rX}{r + 2X}.$$

两边乘以 $r + 2X$，有 $rX + 2X^2 = 3r^2/2 + 4rX$，整理为 $4X^2 - 6rX - 3r^2 = 0$。二次公式给 $X = [6r \pm \sqrt{36r^2 + 48r^2}]/8$，取正根 $X = (3 + \sqrt{21})r/4$。本地含横档的看入电阻则为 $Y = (r/2) \parallel X = X - 3r/2 = (\sqrt{21} - 3)r/4$。

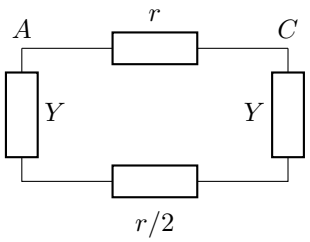


图 4.37: Y 各包含本列横档及背离另一端点的半无限尾部。中间下轨一段为 $r/2$

合成绕行通道

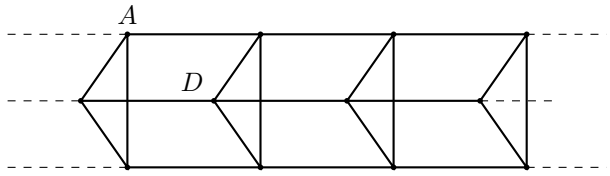
图 4.37 中，左侧 Y 的尾部从 A 所在列向左延伸，右侧 Y 从 C 所在列向右延伸。因此中间只留下上轨 r 和下轨 $r/2$。直接上边与绕行通道 $Y + r/2 + Y$ 并联，

$$R_{AC} = r \parallel (2Y + r/2) = r \parallel \frac{\sqrt{21} - 2}{2} r = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{21}}\right) r.$$

对应支路的电流

另两轨对称，原来对应的纵向电流相等，合并后由 $r/2$ 承担其总电流。两个横向 r 的电流也相等，合并为 $r/2$。上轨的直接边电流与绕行电流在端口汇合，得到 $R_{AC} = (1 - 2/\sqrt{21})r$。

例 4.15 (三导轨跨列异轨端口)**.** 三导轨网络每边电阻 r，A 为零列上轨节点，D 为第一列中轨节点。求 A, D 间电阻。



每条线代表电阻 r，仅实心点相接，左右无限延伸

图 4.38: 题设：三导轨跨列异轨端口

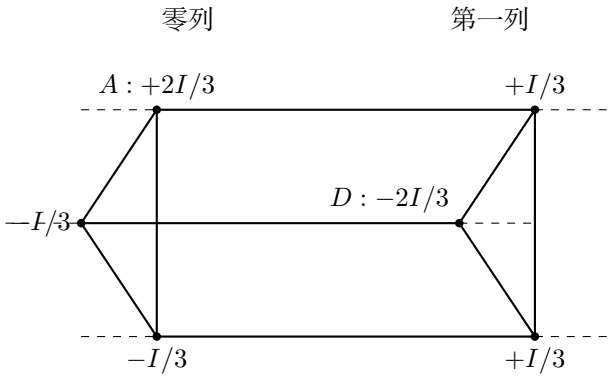
解　平均电势

图 4.38 的零列上轨注入 I、第一列中轨流出 I。先分平均注入与偏差。每列平均电流为总注入的三分之一，同向部分在零列到第一列的每条轨上均产生电流 $I/3$，故端口平均电势差为 $Ir/3$。

偏差注入向量

零列偏差注入向量为 $(2I/3, -I/3, -I/3)$。第一列为 $(I/3, -2I/3, I/3)$。用正文求出的 $G_n = r\lambda^{|n|}/\sqrt{21}$，$\lambda = (5-\sqrt{21})/2$，

$$\delta_A = \frac{2I}{3}G_0 + \frac{I}{3}G_1, \qquad \delta_D = -\frac{I}{3}G_1 - \frac{2I}{3}G_0.$$



每条线为电阻 r，未标点的交叉处不连接。其余各列继续延伸

图 4.39: 跨列异轨源汇的偏差注入。正值表示注入、负值表示流出，每列三分量之和为零

求端口电阻

图 4.39 中两端偏差之差为 $I(4G_0+2G_1)/3$。所以

$$R_{AD}=\frac{r}{3}+\frac{r}{3\sqrt{21}}(4+2\lambda)=\frac{r}{3}+\frac{r(9-\sqrt{21})}{3\sqrt{21}}=\frac{3r}{\sqrt{21}}.$$

共同电势贡献的 $Ir/3$ 来自三条导轨并行输运。偏差部分来自端点分别位于上轨和中轨，图 4.39 用两列不同的注入向量表示。

例 4.16 (无限嵌套中点正方形)**.** 最外正方形每边电阻 r，连接各边中点形成内正方形并递归。导线电阻与长度成正比，所有接点连接。求最外一条对角线两端 A,B 间电阻。

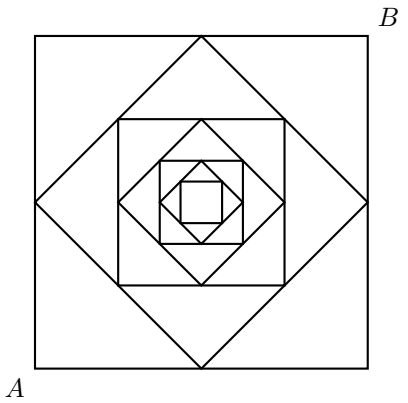
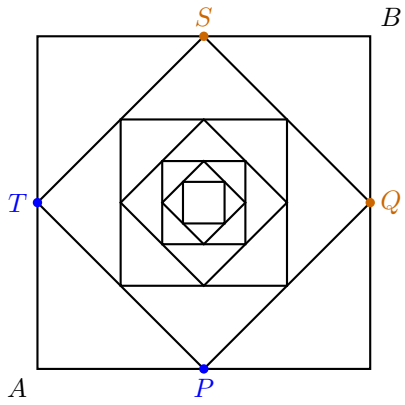


图 4.40: 题设：无限嵌套中点正方形

解　中点等势组

图 4.40 中关于对角线 AB 的反射保持端口，故靠近 A 的两个边中点等势，靠近 B 的两个中点也等势。外端 A 到前一中点组的两段 $r/2$ 并联为 $r/4$，另一端同样为 $r/4$。外部另两个角各形成一条总电阻 r 的中间通道，二者并联为 $r/2$。



P,T 等势，Q,S 等势。每段外边半段为 $r/2$

图 4.41: 反射保持外端口 A,B，内正方形四端分成两个等势组

图 4.41 中 A 接到 P,T，B 接到 Q,S。内层以两组中点为端口，每组同时接入两个原顶点，下面求出它的组间响应。

内层四端响应

设原对角线端口电阻为 X。内正方形尺度缩为 $1/\sqrt{2}$，其对角线电阻为 $D = X/\sqrt{2}$。在图 4.41 的内图上，先作从 P 注入 I、从 S 流出 I 的辅助问题。以平均电势为零，令 $U = ID$，则按 P,Q,S,T 次序的四端电势为 $(U/2, 0, -U/2, 0)$。另两端为零来自交换 P,S 的反射。

再作从 T 注入 I、从 Q 流出 I 的辅助问题，电势依次为 $(0, -U/2, 0, U/2)$。两组相加后，P,T 同为 $U/2$，Q,S 同为 $-U/2$，恰好允许所需合并。组间电压为 U，每组总电流为 $2I$，所以内图组间电阻为 $U/(2I) = D/2 = X/(2\sqrt{2})$。图 4.42 列出两组辅助电势及相加后的分组。两组各输入 I，合并后的电流为 $2I$，这就给出额外的因子 $1/2$。

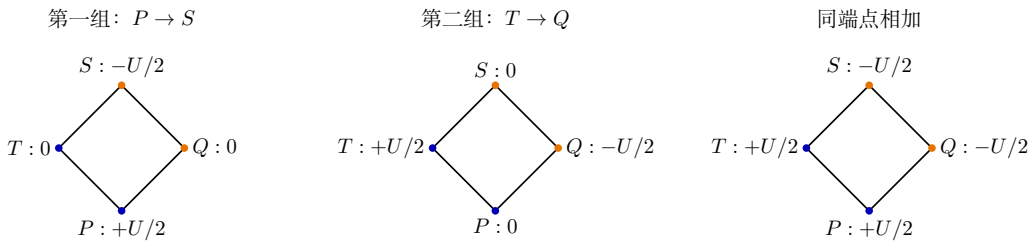


图 4.42: 两个对角线激励的端口电流相加。蓝、橙分别标出合成后的两组等势端点，图中四点沿用内层原来的接法

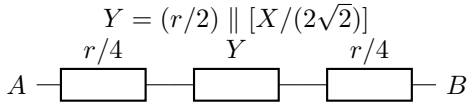


图 4.43: 解答过程：无限嵌套中点正方形

建立递推方程

图 4.43 的串并联给出

$$X=\frac{r}{2}+\left(\frac{r}{2}\parallel\frac{X}{2\sqrt{2}}\right).$$

求固定值

内层并联为 $rX/[2(\sqrt{2}r+X)]$，所以 $2X=r+rX/(\sqrt{2}r+X)$。去分母并展开，

$$2X(\sqrt{2}r+X)=r(\sqrt{2}r+X)+rX,\qquad X^2+(\sqrt{2}-1)rX-\frac{r^2}{\sqrt{2}}=0.$$

判别式为 $[(\sqrt{2}-1)^2+4/\sqrt{2}]r^2=(3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2})r^2=3r^2$，正根

$$X=\frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}r\approx 0.658919r.$$

有限层数

只保留外方框时 $X_0=r$。逐层加入中点方框，递推给出 $X_1=0.707107r$，$X_2=0.666667r$，继续趋于 $0.658919r$。令 $x=X/r$，有限层递推函数为 $f(x)=1/2+x/[2(\sqrt{2}+x)]$。对 $x\geq 0$ 用商法则，

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{2}+x)-x}{2(\sqrt{2}+x)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+x)^2}\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

中值定理给出每次迭代的误差上限，因此从 $x_0=1$ 出发会趋于这个正固定点。

例 4.17 (有限双导轨的端口电阻)**.** 双导轨有节点 $n=0,1,\dots,N$，各相邻轨段和各竖档电阻均为 r，$n=N$ 外不再延伸。电流从 $n=0$ 上节点流入、下节点流出。求两轨电势差分布和端口电阻，并取无限极限。

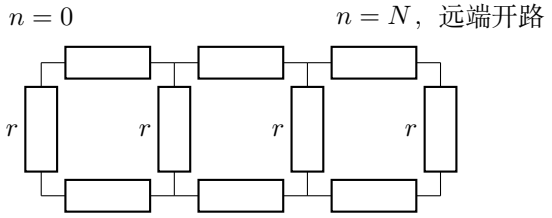


图 4.44: 题设：有限双导轨的端口电阻

解　内部递推与末端方程

在图 4.44 中令第 n 对节点势差为 v_n，上下对称使其相对平均值为 $\pm v_n/2$。先考虑 $N\geq 1$。内部节点方程给 $v_{n+1}-4v_n+v_{n-1}=0$，特征根为 $\lambda=2-\sqrt{3}$ 与 $1/\lambda$。远端上节点只有一个轨段和一个竖档。取离开该节点为正，两个电流分别为 $(v_N-v_{N-1})/(2r)$ 和 v_N/r，所以

$$\frac{v_N-v_{N-1}}{2r}+\frac{v_N}{r}=0,\qquad 3v_N-v_{N-1}=0.$$

这里系数由内部的 4 变为 3，正是末端不再连接下一段导轨的结果。

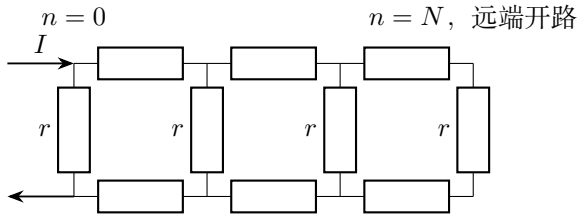


图 4.45: 解答过程：有限双导轨的端口电阻

确定两根的系数比

将通解 $v_n=A\lambda^n+B\lambda^{-n}$ 代入远端条件，分别合并两个系数：

$$A\lambda^{N-1}(3\lambda-1)+B\lambda^{-N}(3-\lambda)=0,$$

$$\frac{B}{A}=\lambda^{2N-1}\frac{1-3\lambda}{3-\lambda}=\lambda^{2N+1}.$$

最后一步用到 $\lambda^2 = 4\lambda - 1$，它给出 $1 - 3\lambda = \lambda^2(3 - \lambda)$。增长项的系数由实际末端方程给出，随截断长度增加而减小。于是

$$v_n = A[\lambda^n + \lambda^{2N+1-n}], \quad I = \frac{v_0}{r} + \frac{v_0 - v_1}{2r}.$$

入口电流

在图 4.45 中，入口电流既可走首竖档也可走上轨。代入 v_0, v_1，先保留电流与 A 的关系：

$$\begin{aligned} I &= \frac{A}{2r}\left[(3 - \lambda) + \lambda^{2N}(3\lambda - 1)\right] \\ &= \frac{A(1 - \lambda)}{2r\lambda}(1 - \lambda^{2N+2}). \end{aligned}$$

第二行分别用了 $3 - \lambda = (1 - \lambda)/\lambda$ 和 $3\lambda - 1 = -\lambda(1 - \lambda)$。因此

$$R_N = \frac{v_0}{I} = \frac{2r\lambda(1 + \lambda^{2N+1})}{(1 - \lambda)(1 - \lambda^{2N+2})}.$$

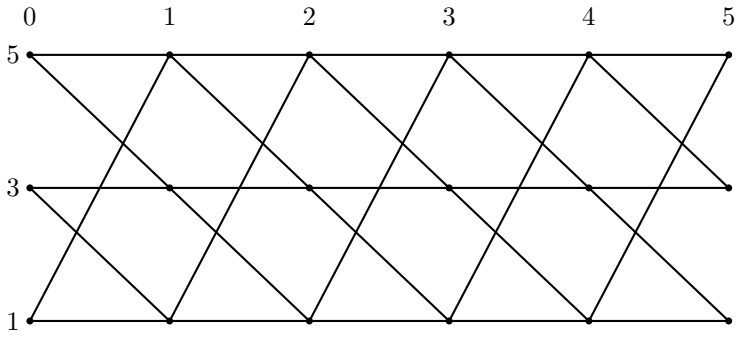
电势分布与无限极限

将入口电流条件代入，得到各列的势差

$$\boxed{v_n = IR_N \frac{\lambda^n + \lambda^{2N+1-n}}{1 + \lambda^{2N+1}}}, \qquad 0 \le n \le N.$$

$N = 0$ 时没有轨段，应直接得到 $R_0 = r$、$v_0 = Ir$。上述最终通式用根关系化简也给出这一结果。$N \to \infty$ 时，$R_\infty = 2r\lambda/(1 - \lambda) = (\sqrt{3} - 1)r$，并且对固定 n 有 $v_n = IR_\infty \lambda^n$。这里的输入端包含首竖档。例题 2 的输入端再向外移两根轨段，故其电阻增加 $2r$。

例 4.18 (五个六电阻环的三端递推)**.** 五个相同六边形环每段电阻 R，节点依次 1 至 6。D_{j+1} 的 $1,3,5$ 分别与 D_j 的 $2,4,6$ 以理想线相连，$j=1,\dots,4$。求在 D_1 和 D_5 的 $1,3$ 间分别测得的电阻。



界面 0 为 D_1 奇数端组，界面 4 为 D_5 奇数端组

每条线电阻 R，只有黑点相接

图 4.46: 题设：五个六电阻环的三端递推

解　等臂星形参数

图 4.46 每环奇数三点为输入、偶数三点为输出。设后续网络从偶数三点看入可等效为等臂星形，臂阻 x。添一个六边形后输入等效星臂为 y。

加载后的节点电势

给三个输入势 $U,0,0$，与高势点邻接的两个偶点可反射互换，电势同为 v，第三偶点为 w，暂记负载星心势为 s。星心没有外部注入，故 $2v+w=3s$。把三个偶点的守恒方程相加：六条环边一共贡献 $[2(2v+w)-2U]/R$，三条星臂贡献 $(2v+w-3s)/x=0$。所以 $2v+w=U$，进而 $s=U/3$。星心的电势由三条星臂的总电流为零确定。两个邻近高势端的偶点为 v，第三个偶点为 w。

对任一高势点旁的偶点列式，

$$\frac{v-U}{R}+\frac{v}{R}+\frac{v-U/3}{x}=0 \quad\Longrightarrow\quad (2x+R)v=U(x+R/3),$$

从而 $v=U(x+R/3)/(2x+R)$。

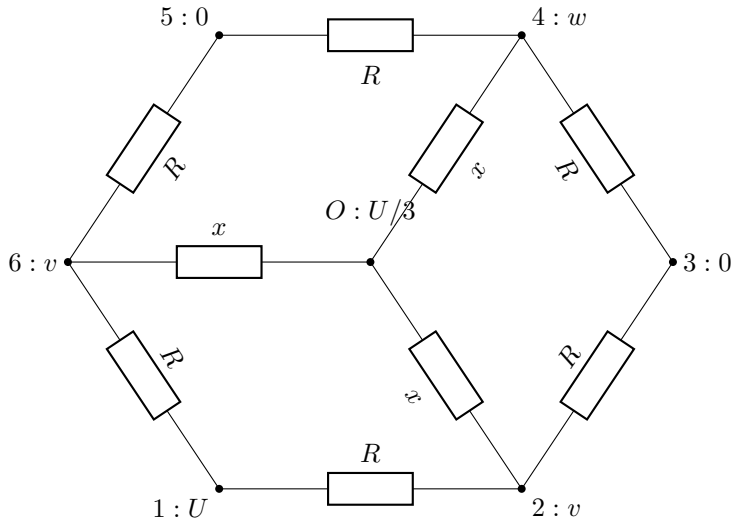


图 4.47: 一个六电阻环的偶数三端接等臂星形。三个奇数输入势取 $U, 0, 0$

求新星臂

图 4.47 输入电流为 $I = 2(U - v)/R = 2U(x + 2R/3)/[R(2x + R)]$。等臂星形对应电流 $2U/(3y)$。两式相等并约去 $2U$，得到 $1/(3y) = (3x + 2R)/[3R(2x + R)]$，所以

$$y = \frac{R(2x + R)}{3x + 2R}.$$

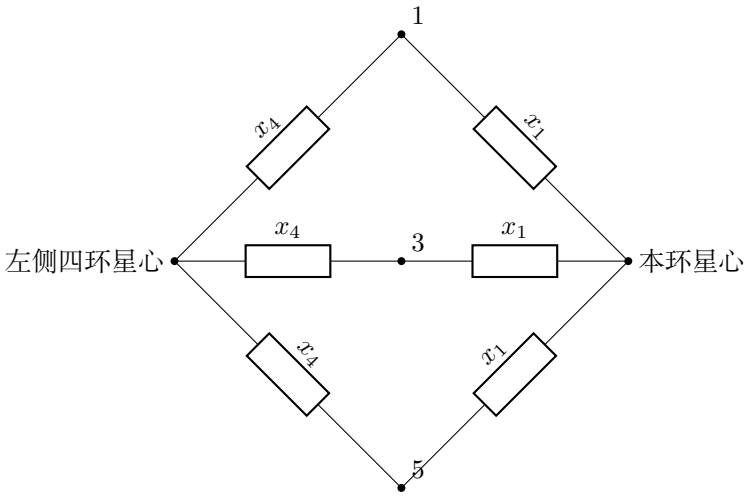
逐环递推

只有一个六边形环、没有后续负载时，令 $x \to \infty$，首臂为 $x_1 = 2R/3$。记无量纲量 $a_j = x_j/R$，递推式为 $a_{j+1} = (2a_j + 1)/(3a_j + 2)$。把每一级的结果代入下一层，

$$a_2 = \frac{2(2/3) + 1}{3(2/3) + 2} = \frac{7/3}{4} = \frac{7}{12},$$
$$a_3 = \frac{2(7/12) + 1}{3(7/12) + 2} = \frac{26/12}{45/12} = \frac{26}{45},$$
$$a_4 = \frac{2(26/45) + 1}{3(26/45) + 2} = \frac{97/45}{168/45} = \frac{97}{168},$$
$$a_5 = \frac{2(97/168) + 1}{3(97/168) + 2} = \frac{362/168}{627/168} = \frac{362}{627}.$$

首端测量

故 D_1 的 $1,3$ 间为两星臂串联，$R_{13}^{(D_1)} = 724R/627$。



两个中心均为三端平均电势，合并后逐臂并联

图 4.48: D_5 的奇数三端同时接向左四环和本环。每组保留全部三端

内部界面测量

图 4.48 的三个共享端点是 D_5 的 $1,3,5$。

D_5 奇数端组三点同时接左侧四环和右侧本环，其等效星臂分别为 x_4 与 x_1。两星心均为三端平均势，等势合并后逐臂并联，故

$$R_{13}^{(D_5)} = 2(x_4 \parallel x_1) = 2R\frac{(97/168)(2/3)}{97/168 + 2/3}$$
$$= 2R\frac{194/504}{209/168} = \frac{388R}{627}.$$

首端只接入右侧五环，内部界面同时接入左右两套三端网络，两个测量值因而不同。

例 4.19 (圆环式自相似网络的固定点)**.** 每层有端点 A, B, M，外三支路各为 $r/3$，另在 M, B 间接串联的 r、下一层同型网络、r。各层不断重复。求最外 A, B 间电阻。

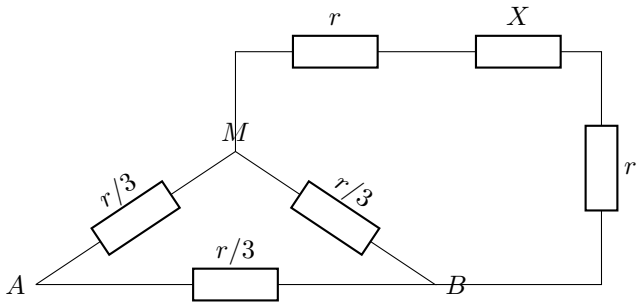


图 4.49: 题设：圆环式自相似网络的固定点

解　逐支路化简

图 4.49 下一层端口电阻仍为 X，它与两根连接电阻组成 $X+2r$，跨接 M, B。所以 M, B 间等效为 $(r/3) \parallel (X+2r)$，再与 A, M 的 $r/3$ 串联，最后与 A, B 直接支路 $r/3$ 并联。

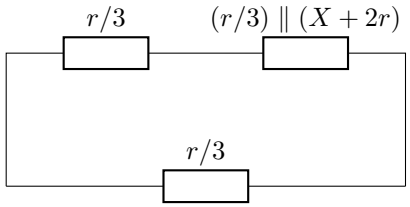


图 4.50: 解答过程：圆环式自相似网络的固定点

写出递推方程

图 4.50 令 $x = X/r$，用并联公式逐步写出

$$x = \left[3 + \frac{1}{1/3 + 1/(3 + 1/(x+2))}\right]^{-1}.$$

解代数方程

内层先化为 $(x+2)/(3x+7)$，再加 $1/3$ 得 $(6x+13)/[3(3x+7)]$。最外并联给 $x = (6x+13)/(27x+60)$，故 $27x^2 + 54x - 13 = 0$。除以 27 并配方，

$$x^2 + 2x = \frac{13}{27}, \qquad (x+1)^2 = \frac{40}{27}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{\frac{40}{27}} = -1 \pm \frac{2\sqrt{30}}{9}.$$

负号根小于零，取正根

$$X=\left(\frac{2\sqrt{30}}{9}-1\right)r\simeq 0.21716r.$$

有限层的收敛

无下一层时可直接从三角形得到初值。具体地，无下一层时 $X_0=2r/9$。递推函数 $f(x)=(6x+13)/(27x+60)$ 满足

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{6(27x+60)-27(6x+13)}{(27x+60)^2}\\&=\frac{162x+360-162x-351}{(27x+60)^2}\\&=\frac{9}{(27x+60)^2}\le\frac{1}{400}\qquad(x\ge 0).\end{aligned}$$

每次迭代的误差至多为上一次的 $1/400$，有限层输入电阻因而迅速趋于此正固定值。外层直接支路 $r/3$ 与绕行通道并联，给出 $X<r/3$。

4.7 本讲小结

梯形网络中，每节电流在横档与后续网络之间分流。逐节化简给出输入电阻的递推。有限截断趋于固定值时，自相似方程就确定相应无限网络的输入电阻。切口所含的首段导轨和横档，决定递推变量的具体含义。

节点电流方程进一步给出电势差分方程。无源区决定衰减根，源节点决定幅度，远端连接决定有限网络中两个特征解的比例。双轨、三轨的激励可分成平均部分与偏差部分，再把两类电势相加恢复实际响应。

晶格的辅助电流利用局部旋转和平移对称计算支路压降。嵌套网络则随几何尺度一同缩放阻值，并保留所有外接端点的响应。导轨衰减、端口分组与星形等效，使无限网络的计算仍落实到电流连续和欧姆定律。

4.8 练习

练习 4.1 (横档阻值改变的双向梯形)**.** 双向无限双导轨每段导轨电阻 r，横档均为 R。求同一横档两端电阻，并讨论 $R \to 0$ 和 $R \to \infty$。

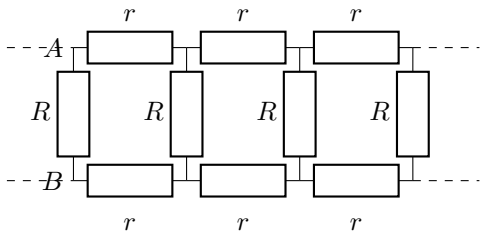


图 4.51: 题设：横档阻值改变的双向梯形

练习 4.2 (无限方格去掉直接边)**.** 无限方格每边为 r，相邻端点 A, B 间的直接电阻断开，其余网络不变。求新的端口电阻。

每边 r，向四周无限延伸

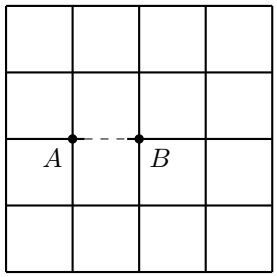


图 4.52: 题设：无限方格去掉直接边

练习 4.3 (无限蜂窝的一条边改变)**.** 无限蜂窝每边原为 r，仅相邻端口 A, B 的直接边改为 R。求等效电阻。

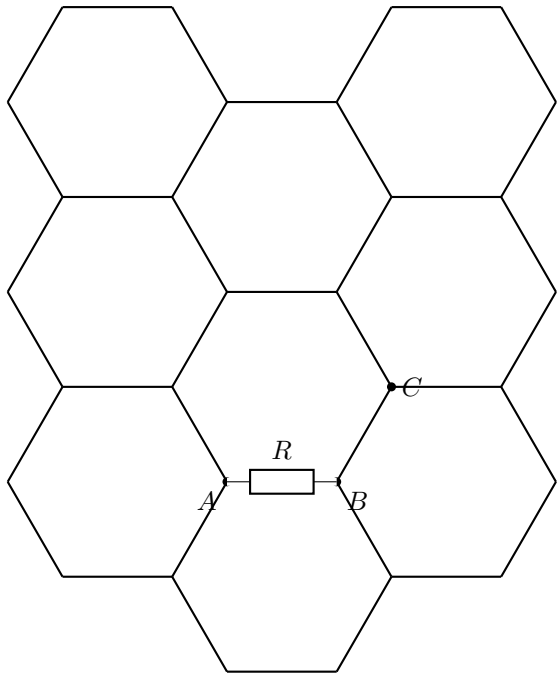


图 4.53: 题设：无限蜂窝的一条边改变

练习 4.4 (有限梯形的两种末端接法)**.** 每节先串联 r、再接横档 r 的单导轨梯形，只保留两节。分别令最末横档之后开路及接理想短路，求输入电阻。讨论是否可以直接使用无限固定点。

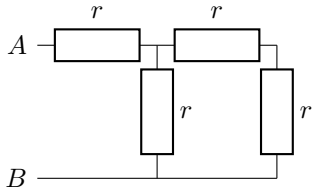


图 4.54: 题设：有限梯形的两种末端接法

练习 4.5 (单导轨的电阻与端口间距)**.** 双向单导轨网络每电阻 r、下导线理想。两上轨节点相距两段。求电阻，并说明相距越来越远时电阻为何趋有限值。

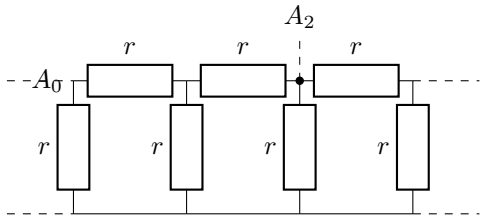


图 4.55: 题设：单导轨的电阻与端口间距

练习 4.6 (双导轨相邻异轨端口)**.** 双向无限双导轨每边为 r。A 在零列上轨，D 在第一列下轨。求电阻，并推广到相隔 n 列的异轨端口。

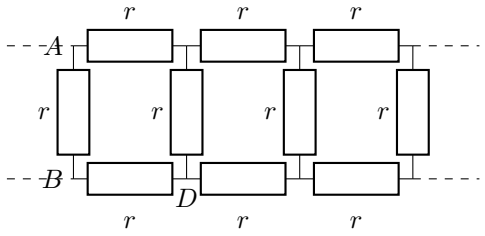


图 4.56: 题设：双导轨相邻异轨端口

练习解答

练习 4.1

解　无源区的衰减根

图 4.51 中无源上节点电势为差电势的一半，故

$$\frac{V_n - V_{n-1}}{2r} + \frac{V_n - V_{n+1}}{2r} + \frac{V_n}{R} = 0.$$

乘以 $2r$ 后，将 $V_n = C\lambda^n$ 代入，得到 $\lambda^2 - (2 + 2r/R)\lambda + 1 = 0$。二次公式的两根为 $1 + r/R \pm \sqrt{(1 + r/R)^2 - 1}$，其中正号根大于 1，不满足远处电势趋零。所以保留 $\lambda = 1 + r/R - \sqrt{r^2/R^2 + 2r/R}$。

源点电流

取 $V_n = V_0\lambda^{|n|}$，源节点守恒为 $I = V_0/R + V_0(1-\lambda)/r$。

每侧输入 X 含两条导轨

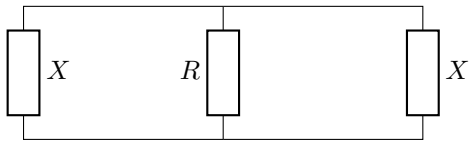


图 4.57: 解答过程：横档阻值改变的双向梯形

图 4.57 把零列画成中央横档与左右两个尾部并联。沿零列的电流方程，令 $a = r/R$ 并代入衰减根，有

$$\frac{I}{V_0} = \frac{1}{R} + \frac{\sqrt{a^2+2a}-a}{r} = \frac{\sqrt{a^2+2a}}{r}.$$

横档阻值的两种极限

图 4.57 的中央横档与左右尾部形成等效，代入根式简化得

$$R_{入} = \frac{V_0}{I} = \frac{rR}{\sqrt{r^2+2rR}}.$$

两个极限分别提出根号中的 r^2 和 $2rR$，写成

$$R_{入} = R\left(1+\frac{2R}{r}\right)^{-1/2} \sim R \qquad (R\to 0),$$

$$R_{入} = \sqrt{\frac{rR}{2}}\left(1+\frac{r}{2R}\right)^{-1/2} \sim \sqrt{\frac{rR}{2}} \qquad (R\to\infty).$$

第一种情形中中央横档近似短路。第二种情形中结果趋于无穷大，两轨间的导电通道逐渐减弱。$R = r$ 回到 $r/\sqrt{3}$。

练习 4.2

解　直接边与绕行网络

先把图 4.52 的断口补回，完整方格网络的端口电阻为 $r/2$。把直接边 r 和其余绕行网络 X 分开，它们跨接同一端口，故 $r/2 = r \parallel X$。

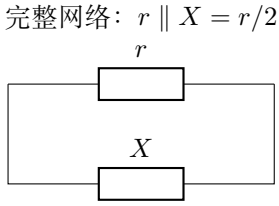


图 4.58: 解答过程：无限方格去掉直接边

相减电导

图 4.58 的电导关系为 $2/r = 1/r + 1/X$，得到 $X = r$。

断边后的电流

固定 $U_{AB} = U$，完整网络的直接边和绕行部分各通过 U/r。断开直接边后只剩绕行电流 U/r，端口电阻便从 $r/2$ 增至 r。

练习 4.3

解　求绕行网络电阻

图 4.53 的完整蜂窝相邻电阻为 $2r/3$。记绕行部分为 X，由 $2r/3 = r \parallel X$，得 $1/X = 3/(2r) - 1/r = 1/(2r)$，所以 $X = 2r$。

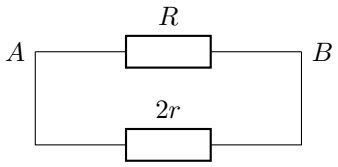


图 4.59: 解答过程：无限蜂窝的一条边改变

接回新电阻

图 4.59 接回新直接边 R 后，总电阻为 $R \parallel 2r = 2rR/(R + 2r)$。

改变直接边

$R = r$ 时恢复原蜂窝的 $2r/3$。$R \to 0$ 时端口短接，电阻趋零。$R \to \infty$ 时只剩绕行网络，电阻趋于 $2r$。改变一条直接边，仅改变与端口并联的一项电导。

练习 4.4

解　末端开路

图 4.54 保留两节。按图 4.60 左图，末端开路时，末节输入为 $r+r=2r$，首节输入 $r+(r\parallel 2r)=5r/3$。

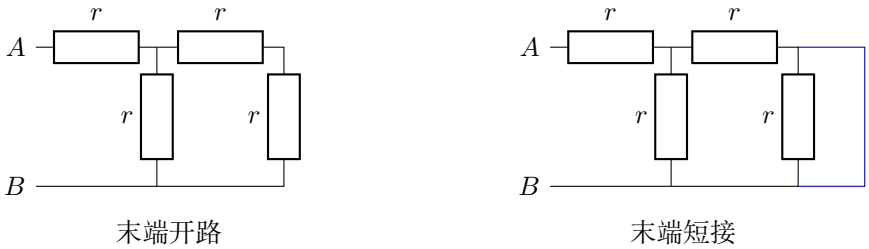


图 4.60: 左图末端开路，末节的两只电阻串联。右图把末端上下短接，末横档被旁路

末端短接

按右图在末横档处接一条理想导线，末横档被旁路，末节输入只剩 r，首节为 $r+(r\parallel r)=3r/2$。

两节与无限节

开路的 $5r/3$ 大于无限值 $(1+\sqrt{5})r/2$，短路的 $3r/2$ 小于它。两节电路仍受到末端连接的明显影响。随着节数增加，两种递推的差按收缩比例减小，才趋于共同的固定值。

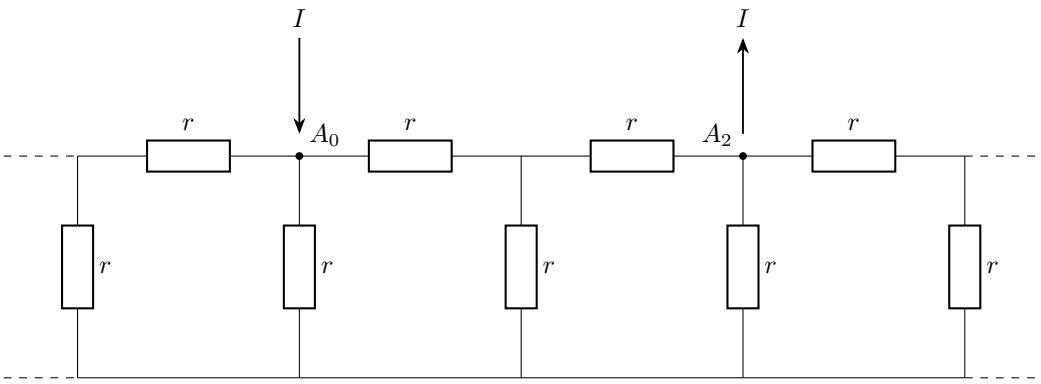
练习 4.5

解　单源响应相减

图 4.55 中，先从零号上节点注入 I、由公共下导线流出。由例 4.5 的三支路守恒与源点归一化，单源电势为 $Ir\lambda^{|k|}/\sqrt{5}$，其中 $\lambda=(3-\sqrt{5})/2$。再叠加位于第 n 点的负源，

$$V_k=\frac{Ir}{\sqrt{5}}\big(\lambda^{|k|}-\lambda^{|k-n|}\big).$$

代入两个端点，$V_0=Ir(1-\lambda^n)/\sqrt{5}$，$V_n=-V_0$。两端压差除以 I 得 $R_n=2r(1-\lambda^n)/\sqrt{5}$。



下导线理想，最终无外部净注入

图 4.61: 两上轨端口相隔两段。电流经横档与公共下导线回流，各支路共同决定端口电势差

代入两段距离

图 4.61 的 $n=2$ 时，$\lambda^2=(7-3\sqrt{5})/2$，所以

$$R_2=\frac{2r}{\sqrt{5}}\left(1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)=(3-\sqrt{5})r.$$

与相邻端口比较

它大于相邻电阻 $(1-1/\sqrt{5})r$，小于饱和值 $2r/\sqrt{5}$。

公共导线的回流

相距较远时，源点附近的横档把电流送到公共理想导线，汇点附近的横档再把电流送回上轨。两端之间远处上轨的电势影响按 λ^n 衰减，因而长距离极限为 $2r/\sqrt{5}$。

练习 4.6

解　平均与反向注入

图 4.56 的实际注入可以像图 4.32 那样分为：零列上下各注入 $I/2$、n 列上下各流出 $I/2$ 的同向部分。以及零列和第 n 列均为上轨注入、下轨流出 $I/2$ 的反向部分。平均纵向压降仍为 $nIr/2$。

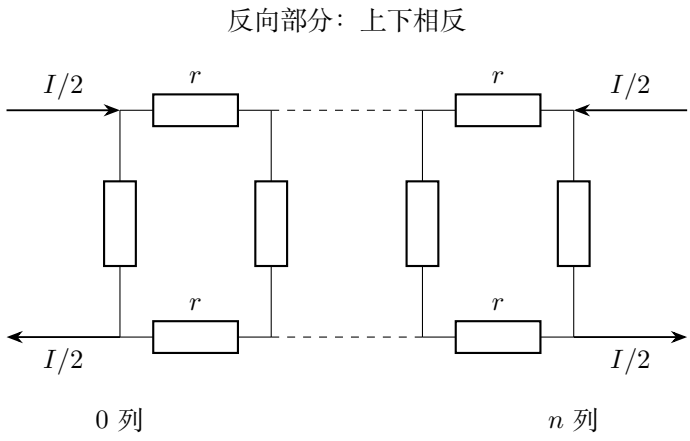


图 4.62: 反向部分的两个同号横档源。上下电流相反，中间若干单元省略

偏差电势相加

图 4.62 的两个反向源均为 $I/2$。利用例 4.4 的单个横档源响应，差电势为 $v_k = Ir[\lambda^{|k|} + \lambda^{|k-n|}]/(2\sqrt{3})$，其中 $\lambda = 2 - \sqrt{3}$。零列上端的偏差是 $v_0/2 = Ir(1 + \lambda^n)/(4\sqrt{3})$。第 n 列下端则为 $-v_n/2 = -Ir(1 + \lambda^n)/(4\sqrt{3})$。两者相减，得到偏差压降 $Ir(1 + \lambda^n)/(2\sqrt{3})$。再加平均压降并除以 I，故

$$R_n^{\text{异轨}} = \frac{nr}{2} + \frac{r}{2\sqrt{3}}(1 + \lambda^n).$$

相邻与同列端口

$n = 1$ 得 $R = r/2 + r(3 - \sqrt{3})/(2\sqrt{3}) = \sqrt{3}r/2$。$n = 0$ 得 $r/\sqrt{3}$，恢复同一横档端口。

汇点位置与符号

同轨汇点的反向注入贡献与源点相反，因而出现 $1 - \lambda^n$。换到下轨后，反向注入同号，上端和下端的电势偏差相减，得到 $1 + \lambda^n$。两个式子的符号直接来自图中的注入方向。

电路

物理竞赛一轮讲义

第五讲

电路暂态与电磁振荡

2026

目录

第五讲　电路暂态与电磁振荡 **1**

5.1　开关接通以后：电荷、电流与场能 1

5.2　一阶 RC 过程 4

5.3　一阶 RL 过程 7

5.4　LC 振荡与两个初值 9

5.5　两个电容之间的电荷交换 11

5.6　例题与分析 13

5.7　本讲小结 33

5.8　练习 34

练习解答 36

第五讲　电路暂态与电磁振荡

5.1　开关接通以后：电荷、电流与场能

5.1.1　电容和电感保存的状态

接通电源后，电阻支路中的电流很快建立，电容上的电荷和线圈中的电流却要经历一段变化过程。电容逐渐积累电场能，线圈逐渐建立磁场能。电源输入的能量，一部分转为焦耳热，一部分留在场中。这段由初态过渡到新状态的过程称为暂态过程。

电容的状态可用一块极板的代数电荷 q 表示，电压为 $u_C = q/C$。图 5.1 把电流取为流入标记 q 的极板，电流在时间 $\mathrm{d}t$ 内送入电荷 $\mathrm{d}q$，因此 $i = \mathrm{d}q/\,\mathrm{d}t$。电荷增加时 $i > 0$，电荷减少时 $i < 0$，一个带符号的式子就描述了充电与放电。

线圈中的电流激发磁场，磁链为 $\Psi = Li$。电流变化引起自感电动势 $\mathcal{E}_L = -L\dot{i}$，其方向阻碍原电流的变化。若把端电压取为电流流入端相对流出端的电势差，便有 $u_L = L\dot{i}$。电感吸收的瞬时功率为 $p_L = u_L i = Li\dot{i}$。当电流大小增大时，$i\dot{i} > 0$，磁场能增加。电流大小减小时，$i\dot{i} < 0$，电感向外释放磁场能。

以无场状态为能量零点，图中的关联正向给出 $\mathrm{d}W_C = u_C\ \mathrm{d}q$、$\mathrm{d}W_L = u_L i\ \mathrm{d}t = Li\ \mathrm{d}i$，故

$$W_C = \int_0^q \frac{z}{C}\ \mathrm{d}z = \left[\frac{z^2}{2C}\right]_0^q = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}Cu_C^2,$$

$$W_L = \int_0^i Lz\ \mathrm{d}z = \left[\frac{1}{2}Lz^2\right]_0^i = \frac{1}{2}Li^2.$$

这里 C, L 为常量，两个积分直接给出相应场能。q 或 i 的符号决定极性、方向，平方决定能量大小。下面把这些状态量与回路电压方程结合，便能求出它们怎样随时间变化。

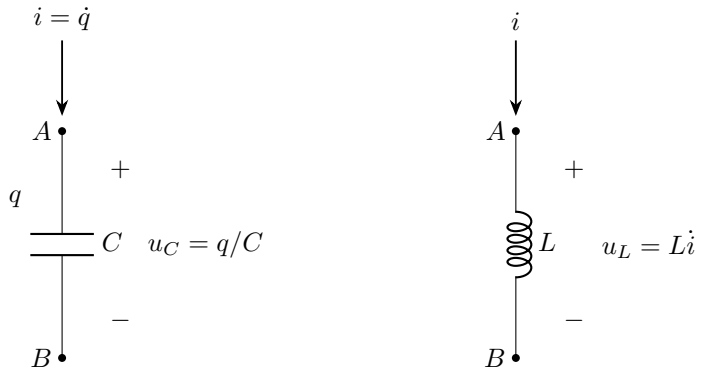


图 5.1: 电容和电感都以电流流入的一端为电压正参考端

图 5.1 的电压均定义为 V_A-V_B。左图正向电流增加上极板的代数电荷。右图正向电流若正在减小，则 $\dot{i}<0$、$u_L<0$，实际是 B 的电势较高。这样可以统一写功率 $p_C=u_Ci=\dot{W}_C$、$p_L=u_Li=\dot{W}_L$，正值表示场能增加，负值表示储能元件向外供能。

5.1.2 开关前的状态怎样进入新回路

若电流没有冲激，短时间内电容电荷变化 $\Delta q=\int i\,\mathrm{d}t$ 趋零，所以电容电压连续。若电感端电压没有冲激，磁链变化 $\Delta(Li)=\int u_L\,\mathrm{d}t$ 趋零，恒定 L 时电流连续。因此一般电阻开关电路满足 $u_C(0^+)=u_C(0^-)$、$i_L(0^+)=i_L(0^-)$。

图 5.2 中的电容先在接点 1 放电至零。开关拨到接点 2 时，仍有 $u_C(0^+)=0$，电阻承担全部电源电压，电流立即为 $\mathcal{E}/R$。零初电流的电感接入同样电源时，$i_L(0^+)=0$，电阻压降为零，电源电压先加在电感上。相同的电源和电阻，在两类储能元件中引起不同的初始变化。

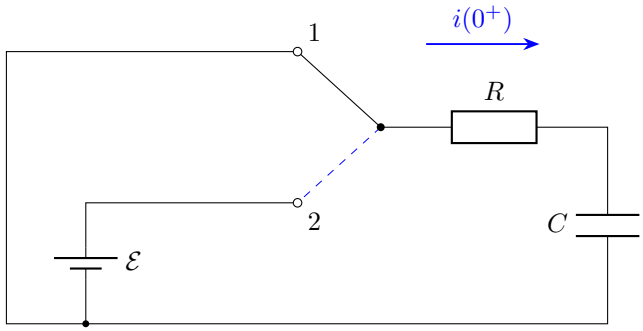


图 5.2: 接点 1 将未带电电容接在闭合的放电回路中。拨到接点 2 后，电源经同一个 R 给电容充电

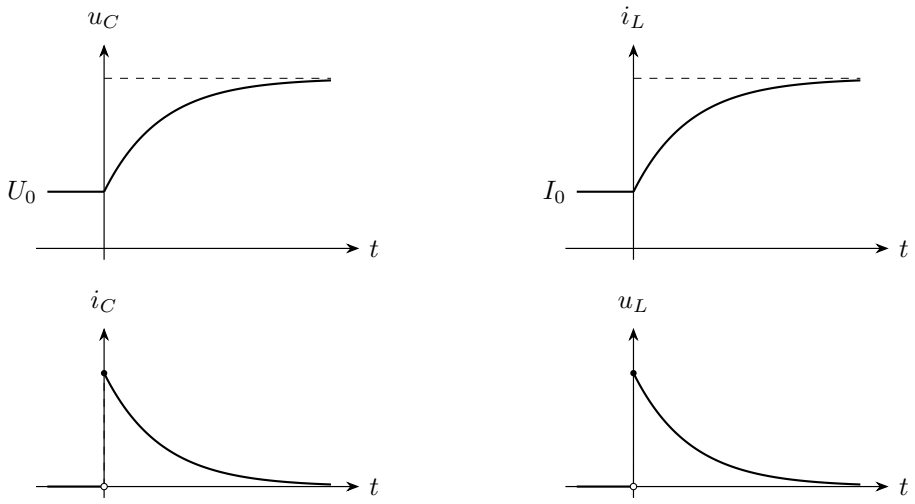


图 5.3: 有限开关过程中的示意曲线：储能状态连续，相关支路量可以有限跳变

图 5.3 把切换时刻放在 $t = 0$。上排分别画出连续的电容电压、电感电流。下排画出由新电路立即决定的电阻电流和电感电压。求具体题目时，先从旧回路求储能状态，再把它作为新回路的初值。

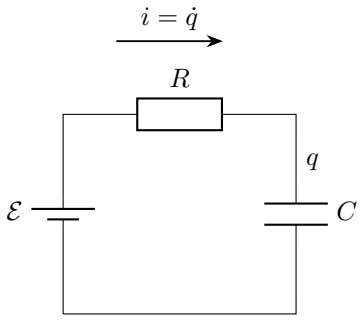


图 5.4: 充电电流流入参考电荷极板

例题 1—7 研究电容在不同电源和电阻连接下的过渡，例题 8—10 研究电感的建立与衰减。每次切换后，沿图中实际闭合路径列回路方程，旧状态提供初值，新连接决定终值和变化快慢。

例 5.1 接通时电容已经带电。图上的初始电压进入微分方程的初值，电源电压决定长时间后的终值；初始电流的方向由两电压之差给出。

5.2　一阶 RC 过程

5.2.1　从回路方程到完整响应

图 5.4 中沿电流参考方向，电源提供 $\mathcal{E}$，电阻降 Ri，电容降 q/C，所以

$$R\dot{q}+\frac{q}{C}=\mathcal{E}.$$

常数外加电源对应终态 $q_\infty=C\mathcal{E}$。令偏差 $u=q-q_\infty$，常数项抵消，得到 $\dot{u}=-u/(RC)$。对非零初始偏差分离变量，

$$\begin{aligned}\int_{q_0-q_\infty}^{u(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}&=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC},\\ [\ln|z|]_{q_0-q_\infty}^{u(t)}&=-\frac{1}{RC}[s]_0^t,\\ \ln\left|\frac{u(t)}{q_0-q_\infty}\right|&=-\frac{t}{RC}.\end{aligned}$$

偏差保持原符号，所以 $u=(q_0-q_\infty)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。初始偏差为零时直接取 $u=0$，不作除法。加回稳态电荷，再用链式法则 $\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t/\tau}/\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t/\tau}/\tau$ 求电流，

$$q(t)=q_\infty+(q_0-q_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau},\quad i(t)=\frac{q_\infty-q_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/\tau},\quad \tau=RC.$$

上式把不同初态统一在同一指数过程中。初电荷低于 $C\mathcal{E}$ 时，电流为正，电荷增加。高于 $C\mathcal{E}$ 时，电流为负，电容向电源回送电荷。例题 1、4 分别画出这两种情形，练习 2 则把终态改为反向电压。

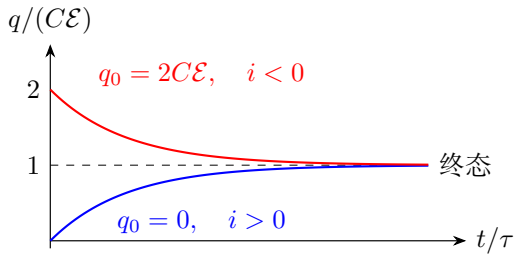


图 5.5: 以 $\mathcal{E}>0$ 为例：初电荷在终值两侧时分别上升、下降，二者均向同一终态趋近

图 5.5 的纵向偏差分别是 $-\mathrm{e}^{-t/\tau}$、$+\mathrm{e}^{-t/\tau}$，其绝对值按同一时间常数衰减。图的横坐标是 t/τ。记 $x=t/\tau$，则 $t=\tau x$。保持 $C,\mathcal{E},\tau$ 不变，按链式法则求斜率，

$$\frac{\mathrm{d}[q/(C\mathcal{E})]}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{C\mathcal{E}}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\tau i}{C\mathcal{E}}=\frac{Ri}{\mathcal{E}}.$$

红线下降，斜率为负，实际电流从电容流回电源。

在 $t=\tau$ 时，偏离终态的量变为初始偏差的 1/e。再经过一个 τ，剩余偏差又乘 1/e。因此同样长的时间对应相同的衰减倍数。对初始未带电的电容，达到终值的比例 f 时有 $q/(C\mathcal{E})=f$，即 $1-f=\mathrm{e}^{-t/\tau}$。两边取自然对数，得 $t=-\tau\ln(1-f)$。例题 3 具体计算 90% 与 99% 对应的时刻。

5.2.2 通过复杂电阻网络的充放电

若一个电容接在线性有源电阻网络端口，先把电容取出，求开路电压 U_{th} 和看入电阻 R_{th}，再接回。电容电压满足

$$R_{\mathrm{th}}C\dot{u}_C+u_C=U_{\mathrm{th}},$$

故终态为 U_{th}，时间常数为 $R_{\mathrm{th}}C$。求 R_{th} 时，将独立电压源置零为短路、独立电流源置零为开路，再从电容的两个接点看入电阻网络。这个端口等效与《电路》第二讲的稳恒方法相接，使多支路电路也能化为同一充放电方程。

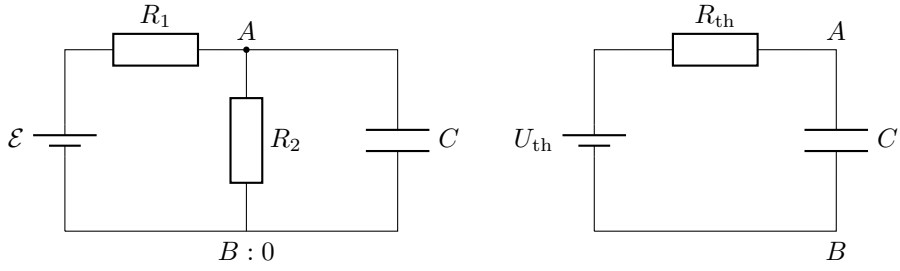


图 5.6: 电容端口的具体分压网络与等效回路。电容始终属于外接储能元件

图 5.6 左侧在 A 列守恒，有

$$C\dot{u}_C+\frac{u_C-\mathcal{E}}{R_1}+\frac{u_C}{R_2}=0.$$

把电阻项合并，正得到 $R_{\mathrm{th}}C\dot{u}_C+u_C=U_{\mathrm{th}}$，其中 $R_{\mathrm{th}}=R_1\parallel R_2$、$U_{\mathrm{th}}=\mathcal{E}R_2/(R_1+R_2)$。初态电容约束上节点电压，终态电容支路无直流电流，故左侧两种时刻的分流关系不同。

当驱动电压随时间变化，一阶方程仍可用积分因子。先除以 R，再乘积分因子 $\mathrm{e}^{t/(RC)}$。由乘积法则，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(q\mathrm{e}^{t/\tau}\right)=\mathrm{e}^{t/\tau}\left(\dot{q}+\frac{q}{\tau}\right)=\frac{\mathcal{E}(t)}{R}\mathrm{e}^{t/\tau}.$$

从 0 到 t 积分，$q(t)\mathrm{e}^{t/\tau}-q_0=R^{-1}\int_0^t\mathcal{E}(s)\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s$，再乘 $\mathrm{e}^{-t/\tau}$，得到

$$q(t)=q_0\mathrm{e}^{-t/\tau}+\frac{1}{R}\int_0^t\mathrm{e}^{-(t-s)/\tau}\mathcal{E}(s)\,\mathrm{d}s.$$

该积分把每一小段外部驱动对以后状态的影响按指数衰减累加。常电源时可回到上一式，线性斜坡驱动则多出随时间变化的特解。

5.2.3　RC 过程中的能量与焦耳热

电容从初始电压 U_0 经电阻接到恒定电源 $\mathcal{E}$，终态电压为 $\mathcal{E}$。电源做功为电动势乘通过电源的净电荷：

$$W_{\text{源}} = \mathcal{E} C(\mathcal{E} - U_0).$$

电容储能增加 $\Delta W_C = C(\mathcal{E}^2 - U_0^2)/2$，所以电阻热为

$$Q_R = W_{\text{源}} - \Delta W_C = \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U_0)^2.$$

也可沿电流过程直接求热量。由 $i = (\mathcal{E} - U_0)\mathrm{e}^{-t/(RC)}/R$，先积到有限时刻 T：

$$\begin{aligned} Q_R(T) &= \frac{(\mathcal{E} - U_0)^2}{R} \int_0^T \mathrm{e}^{-2t/(RC)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(\mathcal{E} - U_0)^2}{R} \left[-\frac{RC}{2} \mathrm{e}^{-2t/(RC)} \right]_0^T \\ &= \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U_0)^2 (1 - \mathrm{e}^{-2T/(RC)}). \end{aligned}$$

令 $T \to \infty$，指数项趋零，得到同一总热量。R 越大，电流越小、持续时间越长。在给定初、终电压的这个电阻模型中，两者合起来给出相同的总热。

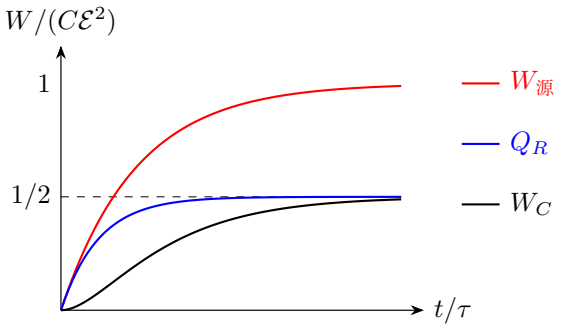


图 5.7: 从零充电时的累计能量。三条曲线分别表示电源功、电容储能和电阻热

图 5.7 取 $U_0 = 0$，用 $x = t/\tau$ 表示时间时，

$$\frac{W_{\text{源}}}{C\mathcal{E}^2} = 1 - \mathrm{e}^{-x}, \quad \frac{W_C}{C\mathcal{E}^2} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-x})^2, \quad \frac{Q_R}{C\mathcal{E}^2} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2x}).$$

任一时刻红线的纵坐标等于另外两线之和。早期电容电压小，电源输入能量中转为热的比例较大。充电完成后的两项各占电源总功的一半。练习 1 将求电荷达到终值一半时三种能量各为多少。

5.3 一阶 RL 过程

5.3.1 电流向稳态的过渡

恒电源、电阻与电感串联时，

$$L\dot{i} + Ri = \mathcal{E}.$$

稳态 $i_\infty = \mathcal{E}/R$，令 $v = i - i_\infty$ 得 $\dot{v} = -(R/L)v$。当 $v(0) \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}
\int_{i_0-i_\infty}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\frac{R}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \\
[\ln|z|]_{i_0-i_\infty}^{v(t)} &= -\frac{R}{L}[s]_0^t, \\
\ln\left|\frac{v(t)}{i_0-i_\infty}\right| &= -\frac{Rt}{L}.
\end{aligned}$$

指数化时保留初始偏差的符号。$v(0) = 0$ 则从开始就是稳态。因此

$$i(t) = i_\infty + (i_0 - i_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau_L}, \qquad \tau_L = \frac{L}{R}.$$

对时间求导，常数稳态项的导数为零，指数项给出

$$L\dot{i} = L(i_0 - i_\infty)\left(-\frac{1}{\tau_L}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau_L} = R(i_\infty - i_0)\mathrm{e}^{-t/\tau_L}.$$

接通初态 $i_0 = 0$ 时，电感先承担全部电源电压。随后 u_L 下降、电阻压降上升。长时间后 $\dot{i} \to 0$，电感电压趋零，电流达到 $\mathcal{E}/R$。

电源切除后若电感与电阻仍构成闭合放电通路，$i = i_0\mathrm{e}^{-Rt/L}$，初始磁场能 $Li_0^2/2$ 最终全部转为电阻热。不同电阻串、并联改变看入电阻，就改变 τ_L。对复杂网络同样可先取电感为负载，求 $U_{\mathrm{th}}, R_{\mathrm{th}}$，再解 $L\dot{i} + R_{\mathrm{th}}i = U_{\mathrm{th}}$。

5.3.2 电流连续与支路重分配

开关切换时，电感电流作为初始条件继承下来，电阻支路电流则立刻按新节点电势分配。求 0^+ 时可把电感暂以已知电流源表示。求 ∞ 时若达到直流稳态，可把理想电感短接。电容在相同两个时刻则分别用继承的电压约束和直流断路处理。

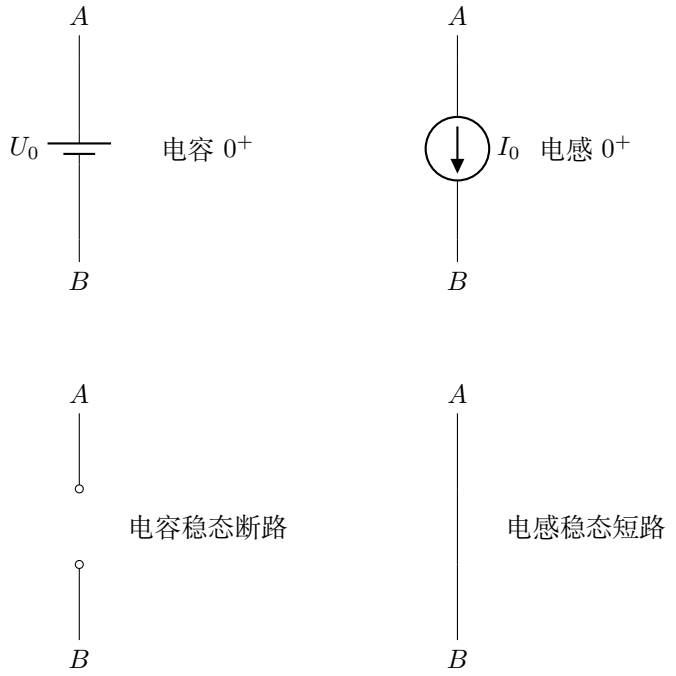


图 5.8: 上排为切换初态的电压和电流约束，下排为直流终态的支路形式

图 5.8 的电容初态用已知 $V_A - V_B = U_0$ 约束外电路，其瞬时电流由新网络求出。电感初态则用已知 $A \to B$ 电流 I_0 约束外电路，其瞬时电压仍可改变。直流终态对应导数为零，才分别得到断路、短路。

图 5.9 中，参考电流从正极经过 R 流向 L。初始时磁场能为零，电流增加使线圈储能。电流趋近稳值后，磁场能变化越来越慢，电源输入最终全转为电阻的焦耳热。例题 8 求出电感电压的下降曲线，例题 9 则研究已有磁场能经电阻释放的过程。

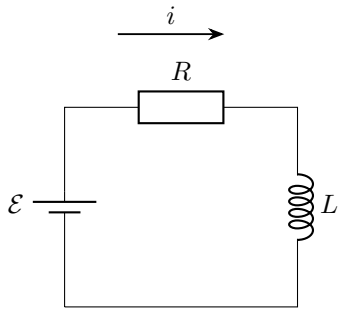


图 5.9: 电感从零电流接通恒电源

5.4 LC 振荡与两个初值

5.4.1 二阶方程的相位由初态确定

图 5.10 的闭合 LC 回路中，取电流沿上导线向右、流入标记 q 的电容极板，使 $i=\dot{q}$。回路方程为 $L\dot{i}+q/C=0$，所以

$$\ddot{q}+\omega_0^2 q=0,\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，则 $\dot{q}=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot{q}=s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得到特征方程 $s^2+\omega_0^2=0$。共轭根 $\pm\mathrm{j}\omega_0$ 给出实通解 $q=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$，求导为 $i=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t$。二阶方程需要两个初值：$q(0)=q_0$ 给出 $A=q_0$，$i(0)=i_0$ 给出 $B=i_0/\omega_0$，则

$$q(t)=q_0\cos\omega_0 t+\frac{i_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,$$

$$i(t)=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t+i_0\cos\omega_0 t.$$

当 $i_0=0$ 时，正弦项的系数为零，电荷从一个极值开始变化。当 $i_0\neq 0$ 时，初始点已带有磁场能，两项共同决定振荡相位。在非零振幅的振荡中，电荷过零时电流大小达到最大值。电流过零时电荷达到正或负的极值。相邻的两个这类时刻相隔四分之一周期。

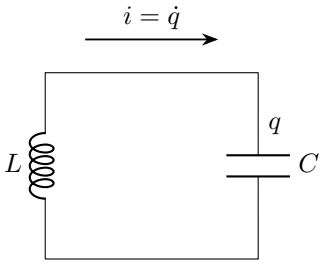


图 5.10: 电荷与电流的关联参考方向

5.4.2 电能与磁能的相互转换

对 $W=q^2/(2C)+Li^2/2$ 求导，

$$\dot{W}=\frac{q}{C}\dot{q}+Li\dot{i}=i\left(\frac{q}{C}+L\dot{i}\right)=0.$$

因此总能量守恒。初始总能量给出 $Q_{\max}=\sqrt{q_0^2+LCi_0^2}$，$I_{\max}=\sqrt{i_0^2+q_0^2/(LC)}$。例如 $i_0=0, q_0>0$，电荷从正最大值出发，先减小，电流为负。四分之一周期后 $q=0$，电流达到负最大值。随后磁场能继续推动电荷转移，电容反向充电。例题 11 和练习 4 分别从一般初值与零初电流出发求这个过程。

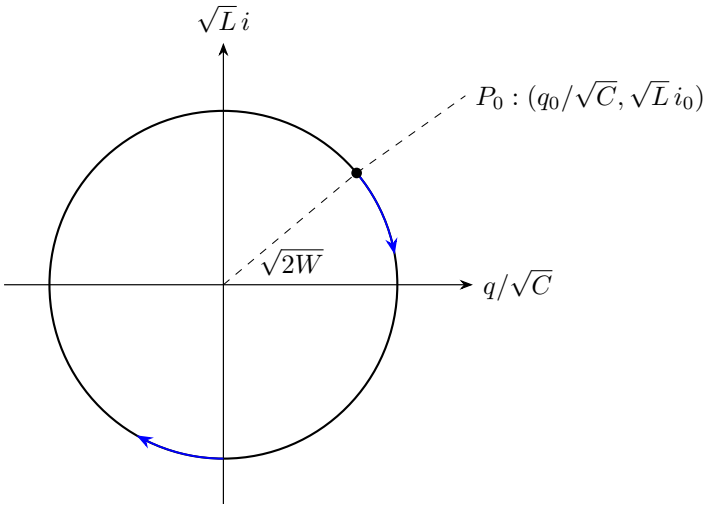


图 5.11: 归一化场能平面中的 LC 轨道。横纵坐标平方和等于两倍总能量

图 5.11 中，若记横、纵坐标为 X,Y，方程给出 $\dot X=\omega_0 Y,\dot Y=-\omega_0 X$，所以沿圆顺时针运动。由右端电荷最大点出发，最初向下，表示 $i<0$、电荷从原正极板流出。半径由总能量决定，初始点所在象限则由 q_0,i_0 的符号共同确定。

真实电路有电阻，振幅会下降。若在 LC 中串入 R，方程变为 $L\ddot q+R\dot q+q/C=0$，总能量满足 $\dot W=-Ri^2$。电流较大时耗散功率较大，电流为零时瞬时耗散也为零。弱阻尼下按周期平均，总能量具有指数衰减的包络。

5.4.3　阻尼的三种参数区间

设特征解为 $q=\mathrm{e}^{st}$，依次求导为 $\dot q=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot q=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并约去非零指数，特征方程为 $Ls^2+Rs+1/C=0$。令 $\gamma=R/(2L)$，除以 L 后配方，

$$s^2+2\gamma s+\omega_0^2=0,\qquad (s+\gamma)^2=\gamma^2-\omega_0^2.$$

因此 $s=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$。当 $R<2\sqrt{L/C}$，根有虚部，电荷为衰减振荡，角频率 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$。等号对应临界阻尼。此时令 $q=y\mathrm{e}^{-\gamma t}$，依次求导为 $\dot q=(\dot y-\gamma y)\mathrm{e}^{-\gamma t}$、$\ddot q=(\ddot y-2\gamma\dot y+\gamma^2 y)\mathrm{e}^{-\gamma t}$。代入方程后只余 $\ddot y=0$。令 $A=y(0)$、$B=\dot y(0)$，连续积分两次：

$$\dot y(t)-B=\int_0^t 0\,\mathrm{d}s=0,\qquad y(t)-A=\int_0^t B\,\mathrm{d}s=B[s]_0^t=Bt.$$

所以 $y=A+Bt$，解为 $(A+Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$。当 $R>2\sqrt{L/C}$ 时，两个根 s_+,s_- 都是负实数，且互不相同。解由两项衰减指数相加。对它逐项求导，

$$q=A\mathrm{e}^{s_+t}+B\mathrm{e}^{s_-t},\qquad i=As_+\mathrm{e}^{s_+t}+Bs_-\mathrm{e}^{s_-t}.$$

代入 $t=0$ 得 $A+B=q_0$、$s_+A+s_-B=i_0$。第二式减去第一式的 s_- 倍，得到

$$A=\frac{i_0-s_-q_0}{s_+-s_-},\qquad B=q_0-A=\frac{s_+q_0-i_0}{s_+-s_-}.$$

图 5.12 的红线对应 $i_0=0$、$q_0>0$。此时

$$i(t)=\frac{q_0 s_+ s_-}{s_+-s_-}\left(\mathrm{e}^{s_-t}-\mathrm{e}^{s_+t}\right)<0\quad(t>0).$$

由于两个指数都趋于零，红线从 q_0 单调趋零。

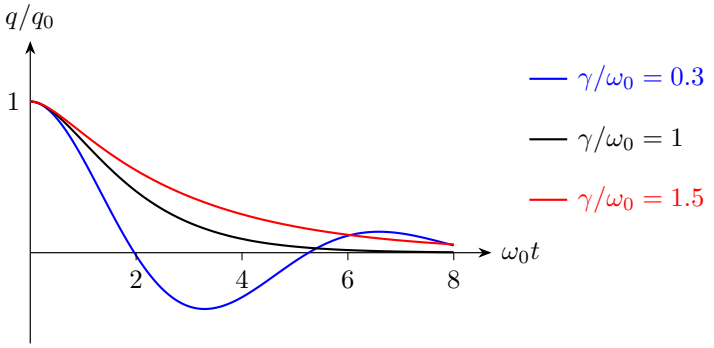


图 5.12: 相同 $q(0)=q_0>0, i(0)=0$ 下的三类响应。横轴采用 $\omega_0 t$

图 5.12 采用相同的 $q_0>0, i_0=0$。欠阻尼曲线在衰减中往复变号。临界与过阻尼曲线在这一初态下逐渐下降到零。临界阻尼的完整响应将在练习 5 中由重根解和两个初值求出。

欠阻尼的两个共轭根给出 $q=\mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$。初电荷决定 A，初电流还包含指数包络的导数，因此同时决定 B。例题 13 保留乘积求导的每一项，由 $\dot q(0)=0$ 求出正弦项系数。

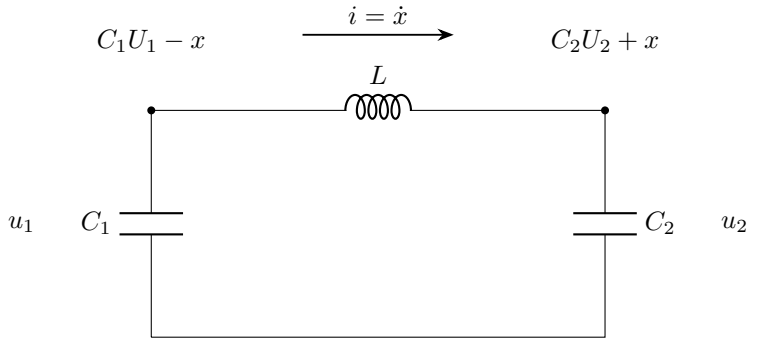
5.5 两个电容之间的电荷交换

5.5.1 平衡坐标与振荡坐标

串联 RLC 自由过程的方程 $L\ddot q+R\dot q+q/C=0$ 与阻尼弹簧振子 $m\ddot x+b\dot x+kx=0$ 形式相同，对应为 $q\leftrightarrow x$、$L\leftrightarrow m$、$R\leftrightarrow b$、$1/C\leftrightarrow k$。电感能 $Li^2/2$ 对应动能，电场能 $q^2/(2C)$ 对应弹性势能。只有把电流定义为同一个电荷坐标的导数时，这组对应才连贯。

两个电容通过电感相连时，一个电容失去电荷，另一个得到相同电荷。两极板总电荷保持常量，决定两电容相同电压的平衡位置。偏离平衡的转移量才随时间振

荡。因此选取从第一电容流向第二电容的转移电荷 x，最便于把守恒关系直接写进两个电压。



两上极板总电荷 $C_1U_1 + C_2U_2$ 守恒

图 5.13: 两个电容经电感相连时，转移量 x 改变差电压。两只下极板共接

图 5.13 取 $x(0) = 0$，则 $u_1 = U_1 - x/C_1, u_2 = U_2 + x/C_2$。由电感端电压 $L\ddot{x} = u_1 - u_2$，

$$L\ddot{x} + \frac{x}{C_s} = U_1 - U_2, \qquad C_s = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

平衡转移量为 $x_{\text{eq}} = C_s(U_1 - U_2)$，真正振荡的坐标是 $x - x_{\text{eq}}$，而非两电容总电量。两上极板总电量所决定的共同电压为 $U_f = (C_1U_1 + C_2U_2)/(C_1 + C_2)$。为看清哪些能量参与交换，先展开两个电容的储能：

$$\begin{aligned} W_C(x) &= \frac{C_1}{2}\left(U_1 - \frac{x}{C_1}\right)^2 + \frac{C_2}{2}\left(U_2 + \frac{x}{C_2}\right)^2 \\ &= W_C(0) - (U_1 - U_2)x + \frac{x^2}{2C_s} \\ &= W_C(0) - \frac{C_s(U_1 - U_2)^2}{2} + \frac{(x - x_{\text{eq}})^2}{2C_s}. \end{aligned}$$

常数项通分并展开分子，得到

$$\begin{aligned} W_C(0) - \frac{C_s(U_1 - U_2)^2}{2} &= \frac{(C_1 + C_2)(C_1U_1^2 + C_2U_2^2) - C_1C_2(U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \\ &= \frac{C_1^2U_1^2 + 2C_1C_2U_1U_2 + C_2^2U_2^2}{2(C_1 + C_2)} \\ &= \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_f^2. \end{aligned}$$

再加电感能，得到

$$W = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_f^2 + \frac{(x - x_{\text{eq}})^2}{2C_s} + \frac{1}{2}Li^2.$$

第一项恒定，后两项交换。若初电感电流为 i_0，相对平衡的振幅为 $\sqrt{x_{\mathrm{eq}}^2 + LC_s i_0^2}$。$i_0 = 0$ 时转移量仍可越过 x_{eq}，这正是理想 LC 过程与电阻耗散过程的区别。

例题 12 由初始 $x = 0, i = 0$ 求解这一方程。电压差先推动电流增大，到了两电压相等时，电流仍因磁场能而继续流动，使转移量越过平衡位置。到电流再次为零时，电容电压差反向达到极值。若换用电阻连接，对应例题 6，电压差的能量转为焦耳热，转移量便单调趋于平衡。

5.6 例题与分析

例 5.1 (带初电荷的 RC 充电)**.** 电容 C 初电荷 q_0（按上极板为正），经电阻 R 接恒电源 $\mathcal{E}$。求 $q(t), i(t)$，讨论 $q_0 > C\mathcal{E}$ 时的电流方向。

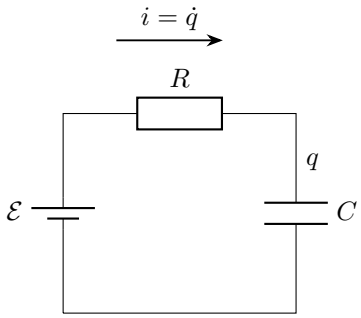


图 5.14: 题设：带初电荷的 RC 充电

解　电荷与电流的正向

图 5.14 电流流入标记 q 的上极板，故 $i = \dot{q}$。由 $\mathcal{E} - R\dot{q} - q/C = 0$，令 $u = q - C\mathcal{E}$，得 $R\dot{u} + u/C = 0$。

分离变量求解

当偏差不为零时，先写 $\mathrm{d}u/u = -\,\mathrm{d}t/(RC)$，再以初态为下限，

$$\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{RC},$$

$$[\ln|z|]_{u(0)}^{u(t)} = -\frac{1}{RC}[s]_0^t,$$

$$\ln\left|\frac{u(t)}{u(0)}\right| = -\frac{t}{RC}.$$

偏差的符号不改变，且偏差零时解恒定。电流由 $\dot q = (q_0 - C\mathcal{E})(-1/RC)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$ 求出，所以

$$q = C\mathcal{E} + (q_0 - C\mathcal{E})\mathrm{e}^{-t/(RC)}, \quad i = \frac{C\mathcal{E} - q_0}{RC}\mathrm{e}^{-t/(RC)}.$$

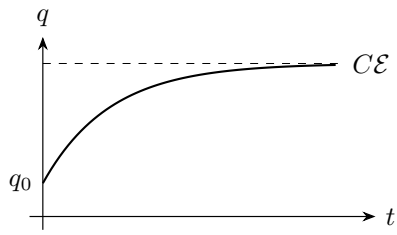


图 5.15: 解答过程：带初电荷的 RC 充电

曲线斜率与电流

图 5.15 示意 $q_0 < C\mathcal{E}$ 的上升过程。若 $q_0 > C\mathcal{E}$，轨迹如图 5.5 红线，斜率为负，电流从电容流回电源，电阻仍发热。

初态与终态

$q(0) = q_0$，$i(0^+) = (C\mathcal{E} - q_0)/(RC)$。长时间后 $q \to C\mathcal{E}$、$i \to 0$。电荷从初值单调接近终值，变化方向由初始电容电压与电源电动势之差决定。

例 5.2 (RC 放电的电荷与通过量)**.** 电容初电压 $U_0 > 0$，经电阻 R 放电。求电荷、按放电方向取正的电流，以及时间 t 内通过电阻的电荷量。

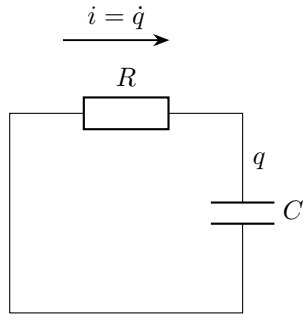


图 5.16: 题设：RC 放电的电荷与通过量

解　放电方程

图 5.16 的参考电流流入上极板，与实际初始放电方向相反。回路式 $R\dot{q}+q/C=0$ 分离后为 $\mathrm{d}q/q=-\mathrm{d}t/(RC)$。由初值 $q(0)=CU_0$，

$$\int_{CU_0}^{q(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC},$$
$$[\ln z]_{CU_0}^{q(t)}=-\frac{1}{RC}[s]_0^t,$$
$$\ln\frac{q(t)}{CU_0}=-\frac{t}{RC}.$$

给出 $q=CU_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}$，参考电流 $\dot{q}=-U_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}/R$。

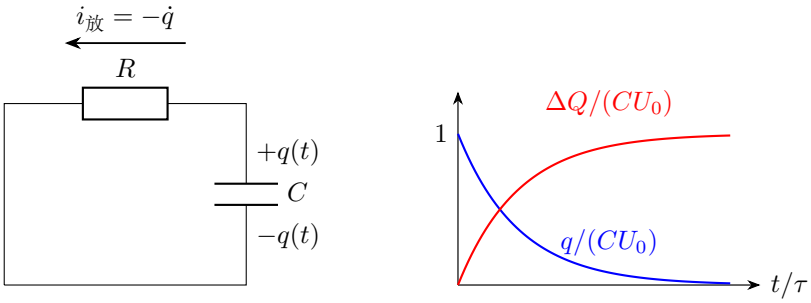


图 5.17: 左图改用实际放电方向为正。右图中剩余电荷与已通过电荷的归一化曲线之和恒为 1

通过电阻的电荷

图 5.17 按实际放电方向标正电流 $i_{放}=U_0\mathrm{e}^{-t/(RC)}/R$。通过电阻的电荷量由实际放电电流的积分求得：

$$\Delta Q=\frac{U_0}{R}\int_0^t\mathrm{e}^{-s/(RC)}\,\mathrm{d}s=\frac{U_0}{R}\left[-RC\mathrm{e}^{-s/(RC)}\right]_0^t=CU_0(1-\mathrm{e}^{-t/(RC)}).$$

电荷的转移

任意时刻都有 $q(t)+\Delta Q(t)=CU_0$，即留在极板上的电荷与已流过电阻的电荷之和等于初值。例如 $q=CU_0/2$ 时，$\mathrm{e}^{-t/(RC)}=1/2$，取对数得 $t=RC\ln 2$，此时也恰好流过一半初始电荷。

例 5.3 (RC 电压达到指定误差)**.** 未带电电容经 R 接到电压 $\mathcal{E}$。求电压达到终值 90%、99% 的时刻，以及此时电流相对初值的比。

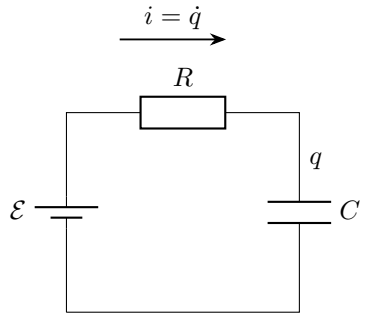


图 5.18: 题设：RC 电压达到指定误差

解　电压的指数响应

图 5.18 中令 $\tau = RC$。回路给出 $\tau \dot u_C = \mathcal{E} - u_C$，以 $u_C(0) = 0$ 积分，

$$\int_0^{u_C(t)} \frac{\mathrm{d}z}{\mathcal{E}-z} = \frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s,$$
$$[-\ln(\mathcal{E}-z)]_0^{u_C(t)} = \frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$
$$-\ln\frac{\mathcal{E}-u_C}{\mathcal{E}} = \frac{t}{\tau}.$$

因此 $u_C = \mathcal{E}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$，初电流 $i_0 = \mathcal{E}/R$。达到 $f\mathcal{E}$ 时，$1-f = \mathrm{e}^{-t/\tau}$，故 $t = -\tau\ln(1-f)$。

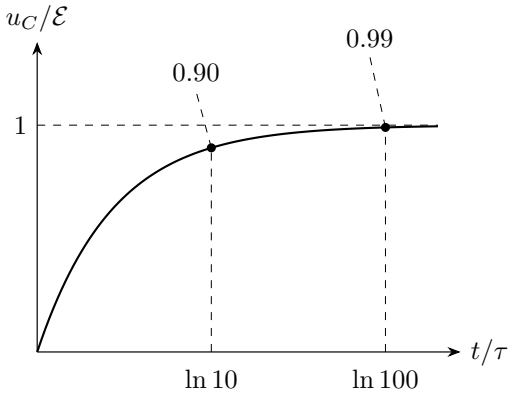


图 5.19: 达到给定比例相当于剩余偏差达到 $0.1, 0.01$。时间横轴以 $\tau = RC$ 归一化

求两个时刻

图 5.19 中 90% 对应 $t_{90}=\tau\ln 10\approx 2.303\tau$，99% 对应 $t_{99}=\tau\ln 100\approx 4.605\tau$。

电流比例

电流 $i/i_0=\mathrm{e}^{-t/\tau}$，所以分别是 $0.10, 0.01$。

剩余偏差的衰减

从 90% 到 99%，剩余偏差由 $0.1\mathcal{E}$ 降为 $0.01\mathcal{E}$，又减小 10 倍，所需时间为 $\tau\ln 10$。指数过程每经过同样时间，剩余偏差乘上同样的比例。

例 5.4 (电容换接另一恒压源)**.** 电容 C 已充到 U_1，经电阻 R 换接到同极性恒压源 U_2，$U_1>U_2>0$。求电流与电阻总热，并说明电源是否吸收能量。

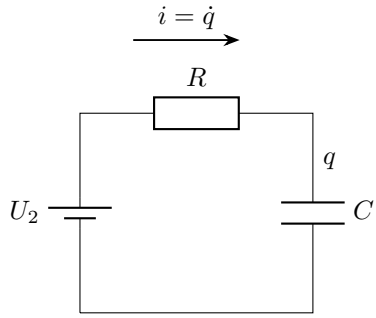


图 5.20: 题设：电容换接另一恒压源

解　换接后的初值方程

图 5.20 切换瞬间电容电压保持 U_1，终态为 U_2。由 $RC\dot{u}_C+u_C=U_2$，令 $w=u_C-U_2$，得

$$\int_{U_1-U_2}^{w(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC},$$
$$[\ln z]_{U_1-U_2}^{w(t)}=-\frac{1}{RC}[s]_0^t,$$
$$\ln\frac{w(t)}{U_1-U_2}=-\frac{t}{RC}.$$

初偏差为正，解也保持正号。两边取指数，再乘 U_1-U_2，得到 $w(t)=(U_1-U_2)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。电流为 $C\dot{u}_C=C(U_1-U_2)(-1/RC)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$，所以

$$u_C=U_2+(U_1-U_2)\mathrm{e}^{-t/(RC)},\quad i=\frac{U_2-U_1}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)}<0.$$

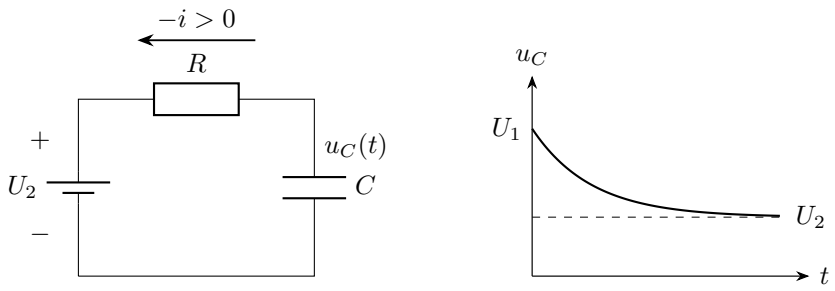


图 5.21: 电容电压由 U_1 下降到 U_2，实际电流沿所画箭头流入电源正端

电源吸收的能量

图 5.21 中，电流流入电源正端。电容从 CU_1 降到 CU_2，经电源正端流入的电荷为 $C(U_1-U_2)$。乘以该电源的端电压，得 $W_{\text{吸}}=CU_2(U_1-U_2)$。

场能的减少

电容场能从 $CU_1^2/2$ 降到 $CU_2^2/2$，释放量为 $C(U_1^2-U_2^2)/2$。其中一部分送入电源，其余经电阻转为热。下面沿电流过程积分求出这部分热量。

积分求电阻热

以有限上限 T 积分 Ri^2，再令 $T\to\infty$：

$$\begin{aligned}Q_R(T)&=\frac{(U_1-U_2)^2}{R}\int_0^T \mathrm{e}^{-2t/(RC)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{(U_1-U_2)^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}\mathrm{e}^{-2t/(RC)}\right]_0^T\\&=\frac{C(U_1-U_2)^2}{2}(1-\mathrm{e}^{-2T/(RC)}).\end{aligned}$$

令 $T\to\infty$，得 $Q_R=C(U_1-U_2)^2/2$。电容减少的能量分别送入电源和电阻。

例 5.5 (经分压网络充电的时间常数)**.** 恒压源 $\mathcal{E}$ 经 R_1 到节点 A，A 经 R_2 接地，电容 C 并联于 R_2，初始未带电。求电容电压、源电流及终态。

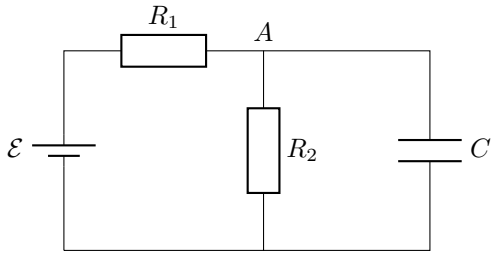


图 5.22: 题设：经分压网络充电的时间常数

解　求端口等效

在图 5.22 中先移去电容。端口开路电压为 $U_{\mathrm{th}}=\mathcal{E}R_2/(R_1+R_2)$。把理想源短路后，$R_1,R_2$ 对电容端口并联，$R_{\mathrm{th}}=R_1R_2/(R_1+R_2)$。

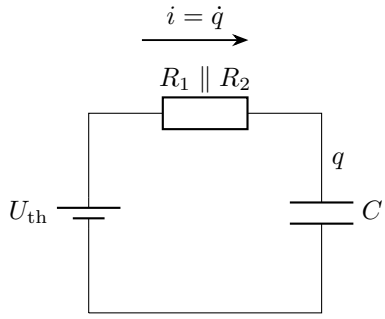


图 5.23: 解答过程：经分压网络充电的时间常数

电容电压

图 5.23 得到 $\tau=R_{\mathrm{th}}C$。回路式 $\tau\dot{u}_C+u_C=U_{\mathrm{th}}$ 给出

$$\begin{aligned}\int_0^{u_C(t)}\frac{\mathrm{d}z}{U_{\mathrm{th}}-z}&=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\tau},\\ [-\ln(U_{\mathrm{th}}-z)]_0^{u_C(t)}&=\frac{1}{\tau}[s]_0^t,\\ -\ln\frac{U_{\mathrm{th}}-u_C}{U_{\mathrm{th}}}&=\frac{t}{\tau}.\end{aligned}$$

所以 $u_C=U_{\mathrm{th}}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$。

原电路的源电流

真实源电流经 R_1，为

$$i_{\text{源}}=\frac{\mathcal{E}-u_C}{R_1}=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2}+\frac{U_{\mathrm{th}}}{R_1}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

初、终态的分流

初始 $u_C=0$，故 $i_{\text{源}}(0^+)=\mathcal{E}/R_1$。终态电容电流为零，源电流为 $\mathcal{E}/(R_1+R_2)$。全过程中，节点 A 的连续关系为 $i_{\text{源}}=C\dot{u}_C+u_C/R_2$，两股电流随电压上升而重新分配。

例 5.6 (两个电容经电阻重新分配电荷)**.** 电容 C_1, C_2 初电压为 U_1, U_2，负极板共接，正极板经电阻 R 接通。求电流、共同终压和总热。

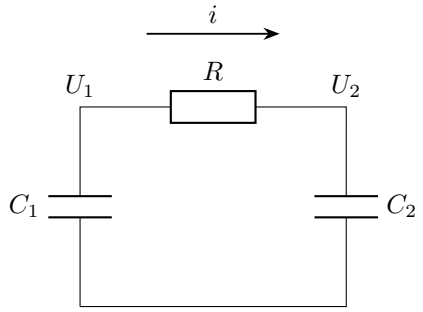


图 5.24: 题设：两个电容经电阻重新分配电荷

解　转移电荷坐标

取图 5.24 的 i 从 C_1 正端流向 C_2 正端。转移电荷为 x，则 $u_1 = U_1 - x/C_1$、$u_2 = U_2 + x/C_2$，电阻关系

$$R\dot{x} = U_1 - U_2 - x\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

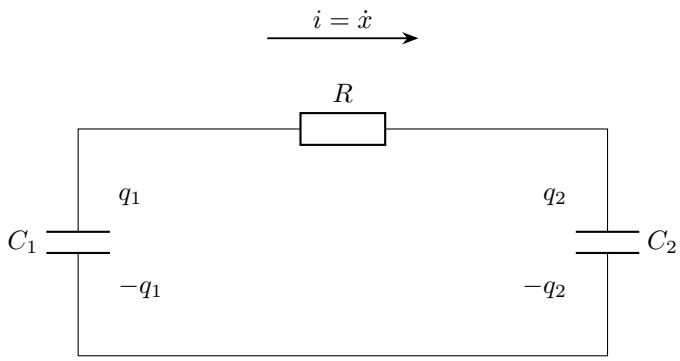
求解转移过程

令 $C_s = C_1C_2/(C_1 + C_2)$，终转移量 $x_\infty = C_s(U_1 - U_2)$，令 $y = x - x_\infty$，则 $\dot{y} = -y/(RC_s)$。当 $x_\infty \neq 0$，由 $y(0) = -x_\infty$ 确定积分下限，

$$\int_{-x_\infty}^{y(t)} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{RC_s}, \qquad [\ln|\eta|]_{-x_\infty}^{y(t)} = -\frac{t}{RC_s}.$$

故 $\ln|y/(-x_\infty)| = -t/(RC_s)$。若 $U_1 = U_2$，初态即平衡，$x = i = 0$。对非平衡初态还原 $x = x_\infty(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC_s)})$。将 x_∞ 作为常数，对时间求导，

$$i = \dot{x} = x_\infty\left[-\left(-\frac{1}{RC_s}\right)\mathrm{e}^{-t/(RC_s)}\right] = \frac{U_1 - U_2}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC_s)}.$$



$$q_1 = C_1U_1 - x \qquad\qquad q_2 = C_2U_2 + x$$

$$q_1 + q_2 = C_1U_1 + C_2U_2$$

图 5.25: 固定从左向右的转移坐标。左上极板电荷减少 x，右上极板电荷增加 x

共同终压

图 5.25 的两上极板总电荷保持为 $C_1U_1 + C_2U_2$。电流趋于零时电阻两端等势，所以

$$(C_1 + C_2)U_f = C_1U_1 + C_2U_2, \qquad U_f = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

焦耳热

初末储能差给出

$$\begin{aligned} Q_R &= \frac{1}{2}C_1U_1^2 + \frac{1}{2}C_2U_2^2 - \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_f^2 \\ &= \frac{(C_1 + C_2)(C_1U_1^2 + C_2U_2^2) - (C_1U_1 + C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \\ &= \frac{C_1C_2(U_1^2 - 2U_1U_2 + U_2^2)}{2(C_1 + C_2)} = \frac{1}{2}C_s(U_1 - U_2)^2. \end{aligned}$$

差压的时间常数用串联等效 C_s，终态总储能用并联总电容 $C_1 + C_2$，二者用途不同。

例 5.7 (斜坡电压驱动 RC 电路)**.** 未带电电容串联 R，从 $t=0$ 起电源电动势为 $\mathcal{E}(t)=\kappa t$，$\kappa>0$。求 $q(t), i(t)$ 和长期电容电压相对电源的滞后。

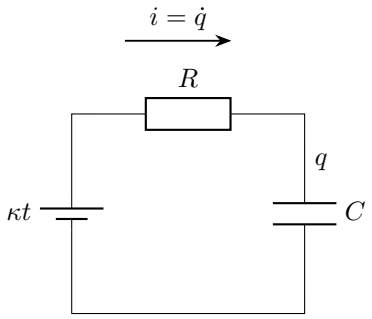


图 5.26: 题设：斜坡电压驱动 RC 电路

解　线性特解

由图 5.26，$R\dot{q}+q/C=\kappa t$。设线性特解 $q_p=at+b$，有 $\dot{q}_p=a$，代回得 $Ra+(at+b)/C=\kappa t$。比较 t 的系数和常数项，$a/C=\kappa$、$Ra+b/C=0$，解得 $a=C\kappa, b=-RC^2\kappa$。

齐次解与初值

齐次项满足 $R\dot{q}_h+q_h/C=0$。由 $q(0)=q_p(0)+q_h(0)=0$，有 $q_h(0)=-b=RC^2\kappa>0$。记 $\tau=RC$。分离变量并按初值积分，

$$\int_{RC^2\kappa}^{q_h(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{1}{\tau}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln z]_{RC^2\kappa}^{q_h(t)}=-\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

于是 $\ln[q_h(t)/(RC^2\kappa)]=-t/\tau$，取指数得 $q_h(t)=RC^2\kappa \mathrm{e}^{-t/\tau}$。

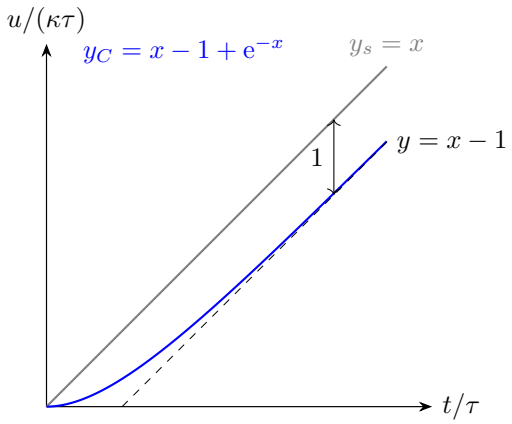


图 5.27: 用 $x=t/\tau$ 和 $y=u/(\kappa\tau)$ 表示电压。右侧竖向标尺 1 对应电源直线与电容电压渐近线之间的差

求电流

相加 $q_p + q_h$ 得到电荷。对括号逐项求导得 $1 + RC(-1/RC)\mathrm{e}^{-t/(RC)} = 1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}$，所以

$$q = C\kappa[t - RC + RC\mathrm{e}^{-t/(RC)}], \quad i = C\kappa(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)}).$$

长期响应

图 5.27 中，电源与电容电压的差为 $\kappa\tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$。当 $t \gg \tau$ 时差值趋于 $\kappa\tau$，电阻电流也趋于 $C\kappa$。这个稳定电流继续送入电荷，使电容电压以斜率 κ 增加。初始源电压与电容电压同为零，所以 $i(0) = 0$。

例 5.8 (电感从零电流接通电源)**.** 电感 L 与电阻 R 串联接恒电源 $\mathcal{E}$，初电流零。求电流、电感端电压及电流达到稳值一半的时间。

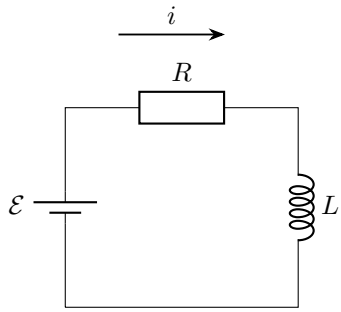


图 5.28: 题设：电感从零电流接通电源

解　回路方程与初值

图 5.28 中 $L\dot{i} + Ri = \mathcal{E}$。终电流 $\mathcal{E}/R$，令 $j = i - \mathcal{E}/R$，则 $\mathrm{d}j/j = -(R/L)\,\mathrm{d}t$。由 $j(0) = -\mathcal{E}/R$ 确定下限，

$$\int_{-\mathcal{E}/R}^{j(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\frac{R}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|\xi|]_{-\mathcal{E}/R}^{j(t)} = -\frac{R}{L}[s]_0^t.$$

所以 $\ln|j/(-\mathcal{E}/R)| = -Rt/L$，指数化并加回终值，得到 $i = (\mathcal{E}/R)(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L})$。

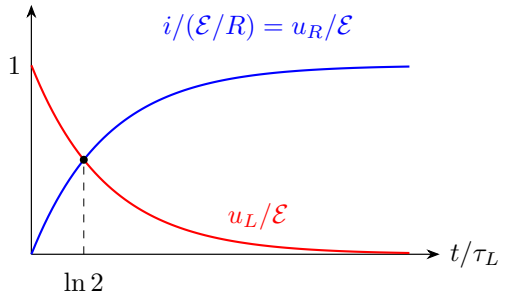


图 5.29: 电感电压与电阻电压互补。电流以稳值归一化后与电阻电压共用同一上升曲线

电感和电阻电压

对已求出的电流用链式法则，

$$\dot{i} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[-\left(-\frac{R}{L}\right)\mathrm{e}^{-Rt/L}\right] = \frac{\mathcal{E}}{L}\mathrm{e}^{-Rt/L}.$$

所以图 5.29 的电感端电压 $u_L = L\dot{i} = \mathcal{E}\mathrm{e}^{-Rt/L}$，电阻电压 $u_R = \mathcal{E}(1-\mathrm{e}^{-Rt/L})$，二者之和始终为 $\mathcal{E}$。

电流达到一半

令 $i = (\mathcal{E}/R)/2$，则 $\mathrm{e}^{-t/\tau_L} = 1/2$。取自然对数得 $-t/\tau_L = -\ln 2$，所以 $t = (L/R)\ln 2$。

初态与终态

初态 $i(0) = 0, u_L(0) = \mathcal{E}$。终态 $i \to \mathcal{E}/R, u_L \to 0$。电源电压逐渐由电感承担转为由电阻承担，电感中的磁场能随电流增加而建立。

例 5.9 (电感在闭合电阻回路中衰减)**.** 电感初电流 $I_0 > 0$，切除电源后仍与电阻 R 组成闭合回路。求 $i(t)$、电阻最终得到的总热量及释放一半磁能所需时间。

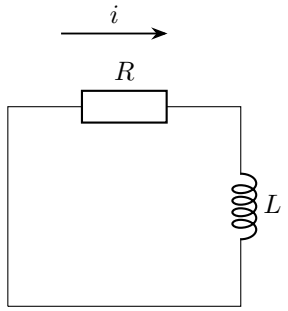


图 5.30: 题设：电感在闭合电阻回路中衰减

解　闭合回路的电流

图 5.30 保留原电流方向为正，电流连续给出 $i(0^+)=I_0$。回路方程 $L\dot{i}+Ri=0$，所以

$$\int_{I_0}^{i(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{R}{L}\int_0^t\mathrm{d}s,$$
$$[\ln z]_{I_0}^{i(t)}=-\frac{R}{L}[s]_0^t,$$
$$\ln\frac{i}{I_0}=-\frac{Rt}{L}.$$

故 $i=I_0\mathrm{e}^{-Rt/L}$。

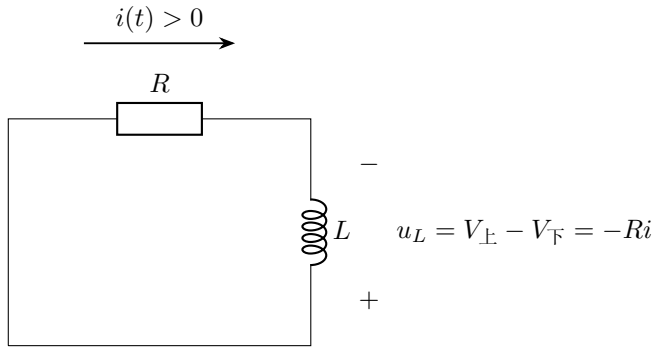


图 5.31: 释放磁能时电感电流保持原方向，但电感实际端电势为下高上低

电感释放能量

图 5.31 中电感功率 $u_Li=-Ri^2<0$，磁场向外释放能量。电阻功率 $Ri^2>0$。沿所选电流方向，电感端电压为负，电阻端电压为正，二者的和为零。

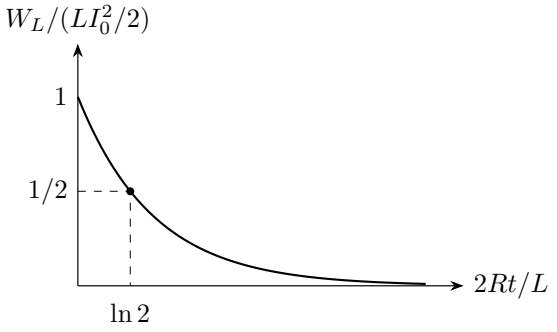


图 5.32: 剩余磁能的指数含电流衰减率的两倍。用 $2Rt/L$ 归一化横轴

积分求热量

图 5.32 的磁能 $W_L = LI_0^2\mathrm{e}^{-2Rt/L}/2$，衰减指数是电流的两倍。总焦耳热

$$Q = \int_0^\infty Ri^2\,\mathrm{d}t = RI_0^2\left[-\frac{L}{2R}\mathrm{e}^{-2Rt/L}\right]_0^\infty = RI_0^2\frac{L}{2R} = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

磁能减半的时刻

释放一半磁能时，$W_L(t)/W_L(0) = \mathrm{e}^{-2Rt/L} = 1/2$。取对数得 $-2Rt/L = -\ln 2$，所以 $t = L\ln 2/(2R)$。此时电流为 $I_0/\sqrt{2}$。电流减至 $I_0/2$ 时，剩余磁能为初值的 $1/4$。

例 5.10 (有源并联网络中的电感响应)**.** 三个支路并联：一支为电感 L，一支为电阻 R，一支为电动势 $\mathcal{E}$ 的电源串联 R。电源正端朝上，电感参考电流取从上向下，初值 I_0。求电感电流。

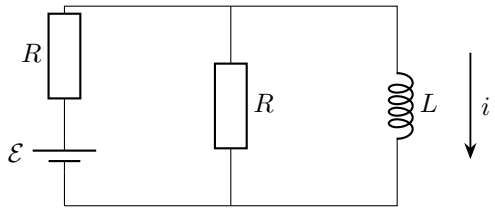


图 5.33: 题设：有源并联网络中的电感响应

解　电感端口的等效

在图 5.33 中暂移去电感，另两支路构成端口电源。开路分压 $U_{\mathrm{th}} = \mathcal{E}/2$，关闭电动势后两电阻并联，$R_{\mathrm{th}} = R/2$。

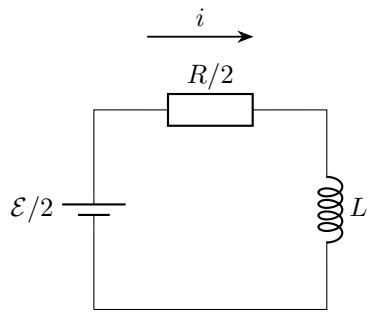


图 5.34: 解答过程：有源并联网络中的电感响应

求解电流响应

由图 5.34 的等效回路，$L\dot{i}+(R/2)i=\mathcal{E}/2$。终态 $i_\infty=\mathcal{E}/R$，时间常数 $\tau=2L/R$。令 $j=i-i_\infty$。对 $I_0\neq i_\infty$ 的初态分离变量并积分，得到

$$\int_{I_0-i_\infty}^{j(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\tau},$$
$$[\ln|z|]_{I_0-i_\infty}^{j(t)}=-\frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$
$$\ln\left|\frac{j(t)}{I_0-i_\infty}\right|=-\frac{t}{\tau}.$$

取指数后得到偏差绝对值之比为 $\mathrm{e}^{-t/\tau}$。结合初始符号，$j(t)=(I_0-i_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}$。初流等于终值时 $j=0$。两种初态的电流都可写成

$$i(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}+\left(I_0-\frac{\mathcal{E}}{R}\right)\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}.$$

电流变化与终态

若 $I_0<\mathcal{E}/R$，电流数值逐渐增至终值。若 $I_0>\mathcal{E}/R$，电流下降。终态电感两端电压为零，纯电阻支路无电流，电池支路的 $\mathcal{E}/R$ 全部流过电感。

例 5.11 (LC 振荡的两个初值)**.** 理想 LC 电路中按图取 $i=\dot{q}$。初始 $q(0)=q_0, i(0)=I_0$。求完整运动及最大电流、最大电荷。

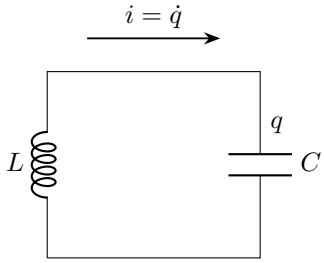


图 5.35: 题设：LC 振荡的两个初值

解　建立二阶方程

图 5.35 沿关联参考方向列式 $L\dot{i}+q/C=0$，结合 $i=\dot{q}$ 得 $\ddot{q}+\omega_0^2q=0$，$\omega_0=1/\sqrt{LC}$。

两个初值求系数

试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，依次求导得到 $\dot q=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot q=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入有 $(s^2+\omega_0^2)\mathrm{e}^{st}=0$，约去指数得 $s^2+\omega_0^2=0$。根为 $\pm\mathrm{j}\omega_0$，通解及其导数为

$$q=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t,\qquad i=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t.$$

在 $t=0$，余弦为 1、正弦为 0，所以 $A=q_0$、$\omega_0 B=I_0$。代回得到

$$q=q_0\cos\omega_0 t+\frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,\quad i=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t+I_0\cos\omega_0 t.$$

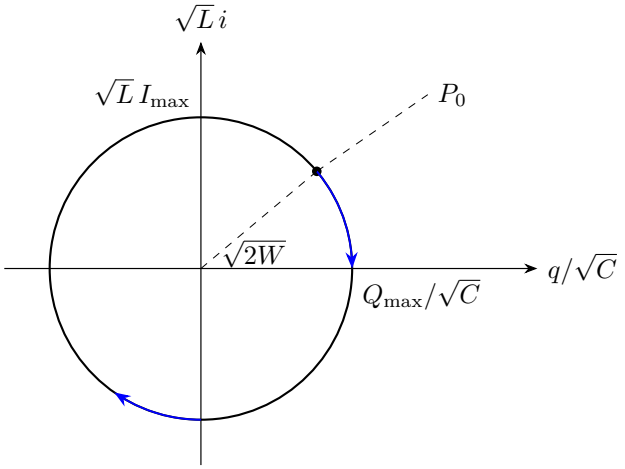


图 5.36: 归一化能量圆。初态点以第一象限示意，实际象限由 q_0, I_0 的符号确定

最大电荷与电流

图 5.36 以归一化 $q/\sqrt{C}$ 和 $\sqrt{L}i$ 表示能量平面，轨道是半径 $\sqrt{q_0^2/C+LI_0^2}$ 的圆。因此 $Q_{\max}=\sqrt{q_0^2+LCI_0^2}$，$I_{\max}=\sqrt{I_0^2+q_0^2/(LC)}$。

相位与运动方向

在能量圆上，初始点为 $(q_0/\sqrt{C},\sqrt{L}I_0)$。由 $\dot q=I_0$ 和 $\dot i=-q_0/(LC)$，可确定初始运动方向。随后沿图中的顺时针方向运动。半径给出两个振幅，初始点的位置给出相位。

例 5.12 (两个电容通过电感转移电荷)**.** C_1 初电压 $U>0$，C_2 未带电，两负极板共接，正极板用理想电感 L 相连。初电感电流零。求转移电荷 $x(t)$、最大电流及最大转移量。

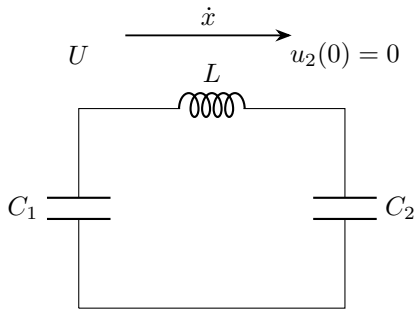


图 5.37: 题设：两个电容通过电感转移电荷

解　两电容的电压

图 5.37 中转移 x 后，两电容电压为 $u_1=U-x/C_1, u_2=x/C_2$。电感上从左到右的电压等于 $u_1-u_2=L\ddot{x}$，所以

$$L\ddot{x}+\frac{x}{C_s}=U,\qquad C_s=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}.$$

平衡坐标与初值

令 $y=x-C_sU$，得 $\ddot{y}+\omega^2y=0$，$\omega=1/\sqrt{LC_s}$。试取 $y=\mathrm{e}^{st}$，两次求导分别为 $s\mathrm{e}^{st}$ 和 $s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并约去指数，得 $s^2+\omega^2=0$。两根 $\pm\mathrm{j}\omega$ 对应

$$y=A\cos\omega t+B\sin\omega t,\qquad \dot{y}=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t.$$

由 $x(0)=0$ 得 $y(0)=-C_sU$，故 $A=-C_sU$。$\dot{y}(0)=\dot{x}(0)=0$ 给出 $\omega B=0$。加回平衡值，再对 x 求导，

$$x=C_sU(1-\cos\omega t),\quad i=C_sU\omega\sin\omega t.$$

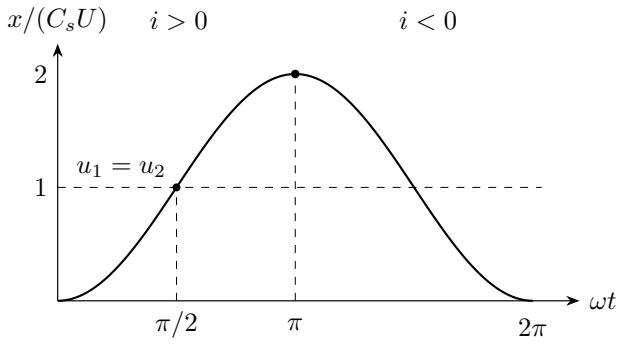


图 5.38: 转移量越过平衡值 C_sU 后仍继续增加。第一次在 $\omega t=\pi$ 达到最大值

转移量与电流极值

图 5.38 中转移量在 0 与 $2C_sU$ 间往复，最大电流 $I_{\max}=U\sqrt{C_s/L}$。

越过平衡位置

当 $x=C_sU$ 时，两电容电压相同，电压差暂为零，电流达到最大值。此时磁场能使电荷继续转移。到 $x=2C_sU$ 时，电流降为零、电压差反向达到 $-U$，随后电流反向。整个过程保持总电荷及总场能守恒。

例 5.13 (RLC 衰减振荡与初始斜率)**.** 串联 RLC 电路无电源，$R<2\sqrt{L/C}$。$q(0)=q_0,\dot q(0)=0$。求 $q(t)$，说明初始电流怎样决定正弦项的系数。

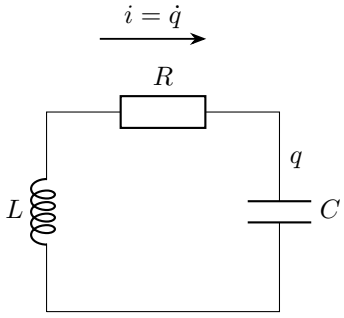


图 5.39: 题设：RLC 衰减振荡与初始斜率

解　特征根与通解

图 5.39 的方程是 $L\ddot q+R\dot q+q/C=0$。设 $\gamma=R/(2L)$、$\omega=\sqrt{1/(LC)-\gamma^2}$，试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，有 $\dot q=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot q=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入有 $(Ls^2+Rs+1/C)\mathrm{e}^{st}=0$，约去非零指数，得到 $Ls^2+Rs+1/C=0$。除以 L 并配方为 $(s+\gamma)^2+\omega^2=0$，特征根为 $-\gamma\pm i\omega$，一般实解 $q=\mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$。

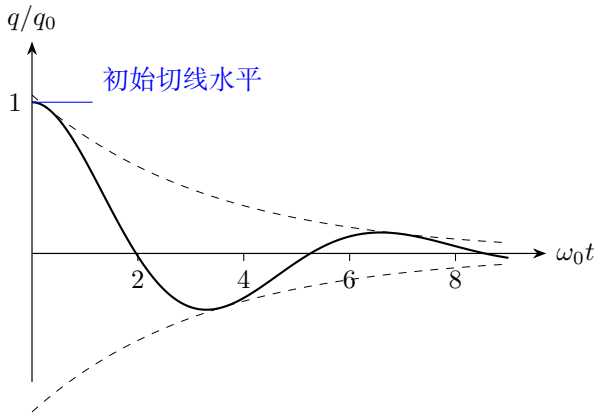


图 5.40: 图取 $\gamma/\omega_0 = 0.3$。实线满足零初始电流，虚线是由两正交系数组成的真实包络

初始电流求系数

图 5.40 初值 $A = q_0$。乘积求导为

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -\gamma \mathrm{e}^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)\\ &\quad + \mathrm{e}^{-\gamma t}(-A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t)\\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}[(-\gamma A + \omega B)\cos\omega t + (-\gamma B - \omega A)\sin\omega t].\end{aligned}$$

在 $t = 0$ 为 $\dot{q}(0) = -\gamma A + \omega B = 0$，因此 $B = \gamma q_0/\omega$，得到

$$q = q_0 \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right).$$

同相位的振幅与能量

令振荡周期 $T = 2\pi/\omega$。通解中的正弦、余弦经过 T 恢复原相位，故 $q(t+T) = \mathrm{e}^{-\gamma T}q(t)$，$i(t+T) = \mathrm{e}^{-\gamma T}i(t)$。两项场能都乘 $\mathrm{e}^{-2\gamma T}$。

例 5.14 (有限电压脉冲后的响应)**.** 电容原不带电，电阻 R 与电容 C 串联。输入电压在 $0 < t < t_0$ 为 $E > 0$，此后变为零，回路保持闭合。求整个电压、电流响应及总热。

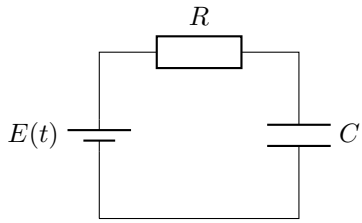


图 5.41: 题设：有限电压脉冲后的响应

解　脉冲期间

图 5.41 令 $\tau = RC$。脉冲期间满足 $\tau\dot{u} = E - u$，以 $u(0) = 0$ 积分得

$$\int_0^{u(t)} \frac{\mathrm{d}z}{E - z} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau},$$
$$[-\ln(E - z)]_0^{u(t)} = \frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$
$$-\ln\frac{E - u}{E} = \frac{t}{\tau}.$$

取指数后 $E - u = E\mathrm{e}^{-t/\tau}$，因此 $u = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$。再求导，

$$i = C\dot{u} = CE\left[-\left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\right] = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

切换时的电压

在结束时 $u_1 = E(1 - e^{-t_0/\tau})$，电容电压连续。

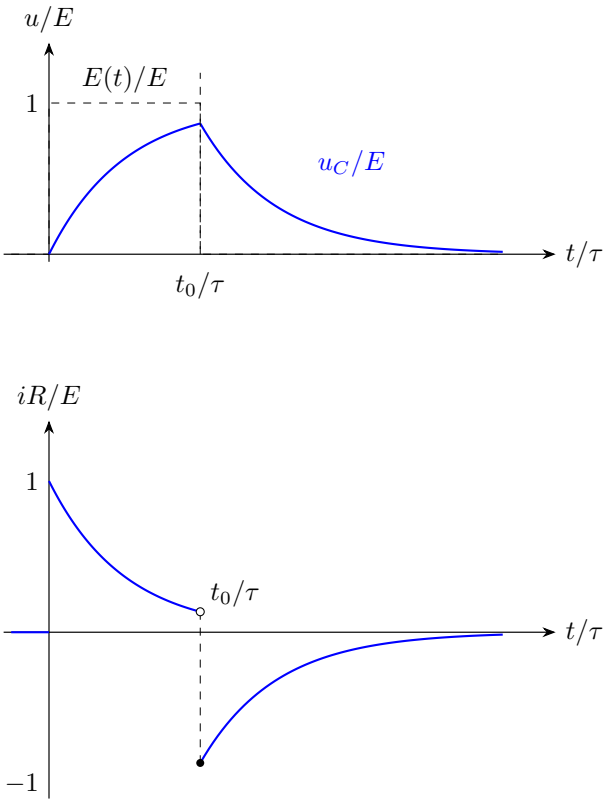


图 5.42: 图以 $t_0 = 2\tau$ 示意：电容电压连续，电流在脉冲结束时向下跳变 E/R

脉冲后的放电

图 5.42 输入变零后满足 $\dot{u}=-u/\tau$。从切换时刻积分，

$$\int_{u_1}^{u(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}s}{\tau},$$
$$[\ln z]_{u_1}^{u(t)}=-\frac{1}{\tau}[s]_{t_0}^{t},$$
$$\ln\frac{u(t)}{u_1}=-\frac{t-t_0}{\tau}.$$

所以是以 u_1 为初值的放电，$u=u_1e^{-(t-t_0)/\tau}$，$i=-(u_1/R)e^{-(t-t_0)/\tau}$。电流可因电源突变而跳变，电容电压不跳变。

分段积分焦耳热

对平方电流分别积分，令第二段局部时间 $s=t-t_0$：

$$\begin{aligned}H_1&=\frac{E^2}{R}\int_0^{t_0}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^{t_0}=\frac{CE^2}{2}(1-\mathrm{e}^{-2t_0/\tau}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_2&=\frac{u_1^2}{R}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-2s/\tau}\,\mathrm{d}s\\&=\frac{u_1^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2s/\tau}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}Cu_1^2.\end{aligned}$$

第二个反常积分按有限上限再趋于无穷理解，指数项在上端趋零。指数原函数中的 $\tau/2$ 正是平方电流带来的时间尺度。令 $a=\mathrm{e}^{-t_0/\tau}$，代入 $u_1=E(1-a)$ 后相加，

$$H_1+H_2=\frac{CE^2}{2}[(1-a^2)+(1-2a+a^2)]=CE^2(1-a).$$

电源在第一段送入电荷 Cu_1，做功 $ECu_1=CE^2(1-a)$。末态电容已放完电，电源的净功全部成为上述焦耳热。长脉冲极限总热为 CE^2，分别包含充电与随后放电的两部分。短脉冲极限用 $1-\mathrm{e}^{-x}=x+O(x^2)$、$x=t_0/\tau$，得到 $H_1+H_2\simeq CE^2t_0/\tau=E^2t_0/R$，此时电容电压尚小。

5.7 本讲小结

电容用电荷或电压描述电场状态，电感用电流描述磁场状态。开关改变后，原有储能状态成为新回路的初值，新的电源与电阻关系决定此后的变化。RC、RL 的一阶方程给出向终态的指数过渡，时间常数分别为 $R_{\mathrm{th}}C$、L/R_{th}。

LC 回路中，电场能与磁场能往复交换。二阶方程的两个积分常数由初电荷、初电流共同确定，进而给出相位、振幅及首次到达某状态的时刻。加入电阻后，焦耳热使总场能减小，特征根决定振荡、临界或非周期的响应形式。

电源功、场能变化与焦耳热描述同一过渡的能量分配。沿已求出的电流积分功率，可得到每一阶段累积的能量。两个电容相连时，总电荷决定共同电压，电压差的变化决定转移过程。

5.8　练习

练习 5.1 (充电到一半时的能量)**.** 未带电电容经电阻接恒压源 $\mathcal{E}$。当电荷为终值一半时，求电源已做功、电容储能和已产生的热。

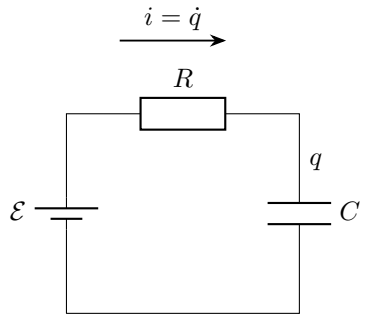


图 5.43: 题设：充电到一半时的能量

练习 5.2 (反向接源后的过零时刻)**.** 电容初电压为 $+\mathcal{E}$，经电阻 R 换接到反向电动势 $-\mathcal{E}$。求电压首次过零时刻与过程总热。

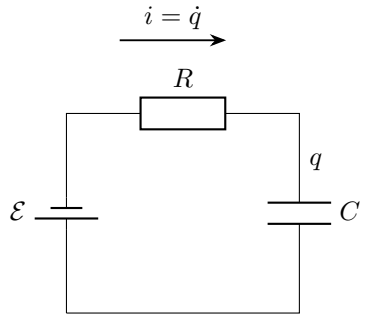


图 5.44: 题设：反向接源后的过零时刻

练习 5.3 (电感释放能量到两个串联电阻)**.** 初电流 I_0 的电感 L，切换后仅与 R_1, R_2 串联闭合。求电流与各电阻最终吸收热量。

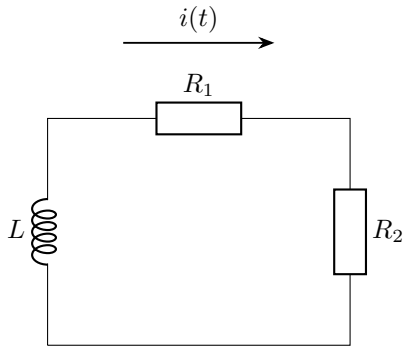


图 5.45: 题设：电感与两个电阻串联闭合

练习 5.4 (LC 电荷为一半时的电流)**.** 理想 LC 初始电容带电 $q_0 > 0$，电感电流零。求第一次电荷降为 $q_0/2$ 的时刻与电流方向、大小。

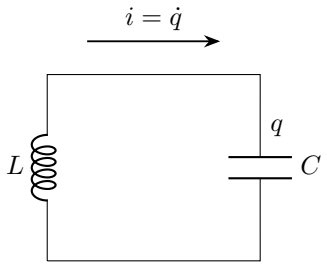


图 5.46: 题设：LC 电荷为一半时的电流

练习 5.5 (临界阻尼的完整解)**.** 串联无源 RLC 满足 $R = 2\sqrt{L/C}$，初值 $q_0 > 0, i_0 = 0$。求电荷响应，判断是否变号。

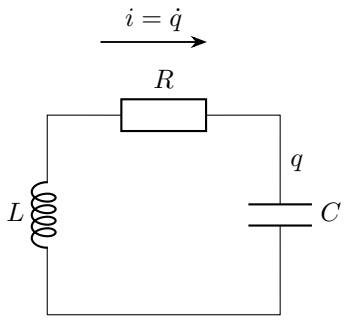
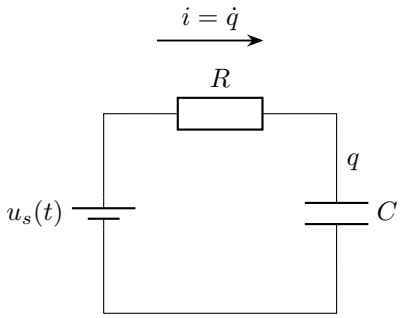


图 5.47: 题设：临界阻尼的完整解

练习 5.6 (RC 周期换接的稳定循环)**.** 电容 C 经同一电阻 R，交替连接恒电压 $U>0$ 和零电压，各持续时间 $T>0$。经过足够多周期后形成稳定循环，求每周期最低、最高电容电压。



电源每隔 T 在 U 与 0 间切换

图 5.48: 题设：RC 周期换接的稳定循环

练习解答

练习 5.1

解　电源功与场能

图 5.43 中该时刻 $q=C\mathcal{E}/2$，电源功 $W_{源}=\mathcal{E}q=C\mathcal{E}^2/2$。电容储能为 $q^2/(2C)=C\mathcal{E}^2/8$。

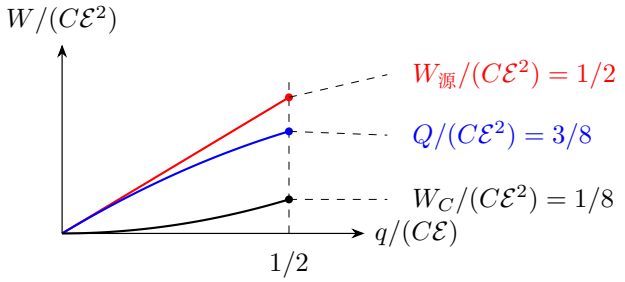


图 5.49: 累计能量随已充入电荷而变。在 $q/(C\mathcal{E})=1/2$ 处分别读取三项

已产生的热

图 5.49 的能量分配由守恒给出 $Q=W_{源}-W_C=3C\mathcal{E}^2/8$。

热量比例

最终总热为 $C\mathcal{E}^2/2$，此时的 $3C\mathcal{E}^2/8$ 占总热的 3/4。前期电流较大，焦耳热积累较快。同时电容储能按电压的平方增加，所以在半电荷时只积累了最终场能的 1/4。

练习 5.2

解　保持电压参考方向

图 5.44 取原电容电压正向不变，初值 $+\mathcal{E}$、终值 $-\mathcal{E}$。回路式为 $RC\dot{u}_C+u_C=-\mathcal{E}$。令 $w=u_C+\mathcal{E}$，则 $w(0)=2\mathcal{E}$，分离积分为

$$\int_{2\mathcal{E}}^{w(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC},$$
$$[\ln z]_{2\mathcal{E}}^{w(t)}=-\frac{1}{RC}[s]_0^t,$$
$$\ln\frac{w}{2\mathcal{E}}=-\frac{t}{RC}.$$

所以 $u_C=-\mathcal{E}+2\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。

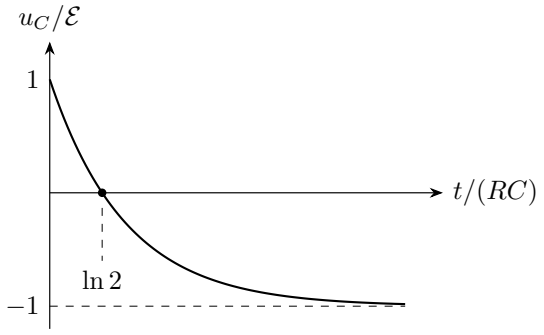


图 5.50: 反向电源使电压从 $+\mathcal{E}$ 趋向 $-\mathcal{E}$。零点对应半个初始偏差

过零时刻

图 5.50 中过零满足 $\mathrm{e}^{-t/(RC)}=1/2$，所以 $t_0=RC\ln 2$。

过程总热

初末电压差为 $-2\mathcal{E}$，总热为 $Q=C(-2\mathcal{E})^2/2=2C\mathcal{E}^2$。原正极板电荷从 $+C\mathcal{E}$ 变为 $-C\mathcal{E}$，沿图中参考方向的净通过量为 $-2C\mathcal{E}$。电源功 $(-\mathcal{E})(-2C\mathcal{E})=2C\mathcal{E}^2$。初末场能相同，电源净功全部转为热。

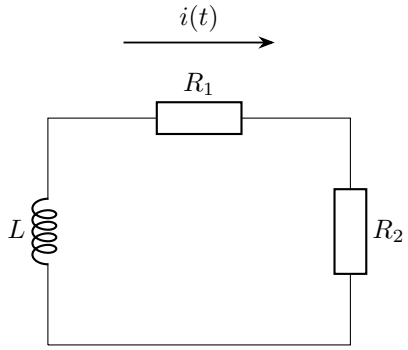
练习 5.3

解　电流衰减

图 5.45 两电阻总看入电阻为 $R_s = R_1 + R_2$，由 $L\dot{i} + R_s i = 0$，

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R_s}{L}\int_0^t \mathrm{d}s,$$
$$[\ln|z|]_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R_s}{L}[s]_0^t,$$
$$\ln\left|\frac{i(t)}{I_0}\right| = -\frac{R_s t}{L}.$$

非零初流保留原符号。若 $I_0 = 0$，直接取恒零解。所以 $i = I_0 \mathrm{e}^{-(R_1+R_2)t/L}$。初磁能为 $LI_0^2/2$，最终电流零，全部变热。



$$P_1(t) : P_2(t) = R_1 : R_2$$

图 5.51: 两个电阻分别保留在同一闭合续流回路中，电流在各元件中相同

各电阻的热量

图 5.51 中两电阻每时刻电流相同，因此功率比始终为 $R_1 : R_2$，而每只电阻的热积分为

$$Q_j = R_j I_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2R_s t/L}\,\mathrm{d}t = R_j I_0^2 \left[-\frac{L}{2R_s}\mathrm{e}^{-2R_s t/L}\right]_0^\infty = \frac{R_j}{R_s}\frac{LI_0^2}{2}.$$

代入 $j = 1, 2$ 得

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\frac{LI_0^2}{2}, \qquad Q_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{LI_0^2}{2}.$$

总能量与分配

$Q_1+Q_2=LI_0^2/2$，等于电感释放的全部磁能。时间常数 $L/(R_1+R_2)$ 决定释放快慢，两只电阻的阻值比例决定热量分配。

练习 5.4

解　求电荷与电流

按图 5.46 的 $i=\dot q$，由回路得 $L\ddot q+q/C=0$。令 $\omega_0=1/\sqrt{LC}$，试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，则 $\dot q=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot q=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并约去指数，得到 $s^2+\omega_0^2=0$，根为 $\pm\mathrm{j}\omega_0$，故 $q=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$。初电荷给出 $A=q_0$。通解求导为 $i=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t$，初流 $B\omega_0=0$ 给出 $B=0$。所以 $q=q_0\cos\omega_0 t$，再用 $\mathrm{d}(\cos\omega_0 t)/\,\mathrm{d}t=-\omega_0\sin\omega_0 t$ 得 $i=-\omega_0 q_0\sin\omega_0 t$。

首次到达的相位

首次 $q=q_0/2$ 时 $\omega_0 t=\pi/3$，故 $t=\pi/(3\omega_0)$。

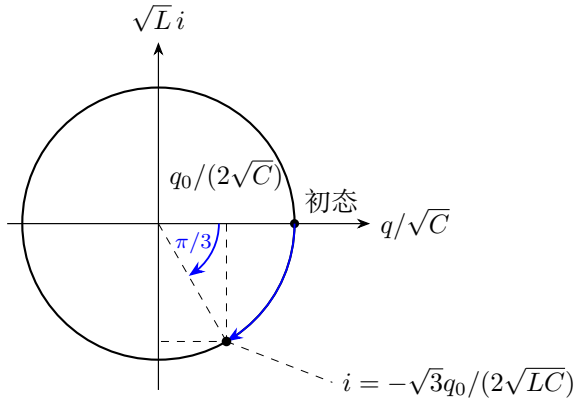


图 5.52: 从右端初态点顺时针运动，第一次到达 $q=q_0/2$ 位于下半圆

电流方向和大小

图 5.52 的电流 $i=-\sqrt{3}\omega_0 q_0/2$，负号表示实际流出所标正极板，大小 $\sqrt{3}q_0/(2\sqrt{LC})$。

此时的能量分配

此时电容场能为 $q_0^2/(8C)$，占初能 $q_0^2/(2C)$ 的 1/4，磁能占 3/4。图 5.52 中，初态到这个位置的转角为 $\pi/3$，角弧从正横轴顺时针量到连向该点的半径。

练习 5.5

解　重根方程的降阶

图 5.47 的特征方程有重根 $-\gamma$，$\gamma = 1/\sqrt{LC}$，原方程为 $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \gamma^2 q = 0$。令 $q = y\mathrm{e}^{-\gamma t}$，则

$$\dot{q} = (\dot{y} - \gamma y)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad \ddot{q} = (\ddot{y} - 2\gamma\dot{y} + \gamma^2 y)\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

代入相消后 $\ddot{y} = 0$。记 $B = \dot{y}(0)$、$A = y(0)$，连续两次定积分：

$$\dot{y}(t) - B = \int_0^t 0 \,\mathrm{d}s = 0, \qquad y(t) - A = \int_0^t B \,\mathrm{d}s = B[s]_0^t = Bt.$$

得到 $\dot{y} = B$、$y = A + Bt$，一般解为 $q = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\gamma t}$。

两个初值求系数

初值给 $A = q_0$，$\dot{q}(0) = B - \gamma A = 0$，所以 $B = \gamma q_0$。

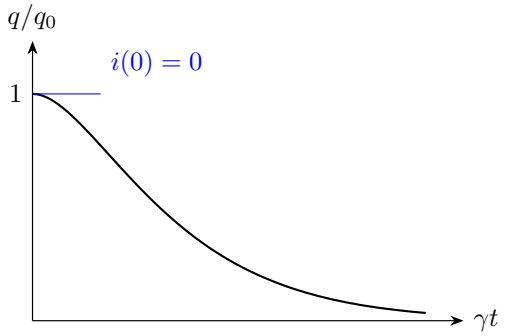


图 5.53: 临界阻尼且初电流为零：曲线从水平切线起步，保持正值并单调趋零

电荷与导数

故图 5.53 的响应 $q = q_0(1 + \gamma t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$，对 $t \geq 0$ 恒正。乘积求导，$i = q_0[\gamma - \gamma(1 + \gamma t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} = -q_0\gamma^2 t\mathrm{e}^{-\gamma t} \leq 0$，电荷单调下降但不穿过零。

当 $t \to \infty$，$t\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 都趋于零，故 q 单调接近零。

练习 5.6

解　连接两段充放电

令图 5.48 中稳定循环的最低、最高电压为 u_-, u_+，$a = \mathrm{e}^{-T/(RC)}$。接 U 的一段满足 $RC\dot{u} = U - u$，从局部时间 0 到 t 积分，

$$\int_{u_-}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}z}{U-z} = \frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}s,$$
$$[-\ln(U-z)]_{u_-}^{u(t)} = \frac{1}{RC}[s]_0^t,$$
$$\ln\frac{U-u_-}{U-u(t)} = \frac{t}{RC}.$$

在 $t = T$ 代入 $u(T) = u_+$，所以 $u_+ = U + (u_- - U)a$。随后接零，从 u_+ 放电到 u_-。在放电阶段另以 $s = 0$ 为起点，满足 $\mathrm{d}u/u = -\mathrm{d}s/(RC)$、$u(0) = u_+$。因此

$$\int_{u_+}^{u(s)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int_0^s \frac{\mathrm{d}\sigma}{RC}, \qquad [\ln\xi]_{u_+}^{u(s)} = -\frac{s}{RC}.$$

到 $s = T$ 时 $u(T) = u_-$，于是 $\ln(u_-/u_+) = -T/(RC)$。取指数并用 $a = \mathrm{e}^{-T/(RC)}$，得 $u_- = au_+$。

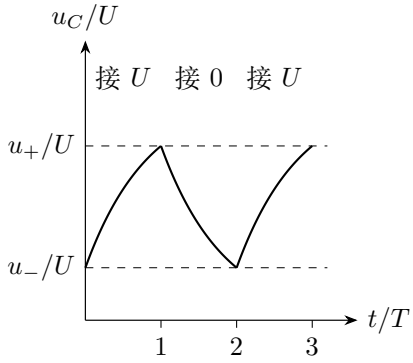


图 5.54: 稳定循环从非零最低值起步。图取 $T/(RC) = 1.2$ 示意，换接点电容电压连续

周期条件

代入图 5.54 的两段连续条件，$u_+ = U(1-a) + a^2u_+$，所以

$$u_+ = \frac{U}{1+a}, \qquad u_- = \frac{aU}{1+a}.$$

长、短换接时间

$T \gg RC$ 时 $a \to 0$，电压几乎在 $0, U$ 间完整充放。$T \ll RC$ 时 $a \to 1$，两者都趋于 $U/2$，波动很小。

循环的稳定性

对任意偏离稳定循环的初电压，充电一段使误差乘 a，放电一段再乘 a，完整周期后为原来的 $a^2 < 1$。误差逐周衰减，因而上述两个极值可由任意有限初态逐渐达到。换接瞬间继承上一段的末电压，成为下一段积分的初值。

电路

物理竞赛一轮讲义

第六讲

电路测量与实验

2026

目录

第六讲　电路测量与实验 **1**

6.1　从线圈偏转到电学测量 1

6.2　伏安法中的仪表接入误差 4

6.3　表头内阻、校准与数据处理 5

6.4　欧姆表的非均匀刻度 8

6.5　非线性元件与故障判断 10

6.6　例题与分析 12

6.7　本讲小结 31

6.8　练习 32

练习解答 34

第六讲　电路测量与实验

6.1　从线圈偏转到电学测量

6.1.1　磁电式表头怎样产生读数

电学测量把电流、电势差或电阻转换为可读的指针偏转。磁电式表头中，线圈处于永久磁铁与软铁芯之间的径向磁场内。电流通过线圈，两侧导线受到方向相反的磁力，形成使线圈转动的力矩。游丝随线圈转动，产生逐渐增大的回复力矩。指针最后停在两个力矩平衡的位置。

设线圈共 N 匝，竖边长 a、宽 b、面积 $S = ab$。从图 6.2 沿转轴看，两条竖边随线圈转过 θ 后，仍沿着磁场所在的径向分布。磁场与两竖边的电流均垂直，每侧磁力为 $NIaB$。磁力沿切向，两条作用线到转轴的距离都为 $b/2$。图 6.1 所示的合力矩为

$$M_B = 2(NIaB)\frac{b}{2} = NISB.$$

游丝的回复力矩大小为 $\kappa\theta$，平衡时 $\kappa\theta = NISB$，所以

$$\theta = \frac{NSB}{\kappa} I.$$

在这一工作范围内，偏转角与电流成正比，电流刻度因而均匀。设满偏电流为 I_g、表头内阻为 R_g，满偏时表头电压为 $U_g = I_g R_g$。附加电阻把较大的端口电压或电流转换为表头内的 0 至 I_g，便得到不同量程的电表。

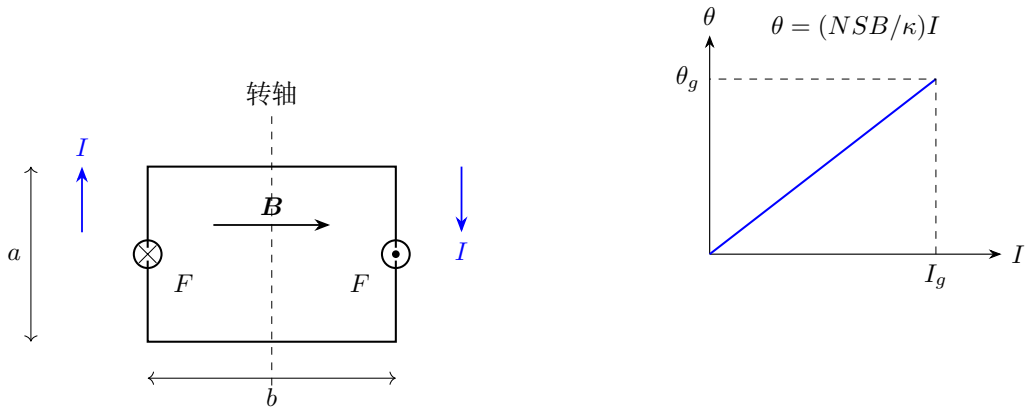


图 6.1: 左图为某一瞬时的线圈平面，圆内叉、点分别表示磁力垂直纸面向里、向外。右图为平衡偏角与电流的关系

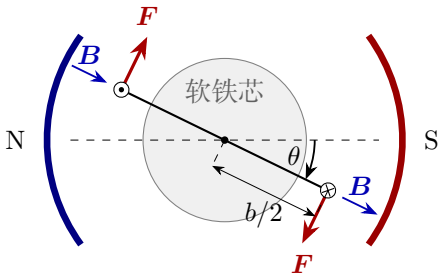


图 6.2: 沿转轴俯视表头。转过角度后，磁场沿线圈半径，磁力沿切向，两侧的力臂都为 $b/2$

例题 1、2 从满偏条件求附加电阻。例题 13 用标准电压表直接测满偏电压，再由 $R_g = U_g/I_g$ 求内阻。

扩大量程为 $U > I_g R_g$ 的电压表时，串联电阻与表头通过同一电流。满量程的回路方程为

$$U = I_g R_s + I_g R_g, \qquad R_s = \frac{U - I_g R_g}{I_g} = \frac{U}{I_g} - R_g.$$

因此仪表总内阻 $R_V = R_s + R_g = U/I_g$。扩大量程为 $I > I_g$ 的电流表时，端口电流分成 I_g 与 $I - I_g$，两支路同电压，故

$$I_g R_g = (I - I_g) R_p, \qquad R_p = \frac{I_g R_g}{I - I_g}.$$

整个电流表的端电压仍为 $I_g R_g$，所以 $R_A = I_g R_g / I$。串联电阻承受的是电压差 $U - I_g R_g$，并联电阻通过的是 $I - I_g$，这两个关系分别来自串联电流相同、并联电压相同。

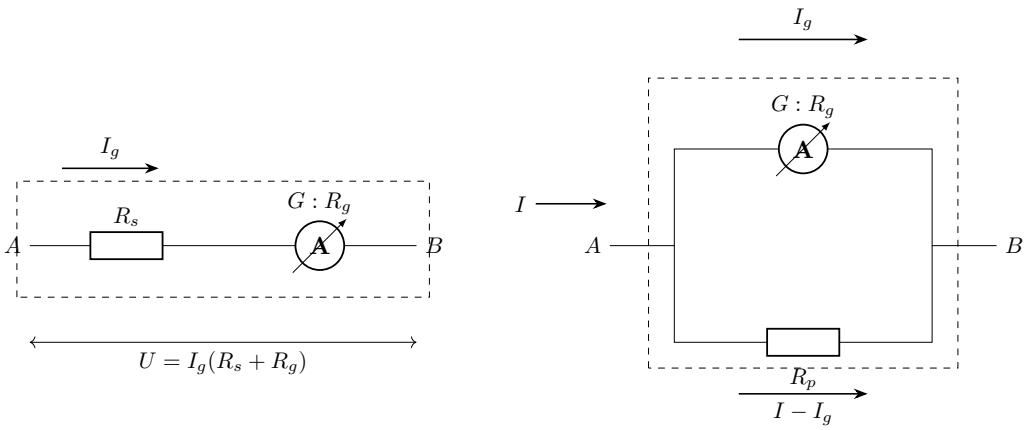


图 6.3: 电压挡把附加电阻串联，电流挡把附加电阻并联。虚框内均包含同一个表头

图 6.3 左图先确定表头所需电压 I_gR_g，剩余电压由 R_s 承担。右图两支路同跨 A,B，故 $I_gR_g=(I-I_g)R_p$。改装后按总端口量重新标度，但线圈的电流上限始终是 I_g。

改装后均匀刻度对应新的端口量：满偏仍通过 I_g，半偏通过 $I_g/2$，但端口读数分别为新量程的全部和一半。例题 5 中的欧姆表则利用同一表头读取电阻，其端口量与电流为分式关系，刻度将随之改变。

用标准电压表与改装电压表跨接同一对端点，逐渐改变实际电压，就能比较两表读数。标准表给出实际端电压，表头偏转给出相应的新刻度。例题 13 先用低电压测裸表头，再接入附加电阻标定新量程，两个开关位置在图中分别画出。

6.1.2 分辨率、量程与功率限制

选择量程时，先由题设估计最大电压、电流，再让常用读数落在表盘易分辨的区域。量程变化同时改变仪表内阻，所以电表也成为被测电路的一部分。实验中的量程、内阻和附加电阻允许功率，需要与实际支路电流、电压相配合。

灯泡额定值给出 $I_N=P_N/U_N$、$R_N=U_N^2/P_N$。这是额定温度下的工作点，低电压时灯丝较冷、电阻较小。描绘从零开始的伏安曲线，可用分压器使输出由零逐渐升高。例题 10 会把额定电流、表的量程和分压器连接放到同一电路中分析。

6.2 伏安法中的仪表接入误差

6.2.1 电压表分流的接法

电压表只跨待测电阻，电流表位于分流点之外时，电流表示数 $I_A = I_x + I_V$，电压表示数 $U_V = I_x R_x$。因 $I_V = U_V/R_V$，若直接以两表读数相除，

$$R_{\text{读}} = \frac{U_V}{I_A} = R_x \parallel R_V < R_x.$$

已知 R_V 后可修正 $R_x = U_V/(I_A - U_V/R_V)$。这种接法适合 $R_x \ll R_V$，因为电压表分流很小。电流表内阻仍影响电源所需总电压，但没有被包含在电压表示数对应的待测电阻范围内。

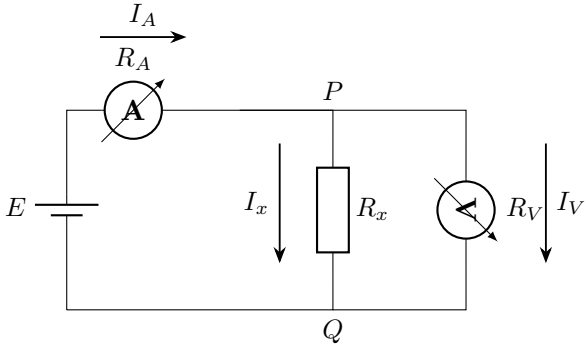


图 6.4: 电压表仅跨待测电阻，电流表读总分流

6.2.2 电流表分压的接法

电压表跨待测电阻和电流表串联部分，电流表恰读待测电阻电流时，有 $U_V = I_A(R_x + R_A)$，因此

$$R_{\text{读}} = R_x + R_A > R_x, \qquad R_x = \frac{U_V}{I_A} - R_A.$$

当 $R_x \gg R_A$ 时，电流表压降占被测电压的比例小，适合较大电阻。两表内阻已知时，两种接法都可用上式修正。例题 4 分别给出具体读数和误差。

若只比较未修正的相对误差，前一接法为 $R_x/(R_x+R_V)$，后一接法为 R_A/R_x。令二者相等并交叉相乘，

$$\frac{R_x}{R_x + R_V} = \frac{R_A}{R_x} \quad \Longrightarrow \quad R_x^2 - R_A R_x - R_A R_V = 0.$$

用求根公式并舍去负根，得到临界阻值

$$R_* = \frac{R_A + \sqrt{R_A^2 + 4R_AR_V}}{2} = \frac{R_A}{2} + \sqrt{R_AR_V + \frac{R_A^2}{4}}.$$

当 $R_V \gg R_A$ 时，根号内 $R_A^2/4$ 相对 R_AR_V 很小，而 $R_A/2$ 也远小于 $\sqrt{R_AR_V}$，因此 $R_* \simeq \sqrt{R_AR_V}$。这一估计建立在忽略其他误差并且阻值可预估的条件下。

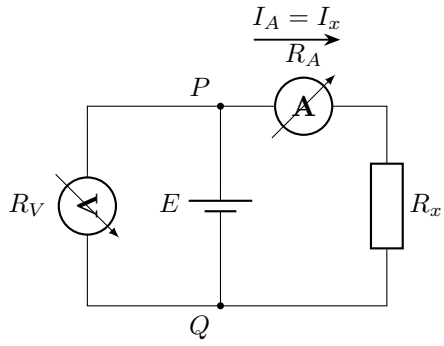


图 6.5: 电压表包含电流表内阻的压降

图 6.4 中 P, Q 恰是待测电阻的两个端点，电流表示数 I_A 减去电压表支路电流 I_V，就是流过 R_x 的电流。图 6.5 的电压表则跨 P, Q，它所测的电势差是电流表和待测电阻两段串联压降之和。先沿图追踪测量路径，再决定修正项，就能判断未修正结果分别偏低、偏高。

6.3 表头内阻、校准与数据处理

6.3.1 半偏法的近似来自何处

电源经大串联电阻 R_1 使表头满偏，再在表头两端并联可调电阻 R_2，调至表头电流减为一半。若串联电阻远大于表头内阻，并联前后总电流近似不变，分流电阻通过另一半电流，所以常近似取 $R_g \simeq R_2$。

精确计算能说明误差方向。忽略电源内阻，并联前 $I_g = E/(R_1 + R_g)$。并联后的等效电阻为 $R_p = R_gR_2/(R_g + R_2)$，并联部分电压为 $U_p = ER_p/(R_1 + R_p)$。表头电流因此为

$$I_g' = \frac{U_p}{R_g} = \frac{ER_2}{R_1R_g + R_1R_2 + R_gR_2}.$$

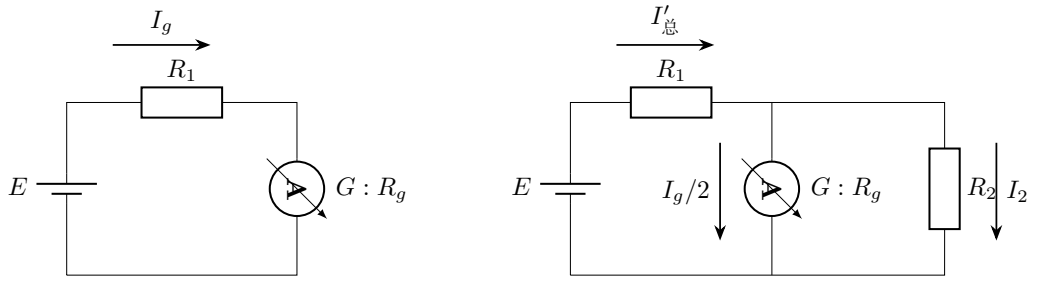
令 $I_g' = I_g/2 = E/[2(R_1 + R_g)]$，消去 E 并交叉相乘：

$$2R_2(R_1 + R_g) = R_1R_g + R_1R_2 + R_gR_2,$$
$$R_2(R_1 + R_g) = R_1R_g.$$

分别把 R_2 与 R_g 作为未知量解出，得

$$R_2 = \frac{R_1 R_g}{R_1 + R_g} < R_g, \qquad R_g = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}.$$

因此直接把 R_2 当作表头内阻会偏小。提高电源电压并增大 R_1，可保持满偏电流 I_g，同时使 $R_2/R_g = R_1/(R_1 + R_g)$ 更接近 1。并联后串联电阻通过的总电流增大，选择其额定功率时用较大的 $I'_{\text{总}}$ 计算 $R_1(I'_{\text{总}})^2$。



并联前　　并联后

图 6.6: 满偏与半偏是两个不同电路。右侧总输入电流增加，表头与分流电阻的电流之和为新的总电流

图 6.6 右侧并联部分的等效电阻小于原表头内阻，所以 $I'_{\text{总}} > I_g$，分流支路电流 $I_2 = I'_{\text{总}} - I_g/2 > I_g/2$。两并联支路电压相同，从 $I_2 R_2 = (I_g/2)R_g$ 立即得到 $R_2 < R_g$，这也从分流过程说明了半偏读数偏小的原因。

6.3.2　电源伏安直线与斜率单位

电源满足端电压 $U = E - rI$。绘制 $U - I$ 图像时，纵轴截距为 E、斜率为 $-r$，但横轴若用 mA，每 mA 对应的电压变化须乘 10^3 才是欧姆。例如斜率 $-0.20\,\text{V/mA}$ 表示 $-200\,\Omega$。

测同一个电源时，每一组电流、电压在图 6.7 上给出一个点。横坐标用 $x = I/(1\,\text{mA})$，纵坐标用 $y = U/(1\,\text{V})$。设直线为 $y = A - Bx$。在第 j 个电流 x_j 处，测量点与直线的纵向差为 $\varepsilon_j = y_j - A + Bx_j$。把各点的差平方后相加，

$$S(A, B) = \sum_{j=1}^{N} (y_j - A + Bx_j)^2.$$

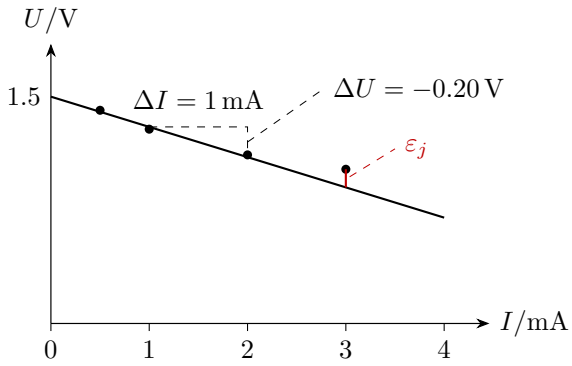


图 6.7: 虚线三角形给出拟合直线的斜率。右侧红线段是一个测量点与直线在同一电流处的纵向差

图 6.7 的读数斜率约为 $-0.20\,\mathrm{V/mA}$。用国际单位计算应先将横向变化写成 $10^{-3}\,\mathrm{A}$，故电阻为 $0.20/10^{-3} = 200\,\Omega$。红线段是同一个 x_j 上的测量点与拟合值之差 ε_j。最小二乘法调节直线的位置和倾斜程度，使这些线段对应的平方和最小。

求 A 的偏导时保持 B 不变，括号内对 A 的导数为 -1。求 B 的偏导时保持 A 不变，括号内的导数为 x_j。由链式法则，

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \sum_j 2(y_j - A + Bx_j)(-1) = 0,$$
$$\frac{\partial S}{\partial B} = \sum_j 2(y_j - A + Bx_j)x_j = 0.$$

第一式给出 $A = \bar{y} + B\bar{x}$，其中横线表示 N 次测量的平均值。代入第二式，

$$\sum_j x_j(y_j - \bar{y}) + B\sum_j x_j(x_j - \bar{x}) = 0.$$

再用 $\sum_j (x_j - \bar{x}) = 0$，把两处求和中的 x_j 换成 $x_j - \bar{x}$，得到

$$B = -\frac{\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2}, \qquad A = \bar{y} + B\bar{x}.$$

只要所取电流中至少有两个不同值，分母便为正。若将得到的 A, B 分别改动 $\delta A, \delta B$，平方和的增量中一次项由上面两个方程消去，只剩 $\sum_j (-\delta A + x_j \delta B)^2$。因此这组系数给出最小值。例 6.12 用六组数据计算 A, B，再把图上斜率换算成电阻。

当电压表跨电池本身时，它的电流也经过电池内阻。当电流表读电池总电流而电压表跨负载时，电流表内阻的压降又可能被排除在电压读数外。仪表接法使拟合变量偏离真实端量，因此应先根据实际跨接点求读数直线，再解释参数。

6.4　欧姆表的非均匀刻度

6.4.1　内电源与电阻刻度

图 6.8 把内电池、表头和调零电阻 R_0 串联，再通过黑、红表笔连接待测电阻 R_x。黑表笔连内电源正侧，外部常规电流经 R_x 从黑流向红。表头和 R_0 同样被这个回路电流穿过。将表笔短接时调到满偏，内部总电阻 $R_m = E/I_g$。接入 R_x 后

$$I = \frac{E}{R_m + R_x}, \qquad \frac{I}{I_g} = \frac{1}{1 + R_x/R_m}.$$

当 $I/I_g = 1/2$ 时，$1 + R_x/R_m = 2$，所以 $R_x = R_m$，称为中值电阻。$R_x = 0$ 对应满偏端，$R_x \to \infty$ 对应零电流端。由分式关系可见，电阻增加相同数值时，电流的减少量随工作点改变，因此电阻刻度不均匀。

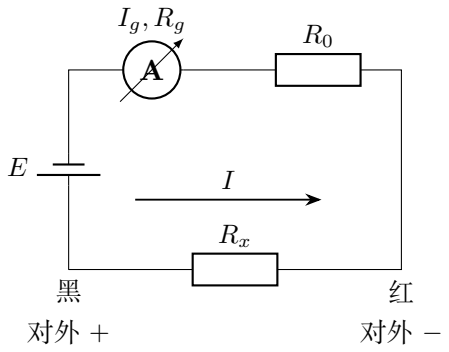


图 6.8: 串联式欧姆表及内部电流方向

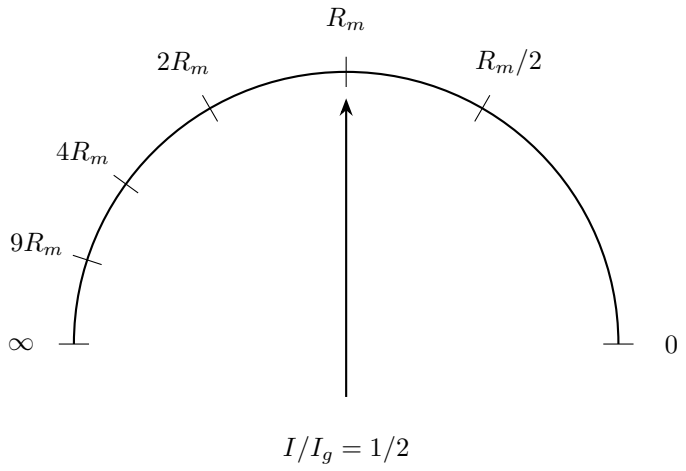


图 6.9: 指针偏角对电流均匀，对电阻不均匀。图中中间偏转对应 $R_x = R_m$

图 6.9 中，阻值与电流比的对应关系为

R_x/R_m	0	1/2	1	2	4	9	∞
I/I_g	1	2/3	1/2	1/3	1/5	1/10	0

越接近零电流端，相同的较大电阻差占据的偏角越小。换倍率是把待测阻值移到较易分辨的区域，刻度的分式关系保持相同，倍率改变其对应的实际阻值。

6.4.2 调零、换挡与表笔极性

机械调零把无电流时的指针置于零电流刻度。欧姆调零则在表笔短接时，使当前量程达到满偏。换倍率后先短接表笔调欧姆零，再接入与外部电源、旁路隔离的被测电阻。测量电流由欧姆表内电池提供。例题 6 把倍率选择与调零、读数联系起来。

常见模拟式串联欧姆表的内部电源使测电阻时黑表笔对外为正、红表笔为负，外电流从黑笔经被测物回到红笔。对无极性电阻，交换表笔不改结果。对二极管或其他非线性元件，会改变工作方向。数字表及不同内部结构的表可能另有极性，解题和实验应以给定电路为准。

内电池电动势改变时，重新调零使 $R_m = E/I_g$ 随之改变。电阻刻度原来按旧 E 标定，因此非零电阻读数会产生系统变化。例题 7 用新、旧两个中值电阻写出同一偏转角对应的真实值与刻度值，求出偏差因子。

6.5　非线性元件与故障判断

6.5.1　灯泡伏安曲线与电阻的两种定义

白炽灯在 $U=0$ 时 $I=0$。通电后灯丝升温，电阻随温度升高而增大，伏安曲线从原点向上弯曲。图上某点 U/I 是该工作点的静态电阻，切线斜率 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$ 则描述小变化的微分电阻。曲线弯曲时二者不等。求功率仍用 UI，把 U^2/R 或 I^2R 用在不同工作点时，要同时更新该点的电阻。

设图 6.10 中 P 点的微分电阻为 $r_d=\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$，沿曲线有 $\mathrm{d}U=r_d\,\mathrm{d}I$。把 $P_L=UI$ 用乘积法则求微分，得到

$$\mathrm{d}P_L=U\ \mathrm{d}I+I\ \mathrm{d}U=(U+Ir_d)\ \mathrm{d}I.$$

横坐标换成 I^2 时，$\mathrm{d}(I^2)=2I\ \mathrm{d}I$。横坐标换成 U^2 时，$\mathrm{d}(U^2)=2U\ \mathrm{d}U=2Ur_d\ \mathrm{d}I$。在 $I,U,r_d>0$ 的工作点，

$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}(I^2)}=\frac{U+Ir_d}{2I},\qquad \frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}(U^2)}=\frac{U+Ir_d}{2Ur_d}.$$

这些是单个工作点的切线斜率。例 6.11 给出离散数据，取相邻两点的功率差除以对应的平方坐标差，所得是两点连线的斜率。

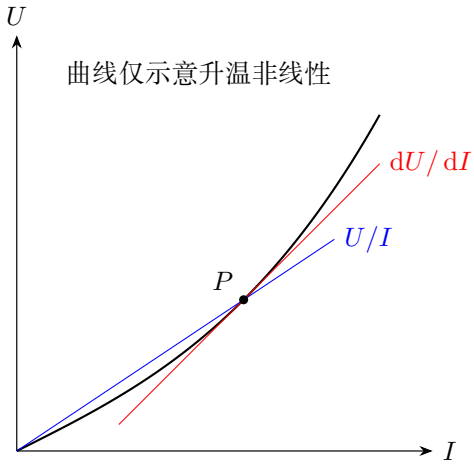


图 6.10: 同一工作点的静态电阻由原点割线确定，小变化的微分电阻由切线确定

图 6.10 在同一工作点 P 画出从原点到 P 的割线与经过 P 的切线。前者斜率为该点的 U/I，后者为该点的 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$。沿曲线移动，灯丝温度随工作状态改变，两种斜率也各自改变。

描绘从零开始的伏安曲线通常采用分压连接，使输出端在滑片处于起始端时可以近似为零。电流、电压表的接入应根据灯泡阻值与仪表内阻选择，必要时对读

数修正。增加低电压区数据有助于表现曲率。实验曲线应连接成平滑趋势，不用折线把各随机波动放大为物理结构。

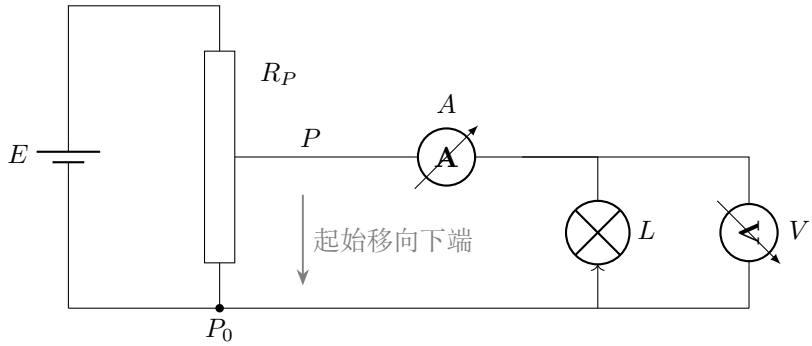


图 6.11: 分压连接中滑片输出单独供给电表和灯泡。起始接近下端 P_0，负载电压近零

图 6.11 中电源接在滑动电阻的两个固定端，负载取滑片 P 与下端 P_0 之间的电压。电压表仅跨灯泡，电流表读灯泡与电压表的总分流。滑片位于 P_0 时两输出端等势。若只把变阻器串入灯泡回路，对应的是限流接法，输出的最小值由串联总电阻决定。

6.5.2 断路、漏电和测量路径

断开外部电源并隔离其他通路后，欧姆表内电池在被测段中建立测试电流。电阻有限时有电流，断开的两端则没有稳恒电流，指针留在无穷大端。沿接线逐段测量，每次把读数对应到实际跨接的两个点，就能逐步定位断点。练习 5 以两只灯泡和一段连接线为例。

电容接入欧姆表时，仪表内电池先给电容充电，电流逐渐减小。理想电容最后达到内电池电压，电流趋零，指针回到无穷大端。带有并联漏电电阻的电容，则在充电结束后保留稳恒电流。例题 9 把指针回移与充电方程相接，再由稳定偏转求漏电电阻。

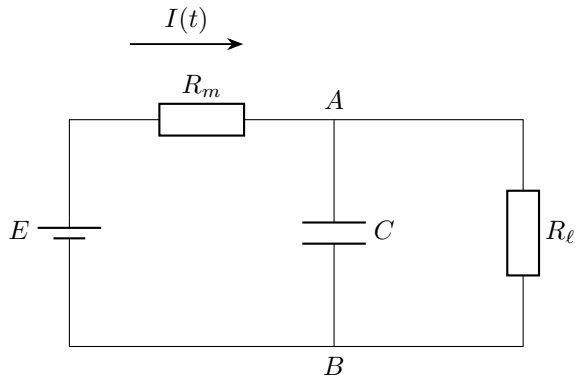


图 6.12: 欧姆表内部源经总电阻 R_m 给电容充电。稳定偏转需沿并联漏电路径解释

图 6.12 中，初始未带电电容给出 $I(0^+) = E/R_m = I_g$。长时间后，电容电流趋零，漏电支路通过 $I_\infty = E/(R_m + R_\ell)$。初、终态与其间的指数过渡共同决定指针的运动。

6.6　例题与分析

例 6.1 (表头改装的两种量程)**.** 表头满偏电流 I_g、内阻 R_g。分别改成量程 $U > I_g R_g$ 的电压表和量程 $I > I_g$ 的电流表，求所需电阻、仪表总内阻及附加电阻满量程时的功率。

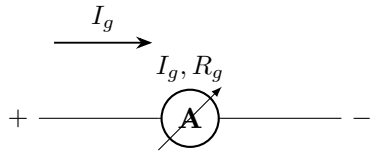


图 6.13: 表头的满偏电流方向及对应端电压

解　电压量程

图 6.13 取电流流入端为电压正端，表头满偏压降为 $U_g = I_g R_g$。要扩大量程须有 $U > U_g$。串联电阻承担剩余压降，且与表头通过同一电流。

$$R_s = \frac{U - I_g R_g}{I_g} = \frac{U}{I_g} - R_g, \qquad R_V = R_s + R_g = \frac{U}{I_g}.$$

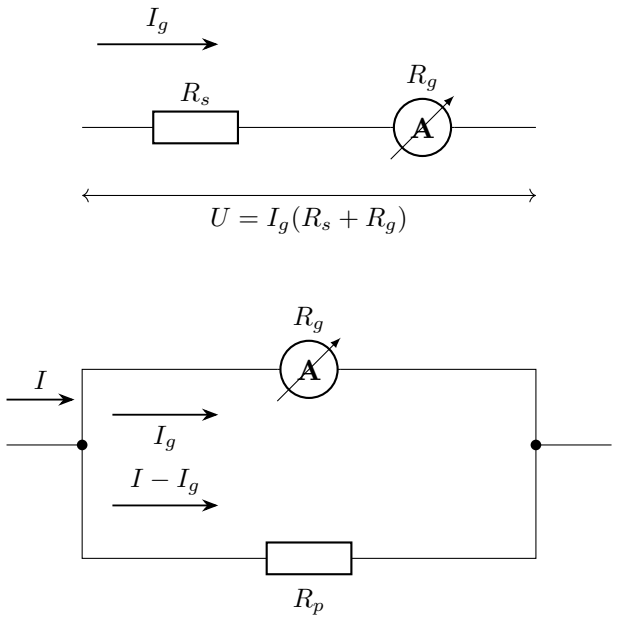


图 6.14: 上图串联分压，下图并联分流。两条支路电流由同一端口电压约束

电流量程

图 6.14 下图中，端口输入 I，表头通过 I_g，其余 $I - I_g$ 经 R_p。由 $I_g R_g = (I - I_g)R_p$ 得

$$R_p = \frac{I_g R_g}{I - I_g}, \qquad R_A = \frac{I_g R_g}{I}.$$

附加电阻的功率

满量程时，串联电阻通过 I_g，故 $P_s = I_g^2 R_s = I_g(U - I_g R_g)$。分流电阻通过 $I - I_g$，故

$$P_p = (I - I_g)^2 R_p = I_g R_g (I - I_g).$$

两附加电阻分别承担扩展量程所需的电压差和电流差，可按相应功率选择器件。

例 6.2 (半偏法的仪器选择与改装)**.** 表头 $I_g = 500\,\mu\text{A}$、内阻约 $100\,\Omega$。有 $999.9\,\Omega$、$99999.9\,\Omega$ 两电阻箱，以及 $200\,\Omega$、$2\,\text{k}\Omega$ 滑动变阻器和 $2,6\,\text{V}$ 电源。用半偏法测内阻，选择串联与并联调节元件。若测得 $R_g = 105.0\,\Omega$，改成 $10\,\text{V}$ 表应串联多大电阻?

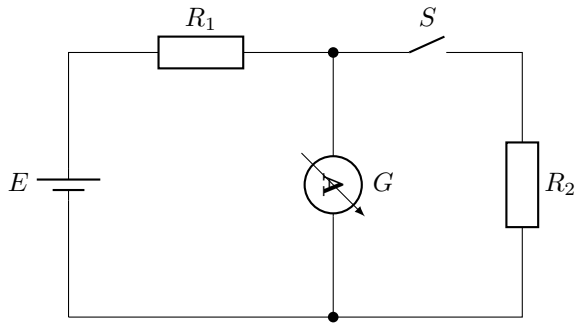


图 6.15: 半偏实验先断开并联开关，再保持串联电阻不变合上开关

解　串联电阻与电源

图 6.15 先断开 S，调 R_1 使表头满偏。用 $6\,\text{V}$ 电源时

$$R_1 \simeq \frac{6}{500\times 10^{-6}} - 100 = 11900\,\Omega.$$

因此串联采用 $99999.9\,\Omega$ 电阻箱。若用 $2\,\text{V}$，所需 $3900\,\Omega$ 也须大箱，但 R_g/R_1 较大。在给定器材中用 $6\,\text{V}$ 更能减小半偏近似误差。

半偏时的分流

合上 S 后只调 R_2，使表头减为 $250\,\mu\text{A}$。所需 R_2 接近 $100\,\Omega$，采用 $999.9\,\Omega$ 电阻箱便于准确读数。

进一步求半偏时的实际关系：满偏时 $E = I_g(R_1 + R_g)$。半偏时并联端电压为 $I_gR_g/2$，分流电流为 $I_gR_g/(2R_2)$，故

$$E = R_1\left(\frac{I_g}{2} + \frac{I_gR_g}{2R_2}\right) + \frac{I_gR_g}{2}.$$

消去 E, I_g，先得 $2(R_1 + R_g) = R_1 + R_1R_g/R_2 + R_g$，再得

$$R_2(R_1 + R_g) = R_1R_g, \qquad R_2 = \frac{R_1R_g}{R_1 + R_g} < R_g.$$

相同电源下并联后总电流略增，分流支路通过的电流略大于表头电流，所以 $R_2 < R_g$。

改装十伏电压表

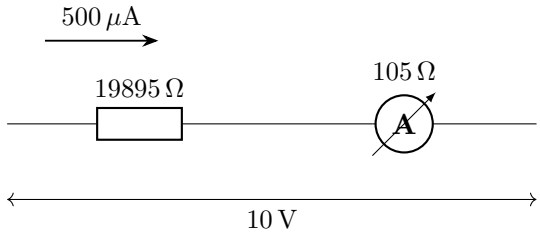


图 6.16: 改装后的整个端口承受十伏。表头本身只承受 I_gR_g

按题给 $R_g = 105.0\,\Omega$ 作为已测得内阻，图 6.16 要求

$$R_s = \frac{10}{500 \times 10^{-6}} - 105 = 19895\,\Omega, \qquad R_V = 20000\,\Omega.$$

满量程时，附加电阻压降 9.9475 V，表头压降 0.0525 V，合计恰为 10 V。

例 6.3 (同一电压表依次测串联大电阻)**.** R_1, R_2 串联接理想恒压源 U。内阻 R_V 的同一电压表依次跨接两电阻，读数 U_1, U_2。求两读数、比值与和，判断有限内阻是否必然使比值也失真。

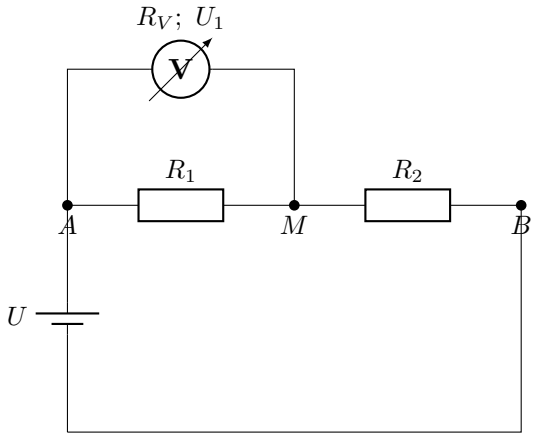


图 6.17: 第一次测量：电压表跨在 A, M 间，恒压源始终接在 A, B 间

解　第一次跨接

图 6.17 中 $R_1' = R_1R_V/(R_1 + R_V)$ 与 R_2 串联，A, B 间电压仍为 U。所以

$$U_1 = U\frac{R_1'}{R_1' + R_2} = \frac{UR_1R_V}{D}, \qquad D = R_1R_2 + R_V(R_1 + R_2).$$

第二次跨接

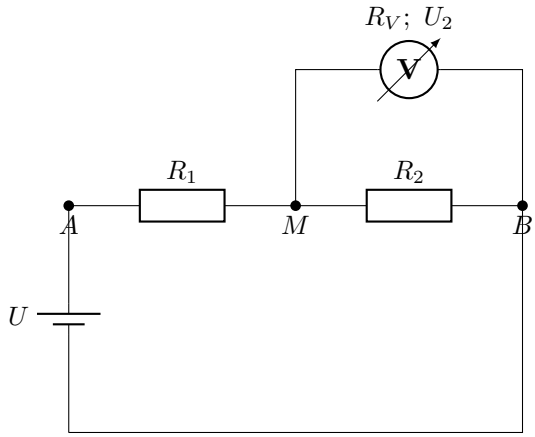


图 6.18: 第二次跨接 M, B。此时被分流的是 R_2，不与第一次测量同时发生

图 6.18 中改为 $R_2' = R_2 R_V/(R_2 + R_V)$，于是

$$U_2 = U\frac{R_2'}{R_1 + R_2'} = \frac{U R_2 R_V}{D}.$$

读数比与读数和

由于是同一只表，两式有共同分母，故 $U_1/U_2 = R_1/R_2$ 精确成立。但

$$U_1 + U_2 = U\frac{R_V(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_V(R_1 + R_2)} < U.$$

每次跨接都把该电阻与表内阻并联，相应读数比空载分压小。两次加载的共同分母在比值中抵消。在读数和中则保留下来，使其小于 U。$R_V \to \infty$ 时，分流趋零，读数和趋于 U。

例 6.4 (两种伏安接法的修正)**.** 测得 $U_V = 6.00\,\mathrm{V}, I_A = 0.100\,\mathrm{A}$，已知 $R_A = 1.00\,\Omega, R_V = 3000\,\Omega$。分别求电压表仅跨 R_x 与电压表跨 $R_x + R_A$ 时的真实电阻及未修正误差。

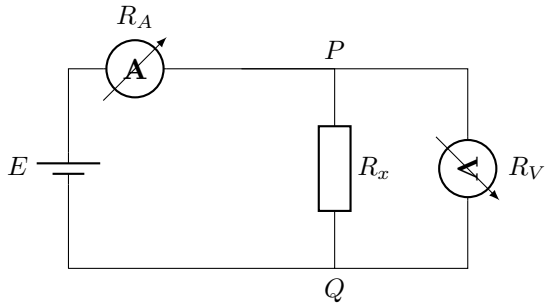


图 6.19: 题设：两种伏安接法的修正

解　扣除电压表分流

图 6.19 中 P, Q 间电压就是 U_x，电流表却读两支路电流之和。由节点 P 的电流守恒，

$$I_V = \frac{6}{3000} = 0.00200\,\mathrm{A}, \qquad I_x = I_A - I_V = 0.0980\,\mathrm{A},$$

故 $R_x = 6/0.0980 = 61.2245\,\Omega$。未修正值 $R_{测} = 60.0\,\Omega$，相对误差为

$$\frac{R_{测} - R_x}{R_x} = -2.00\%.$$

扣除电流表压降

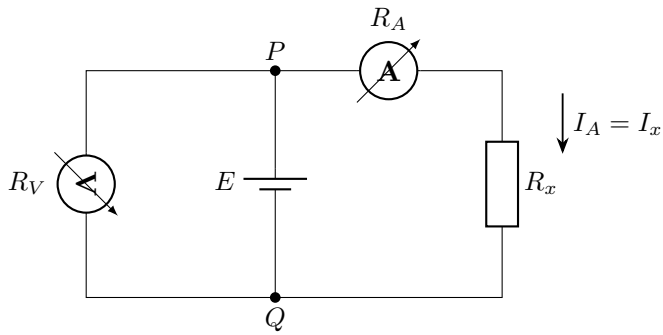


图 6.20: 电流表只读 I_x，电压表跨整个 P, Q 端口，含 R_A 的压降

图 6.20 中 $I_x = I_A$，而 $U_x = U_V - I_A R_A$，所以

$$R_x = \frac{U_V}{I_A} - R_A = 59.0\,\Omega, \qquad \frac{60.0 - 59.0}{59.0} = +1.69\%.$$

误差方向

电压表仅跨 R_x 时，电流表多读一股分流，直接相除得到较小阻值。电压表跨 $R_x + R_A$ 时，多读电流表压降，直接相除得到较大阻值。

例 6.5 (欧姆表的中值与读数)**.** 串联欧姆表电池 $E = 1.5\,\mathrm{V}$，表头 $I_g = 300\,\mu\mathrm{A}, R_g = 100\,\Omega$，电池内阻 $0.5\,\Omega$。短接调满偏后，求调节电阻、中值电阻。测量时表头电流为满偏的 $1/3$，求待测电阻。

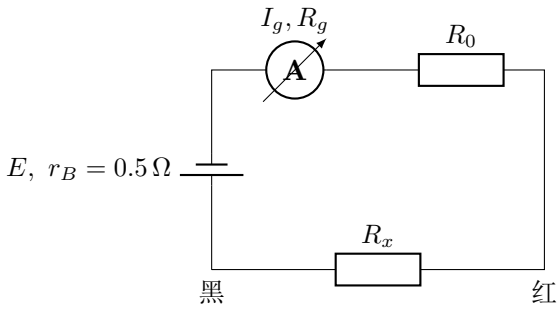


图 6.21: 题设：欧姆表的中值与读数

解　短接调满偏

图 6.21 中短接时内部总电阻 $R_m = E/I_g = 1.5/(300 \times 10^{-6}) = 5000\,\Omega$。除去表头和电池内阻，调节电阻 $R_0 = 5000 - 100 - 0.5 = 4899.5\,\Omega$。

偏转与电阻

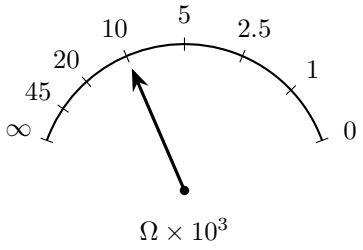


图 6.22: 左端为零电流，右端为满偏。指针所示的 $I_g/3$ 对应 $10\,\mathrm{k}\Omega$

图 6.22 电流比 $f = I/I_g$ 满足 $f = R_m/(R_m + R_x)$，所以 $R_x = R_m(1/f - 1)$。

中值与三分之一偏转

$f = 1/2$ 时，$R_x = R_m(2-1) = 5.00\,\mathrm{k}\Omega$。$f = 1/3$ 时，$R_x = R_m(3-1) = 10.0\,\mathrm{k}\Omega$。偏转减小对应外接电阻增加，分式换算给出它在表盘上的位置。

例 6.6 (从低阻测量换到千欧测量)**.** 模拟多用表刚用 $\Omega\times 1$ 测过约 $10\,\Omega$ 电阻，接着测约 $2\,\mathrm{k}\Omega$。中值基础刻度为 $20\,\Omega$。选择倍率、调零顺序，并说明图示半偏时读数。

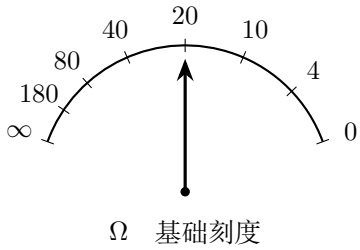


图 6.23: 题设：从低阻测量换到千欧测量

解 选择倍率

图 6.23 基础中值为 $20\,\Omega$，若选择倍率 k，实际中值为 $20k\,\Omega$。测约 $2\,\mathrm{k}\Omega$，应取 $k=100$，使指针接近半偏、刻度较易分辨。

换挡与调零

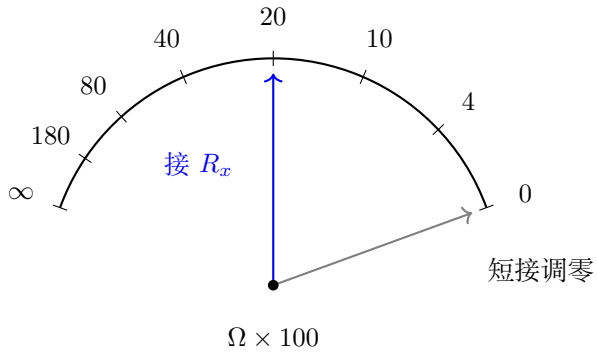


图 6.24: 同一基础刻度上的两个状态：短接时到右端零欧，接待测电阻后回到中值

改变倍率后，先短接两表笔，调欧姆零使指针到图 6.24 右端 $0\,\Omega$。再断开表笔，接入与外部电源隔离的电阻。机械调零在无电流时进行。这里换倍率后调的是表笔短接时的满偏位置。

读出电阻

接入后半偏对应基础刻度 20，所以 $R_x=20\times 100=2.0\,\mathrm{k}\Omega$。在 $\times 1$ 挡测同一电阻，$I/I_g=20/(20+2000)\simeq 0.00990$，几乎停在无穷大端，说明换挡改善的是读数分辨率。

例 6.7 (电池变弱后欧姆表的系统偏差)**.** 原标定电池电动势 E，满偏电流 I_g。后来电池电动势降为 $E' < E$，仍能通过调节电阻使表笔短接满偏。沿用原电阻刻度时，同一待测电阻 R_x 将读大还是读小？求读数表达式。

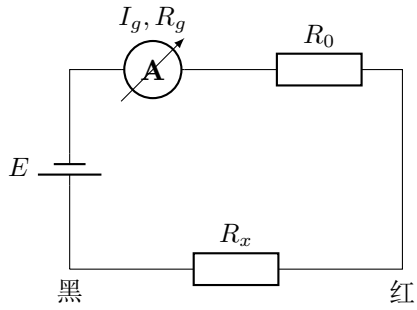


图 6.25: 题设：电池变弱后欧姆表的系统偏差

解　重新调零后的中值

图 6.25 原标定满足 $R_m = E/I_g$。电池变弱后仍能短接满偏，说明调节后的实际内部总电阻为 $R'_m = E'/I_g < R_m$。接入同一 R_x 时

$$f = \frac{I}{I_g} = \frac{R'_m}{R'_m + R_x}, \qquad R_x = R'_m \left(\frac{1}{f} - 1\right).$$

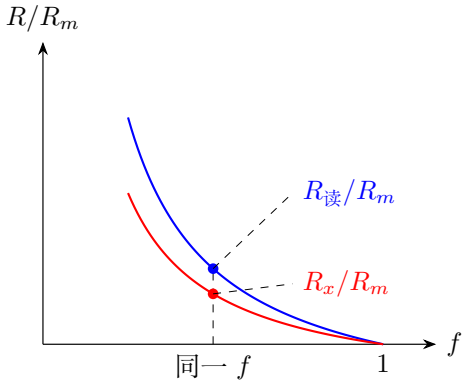


图 6.26: 同一电流比按原刻度换算会读大。图仅以 $E'/E = 2/3$ 示意，两交点共用同一条竖直线

按原刻度读数

图 6.26 原刻度仍使用旧中值 R_m，故

$$R_{读} = R_m(1/f - 1) = \frac{R_m}{R'_m} R_x = \frac{E}{E'} R_x > R_x.$$

整个刻度的变化

对同一个非零 R_x，新的中值较小，电流比 f 也较小，指针更靠近大电阻端。旧刻度用较大的 R_m 换算，因而把读数放大 E/E' 倍。短接点仍满足 $R_x = 0$ 和满偏条件。

例 6.8 (模拟欧姆表测二极管反向电阻)**.** 给定模拟串联欧姆表，黑表笔接内电池正侧，红表笔接负侧。如何连接二极管以测反向电阻？换量程后需怎样操作？为什么不同挡读数可能不同？

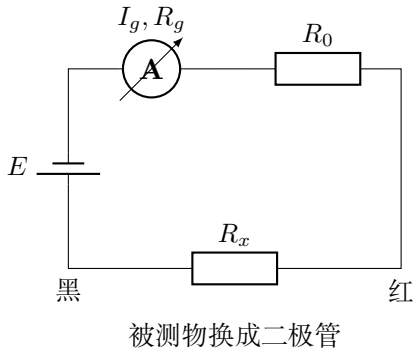


图 6.27: 题设：模拟欧姆表测二极管反向电阻

解　反向接法

图 6.27 的外部测量电流由黑表笔流出。反向偏置要求阴极电势高于阳极，所以黑笔接阴极、红笔接阳极。若相反连接，则变成正向测量。

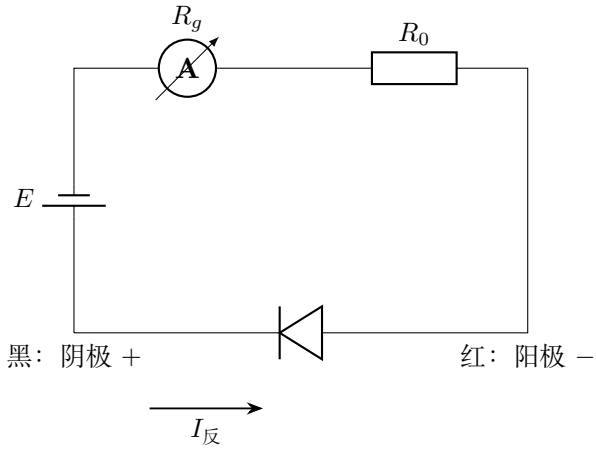


图 6.28: 二极管接入欧姆表的完整回路。竖线一侧为阴极，黑笔使其处于较高电势

换挡后的调零

换倍率后先短接表笔重新调零，再按图 6.28 接回二极管。测试电压按给定仪表挡位和二极管允许反向电压选取，偏转较小时在相应大电阻刻度读取。

工作点电阻

仪表内电池电压、串联电阻与二极管伏安关系共同确定工作点 $(U_D, I_{反})$。刻度换算的是这一点的 $U_D/I_{反}$。换挡后工作点可能变化，读出的反向电阻也会随之改变。漏电流很小时，稳定指针靠近无穷大端。

例 6.9 (用欧姆表观察电容充电与漏电)**.** 一个起初未带电的电容接到串联欧姆表两笔之间。若理想无漏电，描述指针变化。若稳定后表头仍有满偏电流的 1/6，仪表中值电阻为 R_m，求等效漏电电阻。

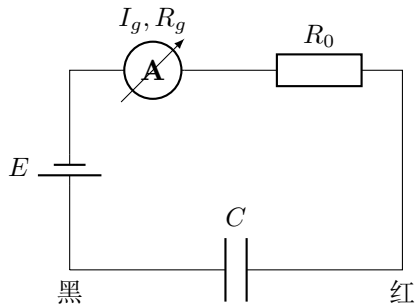


图 6.29: 题设：用欧姆表观察电容充电与漏电

解　理想电容的充电

图 6.29 的电容初电压为零。以 R_m 表示调零后的内部总串联电阻，接入瞬间近似短路，$i(0^+) = E/R_m = I_g$。随后电容充电。记电容电压为 $u(t)$，从电源到电容列回路方程 $E = R_m i + u$，再用 $i = C\,\mathrm{d}u/\,\mathrm{d}t$，得到

$$R_m C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = E - u, \qquad u(0) = 0.$$

令 $w = E - u$，则 $\mathrm{d}w = -\,\mathrm{d}u$、$w(0) = E$，于是

$$\frac{\mathrm{d}w}{w} = -\frac{\mathrm{d}t}{R_m C}, \qquad \int_E^{w(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{R_m C}.$$

两边的原函数和端点分别为

$$[\ln \xi]_E^{w(t)} = -\frac{1}{R_m C}[s]_0^t, \qquad \ln\frac{w(t)}{E} = -\frac{t}{R_m C}.$$

初值 $E > 0$，偏差 w 保持正号，取指数后

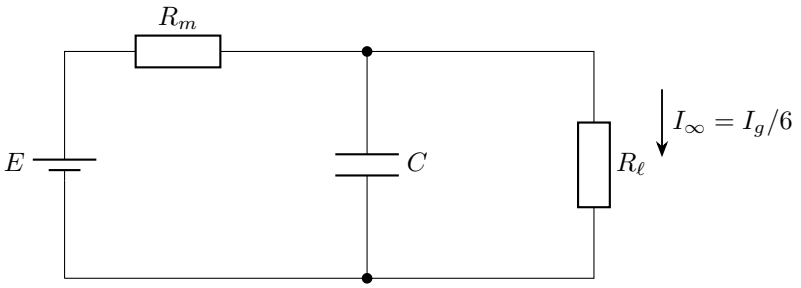
$$w(t) = Ee^{-t/(R_m C)}, \qquad u(t) = E\big[1 - e^{-t/(R_m C)}\big].$$

代回 $i=(E-u)/R_m=w/R_m$，得到

$$i(t)=I_g\exp[-t/(R_mC)]\longrightarrow 0.$$

指针从小电阻侧向大电阻侧回移，最终指向无穷大。

稳态漏电支路



稳态 $i_C=0$

图 6.30: 欧姆表内电源通过 R_m 给 C 与 R_ℓ 供电。稳态电流只走漏电支路

图 6.30 中稳态电容支路不通直流，故

$$\frac{I_\infty}{I_g}=\frac{E/(R_m+R_\ell)}{E/R_m}=\frac{1}{6},\qquad R_\ell=5R_m.$$

带漏电时的指针变化

有漏电时，图 6.30 的输入电流分成充电电流与漏电电流，故

$$\frac{E-u}{R_m}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u}{R_\ell}.$$

移项后定义

$$u_\infty=\frac{ER_\ell}{R_m+R_\ell},\qquad \tau=\frac{CR_mR_\ell}{R_m+R_\ell},$$

方程化为 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=(u_\infty-u)/\tau$。令 $z=u_\infty-u$，则 $\mathrm{d}z/z=-\mathrm{d}t/\tau$。初始未带电，$z(0)=u_\infty$，积分得

$$\int_{u_\infty}^{z(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=-\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\tau},$$

$$[\ln\xi]_{u_\infty}^{z(t)}=-\frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$

$$\ln\frac{z(t)}{u_\infty}=-\frac{t}{\tau}.$$

于是 $u(t)=u_\infty[1-e^{-t/\tau}]$，仪表读到的总电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{E-u(t)}{R_m} = \frac{E-u_\infty}{R_m} + \frac{u_\infty}{R_m}e^{-t/\tau} \\ &= I_\infty + (I_g - I_\infty)e^{-t/\tau}. \end{aligned}$$

这里 $(E-u_\infty)/R_m = E/(R_m+R_\ell) = I_\infty$，且 $\tau = (R_m \parallel R_\ell)C$。因此电流由 I_g 减小到非零的 I_∞，指针回移后停在有限阻值。

例 6.10 (六伏三瓦灯泡的伏安实验)**.** 灯泡额定 $6\,\mathrm{V}, 3\,\mathrm{W}$。有电压表 $6\,\mathrm{V}, 20\,\mathrm{k\Omega}$，电流表 $3\,\mathrm{A}, 0.2\,\Omega$ 或 $0.6\,\mathrm{A}, 1\,\Omega$。滑动变阻器 $1000\,\Omega, 0.5\,\mathrm{A}$ 或 $20\,\Omega, 2\,\mathrm{A}$。理想电源 $8\,\mathrm{V}$。需从零电压起采集 12 组数据，选择仪器并画连接。

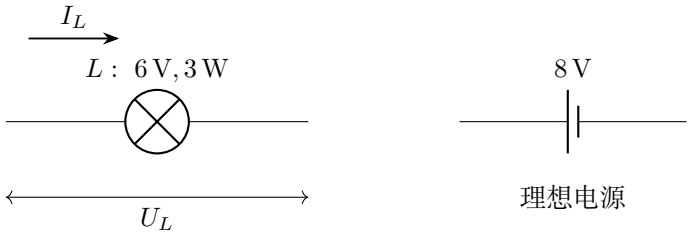


图 6.31: 待测灯泡及给定电源。测量仪器与调压接线由题目要求选择

解　额定电流与仪表

图 6.31 灯泡额定电流为 $I_N = P_N/U_N = 0.50\,\mathrm{A}$，选 $0.6\,\mathrm{A}$ 电流表可获得较大偏转。电压表选给定 $6\,\mathrm{V}$ 表，在额定点漏流仅为 $6/20000 = 0.00030\,\mathrm{A}$。测到总电流 $0.50030\,\mathrm{A}$，仍在 $0.6\,\mathrm{A}$ 范围内。

分压连接

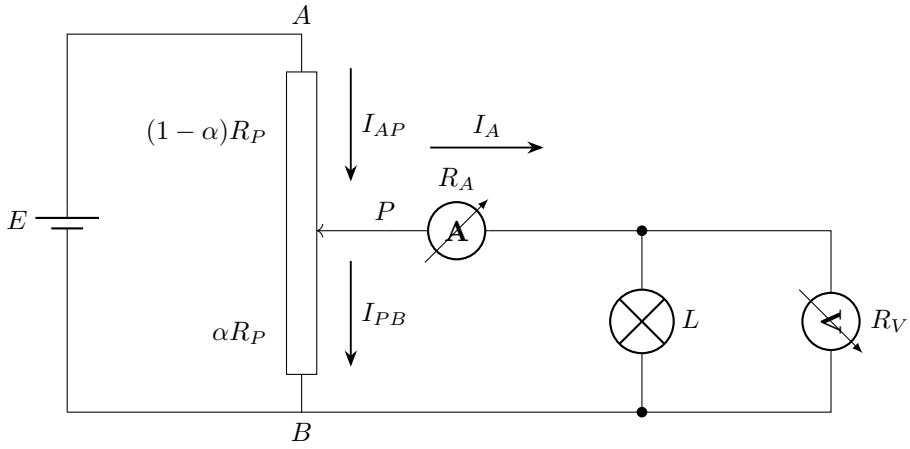


图 6.32: 电流从 A 经上段流到滑片 P，在此分为下段电流和灯泡、电压表支路的总电流

图 6.32 中，固定端 A, B 跨接 8 V，取滑片 P 对 B 的电压为 U_{PB}。用 α 表示下段占总阻的比例，则 $R_{AP} = (1-\alpha)R_P$、$R_{PB} = \alpha R_P$。当 $0 < \alpha < 1$，滑片上的电流关系为

$$\frac{E - U_{PB}}{(1-\alpha)R_P} = \frac{U_{PB}}{\alpha R_P} + I_A.$$

两边乘以 $\alpha(1-\alpha)R_P$，整理得

$$U_{PB} = \alpha E - \alpha(1-\alpha)R_P I_A.$$

第一项是空载分压，第二项是接上负载后减少的电压。把这个 U_{PB} 代回左侧，得到上段电流

$$I_{AP} = \frac{E}{R_P} + \alpha I_A, \qquad I_{PB} = I_{AP} - I_A.$$

两只变阻器的段电流

灯泡达到额定电压时，电流表也产生压降，所以 $U_{PB} = 6.0000\,\mathrm{V} + (1\,\Omega)(0.50030\,\mathrm{A}) = 6.50030\,\mathrm{V}$。将 U_{PB} 和 I_A 代入滑片方程，以伏、安、欧为单位，得到

R_P	α 所满足的方程	α	I_{AP}/A
$20\,\Omega$	$10.006\alpha^2 - 2.006\alpha - 6.50030 = 0$	0.91245	0.85650
$1000\,\Omega$	$500.30\alpha^2 - 492.30\alpha - 6.50030 = 0$	0.99704	0.50682

每个方程取 $0<\alpha<1$ 的根。例如 $20\,\Omega$ 时，

$$\alpha=\frac{2.006+\sqrt{2.006^2+4(10.006)(6.50030)}}{2(10.006)}\simeq 0.91245,$$

$$I_{AP}=\frac{8}{20}+0.91245(0.50030)\simeq 0.85650\,\mathrm{A}.$$

$1000\,\Omega$ 变阻器在额定点的上段电流已超过其 $0.5\,\mathrm{A}$ 额定值。选 $20\,\Omega, 2\,\mathrm{A}$ 的变阻器，从零调到额定点的上段电流至多为 $8/20+0.50030=0.90030\,\mathrm{A}$，下段电流更小。

逐点测量与修正

接通前把滑片置于 B，使输出为零。再由 B 向 A 移动滑片，逐点读取 U_V, I_A，在低电压区适当加密，共采集 12 组数据。每点有

$$U_L=U_V,\qquad I_L=I_A-\frac{U_V}{R_V}.$$

电压表示数达到 $6\,\mathrm{V}$ 时停止升压。

例 6.11 (灯泡曲线与串联电阻功率)**.** 某灯泡伏安曲线在 $U=1,2,4,6,8\,\mathrm{V}$ 时电流分别约为 $0.20, 0.29, 0.40, 0.46, 0.50\,\mathrm{A}$。将其与定值电阻 R 串联接电源 $E=6.0\,\mathrm{V}, r=1.0\,\Omega$，实测电流 $0.40\,\mathrm{A}$。求 R 的功率。另以灯泡各工作点的功率 P_L 作 P_L-U^2、P_L-I^2 图，判断哪一关系的相邻采样点割线斜率随工作点增大。

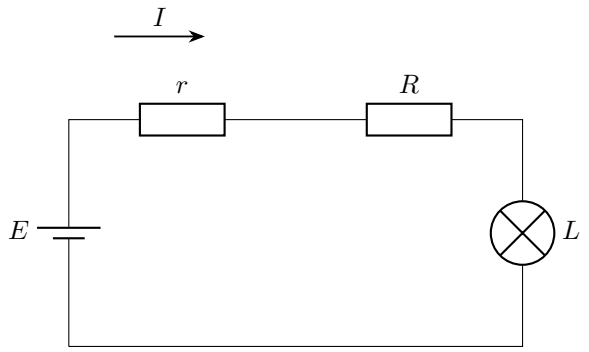


图 6.33: 内阻 r、外接电阻 R 与灯泡串联，通过同一电流

解　回路电压与外接电阻

图 6.33 中各串联元件通过同一电流。给定曲线上 $I=0.40\,\mathrm{A}$ 对应 $U_L=4.0\,\mathrm{V}$。回路方程 $E=Ir+IR+U_L$ 给出

$$U_R=6.0-0.40\times 1.0-4.0=1.6\,\mathrm{V},\qquad R=4.0\,\Omega,\quad P_R=0.64\,\mathrm{W}.$$

转换功率坐标

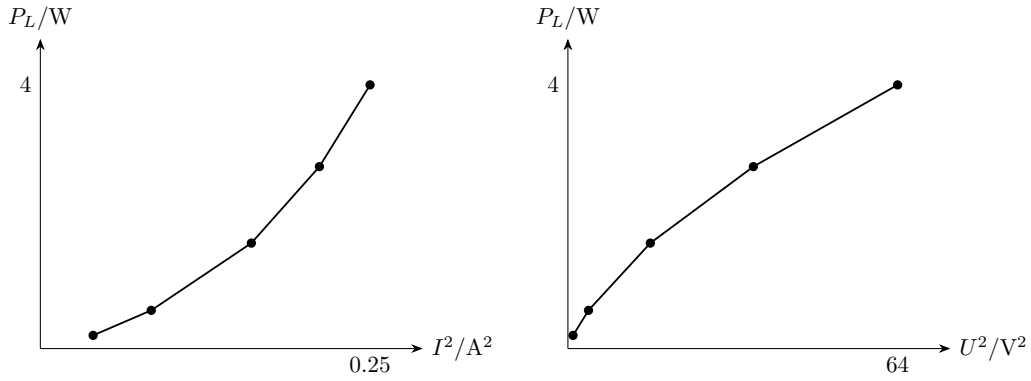


图 6.34: 同一组工作点的两种坐标。线段连接相邻测量点，用它们的斜率比较各区间内的变化

各点 $P_L = UI$，依次为 $0.20, 0.58, 1.60, 2.76, 4.00\,\mathrm{W}$。图 6.34 左图横坐标换成 I^2，右图换成 U^2。两图的纵坐标都采用各工作点的灯泡功率。

相邻点的割线斜率

按横坐标为 I^2 的四段分别计算，

$$\begin{aligned}
\frac{0.58-0.20}{0.29^2-0.20^2} &= \frac{0.38}{0.0441} \simeq 8.62\,\Omega,\\
\frac{1.60-0.58}{0.40^2-0.29^2} &= \frac{1.02}{0.0759} \simeq 13.44\,\Omega,\\
\frac{2.76-1.60}{0.46^2-0.40^2} &= \frac{1.16}{0.0516} \simeq 22.48\,\Omega,\\
\frac{4.00-2.76}{0.50^2-0.46^2} &= \frac{1.24}{0.0384} \simeq 32.29\,\Omega.
\end{aligned}$$

换成横坐标 U^2，功率差不变，分母改为电压平方差：

$$\begin{aligned}
\frac{0.38}{2^2-1^2} &= \frac{0.38}{3} \simeq 0.1267\,\Omega^{-1},\\
\frac{1.02}{4^2-2^2} &= \frac{1.02}{12} = 0.0850\,\Omega^{-1},\\
\frac{1.16}{6^2-4^2} &= \frac{1.16}{20} = 0.0580\,\Omega^{-1},\\
\frac{1.24}{8^2-6^2} &= \frac{1.24}{28} \simeq 0.0443\,\Omega^{-1}.
\end{aligned}$$

因此前者逐渐增大，后者逐渐减小。上述四段斜率分别由相邻两点求得。$P_L/I^2 = U/I$ 与 $P_L/U^2 = I/U$ 则对应从原点连向各点的割线，两个几何量在图中有不同含义。

例 6.12 (水果电池的仪表改装与拟合)**.** 表头 $R_g = 15\,\Omega, I_g = 2\,\mathrm{mA}$，改装为 $4\,\mathrm{V}$ 表，另有内阻 $2\,\Omega$ 的电流表。水果电池约 $E = 4\,\mathrm{V}, r = 200\,\Omega$。按图中乙接法测得数据 $I/\mathrm{mA} = 4, 5, 8, 10, 12, 14$，$U/\mathrm{V} = 3.04, 2.85, 2.30, 1.90, 1.50, 1.14$。求改装电阻、拟合参数，并选择较小系统误差接法。

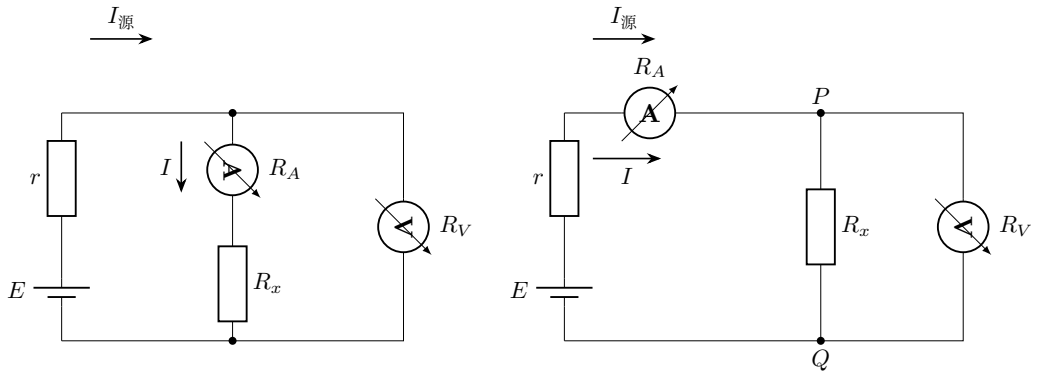


图 6.35: 两种候选接法均把电池内阻画出。电流表示数所在分支不同

解　改装电压表

满偏电流 $2\,\mathrm{mA}$ 不变，要使整个电压表满量程为 $4\,\mathrm{V}$，须有

$$R_V = \frac{4}{0.002} = 2000\,\Omega, \qquad R_s = 2000 - 15 = 1985\,\Omega.$$

两种接法的读数

图 6.35 甲中 $I_{源} = I + U/R_V$，所以

$$U = \frac{ER_V}{R_V + r} - \frac{rR_V}{R_V + r} I.$$

截距、斜率电阻均比真实值低约 $1 - 2000/2200 = 9.1\%$。乙中电流表读总电流，而电压不含电流表压降，故 $U = E - (r + R_A)I$，斜率仅多 $2\,\Omega$，相对约 1%，选乙更合适。

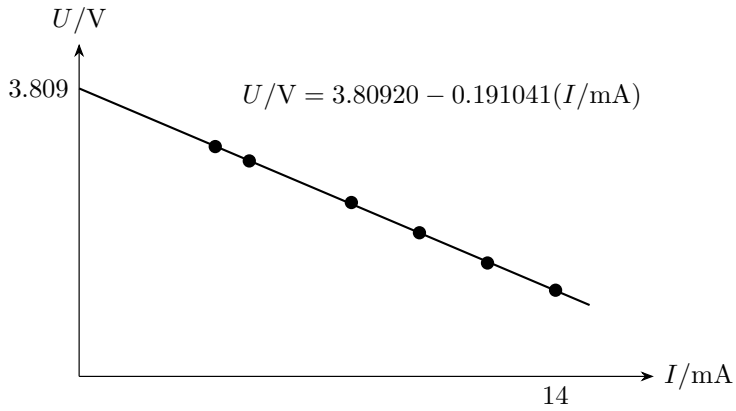


图 6.36: 六组数据与最小二乘直线。横轴用毫安，斜率按横轴单位换算为电阻

拟合与参数修正

按正文的最小二乘式，取 $x = I/(1\,\mathrm{mA})$、$y = U/(1\,\mathrm{V})$，拟合 $y = A - Bx$。本题有六个点。展开正文的中心化求和，利用 $\sum_j x_j = 6\bar{x}$、$\sum_j y_j = 6\bar{y}$，

$$\sum_j (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = \sum_j x_j y_j - \bar{y}\sum_j x_j - \bar{x}\sum_j y_j + 6\bar{x}\bar{y} = \sum_j x_j y_j - 6\bar{x}\bar{y},$$
$$\sum_j (x_j - \bar{x})^2 = \sum_j x_j^2 - 2\bar{x}\sum_j x_j + 6\bar{x}^2 = \sum_j x_j^2 - 6\bar{x}^2.$$

于是

$$B = -\frac{\sum_j x_j y_j - (\sum_j x_j)(\sum_j y_j)/6}{\sum_j x_j^2 - (\sum_j x_j)^2/6}.$$

逐项求和：

$$\sum x_j = 53, \quad \sum y_j = 12.73, \quad \sum x_j^2 = 545, \quad \sum x_j y_j = 97.77.$$

所以 $\bar{x} = 53/6$、$\bar{y} = 12.73/6$，并有

$$B = -\frac{97.77 - 53 \times 12.73/6}{545 - 53^2/6} = 0.191041, \qquad A = \frac{12.73}{6} + B\frac{53}{6} = 3.80920.$$

图 6.36 的带符号斜率为 $-0.191041\,\mathrm{V/mA}$。因为 $x = 1000I/(1\,\mathrm{A})$，恢复电压、电流单位后，

$$U \simeq 3.80920\,\mathrm{V} - (1000B\,\Omega)I = 3.80920\,\mathrm{V} - (191.041\,\Omega)I.$$

与乙接法的 $U = E - (r + R_A)I$ 比较，

$$E = A\,\mathrm{V} \simeq 3.81\,\mathrm{V}, \qquad r = 1000B\,\Omega - R_A = (191.041 - 2)\,\Omega \simeq 189\,\Omega.$$

横轴若用毫安，斜率绝对值须乘 1000 才得到欧姆。计算中间位保留较多，最终精度仍受给定读数限制。

例 6.13 (不拆表头的测阻与量程标定)**.** 表头满偏电流 I_g 已知、内阻 R_g 待测，拟加串联电阻箱 R_s 改电压表。标准电压表跨分压器输出与回路公共端，双掷开关挡 1 使输出直接接表头，挡 2 使输出经 R_s 后接表头。说明怎样在不拆表头的条件下测 R_g 并标定新量程。

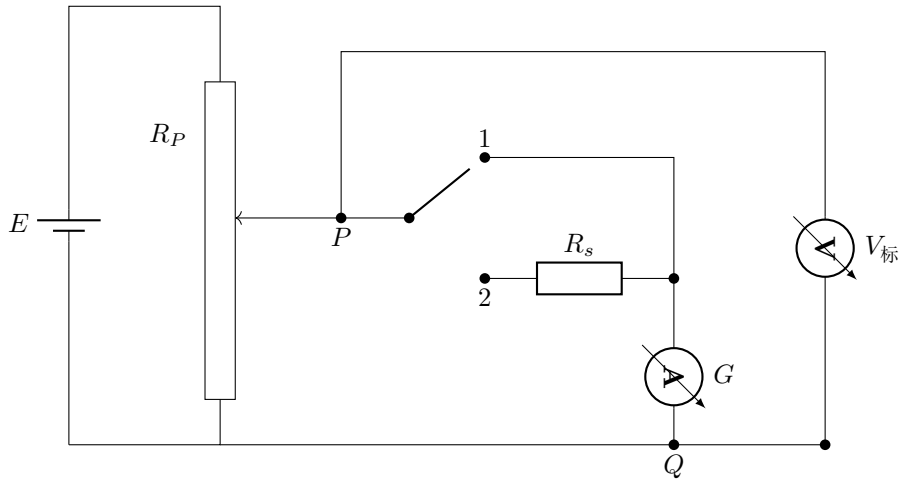


图 6.37: 双掷开关公共端接滑片输出。标准表跨整个输出端口，接点用实心点表示

解　测裸表头电压

图 6.37 标准表始终跨输出 P, Q。输出先调至最小，开关接 1，再逐渐升高到表头满偏。此时 R_s 支路断开，标准表直接读取 G 的实际电压 U_g，所以 $R_g = U_g/I_g$。

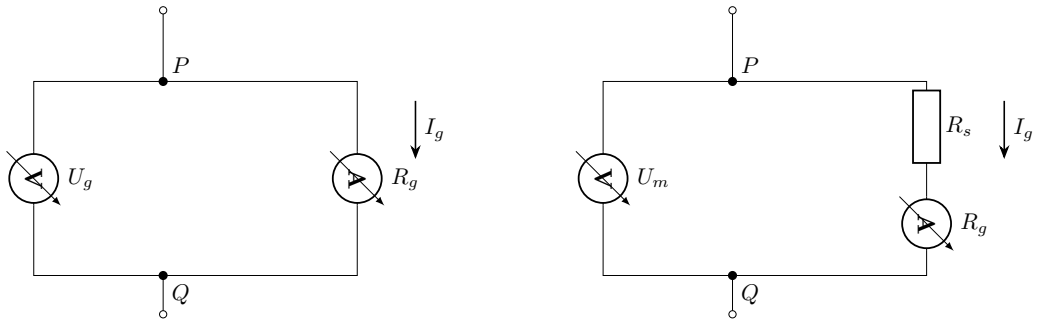


图 6.38: 各挡的 P, Q 接到分压器输出。挡 1 测表头，挡 2 测表头与串联电阻两段的总电压

接入串联电阻

先降低输出，再换到 2。图 6.38 右图中表头与 R_s 串联，若目标量程为 U_m，设

$$R_s = \frac{U_m}{I_g} - R_g.$$

由低电压逐渐升高，标准表到 U_m 时，表头应恰好满偏。再在半量程等若干点标定。

标准表与实际端电压

标准表跨接 P, Q，它给出的就是被测支路的实际端电压。挡 1 时，表头满偏使 $U_g = I_g R_g$。挡 2 时，满偏使 $U_m = I_g(R_g + R_s)$。标准表的分流影响分压器输出，但这两个关系都直接使用实际端电压与表头电流，因而保持成立。

6.7 本讲小结

磁电式表头用磁力矩与游丝回复力矩的平衡，把电流转换为均匀偏转。附加串联电阻分担电压，附加并联电阻分担电流，满偏条件决定新量程和仪表总内阻。

电表接入后也参与分流、分压。伏安法的修正项由电压表跨接的节点和电流表所在支路决定。半偏法由前后两套实际回路确定表头内阻。电源的读数直线同样先由接线推导，再从截距、斜率恢复电源参数。

串联欧姆表把电阻转换为分式变化的电流，中值、倍率与调零都从这一关系得到。电容的指针回移对应充电过程，稳定偏转对应实际导电通路。非线性元件则随工作点改变电阻，曲线上的比值、割线斜率与切线斜率各描述相应的物理量。

6.8 练习

练习 6.1 (伏安法接法的临界阻值)**.** 电流表内阻 $0.50\,\Omega$，电压表内阻 $2000\,\Omega$。仅比较未修正相对误差，求两接法误差相同的待测阻值，并判断 $10\,\Omega$、$1000\,\Omega$ 各宜用哪种接法。

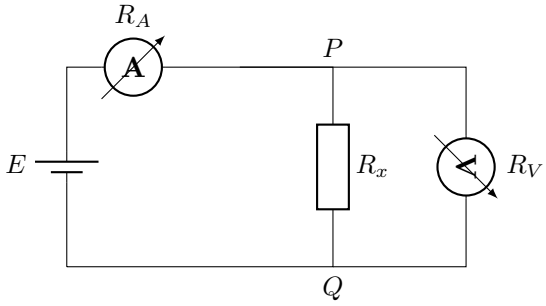


图 6.39: 题设：伏安法接法的临界阻值

练习 6.2 (半偏读数的精确修正)**.** 半偏实验串联电阻 $R_1 = 10000\,\Omega$，使表头电流减半时并联电阻 $R_2 = 99.0\,\Omega$。求真实 R_g 和直接以 R_2 作为内阻的相对误差。

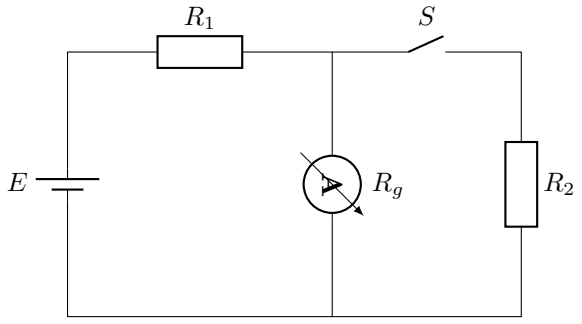


图 6.40: 表头 R_g 两端可通过开关 S 接入分流电阻 R_2

练习 6.3 (三伏电压表扩为六伏)．电压表量程 3 V、内阻 3 kΩ，另有 3 kΩ 与 15 kΩ 定值电阻。要测 4.8 V, 2 W 灯泡的伏安曲线，选择改装方法，求原表读数与灯泡电压的关系。电流表量程 0.6 A、内阻 1 Ω。



图 6.41: 原电压表与灯泡的额定条件。附加电阻和测量接线尚待选择

练习 6.4 (欧姆刻度的倍率与偏转)．欧姆表基础中值为 20 Ω，指针在电流满偏的 2/7 位置，选 ×1000 挡。求电阻。若改为同档 1/2 偏转，电阻应为多少?

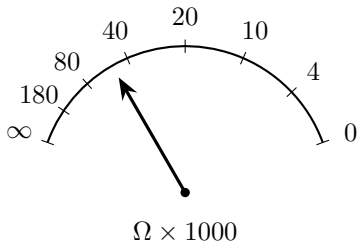


图 6.42: 题设：欧姆刻度的倍率与偏转

练习 6.5 (逐段测量定位断路)．串联回路为电源—灯 L_1—连接线 de—灯 L_2—开关。断开电源后，欧姆表测 L_1 两端有限、连接线 de 两端无穷大、L_2 两端有限。判断故障并说明隔离电源和并联通路后测试电流的路径。

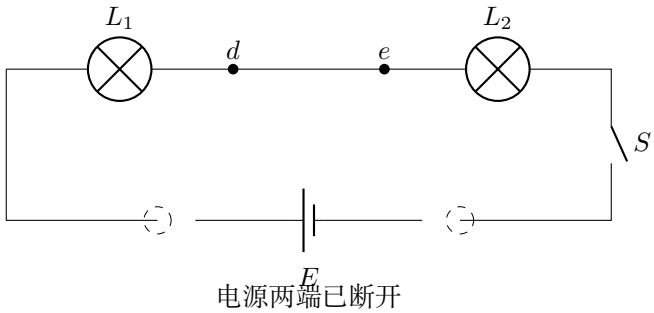
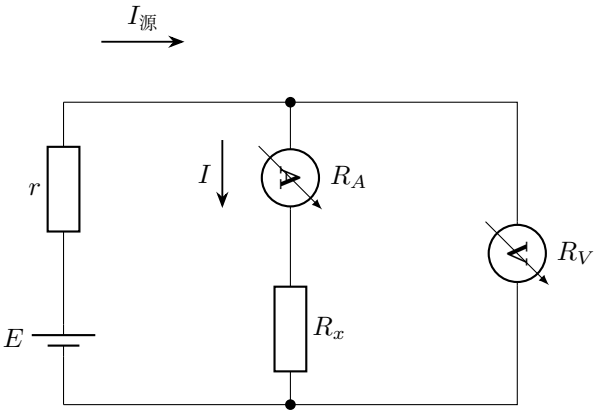


图 6.43: 断开电源后的串联支路。分别测量两个灯泡及连接线 de

练习 6.6 (电源拟合中两种仪表误差)**.** 电池真实参数 E, r，仪表内阻 R_A, R_V。甲接法电压表直接跨电池、电流表只读负载。乙接法的电流表位于电池与分流点 P 之间，读电池总电流，电压表跨接负载两端 P, Q。分别求拟合 $U = a - bI$ 的参数和误差方向。



甲：$I_{源} = I + U/R_V$

图 6.44: 甲接法中电压表直接跨电池端子，电流表位于负载支路

练习解答

练习 6.1

解　两种相对误差

图 6.39 中电压表与待测电阻并联，未修正值为 $R_{测} = R_x R_V/(R_x + R_V)$，相对误差大小

$$\varepsilon_{分流} = \frac{R_x - R_{测}}{R_x} = \frac{R_x}{R_x + 2000}.$$

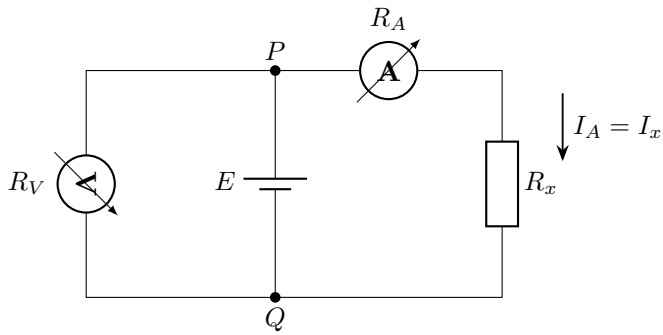


图 6.45: 电压跨整个 P,Q 端口时，所测电阻中包含电流表内阻

图 6.45 中 $R_{测} = R_x + R_A$，故 $\varepsilon_{分压} = 0.5/R_x$。

相同误差的阻值

令两误差大小相等，得

$$R_x^2 = 0.5(R_x + 2000), \qquad R_* = \frac{0.5 + \sqrt{0.25 + 4000}}{2} \simeq 31.87\,\Omega.$$

另一根为负，不对应被测正电阻。近似式 $\sqrt{R_A R_V}$ 给 $31.62\,\Omega$，与精确值接近。

选择两种接法

$10\,\Omega$ 时，分流误差为 $10/(10+2000) = 0.498\%$，分压误差为 $0.5/10 = 5.00\%$，宜用电压表只跨电阻的接法。$1000\,\Omega$ 时，两者分别为 $1000/3000 = 33.3\%$、$0.5/1000 = 0.050\%$，宜使电流表只读待测电阻电流。

练习 6.2

解　满偏和半偏的回路

图 6.40 断开 S 时，$E = I_g(R_1 + R_g)$。合上 S 后表头电流为 $I_g/2$，并联端口电压为 $I_g R_g/2$，所以 R_2 中电流为 $I_g R_g/(2R_2)$。

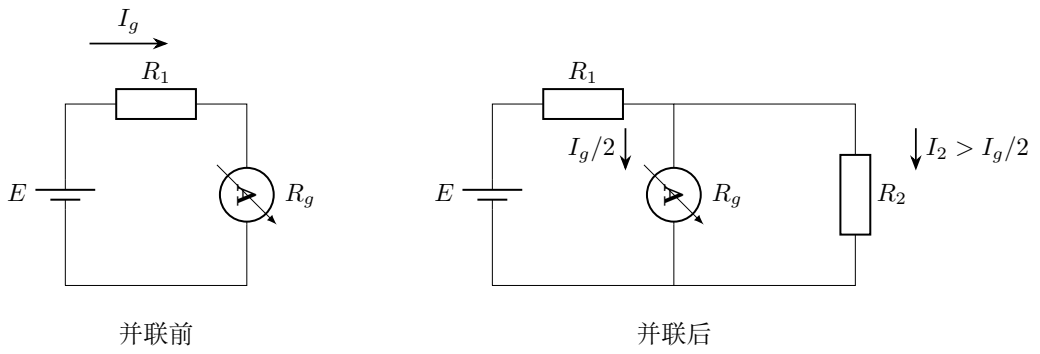


图 6.46: 左图满偏电流全经表头。右图半偏后的电源电流增加，分流电阻电流略大于表头的 $I_g/2$

按图 6.46 右回路，

$$E = R_1\left(\frac{I_g}{2} + \frac{I_g R_g}{2R_2}\right) + \frac{I_g R_g}{2}.$$

与满偏式消去 E，再乘 $2/I_g$：

$$2(R_1 + R_g) = R_1 + \frac{R_1 R_g}{R_2} + R_g.$$

把两边共有项移去，得到 $R_1 + R_g = R_1 R_g/R_2$，即

$$R_2(R_1 + R_g) = R_1 R_g, \qquad R_2 = \frac{R_1 R_g}{R_1 + R_g}.$$

反求内阻

$$R_g = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{10000 \times 99}{10000 - 99} \simeq 99.99\,\Omega.$$

读数误差

直接以 $R_2 = 99.0\,\Omega$ 作为表头内阻，相对误差为

$$\frac{R_2 - R_g}{R_g} = -\frac{R_2}{R_1} = -0.990\%.$$

并联使源所见电阻降低、总电流增加，所以半偏时 R_2 比 R_g 略小。负号与这一过程相符。

练习 6.3

解　扩大电压量程

图 6.41 原表满偏电流 $I_g = 3/3000 = 1\,\mathrm{mA}$。扩为 $6\,\mathrm{V}$，总电阻需 $6000\,\Omega$，故串联 $3\,\mathrm{k}\Omega$。若串联 $15\,\mathrm{k}\Omega$，量程变成 $18\,\mathrm{V}$，可覆盖灯压但偏转较小。

整个电压表跨灯泡

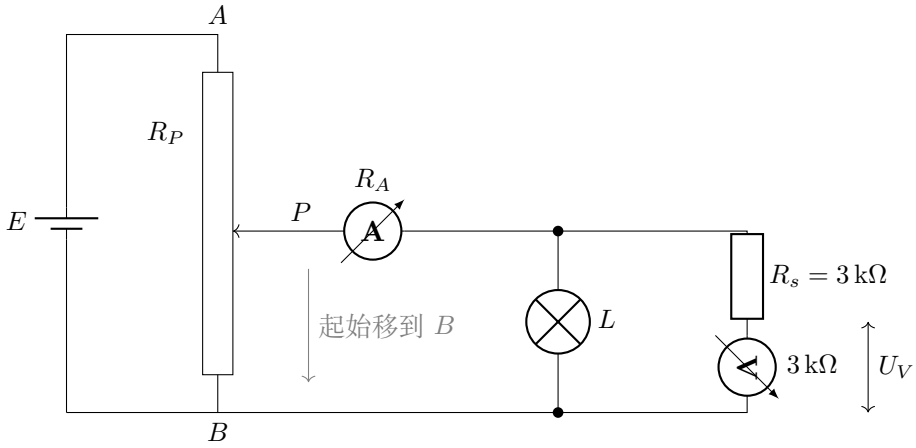


图 6.47: 串联附加电阻与原表组成六伏表，整体跨灯泡。原表电压 U_V 只占一半

图 6.47 两相等的 $3\,\mathrm{k}\Omega$ 串联，因此 $U_L = 2U_V$。这里 U_V 采用原三伏刻度的读数，新量程为原来的两倍。图中分压器为连续调压的一种接线，电压表支路不包含电流表。

电流量程与分流修正

额定灯电流为 $2/4.8 = 0.4167\,\mathrm{A}$，改装电压表分流为 $4.8/6000 = 0.000800\,\mathrm{A}$。电流表约读 $0.4175\,\mathrm{A}$，在 $0.6\,\mathrm{A}$ 量程内。各点的灯电流按

$$I_L = I_A - \frac{2U_V}{6000\,\Omega}$$

修正。额定点原三伏表读 $2.4\,\mathrm{V}$，灯泡电压为其两倍。

练习 6.4

解　由偏转求基础刻度

图 6.42 基础中值为 $20\,\Omega$，欧姆表关系为

$$f = \frac{20}{20 + R_{\text{基}}}, \qquad R_{\text{基}} = 20\left(\frac{1}{f} - 1\right).$$

代入 $f = 2/7$，得基础读数 $50\,\Omega$，乘以 1000，实际 $R_x = 50\,\mathrm{k}\Omega$。

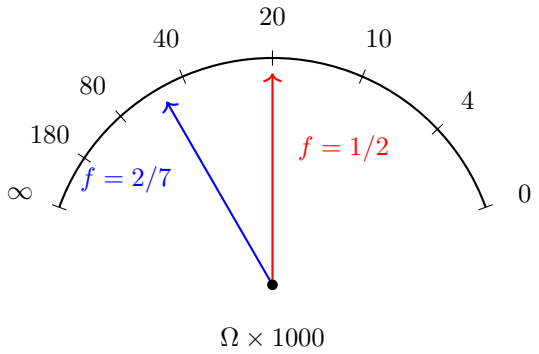


图 6.48: 蓝针为原来的 2/7 偏转，红针为半偏。同一倍率下由五十千欧变为二十千欧

半偏时的读数

图 6.48 半偏时 $R_{基} = 20(2-1) = 20\,\Omega$，实际电阻为 $20\,\mathrm{k}\Omega$。前一状态为 $50\,\mathrm{k}\Omega$。电阻从 50 降到 20 千欧，仪表电流便从满偏的 2/7 增到 1/2。

练习 6.5

解　逐段测量

图 6.43 电源两端断开，且测量时排除并联旁路。表笔跨在 L_1 的两端时，测试电流从欧姆表流经该灯丝回到表内。换到 L_2 两端后，电流改经 L_2 灯丝。两个回路都给出有限读数。只有 d, e 间为无穷大，因此故障位于这段连接线。

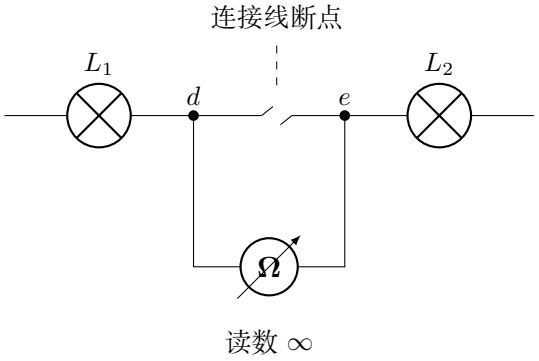


图 6.49: 表笔只跨 d, e。断点切断这条测量路径，其他支路没有提供回路

测量回路的隔离

欧姆表用内电池建立测试电流，刻度按这一电源和内部电阻标定。外部电源隔离后，电流只由测试回路决定。图 6.49 把 d,e 间的其他通路也断开，测得的无穷大便对应连接线本身的断点。若保留旁路，测试电流会沿旁路绕过断点。

练习 6.6

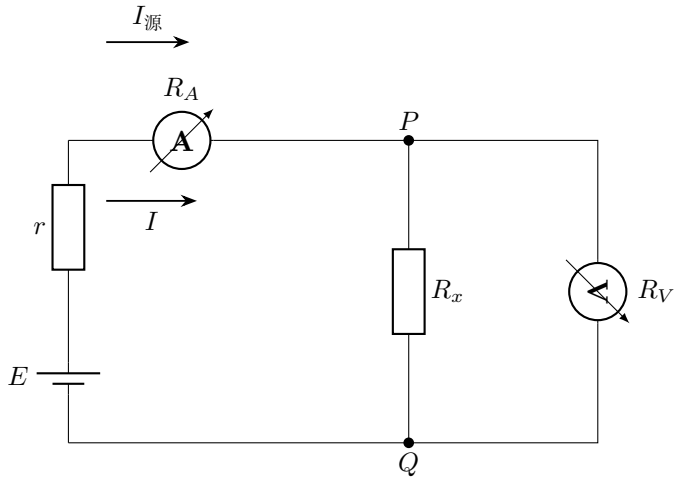
解　甲接法的电流

图 6.44 中 $I_{源}=I+U/R_V$，电池端电压为

$$U=E-r\left(I+\frac{U}{R_V}\right)=\frac{ER_V}{R_V+r}-\frac{rR_V}{R_V+r}I.$$

所以 $a_{甲}=ER_V/(R_V+r)<E$，$b_{甲}=rR_V/(R_V+r)<r$。电流表内阻会改变某次测量的工作点。端电压式中的 I 就是该工作点实际测得的支路电流。

乙接法的电压



乙：$I_{源}=I$，$U=U_{PQ}$

图 6.50: 乙接法的电流表位于分流点之前。电压表只测 P,Q 间外负载

图 6.50 中电池总电流就是 I，电池端电压 $E-rI$ 还包含电流表压降 R_AI，因此

$$U=E-(r+R_A)I,\qquad a_{乙}=E,\quad b_{乙}=r+R_A>r.$$

由拟合参数求电源参数

乙接法修正为 $E = a_{乙}$、$r = b_{乙} - R_A$。甲接法从斜率关系开始反解，

$$b_{甲}(R_V + r) = rR_V, \qquad b_{甲}R_V = r(R_V - b_{甲}).$$

由于 $b_{甲} < R_V$，可除以正分母求 r。再由 $a_{甲} = ER_V/(R_V + r)$ 求 E：

$$r = \frac{b_{甲}R_V}{R_V - b_{甲}}, \qquad E = \frac{a_{甲}R_V}{R_V - b_{甲}}.$$

第二式用到 $R_V + r = R_V + b_{甲}R_V/(R_V - b_{甲}) = R_V^2/(R_V - b_{甲})$，代入 $E = a_{甲}(R_V + r)/R_V$ 即得。$R_V \to \infty$ 时甲的加载消失，$R_A \to 0$ 时乙的压降误差消失。甲的修正来自电压表分流，乙的修正来自电流表压降。两种关系都由图中实际跨接点确定。

静磁

物理竞赛一轮讲义

第一讲

磁场的计算与叠加

2026

目录

第一讲　磁场的计算与叠加 **1**

1.1　电流周围的磁场 1

1.2　毕奥—萨伐尔定律 2

1.3　运动电荷、面电流与分布电流 4

1.4　有限螺线管与端部修正 5

1.5　安培环路定理 6

1.6　平面、圆柱与螺线管的对称模型 8

1.7　磁通量与磁场的无源性质 10

1.8　近轴磁场的径向分量 11

1.9　电流面两侧的场与自身受力 12

1.10 零场点邻域的几何结构 13

1.11 例题与分析 15

1.12 本讲小结 31

1.13 练习 32

练习解答 35

第一讲　磁场的计算与叠加

1.1　电流周围的磁场

把一根直导线竖直穿过水平板，在板上放一枚可水平转动的磁针。导线断开时，磁针沿地磁场的水平分量静止。通电后，磁针转向地磁场和电流磁场合成的方向。电流反向时，它在同一点产生的磁场也反向。图 1.1 从上方画出这两个场在磁针处的方向。右手拇指指向电流，弯曲的四指沿磁场方向。

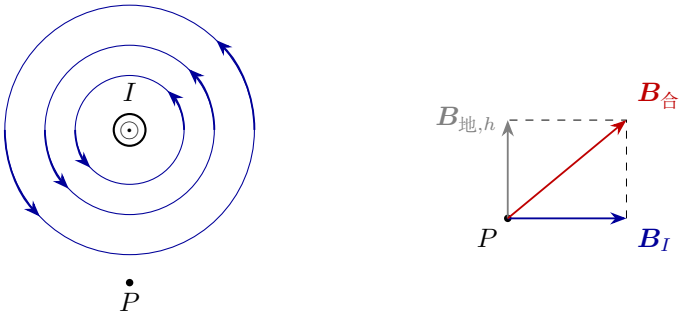


图 1.1: 长直导线的横截面。电流向纸外时，磁感线逆时针。左图标出磁针位置，右图把该处的两个磁场相加

磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 描述磁场的大小和方向。在小段直导线处，长度矢量 $\boldsymbol{l}$ 沿电流方向，磁力为 $\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$。导线与场垂直时，$B = F/(Il)$，单位为特斯拉，$1\,\mathrm{T} = 1\,\mathrm{N}/(\mathrm{A\,m})$。用磁感线描绘磁场，曲线在每一点的切线给出该点的场方向。稳恒电流在空间各处的密度随时间保持恒定，因而它产生的磁场也保持恒定。

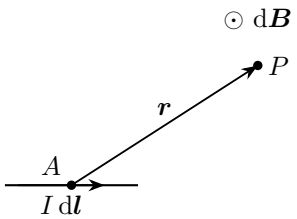


图 1.2: 电流元、场点与磁场的方向

1.2　毕奥—萨伐尔定律

图 1.2 中，$\boldsymbol{r}$ 从电流元指向场点 P。真空中电流元的贡献由毕奥—萨伐尔定律给出，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad \boldsymbol{B}(P) = \int_C \mathrm{d}\boldsymbol{B}. \tag{1.1}$$

μ_0 为真空磁导率。沿载流回路 C 积分时，P 固定，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 随电流元的位置改变。不同电流元在同一场点产生的场按矢量相加。若电流分布在体积内，电流元写作 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}V'$。用场点坐标 $\boldsymbol{r}_P$，上式成为

$$\boldsymbol{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times(\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}V'.$$

1.2.1　有限直导线

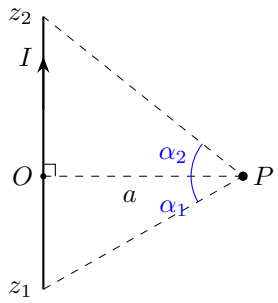


图 1.3: 有限直导线的有向端点角

图 1.3 中，直导线沿 $+z$ 通电，P 到导线的垂距为 a，垂足 O 取 $z=0$。每一电流元的场都沿同一环向，因此可先确定方向，再积大小。由 $r^2 = a^2+z^2$、$\sin\theta = a/r$，得到

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{z_1}^{z_2}\frac{a\,\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

原函数可由三角换元得到：令 $z = a\tan\alpha$，$\mathrm{d}z = a\sec^2\alpha\,\mathrm{d}\alpha$，其中 $-\pi/2<\alpha<\pi/2$，故

$$\frac{a\,\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\cos\alpha}{a}\,\mathrm{d}\alpha, \qquad \int\frac{\cos\alpha}{a}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{z}{a\sqrt{a^2+z^2}}.$$

上下限分别变为 $\alpha_j=\arctan(z_j/a)$，将它们代入原函数，

$$\begin{aligned}B&=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}[\sin\alpha]_{\alpha_1}^{\alpha_2}\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)\\&=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{z_2}{\sqrt{a^2+z_2^2}}-\frac{z_1}{\sqrt{a^2+z_1^2}}\right).\end{aligned}$$

图中以 PO 为零角。端点分居垂足两侧时，$\alpha_1<0<\alpha_2$，上端正弦减去下端正弦等于两个正值相加。两个端点在垂足同侧时，直接保留有向正弦的差。

令两端分别趋于负无穷和正无穷，则两个正弦趋于 -1 和 1，得 $B=\mu_0 I/(2\pi a)$。垂足在半无限导线的端点时，一个正弦为零，场为 $\mu_0 I/(4\pi a)$。练习 1.1 用有限段与长直线的场之比确定近似所需的长度。

1.2.2 圆弧、圆环与轴线上的场

圆弧中心到每个电流元的距离都为 R，且 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{r}$。圆心场的方向处处一致，弧长元为 $R\,\mathrm{d}\varphi$，所以

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\varphi}\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}[\theta]_0^{\varphi}=\frac{\mu_0 I\varphi}{4\pi R},$$

弧长元中的角度以弧度计。径向引线的电流元与指向圆心的位矢共线，叉积为零。

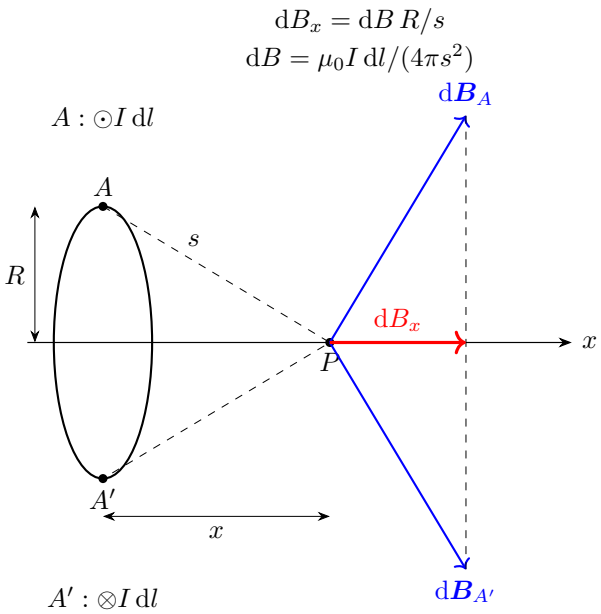


图 1.4: 圆环轴线上，对称电流元的横向场抵消，轴向场同向叠加

图 1.4 中，圆周上 A, A' 关于圆心对称，到轴上 P 的距离都是 $s=\sqrt{R^2+x^2}$。在经过轴线的截面内，$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_A$、$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_{A'}$ 分别垂直于 AP、$A'P$，二者横向投影相消，轴向投影相加。由直角三角形可得轴向投影因子 R/s。每元有 $\mathrm{d}B_x=\mu_0 I R\,\mathrm{d}l/(4\pi s^3)$，沿圆周以 $\mathrm{d}l=R\,\mathrm{d}\varphi$ 积分，

$$B_x=\frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I R^2}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}}[\varphi]_0^{2\pi}=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

在圆心它回到 $\mu_0 I/(2R)$；在 $|x|\gg R$ 处它按 $|x|^{-3}$ 衰减。把磁矩 $m=I\pi R^2$ 代入，远轴场写成 $\mu_0 m/(2\pi|x|^3)$。在这个距离范围内，远场由磁矩决定。

例 1.2 用这条轴线场曲线求半高位置，例 1.10 把两条轴线曲线相加，求中点附近场变化最小的线圈间距。

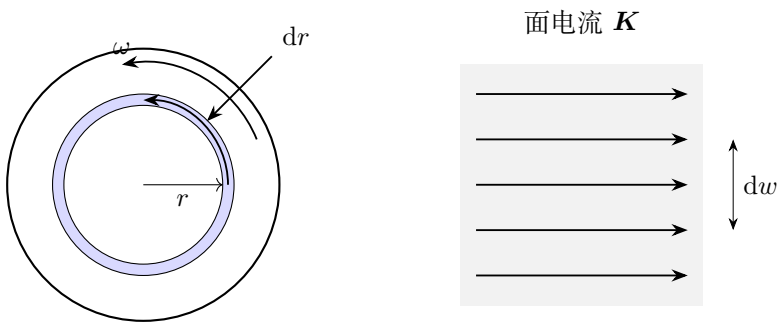
例 1.2 沿圆电流逐段取线元。轴线上各线元到场点的距离相同，垂直于轴的分量按对径配对抵消，留下的轴向分量沿整个圆周相加。

1.3　运动电荷、面电流与分布电流

在低速、运动随时间变化缓慢的近似下，速度为 $\boldsymbol{v}$ 的点电荷产生 $\boldsymbol{B}=\mu_0 q\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}/(4\pi r^3)$。这里 $\boldsymbol{r}$ 从电荷指向场点。对连续电流分布，各处的 $q\boldsymbol{v}$ 贡献按体积或沿导线累加。

旋转带电体可按同心薄环分解。薄环上电量 $\mathrm{d}q$ 每转一周通过一个固定截面一次，周期 $2\pi/\omega$，故 $\mathrm{d}I=\omega\,\mathrm{d}q/(2\pi)$。每个窄环分别以自身半径代入圆环场，再沿圆盘半径积分。若体电流密度为 $\boldsymbol{J}$，则穿过微小截面的电流为 $\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$；若电流集中在薄面内，面电流密度 $\boldsymbol{K}$ 的单位为 $\mathrm{A/m}$。

平行细导线按间距 d 排列时，远处的平均面电流密度为 $K=I/d$。场点的高度远大于 d 时，可用均匀电流面近似。靠近单根细线时，该线的场按到线距离的倒数增长。例 1.5 和练习 1.8 分别计算远处近似和离散修正。



$\mathrm{d}q = \sigma\, 2\pi r\, \mathrm{d}r$ $\qquad$ $\mathrm{d}I = K\, \mathrm{d}w$

$\mathrm{d}I = \omega\sigma r\, \mathrm{d}r$ $\qquad$ $[K] = \mathrm{A/m}$

图 1.5: 旋转圆盘取窄环微元；连续面电流取垂直于电流方向的宽度

图 1.5 左侧窄环的半径 r 是积分变量，环宽为 $\mathrm{d}r$；每一圈包含的电量乘旋转频率才给出该窄环的等效电流。求圆心场时，再将 $\mathrm{d}I$ 代入 $\mathrm{d}B = \mu_0\, \mathrm{d}I/(2r)$，这里一个 r 会约去。右图以垂直电流的宽度 $\mathrm{d}w$ 取条带，穿过这段宽度的电流为 $K\, \mathrm{d}w$。

1.4 有限螺线管与端部修正

有限螺线管中的每一匝仍可按圆电流计算。设长度为 l，中点为轴向原点，半径 R，单位长度匝数 n。位于 z' 到 $z' + \mathrm{d}z'$ 的窄带包含 $n\, \mathrm{d}z'$ 匝，轴上场点 z 到该窄带的轴向距离为 $z - z'$，所以

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mathrm{d}z'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}.$$

把 $u = z - z'$ 作为新变量时，$\mathrm{d}z' = -\,\mathrm{d}u$，积分上下限也同时反向。原来的下限 $z' = -l/2$ 对应 $u = z + l/2$，上限 $z' = l/2$ 对应 $u = z - l/2$；负微分将次序交换。原函数来自

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u(R^2 + u^2)^{-1/2}\right] &= (R^2 + u^2)^{-1/2} + u\left(-\frac{1}{2}\right)(R^2 + u^2)^{-3/2}(2u) \\ &= \frac{R^2 + u^2 - u^2}{(R^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{R^2}{(R^2 + u^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

于是 $B_z = (\mu_0 n I/2)[u/\sqrt{R^2 + u^2}]_{z-l/2}^{z+l/2}$，得到

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left[\frac{z + l/2}{\sqrt{R^2 + (z + l/2)^2}} - \frac{z - l/2}{\sqrt{R^2 + (z - l/2)^2}}\right].$$

这个表达式把长线圈的内部平台、管口过渡与外部衰减连在一起。对于远离两端且两端距离都远大于 R 的内部点，两分式分别趋于 1 和 -1，场接近 $\mu_0 nI$。在长线圈端口，只有一侧还近似延伸到无穷，场约为内部的一半。

场点从线圈中心移到管口时，靠近该端的分式逐渐趋于零。例 1.13 以中心为场点，比较有限长度的计算值和长线圈内部值。

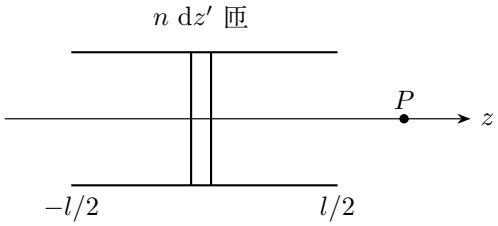


图 1.6: 有限线圈由轴向窄带叠加

图 1.6 中窄带含 $n\,\mathrm{d}z'$ 匝，每匝到场点 P 的轴向距离为 $z - z'$。求积分时改变的是窄带位置 z'，场点 z 保持固定；端口处缺少另一侧的线圈贡献，正是长线圈端部场约减半的原因。

1.5　安培环路定理

在真空稳恒电流条件下，沿闭合路径 C 有

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 I_{\text{穿过}}. \tag{1.2}$$

沿 C 的绕向弯曲右手四指，拇指给出所围曲面的正法线。图 1.7 的回路逆时针，I_1 向纸外、I_2 向纸内，右端为 $\mu_0(I_1 - I_2)$。回路外的 I_3 也参与决定各点的场，它产生的场沿整个回路的积分为零。

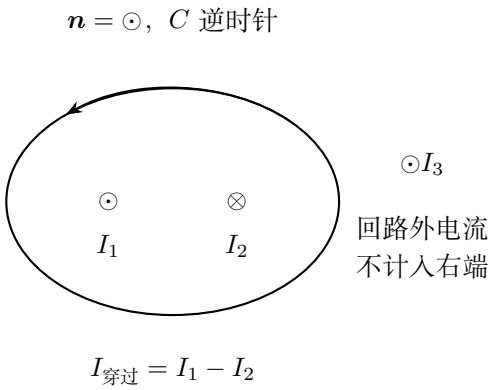


图 1.7: 从正法线一侧观察，环路逆时针时，向纸外电流计正

可以用立体角说明环路定理为何只计入与环路套连的电流。把闭合载流线 C_I 围成的曲面记为 S，法线由电流的绕向确定。场点 P 所见的有向立体角为

$$\Omega(P)=\int_S \frac{(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_P)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}'}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_P|^3}.$$

场点移动 $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$，等效于将整个曲面和载流线平移 $-\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$。原曲面、平移后的曲面和边线扫过的窄带合成封闭面。场点在这个薄层之外时，封闭面对它张的有向立体角为零，所以两曲面的立体角差等于窄带贡献。记 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}_P-\boldsymbol{r}'$，边线微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$ 扫出的窄带在垂直于 $\boldsymbol{R}$ 的平面上的有向投影，给出

$$\mathrm{d}\Omega=\oint_{C_I}\frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{R})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{R^3}.$$

与毕奥—萨伐尔定律逐项比较，便有 $\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}=(\mu_0 I/4\pi)\,\mathrm{d}\Omega$。

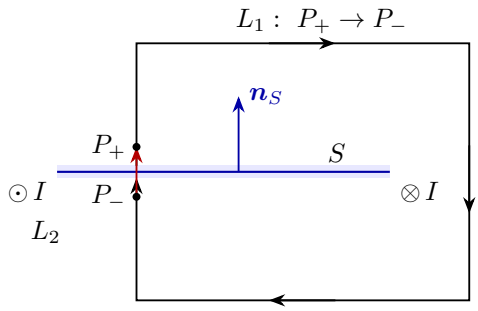


图 1.8: 安培环路分成绕过电流的长段和穿过曲面的短段。截面用粗线表示载流线所围的曲面

图 1.8 中，P_-, P_+ 分处 S 两侧。令它们靠近穿面点，则按定义有 $\Omega(P_-) \to 2\pi$、$\Omega(P_+) \to -2\pi$。沿长段 L_1 由 P_+ 绕到 P_- 时，立体角连续变化，因此

$$\int_{L_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\Omega]_{P_+}^{P_-} \longrightarrow \mu_0 I.$$

短段 L_2 穿过的是空处，磁场有限，路径缩短时它的环量趋零。反向穿面时环量为 $-\mu_0 I$。回路若不与载流线套连，立体角回到起始值，环量为零。多个电流的贡献按穿面方向代数相加。

对长直电流，轴对称给出同一半径上的等场强，右手定则给出磁场沿圆周。取半径 r 的同心圆，环量是 $2\pi r B$，等于 $\mu_0 I$。于是直接得到 $B = \mu_0 I/(2\pi r)$。选环路的要领是让一段与场平行且场强恒定，或让它与场垂直。下一节的圆柱、平面和螺线管沿用这一办法。

1.6　平面、圆柱与螺线管的对称模型

无穷面电流的场平行于面并垂直于 $\boldsymbol{K}$。镜面对称使两侧大小相同、方向相反。选跨过薄面的狭长矩形回路，两个长边各贡献 BL，得到 $B = \mu_0 K/2$。方向可写为 $\boldsymbol{B}_+ = \mu_0 \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{n}/2$，其中 $\boldsymbol{n}$ 指向“正侧”。两块面电流的场由矢量叠加决定；它们的电流相反时，夹层中的场增强，外侧抵消。

无限长圆柱电流具有绕轴对称，但内部环路只包围一部分电流。均匀电流密度 J 时，$I_{\mathrm{enc}} = J\pi r^2$，因此内部 $B = \mu_0 J r/2$，外部按总电流写成 $\mu_0 I/(2\pi r)$。在柱面处两式连续；从轴心到柱面，包围电流按 r^2 增加，场按 r 增加。

理想无限长螺线管可看成绕圆柱面的连续环向面电流 $K = nI$。对称性使内部磁场沿轴，取同在管内、位于不同半径的两个轴向长边构成矩形，环路不穿过面电流，故两个长边的场相等。同理，两个长边都在管外时，两处场相等。把外侧长边移至无穷远，外部场趋零，因而管外场处处为零。跨过管壁的矩形所围电流为 nIL，故 $BL = \mu_0 nIL$，管内场为 $\mu_0 nI$。

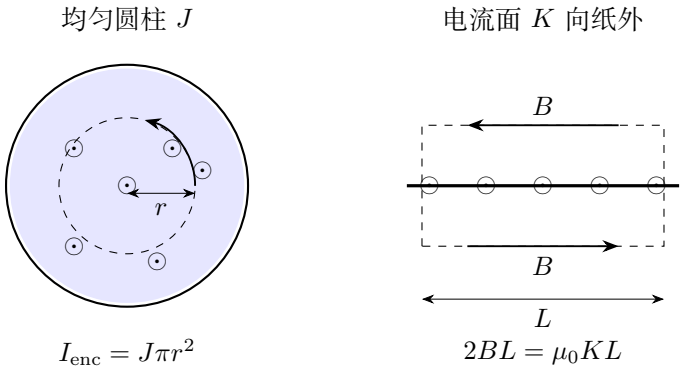


图 1.9: 环路中包围的电流随模型不同而改变，切向磁场由对称性确定

图 1.9 左侧圆环仅包围半径 r 内的电流，故内部场随 r 线性增加。右侧矩形的短边垂直于场，无环量贡献；上下长边沿环路正向都与各自的磁场同向，环量是 $2BL$。这两个模型能够直接求场，依赖的是已知的场方向与沿积分边的等模性质。

遇到偏心孔洞，可把实际电流分布看成完整圆柱的正电流密度，再在孔洞圆柱中叠加反向电流密度。对孔内点 P，位置矢量满足 $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}$，两项中的场点变量恰好消去，得到 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{a}/2$。

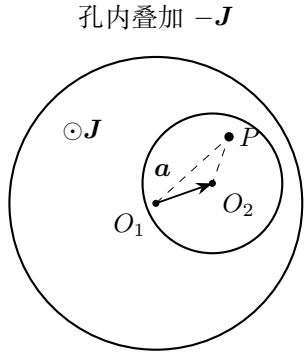


图 1.10: 偏心孔洞中的正、负电流叠加

图 1.10 的两条辅助线都终止于同一场点 P。正、负圆柱电流的场分别依赖从 O_1, O_2 指向 P 的位矢；两条位矢之差正是图中从 O_1 指向 O_2 的 $\boldsymbol{a}$。例 1.8 用这一关系给出场的大小和方向。

1.7　磁通量与磁场的无源性质

磁感线是在每一点与 $\boldsymbol{B}$ 相切的几何曲线，疏密只是辅助表示大小。没有磁单极源意味着任意闭合曲面穿出的有向磁通为零，

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0.$$

闭合曲面的法线统一向外；一个面上的正通量可由其他面上的负通量抵消。载流直导线周围的同心圆是闭合磁感线，理想匀强场则用延伸到无穷远的平行直线表示。

开曲面须先选正法线，磁通为 $\Phi = \int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$。只有平面内磁场均匀时，才能写成 $BS\cos\theta$。若场随位置变化，应同时保留场的空间函数和面积元；长直导线穿过邻近矩形面的磁通便会含有对数。以同一条闭合曲线为边缘、法线取向相容的两个曲面，磁通相同，因为它们合成的闭合曲面总通量为零。这个结论将为电磁感应中的选面提供依据。

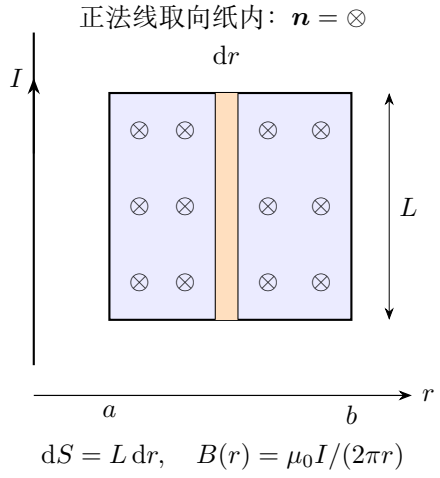


图 1.11: 长直导线邻近矩形面的磁通由不同距离处的窄条累加

图 1.11 中，导线右侧的磁场向纸内，与所选正法线同向。同一窄条内，磁场沿导线方向不变。各窄条到导线的距离 r 不同，分别以 $L\,\mathrm{d}r$ 取面积元。因此

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} L\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I L}{2\pi}\left[\ln r\right]_a^b = \frac{\mu_0 I L}{2\pi}(\ln b - \ln a) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

若把法线反向，整个结果变号；若矩形宽度 $b-a \ll a$，才可用近似均匀场 $B(a)$ 得到 $\Phi \simeq B(a)L(b-a)$。对数式与这一窄面极限相容。

1.8 近轴磁场的径向分量

图 1.12 的小圆柱位于对称轴附近。若轴向场随 z 增强，上底穿出的磁通多于下底穿入的磁通。圆柱侧面必有向内的磁通，磁感线向轴收拢。

在轴对称、轴附近无电流的区域，取半径 r、高 $\mathrm{d}z$ 的小圆柱。轴线附近，光滑的轴对称场有 $B_z(\rho,z)=B_0(z)+O(\rho^2)$，因为横向反转后轴向分量相同。两底通量之差可写为

$$2\pi\int_0^r \rho\,[B_z(\rho,z+\mathrm{d}z)-B_z(\rho,z)]\,\mathrm{d}\rho=\pi r^2 B_0'(z)\,\mathrm{d}z+O(r^4)\,\mathrm{d}z$$

（取高度的一阶项）。侧面积 $2\pi r\,\mathrm{d}z$ 乘侧面处的径向场给出侧面通量。两项相加为零，除以 $2\pi r\,\mathrm{d}z$ 后得到

$$B_r(r,z)=-\frac{r}{2}B_0'(z)+O(r^3).$$

因此轴向场沿 z 增强时，近轴径向场指向轴线；若轴向场减弱，则指向外侧。这个符号将直接用于磁镜的轴向平均力判断。

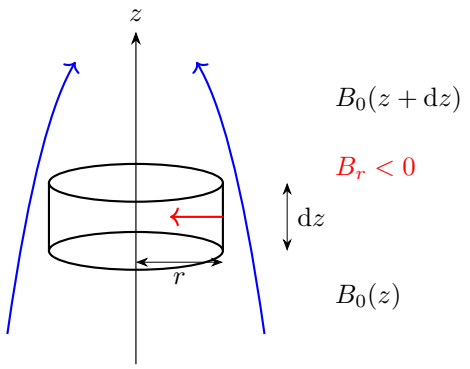
要进一步求轴向场的径向修正，在无电流区域使用小矩形环路的零环量，得到 $\partial B_r/\partial z=\partial B_z/\partial r$。将上一式对 z 求导，得 $\partial_r B_z=-(r/2)B_0''(z)+O(r^3)$。以 ρ 为径向积分变量，

$$B_z(r,z)-B_0(z)=-\frac{B_0''(z)}{2}\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho+O(r^4)=-\frac{B_0''(z)}{2}[\rho^2/2]_0^r+O(r^4).$$

这里 z 在径向积分中保持不变，得到

$$B_z(r,z)=B_0(z)-\frac{r^2}{4}B_0''(z)+O(r^4).$$

两个展开式说明，只要轴上函数足够光滑，就能求出邻近空间的最低阶结构。该展开用于离轴距离远小于轴向变化尺度的无电流区域。对于双线圈中心，若 B_0' 与 B_0'' 同时为零，径向与轴向的低阶不均匀性会一起减弱，这解释了中心均匀场设计的三维意义。



$$\pi r^2 B_0' \,\mathrm{d}z + 2\pi r B_r \,\mathrm{d}z = 0$$

图 1.12: 小柱体的侧面磁通补偿两底磁通差，轴向增强的场必然向轴线收拢

例 1.14 把轴线场取为二次函数，依次求径向场和轴向场的二阶径向修正。

1.9　电流面两侧的场与自身受力

环路定理还能给出穿过理想薄电流面的跨面关系。取法线 $\boldsymbol{n}$ 从负侧指向正侧，跨面矩形的高度趋零、长边仍有限，两个短边的环量趋零。由穿过矩形的面电流得到 $\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}_+-\boldsymbol{B}_-)=\mu_0\boldsymbol{K}$。另由极薄柱面的零总磁通，法向分量满足 $\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_+-\boldsymbol{B}_-)=0$。

切向场的跳变量由面电流给定，法向场连续。若两侧还存在一个均匀外场，它在两侧取同值，因此只改变两侧的平均场。

计算薄电流面本身的受力时，取其他电流产生的外场。对称薄层的平均场 $(\boldsymbol{B}_++\boldsymbol{B}_-)/2$ 正好消去其反向自场，留下可用于 $\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}$ 的场。这一规则解释了两层电流之间磁压力计算常见的因子二差异。

真实导体电流层具有有限厚度，场会在层内连续变化。薄层跳变、平均场受力都是对这一结构的极限描述。若给出体电流密度，先沿厚度积分求面电流。练习 1.6 从厚层的场得到相应的薄层极限。

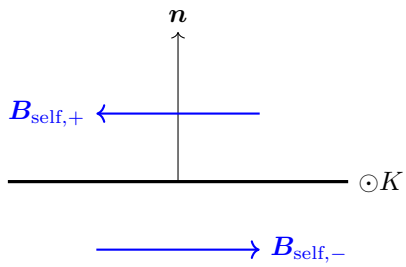


图 1.13: 面电流的自场两侧反向，取平均才消去自场

图 1.13 取面电流向纸外、正法线向上，右手关系给上方自场向左、下方向右。叠加同一个平滑外场后，两侧总场之差保留自场的跳变，平均值则消去这对反向贡献。剩下的平均场就是该面受力所用的外场。第二讲用这一结果计算两层面电流之间的磁压力。

1.10 零场点邻域的几何结构

以两条位于 $(\pm a, 0)$ 的同向相等电流为例，在两线中点附近，令 $c = \mu_0 I/(2\pi)$，两线精确场为

$$\boldsymbol{B} = c\left[\frac{-y\boldsymbol{e}_x + (x-a)\boldsymbol{e}_y}{(x-a)^2+y^2} + \frac{-y\boldsymbol{e}_x + (x+a)\boldsymbol{e}_y}{(x+a)^2+y^2}\right].$$

当 $|x|, |y| \ll a$，两分母先提出 a^2，分别写成 $a^2(1+\epsilon_\pm)$，其中

$$\epsilon_\pm = \mp\frac{2x}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}.$$

对 $F(\epsilon) = (1+\epsilon)^{-1}$ 求导，$F'(\epsilon) = -(1+\epsilon)^{-2}$，故 $F(0) = 1, F'(0) = -1$，一阶展开为 $F(\epsilon) = 1 - \epsilon + O(\epsilon^2)$。舍去坐标的二次及以上项，两分母的倒数分别为 $a^{-2}(1+2x/a) + O((x^2+y^2)/a^4)$、$a^{-2}(1-2x/a) + O((x^2+y^2)/a^4)$。故 $B_x = -2cy/a^2 + \cdots$，而 $B_y = c[(-a-x) + (a-x)]/a^2 + \cdots = -2cx/a^2 + \cdots$。保留坐标的一阶项可得

$$\boldsymbol{B} \simeq -\frac{\mu_0 I}{\pi a^2}(y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y).$$

中点场为零，沿 $+x$ 移动时场朝 $-y$，沿 $+y$ 移动时场朝 $-x$，邻近方向随位置快速改变。磁感线的切线条件为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = B_y/B_x = x/y$，在 $y \neq 0$ 的局部区间分离变量为 $y\,\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}x$。从场线上一点 (x_0, y_0) 积分，

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y} v\,\mathrm{d}v &= \int_{x_0}^{x} u\,\mathrm{d}u,\\ [v^2/2]_{y_0}^{y} &= [u^2/2]_{x_0}^{x},\\ \frac{y^2 - y_0^2}{2} &= \frac{x^2 - x_0^2}{2}.\end{aligned}$$

所以 $y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 =$ 常量。在 $y = 0$ 处可直接从 $\boldsymbol{B}$ 的两个分量读取切向。常量为零时，两条对角线给出穿过零点的分隔方向。

各条磁感线取不同的常量。图中两族双曲线分别在两条对角线划出的四个区域内。沿 $y = x$ 的场朝向零点，沿 $y = -x$ 的场背离零点。

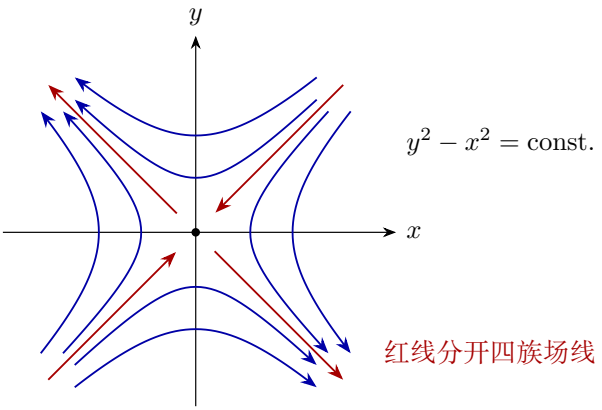


图 1.14: 两条对角线分开零场点周围的场线。沿 $y = x$ 向内，沿 $y = -x$ 向外

在图 1.14 中，$x > 0$ 轴上的场朝 $-y$，$y > 0$ 轴上的场朝 $-x$。例 1.9 比较两线同流和异流时的场分布。

1.11 例题与分析

例 1.1 (垂直直导线的零磁场集合)**.** 两条理想无限长细导线分别沿 x, y 轴通有正向电流 $I_1, I_2 > 0$。交会处作绝缘跨越并忽略其微小尺寸。求空间中磁场为零的位置，并说明平面外是否可能抵消。

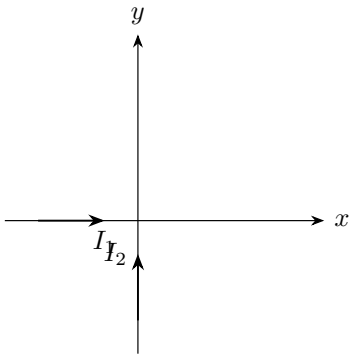


图 1.15: 题设：垂直直导线的零磁场集合

解　两条导线的场

图 1.15 的两导线分别沿 x, y 轴。取 $P = (x, y, z)$，绕 x 轴电流和绕 y 轴电流的环向场分别为

$$\boldsymbol{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(y^2+z^2)}(y\boldsymbol{e}_z - z\boldsymbol{e}_y), \quad \boldsymbol{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(x^2+z^2)}(z\boldsymbol{e}_x - x\boldsymbol{e}_z).$$

零场所在的平面

总场的 x 分量只有第二项提供，y 分量只有第一项提供。两电流非零，故这两个分量同时为零要求 $z = 0$，导线所在的奇点不在讨论范围内。

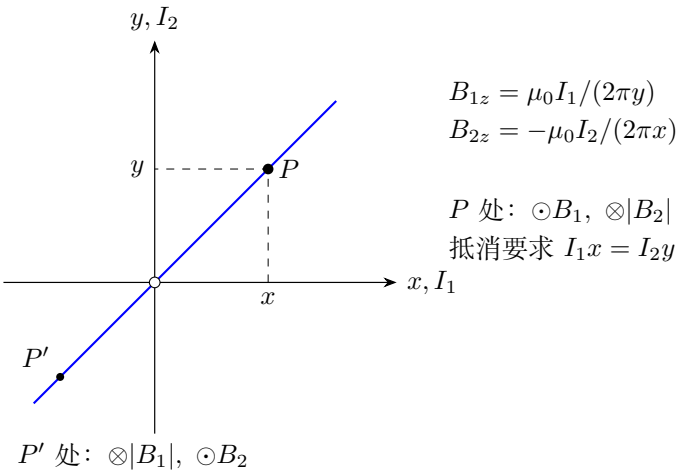


图 1.16: 先证零场点在 $z = 0$，再叠加两导线在该平面内的垂直分量

零场直线

在图 1.16 的平面内，只余 $B_z = \mu_0(I_1/y - I_2/x)/(2\pi)$。令它为零，交叉相乘得到 $I_1 x = I_2 y$，故零场集合是直线 $y = (I_1/I_2)x$，除去原点。它位于第一、第三象限，两项方向相反。第二、第四象限的两个环向场同向。

例 1.2 (圆电流轴线上的磁场)**.** 半径 R 的圆环通有电流 I，方向使轴上正向磁场为 $+x$。求距圆心 x 处的磁感应强度，并求场降到圆心值一半时的 $|x|$。

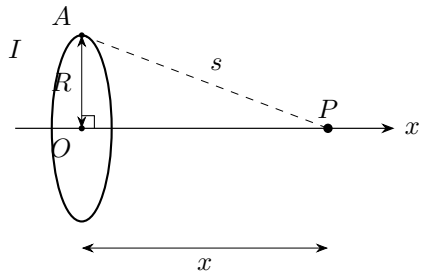


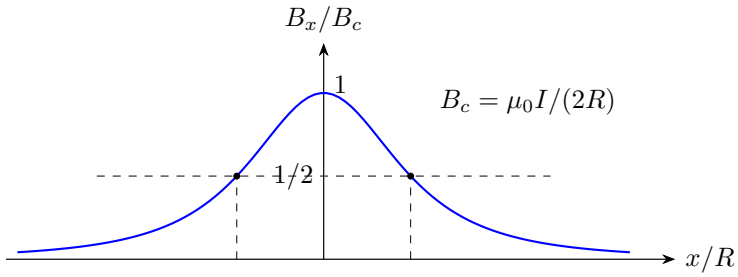
图 1.17: 题设：圆电流轴线上的磁场

解　轴向磁场

图 1.17 的直角三角形 AOP 给出 $s = \sqrt{R^2 + x^2}$。按图 1.4 分解磁场，轴向投影因子为 R/s，横向投影由对径元抵消。将正文中沿圆周的积分代入，得到

$$B_x = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi s^3}[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

方向沿 $+x$。以下把它和圆心场相比较。



半高位置：$x/R = \pm\sqrt{2^{2/3}-1}$

图 1.18: 轴线场关于圆心对称，半高位置由归一化曲线确定

半高位置

图 1.18 中函数关于圆心对称。以 $B_c = \mu_0 I/(2R)$ 归一化，$B_x/B_c = [1 + (x/R)^2]^{-3/2}$。令该比值为 $1/2$，两边取 $-2/3$ 次幂，得 $1 + (x/R)^2 = 2^{2/3}$，于是 $|x| = R\sqrt{2^{2/3}-1}$。两处距圆心相同，磁场均沿 $+x$。

例 1.3 (分流圆环的圆心场)**.** 电阻率、截面均匀的细导线弯成半径 R 的圆环，在点 A, B 接入电源。两弧圆心角为 α 与 $2\pi - \alpha$，端电压为 $U = V_A - V_B > 0$。引线对圆心的场忽略。求两弧电流及圆心磁场。

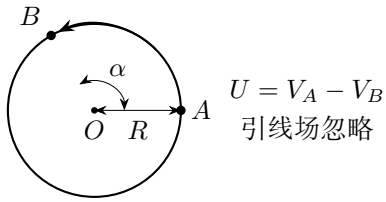


图 1.19: 题设：分流圆环的圆心场

解　两弧电流

由图 1.19 可见，两段弧的电流都从 A 流向 B，但沿圆周的绕向相反。记单位长度电阻为 λ，则 $R_1 = \lambda R\alpha$、$R_2 = \lambda R(2\pi - \alpha)$。两段并联，所以

$$i_1 = \frac{U}{\lambda R\alpha}, \qquad i_2 = \frac{U}{\lambda R(2\pi - \alpha)}.$$

圆心磁场

每段圆心场与电流、弧角的乘积成正比，取角为 α 的弧所生场为正，有 $B_1 = \mu_0 i_1 \alpha/(4\pi R)$、$B_2 = -\mu_0 i_2(2\pi-\alpha)/(4\pi R)$。

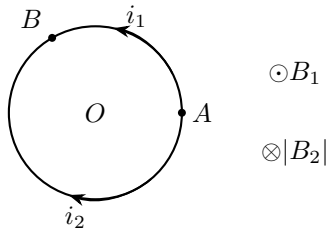


图 1.20: 解答过程：分流圆环的圆心场

合场

图 1.20 中两个场箭头方向相反，而 $i_1\alpha = i_2(2\pi-\alpha) = U/(\lambda R)$，故总场严格为零。较长弧电阻较大，电流按弧角的倒数减小，因而两弧在圆心产生等大的磁场。

例 1.4 (单层与双层面电流)**.** 无限薄平面 $y=0$ 内有均匀面电流 $\boldsymbol{K} = K\boldsymbol{e}_z$。求两侧的场。再在 $y=h$ 放置反向面电流 $-K\boldsymbol{e}_z$，求三个区域的总场。

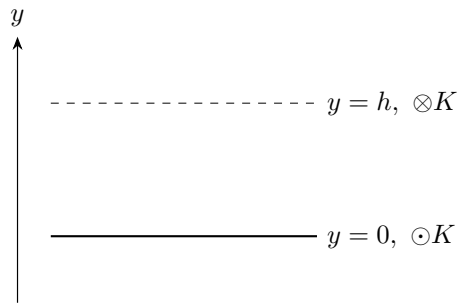


图 1.21: 题设：单层与双层面电流

解　单层电流面

图 1.21 先只保留下平面。沿 x 的平移对称和镜面对称使场沿 x，在两侧大小相等。正 z 电流在 $y>0$ 产生 $-x$ 场。取图 1.22 左侧的跨面矩形，两条长边逆向绕行，恰好分别顺着两侧的场，故环量同号相加，$2BL = \mu_0 KL$，故 $B = \mu_0 K/2$。

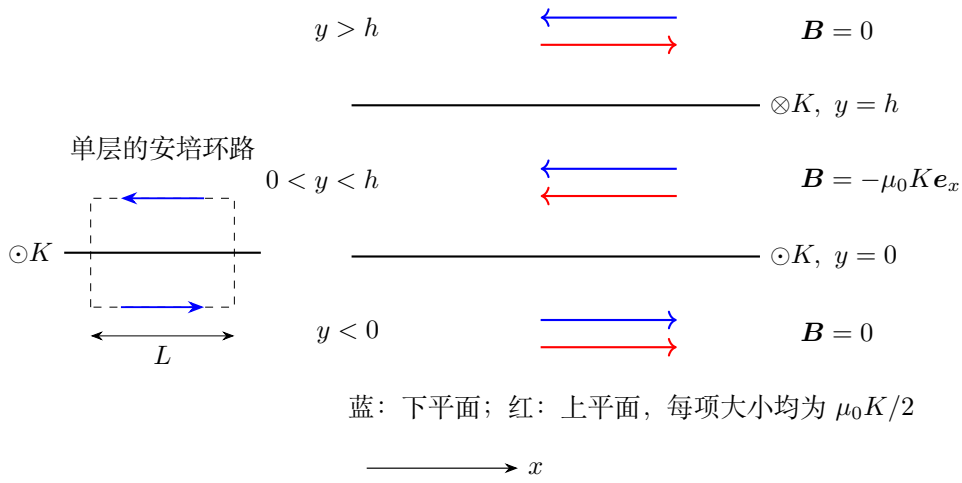


图 1.22: 分别画出两电流面在三个区域的场，再作矢量相加

双层场的叠加

按图 1.22 逐区叠加。下平面在其上方给 $-\mu_0 K\boldsymbol{e}_x/2$、下方给正向同值；上平面电流相反，在其下方也给负向同值。在 $0 < y < h$ 两项相加，$\boldsymbol{B} = -\mu_0 K\boldsymbol{e}_x$；在 $y < 0$ 与 $y > h$ 两项相消，总场为零。以上分段取电流面两侧的极限。

例 1.5 (密集线排的连续近似)**.** 无穷多根平行细导线沿 z 方向，均以电流 I_0 向外通流，其横截面在 x 轴上等间距排列，单位长度根数为 n。在高度 y 远大于间距 $1/n$ 的区域求磁场，并说明靠近一根细线时能否继续使用该结果。

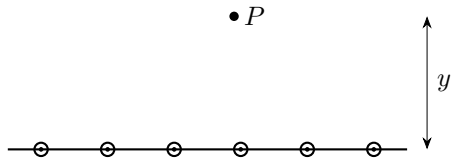


图 1.23: 题设：密集线排的连续近似

解　等效面电流

图 1.23 中观察高度已经使单根导线的细节被平滑，单位横向长度所含总电流为 $K = nI_0$。将线排当作连续电流面后，关于 $y = 0$ 的反射对称使两侧场反向，且水平平移不改变场。跨过线排作矩形环路，得 $2BL = \mu_0(nL)I_0$。

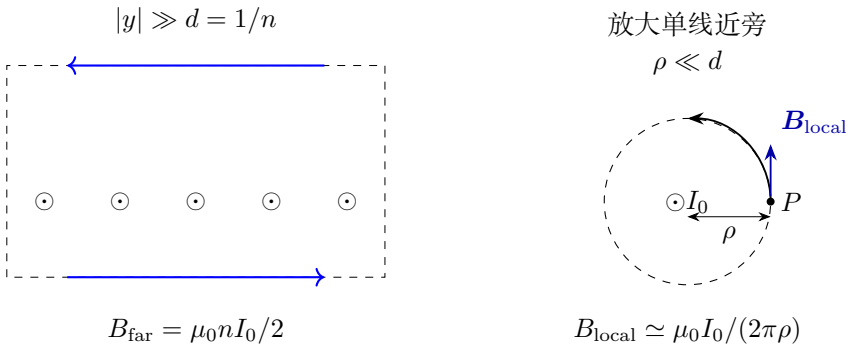


图 1.24: 线排远处可按连续面处理，单根导线近旁须恢复离散电流的局部环场

线排两侧的场

因此图 1.24 上方 $\boldsymbol{B} = -\mu_0 n I_0 \boldsymbol{e}_x/2$，下方反向。结果不含高度，是连续无限面模型的性质。

靠近细线时

若场点距某根线仅 $\rho \ll 1/n$，该线贡献约为 $\mu_0 I_0/(2\pi\rho)$，随 ρ 变小会显著超过连续值，此时最近的细导线决定场的主要部分。练习 1.8 给出从近处过渡到远处的场。

例 1.6 (由轴线场确定螺线管内场)**.** 理想无限长螺线管单位长度匝数为 n，电流为 I，已知轴线场为 $\mu_0 n I$。在没有外加场的条件下，证明管内任意位置的场等于轴线场。并计算 $n = 127\,\mathrm{m}^{-1}, I = 1.76\,\mathrm{A}, \mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}\,\mathrm{N/A}^2$ 时的大小。

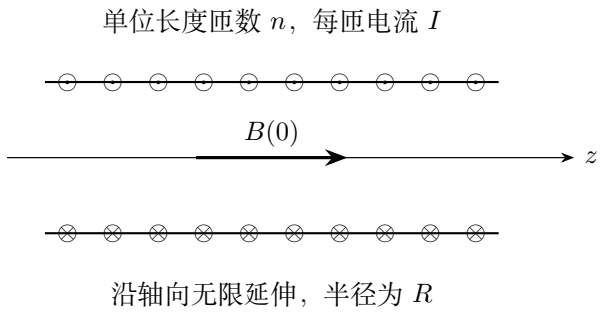


图 1.25: 无限长螺线管的纵截面；上下绕组电流方向相反，轴向场同向

解　管内矩形环路

图 1.25 具有轴向平移、绕轴旋转对称。再以过场点且垂直于轴的平面作镜面反射，线圈和环向电流保持原样，轴矢量的径向分量变号，故径向场为零。取经过

场点和轴的剖面作镜面反射，同时把电流反向，源分布也保持原样，环向分量因而为零。内部磁场沿轴。取两条长为 ℓ 的轴向线段，一条在轴线上，一条在任意半径 $r < R$ 处，再用径向短边闭合。短边与场垂直，且该矩形不穿过绕在柱面上的电流，故环路定理给出 $[B(r) - B(0)]\ell = 0$。

$$I_{\text{enc}} = 0 \implies [B(0) - B(r)]\ell = 0$$

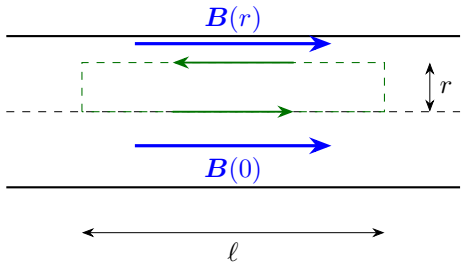


图 1.26: 绿色环路正向与蓝色磁场方向分开表示，环路面不穿过绕组电流

内部场强

由图 1.26 可得 $B(r) = B(0) = \mu_0 n I$。代入数值，

$$B = (1.26 \times 10^{-6})(127)(1.76) = 2.82 \times 10^{-4}\,\text{T}.$$

有限管口

有限螺线管靠近管口时，场沿轴向改变。例 1.13 从各匝的贡献计算有限管的中心场。

例 1.7 (均匀圆柱电流的内外场)**.** 半径 R 的无限长实心圆柱均匀通有轴向电流 I。介质按真空处理。求 $B(r)$，指出最大值的位置，并说明中心处场的方向怎样理解。

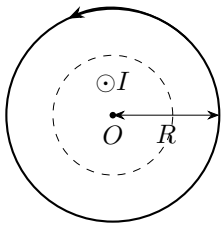


图 1.27: 题设：均匀圆柱电流的内外场

解 环路所围的电流

图 1.27 中的圆形安培环路半径为 r。对 $r < R$，均匀电流密度 $J = I/(\pi R^2)$，包围电流 $I_{\text{enc}} = J\pi r^2 = Ir^2/R^2$。因此 $B\,2\pi r = \mu_0 Ir^2/R^2$，约去 $r > 0$ 后得到 $B = \mu_0 Ir/(2\pi R^2)$。对 $r \geq R$，回路包围全部电流，故 $B = \mu_0 I/(2\pi r)$。

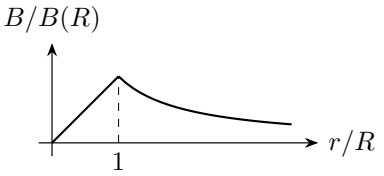


图 1.28: 解答过程：均匀圆柱电流的内外场

柱面上的最大场

图 1.28 中内部随半径线性增长，外部随半径下降，两支在 $r = R$ 的值均为 $\mu_0 I/(2\pi R)$，故最大值就在柱面。

轴心附近的场

中心邻域的场为 $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}/2$，在轴心连续趋于零。

例 1.8 (偏心圆柱孔洞中的均匀磁场)**.** 无限长圆柱导体中挖去一条与轴平行的圆柱孔，孔完全位于导体内。剩余部分的均匀电流密度为 $\boldsymbol{J}$，从大柱轴到孔轴的矢量为 $\boldsymbol{a}$。求孔内磁场。计算 $J = 1.40\,\text{A/m}^2, a = 0.149\,\text{m}$ 时的大小。

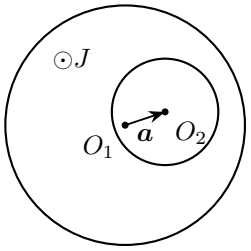


图 1.29: 题设：偏心圆柱孔洞中的均匀磁场

解 用两个圆柱叠加

图 1.29 中大柱与孔不同轴。将电流叠加为完整大柱的 $\boldsymbol{J}$ 与孔柱的 $-\boldsymbol{J}$。对孔内任一点 P，两柱内部场分别是 $\mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}_1/2$ 与 $-\mu_0 \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{r}_2/2$。

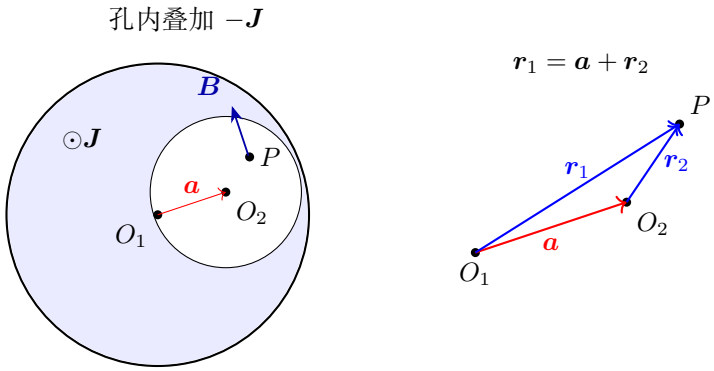


图 1.30: 左图重建孔洞中的正、负电流分布，右图放大同一场点的位置矢量关系

孔内的合场

图 1.30 中 $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{r}_2$，故

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\frac{\mu_0}{2}\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{a}.$$

场强大小与方向

结果不含场点坐标，说明孔内为均匀场。由于孔轴与电流轴平行，$\boldsymbol{J}\perp\boldsymbol{a}$，故 $B=\mu_0 Ja/2=1.31\times10^{-7}\,\mathrm{T}$，方向为 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{a}$。同轴时 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，孔内场为零。

例 1.9 (两平行电流的极大场与零场点)**.** 两条无限长导线位于 $x=\pm a$，电流都沿 $+z$。先令两电流均为 I，在垂直平分线 $x=0, y=s\geq0$ 上求场的极大值。再令左线电流为 $2I$、右线为 I，求零场点距左线的距离。

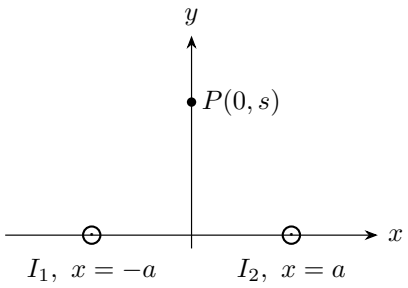


图 1.31: 题设：两平行电流的极大场与零场点

解　中垂线上的合场

在图 1.31 的平分线上，两股相等电流的场之 y 分量抵消，x 分量同向。到每条线的距离 $\rho=\sqrt{a^2+s^2}$，投影因子为 s/ρ，因此场大小

$$B(s)=2\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\frac{s}{\rho}=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{s}{a^2+s^2}.$$

最大场强

对商求导，

$$B'(s)=\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{(a^2+s^2)-s(2s)}{(a^2+s^2)^2}=\frac{\mu_0 I(a^2-s^2)}{\pi(a^2+s^2)^2}$$

，在 $0<s<a$ 为正、$s>a$ 为负，故 $s=a$ 取极大值 $\mu_0 I/(2\pi a)$。

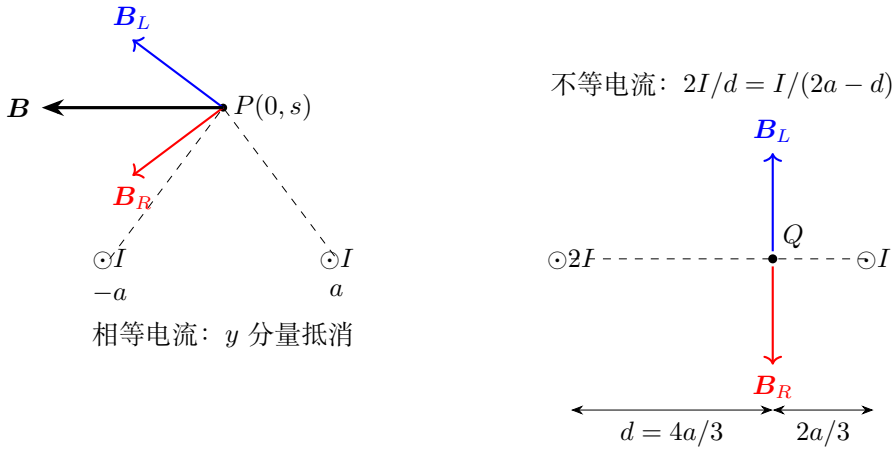


图 1.32: 等电流先作分量投影；不等电流再在两线间求反向场的抵消点

不等电流的零场点

在两线连线之外，两条从导线指向同一点的径向线不平行，相应的两个环向场也无法互相抵消。第二问按图 1.32 在两线之间设零场点距左线 d，两场方向相反，令 $2I/d=I/(2a-d)$。整理 $4a-2d=d$，得 $d=4a/3$，距右线 $2a/3$。零场点更靠近较弱电流，符合需要用较小距离补偿较小电流的判断。

例 1.10 (同轴双线圈的中心均匀性)**.** 两个相同圆线圈半径为 R，圆心在 $x=\pm a$，同向电流均为 I。求两圈中点的场。求使中点附近轴向场的二阶变化消失的间距，并求此时中心附近场变化的最低阶。

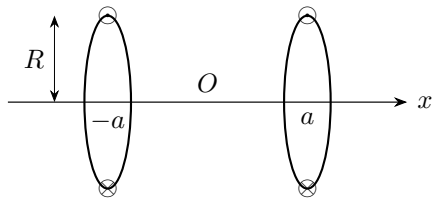


图 1.33: 题设：同轴双线圈的中心均匀性

解　双线圈的轴向场

图 1.33 两圈的轴向场同向，令 $f(u)=(R^2+u^2)^{-3/2}$，则 $B(x)=\mu_0 IR^2[f(x-a)+f(x+a)]/2$。在中点代入 $x=0$ 得 $B(0)=\mu_0 IR^2/(R^2+a^2)^{3/2}$。关于中点的反射对称已经保证一阶导数为零，进一步考察二阶导数。

$$f'(u)=-\frac{3}{2}(R^2+u^2)^{-5/2}(2u)=-3u(R^2+u^2)^{-5/2},$$

$$\begin{aligned} f''(u)&=-3(R^2+u^2)^{-5/2}+(-3u)\left(-\frac{5}{2}\right)(R^2+u^2)^{-7/2}(2u)\\ &=\frac{-3(R^2+u^2)+15u^2}{(R^2+u^2)^{7/2}}=3(4u^2-R^2)(R^2+u^2)^{-7/2}. \end{aligned}$$

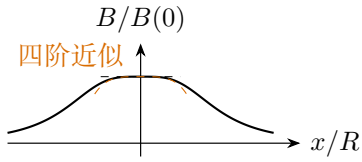


图 1.34: 解答过程：同轴双线圈的中心均匀性

线圈间距与中心场

两个内变量 $x-a, x+a$ 对 x 的导数都为 1，因此

$$B''(0)=\frac{\mu_0 IR^2}{2}[f''(-a)+f''(a)]=\frac{3\mu_0 IR^2(4a^2-R^2)}{(R^2+a^2)^{7/2}}.$$

图 1.34 的 $B''(0)=0$ 因而要求 $4a^2-R^2=0$。取正距离 $a=R/2$，两圈间距即 R。将该值代回中心场，

$$B(0)=\frac{\mu_0 IR^2}{[R^2+R^2/4]^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{R}\left(\frac{4}{5}\right)^{3/2}.$$

中心附近的变化

令 $u = x/R$、$k = 4/5$。取间距 R 后，把两个分母都提出在中心的值，则 $B(x)/B(0)$ 是 $(1+h_+)^{-3/2}$ 和 $(1+h_-)^{-3/2}$ 的平均，其中 $h_\pm = k(u^2 \pm u)$。连续求导时，每次把当前指数乘到系数上，再把指数减一。于是

$$(1+h)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}h + \frac{15}{8}h^2 - \frac{35}{16}h^3 + \frac{315}{128}h^4 + O(h^5).$$

两项平均以后，$h_\pm$、$h_\pm^2$、$h_\pm^3$、$h_\pm^4$ 的平均分别给出 ku^2、$k^2(u^2+u^4)$、$3k^3u^4 + O(u^6)$ 和 $k^4u^4 + O(u^6)$。二次项系数 $-3k/2 + 15k^2/8 = 0$，四次项系数为

$$\frac{15}{8}k^2 - \frac{105}{16}k^3 + \frac{315}{128}k^4 = -\frac{144}{125}.$$

原函数关于 u 为偶函数，五次项也为零，所以

$$\frac{B(x)}{B(0)} = 1 - \frac{144}{125}\left(\frac{x}{R}\right)^4 + O\big((x/R)^6\big)\,.$$

图 1.34 的虚线显示这一四阶变化。

例 1.11 (长直导线附近矩形面的磁通)**.** 无限长直导线沿 z 轴通有电流 I。在 xz 平面内取矩形，沿 z 长度为 l，径向范围 $a < x < b$。正法线选 $+y$，求磁通，并求用中点场乘面积的相对误差最低阶。

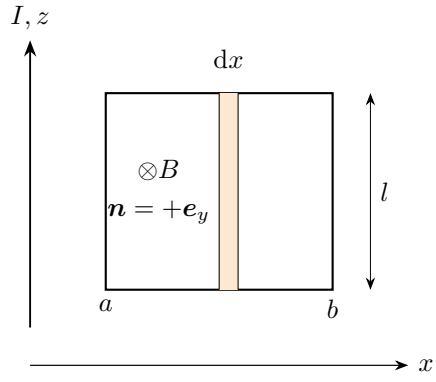


图 1.35: 矩形位于导线右侧的 xz 平面，正法线与局部场均向纸内

解　窄条磁通

图 1.35 的场垂直矩形面且指向 $+y$，沿高度不变，随 x 按 $1/x$ 变化。取宽 $\mathrm{d}x$、高 l 的窄条，面积元 $l\,\mathrm{d}x$，因此

$$\Phi = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\ \mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}[\ln x]_a^b = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

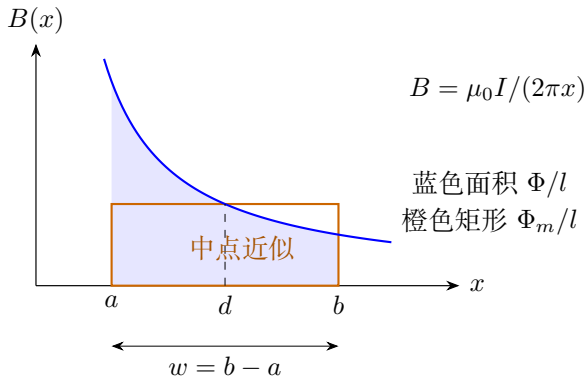


图 1.36: 同一磁通积分既可按窄条求和，也可用磁场曲线下的面积与中点矩形比较

中点近似

图 1.36 令中点距离 $d=(a+b)/2$、宽度 $w=b-a$。中点近似给 $\Phi_m=\mu_0 Ilw/(2\pi d)$。把精确式写成 $\ln[(1+w/(2d))/(1-w/(2d))]$，令 $g(u)=\ln(1+u)-\ln(1-u)$，逐项用链式法则求导：

$$g'(u)=\frac{1}{1+u}\cdot 1-\frac{1}{1-u}\cdot(-1)=\frac{2}{1-u^2}.$$

由恒等式 $1/(1-u^2)=1+u^2+u^4/(1-u^2)$，在 $u\to 0$ 时有 $g'(u)=2[1+u^2+O(u^4)]$。再用 $g(0)=0$，逐项积分，

$$\begin{aligned} g(u) &= 2\int_0^u [1+v^2+O(v^4)]\,\mathrm{d}v \\ &= 2\left[v+\frac{v^3}{3}\right]_0^u + O(u^5) = 2u+\frac{2u^3}{3}+O(u^5). \end{aligned}$$

代入 $u=w/(2d)$，得到 $\Phi=\mu_0 Il[w/d+w^3/(12d^3)+\cdots]/(2\pi)$。

相对误差

令 $\epsilon=w/d$，把精确磁通提出中点近似值，$\Phi=\Phi_m[1+\epsilon^2/12+O(\epsilon^4)]$。以精确值作分母，相对误差为

$$\frac{\Phi-\Phi_m}{\Phi}=\frac{\epsilon^2/12+O(\epsilon^4)}{1+\epsilon^2/12+O(\epsilon^4)}=\frac{\epsilon^2}{12}+O(\epsilon^4).$$

故中点近似偏小，相对误差最低阶为 $w^2/(12d^2)$。展开适用于矩形宽度 w 远小于它到导线的中点距离 d。

例 1.12 (径向非均匀电流密度)**.** 无限长圆柱半径 R, 电流密度沿轴且大小 $J(r) = J_0 r/R$。求总电流、内外磁场及最大场。

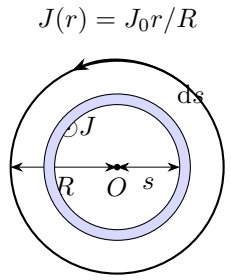


图 1.37: 题设：径向非均匀电流密度

解　环路所围的电流

图 1.37 中的密度随半径增加，半径 r 内的电流应按同心薄环积分。薄环面积 $2\pi s\,\mathrm{d}s$，故

$$I(r) = \int_0^r \frac{J_0 s}{R} 2\pi s\ \mathrm{d}s = \frac{2\pi J_0}{R}[s^3/3]_0^r = \frac{2\pi J_0 r^3}{3R}, \qquad I = I(R) = \frac{2\pi J_0 R^2}{3}.$$

柱内和柱外

再由 $2\pi r B = \mu_0 I(r)$ 得内部 $B = \mu_0 J_0 r^2/(3R)$。外部用总电流得到 $B = \mu_0 J_0 R^2/(3r)$。

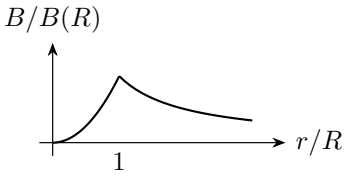


图 1.38: 解答过程：径向非均匀电流密度

最大场强

图 1.38 中内场按 r^2 增长，外场按 $1/r$ 下降，最大值是柱面上的 $\mu_0 J_0 R/3$。场的方向绕柱轴环行，按轴向电流取右手定则。

例 1.13 (有限线圈的中心场精度)**.** 半径 R、长度 l 的密绕螺线管单位长度匝数为 n，电流 I。由圆环轴线场积分求中心场，并求中心场至少达到无限长值 99% 所需的 l/R。

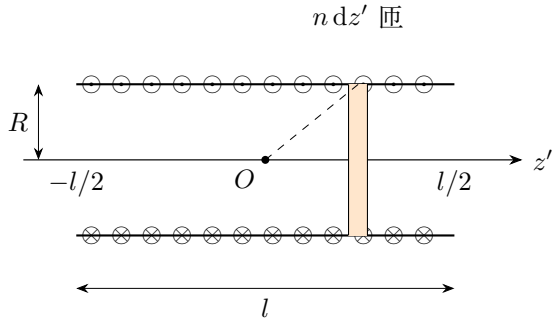


图 1.39: 有限密绕线圈的纵截面，位于 z' 的窄带含 $n\,\mathrm{d}z'$ 匝

解　各匝在中心的贡献

图 1.39 中心到轴向窄带的距离为 z'，窄带匝数 $n\,\mathrm{d}z'$，故

$$\begin{aligned} B_c &= \frac{\mu_0 n I R^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mathrm{d}z'}{(R^2+z'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2}\left[\frac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}\right]_{-l/2}^{l/2} \\ &= \frac{\mu_0 n I}{2}\frac{l}{\sqrt{R^2+l^2/4}} = \mu_0 n I\frac{l}{\sqrt{l^2+4R^2}}. \end{aligned}$$

这里沿用正文有限螺线管一节中已推得的原函数。上、下端贡献同号相加，与被积函数的偶对称相符。

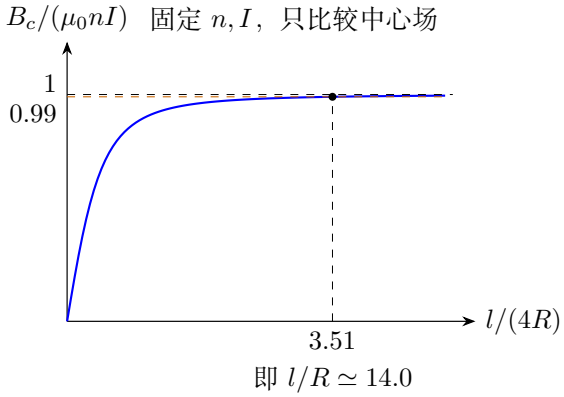


图 1.40: 中心场随长径比趋近无限长值；99% 对应的长径比由阈值交点给出

达到九成九的长度

图 1.40 要求比值 $l/\sqrt{l^2+4R^2} \geq 0.99$。平方并移项，$0.0199l^2 \geq 3.9204R^2$，所以 $l/R \geq 2(0.99)/\sqrt{1-0.99^2}$，所需的最小长径比约为 14.0。

短线圈极限

若固定总匝数 $N = nl$ 并缩短线圈，中心场可写为 $\mu_0 NI/\sqrt{l^2+4R^2}$。令 $l/R \to 0$，得 $N\mu_0 I/(2R)$，即 N 匝圆线圈重合时的圆心场。

例 1.14 (由轴线函数重建近轴磁场)**.** 轴对称、近轴无电流区域中，已知轴线上 $B_z(0,z) = B_0(1-z^2/L^2)$，其中 $B_0 > 0, L > 0$，考察 $r \ll L$ 的区域。求最低非零阶的 $B_r(r,z)$ 及 $B_z(r,z)$ 的二阶径向修正，并判断 $z > 0$ 时磁感线向轴还是离轴。

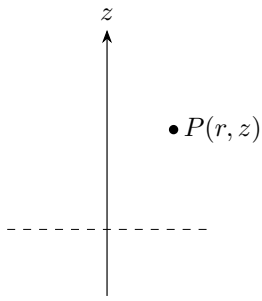


图 1.41: 题设：由轴线函数重建近轴磁场

解 径向场

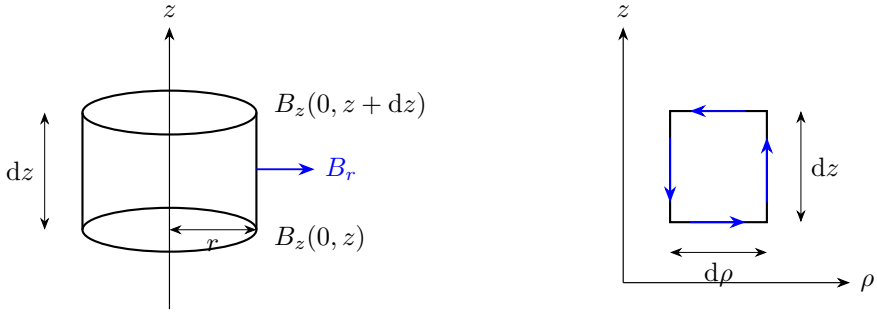


图 1.42: 左图取小圆柱的净磁通，右图在 rz 截面上取小矩形的环量

题图 1.41 给出场点 P。取图 1.42 左侧的小圆柱，记轴线函数为 $f(z) = B_0(1-z^2/L^2)$，最低阶给 $B_r = -rf'(z)/2$。求导时 B_0, L 都为常数，

$$f'(z) = B_0\left(0 - \frac{1}{L^2}\frac{\mathrm{d}z^2}{\mathrm{d}z}\right) = -\frac{2B_0 z}{L^2}.$$

所以 $B_r = B_0 r z/L^2 + O(r^3)$。

轴向场的径向修正

在图 1.42 右侧，底边和顶边的环量之差为 $-\partial_z B_r \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$，右边和左边之差为 $\partial_\rho B_z \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$。小矩形内无电流，两项相加为零，故 $\partial_\rho B_z = \partial_z B_r$。对 z 求偏导时保持 r 不变，$\partial(B_0 r z/L^2)/\partial z = (B_0 r/L^2)\cdot 1 = B_0 r/L^2$。从轴线积分到半径 r，取积分变量 ρ，

$$B_z(r,z) - B_z(0,z) = \frac{B_0}{L^2}\int_0^r \rho\,\mathrm{d}\rho + O(r^4) = \frac{B_0}{L^2}[\rho^2/2]_0^r + O(r^4),$$

得到

$$B_z(r,z) = B_0(1 - z^2/L^2) + \frac{B_0 r^2}{2L^2} + O(r^4).$$

场线的方向

因此 $z > 0$ 时径向分量向外，正好补偿轴向场沿 z 减弱造成的上下磁通差。

1.12 本讲小结

直导线周围的磁场沿环向。毕奥—萨伐尔定律把各电流元在同一场点的贡献作矢量相加。直线段先定垂距和两端的有向角，圆电流先用对称性消去横向分量，螺线管再沿轴向累加各匝。

安培环路定理把磁场的环量与环路包围的有向电流联系起来。圆柱电流取同轴圆，电流面与长螺线管取矩形，沿场的边给出环量。用正、负圆柱叠加，偏心孔内的两条位矢相减后只剩两轴的距离矢量。

闭合曲面的总磁通为零。近轴小柱面上，两底磁通之差由侧面磁通补偿。跨过薄电流面时，法向场连续，切向场有跳变。计算薄面受力时，两侧平均场留下外场。

1.13　练习

练习 1.1 (有限直导线的长线误差)**.** 长为 $2l$ 的直导线通有电流 I，场点在其中垂线上，垂距为 a。若用无限长导线公式近似，并以无限长值为分母定义相对误差，要求该误差不超过 5%，至少要求 l/a 多大?

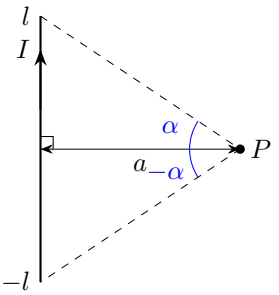


图 1.43: 题设：有限直导线的长线误差

练习 1.2 (圆弧与径向引线的圆心场)**.** 一段半径 R、圆心角 $3\pi/2$ 的圆弧通有逆时针电流 I，两端经径向引线引至远处闭合，忽略远处回路的场。求圆心场。

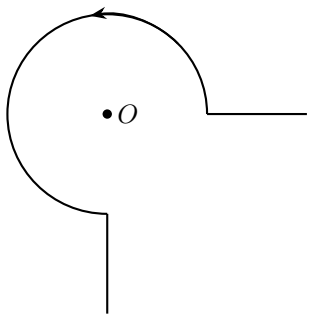


图 1.44: 题设：圆弧与径向引线的圆心场

练习 1.3 (正多边形线圈的圆心场)**.** 正 N 边形线圈外接圆半径为 R，电流为 I。求圆心场，并求 $N \to \infty$ 的极限。

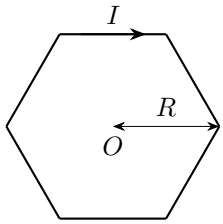


图 1.45: 题设：正多边形线圈的圆心场

练习 1.4 (旋转带电圆盘的中心场)**.** 半径 R 的绝缘薄圆盘面电荷密度为 $\sigma > 0$，以角速度 ω 绕轴逆时针匀速转动。求轴上磁场的积分式及圆心值。

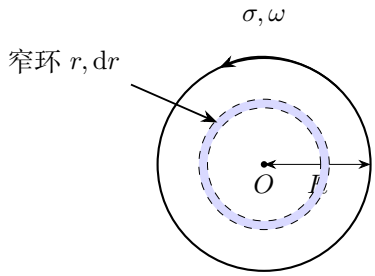


图 1.46: 题设：旋转带电圆盘的中心场

练习 1.5 (中空圆柱电流的三段场)**.** 无限长圆柱导体占据 $a < r < b$，轴向电流密度均为 J。求空心、导体内及外部的磁场，并说明两柱面处的场是否连续。

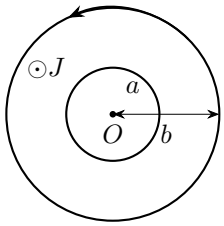


图 1.47: 题设：中空圆柱电流的三段场

练习 1.6 (厚电流层的连续磁场)**.** 沿 x, z 方向无限延展、厚度为 $2a$ 的平板占据 $-a < y < a$，均匀电流密度 $\boldsymbol{J} = J\boldsymbol{e}_z$。外无其他电流或外加场。求所有位置的 $\boldsymbol{B}(y)$。

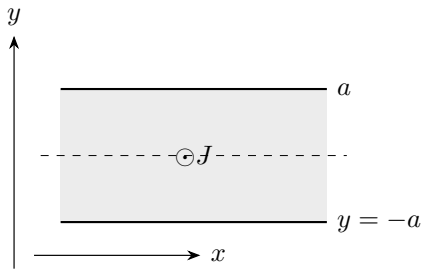


图 1.48: 题设：厚电流层的连续磁场

练习 1.7 (同轴正反电流的空间磁场)**.** 半径 a 的实心圆柱通有均匀电流 I 向外，半径 $b > a$ 的极薄同轴圆柱面上通有总电流 I 向里。求三段场，说明外场为零的原因。

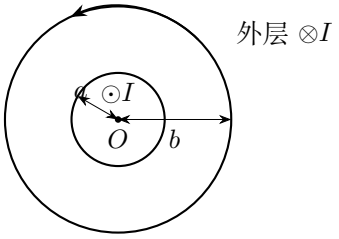


图 1.49: 题设：同轴正反电流的空间磁场

练习 1.8 (离散线排的近场修正)**.** 细线间距为 d，各沿 $+z$ 通电流 I，横截面为 $(kd, 0)$，k 为整数。求 $(0, y)$、$y > 0$ 处的场。可用恒等式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}[(kd)^2 + y^2]^{-1} = \pi \coth(\pi y/d)/(dy)$。高度多大时，离散场相对连续面场的增加不超过 1%?

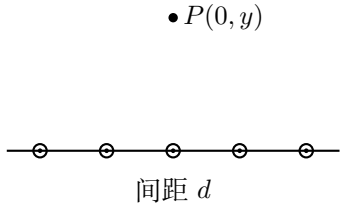


图 1.50: 题设：离散线排的近场修正

练习解答

练习 1.1

解　有限段与长线场

图 1.43 的两个端点角互为相反数。将 $z_1=-l, z_2=l$ 代入有限导线积分，

$$B_f=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right]_{-l}^{l}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{2l}{\sqrt{a^2+l^2}}=\frac{\mu_0 I l}{2\pi a\sqrt{a^2+l^2}}.$$

这里的原函数已由知识正文的 $z=a\tan\alpha$ 换元得到。长线值 $B_\infty=\mu_0 I/(2\pi a)$，因此比值为 $B_f/B_\infty=l/\sqrt{a^2+l^2}<1$。

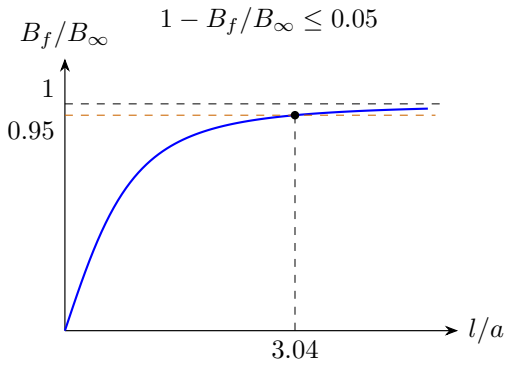


图 1.51: 以无限长值归一化，有限段场低于长线场；阈值与曲线交点给出所需长度

导线的最小长度

图 1.51 中误差按题目指定以长线值为分母，要求 $1-B_f/B_\infty\le 0.05$，即 $l/\sqrt{a^2+l^2}\ge 0.95$。两边均非负，可以平方：$l^2\ge 0.9025(a^2+l^2)$，故 $l/a\ge 0.95/\sqrt{1-0.95^2}$，最小比值约为 3.04。

练习 1.2

解　引线与圆弧的贡献

图 1.44 中沿径向引线的电流元与指向圆心的位置矢量共线，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=0$，所以两段径向线对圆心各自贡献为零。弧段每一元的磁场都向纸外，大小 $\mathrm{d}B=\mu_0 I\,\mathrm{d}\varphi/(4\pi R)$，从 0 积到 $3\pi/2$。

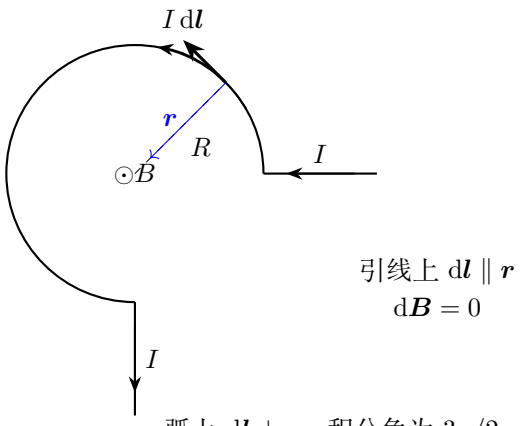


图 1.52: 径向引线的叉乘为零，圆弧各微元的圆心场均向纸外

圆心磁场

图 1.52 所示圆心总场为 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{3\pi/2}\mathrm{d}\varphi=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}[\varphi]_0^{3\pi/2}=\frac{3\mu_0 I}{8R}$，方向向纸外。该值是整圆 $\mu_0 I/(2R)$ 的 $3/4$，与弧长比例一致。

练习 1.3

解　单边的垂距与张角

图 1.45 用六边形示意一般正多边形。每条边到圆心的垂距为 $a=R\cos(\pi/N)$，从垂足到两个端点的张角均为 π/N。有限直线段公式给出单边贡献 $B_1=\mu_0 I\sin(\pi/N)/(2\pi a)$，所有边在圆心的场同向，按图中的顺时针电流均指向纸内。

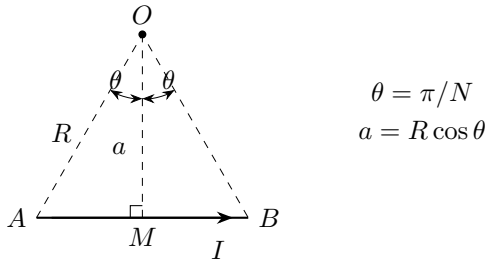


图 1.53: 一般正多边形的一边及圆心构成等腰三角形；此处按六边形的一边示意

各边的合场

按图 1.53 相加得到 $B = NB_1 = \mu_0 NI\tan(\pi/N)/(2\pi R)$。令 $u = \pi/N$，则 $N\tan(\pi/N) = \pi(\tan u/u) \to \pi$，故 $B \to \mu_0 I/(2R)$，回到圆环结果。这里取外接圆半径 R 固定。

练习 1.4

解　旋转薄环的电流

图 1.46 取半径 r、宽 $\mathrm{d}r$ 的薄环，电荷 $\mathrm{d}q = 2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r$，每转一周通过固定径线一次。故 $\mathrm{d}I = \mathrm{d}q\,\omega/(2\pi) = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$。每一薄环在轴上坐标 z 的场由圆电流轴线式得到。图 1.54 中，z 是从盘心 O 到轴上 P 的坐标，r 是薄环的半径。斜线长 $\sqrt{r^2+z^2}$，是环上电流元到 P 的距离。

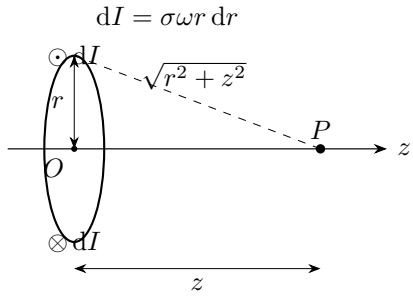


图 1.54: 解答过程：旋转带电圆盘的中心场

轴线场

于是图 1.54 中

$$B_z(z) = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3\,\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}.$$

圆心磁场

在圆心 $z = 0$，对 $r > 0$ 被积函数化为 1，积分下端按连续极限处理：$B_z(0) = (\mu_0\sigma\omega/2)\int_0^R \mathrm{d}r = (\mu_0\sigma\omega/2)[r]_0^R = \mu_0\sigma\omega R/2$，方向向纸外。

练习 1.5

解　三个环路包围的电流

图 1.47 仍有关于共同轴的旋转对称，场沿环向。取半径 r 的圆环路：$r < a$ 时包围电流为零，因此 $B = 0$；$a < r < b$ 时包围电流为 $J\pi(r^2 - a^2)$；$r > b$ 时包围全部电流 $J\pi(b^2 - a^2)$。

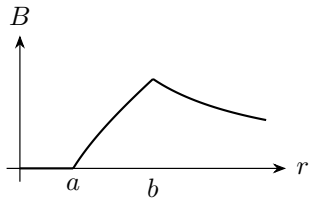


图 1.55: 解答过程：中空圆柱电流的三段场

三段场强

将图 1.47 中各环路包围的面积逐段代入 $B=\mu_0 I_{\mathrm{enc}}/(2\pi r)$，得

$$B=\begin{cases}0, & r<a,\\ \mu_0 J(r^2-a^2)/(2r), & a\le r\le b,\\ \mu_0 J(b^2-a^2)/(2r), & r>b.\end{cases}$$

图 1.55 的两处转折分别对应内、外柱面。

内外表面

在 $r=a$ 中间式为零，在 $r=b$ 与外式相等，场连续。导体内先把中间式改写为 $B=(\mu_0 J/2)(r-a^2 r^{-1})$，再对 r 求导：

$$B'(r)=\frac{\mu_0 J}{2}[1-a^2(-1)r^{-2}]=\frac{\mu_0 J}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)>0.$$

所以最大值仍在外表面。

练习 1.6

解　厚层内部的场

图 1.48 关于中面反射对称，$\boldsymbol{B}(0)=0$，场沿 x。对 $0<y<a$，取长边在中面与高度 y 的矩形，包围电流为 JyL。上边的场向 $-x$，环路定理按大小给 $BL=\mu_0 JyL$，故 $\boldsymbol{B}=-\mu_0 Jy\boldsymbol{e}_x$。反射后该式也适用于负 y。

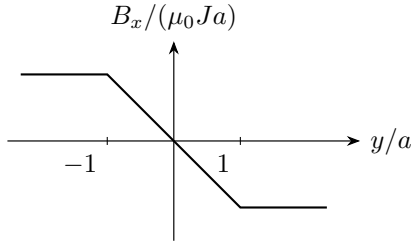


图 1.56: 解答过程：厚电流层的连续磁场

厚层两侧的场

图 1.56 中当 $y>a$ 时已包围半层全部电流，$B=\mu_0 Ja$，方向 $-x$；当 $y<-a$ 时方向 $+x$。即内部线性变化，外部为 $\boldsymbol{B}=-\mu_0 Ja\,\mathrm{sgn}(y)\boldsymbol{e}_x$。

压成薄层

场在两侧表面连续，斜率发生改变。若将厚层压缩而保持 $K=2aJ$ 不变，就得到薄面两侧 $\mu_0 K/2$ 的极限，说明薄面跳变是连续厚层的极限。

练习 1.7

解　各环路所围的电流

在图 1.49 取同轴圆环路。$r<a$ 时只包围内柱的 Ir^2/a^2；$a<r<b$ 时包围全部正向电流 I；$r>b$ 时有向包围电流为 $I-I=0$。由于整体保留完整圆柱对称，可以把场从环量中独立提出。

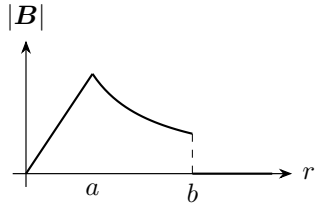


图 1.57: 解答过程：同轴正反电流的外部抵消

三段场强

所以图 1.57 三段场大小依次为 $\mu_0 Ir/(2\pi a^2)$、$\mu_0 I/(2\pi r)$、0，前两段环向相同。内柱表面 $r=a$ 连续，薄外导体面 $r=b$ 的两侧场则发生跳变，差值 $\mu_0 I/(2\pi b)$ 对应外层面电流密度。在外部同轴圆上，场沿圆周且大小恒定，故零环量给出 $B=0$。

练习 1.8

解　离散线排的合场

由图 1.50，第 k 根线在 P 的场之 x 分量为 $-\mu_0 Iy/[2\pi((kd)^2+y^2)]$。正、负 k 两根线的 y 分量相消，因此将这些 x 分量求和。代入给出的恒等式，

$$B_x=-\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(kd)^2+y^2}=-\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\frac{\pi}{dy}\coth\frac{\pi y}{d}.$$

约去 π, y，得到 $\boldsymbol{B}=-[\mu_0 I/(2d)]\coth(\pi y/d)\boldsymbol{e}_x$。

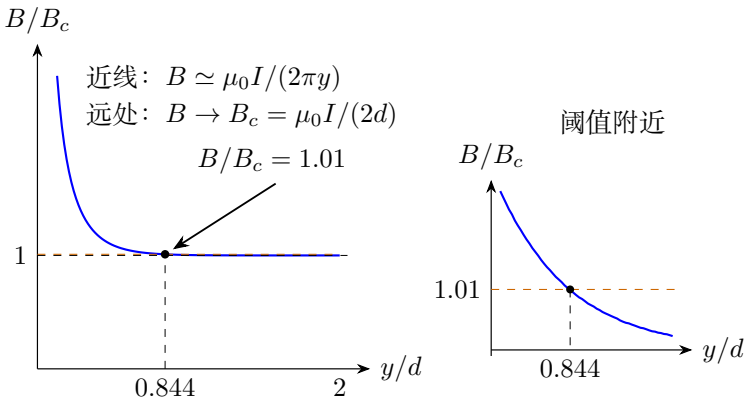


图 1.58: 离散场大小大于连续面值，近线极限和 1% 阈值由同一曲线给出

连续近似的误差

图 1.58 的连续面值为 $B_c = \mu_0 I/(2d)$，故相对增加为 $\coth u - 1$，其中 $u = \pi y/d$。用 $\coth u = (\mathrm{e}^{2u}+1)/(\mathrm{e}^{2u}-1)$，不等式化为 $2/(\mathrm{e}^{2u}-1) \le 0.01$，依次得到 $\mathrm{e}^{2u} \ge 201$、$y/d \ge \ln 201/(2\pi)$，最小值约为 0.844。

贴近一根导线

令 $u = \pi y/d \to 0^+$。指数函数的导数为 $\mathrm{d}\mathrm{e}^{2u}/\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^{2u}$，故在零点的一阶展开为 $\mathrm{e}^{2u} = 1 + 2u + O(u^2)$。将它代入双曲余切的分式，

$$\coth u = \frac{2 + 2u + O(u^2)}{2u + O(u^2)} \sim \frac{1}{u}.$$

所以 $y \ll d$ 时 $\coth(\pi y/d) \simeq d/(\pi y)$，磁场大小为

$$B \simeq \frac{\mu_0 I}{2d}\frac{d}{\pi y} = \frac{\mu_0 I}{2\pi y},$$

回到最近那根长直线的场，把远场与近场两种尺度接续起来。

静磁

物理竞赛一轮讲义

第二讲

磁力、磁矩与平衡

2026

目录

第二讲　磁力、磁矩与平衡 **1**

2.1　安培力与导线的合力 1

2.2　平行长直电流的相互作用 2

2.3　线圈的磁矩与力矩 2

2.4　从分布力得到平面电流的力矩 4

2.5　磁势能的使用条件与稳定性 5

2.6　相反面电流之间的磁压力 6

2.7　磁力的分解、支持力与摩擦阈值 7

2.8　从近轴分布力理解磁偶极子的平移 8

2.9　带电体旋转产生的磁矩与应力 9

2.10 球对称带电转子的进动 9

2.11 短时磁冲量与机械运动的衔接 10

2.12 例题与分析 11

2.13 本讲小结 29

2.14 练习 29

练习解答 32

第二讲　磁力、磁矩与平衡

2.1　安培力与导线的合力

载流导线置于外磁场中，每一小段都受到安培力。取 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿电流方向，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}. \tag{2.1}$$

若电流方向反向，受力也反向。图 2.1 中电流从 A 沿导线流向 B。各点的 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿曲线切线，场若均匀，各小段的力可以先把共同的 $\boldsymbol{B}$ 提到积分号外。

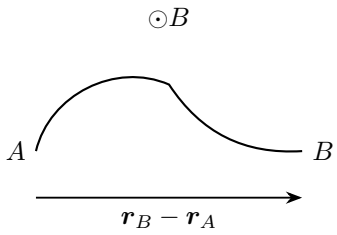


图 2.1: 均匀场中弯曲导线的端点位移

沿导线以弧长 s 为变量，$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}'(s)\,\mathrm{d}s$。若起点与终点分别对应 $s = 0$ 和 $s = L$，则

$$\boldsymbol{F} = I\int_0^L \boldsymbol{r}'(s)\,\mathrm{d}s \times \boldsymbol{B} = I[\boldsymbol{r}(s)]_0^L \times \boldsymbol{B} = I(\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A) \times \boldsymbol{B}.$$

这样得到的 $\boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$ 是图中的直箭头。闭合线圈首尾重合，在均匀场中的合力为零。各处磁力仍可能形成力偶。场随位置变化时，把各段的 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}(s))$ 留在积分号内。

例 2.1 的导线虽然弯曲，各段仍处在同一个匀强场中。把各线元首尾相加，只剩起点到终点的有向位移，由它与磁场的叉乘求合力。

2.2 平行长直电流的相互作用

取两条长导线的电流都沿 $+z$，右线位于左线的 $+x$ 侧，间距为 d。图 2.2 中，左线电流 I_1 在右线处产生沿 $+y$ 的场 $B_1 = \mu_0 I_1/(2\pi d)$。右线电流沿 $+z$，叉乘给出沿 $-x$ 的力。右线上长度 l 的一段受力为 $I_2 l B_1$，每单位长度受力大小为

$$f_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}.$$

在左线处交换两线的角色，得到大小相等、方向相反的力。同向电流相吸，任一根导线的电流反向后，两根线相斥。

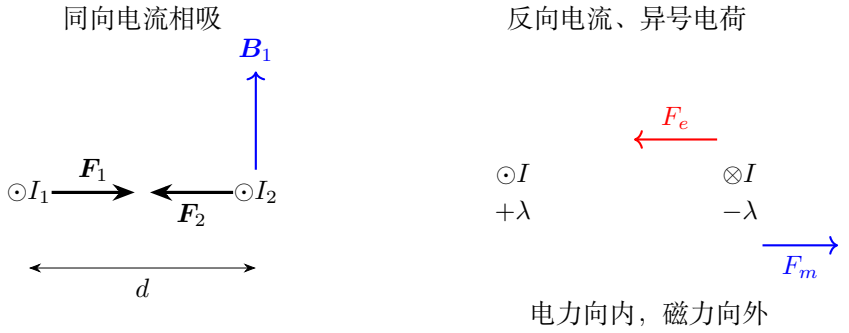


图 2.2: 先由另一根导线的场确定磁力，再与净电荷的电力分别比较

若两根细线还分别带净线电荷 $+\lambda, -\lambda$，右图所示的电力为吸引力，每单位长度的大小为 $f_e = \lambda^2/(2\pi\varepsilon_0 d)$。若两根线的电流大小同为 I，两种力之比为 $\mu_0\varepsilon_0 I^2/\lambda^2$。例 2.3 用单位长度电容 c' 从线间电压 U 求出净线电荷 $\lambda = c'U$，再由两种力平衡求电流。

2.3 线圈的磁矩与力矩

图 2.3 从转轴上方看一只矩形线圈。磁场垂直转轴，因而位于图示截面内。垂直纸面的两条载流边长 b，在纸面内相距 a。右手四指沿电流弯曲，拇指给出线圈的正法线 $\boldsymbol{n}$。图中的 θ 是从 $\boldsymbol{B}$ 到 $\boldsymbol{n}$ 的夹角。两条载流边的力各为 IbB，方向相反，作用线的间距为 $a\sin\theta$。

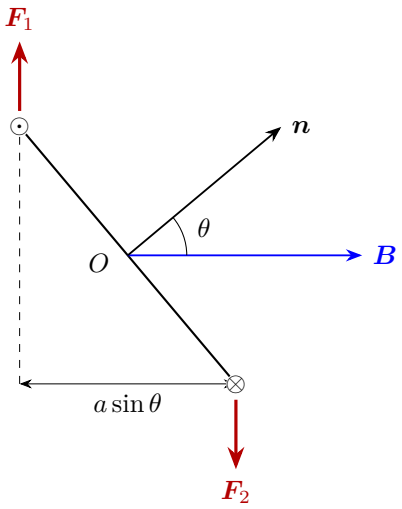
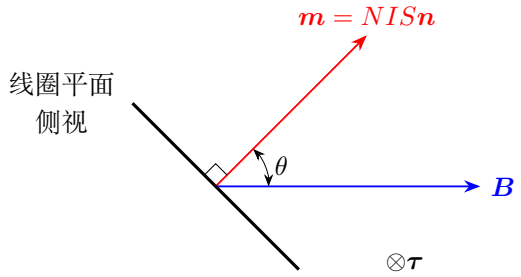


图 2.3: 从转轴上方看矩形线圈。两条有效载流边分别向纸外和纸内通电，磁力构成使夹角减小的力偶

另一对边的磁力沿转轴，对该轴的力矩为零。因此一匝线圈受到的力偶矩大小为 $(IbB)a\sin\theta = ISB\sin\theta$，其中 $S = ab$。对 N 匝同向绕制的线圈定义 $\boldsymbol{m} = NIS\boldsymbol{n}$，总力矩为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}. \tag{2.2}$$



$$\tau_\theta = -mB\sin\theta$$

图 2.4: 角度从线圈法线量到外场；向纸内的力矩使正夹角减小

图 2.4 中，磁矩偏向 $\boldsymbol{B}$ 上方，叉乘指向纸内，夹角随之减小。转到反平行位置后若受到微小扰动，同一力矩关系会使线圈进一步离开反平行位置。例 2.4 把这条力矩关系写成转动方程，求线圈由静止释放后的角速度。

2.3.1 场随位置变化时的受力与取矩

在尺寸远小于场变化尺度、磁矩保持固定的近似下，磁偶极子受力为 $\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{B})$。若磁矩与场同轴，且只讨论轴向变化，便有 $F_z = m_z\,\mathrm{d}B_z/\,\mathrm{d}z$。后文“从近轴分布力理解磁偶极子的平移”一节从圆周各处的安培力推导这一轴向关系。

线圈尺寸与场变化尺度相当时，按每段导线的位置求 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$，再以所选轴为准积分 $\boldsymbol{r}\times\mathrm{d}\boldsymbol{F}$。例 2.5 在水平投影中确定长直导线与方框两条竖边的位置，例 2.11 比较靠近和远离长直导线的两条边。场强差和力臂都由各段的实际位置给定。

2.4 从分布力得到平面电流的力矩

磁矩公式可以由每一小段导线的力直接建立。先把任意形状的平面闭合回路放在 xy 平面，规定电流从 $+z$ 看为逆时针，取外场 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_x$。电流元 $I(\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x+\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y)$ 受到的力为 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -IB\,\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_z$，其关于原点的力矩是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = IB(-y\,\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_x + x\,\mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y).$$

第一项是全微分，$\oint y\,\mathrm{d}y = \oint \mathrm{d}(y^2/2) = 0$。第二项可按水平窄条理解：在逆时针回路的右侧，$\mathrm{d}y>0$，左侧绕行时 $\mathrm{d}y<0$，故

$$\oint x\,\mathrm{d}y = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [x_{\mathrm{right}}(y) - x_{\mathrm{left}}(y)]\,\mathrm{d}y = S.$$

若一条水平线与回路多次相交，就把各段条带宽度相加；同样得到有向面积。因此这部分力矩为 $IBS\boldsymbol{e}_y$。对任意方向的外场，可先把场分成面内、法向两部分，再把 x 轴取为面内场的方向。面内部分沿用上述推导。

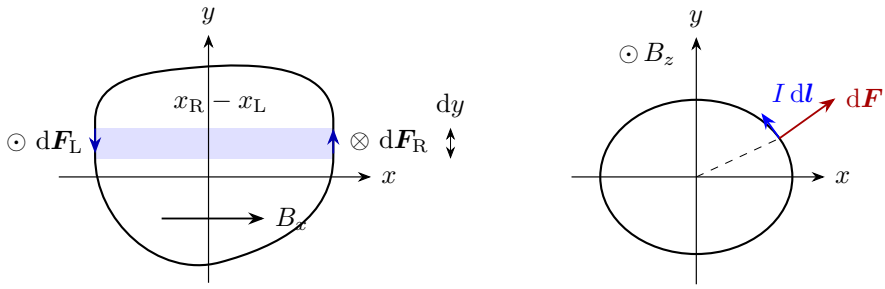
若场只有法向分量 $B_z\boldsymbol{e}_z$，电流元受力留在线圈平面内，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = IB_z(\mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_x - \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_y), \qquad \mathrm{d}\tau_z = x\;\mathrm{d}F_y - y\;\mathrm{d}F_x = -IB_z(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y).$$

这里 $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}[(x^2+y^2)/2]$，沿闭合回路积分为零。两部分叠加后，只有面内场贡献总力矩，因此 $\boldsymbol{\tau} = (IS\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 由电流右手定则确定。

任意形状的平面回路都可逐条带累加面积。多匝线圈按每匝面积和绕向相加。均匀场中总力为零，取矩点的平移不改变总力矩。非均匀场中若有合力 $\boldsymbol{F}$，原点从 O 移到 O'，则 $\boldsymbol{\tau}_{O'} = \boldsymbol{\tau}_O - \overrightarrow{OO'}\times\boldsymbol{F}$。

磁矩提供的是回路远场和均匀外场力矩的简洁表达。用它分析近距离导线之间的相互作用时，场在回路范围内可能明显变化，应回到各边积分。在外场变化尺度远大于回路尺寸时，可以采用偶极近似。



面内场与水平窄条　　法向场使微元力留在平面内

图 2.5: 左图在同一高度取一对电流元，右图示意法向场中的微元力

图 2.5 左图的窄条两端电流沿相反方向通过同一高度，力沿纸内、纸外，绕 y 轴的力臂之差就是条宽 $x_R - x_L$。右图中 $d\boldsymbol{F}$ 留在平面内，绕法线的力矩累加为闭合回路上的全微分。

2.5 磁势能的使用条件与稳定性

大小固定的电流回路在给定外场中转动时，力矩关于夹角 θ 的作用方向使磁矩趋向磁场。广义力矩为 $\tau_\theta = -mB\sin\theta$，由 $dU = -\tau_\theta\,d\theta$，

$$U(\theta) - U(0) = mB\int_0^\theta \sin\varphi\,d\varphi = mB[-\cos\varphi]_0^\theta = mB(1-\cos\theta).$$

选择零点使 $U(0) = -mB$，得到有效势能 $U = -mB\cos\theta$。其微分满足 $dU = mB\sin\theta\,d\theta$；磁力矩作功为 $-dU$，因此平行位置势能最低，反平行位置势能最高。

在平行位置令 θ 很小，$U = -mB + mB\theta^2/2 + O(\theta^4)$。若转动惯量为 J，微振动方程为 $J\ddot\theta + mB\theta = 0$，令 $\omega_0^2 = mB/J$。试取 $\theta = e^{st}$，两次求导为 $\dot\theta = se^{st}$、$\ddot\theta = s^2e^{st}$。代入后 $(s^2+\omega_0^2)e^{st} = 0$，约去非零指数，特征方程 $s^2 + \omega_0^2 = 0$ 给出 $s = \pm i\omega_0$。实通解为 $\theta = A\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$；若 $\theta(0) = \theta_i, \dot\theta(0) = \Omega_i$，则 $A = \theta_i, D = \Omega_i/\omega_0$。通解的两次导数为，

$$\dot\theta = -A\omega_0\sin\omega_0 t + D\omega_0\cos\omega_0 t,$$
$$\ddot\theta = -A\omega_0^2\cos\omega_0 t - D\omega_0^2\sin\omega_0 t = -\omega_0^2\theta.$$

代回原方程为零，因此角频率为 $\sqrt{mB/J}$。在反平行位置写 $\theta = \pi + \delta$，二次项变成 $-mB\delta^2/2$，小扰动被放大。

上述势能用于给定外场中磁矩大小固定的转动。电源维持恒流时，它还会随磁通改变而交换能量。机械势能由力矩沿转角所做的功确定，电源功和场能另由电路条件确定。

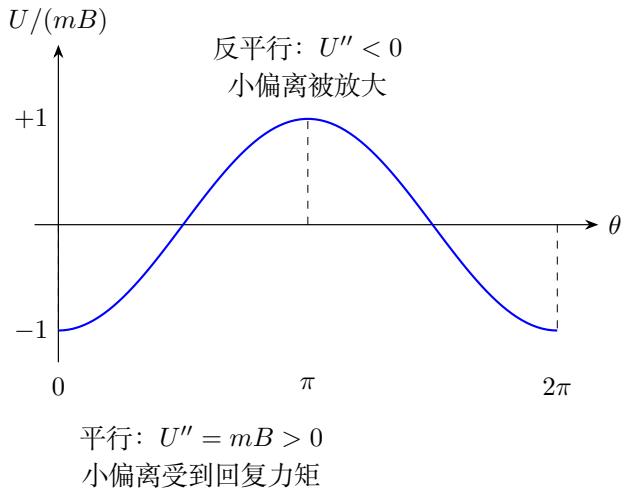


图 2.6: 固定磁矩在均匀外场中的有效势能；最低点与最高点的曲率决定局部稳定性

图 2.6 横轴的正向就是增大夹角的方向，所以机械广义力矩应取 $-\partial U/\partial\theta$。在最低点附近，曲线的二次项为正，回复力矩与偏角反向；在最高点附近，二次项为负，偏角越大越偏离平衡。

2.6　相反面电流之间的磁压力

图 2.7 中，两层薄板上的面电流大小同为 K，方向相反。单层在任一侧的场为 $\mu_0 K/2$。两层在夹层中同向叠加，$B = \mu_0 K$，在外侧相消。

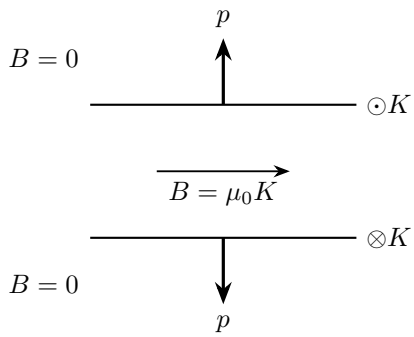


图 2.7: 反向电流层的场叠加与相互排斥

求上层受力时，外场取下层产生的 $\mu_0 K/2$。沿电流截取长 a、横向宽 b 的小片，片上电流为 Kb，受力为 $(Kb)a\mu_0 K/2$。下层也受到同样大小、方向朝外的力。单位面积的力为

$$p = \frac{(Kb)a\mu_0 K/2}{ab} = \frac{\mu_0 K^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

有限宽薄板在远离边缘的部分，可用同一压力近似。

2.7 磁力的分解、支持力与摩擦阈值

棒放在导轨上时，磁力一般既可沿轨道推动，也可改变支持力。接触时摩擦力的上限为 μN。改变磁场方向会改变 N，所以寻找最小磁场时，磁场方向与棒的支持力要一同确定。

以水平轨道上的直棒为例，若长度方向与观察平面垂直，允许磁力在平面内斜向上，设磁力与水平夹角为 α。则临界滑动要求

$$IlB\cos\alpha = \mu(mg - IlB\sin\alpha).$$

把 B 解出后，要让分母 $\cos\alpha + \mu\sin\alpha$ 最大。由 $\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\alpha - \arctan\mu)$，最优方向自然确定。这个优化既利用水平分量，又利用减小支持力的竖直分量；所得方向对应的支持力由竖直平衡式确定。

在斜面上，重力与磁力都应先按切向、法向分解。静止时，静摩擦取维持平衡所需的值，大小在 0 到 μN 之间。达到临界滑动时取上限。

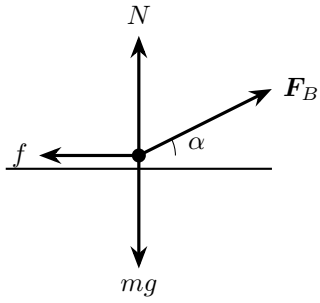


图 2.8: 磁力既推动导棒，也改变支持力

图 2.8 中的磁力竖直分量减小支持力，水平分量克服摩擦。这两个分量一同进入临界式。例 2.2 求出最优场方向，再把竖直分量代回支持力式，得到 $N > 0$。

2.8　从近轴分布力理解磁偶极子的平移

小线圈在非均匀场中的合力也能从导线元逐段推导。设外场关于 z 轴对称，圆线圈半径 a、位于垂直于轴的平面，电流从 $+z$ 看为逆时针。场变化尺度远大于 a，可用上一讲得到的近轴关系 $B_r \simeq -aB_z'(z)/2$。

线圈上的电流元沿方位正向，轴向场产生径向力，各段的径向合力相消；径向场则产生轴向力。因 $\boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_r = -\boldsymbol{e}_z$，有 $\mathrm{d}F_z = -I\,a\,\mathrm{d}\varphi\,B_r$。绕一周积分，

$$F_z = -IaB_r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = -IaB_r[\varphi]_0^{2\pi} = -2\pi a I B_r \simeq I\pi a^2 B_z'(z) = m_B B_z'(z).$$

这个推导解释了为什么轴向场的梯度会产生轴向合力：直接受力的其实是圆周上的径向小分量。

有限尺寸修正由更高阶径向场引入。近轴展开中下一项通常为 $O(a^3)$，积分再乘一因子 a，所以总力的下一项为 $O(a^4)$；相对主要的面积项，其大小受 a^2 与场变化尺度平方之比控制。轴上梯度为零时，面积项消失，剩余的力由更高阶场或对称性决定。

若线圈磁矩被约束反向，$m_{B,z} < 0$，轴向合力也反向。若允许自由转动，线圈还会受到改变取向的力矩，平移与转动需要同时考虑。式中 $m_{B,z}$ 取有向分量。

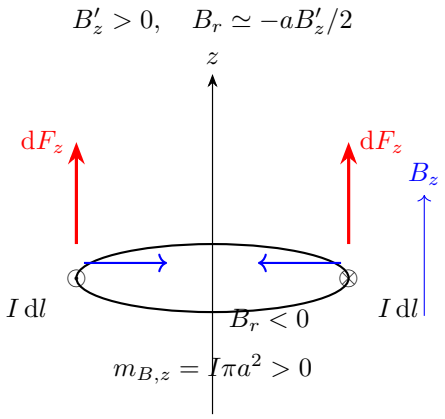


图 2.9: 圆周上两侧的径向场方向相反，但与各自环向电流叉乘后，轴向力同向

图 2.9 中 $B_z' > 0$ 使圆周上的径向场向内；环向电流与该径向分量叉乘产生向上的轴向力，各段相加而不抵消。轴向主场产生的径向力则两两抵消。

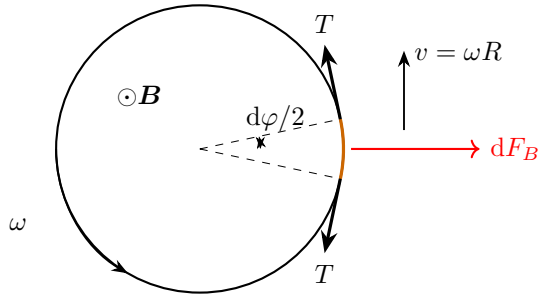
2.9 带电体旋转产生的磁矩与应力

把旋转带电体分解为同心薄环，薄环磁矩为 $\mathrm{d}m = \mathrm{d}I\,\pi r^2 = \omega r^2\,\mathrm{d}q/2$，所以

$$\boldsymbol{m} = \frac{\omega \boldsymbol{n}}{2}\int r_\perp^2\,\mathrm{d}q.$$

电荷与质量若处处按同一比例分布，机械角动量为 $\boldsymbol{L} = \omega\boldsymbol{n}\int r_\perp^2\,\mathrm{d}M$，立即得到 $\boldsymbol{m} = Q\boldsymbol{L}/(2M)$。

对旋转圆环，洛伦兹力沿径向；它可能改变环的张力，而对恒定角速度的转动不产生切向功率。取一小段圆弧，端点的两股张力合成径向力，大小与该段的圆心角成正比。练习 2.5 改为恒流弹性环，半径改变时由材料的伸长量决定张力。



正电荷沿逆时针转动；只画给定外磁场的作用

图 2.10: 圆环右侧微元的张力径向合量向内，正电荷所受的给定磁力向外

图 2.10 中，两个端点张力的切向分量相消，向心合量约为 $T\,\mathrm{d}\varphi$。以径向向内为正，该微段满足

$$T\,\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}F_B + \mathrm{d}F_{\text{其他, 内}} = \mathrm{d}M\,\omega^2 R, \qquad \mathrm{d}F_B = \mathrm{d}q\,\omega RB.$$

若保持同一半径、角速度和电荷分布，只比较加外场前后的张力变化，其他力项不变。均匀带电圆环有 $\mathrm{d}q = Q\,\mathrm{d}\varphi/(2\pi)$，两式相减便得 $\Delta T = Q\omega RB/(2\pi)$。对图中正电荷与场方向，外磁力向外，张力相应增加。电荷或磁场反向时，该增量也反号。总合力为零的整个圆环，仍可具有非零且改变了的内部张力。

2.10 球对称带电转子的进动

对于球对称且电荷质量同比分布的刚体，角动量与角速度平行。在均匀磁场中，$\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\,\mathrm{d}t = (Q/2M)\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$。这个变化始终垂直于 $\boldsymbol{L}$，所以角动量大小不变，只绕磁场进动。写成 $\mathrm{d}\boldsymbol{L}/\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{\Omega}_p\times\boldsymbol{L}$，得到 $\boldsymbol{\Omega}_p = -Q\boldsymbol{B}/(2M)$。负号来自交换叉积

次序。也可显式解分量方程：取 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$，记 $\gamma=QB/(2M)$，则 $\dot L_x=\gamma L_y$，$\dot L_y=-\gamma L_x$，$\dot L_z=0$。对第一式再求导，γ 为常数，因此 $\ddot L_x=\gamma\dot L_y=-\gamma^2 L_x$。试取 $L_x=\mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得到 $(s^2+\gamma^2)\mathrm{e}^{st}=0$，特征根为 $\pm\mathrm{i}\gamma$。令 $L_x=A\cos\gamma t+D\sin\gamma t$，求导为 $\dot L_x=-\gamma A\sin\gamma t+\gamma D\cos\gamma t$。由 $L_x(0)=L_{x0}$、$\dot L_x(0)=\gamma L_{y0}$ 确定 $A=L_{x0}, D=L_{y0}$，再由 $L_y=\dot L_x/\gamma$ 得到

$$L_x=L_{x0}\cos\gamma t+L_{y0}\sin\gamma t,\quad L_y=L_{y0}\cos\gamma t-L_{x0}\sin\gamma t,\quad L_z=L_{z0}.$$

第二式也可将第一式求导再除以 γ 得到；$\gamma=0$ 时原方程直接给出三个分量恒定。分量解显示正电荷从 $+z$ 看沿顺时针进动。

球形刚体的转动惯量各向相同。$\boldsymbol{L}$ 的大小不变，因而转动动能不变。

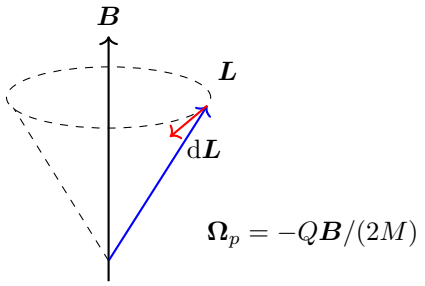


图 2.11: 垂直于角动量的力矩改变方向，不改变角动量大小

图 2.11 中，$\boldsymbol{L}$ 与场的夹角固定，端点在垂直场的圆上运动。球带正电时，从 $+z$ 看沿顺时针转动。例 2.14 以初始横向角动量沿 $+x$ 的实心球为例，求三个分量随时间的变化。

2.11　短时磁冲量与机械运动的衔接

若直棒在匀强场中受到的主要水平力为 Bil，即使电流随时间变化，仍可在固定方向上积分牛顿定律：

$$m\int_{v_i}^{v_f}\mathrm{d}v=Bl\int_{t_i}^{t_f}i(t)\,\mathrm{d}t=Bl\int_{Q_i}^{Q_f}\mathrm{d}Q=Bl(Q_f-Q_i)=Bl\,\Delta Q. \tag{2.3}$$

因此不必先知道电流的具体时间函数，就能从速度变化反求通过的电量。成立条件是棒长、场和受力方向在积分期间不变，其他水平冲量可忽略。电流换向时，反向时段的电量在积分中取负。

棒离轨后若电路断开，水平磁驱动力消失，后续运动可以由机械条件确定。例如从高度 h 水平飞出并落地，飞行时间由竖直自由落体给出，再由水平射程确定离轨速度。将这段机械信息代回磁冲量式，就把实验可测的射程与电量联系起来。

电容放电推动导棒时，通过棒的有向电量等于电容电荷的减少量。棒一离轨，电路断开，电容保留当时的电荷。例 2.9 由磁冲量求余电荷，再用电容储能给出射程的范围。

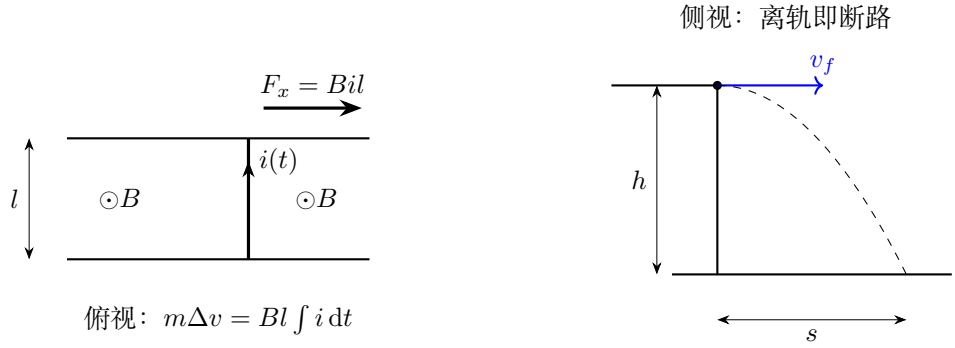


图 2.12: 磁驱动段与断路后的机械运动分别建模，离轨速度由射程反求

图 2.12 左图中 $\int i\,\mathrm{d}t$ 是通过导棒的有向电量，右图中则在电路已断开的条件下使用 $t = \sqrt{2h/g}$、$v_f = s/t$。若棒从静止开始且导轨摩擦可忽略，联立得 $\Delta Q = ms\sqrt{g/(2h)}/(Bl)$。

2.12 例题与分析

例 2.1 (弯曲导线的有效位移)**.** 任意形状细导线从 $A = (0,0)$ 延伸到 $B = (a,b)$，通有从 A 到 B 的电流 I，均匀磁场垂直纸面向外。求导线合力，并比较长直连线与绕行曲线的结果。

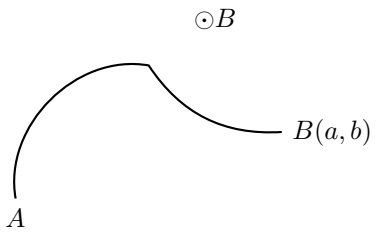


图 2.13: 题设：弯曲导线的有效位移

解　导线元的磁力

图 2.13 各微元受力为 $I\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times B\boldsymbol{e}_z$。均匀场不随积分位置变化，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= IB\left(\int_A^B \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x+\int_A^B \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_y\right)\times\boldsymbol{e}_z\\ &= IB\left([x]_0^a\boldsymbol{e}_x+[y]_0^b\boldsymbol{e}_y\right)\times\boldsymbol{e}_z\\ &= IB(b\boldsymbol{e}_x-a\boldsymbol{e}_y).\end{aligned}$$

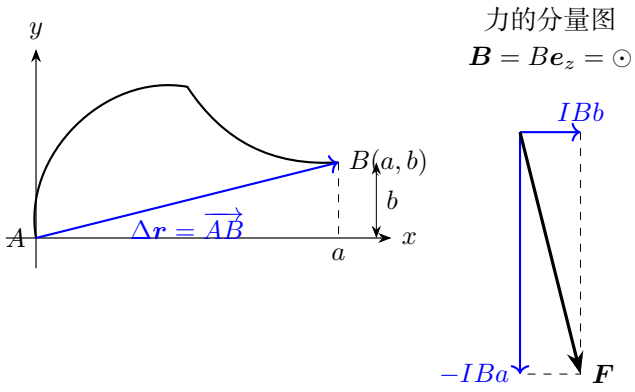


图 2.14: 端点位移决定合力；位移向量与磁力相互垂直，分量需交叉对应

合力的分量

图 2.14 的水平、竖直分力来自端点位移的两个分量，合力大小为 $IB\sqrt{a^2+b^2}$。直线与绕行曲线端点相同，合力相同；局部受力和内部应力可以不同。闭合导线首尾重合，合力为零，各段仍可组成力偶。

例 2.2 (使导棒起滑的最小磁场)**.** 质量 $m=0.10\,\mathrm{kg}$ 的直棒跨在间距 $l=0.080\,\mathrm{m}$ 的水平导轨上，摩擦因数 $\mu=0.50$，棒中电流 $I=5.0\,\mathrm{A}$。允许选择磁场方向，取 $g=10\,\mathrm{m/s^2}$，求起滑所需最小场及该时支持力。

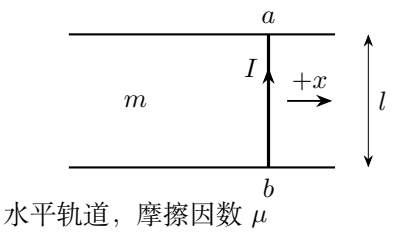


图 2.15: 题设：使导棒起滑的最小磁场

解　磁力的两个分量

在图 2.15 中，磁场平行棒的分量不产生推力，应舍去这一无效分量。其余磁场可使磁力斜向上，设磁力与水平夹角为 α，则 $F_x = IlB\cos\alpha$、$F_y = IlB\sin\alpha$，支持力 $N = mg - F_y$。临界滑动 $F_x = \mu N$，故

$$B = \frac{\mu mg}{Il(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)}.$$

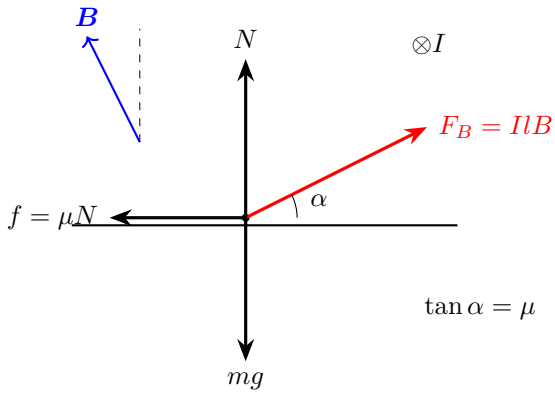


图 2.16: 侧视受力图中电流垂直纸面向内；最优外场向左上，磁力向右上

最小场和支持力

令 $\phi = \arctan\mu$，则 $\cos\phi = 1/\sqrt{1+\mu^2}$、$\sin\phi = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$。按图 2.16 的两分力关系，

$$\cos\alpha + \mu\sin\alpha = \sqrt{1+\mu^2}(\cos\alpha\cos\phi + \sin\alpha\sin\phi) = \sqrt{1+\mu^2}\cos(\alpha - \phi).$$

因此分母在 $\alpha = \phi$ 时最大，$B_{\min} = \mu mg/[Il\sqrt{1+\mu^2}] = 1.12\,\mathrm{T}$。用 $\sin\alpha = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$ 回代支持力，

$$N = mg - IlB_{\min}\sin\alpha = mg - \frac{\mu^2 mg}{1+\mu^2} = \frac{mg}{1+\mu^2} = 0.80\,\mathrm{N} > 0.$$

此时 $N = 0.80\,\mathrm{N}$，棒仍与轨道接触。图中电流垂直纸面向内，$\boldsymbol{B}$ 从竖直向左倾斜 $\alpha = \arctan\mu \simeq 26.6°$，产生斜向上的磁力。

例 2.3 (输电线电荷力与磁力的平衡)**.** 两条细长平行输电线分别带有单位长度电荷 $\pm\lambda$, 通过大小相等、方向相反的电流 I。已知单位长度电容 $c' = 10^{-11}\,\mathrm{F/m}$、线间电压 $U = 33\,\mathrm{kV}$。在细线近似下两线无横向相互作用，求电流与输送功率，取光速 $c_0 = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。

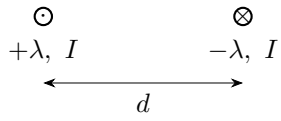
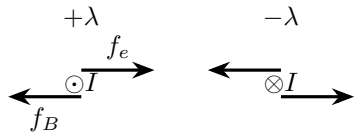


图 2.17: 题设：输电线电荷力与磁力的平衡

解　电力和磁力

图 2.17 的异号线电荷相吸，反向电流相斥。每单位长度电荷力为 $f_e = \lambda^2/(2\pi\varepsilon_0 d)$，磁力为 $f_B = \mu_0 I^2/(2\pi d)$。平衡时两者大小相等，约去共同的 $1/d$，得到 $I^2 = \lambda^2/(\mu_0\varepsilon_0)$。



左线的两种力

图 2.18: 解答过程：输电线电荷力与磁力的平衡

电流与输送功率

由图 2.18 及电容定义 $\lambda = c'U$，取电流大小 $I = c_0 c' U = 99\,\mathrm{A}$。输送功率 $P = UI = c_0 c' U^2 = 3.27 \times 10^6\,\mathrm{W}$。

例 2.4 (线圈在磁场中的转动与稳定性)．磁矩大小为 $m_B = NIS$ 的刚性线圈绕经过中心且位于线圈平面内的固定轴转动，转动惯量为 J。均匀场 B 垂直转轴，初始磁矩与场夹角 $0 \le \theta_0 < \pi$，静止释放，电流恒定。求转过任意角时的角速度、最大角速度及小角振动周期。

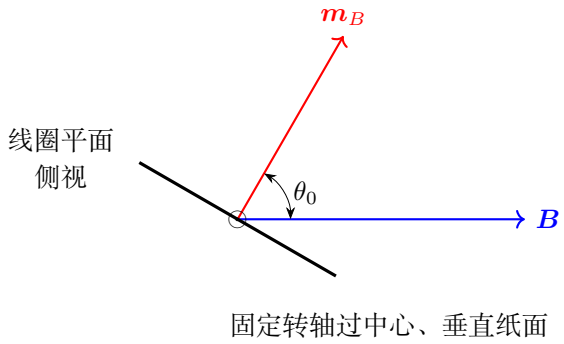


图 2.19: 线圈绕纸面法向的轴转动，磁矩始终垂直转轴；图示初始夹角

解　角速度随夹角的变化

图 2.19 中力矩使夹角减小，$\tau_\theta = -m_B B \sin\theta$。机械势能 $U = -m_B B\cos\theta$，从静止初态到角度 θ，对 $J\ddot\theta = -m_B B\sin\theta$ 乘 $\dot\theta$ 后积分，令 $\Omega = \dot\theta$，

$$J\int_0^{\dot\theta} \Omega\,\mathrm{d}\Omega = -m_B B\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = m_B B[\cos\varphi]_{\theta_0}^{\theta}.$$

左端为 $J[\Omega^2/2]_0^{\dot\theta}$，故 $\frac{1}{2}J\dot\theta^2 = m_B B(\cos\theta - \cos\theta_0)$。当 $\theta_0 > 0$ 时，首次从 θ_0 转到零位的角度逐渐减小，因而

$$\boxed{\dot\theta = -\sqrt{\frac{2m_B B}{J}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}, \qquad 0 \le \theta \le \theta_0.$$

图中两个转折角是 $\pm\theta_0$，转向改变时角速度变号。取 $\theta_0 = 0$ 时，线圈留在平衡位置。

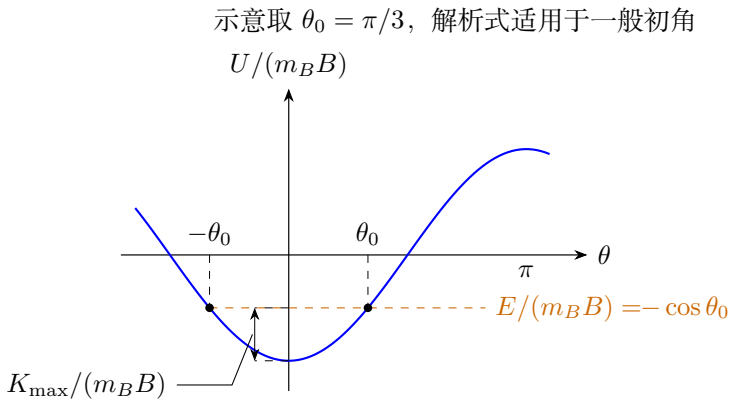


图 2.20: 总机械能等于初始势能；曲线与能量线的竖直差给出转动动能

最大角速度

图 2.20 的势能在 $\theta=0$ 最小，此处角速度最大：

$$|\dot\theta|_{\max}=\sqrt{\frac{2m_BB(1-\cos\theta_0)}{J}}.$$

小角振动

小角度时 $\sin\theta\simeq\theta$，运动方程化为 $\ddot\theta+(m_BB/J)\theta=0$，记 $\omega_0=\sqrt{m_BB/J}$。试取 $\theta=\mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $\dot\theta=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot\theta=s^2\mathrm{e}^{st}$，代入并约去非零指数后，特征方程为 $s^2+\omega_0^2=0$，实通解 $\theta=A\cos\omega_0t+D\sin\omega_0t$。初始静止给 $A=\theta_0$、$\omega_0D=0$，故 $\theta=\theta_0\cos\omega_0t$，每增加 $2\pi/\omega_0$ 重复一次，所以 $T=2\pi\sqrt{J/(m_BB)}$。$\theta=\pi$ 虽力矩也为零，却处于势能极大点，是不稳定平衡。上述周期用于小角振动。

例 2.5 (长直电流对斜置方形线圈的力矩)**.** 长直导线沿 $+z$ 通电流 I_0，其场 $B = kI_0/\rho$。边长 $2L$ 的方形线圈中轴平行 z，轴距直线 $D > L$。线圈通电流 $I > 0$。线圈水平边方向为 $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$，$\varphi$ 从 $+x$ 逆时针量到 $\boldsymbol{u}$，取 $0 \le \varphi \le \pi$。两竖边位置为 $(D,0) \pm L\boldsymbol{u}$，负号一侧电流向上，另一侧向下。求绕中轴的力矩。若两边距直线都为 $2L$，求对应数值表达式。

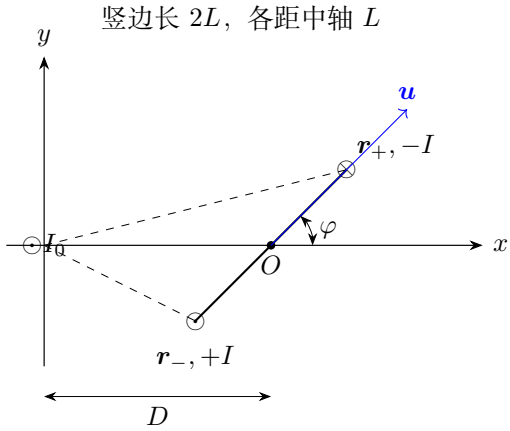
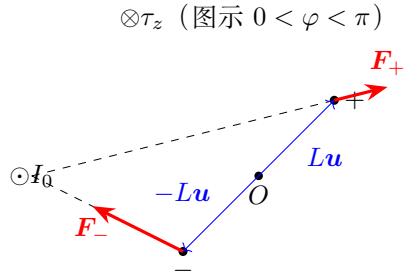


图 2.21: 沿 $+z$ 轴观察线圈的水平投影；两竖边在投影中分别为点

解　两条竖边的受力

按图 2.21 作水平投影，记两边到直线的位置为 $\boldsymbol{r}_\pm = (D,0) \pm L\boldsymbol{u}$，距离平方 $\rho_\pm^2 = D^2 + L^2 \pm 2DL\cos\varphi$。场沿环向，向上的边受吸引力，向下的边受排斥力，故 $\boldsymbol{F}_- = -2LkI_0I\,\boldsymbol{r}_-/\rho_-^2$、$\boldsymbol{F}_+ = 2LkI_0I\,\boldsymbol{r}_+/\rho_+^2$。



水平边受力沿 z，对中轴 z 不贡献力矩

图 2.22: 两竖边的力沿各自到长直电流的径向，取矩的力臂则从线圈中轴量起

绕中轴的力矩

图 2.22 中的力臂是相对中轴的 $\pm L\boldsymbol{u}$。先计算叉积中的几何项：$[\boldsymbol{u}\times(D,0,0)]_z = -D\sin\varphi$，而 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}=0$。因此每一边的位置沿 $\boldsymbol{u}$ 的部分不贡献绕中轴力矩，当 $0<\varphi<\pi$ 时，两边都留下沿 $-z$ 的转矩。两水平边的微元力沿 z，对 z 轴不贡献力矩，所以

$$\tau_z = [(-L\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{F}_- + (L\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{F}_+]_z = -2DL^2kI_0I\sin\varphi\left(\rho_-^{-2}+\rho_+^{-2}\right).$$

两边距长导线相等时

若两边距离同时为 $2L$，相减两距离平方式得到 $\cos\varphi=0$；取 $\varphi=\pi/2$，再由 $D^2+L^2=4L^2$ 得 $D=\sqrt{3}L$。代入力矩为 $\tau_z=-\sqrt{3}kI_0IL$。

对 $\varphi\to 0$，两力作用线均穿过中轴，结果自然趋零。

例 2.6 (旋转带电圆环的张力增量)**.** 质量 m、半径 R 的均匀细圆环带正电 q，以固定角速度 ω 逆时针转动。外磁场 B 垂直环面向外。环的半径与电荷分布保持不变，求与无磁场、相同角速度相比的张力增量。

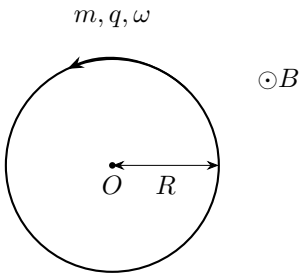


图 2.23: 题设：旋转带电圆环的张力增量

解 小弧段的受力

图 2.23 中正电荷的速度沿逆时针切向，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 径向向外。取张角 $\mathrm{d}\theta$ 的小弧段，质量 $\mathrm{d}m = m\,\mathrm{d}\theta/(2\pi)$，电荷 $\mathrm{d}q = q\,\mathrm{d}\theta/(2\pi)$。两端张力的向心合量为 $2T\sin(\mathrm{d}\theta/2)\simeq T\,\mathrm{d}\theta$，磁力则为 $\omega RB\,\mathrm{d}q$ 向外。

同一 ω, R 下，向心加速度不变

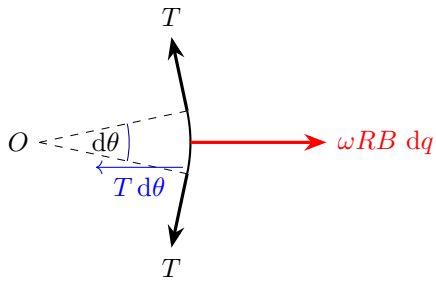


图 2.24: 微元两端张力的切向分量抵消；比较加外场前后的同一向心条件

张力增加量

沿图 2.24 的向心方向列式，把静电自斥等未改变的径向力统一记作 $\mathrm{d}F_{0,\text{内}}$：

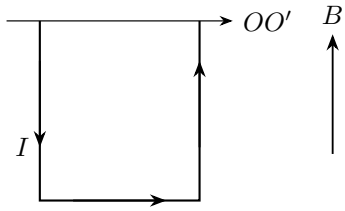
$$T\,\mathrm{d}\theta - \frac{q\omega RB}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}F_{0,\text{内}} = \frac{m}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta\,\omega^2 R.$$

无外场时满足 $T_0\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}F_{0,\text{内}} = m\omega^2 R\,\mathrm{d}\theta/(2\pi)$。将两式相减，其他径向力与同一向心项同时消去，得到

$$\boxed{\Delta T = T - T_0 = \frac{q\omega BR}{2\pi}}.$$

反转磁场后，磁力改向圆心，张力随之减小。

例 2.7 (通电 U 形框的倾斜平衡)**.** 截面积 $A = 2.0\,\mathrm{mm}^2$、密度 $\rho = 2.7\times10^3\,\mathrm{kg/m}^3$ 的均匀铝线弯成三边等长的 U 形框，各边长 l。开口两端绕水平轴转动，供电引线沿转轴接入，通电流 $I = 4.0\,\mathrm{A}$，均匀磁场竖直。平衡时框偏离竖直面 30°。求 B，取 $g = 10\,\mathrm{m/s}^2$。



三边均为 l（未偏转时正视图）

图 2.25: 题设：通电 U 形框的倾斜平衡

解　质心与重力力矩

图 2.25 中每边质量为 ρAl，总质量 $M = 3\rho Al$。以转轴为零点沿框向下量距离，底边质心距轴 l，两侧边质心各距轴 $l/2$，所以总体质心距轴 $d = [l + 2(l/2)]/3 = 2l/3$。框倾斜 θ 时，重力力矩为 $Mgd\sin\theta = 2\rho Agl^2\sin\theta$。

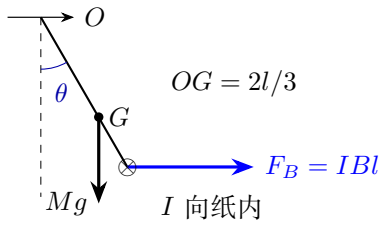


图 2.26: 解答过程：通电 U 形框的倾斜平衡

磁力矩与平衡场

沿转轴的供电引线对该轴的力矩为零，因此沿轴封口后可按闭合回路面积 l^2 取矩。图 2.26 中磁矩与竖直场夹角为 $90^\circ - \theta$，故磁力矩 $IBl^2\cos\theta$。平衡给出 $B = (2\rho Ag/I)\tan\theta = 1.56\times10^{-2}\,\mathrm{T}$。长度约去，是磁矩力臂与重力力臂同按 l^2 缩放的结果。

例 2.8 (由导棒射程反求通过电量)**.** 质量 $m = 3.0\,\mathrm{g}$ 的金属棒跨在宽 $l = 1.0\,\mathrm{m}$ 的光滑水平导轨上。磁场竖直向上，大小 $B = 0.10\,\mathrm{T}$。棒从静止受短时电流推动后水平离轨，从高 $h = 0.80\,\mathrm{m}$ 处落地，射程 $s = 2.0\,\mathrm{m}$。离轨后电路断开，求通过棒的有向总电量，取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。

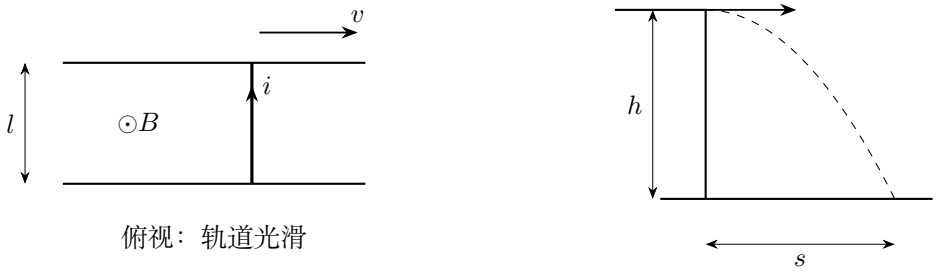


图 2.27: 导轨段用俯视图表示，离轨后的下落另作侧视图；两图中的向右方向相同

解　平抛阶段

图 2.27 的离轨后运动先给出飞行时间 $t_f=\sqrt{2h/g}=0.40\,\mathrm{s}$，所以离轨水平速度 $v=s/t_f=5.0\,\mathrm{m/s}$。

磁冲量

导轨阶段水平其他力忽略，磁力方向不变，设通电从 $t=0$ 持续到 $t=t_1$，牛顿定律积分为 $m\int_0^v \mathrm{d}u=Bl\int_0^{t_1} i(t)\,\mathrm{d}t$。左端是 $m[u]_0^v=mv$，右端是 $Bl\Delta Q$。

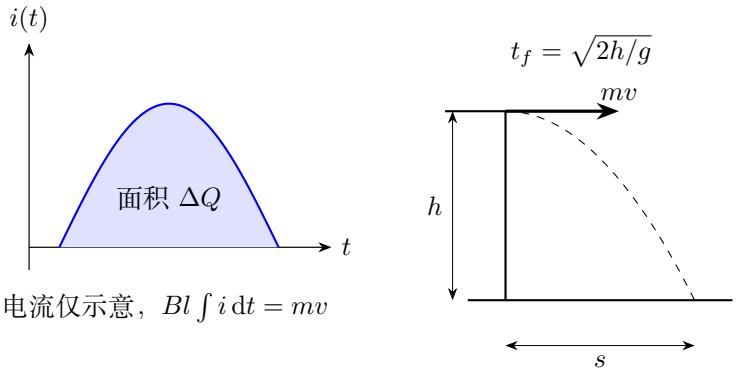


图 2.28: 由抛体轨迹确定末动量，电流曲线下的有向面积再给出相应磁冲量

通过导棒的电量

根据图 2.28，通过棒的电量 $\Delta Q=mv/(Bl)=(0.0030)(5.0)/(0.10\times 1.0)=0.15\,\mathrm{C}$，图 2.27 中棒内电流向上时磁力向右，这个方向取为正。电流反向的时段以负号计入电量，因此射程确定的是有向电量。

例 2.9 (电容放电推动导棒后的剩余电荷)**.** 电容 C 先由电动势 E 的电源充电，随后断开电源并通过光滑轨道上的质量 m、长度 l 的棒放电。均匀磁场竖直，方向使棒向右运动。棒水平离轨后电路立即断开，从高度 h 下落、射程为 s。求电容留下的电荷 Q_f，并给出同向放电且电容极性保持时，由电荷、冲量和电能共同限制的射程必要范围。

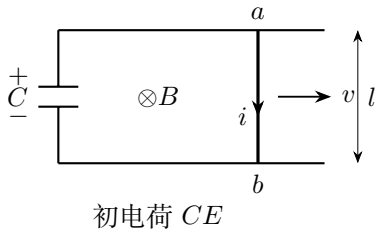
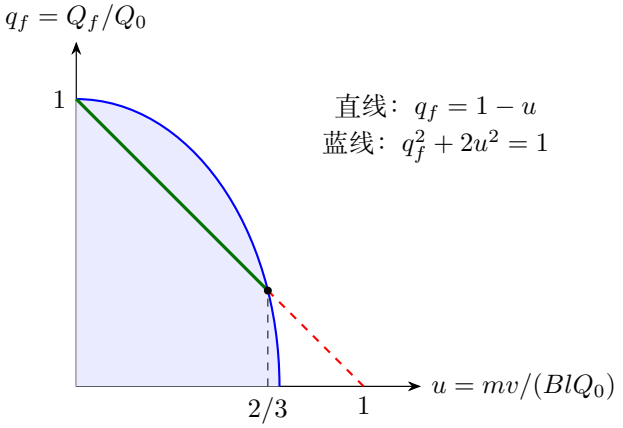


图 2.29: 题设：电容放电推动导棒后的剩余电荷

解　初电荷与离轨速度

图 2.29 的初电荷为 $Q_0 = CE$，释放阶段通过棒的有向电量为 $Q_0 - Q_f$。飞行时间仍为 $\sqrt{2h/g}$，所以离轨速度 $v = s\sqrt{g/(2h)}$。不论放电电流怎样变化，水平磁冲量给出 $mv = Bl(Q_0 - Q_f)$。



示意取 $CB^2l^2/m = 2$；绿色线段满足电荷与电能的必要条件
蓝线以内满足电能上限

图 2.30: 磁冲量确定余电荷与末速度的直线关系，电能再给出独立的必要约束

余电荷和冲量约束

由图 2.30 直接解出

$$Q_f = CE - \frac{ms}{Bl}\sqrt{\frac{g}{2h}}.$$

题设的同向放电和极性条件给出 $0 \le Q_f \le CE$，对应 $0 \le s \le (BlCE/m)\sqrt{2h/g}$。

电能给出的射程

初电能 $Q_0^2/(2C)$ 至少等于棒的动能与剩余电能之和，即 $mv^2/2 + Q_f^2/(2C) \le Q_0^2/(2C)$。把 $a = Bl$、$Q_f = Q_0 - mv/a$ 代入并约去初电能，得到 $mv^2 + m^2v^2/(Ca^2) - 2Q_0mv/(Ca) \le 0$。对 $v > 0$ 约去 mv，故还需 $v \le 2Q_0a/(m + Ca^2)$。这一上界应与 $v \le aQ_0/m$ 同时满足，故射程的必要范围可合并为

$$\boxed{0 \le s \le \sqrt{\frac{2h}{g}}\,\min\!\left(\frac{BlCE}{m},\,\frac{2BlCE}{m + CB^2l^2}\right)}.$$

图 2.30 以 $u = mv/(BlQ_0)$、$q_f = Q_f/Q_0$ 归一化，直线来自冲量，蓝线给出电能约束。示意参数下，电能比非负余电荷给出更紧的必要上界。轨道的长度和放电过程决定实际离轨的时刻。

例 2.10（转动带电圆盘的外磁场力矩）. 绝缘薄圆盘半径 R、均匀面电荷密度 σ，以角速度 ω 转动。均匀磁场 B 垂直转轴，求磁力矩。取 $R=0.108\,\mathrm{m}, \sigma=2.23\,\mathrm{C/m^2}, \omega=24.6\,\mathrm{s^{-1}}, B=0.13\,\mathrm{T}$ 计算大小。

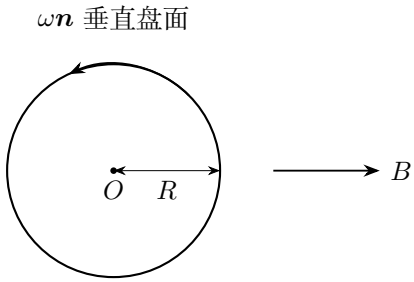


图 2.31: 题设：转动带电圆盘的外磁场力矩

解　环形电流的磁矩

图 2.31 将圆盘分为半径 r 的薄环。薄环电量 $\mathrm{d}q=2\pi\sigma r\,\mathrm{d}r$，电流 $\mathrm{d}I=\omega\,\mathrm{d}q/(2\pi)=\sigma\omega r\,\mathrm{d}r$，磁矩 $\mathrm{d}m=\pi r^2\,\mathrm{d}I=\pi\sigma\omega r^3\,\mathrm{d}r$。所有磁矩沿同一转轴方向，故积分可按标量进行。

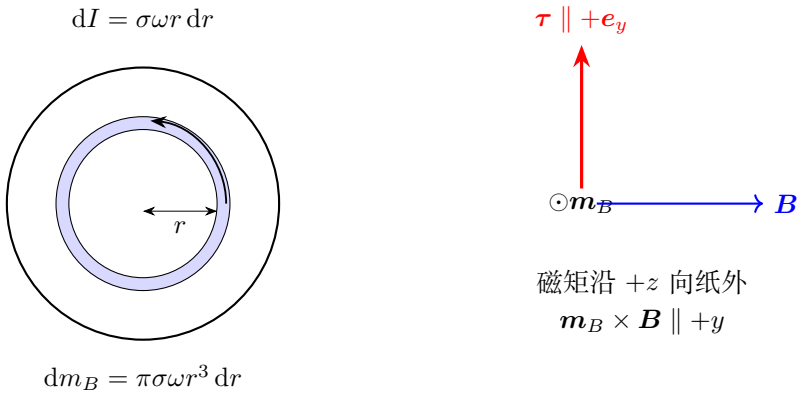


图 2.32: 先按半径积磁矩，再在与题设相同的正视图中确定力矩方向

圆盘所受力矩

图 2.32 给出 $m_B=\pi\sigma\omega\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\pi\sigma\omega[r^4/4]_0^R=\pi\sigma\omega R^4/4$。因磁矩与外场垂直，力矩大小 $\tau=m_BB=\pi\sigma\omega BR^4/4=7.62\times10^{-4}\,\mathrm{N\,m}$。图示磁矩向纸外，场向右，因此 $\boldsymbol{m}_B\times\boldsymbol{B}$ 沿纸面向上。

例 2.11 (矩形回路被长直电流吸引)**.** 长直导线沿竖直方向通电流 I_0，同一平面内矩形线圈高 l、宽 w，近边距直线 a。近边电流 I 与直线同向。求线圈合力，并说明上下横边的作用。

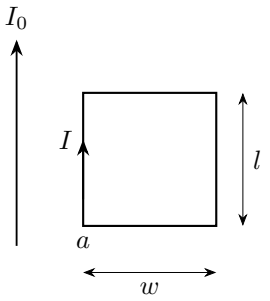
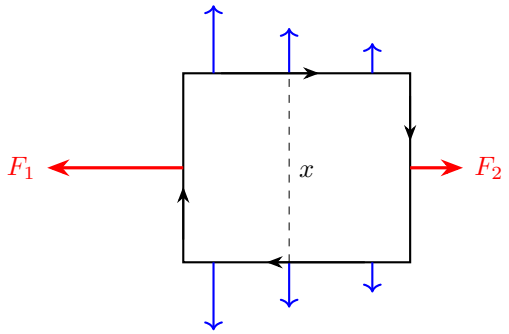


图 2.33: 题设：矩形回路被长直电流吸引

解　近边与远边的磁力

图 2.33 中近边与长直电流同向，受力向左，大小 $F_1 = \mu_0 I_0 I l/(2\pi a)$；远边电流反向，受力向右，大小 $F_2 = \mu_0 I_0 I l/[2\pi(a+w)]$。两边受力的差来自场随距离的变化。

上下横边同一 x 的受力逐点抵消



竖边场分别为 $\mu_0 I_0/(2\pi a)$ 和 $\mu_0 I_0/[2\pi(a+w)]$

图 2.34: 近边的吸引大于远边的排斥，上下边则在相同位置有等大反向的微元力

回路的合力

沿图 2.34 的向左方向，合力大小

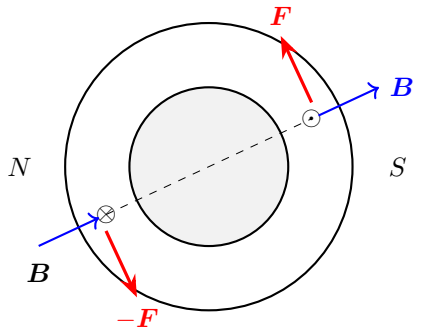
$$F = \frac{\mu_0 I_0 I l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+w}\right).$$

上横边各微元受力竖直，其受力积分大小为

$$|F_{\text{top}}| = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\int_a^{a+w}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}[\ln x]_a^{a+w} = \frac{\mu_0 I_0 I}{2\pi}\ln\frac{a+w}{a}$$

；下横边电流反向，受相反等大的力，所以二者相消。$w \ll a$ 时两竖边差值约为 $\mu_0 I_0 I l w/(2\pi a^2)$，随线圈面积减小而趋零，即磁偶极子的场梯度近似。

例 2.12 (径向磁场电流计的标定)**.** 多匝线圈面积为 S，匝数 N，转动惯量 J，处于理想径向磁场 B 中。设计使工作范围内磁力矩恒为 $NIBS$，游丝反向力矩为 $\kappa\theta$。求静态偏角、电流灵敏度与断电后的微小振动周期。

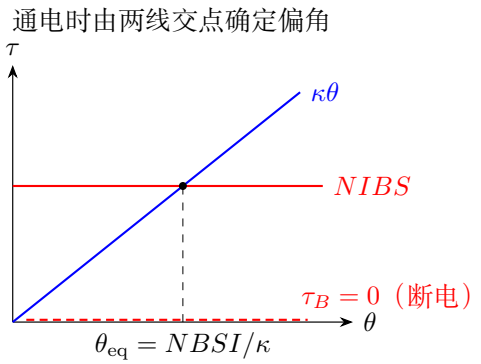


有效载流边沿转轴方向，磁力垂直各自半径
工作范围内力臂不因偏转角改变

图 2.35: 径向场工作区的俯视示意：两有效载流边的场沿径向，磁力沿切向组成力偶

解　偏角与电流灵敏度

图 2.35 中的径向场始终与有效载流边保持规定几何关系，磁力矩按题设为常量 $NIBS$，无需再乘一个随偏角变化的正弦。静态平衡满足 $NIBS - \kappa\theta = 0$，故 $\theta = NBSI/\kappa$，灵敏度 $\theta/I = NBS/\kappa$。



断电后：$J\ddot{\theta}+\kappa\theta=0$，零位恢复

图 2.36: 静态标定来自两种力矩的交点；断电后只保留游丝的线性回复力矩

断电后的运动

图 2.36 中，断电后磁力矩降到零，游丝留下回复力矩 $-\kappa\theta$。所以 $J\ddot{\theta}+\kappa\theta=0$。记 $\omega_0=\sqrt{\kappa/J}$。试取 $\theta=\mathrm{e}^{st}$，两次求导给出 $\dot{\theta}=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot{\theta}=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并除以非零的指数，得 $s^2+\omega_0^2=0$，根为 $\pm\mathrm{i}\omega_0$，实通解和导数为

$$\theta=A\cos\omega_0 t+D\sin\omega_0 t,\qquad \dot{\theta}=-A\omega_0\sin\omega_0 t+D\omega_0\cos\omega_0 t.$$

取从静态偏角处断电，$\theta(0)=NBSI/\kappa,\dot{\theta}(0)=0$，故 $A=NBSI/\kappa$、$D=0$。忽略阻尼，$\theta=(NBSI/\kappa)\cos\omega_0 t$，周期为 $T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{J/\kappa}$。

例 2.13 (电流层的外场与磁压力)**.** 两块很宽的平行薄板通有大小为 K 的面电流，上层向纸外，下层向纸内，忽略边缘效应。求层间磁场、单层所受压力；若 $K=2.0\times10^4\,\mathrm{A/m}$，取 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$，求压力数值。

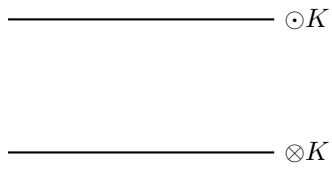


图 2.37: 题设：电流层的外场与磁压力

解　两层磁场的叠加

按图 2.37 中上层电流的右手方向，它在下侧产生向右场；下层在上侧也产生向右场。每层单独的场大小 $\mu_0K/2$，所以层间 $B=\mu_0K$，外部为零。

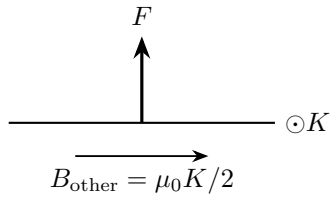


图 2.38: 解答过程：电流层的外场与磁压力

单层受到的压力

图 2.38 取上层小片，使用下层产生的 $B_{\text{other}} = \mu_0 K/2$。若小片沿电流长 a、横向宽 b，其总电流 Kb，受力 $F = (Kb)aB_{\text{other}}$，垂直板面向上。于是 $p = F/(ab) = \mu_0 K^2/2$。代入得 $p = 80\pi\,\text{Pa} \approx 251\,\text{Pa}$，下层受等大反向压力。用层间总场改写为 $B^2/(2\mu_0)$，仍得到同一数值。总场用于描述区域，其他层的场用于求本层受力，两次取场分别对应不同研究对象。

板间距与压力

压力数值按单位面积计算，不需要知道板间距离。在理想无限面模型中，另一层所产生的场与距离无关，所以间距改变不改变此压力；实际有限宽板在间距接近板宽后不再符合该近似。

例 2.14 (均匀带电球的磁进动)**.** 质量 M、电荷 $Q > 0$ 的均匀实心球，电荷密度与质量密度成比例。球心固定且支承不提供力矩，初始角动量与均匀磁场夹角 θ。在经典刚体近似下求角动量的运动、进动角速度，并判断转动动能是否改变。

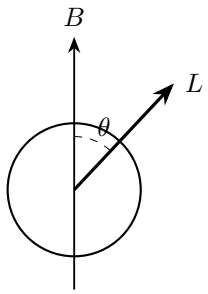


图 2.39: 题设：均匀带电球的磁进动

解 磁矩与角动量

图 2.39 中每个质量微元具有同比电量，故 $\mathrm{d}Q = (Q/M)\,\mathrm{d}M$。由 $\mathrm{d}m = \omega r_\perp^2\,\mathrm{d}Q/2$ 与 $\mathrm{d}L = \omega r_\perp^2\,\mathrm{d}M$ 积分，$\boldsymbol{m} = (Q/2M)\boldsymbol{L}$。均匀场总力矩为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{2M}\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} = \left(-\frac{Q\boldsymbol{B}}{2M}\right)\times\boldsymbol{L}.$$

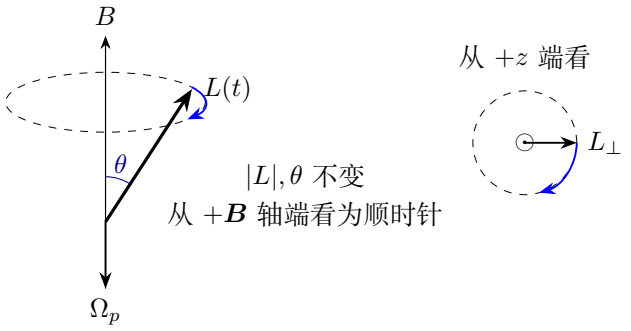


图 2.40: 解答过程：均匀带电球的磁进动

三个分量随时间的变化

图 2.40 的 $\boldsymbol{L}$ 端点绕场轴作匀速圆周运动，$\boldsymbol{\Omega}_p = -Q\boldsymbol{B}/(2M)$，周期 $4\pi M/(QB)$。为确定运动函数，取 $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$，令 $\gamma = QB/(2M)$，并选择初始横向角动量沿 $+x$。运动方程成为 $\dot{L}_x = \gamma L_y, \dot{L}_y = -\gamma L_x, \dot{L}_z = 0$；对第一式再求导，$\ddot{L}_x = \gamma\dot{L}_y = -\gamma^2 L_x$。试取 $L_x = \mathrm{e}^{st}$，其两次导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $(s^2+\gamma^2)\mathrm{e}^{st} = 0$，特征根为 $\pm\mathrm{i}\gamma$。因此 $L_x = A\cos\gamma t + D\sin\gamma t$。由初值 $L_x(0) = L\sin\theta$ 得 $A = L\sin\theta$；求导后 $\dot{L}_x(0) = \gamma D = 0$，故 $D = 0$。再由 $L_y = \dot{L}_x/\gamma = -L\sin\theta\sin\gamma t$、$L_z(0) = L\cos\theta$，得到

$$\boldsymbol{L}(t) = L\sin\theta\cos\gamma t\,\boldsymbol{e}_x - L\sin\theta\sin\gamma t\,\boldsymbol{e}_y + L\cos\theta\,\boldsymbol{e}_z.$$

夹角与转动动能

将运动方程分别点乘 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{B}$，得到 $\mathrm{d}L^2/\,\mathrm{d}t = 0$、$\mathrm{d}(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B})/\,\mathrm{d}t = 0$，因此夹角保持 θ。实心球的 $J = 2MR^2/5$ 不变，$K = L^2/(2J)$ 也不变。当 $\theta = 0$ 或 π 时，端点落在场轴上，力矩为零，角动量方向固定。

从功率也能看出，$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\omega} = (Q/2M)(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{L}/J) = 0$。

2.13 本讲小结

安培力由电流方向和该处外磁场的叉乘确定。均匀场中的导线可先求端点位移，平行长直电流则先求一根在另一根处的场。求薄板压力时，取另一层产生的场。

闭合平面线圈的磁矩垂直线圈平面。均匀场对线圈的合力为零，力矩为 $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$，平行取向稳定。小线圈在缓变场中的轴向力与轴线场的梯度成正比，这个力来自圆周处的径向场。电荷与质量同比分布时，转动带电体的磁矩与角动量成正比。

水平导棒受到的磁冲量等于 Bl 乘以通过棒的有向电量。离轨后，用自由飞行的高度与射程确定离轨速度，再回到通电阶段求电量。

2.14 练习

练习 2.1 (半圆导线的磁力)**.** 半径 R 的上半圆细导线通有从左端 A 到右端 B 的电流 I，均匀场向纸外。求合力，并用直接微元积分检查。

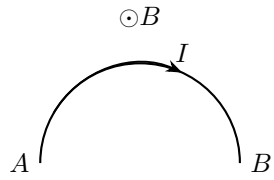
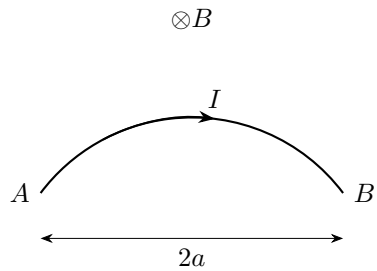


图 2.41: 题设：半圆导线的磁力

练习 2.2 (柔软导线的平面平衡形状)**.** 忽略重力的柔软导线长 s，两端固定，通恒流 I，外场 B 垂直其所在平面。若张力处处为正且没有其他分布力，证明平衡导线为圆弧，并写出弦长 $2a$ 与张力的关系。



总弧长 s，张力为正；形状需由局部平衡求出

图 2.42: 示意一种可能的平衡构型，端点固定；电流与磁场的方向使分布磁力朝弧外

练习 2.3 (倾斜线圈的磁力偶)**.** 矩形线圈匝数 N、电流 I、边长 a, b，其磁矩与匀强场 B 成角 θ。求合力和力矩，并说明 $\theta = 0, \pi/2, \pi$ 三种状态。

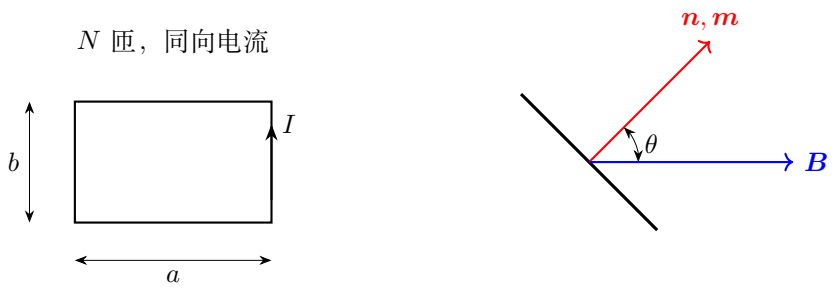


图 2.43: 左图给出矩形与电流，右图为其侧视图，法线与线圈平面垂直

练习 2.4 (均匀带电实心球的磁矩)**.** 半径 R、总电荷 Q 的绝缘实心球均匀带电，以角速度 ω 刚性转动。求磁矩。给定均匀球壳的 $\int r_\perp^2 \, \mathrm{d}q = 2r^2 \, \mathrm{d}q/3$，请对径向分布完成积分。

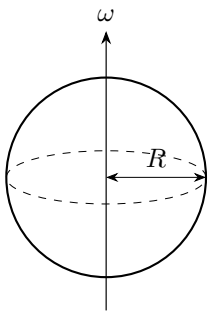


图 2.44: 题设：均匀带电实心球的磁矩

练习 2.5 (恒流弹性圆环的半径)**.** 自然半径 R_0 的细弹性圆环杨氏模量 Y、截面积 A，通有由电源维持的恒流 I。外场 B 垂直环面，方向使磁力向外。忽略自场与重力，采用线弹性关系，求平衡半径与适用条件。

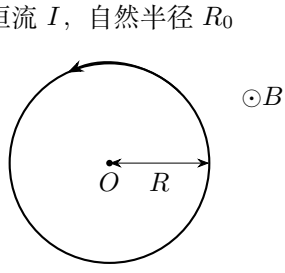


图 2.45: 题设：恒流弹性圆环的半径

练习 2.6 (两平行导线的每单位长度作用力)**.** 两条相距 d 的无限长导线电流分别为 I_1, I_2，同向。求每单位长度的作用力；若电流都加倍，线距加倍，作用力密度怎样变化?

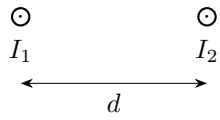


图 2.46: 题设：两平行导线的每单位长度作用力

练习 2.7 (小线圈在轴向梯度场中的力)**.** 小线圈磁矩 m_B 被约束沿 $+z$，其尺寸远小于外场变化尺度。轴向场为 $B(z) = B_0 + \beta z$。求线圈沿轴的力，并求从 z_1 到 z_2 时磁力所作机械功。

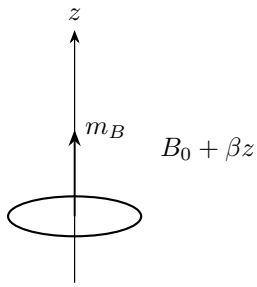


图 2.47: 题设：小线圈在轴向梯度场中的力

练习 2.8 (电荷与质量同比分布时的磁矩)**.** 同一轴对称刚体中每处电荷与质量的比值均为 Q/M，绕固定的对称轴以角速度 ω 转动。证明 $\boldsymbol{m}_B = Q\boldsymbol{L}/(2M)$。分别用薄圆环和薄圆盘的结果检查。

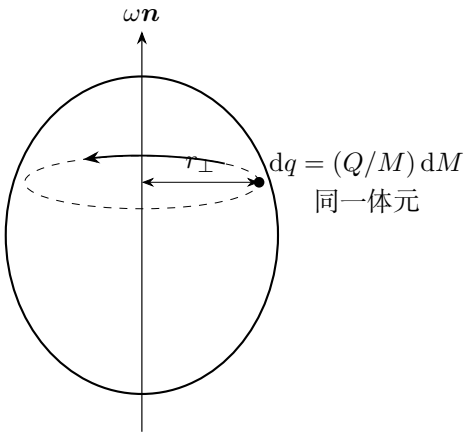


图 2.48: 轴对称刚体中的同一质量微元和电荷微元，距转轴的共同距离是 $r_\perp$

练习解答

练习 2.1

解　端点位移

图 2.41 端点位移为 $2R\boldsymbol{e}_x$，故 $\boldsymbol{F} = I(2R\boldsymbol{e}_x) \times B\boldsymbol{e}_z = -2IBR\boldsymbol{e}_y$。为求弧上各处受力，令弧上坐标 $\boldsymbol{r} = R(\cos\varphi, \sin\varphi)$，电流从 $\varphi = \pi$ 走到 0。微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = R(-\sin\varphi, \cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$。

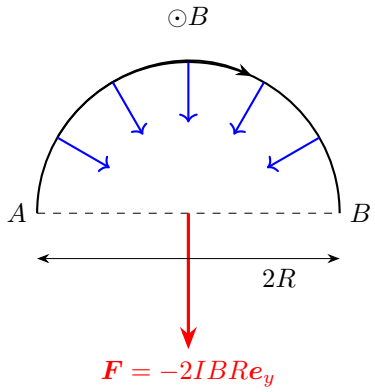


图 2.49: 沿上半圆从左到右通电时，微元力都朝圆心；左右分量抵消，只留向下合力

各弧段的磁力

图 2.49 中 $\mathrm{d}F_x = IBR\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}F_y = IBR\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$。从 π 到 0 积分，水平分量为 $IBR\int_\pi^0 \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = IBR[\sin\varphi]_\pi^0 = 0$，竖直分量为 $IBR\int_\pi^0 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = IBR[-\cos\varphi]_\pi^0 = IBR(-1-1) = -2IBR$。负积分方向与电流绕向一致，因此直接法与端点法相符。沿弧的积分还给出了各段受力如何组成端点公式。

练习 2.2

解　微段的切向和法向平衡

图 2.42 给出两端间距。放大如图 2.50，在导线上取弧长 $\mathrm{d}s$ 的微段。磁力总与导线切向垂直，因此切向受力平衡要求张力大小 T 沿弧不变。若两端切线转角为 $\mathrm{d}\psi$，两个张力的法向合量为 $T\,\mathrm{d}\psi$，磁力大小为 $IB\,\mathrm{d}s$，故曲率 $\mathrm{d}\psi/\,\mathrm{d}s = IB/T$ 为常数。

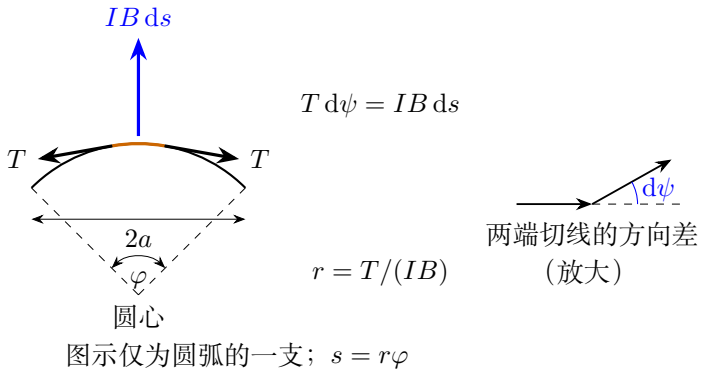


图 2.50: 局部张力沿两端切线，磁力沿法向；整段的圆心角再把曲率与弦长联系起来

由曲率求圆弧

图 2.50 中取定曲率符号为正，记 $k = IB/T$。先从弧长零点积分角度，

$$\psi(s) - \psi_0 = \int_0^s k\,\mathrm{d}\sigma = k[\sigma]_0^s = ks.$$

再由切线分量 $\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}s=\cos\psi,\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}s=\sin\psi$，分别积分。令 $u=\psi_0+k\sigma$，则 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}u/k$，上下限从 $0,s$ 变为 ψ_0,ψ_0+ks，所以

$$\begin{aligned}x-x_0&=\int_0^s\cos(\psi_0+k\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{k}\int_{\psi_0}^{\psi_0+ks}\cos u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{k}[\sin u]_{\psi_0}^{\psi_0+ks}=\frac{\sin(\psi_0+ks)-\sin\psi_0}{k},\\y-y_0&=\int_0^s\sin(\psi_0+k\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{k}\int_{\psi_0}^{\psi_0+ks}\sin u\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{k}[-\cos u]_{\psi_0}^{\psi_0+ks}=\frac{\cos\psi_0-\cos(\psi_0+ks)}{k}.\end{aligned}$$

移到圆心 $(x_0-\sin\psi_0/k,y_0+\cos\psi_0/k)$ 后，两坐标平方和为 $1/k^2$，故平衡曲线是半径 $r=1/k=T/(IB)$ 的圆弧。设圆心角为 φ，则 $s=r\varphi$、$2a=2r\sin(\varphi/2)$。消去 r 后，也可直接把弦长与张力写成

$$\boxed{2a=\frac{2T}{IB}\sin\left(\frac{IBs}{2T}\right)}.$$

因此应先由 $a/s=\sin(\varphi/2)/\varphi$ 确定所选支的角度，再得 $T=IBs/\varphi$。

弧角与张力

对单段简单圆弧，$0<\varphi<2\pi$。令 $u=\varphi/2$，则弦弧比为 $\sin u/u$。求导得 $(u\cos u-\sin u)/u^2$，分子的导数是 $-u\sin u<0$，且分子在 $u=0$ 时为零，所以弦弧比随 u 严格减小。给定 $0<2a<s$ 时，弧角唯一，圆弧弯向由磁力的方向确定。

练习 2.3

解　合力与力偶

图 2.43 中的回路闭合，且外场均匀，故合力 $NI\oint\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}=0$。力矩则按面积磁矩计算，$\boldsymbol{m}=NIab\,\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$，大小 $NIabB\sin\theta$。

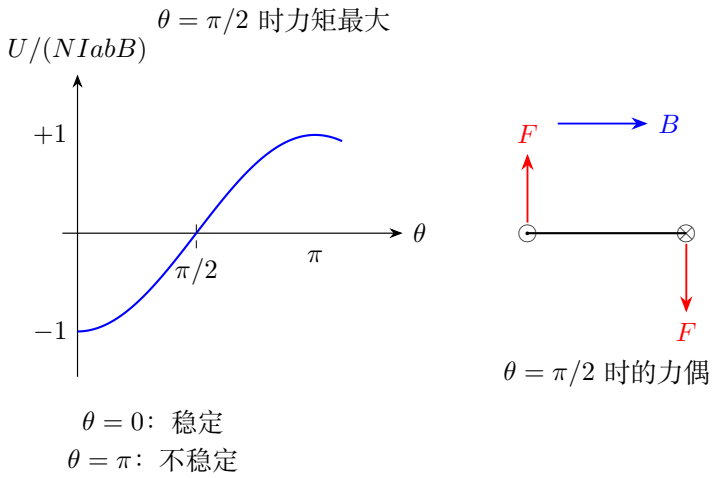


图 2.51: 合力为零仍有力偶；势能曲率区分平行和反平行两个零力矩位置

三个典型取向

图 2.51 表示机械势能 $U=-NIabB\cos\theta$。在 $\theta=0$ 力矩为零、势能最低，是稳定取向；$\theta=\pi/2$ 力矩大小最大；$\theta=\pi$ 力矩虽再次为零，却处在势能最高点，微小偏离时磁力矩使夹角离开 π。

练习 2.4

解　球壳上的磁矩

由图 2.44 的刚性转动，磁矩元为 $\mathrm{d}m=\omega r_\perp^2\,\mathrm{d}q/2$。取半径 r、厚 $\mathrm{d}r$ 的球壳，总电荷密度 $\rho_q=3Q/(4\pi R^3)$，故壳电量 $\mathrm{d}q=4\pi\rho_q r^2\,\mathrm{d}r=3Qr^2\,\mathrm{d}r/R^3$。利用题给角向平均，壳磁矩为 $\omega r^2\,\mathrm{d}q/3$。

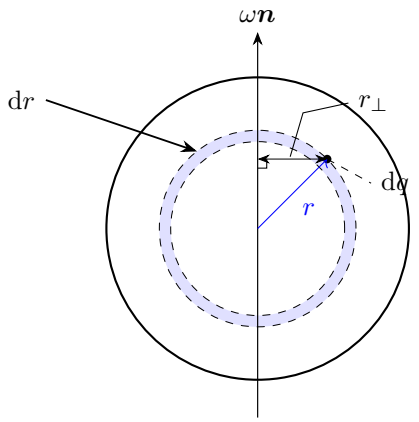


图 2.52: 球壳半径 r 与距转轴距离 $r_\perp$ 不同，先作球壳角向平均，再积壳的径向分布

从球心积到球面

图 2.52 径向积分得到 $m_B = \frac{\omega}{3}\int_0^R r^2 \frac{3Qr^2}{R^3}\,\mathrm{d}r = \frac{Q\omega}{R^3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{Q\omega R^2}{5}$，方向随 $Q\omega$ 的符号确定。若电荷只分布在薄球壳表面，结果为 $Q\omega R^2/3$，因为整个球壳的电荷都集中在最外层。

练习 2.5

解　圆弧元的径向平衡

图 2.45 取微小弧段，磁力为 $IBR\,\mathrm{d}\theta$ 向外，两端张力的向心合量为 $T\,\mathrm{d}\theta$，平衡给出 $T = IBR$。

伸长产生的张力

环的相对伸长等于周长相对增量 $(R - R_0)/R_0$，故线弹性本构是 $T = YA(R - R_0)/R_0$。

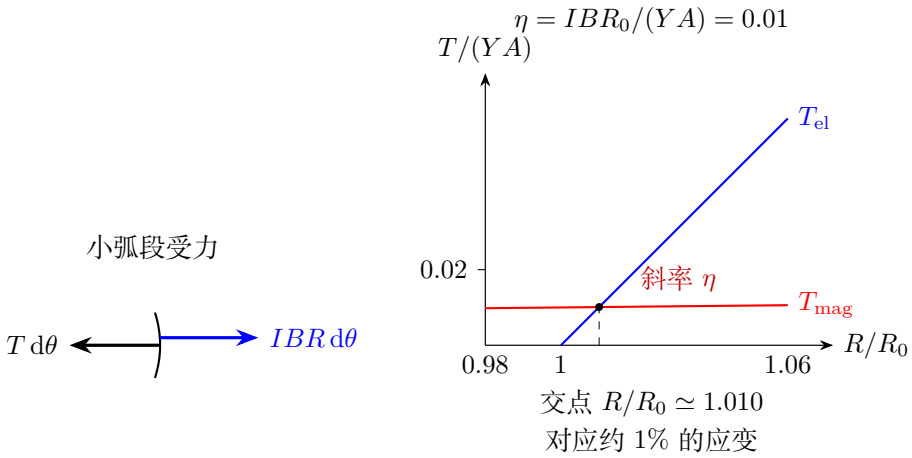


图 2.53: 径向平衡使弹性张力等于磁力需求，右图放大自然半径附近的两条函数

平衡半径与应变

联立图 2.53 两式，先乘自然半径，再把含 R 的项收集：

$$YA(R-R_0) = IBRR_0, \qquad (YA - IBR_0)R = YAR_0.$$

所以 $R = R_0/[1 - IBR_0/(YA)]$。记 $\epsilon = IBR_0/(YA)$，正半径要求 $\epsilon < 1$，而实际应变为

$$\frac{R-R_0}{R_0} = \frac{1}{1-\epsilon} - 1 = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}.$$

线弹性要求该量远小于 1，即参数 ϵ 实际应远小于 1。在这一范围内，半径的相对增量约为 ϵ。

练习 2.6

解　每单位长度的磁力

图 2.46 中先把左线作为场的产生者，右线所在处场大小为 $B_1 = \mu_0 I_1/(2\pi d)$，方向与右线电流垂直。右线长度 l 受力 $F_2 = I_2 l B_1$，故 $f = F_2/l = \mu_0 I_1 I_2/(2\pi d)$，方向朝向左线。交换研究对象得到相反等大的力。

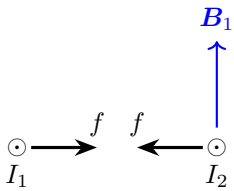


图 2.54: 解答过程：两平行导线的每单位长度作用力

同时改变电流和距离

图 2.54 同向电流相吸。两个电流同时加倍使乘积增为 4 倍，线距加倍又使力密度减半，合计增为 2 倍。力密度的单位为 N/m。

练习 2.7

解　恒定的轴向力

图 2.47 中磁矩的方向由约束保持，且电流恒定，机械势能为 $U(z) = -m_B[B_0 + \beta z]$。求导时 m_B, B_0, β 都为常数，

$$F_z = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z} = m_B\left(\frac{\mathrm{d}B_0}{\mathrm{d}z} + \beta\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z}\right) = m_B(0+\beta) = m_B\beta.$$

这是沿 B_z 增大的方向的常力。$\beta > 0$ 时沿 $+z$，$\beta < 0$ 时沿 $-z$。

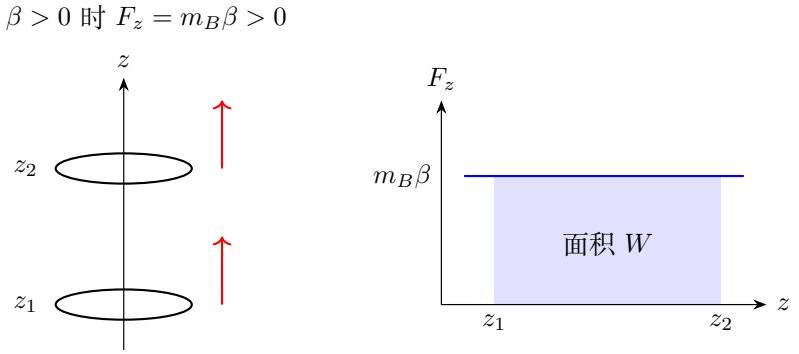


图 2.55: 由场梯度决定的轴向恒力，作功是对应力—位移图下的有向面积

位移中的功

由图 2.55，磁力功 $W = m_B\beta\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z = m_B\beta[z]_{z_1}^{z_2} = m_B\beta(z_2 - z_1)$，也等于势能减少量。若线圈可自由翻转，其磁矩方向还受力矩控制；若线圈尺寸已与变化尺度相当，小偶极近似就不足，应逐段积分。特别地，$\beta = 0$ 时均匀场的合力为零，即使该场 B_0 很大也不会给出轴向推动力。

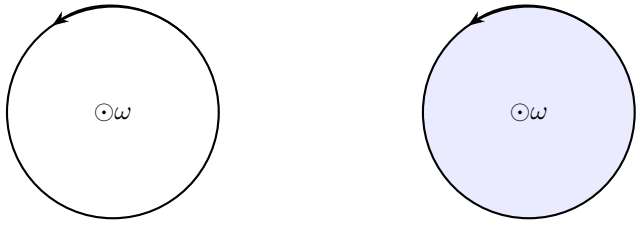
练习 2.8

解　磁矩与角动量的共同积分

图 2.48 中每个体元到转轴的距离为 $r_\perp$。磁矩积分为 $\boldsymbol{m}_B = (\omega\boldsymbol{n}/2)\int r_\perp^2\,\mathrm{d}q$，角动量为 $\boldsymbol{L} = \omega\boldsymbol{n}\int r_\perp^2\,\mathrm{d}M$。把逐点成立的 $\mathrm{d}q = (Q/M)\,\mathrm{d}M$ 代入，并将不随位置变化的 Q/M 提到积分号外，

$$\boldsymbol{m}_B = \frac{\omega\boldsymbol{n}}{2}\frac{Q}{M}\int r_\perp^2\,\mathrm{d}M = \frac{Q}{2M}\left(\omega\boldsymbol{n}\int r_\perp^2\,\mathrm{d}M\right) = \frac{Q}{2M}\boldsymbol{L}.$$

两者均有 $\boldsymbol{m}_B = Q\boldsymbol{L}/(2M)$



薄环
$m_B = Q\omega R^2/2$
$L = M\omega R^2$

薄盘
$m_B = Q\omega R^2/4$
$L = M\omega R^2/2$

图 2.56: 薄环与薄盘具有不同的半径平方平均，但同比分布使磁矩与角动量保留同一比值

薄环和薄盘

图 2.56 中薄环有 $m_B = Q\omega R^2/2$、$L = M\omega R^2$；薄盘中半径 r 的窄环有质量 $\mathrm{d}M = 2Mr\ \mathrm{d}r/R^2$。因此在薄盘上先求共同的积分：

$$\int r^2\ \mathrm{d}M = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\ \mathrm{d}r = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{MR^2}{2}.$$

乘 ω 得 $L = M\omega R^2/2$，乘 $\omega Q/(2M)$ 得 $m_B = Q\omega R^2/4$。两者比值都为 $Q/(2M)$。当 $Q < 0$，磁矩与机械角动量反向。

静磁

物理竞赛一轮讲义

第三讲

洛伦兹力与磁场中的运动

2026

目录

第三讲　洛伦兹力与磁场中的运动 **1**

3.1　洛伦兹力 1

3.2　匀强磁场中的圆周与螺旋运动 1

3.3　回旋加速、磁分析与聚焦 3

3.4　有限磁区中的入射与出射 5

3.5　连接两个磁区中的轨迹 6

3.6　由轨迹上的点与切线确定圆心 7

3.7　限定磁区大小的几何下界 7

3.8　空间聚焦与时间聚焦的区别 8

3.9　受约束带电物体与径向条件 9

3.10 带电摆完整竖直圆周的约束 10

3.11 例题与分析 12

3.12 本讲小结 31

3.13 练习 31

练习解答 34

第三讲　洛伦兹力与磁场中的运动

3.1　洛伦兹力

在阴极射线管中，电子束沿直线飞行时在荧光屏上留下一个亮点。把磁铁放在管旁，亮点会向一侧移动，磁铁换极后偏转反向。磁场对运动电荷的力为

$$\boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}, \qquad F_B = |q|vB\sin\theta, \tag{3.1}$$

其中 θ 是速度与磁场之间的夹角。图 3.1 中，速度向右，场向纸内。$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 指向上方，正电荷向上偏转，电子向下偏转。

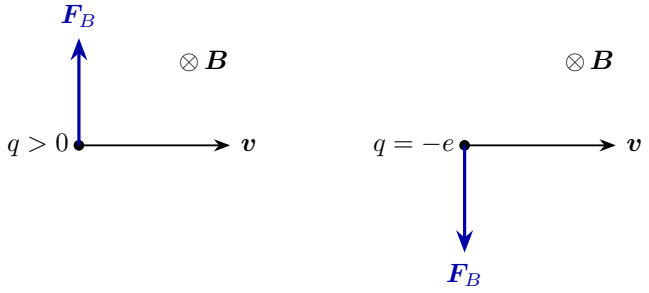


图 3.1: 磁场和速度相同，正电荷向上偏，电子向下偏

磁力垂直于瞬时速度，故功率 $\boldsymbol{F}_B\cdot\boldsymbol{v}=0$。只有磁力作用时，动能和速率保持恒定。速度方向仍随磁力转动，这就给出匀强磁场中的圆周运动。

安培力也可以从载流子的受力得到。导体横截面积为 A，载流子数密度为 n，有向漂移速度为 $\boldsymbol{v}_d$。长 Δl 的一段含 $nA\Delta l$ 个载流子，磁力的和是 $(nq\boldsymbol{v}_d)A\Delta l\times\boldsymbol{B}$。由 $\boldsymbol{J}=nq\boldsymbol{v}_d$ 和 $I\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{J}A\Delta l$，得到 $I\Delta\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$，方向随常规电流确定。

3.2　匀强磁场中的圆周与螺旋运动

把速度分解为沿场的有向分量 $v_\parallel$ 和垂直于场的分量 $\boldsymbol{v}_\perp$。平行方向上无磁力，$v_\parallel$ 恒定。垂直平面内，磁力大小为 $|q|v_\perp B$，并始终沿速度的法线。把它作为向心力，得

$$|q|v_\perp B=\frac{mv_\perp^2}{r}, \qquad r=\frac{mv_\perp}{|q|B}, \qquad T=\frac{2\pi r}{v_\perp}=\frac{2\pi m}{|q|B}.$$

非相对论情形下，速率增大时回旋半径同比增大，周期保持不变。若 $v_\parallel \neq 0$，圆周运动与沿场匀速运动叠加成螺旋线。一周的有向轴向位移为 $p_z = v_\parallel T$，几何螺距为 $|p_z|$。

作图时，从粒子当前位置沿磁力方向量出一个回旋半径。以 $\boldsymbol{r}_c$ 表示该瞬间在垂直截面内的圆心位置，位移 $\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r}$ 可写成

$$\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r} = \frac{m}{qB^2}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$$

改变电荷符号时，圆心移到速度切线的另一侧。

3.2.1　从速度方程得到有向轨迹

例如 $q > 0$、磁场向纸内，粒子从原点以 v_0 沿 $+x$ 入射，圆心为 $(0, r)$。将 $\boldsymbol{B} = -B\boldsymbol{e}_z$ 代入牛顿定律，

$$\dot{v}_x = -\Omega v_y, \qquad \dot{v}_y = \Omega v_x, \qquad \Omega = qB/m > 0.$$

这里 Ω 为常量。对第一式求导，代入第二式，

$$\ddot{v}_x = -\Omega \dot{v}_y = -\Omega(\Omega v_x) = -\Omega^2 v_x.$$

试取 $v_x = e^{st}$，则 $\dot{v}_x = se^{st}$、$\ddot{v}_x = s^2 e^{st}$。代回得 $(s^2 + \Omega^2)e^{st} = 0$，故特征根为 $s = \pm \mathrm{i}\Omega$。实通解及其导数为

$$v_x = A\cos\Omega t + D\sin\Omega t, \qquad \dot{v}_x = -A\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t.$$

由 $v_x(0) = v_0$ 得 $A = v_0$，由 $\dot{v}_x(0) = -\Omega v_y(0) = 0$ 得 $D\Omega = 0$，即 $D = 0$。再用 $v_y = -\dot{v}_x/\Omega$，得到 $v_y = v_0 \sin\Omega t$。位置从初始原点积分：

$$x = v_0 \int_0^t \cos\Omega s \,\mathrm{d}s = \frac{v_0}{\Omega}[\sin\Omega s]_0^t, \qquad y = v_0 \int_0^t \sin\Omega s \,\mathrm{d}s = -\frac{v_0}{\Omega}[\cos\Omega s]_0^t.$$

因 $v_0/\Omega = r$，用速度转角 $\phi = \Omega t$ 表示，

$$v_x = v_0\cos\phi, \quad v_y = v_0\sin\phi, \qquad x = r\sin\phi, \quad y = r(1 - \cos\phi).$$

参数 ϕ 随时间增加。圆上的每一个位置都对应速度方向，从而可以沿圆弧依次寻找进出磁区的位置。

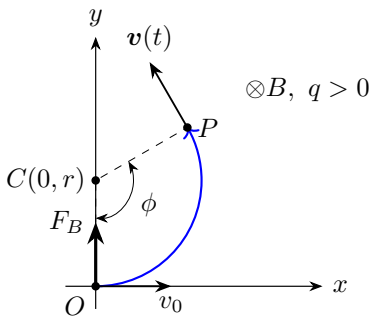


图 3.2: 以向心力定位圆心，实际转角同时决定位置与速度方向

图 3.2 中，圆心角 ϕ 从入射半径量到当前位置的半径。速度方向也转过 ϕ，用时 ϕ/Ω，其中 $\Omega = |q|B/m$。

3.3 回旋加速、磁分析与聚焦

回旋加速器在磁场内使粒子转过半周，再在间隙内用电场增加动能；理想非相对论回旋周期固定，交流电压可按同一周期同步。每次跨缝增加 qU，一整圈跨缝两次，因此整圈增加 $2qU$。最大半径决定可容纳的最大动量，从而决定最大动能。

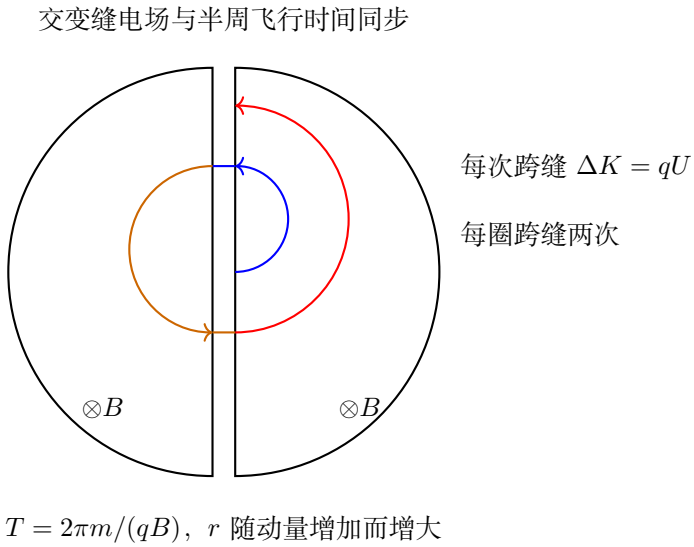


图 3.3: D 形盒内由磁场转向，跨缝时由电场加速；缝宽已放大表示

图 3.3 中的三段半圆按先右、再左、再右的次序连接。跨缝后的速率增大，下一段轨道半径随之增大，但理想半周时间仍为 $\pi m/(qB)$。交流电场每半周期换向，使粒子从另一侧跨缝时仍被加速。

磁分析把轨道半径或落点与质荷比联系。若粒子先经电势差 U 从静止加速，则 $\frac{1}{2}mv^2 = |q|U$，再代入回旋半径，得到 $r = \sqrt{2mU/|q|}/B$。这时半径随质量的平方根变化；若先用速度选择器使各粒子速度相同，半径则与质量成正比。所比较的是不同的入射准备条件。

$$|q|U = mv^2/2, \quad r = mv/(|q|B)$$

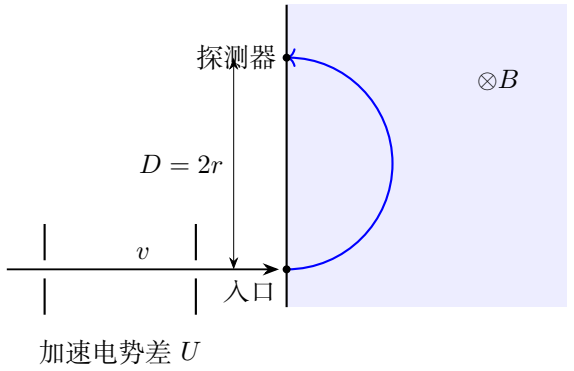


图 3.4: 先由电压准备入射速率，再由半周磁偏转把质量差转成落点差

图 3.4 先用共同电压使相同电荷量的粒子获得相同动能。先按各自质量求 v，才得到 $D = 2\sqrt{2mU/|q|}/B$。若入口前改成速度选择器而保持 v 相同，便应直接用 $D = 2mv/(|q|B)$，质量依赖从平方根变成一次关系。

轴向磁聚焦利用同一质荷比粒子经过一个回旋周期后横向位移回到零。精确的轴向焦距为 $v_{\parallel}T$；同一总速率下，入射角决定平行速度。入射角很小时，各粒子的平行速度接近，因此近似同焦。初始角度与速率分散分别造成角向与色散误差，应明确近似是在哪一步使用的。

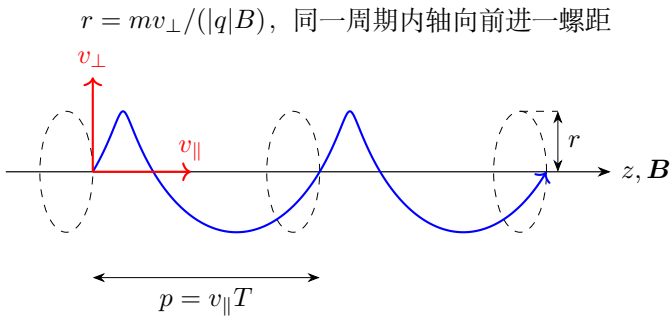


图 3.5: 螺旋轨迹及其垂直磁场的截面

图 3.5 把速度分成平行场与垂直场两部分：前者决定每周轴向前进距离，后者决定回旋半径。无电场、均匀静磁场中二者大小分别不变；有向推进来自同一个回旋周期乘有向平行速度，几何螺距取其绝对值。

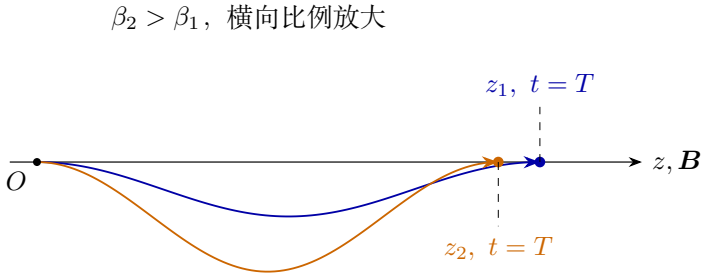


图 3.6: 同速、异角的两条螺线投影。两点都在一周末返回轴线

图 3.6 以同种粒子为例。两粒子的速度横向分量不同，因而螺线宽度不同。沿场分量为 $v\cos\beta$，所以一周末返回轴线的位置 $z = vT\cos\beta$ 随 β 增大而靠近发射点。例 3.10 用小角展开算出这两个返回点的距离差。

3.4 有限磁区中的入射与出射

均匀磁场只占一部分空间时，先按入射点的磁力定圆心，再找轨道圆与磁区边线的交点。图 3.7 的正粒子从 A 向右入射，初始磁力向上。右半圆在磁区内，第一次到达的另一交点 B 是出口。粒子在 B 的速度沿水平切线向左，出区后沿这条切线前进。

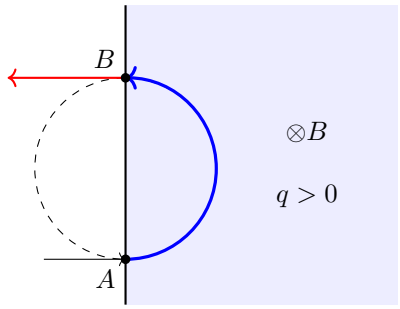


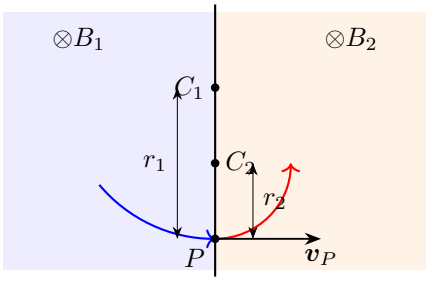
图 3.7: 圆轨迹只是候选延拓，物理轨迹在首次有效出界处切换

若沿轨道圆有几个候选交点，用不断增大的转角 ϕ 排列它们。到达某点后进入场外，才算穿出。圆弧只碰到一条直线、前后都在磁区一侧时，这是相切。例 3.2 和练习 3.3 分别用直入射和斜入射区分穿出与相切。

例 3.2 用条形磁区说明轨道与分界线的两种相遇方式。轨道圆与右侧直线相交时，第一次交点可以是穿出点；两者相切时，速度沿分界线，随后圆弧仍留在场内。

3.5　连接两个磁区中的轨迹

穿过窄的分界层时，有限磁力的冲量随通过时间一起趋于零。因此位置和速度连续，两段轨道共用分界点处的切线。加速度随场改变，新圆心在这条切线的法线上，其所在侧由 $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 决定，到分界点的距离由新磁场下的回旋半径给出。图 3.8 中，第二段的场更强，圆心更接近 P。若第二段场反向，圆心转到法线另一侧。



切线与速率连续，$r_1/r_2 = B_2/B_1$

图 3.8: 过界时共用同一切线，再按新半径另定圆心；图示 $B_2 = 2B_1$

理想分界面可用来近似厚度远小于轨道半径的场过渡层。图示磁场垂直运动平面，平行于两区的实际交界面，跃变的是切向磁场。法向磁场仍连续。例 3.4 用两个半圆接成一次往返，分别累加沿分界线的位移与时间。

3.6 由轨迹上的点与切线确定圆心

图 3.9 中，入射点 P 的速度沿 x 轴，磁力指向 $+y$，因此圆心 C 在 P 上方的法线上。若另一轨迹点是 $Q=(a,b)$，取 $P=(0,0)$、$C=(0,r)$。圆心到 P,Q 等距，所以

$$a^2+(b-r)^2=r^2,\qquad 2br=a^2+b^2,\qquad r=\frac{a^2+b^2}{2b}\quad (b>0).$$

图中的中垂线把等距关系画了出来。若同时给出 Q 处的速度，再把 CQ 与这条速度比较。两者垂直，且速度沿磁力确定的转向时，两个位置可以接在同一段圆弧上。

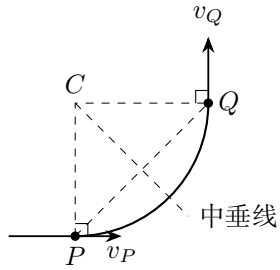


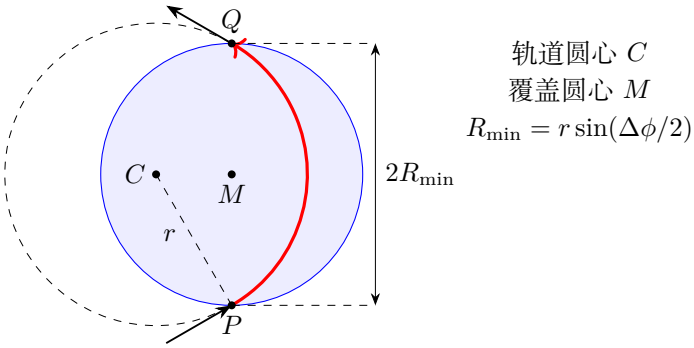
图 3.9: 圆心由切线法线与弦的中垂线共同确定

3.7 限定磁区大小的几何下界

若要求用一个圆形磁区使速度方向改变给定角度，磁区覆盖实际运动圆弧。对不超过半周的圆弧，弦长为 $2r\sin(\Delta\phi/2)$，任何覆盖两个端点的圆盘半径至少是弦长的一半。以弦为直径作圆盘，还需证明整段圆弧确实在盘内。若整段弧都在盘内，弦长给出的下限就是可达的半径。

当圆弧超过半周时，端点距离可能重新变小，仅用端点就会严重低估磁区。因为弧中已经包含轨道圆的某一对对径点，覆盖圆盘至少要有半径 r。最小区域题的关键因此包括两个部分：从几何上得到不可再小的下界，并构造满足入、出射方向且能覆盖整个路径的磁区。

对等边三角形，最大点距是边长，弦长仍给出边长的下限。例 3.6 把弦作为小等边三角形的一边，分别用三条边的直线方程确定整段弧和三个顶点的位置。



图示 $\Delta\phi = 2\pi/3$，红弧位于蓝色圆盘内

图 3.10: 以弦为直径的圆覆盖短弧，直线沿两端的切向进出

图 3.10 中 M 是弦中点。以轨道圆心为原点、弦中点位于正横轴，记 $\eta = \Delta\phi/2 < \pi/2$，任意弧点 X 可写为 $(r\cos u, r\sin u)$，$|u| \le \eta$。它到 $M = (r\cos\eta, 0)$ 的距离满足

$$|XM|^2 = r^2(1 + \cos^2\eta - 2\cos\eta\cos u) \le r^2\sin^2\eta.$$

因此整段短弧确实在弦的直径圆内，端点达到半径下界。对严格小于半周的转角，图中直线进入、离开覆盖圆的方向也分别指向盘内、盘外。

半周及更长弧的几何覆盖圆可以取原轨道圆。若要求从圆盘外穿入并穿出，考虑圆心从轨道圆心沿弧的中间半径移动 $c > 0$，取半径

$$a(c) = \sqrt{r^2 + c^2 - 2rc\cos\eta}, \qquad \eta = \Delta\phi/2.$$

当 $\pi/2 \le \eta < \pi$ 时，弧内各点有 $\cos u > \cos\eta$，严格在圆盘内。端点距离取等号，沿弧的进、出切向分别使到盘心的距离减小、增大。令 $c \to 0^+$，半径趋于 r。此时 r 是严格穿入和穿出的下确界。练习 3.2 求的是允许弧落在圆周上的几何覆盖半径。

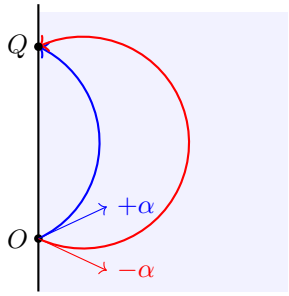
3.8　空间聚焦与时间聚焦的区别

半平面磁场中，从分界线同一点出发、速率相同而入射角略有不同的一束粒子，可以在分界线附近再次会聚。设分界线为 $x = 0$，场位于 $x > 0$，正粒子进入时 $\boldsymbol{v} = v(\cos\alpha, \sin\alpha)$，磁场垂直纸面向里。圆心为 $C = (-r\sin\alpha, r\cos\alpha)$，与分界线的第二交点为 $Q = (0, 2r\cos\alpha)$。

在 $\alpha = 0$ 附近，$y_Q = 2r - r\alpha^2 + O(\alpha^4)$，没有角度的一阶项。这意味着小角度发散造成的落点分散是二阶量，形成空间上的一阶聚焦。但从初始半径到出点半

径的实际转角为 $\pi-2\alpha$，飞行时间为 $(\pi-2\alpha)/\Omega$，其中 $\Omega=|q|B/m$。时间差仍然含角度的一阶项，所以落点可重合，到达时刻仍随入射角改变。

对于速率略有不同的粒子，r 随 v 线性变化，即使角度聚焦，落点仍对速度有一阶色散。速度选择器缩小入射速率的分散。例 3.13 比较速率相同而入射角互为相反数的两粒子。



相同落点
$y_Q=2r\cos\alpha$

蓝：$T_+=(\pi-2\alpha)/\Omega$
红：$T_-=(\pi+2\alpha)/\Omega$

图示 $\alpha=25°$；空间会聚不保证等时到达

图 3.11: 同速而正负入射角不同的两条实际轨迹在同一条分界线点相交，飞行转角却不同

图 3.11 中，蓝弧少于半周，红弧多于半周，但两个出口坐标完全相同。两者时间差为 $4\alpha/\Omega$，对小角度仍是一阶量。相反，落点对 α 的变化以 α^2 开始；求空间分辨率与求到达时间分别由落点公式和飞行时间公式给出。

3.9 受约束带电物体与径向条件

带电物体还受重力、绳力或支持力时，磁力虽然仍不做功，却会改变约束力。应先由能量或竖直平衡确定可确定的量，再在法向列牛顿方程。磁力指向圆心时可以分担向心力，使绳力减小；反向运动时磁力反向，绳力则增大。因此同一条几何轨道的两个运动方向，约束可实现性可能不同。

绳力的允许方向是沿绳指向固定点，光滑表面的支持力沿外法线。由径向方程得到的候选速度还要与这些方向相符。例 3.7 中，小球在圆锥外表面作水平圆周运动，支持力的水平分量向外，磁力抵消这一分量后提供向心力。

磁摆的能量仍由重力决定。若最大摆角为 α，速度满足 $v^2=2gL(\cos\theta-\cos\alpha)$。把它代入径向受力式后，绳力成为速度的二次函数，但速度只在实际摆动允许的有限区间内取值。对每个实际经过的非零速率，令绳力为零可得到一个允许的场强上限。将这些上限中的最小值作为全程允许的最大场强。

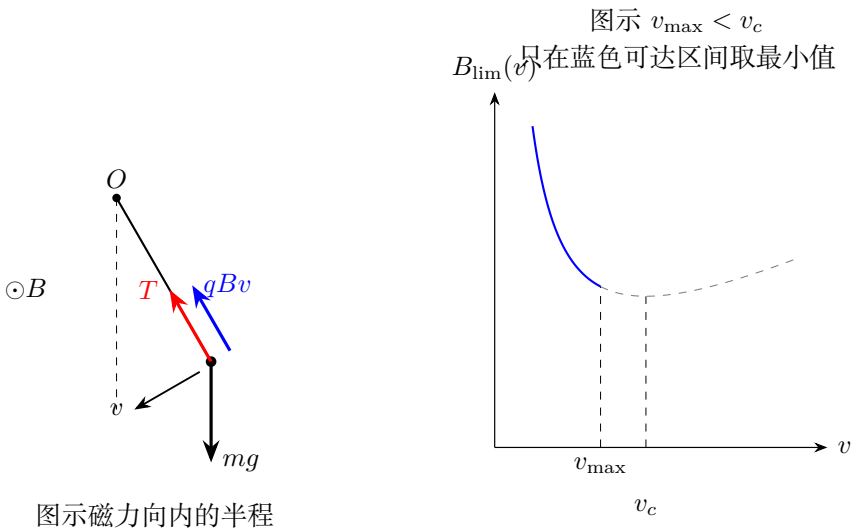


图 3.12: 先由重力确定可达速率区间，再在此区间内检查磁力向内时的最小绳力

图 3.12 左图选择磁力向内的半程，绳力为 $T = mv^2/L + mg\cos\theta - qBv$。另一半程磁力反向，绳力只会更大。将能量关系代入，得到

$$T(v) = \frac{3m}{2L}v^2 - qBv + mg\cos\alpha, \qquad 0 \le v \le v_{\max} = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}.$$

对于 $v > 0$，$T \ge 0$ 等价于 $B \le B_{\lim}(v) = [3mv/(2L) + mg\cos\alpha/v]/q$。图中右侧的虚线只是函数的不可达延拓。对速度求导时，将 $1/v$ 写为 v^{-1}，有

$$\frac{\mathrm{d}B_{\lim}}{\mathrm{d}v} = \frac{1}{q}\left[\frac{3m}{2L} - mg\cos\alpha\, v^{-2}\right].$$

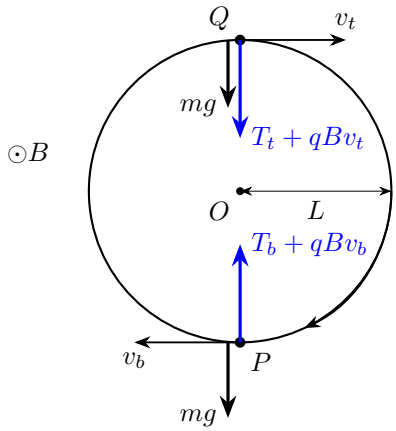
导数在其零点左侧为负、右侧为正，故无约束极小位置 $v_c = \sqrt{2gL\cos\alpha/3}$ 若超过 $v_{\max}$，须取区间右端；只有落入可达区间时，才能取内部极小值。在释放点 $v = 0$，直接从原式得到绳力 $mg\cos\alpha > 0$。

3.10　带电摆完整竖直圆周的约束

竖直圆周中的磁力不作功，速率仍由重力势能变化决定；但磁力进入径向方程，会改变绳的拉力。取底部速率 v_b，以从最低点转过的角度 φ 表示位置，则 $v^2 = v_b^2 - 2gL(1-\cos\varphi)$。选择磁力始终指向圆心的转向，径向方程给 $T = mv^2/L + mg\cos\varphi - qBv$。

将 $\cos\varphi=(v^2-v_b^2+2gL)/(2gL)$ 代入，拉力变为 $T=3mv^2/(2L)-qBv+mg-mv_b^2/(2L)$。要求绳不松弛，相当于对实际可达速率区间逐点要求 $B\le(3mv/(2L)+C/v)/q$，其中 $C=mg-mv_b^2/(2L)$。

若无场时已能完成圆周，即 $v_b^2\ge 5gL$，则 $C<0$。上述上界关于 v 的导数为 $[3m/(2L)-C/v^2]/q>0$，因而最严格的位置是速率最小的最高点。设 $v_t=\sqrt{v_b^2-4gL}$，临界场为 $B_{\max}=(m/q)(v_t/L-g/v_t)$。例 3.14 以 $v_b^2=8gL$ 为例，在这个速率区间内求临界磁场。



最高点：$T_t+qBv_t+mg=mv_t^2/L$
能量：$v_t^2=v_b^2-4gL$

$T_t\ge 0$ 给 $B\le(m/q)(v_t/L-g/v_t)$
还需用全程单调性检查其他点

图 3.13: 完整圆周中，选定的转向使磁力始终向心；最高点处重力也向心

图 3.13 中，最高点的重力和磁力都帮助提供向心力，因此在同一顶点速率下，增大向内磁场会减小所需绳力。由前面的单调性，临界场正对应最高点拉力降到零。

3.11　例题与分析

例 3.1 (半平面磁场中的半周偏转)**.** 正电荷 q、质量 m 的粒子以速度 v_0 沿 $+x$ 从原点进入 $x>0$ 的匀强磁场，场向纸内、大小 B。求首次离开磁区的位置、速度与在场时间。

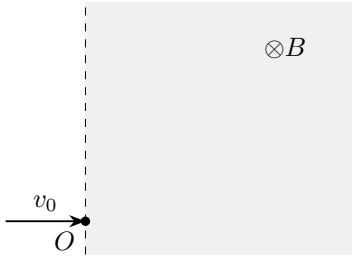
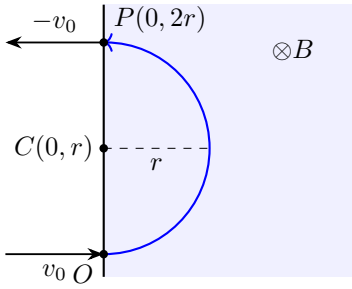


图 3.14: 题设：半平面磁场中的半周偏转

解　圆心与运动参数

由图 3.14, 初始磁力向 $+y$, 圆心在 $(0,r)$, 其中 $r=mv_0/(qB)$。取转角 $\phi=\Omega t$、$\Omega=qB/m$。正文已由初始速度 $(v_0,0)$ 积分得到 $x=r\sin\phi$、$y=r(1-\cos\phi)$。本题用这两个坐标确定粒子在场内的哪一段圆弧上运动。



$0<\phi<\pi:\ x>0;\quad \phi=\pi:\ \boldsymbol{v}\parallel -x$

图 3.15: 先由磁力确定圆心，再按正的运动转角选出第一次跨越分界线的位置

第一次回到分界线

图 3.15 中粒子首先在 $0<\phi<\pi$ 留在 $x>0$，到 $\phi=\pi$ 才再次遇到分界线 $x=0$，此时 $y=2r$，速度为 $-v_0\boldsymbol{e}_x$。粒子从这里向左进入无磁场区。时间 $t=\pi/\Omega=\pi m/(qB)$，等于半个回旋周期。

例 3.2 (有限宽磁场中的穿出与返回)**.** 粒子按上一题的初态进入条形磁场 $0 < x < d$，场向纸内。用 $r = mv_0/(qB)$ 分类讨论首次出界位置和时间，特别说明 $d = r$ 的情形。相切时取磁区内侧的轨迹极限。

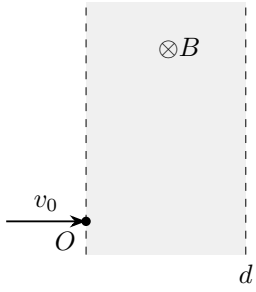


图 3.16: 题设：有限宽磁场中的穿出与返回

解　最大穿透深度

按图 3.16，场内轨迹仍是 $x = r\sin\phi$、$y = r(1-\cos\phi)$。它向右最远只到 $x = r$。若 $d < r$，右侧分界线在达到最远点以前就被穿过，首次解为 $\phi_e = \arcsin(d/r) \in (0, \pi/2)$。

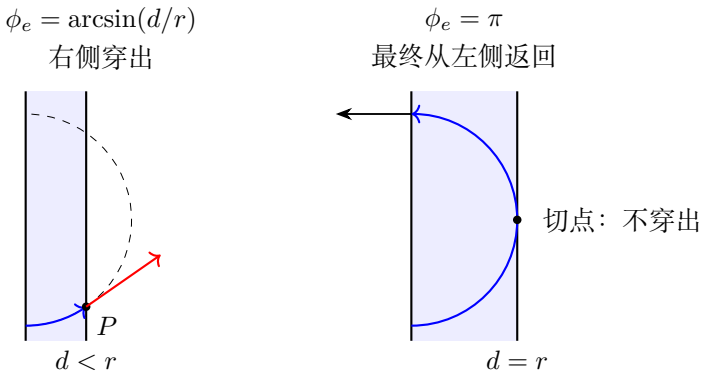


图 3.17: 左图在最远点前穿出，右图只与右侧分界线相切；实际轨道用实线表示

从右侧穿出

图 3.17 左图中 $x_e = d$，故 $\sin\phi_e = d/r$。入射后尚未到达最右点，$\cos\phi_e = \sqrt{1 - d^2/r^2}$。代回 $y = r(1-\cos\phi)$，得到 $y_e = r - \sqrt{r^2 - d^2}$、$t_e = \phi_e/\Omega$，出界速度为 $v_0(\cos\phi_e, \sin\phi_e)$。

从左侧返回

若 $d > r$，粒子最右点仍在右侧分界线以内，经过半周从左侧分界线 $(0, 2r)$ 离开。当 $d = r$ 时，圆弧与右侧分界线相切。切点前后的圆弧都在磁区内，粒子仍从左侧离开。两种情形均有 $(x_e, y_e) = (0, 2r)$，$t_e = \pi/\Omega = \pi m/(qB)$。

例 3.3 (圆形磁区中的散射角)**.** 半径 a 的圆形区域内有向纸内的匀强场 B。正电荷 q、质量 m 的粒子从左端 $A = (-a, 0)$ 沿圆的直径方向以速率 v 入射。求磁区内轨道转角、时间与出界点。

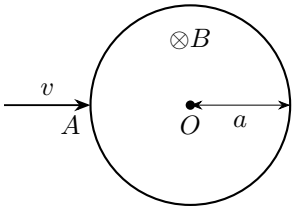


图 3.18: 题设：圆形磁区中的散射角

解　轨道圆与速度

图 3.18 中入射处磁力向上，轨道半径 $r = mv/(qB)$，圆心在 $(-a, r)$。速度分量为 $v\cos\Omega t, v\sin\Omega t$。取初始坐标 $(-a, 0)$，

$$x = -a + v\int_0^t \cos\Omega s\,\mathrm{d}s = -a + \frac{v}{\Omega}[\sin\Omega s]_0^t = -a + r\sin\phi,$$
$$y = v\int_0^t \sin\Omega s\,\mathrm{d}s = -\frac{v}{\Omega}[\cos\Omega s]_0^t = r(1-\cos\phi),$$

其中 $\phi = \Omega t$，积分变量 s 从入射时刻到当前时刻。出界点还应满足磁区圆的方程 $x^2 + y^2 = a^2$。

求两个圆的交点

将参数式代入磁区的边线，逐项展开：

$$(-a + r\sin\phi)^2 + r^2(1-\cos\phi)^2 = a^2,$$
$$-2ar\sin\phi + r^2(\sin^2\phi + 1 - 2\cos\phi + \cos^2\phi) = 0,$$
$$2r^2(1-\cos\phi) = 2ar\sin\phi.$$

除以 $2r > 0$，再用半角公式，得 $2r\sin^2(\phi/2) = 2a\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)$。入点对应 $\phi = 0$；在 $0 < \phi < \pi$ 内，两个半角函数均为正，故可除以 $2\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)$，得到 $\tan(\phi/2) = a/r$。

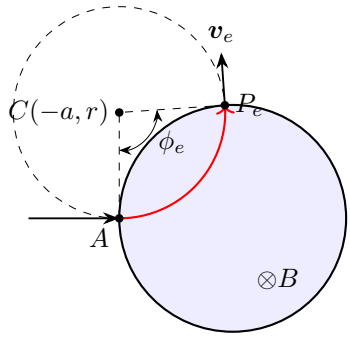


图 3.19: 轨道圆与磁区的边线相交，除去入点后得到唯一的首次出点；示意取 $a/r = 15/14$

出口与飞行时间

图 3.19 中粒子在 A 向圆内运动。$\tan(\phi/2)$ 在 $(0,\pi)$ 内严格增大，所以 $\phi_e = 2\arctan(a/r)$ 是入点之后遇到的第一个交点对应的角度。时间 $t = \phi_e/\Omega$。由半角关系 $\sin\phi_e = 2ar/(a^2+r^2)$、$1-\cos\phi_e = 2a^2/(a^2+r^2)$，出界点为

$$x_e = \frac{a(r^2-a^2)}{r^2+a^2}, \qquad y_e = \frac{2ra^2}{r^2+a^2}.$$

强场和弱场

当 $r \gg a$，转角约为 $2a/r$，时间趋近直线穿过直径的 $2a/v$；强场使 r 很小时，粒子在入口附近折回，转角趋近半周。

例 3.4 (两侧不同磁场中的平均漂移)**.** 界面 $x = 0$ 右侧磁场为 B，左侧为 $2B$，方向均向纸内。正电荷粒子从界面原点以 v_0 向右出发。求经过任意整数个完整往返后，沿界面方向的平均速度。

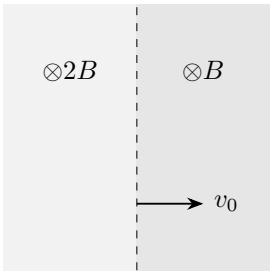
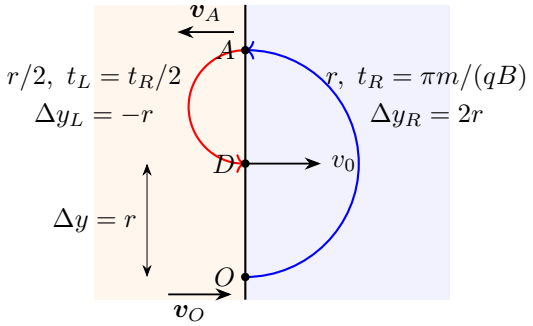


图 3.20: 题设：两侧不同磁场中的平均漂移

解　两个半圆的位移与时间

在图 3.20 右侧，粒子先完成半径 $r = mv_0/(qB)$ 的右半圆，回到界面时沿 $-x$，界面方向位移为 $+2r$，耗时 $t_R = \pi m/(qB)$。进入左侧后半径变为 $r/2$，从当前点继续按同一转向走左半圆，这次界面位移为 $-r$，耗时 $t_L = \pi m/(2qB)$。



D 处速度恢复为向右，下一往返只是整体上移 r

图 3.21: 两段半圆在界面处连续相接，位移取端点差，时间按各自回旋角速度求和

沿分界线的平均速度

所以图 3.21 一个完整往返的净位移 $\Delta y = r$，总时间 $3\pi m/(2qB)$，平均速度 $\bar{v}_y = 2v_0/(3\pi)$。每个往返结束时粒子又从界面向右，初速度方向复原，所以连续 N 个往返只需把位移与时间同乘 N，平均值不变。

例 3.5 (使粒子转过直角的最小圆磁区)**.** 正电荷粒子速率为 v，质量 m，电量 q。在第一象限安排一个向纸外的圆形匀强磁区，使粒子从 y 轴沿 $+x$ 入射，最后从 x 轴沿 $-y$ 射出。两轴上的入、出射点位置可选择。求圆磁区最小半径，并构造实现它的位置。

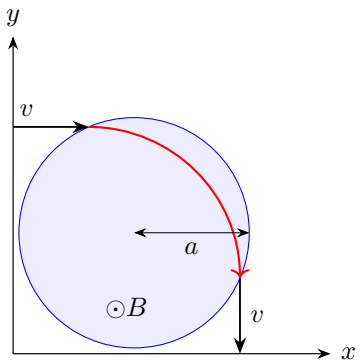


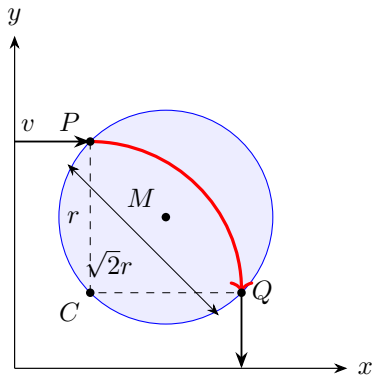
图 3.22: 一种可行布局示意；圆磁区的位置与半径仍待优化

解　轨道半径与转角

图 3.22 中，正电荷在向纸外的场中顺时针转动，速度由 $+x$ 转到 $-y$ 需要四分之一周。由 $mv^2/r = qvB$，轨道半径为 $r = mv/(qB)$，速率全程不变。

由弦长求最小尺寸

设场内弧的两端为 P, Q。速度转角为 $\pi/2$，故弦长 $PQ = \sqrt{2}r$。任一圆盘包含这两个端点，其直径至少为 PQ，因此磁区半径有 $a \geq r/\sqrt{2}$。图 3.23 把轨道圆心 C 与磁区圆心 M 分别标出。



$$P = (r/2, 3r/2),\ Q = (3r/2, r/2)$$

图 3.23: 磁区圆心取弦中点，轨道圆心另在左下方；构造完全位于第一象限

弦的直径圆

以 PQ 为直径作磁区圆盘。将坐标临时转到以轨道圆心 C 为原点、弧的中间半径为横轴的坐标系，弧点为 $(r\cos\psi, r\sin\psi)$，$|\psi| \leq \pi/4$，弦中点为 $(r/\sqrt{2}, 0)$。任意弧点到磁区中心的距离平方为

$$r^2 + \frac{r^2}{2} - \sqrt{2}r^2\cos\psi \leq \frac{r^2}{2}.$$

所以整段实际圆弧都被半径 $r/\sqrt{2}$ 的圆盘包含，下界在几何上达到。

放在第一象限

还要满足两轴与第一象限的限制。回到图中的固定坐标，明确取 $M = (r, r)$、$C = (r/2, r/2)$，则 $P = (r/2, 3r/2)$、$Q = (3r/2, r/2)$。磁区距两坐标轴的最近距离均为 $r - r/\sqrt{2} > 0$，整个圆盘都在第一象限。粒子从 $(0, 3r/2)$ 向右到 P，由 Q

向下到 $(3r/2, 0)$，两段无场直线长度均为 $r/2 > 0$。入点速度指向磁区内、出点速度指向磁区外，构造因此可实现，最终

$$\boxed{a_{\min} = \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{mv}{\sqrt{2}qB}}.$$

例 3.6 (等边三角形磁区的最小边长)**.** 正粒子从大等边三角形 ABC 的 BC 边上 M 点垂直入射，从 AC 边上 N 点垂直射出，$CM = CN = d$。磁场向纸外，仅占据一个等边三角形区域。令 $\rho = mv/(qB)$，取 $d \geq \rho$ 且大三角形边长至少 $2d$，求轨道半径、在场时间与磁区最小边长。

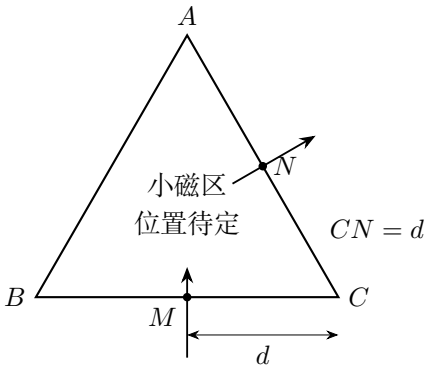


图 3.24: 大等边三角形给定入射点与出射点，两者到同一顶点 C 的距离均为 d

解　速度的转角

图 3.24 中入射方向竖直向上，出射方向与水平成 30 度，速度需顺时针转过 60 度。初始磁力向右，正粒子与向纸外的磁场恰好满足这个转向。轨道半径 $r = \rho = mv/(qB)$，角速度大小 $\Omega = qB/m$。

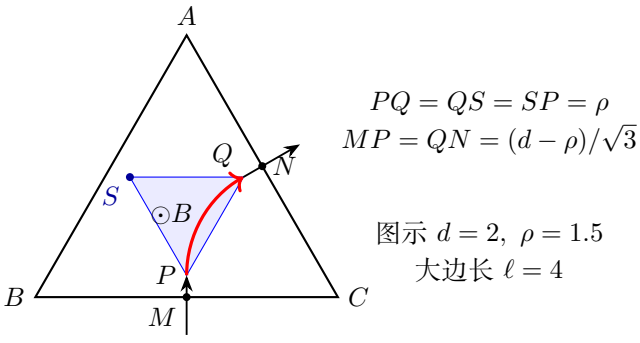


图 3.25: 短弧由边长为 ρ 的等边三角形覆盖，再用进出切线定位小磁区

在场时间与弦长

按图 3.25 场内圆弧转角 $\pi/3$，时间 $t=\pi/(3\Omega)=\pi m/(3qB)$，为周期的六分之一。弧两端 P,Q 的弦长 $2r\sin(\pi/6)=r$。任一等边三角形的最大点距不超过其边长，因此磁区边长至少为 r。

弧在小三角形中的位置

把 PQ 作为小等边三角形的一边，第三顶点 S 放在弧凸起侧。以 P 为局部原点，弧可写为 $x=\rho(1-\cos\beta),y=\rho\sin\beta$，$0\le\beta\le\pi/3$。小三角形的三个顶点为 $(0,0),(\rho/2,\sqrt{3}\rho/2),(-\rho/2,\sqrt{3}\rho/2)$。因为 $x\ge0$、$y\ge\sqrt{3}x$、$y\le\sqrt{3}\rho/2$，整段弧确实在小三角形内。

定位小三角形

再用外部给定点定位。设大三角形边长为 ℓ，取 $B=(0,0),C=(\ell,0)$。图 3.25 中，$M=(\ell-d,0)$、$N=(\ell-d/2,\sqrt{3}d/2)$。令入场前直线长 $a=MP$、出场后直线长 $b=QN$。入射方向为 $(0,1)$，出射方向为 $(\sqrt{3}/2,1/2)$，圆弧端点位移为 $(\rho/2,\sqrt{3}\rho/2)$，因此

$$\left(\frac{d}{2},\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)=(0,a)+\left(\frac{\rho}{2},\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\right)+b\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right).$$

横分量先给 $b=(d-\rho)/\sqrt{3}$；再代入纵分量 $a+\sqrt{3}\rho/2+b/2=\sqrt{3}d/2$，得到 $a=(d-\rho)/\sqrt{3}$。所以小磁区的位置为

$$MP=QN=\frac{d-\rho}{\sqrt{3}},\quad P=\left(\ell-d,\frac{d-\rho}{\sqrt{3}}\right),\quad Q=P+\left(\frac{\rho}{2},\frac{\sqrt{3}\rho}{2}\right).$$

因此 $d\ge\rho$ 正是两直线段长度非负的条件。第三顶点为 $S=P+(-\rho/2,\sqrt{3}\rho/2)$。大三角形的三个内部半平面为

$$y\ge0,\qquad y\le\sqrt{3}(\ell-x),\qquad y\le\sqrt{3}x.$$

三顶点中，P 最低，其高度 $a\ge0$；对右侧分界线 AC，最接近分界线的是 Q，代入得

$$\sqrt{3}(\ell-x_Q)-y_Q=\frac{2(d-\rho)}{\sqrt{3}}\ge0.$$

对左侧分界线 AB，最接近分界线的是 S。由 $x_S=\ell-d-\rho/2$、$y_S=(d+\rho/2)/\sqrt{3}$，可得

$$\sqrt{3}x_S-y_S=\frac{3\ell-4d-2\rho}{\sqrt{3}}.$$

题设给 $\ell \geq 2d$、$d \geq \rho$，故分子至少为 $6d - 4d - 2\rho = 2(d - \rho) \geq 0$。三个顶点都在大三角形内，而每个分界线半平面均为凸集，所以它们的凸包，即整个小等边三角形，也在大三角形内。结合前面对整段圆弧的覆盖证明，边长下界能够实现，最终

$$\boxed{a_{\min} = \rho = \frac{mv}{qB}}.$$

例 3.7 (圆锥外表面运动的最小半径)**.** 光滑圆锥尖顶向上，半顶角为 θ。质量 m、正电荷 q 的小球在外侧表面作水平匀速圆周运动。磁场沿竖直方向向下，转向使磁力向圆心。求允许的最小轨道半径，并取 $m = 0.0369\,\mathrm{kg}, q = 0.181\,\mathrm{C}, B = 1.99\,\mathrm{T}, \theta = 32.7^\circ, g = 10\,\mathrm{m/s^2}$ 计算。

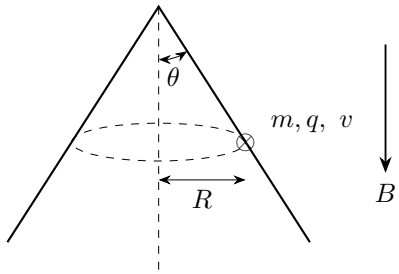
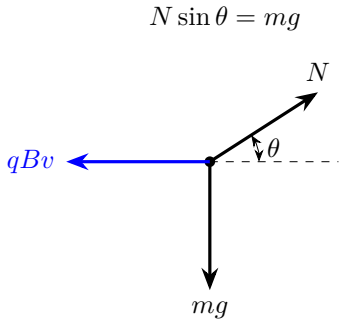


图 3.26: 球在尖顶向上圆锥的外表面，图中速度向纸内，向下磁场产生向内磁力

解　支持力与磁力

图 3.26 规定球在尖顶向上的外表面，支持力向外且向上。竖直平衡 $N\sin\theta = mg$，所以支持力的径向向外分量为 $N\cos\theta = mg\cot\theta$。沿圆心方向，$qBv - mg\cot\theta = mv^2/R$，整理为

$$mv^2 - qBRv + mgR\cot\theta = 0.$$



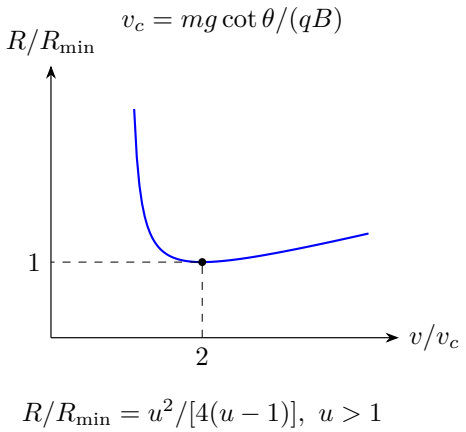


图 3.27: 外表面的支持力向外上方；速度—半径关系的最低点与判别式重根等价

最小半径

图 3.27 的速度应为实数，判别式要求 $(qBR)^2 - 4m^2gR\cot\theta \geq 0$。对 $R>0$ 约去一因子，得到

$$R \geq R_{\min} = \frac{4m^2g\cot\theta}{q^2B^2} = 0.654\,\mathrm{m}.$$

临界速度

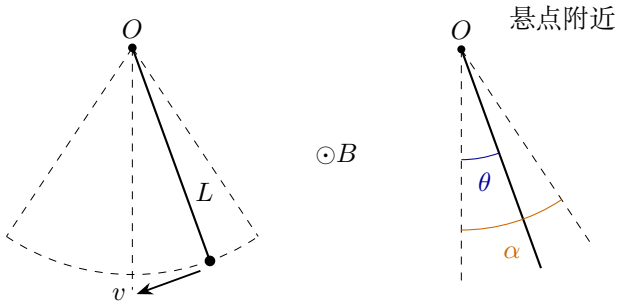
图中再以 $v_c = mg\cot\theta/(qB)$ 归一化。径向式要求 $v > v_c$，且 $R = mv^2/(qBv - mg\cot\theta)$；令 $A = mg\cot\theta$，直接对商求导，

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}v} = \frac{2mv(qBv-A) - mv^2qB}{(qBv-A)^2} = \frac{mv(qBv-2A)}{(qBv-A)^2}.$$

在允许区间 $v > A/(qB)$ 内，导数在 $v = 2A/(qB) = 2v_c$ 前负后正，故曲线在 $v = 2v_c$ 达到同一 $R_{\min}$，两段的单调性给出了图中的两支。

径向式可写为 $R = mv^2/(qBv - A)$，要求 $v > v_c$。在该区间，曲线两端均趋于无穷，最小值处对应唯一速度 $v = 2v_c$。半径大于 $R_{\min}$ 时，水平线与曲线的两支各交一次。全程 $N = mg/\sin\theta > 0$，这些速度都保持接触。

例 3.8 (磁摆不松绳的最大磁场)**.** 长 L 的单摆带正电 q、质量 m，在竖直平面内摆动，最大摆角为 $0<\alpha<\pi/2$。磁场垂直摆动平面，求使往返全过程绳力非负的最大 B。计算 $L=1.2\,\mathrm{m}, m=0.215\,\mathrm{kg}, q=0.867\,\mathrm{C}, \alpha=33.7^\circ, g=10\,\mathrm{m/s^2}$ 时的值。



转折点 $v=0$，最低点速率为 $v_{\max}$

图 3.28: 虚线为两个转折位置，各自与竖直线的夹角为最大摆角 α；实线表示磁力向心半程的一处位置

解　速率和绳力

图 3.28 的磁力不做功，故 $v^2=2gL(\cos\theta-\cos\alpha)$。在磁力向心的半次摆动中，绳力最小；其径向方程是 $T+qvB-mg\cos\theta=mv^2/L$。令 $c=\cos\alpha$，用 $\cos\theta=c+v^2/(2gL)$ 消去角度，得到 $T=3mv^2/(2L)-qBv+mgc$。

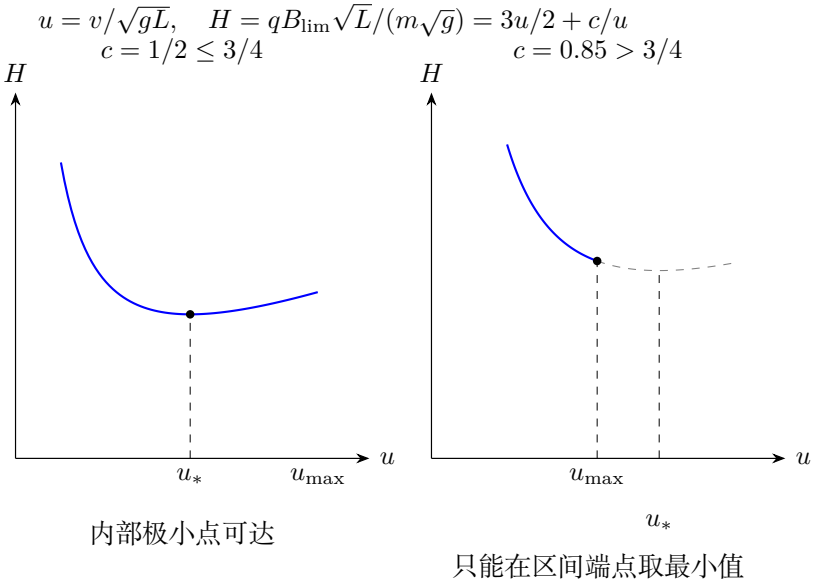


图 3.29: 蓝线给出可达速率区间内的场强上限

允许的磁场

图 3.29 用 $u=v/\sqrt{gL}$ 表示横轴上的速率位置，蓝色实线只保留可达部分。实际速度只在 $0\le v\le v_{\max}=\sqrt{2gL(1-c)}$ 内。对 $v>0$，$T\ge 0$ 等价于

$$B\le \frac{m}{q}\left(\frac{3v}{2L}+\frac{gc}{v}\right).$$

两种临界位置

将上界记为 $B_{\lim}(v)$。求导时 m,q,L,g,c 固定，

$$B'_{\lim}(v)=\frac{m}{q}\left[\frac{3}{2L}+gc(-1)v^{-2}\right]=\frac{m}{q}\left(\frac{3}{2L}-\frac{gc}{v^2}\right).$$

导数由负变正的零点为 $v_*=\sqrt{2gLc/3}$。它可达的条件逐步化为

$$v_*^2\le v_{\max}^2 \iff \frac{2gLc}{3}\le 2gL(1-c) \iff \frac{c}{3}\le 1-c \iff c\le\frac{3}{4}.$$

若可达，由 $v_*^2=2gLc/3$ 得 $gc/v_*=3v_*/(2L)$，所以

$$B_{\lim}(v_*)=\frac{m}{q}\frac{3v_*}{L}=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{6gc}{L}}.$$

若不可达，导数在整个可达区间为负，最小上界位于 $v_{\max}$。代入并通分，

$$\begin{aligned}B_{\lim}(v_{\max})&=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{g}{2L}}\left[3\sqrt{1-c}+\frac{c}{\sqrt{1-c}}\right]\\&=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{g}{2L}}\frac{3(1-c)+c}{\sqrt{1-c}}=\frac{m}{q}\sqrt{\frac{g}{2L}}\frac{3-2c}{\sqrt{1-c}}.\end{aligned}$$

因此

$$B_{\max}=\begin{cases}\dfrac{m}{q}\sqrt{\dfrac{6gc}{L}}, & 0<c\le 3/4,\\[2mm] \dfrac{m}{q}\sqrt{\dfrac{g}{2L}}\dfrac{3-2c}{\sqrt{1-c}}, & 3/4<c<1.\end{cases}$$

代入给定摆角

给定角度的 $c\simeq 0.832>3/4$，应取第二支，得到 $B_{\max}=1.65\,\mathrm{T}$，此时最低点的绳力恰好为零。释放时磁力为零，绳力为 mgc。返回时速度反向，向外的磁力使绳力增大。两式在 $c=3/4$ 处都给出 $(m/q)\sqrt{(9/2)g/L}$。

例 3.9 (斜入射粒子的螺旋参数)**.** 质量 m、电荷 q 的粒子以速率 v、与均匀磁场夹角 β 入射。求回旋半径、周期、有向轴向推进、几何螺距，以及一周期内经过的总路程。

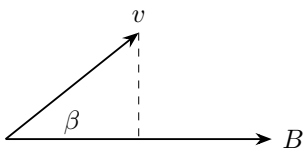


图 3.30: 题设：斜入射粒子的螺旋参数

解　平行与垂直分量

图 3.30 的初速度分量为 $v_\parallel = v\cos\beta$、$v_\perp = v\sin\beta$。磁力不含平行分量，平行运动匀速；垂直平面满足 $mv_\perp^2/r = |q|v_\perp B$，故 $r = mv\sin\beta/(|q|B)$。

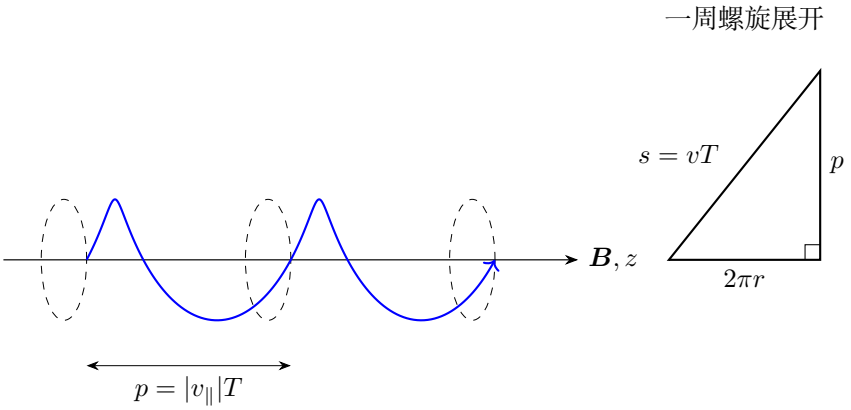


图 3.31: 展开一周螺线，直角三角形的横边为圆周长 $2\pi r$，竖边为螺距 p，斜边为一周路程 s

一周的推进和路程

由图 3.31 一周横向角度 2π，周期 $T = 2\pi m/(|q|B)$，沿 $+\boldsymbol{B}$ 的有向轴向推进为 $p_z = v\cos\beta\, T$，若螺距表示长度，则 $p = |p_z| = |v\cos\beta|T$。总路程为 $s = vT$。展开图的横边是 $v\sin\beta\, T = 2\pi r$，竖边是 p，故 $s^2 = (2\pi r)^2 + p^2$。

平行入射

当 $\beta = 0$ 或 π 时横向圆退化，运动是一条直线；这时形式上的回旋周期只是相关动力学尺度，粒子并没有实际绕轴转一圈。

例 3.10 (磁聚焦与近轴条件)**.** 同种粒子从磁场轴上的同一点发射，总速率均为 v，与均匀轴向场 B 的小夹角为 β。求经过一周回旋后的轴向位置，并写出相对近轴焦距的最低阶偏差。

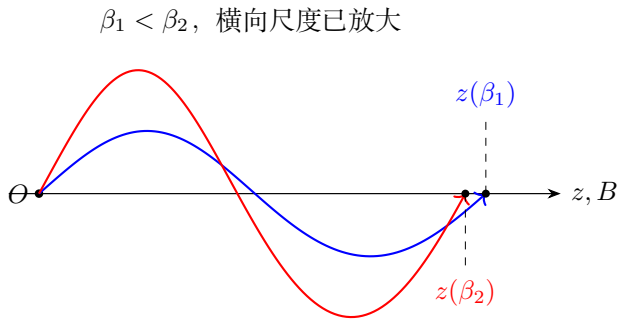


图 3.32: 共同起点、共同总速率的两条空间轨迹投影；较大入射角的粒子一周后回到较近的轴向位置

解　回到轴线的位置

图 3.32 不同入射角的粒子回旋周期同为 $T = 2\pi m/(|q|B)$，因此一周期后都回到初始横向位置。轴向速度却为 $v\cos\beta$，精确回到轴线的位置是 $z(\beta) = vT\cos\beta$。

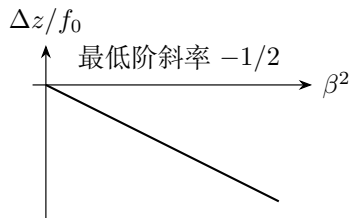


图 3.33: 解答过程：磁聚焦与近轴条件

近轴焦距

图 3.33 的近轴焦距 $f_0 = vT$ 采用了 $\cos\beta \simeq 1$。令 $F(\beta) = \cos\beta$，则

$$F' = -\sin\beta, \qquad F'' = -\cos\beta, \qquad F''' = \sin\beta.$$

在零点的函数值和前三阶导数分别为 $1, 0, -1, 0$，所以泰勒展开为

$$F(\beta) = 1 + 0\beta - \frac{\beta^2}{2!} + 0\beta^3 + O(\beta^4).$$

从 $z = f_0 F(\beta)$ 中减去 f_0，得 $\Delta z = -f_0\beta^2/2 + O(\beta^4)$，$\beta$ 较大的粒子在同一时刻 T 回到轴线上更靠近起点的位置。若粒子从静止经电压 U 加速，$v = \sqrt{2|q|U/m}$，则 $f_0 = 2\pi\sqrt{2mU/|q|}/B$。小角度下轴向焦距的差异以 β^2 开始。

例 3.11 (回旋加速器的能量与尺寸)**.** 理想回旋加速器磁场为 B，粒子质量 m、正电荷 q，D 形盒最大半径 R。每次过缝电压差使动能增加 qU，缝内时间忽略。求同步频率、最大动能，以及从很小初能起约需转动的圈数。

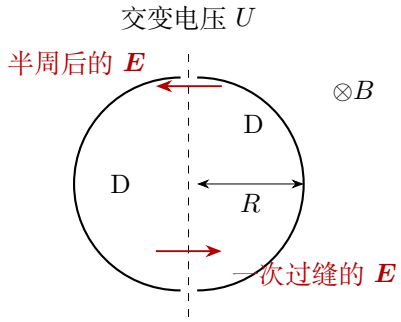


图 3.34: 题设：回旋加速器的能量与尺寸

解　换向频率与最大动能

图 3.34 磁场内周期 $T = 2\pi m/(qB)$ 不随半径改变，电压应每半个回旋周期反向一次，完整交流周期取 T，频率 $f = qB/(2\pi m)$。最大轨道满足 $R = mv_{\max}/(qB)$，故

$$K_{\max} = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBR}{m}\right)^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}.$$

$$K_n = K_0 + n_{\text{gap}}qU, \quad n_{\text{gap}} \simeq 2N_{\text{turn}}$$

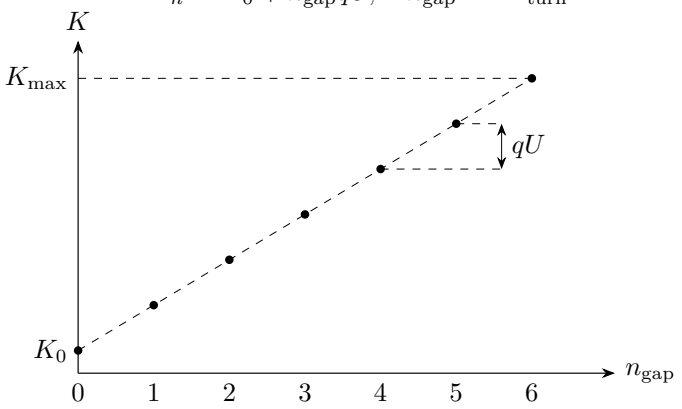


图 3.35: 能量只在跨缝时增加，按跨缝次数计数后再换算完整圈数

转动圈数

按图 3.35 每圈跨缝两次，增加能量 $2qU$，所以所需圈数约 $N = K_{\max}/(2qU)$；实际提取会按跨缝次数取相应整数并保留初能。粒子获得的能量来自电场，磁场只保持弯转。该同步条件要求非相对论近似及缝内时间可忽略；当高速引起回旋周期显著变化时，恒定频率电压不再自动同步。

例 3.12 (加速电压后的磁分析)**.** 同为正电荷 q 的粒子从静止经电势差 U 加速，再垂直进入匀强场 B，经半周落在与入口同一条分界线的探测器。求入口至落点距离 D 与质量的关系，并估算微小质量差造成的落点差。

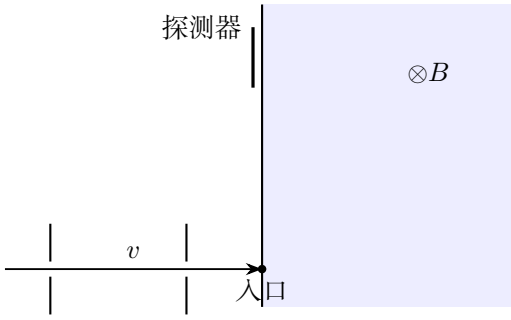
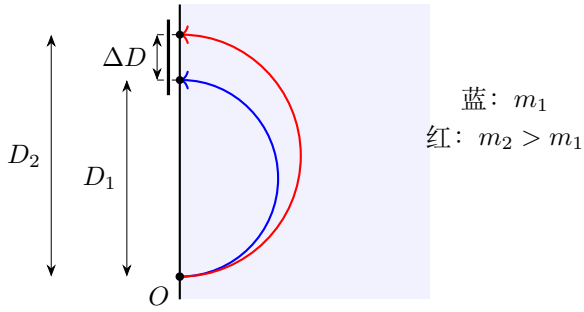


图 3.36: 经同一电势差加速后进入磁区，入口与探测器位于同一条分界线

解　加速与偏转

图 3.36 的加速过程先给 $\frac{1}{2}mv^2 = qU$，所以 $v = \sqrt{2qU/m}$。磁区半径 $r = mv/(qB) = \sqrt{2mU/q}/B$，半周落点距入口 $D = 2r$。



$D \propto \sqrt{m}$，各粒子的加速电压相同

图 3.37: 相同电压与电荷量下，较重粒子的半周轨道半径较大，落点更远

落点对质量的变化

由图 3.37，$D=(2/B)\sqrt{2mU/q}$，平方后 $m=qB^2D^2/(8U)$。对固定 q,B,U，把 $D=A\sqrt{m}$ 中的常量记为 $A=(2/B)\sqrt{2U/q}$，则 $\mathrm{d}D/\,\mathrm{d}m=A(1/2)m^{-1/2}$。一阶增量为 $\Delta D\simeq A\Delta m/(2\sqrt{m})$，再除以 $D=A\sqrt{m}$，得 $\Delta D/D\simeq\Delta m/(2m)$。若探测器能分辨间距 δD，可分辨的相对质量差量级为 $2\delta D/D$。这个平方根关系使用了共同加速电压；若先选择共同速率，半径与质量直接成正比。

例 3.13 (同一落点附近的不同飞行时间)**.** 两个质量均为 m、电荷均为 $q>0$ 的粒子从 O 以相同速率进入 $x>0$ 的匀强磁场，磁场垂直纸面向里。两粒子的入射方向与 $+x$ 的夹角分别为 $+\alpha$、$-\alpha$，$0<\alpha<\pi/2$。求首次返回 $x=0$ 的位置与时间差，说明小角度下的聚焦性质。

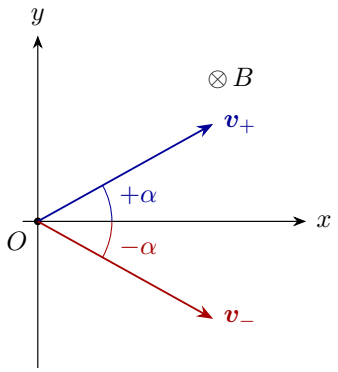
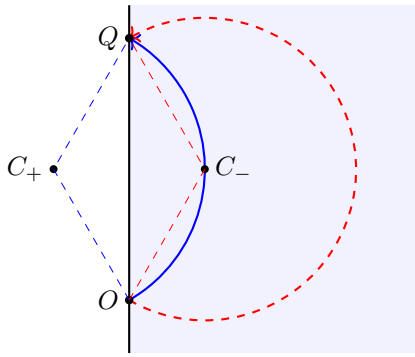


图 3.38: 入射角从 $+x$ 方向量起，上方为正

解　两条轨迹的出口

按图 3.38 的转向，速度逆时针旋转。对入射角 β，圆心相对入点的矢量为 $r(-\sin\beta,\cos\beta)$。将 $x=0$ 代入圆方程，除入点外的交点为 $y=2r\cos\beta$，因此两粒子在相同的 $Q=(0,2r\cos\alpha)$ 返回。



图示 $\alpha = \pi/6$，两圆半径相同

图 3.39: 两轨道共用入点和出点，但圆心位于界面两侧，实际逆时针转角不同

飞行时间

图 3.39 实线对应 $+\alpha$ 粒子，其初始半径方向角为 $\alpha - \pi/2$。出点相对圆心为 $(r\sin\alpha, r\cos\alpha)$，方位角为 $\pi/2-\alpha$；两者相减，实际逆时针转角为 $\pi-2\alpha$。另一粒子把 α 换成 $-\alpha$，所以 $t_+ = (\pi-2\alpha)/\Omega$，$t_- = (\pi+2\alpha)/\Omega$，时间差 $t_- - t_+ = 4\alpha/\Omega$。两粒子的落点相同，飞行时间却不同；相对中心入射束，落点误差 $2r(1-\cos\alpha) \simeq r\alpha^2$ 为二阶，而时间差是一阶量。

速率变化时的落点

若两粒子存在微小速率差，两半径不再相同，落点也不会完全重合。因 $y_Q = 2r\cos\alpha$，固定角度下有 $\Delta y_Q/y_Q = \Delta v/v$，故落点随速率的一阶变化而移动。

例 3.14 (完整竖直圆周运动的临界磁场)**.** 质量 m、正电荷 q 的小球由长 L 的轻绳连接固定点，在竖直面内沿使磁力指向圆心的方向运动。匀强磁场垂直运动平面。底部速率满足 $v_b^2 = 8gL$，求保持完整圆周且绳始终不松弛的最大磁场。

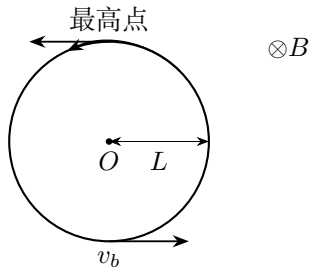


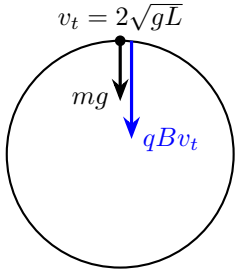
图 3.40: 题设：完整竖直圆周运动的临界磁场

解　顶点速率与绳力

由图 3.40 底部到最高点的高度差 $2L$，能量守恒给 $v_t^2 = 8gL - 4gL = 4gL$，故 $v_t = 2\sqrt{gL}$。任意位置距最低点的转角为 φ，能量与径向方程分别为 $v^2 = v_b^2 - 2gL(1-\cos\varphi)$、$T + qBv - mg\cos\varphi = mv^2/L$。先用能量关系求 $\cos\varphi$，再代入径向式，并使用 $v_b^2 = 8gL$，得到

$$T = \frac{3mv^2}{2L} - qBv + mg - \frac{mv_b^2}{2L} = \frac{3mv^2}{2L} - qBv - 3mg.$$

图 3.41 右图取 $u = v/\sqrt{gL}$、$H = qB_{\lim}\sqrt{L}/(m\sqrt{g})$，只保留完整圆周中实际可达的速率区间。



临界：$T_t = 0$

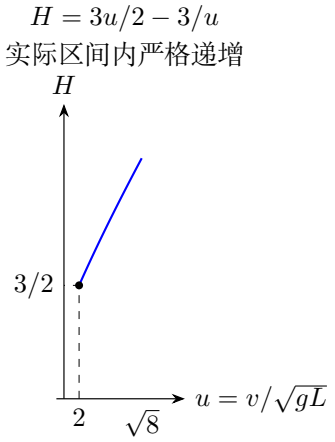


图 3.41: 顶点受力给候选限制，再用全程可达区间中的单调性确定它最严格

临界磁场

图 3.41 实际区间为 $2\sqrt{gL} \le v \le \sqrt{8gL}$。要求 $T \ge 0$ 等价于 $B \le [m(3v/(2L) - 3g/v)]/q$。把右侧记为 $B_{\lim}(v)$，固定其余参数逐项求导，

$$B'_{\lim}(v) = \frac{m}{q}\left[\frac{3}{2L} - 3g(-1)v^{-2}\right] = \frac{m}{q}\left(\frac{3}{2L} + \frac{3g}{v^2}\right) > 0.$$

故最小上界在速率最小的最高点。代入最高点速率，

$$B_{\max} = \frac{m}{q}\left(3\sqrt{g/L} - \frac{3}{2}\sqrt{g/L}\right) = \frac{3m}{2q}\sqrt{g/L}.$$

临界时的绳力

临界时顶点拉力为零，其余位置因上界严格更大而拉力为正。若场继续增大，小球会在达到最高点之前出现绳松弛，随后小球离开定半径轨道。

磁力向心这一条件沿完整圆周保持：粒子始终按同一转向运行，速度切线与垂直平面的磁场叉乘始终朝圆心。若把磁场反向，磁力改为离心，拉力反而增大，本题所求的最大场不再由同一个松绳条件给出。

3.12 本讲小结

磁力与速度垂直。平行场的速度分量保持不变，垂直分量决定回旋半径。螺距由平行速度和回旋周期相乘得到。回旋加速器在磁场内转向，在两盒间用电场增加动能。

有限磁区中的圆心在入射速度的法线上。用连续增加的圆心角排列轨道与各边线的交点，并由实际经过的角度求时间。过分界线时速度连续，进入另一磁区后按新的磁力确定圆心。

最小磁区要同时容纳整段轨迹并允许所需的入射与出射。带绳或受支持的小球仍由能量关系求速率，再沿法线求约束力，在实际经过的速率区间寻找临界值。

3.13 练习

练习 3.1 (异号粒子再次相遇)**.** 两粒子从原点以相同速度 $v\boldsymbol{e}_x$ 同时出发，电量分别为 $+q,-q$，质量分别为 $m,2m$，空间中均匀磁场向纸外。忽略相互作用，求除初态外最早相遇的时间。

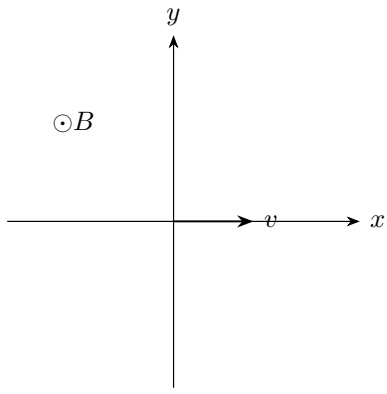


图 3.42: 题设：异号粒子再次相遇

练习 3.2 (圆弧的最小覆盖圆盘)**.** 场内轨道半径为 r，需要圆形区域几何覆盖一段转角 $0 < \delta \le 2\pi$ 的圆弧，允许圆弧落在圆盘分界线上。求最小覆盖圆盘半径，区分 $\delta \le \pi$ 与 $\delta \ge \pi$。圆盘包含圆周上的点。

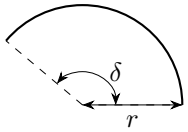


图 3.43: 题设：圆弧的最小覆盖圆盘

练习 3.3 (有限条形场的斜入射)**.** 正粒子从原点进入 $0 < x < d$ 的向纸内磁场，初速度与 $+x$ 夹角 $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$。速率为 v，回旋半径 r。求穿出右侧分界线的条件与首次穿出时刻；若不穿出，求返回左侧分界线的时刻。轨道与右侧分界线相切时取场内轨迹的极限。

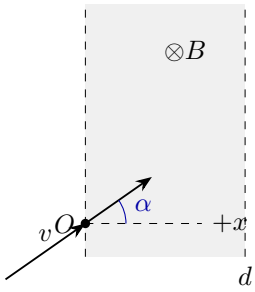


图 3.44: 题设：有限条形场的斜入射

练习 3.4 (由两条切线反求磁场)**.** 正粒子以速率 v 从 $P = (0, 0)$ 沿 $+x$ 进入匀强磁区，首次从 $Q = (a, a)$ 沿 $+y$ 离开。已知仅经过小于半周的一段弧，求磁场方向、大小及在场时间。

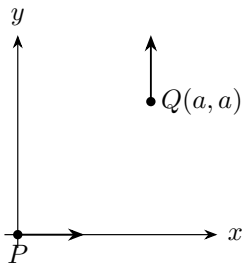


图 3.45: 题设：由两条切线反求磁场

练习 3.5 (圆锥上的两种允许速度)**.** 球在尖顶向上的圆锥外表面运动，条件与前述圆锥例题相同。给定 $R > R_{\min}$，求两个允许速度，并比较它们的和、积及临界合并情形。

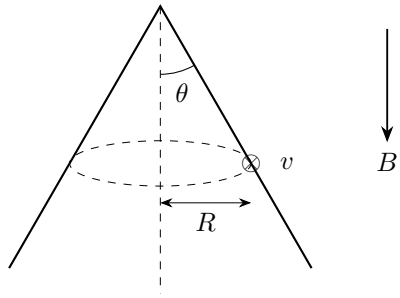
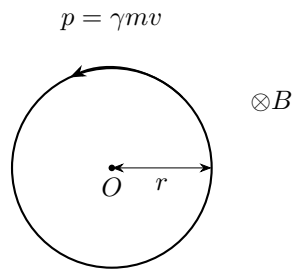


图 3.46: 沿用尖顶向上圆锥的外表面与向下磁场，支持力方向及转向均保持不变

练习 3.6 (非相对论周期的适用精度)**.** 粒子质量 m、电荷大小 q，其动量满足 $p = \gamma mv, \gamma = (1-v^2/c_0^2)^{-1/2}$。在垂直匀强磁场中求周期；若动能为 $K = (\gamma-1)mc_0^2$，以非相对论周期 T_0 为基准，将 $(T - T_0)/T_0$ 用 K 表示。



图示正电荷，周期只取电荷大小

图 3.47: 题设：非相对论周期的适用精度

练习 3.7 (任意两侧磁场的界面漂移)**.** 界面 $x=0$ 右侧磁场 B_1、左侧 B_2，均向纸内。质量 m、正电荷 q 的粒子从界面沿 $+x$ 进入右区，速率恒为 v。求完整往返的界面位移、时间及平均速度，并说明两场相等时的结果。

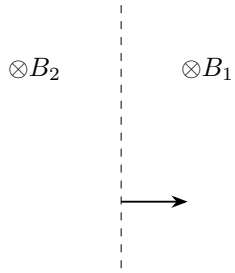


图 3.48: 题设：任意两侧磁场的界面漂移

练习 3.8 (宽角粒子束的最大穿透尺度)**.** 正粒子均从同一点进入 $x>0$ 的向纸内匀强场，速率都为 v，初始方向角可取 $-\pi/2<\alpha<\pi/2$。求所有轨道的右向最大穿透深度的上确界，并说明能否由严格入射的一条轨道达到。

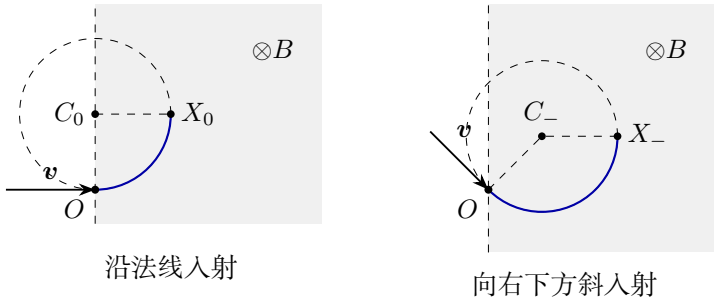


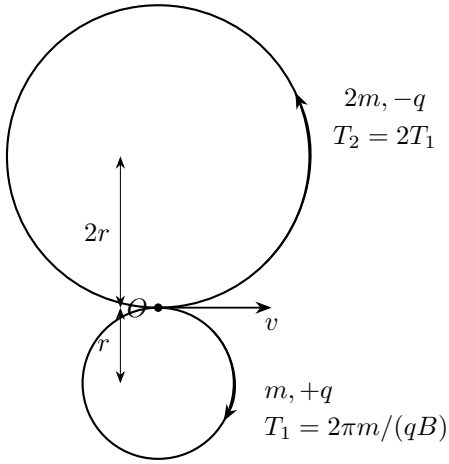
图 3.49: 粒子以不同方向从 O 射入纸内磁场。C 是相应圆心，X 是该圆弧的最右点

练习解答

练习 3.1

解　两轨道的交点

图 3.42 中正粒子圆心在原点下方，半径 $r=mv/(qB)$，负粒子圆心在上方，半径为 $2r$。两个圆心距为 $3r$，恰等于两半径之和，因此两轨道只在原点外切，不可能在别处相遇。



最早共同返回：$t = T_2$，下圆两周、上圆一周

图 3.50: 两轨道在原点外切，相遇只能发生在共同回到切点的时刻；半径按真实质量比作图

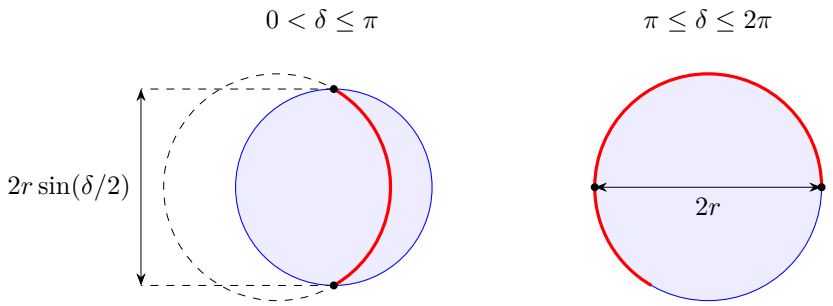
共同回到原点

图 3.50 中相遇发生在两粒子共同回到原点时。两周期分别是 $T_1 = 2\pi m/(qB)$、$T_2 = 4\pi m/(qB) = 2T_1$。共同回到原点的最早正时刻是 T_2，此时第一粒子转两周，第二粒子转一周。

练习 3.2

解　短弧的最小覆盖圆

图 3.43 在 $\delta \le \pi$ 时弦长为 $2r\sin(\delta/2)$，任一覆盖圆盘半径至少为 $r\sin(\delta/2)$。取弦中点作圆心，弧点到中点的距离平方为 $r^2 + r^2\cos^2(\delta/2) - 2r^2\cos(\delta/2)\cos\psi$。在 $|\psi| \le \delta/2$ 内，它不超过 $r^2\sin^2(\delta/2)$，故这个下界可达。



蓝色为覆盖圆盘，红色为所需圆弧；允许圆弧在分界线上

图 3.51: 短弧用两端点定最小覆盖圆，长弧用弧内的一对对径点

半周和长弧

若图 3.51 的圆弧达到或超过半周，弧内存在一对相距 $2r$ 的对径点，所以覆盖半径至少 r；用原轨道圆盘即可达到。因此 $a_{\min} = r\sin(\delta/2)$ 对 $0 < \delta \le \pi$ 成立，而 $\pi \le \delta \le 2\pi$ 时 $a_{\min} = r$。在两支的连接点结果连续。

练习 3.3

解　圆心与最大穿透深度

图 3.44 圆心为 $(-r\sin\alpha, r\cos\alpha)$。速度角随时间增加为 $\beta = \alpha + \Omega t$，速度分量为 $v\cos(\alpha+\Omega t), v\sin(\alpha+\Omega t)$。令 $\psi = \alpha + \Omega s$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}\psi/\Omega$，上下限从 $0, t$ 变为 α, β，从而

$$x = \frac{v}{\Omega}\int_\alpha^\beta \cos\psi\,\mathrm{d}\psi = r[\sin\psi]_\alpha^\beta = r(\sin\beta - \sin\alpha),$$

$$y = \frac{v}{\Omega}\int_\alpha^\beta \sin\psi\,\mathrm{d}\psi = r[-\cos\psi]_\alpha^\beta = r(\cos\alpha - \cos\beta).$$

向右最远点在 $\beta = \pi/2$，最大横坐标 $x_{\max} = r(1-\sin\alpha)$。

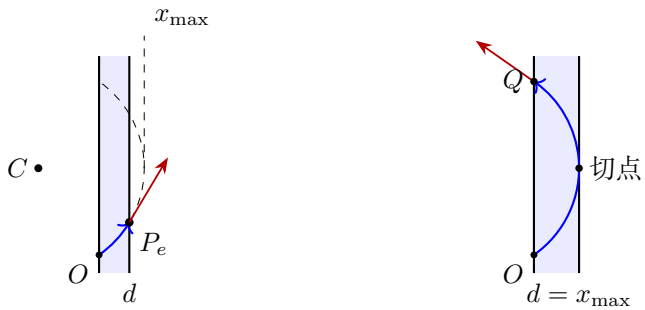


图 3.52: 左图在最右点以前出射，右图在最右点相切后继续沿原圆弧

从右侧穿出

图 3.52 左图中，$d < x_{\max}$，圆弧先与右侧分界线相交，速度的横向分量指向外侧。首次穿出角为 $\beta_e = \arcsin(\sin\alpha + d/r)$，选在 $[\alpha, \pi/2)$ 内，时间 $t_e = (\beta_e - \alpha)/\Omega$。

从左侧返回

若 $d \geq x_{\max}$，右侧分界线不可穿出；再次回到 $x = 0$ 的非初始角满足 $\beta = \pi - \alpha$，故 $t = (\pi - 2\alpha)/\Omega$，回到 $y = 2r\cos\alpha$。右图的等号情形沿场内圆弧经过切点，随后在 Q 离开。

练习 3.4

解　两条法线的交点

由图 3.45 入射切线水平，圆心在过 P 的竖直线上；出射切线竖直，圆心在过 Q 的水平线上。两条法线交于 $C = (0, a)$，因此两端到圆心的距离都为 a，轨道半径 $r = a$。

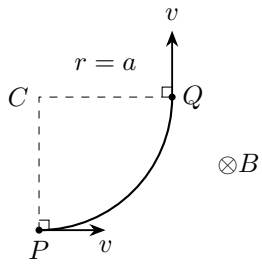


图 3.53: 解答过程：由两条切线反求磁场

磁场与飞行时间

图 3.53 从 P 向 Q 的小圆弧是逆时针四分之一圆，正电荷初始受力向上，故磁场向纸内。由 $qvB = mv^2/a$ 得 $B = mv/(qa)$，时间为弧长除以速率，$t = (\pi a/2)/v$，也等于 $\pi/(2\Omega)$。粒子在四分之一周处第一次到达 Q。

练习 3.5

解 径向方程的两个根

图 3.46 竖直支持平衡给出 $N\sin\theta = mg$，磁力向心，径向式为 $qBv - mg\cot\theta = mv^2/R$。乘以 R 并移项，再除以 $m > 0$ 配方，

$$mv^2 - qBRv + mgR\cot\theta = 0,$$

$$\left(v - \frac{qBR}{2m}\right)^2 = \frac{q^2B^2R^2}{4m^2} - gR\cot\theta.$$

右端非负时取正负平方根，得到

$$v_\pm = \frac{qBR \pm \sqrt{q^2B^2R^2 - 4m^2gR\cot\theta}}{2m}.$$

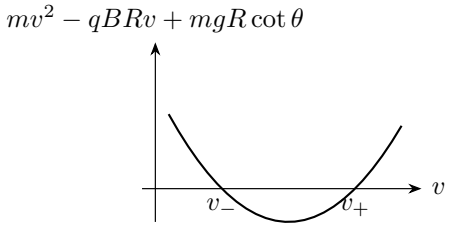


图 3.54: 解答过程：圆锥上的两种允许速度

临界半径与速度

图 3.54 中 $R > R_{\min}$ 时根号为正，且根的和为 $qBR/m > 0$、积为 $gR\cot\theta > 0$，所以两根都为正，均对应同一转向的不同速率。当 $R \downarrow R_{\min}$，两根合并于 $qBR_{\min}/(2m)$，正是所需向心力与实际径向合力相符的临界状态。

练习 3.6

解 动量与回旋周期

图 3.47 中磁力始终垂直动量，速率与 γ 不变，动量方向作匀速转动。径向方程是 $qvB = pv/r$，故 $r = p/(qB) = \gamma mv/(qB)$。用一周弧长除以速率得 $T = 2\pi r/v = 2\pi\gamma m/(qB)$。

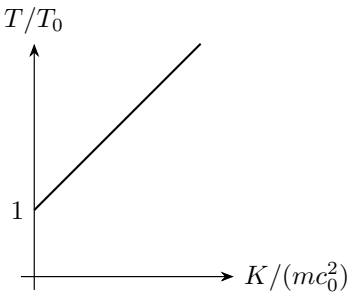


图 3.55: 解答过程：非相对论周期的适用精度

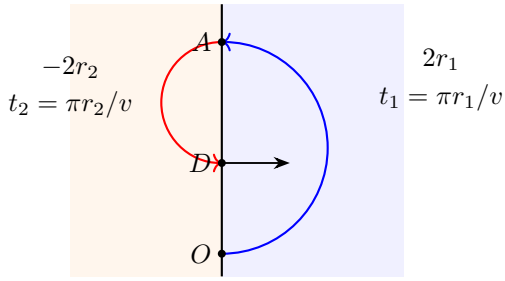
周期偏差

图 3.55 以 $T_0 = 2\pi m/(qB)$ 为非相对论近似值，则 $(T - T_0)/T_0 = \gamma - 1 = K/(mc_0^2)$。若以 T_0 为分母要求周期的相对偏差不超过 1%，在上述理想条件下恰有 $K/(mc_0^2) \le 0.01$。

练习 3.7

解　两个半圆的位移和时间

图 3.48 中每侧的路径都是半圆，半径 $r_1 = mv/(qB_1)$、$r_2 = mv/(qB_2)$。右半圆使界面坐标增加 $2r_1$，左半圆使其减少 $2r_2$，故 $\Delta y = 2(r_1 - r_2)$；耗时分别是 $\pi r_1/v$ 与 $\pi r_2/v$。



$$\Delta y = 2(r_1 - r_2), \quad \Delta t = \pi(r_1 + r_2)/v$$

图 3.56: 每个完整往返由两区各半周组成，速率相同而界面有向位移相反；图示 $r_1 > r_2$

平均速度

按图 3.56，完整往返时间为 $\Delta t = \pi(r_1 + r_2)/v$。以净位移除以总时间，得到 $\bar{v}_y = 2v(r_1 - r_2)/[\pi(r_1 + r_2)] = 2v(B_2 - B_1)/[\pi(B_1 + B_2)]$。当两场相等时位移抵消、平均速度为零，轨道成为完整圆；当某侧场较弱时，其半径较大，净位移沿该侧半圆的界面推进方向。该平均速度只适用于完整往返。

练习 3.8

解　各条轨道的最右点

图 3.49 示意水平入射及一个斜向下入射的圆心与最右点。每条轨道的半径相同，$r = mv/(qB)$，但圆心 $C = (-r\sin\alpha, r\cos\alpha)$ 随入射角改变。圆周最右点到分界线的距离为 $x_{\max} = -r\sin\alpha + r = r(1 - \sin\alpha)$。

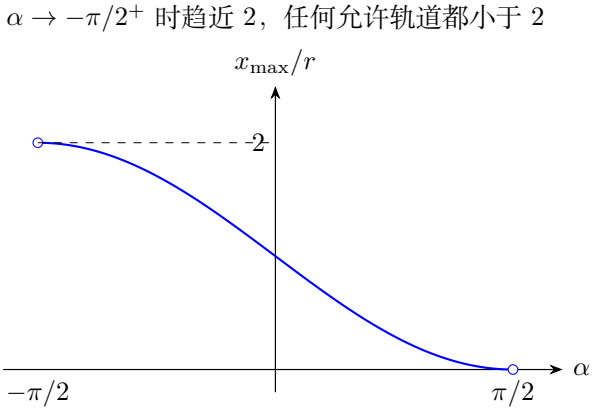


图 3.57: 穿透深度随入射角单调变化；开圆点表示两个分界线角不属于允许入射集合

穿透深度的上限

图 3.57 中 r 固定，对入射角求导得

$$\frac{\mathrm{d}x_{\max}}{\mathrm{d}\alpha} = r\left(0 - \frac{\mathrm{d}\sin\alpha}{\mathrm{d}\alpha}\right) = -r\cos\alpha < 0 \qquad (-\pi/2 < \alpha < \pi/2).$$

所以穿透深度随入射角严格减小，在 $\alpha \to -\pi/2^+$ 时趋向 $r[1 - (-1)] = 2r$，故 $2r$ 是上确界。允许入射的每一条轨道都满足 $v_x = v\cos\alpha > 0$，因此实际穿透深度严格小于 $2r$。

静磁

物理竞赛一轮讲义

第四讲

复合场、霍尔效应与磁约束

2026

目录

第四讲　复合场、霍尔效应与磁约束 **1**

4.1　电场力与磁力同时作用 1

4.2　平行场中的回旋与轴向加速 1

4.3　相互垂直的电、磁场与漂移 2

4.4　任意恒力与磁场中的漂移 4

4.5　霍尔电压与载流子的电荷符号 4

4.6　轨道电子与外场建立后的比较 6

4.7　超导体的屏蔽电流 7

4.8　缓变场中的回旋磁矩 8

4.9　缓变磁场中的磁镜约束 9

4.10 临界反射与到达时间 12

4.11 例题与分析 14

4.12 本讲小结 34

4.13 练习 34

练习解答 38

第四讲　复合场、霍尔效应与磁约束

4.1　电场力与磁力同时作用

上一讲的磁场使速度转向。加上电场，粒子还会沿电场力方向加速或减速。在同一坐标系中，电荷量 q 取有向值，运动方程为

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}. \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{c}}$ 表示绳力或支持力。点乘 $\boldsymbol{v}$ 后，磁力项消失。静电场中，若约束力也不做功，则 $K + q\varphi + mgh$ 保持恒定。求速度大小可先用能量关系，求方向和落点再写分量方程。平行场和垂直场的分解如下。

4.2　平行场中的回旋与轴向加速

均匀电场与磁场都沿同一轴时，横向仍作匀速圆周运动，轴向则按恒定电场力加速。图 4.1 左图从轴端看横向轨迹，右图展示相同回旋时间内的轴向推进。若重力也沿轴，只需把它的有向分量加到轴向加速度。

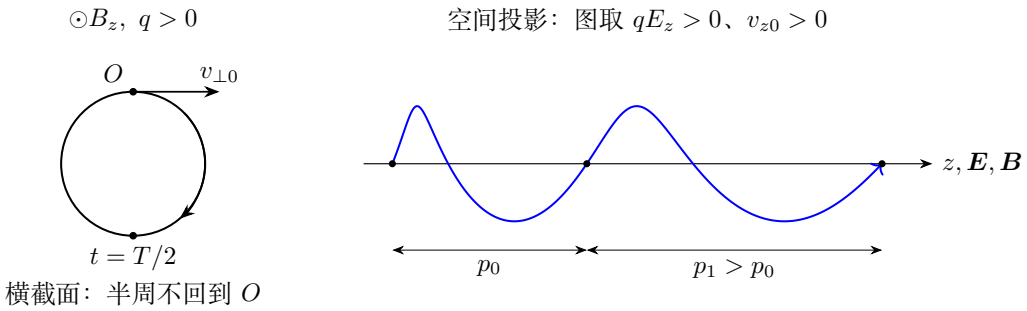


图 4.1: 平行场中横向回旋周期不变，轴向加速使相邻两周的推进距离不同

图 4.1 左图取正电荷在 $+z$ 磁场中由轴线沿 $+x$ 发射，横向参数为 $x = r\sin\Omega t$、$y = r(\cos\Omega t - 1)$。在半周时虽有 $x = 0$，却有 $y = -2r$；两个横向坐标首次同时回到零发生在 $T = 2\pi/\Omega$。轴向方程 $\dot{v}_z = a_z$ 中 a_z 为常数。由初始位置 $z(0) = 0$，

$$v_z(t) - v_{z0} = \int_0^t a_z\,\mathrm{d}s = a_z t, \qquad z(t) = \int_0^t (v_{z0} + a_z s)\,\mathrm{d}s = [v_{z0}s + a_z s^2/2]_0^t.$$

右图使用同一周期，但代入轴向方程

$$z(t)=v_{z0}t+\tfrac12 a_z t^2,\qquad a_z=qE_z/m+g_z.$$

相邻两次回到轴线的间距为 $p_k=z[(k+1)T]-z(kT)=v_{z0}T+a_zT^2(k+1/2)$。$a_z=0$ 时各周推进相同。若轴向速度反向，p_k 的符号记录该周的净推进方向。

4.3　相互垂直的电、磁场与漂移

先看只受电场力和磁力的粒子。在均匀、恒定且互相垂直的 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 中，定义

$$\boldsymbol{v}_D=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}.$$

用矢量三重积展开，

$$(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{E}B^2=-\boldsymbol{E}B^2.$$

所以 $\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{E}$。令相对速度 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_D$，因为 $\boldsymbol{v}_D$ 为常量，原方程化为 $m\dot{\boldsymbol{u}}=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$。所以在随 $\boldsymbol{v}_D$ 匀速运动的坐标系中，粒子只作匀强磁场回旋；实验室轨迹是匀速漂移与圆周运动的合成。

漂移中心沿 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 移动，方向和速率由场决定。围绕中心的回旋方向和周期由电荷及质量决定，初始速度决定从圆上的哪一点开始转动。沿场若有初速度，再叠加该方向的匀速运动。

举例取 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$，正粒子从静止出发，$\Omega=qB/m$、$v_D=E/B$。分量方程为 $\dot v_x=\Omega(v_y+v_D)$、$\dot v_y=-\Omega v_x$。令 $u_y=v_y+v_D$，则 $\dot v_x=\Omega u_y,\dot u_y=-\Omega v_x$。由于 Ω 为常量，$\ddot v_x=\Omega\dot u_y=-\Omega^2 v_x$。试取 $v_x=e^{st}$，则 $\dot v_x=se^{st}$、$\ddot v_x=s^2e^{st}$，代回得 $(s^2+\Omega^2)e^{st}=0$。特征根 $s=\pm\mathrm{i}\Omega$ 给出实通解及其导数

$$v_x=A\cos\Omega t+D\sin\Omega t,\qquad \dot v_x=-A\Omega\sin\Omega t+D\Omega\cos\Omega t.$$

初态 $v_x(0)=0$ 给 $A=0$，$\dot v_x(0)=\Omega v_D$ 给 $D\Omega=\Omega v_D$，即 $D=v_D$，再由 $u_y=\dot v_x/\Omega$ 求出 v_y。对速度从 0 积到 t，

$$x=v_D\int_0^t\sin\Omega s\,\mathrm{d}s=v_D[-\cos\Omega s/\Omega]_0^t,$$
$$y=v_D\int_0^t(\cos\Omega s-1)\,\mathrm{d}s=v_D[\sin\Omega s/\Omega-s]_0^t.$$

原函数中的 $1/\Omega$ 正好抵消三角函数求导带来的 Ω。于是

$$v_x=v_D\sin\Omega t,\quad v_y=v_D(\cos\Omega t-1),\quad x=\frac{v_D}{\Omega}(1-\cos\Omega t),\quad y=\frac{v_D}{\Omega}\sin\Omega t-v_Dt.$$

速度经过一周回到零，位置却沿 $-y$ 推进 $v_D T$。电场在半周内先增加动能，随后又收回；整周净电功为零，因为粒子的净位移与电场垂直。

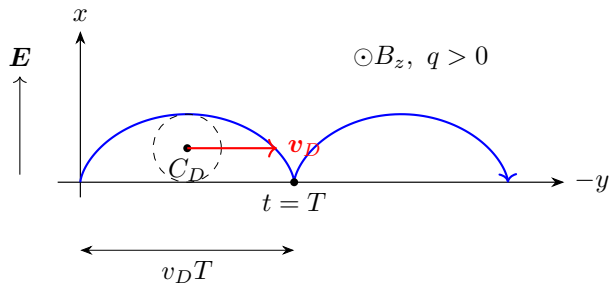


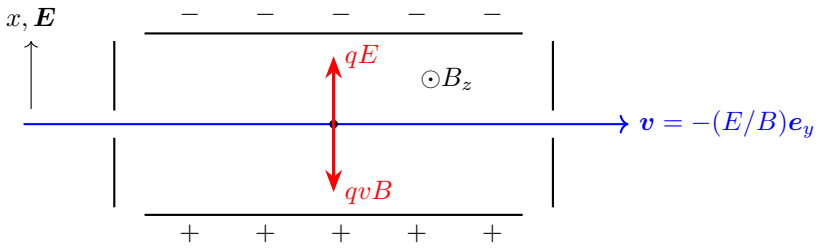
图 4.2: 实验室轨迹是旋轮线，灰色辅助圆表示某时刻漂移中心周围的相对回旋

图 4.2 中，灰色圆的中心随时间沿 $-y$ 运动，蓝色曲线是粒子在实验室中的轨迹。经过一周，粒子相对中心回到起点，净位移正好是中心移过的 $v_D T$。例 4.4 改变电荷符号和坐标方向，例 4.12 保留任意初速度。

在例 4.4 中，电子初速度与漂移速度有差别。把漂移速度从初速度中减去，便得到决定回旋大小和初相位的那部分速度，再把回旋运动叠加到匀速平移上。

4.3.1 速度选择器

让一束粒子从狭缝射入相互垂直的均匀电场和磁场。图 4.3 中，电场朝上，入射束沿 $-y$。速度为 E/B 时，正电荷的电力向上，磁力向下，两力始终平衡，粒子沿直线通过出口。负电荷的两力同时反向，仍在同一直线上通过。沿场的速度分量在叉积中为零，选择器限制的是垂直于场的分量。



图取 $q > 0$，只有与场方向相容的入射速度才无偏转

图 4.3: 在同一组坐标下，选定速度沿 $-y$，电力向上、磁力向下，出口狭缝保留直线束

速率偏离 E/B 时，初始合力使粒子偏转，出口狭缝截去偏离直线的粒子。例 4.9 把通过狭缝的粒子送入只有磁场的区域，再用半周落点分辨质量。

4.4　任意恒力与磁场中的漂移

电场漂移的推导可以推广到任意与速度无关的恒力。设磁场均匀，另有恒力 $\boldsymbol{F}_0$，把它分成沿场和垂直场的两部分。垂直平面内寻找一个恒定速度 $\boldsymbol{v}_D$，使 $\boldsymbol{F}_{0\perp}+q\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B}=0$。两边与 $\boldsymbol{B}$ 叉乘，并用 $\boldsymbol{v}_D\perp\boldsymbol{B}$，得到

$$\boldsymbol{v}_D=\frac{\boldsymbol{F}_0\times\boldsymbol{B}}{qB^2}.$$

写成 $\boldsymbol{v}_\perp=\boldsymbol{v}_D+\boldsymbol{u}$ 后，剩余速度满足 $m\dot{\boldsymbol{u}}=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，故相对漂移中心仍为匀速圆周。平行方向则满足 $m\dot{v}_\parallel=F_{0\parallel}$，一般为匀加速，不受上述漂移抵消。

若恒力是电场力 $q\boldsymbol{E}$，q 约去，正负粒子的电场漂移方向相同。若恒力是重力 $m\boldsymbol{g}$，漂移速度与 m/q 成比例，正负电荷方向相反。两者形式相似，但电荷依赖性不同；同时存在时应先把各恒力相加，或按线性关系将各漂移相加。

若恒力垂直于场，一周的位移只来自漂移，且与恒力垂直，因此这一周的净功为零。周内粒子还有回旋位移，恒力可在不同阶段作正功和负功，动能随时间改变。

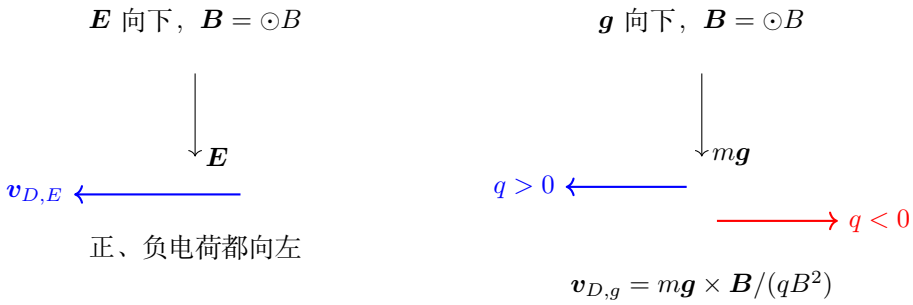


图 4.4: 电场力随电荷变号，重力却不变，因此两种恒力漂移具有不同的电荷依赖

图 4.4 分别取电场 $\boldsymbol{E}$ 向下和重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 向下。电场力 $q\boldsymbol{E}$ 随电荷变号，代入恒力漂移式后 q 约去，正、负电荷的电场漂移同向。重力 $m\boldsymbol{g}$ 与电荷符号无关，漂移速度含 $1/q$，正、负电荷因此向两侧分开。

4.5　霍尔电压与载流子的电荷符号

让长条导体通电，再加上垂直于电流的磁场。载流子受磁力偏向一侧，在两个侧面之间形成电势差。侧面开路时，电荷积累到横向电场力恰好平衡磁力，

$$q_c(\boldsymbol{E}_H+\boldsymbol{v}_d\times\boldsymbol{B})=0,\qquad \boldsymbol{E}_H=-\boldsymbol{v}_d\times\boldsymbol{B}.$$

q_c 是载流子的有向电荷。由 $\boldsymbol{J} = nq_c\boldsymbol{v}_d$，得

$$\boldsymbol{E}_H = \frac{\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{J}}{nq_c}.$$

按 $\boldsymbol{E}_H = R_H(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{J})$ 定义霍尔系数，单载流子模型中 $R_H = 1/(nq_c)$。

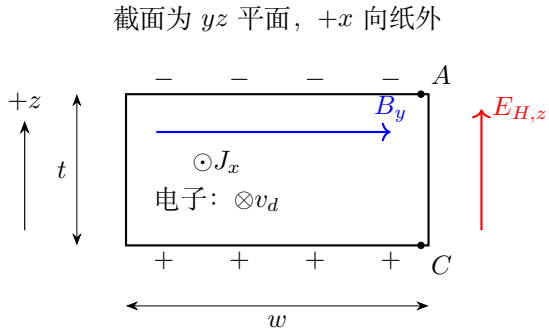


图 4.5: 沿电流轴观察的横截面：w 与磁场平行，t 沿测量电压的方向

图 4.5 沿电流轴观察截面。电流沿 $+x$，磁场沿 $+y$，宽度 w 与场平行，厚度 t 沿测量方向 z。漂移速度 $v_{d,x} = I/(nq_c wt)$，故 $E_{H,z} = -IB/(nq_c wt)$。上触点为 A，下触点为 C。沿图中的 $+z$ 从 C 积到 A，读数为

$$U_H = V_A - V_C = V(t/2) - V(-t/2) = -\int_{-t/2}^{t/2} E_{H,z}\,\mathrm{d}z = -E_{H,z}[z]_{-t/2}^{t/2} = \frac{IB}{nq_c w}.$$

截面里的厚度 t 与测量距离相消，分母保留与磁场平行的宽度 w。

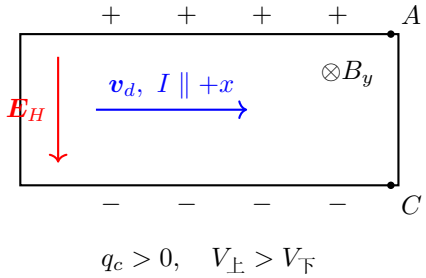


图 4.6: 保持同向常规电流，改用正载流子后霍尔极性反转；仍按横向力平衡确定

图 4.6 画出正载流子向右漂移时的横向受力。同样的电流方向下，正、电子的漂移反向。磁力 $q_c\boldsymbol{v}_d \times \boldsymbol{B}$ 的方向相同，两种载流子都先偏向上侧。正载流子在上侧积累正电，电子在上侧积累负电，因此霍尔电压的极性相反。图 4.7 画的是电子，上负下正，霍尔场向上。

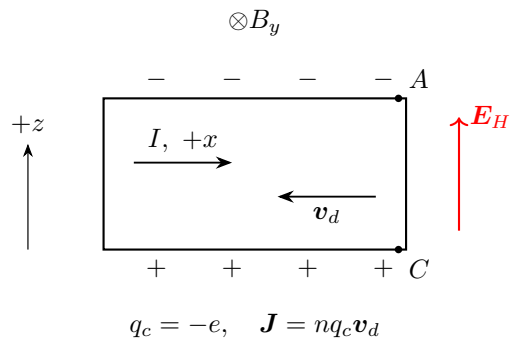


图 4.7: 电子向左漂移时，上边缘积累负电；霍尔场向上，电子所受电场力则向下

4.5.1　纵向驱动与反向测量

在单载流子、各向同性的弛豫模型中，纵向电场补偿碰撞阻力，大小为 $E_x = |\boldsymbol{v}_d|/\mu$，其中 μ 是迁移率。横向场由霍尔平衡确定，二者相加是导体内的总电场。例 4.6 按实际截面求这两个分量，练习 4.1 再用纵向压降和霍尔电压反求密度、迁移率。

若两个横向触点沿电流方向略有错开，读数会混入纵向压降。在电流和材料状态固定、纵向电压在磁场反向下保持不变时，霍尔项随 B 反号。于是 $[U(B) - U(-B)]/2$ 给出霍尔电压。练习 4.7 还把电流反向，用四组读数提取对电流和磁场都为奇函数的分量。

4.6　轨道电子与外场建立后的比较

经典圆轨道上，电荷绕行等效为环电流。对电子，轨道磁矩和角速度方向相反。现在比较弱外磁场建立前后的两条圆轨道，在一阶近似中保留相同的半径 R，求角速度与磁矩的变化。磁场建立时伴随感生电场，给电子的切向速度带来变化。

以沿 $+z$ 的外场为正，令轨道角速度 ω 保留转向，中心吸引力大小为 F_C，固定半径近似下有

$$mR\omega^2 = F_C - q\omega RB, \qquad mR\omega_0^2 = F_C.$$

写 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ 并减去无场关系，得到

$$mR[2\omega_0\delta\omega + (\delta\omega)^2] = -qRB(\omega_0 + \delta\omega).$$

舍去 $B\delta\omega$ 与 $(\delta\omega)^2$ 等二阶项，再约去非零的 $R\omega_0$，有 $2m\delta\omega = -qB$，所以 $\delta\omega = -qB/(2m)$。轨道磁矩的轴向分量为 $m_{\mathrm{orb},z} = qR^2\omega/2$，所以

$$\delta m_{\mathrm{orb},z} = -\frac{q^2R^2B}{4m}.$$

图 4.8 中即使电子原转向反过来，这一磁矩改变量仍反抗外场；角速度增量对同一外场取相同的代数值。

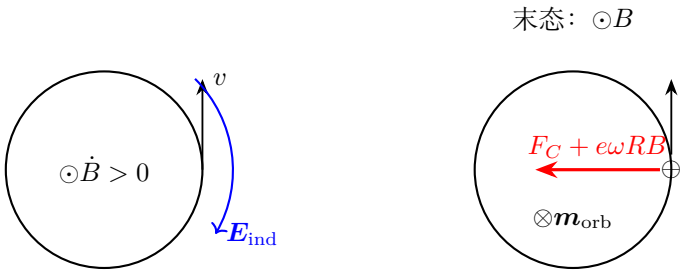


图 4.8: 外场建立阶段与最终径向平衡分别判断；图示电子原先逆时针转动

还可直接解释图 4.8 左图中的能量交换。沿 $+z$ 看，取逆时针为正，缓慢建立的均匀场给出

$$2\pi RE_\varphi = -\pi R^2\dot{B}, \qquad mR\dot{\omega} = qE_\varphi = -\frac{qR}{2}\dot{B}.$$

在半径变化可忽略的一阶近似下，以外场从零建立为 B 为积分上下限，

$$\int_{\omega_0}^{\omega_0+\delta\omega} \mathrm{d}\omega = -\frac{q}{2m}\int_0^B \mathrm{d}b, \qquad [\omega]_{\omega_0}^{\omega_0+\delta\omega} = -\frac{q}{2m}[b]_0^B.$$

同样得到 $\delta\omega = -qB/(2m)$。电子 $q = -e$ 时，图示顺时针感生电场对逆时针运动的电子施加顺速度电力，电子加快；电子在建立外场的过程中受到切向电力并获得动能。

4.7 超导体的屏蔽电流

取理想迈斯纳态，略去很薄的磁场穿透层，超导材料内部 $\boldsymbol{B} = 0$。表面屏蔽电流产生的场与外加场叠加，抵消材料内部的场。图 4.9 中，超导体占据 $y < 0$，外侧切向场为 $B_s\boldsymbol{e}_x$，外法线为 $\boldsymbol{e}_y$。由第一讲的切向场跃变关系，

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{e}_y \times (B_s\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{0}) = -\frac{B_s}{\mu_0}\boldsymbol{e}_z.$$

面电流沿纸内方向，大小为 B_s/μ_0。该表面电流在材料一侧产生沿 $-x$ 的场，在外侧产生沿 $+x$ 的场。

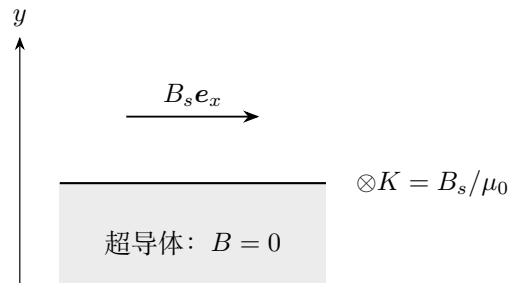


图 4.9: 迈斯纳态的平面分界处与屏蔽电流

图 4.10 中，理想排磁条件用于灰色材料。孔中是空腔，场由外加磁场、环流、几何和初态共同确定。若模型给出闭合环零电阻，可再用法拉第定律求总磁链随时间的关系。

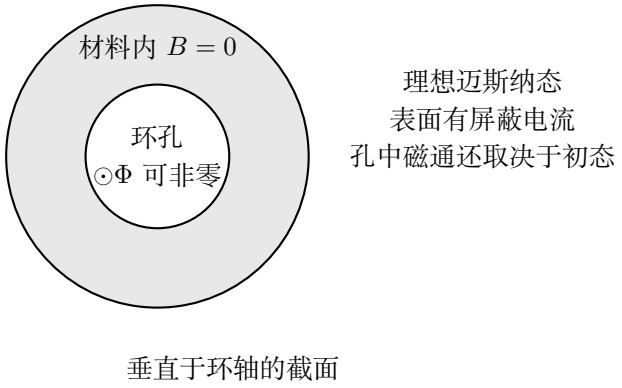


图 4.10: 灰色表示超导材料，中央白色部分是空腔

4.8　缓变场中的回旋磁矩

局部场近似均匀时，把粒子的一周回旋等效为圆电流。电流大小为 $|q|/T_c$，面积为 πr_L^2。用 $T_c = 2\pi m/(|q|B)$ 和 $r_L = mv_\perp/(|q|B)$，得

$$\mu = \frac{|q|}{T_c}\pi r_L^2 = \frac{|q|^2 B}{2m}\frac{m^2 v_\perp^2}{|q|^2 B^2} = \frac{mv_\perp^2}{2B}.$$

从 $+z$ 一端朝回旋平面看，局部磁场指向观察者，正电荷顺时针转动，负电荷逆时针转动。两者的等效电流都顺时针，所以回旋磁矩都与局部场反向。下面由近轴场的径向分量求对应的轴向力。

4.9 缓变磁场中的磁镜约束

把两只同轴线圈接成同一绕向，使轴上磁场同向叠加。图 4.11 中，线圈相隔较远，两端的场比中间强。粒子绕局部磁感线回旋，同时沿场移动。

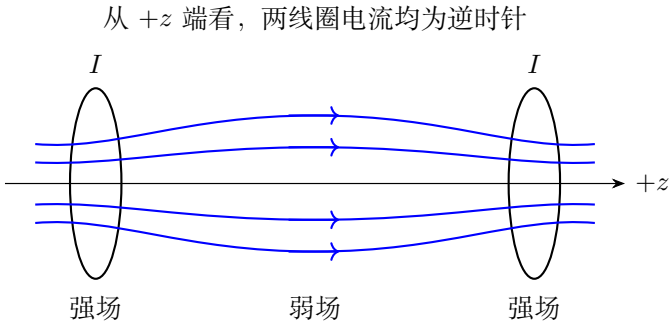


图 4.11: 同向通电的两只同轴线圈。近轴场线在中间张开，向右端线圈收拢

在右半段，B_z 随 z 增大，给定细磁通管穿过的截面积随之减小。轴对称、近轴无电流区域的零磁通关系给 $B_r \simeq -rB_z'/2$。场向前增强时，径向小分量向轴线收拢；它与快速回旋速度作用，才产生减小平行速度的轴向平均力。

先取 $B_z > 0$，以绕轴逆时针为方位正向。正电荷回旋实际为顺时针；对任意电荷符号，向心条件都可写为 $qv_\theta = -mv_\perp/r_L$。因此

$$F_z = -qv_\theta B_r \simeq -\frac{mv_\perp^2}{2B_z}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = -\mu\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}, \qquad \mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} > 0.$$

这里 μ 是回旋的磁矩大小；带符号的回旋磁矩矢量反平行于局部场。电荷反号时回旋转向也反号，乘积 qv_θ 保持相同，所以磁镜力仍指向弱场，不随电荷正负反向。

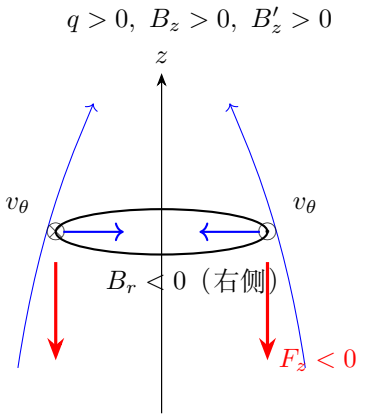


图 4.12: 近轴径向场与回旋速度共同产生向弱场端的力；图示正电荷顺时针回旋

图 4.12 的左右两处速度相反、径向场也相反，叉乘后的轴向力却同向。这个力是对快速回旋平均后的结果，用于一周之内外场变化很小的情形。

4.9.1　平行与垂直能量的交换

磁力整体仍不做功，故总动能 $K=K_\parallel+K_\perp$ 保持不变。沿轴慢运动时，$\mathrm{d}K_\parallel = F_z\,\mathrm{d}z = -\mu\,\mathrm{d}B$，相应有 $\mathrm{d}K_\perp = \mu\,\mathrm{d}B$。又由定义 $K_\perp = \mu B$，比较两式得到 $B\,\mathrm{d}\mu \simeq 0$，即

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B} \simeq \text{常量}. \tag{4.2}$$

这一近似不变量把三维运动简化为轴向有效势能 $U_{\mathrm{eff}}(z)=\mu B(z)$ 下的慢运动：

$$K_\perp = \mu B, \qquad K_\parallel = K-\mu B, \qquad \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B = K.$$

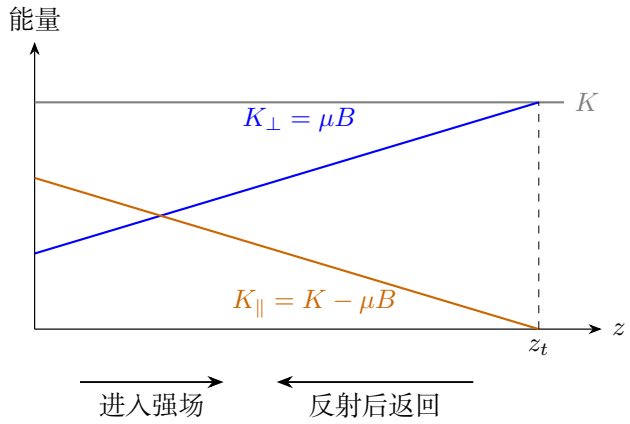


图 4.13: 以线性增强的一段磁场为例，垂直能量增加，平行动能减到零时到达镜点

图 4.13 中，垂直能量随场增强而增加，平行动能相应减少。粒子返回弱场时，能量沿相反方向转移，平行速率重新增加。

4.9.2 绝热条件与损失锥

上述分离要求回旋半径远小于场变化尺度，而且一周内沿轨道采样的相对场变很小。可分别估计

$$r_L \frac{|\nabla_\perp B|}{B} \ll 1, \qquad T_c \frac{|v_\parallel B'|}{B} \ll 1, \qquad T_c = \frac{2\pi m}{|q|B}.$$

这两个比值分别比较回旋尺度上的横向场变和一周期内的轴向场变。下列磁镜计算取二者都远小于 1。

设粒子从中央场强 B_0 处以总速率 v_0、俯仰角 α_0 朝一个强场端出发，初始 $K_\perp = mv_0^2 \sin^2\alpha_0/2$。于是

$$v_\parallel^2 = v_0^2 \left(1 - \frac{B}{B_0}\sin^2\alpha_0\right), \qquad B_t = \frac{B_0}{\sin^2\alpha_0}.$$

若端部可用最大场为 B_m，在峰值前出现普通镜点需要 $\sin^2\alpha_0 > B_0/B_m$。小于该阈值时，到峰值仍有正的平行动能，粒子可以穿过本端。等号时镜点落在场峰，下一节计算接近该点所需的时间。

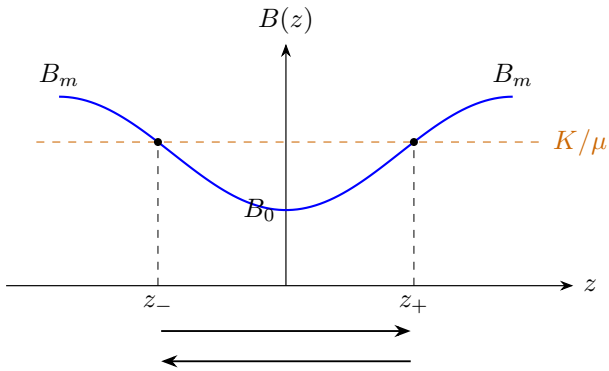


图 4.14: 曲线是沿轴场强的剖面，两个镜点由 $B(z) = K/\mu$ 确定

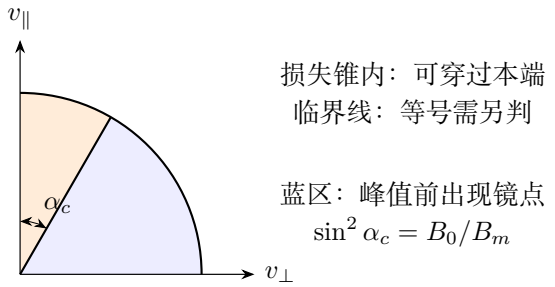


图 4.15: 朝一个强场端发射的速度空间截面，临界俯仰角将穿越与镜点条件分开

图 4.14 以场强剖面与常量 K/μ 相交定位两个镜点，图 4.15 则在同一总速率圆弧上比较入射俯仰角。俯仰角越小，初始垂直能量越少，所需镜场越高；这正是沿场方向形成损失锥的原因。

严格沿对称轴且 $v_\perp = 0$ 时，$\mu = 0$。粒子沿场运动，磁力为零。

4.10　临界反射与到达时间

能量方程给出的反射条件，还应与位置和到达时间一起考察。若 $B(z)$ 单调增大到普通转折点 z_t，且 $B'(z_t) \neq 0$，附近 $K - \mu B(z)$ 与 $z_t - z$ 成正比，所以 $v_\parallel$ 与 $\sqrt{z_t - z}$ 成正比。记 $v_\parallel \simeq c\sqrt{z_t - z}$，$c > 0$。从 $z_t - \delta$ 到镜点，令 $s = z_t - z$，$\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}s$，则

$$\Delta t \simeq \frac{1}{c}\int_{z_t-\delta}^{z_t} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z_t - z}} = \frac{1}{c}\int_0^{\delta} s^{-1/2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\left[2\sqrt{s}\right]_0^{\delta} = \frac{2\sqrt{\delta}}{c}.$$

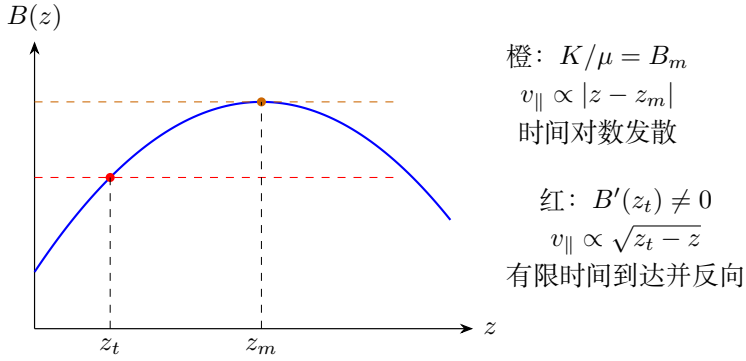
时间积分在端点收敛，粒子在有限时间到达并反向。

若反射阈值恰好对应磁场的光滑最大值 B_m，情况不同。设 $B(z)=B_m-a(z-z_m)^2+\cdots$，$a>0$，且 $K=\mu B_m$。此时 $v_\parallel\simeq\sqrt{2\mu a/m}\,|z-z_m|$，记 $\kappa=\sqrt{2\mu a/m}$，从峰前距离 s_0 走到距离 $\epsilon>0$ 时，令 $s=z_m-z$，

$$\Delta t\simeq-\frac{1}{\kappa}\int_{s_0}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}s}{s}=-\frac{1}{\kappa}[\ln s]_{s_0}^{\epsilon}=\frac{1}{\kappa}\ln\frac{s_0}{\epsilon}.$$

当 $\epsilon\to0^+$ 时，这个时间呈对数发散。理想模型中粒子无限接近峰值，却不在有限时间到达后掉头。

损失锥的临界角对应光滑峰顶上的零平行速度。能量关系给出临界角，时间积分说明这一粒子渐近停在峰前。



只讨论从左向右进入强场的一支；曲线为场强剖面

图 4.16: 普通转折点处的可达性与光滑峰顶处的临界状态，对应不同的到达时间

图 4.16 中红色能量线在上升段先相交，粒子到达第一个交点后返回。橙色临界能量线只在光滑峰顶相切，接近峰值时平行速率按距离的一次方趋零，导致时间积分发散。

4.11　例题与分析

例 4.1 (轨道电子的弱外场响应)**.** 电子质量 m、电荷 $-e$，在固定半径 R 的轨道上逆时针转动，原速率 v_0。用圆轨道径向平衡模型比较外磁场垂直纸面向里和向外时的新速率，并判断电子在轴上产生的场大小怎样变化。

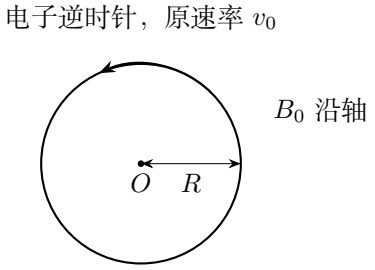
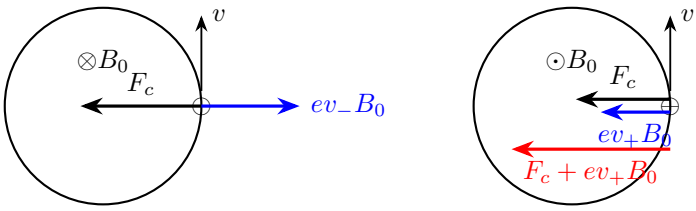


图 4.17: 题设：轨道电子的弱外场响应

解　轨道右端的径向磁力

图 4.17 的电子实际电流为顺时针，轴上自生场大小正比于速率。设维持原圆周的中心吸引力 $F_c = mv_0^2/R$，比较过程保持半径和该力不变。外场向里时，电子磁力径向向外，因此 $mv_-^2/R = F_c - ev_-B_0$。外场向外时，磁力向内，$mv_+^2/R = F_c + ev_+B_0$。



外场向里：$v_- < v_0$　　外场向外：$v_+ > v_0$

图 4.18: 在同一轨道右端作径向受力比较，电子速度始终向上，磁力随外场方向反转

速度和轨道场的变化

在图 4.18 中记 $a = eB_0R/m > 0$。两方程依次化为

$$v_-^2 + av_- - v_0^2 = 0 \implies (v_- + a/2)^2 = v_0^2 + a^2/4,$$
$$v_+^2 - av_+ - v_0^2 = 0 \implies (v_+ - a/2)^2 = v_0^2 + a^2/4.$$

因 $\sqrt{v_0^2+a^2/4}>a/2$，两式取负平方根时都给负速率，应舍去；与原转向连续的正根为

$$v_\pm=\frac{\sqrt{(eB_0R/m)^2+4v_0^2}\ \pm eB_0R/m}{2}.$$

所以向里时 $v_-<v_0$、自生场减小；向外时 $v_+>v_0$、自生场增大。为求弱场近似，令 $\epsilon=a/v_0\ll 1$，则

$$\frac{v_\pm}{v_0}=\sqrt{1+\epsilon^2/4}\pm\frac{\epsilon}{2}.$$

函数 $G(u)=\sqrt{1+u}$ 满足 $G(0)=1$、$G'(u)=1/(2\sqrt{1+u})$、$G'(0)=1/2$，故 $G(\epsilon^2/4)=1+\epsilon^2/8+O(\epsilon^4)$。保留外场的一阶项，得到 $v_\pm\simeq v_0\pm eB_0R/(2m)$，轨道磁矩的增量均反抗外场。该比较描述固定半径圆轨道的力平衡；在建立外场的阶段，感生电场改变电子的速率。

例 4.2 (重力与库仑力共同约束的水平圆轨道)**.** 原点固定正点电荷 Q，匀强磁场沿竖直 $+y$。另一正电荷 q、质量 m 的粒子以 y 轴上 $(0,h,0)$ 为圆心作水平圆周运动，角速度大小为 ω，转向使磁力向心。考虑重力，求 h 和水平半径，并给出存在条件。

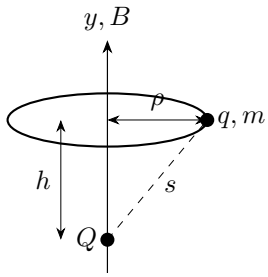


图 4.19: 题设：重力与库仑力共同约束的水平圆轨道

解　重力与库仑力的分量

图 4.19 设粒子到原点距离为 $s=\sqrt{\rho^2+h^2}$，库仑常量为 k_e。竖直方向没有加速度，故 $k_eQq\,h/s^3=mg$。水平方向库仑力向外、磁力向内，径向式为 $qB\omega\rho-k_eQq\rho/s^3=m\omega^2\rho$。

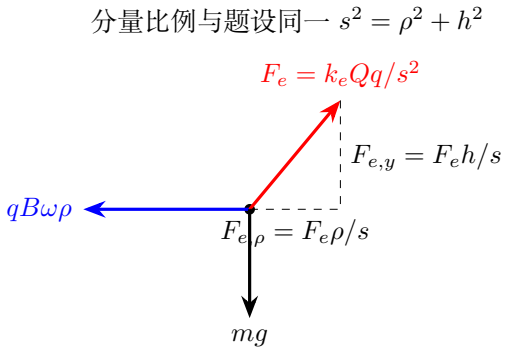


图 4.20: 库仑力沿原点到粒子的连线；竖直分量平衡重力，水平分量抵消一部分向心磁力

高度、距离和半径

对非零半径约去 ρ，令 $D=qB\omega-m\omega^2$，得到 $k_eQq/s^3=D$。代入竖直式，依次求得

$$h=\frac{mg}{D},\qquad s=\left(\frac{k_eQq}{D}\right)^{1/3},\qquad \rho^2=\left(\frac{k_eQq}{D}\right)^{2/3}-\left(\frac{mg}{D}\right)^2.$$

由图 4.20 的径向式，$D=k_eQq/s^3>0$，因此 $0<\omega<qB/m$。非零半径还要求 $s>h$。

圆轨道存在的条件

由于 $D>0$，可将 $\rho^2>0$ 两侧同乘 D^2，再对正数取 $3/2$ 次幂：

$$\begin{aligned}(k_eQq)^{2/3}D^{4/3}&>m^2g^2,\\ k_eQqD^2&>m^3g^3,\\ D&>\sqrt{\frac{m^3g^3}{k_eQq}}.\end{aligned}$$

等号对应 $s=h$，此时水平半径为零。

例 4.3 (平行电磁场中再次经过轴线)**.** 匀强磁场为 $B\boldsymbol{e}_z$，电场为 $-E\boldsymbol{e}_z$。粒子质量 m、电荷 $-q$，从原点以 $v_0\boldsymbol{e}_x$ 出发，不计重力。求首次再次经过 z 轴的时间与坐标，并比较相邻回旋周的轴向推进距离。



图 4.21: 题设：平行电磁场中再次经过轴线

解　横向回旋和轴向加速

图 4.21 中负电荷受电力沿 $+z$, 轴向加速度为 qE/m。横向圆心在 $+y$ 方向, 令 $\Omega = qB/m$、$r = mv_0/(qB)$, 横向速度方程为 $\dot{v}_x = -\Omega v_y, \dot{v}_y = \Omega v_x$。对第一式求导得 $\ddot{v}_x = -\Omega\dot{v}_y = -\Omega^2 v_x$。试取 $v_x = e^{st}$, 两次求导为 se^{st}, s^2e^{st}, 代回得 $s^2+\Omega^2 = 0$, 根为 $\pm\mathrm{i}\Omega$。通解 $v_x = A\cos\Omega t + D\sin\Omega t$ 的导数为 $\dot{v}_x = -A\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t$。初值 $v_x(0) = v_0, \dot{v}_x(0) = 0$ 给 $A = v_0, D = 0$，所以 $v_x = v_0\cos\Omega t$，$v_y = -\dot{v}_x/\Omega = v_0\sin\Omega t$。分别积分，并由静止的轴向初态积分 $\dot{v}_z = qE/m$：

$$x = v_0\int_0^t \cos\Omega s\,\mathrm{d}s = \frac{v_0}{\Omega}[\sin\Omega s]_0^t = r\sin\Omega t,$$

$$y = v_0\int_0^t \sin\Omega s\,\mathrm{d}s = -\frac{v_0}{\Omega}[\cos\Omega s]_0^t = r(1-\cos\Omega t),$$

$$v_z = \frac{qE}{m}\int_0^t \mathrm{d}s = \frac{qE}{m}[s]_0^t = \frac{qEt}{m}, \qquad z = \frac{qE}{m}\int_0^t s\,\mathrm{d}s = \frac{qE}{m}[s^2/2]_0^t = \frac{qEt^2}{2m}.$$

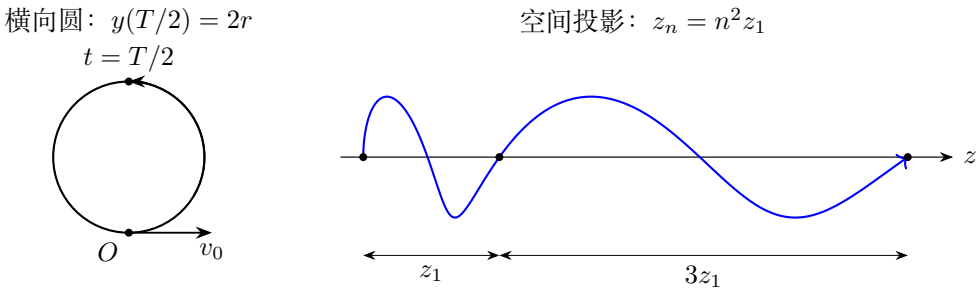


图 4.22: 负电荷横向一周才回到原轴线；轴向加速使前两周推进距离之比为 1 比 3

第一次回到轴线

图 4.22 再次过轴要求 $x=y=0$。x 虽在半周时为零，但当时 $y=2r$；最早非初始解是 $\Omega t=2\pi$。故

$$t_1=\frac{2\pi m}{qB},\qquad (x,y,z)=\left(0,0,\frac{2\pi^2 mE}{qB^2}\right).$$

各周的轴向推进

第 n 周结束时 $z_n=n^2z_1$，所以下一周推进 $z_{n+1}-z_n=(2n+1)z_1$。图 4.22 中前两周的轴向间距分别为 z_1 和 $3z_1$。横向周期相同，轴向速度 $v_z=qEt/m$ 逐周增加，螺距随之增大。

例 4.4 (电子在垂直电磁场中的完整轨迹)**.** 空间中 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_x$。电子质量 m、电荷 $-q$ 从原点静止释放，求 y,z 坐标、沿 y 的最大位移大小与漂移方向。

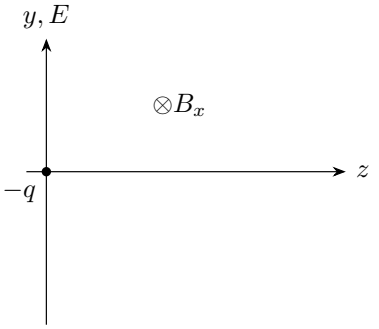


图 4.23: 题设：电子在垂直电磁场中的完整轨迹

解　电子的速度分量

按图 4.23 作叉乘，$m\dot v_y=-qE-qBv_z$、$m\dot v_z=qBv_y$。记 $\Omega=qB/m$、$V=E/B$，令 $w=v_z+V$，则 $\dot v_y=-\Omega w$、$\dot w=\Omega v_y$。对 $\dot v_y=-\Omega w$ 求导，得 $\ddot v_y=-\Omega\dot w=-\Omega^2 v_y$。试取 $v_y=e^{st}$，则 $\dot v_y=se^{st}$、$\ddot v_y=s^2e^{st}$，代入得 $(s^2+\Omega^2)e^{st}=0$，根为 $\pm\mathrm{i}\Omega$，故 $v_y=A\cos\Omega t+D\sin\Omega t$，其导数为 $\dot v_y=-A\Omega\sin\Omega t+D\Omega\cos\Omega t$。初态 $v_y(0)=0, w(0)=V$ 给 $A=0$、$\Omega D=\dot v_y(0)=-\Omega V$，所以 $v_y=-V\sin\Omega t$、$w=-\dot v_y/\Omega=V\cos\Omega t$，进而 $v_z=V(\cos\Omega t-1)$。

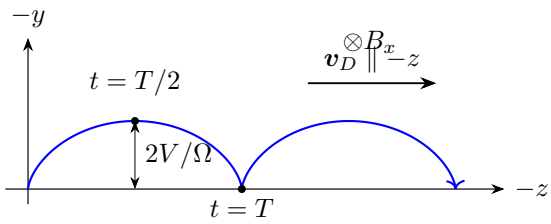


图 4.24: 坐标轴分别取 $-z, -y$ 向正，画出与分量解同一比例尺的旋轮线

轨迹与最大侧移

积分并用零初始坐标，

$$y = -V\int_0^t \sin\Omega s\,\mathrm{d}s = \frac{V}{\Omega}[\cos\Omega s]_0^t,$$
$$z = V\int_0^t (\cos\Omega s - 1)\,\mathrm{d}s = V[\sin\Omega s/\Omega - s]_0^t.$$

代入上下限，得到

$$y = \frac{V}{\Omega}(\cos\Omega t - 1), \qquad z = \frac{V}{\Omega}\sin\Omega t - Vt.$$

图 4.24 中 $y \le 0$，最大位移大小 $2V/\Omega = 2mE/(qB^2)$，在半周时达到。平均漂移沿 $-z$，与 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 一致。

半周时的动能

半周时速率为 $2V$，动能 $2mV^2$；电功 $(-q)Ey = 2qEV/\Omega = 2mV^2$。

例 4.5 (三维落点确定场方向与末速)**.** y 轴竖直向上，匀强电场平行 x 轴。质量 m、电荷 $-q$ 的小球 $(q>0)$ 从 $M=(0,H,0)$ 静止释放，落到 $N=(c,0,b)$，其中 $b,c>0$。撤去磁场时落在 $P=(l,0,0)$，$l>0$。磁场平行某一坐标轴，求其可能方向、电场大小与到达 N 的速率。

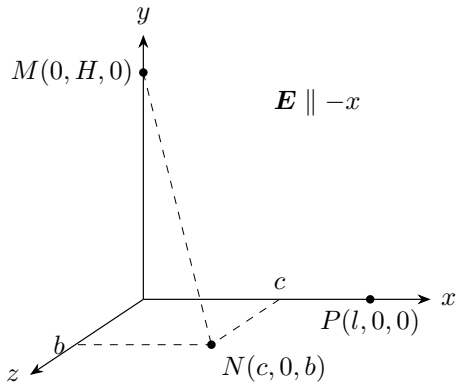


图 4.25: 三维落点的坐标投影；c,l 的大小不预设，位置仅为示意

解　撤去磁场后的落点

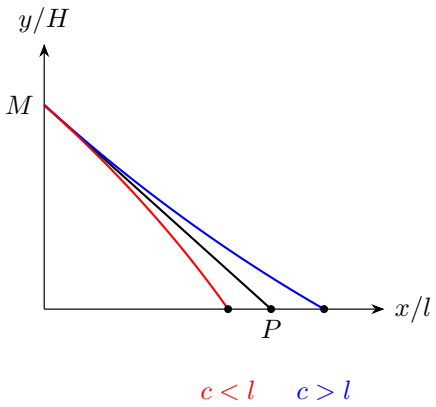
图 4.25 撤去磁场后，落地时间为 $t_0=\sqrt{2H/g}$，水平加速度需向 $+x$，因此负电荷对应电场沿 $-x$。由 $l=\frac{1}{2}(qE/m)t_0^2$ 得 $E=mgl/(qH)$。

正的侧移与磁场符号

磁场沿 z 时，电力、重力和磁力都在 xy 平面内，小球始终在 $z=0$。沿 x 或 y 时，令 $\Omega=qB_{\mathrm{ax}}/m$，其中 B_{ax} 是磁场在相应轴上的有向分量，q 是电荷量的绝对值。运动方程中的磁加速度为 $-\Omega\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_{\mathrm{ax}}$。由下面的分量方程可得，两种方向的侧移都可写成

$$z=-\frac{A}{\Omega}\int_0^t(1-\cos\Omega s)\,\mathrm{d}s$$

其中沿 x 时 $A=g$，沿 y 时 $A=qE/m$。对 $t>0$，积分为正，落点的 $b>0$ 对应 $\Omega<0$。



黑：撤去磁场
蓝：$\boldsymbol{B} \parallel -x$
红：$\boldsymbol{B} \parallel -y$

两色曲线各取一个可实现参数示意
三维的 $b > 0$ 用来筛选轴的负方向

图 4.26: 在 xy 平面比较两个磁场方向下的落点与撤去磁场后的落点

图 4.26 把三种轨迹投影到 xy 平面。接下来保留三维坐标，用投影中 x 方向的位移来判定磁场沿哪一轴。

两个方向下的射程

令 $a_x = qE/m = gl/H$，并取 $\omega = q|B|/m > 0$。在 $\boldsymbol{B} \parallel -x$ 分支，分量方程为 $\dot{v}_x = a_x, \dot{v}_y = -g + \omega v_z, \dot{v}_z = -\omega v_y$。令 $w = v_z - g/\omega$，则 $\dot{v}_y = \omega w, \dot{w} = -\omega v_y$，所以 $\ddot{v}_y = \omega \dot{w} = -\omega^2 v_y$。试取 $v_y = e^{st}$，两次求导为 $se^{st}, s^2 e^{st}$，代回得特征方程 $s^2 + \omega^2 = 0$，根为 $\pm \mathrm{i}\omega$。通解为 $v_y = A\cos\omega t + D\sin\omega t, \dot{v}_y = -A\omega\sin\omega t + D\omega\cos\omega t$。初值 $v_y(0) = 0, \dot{v}_y(0) = -g$ 给 $A = 0, D = -g/\omega$，故 $v_y = -(g/\omega)\sin\omega t$，再由 $v_z = g/\omega + \dot{v}_y/\omega$ 得 $v_z = (g/\omega)(1 - \cos\omega t)$。对三个速度分量从零积分，

$$x = \int_0^t a_x s \,\mathrm{d}s = a_x[s^2/2]_0^t,$$
$$y - H = -\frac{g}{\omega}\int_0^t \sin\omega s \,\mathrm{d}s = \frac{g}{\omega^2}[\cos\omega s]_0^t,$$
$$z = \frac{g}{\omega}\int_0^t (1 - \cos\omega s)\,\mathrm{d}s = \frac{g}{\omega}[s - \sin\omega s/\omega]_0^t.$$

因此轴向 $x = a_x t^2/2$ 不受磁力影响，而

$$H - y = \frac{g}{\omega^2}(1 - \cos\omega t), \qquad z = \frac{g}{\omega^2}(\omega t - \sin\omega t).$$

落地时利用 $1 - \cos u < u^2/2\,(u > 0)$，得 $H < gt^2/2$，所以 $c = a_x t^2/2 > a_x H/g = l$。

在 $\boldsymbol{B} \parallel -y$ 分支，$\dot{v}_y = -g$，$\dot{v}_x = a_x - \omega v_z, \dot{v}_z = \omega v_x$。对第一条横向式求导，得到 $\ddot{v}_x = -\omega\dot{v}_z = -\omega^2 v_x$；试取 $v_x = e^{st}$，两次求导为 $se^{st}, s^2 e^{st}$，代回得 $s^2 + \omega^2 = 0$。通解为 $v_x = C\cos\omega t + F\sin\omega t$，导数为 $\dot{v}_x = -C\omega\sin\omega t + F\omega\cos\omega t$。

由 $v_x(0)=0, \dot v_x(0)=a_x$ 得 $C=0, F=a_x/\omega$，所以 $v_x=(a_x/\omega)\sin\omega t$，再由 $v_z=(a_x-\dot v_x)/\omega$ 得 $v_z=(a_x/\omega)(1-\cos\omega t)$。于是

$$x=\frac{a_x}{\omega}\int_0^t \sin\omega s\,\mathrm{d}s=-\frac{a_x}{\omega^2}[\cos\omega s]_0^t,$$
$$y=H-\int_0^t gs\,\mathrm{d}s=H-g[s^2/2]_0^t,$$
$$z=\frac{a_x}{\omega}\int_0^t (1-\cos\omega s)\,\mathrm{d}s=\frac{a_x}{\omega}[s-\sin\omega s/\omega]_0^t.$$

竖直下落不受磁力影响，仍在 $t_0=\sqrt{2H/g}$ 落地，而 $c=a_x(1-\cos\omega t_0)/\omega^2<a_x t_0^2/2=l$。因此

$$\boxed{\boldsymbol{B}\parallel\begin{cases}-\boldsymbol{e}_x, & c>l,\\ -\boldsymbol{e}_y, & 0<c<l.\end{cases}}$$

非零磁场两分支均为严格不等式；$c=l$ 与题给 $b>0$ 不相容。图 4.26 画的是三维运动的 xy 投影，投影中不显示的正 z 偏移已经用于筛选磁场的正负号。

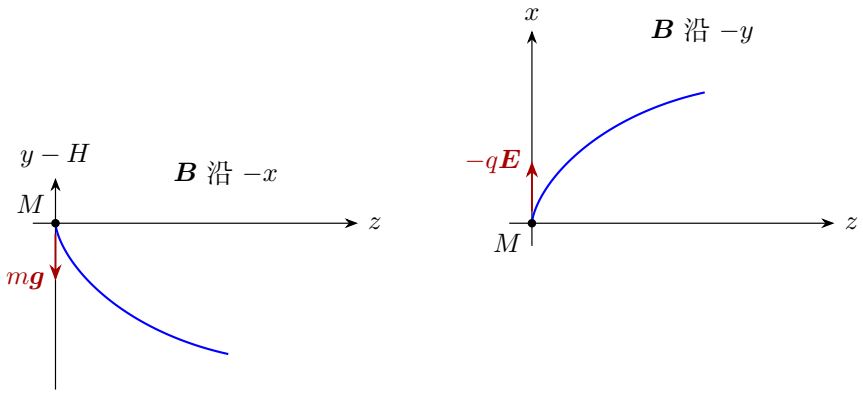


图 4.27: 分别沿磁场方向观察两个横截面。横向恒力和回旋共同产生向 $+z$ 的侧移

图 4.27 左图的侧移由重力引起，右图的侧移由电场力引起。两幅图中，磁力把粒子转向 $+z$。

首次落地的条件

记落地相位 $u=\omega t$。磁场沿 $-x$ 时，$H-y$ 在第一个半周从零单调增至 $2g/\omega^2$。要首次到达地面，需 $H\le 2g/\omega^2$，此时 $0<u\le\pi$。用同一 u 表示落点的两个坐标，

$$\frac{c}{l}=\frac{u^2}{2(1-\cos u)}=\left[\frac{u}{2\sin(u/2)}\right]^2,\qquad \frac{b}{H}=\frac{u-\sin u}{1-\cos u}.$$

取 $w=u/2$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\frac{w}{\sin w}=\frac{\sin w-w\cos w}{\sin^2 w},\qquad \sin w-w\cos w=\int_0^w s\sin s\ \mathrm{d}s>0.$$

所以 c/l 从 1 增至 $\pi^2/4$，给定 $1<c/l\le\pi^2/4$ 就确定了该分支的 u，再将它代入 b/H。磁场沿 $-y$ 时，竖直运动在 t_0 到达地面，$u=\omega t_0$，且

$$\frac{c}{l}=\frac{2(1-\cos u)}{u^2},\qquad \frac{b}{l}=\frac{2(u-\sin u)}{u^2}.$$

在任一分支，题给的 b,c 要由同一个 u 给出。相应的场强为 $mu/(qt)$，式中的 t 取该分支的首次落地时间。

落地速率

按图 4.26 的能量关系，磁力不作功，$\frac{1}{2}mv^2=mgH+qEc$，从而 $v=\sqrt{2gH+2glc/H}$。

例 4.6 (电子导体的总电场与霍尔电压)**.** 长条沿 x 长 a，截面沿 y 宽 $b=1.0\,\mathrm{cm}$、沿 z 厚 $c=1.0\,\mathrm{mm}$。电流 $I=1.0\,\mathrm{A}$ 沿 $+x$，磁场 $B=0.10\,\mathrm{T}$ 沿 $+y$。电子密度 $n=2.5\times10^{22}\,\mathrm{m}^{-3}$、迁移率 $\mu=7.8\,\mathrm{m}^2/(\mathrm{V\,s})$，取 $e=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$。求总电场及 $V(z=c/2)-V(z=-c/2)$。

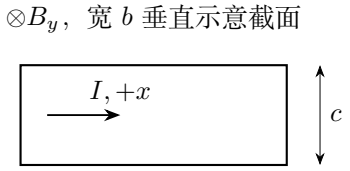


图 4.28: 题设：电子导体的总电场与霍尔电压

解　纵向场和霍尔场

图 4.28 电子沿 $-x$ 漂移，速率 $v_d=I/(nebc)=25.0\,\mathrm{m/s}$。沿电流方向，弛豫模型给驱动场 $E_x=v_d/\mu=3.21\,\mathrm{V/m}$。由于 $\boldsymbol{v}_d=-v_d\boldsymbol{e}_x$，有 $\boldsymbol{v}_d\times\boldsymbol{B}=-v_dB\boldsymbol{e}_z$；横向平衡要求 $\boldsymbol{E}_H=-\boldsymbol{v}_d\times\boldsymbol{B}=+v_dB\boldsymbol{e}_z$。

$V(c/2)-V(-c/2)=-2.50\,\mathrm{mV}$　　各场强单位均为 V/m

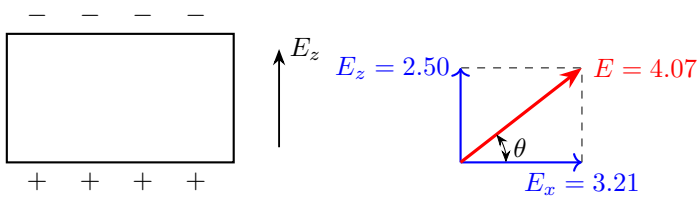


图 4.29: 先画表面极性，再将纵向与霍尔电场按同一比例相加得到总场

总电场与电压

图 4.29 中 $E_z = 2.50\,\mathrm{V/m}$，总场 $\boldsymbol{E} = 3.21\boldsymbol{e}_x + 2.50\boldsymbol{e}_z\,\mathrm{V/m}$，大小 $4.07\,\mathrm{V/m}$，相对 $+x$ 向 $+z$ 倾斜，$\tan\theta = E_z/E_x = \mu B = 0.78$。电势沿电场下降，因此上、下两面电势差

$$V(c/2) - V(-c/2) = -\int_{-c/2}^{c/2} E_z\,\mathrm{d}z = -E_z[z]_{-c/2}^{c/2} = -E_z c = -2.50\,\mathrm{mV}.$$

上表面积累负电荷，与电子磁力向 $+z$ 的判断相符。电压分母等价写成 neb，厚度 c 已由电流截面与测量距离相互约去。

例 4.7 (交叉导线排产生的霍尔电压)**.** 两无限密集线排在截面内相交成 120 度，分别沿与水平成 $+30°, -30°$ 的直线排列。每根线电流大小 I，前者向纸内、后者向纸外，单位长度根数 λ。角平分线上方放一薄 N 型半导体，整个截面均在两线排上方的公共夹角内，截面宽 w 水平、高 l 沿角平分线，电流 I_0 向纸外。载流子密度 n、电荷 $-q$。长直线场为 kI/r，求右侧减左侧的电势差。

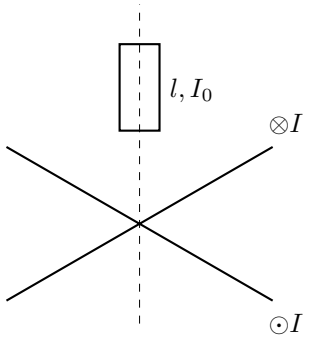
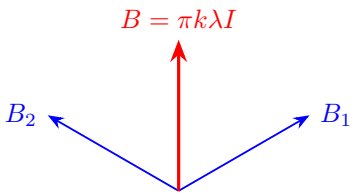


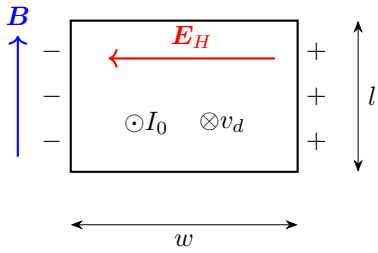
图 4.30: 题设：交叉导线排产生的霍尔电压

解　两组线排的场

图 4.30 每个线排连续面电流密度为 $K = \lambda I$，单侧场大小为 $\mu_0 K/2 = \pi k \lambda I$。在上方夹角区域，第一排场沿向右上 30 度，第二排场沿向左上 30 度；水平分量抵消，竖直分量相加，合场 $B = \pi k \lambda I$，沿角平分线向上。



两项大小相等，夹角为 120°



左侧负电，$V_{右} > V_{左}$

图 4.31: 先叠加两线排的场，再在半导体截面上判断电子受力、霍尔场与测量极性

霍尔电压

图 4.31 电子漂移向纸内，$\boldsymbol{v}_d \times \boldsymbol{B}$ 向右，电子磁力向左，所以左侧积累负电荷，右侧电势较高。电流截面为 wl，$v_d = I_0/(nqwl)$，霍尔电场向左，大小 v_dB。故

$$V_{右} - V_{左} = v_dBw = \frac{\pi k\lambda I I_0}{nql}.$$

结果中 l 是平行合磁场的截面边，薄宽 w 约去。

例 4.8 (速度选择器的通行条件)**.** 平行板间电场沿 $+y$，磁场沿 $+z$。电荷量为 q（带符号）的粒子沿 $+x$ 入射。求无偏转通行的速度；若同样速率的粒子改沿 $-x$ 入射，求其初始合力。

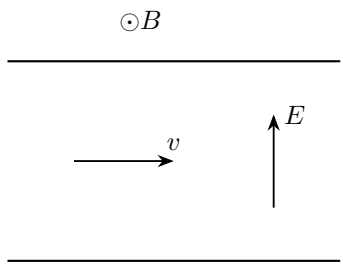


图 4.32: 题设：速度选择器的通行条件

解　直线通过的速率

图 4.32 正向入射时，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = -vB\boldsymbol{e}_y$，总力 $q(E-vB)\boldsymbol{e}_y$。无偏转要求 $v = E/B$；电荷符号改变时两个力同时反向，抵消速率仍相同。

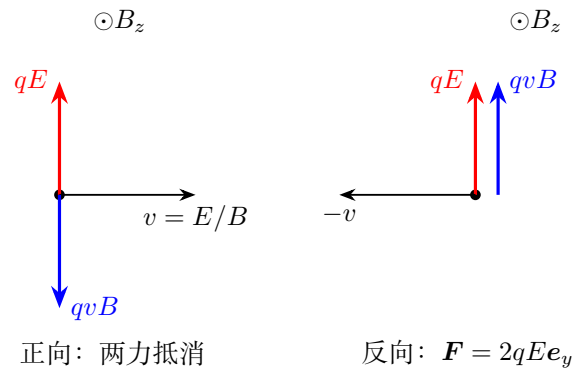


图 4.33: 对同一正电荷比较正、反入射方向；电场不变，磁力却随速度反向

反向入射

图 4.33 将速度改为 $-v\boldsymbol{e}_x$ 后，叉乘变成 $+vB\boldsymbol{e}_y$，合力为 $q(E+vB)\boldsymbol{e}_y = 2qE\boldsymbol{e}_y$。所以能直线通过的入射方向也由两场的取向确定。

例 4.9 (速度选择后的质谱分离)**.** 粒子先通过电场 E、磁场 B_s 的理想速度选择器，再垂直进入分析磁场 B_a，经半周到达探测器。各离子电荷均为 $q > 0$，求落点距离与质量关系，比较共同加速电压的情形。

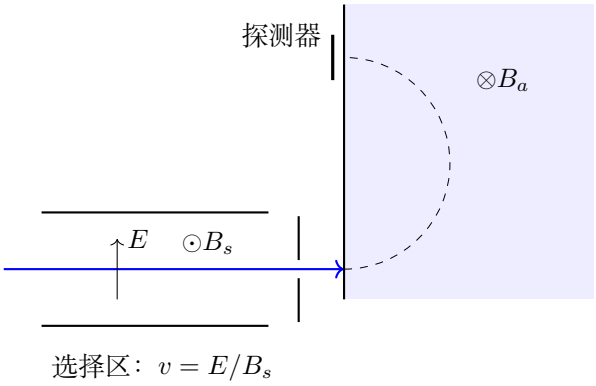
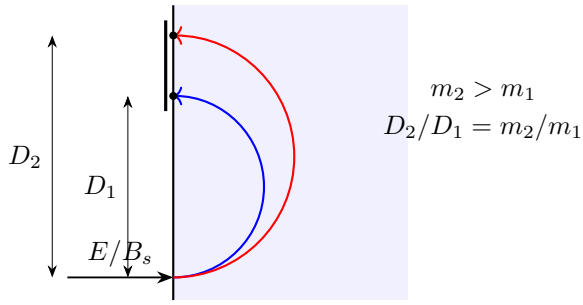


图 4.34: 速度选择区的直线束进入分析磁区后作半周偏转；两个磁场的方向可分别配置

解　选择速率与半周偏转

图 4.34 通过选择器的速度为 $v = E/B_s$。分析区只改变方向，半径 $r = mv/(qB_a) = mE/(qB_sB_a)$，半周落点距离为直径 $D = 2r$。



两离子同电荷、同速率，分析场仅改变方向

图 4.35: 共同速率下磁分析半径与质量成正比，落点差保留质量差的一次比例

质量与落点差

由图 4.35 可解 $m = qB_sB_aD/(2E)$。令 $C = 2E/(qB_sB_a)$，则 $D = Cm$，相同电荷、固定场条件下 $\Delta D/D = \Delta m/m$ 精确成立。若改为从静止经过相同电压 U 加速，先用 $mv^2/2 = qU$，得到

$$D = \frac{2mv}{qB_a} = \frac{2}{B_a}\sqrt{\frac{2mU}{q}} = C_U m^{1/2}, \qquad C_U = \frac{2}{B_a}\sqrt{\frac{2U}{q}}.$$

保持 U, q, B_a 固定，实际求导并除以原距离：

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}m} = \frac{C_U}{2}m^{-1/2}, \qquad \frac{\mathrm{d}D}{D} = \frac{(C_U/2)m^{-1/2}\,\mathrm{d}m}{C_U m^{1/2}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

所以小质量差的相对色散系数为前一种的一半。前者选择共同速度，后者选择共同单位电荷能量。若离子电荷不同，装置直接区分的是相应的 m/q。

例 4.10（磁镜的反射条件与损失锥）. 粒子从场强 B_0 处以总速率 v_0、俯仰角 $0 \le \alpha_0 < \pi/2$ 向缓变强场端运动，该端最大场为 $B_m > B_0$。满足绝热近似，不存在电场。求镜点场强及能够反射的初始角范围。

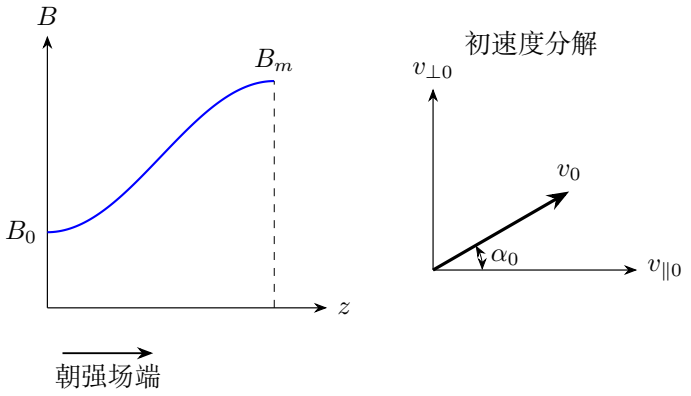


图 4.36: 沿轴的场强剖面仅作示意，初始俯仰角在速度分解图中定义

解　镜点处的场强

图 4.36 初始磁矩 $\mu = mv_0^2 \sin^2\alpha_0/(2B_0)$，总动能为 $mv_0^2/2$。在场强 B 处，横向动能 μB，所以 $v_\parallel^2 = v_0^2[1 - (B/B_0)\sin^2\alpha_0]$。若 $\alpha_0 = 0$，磁矩为零，平行速率始终为 v_0。当 $\alpha_0 > 0$，令平行速度为零，得到镜点场强 $B_{\mathrm{mir}} = B_0/\sin^2\alpha_0$。

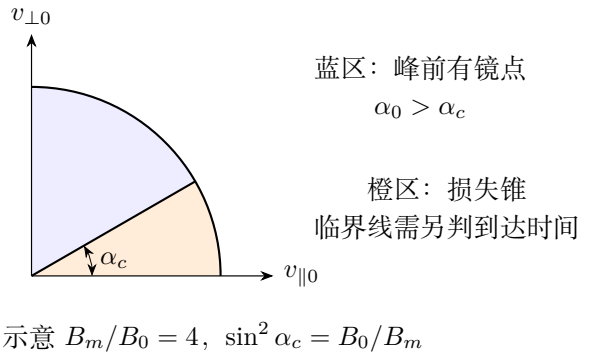


图 4.37: 同一总速率圆弧上的俯仰角决定镜点条件；临界线与有限时间反射须分别讨论

损失锥与临界角

图 4.37 的强场端能达到该镜点，要求 $B_{\mathrm{mir}} \le B_m$，即 $\sin^2\alpha_0 \ge B_0/B_m$。对向该端运动的 $0 \le \alpha_0 < \pi/2$，临界角 $\alpha_c = \arcsin\sqrt{B_0/B_m}$，小于它的方向落入损失锥。若要求在峰值之前出现普通转折点并在有限时间反射，应取严格范围

$\alpha_c < \alpha_0 < \pi/2$。等号 $\alpha_0 = \alpha_c$ 对应镜点位于最大场处；若峰顶光滑且非退化，平行速率按到峰顶距离的一次方趋零，时间对数发散，粒子渐近靠近场峰。

例 4.11 (抛物型磁瓶的轴向振动)**.** 近轴磁场为 $B(z) = B_0(1 + z^2/L^2)$，粒子在 $z = 0$ 的横向、平行速度为 $v_{\perp 0}, v_{\parallel 0}$，其中 $v_{\perp 0} > 0$。在绝热近似下求轴向运动频率与镜点位置。

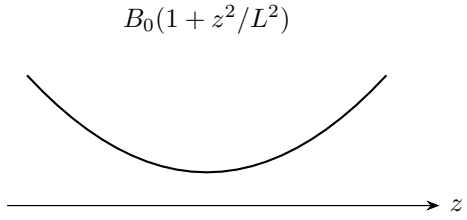


图 4.38: 题设：抛物型磁瓶的轴向振动

解　轴向的回复力

图 4.38 中心磁矩 $\mu = mv_{\perp 0}^2/(2B_0)$。轴向平均力 $F_z = -\mu\,\mathrm{d}B/\,\mathrm{d}z = -2\mu B_0 z/L^2$，故 $m\ddot{z} + (2\mu B_0/L^2)z = 0$，是关于中心的简谐运动。

$$\omega_z = v_{\perp 0}/L, \quad z_m = L|v_{\parallel 0}|/v_{\perp 0}$$

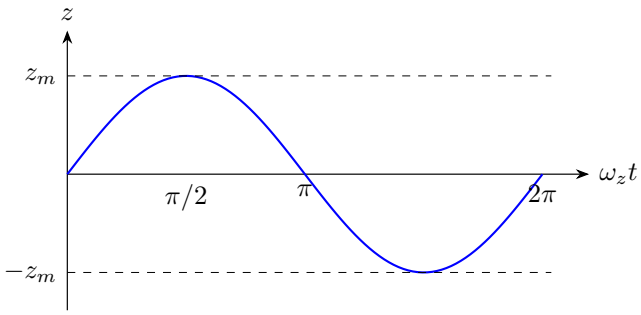


图 4.39: 轴向运动是具有两个镜点的简谐振动，图示 $v_{\parallel 0} > 0$ 的相位

振幅与镜点

由图 4.39，角频率 $\omega_z = \sqrt{2\mu B_0/(mL^2)} = v_{\perp 0}/L$，频率 $f_z = v_{\perp 0}/(2\pi L)$。在 $m\ddot{z} + (2\mu B_0/L^2)z = 0$ 中令 $z = \mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $\dot{z} = s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot{z} = s^2\mathrm{e}^{st}$，代回得 $(s^2+\omega_z^2)\mathrm{e}^{st} = 0$, 故特征方程为 $s^2+\omega_z^2 = 0$, 因此实通解为 $z = A\cos\omega_z t + D\sin\omega_z t$。求导得 $\dot{z} = -A\omega_z \sin\omega_z t + D\omega_z \cos\omega_z t$。从 $z(0) = 0, \dot{z}(0) = v_{\parallel 0}$ 得 $A = 0, D = v_{\parallel 0}/\omega_z$，所以 $z = (v_{\parallel 0}/\omega_z)\sin\omega_z t$。令 $\dot{z} = v_{\parallel 0}\cos\omega_z t = 0$，非零振幅时镜点对应正弦为 ± 1，故 $|z_m| = |v_{\parallel 0}|/\omega_z = L|v_{\parallel 0}|/v_{\perp 0}$。

缓变条件

这个轴向方程用于回旋频率远大于 ω_z、且全程磁场缓变的近轴运动。$v_{\parallel 0}=0$ 对应零振幅，粒子在中央保持回旋。

例 4.12 (任意初速在漂移系中的回旋)**.** 恒定均匀电场与磁场互相垂直，忽略其他力。粒子初速为任意 $\boldsymbol{v}_0$，证明其垂直运动是漂移加圆周，并求一周期内的平均速度和净电功。

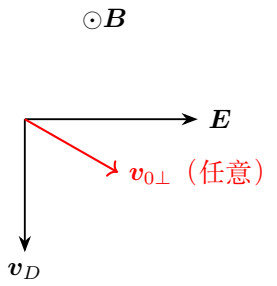


图 4.40: 题设：任意初速在漂移系中的回旋

解　初始相对速度

图 4.40 令 $\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2$，则 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}_D\times\boldsymbol{B}=0$。写 $\boldsymbol{v}_\perp=\boldsymbol{v}_D+\boldsymbol{u}$，运动方程化为 $m\dot{\boldsymbol{u}}=q\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，取 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z$，并定义带符号的 $\omega=qB/m$，则 $\dot u_x=\omega u_y,\dot u_y=-\omega u_x$。再次求导得 $\ddot u_x=\omega\dot u_y=-\omega^2u_x$。试取 $u_x=e^{st}$，两次导数为 se^{st},s^2e^{st}，代回得 $s^2+\omega^2=0$，根为 $\pm\mathrm{i}\omega$。通解 $u_x=A\cos\omega t+D\sin\omega t$ 的导数为 $\dot u_x=-A\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t$。初值 $u_x(0)=u_{x0}$ 给 $A=u_{x0}$，$\dot u_x(0)=\omega u_{y0}$ 给 $D=u_{y0}$，再用 $u_y=\dot u_x/\omega$，得到

$$u_x=u_{x0}\cos\omega t+u_{y0}\sin\omega t,\qquad u_y=u_{y0}\cos\omega t-u_{x0}\sin\omega t.$$

平方相加，交叉项消去，得 $u_x^2+u_y^2=u_{x0}^2+u_{y0}^2$，所以 $|\boldsymbol{u}|$ 不变、在垂直平面匀速转动，初值 $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{v}_{0\perp}-\boldsymbol{v}_D$ 决定回旋半径 $m|\boldsymbol{u}_0|/(|q|B)$。

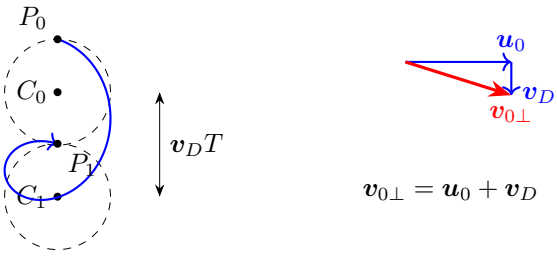


图 4.41: 同一回旋相位一周后复原，整个回旋中心平移；图示非零初始回旋速度的一例

一周后的位移和电功

按图 4.41 取回旋时间尺度 $T = 2\pi/|\omega|$。若初始相对速度为零，回旋半径为零，粒子以漂移速度和轴向速度作匀速直线运动。对任一初态，

$$\int_0^T u_x \,\mathrm{d}t = \left[\frac{u_{x0}}{\omega}\sin\omega t - \frac{u_{y0}}{\omega}\cos\omega t\right]_0^T = 0,$$

$$\int_0^T u_y \,\mathrm{d}t = \left[\frac{u_{y0}}{\omega}\sin\omega t + \frac{u_{x0}}{\omega}\cos\omega t\right]_0^T = 0.$$

因此回旋一周期的位移为零，故垂直平均速度是 $\boldsymbol{v}_D$；若初速含沿场分量，再加不变的 $\boldsymbol{v}_{0\parallel}$。整周净电功 $q\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{v}_D T + \boldsymbol{v}_{0\parallel} T) = 0$，因为电场同时垂直这两个分量。瞬时动能可以振荡，只有初始 $\boldsymbol{u}_0 = 0$ 时才始终直线匀速。这个分解比把所有初速都画成同一条标准摆线更一般。

例 4.13 (重力与磁场共同作用下的水平漂移)**.** 正粒子质量 m、电荷 q，在竖直 xy 平面从原点静止释放，重力向 $-y$，磁场 B 垂直纸面向外。求运动方程、平均漂移速度与最大下降高度，忽略空气阻力。

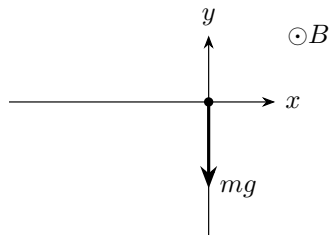


图 4.42: 题设：重力与磁场共同作用下的水平漂移

解　速度与坐标

按图 4.42 的坐标，$m\dot v_x = qBv_y$，$m\dot v_y = -mg - qBv_x$。定义 $\Omega = qB/m$，$V = mg/(qB)$。取 $u_x = v_x + V$，则 $\dot u_x = \Omega v_y$，$\dot v_y = -\Omega u_x$，初始 $u_x(0) = V$、$v_y(0) = 0$。对 $\dot u_x = \Omega v_y$ 再求导，得 $\ddot u_x = \Omega \dot v_y = -\Omega^2 u_x$。试取 $u_x = e^{st}$，两次求导为 se^{st}, s^2e^{st}，代回得 $s^2 + \Omega^2 = 0$，特征根为 $\pm \mathrm{i}\Omega$，通解 $u_x = A\cos\Omega t + D\sin\Omega t$；求导得 $\dot u_x = -A\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t$，初值 $u_x(0) = V, \dot u_x(0) = 0$ 给 $A = V, D = 0$。因此 $v_x = V(\cos\Omega t - 1)$，$v_y = \dot u_x/\Omega = -V\sin\Omega t$。积分并用初始位置为零，

$$x = V\int_0^t (\cos\Omega s - 1)\,\mathrm{d}s = V[\sin\Omega s/\Omega - s]_0^t,$$
$$y = -V\int_0^t \sin\Omega s\,\mathrm{d}s = \frac{V}{\Omega}[\cos\Omega s]_0^t.$$

即

$$x = \frac{V}{\Omega}\sin\Omega t - Vt, \qquad y = \frac{V}{\Omega}(\cos\Omega t - 1).$$

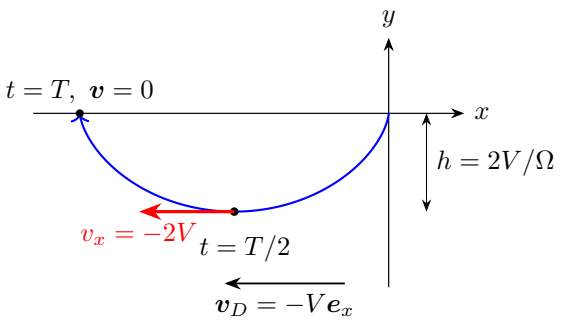


图 4.43: 沿原坐标画出重力漂移的实际旋轮线，最低点仍有水平速率，整周尖点才瞬时静止

平均漂移和最低点

图 4.43 每经过 $T = 2\pi/\Omega$，相对回旋中心的位移复原，平均速度为 $-V\boldsymbol{e}_x$，与 $m\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{B}/(qB^2)$ 一致。最大下降为 $h = 2V/\Omega = 2m^2g/(q^2B^2)$，在 $\Omega t = \pi$ 时首次达到。此刻 $v_x = -2V, v_y = 0$，故动能 $2mV^2 = mgh$，与重力功完全相等；磁场仅改变轨迹方向。图 4.43 中波谷处粒子仍向左运动，一周终点的尖点才是速度为零的位置。

例 4.14 (磁镜峰顶的临界到达时间)**.** 绝热磁镜近轴场的峰顶附近 $B(z)=B_m-a(z-z_m)^2$，$a>0$。粒子磁矩 $\mu>0$，总动能恰为 $K=\mu B_m$，从 $z<z_m$ 向峰顶运动。求峰顶附近的位置随时间的变化，判断是否在有限时间反射。

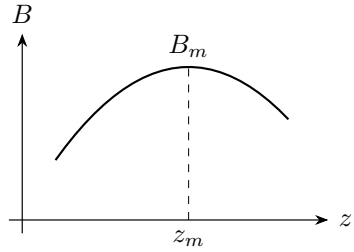


图 4.44: 题设：磁镜峰顶的临界到达时间

解　峰顶附近的运动方程

图 4.44 的能量关系给出 $mv_\parallel^2/2=K-\mu B=\mu a(z_m-z)^2$。入射粒子取正向速率，记 $\kappa=\sqrt{2\mu a/m}$，则 $\dot z=\kappa(z_m-z)$。以 $s=z_m-z>0$ 表示峰顶距离，有 $\dot s=-\kappa s$。在峰前 $s>0$，分离变量并使用初值，

$$\int_{s(t_0)}^{s(t)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=-\kappa\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\tau,\qquad [\ln\xi]_{s(t_0)}^{s(t)}=-\kappa[\tau]_{t_0}^{t}.$$

因此 $\ln[s(t)/s(t_0)]=-\kappa(t-t_0)$，取指数后

$$s(t)=s(t_0)e^{-\kappa(t-t_0)},\qquad z(t)=z_m-s(t_0)e^{-\kappa(t-t_0)}.$$

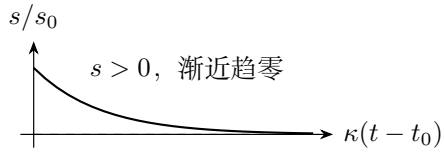


图 4.45: 解答过程：磁镜峰顶的临界到达时间

趋近峰顶的时间

图 4.45 中距离始终为正，只在 $t\to\infty$ 时趋零。等价地，从 s_0 到 s 的时间为 $\kappa^{-1}\ln(s_0/s)$，在 $s\to0$ 时发散。因此临界粒子始终在峰前，随时间渐近趋向 z_m。

4.12　本讲小结

沿磁场的速度由同向恒力改变，垂直速度可分成回旋和漂移。交叉场中的电漂移为 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/B^2$，速度选择器使沿选定方向入射的粒子以 E/B 直线通过。恒力也可产生漂移，重力漂移的方向随电荷反向。

霍尔电压来自横向电力与磁力的平衡。电流方向固定时，正载流子和电子积累在同一侧，电压极性相反。写出截面和触点位置，就能确定读数的符号和分母中的长度。

在缓变磁场中，回旋磁矩的大小近似保持恒定。粒子进入强场，垂直动能增加，平行动能减少；普通镜点处粒子在有限时间内返回，光滑峰顶的临界轨迹则渐近到达。

4.13　练习

练习 4.1 (霍尔测量反求载流子密度)**.** 矩形样品沿电流方向长 L，截面宽 w、厚 t。电流 I 沿长方向，磁场 B 垂直宽面，霍尔电压跨宽 w 测量。测得纵向电阻 R 与霍尔电压大小 U_H。在单一电子载流模型中求 n、电导率与迁移率。

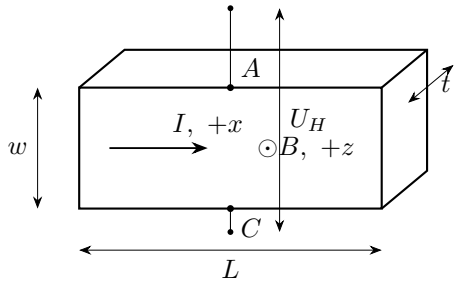


图 4.46: 霍尔电压跨宽度 w，磁场沿厚度 t；纵向电阻沿 L 测量

练习 4.2 (电荷反向与速度反向的偏转)**.** 正粒子在给定电场、磁场中以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 无偏转通过，且 $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$。分别将电荷反向、将速度反向、同时将两者反向，判断初始合力。

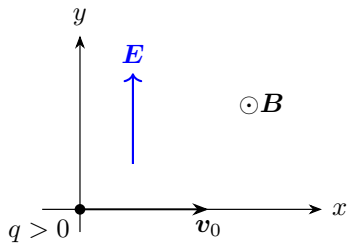


图 4.47: 统一采用 $\boldsymbol{v}_0$ 向右、$\boldsymbol{E}$ 向上、$\boldsymbol{B}$ 向外的方向约定

练习 4.3 (摆线运动一周期的位移与电功)**.** 正粒子从静止释放于 $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$。求首次速度再次为零时的位移及电场净功；说明在此前动能是否始终为零。

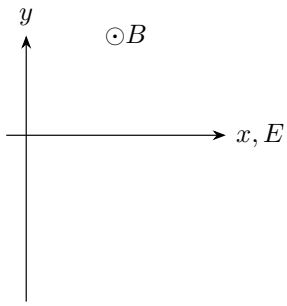


图 4.48: 题设：摆线运动一周期的位移与电功

练习 4.4 (水平圆轨道的存在性判断)**.** 正电荷在正中心电荷、向上均匀磁场及重力中作水平圆周运动。角速度为 ω，定义 $D = qB\omega - m\omega^2$。已由平衡式得到 $h = mg/D$、$s = (k_eQq/D)^{1/3}$。求非零半径存在的约束，并说明 $D > 0$ 是否已经足够。

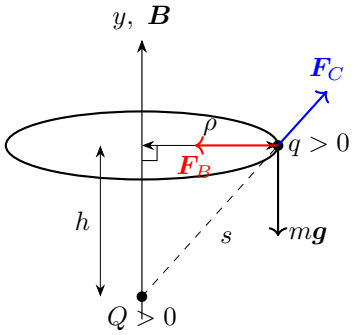


图 4.49: 圆半径 ρ、高度 h 和到中心电荷的距离 s 构成直角三角形

练习 4.5 (旋轮线有无回绕的条件)**.** 在垂直均匀电磁场中，以 x 方向作为漂移正向，漂移速率为 $V = E/B$。粒子初速度也沿 x，大小 $v_0 \geq 0$。求实验室轨迹沿 x 的速度是否会反向，区分平滑推进、尖点和回绕三种情形。

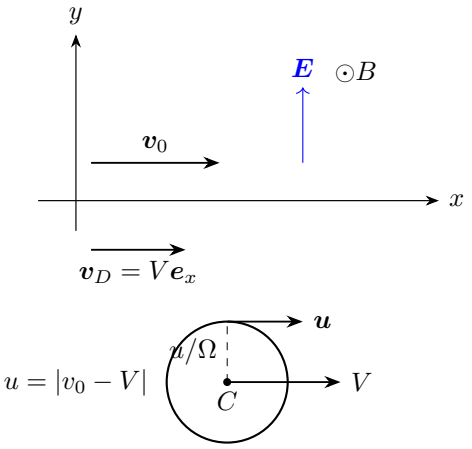
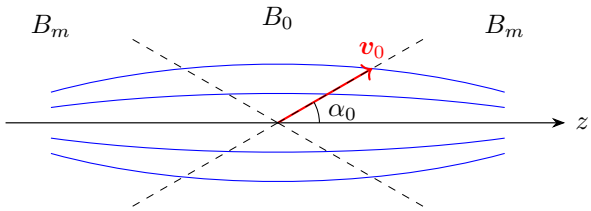


图 4.50: 在漂移系中分解初速度，再将相对圆周运动叠加到向右平移的导引中心上

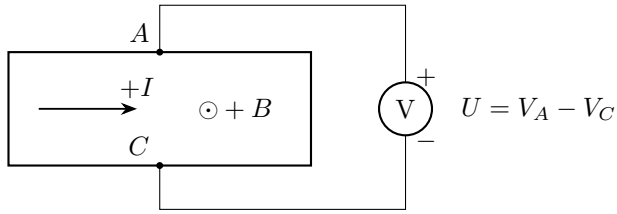
练习 4.6 (各向同性粒子的磁瓶损失比例)**.** 磁瓶中央场为 B_0，两端最大场均为 B_m。初始速度方向在空间各向同性，速率相同。在绝热近似下，求能从任一端逃逸的初始方向比例，忽略碰撞补充损失锥。



中央速度方向在整个球面上均匀分布

图 4.51: 两端场强升高；中央速度与左右轴向的夹角分别决定两端的损失锥

练习 4.7 (反转磁场分离霍尔电压)**.** 电压表正接线端接 A，负接线端接 C。测得横向电压含固定偏置 U_0 与霍尔项 kIB，即 $U(I,B)=U_0+kIB$。给出 $\pm I,\pm B$ 四组测量值，构造能够消去固定偏置并保留霍尔项的组合，说明能否同时消去任意随 I^2 变化的偶项。



四组输入：$(+I,+B),(+I,-B),(-I,+B),(-I,-B)$

图 4.52: 电流与磁场反向时，横向电压始终采用同一对端子的 $U=V_A-V_C$

练习 4.8 (磁镜与缓变静电势共同反射)**.** 粒子进入缓变磁场，初场 B_0，初平行能量 $K_{\parallel 0}$，磁矩不变量为 $\mu > 0$。沿途电势满足 $\varphi - \varphi_0 = \lambda(B - B_0)$，粒子带有符号电荷 q。求镜点场强及能够反射的条件。

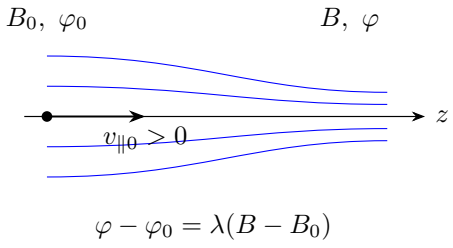


图 4.53: 沿导引中心路径同时记录 $B(z)$ 与电势；电荷 q 保留符号

练习解答

练习 4.1

解　载流子密度

图 4.46 中 B 沿厚度方向，电流穿过截面 wt，横向电压端的间距为 w。单一电子模型给出

$$v_d = \frac{I}{newt}, \qquad U_H = v_d B w = \frac{IB}{net}, \qquad \boxed{n = \frac{IB}{etU_H}}.$$

这里 U_H 是大小；载流子正负需要另由端子极性判断。

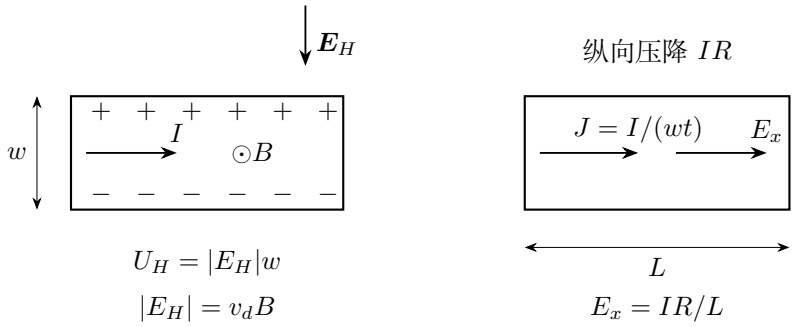


图 4.54: 横向霍尔平衡与纵向欧姆测量使用不同的长度

电导率

图 4.54 左图将电流密度写成 $J = I/(wt)$。纵向电场由两端压降 IR 除以长度 L 得到，故

$$\sigma = \frac{J}{E_x} = \frac{I/(wt)}{IR/L} = \boxed{\frac{L}{Rwt}}.$$

迁移率

再由单一载流子模型 $\sigma = ne\mu$，得到

$$\boxed{\mu = \frac{LU_H}{RwIB}}.$$

横向电压中的 w 在求 n 时约去，磁场方向的长度 t 保留；代入迁移率后 t 又约去。图中的两种测量方向决定这些消去关系。要求样品均匀、横向稳态且单一载流子近似成立。

练习 4.2

解　初始的两种场力

由图 4.47 的方向约定，$\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}$ 向下，而 $\boldsymbol{E}$ 向上。原来无偏转给出

$$\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B} = 0.$$

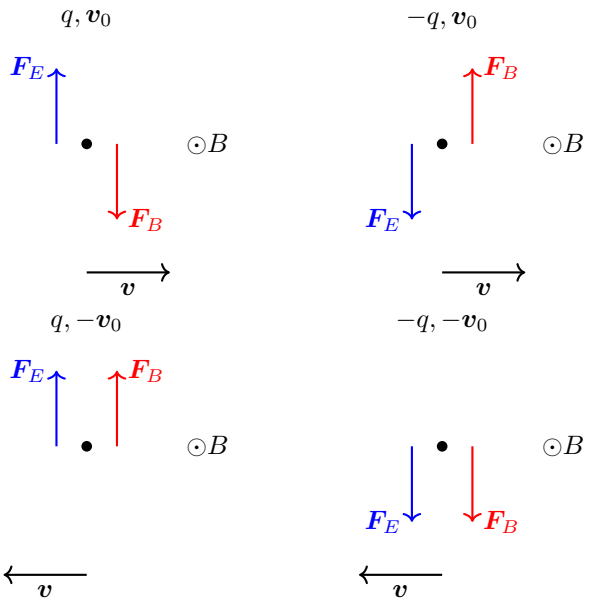


图 4.55: 沿题设同一坐标约定，分别重画三次反向后的电力和磁力

改变电荷或速度

图 4.55 左上到右上，只把 q 改为 $-q$，电力、磁力同时反向，仍相互抵消，故 $\boldsymbol{F}=0$。

左下仅把速度反向：电力不变，磁力由向下变为向上，因而

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B})=\boxed{2q\boldsymbol{E}}.$$

右下同时反转电荷和速度：磁力经历两次变号而回到原方向，电力反向，两力均向下，得到 $\boxed{\boldsymbol{F}=-2q\boldsymbol{E}}$。

初始合力

图中各式以原粒子的正电荷量 q 为基准。

练习 4.3

解　速度第一次回零

按图 4.48 取 $\Omega=qB/m>0$、$V=E/B$，从静止开始的速度为

$$v_x=V\sin\Omega t,\qquad v_y=V(\cos\Omega t-1).$$

两速度分量同时为零时，$\sin\Omega t=0$ 且 $\cos\Omega t=1$，所以首次再次静止为 $T=2\pi/\Omega$；半周时只有 $v_x=0$。

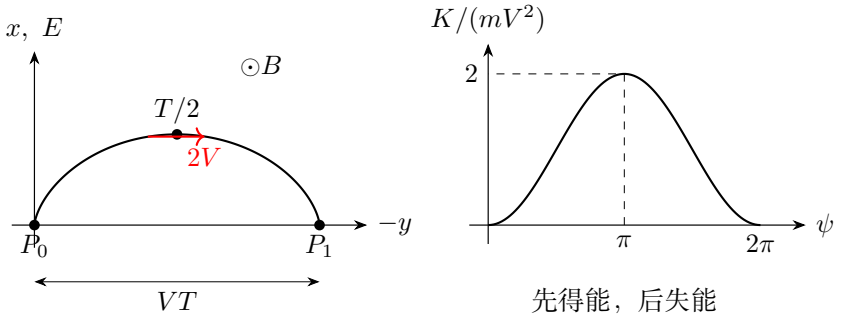


图 4.56: 摆线的实际节距与一周期的动能变化；两图相位一一对应

整周位移和电功

由图 4.56 左侧摆线，令 $\psi=\Omega t$，位置积分中用 $\eta=\Omega s$、$\mathrm{d}s=\mathrm{d}\eta/\Omega$，上下限由 $0,t$ 变为 $0,\psi$：

$$x=\frac{V}{\Omega}\int_0^{\psi}\sin\eta\,\mathrm{d}\eta=\frac{V}{\Omega}[-\cos\eta]_0^{\psi},\qquad y=\frac{V}{\Omega}\int_0^{\psi}(\cos\eta-1)\,\mathrm{d}\eta=\frac{V}{\Omega}[\sin\eta-\eta]_0^{\psi}.$$

所以

$$x=\frac{V}{\Omega}(1-\cos\psi),\qquad y=\frac{V}{\Omega}(\sin\psi-\psi).$$

末点 P_1 回到 $x=0$，沿 $-y$ 平移一个节距，故

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{r}=-VT\boldsymbol{e}_y=-\frac{2\pi mE}{qB^2}\boldsymbol{e}_y}.$$

电场沿 x，所以 $W_E=qE\Delta x=0$，与末初动能均为零一致。

周内动能

图 4.56 右图显示中途

$$K=\tfrac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)=mV^2(1-\cos\psi),\qquad K(T/2)=2mV^2>0.$$

前半周 $v_x>0$，电场做正功；后半周 $v_x<0$，电场做负功。整周净功为零。

练习 4.4

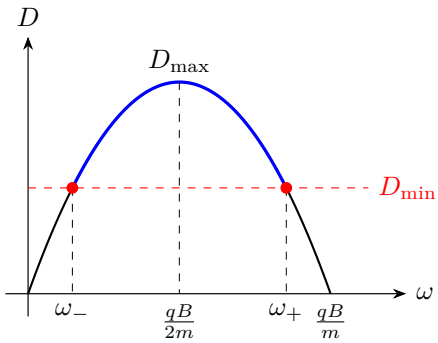
解　圆轨道所需的力

图 4.49 中 $s^2=h^2+\rho^2$，非零水平圆周要求 $s>h>0$。因 $h=mg/D$，先有 $D>0$；再比较

$$\left(\frac{k_eQq}{D}\right)^{2/3}>\frac{m^2g^2}{D^2}\quad\Longrightarrow\quad k_eQqD^2>m^3g^3.$$

因此真正的下界为

$$\boxed{D>D_{\min},\qquad D_{\min}=\sqrt{\frac{m^3g^3}{k_eQq}}}.$$



蓝弧内部才满足 $s>h$

图 4.57: 严格下界截出的角速度开区间；两端均退化为零半径

允许的最大值

图 4.57 的抛物线 $D(\omega)=qB\omega-m\omega^2$ 满足 $D'(\omega)=qB-2m\omega$、$D''(\omega)=-2m<0$，故在导数为零的 $\omega=qB/(2m)$ 取最大值 $(qB)^2/(4m)$。存在允许角速度的条件是

$$\boxed{\frac{(qB)^2}{4m}>D_{\min}}.$$

角速度范围

将严格不等式先配方，

$$qB\omega-m\omega^2>D_{\min}\iff\left(\omega-\frac{qB}{2m}\right)^2<\frac{(qB)^2-4mD_{\min}}{4m^2}.$$

右端为正时，开平方得到中心 $qB/(2m)$ 两侧的两个端点。图 4.57 中，水平线与抛物线交于 ω_-,ω_+，两交点之间的曲线在 $D_{\min}$ 上方。故允许范围为

$$\boxed{\omega_-<\omega<\omega_+,\qquad \omega_\pm=\frac{qB\pm\sqrt{(qB)^2-4mD_{\min}}}{2m}}.$$

两端均不包含：$D=D_{\min}$ 时 $s=h$、$\rho=0$，轨道退化；最大值若等于或小于下界，则所有角速度对应的高度与距离均无法形成所需直角三角形。

练习 4.5

解　速度和位置

按图 4.50 取 $\boldsymbol{B}=B\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{e}_y$，以正电荷为例。令 $\Omega=qB/m>0$、$u_x=v_x-V$。由洛伦兹力的两个分量，$\dot u_x=\Omega v_y$，$\dot v_y=-\Omega u_x$，故 $\ddot u_x=\Omega\dot v_y=-\Omega^2u_x$。试取 $u_x=e^{st}$，两次求导得 se^{st},s^2e^{st}，代入有 $s^2+\Omega^2=0$。由根 $\pm\mathrm{i}\Omega$ 写出

$$u_x=A\cos\Omega t+D\sin\Omega t,\qquad \dot u_x=-A\Omega\sin\Omega t+D\Omega\cos\Omega t.$$

初态 $u_x(0)=v_0-V$，$\dot u_x(0)=\Omega v_y(0)=0$ 给出 $A=v_0-V,D=0$。把 V 加回 x 分量，再用 $v_y=\dot u_x/\Omega$，得到

$$v_x=V+(v_0-V)\cos\Omega t,\qquad v_y=-(v_0-V)\sin\Omega t.$$

由速度曲线求轨迹坐标

取出发点为原点，记 $\psi=\Omega t$，$\lambda=(v_0-V)/V$。图 4.50 中的匀速漂移只增加 x 坐标，回旋同时改变 x,y。分别积分，

$$x=\int_0^t v_x(s)\,\mathrm{d}s=[Vs+(v_0-V)\sin(\Omega s)/\Omega]_0^t=\frac{V}{\Omega}(\psi+\lambda\sin\psi),$$
$$y=\int_0^t v_y(s)\,\mathrm{d}s=[(v_0-V)\cos(\Omega s)/\Omega]_0^t=\frac{V\lambda}{\Omega}(\cos\psi-1).$$

负电荷的回旋方向反过来，所得轨迹关于 x 轴成镜像。

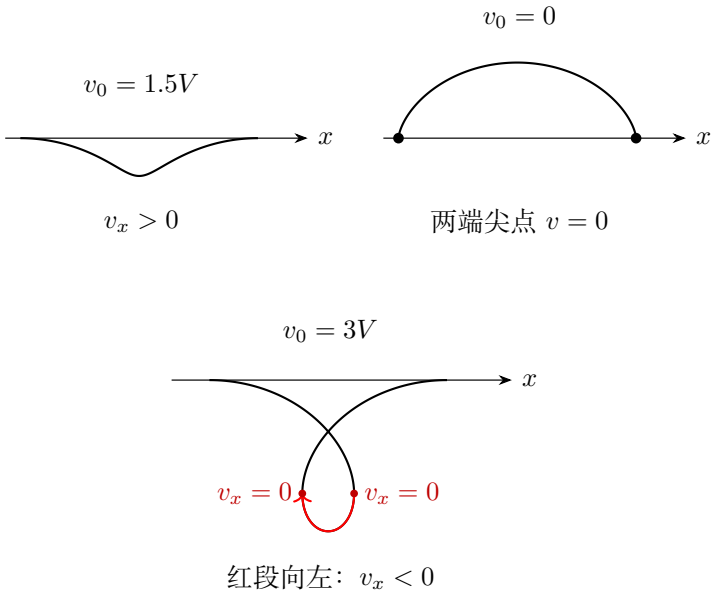


图 4.58: 同一漂移速率下的平滑轨迹、尖点轨迹与回绕轨迹

尖点和回绕

图 4.58 中各轨迹共用漂移速度 V。当 $0 < v_0 < 2V$，$\min v_x = V - |v_0 - V| > 0$，轨迹平滑推进，$v_0 = V$ 时为直线。当 $v_0 = 0$ 或 $2V$，v_x 为零时 v_y 也为零，尖点分别在出发处或半周后。$v_0 > 2V$ 时 $\lambda > 1$，图中红段的两端满足 $\cos\psi = -1/\lambda$，那里 $v_y \neq 0$，切线为竖直方向。红段中 $v_x < 0$，粒子短时向左运动。

为看出回绕确实闭合到自身，取 $\psi = \pi - s$ 和 $\pi + s$，$0 < s < \pi$。两时刻的 y 相同，x 坐标之差为 $(2V/\Omega)(s - \lambda \sin s)$。函数 $f(s) = \lambda \sin s - s$ 满足 $f(0) = 0$，$f'(0) = \lambda - 1 > 0$，$f(\pi) = -\pi$，所以在 $(0, \pi)$ 内存在一个非零根。这两个不同的时刻通过同一点，形成图下方的回绕。

练习 4.6

解　两个方向的损失锥

图 4.51 的两端镜比相同，设 $B_m > B_0$。每端损失锥半角为

$$\sin^2 \alpha_c = \frac{B_0}{B_m}, \qquad 0 < \alpha_c < \frac{\pi}{2}.$$

朝向右端且夹角小于 α_c 的方向，以及朝向左端的相应方向，构成速度球上的两个球冠。

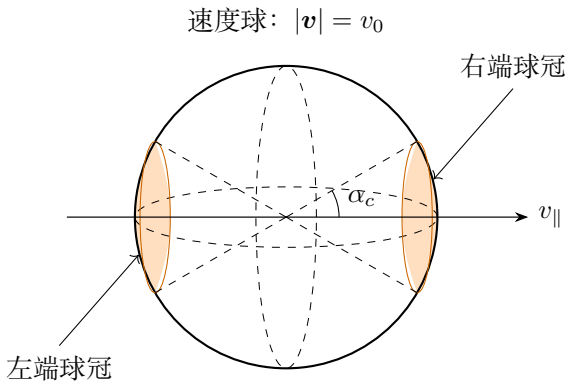


图 4.59: 两端损失锥在速度球上截出两个球冠；按立体角求比例

对速度方向积分

图 4.59 中，与轴夹角为 α 的细纬带面积正比于 $\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$。各向同性对应单位立体角人数相同，因此单个球冠为

$$\Omega_{\mathrm{cap}} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha_c}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = [\varphi]_0^{2\pi}[-\cos\alpha]_0^{\alpha_c} = 2\pi(1-\cos\alpha_c).$$

两端球冠面积相同且不重叠，除以全空间 4π，得到

$$\boxed{f_{\mathrm{loss}} = \frac{2\Omega_{\mathrm{cap}}}{4\pi} = 1-\sqrt{1-\frac{B_0}{B_m}}}.$$

损失比例的极限

令 $\epsilon = B_0/B_m$。函数 $F(\epsilon) = 1-\sqrt{1-\epsilon}$ 满足

$$F(0) = 0, \qquad F'(\epsilon) = -\frac{1}{2}(1-\epsilon)^{-1/2}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{1-\epsilon}}, \qquad F'(0) = \frac{1}{2}.$$

因此大镜比对应 $\epsilon \ll 1$，有 $f_{\mathrm{loss}} = \epsilon/2 + O(\epsilon^2) \simeq B_0/(2B_m)$。临界锥面本身的立体角为零；即使光滑峰值处的临界到达时间发散，也不改变上述初始方向比例。若 $B_m = B_0$，没有镜约束，除零测度的垂直方向外均可轴向离开，极限 $f_{\mathrm{loss}} = 1$ 正确。

练习 4.7

解　四组电压读数

按图 4.52，四次测量始终记录 $V_A - V_C$，电压表的正、负接线端始终接在 A, C。以 I, B 表示正的大小，四个读数为

$$U_{++} = U_0 + kIB, \quad U_{+-} = U_0 - kIB,$$
$$U_{-+} = U_0 - kIB, \quad U_{--} = U_0 + kIB.$$

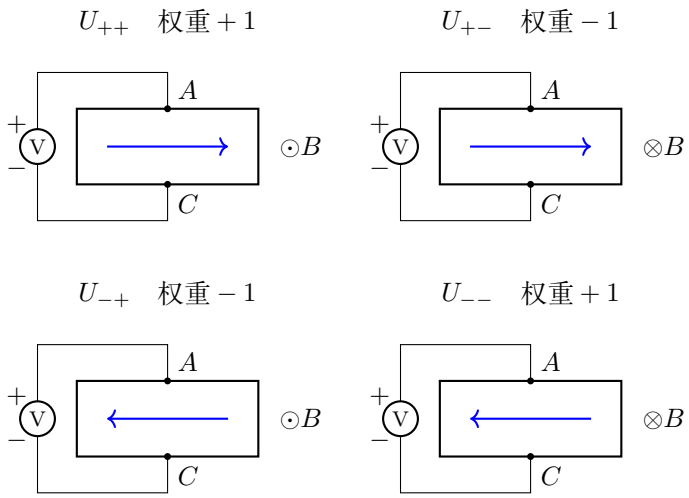


图 4.60: 四组反向测量的实际接线、场向、电流向及组合权重

先反电流再反磁场

图 4.60 中，先在各固定磁场下取电流反向差，再取磁场反向差，得到

$$\boxed{U_H = \frac{(U_{++} - U_{-+}) - (U_{+-} - U_{--})}{4} = kIB}.$$

固定偏置的总系数为 $1 - 1 - 1 + 1 = 0$，而霍尔项的四个贡献同号相加。

保留的电压项

任意电流偶项 $f(I^2, B)$ 在同一磁场下满足 $f((+I)^2, B) = f((-I)^2, B)$，所以第一步电流差就将其消去，其随 B 的变化可以任意。第二步磁场差还会消去电流奇、磁场偶的项。对 I 和 B 都为奇的干扰项将与霍尔信号一起保留。上述消去要求四次测量采用相同的 $|I|, |B|$，且样品与固定偏置在测量期间保持稳定。

练习 4.8

解　轴向有效势能

图 4.53 中，将沿导引中心路径的场强、电势一起代入守恒总能量：

$$K_{\parallel} + \mu B + q\varphi = K_{\parallel 0} + \mu B_0 + q\varphi_0.$$

用题给电势关系，并令 $A = \mu + q\lambda$，得到

$$\boxed{K_{\parallel} = K_{\parallel 0} - A(B - B_0)}.$$

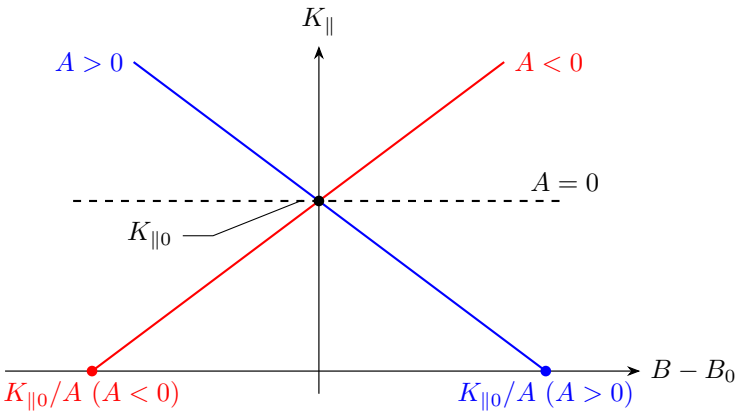


图 4.61: 有效系数 $A = \mu + q\lambda$ 决定平行能量随场强变化的斜率

镜点的位置

取进入时 $K_{\parallel 0} > 0$。当 $A \neq 0$，候选镜点满足

$$\boxed{B_{\mathrm{mir}} = B_0 + \frac{K_{\parallel 0}}{A}}.$$

图 4.61 中，向强场运动时，只有 $A > 0$ 的蓝线随 B 增加而下降，才可能到达零点；$A = 0$ 时平行能量不变，$A < 0$ 时反而增加。因此，向强场运动时，镜点条件是 $A > 0$ 且沿途场强能够达到 B_{mir}。

实际反射条件

沿图 4.61 的红线向左，弱场方向也可使平行能量减小。此时需在缓变场中到达 $0 < B_{\mathrm{mir}} < B_0$。两种情况下均取沿途首次使 $U_{\mathrm{eff}} = A(B - B_0)$ 升到 $K_{\parallel 0}$ 的位置。若上升斜率非零，粒子在有限时间转向。若恰在 U_{eff} 的光滑非退化峰顶，粒子渐近接近该点。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第一讲

电磁感应定律与感生电场

2026

目录

第一讲　电磁感应定律与感生电场 **1**

1.1　电磁感应现象 1

1.2　磁通量、曲面与回路方向 2

1.3　法拉第定律与楞次定律 4

1.4　运动导体与电动势的分布 8

1.5　轴对称感生电场 11

1.6　例题与分析 14

1.7　本讲小结 27

1.8　练习 28

练习解答 31

第一讲　电磁感应定律与感生电场

1.1　电磁感应现象

把线圈接到灵敏电流计，再把条形磁铁插入线圈。插入时指针偏转，停住时回到零位，抽出时向相反方向偏转。图 1.1 以北极朝下为例，磁铁靠近线圈时，穿过线圈的向下磁通量增大。磁铁远离时，向下磁通量减小。两个过程的感应电流方向相反。

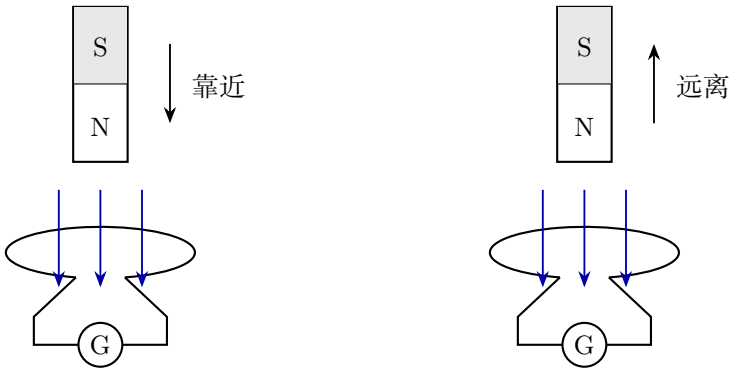


图 1.1: 同一磁铁靠近和远离闭合线圈。蓝箭头表示磁场穿过线圈的方向，黑箭头表示磁铁的运动方向

换用通电线圈也可以改变穿过另一只线圈的磁通。图 1.2 中，两只线圈都固定，只有左侧接电源。合上开关，左线圈的电流从零增大，右线圈中的电流计短时偏转。待左线圈的电流稳定，指针回到零位。断开时，左线圈的电流减小，指针向另一侧偏转。

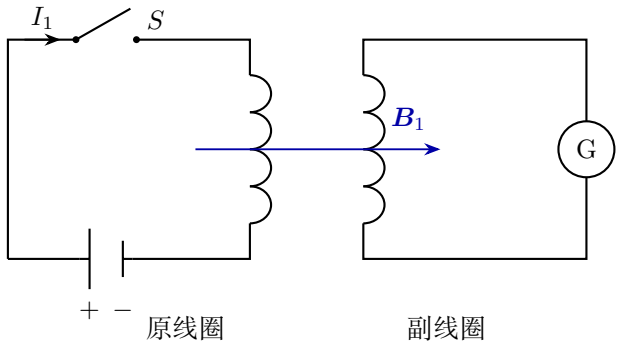


图 1.2: 原线圈接电源和开关，副线圈接电流计。两回路由共同穿过线圈的磁场联系

移动磁铁、改变原线圈电流，都能改变穿过闭合回路的磁通量。也可以让导棒在恒定磁场中滑动，用回路面积的改变产生电流。先规定磁通量的符号，再用它的变化率求电动势。

1.2　磁通量、曲面与回路方向

给曲面指定正法线 $\boldsymbol{n}$。小面元的磁通量为 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$，将各面元的有向磁通相加，得到

$$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{1.1}$$

均匀场中，面积为 S 的平面的正法线与磁场成角 θ，则 $\Phi=BS\cos\theta$。按图 1.3 沿回路的正向弯曲右手四指，拇指即指向正法线。导线随线圈一起翻转，规定的绕行方向也随之转动，法线从平行磁场转到反平行。初、末磁通分别为 BS 和 $-BS$，相差 $-2BS$。例 1.1 把这段有向变化用于平均电动势的计算。

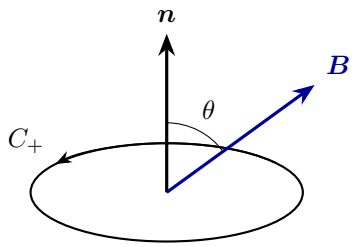
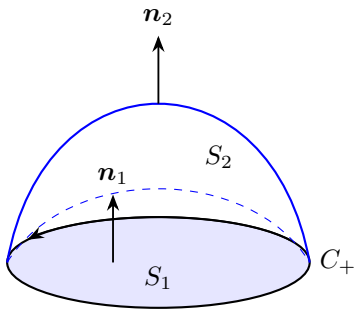


图 1.3: 回路正向、正法线与磁通量

取同一条闭合曲线 C 围成的两张曲面 S_1, S_2。先按同一个 C 正向确定各自法线。拼成闭合面时，拱面沿原法线，底面反向，如图 1.4。闭合面的总磁通为零，

$$0 = \oint_{S_2 - S_1} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Phi_2 - \Phi_1.$$

所以可以按积分方便选平面或曲面，所得磁通相同。



$\Phi_1 = \Phi_2$

闭合面外法线
在底面为 $-\boldsymbol{n}_1$

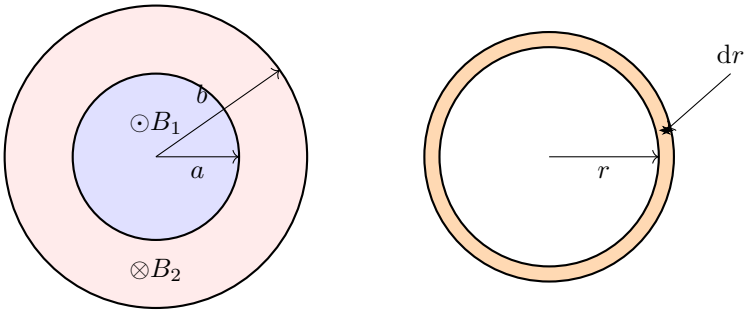
图 1.4: 同一边线的两张积分曲面；取闭合面外法线时使用 $S_2 - S_1$

若磁场不均匀，应把面分成磁场近似均匀的小片后求和。轴对称磁场中，半径 r 的薄圆环面积为 $2\pi r\,\mathrm{d}r$，因此圆盘磁通量为 $\int_0^a B_z(r) 2\pi r\,\mathrm{d}r$。若外圈处于回程磁场中，它增加的几何面积反而会使净磁通量减小。

例如内盘 $0 \le r < a$ 的场为 $+B_1\boldsymbol{e}_z$，外环 $a < r < b$ 的回程场为 $-B_2\boldsymbol{e}_z$，其中 $B_1, B_2 > 0$。图 1.5 取纸外正法线，有

$$\Phi(b) = \pi a^2 B_1 - \pi(b^2 - a^2) B_2.$$

把观察圆的半径记作 r。在 $a < r < b$，$\Phi(r) = \pi a^2 B_1 - \pi(r^2 - a^2) B_2$，对 r 求导有 $\mathrm{d}\Phi/\,\mathrm{d}r = -\pi B_2 (2r) = -2\pi r B_2 < 0$，说明净磁通随面积扩大反而减小；环带的负磁通从内盘的正磁通中扣除。



$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$

图 1.5: 正向内盘与反向外环按有向通量相加；薄环面元为 $2\pi r\,\mathrm{d}r$

1.3　法拉第定律与楞次定律

先考虑固定的闭合回路。沿已选定的正方向，法拉第定律为

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathcal{E} = \oint_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.2}$$

串联的多匝线圈中，先按接线规定的方向相加各匝的磁通，得磁链 $\Psi = \sum_{j=1}^{N}\Phi_j$。各匝磁通相同且绕向一致时，$\Psi = N\Phi$，总电动势为 $-\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。磁通单位为韦伯，$1\,\mathrm{Wb/s} = 1\,\mathrm{V}$。

负号给出感应电动势的方向。取纸外为正法线、逆时针为回路正向。若纸外磁通正在增加，$\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t > 0$，电动势沿反向。固定闭合电阻环中，电流顺时针，产生向纸内的场。若纸外磁通正在减小，电流改为逆时针，产生向纸外的场。楞次定律说的是感应电流产生的磁场阻碍原磁通的变化。

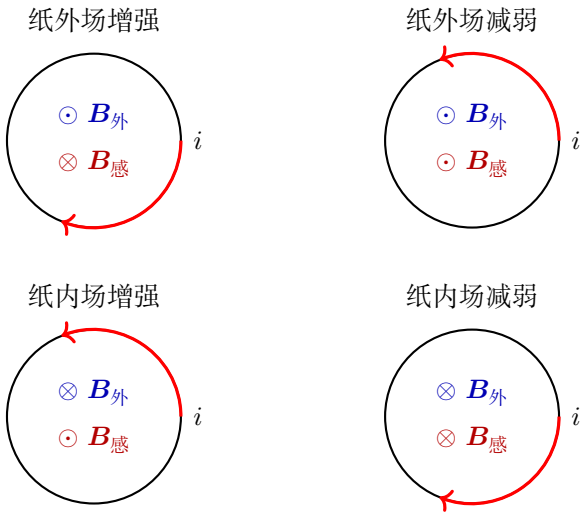


图 1.6: 同取纸外为正法线。蓝色符号表示外场方向，红色符号表示电阻环的感应场方向

图 1.6 四幅图的正法线都朝纸外。下排左图的外场指向纸内且正在增强，有向磁通变得更负，$\dot{\Phi} < 0$，所以电流为逆时针。下排右图的外场正在减弱，有向磁通从负值升高，电流为顺时针。固定电阻环中，外场增强时感应场与外场反向，外场减弱时二者同向。

电动势给出沿回路的驱动。回路闭合、电阻为 R 且可忽略自感时，$i = \mathcal{E}/R$。导线开路时，电荷重新分布，持续电流为零。带电感的回路中，电流由电路方程和初始状态共同决定。

磁通量对时间的斜率给出瞬时电动势的相反数。分段直线对应分段恒定的电动势，折点取两边的极限。一段时间内的有向平均电动势为 $-\Delta\Phi/\Delta t$。

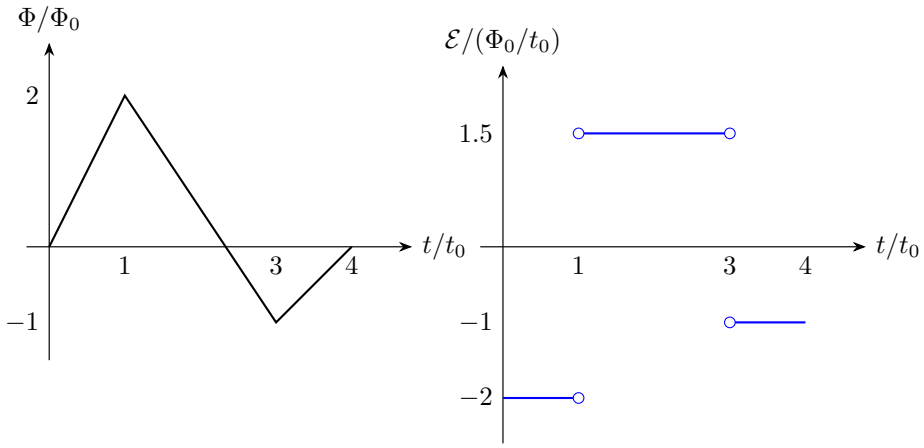


图 1.7: 从磁通折线的分段斜率求电动势；折点处给左右极限

图 1.7 中，三段斜率依次为 $2\Phi_0/t_0, -3\Phi_0/(2t_0), \Phi_0/t_0$，故电动势依次取其负值。全过程始末磁通相同，所以有向平均电动势为零，但各段电动势都非零。相邻平台的端点分别表示折点两侧的值。

例 1.2 给出随时间改变的磁通图。图线的切线斜率决定电动势大小；确定回路正向后，再用斜率的相反数判断感应电动势的方向。

1.3.1 多个因素同时变化时怎样求导

对始终平面的回路，若所围区域内的场均匀、各匝磁通相同，磁链为 $\Psi = NBS\cos\theta$。其中场强、面积和取向均可随时间改变。先对三个因子分别求导，

$$\dot{\Psi} = N[(\dot{B})S\cos\theta + B(\dot{S})\cos\theta + BS\ \mathrm{d}(\cos\theta)/\,\mathrm{d}t].$$

最后一项使用链式法则 $\mathrm{d}(\cos\theta)/\,\mathrm{d}t = -\sin\theta\,\dot{\theta}$，再取 $\mathcal{E} = -\dot{\Psi}$，有

$$\mathcal{E} = -N\big(\dot{B}S\cos\theta + B\dot{S}\cos\theta - BS\dot{\theta}\sin\theta\big).$$

三项分别对应磁场大小变化、面积变化和取向变化。线圈收缩且磁场增强时，两项可以抵消，例 1.4 给出这样的运动。若线圈变为曲面或场随位置变化，各匝磁通用面积分求取。

以图 1.8 的导棒为例，棒向右移动 $\mathrm{d}x$，新增面积为 $l\,\mathrm{d}x$。若磁场指向纸外而回路取逆时针正向，则 $\mathrm{d}\Phi = Bl\,\mathrm{d}x$，电动势为 $-Blv$，对应顺时针电流。沿右侧棒的回路正向是由下向上，而 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 向下，直接积分也给出同一个负号。这里通量变化与棒上积分都采用逆时针正向。

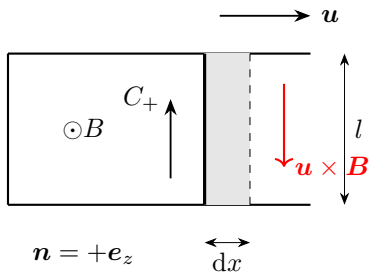


图 1.8: 导棒向右扫出 $l\,\mathrm{d}x$；沿回路正向向上积分，动生项为负

对随导线运动的回路，磁通变化来自场本身变化和导线扫过的面积。若一段 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 以速度 $\boldsymbol{u}$ 移动，在时间 $\mathrm{d}t$ 中扫过的有向面积是 $(\boldsymbol{u}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}t$。磁通的这一部分为

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{u}\times\mathrm{d}\boldsymbol{l})\,\mathrm{d}t=-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\;\mathrm{d}t.$$

图 1.8 中右边导棒向右、线元向上，叉积面积指向纸外。把各段的扫面积和固定曲面上的场变化相加，就得到后面的移动回路公式(1.4)。

1.3.2　电流、电量与热量使用不同的积分

自感可以忽略、总电阻恒定、又没有其他电源时，任意时刻有 $i=-\dot{\Phi}/R$。对时间积分，得到某一截面通过的有向电量

$$\begin{aligned}\Delta Q&=\int_{t_1}^{t_2} i\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{R}[\Phi(t)]_{t_1}^{t_2}\\&=-\frac{\Phi(t_2)-\Phi(t_1)}{R}.\end{aligned}$$

因此始末磁通给定时，有向电量与磁通变化的快慢无关。可是总共通过的电荷绝对量是 $\int|i|\,\mathrm{d}t$；若电流反向，这个量会大于有向电量的绝对值。总焦耳热则为 $\int i^2R\,\mathrm{d}t$，它随电流的时间分布而变。

电阻随回路长度改变时，有向电量为 $-\int\dot{\Phi}/R(t)\;\mathrm{d}t$。若电阻 R 和自感 L 都恒定，积分 $L\dot{i}+Ri=-\dot{\Phi}_{\text{外}}$ 得 $L[i]_{t_1}^{t_2}+R\Delta Q=-[\Phi_{\text{外}}]_{t_1}^{t_2}$，初末电流也参与决定有向电量。

图 1.9 比较两段线性变化。它们从同一初始磁通走到同一末态，第一段用时 T，第二段用时 $2T$。磁通斜率分别为 $\Delta\Phi/T$ 与 $\Delta\Phi/(2T)$，电流为 $i_1=-\Delta\Phi/(RT)$、$i_2=i_1/2$。两个电流矩形的有向面积相同。对电流平方分别积分，

$$Q_{J,T}=R\int_0^T i_1^2\;\mathrm{d}t=Ri_1^2[t]_0^T=\frac{(\Delta\Phi)^2}{RT},$$

$$Q_{J,2T}=R\int_0^{2T}(i_1/2)^2\;\mathrm{d}t=\frac{Ri_1^2}{4}[t]_0^{2T}=\frac{Q_{J,T}}{2}.$$

两段流过的电量相同，电流减半后，发热也减半。

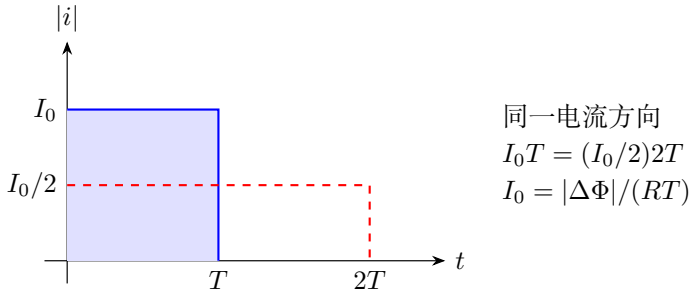


图 1.9: 电流时间图的面积决定电量，平方积分决定发热；两种变化有同一始末磁通

1.3.3 从磁通的阻碍关系到线圈受力

楞次定律决定感应电动势，线圈究竟怎样运动，还要使用受力或转矩关系。小平面线圈的磁矩为 $\boldsymbol{\mu} = iS\boldsymbol{n}$；它的方向由电流的右手定则确定，大小与电流、面积相乘有关。局部磁场在小线圈尺度上近似均匀时，磁力矩为 $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$。因此平行和反平行时力矩都为零，倾斜时才有转动趋势。在电流由外部维持、磁矩大小固定的条件下，反平行的平衡不稳定。

以 θ 表示磁矩正法线与磁场的夹角，规定使 θ 增大为正转向，得到 $\tau_\theta = -iSB\sin\theta$。$i$ 取沿规定回路方向的有向值。若外场增强导致 $i < 0$，转矩反而使 θ 增大，从而减小投影面积。这把“阻碍磁通变化”的定性语言落实到图中的转动方向。

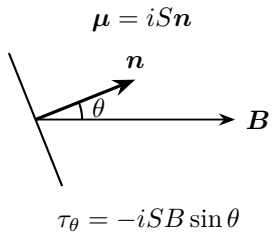


图 1.10: 倾斜线圈的正法线、磁矩与转矩

图 1.10 中的正法线由回路正向决定；$i > 0$ 时磁矩沿 $\boldsymbol{n}$，$i < 0$ 时反向。比较磁通变化时用 $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}$，判断力矩时用 $\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{B}$；线圈平面与场的夹角和法线与场的夹角互为余角。

在不均匀磁场中，相对两侧导线所受的安培力不再完全抵消，小线圈还会平移。在磁矩固定的微小位移中，磁相互作用势能为 $U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$；因此轴向磁矩在

轴向场中受到 $F_x = \mu_x \partial_x B$。这个近似要求线圈足够小，磁场在其范围内变化平缓。沿轴的力由有向磁矩与轴向梯度的乘积确定。

例如铁芯右侧的轴向场向右且向外减弱，$\partial_x B < 0$。磁矩向右时力向左，磁矩向左时力向右。若电源反接，外磁场与相应感应磁矩同时反向，初始力的方向可能保持不变。这正是接通任一极性的电源都能使被动金属环初始离开的原因。

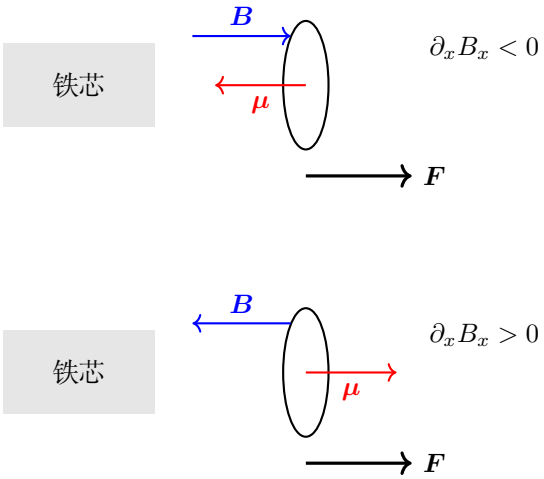


图 1.11: 接通任一极性时，外场与感应磁矩同时反向，环的初始力均指向场较弱的一侧

图 1.11 在两种接通极性下都取 x 向右。上图 $B_x > 0$ 且正在增强，感应磁矩 $\mu_x < 0$，故 $F_x = \mu_x \partial_x B_x > 0$；下图两者同时反号，乘积仍为正。

图中的力指金属环尚未离开初始位置时的趋势。环开始运动后，磁通随环的位置改变。若在线性介质中写穿过单匝环的外磁通为 $\Phi_B = M(x) i_A(t)$，其中 M 是有向互感，则

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = M(x)\dot{i}_A + i_A \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}\dot{x}.$$

第一项来自源电流变化，第二项来自环的位置变化。例 1.5 求接通瞬间的力和转矩，练习 1.3 进一步让互感随时间改变。

1.4　运动导体与电动势的分布

静磁场中，一根导体棒以速度 $\boldsymbol{u}$ 运动。正电荷受到沿导体的磁力分量，电子向相反方向重新分布。沿从 a 到 b 的导体路径，动生电动势定义为

$$\mathcal{E}^{\mathrm{mot}}_{a\to b} = \int_a^b (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}. \tag{1.3}$$

应先叉乘，再投影到导线方向。只有棒长、速度和磁场彼此垂直且各处速度相同时，大小才等于 Blu。若棒绕端点转动，距轴 r 处的速度为 ωr，电动势要沿棒以当地速度积分。若取使 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}>0$ 的端点方向，

$$\mathcal{E}=\int_0^l B\omega r\,\mathrm{d}r=B\omega\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^l=\frac{1}{2}B\omega l^2,$$

所得端点到端点的电动势为 $B\omega l^2/2$。

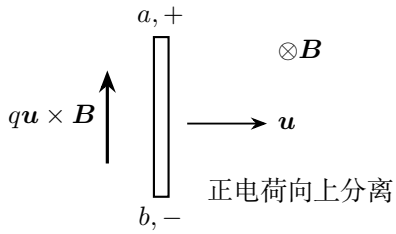


图 1.12: 运动棒中的电荷分离与磁力方向

图 1.12 中磁场指向纸内、棒向右，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 向上，故上端 a 电势较高。开路且电荷分布达到准静态平衡时，导体内沿棒方向有 $\boldsymbol{E}_\mathrm{s}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=0$，因而 $V_a-V_b=Blu$。闭合后若棒自身有电阻，端电压还要扣除棒内阻降。

载流子同时有随导体运动的速度与相对导体的漂移速度。外力维持导体的运动，可以向电路输入能量。本节末尾用这两个速度分量说明磁力传递能量的方式。

对随物质运动的闭合细线，合并感生电场与动生作用，得到

$$\oint_{C(t)}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}. \tag{1.4}$$

回路有滑动接点时，可逐段取导体材料的实际速度。转盘与静止电刷接触的装置中，几何路径可以固定，转盘内的材料速度仍随半径变化。只求一段导线上的动生电动势时，可直接用式(1.3)。

1.4.1 平动、转动与弯曲导线

整根弯曲导线在匀强静磁场中作刚性平移时，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 为常矢量。设端点为 a,b，常矢量可提出线积分号，且 $\int_a^b\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a$，所以式(1.3)化为

$$\mathcal{E}^{\mathrm{mot}}_{a\to b}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a).$$

可见结果取决于端点连线在 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 方向的投影。导线弯得更长，会改变电阻，却不一定改变电动势。若是完整闭合线框作刚性平移，端点重合，整圈动生电动势为

零。各段导线中仍可有电荷分离，局部电动势相互抵消。这一结论要求磁场均匀且整框同速，线框进入有限磁区时就不适用。

刚体绕轴转动时，离轴越远的导线元速度越大。若转轴与匀强磁场平行，且角速度与磁场同向，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=B\omega\boldsymbol{r}_{\perp}$，因而沿导线有 $(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=B\omega r\ \mathrm{d}r$。沿任何曲线都可写成 $r\ \mathrm{d}r=\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(r^2)$，故

$$\int_a^b B\omega r\ \mathrm{d}r=\frac{B\omega}{2}[r^2]_{r_a}^{r_b}.$$

于是

$$\mathcal{E}_{a\to b}^{\mathrm{mot}}=\frac{B\omega}{2}(r_b^2-r_a^2).$$

任意形状的刚性导线只要各点属于同一次转动，都满足这个端点平方差关系。整根同轴转动的闭合线圈中，各段相加仍为零。但若转盘与静止电刷接触，回路有不同速度的物质部分，中心到轮缘的转盘段就能提供电动势。

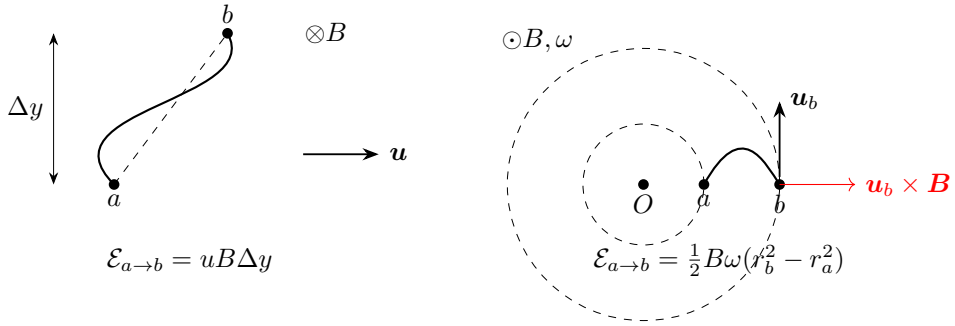


图 1.13: 匀速平移取端点投影，绕轴转动取端点半径平方差；两种公式的前提不同

图 1.13 左图中，平移速度向右、磁场向内，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 向上，只有端点的高度差进入积分。右图中 $\boldsymbol{B}$ 与角速度均向外，磁力项沿径向向外；积分 $B\omega r\,\mathrm{d}r$ 后才得到半径平方差。

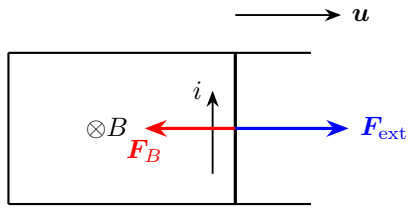
1.4.2　磁力不做功与机械阻力的关系

进一步把导体的平动速度记为 $\boldsymbol{u}$、载流子相对导体的漂移速度记为 $\boldsymbol{w}$。磁力对电荷总速度 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ 的功率为零；将它展开，有

$$q(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{w}+q(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{u}=0.$$

两项分别描述推动电荷沿导体漂移的作用和对应的机械反作用。导棒受到的安培力通过晶格、碰撞和电场与载流子耦合，外力维持运动所供给的机械能最终进入电

路。用宏观量表示，直棒的电功率为 $\mathcal{E}i = Blu\,i$，对应机械功率为 $-Bli\,u$，大小相等、符号相反。



$$P_{\text{ext}} = Bliu = \mathcal{E}i$$

图 1.14: 同一个磁相互作用分别对应载流子的电功率和导棒的机械反作用

图 1.14 中磁场向内，动生电动势推动正电荷沿棒向上；相应安培力向左，外力向右维持匀速。在纯电阻稳态中 $\mathcal{E}i = i^2R$；若电路储能或另一根棒动能正在增加，应先从外力功中扣除相应变化，再求热量。

若两根棒都运动，各自的安培力都可能做机械功。外力输入在两棒动能、储能元件的能量及焦耳热之间分配。先按回路求电流，再求各棒的力和功率，就能写出相应的能量关系。

1.5 轴对称感生电场

磁场随时间变化时，空间中出现环流不为零的电场。这个电场不依赖是否放置金属线圈。设半径 R 的无限长圆柱区域内有沿 $+z$ 的均匀磁场 $B(t)$，区域外磁场近似为零。在忽略端部效应、准静态且轴对称的条件下，感生电场只有环向分量，同一圆周上大小相等。取逆时针为 E_θ 正向，对半径 r 的圆周积分。内区包围的磁区面积为 πr^2，外区只包围固定磁区面积 πR^2，故分别有

$$2\pi r E_\theta = -\pi r^2 \dot{B} \quad (r \le R), \qquad 2\pi r E_\theta = -\pi R^2 \dot{B} \quad (r \ge R).$$

两式各除以 $2\pi r$，得到

$$E_\theta(r) = \begin{cases} -\dfrac{r}{2}\dot{B}, & r \le R, \\ -\dfrac{R^2}{2r}\dot{B}, & r \ge R. \end{cases} \tag{1.5}$$

圆柱外虽然 $B = 0$，电场仍不为零，因为该圆周包围着变化的磁通。两式在 $r = R$ 连续；内区随 r 线性增加，外区按 $1/r$ 减小。若 $\dot{B} > 0$，电场顺时针；若 $\dot{B} < 0$，方向反转。

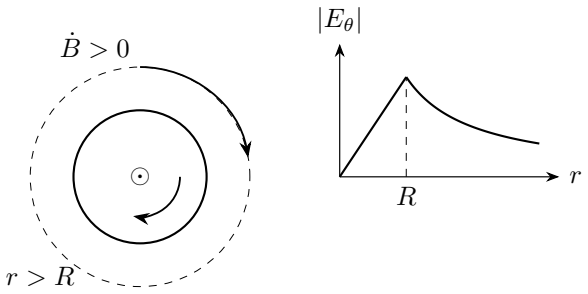


图 1.15: 圆柱内外的环向电场及其径向变化

图 1.15 的内外圆环包围了不同磁通：内环的有效面积随半径增加，外环只包围固定磁区。局部电场分别随半径正比增长、反比衰减，环流却始终按各环所围磁通的变化计算；电场非零处不必有局部磁场。

圆周上的场可从环流中提出，是因为轴对称使感生场在该圆周上等大而沿切线。若放入形状不对称的导体，表面电荷还会建立静电场，改变导体内的总电场。静电场沿任一闭合路径的环流为零，感应电动势仍由磁通的变化率确定。

感生电场可使粒子加速。粒子受圆轨道约束时，切向运动由感生电场决定，径向运动由磁力和轨道约束共同决定。若粒子自由运动，保持固定半径的条件由切向加速与径向力共同给出。

1.5.1　从环流到局部场，再到粒子方程

对更一般的轴对称分布 $B_z(\rho,t)$，仍可先对半径 r 的圆盘积分：

$$\Phi(r,t)=2\pi\int_0^r B_z(\rho,t)\rho\,\mathrm{d}\rho,\qquad E_\theta(r,t)=-\frac{1}{r}\int_0^r\frac{\partial B_z}{\partial t}\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

这里 ρ 是积分变量，r 是观察位置，在一次积分中保持 r 不变。若磁区有限，只需把积分上限改为 $\min(r,R)$。分段磁场可以按同心圆盘逐段相加；粒子所在位置的磁场决定当地磁力，但所有被包围的磁场变化共同决定当地感生电场。

粒子沿定半径轨道运动时，切向动力学可直接对时间积分。若 B 在轨道内均匀，且粒子起初位于 B_i、速度为 v_i 的状态，切向方程是 $m\dot{v}=-qr\dot{B}/2$，固定的半径可以提出积分号。以初态为下限，

$$m\int_{v_i}^{v}\mathrm{d}z=-\frac{qr}{2}\int_{B_i}^{B}\mathrm{d}b,\qquad m[z]_{v_i}^{v}=-\frac{qr}{2}[b]_{B_i}^{B}.$$

代入两端并除以 m，有 $v-v_i=-qr(B-B_i)/(2m)$。这个速度是逆时针为正的有向量。径向磁力则为 qvB，向外为正；$qvB<0$ 时磁力向内。以向外为正，由 $F_r+qvB=-mv^2/r$ 求出支持力。靠近圆心的一侧管壁提供向外的作用力，远离圆心的一侧提供向内的作用力，F_r 的符号指出哪一侧管壁与粒子接触。

1.5.2 自由粒子保持圆轨道的条件

图 1.16 中的正电荷沿半径 r 的圆顺时针运动，磁场沿纸外并增强。感生电场沿顺时针加速粒子，轨道处的磁场 $B(r,t)$ 提供向心力。以 $p>0$ 表示切向动量大小。速度方向每秒转过 v/r，动量沿半径改变的速率为 pv/r。令 $pv/r = qvB(r,t)$，得到 $p = qrB(r,t)$。切向方程与法拉第定律给出

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \qquad \int_{p_i}^{p}\mathrm{d}P = \frac{q}{2\pi r}\int_{\Phi_i}^{\Phi}\mathrm{d}\phi.$$

代入上下限，$p - p_i = q(\Phi-\Phi_i)/(2\pi r)$。用径向方程消去动量，得到

$$B(r,t) - B(r,t_i) = \frac{\Phi(t)-\Phi_i}{2\pi r^2}.$$

因此，若初始磁场和动量都取零，轨道处的场为盘内平均场的一半。这里比较的是当地磁场与整张圆盘的平均场。例 1.8 用两层同轴螺线管实现这两种场的差别，练习 1.5 则考察粒子在磁场区域以外受感生电场作用的情形。

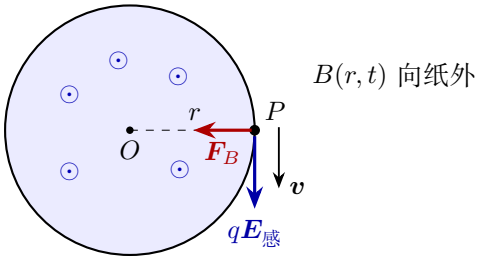


图 1.16: 自由圆轨道上的切向电力与径向磁力。穿过整个浅蓝圆盘的磁通决定轨道处的感生电场

1.5.3 同心分区磁通与受约束粒子的切向响应

图 1.17 取内盘半径 a，场变化率为 $\dot{B}_1$；外层变化率为 $\dot{B}_2$，均按 $+z$ 计有向量。对 $a<r<b$，环流由内盘和外环两部分的磁通变化共同决定：

$$2\pi r E_\theta = -\pi\left[a^2\dot{B}_1 + (r^2-a^2)\dot{B}_2\right].$$

若两项恰好抵消，此圆周上的环向感生电场为零，即使两个区域的磁场分别都在变化，也没有净环流。

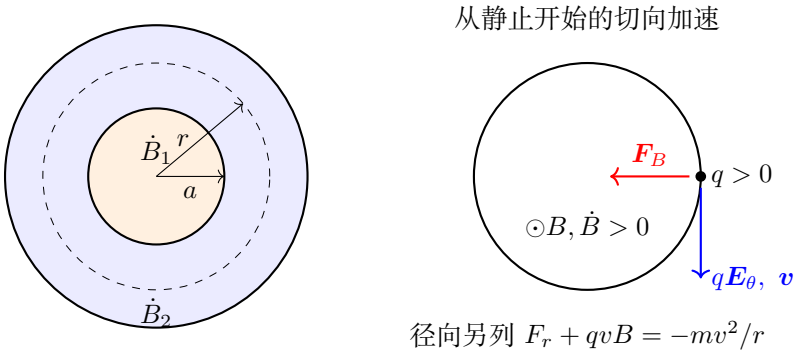


图 1.17: 分区磁场按包围面积求环流；定半径粒子将切向加速与径向约束分开

图 1.17 右图选取均匀变场、正电荷从静止出发的情形。顺时针切向电场先给粒子顺时针速度，此后磁力指向圆心；轨道支持力的大小和方向再由径向方程确定。去掉细管后，固定半径的运动由径向与切向方程共同决定。

1.6　例题与分析

例 1.1 (翻转、投影与闭合曲面)**.** 一匝面积 S 的平面线圈在匀强磁场 B 中，初始正法线平行磁场，历时 Δt 翻转半周，求磁通变化及平均电动势。另有沿 y 方向长 l、横截面为直角三角形的封闭棱柱，底面水平宽 a，高 h，磁场竖直向下，求各面的有向磁通量。

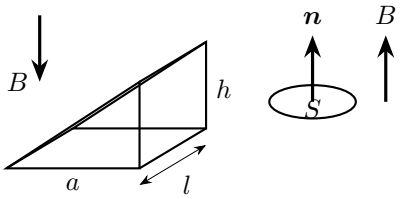


图 1.18: 题设：翻转、投影与闭合曲面

解　线圈翻转的磁通差

按图 1.18 的初始法线约定导线上的正向，并让这一物质正向随线圈一起翻转；末态法线因此与磁场反向。线圈初、末磁通分别为 BS、$-BS$，故

$$\Delta\Phi = -2BS, \qquad \overline{\mathcal{E}} = \frac{2BS}{\Delta t}.$$

正的平均值对应图中随导线转动的绕行正向。

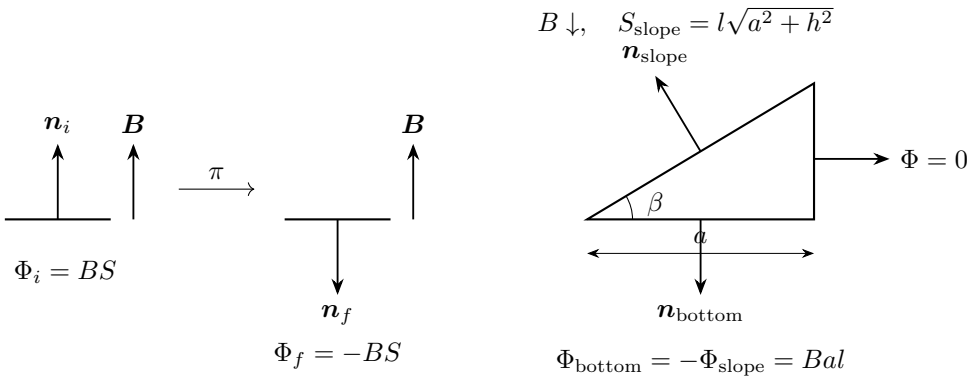


图 1.19: 线圈的物质法线随翻转反向；棱柱各面则使用闭合面的外法线

各面的有向通量

棱柱各面采用图 1.19 的外法线。底面外法线向下，$\Phi_{\text{底}} = Bal$。截面直角三角形的斜边为 $s = \sqrt{a^2+h^2}$，斜面与水平面的夹角 β 满足 $\cos\beta = a/s$。斜面面积为 ls，外法线向上的分量为 $\cos\beta$，所以

$$\Phi_{\text{斜}} = -B(ls)\cos\beta = -B(ls)\frac{a}{s} = -Bal.$$

竖直矩形面与两个三角端面的外法线均水平，磁通为零。底面与斜面的通量相抵，封闭棱柱的总磁通为零。

例 1.2 (磁通图像的斜率)**.** 一匝电阻为 R 的固定线圈，自感忽略。磁通在 $t = 0, 2, 4, 6, 10\,\text{s}$ 时依次为 $0, 2\Phi_0, 2\Phi_0, -2\Phi_0, 0$，相邻点用直线连接。求各段电动势、电流和总焦耳热，并指出电动势绝对值最大的一段。

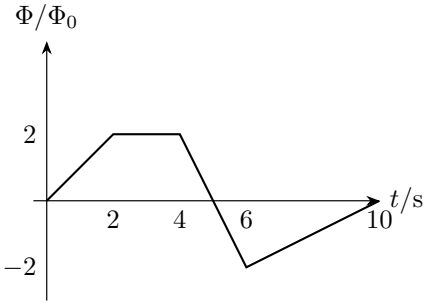


图 1.20: 题设：磁通图像的斜率

解 各段磁通斜率

先固定图 1.20 的磁通正向，自感忽略且没有其他电源，故每段均用 $\mathcal{E}_j = -\Delta\Phi_j/\Delta t_j$、$i_j = \mathcal{E}_j/R$。四段分别为

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{2\Phi_0 - 0}{2\,\mathrm{s}} = -\frac{\Phi_0}{\mathrm{s}}, \qquad \mathcal{E}_2 = -\frac{2\Phi_0 - 2\Phi_0}{2\,\mathrm{s}} = 0,$$
$$\mathcal{E}_3 = -\frac{-2\Phi_0 - 2\Phi_0}{2\,\mathrm{s}} = \frac{2\Phi_0}{\mathrm{s}}, \qquad \mathcal{E}_4 = -\frac{0 - (-2\Phi_0)}{4\,\mathrm{s}} = -\frac{\Phi_0}{2\,\mathrm{s}}.$$

第三段的电动势绝对值最大。按图 1.21 各平台的高度除以 R，得到

$$(i_1, i_2, i_3, i_4) = \frac{\Phi_0}{R\,\mathrm{s}}\left(-1, 0, 2, -\frac{1}{2}\right).$$

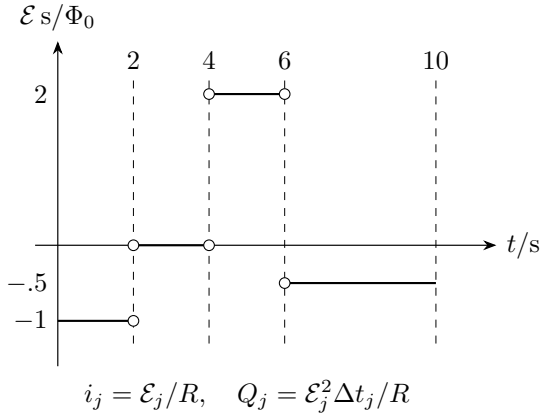


图 1.21: 各段电动势为磁通折线斜率的负值；其平方决定每段发热

各段焦耳热

图 1.21 的阶梯高度由各段斜率决定。各段电流恒定，故对任一段先有

$$Q_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} i_j^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{\mathcal{E}_j^2}{R}[t]_{t_{j-1}}^{t_j} = \frac{\mathcal{E}_j^2}{R}(t_j - t_{j-1}).$$

逐段代入幅度和持续时间，

$$Q_1 = \frac{(\Phi_0/\mathrm{s})^2}{R}(2\,\mathrm{s}) = \frac{2\Phi_0^2}{R\,\mathrm{s}}, \quad Q_2 = 0,$$
$$Q_3 = \frac{(2\Phi_0/\mathrm{s})^2}{R}(2\,\mathrm{s}) = \frac{8\Phi_0^2}{R\,\mathrm{s}}, \quad Q_4 = \frac{[\Phi_0/(2\,\mathrm{s})]^2}{R}(4\,\mathrm{s}) = \frac{\Phi_0^2}{R\,\mathrm{s}}.$$

第三段贡献的热量最多。各段相加得 $Q = 11\Phi_0^2/(R\,\mathrm{s})$。单位为 $\mathrm{Wb}^2/(\Omega\,\mathrm{s}) = \mathrm{J}$。

有向电动势的时间积分

带符号电动势的时间积分却为 $(-2+0+4-2)\Phi_0=0$，与始末磁通相同一致；热量涉及平方，不随正负相消。

例 1.3 (磁铁穿过线框)**.** 一条形磁铁沿竖直轴下落，北极朝下，穿过水平固定的电阻线框。自上向下观察，判断磁铁在框上方接近和在框下方远离时的电流方向，并分析磁场力与发热。忽略线框自感。

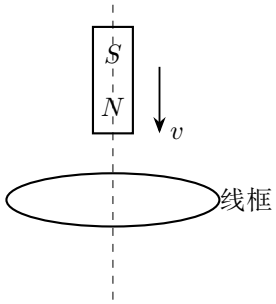


图 1.22: 题设：磁铁穿过线框

解　磁铁接近线框

取向上为正法线。图 1.22 中北极下方的外磁场向下，接近时向下磁通的绝对值增加，即 $\dot{\Phi}<0$。因此感应电流逆时针，产生向上的磁场，使磁铁受到向上的阻力。

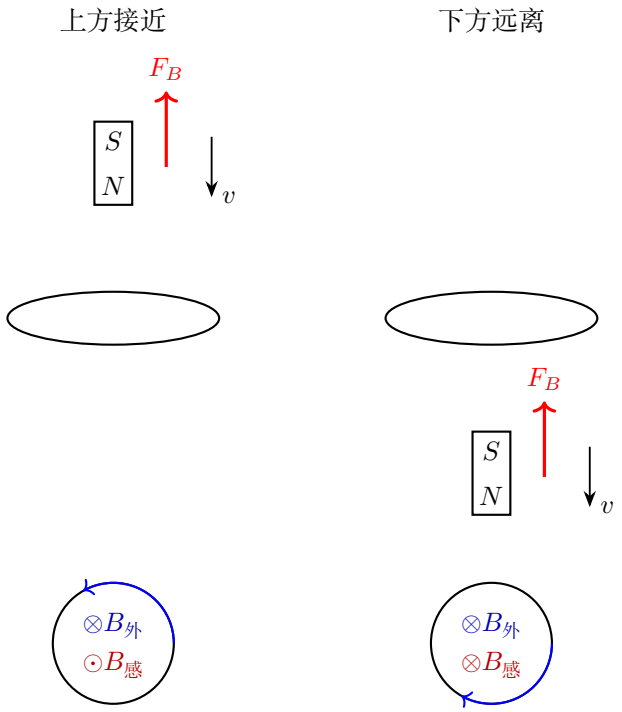


图 1.23: 上方接近与下方远离时的俯视电流相反，磁铁的阻力均向上

磁铁远离线框

磁铁位于线框下方远离时，框处位于磁铁上端南极的上方，轴向外磁场仍向下，因此仍有向下磁通，但其绝对值减小，$\dot{\Phi} > 0$，所以电流顺时针，见图 1.23。电流方向反转，磁力依然阻碍相对离去。

机械能与热量

忽略磁储能变化，记磁力对磁铁的功为 $W_B < 0$，则焦耳热为 $Q_J = -W_B$。磁铁下降时，重力势能的减少量等于动能增加量与焦耳热之和。磁通取极值的时刻有 $\dot{\Phi} = 0$，电流瞬时为零。

例 1.4 (同一回路中场变与运动的抵消)**.** 轴对称匀强磁场在无限圆柱内沿纸外，在 $t \geq 0$ 时为 $B(t) = B_0(1 + t/\tau)$。位于磁区内的薄圆形导体环始终保持圆形，半径为 $r(t) = r_0/\sqrt{1 + t/\tau}$，并均匀收缩。求感生项、动生项及回路总电动势，判断有无环向电流。忽略自感，取逆时针为正。

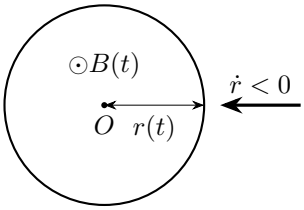
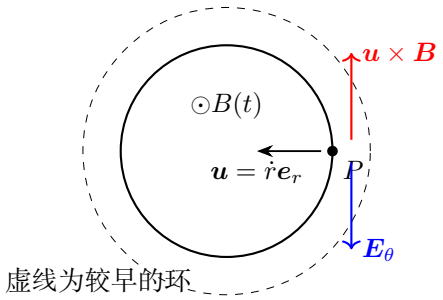


图 1.24: 题设：同一回路中场变与运动的抵消

解　感生和动生两项

图 1.24 中 B 增大，感生项为负：$\mathcal{E}_{感} = -\pi r^2 \dot{B}$。环上各点的速度沿径向向内，叉乘纸外磁场得到逆时针的动生作用。图 1.25 中，沿逆时针取 $\mathrm{d}l = r\ \mathrm{d}\theta$。同一时刻环上各点的动生项切向分量相同，故

$$\mathcal{E}_{动} = \int_0^{2\pi} (-B\dot{r})r\ \mathrm{d}\theta = (-Br\dot{r})[\theta]_0^{2\pi} = -2\pi Br\dot{r}.$$



$$E_\theta = -r\dot{B}/2, \quad (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B})_\theta = -B\dot{r}$$

图 1.25: 收缩环上一点的感生电场与动生项沿切线反向

收缩速度与两项电动势

由 $r = r_0(1 + t/\tau)^{-1/2}$，先对外层幂函数、再对内层时间函数求导，

$$\dot{r} = r_0 \left(-\frac{1}{2}\right)(1 + t/\tau)^{-3/2}\frac{1}{\tau} = -\frac{r_0(1 + t/\tau)^{-1/2}}{2\tau(1 + t/\tau)} = -\frac{r}{2\tau(1 + t/\tau)};$$

又有 $\dot{B}=B_0/\tau$，所以

$$\mathcal{E}_{感}=-\frac{\pi B_0 r_0^2}{\tau(1+t/\tau)},\qquad \mathcal{E}_{动}=+\frac{\pi B_0 r_0^2}{\tau(1+t/\tau)}.$$

环向电流

两项相消，环上的总电动势为零，环向电流为零。磁通 $B\pi r^2=B_0\pi r_0^2$ 保持恒定。

例 1.5 (电磁铁附近线圈的运动)**.** 电磁铁轴线取为 x 轴。规定源电流为正时右端外磁场沿 $+x$，场强大小随远离铁芯而减小。一电阻为 R、面积为 S 的闭合小导体环套在右侧光滑绝缘圆柱上，环面垂直轴线。分析从无电流开始接通任一极性的直流电源，以及已通电后增大、减小电流绝对值时，金属环的初始运动趋势。另将线框装在转轴上，法线 $\boldsymbol{n}$ 与局部磁场 $\boldsymbol{B}$ 的初始夹角为 $0<\theta<\pi/2$，转轴垂直于初始的 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{n}$ 所在平面。求磁场绝对值增大时开始转动的方向。忽略被动线圈自感，采用小线圈近似。

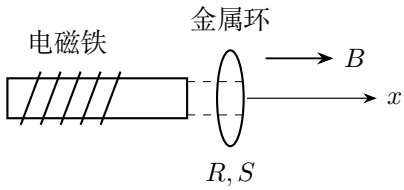


图 1.26: 题设：电磁铁附近线圈的运动

解　磁矩与轴向力

先按图 1.26 规定环的正法线向右。当电磁铁向右的磁场增强时，环中感应电流产生向左的磁矩，环靠近铁芯的一侧与铁芯端部同名磁极相对，故环向右离开。若向右磁场减弱，感应磁矩向右，环被吸向铁芯。

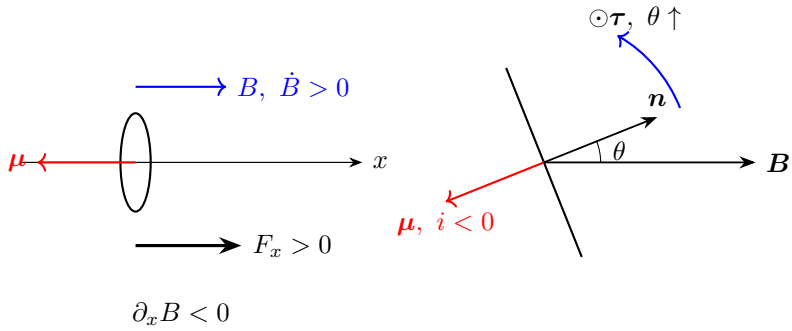


图 1.27: 轴向磁矩与梯度决定平移，倾斜线框的负电流决定转矩正向

电流改变时的平移

把场写成 $B(x,t)=f(x)I(t)$，其中 $f>0, f'<0$，以图 1.27 的向右法线为正，环面积 S，有 $i=-Sf\dot{I}/R$，磁矩 $\mu_x=Si$。小磁偶极的轴向力为 $F_x=\mu_x\partial_x B$，因此

$$F_x=-\frac{S^2}{R}ff'I\dot{I}.$$

因 $ff'<0$，$I\dot{I}>0$ 即电流绝对值增大时向右，$I\dot{I}<0$ 时向左。从零接通任一极性，都是磁场绝对值增大，初始排斥。

倾斜环的转矩

对倾斜线框，场增大时 $i=-S\cos\theta\,\dot{B}/R$。绕使 θ 增大的转向取正，磁力矩为 $\tau_\theta=-iSB\sin\theta=S^2B\dot{B}\sin\theta\cos\theta/R>0$。因此 θ 增大，投影面积减小，阻碍磁通增加。图中的正法线与实际磁矩反向，转矩沿纸外，正好使法线逆时针转动。

例 1.6 (转动导体的局部积分)**.** 绝缘杆 $OC=R$，金属棒 $MN=R$ 固定在 C 点且 $MC=CN=R/2$，$\angle MCO=60°$。结构在纸面内绕 O 顺时针转动，角速度 ω；匀强磁场垂直纸面向里，大小 B。求开路时 U_{MN}。

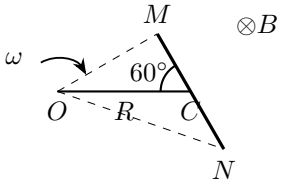


图 1.28: 题设：转动导体的局部积分

解　转动导线上的积分

图 1.28 中转动方向与磁场都向纸内，取 B,ω 为正的大小。距轴 r 的微元速度为 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=B\omega\boldsymbol{r}$ 沿径向向外。开路平衡时 $\boldsymbol{E}_s=-\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$，由 $\boldsymbol{E}_s=-\nabla V$，沿金属棒有

$$\mathrm{d}V=B\omega\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}B\omega\,\mathrm{d}(r^2).$$

令 $z=r^2$，其端点值分别为 OM^2, ON^2。因此即使棒不经过转轴，也能沿 $M\to N$ 积分，

$$V_N-V_M=\frac{B\omega}{2}\int_{OM^2}^{ON^2}\mathrm{d}z=\frac{B\omega}{2}[z]_{OM^2}^{ON^2},$$

即 $V_N-V_M=B\omega(ON^2-OM^2)/2$；这是本题径向分布的积分结果。

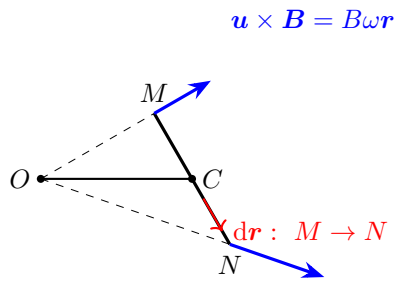


图 1.29: 沿棒微元投影积分，径向距离的端点平方差由真实三角形求得

两端到转轴的距离

图 1.29 保留真实的 M,C,N 几何。$OC=R, CM=CN=R/2$，且 $\angle MCO=60^\circ$。分别对三角形 OCM, OCN 用余弦定理：

$$OM^2=R^2+(R/2)^2-2R(R/2)\cos 60^\circ=3R^2/4,$$
$$ON^2=R^2+(R/2)^2-2R(R/2)\cos 120^\circ=7R^2/4.$$

有向端电压

相减得到平方差为 R^2，故 $U_{MN}=V_M-V_N=-B\omega R^2/2$。较远的 N 端电势较高，与向外分离正电荷的方向相符。反转磁场或角速度之一，端压反号；同时反转则不变。

例 1.7 (圆轨道上粒子的加速与压力)**.** 质量 m、电荷 $q>0$ 的小珠被光滑绝缘圆形细管约束，在半径 r 的水平圆周上运动，初始静止；细管可提供双向径向约束。沿纸外方向的均匀磁场在 $0<t<T$ 为 B_0t/T，以后保持 B_0。磁场区域轴对称并覆盖轨道，忽略重力。求速度及小珠对轨道的径向力，约定向外为正。

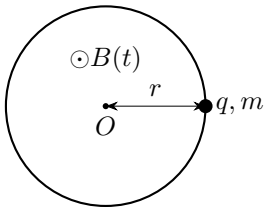


图 1.30: 题设：圆轨道上粒子的加速与压力

解　切向速度

图 1.30 取逆时针切向为正。感生场 $E_\theta = -rB_0/(2T)$，故在增长阶段

$$m\int_0^{v(t)} \mathrm{d}z = -\frac{qrB_0}{2T}\int_0^t \mathrm{d}s,$$

两边原函数分别为速度变量 z 和时间变量 s，所以

$$m[z]_0^{v(t)} = -\frac{qrB_0}{2T}[s]_0^t, \qquad mv(t) = -\frac{qrB_0}{2T}t.$$

除以 m，得到 $v(t) = -qrB_0t/(2mT) = -qrB(t)/(2m)$。以后切向场为零，速率保持 $|v(T)|$，方向顺时针。图 1.31 右端小珠的速度向下，磁力向左，指向圆心。

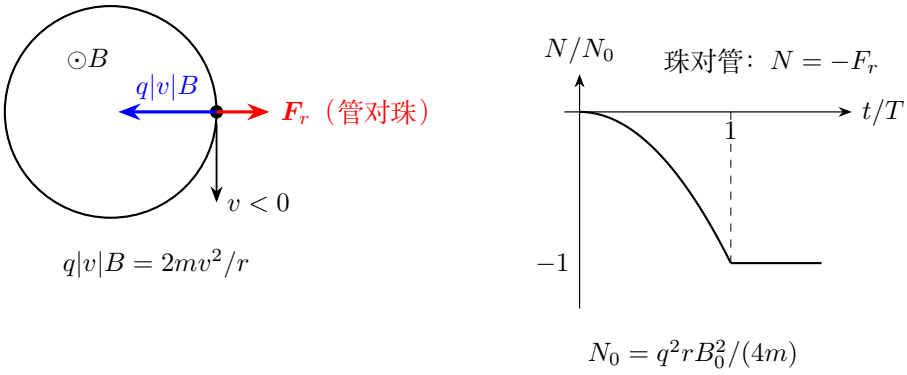


图 1.31: 细管对小珠的力向外，小珠对细管的反作用向内

轨道与小珠的相互作用

设轨道对小珠向外的作用力为 F_r，径向方程为 $F_r + qvB = -mv^2/r$，所以小珠对轨道的力为

$$N = -F_r = \frac{mv^2}{r} + qvB.$$

各阶段的径向力

在增长阶段，$mv^2/r = q^2rB(t)^2/(4m)$，且 $qvB = -q^2rB(t)^2/(2m)$。两项相加得 $N = -q^2rB(t)^2/(4m)$；稳定后为 $-q^2rB_0^2/(4m)$。负号表示小珠对细管的作用向内，细管对小珠的约束力向外。细管内壁提供所需的向外作用力。电场在增长阶段做正功，磁力和轨道力始终不做功。

例 1.8 (同轴螺线管之间的自由圆轨道)**.** 两根无限长同轴螺线管半径为 $R, 2R$，单位长度匝数均为 n。外管电流为 at，内管为 $2at$，方向相同。电荷 $q>0$、初始静止的粒子恰能在两管之间始终沿半径固定的圆轨道运动，求该半径。忽略重力与辐射。

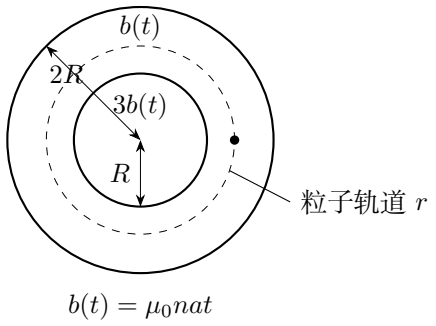


图 1.32: 题设：同轴螺线管之间的自由圆轨道

解 内盘与外环磁通

在图 1.32 中记外管磁场为 $b=\mu_0 nat$。内圆中总场为 $3b$，两管之间为 b。取半径 r 的圆周，包围磁通为

$$\Phi = 3b\pi R^2 + b\pi(r^2-R^2) = \pi b(r^2+2R^2).$$

两个面积分别对应内圆和两管之间的环带。

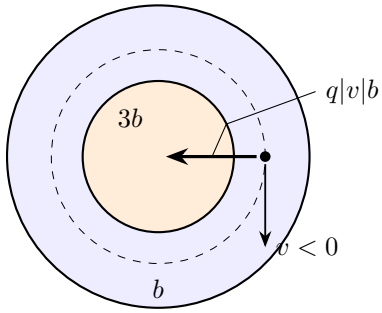
由感生场求速度

法拉第定律给出 $2\pi r E_\theta = -\dot{\Phi}$，将上式对时间求导再除以 $2\pi r$，所以切向电场为 $-\dot{b}(r^2+2R^2)/(2r)$。由于题设半径固定，切向加速度就是 $\dot{v}$，故 $m\,\mathrm{d}v = -q(r^2+2R^2)\,\mathrm{d}b/(2r)$。两侧从 $b=0, v=0$ 积分，$m\int_0^v \mathrm{d}z = -q(r^2+2R^2)\int_0^b \mathrm{d}\beta/(2r)$。写出原函数并代入两端，

$$m[z]_0^v = -\frac{q(r^2+2R^2)}{2r}[\beta]_0^b, \qquad mv = -\frac{q(r^2+2R^2)}{2r}b.$$

先得有向速度 $v=-qb(r^2+2R^2)/(2mr)$，再取大小，得 $|v|=qb(r^2+2R^2)/(2mr)$。

$$\Phi = \pi b(r^2 + 2R^2)$$



切向积分 $|v| = \frac{qb(r^2+2R^2)}{2mr}$

向心条件 $|v| = \frac{qbr}{m}$

图 1.33: 内盘附加磁通决定切向加速，当地环隙磁场单独提供径向向心力

固定半径的条件

若不靠轨道约束，图 1.33 中的磁力提供全部向心力：$mv^2/r = q|v|b$。在 $t > 0$ 时约去非零速率，得到 $|v| = qbr/m$。两式相等，故

$$r^2 + 2R^2 = 2r^2, \qquad r = \sqrt{2}R.$$

它确实满足 $R < r < 2R$。负电荷会反向转动，但半径条件相同。内管的附加磁通增大感生场，径向力仍只由轨道处的 b 决定。

例 1.9 (倾斜导棒的电动势与功率)**.** 水平平行导轨相距 l，左端接电阻 R，导轨的电阻忽略。金属棒单位长度电阻为 λ，棒与导轨的夹角为 $\theta \in (0, \pi/2]$，以沿导轨速度 v 向右匀速平移。磁场垂直纸面向里，大小 B。求电流，并分别求固定电阻、导棒发热功率最大的角度。

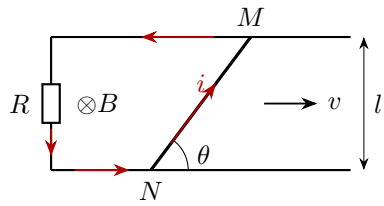
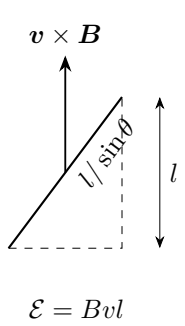


图 1.34: 题设：倾斜导棒的电动势与功率

解 投影长度与导棒电阻

图 1.34 中棒在导轨间的长度为 $l/\sin\theta$，但 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 竖直向上，所以从 N 到 M 的线积分只取竖直投影 l，$\mathcal{E}=Bvl$。电流沿棒从 N 流向 M，再沿上轨向左，经电阻向下回到下轨。令棒电阻 $x=\lambda l/\sin\theta$，则

$$i=\frac{Bvl}{R+x},\quad P_R=\frac{(Bvl)^2R}{(R+x)^2},\quad P_{\text{棒}}=\frac{(Bvl)^2x}{(R+x)^2}.$$



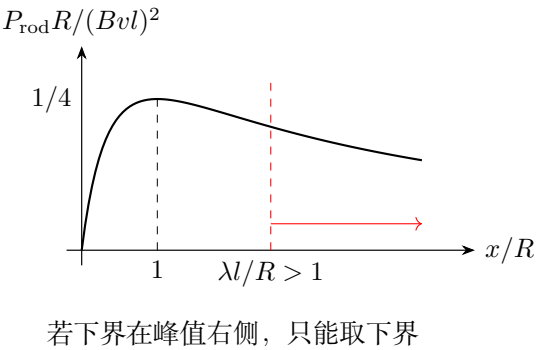


图 1.35: 棒电阻的可行下界可能截去功率峰值；斜棒仍只取竖直投影产生电动势

固定电阻的功率

图 1.35 表示允许的电阻区间为 $x\geq\lambda l$。固定 B,v,l,R 对 P_R 求导，

$$\frac{\mathrm{d}P_R}{\mathrm{d}x}=(Bvl)^2R(-2)(R+x)^{-3}\frac{\mathrm{d}(R+x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{2(Bvl)^2R}{(R+x)^3}<0.$$

因此 P_R 随 x 增大而减小，在最小允许电阻 $x=\lambda l$，即 $\theta=\pi/2$ 时最大。对棒功率求导，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_{\text{棒}}}{\mathrm{d}x}&=(Bvl)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x(R+x)^{-2}\right]\\&=(Bvl)^2\left[(R+x)^{-2}-2x(R+x)^{-3}\right]\\&=(Bvl)^2\frac{R-x}{(R+x)^3}.\end{aligned}$$

导棒的功率

若 $\lambda l\leq R$，最大值在 $x=R$，对应 $\sin\theta=\lambda l/R$；若 $\lambda l>R$，可行区间全部在递减段，最大值仍在 $\theta=\pi/2$。角度改变了导轨间的棒长，棒的垂直投影始终为 l。

例 1.10 (滑动导棒与另一导体的受力)**.** 棒 ab 位于水平导轨间，上端 a 接右侧导线，后者连接位于纸面内的棒 cd；c 与下轨相连，d 与上轨相连。ab 处磁场指向纸内，cd 处磁场沿纸面向下。欲使 cd 受到指向纸外的安培力，ab 应向哪边运动? 忽略自感。

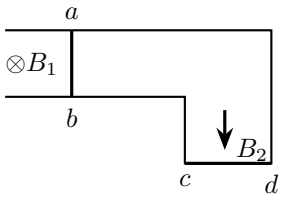


图 1.36: 题设：滑动导棒与另一导体的受力

解　受力棒的电流

先从图 1.36 中的目标受力反推 cd 的电流。取向右为 $+x$、向上为 $+y$，纸外为 $+z$；$\boldsymbol{B}_2$ 沿 $-y$。要使 $i\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}_2$ 沿 $+z$，电流沿 $-x$，即从 d 到 c。

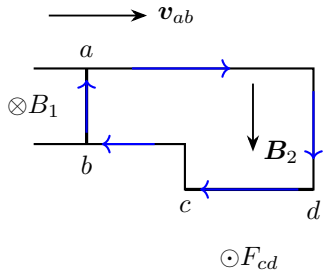


图 1.37: 先由目标安培力反推 $d\to c$，再沿完整回路追踪到动生棒 $b\to a$

沿回路追踪电流

沿图 1.37 的电路连接追踪，电流应从 a 流入上轨、经 $d\to c$、再经下轨到 b，故在作为电动势部件的 ab 内部应从 b 到 a。B_1 指向纸内时，棒向右运动才有 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1$ 向上。因此应使 ab 向右运动。

1.7　本讲小结

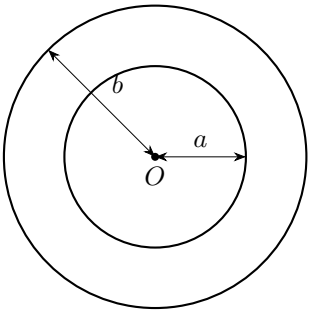
沿回路正向用右手定则确定正法线。磁通量由磁场在正法线上的分量积分得到，电动势取磁链变化率的相反数。楞次定律用感应磁场阻碍磁通变化来判断电流方向。

运动导体的动生作用取 $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 在导线方向的投影。匀强场中的整体平动只取两端位移，绕轴转动需沿导体积分。场本身随时间改变时，即使没有导体，空间也有感生电场。轴对称模型中，环流由所围磁通决定，当地磁力由粒子所在处的磁场决定。

对恒阻、自感可忽略的回路，有向电量由始末磁通差决定，焦耳热还取决于电流随时间的变化。粒子沿圆轨道运动时，感生电场改变切向动量，径向方程决定轨道的约束力或自由圆轨道的半径。

1.8　练习

练习 1.1 (同心圆环的净磁通)**.** 两同心圆环半径 $a<b$，磁场轴对称，垂直分量为 $B_z(r)$。推导两环磁通之差，并说明只给“中心放有条形磁铁”是否足以断定大小。若 $a<r<b$ 内磁场全部向下，而两环净磁通都向上，哪一个较大?



两圆盘均取 $\odot\boldsymbol{n}$，$B_z(r)$ 按有向值积分

图 1.38: 两圆盘使用同一纸外正法线，较大圆盘比小圆盘多包围一个环带

练习 1.2 (变化磁场中的直弦)**.** 无限长圆柱形磁区半径为 R，磁场沿纸外，以恒定速率 $K>0$ 增大。圆柱截面内水平弦 MN 位于圆心上方，距圆心 h，弦长 l，M 在左、N 在右。求沿 $M\to N$ 的感生电动势。若弦长恰为 R，求其大小。

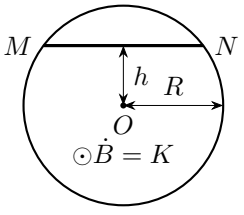


图 1.39: 题设：变化磁场中的直弦

练习 1.3 (旋转带电环与被动线圈)**.** 带正电绝缘圆环 A 与同轴导体环 B 平行，规定从上向下看逆时针为两环正向，互感 $M>0$。A 上总电荷 Q 均匀分布，以角速度 $\omega(t)$ 转动。B 的电阻为 R，忽略自感。求 B 中电流；讨论 A 带负电、加速或减速时的变化。若相对位置或取向改变使互感为 $M(t)$，外加约束控制其运动，求一般表达式，并判断 $i_A>0$ 恒定而 M 减小时 B 中电流方向。

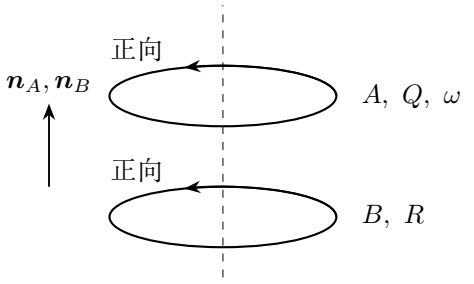


图 1.40: 两个平行环采用同一俯视逆时针正向，ω 和电流均保留符号

练习 1.4 (锥面母线上的动生电动势)**.** 绝缘圆锥的轴为 z 轴、半锥角 $0<\theta<\pi/2$。长 l 的金属丝 OP 沿母线固定，锥顶为 O。圆锥以角速度 $\omega>0$ 绕 $+z$ 轴转动，磁场沿 $+x$，大小 B。$t=0$ 时 OP 位于 xz 平面且 P 的 x 坐标为正，求 V_P-V_O。若磁场改为沿 $+z$ 轴、大小仍为 B，再求 V_P-V_O，比较它与第一种情形的时间依赖。

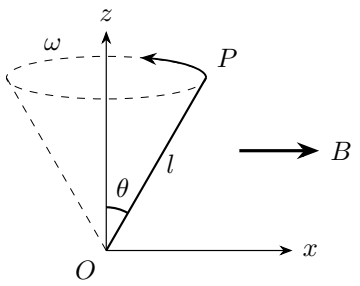


图 1.41: 题设：锥面母线上的动生电动势

练习 1.5 (无磁场区域中的带电探测器)**.** 半径 R 的无限长圆柱内有沿纸外的均匀磁场，以 $\dot{B}=-k<0$ 缓慢减弱，圆柱外磁场忽略。质量 m、电荷 $q>0$ 的探测器在圆柱外由某点以径向指向圆心的初速 v_0 出发，经时间 t 首次与柱面相切，位置相对初始径向转过 α $(0<\alpha<\pi/4)$。忽略重力，求满足这些事件的 v_0 与 t,α 的必要关系，并说明可实现条件。

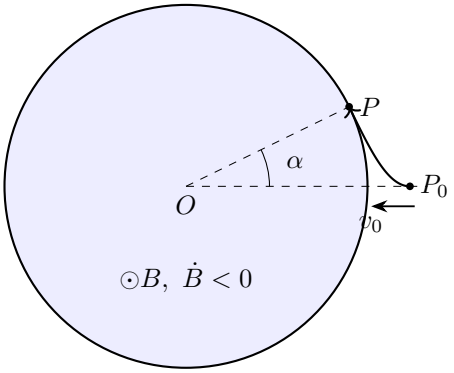


图 1.42: 探测器从 P_0 沿径向向内发射，轨迹在 P 与柱面相切。曲线取一组可实现的参数

练习 1.6 (有缺口圆环的纯滚动)**.** 半径 a 的金属圆环有很小缺口，缺口对应的弧长为 $\Delta l\ll a$。圆环在竖直平面内沿绝缘水平面向右纯滚动，圆心速度 v_0。匀强磁场垂直环面向纸内，大小 B。求缺口两端开路电动势绝对值的最大值，说明平动与转动各自的贡献。

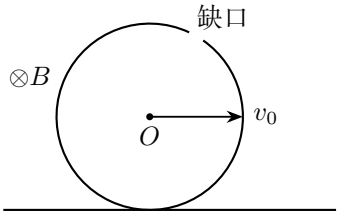


图 1.43: 题设：有缺口圆环的纯滚动

练习 1.7 (相同磁通变化的电量与发热)**.** 电阻为 R 的固定单匝回路，自感忽略，磁通从 Φ_0 减小到零。一种过程历时 T 且磁通线性减小；另一种过程先在 $T/2$ 内线性减小到零，再保持不变。比较两过程的有向电量、热量与电流峰值。

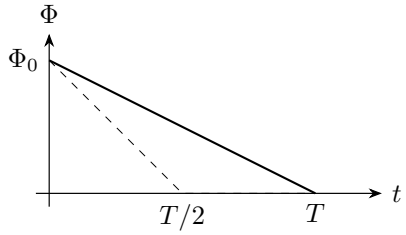


图 1.44: 题设：相同磁通变化的电量与发热

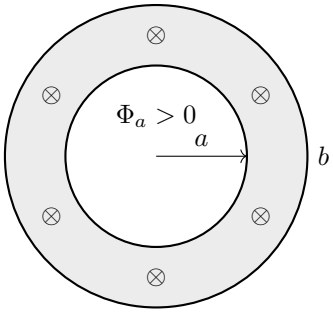
练习解答

练习 1.1

解　内盘和环带

按图 1.38 取向上为正，把较大圆盘分成小圆盘与外环带，如图 1.45，即有

$$\Phi_b - \Phi_a = 2\pi \int_a^b B_z(r) r \, \mathrm{d}r.$$



$$\Phi_b = \Phi_a + \Phi_{\text{annulus}}$$

$$\Phi_{\text{annulus}} < 0$$

图 1.45: 环带中的回程磁通以负号进入两圆盘磁通之差

新增环带的有向磁通

比较两盘磁通只需计算上式的环带积分。积分按 B_z 的符号计入各小片，正值使 $\Phi_b > \Phi_a$，负值使 $\Phi_b < \Phi_a$。

回程场情形

图 1.45 的灰色环带是向下的回程磁场，$\Phi_{\text{annulus}} < 0$，因此 $\Phi_b < \Phi_a$。若 $0 \le \Phi_b < \Phi_a$，大圆盘的磁通量大小也较小。

练习 1.2

解　弦上的电场投影

按图 1.39，在圆柱内 $\boldsymbol{E}_{\text{感}} = \frac{K}{2}(y, -x, 0)$。图 1.46 的蓝箭头沿顺时针切向。弦上 $y = h$，红箭头表示相同的水平分量 $Kh/2$。从 M 到 N 取线元 $(\mathrm{d}x, 0, 0)$，沿弦积分：

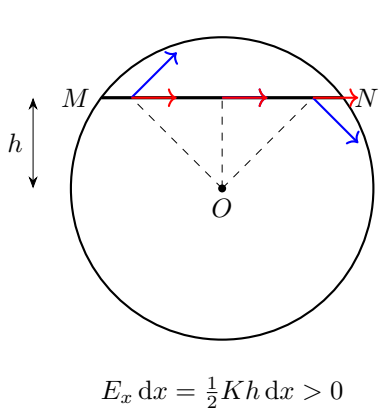


图 1.46: 弦上各点的环向场方向不同，但水平投影均为 $Kh/2$

$$\mathcal{E}^{\text{感}}_{M\to N} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{Kh}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{Kh}{2}[x]_{-l/2}^{l/2} = \frac{Khl}{2}.$$

弦长为半径时

若 $l = R$，几何关系为 $h^2 + (l/2)^2 = R^2$，所以 $h = \sqrt{3}R/2$，电动势大小为 $\sqrt{3}KR^2/4$。

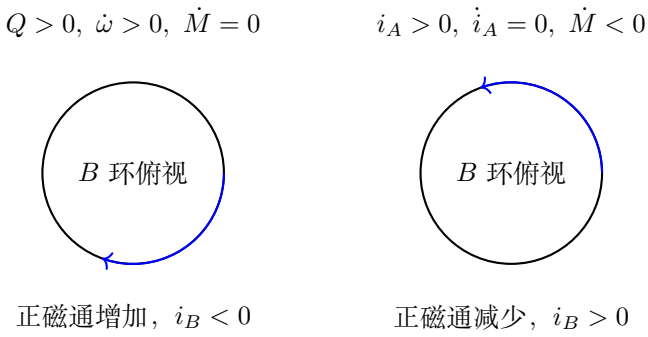
这是沿指定路径的感生积分；若放入开路金属棒，电荷重新分布使总切向场为零，其端电势差 $V_N - V_M$ 与这个感生积分相等。

练习 1.3

解　旋转带电环的电流

图 1.40 中的旋转电荷每转一周通过固定径向截面的电量为 Q，周期为 $2\pi/|\omega|$，所以有向电流为 $i_A = Q\omega/(2\pi)$。互感磁通为 Mi_A，故

$$i_B = -\frac{M}{R}\frac{\mathrm{d}i_A}{\mathrm{d}t} = -\frac{MQ}{2\pi R}\dot{\omega}.$$



$$\dot{\Phi}_B = M\dot{i}_A + i_A\dot{M}$$

图 1.47: 固定互感下的角加速与固定源电流下的互感减小，分别导致相反的被动电流

电流方向

图 1.47 以 $Q>0, \dot{\omega}>0$ 为例，$i_B<0$，即顺时针。取 $Q>0$。A 逆时针加速或顺时针减速时，$\dot{\omega}>0$，B 的电流顺时针。A 逆时针减速或顺时针加速时，$\dot{\omega}<0$，B 的电流逆时针。$Q<0$ 时，同一转动过程使电流方向反转。

互感随时间改变

若几何也变化，先定义穿过 B 的外磁通为 $\Phi_B = M(t)i_A(t)$。对这个乘积求导，得 $i_B = -(M\dot{i}_A + i_A\dot{M})/R$。当 $i_A>0$ 恒定而 $\dot{M}<0$ 时，$i_B>0$，即逆时针，补偿减少的正磁通。

练习 1.4

解　母线各点的速度

图 1.41 中沿金属丝取距锥顶为 s 的微段，其位置为

$$\boldsymbol{r} = s(\sin\theta\cos\omega t, \sin\theta\sin\omega t, \cos\theta).$$

对时间求导时 s,θ 固定，利用 $\mathrm{d}(\cos\omega t)/\,\mathrm{d}t=-\omega\sin\omega t$、$\mathrm{d}(\sin\omega t)/\,\mathrm{d}t=\omega\cos\omega t$，得到速度 $\boldsymbol{u}=\omega s\sin\theta(-\sin\omega t,\cos\omega t,0)$。与 $\boldsymbol{B}=(B,0,0)$ 叉乘后，只有 z 分量 $-B\omega s\sin\theta\cos\omega t$。

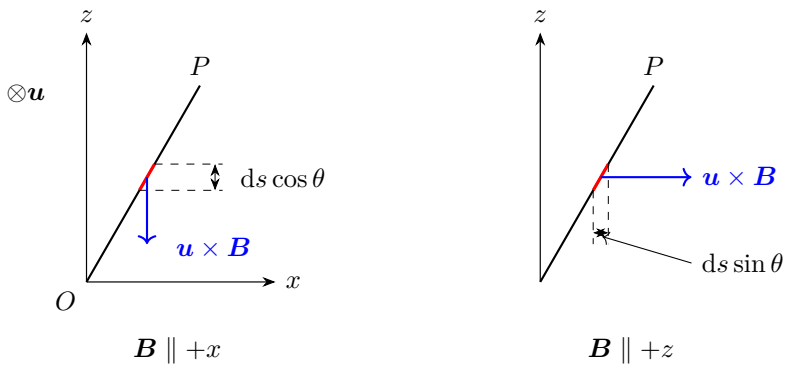


图 1.48: 两种磁场方向对应不同的线元投影；左图仅示 $t=0$ 的瞬间

横向场中的端电压

图 1.48 中母线的 z 投影为 $\mathrm{d}s\cos\theta$，所以

$$V_P-V_O=-B\omega\sin\theta\cos\theta\cos\omega t\int_0^l s\,\mathrm{d}s=-B\omega\sin\theta\cos\theta\cos\omega t\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l.$$

因此

$$V_P-V_O=-\frac{1}{2}B\omega l^2\sin\theta\cos\theta\cos\omega t.$$

开路时，这一动生积分等于端电势升高。

轴向场中的端电压

当磁场改为沿 $+z$ 时，速度表达式不变，叉乘改为

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}=B\omega s\sin\theta(\cos\omega t,\sin\omega t,0),$$

方向沿柱坐标径向向外。图 1.48 右图中，母线在径向的投影为 $\mathrm{d}s\sin\theta$，所以

$$V_P-V_O=\int_0^l B\omega s\sin^2\theta\,\mathrm{d}s=B\omega\sin^2\theta\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^l=\frac{1}{2}B\omega l^2\sin^2\theta.$$

这一结果为常量，且 P 端电势高。横向磁场情形的母线投影沿 z，所以出现 $\sin\theta\cos\theta\cos\omega t$；轴向磁场情形的投影沿径向，所以出现 $\sin^2\theta$。当 $\theta\to0$ 时，两式均趋于零；当 $\theta\to\pi/2$ 时，横向场的结果趋零，轴向场则成为平面径向导线的 $B\omega l^2/2$。

练习 1.5

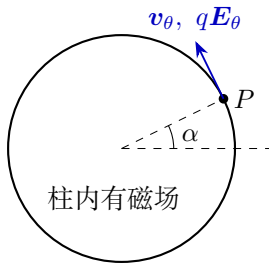
解　柱外电场的力矩

图 1.42 中，探测器在相切以前始终位于柱外，当地 $B=0$，但该位置的环向场为

$$E_\theta=\frac{kR^2}{2r}>0.$$

令 $\Gamma=qkR^2/2$，则对圆心的力矩 $rqE_\theta=\Gamma$ 为常量。初速径向，初始角动量为零。记 $J=mr^2\dot\theta$，其方程 $\dot J=\Gamma$ 先积分为 $J(t)-J(0)=\int_0^t\Gamma\,\mathrm{d}s=\Gamma t$，因此

$$mr^2\dot\theta=\Gamma t.$$



$r=R,\quad \dot r=0$
$L_z=\Gamma t$
$W_E=\Gamma\alpha$

图 1.49: 相切时只有环向速度；柱外环向电场既提供恒定力矩，也沿转角做功

相切时的角动量与电功

图 1.49 的相切位置满足 $r=R,\dot r=0$，全速度只剩切向分量，故 $v_\theta=\Gamma t/(mR)$。沿真实轨迹的电场功为

$$W_E=\int_0^\alpha\Gamma\,\mathrm{d}\theta=\Gamma[\theta]_0^\alpha=\Gamma\alpha,$$

其中径向位移不做功。代入动能定理，得到

$$\frac{\Gamma^2t^2}{2mR^2}-\frac{1}{2}mv_0^2=\Gamma\alpha,\qquad \boxed{v_0=R\sqrt{\left(\frac{qkt}{2m}\right)^2-\frac{qk\alpha}{m}}}.$$

根号内为正对应非零径向入射速率。全程按题给的变化率取柱内磁场，因而 $B(0)-kt\ge0$。

从相切处反求径向轨迹

设 $t_f=t$ 为题给的相切时间，s 表示运动中的时刻。柱外的电力沿切向，径向分量为零，所以

$$m(\ddot r-r\dot\theta^2)=0,\qquad \dot\theta=\frac{\Gamma s}{mr^2},\qquad \ddot r=\frac{\Gamma^2s^2}{m^2r^3}.$$

用无量纲变量 $\tau = s/t_f$，$u(\tau) = r(s)/R$，$\lambda = \Gamma t_f^2/(mR^2)$。由链式法则 $\dot r = (R/t_f)u'(\tau)$、$\ddot r = (R/t_f^2)u''(\tau)$，因此在相切处取终值

$$u'' = \frac{\lambda^2\tau^2}{u^3}, \qquad u(1) = 1, \quad u'(1) = 0.$$

从 τ 到 1 对加速度积分，得到

$$u'(\tau) = -\lambda^2 \int_\tau^1 \frac{\eta^2}{u(\eta)^3}\,\mathrm{d}\eta.$$

再从 τ 到 1 积分，用 $u(1) = 1$，

$$\begin{aligned} u(\tau) - 1 &= \lambda^2 \int_\tau^1 \mathrm{d}\xi \int_\xi^1 \frac{\eta^2}{u(\eta)^3}\,\mathrm{d}\eta \\ &= \lambda^2 \int_\tau^1 \frac{\eta^2}{u(\eta)^3}[\xi]_\tau^\eta\,\mathrm{d}\eta = \lambda^2 \int_\tau^1 \frac{(\eta-\tau)\eta^2}{u(\eta)^3}\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

终值附近 $u > 0$，方程右端光滑，反向积分给出唯一轨迹。对 $\tau < 1$，上面的积分给 $u' < 0$、$u > 1$，所以向前运动时，粒子在 P 才第一次到达 $r = R$。反向积分时 $u'' \le \lambda^2$，位置和斜率在有限时间内有界，因而可以一直积分到 $\tau = 0$。

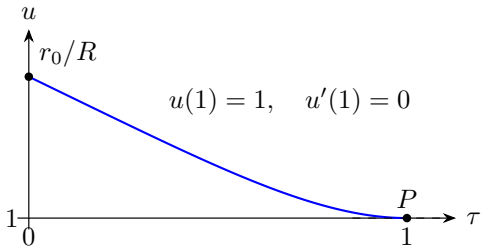


图 1.50: 取 $\lambda = 1$ 反向积分得到的径向轨迹，切点 P 处的切线水平

由图 1.50，初态由曲线在 $\tau = 0$ 的位置与斜率给出，即 $r_0 = Ru(0)$、$v_0 = -Ru'(0)/t_f$。再将角速度从出发积到相切，

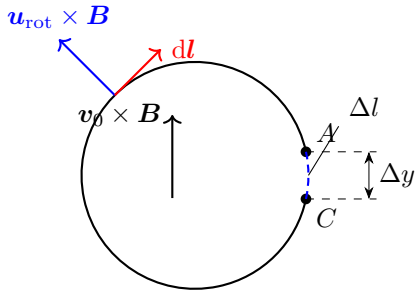
$$\theta(t_f) - \theta(0) = \int_0^{t_f} \frac{\Gamma s}{mr(s)^2}\,\mathrm{d}s = \lambda \int_0^1 \frac{\tau}{u(\tau)^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

给定 t_f 后，右端由该轨迹确定。它与题给 α 相等，且场在全程保持题设方向时，题给的相切事件可以实现。由于相切前 $u > 1$，右端小于 $\lambda\int_0^1 \tau\,\mathrm{d}\tau = \lambda/2$。这个上界对应初速公式中根号为正的条件，具体转角由上面的轨迹积分确定。

练习 1.6

解　平动与转动

图 1.43 中的刚体速度可分为圆心平动与绕圆心转动。对于转动部分，$\boldsymbol{u}_{转}\times\boldsymbol{B}$ 沿径向，而金属圆环的线元沿切向，点积恒为零。只有平动速度进入沿环积分。



$$|\Delta y|_{\max}=2a\sin(\Delta l/2a)$$

此图放大缺口；最大值出现在缺口弦竖直时

图 1.51: 转动项径向、线元切向，点积为零；平动项只保留缺口两端高度差

缺口两端的高度差

平动部分的 $\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}$ 竖直向上，是常矢量。设图 1.51 中缺口两端 A,C 的高度差为 Δy，沿其余金属环积分的绝对值为 $Bv_0|\Delta y|$。当缺口弦竖直时，高度差最大，故

$$|\mathcal{E}|_{\max}=2Bv_0a\sin\frac{\Delta l}{2a}\simeq Bv_0\Delta l.$$

最大电压

精确式把 Δl 取为缺口弧长，近似式用了小角近似。缺口转动使端电势差周期变化。整圈闭合时，端点重合，沿整圈的动生积分为零。

练习 1.7

解　两个过程的电流

根据图 1.44 的两条斜线，第一种过程电流恒为 $i_1=\Phi_0/(RT)$；第二种在前半段为 $i_2=2\Phi_0/(RT)$，后半段为零。电流均为正向，因而

$$\Delta Q_1=i_1T=\frac{\Phi_0}{R},\qquad \Delta Q_2=i_2\frac{T}{2}=\frac{\Phi_0}{R}.$$

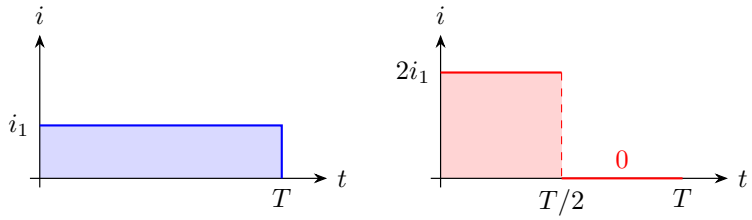


图 1.52: 两过程的电流矩形等面积。右图的电流加倍，持续时间减半

各过程的焦耳热

图 1.52 中两个电流矩形的面积相同，但平方积分不同：

$$W_1 = R\int_0^T i_1^2\,\mathrm{d}t = Ri_1^2[t]_0^T = \frac{\Phi_0^2}{RT},$$
$$W_2 = R\int_0^{T/2}(2i_1)^2\,\mathrm{d}t + R\int_{T/2}^T 0\,\mathrm{d}t = 4Ri_1^2[t]_0^{T/2} = \frac{2\Phi_0^2}{RT}.$$

峰值电流和总热量

第二种过程的电流峰值和总热量都是第一种的两倍。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第二讲

感应电路与电势测量

2026

目录

第二讲　感应电路与电势测量 **1**

2.1　运动导棒的电动势与端电压 1

2.2　感生场的方向与路径积分 3

2.3　并联感应支路与端口等效 5

2.4　电压表的读数与引线路径 7

2.5　电容支路与孤立导体的电荷 8

2.6　例题与分析 9

2.7　本讲小结 24

2.8　练习 24

练习解答 28

第二讲　感应电路与电势测量

2.1　运动导棒的电动势与端电压

图 2.1 中的导棒向右滑动，磁场指向纸内。棒中的正电荷随棒向右运动，受到向上的磁力。把开关断开，电荷在棒的上端积累，在两端之间建立向下的静电场。达到稳定时，两种作用沿棒恰好抵消。若合上开关，电荷可以经左侧电阻返回，电流在棒内向上，沿整圈逆时针流动。

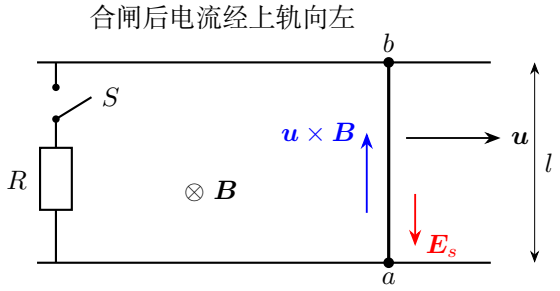


图 2.1: 滑动导棒只有右侧一段在动。左侧开关决定电荷能否经外电阻返回

沿棒从 a 到 b 取正，棒内的动生电动势为

$$\varepsilon_{ab}=\int_0^l uB\ \mathrm{d}s=uB[s]_0^l=uBl.$$

图 2.1 中，沿棒从 a 到 b，磁作用向上，静电场向下。两者沿棒的积分之和为 $uBl+V_a-V_b$。棒的电阻为 r，沿棒取电流 i，所以

$$ir=uBl+V_a-V_b,\qquad V_b-V_a=uBl-ir.$$

开路时 $i=0$，端电压为 uBl。合上开关后，电流由上轨经静止的电阻 R 返回下轨，此时 $V_b-V_a=iR$。代入上式，得 $i(R+r)=uBl$。因此负载改变时，棒内压降 ir 与端电压随之改变，uBl 仍由运动和磁场给定。

2.1.1 一段导线的电压关系

固定导线若处在变化磁场中，推动电荷的是感生电场 $\boldsymbol{E}_f$。在准静态模型中，取给定外场所产生的 $\boldsymbol{E}_f$，导体上的电荷另产生 $\boldsymbol{E}_s = -\nabla V$。运动与场变可以同时出现。沿实际导线由 a 指向 b，定义

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b (\boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}.$$

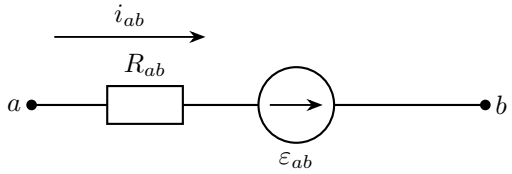
沿同一方向取电流 i_{ab}。将局部欧姆定律沿线积分，

$$i_{ab} R_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \varepsilon_{ab},$$

$$\int_a^b \boldsymbol{E}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_{V_a}^{V_b} \mathrm{d}V = -[V]_{V_a}^{V_b} = V_a - V_b.$$

于是

$$V_a - V_b = i_{ab} R_{ab} - \varepsilon_{ab}. \tag{2.1}$$



$$V_b = V_a + \varepsilon_{ab} - i_{ab} R_{ab}$$

图 2.2: 沿 $a \to b$，非静电作用给出电势升高，电阻给出电势下降

图 2.2 中电阻和等效电源的符号都按 $a \to b$ 读取。从 b 反向走回 a，电流、端电势差和电动势一起反号。沿闭合回路把各段相加，端电势差首尾相消，留下 $\sum i_{ab} R_{ab} = \sum \varepsilon_{ab}$。例 2.1 中的两段半圆具有相同的感生积分，却因电阻不同而具有不同的静电势升降。

2.1.2 导线内部的电势分布与功率

用弧长 s 定位导线上的一点，令 $e(s) = (\boldsymbol{E}_f + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{t}$，单位长度电阻为 $r(s)$。把式(2.1)用于一小段 $\mathrm{d}s$，得到 $\mathrm{d}V/\,\mathrm{d}s = e(s) - ir(s)$。因此只要局部驱动和局部电阻降已知，便可从任意参考点积分求电势。

图 2.3 的径向棒匀速绕 O 转动，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{\omega}$ 同向。离轴距离为 s 的一小段速度是 ωs，所以 $e(s) = B\omega s$。取均匀电阻 $r(s) = r_0$，

$$V(s) - V(0) = \int_0^s (B\omega\sigma - ir_0)\ \mathrm{d}\sigma = \left[\frac{B\omega\sigma^2}{2} - ir_0\sigma\right]_0^s = \frac{1}{2}B\omega s^2 - ir_0 s.$$

开路时 $i=0$，电势沿棒升高。若通过静止理想导线把两端接通，$V(L)=V(0)$ 给出 $ir_0=B\omega L/2$。此时

$$V'(s)=B\omega s-ir_0=B\omega(s-L/2),\qquad V''(s)=B\omega>0.$$

因此棒内最低点在 $L/2$，电势比两端低 $B\omega L^2/8$。例 2.10 保留可变负载，让最低点随电流移动。

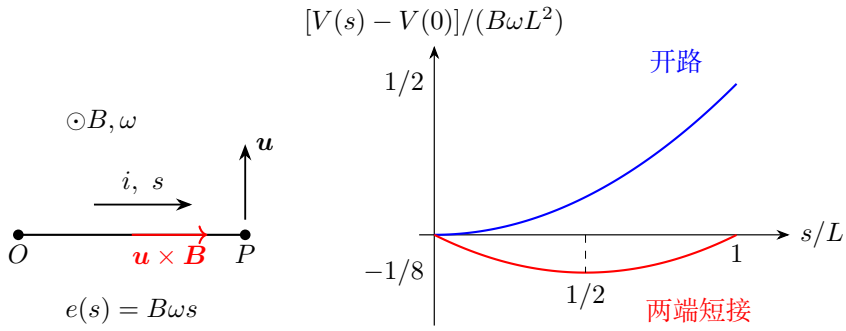


图 2.3: 同一转棒在开路与有负载时的电势曲线；两端短接时棒内出现最低电势

式(2.1)乘电流后是功率关系，$i(V_a-V_b)+i\varepsilon_{ab}=i^2R_{ab}$。其中 $i\varepsilon_{ab}$ 是分布驱动向支路提供的功率。为负时，支路的感应作用吸收能量。对整个网络求和，各节点电势所乘的电流代数和为零，因此总驱动功率等于总发热率。

2.2 感生场的方向与路径积分

圆柱磁区半径为 a，磁场沿 $+z$，$\dot B=k$，柱外磁场取零。取逆时针为正，半径 r 的圆上场的切向分量相同。法拉第定律给出

$$2\pi rE_\theta=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{\min(r,a)}B(t)\,2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=-k\left[\pi\rho^2\right]_0^{\min(r,a)}=-k\pi\min(r,a)^2.$$

所以柱内 $E_\theta=-kr/2$，柱外 $E_\theta=-ka^2/(2r)$。沿同心弧取线元 $r\,\mathrm{d}\theta$。沿半径，线元与感生场垂直。沿弦则要把场投影到弦上。

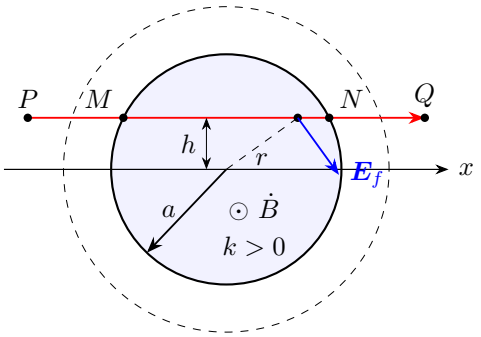


图 2.4: 环向电场在直线路径上的投影；磁区外仍存在感生电场

图 2.4 中取直线路径 $P\to Q$，其高度为 $h>0$，微元为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_x$。按逆时针定义 $\boldsymbol{e}_\theta$，有 $r^2=x^2+h^2$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_x=-h/r$，因而

$$\boldsymbol{E}_f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-E_\theta(r)\frac{h}{r}\,\mathrm{d}x.$$

这一步投影给出沿弦的推动作用，线元长度取 $\mathrm{d}x$。由图中交点 M,N 把积分分成三段，内段代入 $E_\theta=-kr/2$，两外段代入 $E_\theta=-ka^2/(2r)$。在 $r=a$ 处两式同为 $-ka/2$，所以分段不会引入电场跳变。固定端点的测量支路若改走别的路径，也应重新按路径投影积分。

由图 2.4，内段的投影为 $E_x=kh/2$，外段为 $E_x=ka^2h/[2(x^2+h^2)]$。内段积分取水平长度，外段可取 $z=x/h$，以 $\arctan z$ 为原函数。例 2.2 的路径跨越圆周，沿同一条直线分三段积分。若改成刚性导线在匀强静磁场中平移，$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}$ 为常矢量，

$$\varepsilon_{ab}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot\int_a^b\mathrm{d}\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{r}_b-\boldsymbol{r}_a).$$

例 2.4 中圆弧和表引线同速平移，连接相同端点时积分相同。静止接触板一段取 $\boldsymbol{u}=0$。

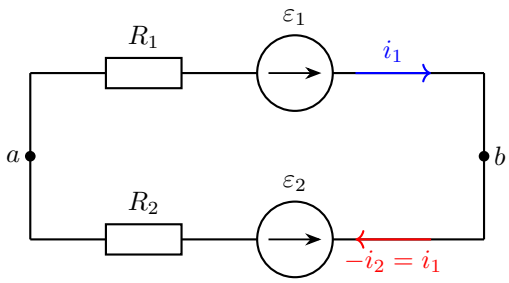
例 2.2 沿一段延长弦积分。感生场沿同心圆的切线，图中的弦距圆心为 h。径向距离为 r 时，切线沿弦的投影因子是 h/r。在磁区内，场强正比于 r，相乘后沿弦的分量为常量；到磁区外，场强按 $1/r$ 变化，沿弦的分量也随位置变化。

2.3 并联感应支路与端口等效

图 2.5 中两个支路都以 $a \to b$ 为正。令 $U = V_a - V_b$。端口开路时 $i_1 + i_2 = 0$，将两支路的电压关系代入，

$$\frac{U+\varepsilon_1}{R_1} + \frac{U+\varepsilon_2}{R_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad U = -\frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

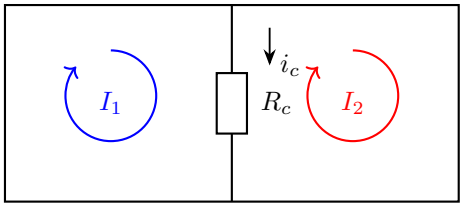
代回 $i_1 = (U+\varepsilon_1)/R_1$，得 $i_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(R_1 + R_2)$。从上支路去、沿下支路返回，也会得到同一个电动势之差。两支路电动势相同且端口开路时，环流为零。



图示 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，两支路正向仍均取 $a \to b$

图 2.5: 两支路采用相同端点正向；内部环流来自电动势之差

有公共电阻的两个回路，可以各自取一个顺时针电流。图 2.6 中左回路在公共支路向下，右回路向上。于是公共电阻的压降是 $(I_1 - I_2)R_c$，发热功率是 $(I_1 - I_2)^2 R_c$。相邻磁区各自按对应回路的法线求磁通变化，公共支路按真实电流列式。



$$i_c = I_1 - I_2$$
$$P_c = R_c(I_1 - I_2)^2$$

图 2.6: 两个相邻回路在公共电阻中反向经过，公共支路真实电流是有向差

2.3.1　多支路的开路电压和内阻

设各支路从 A 到 B 的驱动为 ε_j，电导为 $G_j = 1/R_j$。若外负载电流 I 从 A 流出，节点方程为 $\sum_j G_j(U+\varepsilon_j) + I = 0$。解出

$$U = U_{\rm oc} - r_p I, \qquad U_{\rm oc} = -\frac{\sum_j G_j \varepsilon_j}{\sum_j G_j}, \qquad r_p = \frac{1}{\sum_j G_j}.$$

在图 2.7 中，三支路等电阻，驱动依次为 $0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0$，所以 $U_{\rm oc} = -\varepsilon_0$。中支路的静电压与感生驱动恰好抵消，左右两支路则形成环流。例 2.7 从端口电压为零进一步算出内部发热率。

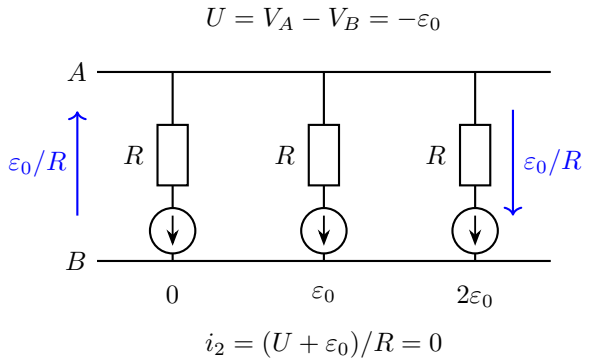


图 2.7: 三支路同电阻的例子：中支路零电流而端电势差非零

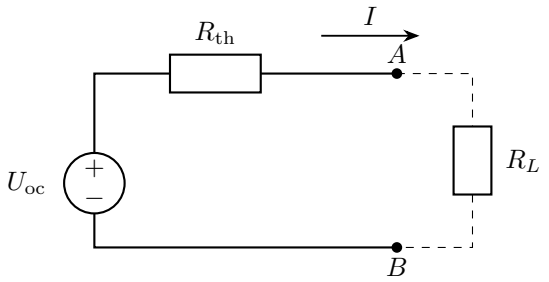


图 2.8: 用开路静电势差和串联内阻表示端口，图中负载支路无感应电动势

图 2.8 中的 $U_{\rm oc}$ 是外支路开路时两个节点的静电势差，$R_{\rm th}$ 是端口内阻。接入没有感应电动势的负载 R_L 时，负载电流从 A 到 B 取正，$I = U_{\rm oc}/(R_{\rm th}+R_L)$，此时 $V_A - V_B = IR_L$。

若负载引线沿路径 g 还有感应积分 ε_g，该支路满足 $IR_L = V_A - V_B + \varepsilon_g$。与端口式 $V_A - V_B = U_{\rm oc} - IR_{\rm th}$ 联立，得到

$$I = \frac{U_{\rm oc} + \varepsilon_g}{R_{\rm th} + R_L}.$$

沿同一路径接高内阻表，读数趋于 $U_{\mathrm{oc}}+\varepsilon_g$。改接引线改变的是 ε_g，其差值由两条路径围成的闭合回路求出。

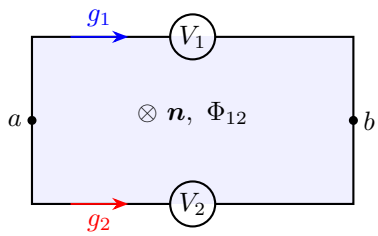
求网络内部功率时，先由负载电流确定实际端电压，再把它代回各条支路。移动导体的速度由外界给定时，改变测量负载仍可使用同一个等效电源。

2.4 电压表的读数与引线路径

表的正、负接线端决定测量的有向路径。设表支路从 a 经引线和表体到 b，引线电阻略去，表内电阻为 R_V。沿这条路径应用式(2.1)，表内局部感应可忽略时，读数为

$$M = i_V R_V = V_a - V_b + \varepsilon_g.$$

引线若沿被测电阻贴近布置，两条路径间的磁通变化很小，引线积分便接近被测支路的积分。这时读数给出该支路的电阻降。若引线本身的积分可忽略，读数给出端点静电势差。例 2.3 用同一个方框比较这两种量。



$\Gamma = g_1 + (-g_2)$：沿上路去、下路回

图 2.9: 同一对端点的两条测量路径；两表均按从 a 到 b 计有向读数

图 2.9 中的两条路径都由 a 指向 b，因此两支路的端电势项相同。设局部表体的感应可忽略，表内电阻降为 $M_j = i_j R_{Vj}$，便有

$$M_1 = V_a - V_b + \varepsilon_{g_1}, \qquad M_2 = V_a - V_b + \varepsilon_{g_2}.$$

先作两式之差，再沿图中的闭合方向 Γ 使用法拉第定律，得到固定引线时

$$M_1 - M_2 = \int_{g_1} \boldsymbol{E}_f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} - \int_{g_2} \boldsymbol{E}_f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t}.$$

上路从左向右、下路反向返回，组成顺时针环路，故图中正法线指向纸里。图中两支路接在同一对端点上，端电势项直接相消。分两次测量时，大内阻使两次端电势近似相同。

近似均匀变化的磁场中，两引线之间围成面积 A_g，则附加读数的量级为 $A_g|\dot{B}|$。若要求附加读数至多为 δU，可按 $A_g \le \delta U/|\dot{B}|$ 布线。大内阻主要用来减小分流。

表内阻与端口内阻可比时，先用 $U = U_{\mathrm{oc}} - r_p i_V$ 表示节点电势，再与 $M = R_V i_V = U + \varepsilon_g$ 联立。例 2.6 的径向引线和弦形引线对应不同的 ε_g。

2.5 电容支路与孤立导体的电荷

当外磁通变化率恒定，电容充电后可以在零电流下维持电压。若支路从 A 到 B 的引线积分为 ε_g，稳定时沿该支路有 $u_C = V_A - V_B + \varepsilon_g$，极板电荷为 Cu_C。例 2.11 先求电阻网络的端电势，再按实际引线路径求极板电荷。

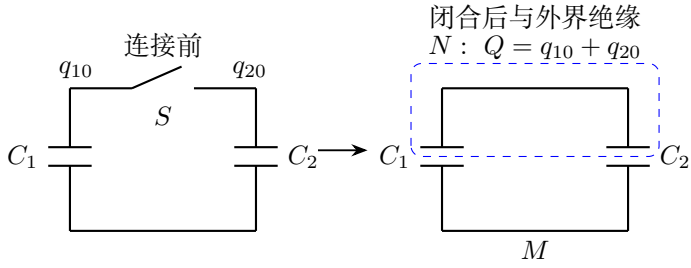


图 2.10: 电容重新连接前后：虚线框标出应守恒总电荷的上导体

图 2.10 中，闭合 S 以后两个上极板与连线组成同一个孤立导体 N。电荷沿连线在两块上极板之间转移，框内总电荷保持为 Q。以下用 $U = V_N - V_M$ 计算共同电压，初始电荷均按各上极板的有向电荷代入；闭合过程保留微小电阻以保证最终稳定。

图 2.10 合闸后，电荷在上导体 N 内重新分配。令连接前两上极板分别带 $q_{10} = C_1U_1$、$q_{20} = C_2U_2$，有向总电荷为 $Q = q_{10} + q_{20}$。待微小电阻使电流衰减到零，两个电容的电压相同，

$$q_1 + q_2 = Q, \quad q_1 = C_1U, \quad q_2 = C_2U \quad \Longrightarrow \quad U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2}.$$

分配期间若外场停止变化且回路无外电源，焦耳热来自电场能减少。代入共同电压并展开，

$$\begin{aligned} Q_J &= \frac{1}{2}C_1U_1^2 + \frac{1}{2}C_2U_2^2 - \frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \\ &= \frac{C_1C_2U_1^2 - 2C_1C_2U_1U_2 + C_1C_2U_2^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 - U_2)^2. \end{aligned}$$

电阻很小时，电流的持续时间缩短，初末电压和上述总热量仍由两初始电荷决定。外场持续供能时，把感应电动势与电流的乘积计入能量关系。

2.6 例题与分析

例 2.1 (不同电阻的两段半圆)**.** 半径 a 的圆环上、下半圆电阻分别为 R_1, R_2，每段电阻沿弧长均匀分布。圆心为 O，右端为 P，左端为 Q，均匀磁场垂直纸面向里，以速率 $b>0$ 增大。求电流与 V_P-V_Q；再取 $R_1=R, R_2=2R$，求上半圆上极角分别为 $45°, 135°$ 的 M, N 两点的 V_M-V_N。

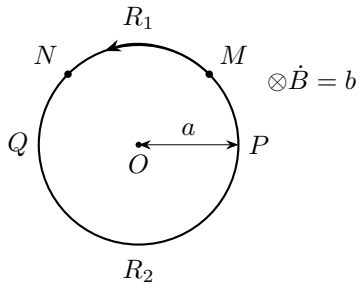
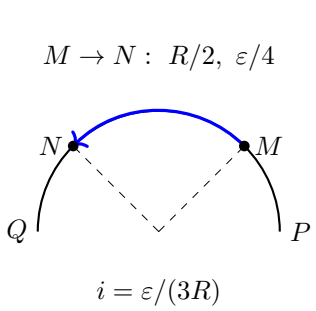


图 2.11: 题设：不同电阻的两段半圆

解　环流与上半圆端压

图 2.11 给出逆时针正向，上半圆从 P 到 Q。外场向里增大，感生场沿逆时针，因此总电动势 $\varepsilon=b\pi a^2$，取图中的逆时针极角 φ。每段用 $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}(ba/2)a\,\mathrm{d}\varphi=(ba^2/2)[\varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2}$ 计算。半圆的角跨度为 π，电动势为 $\varepsilon/2$。闭合回路有 $i(R_1+R_2)=\varepsilon$，所以

$$i=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2},\qquad V_P-V_Q=iR_1-\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon(R_1-R_2)}{2(R_1+R_2)}.$$



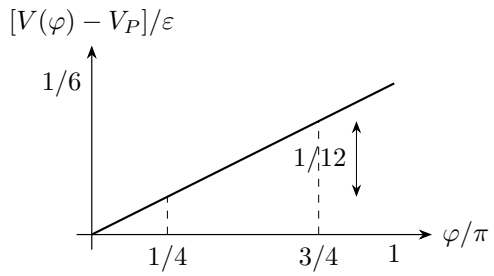


图 2.12: 上半圆中感生作用超过电阻降，电势沿实际电流方向升高

两点间的弧长比例

图 2.12 将上半圆与电势随极角的变化对应，明确电阻降和分布电动势的方向。特殊情形中 $i=\varepsilon/(3R)$，$M\to N$ 占上半圆一半，故其电阻为 $R/2$、电动势为 $\varepsilon/4$。逐项代入得

$$V_M-V_N=\frac{\varepsilon}{3R}\frac{R}{2}-\frac{\varepsilon}{4}=-\frac{\varepsilon}{12}.$$

右图的电势随 φ 升高。M,N 间感生驱动超过电阻降，所以电流流向电势更高的 N。

例 2.2 (感生电场沿延长弦的积分)**.** 圆形磁区半径 a，内部磁场向纸外且 $\dot B=K>0$，外部磁场忽略。水平弦 AC 距圆心 $h=a/\sqrt{2}$。在整条直线上取任意点 P，令沿 AC 向右为有向距离 s 的正向。求 ε_{AP} 及其大小。

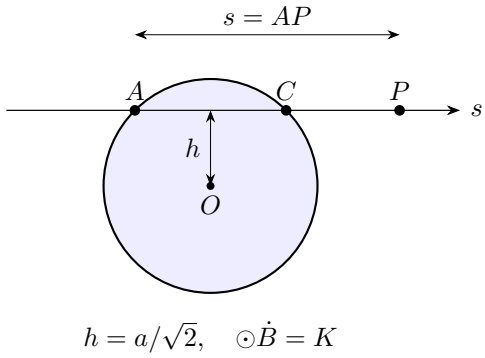


图 2.13: 延长弦上的有向距离从 A 计起，P 可在左右延长线或弦内

解　弦内的电场投影

沿图 2.13 建立 Oxy，弦为 $y=h$，$A=(-h,h)$。外场增大产生顺时针电场。磁区内 $E_x=Kh/2$，故当 $0\le s\le 2h$，

$$\varepsilon_{AP}=\int_{-h}^{s-h}\frac{Kh}{2}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{Khx}{2}\right]_{-h}^{s-h}=\frac{Kh[(s-h)-(-h)]}{2}=\frac{Khs}{2}.$$

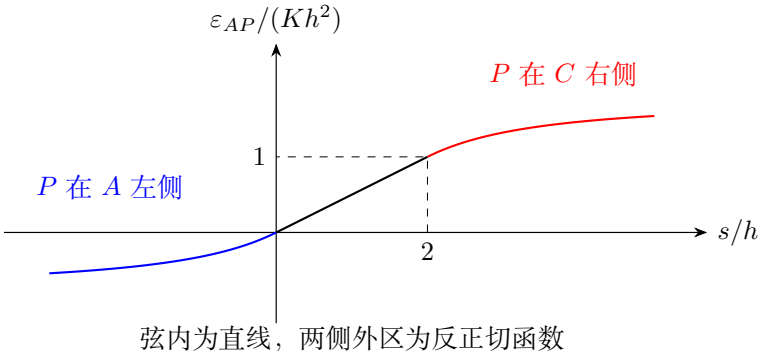


图 2.14: 同一水平路径的三个位置区间，给出连续的有向感生积分

右侧延长线

图 2.14 把 $A\to C$ 与 $C\to P$ 分开。区外场为 $E_\theta=-Ka^2/(2r)$，其水平投影为 $E_x=Ka^2h/[2(x^2+h^2)]$。令 $z=x/h$，则 $\mathrm{d}x=h\,\mathrm{d}z$，$h\,\mathrm{d}x/(x^2+h^2)=\mathrm{d}z/(1+z^2)$；上下限由 $h,s-h$ 变为 $1,(s-h)/h$。因 $\mathrm{d}(\arctan z)/\,\mathrm{d}z=1/(1+z^2)$，

$$\int_h^{s-h}\frac{h\,\mathrm{d}x}{x^2+h^2}=\left[\arctan z\right]_1^{(s-h)/h}=\arctan\frac{s-h}{h}-\frac{\pi}{4}.$$

于是 $s\ge 2h$ 时

$$\begin{aligned}\varepsilon_{AP}&=Kh^2+\frac{Ka^2}{2}\int_h^{s-h}\frac{h\,\mathrm{d}x}{x^2+h^2}\\&=\frac{Ka^2}{2}\left[1+\arctan\frac{s-h}{h}-\frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

两段在 C 点接上，此处 $s=2h$，积分值为 $Ka^2/2$。$s\to\infty$ 时结果趋于 $Ka^2(1+\pi/4)/2$；电场虽延伸到无穷远，沿此直线的投影衰减为 x^{-2}，积分仍收敛。

左侧延长线

若 P 在 A 左侧，即 $s<0$，路径全在磁区外，积分上限 $s-h<-h$。同样令 $z=x/h$，上下限变成 $-1,(s-h)/h$；$\left[\arctan z\right]_{-1}^{(s-h)/h}=\arctan[(s-h)/h]+\pi/4$，于是

$$\varepsilon_{AP}=\frac{Ka^2}{2}\int_{-h}^{s-h}\frac{h\,\mathrm{d}x}{x^2+h^2}=\frac{Ka^2}{2}\left[\arctan\frac{s-h}{h}+\frac{\pi}{4}\right].$$

该值为负，表示沿向左路径的电场积分反向；大小取绝对值。在 $s=0$ 时与内部表达式同时为零。

例 2.3 (方框中的端电势与三种测量)**.** 方框如图，上下边电阻为零，两竖边电阻分别为 $3\,\mathrm{k\Omega}, 7\,\mathrm{k\Omega}$。磁场向里均匀增大，产生逆时针 $1\,\mathrm{mA}$ 电流。外加磁场及方框的几何具有四重旋转对称性；导线电阻不对称。先求沿逆时针各边的静电势差；再用大内阻电压表，引线紧贴被测边且不围成额外磁通，分别测 $A_4 \to A_1$、$A_2 \to A_3$、$A_3 \to A_4$ 的有向读数。

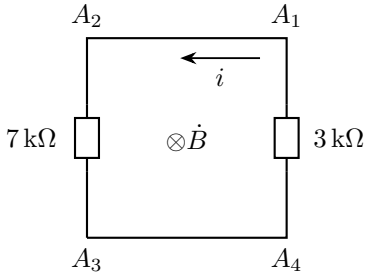


图 2.15: 题设：方框中的端电势与三种测量

解　整圈电动势

图 2.15 以 $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_1$ 为正向。沿此方向电流为 1mA，总电阻 $(7+3)\,\mathrm{k\Omega} = 10\,\mathrm{k\Omega}$，所以整圈电动势 $\varepsilon = iR_\Sigma = 10\,\mathrm{V}$。外场的四重对称性使每边感生积分同为 $e_s = \varepsilon/4 = 2.5\,\mathrm{V}$；电阻不对称不改变这一外场积分。

四边的静电势差

对任意边使用 $U_{ab} = iR_{ab} - e_{ab}$。上、下边理想导线无电阻，两竖边分别为 7kΩ 与 3kΩ，因此

$$U_{12} = 0 - 2.5 = -2.5\,\mathrm{V}, \qquad U_{23} = (10^{-3})(7\times 10^3) - 2.5 = 4.5\,\mathrm{V},$$
$$U_{34} = 0 - 2.5 = -2.5\,\mathrm{V}, \qquad U_{41} = (10^{-3})(3\times 10^3) - 2.5 = 0.5\,\mathrm{V}.$$

这四段静电势差相加为零，整圈感应电动势却为 10V，二者含义不同。

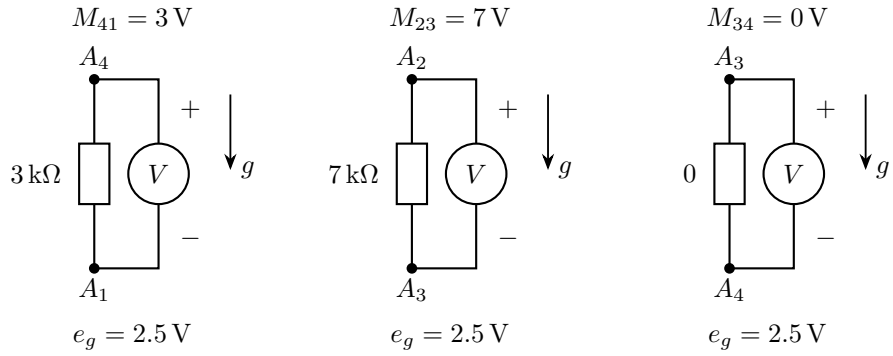


图 2.16: 三条被测边分别旋转展开；表支路紧贴相应边，积分与该边相同

三次电压表读数

图 2.16 中的表引线紧贴被测边且不反穿磁区，故沿同一方向的引线积分也是 2.5 V。表的内阻足够大，原环流和两端电势可近似取接表前的值。题目三次读数按给定方向分别为

$$U_{41}+e_g=3\,\mathrm{V},\qquad U_{23}+e_g=7\,\mathrm{V},\qquad U_{34}+e_g=0.$$

它们恰等于对应边的电阻降。

例 2.4 (移动圆弧与随动电压表)**.** 在 yz 平面内，半径 a 的四分之三圆弧端点 a,d 位于极角 $225°, 315°$；b,c 位于 $135°, 45°$，e,f 为左右端。弧总电阻 $3R$。弧沿纸外 $+x$ 方向以速率 v 平移，静磁场沿图中竖直向上方向。静止零电阻接触板跨接 a,d，宽 $l=\sqrt{2}a$。电阻为 nR 的小表体在圆心，以随弧运动的径向引线接 b,c。求表的读数大小及 V_e-V_f。

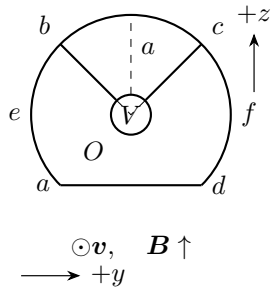


图 2.17: 题设：移动圆弧与随动电压表

解　各支路的动生作用

图 2.17 中 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 指向图左，令 $E=Blv$。按各点的水平坐标计算端点投影，弧 $a\to b, c\to d$ 的动生电动势均为零，电阻各为 R；弧 $b\to c$ 电动势为 $-E$，电阻为 R。径向表支路 $b\to O\to c$ 同样随动，电动势也是 $-E$，电阻为 nR。

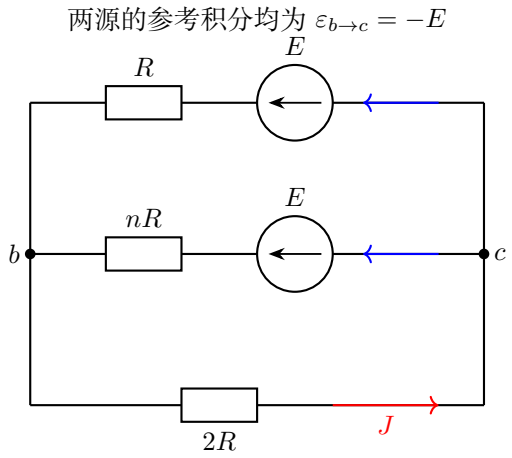


图 2.18: 三条 $b\to c$ 支路中，两条随动路径有相同的负电动势，静止接触板所在外路径无净电动势

并联支路与回路电流

图 2.18 的中间两支路具有相同电动势，故等效电阻 $nR/(n+1)$、电动势 $-E$。外回路其余电阻为 $2R$，于是流经 $b\to a\to d\to c$ 的电流

$$J=\frac{E}{2R+nR/(n+1)}=\frac{E(n+1)}{R(3n+2)}.$$

随动表的电流

求电流方向时，把中间两条电流均按 $b\to c$ 计。外路径电流 J 从 b 流出，所以节点方程为 $i_{bc}+i_V=-J$。

两中间支路的电动势均为 $-E$，故

$$i_{bc}=\frac{U_{bc}-E}{R},\qquad i_V=\frac{U_{bc}-E}{nR}.$$

代入节点方程，先得 $U_{bc}-E=-JnR/(n+1)$，再解出

$$U_{bc}=E-\frac{JnR}{n+1}=\frac{2E(n+1)}{3n+2}.$$

因此表电流为 $(U_{bc}-E)/(nR)=-E/[R(3n+2)]$。读数大小为 $nE/(3n+2)$。

左右端的静电势差

取接触板电势为零。弧 $a \to e$ 电阻 $R/2$，图中水平向右为 $+y$，圆半径为 a。点 a, e 的水平坐标为 $y_a = -a/\sqrt{2}$、$y_e = -a$，而 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -Bv\boldsymbol{e}_y$，所以

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ae} &= \int_{-a/\sqrt{2}}^{-a} (-Bv)\,\mathrm{d}y = -Bv[y]_{-a/\sqrt{2}}^{-a} \\ &= Bva(1-1/\sqrt{2}) = E(1/\sqrt{2}-1/2),\end{aligned}$$

最后用了 $l = \sqrt{2}a$ 和 $E = Blv$。沿 $a \to e$ 的电流为 $-J$，所以 $V_a - V_e = (-J)R/2 - \varepsilon_{ae}$；由 $V_a = 0$ 得到 $V_e = JR/2 + E(1/\sqrt{2}-1/2)$。对称地 $V_f = -V_e$，所以

$$V_e - V_f = E\left[\frac{n+1}{3n+2} + \sqrt{2} - 1\right].$$

增大表电阻时，i_V 趋于零，表体读数的大小趋于 $E/3$。此时 U_{bc} 趋于 $2E/3$，两者由引线上的 $-E$ 联系起来。

例 2.5 (取走直径导体后的电荷分配)**.** 半径 a 的圆形回路左右两弧分别串有电容 C_1, C_2，其余导线电阻很小。竖直直径 AB 为可取走的导体。向里磁场以速率 B_0/T 增大并已达到充电平衡；先取走直径导体，随即让磁场停止变化。忽略导线寄生电容及取走导体携带的电荷，允许微小电阻使系统最终稳定。求最终两电容上极板的有向电荷。

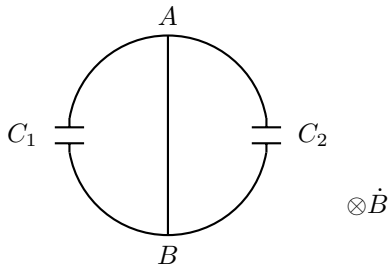


图 2.19: 题设：取走直径导体后的电荷分配

解　拆除前的极板电荷

在图 2.19 中，取走前 $V_A = V_B$，每半圆感应电动势大小 $e = \pi a^2 B_0/(2T)$。左半圆正向 $A \to B$，故左电容上极板电荷为 $-C_1 e$；右半圆正向 $B \to A$，右电容上极板电荷为 $+C_2 e$。

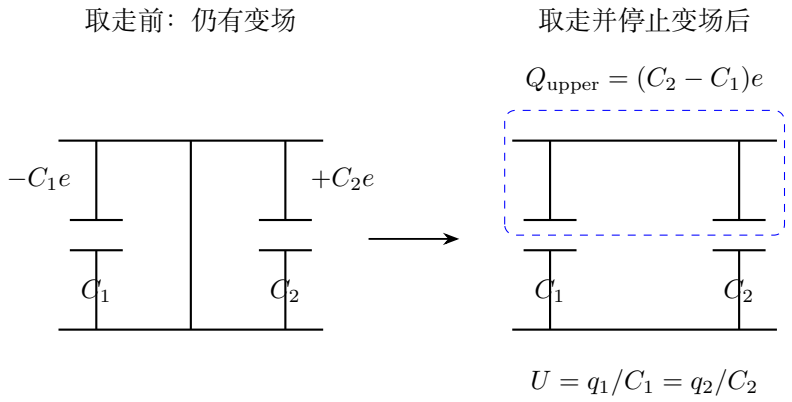


图 2.20: 先确定两块上极板的初始异号电荷，再在取走导体后守恒新孤立上节点的总电荷

上导体的总电荷

图 2.20 把取走直径后彼此绝缘的上、下导体分开。上导体所带总电荷守恒，为 $(C_2 - C_1)e$。磁场停止后没有持续感应电动势，两电容并联，最终共同电压 $U = V_A - V_B$ 满足

$$(C_1 + C_2)U = (C_2 - C_1)e.$$

最终极板电荷

所以 $q_1 = C_1(C_2 - C_1)e/(C_1 + C_2)$，$q_2 = C_2(C_2 - C_1)e/(C_1 + C_2)$。负号表示上极板带负电。$C_1 = C_2$ 时最终两电容均放电，电场能经微小电阻耗散。

例 2.6 (有限内阻表与两条引线路径)**.** 均匀圆环半径 a、总电阻 r，端点 A, B 的逆时针圆心角为 $0 < \theta < \pi$。圆环内外满足轴对称感生场，圆环内部均匀磁场向里以速率 k 增大。电阻为 R 的小表体分别用径向折线 AOB 或直弦 AB 接入，表支路总电动势按这两条路径计算。求两次表读数。

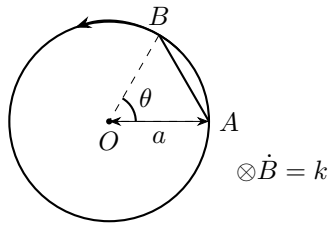


图 2.21: 题设：有限内阻表与两条引线路径

解　空载圆环的端电势

图 2.21 两圆弧电阻为 $r_1 = r\theta/(2\pi)$、$r_2 = r(2\pi-\theta)/(2\pi)$。取两支路均由 A 走向 B，电动势分别为 $ka^2\theta/2$ 与 $-ka^2(2\pi-\theta)/2$。设未接表时 $U = V_A - V_B$，两支路电流为 $(U+\varepsilon_1)/r_1$、$(U+\varepsilon_2)/r_2$，节点电流和为零。代入有 $\varepsilon_1/r_1 = k\pi a^2/r$、$\varepsilon_2/r_2 = -k\pi a^2/r$，驱动项抵消，剩下 $U(1/r_1+1/r_2)=0$，故 $U=0$。

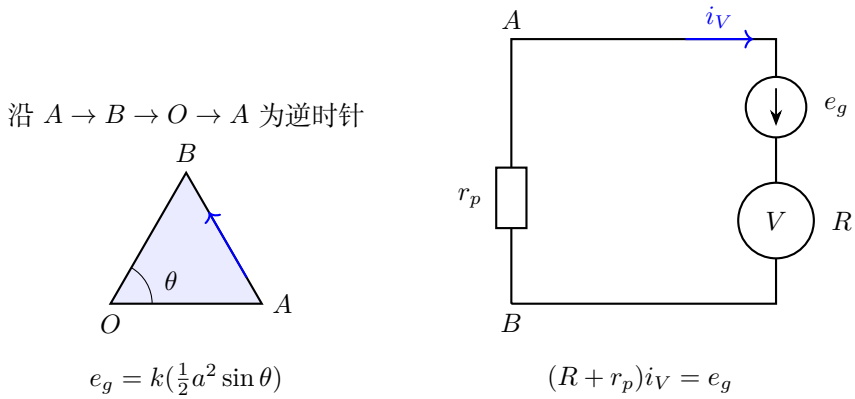


图 2.22: 弦与径向线围成的三角形决定引线源，有限内阻则与圆环端口电阻串联

端口内阻与径向引线

图 2.22 把圆环对外端口等效为零电压源与 $r_p = r_1r_2/(r_1+r_2) = r\theta(2\pi-\theta)/(4\pi^2)$。径向路径感应积分为零，所以表电流、读数都为零。

弦路驱动与表电流

直弦路径与径向路径围成三角形 AOB，按逆时针取向，弦的积分为 $e_g = ka^2\sin\theta/2$。表支路闭合后，圆环端口电势成为 $U = -i_Vr_p$，表体电阻满足 $Ri_V = U + e_g$，消去 U 得 $(R+r_p)i_V = e_g$。所以

$$i_V = \frac{e_g}{R+r_p}, \qquad |U_V| = \frac{Rka^2\sin\theta}{2(R+r_p)}.$$

有限内阻造成分流，已通过 r_p 计入。$R\to\infty$ 时读数趋于 e_g，$R\to 0$ 时表体电压趋零；两种极限都与含源支路的关系相容。

例 2.7（三个感应支路中的环流与供能）. 三条支路同接节点 A, B，电阻依次为 $R, 2R, R$。从 A 到 B 的分布电动势为 $e, -2e, 0$，$e > 0$，各感应驱动由外部维持，支路自感忽略。求端电势差、各支路电流和总发热率；再接电阻 R_L 于端口，求端口等效。

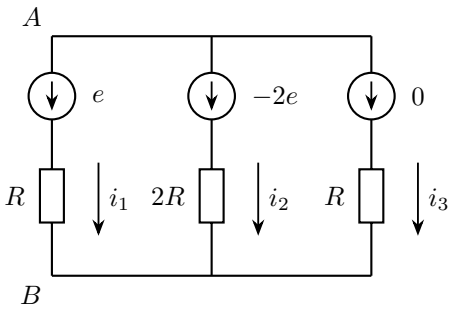


图 2.23: 题设：三个感应支路中的环流与供能

解　节点电势

图 2.23 已把三条参考电流统一向下，故每一支路使用 $i_j R_j = U + e_j$。开路端口没有取流，节点条件给出

$$\frac{U+e}{R} + \frac{U-2e}{2R} + \frac{U}{R} = 0.$$

电动势项恰好抵消，而总电导为 $5/(2R)$，所以 $U = 0$。逐一代回得到 $i_1 = e/R, i_2 = -e/R, i_3 = 0$；负号说明第二支路真实电流从 B 向 A。

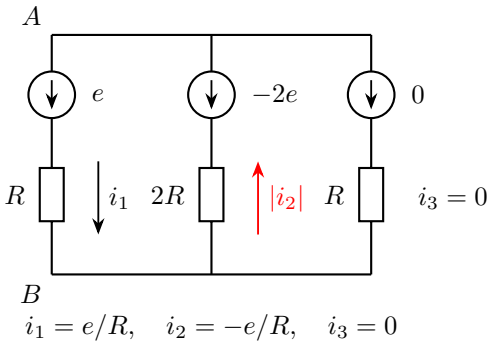


图 2.24: 解答过程：三个感应支路中的环流与供能

内部环流与发热

图 2.24 明确第二支路电流的负号，第一、第二支路形成环流。总发热率为 $i_1^2 R + i_2^2 (2R) = 3e^2/R$。外驱动功率为 $e i_1 + (-2e) i_2 = 3e^2/R$，与发热一致。

接入外负载

接入负载后，端口开路电压仍为零，内阻为 $r_p = [1/R + 1/(2R) + 1/R]^{-1} = 2R/5$。因此任意纯电阻负载中仍没有电流，内部环流却保持存在。

例 2.8 (相邻磁区驱动的电桥)**.** 菱形网络 $ACBD$ 的边电阻如图，对角线 AB 电阻为 r。上、下三角回路均按顺时针选向，其感应电动势都为 $e > 0$。几何和外场使对角支路的分布电动势为零。沿上外路径 $A \to C \to B$ 的积分为 e，沿下外路径 $A \to D \to B$ 的积分为 $-e$。求各路径电流及 U_{AB}，再判断沿对角线接表的读数。

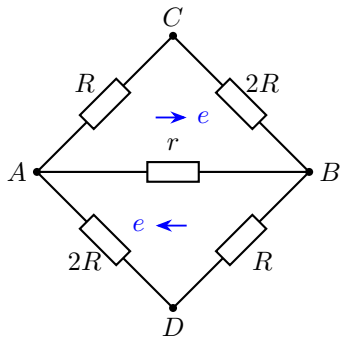


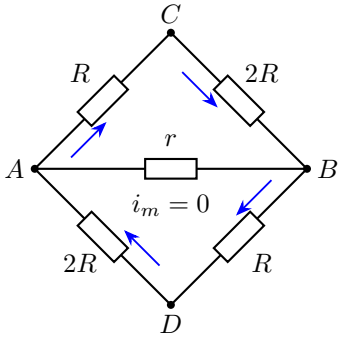
图 2.25: 菱形电桥的电阻与两个三角回路的顺时针方向

解　三条并联路径

图 2.25 的三条 $A \to B$ 路径电阻分别为 $3R, 3R, r$，电动势分别为 $e, -e, 0$。把两串联外路径各视为一条支路，得到

$$i_u = (U + e)/(3R), \quad i_d = (U - e)/(3R), \quad i_m = U/r.$$

节点方程 $i_u + i_d + i_m = 0$ 化为 $U[2/(3R) + 1/r] = 0$，所以 $U = 0$。因此上路径电流从 A 经 C 到 B，为 $e/(3R)$；下路径从 B 经 D 回 A，同样为 $e/(3R)$；对角线无电流。



$i_{外} = e/(3R)$
$U_{AB} = 0$
沿 AB 接表：$\varepsilon_g = 0$

图 2.26: 外框电流沿 $A \to C \to B \to D \to A$ 流动，对角支路的电流为零

对角线的电压表

图 2.26 中的对角线是一条零电流支路，沿它放置的静止表引线感应积分为零，故读数为零。两外路径仍持续发热，总功率 $2e^2/(3R)$。虽然两条边在不同位置的电阻不相等，两外路径的总电阻恰相等，足以使端口 A, B 平衡。

例 2.9 (转棒的中间电刷与分段负载)**.** 均匀导棒 OA 长 a，绕 O 在纸面内逆时针转动，角速度 ω，磁场向纸外。每单位长度电阻为 λ，在半径 b 处有电刷 P。固定导线将 O, P, A 分别引出，负载 R_1 接 O, P，R_2 接 P, A；两负载引线相互贴近且固定。求两段电流、$V_P - V_O, V_A - V_P$，以及维持转动所需的电磁功率。

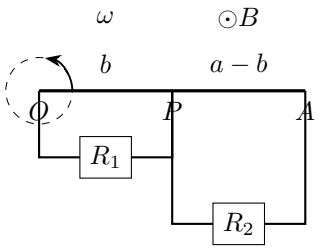


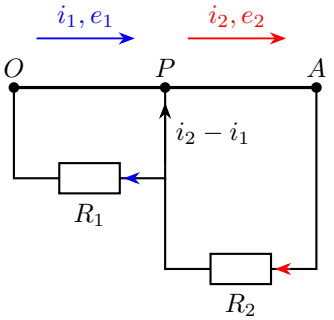
图 2.27: 题设：转棒的中间电刷与分段负载

解　两段转棒的电动势

在图 2.27 中，转棒各点 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 沿径向向外。用径向坐标 r 分别积分，

$$e_1 = B\omega \int_0^b r \, \mathrm{d}r = B\omega[r^2/2]_0^b = \frac{B\omega b^2}{2},$$
$$e_2 = B\omega \int_b^a r \, \mathrm{d}r = B\omega[r^2/2]_b^a = \frac{B\omega(a^2 - b^2)}{2}.$$

两段棒电阻为 $r_1 = \lambda b, r_2 = \lambda(a - b)$。节点 P 是两闭合子回路的公共节点，但固定负载各与相应棒段成闭合回路，另一端没有额外短接。



P 电刷的参考方向为固定网络指向棒

图 2.28: 两段棒各经自己的负载返回；电刷承担两段电流之差

负载电流与电刷分流

图 2.28 分别标出两段的发电方向。令棒段电流向外为正，负载电流从高电势外端返回内端，因而

$$i_1 = \frac{e_1}{R_1 + r_1}, \qquad i_2 = \frac{e_2}{R_2 + r_2}.$$

在节点 P，电刷流入棒的电流加上 i_1，等于外侧棒段的 i_2。所以电刷的有向电流为 $i_2 - i_1$。两负载的端电势差分别为

$$V_P - V_O = i_1 R_1 = e_1 - i_1 r_1, \qquad V_A - V_P = i_2 R_2 = e_2 - i_2 r_2.$$

两段导棒的磁阻力矩

棒内一段长 $\mathrm{d}r$ 的磁阻力矩为 $Bi_j r\,\mathrm{d}r$，在两段电流各自保持不变的区间内积分，

$$\tau_B = Bi_1 \int_0^b r\,\mathrm{d}r + Bi_2 \int_b^a r\,\mathrm{d}r = Bi_1[r^2/2]_0^b + Bi_2[r^2/2]_b^a = \frac{Bi_1 b^2 + Bi_2(a^2 - b^2)}{2}.$$

机械功率 $\omega\tau_B = e_1 i_1 + e_2 i_2 = i_1^2(R_1 + r_1) + i_2^2(R_2 + r_2)$，包括负载与棒内发热。

例 2.10 (有负载时导棒内部的电势极值)**.** 长 l 的直棒沿垂直棒的方向以速率 v 平移，磁场垂直运动平面，沿棒坐标 $s \in [0, l]$ 有 $B(s) = B_0 s/l$，且 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ 沿 s 增加方向。单位长度电阻为 λ，两端经静止、无动生作用的负载 R 闭合。求电流与棒内部相对 $s = 0$ 端的电势分布，讨论极值位置。

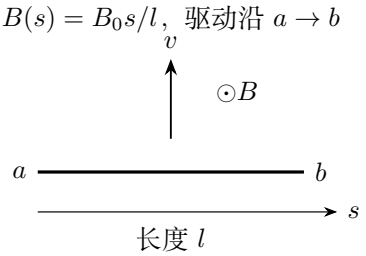


图 2.29: 题设：有负载时导棒内部的电势极值

解　整棒电动势与电流

图 2.29 规定的推动方向为正，局部电动势密度 $e(s) = vB_0 s/l$。整棒电动势 $e = (B_0 v/l)\int_0^l s\,\mathrm{d}s = (B_0 v/l)[s^2/2]_0^l = B_0 vl/2$，棒内阻 $r = \lambda l$，故 $i = B_0 vl/[2(R + \lambda l)]$，沿棒 $a \to b$。

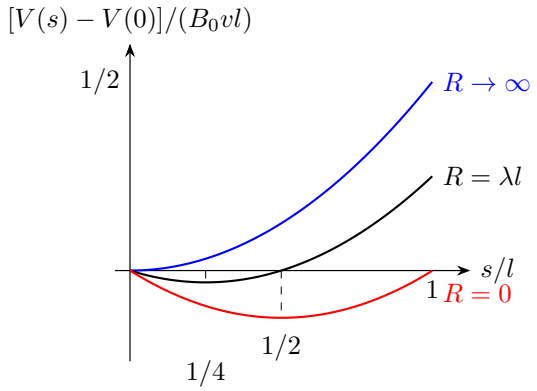


图 2.30: 对同一局部驱动分别减去不同电阻降，得到开路、有限负载和短接的电势分布

棒内最低电势

由图 2.30 的局部关系，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = e(s) - i\lambda$，从 0 积分到 s 得

$$V(s) - V(0) = \int_0^s \left(\frac{B_0 v}{l}\sigma - i\lambda\right)\mathrm{d}\sigma = \left[\frac{B_0 v}{2l}\sigma^2 - i\lambda\sigma\right]_0^s = \frac{B_0 v}{2l}s^2 - i\lambda s.$$

固定 i，对 s 求导：

$$V'(s) = \frac{B_0 v}{2l}(2s) - i\lambda, \qquad V''(s) = \frac{B_0 v}{l} > 0.$$

曲线开口向上，导数在 $s_* = i\lambda l/(B_0 v) = \lambda l^2/[2(R+\lambda l)]$ 为零，因此这里是最小电势，且 $0 < s_* \le l/2$。两端的电势差为 $V(l) - V(0) = e - ir = iR$，与负载关系一致。最小值为 $-B_0 v s_*^2/(2l)$。

开路与短接

当 $R \to \infty$，$i \to 0$、$s_* \to 0$，棒内电势沿驱动方向单调上升；当 $R \to 0$，两端电势相等，但内部电势先降后升，最低点在中间。

例 2.11 (磁通已知的开路电容支路)**.** 三支路并联于 A, B。前两支路电阻为 $R, 2R$，从 A 到 B 的感应电动势分别为 $e, 0$；第三支路串联电容 C，其引线从 A 到 B 的感应积分为 $e/4$，电容上极板接 A 一侧。变化率恒定且已稳定。求电容的电压、电荷与两电阻支路电流；说明换一条引线后哪些量改变。

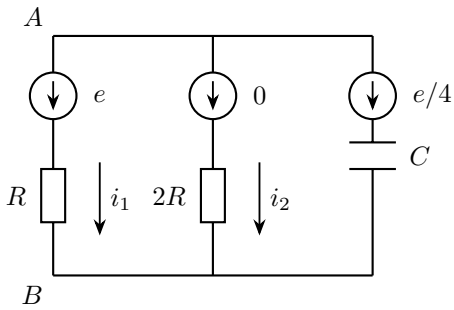


图 2.31: 题设：磁通已知的开路电容支路

解　电阻支路的环流

图 2.31 中稳定电容支路没有电流，故先在前两支路应用节点方程：$(U+e)/R+U/(2R)=0$，得到 $U=V_A-V_B=-2e/3$。因此 $i_1=e/(3R), i_2=-e/(3R)$，实际环流经第一支路向下、第二支路向上。

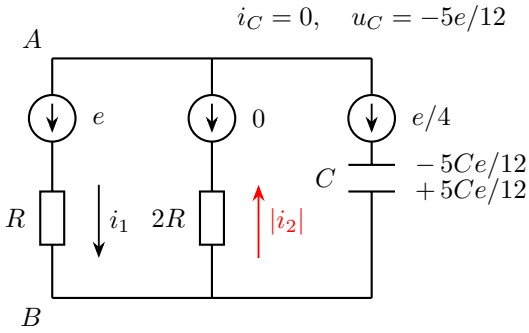


图 2.32: 解答过程：磁通已知的开路电容支路

极板电荷与引线积分

图 2.32 把第三支路的引线作用与电容电压分开。沿 $A\to B$，电容电压降 u_C 应与节点电势差和引线驱动之和相等，所以 $u_C=U+e/4=-5e/12$。上极板有向电荷 $q=Cu_C=-5Ce/12$，负号表示它带负电。

改线后的电容电压

若只把第三支路改走感应积分为零的路径，并等待新的充电稳定，前两支路环流与节点电势均不变，而 u_C 改为 $-2e/3$。电容电压的改变量为 $-e/4$。

2.7　本讲小结

沿实际导线确定 ε_{ab}，再用 $V_a - V_b = i_{ab}R_{ab} - \varepsilon_{ab}$ 连接端点、电阻和电流。磁区内外的感生场投影按路径分段，匀强静磁场中的平移动生积分由端点位移确定。

电压表的读数是表体电阻降。把引线积分加到两接点的静电势差上，再按表的内阻处理分流。电容改接后，先找孤立导体，按有向总电荷求最终板间电压。

2.8　练习

练习 2.1 (螺线管内场变化与不等半圆)**.** 长螺线管截面半径 a，电流为 I_0 时内场为 B_0。电流以速率 $\beta > 0$ 增加；管外同轴圆环由两个半圆构成，正向 $P \to Q$ 的半圆电阻为 R_1，另一半为 R_2。选正法线使总电动势为正，求环流和 $V_P - V_Q$。

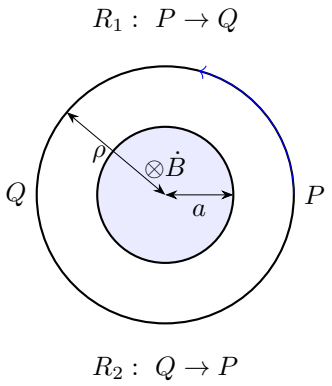


图 2.33: 外环包围整个螺线管截面；a 是磁区半径，外环半径另记为 $\rho > a$

练习 2.2 (绕中线转动的等边三角形)**.** 边长 l、总电阻 R 的均匀等边三角形 abd 绕中线 ac 转动，c 为底边中点。此刻线框在 xy 平面，a 在 $+y$ 轴，b 在 $+x$ 一侧。磁场沿 $+x$，角速度沿 $+y$，大小为 B,ω。求总电动势及 U_{ab},U_{ac}。

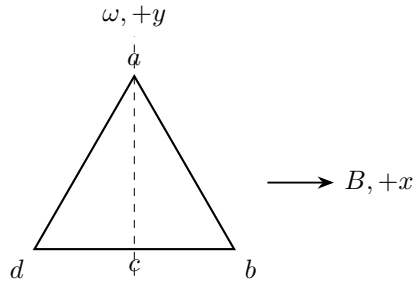


图 2.34: 题设：绕中线转动的等边三角形

练习 2.3 (改变引线面积造成的读数变化)**.** 固定的两端点 A,B 连接一只内阻足够大的电压表。两次引线走向分别为 g_1,g_2，都按 $A\to B$ 取向。沿 g_1 前进、g_2 返回构成面积 S 的矩形，正法线向纸外。该窄条内 $\dot{B}=\beta$ 向纸外。求两次有向读数之差及误差容许 u_0 对面积的要求。

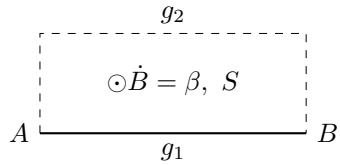
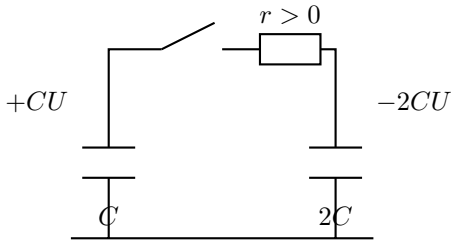


图 2.35: 题设：改变引线面积造成的读数变化

练习 2.4 (极性相反的两电容并接)**.** 电容 $C, 2C$ 的上极板初电压分别为 $+U, -U$。用细电阻将两上极板相连，下极板也相连，不接外源，最终稳定。求最终电压和热量。



两下极板已连接；磁场与外源均不参与再分配

图 2.36: 初始上极板尚未连通，分别带 $+CU$ 与 $-2CU$；闭合开关后经细电阻再分配

练习 2.5 (电阻改变后的圆环电势分配)**.** 半径 a 的圆环处于轴对称向里增强的磁场中，总电动势 $e > 0$。按逆时针，从 P 到 Q 的上半圆含两段四分之一圆，电阻分别为 $R, 3R$；下半圆电阻为 $2R$。上端中点为 M。求 $V_P - V_M, V_M - V_Q, V_P - V_Q$，并计算电势最高的连接点。

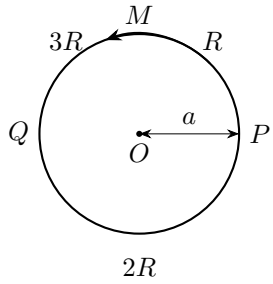


图 2.37: 题设：电阻改变后的圆环电势分配

练习 2.6 (由两次电压测量反求磁场变化率)**.** 圆形磁区内 $B(t)$ 均匀，半径 a。两个不改变网络负载的高内阻表连接相同端点，其两套固定引线之间围出面积 S，按第一路径前进、第二路径返回，法线向纸外。第一次有向读数 $U_1 = 0.80\,\mathrm{V}$，第二次 $U_2 = 0.50\,\mathrm{V}$，$S = 0.015\,\mathrm{m}^2$，窄条完全位于磁区。求 $\dot{B}_z$；若另加一只包围全磁区的 N 匝高阻探测线圈，求其电动势。

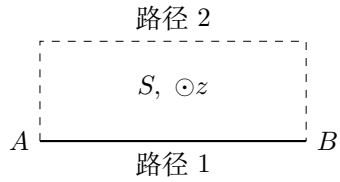


图 2.38: 题设：由两次电压测量反求磁场变化率

练习 2.7 (感应驱动与直流电源相接)**.** 三支路并联于 A, B。第一支路为内阻 R 的直流源，其沿 $A \to B$ 的电动势为 E；第二支路为电阻 R 与同向感应电动势 e；第三支路为纯电阻 R。求三支路电流；当 e 从零增大时，直流电源何时开始吸收电能？求对应临界状态下的总发热率。

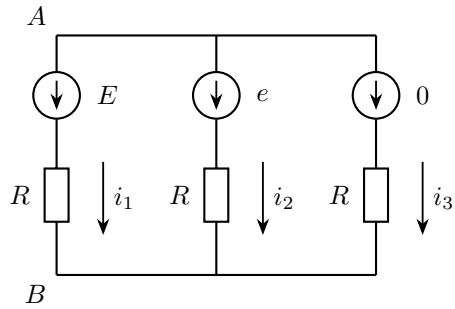


图 2.39: 题设：感应驱动与直流电源相接

练习 2.8 (感应网络中的孤立中间导体)**.** 感应电阻网络已建立稳定端电势差 $U = V_A - V_B$。另一支路用串联电容 C_1, C_2 接在 A, B，中间导体 X 完全绝缘，其净电荷恒为 Q_X。沿该支路从 A 到 B 的全部固定引线感应积分为 e_c。电容电压 u_1, u_2 均按 $A \to B$ 的电压降计。求两电压、储能，并讨论引线改变时的响应。

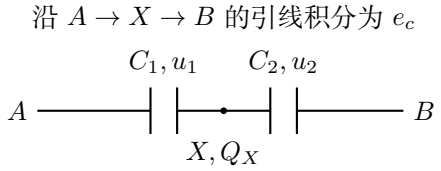


图 2.40: 题设：感应网络中的孤立中间导体

练习 2.9 (圆盘发电机的端压与电磁转矩)**.** 薄金属圆盘半径 a，在向纸外的匀强磁场 B 中绕中心逆时针匀速转动，角速度 ω。中心 O 与圆周电刷 A 经固定电阻 R_L 闭合，盘内等效电阻为 r，接触电阻已计入，忽略自感。求端电压、电流和维持匀速所需转矩，并解释圆盘几何轮廓不变仍能发电的原因。

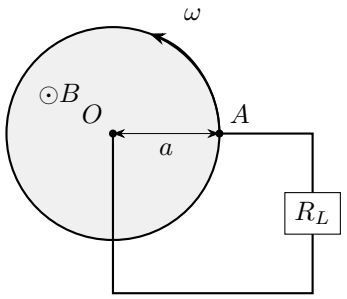


图 2.41: 题设：圆盘发电机的端压与电磁转矩

练习解答

练习 2.1

解　磁通变化与环流

图 2.33 中的外环包围整个管截面；线性关系给出 $\dot{B} = B_0\beta/I_0$，其中 β 单位是安每秒。总电动势

$$e = \pi a^2 B_0 \beta / I_0, \qquad i = e/(R_1 + R_2).$$

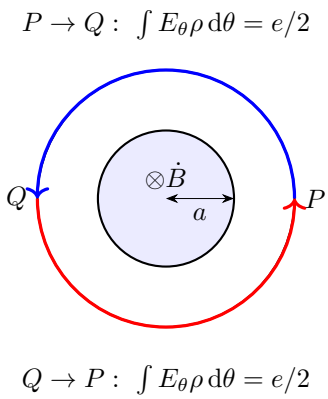


图 2.42: 管外同心圆周的场按 $1/\rho$ 衰减，半周积分仍等于总电动势的一半

外环上的电势差

图 2.42 中，外环处 $E_\theta = a^2\dot{B}/(2\rho)$，所以每半圆沿感生场方向的积分为

$$\int_0^\pi E_\theta \rho\,\mathrm{d}\theta = \rho E_\theta [\theta]_0^\pi = \pi\rho E_\theta = \pi a^2\dot{B}/2 = e/2.$$

于是 $V_P - V_Q = iR_1 - e/2 = e(R_1 - R_2)/[2(R_1 + R_2)]$。外环半径越大，环向场按 $1/\rho$ 减弱，半周弧长按 ρ 增大，所以半周感生积分只含管截面半径 a。

练习 2.2

解　斜边的速度投影

由图 2.34 取高 $h = \sqrt{3}l/2$。点 (x, y) 的速度为 $-\omega x\boldsymbol{e}_z$，故 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = -B\omega x\boldsymbol{e}_y$。沿 $a \to b$，$x = l(h-y)/(2h)$，于是

$$e_{ab} = \int_h^0 -B\omega\frac{l(h-y)}{2h}\,\mathrm{d}y = -\frac{B\omega l}{2h}\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_h^0 = -\frac{B\omega l}{2h}\left(0 - \frac{h^2}{2}\right) = \frac{B\omega lh}{4}.$$

全回路的电动势

底边积分为零，另一斜边 $d \to a$ 同样贡献 $B\omega lh/4$。总电动势 $e = B\omega lh/2 = \sqrt{3}B\omega l^2/4$，电流沿 $a \to b \to d \to a$，大小 e/R。

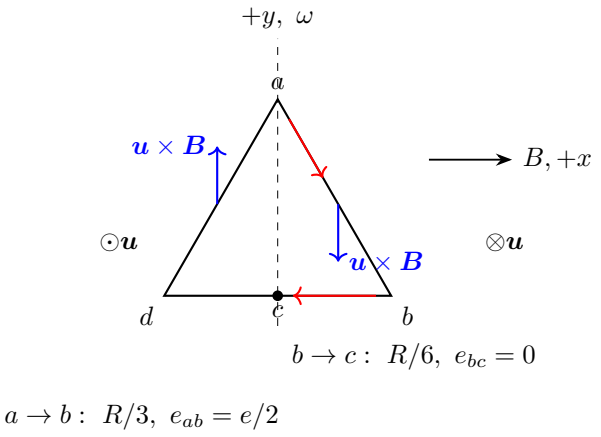


图 2.43: 两斜边的动生推动沿实际电流方向，底边动生积分为零；求 U_{ac} 沿真实边 $a \to b \to c$

边端与中点的电势

图 2.43 中 ab 电阻为 $R/3$、电动势为 $e/2$，故 $U_{ab} = e/3 - e/2 = -e/6$。从 a 经 b 走到 c，电阻为 $R/2$、电动势仍为 $e/2$，所以 $U_{ac} = e/2 - e/2 = 0$。图中 ac 是转轴。从 a 到 c 的实际电流路径沿 ab、bc。反转角速度，两有向电动势、电流和非零电势差同时反号。

练习 2.3

解　闭合测量路径

图 2.35 中 g_1 向右、g_2 返回，环路方向逆时针，法线向纸外。忽略表负载影响，两次静电势差相同，读数差只来自引线积分，故 $U_1 - U_2 = \varepsilon_{g_1} - \varepsilon_{g_2} = -\beta S$。

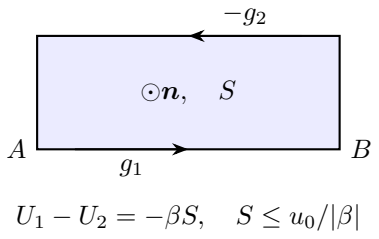


图 2.44: 两引线之差沿下路去、上路回，正法线为纸外，误差正比于两路间面积

允许的引线面积

图 2.44 用闭合箭头标明差值所对应的法线，因此误差大小为 $|\beta|S$。要求其不超过 u_0，得到 $S \le u_0/|\beta|$；当变化率为零时本项误差为零。

练习 2.4

解　合闸后的总电荷

图 2.36 表示闭合前的连接关系，初始电压按各自上极板对下极板计。上导体总电荷 $CU + 2C(-U) = -CU$，两上极板在同一导体上，最终对下导体具有共同电压 U_f，故 $(C + 2C)U_f = -CU$，得 $U_f = -U/3$。

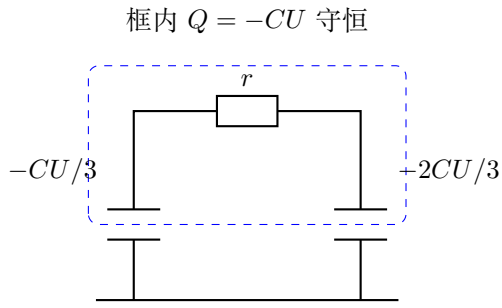


图 2.45: 最终上导体总电荷仍为 $-CU$，两上极板均为负；微小电阻保证最终稳定

最终极板电荷

图 2.45 中，最终两上极板均带负电，电荷分别为 $-CU/3, -2CU/3$。

电荷分配产生的热

初场能 $3CU^2/2$，末场能 $3C(U/3)^2/2 = CU^2/6$，因此热量 $Q = 4CU^2/3$。

练习 2.5

解　两段圆弧的压降

图 2.37 中总电阻为 $6R$，环流 $i = e/(6R)$。轴对称感生场使每四分之一圆的感应积分为 $e/4$，它不随该段电阻改变。逐段使用 $U = iR - \varepsilon$，得到

$$V_P - V_M = \frac{e}{6} - \frac{e}{4} = -\frac{e}{12}, \quad V_M - V_Q = \frac{3e}{6} - \frac{e}{4} = \frac{e}{4}.$$

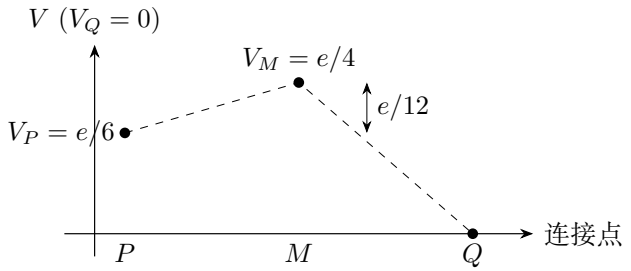


图 2.46: 仅比较 P, M, Q 三个连接点的电势；虚线不预先规定各段内部电势分布

三个接点的电势

图 2.46 取 $V_Q = 0$，由前两段结果得 $V_P - V_Q = (-e/12) + (e/4) = e/6$。因此 $V_M = e/4, V_P = e/6$，三个连接点中 M 电势最高。沿下半圆 $Q \to P$，净电势升高为 $e/2 - 2Ri = e/6$。各段斜率由局部电阻率决定，三个指定点的电势只用各段总电阻即可求出。

练习 2.6

解　磁场的有向变化率

图 2.38 两次测量的节点电势差相同，读数相减后只留下两引线感应积分之差。闭合方向逆时针，因此 $U_1 - U_2 = -S\dot{B}_z$。代入给定量，

$$\dot{B}_z = -\frac{0.80 - 0.50}{0.015} = -20\,\mathrm{T/s}.$$

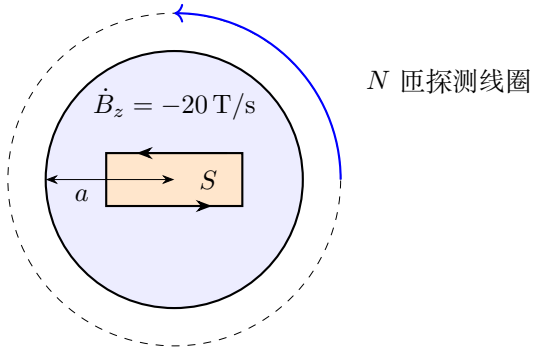


图 2.47: 窄条差分测量与包围全磁区的探测线圈，分别使用 S 和 πa^2 两种有效面积

多匝线圈的电动势

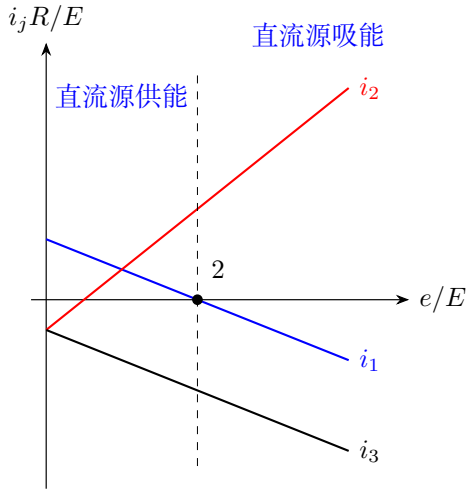
图 2.47 负号给出磁场的变化方向，即向纸外的分量随时间减小。全截面线圈取向纸外为正法线，其电动势为 $\varepsilon_N = -N\pi a^2 \dot{B}_z = (20\,\mathrm{T/s})N\pi a^2$。两种探测方式分别对应窄条面积和整个磁区面积。

练习 2.7

解　三支路的有向电流

按图 2.39 的共同参考方向，$i_1 = (U+E)/R, i_2 = (U+e)/R, i_3 = U/R$。节点方程给出 $3U + E + e = 0$，所以

$$U = -\frac{E+e}{3}, \quad i_1 = \frac{2E-e}{3R}, \quad i_2 = \frac{2e-E}{3R}, \quad i_3 = -\frac{E+e}{3R}.$$



$e = 2E:\ (i_1, i_2, i_3) = (0, E/R, -E/R)$

图 2.48: 电流随感应驱动变化：$e = 2E$ 时直流源支路过零，再增大便反向吸能

直流源的供能与吸能

图 2.48 以驱动的功率 Ei_1 判断直流源的能量流向。$e < 2E$ 时 $i_1 > 0$，电源向电路供能；$e > 2E$ 时 $i_1 < 0$，电源吸收电能，理想可逆电源模型下可理解为被充电。

临界电流与总发热率

临界 $e=2E$ 时，$i_1=0, i_2=E/R, i_3=-E/R$，总热功率为 $2E^2/R$，全部由感应驱动提供。

任意 e 下，将三个支路的电流代入功率关系，得到

$$\begin{aligned} P_{\text{驱}} &= Ei_1+ei_2=\frac{E(2E-e)+e(2e-E)}{3R}=\frac{2(E^2+e^2-Ee)}{3R},\\ P_J &= R(i_1^2+i_2^2+i_3^2)=\frac{(2E-e)^2+(2e-E)^2+(E+e)^2}{9R}\\ &=\frac{(4E^2-4Ee+e^2)+(4e^2-4Ee+E^2)+(E^2+2Ee+e^2)}{9R}\\ &=\frac{6E^2+6e^2-6Ee}{9R}=\frac{2(E^2+e^2-Ee)}{3R}. \end{aligned}$$

电源支路内的电阻始终按 i_1^2R 发热。

练习 2.8

解　电压和与孤立导体电荷

图 2.40 的电容支路稳定后无电流，因此不改变电阻网络给出的 U。沿支路积分，两个电容电压满足 $u_1+u_2=U+e_c=T$。中间导体由第一只电容的右极板和第二只的左极板相连而成，其电荷是 $-C_1u_1+C_2u_2=Q_X$。这条电荷方程与两个电容的电压和共同确定两组极板电荷。

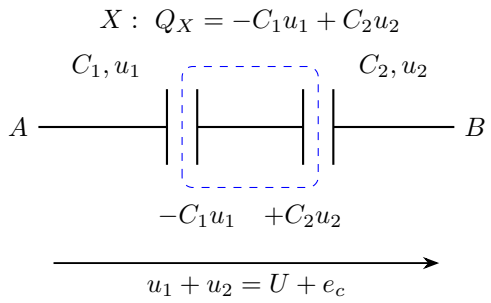


图 2.49: 孤立中间导体包括两块内侧极板及连线，净电荷约束独立于总电压关系

两电容的电压与储能

按图 2.49 标出的板电荷，用 $u_2=T-u_1$ 代入电荷约束，

$$-C_1u_1+C_2(T-u_1)=Q_X,\qquad (C_1+C_2)u_1=C_2T-Q_X.$$

除以 $C_1+C_2>0$ 求 u_1，再以 $T-u_1$ 求 u_2，得到

$$u_1=\frac{C_2T-Q_X}{C_1+C_2},\qquad u_2=\frac{C_1T+Q_X}{C_1+C_2}.$$

把两个电压代入场能并展开平方，

$$\begin{aligned} W_C &= \frac{C_1(C_2T-Q_X)^2+C_2(C_1T+Q_X)^2}{2(C_1+C_2)^2} \\ &= \frac{C_1C_2^2T^2-2C_1C_2TQ_X+C_1Q_X^2}{2(C_1+C_2)^2} \\ &\quad + \frac{C_2C_1^2T^2+2C_1C_2TQ_X+C_2Q_X^2}{2(C_1+C_2)^2} \\ &= \frac{C_1C_2(C_1+C_2)T^2+(C_1+C_2)Q_X^2}{2(C_1+C_2)^2} = \frac{C_1C_2T^2+Q_X^2}{2(C_1+C_2)}. \end{aligned}$$

前一项随端口及引线驱动变化，后一项是由孤立导体净电荷固定的部分。$Q_X=0$ 时恢复通常的等量异号串联电容；$T=0$ 时如果 $Q_X\neq 0$，两电压仍可相反且不为零。

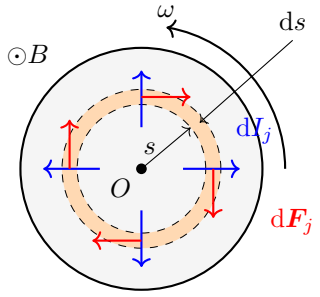
引线改接后的电压

若引线积分改变 Δe_c 而网络 U 不变，$\Delta u_1 = C_2\Delta e_c/(C_1+C_2)$、$\Delta u_2 = C_1\Delta e_c/(C_1+C_2)$，中间净电荷保持。

练习 2.9

解　圆盘的动生电动势

图 2.41 的转速方向使盘内 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 径向向外。沿任意半径从 O 积分到盘缘，$e = B\omega\int_0^a s\,\mathrm{d}s = B\omega[s^2/2]_0^a = B\omega a^2/2$。中心与盘缘电刷组成持续滑动接触，电流从盘内向外流，外负载由 A 返回 O，故 $I=e/(R_L+r)$，端压 $V_A-V_O=IR_L$。



$\sum_j \mathrm{d}I_j = I, \quad \mathrm{d}\tau = IBs\,\mathrm{d}s$

图 2.50: 同心薄环中的各份径向电流合为 I，切向磁力共同产生顺时针阻力矩

薄环的制动力矩

图 2.50 中取半径 s 处薄环。无论电流在周向怎样分配，穿过这一薄环的总径向电流为 I，其切向磁力对轴的阻力矩为 $\mathrm{d}\tau = IBs\,\mathrm{d}s$。因此阻力矩大小 $\tau = IB\int_0^a s\,\mathrm{d}s = IB[s^2/2]_0^a = IBa^2/2$，方向与转动相反；外驱转矩同大小逆时针。机械功率 $\tau\omega = eI = I^2(R_L + r)$，与两处发热和一致。

滑动电刷与负载

静止电刷接触的圆盘材料随转动不断更换。沿图 2.50 的任意盘内导电路径，$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = B\omega s\,\boldsymbol{e}_s$，只有线元的径向分量 $\mathrm{d}s$ 参与积分。从中心到圆周的积分均为 $B\omega a^2/2$。开路时电流和负载转矩趋零，端电压趋于 e。负载短接时端电压为零，电流为 e/r。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第三讲

电磁感应中的动力学

2026

目录

第三讲　电磁感应中的动力学 **1**

3.1　导棒运动怎样产生磁阻力 1

3.2　终端速度、时间解与空间解 1

3.3　空间变化的磁场与倾斜运动的投影 5

3.4　多杆运动与约化质量 6

3.5　电容耦合与切换初态 9

3.6　发电、受驱动运动与能量流向 11

3.7　回复力、阻尼与参数辨认 12

3.8　功率、热量与涡流阻尼 14

3.9　例题与分析 15

3.10 本讲小结 40

3.11 练习 41

练习解答 44

第三讲　电磁感应中的动力学

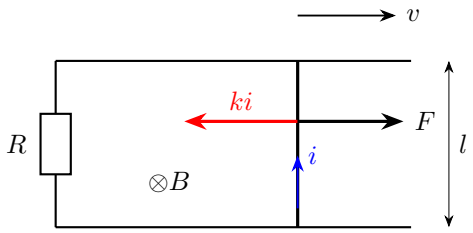
3.1　导棒运动怎样产生磁阻力

把滑动导棒接成闭合回路。图 3.1 中，棒向右运动，纸内磁场使正电荷在棒中向上流。电流通过磁场时，棒受到向左的安培力。若推棒匀速运动，外力所做的功最终转化为回路的焦耳热。松手以后，棒的动能供给这笔能量，速度逐渐下降。

令棒长为 l，磁场垂直导轨平面，记 $k = Bl$。沿棒向上取电流正向，沿导轨向右取速度正向。运动导棒在一个很短的时间 $\mathrm{d}t$ 内扫过面积 $lv\,\mathrm{d}t$，闭合回路得到 $\varepsilon = Blv = kv$。在总电阻为 R、自感可忽略的回路中，有

$$Ri = kv, \qquad F_B = -ki, \qquad m\dot{v} = F - ki = F - \gamma v, \qquad \gamma = \frac{k^2}{R}.$$

以图中向右运动为例，安培力的机械功率为 $-kiv$，电阻热功率为 Ri^2。由 $Ri = kv$ 得 $-F_B v = Ri^2$。这三个关系把速度、感应电流和磁阻力连在一起，适用于固定轨宽、匀强场和电阻回路。



$$\varepsilon = kv, \quad Ri = kv, \quad m\dot{v} = F - ki$$

图 3.1: 同一张图确定电动势、电流和机械反作用的符号，再联立电路与牛顿方程

3.2　终端速度、时间解与空间解

当 F 恒定，令 $v_\infty = F/\gamma$、$\tau = m/\gamma$，将运动方程改写为 $\mathrm{d}(v-v_\infty)/(v-v_\infty) = -\,\mathrm{d}t/\tau$。当 $v_0 \neq v_\infty$ 时，以 $\delta = v - v_\infty$ 为偏差变量，

$$\int_{v_0-v_\infty}^{v-v_\infty} \frac{\mathrm{d}\delta}{\delta} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad \left[\ln|\delta|\right]_{v_0-v_\infty}^{v-v_\infty} = -\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

代入上下限并合并对数，

$$\ln\left|\frac{v-v_\infty}{v_0-v_\infty}\right| = -\frac{t}{\tau}.$$

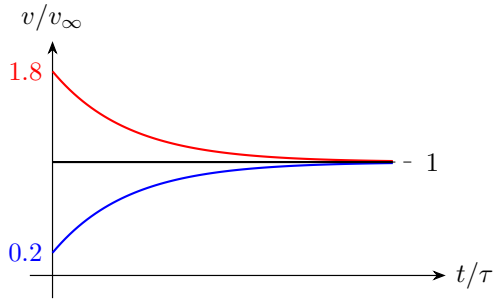
保留偏差的原符号；若初速度就是终速，直接取恒速解。于是得到

$$v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

再以 $x(0) = x_0$ 对速度积分：

$$x - x_0 = \int_0^t [v_\infty + (v_0 - v_\infty)\mathrm{e}^{-s/\tau}]\,\mathrm{d}s = \Big[v_\infty s - \tau(v_0 - v_\infty)\mathrm{e}^{-s/\tau}\Big]_0^t.$$

代入两端，位移为 $x - x_0 = v_\infty t + \tau(v_0 - v_\infty)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$。初速度小于终端值时加速，大于终端值时减速，两种情形由同一公式描述。在有限时间内，指数项一般不恰为零；“达到终端速度”往往只是允许误差内的近似。



$\dot v = (v_\infty - v)/\tau$，速度一般在有限时间内不恰等于终速

图 3.2: 低于终速则加速，高于终速则减速；相同时间尺度控制趋近过程

图 3.2 的红、蓝曲线共享同一水平渐近线。若要求相对偏差不超过 δ，条件是 $|v_0 - v_\infty|\mathrm{e}^{-t/\tau} \le \delta|v_\infty|$，可据此给出所需时间；偏差随后继续指数减小。

已知经过的距离而不关心时间时，使用 $\dot v = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ 可减少计算。特别是无外力、阻力为 $-\gamma(x)v$ 时，约去非零速度得到 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -\gamma(x)$，直接按位移积分。沿 $v > 0$ 的物理解积分到 $v \to 0^+$，得到位置极限。若停止点附近速度随剩余距离线性趋零，所需时间仍可能发散。

图 3.3 专取 $F = 0, \gamma$ 恒定。由 $m\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -\gamma$ 积分，$m[v - v_0] = -\gamma[x - x_0]$。时间由 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v$ 给出，令 $z = v_0 - \gamma(x - x_0)/m$，则 $\mathrm{d}x = -m\,\mathrm{d}z/\gamma$，所以

$$t = -\frac{m}{\gamma}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{m}{\gamma}[\ln z]_{v_0}^{v} = -\frac{m}{\gamma}(\ln v - \ln v_0) = \frac{m}{\gamma}\ln\frac{v_0}{v}.$$

空间解与时间解共同给出

$$v(x) = v_0 - \frac{\gamma}{m}(x - x_0), \quad x_\infty - x_0 = \frac{mv_0}{\gamma}, \quad t = \tau\ln\frac{v_0}{v}.$$

当 $v \to 0^+$ 时，位置趋于有限的 x_∞，但时间趋于无穷。图中的物理曲线到 x_∞ 为止，$v = 0$ 是静止解。

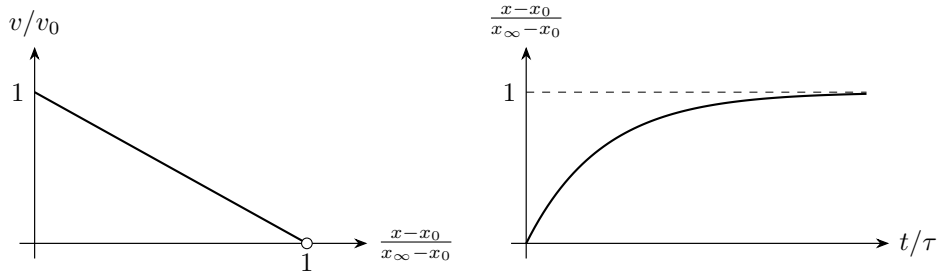


图 3.3: 有限的空间衰减距离与无限的衰减时间相容；空间图端点只表示极限

横向宽为 l、沿运动方向长为 a 的线框向右穿过宽 $d > a$ 的匀强磁区。图 3.4 中，以前边自磁区左缘起的距离为 x，在线框从刚入到完全离开的过程中，覆盖磁区的面积是

$$A(x) = l \begin{cases} x, & 0 \le x \le a, \\ a, & a \le x \le d, \\ d + a - x, & d \le x \le d + a. \end{cases}$$

取逆时针为正，纸内磁场使磁通 $\Phi = -BA(x)$，于是 $\mathcal{E} = -\dot{\Phi} = BA'(x)v$。三段 $A'(x)$ 依次是 $l, 0, -l$。进入时电流从右边向上，离开时电流从左边向上，两次受磁场的那一边都受向左的安培力。整个线框在场内时，前后两边的动生积分相消。换段时以前一段的末速度为下一段初值。练习 3.7 把这三段写成速度随位置的曲线。

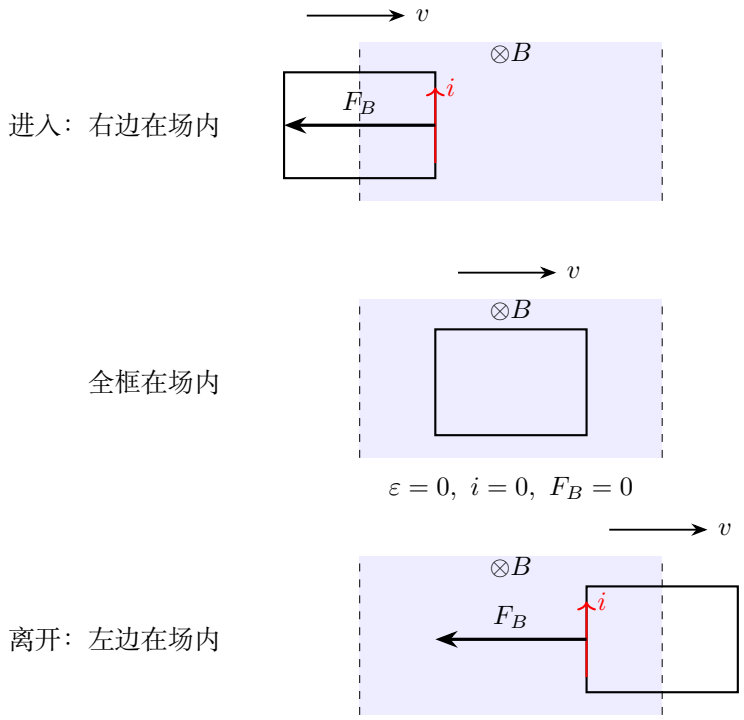


图 3.4: 同一个线框进入、完全处于磁区和离开时，要分别更新有效横边、电流及合力

例 3.1 中，导棒速度增大时磁阻力随之增大。终端速度由重力与磁阻力相等确定；从初速度到终端速度的过程则由力差给出的加速度决定。

3.2.1　变力驱动与时间尺度

在固定电阻的单棒问题中，可以把外力驱动与自由衰减叠加。设外力随时间按给定函数 $F(t)$ 变化，$m\dot{v}+\gamma v = F(t)$。乘以积分因子 $\mathrm{e}^{t/\tau}$，左端成为 $m\mathrm{e}^{t/\tau}(\dot{v}+v/\tau) = m\,\mathrm{d}[v\mathrm{e}^{t/\tau}]/\,\mathrm{d}t$。从初时刻到当前时刻积分，

$$m[v(t)\mathrm{e}^{t/\tau} - v_0] = \int_0^t F(s)\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s.$$

两边除以 $m\mathrm{e}^{t/\tau}$，因此

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{1}{m}\int_0^t F(s)\mathrm{e}^{-(t-s)/\tau}\,\mathrm{d}s, \qquad \tau = m/\gamma.$$

积分中的指数表明，越早施加的力对当前速度的影响经过越久衰减。若外力分段恒定，可以逐段使用常力解并保持速度连续；不必在每个阶段重新猜一种函数。若电流存在电感暂态，则速度与电流构成两个状态量，上式不再单独成立。

无量纲化可帮助判断哪些量控制结果。令 $s=t/\tau$、$z=v/v_t$，常力方程化为 $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}s=1-z$，所以所有同类系统的归一化曲线相同，区别只在速度尺度 v_t 和时间尺度 τ。当磁场增大，终端速度和时间尺度都按 B^{-2} 减小；但在给定物理时刻，电流未必按同一个简单比例改变，须先把速度反馈代入。

若进入段的长度已知，可用 $x(t)$ 的单调关系求出段末时刻。例如竖直下落线框的下边先入场，上边进入时，前一阶段已走完一个框高。把这个距离代入位移公式，便能求下一段自由下落的初速。

3.3 空间变化的磁场与倾斜运动的投影

若回路运动到不同位置时经历不同磁场，应先算当前有效磁通导数。对一根横跨等宽轨道的直棒，磁场在棒长方向近似均匀而沿轨坐标 x 改变，电动势为 $B(x)lv$；纯电阻回路的阻力系数为 $\gamma(x)=B(x)^2l^2/R$。无外力时使用空间方程 $m\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x=-\gamma(x)$，可直接累加不同位置的减速效果。在给定位置和速度下，磁场增大一倍，磁阻力增至四倍。

倾斜导轨中，还要区分垂直轨面的场分量与实际安培力方向。动生电动势由 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 在棒方向上的投影决定；支路电流确定以后，安培力仍由完整矢量 $i\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$ 决定。若磁场竖直而轨道倾斜，安培力一般有垂直轨面的分量，它会改变支持力，进而改变滑动摩擦力。只把 B 换成 $B\cos\theta$ 而完全不检查支持力，会漏掉摩擦反馈。

以图 3.5 的侧视截面为例，轨面倾角为 θ，棒轴垂直图面，磁场竖直向下，棒正沿斜面下滑。动生作用朝纸外，故正电流也朝纸外，安培力水平向右。其沿斜面的分量阻碍下滑，垂直斜面的分量则压向轨面：

$$i=\frac{Blv\cos\theta}{R},\quad F_B=Bli,\quad N=mg\cos\theta+F_B\sin\theta.$$

若滑动摩擦系数为 μ_f，沿下坡取正，才得到

$$m\dot v=mg(\sin\theta-\mu_f\cos\theta)-\frac{B^2l^2\cos\theta}{R}(\cos\theta+\mu_f\sin\theta)v.$$

这里的额外 $\mu_f\sin\theta$ 来自支持力改变；仅将磁场换成法向分量而仍取 $N=mg\cos\theta$ 会漏掉它。这些式子适用于已经下滑且保持接触的阶段，静止能否启动还需静摩擦条件。

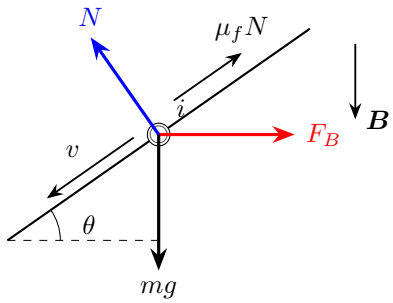


图 3.5: 侧视图中棒电流向外，水平安培力同时改变切向阻力与法向支持力

用空间方程得到 $v(x)$ 后，先找它沿运动方向的第一个零点。零点若在磁区内，棒渐近停在该位置。若离开磁区时速度仍为正，就以这个速度接续场外运动。例 3.11 把这一判断用于沿轨道逐渐增强的磁场。

3.4　多杆运动与约化质量

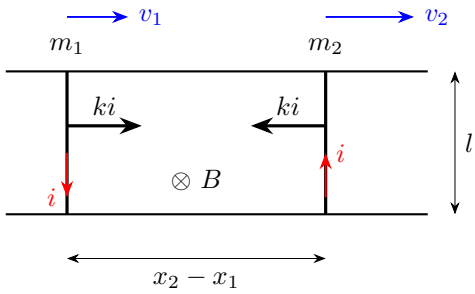


图 3.6: 等轨宽双棒的相对运动；图示 $v_2 > v_1$ 时的电流与受力

图 3.6 以向右为共同速度正向，磁场指向纸里。右棒快于左棒时，回路面积增长率为 $l(v_2 - v_1)$；图示电流在右棒向上、左棒向下，使两棒受到大小相等、方向相反的安培力。令 $k = Bl$，这一几何关系给出 $i = k(v_2 - v_1)/R$。若速度差反号，电流和两力同时反向，下面的有向方程仍成立。

取图 3.6 中的两棒为整体，内部安培力大小相等、方向相反。没有其他水平外力时，两棒总动量守恒，机械能却因回路发热而减少；这总动量决定最终的共同速度，减少的机械能给出总热量。

令质量为 m_1, m_2，相对速度 $w = v_2 - v_1$。图 3.6 中两棒受力相反，分别列式并作有向差：

$$m_1\dot{v}_1 = ki, \qquad m_2\dot{v}_2 = -ki, \qquad \dot{w} = -ki\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

定义约化质量 $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$，再用 $i = kw/R$ 消去电流，才得到

$$\mu\dot{w} = -\frac{k^2}{R}w.$$

当 $w_0 \neq 0$，在相对速度未变号的区间分离变量，并从初始状态积分：

$$\begin{aligned}\int_{w_0}^{w(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\frac{k^2}{\mu R}\int_0^t \mathrm{d}s,\\ [\ln|z|]_{w_0}^{w(t)} &= -\frac{k^2t}{\mu R},\\ \ln\left|\frac{w(t)}{w_0}\right| &= -\frac{k^2t}{\mu R}.\end{aligned}$$

取指数并保留初始符号，得到 $w(t) = w_0\mathrm{e}^{-k^2t/(\mu R)}$。该式表明相对速度只渐近趋于零，因而与积分时未变号的条件一致。若 $w_0 = 0$，直接代入原方程得到 $w(t) = 0$，两棒保持共同速度，回路中也没有电流。最终共同速度由总动量求得。总焦耳热为初始相对运动动能 $\mu w_0^2/2$，质心动能保持不变。这一结果同时说明，把某一根棒损失的动能全部认作热量是不对的，另一根棒还会获得动能。

若两棒所跨有效轨宽不同，安培力系数也不同，总动量未必守恒，固定导轨和磁场装置会承担水平反作用。

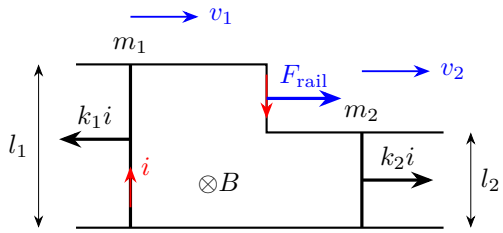


图 3.7: 不同有效轨宽下两棒的受力系数不同；图示电流按左棒动生作用为正

图 3.7 改按左棒的动生作用选电流正向，令 $k_j = Bl_j$，则

$$Ri = k_1v_1 - k_2v_2, \qquad m_1\dot{v}_1 = -k_1i, \quad m_2\dot{v}_2 = k_2i.$$

两棒受力和为 $(k_2-k_1)i$，这就是两棒总动量的变化率。将两受力式分别除以各自 k_j 再相加，电流项消去：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_1v_1}{k_1}+\frac{m_2v_2}{k_2}\right) = 0.$$

这个加权不变量只在图示有效长度各自恒定的阶段成立。跨越台阶后，k_j 改变，应使用切换瞬间的实际速度重新确定后续不变量；如果接续产生机械冲量，还需单独计入。

图中固定台阶上的竖直导线也载流，长度为 $l_1 - l_2$。它所受水平安培力为 $(k_1 - k_2)i$，与两棒合力相反；导轨固定时由支座承担这部分作用。对包含导轨支座和磁场装置的更大系统列动量方程时，把这些反作用一同计入。

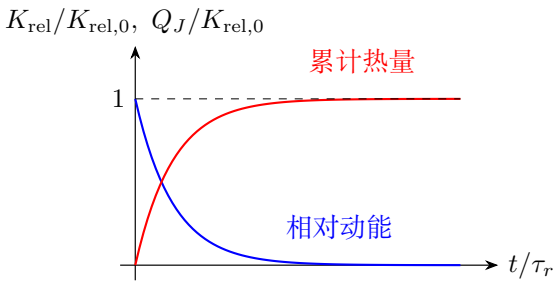
3.4.1　冲量关系与可达状态

安培力积分可以把机械变化与通过电量联系起来。长度不变的一根棒满足 $m\Delta v = \int F_{\text{外}}\,\mathrm{d}t \pm Bl\Delta Q$。外力冲量已知时，这常比完整求 $i(t)$ 简洁，但符号取决于图中棒的电流方向。两棒等宽时，安培冲量等大反向。不等宽时，各棒按自己的有效长度求冲量。

固定等宽两棒的动能可分解为质心项与相对项：

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}\mu(v_2-v_1)^2.$$

这个恒等式可由 $v_1 = V - m_2w/(m_1+m_2)$、$v_2 = V + m_1w/(m_1+m_2)$ 展开验证，交叉项互相抵消。纯电阻使相对项最终耗尽；接电容后相对项可以保留一部分，并另储存电场能；理想自感则允许相对动能与磁场能交换。这使几个看似相似的“双杆最终速度”问题具有不同结局。



$\tau_r = \mu R/k^2$，　$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2$ 保持不变

图 3.8: 等宽无外力双棒中，质心运动不变，热量只来自相对运动动能的衰减

由 $w = w_0\mathrm{e}^{-t/\tau_r}$，图 3.8 中的能量曲线为 $K_{\text{rel}} = \mu w_0^2\mathrm{e}^{-2t/\tau_r}/2$。因此累计热量为 $Q_J = \mu w_0^2(1-\mathrm{e}^{-2t/\tau_r})/2$，热量来自相对运动动能。若两棒最终都仍向右运动，其共同动能正是未被耗散的质心项。

相对速度按指数衰减时，从初值到任意同号的非零较小速度都对应有限时间，相对速度趋零则是长时间极限。例 3.3 先处理两棒粘连的冲量，再把碰后并联的接

触电阻带入衰减方程。例 3.10 持续牵引一根棒时，系统质心保持加速度，相对速度才趋于常量。

3.5 电容耦合与切换初态

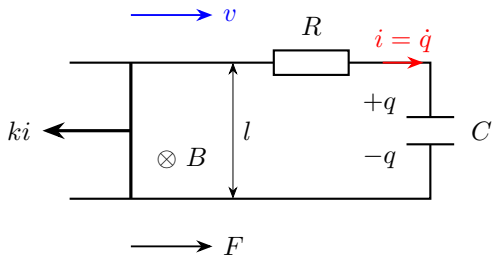


图 3.9: 电容导棒的充电正向和机械反作用

图 3.9 约定电容上极板电荷为 q，电流正向为向该极板充电，故 $i=\dot q$。向右运动的棒产生向上的动生作用，沿图示电流方向绕回路一周，电阻降与电容电压之和等于 kv；棒中正向电流受到向左安培力。电路和机械方程的符号因而来自同一张图。

导棒连接电容后，安培力随充电电流改变。设正向电容电荷为 q，回路满足

$$R\dot q + q/C = kv, \qquad m\dot v = F - k\dot q.$$

第一式中的电容电压与动生电动势相抗，第二式包含电流的机械反作用。无外力时从 (v_0,q_0) 积分第二式，$m\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}z = -k\int_{q_0}^{q}\mathrm{d}y$，两侧原函数给 $m[z]_{v_0}^{v} = -k[y]_{q_0}^{q}$，即 $m(v-v_0)+k(q-q_0)=0$，得到 $mv+kq=$ 常量；代入第一式即可把问题化成单个充电方程。等效电容 $C_e=(1/C+k^2/m)^{-1}$ 来自原电容的储能和导棒运动对电流的反馈。

若令 $R=0$，有 $q=Ckv$。对时间求导并代入受力方程，得到 $(m+Ck^2)\dot v = F$。加速时，电容电压随速度升高，充电电流产生与加速度反向的安培力，表现为附加惯性 Ck^2。初态已满足 $q_0=Ckv_0$ 时，可从接通时刻使用这个方程。若把未充电电容接到运动中的导棒，先保留小电阻计算充电过程，再取 $R\to 0^+$ 得到快过程结束时的速度、电荷和发热量。

对无外力、初始 $q(0)=0, v(0)=v_0$ 的快速接通，先保留 $R>0$。由 $mv+kq=mv_0$ 消去速度，得到

$$R\dot q + \left(\frac{1}{C}+\frac{k^2}{m}\right)q = kv_0.$$

定义 $\eta = Ck^2/m$、$\tau_e = RC/(1+\eta)$，以及 $q_f = Ckv_0/(1+\eta)$。方程成为 $\dot q = (q_f - q)/\tau_e$，从零电荷积分，

$$\int_0^{q(t)} \frac{\mathrm{d}z}{q_f - z} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau_e}, \qquad [-\ln|q_f - z|]_0^{q(t)} = \frac{1}{\tau_e}[s]_0^t.$$

对图示 $v_0 > 0$ 有 $q_f > 0$，解沿 $0 \le q < q_f$ 的分支，故 $-\ln[(q_f - q)/q_f] = t/\tau_e$；若初始速度反向，应保留偏差的原符号。先求出 q，再用 $v = v_0 - kq/m$，便有

$$q(t) = \frac{Ckv_0}{1+\eta}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_e}), \qquad v(t) = \frac{v_0}{1+\eta}(1 + \eta\mathrm{e}^{-t/\tau_e}).$$

图 3.10 显示电荷上升与速度下降是同一反馈过程。快速阶段结束后，棒速降为 $v_f = v_0/(1+\eta)$，电容带电 $q_f = Ckv_f$。

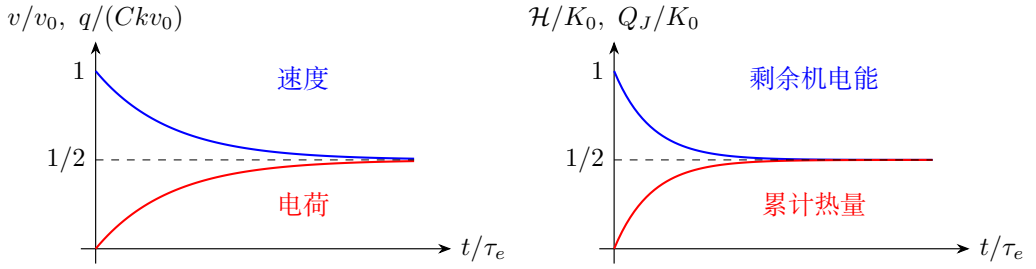


图 3.10: 保留小电阻求快速充电；示意取 $\eta = 1$，横轴为 t/τ_e

令 $\mathcal{H} = mv^2/2 + q^2/(2C)$、$K_0 = mv_0^2/2$，初末能量差为

$$Q_J = K_0 - \frac{1}{2}(m + Ck^2)v_f^2 = K_0\frac{\eta}{1+\eta}.$$

当 $R \to 0^+$，充电时间尺度 τ_e 趋零，热量仍为上式。随后的零电阻运动从 v_f, q_f 出发，两者满足 $q_f = Ckv_f$。

重力作用下，零电阻且初态相容的电容导棒作匀加速运动，$a = mg/(m+Ck^2)$。给定击穿电压时，先由 $u_C = kv$ 求达到它的时刻，再按击穿后的短路回路列方程。

3.5.1　电容反馈中的能量与击穿阈值

一般的约化质量电容耦合模型满足 $\mu\dot w = -k\dot q$、$R\dot q + q/C_0 = kw$。分别乘 w 和 $\dot q$ 相加，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu w^2 + \frac{q^2}{2C_0}\right) = -R\dot q^2.$$

由此看出能量随时间下降，下降率非负；同时 $\mu w + kq$ 保持常量。一个给出状态约束，另一个给出耗散检查，作用不同。若只用初末能量守恒求末速度，等于把右端本应存在的耗散强行删去。

电容击穿题还需要确定阈值在快速切换阶段还是缓慢运动阶段出现。初始未充电且棒有速度时，快速阶段先把速度从 v_0 降到 $mv_0/(m+Ck^2)$，电压从零升到相应动生电压。若击穿阈值低于快速阶段的电压极限，保留小电阻，用快速充电解求首次触及阈值的时刻。

近似参数也要随结果复核。忽略回路自感，意味着电感电压在所关心的时间尺度上远小于电阻降或电容电压；突然切换的极短时段未必满足这一点。题目明确采用小电阻、无自感的理想极限时，结果说明的是该模型的极限行为；实际峰值电流和切换持续时间还会受到寄生电感限制。

3.6 发电、受驱动运动与能量流向

被动感应回路中的安培力通常阻碍相对运动，但在电路中接入独立电源后，电流方向可能由电源控制，安培力可以驱动导棒加速。仍令 $k = Bl$，电源极性使静止棒受到正向磁力，动生作用就成为反电动势，电路有 $Ri = E - kv$，而受力方程为 $m\dot{v} = ki - F_{\text{负载}}$。这将电路方程乘 i，电源功率 Ei 分成电阻热 Ri^2 与机械功率 kvi。

当速度增加，反电动势增大，电流和驱动力下降；当棒被外界拖得过快，使 $kv > E$，电流反向，机械能可以经电路返回电源。同一耦合方程把电动和发电两种状态连在一起。电流换向处为 $kv = E$，机械功率 kiv 也在这里换符号。

两棒中只有一棒受恒力时，质心以 $F/(m_1+m_2)$ 加速。两棒的速度差趋于定值，电流随之稳定，外力仍持续增加质心动能。

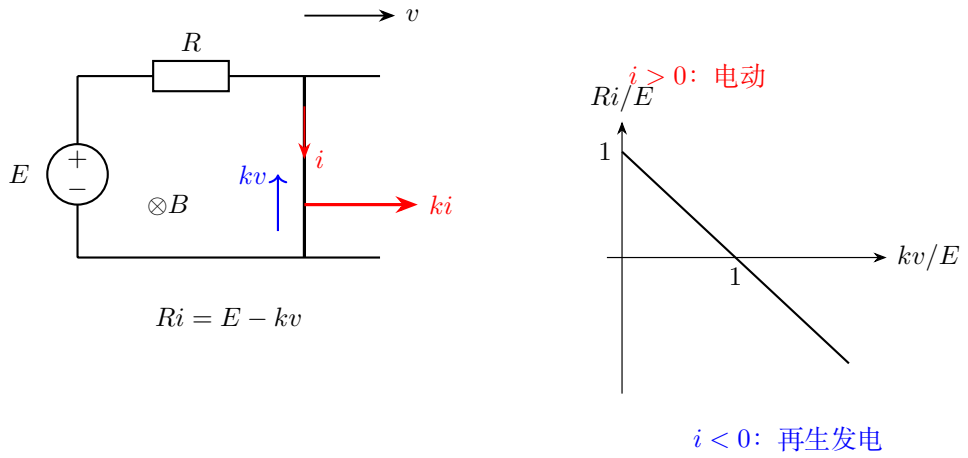


图 3.11: 电源极性使棒中正电流向下、磁力向右；向右运动产生反向的动生电动势

图 3.11 左图中的向下电流与纸内磁场给向右安培力，棒向右运动却产生向上动生作用，二者在电路方程中相抗。由 $Ri = E - kv$ 乘以 i，立即有

$$Ei = Ri^2 + kvi.$$

右图过零点 $kv = E$ 将两种能量流向分开：$0 < kv < E$ 时电源供能，磁力推动棒；$kv > E$ 时电流反向，磁力阻碍运动，且 $Ei < 0$ 表示可逆电源吸能。无论哪种状态，电阻发热 Ri^2 都非负。

3.7　回复力、阻尼与参数辨认

若导棒与弹簧相连，纯电阻感应表现为阻尼，弹簧提供回复力，二者必须同时保留。取平衡位置位移为 x，有 $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = 0$。试取 $x = \mathrm{e}^{st}$，其一、二阶导数分别为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并约去非零指数，得 $ms^2 + \gamma s + K = 0$，两根

$$s = -\frac{\gamma}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{K}{m}}.$$

因此阻尼判别式 $\gamma^2 - 4mK$ 决定是否振荡，磁场增大可以使系统从欠阻尼变为临界或过阻尼。这里的回复力由弹簧提供，感应电流产生速度阻尼。若改用零电阻自感回路，磁链守恒会使感应电流随位移变化，从而产生磁回复力。

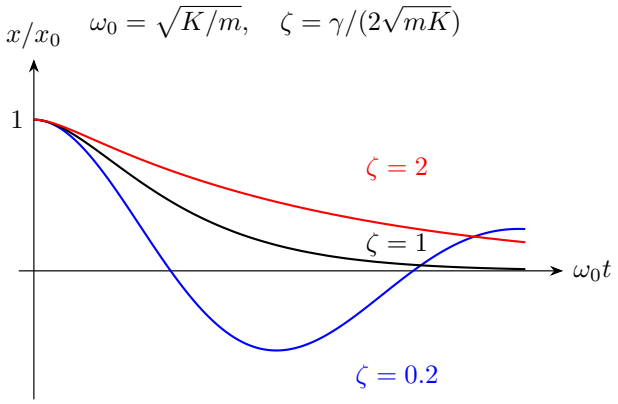


图 3.12: 同一初位移、零初速下，感应阻尼从欠阻尼到临界及过阻尼改变回复方式

图 3.12 中的蓝线越过平衡位置，黑线和红线不越过。在过阻尼区，继续增大阻尼会使较慢的特征根向零靠近，系统后段回到平衡附近的时间随之延长。

有多个速度相关阻力时，可从改变磁场前后的衰减率辨认参数。若空气阻力近似为 $-bv$，磁阻力为 $-B^2l^2v/R$，总衰减率为 $(b+B^2l^2/R)/m$。在两个磁场值下测得指数时间常量，便可分别求出空气阻力系数和电阻。反演还需要检查求出的参数为正，并确认两个实验的接触电阻和机械条件没有改变。

将实测衰减率记为 $\Lambda=1/\tau$，图 3.13 给出

$$\Lambda=\frac{b}{m}+\frac{l^2}{mR}B^2.$$

在 $B_2^2>B_1^2$ 的两次实验中，若测得 $\Lambda_2>\Lambda_1$，则

$$R=\frac{l^2(B_2^2-B_1^2)}{m(\Lambda_2-\Lambda_1)},\qquad b=m\Lambda_1-\frac{B_1^2l^2}{R}.$$

图中正斜率对应 $R>0$，非负截距对应 $b\geq 0$。练习 3.5 用两次测量求出这两个量，再按两种阻力的功率分配初动能。

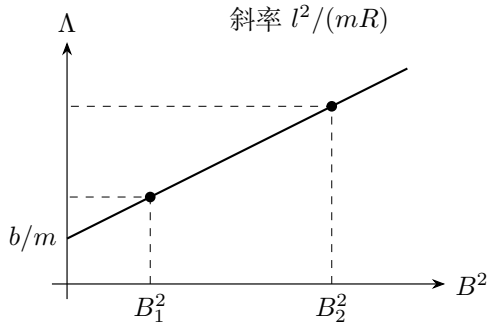


图 3.13: 衰减率对磁场平方的直线将机械阻力与电磁阻尼分开

旋转装置可沿同样思路建立反馈。绳端速度与角速度由轴半径联系，转动惯量在绳端等效为 J/a_0^2 的附加惯性；发电电动势随角速度成正比，磁制动力矩随电流成正比。质量和惯量决定建立过程的快慢，而稳定功率平衡未必含这些惯量。这正是仅求终速与求完整运动规律需要不同信息的原因。

3.8 功率、热量与涡流阻尼

以一根受外力 F 的电容导棒为例，将 $m\dot{v} = F - ki$ 乘 v，把 $Ri + q/C = kv$ 乘 i。用 $i = \dot{q}$ 将两式相加，右侧的两项 kiv 相消，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{q^2}{2C}\right) + Ri^2 = Fv.$$

外力输入的功率用来增加储能和发热。若电路含自感，电路方程的 $L\dot{i}$ 乘 i 后给出 $\mathrm{d}(Li^2/2)/\,\mathrm{d}t$，同样进入储能项。粘连产生的机械能损失来自碰撞，滑动摩擦的功来自接触。分别求出这两项以后，电流产生的热量仍是 $\int Ri^2\,\mathrm{d}t$。

整块金属经过局部磁区时，电流在金属内部绕成回路。图 3.14 中铜片向右移出纸内磁区。取跨过磁区边线的虚线小回路，穿过它的向里磁通减小，涡流产生向里的磁场，沿顺时针流动。小回路左侧仍处在磁区，电流向上，所以该处安培力向左。给铜片开槽可以缩短连续的通流路径，改变涡流分布，制动随之减弱。练习 3.4 把磁区附近的电流简化成一条局部回路，求力矩的数量级。

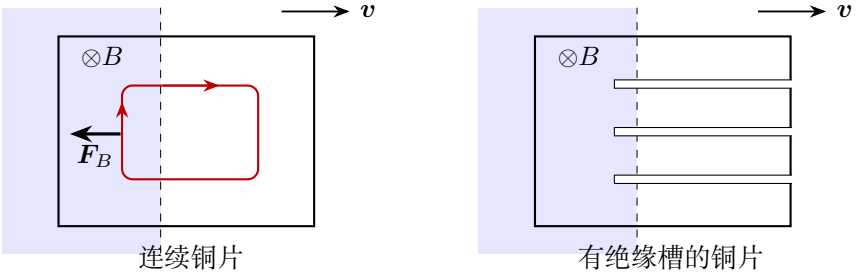


图 3.14: 铜片移出局部磁区时的涡流方向。右图的绝缘槽切开一部分横向通路

在局部回路近似中，回流范围和等效电阻按磁区的特征尺度估计。精确的电流和力矩由导体形状、磁区位置和片内电荷分布共同决定。缓慢收缩的圆环则用准静态功率关系求速度，适用范围由惯性是否可略去决定。

3.9 例题与分析

例 3.1 (竖直导棒的速度建立)**.** 质量 0.030 kg、长度 0.20 m 的棒从静止沿竖直无摩擦导轨下落，磁场垂直导轨，$B = 0.50\,\mathrm{T}$，总电阻 $0.50\,\Omega$。取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$。求速度规律、终端速度及速度为 10 m/s 时的电流与磁力。

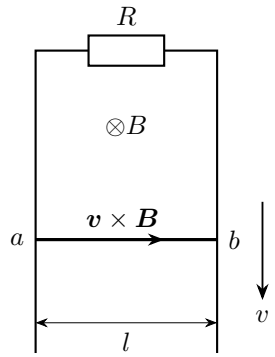


图 3.15: 水平棒横跨竖直导轨向下滑动；纸内磁场使棒内动生作用向右

解　导棒的受力

图 3.15 中取竖直向下为速度正向。棒中 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 向右，回路电动势大小为 Blv，自感忽略给出 $i = Blv/R$；安培力大小 Bli，实际方向竖直向上。因此

$$m\dot{v} = mg - Bli = mg - \frac{B^2l^2}{R}v.$$

速度随时间的变化

令 $\gamma = B^2l^2/R$，$v_\infty = mg/\gamma$，将方程改写为 $\mathrm{d}v/(v_\infty - v) = (\gamma/m)\,\mathrm{d}t$。从 $0, 0$ 积分到 t, v，

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}z}{v_\infty - z} = \frac{\gamma}{m}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [-\ln(v_\infty - z)]_0^v = \frac{\gamma}{m}t.$$

原函数的负号来自 $v_\infty - z$ 的内层导数，代入上下限后，

$$-\ln\frac{v_\infty - v}{v_\infty} = \frac{\gamma}{m}t, \qquad v = v_\infty(1 - \mathrm{e}^{-\gamma t/m}).$$

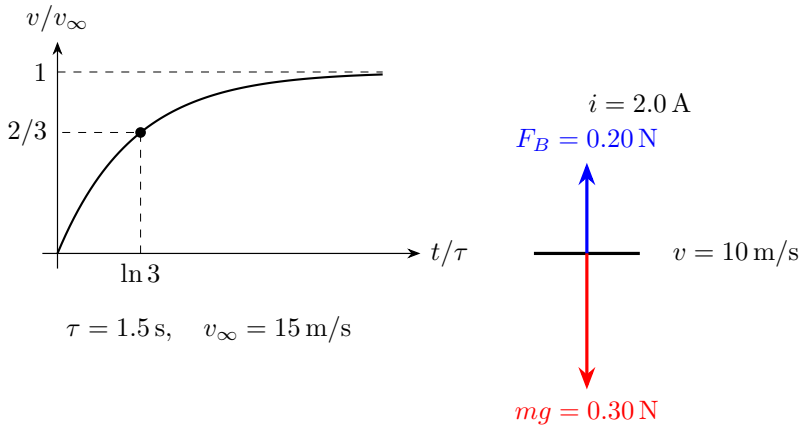


图 3.16: 下落导棒的速度曲线及 $v = 10\,\mathrm{m/s}$ 时的受力

时间常量与终速

与图 3.16 对照，$\gamma = 0.50^2 \times 0.20^2/0.50 = 0.020\,\mathrm{kg/s}$，时间常量 $m/\gamma = 1.5\,\mathrm{s}$，终速 $mg/\gamma = 15\,\mathrm{m/s}$。于是 $v = 15(1 - \mathrm{e}^{-t/1.5})\,\mathrm{m/s}$。

指定速度下的磁力

速度达到 10m/s 时，依次计算电流和磁力：

$$i = \frac{(0.50)(0.20)(10)}{0.50} = 2.0\,\mathrm{A}, \qquad F_B = (0.50)(0.20)(2.0) = 0.20\,\mathrm{N}.$$

磁力向上，而重力为 0.30N，因此净力仍为 0.10N 向下，加速度为 $0.10/0.030 = 3.33\,\mathrm{m/s^2}$。初始斜率 $\dot{v}(0) = g$、终态斜率趋零，都与受力一致。

例 3.2 (两棒的摩擦与悬物牵引)**.** 两棒在向纸里、大小为 B 的匀强磁场中沿等宽轨道运动。棒长均为 l，忽略导轨电阻和回路自感。第一种情形的总电阻为 R_Σ。前棒受水平拉力，两棒均向右匀速，前棒、后棒的摩擦力大小分别为 f_1, f_2，求拉力及速度差。第二种情形：两棒各质量 m、电阻 R，无摩擦；右棒由越过定滑轮的轻绳连接质量 M 的悬物，求给定速度 v_1, v_2 时的加速度。

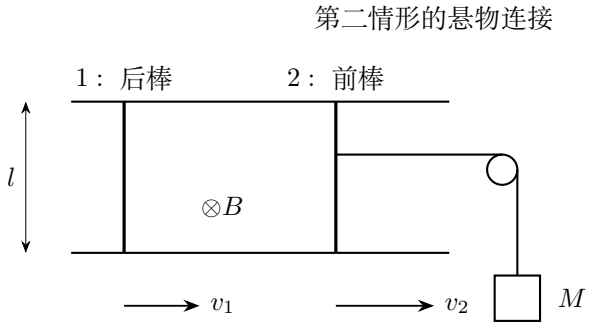


图 3.17: 两棒均向右运动；右棒为前棒，第二情形另以绳连接悬物

解　两棒匀速时的拉力

图 3.17 中前棒为右侧棒，较快的前棒驱动电流，后棒被磁力向右牵引。第一种情形后棒平衡给出 $Bli = f_2$，前棒平衡给出 $F = f_1 + Bli$，因此

$$F = f_1 + f_2, \qquad v_2 - v_1 = \frac{iR_\Sigma}{Bl} = \frac{f_2 R_\Sigma}{B^2 l^2}.$$

一组匀速数据

例如，取

$$f_1 = 0.020\,\mathrm{N}, f_2 = 0.010\,\mathrm{N}, B = 0.20\,\mathrm{T}, l = 0.50\,\mathrm{m}, R_\Sigma = 2.0\,\Omega$$

可得 $F = 0.030\,\mathrm{N}$，速度差为 $2.0\,\mathrm{m/s}$。

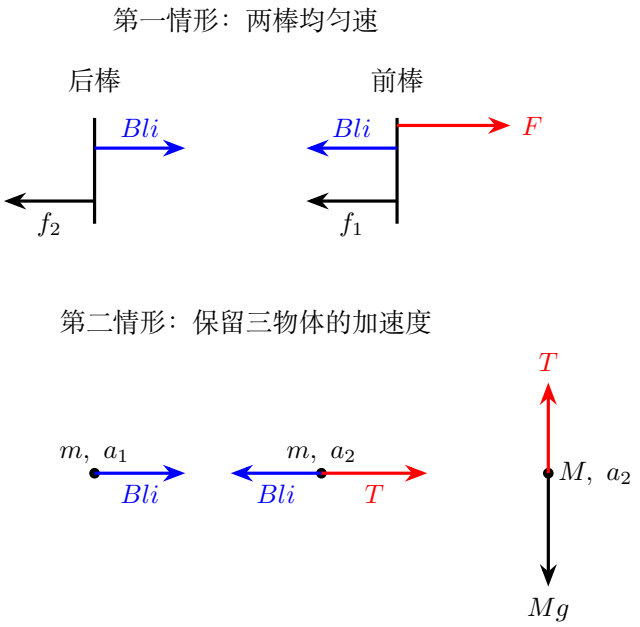


图 3.18: 分别对匀速摩擦情形及无摩擦悬物情形列真实受力，不混用稳态条件

悬物与两棒的加速度

第二情形按图 3.18 分别画后棒、前棒与悬物，$i = Bl(v_2 - v_1)/(2R)$。沿后、前棒向右及悬物向下取正，分别有

$$ma_1 = Bli, \qquad ma_2 = T - Bli, \qquad Ma_2 = Mg - T.$$

把前棒与悬物的方程相加，张力消去，$(m+M)a_2 = Mg - Bli$；再把 $i = Bl(v_2 - v_1)/(2R)$ 分别代入两个加速度式，得

$$a_1 = \frac{B^2l^2(v_2 - v_1)}{2mR}, \quad a_2 = \frac{Mg - B^2l^2(v_2 - v_1)/(2R)}{m+M}.$$

这些是有向加速度，若括号为负，实际加速度反向；求大小时最后取绝对值。

例 3.3 (碰撞后的三杆系统)**.** 上下平行导轨相距高 H，轨宽 l，左端半圆竖直轨道连接上下层。相同棒各质量 m，单位长度电阻 λ。A_3 从半圆最左点静止下滑，在底端与静止 A_2 粘连；此后粘连棒立即进入右侧竖直向上、大小为 B 的匀强磁场，与上层静止棒 A_1 构成闭合回路，两条水平轨均无摩擦且足够长。求最大电流、电流产生的总热及粘连棒速度为 A_1 三倍时 A_1 的磁力。

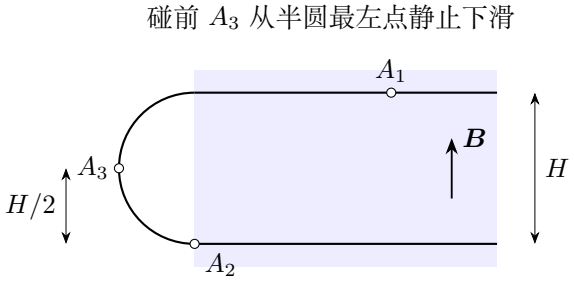


图 3.19: 竖直侧视图：半圆轨道位于无磁区，棒的长度 l 垂直图面

解　粘连时的速度

图 3.19 中 A_3 下落高度为 $H/2$，由机械能守恒得碰前速度 $u = \sqrt{gH}$。碰撞时间很短，沿水平动量守恒：

$$mu = 2mV, \qquad V = \frac{u}{2}.$$

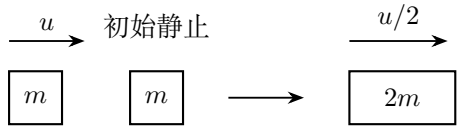


图 3.20: 先在短碰撞中守恒水平动量，再以粘连后的状态开始计算电磁发热

图 3.20 把碰撞前的两个质量 m 与碰后质量 $2m$ 分开，速度箭头由 u 变为 $u/2$；因此碰撞损失为 $\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}(2m)(u/2)^2 = mu^2/4$。这部分机械能损失发生在碰撞中，不计入随后回路的焦耳热。粘连后的 A_2, A_3 并联，电阻为 $\lambda l/2$；它们再与 A_1 串联，故 $R_\Sigma = 3\lambda l/2$。后续焦耳热的计算从粘连完成时开始。

碰后环流与相对速度

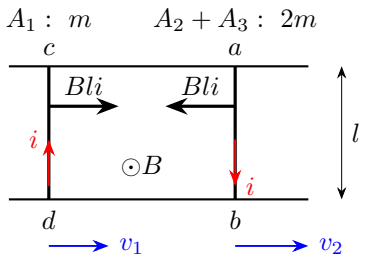


图 3.21: 从上方投影的两部分受力；竖直向上的磁场在图中向纸外

图 3.21 中取向右为正，系统水平合外力为零。令 $w = v_2 - v_1$，分别写动量、电流及受力关系：

$$mv_1 + 2mv_2 = mu, \qquad i = \frac{Bl}{R_\Sigma} w,$$
$$m\dot{v}_1 = Bli, \qquad 2m\dot{v}_2 = -Bli.$$

将后两式相减，得到

$$\dot{w} = -\frac{3B^2l^2}{2mR_\Sigma} w, \qquad w(0) = \frac{u}{2}.$$

令 $\tau_r = 2mR_\Sigma/(3B^2l^2) = m\lambda/(B^2l)$，分离积分得

$$\int_{u/2}^{w(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau_r}, \qquad [\ln|z|]_{u/2}^{w(t)} = -\frac{1}{\tau_r}[s]_0^t.$$

初始 $w_0 = u/2 > 0$，先在正分支代入上下限，得 $\ln[2w(t)/u] = -t/\tau_r$。指数化后 $w(t) = (u/2)\mathrm{e}^{-t/\tau_r}$。衰减系数为正，故 w 始终为正并单调趋零，图示两力始终使两部分速度靠近。

最大电流

电流正比于 w，因此粘连后立即最大：

$$\boxed{I_{\max} = \frac{Bl(u/2)}{3\lambda l/2} = \frac{B\sqrt{gH}}{3\lambda}}.$$

共同末速与焦耳热

在动量关系中令 $v_1 = v_2 = v_f$，得 $v_f = u/3$。从碰撞后到这一末态，机械能的减少全部成为回路热量：

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{u}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(3m)\left(\frac{u}{3}\right)^2 = \frac{mu^2}{12} = \frac{mgH}{12}}.$$

指定速度比下的磁力

将 $v_2 = 3v_1$ 代入动量式，依次求得

$$v_1 = \frac{u}{7}, \quad v_2 = \frac{3u}{7}, \quad i = \frac{Bl(2u/7)}{3\lambda l/2} = \frac{4Bu}{21\lambda}.$$

所以 A_1 的磁力为

$$\boxed{F_{A_1} = Bli = \frac{4B^2 l\sqrt{gH}}{21\lambda}},$$

该速度比确实能达到：此时 $w = 2u/7$，小于初始 $w_0 = u/2$ 而大于零。由指数衰减有 $t = \tau_r \ln(7/4) > 0$，其中 $\tau_r = m\lambda/(B^2 l)$，属于碰撞后的正常演化阶段。

方向按图 3.21 为向右，与较慢的 A_1 加速方向一致。

例 3.4 (不等有效轨宽与阶段接续)**.** 两棒质量均为 m，棒 P 从无磁光滑斜轨下降高度 h 后，以 $u = \sqrt{2gh}$ 进入水平磁区；Q 初始静止。磁场均匀，两棒有效导电长度分别为 $2l, l$，回路总电阻为常量 R。先求有效长度保持不变的渐近速度；再说明若 P 到达台阶后有效长度也变成 l，能否只由 h 确定最终共同速度。讨论相应构型保持电接触且两棒不相碰的阶段，台阶接续先按无机械冲量理想化处理。

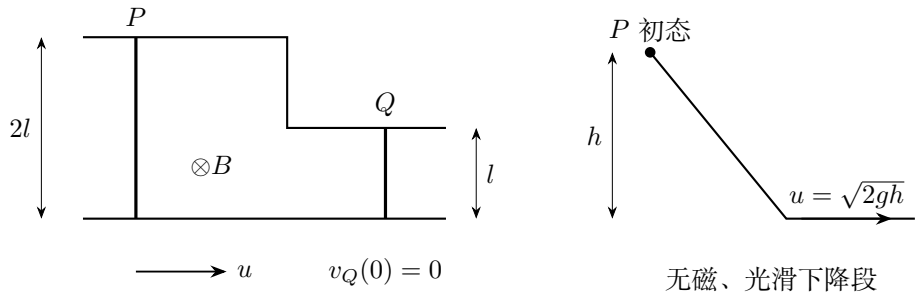


图 3.22: 左为磁区俯视的不同轨宽，右为 P 入场前下降高度 h 的侧视图

解　不等轨宽时的受力

按图 3.22 取两棒向右为速度正向，电流按 P 棒的动生作用方向为正：

$$i = \frac{Bl}{R}(2v_P - v_Q), \qquad m\dot{v}_P = -2Bli, \quad m\dot{v}_Q = Bli.$$

将第一棒的受力式与第二棒的两倍相加，得到

$$\dot{v}_P + 2\dot{v}_Q = 0, \qquad v_P + 2v_Q = u.$$

若这一构型保持足够久，渐近无电流要求 $2v_P = v_Q$。联立得 $v_P \to u/5$, $v_Q \to 2u/5$；两渐近速度并不相等。

台阶距离与切换速度

若要确定切换速度，必须知道 P 在初阶段走过的距离。令 $k = Bl$、$\kappa = 5k^2/(mR)$，先对 $z = 2v_P - v_Q$ 求导，得到 $\dot z = -\kappa z, z(0) = 2u$。分离积分 $\int_{2u}^{z(t)} \mathrm{d}y/y = -\kappa \int_0^t \mathrm{d}s$，写出原函数并代入两端，

$$[\ln|y|]_{2u}^{z(t)} = -\kappa[s]_0^t, \qquad \ln\frac{z(t)}{2u} = -\kappa t.$$

初始 $z = 2u > 0$ 的分支给 $z = 2u\mathrm{e}^{-\kappa t}$。联立 $2v_P - v_Q = z$ 与 $v_P + 2v_Q = u$，$5v_P = u + 2z$、$5v_Q = 2u - z$，所以

$$v_P(t) = \frac{u}{5} + \frac{4u}{5}\mathrm{e}^{-\kappa t}, \qquad v_Q(t) = \frac{2u}{5}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t}).$$

若台阶距离为 D，先对 P 的速度作定积分，

$$D = \int_0^{t_*}\left(\frac{u}{5} + \frac{4u}{5}\mathrm{e}^{-\kappa t}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{ut}{5} - \frac{4u}{5\kappa}\mathrm{e}^{-\kappa t}\right]_0^{t_*}.$$

代入上下限，到达时刻 t_* 须满足

$$D = \frac{u}{5}t_* + \frac{4u}{5\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa t_*}), \qquad v_* = v_P(t_*).$$

台阶设在有限距离处，越过台阶的速度由到达时刻代入上式求出。以下按台阶处无机械冲量、两棒在相应轨段内保持接触且不相碰的理想接续计算。

等轨宽时的共同末速

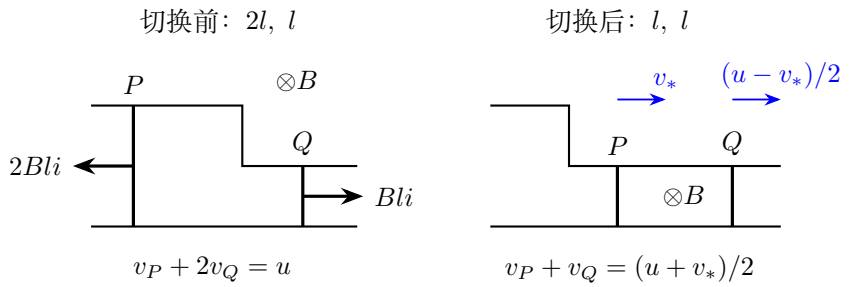


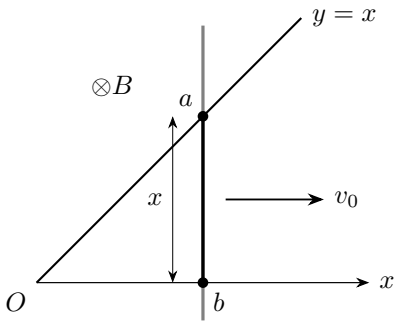
图 3.23: 左为切换前受力，右为切换后两棒均跨长 l；台阶转换假定无机械冲量

图 3.23 右图标出 P 到达台阶后的状态。设到达时 $v_P = v_*$，由切换前不变量得 $v_Q = (u - v_*)/2$。在题设的无机械冲量理想接续下，两速度不跳变；此后安培力大小相等、方向相反，两棒总动量才保持不变。因此共同末速度为

$$\boxed{v_f = \frac{v_* + (u - v_*)/2}{2} = \frac{u + v_*}{4}}.$$

v_* 由台阶距离和左图这段运动共同确定。进入右图后，两棒总动量以刚过台阶时的值为常量。

例 3.5 (有效长度变化的导棒电流、热与停止位置)**.** 水平导轨为直角坐标中的射线 $y=0$ 与 $y=x$，均匀磁场向纸里。一根足够长、整体质量恒为 m 的刚性导棒垂直 x 轴，以速度 v_0 向右运动，$t=0$ 的有效接触段位于顶点。仅两导轨接触点之间的棒段参与闭合回路，导轨与棒单位长度电阻均为 λ。求匀速时电流、拉力与棒自身发热；在 t_0 撤去拉力，求极限停止坐标。



灰色端段不承载回路电流；m 为整根导棒质量

图 3.24: 整根导棒质量固定；只有接触点 a,b 之间的有效导电长度随位置增加

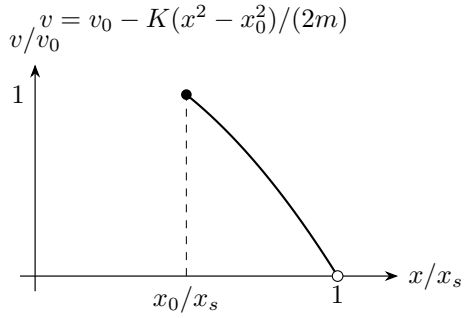
解　有效导线与拉力

图 3.24 中 $x=v_0t$，有效导电长度 $ab=x$，另外两边长度为 $x,\sqrt{2}x$，故 $R_\Sigma=\lambda(2+\sqrt{2})x$。磁区面积 $x^2/2$，磁通大小为 $Bx^2/2$；链式求导 $\mathrm{d}(Bx^2/2)/\,\mathrm{d}t=(B/2)(2x)\dot{x}=Bxv_0$，电动势为 Bxv_0，除以 R_Σ 得 $i=Bv_0/[\lambda(2+\sqrt{2})]$，沿棒向上，电流为常量（$t>0$）。拉力 $F=Bix=B^2v_0^2t/[\lambda(2+\sqrt{2})]$。

导棒的焦耳热

棒的电阻为 λv_0t，单独积分其焦耳热，得

$$Q_{ab}=\int_0^t i^2\lambda v_0t'\,\mathrm{d}t'=i^2\lambda v_0\left[\frac{t'^2}{2}\right]_0^t=\frac{B^2v_0^3t^2}{2\lambda(2+\sqrt{2})^2}.$$



图示取 $x_0/x_s = 1/2$，$x_s = x_{\text{stop}}$

图 3.25: 撤去拉力后，速度随位置按二次函数减小，空心点是 $to\infty$ 时的位置极限

撤力后的空间速度

图 3.25 中撤力后 $x_0 = v_0 t_0$。令 $K = B^2/[\lambda(2+\sqrt{2})]$，有 $m\dot{v} = -Kxv$。使用链式法则 $\dot{v} = (\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x)\dot{x} = v\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x$，在 $v > 0$ 时约去速度，

$$m\int_{v_0}^{v(x)} \mathrm{d}z = -K\int_{x_0}^{x} \xi\,\mathrm{d}\xi, \qquad m[z]_{v_0}^{v(x)} = -K[\xi^2/2]_{x_0}^{x} = -\frac{K}{2}(x^2 - x_0^2).$$

因此 $v = v_0 - K(x^2 - x_0^2)/(2m)$，故

$$x_{\text{stop}} = \sqrt{x_0^2 + 2mv_0/K}.$$

接近停止位置所需的时间

记 $x_s = x_{\text{stop}}$，把图中的速度写成 $v = K(x_s^2 - x^2)/(2m)$。利用 $\dot{x} = v$，从撤力位置积分到 x，

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \frac{2m}{K}\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{x_s^2 - \xi^2} \\ &= \frac{m}{Kx_s}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{x_s+\xi} + \frac{1}{x_s-\xi}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{m}{Kx_s}\left[\ln\frac{x_s+\xi}{x_s-\xi}\right]_{x_0}^{x}. \end{aligned}$$

当 $x \to x_s^-$，最后一项按对数增长到无穷大，因此导棒渐近于图中的空心点。

例 3.6 (导棒与电容的快速耦合)**.** 水平无摩擦轨道上的棒质量 m、长度 l，初速度 $v_0>0$。未充电电容 C 通过总电阻 $R>0$ 突然接入，磁场 B 垂直轨道，自感忽略。单棒向远离固定电容的方向运动，轨道足够长，求最终速度、充电时间尺度与总焦耳热。再考虑图示两根各质量 m、各电阻 R 的棒：左棒向右的初速度为 v_0，右棒静止，初始间距 D_0；两个相同电容 C 串在两棒之间的固定上导轨中，均未充电，中间孤立导体净电荷为零。左棒到最近固定电容接点的初始距离为 a，$0<a<D_0$。求左棒到达该接点之前两棒的速度、电荷及累计焦耳热，并给出这一运动阶段结束时刻 t_* 的方程。

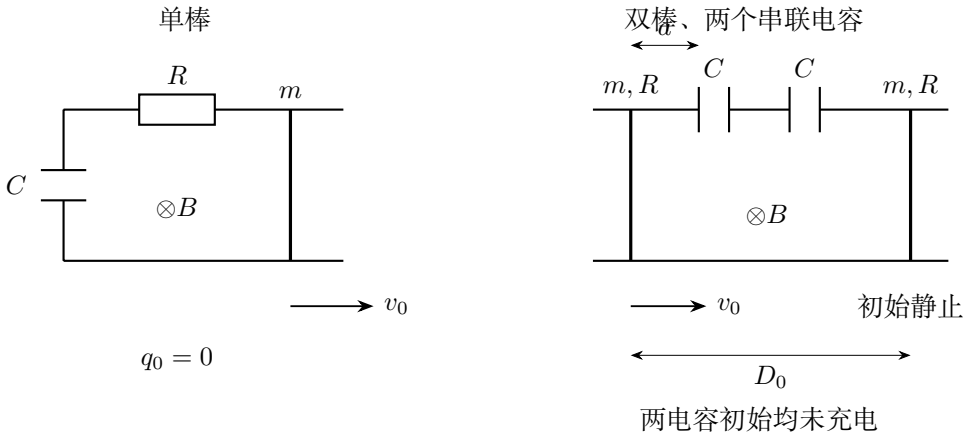


图 3.26: 两种初始连接：电容均未充电，双棒模型的两电容串在固定导轨中

解　安培冲量与单棒电路

令 $k=Bl$，按图 3.26 使充电电流产生阻力，$m\dot v=-k\dot q$。从 $v(0)=v_0, q(0)=0$ 积分，

$$m\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}u=-k\int_0^q\mathrm{d}Q,\qquad m[u]_{v_0}^{v}=-k[Q]_0^q.$$

所以 $m(v-v_0)=-kq$，即 $mv+kq=mv_0$。代入 $R\dot q+q/C=kv$，得到

$$R\dot q+\left(\frac{1}{C}+\frac{k^2}{m}\right)q=kv_0.$$

电荷与速度

定义 $C_e=(1/C+k^2/m)^{-1}$、$\tau=RC_e$，把方程写为 $\dot q+q/\tau=kv_0/R$，乘积分因子 $\mathrm{e}^{t/\tau}$，得到 $\mathrm{d}(q\mathrm{e}^{t/\tau})/\mathrm{d}t=(kv_0/R)\mathrm{e}^{t/\tau}$。从零初电荷积分，

$$q(t)\mathrm{e}^{t/\tau}-0=\frac{kv_0}{R}\int_0^t\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s=\frac{kv_0}{R}[\tau\mathrm{e}^{s/\tau}]_0^t=\frac{kv_0\tau}{R}(\mathrm{e}^{t/\tau}-1),$$

故 $q=C_ekv_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$。因此 $v_\infty=mv_0/(m+Ck^2)$。

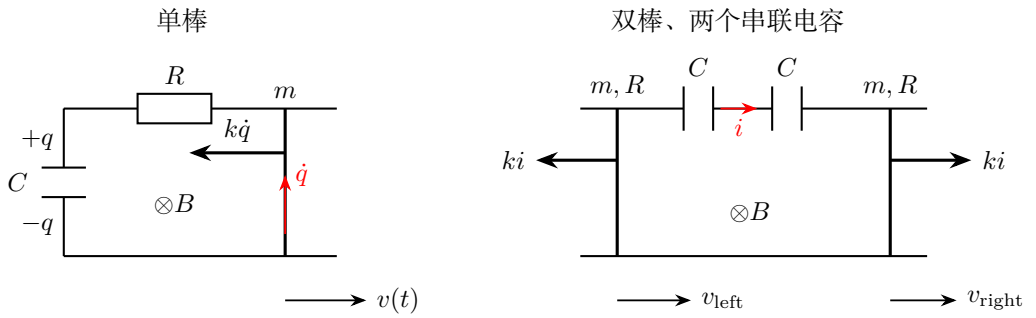


图 3.27: 由充电电流确定单棒阻力、双棒等大反向力，再分别保留质心与相对运动

单棒充电的热量

图 3.27 左图对应单棒，机械能除一部分留为动能、一部分存入电容外，其余为热，故

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{(Ckv_\infty)^2}{2C} \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}(m+Ck^2)\left(\frac{mv_0}{m+Ck^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2\left(1-\frac{m}{m+Ck^2}\right) = \frac{mv_0^2}{2}\frac{Ck^2}{m+Ck^2}. \end{aligned}$$

$R \to 0^+$ 时，充电集中在极短的时间内。机械能和电场能之和在这段时间减少，减少量就是上式给出的热量。

双棒的相对运动

右图中令相对速度 $w = v_{\text{left}} - v_{\text{right}}$，初值为 v_0。两棒质心速度为 $v_0/2$，相对运动的质量为 $\mu = m/2$，两个串联电容的电容为 $C_0 = C/2$。两个棒的受力相反，所以质心匀速；相减两棒方程并用 $\dot q$ 为共同串联电流，得 $\mu\dot w = -k\dot q$。两只电容电压相加为 $2q/C = q/C_0$，两电阻相加为 $2R$，回路方程为 $2R\dot q + q/C_0 = kw$。积分第一式得 $\mu w + kq = \mu v_0$，这才将两棒问题化为与单棒同形式的方程。

电荷与两棒速度

将 m, C, R 分别替换为 $\mu, C_0, 2R$。定义无量纲数 $\lambda = m/(m+Ck^2)$ 和时间尺度 $\tau' = RmC/(m+Ck^2)$，双棒的约化方程为 $2R\dot q + (1/C_0 + k^2/\mu)q = kv_0$。令 $q_f = kv_0/(1/C_0 + k^2/\mu)$，则 $\dot q = (q_f - q)/\tau'$；从 $q(0) = 0$ 分离变量并积分：

$$\int_0^{q(t)} \frac{\mathrm{d}Q}{q_f - Q} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau'}, \qquad [-\ln(q_f - Q)]_0^{q(t)} = \left[\frac{s}{\tau'}\right]_0^t.$$

在题设 $q_f>0$ 时，解沿 $q<q_f$ 的分支趋近终值，故 $-\ln[(q_f-q)/q_f]=t/\tau'$。把 $C_0=C/2,\mu=m/2$ 代入 q_f，再用 $w=v_0-kq/\mu$，得到

$$q(t)=\frac{mCkv_0}{2(m+Ck^2)}(1-\mathrm{e}^{-t/\tau'}),\qquad w(t)=v_0[\lambda+(1-\lambda)\mathrm{e}^{-t/\tau'}].$$

再用质心速度与相对速度还原图 3.27 右图的两个箭头：

$$v_{\text{left}}(t)=\frac{v_0+w(t)}{2},\qquad v_{\text{right}}(t)=\frac{v_0-w(t)}{2}.$$

初始时分别恢复 $v_0,0$。此后 $0<w(t)<v_0$，所以两棒都向右运动，左棒始终更快；必须在它到达固定接点前停止使用这一回路方程。

首次到达接点

以左棒初始位置为 $x=0$，图 3.28 中的最近接点位于 $x=a$。从零位移积分左棒速度，

$$x_{\text{left}}(t)=\int_0^t\frac{v_0}{2}[(1+\lambda)+(1-\lambda)\mathrm{e}^{-s/\tau'}]\,\mathrm{d}s=\frac{v_0}{2}\left[(1+\lambda)s-(1-\lambda)\tau'\mathrm{e}^{-s/\tau'}\right]_0^t,$$

代入上下限后得到

$$x_{\text{left}}(t)=\frac{v_0}{2}\left[(1+\lambda)t+(1-\lambda)\tau'(1-\mathrm{e}^{-t/\tau'})\right].$$

因此 t_* 是 $x_{\text{left}}(t_*)=a$ 的唯一正根。左棒速度始终介于 $(1+\lambda)v_0/2$ 与 v_0 之间，故

$$\frac{a}{v_0}<t_*<\frac{2a}{(1+\lambda)v_0}.$$

右棒向右移动，始终有 $x_{\text{right}}\ge D_0>a$，所以左棒先到接点，此前两棒不会相遇。

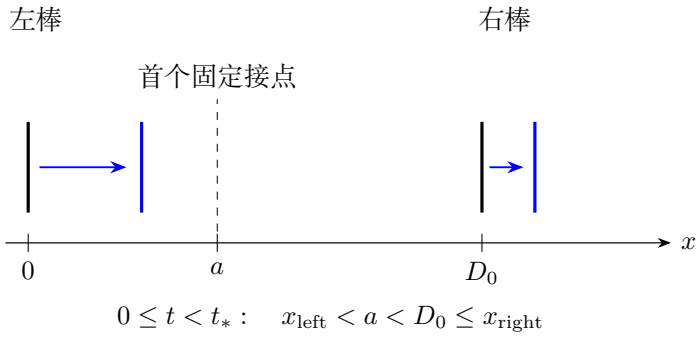


图 3.28: 固定接点限定暂态方程的有效运动区间

接触前的焦耳热

先对电荷的指数求导，

$$i = \dot{q} = q_f \left[-\mathrm{e}^{-t/\tau'} \left(-\frac{1}{\tau'} \right) \right] = \frac{q_f}{\tau'} \mathrm{e}^{-t/\tau'} = \frac{kv_0}{2R} \mathrm{e}^{-t/\tau'}.$$

两棒电阻均发热，须对总电阻 $2R$ 积分，所以

$$\begin{aligned} Q_J(t) &= \int_0^t 2Ri(t')^2 \,\mathrm{d}t' = \frac{k^2 v_0^2}{2R} \int_0^t \mathrm{e}^{-2t'/\tau'} \,\mathrm{d}t' \\ &= \frac{k^2 v_0^2}{2R} \left[-\frac{\tau'}{2} \mathrm{e}^{-2t'/\tau'} \right]_0^t \\ &= \frac{mv_0^2}{4} \frac{Ck^2}{m + Ck^2} (1 - \mathrm{e}^{-2t/\tau'}), \qquad 0 \le t < t_*. \end{aligned}$$

到达接点前的累计热量取 $Q_J(t_*^-)$。能量关系为

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} m(v_{\text{left}}^2 + v_{\text{right}}^2) + \frac{q^2}{C} + Q_J(t).$$

两只真实电容的总储能为 q^2/C，质心动能 $mv_0^2/4$ 保持不变。这组速度与电荷方程用到导棒到达接点为止，接点之后的运动取决于新的回路连接。

例 3.7 (电容导棒下落、有限电阻与击穿)**.** 水平棒横跨竖直导轨下落，质量 m、长度 l，上端回路接电容 C，磁场向纸内且垂直轨道。先从静止、未充电状态释放，求零电阻下落高度 h 的时间，并给出总电阻为 $R > 0$ 时热量的表达式。再取零电阻、初始向下速度 v_0 以及与之相容的初始电压，求达到击穿电压 U_b 的时刻。

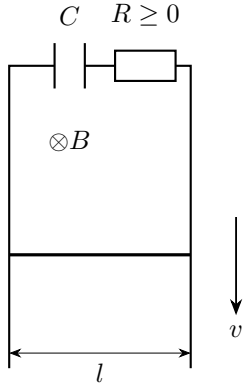


图 3.29: 棒向下运动，电容接在竖直导轨上端；零电阻与有限电阻分别讨论

解　零电阻时的加速度

令 $k=Bl$，取接右轨一侧极板电荷为 q、下落方向为正。图 3.29 中无电阻时 $q=Ckv$，受力方程 $m\dot v=mg-k\dot q$ 给出 $a=mg/(m+Ck^2)$。由初态零速度，$h=at_h^2/2$，所以 $t_h=\sqrt{2h(m+Ck^2)/(mg)}$。

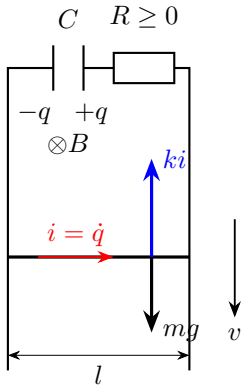


图 3.30: 右轨侧极板电荷为 q，棒中充电电流向右，安培力与重力相反

有限电阻时的下落

图 3.30 保留电阻时先积分受力，得到 $mv+kq=mgt$；代入电路，$R\dot q+(1/C+k^2/m)q=kgt$。令 $C_e=(1/C+k^2/m)^{-1}$、$\tau=RC_e$、$\alpha=m/(m+Ck^2)$，一阶方程乘 $\mathrm{e}^{t/\tau}$ 后，$\mathrm{d}(q\mathrm{e}^{t/\tau})/\,\mathrm{d}t=(kg/R)t\mathrm{e}^{t/\tau}$。分部积分时取 $f=s$、$\mathrm{d}g=\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s$，所以 $\mathrm{d}f=\mathrm{d}s$、$g=\tau\mathrm{e}^{s/\tau}$。于是

$$\int_0^t s\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s=[\tau s\mathrm{e}^{s/\tau}]_0^t-\tau\int_0^t\mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s=\tau t\mathrm{e}^{t/\tau}-\tau^2(\mathrm{e}^{t/\tau}-1),$$

将这一积分乘 $kg/(R\mathrm{e}^{t/\tau})$，先得到电荷；再用 $v=gt-kq/m$ 求速度：

$$q=C_ekg[t-\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})],\qquad v=\alpha gt+(1-\alpha)g\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

最后从零位移对速度积分，

$$\begin{aligned}x&=\int_0^t[\alpha gs+(1-\alpha)g\tau(1-\mathrm{e}^{-s/\tau})]\,\mathrm{d}s\\&=\left[\frac{1}{2}\alpha gs^2+(1-\alpha)g\tau(s+\tau\mathrm{e}^{-s/\tau})\right]_0^t,\end{aligned}$$

代入上下限，得到 $x=\alpha gt^2/2+(1-\alpha)g\tau[t-\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})]$。

落地前的焦耳热

用最后一式令 $x(T)=h$ 确定落地时间。对电荷括号内逐项求导，

$$\dot q = C_e k g\left[1-\tau\left(0-\mathrm{e}^{-t/\tau}\frac{-1}{\tau}\right)\right] = C_e k g(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}).$$

所以 $Q = R(C_e k g)^2\int_0^T (1-\mathrm{e}^{-t/\tau})^2\,\mathrm{d}t$。平方后保留三项 $1-2\mathrm{e}^{-t/\tau}+\mathrm{e}^{-2t/\tau}$，分别从零积分到 T，三项原函数依次是 t、$2\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$、$-(\tau/2)\mathrm{e}^{-2t/\tau}$。因此

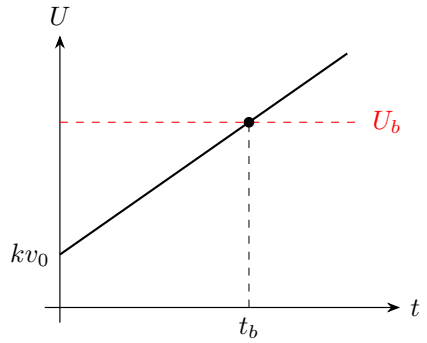
$$Q = R(C_e k g)^2\left[t+2\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^T.$$

扣除下限的 $3\tau/2$，得到电阻热：

$$Q = R(C_e k g)^2\left[T-2\tau(1-\mathrm{e}^{-T/\tau})+\frac{\tau}{2}(1-\mathrm{e}^{-2T/\tau})\right].$$

也可用 $Q = mgh - mv(T)^2/2 - q(T)^2/(2C)$ 检查。

首次达到击穿电压



$$U = kv_0 + kat,\quad a = mg/(m+Ck^2)$$

图 3.31: 相容初态下电压线性增长；阈值高于初始电压时才有正的首次击穿时刻

图 3.31 画出零电阻时电压随速度线性增长的过程。

若零电阻初始电压已为 kv_0，初态相容，便有 $v = v_0 + at$，$U = k(v_0+at)$。在 $U_b > kv_0$ 时，$t_b = (U_b/k - v_0)/a$；若 $U_b \le kv_0$，初态即触及或超过阈值。

例 3.8 (交叠圆环：场变与相对运动)**.** 两个相同均匀圆环半径 a，每环总电阻 r，中心距 $\sqrt{3}a$，交点 A, C 电接触良好。先固定两环，向里磁场以速率 $k>0$ 减小，求各长、短弧电流及单环合磁力。再令磁场恒定，两环分别以速率 v 相向平移，求此瞬时电流与阻力。

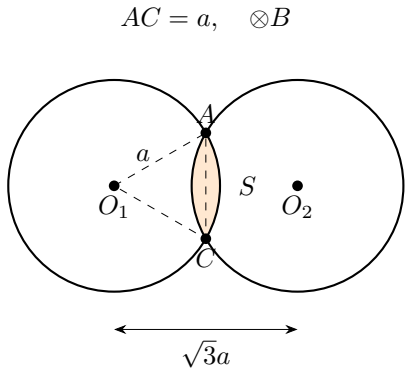


图 3.32: 两个圆心位于各自圆心处；中心距 $\sqrt{3}a$ 确定短弧 60°、交弦长 a

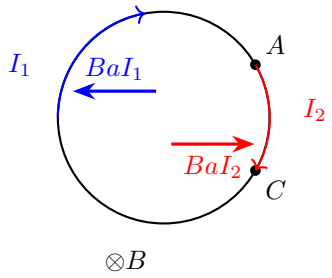
解　交叠面积与长短弧

由图 3.32 每条短弧圆心角 60°、电阻 $r/6$，长弧为 $5r/6$。交叠部分由两个圆心角 60 度的扇形各减一个三角形拼成，故 $S=2[\pi a^2/6-(a^2/2)\sin 60^\circ]=a^2(\pi/3-\sqrt{3}/2)$。

固定圆环的电流

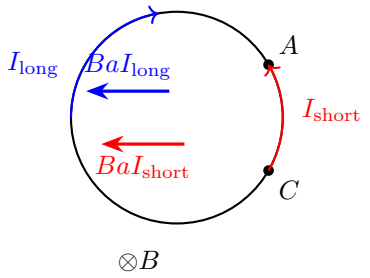
场变情形诱导顺时针环流，设外侧长弧电流为 I_1、内侧短弧电流为 I_2，方向均按各自圆环的顺时针。透镜回路电阻 $r/3$，故 $I_2=3kS/r$；任一整环的回路方程为 $(5r/6)I_1+(r/6)I_2=k\pi a^2$，因此 $I_1=k(6\pi a^2-3S)/(5r)$。

固定环、向里场减弱



$F_{\text{left}} = Ba(I_1 - I_2)$ 向左

恒场、两环相向运动



$F_{\text{left}} = Ba(I_{\text{long}} + I_{\text{short}})$ 向左

图 3.33: 只取左环比较两种驱动：场变时两弧电流反向，相向运动时两弧同向；右环由对称性得到

各段安培力

图 3.33 中左环长弧从 C 到 A、短弧从 A 到 C，所以按端点位移计算两部分安培力，均匀磁场中任一载流弧段的合力为 $I\int \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} = I(\boldsymbol{r}_{\text{末}} - \boldsymbol{r}_{\text{初}})\times\boldsymbol{B}$。公共弦 $AC = a$ 竖直，左长弧电流从下到上，受力向左，大小 BaI_1；短弧电流从上到下，受力向右，大小 BaI_2。先计算电流之差，

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \frac{k(6\pi a^2 - 18S)}{5r} \\ &= \frac{ka^2}{5r}\left[6\pi - 18\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{9\sqrt{3}ka^2}{5r} > 0. \end{aligned}$$

所以合力向左，大小 $F = Ba(I_1 - I_2) = 9\sqrt{3}kBa^3/(5r)$。右环受反向等大力，两环有分开的趋势。

相向运动时的阻力

图 3.33 右侧的恒场相向运动中，左环 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 向上，左右环沿 $C\to A$ 的动生积分分别为 $+Bva, -Bva$。把四条弧都按 $C\to A$ 为参考，左右环电动势分别为 $+Bva, -Bva$，总电导又相同。节点方程中的两组源项抵消，给出 $V_A = V_C$。故左环两弧都从 C 流向 A，且

$$I_{\text{短}} = \frac{Bva}{r/6} = \frac{6Bva}{r}, \qquad I_{\text{长}} = \frac{Bva}{5r/6} = \frac{6Bva}{5r}.$$

两部分力同向向左，阻力 $F = Ba(I_{\text{短}} + I_{\text{长}}) = 36B^2va^2/(5r)$。若已知单位长度电阻 λ，全环电阻为 $r = 2\pi a\lambda$。

例 3.9 (导棒电动机的启动与能量分配)**.** 水平导棒质量 m、长度 l，回路总电阻 R，磁场向纸里，接理想直流源 E，极性使棒从静止向右加速。无摩擦、自感忽略。求电流、速度和位移；求从启动到渐近无电流过程中电源做功、焦耳热和最终动能。

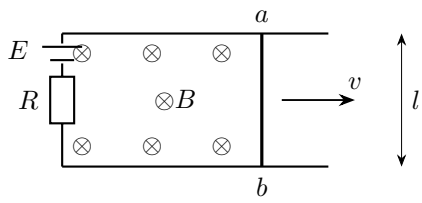


图 3.34: 题设：导棒电动机的启动与能量分配

解　电源与反电动势

图 3.34 电源正端接上轨，初电流沿棒向下，安培力向右。棒向右运动时自身动生作用向上，反抗电源。因此令 $k = Bl$，有

$$Ri = E - kv, \qquad m\dot{v} = ki = \frac{kE - k^2 v}{R}.$$

启动速度、电流和位移

令 $\tau = mR/k^2$，令 $v_\infty = E/k$，从 $v(0) = 0$ 分离积分，

$$\int_0^{v(t)} \frac{\mathrm{d}z}{v_\infty - z} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad [-\ln(v_\infty - z)]_0^{v(t)} = \frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$

代入端点得 $-\ln[(v_\infty - v)/v_\infty] = t/\tau$，指数化后 $v = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})/k$，电流 $i = E\mathrm{e}^{-t/\tau}/R$。再次积分速度，$x = (E/k)\int_0^t (1 - \mathrm{e}^{-s/\tau})\,\mathrm{d}s = (E/k)[s + \tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t$，得到 $x = E[t - \tau(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})]/k$。

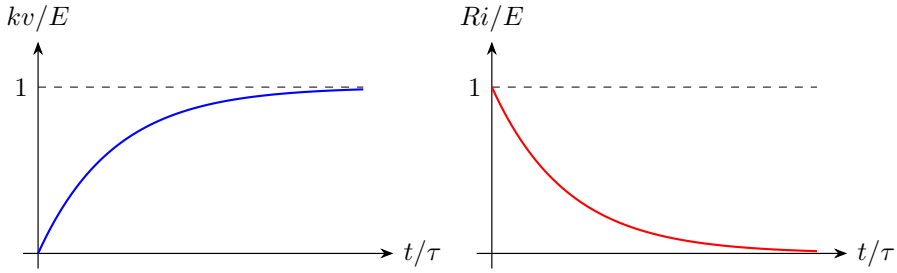


图 3.35: 启动后速度逐渐接近 E/k，电流同时从 E/R 衰减到零

总电量与能量分配

图 3.35 中速度上升而电流下降，二者的初态与极限相互对应。通过电源的总电量有限，为 $Q=(E/R)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t=(E/R)[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}]_0^\infty=E\tau/R=mE/k^2$，所以电源做功 $W_E=EQ=mE^2/k^2$。热量直接由电流平方积分，

$$Q_J=\frac{E^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t=\frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^\infty=\frac{mE^2}{2k^2}.$$

最终动能 $mv_\infty^2/2=mE^2/(2k^2)$，恰与热量相同，二者之和等于电源功。最终棒仍匀速运动而电流趋零，不存在维持匀速所需的电阻功率，因为本题没有机械负载。

例 3.10 (恒力牵引两棒的共同加速)**.** 两根棒长度 l、质量 m_1,m_2，在水平等宽光滑导轨上，回路总电阻 R，磁场向纸里。两棒初始静止，右棒受恒力 F 向右。求两棒速度、电流的时间规律，解释电流趋于常量时为何两棒仍加速。

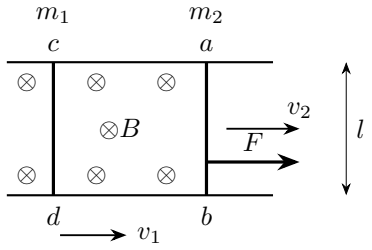


图 3.36: 题设：恒力牵引两棒的共同加速

解　两棒的受力

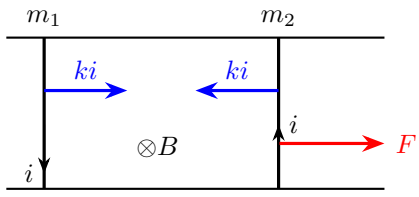
图 3.36 右棒先运动，回路电动势为 $k(v_2-v_1)$，其中 $k=Bl$。安培力使左棒向右、右棒受阻，因此

$$m_1\dot v_1=ki,\quad m_2\dot v_2=F-ki,\quad i=k(v_2-v_1)/R.$$

质心与相对运动

先将两受力式相加，内部磁力抵消，得到 $m_1\dot v_1+m_2\dot v_2=F$。再将第二式除以 m_2、第一式除以 m_1 后相减，得到相对速度方程。令总质量 $M=m_1+m_2$、约化质量 $\mu=m_1m_2/M$，质心方程为 $\dot V=F/M$，所以 $V=Ft/M$。相对速度 $w=v_2-v_1$ 满足

$$\mu\dot w=\frac{m_1}{M}F-\frac{k^2}{R}w.$$



$$m_1\dot{v}_1 + m_2\dot{v}_2 = F$$

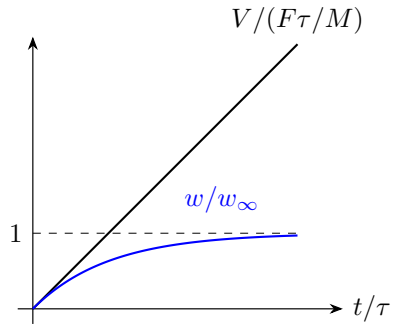


图 3.37: 质心持续加速，相对速度趋于常量；两棒的安培力是内部等大反向力

相对速度与电流

由图 3.37 分别对质心和相对运动求解，$\tau = \mu R/k^2$，$w_\infty = Fm_1R/(Mk^2)$，相对方程是 $\dot{w} = (w_\infty - w)/\tau$，由 $w(0) = 0$ 积分，

$$\int_0^{w(t)} \frac{\mathrm{d}z}{w_\infty - z} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad [-\ln(w_\infty - z)]_0^{w(t)} = \frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

代入端点得 $-\ln[(w_\infty - w)/w_\infty] = t/\tau$，所以 $w = w_\infty(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$。

$$v_1 = \frac{Ft}{M} - \frac{m_2}{M}w, \qquad v_2 = \frac{Ft}{M} + \frac{m_1}{M}w, \qquad i = \frac{k}{R}w.$$

长期加速度与功率

初始 $\dot{v}_1 = 0, \dot{v}_2 = F/m_2$，与直接受力相符。长期两棒加速度均趋于 F/M，电流却趋于 $Fm_1/(Mk)$。相对速度和电流趋于常量，两棒同时以同一加速度继续运动。每一时刻都有 $Fv_2 = \mathrm{d}(m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2)/\,\mathrm{d}t + i^2R$，外力持续供能同时增加质心动能和发热。

例 3.11（随位置增强的磁场中的停止位置）. 水平光滑轨道上，质量 m、长度 l 的棒从 $x=0$ 以速度 v_0 向右运动。回路总电阻 R 恒定，场垂直轨面，沿轨为 $B(x)=B_0x/a$ $(x\ge 0)$，棒长方向近似均匀。无外力、自感忽略。求 $v(x)$、极限停止位置；若磁区在 $x=d$ 截止，判断能否穿出。

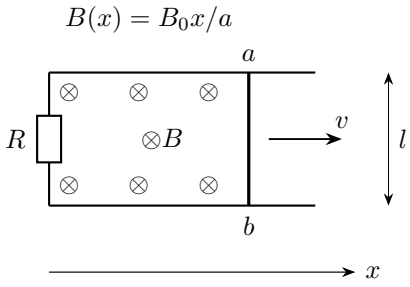


图 3.38: 题设：随位置增强的磁场中的停止位置

解　场强与阻力

沿图 3.38 向右，电动势 $e=B(x)lv$，电流 $i=B(x)lv/R$，磁力 $F_x=-B(x)^2l^2v/R$。因此

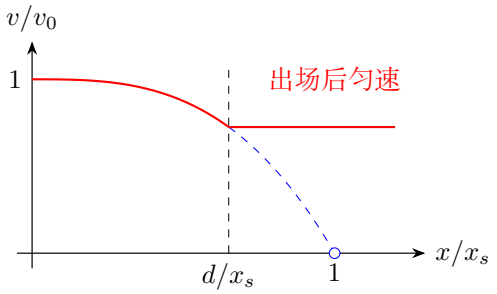
$$m\dot v=-\frac{B_0^2l^2}{Ra^2}x^2v.$$

速度随位置的变化

在尚有正速度时用 $\dot v=v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$，约去 v 后按位移积分：

$$m\int_{v_0}^{v(x)}\mathrm{d}z=-\frac{B_0^2l^2}{Ra^2}\int_0^x\xi^2\,\mathrm{d}\xi,\qquad m[z]_{v_0}^{v(x)}=-\frac{B_0^2l^2}{Ra^2}[\xi^3/3]_0^x.$$

代入上下限并除以 m，得到 $v(x)=v_0-B_0^2l^2x^3/(3mRa^2)$。



红线示意 $d/x_s=0.65$；蓝虚线为未截场的后续解

图 3.39: 若磁区在 $d<x_s$ 截止，速度转为正的常量；未截断的零点只表示渐近停止

场区出口与停止位置

图 3.39 中未截场的三次速度曲线逐渐变陡，其零点给出位置极限 $x_s = [3mRa^2v_0/(B_0^2l^2)]^{1/3}$。若 $d < x_s$，穿出速度 $v_d = v_0[1-(d/x_s)^3] > 0$，此后无场而匀速；若 $d > x_s$，棒渐近停在场区内。若 $d = x_s$，极限位置恰在出口。

时间与热量

用 $v(x) = v_0[1-(x/x_s)^3]$ 先分解三次差，

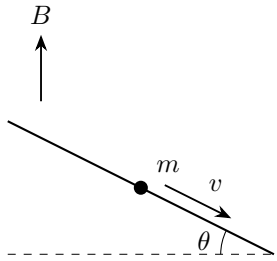
$$v(x) = v_0\left(1-\frac{x}{x_s}\right)\left[1+\frac{x}{x_s}+\left(\frac{x}{x_s}\right)^2\right] \simeq \frac{3v_0}{x_s}(x_s-x).$$

这里方括号在 $x \to x_s^-$ 时趋于 3。设 $x_* = x_s - \epsilon_0$ 已在停止点附近，则

$$\int_{x_*}^{x_s-\epsilon}\frac{\mathrm{d}x}{v(x)} \simeq \frac{x_s}{3v_0}\int_{x_*}^{x_s-\epsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x_s-x} = -\frac{x_s}{3v_0}[\ln(x_s-x)]_{x_*}^{x_s-\epsilon} = \frac{x_s}{3v_0}\ln\frac{\epsilon_0}{\epsilon} \longrightarrow \infty.$$

时间积分按对数发散，导棒逐渐逼近停止位置。若能穿出，磁区内热量为 $m(v_0^2 - v_d^2)/2$；未穿出则最终全部初动能变热。

例 3.12 (竖直磁场中斜面导棒与摩擦反馈)**.** 导轨平面倾角 θ，棒沿等高线横跨轨道，长 l、质量 m，以速度 v 沿斜面下滑。磁场竖直向上、大小 B，总电阻 R，动摩擦因数 μ，设 $\tan\theta > \mu$。求电流、支持力和终端速度。



棒长 l 垂直图面

图 3.40: 题设：竖直磁场中斜面导棒与摩擦反馈

解　动生电动势与电流

图 3.40 中速度的水平分量为 $v\cos\theta$，它与竖直场叉乘后沿棒，所以电动势大小 $Blv\cos\theta$，电流 $i = Blv\cos\theta/R$。安培力大小为 Bil，水平方向指向斜面高端。下面沿斜面及其法线分别取分量。

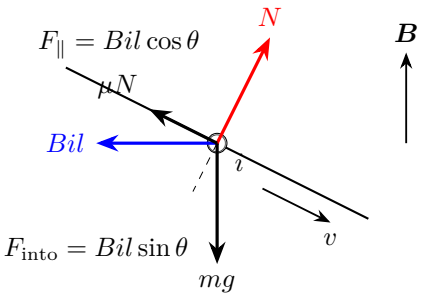


图 3.41: 磁场向上、电流向外，安培力水平向左；它压向斜面的分量增加支持力和摩擦

支持力与摩擦

按图 3.41 将水平磁力分解，沿斜面向上的分量为 $Bil\cos\theta$，压入斜面的分量为 $Bil\sin\theta$。垂直轨面没有加速度，因此 $N = mg\cos\theta + Bil\sin\theta$，摩擦力大小 μN、方向沿斜面向上。沿下滑方向列式，

$$m\dot{v} = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta) - Bil(\cos\theta + \mu\sin\theta).$$

沿坡加速度与终速

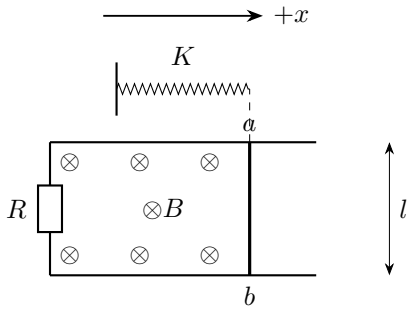
代入电流并令加速度趋零，得到

$$v_{\infty} = \frac{mgR(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{B^2l^2\cos\theta(\cos\theta + \mu\sin\theta)}.$$

开始下滑的条件

无摩擦时化为 $mgR\sin\theta/(B^2l^2\cos^2\theta)$；若 $\tan\theta \le \mu$，从静止释放是否启动还要使用静摩擦条件，本题所给持续下滑模型不直接适用。由法向方程可见，磁场越强，运动中支持力及滑动摩擦力的变化越显著。

例 3.13 (弹簧导棒的磁阻尼与临界磁场)． 光滑水平轨道上的棒质量 m、长度 l，与劲度系数 K 的弹簧相连。磁场 B 垂直轨面，回路总电阻 R，自感忽略。棒从伸长 A 处静止释放。求运动方程、欠阻尼条件及临界磁场；求全过程发热。



x 为相对平衡位置的伸长

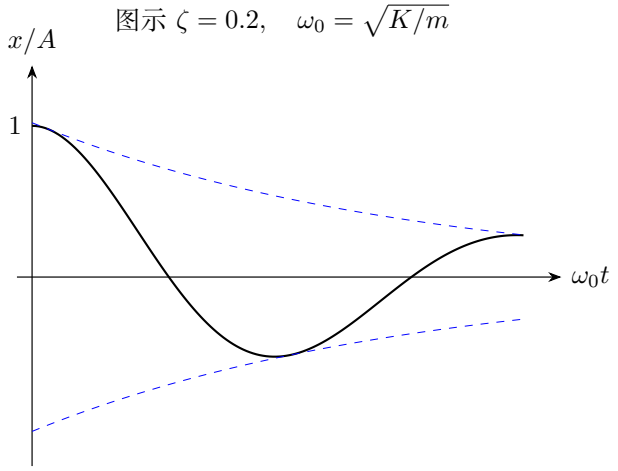
初态 $x = A,\ \dot{x} = 0$

图 3.42: 题设：弹簧导棒的磁阻尼与临界磁场

解　弹簧力与磁阻力

在图 3.42 中，以弹簧伸长为 x 的正向，弹簧力 $-Kx$，电流所致磁力为 $-\gamma\dot{x}$，其中 $\gamma = B^2l^2/R$。方程为 $m\ddot{x}+\gamma\dot{x}+Kx = 0$。试取 $x = \mathrm{e}^{st}$，其两次导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $(ms^2+\gamma s+K)\mathrm{e}^{st} = 0$；除以非零指数后，特征方程为 $ms^2+\gamma s+K = 0$。

图示 $\zeta = 0.2$，　$\omega_0 = \sqrt{K/m}$



虚线为 $x/A = \pm(\omega_0/\omega_d)\mathrm{e}^{-\alpha t}$

图 3.43: 从伸长处静止释放的欠阻尼曲线；初始斜率为零，首段速度向负方向

欠阻尼运动

图 3.43 中欠阻尼要求 $\gamma^2 < 4mK$。令 $\alpha = \gamma/(2m)$、$\omega_d = \sqrt{K/m - \alpha^2}$，将特征方程除以 m 并配方为 $(s+\alpha)^2 + \omega_d^2 = 0$，两个根为 $-\alpha \pm \mathrm{j}\omega_d$，所以一般实解为 $x = \mathrm{e}^{-\alpha t}(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t)$。$x(0) = A$ 给出 $C_1 = A$；乘积求导为

$$\dot{x} = \mathrm{e}^{-\alpha t}[(-\alpha C_1 + \omega_d C_2)\cos\omega_d t + (-\alpha C_2 - \omega_d C_1)\sin\omega_d t].$$

所以 $\dot{x}(0) = -\alpha A + \omega_d C_2 = 0$，由此得 $C_2 = \alpha A/\omega_d$，得到

$$x = A\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right).$$

临界磁场

临界磁场由 $B_c^2 l^2/R = 2\sqrt{mK}$ 得

$$B_c = \left(\frac{4mKR^2}{l^4}\right)^{1/4}.$$

机械能与焦耳热

将受力式乘速度，$\mathrm{d}(m\dot{x}^2/2 + Kx^2/2)/\,\mathrm{d}t = -\gamma\dot{x}^2 = -i^2R$。只要 $B > 0$ 且回路闭合，最终回到平衡并静止，全过程热量为 $KA^2/2$。$B = 0$ 时磁阻尼消失，机械能在弹性势能和动能之间周期转化。

3.10　本讲小结

导棒速度决定动生电动势，回路电流决定安培力。固定几何、匀强场和纯电阻给出线性磁阻力。随位置变化的场强进入空间方程，有限磁区按有效横边的位置接续。

等宽两棒的安培力等大反向，分开写质心与相对运动。接电容时，电荷和棒速共同演化。接入独立电源后，反电动势与电源电压之差决定驱动电流，能量按外力功、电源功、储能及发热分配。

3.11 练习

练习 3.1 (有限磁区中的下落线框)**.** 矩形框质量 m、总电阻 R，横边长 l、竖边长 d。磁区竖直高度 $H > d$，上缘以下为向里磁场 B。框下边从磁区上缘之上 h 自由下落。求从释放到下边抵达磁区下缘时的磁力规律和最大速度，并比较部分进入阶段的速度与终端速度。

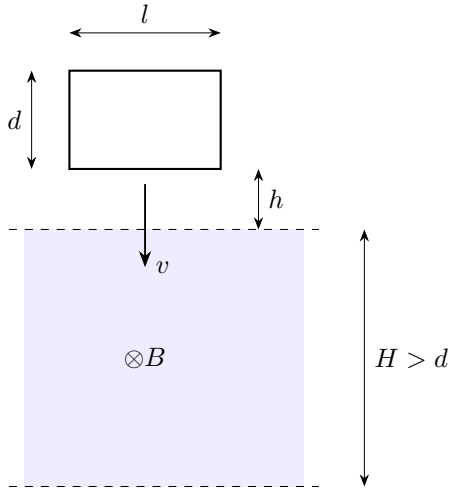


图 3.44: 下边从距上磁界 h 处释放；d 为竖边长，H 为磁区高度

练习 3.2 (缓慢收缩的柔软圆环)**.** 单位长度电阻 λ 的软导线形成圆环，初半径 a_0，交叠接触点始终导电。向外拉出导线的恒力为 F，磁场 B 垂直圆面。忽略惯性且圆环保持圆形，求缩到半径 $a_f > 0$ 的时间，并讨论取 $a_f \to 0$ 的限制。

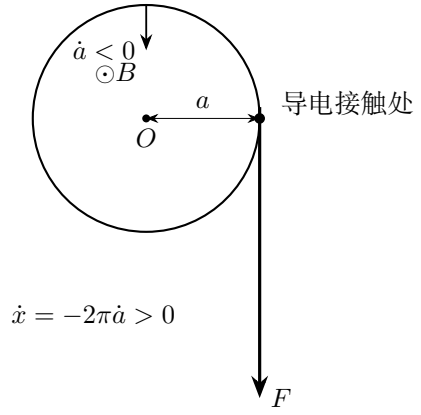


图 3.45: 拉端沿接触处的切线抽出导线，圆周长的减少量等于被抽出的长度

练习 3.3 (辐条轮的发电阻力与悬物终速)**.** 两个半径 a_1, a_2 的导电轮外缘无滑动接触，每轮有四根均匀辐条，每根电阻分别为 R_1, R_2。均匀磁场 B 垂直轮面，轮心用外电阻 R 连接。第一轮同轴小轴半径 a_0，悬挂质量 m 的物体。忽略机械摩擦与轮缘电阻，求稳定下落速度。

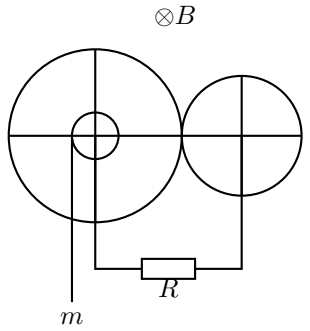


图 3.46: 题设：辐条轮的发电阻力与悬物终速

练习 3.4 (局部磁区中的圆盘涡流估算)**.** 电阻率 ρ、厚度 δ 的大金属圆盘以角速度 ω 转动。距轴 r 处有边长 $a \ll r$ 的正方形磁区，磁场垂直盘面、大小 B。采用局部回路近似：有效切割长度与回流尺度均取 a、通流截面取 $a\delta$。估计制动力矩，并说明区外回流怎样影响这一估计。

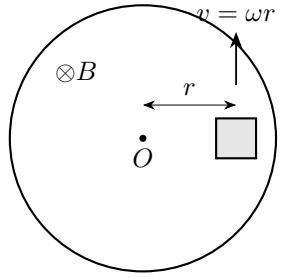


图 3.47: 题设：局部磁区中的圆盘涡流估算

练习 3.5 (两次制动实验反求电阻与空气阻力)**.** 导棒质量 $m = 0.10\,\mathrm{kg}$、长度 $l = 0.50\,\mathrm{m}$, 受空气线性阻力 $-bv$ 与电磁阻力, 在水平轨道上自由减速。在 $B_1 = 0.20\,\mathrm{T}$ 时测得速度时间常量 $\tau_1 = 2.0\,\mathrm{s}$，在 $B_2 = 0.40\,\mathrm{T}$ 时测得 $\tau_2 = 0.80\,\mathrm{s}$。两次总电阻 R 相同。求 R, b，再求第二次实验中初动能最终转为电阻热的比例。

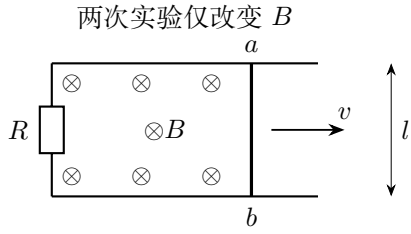


图 3.48: 题设：两次制动实验反求电阻与空气阻力

练习 3.6 (有机械负载的导棒电动机)**.** 导棒电动机由电动势 E、总电阻 R 的回路驱动，棒长 l，磁场 B，无其他摩擦。对棒施加恒定反向负载 F。求可持续正向匀速运动时的速度、负载机械功率、效率，及最大输出功率的负载；说明负载过大时的限制。

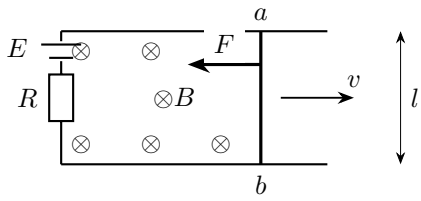


图 3.49: 题设：有机械负载的导棒电动机

练习 3.7 (闭合线框穿过有限宽磁区的三种结局)**.** 矩形刚性线框质量 m、电阻 R，沿运动方向宽 a，横向边长 l。无摩擦水平运动，前边刚到匀强磁区左缘时速度 $v_0>0$。磁区宽 $d\geq a$，磁场垂直线框平面，忽略自感。求完整穿出条件和穿出速度，区分进入时停滞、退出时停滞及完全穿过三种情况；能穿过时求所用时间。图示为进入过程。

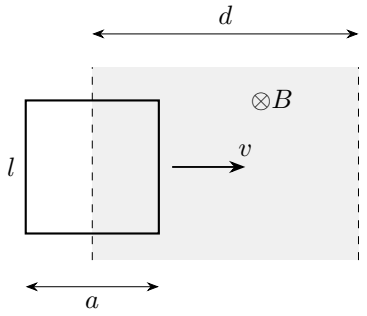


图 3.50: 题设：闭合线框穿过有限宽磁区的三种结局

练习解答

练习 3.1

解　进入磁区时的速度

图 3.44 中进入前无电流、磁力为零；下边到上缘时速度 $u=\sqrt{2gh}$。从此刻重新计时 s，直到上边也进入磁区，只有一横边受磁力。令 $\gamma=B^2l^2/R$，$v_t=mg/\gamma$、$\tau=m/\gamma$，令 $z=v-v_t$，从初值 $z(0)=u-v_t$ 分离积分，

$$\int_{u-v_t}^{z(s)}\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{1}{\tau}\int_0^s\mathrm{d}\xi,\qquad[\ln|y|]_{u-v_t}^{z(s)}=-\frac{1}{\tau}[\xi]_0^s.$$

代入端点得 $\ln|z(s)/(u-v_t)|=-s/\tau$，取指数并恢复初始偏差符号，有 $z=(u-v_t)\mathrm{e}^{-s/\tau}$；若 $u=v_t$，直接取 $z=0$。因此

$$v=v_t+(u-v_t)\mathrm{e}^{-s/\tau},\quad F_B=-\gamma v.$$

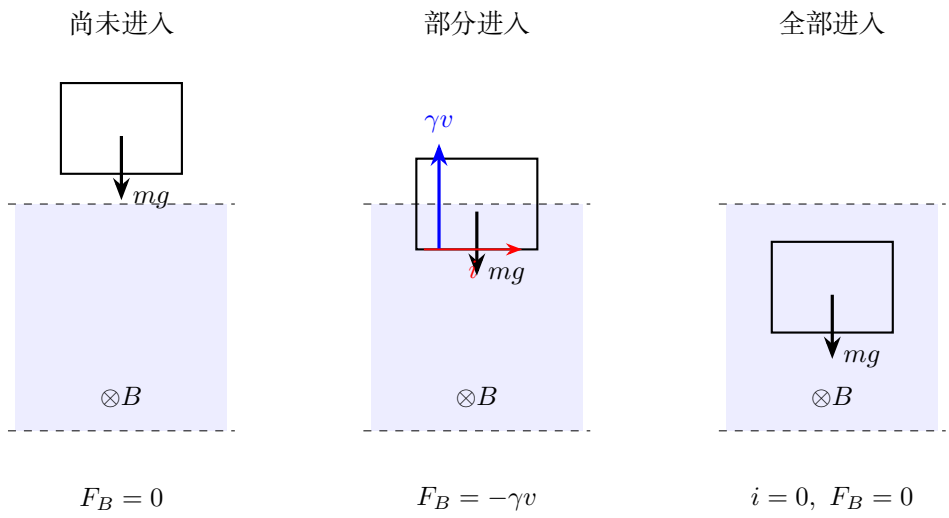


图 3.51: 磁力只在单条横边处于场内时出现；完全进入后的本题区间重新自由落体

全框入场后的运动

图 3.51 中部分进入阶段先积分 $y = \int_0^s [v_t + (u - v_t)\mathrm{e}^{-\xi/\tau}]\,\mathrm{d}\xi = [v_t\xi - \tau(u - v_t)\mathrm{e}^{-\xi/\tau}]_0^s$，代入上下限得到位移为 $y = v_t s + \tau(u - v_t)(1 - \mathrm{e}^{-s/\tau})$。由 $y = d$ 求阶段末时刻 s_1，得末速 v_1。此后两横边同时在场内，电动势相消、磁力为零，框重新自由落体，直到下边到下缘，还下降 $H - d$，末速 $\sqrt{v_1^2 + 2g(H - d)}$。

整个过程的最大速度

若 $u < v_t$，部分进入速度单调增大但有限时间并不恰达 v_t；若 $u > v_t$，则从入口速度开始减小，此阶段最大值反而是 u。若 $u = v_t$，仅部分进入阶段恰为匀速。整段运动的最大速度还应比较入口速度与到达下磁界前的速度：

$$v_{\max} = \max\left(u, \sqrt{v_1^2 + 2g(H - d)}\right).$$

全框入场后，线框重新以加速度 g 下落。

练习 3.2

解　半径与拉出长度

图 3.45 中半径减少 $\mathrm{d}a$，拉出长度增加 $\mathrm{d}x = -2\pi\,\mathrm{d}a$，故拉端速度 $v_x = -2\pi\dot{a}$。圆环电阻 $2\pi\lambda a$，电动势大小 $-2\pi Ba\dot{a}$，电流大小 $-B\dot{a}/\lambda$。缓慢运动时外功率等于发热率，

$$F(-2\pi\dot{a}) = \frac{B^2\dot{a}^2}{\lambda^2}(2\pi\lambda a).$$

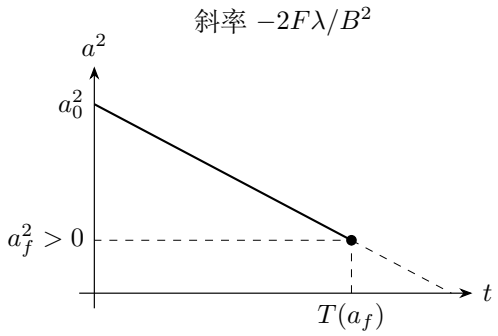


图 3.52: 按 a^2 的线性下降求有限半径终点；向零半径外推只是形式极限

收缩规律

图 3.52 约去负的收缩速度，得 $\dot a=-F\lambda/(B^2a)$，分离后积分，

$$\int_{a_0}^{a_f} a\ \mathrm{d}a=-\frac{F\lambda}{B^2}\int_0^T \mathrm{d}t,\qquad \left[\frac{a^2}{2}\right]_{a_0}^{a_f}=-\frac{F\lambda}{B^2}T.$$

收缩使左端为负，解出正时间，于是

$$T(a_f)=\frac{B^2(a_0^2-a_f^2)}{2F\lambda}.$$

小半径下的收缩速度

当 $a_f\to 0$ 时，上式趋于 $B^2a_0^2/(2F\lambda)$。与此同时，$|\dot a|$ 随 $1/a$ 增大，接近这一极限时圆环的惯性会影响收缩。

练习 3.3

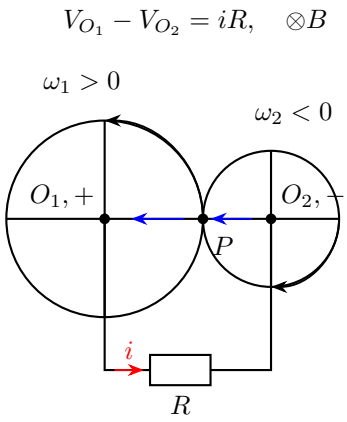
解　两轮的有向电动势

图 3.46 中外缘无滑动给出 $a_1\omega_1=-a_2\omega_2$。按图示向里磁场，取逆时针角速度为正，在距心 r 处速度为 $\omega_j r$，沿由心到缘的微元有 $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-B\omega_j r\ \mathrm{d}r$。因此每根辐条从心到缘的有向电动势为

$$\varepsilon_j=-B\omega_j\int_0^{a_j} r\ \mathrm{d}r=-B\omega_j\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{a_j}=-\frac{1}{2}B\omega_j a_j^2;$$

四根并联使内阻为 $R_j/4$，电动势不变。左侧绳向下运动时第一轮逆时针，$\omega_1>0$，第二轮反向。回路两轮的有向电动势相减，所以总电动势大小

$$e=\frac{B}{2}\omega_1 a_1(a_1+a_2)=K\omega_1,\quad K=\frac{B}{2}a_1(a_1+a_2).$$



两轮等效内阻分别为 $R_1/4$, $R_2/4$

图 3.53: 两轮转向相反，电流经过外电阻 R 由左轮心流向右轮心

轮缘约束与总电阻

图 3.53 中，电流经外电阻从左轮心流到右轮心，再由右轮心经接触点 P 返回左轮心。沿这一路径，两轮的动生电动势同向推动电流。总电阻为 $R_\Sigma = R + (R_1 + R_2)/4$，悬物速度 $v = a_0\omega_1$，故 $i = Kv/(a_0 R_\Sigma)$。

悬物终速

稳定时重力功率转为焦耳热，$mgv = i^2 R_\Sigma$，代入并约去非零 v 得

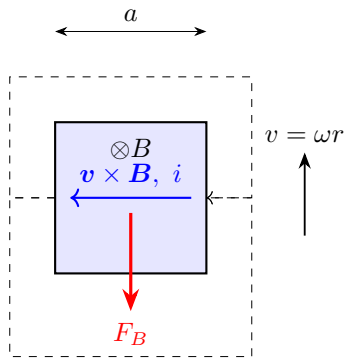
$$v_\infty = \frac{mga_0^2 R_\Sigma}{K^2} = \frac{4mga_0^2 R_\Sigma}{B^2 a_1^2 (a_1 + a_2)^2}.$$

外电阻的压降为 $V_{O_1} - V_{O_2} = iR$。由 P 沿左轮辐条到 O_1，有 $V_{O_1} - V_P = |\varepsilon_1| - iR_1/4$；由 O_2 沿右轮到 P，有 $V_P - V_{O_2} = |\varepsilon_2| - iR_2/4$。共同轮缘的电势由各轮的动生电动势和内阻压降共同决定。

练习 3.4

解　局部电动势与电阻

图 3.47 磁区局部速度近似为 $v = \omega r$。按题设等效尺度，电动势 $e \sim Bva$，电阻 $R_e \sim \rho a/(a\delta) = \rho/\delta$，故电流 $i \sim Bva\delta/\rho$。



虚线示意磁区外的回流

图 3.54: 局部速度向上、磁场向里时，动生推动向左，安培阻力向下；区外回流影响等效电阻

制动力矩

图 3.54 中的局部阻力估计为 $F \sim Bia$，所以制动力矩的数量级

$$M \sim \frac{B^2a^2\delta r^2}{\rho}\omega,$$

方向与转动相反，发热功率 $M\omega \sim B^2a^2\delta v^2/\rho$，两种计算一致。

局部回流的尺度

这里的 $\sim$ 表示数量级。系数由磁区外的回流和圆盘内的电流分布决定。

练习 3.5

解　两次衰减的时间常量

由图 3.48 的同一回路，在各次实验中 $m\dot{v} = -(b + B_j^2l^2/R)v$，记 $\Gamma_j = b + B_j^2l^2/R$，从初速 v_0 分离积分，$\int_{v_0}^{v(t)} \mathrm{d}z/z = -(\Gamma_j/m)\int_0^t \mathrm{d}s$，原函数端点给 $[\ln|z|]_{v_0}^{v(t)} = -(\Gamma_j/m)[s]_0^t$，即 $\ln[v(t)/v_0] = -\Gamma_j t/m$，所以 $v = v_0\mathrm{e}^{-\Gamma_j t/m}$。与实测指数 $v_0\mathrm{e}^{-t/\tau_j}$ 比较，得到 $m/\tau_j = \Gamma_j$。两式相减，

$$\frac{1}{R} = \frac{m(1/\tau_2 - 1/\tau_1)}{l^2(B_2^2 - B_1^2)} = \frac{0.10(1.25 - 0.50)}{0.25(0.16 - 0.04)} = 2.5\,\Omega^{-1}.$$

回路电阻与空气阻力

所以 $R = 0.40\,\Omega$，再代第一式得到 $b = 0.050 - 0.040 \times 0.25/0.40 = 0.025\,\mathrm{kg/s}$，两参数均为正。

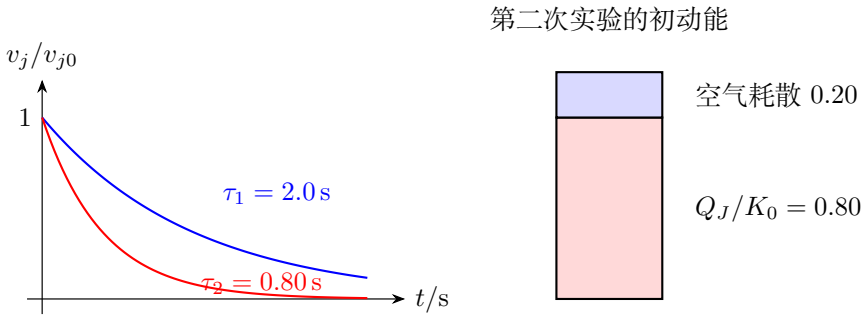


图 3.55: 归一化速度按各自时间常量衰减，第二次实验中两类耗散以固定比例分享初动能

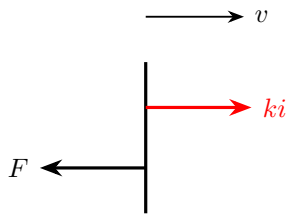
电阻热的份额

图 3.55 中两种阻力的功率都正比于 v^2。第二次磁阻力系数为 $\gamma_2 = B_2^2 l^2/R = 0.10\,\mathrm{kg/s}$，总耗散系数 $b + \gamma_2 = 0.125$，故任意时刻磁耗散占比均为 $\gamma_2/(b+\gamma_2) = 0.80$，积分后的电阻热也占初动能 80%。其余 20% 的初动能由空气阻力耗散。

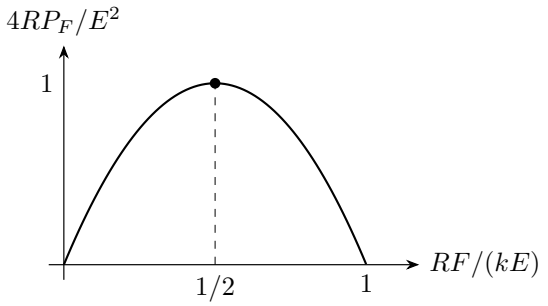
练习 3.6

解　正向匀速条件

按图 3.49，稳态动力学要求 $ki = F$，其中 $k = Bl$；电路要求 $E = Ri + kv$。先由第一式得 $i = F/k$，再代第二式得 $v = E/k - RF/k^2$。持续正向运动需要 $0 < F < kE/R$。



$ki = F, \quad Ri + kv = E$



最大功率点 $\eta = 1/2$

图 3.56: 先由磁力与负载平衡求稳态速度，再在正向可运行区间内优化输出功率

最大负载功率

图 3.56 中负载功率

$$P_F = Fv = \frac{E}{k}F - \frac{R}{k^2}F^2$$

是开口向下的抛物线，逐项求导，

$$\frac{\mathrm{d}P_F}{\mathrm{d}F} = \frac{E}{k} - \frac{2R}{k^2}F = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2P_F}{\mathrm{d}F^2} = -\frac{2R}{k^2} < 0.$$

由一阶导数解得极值负载 $F_* = kE/(2R)$，二阶导数和端点零功率共同确认它是区间内最大值，相应速度 $E/(2k)$，最大功率 $E^2/(4R)$。电源输入功率 $Ei = EF/k$，故效率 $\eta = P_F/(Ei) = 1 - RF/(kE)$，最大功率点效率为 50%。

空载与停转

当 $F \to 0^+$，效率趋于 1，输出功率 Fv 趋于零。启动时安培力为 kE/R，正向启动及正向匀速运行都要求 $F < kE/R$。

练习 3.7

解　三段空间方程

图 3.50 的磁区宽 $d \geq a$，a 为线框沿运动方向的边长。取前边自左磁界前进的距离为 x，令 $\gamma = B^2l^2/R$。仅一条横边在磁区内时，电流大小为 Blv/R，合磁力为 $-\gamma v$，故在 $v > 0$ 的实际运动段

$$m\dot{v} = -\gamma v, \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\gamma.$$

全部进入时两边动生作用相消，速度保持不变；退出时电流反向，但合磁力仍阻碍运动。在进入段，以 $x=0, v=v_0$ 为初态积分，

$$m\int_{v_0}^{v(x)}\mathrm{d}z=-\gamma\int_0^x\mathrm{d}\xi,\qquad m[z]_{v_0}^{v(x)}=-\gamma[\xi]_0^x,$$

所以 $m(v-v_0)=-\gamma x$。退出段的初态改为 $x=d, v=v_1$，

$$m\int_{v_1}^{v(x)}\mathrm{d}z=-\gamma\int_d^x\mathrm{d}\xi,\qquad m[z]_{v_1}^{v(x)}=-\gamma[\xi]_d^x,$$

所以 $m(v-v_1)=-\gamma(x-d)$。若能够穿出，连续接续得到

$$v(x)=\begin{cases}v_0-\gamma x/m, & 0\le x\le a,\\ v_1=v_0-\gamma a/m, & a\le x\le d,\\ v_1-\gamma(x-d)/m, & d\le x\le d+a.\end{cases}$$

某段内若速度先趋零，后续分段不再被实际到达，应在相应位置截断。

三种穿出情形

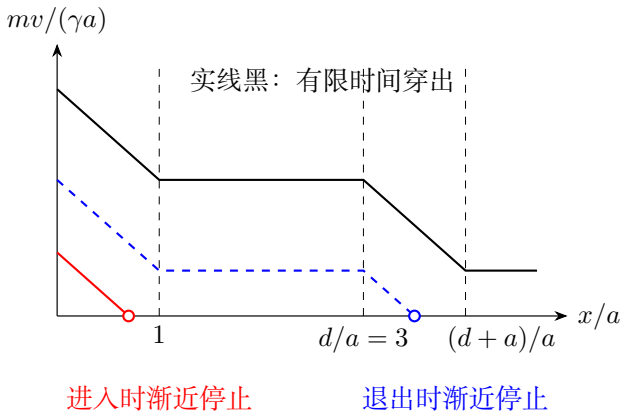


图 3.57: 三个不同初速度对应的结局；空心点表示无限时间的位置极限，曲线不延伸到负速度

图 3.57 用 $d/a=3$ 作示意，三个初速度的归一化值分别为 $0.7, 1.5, 2.5$。一般判据为

初速度范围	运动结局
$0<v_0\le\gamma a/m$	进入阶段渐近停止
$\gamma a/m<v_0\le 2\gamma a/m$	退出阶段渐近停止
$v_0>2\gamma a/m$	有限时间完整穿出

第一类的极限位置为 $x_s = mv_0/\gamma \le a$。第二类先以正速度 v_1 进入匀速段，再在 $x_s = d + mv_0/\gamma - a \le d + a$ 趋零。两种停止都服从指数衰减，空心点仅表示位置极限；等号对应极限位置恰在线框的换段处。

穿出时间与焦耳热

此时 $v_1 > 0$，穿出速度 $v_2 = v_0 - 2\gamma a/m > 0$。分别用 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/v(x)$ 积分。进入段令 $z = v_0 - \gamma x/m$，则 $\mathrm{d}x = -m\,\mathrm{d}z/\gamma$，上下限 $x = 0, a$ 对应 $z = v_0, v_1$，故

$$t_1 = -\frac{m}{\gamma}\int_{v_0}^{v_1}\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{m}{\gamma}[\ln z]_{v_0}^{v_1}.$$

匀速段有 $t_2 = \int_a^d \mathrm{d}x/v_1 = [x]_a^d/v_1 = (d-a)/v_1$。退出段同样用 $z = v_1 - \gamma(x-d)/m$，上下限为 v_1, v_2，所以 $t_3 = -(m/\gamma)[\ln z]_{v_1}^{v_2}$。合并各段得

$$t_1 = \frac{m}{\gamma}\ln\frac{v_0}{v_1},\quad t_2 = \frac{d-a}{v_1},\quad t_3 = \frac{m}{\gamma}\ln\frac{v_1}{v_2}.$$

所以

$$\boxed{t = \frac{m}{\gamma}\ln\frac{v_0}{v_2} + \frac{d-a}{v_1}},\qquad \boxed{Q_J = \frac{m}{2}(v_0^2 - v_2^2)}.$$

在 $d \ge a$ 的前提下，改变 d 只改变无磁通变化的匀速中段，因而不改变 v_2。两类渐近停止的末动能均趋零，最终热量为 $mv_0^2/2$，但不存在有限的“停止所需总时间”。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第四讲

自感互感与磁场能量

2026

目录

第四讲　自感互感与磁场能量 **1**

4.1　电流变化时的自感 1

4.2　从建立电流的过程得到磁场能量 2

4.3　磁链法与场能法 3

4.4　有气隙磁路的磁链与能量分布 5

4.5　电流分布、内部自感与非线性磁链 6

4.6　互感、同名端与耦合能量 8

4.7　不等线圈的连接与参考方向 9

4.8　磁耦合的反馈、屏蔽与模态 10

4.9　总磁链守恒与磁力 11

4.10 例题与分析 13

4.11 本讲小结 28

4.12 练习 29

练习解答 34

第四讲　自感互感与磁场能量

4.1　电流变化时的自感

图 4.1 中有两只相同的小灯。上支路串联电阻，下支路串联线圈，并使电阻等于线圈的直流电阻。合闸时，两支路的端电压同时建立。上灯的电流随端电压迅速建立，下灯的电流还要逐渐建立线圈的磁场，所以较晚变亮。稳定后，两支路的总电阻相同，灯泡同样亮。断开电源以后，上、下支路仍组成一个闭合回路，线圈中的电流沿原方向续流，再经上支路返回。

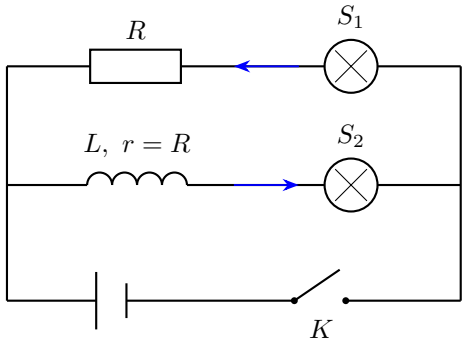


图 4.1: 自感的双灯实验。蓝箭头表示断开电源以后线圈电流经两只灯返回的方向

固定线圈中，取电流的绕向为每匝磁通的正向，把各匝的磁通相加，得到磁链 $\Psi=\sum_j \Phi_j$。在线性磁介质中，自身电流产生的磁链与电流成正比，定义 $\Psi=Li$。由法拉第定律，沿电流方向的自感电动势为 $\varepsilon_L=-\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t=-L\dot{i}$。以电流流入的一端为正端，理想电感两端的电压则为 $u_L=-\varepsilon_L=L\dot{i}$。图中的电流在接通后增大，自感电动势取负值。断开电源后，电流仍为正而逐渐减小，电动势改取正值。L 的单位为亨利，即 $\mathrm{V\,s/A}$。

长螺线管内部磁场近似 $B=\mu Ni/\ell$，单匝磁通为 BS，磁链 $NBS=\mu N^2Si/\ell$，从而

$$L=\frac{\mu N^2 S}{\ell}. \tag{4.1}$$

这要求线圈足够长、内部场近似均匀、漏磁可以忽略，介质磁导率不随场显著变化。若磁芯饱和，磁链 $\Psi(i)$ 是曲线，端压直接取 $u=\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}t$。在线性介质中改变几何，$L$ 随时间改变，乘积法则给出 $\dot{\Psi}=L\dot{i}+i\dot{L}$。

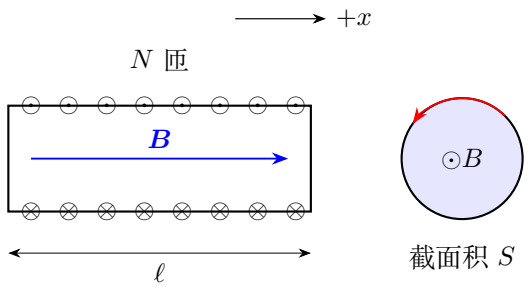


图 4.2: 线圈纵截面中的电流方向与轴向磁场；右图为从右端观察的截面

图 4.2 中的长度 ℓ 决定单位长度匝数，截面积 S 决定单匝磁通，再乘总匝数 N 才得磁链。因此自感正比于 N^2。一因子来自产生磁场的 N 匝，另一因子来自链接磁通的 N 匝。

4.2　从建立电流的过程得到磁场能量

把理想电感接到外电源上，缓慢建立电流。电源克服线圈端电压所做的微元功为 $\mathrm{d}W = u_L i\,\mathrm{d}t = Li\,\mathrm{d}i$。从零电流积分到 I，得到

$$W_B = \int_0^I Li\,\mathrm{d}i = L\left[\frac{i^2}{2}\right]_0^I = \frac{1}{2}LI^2. \tag{4.2}$$

串联电阻时，电源功分成磁场能增量与焦耳热。磁场能在电流为负时仍为正；只要电流绝对值增加，磁场能就增加。

将螺线管的 L 与 B 代入，$W_B = B^2 S\ell/(2\mu)$。在均匀线性介质中，单位体积磁能密度因此为 $w_B = B^2/(2\mu)$。非均匀场的总磁能由 $B^2/(2\mu)$ 对有场空间积分。细圆环的外部磁场也储能，其空间分布进入自感计算。

对端压积分有 $L[i(t_2) - i(t_1)] = \int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t$。在开关间隔趋零、电压有限时，电感电流连续。快速建立电流的互感题给出了电压冲激引起磁链转移的另一种情形。

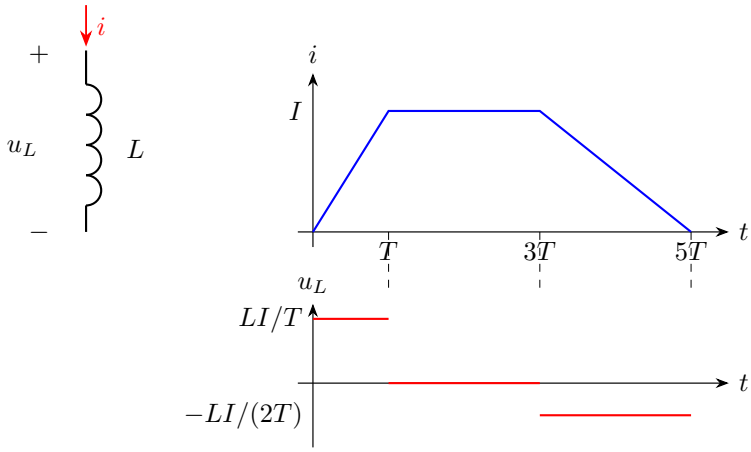


图 4.3: 被动端压的正端是电流流入端；端压符号由磁链斜率决定

图 4.3 的上图先使电流线性增大，再保持，最后缓慢减小。三段斜率依次为 $I/T, 0, -I/(2T)$，因此下图端压为 $LI/T, 0, -LI/(2T)$。下降段仍有正向电流，却有负端压，功率 $u_L i < 0$，表示磁场向外送能。转折处只是斜率改变，电流本身连续；图中的有限电压阶跃并不造成电流突变。

例 4.1 先按匝数、面积与磁场求出总磁链，再求储能。用场能密度另算时，积分区域取螺线管中近似匀强的场区，便能把电路变量与空间中的场联系起来。

4.3 磁链法与场能法

由磁链求自感时，先定每一匝所围的面，再对其中的磁通求和。由场能求自感时，在磁场所在的体积内积分 $B^2/(2\mu)$，最后与 $LI^2/2$ 比较。同轴结构可以看清这两种积分中面积元和体积元的区别。

以理想同轴结构为例，内导体半径 a、外导体内半径 b，两导体电流等大反向。忽略端部及导体内部磁场，安培定律给出 $a < s < b$ 中 $B(s) = \mu I/(2\pi s)$。长度 ℓ 的薄圆柱壳体积为 $2\pi s\ell\,\mathrm{d}s$，所以

$$W_B = \int_a^b \frac{B(s)^2}{2\mu} 2\pi s\ell\,\mathrm{d}s = \frac{\mu I^2 \ell}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\mu I^2\ell}{4\pi}[\ln s]_a^b = \frac{\mu I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

与磁能式比较，单位长度外自感为 $L' = \mu\ln(b/a)/(2\pi)$。对每一条与轴平行、从内导体延伸到外导体的窄带积分磁通，有

$$\Psi = \int_a^b B(s)\ell\;\mathrm{d}s = \frac{\mu I\ell}{2\pi}[\ln s]_a^b = \frac{\mu I\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

代入 Ψ/I 得到同一外自感。内导体有均匀电流分布时，还要加入导体内部的场能。例 4.7 计算这个内部项。

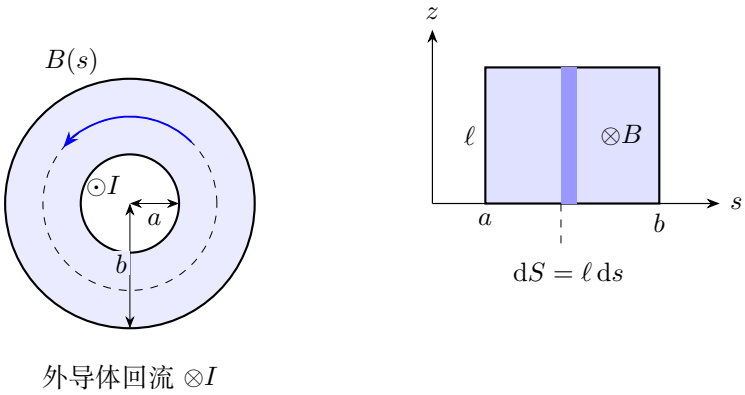


图 4.4: 同轴结构的环向磁场；磁通积分取径向与轴向组成的窄带

图 4.4 左图说明 B 沿圆周而变，右图所取的径向—轴向窄带才与 B 垂直。单个同轴回路由内导体前行、外导体回行，所围跨接面为这条窄带，故 $\mathrm{d}\Psi = B(s)\ell\,\mathrm{d}s$。能量积分使用的体积元却是整圈圆柱壳 $2\pi s\ell\,\mathrm{d}s$。

环形螺线管则说明“平均半径”只是近似。截面为高 h、内外半径 a, b 的矩形环形线圈有 $B(s) = \mu NI/(2\pi s)$，单匝磁通用截面窄条积分为

$$\Phi = \frac{\mu NIh}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}s}{s} = \frac{\mu NIh}{2\pi}[\ln s]_a^b = \frac{\mu NIh}{2\pi}\ln\frac{b}{a},$$

因此 $L = \mu N^2 h\ln(b/a)/(2\pi)$。只有当径向宽度远小于平均半径时，才能用平均周长与近似均匀磁场化成通常的长螺线管形式。

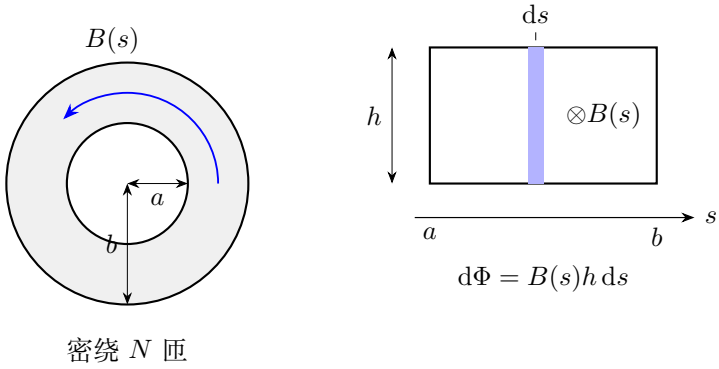


图 4.5: 环形线圈的环向场与矩形截面；各径向位置的场强不同

沿图 4.5 右图从 a 积分到 b，再乘链接这些磁通的 N 匝，才得到磁链。令 $r_m=(a+b)/2, w=b-a$，当 $w/r_m\ll 1$，令 $x=w/(2r_m)$，为说明近似误差，定义 $G(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$。在 $|x|<1$ 内逐项求导并作精确分解，

$$G'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}=2(1+x^2)+\frac{2x^4}{1-x^2}.$$

由 $G(0)=0$，积分回去，

$$\begin{aligned}G(x)&=2\int_0^x(1+u^2)\,\mathrm{d}u+2\int_0^x\frac{u^4}{1-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=2[u+u^3/3]_0^x+O(x^5)=2x+\frac{2x^3}{3}+O(x^5).\end{aligned}$$

第二个积分的分母在零点附近有界且不为零，故余项为五阶。代回宽度，

$$\ln\frac{b}{a}=\frac{w}{r_m}+\frac{w^3}{12r_m^3}+O\!\left(\frac{w^5}{r_m^5}\right).$$

保留首项便有 $L\simeq\mu N^2hw/(2\pi r_m)$，即截面积 $S=hw$、平均磁路长 $2\pi r_m$ 的均匀场近似。对称取平均半径后相对误差从 $(w/r_m)^2$ 阶开始。

4.4 有气隙磁路的磁链与能量分布

磁芯把磁场集中在一个近似闭合通道中，但气隙会显著改变自感。若截面积 S 近似恒定、漏磁与边缘扩展可以忽略，磁通连续性给出磁芯和气隙中的 $B=\Phi/S$ 相同。沿磁路使用安培定律，$H_c\ell+H_g g=Ni$；在线性介质中 $H_c=B/\mu, H_g=B/\mu_0$，因此

$$Ni=\Phi\left(\frac{\ell}{\mu S}+\frac{g}{\mu_0 S}\right).$$

括号称为磁阻。它是磁动势 Ni 与磁通 Φ 的比例系数。由 $\Psi=N\Phi$ 可得 $L=N^2/[\ell/(\mu S)+g/(\mu_0 S)]$。即使气隙很短，因为 $\mu\gg\mu_0$，气隙项仍可能主导总磁阻。

场能密度分别为 $B^2/(2\mu)$、$B^2/(2\mu_0)$。同样的 B 下，气隙单位体积的能量远大于磁芯中。气隙体积虽小，其中的总磁能仍可能超过磁芯中的磁能。用气隙能随宽度变化计算吸力时，还必须保留固定电流或固定磁链的控制条件。

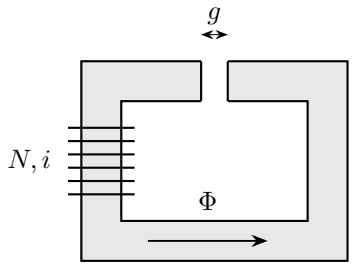


图 4.6: 磁通连续的磁芯与气隙

图 4.6 中同一磁通依次穿过磁芯和气隙，因此安培积分沿这两段串行相加。气隙长度虽短，μ_0 却小，往往主导磁阻和储能。改变气隙时，还应说明电流由电源保持，还是闭合回路保持磁链，再据此计算机械功。

若磁芯和气隙截面积相同，两部分总能量之比还可直接写为

$$\frac{W_g}{W_c} = \frac{g/\mu_0}{\ell/\mu} = \frac{\mu g}{\mu_0 \ell}.$$

这与各段磁阻之比相同。图 4.6 中穿过气隙的磁通沿上支路向左，密度仍为 $B = \Phi/S$；气隙并未凭空增加磁通，而是要求更大的励磁安匝数。以上结论依赖漏磁及边缘扩展可忽略，气隙接近横截面尺度时要重新求场。

4.5　电流分布、内部自感与非线性磁链

同轴结构的外部自感只涉及两导体之间的磁场。若导体内部电流均匀分布，安培环路包围的电流随半径平方增加，导体内部也有磁场和磁能。高频集肤时电流向表面集中，内部场能减小，所以同一几何结构在不同电流分布条件下的总自感可以不同。本讲用均匀直流电流分布求内部项，并与已得到的外部项相加，分别在导体内部和间隙取积分。

取内导体磁导率为 μ_c、间隙介质为 μ_m，在半径 $s < a$ 的环路内，电流为 $I_s = Is^2/a^2$，所以

$$B_{\mathrm{in}}(s) = \frac{\mu_c I s}{2\pi a^2}, \qquad W'_{\mathrm{in}} = \int_0^a \frac{B_{\mathrm{in}}^2}{2\mu_c} 2\pi s \,\mathrm{d}s = \frac{\mu_c I^2}{4\pi a^4}\int_0^a s^3 \,\mathrm{d}s = \frac{\mu_c I^2}{4\pi a^4}\left[\frac{s^4}{4}\right]_0^a = \frac{\mu_c I^2}{16\pi}.$$

撇号表示单位轴向长度。由 $W'_{\mathrm{in}} = L'_{\mathrm{in}} I^2/2$，得 $L'_{\mathrm{in}} = \mu_c/(8\pi)$，与外部项相加为

$$L'_{\mathrm{total}} = \frac{\mu_c}{8\pi} + \frac{\mu_m}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

外回流层自身的内部场仍未计入。几何放大使内部场按长度的倒数减弱，单位长度体积却按长度平方增加，所以给定 I 时内部储能不随 a 改变。

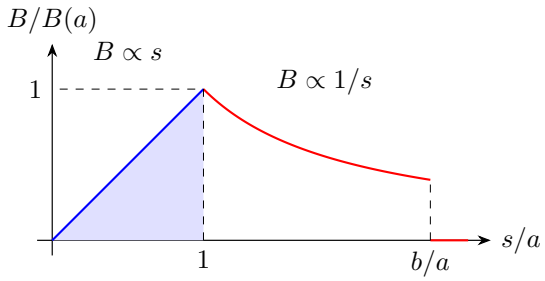


图 4.7: 均匀直流电流的内部场与同轴间隙中的外部场；图取相同磁导率

图 4.7 的两段曲线在 $s=a$ 处相接。图中为 $\mu_c=\mu_m$ 的特例；若磁导率不同，切向 H 在没有表面电流的界面连续，B 可以跳变。

在线性关系 $\Psi=Li$ 以外，可逆磁介质用磁链曲线 $\Psi(i)$ 描述。电压 $u=\dot\Psi$，微元输入功为 $i\,\mathrm{d}\Psi$，场能为 $W(\Psi)=\int_0^{\Psi} i(\psi)\,\mathrm{d}\psi$。只有 $i=\Psi/L$ 为直线时，积分才化成 $Li^2/2$。瞬时增量电感 $L_d=\mathrm{d}\Psi/\,\mathrm{d}i$ 与从原点连到当前点的比值 Ψ/i 一般不同，暂态斜率需要前者。

练习 4.8 取单值、可逆的磁链曲线。若磁芯有磁滞，建立和撤去电流沿不同路径，循环积分 $\oint i\,\mathrm{d}\Psi$ 给出磁滞损耗。

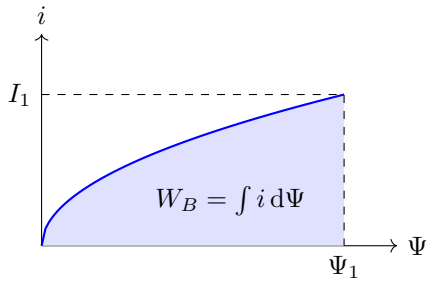


图 4.8: 非线性可逆磁链中，场能是电流对磁链的积分

图 4.8 把磁链作为横坐标，蓝色面积才直接等于输入功。取 $i\ge 0$ 区间内的示例 $\Psi=\alpha i^2$，反解 $i(\psi)=\alpha^{-1/2}\psi^{1/2}$，就有

$$W_B=\alpha^{-1/2}\int_0^{\Psi_1}\psi^{1/2}\,\mathrm{d}\psi=\alpha^{-1/2}\left[\frac{2}{3}\psi^{3/2}\right]_0^{\Psi_1}=\frac{2}{3}I_1\Psi_1.$$

图中矩形扣去蓝色面积，余下的面积称为磁共能 $W_B^*=\int_0^{I_1}\Psi(i)\,\mathrm{d}i=I_1\Psi_1-W_B$，通常与场能不同。可逆系统有 $\mathrm{d}W_B=i\,\mathrm{d}\Psi-F\,\mathrm{d}x$，因此 $\mathrm{d}W_B^*=\Psi\,\mathrm{d}i+F\,\mathrm{d}x$：固定电流求力时应取 $F=\partial W_B^*/\partial x|_i$，固定磁链时取 $F=-\partial W_B/\partial x|_\Psi$。线性关系恰

好把矩形分成两半，才有熟悉的二分之一系数；有磁滞时，沿各自的磁化和退磁路径积分，两段做功之差由回线面积给出。

4.6　互感、同名端与耦合能量

图 4.9 中两个线圈靠得很近，初级电流 i_1 的一部分磁通穿过次级。固定绕组，且磁介质为线性时，次级的这部分磁链正比于 i_1，写成 $\Psi_{21} = M_{21} i_1$。交换励磁的线圈，有 $\Psi_{12} = M_{12} i_2$。在空气中，两者可用同一个双重线积分表示，

$$M_{21} = M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}.$$

这里用到线圈 1 的矢势 $\boldsymbol{A}_1 = (\mu_0 i_1/4\pi) \oint_{C_1} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_1/|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$，以及线圈 2 的磁通 $\oint_{C_2} \boldsymbol{A}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_2$。互换积分次序和线圈编号，结果相同。多匝时对匝对求和。线性互易磁介质也有相同的互感系数 $M_{12} = M_{21} = M$。把每只线圈的自感与互感叠加，

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2, \qquad \Psi_2 = M i_1 + L_2 i_2.$$

圆点标出同名端。若两个参考电流都从圆点端流入，相互产生的磁链沿各自的正向。

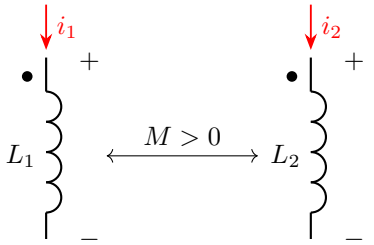


图 4.9: 两个参考电流均流入同名端，电压均按被动约定取正

图 4.9 的两个参考电流都流入圆点端，所以磁链式的互感项同取正号。若实际反接一个绕组，而外部端口的电压、电流参考保持原约定，互感项应变号。若只是反选某一绕组的参考方向，则该绕组的电流、电压和磁链变量都变号，互感的有向系数也相应改变。实际接线变化与坐标重选必须区分，功率 ui 在自洽的参考变换下不变。

端电压为磁链的时间导数。建立两电流时，展开输入微元功，

$$\mathrm{d}W = L_1 i_1 \,\mathrm{d}i_1 + L_2 i_2 \,\mathrm{d}i_2 + M(i_1 \,\mathrm{d}i_2 + i_2 \,\mathrm{d}i_1).$$

末两项由乘积微分合为 $M\,\mathrm{d}(i_1 i_2)$；前两项各以平方的一半为原函数。从两电流均为零积到 (i_1, i_2)，端点代入为

$$W_B = \frac{L_1}{2}[z^2]_0^{i_1} + \frac{L_2}{2}[y^2]_0^{i_2} + M[i_1 i_2]_{(0,0)}^{(i_1,i_2)}.$$

因此

$$W_B = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2.$$

互感项的正负随两电流方向而变，磁能之和始终非负。固定 i_2，把 i_1 配方，可写成

$$W_B = \frac{L_1}{2}\left(i_1 + \frac{M}{L_1}i_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right)i_2^2.$$

因此 $M^2 \le L_1 L_2$。定义耦合系数 $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$，它的绝对值不超过一。接近一对应漏磁很小。

串联两线圈时，先按同名端判断两互感电压相加还是相减，再得到 $L_s = L_1 + L_2 \pm 2M$。并联时两支路共用端电压，由含互感的两条方程求总电流的变化率。反向并联的相同绕组在完全耦合极限下具有零端口电感，外加有限电压时电流增长由真实漏感与电阻限制。匝数不同的完全耦合绕组直接同名端并联，则是端电压约束与匝数比不相容，可能出现很大的环流。

4.7 不等线圈的连接与参考方向

两个不相同的线圈同名端并联，电压分别为 $u = L_1\dot{i}_1 + M\dot{i}_2$、$u = M\dot{i}_1 + L_2\dot{i}_2$。令 $D = L_1 L_2 - M^2 > 0$。第一式乘 L_2、第二式乘 M 后相减，消去 $\dot{i}_2$；再交换消元对象，得到

$$(L_2 - M)u = L_1 L_2\dot{i}_1 + M L_2\dot{i}_2 - M^2\dot{i}_1 - M L_2\dot{i}_2 = D\dot{i}_1,$$
$$(L_1 - M)u = D\dot{i}_2.$$

因此 $\dot{i}_1 = u(L_2 - M)/D$、$\dot{i}_2 = u(L_1 - M)/D$，总电流导数为 $u(L_1 + L_2 - 2M)/D$，所以

$$L_p = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

反接一组后按新方向重新定义互感项，相当于将式中的 M 换为 $-M$。不等绕组的分流由两个电流导数与各自的初态决定。

完全耦合时 $D = 0$，上述除以 D 的推导不适用。尤其是匝数不同的理想完全耦合绕组直接并联，要求相同端电压又要求电压按匝数成比例，理想约束互相矛盾。真实绕组中的漏感与电阻限制环流。相同绕组的完全耦合是特殊退化情形：端口关系存在，但支路差模电流须由初态或实际非理想因素另行确定。

同名端可用实验定义而不依赖绕线图的外观。向第一线圈同名端注入一个增长电流，若第二线圈按流入其同名端的被动端压为正，则两端为同名。第二线圈接电阻闭合时，感应电流往往从同名端流出，以阻碍初级磁链增长，这与开路感应电压的正端并不矛盾。

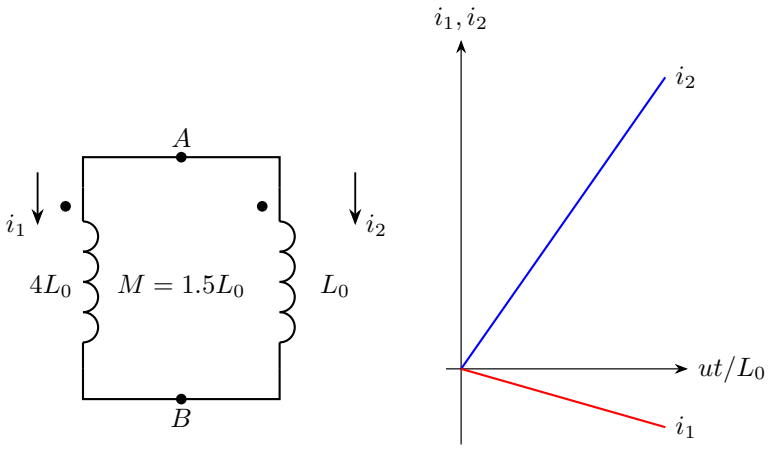


图 4.10: 同名端并联可有相反的支路电流变化率；图示零初态加恒定正电压

例如图 4.10 中 $D = (7/4)L_0^2 > 0$，代入得 $\dot{i}_1 = -2u/(7L_0)$、$\dot{i}_2 = 10u/(7L_0)$。支路一的电流从零向负方向增长，但总电流导数为 $8u/(7L_0) > 0$，端口等效电感为 $7L_0/8$。互感项使两支路的初始斜率不同。

对相同绕组的完全同向耦合，端口仍有 $L_p = L$，但方程只决定 $i_1 + i_2$，不决定无磁场的差模电流 $i_1 - i_2$。只有对称初态或其他给定约束才能令两者相等。

4.8　磁耦合的反馈、屏蔽与模态

闭合次级线圈中的感应电流会反馈到初级磁链。若次级超导、初始次级总磁链为零，约束为 $Mi_1 + L_2 i_2 = 0$。代入初级磁链后，端口等效自感减为 $L_1 - M^2/L_2$。次级感应磁场抵消了初级的一部分磁链。由 $M^2 \le L_1 L_2$ 可见，剩余的等效自感为非负。

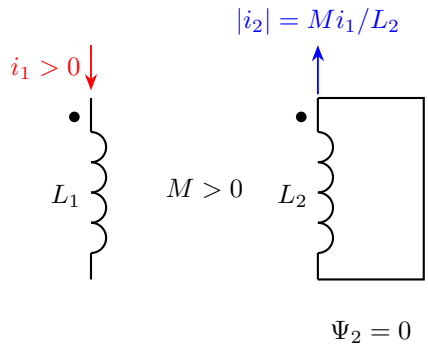


图 4.11: 闭合超导次级的实际电流从同名端流出，抵消次级的总磁链变化

图 4.11 把反向的实际次级电流画为向上，而方程中的 i_2 仍以流入同名端为正，所以 $i_2 < 0$。代入完整场能也得到 $W_B = (L_1 - M^2/L_2)i_1^2/2$，表明等效电感既描述端口电压，也描述该磁链约束下的总储能。

两个相同耦合线圈的电流还可分解成同向与反向组合。令 $i_+ = (i_1 + i_2)/2, i_- = (i_1 - i_2)/2$，磁能化为 $(L+M)i_+^2 + (L-M)i_-^2$。这两个组合互不混合，分别对应相助和相消的磁场结构。后面耦合振荡电路的两个固有频率正是由这两个不同磁能系数产生。

当线圈相对运动，互感还随位置改变。磁链求导时，互感变化产生 $i\dot{M}$，这一项进入动生电动势。固定初级电流、短路次级并匀速改变互感时，次级电流通常产生阻力，初级电源也会交换能量；功率关系中要计入初级电源的输入。两个都超导的线圈则各自保持总磁链，电流随位置的变化规律与固定电流情形完全不同。

4.9 总磁链守恒与磁力

闭合回路的电阻为零且外场变化缓慢、几何参数给定时，总磁链满足 $\dot{\Psi}_{总} = 0$。若自感固定，有 $Li + \Phi_{外} =$ 常量。守恒的是总磁链，不只是外磁通，也不只是自感磁通。初始外磁通和初始电流决定这个常量；不检查初始状态就写成 $Li = -\Phi_{外}$，只适用于初始总磁链为零的情形。

当回路进入磁区，外磁通增大，感应电流建立，磁场能随之增加。磁力阻碍进入的趋势，但回路是否能完全进入，取决于初始机械能能否支付磁能增量。若电阻虽极小但不为零，磁链守恒只能在时间远小于 L/R 的范围内近似使用，长期运动仍会耗散。

以下先讨论没有独立外加磁通的单个可逆线性电感，磁链为 $\Psi = L(x)i$。用磁能求力前，必须说明电源是否维持电流。固定磁链时没有电源输入，磁力的功由磁

场能减少给出，可直接使用 $F=-\partial W_B/\partial x|_{\Psi}$；固定电流时，电源在位移中也做功，需要将这部分计入。对单个线性电感，最终分别得到

$$F\big|_{\Psi}=-\frac{\Psi^2}{2}\left[-\frac{L'(x)}{L(x)^2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\Psi}{L(x)}\right)^2 L'(x)=\frac{1}{2}i^2L'(x),\qquad F\big|_{i}=\frac{1}{2}i^2L'(x).$$

两式在同一瞬间可以形式相同，变化过程中 $i(x)$ 的规律却不同。对固定电流的两线圈，互感引起的力为 $i_1i_2M'(x)$；若线圈短路而电流随位置改变，应先求出相应约束，再代入。把 Mi_1i_2 直接当成全部机械势能并随意取负导数，会漏掉电源的功。

实际线圈的磁能释放还受电阻、频率和材料限制。长时间保持的微小衰减可用于估计电阻上限，但这类估计依赖自感的近似值，结果应注明量级。

4.9.1　外源功与机械稳定性

在单电感的微小位置改变中，磁链微分为 $\mathrm{d}\Psi=L\,\mathrm{d}i+iL'\,\mathrm{d}x$。电源输入功 $i\,\mathrm{d}\Psi$，磁能微分 $\mathrm{d}(Li^2/2)=Li\,\mathrm{d}i+i^2L'\,\mathrm{d}x/2$，二者之差为机械功 $i^2L'\,\mathrm{d}x/2$。这逐项证明了磁力表达式，也说明固定电流时电源输入的一半位置相关功进入磁能，另一半进入机械系统。

若没有外源而磁链固定，电流随自感增加而减小，磁能反而减少，减少量转成机械功。两种约束下都可能表现为磁芯被吸入，但电流、储能和外源功的变化不同。图中的蓝线对应电源维持电流的过程，红线对应闭合线圈保持磁链的过程。

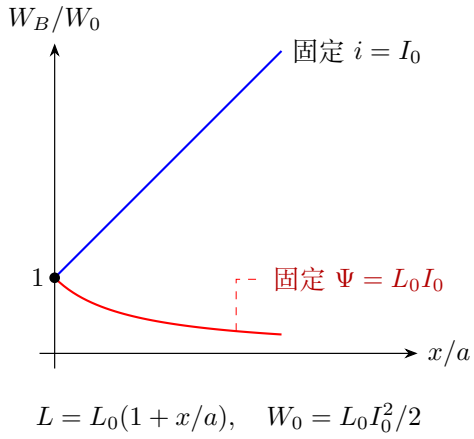


图 4.12: 同一初态出发，自感增加时两种约束给出相反的磁能变化

图 4.12 的蓝线为 $W_B/W_0=1+x/a$，红线为 $(1+x/a)^{-1}$。两种情况下磁力都向自感增大的正 x 方向：蓝线升高所需的能量由电源供给，红线降低释放的能量则直接转为机械功。固定电流时求机械功，要在电源功中扣除增加的磁能。

固定磁链的平衡还可用磁能曲线判断。若外加弹簧势能为 $kx^2/2$，总有效势能为 $kx^2/2+\Psi_0^2/[2L(x)]$。平衡位置满足势能一阶导数为零，稳定性由二阶导数正负决定；磁力为零的瞬间并不必然是稳定平衡。超导线框进入磁区题所得到的回复力，则来自外磁通随位置线性增加后产生的二次磁能。

若一周期损耗远小于总能量，可以先用磁链近似守恒求出该周期的运动，再由 $\dot{W}=-Ri^2$ 计算缓慢的能量下降。持久电流实验中的 L/R 很大，所以长时间观测微小衰减可以给出很严格的电阻上限；估计精度仍受几何自感模型与测流精度限制。

4.10 例题与分析

例 4.1 (螺线管自感与储能的两种计算)**.** 长螺线管长 ℓ、截面积 S、匝数 N，内部为磁导率 μ 的线性介质。电流从零建立到 I。求自感，并分别从输入功和场能密度求磁场能。

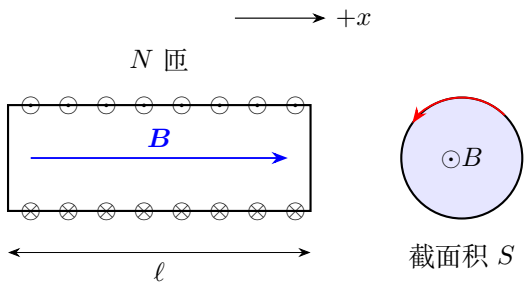


图 4.13: 长螺线管的纵截面和截面积；上下绕线电流共同产生向右的内场

解　螺线管内场与磁链

根据图 4.13，忽略两端漏磁，$B=\mu NI/\ell$。磁链为 $NBS=\mu N^2SI/\ell$，故 $L=\mu N^2S/\ell$。

建立电流的电源功

电源向理想电感输入的功为

$$W=\int_0^I Li\,\mathrm{d}i=L\left[\frac{i^2}{2}\right]_0^I=\frac{\mu N^2SI^2}{2\ell}.$$

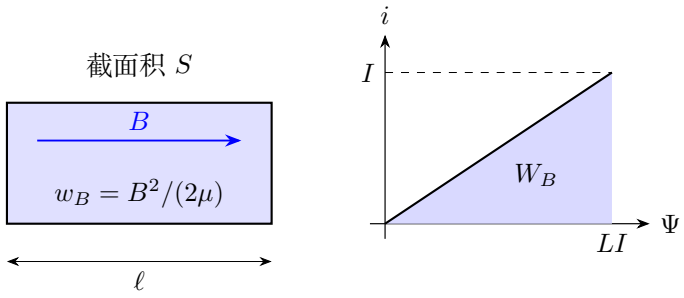


图 4.14: 磁场占据体积 $S\ell$；建立电流所做功也等于磁链—电流图中的蓝色面积

螺线管内的场能

图 4.14 中的场能主要位于柱体 $S\ell$ 内。沿轴向取厚度 $\mathrm{d}z$ 的薄片，体积为 $S\,\mathrm{d}z$。忽略端部漏场时 B 近似均匀，所以

$$W_B = \int_0^\ell \frac{B^2}{2\mu} S\,\mathrm{d}z = \frac{B^2 S}{2\mu}[z]_0^\ell = \frac{(\mu NI/\ell)^2 S\ell}{2\mu} = \frac{\mu N^2 S I^2}{2\ell}.$$

例 4.2 (双线绕组的串联和并联)**.** 两根绝缘导线并排绕成相同绕组，每组自感 L，互感 $M = kL$，同名端如图，电阻忽略。求顺向串联、反向串联以及同名端相接并联时的等效电感。

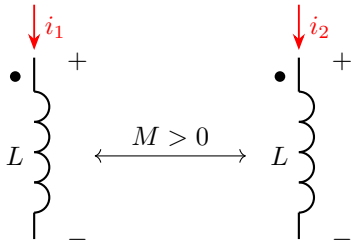


图 4.15: 相同绕组的同名端与电流参考；$M = kL$，磁耦合不等于电连接

解　同向串联

图 4.15 中流入同名端的电流产生相助磁链。顺向串联时 $i_1 = i_2 = i$，两端电压相加为 $u = 2(L + M)\dot{i}$，故 $L_+ = 2L(1 + k)$。

反向串联

反向串联时 $i_1 = i, i_2 = -i$，沿串联电流的端口电压为 $u_1 - u_2$，其中 $u_1 = (L - M)\dot{i}, u_2 = -(L - M)\dot{i}$，所以 $u = 2(L - M)\dot{i}$，得 $L_- = 2L(1 - k)$。

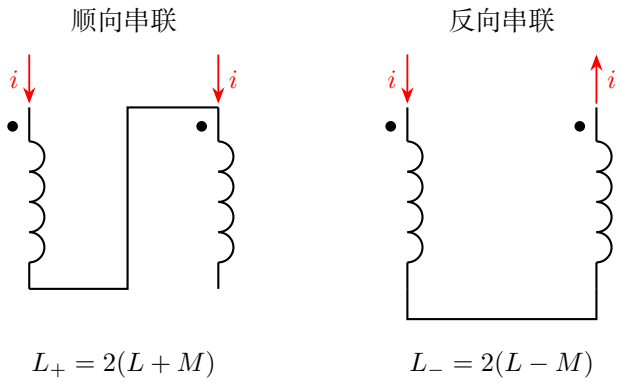


图 4.16: 同名端的实际串联接线决定两互感电压相加或相减

图 4.16 左图电流先流入第一绕组圆点端，再流入第二绕组圆点端；右图则从第二绕组的非圆点端流入。两者互感大小相同，端口取向不同才使等效电感不同。

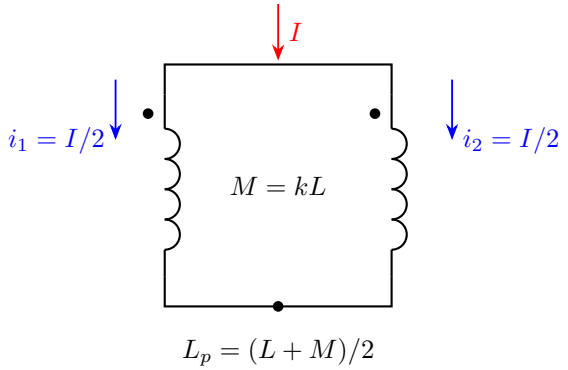


图 4.17: 同名端并联与对称零初态下的分流；总电流 $I = i_1 + i_2$

并联的端口电感

图 4.17 的并联电路端电压相同，有 $u = L\dot{i}_1 + M\dot{i}_2 = M\dot{i}_1 + L\dot{i}_2$。两端电压相减得 $(L-M)(\dot{i}_1 - \dot{i}_2) = 0$。在 $k < 1$ 时 $L - M \neq 0$，故 $i_1 - i_2$ 是常量；对称零初态使这一常量为零。因此 $i_1 = i_2 = I/2$，从而 $u = (L+M)\dot{I}/2$，$L_p = L(1+k)/2$。

完全耦合与对称初态

在完全耦合的对称工作状态下取极限，$L_+ = 4L, L_- = 0, L_p = L$。反向串联时，完全耦合的磁链相消。

例 4.3（持久电流给出的电阻率上限）. 细导线半径 $a = 1\,\mathrm{mm}$，绕成半径 $b = 0.10\,\mathrm{m}$ 的单匝圆环。初始电流 $100\,\mathrm{A}$，一年后减小量不足 $10^{-6}\,\mathrm{A}$。用细圆环近似 $L \simeq \mu_0 b[\ln(8b/a) - 2]$，估计 L 及电阻率上限。

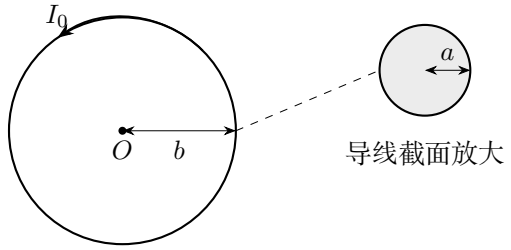


图 4.18: 细导线圆环的环半径 b 与导线截面半径 a 是不同的长度

解　圆环自感

图 4.18 中 $b/a = 100$，可采用细线近似，得到 $L \simeq 4\pi\times10^{-7}\times0.10[\ln 800 - 2] = 5.89\times10^{-7}\,\mathrm{H}$。

持久电流的衰减

闭合环满足 $L\dot{i} + Ri = 0$，把方程两侧除以非零电流，$\mathrm{d}i/i = -(R/L)\,\mathrm{d}t$，以初末状态作定积分，$\int_{I_0}^{i(T)} \mathrm{d}z/z = -(R/L)\int_0^T \mathrm{d}t$，原函数端点给 $[\ln|z|]_{I_0}^{i(T)} = -(R/L)[t]_0^T$。正初始电流衰减时不变号，故 $\ln[i(T)/I_0] = -RT/L$，指数化得 $i(T) = I_0\mathrm{e}^{-RT/L}$。

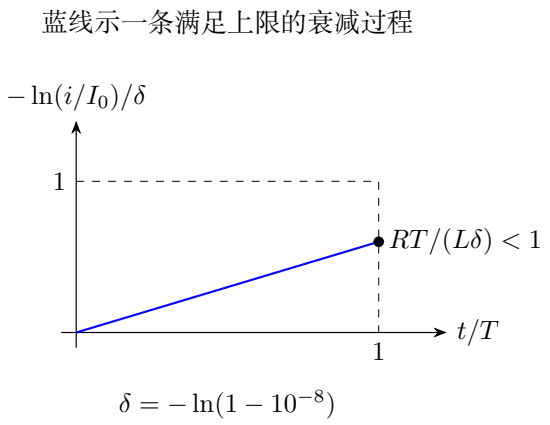


图 4.19: 将极小衰减改用对数坐标表示；一年后的实测点须落在上限以下

电阻上限

图 4.19 用归一化对数显示极小衰减；蓝线仅示一条允许的衰减，实验没有测定其中的具体斜率。实验界限是 $(I_0 - i(T))/I_0 < 10^{-8}$，先移项得到 $\mathrm{e}^{-RT/L} > 1 - 10^{-8}$，两侧取对数，再乘负号时不等号反向，得 $RT/L < -\ln(1 - 10^{-8})$。令 $f(\epsilon) = -\ln(1-\epsilon)$，有 $f(0) = 0$，且

$$f'(\epsilon) = -\frac{-1}{1-\epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}, \qquad f'(0) = 1.$$

所以 $f(\epsilon) = \epsilon + O(\epsilon^2)$，在 $\epsilon = 10^{-8}$ 时可取 $RT/L \lesssim 10^{-8}$。取一年 $T = 3.156 \times 10^7\,\mathrm{s}$，有 $R < 1.87 \times 10^{-22}\,\Omega$ 的近似上限。

电阻率上限

由 $R = \rho\, 2\pi b/(\pi a^2) = 2\rho b/a^2$，得到 $\rho < 9.4 \times 10^{-28}\,\Omega\,\mathrm{m}$。

例 4.4 (超导方框进入磁区)**.** 质量 m、自感 L 的超导矩形框，垂直运动方向的边长为 l，沿运动方向长 d。初始电流为零，以速度 v_0 向右进入磁场 B。磁场从 $x = 0$ 起向纸里，忽略自感随位置改变。求部分进入阶段的电流与运动，并判断能否完全进入。

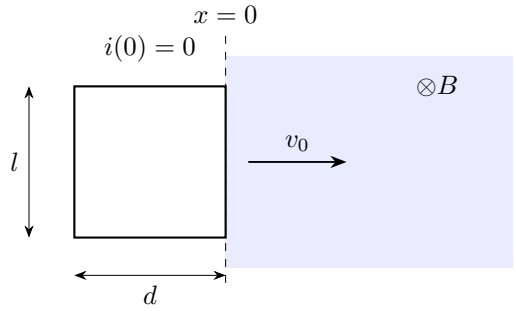


图 4.20: 初态前边刚到 $x = 0$，框长 d，垂直运动方向的边长为 l

解　磁链与水平磁力

图 4.20 中令前边进入深度为 x，外磁通按向里为正取 Blx。总磁链初始为零，因此 $Li + Blx = 0$，即 $i = -Blx/L$，实际电流逆时针。前边受阻力 $F_x = -B^2 l^2 x/L$。

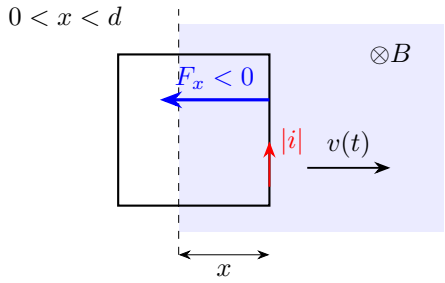


图 4.21: 部分进入时前边电流实际向上，磁力向左；向里为正的参考电流为负

部分进入时的运动

图 4.21 把机械能向磁能的转移画出。由 $m\ddot{x} = -(B^2l^2/L)x$，令 $\Omega = Bl/\sqrt{mL}$。试取 $x = \mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $\dot{x} = s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot{x} = s^2\mathrm{e}^{st}$，代回得 $(s^2 + \Omega^2)\mathrm{e}^{st} = 0$，故特征方程为 $s^2 + \Omega^2 = 0$。共轭根 $\pm\mathrm{j}\Omega$ 给出一般实解 $x = A\cos\Omega t + D\sin\Omega t$。求导为 $\dot{x} = -A\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t$。$x(0) = 0$ 给出 $A = 0$，$\dot{x}(0) = v_0$ 给出 $D = v_0/\Omega$，于是

$$x = \frac{v_0}{\Omega}\sin\Omega t, \quad v = v_0\cos\Omega t, \quad \frac{1}{2}mv^2 + \frac{B^2l^2x^2}{2L} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

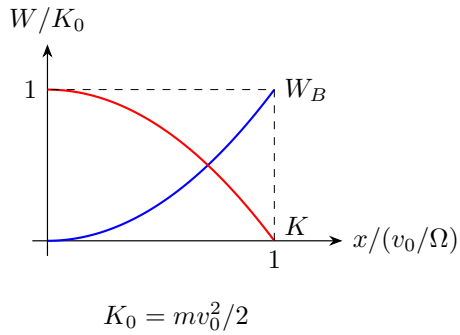


图 4.22: 部分进入阶段的能量交换；横坐标到 $x = d$ 时即须终止这一模型

图 4.22 以进入磁区的长度 x 为横坐标，蓝线为 $W_B/K_0 = (\Omega x/v_0)^2$，红线为其补量。若 $d < v_0/\Omega$，尚未走到图中的零动能点便已全进入，后续应改用净水平磁力为零的模型。

最大进入深度

把振荡解在第一个速度为零的时刻 $t_* = \pi/(2\Omega)$ 取值，最大进入深度为 $x_{\max} = v_0/\Omega$。若 $v_0/\Omega < d$，框在部分进入阶段就反向；若 $v_0/\Omega > d$，可完全进入，进入后外磁通恒定、电流恒定、净水平磁力为零。等号对应在 $t = \pi/(2\Omega)$ 恰到 $x = d$ 且速度为零。振荡式用到部分进入阶段结束。

例 4.5 (小气隙怎样改变电磁铁自感)**.** 闭合磁芯平均长度 ℓ、截面积 S，线性磁导率 μ，有一宽度 g 的空气隙，绕组 N 匝。忽略漏磁与边缘效应，磁芯长度近似不随小气隙变化。求自感以及磁芯、气隙各自储能；求气隙能超过总能量一半的条件。

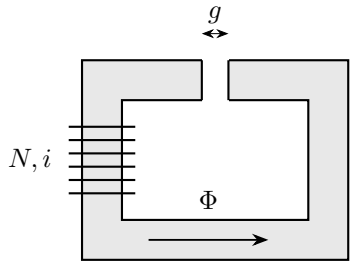
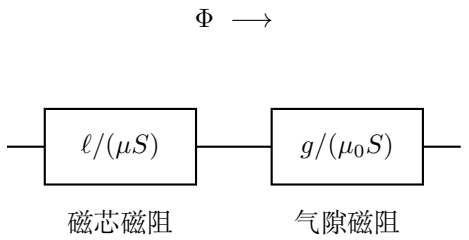


图 4.23: 题设：小气隙怎样改变电磁铁自感

解　磁路方程与自感

由图 4.23 磁通连续，各截面同一磁通 Φ，故两处磁感应强度相同，记为 B。安培环路给出 $B\ell/\mu + Bg/\mu_0 = Ni$。令 $D = \ell/\mu + g/\mu_0$，则 $B = Ni/D$，磁链 $\Psi = NBS = N^2Si/D$，所以 $L = N^2S/D$。



$$W_c/W_g = [\ell/\mu]/[g/\mu_0]$$

图 4.24: 同一磁通串行通过磁芯和气隙；储能与两段磁阻成正比

磁芯和气隙的储能

图 4.24 把总能量分成两个不重叠区域，$W_c = B^2S\ell/(2\mu)$，$W_g = B^2Sg/(2\mu_0)$。相加得 $W_c + W_g = B^2SD/2 = N^2Si^2/(2D) = Li^2/2$，与磁链法一致。气隙能占比为

$$\frac{W_g}{W_c + W_g} = \frac{g/\mu_0}{\ell/\mu + g/\mu_0}.$$

气隙储能过半的条件

因此超过一半要求 $g > \ell\mu_0/\mu$。例如相对磁导率 1000、磁芯长 0.20m，只需气隙大于 0.20mm 就可能使气隙能占多数。这里气隙远小于横截面尺度，按均匀气隙计算。增大气隙会增大磁阻，所以自感下降。

例 4.6 (电磁铁的气隙吸力与控制条件)**.** 理想高磁导率磁芯的磁能主要在一个均匀气隙中，面积 S，宽度 g 可变，绕组 N 匝，忽略边缘效应。分别在保持电流 I 和保持磁链 Ψ_0 时，求使气隙闭合的吸力；计算气隙由 g_1 缩至 $g_2 < g_1$ 时磁力做功，并说明两种能量变化。

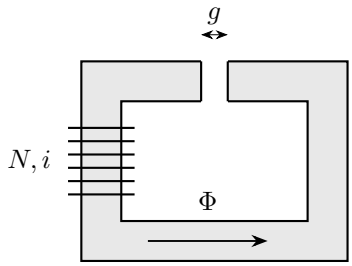


图 4.25: 题设：电磁铁的气隙吸力与控制条件

解　固定电流时的吸力

图 4.25 取气隙增大为 g 正方向。高磁导极限下 $L(g) = \mu_0 N^2 S/g = A/g$，其中 $A = \mu_0 N^2 S$。固定电流时，先对 $L = Ag^{-1}$ 求导，$L'(g) = -Ag^{-2}$，所以磁力的有向值 $F_g = I^2 L'(g)/2 = -AI^2/(2g^2)$，故吸力大小 $AI^2/(2g^2) = B^2 S/(2\mu_0)$。

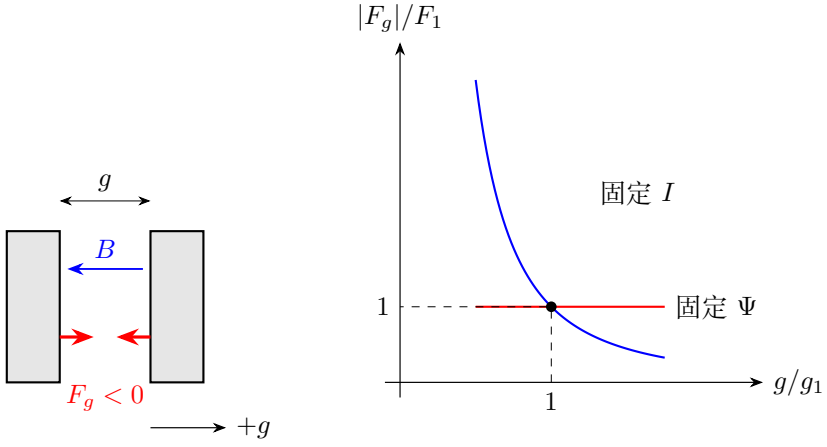


图 4.26: 气隙两极面相吸；同一初态出发，固定电流时吸力随气隙缩小而增大，固定磁链时恒定

固定电流时的磁力功

图 4.26 左图的两个极面相吸，右图以同一初态 g_1, I_1 为基准，$F_1 = AI_1^2/(2g_1^2)$。固定电流对应曲线 $(g_1/g)^2$，固定初始磁链则对应水平线。固定电流的磁力功为

$$W_{\text{mech}} = -\frac{AI^2}{2}\int_{g_1}^{g_2} g^{-2}\,\mathrm{d}g = \frac{AI^2}{2}[g^{-1}]_{g_1}^{g_2} = \frac{AI^2}{2}\left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1}\right).$$

上限虽比下限小，但力也为负，故机械功为正。磁能增加相同数值，电源做功则为它的两倍，其中另一半转成机械功。

固定磁链时的吸力

固定磁链时，$W_B = \Psi_0^2/(2L) = \Psi_0^2 g/(2A)$，对 g 求偏导，$\partial W_B/\partial g|_\Psi = (\Psi_0^2/(2A))(\mathrm{d}g/\,\mathrm{d}g) = \Psi_0^2/(2A)$，所以 $F_g = -\Psi_0^2/(2A)$。磁力的功为

$$W_{\text{m}} = -\frac{\Psi_0^2}{2A}\int_{g_1}^{g_2} \mathrm{d}g = -\frac{\Psi_0^2}{2A}[g]_{g_1}^{g_2} = \frac{\Psi_0^2(g_1 - g_2)}{2A}.$$

此时电流 $I(g) = \Psi_0 g/A$ 随气隙减小而减小，气隙磁感应强度 $B = \Psi_0/(NS)$ 不变。

两种约束下的场强

两种条件下，同一瞬间的力都可写为 $B^2S/(2\mu_0)$。固定磁链时 B 恒定，固定电流时 B 随气隙缩小而增大。

例 4.7 (均匀电流圆柱导体的内部自感)**.** 实心圆柱导体半径 a，电流 I 在截面均匀分布，磁导率 μ。外侧同轴回流导体内半径 b，两导体间介质磁导率 μ_0。忽略端部和外导体内部场。求单位长度内部自感和单位长度总自感，并解释内部项为何与 a 无关。

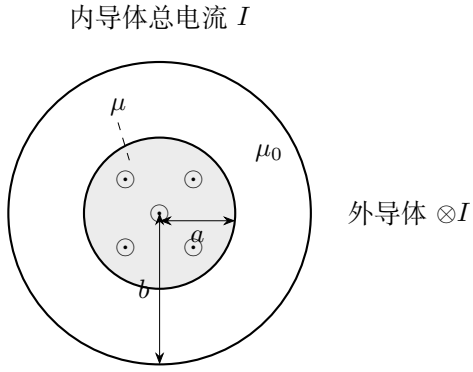


图 4.27: 内导体电流均匀分布，外回流薄层的内部磁场忽略；两区域磁导率分别给定

解　导体内部的磁场

图 4.27 中取内部半径 $s<a$，包围电流 $I_s = Is^2/a^2$，安培定律给出 $B(s) = \mu I_s/(2\pi s) = \mu I s/(2\pi a^2)$。

内部磁场能

单位长度薄壳体积 $2\pi s\,\mathrm{d}s$，所以

$$W'_{\mathrm{in}} = \int_0^a \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I s}{2\pi a^2}\right)^2 2\pi s\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{\mu I^2}{4\pi a^4}\int_0^a s^3\,\mathrm{d}s = \frac{\mu I^2}{4\pi a^4}\left[\frac{s^4}{4}\right]_0^a = \frac{\mu I^2}{16\pi}.$$

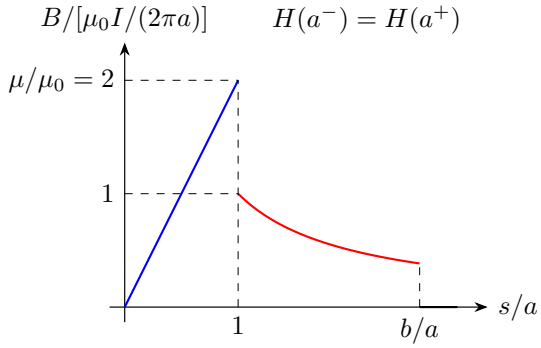


图 4.28: 内场线性增长、外场按 $1/s$ 衰减；图取 $\mu = 2\mu_0$，界面处 B 跳变

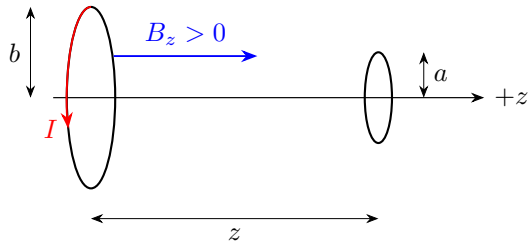
单位长度自感

图 4.28 将磁导率不同造成的界面跳变与内部场的线性增长分别画出。内部场能积分仍独立进行；比较 $W'_{\mathrm{in}} = L'_{\mathrm{in}} I^2/2$，得到 $L'_{\mathrm{in}} = \mu/(8\pi)$。外部 $a<s<b$ 的场为 $\mu_0 I/(2\pi s)$，外部单位长度场能为 $W'_{\mathrm{out}} = \mu_0 I^2(4\pi)^{-1}\int_a^b \mathrm{d}s/s = \mu_0 I^2(4\pi)^{-1}[\ln s]_a^b$，再用 $L'_{\mathrm{out}} = 2W'_{\mathrm{out}}/I^2$ 得 $L'_{\mathrm{out}} = \mu_0 \ln(b/a)/(2\pi)$，于是单位长度总自感为 $L' = \mu/(8\pi) + \mu_0 \ln(b/a)/(2\pi)$。

半径与内部储能

内部项不含半径，是因为导体变粗使给定归一化半径处的场按 a^{-1} 减弱，而体积按 a^2 增大，平方场强与体积恰相抵消。这里采用均匀电流分布。频率升高并出现集肤时，内部项随电流重新分布而改变。

例 4.8 (同轴圆环互感与移动感应电动势)**.** 半径 b 的大圆环通恒定电流 I，小圆环半径 $a \ll b$，两者同轴，轴向距离 $z > 0$。小环以速度 v 沿增大 z 的方向运动，总电阻 R，自身感应可忽略。求互感、感应电流及机械阻力，找出感应电动势最大的轴向位置。



两环正法向均沿 $+z$

图 4.29: 两圆环所在平面均垂直共同轴，正电流均按 $+z$ 法向右手定则取向

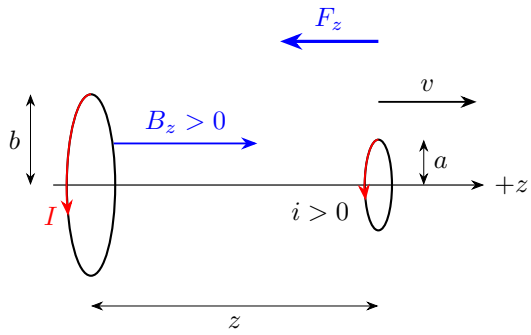
解　小环磁通与互感

图 4.29 中小环尺寸足够小，可用其圆心处大环轴向磁场近似整个小环的场。该场为 $B_z = \mu_0 I b^2/[2(b^2+z^2)^{3/2}]$，因此小环外磁通为 $\pi a^2 B_z = MI$。令 $K = \mu_0 \pi a^2 b^2/2$，有 $M = K(b^2+z^2)^{-3/2}$；链式求导

$$M' = K\left(-\frac{3}{2}\right)(b^2+z^2)^{-5/2}(2z) = -3Kz(b^2+z^2)^{-5/2}.$$

因此

$$M(z) = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2+z^2)^{3/2}}, \quad M'(z) = -\frac{3\mu_0 \pi a^2 b^2 z}{2(b^2+z^2)^{5/2}}.$$



两环正法向均沿 $+z$

图 4.30: 小环远离时互感减小，实际感应电流维持正向磁通，磁力阻碍远离

感应电流与阻力

图 4.30 小环离开时 M 减小，电动势 $e=-IvM'>0$，电流 $i=-IvM'/R$。固定初级电流下的机械力 $F_z=IiM'=-I^2v(M')^2/R<0$，始终阻碍离开。

阻力与发热

机械损耗率 $-F_zv=i^2R$，与小环发热相等。

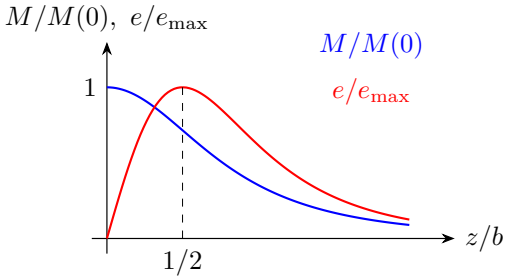


图 4.31: 互感随距离单调下降，但匀速运动产生的电动势在 $z=b/2$ 最大

图 4.31 的两条曲线分别按各自最大值归一化。红色电动势曲线由蓝色互感曲线的负斜率得到。

最大动生电动势

电动势大小正比 $f(z)=z/(b^2+z^2)^{5/2}$。先将 $f=z(b^2+z^2)^{-5/2}$ 看作两因子乘积，

$$f'=(b^2+z^2)^{-5/2}+z\left(-\frac{5}{2}\right)(b^2+z^2)^{-7/2}(2z)=\frac{b^2-4z^2}{(b^2+z^2)^{7/2}}.$$

分母恒正，分子在 $z=b/2$ 两侧由正变负，故最大值在 $z=b/2$。在 $z=0$，互感最大而空间导数为零，沿轴匀速运动的瞬时电动势反而为零。

例 4.9 (超导次级对初级自感的屏蔽)**.** 固定线圈自感 L_1, L_2、互感 M, $M^2 < L_1 L_2$。次级零电阻闭合，初始两电流为零。初级接电阻 R 和恒压 E。求初级电流、次级电流及总磁能，解释次级反馈对建立过程的影响。

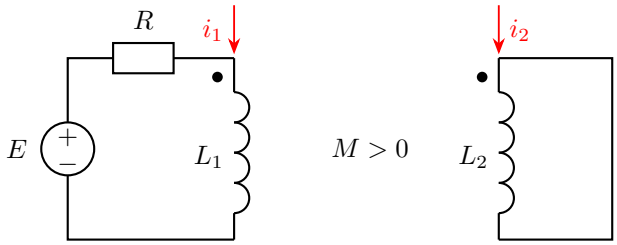


图 4.32: 初级为串联电源—电阻回路，次级为闭合超导回路；两电流参考均流入同名端

解　次级总磁链

图 4.32 参考电流都流入同名端。次级端电压为零，故 $\mathrm{d}(Mi_1 + L_2 i_2)/\mathrm{d}t = 0$。初始总磁链为零，得到 $i_2 = -Mi_1/L_2$。代入初级磁链，

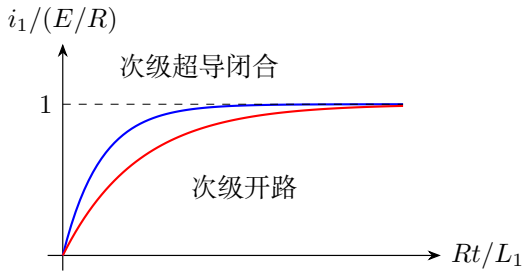
$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) i_1 = L_e i_1.$$

初级的等效电感

这里 $L_e > 0$，由耦合能量约束保证。初级回路因此满足 $L_e \dot{i}_1 + R i_1 = E$，令 $j = i_1 - E/R$，得到 $\dot{j} = -(R/L_e) j$。由 $j(0) = -E/R$，

$$\int_{-E/R}^{j(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R}{L_e} \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{-E/R}^{j(t)} = -\frac{R}{L_e}[s]_0^t.$$

端点代入给 $\ln|j(t)/(-E/R)| = -Rt/L_e$。初始偏差为负，恢复这个符号，得 $j(t) = -(E/R)\mathrm{e}^{-Rt/L_e}$。加回稳态电流后得到 $i_1 = E(1 - \mathrm{e}^{-Rt/L_e})/R$，$i_2 = -Mi_1/L_2$。



示例取 $M^2/(L_1L_2) = 1/2$

闭合时 $-i_2/[ME/(L_2R)] = i_1/(E/R)$

图 4.33: 闭合超导次级降低初级建立电流的时间常量；负次级电流与初级同步增长

磁能与电流建立过程

将 $i_2 = -Mi_1/L_2$ 代入完整磁能式，各项分别为

$$W_B = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2}{2}\frac{M^2 i_1^2}{L_2^2} - \frac{M^2 i_1^2}{L_2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(L_1 + \frac{M^2}{L_2} - \frac{2M^2}{L_2}\right) i_1^2 = \frac{1}{2} L_e i_1^2.$$

可见端口等效电感也正确描述该约束下的总储能。图 4.33 显示，与次级开路时相比，时间常量从 L_1/R 减为 L_e/R，初级电流建立更快；最终初级电流仍为 E/R，但次级保留反向持久电流。

有电阻的次级

若次级有电阻 R_2，且另由电源将初级电流保持恒定，次级的续流时间常量为 L_2/R_2。

例 4.10 (快速建立初级电流后的次级发热)**.** 两个固定线圈互感 M，次级自感 L_2、电阻 R，初始电流均为零。初级电流在很短时间内从零升至 I_0，之后保持。上升时间远小于 L_2/R，用理想阶跃极限描述。求次级在快过程结束后的电流、随后衰减以及电阻总热。说明初级的快变化怎样决定次级电流在快过程末的数值。

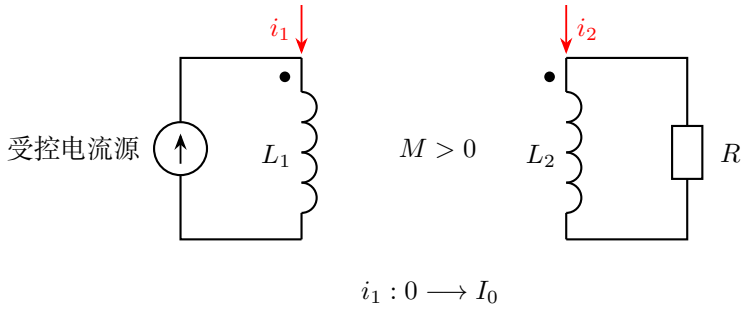


图 4.34: 初级电流由外源快速建立并保持，次级通过电阻闭合

解　快速阶段的磁链

图 4.34 次级回路为 $L_2\dot{i}_2+Ri_2=-M\dot{i}_1$。对初级很快上升的短时间积分，显式写为

$$L_2[i_2(0^+)-i_2(0^-)]+R\int_{0^-}^{0^+} i_2\,\mathrm{d}t=-M[i_1(0^+)-i_1(0^-)].$$

快过程持续时间趋零而电流有限，电阻积分相对磁链变化可以忽略，得到 $L_2i_2(0^+)=-MI_0$，即 $i_2(0^+)=-MI_0/L_2$。

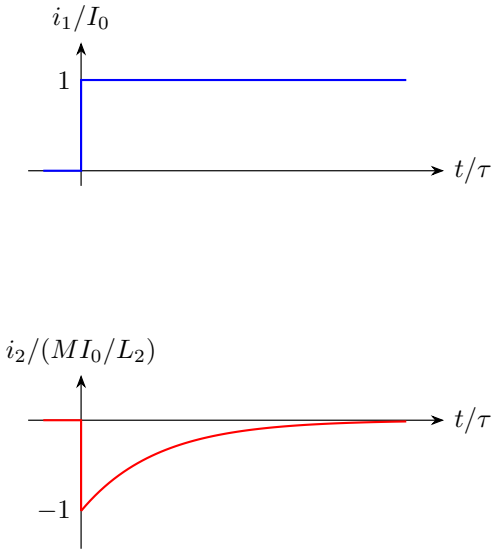


图 4.35: 理想阶跃造成有限的次级电流跳变，之后按 $\tau=L_2/R$ 衰减

次级续流与发热

图 4.35 将快建立与慢衰减分开。之后初级电流不再变化，次级满足 $L_2\dot{i}_2 + Ri_2 = 0$。以 $I_{20} = -MI_0/L_2$ 为初流，分离积分 $\int_{I_{20}}^{i_2(t)} \mathrm{d}z/z = -(R/L_2)\int_0^t \mathrm{d}s$，原函数端点给 $[\ln|z|]_{I_{20}}^{i_2(t)} = -(R/L_2)[s]_0^t$，即 $\ln|i_2/I_{20}| = -Rt/L_2$，保持初始负号后

$$i_2(t) = -\frac{MI_0}{L_2}\mathrm{e}^{-Rt/L_2}.$$

再代入热量积分，先取有限上限 T：

$$\begin{aligned} Q_J(T) &= R\frac{M^2I_0^2}{L_2^2}\int_0^T \mathrm{e}^{-2Rt/L_2}\,\mathrm{d}t \\ &= R\frac{M^2I_0^2}{L_2^2}\left[-\frac{L_2}{2R}\mathrm{e}^{-2Rt/L_2}\right]_0^T \\ &= \frac{M^2I_0^2}{2L_2}(1-\mathrm{e}^{-2RT/L_2}). \end{aligned}$$

最后令 $T\to\infty$，得到 $Q_J = M^2I_0^2/(2L_2)$。

总热量与通过的电量

在理想阶跃极限，快过程内电阻热趋零，随后全部热量等于快过程建立的次级自感能。总次级电量仍为 $-MI_0/R$，与对完整方程积分的结果一致。

有限上升时间

有限上升时间内，次级电流连续改变。把上升时间缩短到零，$-M\dot{i}_1$ 的时间积分保持为 $-MI_0$，于是连续的快变化在阶跃模型中成为电流跳变。

4.11　本讲小结

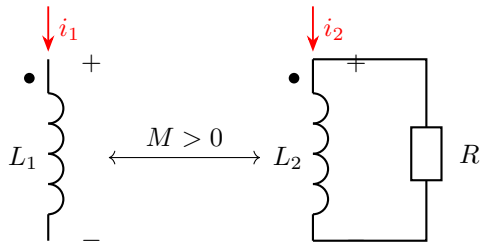
磁链是自感与互感的共同出发点。固定线性几何中，端电压来自磁链导数，磁场能来自建立电流的功；同名端决定互感项的符号，能量非负决定互感的范围。

超导回路守恒总磁链，微小电阻回路只在有限时间内近似守恒。用能量求磁力时，应先说明电流由电源维持还是磁链固定，计入相应电源功后再求机械功与力。

场能积分应覆盖所有显著的有场区域。导体内部、同轴间隙、磁芯与气隙的场分布各不相同，面积元和体积元也须分别确定。非线性可逆磁链的场能为 $\int i\,\mathrm{d}\Psi$，磁共能为 $\int \Psi\,\mathrm{d}i$；只有在线性模型中，两者才都等于 $Li^2/2$。

4.12 练习

练习 4.1 (互感脉冲与次级总电量)**.** 两个固定线圈互感为 $M>0$，参考电流均流入同名端。次级自感 L_2、总电阻 R，初始电流为零。初级电流在有限时间内从零升至 I_0 后保持，求次级充分稳定前通过的有向总电量。



$i_1(0)=0,\quad i_1(\infty)=I_0$

图 4.36: 两电流以流入同名端为正；次级绕组经电阻闭合

练习 4.2 (耦合磁能的正定条件)**.** 两线圈自感 $L_1,L_2>0$，互感 M。证明 $|M|\le\sqrt{L_1L_2}$，并求给定 $i_2=I$ 时磁能最小的 i_1 与最小值。

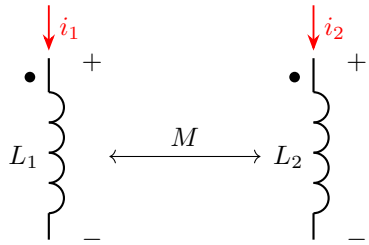


图 4.37: 两线圈的参考方向确定有向互感 M；能量约束须对任意两电流成立

练习 4.3 (插入磁芯时的机械功)．某线圈自感 $L(x) = L_0 + \alpha x$，$\alpha > 0$，x 为磁芯插入量。分别讨论电源维持电流 I 与断开电源后超导闭合、初始磁链 Ψ_0 两种情形。求插入力及从 0 到 d 的机械功。

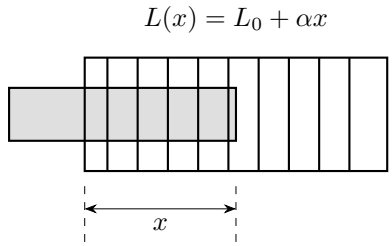


图 4.38: 磁芯前端越过线圈入口的距离为插入量 x，向右为正

练习 4.4 (同轴结构的外自感)．同轴结构内导体半径 a、外导体内半径 b，电流等大反向。介质磁导率 μ。忽略端部与导体内部磁场，求单位长度自感及两导体间的磁场能。

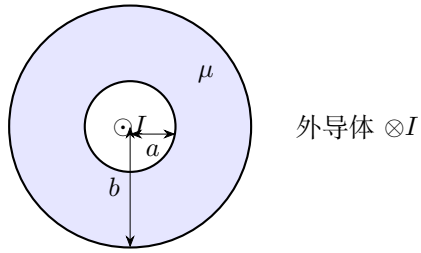


图 4.39: 内导体电流向外，外导体等大反向回流；只计两者之间的磁场

练习 4.5 (不等线圈并联的等效电感)．自感 L_1, L_2、互感 $M > 0$ 的线圈同名端相接并联。设 $L_1 L_2 > M^2$、初始两支路无电流。求端口等效电感，并分别写出 $M = 0$ 与 $L_1 = L_2$ 时的结果。

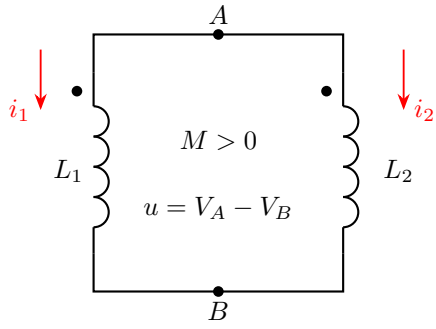
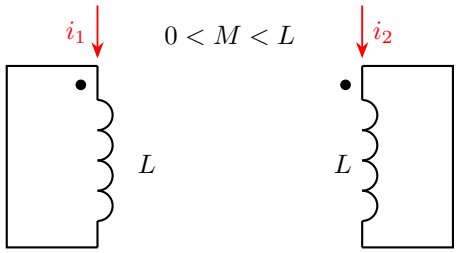


图 4.40: 同名端接公共点 A，另一端接公共点 B；两支路端压相同

练习 4.6 (两个孤立超导线圈逐渐靠近)**.** 相同线圈自感均为 L, 互感从初始 $M=0$ 缓慢增大。两线圈均超导且彼此不电接触，初始电流分别为 $I_0, 0$。自感保持不变，$0<M<L$。求两电流和总磁能，判断准静态靠近时外力需做正功还是负功。



初始 $i_1=I_0,\ i_2=0,\ M=0$

图 4.41: 两个线圈各自超导闭合，磁耦合逐渐增强，彼此没有导线连接

练习 4.7 (相同耦合线圈的同向与反向磁能)**.** 相同线圈自感 L，互感 $M>0$ 且 $M<L$。定义 $i_+=(i_1+i_2)/2, i_-=(i_1-i_2)/2$。将总磁能化成两个独立组合，比较给定 $i_1^2+i_2^2=I^2$ 时的最大、最小磁能，并说明对应电流方向。

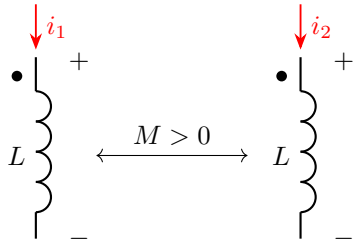


图 4.42: 相同自感 L、互感 $0<M<L$ 的两线圈及其电流参考

练习 4.8 (非线性磁链的储能与增量电感)**.** 可逆单值磁路满足 $i = a\Psi + b\Psi^3$, $a, b > 0$。从零状态建立到磁链 Ψ_0，求场能、静态比值电感和增量电感。若理想恒压 E 直接接在线圈上、线阻忽略，求建立过程电流。

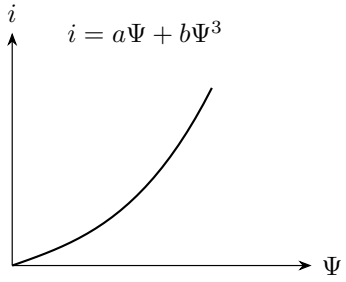


图 4.43: 题设：非线性磁链的储能与增量电感

练习 4.9 (零总磁链圆环缓慢伸展的外功)**.** 柔性超导圆环半径为 a，总磁链恒为零，置于恒定垂直磁场 B。采用自感模型 $L(a) = \lambda a$，$\lambda > 0$，忽略其他储能；初始已处于相应带电流状态。求半径缓慢增加时的电流、广义磁力及从 a_1 到 a_2 的外力功。

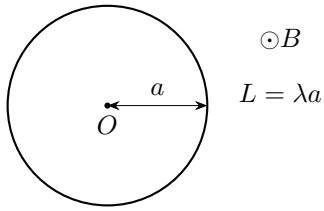


图 4.44: 题设：零总磁链圆环缓慢伸展的外功

练习 4.10 (矩形截面环形线圈的精确自感)**.** 环形磁芯内半径 a、外半径 b、轴向高度 h，线性磁导率 μ，绕组 N 匝均匀紧密绕制。忽略漏磁和绕组内部场，求自感和磁能；若截面较窄，说明平均半径近似如何得到，以及它的误差从哪一阶开始。

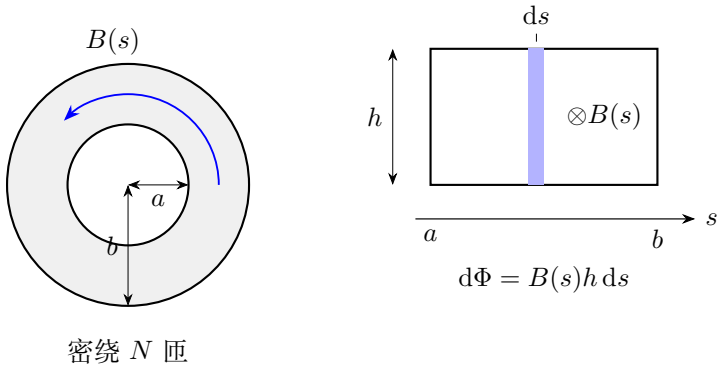


图 4.45: 环形磁芯的内外半径与矩形截面；磁通面积元垂直环向磁场

练习 4.11 (嵌套长线圈的互感与耦合)**.** 两根同轴长螺线管长度均 ℓ，内线圈截面积 S_1、匝数 N_1，外线圈截面积 $S_2 > S_1$、匝数 N_2，介质磁导率均 μ。忽略端部漏场，各参考电流产生同向内部磁场。求两自感、互感和耦合系数，并在固定 i_1 时求使总磁能最小的 i_2，解释剩余能量。

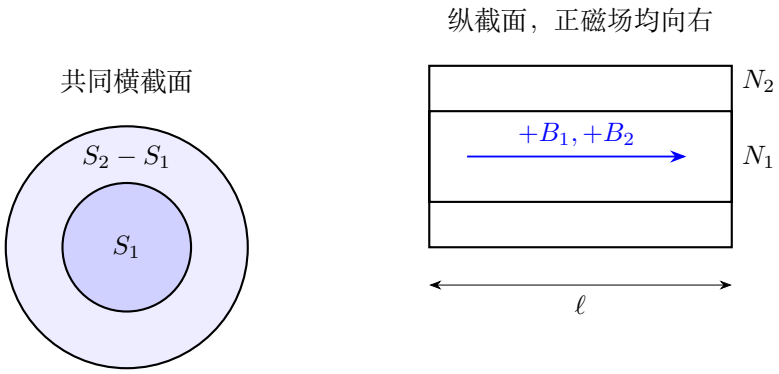


图 4.46: 嵌套线圈共轴且长度相同；内线圈只在内区产生磁场，外线圈还占据环区

练习解答

练习 4.1

解　次级电流方向

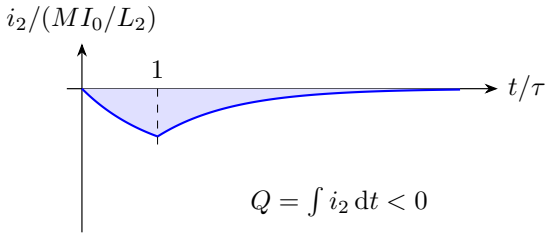
由图 4.36 次级沿流入同名端为正，有 $L_2\dot{i}_2 + Ri_2 = -M\dot{i}_1$。初级稳定以后，次级经电阻衰减到零。

从接通到衰减的总电量

全程积分，

$$L_2[i_2(\infty) - i_2(0)] + R\int_0^\infty i_2\,\mathrm{d}t = -M[I_0 - 0].$$

由初末次级电流均为零，得到有向总电量 $Q = -MI_0/R$，负号对应从次级同名端流出。



示例上升时间 $T = \tau = L_2/R$

图 4.47: 线性上升初级电流的一种示例：次级电流的有向面积为负，充分衰减后回零

线性上升时的电流曲线

图 4.47 取初级在 $T = \tau = L_2/R$ 内线性上升为示例。上升段有 $\dot{i}_1 = I_0/T$，故 $\dot{i}_2 + i_2/\tau = -MI_0/(L_2T)$。乘以积分因子 $\mathrm{e}^{t/\tau}$，左侧按乘积法则合并：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(i_2\mathrm{e}^{t/\tau}\right) = \mathrm{e}^{t/\tau}\left(\dot{i}_2 + i_2/\tau\right) = -\frac{MI_0}{L_2T}\mathrm{e}^{t/\tau}.$$

使用 $i_2(0) = 0$，在上升段 $0 \le t \le T$ 积分，

$$i_2(t)\mathrm{e}^{t/\tau} = -\frac{MI_0}{L_2T}\int_0^t \mathrm{e}^{s/\tau}\,\mathrm{d}s = -\frac{MI_0}{L_2T}[\tau\mathrm{e}^{s/\tau}]_0^t.$$

在图示 $T = \tau$ 下，得到 $i_2 = -(MI_0/L_2)(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$。随后令 $s = t - T$，无源方程给 $\mathrm{d}i_2/i_2 = -\,\mathrm{d}s/\tau$。由接续初值 $i_2(T) < 0$ 确定积分上下限：

$$\int_{i_2(T)}^{i_2(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\int_0^s \frac{\mathrm{d}\sigma}{\tau}, \qquad [\ln|\xi|]_{i_2(T)}^{i_2(t)} = -\frac{s}{\tau}.$$

由于衰减过程中电流保持负号，得到 $\ln[i_2(t)/i_2(T)] = -s/\tau$，所以 $i_2(t) = i_2(T)\mathrm{e}^{-(t-T)/\tau}$。图中上升段末电流最负，随后由同一初值指数回升，蓝色阴影给出两段电流的有向面积。

练习 4.2

解　磁能的平方形式

图 4.37 的磁能为 $W = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 I + \frac{1}{2}L_2 I^2$。按 i_1 配方，

$$W = \frac{L_1}{2}\left(i_1 + \frac{MI}{L_1}\right)^2 + \frac{I^2}{2}\left(L_2 - \frac{M^2}{L_1}\right).$$

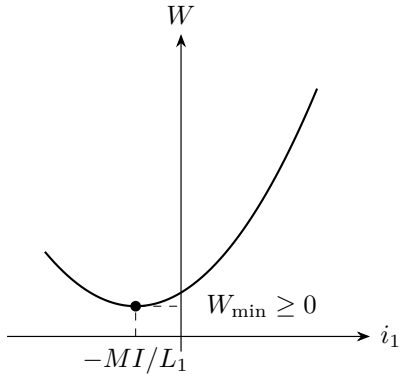


图 4.48: 固定第二电流后，磁能为抛物线；图示 $MI > 0$、非完全耦合的情形

场能非负的条件

图 4.48 中的抛物线在 $i_1 = -MI/L_1$ 处取最小值 $W_{\min} = I^2(L_2 - M^2/L_1)/2$。磁能对所有给定电流均非负。取任意 $I \neq 0$，由 $W_{\min} \geq 0$ 除以 $I^2/2$，得 $L_2 - M^2/L_1 \geq 0$，即 $|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$。

完全耦合

完全耦合时最小值可为零，表示两个绕组的磁场在理想模型中完全抵消。

练习 4.3

解　固定电流时的能量

图 4.38 中向右插入使自感增加。维持电流时，电源功为 $I\,\mathrm{d}(LI) = I^2\,\mathrm{d}L$，磁能增加 $I^2\,\mathrm{d}L/2$；余下部分为机械功，因此 $F = I^2\alpha/2$，$W_{\mathrm{mech}} = I^2\alpha d/2$。

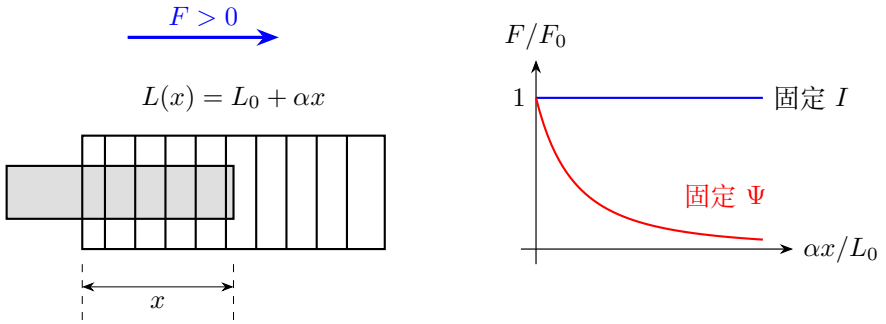


图 4.49: 磁力均向自感增大的方向；同一初态下固定电流的力恒定，固定磁链的力减小

固定磁链时的能量

图 4.49 以 $\Psi_0 = L_0 I, F_0 = \alpha I^2/2$ 比较同一初态的两种控制。对一般给定的 Ψ_0，孤立超导回路磁链固定，$i = \Psi_0/L(x)$。磁能 $W_B = \Psi_0^2/[2L(x)]$，对 x 求导时，$\mathrm{d}[1/L(x)]/\,\mathrm{d}x = -\alpha/L(x)^2$，所以 $F = \alpha\Psi_0^2/[2L(x)^2]$。

磁芯移动时的功

机械功应沿路积分，令 $z = L_0 + \alpha x, \mathrm{d}z = \alpha\,\mathrm{d}x$，得到 $\int_0^d F\,\mathrm{d}x = (\Psi_0^2/2)\int_{L_0}^{L_0+\alpha d} z^{-2}\,\mathrm{d}z$，原函数 $\int z^{-2}\,\mathrm{d}z = -z^{-1}$，代入上下限后，

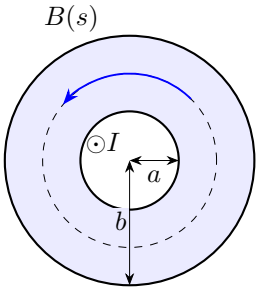
$$W_{\mathrm{mech}} = \frac{\Psi_0^2}{2}\left(\frac{1}{L_0} - \frac{1}{L_0 + \alpha d}\right).$$

两种情况下力均向自感增大的方向，但固定磁链时电流下降、力也下降。这里机械功指磁力的正功；准静态外力做功与之相反。

练习 4.4

解　两导体之间的磁场

图 4.39 中对半径 s 的同心圆使用安培定律，$B\,2\pi s = \mu I$，所以 $B = \mu I/(2\pi s)$，适用 $a < s < b$。



外导体回流 $\otimes I$

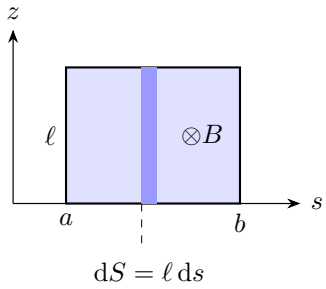


图 4.50: 能量积分取整圈薄壳，磁通积分取径向—轴向窄带；二者须使用不同微元

圆柱壳的场能

图 4.50 左图取厚度 $\mathrm{d}s$ 的整圈圆柱壳，单位长度体积 $2\pi s\,\mathrm{d}s$，故

$$W'_B=\int_a^b[B^2/(2\mu)]2\pi s\,\mathrm{d}s=\frac{\mu I^2}{4\pi}\int_a^b\frac{\mathrm{d}s}{s}=\frac{\mu I^2}{4\pi}[\ln s]_a^b=\frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

单位长度外自感

由 $W'_B=L'I^2/2$ 得 $L'=\mu\ln(b/a)/(2\pi)$。若取轴向长度 ℓ，两导体间磁能为 $W_B=\ell W'_B=\mu I^2\ell\ln(b/a)/(4\pi)$。$b\to a$ 时，两导体间的储能趋于零。

练习 4.5

解　共同电压与电流导数

图 4.40 两支路端压相等，故 $u=L_1\dot{i}_1+M\dot{i}_2=M\dot{i}_1+L_2\dot{i}_2$。将第一等式乘 L_2、第二等式乘 M 后相减，消去 $\dot{i}_2$，得 $(L_1L_2-M^2)\dot{i}_1=(L_2-M)u$；反过来消去 $\dot{i}_1$，得 $(L_1L_2-M^2)\dot{i}_2=(L_1-M)u$。题设行列式为正，可以相除，因此 $\dot{i}_1=u(L_2-M)/(L_1L_2-M^2)$、$\dot{i}_2=u(L_1-M)/(L_1L_2-M^2)$。

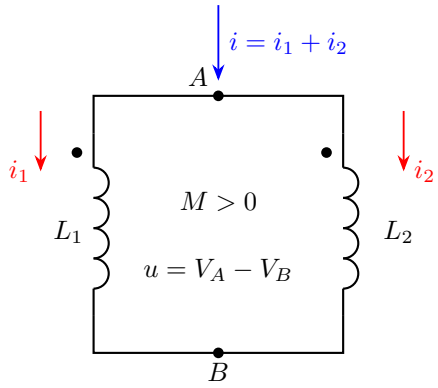


图 4.51: 并联支路同电压，端口电流等于两支路电流之和

端口等效电感

图 4.51 总电流导数是两者相加，因此

$$L_p = \frac{u}{\dot{i}_1 + \dot{i}_2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

无互感与相同绕组

无互感时为通常并联值 $L_1L_2/(L_1+L_2)$；相等自感 L 时，分子 $L^2 - M^2 = (L-M)(L+M)$，分母为 $2(L-M)$，约去非零的 $L-M$ 后得 $(L+M)/2$，与对称分流结果一致。以上按 $M^2 < L_1L_2$ 求解。

练习 4.6

解　两线圈的守恒磁链

在图 4.41 中，每个闭合超导回路分别保持总磁链。按初始值写出 $Li_1 + Mi_2 = LI_0$、$Mi_1 + Li_2 = 0$。先从第二式得 $i_2 = -Mi_1/L$，代第一式求得

$$i_1 = \frac{L^2 I_0}{L^2 - M^2}, \qquad i_2 = -\frac{LMI_0}{L^2 - M^2}.$$

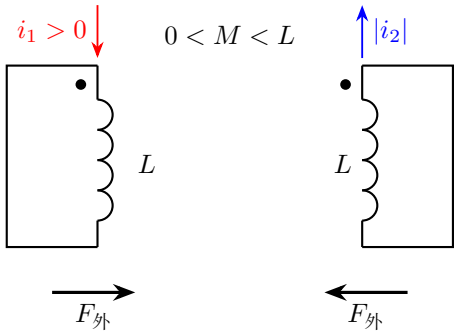


图 4.52: 实际次级电流从同名端流出；外力相向推动，磁作用阻碍靠近

磁能与外力功

图 4.52 中两电流反向，两环靠近时分别沿各自的磁链守恒关系变化。利用 $W_B = (i_1\Psi_1 + i_2\Psi_2)/2$，得 $W_B = LI_0 i_1/2 = L^3 I_0^2/[2(L^2 - M^2)]$。相对初始 $LI_0^2/2$，能量增加 $LI_0^2M^2/[2(L^2 - M^2)]$，无电阻也无外电源，故这正是准静态外力需要提供的正功，磁作用阻碍靠近。

完全耦合时的相容条件

$M \to L^-$ 时，两电流的大小与磁能一同增大。若两环完全耦合且自感相等，两式的磁链相等，而本题初始磁链之差为 LI_0，所以在保持该差值的过程中始终有 $M < L$。

练习 4.7

解　同向和反向的电流组合

由图 4.42 的同名端约定，$W = L(i_1^2 + i_2^2)/2 + Mi_1i_2$。反解电流为 $i_1 = i_+ + i_-, i_2 = i_+ - i_-$，展开有 $i_1^2 + i_2^2 = 2(i_+^2 + i_-^2)$、$i_1i_2 = i_+^2 - i_-^2$，所以

$$W = (L + M)i_+^2 + (L - M)i_-^2.$$

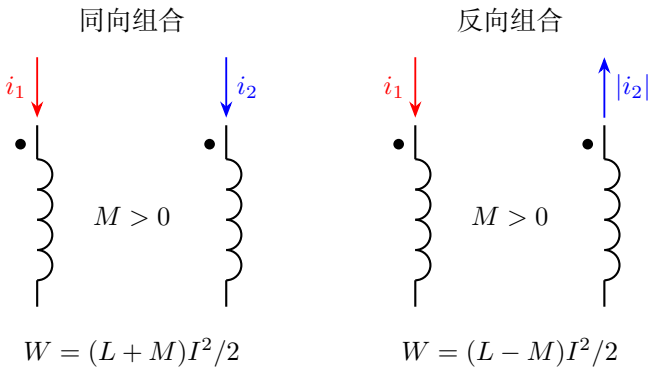


图 4.53: 固定 $i_1^2+i_2^2=I^2$ 时，同向等幅电流给出最大能量，反向等幅给出最小能量

约束下的磁能极值

图 4.53 对应两种磁场叠加方式。约束为 $i_+^2+i_-^2=I^2/2$。因为 $L+M>L-M>0$，最大能量在全部幅度分配给 i_+ 时取得，$W_{\max}=(L+M)I^2/2$，此时 $i_1=i_2=\pm I/\sqrt{2}$；最小能量 $W_{\min}=(L-M)I^2/2$，此时 $i_1=-i_2=\pm I/\sqrt{2}$。

耦合强弱与储能

反向磁场相互抵消但不一定完全抵消，因为 $M<L$。当耦合弱 $M\to 0$，两种组合能量相同；只有理想完全耦合的极限下，反向组合能量才可趋零。这个分解也为后面的两个耦合振荡频率提供磁能系数。

练习 4.8

解　非线性磁链的储能

图 4.43 给的是电流作为磁链的函数。磁能微元为 $\mathrm{d}W=i\,\mathrm{d}\Psi$，所以

$$W(\Psi_0)=\int_0^{\Psi_0}(a\psi+b\psi^3)\,\mathrm{d}\psi=\left[\frac{a}{2}\psi^2+\frac{b}{4}\psi^4\right]_0^{\Psi_0}=\frac{a}{2}\Psi_0^2+\frac{b}{4}\Psi_0^4.$$

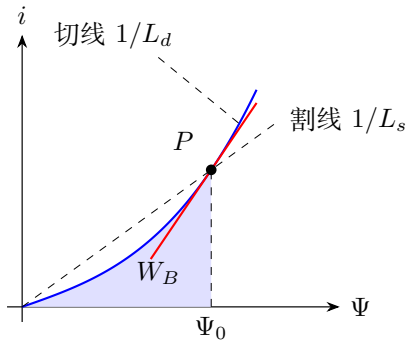


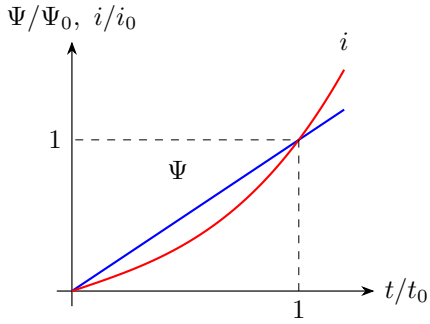
图 4.54: 蓝色面积给出场能；原点割线和工作点切线的斜率分别是两种电感的倒数

静态电感与增量电感

图 4.54 中从原点到工作点的连线斜率为 i/Ψ，静态比值电感 $L_s = \Psi/i = 1/(a + b\Psi^2)$；工作点切线斜率为 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}\Psi$，逐项求导得 $\mathrm{d}i/\mathrm{d}\Psi = a + b(3\Psi^2) = a + 3b\Psi^2$，所以增量电感 $L_d = (\mathrm{d}i/\mathrm{d}\Psi)^{-1} = 1/(a + 3b\Psi^2)$。在 $\Psi = 0$ 处，比值电感按连续极限取 $1/a$，与零点的增量电感相同。

电压驱动下的电流

恒压源给出 $u = \dot{\Psi} = E$，从零初态积分 $\int_0^{\Psi(t)} \mathrm{d}\psi = E\int_0^t \mathrm{d}s$，原函数及端点为 $[\psi]_0^{\Psi(t)} = E[s]_0^t$，故 $\Psi(t) - 0 = E(t - 0)$，即 $\Psi = Et$，于是 $i = aEt + bE^3t^3$。



$$t_0 = \Psi_0/E, \quad i_0 = a\Psi_0 + b\Psi_0^3$$

图 4.55: 恒压使磁链线性增长，非线性本构关系使电流呈弯曲增长；示例取 $b\Psi_0^2 = a$

取 $t_0 = \Psi_0/E$、$i_0 = a\Psi_0 + b\Psi_0^3$，并令 $x = t/t_0$，则

$$\frac{\Psi}{\Psi_0} = x, \qquad \frac{i}{i_0} = \frac{ax + b\Psi_0^2 x^3}{a + b\Psi_0^2}.$$

图 4.55 取 $b\Psi_0^2 = a$，所以红线为 $(x + x^3)/2$。固定 E 时，$\dot{i} = aE + 3bE^3t^2$；电流初期近似线性，随后斜率逐渐增大。

储能的四次项

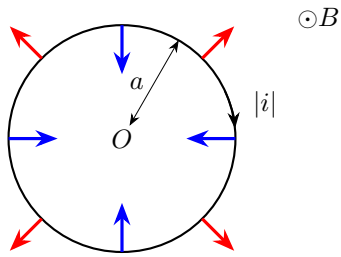
上式的四次项来自增量电感随电流变化。沿同一条可逆曲线返回初态时，储能可以全部释放。

练习 4.9

解　总磁链与电流

按图 4.44 向纸外取磁通正向，零总磁链要求 $\lambda a i + B\pi a^2 = 0$，所以 $i = -B\pi a/\lambda$，实际电流为顺时针。磁能为

$$W_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{B^2\pi^2a^3}{2\lambda}.$$



共同增大半径 a，广义磁力 $F_a < 0$

图 4.56: 顺时针电流使外磁场力向内，自感几何项向外；蓝箭头示两者合成的收缩趋势，红箭头示外力伸展

圆环的径向力

图 4.56 以半径增大为正广义位移，准静态过程中外力支付磁能增加，磁力的广义值为 $F_a = -[B^2\pi^2/(2\lambda)]\ \mathrm{d}(a^3)/\,\mathrm{d}a = -3B^2\pi^2a^2/(2\lambda)$，阻碍伸展。半径改变 $\mathrm{d}a$ 时，沿圆周各处的磁力合计做功 $F_a\,\mathrm{d}a$。

外场力与自感力

径向广义力分成两项。外磁通项 $i\ \mathrm{d}(B\pi a^2)/\,\mathrm{d}a = -2B^2\pi^2a^2/\lambda$，自感几何项 $i^2L'(a)/2 = B^2\pi^2a^2/(2\lambda)$，相加正好为上述结果。第二项来自圆环自感随半径改变。

缓慢伸展的外力功

外力与广义磁力平衡，故

$$W_{\text{ext}} = \frac{3B^2\pi^2}{2\lambda}\int_{a_1}^{a_2} a^2\,\mathrm{d}a = \frac{3B^2\pi^2}{2\lambda}\left[\frac{a^3}{3}\right]_{a_1}^{a_2} = \frac{B^2\pi^2}{2\lambda}(a_2^3 - a_1^3) > 0,$$

过程中无电阻热。

练习 4.10

解　环形磁芯内的磁场

图 4.45 右侧表示径向—轴向截面尺寸。由轴对称性，在磁芯内半径 r 的圆形安培环路上 $B(r)2\pi r = \mu N i$，所以 $B(r) = \mu N i/(2\pi r)$。

截面窄条的磁通

单匝线圈跨过径向截面，垂直于周向磁场的面积元为 $h\,\mathrm{d}r$，故单匝磁通

$$\Phi = \int_a^b B(r)h\,\mathrm{d}r = \frac{\mu N i h}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu N i h}{2\pi}[\ln r]_a^b = \frac{\mu N i h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

磁链 $N\Phi$ 与电流之比给出 $L = \mu N^2 h\ln(b/a)/(2\pi)$。

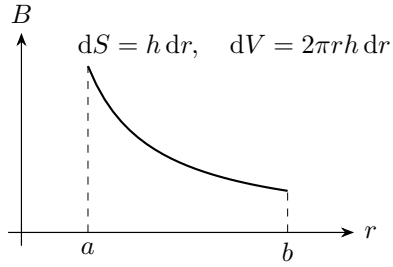


图 4.57: 解答过程：矩形截面环形线圈的精确自感

用薄环体积求磁能

图 4.57 的薄环体积 $2\pi r h\,\mathrm{d}r$，所以

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \frac{B(r)^2}{2\mu}2\pi r h\;\mathrm{d}r = \frac{\mu N^2 h i^2}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} \\ &= \frac{\mu N^2 h i^2}{4\pi}\left[\ln\frac{r}{a}\right]_a^b = \frac{\mu N^2 h i^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}Li^2. \end{aligned}$$

磁通积分使用截面积元，场能积分使用体积元，两者几何含义不同。

平均半径近似

设平均半径 $r_0=(a+b)/2$，宽度 $w=b-a$，$x=w/(2r_0)\ll 1$。令 $G(x)=\ln[(1+x)/(1-x)]$，由链式求导，

$$G'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\frac{2}{1-x^2}=2(1+x^2)+\frac{2x^4}{1-x^2}.$$

用 $G(0)=0$ 积分回去，

$$\begin{aligned}G(x)&=2\int_0^x(1+u^2)\,\mathrm{d}u+2\int_0^x\frac{u^4}{1-u^2}\,\mathrm{d}u\\&=2[u+u^3/3]_0^x+O(x^5)=2x+\frac{2x^3}{3}+O(x^5).\end{aligned}$$

第二项积分在小 x 时为五阶，因为其被积函数从 u^4 阶开始。代回 $x=w/(2r_0)$，再从精确自感中提出首项，

$$L=\frac{\mu N^2hw}{2\pi r_0}\left[1+\frac{w^2}{12r_0^2}+O\!\left(\frac{w^4}{r_0^4}\right)\right].$$

首项就是把磁场取在平均半径、磁路长取 $2\pi r_0$ 的公式；相对误差从 $(w/r_0)^2$ 开始。当 w/r_0 较大时，磁场的径向变化由上式中的对数项给出。

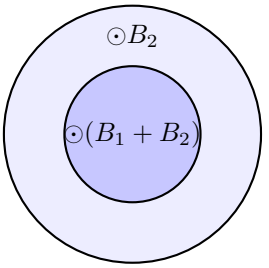
练习 4.11

解　内线圈磁通与互感

图 4.46 中单独给内线圈通流，磁场 $\mu N_1 i_1/\ell$ 只存在于面积 S_1 内。它穿过外线圈每匝的磁通仍为 $\mu N_1 i_1 S_1/\ell$，因此 $M=\mu N_1 N_2 S_1/\ell$。

自感和耦合系数

分别计算自磁链，$L_1=\mu N_1^2 S_1/\ell, L_2=\mu N_2^2 S_2/\ell$，耦合系数 $\kappa=M/\sqrt{L_1L_2}=\sqrt{S_1/S_2}<1$。



内区体积 $S_1\ell$
$B_1+B_2=\mu(N_1i_1+N_2i_2)/\ell$

环区体积 $(S_2-S_1)\ell$
$B_2=\mu N_2 i_2/\ell$

符号表示沿共同正轴的有向场，负值时实际方向相反

图 4.58: 总磁能分为不重叠的内区和环区；内区完全抵消并不使环区储能最小

内区、外环的场能积分

图 4.58 的内区两磁场叠加，外环区只有外线圈磁场。按两个体积积分，

$$W=\frac{\mu}{2\ell}\left[S_1(N_1i_1+N_2i_2)^2+(S_2-S_1)(N_2i_2)^2\right].$$

展开正好等于 $L_1i_1^2/2+L_2i_2^2/2+Mi_1i_2$，也从空间场解释互感交叉项。

固定初级电流时的极小值

固定 i_1 时，

$$\frac{\partial W}{\partial i_2}=0+\frac{L_2}{2}(2i_2)+Mi_1=L_2i_2+Mi_1.$$

令其为零，且 $\partial^2W/\partial i_2^2=L_2>0$ 确认是极小值，所以 $i_{2*}=-(N_1S_1/N_2S_2)i_1$，最小磁能为 $W_{\min}=L_1i_1^2(1-S_1/S_2)/2$，在 $i_1\neq0$ 时为正。

外环的剩余场能

把 $N_2i_{2*}=-N_1i_1S_1/S_2$ 代入图中的两个磁场，得到

$$B_{\text{内}}=\frac{\mu N_1i_1}{\ell}\left(1-\frac{S_1}{S_2}\right),\qquad B_{\text{外环}}=-\frac{\mu N_1i_1}{\ell}\frac{S_1}{S_2}.$$

极小值对应内区还剩一部分原磁场，外环区同时存有外绕组产生的磁场。当 $S_2\to S_1$，内区的合场趋零，外环区的体积也趋零。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第五讲

暂态电路与电磁振荡

2026

目录

第五讲　暂态电路与电磁振荡 **1**

5.1　切换过程中的连续状态与初始条件 1

5.2　一阶电路与时间常量 3

5.3　总电量、有限暂态量与能量 7

5.4　LC 振荡的方程、初相位与能量交换 8

5.5　串联 RLC 的阻尼与能量耗散 10

5.6　电磁机械振荡与两个连续状态 12

5.7　受迫响应与自然响应怎样共同满足初态 13

5.8　多储能元件中的独立振荡与剩余能量 14

5.9　例题与分析 16

5.10 本讲小结 37

5.11 练习 37

练习解答 42

第五讲　暂态电路与电磁振荡

5.1　切换过程中的连续状态与初始条件

图 5.1 中，开关拨到位置 1，电源给线圈供能。线圈电流从零开始上升，直到电阻压降等于电源电压。开关再拨到位置 2，电源退出，电感与电阻仍闭合，线圈中原方向的电流逐渐减小，磁场能随之转成焦耳热。若把线圈换为电容，位置 1 使电容充电，位置 2 使它放电。换接时，前一个状态决定后一个过程的起点。

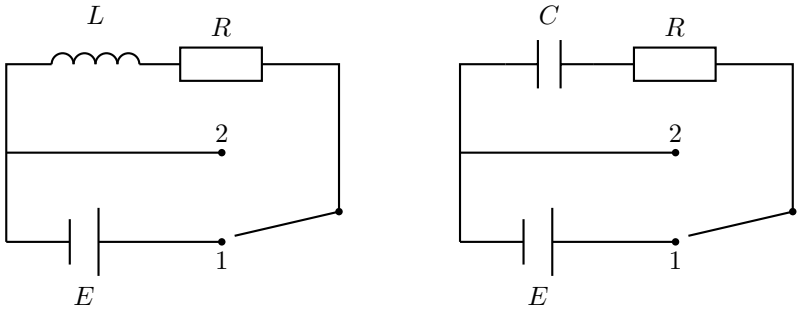
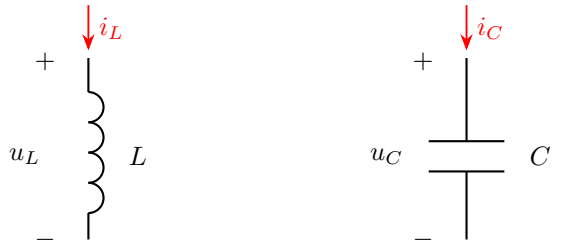


图 5.1: 单刀双掷开关的两个位置。位置 1 接入电源，位置 2 把储能元件与电阻接成闭合回路

开关改变连接关系时，先从旧电路求电感电流和电容电压。理想电感满足 $u_L = L\dot{i}$，电容满足 $i_C = C\dot{u}_C$。在开关前后的一小段时间内积分，

$$L[i]_{t_-}^{t_+} = \int_{t_-}^{t_+} u_L \,\mathrm{d}t, \qquad C[u_C]_{t_-}^{t_+} = \int_{t_-}^{t_+} i_C \,\mathrm{d}t.$$

时间间隔趋零、相应的电压或电流有限时，积分也趋零。因此在新电路中，电感以原电流为初值，电容以原电压为初值。新电路的电阻压降随支路电流立即改变。图 5.2 对照这两种初值如何传递。



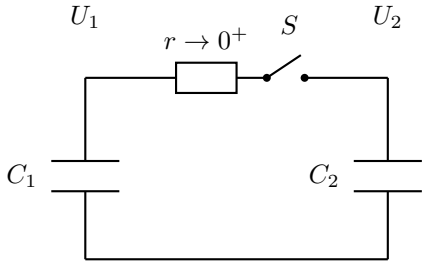
$L\Delta i_L = \int u_L \,\mathrm{d}t$　　$C\Delta u_C = \int i_C \,\mathrm{d}t$

图 5.2: 元件正向与状态连续条件；连续性来自相应电压或电流的短时积分

图 5.2 的两行分别由 $L\Delta i = \int u_L \,\mathrm{d}t$ 和 $C\Delta u = \int i_C \,\mathrm{d}t$ 得到。切换间隔趋零且相应被积量有限时，积分趋零；

5.1.1　快慢阶段与冲激改变状态的情形

若理想开关把不同电压的电容直接并接，电流中出现冲激，原来每只电容的电压就不再分别连续；能保留的是并接导体总电荷。类似地，互感中的理想电流阶跃可以给另一个电感施加电压冲激。开关前后的状态差由电压或电流在快过程中的积分决定。



$U_f = (C_1U_1 + C_2U_2)/(C_1 + C_2)$

图 5.3: 电压不同的电容通过小电阻接通，电荷守恒而各自电压在快过程中改变

图 5.3 中，两电容原来的上极板电压为 U_1, U_2。保留一只小电阻 r 连接上极板，下极板直接连通。从左到右取电流为正。记压差为 $D = u_1 - u_2$，则

$$i = \frac{D}{r}, \qquad C_1\dot{u}_1 = -i, \qquad C_2\dot{u}_2 = i, \qquad \dot{D} = -\frac{D}{rC_e}, \quad C_e = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

若 $D_0 = U_1 - U_2 \neq 0$，分离变量后从初态积分，

$$\int_{D_0}^{D(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{rC_e}, \qquad [\ln|z|]_{D_0}^{D(t)} = -\frac{t}{rC_e}.$$

合并对数并保留 D_0 的符号，得 $D = D_0\mathrm{e}^{-t/(rC_e)}$。$D_0 = 0$ 时两电容从开始就在平衡。由于 $C_1\dot{u}_1 + C_2\dot{u}_2 = 0$，最终共同电压为 $U_f = (C_1U_1 + C_2U_2)/(C_1 + C_2)$。电阻热为

$$Q_J = \frac{D_0^2}{r}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/(rC_e)}\,\mathrm{d}t = \frac{D_0^2}{r}\left[-\frac{rC_e}{2}\mathrm{e}^{-2t/(rC_e)}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}C_eD_0^2.$$

小电阻使这段电流持续得很短，总热量仍有限。例 5.10 以快过程后的共同电压为振荡初值。例 5.8 则由续流电流首次降到零的时刻决定换段。

5.2 一阶电路与时间常量

理想电感 L 串联电阻 R 接到恒压 E 上，回路有 $L\dot{i} + Ri = E$。令最终电流 $I_\infty = E/R$，减去稳态关系后得 $L\,\mathrm{d}(i - I_\infty)/\,\mathrm{d}t = -R(i - I_\infty)$。令 $\delta = i - I_\infty$。若 $\delta(0) \neq 0$，分离变量并保留积分上下限，

$$\int_{\delta(0)}^{\delta(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{\delta(0)}^{\delta(t)} = -\frac{R}{L}[s]_0^t.$$

代入上下限并合并对数，

$$\ln\left|\frac{\delta(t)}{\delta(0)}\right| = -\frac{Rt}{L}.$$

偏差的符号不会在有限时间内改变，故 $\delta(t) = \delta(0)\mathrm{e}^{-Rt/L}$；若初始偏差为零，原方程直接给出恒定的稳态解。代入 $\delta(0) = I_0 - I_\infty$，得到

$$i = I_\infty + (I_0 - I_\infty)\mathrm{e}^{-t/\tau_L}, \qquad \tau_L = L/R.$$

电感电压为 $u_L = E - Ri$，自感电动势为 $-u_L$。电源断开并经电阻续流时，$E = 0$，电流按相同形式衰减。$t = \tau_L$ 时剩余偏差为原来的 e^{-1}。指定误差 η 时应取 $t \geq \tau_L\ln(1/\eta)$。

电容充电回路满足 $R\dot{q} + q/C = E$。令 $z = q - CE$，则 $\dot{z} = -z/(RC)$，于是

$$\int_{q_0-CE}^{q-CE}\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC}, \qquad [\ln|z|]_{q_0-CE}^{q-CE} = -\frac{1}{RC}[s]_0^t.$$

当 $q_0 \neq CE$ 时，端点给出 $\ln|(q - CE)/(q_0 - CE)| = -t/(RC)$。指数化并恢复偏差的原符号，得 $q - CE = (q_0 - CE)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。初始偏差为零时仍应单独取恒定解；其他初态给出 $q = CE + (q_0 - CE)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。时间常量 RC 与电感的 L/R 对电阻的依赖相反：电阻越大，电容充电越慢，电感电流建立相对最终值则越快。这里比较的是归一化时间过程，电感的最终电流 E/R 本身还会随电阻改变。

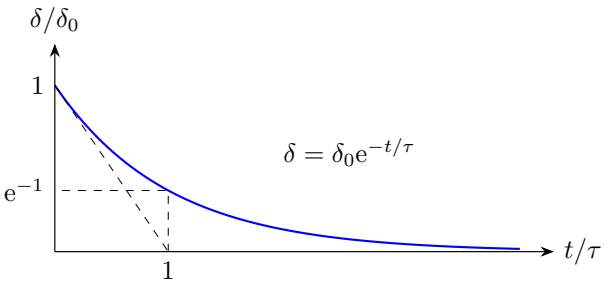


图 5.4: 一阶过程的剩余偏差；虚线为初始切线及一个时间常量的读数

图 5.4 把电感电流偏差 $\delta = i - I_\infty$ 或电容电压偏差 $\delta = u - U_\infty$ 除以各自初始偏差 δ_0。曲线在 $t = \tau$ 处的高度为 e^{-1}，初始切线则在同一横坐标截到零；实际曲线始终不在有限时间到零。初值高于或低于新稳态时，δ_0 符号不同，但归一化后的曲线相同。$\delta_0 = 0$ 时系统从开始就在稳态，无须作此归一化。

复杂的线性电阻网络接单个电感时，可先对电感端口求戴维南等效电压 E_{th} 和电阻 R_{th}，再使用 L/R_{th}。求等效电阻时独立理想电压源短接、理想电流源断开，电源内阻仍保留。等效电阻由切换后的连接决定。

5.2.1　戴维南等效与非零初态

对只有一个电感的线性网络，把其他元件等效到其两端以后，可将电感电流写成“新稳态加衰减偏差”。这个形式不要求初电流为零，初值高于新稳态时电流下降，自感电动势顺原电流；初值低于新稳态时电流上升，自感作用反向。两种情况的电流都连续，但电感端电压可以在开关切换后立刻改变。

若电路中同时有电感和电容，通常需要两个初始状态。仅知道切换前端电压，不足以确定切换后全部运动；还要知道电感中存储的电流。把未知初值误当成零，会改变振幅和相位，甚至改变电容最先带电的极性。对电容并联电感的释放过程，最可靠的方法是先写节点电流守恒，再根据它确定电容电压的初始导数。

实际开关存在断开再接通的微小时间。若这段时间中电感没有续流路径，端电压可能由寄生电容决定，之后再接通的初态与理想无缝换接不同。在有续流通路的理想快速换接中，以切换前的电流作为新通路的初值。

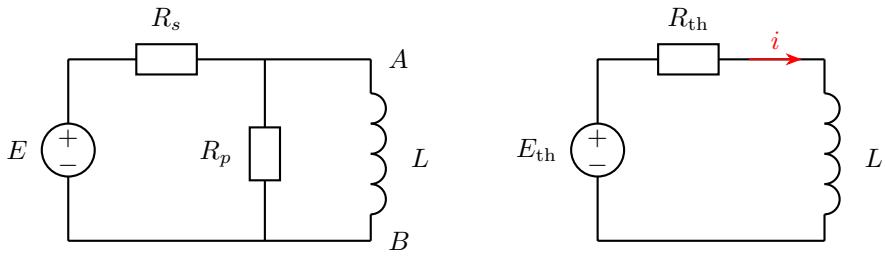


图 5.5: 单电感端口的电阻网络及其等效回路；初始电流由切换前的电路另行确定

以图 5.5 为例，将电感移开后由分压得 $E_{\text{th}} = ER_p/(R_s + R_p)$；再将独立理想电压源置零，得到 $R_{\text{th}} = R_s \parallel R_p$。于是

$$i(t) = \frac{E_{\text{th}}}{R_{\text{th}}} + \left(I_0 - \frac{E_{\text{th}}}{R_{\text{th}}}\right) \mathrm{e}^{-R_{\text{th}}t/L}.$$

初流 I_0 来自换接前。求出电感端电压后，再代回左图即可求原网络内部的电流与功率。

用导线短接图中的端口，得到短路电流 $I_{\text{sc}} = E_{\text{th}}/R_{\text{th}}$。它也就是该电路中电感的稳态电流。例 5.5 有两个电源，初值来自换接前的两路支流，新稳态由换接后的端口决定。

例 5.1 要算有限时间内通过的电量。先由电感电流在接通时的初值求出整条电流曲线，再在所给时间范围内积分，所得电量对应曲线下的面积。

5.2.2 阶跃换接、有限脉冲与误差要求

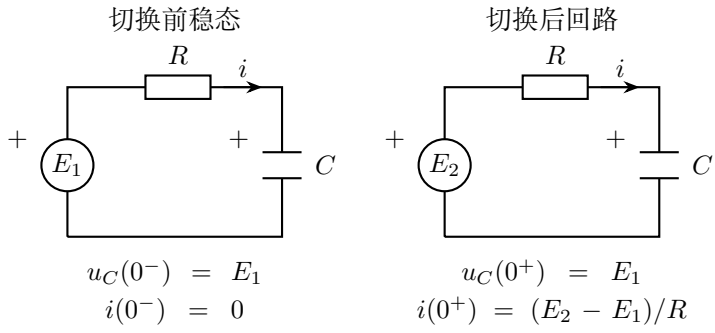


图 5.6: 电容从一个恒压源无缝换接到另一个恒压源；电压按上极板对下极板计

图 5.6 左图先用稳态电流为零确定电容原有电压，右图保留这一电压、换入新电源。沿右图正电流方向列式，得到 $E_2 - Ri - u_C = 0$，再用 $i = C\dot{u}_C$ 建立下面的暂态方程。电容电压连续，电阻电流却可以立即改变；当 $E_2 < E_1$ 时，图中电流的

计算值为负，表示实际电流反向。电容电压从 $u_C(0^+)=E_1$ 向新稳态 $u_C(\infty)=E_2$ 变化。

电容在电源从 E_1 改为 E_2 的阶跃中，若切换前已稳态，初电压 $U_1=E_1$，之后满足 $RC\dot{u}+u=E_2$。令 $w=u-E_2$，则 $w(0)=E_1-E_2$。当 $E_1\neq E_2$ 时，分离变量并按初值确定积分下限：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{w}&=-\frac{\mathrm{d}t}{RC},\\ \int_{E_1-E_2}^{w(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}&=-\frac{1}{RC}\int_0^t \mathrm{d}s,\\ \left[\ln|z|\right]_{E_1-E_2}^{w(t)}&=-\frac{t}{RC},\\ \ln\left|\frac{w(t)}{E_1-E_2}\right|&=-\frac{t}{RC}.\end{aligned}$$

取指数并由初值确定符号，得到 $w(t)=(E_1-E_2)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。若 $E_1=E_2$，原方程的初始状态已经是平衡态，故 $w(t)=0$，同一结果仍成立。再对电压求导，$C\dot{u}=C(E_1-E_2)(-1/RC)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$，故

$$u(t)=E_2+(E_1-E_2)\mathrm{e}^{-t/(RC)},\quad i(t)=\frac{E_2-E_1}{R}\mathrm{e}^{-t/(RC)}.$$

当 $E_2<E_1$ 时，电流反向，电容向网络释放能量；外电源也可能吸收能量。热量由电流平方积分求出：

$$\begin{aligned}Q_J&=\frac{(E_2-E_1)^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/(RC)}\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{(E_2-E_1)^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}\mathrm{e}^{-2t/(RC)}\right]_0^\infty=\frac{C}{2}(E_2-E_1)^2.\end{aligned}$$

这里电源做的有向功为 $E_2C(E_2-E_1)$，减去电容储能的变化也得到同一热量。

串联 RL 的电源也可在任意时刻改变。每个恒压阶段的解由该阶段稳态与初始偏差组成，在切换点保持电感电流相等即可接续。对于短脉冲，脉冲结束时电流一般尚未到稳态，把脉冲宽度代入第一阶段的电流解，所得的末电流决定续流阶段释放的磁能。

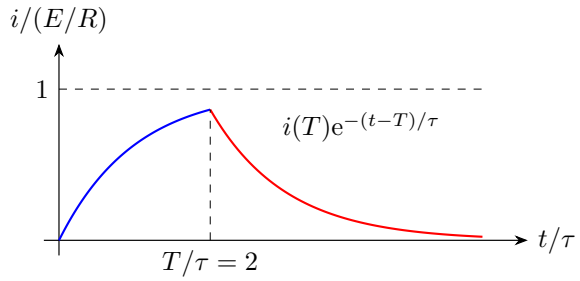


图 5.7: 有限恒压脉冲结束后经同一电阻续流，续流初值等于脉冲结束时的电流

图 5.7 示 $T=2\tau$ 的脉冲，换接时 $i(T)=(E/R)(1-\mathrm{e}^{-T/\tau})$。后半段以此为初流，续流全过程发热为 $Li(T)^2/2$。若续流电阻另有数值，后半段还须使用新的时间常量。

“五个时间常量后稳定”是一种误差约定。指数偏差在 5τ 时仍有约 0.67%，若要求千分之一误差，应使用 $\ln 1000\simeq 6.91$ 个时间常量。题目没有规定精度时，严格数学解用极限表示稳态，工程估计则需要给出所采用的容差。

时间常量还应与测量时段比较。若观测时间远小于 L/R，电感电流初期近似 $i\simeq Et/L$；若远小于 RC，未充电电容电压近似 $u\simeq Et/(RC)$。这些展开来自 $\mathrm{e}^{-z}\simeq 1-z$，展开参数分别是 tR/L 和 $t/(RC)$，两种近似分别用于对应参数远小于 1 的时段。

5.3 总电量、有限暂态量与能量

电流趋于非零常量时，从接通一直积分到无穷时刻的总电量必然发散。在有限观察时间内，可以把总电量分成稳态电流贡献与暂态电流偏差的贡献。对于从零建立的电感电流，

$$Q(T)=\frac{E}{R}\left[t+\tau_L\mathrm{e}^{-t/\tau_L}\right]_0^T=\frac{E}{R}[T-\tau_L(1-\mathrm{e}^{-T/\tau_L})].$$

这里 $\mathrm{d}(\tau_L\mathrm{e}^{-t/\tau_L})/\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-t/\tau_L}$，原函数在下限 0 的值为 τ_L。相对于从一开始就达到稳态而少通过的电量，则为

$$\int_0^\infty (I_\infty-i)\,\mathrm{d}t=I_\infty\left[-\tau_L\mathrm{e}^{-t/\tau_L}\right]_0^\infty=I_\infty\tau_L=\frac{EL}{R^2}.$$

接通后的总电量随 T 继续增大，暂态欠额随 T 增大趋于有限值。

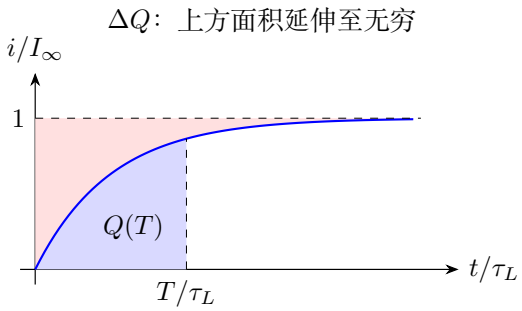


图 5.8: 同一建立电流曲线下的有限时间电量与上方的暂态欠额，是不同的积分区域

图 5.8 中的蓝色区域只积到 T，红色区域应沿水平渐近线一直延伸。若把两个区域都称为“总电量”，便会把一个随观察时间增长的量与一个有限的暂态差额混淆。

在电容充电过程中，电源做功 $E\Delta q$，电容能增量由 $q^2/(2C)$ 的始末差确定，差额为热。未充电电容接恒压源的全过程中，电源做功 CE^2，电容只储存 $CE^2/2$，另有一半耗散；这一结论与充电电阻大小无关，但充电时间有关。电感续流释放的总热则为初始磁场能 $LI_0^2/2$，前提是没有其他储能或外源继续做功。

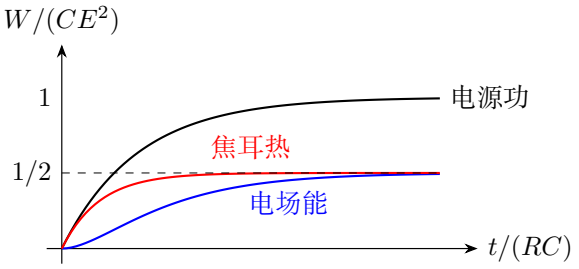


图 5.9: 未充电电容接恒压源时，累计电源功、储能和热量的关系

令 $s = t/(RC)$。图 5.9 三条曲线分别为 $W_s/(CE^2) = 1 - \mathrm{e}^{-s}$、$W_E/(CE^2) = (1-\mathrm{e}^{-s})^2/2$、$Q_J/(CE^2) = (1-\mathrm{e}^{-2s})/2$，任意时刻均有 $W_s = W_E + Q_J$。改变电阻只改横轴时间尺度；保留初态和末态后，全过程能量比例不变。

5.4　LC 振荡的方程、初相位与能量交换

在无电阻的闭合 LC 回路，约定电容上极板电荷为 q，电流 $i = -\dot{q}$ 表示上极板放电。回路电压关系为 $L\dot{i} = q/C$，消去电流得 $\ddot{q} + q/(LC) = 0$。令 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，

试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，则 $\dot q=s\mathrm{e}^{st}$、$\ddot q=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并约去指数得 $s^2+\omega_0^2=0$，两个根为 $s=\pm\mathrm{j}\omega_0$；将共轭指数解合成实函数，一般解为

$$q=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t.$$

两个常数分别由初始电荷和初始电流决定。先对一般解求导，

$$\dot q=-A\omega_0\sin\omega_0 t+B\omega_0\cos\omega_0 t,\qquad i=-\dot q.$$

若 $q(0)=Q_0, i(0)=I_0$，则 $A=Q_0$、$-B\omega_0=I_0$，故 $B=-I_0/\omega_0$，因而 $i=Q_0\omega_0\sin\omega_0 t+I_0\cos\omega_0 t$。周期 $T_0=2\pi\sqrt{LC}$，电流与电荷相差四分之一周期，但谁先达到峰值须结合符号与初态判断。

两端能量为 $W_E=q^2/(2C)$、$W_B=Li^2/2$。逐项使用复合函数求导，

$$\dot W_E=\frac{q}{C}\dot q,\qquad \dot W_B=Li\dot i=-L\dot q\,\dot i.$$

所以 $\dot W_E+\dot W_B=\dot q(q/C-L\dot i)=0$，总能量守恒。电容电压为零时电流绝对值最大；电流为零时电荷绝对值最大。四分之一周期后仅仅是能量完成一次单向转移，半周期后电容极性反转，一整周期后所有有向状态量才回到初值。

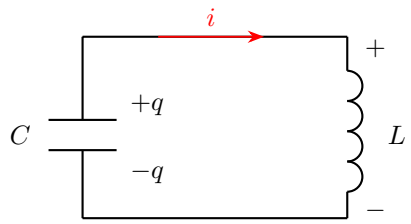


图 5.10: 电流从带电极板流出后进入电感；$i=-\dot q$，电感被动端压为 q/C

图 5.10 的电流箭头从电容上极板流出，所以该极板电荷减少时 $i>0$，即 $i=-\dot q$。沿图示上支路向右经过电感，电容电压推动电流建立，给出 $L\dot i=q/C$。后续相位图和时间图沿用这一正向。

5.5　串联 RLC 的阻尼与能量耗散

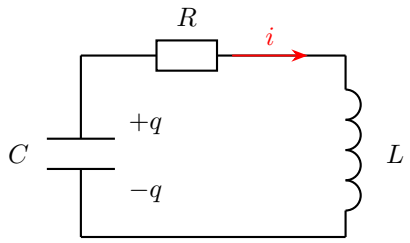


图 5.11: 串联 RLC 自由回路沿放电电流列式，电阻持续耗散两种储能

图 5.11 与理想 LC 采用相同正向，先列 $L\dot{i}+Ri=q/C$，再代 $i=-\dot{q}$，便得到电荷方程。由于 $\dot{i}=-\ddot{q}$，移项后得到 $L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$。

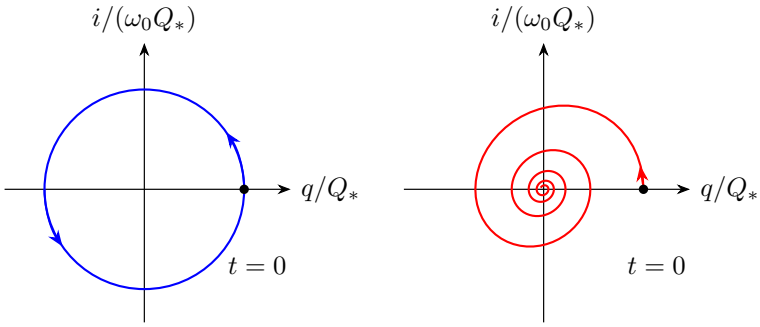
含电阻的串联 RLC 自由电路，电荷满足 $L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$。试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，其导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代回并除以非零指数，得 $Ls^2+Rs+1/C=0$。再除以 L 并配方，

$$\left(s+\frac{R}{2L}\right)^2=\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}.$$

当 $R<2\sqrt{L/C}$ 时右端为负，根为 $-R/(2L)\pm\mathrm{j}\omega_d$，$\omega_d=\sqrt{1/(LC)-R^2/(4L^2)}$，振幅指数衰减；等号时临界阻尼；更大时两根均为负实数，没有周期反向的振荡。把所有含电感和电容的电路都称为等幅振荡是不对的。

阻尼电路的总能量变化率为 $-Ri^2$，电流的平方随时间改变，所以耗散速率也随时间改变。弱阻尼时才可将一个周期内的能量变化近似平均，得到包络按 $\mathrm{e}^{-Rt/L}$ 衰减。瞬时热功率由实际的 Ri^2 给出，电荷曲线与电流曲线要用同一组初态。

5.5.1 从相平面与时间图理解阻尼



$R=0$：能量保持　　$0<R<2\sqrt{L/C}$：能量耗散

图 5.12: 归一化电荷、电流相平面：理想回路的闭合轨道与欠阻尼回路的收缩轨道

图 5.12 取初态 $q=Q_*>0, i=0$，并使用前文的放电正向 $i=-\dot{q}$。起点处 $\dot{i}=q/(LC)>0$，状态点先向上；到达上半平面后 $\dot{q}<0$，所以沿逆时针方向前进。左图的归一化使能量椭圆变成圆；在未归一化的 q,i 坐标中仍是椭圆。右图采用同样初态，电阻使每次绕转后能量减小，轨道向原点收缩。横坐标记录电荷，纵坐标记录电流。

理想 LC 的能量等值线 $q^2/(2C)+Li^2/2=W_0$ 可与图 5.12 的运动方向结合使用：给定 q 时，能量只确定 $|i|$，而正负号取决于状态点位于上半轨道还是下半轨道。电荷端点处 $i=0$，电流端点处 $q=0$，对应两种储能完全转换的时刻。

含电阻时，能量等值线不再保持，状态轨迹向原点收缩。欠阻尼时轨迹绕原点旋转，电容反复换极；临界与过阻尼时一般不出现这种周期绕转。对临界阻尼 $R=2\sqrt{L/C}$，特征根重合为 $-\alpha$，令 $q=y(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$，则

$$\dot{q}=(\dot{y}-\alpha y)\mathrm{e}^{-\alpha t},\qquad \ddot{q}=(\ddot{y}-2\alpha\dot{y}+\alpha^2 y)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

代入 $\ddot{q}+2\alpha\dot{q}+\alpha^2 q=0$ 后只余 $\ddot{y}=0$。以 $y(0)=A, \dot{y}(0)=B$ 积分，$\dot{y}(t)-B=\int_0^t 0\,\mathrm{d}s=0$，再有 $y(t)-A=\int_0^t B\,\mathrm{d}s=B[s]_0^t=Bt$。因此通解为 $(A+Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t}$。

初电荷 Q_0、初电流为零时，$q(0)=A=Q_0, \dot{q}(0)=B-\alpha A=0$，解得 $B=\alpha Q_0$，临界解为 $q=Q_0(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$。过阻尼的两个负实根为 s_1, s_2，写 $q=A\mathrm{e}^{s_1 t}+B\mathrm{e}^{s_2 t}$，由 $A+B=Q_0$、$s_1A+s_2B=0$ 解出 $A=Q_0 s_2/(s_2-s_1)$、$B=-Q_0 s_1/(s_2-s_1)$，得 $q=Q_0(s_2\mathrm{e}^{s_1 t}-s_1\mathrm{e}^{s_2 t})/(s_2-s_1)$。两条曲线都由图中的同一初态出发，衰减形式由根的重数和大小决定。

弱阻尼近似中，电荷振幅以 $\mathrm{e}^{-Rt/(2L)}$ 衰减，能量包络以 $\mathrm{e}^{-Rt/L}$ 衰减，两者指数相差一倍。用某两次同极性电荷峰值的比可以估计阻尼，再求能量损失；若直接

把振幅比当能量比，会把损失估计错。全过程最终发热可由初总能量求得，但任意中间时间的热量还要扣除当前电场能与磁场能。

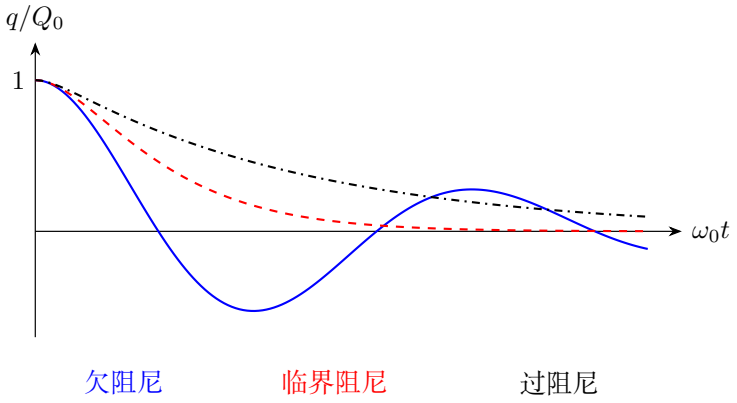


图 5.13: 相同初电荷、零初电流时，三种阻尼的电荷时间曲线

图 5.13 统一使用无阻尼角频率 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 量度时间。三条曲线分别取阻尼比 $R/(2\sqrt{L/C})$ 为 $0.2, 1, 2$，起点高度和初始斜率相同。蓝线穿过横轴，表示电容换极；另外两线在本图初态下保持正电荷并渐近衰减。这张图取初电流为零。给定其他初电流时，可以用相同的特征根重新确定解中的两个系数。

5.6 电磁机械振荡与两个连续状态

零电阻多杆回路中，自感阻止电流突变，使机械相对位移与磁能之间可以周期交换。设等宽两杆的约化质量为 μ、相对位移变化为 ξ，以初态间距为位移参考，并取初始电流为零。令 $k = Bl$，向纸里为正磁通，总磁链守恒给出 $Li + k\xi = 0$。相对受力为 $\mu\ddot{\xi} = ki$，于是 $\ddot{\xi} + k^2\xi/(\mu L) = 0$。磁链关系给出的等效回复力系数为 k^2/L。

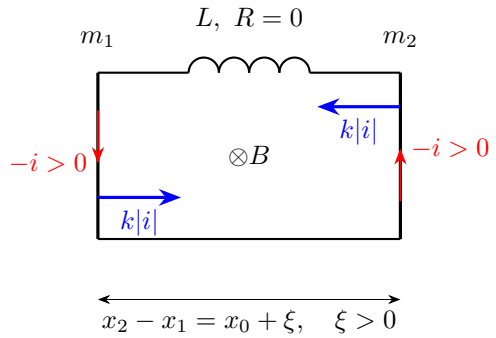


图 5.14: 间距增加后实际电流逆时针，两棒受力使间距减小；质心运动另行保留

图 5.14 用顺时针为参考电流正向：右棒中正电流向下，正磁力便向右。间距增大时 $i=-k\xi/L<0$，所以右棒受力向左、左棒受力向右，构成相对运动的回复作用。两棒总动量守恒，质心动能保持恒定。

相对运动的角频率与能量为

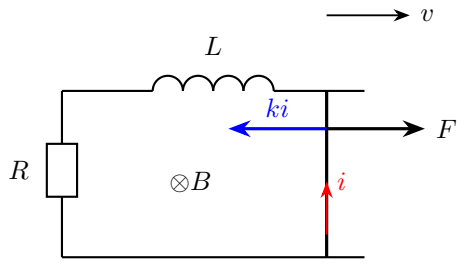
$$\Omega=\frac{k}{\sqrt{\mu L}},\qquad \frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2+\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\mu\dot{\xi}^2+\frac{k^2\xi^2}{2L}=\text{常量}.$$

固定 L 是几何近似，要求棒间距改变不显著影响回路自感；若两棒接近到碰撞或交叉，原模型亦须终止。这里磁能对应相对位移的二次势能，与纯电阻回路的速度阻尼不同。

5.7 受迫响应与自然响应怎样共同满足初态

线性电路的完整响应可写成一个特解与齐次解之和。特解反映持续外源，自然响应负责使总电流、电压满足切换瞬间的状态条件。正弦电源接通后，最终正弦稳态只是特解；若接通相位不合适，初期还会叠加指数分量。电源相位相同不等于电流初相位相同，电感和电阻决定的相位滞后必须先算出。

二阶电路需要两个独立初始条件。以电容电荷为变量时，电感初始电流通过电荷导数进入；以导棒速度为变量时，电流初值通过加速度进入。对恒力驱动的导棒，电感使电流变化滞后，速度可以围绕终值作衰减振荡。



$$m\dot{v}=F-ki,\quad L\dot{i}+Ri=kv$$

图 5.15: 含自感导棒具有速度和电流两个状态；动生电动势与安培力形成相反的功率交换

图 5.15 的两个一阶方程分别给出速度斜率和电流斜率。消元得

$$mL\ddot{v}+mR\dot{v}+k^2v=RF,\qquad v(0)=v_0,\quad \dot{v}(0)=\frac{F-ki_0}{m}.$$

初始电流作为初始加速度进入二阶方程。若 $R>0$，终态为 $i_\infty = F/k, v_\infty = RF/k^2$；欠阻尼条件为 $R<2k\sqrt{L/m}$。方程的两个状态还决定瞬时能量平衡

$$Fv=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Li^2\right)+Ri^2.$$

速度降低时，部分机械能可以转入磁场。

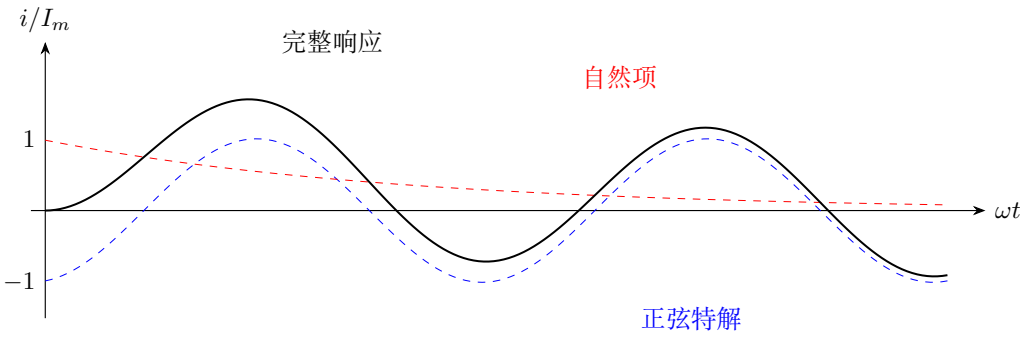


图 5.16: 正弦电压从过零点接通时，正弦特解与自然项相加才满足零初流

固定参数的串联 RL 电路受正弦电压驱动时，设 $i_{\mathrm{ss}}(t)$ 是已求得的正弦特解，任意初流 I_0 对应的完整解为

$$i(t)=i_{\mathrm{ss}}(t)+[I_0-i_{\mathrm{ss}}(0)]\mathrm{e}^{-t/\tau},\qquad \tau=L/R.$$

齐次项由接通时的电流与稳态特解在该时刻的差确定。图 5.16 取 $e=E_m\sin\omega t$、$R/(\omega L)=0.2$，稳态相位滞后 $\phi=\arctan 5$，因此 $i_{\mathrm{ss}}(0)=-I_m\sin\phi$。红色自然项在零时刻恰抵消蓝色特解，使总电流为零；两者斜率也在起点抵消，与原方程给出的 $\dot{i}(0)=e(0)/L=0$ 一致。

若接通时已满足 $I_0=i_{\mathrm{ss}}(0)$，齐次项系数为零，电流从接通时刻起便沿稳态曲线变化。电阻越小，自然项衰减越慢；理想纯电感的常量积分偏置不会自行消失。

5.8　多储能元件中的独立振荡与剩余能量

互感把两个储能回路的电流变化联系起来。对称结构可把电荷或电流分成相加、相减的两个组合，使耦合方程分离。每种组合对应一种固有频率，实际运动是它们的叠加；弱耦合时两频率接近，叠加产生缓慢的能量交换。要从电荷和电流的叠加式求能量转移，把两回路的电荷和电流同时代入，磁能中保留互感项。

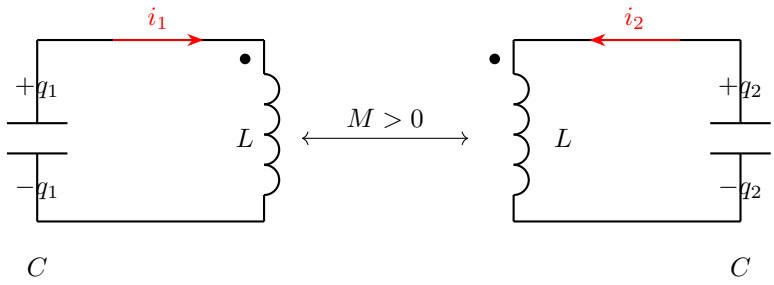


图 5.17: 两个独立闭合回路只作磁耦合；两电流均流入同名端并从各自的带电极板流出

图 5.17 采用 $i_j=-\dot{q}_j$。由互感端压分别列回路方程，得到

$$L\ddot{q}_1+M\ddot{q}_2+q_1/C=0,\qquad M\ddot{q}_1+L\ddot{q}_2+q_2/C=0.$$

令 $q_\pm=q_1\pm q_2$，两式相加、相减便使方程分离：$(L\pm M)\ddot{q}_\pm+q_\pm/C=0$，频率为 $\omega_\pm=1/\sqrt{(L\pm M)C}$。每个独立组合均须使用自己的初值，最后再还原两回路的电荷与电流。总磁场能还含交叉项 Mi_1i_2。

含电阻也不一定意味着所有初始磁能最终都变成热。两只理想电感并联时，若存在不经过电阻的环流组合，它可以持续存在；电阻只衰减与端口电压相联系的组合。末态由电流和为零以及一个磁链差不变量共同决定。先找不变量，再计算耗散部分，往往比逐支路强行积分更清晰。

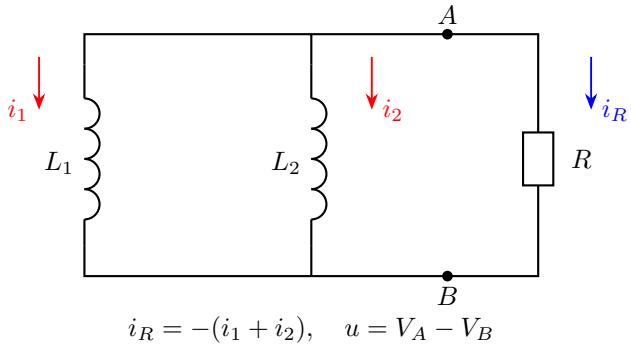


图 5.18: 两个未耦合理想电感并联电阻释放能量；公共端口可以无流，电感间仍有环流

图 5.18 中三条支路均取向下为正。节点关系给出 $i_R=-(i_1+i_2)$，共同端压给出 $L_1\dot{i}_1=L_2\dot{i}_2=u=-R(i_1+i_2)$。令 $S=i_1+i_2$，相加后

$$\dot{S}=-R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)S,\qquad L_1i_1-L_2i_2=D_0=\text{常量}.$$

令 $\tau = L_1L_2/[R(L_1+L_2)]$，总电流方程的分离变量式为

$$\int_{S(0)}^{S(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad [\ln|z|]_{S(0)}^{S(t)} = -\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

非零初始和给出 $\ln|S(t)/S(0)| = -t/\tau$，保持其初始符号，故 $S(t) = S(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$。若 $S(0)=0$，直接取 $S(t)=0$；磁链差则由 $\mathrm{d}(L_1i_1 - L_2i_2)/\mathrm{d}t = u-u = 0$ 得到，因此不衰减。末态 $S=0$，于是 $i_{1\infty} = D_0/(L_1+L_2)$、$i_{2\infty} = -i_{1\infty}$，可保留非零环流。完整磁能可分解为

$$W_B = \frac{1}{2}\frac{L_1L_2}{L_1+L_2}S^2 + \frac{D_0^2}{2(L_1+L_2)}.$$

前一项最终耗散，后一项作为磁能保留。练习 5.6 由两支路初始电流分别求这两部分能量。

5.9　例题与分析

例 5.1 (电感电流的建立与有限时间电量)**.** 恒压源电动势 E、内阻 r，与电阻 R、理想电感 L 串联，初始电流为零。求电流、到时刻 T 的电量及相对于稳态电流少通过的总电量；判断“到完全稳定为止的总电量”是否有限。

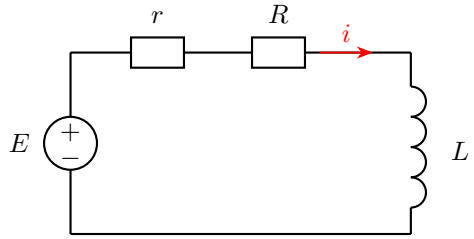


图 5.19: 电源内阻与外电阻均在电感建立电流的串联通路中

解　电流的建立

图 5.19 中总电阻为 $R_\Sigma = R+r$，$L\dot{i} + R_\Sigma i = E$。令 $\tau = L/R_\Sigma$，先减去新稳态电流 $I_\infty = E/R_\Sigma$，令 $j = i - I_\infty$，则 $\dot{j} = -j/\tau$。分离变量，

$$\int_{j(0)}^{j(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad [\ln|z|]_{j(0)}^{j(t)} = -\frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$

代入两端得 $\ln|j(t)/j(0)| = -t/\tau$。保持初始偏差的符号，得 $j(t) = j(0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$；接通前电流为零，故 $j(0) = -I_\infty$，代回得 $i = E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})/R_\Sigma$。

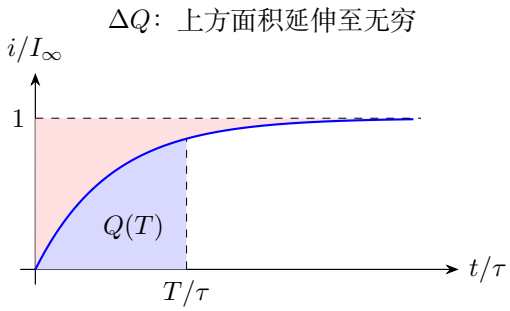


图 5.20: 有限时间的通过电量和暂态欠额对应不同面积；横轴以 $\tau = L/(R+r)$ 归一化

有限时间的电量

图 5.20 中曲线下面积给出通过电量。先分别积分常量项和指数项，

$$\begin{aligned} Q(T) &= \frac{E}{R_\Sigma}\int_0^T (1-\mathrm{e}^{-t/\tau})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{E}{R_\Sigma}[t]_0^T - \frac{E}{R_\Sigma}[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}]_0^T \\ &= \frac{E}{R_\Sigma}T - \frac{E\tau}{R_\Sigma}(1-\mathrm{e}^{-T/\tau}) \\ &= \frac{E}{R_\Sigma}[T-\tau(1-\mathrm{e}^{-T/\tau})]. \end{aligned}$$

指数原函数的导数为 $(-\tau)(-1/\tau)\mathrm{e}^{-t/\tau} = \mathrm{e}^{-t/\tau}$，与被积项一致。

相对稳态的电量欠额

渐近水平线与曲线之间的面积为

$$\Delta Q = \int_0^\infty \frac{E}{R_\Sigma}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E}{R_\Sigma}\left[-\tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E\tau}{R_\Sigma} = \frac{EL}{R_\Sigma^2}.$$

$T\to\infty$ 时，总电量随 T 线性增大，因接通过渡造成的电量缺额趋于有限值 $I_\infty\tau$，其中 $\tau = L/(R+r)$。

短时间的电流和电量

可进一步直接检查初始斜率：$\dot{i}(0) = E/L$，由此在图 5.20 起点应画非零正切线；稳态处斜率趋零。短时间 $T \ll \tau$ 时，$Q(T) \simeq ET^2/(2L)$，与近似线性增长的电流所围三角形面积一致。

例 5.2 (并联双灯的接通与续流)**.** 两个相同灯泡电阻均为 R_d。灯 A_1 与理想电感 L 串联后，与灯 A_2 并联，接电动势 E、串联总内阻 r 的电源。先接通至稳定，再断开电源支路，但保留两灯与电感组成的闭合回路。求两灯电流的变化并比较断开瞬间亮度。

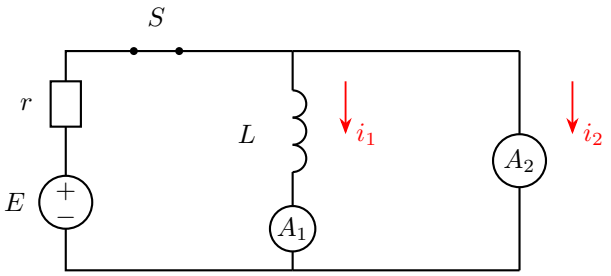


图 5.21: 开关只断开电源支路；右侧的两灯与电感始终保有闭合通路

解　刚接通时的电流

图 5.21 的两灯电流统一取自上而下。本步从接通电源的时刻计时。电感没有电压冲激，故初流 $i_1(0^+)=0$，此刻只有 r 和第二只灯通流，$i_2(0^+)=E/(r+R_d)$。记两灯支路的共同端压为 u，分别沿电源支路和第二只灯列式，得到

$$u = E - r(i_1+i_2) = R_d i_2, \qquad i_2 = \frac{E - r i_1}{r+R_d}.$$

两灯电流的建立

第一支路则满足 $L\dot{i}_1 + R_d i_1 = u$。消去 u, i_2，得到

$$L\dot{i}_1 + \left(R_d + \frac{rR_d}{r+R_d}\right) i_1 = \frac{ER_d}{r+R_d}.$$

令括号为 R_t，右端为 E_t，再令 $j = i_1 - E_t/R_t$。方程成为 $\dot{j} = -(R_t/L)j$，从 $j(0) = -E_t/R_t$ 积分，

$$\int_{-E_t/R_t}^{j(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R_t}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{-E_t/R_t}^{j(t)} = -\frac{R_t}{L}[s]_0^t.$$

所以 $\ln|j(t)/(-E_t/R_t)| = -R_t t/L$，保留负初始偏差得 $j(t) = -(E_t/R_t)\mathrm{e}^{-R_t t/L}$。加回稳态项，解出 $i_1 = (E_t/R_t)(1-\mathrm{e}^{-R_t t/L})$。记 $I = E/(2r+R_d) = E_t/R_t$、$\tau_{\mathrm{on}} = L/R_t$。把 $i_1 = I(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}})$ 代入第二灯的电流关系，得到

$$i_2 = \frac{E - rI(1-\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}})}{r+R_d} = I + \frac{rI}{r+R_d}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}},$$

第二步用了 $E - rI = (r+R_d)I$。因此接通后两灯电流都趋于 I。

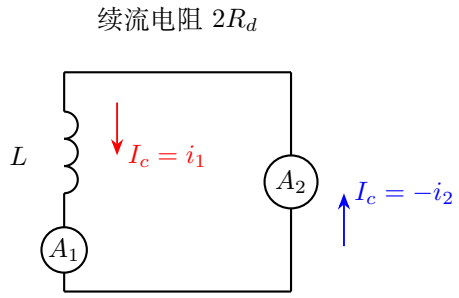


图 5.22: 断开电源后，电感原方向电流经两只灯续流，第二灯的实际电流反向

断开后的续流

图 5.22 表示断开后保留的真实续流回路，以下重新从断开瞬间计时。电感电流仍沿原第一支路向下，节点电流要求第二支路向上，故 $i_1 = I_c, i_2 = -I_c$。电感沿这条闭合路径克服两只灯的电阻降，有 $L\dot{I}_c + 2R_d I_c = 0$。用连续初值 $I_c(0) = I$ 积分，$\int_I^{I_c(t)} \mathrm{d}z/z = -(2R_d/L)\int_0^t \mathrm{d}s$，原函数端点给 $[\ln z]_I^{I_c(t)} = -(2R_d/L)[s]_0^t$，即 $\ln(I_c/I) = -2R_d t/L$，得 $I_c = I\mathrm{e}^{-2R_d t/L}$。

灯泡亮度与总热量

断开前各灯功率均为 I^2R_d，断开后瞬间仍为同一数值；第二灯的电流反向，大小仍为 I，所以两灯在断开瞬间的亮度与断开前相同。随后两灯的电流大小同时衰减，亮度一起降低。总热

$$Q_J = 2R_d I^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-4R_d t/L}\,\mathrm{d}t = 2R_d I^2 \left[-\frac{L}{4R_d}\mathrm{e}^{-4R_d t/L}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}LI^2,$$

与断开前电感储能相等。

例 5.3 (电感旁路灯泡的断开闪亮)**.** 理想电感 L 与灯 D_1 并联后，再与相同的灯 D_2 串联接理想电源 E。两灯电阻均为 R_d。开关在电源与 D_2 所在支路，断开后只留下 L, D_1 组成的闭合回路。求接通瞬间、稳态和断开后的灯电流。

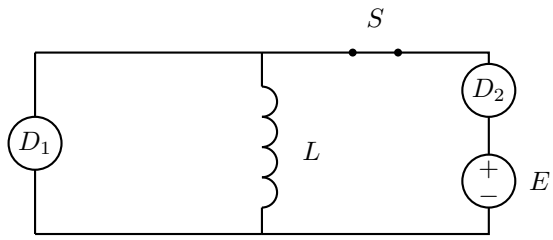


图 5.23: 电感旁路第一灯；开关断开后仅将电源和第二灯支路移出

解　两灯的初始电流

图 5.23 接通瞬间 $i_L = 0$，电感支路不允许电流立即增大，两灯串联，各电流为 $E/(2R_d)$。

接通后的电流

在接通后的整个建立阶段，节点与回路方程为 $i_{D_2} = i_L + i_{D_1}$、$u = R_d i_{D_1} = L\dot{i}_L$、$E = R_d i_{D_2} + u$。消去两灯电流得

$$L\dot{i}_L + \frac{R_d}{2} i_L = \frac{E}{2}.$$

令 $\tau_{\mathrm{on}} = 2L/R_d$、$j = i_L - E/R_d$，有 $\mathrm{d}j/j = -\,\mathrm{d}t/\tau_{\mathrm{on}}$。由 $j(0) = -E/R_d$，

$$\int_{-E/R_d}^{j(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{on}}} \int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{-E/R_d}^{j(t)} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{on}}}[s]_0^t.$$

端点给 $\ln|j(t)/(-E/R_d)| = -t/\tau_{\mathrm{on}}$；初始偏差为负，故

$$j = -\frac{E}{R_d}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}}.$$

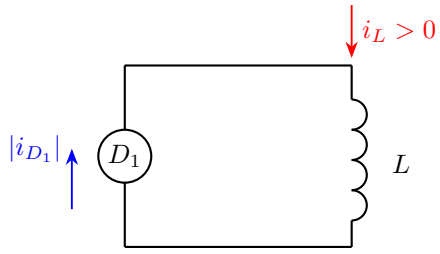
再用 $i_{D_1} = L\dot{i}_L/R_d$、$i_{D_2} = i_L + i_{D_1}$，逐项求导 $\dot{i}_L = (E/R_d)\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}}/\tau_{\mathrm{on}}$，解出

$$i_L = \frac{E}{R_d}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}}), \quad i_{D_1} = \frac{E}{2R_d}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}}, \quad i_{D_2} = \frac{E}{R_d}\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t/\tau_{\mathrm{on}}}\right).$$

接通期间 D_1 逐渐变暗，D_2 逐渐变亮。

断开前的稳态

稳态电感端电压为零，D_1 被旁路而熄灭，D_2 电流为 E/R_d，同样的电流经电感返回。



$$i_L(0^+) = E/R_d$$

图 5.24: 续流仍向下经过电感，随后向上经过 D_1，电源与 D_2 已移出闭合路径

闪亮灯的续流

图 5.24 断开后 D_2 支路没有闭合通路而立即熄灭，L 中原有 $I_0 = E/R_d$ 电流经 D_1 续流，方向与接通初刻 D_1 中电流相反。故 D_1 由断开前的熄灭变为瞬时功率 E^2/R_d，是最初两灯串联时功率的四倍，随后续流回路满足 $L\dot{i} + R_d i = 0$，以断开瞬间为 $t = 0$，分离变量并使用 $i(0) = I_0 > 0$：

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = -\frac{R_d}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln \xi]_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R_d}{L}[s]_0^t.$$

所以 $\ln(i/I_0) = -R_d t/L$，取指数得 $i = I_0 \mathrm{e}^{-R_d t/L}$，保持原电流方向并衰减。释放总热 $LI_0^2/2$ 与原磁能相等。

例 5.4 (电容并联电感的极性演变)**.** 理想电感 L 与电容 C 并联在 A, B 两端，电容电压取 $u = V_A - V_B$。它们与 $R_1 = 3\,\Omega, R_2 = 6\,\Omega$ 的并联组串联，接 $E = 5\,\mathrm{V}, r = 1\,\Omega$ 电源。稳态后断开电源，电阻组接在悬空端而不再通流，仅余理想 LC 闭合。求电感初流及电容极性、振幅。

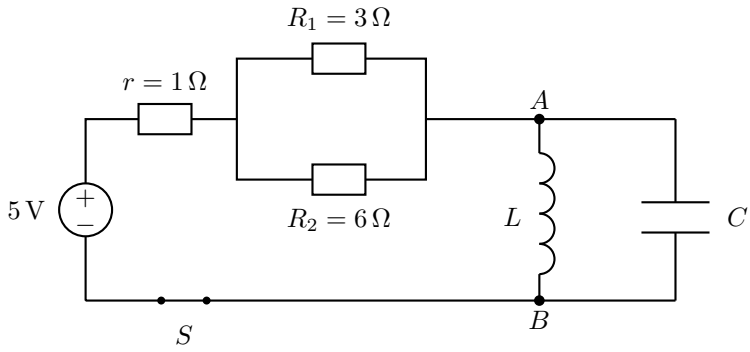


图 5.25: 开关在电源返回支路；断开后电阻组一端悬空，A, B 之间的 LC 通路仍闭合

解　断开前的电压与电流

图 5.25 中切换前电感稳态相当于导线，电容电压为零，电感电流 $I_0 = E/[r + (R_1 \parallel R_2)] = 5/3\,\mathrm{A}$，由 A 流向 B。

切换初值与电压斜率

切换后约定 $u = V_A - V_B$，电感流向仍取 $A \to B$，节点方程 $i_L + C\dot{u} = 0$，电感关系 $L\dot{i}_L = u$。

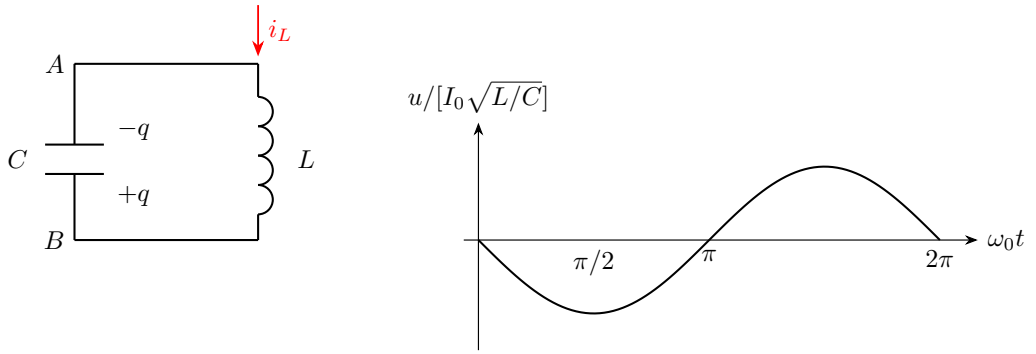


图 5.26: 小正时间内电感电流仍向下，电容上极板先带负电；电压曲线从零向负值发展

电压和电流的振荡

图 5.26 给出 $u(0)=0, \dot{u}(0)=-I_0/C$，对节点方程求导，并用 $\dot{i}_L = u/L$，得到 $C\ddot{u}+u/L=0$，即 $\ddot{u}+\omega_0^2 u=0$。试取 $u=\mathrm{e}^{st}$，则 $\dot{u}=s\mathrm{e}^{st}, \ddot{u}=s^2\mathrm{e}^{st}$，代入并除以指数后，特征方程为 $s^2+\omega_0^2=0$。根 $s=\pm \mathrm{j}\omega_0$ 给出实通解 $u=A\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$。求导为 $\dot{u}=-A\omega_0\sin\omega_0 t + D\omega_0\cos\omega_0 t$，初压使 $A=0$，初始导数使 $D\omega_0=-I_0/C$。因此

$$u=-I_0\sqrt{L/C}\sin(t/\sqrt{LC}), \quad i_L=I_0\cos(t/\sqrt{LC}).$$

电容首先出现的极性

切换的严格瞬间电容仍未带电；紧接着 $u<0$，接 A 的极板带负电，接 B 的极板带正电。最大电压 $I_0\sqrt{L/C}$ 来自初始磁能全部转化为电场能。

例 5.5 (双电源切换后的自感电动势)**.** 电感 $L=2\,\mathrm{H}$，切换前由两个同向供电的 $12\,\mathrm{V}$ 电源并联供电：一路串联内阻 $1\,\Omega$ 和 $2\,\Omega, 9\,\Omega$，另一路仅串内阻 $1\,\Omega$。稳态后移去第一电源，把其 $9\,\Omega$ 电阻改与 $15\,\Omega$ 串联并接在电感两端，第二电源保留。求切换后电流及初始自感电动势。

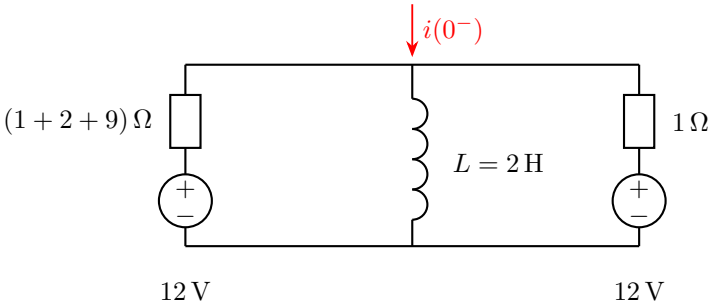


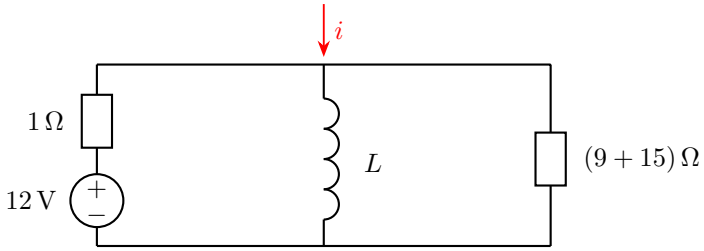
图 5.27: 切换前两电源经各自串联电阻供电，稳态电感电流为两路电流之和

解　换接前的电感初流

图 5.27 稳态电感短接，两电源各供 $12/12=1\,\mathrm{A}$ 与 $12/1=12\,\mathrm{A}$，故 $i(0^-)=13\,\mathrm{A}$。

换接后的等效端口

图 5.28 给出切换后的实际网络。求端口等效时暂将电感开路，其余网络是 12V 电源及 1Ω 内阻向 24Ω 支路供电，开路端压由分压得到 $12\times 24/(1+24)$。再把独立电压源置零，端口看见 1Ω 与 24Ω 并联，故电感端口的戴维南电压为 $E_t=12\times 24/25=288/25\,\mathrm{V}$，等效电阻 $R_t=1\parallel 24=24/25\,\Omega$，新稳态电流为 $12\,\mathrm{A}$。



$$E_t=288/25\,\mathrm{V},\quad R_t=24/25\,\Omega$$

图 5.28: 切换后的实际网络：保留第二电源，9Ω 与 15Ω 串联负载接到电感两端

线圈端压与自感电动势

图 5.28 按流入电感端定义电压，$u_L=E_t-R_t i$，因此 $u_L(0^+)=-24/25\,\mathrm{V}$，自感电动势为 $+24/25\,\mathrm{V}$，维持原电流方向。

电流随时间的变化

时间常量 $\tau=L/R_t=25/12\,\mathrm{s}$。把电流数值以安培计，令 $j=i-12$，则 $\dot{j}=-12j/25$、$j(0)=1$。分离变量积分，

$$\int_1^{j(t)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\frac{12}{25}\int_0^t \mathrm{d}s,\qquad [\ln z]_1^{j(t)}=-\frac{12}{25}[s]_0^t.$$

所以 $\ln j(t)-\ln 1=-12t/25$，取指数得 $j(t)=\mathrm{e}^{-12t/25}$。自感电动势由 $-L\dot{i}=-2(-12/25)\mathrm{e}^{-12t/25}$ 还原，所以

$$i(t)=12+\mathrm{e}^{-12t/25}\,\mathrm{A},\qquad \varepsilon_L(t)=\frac{24}{25}\mathrm{e}^{-12t/25}\,\mathrm{V}.$$

自感电动势在切换后最大，随后衰减为零；电感电流始终连续，电压则可以在切换时改变。

例 5.6 (两根零电阻导棒的相对振荡)**.** 两根质量均为 m、长度均为 l 的棒在水平导轨上，初始位置 $x_2 = x_0, x_1 = 0$，两棒均静止，回路无电流。回路零电阻、自感 L 取常量，匀强磁场 B 向纸里。瞬时冲量使右棒获得速度 v_0。忽略冲量期间磁作用的冲量，求以后两棒位置和电流；要求间距变化远小于 x_0。

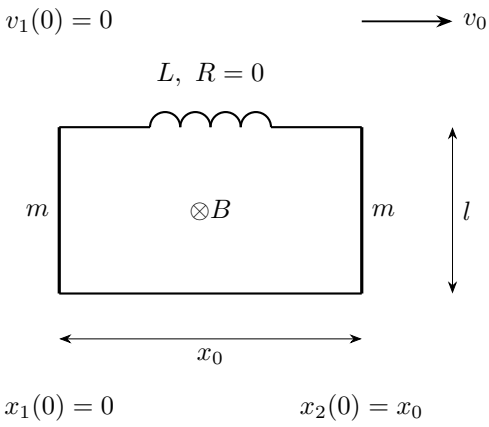


图 5.29: 冲量结束后的初态：左棒静止、右棒速度 v_0，回路初始无流

解　磁链与相对回复力

在图 5.29 中令 $k = Bl$，$\xi = x_2 - x_1 - x_0$，回路正向取顺时针。冲量后初始电流仍为零，磁链守恒给出 $Li + k\xi = 0$。右棒受力 ki、左棒受力 $-ki$，分别写 $m\ddot{x}_2 = ki$、$m\ddot{x}_1 = -ki$，相减得到 $\ddot{\xi} = 2ki/m$；移项后，约化质量 $\mu = m/2$ 满足 $\mu\ddot{\xi} = ki = -k^2\xi/L$。

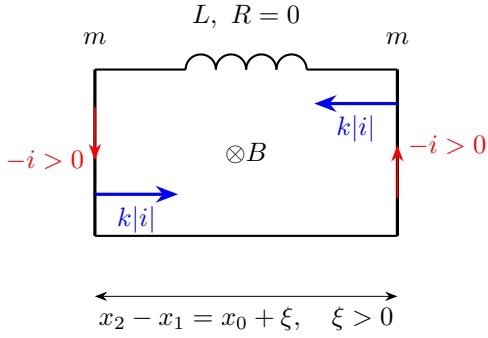


图 5.30: 间距增加时电流逆时针，两棒受力相反；相对振荡与质心匀速同时存在

相对振荡

图 5.30 中 $\Omega = k\sqrt{2/(mL)}$，$\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = v_0$。在 $\ddot{\xi} + \Omega^2\xi = 0$ 中试取 $\xi = \mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $(s^2 + \Omega^2)\mathrm{e}^{st} = 0$，根为 $\pm\mathrm{j}\Omega$。因此写 $\xi = A\cos\Omega t + D\sin\Omega t$；其导数为 $-A\Omega\sin\Omega t + D\Omega\cos\Omega t$。两初态依次给出 $A = 0, D = v_0/\Omega$，故 $\xi = v_0\sin\Omega t/\Omega$。

质心与两棒的运动

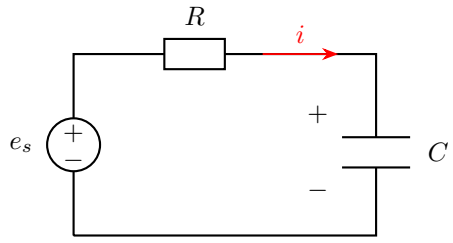
先把两受力式相加，可得 $\ddot{X} = 0$，其中 $X = (x_1 + x_2)/2$。冲量后 $X(0) = x_0/2, \dot{X}(0) = v_0/2$，先积 $\dot{X}(t) - v_0/2 = \int_0^t 0\,\mathrm{d}s = 0$，再积 $X(t) - x_0/2 = \int_0^t (v_0/2)\,\mathrm{d}s = v_0t/2$，所以质心位置为 $x_0/2 + v_0t/2$，因此

$$x_2 = x_0 + v_0t/2 + \frac{v_0}{2\Omega}\sin\Omega t,$$
$$x_1 = v_0t/2 - \frac{v_0}{2\Omega}\sin\Omega t,$$
$$i = -\frac{kv_0}{L\Omega}\sin\Omega t.$$

运动的适用范围

相对振幅为 v_0/Ω，固定自感近似要求 $v_0/\Omega \ll x_0$。满足这一条件时，质心保持匀速，相对振荡持续进行。

例 5.7 (有限充电脉冲后的反向换接)**.** 电容 C 初始无电，经 R 接恒压 $+E$，在 $t = T$ 时将电源反接为 $-E$，电阻和电容接线不变。求电容电压、换接后第一次电压为零的时间，以及两个阶段的电阻热。电压与电流均按充入电容上极板为正。



$$e_s = +E\ (0 < t < T), \quad e_s = -E\ (t > T)$$

图 5.31: 电源参考端压在 T 时由 $+E$ 改为 $-E$；电容上端电压和充入电流的参考不变

解　脉冲结束时的电压

由图 5.31 的上极板参考方向，回路满足 $RC\dot{u}+u=e_s$。令 $\tau=RC$，第一阶段从 $u(0)=0$ 出发，

$$\int_0^{u(t)}\frac{\mathrm{d}z}{E-z}=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\tau},\qquad[-\ln(E-z)]_0^{u(t)}=\frac{1}{\tau}[s]_0^t,$$

端点代入给 $-\ln[(E-u)/E]=t/\tau$，所以 $u=E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$，故切换电压 $U_T=E(1-\mathrm{e}^{-T/\tau})$。

反向换接后的充放电

电压连续，第二阶段以 $s=t-T$ 计时。方程变为 $\tau\dot{u}+u=-E$，令 $w=u+E$，此时 $\mathrm{d}w/w=-\mathrm{d}s/\tau$，初值为 $w(0)=U_T+E$。因此

$$\int_{U_T+E}^{w(s)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}=-\int_0^s\frac{\mathrm{d}\sigma}{\tau},\qquad[\ln\xi]_{U_T+E}^{w(s)}=-\frac{s}{\tau}.$$

即 $\ln[w(s)/(U_T+E)]=-s/\tau$。取指数后得到 $u=-E+(U_T+E)\mathrm{e}^{-s/\tau}$。在第二阶段 $\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t=1$，对指数项求导得到

$$i=C\dot{u}=C(U_T+E)\mathrm{e}^{-s/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)=-\frac{U_T+E}{R}\mathrm{e}^{-s/\tau}.$$

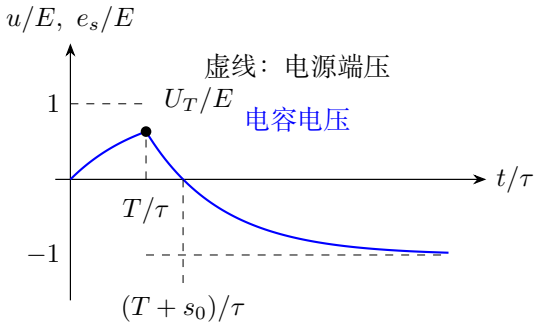


图 5.32: 示例取 $T=\tau$：电源端压阶跃反号，电容电压连续并稍后过零

电流反向与电压过零

图 5.32 中电容电压从 U_T 连续下降，换接瞬间电流已变为负值。令第二阶段 $u=0$，得到 $s_0=\tau\ln[(U_T+E)/E]$；若从最初接通计时，应再加 T。$T\to0$ 时 $s_0\to0$，长脉冲时趋于 $\tau\ln2$。

两阶段的焦耳热与电源功

指数项的原函数为 $-(\tau/2)\mathrm{e}^{-2t/\tau}$，因为求导时指数的 $-2/\tau$ 与前系数相消。两阶段分别使用有限终点和无穷终点：

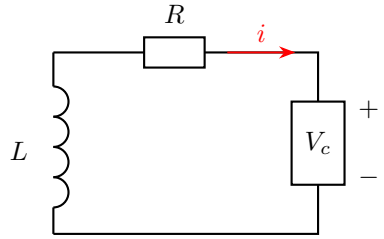
$$Q_1 = \frac{E^2}{R}\int_0^T \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^T = \frac{CE^2}{2}(1-\mathrm{e}^{-2T/\tau}),$$

$$Q_2 = \frac{(U_T+E)^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2s/\tau}\,\mathrm{d}s$$

$$= \frac{(U_T+E)^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2s/\tau}\right]_0^\infty = \frac{C}{2}(U_T+E)^2.$$

反向电源做功为 $(-E)C(-E-U_T) = CE(E+U_T) > 0$，且它加上初始电能 $CU_T^2/2$，减去最终 $CE^2/2$，正好等于 Q_2。反接阶段，电源电压和通过它的有向电荷同为负，乘积为正，电源仍供能。

例 5.8 (限压续流的终止时刻与能量分配)**.** 电感初流 $I_0 > 0$。移去原电源后，电流沿原方向经电阻 R 和理想限压支路续流。限压支路导通时沿电流方向恒有压降 $V_c > 0$，电流降为零后截止，不允许反向。求续流持续时间、流经限压支路的电量及其吸收能量，讨论 $R \to 0$。



限压支路：$i = 0$ 后截止

图 5.33: 续流经电阻与单向限压元件；导通时沿电流方向的限压端压为正

解　导通时的续流方程

图 5.33 的电流沿顺时针流动，电感端电压必须补偿两个被动压降，因此 $L\dot{i} + Ri + V_c = 0$。只在 $i > 0$ 的导通阶段，分离变量得

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}z}{Rz+V_c} = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{L}.$$

左侧以 $y = Rz + V_c$ 换元，$\mathrm{d}z = \mathrm{d}y/R$，上下限从 $I_0, i(t)$ 变成 $RI_0 + V_c, Ri(t) + V_c$，所以

$$\frac{1}{R}\int_{RI_0+V_c}^{Ri(t)+V_c} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{1}{R}[\ln y]_{RI_0+V_c}^{Ri(t)+V_c} = \frac{1}{R}\ln\frac{Ri(t)+V_c}{RI_0+V_c}.$$

右侧为 $-[s]_0^t/L=-t/L$。将两侧相等的关系指数化并移项，得

$$i=(I_0+V_c/R)\mathrm{e}^{-Rt/L}-V_c/R.$$

截止时间

令它第一次到零，$t_c=(L/R)\ln(1+RI_0/V_c)$。到这一时刻限压支路截止，此后 $i=0$。

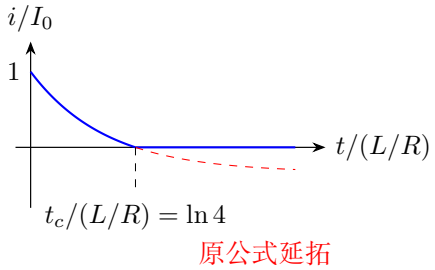


图 5.34: 归一化示例 $RI_0/V_c=3$：电流到零即截止，指数解的负值延拓不再适用

限压元件的吸能与焦耳热

图 5.34 标出的曲线在 t_c 截断。只对有效导通时间积分，

$$\begin{aligned}Q_e&=\int_0^{t_c}\left[\left(I_0+\frac{V_c}{R}\right)\mathrm{e}^{-Rt/L}-\frac{V_c}{R}\right]\mathrm{d}t\\&=\left[-\frac{L}{R}\left(I_0+\frac{V_c}{R}\right)\mathrm{e}^{-Rt/L}-\frac{V_c}{R}t\right]_0^{t_c}.\end{aligned}$$

用截止条件 $(I_0+V_c/R)\mathrm{e}^{-Rt_c/L}=V_c/R$ 化简，得 $Q_e=(L/R)I_0-(V_c/R)t_c$，故限压元件吸收 $W_c=V_cQ_e$。初始磁能全部耗散，电阻热为 $Q_R=LI_0^2/2-W_c$。也可用原方程乘以 i 后积分，逐项得到 $\Delta(Li^2/2)+Q_R+W_c=0$，说明没有遗漏截止事件的能量。

零电阻时的续流

当 $R\to0$，先在导通阶段的原方程中取极限，$L\dot{i}=-V_c$。从初态积分，

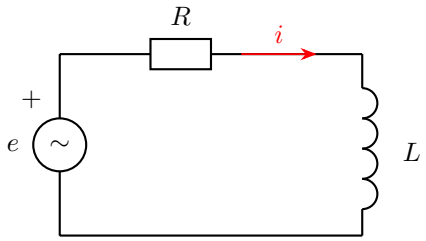
$$L\int_{I_0}^{i(t)}\mathrm{d}z=-V_c\int_0^t\mathrm{d}s,\qquad L[z]_{I_0}^{i(t)}=-V_c[s]_0^t.$$

所以 $i=I_0-V_ct/L$，令它为零得 $t_c=LI_0/V_c$。再积分有效电流，

$$Q_e=\int_0^{t_c}\left(I_0-\frac{V_ct}{L}\right)\mathrm{d}t=\left[I_0t-\frac{V_ct^2}{2L}\right]_0^{t_c}=\frac{LI_0^2}{2V_c}.$$

此时全部磁能由限压支路吸收，电阻热趋零。对有限 R，提高限压值会缩短续流时间，但也提高开关承受的端电压。

例 5.9 (正弦电源接通相位决定的暂态电流)**.** 串联 R, L 接电压 $e = E_m \sin(\omega t+\beta)$, $t = 0$ 接通前电流为零。求完整电流，找出不产生指数暂态的接通相位，并讨论 $R \to 0$ 时从电压过零点接通的最大电流。



$$e = E_m \sin(\omega t + \beta), \quad i(0) = 0$$

图 5.35: 正弦源、串联电阻与电感；电压和电流沿同一供电参考方向取值

解　正弦特解与自然响应

图 5.35 按电源供电方向写 $L\dot{i} + Ri = E_m \sin(\omega t + \beta)$。令 $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$、$I_m = E_m/Z$、$\phi = \arctan(\omega L/R)$, 设 $\theta = \omega t+\beta$, 用待定系数取特解 $a \sin\theta+b\cos\theta$。其导数为 $\omega a \cos\theta - \omega b \sin\theta$；代入方程后比较同类项，

$$Ra - \omega Lb = E_m, \qquad \omega La + Rb = 0.$$

解得 $a = E_m R/Z^2$、$b = -E_m \omega L/Z^2$。用 $\cos\phi = R/Z, \sin\phi = \omega L/Z$ 合成，特解为 $I_m \sin(\omega t + \beta - \phi)$。齐次方程 $L\dot{j} + Rj = 0$ 对 $j \neq 0$ 分离为 $\mathrm{d}j/j = -(R/L)\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int \frac{\mathrm{d}j}{j} = -\frac{R}{L}\int \mathrm{d}t, \qquad \ln|j| = -\frac{R}{L}t + C_0.$$

取指数后将常数与正负号合并，得 $j = A\mathrm{e}^{-Rt/L}$；零解也包含在 $A = 0$ 中。由初态 $A = -I_m \sin(\beta - \phi)$，于是

$$i = I_m \left[\sin(\omega t + \beta - \phi) - \sin(\beta - \phi)\mathrm{e}^{-Rt/L}\right].$$

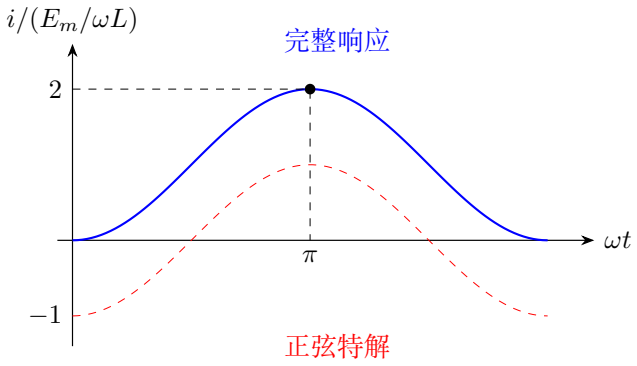


图 5.36: 纯电感极限、$\beta = 0$：完整响应具有常量偏置，峰值是正弦特解幅值的两倍

没有暂态的接通相位

图 5.36 以 $R \to 0$、$\beta = 0$ 的极限显示偏置。要消去指数项，应有 $\sin(\beta - \phi) = 0$，因此 $\beta = \phi + n\pi$，n 为整数。此时稳态电流恰在接通时刻过零。

纯电感的峰值电流

$R \to 0$ 时 $\phi \to \pi/2$，若 $\beta = 0$，原方程可直接积分：

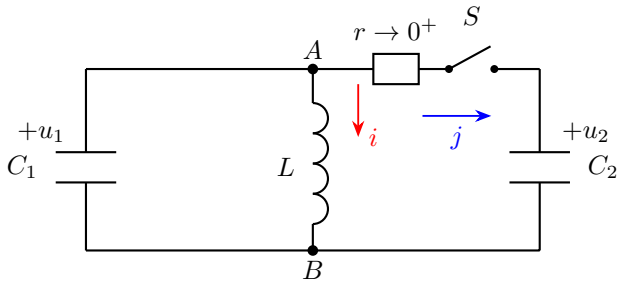
$$i(t) - i(0) = \frac{E_m}{L} \int_0^t \sin \omega s \, \mathrm{d}s = \frac{E_m}{L} \left[-\frac{\cos \omega s}{\omega} \right]_0^t ,$$

所以完整解成为 $i = E_m(1 - \cos \omega t)/(\omega L)$，最大值 $2E_m/(\omega L)$，是正弦特解幅值的两倍。这个无衰减偏置由积分初值决定，理想纯电感没有损耗来消除它。有电阻时，偏置按自然项的指数规律衰减。

接通瞬间的斜率

代 $t = 0$ 得 $\dot{i}(0) = E_m \sin \beta / L$，也与原微分方程一致。

例 5.10 (振荡过程中并入未充电电容)**.** 电容 C_1 初压 U_0，与理想 L 自由振荡，初流为零。在 t_s 时把未充电的 C_2 经小接触电阻 r 并到 C_1 两端。电荷重新分配的时间远短于 LC 振荡的时间尺度。取 $r\to 0^+$ 的快过程极限，求重新分配前后的状态、快过程的焦耳热及随后理想 LC 振荡的电压振幅；特别讨论第一次电压为零时并入。



初始 $u_{C_1}=U_0,\ u_{C_2}=0,\ i=0$

图 5.37: 合闸后，蓝箭头给出转移电流 j 的正向，两只电容经接触电阻交换电荷

解　并接前的电荷和电流

在图 5.37 中，上端对下端电压为 u，电感电流从上端经电感流向下端，故原回路满足 $C_1\dot u=-i$、$L\dot i=u$。消元得 $\ddot u+\omega_1^2u=0$，其中 $\omega_1=1/\sqrt{LC_1}$。试取 $u=\mathrm{e}^{st}$，其导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $s^2+\omega_1^2=0$。由根 $\pm\mathrm{j}\omega_1$ 写 $u=A\cos\omega_1t+D\sin\omega_1t$，求导为 $\dot u=-A\omega_1\sin\omega_1t+D\omega_1\cos\omega_1t$。$u(0)=U_0$、$\dot u(0)=0$ 给出 $A=U_0, D=0$。再用 $i=-C_1\dot u=C_1U_0\omega_1\sin\omega_1t$，得接入前 $u_-=U_0\cos\omega_1t_s$，$i_-=U_0\sqrt{C_1/L}\sin\omega_1t_s$。

快过程中的电压差和总电荷

按图 5.37，以公共下端 B 为参考，记两只电容的上板电压为 u_1,u_2，接触电阻中从第一只电容上板流向第二只的电流为 $j=(u_1-u_2)/r$。两块上极板分别满足

$$C_1\dot u_1=-j-i,\qquad C_2\dot u_2=j.$$

相加可见，合计电荷的变化为 $-\int i\,\mathrm{d}t$。电感电流和端压有限，在快过程的时间尺度上，这一电荷变化与电感电流的变化都趋于零。令 $D=u_1-u_2$、$C_e=C_1C_2/(C_1+C_2)$，把两式分别除以 C_1,C_2 后相减，得到

$$\dot D=-\frac{D}{rC_e}-\frac{i}{C_1}.$$

以 $\xi=(t-t_s)/(rC_e)$ 量度这段时间，$\mathrm{d}D/\mathrm{d}\xi=-D-rC_ei/C_1$。取 $r\to0^+$，用 $D(0)=u_-$ 积分：

$$\int_{u_-}^{D(\xi)}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\int_0^{\xi}\mathrm{d}y,\qquad [\ln|z|]_{u_-}^{D(\xi)}=-\xi.$$

故 $D=u_-\mathrm{e}^{-\xi}$，$u_-=0$ 时也给出 $D=0$。电压差在尺度 rC_e 上衰减，两上极板的总电荷近似保持 C_1u_-，所以 $(C_1+C_2)u_+=C_1u_-$，而 $i_+=i_-$。

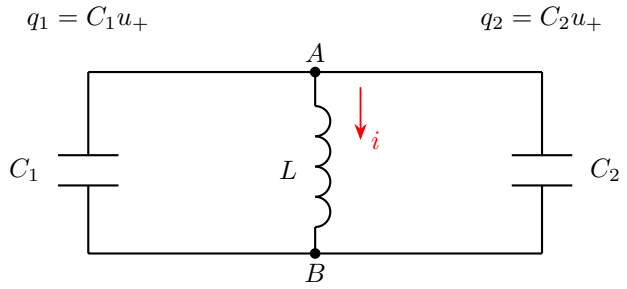


图 5.38: 快过程结束后两电容同压并联，电感电流保留，之后以新的总电容振荡

快过程的发热

图 5.38 中，电感储能在快过程前后取同一数值。两只电容的共同电压为 $u_+=C_1u_-/(C_1+C_2)$，所以快过程的电阻热等于这段时间内的电场能减少量：

$$\begin{aligned}Q_J&=\frac{1}{2}C_1u_-^2-\frac{1}{2}(C_1+C_2)\left(\frac{C_1u_-}{C_1+C_2}\right)^2\\&=\frac{1}{2}C_1u_-^2\left(1-\frac{C_1}{C_1+C_2}\right)=\frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}u_-^2.\end{aligned}$$

新振荡的幅度与相位

令 $C_\Sigma=C_1+C_2$、$\omega_2=1/\sqrt{LC_\Sigma}$，以接入后时间 s 计，$C_\Sigma\dot u=-i$，与 $L\dot i=u$ 联立得 $\ddot u+\omega_2^2u=0$。试取 $u=\mathrm{e}^{ps}$，两次导数为 $p\mathrm{e}^{ps},p^2\mathrm{e}^{ps}$，代回得 $p^2+\omega_2^2=0$。写实通解 $u=A\cos\omega_2s+D\sin\omega_2s$，求导为 $\dot u=-A\omega_2\sin\omega_2s+D\omega_2\cos\omega_2s$。初态给 $A=u_+$、$\omega_2D=\dot u(0)=-i_-/C_\Sigma$，所以 $u(s)=u_+\cos\omega_2s-i_-\sin\omega_2s/(C_\Sigma\omega_2)$。振幅 $U_2=\sqrt{u_+^2+Li_-^2/C_\Sigma}$，直接由剩余总能也能得到同一结果。

零电压时并接

第一次电压为零时 $t_s=\pi/(2\omega_1)$，此时 $u_-=0$，快过程极限下的重新分配热为零，新振幅 $U_2=U_0\sqrt{C_1/C_\Sigma}$。这一时刻的能量全在电感中。接入第二只电容后，较大的总电容以较小的电压振幅储存同样的能量。

例 5.11 (两个耦合振荡回路的频率与拍)**.** 两个相同理想 LC 回路，自感均 L、电容均 C，互感 $0 < M < L$。两电流参考方向都流入同名端，取 $i_j = -\dot{q}_j$。初始 $q_1 = Q_0, q_2 = 0$，两电流为零。求两个电荷的完整变化，说明弱耦合时慢包络的形成。

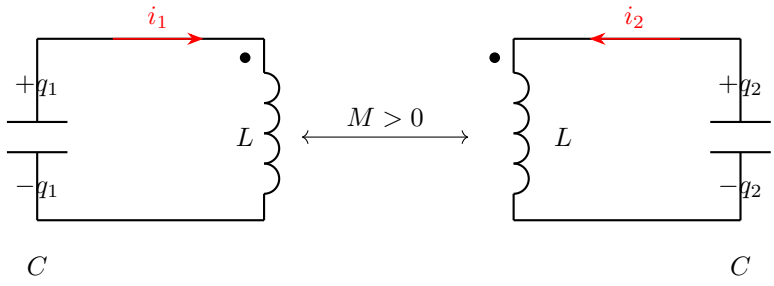


图 5.39: 两个电容—电感回路各自闭合，电流参考均流入同名端，互感取正

解　两个回路的方程

由图 5.39 同名端，两个回路方程为 $L\ddot{q}_1 + M\ddot{q}_2 + q_1/C = 0$ 与 $M\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + q_2/C = 0$。

两种独立振荡

相加和相减，令 $q_\pm = q_1 \pm q_2$，得

$$(L+M)\ddot{q}_+ + q_+/C = 0, \qquad (L-M)\ddot{q}_- + q_-/C = 0.$$

因此 $\omega_\pm = 1/\sqrt{(L \pm M)C}$。每个方程试取 $q_\pm = \mathrm{e}^{st}$，两次导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入并除以非零指数，得到 $s^2 + \omega_\pm^2 = 0$，所以 $q_\pm = A_\pm \cos\omega_\pm t + B_\pm \sin\omega_\pm t$。其导数为 $\dot{q}_\pm = -A_\pm\omega_\pm \sin\omega_\pm t + B_\pm\omega_\pm \cos\omega_\pm t$。两个初电荷组合都为 Q_0、导数都为零，分别给出 $A_\pm = Q_0$、$\omega_\pm B_\pm = 0$，故 $q_\pm = Q_0 \cos\omega_\pm t$。

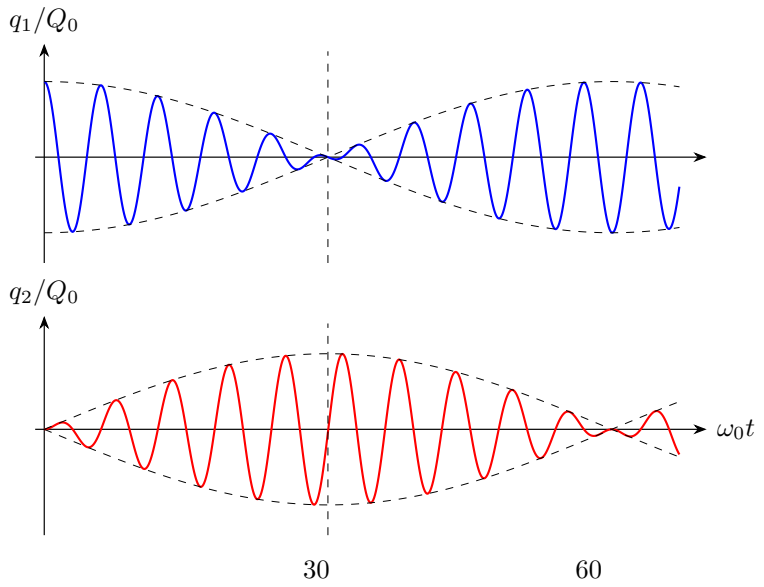


图 5.40: 精确频率下的两电荷及慢包络，示例取 $M/L = 0.1$；包络须与磁能共同解释

快振荡与慢包络

按图 5.40 重新相加和相减，

$$q_1 = \frac{Q_0}{2}(\cos\omega_+ t + \cos\omega_- t), \qquad q_2 = \frac{Q_0}{2}(\cos\omega_+ t - \cos\omega_- t).$$

设 $\bar{\omega} = (\omega_+ + \omega_-)/2$、$\delta = (\omega_- - \omega_+)/2 > 0$，则 $q_1 = Q_0 \cos\bar{\omega}t \cos\delta t$，$q_2 = Q_0 \sin\bar{\omega}t \sin\delta t$。为求弱耦合的频差，令 $\epsilon = M/L \ll 1$、$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$。函数 $f(x) = (1+x)^{-1/2}$ 满足

$$f(0) = 1, \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}(1+x)^{-3/2}, \qquad f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

所以 $\omega_\pm = \omega_0 f(\pm\epsilon) = \omega_0[1 \mp \epsilon/2 + O(\epsilon^2)]$，相减再除以 2，

$$\delta = \frac{\omega_- - \omega_+}{2} = \frac{\omega_0}{2}[\epsilon + O(\epsilon^2)] \simeq \frac{\omega_0 M}{2L}.$$

慢包络在约 $\pi/(2\delta)$ 内由第一回路转向第二回路。

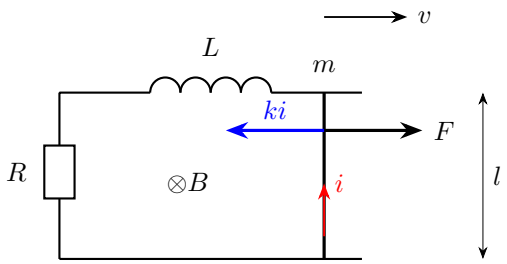
回路之间的能量交换

总能必须写成 $W = (q_1^2 + q_2^2)/(2C) + L(i_1^2 + i_2^2)/2 + M i_1 i_2$，逐项求导并用 $\dot{q}_j = -i_j$，

$$\dot{W} = i_1\left(L\dot{i}_1 + M\dot{i}_2 - \frac{q_1}{C}\right) + i_2\left(M\dot{i}_1 + L\dot{i}_2 - \frac{q_2}{C}\right) = 0.$$

两个括号分别等于两个回路的电压方程左边，均为零。弱耦合时，能量在两回路之间缓慢地来回转移。要算某一时刻的能量，须把该时刻两只电容的电荷和两个线圈的电流代入上式。

例 5.12 (含回路自感的恒力导棒)**.** 导棒质量 m、长度 l，在垂直轨面的匀强磁场 B 中水平运动，回路总电阻 $R>0$、恒定自感 $L>0$。恒力 F 自 $t=0$ 起向右作用，初始棒静止、回路无流。令 $k=Bl$，求欠阻尼情况下速度和终态，并由导棒在接通时刻所受的力求其初始加速度。



$$m\dot{v}=F-ki,\quad L\dot{i}+Ri=kv$$

图 5.41: 恒力驱动含电阻与自感的导棒，磁场向里，正电流在棒中向上

解　导棒和回路的耦合

图 5.41 取棒向右为正，右棒中电流向上为正；磁力向左，故 $m\dot{v}=F-ki$。回路中动生电动势 kv 驱动电流，$L\dot{i}+Ri=kv$。

速度方程与终态

由第一式 $i=(F-m\dot{v})/k$，代第二式得

$$mL\ddot{v}+mR\dot{v}+k^2v=RF.$$

稳态 $v_\infty=RF/k^2, i_\infty=F/k$。初始 $i=0$ 决定 $\dot{v}(0)=F/m$，这是二阶速度方程需要的第二个初态。

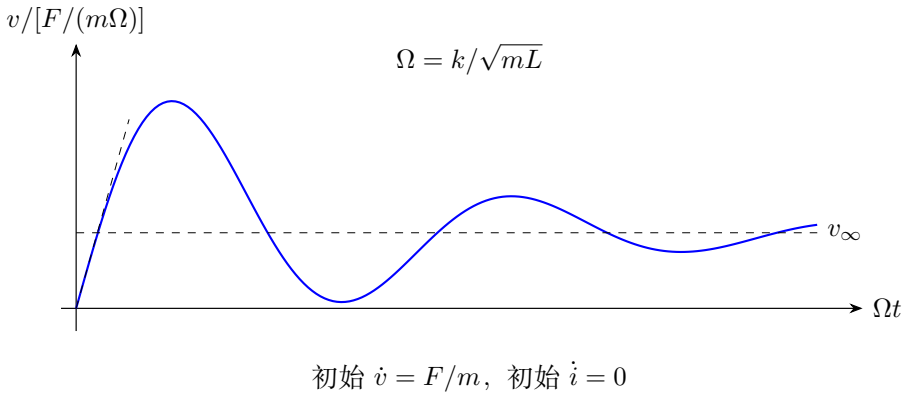


图 5.42: 欠阻尼示例 $R/(2L\Omega) = 0.2$：速度围绕终值衰减，起点斜率非零

欠阻尼速度

图 5.42 中磁能与动能可相互交换。设 $\alpha = R/(2L)$、$\omega_d = \sqrt{k^2/(mL) - \alpha^2} > 0$，令 $y = v - v_\infty$，得到 $\ddot y + 2\alpha\dot y + k^2 y/(mL) = 0$。试取 $y = \mathrm{e}^{st}$，两次求导为 $s\mathrm{e}^{st}$，$s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $s^2 + 2\alpha s + k^2/(mL) = 0$；配方为 $(s+\alpha)^2 + \omega_d^2 = 0$，根为 $-\alpha \pm \mathrm{j}\omega_d$，因此自然解为指数乘正弦、余弦。令 $v = v_\infty + \mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos\omega_d t + D\sin\omega_d t)$，初速给出 $A = -v_\infty$；用乘积法则，

$$\dot v = \mathrm{e}^{-\alpha t}[(-\alpha A + \omega_d D)\cos\omega_d t + (-\alpha D - \omega_d A)\sin\omega_d t].$$

在 $t = 0$ 代入 $\dot v(0) = F/m$ 得 $\alpha v_\infty + \omega_d D = F/m$，即 $D = (F/m - \alpha v_\infty)/\omega_d$。因此

$$v = v_\infty + \mathrm{e}^{-\alpha t}\left[-v_\infty\cos\omega_d t + \frac{F/m - \alpha v_\infty}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

由加速度求电流

先把两系数代回速度导数。余弦系数已经由初值给定为 F/m；正弦系数为

$$\begin{aligned} -\alpha D - \omega_d A &= \frac{-\alpha F/m + (\alpha^2 + \omega_d^2)v_\infty}{\omega_d} \\ &= \frac{-\alpha F/m + RF/(mL)}{\omega_d} = \frac{\alpha F}{m\omega_d}, \end{aligned}$$

最后用了 $R/L = 2\alpha$。所以 $\dot v = (F/m)\mathrm{e}^{-\alpha t}[\cos\omega_d t + (\alpha/\omega_d)\sin\omega_d t]$。再由 $i = (F - m\dot v)/k$ 还原电流，得到

$$i(t) = \frac{F}{k}\left[1 - \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)\right].$$

图中的电流从零、以零初始斜率起步。棒的初加速度为 F/m，所以速度曲线在起点已有正斜率。

导棒与回路的能量

当忽略电感时电流立即跟随速度，得到单指数建立；保留电感则存在两个状态，可能超越终速再衰减返回。将两条一阶式分别乘 v, i 相加，$Fv = \mathrm{d}(mv^2/2 + Li^2/2)/\,\mathrm{d}t + Ri^2$，明确外力功同时进入机械能、磁能与电阻热。

5.10 本讲小结

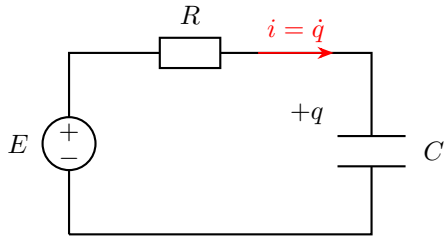
开关题由稳态确定储能初态，再按新通路求暂态。电感电流连续、电容电压连续均需相应无冲激条件；灯泡亮度由自身瞬时功率决定。

一阶电路使用新连接下的时间常量；总电量先判断积分是否收敛。LC 与电磁机械振荡都须由方程及两个初态求相位，含电阻时再检查阻尼与能量下降。

快速切换时，在切换时段内积分电压、电流和功率，求出快过程后的状态及释放的热量。含多个储能元件时，应由实际连接确定独立组合；电阻可能只耗散部分组合，未经过电阻的环流仍可保留磁能。

5.11 练习

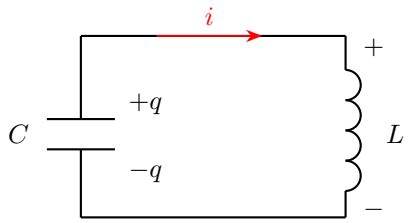
练习 5.1 (充电的能量与极限)**.** 未充电电容 C 经电阻 R 接恒压 E，求 $q(t), i(t)$，以及全过程电源功、储能、热量；讨论 $R \to 0^+$。



$q(0) = 0$

图 5.43: 恒压源经电阻给电容充电，电流参考取充入上极板

练习 5.2 (一般初态的 LC 振荡)**.** 理想 LC 回路中，上极板初电荷 Q_0，沿其放电方向初电流 I_0。求电荷、电流、周期与最大电流，并给出初相位的确定方法。



$$q(0)=Q_0,\quad i(0)=I_0$$

图 5.44: 上极板电荷作为 q，从该极板流出为正电流；一般初态包括电荷和电流

练习 5.3 (开关换接后的最大自感电动势)**.** 电感 L 切换前与 R_1, R_2 及电源内阻 r 串联接电动势 E，已稳定。切换后电源和 R_1 被断开，电感经 R_2, R_3 串联续流。求最大自感电动势及总热。

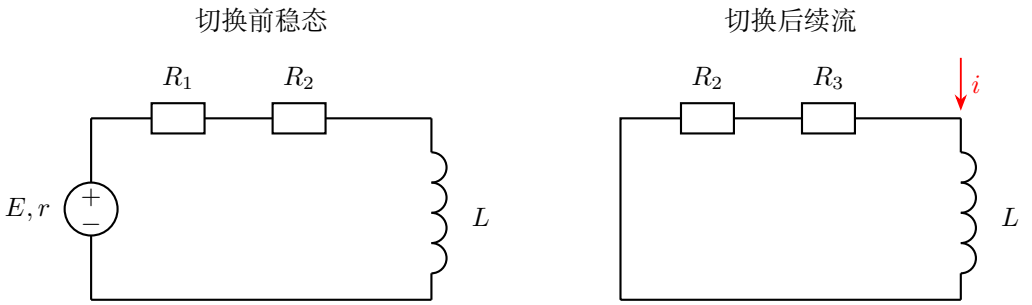
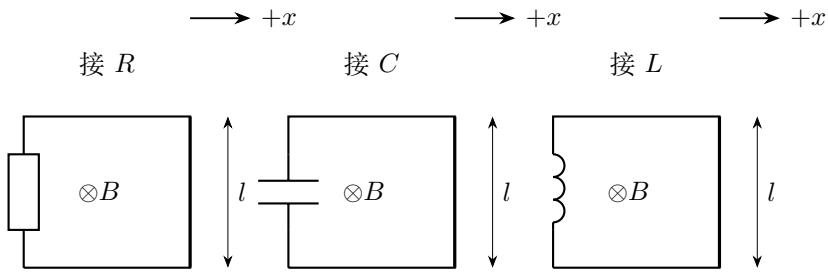
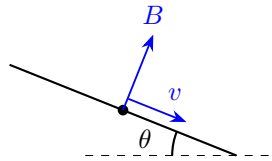


图 5.45: 切换前后分别画回路，电感保留同一电流方向；电源内阻只在前一阶段参与

练习 5.4 (同一斜面导棒接 R、C、L 的比较)**.** 质量 m、长度 l 的导棒沿倾角 θ 的无摩擦导轨下滑，磁场垂直轨面，令 $F = mg\sin\theta, k = Bl$。初态静止，分别接电阻 R、未充电电容 C 或零电阻理想电感 L，求运动规律并比较能量去向。

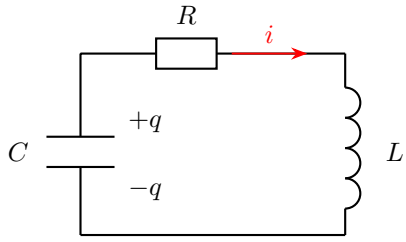




侧视：$F = mg\sin\theta$

图 5.46: 三种元件各自独立接入；上排沿轨面展开，右方为下滑方向，下图给出倾角与垂直轨面的磁场

练习 5.5 (欠阻尼电路的初态与能量下降)**.** 串联 RLC 回路初始电荷 Q_0、电流为零，$0 < R < 2\sqrt{L/C}$。求电荷规律并证明能量单调减少。



$$q(0) = Q_0, \quad i(0) = 0, \quad 0 < R < 2\sqrt{L/C}$$

图 5.47: 欠阻尼串联 RLC 自由回路，初始电感无流，初始电容带电

练习 5.6 (并联理想电感的换接过程)**.** 理想且无互感的电感 L_1, L_2 与电阻 R 并联，不接外源。自上节点 A 向下节点 B 取两电感电流为正，初流 I_{10}, I_{20} 可正可负。求全过程电流、剩余磁能和电阻热。

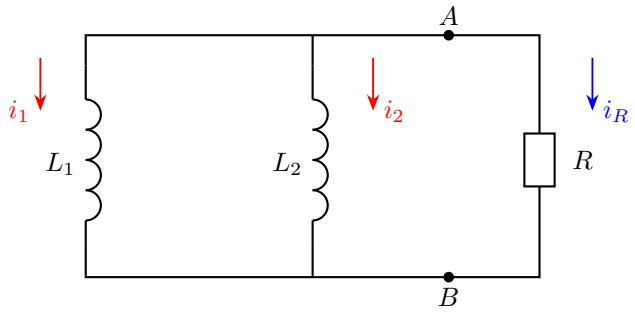


图 5.48: 无外源、无互感的两电感与电阻并联；三支路均以下行为正

练习 5.7 (开关触点的寄生电容与击穿判据)**.** 电感 L 初流 I_0，断开电源后，其电流只能给开关两触点间的寄生电容 C_p 充电，初始触点电压为零。忽略电阻及辐射，把初次过电压形成过程视为 LC 自由交换。触点击穿阈值 U_b，求最大电压及是否击穿，若会击穿求首次到阈值的时刻。

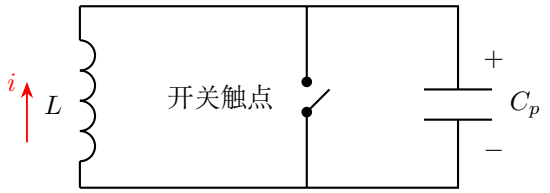
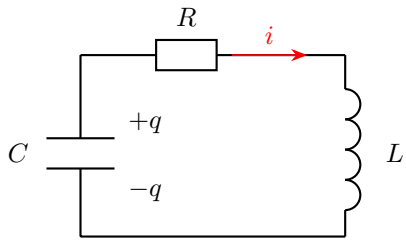


图 5.49: 开关两触点间的寄生电容保留电感续流路径；参考电流给上侧触点充正电

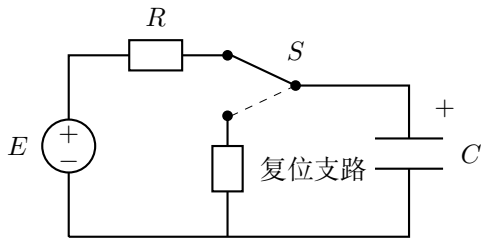
练习 5.8 (临界阻尼电路的电流峰值与热量)**.** 串联 RLC 回路无外源，$R = 2\sqrt{L/C}$，初始电容电荷 $Q_0 > 0$、电流为零。取放电方向电流为正，求电荷、电流、最大电流及其发生时刻，求到这一时刻已放出的热占初始电能的比例。



$$R = 2\sqrt{L/C}, \quad q(0) = Q_0 > 0, \quad i(0) = 0$$

图 5.50: 临界阻尼自由回路的放电方向与两项初态

练习 5.9 (阈值复位电路的重复周期)**.** 电容 C 经电阻 R 由恒压源 E 充电。当电容电压到 U_h 时，控制开关将电源支路断开，经另一个耗散支路快速放电到 U_l，再恢复充电。$0 \le U_l < U_h < E$，放电和切换时间可忽略。求重复周期、充电阶段电源功及两个耗散支路每周期总热，解释平均功率。



$u = U_h$ 时转接复位，$u = U_l$ 时恢复充电

图 5.51: 开关在电源充电和电阻复位两个位置之间切换

练习解答

练习 5.1

解　充电电流与电压

图 5.43 取充入电容正极板的电量为 q，初态 $q(0)=0$。回路为 $R\dot q + q/C = E$，令 $Q_\infty = CE, \tau = RC$，则 $\mathrm{d}q/(Q_\infty - q) = \mathrm{d}t/\tau$。按初末状态积分，

$$\int_0^{q(t)} \frac{\mathrm{d}z}{Q_\infty - z} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{\tau}, \qquad \left[-\ln(Q_\infty - z)\right]_0^{q(t)} = \frac{t}{\tau}.$$

原函数的负号来自内层 $Q_\infty - z$ 的导数 -1，所以 $-\ln[(Q_\infty - q)/Q_\infty] = t/\tau$，从而

$$q = CE(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}), \qquad i = \dot q = CE\left[-\mathrm{e}^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)\right] = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

通过的电量和源功

电源始终以电动势 E 输送电荷，总输送电量为 $q(\infty) - q(0) = CE$，故做功 $W_s = E\Delta q = CE^2$。

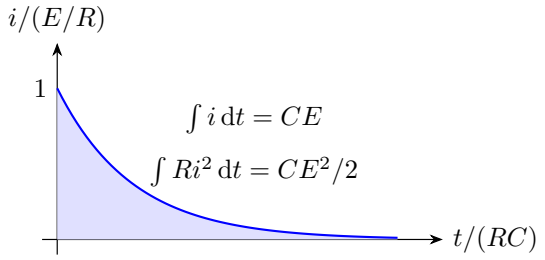


图 5.52: 归一化充电电流指数衰减；平方电流积分给出与电阻大小无关的总热

场能与电阻热

图 5.52 的电流按指数下降，最终电容电压为 E，储能 $W_C = q(\infty)^2/(2C) = CE^2/2$。电阻热直接积分为

$$Q_J = \frac{E^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\right]_0^\infty = \frac{E^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CE^2.$$

所以 $W_s = W_C + Q_J$，全过程能量闭合。

小电阻极限

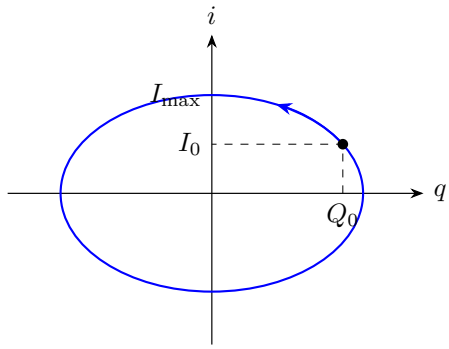
$R \to 0^+$ 时初始电流按 $1/R$ 增大、持续时间按 R 缩短，在 i^2R 的时间积分中，这两个变化给出有限的热量。

练习 5.2

解　LC方程与初态

按图 5.44 正向 $i=-\dot{q}$，回路给出 $L\dot{i}=q/C$，因此 $\ddot{q}+\omega_0^2 q=0$，$\omega_0=1/\sqrt{LC}$。设 $q=\mathrm{e}^{st}$，两次导数为 $s\mathrm{e}^{st}, s^2\mathrm{e}^{st}$，代入得 $(s^2+\omega_0^2)\mathrm{e}^{st}=0$，故特征方程为 $s^2+\omega_0^2=0$。由共轭根 $\pm\mathrm{j}\omega_0$ 合成实一般解 $q=A\cos\omega_0 t+D\sin\omega_0 t$，求导后 $i=A\omega_0\sin\omega_0 t-D\omega_0\cos\omega_0 t$。由 $q(0)=Q_0$ 得 $A=Q_0$，由 $i(0)=I_0$ 得 $D=-I_0/\omega_0$，于是

$$q=Q_0\cos\omega_0 t-\frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t,\quad i=Q_0\omega_0\sin\omega_0 t+I_0\cos\omega_0 t.$$



图示第一象限初态；一般初态须按有向坐标选象限

图 5.53: 能量椭圆上用初始状态点同时确定电荷和电流的符号，轨道沿逆时针运行

最大电流与周期

图 5.53 的相平面椭圆为 $q^2/C+Li^2=Q_0^2/C+LI_0^2$，最大电流时电容电荷为零，将 $q=0$ 代入椭圆式后除以 L，即得 $I_{\max}^2=I_0^2+Q_0^2/(LC)$。振荡角频率为 ω_0，所以 $T=2\pi\sqrt{LC}$，$I_{\max}=\sqrt{I_0^2+Q_0^2/(LC)}$。

初相位

若 $A=\sqrt{Q_0^2+(I_0/\omega_0)^2}>0$，写 $q=A\cos(\omega_0 t+\phi)$，应同时满足 $A\cos\phi=Q_0, A\omega_0\sin\phi=I_0$，用这两式给出的正弦和余弦确定相位所在的象限。若 $Q_0=I_0=0$，回路始终处于零状态，振幅为零，初相位没有可辨认的物理意义。

练习 5.3

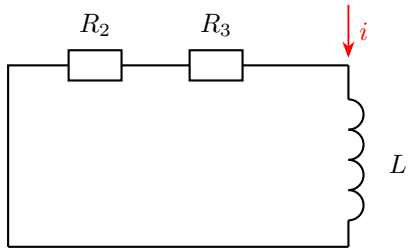
解 换接前后电流

图 5.45 的连接关系明确给出切换前后不同的串联电阻。初流 $I_0 = E/(r+R_1+R_2)$。切换后 $L\dot{i} + (R_2+R_3)i = 0$，电流连续，令 $R_s = R_2+R_3$，分离并积分得

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R_s}{L}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln z]_{I_0}^{i(t)} = -\frac{R_s}{L}[s]_0^t.$$

端点代入给 $\ln[i(t)/I_0] = -R_s t/L$，所以 $i(t) = I_0\mathrm{e}^{-R_s t/L}$。再用 $-L\dot{i} = -LI_0(-R_s/L)\mathrm{e}^{-R_s t/L}$，所以

$$i = I_0\mathrm{e}^{-(R_2+R_3)t/L}, \quad \varepsilon_L = (R_2+R_3)I_0\mathrm{e}^{-(R_2+R_3)t/L}.$$



$$\varepsilon_L = -L\dot{i} = (R_2+R_3)i > 0$$

$$\tau = L/(R_2+R_3)$$

图 5.54: 无源续流中自感电动势沿原电流方向，其大小随电流同步衰减

最大自感电动势

图 5.54 中自感电动势与续流方向一致，其大小为 $(R_2+R_3)I_0\mathrm{e}^{-(R_2+R_3)t/L}$，指数因子从 1 单调减小，故最大值在 0^+，为 $E(R_2+R_3)/(r+R_1+R_2)$。

续流的焦耳热

由同一续流电流直接积分，

$$Q_J = R_s I_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2R_s t/L}\,\mathrm{d}t = R_s I_0^2\left[-\frac{L}{2R_s}\mathrm{e}^{-2R_s t/L}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}LI_0^2.$$

它也等于切换前磁能；两电阻分热比例为 $R_2 : R_3$，因为它们始终流过相同电流。

练习 5.4

解　沿斜面受力与电路方向

图 5.46 把轨面展开为平面图，向右对应沿斜面下滑的正 x 方向。磁场向轨面内，统一取棒中向上的电流 J 为正，磁力便沿斜面向上，即 $F_B=-kJ$。三种回路初态均与 $x(0)=v(0)=0$ 相容。

接电阻

接电阻时 $J=kv/R$，所以 $m\dot v=F-k^2v/R$。令 $\tau=mR/k^2, v_\infty=FR/k^2$，分离速度方程，

$$\int_0^{v(t)}\frac{\mathrm{d}z}{v_\infty-z}=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{\tau},\qquad[-\ln(v_\infty-z)]_0^{v(t)}=\frac{1}{\tau}[s]_0^t.$$

代入端点得 $-\ln[(v_\infty-v)/v_\infty]=t/\tau$，指数化得 $v=v_\infty(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$。再从 $x(0)=0$ 对速度积分，$x=v_\infty\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-s/\tau})\,\mathrm{d}s=v_\infty[s+\tau\mathrm{e}^{-s/\tau}]_0^t$，解得

$$v=v_\infty(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}),\qquad x=v_\infty[t-\tau(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})].$$

任意时刻重力功满足 $Fx=mv^2/2+Q_R$，其中 $Q_R=\int_0^t RJ^2\,\mathrm{d}t\ge0$；末速有限，但棒仍持续下滑和发热。

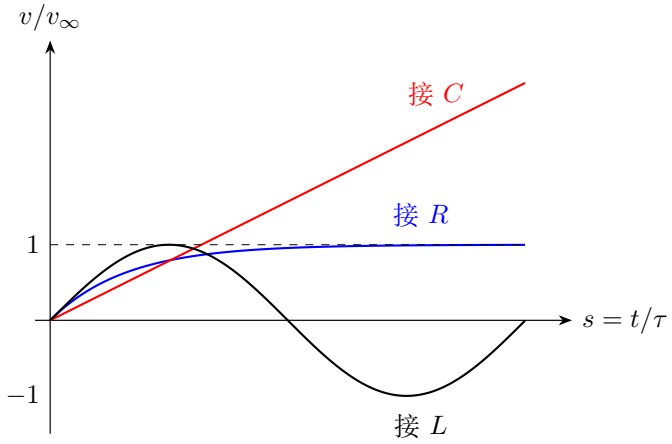


图 5.55: 同一时间、速度尺度下的一组参数示例：电阻趋于终速，电容匀加速，电感使速度周期反向

接电容

接未充电电容时，正电流充入与上轨相连的极板。回路无电阻且忽略自感，故 $q/C=kv$、$J=\dot q=Ck\dot v$。代入机械方程得 $(m+Ck^2)\dot v=F$，以 $a=F/(m+Ck^2)$

记常加速度，从零初态连续积分，$v(t)=\int_0^t a\,\mathrm{d}s=at$，$x(t)=\int_0^t as\,\mathrm{d}s=[as^2/2]_0^t$，因此

$$v=\frac{Ft}{m+Ck^2},\qquad x=\frac{Ft^2}{2(m+Ck^2)}.$$

电容场能 $q^2/(2C)=Ck^2v^2/2$，于是 $Fx=(m+Ck^2)v^2/2$，没有电阻热，也不存在电阻模型的终速。

接电感

接零电阻电感时，同一参考方向的回路方程为 $L\dot{J}=kv=k\dot{x}$。从两项零初态积分，$L\int_0^{J(t)}\mathrm{d}z=k\int_0^{x(t)}\mathrm{d}y$，原函数给 $L[z]_0^{J(t)}=k[y]_0^{x(t)}$，故 $LJ=kx$；电流参考的正法向向纸外，外磁通为 $-kx$，这也满足总磁链 $LJ-kx=0$。机械方程为 $m\ddot{x}=F-k^2x/L$。令 $\Omega=k/\sqrt{mL}$，平衡位置 $x_e=FL/k^2$，令 $y=x-x_e$，其方程为 $\ddot{y}+\Omega^2y=0$。试取 $y=\mathrm{e}^{st}$，两次导数为 $s\mathrm{e}^{st}$，$s^2\mathrm{e}^{st}$，代回得 $s^2+\Omega^2=0$，根为 $\pm\mathrm{j}\Omega$。写 $y=A\cos\Omega t+D\sin\Omega t$，其导数为 $-A\Omega\sin\Omega t+D\Omega\cos\Omega t$。由 $y(0)=-x_e,\dot{y}(0)=0$ 得 $A=-x_e,D=0$；所以 $v=x_e\Omega\sin\Omega t$，利用 $x_e\Omega=F/(m\Omega)$，得

$$x=x_e(1-\cos\Omega t),\qquad v=\frac{F}{m\Omega}\sin\Omega t,\qquad J=\frac{kx}{L}.$$

此时 $Fx=mv^2/2+LJ^2/2$，重力功与动能、磁场能交换，棒还会沿斜面向上返回。

三种运动的比较

图 5.55 为便于共用坐标，选取 $Ck^2=m,L=mR^2/k^2$，使 $\Omega\tau=1$。三条曲线依次为 $v_R/v_\infty=1-\mathrm{e}^{-s}$、$v_C/v_\infty=s/2$、$v_L/v_\infty=\sin s$，$s=t/\tau$。这组参数只用于直观比较耗散、额外储能惯性与回复作用；一般参数下应使用上面的各自表达式。

练习 5.5

解　欠阻尼解的系数

图 5.47 中取 $i=-\dot{q}$，方程为 $L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$。令 $\alpha=R/(2L)$、$\omega_d=\sqrt{1/(LC)-\alpha^2}$，试取 $q=\mathrm{e}^{st}$，则 $\dot{q}=s\mathrm{e}^{st},\ddot{q}=s^2\mathrm{e}^{st}$。代入并除以 $L\mathrm{e}^{st}$，特征方程为 $s^2+2\alpha s+1/(LC)=0$；配方得 $(s+\alpha)^2+\omega_d^2=0$，所以特征根 $-\alpha\pm\mathrm{j}\omega_d$ 给出 $q=\mathrm{e}^{-\alpha t}(A\cos\omega_dt+B\sin\omega_dt)$。初电荷决定 $A=Q_0$，先对通解求导，

$$\dot{q}=\mathrm{e}^{-\alpha t}[(-\alpha A+\omega_dB)\cos\omega_dt+(-\alpha B-\omega_dA)\sin\omega_dt].$$

初电流为零要求 $\dot{q}(0)=-\alpha A+\omega_dB=0$，所以

$$q=Q_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos\omega_dt+\frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_dt\right).$$

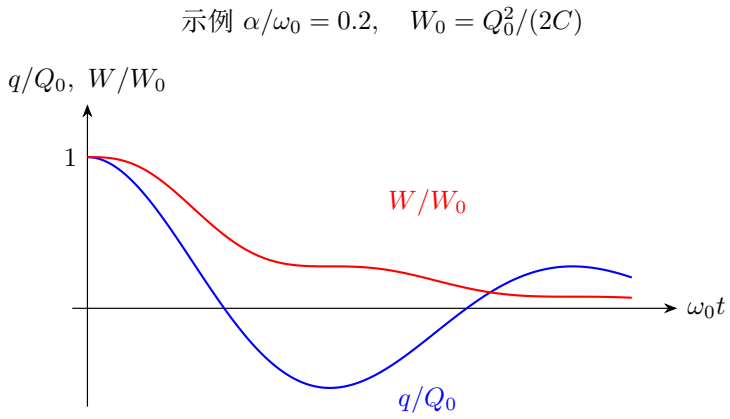


图 5.56: 同一欠阻尼解中的电荷与总能量；电荷会反号，能量始终非负并单调下降

瞬时储能与耗散

图 5.56 同时画出电荷和总能量。电荷曲线在起点的切线为水平，随后开始衰减。使用乘积法则求得

$$\begin{aligned}\dot q =& -\alpha Q_0 \mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)\\ &+ Q_0\mathrm{e}^{-\alpha t}(-\omega_d\sin\omega_d t + \alpha\cos\omega_d t)\\ =& -Q_0\mathrm{e}^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha^2}{\omega_d}+\omega_d\right)\sin\omega_d t\\ =& -\frac{Q_0}{LC\omega_d}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin\omega_d t.\end{aligned}$$

能量逐项求导，并用 $i=-\dot q$、$L\dot i = q/C - Ri$，

$$\dot W = \frac{q}{C}\dot q + Li\dot i = -\frac{q}{C}i + i\left(\frac{q}{C}-Ri\right) = -Ri^2 \le 0.$$

最终总热为 $Q_0^2/(2C)$。

振荡周期

相邻同向峰之间相隔 $2\pi/\omega_d$，峰值之比由指数衰减因子给出。

练习 5.6

解 总电流的衰减

图 5.48 的共同电压 $u = V_A - V_B$ 满足 $L_1\dot{i}_1 = L_2\dot{i}_2 = u$。电阻向下电流为 u/R，节点方程 $i_1 + i_2 + u/R = 0$。令 $I = i_1 + i_2$，则 $\dot{I} = u(1/L_1 + 1/L_2) = -RI/L_e$，其中 $L_e = L_1L_2/(L_1 + L_2)$。当初始和 $I_s = I_{10} + I_{20} \neq 0$ 时，

$$\int_{I_s}^{I(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{R}{L_e}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{I_s}^{I(t)} = -\frac{R}{L_e}[s]_0^t,$$

端点给 $\ln|I/I_s| = -Rt/L_e$，保持初始和的符号，故 $I = I_s\mathrm{e}^{-Rt/L_e}$。若 $I_s = 0$，原方程给出恒零解。

$$u = 0, \quad i_{1\infty} = -i_{2\infty} = D/(L_1 + L_2)$$

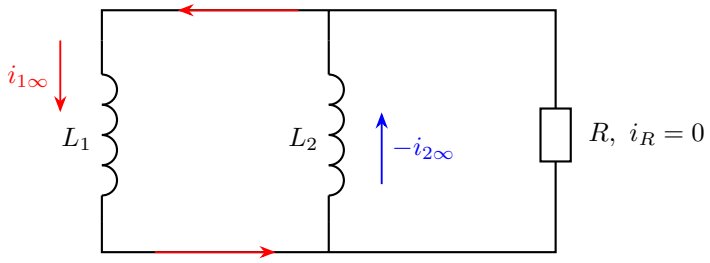


图 5.57: 末态存在不经过电阻的环流，图取 $D > 0$；若 $D < 0$ 则两个实际电流方向均反转

末态的环流

图 5.57 中差组合 $D = L_1i_1 - L_2i_2 = L_1I_{10} - L_2I_{20}$ 恒定。联立和与差，$i_1 = (D + L_2I)/(L_1 + L_2)$，$i_2 = (L_1I - D)/(L_1 + L_2)$。电阻支路电流为 $i_R = -I = -I_s\mathrm{e}^{-Rt/L_e}$。它趋于零时，两电感中留下 $\pm D/(L_1 + L_2)$ 的环流。

可耗散与剩余的磁能

把已求出的两支路电流代入储能，再展开平方，

$$\begin{aligned} W_B &= \frac{L_1(D + L_2I)^2 + L_2(L_1I - D)^2}{2(L_1 + L_2)^2} \\ &= \frac{(L_1 + L_2)D^2 + (2L_1L_2DI - 2L_1L_2DI) + L_1L_2(L_1 + L_2)I^2}{2(L_1 + L_2)^2} \\ &= \frac{L_eI^2}{2} + \frac{D^2}{2(L_1 + L_2)}. \end{aligned}$$

第二项不衰减，最终能量即 $D^2/[2(L_1 + L_2)]$；第一项全部变为热，$Q_J = L_e(I_{10} + I_{20})^2/2$。

两种特殊初态

若初始两电流等大反向，则 $I=0$、端压为零，从开始就没有电阻热；若 $D=0$，则所有初始磁能都可耗散。

练习 5.7

解　触点电容的充电

按图 5.49，沿充入寄生电容正极板的方向取电流为正 $i=C_p\dot{u}$，电感关系为 $L\dot{i}=-u$。消去电流得到 $\ddot{u}+u/(LC_p)=0$，初值 $u(0)=0,\dot{u}(0)=I_0/C_p$。试取 $u=\mathrm{e}^{st}$，两次导数为 $s\mathrm{e}^{st},s^2\mathrm{e}^{st}$，代回得 $[s^2+1/(LC_p)]\mathrm{e}^{st}=0$，除以指数后得到特征方程 $s^2+1/(LC_p)=0$。令 $\omega=1/\sqrt{LC_p}$，实通解为 $u=A\cos\omega t+D\sin\omega t$，其导数为 $\dot{u}=-A\omega\sin\omega t+D\omega\cos\omega t$；初压给出 $A=0$，初始导数给出 $\omega D=I_0/C_p$，所以 $D=I_0\sqrt{L/C_p}$。再由 $i=C_pD\omega\cos\omega t$ 还原电流，得

$$u=I_0\sqrt{L/C_p}\sin(t/\sqrt{LC_p}),\qquad i=I_0\cos(t/\sqrt{LC_p}).$$

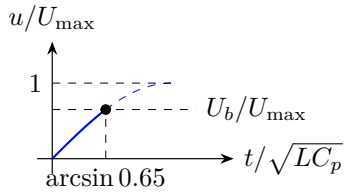


图 5.58: 首次上升到阈值即改变电路；图示 $U_b/U_{\max}=0.65$ 的击穿前过程

首次达到阈值

图 5.58 的上升曲线在未击穿的 LC 解中达到峰值 $U_{\max}=I_0\sqrt{L/C_p}$。此时 $i=0$，初始磁能 $LI_0^2/2$ 全部成为电容能 $C_pU_{\max}^2/2$。

若 $U_b>U_{\max}$，电压始终低于阈值。若 $0<U_b\le U_{\max}$，在首个四分之一周期内有 $\sin(\omega t_b)=U_b/U_{\max}$，所以 $t_b=\sqrt{LC_p}\arcsin(U_b/U_{\max})$。按题设，一旦达到阈值便形成放电通道，此前实际达到的最大触点电压为 U_b。

练习 5.8

解　临界阻尼的放电

由图 5.50 的放电方向，$i=-\dot{q}$，$L\ddot{q}+R\dot{q}+q/C=0$。令 $\alpha=R/(2L)=1/\sqrt{LC}$，特征方程为 $(s+\alpha)^2=0$，令 $q=y\mathrm{e}^{-\alpha t}$，两次求导为 $\dot{q}=(\dot{y}-\alpha y)\mathrm{e}^{-\alpha t}$、

$\ddot{q} = (\ddot{y} - 2\alpha\dot{y} + \alpha^2 y)\mathrm{e}^{-\alpha t}$。代入方程后 $\ddot{y} = 0$。记 $A = y(0), B = \dot{y}(0)$，先积加速度、再积速度：

$$\dot{y}(t) - B = \int_0^t 0\ \mathrm{d}s = 0, \qquad y(t) - A = \int_0^t B\ \mathrm{d}s = B[s]_0^t = Bt.$$

因此 $\dot{y} = B, y = A + Bt$，所以 $q = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\alpha t}$。初电荷给出 $A = Q_0$，用乘积法则得 $\dot{q} = [B - \alpha(A + Bt)]\mathrm{e}^{-\alpha t}$，初流为零要求 $\dot{q}(0) = B - \alpha Q_0 = 0$，即 $B = \alpha Q_0$，于是

$$q = Q_0(1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}, \qquad i = Q_0\alpha^2 t\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

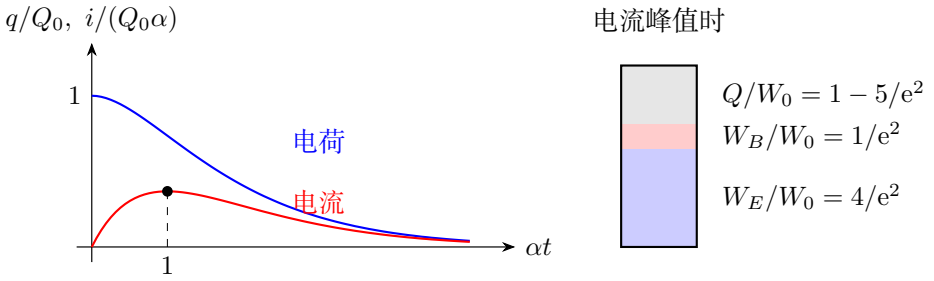


图 5.59: 临界电荷单调衰减，电流在 $\alpha t = 1$ 达峰；该时刻的能量仍分布于电容、电感与已放热三部分

电流的峰值时刻

图 5.59 电流从零增加再衰减。固定 Q_0, α，对 $t\mathrm{e}^{-\alpha t}$ 用乘积法则，

$$\dot{i} = Q_0\alpha^2[1 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha t} + t(-\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha t}] = Q_0\alpha^2(1 - \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

指数恒正，导数在 $t_* = 1/\alpha = \sqrt{LC}$ 前后由正变负，故这里为唯一峰值，$I_{\max} = Q_0\alpha/\mathrm{e}$。不存在电流反向，电荷也始终保持原号。

峰值时的储能和热量

令 $x = \alpha t$，由 $L\alpha^2 = 1/C$，剩余电磁能为 $W(t) = Q_0^2\mathrm{e}^{-2x}[(1+x)^2 + x^2]/(2C)$。在 $x = 1$ 时，其与初能 $W_0 = Q_0^2/(2C)$ 之比为 $5/\mathrm{e}^2$，所以已放热比例 $1 - 5/\mathrm{e}^2 \simeq 0.3233$。此刻电容能占初能的 $4/\mathrm{e}^2$，磁场能占 $1/\mathrm{e}^2$。

练习 5.9

解　阈值间的充电时间

图 5.51 每次充电都从同一电压 U_l 出发，$RC\dot{u}+u=E$，从下阈值到当前电压分离积分，

$$\int_{U_l}^{u(t)}\frac{\mathrm{d}z}{E-z}=\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{RC},\qquad[-\ln(E-z)]_{U_l}^{u(t)}=\frac{1}{RC}[s]_0^t,$$

端点给 $-\ln[(E-u(t))/(E-U_l)]=t/(RC)$，指数化得 $u=E-(E-U_l)\mathrm{e}^{-t/(RC)}$。令 $u(T)=U_h$，得

$$T=RC\ln\frac{E-U_l}{E-U_h}.$$

RC 给出电压趋近电源电压的时间尺度。阈值 U_h 越接近 E，充电时段越长。有限周期对应 $U_h<E$。

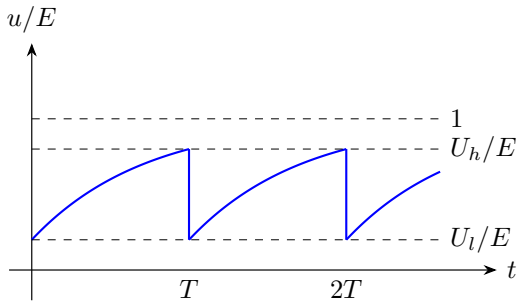


图 5.60: 阈值复位的重复电压；图示 $U_l/E=0.2, U_h/E=0.8$，充电时段 $T=RC\ln 4$

每周期的电量和源功

图 5.60 中快速下降阶段使状态返回 U_l，每周期电源净送出电荷 $C(U_h-U_l)$，做功 $W_s=EC(U_h-U_l)$。

充电与复位的热量

充电电阻热为源功减电能增加，$Q_c=EC(U_h-U_l)-C(U_h^2-U_l^2)/2$；复位支路热为 $Q_d=C(U_h^2-U_l^2)/2$。二者相加 $Q_{周}=EC(U_h-U_l)$，因为电容经过完整周期没有净储能变化。

平均功率

平均源功率及总耗散均为 $EC(U_h-U_l)/T$。复位时间很短，故上面算出的复位热集中释放在很短的时段。

电磁感应

物理竞赛一轮讲义

第六讲

交流电与变压器

2026

目录

第六讲　交流电与变压器 **1**

6.1　正弦交流的产生与有效值 1

6.2　从微分关系推导感抗、容抗与相量 2

6.3　串并联谐振与实际线圈 6

6.4　二极管分段与非正弦波形 9

6.5　变压器的端口与负载折算 12

6.6　三相连接与中性点约束 14

6.7　输电线路的电压与功率平衡 16

6.8　振荡电路与电磁波的联系 17

6.9　例题与分析 21

6.10 本讲小结 40

6.11 练习 40

练习解答 44

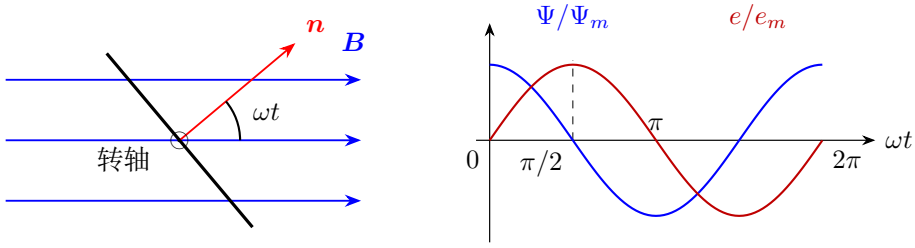
第六讲　交流电与变压器

6.1　正弦交流的产生与有效值

平面线圈在匀强磁场中绕垂直磁场的固定轴匀速转动，各匝面积为 S，匝数为 N。从法线与磁场重合的时刻计时，磁链 $\Psi = NBS\cos\omega t$，对复合函数求导时，先对相位 θ 求导，再乘 $\dot\theta = \omega$：

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = -NBS\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -NBS(-\sin\theta)\omega = NBS\omega\sin\omega t.$$

初始位置改变只改变相位，幅值仍为 $NBS\omega$。若转轴平行磁场，磁通不变，不会由这一转动产生相同的正弦电动势。



线圈边视投影，N 匝、每匝面积 S

图 6.1: 线圈法线从磁场方向转过 ωt。右图以同一相位为横坐标画出磁链和感应电动势

图 6.1 中的线段是线圈平面沿转轴观察的边视投影，红箭头才是用于磁通的法向。匀速转动使法向与磁场夹角增加为 ωt，从而投影面积为 $S\cos\omega t$。磁链最大时其瞬时变化率为零，电动势也为零；线圈法向与磁场垂直时，磁链过零而电动势的绝对值最大。

峰值、平均值与有效值回答不同问题。周期平均值 $\bar u = T^{-1}\int_0^T u\,\mathrm{d}t$ 决定有向平均；有效值定义为 $U = \sqrt{T^{-1}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t}$，对应相同电阻上的平均热功率 U^2/R。对 $u = U_m\sin\omega t$，令 $\varphi = \omega t$，则 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\omega$，$t = 0, T$ 对应 $\varphi = 0, 2\pi$。用 $\sin^2\varphi = (1-\cos 2\varphi)/2$，

$$U^2 = \frac{U_m^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{U_m^2}{2\pi}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{U_m^2}{2}.$$

因此正弦有效值为峰值除以 $\sqrt{2}$。经过二极管截波后，不再能无条件使用这条峰值换算公式。

平均功率为 $P = T^{-1}\int_0^T ui\,\mathrm{d}t$，通常不等于 UI。若 $u = \sqrt{2}U\cos\omega t$、$i = \sqrt{2}I\cos(\omega t-\phi)$，积化和差给出 $ui = UI[\cos\phi + \cos(2\omega t-\phi)]$。逐项积分，

$$P = UI\cos\phi + \frac{UI}{T}\left[\frac{\sin(2\omega t-\phi)}{2\omega}\right]_0^T = UI\cos\phi,$$

因为 $2\omega T = 4\pi$，原函数在上下限相等。电阻上的相位差为零；理想电感、电容只周期储能与返还能量，平均有功功率为零，但瞬时功率不处处为零。

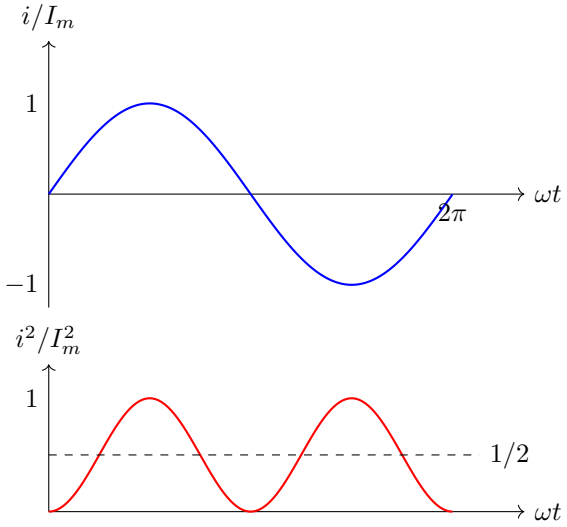


图 6.2: 有效值由平方的平均确定，与电流代数平均不同

图 6.2 上图一个周期的有向面积为零，说明电流代数平均为零；下图平方始终非负，平均值为 $I_m^2/2$。电阻发热由 $R\int i^2\,\mathrm{d}t$ 决定，与产生同样热量的直流相比，故 $I_{\mathrm{rms}} = I_m/\sqrt{2}$。遇到半波整流、削顶或脉冲电流，用同一热量关系对给定波形平方积分。

电阻上的瞬时功率为 u^2/R。图 6.2 中平方曲线的平均高度便是 U^2（图用电流作纵轴时为 I^2）。截波后用实际的非零区间计算积分，周期 T 仍取完整周期。例 6.8 和练习 6.2 分别比较移相截波与半波整流。

6.2　从微分关系推导感抗、容抗与相量

以正弦电流 $i = \sqrt{2}I\cos\omega t$ 为参考，理想电感端电压由微分给出：

$$u_L = L\dot{i} = \sqrt{2}LI(-\sin\omega t)\omega = -\sqrt{2}\omega LI\sin\omega t = \sqrt{2}\omega LI\cos(\omega t+\pi/2).$$

因此电感电压超前电流四分之一周期，感抗 $X_L=\omega L$。电容满足 $i=C\dot{u}_C$，因 $\mathrm{d}(\sin\omega t)/\,\mathrm{d}t=\omega\cos\omega t$，积分为

$$u_C(t)=\frac{\sqrt{2}I}{C}\int\cos\omega t\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}I}{\omega C}\sin\omega t+K.$$

正弦项周期平均为零，无直流偏置要求 $K=0$，得到 $u_C=\sqrt{2}I\sin\omega t/(\omega C)$，即电压滞后电流四分之一周期，容抗 $X_C=1/(\omega C)$。

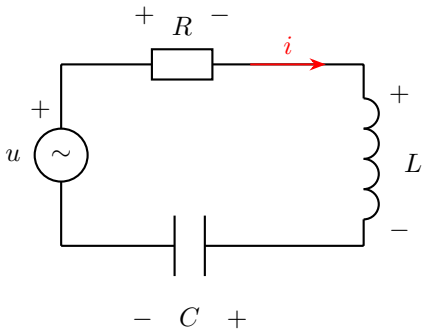


图 6.3: 串联 RLC 的实际连接及被动电压正向；相量图必须对应同一参考电流

图 6.3 沿电流方向经过每个元件，均以电流流入端为正端，故瞬时关系为 $u=u_R+u_L+u_C$。电流正向经过下侧电容时从右向左，电容的正端也必须画在右侧；若只沿元件在纸上的左右位置猜测端压正负，相量合成便会与实际回路不符。

把 $u(t)=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\phi)$ 看成旋转矢量在实轴上的投影。复数形式为 $u(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}[\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，其中 $\underline{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$。对于同频量，公共因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 可以提出，因此先在相量图上合成各分量，再取实部得到瞬时值。求导时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\underline{U}(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}.$$

于是电感和电容的阻抗分别为 $\mathrm{j}\omega L$、$1/(\mathrm{j}\omega C)$。乘 j 对应相位增加 $\pi/2$。串联电路以共同电流为参考，并联电路以共同端电压为参考。

图 6.4 中串联元件的电流同相。电阻电压水平，电感、电容电压沿相反方向，合相量为

$$\underline{U}=\underline{I}[R+\mathrm{j}(X_L-X_C)],\qquad I=\frac{U}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}.$$

图中的夹角满足 $\tan\phi=(X_L-X_C)/R$，所以 $\cos\phi=R/|Z|$。例 6.4 给出三个电压的有效值，用同一张相量图求出总电压。

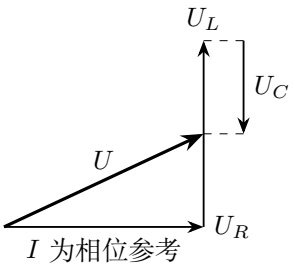


图 6.4: 串联电路电压的相量合成

图 6.4 先沿水平放置与电流同相的电阻电压，再把超前的电感电压向上相加、滞后的电容电压向下相加。总相量的竖直分量因而为 $U_L - U_C$，斜边长度由勾股关系求出。

6.2.1　复功率与补偿电流的物理意义

使用有效值相量，复功率定义为 $S_c = \underline{U}\,\underline{I}^{*} = P + \mathrm{j}Q$，星号表示共轭。若阻抗为 $R + \mathrm{j}X$，则 $P = I^2R$、$Q = I^2X$，感性负载无功取正、容性负载取负。视在功率的大小为 $UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$，它反映线路与设备所承担的电压电流容量，不等同于每秒净消耗的能量。

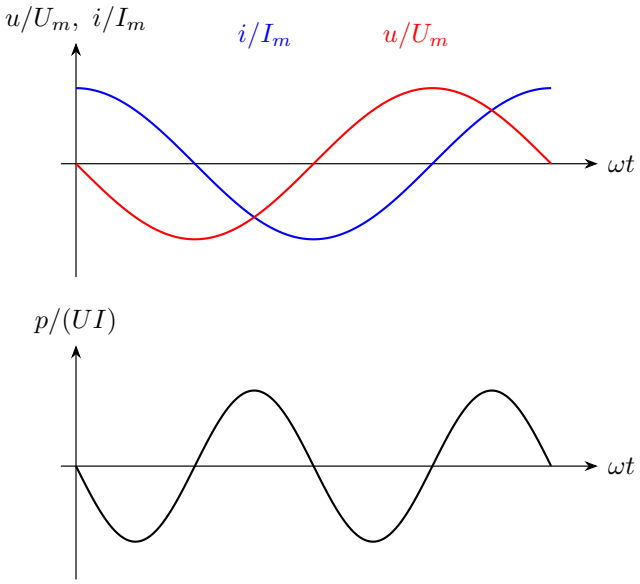


图 6.5: 理想电感中的电压、电流及瞬时功率；负功率时磁场返还能量

图 6.5 取 $i = I_m \cos\omega t$，电感端压为 $u = -\omega L I_m \sin\omega t$，因此 $p = -UI \sin 2\omega t$。这也等于磁场能的时间导数，链式法则给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{LI_m^2}{2}\cos^2\omega t\right) = \frac{LI_m^2}{2}\,2\cos\omega t(-\sin\omega t)\omega = -\frac{\omega L I_m^2}{2}\sin 2\omega t = -UI\sin 2\omega t.$$

一个周期内，返还的能量等于吸收的能量，平均功率为零。

给感性负载并联电容时，电容提供超前电流，减小电源端所需无功电流。在电源电压不变、原负载状态不变的条件下，负载本身有功功率不变，而线路电流可下降。若负载原来 P, Q 已知，希望补偿到单位功率因数，所需电容满足 $\omega C U^2 = Q$。电容超过补偿值后，合电流转为超前。

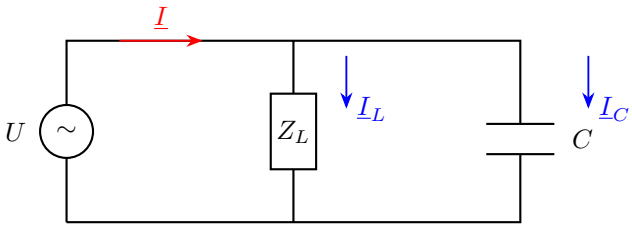


图 6.6: 并联补偿保持负载端有效电压 U 不变，电源电流等于两支路电流相量之和

图 6.6 中的电容与负载跨接同一对节点，故电容无功为 $Q_C = -\omega C U^2$。补偿不改变 Z_L 及其端压时，负载支路的 P, Q 保持原值，改变的是电源端相量和；若端压也随线路压降明显变化，就应同时求新的负载工作状态。

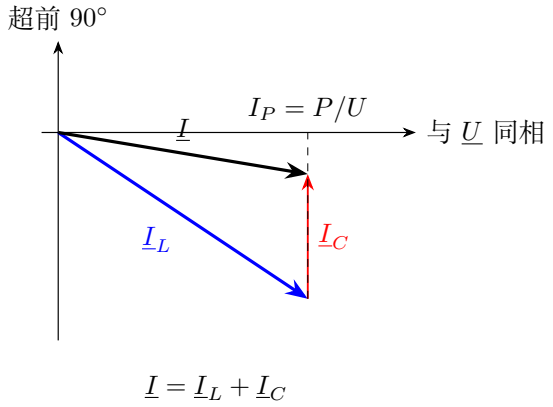


图 6.7: 电压为水平相位参考时，并联电容改变电源所需无功电流

图 6.7 中感性负载电流 $\underline{I}_L$ 滞后电压，竖直分量向下；电容电流 $\underline{I}_C$ 向上。两者相加后，水平分量 $I_P = P/U$ 不变，向下的无功分量由 Q/U 减为 $(Q-\omega CU^2)/U$，故

$$I = \frac{\sqrt{P^2 + (Q - \omega C U^2)^2}}{U}.$$

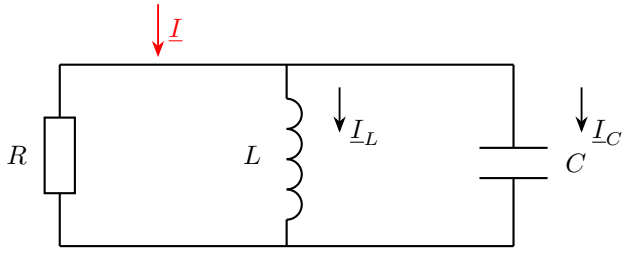
图中红箭头恰好抵消全部竖直分量时，电源电流最小，为 P/U；继续加大电容会使合电流超前并重新增大。线路损耗据这一合电流计算，负载支路电流本身并未因理想并联补偿而减小。

线路电阻承受完整的源电流，功率损耗为 $I^2 R_\ell$。固定负载电压和有功功率时，补偿只改变 I 的正交分量。练习 6.8 按补偿前后的相量大小比较线路发热。

6.3　串并联谐振与实际线圈

串联谐振满足 $X_L = X_C$，角频率 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，输入阻抗等于 R、电流最大。此时电感和电容各自电压可以远高于电源电压，因为两者相量抵消。电压放大倍数在谐振时为 $\omega_0 L/R$，实际损耗和元件耐压限制其大小。

并联电路各支路电压相同，应先加电流相量。理想 L, C 并联的无功电流分别滞后、超前电压 $90°$，在 $\omega C = 1/(\omega L)$ 时抵消。输入电流可以很小，而支路电流仍很大。若有并联电阻，电源仍供给它所需的有功电流。



共同端压 $\underline{U}$，$\underline{I} = \underline{U}/R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$

图 6.8: 并联 RLC 的共同端压与支路电流参考；谐振抵消的是电感、电容电流相量

在图 6.8 中，输入导纳为 $Y = 1/R + \mathrm{j}[\omega C - 1/(\omega L)]$。谐振时虚部为零，电源仍供给 U/R 的同相电流，而两个电抗支路的电流大小相等、相位相反。串联谐振通过电压抵消使输入阻抗最小，并联谐振则通过电流抵消使输入导纳的模最小，两者应按各自实际连接讨论。

实际线圈可以用 r, L 串联表示。把这样的线圈与电容并联，取共同电压为水平参考。图 6.9 中线圈电流向右下，电容电流向上。由阻抗倒数得总导纳

$$Y = \frac{1}{r + \mathrm{j}\omega L} + \mathrm{j}\omega C = \frac{r}{r^2 + \omega^2 L^2} + \mathrm{j}\omega\left(C - \frac{L}{r^2 + \omega^2 L^2}\right) = G + \mathrm{j}B_Y.$$

令 $B_Y = 0$，求得相位为零的正频率

$$\omega_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{r^2}{L^2}} \qquad (r^2 < L/C).$$

此处无功分量抵消，源电流 UG 仍给线圈电阻供能。对 G 求导，固定 r, L，

$$G'(\omega) = r(-1)(r^2 + \omega^2 L^2)^{-2}(2\omega L^2) = -\frac{2r\omega L^2}{(r^2 + \omega^2 L^2)^2}.$$

因此 $r > 0$ 时，在相位为零的频率处，$|Y|^2$ 的导数为 $2GG' < 0$，电流还在随频率升高而减小。例 6.5 也用同相与滞后分量来求线圈参数。

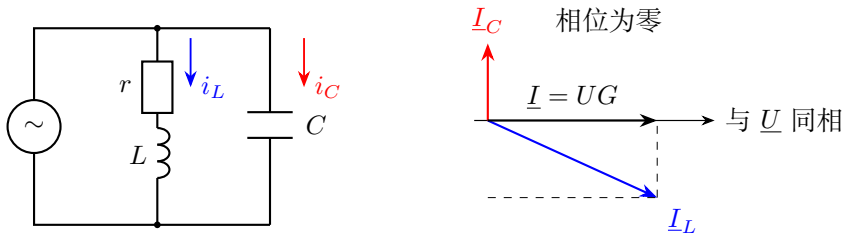


图 6.9: 实际线圈与电容并联。虚线给出线圈电流的同相和滞后分量

6.3.1 实际线圈并联时的最小电流

设 $x = \omega^2 LC$、$a = r^2 C/L$，并保持电源有效电压 U 恒定。因为 $I^2 = U^2|Y|^2$，由上面的导纳式得到

$$\begin{aligned}\frac{I^2}{U^2 C/L} &= \frac{a}{(a+x)^2} + x\left(1 - \frac{1}{a+x}\right)^2 \\ &= x + \frac{1-2x}{a+x} = x - 2 + \frac{1+2a}{a+x}.\end{aligned}$$

对这个无量纲的电流平方求导，记它为 $F(x)$，则

$$F'(x) = 1 - (1+2a)(a+x)^{-2}, \qquad F''(x) = 2(1+2a)(a+x)^{-3} > 0.$$

因此当 $a < 1 + \sqrt{2}$ 时，正频率处的极小点为

$$x_I = \sqrt{1+2a} - a, \qquad \omega_I = \sqrt{x_I/(LC)}.$$

当 $a \geq 1+\sqrt{2}$ 时，曲线在正频率区单调上升，最低电流出现在直流极限。若 $0<a<1$，相位为零的位置是 $x_p = 1-a$，两位置之差为 $x_I - x_p = \sqrt{1+2a}-1 > 0$。图 6.10 画出了这种先同相、后达到最小电流的情形。$r=0$ 时，两位置同为 $x=1$。

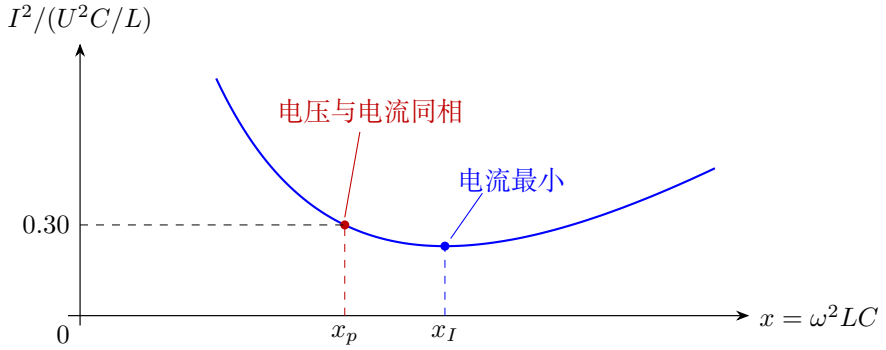


图 6.10: 取 $r^2C/L = 0.30$，电压电流同相的位置在电流最小点左侧

6.3.2 串联谐振的半功率带宽

固定有效电压驱动的串联 RLC，电流为 $I(\omega) = U/\sqrt{R^2+(\omega L - 1/(\omega C))^2}$。低频时容抗占主导，高频时感抗占主导。两者相等时，阻抗为 R，电流达到峰值 U/R。从峰值降至 $1/\sqrt{2}$ 时，电阻功率降为峰值功率的一半。

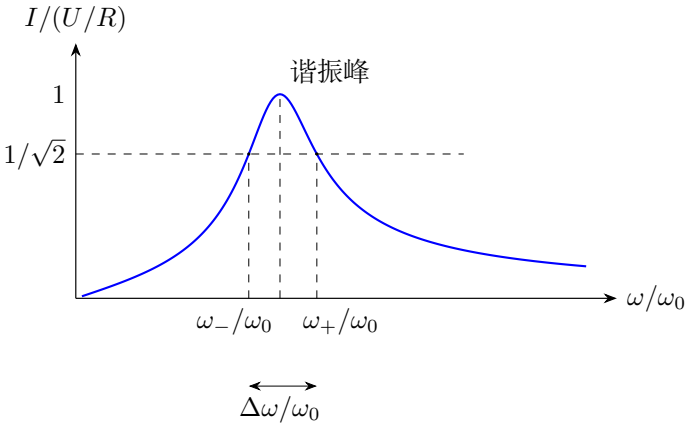


图 6.11: 串联 RLC 的归一化谐振曲线；半功率点对应电流峰值的 $1/\sqrt{2}$

图 6.11 图示 $Q_f = 3$。曲线的高度只在 $\omega = \omega_0$ 处为一，而两侧交点满足

$$\frac{U^2}{R^2+(\omega L - 1/\omega C)^2} = \frac{U^2}{2R^2}, \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R.$$

两边乘以正量 ω，高频侧满足 $L\omega^2-R\omega-1/C=0$，低频侧满足 $L\omega^2+R\omega-1/C=0$。分别乘 $4L$ 后配方，

$$(2L\omega-R)^2=R^2+4L/C,\qquad (2L\omega+R)^2=R^2+4L/C.$$

因 $\sqrt{R^2+4L/C}>R>0$，高频侧开平方的负号给出负频率，应舍去；低频侧也只保留正频率根。由此得到

$$\omega_\pm=\frac{\sqrt{R^2+4L/C}\pm R}{2L},\qquad \Delta\omega=\omega_+-\omega_-=\frac{R}{L},\quad \omega_+\omega_-=\frac{1}{LC}.$$

图中横坐标是角频率；改用频率 f 时带宽应除以 2π。两半功率点关于 ω_0 并不严格算术对称，其几何平均才等于 ω_0。

定义品质因数 $Q_f=\omega_0L/R$。在这组固定 R,L,C 的串联电路中，$\Delta\omega/\omega_0=1/Q_f$。弱阻尼时，自由振荡的角频率也接近 ω_0。

6.3.3 由半功率点识别参数

串联谐振的参数识别可承接图 6.11。已知串联电阻 R 并测出两半功率角频率，由它们的差和积依次求

$$L=\frac{R}{\omega_+-\omega_-},\qquad C=\frac{1}{L\omega_+\omega_-}.$$

例 6.10 的测量数据用频率 f 给出，代入前按 $\omega=2\pi f$ 换算。峰频对应两个半功率频率的几何平均。

6.4 二极管分段与非正弦波形

理想二极管导通时端压为零且电流只能沿允许方向；截止时电流为零且两端反向偏置。含直流偏置的限幅电路，应先假设截止，求开路二极管两端电压，再判定何时正向；在导通区间用短路替代二极管，重新求输出，并检查电流方向。在切换相位，两种表达式给出相同的输出电压。

并联限幅时，导通支路将输出电压钳在偏置值。串联二极管截止时，负载支路断开，电阻负载的电压为零。图中的偏置源极性和二极管方向共同决定起止相位。

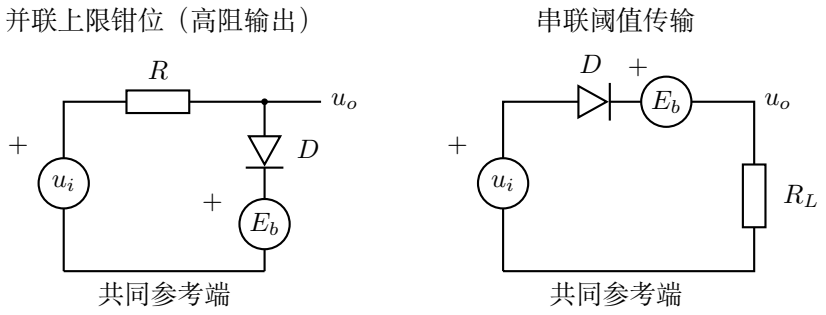


图 6.12: 正向阈值相同的两种接法；二极管三角端到横杠为允许电流方向

图 6.12 取 $u_i = U_m \sin\varphi$、$0 < E_b < U_m$，输出均对下方公共导线计。左图截止时电阻无电流，$u_o = u_i$；一旦 $u_i > E_b$，二极管把输出钳在 E_b，并有正向电流 $(u_i - E_b)/R$。右图截止时负载电流为零，故 $u_o = 0$；导通时沿串联路径扣除 E_b，得到 $u_o = u_i - E_b$。于是

$$u_{o,\text{并}} = \min(u_i, E_b), \qquad u_{o,\text{串}} = \max(u_i - E_b, 0).$$

左图采用高阻测量端，若输出并接有限负载，截止时还需先计算电阻分压，阈值也随之改变。

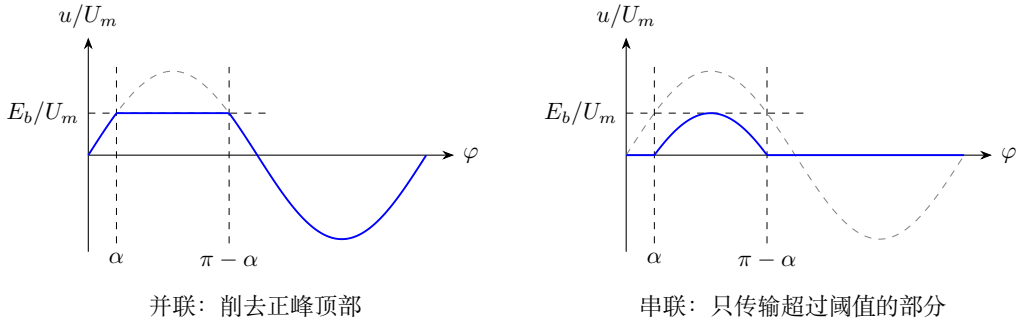


图 6.13: 同一正弦输入的两种输出；图示 $E_b/U_m = 1/2$，虚线为输入

图 6.13 的两条竖虚线由 $U_m \sin\alpha = E_b$ 确定。在区间 $[\alpha, \pi - \alpha]$ 内二极管导通，左图的输出由偏置源固定，右图的输出是输入减去偏置电压。求平均值、有效值时，先按图写出各段函数，再对完整周期 $0 \le \varphi < 2\pi$ 积分。

具有发光阈值的器件还涉及导通占空时间。简化模型若假定正负极性均在 $|u| \ge U_b$ 时发光，则用两半周的对称区间计算；若仅允许一个方向发光，时间应减少为相应单半周。真实辉光管有维持电压、熄灭电压和限流要求，题目中的单一阈值只是理想化计时模型。

带直流分量的输出，在整个周期上积分求平均电压，平方平均求有效值。减去平均电压后再平方平均，所得是纹波的有效值。

以图 6.13 右侧的串联接法为例，记 $a = E_b/U_m = \sin\alpha$。蓝线只在 $\alpha \le \varphi \le \pi - \alpha$ 内有输出，故整个周期的均方电压为

$$U_{\mathrm{rms}}^2 = \frac{U_m^2}{2\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (\sin\varphi - a)^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

用 $\sin^2\varphi = (1-\cos 2\varphi)/2$ 展开。逐项求原函数、再代入两端，得到

$$\begin{aligned}\frac{2\pi U_{\mathrm{rms}}^2}{U_m^2} &= \left[\left(\frac{1}{2}+a^2\right)\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + 2a\cos\varphi\right]_{\alpha}^{\pi-\alpha}\\ &= \left(\frac{1}{2}+a^2\right)(\pi-2\alpha) + \frac{1}{2}\sin 2\alpha - 4a\cos\alpha.\end{aligned}$$

分母中的 2π 来自完整周期。图中 $a = 1/2$ 时 $\alpha = \pi/6$，代入即得这一输出的有效值。若仪表隔断直流，读数来自 $u_o - \bar{u}_o$ 的有效值；按正弦波校准的平均响应式仪表则用其平均响应换算。

例 6.3 在同一个正弦输入下比较并联钳位与串联截波。先从二极管两端的电压找导通时刻，再沿各接法的通路写出输出波形。

6.4.1 电容滤波与小纹波近似

电容滤波把短时间补充电荷与较长时间向负载放电联系起来。小纹波近似下，先以相邻充电峰的间隔估计电荷缺额，再求峰谷差及平均输出。

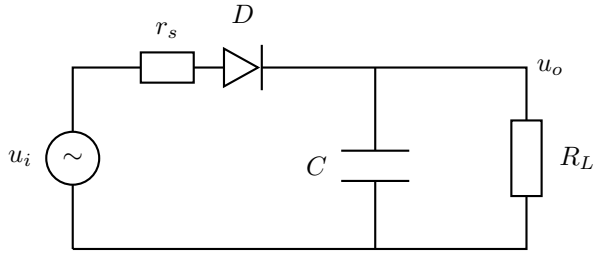


图 6.14: 半波整流后的电容滤波：峰值附近补充电荷，其余时间由电容向负载放电

在图 6.14 中，二极管只在输入足以补充电容电荷时导通。对电阻负载，在截止段由 $C\dot{u} = -u/R_L$ 得

$$\int_{U_{\max}}^{u(t)} \frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{1}{R_L C}\int_0^t \mathrm{d}s, \qquad [\ln|z|]_{U_{\max}}^{u(t)} = -\frac{1}{R_L C}[s]_0^t.$$

初值为正且有限时间内不穿过零，故 $\ln[u(t)/U_{\max}] = -t/(R_L C)$，指数化得到 $u(t) = U_{\max}\mathrm{e}^{-t/(R_L C)}$。令 $x = t/(R_L C)$，函数 $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 满足 $g(0) = 1$、$g'(x) =$

$-\mathrm{e}^{-x}$、$g'(0)=-1$，因此 $g(x)=1-x+O(x^2)$。在 $x\ll 1$ 时，$u(t)\simeq U_{\max}[1-t/(R_LC)]$，即近似线性放电。若峰间放电电流近似为 I_L、相邻充电峰间隔为 $1/f_r$，电荷缺额由 $\Delta q=\int_0^{1/f_r} I_L\,\mathrm{d}t = I_L[t]_0^{1/f_r}=I_L/f_r$ 给出，从而

$$\Delta U \simeq \frac{I_L}{f_r C}, \qquad \overline{U}_o \simeq U_{\max}-\frac{\Delta U}{2}.$$

半波整流 $f_r=f$，全波整流 $f_r=2f$。电阻负载下还需 $I_L\simeq \overline{U}_o/R_L$，并检查 $f_rR_LC\gg 1$ 才能把放电段近似为小斜率。忽略二极管压降及电源内阻引起的峰值下降时，$U_{\max}$ 才近似等于输入峰值。补电峰值电流由电源内阻 r_s 与实际导通区间决定。

对任何周期输出，令直流分量 $U_{\mathrm{dc}}=\overline{u}_o$、交流分量 $u_{\mathrm{ac}}=u_o-U_{\mathrm{dc}}$。展开平方并利用 $\overline{u_{\mathrm{ac}}}=0$，有

$$U_{\mathrm{rms}}^2=U_{\mathrm{dc}}^2+U_{\mathrm{ac,rms}}^2.$$

纹波的均方值是总均方值中扣去直流项后的部分。

6.5　变压器的端口与负载折算

理想变压器的两绕组链接相同主磁通，$e_1=-N_1\dot{\Phi}, e_2=-N_2\dot{\Phi}$。忽略线阻、漏磁和铁芯损耗，端电压有效值之比为 $U_1/U_2=N_1/N_2$。在理想无励磁电流极限，负载电流所产生的磁动势互相抵消，电流大小满足 $N_1I_1=N_2I_2$，相位与绕组同名端相容；输入输出有功功率相等。

匝数比 $n=N_1/N_2$，副边阻抗 Z_2 折算到原边为 $Z_1=n^2Z_2$，这可以从电压和电流比直接相除得到。两绕组的感应电压都来自变化的主磁通。

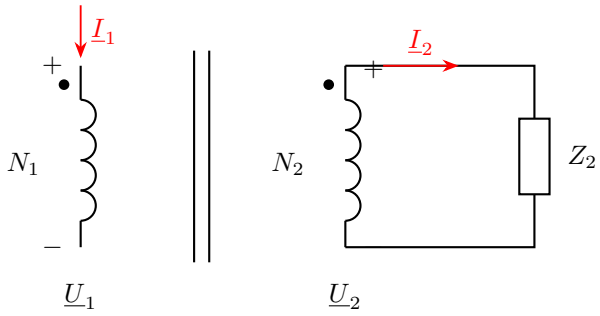


图 6.15: 电压均按同名端对非同名端取值；原边电流流入圆点端，副边负载电流从圆点端流出

图 6.15 的两绕组共用铁芯主磁通，因此两边每匝的感应电动势相同。沿图中的副边负载回路求电流后，再由安匝关系折算到原边；负载断开时理想模型的两边

负载电流均为零。图中的两条铁芯线只示意主磁路，匝比关系还依赖前述忽略漏磁与损耗的条件。

理想变压器的副边负载若为电阻 R_L，原边看到 n^2R_L，因此原边电流既由匝数比决定，也受负载控制。副边开路时理想负载电流为零；副边负载电阻减小，原边电流随之增大。真实变压器空载时，原边还要提供励磁电流。以线性铁芯和固定频率为例，副边开路，$\underline{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{I}_0$。原边自感很大时，$|\underline{I}_0| = U_1/(\omega L_1)$ 很小，理想模型取其为零。

图 6.15 采用副边向负载送出的电流正向，因此理想安匝平衡写为 $N_1\underline{I}_1 = N_2\underline{I}_2$，电压比为 $\underline{U}_1 = n\underline{U}_2$。两式相除即得 $Z_1 = \underline{U}_1/\underline{I}_1 = n^2 Z_2$。若把副边参考改成流入圆点端，则电流关系须增加负号；电压比和功率关系也要保持同一套参考。

6.5.1 负载匹配与效率极值

变压器在改变电压的同时还改变源端看到的负载阻抗。给定实际负载时，选择匝比相当于选择折算阻抗；当折算到初级的负载电阻等于源内阻时，输出功率达到最大。最高效率与最大功率通常属于不同的工作点。真实变压器的恒定铁损与随电流平方增大的铜损，也会使效率在某一负载处达到极值。

求极值应先写清哪些量固定。例如以理想稳压次级电压为常量求最佳电流时，可以把输出功率写成 UI；若负载变化导致明显电压调整率，就需要把 $U(I)$ 一并代入。数学极值只有在模型允许的电流、温升和额定电压范围内才有实际意义。

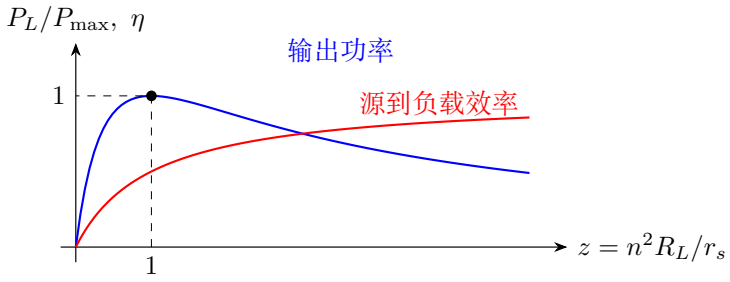


图 6.16: 通过理想变压器改变折算负载；有内阻的交流源最大输出功率出现在阻抗匹配点

若电源有效电动势 E、串联内阻 $r_s > 0$ 固定，理想变压器副边接电阻 R_L，令折算电阻 $R' = n^2R_L$，则

$$P_L = \frac{E^2 R'}{(r_s + R')^2}.$$

固定 E, r_s，使用乘积法则与幂函数求导：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R'} &= E^2\left[(r_s+R')^{-2} - 2R'(r_s+R')^{-3}\right] \\ &= \frac{E^2[(r_s+R') - 2R']}{(r_s+R')^3} = \frac{E^2(r_s-R')}{(r_s+R')^3}.\end{aligned}$$

图 6.16 的功率峰值对应 $R' = r_s$、$n = \sqrt{r_s/R_L}$，$P_{\max} = E^2/(4r_s)$。此时源内阻损耗等于负载功率，源到负载效率为 $1/2$；增大折算负载可提高效率，却会使输出功率最终趋零。

真实变压器若输出有效电压 U 近似恒定，铁损 P_0 近似恒定、铜损为 βI^2，则

$$\eta(I) = \frac{UI}{UI + P_0 + \beta I^2}.$$

分子、分母对 I 的导数分别为 U 和 $U + 2\beta I$，商法则给出

$$\begin{aligned}\eta'(I) &= \frac{U(UI + P_0 + \beta I^2) - UI(U + 2\beta I)}{(UI + P_0 + \beta I^2)^2} \\ &= \frac{U(P_0 - \beta I^2)}{(UI + P_0 + \beta I^2)^2}.\end{aligned}$$

效率极大值出现在 $\beta I^2 = P_0$，仍须落在该近似有效的额定工作范围内。这里改变的是实际损耗模型下的负载电流，与上一幅图通过匝比匹配源内阻的问题不同。

6.6　三相连接与中性点约束

平衡三相电源的三个相电压相差 120°。星形连接时线电压是两个相电压之差，大小为 $\sqrt{3}U_\phi$，线电流等于相电流；三角形连接时线电压等于相电压，线电流是两支路电流之差，大小为 $\sqrt{3}I_\phi$。平衡有功功率均可写成 $\sqrt{3}U_\ell I_\ell \cos\phi$。星形中性线电流为三相电流相量和，平衡时为零，负载不平衡时由三个支路电流的相量和求得。

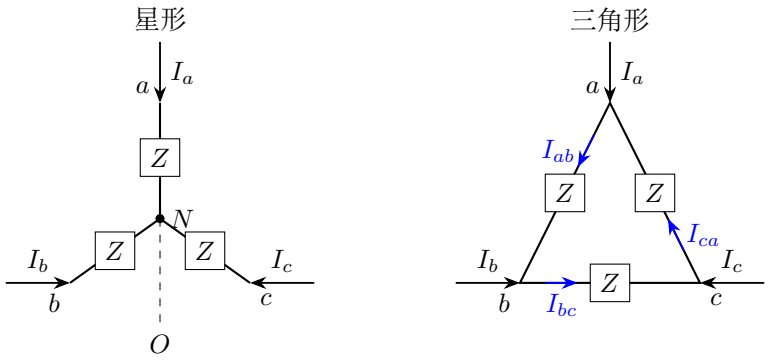
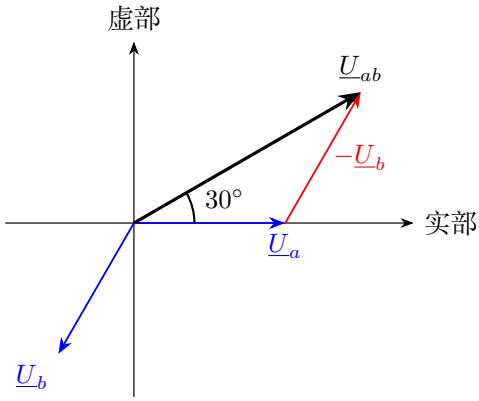


图 6.17: 星形与三角形的实际连接；各箭头仅规定电流正向

图 6.17 左图每条线只接一个负载，所以 $I_\ell = I_\phi$；右图节点 a 有两条负载支路，按图中箭头列节点方程为 $\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$。星形中线电压是两端相电压之差，三角形中每个负载直接跨接在线端之间。连接关系先确定，再对相量差取模，才能得到 $\sqrt{3}$ 因子。

三相功率公式也需要保持连接条件一致。星形改为三角形，在相同线电压、相同单相阻抗下，单相电压增大 $\sqrt{3}$ 倍，单相功率为原来的三倍，总功率同样增至三倍。



$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_a - \underline{U}_b$$

图 6.18: 星形的线电压由两相电压的矢量差得到

图 6.18 取 $\underline{U}_a = U_\phi$、$\underline{U}_b = U_\phi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/3}$。从 $\underline{U}_a$ 的箭头端再加 $-\underline{U}_b$。由于 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/3} = -1/2 - \mathrm{j}\sqrt{3}/2$，相减得到

$$\underline{U}_{ab} = U_\phi \left(\frac{3}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2} \right), \qquad |\underline{U}_{ab}| = U_\phi \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3} U_\phi .$$

实部与虚部均为正，相角为 $\arctan[(\sqrt{3}/2)/(3/2)] = \pi/6$，故 $\underline{U}_{ab} = \sqrt{3}U_\phi \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/6}$。所以线电压比相电压大 $\sqrt{3}$ 倍，并有相位差。三角形节点的电流相减以相同方法处理；只比较支路电流大小而不处理相位，会遗漏线电流的 $\sqrt{3}$ 因子。

6.6.1 中性线断开后的浮动节点

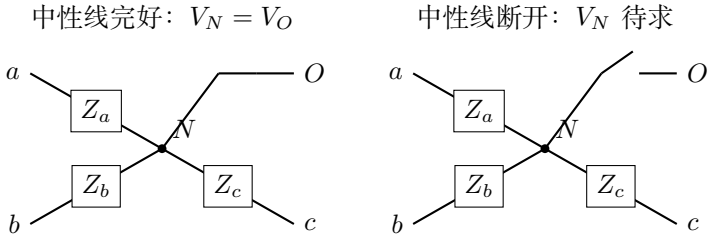


图 6.19: 不平衡星形负载的两种中性线状态；阻抗按支路标出

图 6.19 左图由导线直接规定 $V_N = V_O$。右图的开关断开后，应对浮动节点 N 列方程。相电压均对 O 计，令 $\underline{U}_N = V_N - V_O$，得到

$$\sum_{j=a,b,c} \frac{\underline{U}_j - \underline{U}_N}{Z_j} = 0, \qquad \underline{U}_N = \frac{\underline{U}_a/Z_a + \underline{U}_b/Z_b + \underline{U}_c/Z_c}{1/Z_a + 1/Z_b + 1/Z_c}.$$

这里假定分母非零并存在有限的正弦稳态。各负载电压随后由 $\underline{U}_{jN} = \underline{U}_j - \underline{U}_N$ 求出；三个阻抗相等时，相电压和为零使中性点位移恢复为零。若无损电路的导纳和为零，回到未作除法的节点方程，右端为零时方程相容，右端非零时没有有限的正弦稳态。

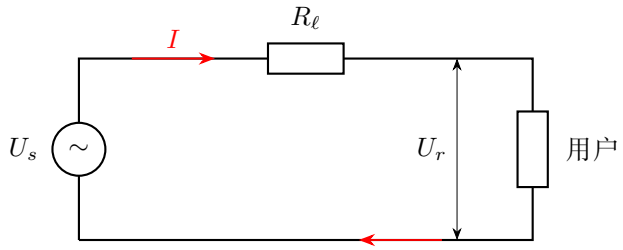
图 6.19 中的断线改变了节点约束，电源的三个相电压仍保持原值，负载相电压却需重新求出。中性线断开时，负载中性点的电势由三支路电流相量和为零确定。

6.7 输电线路的电压与功率平衡

输电线路耗散为 I^2R_ℓ，用户得到的功率等于送出功率减线路损耗。变压器升压的作用，是在相同输送功率和功率因数下减小线路电流。受端电压应由送端电压扣除线路压降后再求降压匝比，两端变压器的匝比一般不同。

线路只含电阻且受端功率因数为 1 时，送端和受端电压与电流同相。有效值 U_s, U_r, I 满足 $U_s - U_r = IR_\ell$；功率差为 $(U_s - U_r)I = I^2R_\ell$。若损耗比例给的是占送出功率 η，则 $P_r = (1-\eta)P_s$；若损耗占受端功率的比例为 η_r，则 $P_s = (1+\eta_r)P_r$。

对于有明显无功的交流长线路，电压降一般是相量关系，取 $\underline{U}_s - \underline{U}_r = \underline{I}Z_\ell$。感性负载的电流相量滞后于受端电压，按上式作相量加法即可求送端电压。



$$U_s I = U_r I + I^2 R_\ell$$

图 6.20: 功率因数为一时的线路模型；往返总电阻等效画在上支路

图 6.20 用同一个回路联系送端、受端和线路电流。已知送端功率和允许损耗时，先由 $I^2 R_\ell$ 求电流，再求送、受端电压；降压变压器的输入电压取实际受端 U_r。

6.8 振荡电路与电磁波的联系

电容板间没有传导电流穿过绝缘层，但变化电场仍对应磁场的环流。麦克斯韦引入位移电流 $I_d = \varepsilon_0 \,\mathrm{d}\Phi_E/\,\mathrm{d}t$，使跨过导线截面或跨过极板间隙选取曲面时，安培环路关系给出一致的磁场。板间电场的通量随充电电荷增加，位移项由这一通量的变化率给出。

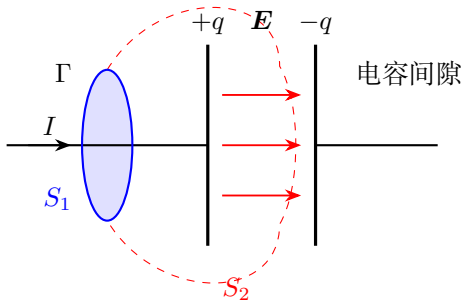


图 6.21: 同一安培环路的两种张面；蓝色面截导线，红色面从极板外绕入间隙（示意剖面）

图 6.21 中两张面共用同一环路 Γ，曲面的正向均由同一环路方向确定。S_1 截过充电导线，S_2 避开导线并穿过极板间电场。忽略边缘场、取极板面积 A 时，间隙内 $q=\varepsilon_0 EA$，所以

$$I=\dot{q}=\varepsilon_0 A\dot{E}=\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}=I_d.$$

安培—麦克斯韦关系

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\left(I_{\text{传导}}+\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}\right)$$

对两张面给出相同结果：前者主要由传导项贡献，后者由位移项贡献。改变张面后，导线截面的传导电流由板间电场通量的变化率接替。电场不均匀时，对所选曲面上的电场分布积分。

位移电流的空间分布同样需要积分。均匀极板电场给出内部磁场随半径线性增大；若电场随半径减弱，则环路包围的位移电流不再简单正比面积，磁场最大位置可能移到极板内部。先对电场通量积分，再使用安培—麦克斯韦关系，可以自然处理不同空间分布，并与极板外包围全部电流的结果相接。

例如在轴对称电场区域中，已知半径 a 以内的轴向分量为 $E_z(r,t)=E_0(t)(1-r^2/a^2)$，半径 a 以外该分量的时间变化可忽略。对 $r<a$ 的圆环路，包围的位移电流为

$$I_d(r)=\varepsilon_0\int_0^r \dot{E}_0\left(1-\frac{s^2}{a^2}\right)2\pi s\,\mathrm{d}s=2\pi\varepsilon_0\dot{E}_0\left[\frac{s^2}{2}-\frac{s^4}{4a^2}\right]_0^r=2\pi\varepsilon_0\dot{E}_0\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4a^2}\right).$$

再用 $2\pi rB=\mu_0 I_d(r)$，得到

$$B(r)=\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0\begin{cases} r/2-r^3/(4a^2), & 0\le r\le a,\\ a^2/(4r), & r\ge a.\end{cases}$$

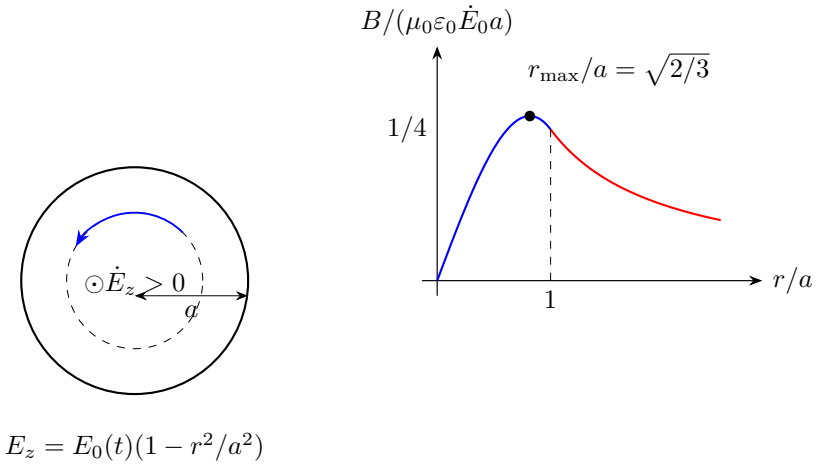


图 6.22: 电场增长并不均匀时，应先积包围通量；磁场最大点可在有场区域内部

图 6.22 中 $\dot{E}_0>0$，磁场沿逆时针方向。内部函数求导为 $\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0[1/2-3r^2/(4a^2)]$，故最大值在 $r=a\sqrt{2/3}$；在边缘 $r=a$ 处两段场值连续，外侧按总位移电流给出的 $1/r$ 规律衰减。练习 6.7 用同心圆环逐层求出包围的位移电流。

自由空间中的电场与磁场耦合变化可形成传播波。平面波中 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ 彼此垂直，且均垂直传播方向，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 给出传播方向；真空中 $E=cB$，$c=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，波长与频率满足 $\lambda=c/f$。在介质中，波长为该介质的传播速度除以频率。

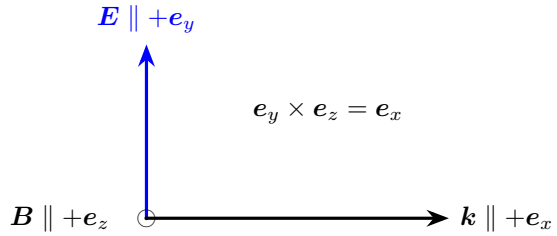


图 6.23: 平面电磁波同一相位处的三个方向

图 6.23 以纸面向外为 $+z$。图示相位中电场向上、磁场向外，右手叉乘给出向右的传播方向；半周期后二者同时反向，叉乘仍向右。

LC 回路中的振荡可以向空间辐射。靠近小回路主要是储能近场，远处辐射场带走能量，实际振荡因电阻与辐射而衰减。理想集中参数 LC 模型忽略辐射和传播延迟，适用于电路尺度远小于波长的情况；扩大到与波长相当的结构，就要考虑场的空间分布。

6.8.1　分布电感、电容与有限传播速度

集中参数电路把导线连接视为瞬时成立。对很长的线路，电流建立需要同时给沿线电容充电、在沿线电感中建立磁场，扰动以有限速度推进。单位长度电感 L'、电容 C' 决定波速和特性阻抗。这两个参数描述传播中的储能关系，特性阻抗以欧姆为单位，由行波电压与电流之比确定。无损线上电能和磁能随波前向前传送。

沿线各微段的电感、电容共同决定波前的传播。以下电压始终以上导体对下导体计，电流以上导体沿 $+x$ 为正。

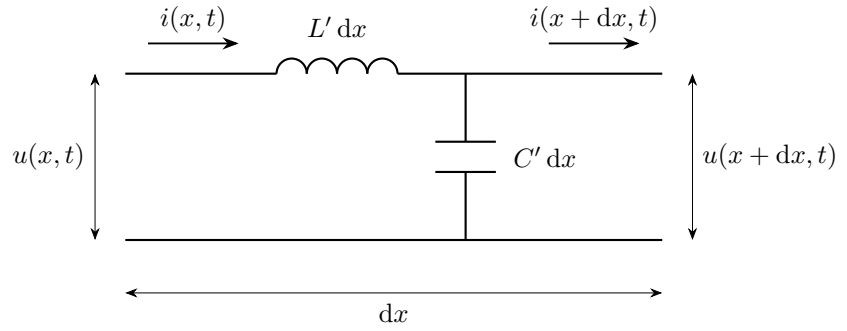


图 6.24: 无损双导线的一个微段；串联电感和并联电容均按长度分配

图 6.24 中的串联电感造成相邻端电压的差，并联电容使流入、流出电流不同。取微段极限分别得到

$$\partial_x u = -L'\partial_t i, \qquad \partial_x i = -C'\partial_t u.$$

再对第一式求 x 偏导，并以第二式消去电流，

$$\partial_x^2 u = -L'\partial_x\partial_t i = -L'\partial_t(-C'\partial_t u) = L'C'\partial_t^2 u.$$

令右行波 $u = f(\xi)$，$\xi = t - x/v$。链式法则给出 $\partial_x u = -f'(\xi)/v$、$\partial_x^2 u = f''(\xi)/v^2$、$\partial_t^2 u = f''(\xi)$，代入波动方程得 $v^{-2} = L'C'$，故 $v = 1/\sqrt{L'C'}$。再令右行电流 $i = kf(\xi)$，第一式变为 $-f'/v = -L'kf'$，所以 $k = 1/(vL')$，电压与电流之比为 $Z_0 = vL' = \sqrt{L'/C'}$。波前到来以前电场和磁场均为零。Z_0 给出这一行波的电压电流比，随波前进入长线的能量同时储存在电场和磁场中。

由微段方程还可将行波写为

$$u(x,t) = f(t - x/v) + g(t + x/v), \qquad i(x,t) = \frac{f(t - x/v) - g(t + x/v)}{Z_0}.$$

向左传播的电压波与沿 $+x$ 定义的电流之比多一个负号。末端接纯电阻 R_L 时，末端总电压为 $u_+ + u_-$，沿 $+x$ 的总电流为 $(u_+ - u_-)/Z_0$。末端关系 $u = R_L i$ 给出

$Z_0(u_+ + u_-) = R_L(u_+ - u_-)$，移项得 $(R_L + Z_0)u_- = (R_L - Z_0)u_+$，因而电压反射系数

$$\Gamma_u = \frac{u_-}{u_+} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}.$$

开路对应 $\Gamma_u = 1$，末端总电流为零；短路对应 $\Gamma_u = -1$，末端总电压为零；匹配 $R_L = Z_0$ 时没有反射。终端无反射不等于沿线发热：无损线把能量输送给末端负载，其特性阻抗仍由储能与传播决定。

6.9 例题与分析

例 6.1 (由元件关系求感抗与容抗)**.** 电流 $i = I_m \cos \omega t$ 分别通过理想电感 L、理想电容 C，电容电压无直流偏置。求两元件电压、有效值及平均功率。

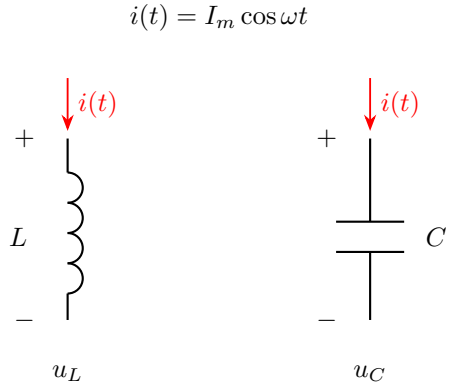


图 6.25: 分别给两个独立元件通入给定电流，电压均采用电流流入端为正的被动约定

解　感应端压与电容电压

图 6.25 中均按电流流入端为电压正端。电感由链式法则得 $u_L = L\dot{i} = LI_m(-\sin \omega t)\omega = -\omega L I_m \sin \omega t$。电容满足 $\dot{u}_C = i/C$。令 $\varphi = \omega t$，$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\omega$，则

$$u_C = \frac{I_m}{C} \int \cos \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{I_m}{\omega C} \int \cos \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t + K.$$

积分所得正弦项均值为零，无直流偏置要求 $K = 0$。

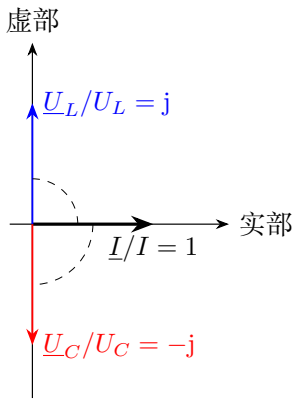


图 6.26: 按各自幅值归一化的相量只表示相位，电感、电容电压分别超前和滞后电流 90°

有效值与电抗

图 6.26 以电流相位沿水平向右，电感电压向上、电容电压向下，故 $U_L = \omega L I_m/\sqrt{2}$，$U_C = I_m/(\sqrt{2}\omega C)$，感抗 ωL、容抗 $1/(\omega C)$。

平均功率

瞬时功率均正比于 $\sin\omega t\cos\omega t$，利用 $2\sin\omega t\cos\omega t = \sin 2\omega t$，且

$$\int_0^T \sin 2\omega t \ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos 2\omega t}{2\omega}\right]_0^T = \frac{-\cos 4\pi + \cos 0}{2\omega} = 0.$$

故每一元件一周期平均功率均为零，表示能量往返交换。

例 6.2 (辉光器件的发光时间)**.** 交流电压 $u = 311\sin(314t)\,\mathrm{V}$，简化设器件在正负两个方向均于 $|u| \geq 220\,\mathrm{V}$ 时发光，无滞回。从 $t = 0$ 起观察 $1\,\mathrm{s}$，求发光总时间，并比较把角频率近似为 100π 时的结果。

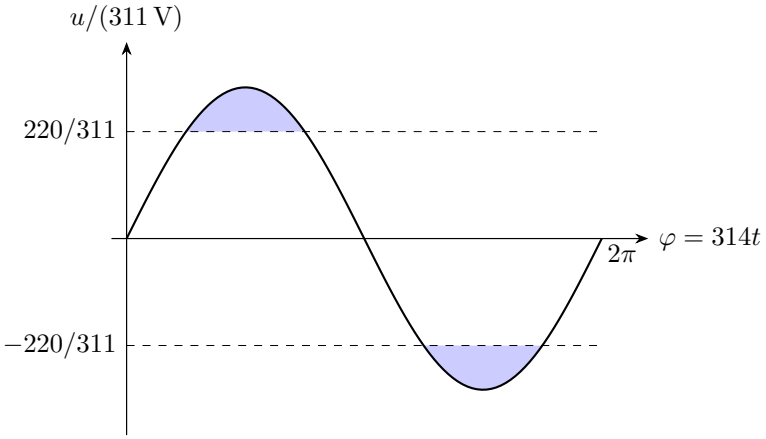


图 6.27: 输入电压与正负发光阈值。阴影标出两半周内各自的发光区间

解　两个半周的发光区间

图 6.27 中令 $\alpha = \arcsin(220/311)$，正半周 $\sin\varphi \geq 220/311$，起止相位为 $\varphi = \alpha, \pi - \alpha$；负半周则为 $\pi + \alpha, 2\pi - \alpha$。两个半周期各有相同的发光相位长度 $\pi - 2\alpha$，从而整周期发光占比 $D = 1 - 2\alpha/\pi \simeq 0.49974$。

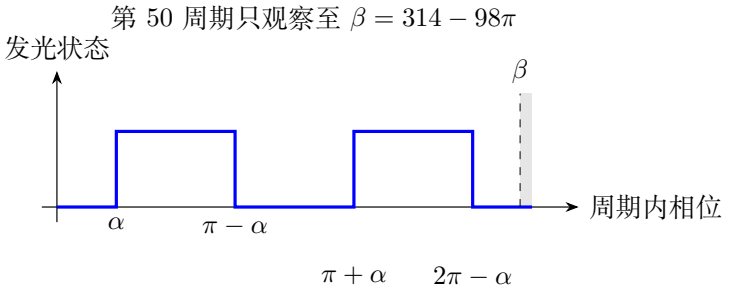


图 6.28: 每周期有两段发光。第 50 周期观察至 β，此时第二段发光已经结束

近似角频率的发光时间

图 6.28 标出正、负两个发光区。若取 $\omega = 100\pi$，一秒恰为 50 周期，发光时间 $D\,\mathrm{s} \simeq 0.49974\,\mathrm{s}$。

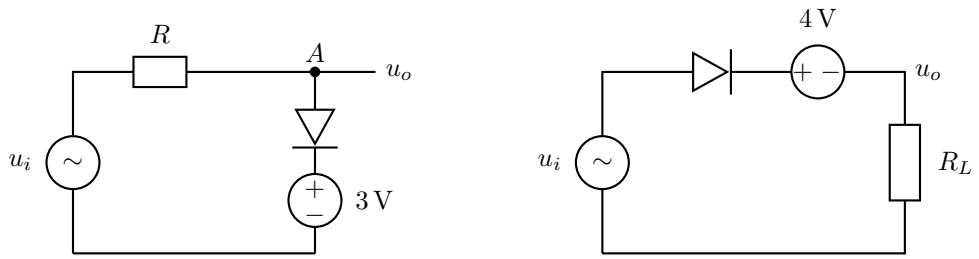
一秒观察窗的准确计时

若严格使用 314，一秒相位为 314，包含 49 整周期及余相位 $314 - 98\pi$。余相位约为 6.1239，而最后一段的结束相位 $2\pi - \alpha$ 约为 5.4974。该余段已经超过最后一段的结束点 $2\pi - \alpha$，所以仍包含第 50 周期的全部发光区间，发光总时间为

$$t_{\text{on}} = \frac{50(2\pi - 4\alpha)}{314} \simeq 0.49999\,\text{s}.$$

观察时间含有不满一周期的余段时，把整周期内的发光时间与余段内的发光时间相加。

例 6.3 (并联钳位与串联截波)**.** 输入 $u_i = 5\sin\omega t\,\text{V}$，经电阻 R 接输出节点 A，输出参考为地。理想二极管阳极接 A、阴极接 $+3\,\text{V}$ 理想偏置端，输出负载近似开路。求输出；再反接二极管。另有串联电路：输入 $6\sin\omega t$ 经允许由输入流向输出的二极管与正向压降 $4\,\text{V}$ 的偏置源接到负载 R_L，求负载电压。



$u_i = 5\sin\varphi\,\text{V}$　　$u_i = 6\sin\varphi\,\text{V}$

图 6.29: 左为高阻输出的并联上钳位，右为有负载的串联阈值传输；两者输入和偏置分别给定

解　并联上钳位

图 6.29 先假设二极管截止，输出无电流故 $u_o = u_i$。若 $u_i > 3\,\text{V}$，输出阳极高于阴极，导通后被钳到 $3\,\text{V}$，且 $(u_i - 3)/R \geq 0$，符合方向。因此 $u_o = \min(u_i, 3\,\text{V})$。

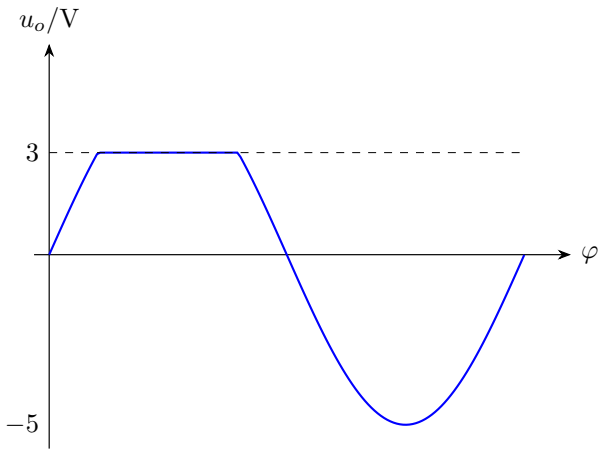


图 6.30: 正接并联二极管把正峰钳在 3V，负半波仍完整输出

图 6.30 的水平段来自二极管导通，曲线段来自截止后的开路输出；两个状态各自都满足题设电流方向。

反接后的下钳位

反接后导通条件变为 $u_i < 3\,\mathrm{V}$，电流由偏置源流向输入，所以 $u_o = \max(u_i, 3\,\mathrm{V})$。

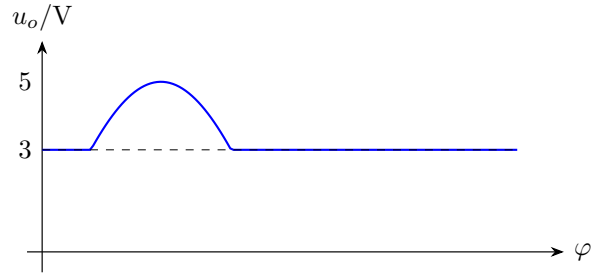


图 6.31: 反接二极管而保持偏置正端不变，下限便成为 3V，输入较低时由偏置源向输入送电

串联负载的输出

图 6.31 是保持 $+3\,\mathrm{V}$ 偏置、反接二极管得到的波形。再看图 6.29 右侧的串联电路。截止时负载电流为零，故 $u_o = 0$；导通时回路有 $u_i - 4 - iR_L = 0$，且要求 $i \geq 0$，故

$$u_o = \begin{cases} 6\sin\omega t - 4, & \sin\omega t \geq 2/3, \\ 0, & \sin\omega t < 2/3. \end{cases}$$

三段波形的衔接

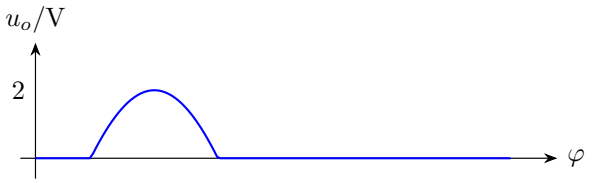


图 6.32: 串联电路只输出超过 4V 偏置的部分，峰值为 $6-4=2$V

图 6.32 的非零段要求二极管正向电流，零段则由负载电流为零确定。

并联钳位保留未被削去的负半波，串联负载则在大部分周期没有电压。在各自的阈值处，导通段与截止段的端点连续相接。

例 6.4 (串联电路的总电压与相位)**.** 串联 RLC 正弦稳态中，电阻、电感、电容的有效电压分别为 $60, 100, 20$ V，电流有效值 2 A，角频率 $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$。求总电压、各参数、有功功率与功率因数。

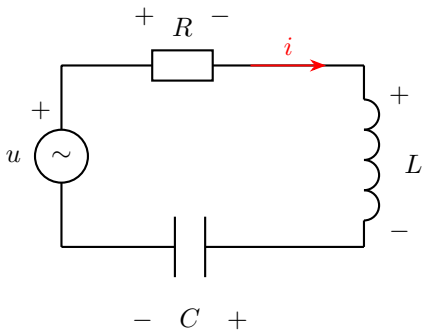


图 6.33: 串联电流相同，各端压按被动约定；有效值 $U_R = 60\text{V}, U_L = 100\text{V}, U_C = 20\text{V}$

解　电阻、感抗与容抗

图 6.33 各元件电流相同，先求 $R = 60/2 = 30\,\Omega$，$X_L = 100/2 = 50\,\Omega$，$X_C = 20/2 = 10\,\Omega$，因此 $L = X_L/\omega = 0.050\,\mathrm{H}$，$C = 1/(\omega X_C) = 100\,\mu\mathrm{F}$。

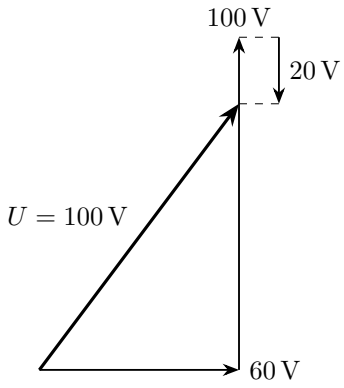


图 6.34: 解答过程：串联电路的总电压与相位

总电压相量

图 6.34 以电流相量为水平正向，电阻电压与它同相，电感电压超前 90 度，电容电压滞后 90 度。因而图中竖直合电压为 $100-20=80\,\mathrm{V}$，与水平 $60\,\mathrm{V}$ 正交，所以 $U=\sqrt{60^2+80^2}=100\,\mathrm{V}$。

有功功率和功率因数

只有电阻消耗平均功率，所以 $P=I^2R=2^2\times 30=120\,\mathrm{W}$；视在功率 $UI=100\times 2=200\,\mathrm{VA}$，故功率因数 $P/(UI)=120/200=0.60$，电压超前电流角 $\arctan(80/60)$。

例 6.5 (并联电路辨认真实线圈)**.** 正弦电源有效电压 $100\,\mathrm{V}$，一支路为 $100\,\Omega$ 电阻，另一支路为串联内阻 r 与电感 L 的真实线圈。总有功功率 $200\,\mathrm{W}$，总电流 $\sqrt{13}\,\mathrm{A}$，角频率 $1000\,\mathrm{s}^{-1}$。求 r, L。

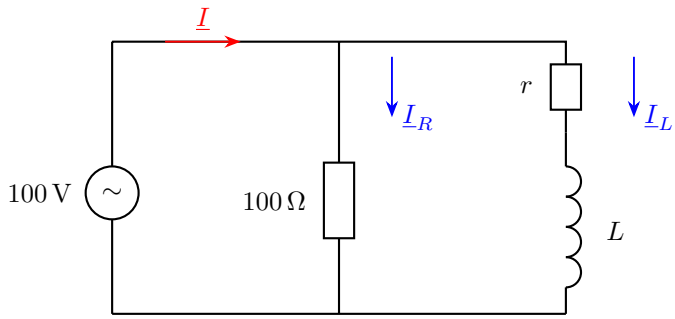


图 6.35: 真实线圈支路中电阻与电感串联；它与 100Ω 纯电阻支路共用电压

解　线圈的有功功率

图 6.35 两支路同电压。纯电阻支路电流为 1 A、功率 100 W，所以线圈有功功率也是 100 W，同相电流分量为 1 A。

滞后的电流分量

总同相分量 2 A，总电流大小 $\sqrt{13}$，因此无功分量大小为 $\sqrt{13-4}=3\,\mathrm{A}$，由电感性质取滞后方向。

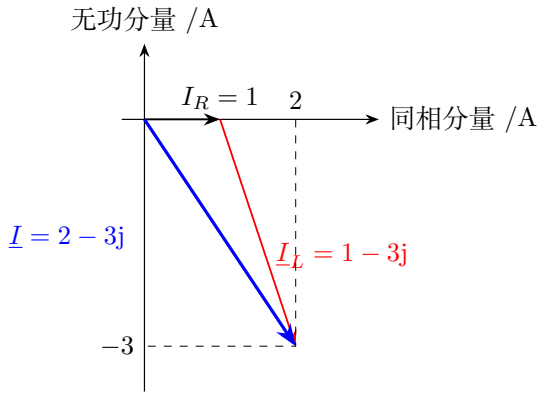


图 6.36: 线圈电流与纯电阻支路电流相加，得到电源的总电流

线圈阻抗

图 6.36 中线圈相量 $\underline{I}_L=1-3\mathrm{j}$，阻抗

$$Z_L=\frac{100}{1-3\mathrm{j}}\frac{1+3\mathrm{j}}{1+3\mathrm{j}}=\frac{100(1+3\mathrm{j})}{1+9}=10+30\mathrm{j}\,\Omega.$$

线圈的电阻与电感

所以 $r=10\,\Omega, L=30/1000=0.030\,\mathrm{H}$。检查线圈功率 $|I_L|^2r=10\times10=100\,\mathrm{W}$，与输入条件相符。

例 6.6 (水电功率与两端变压器)**.** 进、出口压强相同，水以 3 m/s 流入、以 1 m/s 流出水轮机，流出位置低 10 m，体积流量 10 m^3/s，密度 1000 kg/m^3。水轮机、发电机效率分别为 75%、80%，取 $g = 10\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$。发电电压 240V，线路总电阻 12Ω、损耗占送出功率 5%，用户电压 220V，两变压器理想，负载功率因数为 1。求输出功率及升压、降压匝数比。

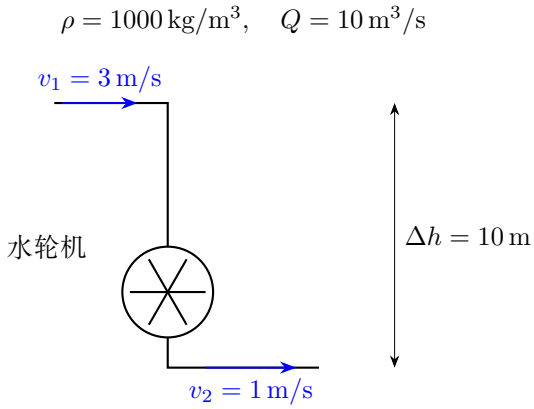


图 6.37: 水流入口、出口的速度与高度差；流量和效率共同确定发电功率

解　水流的机械功率

图 6.37 比较入口与出口两个截面，每秒流过质量 $\dot{m} = \rho Q = 10^4\,\mathrm{kg}/\mathrm{s}$，单位质量释放机械能 $g\Delta h + (v_1^2 - v_2^2)/2 = 100 + 4 = 104\,\mathrm{J}/\mathrm{kg}$。

发电机输出功率

故水流功率 $1.04 \times 10^6\,\mathrm{W}$，发电输出

$$P = 1.04 \times 10^6 \times 0.75 \times 0.80 = 6.24 \times 10^5\,\mathrm{W}.$$

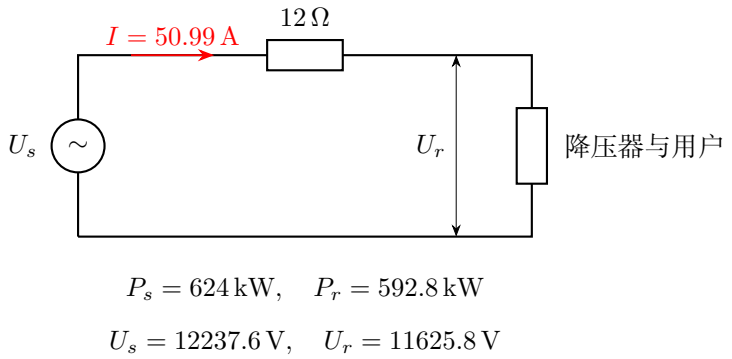


图 6.38: 升压后的线路以同一电流传送功率；降压匝比必须使用扣除损耗后的受端电压

线路电流与端压

图 6.38 按功率逐段传递，$I^2R_\ell = 0.05P$，得到线路电流 $I = \sqrt{31200/12} = 50.99\,\mathrm{A}$。送端高压 $U_s = P/I = 12237.6\,\mathrm{V}$，线路压降 $IR_\ell = 611.9\,\mathrm{V}$，受端 $U_r = 11625.8\,\mathrm{V}$。

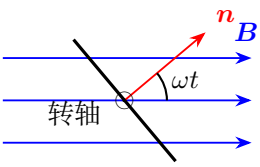
升压、降压匝比

理想变压器同频绕组的有效电压比等于匝数比：升压器输入为 240V、输出为送端电压 U_s；降压器输入是已经扣除线路压降的 U_r、输出为 220V。因而分别取相应两端电压，得到升压器 $N_1 : N_2 = 240 : 12237.6 \simeq 1 : 50.99$，降压器 $N_1 : N_2 = 11625.8 : 220 \simeq 52.84 : 1$。

受端功率

用户得到的功率为 $0.95P = 5.928 \times 10^5\,\mathrm{W}$，也等于用未舍入的 U_r, I 算出的 U_rI。

例 6.7 (感性负载下交流发电机的制动转矩)**.** N 匝面积 S 的线圈在匀强磁场 B 中以角速度 ω 匀速转动，磁链取 $\Psi = NBS\cos\omega t$。接串联 R, L 负载，已达稳态，忽略发电机其他损耗。求电流、瞬时电磁转矩和平均制动转矩，说明转矩是否始终阻碍转动。



线圈边视投影，N 匝、每匝面积 S

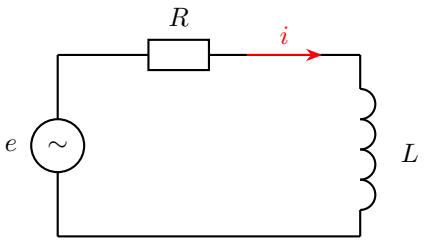


图 6.39: 左图法向转角决定磁链，右图为发电机向串联 RL 负载供电的等效回路

解　磁链、电动势与电流

由图 6.39 的磁链相位，$e = -\dot{\Psi} = -NBS(-\sin\omega t)\omega = E_m\sin\omega t$，其中 $E_m = NBS\omega$。负载满足 $L\dot{i}+Ri = E_m\sin\omega t$。设周期特解 $i = A\sin\omega t+B_1\cos\omega t$，则 $\dot{i} = A\omega\cos\omega t - B_1\omega\sin\omega t$。比较正弦、余弦系数，得 $RA - \omega LB_1 = E_m$、$\omega LA + RB_1 = 0$，从而 $A = E_mR/(R^2+\omega^2L^2)$、$B_1 = -E_m\omega L/(R^2+\omega^2L^2)$。齐次方程 $L\dot{i}_h + Ri_h = 0$ 在 $i_h \neq 0$ 时可分离为 $\mathrm{d}i_h/i_h = -(R/L)\,\mathrm{d}t$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}i_h}{i_h} = -\frac{R}{L}\int \mathrm{d}t, \qquad \ln|i_h| = -\frac{R}{L}t + C_0.$$

取指数并合并常数与符号，得到 $i_h = K\mathrm{e}^{-Rt/L}$，其中 $K = 0$ 也包括零解。因此完整电流是上述周期特解加衰减项；题设已达稳态，选取 $K = 0$ 的周期响应。把特解合成为相位形式，负载稳态电流为 $i = I_m\sin(\omega t-\phi)$，其中 $I_m = E_m/\sqrt{R^2+\omega^2L^2}$、$\tan\phi = \omega L/R$。

瞬时电磁转矩

电磁转矩对转子做功率为 $\tau_e\omega = -ei$，所以

$$\tau_e = -\frac{E_mI_m}{\omega}\sin\omega t\sin(\omega t-\phi).$$

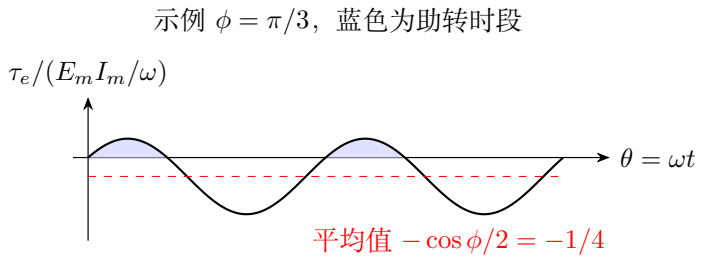


图 6.40: 感性负载下的有向电磁转矩；正值短时助转，周期平均值为制动转矩

平均制动转矩

图 6.40 中利用积化和差，$ei=E_mI_m[\cos\phi-\cos(2\omega t-\phi)]/2$。在 $T=2\pi/\omega$ 内，$\int_0^T\cos(2\omega t-\phi)\,\mathrm{d}t=[\sin(2\omega t-\phi)/(2\omega)]_0^T=0$。平均电磁转矩为负，平均制动转矩大小

$$\bar{\tau}_b=\frac{E_mI_m\cos\phi}{2\omega}=\frac{E_m^2R}{2\omega(R^2+\omega^2L^2)}.$$

助转时段与两种极限

若 $L>0$，某些时段 e,i 异号，$ei<0$，电磁转矩反而助转，表示电感释放磁能经电机送回转子。只有平均制动功率等于电阻平均热功率 $I_m^2R/2$。$L\to0$ 时瞬时功率始终非负，$R\to0$ 的理想纯电感负载则平均转矩为零，但瞬时转矩仍振荡。要维持严格匀速，外驱转矩也应作相应瞬时调整。

例 6.8 (对称移相截波的有效值与功率)**.** 电阻负载的周期电压按相位 $\varphi=\omega t$ 给出：每个半周期前 α 相位不导通，其后保留输入正弦，$0\le\alpha\le\pi$。即 $u_o=U_m\sin\varphi$ 在 $[\alpha,\pi]$ 与 $[\pi+\alpha,2\pi]$，其余为零。求平均值、绝对值平均值、有效值及负载功率。

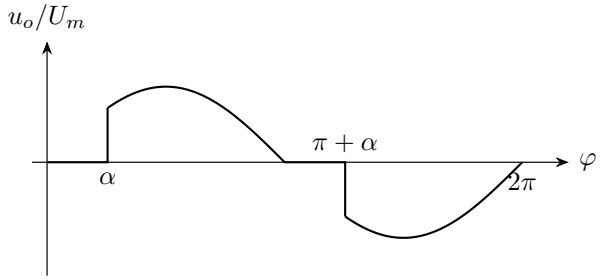


图 6.41: 对称移相截波的给定电压，图示 $\alpha=0.8$；两半周均须按同一延迟相位处理

解　有向平均与绝对值平均

图 6.41 两半周波形互为相反数，故平均电压为零。绝对值在两导通区的积分相等，$\overline{|u_o|}=\frac{U_m}{\pi}\int_\alpha^\pi \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{U_m}{\pi}[-\cos\varphi]_\alpha^\pi=\frac{U_m(1+\cos\alpha)}{\pi}$。它不同于有符号平均值，也不同于有效值。

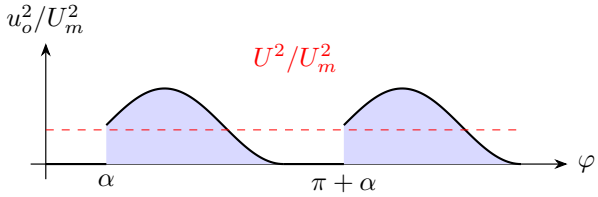


图 6.42: 平方后两半周贡献相同，面积须除以完整周期 2π，虚线示平方平均值

有效值的平方积分

按图 6.42 对平方波形积分，

$$\begin{aligned}U^2&=\frac{U_m^2}{\pi}\int_\alpha^\pi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{U_m^2}{\pi}\left[\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_\alpha^\pi\\&=U_m^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2\pi}+\frac{\sin 2\alpha}{4\pi}\right).\end{aligned}$$

半功率相位

所以有效值为上式平方根，平均功率 $P=U^2/R$。若希望功率为未截波时的一半，$\alpha=\pi/2$ 满足条件，此时 $U=U_m/2$。$\alpha=0$ 时恢复完整正弦，$U=U_m/\sqrt{2}$；$\alpha=\pi$ 时完全截止，所有输出量为零。

起始相位怎样影响功率

对角度求导，$\mathrm{d}(\sin 2\alpha)/\,\mathrm{d}\alpha=2\cos 2\alpha$，故 $\mathrm{d}U^2/\,\mathrm{d}\alpha=U_m^2[-1/(2\pi)+2\cos 2\alpha/(4\pi)]=-U_m^2\sin^2\alpha/\pi\le 0$，所以推迟导通会降低有效值及负载功率。

上述波形由纯电阻电流在过零时自然终止。若负载含电感，电流可能延续到电压过零之后，给定的截止相位将不再自动成立，应重新求导通区间。

例 6.9 (全波整流后的电容滤波与纹波)**.** 理想全波整流器由频率 f、峰值 U_m 的正弦电源驱动，输出接 C 与电阻 R 并联。忽略二极管压降，假定纹波很小、每半周期在峰值附近快速补电。求峰谷纹波、直流输出和纹波有效值的一阶近似，并说明近似适用条件。

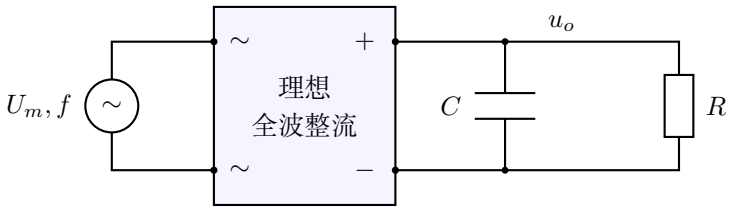


图 6.43: 正弦源接整流器的交流输入端，电容 C 和电阻 R 并接在直流输出端

解　全波整流后的电荷缺额

图 6.43 整流输出每半个输入周期有一个峰，相邻补电间隔约 $\Delta t = 1/(2f)$。放电期负载电流近似 $I_L = U_{\mathrm{dc}}/R$，电容损失电荷 $I_L\Delta t$，所以峰谷差 $\Delta U \simeq I_L/(2fC)$。

输出电压的峰谷差

上峰近似 U_m，下谷近似 $U_m - \Delta U$，两者平均给出 $U_{\mathrm{dc}} \simeq U_m - \Delta U/2$。

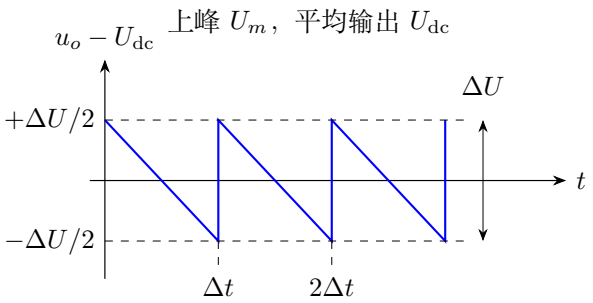


图 6.44: 小纹波放大后的近似线性放电段；相邻补电峰间隔为 $\Delta t = 1/(2f)$

直流输出与纹波

将图 6.44 的峰谷差 $\Delta U \simeq U_{\mathrm{dc}}/(2fRC)$ 代入 $U_{\mathrm{dc}} \simeq U_m - \Delta U/2$，得到

$$U_{\mathrm{dc}} \simeq U_m - \frac{U_{\mathrm{dc}}}{4fRC}, \qquad \left(1 + \frac{1}{4fRC}\right) U_{\mathrm{dc}} \simeq U_m.$$

因括号内系数为正，两边相除，再回代峰谷差，得到

$$U_{\mathrm{dc}} \simeq \frac{U_m}{1 + 1/(4fRC)}, \qquad \Delta U \simeq \frac{U_{\mathrm{dc}}}{2fRC}.$$

纹波的有效值

纹波去掉平均后，近似在 $+\Delta U/2$ 与 $-\Delta U/2$ 之间匀速变化。写作 $x(t)=\Delta U/2-(\Delta U/\Delta t)t$，则 $\mathrm{d}t=-(\Delta t/\Delta U)\,\mathrm{d}x$；$t=0,\Delta t$ 对应 $x=\Delta U/2,-\Delta U/2$。所以一个放电周期平均平方为

$$\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}x(t)^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\Delta U}\int_{-\Delta U/2}^{\Delta U/2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\Delta U}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\Delta U/2}^{\Delta U/2}=\frac{\Delta U^2}{12}$$

因此纹波有效值 $U_r=\sqrt{\Delta U^2/12}=\Delta U/(2\sqrt{3})$。总有效值满足 $U_{\mathrm{rms}}^2\simeq U_{\mathrm{dc}}^2+U_r^2$。

小纹波条件

小纹波要求 $2fRC\gg 1$，还要求补电导通时间相对半周期短。若 C 变小或负载重，放电不再近似线性，需使用指数放电与整流正弦相交来确定导通相位。

例 6.10 (由半功率频率反求串联谐振参数)**.** 串联 RLC 电路电阻 $R=20\,\Omega$, 电源有效电压 $U=100\,\mathrm{V}$, 改变频率而保持电压不变。两个半功率频率为 $f_1=80\,\mathrm{Hz}, f_2=125\,\mathrm{Hz}$。求 L,C、谐振频率、品质因数以及谐振时电感和电容端电压。

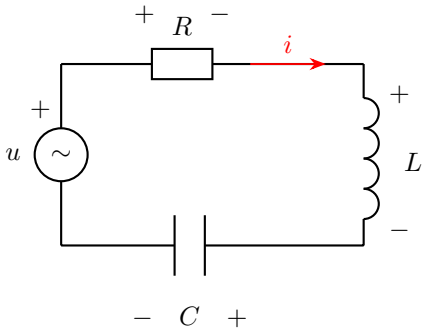


图 6.45: 电压固定、频率可变的串联 RLC；$R=20\Omega, U=100\mathrm{V}$，测得半功率频率 $80,125\mathrm{Hz}$

解　两个半功率方程

图 6.45 中 $I=U/\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}$。谐振时功率最大 U^2/R，半功率要求分母平方变为 $2R^2$，所以低频和高频两边分别满足

$$\frac{1}{\omega_1 C}-\omega_1 L=R,\qquad \omega_2 L-\frac{1}{\omega_2 C}=R.$$

带宽与频率乘积

分别乘 ω_1,ω_2 后消去 $1/C$，得到 $(\omega_2^2-\omega_1^2)L = R(\omega_1+\omega_2)$，故 $L = R/(\omega_2-\omega_1)$。再代回任一式，$1/C = L\omega_1\omega_2$。

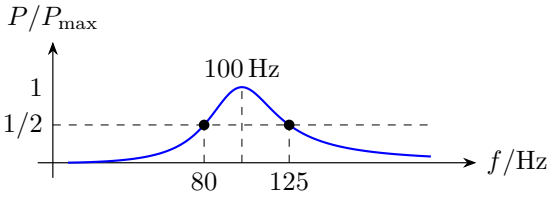


图 6.46: 两半功率点与精确谐振峰；横轴为频率，求角频率关系时须乘 2π

电路参数

由图 6.46 的两半功率点，$L = 20/[2\pi(125-80)] \simeq 0.07074\,\mathrm{H}$，$C = 1/[L(2\pi)^2(80)(125)] \simeq 35.81\,\mu\mathrm{F}$。谐振频率 $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = 100\,\mathrm{Hz}$，品质因数 $\mathcal{Q} = \omega_0 L/R = f_0/(f_2-f_1) = 20/9$。

谐振时的元件电压

谐振电流 $I_0 = U/R = 5\,\mathrm{A}$，$U_L = \omega_0 L I_0 = \mathcal{Q}U \simeq 222.2\,\mathrm{V}$，$U_C = U_L$，两者的相量方向相反。元件端电压可以超过电源电压，矢量相消使总电压仍为 100V。

谐振频率与半功率频率

f_0 是两个半功率频率的几何平均；把它们直接取算术平均会给出 102.5Hz，与精确谐振条件不符。

例 6.11 (变压器匝比与最大负载功率)**.** 正弦电源开路有效电压 E、纯电阻内阻 R_s，通过理想变压器接固定电阻 R_L。匝比 $n = N_1/N_2$ 可调。求负载功率与 n 的关系、最大功率时的匝比和效率，并说明这一点是否同时对应最高效率。

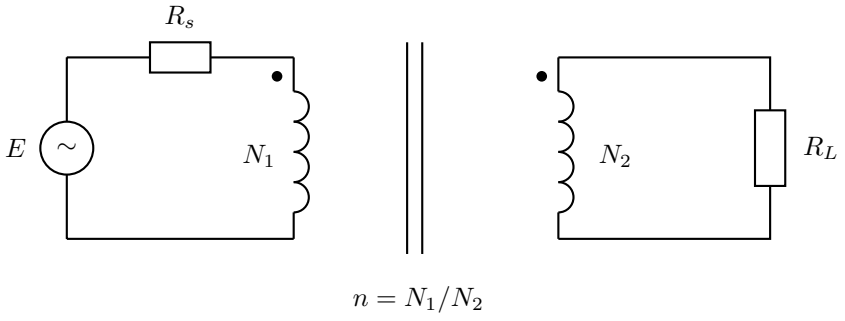


图 6.47: 有内阻的正弦电源接原绕组，固定电阻接副绕组，匝比 $n = N_1/N_2$ 可调

解　折算负载与输出功率

图 6.47 将副边负载折算到原边，$R_L' = n^2 R_L$，原边电流 $I_1 = E/(R_s + n^2 R_L)$。理想变压器不耗有功，负载功率为

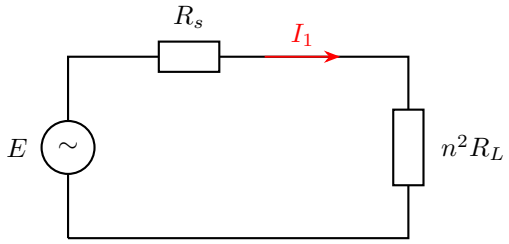
$$P_L = I_1^2 n^2 R_L = \frac{E^2 n^2 R_L}{(R_s + n^2 R_L)^2}.$$

最大负载功率

令 $x = n^2 R_L / R_s > 0$，得 $P_L = (E^2/R_s)x/(1+x)^2$；逐项求导，

$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}x} = \frac{E^2}{R_s}\left[(1+x)^{-2} - 2x(1+x)^{-3}\right] = \frac{E^2}{R_s}\frac{1-x}{(1+x)^3}.$$

导数在 $0 < x < 1$ 为正，在 $x > 1$ 为负，故唯一最大值在 $x = 1$。



$$P_{\text{in}} = EI_1 = I_1^2 R_s + P_L$$

图 6.48: 副边负载折算为原边电阻 $n^2 R_L$，源内阻仍在回路中并持续发热

最佳匝比与源损耗

由图 6.48 的等效原边，最佳匝比 $n_* = \sqrt{R_s/R_L}$，$P_{L,\max} = E^2/(4R_s)$。此时原边端压 $E/2$，副边电压 $E/(2n_*)$，源内阻热功率与负载功率相等，整个供电系统效率为 50%。

输出功率与效率

一般效率 $\eta = P_L/(EI_1) = x/(1+x)$，随折算负载电阻增大而上升，但输出功率在 $x > 1$ 后下降。$x \to \infty$ 时效率形式上趋 1 而功率趋 0；

例 6.12 (不平衡星形负载的中性点位移)**.** 三相理想电源相电压为 $\underline{U}_a = U$、$\underline{U}_b = U\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi/3}$、$\underline{U}_c = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi/3}$，对电源中性点 O 计。负载星形接法中 a, b, c 三支路分别为 $R, R, 2R$，公共点为 N。分别求中性线完好和断开时的支路电压、中性线电流及总有功功率。

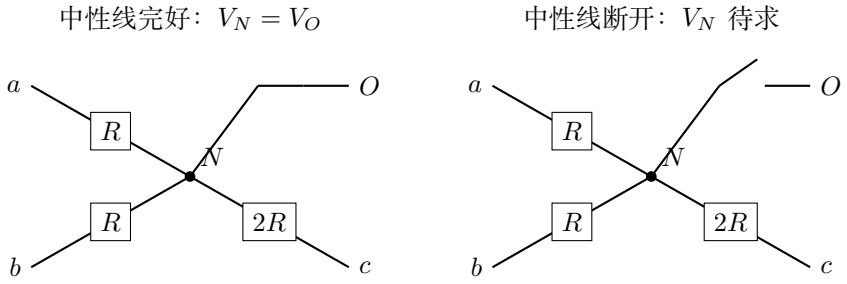


图 6.49: 不平衡负载的实际星形连接；中性线完好时固定 N 电位，断开后由节点方程求 N

解　中性线接通时的支路电压

图 6.49 的中性线将 N 固定在电源中性点 O 的电位，各负载电压均为相应电源相电压。电流按线端流向 N 为正，利用 $\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 0$：

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_a}{R}, \quad \underline{I}_b = \frac{\underline{U}_b}{R}, \quad \underline{I}_c = \frac{\underline{U}_c}{2R}, \qquad \underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = -\frac{\underline{U}_c}{2R}.$$

因此中性线电流大小为 $U/(2R)$；若按 $N \to O$ 取正，其相量即上式三电流之和。负载总有功功率为

$$P_{\text{通}} = \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{2R} = \frac{5U^2}{2R}.$$

断开后的中性点电位

断开 NO 后没有中性线电流，节点 N 不再等势于 O。令 $\underline{U}_N = V_N - V_O$，对 N 列电流守恒：

$$\frac{\underline{U}_a - \underline{U}_N}{R} + \frac{\underline{U}_b - \underline{U}_N}{R} + \frac{\underline{U}_c - \underline{U}_N}{2R} = 0.$$

乘以 $2R$ 后合并，

$$5\underline{U}_N = 2\underline{U}_a + 2\underline{U}_b + \underline{U}_c = -\underline{U}_c, \qquad \boxed{\underline{U}_N = -\underline{U}_c/5}.$$

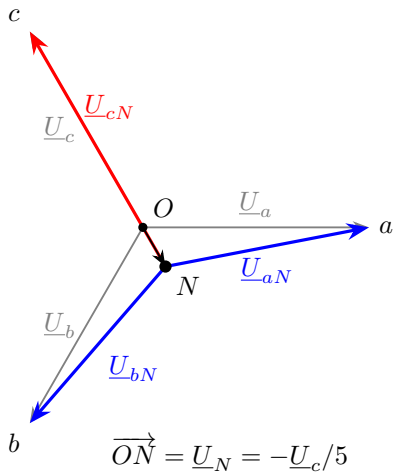


图 6.50: 电源电压从 O 起画，断线后的负载电压从新中性点 N 起画

图 6.50 中 O, N 表示相量平面上的电位端点。负载电压应沿 N 指向各线端，对应 $\underline{U}_{jN} = \underline{U}_j - \underline{U}_N$；$N$ 沿 $\underline{U}_c$ 反方向移动，使 c 支路电压增长。

新支路电压和功率

按图中的三条负载电压箭头，

$$\underline{U}_{aN} = \underline{U}_a + \frac{\underline{U}_c}{5}, \quad \underline{U}_{bN} = \underline{U}_b + \frac{\underline{U}_c}{5}, \quad \underline{U}_{cN} = \frac{6}{5}\underline{U}_c.$$

前两相与 $\underline{U}_c$ 的夹角均为 $120°$，所以

$$|U_{aN}|^2 = |U_{bN}|^2 = U^2\left(1 + \frac{1}{25} + \frac{2}{5}\cos 120°\right) = \frac{21U^2}{25}, \qquad |U_{cN}| = \frac{6}{5}U.$$

c 支路出现 20% 过电压。总有功功率为

$$\boxed{P_{\text{断}} = 2\frac{21U^2}{25R} + \frac{36U^2/25}{2R} = \frac{12U^2}{5R}}.$$

中性点的电流与平衡负载

两个 R 支路电压下降、$2R$ 支路上升，三电流重新分配后在 N 处相量和为零。若三电阻相等，节点方程恢复 $\underline{U}_N = 0$。

6.10　本讲小结

有效值由完整周期的平方平均决定。线性同频稳态用相量表示幅值与相位，串联先合成电压，并联先合成电流。二极管电路按导通区间写波形，再积分求平均值、有效值和功率。

理想变压器由共同磁通得到匝比电压关系，副边阻抗按匝比的平方折算到原边。三相负载的线量由相量相减得到，浮动中性点的电势由三支路电流和为零确定。长线路以分布电感和电容描述，行波携带电场能和磁场能，位移电流与传导电流共同决定环路磁场。

6.11　练习

练习 6.1 (平衡三相星形与三角形)**.** 平衡三相电源线电压 380V，每相相同负载阻抗 $Z = 8 + 6\mathrm{j}\,\Omega$。分别按星形和三角形连接，求相电流、线电流、有功功率及星形中性线电流。

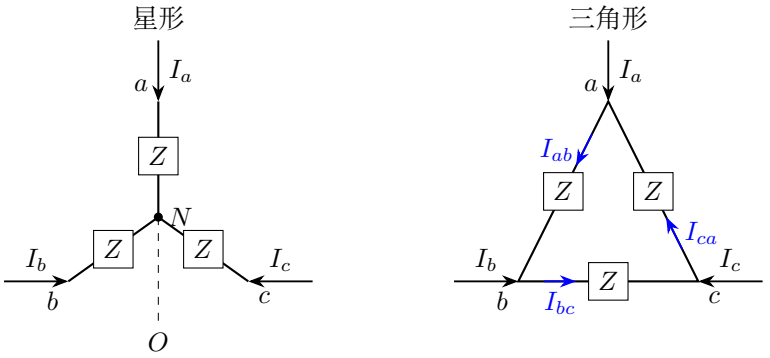


图 6.51: 题设：星形与三角形负载及线电流、支路电流正向

练习 6.2 (半波整流的平均值与有效值)**.** 理想二极管使负载 R 上电压为 $u_o = U_m \sin \omega t$（正半周），负半周为零。求周期平均电压、有效电压和平均热功率。

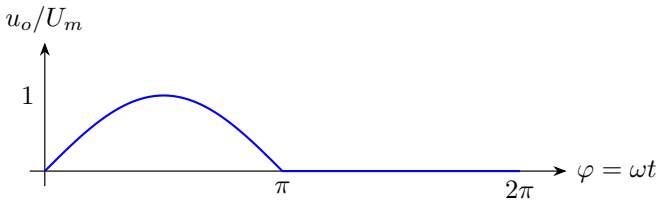
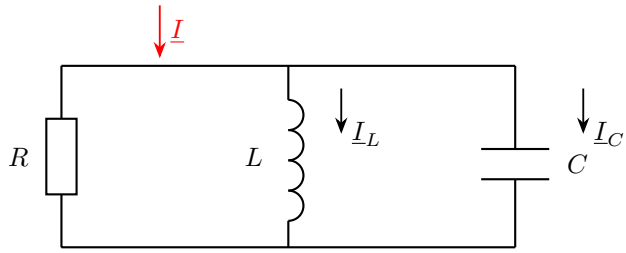


图 6.52: 理想半波整流的负载电压，负半周输出为零，平均值须按整个周期计算

练习 6.3 (并联谐振与支路大电流)**.** 理想电感 L、电容 C 和电阻 R 并联，接有效电压 U、角频率 ω 的电源。求总电流相量、谐振频率和谐振时功率，说明支路电流是否为零。



共同端压 $\underline{U}$，$\underline{I} = \underline{U}/R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$

图 6.53: 三个支路跨接同一正弦电源，电感和电容支路电流均以从上到下为正

练习 6.4 (充电电容间隙的磁场与波长)**.** 半径 a 的平行圆板电容缓慢充电，电流为 I，忽略边缘效应，极板间电场均匀。求同轴半径 s 的圆周上磁场（$s < a$ 及 $s > a$）。设电容的电容为 C，若它与电感 L 组成理想 LC 回路，真空中对应频率的电磁波波长是多少?

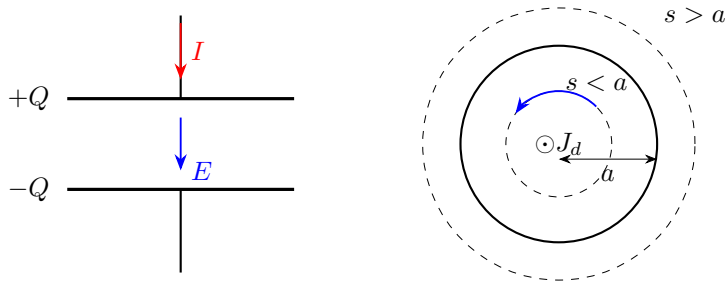


图 6.54: 左为正向充电的极板间隙，右为从下极板向上观察的截面，位移电流向纸外

练习 6.5（固定铁损和铜损下的最佳负载）. 一台变压器次级有效电压近似恒定 $U = 220\,\mathrm{V}$，负载功率因数为 1。空载铁损 $P_0 = 20\,\mathrm{W}$，折算到次级的总绕组电阻 $r_e = 0.20\,\Omega$，其他损耗忽略。求效率随负载电流变化关系及最高效率点；说明空载和大电流时效率的变化。

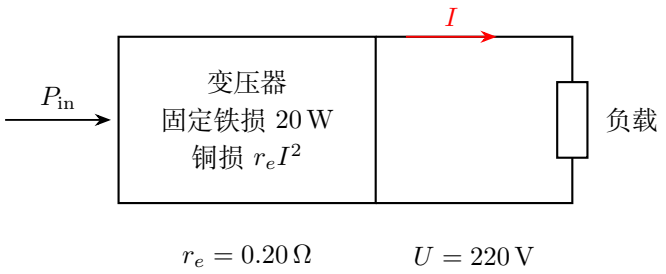


图 6.55: 有损变压器的输出及损耗模型，次级有效电压近似保持 220V

练习 6.6（传输线波前的速度与特性阻抗）. 理想无损长双导体线路的单位长度电感和电容分别为 L', C'。一个电压由零升到 U 的阶跃波前向右传播，波前后电流为 I、前方未受扰动。用给新线路段充电及建立磁场的过程求波速、U/I 和能流。再求内导体外半径 a、外导体内半径 b，介质参数为 ε, μ 的同轴线波速、特性阻抗和能流。

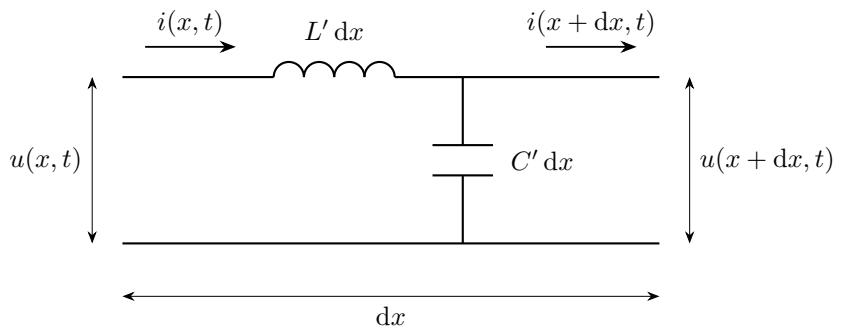


图 6.56: 取无损长线的一小段 $\mathrm{d}x$，串联电感 $L'\,\mathrm{d}x$，并联电容 $C'\,\mathrm{d}x$

练习 6.7 (非均匀变化电场中的磁场最大值)**.** 轴对称缓变电场沿 z 轴，在圆形区域 $r < a$ 内为 $E_z(r,t) = E_0(t)(1 - r^2/a^2)$，外区电场变化可忽略。无传导电流，忽略边缘及高阶传播效应。求同轴圆周磁场的内外分布，并找出磁场大小最大的半径，设 $\dot{E}_0 > 0$。

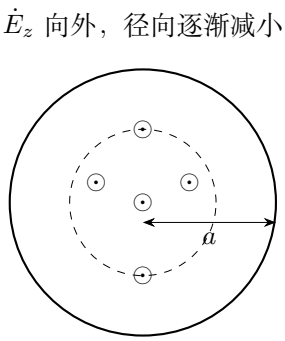


图 6.57: 题设：非均匀变化电场中的磁场最大值

练习 6.8 (并联电容补偿功率因数与线路损耗)**.** 单相负载接 $U = 220\,\mathrm{V}, f = 50\,\mathrm{Hz}$ 稳压电源，有功功率 $P = 2.2\,\mathrm{kW}$，滞后功率因数 0.60。用理想并联电容把总功率因数提高到 0.90，仍保持滞后。求电容、补偿前后源电流及同一线路电阻下损耗之比。负载电压与自身参数保持。

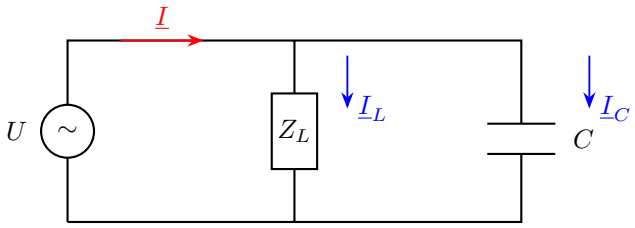


图 6.58: 感性负载与补偿电容并联，稳压源使负载端电压及负载自身的有功、无功保持

练习 6.9 (恒功率输电的端压与负载极限)**.** 理想单相送端电压有效值 U_s，线路总电阻 $R_\ell > 0$，受端功率因数为 1，调节负载使其吸收恒定有功功率 $P > 0$。忽略电抗。求受端电压的可能值、存在稳态的条件和线路效率，并比较轻载时两支解的物理含义。

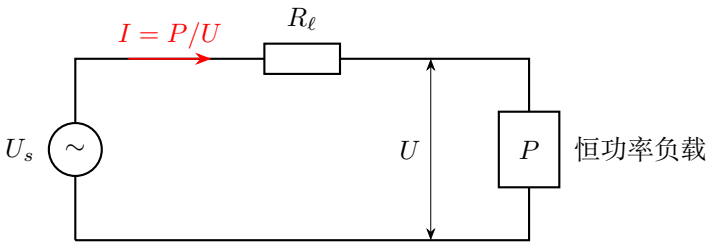


图 6.59: 送端电压固定，线路电阻与恒功率负载串联；负载的电流随其端压改变

练习解答

练习 6.1

解　线量与相量

图 6.51 左图每条线路电流就是对应负载电流；右图节点 a 则给出 $\underline{I}_a = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}$。负载参数为

$$|Z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\,\Omega, \qquad \cos\phi = \frac{8}{10} = 0.8.$$

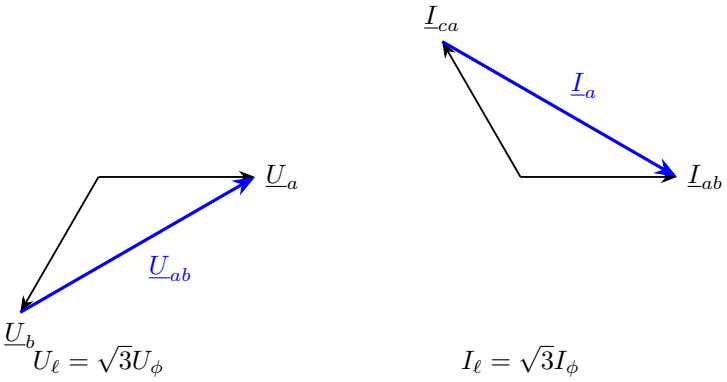


图 6.60: 星形的电压差与三角形的电流差；两图均将两个相差 120° 的等长相量相减

图 6.60 中作差箭头均从被减相量的端点指向另一端点。由余弦定理，差的模为

$$\sqrt{A^2+A^2-2A^2\cos 120^\circ}=\sqrt{3}A.$$

左图应用于星形线电压，右图应用于三角形线电流；两幅相量图可各自整体旋转，不改变模的关系。

星形连接

按题设图左侧连接，

$$U_\phi=\frac{380}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V},\qquad I_\phi=I_\ell=\frac{38}{\sqrt{3}}\,\mathrm{A}\simeq 21.94\,\mathrm{A}.$$

三条相电流等大且依次相差 120°，故中性线电流为零。总有功功率为

$$P_Y=3U_\phi I_\phi\cos\phi=11552\,\mathrm{W}.$$

三角形连接

题设图右侧每个 Z 直接跨接两条线路，

$$U_\phi=380\,\mathrm{V},\quad I_\phi=38\,\mathrm{A},\quad I_\ell=\sqrt{3}I_\phi=38\sqrt{3}\,\mathrm{A}\simeq 65.82\,\mathrm{A},$$

$$P_\Delta=3U_\phi I_\phi\cos\phi=34656\,\mathrm{W}=3P_Y.$$

两种接法的总功率

两种连接保持相同线电压、相同每相阻抗，因而三角形的相电压、相电流各增至星形的 $\sqrt{3}$ 倍，总功率增至三倍；若改变比较条件，应重新由接线求相量。

练习 6.2

解　整流电压的周期平均

图 6.52 只有 $0\le\varphi\le\pi$ 有输出。周期平均电压为 $\bar{U}=\frac{U_m}{2\pi}\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{U_m}{2\pi}[-\cos\varphi]_0^\pi=\frac{U_m[1-(-1)]}{2\pi}=\frac{U_m}{\pi}$。

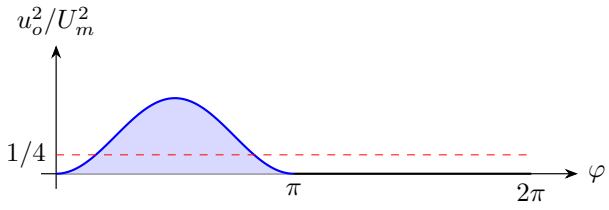


图 6.61: 平方波形只占正半周，蓝色面积除以 2π 得 $U^2/U_m^2=1/4$

有效值与发热

图 6.61 的蓝色面积给出正半周的平方积分，负半周的积分为零。取整周期的平均，归一化因子为 $1/(2\pi)$。用 $\sin^2\varphi = (1-\cos 2\varphi)/2$，有 $\int_0^\pi \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = [\varphi/2 - \sin 2\varphi/4]_0^\pi = \pi/2$。因此，$U^2 = (2\pi)^{-1}\int_0^\pi U_m^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = U_m^2/4$，故 $U = U_m/2$，$P = U_m^2/(4R)$。

练习 6.3

解　三个支路的电流

图 6.53 各支路同电压，以电压相量为实轴，$I_R = U/R$，$\underline{I}_L = -\mathrm{j}U/(\omega L)$，$\underline{I}_C = \mathrm{j}\omega CU$。相加得到

$$\underline{I} = \frac{U}{R} + \mathrm{j}U\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

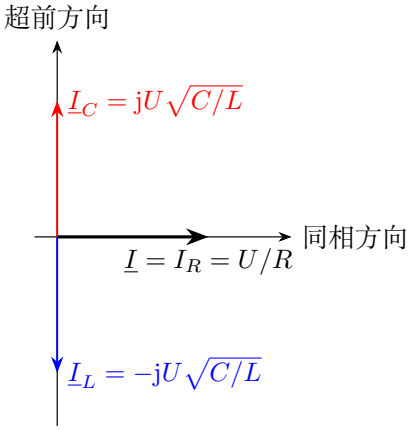


图 6.62: 谐振时两个电抗电流相量相消，电源仍供给电阻支路电流

谐振时的源电流与功率

图 6.62 谐振时总电流与源电压同相，图中竖直的无功分量为零，故 $\omega C - 1/(\omega L) = 0$。两边乘正量 ωL 得 $\omega^2 LC = 1$，所以 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$，总电流 U/R，总有功功率 U^2/R。

电抗支路的电流

支路电感、电容电流大小仍为 $U\sqrt{C/L}$，可以远大于源电流；它们交换储能而不消耗平均有功功率。

练习 6.4

解　位移电流密度

图 6.54 均匀极板电荷 Q 给出 $E = Q/(\varepsilon_0\pi a^2)$，故 $\varepsilon_0\dot{E} = I/(\pi a^2)$。

极板内的磁场

半径 $s < a$ 的圆面只包围全部均匀位移电流密度的一部分，对面积积分得 $I_d = 2\pi\varepsilon_0\dot{E}\int_0^s r\,\mathrm{d}r = 2\pi\varepsilon_0\dot{E}[r^2/2]_0^s = \varepsilon_0\dot{E}\pi s^2$。代入电场变化率，曲面包围位移电流 $I_d = Is^2/a^2$，由 $B(2\pi s) = \mu_0 I_d$ 得 $B = \mu_0 Is/(2\pi a^2)$。

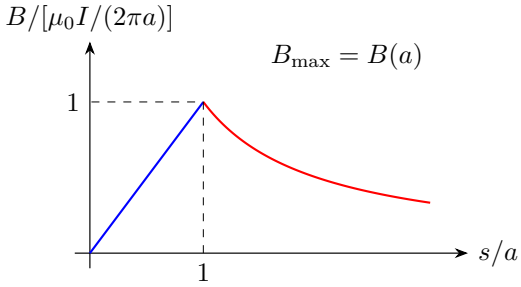


图 6.63: 均匀位移电流给出内部线性场，极板外由包围的总电流给出 $1/s$ 场

极板外的磁场与环向

图 6.63 外区圆周包围全部位移电流，所以 $s > a$ 时 $B = \mu_0 I/(2\pi s)$，两式在 $s = a$ 连续。磁场方向由电场增长方向的右手定则确定。

相同频率的真空波长

LC 振荡频率为 $f = 1/(2\pi\sqrt{LC})$，对应真空波长 $\lambda = c/f = 2\pi c\sqrt{LC}$。

练习 6.5

解　输出功率与损耗

由图 6.55 近似稳压条件，输出 $P_o = UI$，输入为 $UI + P_0 + r_e I^2$，故 $\eta = UI/(UI + P_0 + r_e I^2)$。

效率最高时的负载

对 $I > 0$, 最大效率等价于使 $F(I) = (P_0 + r_e I^2)/(UI) = (P_0/U)I^{-1} + (r_e/U)I$ 最小。固定 P_0, r_e, U，按幂函数求导，

$$F'(I) = \frac{P_0}{U}(-1)I^{-2} + \frac{r_e}{U}, \qquad F''(I) = \frac{2P_0}{UI^3} > 0.$$

驻点条件为 $-P_0 + r_e I^2 = 0$，取正电流得 $I_* = \sqrt{P_0/r_e}$；严格正的二阶导数说明它是唯一最小值点。

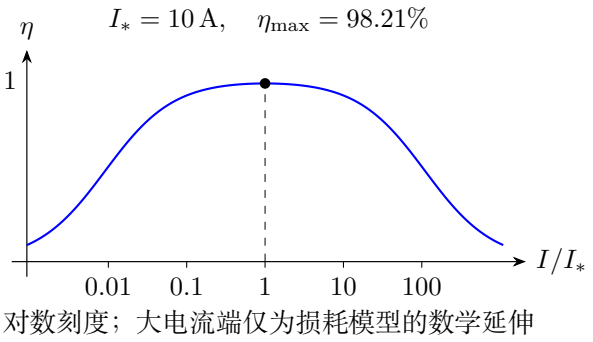


图 6.64: 损耗模型给出的效率曲线；横轴采用对数刻度，最佳点的铁损与铜损相等

最佳电流与效率

图 6.64 在该点铁损与铜损相等，数值 $I_* = 10\,\mathrm{A}$，输出 2200W，总损耗 40W，所以 $\eta_{\max} = 2200/2240 \simeq 98.21\%$。

轻载和大电流

$I \to 0$ 时输出趋零而铁损仍在，效率趋零；大电流时铜损按平方增长，比线性输出增加更快，效率也下降。

练习 6.6

解　波前的电荷与磁通

图 6.56 在短时间 $\mathrm{d}t$ 内波前推进 $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$。新段所需电荷为 $C'U\,\mathrm{d}x$，输入电荷 $I\,\mathrm{d}t$，所以 $I = C'Uv$。另一方面，图 6.65 中新建立的磁通为 $\mathrm{d}\Phi = L'I\,\mathrm{d}x$，推进时间为 $\mathrm{d}t$，因此波前对应的感应压差为 $U = \mathrm{d}\Phi/\,\mathrm{d}t = L'vI$。这也可由微段方程跨过阶跃波前积分得到。联立得到

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}, \qquad Z_0 = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}.$$

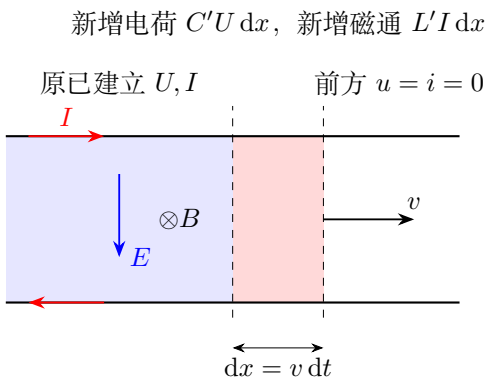


图 6.65: 波前在 $\mathrm{d}t$ 内前进 $\mathrm{d}x$，新增线段同时建立电场与磁场储能

行波的两种场能与功率

图 6.65 每单位长度的电场和磁场储能分别为 $C'U^2/2, L'I^2/2$；利用 $I = U/Z_0$ 两者相等，总量 $w = C'U^2$。前进速度乘储能密度 $vw = vC'U^2 = UI$，恰为电源送入功率。Z_0 连接行波的电压和电流，UI 是向前传送的功率。

同轴线的单位长度电容

再讨论均匀介质的同轴线。设单位长度内导体电荷为 λ_q，柱面高斯定律给出 $E_r = \lambda_q/(2\pi\varepsilon r)$，积分端压为 $U = \frac{\lambda_q}{2\pi\varepsilon}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\lambda_q}{2\pi\varepsilon}[\ln r]_a^b = \frac{\lambda_q}{2\pi\varepsilon}\ln(b/a)$，从而 $C' = \lambda_q/U = 2\pi\varepsilon/\ln(b/a)$。

同轴线的波速与特性阻抗

同轴线中忽略内部自感，安培环路给出 $B(r) = \mu I/(2\pi r)$。取单位长度径向张面，磁通为

$$\Phi' = \int_a^b B(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\mu I}{2\pi}[\ln r]_a^b = \frac{\mu I}{2\pi}\ln(b/a), \qquad L' = \Phi'/I = \frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a).$$

两个参数分别来自磁场和电场储能，取同一介质和同一环形空间，因而 $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$，$Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}\ln(b/a)/(2\pi)$。同轴线承载的行波功率为 $UI = U^2/Z_0 = 2\pi U^2\sqrt{\varepsilon/\mu}/\ln(b/a)$。

反射返回前后的端口

几何比例改变特性阻抗而不改变给定均匀介质中的波速。反射到来以前，源端看到的比值为 Z_0；有限线路末端开路或短路会在传播延迟后改变源端响应。

练习 6.7

解　非均匀位移电流的积分

图 6.57 中环路正向取逆时针。用题给的径向分布积分，得到环路包围的位移电流。对 $r < a$，

$$\begin{aligned} I_d(r) &= \varepsilon_0 \dot{E}_0 \int_0^r (1 - s^2/a^2) 2\pi s \, \mathrm{d}s \\ &= 2\pi\varepsilon_0 \dot{E}_0 \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4a^2} \right]_0^r \\ &= \pi\varepsilon_0 \dot{E}_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{2a^2} \right). \end{aligned}$$

极板内外的磁场

由 $B_\varphi 2\pi r = \mu_0 I_d(r)$，$B_{\text{in}} = \mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0[r/2 - r^3/(4a^2)]$。对外区包围全部位移电流 $\pi\varepsilon_0\dot{E}_0 a^2/2$，故 $B_{\text{out}} = \mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 a^2/(4r)$。

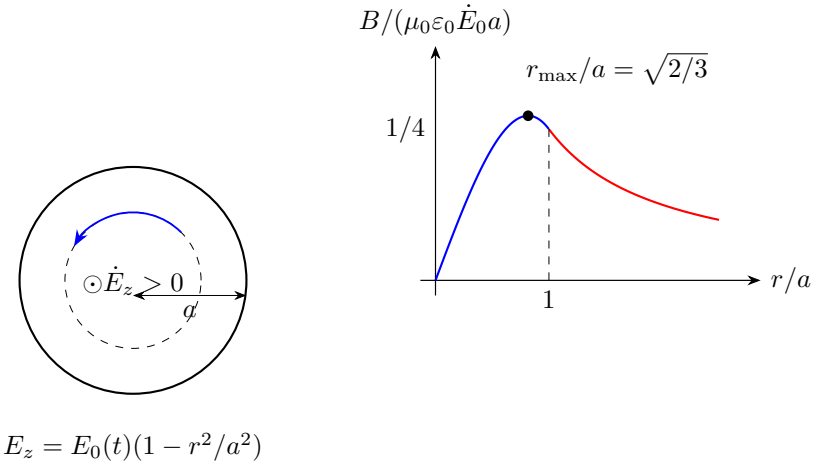


图 6.66: 给定非均匀电场所对应的包围位移电流与磁场曲线，内部极值需由积分后的场函数求出

磁场的峰值位置

图 6.66 两式在 $r = a$ 同为 $\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 a/4$。在同一时刻固定 $\dot{E}_0$，内部场逐项求导为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}r} = \mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 \left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{4a^2}\frac{\mathrm{d}r^3}{\mathrm{d}r} \right] = \mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{3r^2}{4a^2} \right).$$

导数为零要求 $2a^2-3r^2=0$，在 $0\le r\le a$ 内取 $r_*=a\sqrt{2/3}$。导数由正变负，外区场又随 $1/r$ 下降，故全局最大在此处。利用 $r_*^2/a^2=2/3$ 代回内部场，

$$B_{\max}=\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 r_*\left(\frac{1}{2}-\frac{r_*^2}{4a^2}\right)=\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 a\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\mu_0\varepsilon_0\dot{E}_0 a}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

轴线附近的磁场

靠近轴线时，$I_d(r)$ 的首项正比于 r^2，除以环路周长 $2\pi r$ 后，磁场正比于 r。

练习 6.8

解　补偿前后的无功分量

图 6.58 补偿不改变负载的有功电流 $I_P=P/U=10\,\mathrm{A}$。原相角满足 $\tan\phi_1=\sqrt{1-0.6^2}/0.6=4/3$，原无功电流为 $I_{Q1}=I_P\tan\phi_1=13.333\,\mathrm{A}$。目标 $\tan\phi_2=\sqrt{1-0.9^2}/0.9\simeq 0.48432$，故所需净无功电流为 4.843A。

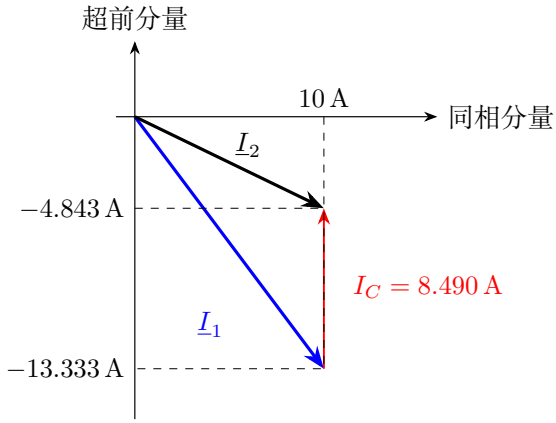


图 6.67: 补偿前后同相电流均为 10A，电容只改变净无功分量；图中电流为有效值相量

电容电流与电容

由图 6.67 的相量，电容提供超前电流 $I_C=I_{Q1}-I_{Q2}\simeq 8.490\,\mathrm{A}$。$I_C=2\pi fCU$，所以 $C\simeq 122.84\,\mu\mathrm{F}$。

线路电流与发热

源电流从 $I_1=P/(0.6U)=16.667\,\mathrm{A}$ 降至 $I_2=P/(0.9U)=11.111\,\mathrm{A}$，线路热损比为 $(I_2/I_1)^2=4/9$，降低约 55.6%。

补偿后的负载与源电流

负载仍消耗 2.2kW，理想电容只在周期内交换能量，节省的是输送相同有功功率所需的总电流。补偿使无功分量减小。完全补偿时线路电流最小，继续增加电容会使总电流超前，线路损耗随之回升。

练习 6.9

解　受端电压方程

图 6.59 功率因数为 1，所以电压电流相量同向，可用实数关系 $U_s = U + IR_\ell$，$P = UI$。由 $U > 0$ 得 $I = P/U$，代入电压关系并乘 U，得到 $U_s U = U^2 + PR_\ell$。移项配方为

$$\left(U - \frac{U_s}{2}\right)^2 = \frac{U_s^2}{4} - PR_\ell.$$

右侧非负时开平方，保留正负两个分支，得到

$$U_\pm = \frac{U_s \pm \sqrt{U_s^2 - 4PR_\ell}}{2}.$$

最大可传输功率

在题设 $P > 0$ 下，实数稳态要求 $0 < P \le U_s^2/(4R_\ell)$。极限功率处两解合并，受端 $U = U_s/2$、电流 $U_s/(2R_\ell)$。

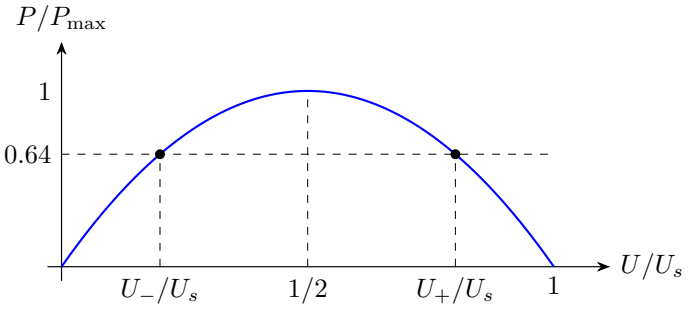


图 6.68: 给定功率的水平线一般与静态功率曲线相交两次；图示 $P/P_{\max} = 0.64$

两支解的电流与效率

图 6.68 中 $P = U(U_s - U)/R_\ell$ 是开口向下的抛物线。$P \to 0^+$ 时，高压支 $U_+ \to U_s$，电流趋零。低压支 $U_- \to 0$，由 $I = (U_s - U)/R_\ell$ 可知，电流趋于短路电流 U_s/R_ℓ。

线路效率为 $\eta = P/(U_s I) = U/U_s$。轻载时，高压支的效率趋于 1，低压支趋于零。两支解在抛物线顶点合并，效率为 1/2。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第一讲

几何光学原理

2026

目录

第一讲　几何光学原理 **1**

1.1　几何光学基本定律 1

1.2　近似计算与几何光学定律的解释 7

1.3　精确曲面与波前设计 10

1.4　散射与天空的颜色 11

1.5　例题与分析 12

1.6　本讲小结 40

1.7　练习 40

练习解答 43

第一讲　几何光学原理

1.1　几何光学基本定律

1.1.1　从小孔成像到光线

让一个小孔 O 隔在物体与屏之间。物上两点发出的光各有一小束能通过孔，孔后仍沿原来的方向传播。图 1.1 中，物面距孔 a，屏距孔 b，物点 B 在轴上方 y 处，穿孔的光落在轴下方的 B'。两个直角三角形有共同的顶角，若向上为正，则

$$\frac{-y'}{b} = \frac{y}{a}, \qquad y' = -\frac{b}{a}y.$$

屏上的倒像是由不同物点到达不同位置形成的。例 1.1 也从直线传播出发，用狭缝的两个端点作图，求眼睛经镜面能看到的米尺范围。

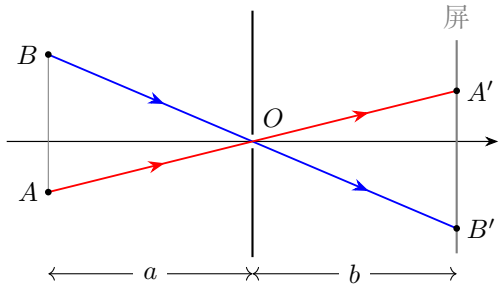


图 1.1: 两条过孔光线在 O 处交叉，物面与屏面上的高低顺序互换。

光线是传播方向的几何表示。在均匀、透明、各向同性的介质内，它是直线。孔径和介质变化的尺度远大于波长时，可以先用光线求像的位置与通光范围。遇到镜面或折射面，再从交点处的法线量角。

1.1.2　反射与折射

图 1.2 中，AO 为入射光线，OB 为反射光线，OC 为折射光线。各角均从界面法线量起。入射、反射、折射光线与法线共面，反射角等于入射角，折射角满足斯涅尔定律：

$$i' = i, \qquad n_1 \sin i = n_2 \sin r. \tag{1.1}$$

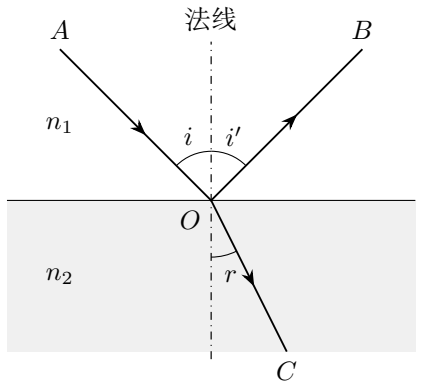


图 1.2: 反射和折射的角度约定。图中下方介质的折射率较大。

折射率定义为 $n = c/v_{\mathrm{p}}$，v_{p} 为相速度。本讲忽略色散，传播时间按 $v = c/n$ 计算，空气取 $n = 1$。第二种介质相对第一种介质的折射率为

$$n_{21} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

例题中的普通玻璃和液体取 $n > 1$，传播时间按各段的 $n\ell/c$ 相加。

镜面反射的两段光路可以用镜面对称展开。下一节先从图上确定法线和方向，再用展开图求狭缝与镜面的通光范围。

1.1.3　从法线、传播方向到几何关系

从交点沿入射光的来向回看，这条半直线与入射侧法线的夹角是 i。反射角、折射角分别从同侧和另一侧的法线量起。图 1.2 中，光线与界面成角 α 时有 $i+\alpha = 90^\circ$；沿法线入射时 $i = 0$。

图 1.3 把反射定律分解为两个分量。令 $\boldsymbol{u}$ 为指向镜面的入射单位矢量，$\boldsymbol{n}$ 为任一侧的单位法线，则

$$\boxed{\boldsymbol{u}_{\mathrm{r}} = \boldsymbol{u} - 2(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}.} \tag{1.2}$$

沿镜面的分量不变，垂直镜面的分量反号。对曲面，只需在碰撞点使用当地的 $\boldsymbol{n}$。若镜面方向与 $+x$ 轴成 φ，入射传播方向角为 θ，同一关系可写为 $\theta_{\mathrm{r}} = 2\varphi - \theta$，角度按 360° 取同一方向。这正是例 1.3 逐次计算反射方向所用的式子。

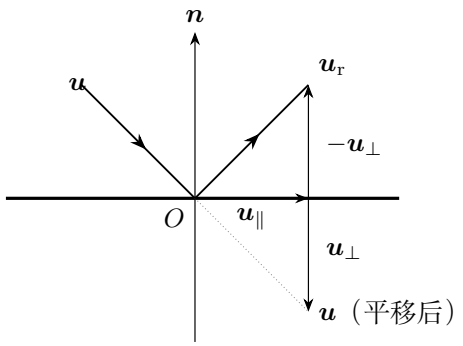


图 1.3: 传播矢量的切向分量保持不变，法向分量反号。虚线表示入射传播方向在 O 处的平移。

反射光的反向延长线在镜后交于虚像点。把反射段沿镜面翻到镜后，可在一条直线上同时标出碰镜点和穿屏点；图 1.4 给出这个作法。

1.1.4 镜像展开与实际反射路径

设物点、接收点分别为 A, B，镜面为 $y = 0$。图 1.4 把 A 映为 A'，镜面对称使任一镜上点 P 都有 $AP = A'P$。因此折线路程 $AP + PB$ 可由 $A'P + PB$ 计算；当 A', P, B 共线时，折线满足反射定律。

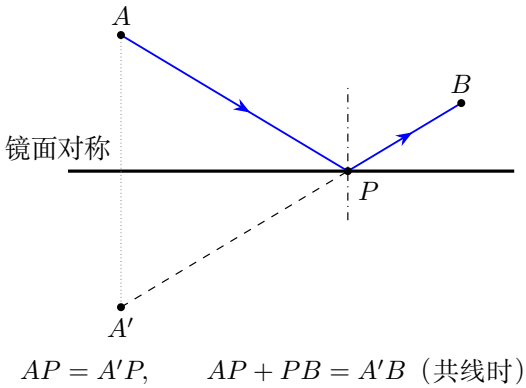


图 1.4: 由镜后像点与接收点的连线确定反射点。蓝线是镜前的实际光路。

在图 1.4 中，$A \to P \to B$ 是光在镜前走过的两段。有限镜面给 P 划定一段取值范围。狭缝若在往返路上都被穿过，就在展开图中标出两次穿越对应的位置；两段允许范围的交集给出实际可见的部分。

1.1.5　光密、光疏与全反射

“光密”和“光疏”表示两种介质折射率的相对大小，与质量密度没有普遍的一一对应关系。光由较大折射率 n_1 射向较小折射率 n_2 时，折射光远离法线。临界角为

$$\sin C = \frac{n_2}{n_1}, \qquad n_1 > n_2. \tag{1.3}$$

空气一侧取 $n_2 = 1$，于是 $\sin C = 1/n_1$。

临界角可直接由折射定律中的限制得到。实折射方向要求

$$\sin r = \frac{n_1}{n_2}\sin i \le 1.$$

随着 i 增大，r 到达 90° 时有 $n_1 \sin C = n_2$。导光棒的侧壁和端面可有不同的外界介质或法线方向，计算临界角和入射角时分别取各自的界面。

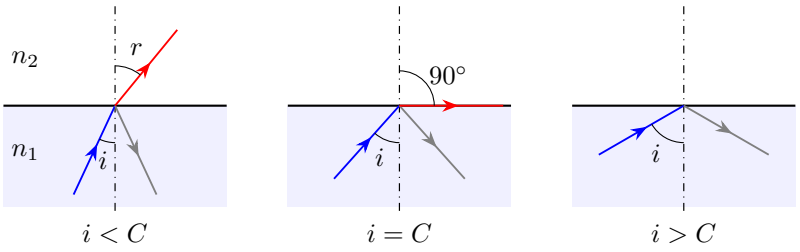


图 1.5: 光由 n_1 射向 $n_2 < n_1$。红线为折射光，灰线为反射光；图中取 $n_1/n_2 = 1.50$。

图 1.5 比较三个入射角。$i < C$ 时，红色折射线进入上方介质；$i = C$ 时，它趋于沿界面；$i > C$ 时，光沿灰色反射线回到第一种介质。例 1.9 先由端面确定入纤方向，再用侧面法线量出侧面入射角。

1.1.6　棱镜的两次折射与偏向

图 1.6 中，光在 P 折入棱镜，在 Q 折出。取 P 点指向棱镜内的法线及 Q 点指向棱镜外的法线为量角起点。两条法线方向相差棱镜顶角 A；内部光线的传播方向介于这两个方向之间，所以两个内角满足 $r_1 + r_2 = A$。光在 P 偏转 $i_1 - r_1$，在 Q 又向同一侧偏转 $i_2 - r_2$。把两次转角加起来，得到

$$r_1 + r_2 = A, \qquad \delta = (i_1 - r_1) + (i_2 - r_2) = i_1 + i_2 - A.$$

其中 i_1 是入射角，i_2 是最后的出射角。若两侧为同一种介质，令 N 为棱镜相对外界的折射率，则 $\sin i_1 = N \sin r_1$、$\sin i_2 = N \sin r_2$。

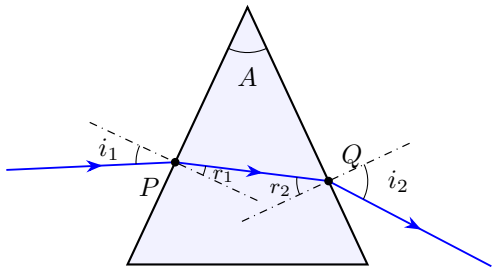


图 1.6: 非对称光路在 P,Q 各折转一次，虚线为两侧法线。

当 $N>1$ 时，两面都有非掠射透射，要求 $r_1,r_2<\arcsin(1/N)$。由 $r_1+r_2=A$，只要 $N\sin(A/2)<1$，对称走法 $r_1=r_2=A/2$ 就能通过两面。例 1.13 用求导证明对称走法的偏向最小，练习 1.4 则通过改变外界介质来比较透射条件。

1.1.7 分层介质中的位移、路程与时间

各层界面平行，因此同一个 $p=n_j\sin\theta_j$ 沿光路传递。图 1.7 中，d_j 是该层厚度，Δx_j 和 ℓ_j 分别为横向投影和实际路程。

$$\sin\theta_j=\frac{p}{n_j},\quad \Delta x_j=\frac{d_jp}{\sqrt{n_j^2-p^2}},\quad \ell_j=\frac{d_jn_j}{\sqrt{n_j^2-p^2}},$$

$$T=\sum_j\frac{n_j\ell_j}{c}=\frac{1}{c}\sum_j\frac{d_jn_j^2}{\sqrt{n_j^2-p^2}}.$$

若已知两端的横向间距 X，应先用 $\sum_j\Delta x_j=X$ 求 p，再求各层角度和时间。要使光线穿过所有层，须对每层都有 $p<n_j$；等号表示该层中的掠射极限。

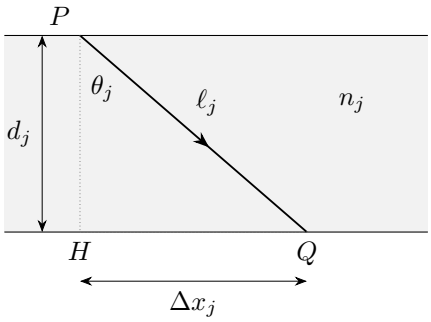


图 1.7: 在一层内区分法向厚度、横向投影和真实路程。PQ 与法线的夹角为 θ_j。

光线越接近层面，给定厚度所需的路程就越长。例 1.6 用的是两段横向投影之和；例 1.9 则要先把端面折射角转换为侧面的入射角。

取横轴朝向接收点，设 $X(p)=\sum_j d_j p/\sqrt{n_j^2-p^2}$。端点横向间距给定时，$X(p)=X$ 是关于同一个 p 的方程。对 $0\le p<\min_j n_j$，

$$\begin{aligned}X'(p)&=\sum_j d_j\left[(n_j^2-p^2)^{-1/2}+p^2(n_j^2-p^2)^{-3/2}\right]\\&=\sum_j \frac{d_j n_j^2}{(n_j^2-p^2)^{3/2}}>0.\end{aligned}$$

因此横向间距越大，各层光线越倾斜。$X(0)=0$，当 p 趋近最小的折射率时，最疏一层内的横向路程趋于无穷。这个单调关系给例 1.12 的数值求解提供了唯一的取值。

若把平行分层逐渐细化为 $n=n(y)$ 的连续介质，取 $\theta(y)$ 为光线与竖直线的锐角，同一不变量成为

$$n(y)\sin\theta(y)=p.$$

沿光线进入折射率较小的地方，光线与法线的夹角增大。到 $n=p$ 时，光线沿层面的方向传播。下一段用图 1.8 中的切线说明这种连续弯折。

1.1.8　渐变介质中的方向变化与转向点

在图 1.8 中，令 β 是切线相对水平向右方向的有向角，向上为正。于是 $\sin\theta=\cos\beta$，不变量写成 $p=n(y)\cos\beta$。向上时若折射率逐渐减小，β 随之减小，在 $n(y_T)=p$ 处达到水平切线。

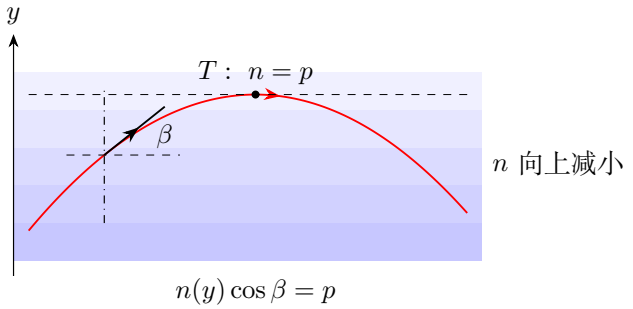


图 1.8: 折射率随高度降低时，光线逐渐转向，在 $n(y_T)=p$ 处与水平线相切。

平滑转向由很多次微小折射累积而成。用弧长 s 表示，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}s=\sin\beta$；对不变量 $n(y(s))\cos\beta(s)$ 使用乘积和链式法则：

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(n\cos\beta)=\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cos\beta-n\sin\beta\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}.$$

代入 $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}s=\sin\beta$，在非水平段将两项的公因子 $\sin\beta$ 消去，可得

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=\frac{\cos\beta}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}.$$

图中 $\mathrm{d}n/\,\mathrm{d}y<0$，故传播方向持续向下转。若光路在 y_T 处平滑，由相邻两侧取极限，曲率关系在转向点仍成立。

1.2 近似计算与几何光学定律的解释

1.2.1 小角度近似

以弧度计，

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6}+\cdots,\qquad \tan\theta=\theta+\frac{\theta^3}{3}+\cdots.$$

由光路图量出角度后，近轴折射可取 $n_1 i\simeq n_2 r$；全反射附近的 r 接近直角，仍按正弦关系计算。例 1.15 先用精确光程确定透镜面形，再从顶点附近取近轴结果。

小角度的判据是误差是否可接受。例如 $\sin\theta$ 以 θ 代替时，相对误差约为 $\theta^2/6$；$\tan\theta$ 的相应误差约为 $\theta^2/3$。5° 时二者约为 0.13%、0.25%，而 30° 时已不宜在精确追迹中直接替换。这里的幂级数必须把角度换成弧度后使用。

沿轴投影和实际路程的差从二阶开始。由 $1-\cos\theta\simeq\theta^2/2$ 可知，两条近轴路径若有相同的零阶光程，二阶的光程差便会决定干涉条纹。

在图 1.7 中，Δx_j 是一阶角度量，而 ℓ_j-d_j 是二阶角度量。分别展开后比较所求量的首个非零阶，才能判断哪些项可以略去。近轴成像着重光线方向的一阶关系，等光程设计却可能需要更高阶的长度，两类计算使用近似的目的不同。

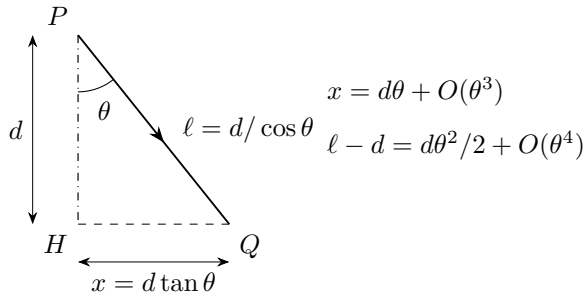


图 1.9: 相同角度下的精确投影；横向位移从一阶开始，路程增量从二阶开始

图 1.9 中，轴向厚度为 d，实际路程为 $d\sec\theta$。相对轴向多出的路程 $d(\sec\theta-1)$ 从二阶开始。有色散时，光程 $\int n\,\mathrm{d}s$ 用于计算相位；在本讲采用的无色散介质中，它除以 c 也给出传播时间。

1.2.2 光程与费马原理

均匀介质中，几何路程 s 对应光程 $\mathcal{L} = ns$。不均匀介质中则有

$$\mathcal{L} = \int_\Gamma n(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s, \qquad T = \mathcal{L}/c.$$

费马原理说，在固定两端之后，沿实际光路稍稍移动中间的路径，光程的一阶变化为零，记作 $\delta\mathcal{L} = 0$。均匀介质中两点之间的直线使光程取极小值；有曲面反射或多个可行光路时，驻值的性质由具体装置决定。

图 1.10 用平面界面说明这一原理。交点沿界面移动时，两个路段的光程随之变化；实际折射方向使两段的一阶变化恰好抵消。例 1.11 分别计算反射和折射的驻值。

1.2.3 光程驻值与透光窗口

透光窗口将折射点限制在 $x_{\min} \le x \le x_{\max}$。

图 1.10 把界面上的折射点写为 $P(x,0)$，物、像两端固定在 $A(-a,h_1)$、$B(b,-h_2)$。两介质的光程为

$$\mathcal{L}(x) = n_1\sqrt{(x+a)^2+h_1^2} + n_2\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}.$$

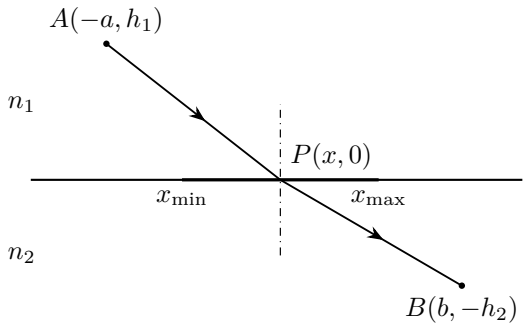


图 1.10: 先以折射点坐标表示光程，再检查驻值点是否落在有效界面内

让 P 向右移动 $\mathrm{d}x$，投影到 AP 的分量为 $\sin i\,\mathrm{d}x$，投影到 PB 的反向分量为 $-\sin r\,\mathrm{d}x$。对两段路程求导，可直接得到这两个系数：

$$\frac{\mathrm{d}(AP)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{(x+a)^2+h_1^2}}\cdot 2(x+a) = \frac{x+a}{AP},$$
$$\frac{\mathrm{d}(PB)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}}\cdot 2(b-x)(-1) = -\frac{b-x}{PB}.$$

所以

$$\mathcal{L}'(x) = n_1 \frac{x+a}{AP} - n_2 \frac{b-x}{PB} = n_1 \sin i - n_2 \sin r.$$

令 $\mathcal{L}'(x_*) = 0$ 就得到折射定律。若 A, B 在同一介质的镜面同侧，两段的共同折射率约去，同样的投影关系给出反射定律。

粗线段给出界面上透光的部分。当 $x_{\min} \le x \le x_{\max}$ 时，由驻值方程求得的光线可以通过；若交点在这段以外，挡板截去该光线。屏缘附近的明暗分布则可由第五讲的衍射计算。

1.2.4 波前与惠更斯原理

同一时刻相位相同的点组成波前。按惠更斯作图，经过 Δt 后，旧波前上各点发出的子波向前扩展，子波的前向包络就是新波前。

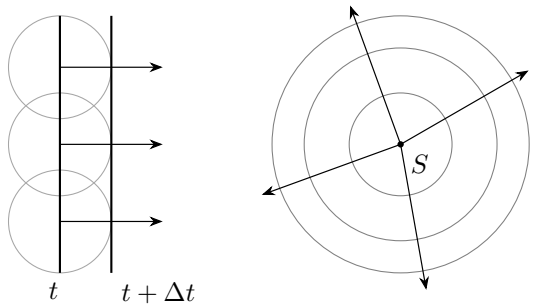


图 1.11: 平面波前与点光源的球面波前截面。箭头沿波前法线。

图 1.11 中，每条波前连接同一时刻相位相等的位置。垂直于波前的箭头是光线：平面波的光线彼此平行，球面波的光线沿半径发散。

同一波前若经光学系统会聚于一点，从该波前各处到焦点的传播时间相等。在本讲的无色散模型中，这等价于各条光路的光程相等。

也可用惠更斯作图直接读出折射定律。图 1.12 中，入射平面波前 AB 在 A 最先到达界面。经过 Δt，B 处的光传播到 C，所以 $BC = v_1 \Delta t$；同时，A 发出的下方子波半径为 $AD = v_2 \Delta t$。从 C 作子波的切线 CD，它便是新的折射波前，$AD \perp CD$。

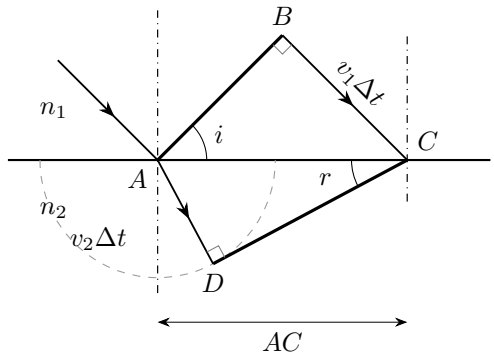


图 1.12: AB 与 CD 为先后两个波前；BC、AD 分别垂直于相应波前。图示取 $n_2/n_1 = 1.5$。

图上的两个直角分别在 B 和 D，两个三角形共用斜边 AC。因为光线垂直波前，波前和界面的夹角等于光线和法线的夹角，所以从 A 处的波前角读出 i，从 C 处的波前角读出 r，有

$$\sin i = \frac{BC}{AC}, \qquad \sin r = \frac{AD}{AC}, \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

波前作图由此得到与光线追迹相同的折射关系。例 1.14 和例 1.15 将进一步设计反射、折射面，使整个入射波前转化为以指定焦点为中心的会聚波前。

1.3 精确曲面与波前设计

等光程曲面把给定的入射波前变成所需的出射波前。从同一入射波前出发，分别求光到各曲面点的光程与各点到目标焦点的光程。让两项之和处处相等，便可确定曲面。

1.3.1 反射面的等光程与局部法线

图 1.13 左图中，平行光从 $x = X$ 向左射到 $M = (x, y)$，再反射到 $F = (f, 0)$。均匀介质的公共折射率约去，等光程要求

$$(X - x) + MF = X + f, \qquad MF = x + f,$$

平方后得到 $y^2 = 4fx$。它给出抛物线截面，绕轴旋转即为抛物面。点源到另一点的反射则要求 $MF_1 + MF_2$ 为常数，得到椭圆截面；两种曲面来自不同的入射波前。

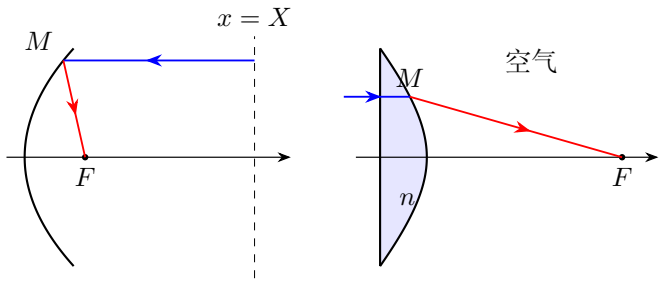


图 1.13: 反射时补偿几何路程，折射时补偿加权光程；两侧图中的介质和入射方向不同

等光程还应落实到反射方向。沿曲面切向 $\boldsymbol{t}$ 移动 M，路径的一阶变化为 $(\boldsymbol{u}_{\text{in}} - \boldsymbol{u}_{\text{out}}) \cdot \boldsymbol{t}\ \mathrm{d}s = 0$，所以两传播单位矢量的切向分量相同；对实际入、出镜面的两条光线，法向分量大小相等、方向相反。这给出与前述反射矢量式相同的局部定律。

1.3.2 折射面的加权光程与传播支路

右图以玻璃内的平面 $x = 0$ 为入射波前。到曲面点 $M = (x, y)$ 的玻璃路程为 x，到外部焦点的空气路程为 MF，故

$$nx + \sqrt{(f - x)^2 + y^2} = K.$$

令 $L = MF = \sqrt{(f - x)^2 + y^2}$，先对根式逐项微分：

$$\mathrm{d}L = \frac{2(x - f)\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y}{2L} = -\boldsymbol{u}_{\text{out}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\ \mathrm{d}\ell.$$

因此 $\mathrm{d}(nx + L) = n\,\mathrm{d}x - \boldsymbol{u}_{\text{out}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$，除以 $\mathrm{d}\ell$ 得 $(n\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{u}_{\text{out}}) \cdot \boldsymbol{t} = 0$，说明两侧切向光学分量相同，等价于斯涅尔定律。再以曲面向外法线检查出射方向，排除平方后引入的根和全反射支路。边缘位置、中心厚度和外部焦点还会进一步限制孔径。例 1.15 把这些条件同时用于有限孔径的精确面形，第三讲继续讨论不同物像位置下的设计。

1.4 散射与天空的颜色

前面的几何光路描述沿一条方向传播的光；天空颜色还需要研究光离开原传播方向后的强度分布。晴空的颜色涉及光在大气中的散射。对于尺度远小于波长的分子或微粒，瑞利散射强度近似满足 $I_{\text{sc}} \propto \lambda^{-4}$，短波光更容易被散射到偏离太阳直射方向的位置。

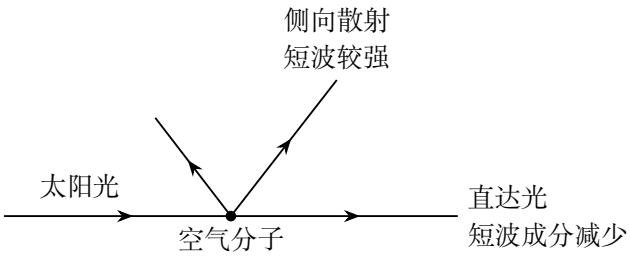


图 1.14: 直达光沿较长的大气路径传播后，短波成分损失较多；侧向观察接收到较强的短波散射光。

例如比较 $0.425\,\mu$m 和 $0.650\,\mu$m 的光，在其余条件相同时，散射强度比约为

$$\left(\frac{0.650}{0.425}\right)^4 \simeq 5.47.$$

图 1.14 中的侧向光含有较多短波成分。日出、日落时，直达光在大气中的路径较长，短波成分损失较多，常呈偏红色。云滴通常比可见光波长大，对可见光各色的散射差异较小，混合后常呈白色。

天空没有呈现单一紫色，还与太阳光谱、大气传输及人眼对不同波长的响应有关。判断所见颜色时，须把这些因素与 λ^{-4} 的散射规律合并考虑。

1.5　例题与分析

例 1.1 (经过狭缝观察米尺)**.** 平面镜 AB、水平放置的米尺 P_1P_2 与不透明屏 MN 相互平行。屏上 ab 为透光狭缝，米尺有刻度的一面朝向镜面。眼睛紧贴米尺上的小孔 S，位置如图 1.15。用作图法确定能经平面镜看到的米尺部分。

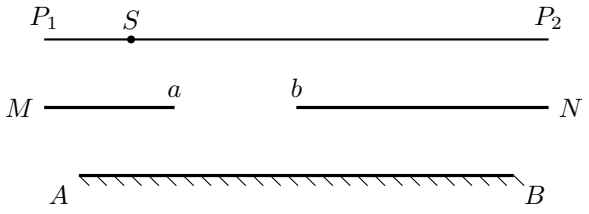


图 1.15: 反射前后两段光路均须穿过狭缝 ab。各段长度未给出，按几何作图确定范围。

解　把眼点与两次穿缝条件展开到同一直线

图 1.15 中，米尺上一点能被看到，要靠一条先穿狭缝、碰镜后再穿狭缝的光线。先在图 1.16 中把眼睛 S 对镜面对称为 S'，再把狭缝端点 a, b 对称为 a', b'。任取米尺上的点 Q，若反射点为 P，把反射段 $P \to S$ 展开，整条光路便成为直线 $Q \to P \to S'$。

这条直线必须依次通过三个允许区域：实狭缝 ab、镜段 AB、虚狭缝 $a'b'$。实狭缝限制入射段 $Q \to P$，虚狭缝限制折回后的 $P \to S$。因此应作 $S'a, S'b$、$S'a', S'b'$、$S'A, S'B$ 并延长到米尺所在直线；三组线各给出一个允许区间，再与米尺本身取交集。

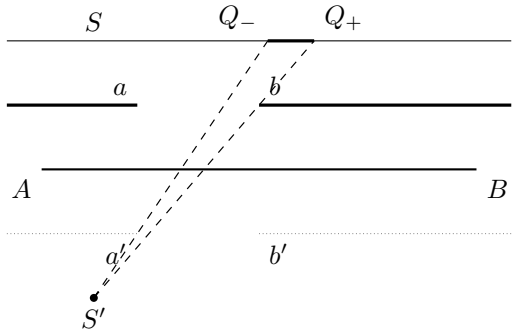


图 1.16: 镜像展开同时保留实、虚狭缝。粗米尺段 Q_-Q_+ 是各允许区间的交集。

把两条端点光线折回镜前

图 1.16 所示位置中，可见区的左端由 $S'a'$ 与米尺的交点 Q_- 决定，右端由 $S'b$ 的交点 Q_+ 决定。

图 1.17 把两条端点光线折回镜前。左端点光线返回时擦过 a，右端点光线入射时擦过 b；两次反射的位置都在镜段 AB 上。

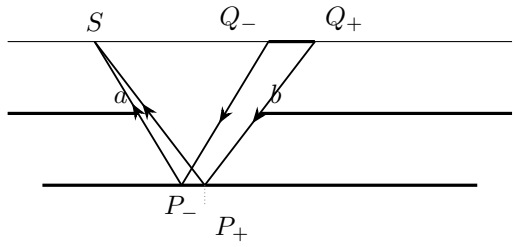


图 1.17: 可见区两个端点的反射光路。左端点的返回段擦过 a，右端点的入射段擦过 b。

写出镜面和两次穿屏的交点坐标

图上的投影也可以写成坐标关系。设镜面 $y=0$，米尺 $y=D$，屏 $y=h$，$0<h<D$，眼睛横坐标为 s，物点横坐标为 q。镜面交点与两次穿屏点分别为

$$x_P=\frac{q+s}{2},\quad x_{\text{入}}=s+\frac{D+h}{2D}(q-s),\quad x_{\text{回}}=s+\frac{D-h}{2D}(q-s).$$

镜段给出 $x_P\in[A,B]$，两次穿屏分别给出 $x_{\text{入}},x_{\text{回}}\in[a,b]$。把三个条件都换成关于 q 的范围，再与米尺相交。

把各通光限制化为同一米尺上的区间

图 1.18 将三组投影区间并列画出，各行横坐标对应同一个米尺位置。沿竖线比较各行，便可找出公共部分。仍用 a,b,A,B 表示相应端点的横坐标，前三组范围分别为

$$\begin{aligned}I_{\text{入}}&=\left[s+\frac{2D(a-s)}{D+h},\ s+\frac{2D(b-s)}{D+h}\right],\\ I_{\text{回}}&=\left[s+\frac{2D(a-s)}{D-h},\ s+\frac{2D(b-s)}{D-h}\right],\\ I_{\text{镜}}&=[2A-s,\ 2B-s].\end{aligned}$$

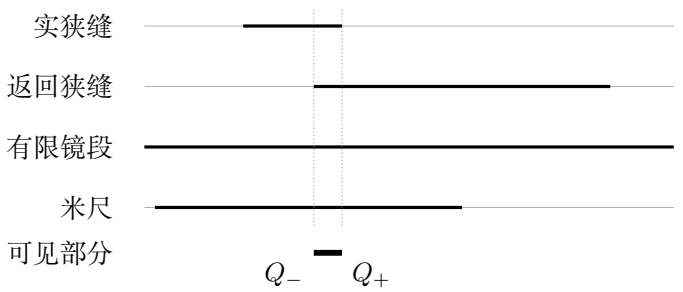


图 1.18: 将三种通光限制投影到米尺所在直线后，取它们与米尺的公共部分。各行横向尺度相同。

取各段可见范围的交集

可见部分是 $I_{\text{入}}\cap I_{\text{回}}\cap I_{\text{镜}}\cap[P_1,P_2]$。在图 1.18 中，所有左端点的最大值和所有右端点的最小值分别给出这段公共区间的两端。

例 1.2 (夹角镜中的像数)**.** 两个平面镜的夹角分别为 $45°, 60°, 120°$，物体均放在夹角平分线上。分别求像的个数。镜面足够大，忽略遮挡，见图 1.19。

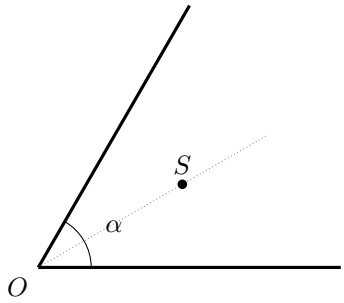


图 1.19: 物体 S 在两镜的角平分线上。反复镜像保持到交点 O 的距离。

解　反复镜像并按圆周位置去重

图 1.19 中两镜交于 O，S 到 O 的距离在两次镜像中都保持不变。依次把 S 对两镜作对称，每个像仍位于以 O 为圆心、OS 为半径的圆上。本题中 $m = 360°/\alpha$ 分别为 8、6、3，物体又位于角平分线上，反复镜像恰好得到 m 个不同位置，分布在等分扇区的中线上。绕满一周后与已有位置重合，计数便应停止。

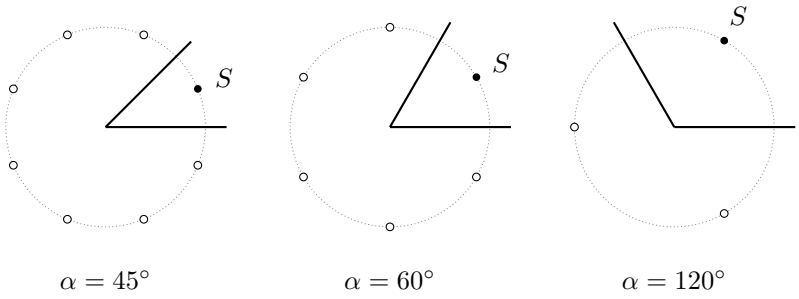


图 1.20: 实心点为物体，空心点为不同的像。三种情况下均须从圆周总位置数中扣除物体本身。

扣除物点，分别得到三种像数

图 1.20 分别有 8、6、3 个不同位置，其中一个是真实物体，故

$$\boxed{N_{45°} = 7, \qquad N_{60°} = 5, \qquad N_{120°} = 2.}$$

对于 $120°$ 的情形：物体在 $60°$ 方向，对下镜反射到 $300°$，对上镜反射到 $180°$；再反射只会回到这三个位置。

图 1.20 中的空心点各算一个像。同一位置可以由不同的镜像顺序得到。$45°$ 和 $60°$ 两图中，这些位置的方向角可写为 $\alpha/2 + k\alpha$，$k = m$ 时恰好绕回真实物点。

检查镜面大小和观察窗口的附加限制

应将像的位置计数与具体眼点能看见哪些像分开。前者按图 1.20 的镜像位置去重；后者还要从眼点向像连线，检查各次反射是否落在实际镜面上。本题已约定镜面足够大且忽略遮挡，因此求的是给定镜角和物体位置下的像数；若另给有限镜长或观察窗口，就必须增加可见光路的筛选。

例 1.3 (小夹角镜间的反复反射)**.** 两镜 L_1, L_2 相交于 O，夹角 $\alpha = 15^\circ$，A 在 L_2 上，$OA = 10\,\mathrm{cm}$。从 A 沿垂直于 L_2 的方向发出光线，先射向 L_1，此后反复反射，直到平行于某一镜面射出。求从 A 到最后一次反射点的总路程，见图 1.21。

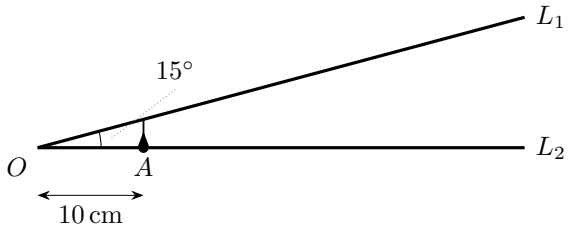


图 1.21: 两镜朝右张开，起始光线垂直于下镜。

解　逐次计算传播方向，确定最后反射点

图 1.21 中，L_2 是水平镜面，光从 A 竖直发出。在图 1.22 中，依次记反射点为 $P_1, \ldots, P_5$。用相对下镜的方向角计算，每次在上镜反射取 $\theta_{\text{出}} = 30^\circ - \theta_{\text{入}}$，每次在下镜反射取 $\theta_{\text{出}} = -\theta_{\text{入}}$，得到

$$90^\circ \to -60^\circ \to 60^\circ \to -30^\circ \to 30^\circ \to 0^\circ.$$

因此共有 5 次反射，最后在上镜的 P_5 处反射后平行于 L_2 射出。

五次反射的入射角

方向角 θ 相对下镜量取；碰撞点的入射角则相对该处法线量取。由图 1.22 得到

碰撞点	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
i	15°	30°	45°	60°	75°

第一段光线垂直下镜，上镜法线相对它转过 15°，所以在 P_1 的入射角为 15°。

最后一条水平光线留在两镜间的开口内，不会再碰到下镜。

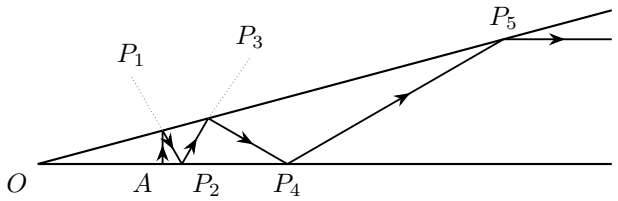


图 1.22: 五次反射的实际光路。数字按碰撞先后标记，P_5 是最后一次反射点。

展开镜区，把五段折线拉直

将五段光路展开，可把总路程化为一条线段的长度。每次反射后，把后续镜区翻到前一镜区的另一侧，光路便拉直。图 1.23 中，五个碰撞面依次成为与水平成 $15°, 30°, 45°, 60°, 75°$ 的射线；光路始终沿过 A 的竖直线前进。

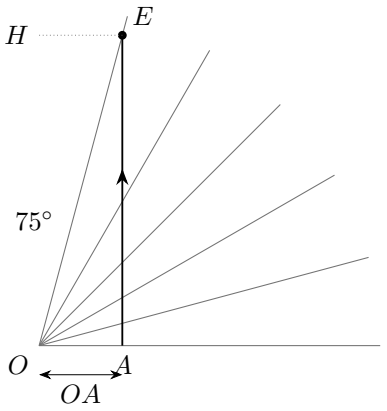


图 1.23: 展开后的同一条直光线。E 是 P_5 的展开位置，$HE = OA$ 为水平尺度，AE 等于实际总路程。

由直角三角形求总路程并界定终点

展开只作刚性反射，故各段长度之和不变。直角三角形 OAE 给出

$$\boxed{s = AE = OA\tan 75° = 10(2+\sqrt{3})\,\mathrm{cm} \simeq 37.32\,\mathrm{cm}.}$$

这里计算到 P_5 为止，不包括平行于下镜射出后的路程。

例 1.4 (由光路比较折射率)**.** 光依次穿过平行的介质 I、II、III，各段与法线的夹角如图 1.24 所示。选出所有正确说法：A. 介质 II 是三者中的光密介质；B. 介质 I 的折射率最大；C. 介质 III 的折射率比 I 大；D. 光在介质 III 中的速度最小。

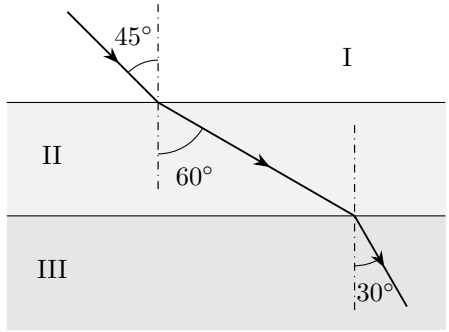


图 1.24: 两个界面平行，三个角均从法线量起，依次为 $45°, 60°, 30°$。

解　用平行界面确定共同折射参数

图 1.25 将三段共用的折射参数记为 p。由于界面法线平行，逐面折射给出

$$n_{\mathrm{I}} \sin 45° = n_{\mathrm{II}} \sin 60° = n_{\mathrm{III}} \sin 30° = p.$$

所以

$$n_{\mathrm{I}} = \sqrt{2}p, \qquad n_{\mathrm{II}} = \frac{2}{\sqrt{3}}p, \qquad n_{\mathrm{III}} = 2p.$$

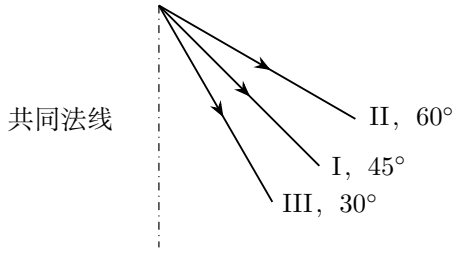


图 1.25: 将三段转到同一法线旁比较。共同的 $n \sin\theta$ 使角越小的一段对应折射率越大。

比较折射率与光速，判断各选项

由此 $n_{\mathrm{III}} > n_{\mathrm{I}} > n_{\mathrm{II}}$，而 $v = c/n$，故 $v_{\mathrm{III}} < v_{\mathrm{I}} < v_{\mathrm{II}}$。答案为 $\boxed{\mathrm{C,D}}$。介质 II 的折射率最小，是三者中光速最大的一层。图 1.24 第一界面处，光线远离法线，从 I 进入折射率较小的 II；第二界面处又向法线偏折，从 II 进入折射率较大的 III。

这个逐面判断与代数排序一致。将共同因子消去，还可得到确定的比值

$$n_{\mathrm{I}} : n_{\mathrm{II}} : n_{\mathrm{III}} = \sqrt{6} : 2 : 2\sqrt{3}.$$

任意给定其中一层的折射率，就可由这个比例求其余两层的绝对折射率。

反向传播时的临界角

从相反方向看第二个折射面。图 1.25 中从 II 进入 III 时折射率增大，因而不存在由 II 向 III 的全反射；若反向从 III 射向 II，则临界角满足$\sin\theta_c = n_{\mathrm{II}}/n_{\mathrm{III}} = 1/\sqrt{3}$。原光路在 III 中的角度为$30^\circ < \theta_c$，可沿原路返回。这里使用的是光路可逆性，不需要再假定一个新的折射率。

例 1.5 (糖水中弯曲的光线)**.** 在长方形玻璃缸中配制糖水，静置两天后，用激光笔从侧面斜向上射入，发现缸内光线向下弯曲，见图 1.26。以下哪项能合理解释? A. 玻璃缸的折射作用；B. 光束不绝对平行；C. 糖水不均匀，越深处密度越大；D. 不同颜色的光发生色散。

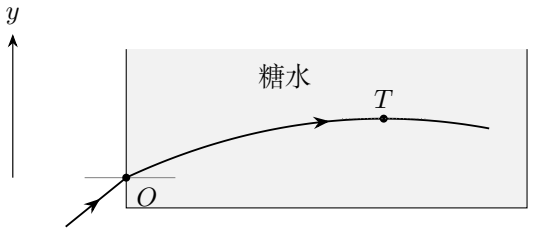
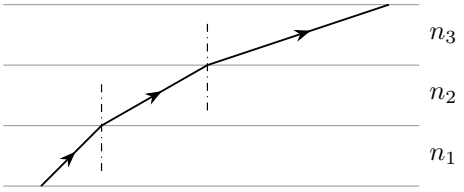


图 1.26: 忽略玻璃壁厚度。入缸处 O 的折射使光线靠近水平法线；缸内光路继续平滑弯曲，在 T 达到最高点。

解　区分界面折转与液体内部的连续弯曲

玻璃壁在入射面使光线折转。图中光线进入液体之后仍沿途弯曲，因而要用液体内部随高度变化的折射率来解释。



$$n_1 > n_2 > n_3$$

图 1.27: 把糖水分成很薄的水平层。向上进入较小折射率的一层时，光线远离竖直法线，逐渐转向水平。

把法线角换为水平角，写出分层不变量

在图 1.27 中，设光线与水平线夹角为 θ，则与竖直法线的夹角为 $90^\circ-\theta$。

分层折射保持

$$n(y)\cos\theta = \text{常量}.$$

光向上走而 n 减小时，$\cos\theta$ 增大，轨迹斜率减小。对糖水，浓度越高，密度与折射率通常都越大。因此较深处浓度较高符合图中的光路，选 $\boxed{\text{C}}$。

用实方向条件确定可能的转向高度

图 1.26 中，光过 O 后先上升，斜率逐渐减小。若 $n(y)$ 随高度降低到 $n(y_T)=p$，则 $\theta=0$。再高处 $n<p$，条件 $n\cos\theta=p$ 已无实解，光路于 T 向下转。

由折射率梯度求弯曲方向

还可沿光线弧长 ℓ 对 $n\cos\theta=p$ 求导。利用 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\ell=\sin\theta$，在上升段有

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\sin\theta\cos\theta - n\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\ell}=0, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\ell}=\frac{\cos\theta}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}<0.$$

这一式子直接说明曲率转向。图 1.26 采用平滑的分层模型；图 1.27 则用少数水平薄层近似显示同一趋势。

例 1.6 (游泳池中的杆影)**.** 池底水平，水深 $h=1.20\,\mathrm{m}$。一根直杆竖直立于池底，浸水部分恰占全长的一半。太阳光与水平面成 37°，测得池底影长 $s=2.50\,\mathrm{m}$。求水的折射率，见图 1.28。

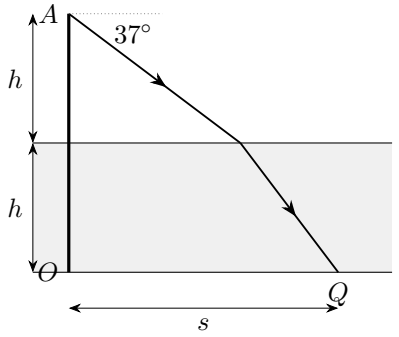


图 1.28: 擦过杆顶 A 的光线决定影子的端点 Q；O 为杆脚。

解　把影长拆成空气段和水中段的投影

图 1.28 中，水面把竖杆分成空气和水中的两段，杆顶光线从上向下传播。图 1.29 把水面折射点记为 P，过 P 作竖直辅助线，将影长拆成 x_1,x_2。杆在水面上、下的高度都等于 h，因此

$$x_1 = h\cot 37^\circ = 1.59245\,\mathrm{m}, \qquad x_2 = s - x_1 = 0.90755\,\mathrm{m}.$$

从水面法线读角，用直角三角形求折射角

空气中的入射角须从竖直法线量起，故 $i = 53^\circ$。水中三角形给出

$$\tan r = \frac{x_2}{h}, \qquad \sin r = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + h^2}}.$$

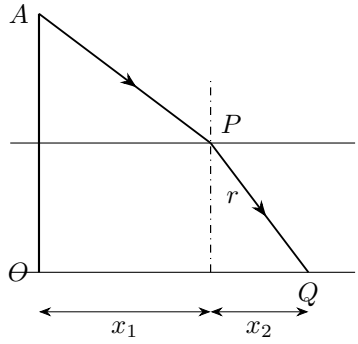


图 1.29: 空气段和水中段的水平投影之和为 s。水中角 r 从 P 处法线量起。

由两侧角度反求折射率

用斯涅尔定律，

$$\boxed{n = \frac{\sin 53^\circ}{\sin r} = \frac{\cos 37^\circ \sqrt{x_2^2 + h^2}}{x_2} \simeq 1.324.}$$

水中 $r \simeq 37.1^\circ < i$，光比在空气中更靠近法线。图 1.29 中的水下三角形只占总影长的一段 x_2。

与无折射影长比较，检查结果方向

还可从无折射情形检查影长的方向。若把水换成空气，全杆高度为 $2h$，则影长应为 $s_0 = 2h \cot 37^\circ \simeq 3.185\,\mathrm{m}$。实际 $s = 2.50\,\mathrm{m} < s_0$，因为图 1.29 水中的光线更接近竖直方向，水下投影缩短。若计算结果反而使 $n < 1$ 或 $s > s_0$，应首先检查是否把 37° 当成了法线角。

例 1.7 (空心球的吸收截面)**.** 透明球壳的折射率为 $n>1$，内、外半径分别为 a,b，$0<a<b$。内表面完全吸光。平行光从空气射入，忽略外表面反射损失，求首次在壳内传播时被内壁吸收的入射光束横截面积，见图 1.30。

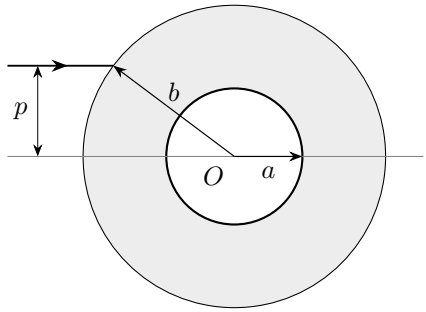


图 1.30: 球壳的子午截面；p 为入射线到球心的垂距，吸收截面在入射前量取。

解　把入射垂距与壳内垂距用折射关系连接

图 1.30 中，球壳的内、外表面同心。只要壳内折射线与内球相交，光就被吸收。图 1.31 中外表面交点为 P，法线是半径 OP。由垂距定义，$p=b\sin i$。将壳内折射线作几何延长，它到 O 的垂距记为 q，则 $q=b\sin r$。外表面折射关系为 $\sin i=n\sin r$，所以

$$q=p/n.$$

同时施加吸收内壁与击中外球的条件

折射光向球内传播，能接触内球的条件为 $q\le a$。此外，入射光本身须打到外球，即 $p\le b$。两条件合并为 $p\le p_{\max}=\min(b,na)$。

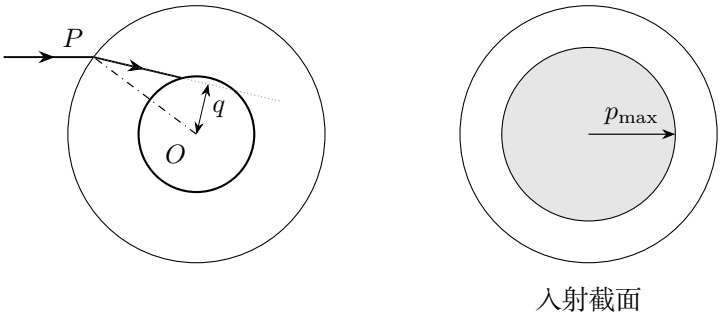


图 1.31: 左图的实光线在吸收内壁终止，虚线仅用于定义垂距；右图为吸收截面。

在入射平面上积分求吸收截面

图 1.31 右侧所有允许光线填满一个圆盘。

对入射圆环积分，

$$\boxed{\sigma = \int_0^{p_{\max}} 2\pi p \, \mathrm{d}p = 2\pi \left[\frac{p^2}{2}\right]_0^{p_{\max}} = \pi p_{\max}^2 = \pi \min(b^2, n^2 a^2).}$$

当 $na < b$ 时，只有中心部分被吸收；当 $na \geq b$ 时，整个外球投影圆盘都计入。$n \to 1$ 时退化为 πa^2，与没有折射聚拢时一致。

内壁相切与外壁口径

前一种情况下，最大入射垂距为 $p = na$：此时壳内光线与吸收内球相切，垂距正好是 a。若再增大 p，光线虽仍可能进入外球，却会从内球旁掠过。

后一种情形由外球的半径 b 限制，击中外球的整束光都能到达吸收内壁。

图 1.31 左图的 q 从球心量到壳内的折射线；右图的 $p_{\max}$ 则在入射光束截面内量取。吸收截面 σ 是右图的圆盘面积。

例 1.8 (棱镜内全反射的次数)**.** 玻璃的临界角为 42°。三棱镜截面 ABC 中，$\angle B = 15°, \angle C = 90°$，光线垂直于 AC 入射，位置如图 1.32。在离开棱镜前发生几次全反射？A. 2 次；B. 3 次；C. 4 次；D. 5 次。

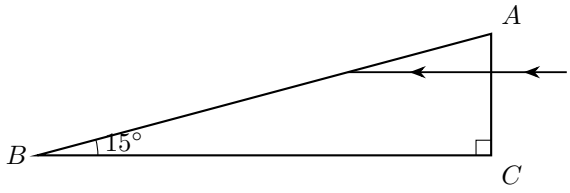


图 1.32: AC 为竖直入射面，BC 水平，斜面 AB 与 BC 成 15°。

解　按碰撞顺序标出各面的当地法线

在图 1.32 中，AC 是入射面，光在棱镜内先遇到斜面 AB。垂直进入 AC 时不偏折。图 1.33 将后续四个碰撞点记为 P_1, P_2, P_3, P_4，其中 P_1, P_3 在斜面，P_2, P_4 在底面。

逐次比较前三个入射角与临界角

先看 P_1：水平光与斜面成 15°，故与法线成 $i_1 = 75°$，发生全反射。在 P_2：反射后光线斜向左下，与底面成 30°，故在 P_2 的入射角为 $i_2 = 60°$，仍全反射。在 P_3：第二次反射后光线向左上，与斜面的锐夹角为 45°，所以 $i_3 = 45°$，第三次全反射仍成立。

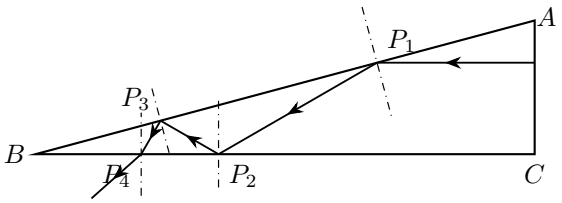


图 1.33: 按反射定律逐段追踪，短虚线为各碰撞点的法线。P_4 为首次能够透射出玻璃的位置。

检查第四次碰撞，终止全反射计数

由第三次反射后的方向，光在 P_4 与底面成 60°，因此第四次碰撞的入射角降到 $i_4 = 30^\circ < C$。四次比较为

碰撞点	P_1	P_2	P_3	P_4
i	75°	60°	45°	30°
与42° 比较	$>$	$>$	$>$	$<$

前三次碰撞发生全反射，第四次有透射光出射，所以沿首次出射的光路计数为 B，3 次。

后两面的方向变化

图 1.34 放大了最后两次碰撞，以区分“光线与面”的角和“入射角”。在 P_3，传播方向为 150°，斜面方向为 15°，两直线锐夹角为 45°；在该点反射后，方向变为 $2\times 15^\circ - 150^\circ = -120^\circ$。它与水平底面的锐夹角是 60°，所以到 P_4 的法线角为 30°。

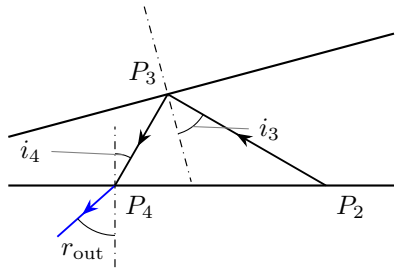


图 1.34: P_3 的法线垂直斜面，P_4 的法线垂直底面。蓝色光线在 P_4 折出。

首次透射的方向

在图 1.34 中，从 P_4 向下的法线量出折射角。由 $n = 1/\sin 42^\circ$，得 $\sin r_{\text{out}} = n\sin 30^\circ = \sin 30^\circ/\sin 42^\circ$，即 $r_{\text{out}} \simeq 48.35^\circ$。

例 1.9 (光纤的接收范围)**.** 光纤端面 AB 与轴垂直，内芯、包层折射率分别为 $n_1 = 1.30, n_2 = 1.20$，外界为空气。只考虑轴截面内的子午光线。求端面入射角 i 的接收范围，见图 1.35。

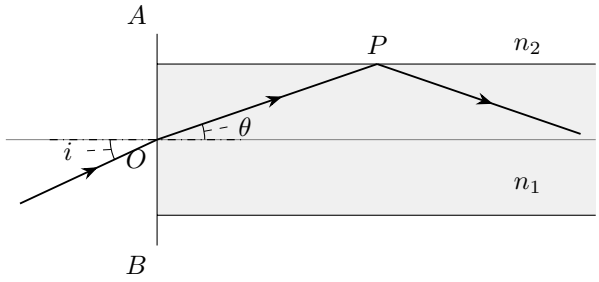


图 1.35: 端面折射后，光线在内芯与包层的界面反射。图示入射角为 25°。

解　区分端面法线与侧面法线

在图 1.35 的端面 O 处，法线沿轴，因此 $\sin i = n_1 \sin\theta$。到侧面 P 处，法线与轴垂直，侧面入射角 j 满足 $j + \theta = 90°$。严格全反射要求

$$\sin j = \cos\theta > \frac{n_2}{n_1}.$$

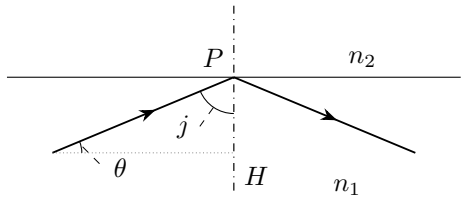


图 1.36: 侧面临界光线。PH 为侧面法线，j 与芯内轴向角 θ 互余。

消去芯内角，求端面接收范围

把侧面条件平方并用端面折射式消去 θ:

$$n_1^2(1 - \sin^2\theta) > n_2^2 \Longrightarrow \sin^2 i < n_1^2 - n_2^2 = 0.25.$$

故接收阈值为 30°，严格范围为

$$\boxed{0 \le i < 30°.}$$

图 1.36 取等号的临界情形，此时 $\sin\theta = 5/13, \cos\theta = 12/13$，$\sin j = n_2/n_1$。直光纤的各侧面平行，反射只改变横向分量的符号，后续侧面入射角的大小不变，因而同一条件可以连续维持。

端面角、轴向角与侧壁角

对应的三个临界角分别为

$$C = \arcsin\frac{12}{13} = 67.380^\circ, \quad \theta_{\max} = 90^\circ - C = 22.620^\circ, \quad i_{\max} = 30^\circ.$$

图 1.35 的 25° 从端面法线量起，进入纤芯后 $\theta = \arcsin(\sin 25^\circ/1.30) \simeq 19.0^\circ$，所以侧壁处 $j \simeq 71.0^\circ > C$。若端面外改为折射率 n_0 的介质，端面关系变成 $n_0 \sin i = n_1 \sin\theta$，而侧面的 C 仍由纤芯和包层决定。

例 1.10 (U 形导光棒)**.** 矩形截面的玻璃棒弯成图 1.37 所示的 U 形，弯曲段内半径为 R，厚度为 d，玻璃折射率 $n = 1.50$，外界为空气。一束平行光从平端面 A 垂直射入并覆盖其全宽。求使光束经弯曲段到达端面 B 射出的 R/d 阈值。忽略吸收和端面的部分反射，以临界角作为全反射阈值。

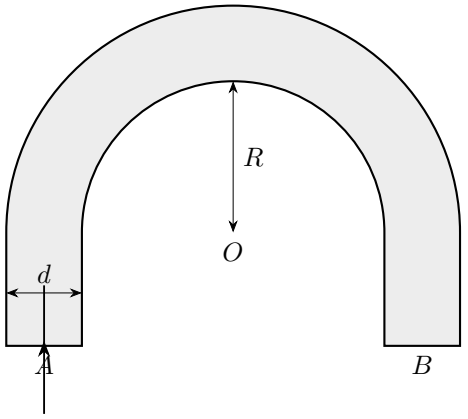


图 1.37: 弯曲段为同心半圆环，两直段与其相切。A, B 均为水平端面。

解　最内侧光线的全反射条件

图 1.37 中的端面 A 横跨内、外两侧壁，对应一族到圆心距离不同的平行线。从 A 垂直进入时不偏折。把入射直线到弯曲圆心 O 的垂距记为 s，全宽入射对应 $R \le s \le R + d$。图 1.38 中，第一次外壁碰撞点为 P，半径 $OP = R + d$ 是法线，直角三角形给出

$$\sin j = \frac{s}{R + d}.$$

入射角最小的是最靠内的一条光线 $s = R$。所有光线达到全反射阈值，须有

$$\frac{R}{R + d} \ge \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\frac{R}{d} \ge \frac{1}{n - 1} = 2.}$$

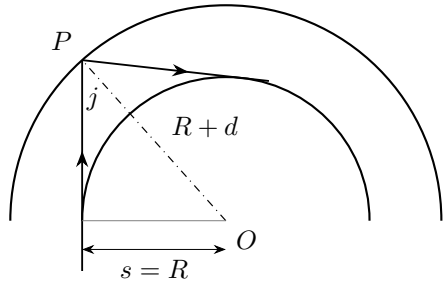


图 1.38: 最靠内的光线在外壁上的入射与反射。虚线 OP 为法线；反射段与入射段到 O 的垂距相等。

用垂距不变量检查后续外壁碰撞

圆形外壁反射时，法向分量反号、切向分量不变，所以相邻两段到 O 的垂距同为 $s=(R+d)\sin j$。每条弦的最近处距 O 至少为 R，因此在弯曲段内只需考虑外壁反射。

从弯曲段反射次数计算端面入射角

图 1.39 画出三次反射后垂直入射端面 B 的一条光线。对其他光线，令 $\alpha=90^\circ-j$。在 $R/d=2$ 时，由 $s\geq R$ 得

$$0\leq\alpha\leq\arccos(2/3)=48.190^\circ.$$

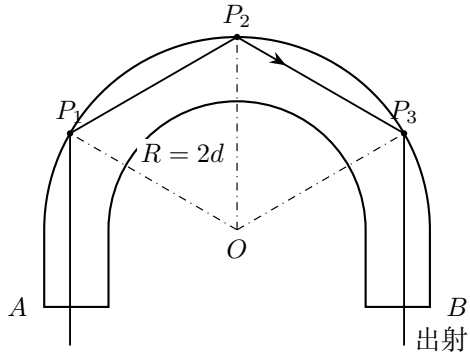


图 1.39: 取 $R=2d$、$s=3\sqrt{3}d/2$ 的过程图。光线依次经过 P_1,P_2,P_3，此时 $\alpha=30^\circ$，在 B 处的入射角为零。

若光线在半圆弯曲段反射 N 次，则方向共转过 $2N\alpha$；到右侧直段时，它与向下轴线的夹角为

$$i_B=|180^\circ-2N\alpha|,\qquad(2N-1)\alpha\leq180^\circ\leq(2N+1)\alpha.$$

后一组不等式可从圆周位置得到。

反射次数与端面出射

在相邻碰撞点形成的等腰三角形中，两半径的夹角为 2α，故外壁碰撞点的极角依次为 $180^\circ-\alpha, 180^\circ-3\alpha, \ldots$。最后一点仍位于上半圆、下一次圆周碰撞已越过右端，正给出上述范围。图 1.39 的 $\alpha=30^\circ$ 对应三个极角 $150^\circ, 90^\circ, 30^\circ$，所以 $N=3$、$i_B=0$。当 $N=2$ 时，$36^\circ \le \alpha \le 48.190^\circ$，因而 $i_B \le 36^\circ$；当 $N\ge 3$ 时，$\alpha \le 36^\circ$，也有 $i_B \le \alpha \le 36^\circ$。右侧直段上若发生反射，入射角为 $90^\circ - i_B \ge 54^\circ$，仍大于 $C=41.810^\circ$。反射只交换横向分量的符号，所以到达端面时仍以 $i_B < C$ 入射，光从 B 透出。

区分阈值等号与严格全反射条件

更大的 R/d 只会缩小允许的 α 范围。等号表示阈值，要求所有侧壁碰撞严格全反射时应取 $R/d>2$。

例 1.11 (由费马原理导出反射与折射定律)**.** 固定两端点，让光与平直界面的交点 P 沿界面移动。用费马原理分别证明反射定律和折射定律，见图 1.40。

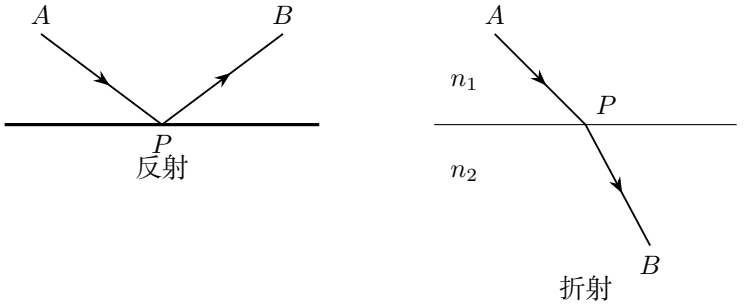


图 1.40: 左为反射，右为折射。端点固定，只有界面交点 P 可以变化。

解　在镜面上移动交点，建立反射光程

图 1.40 分别给出两端点在界面同侧和异侧的情况。先取同侧的镜面反射。反射情形取镜面为 $y=0$，$A=(-a,h_1)$，$B=(b,h_2)$，$h_1,h_2>0$，$P=(x,0)$。图 1.41 中改变 x 便改变两段长度，在同一介质中有

$$\mathcal{L}(x)=n\left[\sqrt{(x+a)^2+h_1^2}+\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}\right].$$

把反射光程导数化为两侧入射角

先分别对两段根式使用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}(AP)}{\mathrm{d}x}=\frac{2(x+a)}{2\sqrt{(x+a)^2+h_1^2}},\qquad \frac{\mathrm{d}(PB)}{\mathrm{d}x}=\frac{2(b-x)(-1)}{2\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}}.$$

第二式的负号来自 $\mathrm{d}(b-x)/\,\mathrm{d}x=-1$。由驻值条件，

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}x}=\frac{x+a}{AP}-\frac{b-x}{PB}=0.$$

图中这两个比值分别为 $\sin i,\sin i'$，故 $\sin i=\sin i'$。两角均取 $[0,90^\circ)$，于是 $\boxed{i=i'}$。

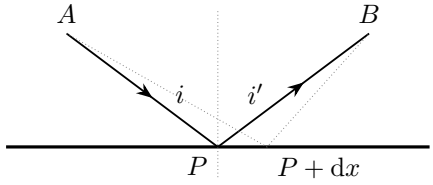


图 1.41: 实线是驻值反射路径，虚线是交点移到 $P+\mathrm{d}x$ 后的试探路径。

给两介质路程加权，得到折射定律

折射情形把 B 改为 $(b,-h_2)$，下方折射率为 n_2。图 1.42 的几何长度形式相同，但两段权重不同：

$$\mathcal{L}(x)=n_1\sqrt{(x+a)^2+h_1^2}+n_2\sqrt{(b-x)^2+h_2^2}.$$

因此

$$\mathcal{L}'(x)=n_1\frac{x+a}{AP}-n_2\frac{b-x}{PB}=0,\qquad \boxed{n_1\sin i=n_2\sin r}.$$

用有向投影解释光程的一阶抵消

图 1.42 中的 $\mathrm{d}x$ 是沿界面的有向小位移。P 向右移动时，入射段增加的一阶长度为 $\mathrm{d}(AP)=\sin i\;\mathrm{d}x$，出射段减少的一阶长度为 $\mathrm{d}(PB)=-\sin r\;\mathrm{d}x$。

故

$$\mathrm{d}\mathcal{L}=(n_1\sin i-n_2\sin r)\,\mathrm{d}x.$$

实际交点处，两段光程的一阶增减恰好抵消。这个投影解释也说明，为何定律中出现正弦，以及为何两个折射率须分别乘在各自的路程变化前。

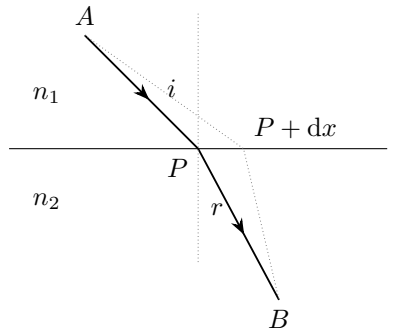


图 1.42: 折射路径的两段分别乘以各自折射率；角 i, r 均从 P 处法线量起。

检查二阶导数，说明本题的唯一极小性

为计算二阶导数，先令 $g_h(s) = s(s^2+h^2)^{-1/2}$。乘积法则给出

$$g_h'(s) = (s^2+h^2)^{-1/2} - s^2(s^2+h^2)^{-3/2} = \frac{h^2}{(s^2+h^2)^{3/2}}.$$

折射时 $\mathcal{L}' = n_1 g_{h_1}(x+a) - n_2 g_{h_2}(b-x)$。再求导时，第二项中的负号与 $\mathrm{d}(b-x)/\,\mathrm{d}x = -1$ 相消，因而

$$\mathcal{L}''(x) = \frac{n_1 h_1^2}{[(x+a)^2+h_1^2]^{3/2}} + \frac{n_2 h_2^2}{[(b-x)^2+h_2^2]^{3/2}} > 0,$$

故本题的驻值确为唯一极小值。

用镜像作出反射点

反射情形还可解出交点横坐标。由 $\sin i = \sin i'$ 及角度范围，可得 $(x+a)/h_1 = (b-x)/h_2$，于是

$$x_* = \frac{bh_1 - ah_2}{h_1 + h_2}.$$

这正是把 A 映到镜后 $A' = (-a, -h_1)$，再连直线 $A'B$ 与镜面的交点。图 1.41 的 $h_1 = h_2, a = b$ 给出 $x_* = 0$，与所画对称路径一致。

例 1.12（由端点反求分层光路）. 平面界面上方为空气，下方为折射率4/3 的水。点A 高于界面0.60 m，点B 低于界面0.80 m，两点水平距离1.40 m。求透射光线与界面的交点位置和传播时间。取$c = 3.00 \times 10^8$ m/s。

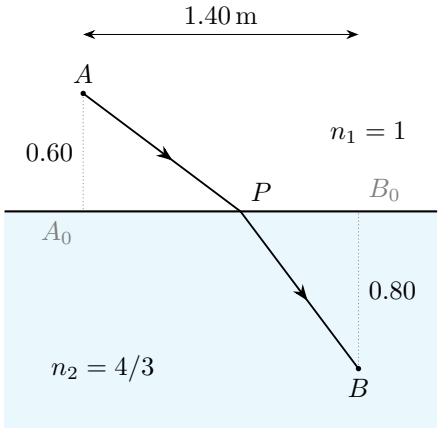


图 1.43: 交点P 的水平位置待定；A_0, B_0 是端点的垂足

解　选交点横坐标，写出两段光程

以图 1.43 的A_0 为水平坐标起点，设$A_0P = x$，则$PB_0 = 1.40 - x$。光程为

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{x^2 + 0.60^2} + \frac{4}{3}\sqrt{(1.40 - x)^2 + 0.80^2}.$$

求驻值并用正二阶导数证明唯一

固定端点，根式的导数为内函数导数除以根式的两倍，所以

$$\mathcal{L}'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 0.36}} + \frac{4}{3}\frac{-2(1.40 - x)}{2\sqrt{(1.40 - x)^2 + 0.64}}.$$

令$\mathcal{L}'(x) = 0$，即

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 0.36}} = \frac{4}{3}\frac{1.40 - x}{\sqrt{(1.40 - x)^2 + 0.64}}.$$

代入$x = 0.80$ m，两边均为0.80。二阶导数中第一项用乘积法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{\sqrt{x^2 + 0.36}} = (x^2 + 0.36)^{-1/2} - x^2(x^2 + 0.36)^{-3/2} = \frac{0.36}{(x^2 + 0.36)^{3/2}}.$$

第二项令 $s = 1.40 - x$，则 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}x = -1$；外部负号与该负号相消，同样得到$(4/3)0.64/(s^2 + 0.64)^{3/2}$。故

$$\mathcal{L}''(x) = \frac{0.36}{(x^2 + 0.36)^{3/2}} + \frac{(4/3)0.64}{[(1.40 - x)^2 + 0.64]^{3/2}} > 0,$$

所以这个驻值给出唯一光路。

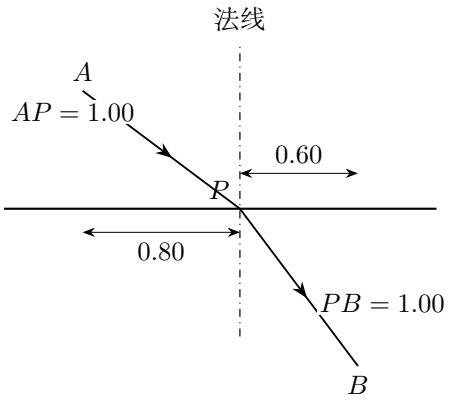


图 1.44: 两段均长1.00 m，但时间与各层折射率成正比

按实际路程与折射率分别计时

由图 1.44，$\sin\theta_1 = 0.80, \sin\theta_2 = 0.60$，满足$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$。传播时间为

$$\boxed{T = \frac{1 + (4/3) \times 1}{c} = 7.78 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}}, \qquad \boxed{A_0P = 0.80\,\mathrm{m}}.$$

折射后靠近法线，且水中每米用时较长，均与图中方向及速度关系一致。

例 1.13 (棱镜的最小偏向)**.** 空气中的三棱镜顶角$A = 60°$，折射率$n = 1.50$。光线由一侧面进入并由另一侧面射出，求最小偏向角及对应的入射角。证明最小值对应对称光路，不采用小角度近似。

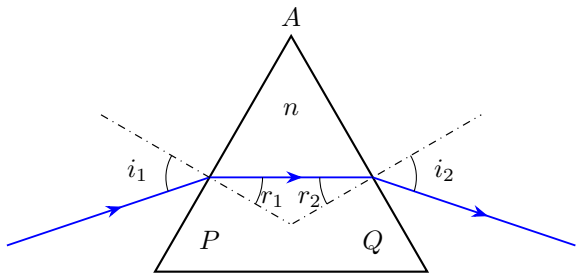


图 1.45: 棱镜的两组入射、出射角均相对当地法线量取。图中画出对称光路。

解　由两侧法线建立顶角与偏向关系

图 1.45 中，以各面的法线量角，内部角为r_1, r_2，有

$$r_1 + r_2 = A, \qquad \sin i_j = n \sin r_j, \qquad \delta = i_1 + i_2 - A.$$

用凸性证明最小偏向对应对称光路

在透射区$0 \le r < \arcsin(1/n)$，令$g(r) = \arcsin(n\sin r)$。先用反正弦的链式法则，得 $g'(r) = n\cos r(1-n^2\sin^2 r)^{-1/2}$。再用乘积法则，

$$\begin{aligned} g''(r) &= -\frac{n\sin r}{\sqrt{1-n^2\sin^2 r}} + \frac{n^3\sin r\cos^2 r}{(1-n^2\sin^2 r)^{3/2}} \\ &= \frac{n\sin r[-1+n^2\sin^2 r + n^2\cos^2 r]}{(1-n^2\sin^2 r)^{3/2}} = \frac{n(n^2-1)\sin r}{(1-n^2\sin^2 r)^{3/2}} \ge 0. \end{aligned}$$

固定$r_1 + r_2 = A$，凸性给出$g(r_1) + g(r_2) \ge 2g(A/2)$，等号对应$r_1 = r_2$。

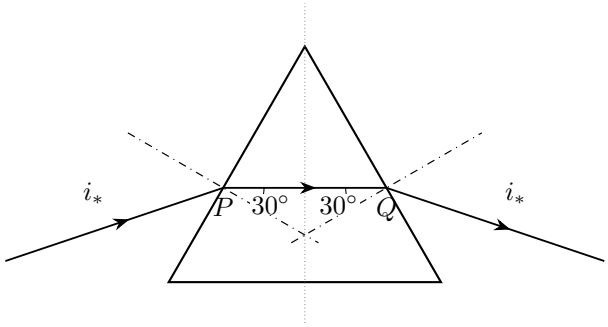


图 1.46: 最小偏向时$r_1 = r_2 = A/2$，入射线与出射线关于对称轴互为镜像

代入精确折射式求入射角和最小偏向

图 1.46 于是给出

$$\boxed{i_* = \arcsin(1.50\sin 30^\circ) = 48.590^\circ}, \qquad \boxed{\delta_{\min} = 2i_* - 60^\circ = 37.181^\circ}.$$

对称光线的透射条件

这条非掠入射的对称光路要求$n\sin(A/2) < 1$, 本题为$0.75 < 1$。式$\delta \approx (n-1)A$只适合薄棱镜，本题顶角较大，应使用上面的精确关系。

例 1.14 (会聚波前与反射曲面)**.** 用惠更斯原理和等光程说明：(1) 平行光经凹面镜反射后全部会聚于一点，镜面为抛物面；(2) 一点发出的光经内壁一次反射后全部会聚于另一点，镜面为椭球面。讨论旋转对称的光滑曲面，见图 1.47。

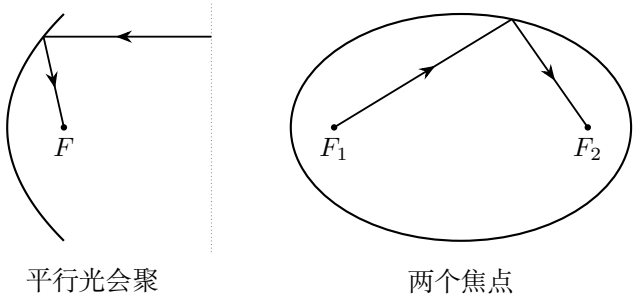


图 1.47: 左图把平面波前变为会聚球面波前；右图把以 F_1 为中心的发散波变为向 F_2 会聚的波。

解　固定同一入射波前，写出反射等光程条件

图 1.47 中，第一种入射光有平面波前，第二种入射光有以 F_1 为中心的球面波前。惠更斯作图要求同一波前的各部分在等时间后形成新的波前。若光全部会聚于一点，该点周围会聚球面波前的相位须一致。因此同一入射波前到焦点的光程应与镜面交点无关。

由平行光的等光程求抛物面截面

先看图 1.48。取镜面顶点为 $O=(0,0)$，焦点 $F=(f,0)$，$f>0$，入射光沿 $-x$。位于有限镜面右方的平面 $x=X$ 是入射波前。从它到镜面点 $P=(x,y)$，再到 F，几何总长为

$$(X-x)+\sqrt{(x-f)^2+y^2}.$$

轴上经顶点的光路长度为 $X+f$，故等光程条件给出

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=x+f \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y^2=4fx}.$$

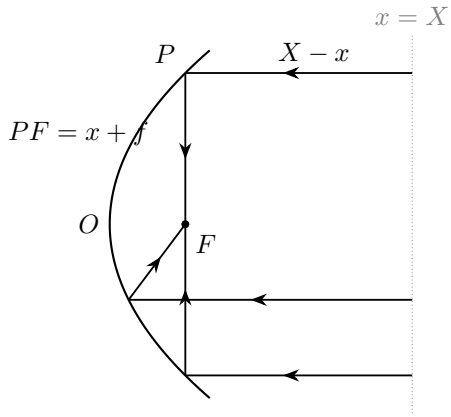


图 1.48: 同一平面波前上三条光线的入射段与焦点段互相补偿；截面为抛物线。

绕 x 轴旋转，得 $y^2 + z^2 = 4fx$，即旋转抛物面。这里须是来自无限远的平行光；普通球面镜仅在近轴范围近似满足这一会聚性质。

抛物面各点的反射方向

等光程还须与图中的反射方向相容。对截面 $y^2 - 4fx = 0$，法线平行于 $(-2f, y)$。入射单位矢量为 $\boldsymbol{u}_1 = (-1, 0)$，指向焦点的单位矢量为

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{(f - x, -y)}{x + f}.$$

利用 $PF = x + f$，有 $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = (-2f, y)/(x + f)$，与该法线平行。两单位方向的切向分量相同，故图 1.48 的各条入射光也满足反射定律，能够实际到达 F。

由点源到点像的路径和求椭圆截面

再看图 1.49。从点源 F_1 发出并到达 F_2 的各条反射光路应满足

$$PF_1 + PF_2 = 2a = \text{常量}.$$

令 $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$，$a > c$，并记 $d_1 = PF_1$、$d_2 = PF_2$。两距离的平方差为 $d_1^2 - d_2^2 = (x + c)^2 - (x - c)^2 = 4cx$。用 $d_1 + d_2 = 2a$ 相除，得 $d_1 - d_2 = 2cx/a$，所以 $d_1 = a + cx/a$。再代入 $d_1^2 = (x + c)^2 + y^2$，

$$a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + 2cx + c^2 + y^2, \qquad \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

因 $a^2 - c^2 > 0$，两边除以它，得到椭圆

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.}$$

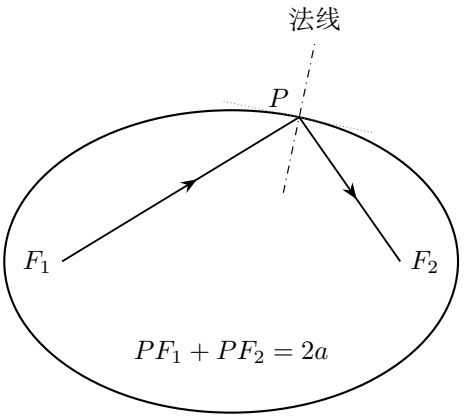


图 1.49: 椭圆截面的两条焦半径和不变。法线平分从 P 指向两焦点的夹角，通常不经过中心。

由椭球面切向微分推出反射定律

为了从光程推出反射方向，设实际入射单位矢量为 $\boldsymbol{u}_1 = (P - F_1)/PF_1$，候选出射方向为 $\boldsymbol{u}_2 = (F_2 - P)/PF_2$。将距离写成 $PF_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}$，微分得到

$$\mathrm{d}(PF_j) = \frac{(x - x_j)\,\mathrm{d}x + (y - y_j)\,\mathrm{d}y}{PF_j}.$$

第一段对应 $\mathrm{d}(PF_1) = \boldsymbol{u}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$，第二段因 $\boldsymbol{u}_2$ 从 P 指向 F_2，对应 $\mathrm{d}(PF_2) = -\boldsymbol{u}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$。沿镜面切向 $\boldsymbol{t}$ 微移 P，代入 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\ell$，有

$$\mathrm{d}(PF_1 + PF_2) = (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}\ell = 0.$$

这说明两方向的切向分量相同；二者均为单位矢量且分别指向、离开镜面，法向分量便大小相等而反号，正是反射定律。

将椭圆绕焦点连线旋转，得到所求旋转椭球面。对抛物面也可沿切向微分，从等光程推出反射定律。

例 1.15 (平凸透镜的精确会聚面形)**.** 折射率为 $n>1$ 的平凸透镜置于空气中，平面为 $x=0$，其中心为 O，圆形孔径半径为 R。在透镜外的主轴上取 F'，$OF'=f'>0$。平行光从左侧垂直进入平面，要求全孔径光线均会聚于 F'，见图 1.50。求：(1) 凸面的形状；(2) 轴上顶点 A 到 O 的距离；(3) R 的限制。凸面边缘与平面在半径 R 处相接。

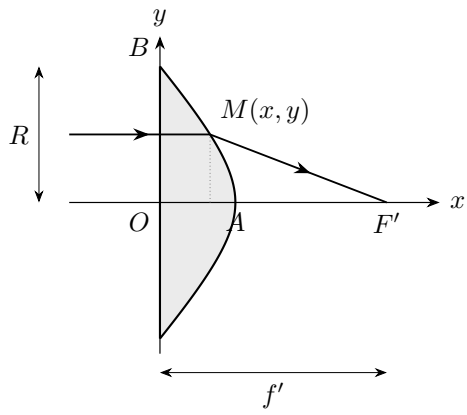


图 1.50: 平面入射不改变方向，凸面点 $M=(x,y)$ 将玻璃内的水平光折向透镜外的轴上焦点 F'。

解　按玻璃与空气分别加权，确定公共光程

图 1.50 的平行光垂直入射，所以光在玻璃中的路段均与轴平行。同一入射平面波前到 F' 的光程必须相同。图 1.51 中，光在玻璃内从 $x=0$ 走到 M 的长度是 x，之后在空气中走过 MF'，所以

$$nx+MF'=nx+\sqrt{(f'-x)^2+y^2}=K.$$

边缘 $B=(0,R)$ 的玻璃路程为零，故 $K=BF'=\sqrt{f'^2+R^2}$。

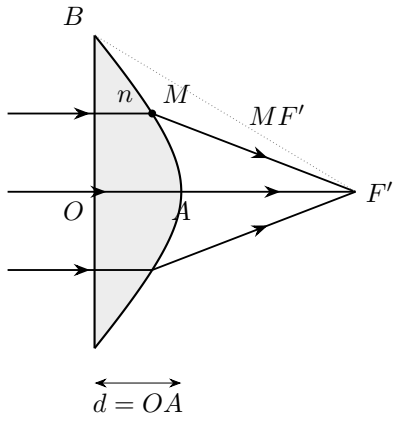


图 1.51: 从同一入射平面到焦点的三条路径等光程，玻璃段乘 n，空气段不乘 n。

平方求面形，同时保留原方程的支路条件

将根式移到一侧再平方，保留物理分支 $K - nx > 0$：

$$(f' - x)^2 + y^2 = (K - nx)^2,$$

$$\boxed{y^2 = R^2 - 2(nK - f')x + (n^2 - 1)x^2.}$$

令 $x_c = (nK - f')/(n^2 - 1)$，整理为

$$(n^2 - 1)(x - x_c)^2 - y^2 = \frac{(nf' - K)^2}{n^2 - 1}.$$

这是双曲线，离心率为 n；凸面取靠近平面的一支，并绕主轴旋转，得到旋转双曲面的一叶。

仅在近轴范围，它才可用球面近似。所用物理分支可以明确写为

$$\boxed{x(y) = \frac{nK - f' - \sqrt{(nf' - K)^2 + (n^2 - 1)y^2}}{n^2 - 1}.}$$

这支在 $y = \pm R$ 给出 $x = 0$，在 $y = 0$ 给出正的中心厚度；若取根号前的正号，就不再是图 1.51 中与入射平面相接的凸面。平方之后仍须保留 $K - nx > 0$，以免把错误分支带回光路。

用轴上光路求中心厚度

轴上 $A = (d, 0)$，因焦点在透镜外，$AF' = f' - d$，于是

$$nd + f' - d = K, \qquad \boxed{OA = d = \frac{\sqrt{f'^2 + R^2} - f'}{n - 1}.}$$

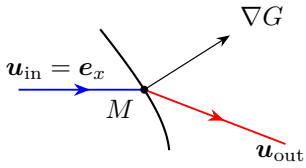
要求焦点在透镜外，求有限孔径范围

须有 $d < f'$，即 $K < nf'$，从而

$$\boxed{0 < R < f'\sqrt{n^2-1}.}$$

用局部法线排除不向外传播的支路

从曲面向外的法线也可得出这个孔径限制。设 MF' 与轴的锐夹角为 φ。等光程曲面的法线平行于 $n\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{u}_{\text{out}}$；出射光要进入曲面外侧，须 $n\cos\varphi > 1$。用 $MF' = K - nx$，该式等价于 $nf' > K$，与上式一致。等号时焦点与轴上顶点重合，是这族透镜的极限。



$$\nabla G = n\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{u}_{\text{out}}$$

图 1.52: 凸面点的局部折射：法向量由两侧传播方向的加权差给出

图 1.52 用同一 M 点标出入射、出射和向外法向。要排除等光程方程的非物理解，应检查出射箭头在向外法线上的投影为正。

具体地，令 $G(x,y) = nx + MF' - K$，则玻璃内部满足 $G < 0$，向外法线为 $\boldsymbol{N} \parallel \nabla G = n\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{u}_{\text{out}}$。

对曲面切向 $\boldsymbol{t}$，有

$$n\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{t} = \boldsymbol{u}_{\text{out}} \cdot \boldsymbol{t},$$

即玻璃与空气两侧的切向光学分量相等，等价于斯涅尔定律。再算出射方向的法向分量，

$$\boldsymbol{u}_{\text{out}} \cdot \nabla G = n\cos\varphi - 1 > 0,$$

才保证箭头由玻璃进入空气。图 1.51 中的三条折线因此同时满足等光程、折射方向和外部焦点这三项条件。

展开中心厚度，并区分精确面形与近轴近似

令 $\epsilon = R^2/f'^2$，精确厚度写为 $d = f'[\sqrt{1+\epsilon} - 1]/(n-1)$。函数 $h(\epsilon) = \sqrt{1+\epsilon}$ 满足 $h(0) = 1$、$h'(\epsilon) = \frac{1}{2}(1+\epsilon)^{-1/2}$、$h'(0) = 1/2$，故 $h(\epsilon) = 1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$。当 R/f' 很小时，代入得到

$$d \simeq \frac{R^2}{2(n-1)f'}.$$

小孔径时可用上式近似中心厚度。整个孔径内的精确会聚则由前面求出的双曲面给出。

1.6　本讲小结

在反射点或折射点画当地法线。反射保留传播矢量的切向分量并反转法向分量，折射保留 $n\sin\theta$。在球面或棱镜中，每遇一个面都用交点处的法线重新量角。从光密介质射向光疏介质时，入射角大于临界角便发生全反射，等于临界角时折射方向沿界面。

镜像展开保持长度和交角，用辅助直线求反射路径后，应折回并逐次检查真实碰镜和穿屏位置。分层介质中，各层以同一参数 p 连接；横向投影、法向厚度、实际路程分别进入端点约束、几何关系和计时。连续分层时，光线在 $n=p$ 处转向，轨迹在该处与层面相切。

固定端点后，实际光路的光程对允许路径取驻值。等光程设计须从同一入射波前出发，给各介质路程分别加权，并由光程的切向变化求出局部反射或折射方向。近轴方向的一阶近似与光程差所需的二阶长度项，应按最终所求量分别保留。

1.7　练习

练习 1.1 (空气与玻璃界面的两次入射)**.** 空气中的光以45° 入射到折射率$n=\sqrt{2}$的玻璃，求折射角。另有一束光从同种玻璃射向空气，入射角为50°，判断能否有传播折射光。两角均从当地法线量起。

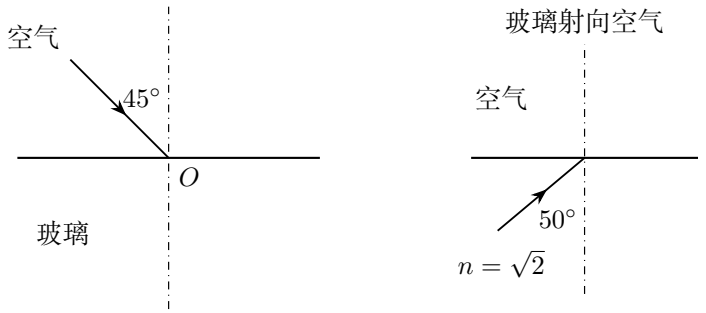


图 1.53: 练习：空气与玻璃界面的两次入射

练习 1.2 (平行玻璃板：位移与时间)**.** 空气中一平行玻璃板厚$t = 6.00\,\mathrm{cm}$，折射率$\sqrt{2}$。光以45° 入射。求板内光线的横向位移X、出射方向及在玻璃内的传播时间。取$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。

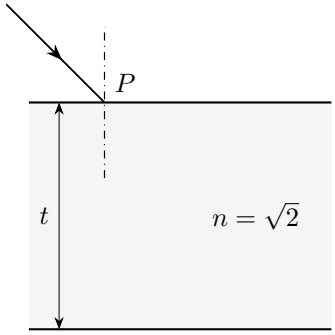


图 1.54: 练习：平行玻璃板：位移与时间

练习 1.3 (平面镜上的反射点与总路程)**.** 同一均匀介质中，平面镜为$y = 0$，物点$A = (-2, 3)$，接收点$B = (4, 1)$，坐标单位均为米。求$A \to P \to B$ 的反射点P及总路程，并检查两侧角度。

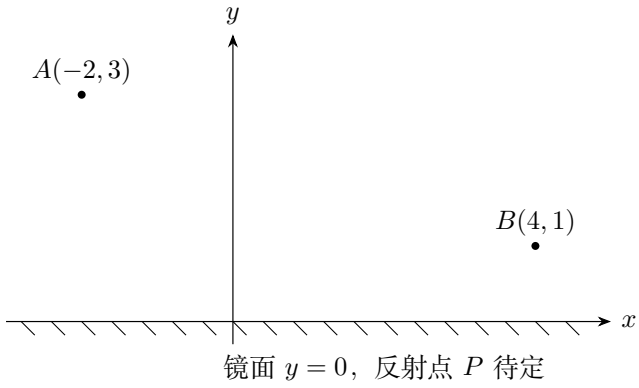
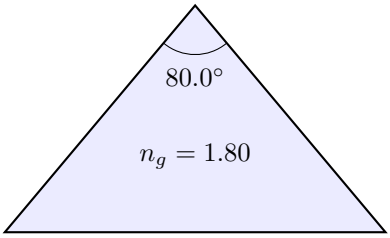


图 1.55: 练习：平面镜上的反射点与总路程

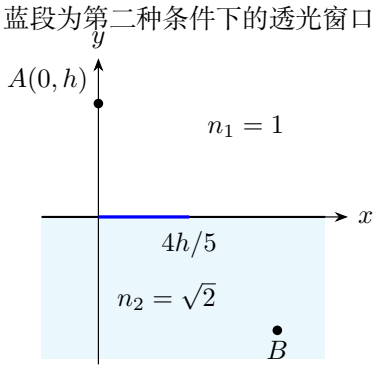
练习 1.4 (不同环境中的棱镜透射)**.** 折射率 $n_g = 1.80$ 的三棱镜顶角 $A = 80.0°$。将它分别置于空气和折射率 $n_m = 1.20$ 的液体中，判断是否存在由一个侧面进入、另一个侧面射出的非掠射光路。若存在，求最小偏向角及对应入射角。只考虑两侧面的透射，不考虑底面和多次反射。



外部：空气或 $n_m = 1.20$ 的液体

图 1.56: 棱镜形状和折射率不变，分别改变外部介质

练习 1.5 (两介质与有限透光窗口)**.** 平面界面为 $y = 0$，上方折射率 $n_1 = 1$，下方 $n_2 = \sqrt{2}$。光由 $A = (0, h)$ 发出，经界面一次折射到达 $B = ((1 + 1/\sqrt{3})h, -h)$，$h > 0$。先求整个界面透明时的入射点和传播时间。再设界面仅 $0 \le x \le 4h/5$ 透光，其余部分完全遮蔽，判断 B 能否收到上述直接折射光。忽略衍射和反射。



$x_B = (1 + 1/\sqrt{3})h$

图 1.57: 已知两点的位置及界面窗口，入射点待定

练习解答

练习 1.1

解　分开辨认两次入射的介质顺序与当地法线

图 1.53 左图是空气射向玻璃，折射线向法线偏折；右图是玻璃射向空气，先由两种介质的折射率求临界角。

对空气入射计算折射角

图 1.53 左侧的法线垂直界面，故

$$\sin r = \frac{\sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \qquad \boxed{r = 30^\circ}.$$

对玻璃入射先算临界角，再判断传播支路

右侧入射来自玻璃，临界角$C = \arcsin(1/\sqrt{2}) = 45^\circ$。由于$50^\circ > C$，发生全反射，没有传播折射光。图 1.58 左侧折射线靠近法线；右侧只保留玻璃内的反射线。若把50° 误当作空气侧入射角，会错误地使用另一组介质顺序。

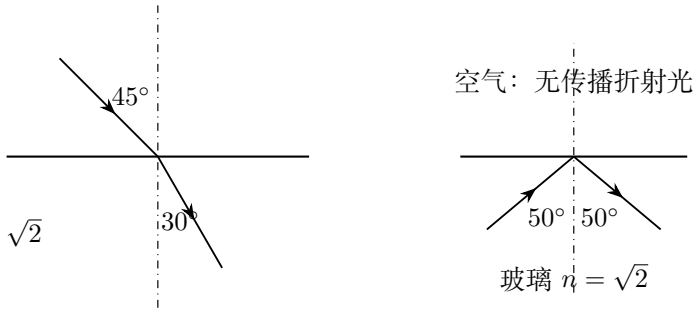


图 1.58: 练习 1.1 的解答图：左为折射，右为全反射；点划线均为法线

练习 1.2

解　连续使用两面折射定律，确定方向和板内投影

图 1.54 中入射角从第一面的法线量起，故 $\sin r = \sin 45^\circ/\sqrt{2} = 1/2$，即 $r = 30^\circ$。两法线平行，板内直线在第二面的入射角仍为 r。第二面满足$\sqrt{2}\sin 30^\circ = \sin i_{\text{out}}$，故

$$\boxed{i_{\text{out}} = 45^\circ}, \qquad \boxed{X = t\tan 30^\circ = 2\sqrt{3}\,\text{cm} = 3.46\,\text{cm}}.$$

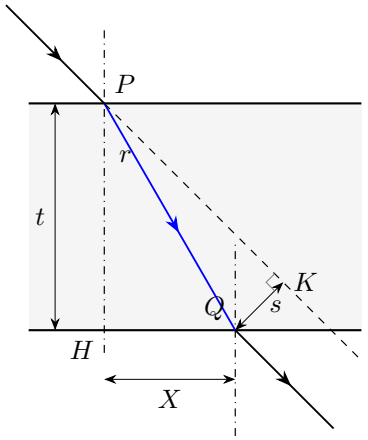


图 1.59: 平行板内的路程 PQ、横向投影 $HQ = X$ 与通常侧移 s 属于三个不同的几何量

按板内实际路程计时

图 1.59 的PH 是厚度、HQ 是横向投影，真正用于计时的路程是PQ。因此

$$T = \frac{n\,PQ}{c} = \frac{\sqrt{2}(0.0600)}{c\cos 30^\circ} = \boxed{3.27 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}}.$$

沿光线法向量侧移

图 1.59 中，$X = HQ$ 沿板面量取。若要量两条平行光线的间距，从 Q 向入射线的延长线作垂线，垂足为 K。在直角三角形 PQK 中，$\angle QPK = i - r$，所以

$$s = QK = PQ\sin(i-r) = \frac{t\sin(i-r)}{\cos r} = \frac{6.00\sin 15^\circ}{\cos 30^\circ}\,\mathrm{cm} \simeq 1.79\,\mathrm{cm}.$$

练习 1.3

解　将物点映到镜后，把实际折线展开

图 1.55 中，A, B 同在镜面上方。把 A 映到镜下的 A'，有 $AP = A'P$；连 $A'B$ 与镜面相交，再将入射段折回即可。下面用线段参数 s 表示交点在线段上的位置。

求镜像直线与镜面的交点和总路程

图 1.60 将A 映为$A' = (-2, -3)$。直线$A'B$ 可写为

$$(x, y) = (-2, -3) + s(6, 4).$$

令$y = 0$，得$s = 3/4$，故

$$\boxed{P = (2.50, 0)}, \qquad \boxed{AP + PB = A'B = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}\,\mathrm{m}}.$$

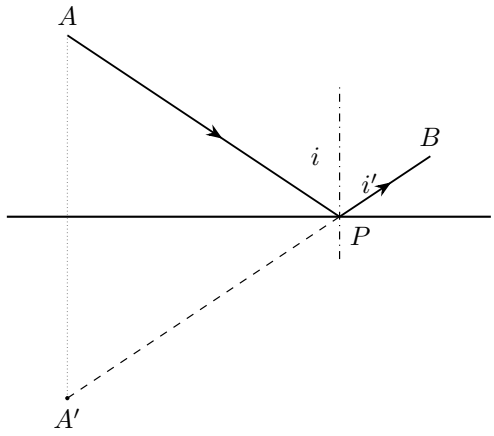


图 1.60: 练习 1.3 的解答图：虚线连接镜像点，实线保留实际反射路径

比较法线两侧的角

图 1.60 中P 处法线竖直。入射与反射两侧分别有$\tan i = (2.5+2)/3 = 1.5$，$\tan i' = (4-2.5)/1 = 1.5$，因此$i = i' \approx 56.3°$。镜像直线只是求解的辅助线；实际光沿实线$A \to P \to B$ 传播。

练习 1.4

解　由两个透射条件判断光路能否存在

按图 1.56，两侧外部介质相同，令相对折射率 $N = n_g/n_m > 1$。内角满足 $r_1 + r_2 = A$；两面均为非掠射透射，要求 $0 \le r_1, r_2 < r_c = \arcsin(1/N)$。因此必须有 $A < 2r_c$，即 $N\sin(A/2) < 1$；反过来，此条件成立时取 $r_1 = r_2 = A/2$ 即可实现，故它也是充分条件。

在空气中，$1.80\sin 40° \simeq 1.157 > 1$，不存在题设双面透射光路。在液体中 $N = 1.50$，$1.50\sin 40° \simeq 0.9642 < 1$，光路存在。

在可行区间证明最小偏向的对称条件

令 $g(r) = \arcsin(N\sin r)$，则 $i_1 = g(r_1)$、$i_2 = g(r_2)$，偏向角为 $\delta = g(r_1) + g(A - r_1) - A$。反正弦链式求导给出 $g'(r) = N\cos r(1 - N^2\sin^2 r)^{-1/2}$。在 $0 < r < r_c$，再用乘积与链式法则，

$$\begin{aligned} g''(r) &= -N\sin r(1-N^2\sin^2 r)^{-1/2} \\ &\quad + N\cos r\left(-\frac{1}{2}\right)(1-N^2\sin^2 r)^{-3/2}(-2N^2\sin r\cos r) \\ &= \frac{N\sin r[-1+N^2\sin^2 r + N^2\cos^2 r]}{(1-N^2\sin^2 r)^{3/2}} = \frac{N(N^2-1)\sin r}{(1-N^2\sin^2 r)^{3/2}} > 0. \end{aligned}$$

因此和式关于 $r_1 = A/2$ 对称且严格凸，唯一最小值在 $r_1 = r_2 = 40^\circ$。图 1.61 的内部线段平行底面，两次折射关于棱镜对称轴互为逆过程。

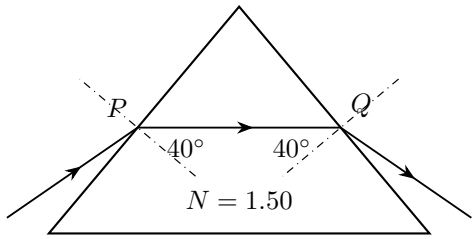


图 1.61: 液体中的最小偏向光路，两内部角均从各自法线量起

求角度并检查环境变化的作用

由图 1.61 两面的折射定律，

$$i_* = \arcsin(1.50\sin 40^\circ), \qquad \boxed{\delta_{\min} = 2\arcsin(1.50\sin 40^\circ) - 80^\circ}.$$

液体中 $i_* \simeq 74.62^\circ$、$\delta_{\min} \simeq 69.24^\circ$。外界折射率升高后，棱镜的相对折射率降低，允许的内部角度范围增大。

练习 1.5

解　用界面交点表示完整光程

令图 1.57 的界面交点为 $X = (x, 0)$，并记 $b = (1 + 1/\sqrt{3})h$。两段实际长度分别为 $\sqrt{h^2 + x^2}$ 和 $\sqrt{h^2 + (b-x)^2}$，光程为

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{2}\sqrt{h^2 + (b-x)^2}.$$

对两个根式分别用链式法则，得到

$$\mathcal{L}'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{h^2 + x^2}} + \sqrt{2}\frac{2(b-x)(-1)}{2\sqrt{h^2 + (b-x)^2}}.$$

令 $\mathcal{L}'(x) = 0$，驻值条件为

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{2}(b-x)}{\sqrt{h^2 + (b-x)^2}}.$$

两边就是 $n_1 \sin\theta_1$ 与 $n_2 \sin\theta_2$，角度均按图 1.62 从法线量起。

由交点位置求传播时间

代入 $x=h$，有 $b-x=h/\sqrt{3}$，故 $\theta_1=45^\circ$、$\theta_2=30^\circ$，满足上式。为检查这个驻点是否唯一，将一阶导数的两个分式逐项求导：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{h^2+x^2}}-\frac{x^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}=\frac{h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-(b-x)}{\sqrt{h^2+(b-x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{h^2+(b-x)^2}}-\frac{(b-x)^2}{[h^2+(b-x)^2]^{3/2}}.$$

第二行通分后分子也是 h^2，所以

$$\mathcal{L}''(x)=\frac{h^2}{(h^2+x^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{2}h^2}{[h^2+(b-x)^2]^{3/2}}>0,$$

所以这个交点唯一。两段长度为 $\sqrt{2}h$、$2h/\sqrt{3}$，得到

$$\boxed{X=(h,0)},\qquad \boxed{T=\frac{h}{c}\left(\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}.$$

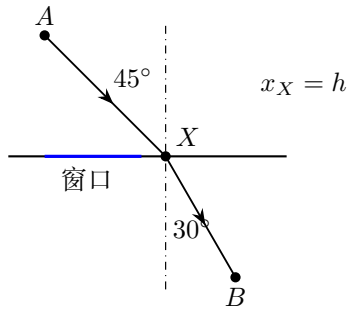


图 1.62: 唯一直接折射光路在 $x=h$ 处通过界面，交点落在窗口之外

折射点落在透光窗口内

图 1.62 中，折射定律给出的唯一交点在 $x=h$，而窗口只开到 $x=4h/5$。挡板遮住这条光线，所以第二种条件下 B 收不到直接折射光。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第二讲

球面反射与折射

2026

目录

第二讲　球面反射与折射 **1**

2.1　从视深问题到近轴成像 1

2.2　球面反射与球面镜成像 7

2.3　成像变化与可逆性 11

2.4　色散与光学模型的适用范围 11

2.5　例题与分析 13

2.6　本讲小结 32

2.7　练习 32

练习解答 34

第二讲　球面反射与折射

2.1　从视深问题到近轴成像

2.1.1　近轴近似及其适用范围

水中的硬币看上去靠近水面，凹面镜则能把平行光收成镜前的亮斑。研究这两种成像，都是追踪同一物点发出的光：光线会聚时取它们的交点，出射光发散时沿反向延长线寻找像点。

2.1.2　入射高度、法线转角与孔径

对球面，靠近轴线的光打在接近顶点的地方，所遇法线也接近主轴。由图 2.1 可见，衡量近轴程度要同时看入射高度和光线倾角：轴上的同一物点也能发出打到球面边缘的光线。

图 2.1 中，球面顶点为 O，球心为 C，折射点为 P，高度为 y。设 $OC = R > 0$，球面法线沿 CP，其与轴的夹角大小满足

$$\sin\varphi = \frac{y}{R}, \qquad x_P = R - \sqrt{R^2 - y^2} = \frac{R^2 - (R^2 - y^2)}{R + \sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{y^2}{R + \sqrt{R^2 - y^2}} \simeq \frac{y^2}{2R}.$$

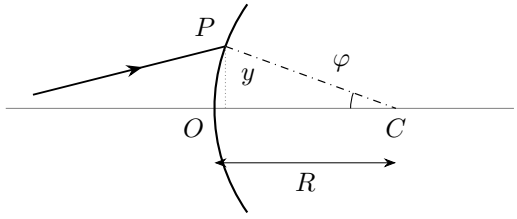


图 2.1: 球面入射高度决定法线转角；弧面到顶点平面的轴向差为二阶小量

当 $|y|/R \ll 1$ 时，法线转角 $\varphi \simeq y/R$，面形位移 $x_P \simeq y^2/(2R)$ 从二阶开始。一阶计算把交点移到顶点平面，保留转角。同时令 $|y/u|, |y/v| \ll 1$，就可以把两侧光线的斜率也看作小角度。

令球面半径趋于无穷，法线处处平行，便得到平面折射。稍后讨论凹面镜时，再把实际反射点放回球面，比较不同入射高度的光怎样交轴。

2.1.3　平面折射：视深与视高

图 2.2 中，S 位于折射率n_1 的介质内，距界面h_0；观察者位于n_2 介质，沿法线观察。光线在界面点B 折射后进入眼睛，反向延长线与法线交于虚像S'。若$OB = a$，则

$$i \simeq \frac{a}{h_0}, \quad r \simeq \frac{a}{h}, \quad n_1\frac{a}{h_0} = n_2\frac{a}{h}, \qquad \boxed{h = \frac{n_2}{n_1}h_0}.$$

沿法线附近观察，从空气看水中物体的视深约为 h_0/n，从水中看空气中物体的视高约为 nh_0。

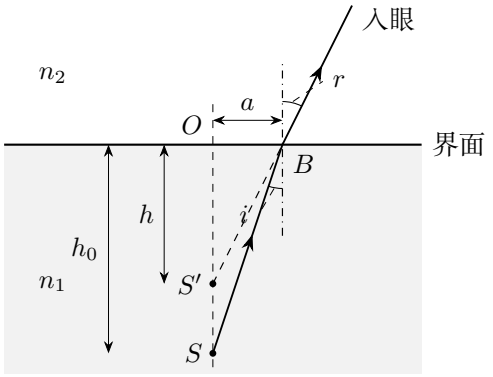


图 2.2: 折射后的光进入眼睛，沿出射线反向延长得到虚像 S'。

在图 2.2 中，h_0 从水面量到 S，h 则从水面量到虚像 S'。水的折射率大于空气的折射率，因此 $h < h_0$。

从图 2.2 的两个直角三角形可读出准确关系 $a = h_0\tan i = h\tan r$。斜视时，每条出射线仍有一个轴上的反向交点；改变观察方向，反向交点会沿轴移动。

图 2.3 以水的折射率 4/3、空气的折射率 1 为例画出反向交点的深度。由 $n_1\sin i = n_2\sin r$，在可透射的角度范围内有

$$\sin i = \frac{n_2}{n_1}\sin r, \qquad \cos i = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\sin r\right)^2}.$$

将它们代入两个正切之比，

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\sin i}{\sin r}\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{n_2\cos r}{n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2\sin^2 r}}.$$

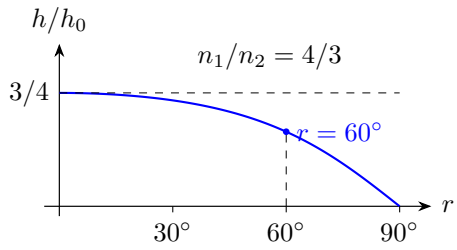


图 2.3: 从空气中观察水下物点，曲线给出各条出射光线的反向延长线在轴上的交点深度。

从法线附近看，曲线从 $h/h_0 = 3/4$ 起步。视线偏到 $r = 60°$，水下物点对应的轴上交点变为 $h/h_0 = 3/\sqrt{37} \simeq 0.493$，比正视时更浅。

2.1.4 实物、虚物、实像与虚像

判断物像的虚实，要分别考察光具作用前后的光束。入射光束若发散，其反向延长线交点是实物点；若会聚，其继续传播本将到达的点是虚物点。这里判断的是光具作用前的方向关系，虚物常由前一级光具产生。

再看作用后的光束：实际会聚的交点是实像，发散束反向延长线的交点是虚像。平行出射对应像在无穷远。连用多个光具时，上一光具送来发散束，或送来尚未到达目标的会聚束，这就决定了下一光具的物是实物还是虚物。

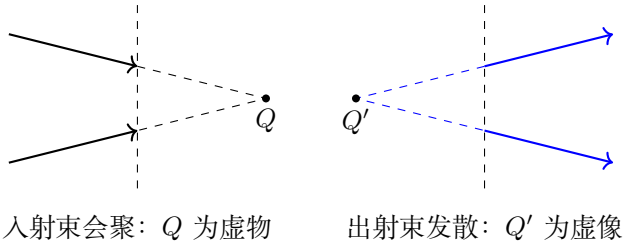


图 2.4: 分别在光具前后判断光束，才能区分虚物与虚像

图 2.4 中，左图的入射束原来朝 Q 会聚，在到达 Q 之前先遇到光具，所以 Q 是虚物。右图的出射束发散，向后延长交于 Q'，所以 Q' 是虚像。每一次量距均以这次作用的顶点和传播方向为准。

2.1.5　折射公式的符号约定

每次折射均以该次入射光的主轴方向为正向，顶点记为O。采用以下约定：

	正值	负值
u	实物，位于入射侧	虚物，位于出射侧
v	实像，位于出射侧	虚像，位于入射侧
R_s	球心在出射侧	球心在入射侧

用R_s 表示带符号曲率半径，用$R>0$ 表示半径大小。本讲统一使用

$$\boxed{\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R_s}}. \tag{2.1}$$

按此约定，左侧实物距 $u>0$，其轴上坐标为 $x=-u$。

若改用统一坐标$s=x_{\text{物}}, s'=x_{\text{像}}$，则$s=-u, s'=v$，公式等价于

$$\frac{n_2}{s'}-\frac{n_1}{s}=\frac{n_2-n_1}{R_s}.$$

前式按实物、虚物量物距，后式统一沿轴量有向坐标，两式通过 $s=-u$，$s'=v$ 互换。

沿多个面传播时，还应暂时保留物像的绝对坐标，再相对下一面的顶点重新量距。后面的图 2.8 将把这一操作与虚物的会聚光束对应起来。

同一个球面反向追迹时，入射方向反转，球心相对顶点的有向坐标 R_s 随之变号。例 2.12 从正、反两个方向分别量距，可直接看到共轭物点如何互换。

物距的符号来自入射束的发散或会聚；像距的符号来自出射束的交点；横向放大率的符号来自离轴像点在轴的哪一侧。式(2.1)中，$R_s\to\infty$ 给出平面折射，$n_1=n_2$ 则给出 $v=-u$，光束保持原来的会聚或发散中心。

2.1.6　用有向倾角推导球面折射公式

带符号距离的作用可以直接从一阶光线方程看出。图 2.5 中，入射主轴向右，物点坐标 $-u$，像点坐标 v。把传播方向相对 $+x$ 的有向小倾角分别记为 α_1,α_2，把指向出射侧的法线倾角记为 ν。在高度 y 处，略去二阶面形位移后有

$$\alpha_1=\frac{y}{u},\qquad \alpha_2=-\frac{y}{v},\qquad \nu=-\frac{y}{R_s}.$$

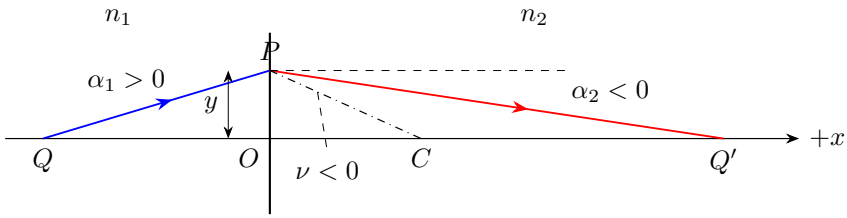


图 2.5: 一阶作图把折射点移到顶点平面；有向倾角区分上倾、下倾，虚线为当地法线

在图 2.5 中，从同一有向法线量角，近轴折射定律为 $n_1(\alpha_1-\nu)=n_2(\alpha_2-\nu)$。代入三个斜率，先保留共同的高度 y：

$$n_1\left(\frac{y}{u}+\frac{y}{R_s}\right)=n_2\left(-\frac{y}{v}+\frac{y}{R_s}\right).$$

移项，再除以非零的 y，得到 $n_1/u+n_2/v=(n_2-n_1)/R_s$。高度在一阶成像式中约去，所以从同一物点出发、以不同近轴高度到达球面的光线给出同一个像距。物、像或球心移到另一侧时，三个倾角随对应的 u, v, R_s 一起变号。

当 $n_1=n_2$ 时，右侧为零，于是 $v=-u$，光沿原方向传播。平面极限 $R_s\to\infty$ 给出 $v=-n_2u/n_1$，也就是前面的视深关系。

2.1.7 焦点、横向放大率与多界面衔接

令$u\to\infty$，得到像方焦距

$$f'=\frac{n_2R_s}{n_2-n_1};$$

令$v\to\infty$，得到物方焦距

$$f=\frac{n_1R_s}{n_2-n_1}.$$

物方和像方焦距按两侧的折射率成比例，即 $f'/f=n_2/n_1$。

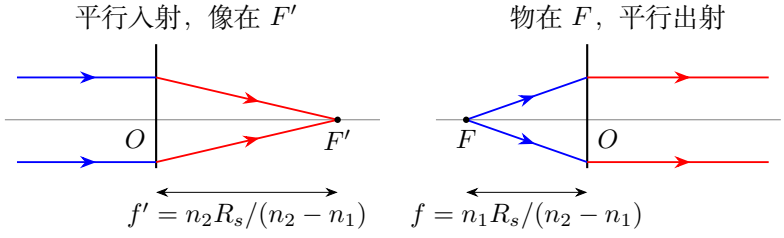


图 2.6: 同一折射面的两种实验分别定义像方焦点和物方焦点；图示会聚界面的一阶作图

图 2.6 左图用轴上平行入射束确定 f'，右图把轴上光源移到出射束恰好平行的位置，确定 f。光反向传播时，两侧介质和量距方向一同交换。

对垂直主轴的小物，横向放大率为

$$\boxed{\beta = \frac{h'}{h} = -\frac{n_1 v}{n_2 u}}. \tag{2.2}$$

$\beta > 0$ 表示正立，$\beta < 0$ 表示倒立，$|\beta|$ 才是宽度放大倍数。对于柱面折射，这一关系用于有曲率的截面；沿圆柱轴线方向的放大情况须另行讨论。

放大率可以由过顶点的光线推导。图 2.7 中，顶点法线沿轴，入射、出射倾角近似为 $-h/u$ 和 h'/v。近轴折射给出 $-n_1 h/u = n_2 h'/v$，所以得到式(2.2)。折射率的比值来自光在顶点处折转。

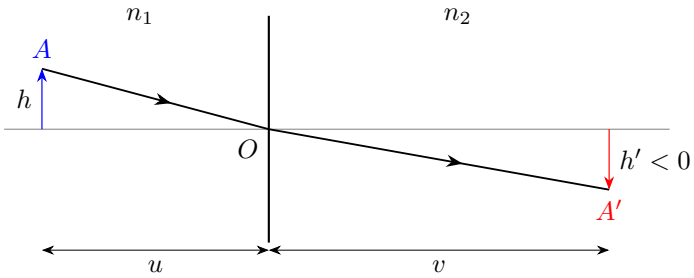


图 2.7: 过顶点的光线连接物高与像高；向下的像箭头对应负放大率

两个折射面顶点间隔为t，沿同一正向传播时，

$$u_2 = t - v_1.$$

图 2.8 中，第一个面若单独存在，光束将在I_1 会聚；第二个面位于会聚点之前，所以$u_2 < 0$，I_1 是第二个面的虚物。经第二面折射后，实际像点为I_2，应由第二次成像另求。先画出这些点的相对位置，再确定物距符号。

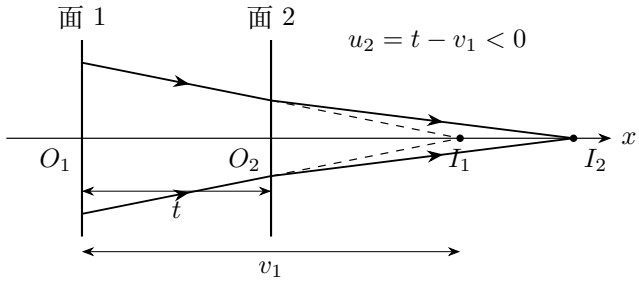


图 2.8: 前一级的实像位置在后一级之后，因而成为后一级的虚物

2.2 球面反射与球面镜成像

2.2.1 球面镜公式的近轴推导

图 2.9 左图中，Q 是轴上实物点，Q' 是实像点。入射光与正轴的夹角大小为 α；在 P 处，向左的轴向参考线与 PQ、PC、PQ' 的夹角依次为 α,φ,γ。右图放大了这三个方向。由反射定律，法线两侧的角相等，即 $\varphi-\alpha=\gamma-\varphi$，因此

$$\alpha+\gamma=2\varphi.$$

设P 的高度为y，略去球面相对顶点平面的二阶位移，则

$$\alpha\simeq\frac{y}{u},\qquad \gamma\simeq\frac{y}{v},\qquad \varphi\simeq\frac{y}{R}.$$

消去y，得到

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2}{R}=\frac{1}{f}.$$

配合实物、实像为正的约定，此式可延续到虚物与虚像。镜面放大率$\beta=-v/u$ 的负号则记录物像两端的正倒关系。

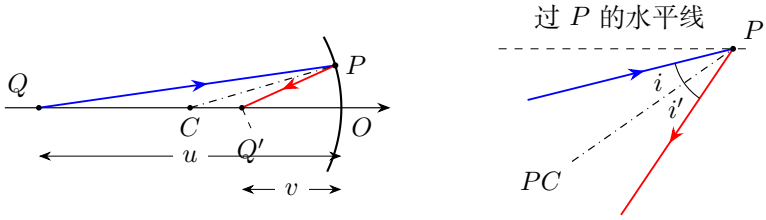


图 2.9: 左图为凹面镜的光路，右图在反射点放大法线两侧的两个角。蓝色为入射光，红色为反射光。

右图的 i 与 i' 都从 PC 量起。CP 随 P 的高度倾斜，这个法线转角 φ 在成像式中给出聚焦项 $2/R$。

$f=R/2$ 给出凹面镜的近轴焦点。下面恢复球面上反射点的真实位置，计算孔径增大后各条反射线怎样交轴。

2.2.2 不同高度的平行光在哪里交轴

图 2.10 把两条平行于主轴、入射高度不同的光画在同一面凹镜上。取顶点 O 为原点，向右为正，球心坐标为 $-R$。若 CP 与正轴夹角为 φ，则反射点为

$P=(-R+R\cos\varphi, R\sin\varphi)$。反射线相对向左的轴向向下转过 2φ。在图中的 $0<\varphi<45^\circ$ 内，从 P 到轴上交点 Q 的水平距离为 $R\sin\varphi\cot(2\varphi)$，于是

$$\begin{aligned} x_Q &= -R+R\cos\varphi - R\sin\varphi\frac{\cos(2\varphi)}{2\sin\varphi\cos\varphi} \\ &= -R+R\cos\varphi - R\frac{2\cos^2\varphi-1}{2\cos\varphi} = -R+\frac{R}{2\cos\varphi}. \end{aligned}$$

光线趋近主轴时，x_Q 趋于 $-R/2$。入射点越高，$\cos\varphi$ 越小，交点就越靠近镜面。这样，近轴焦点 F 与图中的两个交点有了明确的几何关系；例 2.13 用同一关系求给定孔径下的轴向像差。

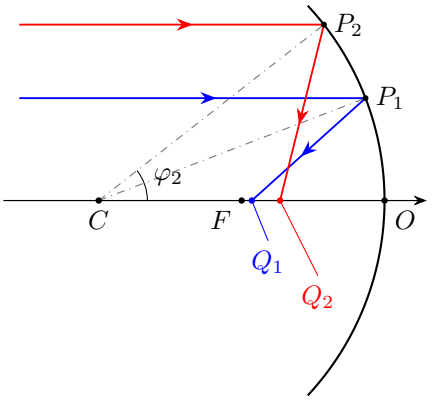


图 2.10: 凹面镜的边缘光线交轴于较靠近镜面的 Q_2。

2.2.3　球面镜的物像关系

对球面镜，取实物$u>0$、虚物$u<0$、实像$v>0$、虚像$v<0$，则

$$\boxed{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}}, \qquad \boxed{\beta=-\frac{v}{u}}.$$

反射使光的传播方向翻转，因此镜面实像位于入射侧；折射面实像则位于出射侧。两式形式相近，几何位置的判断不同。

凹镜对实物的成像可按u 分区：$u>2f$ 时，在$f<v<2f$ 成倒立缩小实像；$u=2f$ 时，$v=2f$，倒立等大；$f<u<2f$ 时，$v>2f$，倒立放大；$u=f$ 时出射光平行；$0<u<f$ 时$v<0$，为正立放大虚像。凸镜对任意实物均有$f<v<0$，形成正立缩小虚像。

遇到虚物时，先画出入射会聚点，确定$u<0$，由公式求v，再用β 判正倒。完整分类及其作图依据如下。

各区间的物像关系可由 $v=fu/(u-f)$ 和 $\beta=-f/(u-f)$ 一同读出。物经过焦点时，出射束从会聚经过平行变为发散；实物在两倍焦距处时，$\beta=-1$，成倒立等大的实像。

在不跨越焦点的支路上，固定 f，对 $v=fu/(u-f)$ 使用商法则：

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{f(u-f)-fu}{(u-f)^2}=-\frac{f^2}{(u-f)^2}<0.$$

这一负号可以检查物像位置变化的趋势；但把代数像距的变化转成实际空间方向时，还须保留反射后的传播方向。像距正负负责前后位置，放大率正负负责正倒关系，沿出射轴量像距，沿垂直于轴的方向量像高。

2.2.4 实物与虚物的完整分类

表中$F=|f|>0$，像距v 与放大率β 均保留符号。$v>0$ 的实像位于镜前，$v<0$ 的虚像位于镜后。

镜面及物距	像距范围	β	像的性质
凹镜，$u>2F$	$F<v<2F$	$-1<\beta<0$	倒立缩小实像
凹镜，$u=2F$	$v=2F$	$\beta=-1$	倒立等大实像
凹镜，$F<u<2F$	$v>2F$	$\beta<-1$	倒立放大实像
凹镜，$u=F$	无穷远	无有限值	出射平行
凹镜，$0<u<F$	$v<0$	$\beta>1$	正立放大虚像
凹镜，$u<0$	$0<v<F$	$0<\beta<1$	正立缩小实像
凸镜，$u>0$	$-F<v<0$	$0<\beta<1$	正立缩小虚像

凸镜若接收入射会聚光束，虚物距可写为$u=-a$，其中$a>0$。代入$f=-F$，可直接得到

$$v=\frac{Fa}{F-a},\qquad \beta=\frac{F}{F-a}.$$

因此还须区分以下几种情况：

虚物位置	像距范围	β	像的性质
$a>2F$	$-2F<v<-F$	$-1<\beta<0$	倒立缩小虚像
$a=2F$	$v=-2F$	$\beta=-1$	倒立等大虚像
$F<a<2F$	$v<-2F$	$\beta<-1$	倒立放大虚像
$a=F$	无穷远	无有限值	出射平行
$0<a<F$	$v>0$	$\beta>1$	正立放大实像

“凸镜总成虚像”只适用于实物。图 2.11 中，会聚光在到达镜后点V 前被凸镜反射，反射后在镜前实际会聚，正对应$0<a<F$ 的最后一行。

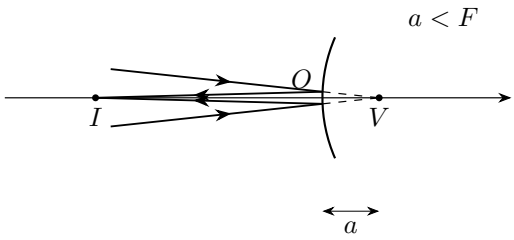


图 2.11: 凸镜对虚物可以成实像；虚线是入射光若未被反射时的继续路径

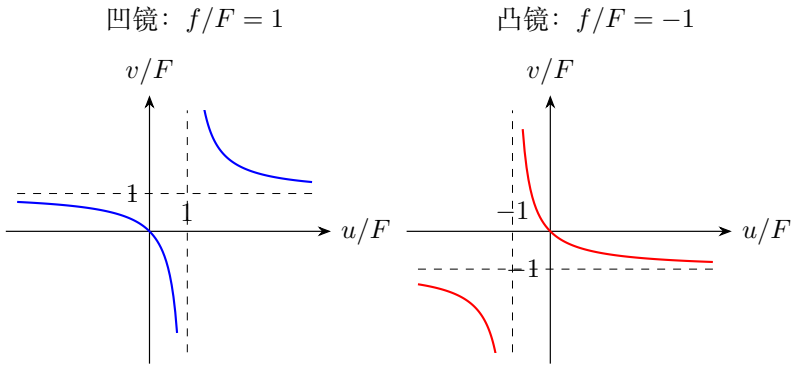


图 2.12: 带符号物像函数把各类光束放在同一图上；虚物也须代入相应支路

图 2.12 中，横轴两侧分别表示实物、虚物，纵轴两侧分别表示实像、虚像。靠近竖直渐近线 $u = f$ 时，出射束接近平行。对每一支，像的大小和正倒再由 $\beta = -v/u$ 给出。

2.2.5　作图时怎样选择辅助光线

近轴作图可选：平行主轴的入射光经凹镜反射后通过焦点；通过焦点的入射光反射后平行主轴；沿球心法线入射的光原路返回。凸镜相应使用焦点或球心的反向延长线。作图时应先确定光线实际传播的半直线，再画延长线。

图 2.13 用前两条光线确定物体上端A 的像A'。其交点在轴下，说明像倒立；交点在镜前，说明像为实像。这两个判断分别对应$\beta < 0$ 与$v > 0$。

两条方向不同的辅助光线确定近轴像点，第三条光线也通过同一交点。如果选到两条重合的光线，就改从物点向镜面的另一处画一条入射线，再按当地法线作出反射线。

图 2.13 选的两条辅助光线都落在镜面口径内。镜面较小时，可换一条实际打到镜面的光线，按当地法线作出反射线，仍能定出同一近轴像点。

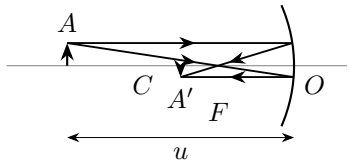


图 2.13: 凹镜的两条辅助光线；球面处小轴向位移在一阶作图中略去

2.3 成像变化与可逆性

2.3.1 先规定测量，再决定公式

单球面折射的$n_1/u+n_2/v=(n_2-n_1)/R_s$是一阶近轴关系，$u,v$从顶点量取。反向追迹时两介质互换，曲率半径随正轴反转而变号。横向放大率$\beta=-n_1v/(n_2u)$包含顶点处的折射率之比。

对固定元件，把物距微增量记为$\mathrm{d}u$，固定介质和曲率后，等式右端为常量。利用 $\mathrm{d}(u^{-1})=-u^{-2}\,\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}(v^{-1})=-v^{-2}\,\mathrm{d}v$，先写成

$$-\frac{n_1}{u^2}\,\mathrm{d}u-\frac{n_2}{v^2}\,\mathrm{d}v=0.$$

移项后除以 $\mathrm{d}u$，得到

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=-\frac{n_1v^2}{n_2u^2}.$$

在统一的向右坐标轴上，实物和实像的坐标分别是 $x=-u$、$x'=v$。在这一坐标下，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$、$\mathrm{d}x'=\mathrm{d}v$，所以 $\mathrm{d}x'/\,\mathrm{d}x=-\,\mathrm{d}v/\,\mathrm{d}u=n_1v^2/(n_2u^2)$。

进一步用式(2.2)消去距离比，可把同向坐标下的轴向位移放大率写为

$$\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}=\frac{n_1v^2}{n_2u^2}=\frac{n_2}{n_1}\beta^2.$$

在本节固定折射面的轴向坐标中，$\mathrm{d}x'/\,\mathrm{d}x>0$，所以实物沿轴移动时，像沿同一坐标方向移动。若物体速度为 V，像速是 $V'=(\mathrm{d}x'/\,\mathrm{d}x)V$。横向放大率的正、负则描述像的正倒。

2.4 色散与光学模型的适用范围

2.4.1 波长、色散与反射望远镜

棱镜使不同波长的光沿不同方向传播，是折射率随波长变化的结果。白光分解后，再把各色光适当重合，可以恢复近似白光。重合后的白光显示了各波长成分的叠加。

折射率随波长变化时，不同颜色的近轴像距可以不同，这就是色差。理想镜面反射的成像式不含介质折射率，所以反射望远镜的主镜没有折射色差。球差和彗差则来自反射面的几何形状和入射方向。

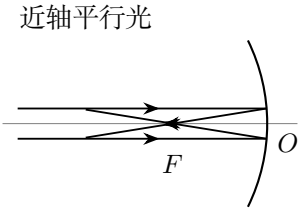


图 2.14: 反射主镜的轴上近似光路；两条入射光具有同一几何焦点

图 2.14 把反射望远镜的主要聚焦作用简化为凹面主镜。真正的仪器还要通过次镜或其他光学部件把光引到合适的观测位置，这些部件的物像衔接仍可按本讲的逐级成像思路分析。

2.4.2　光的微粒图景与波动描述

几何光线给出传播方向和像的位置。第五讲将用光波相位计算干涉与衍射，再用光子的能量解释光电效应。

几何光学用光线研究传播和成像；干涉、衍射、偏振需要波动描述，光电效应则要计算光子的能量交换。处理具体问题时，应先确定所用模型的条件，再把图中的距离、角度或路径写入方程。

例如，相机里的透镜先用几何光线确定像面。要知道两个细小的物点在这个像面上能否分开，就求有限孔径的衍射斑；光到达探测器后，再按材料吸收光子的过程求信号。

2.5 例题与分析

例 2.1 (球面折射成像公式)**.** 两种透明介质的折射率分别为n_1, n_2，分界面为球面，顶点为O，球心为C。按本讲的符号约定，证明式(2.1)，并说明其近轴条件。

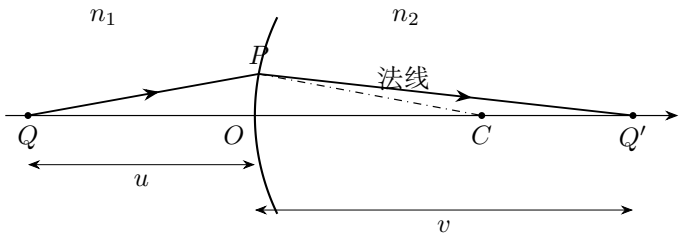


图 2.15: 球面折射的轴上物点、像点与法线；图示$u, v, R_s > 0$

解　在折射点用当地法线区分三个几何倾角

先推导图 2.15 所示的实物、实像、球心在出射侧的情形。在图 2.16 中，设P的高度为y，入射光QP 向上倾斜α，出射光PQ' 向下倾斜γ，法线PC 向下倾斜φ。这里三个角均取其正的大小。由几何关系，

$$i = \alpha + \varphi, \qquad r = \varphi - \gamma.$$

第二式对应图示光线位于法线上方的情形；用带符号角写折射定律时，不必另行限制n_1, n_2 的大小。

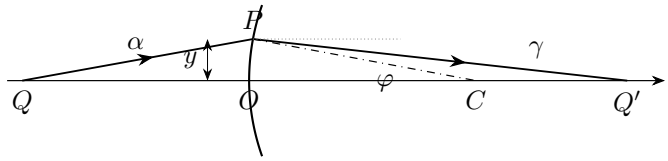


图 2.16: 把高度y 与三条直线的倾角对应起来

把倾角换成高度与带符号距离之比

略去顶点与P 之间的二阶轴向位移，有

$$\alpha \simeq \frac{y}{u}, \qquad \gamma \simeq \frac{y}{v}, \qquad \varphi \simeq \frac{y}{R_s}.$$

代入$n_1 i = n_2 r$：

$$n_1\left(\frac{y}{u} + \frac{y}{R_s}\right) = n_2\left(\frac{y}{R_s} - \frac{y}{v}\right).$$

消去$y \neq 0$，整理即得

$$\boxed{\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \frac{n_2 - n_1}{R_s}}.$$

若某点转到另一侧，用本讲的带符号距离延续同一式即可。

说明共同像点来自一阶近似，并检查两项极限

这一步中高度y 消失，说明一阶近似下不同高度的近轴光线有同一像点。若保留高阶项，结论一般会依赖y，这正是球差需要另行处理的原因。

在两种简单情形下，成像式可直接化简。$R_s \to \infty$ 时，$v = -n_2u/n_1$，与视深公式一致；$n_1 = n_2$ 时，$v = -u$，出射光沿原方向传播，反向延长线仍交于原物点，不产生新的折射成像效果。

由过顶点光线求横向放大率

为推导横向放大率，再取通过顶点O 的近轴光线。其折射前、后的带符号倾角分别为$-h/u$ 与h'/v，因此

$$n_1\left(-\frac{h}{u}\right) = n_2\frac{h'}{v}, \qquad \frac{h'}{h} = -\frac{n_1v}{n_2u}.$$

放大率的符号给出像的方向。对本图中的实物、实像，$u, v > 0$，所以物在轴上方的端点成像在轴下方。

例 2.2 (球面镜的焦距)**.** 一束近轴平行光分别射向凹球面镜、凸球面镜。证明焦距的大小为球面半径的一半，并判断焦点虚实。

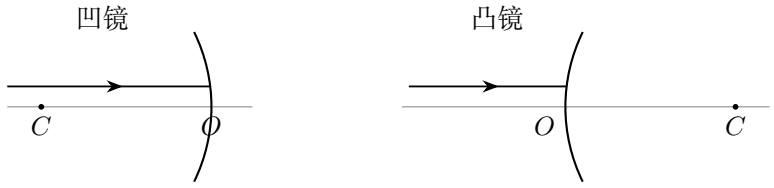


图 2.17: 反射面不同，平行光的会聚性质不同

解　由球面法线把平行入射的反射偏转写成两倍角

图 2.17 的两种镜面均接收近轴平行光。先考察图 2.18 左图。CP 是反射点法线，与主轴的夹角为θ。平行入射光与法线夹角也是θ，由反射定律，反射光与主轴夹角为2θ。若反射高度为y，

$$\theta \simeq \frac{y}{R}, \qquad OF \simeq \frac{y}{\tan 2\theta} \simeq \frac{y}{2y/R} = \frac{R}{2}.$$

入射光从左向右，反射光从P 向左到达F，所以凹镜的F 是实焦点。

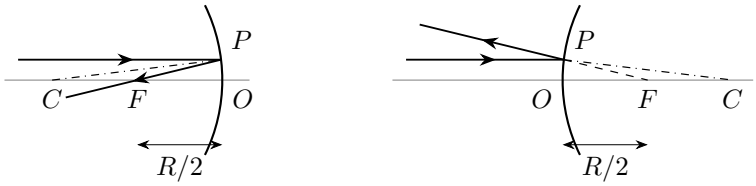


图 2.18: 凹镜反射光实际会聚；凸镜只由反向延长线确定虚焦点

按反射线及其延长线区分实、虚焦点

右图中，凸镜反射光向左上方发散，反向延长线在镜后与轴交于F，故其焦点为虚焦点。采用实焦距为正的镜面约定，

$$\boxed{f_{凹}=+\frac{R}{2},\qquad f_{凸}=-\frac{R}{2}}.$$

球面镜的焦距

这里的 $f=R/2$ 从镜面顶点沿反射方向量取。

例 2.3 (水下看到的太阳视角)**.** 地面观测太阳的角直径约为$\Theta=9.2\times10^{-3}\,\mathrm{rad}$。正午太阳位于天顶，水的折射率为$n=4/3$。人在水下沿竖直方向观察，太阳的角直径变为多少?

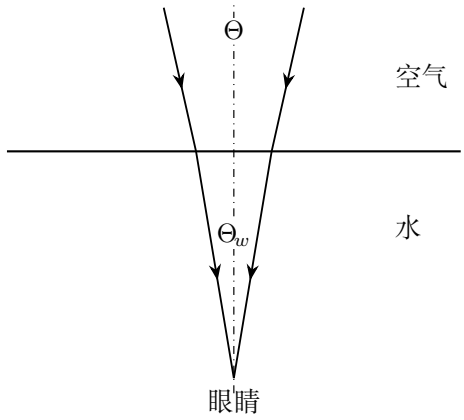


图 2.19: 太阳两端的入射方向关于水面法线对称，角度放大示意

解　先对太阳边缘的半角列精确折射关系

图 2.19 中，太阳两端的入射光关于法线对称，整个空气侧角直径为 Θ。图 2.20 放大其中一端的光线，两个角弧分别给出 $\Theta/2$ 和 $\Theta_w/2$。由折射定律，

$$\sin\frac{\Theta}{2}=n\sin\frac{\Theta_w}{2}.$$

取一阶近似后恢复整个角直径

由于给定角度很小，

$$\boxed{\Theta_w \simeq \frac{\Theta}{n} = 6.9 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}}.$$

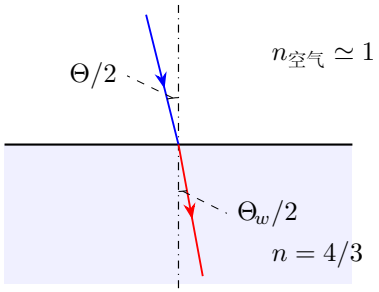


图 2.20: 单条边缘光线的入射角与折射角均从法线量起，图中角度放大示意。

两条边缘光线的夹角

空气射入水中时，折射光靠近法线，两条边缘光线在水中的夹角变小。若太阳偏离天顶，两条边缘光线在空气侧的入射角不同，就分别用折射定律求出射方向，再取它们的夹角。

用精确式量化近似误差

上述近似保留一阶角度。若要量化误差，应从

$$\Theta_w = 2\arcsin\left[\frac{1}{n}\sin(\Theta/2)\right]$$

计算，代入得 $\Theta_w \approx 6.899989 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad}$，比一阶结果小约 $1.1 \times 10^{-8}\,\mathrm{rad}$。

例 2.4 (玻璃棒的两种入射方向)**.** 足够长的细玻璃棒一端为平面，另一端为向外凸起的球面，球心在棒内。近轴平行光由平端入射，从球端出射后在空气中与轴交于距球面a 处；若由球端入射，在棒内与轴交于距球面b 处。求玻璃折射率n。

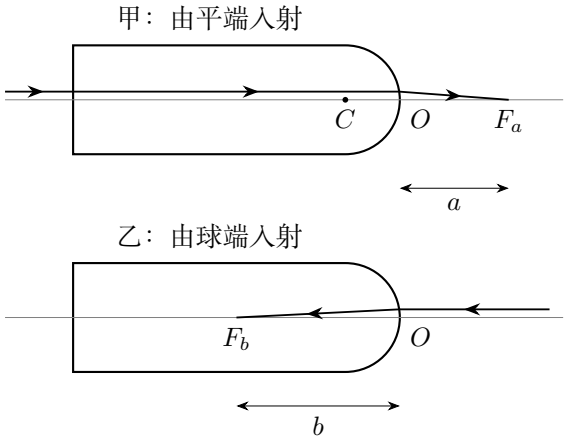


图 2.21: 同一球面在两种传播方向下，曲率半径的符号相反

解　按实际光路区分两次实验的介质和曲率号

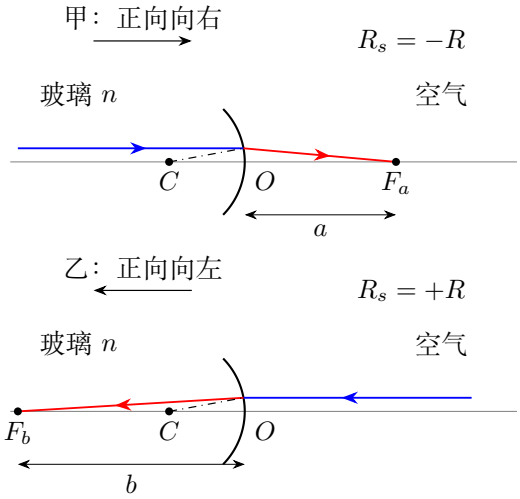


图 2.22: 同一凸球端的反向入射实验：分别重新规定传播正向，并按球心所在侧赋予曲率符号

图 2.21 甲中的光线垂直进入平端，方向不变，抵达球面时仍是平行光。其传播正向向右，球心C 在入射侧，故$R_s = -R$。式(2.1)给出

$$\frac{1}{a} = \frac{1-n}{-R}, \qquad a = \frac{R}{n-1}.$$

反向入射时重新计算玻璃内焦点

乙图的传播正向向左，球心在出射侧，故$R_s = +R$。此时从空气折入玻璃，

$$\frac{n}{b} = \frac{n-1}{R}, \qquad b = \frac{nR}{n-1}.$$

消去半径求折射率，再还原曲率半径

两式相除，

$$\boxed{n = \frac{b}{a}}.$$

还可由$R = (n-1)a$ 得

$$\boxed{R = b - a}.$$

因此a, b 不仅能确定折射率，还能反推出球端曲率半径。

像的位置与棒长

若测得$b \le a$，便与普通玻璃$n > 1$、向外凸起球端的题设不符，应先检查两种入射方向与距离基准。

图 2.22 所列两次实验的出射介质不同，测得的像方焦距也不同。因$n > 1$，应有$b > a$，可据此检查实验数据。题设默认棒足够长，使乙图光线在遇到平端前已经交轴。

例 2.5 (盛有浅水的凹球面镜)**.** 开口向上的凹球面镜曲率半径为$R = 60\,\mathrm{cm}$，装入折射率$n = 1.333$ 的浅水，水深$d \ll R$。空气中的近轴平行光竖直入射，所用镜面区域全部浸没。求光线出水后的焦点距镜面顶点的距离，并求浅水极限。

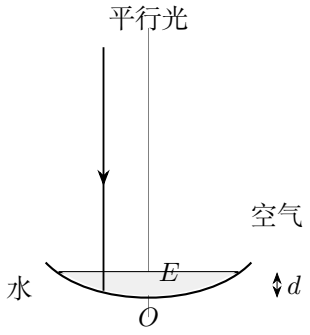


图 2.23: 先在水中反射，再经平水面折射进入空气

解　先在水中作反射，确定原几何焦点

图 2.23 中入射光垂直水面，折射后仍竖直。水中反射遵循反射定律，几何焦点F_w 距顶点仍为$R/2$，并不会因介质折射率而变成$R/(2n)$。改变最终焦点的是出水时的折射。

把水中会聚点作为水面的虚物，计算出水焦点

图 2.24 中，若暂时没有水面，反射光将在F_w 会聚。水面位于其前方，故F_w 对水面是虚物。其虚物距

$$u_E = -\left(\frac{R}{2} - d\right).$$

平面折射公式为$n/u_E + 1/v_E = 0$，于是

$$v_E = \frac{R/2 - d}{n}, \qquad \boxed{OF = d + \frac{R/2 - d}{n}}.$$

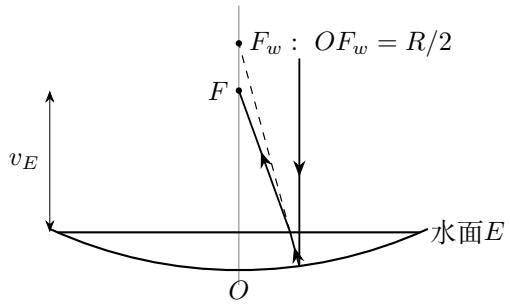


图 2.24: 水面使上行会聚光更偏离法线，焦点由F_w 移到F

求浅水极限并检查水深变化的方向

在$d/R \to 0$ 的极限，

$$\boxed{OF \simeq \frac{R}{2n} = \frac{60}{2 \times 1.333}\,\mathrm{cm} \simeq 22.5\,\mathrm{cm}}.$$

在图 2.24 的几何关系下，d 增大一小量时，最终焦点高度增大$(1-1/n)\,\mathrm{d}d$。令$n \to 1$，不论参考液面画在何处，都恢复$OF = R/2$；这是检查逐级成像公式的一个直接极限。

检查浸没孔径和焦点距离的定义

水深 d 减小时，仍浸在水中的镜面区域也会缩小。近轴区域的弓高约为$y^2/(2R)$，需小于 d。这里求的是图 2.24 中从镜顶点 O 量到焦点 F 的距离。

例 2.6 (凹镜中的液体与自准直)**.** 凹球面镜的球心为C，主轴交液面于E，镜面顶点为O。$CE = 40.0\,\mathrm{cm}$，物点A 在液面上方，$AE = 30.0\,\mathrm{cm}$。小光圈保证近轴成像，调节后A 的实像与A 处于同一位置。求液体折射率。

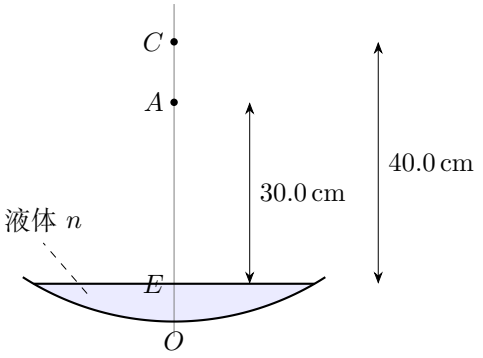


图 2.25: 物点、球心、液面与镜面的轴上位置

解　从液体一侧确定空气物点的等效位置

从图 2.25 的液体一侧看空气中的A，其视高为$n\,AE$。也就是说，入射到凹镜的光束反向延长后交于图 2.26 的A_1，距液面$EA_1 = n\,AE$。

由可逆性把往返光路化为镜面自共轭条件

要使反射后再折出液面的光回到A，由光路可逆性，液体中的反射光须回到同一轴上点A_1。因此A_1 是凹镜的自共轭点。由镜面公式$u = v$ 得

$$\frac{2}{u} = \frac{1}{R/2}, \qquad u = R,$$

故A_1 必须与球心C 重合。

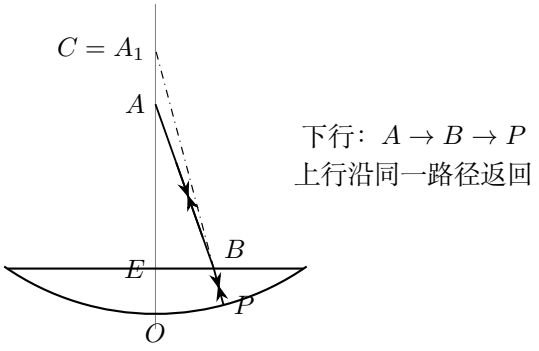


图 2.26: 液中光线的反向延长线通过球心，镜面处沿法线往返

用球心重合条件求液体折射率

因此

$$n\,AE = CE, \qquad \boxed{n = \frac{40.0}{30.0} = \frac{4}{3} \simeq 1.33}.$$

沿法线往返的光路

图 2.26 中的CP 是球面法线；只要$A_1 = C$，镜面处就是法向入射，反射光沿原路返回。这里的像为实像，因为回程空气中的光实际会聚于A，而A_1 只是第一次平面折射后用于描述入射光束的虚像位置。

例 2.7 (鱼缸中小鱼的像速)**.** 薄壁球形鱼缸直径为$2R$，忽略缸壁厚度，水的折射率为$n = 3/2$。小鱼从左侧壁中点沿直径向球心游动，速率为v_{fish}，观察者在右侧轴线上。求小鱼刚离开左侧壁时，观察到的像朝右运动的速度。

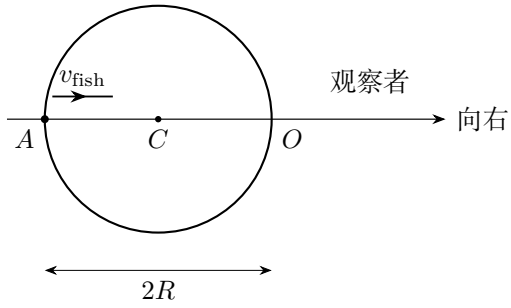


图 2.27: 只研究小鱼发出的光穿过右侧球面后形成的近轴像

解　以出射顶点为原点，确定物距、曲率号和初始像距

取图 2.27 的右侧球面顶点O 为原点，向右为坐标正向。小鱼的坐标$x_A = -u$，刚离开左壁时$u = 2R$。水向空气折射，$n_1 = n, n_2 = 1$；球心在入射侧，故$R_{\text{s}} = -R$。成像公式为

$$\frac{n}{u} + \frac{1}{v} = \frac{n-1}{R}, \qquad v = \frac{Ru}{(n-1)u - nR}.$$

当$n = 3/2, u = 2R$ 时，$v = -4R$，虚像位于右端面左侧$4R$ 处，已经超出鱼缸范围。虚像由出射光的反向延长线确定，其位置可以在水体之外。

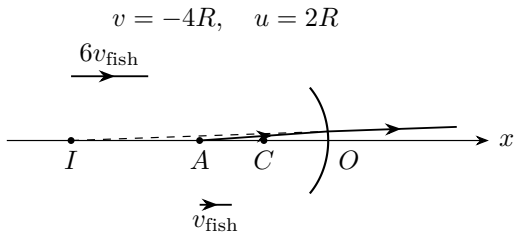


图 2.28: 小鱼向右游动时，物点 A 和虚像 I 在同一轴上向右移动。

区分物距的变化率与实际坐标速度

对成像公式关于时间求导，水与球面均静止：

$$-\frac{n}{u^2}\dot{u}-\frac{1}{v^2}\dot{v}=0,\qquad \dot{v}=-n\frac{v^2}{u^2}\dot{u}.$$

小鱼向右，故$\dot{u}=-v_{\text{fish}}$；像的坐标是$x_I=v$，所以

$$\boxed{v_{\text{image}}=\dot{v}=n\frac{v^2}{u^2}v_{\text{fish}}=6v_{\text{fish}}}$$

且方向向右。图 2.28 中两支速度箭头同向，与求导所得正号一致。

沿游动区间检查像的性质与速度变化

小鱼从左壁游到球心的过程中，$R\le u\le 2R$，成像分母$(n-1)u-nR$ 始终为负，所以近轴像一直是虚像。到球心时$u=R$，有$v=-R$，像恰与图 2.28 的球心C 重合；此时像速降为$1.5v_{\text{fish}}$。

比较轴向像速比与横向放大率

本题求的是轴向位移的变化率。横向放大率在起始位置为同一时刻的横向放大率为 $\beta=-nv/u=3$，纵向的像速与鱼速之比为 6。鱼继续向右游动时，图 2.28 中的 u 和 v 都会改变，像速由当前位置代入导数得到。

例 2.8 (体温计柱面的放大作用)**.** 体温计横截面如图。玻璃圆柱面的半径为R，顶点为O，圆柱轴线在截面上的位置为C。细水银柱A 距O 为$2R$，玻璃折射率$n = 1.5$，观察者在右侧轴线上。求该截面内水银柱像距O 的距离、像的虚实与正倒，以及宽度放大倍数。

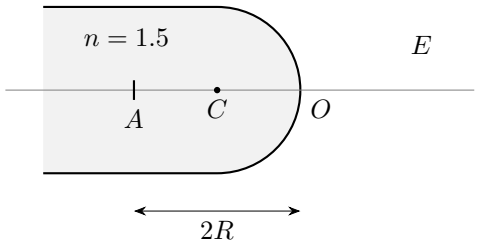


图 2.29: 柱面的有曲率截面；水银柱在顶点左侧$2R$

解　在柱面有曲率的截面内求带符号像距

图 2.29 中的光从玻璃射入空气，球心在入射侧，所以$u = 2R, R_s = -R$。由球面折射公式在该截面内的对应关系，

$$\frac{1.5}{2R} + \frac{1}{v} = \frac{1 - 1.5}{-R}, \qquad \boxed{v = -4R}.$$

因此像距顶点的几何距离为$4R$，位于玻璃一侧；出射光发散，只能反向延长后相交，故为虚像。

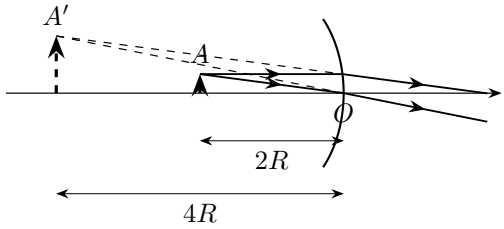


图 2.30: 在截面内追踪物体上端，确定虚像的正倒和宽度

由出射线反向延长确定正倒和宽度

横向放大率为

$$\boxed{\beta = -\frac{n_1 v}{n_2 u} = -\frac{1.5(-4R)}{2R} = +3}.$$

图 2.30 中，从物体上端 A 出发的光线经折射后，其反向延长线交于轴上方的 A'，故截面内的像正立，宽度放大到三倍。这里的宽度沿垂直体温计长轴的方向量取。

出射倾角和虚像位置

还可用顶点附近一条高度为y 的光线检查虚像位置：由轴上物点出发时，入射约化倾角为$p_1 = 1.5y/(2R)$，界面光焦度为$\Phi = 0.5/R$，故

$$p_2 = p_1 - \Phi y = \frac{y}{4R} > 0.$$

空气侧出射线仍离轴发散，反向延长至$x = -4R$ 才回到轴上，与图 2.30 所画虚像一致。这一步同时检查了曲率半径、像距的负号和光线方向。

例 2.9 (薄弯玻璃板的等效折射面)**.** 一块很薄的弯玻璃板，两球面在近轴区具有相同的带符号曲率半径R_s，玻璃折射率为n，左右两侧介质折射率为n_a, n_b。忽略板厚，证明其近轴折射效果等同于n_a, n_b 间的单个球面。

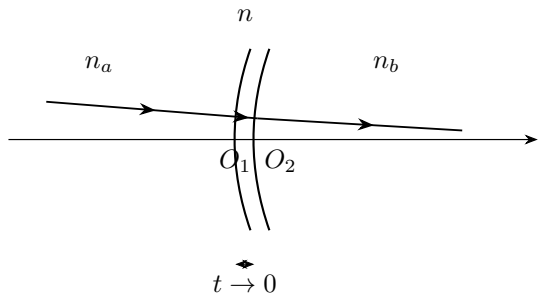


图 2.31: 两面朝向相同；“半径相同”还须包括曲率符号相同

解　按零厚度极限连接前后两面的物像距离

设第一面成像距离为v_1，第二面的物距为u_2。由图 2.31 的顶点关系，忽略板厚后$u_2 = -v_1$。分别列式：

$$\frac{n_a}{u} + \frac{n}{v_1} = \frac{n - n_a}{R_s}, \qquad \frac{n}{u_2} + \frac{n_b}{v} = \frac{n_b - n}{R_s}.$$

消去中间像，得到外介质间的等效公式

相加时，中间介质的两项恰好抵消：

$$\boxed{\frac{n_a}{u} + \frac{n_b}{v} = \frac{n_b - n_a}{R_s}}.$$

这就是两种外部介质间单个球面的一阶成像公式。

保留薄板厚度后的第二面物距

在薄板近似下，$u_2 = -v_1$ 使 $n/v_1 + n/u_2 = 0$，从而把两个成像方程合成一个。厚度为 t 时，第二面要用 $u_2 = t - v_1$，依次解两次成像。

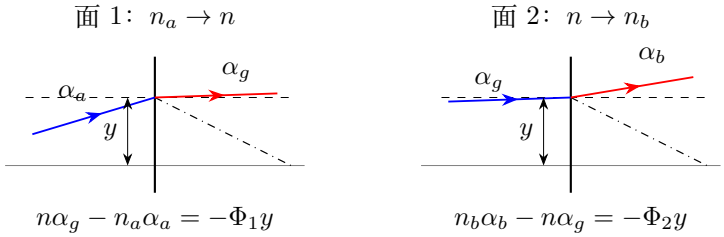


图 2.32: 零厚度极限下，两面使用同一高度 y；分别追踪每次折射前后的方向，再相加约化倾角的变化

从两次倾角改变量得到总光焦度

图 2.32 的两个局部图是同一薄板的两次折射，竖线表示各自的近轴顶点平面，角度作放大示意。令 $\Phi_1 = (n - n_a)/R_s, \Phi_2 = (n_b - n)/R_s$，图中两式相加使中间方向 α_g 消去，得到 $n_b\alpha_b - n_a\alpha_a = -(\Phi_1 + \Phi_2)y$。所以两面的作用相加，得到同一个总光焦度。这里$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ 表示折射本领，量纲为长度的倒数。若$n_a = n_b$，则$\Phi = 0$，薄板在零厚度极限没有一阶聚焦作用。有限厚度仍可能带来光线位移和高阶影响；两面的曲率符号若相反，上述抵消关系便不成立。

例 2.10 (透明球内的小发光泡)**.** 透明球半径为R，折射率为$n > 1$，直径两端为A, B。除A, B 附近小区域透光外，其余表面涂黑。小发光泡紧靠球内B 点，观察者位于左侧轴线上。求小泡的像位于B 点左侧多远处（向左取正，向右取负），以及横向放大率；并给出像在整个球右侧的折射率范围。

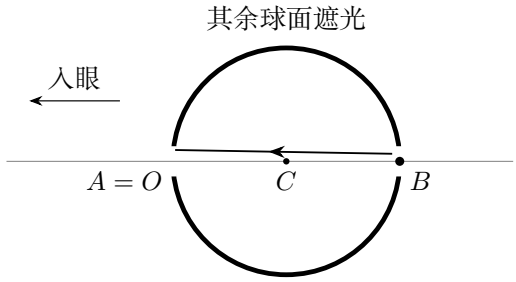


图 2.33: 传播方向向左，出射面是A 附近的小球面

解　随向左传播重新定向，求出射面像距

在图 2.33 中，主轴正向应随光向左。相对出射面A，有$u = 2R, n_1 = n, n_2 = 1$，球心位于入射侧，$R_s = -R$。所以

$$\frac{n}{2R} + \frac{1}{v} = \frac{n-1}{R}, \qquad \boxed{v = \frac{2R}{n-2}}.$$

筛选像在整个球右侧的折射率范围

当$1 < n < 2$ 时，$v < 0$，虚像在A 的右侧。其到A 的距离为$-v = 2R/(2-n) > 2R$，故确在整个球的右侧。

从顶点像距换算到球后端的有向距离

像距 v 从折射面顶点量起；题中所求位置则从 B 向左量。按图 2.34 平移量距起点，得到

$$\boxed{\ell_{BI} = 2R + v = \frac{2R(n-1)}{n-2}}.$$

在$1 < n < 2$ 时此值为负，表示像在B 右侧。

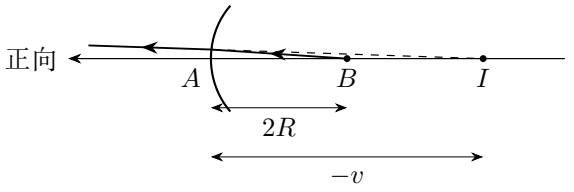


图 2.34: 示例取$n = 3/2$；虚像在B 的右侧，实际出射光向左

横向放大率随折射率的变化

横向放大率为

$$\boxed{\beta = -\frac{nv}{2R} = \frac{n}{2-n}}.$$

在题设像位于球右侧的范围内，$\beta > 0$，为正立放大虚像。$n \to 1$ 时，$v \to -2R$，$\ell_{BI} \to 0, \beta \to 1$，像回到小泡自身；$n \to 2^-$ 时，虚像向右远离，放大率增大。$n = 2$ 时出射平行，像在无穷远；$n > 2$ 时$v > 0$，形成左侧实像，已不满足“像在球右侧”的限制。

例 2.11 (高脚酒杯中的画片)**.** 酒杯内底面向上凸起，球面顶点为O，球心C 在O下方的玻璃中，半径$R = 1.50\,\mathrm{cm}$。杯口高于O 点$8.0\,\mathrm{cm}$，杯脚底中心的画片P 在O下方$6.3\,\mathrm{cm}$。玻璃折射率$n_1 = 1.56$，酒的折射率$n_2 = 1.34$。求未斟酒时、斟酒后杯底球面对画片所成的像。进一步讨论酒面高度为H 时，经过水平酒面后看到的视位置，并计算斟至杯口的情形。

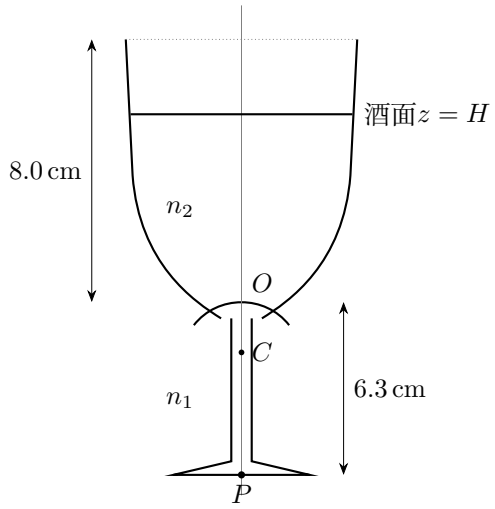


图 2.35: 杯底球面与水平酒面是两个不同的折射界面；纵向尺寸作示意

解　以球面顶点为量距起点，先固定曲率符号

按图 2.35 取竖直向上为正向，O 为坐标原点。玻璃中的画片是实物，$u = 6.3\,\mathrm{cm}$，球心在入射侧，故$R_s = -1.50\,\mathrm{cm}$。

空杯时单独计算玻璃到空气的球面像

玻璃直接通向空气，球面成像公式给出

$$\frac{1.56}{6.3} + \frac{1}{v_0} = \frac{1 - 1.56}{-1.50}, \qquad \boxed{v_0 = +7.95\,\mathrm{cm}}.$$

像为实像，在O 上方，距杯口平面仅约$0.045\,\mathrm{cm}$。眼睛若贴近杯口，这个像几乎落在眼睛位置，难以调焦。

斟酒后先求杯底球面在酒中的中间像

先只计算这一界面的像I_1：

$$\frac{1.56}{6.3} + \frac{1.34}{v_1} = \frac{1.34 - 1.56}{-1.50}, \qquad \boxed{v_1 = -13.27\,\mathrm{cm}}.$$

负号表示杯底球面在酒中所成的虚像位于 O 下方。到达酒面后，这束光还要经历一次酒到空气的折射。

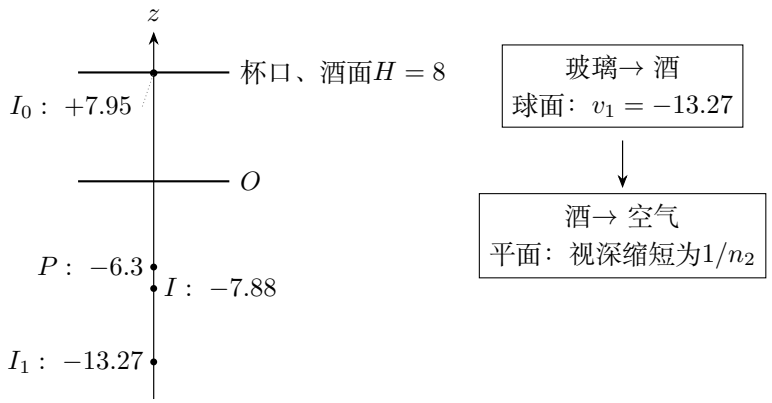


图 2.36: 球面成像与平面折射分两步计算；右侧是高度坐标示意

以酒面为新顶点计算空气中的最终视位置

图 2.36 中，到达酒面的酒中光束相当于从I_1 发出，I_1 距酒面的深度为$H-v_1$。在空气中观察，视深为

$$h_{\text{app}}=\frac{H-v_1}{n_2},\qquad \boxed{z_I=H-\frac{H-v_1}{n_2}}.$$

若斟至杯口，$H=8.0\,\text{cm}$，则

$$h_{\text{app}}=\frac{8.0+13.27}{1.34}\simeq 15.88\,\text{cm},\qquad \boxed{z_I\simeq -7.88\,\text{cm}}.$$

两次折射后的观察位置

图 2.37 把前述两次计算落实到同一条近轴光线上。空杯中的光束越过O 后会聚于I_0；斟满酒后，O 至液面E 的光束发散，其反向延长线交于I_1。经液面后，出射光更偏离法线，反向延长线改交于I。

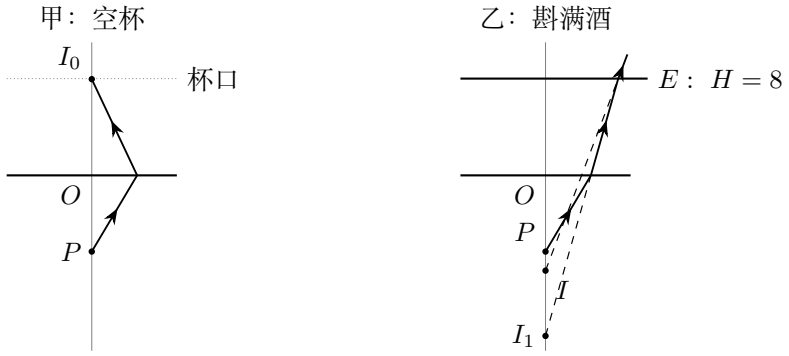


图 2.37: 两种情况下的分段光路；球面用顶点平面表示，纵向压缩示意

“距O 下方13.27 cm” 是球面在酒中所成的像，空气中的最终视位置还受酒面高度影响。斟酒后视像远离杯口，观察距离增大；具体能否看清，还取决于眼睛的位置和调节范围，不宜单凭一个轴上像距作绝对判断。

例 2.12 (球面折射的共轭物点)**.** 光从空气射入折射率1.50 的玻璃，球面顶点为O，球心C 位于玻璃内，$OC = 10.0\,\mathrm{cm}$。轴上实物A 在顶点前30.0 cm。求近轴像的位置、横向放大率，并将该像点改为反向发光点，重新计算反向的像。



图 2.38: 球心在正向出射侧；图中长度统一用厘米

解　正向传播时分别计算像距和横向放大率

按图 2.38 正向传播，$n_1 = 1, n_2 = 1.50, u = 30.0\,\mathrm{cm}, R_s = +10.0\,\mathrm{cm}$，所以

$$\frac{1}{30} + \frac{1.50}{v} = \frac{0.50}{10}, \qquad \boxed{v = 90.0\,\mathrm{cm}}, \qquad \boxed{\beta = -\frac{1 \times 90}{1.50 \times 30} = -2.00}.$$

正像距表示玻璃中的实像；负放大率表示物面上端成像在轴下。

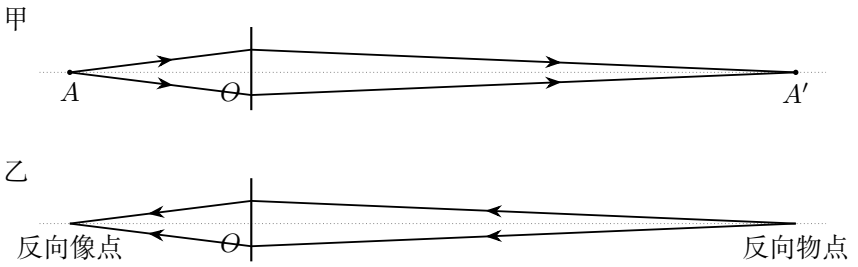


图 2.39: 甲为正向近轴追迹，乙把同一对共轭点反向使用；竖线为等效顶点平面

反向传播时重置两介质与曲率号

图 2.39 乙的入射介质为玻璃，出射介质为空气，球心在反向入射侧。重新赋值

$$n_1' = 1.50, \quad n_2' = 1, \quad u' = 90.0\,\mathrm{cm}, \quad R_s' = -10.0\,\mathrm{cm}.$$

于是$1.50/90 + 1/v' = (1 - 1.50)/(-10)$，得到

$$\boxed{v' = 30.0\,\mathrm{cm}}, \qquad \boxed{\beta' = -\frac{1.50 \times 30}{1 \times 90} = -\frac{1}{2}}.$$

共轭点与放大率

反向像回到 A。正向把物高乘以 -2，反向再乘以 $-1/2$，恢复原来的方向和高度。这正是近轴共轭成像的可逆性。

例 2.13 (凹球面镜的纵向球差)**.** 凹球面镜顶点O 取为$x=0$，球心$C=(-R,0)$，平行轴光沿$+x$ 方向入射。光线在高度h 处击中镜面P。求反射线与主轴的交点F_h，并对$h/R \ll 1$ 展开。取$R=20.0\,\mathrm{cm}, h=4.00\,\mathrm{cm}$，比较它与近轴焦点的位置。

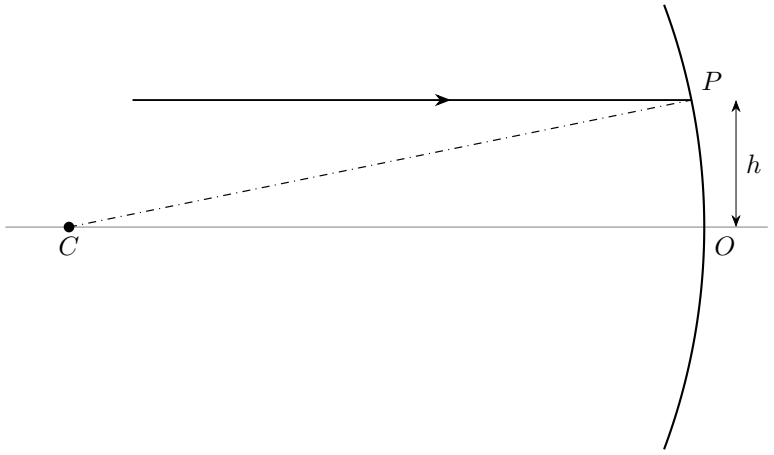


图 2.40: 实际球面上CP 是法线；P 位于顶点左侧

解　从实际球面点和单位法线求精确反射方向

图 2.40 中令$\phi=\angle OCP$，则

$$h=R\sin\phi,\quad x_P=-R+R\cos\phi,\quad \boldsymbol{s}_{\mathrm{in}}=(1,0),\quad \boldsymbol{n}=(\cos\phi,\sin\phi).$$

由反射矢量式$\boldsymbol{s}_{\mathrm{out}}=\boldsymbol{s}_{\mathrm{in}}-2(\boldsymbol{s}_{\mathrm{in}}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}$，得$\boldsymbol{s}_{\mathrm{out}}=(-\cos 2\phi,-\sin 2\phi)$。

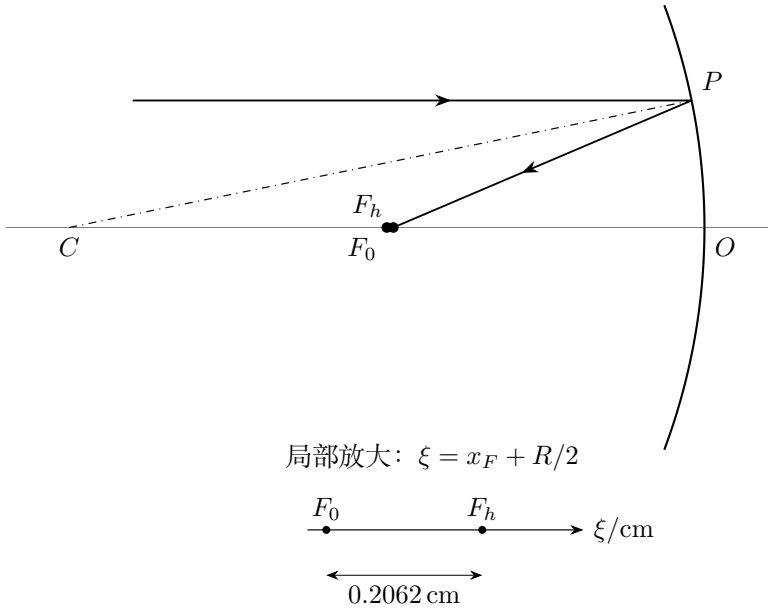


图 2.41: 有限高度光线在F_h 交轴；近轴焦点F_0 稍远离顶点

沿实际反射方向求与主轴的交点

由图 2.41 从P 沿反射方向走过路程 ℓ，高度为 $h-\ell\sin 2\phi$。令其为零，得 $\ell = h/\sin 2\phi$；相应横坐标为 $x_P - \ell\cos 2\phi$。代入 $h = R\sin\phi$，并用 $\sin 2\phi = 2\sin\phi\cos\phi$、$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1$，

$$\begin{aligned} x_{F_h} &= -R + R\cos\phi - \frac{R(2\cos^2\phi - 1)}{2\cos\phi} \\ &= -R + \frac{R}{2\cos\phi} = \boxed{-R + \frac{R}{2\sqrt{1 - h^2/R^2}}}. \end{aligned}$$

展开交点位置，辨认纵向球差的方向

在本题的小孔径区域，光线向左下方传播，故此交点在实际反射线上。令 $\epsilon = h^2/R^2$，$g(\epsilon) = (1-\epsilon)^{-1/2}$。链式法则给出 $g'(\epsilon) = (-1/2)(1-\epsilon)^{-3/2}(-1) = \frac{1}{2}(1-\epsilon)^{-3/2}$，所以 $g(0) = 1$、$g'(0) = 1/2$，即 $g(\epsilon) = 1 + \epsilon/2 + O(\epsilon^2)$。代回 $x_{F_h} = -R + (R/2)g(\epsilon)$，得到

$$x_{F_h} = -\frac{R}{2} + \frac{h^2}{4R} + O\left(\frac{h^4}{R^3}\right).$$

所以F_h 比近轴焦点$F_0 = (-R/2, 0)$ 更靠近顶点。数值为

$$\boxed{x_{F_h} = -9.7938\,\text{cm}}, \qquad x_{F_0} = -10.000\,\text{cm}, \qquad \boxed{x_{F_h} - x_{F_0} = 0.2062\,\text{cm}}.$$

用数值和局部图检查近轴误差的阶数

图 2.41 下方以F_0 为局部坐标原点，单独放大了两焦点间的距离。二阶估计为$h^2/(4R) = 0.200\,\mathrm{cm}$。误差项随孔径四次方起始，说明缩小孔径能改善球面镜的近轴成像；把$f = R/2$ 用于所有高度会掩盖这项差异。

2.6　本讲小结

球面成像的一阶关系来自当地法线与近轴方向的连接。折射采用 $n_1/u + n_2/v = (n_2 - n_1)/R_s$，每次先按传播方向判断物、像和球心的位置，再赋予距离符号。反向传播需要交换介质并重定曲率号；平面折射是曲率趋零的极限，沿法线附近观察时才具有统一视深。

多界面问题先保留中间像的轴上坐标，再从下一面顶点重新量物距。若光到下一面时仍朝中间像会聚，这个点便是下一面的虚物。像的正倒由横向放大率给出，沿轴的像位移和像速则由有向坐标的变化给出。

镜面反射使用实物、实像为正的约定，实像位于镜前。焦点处的平行状态改变像的虚实，二倍焦距处改变放大与缩小，两个分界应区分。球面镜的 $|f| = R/2$ 只在近轴极限成立；增加孔径后应以实际反射点和法线追迹，才能看见纵向球差以及局部焦点的移动。

2.7　练习

练习 2.1 (视深与真实移动)．水的折射率为4/3。小物体在平面水面下40.0 cm，从空气中沿法线附近观察。求视深。若物体上升4.00 cm，虚像上升多少？忽略水面波动。

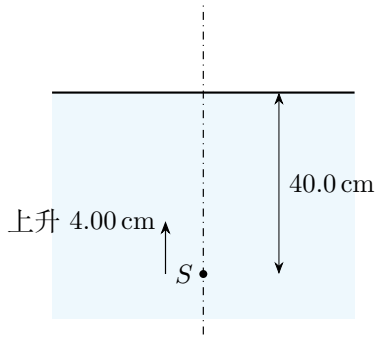


图 2.42: 练习：视深与真实移动

练习 2.2 (空气与玻璃球面的近轴成像)**.** 光从空气射入折射率1.50 的玻璃，球心在出射侧，曲率半径为+10.0 cm。实物位于顶点前10.0 cm。求像距、实虚、正倒和横向放大率，只讨论近轴成像。

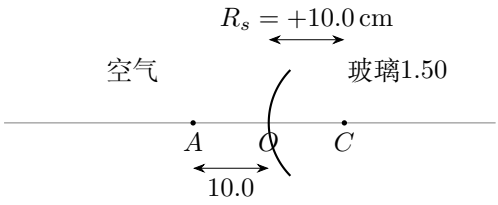


图 2.43: 练习：空气与玻璃球面的近轴成像

练习 2.3 (凹面镜的两个共轭位置)**.** 凹面镜焦距$f = 10.0\,\mathrm{cm}$，实物距$u = 15.0\,\mathrm{cm}$。求像的位置及横向放大率。再把物体放到第一次的像位置，求第二次成像位置及放大率。

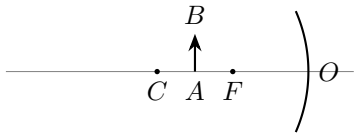


图 2.44: 练习：凹面镜的两个共轭位置

练习 2.4 (实心玻璃球的两次折射)**.** 空气中实心玻璃球半径 $R = 10.0\,\mathrm{cm}$，折射率 $n = 1.50$。小物在主轴上，距前表面顶点 O_1 为 $15.0\,\mathrm{cm}$。求近轴光经前、后表面折射后的最终像位置和横向放大率，注明中间像对第二面的物距。忽略反射光。

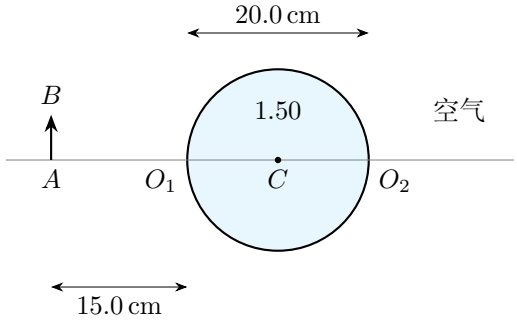


图 2.45: 物距从前顶点量起，两顶点相隔一个直径

练习 2.5 (球面镜的有限入射高度)**.** 一束平行于主轴的光射向凹球面镜，球面半径为 R，顶点为 O。求入射高度为 h 的光线反射后与主轴交点到顶点的距离 $s(h)$，取 $0 < h < R/\sqrt{2}$。当 $R = 20.0\,\mathrm{cm}$、$h = 10.0\,\mathrm{cm}$ 时，比较该距离与近轴焦距。若要求 $|s - R/2|/(R/2) \le 1.00\%$，求允许的最大入射高度。

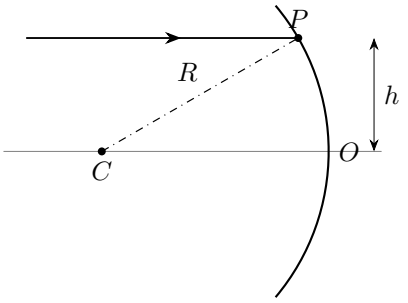


图 2.46: 入射光平行主轴，球心到入射点的半径给出局部法线

练习解答

练习 2.1

解　用同一折射点的横向距离连接真实深度与视深

图 2.42 的物点与观察者分处水、空气两侧。设真实深度为h、视深为h_{app}，取水面折射点P 离轴的水平距离为ξ。图 2.47 左侧中SP 与法线夹角满足$\tan i = \xi/h$，出射线及其反向延长线满足$\tan r = \xi/h_{\mathrm{app}}$。近轴时分别以角度代替正切、正弦，折射定律变为

$$n_{\text{水}}\frac{\xi}{h} = n_{\text{空气}}\frac{\xi}{h_{\mathrm{app}}}, \qquad h_{\mathrm{app}} = \frac{n_{\text{空气}}}{n_{\text{水}}}h.$$

代入初始深度求虚像位置

因此

$$\boxed{h_{\mathrm{app}} = \frac{40.0}{4/3} = 30.0\,\mathrm{cm}}.$$

在固定水面下比较末态与初态

物体上升后真实深度为36.0 cm，视深变为27.0 cm，故 $\boxed{\text{虚像上升3.00 cm}}$。

图 2.47 中空气侧出射线反向延长到I，像在水中且比S 浅。深度从水面向下为正，所以上升时真实深度和视深同时减小。

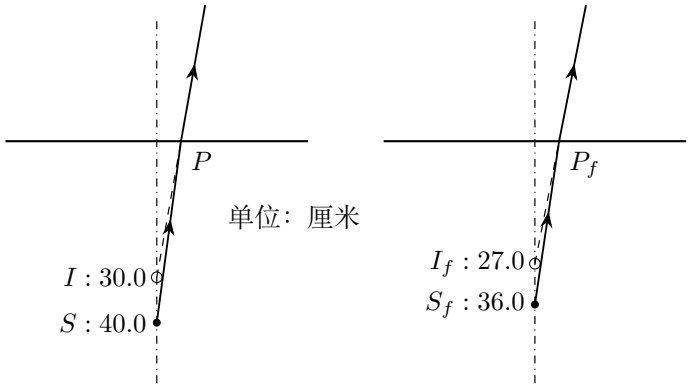


图 2.47: 初、末态共用同一水面高度；横向偏移放大，虚线给出近轴虚像

虚像的移动量

图中水面是两次量深度的共同起点。由 $h_{\text{app}} = 3h/4$，深度减小 4.00 cm 时，视深减小 3.00 cm，即虚像上升 3.00 cm。

练习 2.2

解　先判介质、物点和球心的相对位置

本次光从空气进入折射率较大的介质，物点在入射侧，球心在出射侧，因此 $n_1 = 1, n_2 = 1.50, u > 0, R_s > 0$。像距由成像式求出，所得符号给出出射束是会聚还是发散。

代入带符号公式，允许解出负像距

图 2.43 中$u = +10.0\,\text{cm}, R_s = +10.0\,\text{cm}$。因此

$$\frac{1}{10} + \frac{1.50}{v} = \frac{0.50}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = -30.0\,\text{cm}}.$$

分别判断像的正倒与尺寸

横向放大率为

$$\boxed{\beta = -\frac{n_1 v}{n_2 u} = -\frac{-30}{1.50 \times 10} = +2.00}.$$

焦内物点的虚像

图 2.48 中的两条出射线发散，反向延长交于入射侧的 B'。像正立、像高为物高的两倍。物方焦距是 $f = n_1 R_s/(n_2 - n_1) = 20.0\,\text{cm}$，而 $u = 10.0\,\text{cm}$，所以折射面只减弱了来自焦内实物的发散程度。

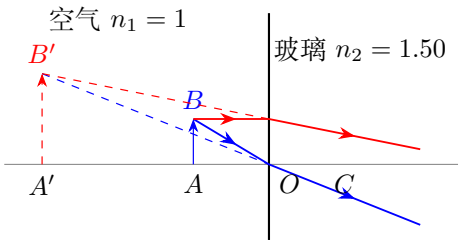


图 2.48: 近轴顶点平面作图：两条出射线反向延长相交于上端虚像 B'，对应正立放大

练习 2.3

解　辨认第一实验的物点位置和距离基准

实物位于凹镜的焦点与球心之间，图 2.44 中两条独立反射线可用来确定第一次的像。各距离均从镜顶点量起，实物、实像取正；正倒再由横向放大率判断。

求第一次像距和放大率

以图 2.44 的镜顶点O 为量距起点，

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{v}=\frac{1}{10}, \qquad \boxed{v=30.0\,\mathrm{cm},\quad \beta=-2.00}.$$

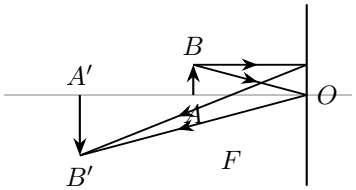


图 2.49: 练习 2.3 的解答图：镜前形成倒立实像；竖线表示近轴顶点平面

两条反射线的交点

像在镜前，为倒立放大实像。图 2.49 中平行主轴的光线反射后经过F，经顶点的光线按反射定律返回，两线交于B'。

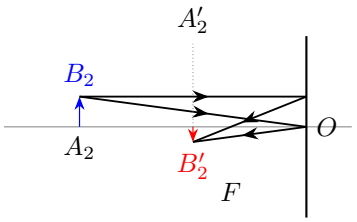


图 2.50: 第二次实验把物体移到第一次的像平面，反射线在原物平面相交；图中物高重新取为正

图 2.50 把物体移到原来的像面。两条新入射线分别沿原反射线的反方向传播，因此在原物面重新会聚。

交换物像位置后的放大率

把物体放到镜前30.0 cm，物像距交换，故

$$\boxed{v_2 = 15.0\,\mathrm{cm}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2}}, \qquad \beta\beta_2 = 1.$$

两次放大率相乘为 1，表示同一对共轭平面的尺寸关系互为倒数；每次负号都由该次图中的倒立关系独立确定。

练习 2.4

解　从前顶点计算第一次折射

图 2.45 中光从左向右。采用实物距为正、沿出射方向的像距为正、球心在出射侧的曲率半径为正的约定，第一面 $R_{1s} = +10$，长度以厘米计：

$$\frac{1}{15} + \frac{1.50}{v_1} = \frac{1.50 - 1}{10}, \qquad v_1 = -90.0.$$

所以中间像在 O_1 左侧 90.0 cm，第一面放大率 $\beta_1 = -n_1 v_1/(n_2 u_1) = +4$。它是第一面的正立虚像，但对后表面来说，入射光实际从这个位置发散。

用两顶点间距更新第二面的物距

图 2.51 以 O_1 为位置零点，O_2 的位置为 20，中间像位置为 -90，因此第二面的实物距为

$$u_2 = 20 - (-90) = 110.0\,\mathrm{cm}.$$

第二面球心在入射侧，$R_{2s} = -10$；其入射介质为玻璃、出射介质为空气，故

$$\frac{1.50}{110} + \frac{1}{v_2} = \frac{1 - 1.50}{-10}, \qquad \boxed{v_2 = 27.5\,\mathrm{cm}}.$$

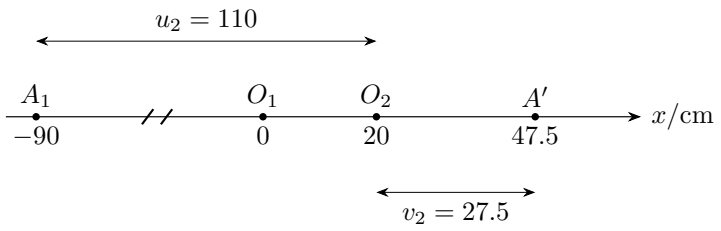


图 2.51: 按有向位置连接两次成像，左侧长距离作压缩示意

总放大率与像的位置

第二面 $\beta_2 = -1.50 \times 27.5/110 = -0.375$，总放大率为

$$\boxed{\beta = \beta_1\beta_2 = -1.50}.$$

最终像在 O_2 右侧 $27.5\,\mathrm{cm}$，即图 2.51 中 $x = 47.5\,\mathrm{cm}$，为倒立放大实像。球的直径决定了两面之间的传播距离，所以第二面物距从 O_2 重新量取。

练习 2.5

解　用球面几何保留有限入射角

按图 2.46 取 $O = (0,0)$、$C = (-R,0)$。令半径 CP 与正轴夹角为 θ，则

$$h = R\sin\theta, \qquad P = (R\cos\theta - R, R\sin\theta).$$

入射方向为 $(1,0)$，单位法线为 $(\cos\theta,\sin\theta)$。由反射定律，出射方向为

$$(1,0) - 2\cos\theta(\cos\theta,\sin\theta) = (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta).$$

题设 $\theta < 45^\circ$，所以反射光向左下方传播，与主轴相交。

求实际反射线与主轴的交点

反射线从 P 到主轴的路程为 $h/\sin 2\theta = R/(2\cos\theta)$。其交点横坐标为

$$x_F = R(\cos\theta - 1) - \frac{R\cos 2\theta}{2\cos\theta} = \frac{R}{2\cos\theta} - R.$$

于是图 2.52 中 $s = -x_F$，得到

$$\boxed{s(h) = R - \frac{R}{2\sqrt{1 - h^2/R^2}}}.$$

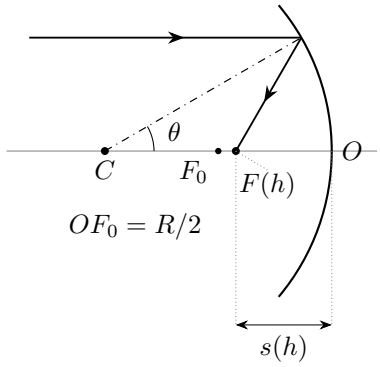


图 2.52: 有限高度光线的交点比近轴焦点更靠近顶点

由焦点偏移确定孔径限制

当 $h/R = 1/2$，$\cos\theta = \sqrt{3}/2$，故 $s = 20(1 - 1/\sqrt{3})\,\mathrm{cm} \simeq 8.453\,\mathrm{cm}$；近轴值为 $10.0\,\mathrm{cm}$，相对偏差约 15.47%。图 2.52 的交点顺序与 $s < R/2$ 一致。

一般地，$s < R/2$，相对偏差为 $(R/2 - s)/(R/2) = \sec\theta - 1$。要求它不超过 0.0100，先得 $1/\cos\theta \le 101/100$。因 $0 < \theta < 45^\circ$，两边正，取倒数得到 $\cos\theta \ge 100/101$。再用 $h/R = \sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$，

$$\frac{h}{R} \le \sqrt{1 - \frac{10000}{10201}} = \frac{\sqrt{201}}{101},$$

从而

$$\boxed{h_{\max} = R\frac{\sqrt{201}}{101} \simeq 2.807\,\mathrm{cm}} \quad (R = 20.0\,\mathrm{cm}).$$

$h \to 0$ 时精确式恢复 $s \to R/2$。若令 $\epsilon = h^2/R^2$，相对偏差为 $(1-\epsilon)^{-1/2} - 1$；在零点的函数值为零，导数为 $\frac{1}{2}(1-\epsilon)^{-3/2}$、零点导数为 $1/2$，故误差为 $\epsilon/2 + O(\epsilon^2)$，首项即 $h^2/(2R^2)$。孔径限制来自球面反射的几何像差，与衍射限制是不同的问题。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第三讲

薄透镜与光学系统

2026

目录

第三讲　薄透镜与光学系统 **1**

3.1　薄透镜与光组的基本描述 1

3.2　分离光组与等效主平面 7

3.3　光焦度的色散与胶合消色差 9

3.4　精确成像与近轴近似 10

3.5　例题与分析 12

3.6　本讲小结 32

3.7　练习 33

练习解答 34

第三讲　薄透镜与光学系统

3.1　薄透镜与光组的基本描述

3.1.1　从两个折射面到一个薄透镜

第二讲从一个球面上的折转求出成像位置。透镜有前、后两个球面，第一面改变光束的会聚程度，第二面接着改变它。将两面的折射合在一起，就能由焦点画出薄透镜的光路。

沿本次传播方向取正，实物距$u>0$，虚物距$u<0$；实像距$v>0$，虚像距$v<0$。物高和像高h, h' 均带符号，横向放大率定义为$\beta = h'/h$。左右介质相同的薄透镜满足

$$\boxed{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}}, \qquad \boxed{\beta = -\frac{v}{u}}. \tag{3.1}$$

会聚透镜取 $f>0$，发散透镜取 $f<0$。实物在会聚透镜物方焦平面时，出射束平行，像在无穷远。

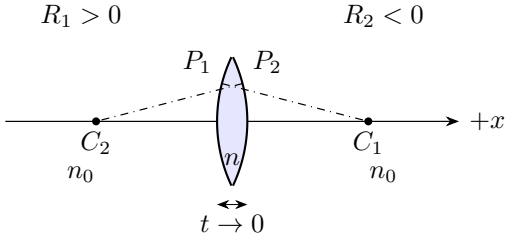


图 3.1: 先按同一传播方向判断两个球心；厚度在结构图中放大，薄镜计算才把两量距平面合并

图 3.1 中，第一面球心在出射侧，第二面球心在入射侧，故双凸透镜取 $R_1>0, R_2<0$。若第一面单独成像于 v_1，厚度为 t 时，第二面看见的物距是 $u_2 = t - v_1$。薄透镜近似把 t 略去，两次折射的量距起点合并。

薄透镜公式可以由两个球面折射式相加得到。设透镜折射率为 n、两侧均为 n_0，两面的带符号半径为 R_1, R_2。忽略厚度时，第一面中间像距为 v_1，第二面的物距就是 $u_2 = -v_1$。于是

$$\frac{n_0}{u}+\frac{n}{v_1}=\frac{n-n_0}{R_1}, \qquad -\frac{n}{v_1}+\frac{n_0}{v}=\frac{n_0-n}{R_2}.$$

相加消去中间像，得到 $1/f = (n/n_0 - 1)(1/R_1 - 1/R_2)$，再得到式(3.1)。这说明焦距来自两次折射的共同作用，透镜厚度可略才允许把两个量距起点合并。

光焦度取决于玻璃和外部介质的折射率。同一块玻璃放到折射率比它大的液体中，$n/n_0 - 1$ 变号，原来的会聚透镜在液体中起发散作用。若透镜左右的折射率分别为 n_u, n_v，在两个球面方程中分别代入，再将中间像距消去，得到

$$\frac{n_u}{u} + \frac{n_v}{v} = \Phi, \qquad \Phi = \frac{n - n_u}{R_1} + \frac{n_v - n}{R_2}.$$

此时平行入射与平行出射给出两个焦距 $f_v = n_v/\Phi$ 和 $f_u = n_u/\Phi$。例 3.3 和练习 3.5 都用这个关系从两面的曲率分别求两侧焦点。

3.1.2 三条辅助光线及其条件

在两侧介质相同的薄透镜中，过光心 O 的近轴光线沿原方向传播；平行于轴的光线与像方焦点 F' 对应；经过物方焦点 F 的光线平行出射。发散透镜的焦点由相应光线的延长线确定。

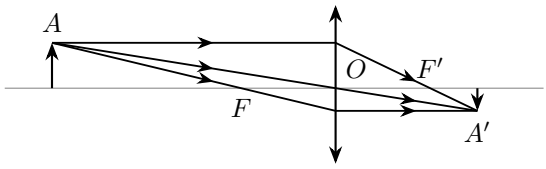


图 3.2: 两侧均为空气的会聚薄透镜；三条光线在同一像点相交

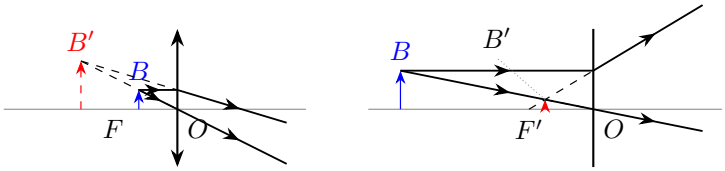
图 3.2 中，实际出射光线相交于轴下方的 A'，所以是倒立实像。若出射束发散，就沿出射方向反向延长，以延长线的交点确定虚像。

第一面的折射改变量与第二面的折射改变量都与入射高度成正比。薄透镜两侧介质相同时，取高度趋于零的一条光线，它在两面上的总方向改变量趋于零，便得到图中的过光心直线。厚透镜中，前后交点的高度要分别追迹。

作虚像时，从物点画到透镜，先沿出射方向画实线，再向后延长求交点。若镜框挡住一条辅助光线，可在孔径内改选另一条。

3.1.3 实像、虚像与会聚性质的区别

会聚透镜对平行光给出实焦点。对轴上实物，$v = fu/(u - f)$ 随物距变化：$u > f$ 时成实像，$u = f$ 时平行出射，$0 < u < f$ 时成正立放大的虚像。发散透镜对实物成正立缩小的虚像。图 3.3 用实际出射线的反向延长线找出两种虚像。



$0 < u < f, \quad \beta > 1$ $\qquad$ $f < 0, \quad 0 < \beta < 1$

图 3.3: 实物的两种虚像：左为会聚镜焦内成像，右为发散镜成像；虚线只用于求交点

两侧介质相同时，过光心的光线保持方向，可以连接物高与像高。透镜正负则应由平行入射束的出射会聚度判断。后文组合系统还会出现负透镜接收虚物而成实像的情形，应继续按入射、出射两束光分别判断。

3.1.4 主平面与物像距的测量

厚透镜或多个透镜组成的光组，可用主平面 H, H' 和两侧焦点 F, F' 描述。主平面是一对横向放大率为 $+1$ 的共轭平面：图上从 H 到 H' 传递的是同一个光线高度。物距从 H 量，像距从 H' 量。

设左右介质折射率为n_u, n_v，光焦度为Φ，则

$$\boxed{\frac{n_u}{u} + \frac{n_v}{v} = \Phi}, \qquad f_u = \frac{n_u}{\Phi}, \quad f_v = \frac{n_v}{\Phi}, \qquad \frac{f_u}{u} + \frac{f_v}{v} = 1.$$

这里f_u, f_v 为按会聚性质赋号的焦距。会聚光组中，F 在H 左侧，F' 在H' 右侧，而两段焦距都取正。$\Phi = 0$ 的无焦系统须直接分析光束传递，不再代入有限焦距形式。

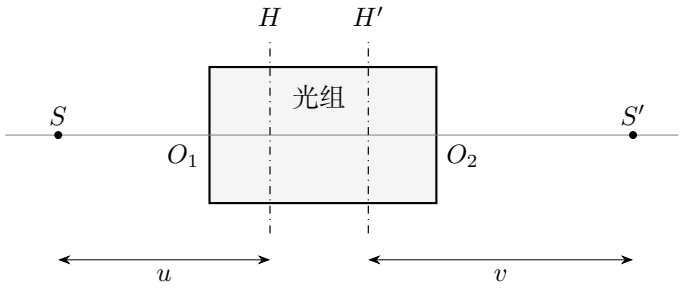


图 3.4: 主平面是等效量距基准，与外表面顶点分别标出

图 3.4 把外表面顶点和主平面分别标出。设向右为正，物、像点坐标为 $x_S, x_{S'}$，则 $u = x_H - x_S$、$v = x_{S'} - x_{H'}$。主平面的位置由整个光组决定，可以落在玻璃外。

物方焦点发出的光平行出射；轴上平行入射光在像方焦点会聚或从它发散。两侧介质不同时，$f_u : f_v = n_u : n_v$。

3.1.5　把量距起点换到焦点

在图 3.5 中，物距 u 和像距 v 从透镜 O 量。若改从两侧焦点量，设 $x = u - f$，$x' = v - f$；对于一般的光组，相应地取 $x = u - f_u$，$x' = v - f_v$。把主面成像式乘以 uv，便有

$$f_u v + f_v u = uv, \qquad uv - f_u v - f_v u + f_u f_v = f_u f_v, \qquad \boxed{x x' = f_u f_v}.$$

同一介质中的薄透镜取 $f_u = f_v = f$，可直接从图上的两个相似三角形读出这条关系。平行主轴的蓝光过 F'，从镜面到 F' 下降 h，从 F' 到像点再下降 $-h'$，故 $-h'/h = x'/f$。橙光过 F 后平行于轴，从物点到 F 下降 h，从 F 到镜面再下降 $-h'$，故 $-h'/h = f/x$。两式相等即给出牛顿成像式。物体离焦点很近时，x' 变化尤其显著；第四讲显微镜的物镜正利用了这种物像关系。

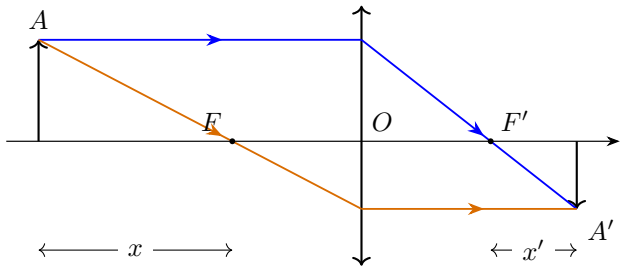


图 3.5: 蓝光过像方焦点 F'，橙光过物方焦点 F；两条折线给出从焦点量起的距离。

3.1.6　共轭点处的横向放大和倾角变化

在图 3.6 中，轴上的 Q, Q' 是一对实共轭点。一条光线在两主平面 H, H' 上都取高度 y，所以从图中的两个三角形可知

$$\theta \simeq \frac{y}{u}, \qquad \theta' \simeq -\frac{y}{v}, \qquad \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{u}{v}.$$

这里的负号来自光在物方上倾、在像方下倾。另取离轴小物点，利用经过两主点的那条近轴光线，约化倾角保持不变，横向放大率为 $\beta = -n_u v/(n_v u)$。两种放大率的乘积为

$$\beta \frac{\theta'}{\theta} = \left(-\frac{n_u v}{n_v u}\right)\left(-\frac{u}{v}\right) = \frac{n_u}{n_v}.$$

因此在同一外部介质中，横向放大伴随共轭光束倾角的相应缩小。例 3.7 再考虑轴上物点本身移动，求它的像沿轴移动多少。

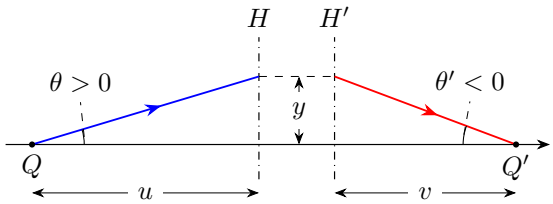


图 3.6: 对应光线在两主平面上取相同的高度；入射与出射倾角相对向右的轴线取号。

3.1.7 用高度和约化倾角逐级计算

令光线高度为y，小倾角为θ，约化倾角为$p = n\theta$。在均匀介质内传播距离d，以及通过近轴折射面时，分别有

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_+ \\ p_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_- \\ p_- \end{pmatrix},$$

其中$\Phi_s = (n_+ - n_-)/R_s$，球心在本次出射侧时$R_s > 0$。薄透镜可把两个面的光焦度相加。多个元件依次作用时，应先按传播顺序组成总矩阵，再在指定物、像平面之间判断成像。先按实际传播顺序列出各段传播和各次折射，再将它们相乘。

反射改变传播方向，回程沿新的方向量距。镀银透镜的光路还要在反射前后分别计入折射。

矩阵乘法的顺序应与实际传播次序对应。若光线先经过面 1、再传播距离 d、最后经过面 2，总矩阵为 $M_2 P(d) M_1$，最先作用的矩阵写在最右边。传播使高度变化而约化倾角不变，界面折射使倾角变化而交点高度连续；这正是两类基本矩阵中零元和单位元的物理意义。

总关系为 $y_{\text{out}} = A y_{\text{in}} + B p_{\text{in}}$。同一物点可以发出不同倾角的光，成像要求它们到达同一像高，因此必须消去对 p_{in} 的依赖，即 $B = 0$，此时横向放大率就是 A。这些基本矩阵的行列式均为一，总矩阵也应满足 $AD - BC = 1$，可以独立检查乘法次序或系数错误。矩阵给出数值关系后，仍要回到实际光路判定是否被孔径遮挡。

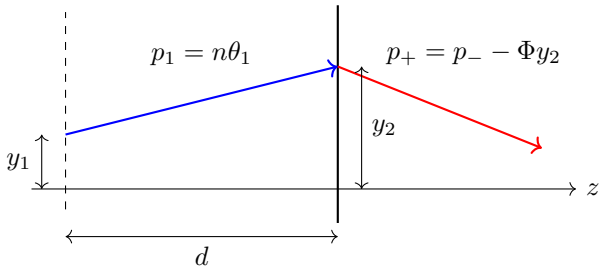


图 3.7: 传播改变高度，薄透镜在同一高度改变光线倾角

图 3.7 中，光线先传播到高度 $y_2 = y_1 + dp_1/n$，再在透镜处改变约化倾角 $-\Phi y_2$。写成矩阵就是 LP：右侧的传播先给出落在透镜上的高度，左侧的折射才使用这个高度。

由两种基本矩阵还可看出镜厚的影响。设两球面光焦度为 Φ_1, Φ_2，玻璃内厚度为 t、折射率为 n。总矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix},$$

先乘右边两个矩阵，再乘最左矩阵：

$$P(t/n)M_1 = \begin{pmatrix} 1 - t\Phi_1/n & t/n \\ -\Phi_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 - t\Phi_1/n & t/n \\ -\Phi_2(1 - t\Phi_1/n) - \Phi_1 & 1 - t\Phi_2/n \end{pmatrix}.$$

左下元为 $C = -\Phi_2 + t\Phi_1\Phi_2/n - \Phi_1$，故 $\Phi_{\text{eff}} = -C$ 给出

$$\Phi_{\text{eff}} = \Phi_1 + \Phi_2 - \frac{t}{n}\Phi_1\Phi_2.$$

零厚度时才严格回到光焦度直接相加；若两面作用接近相消，厚度修正相对净光焦度可能很大，即使结构上看起来很薄，也要检查所求精度。

3.1.8　会聚入射束与第二级的虚物

第一级单独成像的位置是入射到第二级的光束的会聚目标。第二镜若放在这个目标之前，光束在到达目标前再次折射，这个目标就是第二镜的虚物。

图 3.8 中，第一镜的单独像为 B_1，两镜间距为 d。以第一镜位置为轴向原点，则第二镜物距为

$$u_2 = d - v_1.$$

当 $v_1 > d$ 时，$u_2 < 0$，第二镜接收的是仍在向右会聚的光束。图中的虚线通往第一镜单独作用时的像 B_1，实线给出加上第二镜之后的光路。

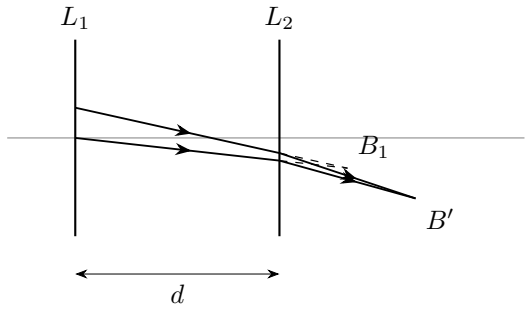


图 3.8: 负透镜可以减弱已有的会聚度，虚物情形下仍可能得到实像

对焦距 $f_2 < 0$ 的负透镜，

$$\frac{1}{v_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{u_2} = -\frac{1}{|f_2|} + \frac{1}{|u_2|}.$$

若 $|u_2| < |f_2|$，负透镜使会聚减弱，光仍在右侧形成实像，如图中的 B'。若 $|u_2| = |f_2|$，则 $1/v_2 = 0$，光平行出射；若 $|u_2| > |f_2|$，透镜把原来的会聚束变成发散束，$v_2 < 0$。

3.2 分离光组与等效主平面

3.2.1 由系统矩阵确定主平面

以下专取空气中的 (y, θ) 坐标，折射率 $n = 1$，于是前文的约化倾角就是倾角。用 $P(d)$ 记空气传播矩阵、$L(f)$ 记薄透镜矩阵，基本式化为

$$P(d) = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

若 M 从首面量到末面，则从物面到像面的传递是 $P(v)MP(u)$。使这个总矩阵的右上元等于零，便确定了对应的像面。

在空气中，$C \neq 0$ 时设有效焦距为 $F = -1/C$。令首、末面间的传递等效于传播 a、透镜折转、再传播 b，直接相乘：

$$P(b)L(F)P(a) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1/F & 1 - a/F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - b/F & a + b - ab/F \\ -1/F & 1 - a/F \end{pmatrix}.$$

比较 A, D 两项，有 $a = F(1-D)$、$b = F(1-A)$。前主平面在首面后有向距离 a，后主平面在末面前有向距离 b。若 $C = 0$，后面直接从矩阵读无焦光束的高度与倾角。

为说明主平面公式怎样连接到实际光路，先把两片空气中薄透镜相隔 d 的矩阵写开：

$$M = L(f_2)P(d)L(f_1) = \begin{pmatrix} 1 - d/f_1 & d \\ -(1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 f_2)) & 1 - d/f_2 \end{pmatrix}.$$

因此 $1/F = 1/f_1 + 1/f_2 - d/(f_1 f_2)$。图 3.9 用平行束定位后焦点 F_i。同一出射线反向延长到入射高度时确定后主平面；有效焦距从主平面量起，末面到焦点的后焦距则是另一个距离。

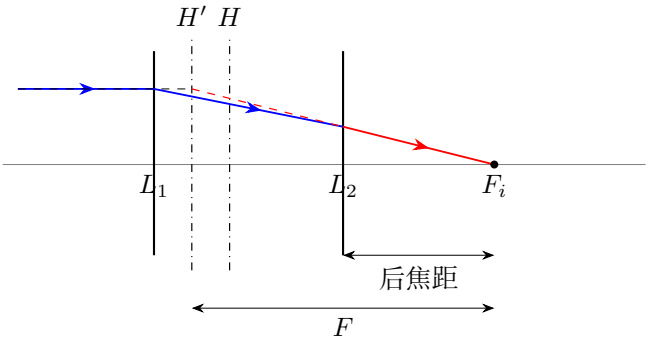


图 3.9: 实际折线路径与主平面等效作图对应同一出射线；图示 $f_1 = 10, f_2 = 20, d = 5$ 的位置关系，轴向比例压缩

图中以 L_1 为 $x = 0$，取 $x_{L_2} = 5$，$x_H = 2$，$x_{H'} = 1$，$x_{F_i} = 9$（单位厘米）。后焦距从末镜到 F_i，为 4 cm；有效焦距从 H' 到 F_i，为 8 cm。例 3.12 按这两个量距起点分别计算。

3.2.2　无焦系统仍有光束传递作用

$C = 0$ 时，平行入射束仍平行出射，系统无焦。由 $AD = 1$ 可知，这样的光组仍可改变束高与倾角。取 $f_1 = 2\ell, f_2 = \ell, d = 3\ell$，有

$$M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3\ell \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

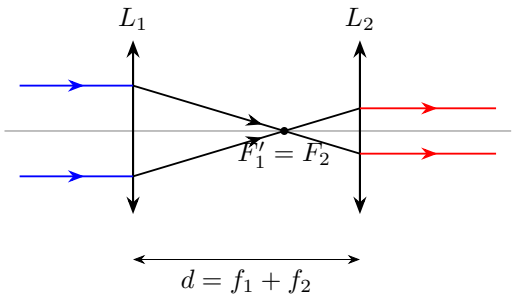


图 3.10: 两正透镜共焦组成无焦系统：上、下边缘光线在内部交叉，出射束仍平行且直径缩小

图 3.10 的轴上平行束满足 $p_{\text{in}} = 0$，出射高度为 $-y_{\text{in}}/2$；负号来自边缘光线在两镜之间交叉。同一系统还使一束略带倾斜的平行光以 $-2\theta_{\text{in}}$ 出射。若研究有限物距成像，把物、像平面到光组的传播也乘入总矩阵。

3.3 光焦度的色散与胶合消色差

固定形状的薄透镜有 $\Phi_j = (n_j - 1)K_j$（空气中），故波长改变时

$$\Delta\Phi_j = K_j \Delta n_j = \Phi_j \frac{\Delta n_j}{n_j - 1}.$$

正常色散中短波折射率较大，正透镜对短波的会聚更强。负透镜的光焦度带负号，同样的折射率增量却使它更加发散；两种材料因色散比例不同，才可能同时满足总光焦度和色差两个条件：

$$\sum_j \Phi_j = \Phi_{\text{target}}, \qquad \sum_j \Delta\Phi_j = 0.$$

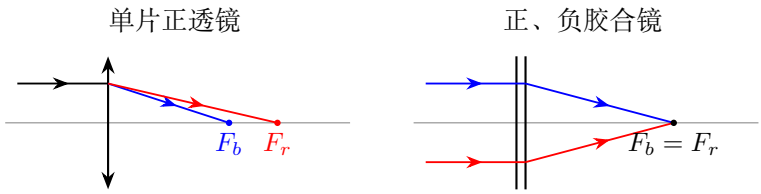


图 3.11: 单片透镜的近轴焦点随波长移动；正负光焦度配合后，可令两种颜色的一阶焦点重合

图 3.11 右侧画出一阶色散抵消后的会聚情形。两片透镜的光焦度仍合成给定的正值；两种玻璃随波长变化的光焦度增量大小相等、符号相反。

3.4　精确成像与近轴近似

近轴成像式忽略高阶项。分析球面的特殊共轭点或设计无球差曲面时，应保留精确几何与折射定律，不把 $\sin\theta$ 换成 θ。所谓“所有光线”，均指实际能依次通过指定界面、未被孔径遮挡的那部分光线；等光程关系还须与实际传播方向、法线和曲面支路相容。

3.4.1　特殊共轭点与精确距离比

球面通常只在近轴范围把一般物点成像，但特殊位置可以使精确折射关系对有限孔径同时成立。例如从折射率 n 向空气出射的半径 R 球面，若物点距球心 R/n，且位于入射侧轴上，可在球心同侧距 nR 处寻找共同虚像。下面比较出射点到物点、像点的几何距离。设球心为 $C=(0,0)$，物点 $Q=(-R/n,0)$，候选虚像 $Q'=(-nR,0)$，取球面点 $M=(R\cos\theta,R\sin\theta)$，如图 3.12。

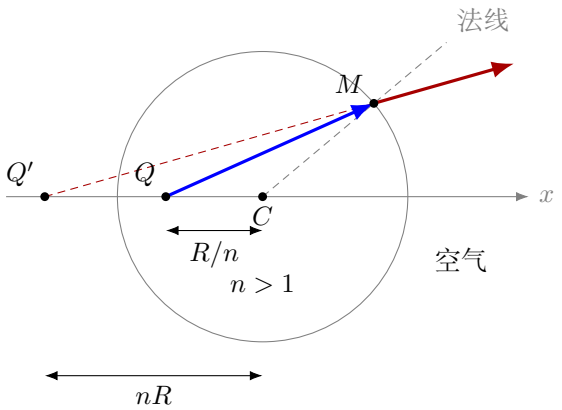


图 3.12: 球心到物、像的距离分别为 R/n 与 nR；出射光向后延长经过 Q'

由坐标距离公式逐项展开：

$$\begin{aligned} MQ^2 &= (R\cos\theta + R/n)^2 + R^2\sin^2\theta \\ &= R^2 + \frac{R^2}{n^2} + \frac{2R^2}{n}\cos\theta, \\ MQ'^2 &= (R\cos\theta + nR)^2 + R^2\sin^2\theta \\ &= R^2 + n^2R^2 + 2nR^2\cos\theta = n^2MQ^2. \end{aligned}$$

两距离均为正，所以 $MQ' = nMQ$。分别在三角形 CQM、$CQ'M$ 中，用相对半径法线的角和正弦关系，有

$$\sin i = \frac{CQ\sin\theta}{MQ} = \frac{R\sin\theta}{nMQ}, \qquad \sin r = \frac{CQ'\sin\theta}{MQ'} = \frac{R\sin\theta}{MQ} = n\sin i.$$

这正是从折射率 n 向空气出射的折射定律。还要检查候选出射方向确实向球外：沿 $\overrightarrow{Q'M}$ 的方向与外法线点积须为正，即 $R+nR\cos\theta>0$，也就是 $\cos\theta>-1/n$。等号时，出射光与球面相切。

这一关系还须筛选实际穿出指定球面的传播支，并要求第一面确实把光送到 M。第一面若以物点为球心，入射不偏折，就能把特殊单球面配置嵌入一个实际光学系统。例 3.9 用精确几何求方向，例 3.10 由等光程求出射波前。

3.4.2 等光程曲面与近轴曲率的连接

平行光先垂直进入平面，再从玻璃凸面射向外部轴上点时，应从同一个入射波前计算 $nx+MF'=K$。等光程规定面形，切向微分规定折射方向，向外法向投影再筛选物理支路；这三项分别回答同相、方向和能否穿出的不同问题。

在第一讲所讨论的零边缘厚度配置中，$K=\sqrt{f'^2+R^2}$，中心厚度 $t=(K-f')/(n-1)$。令 $A=nf'-K>0$、$b=n^2-1$，精确左支写成

$$x(y)=\frac{nK-f'-\sqrt{A^2+by^2}}{b}.$$

先求导再作局部展开：

$$\begin{aligned}x'(y)&=-\frac{1}{b}\frac{2by}{2\sqrt{A^2+by^2}}=-\frac{y}{\sqrt{A^2+by^2}},\\ x''(y)&=-(A^2+by^2)^{-1/2}-y\left(-\frac{1}{2}\right)(A^2+by^2)^{-3/2}(2by)\\ &=-\frac{1}{\sqrt{A^2+by^2}}+\frac{by^2}{(A^2+by^2)^{3/2}}.\end{aligned}$$

因此 $x(0)=t$、$x'(0)=0$、$x''(0)=-1/A$。曲面关于轴对称，奇次项为零，代入泰勒式 $x(y)=x(0)+x'(0)y+x''(0)y^2/2+O(y^4)$，得到

$$x(y)=t-\frac{y^2}{2(nf'-K)}+O(y^4).$$

因此顶点曲率半径大小为 $\rho=nf'-K=(n-1)(f'-t)$。它恰好满足玻璃到空气的近轴折射关系 $f'-t=\rho/(n-1)$。图 3.13 把这种局部一致与全孔径差异放在同一图中。

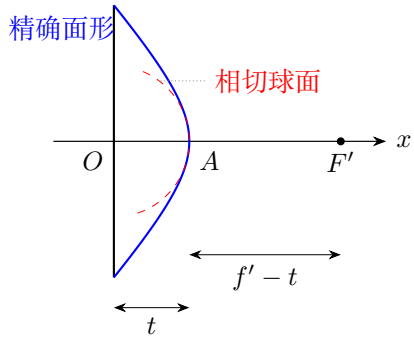


图 3.13: 精确双曲面与顶点相切球面具有相同近轴曲率，离轴面形不同；图示球面只画到其可达高度

只要求近轴焦点时，可以用相同顶点曲率的球面近似；要求整个孔径严格会聚时，则须使用精确等光程面形，并同时满足焦点在透镜外和不选错折射支路的条件。有效焦距、从入射平面量起的 f'、从凸面顶点量起的 $f'-t$ 也应分别辨认。

3.5　例题与分析

例 3.1 (平凸薄透镜)**.** 空气中的平凸薄透镜折射率为$n>1$，球面半径大小为R。证明其物方、像方焦距相等，并求其值。

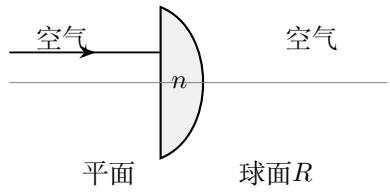


图 3.14: 平面与球面分担两次折射；厚度在计算中趋于零

解　按两面的介质顺序和曲率号求光焦度

按图 3.14 从左向右追迹。第一面为平面，光焦度为零；第二面球心在入射侧，$R_s=-R$，所以

$$\Phi_1=0,\qquad \Phi_2=\frac{1-n}{-R}=\frac{n-1}{R}.$$

两面厚度趋零时，高度相同，约化倾角的改变量相加，故

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{n-1}{R},\qquad \boxed{f_u=f_v=\frac{R}{n-1}}.$$

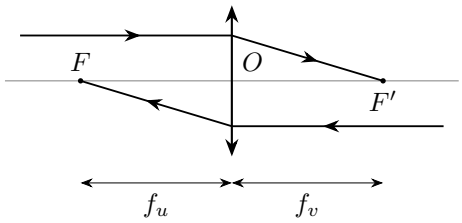


图 3.15: 同一薄透镜的正向与反向平行光，焦距大小相同

分别由正向与反向平行束定义两焦距

图 3.15 分别把物距取到无穷远，正向平行光会聚于F'，反向平行光会聚于F。焦距相等依赖两侧介质相同；曲面和平面的先后顺序不影响薄透镜的一阶光焦度。令$n \to 1$，两焦点移向无穷远，与透镜失去聚焦作用一致。

中心光线与像方焦点

为明确两面怎样进入焦距，取图 3.15 上方平行光高度为$y > 0$。平面正入射不改方向，球面出射后空气侧倾角为$\theta_{\text{out}} = -\Phi y = -(n-1)y/R$。出射线方程$y(x) = y + \theta_{\text{out}} x$ 在$x = R/(n-1)$ 处交轴。反向追迹也在相同的外界折射率中用同一光焦度，因而两侧几何焦距相等；有限镜厚时还需保留内部传播，并从各主平面量有效焦距。

例 3.2 (薄透镜紧贴)**.** 两薄透镜放在同一均匀介质中，焦距分别为f_1, f_2，紧贴且同轴。证明组合焦距满足$1/f = 1/f_1 + 1/f_2$。

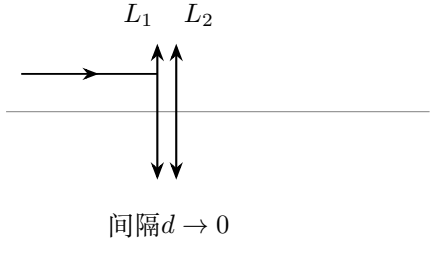


图 3.16: 两次折射发生在近似同一高度；焦距允许带负号

解　把第一镜的像作为第二镜的物，按零间隔连接

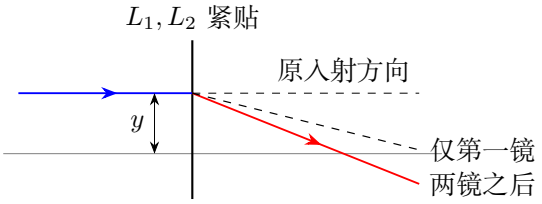
图 3.16 中，第一镜的像是第二镜的物。两镜重合时$u_2 = -v_1$，因此

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad -\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f_2}.$$

消元求组合焦距，并用方向改变量解释相加

相加消去中间像，得到

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}, \qquad \boxed{\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}}.$$



$$\theta_1=\theta-y/f_1, \quad \theta'=\theta_1-y/f_2$$

图 3.17: 同一高度的两次方向改变；虚线是仅经第一镜的方向，图以两正镜为例

保留有限镜间传播，说明间距修正

图 3.17 也说明了紧贴条件的作用。若两镜间距为有限的d，第二镜处的高度已经改变，总光焦度成为

$$\frac{1}{f_{\text{eff}}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2}$$

(两侧均为空气)。此时有效焦距一般不等于末面到后焦点的距离。若紧贴后$1/f_1+1/f_2=0$，组合无焦，应直接追迹光束。

用倾角关系处理无穷远与光焦度相消

若中间像恰在无穷远，不必把$u_2=-v_1$ 当作有限数作代数运算；图 3.17 的倾角法仍适用。对任意入射倾角θ，第二镜后

$$\theta'=\theta-y/f_1-y/f_2.$$

所以两光焦度相消时$\theta'=\theta$，紧贴薄镜组合对一阶光线的高度和方向均无净改变。这也给出了焦距无穷大的几何意义；两镜分开以后，镜间高度变化使这一抵消一般不再成立。

例 3.3 (两侧介质不同的薄双凸透镜)**.** 透镜折射率为n，两个球面的半径大小为R_1, R_2，左、右外界折射率分别为n_1, n_2。求物方焦距、像方焦距及物像公式。

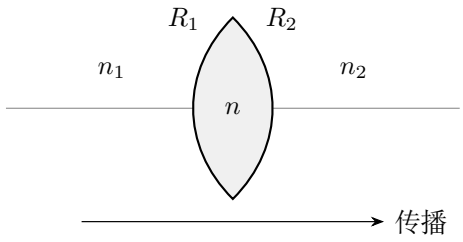


图 3.18: 传播方向向右；两面的带符号曲率分别为$+R_1, -R_2$

解　对两面分别列式，保留不同外介质的权重

对图 3.18 的左右面分别写折射成像式，再令镜厚趋零。第一面的像距为v_1，第二面物距为$-v_1$，有

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n}{v_1}=\frac{n-n_1}{R_1},\qquad -\frac{n}{v_1}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n}{-R_2}.$$

消去中间像，定义组合光焦度

于是令

$$\Phi=\frac{n-n_1}{R_1}+\frac{n-n_2}{R_2},\qquad \boxed{\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\Phi}.$$

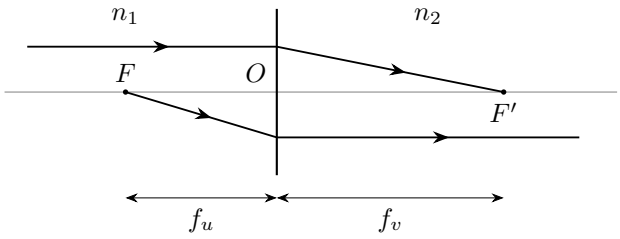


图 3.19: 物方焦距与像方焦距分别由两个无穷远条件定义

由两种平行条件分别求物方、像方焦距

如图 3.19，平行光的会聚位置给出$u\to\infty$ 时的$v=f_v$；由F 发出的光出射平行，则$v\to\infty, u=f_u$。故

$$\boxed{f_u=\frac{n_1}{\Phi},\qquad f_v=\frac{n_2}{\Phi}},\qquad \frac{f_v}{f_u}=\frac{n_2}{n_1}.$$

检查光焦度正负、零值与相同外介质极限

图中 $\Phi>0$，两焦点为实焦点。$\Phi<0$ 时为虚焦点，$\Phi=0$ 时平行束仍平行出射。若 $n_1=n_2=1$，上式化成空气中的制镜公式

$$\boxed{\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}.$$

双凹或弯月形透镜同样按球心位置给半径取号，然后相加 $\Phi=(n-n_1)/R_{1s}+(n_2-n)/R_{2s}$。

例 3.4 (光组的实物与虚物作图)**.** 两侧介质相同，会聚光组的主平面为H,H'，实焦点为F,F'。在图示两种情况下，分别作出倾斜实物线段AB 的像及虚物AB 的像。只讨论近轴范围。

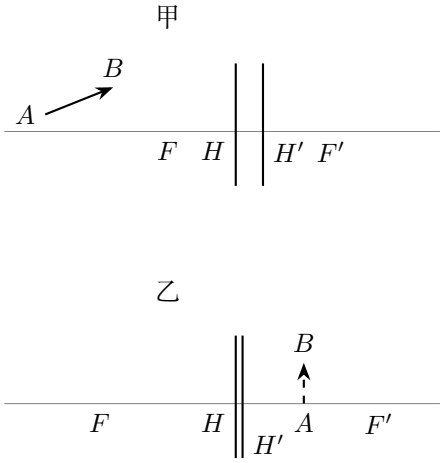


图 3.20: 甲：逐点处理倾斜实物；乙：虚物表示入射光若不经过光组时的会聚目标

解　对倾斜实物的两个端点分别作主平面等效光路

图 3.20 甲中，从 B 画一条平行主轴的入射线，经 H,H' 等高传递后，出射线通过 F'。再画经 F 的入射线，等高传递后沿轴平行出射。两条出射线交于 B'。用 A 自己的物距作出 A'，再连成倾斜的像 $A'B'$。

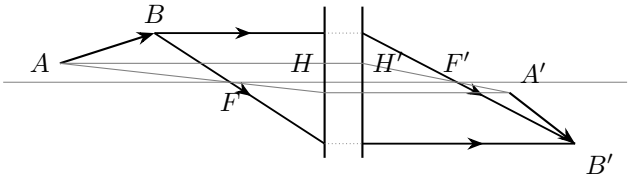


图 3.21: 甲的逐点作图：细虚线只表示两个主平面间的等效对应

光组后的真实像点

图 3.21 中，A', B' 都是实际出射线的交点，因而像为实像。两主平面之间的点线表示对应光线的高度传递。

把会聚目标作为虚物，求虚物距对应的像

图 3.20 乙中，光到达前主平面后若仍按原方向前进，将在其右侧 a 处会聚，所以 $u = -a$。光组使会聚提前，从后主平面量到像的距离满足

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f} \quad \Longrightarrow \quad v=\frac{af}{a+f}, \qquad \beta=-\frac{v}{-a}=\frac{f}{a+f}>0.$$

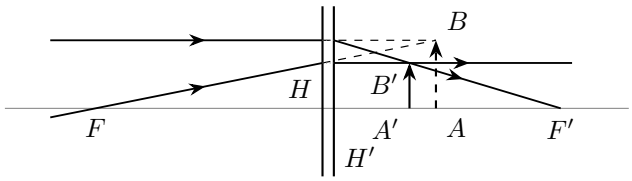


图 3.22: 乙的入射会聚光被光组提前会聚；虚物与实像均在右侧，但距离从不同主平面量起

分别判实虚、正倒与缩小性质

图 3.22 中，两条实际出射线交于轴上方的 B'。因为 $v>0$ 且 $0<\beta<1$，这是正立缩小的实像。

例 3.5 (平面镀银的平凸透镜)**.** 空气中平凸薄透镜的焦距为$f>0$，平面上镀银。凸面一侧、距透镜$2f$ 处有高为H 的直立物，下端在主轴上。作出最终像，并求其位置、大小和实虚。

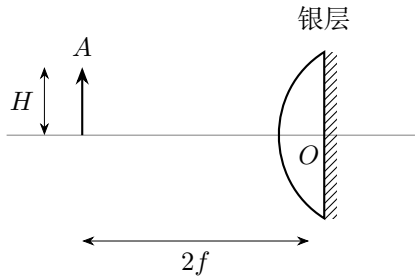


图 3.23: 光先通过透镜，再由平面反射，返回时再次通过透镜；结构间隔放大示意

解　计算第一次折射的会聚目标和像高

先逐段追迹图 3.23。第一次通过透镜，$u_1 = 2f$，故$v_1 = 2f$，中间像高为$-H$。若没有银层，光将向右会聚于这个中间像。

反转传播方向，确定回程透镜的虚物

平面镜使这束光返回左侧；若先不计回程透镜，它将向左侧距镜$2f$、高为$-H$的点会聚。于是回程透镜接收的是会聚光，其虚物距为$u_2 = -2f$。因此

$$-\frac{1}{2f} + \frac{1}{v_2} = \frac{1}{f}, \qquad \boxed{v_2 = \frac{2f}{3}}.$$

换回实际左右位置，并连乘三段放大率

这里$v_2 > 0$ 是沿回程方向的实像距，即像在透镜左侧。第二次透镜的放大率为$+1/3$，乘上第一次的-1 和平面反射的$+1$，得到

$$\boxed{\beta = -\frac{1}{3}, \qquad h' = -\frac{H}{3}}.$$

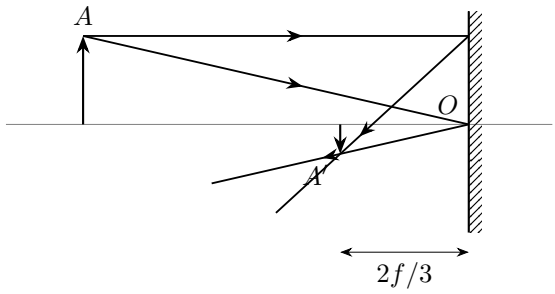


图 3.24: 薄透镜极限下的实际入射与最终反射光；像点A' 在镜前实际会聚

图 3.24 可直接判定像为倒立缩小实像。

等效凹镜的画法

图 3.24 的轴上平行入射线在两次折射中各增加一份光焦度，故往返光路可画成焦距 $f/2$ 的等效凹镜。图上标出的像距 $2f/3$ 则由上面的逐段成像得到。

例 3.6（由光斑反求焦距）. 点光源S 在薄透镜左侧主轴上，距透镜$a = 30\,\mathrm{cm}$。透镜恰好填满遮光板的圆孔，孔半径$r = 1\,\mathrm{cm}$；右侧屏距为b，屏上圆光斑半径为$R = 5\,\mathrm{cm}$。取$0 < b < 4a$。分别求会聚透镜和发散透镜的焦距，以b 表示，并分析几何分支。

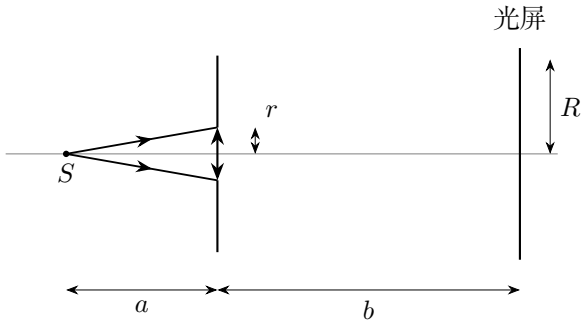


图 3.25: 圆孔限制入射束的截面；屏上的光斑半径由出射光束的边缘线确定。

解　保留孔径边缘线在屏上的有向高度

设出射光束的轴上像距为v。如图 3.25，上边缘点高度为r，出射直线在屏上的带符号高度为

$$y_b = r\left(1 - \frac{b}{v}\right), \qquad \frac{R}{r} = \left|1 - \frac{b}{v}\right| = 5.$$

按是否交轴拆出实像与虚像两种几何支路

将绝对值拆成 $1 - b/v = -5$ 或 $1 - b/v = 5$。前者给出 $b/v = 6$，后者给出 $b/v = -4$，故有两个分支：

$$\text{交叉后到屏：}\quad v = \frac{b}{6}; \qquad \text{保持发散到屏：}\quad v = -\frac{b}{4}.$$

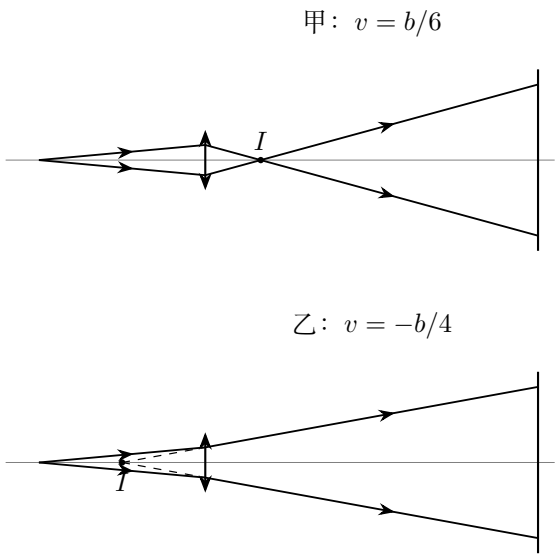


图 3.26: 上边缘光线到达屏的下侧或上侧，分别对应两个符号分支；纵向比例放大示意

分别代入成像式，按给定镜型筛选焦距

图 3.26 甲实际会聚于I，穿过后上下颠倒；乙的反向延长线交于I，实际光束仍发散。分别代入透镜公式，

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{6}{b} = \frac{b+6a}{ab}, \qquad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a} - \frac{4}{b} = \frac{b-4a}{ab}.$$

取倒数，得到

$$\boxed{f_1 = \frac{ab}{b+6a}}, \qquad \boxed{f_2 = \frac{ab}{b-4a}}.$$

在题设$0 < b < 4a$ 下，$f_1 > 0, f_2 < 0$，两种透镜各对应一个分支。例如$b = 60\,\mathrm{cm}$ 时，$f_1 = 7.50\,\mathrm{cm}, f_2 = -30.0\,\mathrm{cm}$。这个数值例仅用于展示通式，屏距改变时应重新代入。

撤去屏距限制后的解

若去掉$b < 4a$ 的条件，$b > 4a$ 时乙分支也可能由会聚透镜产生：物在焦点内，出射虽发散，却比入射光更缓。$b = 4a$ 时乙分支的光焦度为零。可见光斑大小本身不够，还须知道光束交叉情况或透镜性质。

例 3.7 (横向与纵向放大)**.** 近轴成像系统的物方、像方介质折射率为n_u, n_v，物像距为u, v，光焦度固定。求带符号横向放大率$\beta = h'/h$ 和$\alpha = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}u$，结果中不含焦距。再说明$\alpha$ 与物、像在统一轴坐标中的位移比有何区别。

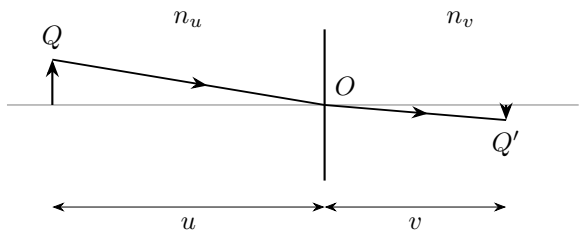


图 3.27: 图中h' 带符号；倒立像对应$h' < 0$

解　由主平面轴上参考光线求带符号横向放大率

图 3.27 中，过轴上参考点O 的近轴光线在物方倾角为$-h/u$，像方倾角为h'/v。薄系统在$y = 0$ 处不改变约化倾角，因此

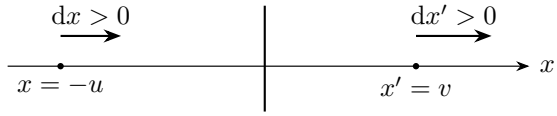
$$n_u\left(-\frac{h}{u}\right) = n_v\frac{h'}{v}, \qquad \boxed{\beta = -\frac{n_u v}{n_v u}}.$$

有厚度的光组应改在主平面量距，结论不变。若用$h'_{\mathrm{abs}} > 0$ 表示倒立像高的大小，则同一个结论写成$\beta = -h'_{\mathrm{abs}}/h$，不可把大小和带符号量混用。

在固定光焦度下微分物像关系

对$n_u/u + n_v/v = \Phi$ 求微分：

$$-\frac{n_u}{u^2}\,\mathrm{d}u - \frac{n_v}{v^2}\,\mathrm{d}v = 0, \qquad \boxed{\alpha = -\frac{n_u v^2}{n_v u^2}} = -\frac{n_v}{n_u}\beta^2.$$



$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x} = -\alpha = \frac{n_v}{n_u}\beta^2}$$

图 3.28: 统一轴向坐标下，物向右移使u 减小；实像通常也向右移

把物像距离的导数换成同一轴坐标的位移比

图 3.28 采用同一个向右坐标。因为 $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x'$，所以 $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}x = -\alpha = (n_v/n_u)\beta^2 > 0$。这给出物点和像点沿轴同向移动的关系；两侧介质相同的特例为 $\mathrm{d}x'/\mathrm{d}x = \beta^2$。

例 3.8 (冕牌与火石玻璃胶合镜)**.** 冕牌玻璃$n_c = 1.499$，平均色散率$\mathrm{d}n_c/\mathrm{d}\lambda = -4.74 \times 10^{-5}\,\mathrm{nm}^{-1}$；火石玻璃$n_f = 1.610$，平均色散率$\mathrm{d}n_f/\mathrm{d}\lambda = -9.76 \times 10^{-5}\,\mathrm{nm}^{-1}$。波长范围为$\Delta\lambda = 170.0\,\mathrm{nm}$。两种薄透镜在空气中紧贴，焦距分别为$f_c, f_f$。令

$$D_j = \frac{1}{n_j - 1}\frac{\mathrm{d}n_j}{\mathrm{d}\lambda}\Delta\lambda.$$

证明一阶消色差条件为$D_c/f_c + D_f/f_f = 0$，并判断哪种玻璃应制成会聚透镜，才能得到会聚的消色差镜头。

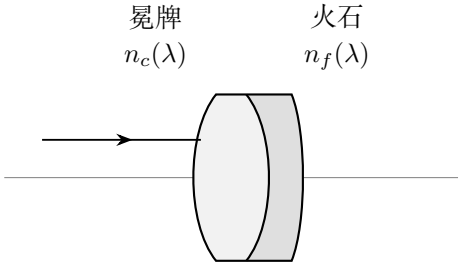


图 3.29: 胶合正、负透镜；两种材料的折射率均随波长变化

解　对固定形状透镜的光焦度求波长变化

对图 3.29 中形状固定的每片薄透镜，$1/f_j = (n_j - 1)K_j$，其中K_j 只由两个曲率决定。因此

$$\Delta\left(\frac{1}{f_j}\right) = \frac{1}{f_j}\frac{\Delta n_j}{n_j - 1} \simeq \frac{D_j}{f_j}.$$

令两片光焦度的一阶变化相消

一阶消色差要求组合光焦度随波长的一阶变化为零，故

$$\boxed{\frac{D_c}{f_c} + \frac{D_f}{f_f} = 0}.$$

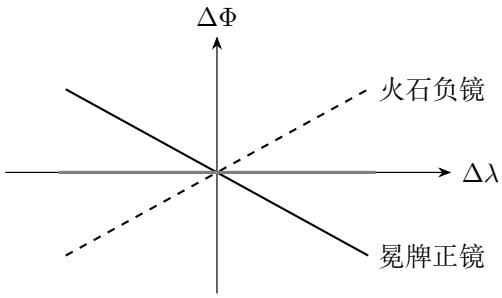


图 3.30: 以波长变化为横轴示意光焦度变化；两片斜率相反，和的一阶斜率为零

由色散数据求两片焦距的比例与符号

由数据得

$$D_c \simeq -0.01615, \qquad D_f = -0.02720, \qquad \frac{f_f}{f_c} = -\frac{D_f}{D_c} \simeq -1.684.$$

两片必须有相反光焦度。记$\Phi_c = 1/f_c$，则

$$\Phi_f = -\frac{D_c}{D_f}\Phi_c \simeq -0.5937\Phi_c, \qquad \Phi_{\text{tot}} \simeq 0.4063\Phi_c.$$

再加正总光焦度条件，确定材料分工

要使组合会聚，必须$\Phi_c > 0$：冕牌做会聚镜，火石做发散镜。图 3.30 中的两条斜线正对应一正一负光焦度对正常色散的响应。$\Delta\lambda$ 必须与色散率使用同一波长单位；本题中为nm。

说明一阶消色差的波段和像差限制

在设计波段附近，这个条件使总光焦度随波长的线性变化相消。较宽波段内还可由高阶色散产生二级光谱。

例 3.9 (弯月形透镜的齐明点)**.** 空气中的弯月形透镜折射率为$n > 1$。入射面Σ_1 的球心为C_1，出射面Σ_2 的球心为C_2、半径为R。两球心均位于透镜左侧，且C_1 在C_2 左侧，$C_1C_2 = R/n$。点光源$Q = C_1$。证明出射光具有同一像点Q'，求像的位置与实虚。

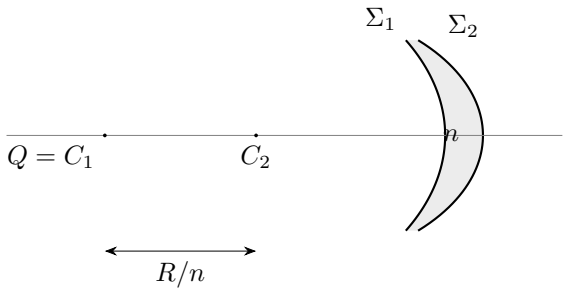


图 3.31: 第一面以物点为球心；第二面的球心与物点间距固定

解　利用第一面正入射，把问题化为第二面的精确折射

先看图 3.31 的第一面。由$Q = C_1$ 发出的任一光线都沿该面的法线入射，因此方向不变；只需精确分析它在第二面的折射。

选候选虚像点，用球面方程证明距离比恒等式

以C_2 为原点，主轴向右，任取第二面上的点$M = (x, y)$，满足$x^2 + y^2 = R^2$。物点为$Q = (-R/n, 0)$。在轴上先取候选像点

$$Q' = (-nR, 0).$$

由距离平方可得

$$MQ'^2 = (x + nR)^2 + y^2 = R^2 + 2nRx + n^2R^2,$$
$$n^2MQ^2 = n^2\big[(x + R/n)^2 + y^2\big] = n^2R^2 + 2nRx + R^2.$$

因此对任意这样的M，都有$MQ' = nMQ$。

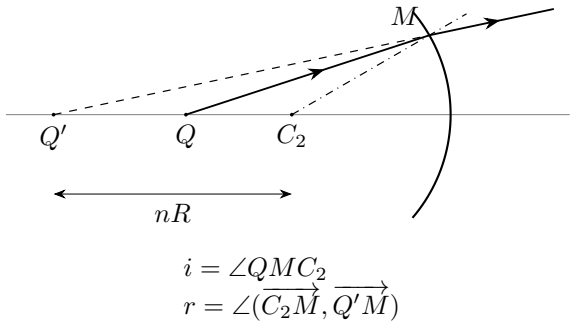


图 3.32: 实线为实际出射光，虚线反向延长至同一Q'；C_2M 是法线

球面法线与斯涅尔定律

在图 3.32 的三角形中，用叉积或正弦定理计算入射角i 和候选折射角r：

$$\sin i = \frac{(R/n)|y|}{R\,MQ}, \qquad \sin r = \frac{nR|y|}{R\,MQ'} = n\sin i.$$

这正是从折射率n 到空气的折射定律。取穿出右侧球面的传播支，出射方向就是从Q' 指向M 的方向。

按出射传播支判断共同像点的虚实

由于Q' 在透镜左侧，实际出射光不会向它会聚，而是其反向延长线相交，故

$$\boxed{Q'C_2 = nR, \quad Q'\text{在}C_2\text{左侧，为虚像}}.$$

距离比 $MQ'/MQ = n$ 对图中能透过两面的整束光成立，所有出射线的反向延长线便共有这个虚像点。

例 3.10 (显微镜物镜中的齐明透镜)**.** 某球面透镜的入射面球心为C_1、半径为R_1，出射面球心为C_2、半径为R_2，玻璃折射率为n。几何配置如图，$C_1C_2 = R_2/n$，物点在C_1。证明可通过指定两面的光线具有同一像点Q，并求QC_2。

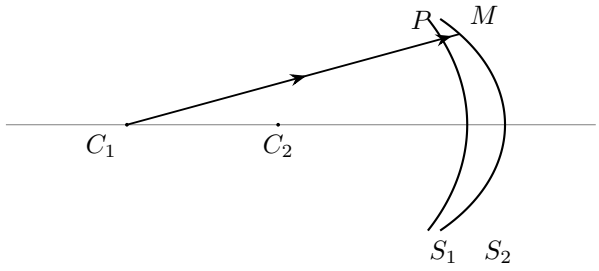


图 3.33: 沿C_1P 入射第一面，再在第二面M 折射

解 由第一面正入射确定玻璃内的实际传播段

图 3.33 中，$C_1P = R_1$，光在P 正入射，进入玻璃后仍沿C_1M 传播。第 3.9 题已经证明：若$C_1C_2 = R_2/n$，则取Q 在C_2 左侧、$QC_2 = nR_2$，对第二面上任意可通光点M 有

$$MQ = n\,MC_1.$$

把空气段与玻璃段分别加权

下面计算这些光线到第二面的光程，求出射波前的形状。物点到 M 的累计光程为

$$\mathcal{L}_{C_1M} = C_1P + nPM = R_1 + n(MC_1 - R_1) = nMC_1 - (n-1)R_1.$$

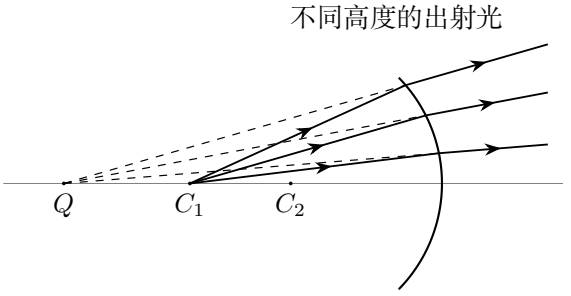


图 3.34: 物点到曲面M 的光程，与来自虚像点的参考球面波只差一个常量

用光程常量说明共同球面出射波前

因此图 3.34 中

$$\mathcal{L}_{C_1M} - MQ = -(n-1)R_1$$

与M 无关，出射波前等效于以Q 为中心的球面波，和精确折射定律的证明一致。

故

$$\boxed{QC_2 = nR_2}, \qquad Q\text{为位于左侧的共同虚像点.}$$

界定第一面半径对孔径与光程常数的作用

改变 R_1 会改变第一面的形状、通光范围和整体光程常数。共同虚像的位置由第二面的 R_2 和折射率 n 决定。

例 3.11 (平行光精确会聚的平凸透镜)**.** 空气中的平凸透镜折射率为$n>1$，平的入射面位于$x=0$，口径半径为R，边缘厚度为零。主轴上焦点$F'=(f',0)$ 位于透镜右侧。平行光从左向右、垂直平面入射，要求通过孔径的所有光线经凸面后都到达F'。求凸面的形状、中心厚度OA 及口径限制。

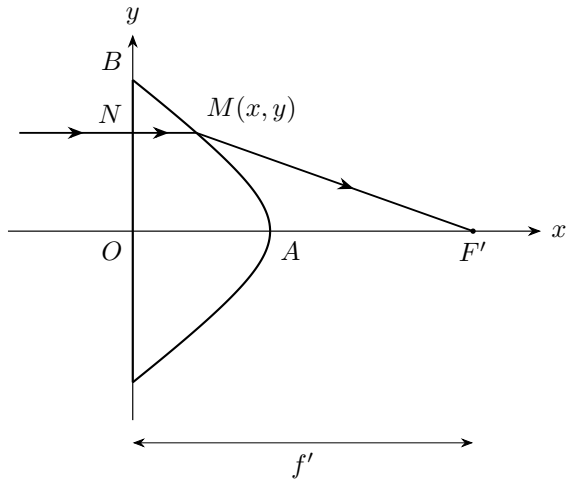


图 3.35: 图中$B=(0,R)$ 是口径边缘，A 是凸面顶点，N 与M 等高

解　从同一入射波前计算玻璃段与空气段的总光程

图 3.35 中，入射平面上的光同相，且在平面处不偏折。经任意$M=(x,y)$ 到F'的光程必须相同。边缘B 的厚度为零，因此这个常量为

$$K=BF'=\sqrt{f'^2+R^2}.$$

任意光线在玻璃内走过$NM=x$，在空气内走过MF'，故

$$\boxed{nx+\sqrt{(f'-x)^2+y^2}=K}. \tag{*}$$

保留未平方的条件，并用轴上光路求中心厚度

这同时给出曲面的物理分支：$K-nx>0$。在顶点$A=(t,0)$ 且$t<f'$，有

$$nt+(f'-t)=K, \qquad \boxed{OA=t=\frac{\sqrt{f'^2+R^2}-f'}{n-1}}.$$

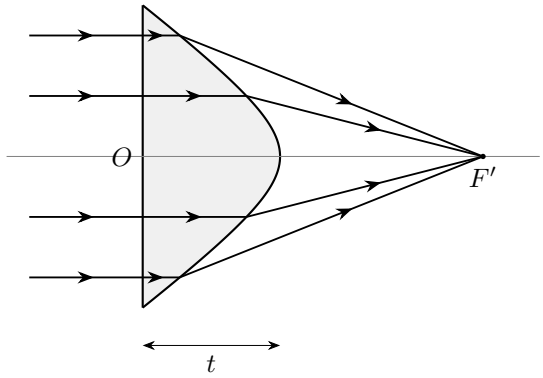


图 3.36: 由同一等光程曲面折射的平行光，包含较大高度光线

解出曲面母线和接入孔径边缘的物理支

为识别图 3.36 的曲线，把式 (*) 移项平方，得到

$$(n^2-1)x^2-2(nK-f')x+R^2-y^2=0.$$

令$a=n^2-1>0$，可改写为

$$\left(x-\frac{nK-f'}{a}\right)^2-\frac{y^2}{a}=\frac{(nf'-K)^2}{a^2}.$$

母线是一条双曲线，旋转后为双叶双曲面的一支。所需左支为

$$\boxed{x(y)=\frac{nK-f'-\sqrt{(nf'-K)^2+(n^2-1)y^2}}{n^2-1}},\quad |y|\le R.$$

由 $x(\pm R)=0$、$x(0)=t$，这条双曲线支在边缘接到入射平面，在主轴上达到中心厚度。

光线沿曲面法线的分量

下面求光线从玻璃沿MF' 进入空气的条件。令$\boldsymbol{e}_x$ 为入射方向、$\boldsymbol{e}_o$ 为M 指向F' 的单位向量。式 (*) 的梯度为

$$\boldsymbol{\nabla}(nx+MF')=n\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_o,$$

恰与曲面法线同向，因此切向分量满足$n\sin i=\sin r$。这把等光程条件与精确折射定律联系起来，排除了仅靠平方方程得到的错误分支。

求顶点局部曲率，连接近轴球面公式

由图 3.36 中轴上顶点附近的精确曲线还可求局部曲率。令 $A = nf' - K > 0$、$a = n^2 - 1$。由左支的根式逐次求导，

$$\begin{aligned} x'(y) &= -\frac{1}{a}\frac{2ay}{2\sqrt{A^2+ay^2}} = -\frac{y}{\sqrt{A^2+ay^2}}, \\ x''(y) &= -(A^2+ay^2)^{-1/2} - y\left(-\frac{1}{2}\right)(A^2+ay^2)^{-3/2}(2ay) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{A^2+ay^2}} + \frac{ay^2}{(A^2+ay^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

在顶点 $x'(0) = 0$、$x''(0) = -1/A$。由于 $x(y)$ 是偶函数，泰勒式的奇次项消失，从而

$$x(y) = t - \frac{y^2}{2(nf' - K)} + O(y^4), \qquad \rho = nf' - K = (n-1)(f' - t).$$

用顶点处曲率半径 ρ 作近轴球面计算，玻璃到空气的像方焦距从 A 量起，等于 $\rho/(n-1) = f' - t$。题设的 $f' = OF'$ 从入射平面起算，两段距离相差中心厚度 t。

检查外部焦点、孔径上限与向外传播条件

焦点在整个透镜外，要求$t < f'$，等价于

$$K < nf', \qquad \boxed{0 < R < f'\sqrt{n^2-1}}.$$

在这个范围内，$n\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_o - 1 = (nf' - K)/MF' > 0$，出射方向位于曲面外侧，没有选到穿回玻璃的支。等号时顶点与焦点重合，已不符合题设；因此口径上限应取严格不等式。若另留非零边缘厚度，式 (*) 中的常量和中心厚度都会改变，须重新建模。

例 3.12 (有效焦距与后焦距为何不同)**.** 空气中两同轴薄凸透镜L_1, L_2 的焦距依次为$10.0, 20.0\,\mathrm{cm}$，间距$5.00\,\mathrm{cm}$。求系统有效焦距、两主平面及前后焦点。轴上实物在L_1 前$20.0\,\mathrm{cm}$ 时，求最终像位置和横向放大率。

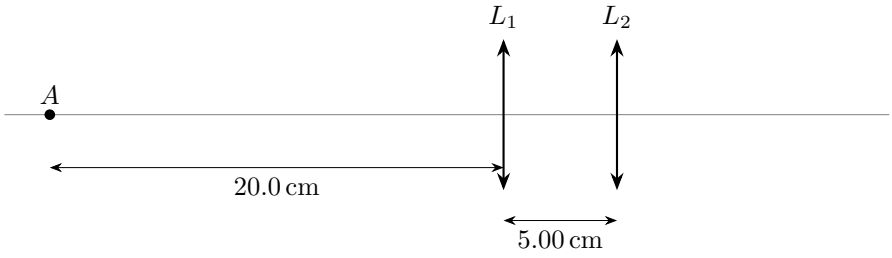


图 3.37: 长度从透镜顶点量起；先保留两镜间有限传播

解　按实际传播顺序求两镜间总矩阵与有效焦距

按图 3.37 顺序，$M = L(20)P(5)L(10)$。以下各长度数值以厘米计，先算传播与第一镜的乘积，

$$P(5)L(10) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 & 5 \\ -0.10 & 1 \end{pmatrix}.$$

再由第二镜作用，左下元为 $(-0.05)(0.50)-0.10 = -0.125$，右下元为 $(-0.05)5+1 = 0.75$；上行不变。因此恢复各元的量纲后，

$$M = \begin{pmatrix} 0.50 & 5.00\,\mathrm{cm} \\ -0.125\,\mathrm{cm}^{-1} & 0.75 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{F = 8.00\,\mathrm{cm}}.$$

以首末透镜为参考，定位两主平面

取L_1 为$x = 0$, L_2 为$x = 5.00\,\mathrm{cm}$，由分解式

$$a = 8(1 - 0.75) = 2.00\,\mathrm{cm}, \quad b = 8(1 - 0.50) = 4.00\,\mathrm{cm},$$

得$H : x = 2.00\,\mathrm{cm}, H' : x = 1.00\,\mathrm{cm}$。

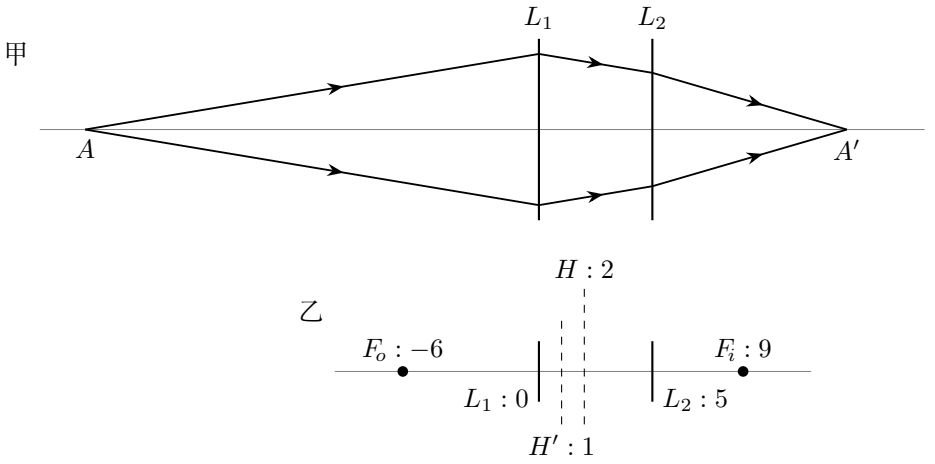


图 3.38: 甲为实际近轴追迹，乙列出主平面和焦点；两主平面的先后次序可互换

从主平面求焦点，再与顶点焦距比较

图 3.38 乙中，前焦点在H 前F，后焦点在H' 后F，因此

$$\boxed{x_{F_o} = -6.00\,\mathrm{cm}, \qquad x_{F_i} = 9.00\,\mathrm{cm}}.$$

后焦距从L_2 量起，仅为$4.00\,\mathrm{cm}$，与有效焦距$8.00\,\mathrm{cm}$ 不同。

从前后焦点量距离，求有限物距的像

图 3.38 甲中的实物在 $x=-20\,\mathrm{cm}$，前焦点在 $-6\,\mathrm{cm}$，所以物在前焦点左侧 $x_o=14\,\mathrm{cm}$。从后焦点向右量到像的距离记为 x_i。由牛顿成像式，

$$x_o x_i = F^2, \qquad x_i = \frac{8^2}{14}\,\mathrm{cm} = \frac{32}{7}\,\mathrm{cm}.$$

后焦点在 $9\,\mathrm{cm}$ 处，故像的坐标是 $9+32/7=95/7\,\mathrm{cm}$。从 L_2 向右量，像距为 $\boxed{60/7\,\mathrm{cm}}$。由 $\beta=-F/x_o$ 得 $\boxed{\beta=-4/7}$。这就是图中两条出射线所成的倒立缩小实像。

例 3.13 (凸透镜浸入液体后是否仍会聚)． 薄双凸透镜折射率$n_\ell=1.50$，两球面带符号曲率半径为$+10.0,-10.0\,\mathrm{cm}$。把它分别置于两侧相同、折射率$n_m=1.00,4/3,1.60$ 的透明介质中，求焦距并判断会聚或发散性质。

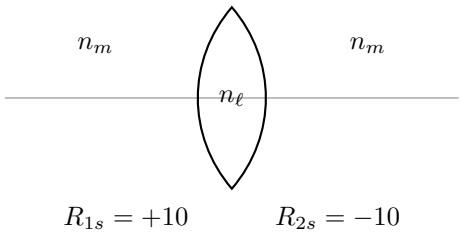


图 3.39: 透镜形状固定，改变的是两侧相同的环境折射率

解　固定几何形状，保留环境折射率进入光焦度

对图 3.39 两面相加，介质中的光焦度为

$$\Phi=(n_\ell-n_m)\left(\frac{1}{R_{1s}}-\frac{1}{R_{2s}}\right).$$

把约化光焦度换成介质中的几何焦距

由于物方、像方均为n_m，两侧焦距相等，$f=n_m/\Phi$，从而

$$\frac{1}{f}=\left(\frac{n_\ell}{n_m}-1\right)\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{-10}\right)\mathrm{cm}^{-1}.$$

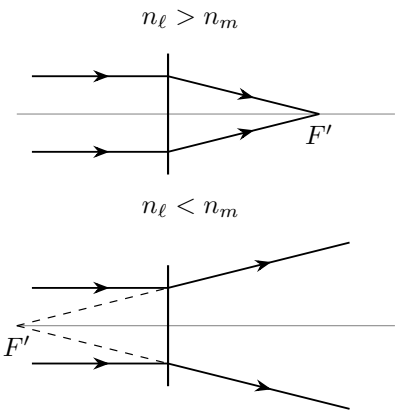


图 3.40: 相对折射率决定平行束向轴偏折还是离轴偏折；虚焦点由延长线确定

代入三种环境，分别判会聚和发散

图 3.40 对应的数值为

$$\boxed{f_{\text{air}} = +10.0\,\text{cm}}, \quad \boxed{f_{4/3} = +40.0\,\text{cm}}, \quad \boxed{f_{1.60} = -80.0\,\text{cm}}.$$

折射率相等时的光路

前两种情况会聚，后一种发散。若$n_m = n_\ell$，两界面均不偏折，光焦度为零，焦点移至无穷远。透镜的会聚或发散性质由形状和相对折射率共同决定。

3.6　本讲小结

薄透镜把两次近轴折射合并到同一量距平面，要求厚度修正相对所求精度可略。焦距由形状与相对折射率共同决定；两侧介质不同，应使用 $n_u/u + n_v/v = \Phi$，分别定义物方、像方焦距，横向放大率也保留介质因子。

组合系统沿实际传播顺序处理。前一级的会聚目标在后一级之后时，它是后一级的虚物；镀银系统还要在反射后重新指定传播方向，并计入回程折射。主平面提供等效量距基准，首末顶点到焦点的距离与有效焦距一般不同。用矩阵计算时，应补齐物、像两端传播，对完整矩阵施加成像条件。

紧贴光焦度直接相加，有限间隔还包含传播引起的高度变化。无焦系统没有有限焦距，仍可改变束宽和倾角。光斑反求成像保留屏上有向高度，先区分交叉与未交叉的几何支路；轴向位移、物像距离的导数和横向放大率也分别按其定义计算。

胶合消色差把总光焦度设为所需的正值，并使两片随波长产生的一阶光焦度变化相消。特殊齐明点用距离比求得，精确会聚面用等光程求得。曲面顶点的局部曲率决定近轴聚焦。

3.7 练习

练习 3.1 (单透镜的像位置与放大率)**.** 空气中薄凸透镜焦距10.0 cm，高2.00 mm的直立小物在镜前30.0 cm。求像的位置、高度、实虚和正倒，并画两条辅助光线标出像点。

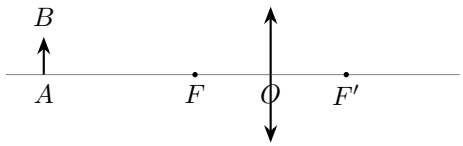


图 3.41: 练习：单透镜的像位置与放大率

练习 3.2 (两薄透镜依次成像)**.** 空气中两薄透镜同轴，$f_1 = +10.0\,\mathrm{cm}$、$f_2 = -10.0\,\mathrm{cm}$，间隔15.0 cm。实物在第一镜前20.0 cm。求中间像、第二镜的物距、最终像及总横向放大率。

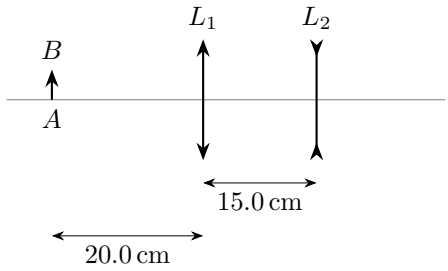
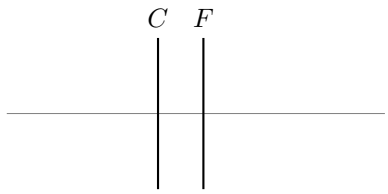


图 3.42: 练习：两薄透镜依次成像

练习 3.3 (光焦度分配与消色差)**.** 两紧贴薄透镜的总焦距要求为10.0 cm。从红光到蓝光，两材料透镜的光焦度变化分别满足$\Delta\Phi_C = 0.0200\Phi_C$、$\Delta\Phi_F = 0.0400\Phi_F$，其中光焦度带符号。求满足一阶消色差的两片焦距。



紧贴组合
总光焦度$0.100\,\mathrm{cm}^{-1}$

图 3.43: 练习：光焦度分配与消色差

练习 3.4 (分离双透镜的出射光束)**.** 空气中两薄凸透镜同轴，焦距分别为 $f_1 = 10.0\,\mathrm{cm}$、$f_2 = 20.0\,\mathrm{cm}$。平行于轴的近轴光束由左向右入射。分别取镜间距 $d = 15.0\,\mathrm{cm}$ 和 $30.0\,\mathrm{cm}$，求系统的等效光焦度，判断出射束的会聚性质；若有有限的后焦点，求它相对第二镜的位置。说明等效焦距能否直接作为从第二镜量起的后焦距。

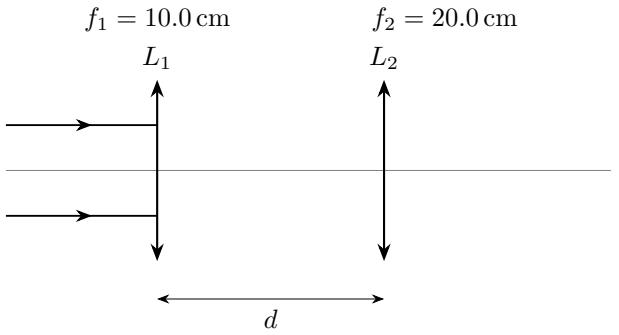


图 3.44: 两镜焦距已知，镜间距分别取两种数值

练习 3.5 (两侧介质不同的薄透镜)**.** 薄玻璃透镜的折射率为 $n_\ell = 1.50$，两面曲率半径为 $R_{1s} = +10.0\,\mathrm{cm}$、$R_{2s} = -10.0\,\mathrm{cm}$。左侧为空气，右侧为折射率 $4/3$ 的透明液体，两介质由透镜隔开。求物方和像方焦距的大小。若实物在透镜左侧 $30.0\,\mathrm{cm}$，求像距和横向放大率。均采用近轴、零厚度近似。

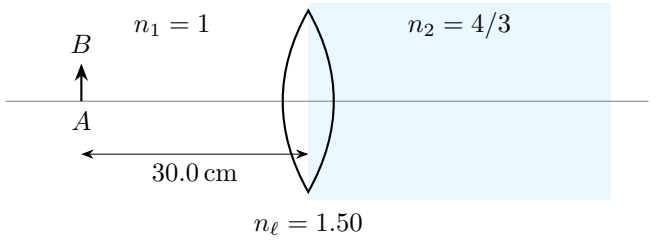


图 3.45: 同一薄透镜连接两种不同的外部介质

练习解答

练习 3.1

解　确定量距起点和物像高度的符号

图 3.41 中物体位于凸透镜两倍焦距以外。先以透镜为量距起点求像距，再由横向放大率计算带符号像高。物像距离统一用厘米，物像高度统一用毫米；两个比值各自保持单位一致，放大率为无量纲数。

用薄镜成像式求像距、放大率和像高

图 3.41 中$f=+10.0, u=+30.0\,\mathrm{cm}$，故

$$\boxed{v=\frac{fu}{u-f}=15.0\,\mathrm{cm}},\qquad \boxed{\beta=-\frac{v}{u}=-0.500},\qquad \boxed{h'=-1.00\,\mathrm{mm}}.$$

由两条出射线判断像的性质

图 3.46 中的两条实际出射线交于B'，所以是倒立缩小实像。像距的正号给出镜后位置，像高的负号给出倒立方向。

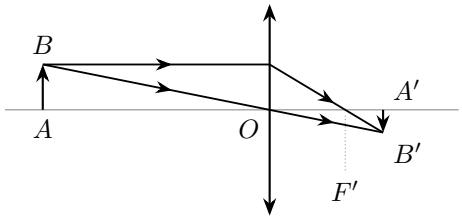


图 3.46: 练习 3.1 的解答图：高度作放大示意；两条实际出射线相交于轴下

练习 3.2

解　先求第一镜单独作用时的中间像

按图 3.42 从左到右计算。第一镜给出

$$v_1=\frac{10\times 20}{20-10}=20.0\,\mathrm{cm},\qquad \beta_1=-1.$$

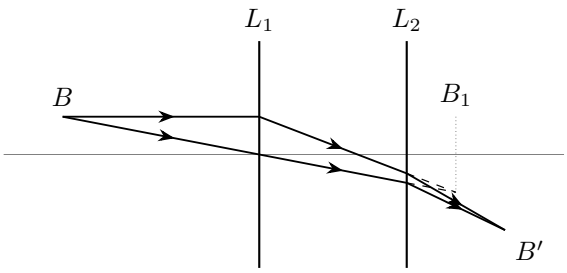


图 3.47: 练习 3.2 的解答图：用虚线保留未受第二镜作用的中间会聚目标

把未到达的会聚目标作为第二镜的虚物

该会聚目标在L_2 后5.00 cm，故

$$u_2 = 15 - 20 = -5.00\,\text{cm}, \quad -\frac{1}{5} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{v_2 = +10.0\,\text{cm}}.$$

两级横向放大率的乘积

于是$\beta_2 = -v_2/u_2 = +2$，$\boxed{\beta = \beta_1\beta_2 = -2}$。

元件	u/cm	v/cm	f/cm	β
L_1	$+20$	$+20$	$+10$	-1
L_2	-5	$+10$	-10	$+2$

表中L_2 的物距为负，因为入射到它的光尚未到达会聚目标；这与最终实像的正像距分别判断。图 3.47 的虚线指向假定没有第二镜时的B_1。实际光在L_2 被减弱会聚，最终在更远的B' 相交，为倒立放大实像。

负透镜减弱了入射光束的会聚

由图 3.47 可将第二镜的作用写成会聚度相加：入射束原在镜后 5 cm 会聚，其会聚度为 $+1/5\,\text{cm}^{-1}$；加上负透镜的 $-1/10\,\text{cm}^{-1}$，出射束的会聚度降为 $+1/10\,\text{cm}^{-1}$，所以交点后移到镜后 10 cm。

练习 3.3

解　区分目标总光焦度与总色差两个条件

图 3.43 中的两片薄透镜紧贴。总光焦度是两片之和；一阶消色差要求从红光到蓝光的两项光焦度变化也相加为零。

联立两片光焦度及其蓝红变化

图 3.43 的两片紧贴，先写

$$\Phi_C + \Phi_F = 0.100\,\text{cm}^{-1}, \qquad 0.0200\Phi_C + 0.0400\Phi_F = 0.$$

解出带符号光焦度，再分别取倒数求焦距

第二式给出$\Phi_C = -2\Phi_F$。代入第一式，

$$\boxed{\Phi_C = +0.200\,\text{cm}^{-1}, \quad \Phi_F = -0.100\,\text{cm}^{-1}}.$$

$$\boxed{f_C = +5.00\,\text{cm}, \quad f_F = -10.0\,\text{cm}}.$$

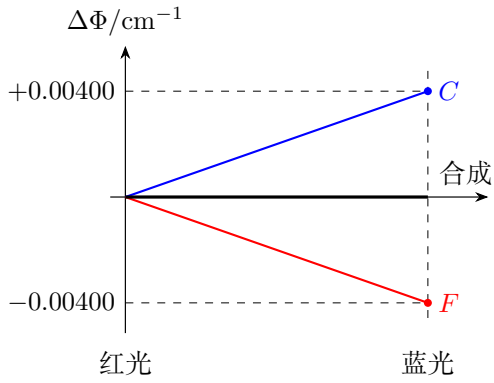


图 3.48: 相对红光的光焦度变化：蓝光端两片分别增加和减小相同数值，总变化为零

蓝光与红光的焦点

图 3.48 中的两项蓝红光焦度差分别是 $+0.00400$ 和 $-0.00400\,\mathrm{cm}^{-1}$，相加为零。两片的总光焦度仍为正，组合镜对两色光都起会聚作用。

练习 3.4

解　逐段追踪入射高度和倾角

图 3.44 中取第一镜处入射高度为 $y_0>0$、入射倾角为零。经过第一镜，倾角变为 $\alpha_1=-y_0/f_1$；传播到第二镜时，高度为 $y_2=y_0+d\alpha_1=y_0(1-d/f_1)$。第二镜再改变倾角，故

$$\alpha_2=\alpha_1-\frac{y_2}{f_2}=-\Phi_{\mathrm{eq}}y_0,\qquad \Phi_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1f_2}.$$

第二镜后的轴交点满足 $0=y_2+b\alpha_2$，其中 b 向右为正。因此在 $\Phi_{\mathrm{eq}}\neq 0$ 时，

$$b=\frac{1-d/f_1}{\Phi_{\mathrm{eq}}},\qquad f_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{\Phi_{\mathrm{eq}}}.$$

分别判断两种镜距下的实际传播

$d=15.0\,\mathrm{cm}$ 时，$\Phi_{\mathrm{eq}}=0.0750\,\mathrm{cm}^{-1}$，$f_{\mathrm{eq}}=13.33\,\mathrm{cm}$，但 $y_2=-y_0/2$、$\alpha_2<0$。图 3.49 上图的光线已在两镜之间越过轴线，出第二镜后继续离轴，故为发散束，其反向延长线交于虚后焦点：

$$\boxed{b=-6.667\,\mathrm{cm}}.$$

$d=30.0\,\mathrm{cm}$ 时，$\Phi_{\mathrm{eq}}=0$、$y_2=-2y_0$、$\alpha_2=0$，图中下方出射光与轴平行，系统无焦，没有有限后焦点。

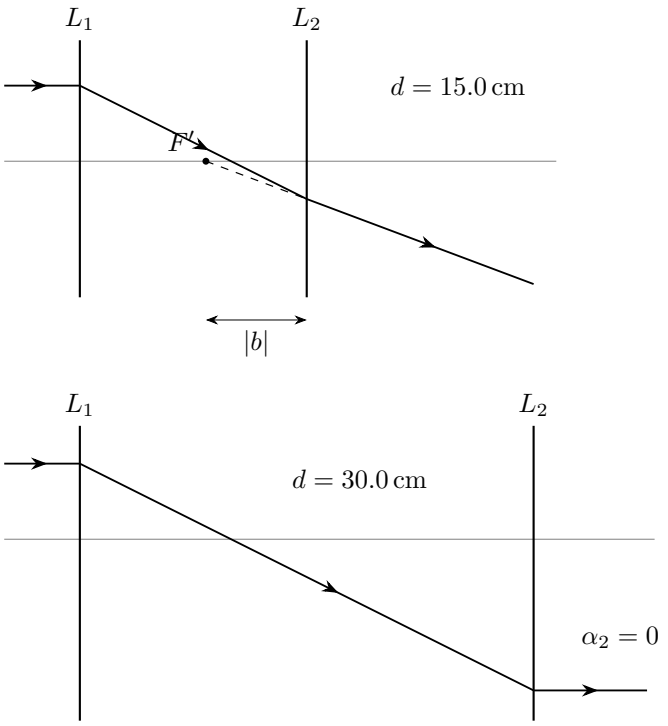


图 3.49: 上图在第二镜前已越轴，出射束发散；下图重新成为平行束

区分主平面焦距与顶点后焦距

等效焦距 f_{eq} 从后主平面量，b 从第二镜量。图 3.49 上方，光在两镜之间已交轴，出射后继续离轴，所以从第二镜量出的 b 为负。

练习 3.5

解　分别计入两个折射面的约化光焦度

图 3.45 中的两个外部折射率不同。薄透镜的两面可在同一顶点平面相加，约化光焦度为

$$\Phi = \frac{n_\ell - n_1}{R_{1s}} + \frac{n_2 - n_\ell}{R_{2s}} = \frac{0.50}{10} + \frac{4/3 - 1.50}{-10} = \frac{1}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

近轴成像关系是 $n_1/u + n_2/v = \Phi$，两边不同的折射率必须保留。

用平行入射与平行出射分别确定两个焦距

令 $u \to \infty$，得到像方焦距 $f' = n_2/\Phi = 20.0\,\mathrm{cm}$；令 $v \to \infty$，得到物方焦距大小 $f = n_1/\Phi = 15.0\,\mathrm{cm}$。所以物方焦点在左侧 $15.0\,\mathrm{cm}$，像方焦点在右侧 $20.0\,\mathrm{cm}$。

有限物距下的像

代入 $u = 30.0\,\mathrm{cm}$：

$$\frac{1}{30} + \frac{4/3}{v} = \frac{1}{15}, \qquad \boxed{v = 40.0\,\mathrm{cm}}, \qquad \boxed{\beta = -\frac{n_1 v}{n_2 u} = -1}.$$

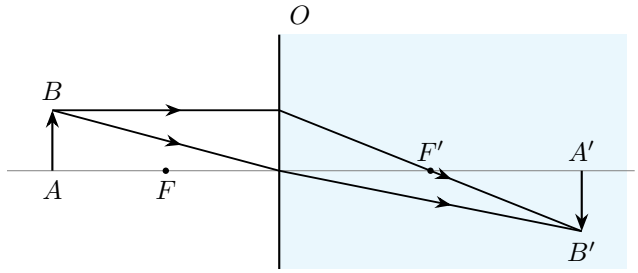


图 3.50: 平行入射线经像方焦点；过顶点的近轴线也因外部介质不同而折转

图 3.50 中的两条实际光线在右侧相交，像倒立且等大。其中经过顶点的光线满足 $n_1\alpha_{\mathrm{in}} = n_2\alpha_{\mathrm{out}}$，出射倾角是入射倾角的 3/4。平行入射的另一条光线通过像方焦点 F'。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第四讲

光学仪器与综合成像

2026

目录

第四讲　光学仪器与综合成像 **1**

4.1　成像位置、清晰观察与视角放大率 1

4.2　光线模型与孔径衍射 7

4.3　例题与分析 8

4.4　本讲小结 31

4.5　练习 31

练习解答 34

第四讲　光学仪器与综合成像

4.1　成像位置、清晰观察与视角放大率

4.1.1　逐段成像与距离符号

放大镜、显微镜和望远镜都改变眼睛接收的光束。一束光经过多个元件时，前一个元件送来的发散束或会聚束，决定下一元件的物距。光经反射折回后，从回程方向重新量距。

同一外界介质中的薄透镜满足$1/u+1/v=1/f$，横向放大率为$\beta=-v/u$。会聚镜取$f>0$，发散镜取$f<0$。球面镜的近轴公式形式相同，凹面镜$f=R/2>0$，凸面镜$f=-R/2<0$。折射率不同的两侧应使用

$$\frac{n_1}{u}+\frac{n_2}{v}=\Phi,\qquad \beta=-\frac{n_1 v}{n_2 u}.$$

平行玻璃板让近轴光线从另一面以原倾角射出，却改变光线的横向位置。玻璃板的等效空气传播距离可以从这个横移直接求得。

4.1.2　平行板的约化传播与光程

图 4.1 中，光从空气以角 θ 射向玻璃，玻璃中的折射角为 β。角度均从与光轴平行的法线量起。折射定律给 $\sin\theta=n\sin\beta$，近轴时 $\beta\simeq\theta/n$。光在玻璃中前进厚度 t，光线高度增加 $t\tan\beta\simeq t\theta/n$。第二次折射后，斜率恢复到约 θ。若在空气中用同样的斜率产生这段高度增量，轴向距离为 $(t\theta/n)/\theta=t/n$。计算传播时间时，玻璃内光速为 c/n，沿法线走过 t 的时间为 nt/c。

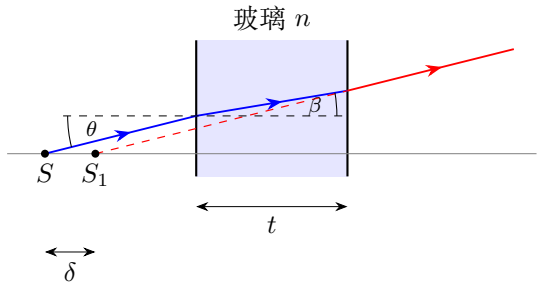


图 4.1: 平行板后的出射线向后延长到较靠近观察侧的 S_1；约化传播长度与光程用于不同问题

将图中的出射线延长回轴，得到视物点 S_1。它相对 S 向出射侧移动 $\delta = t - t/n$。在后面接透镜时，从透镜量到 S_1 就得到物距。

4.1.3　往返系统的反射与展开

同一透镜在往返途中通常作用两次。图 4.2 左图逐次标出透射、反射、再次透射；右图把镜后区域展开，使反射后的左行段成为继续右行的段，回程透镜成为一片镜像透镜。展开保持长度和横向高度，改变的是轴向量距方式。

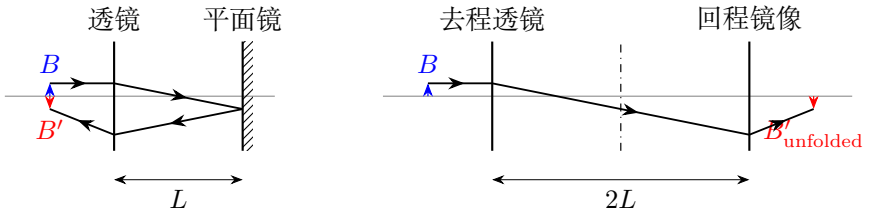


图 4.2: 往返光路与展开光路：平面镜到透镜的距离在展开后累计两次，回程像也要映到展开侧

展开后，镜前往返的两段传播可合成 $2L$，透镜在去程和回程各作用一次。若银层镀在透镜表面，沿实线标出折射、反射和再次折射的顺序，就能区分平面镀银和凸面镀银的光路。

4.1.4　视角放大率与观察条件

裸眼在参照距离 D 处看高度为 h 的小物体，视角为 $\alpha_0 \simeq h/D$。通常用 $D = 25\,\mathrm{cm}$ 作为比较距离；某个观察者的实际近点另记作 D_N。经光具看到的有向视角为 α 时，$M = \alpha/\alpha_0$。$M < 0$ 对应倒像。

以焦距 $f > 0$ 的放大镜为例，图 4.3 设眼睛 E 在透镜 O 后 ℓ 处，虚像到镜的距离大小为 q，像高为 h'。眼到像的距离是 $q + \ell$，所以小视角下

$$\alpha \simeq \frac{h'}{q+\ell}, \qquad \alpha_0 \simeq \frac{h}{D}, \qquad M = \frac{D}{q+\ell}\frac{h'}{h}.$$

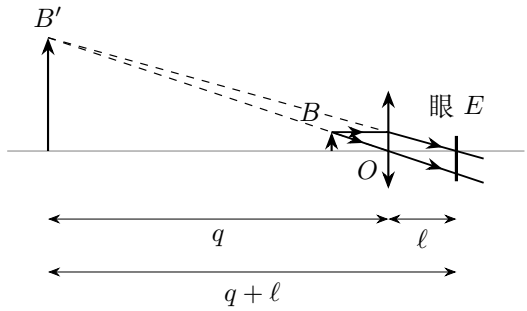


图 4.3: 眼到虚像的距离从眼睛量取，透镜物像距从光心量取；横纵尺度不同

眼距透镜 $\ell < D_N$ 且末像在近点时，图 4.3 中的 $q = D_N - \ell$。薄透镜成虚像时，$v = -q$，所以

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \qquad \frac{h'}{h} = \frac{q}{u} = 1 + \frac{q}{f},$$

$$M_N = \frac{D}{D_N}\left(1 + \frac{D_N - \ell}{f}\right).$$

若用实际近点作裸眼参照，即取 $D_N = D$，上式化为 $M_D = 1 + (D - \ell)/f$。当眼靠近镜片时，再取 $\ell = 0$，得到 $M_D = 1 + D/f$。

图 4.4 比较了裸眼和末像在无穷远时的视角。右图取 $u = f$，出射线平行于过光心的光线。它们的斜率大小为 h/f，进入眼睛后对应的视角约为 h/f，所以 $M_\infty = (h/f)/(h/D) = D/f$。近点和无穷远两种调法都用同一个裸眼参照，改变的是物体到放大镜的距离和眼的调节状态。显微镜的目镜就按这两种方式之一使用。

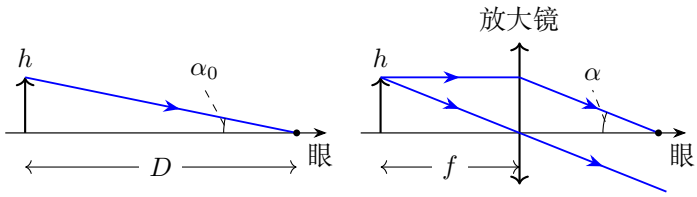


图 4.4: 同一物高 h 的裸眼视角与放大镜视角。

4.1.5 开普勒与伽利略望远镜

设物镜焦距 $f_o > 0$，目镜焦距为带符号的 f_e，两镜间距为 d。来自同一远物点的入射光彼此平行。图 4.5 中，取它们相对向右主轴的倾角为 α，其中过物镜光心的一条保持原方向，故像方焦平面上 B_1 的高度为 $y_1 \simeq f_o\alpha$。

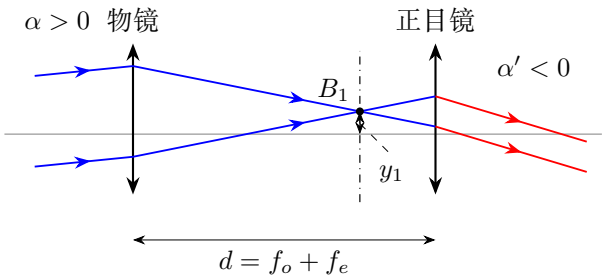


图 4.5: 开普勒式的真实中间像在两镜之间；图以 $f_o : f_e = 3 : 1$ 示意两束平行光的倾角反向

从物镜量起，B_1 的横坐标为 f_o。一条光到达目镜时若高度为 y_e，其折射前的倾角是两点连线的斜率，折射后的倾角再减去 y_e/f_e：

$$\alpha' = \frac{y_e - y_1}{d - f_o} - \frac{y_e}{f_e} = y_e\left(\frac{1}{d - f_o} - \frac{1}{f_e}\right) - \frac{y_1}{d - f_o}.$$

无焦调节时，同一远物点的出射倾角与入射到目镜的高度无关。让 y_e 的系数为零，就有 $d - f_o = f_e$，于是

$$\boxed{d = f_o + f_e}, \qquad \alpha' = -\frac{y_1}{f_e}, \qquad \boxed{M = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_o}{f_e}}.$$

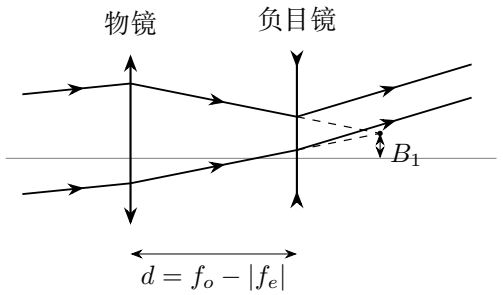


图 4.6: 伽利略望远镜：虚线给出撤去目镜时的会聚目标B_1

开普勒式用正目镜，$d > f_o$，所以光先在 B_1 会聚，再进入目镜，倾角反向。图 4.6 中的负目镜放在会聚目标之前，$d < f_o$；上式的 $d - f_o$ 和 f_e 都为负，出射倾角与入射倾角同号。例 4.8 用开普勒式光路计算远物的视角放大率，练习 4.3 则换成伽利略式。

4.1.6 孔径光阑与出瞳

望远镜能接收多宽的光束，取决于孔径光阑。从物方看，孔径光阑通过前面的光学元件所成的像叫入瞳；从像方看，光阑通过后面的元件所成的像叫出瞳。在出瞳的截面上，若其余光具口径足够，来自不同远物点的出射束覆盖同一个圆孔。把眼瞳放在这里，便能同时接收轴上和离轴光束。

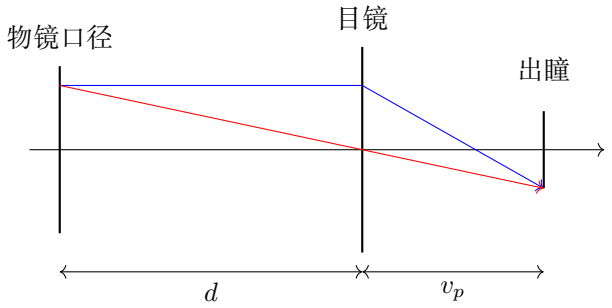


图 4.7: 目镜对孔径光阑成像，确定眼睛应放置的轴向位置

以开普勒望远镜为例，若物镜边缘确为限制光束的光阑，图 4.7 中它距目镜 d，出瞳便是目镜对这个圆孔的实像。由 $1/d + 1/v_p = 1/f_e$，有

$$v_p = \frac{df_e}{d - f_e}, \qquad D_p = \frac{v_p}{d} D_o.$$

若物镜为孔径光阑，它同时就是入瞳。D_o 和 D_p 分别是物镜直径和出瞳直径。代入无穷远调焦条件 $d = f_o + f_e$，有 $D_p = D_o f_e / f_o$。例 4.12 用这两个条件先定出瞳位置，再定其直径。

伽利略式取 $f_e < 0$。若物镜为孔径光阑，$v_p = df_e/(d - f_e) < 0$，出瞳在目镜前，是虚像。眼睛在镜后，接收到的光束宽度要从目镜后实际出射的光线求得。

把眼移离出瞳后，轴上束的中心还在主轴上，斜束的中心却沿出射方向偏移。图 4.8 中，眼瞳平面到出瞳平面的距离为 z，斜束倾角为 α'，束中心偏移 $z \tan \alpha' \simeq z\alpha'$。出瞳半径为 R_p、眼瞳半径为 a，斜束离轴最远处为 $|z\alpha'| + R_p$，所以完整通光要求

$$|z\alpha'| + R_p \le a.$$

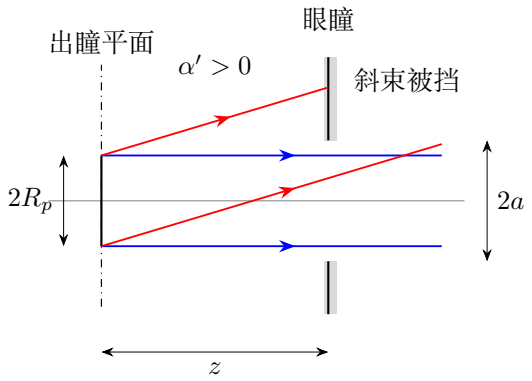


图 4.8: 出瞳后自由传播的轴上束与斜束；眼瞳偏离出瞳平面后，斜束的部分边缘可被截去

斜束的圆截面与眼瞳只部分相交时，边缘光被截去。图中红色光束的上缘就落在眼瞳外。练习 4.4 给定眼瞳与出瞳的直径，可以直接比较轴上束有多少进入眼睛。

4.1.7　显微镜的两级放大

物镜先把AB 成为放大的实像A_1B_1，目镜再把它作为放大镜的物。设物镜焦距f_o，目镜焦距f_e，两镜间距d，光学间隔为$\Delta = d - f_o - f_e$。常规显微镜取$\Delta \gg f_o$。眼睛放松、末像在无穷远时，$u_e = f_e$、$v_o = d - f_e$，于是

$$\beta_o = -\frac{v_o}{u_o} = -\frac{v_o - f_o}{f_o} = -\frac{\Delta}{f_o}, \qquad \boxed{M_\infty = -\frac{\Delta D}{f_o f_e}}.$$

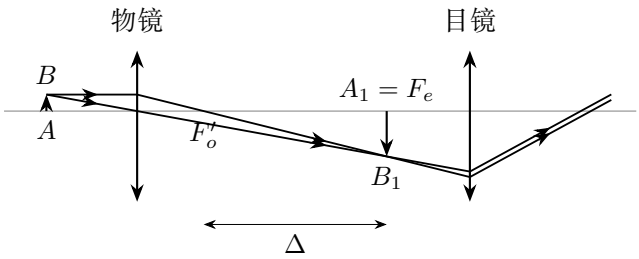


图 4.9: 物镜形成倒立实像，目镜把来自同一像点的光折成平行束；图示为放松观察

图 4.9 中，A_1B_1 在目镜前焦平面，出射为平行光。物镜给出中间像高 $h_1=\beta_o h$，目镜把这个高度变成眼处视角 h_1/f_e，再与裸眼视角 h/D 相比，得到上式的总放大率。眼睛紧贴目镜且末像移到近点 D 时，

$$u_e=\frac{f_eD}{D+f_e},\quad v_o=d-u_e,\quad M_D=\beta_o\left(1+\frac{D}{f_e}\right),\quad \beta_o=-\frac{v_o-f_o}{f_o}.$$

近点调焦把目镜物距从 f_e 减到 $f_eD/(D+f_e)$。在长镜筒、两焦距远小于 d 的情形，才可用 d 近似光学间隔，得到常用估计 $|M|\approx dD/(f_of_e)$。

若把末像从无穷远调到近点，u_e 减小，中间像靠近目镜。在固定镜筒上，物镜的像距 v_o 随之增大，物距便要重新调整。

4.1.8 固定镜距下的观察条件与调焦

若眼睛与目镜有间隔 ℓ，实际近点为 D_N，则最终虚像到目镜的距离大小为 $q=D_N-\ell>0$。应先由目镜确定

$$u_e=\frac{f_eq}{q+f_e},\qquad v_o=d-u_e,\qquad u_o=\frac{f_ov_o}{v_o-f_o},$$

再求物镜横向放大率和总视角放大率

$$\beta_o=-\frac{v_o-f_o}{f_o},\qquad M_N=\beta_o\frac{D}{D_N}\left(1+\frac{q}{f_e}\right).$$

例 4.13 把目镜从无穷远调到近点。两镜间距固定，中间像随目镜物距移动，物镜也要重新调焦。

4.2 光线模型与孔径衍射

前面的图用光线交点定出像的位置。实际透镜口径有限，光到焦平面时形成有一定宽度的斑。两个物点是否能分开，还取决于这些斑的大小。

若透光孔径的特征尺度为 a，波长为 λ，几何光学以 $\lambda/a\ll 1$ 为小参数。图 4.10 区分理想光线交点与有限口径下的焦斑宽度。忽略像差时，衍射给出的角宽尺度约为 λ/a，焦平面宽度尺度约为

$$\Delta x\sim\frac{f\lambda}{a}.$$

比例系数与孔径形状、所用宽度定义有关，这里只作尺度估计。

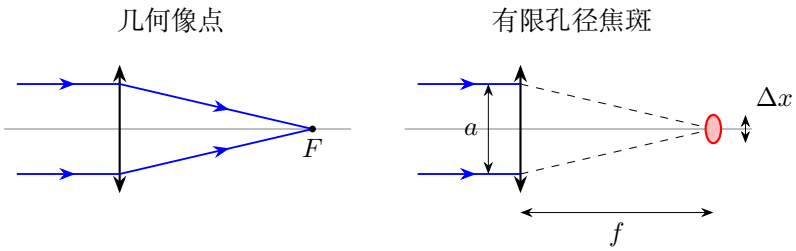


图 4.10: 几何光线交于焦斑中心。右图画出有限孔径下的焦斑宽度。

几何光线给出焦斑中心的位置；两物点的焦斑若相互覆盖，增大观察视角会同时放大两个焦斑。第五讲将从孔径中的光程差求衍射宽度。

干涉和衍射可由电磁场的相干叠加求得。光很弱时，探测器逐个记录光子的位置，积累足够多的记录后仍得到同样的干涉图样。光电效应中则由每次吸收的能量 $h\nu$ 决定逸出电子的能量。

用反射镜和透镜产生空心光束时，光路设计采用几何光学的细束近似。若要计算中心暗区的实际光强、衍射填充和传播距离，就须进一步给出波长、入射场分布、各元件孔径，并用波动光学计算。几何设计保证光线的传播方向，不单独决定全部强度分布。

4.3　例题与分析

例 4.1 (玻璃板中的像与凸面镜中的像重合)**.** 观察者的眼睛距凸面镜顶点O为40 cm，凸面镜焦距大小为10 cm。在眼睛与镜之间放一薄玻璃板，使玻璃板反射所成的眼睛像与凸面镜中的眼睛像重合。求眼睛到玻璃板的距离。忽略玻璃板厚度及其前后两反射面的分离。

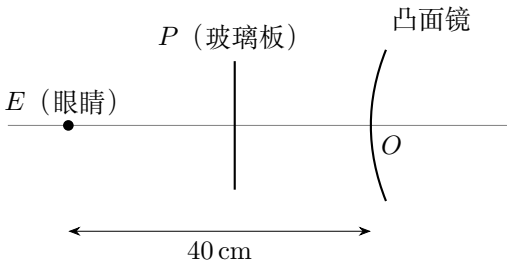


图 4.11: 玻璃板在眼睛与凸面镜之间移动，比较两个虚像的位置

解　先求凸面镜虚像的带符号像距

按图 4.11，凸面镜的带符号焦距为$f=-10\,\mathrm{cm}$，实物距$u=40\,\mathrm{cm}$。因此

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{v}=-\frac{1}{10},\qquad v=-8\,\mathrm{cm}.$$

改用同一坐标轴连接两种虚像位置

图 4.12 取镜顶点O 为坐标原点，向右为正。眼睛E 在$-40\,\mathrm{cm}$，凸面镜虚像I 在镜后$+8\,\mathrm{cm}$。玻璃板反射近似为平面镜反射，因此 $x_I=2x_P-x_E$。要求该像也在 $+8\,\mathrm{cm}$，就等价于让 E,I 关于板面 P 对称。

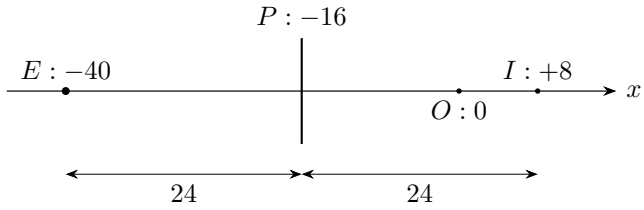


图 4.12: 同一虚像点I 要求玻璃板位于EI 的中点；坐标单位为厘米

由镜面对称求板位，再换算眼到板距离

于是$x_P=(-40+8)/2=-16\,\mathrm{cm}$，眼睛到板的距离为

$$\boxed{EP=40-16=24\,\mathrm{cm}}.$$

图 4.12 中，玻璃板在眼与凸面镜之间，像在玻璃板后 $24\,\mathrm{cm}$，即镜后 $8\,\mathrm{cm}$。题目所求眼到板的距离就是图中左侧的 $24\,\mathrm{cm}$。

两个像距的量距起点

例 4.2 (斟酒前后的杯底图像)**.** 高脚杯杯内底面为向上凸起的球面，顶点为O，球心C 在下方玻璃中，半径$R = 1.50\,\mathrm{cm}$。杯口平面高于O 点$8.0\,\mathrm{cm}$，画片中心P 位于O 下方$6.3\,\mathrm{cm}$。玻璃折射率$n_g = 1.56$，酒的折射率$n_w = 1.34$。观察者在杯口附近沿轴向下看，空杯时难以看清画片，斟满酒后则较容易看清。用近轴成像说明这一变化，忽略侧壁对所取近轴光束的影响。

进一步设眼睛的最近清晰距离为$D = 25.0\,\mathrm{cm}$，远点在无穷远，眼位于杯口上方$h \geqslant 0$ 处。只考虑调焦条件，求满杯可看清而空杯不能看清的h 范围，并判断$h = 10.0\,\mathrm{cm}$ 时的情况。

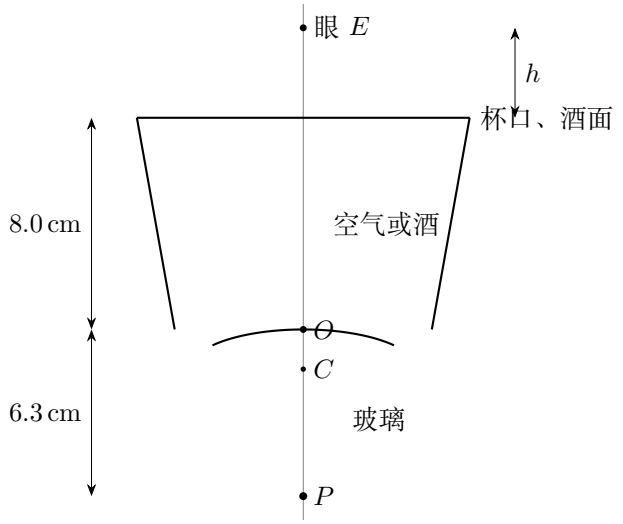


图 4.13: 向上为传播方向；轴向距离压缩示意，第一面球心在入射侧

解　空杯时求玻璃到空气球面形成的实像

图 4.13 中物距$u = 6.3\,\mathrm{cm}$，向上出射时曲率半径为$-1.50\,\mathrm{cm}$。玻璃到空气的成像式为

$$\frac{1.56}{6.3} + \frac{1}{v_a} = \frac{1 - 1.56}{-1.50}, \qquad \boxed{v_a = 7.9545\,\mathrm{cm}}.$$

因此空杯内的近轴光束先在杯口下方约$0.0455\,\mathrm{cm} = 0.455\,\mathrm{mm}$ 处形成实像，再发散进入眼睛。眼睛若恰在杯口附近，所需调焦距离过短。

满杯时先求玻璃到酒的中间虚像

第一面改为玻璃到酒：

$$\frac{1.56}{6.3} + \frac{1.34}{v_w} = \frac{1.34 - 1.56}{-1.50}, \qquad \boxed{v_w = -13.2736\,\mathrm{cm}}.$$

以酒面为第二顶点计算空气中的最终虚像

第一面所成虚像I_w 在O 下方。到杯口酒面时，入射光仍发散，其物距为$u_s = 8 - v_w = 21.2736\,\mathrm{cm}$。平面折射给出

$$\frac{1.34}{u_s} + \frac{1}{v_s} = 0, \qquad v_s = -15.8758\,\mathrm{cm}.$$

最终虚像I 在酒面下方约$15.9\,\mathrm{cm}$，即相对O 的坐标$z_I = 8 + v_s = -7.8758\,\mathrm{cm}$。

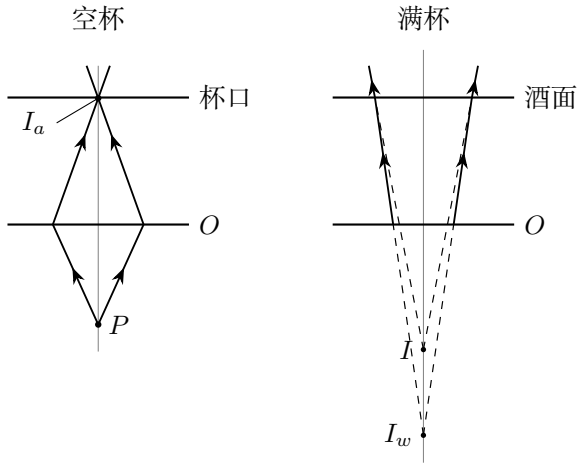


图 4.14: 两次成像的位置比较；右图的虚像均由光线反向延长得到，距离示意

把两种像位置换为眼到像的观察距离

图 4.14 给出空杯实像I_a 与满杯虚像I 的位置。到达眼睛的光均为发散光，眼睛应分别对准这两个像调焦。

结合图 4.13 中眼位E，眼到像的距离为

$$\ell_a = h + (8 - v_a) = h + 0.04545, \qquad \ell_w = h - v_s = h + 15.8758,$$

式中长度统一用厘米。按题设眼睛模型，清晰条件为$\ell \geqslant D$。所以满杯清晰要求$h \geqslant 9.1242$，空杯不能清晰要求$h < 24.9545$。两者取交集：

$$\boxed{9.12\,\mathrm{cm} \leqslant h < 24.95\,\mathrm{cm}}.$$

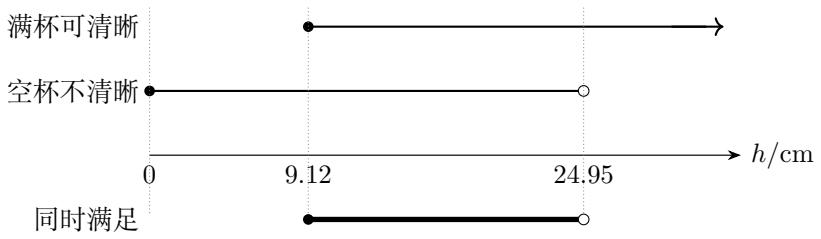


图 4.15: 调焦条件的交集；实心端点计入，空心端点不计入，右向射线继续延伸

将具体眼位代入两个调焦条件

在$h = 10.0\,\mathrm{cm}$ 时，$\ell_a = 10.0455\,\mathrm{cm} < D$，$\ell_w = 25.8758\,\mathrm{cm} > D$，因此落在图 4.15 的交集内。

眼睛的调节与通光

像的位置与眼位共同确定观察距离，应将它们先合并，再施加眼睛的调焦条件。25 cm 在这里是题设给定的最近清晰距离。对其他眼睛和观察位置，应重新代入相应的近点、远点；通光孔径和侧壁遮挡也可能影响实际观察。

例 4.3 (凸面镀银的平凸透镜)**.** 空气中一薄平凸透镜的折射率$n = 1.5$，平行光通过它后会聚在$f = 48\,\mathrm{cm}$ 处。现将凸面镀银，光从平面一侧入射，物位于平面前12 cm。求最终像的位置、实虚和横向放大率。

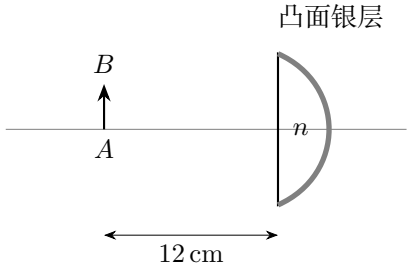


图 4.16: 这次银层在凸面；光从左侧平面进入玻璃后再反射

解　从原透镜焦距还原球面半径，求玻璃内等效物点

先由未镀银的薄透镜求球面半径：$f = R/(n-1)$，所以$R = 24\,\mathrm{cm}$。图 4.16 的入射面是平面，光由空气进入玻璃后，来自物点的发散光在玻璃内相当于来自距平面$nu = 18\,\mathrm{cm}$ 的虚像点。

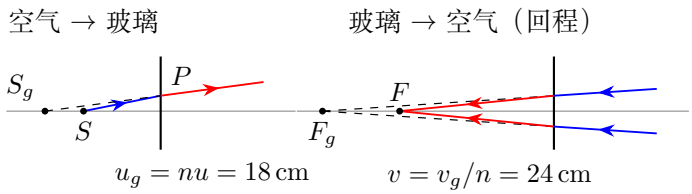


图 4.17: 两次平面折射的光束不同：先将空气物点化为玻璃内等效位置，回程再将玻璃中的会聚目标折到空气中

图 4.17 左侧的 S_g 是第一次折射后发散束的反向交点。右侧是回程：光朝 F_g 会聚，先遇到平面，所以 F_g 是回程折射的虚物。

在玻璃中按球面镜计算回程会聚距离

薄镜极限中凸面银层与平面顶点重合。对玻璃内的反射，银层从入射侧看是凹面镜，几何焦距$R/2 = 12\,\mathrm{cm}$。故玻璃内回程会聚距离v_g 为

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{v_g} = \frac{2}{24}, \qquad v_g = 36\,\mathrm{cm}.$$

把回程目标作平面折射的虚物，求空气实像

返回光通过玻璃到空气的平面时，这个会聚目标是平面折射的虚物，$u_s = -v_g$。因此

$$\frac{n}{-v_g} + \frac{1}{v} = 0, \qquad \boxed{v = \frac{v_g}{n} = 24\,\mathrm{cm}}.$$

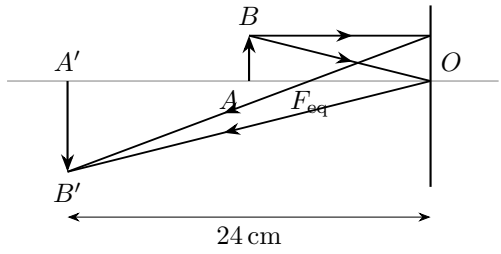


图 4.18: 最终光线在左侧实际相交；图按等效凹镜绘制，焦距为8 cm

末像位置与三次放大

图 4.18 中的像在平面前24 cm，是倒立放大实像。两次平面折射的横向放大率均为+1，玻璃内球面镜放大率为$-v_g/(nu) = -2$，所以$\boxed{\beta = -2}$。

用等效反射关系检查银层位置的影响

把三段式合并还得到

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{2n}{R},\qquad f_{\mathrm{eq}}=\frac{R}{2n}=8\,\mathrm{cm}.$$

这与平面镀银的平凸透镜不同：银层位置决定了光实际经历哪些折射面。计算时应按图中的界面顺序列式。

例 4.4 (方格纸的两个自成像位置)**.** 凸透镜后方$L=4\,\mathrm{cm}$ 处有一平面镜，且$L>f$。透镜前的方格纸沿轴移动，在相距$l=9\,\mathrm{cm}$ 的两个位置，纸面都能承接自身经该系统形成的清晰像。求透镜焦距。

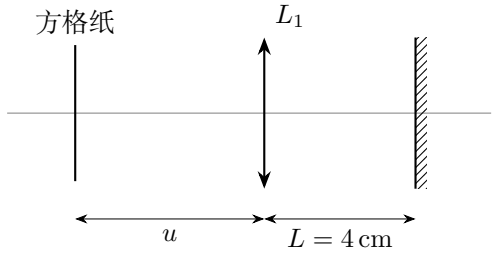


图 4.19: 纸面既是物平面也是接像屏；两次透镜成像之间有一次平面反射

解　识别前焦平面产生的第一种自成像

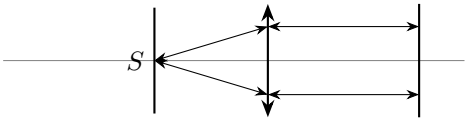
图 4.19 有两个不同的自成像条件。第一种是纸在透镜前焦平面，$u_1=f$：透镜后光束平行，平面镜反射后再次经透镜，返回前焦平面。

识别中间像落在平面镜上的第二种自成像

第二种是第一次透镜像恰在平面镜上，$v_1=L$。平面镜关于自身平面对该像点的映射不改变其位置，回程透镜把它重新成像到纸上。因此

$$\frac{1}{u_2}+\frac{1}{L}=\frac{1}{f},\qquad u_2=\frac{fL}{L-f}>f.$$

甲：$u_1 = f$



乙：$v_1 = L$

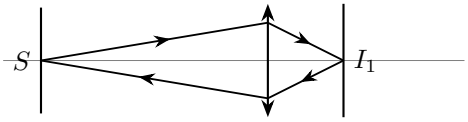


图 4.20: 轴上物点的两种往返光路；甲中双向箭头表示重合的去、回光线，乙中光在镜面交叉

把两个位置之差化为焦距方程并筛选正根

由图 4.20 的两条件，纸面间距为

$$l = u_2 - u_1 = \frac{f^2}{L - f} = 9\,\mathrm{cm}.$$

统一以厘米计算，$f^2+9f-36=0$，因式分解为 $(f-3)(f+12)=0$，两根为$3, -12$。凸透镜要求$f>0$，并须满足$f<L=4$，故

$$\boxed{f = 3\,\mathrm{cm}}, \qquad u_1 = 3\,\mathrm{cm}, \quad u_2 = 12\,\mathrm{cm}.$$

还可检查是否遗漏其他位置。

往返光路的全部解

把平面反射展开，两次透镜间的传播长度为$2L$，令$P(a) = \left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$、$T = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ -1/f & 1\end{smallmatrix}\right)$，往返矩阵为$P(u)TP(2L)TP(u)$。先算 $P(2L)T = \left(\begin{smallmatrix}1-2L/f & 2L\\ -1/f & 1\end{smallmatrix}\right)$，再左乘 T，得

$$S = TP(2L)T = \begin{pmatrix} 1 - 2L/f & 2L \\ 2(L-f)/f^2 & 1 - 2L/f \end{pmatrix}.$$

补上两端的 $P(u)$ 后，右上元依次为

$$\begin{aligned} B &= (1 - 2L/f)u + 2L + u[2(L-f)u/f^2 + 1 - 2L/f] \\ &= 2L + 2u(1 - 2L/f) + 2(L-f)u^2/f^2 \\ &= \frac{2(f-u)\,[fL + fu - Lu]}{f^2}. \end{aligned}$$

成像要求 $B=0$，这两个根正好对应图中的两条往返光路。第一个位置的横向放大率为 -1，第二个位置为 $+1$。

例 4.5（玻璃板上方透镜使像回到物点）. 一水平平行玻璃板厚$t = 3.0\,\mathrm{cm}$，折射率$n = 1.5$。小物S 在下表面下方$s = 2.0\,\mathrm{cm}$ 处，上方有焦距$f = 30\,\mathrm{cm}$ 的薄凸透镜，主轴竖直且通过S。从透镜上方观察，最终像恰在S 处。求透镜到玻璃板上表面的距离a。

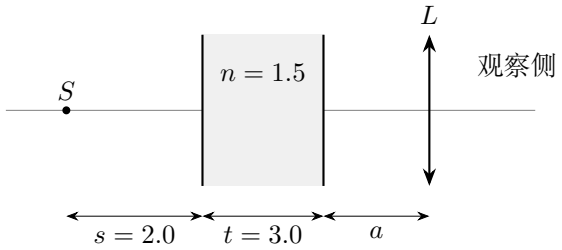


图 4.21: 图将竖直光轴横放，向右对应实际向上；透镜接收已通过玻璃板的光

解　先求平行板造成的表观轴向移动

图 4.21 的平板使S 向观察侧的表观移动量为

$$\delta = t\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.0\,\mathrm{cm}.$$

从实际光束确定透镜物距和最终虚像距

设平板后的空气中，光线反向延长相交于S_1，则透镜的实际入射光相当于从S_1 发出。透镜物距与S 到透镜的几何距离分别为

$$u = a + s + \frac{t}{n} = a + 4, \qquad \ell = a + s + t = a + 5$$

（长度单位均为厘米）。最终像须在透镜的入射侧S，故像距应取$v = -\ell$。透镜式给出

$$\frac{1}{a+4} - \frac{1}{a+5} = \frac{1}{30} \quad \Longrightarrow \quad (a+4)(a+5) = 30.$$

展开为 $a^2 + 9a - 10 = 0$，因式分解为 $(a-1)(a+10) = 0$，故根为$a = 1\,\mathrm{cm}$ 或$-10\,\mathrm{cm}$。

筛选允许的透镜位置

透镜在板上方要求$a \geq 0$，故

$$\boxed{a = 1.0\,\mathrm{cm}}.$$

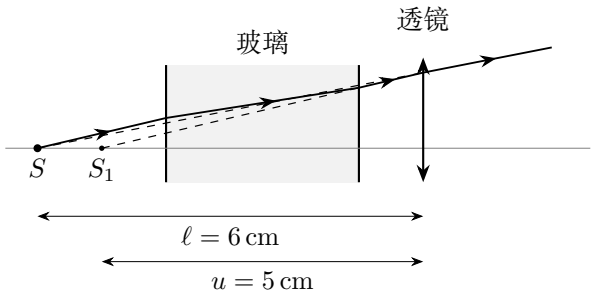


图 4.22: 平板后延长线交于S_1，透镜后延长线交回S；光线高度放大示意

用各段斜率与像距代回检查方向和尺寸

图 4.22 中，玻璃内斜率是空气内的 $1/n$。出射光平行于入射线，反向延长线指向 S_1；透镜把这束光的发散角减小，虚像移回 S。此时透镜的横向放大率为 $-v/u = 6/5$。

例 4.6 (全反射棱镜与正负透镜组合)**.** 直角等腰棱镜折射率$n = 1.5$，两直角边均长6 cm。小物AB 在上直角面上方6 cm，中心近轴光在棱镜中被斜面折转90° 后从右直角面出射。右面外10 cm 处放焦距$f_1 = +10\,\mathrm{cm}$ 的凸透镜；其右侧15 cm 处放焦距$f_2 = -10\,\mathrm{cm}$ 的凹透镜。求最终像的位置和放大率。取足够窄的近轴光束，使斜面反射均满足全反射条件。

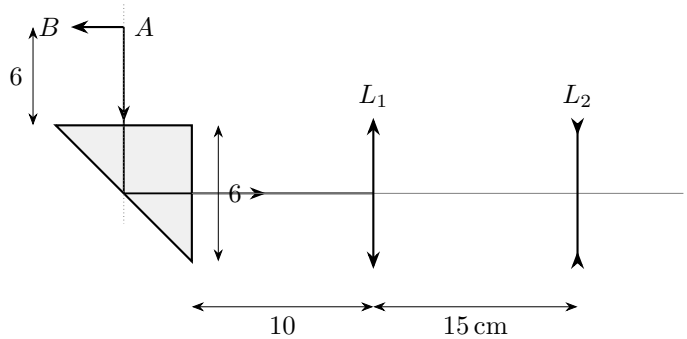


图 4.23: 中心光在斜面反射，玻璃内两段长度之和为6 cm；距离示意

解　展开棱镜折线，按约化长度求第一镜物距

图 4.23 中，把斜面反射后的区域关于斜面展开，入射面与出射面成为等效平行面。中心光在玻璃内的总路程为6 cm，其近轴传播对后续空气中成像距离的贡献为$6/n = 4\,\mathrm{cm}$。所以第一镜接收的等效物距为

$$u_1 = 6 + \frac{6}{1.5} + 10 = 20\,\mathrm{cm}.$$

展开图中，玻璃内的高度增量是空气中同样长度的 $1/n$。所以在计算 L_1 的物距时，图上的 $6.00\,\mathrm{cm}$ 玻璃段贡献 $6/n\,\mathrm{cm}$。

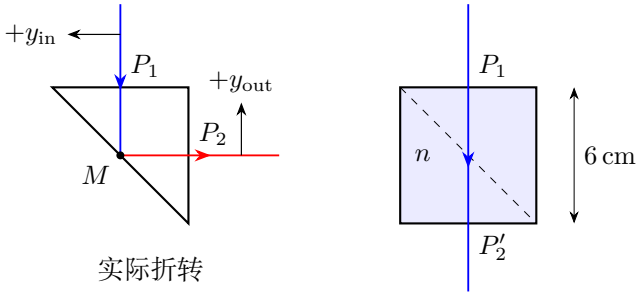


图 4.24: 棱镜折线展开成平行板中的直线段；入射横向的左方向经反射对应出射横向的上方向

图 4.24 中，反射把出射面映成 P_2' 所在的平面，两段玻璃路程合并为 $P_1P_2' = 6\,\mathrm{cm}$。接入第一镜的物距时，空气段保持几何长度，玻璃段才除以 n；横向坐标随反射一起展开，大小保持不变。

计算第一镜中间像与横向放大率

第一镜成像为

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{10}, \qquad v_1 = 20\,\mathrm{cm}, \qquad \beta_1 = -1.$$

辨认第二镜的虚物并求最终会聚位置

它的会聚目标I_1 位于第二镜后$5\,\mathrm{cm}$。第二镜截获的是尚未会聚的光束，因此$u_2 = 15 - v_1 = -5\,\mathrm{cm}$，是虚物，而凹透镜焦距为$-10\,\mathrm{cm}$：

$$-\frac{1}{5} + \frac{1}{v_2} = -\frac{1}{10}, \qquad \boxed{v_2 = 10\,\mathrm{cm}}, \qquad \beta_2 = -\frac{v_2}{u_2} = +2.$$

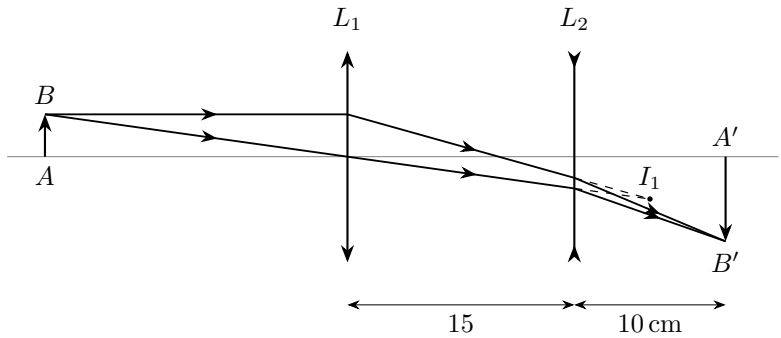


图 4.25: 展开后的两镜光路：虚线给出第一镜的会聚目标，第二镜把会聚位置推远

连乘放大率，并按折转后的横向坐标解释符号

图 4.25 中实际光线在$A'B'$ 会聚，故最终是凹透镜右侧10 cm 的实像。棱镜本身在随中心光转向的横向坐标中不改变一阶横向大小，所以

$$\boxed{\beta = \beta_1\beta_2 = -2}, \qquad |\beta| = 2.$$

图 4.24 规定入射束的正横向朝左，折转后正横向朝上。$\beta = -2$ 因而表示，入射轴左侧的 B 在出射轴下方成像，像高是原高度的两倍。

棱镜内的全反射条件

中心光以 45° 射到斜面，玻璃到空气的临界角为 $\theta_c = \arcsin(1/1.5) \simeq 41.81°$。在图 4.24 的轴截面内，若束内偏角小于 $45° - \theta_c \simeq 3.19°$，斜面上的入射角都大于临界角。

例 4.7 (固定物屏间的两个透镜位置)**.** 小光源位于焦距$f = 30\,\text{mm}$ 的薄凸透镜前40 mm。求接到清晰实像的屏位置和横向放大率。保持光源、光屏不动，透镜还可移至何处再次在屏上成清晰像？求第二位置的放大率。

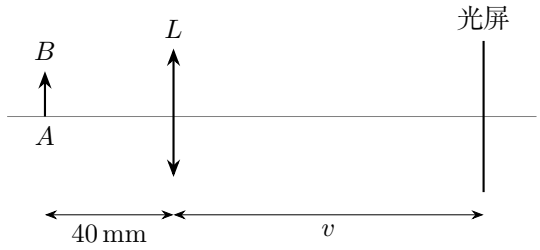


图 4.26: 物点与屏固定，先由第一透镜位置确定屏的位置

解　先由第一透镜位置确定屏距和横向放大率

图 4.26 中$u_1 = 40\,\mathrm{mm}$，因此

$$\frac{1}{40} + \frac{1}{v_1} = \frac{1}{30}, \qquad \boxed{v_1 = 120\,\mathrm{mm}}, \qquad \boxed{\beta_1 = -3}.$$

保留固定物屏总距，交换物像距求第二位置

屏在透镜后120 mm，物屏总距为$D = u_1 + v_1 = 160\,\mathrm{mm}$。物屏固定时$u+v = D$，而透镜式对$u, v$ 对称，交换二者仍然成像。第二位置为

$$\boxed{u_2 = 120\,\mathrm{mm}, \quad v_2 = 40\,\mathrm{mm}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{3}}.$$

透镜从原位置向屏移动80 mm。

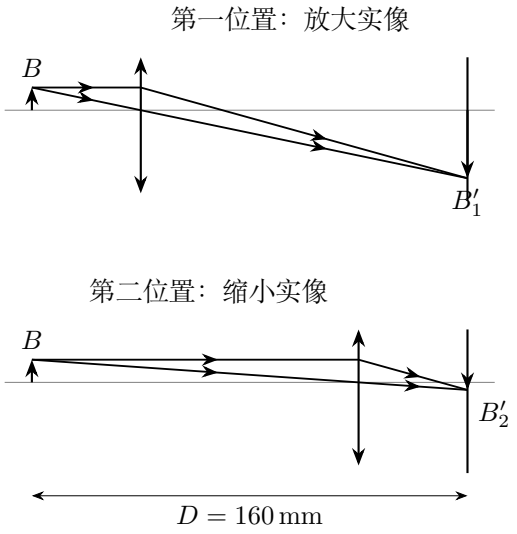


图 4.27: 同一物屏间的两套近轴光路；上下两图使用相同的横向比例

由二次方程检查两个位置的存在条件和位移法公式

图 4.27 中两次像都倒立，大小互为倒数，$\beta_1\beta_2 = 1$。若用代数检查，令$v = D - u$，则

$$u^2 - Du + fD = 0.$$

配方为 $(u - D/2)^2 = D^2/4 - fD$，故有两个不同的实透镜位置要求$D > 4f$。两根为 $u_\pm = [D \pm \sqrt{D^2 - 4fD}]/2$，相减得两位置间距$d = \sqrt{D(D-4f)}$。再把 $d^2 = D^2 - 4fD$ 移项并除以 $4D > 0$，得到位移法公式$f = (D^2 - d^2)/(4D)$，本题代入 $(160^2 - 80^2)/(4 \times 160)$ 确得30 mm。

例 4.8 (天文望远镜的放大率)**.** 开普勒望远镜由焦距$f_o > 0$ 的物镜和焦距$f_e > 0$ 的目镜组成，两镜间距为$f_o + f_e$。远处物体上一点发出的光在物镜处可看作与轴成小角α 的平行束。证明视角放大倍数为f_o/f_e，并说明像的正倒。

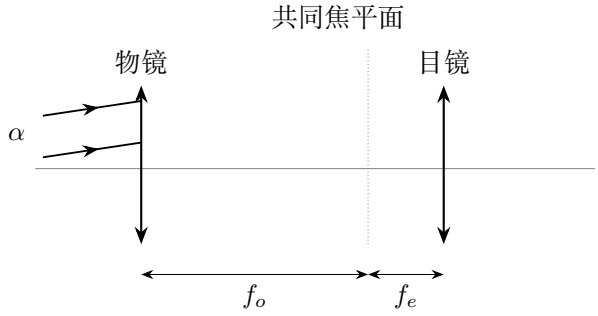


图 4.28: 物镜后焦平面与目镜前焦平面重合，末态为平行光束

解　把远物点的平行入射束成像到共同焦平面

对图 4.28 中的同一远物点，物镜把所有近轴入射光会聚于共同焦平面的B_1，像高为$h_1 = f_o \tan\alpha \approx f_o\alpha$。由$B_1$ 指向目镜光心O_e 的光线，斜率为$-h_1/f_e$。它通过薄透镜光心方向不变，因此也给出了整个出射平行束的有向倾角。

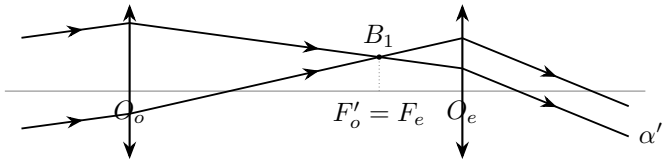


图 4.29: 两条出射线平行且倾角反向；图以$f_o : f_e = 3 : 1$ 示意近轴斜率关系

以目镜光心光线确定出射倾角和放大率

因此图 4.29 给出

$$\alpha' \approx -\frac{h_1}{f_e} = -\frac{f_o}{f_e}\alpha, \qquad \boxed{M = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_o}{f_e}}, \qquad \boxed{|M| = \frac{f_o}{f_e}}.$$

图 4.29 中的入射束向上倾斜，出射束向下倾斜。视角放大率取负号，表示观察到倒像；视角放大倍数取 f_o/f_e。

平行光束的出射方向

图 4.29 中，物镜的中间像 B_1 落在目镜前焦平面，从该点发散的光出射后便平行。调节两镜间距会移动中间像相对目镜焦平面的位置，也就改变眼睛所接收到的光束。

例 4.9 (玻璃棒制成无焦望远系统)**.** 空气中玻璃棒折射率$n = 1.5$，两端轴上顶点距离$L = 45\,\mathrm{cm}$，左端磨成半径$R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ 的凸球面。光从左向右传播。

1. 右端应磨成怎样的球面，才能使轴上平行入射光仍平行出射?
2. 若入射平行束与轴成带符号小角φ_1，求出射束的小角φ_2 与之的比值。

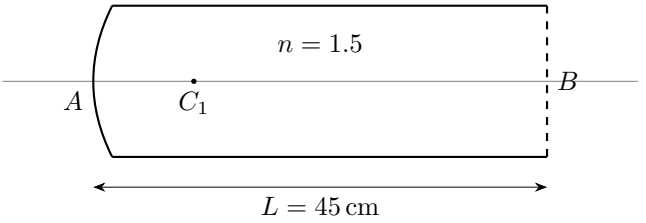


图 4.30: 左面球心C_1 在其右方；右端形状待定，L 是顶点间距

解　求第一球面的像方焦点，定位棒内交叉点

图 4.30 的第一面半径带符号为+10 cm，空气到玻璃的折射式给出

$$\frac{n}{AF} = \frac{n-1}{R_1}, \qquad \boxed{AF = \frac{nR_1}{n-1} = 30\,\mathrm{cm}}.$$

辨认右端面的实物，求所需曲率号

右端顶点B 位于45 cm，因此入射到右端面的光在到达之前已经越过F，相当于来自左侧距该面$BF = 15\,\mathrm{cm}$ 的实物点。要求出射平行，右端折射满足

$$\frac{1.5}{15} = \frac{1-1.5}{R_{2s}}, \qquad \boxed{R_{2s} = -5\,\mathrm{cm}}.$$

右端球心C_2 在顶点B 左侧5 cm，故从棒外右侧看是凸面，半径大小为5 cm。

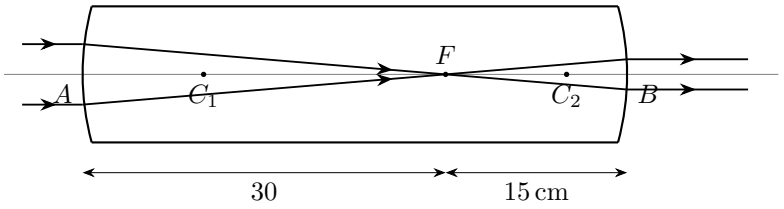


图 4.31: 轴上平行束在玻璃内交叉于F，再由右端面准直；按顶点平面近轴追迹，高度放大示意

选过第一顶点的斜光线，计算右端高度

在图 4.31 所确定的两曲面系统中，令入射线在A 处的高度为零、倾角为φ_1。第一次近轴折射使玻璃内倾角为φ_1/n，到右端顶点平面的高度为$y_B = L\varphi_1/n$。右面的光焦度

$$\Phi_2 = \frac{1-n}{R_{2s}} = 0.1\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

求第二次折射后的角放大率

约化倾角关系为$\varphi_2 = n(\varphi_1/n) - \Phi_2 y_B$，所以

$$\boxed{\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = 1 - \frac{\Phi_2 L}{n} = 1 - 3 = -2}.$$

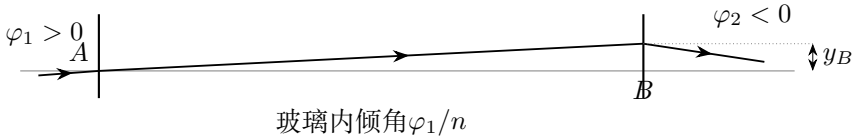


图 4.32: 过第一顶点的斜光线用于求角放大率；高度比例放大，倾角由公式定义

图 4.32 中的斜率关系说明，出射倾角反向且大小变为两倍。若只报视角放大倍数，则为2。

以完整矩阵同时检查平行出射与角放大率

该系统的约化角矩阵可独立写成

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.05 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 30 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

左下元为零保证同一方向的平行入射束仍平行出射；右下元给出角放大率-2，与选定光线的计算相同。在这一近轴模型下，整个玻璃棒是无焦光组。

例 4.10 (不同外界介质中的焦距与中心光线)**.** 一薄会聚透镜两侧介质折射率分别为n_1, n_2，物方、像方实焦点为F_1, F_2，到中心O 的距离为$f_1, f_2 > 0$。求：

1. 物距u、像距v 与两个焦距的关系；
2. 射向中心O 的傍轴入射线倾角为θ_1 时，出射倾角θ_2；
3. 两个焦距与两侧折射率之间的关系。

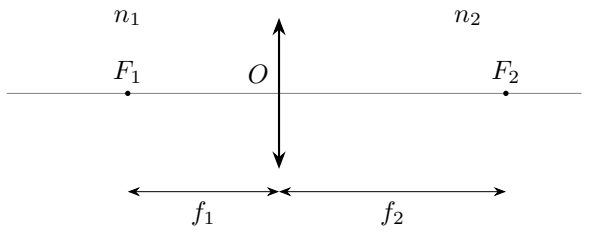


图 4.33: 会聚光组的两个实焦距分别从O 向两侧量取，二者通常不等

解　从两个无穷远条件分别定义两侧焦距

对图 4.33 的薄系统，光焦度为Φ，一般成像式为

$$\frac{n_1}{u} + \frac{n_2}{v} = \Phi.$$

当$v \to \infty$，有$u = f_1 = n_1/\Phi$；当$u \to \infty$，有$v = f_2 = n_2/\Phi$。因此

$$\boxed{\frac{f_1}{u} + \frac{f_2}{v} = 1}, \qquad \boxed{\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_2}{n_1}}.$$

以中心高度为零求两侧倾角的关系

在O 处高度为零，薄系统的$-\Phi y$ 项为零，故$n_2\theta_2 = n_1\theta_1$，即

$$\boxed{\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\theta_1 = \frac{f_1}{f_2}\theta_1}.$$

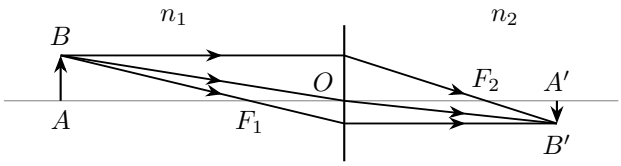


图 4.34: 不等介质中的中心线一般折转；三条辅助光线仍交于同一个像点

中心光线的折转与放大率

图 4.34 取 $n_2/n_1 = 3/2$。经过 O 的光线在右侧的倾角是左侧的 $2/3$，因此右侧光线在图中更接近主轴。由两段斜率还能得到横向放大率

$$\beta = -\frac{n_1 v}{n_2 u} = -\frac{f_1 v}{f_2 u}.$$

两侧介质相同时，$f_1 = f_2$、$\theta_1 = \theta_2$，才还原为常见的同焦距透镜式和中心光线方向不变的作图规则。

例 4.11 (锥面镜、球面镜与环形准直光)**.** 给定焦距为f 的凸透镜、母线与轴成45°的锥面反射镜，以及曲率半径为R、中央有入射圆孔的凹球面镜。设计同轴光路，把很细的实心圆柱入射光束变为圆柱形空心出射光束，空腔半径为$r > 0$。画出光路，并求锥面镜顶点S 到球面镜球心C 的距离x。采用细束极限，忽略束宽；凸透镜按理想近轴透镜处理，取$r/f \ll 1$。

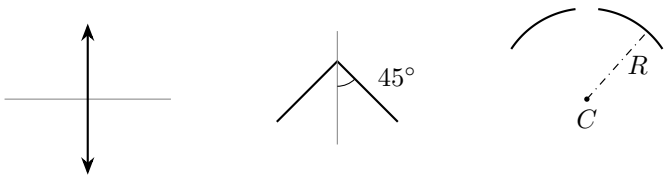


图 4.35: 三个给定元件；锥面角为母线与轴的夹角，球面镜中心孔供入射束通过

解　选定球面镜、锥镜与入射孔的同轴布置

根据图 4.35 给出的透镜、锥面镜与球面镜，令球心C 为原点，竖直向上为z 正向。凹球面镜在上方，反射面朝下；锥面镜顶点S 位于轴上$z = x > 0$，尖端朝上。入射光从球面镜中央小孔向下照到锥面，反射为近似径向外射的薄环形光。选取经球面镜后向下会聚于轴上Q 的支，再用透镜准直。

把球面反射的会聚目标作为透镜前焦点

将凸透镜放在Q 下方f 处。光线越过Q 后发散，到透镜时恰好是来自前焦点的光，出射平行于轴；绕轴旋转后得到空心圆柱。锥面镜只需截获很细的入射束，其底座和支架应避开返回的环形光。

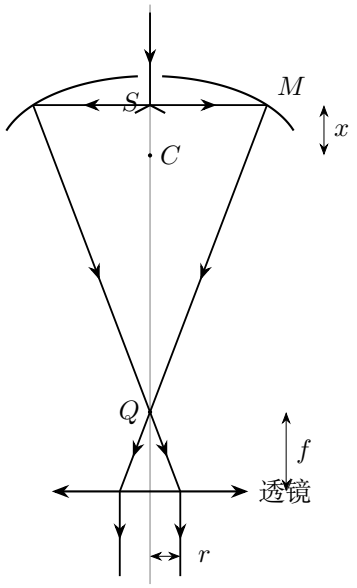


图 4.36: 一个可行的同轴方案；图取细束极限，把锥面反射区缩至S 附近

由交叉后的实际路径说明空心出射束

图 4.36 中的两条截面光线在Q 交叉，所以右侧球面反射的光最终从左侧半径r 处出射，左侧则相反。这个中途会聚点不妨碍末端光束为空心圆柱。

在实际球面点按精确法线求反射矢量

细束极限中可取$M=(\rho,x)$，$\rho^2+x^2=R^2$。图 4.37 的入射单位向量为径向$\boldsymbol{e}_\rho$，球面单位法线为$\boldsymbol{n}=(\rho,x)/R$。反射后的单位方向为

$$\boldsymbol{k}_{\text{out}}=\boldsymbol{e}_\rho-2(\boldsymbol{e}_\rho\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=\left(1-\frac{2\rho^2}{R^2},\ -\frac{2\rho x}{R^2}\right).$$

筛选向轴会聚的分支并求出射斜率

会聚支要求径向分量小于零，即$0<x<R/\sqrt{2}$。设出射光与向下轴向的锐角为θ，则

$$\tan\theta=\frac{R^2-2x^2}{2x\sqrt{R^2-x^2}}.$$

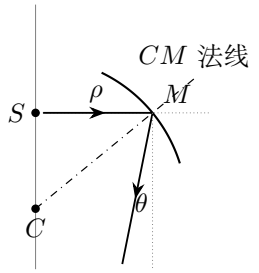


图 4.37: 球面法线为CM；入射光水平向外，出射光向下且向轴靠拢

用环半径连接透镜前焦点，解出锥镜顶点位置

末端透镜的前焦点为Q，光在透镜处的高度大小为r，所以在理想薄透镜模型内$\tan\theta = r/f$。令$x = R\sin\alpha$，$0 < \alpha < \pi/4$，则

$$\tan\theta = \cot 2\alpha = \frac{r}{f}, \qquad \boxed{x = R\sin\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{f}{r}\right)}.$$

等价地，

$$\boxed{x = R\sqrt{\frac{1 - r/\sqrt{f^2+r^2}}{2}}}.$$

为求小环半径近似，令 $\epsilon = r/f$、$\delta = \epsilon/\sqrt{1+\epsilon^2}$。有

$$\delta - \epsilon = -\frac{\epsilon^3}{\sqrt{1+\epsilon^2}(1+\sqrt{1+\epsilon^2})} = O(\epsilon^3).$$

而 $g(\delta) = \sqrt{1-\delta}$ 满足 $g(0) = 1$、$g'(\delta) = -\frac{1}{2}(1-\delta)^{-1/2}$、$g'(0) = -1/2$，故 $g(\delta) = 1 - \delta/2 + O(\delta^2)$。代回 $x = Rg(\delta)/\sqrt{2}$，在$r/f \ll 1$ 时得到$x \approx (R/\sqrt{2})(1 - r/(2f))$。反射点的径向坐标 ρ 约为 $R/\sqrt{2}$，球面反射用精确法线；$r/f \ll 1$ 用在末端透镜的准直计算中。

会聚点与透镜的相对位置

作为布置检查，由图 4.36 可得$z_Q = x - \rho f/r$，透镜位置$z_L = z_Q - f$。两者都在选定反射点下方，光能按所画次序传播。有限束宽会带来环宽和剩余像差；有限孔径、锥镜支架及中心孔还须留出实际通光空间。本题给出的是细束、理想透镜模型下的一种设计。

例 4.12 (开普勒望远镜的出瞳)**.** 空气中开普勒望远镜的物镜焦距为100 cm、直径为5.00 cm，目镜焦距为5.00 cm，两镜相距105 cm。设物镜为孔径光阑，其余元件不遮光，求出瞳位置和直径，并求它与视角放大率的关系。

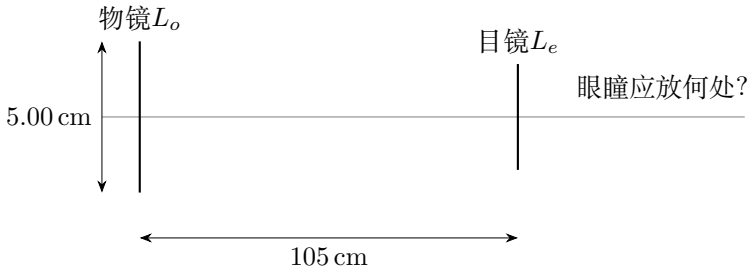


图 4.38: 出瞳是物镜孔径经目镜所成的像；这里求的是孔径的像

解　把物镜孔径作为目镜的物，求孔径像距

图 4.38 的孔径光阑就是物镜口径。它距目镜 $u_p = 105\,\mathrm{cm}$，以这个距离作为目镜的物距：

$$\frac{1}{105}+\frac{1}{v_p}=\frac{1}{5},\qquad \boxed{v_p = 5.25\,\mathrm{cm}},\qquad \beta_p = -\frac{5.25}{105} = -0.0500.$$

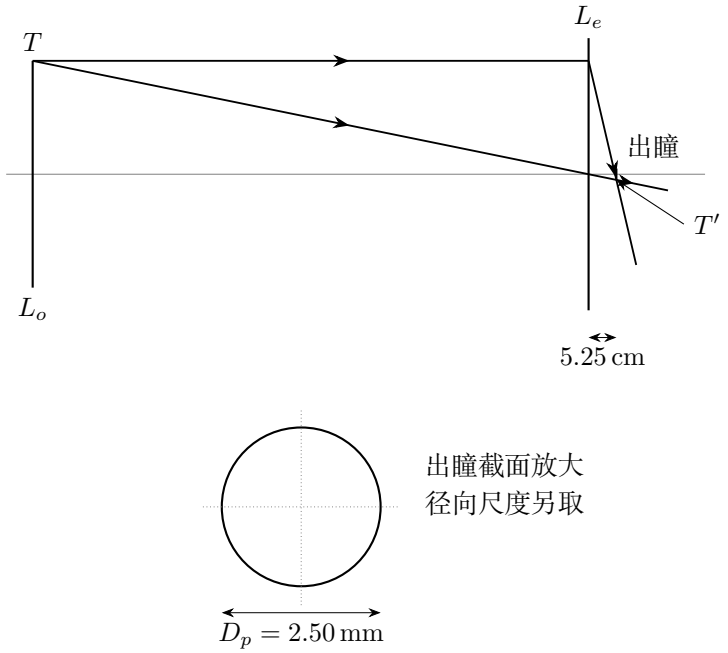


图 4.39: 上孔径边缘T 的两条光线在T' 相交；出瞳直径由孔径横向放大率求得

判断实出瞳，并按孔径横向放大率求直径

图 4.39 中T' 在目镜后，是实像点；整个孔径的像即为实出瞳。其直径为

$$\boxed{D_p = |\beta_p| D_o = 0.250\,\mathrm{cm} = 2.50\,\mathrm{mm}}.$$

出瞳直径与视角放大率

望远镜视角放大率$M = -f_o/f_e = -20$，所以

$$\boxed{D_p = \frac{D_o}{|M|}}.$$

图 4.39 下方放大了出瞳的圆形截面，直径为2.50 mm，径向尺度与上方光路另取。眼瞳放在目镜后约5.25 cm 的出瞳平面附近。

区分孔径截光与远物成像的正倒

眼瞳直径若小于 2.50 mm，即使放在出瞳平面上，也只接收这束光的中央部分。

例 4.13 (显微镜在近点观察时的严格调焦)**.** 简化显微镜物镜、目镜焦距为$f_o = 1.00\,\mathrm{cm}$、$f_e = 5.00\,\mathrm{cm}$，两镜间距固定为$d = 26.0\,\mathrm{cm}$。眼睛贴近目镜，明视距离$D = 25.0\,\mathrm{cm}$。求最终像在近点时的物距及总视角放大率，并与最终像在无穷远时比较。忽略眼睛到目镜的间隔。

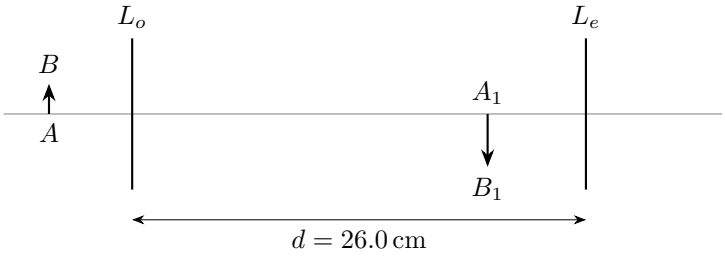


图 4.40: 先确定目镜物面A_1B_1，再由固定镜距反求物镜物距

解　从最终近点虚像反求目镜物距

以图 4.40 中最终虚像在目镜左侧D 处为条件，$v_e = -D$。由目镜公式得

$$u_e = \frac{f_e D}{D + f_e} = \frac{25}{6}\,\mathrm{cm}.$$

按固定镜距确定物镜像距、物距与横向放大率

物镜必须把像成在该物面，故

$$v_o = d - u_e = \frac{131}{6}\,\mathrm{cm},$$
$$u_o = \frac{f_o v_o}{v_o - f_o} = \boxed{\frac{131}{125}\,\mathrm{cm} = 1.048\,\mathrm{cm}},$$
$$\beta_o = -\frac{v_o}{u_o} = -\frac{125}{6}.$$

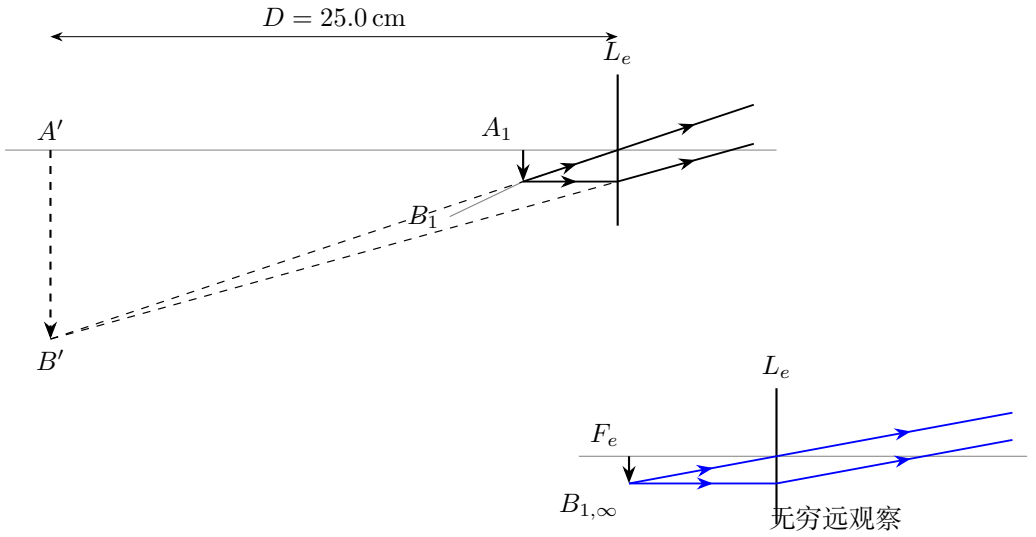


图 4.41: 上图为近点调焦，下图为无穷远调焦。近点的虚像由发散光的反向延长线确定。

由眼处视角与裸眼参照角计算总放大率

图 4.41 中示意取物高$h = 0.020\,\mathrm{cm}$，则中间像高$-0.4167\,\mathrm{cm}$、最终虚像高$-2.50\,\mathrm{cm}$。两条延长线确在同一B' 相交。按裸眼在D 处观察同一物体的视角h/D 比较，

$$M = \beta_o \frac{D}{u_e} = -\frac{125}{6} \times 6 = \boxed{-125}.$$

重新计算放松观察的物距与放大率

图 4.41 下方画出放松观察时的光路。中间像在目镜前焦平面，故 $u_e = f_e = 5.00\,\mathrm{cm}$，$v_o = 26.0 - 5.00 = 21.0\,\mathrm{cm}$。

$$\boxed{u_{o,\infty} = \frac{21}{20} = 1.050\,\mathrm{cm}}, \qquad \boxed{M_\infty = -20 \times \frac{25}{5} = -100}.$$

两种调焦下的物镜放大率

由无穷远调到近点时，u_e 由 5.00 cm 减到 25/6 cm，中间像向目镜移动。固定镜距下，物体向物镜移近 0.002 cm，物镜的线放大倍数也从 20 增至 125/6。

4.4 本讲小结

组合成像沿实际经过的各个界面逐段量距。平行板对近轴光线的高度传递等效于空气中的 t/n，沿法线的光程为 nt。往返系统在去程、回程各经过透镜一次，银层所在的表面决定折射与反射的次序。

清晰观察与视角放大是不同的条件。先求最终像的坐标，再从眼位量观察距离，并按实际近点和远点判断调焦。视角放大率以同一物体在约定比较距离处的裸眼视角为基准；若实际近点不同，或眼睛与目镜有间隔，应把这些距离分别写入几何关系。

望远镜的无焦条件连接物镜后焦平面与目镜物方焦平面，角放大率的符号由实际出射倾角决定。开普勒式在两镜间形成真实中间像，伽利略式以负目镜接收尚未完成会聚的虚物。显微镜先由物镜作横向放大，再由目镜作视角放大；固定镜距下改变最终观察状态，还会改变物镜的物距与放大率。

出瞳是孔径光阑经后续光组所成的像。出瞳和眼瞳的相对位置与大小决定哪些光束进入眼睛。空心准直光束的设计先由球面法线求反射方向，再在会聚点之后放置透镜，把发散的环形光束折成平行光。

4.5 练习

练习 4.1 (放大镜的近点观察)**.** 薄凸透镜焦距$f = 5.00\,\mathrm{cm}$，眼睛紧贴透镜，明视距离$D = 25.0\,\mathrm{cm}$。求最终虚像在近点时的物距和视角放大率，再与最终像在无穷远时比较。忽略眼与镜之间的间隔。

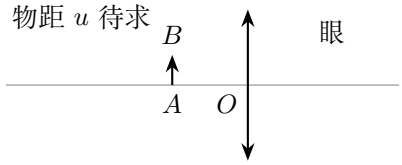


图 4.42: 练习：放大镜的近点观察

练习 4.2 (焦平面上的物体往返成像)**.** 薄凸透镜焦距$f = 10.0\,\mathrm{cm}$，其后20.0 cm 处放垂直主轴的平面镜。小物放在透镜前焦平面。求光两次通过透镜后的像位置及横向放大率。忽略元件厚度。

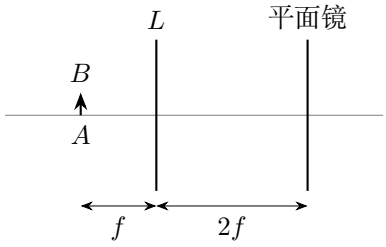


图 4.43: 练习：焦平面上的物体往返成像

练习 4.3 (伽利略望远镜的无焦条件)**.** 伽利略望远镜的物镜焦距$f_o = +30.0\,\mathrm{cm}$，目镜焦距$f_e = -5.00\,\mathrm{cm}$。求观察无穷远目标、出射光平行时的镜间距和视角放大率，并说明像的正倒。

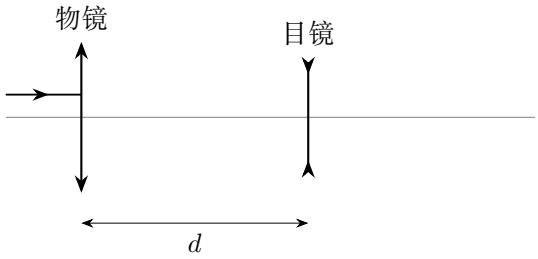


图 4.44: 练习：伽利略望远镜的无焦条件

练习 4.4 (望远镜的孔径与观察位置)**.** 开普勒望远镜物镜焦距 $f_o = 20.0\,\mathrm{cm}$、直径 $D_o = 4.00\,\mathrm{cm}$，目镜焦距 $f_e = 5.00\,\mathrm{cm}$，镜间距为 $25.0\,\mathrm{cm}$。目镜通光直径足够大，忽略镜框及衍射。求轴上观察时出瞳的位置和直径、视角放大率。若直径 $0.800\,\mathrm{cm}$ 的眼瞳准确放在出瞳平面并与轴同心，求有效入射口径，以及相对整个出射光束被接收的光通量比例；入射照度均匀。

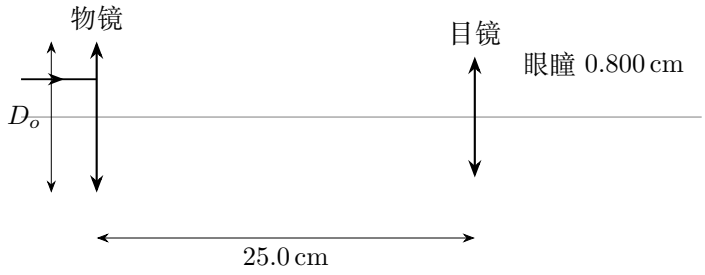


图 4.45: 物镜口径和两镜焦距已知，眼睛的合适位置待求

练习 4.5 (固定镜筒的两种观察状态)**.** 复合显微镜的物镜焦距 $f_o = 1.00\,\mathrm{cm}$，目镜焦距 $f_e = 5.00\,\mathrm{cm}$，两镜相距 $L = 18.0\,\mathrm{cm}$。眼睛紧贴目镜，明视距离 $D = 25.0\,\mathrm{cm}$。先使最终像在无穷远，再移动物体使最终虚像位于近点，两透镜位置保持不变。求物体应移动的方向和距离，并比较两种状态相对于裸眼在明视距离观察同一物体的视角放大率。忽略元件厚度。

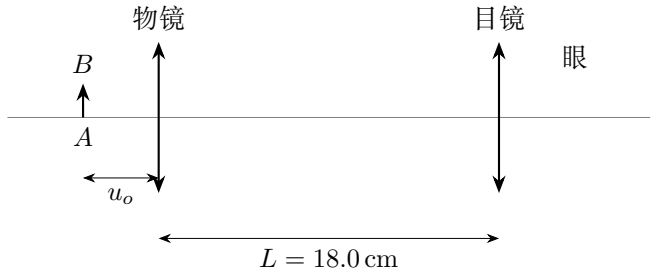


图 4.46: 镜筒长度固定，仅物体沿轴移动

练习解答

练习 4.1

解　由近点位置确定负像距并求物距

图 4.42 中眼睛贴近镜片，近点虚像在透镜左侧25.0 cm 处，故$v=-25.0\,\mathrm{cm}$。

$$\frac{1}{u}-\frac{1}{25}=\frac{1}{5}\Rightarrow\boxed{u=\frac{25}{6}\,\mathrm{cm}=4.17\,\mathrm{cm}}.$$

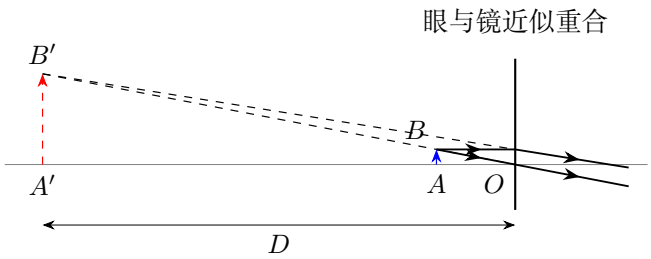


图 4.47: 练习 4.1 的解答图：放大镜的近点虚像；横纵尺度不同，两条实际出射线的反向延长线相交

在眼处比较经镜视角和裸眼参照角

题设忽略眼、镜间隔，故图 4.47 中的光心O 也作为眼的位置。裸眼把同一高度h 的物体放在明视距离D 处，参考视角约为h/D；经镜后沿过光心的光线看去，视角约为h/u，所以

$$\boxed{M_D=\frac{D}{u}=6.00}.$$

图 4.47 中两条实际出射线发散，其反向延长线在B' 相交，像正立。

重新确定物面，比较近点与放松观察

若改为无穷远观察，$u=f=5.00\,\mathrm{cm}$，$M_\infty=D/f=5.00$。近点观察时，虚像到眼的距离与裸眼参照距离都是 D，所以放大倍数等于横向放大率 D/u。无穷远观察时，则按出射方向的倾角 h/f 来比较。

练习 4.2

解　先由前焦平面判断去程的平行光束

图 4.43 中$u=f$，第一次经过透镜后同一物点的出射光互相平行。平面镜使轴向传播方向反转，再经透镜后会聚回前焦平面。轴上点 A 的像仍在轴上。取其上方的点 $B=(-f,h)$，从该点画出两条光线，求像高的符号。

追迹离轴点的一条完整往返路径

图 4.48 中，黑线以高度 h 平行于主轴进入透镜。第一次折射后，倾角为 $-h/f$，故在距透镜 $2f$ 的镜面上高度为 $h+2f(-h/f)=-h$。反射后沿向左方向计路程，斜率仍为 $-h/f$，返回透镜时高度为 $-3h$。第二次通过透镜时，向左的出射倾角和到达焦面的高度依次为

$$\theta_{\text{out}}=-\frac{h}{f}-\frac{-3h}{f}=\frac{2h}{f},\qquad y_{\text{image}}=-3h+f\theta_{\text{out}}=-h.$$

另一条光线怎样到达像面

蓝线从光心进入，初次折射后的斜率也是 $-h/f$，往返 $4f$ 后到达高度 $-4h$，再折转为 $3h/f$，在焦平面的高度仍为 $-h$。两条光线在 B' 相交。实像在透镜左侧 $f=10.0\,\text{cm}$，倒立等大，$\boxed{\beta=-1}$。

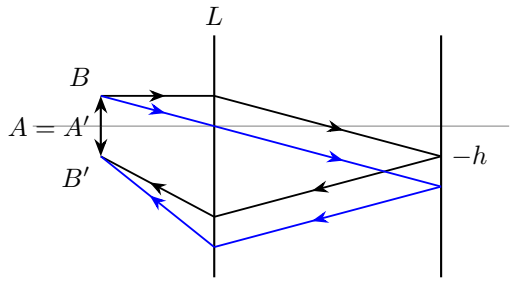


图 4.48: 两条独立光线均在同一 B' 相交；黑线返回透镜时高度为 $-3h$，图中高度放大示意

练习 4.3

解　把物镜的会聚平面作为负目镜的虚物平面

按图 4.44 传播顺序，物镜原本会在其右侧30.0 cm 处会聚。将负目镜放在此点之前5.00 cm，入射会聚束经目镜恰变为平行束，所以

$$\boxed{d=f_o+f_e=25.0\,\text{cm}},\qquad \boxed{M=-\frac{f_o}{f_e}=+6.00}.$$

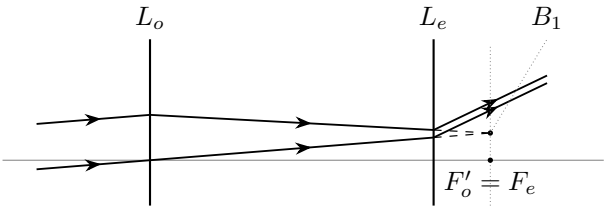


图 4.49: 练习 4.3 的解答图：高度放大示意；两条出射线平行，虚线指向物镜单独的会聚目标

分清轴上焦点和离轴目标，检查出射平行

图 4.49 中，轴上的共同焦点为 $F_o' = F_e$；所画斜入射束的单独会聚目标是同一焦平面内的离轴点 B_1。目镜在会聚前截获光束，所受虚物距为 $u_e = -5.00\,\mathrm{cm}$，所以

$$\frac{1}{v_e} = \frac{1}{f_e} - \frac{1}{u_e} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 0.$$

由两侧有向倾角求正视角放大率

这从成像式检查了平行出射条件。对小入射倾角 α，中间像高 $h_1 = f_o\alpha$，出射倾角 $\alpha' = -h_1/f_e = +6\alpha$；因此像正立。把镜距写成 $f_o + |f_e|$ 会破坏共同焦平面的衔接。

练习 4.4

解　把物镜孔径作为目镜的成像对象

出瞳是物镜孔径经目镜所成的像，量距起点在图 4.45 的目镜。物距为 $25.0\,\mathrm{cm}$，所以

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{v_p} = \frac{1}{5}, \qquad \boxed{v_p = 6.25\,\mathrm{cm}}.$$

孔径像的横向放大率为 $-v_p/25 = -1/4$，故出瞳直径 $\boxed{D_p = 1.00\,\mathrm{cm}}$。它是位于目镜后 $6.25\,\mathrm{cm}$ 的实像；正常观察时眼睛应靠近这个平面。

区分方向放大与光束口径

物镜把无穷远目标成像在共同焦平面，因此 $M = -f_o/f_e = \boxed{-4}$，像倒立。图 4.50 左侧另画出物镜口径经目镜所成的出瞳，用于确定眼的位置。

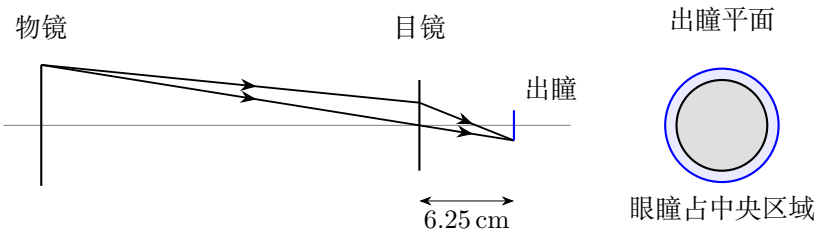


图 4.50: 左图追踪物镜上缘的孔径像；右图比较同心出瞳和眼瞳

将眼瞳限制折回物方并计算面积比

图 4.50 右图中眼瞳直径小于出瞳，接收中央直径比例 $0.800/1.00 = 0.800$ 的光束。因此有效物镜口径

$$\boxed{D_{\text{eff}} = 0.800 D_o = 3.20\,\text{cm}}.$$

均匀照度下通量按圆面积变化，接收比例为

$$\boxed{\eta = (0.800/1.00)^2 = 0.640}.$$

这里只改变轴上接收光量，近轴视角放大率仍为 -4。眼睛若偏离出瞳平面或横向偏心，还会出现不同的遮光条件，不属于上述同心面积比模型。

练习 4.5

解　由无穷远观察确定第一次物距

图 4.46 中镜距固定。最终像在无穷远时，中间实像必须落在目镜前焦平面，故物镜像距为 $v_{o\infty} = L - f_e = 13.0\,\text{cm}$。由物镜公式，

$$u_{o\infty} = \frac{f_o v_{o\infty}}{v_{o\infty} - f_o} = \frac{13}{12}\,\text{cm}, \qquad \beta_{o\infty} = -\frac{v_{o\infty}}{u_{o\infty}} = -12.$$

目镜的视角放大率为 $D/f_e = 5$，总放大率 $\boxed{M_\infty = -60}$。

从近点虚像反求新的中间像位置

近点虚像的目镜像距为 $v_{eD} = -25.0\,\text{cm}$，所以

$$\frac{1}{u_{eD}} - \frac{1}{25} = \frac{1}{5}, \qquad u_{eD} = \frac{25}{6}\,\text{cm}.$$

图 4.51 显示，中间像向目镜靠近，新的物镜像距为 $v_{oD} = 18 - 25/6 = 83/6\,\text{cm}$，对应

$$u_{oD} = \frac{83/6}{83/6 - 1} = \frac{83}{77}\,\text{cm}.$$

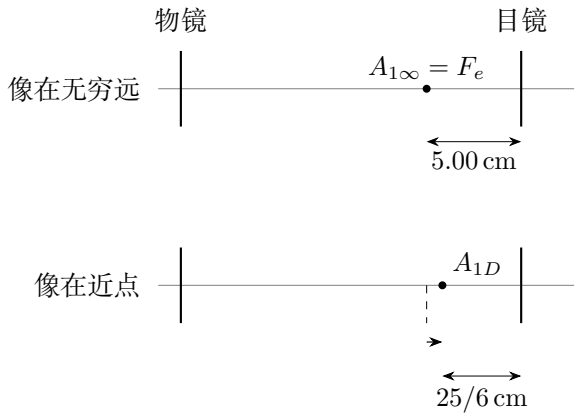


图 4.51: 同一镜距下，近点观察要求中间像从前焦平面向目镜移动

求物体位移及新的视角放大率

物距变化为

$$\Delta u_o = \frac{83}{77} - \frac{13}{12} = -\frac{5}{924}\,\mathrm{cm} \simeq -0.0541\,\mathrm{mm}.$$

因此物体向物镜移动约 0.0541 mm。新的物镜放大率为 $\beta_{oD} = -77/6$，目镜近点视角放大率为 $1 + D/f_e = 6$，故

$$\boxed{M_D = -77}.$$

图 4.51 中，调到近点后中间像向右移，物镜像距增大，物体向物镜焦点靠近。总视角放大倍数从 60 增到 77，两次均看到倒像。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第五讲

波动光学与光电效应

2026

目录

第五讲　波动光学与光电效应 **1**

5.1　波前、相位与叠加 1

5.2　双缝干涉与薄膜干涉 4

5.3　衍射、偏振与旋光 9

5.4　光子与光电效应 15

5.5　物质结构与模型的层次 19

5.6　例题与分析 20

5.7　本讲小结 46

5.8　练习 47

练习解答 51

第五讲　波动光学与光电效应

5.1　波前、相位与叠加

5.1.1　惠更斯原理与光程

第一讲用子波的包络确定新波前。现在让两束光到达同一个观察点，明暗取决于它们到达时的振幅与相位。两束光在该点同相时振动加强，反相时振动减弱；下面从各段光路求出相位差。

图 5.1 中，旧波前上各点发出的子波在 Δt 内前进 $c\Delta t/n$。新波前是它们的公共切面。计算屏上亮度时，还要知道各子波在同一观察点怎样叠加。

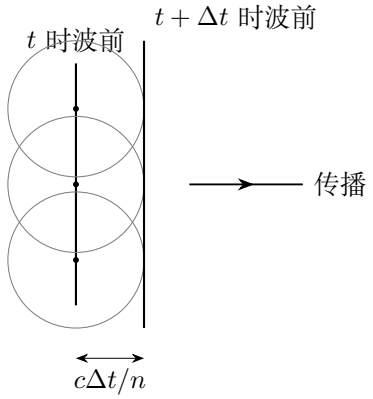


图 5.1: 相同传播时间对应相同的子波半径

真空波长记为λ_0，在折射率为n 的介质中，频率不变、波长为$\lambda = \lambda_0/n$。沿路径Γ 的光程与传播相位为

$$\mathcal{L} = \int_\Gamma n \, \mathrm{d}s, \qquad \phi_{\mathrm{prop}} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\mathcal{L}.$$

两束光走过不同介质时，先按各段折射率加权求光程，再将光程差换成相位差。界面引起的相移另加在总相位差中。

5.1.2　由各子波的相位求合振幅

惠更斯作图用包络面找下一时刻的波前。要算明暗，则要叠加各子波的复振幅。图 5.2 中，取波面上一小面元 $\mathrm{d}S$，其振幅为 $A(Q)$，到观察点 P 的距离为 r，它贡献的复振幅写成

$$\mathrm{d}\mathcal{E}(P) \;\propto\; A(Q)\,\frac{K(\theta)}{r}\exp\!\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{\lambda_0}\mathcal{L}_{QP}\right)\mathrm{d}S.$$

其中$\mathcal{L}_{QP}=\int_Q^P n\,\mathrm{d}s$，均匀介质内为$nr$；$K(\theta)$ 为倾斜因子，θ 是面元法线与QP 的夹角。此式采用标量衍射近似，整体比例因子须由所用积分公式确定。

四个量各有作用：$\mathrm{d}S$ 决定面元的贡献大小；$1/r$ 表示子波球面扩展时振幅衰减；光程决定传播相位；$K(\theta)$ 反映子波的方向性。同一等相位波面上，出发相位相同，面元入射振幅则未必处处相等。

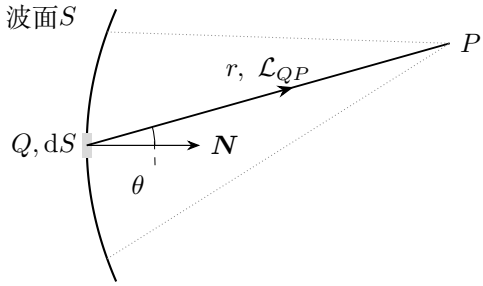


图 5.2: 把波面分成面元，再在P 点叠加复振幅

图 5.2 中各面元到P 的光程不同，因而相位不同。总复振幅与强度分别为

$$\mathcal{E}(P)=\int_S \mathrm{d}\mathcal{E}(P),\qquad I(P)\propto|\mathcal{E}(P)|^2.$$

总强度取决于合振幅的平方，因此含有来自不同面元的交叉项。下面用两束光把这个交叉项写出来。

5.1.3　稳定干涉的条件

在同一观察点，先把两束光的电场相加，再对电场平方作时间平均。若两束光同频、同偏振，复振幅可写成 A_1 与 $A_2e^{i\Delta\phi}$，其中 $A_1,A_2\ge 0$。图 5.3 把它们画在复平面上，斜边的长度给出合振幅：

$$|A_1+A_2e^{i\Delta\phi}|^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\phi.$$

相同介质中 $I_j\propto A_j^2$，所以

$$\boxed{I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\phi}.$$

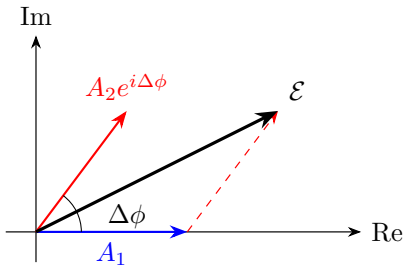


图 5.3: 两路复振幅在复平面上相加，夹角为相位差 $\Delta\phi$。

稳定条纹要求相位差在观测时间内稳定，且偏振方向有共同分量。若两束线偏振夹角为 ψ，干涉项还乘 $\cos\psi$；正交偏振直接叠加时，该项为零。一般光源常从同一束光分出两路，使两路保留相位关联。

若同相出发，在同一介质中传播，且没有反射等额外相移，几何路程差 δ 对应

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}, \qquad \delta = k\lambda \text{ 为强度极大}, \quad \delta = (k+\tfrac{1}{2})\lambda \text{ 为强度极小}.$$

这里 $k \in \mathbb{Z}$，λ 是介质中的波长。当两束光等幅时，极小处恰好完全相消。

不同频率之间的相位差随时间以 $\Delta\omega$ 的速率变化。令曝光时间为 T，且 $\Delta\omega \neq 0$。交叉项中的余弦平均应按实际时间窗积分：

$$\begin{aligned}\langle\cos(\Delta\omega t+\phi_0)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\Delta\omega t+\phi_0)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T\Delta\omega}[\sin(\Delta\omega t+\phi_0)]_0^T \\ &= \frac{\sin(\Delta\omega T+\phi_0)-\sin\phi_0}{T\Delta\omega}.\end{aligned}$$

分子的绝对值不超过 2，所以 $T \gg 2\pi/|\Delta\omega|$ 时，探测器主要记录两频率的强度之和。若 $\Delta\omega = 0$，交叉项随时间保持原值。白光照双缝时，每个频率先形成自己的条纹，再将各频率的强度相加。

5.1.4 干涉条纹的可见度与观测条件

由两束相干光的强度关系可知，相位差分别为 0 和 π 时，强度达到极大与极小：

$$I_{\max} = (\sqrt{I_1}+\sqrt{I_2})^2, \qquad I_{\min} = (\sqrt{I_1}-\sqrt{I_2})^2.$$

把两式相减、相加，可得条纹可见度

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}.$$

两束等强且相位相反时，才出现完全暗纹。不同颜色各自产生的条纹间距不同，叠加后暗纹处常被另一种颜色照亮，因而条纹变浅。例 5.21 算出了第一次变浅至零对比的位置。

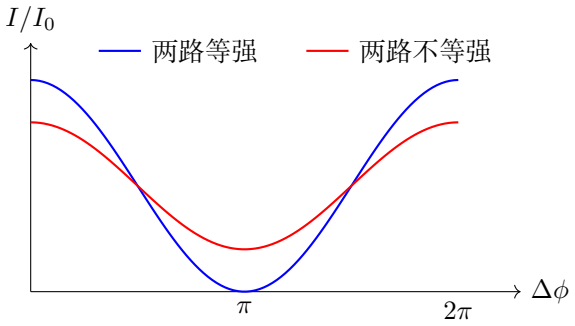


图 5.4: 保持总强度相同，两路等幅时谷值为零；振幅不同时暗纹处仍有光。

图 5.4 取总强度 $2I_0$。蓝线的两路强度都是 I_0，谷值为零，可见度为 1；红线取 $1.8I_0$ 和 $0.2I_0$，谷值升到 $0.8I_0$，可见度降为 0.6。两条曲线仍在同样的相位处达到极值。

令强度比 $r_I = I_2/I_1 > 0$，则

$$\mathcal{V} = \frac{2\sqrt{r_I}}{1 + r_I}.$$

根式的导数为 $\mathrm{d}(2\sqrt{r_I})/\,\mathrm{d}r_I = r_I^{-1/2}$，再用商法则：

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}r_I} = \frac{r_I^{-1/2}(1 + r_I) - 2r_I^{1/2}}{(1 + r_I)^2} = \frac{1 + r_I - 2r_I}{\sqrt{r_I}(1 + r_I)^2} = \frac{1 - r_I}{\sqrt{r_I}(1 + r_I)^2}.$$

r_I 从小于 1 增大到 1 时，可见度提高；超过 1 后再增大，可见度下降。两路一样强时条纹最深。若曝光期间的相位差在一周内随机变化，$\langle\cos\Delta\phi\rangle$ 趋于零，等强的两束光也只留下强度之和。

5.2　双缝干涉与薄膜干涉

5.2.1　从同一光源到两缝，再到观察屏

图 5.5 中，单色光先通过小孔 S，再照亮 S_1, S_2。两缝对称放置，$SS_1 = SS_2$，所以从同一个 S 发出的波到达两缝时相位相同。屏上点 P 的相位差因此由缝后两段 $r_1 = S_1P$，$r_2 = S_2P$ 决定。

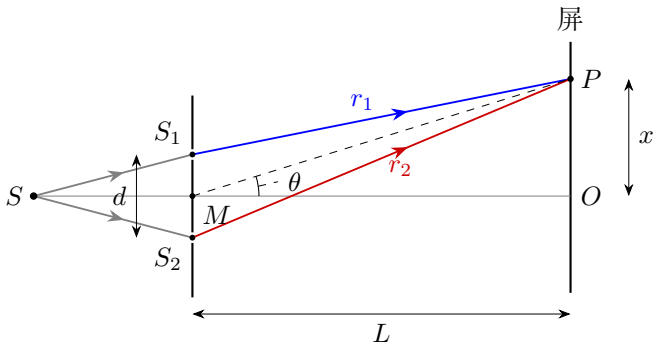


图 5.5: S 到两缝的距离相等。屏上点 P 的相位差由红、蓝两段的路程差给出。

从两缝中点 M 到屏的距离为 L，屏上从 O 向上量到 P 的高度为 x。两缝在 M 上下各距 $d/2$。先用平方差求路程差，

$$r_2^2 - r_1^2 = \left[L^2 + (x + d/2)^2\right] - \left[L^2 + (x - d/2)^2\right] = 2dx,$$

$$\delta = r_2 - r_1 = \frac{2dx}{r_2 + r_1}.$$

若 $d \ll MP$，分母可取 $2MP$，图中 $x/MP = \sin\theta$，所以 $\delta \simeq d\sin\theta$。观察屏中央附近 $|x| \ll L$ 时，$MP \simeq L$，于是 $\delta \simeq dx/L$。令 $\delta = k\lambda$，得到同相双缝的明纹位置和间距

$$x_k \simeq \frac{k\lambda L}{d}, \qquad \boxed{\Delta x \simeq \frac{\lambda L}{d}}.$$

用尺测量连续 N 条明纹时，首末两条之间有 $N-1$ 个间隔；若首末距离为 ℓ，可用 $\lambda = d\ell/[L(N-1)]$。白光照明时，各色光在 O 处的零级明纹重合，离开 O 后，各色明纹因间距不同逐渐错开。

在一路插入薄片时，还要把该路新增的光程计入 δ。练习 5.1 保留 $r_2 - r_1$ 的取差顺序来判断零级移向哪一侧；例 5.21 则计算两种波长的细条纹叠加后在何处变浅。

5.2.2 薄膜的两束反射光

设薄膜折射率为n_f，厚度为t，膜内折射角为r。两束反射光的传播光程差为$2n_f t\cos r$。若只有一次相对的半波损失，则总相位差为

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(2n_f t\cos r) + \pi.$$

“半波损失”是反射引入的 π 相移，写入两束光的总相位差。普通透明介质近法向反射时，低折射率一侧向高折射率一侧反射有这项相移，从高折射率一侧反射则保留原相位。

图 5.6 的空气劈尖夹在两玻璃板之间，两束主要反射光只有一次相对半波损失。近法向观察时

$$\begin{array}{c|c} \text{暗纹} & 2t = k\lambda_0 \\ \text{明纹} & 2t = (k+\tfrac{1}{2})\lambda_0 \end{array}, \qquad \Delta t = \frac{\lambda_0}{2}.$$

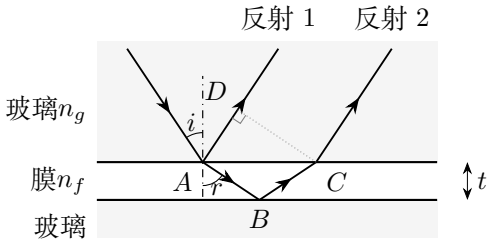


图 5.6: 空气夹层的两束反射光；在上侧玻璃内用公共波前CD 比较相位

图 5.6 中，C, D 位于同一出射波前，故 CD 垂直于第一束反射光。比较到这个波前的光程，第二束多走了膜内的 $AB + BC$，第一束则多走了上方玻璃中的 AD。上侧入射角为 i，膜内折射角为 r，由图上的直角三角形有

$$AB + BC = \frac{2t}{\cos r}, \qquad AD = AC \sin i = 2t \tan r \sin i.$$

利用$n_g \sin i = n_f \sin r$，比较到同一波前的光程：

$$\delta = n_f(AB+BC) - n_g AD = \frac{2n_f t}{\cos r} - 2t \tan r \, n_g \sin i = \frac{2n_f t(1-\sin^2 r)}{\cos r} = 2n_f t \cos r.$$

对小劈角，局部可按平行膜面求相位，再把 t 写成位置的函数。劈角为$\alpha \ll 1$ 时，$t(x) \simeq \alpha x$，同级条纹是等厚线：

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda_0}{2\alpha}}.$$

对同一级次，所需的膜厚固定。若工件局部凹下使气膜增厚，该条等厚线便移向原来较薄的一侧。例 5.4 用这一关系从条纹弯曲方向辨认工件表面的起伏。

5.2.3　反射相位怎样改变明暗条件

一般情况下，应把膜内往返光程差与两次反射的相对相位分开记录：

$$\Delta\phi = \frac{4\pi n_f t \cos r}{\lambda_0} + (\phi_{\text{下}} - \phi_{\text{上}}).$$

折射率次序	相对反射相位	反射光明纹条件
$n_0 < n_f < n_s$	两次均反相，相差0	$2n_f t\cos r = k\lambda_0$
$n_0 > n_f > n_s$	两次均不反相，相差0	$2n_f t\cos r = k\lambda_0$
$n_f < n_0, n_s$	只有下表面反相，相差π	$2n_f t\cos r = (k+\frac{1}{2})\lambda_0$
$n_f > n_0, n_s$	只有上表面反相，相差π	$2n_f t\cos r = (k+\frac{1}{2})\lambda_0$

表中的n_0, n_f, n_s 分别是入射侧、膜、基底折射率，相位分类用于普通透明介质的近法向入射。暗纹条件与明纹条件相差半级。观察方向也须固定：无吸收时，反射率降低伴随透射率升高。

两次反射各有 π 跳变时，相对反射相位为零；只有一路跳变时，相对反射相位为 π，明暗级次交换半级。改变基底折射率，可能只改变反射相位就使同一膜厚处的明暗互换。

相位差为奇数倍 π 时，两束光的振幅相减。等幅时反射强度为零，振幅不等时仍有剩余反射光。在无吸收薄膜中，反射减少的能量转入透射光。

5.2.4 肥皂膜条纹与彩色薄膜

空气中的肥皂膜属于“低–高–低”结构，两个主要反射光束相差一次反射反相。近法向时，反射光的暗纹满足$2n_f t = k\lambda_0$。竖直膜排液后，上部通常较薄、下部较厚，同色光的等厚条纹近似水平。

图 5.7 中，同一位置的t 固定，各种波长代入相位条件后可分别加强或减弱，所以白光照明时出现彩色。若膜顶薄到$t \to 0$，反射相位差趋于π，两束振幅接近时该处呈暗色。

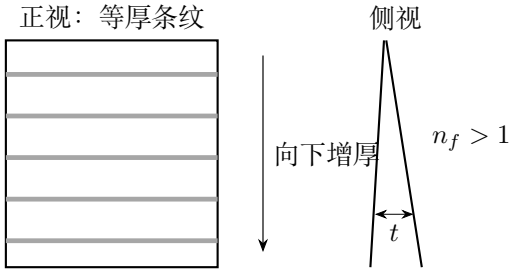


图 5.7: 竖直肥皂膜的等厚线；右图只示意膜厚随高度的趋势

膜厚扰动还可用来判断条纹侧移。对既定级次，$n_f t\cos r$ 必须保持不变；若某处膜变厚，等厚条纹就移向原先较薄的区域。分析劈尖或工件表面时，也应按这一条件追踪同级条纹。

5.2.5　增透膜：相消条件与振幅条件

增透膜常取$n_0 < n_f < n_s$。图 5.8 中，两次反射本身都发生π 相移，相对反射相位为零。欲使设计波长λ_0 的两束反射光相消，应有$2n_f t\cos r = \lambda_0/2$。正入射时$r = 0$，所以

$$2n_f t = \frac{\lambda_0}{2}, \qquad \boxed{t_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_f}}$$

这里取正入射。两束等幅时完全相消；两束振幅不等时，余下的是振幅之差。

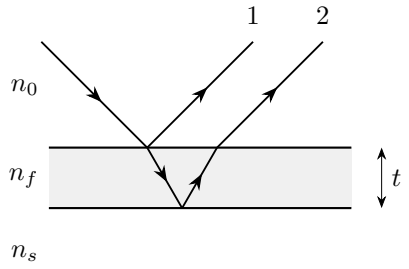


图 5.8: 图中斜入射用来分辨光路；正入射厚度公式对应$r \to 0$ 的极限

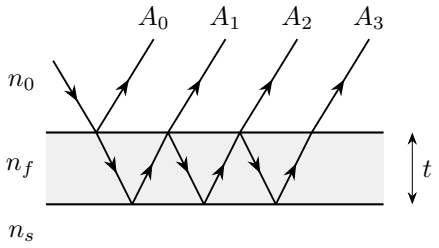
两束主要反射光的近似足以判断相位条件；要讨论反射率严格为零，则应把膜内多次反射一并求和。理想的无吸收单层膜在正入射下，振幅匹配还要求

$$\boxed{n_f = \sqrt{n_0 n_s}}.$$

在正入射下，两面的振幅反射系数分别为

$$r_{0f} = \frac{n_0 - n_f}{n_0 + n_f}, \qquad r_{fs} = \frac{n_f - n_s}{n_f + n_s}.$$

这里的系数是电场振幅比，均按正入射取值。透射系数为$t_{0f} = 2n_0/(n_0 + n_f)$、$t_{f0} = 2n_f/(n_0+n_f)$，反向反射系数为$r_{f0} = -r_{0f}$，因此振幅透射系数满足 $t_{0f}t_{f0} = 1 - r_{0f}^2$。下式用它累加同一方向上的各束反射光的振幅。



每增加一次膜内往返，乘以同一因子 q

图 5.9: 将各次返回分开画出以辨认路径；振幅系数和往返相位均按正入射计算

把入射振幅归一化为 1，令一次往返的传播相位为$\delta = 4\pi n_f t/\lambda_0$。图 5.9 中，前表面直接反射的振幅为$A_0 = r_{0f}$。第一束从膜内返回的光先透入膜、在下表面反射，再透出上表面，故

$$A_1 = t_{0f} t_{f0} r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}.$$

下一束比它多经历一次上表面内反射、一次下表面反射和一次往返传播，因此

$$q = r_{f0} r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}, \qquad A_2 = A_1 q, \quad A_3 = A_1 q^2, \quad \ldots.$$

无吸收、正的有限折射率使这里$|q| < 1$。将所有返回光的复振幅相加，得到

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{tot}} &= r_{0f} + \frac{t_{0f} t_{f0} r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}}{1 - r_{f0} r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}} \\ &= r_{0f} + \frac{(1 - r_{0f}^2) r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}}{1 + r_{0f} r_{fs} e^{\mathrm{i}\delta}}. \end{aligned}$$

通分后，含$r_{0f}^2 r_{fs}$ 的两项相消，才得到严格的总反射系数

$$r_{\mathrm{tot}} = \frac{r_{0f} + r_{fs} \exp(4\pi \mathrm{i} n_f t/\lambda_0)}{1 + r_{0f} r_{fs} \exp(4\pi \mathrm{i} n_f t/\lambda_0)}.$$

四分之一波长厚度使指数因子为-1，而$n_f^2 = n_0 n_s$ 使$r_{0f} = r_{fs}$，因此分子为零。图 5.8 的完全相消同时需要这两项条件。改变波长或入射角后，相位通常不再恰好相反，所以单层膜只能在一定波段、角度范围内有效增透。

5.3 衍射、偏振与旋光

5.3.1 单缝衍射

光通过有限孔径后出现展宽，说明直线传播是有条件的近似。设平行单色光均匀、正入射到宽为a 的狭缝，在远场方向θ 比较缝内各点的贡献。远场可由足够远的屏近似实现，也可在透镜的后焦面观察；它意味着在同一观察方向上，各微元到观察点的传播方向近似相同，振幅随距离的差别可以忽略，而相位差必须保留。

远屏条件还可由路程展开说明。设屏上横坐标为 x，缝内坐标为 s，两平面相距 L，则近轴时

$$r(s) = \sqrt{L^2 + (x - s)^2} \simeq L + \frac{x^2}{2L} - \frac{xs}{L} + \frac{s^2}{2L}.$$

前两项是共同相位，线性项决定方向相关的相位差；忽略最后一项要求缝内二次相位变化很小，通常用 $a^2/(\lambda L) \ll 1$ 表示。透镜后焦面则把各平行出射方向会聚到不同位置，提供另一种观察夫琅禾费衍射的方法。

图 5.10 以缝中心O 为坐标原点，缝上微元坐标为s。向上取$s>0$，出射方向与法线夹角为$\theta>0$，该微元相对中心到远方同一波前的路程短$s\sin\theta$。选取相应相位约定，把各微元振幅相加，得到

$$E(\theta)=C\int_{-a/2}^{a/2}e^{-i(2\pi/\lambda)s\sin\theta}\,\mathrm{d}s.$$

记 $k_\theta=(2\pi/\lambda)\sin\theta$、$\beta=k_\theta a/2$。当 $k_\theta\neq0$ 时，指数函数的原函数为 $e^{-ik_\theta s}/(-ik_\theta)$，因此

$$\begin{aligned}E(\theta)&=C\left[\frac{e^{-ik_\theta s}}{-ik_\theta}\right]_{-a/2}^{a/2}\\&=C\frac{e^{-i\beta}-e^{i\beta}}{-ik_\theta}=C\frac{-2i\sin\beta}{-ik_\theta}=Ca\frac{\sin\beta}{\beta}.\end{aligned}$$

当 $k_\theta=0$ 时，直接积常数 1：

$$E(0)=C[s]_{-a/2}^{a/2}=Ca.$$

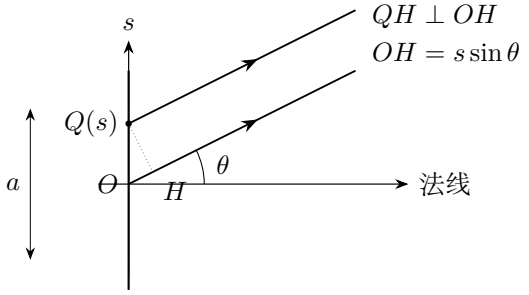


图 5.10: 缝上微元到同一远场波前的路程差由投影确定

常量 C 包含照明振幅和各缝元共有的传播因子。正前方各缝元同相，因此 $E(0)=Ca$。斜向观察时，图 5.10 中缝元的相位随 s 连续改变，叠加结果比正前方小。光强与振幅模的平方成正比，所以

$$I(\theta)=I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2,\qquad \beta=\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

非零整数m 使$\sin\beta=0$ 而$\beta\neq0$，于是暗纹满足$a\sin\theta=m\lambda$，其中$m=\pm1,\pm2,\ldots$。第一暗纹还可用图 5.10 的缝内配对理解：当$a\sin\theta=\lambda$ 时，将缝分成两半，相隔$a/2$ 的微元相位差恰为π，均匀照明保证它们等幅，因而逐对相消。对于小角度、屏距为L 的屏面，才进一步使用$\sin\theta\simeq\tan\theta=x/L$，得到

$$x_m\simeq\frac{m\lambda L}{a},\qquad \boxed{w_{\text{中央}}=\frac{2\lambda L}{a}}.$$

中央亮纹从 $m=-1$ 延伸到 $m=1$，宽度是相邻两条同侧暗纹间距的两倍。次级亮纹逐级变弱；第五讲的条纹辨认和缺级问题，分别用到中央峰的宽度与单缝暗纹的位置。

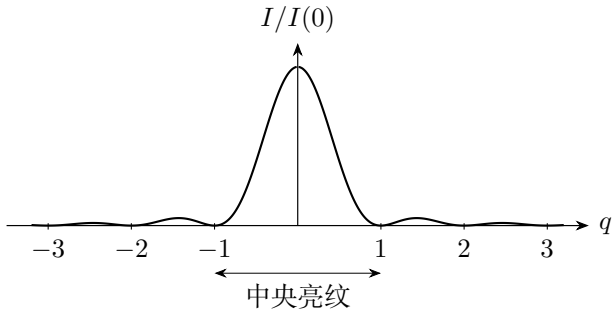


图 5.11: 单缝衍射的归一化强度；横坐标$q=ax/(\lambda L)$

由图 5.11 可知，增大λ 或减小a 会使衍射展宽。即便$a\gg\lambda$，衍射仍然存在，只是角宽很小；能否观察还取决于传播距离、光源相干性及仪器分辨能力。

5.3.2 衍射光栅测波长

光栅由许多等间距狭缝构成，缝宽记为 a，相邻缝中心的距离记为 g。单色平面波正入射时，沿 θ 方向的相邻缝光程差为 $g\sin\theta$。图 5.12 标出了其中三条缝。

各缝沿该方向同相叠加时形成主极大：

$$\boxed{g\sin\theta_m=m\lambda},\qquad \boxed{\lambda=\frac{g\sin\theta_m}{m}}\quad(m\neq0).$$

若光栅每单位长度有N_ℓ 条刻线，则$g=1/N_\ell$，使用时应先统一长度单位。允许级次满足$|m|\lambda\le g$；等号对应沿光栅面的掠射方向。

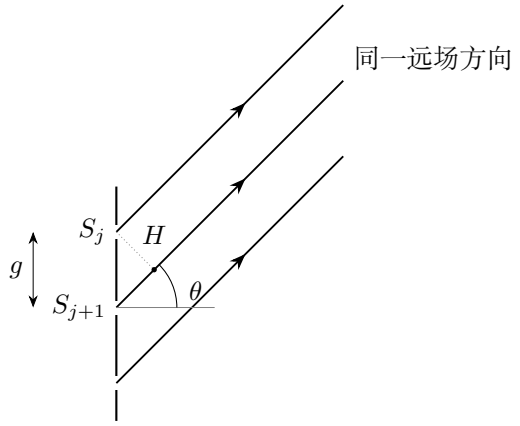


图 5.12: 相邻缝间距沿传播方向的投影给出光程差

图 5.12 中，S_jH 垂直出射方向，故$S_{j+1}H = g\sin\theta$。增大缝数主要使主极大更尖锐；各级亮度仍受单缝衍射包络限制。

缝间距决定哪些方向上各缝同相。若某一同相方向恰是单缝暗纹，来自每条缝的合振幅都为零，这一级就缺失。缝数主要控制主峰宽度，缝宽控制强度包络。

用左右对称的同级谱线测角，可以减小零角位置误差。若从刻线数换算光栅常数，应先把“每毫米”或“每厘米”换成统一长度单位，再与波长比较；一个单位换算错误会同时破坏波长数值和允许级次的判断。

5.3.3　多缝强度、衍射包络与缺级

设每条缝宽为 a，相邻缝中心距仍记为 g，共有 N 条相同的缝。对图 5.12 的同一远场方向，相邻缝复振幅相差相位 $2\beta = 2\pi g\sin\theta/\lambda$。以第一缝为相位参考，多缝因子是等比数列之和：

$$S_N = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2ij\beta} = \frac{1-e^{2iN\beta}}{1-e^{2i\beta}} = e^{i(N-1)\beta}\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}.$$

乘上前面求出的单缝振幅，再取模平方，得到

$$I(\theta) \propto \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2, \qquad \alpha = \frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}, \quad \beta = \frac{\pi g\sin\theta}{\lambda}.$$

本式中 α 描述一条缝内部的相位变化，β 描述相邻缝的相位变化。第一因子决定衍射包络，第二因子决定窄的干涉峰。

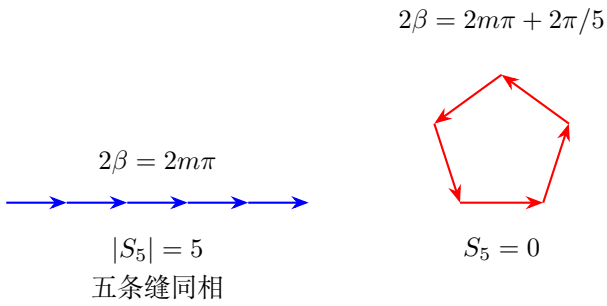


图 5.13: 五缝复振幅的叠加：主极大同向相加，邻近第一个零点处首尾闭合

当 $\beta = m\pi$ 时，原求和式的 N 项相位相同，直接得 $S_N = N$。图 5.13 左图中，合振幅是单缝振幅的 N 倍，强度因子为 N^2。右图把相邻相位差再增加 $2\pi/N$，各振幅矢量闭合，合振幅为零。

某一主极大附近的第一对零点满足 $\beta = m\pi \pm \pi/N$。由 $\beta(\theta) = \pi g \sin\theta/\lambda$ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\pi g}{\lambda}\cos\theta.$$

在非掠射主极大 θ_m 附近，令偏离角为 $\delta\theta$，一阶展开为

$$\beta(\theta_m + \delta\theta) - m\pi \simeq \frac{\pi g}{\lambda}\cos\theta_m\,\delta\theta.$$

分别令左侧等于 $\pm\pi/N$，得到两侧零点相对主极大的偏移 $\delta\theta_\pm \simeq \pm\lambda/(Ng\cos\theta_m)$，相减便得零点之间的角宽约为

$$\Delta\theta_{\text{零点间}} \simeq \frac{2\lambda}{Ng\cos\theta_m}.$$

缝数增大时，相邻主峰间的第一个零点更靠近主峰，所以峰更窄。若该主峰恰落在单缝暗纹 $a\sin\theta = q\lambda$（$q \neq 0$），总振幅为零。例 5.22 联立这两条条件求缺级。

5.3.4 偏振与马吕斯定律

线偏振光的电场在垂直传播方向的固定方向上振动。偏振现象说明光具有横波性质。理想检偏器保留沿透振轴的电场分量，图 5.14 中入射振幅E_p 沿透振轴的投影为$E_p\cos\theta$，与该轴垂直的分量被阻断。相同介质中光强与电场振幅平方成正比，所以

$$\boxed{I = I_p\cos^2\theta},$$

这里 I_p 是线偏振光到达检偏器前的强度，θ 是其偏振方向与检偏器透振方向的夹角。

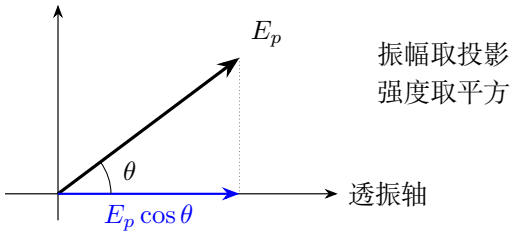


图 5.14: 沿传播方向看电场分解；只有沿透振轴的投影通过

自然光的横向振动没有优先方向。将各取向对透振轴的投影平方作平均，

$$\langle\cos^2\varphi\rangle=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

利用倍角公式后，两个原函数分别为 φ 与 $\sin 2\varphi/2$。代入上下限，

$$\langle\cos^2\varphi\rangle=\frac{1}{2\pi}\left[\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi-0}{2\pi}=\frac{1}{2},\qquad I_p=\frac{1}{2}I_{\text{自然}}.$$

自然光依次通过夹角为 θ 的两片理想偏振片时，第一片给出 $I_{\text{自然}}/2$ 的线偏振光，第二片再乘以 $\cos^2\theta$。所以末强度是 $I_{\text{自然}}\cos^2\theta/2$。

图 5.15 中，两片平行时最亮，正交时理想透射为零。立体电影利用两路正交偏振区分左右眼画面，要求银幕能保持所需偏振性质，眼镜每片与相应画面偏振方向一致。

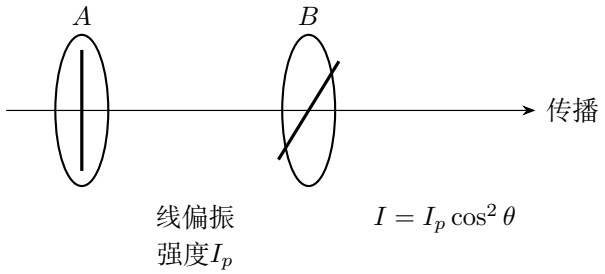


图 5.15: 起偏器确定偏振方向，检偏器只透过沿自身方向的分量

旋光溶液可使线偏振方向绕传播轴转动。固定波长、温度和溶液种类时，稀溶液的旋光角常写为

$$\alpha=[\alpha]\,\ell c_s,$$

其中ℓ 为光程长度，c_s 为浓度，比旋光度$[\alpha]$ 还与波长和温度有关。因此用旋光测浓度时，必须同时控制这些条件。

5.4 光子与光电效应

5.4.1 单光子能量与电子逸出

真空中光子的能量与动量为

$$E_\gamma = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{\lambda_0}.$$

单个光子的能量由频率决定；光功率则还取决于单位时间内通过的光子数。单色光功率为P 时，

$$\dot{N}_\gamma = \frac{P}{h\nu}.$$

将单色光照到金属阴极上，材料吸收光子后可以释放电子。图 5.16 中，电子从能量最高的占据态逸出时，所需的最小能量为逸出功 W。在通常光强下，一次吸收给电子能量 $h\nu$，余下的是电子离开金属时的最大初动能：

$$\boxed{K_{\max} = h\nu - W}, \qquad \boxed{\nu_0 = \frac{W}{h}}, \qquad \boxed{\lambda_{\max} = \frac{hc}{W}}.$$

在一光子模型中，ν_0 是能发生逸出的最低频率。频率到达 ν_0 时，$h\nu$ 恰好补足逸出功；频率再增大时，多出的能量成为动能。

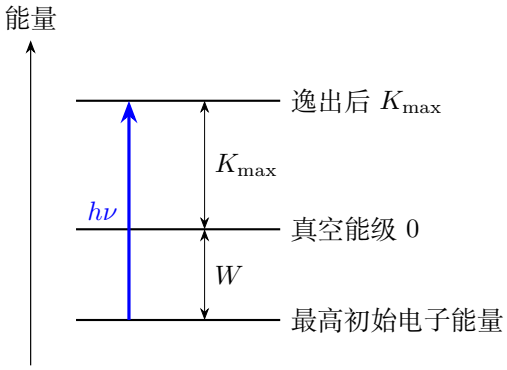


图 5.16: 一次吸收中的能量分配；最高初始电子给出最大逸出动能

图 5.16 以刚离开材料后的真空能级为零点。初始能量最高的电子从 $-W$ 出发，吸收光子后到达 $K_{\max}$；从更低的能态出发或途中损失能量的电子，离开时的动能较小。下面用反向电场测量动能的上限。

频率固定且超过阈值时，光越强，单位时间内到达的光子越多，因而通常有更多电子逸出。单个光子的能量保持 $h\nu$，最大初动能仍为 $h\nu - W$。

5.4.2 截止电压、饱和电流和电流方向

在图 5.17 中，阴极 K 受光照后发射电子，收集极 A 接住其中一部分。取极间电压 $U_{AK}=V_A-V_K$。当 $U_{AK}<0$ 时，管内电场从 K 指向 A，电子所受电场力指向 K。下图用 $U=-U_{AK}>0$ 表示反向电压的大小。

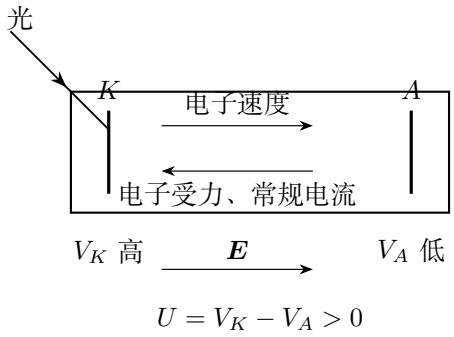


图 5.17: 反向电压下电子向右减速，管内常规电流方向向左

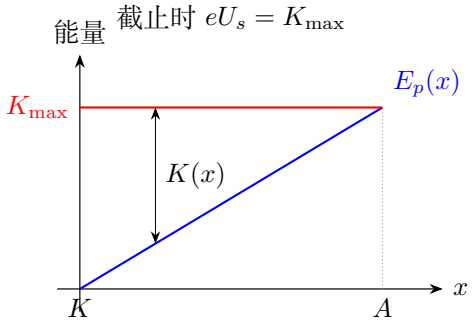


图 5.18: 均匀反向场中的最快电子；势能上升使动能逐步耗尽

电子的电荷为 $-e$，所以图 5.18 中的势能升高量为

$$\Delta E_{\mathrm{p}}=(-e)(V_A-V_K)=eU,\qquad K_A=K_K-eU.$$

在平行极板模型中，电场垂直极板。取由 K 指向 A 的方向为 x 轴。若电子以初动能 K_0、与轴成角 ϑ 的方向射出，初始轴向动能为 $K_0\cos^2\vartheta$；平行极板的速度分量保持原值。故在距阴极 x 处，

$$K_x(x)=\frac{1}{2}mv_x^2=K_0\cos^2\vartheta-eU\frac{x}{\ell},$$

其中 ℓ 是两极板间距。电子到达收集极所需的条件是 $K_0\cos^2\vartheta\geq eU$。

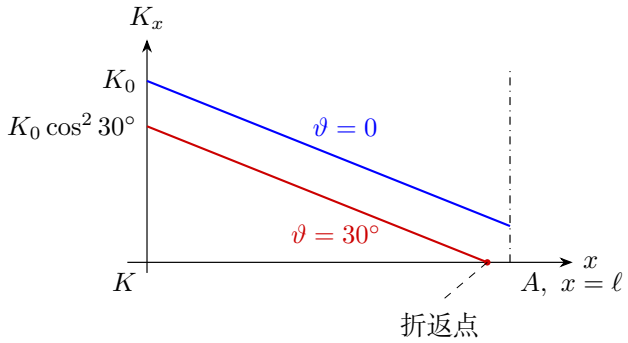


图 5.19: 两电子有相同的初动能 K_0。沿轴发射者到达收集极；斜射者在到达之前折返。图取 $eU = 0.8K_0$。

图 5.19 中，蓝线对应沿法线发射的电子；红线对应相同 K_0、但初速度倾斜的电子，先在 $K_x = 0$ 的位置折返。若发射电子中可达到的最大轴向动能为 $K_{\max}$，反向电压增大到 $eU_s = K_{\max}$ 时，电子刚失去到达收集极的能力。伏安曲线的截止点为 $U_{AK} = -U_s$。

在同一块阴极上改用不同频率的单色光，每次都读出截止电压的大小 U_s。由上式和爱因斯坦光电方程得

$$\boxed{U_s = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)}, \qquad h = e\frac{U_{s,2} - U_{s,1}}{\nu_2 - \nu_1}, \qquad W = h\nu_0.$$

图 5.20 中，斜率给出 h/e，横轴截点给出阈频 ν_0。例 5.16 在已知 h 时，由一组频率和电压反求逸出功；练习 5.5 再从两组测量值求斜率。

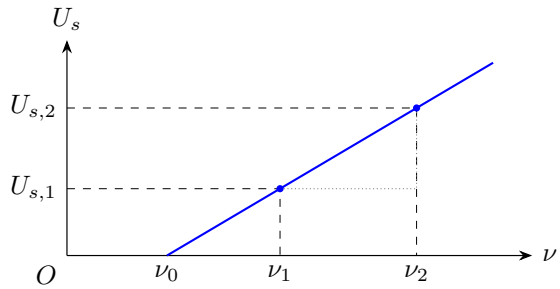


图 5.20: 同一阴极的截止电压随入射频率变化。

若反过来给收集极加足够高的正电势，几乎所有逸出电子均被收集，得到饱和电流。固定频率和材料、量子效率不变时，

$$I_{\text{sat}} = e\eta\frac{P}{h\nu}.$$

η 是每个入射光子产生可收集电子的平均数。固定频率时，I_{sat} 随入射功率改变；截止电压则由最大初动能决定。

在伏安图上，反向电压一侧的横截点给出截止电压，正电压一侧的平台给出饱和电流。

极间电压为零时，一部分电子已能靠初速度到达收集极。正电压逐渐增大，收集到的比例随之增大；进入饱和区后，电流才直接给出单位时间内收集的电子数。

5.4.3 用两组伏安曲线分清光强与频率

图 5.21 以 $U_{AK}=V_A-V_K$ 为横轴，右边加速，左边减速。由 $U_s=(h/e)(\nu-\nu_0)$ 可知，同一阴极上频率越高，截止点 $-U_s$ 越靠左。

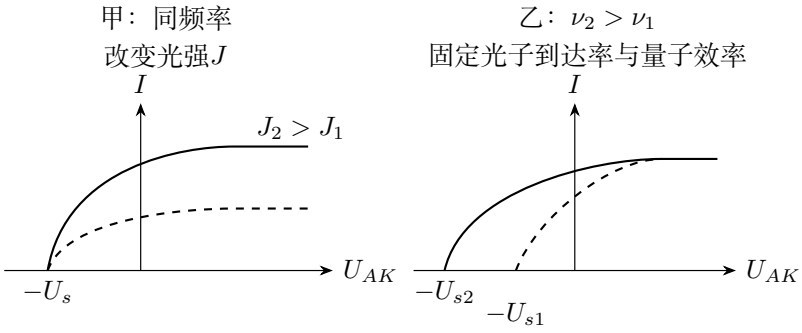


图 5.21: 曲线形状作示意；固定材料，比较时另行标明保持不变的照射条件

甲图频率固定，最快电子的能量不变，故两条曲线共用截止点；光强增加时发射数增加，饱和电流增大。乙图保持光子到达率、量子效率相同，因而饱和电流相同，但频率较高的实线有更大的最大初动能。

若改为保持光功率 P 相同，光子到达率 $P/(h\nu)$ 随频率升高而下降。在量子效率相同的模型下，高频光的饱和电流随之减小。

比较同一阴极在两个频率下的截止电压，有 $e(U_{s2}-U_{s1})=h(\nu_2-\nu_1)$。在同一频率下比较两种材料时，入射光子的能量相同，截止电压之差给出两种材料的逸出功之差。

5.4.4 连续吸能图景与单光子吸收

若把电子想成持续吸收波能量，容易预期低频照射只要足够久也能逸出，以及光越强电子动能越大。实验中的三个量分别给出一次吸收与电子逸出的不同关系：阈频规定一次吸收能否克服逸出功，截止电压测量最快电子的能量，饱和电流则统

计收集到的电子数。它们共同支持通常弱光条件下的单光子吸收模型；传播过程的干涉与偏振仍需用电磁波描述。

5.4.5 光信号怎样变成电信号

光电管窗口须透过所测波段，测紫外光时可以用相应透紫外的材料。入射光谱由光源和滤光片决定；固定频率改变入射功率时，光电子发射数随之改变，外电路把它转为电流变化。

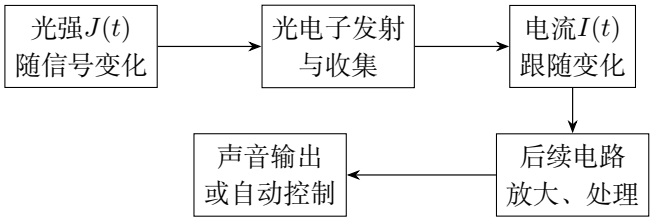


图 5.22: 固定载光频率后，用随时间变化的光强传递信息

图 5.22 中，若用声音信号改变光的强弱，探测电流就随光强包络变化。电流经放大后可驱动声音输出，接到阈值电路上也可作自动控制信号。

太阳能电池靠半导体内的光生载流子输出电能。光纤通信中，光沿光纤传到接收端，再由光电探测器变成电信号。

5.4.6 三种模型各自回答的问题

以双缝后的探测屏为例，先用两缝到同一位置的相位差求出光强，再用探测器吸收光子的频率和数率求信号。若中间加一片偏振片，先把电场投影到它的透振方向，再计算到达屏的光强。

5.5 物质结构与模型的层次

图 5.23 从分子逐级画到原子及其内部。原子由原子核和电子组成；核内的质子、中子含有夸克，电子属于轻子。

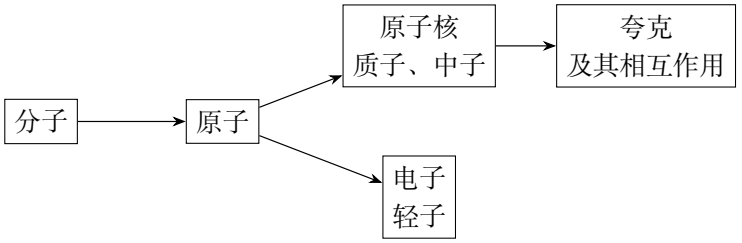


图 5.23: 物质结构的组成层次；氢-1等核素的核内没有中子

元素由原子核的电荷数区分；元素周期表中的化学性质周期性与电子结构有关。原子中的电磁作用决定许多电子状态与光的吸收、发射特征；核内结构还涉及强相互作用，某些粒子转变涉及弱相互作用。电磁作用、引力、强相互作用和弱相互作用是讨论物质结构时需要区分的四类基本相互作用。

研究更小尺度，需要能分辨相应尺度的探测过程。光子的动量关系$p = h/\lambda$ 表明，较短波长对应较大动量；具体能分辨什么，还取决于相互作用机制、探测几何和实验分辨率。

光电效应用能量守恒连接光子和电子逸出。接下来研究原子光谱时，光子的能量将由原子两个能级的差决定。

5.6 例题与分析

例 5.1 (双缝前的不同滤光片)**.** 白光照射双缝，屏上原有彩色干涉条纹。现一缝前放只透红光的理想滤光片，另一缝前放只透绿光的理想滤光片。屏上会出现什么?

A. 只剩红色和绿色的双缝干涉条纹。

B. 红、绿双缝条纹消失，其余颜色条纹仍在。

C. 各色双缝干涉条纹均消失，但屏上仍有光。

D. 屏上完全黑暗。

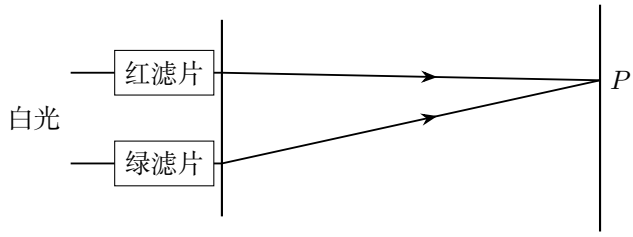


图 5.24: 两缝各自只保留一种颜色，透射频带互不重叠

解　对每种频率检查两缝是否都有振幅

图 5.24 中，第一缝透过红光，第二缝透过绿光。分别计算每个频率在屏上的贡献：红光来自第一缝，绿光来自第二缝。

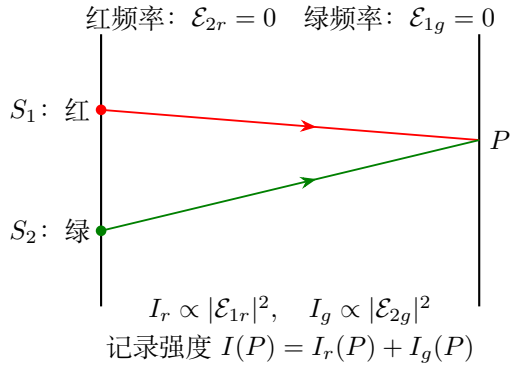


图 5.25: 按频率分别追踪两路：每种颜色只有一路到达屏面

叠加到屏强度并判断选项

如图 5.25，两缝的光都到达屏面，长时间曝光记录两路强度之和，故选 C。有限缝宽使两路各自呈现单缝衍射分布。

用观测时间检查红绿交叉项

从时间平均看，图 5.25 中红、绿两路虽在 P 相遇，频率分量之间的交叉项含有$\cos[2\pi(\nu_{红}-\nu_{绿})t+\phi_0]$，其变化远快于普通探测器的积分时间，平均贡献趋近于零。

理想滤片还使两缝没有共同透射频段；若实际滤片的频带有重叠，应单独检查重叠部分是否仍相干。

例 5.2 (固定路程差处的明暗)**.** 双缝到屏上P 点的路程差为$\delta = 0.6\,\mu\mathrm{m}$。分别用频率$\nu_1 = 5.0\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$、$\nu_2 = 7.5\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ 的单色光照射双缝。判断两种情况下P为明纹还是暗纹。空气中取$c = 3.0\times10^{8}\,\mathrm{m/s}$。

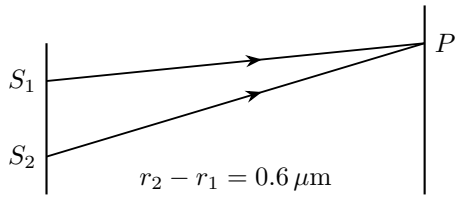


图 5.26: P 点不动，改变的是波长与相位差

解　把两种频率换算成波长

图 5.26 的同一 P 点具有固定路程差 δ，明暗取决于它与波长之比。先求两种波长：

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 0.60\,\mu\text{m}, \qquad \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 0.40\,\mu\text{m}.$$

以路程差除以各自波长

于是$\delta/\lambda_1 = 1$，为明纹；$\delta/\lambda_2 = 3/2$，为暗纹。



图 5.27: 等振幅复矢量相加：相差整周时同向，相差半周时反向

相消时的振幅矢量

图 5.27 中，第二种光的相位差等效于 π，两路等幅时相消。因此 ν_1 在该处形成明纹，ν_2 在该处形成暗纹。

例 5.3 (第十级明纹的路程差)**.** 激光垂直照射双缝S_1, S_2，波长为λ。屏上P 到两缝等距，记其明纹为零级。沿屏向上数，P_1 是第十级明纹。设$r_1 = S_1P_1, r_2 = S_2P_1$，其中$S_1$ 为上缝。求$r_2 - r_1$。

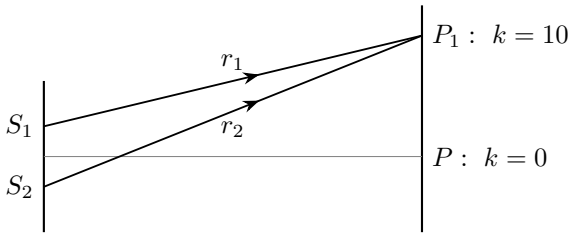


图 5.28: 先确定路程差的符号，再使用明纹级次

解　根据屏上方位确定路程差正负

图 5.28 中，下缝到上方P_1 的路程较长，故$r_2 - r_1 > 0$。

将第十级代入相位条件

同相双缝的明纹条件是$r_2 - r_1 = k\lambda$，因此

$$\boxed{r_2 - r_1 = 10\lambda}.$$

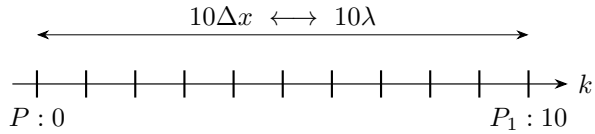


图 5.29: 从零级走到十级，跨越十个同类条纹间隔

区分级次和所数中心条数

图 5.29 中两个端点共有十一条明纹中心，间隔只有十个。明纹级次与“所数亮纹条数”应分清；明暗之间相差半级，但相邻两条明纹之间相差一级。本题直接使用的是同相光源的相位条件，$\delta = 10\lambda$ 不需要先作小角近似。只有把级次换成屏上坐标$x_{10} \simeq 10\lambda L/d$ 时，才需要远屏与小角条件。

例 5.4 (用劈尖条纹检查平整度)**.** 标准样板位于被检平面上方，左端接触，右端垫薄片，形成向右增厚的空气劈尖。反射光俯视图中，部分同级条纹在缺陷处向左弯曲。判断被检平面该处是凸起还是凹下。

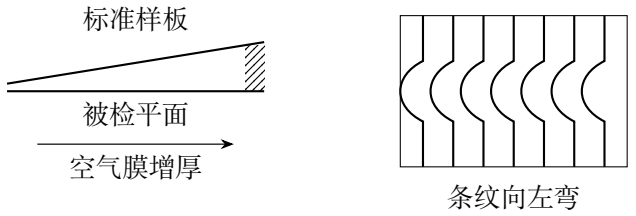


图 5.30: 空气膜向右增厚；图中竖线代表同级等厚条纹

解　按膜厚方向定义表面高度

按图 5.30 中膜向右增厚的方向，取右向为x 正向，把被检面相对理想平面的高度记为$h(x, y)$，凸起取$h > 0$。空气膜厚度为

$$t(x, y) = \alpha x - h(x, y).$$

追踪同一级等厚线的侧移

某一级条纹的厚度固定为t_k，因此它的位置满足

$$x_k(y) = \frac{t_k + h(x_k, y)}{\alpha}.$$

与无缺陷的位置 $x_{k0} = t_k/\alpha$ 相比，精确关系是 $\alpha\Delta x_k = h(x_k, y)$。若缺陷较小、侧移导致的 h 变化可忽略，才进一步得到一阶侧移

$$\Delta x_k \simeq \frac{h}{\alpha}.$$

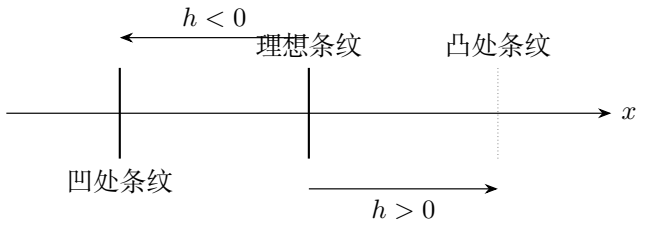


图 5.31: 固定同一膜厚：凹处应向薄端移动，凸处应向厚端移动

结合左移方向判定凹凸

图 5.31 中，观察到左移意味着$\Delta x_k < 0$，从而$h < 0$，故缺陷为凹下。物理上，凹处使空气膜变厚，要恢复同级条纹所需厚度，就必须移向较薄的左侧。这个解释也能检查代数符号。

例 5.5 (抽去一张垫片)**.** 两玻璃板形成空气劈尖，右端夹入两张等厚纸片。垫片到接触线的距离不变，现抽去一张，仍从上方观察同色单色光的反射条纹。条纹变疏、变密、不变还是消失?

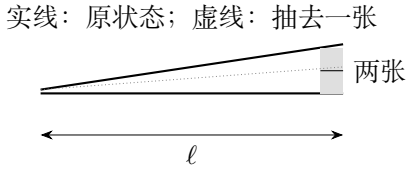


图 5.32: 垫片数减半，几何长度保持不变

解　由垫片厚度反求两次劈角

设每张纸片厚s，图 5.32 的劈角先为$\alpha \simeq 2s/\ell$，抽去一张后$\alpha' \simeq s/\ell = \alpha/2$。

保持相邻级次的膜厚差不变

相邻同类条纹所需厚度差仍为$\lambda/2$，故

$$\Delta x' = \frac{\lambda}{2\alpha'} = 2\Delta x.$$

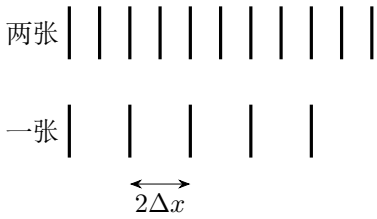


图 5.33: 同一观察宽度内，条纹间距加倍

同一宽度内的条纹数

所以条纹 变疏 。图 5.33 中，同样的膜厚增量对应两倍的水平距离。

例 5.6 (四幅条纹与颜色)**.** 红光、蓝光分别通过同一双缝，黄光、紫光分别通过同一单缝，形成图 5.34 的四幅条纹。各实验的屏距相同，深色条表示亮纹。判断从左向右的颜色次序。



图 5.34: 四幅候选图样使用相同图尺，深色条表示亮纹

解　按中央宽度和等间隔特征分类

图 5.34 中的 I、III 是双缝图样，比较细纹间距；II、IV 是单缝衍射，比较中央亮纹宽度。

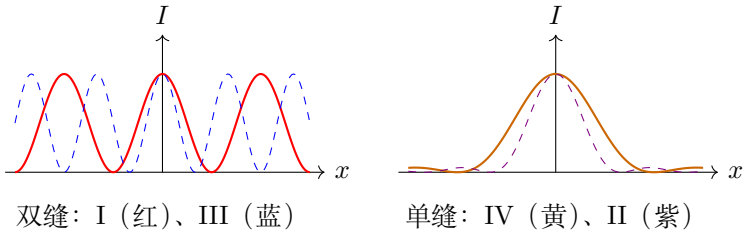


图 5.35: 分别在同一类装置内比较波长与条纹尺度

在相同装置内比较波长

同一双缝的d, L 相同，红光波长较长，所以 I 为红、III 为蓝。同一单缝的a, L 相同，黄光波长长于紫光，所以 IV 为黄、II 为紫。由图 5.35 得次序

$$\boxed{\text{红、紫、蓝、黄}}.$$

灰度图中的条纹宽度

灰度图上，双缝的间距和单缝中央亮纹的宽度仍可以直接比较。

例 5.7 (单缝图样的辨认)**.** 单色光通过一条窄缝，在远处屏上形成衍射图样。图 5.36 的四幅候选图中，亮纹画成深色，哪幅符合单缝衍射的基本特征?

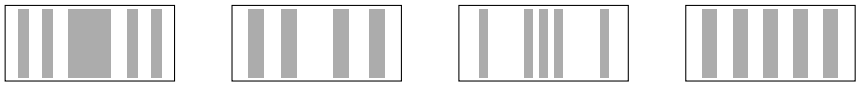


图 5.36: 四幅候选图样，深色条表示亮纹

解　检查中央主峰和图样对称性

图 5.36 中 A 的中央亮纹最宽，图样关于中心对称。B 缺少相应对称性，C 中心最窄，D 所有亮纹宽度相近，均不符合给定单缝的远场图样。故选$\boxed{\text{A}}$。

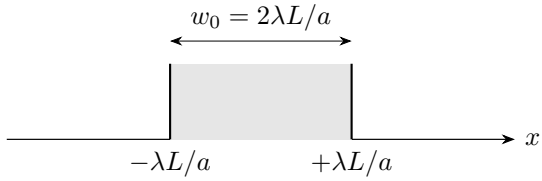


图 5.37: 左右第一暗纹之间为中央亮纹。

第一暗纹之间的宽度

在图 5.37 上，从左侧第一暗纹量到右侧第一暗纹，即得中央亮纹宽度。

从缝内配对相消推导宽度

这项图样判据可由缝内连续波源相消得到：缝宽为a，当$a\sin\theta = \lambda$ 时，把缝分成上下两半，相隔$a/2$ 的对应点相位相差π，振幅逐对抵消。因此第一暗纹满足$\sin\theta = \pm\lambda/a$，近轴屏坐标为$x_{\pm1} \simeq \pm\lambda L/a$。相邻高阶暗纹间距约为$\lambda L/a$，中央区却跨越正负第一暗纹，宽度为其两倍。这个定量关系支持图 5.37 的选图结论，而非只凭“中心看起来较亮”判断。

例 5.8 (缝宽、缝距与条纹间距)**.** 用同一种单色光分别照射竖直单缝a 和双缝b，在远处屏上得到图样c, d。判断：

A. c 为单缝衍射，d 为双缝干涉。

B. 单缝越宽，衍射展宽越明显。

C. 双缝间距越小，干涉条纹间距越大。

D. 照射双缝的波长越短，干涉条纹间距越大。

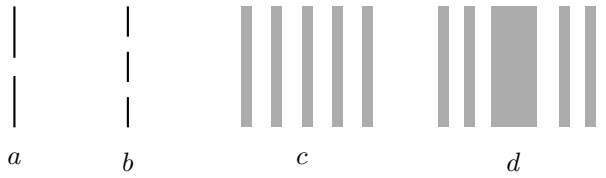


图 5.38: 缝板a, b 与候选屏上图样c, d；深色条表示亮纹

解　先区分题图的两种条纹

图 5.38 中c 是双缝干涉，d 是单缝衍射，A 颠倒。

分别检查孔径和缝距的影响

单缝宽度增加时$2\lambda L/a$ 变小，衍射展宽减弱，B 错。由

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$$

可知 C 对、D 错，故选 C。

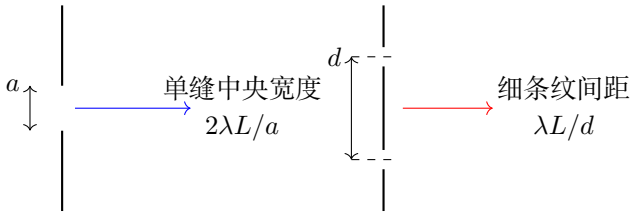


图 5.39: 孔径宽度与双缝中心距在图中是两个不同的长度

由缝宽确定衍射包络

图 5.39 分别列出单缝宽度与双缝间距的影响。双缝中每条缝自身的宽度主要改变衍射包络，两缝中心间距主要决定细干涉条纹的间隔，计算时应使用各自对应的几何量。

例 5.9 (再辨干涉与衍射)**.** 单色光通过窄缝后形成图 5.40 的甲、乙两幅图。判断哪幅为单缝衍射，哪幅为双缝干涉。两实验均使用600 nm 的光，屏距均为1.50 m，每条缝等宽。测得甲的中央亮纹宽8.00 mm，乙的干涉细纹周期为1.00 mm。求单缝宽度和双缝中心距，并判断乙的第几级干涉因子极大首先与单缝暗纹重合。



图 5.40: 甲、乙两次实验的屏上图样；深色表示亮纹，尺寸以测量值为准

解 辨认甲乙并选取测量尺度

图 5.40 中，甲的中央亮纹比旁侧亮纹宽，乙的细条纹近似等间距，所以甲是单缝衍射，乙是双缝干涉。下面用题给的中央亮纹宽度和相邻细纹间距分别求 a, d。

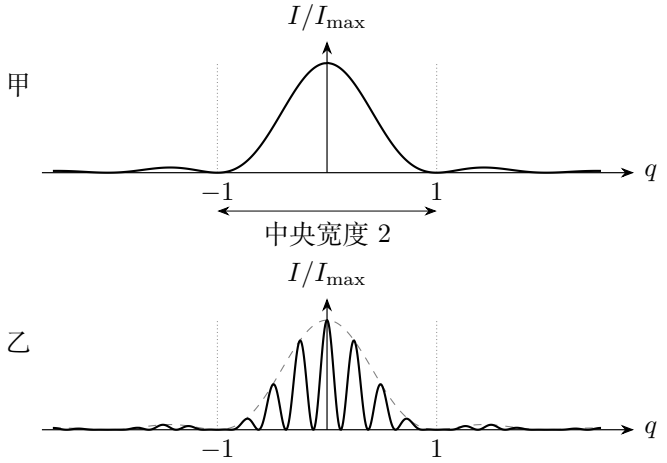


图 5.41: 归一化强度；横轴$q = a\sin\theta/\lambda$，乙按题给数据取$d = 4a$

图 5.41 直接比较两种强度分布：甲从$q = -1$ 到$q = 1$ 为中央主峰；乙在同一包络内出现细纹。双缝条纹在更大范围内也会随单缝包络变弱，仅凭“边上变暗”不足以区分两类图样，还应检查中央宽度与细条纹周期。

将细纹与单缝包络写成乘积

若每个狭缝宽a、双缝中心距d，两种模型在近轴远场分别给出

$$I_{\text{single}} \propto \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad I_{\text{double}} \propto \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \cos^2\!\left(\frac{\pi d x}{\lambda L}\right), \quad \alpha = \frac{\pi a x}{\lambda L}.$$

图 5.41 乙的细纹间距约为$\lambda L/d$，外层包络仍由a 控制。甲中央宽度为$2\lambda L/a$，两侧相邻暗纹之间的宽度约为$\lambda L/a$。辨认时应同时使用这些宽度关系和对称性；单独出现亮暗相间不足以确定缝数。

反求缝宽和两缝中心距

由甲的中央两第一暗纹间距反求

$$a=\frac{2\lambda L}{w_0}=\frac{2(600\times10^{-9})(1.50)}{8.00\times10^{-3}}=\boxed{0.225\,\mathrm{mm}},\qquad d=\frac{\lambda L}{\Delta x}=\boxed{0.900\,\mathrm{mm}}.$$

于是$d/a=4$。

联立两种条件判断首个缺级

图 5.41 乙的第一包络零点在$q=\pm1$，而第k 级干涉因子极大在$q=ka/d=k/4$，两者首先在$k=\pm4$ 重合。故首先缺失的是$\boxed{\text{第4 级}}$。第 4 级的位置仍满足缝间相长条件，但每条缝单独向这个方向的振幅都为零，因而合成强度也为零；这正是把干涉与衍射同时考虑的必要性。

例 5.10 (立体电影的偏振配置)**.** 两台放映机分别投射左眼画面L 和右眼画面R，银幕保持偏振。表中“放映片”表示相应放映机偏振片的透振方向。哪种配置能使每只眼只接收自己的画面？竖、横表示互相垂直的两个方向。

	L放映片	左镜片	R放映片	右镜片
A	竖	竖	竖	竖
B	竖	竖	横	横
C	竖	横	横	竖
D	横	横	横	横

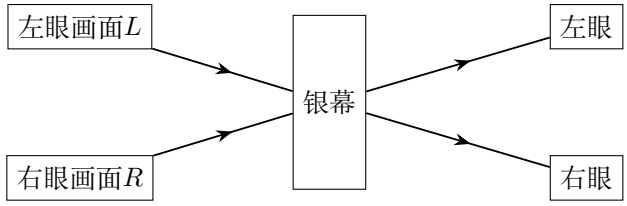


图 5.42: 两路画面共用银幕，利用偏振方向选择接收通道

解　为每只眼写出保留和阻断条件

图 5.42 中两路画面共用银幕，应在眼镜处选择接收通道。对左眼画面，左镜片应与其偏振方向平行，右镜片应与其正交；右眼画面则相反。

代入平行与正交的透过率

由马吕斯定律，平行通道$\cos^2 0 = 1$，正交通道$\cos^2 90^\circ = 0$，所以选$\boxed{\text{B}}$。

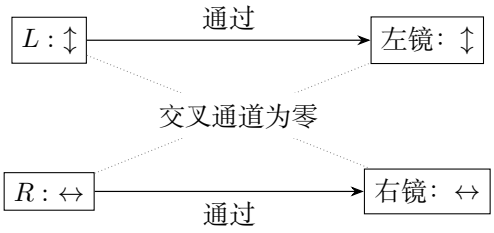


图 5.43: B配置的透过关系；对角通道通过，交叉通道阻断

检查四种配置的画面归属

图 5.43 中，两条实线将左右视差画面分别送入对应的眼睛。A、D 让两眼收到同样的混合画面，C 则互换了两路画面。银幕需保留两路的偏振方向，眼镜才能分别透过各自的图像。

例 5.11 (旋光法测浓度)**.** 自然光源S 后依次放起偏器A、待测糖溶液P、检偏器B，最后在O 观察。不放溶液时转动B，使O 处最亮；再插入使偏振方向转过α 的溶液，忽略吸收。求强度如何改变，以及分别只转动A 或只转动B 时恢复最大亮度所需的角度。测浓度时固定波长、温度与溶液厚度。

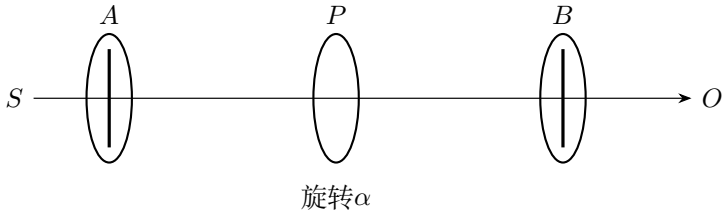


图 5.44: 光的传播次序为$S \to A \to P \to B \to O$

解　沿元件次序计算插入后的强度

按图 5.44 的 $A \to P \to B$ 次序，把起偏器后的强度记为I_p，初始A, B 平行。不放溶液时$I_{\max} = I_p$，插入后偏振方向相对B 转过α，故

$$\boxed{I = I_{\max}\cos^2\alpha}.$$

强度变化由偏振方向与检偏器透振轴的夹角决定；下面用实际导数判断微小旋光角的亮度灵敏度。

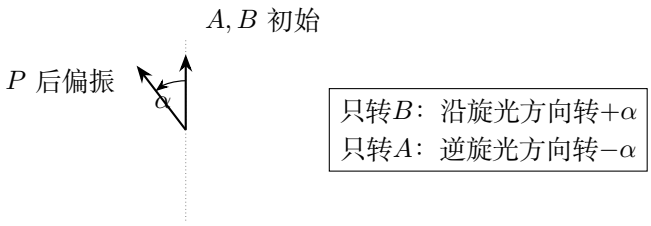


图 5.45: 沿传播方向看横截面；虚线为B 最初的透振方向

分别求转动起偏器和检偏器的方向

按图 5.45 约定旋光方向为正。只转B 时，使其与出射偏振方向平行，须转$+\alpha$；只转A 时，溶液仍额外转动$+\alpha$，故应预先把入射偏振方向转$-\alpha$。两个透振方向以 180° 为周期；最小转角应把 $+\alpha$ 或 $-\alpha$ 归约到 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 后取绝对值。通常小旋光角时，最小转角大小均为 $|\alpha|$。

检查微小角的亮度灵敏度

固定 I_p，对 $I = I_p \cos^2\alpha$ 使用链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\alpha} = 2I_p \cos\alpha(-\sin\alpha) = -I_p \sin 2\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}\alpha^2} = -2I_p \cos 2\alpha.$$

在 $\alpha = 0$，三项分别为 $I_p, 0, -2I_p$。因 I/I_p 是偶函数，泰勒式给出 $I/I_p = 1 - \alpha^2 + O(\alpha^4)$，$\alpha$ 用弧度。这个二阶变化说明亮度在平行位置附近变化较慢。由 $I' = -I_p \sin 2\alpha$，可见一阶变化在平行和正交位置为零，斜率的绝对值在 45° 处最大。

在固定实验条件下反求浓度

测量时转动检偏器，记下最大强度或消光的位置。这个角度随偏振方向转动而改变；吸收使透射强度整体降低。给定旋光率与液层厚度后，用 $\alpha = [\alpha]\ell c_s$ 求浓度。

例 5.12 (洛埃镜的干涉区域与条纹间距)**.** 点光源S 位于水平镜面上方a，屏在其右侧水平距离L 处。镜面M 只覆盖$x_1 \le x \le x_2$，其中$0 < x_1 < x_2 < L$。光源坐标为$(0, a)$，屏为$x = L$。画出直接光和反射光在屏上的重叠区域，并求近轴条件下相邻同类条纹的间距。设波长为λ，镜面引入相对π 反射相位。

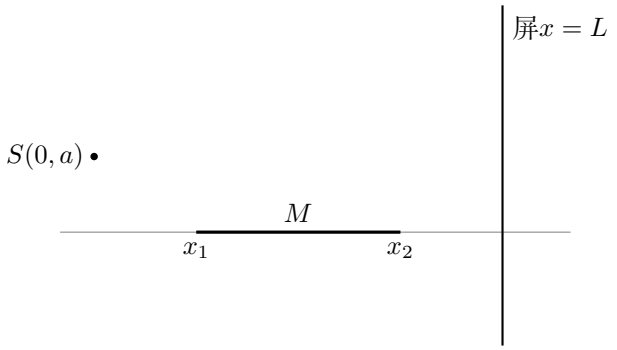


图 5.46: 有限长度镜面决定可接收反射光的屏上范围

解　用镜像光源构造有限镜面的照明区

将图 5.46 中的S 关于镜面反射到$S'(0, -a)$。镜面反射光等效于从S' 发出、穿过实际镜面区间的光。图 5.47 中，连接S' 与镜面两端并延长，得到屏上的$P_{\text{高}}, P_{\text{低}}$。直线从$S'$ 经$(x_m, 0)$ 到屏，交点高度为

$$y = a\left(\frac{L}{x_m} - 1\right).$$

所以反射光照到的区间为

$$\boxed{a\left(\frac{L}{x_2} - 1\right) \le y \le a\left(\frac{L}{x_1} - 1\right)}.$$

若直接光可照满这段屏面，则此区间就是几何重叠区；实际还应满足两束光相干且均有可观测强度。

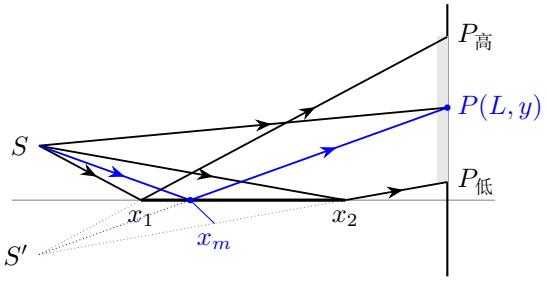


图 5.47: 由虚光源和镜面端点构造重叠区；纵向作压缩示意

由等效双光源求几何路程差

对于屏上任意点$P(L,y)$，反射光路长等于$S'P$。用两根式的平方差消去相减，几何路程差为

$$\begin{aligned}\delta &= \sqrt{L^2+(y+a)^2}-\sqrt{L^2+(y-a)^2}\\ &= \frac{(y+a)^2-(y-a)^2}{\sqrt{L^2+(y+a)^2}+\sqrt{L^2+(y-a)^2}}\\ &= \frac{4ay}{\sqrt{L^2+(y+a)^2}+\sqrt{L^2+(y-a)^2}} \simeq \frac{2ay}{L}.\end{aligned}$$

求相邻同类条纹的近轴间距

这里要求$a,|y|\ll L$。由相邻同类条纹$\Delta\delta=\lambda$，

$$\boxed{\Delta y=\frac{\lambda L}{2a}}.$$

此处 δ 随 y 的变化率是 $2a/L$，对应图 5.47 中相距 $2a$ 的 S 和 S'。

加入反射相移并检查可见区域

反射还增加相对相位π，故

$$\Delta\phi=\frac{2\pi\delta}{\lambda}+\pi.$$

在图 5.47 的重叠区内，亮纹满足 $\delta=(m+\frac{1}{2})\lambda$，暗纹满足 $\delta=m\lambda$。有限镜面给出 $P_{低}>0$，因此从这段屏面上的第一个可见级次开始计数。

例 5.13 (阈值、光强与初动能)**.** 对同一种金属，以下说法哪些正确?

A. 入射光频率低于阈值时，通常的一光子光电效应不能发生。

B. 无论频率多低，只要照射足够久就会发生光电效应。

C. 频率超过阈值时，光强越弱，光电子最大初动能越小。

D. 频率超过阈值时，频率越高，光电子最大初动能越大。

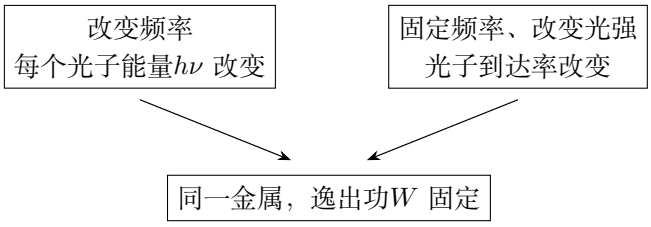


图 5.48: 分别考虑单个光子的能量与单位时间到达的光子数

解　用单次吸收的能量条件判断阈值

图 5.48 把单光子能量与光子到达率分开。由$K_{\max}=h\nu-W$ 可知，$\nu<W/h$ 时单个光子能量不足以使电子逸出，所以 A 对、B 错。

区分频率与光强控制的量

在同一频率下改变光强，发射数改变，$K_{\max}=h\nu-W$ 保持原值，所以 C 错。频率提高时 $K_{\max}$ 增大，所以 D 对。

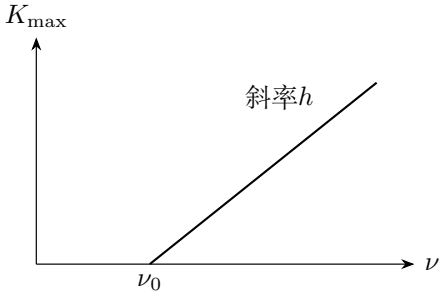


图 5.49: 最大初动能与频率的关系，直线仅在阈值以上有发射意义

从图上读阈频和斜率

故选 $\boxed{\text{A, D}}$。图 5.49 的实际直线从横轴上的阈频开始；把直线延到纵轴时，截距为 $-W$，可用来读出逸出功。

例 5.14 (比较材料时须控制频率)**.** 判断下列说法：

A. 极限频率越大的金属，逸出功越大。

B. 只要照射足够久，任何频率的光都能使金属发射电子。

C. 只要测得某金属的光电子最大初动能较大，就能断定其逸出功较小。

D. 入射总功率一定时，频率越高，单位时间逸出电子必然越多。

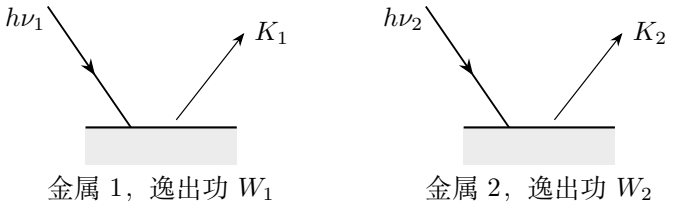


图 5.50: 两种材料分别受光照射；比较最大初动能前须确认两次频率

解　由阈频比较逸出功

$W = h\nu_0$，故 A 对。B 忽略阈值，错。

检查比较动能时缺少的同频条件

比较图 5.50 中的 K_1, K_2 时，C 只有在$\nu_1 = \nu_2$ 时才可成立；若入射频率也改变，较大的$K_{\max}$ 完全可能来自更大的光子能量。

固定功率时重新计算光子到达率

总功率P 固定时，光子到达率为$P/(h\nu)$，提高频率反而减少光子数；电子发射率还受量子效率影响，所以 D 的“必然越多”没有依据。

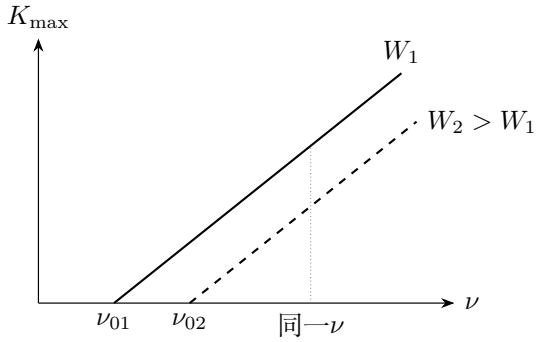


图 5.51: 固定同一频率时，较大逸出功使整条直线下移、阈值右移

图 5.51 中的竖直辅助线才允许在同一频率上比较初动能。故仅$\boxed{\text{A}}$ 正确。

给出不同频率下的数值反例

选项 C 可用两组能量来判断。若第一次$h\nu_1 = 3\,\text{eV}, W_1 = 2\,\text{eV}$，则$K_1 = 1\,\text{eV}$；第二次$h\nu_2 = 5\,\text{eV}, W_2 = 3\,\text{eV}$，则$K_2 = 2\,\text{eV}$。第二次最大初动能更大，逸出功也更大，说明缺少同频条件时无法反推材料性质。

例 5.15 (用阈值判断棱镜色散次序)**.** 复色光含m,n,p 三种单色光，其中ν_n,ν_p 均大于ν_m。用n 光照射某金属时发生光电效应，改用p 光照射则不发生。复色光通过处于正常色散波段的玻璃三棱镜，求出射光从偏折最小到最大所对应的次序。

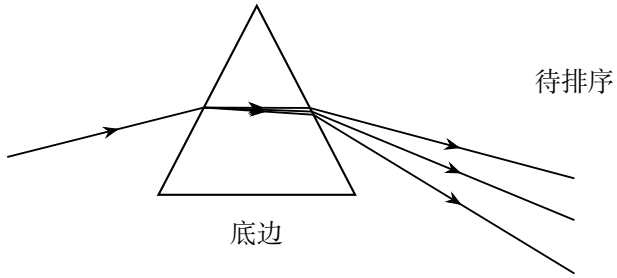


图 5.52: 棱镜底边在下方，正常色散时较高频率向底边偏折更多

解　由能否逸出建立频率不等式

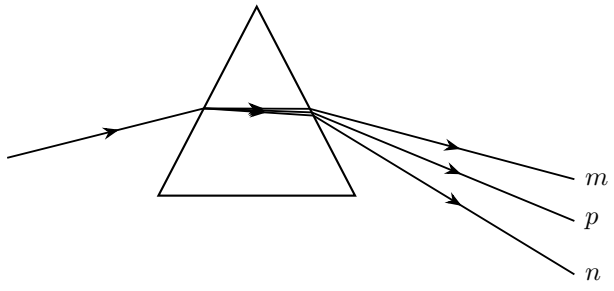
先用光电阈值确定图 5.52 中三束光的频率次序。题意给出$\nu_n \geq \nu_0 > \nu_p$，再结合$\nu_p > \nu_m$，得

$$\nu_n > \nu_p > \nu_m, \qquad \lambda_n < \lambda_p < \lambda_m.$$

把频率次序转为折射率和偏折次序

正常色散区内折射率随频率增加而增大，对相同棱镜和入射条件，偏折也相应增大，所以从偏折最小到最大为

$$\boxed{m,\ p,\ n}.$$



频率越高，向底边偏折越大

图 5.53: 先比较频率，再比较折射率与偏折，避免直接凭颜色猜测

检查色散条件和示意角度

图 5.53 按正常色散画出三束光。频率越高，玻璃的折射率越大，光线向底边的偏向越大。

例 5.16 (由截止电压求逸出功)**.** 用光子能量$E_\gamma = 2.5\,\mathrm{eV}$ 的单色光照射光电管阴极P。开关断开、无外加反向电压时可测得光电流；闭合开关调节反向电压，当其大小达到0.60 V 时光电流恰好截止。求阴极材料的逸出功。

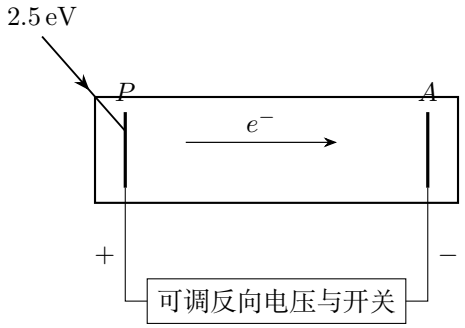


图 5.54: 测量反向电压的大小，阴极电势高于收集极

解　以电子电势能增加确定反向场做功

图 5.54 中电子从P 向A 飞行，电势降低使负电电子的电势能增加，因此外电场对电子做负功。截止时，

$$K_{\max} = eU_s = 0.60\,\mathrm{eV}.$$

将最大初动能从光子能量中扣除

由能量守恒，

$$\boxed{W = E_\gamma - K_{\max} = 2.5 - 0.60 = 1.9\,\mathrm{eV}}.$$

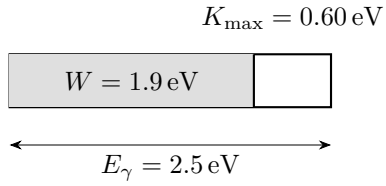


图 5.55: 能量先用于逸出，再把剩余最大动能全部消耗于反向电场

入射能量的分配

图 5.55 中，入射光子的能量分成逸出功和最大动能。截止电压 0.60 V 对应能量 $eU_s = 0.60\,\mathrm{eV}$，两项用同一种能量单位后即可相减。

例 5.17 (光电效应图像的截距)**.** 对同一金属、固定照射面积，图 5.56 中给出四种理想化关系。A：固定频率、固定反向电压时，光电流与光强成正比；B：截止电压与频率的直线通过坐标原点；C：反向电压增大时光电流减小直至为零；D：忽略仪器响应，照射后电子发射迅速建立。哪一幅存在基本物理错误?

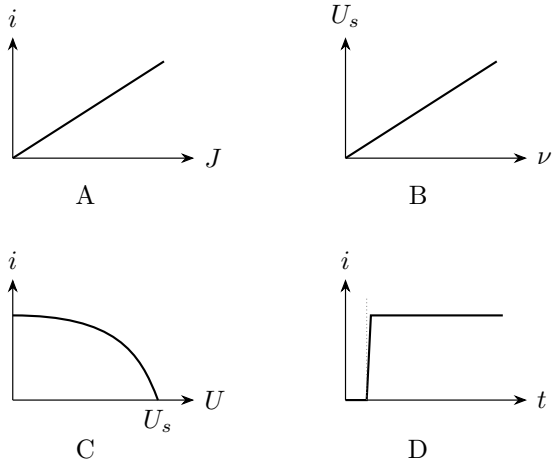


图 5.56: 横轴J 为光强，U 为反向电压大小；所有轴均从零起

解 由光电方程求出横截距

图 5.56 的 B 图使用截止电压的大小 U_s。由

$$U_s = \frac{h}{e}\nu - \frac{W}{e} = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

可知，截止电压直线与频率轴交于$\nu_0 = W/h > 0$，不通过原点，所以错图为$\boxed{\mathrm{B}}$。

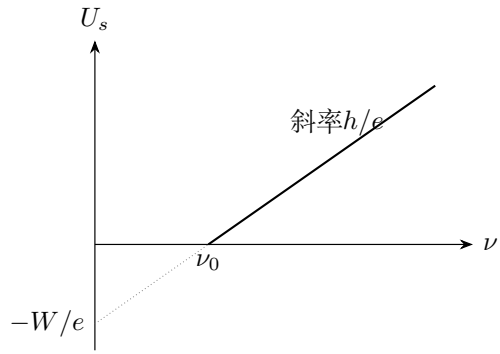


图 5.57: 正确的截止电压直线；在阈值以上取实际可测分支

区分实际测量分支与负截距外推

图 5.57 中的负截距只来自数学外推。

逐一检查其余图像的固定条件

A取固定材料、频率和收集条件，光电流随入射强度成比例改变。C 中电子遇到的反向电压越大，能到达收集极的电子越少。D 画出照射后电流很快建立的情形。

例 5.18 (光电管外电路的电流方向)**.** 光电管阴极K 在左、收集极A 在右；右支电流计上端为a、下端为b。用单色光L_A 照射可测到光电流，用单色光L_B 照射不发生光电效应。比较两光频率，并判断流经电流计的常规电流方向。

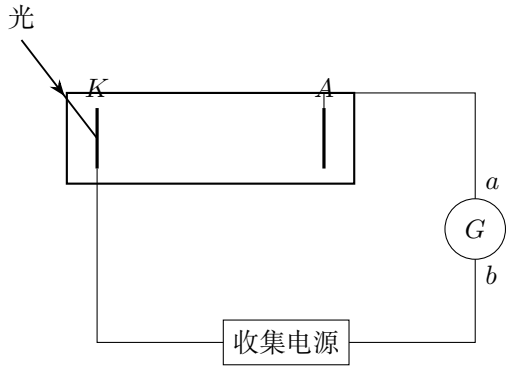


图 5.58: 电流计在收集极右侧的外电路中

解　利用同一阴极阈值比较两束频率

图 5.58 中的阴极 K 有同一个阈频。光 A 使电子逸出，满足 $\nu_A \geq \nu_0$；光 B 的频率 $\nu_B < \nu_0$。所以

$$\boxed{\nu_A > \nu_B}.$$

沿管内外连续路径追踪电子

图 5.59 中，管内电子从K 向右到A，被收集后沿右外支路从a 向b 移动。

反向标出电流计中的常规电流

常规电流与电子定向运动方向相反，故电流计中

$$\boxed{\text{电流由}b\text{ 流向}a}.$$

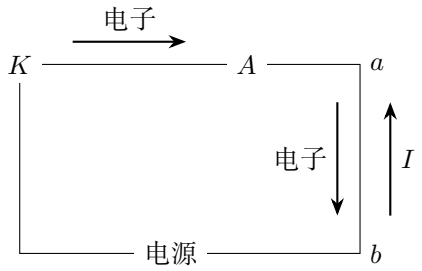


图 5.59: 管内外的电子流连续，常规电流与之相反

图中电子从 K 向 A 飞行，常规电流方向与电子运动方向相反。

例 5.19 (X 射线管的电子速度与短波限)**.** X 射线管中阴极K 发射初速可忽略的电子，电子经$U = 30\,\mathrm{kV}$ 加速后打到阳极靶A。求：(1) 电子到靶速度，并比较非相对论近似；(2) X 射线最短波长；(3) 电流为$10\,\mathrm{mA}$ 时，若把全部入射电子动能用于产生能量为eU 的短波限光子，每秒最多产生多少个这样的光子？取$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$，$m_e = 9.10 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$，$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$，$c = 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$。

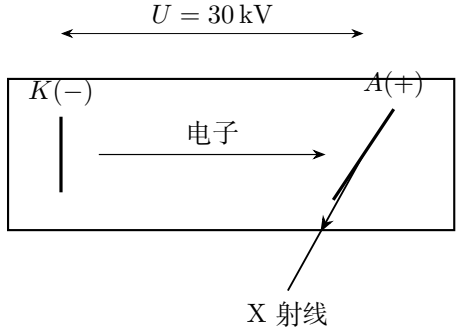


图 5.60: 电子加速方向与 X 射线出射方向无需相同

解　先由电场做功求入射电子动能

图 5.60 中电子由 K 向高电势的 A 加速，电场做功为 eU，故

$$K = eU = 4.80 \times 10^{-15}\,\mathrm{J} = 30\,\mathrm{keV}.$$

由相对论动能计算速度

相对论关系$K = (\gamma - 1)m_e c^2$ 给出

$$\gamma = 1 + \frac{eU}{m_e c^2} \simeq 1.05861, \qquad \boxed{v = c\sqrt{1-\gamma^{-2}} \simeq 9.84 \times 10^7\,\mathrm{m/s}}.$$

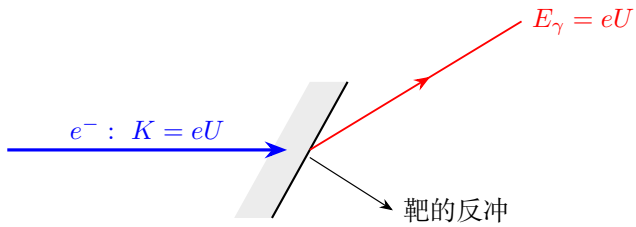
估计经典速度的误差

若用经典关系，则

$$v_{\mathrm{cl}} = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} \simeq 1.03 \times 10^8\,\mathrm{m/s},$$

约高估4.3%。电子速率约为$0.328c$。相对论修正改变速度的数值，却不改变电场做功 eU；因此单个电子可用于辐射的最大能量仍为 eU，短波限的计算应以这一能量为依据。

$$E_\gamma \le eU, \qquad \lambda \ge hc/(eU)$$



电子束：每秒 I/e 个
入射总功率 UI

图 5.61: 端点事件：电子损失全部入射动能并发出一个最高能量光子；靶承担动量交换

以最大辐射能量求短波限

图 5.61 中，靶承担动量交换。忽略重靶反冲能时，端点光子能量最大为电子入射动能，所以

$$\boxed{\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU} = 4.14 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} = 0.0414\,\mathrm{nm}}.$$

按总能量求端点光子数率上限

将总入射功率除以每个端点光子的能量，得到端点光子的数率上限：

$$\dot{N}_{\mathrm{end}} \le \frac{UI}{eU} = \frac{I}{e}, \qquad \boxed{\dot{N}_{\mathrm{end,max}} = 6.25 \times 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}}.$$

这是假定全部电子动能都变成端点光子的能量上限，实际效率远低于该理想值。若问所有能量的 X 射线光子总数，只知道总功率并不足以确定，因为较低能量光子也可能产生；必须说明光谱或每个光子的能量，才能求总数。

例 5.20 (激光光子数与辐射压力)**.** 激光功率为$P = 60\,\mathrm{W}$, 真空波长为$\lambda = 663\,\mathrm{nm}$。取$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$，$c = 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$。求：(1) 1 秒内发射的光子数；(2) 光束垂直照射并被表面全部吸收时，光对表面的作用力。忽略表面随后向外辐射的反冲。

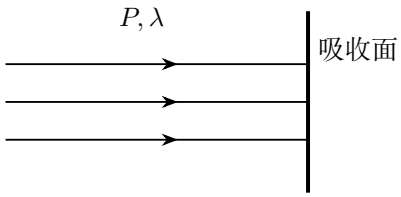


图 5.62: 吸收面获得入射光子沿光束方向的动量

解　将波长换算成单个光子能量

由图 5.62 给出的波长，先求单个光子的能量

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = 3.00 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

以一秒总能量除以单光子能量

因此

$$\boxed{N = \frac{P(1\,\mathrm{s})}{E_\gamma} = 2.00 \times 10^{20}}.$$

计算吸收面的动量转移率

图 5.63 中，入射光子的动量向右，吸收后不再以光子的形式离开。每个光子被吸收，转移给表面的法向动量为$p_\gamma = h/\lambda$，故

$$F = \dot{N}_\gamma p_\gamma = \frac{P\lambda}{hc}\frac{h}{\lambda} = \frac{P}{c}, \qquad \boxed{F = 2.00 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}}.$$

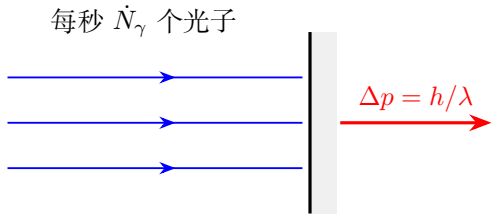


图 5.63: 吸收一个光子后，表面获得沿入射方向的动量；力由连续的动量转移率决定

以固定功率和全反射极限检查结果

力与波长在代数中抵消，是因为固定功率下，长波光子的数率较大而单个动量较小。若表面为理想镜面、正入射后全部反射，单个法向动量变化加倍，对应$F = 2P/c$，可作比较检查。

例 5.21 (两种近邻波长使条纹变浅)**.** 两种互不相干、强度相等的单色光$\lambda_1 = 500\,\mathrm{nm}$、$\lambda_2 = 502\,\mathrm{nm}$ 同时垂直照射双缝，每种光在两缝的振幅相等。缝距$d = 2.00\,\mathrm{mm}$，屏距$L = 1.00\,\mathrm{m}$。忽略单缝包络，求总强度随路程差的表达式，并求从中心起第一处细条纹对比度降至零的包络节点。使用远场和近轴近似，并估计其适用程度。

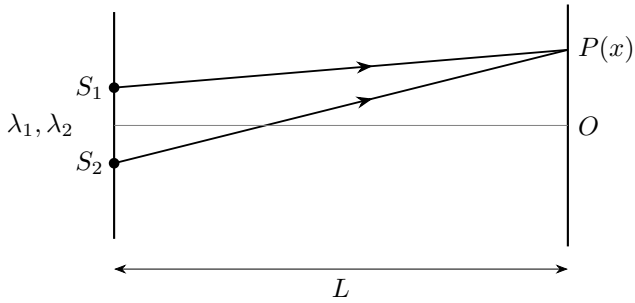


图 5.64: 每种波长各自通过两缝；屏上记录两幅强度图样的叠加

解　分别计算两种颜色自身的双缝强度

图 5.64 的几何路程差为$\delta = d\sin\theta \simeq dx/L$。设每种单色光单独形成图样的最大强度为$I_0$，则

$$I_j = I_0 \cos^2 \frac{\pi\delta}{\lambda_j}.$$

叠加强度并分离快慢变化因子

不同频率之间的交叉项平均为零，所以先将两种强度相加。令 $\phi_j = 2\pi\delta/\lambda_j$，用 $\cos^2(\phi_j/2) = (1+\cos\phi_j)/2$，

$$\frac{I}{I_0} = 1 + \frac{\cos\phi_1 + \cos\phi_2}{2} = 1 + \cos\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\cos\frac{\phi_1+\phi_2}{2}.$$

将两个相位的和、差分别代入，得到总强度

$$\boxed{\frac{I}{I_0} = 1 + \cos\left[\pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\right]\cos\left[\pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\right]}.$$

确定局部对比度的近似含义

后一余弦随δ 快速变化，前一余弦为慢变调制。把慢变因子在几条细条纹范围内视为常数，局部对比度为

$$\mathcal{V}(\delta) \simeq \left|\cos\left[\pi\delta\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right)\right]\right|.$$

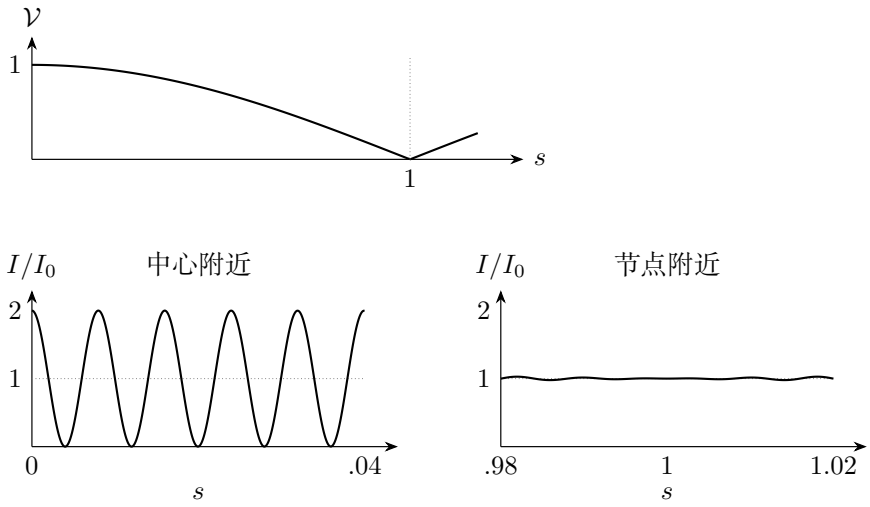


图 5.65: 上图为慢变对比度；下方用相同纵轴尺度比较中心与节点附近的真实强度，$s = \delta/\delta_0$

由慢变相位求第一包络节点

从中心向外，图 5.65 中的两组条纹逐渐错开。节点处，慢变余弦过零；在该点附近几条细纹内，总强度只在平均值 I_0 附近小幅起伏。

图 5.65 中，慢变相位首次达到$\pi/2$ 时出现包络节点，故

$$\boxed{\delta_0 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2|\lambda_2-\lambda_1|} = 62.75\,\mu\text{m}}, \qquad \boxed{x_0 \simeq \frac{L\delta_0}{d} = 31.375\,\text{mm}}.$$

在该节点，慢变因子为零，强度等于 I_0。

用两段准确路程求节点位置

图 5.65 下方用同一纵轴比较中心与节点附近的强度。要估计节点坐标的误差，保留两缝到屏的准确距离。由 $r_2 - r_1 = \delta_0$ 和 $r_2^2 - r_1^2 = 2dx$ 得

$$r_1 = \frac{dx}{\delta_0} - \frac{\delta_0}{2}.$$

将右侧平方，令其等于 $L^2 + (x - d/2)^2$。两边的 $-dx$ 消去，余下

$$x^2\left(\frac{d^2}{\delta_0^2} - 1\right) = L^2 + \frac{d^2 - \delta_0^2}{4}.$$

取正侧节点，

$$x = \frac{\delta_0}{2}\sqrt{1 + \frac{4L^2}{d^2 - \delta_0^2}} \simeq 31.390\,\text{mm}.$$

它比近轴值 31.375 mm 大约 0.0155 mm，相对差约 4.93×10^{-4}。

例 5.22 (有限缝宽造成的光栅缺级)**.** 光栅周期$d = 3.00\,\mu\text{m}$,每缝宽度$a = 1.00\,\mu\text{m}$，共有$N = 300$ 条被均匀照明的缝。波长$\lambda = 500\,\text{nm}$ 的平行光垂直入射。求非掠射范围内可出现的主极大级次、缺级，并求中央单缝包络内实际主极大的数目。

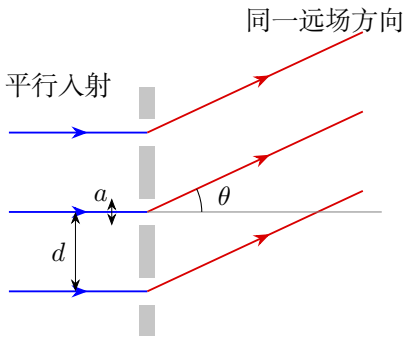


图 5.66: 灰色部分挡光，缝宽为 a，相邻缝中心的距离为 d。

解　按非掠射条件列出几何候选级次

由图 5.66 的相邻缝路程差，主极大要求$d\sin\theta = k\lambda$。非掠射传播要求$|\sin\theta| < 1$，故$|k| < 6$，候选级次为$0, \pm1, \ldots, \pm5$。

联立单缝零点找出缺级

单缝暗纹满足$a\sin\theta = m\lambda$，$m = \pm1, \pm2, \ldots$。两条件重合时

$$k = \frac{d}{a}m = 3m.$$

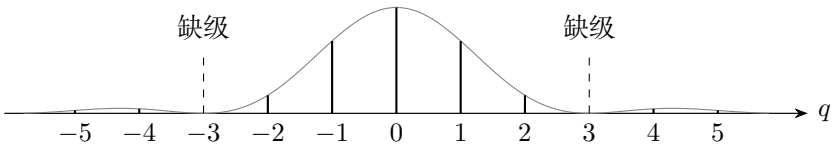


图 5.67: 第一暗纹在$q = \pm3$。虚线标出缺级，实线标出保留的级次，其中$q = d\sin\theta/\lambda$。

在中央包络开区间内计数

图 5.67 中±3 级落在第一单缝零点，故

$$\boxed{\text{实际非掠射主极大：}\ 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm5}.$$

中央包络严格位于$|a\sin\theta| < \lambda$，即$|q| < 3$，包含

$$\boxed{k = -2, -1, 0, 1, 2, \quad \text{共5 个主极大}}.$$

掠射级次与主峰宽度

±6 级落在掠射方向，也恰是第二个单缝零点。图 5.67 用竖线标出各级位置和包络高度；$N = 300$ 主要决定亮峰的角宽。

5.7 本讲小结

干涉强度来自复振幅相加后的模平方。相位差决定明暗位置，振幅匹配与相干性决定对比度；不同频率在通常观测时间内各自形成图样后叠加强度。双缝计算应先定义有符号光程差，加入薄片引起的额外光程和反射相位，再使用明暗条件。薄膜的传播光程差为 $2n_f t\cos r$，相位相消还须与振幅匹配区别。

单缝衍射把缝内连续微元相加，多缝干涉再把不同缝的复振幅相加。缝宽决定包络，周期决定主极大候选位置，缝数决定细峰宽度；缺级由单缝零点与缝间相长条件共同确定。有限包络下，总强度峰位还可能偏离干涉因子的极大位置，计数与求实际峰位应分别处理。

偏振片保留电场在透振轴上的分量。自然光经第一片的强度减半，后续各片则按当前偏振方向逐次使用马吕斯定律。旋光改变偏振方向，吸收改变强度；反求浓度须固定波长、温度与溶液厚度，并明确所采用的检偏方法。

光电效应中，单个光子的能量由频率决定，光子到达率还取决于功率。逸出功规定阈值，截止电压测量最大初动能，饱和电流反映被收集的电子数。对同一材料作差可消去逸出功；分析电流方向时先沿装置追踪电子，再反向标出常规电流。结果应同时符合能量守恒、量纲以及图中的电场和电子受力方向。

5.8 练习

练习 5.1 (插入薄片后的条纹移动)**.** 双缝间距$d = 0.300\,\mathrm{mm}$，屏距$L = 1.50\,\mathrm{m}$，波长600 nm。在上缝S_1 后紧贴厚$t = 3.00\,\mu\mathrm{m}$、折射率1.50 的薄片，忽略倾斜与反射。求条纹间距、零级明纹的移动方向及距离，并判断原中心O 的明暗。

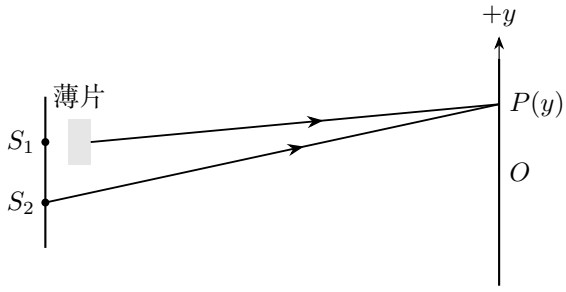


图 5.68: 练习：插入薄片后的条纹移动

练习 5.2 (增透膜的两个条件)**.** 空气、薄膜、基底折射率依次为1.00, 1.40, 1.96，波长$\lambda_0 = 560\,\mathrm{nm}$ 的光正入射。求使两束主要反射光相消的最小非零膜厚，并检查该膜是否满足零反射所需的振幅条件。

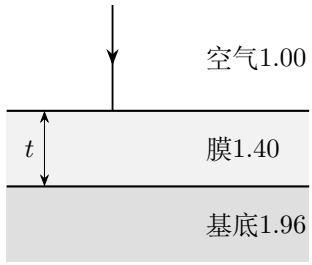


图 5.69: 练习：增透膜的两个条件

练习 5.3 (双缝条纹与单缝包络)**.** 波长500 nm 的光照射双缝，每缝宽$a = 0.200\,\mathrm{mm}$，中心距$d = 0.500\,\mathrm{mm}$，屏距$L = 2.00\,\mathrm{m}$。按近轴远场模型求单缝中央包络宽度、干涉因子的空间周期及中央包络内的干涉因子极大级次数。若每缝宽度加倍，波长、中心距和屏距不变，结论怎样改变？说明这些级次位置与总强度实际峰位的区别。

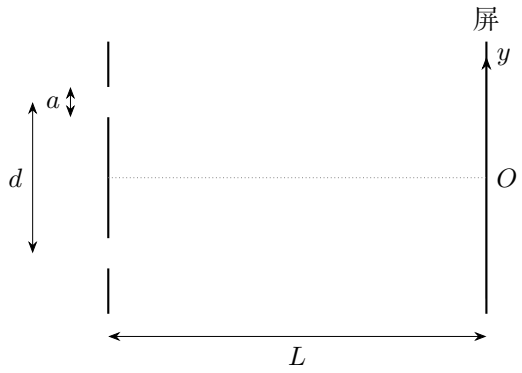


图 5.70: 等宽双缝与观察屏的几何参数；图中不标出待求条纹

练习 5.4 (正交偏振片之间插入第三片)**.** 自然光强度为I_0，先后通过透振方向互相垂直的两片理想偏振片，出射强度是多少？现于两者之间插入透振方向与第一片成45° 的第三片，求最终强度。忽略吸收以外的损失。

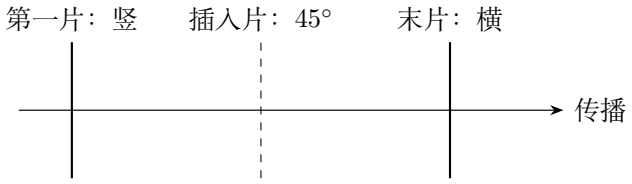


图 5.71: 练习：正交偏振片之间插入第三片

练习 5.5 (用两组截止电压求材料参数)**.** 某光电管在频率$6.00\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$、$8.00\times10^{14}\,\mathrm{Hz}$ 下的截止电压大小分别为$0.480\,\mathrm{V}, 1.310\,\mathrm{V}$。取$e=1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$，求普朗克常量的测量值、逸出功和截止频率。固定频率把光强加倍，截止电压怎样变化?

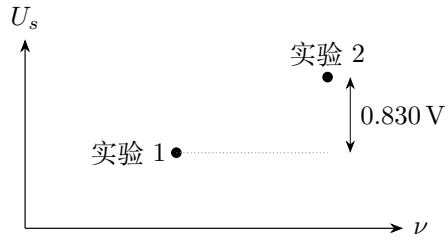


图 5.72: 练习：用两组截止电压求材料参数

练习 5.6 (圆孔逐渐闭合)**.** 在亮着的小电珠与光屏之间放一带圆孔的遮光板，孔径由约$1\,\mathrm{cm}$ 逐渐缩小直至闭合。设光源包含可分辨的灯丝形状，光屏距离和观察条件合适。将以下主要现象按出现顺序排列：a. 完全黑暗；b. 小孔成像；c. 明显衍射图样；d. 主要由孔形决定的亮斑。

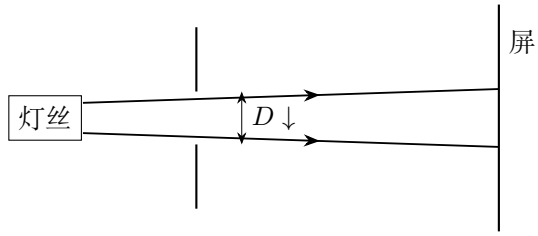


图 5.73: 孔径改变，而光源与屏的位置不变

练习 5.7 (增大双缝条纹间距)**.** 用黄光观察双缝干涉，要增大条纹间距，下列措施哪一项有效? A. 换绿光；B. 换红光；C. 增大光强；D. 使光屏靠近双缝。其余条件保持不变。

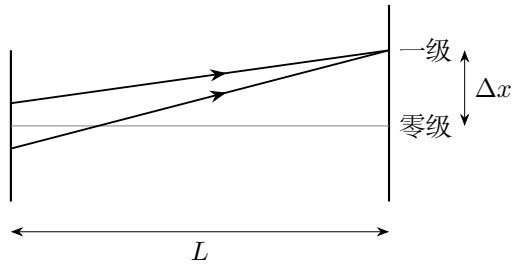


图 5.74: 比较同一对相邻亮纹中心的位置

练习 5.8 (锌板与验电器)**.** 清洁锌板与起初不带电的验电器相连，分别用足以引起锌板光电发射的紫外线、不能引起发射的红光照射，忽略漏电。判断：A. 紫外线可使指针偏转；B. 红光也可使指针偏转；C. 发射后锌板带负电；D. 指针与金属杆因带同种正电荷而排斥。

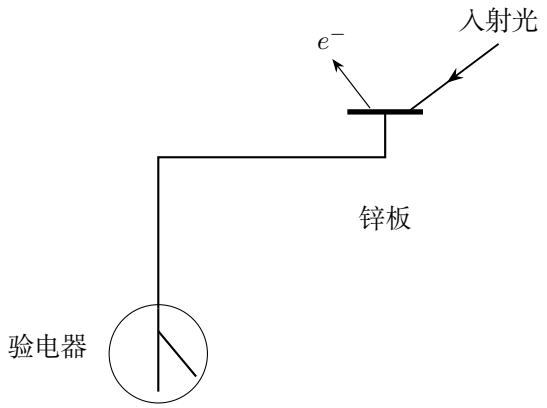
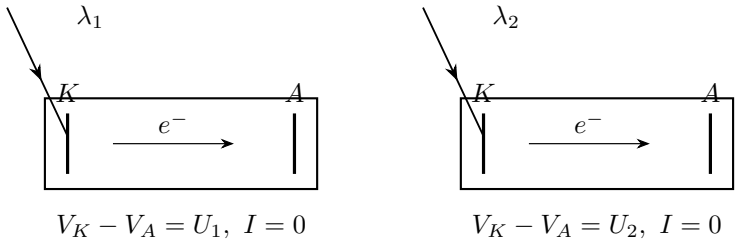


图 5.75: 逸出电子离开锌板，锌板与验电器构成同一导体

练习 5.9 (改变波长测电子电荷量)**.** 用$\lambda_1 = 3500 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ 的光照射某金属，测得截止电压U_1。光波长改变$500 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ 后，截止电压增加$0.59\,\mathrm{V}$。已知$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$，取$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。求波长改变的方向及电子电荷量的大小。



$$|\lambda_2 - \lambda_1| = 50\,\mathrm{nm}$$
$$U_2 - U_1 = 0.59\,\mathrm{V}$$

图 5.76: 同一阴极分别受两种波长照射，均调节反向电压直至电流截止

练习解答

练习 5.1

解　按下路减上路建立有符号光程差

图 5.68 中 y 向上为正，总光程差取下路减上路。几何路程差为$r_2-r_1\simeq dy/L$。薄片取代同厚度空气，上路增加光程$q=(n-1)t=1.50\,\mu\mathrm{m}=2.50\lambda$。用下路减上路，得到

$$\delta=\frac{dy}{L}-q,\qquad y_k=\frac{L}{d}(k\lambda+q).$$

分别求周期和新零级位置

故$\boxed{\Delta y=\lambda L/d=3.00\,\mathrm{mm}}$，$\boxed{y_0=Lq/d=+7.50\,\mathrm{mm}}$，向上缝即薄片一侧移动。

原中心位置的相位差

图 5.77 中，所有条纹向上移，周期保持原值。原中心 $y=0$ 的总相位差为 -5π，所以两路等幅时该处为暗纹。

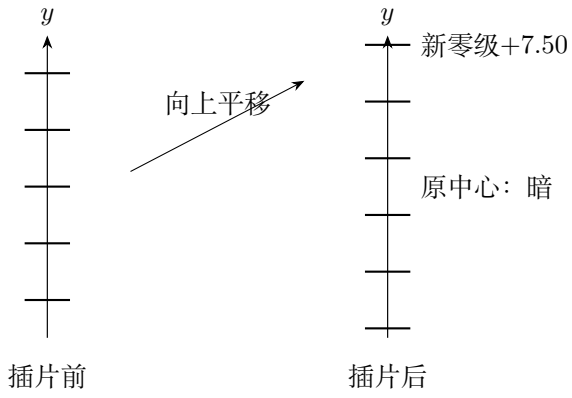


图 5.77: 练习 5.1 的解答图：新零级向薄片所在侧移动；纵向屏坐标用毫米

练习 5.2

解　分别记录两个界面的反射相位

图 5.69 的两个界面各产生一次π 反射相位变化，二者相减为零。因此相消的最小非零厚度满足

$$2n_f t=\frac{\lambda_0}{2},\qquad \boxed{t=\frac{560}{4\times1.40}\,\mathrm{nm}=100\,\mathrm{nm}}.$$

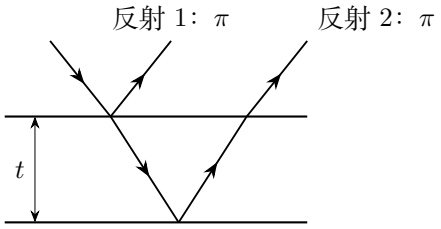
薄膜内的往返光程

图 5.78 分辨了两个反射界面。计算按正入射，膜内往返的额外光程为 $2n_f t$，传播相位差正好为 π。

检查总反射系数的振幅匹配

仅有相消相位仍不保证零反射；严格零反射还须将多次反射求和。本题$n_f^2 = 1.40^2 = 1.96 = n_0 n_s$，满足正入射无吸收单层膜的振幅匹配条件，所以设计波长下可实现零反射。将折射率代入薄膜的总反射系数。$r_{0f} = (1-1.4)/(1+1.4) = -1/6$，$r_{fs} = (1.4-1.96)/(1.4+1.96) = -1/6$。四分之一波长厚度使传播因子为 -1，故总反射系数的分子 $r_{0f} - r_{fs}$ 为零。

该结论限于给定波长及正入射。



路径为辨认界面而倾斜示意
计算按正入射，额外光程为$2n_f t$

图 5.78: 练习 5.2 的解答图：两次反射相位相同，差异来自膜内往返传播

练习 5.3

解　由第一暗纹求包络宽度和细纹周期

图 5.70 给出缝板与屏的尺度。单缝第一暗纹满足$a\sin\theta = \pm\lambda$，近轴时$y \simeq L\theta$，所以中央包络的两侧暗纹位于$y = \pm\lambda L/a$，其宽度与干涉因子的空间周期分别为

$$\boxed{w_0 = \frac{2\lambda L}{a} = 10.0\,\mathrm{mm}}, \qquad \boxed{\Delta y = \frac{\lambda L}{d} = 2.00\,\mathrm{mm}}.$$

用严格不等式数出中央包络级次

干涉因子在$y_k = k\lambda L/d$ 处取极大。该位置位于中央包络内的条件是$|y_k| < \lambda L/a$，即$|k| < d/a = 2.50$，故$k = -2, -1, 0, 1, 2$，共$\boxed{5}$ 个级次。

图 5.79 把两侧第一暗纹与五个干涉级次画在同一屏坐标上。

改变缝宽后的中央包络与级次

若 a 加倍，则 $w_0 = 5.00\,\mathrm{mm}$、$\Delta y = 2.00\,\mathrm{mm}$，且 $|k| < 1.25$。图 5.79 下方给出 $k = -1, 0, 1$，共 $\boxed{3}$ 个级次。

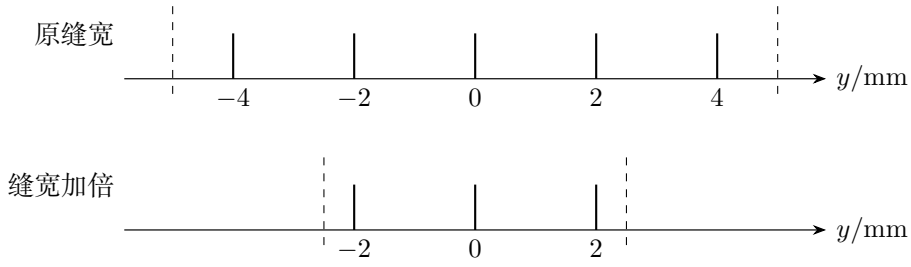


图 5.79: 虚线是第一暗纹的位置，短竖线是干涉因子的极大位置。

对总强度求导区别实际峰位

有限缝宽时，总强度是两个因子的乘积，

$$I(y) = I(0)\left[\frac{\sin(\pi a y/\lambda L)}{\pi a y/\lambda L}\right]^2 \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right).$$

在非中心的y_k 处，干涉因子的导数为零，但包络的导数一般不为零，故乘积的导数未必为零。

求实际峰位时，令$q = ay/(\lambda L)$、$r = d/a$，在 $q \neq 0$ 且光强非零处取对数：

$$\ln I = \ln I(0) + 2\ln|\sin(\pi q)| - 2\ln|\pi q| + 2\ln|\cos(\pi r q)|.$$

逐项使用 $\mathrm{d}\ln|f|/\,\mathrm{d}q = f'/f$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}q} &= 2\frac{\pi\cos(\pi q)}{\sin(\pi q)} - \frac{2}{q} + 2\frac{-\pi r\sin(\pi r q)}{\cos(\pi r q)} \\ &= 2\pi\cot(\pi q) - \frac{2}{q} - 2\pi r\tan(\pi r q).\end{aligned}$$

又因 $\mathrm{d}q/\,\mathrm{d}y = a/(\lambda L) > 0$，对 y 求导为零等价于对 q 求导为零。将上式除以 2，实际非零峰位满足

$$\pi\cot(\pi q) - \frac{1}{q} - \pi r\tan(\pi r q) = 0.$$

强度峰的位置

把峰位方程的左端记为 $G(q)$。先在相邻零强度点之间找根。例如缝宽加倍时，$r = 1.25$，图 5.80 所示亮纹位于 $0.4 < q < 1$。代入有

$$G(0.630) = 0.1490, \quad G(0.640) = -0.1877, \quad G(0.635) = -0.0206.$$

因此先把区间缩到 $(0.630, 0.635)$，再取中点，用中点的符号替换与它同号的端点。继续二分得到 $q \simeq 0.63439$，代回 $y = q\lambda L/a$，峰位为 $1.586\,\mathrm{mm}$。原缝宽时，$r = 2.50$，两处正侧峰分别由 $(0.37, 0.38)$、$(0.73, 0.74)$ 内的根给出，换回屏坐标为 $1.889\,\mathrm{mm}$、$3.684\,\mathrm{mm}$。

图 5.80 中的实际峰比干涉因子极大的位置更靠近中心，因为这一侧的单缝包络较高。

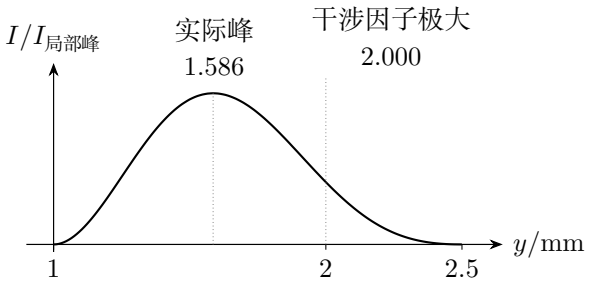


图 5.80: 缝宽加倍后右侧亮纹的局部放大；纵轴以该局部峰强度归一化

练习 5.4

解　先计算未插片时的正交通道

未插片时，图 5.71 中第一片将自然光变为强度$I_0/2$ 的竖直线偏振光，末片与它正交，所以 $\boxed{I_{\text{out}} = 0}$。

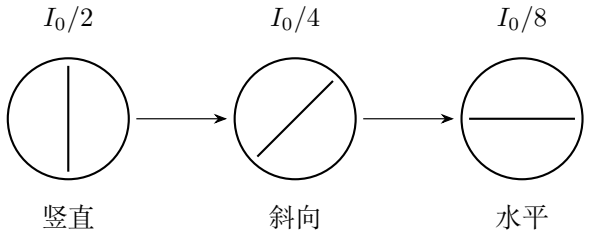


图 5.81: 练习 5.4 的解答图：每一步使用刚刚形成的偏振方向

沿新的相邻透振方向逐片投影

插入第三片后，必须按新的相邻透振方向逐片计算：

$$I_1 = I_0/2, \qquad I_2 = (I_0/2)\cos^2 45^\circ = I_0/4, \qquad \boxed{I_3 = (I_0/4)\cos^2 45^\circ = I_0/8}.$$

检查末片面对的入射偏振已改变

图 5.81 中，线偏振方向依次从竖直转到 45°，再转到水平。后两次投影的夹角都为 45°。

练习 5.5

解　两式相减消去同一材料的逸出功

图 5.72 两次实验使用同一阴极，逸出功相同。分别写$eU_s = h\nu - W$，相减得

$$\boxed{h = \frac{e(1.310 - 0.480)}{(8.00 - 6.00) \times 10^{14}} = 6.65 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}.$$

以斜率和一个测量点求逸出功

先保留未取整的$h/e = 4.150 \times 10^{-15}\,\mathrm{V\,s}$，回代可得

$$\boxed{W/e = 4.150 \times 10^{-15}(6.00 \times 10^{14}) - 0.480 = 2.01\,\mathrm{V}}, \quad \boxed{W = 2.01\,\mathrm{eV}},$$

$$\boxed{\nu_0 = W/h = 4.84 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz}}.$$

检查阈频与光强改变的不同作用

图 5.82 中的频率截距为ν_0，图线不经过原点。固定频率改变光强不改变单个光子的能量，故$\boxed{U_s\text{ 不变}}$；在收集和量子效率相同的条件下饱和电流加倍。

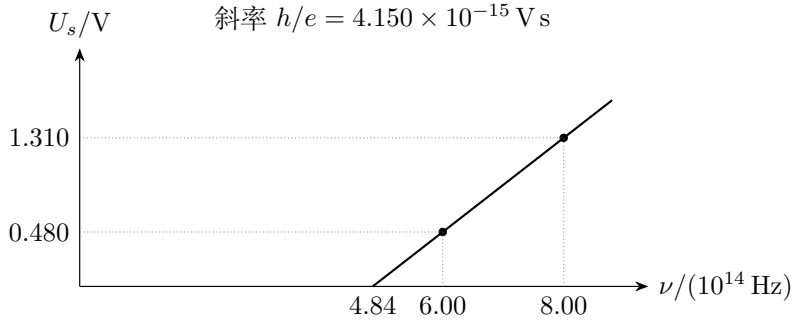


图 5.82: 两测量点确定同一直线；以真实频率刻度表示横截距

练习 5.6

解　沿孔径减小的次序判断主要现象

图 5.73 只改变孔径，光源与屏的位置固定。孔大时，多个发光点的几何投影大范围叠加，主要表现为孔形亮斑；缩小到合适孔径后，不同物点的模糊斑变小，

可见倒立灯丝像。继续缩小，衍射扩展成为限制分辨率的主因，几何小孔模型失效；孔完全闭合后无光到达屏。

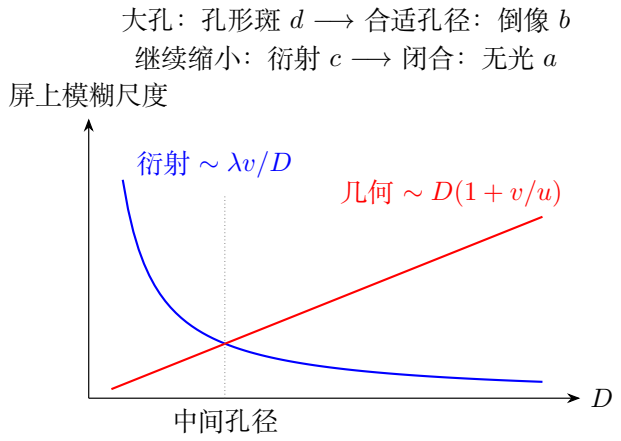


图 5.83: 物、屏距离固定时，孔径大小对几何模糊和衍射模糊的影响。

比较几何模糊与衍射模糊的尺度

令物到孔的距离为 u、孔到屏的距离为 v。同一物点经孔内不同位置的几何投影，形成尺度约 $D(1+v/u)$ 的模糊斑；圆孔衍射尺度则约为 $\lambda v/D$。图 5.83 的两条曲线一增一减，因此孔径存在折中范围。

确定四种现象的顺序并检查极限

故顺序为 $\boxed{\mathrm{d}\to\mathrm{b}\to\mathrm{c}\to\mathrm{a}}$。图 5.83 把逐渐缩小的孔径与各阶段的图样排在一起。圆孔的角分辨尺度约为 λ/D，孔越小，衍射展宽越明显。

练习 5.7

解　以相邻同级中心的距离写干涉周期

图 5.74 以零级、一级亮纹中心的距离表示Δx。由$\Delta x = \lambda L/d$，换红光增大λ，条纹变疏，所以选 $\boxed{\mathrm{B}}$。

逐项检查波长、光强和屏距

绿光波长更短，使间距减小；增大光强只改变强度；屏靠近双缝使L 减小，也会使间距减小。

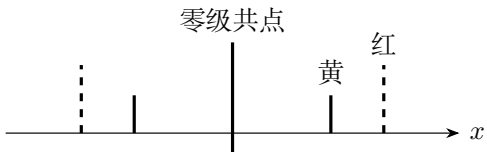


图 5.84: 同一L, d 下，红光的一级亮纹距中心更远

区别周期展宽与条纹整体平移

图 5.84 中，两种颜色的零级明纹共用中心，其余各级在红光下向两侧分得更开。

练习 5.8

解　用阈值判断紫外线和红光的作用

图 5.75 中，锌板和验电器相连。题给紫外光的 $h\nu > W$，能使电子逸出；红光的 $h\nu < W$，照射时导体保持初始的中性状态。

根据电子缺失判断导体净电荷

失去电子后，导体中留下净正电荷，所以 A、D 对，B、C 错。

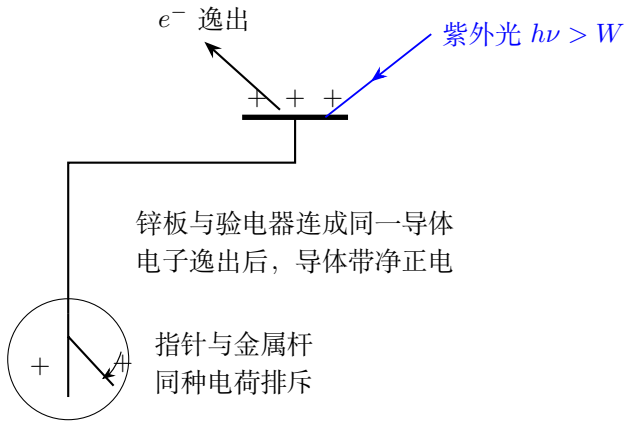


图 5.85: 紫外线使电子逸出；同一导体上的净正电荷分布导致指针偏转

验电器上的电荷分布

故选 $\boxed{\text{A, D}}$。图 5.85 画的是电子逸出后同一导体上的净正电荷分布。

练习 5.9

解　由截止电压增大确定波长缩短

图 5.76 的两次测量使用同一金属，逸出功相同。截止电压增大意味着最大初动能增大，因此光子频率增大、波长缩短。故

$$\boxed{\lambda_2 = 350 - 50 = 300\,\mathrm{nm}}.$$

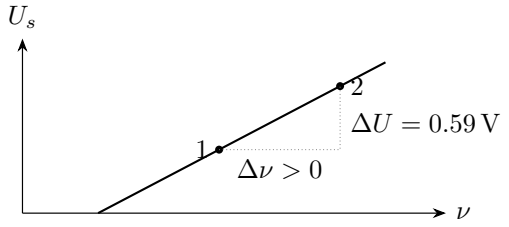


图 5.86: 差分测量消去材料参数，斜率只包含h/e

消去逸出功并计算电荷量

两次光电方程相减，逸出功消去：

$$e(U_2 - U_1) = hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

所以

$$\boxed{e = \frac{hc}{0.59}\left(\frac{1}{300\times10^{-9}} - \frac{1}{350\times10^{-9}}\right) \simeq 1.61\times10^{-19}\,\mathrm{C}}.$$

两种横坐标与斜率单位

图 5.86 的两点位于同一条直线上；差分使用的是纵坐标之差，并不需要先知道阈值频率。量纲为$(\mathrm{J\,s})(\mathrm{s}^{-1})/\mathrm{V} = \mathrm{C}$，与电荷量一致。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第六讲

相对论基础

2026

目录

第六讲　相对论基础 **1**

6.1　伽利略相对性原理与狭义相对论 1

6.2　时间、长度与坐标变换 3

6.3　两个光学实验 9

6.4　动量、质量与能量 11

6.5　非惯性系、局部引力与时钟 15

6.6　例题与分析 17

6.7　本讲小结 39

6.8　练习 39

练习解答 43

第六讲　相对论基础

6.1　伽利略相对性原理与狭义相对论

6.1.1　惯性系与经典变换

惯性系是自由质点保持静止或匀速直线运动的参考系。伽利略相对性原理指出，力学规律在所有惯性系中具有相同形式。若 S' 相对 S 沿 $+x$ 以速度 V 匀速运动，且两原点在零时刻重合，经典运动学采用

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \qquad u'_x = u_x - V.$$

把真空光信号代入伽利略式，会得到随参考系而变的 $c - V$。要让两个系都测得 c，位置坐标与时间坐标就得一起变换。

狭义相对论以两条原理为出发点：物理定律在各惯性系中具有相同形式，各惯性系测得的真空光速相同。以下取 $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。介质中传播时，以介质静止系中的光速为起点，再变换到实验室。斐索流水实验正好提供了这样的例子。

6.1.2　事件、对时和同时性

爆炸发生、闪光反射和光到达探测器各是一个事件。参考系内分布着静止的尺和钟，事件的地点由当地的尺给出，时刻由当地的钟给出。要比较发生在不同地点的事件，先用光信号给各处的钟对时。

惯性系中的雷达对时可把远处反射事件的时间定义为 $(t_1 + t_2)/2$，其中 t_1, t_2 是原点钟记录的发出、返回时刻。在图 6.1 中，反射器静止于该系的 $x = D$，去、返真空光程相同，因此

$$t_B = \frac{t_1 + t_2}{2}, \qquad D = \frac{c(t_2 - t_1)}{2}.$$

以后所说的事件时刻均指这样建立的同步钟网所赋予的坐标时间。收到远处消息的时刻还要另计光的传播时间。

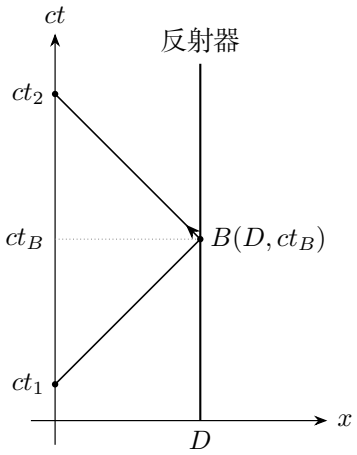


图 6.1: 原点钟的两次读数确定远处反射事件 B 的坐标时间；两轴等比例。

图 6.2 中，车头 A、车尾 B 在地面系同一时刻闪光，发光时车厢中点 C 位于 $x = 0$。记两端在地面系的间距为 L，则 A 发出的光向左走，位置为 $L/2 - ct$；B 发出的光向右走，位置为 $-L/2 + ct$。中点沿 $x = Vt$ 运动。把两条光线的位置分别与 Vt 相等，得到

$$t_A = \frac{L}{2(c+V)}, \qquad t_B = \frac{L}{2(c-V)}.$$

$V > 0$ 时先收到车头的光。车厢系内两端到中点的距离相同，光从两端走到中点的时间都为 $L_0/(2c)$，其中 L_0 是车厢的固有长度。两次接收时刻各减去这段相同的传播时间，便可知在车厢系里也是车头先发光。所以地面系同时发生的两次闪光，在车厢系中有了先后。

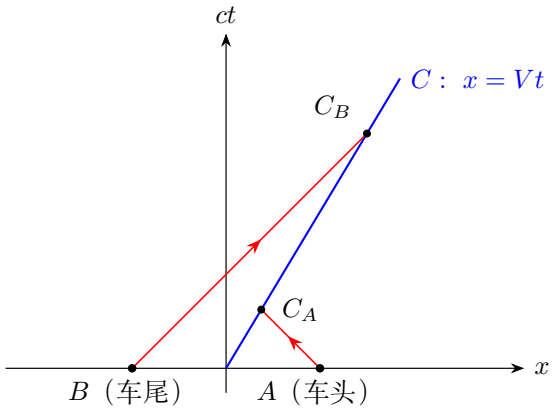


图 6.2: 地面系的两次闪光同时发生。车厢中点的世界线先与车头来的光相交

6.1.3 光锥、间隔与固有时间

两事件的间隔定义为

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \tag{6.1}$$

洛伦兹变换保持这一量不变。$\Delta s^2 > 0$ 为类时间隔，可以由亚光速物体连接；$\Delta s^2 = 0$ 为类光间隔；$\Delta s^2 < 0$ 为类空间隔，不能用不超光速的信号连接。

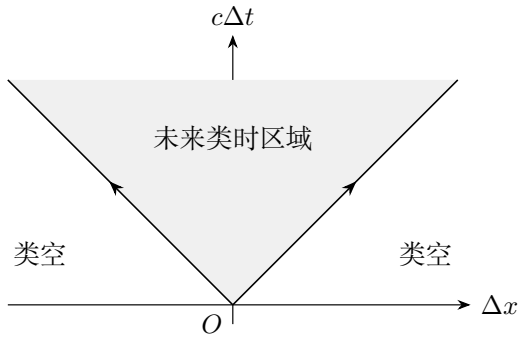


图 6.3: 横轴 Δx 与纵轴 $c\Delta t$ 等比例。真空光线斜率为 ± 1，类时事件位于光锥内部。

若要把两事件间的时间差解释为随身钟的走时，须先确认它们在同一物体的世界线上。对匀速运动，$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}\Delta t$，故

$$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - |\Delta\boldsymbol{r}|^2, \qquad \Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

这是该物体随身钟在两事件间的读数差。若物体在两事件间变速，需沿实际世界线积分 $\tau = \int \sqrt{1 - u(t)^2/c^2}\,\mathrm{d}t$，不能只将首末位移代入匀速公式。图 6.3 中的类空事件则没有这种由同一物体携带的钟。

6.2 时间、长度与坐标变换

6.2.1 时间膨胀

若一只钟先后经历两事件，在其静止系中两事件同地，这只钟记录的时间差称固有时间 $\Delta\tau$。实验室中该钟以 V 匀速运动时，

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau, \qquad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \qquad \beta = V/c. \tag{6.2}$$

图 6.4 用横向光钟推导此式。钟系镜距为 b，静止周期 $\Delta\tau = 2b/c$。实验室的每个半程满足

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2,$$

将含 Δt 的两项移到左边，

$$(c^2 - V^2)\frac{\Delta t^2}{4} = b^2, \qquad \Delta t = \frac{2b}{c\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma\Delta\tau.$$

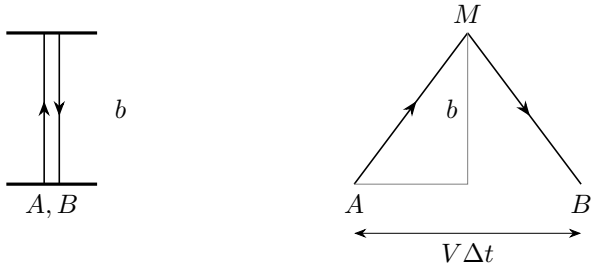


图 6.4: 左为钟系的竖直往返，右为实验室的斜向往返。A, B 是同一下镜的发射、回收事件。

时空间隔和光钟图使用同一对事件，即下镜发光和下镜收回光。

例如图 6.4 中的发射事件 A 和回收事件 B 发生在同一下镜上，因而钟系读数差是固有时间。若改选 A 和上镜的反射事件 M，两事件在钟系中异地，$t_M - t_A = b/c$ 是坐标时间；AM 本身是光的世界线，间隔为零。使用时间膨胀式前，须明确选的是同一接收器先后经历的哪两个事件。

6.2.2　长度收缩

固有长度 L_0 在物体静止系测量。实验室测运动杆长度 L，须在同一实验室时刻记录两端位置。

沿杆发出一束光追赶前镜，再反射回后镜。图 6.5 中，实验室去、返时间为 $L/(c - V)$ 和 $L/(c + V)$，总时间为

$$\Delta t = \frac{2Lc}{c^2 - V^2}.$$

发射、回收发生在同一后镜，故 $\Delta t = \gamma(2L_0/c)$，得到

$$\boxed{L = L_0/\gamma = L_0\sqrt{1 - \beta^2}.} \tag{6.3}$$

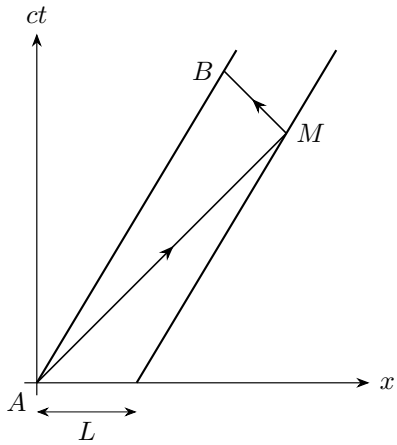


图 6.5: 纵向光钟的两镜世界线。真空光线满足 $|\Delta x| = c\Delta t$，去程时间比返程长；两轴等比例。

垂直运动方向的长度不变。尺缩是同时测长的结果，照片中各点的光到达相机还存在不同时延，不能直接把照片轮廓当作同时测长。

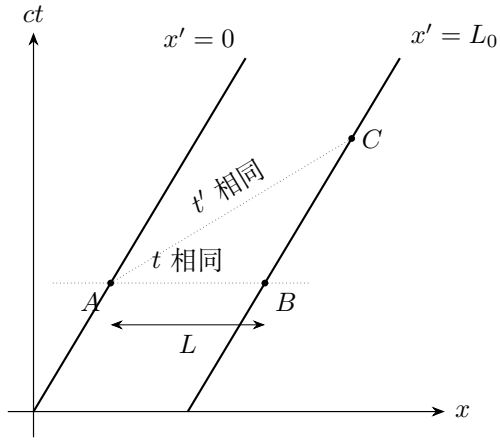


图 6.6: 同一根杆的两条端点世界线。AB 是实验室同时测量，AC 是杆系同时测量；图示 $V = 0.6c$，两轴等比例。

图 6.6 还说明，测量条件变了，选取的端点事件也会改变。对实验室同时事件 A, B，有 $\Delta t = 0$、$\Delta x = L$。用下文的变换，

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = \gamma L.$$

前端在杆系中的位置恒定，因此前端世界线上的 B, C 有相同的 x'。杆系沿自己的同时线选 A, C，得 $x'_C - x'_A = x'_B - x'_A = \gamma L = L_0$。

6.2.3 洛伦兹变换与速度变换

沿用图 6.2 的运动方向。S' 沿 S 的 $+x$ 方向以 V 匀速运动，两原点在 $t=t'=0$ 时重合。时空均匀性使变换为线性，S' 原点沿 $x=Vt$，故 $x'=k(x-Vt)$。设 $t'=at+bx$。将从原点向两侧传播的光 $x=\pm ct$ 代入，并令其在 S' 中满足 $x'=\pm ct'$，得到

$$a+bc=k(1-V/c), \qquad a-bc=k(1+V/c).$$

两式相加求出 $a=k$，相减得 $b=-kV/c^2$。再把两系互换，相对速度为 $-V$，由对称性逆式沿用同一系数 k。将正变换代入 $x=k(x'+Vt')$，

$$x=k^2[x-Vt+V(t-Vx/c^2)]=k^2(1-V^2/c^2)x.$$

取 $V\to 0$ 时趋于一的根，得到 $k=\gamma=(1-V^2/c^2)^{-1/2}$。横向坐标在这种标准构型下保持不变。

$$\boxed{x'=\gamma(x-Vt), \qquad t'=\gamma\left(t-\frac{Vx}{c^2}\right), \quad y'=y,\ z'=z.} \tag{6.4}$$

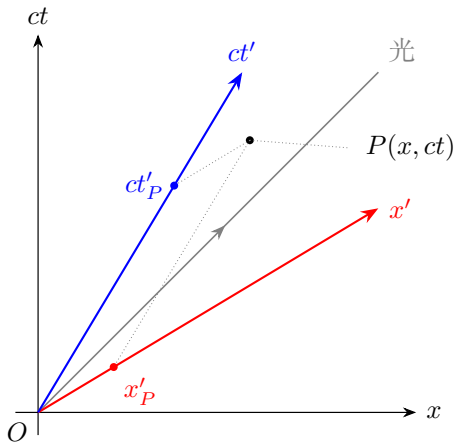


图 6.7: 标准构型下的两组坐标轴；虚线沿另一根有色轴的方向投影，光线为 $ct=x$

图 6.7 取 $V=0.6c$，黑色两轴等比例。ct' 轴是飞船原点的世界线 $x=Vt$；x' 轴则由 $t'=0$ 给出 $ct=(V/c)x$。一般的 $t'=$ 常量 线与 x' 轴平行，$x'=$ 常量 线与 ct' 轴平行。因此读出同一事件 P 的有色坐标，要沿另一根有色轴作平行线；不能向黑色轴作垂直投影后直接当作 x', ct'。有色轴的单位刻度由坐标变换给出。

由坐标变换可以求任意两事件的间隔。将两式代入 $c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2$，先将两个平方展开，

$$c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2=\gamma^2\left[c^2\Delta t^2-2V\Delta t\Delta x+\frac{V^2}{c^2}\Delta x^2 \right.$$
$$\left.-\Delta x^2+2V\Delta x\Delta t-V^2\Delta t^2\right].$$

两个交叉项相消，再将 Δt^2 和 Δx^2 项分别合并，得到

$$c^2\Delta t'^2-\Delta x'^2=\gamma^2(1-\beta^2)(c^2\Delta t^2-\Delta x^2)=c^2\Delta t^2-\Delta x^2.$$

横向坐标差相同，所以加回横向两项后，式(6.1) 仍成立。

逆变换把 V 换成 $-V$。坐标差也满足同样关系。若 $\Delta t=0$，通常有 $\Delta t'=-\gamma V\Delta x/c^2\neq 0$，可见不同位置的同时性取决于参考系。

对逆变换微分，再除以 $\mathrm{d}t$，得

$$u_x=\frac{u'_x+V}{1+Vu'_x/c^2},\qquad u_y=\frac{u'_y}{\gamma(1+Vu'_x/c^2)},\quad u_z=\frac{u'_z}{\gamma(1+Vu'_x/c^2)}. \tag{6.5}$$

速度式的分母来自时间变换。沿粒子相邻事件，有 $\mathrm{d}x'=u'_x\,\mathrm{d}t'$，故

$$\mathrm{d}t=\gamma\left(1+\frac{Vu'_x}{c^2}\right)\mathrm{d}t',\qquad \mathrm{d}x=\gamma(u'_x+V)\,\mathrm{d}t'.$$

相除得到纵向速度式；再用 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}y'$、$\mathrm{d}z=\mathrm{d}z'$，便得到横向速度式。横向坐标虽不变，横向速度仍会因时间间隔的变化而改变。

把三个速度分量平方相加，令 $D=1+Vu'_x/c^2$。通分得到

$$1-\frac{u^2}{c^2}=\frac{D^2-(u'_x+V)^2/c^2-(1-V^2/c^2)(u'^2_y+u'^2_z)/c^2}{D^2}.$$

其中前两项逐项展开，

$$D^2-\frac{(u'_x+V)^2}{c^2}=1+\frac{2Vu'_x}{c^2}+\frac{V^2u'^2_x}{c^4}-\frac{u'^2_x}{c^2}-\frac{2Vu'_x}{c^2}-\frac{V^2}{c^2}$$
$$=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{u'^2_x}{c^2}\right).$$

再与横向两项合并，使用 $u'^2=u'^2_x+u'^2_y+u'^2_z$，得到

$$1-\frac{u^2}{c^2}=\frac{(1-V^2/c^2)(1-u'^2/c^2)}{(1+Vu'_x/c^2)^2}.$$

右端在 $u'<c, V<c$ 时为正，所以合成速度小于 c；对光有 $u'=c$，两边同时为零。这里比较的是速度矢量的总大小，不应只判断某一个分量。

若由 S 变到 S'，将 V 换为 $-V$。对真空光代入 $u=c$，合成后总光速仍为 c；亚光速物体的相对速度仍小于 c。同一实验室中两个物体的间距减少率可以大于 c，它不是某一物体在另一物体静止系中测得的速度。

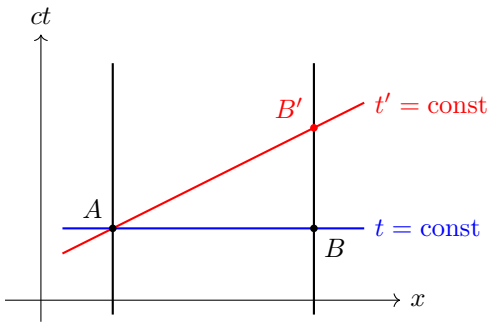


图 6.8: 同时线随参考系倾斜，测量运动长度必须重选事件

图 6.8 把杆画成在 S 中静止的两条端点世界线。蓝线选出的 A, B 满足 $\Delta t = 0$；变换后却有 $\Delta t' = -\gamma V \Delta x/c^2 \neq 0$，不能用这对事件直接测量 S' 中的杆长。S' 的同时线满足 $ct = (V/c)x +$ 常量，应另选同一红线上两端的事件。每个系都在自己的同时线上取杆的两个端点。

图 6.8 中杆在 S 静止，故 $x_B - x_A = x_{B'} - x_A = L_0$。红线选取 A, B'，满足 $\Delta t' = 0$，所以 $\Delta t = V L_0/c^2$。将它代入空间变换：

$$L' = \Delta x' = \gamma(L_0 - V\Delta t) = \gamma L_0(1 - \beta^2) = \frac{L_0}{\gamma}.$$

这与前面“杆在 S' 静止、在 S 运动”的情形互为参照。每一方都在自己的同时线上选端点，所比较的是不同事件对，因而两方都测得对方的运动杆收缩并不矛盾。

6.2.4　事件选择与测量条件

每个测量量都对应特定的事件选择和参考系。时间膨胀选同一只钟的两次读数，长度收缩选测量系中同一时刻的两端，速度变换选同一粒子的相邻事件。对于爆炸、遮光、碰撞这类单个事件，应同时变换它的空间和时间坐标。

所求量	所选事件或条件	可用关系
运动钟走时	同一随身钟经历两个事件	$\Delta t = \gamma \Delta \tau$
运动杆长度	测量系同时记录两端	$L = L_0/\gamma$
粒子速度	同一粒子上的相邻事件	$\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t$ 的洛伦兹变换
远处事件坐标	位置与时刻属于同一事件	同时变换 x, t

例 6.2 和例 6.6 的不同“同时面”，以及练习 6.5 中跑道长度与赛跑位移的区别，都可先由这张表确定事件，再进行计算。

6.3 两个光学实验

6.3.1 斐索实验与运动介质中的光速

图 6.9 表示干涉装置中两个等长水管的传播部分。沿图中箭头，蓝色光束在两管内均顺水传播，红色光束在两管内均逆水传播。令每管长度为 l，水速为 $V \ll c$，水静止系中的光速为 c/n，忽略色散。

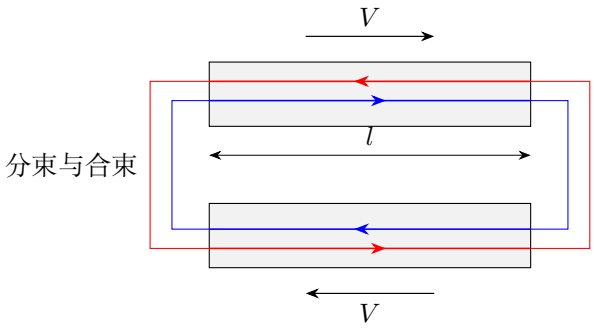


图 6.9: 两管中的水流方向相反。两条互逆光路分别累计 $2l$ 的顺水路程和 $2l$ 的逆水路程。

对顺水传播，速度变换给出 $u_+ = (c/n + V)/[1 + V/(nc)]$。令 $z = V/(nc)$，函数 $g(z) = (1+z)^{-1}$ 满足 $g(0) = 1$、$g'(z) = -(1+z)^{-2}$、$g'(0) = -1$，故 $g(z) = 1 - z + O(z^2)$。固定 n，保留到 V/c 的一阶，

$$\begin{aligned} u_+ &= \left(\frac{c}{n} + V\right)\left[1 - \frac{V}{nc} + O(V^2/c^2)\right] \\ &= \frac{c}{n} + V - \frac{V}{n^2} + O(V^2/c) \simeq \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

逆水速率以 $V \to -V$ 得 $|u_-| \simeq c/n - V(1 - 1/n^2)$。若以 $k = 1 - 1/n^2$ 表示一阶系数，两束光各累计 $2l$，先将时间差通分，

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2l}{c/n - kV} - \frac{2l}{c/n + kV} = \frac{4lkV}{(c/n)^2 - k^2V^2} \\ &\simeq \frac{4lkVn^2}{c^2} = \frac{4lV(n^2-1)}{c^2}. \end{aligned}$$

最后一步在分母中略去二阶小量，给出所需的一阶时间差。该结果由介质系与装置系之间的速度变换得到，无须假设一种绝对静止的传播介质。直接把 c/n 与 V 相加会漏掉展开中的 $-V/n^2$。在 $n \to 1$ 的真空极限，两方向的速率都回到 c；在 $V \to 0$ 时，则回到静止介质中的 c/n。这两个极限也能检查拖曳系数的形式。

6.3.2 迈克耳孙—莫雷实验

图 6.10 中，两臂在装置静止系长度均为 l，分束镜 M 将光分到 M_1, M_2，反射后在 M 合束。

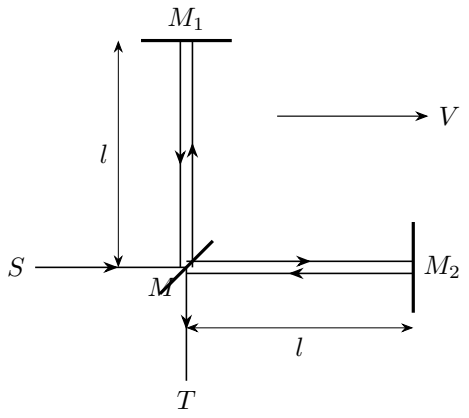


图 6.10: 等臂干涉仪。右臂平行于所假设的绝对运动方向，上臂与其垂直。

先按经典以太模型作预测。设装置相对以太沿 $+x$ 以速度 V 平移，真空光在以太系中的速率为 c。水平臂出程时镜子离开光束，间距以 $c-V$ 缩短；回程时分束镜迎向光束，间距以 $c+V$ 缩短。因此

$$t_{\parallel} = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2lc}{c^2-V^2} = \frac{2l/c}{1-\beta^2}, \qquad \beta = V/c.$$

竖直臂的情况画在图 6.11 中。出程历时 T，镜子在这段时间水平移动 VT，光在以太系中沿斜边走过 cT。因而

$$(cT)^2 = l^2 + (VT)^2, \qquad T = \frac{l}{\sqrt{c^2-V^2}}.$$

回程的竖直位移反向，水平位移仍为 VT，所用时间同为 T。因此 $t_{\perp} = 2T = (2l/c)/\sqrt{1-\beta^2}$。

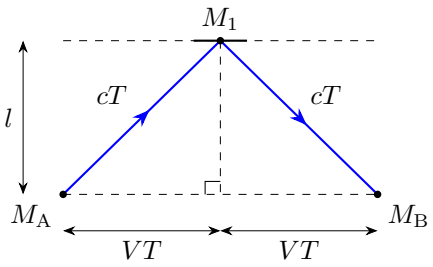


图 6.11: 在经典以太模型中，竖直臂上的镜子随装置平移。$M_{\mathrm{A}}, M_{\mathrm{B}}$ 是分束镜在出发和返回时的位置

为保留首个非零差值，令 $x=\beta^2\ll 1$。函数 $g(x)=(1-x)^{-1}$ 的导数为 $(1-x)^{-2}$，在零点的函数值与导数均为 1，故 $g(x)=1+x+O(x^2)$。函数 $h(x)=(1-x)^{-1/2}$ 的导数为 $\frac{1}{2}(1-x)^{-3/2}$，零点函数值为 1、导数为 $1/2$，故 $h(x)=1+x/2+O(x^2)$。代入两时间之差，

$$t_{\parallel}-t_{\perp}=\frac{2l}{c}[g(x)-h(x)]=\frac{2l}{c}\left[\frac{x}{2}+O(x^2)\right]\simeq\frac{l\beta^2}{c}.$$

装置转过 90° 后差值反号，故时间差的改变量大小为 $2l\beta^2/c$；乘以 c 换成光程差，再除以波长，预测的条纹移动为

$$\Delta N\simeq\frac{2l}{\lambda}\frac{V^2}{c^2}.$$

取 $l=11\,\mathrm{m}, V=3.0\times10^4\,\mathrm{m/s}, \lambda=5.9\times10^{-7}\,\mathrm{m}$，预测约 0.37 条。实验未出现这一预期的方向效应。狭义相对论在装置静止系直接给出两臂往返时间均为 $2l/c$，理想等臂装置转动后不会产生上述条纹移动。

条纹的移动来自转动前后往返相位差的变化。若两臂有固定的长度差，合束时会有相应的固定相位差。实验比较的是转动装置时这一相位差是否随朝向改变。

6.4 动量、质量与能量

6.4.1 相对论动量与动能

以下统一用 m_0 表示粒子的不变质量，记其速度为 u，$\gamma_u=(1-u^2/c^2)^{-1/2}$。相对论动量、总能量为

$$\boldsymbol{p}=\gamma_u m_0\boldsymbol{u},\qquad E=\gamma_u m_0c^2. \tag{6.6}$$

若记 $m_{\text{动}}=E/c^2=\gamma_u m_0$，动量可以写成 $\boldsymbol{p}=m_{\text{动}}\boldsymbol{u}$。对于合成后的系统，先将各粒子的能量和动量分别相加，再由 $M^2c^4=E_{\text{总}}^2-c^2|\boldsymbol{p}_{\text{总}}|^2$ 求不变质量。

力定义为 $\boldsymbol{F}=\mathrm{d}\boldsymbol{p}/\mathrm{d}t$，功满足 $\mathrm{d}K=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{p}$。动能须从静止时 $K=0$ 的端点连续积分确定。对沿直线的运动，$p=m_0u/\sqrt{1-u^2/c^2}$，先对 γ_u 使用链式法则：

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_u}{\mathrm{d}u}=-\frac{1}{2}(1-u^2/c^2)^{-3/2}\frac{-2u}{c^2}=\frac{u\gamma_u^3}{c^2}.$$

再对 $p=m_0u\gamma_u$ 使用乘积法则，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}&=m_0\left(\gamma_u+\frac{u^2}{c^2}\gamma_u^3\right)\\&=m_0\gamma_u^3\left(1-\frac{u^2}{c^2}+\frac{u^2}{c^2}\right)=m_0\gamma_u^3.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{d}K = u\,\mathrm{d}p = m_0 u\gamma_u^3\,\mathrm{d}u = m_0c^2\,\mathrm{d}\gamma_u$。静止时 $u=0$、$\gamma_u=1$、$K=0$，积分上下限一一对应：

$$\int_0^{K(u)} \mathrm{d}K' = m_0c^2\int_1^{\gamma_u}\mathrm{d}\gamma', \qquad K(u) = m_0c^2[\gamma']_1^{\gamma_u} = (\gamma_u-1)m_0c^2.$$

积分常量已由静止时的动能零点确定，故总能量与动能的关系为

$$\boxed{K = (\gamma_u-1)m_0c^2 = E - m_0c^2.} \tag{6.7}$$

同一微分关系还给出纵向运动的

$$F = m_0\gamma_u^3\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

因而实验室恒力并不对应恒加速度。粒子越快，同样的动量增量所造成的速度增量越小；继续做功主要使总能量和动量增长。

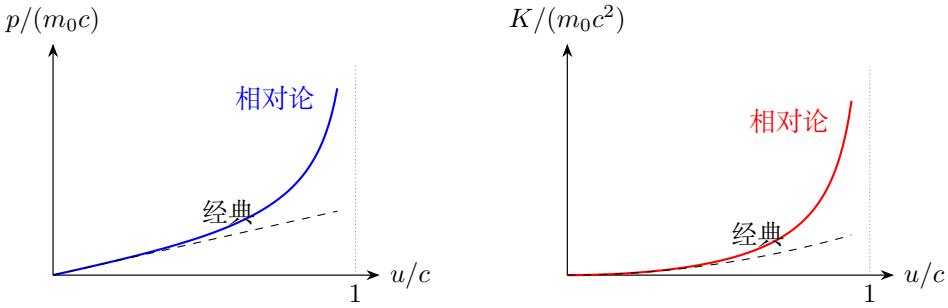


图 6.12: 实线为相对论关系，虚线为经典近似；各图保持粒子不变质量相同

图 6.12 中，两种关系在 $u/c \ll 1$ 时接近；接近光速时，实线的动量和动能都急剧增大。对有质量粒子，$u\to c^-$ 要求无界的能量，有限做功不能使它达到或越过 c。图中低速近似的抛物线不能向高速无限外推。

低速展开 $\gamma_u \simeq 1 + u^2/(2c^2)$，才退化为 $K \simeq m_0u^2/2$。恒力对应动量随时间线性增长，速度却不会随时间无限增大，例 6.10 将具体计算。

6.4.2　换参考系时的能量与动量

总能量、动量分别依赖参考系，但同一系统的不变质量不依赖参考系。设 S' 相对 S 沿 $+x$ 以速度 V 运动。将速度变换代入 $E=\gamma_u m_0c^2$、$p_x=\gamma_u m_0u_x$，利用

$$\gamma_{u'} = \gamma_V\gamma_u\left(1-\frac{Vu_x}{c^2}\right),$$

得到

$$E' = \gamma_V(E - Vp_x), \qquad p_x' = \gamma_V\left(p_x - \frac{VE}{c^2}\right), \qquad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z.$$

这些关系是线性的，对各粒子相加后仍成立，所以也可变换整个碰撞系统的总能量与总动量。例如静止靶的初动量在实验室为零，在入射粒子的静止系中则沿来束的反方向。计算系统质量时，取同一系中的总能量和总动量。

若在 S 系有 $E_{初}=E_{末}$、$\boldsymbol{P}_{初}=\boldsymbol{P}_{末}$，代入上述线性关系便同时得到 S' 系的两条守恒式。在每一个惯性系里，比较的都是该系测得的初、末总量。比较一个碰撞前后时，先固定参考系，再逐项列出参与物体；需要换系时，将所有参与物体一起变换。

6.4.3 能量动量关系与守恒

消去 γ_u, u，得到

$$\boxed{E^2-p^2c^2=m_0^2c^4,\qquad \boldsymbol{u}=\frac{c^2\boldsymbol{p}}{E}.} \tag{6.8}$$

式(6.8)可直接从同一粒子的能量、动量求出：

$$E^2-p^2c^2=\gamma_u^2m_0^2c^4(1-u^2/c^2)=m_0^2c^4.$$

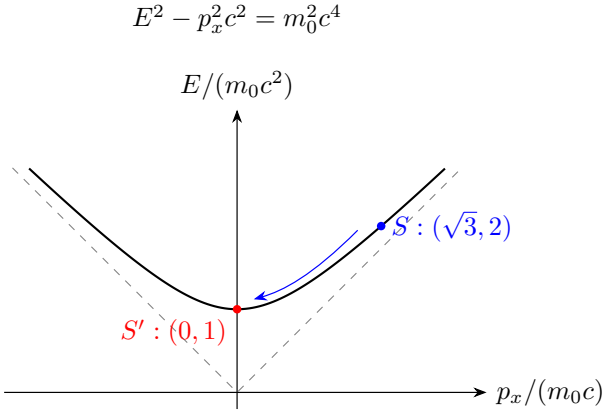


图 6.13: 同一有质量粒子在不同参考系中的能量、动量数值落在同一正能量双曲线上

图 6.13 只考虑沿 x 的运动。在 S 中取 $E=2m_0c^2$，$p_x=\sqrt{3}m_0c$，则粒子速度为 $u=\sqrt{3}c/2$；选 $V=u$ 变到粒子静止系后，$p'_x=0, E'=m_0c^2$。能量与动量都改变，双曲线所代表的不变质量保持不变。灰虚线对应 $E=|p_x|c$，有质量粒子的数值位于其上方。

光子的 $m_0=0$，故 $E=pc=h\nu=hc/\lambda$。光子有能量和动量，没有可供选取的静止参考系。

孤立系统的总能量、总动量守恒。把整个系统视为一个整体，其不变质量 M 由

$$M^2c^4 = E_{\text{总}}^2 - c^2|\boldsymbol{p}_{\text{总}}|^2$$

确定。完全非弹性碰撞中，部分相对运动能转化为复合物的内能，所以 M 可以大于碰前各粒子不变质量之和。衰变、光子反冲和康普顿散射也应同时使用能量、动量守恒。

末态若产生复合粒子和辐射，把它们的能量、动量分别相加：

$$\sum E_{\text{初}} = E_{\text{复合}} + E_{\text{辐射}}, \qquad \sum \boldsymbol{p}_{\text{初}} = \boldsymbol{p}_{\text{复合}} + \boldsymbol{p}_{\text{辐射}}.$$

由第二式，复合粒子的动量为 $\boldsymbol{p}_{\text{复合}} = \boldsymbol{P}_{\text{初}} - \boldsymbol{p}_{\text{辐射}}$。初态总动量与辐射动量相等时，复合粒子静止，其能量为自身的静能。若总动量 $\boldsymbol{P} \neq 0$，则先由 $E_{\text{总}}^2 - P^2c^2$ 求系统不变质量；若 $M > 0$，系统整体静止系相对当前系的速度为 $\boldsymbol{V}_{\text{cm}} = c^2\boldsymbol{P}/E_{\text{总}}$，其大小严格小于 c。当 $M = 0$ 且总能量非零时，该表达式的大小为 c，不对应可选取的惯性静止系。



图 6.14: 两个光子的单独静质量均为零，合系统的静质量仍取决于夹角。左图反向等能，总动量为零；右图同向，总动量为 $2E_\gamma/c$。

图 6.14 中，两束光的总能量为 $E_1 + E_2$。若它们的动量夹角为 θ，则

$$c^2|\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta.$$

从 $(E_1 + E_2)^2$ 中减去上式，得到

$$M^2c^4 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta).$$

同向时整体仍没有静止系；反向等能时则有静止系，能量全部计入系统静能。这说明“各粒子的静质量相加”与“求整个系统的静质量”是不同的运算。练习 6.9 将用这一关系反推母粒子的质量。

6.4.4 光子散射中的能量与动量

以初始静止的自由电子为靶，图 6.15 取入射光子的方向为 $+x$。记入射、出射光子能量为 ϵ, ϵ'，它们的动量大小分别为 $\epsilon/c, \epsilon'/c$。由动量守恒，反冲电子的动

量是入射与出射光子动量之差。电子末态总能量由能量守恒确定为 $m_e c^2 + \epsilon - \epsilon'$，于是

$$p_e^2 c^2 = \epsilon^2 + \epsilon'^2 - 2\epsilon\epsilon' \cos\theta,$$
$$(m_e c^2 + \epsilon - \epsilon')^2 - p_e^2 c^2 = m_e^2 c^4.$$

展开第二式并代入第一式，平方项消去，余下

$$m_e c^2(\epsilon - \epsilon') = \epsilon\epsilon'(1 - \cos\theta).$$

除以 $\epsilon\epsilon'$，再用 $1/\epsilon = \lambda/(hc)$，得到

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta).$$

这里的 θ 从入射方向量到出射光子方向。例 6.11 将用这一角度求波长，练习 6.4 还要用动量在 x, y 两方向上的分量确定反冲方向。

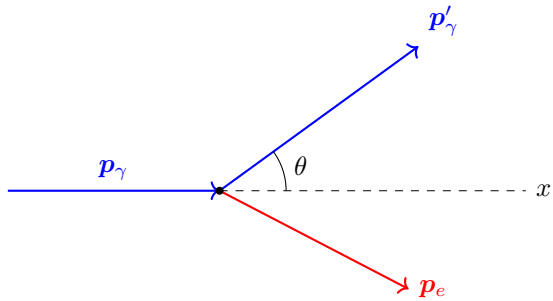


图 6.15: 出射光子与反冲电子的横向动量分量方向相反

6.5 非惯性系、局部引力与时钟

6.5.1 惯性力与等效原理

在低速近似下，相对于惯性系做平动加速的参考系中，可以引入惯性力 $\boldsymbol{F}_{\text{in}} = -m_{\text{i}}\boldsymbol{a}$，使运动方程保持通常的形式。引力中的 m_{g} 决定物体受到的引力，惯性质量 m_{i} 则决定物体对加速的响应。自由落体加速度与物体组成无关，表明二者成比例；采用通常的单位约定可令 $m_{\text{g}} = m_{\text{i}}$。

图 6.16 比较一个向上加速的小舱和一个处于引力场中的小舱。对足够小的空间区域和足够短的时间，舱内实验不能区分均匀引力与相应的加速效应。这是等效原理的局部表述。

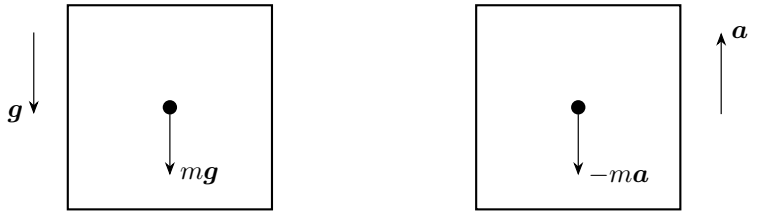


图 6.16: 小舱内的加速效应与局部引力效应

局部条件不可省略。跨越较大区域时，引力方向和大小可能随位置变化，产生潮汐效应；一个整体平动加速的参考系不能消去这些变化。

6.5.2 轨道、光线与时钟

广义相对论用时空几何描述引力，可以计算行星轨道的相对论修正、掠过天体的光线偏折，以及不同高度时钟的速率差。这里先给出弱场、低速情形下的时钟关系。

对静止于弱引力场中的时钟，若 Φ 为引力势且 $|\Phi|/c^2 \ll 1$，则

$$\mathrm{d}\tau \simeq \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)\mathrm{d}t.$$

比较图 6.17 中的上下两处，$\Phi_2 > \Phi_1$，高处时钟相对于低处走得较快。低处发出的光到达高处后，由高处本地时钟测得的频率降低，近似满足

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} \simeq -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{c^2}.$$

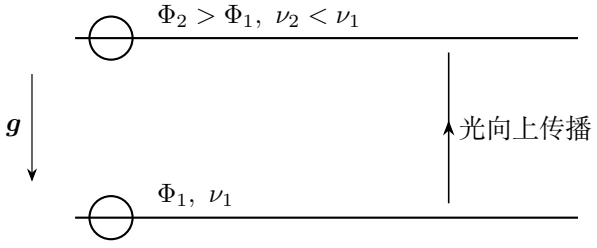


图 6.17: 静态弱引力场中的时钟比较与向上传播的光

引力势决定上述时钟比较，不能仅凭某一点的引力场强大小判断时钟快慢。狭义相对论的运动学效应与引力效应在实际比较中还可能同时出现。例如在地面附近取较小高度差 h，近似有 $\Phi_2-\Phi_1\simeq gh$，于是

$$\frac{\mathrm{d}\tau_2}{\mathrm{d}\tau_1}\simeq 1+\frac{gh}{c^2},\qquad \frac{\nu_2-\nu_1}{\nu_1}\simeq -\frac{gh}{c^2}.$$

频率变化的符号也可从波峰计数理解。静态场中，连续两波峰到达上下两处的坐标时间间隔相同，记为 $\mathrm{d}t$；本地测得的周期却分别为 $\mathrm{d}\tau_1,\mathrm{d}\tau_2$。因而

$$\frac{\nu_2}{\nu_1}=\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}\tau_2}\simeq\frac{1+\Phi_1/c^2}{1+\Phi_2/c^2}\simeq 1-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{c^2}.$$

比较频率时，各处用本地钟测量相邻两个波峰到达的固有时间间隔，再取其倒数。

图 6.17 的上方时钟每一单位坐标时间走得稍快，向上传播的光在上方用本地钟计量时频率稍低；两个符号描述的是同一次比较的不同测量量。这里要求静态弱场、上下两处相对静止，且高度范围内 g 的变化可以忽略。

引力场的扰动也能以波的形式传播。引力波在局部表现为横向两个方向上交替的潮汐伸缩，可通过比较互相垂直的光程变化进行测量。理解这类现象需要把本讲的时钟、光信号和事件观点推广到弯曲时空。

6.6 例题与分析

例 6.1 (炸弹爆炸事件的坐标)**.** 在地面系 S 中，炸弹于 $x=1.0\times10^6\,\mathrm{m}, t=0.020\,\mathrm{s}$ 爆炸。飞船系 S' 沿 $+x$ 以 $V=0.75c$ 运动，两系原点在 $t=t'=0$ 重合。求爆炸事件在飞船系中的地点和时刻，并与伽利略变换比较，见图 6.18。

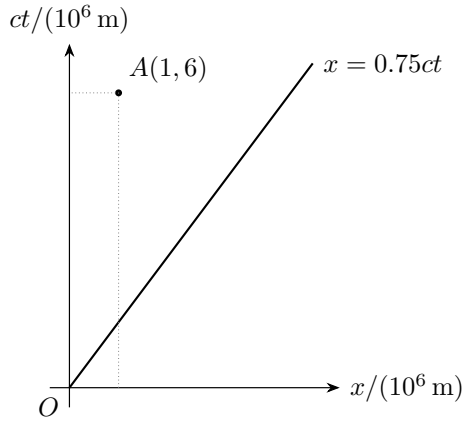


图 6.18: 地面系中爆炸事件 A 与飞船原点的世界线。两轴均以 $10^6\,\mathrm{m}$ 为单位，等比例。

解　统一时空单位并求洛伦兹因子

图 6.18 中时间坐标已乘以 c，所以 $ct_A = 6.0 \times 10^6\,\mathrm{m}$。先求

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}} = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$

变换同一爆炸事件的两个坐标

把同一个事件的空间、时间坐标一起变换：

$$x'_A = \frac{4}{\sqrt{7}}(1.0 - 0.75 \times 6.0)10^6\,\mathrm{m} = \boxed{-5.2915 \times 10^6\,\mathrm{m}},$$

$$t'_A = \frac{4}{\sqrt{7}}\left(0.020 - \frac{0.75 \times 10^6}{3.00 \times 10^8}\right)\mathrm{s} = \boxed{0.026458\,\mathrm{s}}.$$

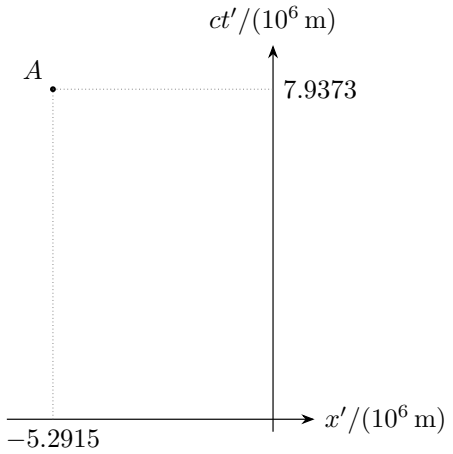


图 6.19: 飞船系中的同一事件。负横坐标表示爆炸发生在飞船原点后方，时间仍为正。

爆炸发生在飞船后方

地面爆炸时，飞船原点已在 $Vt = 4.5 \times 10^6\,\mathrm{m}$ 处，所以图 6.19 中事件在后方是合理的。间隔也可对照：

$$(ct_A)^2 - x_A^2 = 35 \times 10^{12}\,\mathrm{m}^2 = (ct'_A)^2 - x'^2_A.$$

比较经典结果并区别信号到达时间

若用伽利略变换，则 $x'_{\mathrm{G}} = x - Vt = -3.5 \times 10^6\,\mathrm{m}$，$t'_{\mathrm{G}} = 0.020\,\mathrm{s}$。这两个经典坐标分别来自 $x - Vt$ 和各处共享的经典时间。图 6.19 的 t'_A 由飞船系同步钟网定义，表示爆炸发生的坐标时间；光信号随后到达原点，还需传播一段时间。

又因 O, A 为类时间隔且 $t_A > 0$，所有惯性系都把 A 排在 O 之后。$x'_A < 0$ 表示爆炸地点在后方，与这个时间先后关系相容。

例 6.2 (隧道口的闪电能否击中车尾)**.** 隧道 BA 与列车 $B'A'$ 的固有长度都为 L_0。列车以 $0 < V < c$ 沿 $B \to A$ 方向运动。在地面系中，车头 A' 恰到出口 A 的同时，闪电击中入口 B。问闪电是否同时击中车尾 B'？见图 6.20。将闪电击中视为入口处的一次局部事件。

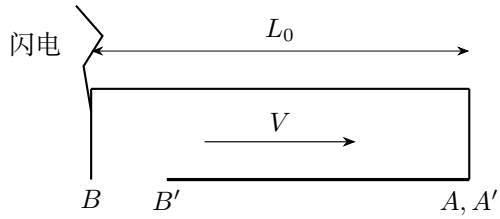


图 6.20: 所画快照属于地面系：隧道长 L_0，列车同时测长为 L_0/γ，车尾已进入入口右侧。

解　在地面同时面上确定车尾位置

取入口 B 为 $x = 0$，出口 A 为 $x = L_0$，并把题设地面同时的两事件定为 $t = 0$。此时车头在 $x = L_0$，车长却是 L_0/γ，所以车尾在

$$x_{B'}(0) = L_0 - L_0/\gamma > 0.$$

以局部事件是否重合判断击中

图 6.20 的入口为 $x = 0$。闪电事件在 $(x, t) = (0, 0)$，车尾事件在 $(L_0 - L_0/\gamma, 0)$，二者不同地。因此 闪电不会击中车尾。

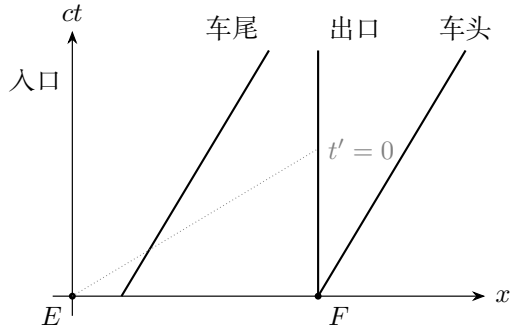


图 6.21: 地面时空图。闪电事件 E 在入口世界线上，车尾世界线在其右方；车头抵出口事件为 F。两轴等比例，图示速度取 $0.6c$。

将同一对事件变换到车系

“击中” 要求两个物体在同一事件相遇，这种重合关系在所有参考系中一致。在车系中，E, F 不再同时。以 E 为两系共同原点，时间变换给出

$$t'_E = 0, \qquad t'_F = -\gamma \frac{V L_0}{c^2} < 0.$$

在车系的闪电时刻 $t' = 0$，还可以直接列位置。

重选车系同时面并画出列车位置

入口在 $x'_B = 0$，出口在 $x'_A = L_0/\gamma$，而车尾、车头分别固定于

$$x'_{B'} = (\gamma - 1)L_0, \qquad x'_{A'} = \gamma L_0.$$

因此车尾与入口仍有正的间隔，结论与地面系一致。图 6.22 采用与前图相同的 $V = 0.6c$，把这组同时位置画出；此时车头早已超过出口。

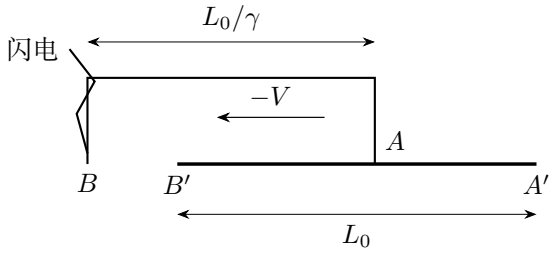


图 6.22: 车系 $t' = 0$ 的同时快照。隧道以 $-V$ 运动，列车静止；本图的出口位置与地面同时快照不同。

图 6.21 的斜同时线经过 E，两组快照各沿一条同时线取点：车系中，车头抵出口发生在闪电之前。

区别局部击中和随后光信号传播

若另问闪电发出的光后来能否追上车尾，则需画出光信号世界线，寻找它与车尾世界线的交点。

例 6.3 (高空产生的介子能否到达地面)**.** 一个介子在离地面 $D = 6000\,\mathrm{m}$ 的高空产生，以 $v = 0.998c$ 飞向地面。假定平均固有寿命为 $\tau_0 = 2.0 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$，按指数规律衰变，忽略运动中的能量损失。(1) 地面能否观测到到达的介子？(2) 与介子共动的观察者如何判断？见图 6.23。

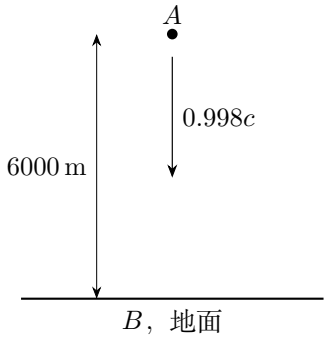


图 6.23: 介子在高空产生于 A，沿竖直方向向地面 B 运动。

解　选取粒子产生和到达的同一对事件

图 6.23 中，高处的 A 到地面的 B 相距 D。在图 6.24 的时空图上，A, B 位于同一粒子的世界线上，实验室飞行时间和粒子固有时间分别为 D/v、$D/(\gamma v)$。先求

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.998^2}} \simeq 15.8193, \quad \tau_{\text{地}} = \gamma\tau_0 \simeq 31.639\,\mu\mathrm{s}.$$

到达地面的存活比例

地面系平均传播距离为 $v\gamma\tau_0 \simeq 9.47\,\mathrm{km}$，大于 $6.00\,\mathrm{km}$。更确切地，到达地面的存活比例为

$$\boxed{\frac{N}{N_0} = \exp\left[-\frac{D}{\gamma v \tau_0}\right] \simeq 0.531.}$$

将地面飞行时间 $D/v = 20.04\,\mu\mathrm{s}$ 除以 $\gamma\tau_0 = 31.64\,\mu\mathrm{s}$，指数为 -0.633。因此在同样条件下产生的一群介子，约有 53.1% 能到达地面。

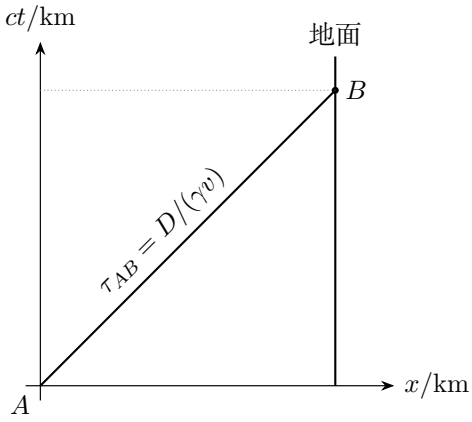


图 6.24: 把沿飞行方向的坐标改为 x。探测面静止，AB 为粒子世界线；两轴以相同长度单位绘制。

在粒子系重选地面同时位置

介子系中，地面与产生位置在地面系的静止间距收缩为 $D' = D/\gamma \simeq 379.3\,\mathrm{m}$。

介子系中的飞行时间

地面以 $0.998c$ 接近，所需时间

$$t'_{AB} = \frac{D'}{v} = \frac{D}{\gamma v} \simeq 1.267\,\mu\mathrm{s}.$$

将它代入同一指数衰变式，仍得约 0.531。两系选取的是相同的产生、到达事件，因而关于能否到达的结论一致。

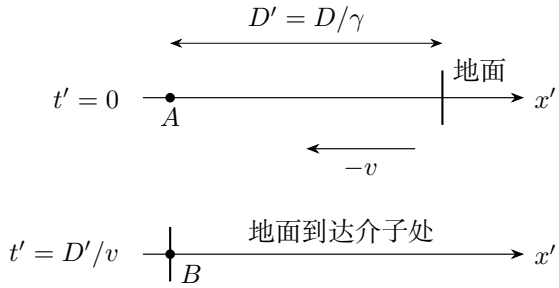


图 6.25: 介子系中的两幅同时快照。介子始终在 $x' = 0$，地面从 D/γ 处以 $-v$ 接近。

图 6.25 中，地面到达所需的时间为 $1.267\,\mu\mathrm{s}$，介子的平均固有寿命为 $2.0\,\mu\mathrm{s}$。平均寿命描述一群粒子的衰变统计，单个粒子没有统一的消失时刻。

例 6.4 (反向飞行的两艘飞船)**.** 地面测得飞船 a, b 沿同一直线分别以 $+0.9c, -0.9c$ 飞行。求 a 相对 b 的速度大小，见图 6.26。

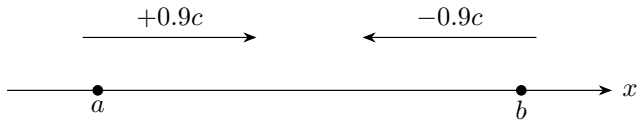


图 6.26: 两速度都给在地面系中，正方向向右。

解　在飞船 b 的参考系中计算速度

图 6.26 中，地面测得 a 沿 $+x$ 运动、b 沿 $-x$ 运动。取 b 的静止系为 S'，所以 $V = -0.9c$。在 a 的世界线上选相邻两事件，地面系有 $\Delta x = 0.9c\Delta t$。代入坐标差的洛伦兹变换，

$$\Delta x' = \gamma_b(\Delta x - V\Delta t) = \gamma_b(0.9c + 0.9c)\Delta t,$$
$$\Delta t' = \gamma_b(\Delta t - V\Delta x/c^2) = \gamma_b(1 + 0.81)\Delta t.$$

因此在 b 系内，a 沿 $+x'$ 运动，速率为

$$u'_a = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{1.8c}{1.81} = \boxed{\frac{180}{181}c \simeq 0.994475c}.$$

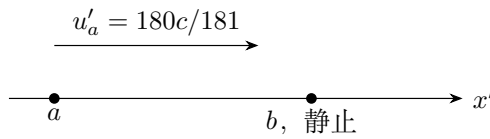


图 6.27: 在 b 系中，b 静止，a 沿正方向接近。分母中的时间变换使相对速度保持小于 c。

图 6.27 中，b 在 S' 静止。图 6.26 中的 $1.8c$ 则是地面用同一时刻的两船位置求出的间距减少率，计算时采用地面时间。变到 S' 后，时间差多出上式中的 0.81 项。

例 6.5 (飞船向前发射导弹). 飞船以 $0.9c$ 远离地球，又以相对飞船 $0.9c$ 的速率向前发射导弹。求导弹相对地球的速率，见图 6.28。

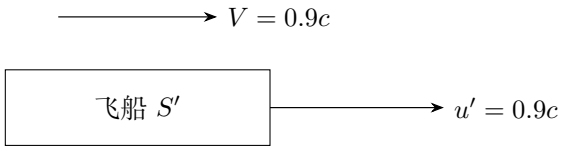


图 6.28: 船系中的发射速度为 $u' = 0.9c$，飞船相对地球速度为 $V = 0.9c$。

解 由船系发射速度合成为地球系速度

图 6.28 的两个速度属于不同的参考系，应由逆速度变换合成：

$$u = \frac{u' + V}{1 + Vu'/c^2} = \frac{1.8}{1.81}c = \boxed{\frac{180}{181}c \simeq 0.994475c}.$$

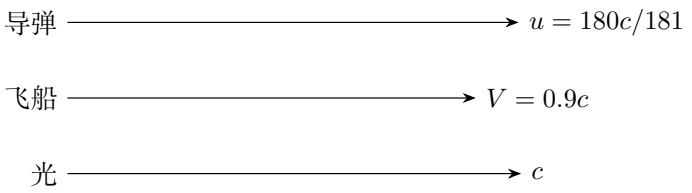


图 6.29: 地球系中，导弹比飞船快，但仍比真空光慢。三条箭头按速度比例绘制。

检查速度差与光速上限

图 6.29 中，地球系速度差 $u - V \simeq 0.094475c$ 不是导弹的船系速度。两系赋予相邻导弹事件的时间间隔不同，须把空间和时间一起变换。还可把合成速度与光速的差写成

$$c - u = \frac{(c - u')(c - V)}{c(1 + Vu'/c^2)}.$$

本题右端为 $0.01c/1.81 = c/181 > 0$，与图 6.29 导弹箭头略短于光箭头一致。

以导弹相邻事件推导所用比值

为说明这里使用的是逆变换，取导弹在船系的两相邻事件，满足$\Delta x' = u'\Delta t'$。地球系测得

$$\Delta x = \gamma_V(u' + V)\Delta t', \qquad \Delta t = \gamma_V(1 + Vu'/c^2)\Delta t'.$$

与图 6.29 向右的传播方向对应，两式取比正好得到前述合成式。反向计算 $(u - V)/(1 - uV/c^2)$ 恰好得到船系的 $0.9c$。低速极限下，当$Vu'/c^2 \ll 1$ 时才近似回到$u \simeq u' + V$；本题该无量纲量为0.81，显然不能忽略。

例 6.6 (飞船与彗星的相撞时间)**.** 飞船和彗星相对地面分别以 $+0.6c, -0.8c$ 相向运动。地面在当前时刻判断，再过 5 s 两者相撞。求：(1) 飞船系中彗星的速度；(2) 从飞船当前事件到相撞，船钟还经过多少时间？见图 6.30。

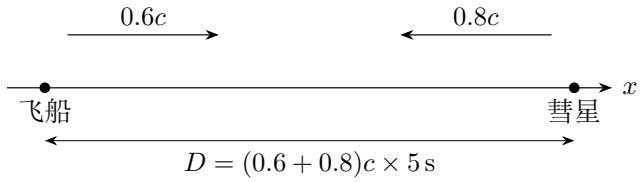


图 6.30: 地面当前快照。两者间距由地面接近率与剩余时间确定。

解　在地面系写出两条运动世界线

图 6.30 给出地面同一时刻的两个位置，取飞船此刻所在处为原点。取飞船当前事件为 O，令 $x_O = t_O = 0$。图 6.31 中两条世界线为

$$x_{\text{船}} = 0.6ct, \qquad x_{\text{彗}} = 7c\,\text{s} - 0.8ct.$$

把彗星速度变到飞船系

彗星速度变到飞船系，

$$\boxed{u'_{\text{彗}} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + 0.48} = -\frac{35}{37}c \simeq -0.945946c.}$$

在飞船世界线上计算船钟走时

相撞事件 C 在地面系有 $t_C = 5\,\text{s}, x_C = 3c\,\text{s}$。由于 O, C 都在飞船世界线上，船钟经历

$$\boxed{\Delta\tau_{OC} = \frac{5}{1.25}\,\text{s} = 4.00\,\text{s}.}$$

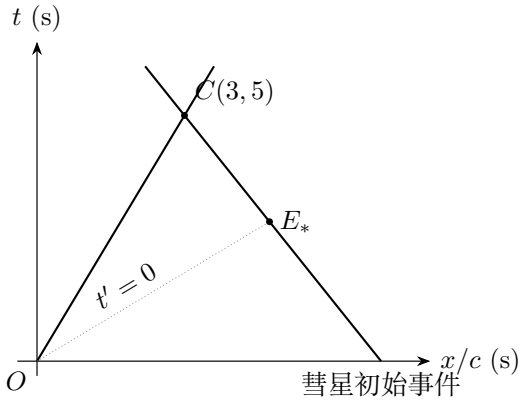


图 6.31: 横轴 x/c、纵轴 t 均以秒计且等比例。虚线 OE_* 在飞船系同时，E_* 不是地面 $t=0$ 时的彗星事件。

飞船系中与出发同时的彗星位置

用时间变换也得 $\Delta t' = 1.25(5 - 0.6\times 3)\,\mathrm{s} = 4\,\mathrm{s}$。若改用 “船系初始距离除以相对速度”，须先按图 6.31 的船系同时线取彗星位置：$t = 0.6x/c$ 与其世界线相交，得

$$\frac{x}{c} = 7\,\mathrm{s} - 0.8t = 7\,\mathrm{s} - 0.48\frac{x}{c}, \qquad 1.48\frac{x}{c} = 7\,\mathrm{s}.$$

所以

$$\frac{x_{E_*}}{c} = \frac{175}{37}\,\mathrm{s}, \quad t_{E_*} = \frac{105}{37}\,\mathrm{s}, \quad D' = x'_{E_*} = \frac{140}{37}c\,\mathrm{s}.$$

用船系同时距离除以船系相对速率，得到 $D'/|u'_{\text{彗}}| = 4\,\mathrm{s}$。

例 6.7 (运动圆孔与固定挡板的遮光时刻)**.** 车厢以速度 V 沿地面 $+x$ 运动。车内点光源 S 一直发光，正前方固有距离 l 处有半径 r 的圆孔，圆心为 O_1。地面 $x = x_A$ 处固定半径 $R > r$ 的不透明圆挡板，圆心为 O_2。孔面、挡板均垂直于轴线，S, O_1, O_2 等高，见图 6.32。S 经过地面原点时取 $t = t' = 0$，此时尚有光从挡板周围通过。求挡板处刚完全截住光束这一事件的车系时刻与地面时刻。忽略衍射；不把挡板到远处屏幕的传播延迟计入。

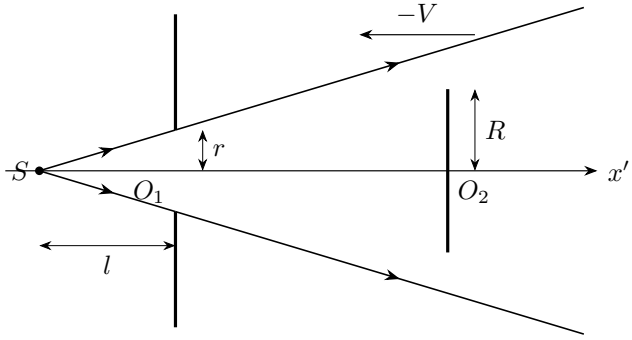


图 6.32: 在车系中作几何示意：光源和圆孔静止，挡板向左运动，最外侧光线形成稳定的圆锥。

解　在车系由相似三角形求遮光位置

图 6.32 的孔面和光源在车系中静止，最外侧光线由 S 连到孔边缘。因此图 6.33 中距光源 X' 处的光束半径为 $\rho = rX'/l$。刚完全遮光时 $\rho = R$，故挡板的车系坐标为

$$\boxed{X'_* = \frac{lR}{r}}.$$

由于 $R > r$，该位置仍在孔面前方。

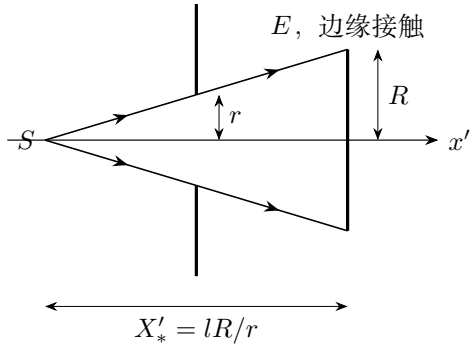


图 6.33: 遮光开始时，挡板边缘恰好接触光锥端点。两直角三角形给出 $R/X'_* = r/l$。

变换挡板世界线并求车系时刻

地面固定挡板的世界线为 $x = x_A$。由逆变换 $x = \gamma(x' + Vt')$，在车系有

$$x'_A(t') = \frac{x_A}{\gamma} - Vt'.$$

令它到达 X'_*，得到车系坐标时间

$$\boxed{t'_E = \frac{1}{V}\left(\frac{x_A}{\gamma} - \frac{lR}{r}\right).}$$

这里的 t'_E 是车系同步钟网赋予挡板处遮光事件的坐标时间。

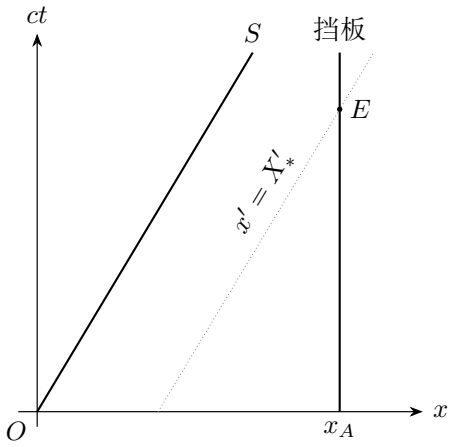


图 6.34: 地面时空图。$x' = X'_*$ 对应一条与车厢平行的直线，与固定挡板世界线相交于遮光事件 E。两轴等比例，图示取 $V = 0.6c$。

把同一遮光事件变回地面时刻

图 6.34 中遮光事件 E 是固定挡板世界线与 $x' = X'_*$ 轨迹的交点，先确定这个共同事件，再变回地面时间；等价地，将 $x' = \gamma(x_A - Vt)$ 代入阈值，得

$$\boxed{t_E = \frac{1}{V}\left(x_A - \frac{lR}{\gamma r}\right).}$$

遮光时刻与两个时间零点

题给地面零时刻仍有光从边缘通过，等价于 $\gamma x_A > lR/r$，保证 $t_E > 0$。t'_E 不一定为正，因为地面零时刻与车系零时刻的远处同时面不同。若另求屏幕真正变暗的接收时刻，还须给出屏幕位置并加上最后一束光从挡板到屏幕的传播时间。

光源、圆孔和挡板的尺寸

在几何步骤中，l 是车厢固有距离，图 6.33 又正是在车系中作图，所以直接用 l，不再附加一次长度收缩。挡板的横向半径 R 和圆孔半径 r 也不随纵向变换改变。遮光发生在一圈边缘的同一轴向位置、同一时刻，时空图中的 E 代表其中任一点的轴向坐标。

挡板半径与遮光早晚

最后检查参数趋势：固定 V, x_A, l, r 时，

$$\frac{\partial t_E}{\partial R} = -\frac{l}{\gamma r V} < 0.$$

挡板越大，越早完全遮光，符合光锥与挡板相交的图形。反之，若圆孔更大，光束更宽，挡板需更接近光源才会截住全部光。

例 6.8 (串列静电加速器)**.** 串列加速器中，离子源 S 与终端靶 T 接地，中央氮气管 N 的电势为 $U = 5.00 \times 10^6\,\mathrm{V}$，见图 6.35。氢负离子从 S 由静止进入，在 N 中被剥去电子而成为质子。忽略电子质量及能量损失，并假定剥离不改变粒子速度。考虑相对论效应，求质子到达 T 的速率。取 $e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}, m_0 = 1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$。

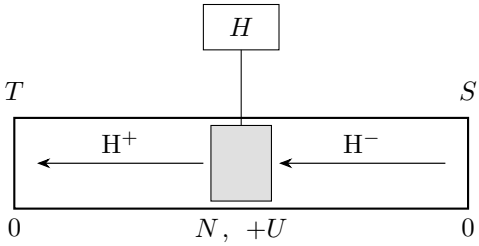


图 6.35: 粒子先以负电荷从零电势到正高压区，再以正电荷回到零电势；两段均加速。

解　按电荷和电势差分别计算两段做功

电场做功为 $\Delta K = -q\Delta\varphi$。图 6.35 的第一段 $S \to N$ 中，$q = -e, \Delta\varphi = U$，所以 $\Delta K_1 = eU$。第二段 $N \to T$ 中电荷变成 $+e$，电势降为 $\Delta\varphi = -U$，故仍有 $\Delta K_2 = eU$。

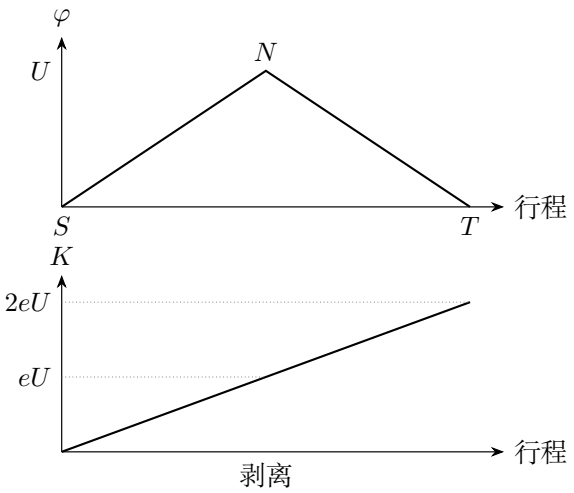


图 6.36: 沿粒子行程画电势和动能：电势先升后降，电荷在 N 变号，使动能两段都增加。横轴表示行程次序。

将两段增益相加求终端动能

按题设的质量近似，剥离前后的动能可连续处理，终端动能为

$$K_T = 2eU = 1.60 \times 10^{-12}\,\mathrm{J} = 10.0\,\mathrm{MeV}.$$

用相对论动能反求速度

由 $K_T = (\gamma - 1)m_0c^2$，

$$\gamma = 1 + \frac{2eU}{m_0c^2}, \qquad \boxed{v = c\sqrt{1 - \left(1 + \frac{2eU}{m_0c^2}\right)^{-2}}} \simeq 4.34 \times 10^7\,\mathrm{m/s}.$$

图 6.36 中的两次能量增益都须计入，不能只取一次 eU。若要保留电子质量，剥离时速度不变并不等于质子动能不变，须分别使用氢负离子质量和质子质量；本题已明确忽略这一小修正。

两段加速中的电场力方向

两段加速也可从受力方向检查：$S \to N$ 时电势沿运动方向升高，电场指向反方向，负离子受力沿运动方向；$N \to T$ 时电势降低，电场和正离子受力都沿运动方向。因此图 6.36 的动能在两段均上升。电场做功仍由电荷与电势差决定，相对论修正进入的是最后由 K_T 求 v 的关系。

例 6.9 (迎头粘合后的质量)**.** 两个粒子的不变质量均为 m，以大小相同、方向相反的速度 $0.6c$ 迎头碰撞，随后粘成一个复合粒子。若没有能量向外散失，求复合粒子的不变质量 M，见图 6.37。

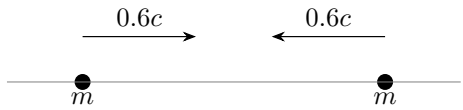


图 6.37: 对称的碰前状态。两粒子动量等大反向，总动量为零。

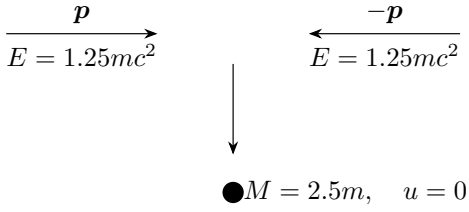
解　先由动量守恒判断复合粒子静止

图 6.37 中两粒子的速率相同，方向相反。图 6.38 中两条动量箭头相互抵消，碰前总动量为零。碰后只有一个复合粒子，故其动量也为零，即它在此参考系静止。

用总能量守恒求不变质量

每个入射粒子的洛伦兹因子为 $\gamma = 1/\sqrt{1-0.6^2} = 1.25$，总能量为 $2\gamma mc^2$。能量不向外流失，所以

$$Mc^2 = 2\gamma mc^2, \qquad \boxed{M = 2.50m}.$$



$$E_{后} = Mc^2 = 2.5mc^2$$

图 6.38: 上方为碰前的两粒子，下面为静止复合粒子。总动量保持为零，碰前动能转化为复合粒子的内能。

解释增加的静能与内部能量

两粒子碰前的静能和为 $2mc^2$，总动能为 $0.5mc^2$。这些相对运动能在粘合后留作内能，使复合粒子的不变质量增加 $0.5m$。若有辐射带走能量和动量，就必须把辐射也列入守恒式，不能沿用本题的 M。

一般相向速率下的系统质量

也可直接对图 6.38 的整个系统使用不变量：

$$M^2c^4 = (2\gamma mc^2)^2 - c^2|\boldsymbol{p} + (-\boldsymbol{p})|^2 = 4\gamma^2 m^2 c^4.$$

取正根得到 $M = 2\gamma m$。这样先消去总动量，再求静质量，便不必为碰后的复合粒子另猜一个速度。将 $0.6c$ 换成任意等值反向速率 v，仍有 $M = 2m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$。

例 6.10 (恒力作用下的高速粒子)**.** 一粒子不变质量为 m_0，起初静止，受地面系中恒力 F 沿 $+x$ 加速，$F/m_0 = 0.5c/\mathrm{s}$。求 $t = 0, 0.1, 0.6, 1.0\,\mathrm{s}$ 时的速度和动能，见图 6.39。

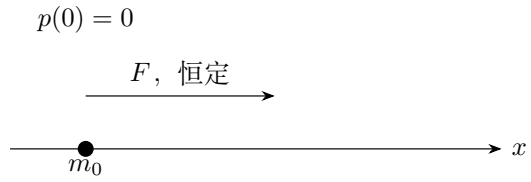


图 6.39: 恒定的是实验室力 $F = \mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t$，不是粒子的加速度。

解　对恒力积分得到随时间增长的动量

图 6.39 中的 F 是实验室系恒力。把 $\mathrm{d}p/\,\mathrm{d}t = F$ 写为 $\mathrm{d}p = F\,\mathrm{d}t$，并使用初值 $p(0) = 0$：

$$\int_0^{p(t)} \mathrm{d}p' = \int_0^t F\,\mathrm{d}t', \qquad [p']_0^{p(t)} = F[t']_0^t, \qquad p(t) = Ft.$$

以无量纲动量表达速度和动能

令 $q = p/(m_0c) = Ft/(m_0c)$，本题中 $q = 0.5t/\mathrm{s}$。由式(6.8)，

$$E = m_0c^2\sqrt{1+q^2}, \qquad \boxed{\frac{u}{c} = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{K}{m_0c^2} = \sqrt{1+q^2} - 1.}$$

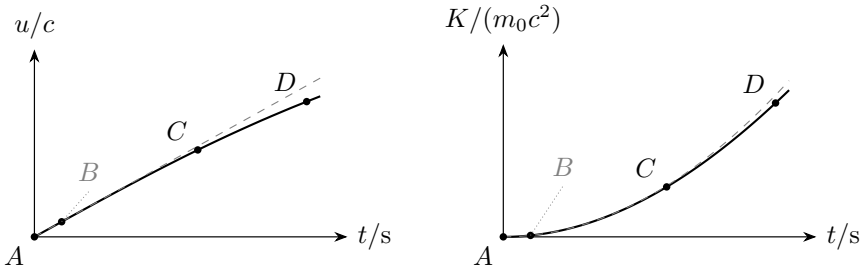


图 6.40: 实线为相对论结果，灰虚线为经典近似；A, B, C, D 对应题设四个时刻。

把四个时刻对应到曲线和数值表

逐项代入，得

图中点	t/s	u/c	$K/(m_0c^2)$
A	0	0	0
B	0.1	0.049938	0.0012492
C	0.6	0.287348	0.0440307
D	1.0	0.447214	0.118034

求加速度并检查低速极限

图 6.40 的每一点都由同一个动量 Ft 决定。由 $u = cq(1+q^2)^{-1/2}$、$\mathrm{d}q/\,\mathrm{d}t = F/(m_0c)$，先对 q 使用乘积法则，再作时间的链式求导：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q} = c\left[(1+q^2)^{-1/2} - q^2(1+q^2)^{-3/2}\right] = \frac{c}{(1+q^2)^{3/2}},$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{F/m_0}{(1+q^2)^{3/2}}.$$

可见加速度随时间减小，而 u 始终小于 c。只有 $q \ll 1$ 时才有 $u \simeq Ft/m_0$ 和 $K \simeq F^2t^2/(2m_0)$。

由位移积分验证功与动能一致

还可用功检查表中的动能。取 $x(0) = 0$，将速度对时间积分，并以 $q' = Ft'/(m_0c)$ 换元，$\mathrm{d}t' = (m_0c/F)\,\mathrm{d}q'$：

$$x(t) = \int_0^t u(t')\,\mathrm{d}t' = \frac{m_0c^2}{F}\int_0^{q(t)} \frac{q'\,\mathrm{d}q'}{\sqrt{1+q'^2}}.$$

再令 $z = 1+q'^2$，$\mathrm{d}z = 2q'\,\mathrm{d}q'$；积分限由 $0, q(t)$ 变成 $1, 1+q(t)^2$，故

$$\int_0^{q(t)} \frac{q'\,\mathrm{d}q'}{\sqrt{1+q'^2}} = \frac{1}{2}\int_1^{1+q(t)^2} z^{-1/2}\,\mathrm{d}z = \left[\sqrt{z}\right]_1^{1+q(t)^2} = \sqrt{1+q(t)^2} - 1.$$

代回得到

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{F}\left[\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{m_0c}\right)^2} - 1\right],$$

故 $Fx(t) = m_0c^2(\sqrt{1+q^2}-1) = K(t)$。图 6.40 两条曲线虽分别表示速度和动能，却由同一条粒子运动联系起来。若误用 $u = Ft/m_0$ 一直外推，既不能保持图中的速度上限，也不能与该功关系相容。

例 6.11 (康普顿散射的波长变化)**.** 波长为 λ_0 的光子与不变质量为 m 的静止自由粒子碰撞。光子碰后相对入射方向偏转 θ，见图 6.41。求出射光子的波长 λ。

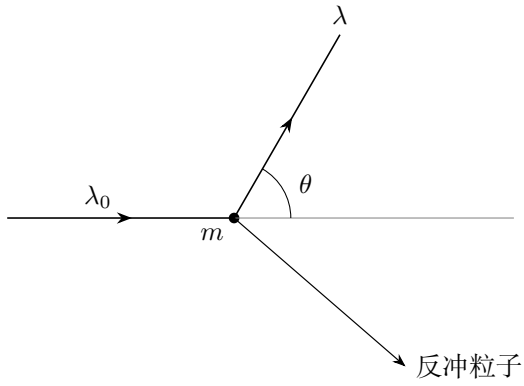


图 6.41: 光子向右入射，碰后向右上方散射，粒子向右下方反冲。θ 是两光子传播方向之间的夹角。

解 根据动量三角形消去反冲方向

记入射、出射光子能量为 $\varepsilon_0 = hc/\lambda_0$、$\varepsilon = hc/\lambda$，反冲粒子的能量、动量为 $E_e, \boldsymbol{p}_e$。图 6.42 用首尾相接的矢量表示动量守恒：

$$\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p}_0 - \boldsymbol{p}_\gamma, \qquad p_e^2c^2 = \varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon_0\varepsilon\cos\theta.$$

把反冲总能量写成光子能量之差

能量守恒给出 $E_e = mc^2 + \varepsilon_0 - \varepsilon$。

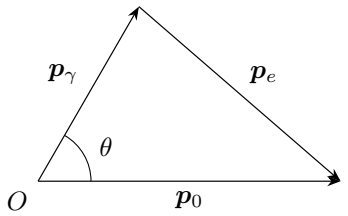


图 6.42: 光子动量与反冲动量组成矢量三角形。图示长度取 $\varepsilon_0 = mc^2, \theta = 60°$，两光子动量夹角为 θ。

联立反冲粒子的能量动量关系

将 E_e 代入粒子的能量动量关系 $E_e^2 - p_e^2c^2 = m^2c^4$，有

$$(mc^2 + \varepsilon_0 - \varepsilon)^2 - \left(\varepsilon_0^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon_0\varepsilon\cos\theta\right) = m^2c^4.$$

散射角与波长差

先展开能量平方为 $m^2c^4+2mc^2(\varepsilon_0-\varepsilon)+\varepsilon_0^2-2\varepsilon_0\varepsilon+\varepsilon^2$。扣除动量平方后，$m^2c^4$、$\varepsilon_0^2$、$\varepsilon^2$ 分别消去，余下

$$2mc^2(\varepsilon_0-\varepsilon)-2\varepsilon_0\varepsilon+2\varepsilon_0\varepsilon\cos\theta=0.$$

移项并除以 2，整理为

$$mc^2(\varepsilon_0-\varepsilon)=\varepsilon_0\varepsilon(1-\cos\theta).$$

两边除以正量 $\varepsilon_0\varepsilon$，得到 $mc^2(1/\varepsilon-1/\varepsilon_0)=1-\cos\theta$。代入 $1/\varepsilon=\lambda/(hc)$、$1/\varepsilon_0=\lambda_0/(hc)$，再乘 $h/(mc)$，得到

$$\boxed{\lambda-\lambda_0=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta).}$$

前向散射 $\theta=0$ 时波长不变；反向散射 $\theta=\pi$ 时增量最大，为 $2h/(mc)$。图 6.41 中的反冲动量带走能量，所以出射光子一般波长增大；这里要求粒子起初静止且可视为自由粒子。

由动量分量求反冲角

为了进一步对照图 6.42 的矢量长度，可把结果写成出射能量：

$$\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{1+\dfrac{\varepsilon_0}{mc^2}(1-\cos\theta)},\qquad K_e=\varepsilon_0-\varepsilon.$$

反冲动量的分量为 $p_{ex}=(\varepsilon_0-\varepsilon\cos\theta)/c$、$p_{ey}=-\varepsilon\sin\theta/c$，故向下反冲角 ϕ 满足

$$\tan\phi=\frac{\varepsilon\sin\theta}{\varepsilon_0-\varepsilon\cos\theta}.$$

图示参数给出 $\varepsilon=2\varepsilon_0/3$、$\phi=40.89^\circ$，与题设图的反冲方向和动量三角形一致。出射光子的 θ 与粒子反冲角 ϕ 是两个角，进入波长公式的是前者。

例 6.12 (寿命、飞行距离与同时性)**.** 某不稳定粒子的固有平均寿命为$\tau_0 = 2.00\,\mu\mathrm{s}$，相对地面匀速$v = 0.800c$。取产生事件$A$ 为两系共同原点，求平均意义下的地面寿命与飞行距离。再在粒子静止系中用地面两个标记点的运动解释同一结果。取$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。

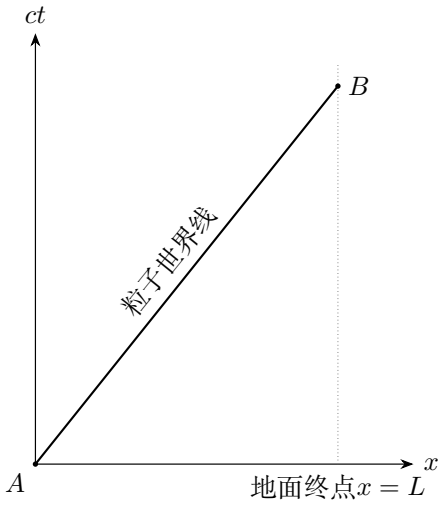


图 6.43: B 表示经过一个平均寿命时的代表事件；平均寿命不是每个粒子的固定衰变时刻

解　由粒子固有平均寿命求地面寿命和距离

图 6.43 的A, B 在粒子系同一空间点，所以其时间间隔为固有平均寿命。由$\gamma = 1/\sqrt{1-0.8^2} = 5/3$，有

$$\boxed{\Delta t = \gamma\tau_0 = \frac{10}{3}\,\mu\mathrm{s}}, \qquad \boxed{L = v\Delta t = 800\,\mathrm{m}}.$$

逐事件变换确认粒子系时间

将两个事件列在地面系：$A : (0, 0)$，$B : (L, \Delta t)$。变换给出

$$\Delta x' = \gamma(L - v\Delta t) = 0, \qquad \Delta t' = \gamma\left(\frac{10}{3} - \frac{0.8 \times 800}{300}\right)\mu\mathrm{s} = 2.00\,\mu\mathrm{s}.$$

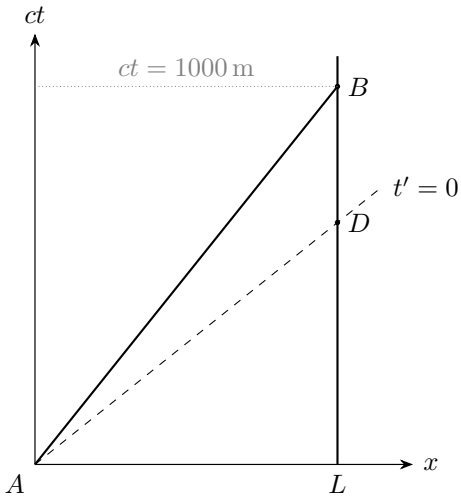


图 6.44: A, D 在粒子系同时；A 与地面终点在$t = 0$ 的事件并不在粒子系同时

选粒子系同时事件测地面标记间距

图 6.44 中，D 是终点世界线与$t' = 0$ 线的交点。地面原点与终点之间的固有距离为L，在粒子系同时测得其间距

$$L' = \frac{L}{\gamma} = 480\,\mathrm{m}.$$

终点向粒子运动的时间

这段地面装置以$-0.800c$ 运动，终点从距粒子480 m 处移到粒子旁。所用时间为

$$\frac{L'}{v} = \frac{480\,\mathrm{m}}{0.800c} = 2.00\,\mu\mathrm{s},$$

与固有寿命一致。这里L' 使用A, D 两个同时事件，它们位于粒子系的同一条同时线上。

例 6.13 (两个光子的系统质量)**.** 实验室中两光子的能量分别为$E_1 = 3.00\,\mathrm{MeV}, E_2 = 1.00\,\mathrm{MeV}$，传播夹角为$\theta$。求系统不变质量随$\theta$ 的关系。对迎头相向的$\theta = \pi$，求质心系相对实验室的速度及质心系中两光子的能量。

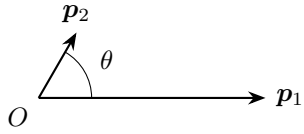


图 6.45: 两光子的动量必须作矢量相加；单个光子仍有零静质量

解 将两光子动量作矢量相加

按图 6.45，$|\boldsymbol{p}_j| = E_j/c$，所以

$$c^2|\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2|^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta.$$

求任意夹角下的系统不变质量

代入总能量得

$$\boxed{M^2c^4 = 2E_1E_2(1-\cos\theta)}, \qquad \boxed{Mc^2 = 2\sqrt{E_1E_2}\,|\sin(\theta/2)|}.$$

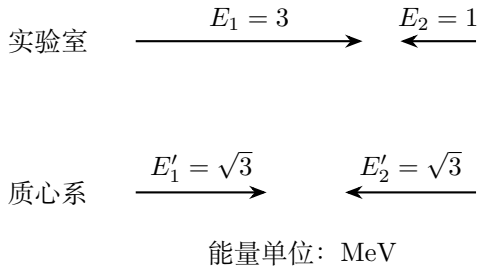


图 6.46: 迎头时实验室总动量向右；质心系中两光子等能、反向

列出迎头情形的总能量和总动量

取图 6.46 向右为正，迎头时

$$E_{\rm tot} = 4.00\,{\rm MeV}, \quad cp_{\rm tot} = 2.00\,{\rm MeV}, \quad \boxed{Mc^2 = 2\sqrt{3}\,{\rm MeV}}.$$

求使系统总动量消失的参考系速度

要求质心系总动量为零，由$p'_{\rm tot} = \gamma_V(p_{\rm tot} - VE_{\rm tot}/c^2) = 0$，得

$$\boxed{V = \frac{c^2p_{\rm tot}}{E_{\rm tot}} = +0.500c}.$$

质心系中的光子能量

再分别变换光子能量，$\gamma_V = 2/\sqrt{3}$，

$$E_1' = \gamma_V E_1(1-0.5) = \sqrt{3}\,{\rm MeV}, \qquad E_2' = \gamma_V E_2(1+0.5) = \sqrt{3}\,{\rm MeV}.$$

两光子反向等能，总动量确为零。若$\theta = 0$，则$M = 0$，系统整体同向传播，不能用小于光速的惯性系把它变成总动量为零；这是上述“质心静止系”存在条件的端点。

6.7 本讲小结

事件的位置和时刻必须由同一参考系的尺与同步钟定义。洛伦兹变换保持时空间隔不变，同时改变空间和时间坐标；收到光信号的时刻还包含传播延迟。类时关联的因果先后不因换系颠倒，类空事件的同时性和先后则可以依赖参考系。

时间膨胀比较同一只钟经历的两个事件。测量长度时，在测量系同时记录两端；换系测量时重选同一时刻的两个端点事件。速度变换从同一粒子的相邻事件出发，先变换位移和时间间隔，再取它们的比。横向位移保持原值，时间间隔随参考系改变，因而横向速度也随之改变。

有质量粒子的总能量和动量满足 $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$。做功决定动能增量，相对论关系决定由动能反求的速度；恒力使动量线性增长，速度仍小于光速。碰撞、衰变与散射须在同一参考系内列出全部参与者的能量和动量，再由总量求系统不变质量。系统质量包含内部能量，通常不能逐个相加粒子的静质量。

光学实验中的条纹比较仍由往返传播时间与相位决定，介质中的光速须先注明介质静止系。局部加速效应与引力效应的等价有空间和时间范围限制；弱静态引力场中，时钟比较取决于引力势差。运动学效应与引力效应使用的条件不同，具体比较应把所选时钟、事件和测量量一并注明。

6.8 练习

练习 6.1 (同一对闪光事件的同时性)**.** 飞船固有长度300 m，沿地面+x 方向以0.600c 运动。地面系在同一时刻记录船尾闪光A 和船头闪光B。以A 为两系原点，求B 相对A 的船系时间间隔，并判断先后。取$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$。

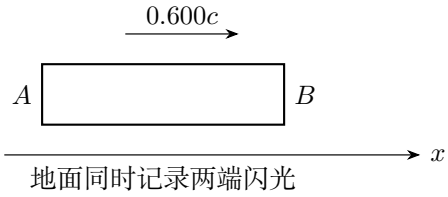


图 6.47: 练习：同一对闪光事件的同时性

练习 6.2 (飞船中的横向运动)**.** 飞船相对地面沿$+x$ 方向以$V = 0.600c$ 运动。在船系中，一粒子沿$+y'$ 方向以$0.800c$ 发射，且$u'_x = 0$。求地面系中粒子的两个速度分量与速率。

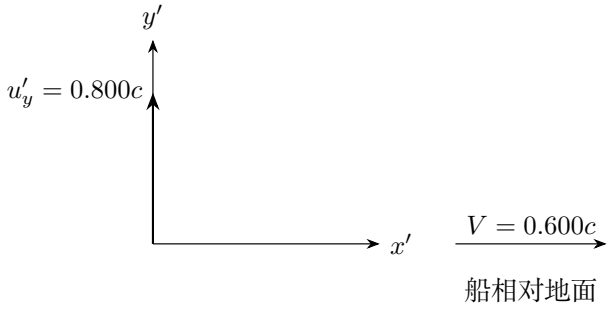


图 6.48: 练习：飞船中的横向运动

练习 6.3 (静止靶与运动粒子的粘合)**.** 两粒子静质量均为m。实验室中一粒子以$0.600c$ 撞向另一静止粒子，碰后粘合且无能量逸出。求复合粒子的速度、不变质量，以及在复合粒子静止系中增加的内能。

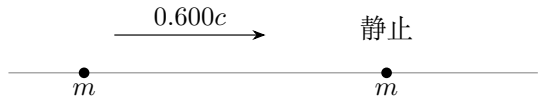


图 6.49: 练习：静止靶与运动粒子的粘合

练习 6.4 (康普顿散射的能量与反冲方向)**.** 静止自由电子质量为m。入射光子波长为$\lambda_C = h/(mc)$，沿$+x$ 方向传播，散射后光子沿$+y$ 方向传播。求散射波长、电子动能和电子速度的两个分量。

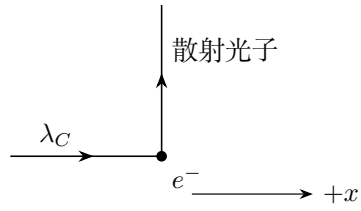


图 6.50: 练习：康普顿散射的能量与反冲方向

练习 6.5 (飞船上观察百米赛跑)**.** 飞船以 $V = 0.8c$ 向北飞行。地面上一名运动员由南向北匀速跑完 100 m，地面记录的用时为 10 s。求飞船系中的跑道长度、运动员在这段运动中的路程及平均速度。取 $c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$，以北为正方向。

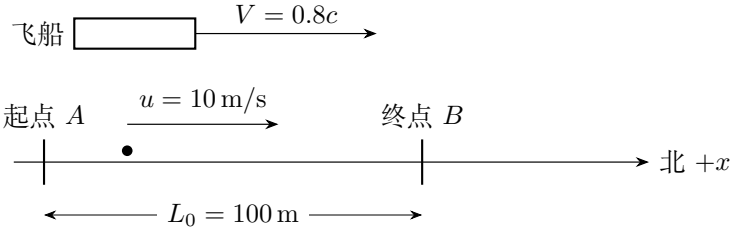


图 6.51: 地面系中的跑道与两种运动

练习 6.6 (两种安装方式的光钟)**.** 光钟由发光接收器 A 与平面镜 M 组成，二者在光钟静止系中的间距为 l_0，一次往返为一个滴答，固有周期 $\tau_0 = 2l_0/c$。分别讨论：

(1) 光钟固定在地面，AM 垂直于车辆速度 V。求车上观察者测得的滴答周期。

(2) 光钟固定在车上，AM 平行于 V。求地面测得的 AM 间距。

(3) 对第 (2) 种安装方式，求地面测得的滴答周期。

取 $c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$、$V = 7.70 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$、$l_0 = 2.46 \times 10^5\,\mathrm{m}$。

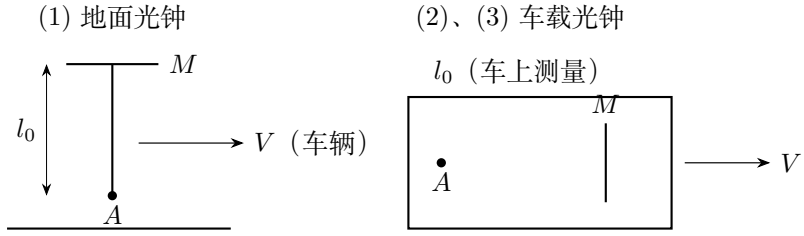


图 6.52: 分别固定在地面和车上的光钟

练习 6.7 (恒星光行差)**.** 航天飞机沿 $+x$ 方向飞行，速率为 V。在恒星静止系 S 中，从飞机指向恒星的视线与 $+x$ 轴成 θ 角。求飞机系 S' 中的视线角 θ'。若前端半球形观察室只能接收 $\theta' < \pi/2$ 的恒星，说明 $V \to c$ 时可见范围怎样变化。取 $V = 2.61 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$、$c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$、$\theta = 30.9°$。

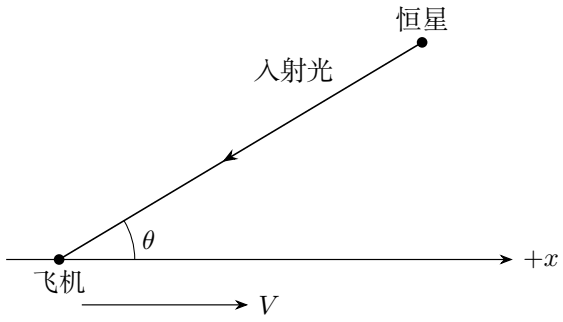


图 6.53: 视线指向恒星，光的传播方向与视线相反

练习 6.8 (高速粒子的完全非弹性碰撞)**.** 两个相同质点的静质量均为 m_0，在实验室系中以等值反向的速率 v 相撞，碰后粘成一个质点，过程中没有能量逸出。求复合质点的静质量。取 $v = 2.74 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$、$c = 3.0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$、$m_0 = 4.21 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$。

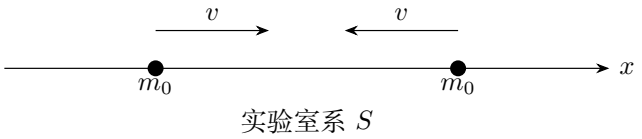


图 6.54: 两粒子的动量大小相等、方向相反

练习 6.9 (两光子反推母粒子的静质量)**.** 一个粒子衰变为两个光子。在同一惯性系中测得它们的能量分别为 E_1, E_2，传播方向夹角为 θ。求母粒子的静质量 m_0。取 $E_1 = 182\,\mathrm{MeV}$、$E_2 = 162\,\mathrm{MeV}$、$\theta = 37.6°$。

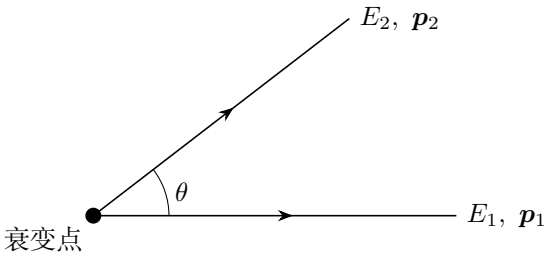


图 6.55: 两光子的传播方向与夹角

练习 6.10 (发射光子后的反冲)**.** 静质量为 M_0 的粒子起初静止，发射一个能量为 $Q = \lambda M_0 c^2$ 的光子后，剩余粒子反冲。求反冲速度与剩余粒子的静质量。取 $\lambda = 0.139$。

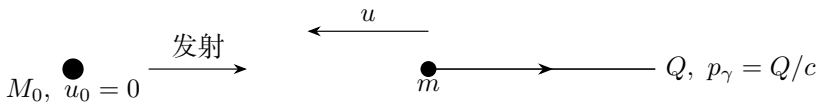


图 6.56: 初态静止，末态的光子和剩余粒子反向运动

练习解答

练习 6.1

解　先在地面同时测量船长

图 6.47 两端同时测得的地面船长为

$$\gamma = 1.25, \qquad L = 300/1.25 = 240\,\mathrm{m}.$$

对同一对闪光变换时间差

固定事件顺序为$B - A$，地面事件间隔为$(\Delta x, \Delta t) = (240\,\mathrm{m}, 0)$，所以

$$\boxed{\Delta t' = -\gamma \frac{VL}{c^2} = -0.600\,\mu\mathrm{s}}.$$

故船系中$\boxed{\text{船头闪光比船尾早}0.600\,\mu\mathrm{s}}$。

两次闪光在飞船系中的坐标

取事件A 为两系共同原点，逐个变换事件可以分别确定它们的时刻：

事件	x/m	$t/\mu\mathrm{s}$	x'/m	$t'/\mu\mathrm{s}$
船尾A	0	0	0	0
船头B	240	0	300	-0.600

两系比较同一对闪光事件。船系中，两次闪光的位置分别在船的两端，空间坐标差为300 m。时间差仍由变换后的两个事件时刻相减得到。图 6.57 中，船头世界线与 $t' = 0$ 相交于 C，闪光事件 B 位于 C 之前。A, C 是另一对船系同时的端点事件；题目所问仍是 A, B，不能为恢复同时性而擅自换成 C。

两个闪光的时空间隔

两事件类空分离，先后次序依赖参考系；这不构成从一端到另一端的超光速信号。

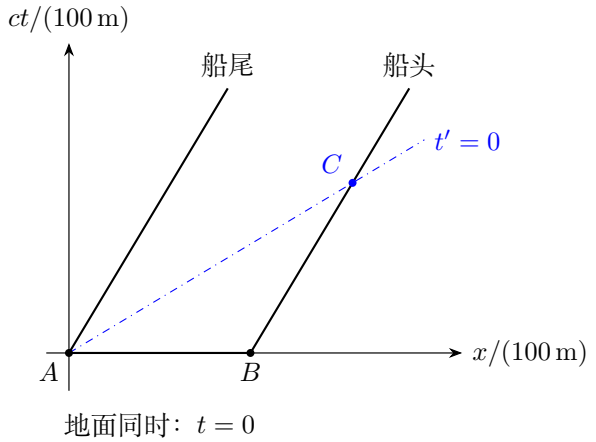


图 6.57: 同一对闪光 A, B 在地面同时；C 才是船头在船系 $t'=0$ 上的事件

练习 6.2

解　取粒子世界线上相邻事件

图 6.48 的粒子在船系纯横向运动。选粒子世界线上相邻两事件，在船系有$\mathrm{d}x'=0$、$\mathrm{d}y'=u'_y\,\mathrm{d}t'$。由逆洛伦兹变换，

$$\mathrm{d}t=\gamma_V\left(\mathrm{d}t'+\frac{V\,\mathrm{d}x'}{c^2}\right)=\gamma_V\,\mathrm{d}t',\quad \mathrm{d}x=\gamma_V V\,\mathrm{d}t',\quad \mathrm{d}y=\mathrm{d}y'.$$

由空间与时间微分共同求速度分量

因此$u_x=\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t=V$，$u_y=\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t=u'_y/\gamma_V$。横向空间间隔不变，横向速度仍因时间间隔变换而改变。这里$\gamma_V=1.25$、$u'_x=0$，故

$$\boxed{u_x=0.600c},\qquad \boxed{u_y=0.800c/1.25=0.640c}.$$

横向和纵向速度的合成

图 6.58 中两分量组成地面系速度矢量，

$$\boxed{u=c\sqrt{0.600^2+0.640^2}=0.877c<c}.$$

两条分量线的长度分别为 $0.600c$ 和 $0.640c$，蓝色斜边给出合速度。

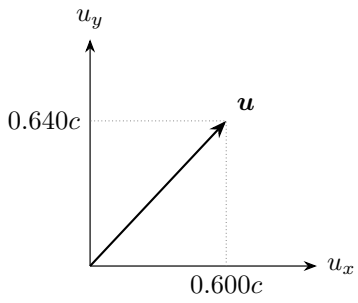


图 6.58: 练习 6.2 的解答图：地面系速度矢量由重新变换后的两个分量组成

练习 6.3

解　把静止靶的静能列入初态总能量

图 6.49 中，静止靶虽无动量，仍贡献静能 mc^2。运动粒子的$\gamma = 1.25$，所以

$$E_{\text{tot}} = 2.25mc^2, \qquad p_{\text{tot}} = 0.750mc.$$

由总能量和动量同时求速度与质量

封闭系统的能量、动量均守恒。实验室总动量不为零，复合粒子仍运动，须同时使用 $V = c^2 p_{\text{tot}}/E_{\text{tot}}$ 和系统质量不变量：

$$\boxed{V = \frac{c^2 p_{\text{tot}}}{E_{\text{tot}}} = \frac{c}{3}}, \qquad \boxed{M = m\sqrt{2.25^2 - 0.750^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}m}.$$

图 6.59 显示碰后实验室总动量向右，因此合体的实验室能量含有平动动能。合体的静能由同一组能量和动量代入$Mc^2 = \sqrt{E^2 - c^2p^2}$ 求出。

在复合物静止系计算增加的内能

在复合粒子静止系中增加的内能为

$$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = (M - 2m)c^2 = (3/\sqrt{2} - 2)mc^2 \approx 0.121mc^2}.$$

这不是实验室初始全部动能$0.250mc^2$，其余部分对应碰后整体运动。

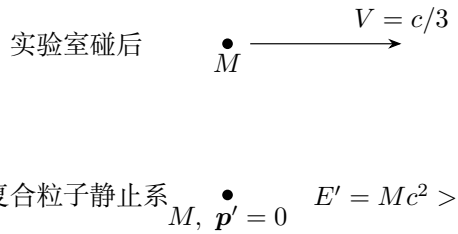


图 6.59: 练习 6.3 的解答图：实验室仍有整体动量；静止系总能量才等于Mc^2

练习 6.4

解 用九十度散射求光子波长

图 6.50 中散射角90°，所以

$$\boxed{\lambda = \lambda_C + \lambda_C(1 - \cos 90^\circ) = 2\lambda_C}.$$

由能量守恒求电子动能和总能量

初、末光子能量分别为$mc^2, mc^2/2$。由能量守恒，$\boxed{K_e = mc^2/2}$，电子总能量$E_e = 3mc^2/2$。

按矢量差求电子动量分量

初态电子静止，图 6.60 中电子末动量为入射光子动量减去上行散射光子动量，所以

$$p_{ex} = mc, \qquad p_{ey} = -mc/2.$$

以总能量和动量共同反求电子速度

利用$\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/E_e$，得

$$\boxed{v_x = 2c/3, \qquad v_y = -c/3}, \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{5}c/3 < c.$$

电子向右下方反冲，以补偿散射光子向上的动量。这里不能用$p = mv$ 反求速度。

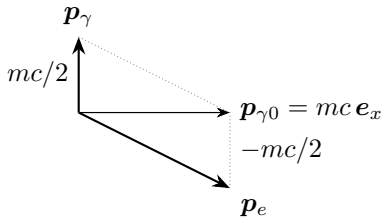


图 6.60: 练习 6.4 的解答图：上行光子动量与下行电子动量的纵向分量抵消

练习 6.5

解　在飞船同时面上测量跑道长度

图 6.51 中的跑道静止于地面，故 L_0 是固有长度。飞船必须在自身同一时刻测量跑道两端，所得长度为

$$L' = \frac{L_0}{\gamma} = 60\,\mathrm{m}, \qquad \gamma = \frac{5}{3}.$$

为赛跑另选起跑和到达两个事件

运动员的起跑、到达是另外两个事件，记作 E_A, E_B。图 6.61 把它们与跑道长度的测量分开表示。

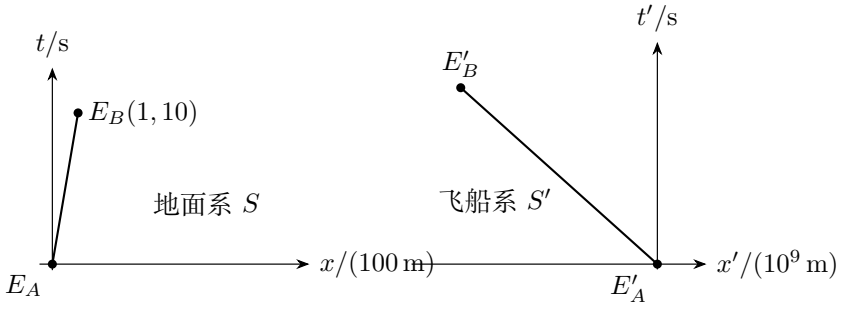


图 6.61: 赛跑事件的变换；两侧坐标采用各自注明的尺度

变换赛跑事件的位移和时间

以 E_A 为共同零点，图中的 E_B 满足 $\Delta x = 100\,\mathrm{m}$、$\Delta t = 10\,\mathrm{s}$。洛伦兹变换给出

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) = -3.999999833 \times 10^9\,\mathrm{m},$$
$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{V\Delta x}{c^2}\right) = 16.66666622\,\mathrm{s}.$$

图 6.61 中 E'_B 在 E'_A 左侧，说明运动员在飞船系向南运动。

求路程与带方向的平均速度

他做匀速直线运动，路程为位移的绝对值：

$$\boxed{s' = |\Delta x'| \simeq 4.00 \times 10^9\,\mathrm{m}}.$$

平均速度为

$$\boxed{u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{u - V}{1 - uV/c^2} \simeq -2.399999964 \times 10^8\,\mathrm{m/s}}.$$

跑道在飞船系中也不断向南移动，因此运动员走过的路程不能用收缩后的跑道长度 60 m 代替。路程取正值，向南的方向由速度的负号表示。

跑道终点在飞船系中的运动

还可在飞船系内直接复核。取起跑事件 E'_A 为零点，飞船系 $t'=0$ 时终点线在 $x'=L'=60\,\mathrm{m}$，随后以速度 $-V$ 向南移动。

运动员到达终点线时，故有

$$\Delta x' = L' - V\Delta t'.$$

代入 $\Delta t' = 16.66666622\,\mathrm{s}$，图中这段位移主要来自整条跑道在飞船系中向后运动。

练习 6.6

解 从固有镜距和车速计算共同参数

先由图 6.52 中的镜距 l_0 和车速 V 算参数：

$$\beta = 0.256667, \quad \gamma = 1.034661, \quad \tau_0 = 1.640\times10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

用横向光路求车上测得的地面钟周期

第 (1) 问中，光钟随地面相对于车辆向后运动。图 6.62 左侧的 A_0, M_1, A_2 是车上观察者所见的发射、反射和接收位置。光钟横向尺寸不变，每半程均有

$$\left(\frac{c\tau}{2}\right)^2 = l_0^2 + \left(\frac{V\tau}{2}\right)^2, \quad \boxed{\tau = \gamma\tau_0 = 1.69684\times10^{-3}\,\mathrm{s}}.$$

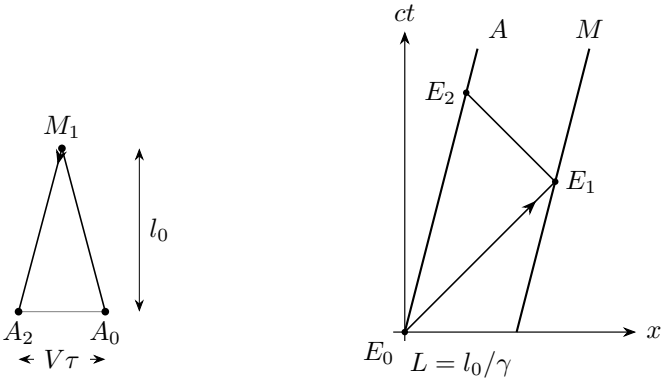


图 6.62: 左：车上所见地面光钟的路径；右：地面所见车载纵向光钟的三个事件

同时测量车载纵向光钟的镜距

第 (2) 问的光钟固定于车上，地面同时测量图 6.62 右侧两条世界线之间的水平距离，得

$$\boxed{L=\frac{l_0}{\gamma}=2.37759\times10^5\,\mathrm{m}}.$$

分别求追赶和迎面传播的两半程

第 (3) 问沿右图的折线 $E_0E_1E_2$ 计算。

去程追赶前方镜面，回程迎向接收器，所以

$$t_+=\frac{L}{c-V},\qquad t_-=\frac{L}{c+V}.$$

两段时间不等，但总周期仍为

$$\boxed{\tau=t_++t_-=\frac{2Lc}{c^2-V^2}=\gamma\frac{2l_0}{c}=1.69684\times10^{-3}\,\mathrm{s}}.$$

完整往返所对应的固有周期

第 (1) 问的相邻滴答发生在同一地面接收器处，第 (3) 问则发生在同一车载接收器处；各自的固有周期均为 τ_0。图 6.62 右侧还可读出两个不相等的半程：

$$t_+=1.06618\times10^{-3}\,\mathrm{s},\qquad t_-=0.630660\times10^{-3}\,\mathrm{s}.$$

它们的比值为 $(c+V)/(c-V)$，相加才是实验室周期。

纵向光钟的反射事件 E_1 发生在另一面镜上。对去程和回程分别作时间变换时，位置项符号相反，所以两个半程用时不同。相加后位置项抵消，整个周期仍为 γ 倍固有周期。

练习 6.7

解　由视线方向反向确定入射光速度

图 6.53 中的光向左下方传播，故在 S 中

$$u_x=-c\cos\theta,\qquad u_y=-c\sin\theta.$$

变换光速分量后重新定义视线角

速度变换给出

$$u'_x=-c\frac{\cos\theta+\beta}{1+\beta\cos\theta},\qquad u'_y=-c\frac{\sin\theta}{\gamma(1+\beta\cos\theta)}.$$

在飞机系中，视线仍取光传播的反方向。图 6.63 左侧据此画出 θ'，所以

$$\boxed{\cos\theta' = \frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta}}, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 + \beta\cos\theta)}.$$

取 $\beta = 0.87$，得 $\boxed{\theta' = 8.34^\circ}$。

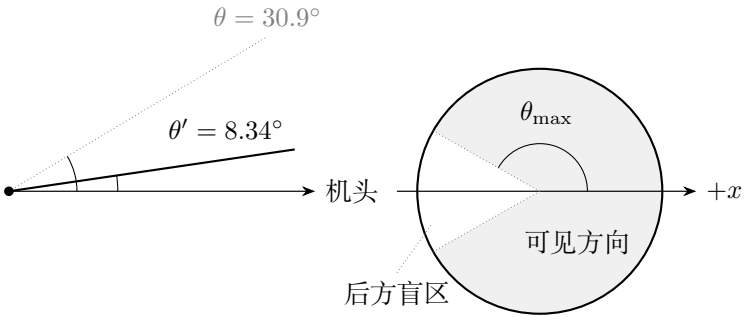


图 6.63: 左：前方恒星的视线偏向机头；右：恒星系中的可见角范围

由前半球条件求原星空可见范围

半球观察室接收 $\cos\theta' > 0$ 的光。分母 $1 + \beta\cos\theta$ 恒正，故恒星系中的可见条件为

$$\cos\theta > -\beta, \qquad 0 \le \theta < \theta_{\max} = \arccos(-\beta).$$

本题 $\theta_{\max} = 150.46^\circ$，右图的后方盲区已小于半球。当 $\beta \to 1$ 时，$\theta_{\max} \to \pi$，除严格后方的方向外，几乎整个星空都可进入前端观察室。

图中画的是过飞行轴的截面；绕轴旋转即为空间角范围。

以半角关系解释视线聚向机头

角度的压缩还可写成半角形式。由上面的正弦、余弦关系，

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta'}{2} &= \frac{\sin\theta'}{1 + \cos\theta'} = \frac{\sin\theta}{\gamma[(1 + \beta\cos\theta) + (\cos\theta + \beta)]} \\ &= \frac{1}{\gamma(1+\beta)}\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\tan\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

对任一固定的 $\theta < \pi$，当 $\beta \to 1$ 时均有 $\theta' \to 0$，即星光视线聚向机头。

计算方向立体角并明确所数范围

若按恒星系的方向立体角计算，轴对称可见区域的立体角微元为 $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$。先积方位角，再积极角，

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{可见}} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\theta_{\max}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi[-\cos\theta]_0^{\theta_{\max}} = 2\pi(1-\cos\theta_{\max}) = 2\pi(1+\beta).\end{aligned}$$

占整天方向的比例为 $(1+\beta)/2$，本题为 93.5%。

这个比例描述可见的方向范围，未对恒星的亮度或实际数量分布作假设。

练习 6.8

解　由对称初态动量判断碰后静止

图 6.54 两侧动量相消，系统总动量为零。碰后只有一个质点，因而复合质点在实验室系静止。它的总能量就是静能 Mc^2。

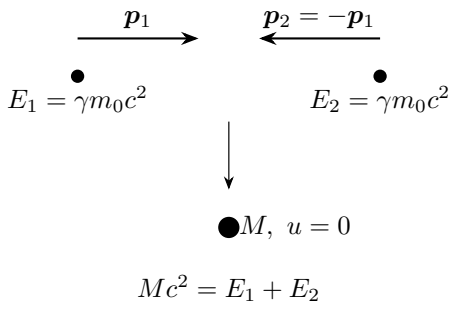


图 6.64: 碰前等值反向动量相消；碰后只有一个复合粒子，静止于同一实验室系

把两份相对论总能量转为复合静能

对图 6.64 写能量守恒式：

$$Mc^2 = 2\gamma m_0c^2, \qquad \boxed{M = \frac{2m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2.0677\times10^{-26}\,\mathrm{kg}}.$$

数值上 $\gamma = 2.45572$，所以 $M = 4.91144m_0$。增加的静能 $(M-2m_0)c^2$ 等于碰前的总动能，并以复合系统的内能等形式保留。

碰撞后的静能增量

把图 6.64 上方每个粒子的能量拆开，有 $\gamma m_0c^2 = m_0c^2 + K_1$，因此也可写成

$$M = 2m_0 + \frac{2K_1}{c^2}.$$

粘合后宏观动能为零，复合系统的内能相应增加，总能量守恒。

这里 v 是每个粒子在实验室系的速率，求 γ 时应使用它；若换成两粒子的相对速率，就改变了能量所属的参考系。

练习 6.9

解　由两光子矢量和确定母粒子动量

母粒子在所选惯性系中未必静止。图 6.65 把图 6.55 中的两个光子动量首尾相接，合动量 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ 就是母粒子衰变前的动量。

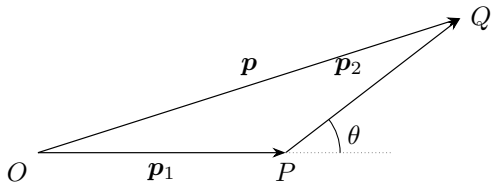


图 6.65: 动量三角形；平行虚线保留两光子的夹角

联立能量和动量求母粒子质量

由图中的矢量和及光子关系 $p_i = E_i/c$，

$$p^2 = \frac{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\theta}{c^2}.$$

总能量 $E = E_1 + E_2$。代入母粒子的能量动量关系，得

$$\begin{aligned} m_0^2c^4 &= (E_1 + E_2)^2 - p^2c^2 \\ &= 2E_1E_2(1 - \cos\theta). \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{m_0 = \frac{\sqrt{2E_1E_2(1-\cos\theta)}}{c^2} = 110.67\,\mathrm{MeV}/c^2}.$$

母粒子在实验室中的速度

若母粒子静止，两个光子应等能且反向。本题的能量和夹角不满足这一条件，故不能令总动量为零。

变到母粒子的静止系

由图 6.65 还可检查母粒子的运动状态。它的总能量为 344 MeV，故

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_0c^2}{E_1 + E_2}\right)^2} \simeq 0.94683.$$

若选到母粒子静止系，总动量才为零，两光子在那里反向且各有能量 $m_0c^2/2$。当前系的两份能量可以不同，但由它们和夹角求出的 m_0 保持不变；这正是不变量方法能避免另外求母粒子速度的原因。

练习 6.10

解　按动量反向和能量分配确定末态总量

取光子方向为 $+x$。图 6.56 中的初态总动量为零，故剩余粒子的动量为 $p_x = -Q/c$。能量守恒给出

$$E = M_0c^2 - Q = (1-\lambda)M_0c^2.$$

图 6.66 分别画出能量分配和动量平衡。剩余粒子的 E 包含静能与反冲动能，不能直接以 E/c^2 作为静质量。

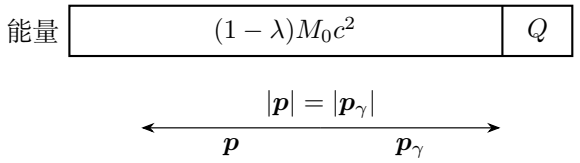


图 6.66: 能量分配与等值反向的动量

由剩余粒子的总能量求反冲速率

用 $\boldsymbol{u} = c^2\boldsymbol{p}/E$，反冲速率为

$$\boxed{\frac{u}{c} = \frac{\lambda}{1-\lambda} = 0.16144},$$

方向与图中光子相反。

剩余粒子的静质量

再由能量动量关系，

$$\begin{aligned} m^2c^4 &= E^2 - p^2c^2 \\ &= [(1-\lambda)^2 - \lambda^2]M_0^2c^4, \end{aligned}$$

得

$$\boxed{\frac{m}{M_0} = \sqrt{1-2\lambda} = 0.849706}.$$

若剩余粒子具有正静质量，需 $0 < \lambda < 1/2$。

本题满足该条件，且所得反冲速率小于光速。

静能在光子和反冲之间的分配

静质量的减少也可逐项对照。剩余粒子的反冲动能为

$$K = E - mc^2 = \left[1 - \lambda - \sqrt{1 - 2\lambda}\right] M_0 c^2 \simeq 0.0112942 M_0 c^2.$$

初态减少的静能为 $(M_0 - m)c^2 = Q + K$。图 6.66 左侧的能量块包含剩余粒子的静能 mc^2 与反冲动能 K，另一部分是光子的能量 Q。

光学与近代物理

物理竞赛一轮讲义

第七讲

物质波与原子模型

2026

目录

第七讲　物质波与原子模型 **1**

7.1　物质波与粒子动量 1

7.2　原子定态、类氢能级与谱线 2

7.3　有限核质量与跃迁反冲 6

7.4　碰撞激发与能量分配 7

7.5　例题与分析 9

7.6　本讲小结 23

7.7　练习 24

练习解答 25

第七讲　物质波与原子模型

7.1　物质波与粒子动量

7.1.1　从光子动量到德布罗意波长

上一讲的康普顿散射把光子的动量带进了守恒方程。对真空中的光子，$E = h\nu$，且 $E = pc$、$c = \lambda\nu$，所以 $p = h/\lambda$。德布罗意将这条关系推广到电子等实物粒子。对动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子，沿动量方向前进一个波长，空间相位增加 2π。记 $\hbar = h/(2\pi)$，以 k_{w} 表示波数，则

$$k_{\mathrm{w}} = \frac{p}{\hbar}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k_{\mathrm{w}}} = \frac{h}{p}.$$

电子束打到晶体上，在某些方向出现衍射极大。相邻晶面的散射相位在图 7.1 中可以直接比较。两晶面的间距为 d，入射束和出射束各与晶面成 θ 角。以相同入射波面和出射波面为起止面，经过下方晶面的波在入射、出射两段分别多走 $d\sin\theta$，总路程差为 $2d\sin\theta$。具体地，BP、BQ 分别垂直于入射、出射方向，在直角三角形 ABP、ABQ 中，$AB = d$，两段投影 AP、AQ 各为 $d\sin\theta$。相位差为 2π 的整数倍时，来自各层的散射波相长，满足

$$2d\sin\theta = j\lambda, \qquad j = 1, 2, \ldots.$$

测得 d 与衍射角即可反求 λ。图中角度按晶面取，入射束与出射束的方向夹角为 2θ。

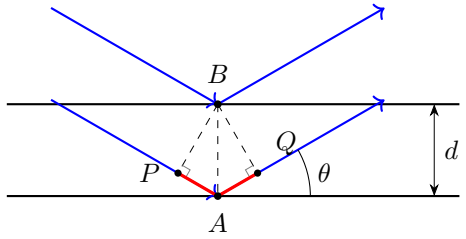


图 7.1: 相邻晶面的散射。PA 和 AQ 是下方路径多出的两段

静电场加速从动能入手。把 $E = K + mc^2$ 代入 $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$，

$$p^2c^2 = (K + mc^2)^2 - m^2c^4 = K^2 + 2Kmc^2, \qquad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{K(K + 2mc^2)}}.$$

当 $K/(2mc^2) \ll 1$ 时，$p \simeq \sqrt{2mK}$。例 7.1 从加速电压求 K，例 7.2 将比较两种动量公式得到的波长。

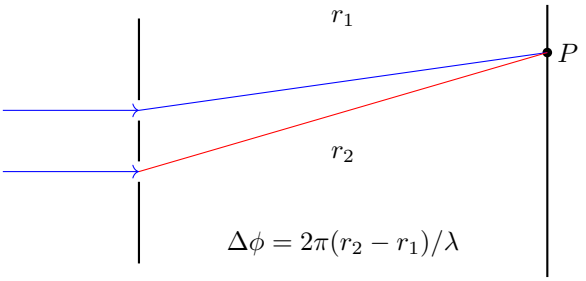


图 7.2: 两条狭缝到探测点的路程决定相位差

图 7.2 中两条线段给出传播距离 r_1, r_2。动量确定空间相位的尺度 $\lambda = h/p$，到达 P 的概率则由相应概率幅相加后取模平方得到。单个电子的探测是一个局域事件，多次重复才逐渐显示空间分布。若到达 P 的两路概率幅分别为 $\psi_1(P), \psi_2(P)$，且没有区分路径的测量，则

$$\mathcal{P}(P) \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\psi_1^* \psi_2).$$

对入射相位相同的两缝，图中的路程差使最后一项随 P 的位置而变。逐个记录电子在屏上的到达点，亮纹处积累的记录较多，暗纹处较少。

7.2　原子定态、类氢能级与谱线

7.2.1　玻尔模型：库仑力与角动量量子化

氢放电管发出的光在分光仪中分成若干条分立谱线。用波数 $1/\lambda$ 表示，巴耳末系可以写成 $R_H(1/2^2 - 1/n^2)$，其中 $n = 3, 4, \ldots$。式中两项各属于一个原子状态，一条谱线的波数由两项相减给出。乘上 hc，就得到发光前后的能量差。玻尔模型从允许的定态出发，再用库仑力和量子化条件求能级。

先把氢核看作静止，电子质量为m_e，电荷量大小为e，记$k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$，$\hbar = h/(2\pi)$。玻尔模型作如下假定：电子可处于若干不辐射的定态；圆轨道角动量满足

$$m_e v_n r_n = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

对于束缚能级之间的跃迁，发射或吸收的光子频率由两个定态的能量差决定。

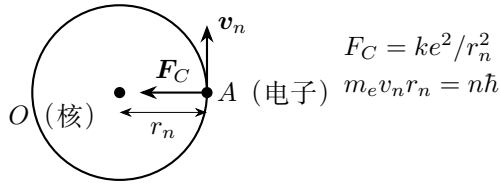


图 7.3: 半径、速度和库仑力的方向；圆轨道是玻尔模型中的图像

图 7.3 中，A 点的库仑力沿AO 向内，速度沿圆的切线。因此

$$\frac{ke^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}, \qquad v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n}.$$

先把量子化条件给出的 v_n 代入向心力方程，

$$\frac{ke^2}{r_n^2} = \frac{m_e}{r_n}\frac{n^2\hbar^2}{m_e^2 r_n^2} = \frac{n^2\hbar^2}{m_e r_n^3}.$$

两边乘以 $m_e r_n^3$，得到 $m_e k e^2 r_n = n^2\hbar^2$，再除以正量 $m_e k e^2$ 求出半径；将它代回速度式，得

$$\boxed{r_n = n^2 a_0}, \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2} \approx 5.29 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}, \qquad v_n = \frac{ke^2}{n\hbar}.$$

以无穷远为势能零点，径向向外取正，库仑力的径向分量为 $F_r = -ke^2/r^2$。由 $U(r) - U(\infty) = -\int_\infty^r F_r(s)\,\mathrm{d}s$，将无穷远端点先用有限 $b > r$ 代替，求原函数并代端点后再取极限，

$$\begin{aligned} U(r) &= ke^2 \lim_{b\to\infty} \int_b^r s^{-2}\,\mathrm{d}s = ke^2 \lim_{b\to\infty} [-s^{-1}]_b^r \\ &= ke^2 \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{b}\right) = -\frac{ke^2}{r}. \end{aligned}$$

再由圆周运动方程乘以 $r_n/2$ 得$K_n = m_e v_n^2/2 = ke^2/(2r_n)$。将动能与势能相加，故

$$\boxed{E_n = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{m_e k^2 e^4}{2n^2\hbar^2} = -\frac{E_B}{n^2}}, \qquad E_B \approx 13.6\,\mathrm{eV}.$$

负号表示束缚态；电离能为$-E_n = E_B/n^2$。第一激发态是$n = 2$，其激发能为$E_2 - E_1 = 3E_B/4$，不是$|E_2|$。

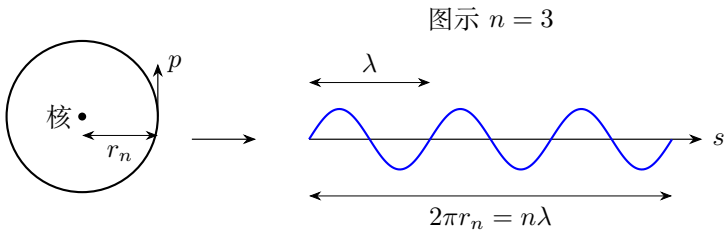


图 7.4: 将玻尔圆轨道的周长展开，检查绕行一周的相位闭合；波线表示相位的周期

图 7.4 中，绕行一周须使相位增加 $2\pi n$。圆周上容纳整数个波长的条件 $2\pi r_n = n\lambda$，结合$\lambda = h/(m_e v_n)$，也得到角动量量子化。这是对玻尔圆轨道条件的直观解释。实际原子中的定态由波函数描述，波函数给出各处探测到电子的概率分布。

7.2.2　核电荷数与类氢能级

先把库仑力中的核电荷数Z 写清楚，再使用角动量量子化。忽略核运动时，

$$\frac{kZe^2}{r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}, \qquad m_e v_n r_n = n\hbar.$$

联立得到

$$r_n = \frac{n^2}{Z}a_0, \qquad v_n = \frac{Z}{n}v_0, \qquad E_n = -13.6\,\frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{eV}.$$

这里$a_0 = 5.29 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$，$v_0 = 2.19 \times 10^{6}\,\mathrm{m/s}$。这些关系采用固定核近似；有限核质量需要以约化质量替换电子质量。

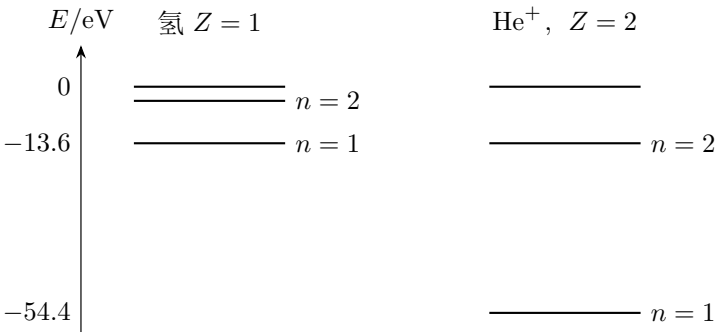


图 7.5: 相同电子量子数下，单电子氦离子的束缚能为氢的四倍；同一能量比例示意

图 7.5 中，Z 加倍使同一 n 的半径减半、轨道速率加倍，动能和束缚能的尺度均增为四倍。这里只讨论单电子库仑体系；中性氦有两个电子，电子间相互作用

使这些类氢公式不能直接套用。还应检查 $v_n/c = (Z/n)v_0/c \ll 1$，否则玻尔模型的非相对论近似不足。

7.2.3 能级图与谱线

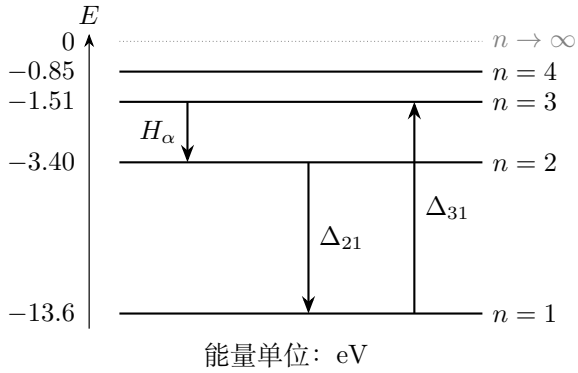


图 7.6: 能级越高，间隔越密；图中纵向间距作了示意性放大

图 7.6 中，向下箭头对应发射，向上箭头对应吸收。忽略原子整体反冲时，$n_i \to n_f$ 的光子满足

$$h\nu = |E_{n_i} - E_{n_f}|, \qquad \frac{1}{\lambda} = R_\infty \left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right|, \quad R_\infty = \frac{E_B}{hc}.$$

式中的 R_∞ 对应固定核；实际氢原子的 R_H 在有限核质量一节求出。终态$n_f = 1, 2, 3$ 分别构成莱曼系、巴耳末系、帕邢系。巴耳末系首线H_α 是$3 \to 2$，其中$n_f = 2$。处于$n = 3$ 的原子既可直接回到$n = 1$，也可先到$n = 2$；后一条级联路径才能发出H_α。

图 7.6 的纵轴表示整个原子内部的总能量，跃迁箭头跨过的能量差包含动能与库仑势能两部分。能级的零点选在电离极限，所以从 n 态电离所需的能量是$0 - E_n = E_B/n^2$。

对固定终态的谱线系列，初态越高，发射光子能量越大，波长越短；当初态趋于无穷远时达到该系列的短波极限。初态固定时，一次原子衰变只能沿某条直接或级联路径下降，不能在同一次衰变中任意发出所有可能能级差。大量原子的不同衰变路径叠加后，才可能观察到多条谱线。数谱线或判断是否出现某条谱线时，应先说明讨论的是单个原子的一次过程，还是原子集合的统计结果。

7.3　有限核质量与跃迁反冲

7.3.1　有限核质量：内部运动与整体运动

以下先取氢原子 $Z=1$。核质量为 M_N 时，电子和核都绕质心运动。令相对坐标$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_e-\boldsymbol{r}_N$，约化质量为

$$\mu=\frac{m_eM_N}{m_e+M_N}.$$

内部相对运动满足$\mu v_{\rm rel}r=n\hbar$ 与$ke^2/r^2=\mu v_{\rm rel}^2/r$，所以上述公式中的$m_e$ 应替换为μ：

$$r_n=\frac{n^2\hbar^2}{\mu ke^2},\quad E_n=-\frac{\mu k^2e^4}{2n^2\hbar^2},\quad \boxed{R_M=R_\infty\frac{\mu}{m_e}=\frac{R_\infty}{1+m_e/M_N}}.$$

这里的r_n 是电子与核的间距。有限核质量改变的是内部能级；跃迁时原子质心获得动量，则属于整体反冲，两种效应须分别计算。

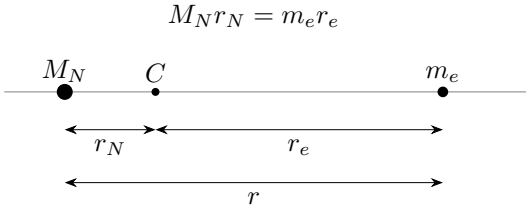


图 7.7: 电子和核到质心的距离不同，间距之和为相对坐标长度

图 7.7 示意质心分配关系；为显示核的运动，距离不按真实比例绘制。由 $M_Nr_N=m_er_e$ 与 $r=r_N+r_e$，得 $r_e=M_Nr/(M_N+m_e)$、$r_N=m_er/(M_N+m_e)$。二者同角速度转动，设角速度为 ω，两部分动能之和为

$$\begin{aligned}T_{\rm int}&=\frac{1}{2}m_e\omega^2r_e^2+\frac{1}{2}M_N\omega^2r_N^2\\&=\frac{\omega^2r^2}{2}\frac{m_eM_N^2+M_Nm_e^2}{(m_e+M_N)^2}\\&=\frac{\omega^2r^2}{2}\frac{m_eM_N(m_e+M_N)}{(m_e+M_N)^2}=\frac{1}{2}\mu v_{\rm rel}^2.\end{aligned}$$

因此内部运动的惯量由约化质量承担。对一般核电荷数 Z，还应把库仑因子 ke^2 换成 kZe^2，能级相应含 Z^2。

当 $M_N\to\infty$, 质心趋向核, $\mu\to m_e$, 恢复固定核近似; 有限核质量使 $\mu<m_e$, 能级结合能的绝对值略减小, 波长相应改变。这种改变在跃迁之前就已包含在内部能级中，不能再把同一效应重复算成发射光子的整体反冲。

7.3.2 跃迁能对应静质量差

设基态原子静质量为m_0，某激发态高出能量Δ，则激发态的静质量为

$$\boxed{m_* = m_0 + \frac{\Delta}{c^2}}.$$

Δ 是两个静止原子内部能量之差。自由原子发射光子时要分出反冲动能，故光子能量小于Δ；静止基态原子吸收一个光子后会整体运动，入射光子能量须大于Δ。例 7.5 将用能量和动量守恒求出这两个差值。

两个定态的静能都在原子各自的质心系中定义。激发增加的内部能量 Δ 对应原子整体静质量的增量 Δ/c^2。

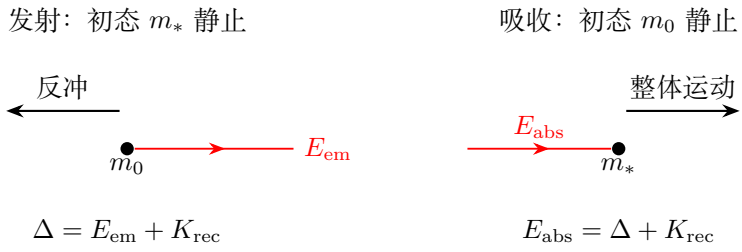


图 7.8: 自由原子的发射与吸收均需给整体动量；两幅图分别从各自初态静止的条件出发

图 7.8 把质心反冲与内部状态分开画出。发射时，光子向右而末态原子向左；吸收时，入射光子消失，其动量由末态原子向右运动承担。m_0 与 m_* 是原子不同内部状态的静质量，箭头表示整体运动。

若初态激发原子静止，自由发射后动量守恒要求原子反冲，故 $\Delta = E_\gamma + K_{\mathrm{rec}}$。在反冲非相对论时，$K_{\mathrm{rec}} \simeq E_\gamma^2/(2m_0c^2)$，因此光子能量略低于内部能级差。吸收时同样须给末态原子动量，关系改为 $E_\gamma = \Delta + K_{\mathrm{rec}}$，所以所需光子能量略高。图上的两个箭头分别从内部能量出发：发射要分出反冲动能，吸收要补足反冲动能。

7.4 碰撞激发与能量分配

7.4.1 质心平动能与内部相对运动能

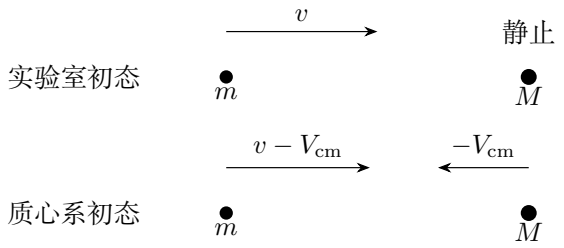
碰撞期间系统总动量守恒。在非相对论近似下，质量分别为 m, M 的两粒子组成的系统以 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\mathrm{cm}}$ 运动。写 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{w}_1$、$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{w}_2$，则

$$m\boldsymbol{w}_1 + M\boldsymbol{w}_2 = 0, \qquad \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}.$$

由此 $\boldsymbol{w}_1 = M\boldsymbol{v}_{\rm rel}/(m+M)$、$\boldsymbol{w}_2 = -m\boldsymbol{v}_{\rm rel}/(m+M)$。展开两个粒子的动能，含 $\boldsymbol{V}\cdot(m\boldsymbol{w}_1 + M\boldsymbol{w}_2)$ 的交叉项为零。剩下的两部分为

$$\begin{aligned} K_{\rm tot} &= \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}mw_1^2 + \frac{1}{2}Mw_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}v_{\rm rel}^2 \\ &= \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}\mu v_{\rm rel}^2, \qquad \mu = \frac{mM}{m+M}. \end{aligned}$$

图中分别画出实验室和质心系的速度，后一组速度直接决定可供激发的能量。



阈值末态：质心系中两者均静止
相对运动能恰好全部用于内部激发

图 7.9: 静止靶碰撞的两种参考系；阈值末态在质心系没有相对运动

图 7.9 中，初态 $V_{\rm cm} = mv/(m+M)$。在质心系，两个动量等值反向，故内部可用动能为

$$\frac{1}{2}m(v-V_{\rm cm})^2 + \frac{1}{2}MV_{\rm cm}^2 = \frac{1}{2}\mu v^2.$$

回到实验室系时，加上质心平动能 $\frac{1}{2}(m+M)V_{\rm cm}^2$。总动量守恒，因而质心速度固定。碰撞中用于激发的能量来自两粒子的相对运动。

7.4.2　能级差、光子能量与碰撞阈能

图 7.6 上的两条水平线之差是原子内部能量差 Δ。光子吸收和粒子碰撞都会改变原子的整体动量。以下分别用能量和动量守恒，求各过程实际所需的入射能量。

跃迁反冲的讨论已经由反冲动能非负判断了自由发射和吸收的能量偏移。若外部支撑能承担动量、且其能量变化可忽略，才可把光子能量近似等同于 Δ。下面改为粒子碰撞：其入射动量由两物体共同承担，须先分离不能转入激发的质心动能。

粒子碰撞则可能在激发后仍有剩余动能。对质量 m 的入射粒子撞击静止质量 M 的原子，先在非相对论、忽略激发引起质量微小变化的模型下分解初动能：

$$K_{\text{入}} = K_{\text{质心}} + K_{\text{相对}}, \qquad K_{\text{相对}} = \frac{M}{m+M} K_{\text{入}}.$$

总动量守恒要求质心运动不能任意消失，真正能转入内部激发的是相对运动能。阈值处末态相对运动能恰好为零，故

$$K_{\text{相对}} \geq \Delta, \qquad \boxed{K_{\text{入, 阈}} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\Delta}.$$

入射电子远轻于原子时，阈能近似为 Δ；入射粒子与原子等质量时，阈能近似为 2Δ。图 7.9 的阈值末态在实验室中仍以 V_{cm} 共同平移。例 7.8 还会比较入射粒子和原子相向运动的情形，那时应由两者的速度差求初态相对动能。

本讲数值计算取$h = 6.626\times10^{-34}\,\text{J s}$, $c = 2.998\times10^{8}\,\text{m/s}$, $e = 1.602\times10^{-19}\,\text{C}$, $m_e c^2 = 0.511\,\text{MeV}$。氢原子能级取$E_B = 13.6\,\text{eV}$ 时只保留相应精度；精细结构和辐射修正不在本讲模型内。

7.5 例题与分析

例 7.1 (电场加速后的电子物质波)**.** 电子从静止出发，经电势差$U = 150\,\text{V}$ 加速。求电子的德布罗意波长，并判断能否用非相对论动量公式。设加速区外电场为零，忽略电子间相互作用。

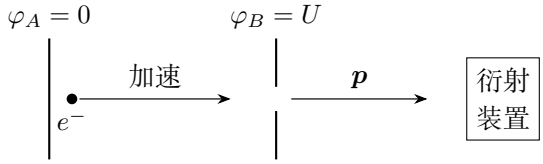


图 7.10: 电子由低电势处向高电势处加速，离开加速区后进入衍射装置

解　先由电势能变化求电子动能

图 7.10 中电子电荷为$-e$，从A 到B 的电势能变化为$-eU$。电场力做正功eU，因此动能为$K = eU = 150\,\text{eV}$。先比较能标：

$$\frac{K}{m_e c^2} = \frac{150}{5.11\times10^5} = 2.94\times10^{-4} \ll 1.$$

由动能求出射动量

可以取$p \approx \sqrt{2m_e eU}$。图 7.11 把动量和波长的对应关系画在出射区；图中波峰间的间距给出出射电子的波长。

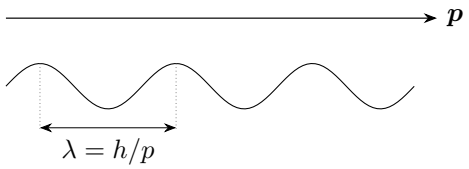


图 7.11: 同一出射动量对应确定波长；波线仅表示空间周期

计算波长并估计近似误差

代入$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ 得

$$\lambda \approx \frac{6.626 \times 10^{-34}}{\sqrt{2(9.109 \times 10^{-31})(1.602 \times 10^{-19})(150)}} = \boxed{1.00 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} = 0.100\,\mathrm{nm}}.$$

为量化近似，记上式为 λ_{nr}，相对论波长为 $\lambda_{\mathrm{rel}} = hc/\sqrt{eU(eU + 2m_e c^2)}$。两式相除，令 $x = eU/(2m_e c^2) = 1.47 \times 10^{-4}$，则

$$\frac{\lambda_{\mathrm{rel}}}{\lambda_{\mathrm{nr}}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \qquad \frac{\lambda_{\mathrm{nr}} - \lambda_{\mathrm{rel}}}{\lambda_{\mathrm{nr}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x}(\sqrt{1+x}+1)} \simeq \frac{x}{2}.$$

故相对减小量约为7.3×10^{-5}，远小于本题保留三位有效数字的要求。把电子动能代入光子的$\lambda = hc/E$ 则会得到错误结果，因为有静质量的电子不满足$E = pc$。

出射区的电子动量

图 7.11 中动量应对应加速区外的匀速电子。为检查单位，$150\,\mathrm{eV} = 2.403 \times 10^{-17}\,\mathrm{J}$，因此出口处 $p \simeq 6.62 \times 10^{-24}\,\mathrm{kg\,m/s}$。由 $\mathrm{J\,s} = \mathrm{kg\,m^2/s}$，可知 h/p 的单位为米。沿加速方向，电子的动量逐渐增大，德布罗意波长逐渐减小。

例 7.2 (高电压电子的波长与近似误差)**.** 电子从静止出发，经$U = 150\,\mathrm{kV}$ 电势差加速。取$m_e c^2 = 511\,\mathrm{keV}$，$hc = 1.240\,\mathrm{keV\,nm}$。求精确相对论波长和非相对论波长，比较后者的相对误差，并求使该误差低于1.00% 的电压范围。

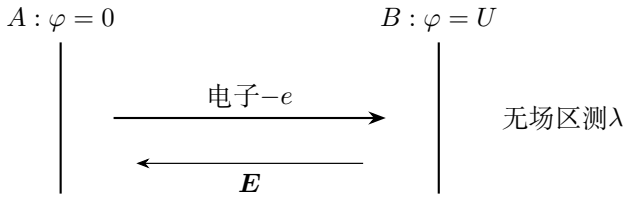


图 7.12: 电子从低电势A 向高电势B 加速，获得动能eU

解　由加速动能求相对论动量与波长

图 7.12 中电势能变化为$-eU$，故$K = 150\,\mathrm{keV}$。相对论动量为

$$pc = \sqrt{150(150 + 2\times 511)}\,\mathrm{keV},$$

因此

$$\boxed{\lambda = \frac{1.240}{\sqrt{150\times 1172}}\,\mathrm{nm} = 2.96\,\mathrm{pm}}.$$

在同一动能下计算经典近似值

若采用非相对论动量，得到

$$\lambda_{\mathrm{nr}} = \frac{1.240}{\sqrt{2\times 511\times 150}}\,\mathrm{nm} = 3.17\,\mathrm{pm}.$$

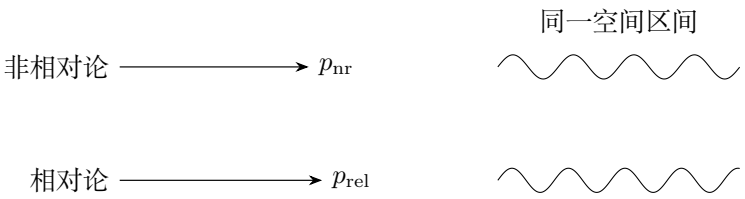


图 7.13: 同一动能下$p_{\mathrm{rel}} > p_{\mathrm{nr}}$，故实际波长较短；波线仅示意相位

建立相对误差的精确表达式

以相对论结果为分母。图 7.13 中两柱对应同一个 K，所以两种波长的比值可直接用动量比求出：

$$\frac{\lambda_{\mathrm{nr}}}{\lambda} = \frac{p_{\mathrm{rel}}}{p_{\mathrm{nr}}} = \sqrt{\frac{K(K+2m_ec^2)}{2m_ec^2K}} = \sqrt{1+\frac{K}{2m_ec^2}}.$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda_{\mathrm{nr}}-\lambda}{\lambda} = \sqrt{1+\frac{K}{2m_ec^2}} - 1 = \boxed{7.09\%}.$$

由误差上限反解允许电压

解$\varepsilon < 0.0100$ 时，应先保留精确不等式：

$$1+\frac{eU}{2m_ec^2} < (1.0100)^2, \qquad \boxed{0 < U < 20.5\,\mathrm{kV}}.$$

其中 $(1.0100)^2 - 1 = 0.0201$，所以动能上限为 $2\times 511\times 0.0201 = 20.5422\,\mathrm{keV}$。电子动能用 keV 表示时，数值等于加速电压的 kV 数值。

例 7.3 (从氢到单电子氦离子)**.** 单电子氦离子He^+ 的核电荷数为$Z=2$，电子处于$n=2$。求该模型中的轨道半径、速度和能量，并求$2\to 1$ 光子的波长。取$hc=1240\,\mathrm{eV\,nm}$，忽略核运动和整体反冲。

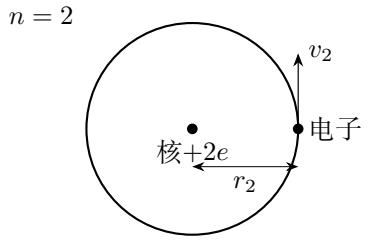


图 7.14: 核电荷改变库仑力；圆轨道只表示玻尔模型的量子化条件

解　代入核电荷和量子数求轨道参数

图 7.14 中$Z=2, n=2$，所以

$$\boxed{r_2=2a_0=1.06\times10^{-10}\,\mathrm{m}},\qquad \boxed{v_2=v_0=2.19\times10^{6}\,\mathrm{m/s}},$$

$$\boxed{E_2=-13.6\,\mathrm{eV}}.$$

由两内部能级之差求光子波长

图 7.15 把氢和单电子氦离子的同量子数能级并列。氦离子的$E_1=-54.4\,\mathrm{eV}$，故

$$\Delta E=E_2-E_1=40.8\,\mathrm{eV},\qquad \boxed{\lambda=\frac{1240}{40.8}\,\mathrm{nm}=30.4\,\mathrm{nm}}.$$

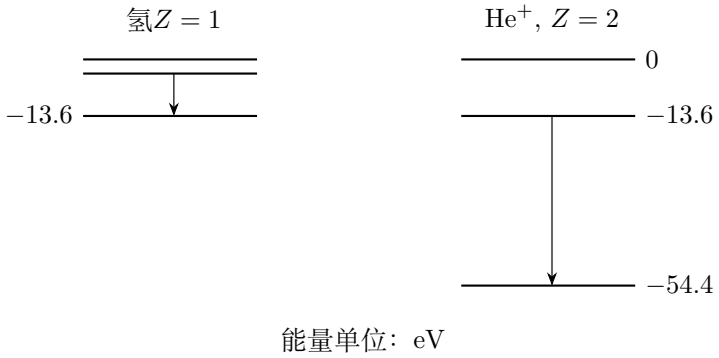


图 7.15: 左为氢，右为单电子氦离子；各列内部按同一能量比例画出

核电荷数与波长的比例

相同n 下，能量差随Z^2 放大为四倍，所以该跃迁波长为氢$2 \to 1$ 波长的四分之一。先区分核电荷数与电子数，才能判断这些类氢公式是否适用。

例 7.4 (从第四能级出发的全部谱线)**.** 大量彼此独立的氢原子被激发至$n = 4$，随后通过自发辐射回到基态。按玻尔模型，设任意两层间的向下跃迁均可能发生，忽略反冲、精细结构及外场。求可能出现的不同谱线数、各条谱线所属谱系及波长，并说明单个原子一次退激发最多发射多少个光子。取$E_n = -13.6/n^2\,\mathrm{eV}$，$hc = 1240\,\mathrm{eV\,nm}$。



图 7.16: 能级按主量子数示意排列，初始原子均在$n = 4$

解　列举不同起终层组成的谱线集合

图 7.16 中允许的起终层满足$1 \le j < i \le 4$。逐一列出配对，可避免漏掉间接下降所形成的谱线：

$$(i, j) = (2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3).$$

共 6 条 。

将每一能级差换成波长

每条能量与波长为$\Delta_{ij} = 13.6(1/j^2 - 1/i^2)\,\mathrm{eV}$，$\lambda_{ij} = 1240/\Delta_{ij}\,\mathrm{nm}$。

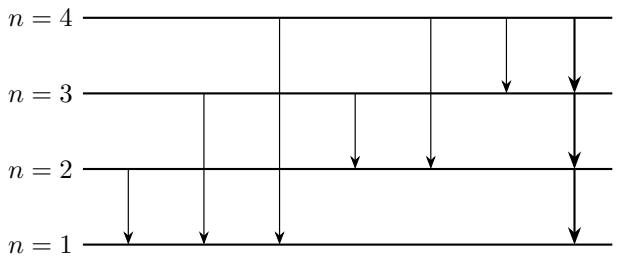


图 7.17: 细箭头列出六种跃迁；右侧粗箭头为逐级退激发路径

谱线的归属与波长

对应图 7.17 的六根细箭头，计算结果为

跃迁	能量/eV	波长/nm	谱系
$2 \to 1$	10.2	122	赖曼系
$3 \to 1$	12.09	103	赖曼系
$4 \to 1$	12.75	97.3	赖曼系
$3 \to 2$	1.889	656	巴耳末系
$4 \to 2$	2.550	486	巴耳末系
$4 \to 3$	0.6611	1.88×10^3	帕邢系

表中波长按所给近似常数保留三位有效数字。最长波长对应最小能级差$4 \to 3$，最短波长对应最大能级差$4 \to 1$，与能级顺序相符。

区别单个原子的级联路径与整个集合

图 7.17 粗箭头的逐级路径最多包含 3 个光子。直接$4 \to 1$ 则只发一个光子；单个原子不会依次发出全部六种光子。任一路径总辐射能量均为

$$E_4 - E_1 = 12.75\,\mathrm{eV},$$

例如$0.6611 + 1.8889 + 10.2 = 12.75$。六条谱线是大量原子的不同下降路径合在一起得到的集合。

例 7.5 (内部跃迁能与自由原子的反冲)**.** 氢原子处于第一激发态$n = 2$，基态静质量为m_0，基态电离能为$E_B = 13.6\,\mathrm{eV}$。

1. 原子受外界束缚，忽略支承整体的反冲能，求$2 \to 1$ 跃迁发出的光子频率ν_1。
2. 原子最初静止且完全自由，求发射光子的频率ν_{em} 及频率降低量$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_{\mathrm{em}}$。
3. 另有一个静止、自由的基态氢原子。用一个光子使其激发到$n = 2$，求所需入射频率ν_{abs}。

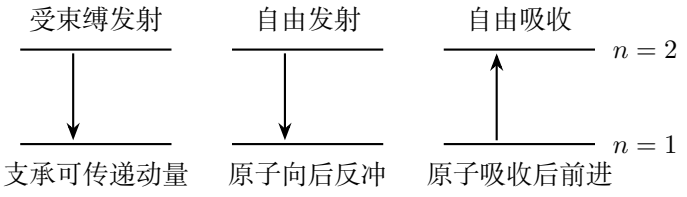


图 7.18: 相同内部能级差对应三种整体运动条件

解　求内部能级差并处理支承承担动量的情形

图 7.18 中的两条能级线相隔

$$\Delta = E_2 - E_1 = E_B\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10.2\,\mathrm{eV}.$$

受束缚原子发射时，支承可以取得动量。在理想化的巨大支承质量极限，其反冲能可忽略，于是

$$\boxed{h\nu_1 = \Delta}, \qquad \nu_1 = \frac{10.2(1.602\times10^{-19})}{6.626\times10^{-34}} = \boxed{2.47\times10^{15}\,\mathrm{Hz}}.$$

对应波长约121.6 nm。图 7.19 说明支承的作用：原子与光子不是独立封闭系统，但包括支承的整体仍满足动量守恒。束缚本身若显著改变能级，就不能沿用孤立氢原子的Δ；本题已忽略这一影响。

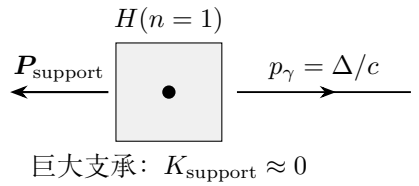


图 7.19: 支承承担反冲动量；图示为发射后的状态

自由发射时先确定末态反冲动量

激发态质量应取$m_* = m_0 + \Delta/c^2$。图 7.20 选光子方向为$+x$，初始总动量为零，故末态原子动量为$-h\nu_{\mathrm{em}}/c$。

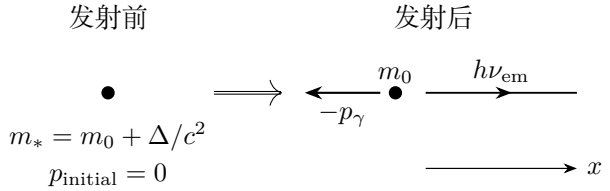


图 7.20: 自由发射前后：末态原子向左，光子向右

联立自由发射的能量和动量守恒

记$\varepsilon = h\nu_{\mathrm{em}}$。按图 7.20 中的末态动量，原子总能量为$\sqrt{m_0^2c^4 + \varepsilon^2}$。能量守恒给出

$$m_0c^2 + \Delta = \varepsilon + \sqrt{m_0^2c^4 + \varepsilon^2}.$$

先移项再平方，ε^2 恰好相消：

$$(m_0c^2 + \Delta)^2 - 2(m_0c^2 + \Delta)\varepsilon = m_0^2c^4.$$

发射频率与反冲修正

将平方中的 $(m_0c^2+\Delta)^2$ 展开，减去 $m_0^2c^4$，得到 $2(m_0c^2+\Delta)\varepsilon = 2m_0c^2\Delta+\Delta^2$。于是

$$\varepsilon = \frac{\Delta(2m_0c^2+\Delta)}{2(m_0c^2+\Delta)}.$$

令$\delta = \Delta/(m_0c^2)$，分子、分母同除 $2m_0c^2$，并用 $\nu_1 = \Delta/h$，得到

$$\boxed{\nu_{\rm em} = \nu_1\frac{1+\delta/2}{1+\delta}}, \qquad \boxed{\Delta\nu = \nu_1\frac{\delta}{2(1+\delta)}}.$$

因此相对降低量为

$$\boxed{\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\delta}{2(1+\delta)} \approx \frac{\Delta}{2m_0c^2}} \quad (\delta \ll 1).$$

频率降低量为正，与图中原子获得反冲动能一致。若取$m_0c^2 \approx 938.8\,\mathrm{MeV}$，则$\delta \approx 1.09\times10^{-8}$，$\Delta\nu/\nu_1 \approx 5.43\times10^{-9}$，$\Delta\nu \approx 1.34\times10^{7}\,\mathrm{Hz}$。

还可用非相对论反冲能检查：图 7.20 给出$p_\gamma \approx \Delta/c$，所以

$$K_R \approx \frac{p_\gamma^2}{2m_0} = \frac{\Delta^2}{2m_0c^2}, \qquad h\Delta\nu \approx K_R.$$

这一近似只作一阶检查。精确反冲能为$\Delta^2/[2(m_0c^2+\Delta)]$。

自由吸收时确定末态原子运动

图 7.21 中，原子初始静止，光子向右入射，吸收后的激发态原子也向右，动量为$h\nu_{\rm abs}/c$。

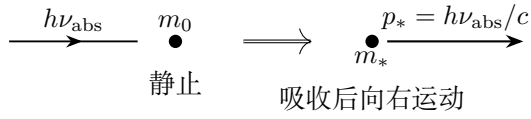


图 7.21: 吸收前后的动量方向；末态质量为m_*

求自由吸收所需的精确光子能量

记$\varepsilon_a = h\nu_{\rm abs}$，能量守恒为

$$m_0c^2 + \varepsilon_a = \sqrt{(m_0c^2+\Delta)^2 + \varepsilon_a^2}.$$

平方后同样消去ε_a^2，先得

$$m_0^2c^4 + 2m_0c^2\varepsilon_a = m_0^2c^4 + 2m_0c^2\Delta + \Delta^2.$$

消去共同静能平方，再除以 $2m_0c^2$，得

$$\boxed{h\nu_{\rm abs}=\Delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right)},\qquad \boxed{\nu_{\rm abs}=\nu_1\left(1+\frac{\delta}{2}\right)>\nu_1}.$$

比较发射和吸收的频率偏移

图 7.22 中，吸收与发射分别位于内部能级差的两侧，偏移为

$$h\nu_{\rm abs}-\Delta=\frac{\Delta^2}{2m_0c^2},\qquad \Delta-h\nu_{\rm em}=\frac{\Delta^2}{2(m_0c^2+\Delta)}.$$

当 $\delta\ll 1$ 时，两个偏移各约为 $\Delta^2/(2m_0c^2)$。两者相加再除以 h，

$$\nu_{\rm abs}-\nu_{\rm em}\simeq\frac{\Delta}{h}\frac{\Delta}{m_0c^2}\simeq(2.466\times10^{15})(1.086\times10^{-8})\,\text{Hz}\simeq2.68\times10^{7}\,\text{Hz}.$$

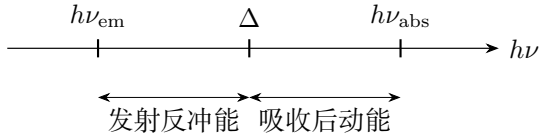


图 7.22: 以静止内部能级差为基准比较三种光子能量；偏移夸张绘制

精确关系$\nu_{\rm abs}/\nu_{\rm em}=1+\delta=m_*/m_0$ 可作为代数检查。自由、静止原子发出的这一个光子，不能恰好激发另一个自由、静止的同种基态原子；需考虑原子的运动、多普勒频移等条件。

末态静止系中的光子频率

设图 7.21 中末态原子在实验室的速度为$+u$，记$b=u/c$。新参考系S' 相对实验室以$+u$ 运动，故吸收前基态原子在S' 中以$-u$ 运动，入射光子仍向右，如图 7.23。

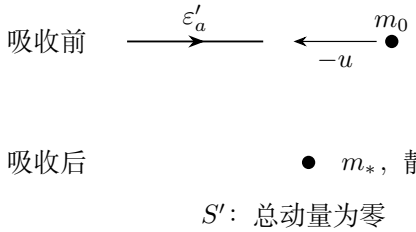


图 7.23: 在末态静止系中，入射原子与光子的动量相消

图中动量守恒为$\varepsilon'_a=\gamma_b m_0 bc^2$，能量守恒为

$$\gamma_b m_0c^2+\varepsilon'_a=m_*c^2\quad\Longrightarrow\quad\gamma_b(1+b)=\frac{m_*}{m_0}=1+\delta.$$

两边平方并用 $\gamma_b^2=(1-b^2)^{-1}$，得到 $(1+b)/(1-b)=(1+\delta)^2$。记右侧为 a，则 $1+b=a-ab$，移项得 $b(1+a)=a-1$，即$b=[(1+\delta)^2-1]/[(1+\delta)^2+1]$。入射光子在两系间满足纵向多普勒关系$\varepsilon_a'=\gamma_b(1-b)\varepsilon_a$，故

$$\varepsilon_a=\frac{m_0c^2b}{1-b}=\frac{m_0c^2}{2}\big[(1+\delta)^2-1\big]=\Delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right),$$

与实验室中的直接计算一致。

例 7.6 (用同位素谱线反求核质量比)**.** 巴耳末系中的H_α 线对应氢原子$n=3\to2$ 跃迁，波长为$\lambda_H=656.280\,\mathrm{nm}$。氘原子的对应谱线波长为$\lambda_D=656.101\,\mathrm{nm}$。在玻尔模型及约化质量修正下，求氢核与氘核的质量比，按整数比表示。取氢核质量与电子质量之比$M_H/m_e=1836$，忽略整体发射反冲和更高阶光谱修正。

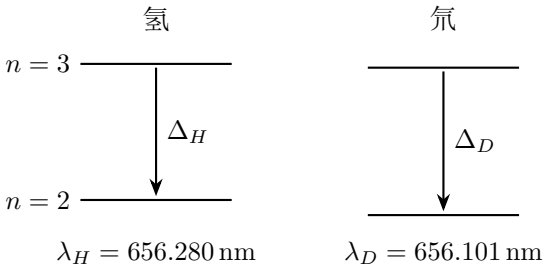


图 7.24: 同一对量子数的跃迁；氘的能级差略大，图中差别夸张绘制

解　用两体相对坐标确定质量怎样进入能级

图 7.25 中电子与核分别位于质心C 两侧，电子到核的间距为r。由$m_er_e=M_Nr_N$ 和$r=r_e+r_N$，可把两体相对运动化成质量为$\mu=m_eM_N/(m_e+M_N)$ 的等效运动。

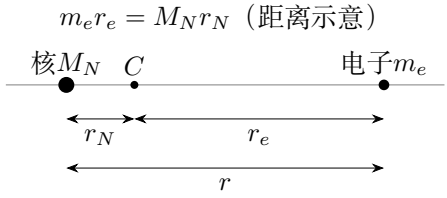


图 7.25: 核越重，核到质心的距离越小；能级公式使用相对坐标和约化质量

列两条波长式并消去公共能级因子

对图 7.24 中的相同跃迁，量子数因子相同，因此

$$\frac{1}{\lambda_H}=\frac{R_\infty}{1+m_e/M_H}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right),\qquad \frac{1}{\lambda_D}=\frac{R_\infty}{1+m_e/M_D}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right).$$

设$q=\lambda_H/\lambda_D$，消去共同因子得

$$q=\frac{1+m_e/M_H}{1+m_e/M_D},\qquad \frac{m_e}{M_D}=\frac{1+1/1836}{q}-1.$$

由两条波长求核质量

代入$q=1.00027282385$，得到

$$\frac{M_D}{m_e}\approx 3679.7,\qquad \frac{M_D}{M_H}\approx 2.004,\qquad \boxed{M_H:M_D=1:2}.$$

图 7.24 中$\lambda_D<\lambda_H$，故$\Delta_D>\Delta_H$。这与较重的氘核给出较大的约化质量、较大的同量子数能级间隔相符，因而质量比方向也得到了检查。

题目只要求整数比，上述小数不应被解释为精密核质量测量。

明确反演所需的已知质量条件

已知M_H/m_e是完成质量反演所需的条件。单独给出两条波长的比值，只能确定$(1+m_e/M_H)/(1+m_e/M_D)$，不足以同时求出两个未知核质量。

保留同位素小差量后再取整

上述质量比应在消去小差量后再取整。具体地，先保留

$$q-1=\frac{656.280-656.101}{656.101}\approx 2.72824\times10^{-4},$$

再求$(1+1/1836)/q-1\approx 2.7176\times10^{-4}$，最后取倒数求$M_D/m_e$。若一开始把$q$取成1.000，同位素差异就被舍去，图 7.24 两条不同波长将被错误地当成同一能级间隔。

例 7.7 (不同质量的静止靶碰撞)**.** 质量为m 的粒子以速率v 撞击静止靶原子，靶质量为$3m$。靶原子激发需要内能Δ。采用非相对论模型，忽略激发引起的相对静质量变化。求质心系相对运动动能占入射动能的比例，以及实验室激发阈能。

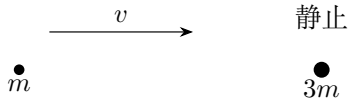


图 7.26: 实验室中仅入射粒子运动，质量比不能遗漏

解　由总动量求实验室质心速度

图 7.26 的入射动能为$K=mv^2/2$，质心速度为$V_{\rm cm}=mv/(m+3m)=v/4$。

在质心系计算可用相对运动动能

图 7.27 中两粒子在质心系的速度分别为$+3v/4, -v/4$，故

$$K_{\text{rel}} = \frac{1}{2}m(3v/4)^2 + \frac{1}{2}(3m)(v/4)^2 = \frac{3}{8}mv^2 = \boxed{\frac{3}{4}K}.$$

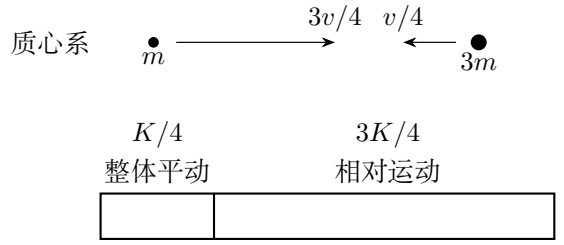


图 7.27: 质心系两动量等大反向，实验室整体平动能仍需保留

用末态相对动能为零求实验室阈能

阈值时质心系中的末态相对运动动能趋于零，因而

$$\frac{3}{4}K_{\min} = \Delta, \qquad \boxed{K_{\min} = \frac{4}{3}\Delta}.$$

实验室阈能大于能级差，差额对应守恒总动量所要求的整体平动。本题的3/4 来自质量比；若两者质量相等，该系数变为1/2，应重新计算。

例 7.8 (不同碰撞条件下的激发阈能)**.** 用粒子碰撞基态氢原子，使其随后有可能发出H_α 谱线。求下列情况下入射粒子的最小动能：

1. 电子与室温下的氢原子相碰撞；
2. 质子轰击最初静止的基态氢原子；
3. 质子与基态氢原子以相等速率相向运动并对心碰撞。

取$E_n = -13.6/n^2\,\text{eV}$，电子质量远小于氢原子质量，质子质量与氢原子质量近似相等。忽略辐射损失和相对论修正。所求阈能仅表示能量和动量允许的下限。

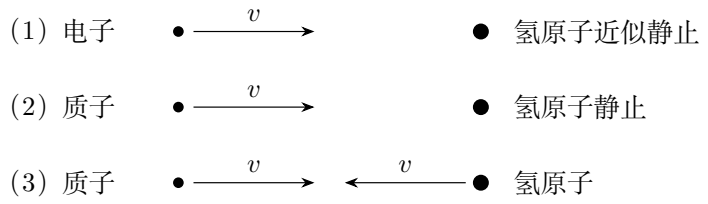


图 7.28: 三种入射条件；第三行的两个速度均相对同一实验室测量

解　由目标谱线确定最小内部激发能

H_α 对应$3\to 2$。因此从$n=1$ 至少须激发到$n=3$，而只到$n=2$ 不够。图 7.29 把碰撞吸收的能量和随后发射的光子区分开。

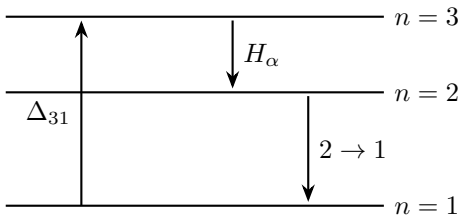


图 7.29: 碰撞至少提供$1\to 3$ 的激发能；$3\to 2$ 只释放其中一部分

最小内部激发能为

$$\Delta_{31}=E_3-E_1=13.6\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{108.8}{9}\,\mathrm{eV}\approx 12.09\,\mathrm{eV}.$$

这还不一定等于实验室中入射粒子的阈能，因为总动量所对应的质心动能不能全部转成内部能。

对任意初速度分解整体与相对运动

设入射粒子质量为m，氢原子质量为M，初速度分别为v_1,v_2，均带方向符号。定义

$$V=\frac{mv_1+Mv_2}{m+M},\qquad v_{\mathrm{rel}}=v_1-v_2,\qquad \mu_c=\frac{mM}{m+M}.$$

这里μ_c 是碰撞两物体的约化质量，与原子内部电子和核的约化质量不同。由定义反解两初速度，得 $v_1=V+Mv_{\mathrm{rel}}/(m+M)$、$v_2=V-mv_{\mathrm{rel}}/(m+M)$。代入两份动能并展开平方：$Vv_{\mathrm{rel}}$ 的系数为 $mM/(m+M)-Mm/(m+M)=0$，而 $v_{\mathrm{rel}}^2/2$ 的系数为

$$\frac{mM^2+Mm^2}{(m+M)^2}=\frac{mM(m+M)}{(m+M)^2}=\mu_c.$$

将整体速度的平方项合并，初始动能因此分为

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2=\frac{1}{2}(m+M)V^2+\frac{1}{2}\mu_c v_{\mathrm{rel}}^2.$$

由阈值同速末态建立必要能量条件

图 7.30 画出靶静止时阈值前后的运动。阈值处末态相对动能趋于零，两物体具有相同速度V，这一速度正是实验室系中的质心速度。因此可转成内部能的最大值是$\frac{1}{2}\mu_c v_{\mathrm{rel}}^2$，必要条件为

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu_c v_{\mathrm{rel}}^2\geq\Delta_{31}}.$$

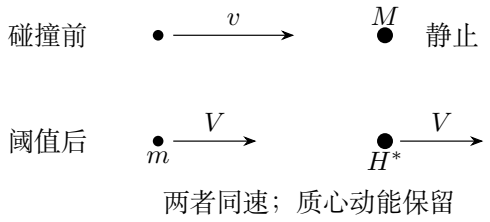


图 7.30: 靶静止时的阈值状态：末态在实验室中仍整体向右运动

计算轻电子打近似静靶的阈能

图 7.28 第一行可近似取$v_2 = 0$，于是$v_{\rm rel} = v$。因$m = m_e \ll M$，$\mu_c \approx m_e$，故

$$\boxed{K_{e,\min} \approx \Delta_{31} = 12.09\,\text{eV}}.$$

室温氢原子的热速度远小于具有约12 eV 动能的电子速度，本题据此忽略靶的热运动。若保留有限m_e/M，静靶阈能为$(1 + m_e/M)\Delta_{31}$，略高于此值。

计算质子打静靶时保留的整体动能

此时$m \approx M$，$\mu_c \approx m/2$，$v_{\rm rel} = v$。结合图 7.30，初始质子动能的一半留作质心动能，另一半才可用于激发：

$$\frac{1}{2}\mu_c v^2 = \frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}K_p \geq \Delta_{31}, \qquad \boxed{K_{p,\min} = 2\Delta_{31} \approx 24.18\,\text{eV}}.$$

一般的静靶情形满足$\mu_c v^2/2 = [M/(m+M)]K_{\rm lab}$，从而

$$\boxed{K_{\rm lab,min} = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\Delta_{31}}.$$

它同时包含前两问，是检查因子2 的简便方法。

计算等速相向时每个入射粒子的阈能

图 7.31 中两物体质量近似相等，速度为$+v, -v$，故质心静止，相对速度为$2v$。末态在阈值极限中都可在实验室静止。

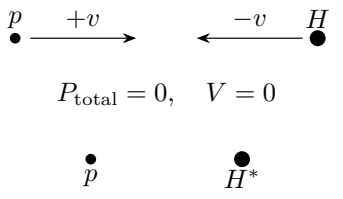


图 7.31: 等质量、等速相向时，全部初始总动能均可转成内部激发能

于是

$$\frac{1}{2}\mu_c(2v)^2 = mv^2 = 2K_p \geq \Delta_{31}, \qquad \boxed{K_{p,\min} = \frac{\Delta_{31}}{2} \approx 6.04\,\mathrm{eV}}.$$

这个数值是单个质子的动能；初始氢原子也提供同样的动能，系统总初始动能仍为 $\Delta_{31} \approx 12.09\,\mathrm{eV}$。计算先保留 $\Delta_{31} = 108.8/9\,\mathrm{eV}$，最后才对 $\Delta_{31}/2$ 取舍，得到 $6.04\,\mathrm{eV}$。

激发后的辐射路径

上述结果只给出能量和动量允许的阈值。碰撞是否发生激发、激发后是否沿$3 \to 2$ 路径发光，还涉及碰撞概率和跃迁分支；能量够大不等于每次碰撞必然发出H_α。

7.6 本讲小结

德布罗意波长由指定参考系内的动量决定。电场加速提供动能，非相对论时以 $p = \sqrt{2mK}$ 求波长，高速时须使用 $p^2c^2 = K(K + 2mc^2)$。物质波描述概率幅的相位与叠加，探测到的单个粒子仍形成局域记录，波线不是粒子的经典轨迹。

玻尔模型将圆周运动条件与角动量量子化联立，得到类氢半径、速率和能级。内部总能量差决定跃迁能标，电离极限规定束缚能的零点；光谱计数须区别单个原子的下降路径与大量原子的所有可能路径。类氢公式要求单电子体系，并须检查固定核、低速等近似。

有限核质量通过约化质量修正内部能级；原子整体反冲则由发射、吸收过程的能量和动量守恒计算。这两种质量效应分别属于内部相对运动和整体运动。自由静止原子的发射光子能量低于内部能级差，吸收所需能量高于该差；微小修正应先保留精确关系，再按小量展开。

粒子碰撞激发时，可供内部状态改变的是质心系的相对运动动能。实验室的整体平动由总动量约束，不能任意转为激发能。静靶、相向运动以及不同入射质量会给出不同的实验室阈能；达到阈值仅表示能量、动量允许，实际激发和随后谱线的出现还取决于碰撞与跃迁过程。

7.7　练习

练习 7.1 (同一加速电压下的两种物质波)**.** 电子和质子均从静止出发,经同一100 V电势差加速，分别忽略辐射损失，均可用非相对论近似。已知电子波长为0.123 nm，$m_p/m_e = 1836$。求两者的动能关系、动量比和质子波长。

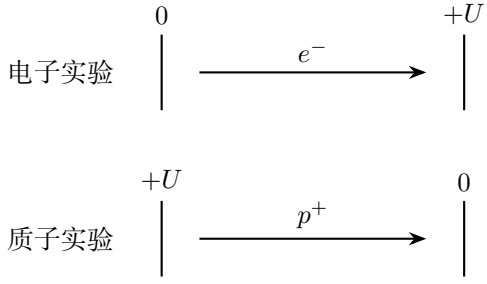


图 7.32: 两次独立实验分别选取电极极性，使电子和质子均获得动能 eU

练习 7.2 (光子吸收、电离与碰撞激发)**.** 氢原子初始在$n = 2$，能级$E_n = -13.6/n^2\,\mathrm{eV}$。忽略线宽和原子反冲。(1) 能量2.00 eV 的单个光子能否被吸收而使它进入某一更高束缚能级？(2) 能量4.00 eV 的光子能否电离它，光电子动能多少？(3) 若用动能2.00 eV 的电子碰撞，是否在能量上允许激发到$n = 3$?

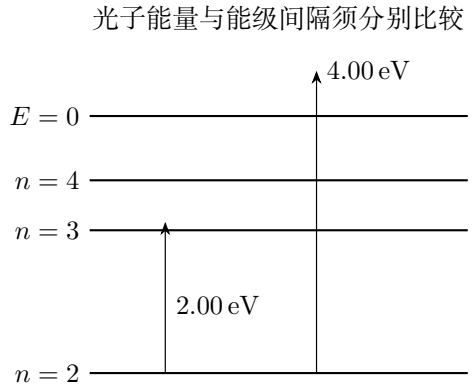


图 7.33: 练习：光子吸收、电离与碰撞激发

练习 7.3 (氢同位素的谱线位置)**.** 两种类氢原子核电荷相同，核质量分别为M与$2M$，且$M = 1836m_e$。比较相同量子数跃迁的波长，求$(\lambda_M - \lambda_{2M})/\lambda_M$。只保留玻尔模型的约化质量修正，忽略原子整体反冲。

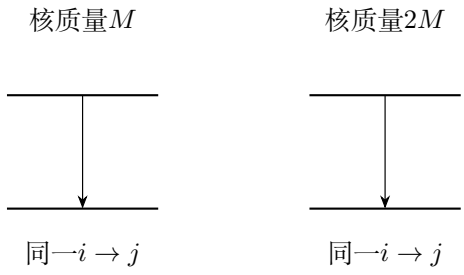


图 7.34: 两列只标记同一对量子数，竖直间距不作实际能量比较

练习 7.4 (等质量碰撞的可用内部能量)**.** 质子以动能30.0 eV 撞击静止基态氢原子。两者质量均近似为M，用非相对论模型，忽略激发造成的相对静质量变化。求质心系相对运动动能，判断在能量上能否激发到$n = 3$，并求相应实验室最小入射动能。取氢能级$E_n = -13.6/n^2\,\mathrm{eV}$。

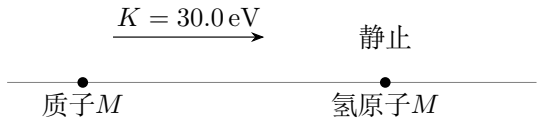


图 7.35: 练习：等质量碰撞的可用内部能量

练习解答

练习 7.1

解　按不同电荷的极性分别求动能

图 7.32 表示两次独立实验，电极极性分别按电荷符号选择，使电场力均做正功eU。所以

$$\boxed{K_p = K_e = 100\,\mathrm{eV}}, \qquad \boxed{\frac{p_p}{p_e} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{1836} \approx 42.8}.$$

从动量比求质子波长

由德布罗意关系，

$$\boxed{\lambda_p = \frac{0.123}{\sqrt{1836}}\,\mathrm{nm} = 2.87\,\mathrm{pm}}.$$

相同动能下的波长比较

图 7.36 分别放大显示一个电子波长和一个质子波长，并用不同的横轴单位标明。同为 100 eV 时，质子的动量为电子的约 42.8 倍，物质波的波长约为电子的 1/42.8。

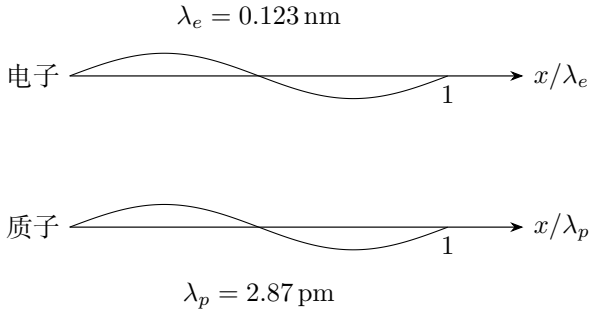


图 7.36: 练习 7.1 的解答图：每行各显示一个相位周期，两行水平比例不同

练习 7.2

解　逐一比较束缚态吸收的离散能级差

图 7.33 中取 $n = 2$ 的水平线为起点。到第 n 层所需能量为

$$E_n - E_2 = 13.6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)\mathrm{eV}.$$

分别代入 $n = 3, 4$，两项为 $13.6(1/4 - 1/9) = 1.889$ 和 $13.6(1/4 - 1/16) = 2.550$，单位都是 eV。更高的能级距 $n = 2$ 更远。2.00 eV 落在二者之间，没有对应束缚能级差，在理想窄线模型下 $\boxed{\text{不能发生该单光子束缚态吸收}}$。忽略反冲后，光子的全部能量计入原子内部，因此束缚态吸收要求 $h\nu = E_n - E_2$。

以电离极限计算光电子动能

从$n = 2$ 电离的阈能为$0 - E_2 = 3.40\,\mathrm{eV}$，所以4.00 eV 光子可以电离，忽略反冲时 $\boxed{K_e = 4.00 - 3.40 = 0.600\,\mathrm{eV}}$。

用出射电子带走余能解释碰撞激发

碰撞电子可在激发后带走剩余动能，不必把全部2.00 eV 交给原子。图 7.37 右侧满足

$$2.00 = (E_3 - E_2) + K_{\text{rem}}, \qquad K_{\text{rem}} = 0.111\,\text{eV} > 0,$$

故 $\boxed{\text{能量上允许激发到} n = 3}$，但不保证每次碰撞都发生激发。光子全部吸收与粒子碰撞的条件不同。

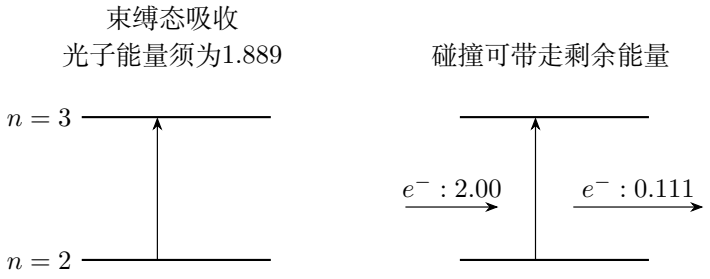


图 7.37: 左为束缚态共振吸收所需的光子能量，右为碰撞后电子带走的剩余能量

练习 7.3

解　由约化质量判断谱线移动方向

图 7.34 比较相同量子数的跃迁，整数能级因子相同。约化质量 $\mu = m_e/(1 + m_e/M_N)$ 随核质量增加而增大，能级差随之增大，所以较重核 $2M$ 对应较短波长。

消去公共波长因子求相对差

把无限重核时的相应波长记为 λ_∞，由 $\lambda \propto 1/\mu$ 得

$$\lambda_M = \lambda_\infty(1 + m_e/M), \qquad \lambda_{2M} = \lambda_\infty(1 + m_e/(2M)).$$

先相减，再除以题设的 λ_M，共同因子 λ_∞ 消去：

$$\frac{\lambda_M - \lambda_{2M}}{\lambda_M} = \frac{m_e/(2M)}{1 + m_e/M} = \boxed{\frac{1}{2(1836+1)} = 2.72 \times 10^{-4}}.$$

小质量比下的波长差

图 7.38 中λ_{2M} 向短波一侧移动。分母应以题设的λ_M 为准；若换成λ_∞，精确分式会改变，虽然一阶近似都约为$m_e/(2M)$。

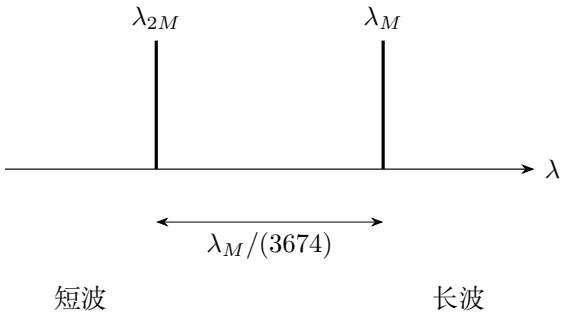


图 7.38: 练习 7.3 的解答图：谱线间距放大示意；重对照应较短波长

练习 7.4

解　变到质心系求可用相对运动动能

设入射速率为v，图 7.35 中$K = Mv^2/2$。质心速度为$V = v/2$，故图 7.39 的两粒子在质心系的速度为$\pm v/2$，

$$\boxed{K_{\rm rel} = 2 \times \frac{1}{2} M (v/2)^2 = \frac{K}{2} = 15.0\,{\rm eV}}.$$

比较内部激发能与可用动能

由基态到第三层的能级差为

$$\Delta_{31} = 13.6(1 - 1/9) = 12.0889\,{\rm eV} < 15.0\,{\rm eV}.$$

由阈值末态求最小实验室入射动能

故能量上允许激发到$n = 3$。阈值时质心系末态相对运动动能趋于零，因此

$$K_{\rm min}/2 = \Delta_{31}, \qquad \boxed{K_{\rm min} = 24.2\,{\rm eV}}.$$

图 7.39 中整体平动的15.0 eV 不能凭空转为内部激发能，实验室阈能因此高于能级差。达到阈能仍只是必要能量条件。

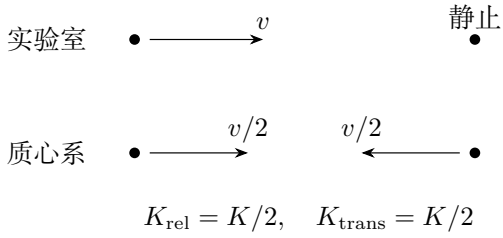


图 7.39: 练习 7.4 的解答图：先扣除质心整体运动，再判断内部激发是否可行