附录A

初等数学

A.1 初等函数及其数值计算

A.1.1 函数的概念和分类

1. 函数与反函数

如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，都有确定的数 $y=f(x)$和它对应，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in A$$

x 叫作自变量，y 叫作因变量，A 叫作定义域，A 对应的 y 构成的集合 B 称为值域.

反过来，把 y 视作自变量，x 视为因变量，用 y 写出 x 的表达式：

$$x=\varphi(y),\quad y\in B$$

则称 $y=f(x)$和 $x=\varphi(y)$互为反函数.

习惯上，通常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常常对调函数中的 x，y，写成

$$y=\varphi(x),\quad x\in B$$

则称 $y=f(x)$和 $y=\varphi(x)$互为反函数.

例如 $y=x+1$ 与 $x=y-1$(或 $y=x-1$)互为反函数.

2. 一元函数与多元函数

只有一个自变量的函数称为一元函数，有两个或两个以上自变量的函数称为多元函数.

3. 显函数与隐函数

因变量可用自变量用数学式子直接表示出来的函数称为显函数；若函数关系式包含在一个方程式或一组方程式中，则称为隐函数.

4. 简单函数与复合函数

若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，则 y 称为 x 的复合函数，u 称为中间变量，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

无中间变量的函数称为简单函数.

5. 单调函数与非单调函数

递增函数和递减函数通称为单调函数，不是递增或递减的函数称为非单调函数.

6. 奇函数与偶函数

若对于定义域中任意 x 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数；若对于定义域中任意 x 恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

7. 周期函数与非周期函数

若有一实数 $T\neq 0$，使对定义域中的任意 x 恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为以 T 为周期的周期函数；否则称 $f(x)$ 为非周期函数.

8. 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数通称为“基本初等函数”，凡是由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤而构成并能用一个数学式子表示的函数都属于初等函数.

A.1.2 幂函数

函数 $y=x^{\alpha}$ 叫作幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数.

A.1.3 指数函数与对数函数

1. 指数运算法则

$$a^r a^s=a^{r+s},\quad a^0=1(a\neq 0),\quad a^{-r}=\frac{1}{a^r},\quad (a^r)^s=a^{rs}$$

$$a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}=(\sqrt[s]{a})^r,\quad \frac{a^r}{a^s}=a^{r-s},\quad (ab)^r=a^r b^r,\quad \left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$$



指数运算法则

2. 指数函数

形如 $y=a^x(a>0,a\neq1,-\infty<x<\infty)$的函数称为指数函数.

图像如图 A-1 所示,与 y 轴交于点(0,1),渐近线为 $y=0$.

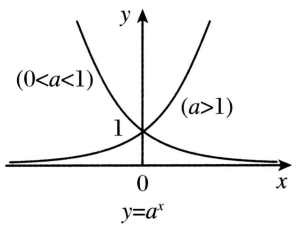


图 A-1

3. 对数与对数运算法则

一般地,如果 $a^x=N(a>0,a\neq1)$,那么数 x 叫作以 a 为底 N 的对数,记作

$$x=\log_a N \quad (a>0 \text{ 且 } a\neq1,N>0)$$

其中 a 叫作对数的底数,N 叫作真数.

负数和零没有对数,即 N 不能为负数和零.(若拓展到复数,则负数有对数,故物理中若出现负数的对数可以继续做下去.)

通常将以 10 为底的对数叫作常用对数,并把 $\log_{10}N$ 记作 $\lg N$.

在科学技术中常用以无理数 e=2.71828…为底数的对数,以 e(自然常数)为底的对数称为自然对数,并把 $\log_e N$ 记作 $\ln N$.

如果 $a>0$ 且 $a\neq1,b>0$ 且 $b\neq1,M>0,N>0$,那么

$$\log_a a=1,\quad \log_a 1=0,\quad \log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$$

$$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N,\quad \log_a M^\alpha=\alpha\log_a M,\quad \log_{a^\beta}M^\alpha=\frac{\alpha}{\beta}\log_a M$$

$$\log_a b\cdot\log_b a=1 \text{ 或 } \log_a b=\frac{1}{\log_b a},\quad M^{\log_a N}=N^{\log_a M}$$

对数恒等式

$$a^{\log_a M}=M=\log_a a^M$$

换底公式

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \text{或} \quad \log_a M\cdot\log_b a=\log_b M$$

4. 对数函数

形如 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1,x>0)$的函数称为对数函数.

图像如图 A－2 所示，与 x 轴交于点(1,0)，渐近线为 $x=0$.

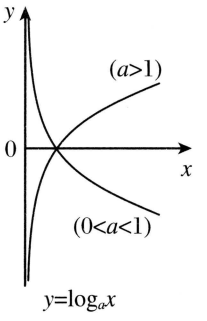


图 A－2

A.1.4 平面三角函数与反三角函数

1. 任意角与弧度制

我们规定，按逆时针旋转形成的角叫作正角，按顺时针旋转形成的角叫作负角.

用度作为单位来度量角的单位叫作角度制，1 度的角等于周角的 1/360，记作 1°.

用弧度作为单位来度量角的单位叫作弧度制，1 弧度的角等于半径长的弧所对的圆心角，记作 1 rad，rad 读作弧度.故有

$$l=|\alpha|r$$

式中 l 为弧长，α 为圆心角的弧度，r 为半径.

弧度与度的关系是

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\theta}{180^\circ}$$

式中 α,θ 分别表示同一角的度数与弧度数.如表 A－1 所示.

表 A－1 度与弧度的换算

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

2. 三角函数

(1) 三角函数的定义

如图 A－3 所示，在直角坐标系中，以原点为圆心、单位长度为半径($r=1$)的圆称为单位圆.设角 α 的顶点与原点重合，始边与 x 正半轴重合，终边与单位圆交于一点 $P(x,y)$.过 P 作 x 轴的垂线可以得到斜边长为 1 的直角三角形，则锐角三角函数可以用单位圆上点的坐标表示；同样地，我们可以利用单位圆定义任意角的三角函数，此时对边或邻边(即 y 或 x

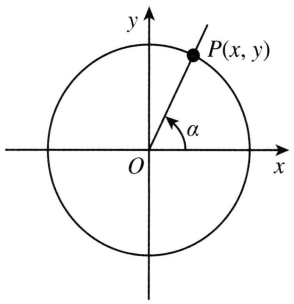


图 A－3

坐标值)有可能为负数或零,但斜边一定为 1.

$$\text{正弦}\ \sin\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}}=y \qquad \text{余弦}\ \cos\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}=x$$

$$\text{正切}\ \tan\alpha=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}=\frac{y}{x} \qquad \text{余切}\ \cot\alpha=\frac{\text{邻边}}{\text{对边}}=\frac{x}{y}$$

$$\text{正割}\ \sec\alpha=\frac{\text{斜边}}{\text{邻边}}=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{x} \qquad \text{余割}\ \csc\alpha=\frac{\text{斜边}}{\text{对边}}=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{y}$$

(2) 三角函数的图像

可以利用单位圆帮助作出三角函数的图像.以下均采用弧度制,x 表示角,y 表示三角函数.

如图 A－4 所示:标准正弦曲线 $y=\sin x$,周期为 $T=2\pi$;余弦曲线 $y=\cos x$,周期为 $T=2\pi$;正切曲线 $y=\tan x$,周期为 $T=\pi$;余切曲线 $y=\cot x$,周期为 $T=\pi$.

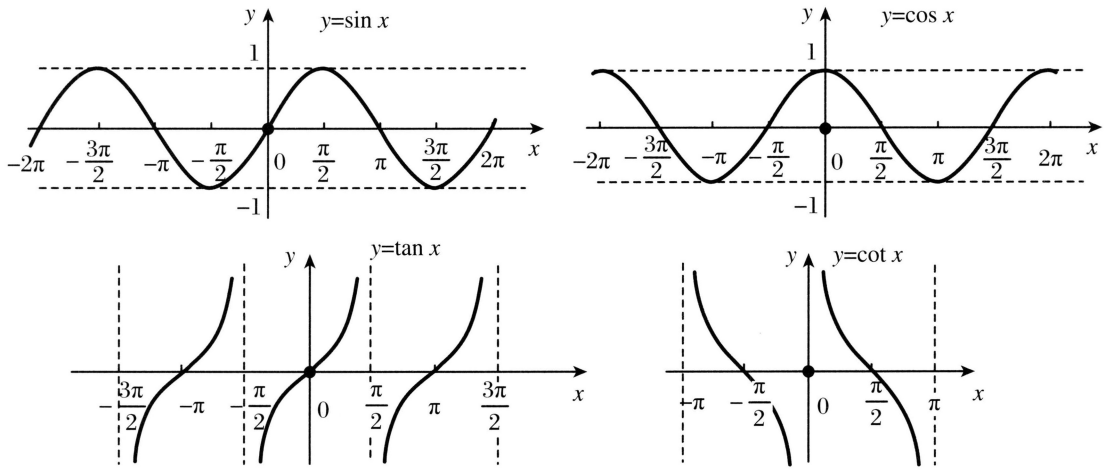


图 A－4

一般三角函数的图像,以一般正弦曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi_0)$ 为例,式中 $|A|$ 为振幅,$|\omega|$ 为角频率,$\omega x+\varphi_0$ 为相位,φ_0 为初相位;如图 A－5 所示,它是将 $y=\sin x$ 图像在 y 轴上伸长为 A 倍,在 x 轴上压缩为 $1/\omega$,并向左平移 φ_0/ω 而得到的,周期为 $T=2\pi/\omega$.

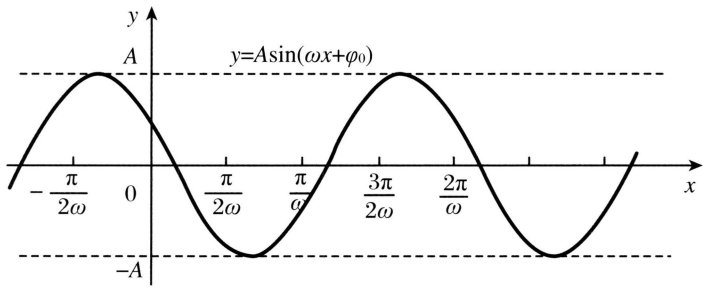


图 A－5

3. 三角函数的基本关系和公式

(1) 诱导公式

如表 A-2 所示,表中 k 为整数.利用诱导公式可以实现把任意角的三角函数转化为锐角三角函数,或实现正、余弦函数与正、余切函数的相互转化.例如

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

也可以借助单位圆或函数图像帮助得到转化的结果.

表 A-2 三角函数诱导公式表

	sin	cos	tan
$\alpha+2k\pi$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\tan\alpha$
$\pi\pm\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\tan\alpha$
$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$\mp\cot\alpha$

(2) 基本关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1,\quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1,\quad \sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1,\quad \csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$$

合理利用这些基本关系,运用三角代换,可使某些问题求解过程简化或使某些难以求解的问题快速求解.常见的三角代换有:

对 $\sqrt{1-x^2}$,令 $x=\sin\alpha$,$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$,则

$$\text{原式}=\cos\alpha$$

α 取值范围是为了保证 $\cos\alpha$ 的值非负(也可令 $x=\cos\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$);若为 $\sqrt{a^2-x^2}$,令 $x=|a|\sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\text{原式}=|a|\cos\alpha$$

以下略去这种讨论.

对 $\sqrt{1+x^2}$,令 $x=\tan\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\text{原式}=\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

对 $\sqrt{x^2-1}$,令 $x=\sec\alpha\left(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\text{原式}=\tan\alpha$$

(3) 和差角公式

可用单位圆与矢量(数学中的向量)乘积得到,也可用单位圆与几何方法得到,略去推导,给出结论:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

由这两个公式可推得

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\quad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

(4) 和差与积互化公式

由正、余弦的和差角公式可推得

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cot\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\tan\alpha\pm\cot\beta=\pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

由正、余弦的积化和差公式可推得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(5) 倍角公式

由正、余弦的和角公式可推得

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

进一步推出

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \cot2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$$

(6) 半角公式

由余弦的倍角公式可推得(正负取决于 $\alpha/2$)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

(7) 降幂公式

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\quad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

4. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数,三角函数具有周期性,因此反三角函数是多值函数,其图像与其原函数的图像关于 $y=x$ 对称.例如正弦函数 $y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$的反函数为反正弦函数,记为 $y=\operatorname{Arcsin}x(-1\leqslant x\leqslant 1)$,一个 x 值对应多个(无数个)y 值.

在实函数中一般只研究单值函数,故一般只把定义在包含锐角的单调区间上的基本三角函数的反函数称为反三角函数.例如正弦函数 $y=\sin x$ 在包含锐角的单调区间 $-\pi/2\leqslant x\leqslant\pi/2$的反函数为反正弦函数(或称为反正弦函数主值),记为 $y=\arcsin x$.如表 A-3 所示.

表 A-3　反三角函数定义域与主值范围

函数	主值记号	定义域	主值范围
反正弦	$\arcsin x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$[-\pi/2,\pi/2]$
反余弦	$\arccos x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$[0,\pi]$
反正切	$\arctan x$	$-\infty<x<\infty$	$[-\pi/2,\pi/2]$
反余切	$\operatorname{arccot}x$	$-\infty<x<\infty$	$[0,\pi]$
反正割	$\operatorname{arcsec}x$	$x\leqslant -1,x\geqslant 1$	$[0,\pi]$
反余割	$\operatorname{arccsc}x$	$x\leqslant -1,x\geqslant 1$	$[-\pi/2,\pi/2]$



反三角函数

一般反三角函数与主值的关系为

$\operatorname{Arcsin}x=n\pi+(-1)^n\arcsin x$,　$\operatorname{Arccos}x=2n\pi\pm\arccos x$,　$\operatorname{Arctan}x=n\pi+\arctan x$

式中 n 为任意整数.

A.2　坐标系与坐标变换

A.2.1　平面坐标系及其变换

1. 平面直角坐标系

(1) 坐标轴的平移(略).

(2) 坐标轴的旋转. 如图 A-6 所示，Oxy 坐标系绕过原点垂直于纸面的轴转过 α 得到新坐标系 OXY，则同一点在两个坐标系中的坐标关系为

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

2. 极坐标系

平面内选一个定点 O 为极点，引一条射线 Ox 为极轴就建立了极坐标系，如图 A-7 所示.

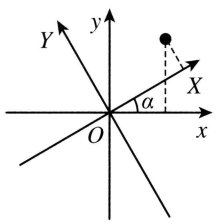


图 A-6

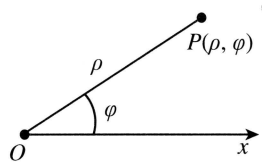


图 A-7

平面内某点 P 的位置可用极坐标 $P(\rho,\varphi)$ 表示；ρ 为 P，O 的距离，称为极径或矢径，$0\leqslant\rho<\infty$(物理中取 $-\infty<\rho<\infty$)；φ 为极角，$-\infty<\varphi<\infty$，φ 从极轴开始，一般取逆时针转动为正，顺时针转动为负.

3. 直角坐标系与极坐标系的互换

如图 A-8 所示，可得到

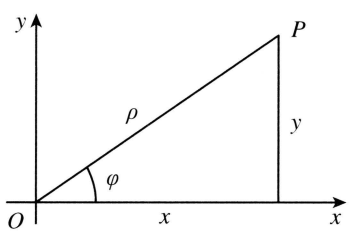


图 A-8

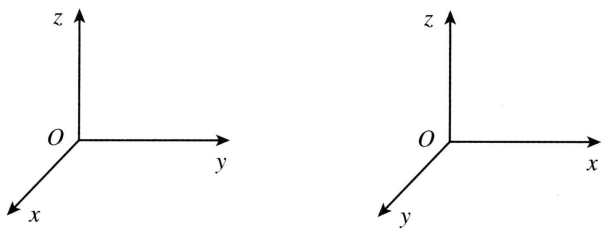
$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi=\begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & (x<0) \end{cases} \end{cases}$$

A.2.2 空间坐标系及其变换

1. 空间直角坐标系

(1) 右手系与左手系

在空间中规定直角坐标系的方法有右手系和左手系，如图 A－9 所示，一般应用右手系.



(a) 右手系　　(b) 左手系

图 A－9

(2) 坐标轴的平移(略)

(3) 坐标轴的旋转

如图 A－10 所示，有向线段 OP(设长度为 r)与 Ox,Oy,Oz 的夹角 α,β,γ 称为线段的方向角，这三个角的余弦称为方向余弦，分别表示为

$$l=\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad m=\cos\beta=\frac{y}{r},\quad n=\cos\gamma=\frac{z}{r}$$

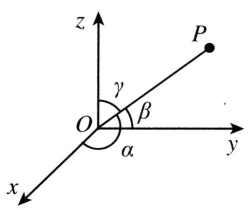


图 A－10

有

$$r^2=x^2+y^2+z^2$$

故

$$l^2+m^2+n^2=1$$

若 $O\text{-}xyz$ 坐标系绕原点转动得到新坐标系 $O\text{-}XYZ$，分别给出新坐标轴 OX,OY,OZ 对原坐标系的方向余弦 $l_1,m_1,n_1,l_2,m_2,n_2,l_3,m_3,n_3$，则同一点在两个坐标系中的坐标关系为

$$\begin{cases} x = l_1 X + l_2 Y + l_3 Z \\ y = m_1 X + m_2 Y + m_3 Z \\ z = n_1 X + n_2 Y + n_3 Z \end{cases}$$

空间直角坐标系

2. 柱坐标系

图 A－11 所示为柱坐标系，又叫半极坐标系. 某点 P 的柱坐标为 (ρ,φ,z)，ρ,φ 为点 P 在 Oxy 平面上投影的极坐标，z 为 P 到 Oxy 平面的距离. $0\leqslant\rho<\infty$，$-\infty<\varphi<\infty$，$-\infty<z<\infty$.

直角坐标系与柱坐标系的互换为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & (x<0) \end{cases} \\ z = z \end{cases}$$

3. 球坐标系(空间极坐标系)

图 A－12 所示为球坐标系，又叫空间极坐标系. 某点 P 的球坐标为 (r,θ,φ)，矢径长 r 为 OP 的长度，极角 θ 为 OP 与 z 轴的夹角，方位角 φ 为 OP 在 xy 平面内的投影与 x 轴的夹角. $0\leqslant r<\infty$，$-\infty<\varphi<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

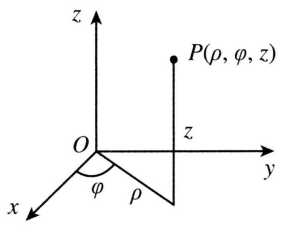


图 A－11

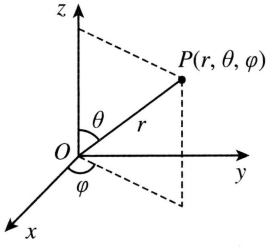


图 A－12

球坐标系与直角坐标系的互换为

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & (x<0) \end{cases} \\ \theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & (z>0) \\ \pi+\arctan\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} & (z<0) \end{cases} \end{cases}$$

A.3　解三角形、数列、均值不等式

A.3.1　三角形的正、余弦定理

1. 正弦定理

如图 A－13 所示，可推得(推导略)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

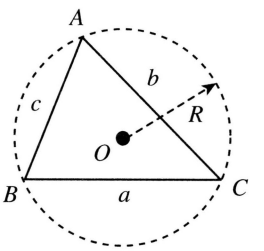


图 A－13

2. 余弦定理

如图 A－13 所示，多种方法可证得(证明略)

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

A.3.2　数列

按一定规则排列的一列数叫作数列，可以写成

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \cdots,\quad a_n,\quad \cdots$$

简记为$\{a_n\}$.

如果第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个式子叫作这个数列的通项公式.

1. 等差数列

从第二项起，每一项与它前一项的差为常数的数列为等差数列，这个常数叫作等差数列的公差，一般用 d 表示.

通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

前 n 项和

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

2. 等比数列

从第二项起，每一项与它前一项的比为常数的数列为等比数列，这个常数叫作等比数列

的公比，一般用 q 表示.

通项公式

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

前 n 项和

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \quad q \neq 1$$

A.3.3　均值不等式求最值

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均大于零时，有

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n \cdot \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad 或 \quad a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时等号成立.

据此，当多个可变正数的积为定值时，可求它们和的最小值；当多个可变正数的和为定值时，可求它们积的最大值，即积定和最小，和定积最大.

求最值的条件可记为：一正，二定，三取等.

例　求以下 y 的最值：

(1) $y = x + \frac{2}{x}(x>0)$；　　(2) $y = 2x + \frac{1}{x^2}(x>0)$；

(3) $y = x(2-x)(0<x<2)$；　　(4) $y = x(8-2x)(0<x<4)$；

(5) $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x-5}\left(x<\frac{5}{4}\right)$；　　(6) $y = \frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$.

解　(1) 当 $x = \frac{2}{x}$，即 $x = \sqrt{2}$ 时

$$y_{\min} = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad 或 \quad y_{\min} = 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$$

(2) 原式化为

$$y = x + x + \frac{1}{x^2}$$

当 $x = \frac{1}{x^2}$，即 $x = 1$ 时

$$y_{\min} = 1 + 1 + 1 = 3 \quad 或 \quad y_{\min} = 3\sqrt[3]{x \cdot x \cdot \frac{1}{x^2}} = 3$$

(3) 当 $x = 2 - x$，即 $x = 1$ 时

$$y_{\max} = 1 \times (2-1) = 1 \quad 或 \quad y_{\max} = \left(\frac{x + 2 - x}{2}\right)^2 = 1$$

(4) 原式化为

$$y=\frac{1}{2}[2x(8-2x)]$$

当 $2x=8-2x$，即 $x=2$ 时

$$y_{\max}=\frac{1}{2}\times(4\times4)=8 \quad 或 \quad y_{\max}=\frac{1}{2}\left(\frac{2x+8-2x}{2}\right)^2=8$$

(5) 原式化为

$$y=-\left[(5-4x)+\frac{1}{5-4x}\right]+3$$

当 $5-4x=\frac{1}{5-4x}$，即 $x=1$ 或 $\frac{3}{2}$(舍)时

$$y_{\max}=-2\sqrt{(5-4x)\cdot\frac{1}{5-4x}}+3=1$$

(6) 原式化为

$$y=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}=(x+1)+\frac{4}{x+1}+5$$

当 $x+1=\frac{4}{x+1}$，即 $x=1$ 或 -3(舍)时

$$y_{\min}=2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{4}{x+1}}+5=9$$

A.4 圆锥曲线

二次曲线都是用平面切割圆锥面的截线，因此二次曲线也称为圆锥曲线. 如图A－14 所示. 圆锥曲线包括椭圆(圆为椭圆的特例)、抛物线和双曲线.

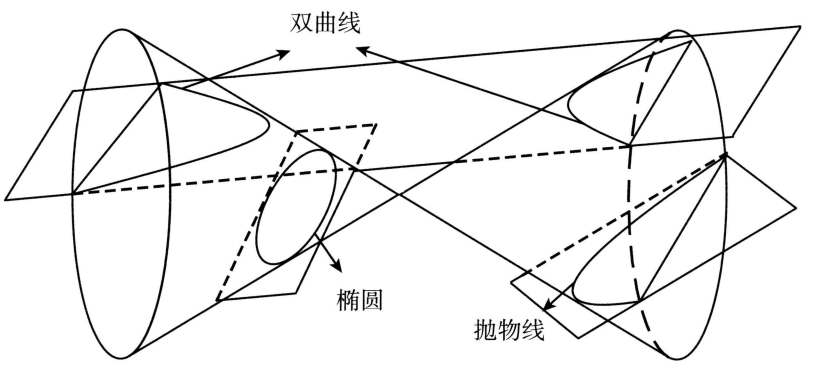


图 A－14

在平面不过圆锥面顶点时：用垂直于锥轴的平面去截圆锥面，它只与圆锥面一侧相交，交线为圆；将平面渐渐倾斜，但仍只与圆锥面一侧相交且未平行于某条母线时，交线为椭圆；

当平面倾斜到和圆锥的一条母线平行时，它仍只与圆锥面一侧相交，交线为抛物线；继续倾斜平面，它与圆锥面两侧均相交时，交线为双曲线.

A.4.1　圆

如图 A－15 所示，各圆方程为(其中极坐标方程均以 O 为极点，x 为极轴)：

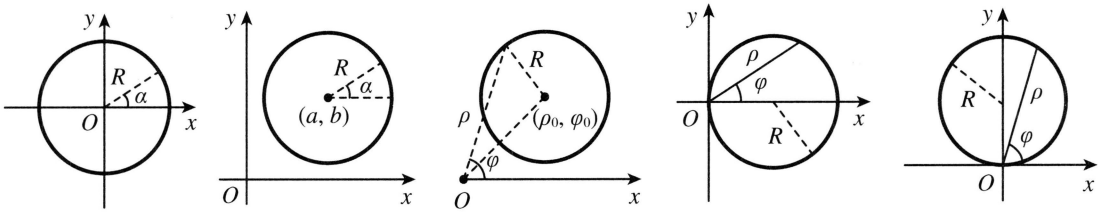


图 A－15

(a) 标准方程　　$x^2+y^2=R^2$

参数方程　　$x=R\cos\alpha,\ y=R\sin\alpha$

极坐标方程　　$\rho=R$

(b) 标准方程　　$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

参数方程　　$x=a+R\cos\alpha,\ y=b+R\sin\alpha$

(c) 极坐标方程　　$\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2=R^2$

(d) 标准方程　　$(x-R)^2+y^2=R^2$

极坐标方程　　$\rho=2R\cos\varphi$

(e) 标准方程　　$x^2+(y-R)^2=R^2$

极坐标方程　　$\rho=2R\sin\varphi$

A.4.2　椭圆

1. 定义

第一定义：平面内与两个定点 F_1，F_2 的距离和等于常数 $2a$($2a>|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作椭圆. 这两个定点叫作椭圆的焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距.

第二定义：平面上到一个定点 F 的距离和到一条定直线 l 的距离之比为一个常数 e($0<e<1$)的点的轨迹是椭圆. 点 F 是它的焦点(之一)，直线 l 是它的(这个焦点一侧的)准线，e 是它的离心率.

2. 椭圆的基本元素

如图 A－16 所示.

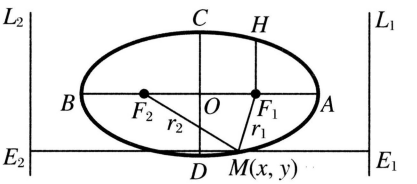
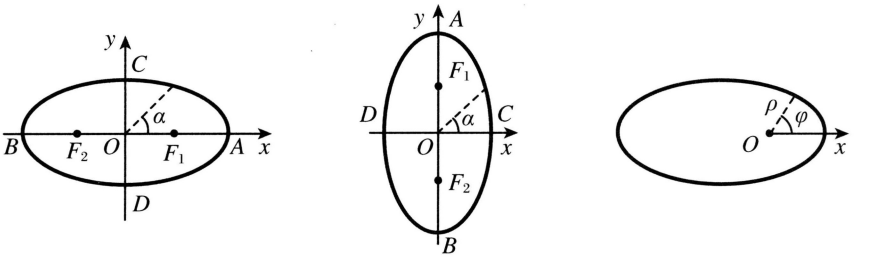


图 A－16

中心	O
顶点	A, B, C, D
焦点	F_1, F_2
	$\begin{cases}\text{长轴 } AB=2a \\ \text{短轴 } CD=2b\end{cases}(a>b>0)$
焦距	$F_1F_2=2c, c=\sqrt{a^2-b^2}$
	$CF_1=CF_2=a$
离心率	$e=\dfrac{c}{a}<1$，$e=0$ 时为圆
通径 $2p$	过焦点且垂直于长轴的弦
压缩系数	$\mu=\dfrac{b}{a}, \mu^2=1-e^2$
焦点参数	$p=\dfrac{b^2}{a}$，等于通径长的一半，即 F_1H
焦点半径 r_1, r_2	椭圆上一点(x, y)到焦点的距离 $r_1=a-ex, r_2=a+ex$
准线 L_1, L_2	平行于短轴，到短轴的距离为 $\dfrac{a}{e}$
直径	通过椭圆中心的弦

3. 椭圆的方程、顶点与焦点

如图 A－17 所示，各椭圆的方程、顶点与焦点分别如下：



(a) (b) (c)

图 A－17

(a) 标准方程　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

参数方程　$x=a\cos\alpha, y=b\sin\alpha$

顶点　$A(a,0), B(-a,0), C(0,b), D(0,-b)$

焦点　$F_1(c,0), F_2(-c,0)$

(b) 标准方程　$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$

参数方程　$x=b\cos\alpha, y=a\sin\alpha$

顶点　$A(0,a), B(0,-a), C(b,0), D(-b,0)$

焦点　$F_1(0,c), F_2(0,-c)$

(c) 取椭圆的一个焦点为极点，从此点指向最近的一个顶点的射线为极轴，则极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e<1$$

取椭圆的一个焦点为极点，从此点指向最远的一个顶点的射线为极轴，则极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi},\quad e<1$$

长轴 $2a=\dfrac{2p}{1-e^2}$；短轴 $2b=\dfrac{2p}{\sqrt{1-e^2}}$；焦距 $2c=\dfrac{2pe}{1-e^2}$.

4. 椭圆的性质

如图 A-16 所示.

由第一定义 $r_1+r_2=2a$.

由第二定义 $e=\dfrac{MF_1}{ME_1}=\dfrac{MF_2}{ME_2}$.

椭圆是将半径为 a 的圆沿短轴方向按比例 $\mu=\dfrac{b}{a}$ 压缩而得到的.

过椭圆上某点的切线把此点的两焦半径间的外角平分，法线把内角平分.

椭圆可用平面截圆锥面得到，也可用平面截圆柱体得到.

A.4.3　双曲线

1. 定义

第一定义：平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离差的绝对值等于常数 $2a(2a<|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫作双曲线. 这两个定点叫作双曲线的焦点，两焦点间的距离叫作双曲线的焦距.

第二定义：平面上到一个定点 F 的距离和到一条定直线 l 的距离之比为一个常数 e $(e>1)$ 的点的轨迹是双曲线. 点 F 是它的焦点(之一)，直线 l 是它的(这个焦点一侧的)准线，e 是它的离心率.

2. 双曲线的基本元素

如图 A－18 所示.

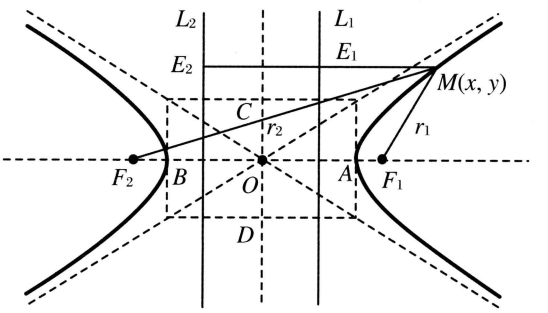


图 A－18

中心	O
顶点	A, B
焦点	F_1, F_2
	$\begin{cases}\text{实轴 } AB=2a \\ \text{虚轴 } CD=2b\end{cases}(a>0, b>0)$
焦距	$F_1F_2=2c, c=\sqrt{a^2+b^2}$
离心率	$e=\dfrac{c}{a}>1$
通径 $2p$	过焦点且垂直于实轴的弦
焦点参数	$p=\dfrac{b^2}{a}$，等于通径长的一半
焦点半径 r_1, r_2	双曲线上一点(x, y)到焦点的距离$r_1=\pm(ex-a), r_2=\pm(ex+a)$
准线L_1, L_2	垂直于实轴，到中心的距离为$\dfrac{a}{e}$

3. 双曲线的方程、顶点与焦点

如图 A－19 所示，各双曲线的方程、顶点与焦点如下：

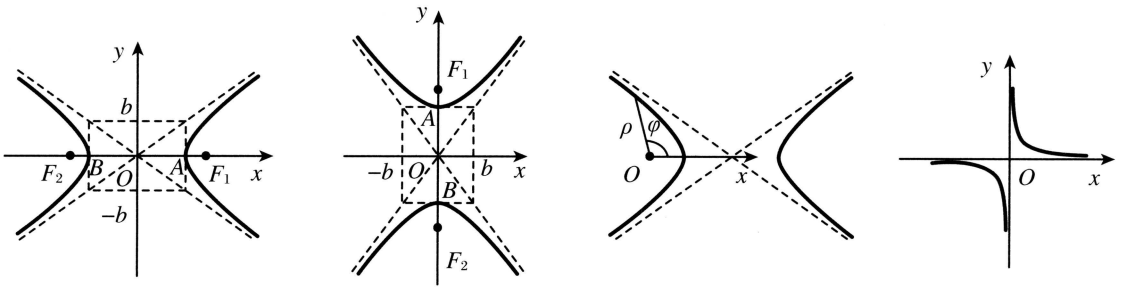


图 A－19

(a) 标准方程　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

参数方程　$x=a\sec\alpha, y=b\tan\alpha$

顶点　$A(a,0), B(-a,0)$

焦点　$F_1(c,0), F_2(-c,0)$

渐近线　$y=\pm\dfrac{b}{a}x$

(b) 标准方程　$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$

参数方程　$y=a\sec\alpha, x=b\tan\alpha$

顶点　$A(0,a), B(0,-a)$

焦点　$F_1(0,c), F_2(0,-c)$

渐近线　$y=\pm\dfrac{a}{b}x$

(c) 取双曲线的一个焦点为极点，从此点指向某顶点的射线为极轴，则极坐标方程



双曲线极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e>1$$

当 $1+e\cos\varphi>0$ 时，其表示较近的一支；当 $1+e\cos\varphi<0$ 时，其表示较远的一支.

若只表示较远的一支，且取 $\rho>0$，则

$$\rho=-\frac{p}{1-e\cos\varphi},\quad e>1,\quad 1-e\cos\varphi<0$$

取双曲线的一个焦点为极点，从此点背离某顶点的射线为极轴，则极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi},\quad e>1$$

当 $1-e\cos\varphi>0$ 时，其表示较近的一支；当 $1-e\cos\varphi<0$ 时，其表示较远的一支.

若只表示较远的一支，且取 $\rho>0$，则

$$\rho=-\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e>1,\quad 1+e\cos\varphi<0$$

实轴 $2a=\dfrac{2p}{e^2-1}$；虚轴 $2b=\dfrac{2p}{\sqrt{e^2-1}}$；焦距 $2c=\dfrac{2pe}{e^2-1}$.

(d) $y=\dfrac{k}{x}$，$k>0$ 时在第一、第三象限，$k<0$ 时在第二、第四象限.

渐近线 $x=0, y=0$.

4. 双曲线的性质

如图 A-18 所示.

由第一定义 $|r_1 - r_2| = 2a$.

由第二定义 $e = \dfrac{MF_1}{ME_1} = \dfrac{MF_2}{ME_2}$.

过双曲线上某点的切线把此点的两焦半径间的内角平分,法线把外角平分.

A.4.4 抛物线

1. 定义

平面上到一个定点 F 的距离和到一条定直线 l 的距离相等的点的轨迹是抛物线.点 F 是它的焦点,直线 l 是它的准线.抛物线的离心率 $e = 1$.

2. 抛物线的基本元素

如图 A-20 所示.

顶点	A
焦点	F
主轴	AB
离心率	$e = \dfrac{MF}{ME} = 1$
通径 $2p$	过焦点且垂直于主轴的弦
焦点参数 p	等于过焦点且垂直于主轴的弦长的一半
焦点半径 MF	即抛物线上一点(x, y)到焦点的距离
准线 L	垂直于主轴,到顶点的距离为 $p/2$,到焦点的距离为 p

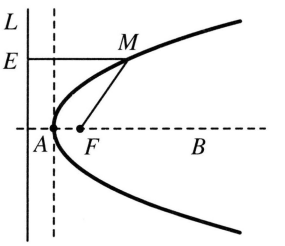
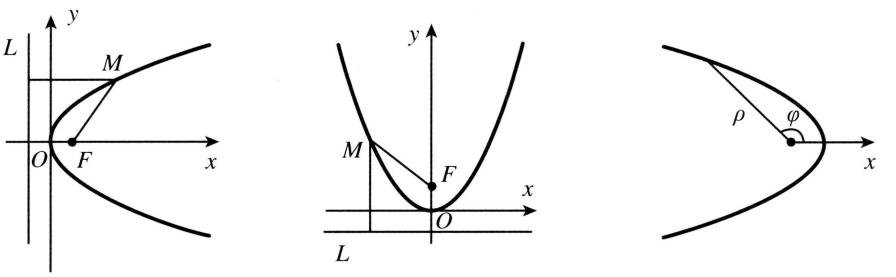


图 A-20

3. 抛物线的方程、顶点、焦点与准线

如图 A-21 所示,各抛物线的方程、顶点、焦点与准线如下:



(a) (b) (c)

图 A-21

(a) 标准方程　　$y^2=2px$

顶点　　$O(0,0)$

焦点　　$F\left(\frac{p}{2},0\right)$

准线 L　　$x=-\frac{p}{2}$

若取向左为 x 正方向，则方程 $y^2=-2px$，焦点 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$，准线 $x=\frac{p}{2}$.

(b) 标准方程　　$x^2=2py$

顶点　　$O(0,0)$

焦点　　$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$

准线 L　　$y=-\frac{p}{2}$

(c) 取抛物线的焦点为极点，从此点指向顶点的射线为极轴，极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\varphi},\quad e=1$$

取抛物线的焦点为极点，从此点背离顶点的射线为极轴，极坐标方程

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi},\quad e=1$$

4. 抛物线的性质

如图 A-20 所示.

由定义 $MF=ME$.

过抛物线上 M 点的切线把$\angle EMF$ 平分.

p 和 e 分别控制圆锥曲线的大小和形状，抛物线 $e=1$，故抛物线的形状都相同.

附录B

矢量运算

B.1 矢量及其解析表示

1. 标量和矢量

标量：遵从算数相加法则. 一般只有大小没有方向，例如质量、路程、温度、功等；少数有方向，例如电流等. 标量的正负不一定表示大小，例如温度 $-5\ ℃<3\ ℃$，功 $-5\ J>3\ J$.

矢量：既有大小又有方向，且遵从平行四边形(或三角形)法则，例如位移、速度、力等. 矢量的绝对值表示大小，正负号表示方向，例如位移大小 $-5\ m>3\ m$.

矢量在数学中称为向量.

2. 矢量的书写

以力为例，手写体为物理量字母上加箭头“$\vec{F}$”，印刷体为加粗斜体“$\boldsymbol{F}$”.

矢量的大小为标量，以力的大小为例，手写体为不加箭头的物理量字母“F”，印刷体为不加粗斜体“F”；数学上叫作向量的模，手写体为“$|\vec{F}|$”，印刷体为“$|\boldsymbol{F}|$”.

3. 单位矢量、基矢

长度为 1 的矢量称为单位矢量.

沿坐标轴的单位矢量称为坐标系的基矢. 空间直角坐标系沿 x,y,z 轴的基矢分别记为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，或 $\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$；平面极坐标系沿径向、横向的基矢分别记为 $\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\varphi$；自然坐标系沿法向、切向的基矢分别记为 $\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_t$；另有柱坐标系、球坐标系的基矢，不一一复述.

4. 矢量的解析表示

如图 B-1 所示，平面直角坐标系中有一矢量 $\boldsymbol{A}$，大小为 A，与 x 轴的夹角为 α，则它在 x 轴、y 轴的投影(即分量)分别为

$$A_x = A\cos\alpha,\quad A_y = A\sin\alpha$$

则有

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j},\quad A^2=A_x^2+A_y^2$$

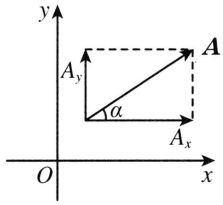


图 B-1



矢量的解析表示

空间直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x,y,z 轴的夹角分别为 α,β,γ，则它在 x,y,z 轴的分量分别为

$$A_x=A\cos\alpha,\quad A_y=A\cos\beta,\quad A_z=A\cos\gamma$$

且有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

其中 α,β,γ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的方向角；$\boldsymbol{A}$ 写成解析形式为

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\quad A^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$$

B.2　矢量的加、减法

1. 矢量的加法

服从平行四边形(或三角形)定则，如图 B-2 所示.

满足交换律和结合律

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$$

直角坐标系下矢量加法运算

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(A_x+B_x)\boldsymbol{i}+(A_y+B_y)\boldsymbol{j}+(A_z+B_z)\boldsymbol{k}$$

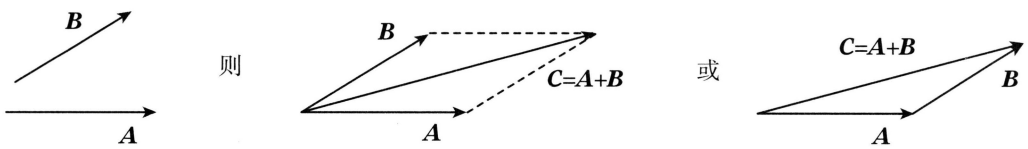


图 B-2

2. 矢量的减法

逆矢量：大小相等、方向相反的矢量互为逆矢量. 例如图 B-3 中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $-\boldsymbol{A}$.



图 B-3

矢量的减法：利用逆矢量转换成加法运算. 如图 B-4 所示.

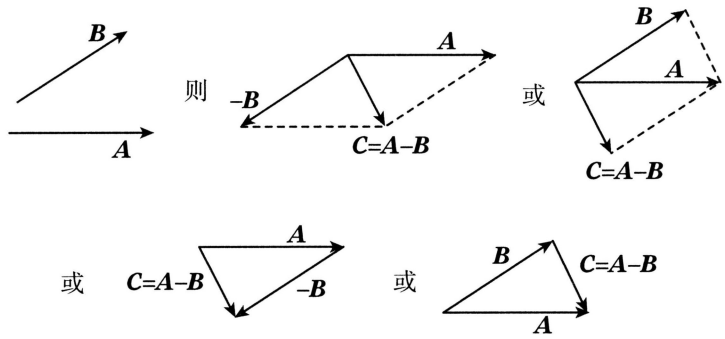


图 B-4

推论：任意多个矢量首尾相接组成闭合多边形，其矢量和必为零.

B.3 矢量的乘法

1. 标量与矢量的乘积

$$\boldsymbol{kA}=kA\boldsymbol{e}_A\begin{cases}k>0\text{ 时，}k\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{A}\text{ 同向，大小为 }\boldsymbol{A}\text{ 的 }k\text{ 倍}\\k=0\text{ 时，}k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}\\k<0\text{ 时，}k\boldsymbol{A}\text{ 与 }\boldsymbol{A}\text{ 反向，大小为 }\boldsymbol{A}\text{ 的 }-k\text{ 倍}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{e}_A$ 为与 $\boldsymbol{A}$ 同向的单位矢量.

在直角系中

$$\boldsymbol{kA}=kA_x\boldsymbol{i}+kA_y\boldsymbol{j}+kA_z\boldsymbol{k}$$

例如：$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}/m$，物体的 $\boldsymbol{a}$ 与物体所受的 $\boldsymbol{F}$ 同向；$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$，但 q 有正负，故正电荷所受 $\boldsymbol{F}$ 与所处位置 $\boldsymbol{E}$ 同向，负电荷所受 $\boldsymbol{F}$ 与所处位置 $\boldsymbol{E}$ 反向.

2. 矢量与矢量的标量积(点积、内积)

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ 的结果为标量，故称为标量积，也称为内积、点积. 如图 B-5 所示，有

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\varphi$$

其中 φ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

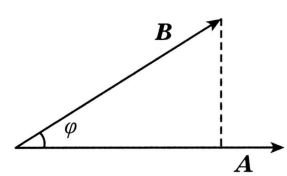


图 B-5

矢量的标量积含义是一个矢量在另一个矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，故两矢量的标积只有共线的分量起作用，垂直的分量不起作用.

$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 时

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos\frac{\pi}{2}=0$$

故

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

两非零矢量点积为零时，这两个矢量必垂直.

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同向时

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB$$

故

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2,\quad \boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=1$$

直角坐标系中

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 反向时

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=-AB$$

矢量的标量积满足交换律和分配率

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$$

不服从结合律

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$$

例如：力随空间的积累是功，做功会使物体的动能 $mv^2/2$ 改变，力与位移共线分量的乘积等于动能的变化量，故功是力与位移的标积：

$$\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=F\mathrm{d}l\cos\theta$$

3. 矢量与矢量的矢量积(叉积、外积)

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 结果为矢量，故称为矢积，数学上称为向量积，也称为叉积、外积. 如图 B－6 所示.

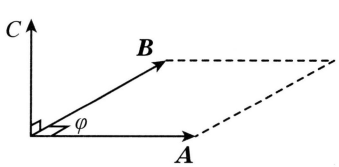


图 B－6

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

$\boldsymbol{C}$ 的大小

$$C=AB\sin\varphi$$

为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 组成的平行四边形的面积，φ 为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的夹角，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$.

$\boldsymbol{C}$ 的方向用右手定则判断：$\boldsymbol{C}$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 组成的平面(即 $\boldsymbol{C}$ 既垂直于 $\boldsymbol{A}$，又垂直于 $\boldsymbol{B}$)，伸出右手，四指从 $\boldsymbol{A}$ 以小于 180°转向 $\boldsymbol{B}$，则拇指指向为 $\boldsymbol{C}$ 方向.

$\boldsymbol{A}/\!/\boldsymbol{B}$ 时

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

故

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$$

两个非零矢量叉积为零时，这两个矢量必平行.

$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 时，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 最大，此时 $C=AB$. 则

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}$$

$$-\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i},\quad -\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j},\quad -\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}$$

故直角坐标系中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

可用以下行列式比较快捷地得到结果：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\quad 或\quad \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&A_x&B_x\\\boldsymbol{j}&A_y&B_y\\\boldsymbol{k}&A_z&B_z\end{vmatrix}$$

两矢量的矢量积只有垂直的分量起作用，共线的分量不起作用.

矢积满足反交换律

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$$

满足分配律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$$

不服从结合律

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$$

例如：带电粒子射入磁场中，$\boldsymbol{v}$ 为粒子速度，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度. 带电粒子所受磁场力的大小与 $\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{B}$ 垂直分量乘积成正比，其中 $\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{B}$ 时粒子不会受力的作用，$\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{B}$ 时受力最大；力的方向与带电粒子电性有关，考虑电性后符合右手定则. 这种力称为洛伦兹力，可表述为

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

如图 B－7 所示.

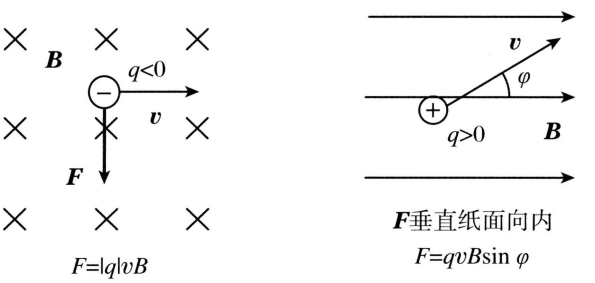


图 B－7

B.4　矢量的三重积

1. 三重标积

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=ABC\sin\theta\cos\varphi$$

其绝对值等于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 组成的平行六面体的体积，如图 B－8 所示.有

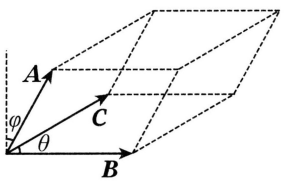


图 B－8

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

直角坐标系中

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)$$

2. 三重矢积

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$$

与 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 共面.

附录C

微积分与微分方程

C.1 极　　限

C.1.1 极限的定义

如果当 x 无限趋近于某一数值 x_0 时，$f(x)$ 的数值无限趋近于某一确定的数值 a，则 a 叫作 $f(x)$ 的极限值，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$$

读作“当 x 趋近于 x_0 时，$f(x)$ 的极限值等于 a”.

例C-1 极限的理解. 试求以下极限的值：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-7x^3+5)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^3}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{\pi}}\sin\dfrac{1}{x}$.

解 (1) $x=1$ 时，函数结果有确定的值，且在附近连续，故原式的极限即 $x=1$ 时的值

$$\lim_{x\to 1}(x^2-7x^3+5)=1^2-7\times 1^3+5=-1$$

(2) 从 $x>2$ 的方向逐渐趋近于 2 时，函数结果趋近于正无穷，故

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3}=+\infty$$

(3) 从 $x<2$ 的方向逐渐趋近于 2 时，函数结果趋近于负无穷，故

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty$$

(4) 由(2)和(3)可知从两个方向趋近于 2 时，函数趋近于 2 的数值不同，故极限不存在；这类问题由于函数结果分别趋近于正无穷、负无穷，也称为趋近于无穷，即

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}=\infty \text{或不存在}$$

(5) $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}\to\infty$，函数的值在 $-1\sim+1$ 之间摆动不能确定，故没有极限.

(6) 理由同(1)，故

$$\lim_{x\to\frac{2}{\pi}}\sin\frac{1}{x}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

可约分的$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型函数的极限

对$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$，当 x 的值从小于 1 和大于 1 两方面趋于 1 时值的变化情况，如表 C-1 所示.

表 C-1

x	$x-1$	x^2-1	$\frac{x-1}{x^2-1}$
0.99	−0.01	−0.0199	0.502513
0.999	−0.001	−0.001999	0.500250
0.9999	−0.0001	−0.00019999	0.500025
1.01	0.01	0.0201	0.497512
1.001	0.001	0.002001	0.499750
1.0001	0.0001	0.00020001	0.499975

可知其值应为 0.5.

实际上，对可约分的$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$型极限，可以先约分再计算，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$



极限

再给出两例：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0$$

C.1.2　无穷大与无穷小

1. 无穷大

若 $x\to x_0$ 时，$|f(x)|$ 大于任意正数，则称 $f(x)$ 为无穷大，记为

$$f(x)\to\infty\quad 或\quad \lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$$

∞ 有 $+\infty$，$-\infty$.

若自变量趋于某个值时，两个函数均为无穷大：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$$

若满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷大；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的低阶无穷大；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷大；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的等价无穷大.

例如：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x}=\infty$，故 $x\to\infty$ 时，x^2 是 x 的高阶无穷大；

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\dfrac{3}{2}$，故 $x\to\infty$ 时，$3x^2$ 是 $2x^2$ 的同阶无穷大；

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2}=1$，故 $x\to\infty$ 时，x^2+x 是 x^2 的等价无穷大.

2. 无穷小

若 $x\to x_0$ 时，$|f(x)|$ 大于零小于任意正数，则称 $f(x)$ 为无穷小，记为

$$f(x)\to 0 \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

设自变量趋于某个值时，两个函数均为无穷小：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

若满足 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的高阶无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的低阶无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶无穷小；

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的等价无穷小.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，故 $x\to 0$ 时，x^2 是 x 的高阶无穷小；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，故 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小.

等价无穷大（或等价无穷小）可相互替换.

C.1.3 常用的极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1.$

等价于

$$x\to 0\text{ 时},\sin x\approx\tan x\approx x\approx\arcsin x\approx\arctan x$$

或

$$x\to 0\text{ 时},\sin x,\tan x,x,\arcsin x,\arctan x\text{ 为等价无穷小}$$

例C-2 试计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$的值.

解 解法 1:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin 5x}{5x}=5.$

解法 2:原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,其中 e 为自然常数,其值为 $\mathrm{e}\approx 2.7182\cdots$.

等价于

$$x\to 0\text{ 时},\mathrm{e}^{x}\approx 1+x$$

或

$$x\to 0\text{ 时},\ln(1+x)\approx x$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{p}=1+px$,其中 p 为常量.

等价于

$$x\to 0\text{ 时},(1+x)^{p}\approx 1+px,\text{其中 }p\text{ 为常量}$$

C.2 微分、微商(导数)

C.2.1 微分、微商(导数)的定义

1. 微分的定义

对 $y=f(x)$,自变量若从 x 增加到$x+\Delta x$,称 Δx 为x 的增量;当 $\Delta x\to 0$ 时,称为自变量微分,改记作 $\mathrm{d}x$.

在连续区域内,自变量增量取 $\mathrm{d}x$ 时,函数增量 $\Delta y\to 0$,称为函数微分,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$.

$\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 的关系为

$$\mathrm{d}y = f(x+\mathrm{d}x) - f(x)$$

例C-3 体验利用定义计算微分.计算以下函数的微分：

(1) $y = Ax + B$； (2) $y = Ax^2$； (3) $y = \sin x$； (4) $y = \mathrm{e}^x$.

解 (1)

$$\mathrm{d}y = [A(x+\mathrm{d}x) + B] - (Ax + B) = A\mathrm{d}x$$

(2)

$$\mathrm{d}y = A(x+\mathrm{d}x)^2 - Ax^2 = A(2x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}x \approx 2Ax\mathrm{d}x$$

简写为

$$\mathrm{d}y = 2Ax\mathrm{d}x$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \sin(x+\mathrm{d}x) - \sin x = \sin x\cos\mathrm{d}x + \cos x\sin\mathrm{d}x - \sin x\\ &= \sin x\left(1 - 2\sin^2\frac{\mathrm{d}x}{2}\right) + \cos x\sin\mathrm{d}x - \sin x\\ &\approx \sin x\left[1 - 2\left(\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)^2 - 1\right] + \cos x\mathrm{d}x \approx \cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

简写为

$$\mathrm{d}y = \cos x\mathrm{d}x \quad 或 \quad \mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$$

(4)

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\mathrm{d}x} - 1) \approx \mathrm{e}^x(1 + \mathrm{d}x - 1) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

简写为

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \quad 或 \quad \mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

2. 微商(导数)的定义

函数微分与自变量微分的商称为函数的微商或导数.有多种写法：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x),\quad y',\quad f'(x)$$

物理中在物理量上边加点表示对时间求导，如

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

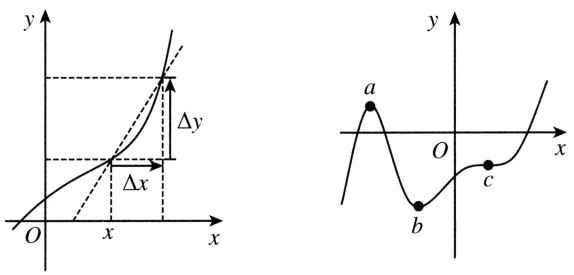
微商还可用极限来定义：

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x+\mathrm{d}x) - f(x)}{\mathrm{d}x}$$

如图C-1(a)所示，$\Delta y/\Delta x$ 为函数在 x 到 $x+\Delta x$ 的平均变化率或割线的斜率，$\Delta x\to 0$ 时变为 x 处的切线，则 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 为函数在 x 处的变化率或在 x 处切线的斜率.所以函数在 x

处的导数为函数曲线在x处切线的斜率.

函数的导数等于零时,原函数可能出现极值.如图C-1(b)所示,a,b,c点函数的导数为零(图线切线的斜率为零),其中a,b点处原函数出现极值,但c点处原函数未出现极值.



图C-1

例C-4　写出以下函数的导数:

(1) $y=Ax+B$;

(2) $y=Ax^2$;

(3) $y=\sin x$;

(4) $y=\mathrm{e}^x$.

解　直接利用例C-3计算的结果:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A$,或 $y'=A$(以下略去别的写法);

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2Ax$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$.

3. 二阶导数、三阶导数……

函数的导数仍是一个函数,称为一阶导数;对一阶导数再次求导,得到的函数称为二阶导数;还可继续求导得到三阶导数、四阶导数等.

二阶导数也有多种写法:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2},\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y,\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x),\quad y'',\quad f''(x)$$

物理中对时间的二阶导数也常用在物理量上加两点表示,如

$$\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

三阶导数同理；n 阶导数表示为

$$f^{(n)}(x)$$

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，若在(a,b)内$f''(x)>0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的，略去坐标轴和自变量的取值区间，图线的形状如图 C-2(a)，(b)，(c)所示；若在(a,b)内$f''(x)<0$，则 $f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的，如图 C-2(d)，(e)，(f)所示.

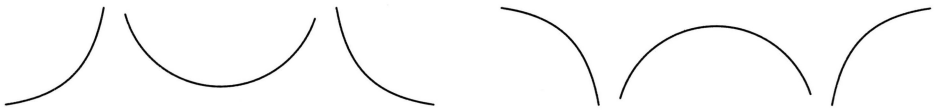


图 C-2

由此可知，若函数在某点一阶导数等于零，二阶导数大于零，则此点为函数的极小值点；若一阶导数等于零，二阶导数小于零，则此点为函数的极大值点.

C.2.2 微分、微商公式与定理

为了方便，我们可以直接使用以下公式与定理来计算所求函数的微分或微商.

1. 部分微分、微商公式

(1) 微分形式

$$dC=0(C\text{ 为常数})\qquad dx^n=nx^{n-1}dx(n\neq 0)\qquad d\sin x=\cos x\,dx$$

$$d\cos x=-\sin x\,dx\qquad de^x=e^x dx\qquad da^x=a^x\ln a\,dx$$

$$d\ln x=\frac{1}{x}dx\qquad d\log_a x=\frac{1}{x\ln a}dx\qquad d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\qquad d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx\qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$

(2) 微商形式

$$\frac{dC}{dx}=0\qquad \frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}(n\neq 0)\qquad \frac{d\sin x}{dx}=\cos x$$

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x\qquad \frac{de^x}{dx}=e^x\qquad \frac{da^x}{dx}=a^x\ln a$$

$$\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}\qquad \frac{d\log_a x}{dx}=\frac{1}{x\ln a}\qquad \frac{d(\arcsin x)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d(\arccos x)}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad \frac{d(\arctan x)}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\qquad \frac{d(\operatorname{arccot} x)}{dx}=-\frac{1}{1+x^2}$$

微商形式也可以写为$(\sin x)'=\cos x$ 这类形式，读者可自行写出.

2. 微分、微商定理

(1) 数乘公式

$$\text{微分形式：}\mathrm{d}[Cf(x)]=C\mathrm{d}f(x),\quad C\text{ 为常数}$$

$$\text{微商形式：}\frac{\mathrm{d}[Cf(x)]}{\mathrm{d}x}=C\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\quad C\text{ 为常数}$$

(2) 加/减法公式

$$\text{微分形式：}\mathrm{d}[f(x)\pm g(x)]=\mathrm{d}f(x)\pm\mathrm{d}g(x)$$

$$\text{微商形式：}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\pm g(x)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$$

(3) 乘法公式

$$\text{微分形式：}\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]=\mathrm{d}f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot\mathrm{d}g(x)$$

$$\text{微商形式：}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\cdot g(x)]=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot g(x)+f(x)\cdot\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

(4) 除法公式

$$\text{微分形式：}\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\mathrm{d}f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot\mathrm{d}g(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\text{微商形式：}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}{[g(x)]^2}$$

(5) 链式法则(复合函数的微分、微商)

$$\text{微分形式：}\mathrm{d}f[g(x)]=\frac{\mathrm{d}f[g(x)]}{\mathrm{d}g(x)}\mathrm{d}g(x)$$

$$\text{微商形式：}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[g(x)]=\frac{\mathrm{d}f[g(x)]}{\mathrm{d}g(x)}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$

下面应用公式和定理来计算一些函数的微商和导数.

例C-5　计算下列函数的微商和导数：

(1) $y=4\sin x$；　(2) $y=x^3+4$；　(3) $y=x^2\mathrm{e}^x$；　(4) $y=\dfrac{4x^2-2}{5x+1}$；

(5) $y=\tan x$；　(6) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(7) $y=\cos(2\sqrt{x}-x)$.

解　(1) 由数乘公式得

$$\mathrm{d}y=4\mathrm{d}\sin x=4\cos x\mathrm{d}x,\quad y'=4(\sin x)'=4\cos x$$

(2) 由加法公式得

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^3+\mathrm{d}4=3x^2\mathrm{d}x,\quad y'=(x^3)'+(4)'=3x^2$$

(3) 由乘法公式得

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x^2\cdot\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=2x\mathrm{d}x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(2x+x^2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^2}{dx}e^x+x^2\frac{de^x}{dx}=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$$

(4) 由除法公式得

$$dy=\frac{d(4x^2-2)\cdot(5x+1)-(4x^2-2)d(5x+1)}{(5x+1)^2}$$

$$=\frac{8x(5x+1)-5(4x^2-2)}{(5x+1)^2}dx=\frac{20x^2+8x+10}{(5x+1)^2}dx$$

$$y'=\frac{(4x^2-2)'\cdot(5x+1)-(4x^2-2)(5x+1)'}{(5x+1)^2}$$

$$=\frac{8x(5x+1)-5(4x^2-2)}{(5x+1)^2}=\frac{20x^2+8x+10}{(5x+1)^2}$$

(5) 由除法公式得

$$dy=d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{d\sin x\cdot\cos x-\sin x d\cos x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

(6) 令 $u=x^2-1$,则

$$y=u^{\frac{1}{2}}$$

由链式法则得

$$dy=\frac{dy}{du}du=\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}d(x^2-1)=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}2xdx=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\frac{d(x^2-1)}{dx}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

熟练后可略去代换过程,这样计算:

$$dy=\frac{d\sqrt{x^2-1}}{d(x^2-1)}d(x^2-1)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2xdx=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sqrt{x^2-1}}{d(x^2-1)}\frac{d(x^2-1)}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

更熟练后可进一步简化,如下:

$$dy=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2xdx=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

(7) 由链式法则、减法公式和数乘公式得

$$dy=-\sin(2\sqrt{x}-x)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)dx=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(2\sqrt{x}-x)dx$$

$$y'=-\sin(2\sqrt{x}-x)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin(2\sqrt{x}-x)$$

例C-6　质点在一条直线上运动，已知其位置与时间的关系为

$$x=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+4t$$

式中各量均采用国际单位，试求其速度、加速度与时间的关系.

解　由题意得

$$v=\dot{x}=-3\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2+4=-6\sin\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)+4$$

$$a=\dot{v}=\ddot{x}=-6\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2=-12\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$$

C.2.3　其他求导数方法　导数的部分应用

1. 对数求导法

对数求导法可将乘积形式、商的形式、根式、幂的形式、指数形式或幂指数形式运算降格为加、减法运算，使求导计算量大为减少.

求导过程为：对求导的函数 $y=f(x)$，两边取对数

$$\ln y=\ln f(x)$$

再两边同时求导

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln y)'$$

故

$$f'(x)=f(x)(\ln y)'$$

或先换底

$$f(x)=\mathrm{e}^{\ln f(x)}$$

再求导

$$f'(x)=\left[\mathrm{e}^{\ln f(x)}\right]'=\mathrm{e}^{\ln f(x)}\left[\ln f(x)\right]'=f(x)\left[\ln f(x)\right]'$$

例C-7　求下列函数的导数：

(1) $y=(x^2-3)(x^3-4)(x^7-5)(x^2-6)$；　(2) $f(x)=2^x$；　(3) $y=x^x$.

解　(1) 先取对数再求导

$$\ln y=\ln(x^2-3)+\ln(x^3-4)+\ln(x^7-5)+\ln(x^2-6)$$

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2-3}+\frac{3x^2}{x^3-4}+\frac{7x^6}{x^7-5}+\frac{2x}{x^2-6}$$

故

$$y'=y\left(\frac{2x}{x^2-3}+\frac{3^2}{x^3-4}+\frac{7x^6}{x^7-5}+\frac{2x}{x^2-6}\right)=\cdots$$

(2) 解法 1:由题意得

$$\ln f(x)=\ln 2^{x}=x\ln 2$$

则

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln 2$$

故

$$f'(x)=2^{x}\ln 2$$

解法 2:

$$f'(x)=(\mathrm{e}^{\ln 2^{x}})'=(\mathrm{e}^{x\ln 2})'=\mathrm{e}^{x\ln 2}\ln 2=2^{x}\ln 2$$

(3) 解法 1:由题意得

$$y'=(\mathrm{e}^{\ln x^{x}})'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=\mathrm{e}^{x\ln x}(x\ln x)'=x^{x}\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^{x}(\ln x+1)$$

解法 2:

$$\ln y=\ln x^{x}=x\ln x$$

则

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

故

$$y'=x^{x}(\ln x+1)$$

2. 反函数的导数

反函数的导数可由原函数的导数得到,方法为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}\quad\text{或}\quad f'(x)=\frac{1}{f(x)\text{的反函数的导数}}$$

例C-8 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 由题意得

$$x=\sin y$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

3. 大小不变、匀速旋转的矢量的导数

大小不变的矢量 $\boldsymbol{A}$ 以 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

证明　如图 C-3 所示，有

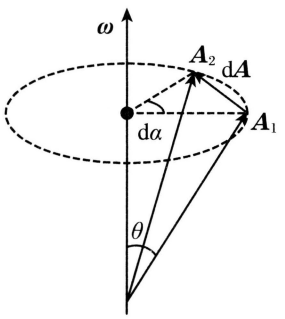


图 C-3

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{A\sin\theta\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\omega A\sin\theta$$

再考虑方向，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}$$

4. 利用导数求近似值

当 Δx 足够小时，有

$$f'(x)\approx\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

故

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

可由上式计算某些近似值. 例如

$$\sin 44^\circ\approx\sin 45^\circ+\cos 45^\circ\left(-\frac{\pi}{180}\right)=0.694765$$

5. 洛必达法则

洛必达法则的内容：两无穷小之比（或无穷大之比，或可化为此类的）等于它们的导数之比. 即

$$\lim_{x\to a}f(x)=0(\text{或}\infty),\quad \lim_{x\to a}g(x)=0(\text{或}\infty)$$

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

若仍为 $\frac{0}{0}\left(\text{或}\frac{\infty}{\infty}\right)$，则可连续使用下去. 还可与等价无穷小和极限其他性质结合应用.

例C-9　试计算以下极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{(\arcsin x)^2}$.

解　(1) 由洛必达法则得

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

(2) 由于 $x\to0$ 时 $\arcsin x$ 与 x 为等价无穷小，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{2}=\frac{1}{2}$$

C.2.4 多元函数的偏微商(偏导数)

1. 偏微商(偏导数)

多元函数是由多个独立自变量构成的函数,将 k 个自变量记为 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$,多元函数可书写成 $y=y(x_1,x_2,\cdots,x_k)$.

仅由自变量 x_1 的无穷小变化引起的函数增量

$$y(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2,\cdots,x_k)-y(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

称为函数对 x_1 的偏微分.

函数对 x_1 的偏微分与 $\mathrm{d}x_1$ 的比值

$$y'_{x_1}=\frac{y(x_1+\mathrm{d}x_1,x_2,\cdots,x_k)-y(x_1,x_2,\cdots,x_k)}{\mathrm{d}x_1}$$

称为函数对 x_1 的偏微商或偏导数,书写成

$$y'_{x_1}=\frac{\partial y}{\partial x_1}$$

同理可写出对 x_i 的偏导数.

k 个自变量均有无穷小增量时引起的 y 增量称为多元函数的全微分,记作 $\mathrm{d}y$,可导出

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$$

例如:$T=\dfrac{pV}{vR}$(v,R 为常数),则

$$\mathrm{d}T=\frac{\partial T}{\partial p}\mathrm{d}p+\frac{\partial T}{\partial V}\mathrm{d}V=\frac{V}{vR}\mathrm{d}p+\frac{p}{vR}\mathrm{d}V$$

也可以利用微分的乘法法则得到同样的结果:

$$\mathrm{d}T=\frac{1}{vR}\mathrm{d}(pV)=\frac{1}{vR}(V\mathrm{d}p+p\mathrm{d}V)$$

2. 一元函数可看作多元函数,利用多元函数偏微商来求一元函数的微商

例C-10 求 $y=x^x$ 的导数.

解 看作 $y=x_1^{x_2}$,有 $x_1=x_2=x$,$\mathrm{d}x_1=\mathrm{d}x_2=\mathrm{d}x$,则

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{\partial y}{\partial x_2}=x_2x_1^{x_2-1}+x_1^{x_2}\ln x_1=x^x+x^x\ln x$$

熟练后，过程可简化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xx^{x-1}+x^x\ln x=x^x+x^x\ln x$$

C.2.5　函数的幂级数展开

1. 幂函数的展开

首先补充一点知识.

阶乘 $n!$：

$$n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n,\quad \text{其中}\ 0!=1$$

排列数 A_n^m：在 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数

$$\mathrm{A}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

组合数 C_n^m：在 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{m!}=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

求和符号 $\sum$，例如

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

二项式定理：n 为正整数时

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n=a^n+na^{n-1}b+\cdots+b^n$$

广义二项式定理：α 不为正整数时

$$(a+b)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k=a^\alpha+\alpha a^{\alpha-1}b+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}a^{\alpha-2}b^2+\cdots$$

故若已知一个幂函数 $f(x)=x^n$ 在 $x=x_0$ 的值 $f(x_0)$，求其附近点 $x=x_0+\Delta x$ 处的函数值，可以利用牛顿二项式定理

$$f(x)=x^n=(x_0+\Delta x)^n=x_0^n\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^n=f(x_0)\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^n$$

$$=f(x_0)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\Delta x}{x_0}\right)^k$$

此式适用于任何 n，如果 n 为正整数，则上式中的级数为有限多项，在 $k=n$ 处截断，余下的项自动为零；否则，上式为无穷级数. 当 $\Delta x\ll x_0$ 时，我们只需保留有限余项就足够精确了.

若 Δx 为小量，仅需要保留到一阶小量时

$$(a+\Delta x)^n=a^n\left(1+\frac{\Delta x}{a}\right)^n\approx a^n\left(1+\frac{n\Delta x}{a}\right)=a^n+na^{n-1}\Delta x$$

或

$$(a+\Delta x)^n \approx a^n + na^{n-1}\Delta x$$

2. 泰勒展开

对非幂函数作幂级数展开，可以利用泰勒公式. 非幂函数 $f(x)$ 设为

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n$$

则

$$f'(x_0) = A_1,\quad f''(x_0) = 2!A_2,\quad f'''(x_0) = 3!A_3,\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x_0) = n!A_n$$

故

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \end{aligned}$$

这就是泰勒公式；其中定义

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

例C-11 分别导出 $y=\cos x$，$y=\sin x$ 的麦克劳林级数（即求函数在 $x_0=0$ 的泰勒级数）.

解 (1) 对 $y=\cos x$，有

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=1,3,5,\cdots) \\ -1 & (n=2,6,10,\cdots) \\ 1 & (n=0,4,8,\cdots) \end{cases}$$

故

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \frac{1}{0!}x^0 + \frac{0}{1!}x^1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

(2) 对 $y=\sin x$，有

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (n=0,2,4,6,\cdots) \\ -1 & (n=3,7,11,\cdots) \\ 1 & (n=1,5,9,\cdots) \end{cases}$$

故

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$=\frac{0}{0!}x^0+\frac{1}{1!}x^1+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

例C-12　推导欧拉定理：$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$.

解　对 $e^{\pm ix}$，有

$$y^{(0)}=e^{\pm ix},\quad y^{(1)}=\pm ie^{\pm ix},\quad y^{(2)}=-e^{\pm ix},\quad y^{(3)}=\mp ie^{\pm ix},\quad y^{(4)}=e^{\pm ix},\quad \cdots$$

故

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}1 & (n=0,4,8,\cdots)\\ \pm i & (n=1,5,9,\cdots)\\ -1 & (n=2,6,10,\cdots)\\ \mp i & (n=3,7,11,\cdots)\end{cases}$$

则

$$y=1\pm ix-\frac{1}{2!}x^2\mp i\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4\pm i\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{6!}x^6\mp\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots\right)\pm i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7\right)=\cos x\pm i\sin x$$

得证.

C.3　积　　分

C.3.1　定积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

叫作 $x=a$ 到 $x=b$ 区间内 $f(x)$ 对 x 的定积分，$f(x)$ 叫作被积函数，a，b 分别叫作定积分的下限、上限；有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sum_{x=a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

它是在给定区域内的无穷多个无穷小量求和，它的结果是一个常数而不是一个函数.

若 $f(x)=\Phi'(x)$，称 $f(x)$ 是 $\Phi(x)$ 的导函数，$\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 则

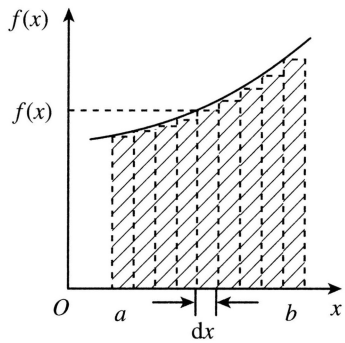
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\Phi(x)\Big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)$$

证明　$f(x)=\Phi'(x)$，即 $\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x$，故

$$\Phi(b)-\Phi(a)=\sum_a^b \mathrm{d}\Phi(x)=\sum_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

如图C-4所示，定积分是$f(x)$图像在积分区间与x轴围成的面积. 例如变速直线运动$v=\dot{x}$，则v-t图像围成的面积为位移，0～t时间内

$$x-x_0=\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$$



图C-4

C.3.2 不定积分

1. 不定积分的定义

一个函数的原函数不是唯一的，例如$f(x)=x^2$，则

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{3}x^3,\quad \Phi_2(x)=\frac{1}{3}x^3+1$$

都是它的原函数，在原函数$\Phi(x)$上加任一常数C仍是它的原函数. 函数$f(x)$的原函数的全体$\Phi(x)+C$(C为任意常数)称为$f(x)$的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi(x)+C$$

不定积分是微分的逆运算，它的结果是一组函数.

2. 部分不定积分公式

$$\int k\mathrm{d}x=kx+C \qquad \int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C(n\neq -1) \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x+C$$

$$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C \qquad \int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C \qquad \int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C \quad \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

3. 定理

$$\int af(x)\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

例C-13　试计算 $\int 2(x+1)\mathrm{d}x$.

解　原式 $= 2\left(\int x\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x\right) = x^2 + 2x + C$.

4. 积分计算常用方法

Ⅰ. 换元法

例C-14　试计算：

(1) $\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x$；　(2) $\int \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \mathrm{e}^{x^3}x^2\mathrm{d}x$；　(4) $\int \sin(ax+b)\mathrm{d}x$.

解　(1) 原式 $= \int \sin^2 x\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$；

(2) 原式 $= \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}(3x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + C$；

(3) 原式 $= \int \mathrm{e}^{x^3}\frac{1}{3}\mathrm{d}x^3 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3} + C$；

(4) 原式 $= \frac{1}{a}\int \sin(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$.

例C-15　三角代换. 试计算：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(2) $\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$；　(3) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解　(1) 设 $x = \sin\theta\left(\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$，则 $\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}\theta$，故

$$\text{原式} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int \mathrm{d}\theta = \theta + C = \arcsin x + C$$

(2) 设 $x = 2\tan\theta\left(\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$，则 $\mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\mathrm{d}\theta$，故

$$\text{原式} = \int \frac{2\sec^2\theta}{4(1+\tan^2\theta)}\mathrm{d}\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{4\sec^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

(3)

$$原式 = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

也可像(2)一样进行三角代换,请读者自行尝试.

例C-16 三角函数积分:奇凑偶降.试计算:

(1) $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$; (2) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$; (3) $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解 (1)

$$原式 = \int(-\sin^2 x)\mathrm{d}\cos x = \int(\cos^2 x - 1)\mathrm{d}\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$

(2)

$$原式 = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}2x = \frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)\mathrm{d}2x = \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) + C$$

(3)

$$原式 = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{3}{8}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}2x + \frac{1}{32}\int\cos 4x\mathrm{d}4x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

例C-17 试计算:

(1) $\int \tan x\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+1}$; (3) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解 (1)

$$原式 = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$$

(2) 令 $\sqrt{x+1} = u$,则 $x = u^2 - 1$,$\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$,故

$$原式 = \int \frac{2u\mathrm{d}u}{u+1} = 2\int\left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = 2[u - \ln(u+1)] + C$$

$$= 2\left[\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1}+1)\right] + C$$

(3) 令 $x = a\sin\theta$,则 $\mathrm{d}x = a\cos\theta\mathrm{d}\theta$,故

$$原式 = \int \frac{a\cos\theta}{a^4\sin^4\theta}a\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int \frac{\cos^2\theta\mathrm{d}\theta}{a^2\sin^4\theta} = ?$$

进行不下去,换一种办法.令 $x = \frac{1}{u}$,以消去分母,则 $\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}u}{u^2}$,故

$$原式 = \int u^4\sqrt{a^2 - \frac{1}{u^2}}\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} = -\int|u|\sqrt{a^2u^2 - 1}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int\sqrt{a^2u^2 - 1}\mathrm{d}(a^2u^2 - 1) = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3} + C$$

Ⅱ. 部分分式积分法

例C-18　试计算：

(1) $\int \frac{3x-1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$；　　(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

解　(1)

$$\text{原式} = \int\left(\frac{2/3}{x-1}+\frac{7/3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C$$

(2) 令 $x=a\sin\theta$，则 $\mathrm{d}x=a\cos\theta\mathrm{d}\theta$，故

$$\text{原式} = \int \frac{a\cos\theta}{a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{a\cos\theta} = ?$$

进行不下去，换一种办法.

$$\text{原式} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}[-\ln(a-x)+\ln(a+x)]+C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C$$

同时我们还可得出

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \int \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\cos^2\theta} = \int \frac{\mathrm{d}\sin\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)\mathrm{d}\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+C$$

(3)

$$\text{原式} = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x+\frac{1}{\cos x}+C$$

Ⅲ. 分部积分法

由 $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$ 得

$$\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$$

当 $u\mathrm{d}v$ 不易积分而 $v\mathrm{d}u$ 易积分时，可以采用此方法.

例C-19　试计算：

(1) $\int \ln x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\ln x\mathrm{d}x$；　　(3) $\int t\sin t\mathrm{d}t$；

(4) $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；　　(5) $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解　(1)

$$\text{原式} = \ln x\cdot x-\int x\mathrm{d}\ln x = x\ln x-\int \mathrm{d}x = x\ln x-x+C$$

(2)

$$原式=\int \ln x \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\ln x\cdot\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}\ln x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$

(3)

$$原式=-\int t\mathrm{d}\cos t=-\left(t\cos t-\int\cos t\mathrm{d}t\right)=-t\cos t+\sin t+C$$

(4)

$$原式=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x^2=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

其中

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C_1$$

故

$$原式=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C$$

(5)

$$原式=x\arctan x-\int x\mathrm{d}\arctan x=x\arctan x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Ⅳ. 不是所有函数都能求出原函数

计算器积分是用数值积分法计算定积分的值.

C.3.3 线积分 面积分 体积分

一般只要求能看懂和理解,通常可转化为一元函数的单向积分.

标量 $\Phi(x,y,z)$ 沿 L 的线积分写作

$$\int_L\Phi(x,y,z)\mathrm{d}L$$

若曲线闭合,称为环路积分,写作

$$\oint_L\Phi(x,y,z)\mathrm{d}L$$

矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 沿 L 的标积线积分写作

$$\int_L\boldsymbol{A}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

若曲线闭合,写作

$$\oint_L\boldsymbol{A}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L}$$

以上是对弧长的曲线积分,另有对坐标的曲线积分.

标量 $\Phi(x,y,z)$ 在 S 面上的面积分写作

$$\iint_S \Phi(x,y,z)\mathrm{d}S$$

若曲面封闭，称为封闭曲面积分，写作

$$\oiint_S \Phi(x,y,z)\mathrm{d}S$$

矢量 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 在 S 面上的标积性面积分写作

$$\iint_S \boldsymbol{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

若曲面封闭，写作

$$\oiint_S \boldsymbol{A}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

空间区域 V 内的体积分写作

$$\iiint_V \Phi(x,y,z)\mathrm{d}V$$

C.4　常微分方程

C.4.1　基本概念

微分方程：含有未知函数及其导数（或微分）的关系式的方程，如 $y'=xy$，$y''+3y+x=2$. 解微分方程就是找出未知函数. 如果未知函数是一元的，称为常微分方程；如果未知函数是多元的，称为偏微分方程.

微分方程的阶：微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称为微分方程的阶. 例如二阶微分方程指方程中关于 y 的最高阶导数是二阶导数，$y'=xy$ 为一阶微分方程，$y''+3y+x=2$ 为二阶微分方程.

线性与非线性微分方程：方程简化后 y 及其各阶导数均为一次有理整式，则称此方程为线性微分方程. 如 $y'=xy$，$y''+3y+x=2$ 为线性微分方程，$y''+7\sin y=0$，$yy'-2xy=3$ 为非线性微分方程.

微分方程的解：代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解，分为通解和特解.

通解：微分方程的解中含有任意常数（如果一个解中的常数可以取任意值，称为任意常数），且独立任意常数的个数与微分方程的阶数相同. n 阶微分方程通解表达式中含有 n 个彼此独立的任意函数. 例如 $y'=y$，通解为 $y=C\mathrm{e}^x$；$y''+y=0$，通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 或 $y=C_1\cos(x+C_2)$.

特解：不包含任何任意常数的解. 例如 $y=e^x$ 为 $y'=y$ 的一个特解.

有时给出一些附加条件，用来求微分方程的特解. 例如 $y'=y$，且 $x=0$ 时 $y=5$，则 $y=5e^x$.

C.4.2 一阶线性微分方程

1. 变量可分离方程

可化为 $f(x)dx=g(y)dy$ 形式的微分方程称为变量可分离的微分方程，分离变量后分别积分即可.

例C-20 试求 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$ 的特解，已知 m,g,k 为大于零的常数，$t=0$ 时 $v=0$.

解 解法 1：分离变量并不定积分

$$\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$$

故

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1$$

即

$$v=\frac{mg}{k}+Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

代入初始条件确定任意常数的值，由 $t=0$ 时 $v=0$ 得

$$0=\frac{mg}{k}+C$$

故

$$C=-\frac{mg}{k}$$

$$v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{k}{m}t})$$

解法 2：分离变量并定积分

$$\int_0^v\frac{dv}{mg-kv}=\int_0^t\frac{dt}{m}$$

故

$$-\frac{1}{k}\ln\frac{mg-kv}{mg}=\frac{t}{m}$$

则

$$v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t})$$

例C-21　质点做直线运动，其加速度和位置的关系为 $a=10-x$，且在 $x=0$ 处速度为 10 m/s，试求质点速度与位置的关系 $v(x)$.

解　由题意得

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v=10-x$$

分离变量并定积分

$$\int_{10}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{0}^{x}(10-x)\mathrm{d}x$$

解得

$$v=\pm\sqrt{20x-x^2+100}\ \mathrm{m/s}$$

2. 齐次方程(可化为变量可分离方程)

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次方程.

令

$$u=\frac{y}{x}$$

则

$$y=ux$$

故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

原式化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)$$

化为了变量可分离方程.

例C-22　试求 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解.

解　令

$$u=\frac{y}{x}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

原式化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$$

则

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}(\ln u-1)}{\ln u-1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

故

$$\ln(\ln u-1)=\ln x+C_1\quad\Rightarrow\quad\ln\frac{y}{x}-1=Cx$$

3. 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

若 $Q(x)=0$,称为齐次方程(与前一个“齐次”含义不同);若 $Q(x)\neq0$,称为非齐次方程.

求解方法之一为:(1) 先求齐次方程的通解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$$

积分得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1$$

故齐次方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

(2) 再求非齐次方程的通解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{Q(x)\mathrm{d}x}{y}-P(x)\mathrm{d}x$$

由于 y 是 x 的函数,令

$$\varphi(x)=\frac{Q(x)}{y}$$

并设

$$\int \varphi(x)\mathrm{d}x = \phi(x) + C_1$$

则原式积分得

$$\ln y = \phi(x) + C_1 - \int P(x)\mathrm{d}x$$

即

$$y = \pm \mathrm{e}^{\phi(x)+C_1} \cdot \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

故只需在齐次方程的通解中将常数 C 变易为待定函数 $C(x)$，便得到非齐次方程通解的形式；代入原方程求出 $C(x)$，便可求出非齐次方程通解，这种方法称为常数变易法.

过程略去，结论为：一阶线性非齐次微分方程通解等于齐次方程通解加上非齐次方程特解.

求解步骤为：(1) 求齐次方程通解；(2) 常数变易求非齐次方程特解；(3) 合成.

例C-23　求解 $xy' + y = \mathrm{e}^x\ (x>0)$.

解　齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$$

通解为

$$y = \frac{C}{x}$$

由常数变易法，非齐次方程特解为

$$Y = \frac{C(x)}{x}, \quad Y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$$

代入原式得

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x} + \frac{C(x)}{x} = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}^x$$

故原式通解为

$$y = \frac{C}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x}$$

C.4.3　二阶常系数线性微分方程

1. 二阶线性微分方程通解的性质和解的结构

(1) 二阶齐次线性方程解的结构

对二阶齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

定理 1 解的叠加原理，如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$是方程的两个解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1，C_2 为任意常数)也是方程的解.

函数的线性相关性：对于一组函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$，如果有不全为零的常数使 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)=0$ 在某区间上成立，则称这组函数在此区间上线性相关；否则称这组函数线性无关(即线性独立).

定理 2 “$y_1(x)\neq0$，$y_2(x)\neq0$ 线性相关”等价于“$y_1(x)=Cy_2(x)$(C 为常数)”.

定理 3 通解结构：如果 $y_1(x)$，$y_2(x)$是方程的两个线性无关的特解，则 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$(C_1，C_2 为任意常数)是方程的通解.

(2) 二阶非齐次线性方程解的结构

对二阶非齐次线性微分方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$$

定理 4 通解结构：设 $y^*(x)$是非齐次方程的一个特解，$Y(x)$为对应齐次方程的通解，则 $y=Y(x)+y^*(x)$是非齐次方程的通解.

定理 5 若 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而 $y_1^*(x)$，$y_2^*(x)$分别是 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$，$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$的特解，则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$就是原方程的特解.

2. 二阶常系数线性齐次方程的解法

常系数指方程简化后的每一项关于 y，y'的系数为常数. 二阶常系数线性齐次方程的标准形式为

$$y''+py'+qy=0$$

其中 p，q 是常数.

$e^{\lambda x}$(λ 为常数)和它的各阶导数都只相差一个常数因子，故设 $y=e^{\lambda x}$为方程的解，代入得

$$(\lambda^2+p\lambda+q)e^{\lambda x}=0$$

因为 $e^{\lambda x}\neq0$，所以

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

方程$\lambda^2+p\lambda+q=0$ 称为微分方程的特征方程，其根称为特征根. 先由特征根给出原方程通解公式再逐个解释：

(1) 若有两不相等的实根λ_1，λ_2，则通解为

$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$

(2) 若有两相等的实根 λ，则通解为

$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$$

(3) 若有两复数解 $\lambda=\lambda_0\pm i\omega$，则

$$y=e^{\lambda_0x}(C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x)\quad 或\quad y=C_1e^{\lambda_0x}\cos(\omega x+C_2)$$

原因分别如下：

(1) $e^{\lambda_1 x}$,$e^{\lambda_2 x}$是两个线性无关的特解,由定理3可得通解.

(2) 只得到一个特解 $y_1 = e^{\lambda x}$,还需找到一个与 y_1 线性无关的特解 y_2,则

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \neq C$$

将 $y_2 = u(x)e^{\lambda x}$代入微分方程并化简得

$$u''(x) + (2\lambda + p)u'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)u(x) = 0$$

可知 $u(x)$的最简形式为 $u(x) = x$,故取特解为

$$y_2 = xe^{\lambda x}$$

(3) 两特解为线性无关复数,由欧拉定理得

$$\tilde{y}_1 = e^{(\lambda_0 + i\omega)x} = e^{\lambda_0 x}(\cos \omega x + i \sin \omega x), \quad \tilde{y}_2 = e^{(\lambda_0 - i\omega)x} = e^{\lambda_0 x}(\cos \omega x - i \sin \omega x)$$

为求其线性无关实数解,取其线性组合

$$y_1 = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{\lambda_0 x}\cos \omega x, \quad y_2 = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{\lambda_0 x}\sin \omega x$$

由定理1,这两个也为原方程的特解.

例C-24　已知 $kx + m\ddot{x} = 0$,其中 k,m 为常数,且 $k > 0$,$m > 0$. $t = 0$ 时 $x = 0$,$\dot{x} = v_0$,试求 x-t 关系.

解　解法1:特征方程

$$m\lambda^2 + k = 0$$

则

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

故

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

代入初始条件得

$$0 = C_1, \quad v_0 = C_2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

则

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

解法2:(猜得)设

$$x = A\sin \omega t$$

则

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\sin \omega t$$

代入原式得

$$kA\sin \omega t - m\omega^2 A\sin \omega t = 0$$

则

$$kA = m\omega^2 A$$

故

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$t = 0$ 时

$$\dot{x} = \omega A\cos \omega t = \omega A = v_0$$

则

$$A = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

故

$$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

例C-25 试求 $\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0$ 的通解.

解 特征方程

$$\lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0$$

特征根为

$$\lambda_1 = -8, \quad \lambda_2 = -2$$

故原方程的通解为

$$x = C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-2t}$$

3. 二阶常系数线性非齐次方程的解法

根据定理4,二阶常系数线性非齐次方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

通解等于齐次方程的通解 $Y(x)$加上非齐次方程的特解 $y^*(x)$.特解的求解法有常数变易法、待定系数法等,以下对几种类型的 $f(x)$给出用待定系数法求特解的解法:

(1) $f(x)$是多项式,特解要用相同次数的多项式.例如 $f(x) = x^2 + 2x$,则设

$$y^*(x) = Ax^2 + Bx + C$$

(2) $f(x)$是正、余弦函数,特解要用正弦和余弦函数.例如 $f(x) = 3\sin x$,则设

$$y^*(x) = A\cos x + B\sin x$$

(3) $f(x)$是指数函数,则特解里要出现相同的指数函数,此特解要和齐次方程的通解相比较,若出现相同项,则乘以 x 直至不出现相同项.例如 $f(x) = 2e^{2x}$.

若齐次方程的通解中没有 e^{2x},则设 $y^*(x) = Ae^{2x}$;

若齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{2x}$,则设 $y^*(x) = Axe^{2x}$(若仍设 $y^*(x) = Ae^{2x}$,代入原方程,则会出现 $0 = f(x)$);

若齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$,则设 $y^*(x) = Ax^2 e^{2x}$.

(4) $f(x)$为函数相加，则根据定理5，特解为将各函数的特解相加.

(5) $f(x)$为函数相乘，则特解为将各函数的特解相乘. 例如 $f(x)=3x^2\mathrm{e}^x\sin x$ 且齐次方程的通解中无 e^x，则设

$$y^*(x)=(Ax^2+Bx+C)\mathrm{e}^x\cos x+(Dx^2+Ex+F)\mathrm{e}^x\sin x$$

之后代入原方程，求解出待定系数即可.

例C-26　试求 $\ddot{x}+10\dot{x}+16x=136\cos 2t$ 的通解.

解　前已解出齐次方程的通解为

$$X=C_1\mathrm{e}^{-8t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}$$

设非齐次方程的特解为

$$x^*=A\cos 2t+B\sin 2t$$

代入原方程整理得

$$(12A+20B-136)\cos 2t+(12B-20A)\sin 2t=0$$

即

$$12A+20B-136=0,\quad 12B-20A=0$$

解得

$$A=3,\quad B=5$$

故通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{-8t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}+3\cos 2t+5\sin 2t$$

附录D

全国中学生物理竞赛内容提要

（2015年4月修订，2016年开始实行）

标☆仅为决赛内容，※为复赛和决赛内容，如不说明，一般要求考查定量分析能力.

力　学

1. 运动学

参考系；

坐标系，直角坐标系；

※平面极坐标，※自然坐标系；

矢量和标量；

质点运动的位移和路程，速度，加速度；

匀速、匀变速直线运动及其图像；

运动的合成与分解，抛体运动，圆周运动；

圆周运动中的切向加速度和法向加速度；

曲率半径，角速度和※角加速度；

相对运动，伽利略速度变换.

2. 动力学

重力，弹性力，摩擦力；

惯性参考系；

牛顿第一、第二、第三运动定律，胡克定律，万有引力定律；

均匀球壳对壳内和壳外质点的引力公式（不要求导出）；

※非惯性参考系，※平动加速参考系中的惯性力；

※匀速转动参考系惯性离心力，视重；

☆科里奥利力.

3. 物体的平衡

共点力作用下物体的平衡；

力矩，刚体的平衡条件；

☆虚功原理.

4. 动量

冲量，动量，质点与质点组的动量定理，动量守恒定律；

※质心，※质心运动定理；

※质心参考系；

反冲运动；

※变质量体系的运动.

5. 机械能

功和功率；

动能和动能定理，※质心动能定理；

重力势能，引力势能；

质点及均匀球壳壳内和壳外的引力势能公式（不要求导出）；

弹簧的弹性势能；

功能原理，机械能守恒定律；

碰撞；

弹性碰撞与非弹性碰撞，恢复系数.

6. ※角动量

冲量矩，角动量；

质点和质点组的角动量定理与转动定理；

角动量守恒定律.

7. 有心运动

在万有引力和库仑力作用下物体的运动；

开普勒定律；

行星和人造天体的圆轨道和椭圆轨道运动.

8. ※刚体

刚体的平动，刚体的定轴转动；

刚体绕轴的转动惯量；

平行轴定理，正交轴定理；

刚体定轴转动的角动量定理，刚体的平面平行运动.

9. 流体力学

静止流体中的压强；

浮力；

☆连续性方程，☆伯努利方程.

10. 振动

简谐振动，振幅，频率和周期，相位；

振动的图像；

参考圆，简谐振动的速度；

(线性)恢复力，由动力学方程确定简谐振动的频率；

简谐振动的能量；

同方向、同频率简谐振动的合成；

阻尼振动、受迫振动和共振(定性).

11. 波动

横波和纵波；

波长、频率和波速的关系；

波的图像；

※平面简谐波的表示式；

波的干涉，※驻波，波的衍射(定性)；

声波，声音的响度和音调，声音的音品(定性)；

声音的共鸣，乐音和噪声(定性)；

※多普勒效应.

光　学

1. 几何光学

※费马原理；

光的传播、反射、折射、全反射；

光的色散，折射率与光速的关系；

平面镜成像、球面镜成像公式与作图法；

※球面折射成像公式，※焦距与折射率、球面半径的关系；

薄透镜成像公式与作图法；

眼睛，放大镜，显微镜，望远镜；

※其他常用光学仪器.

2. 波动光学

光程；

※惠更斯原理(定性)；

光的干涉现象，双缝干涉；
光的衍射现象；
※夫琅禾费衍射；
※光栅，※布拉格公式；
※分辨本领（不要求导出）；
光谱和光谱分析（定性）；
※光的偏振，※自然光与偏振光；
※马吕斯定律，※布儒斯特定律.

单　位　制

国际单位制与量纲分析.

数学基础

1. 中学阶段全部初等数学（包括解析几何）

2. 矢量的合成和分解，矢量的运算，极限、无限大和无限小的初步概念

3. ※微积分初步及其应用

含一元微积分的简单规则；

微分（包括多项式、三角函数、指数函数、对数函数的导数，函数乘积和商的导数，复合函数的导数）；

积分（包括多项式、三角函数、指数函数、对数函数的简单积分）.

附 录

全国中学生物理竞赛内容提要

（2015 年 4 月修订，2016 年开始实行）

标☆仅为决赛内容，※为复赛和决赛内容，如不说明，一般要求考查定量分析能力.

热　学

1. 分子动理论

原子和分子大小的数量级；

分子的热运动和碰撞，布朗运动；

※压强的统计解释；

☆麦克斯韦速率分布的定量计算；

※分子热运动自由度，※能均分定理；

温度的微观意义；

分子热运动的动能；

※气体分子的平均平动动能；

分子力，分子间的势能；

物体的内能.

2. 气体的性质

温标，热力学温标；

气体实验定律，理想气体状态方程；

道尔顿分压定律；

混合理想气体状态方程；

理想气体状态方程的微观解释(定性).

3. 热力学第一定律

热力学第一定律；

理想气体的内能；

热力学第一定律在理想气体等容、等压、等温和绝热过程中的应用；

※多方过程及应用；

※定容热容和定压热容；

※绝热过程方程；

※等温、绝热过程中的功；

※热机及其效率，※卡诺定理.

4. 热力学第二定律

※热力学第二定律的开尔文表述和克劳修斯表述；

※可逆过程与不可逆过程；

※宏观热力学过程的不可逆性；

※理想气体的自由膨胀；

※热力学第二定律的统计意义；

☆热力学第二定律的数学表达式；

☆熵，熵增.

5. 液体的性质

液体分子运动的特点；

表面张力系数；

※球形液面两边的压强差；

浸润现象和毛细现象(定性).

6. 固体的性质

晶体和非晶体，空间点阵；

固体分子运动的特点.

7. 物态变化

熔化和凝固，熔点，熔化热；

蒸发和凝结，饱和气压，沸腾和沸点；

汽化热，临界温度；

固体的升华；

空气的湿度和湿度计，露点.

8. 热传递的方式

传导，※导热系数；

对流；

辐射，※黑体辐射的概念，※斯特藩定律；

※维恩位移定律.

9. 热膨胀

热膨胀和膨胀系数.

电　磁　学

1. 静电场

电荷守恒定律；

库仑定律；

电场强度，电场线；

点电荷的场强，场强叠加原理；

匀强电场；

均匀带电球壳内、外的场强公式(不要求导出)；

※高斯定理及其在对称带电体系中的应用；

电势和电势差，等势面；

点电荷电场的电势；

电势叠加原理；

均匀带电球壳内、外的电势公式；

电场中的导体，静电屏蔽；

※静电镜像法；

电容，平行板电容器的电容公式；

※球形、圆柱形电容器的电容；

电容器的连接；

※电荷体系的静电能，※电场的能量密度；

电容器充电后的电能；

☆电偶极矩；

☆电偶极子的电场和电势；

电介质的概念；

☆电介质的极化与极化电荷；

☆电位移矢量.

2. 稳恒电流

欧姆定律，电阻率和温度的关系；

电功和电功率；

电阻的串、并联；

电动势，闭合电路的欧姆定律；

一段含源电路的欧姆定律，※基尔霍夫定律；

电流表，电压表，欧姆表；

惠斯通电桥；

补偿电路.

3. 物质的导电性

金属中的电流,欧姆定律的微观解释;

※液体中的电流,※法拉第电解定律;

※气体中的电流,※被激放电和自激放电(定性);

真空中的电流,示波器;

半导体的导电特性,p 型半导体和 n 型半导体,※P-N 结;

晶体二极管的单向导电性及其※微观解释(定性);

三极管的放大作用(不要求掌握机理);

超导现象,☆超导体的基本性质.

4. 磁场

电流的磁场,※毕奥-萨伐尔定律;

磁场叠加原理;

磁感应强度,磁感线;

匀强磁场;

长直导线、圆线圈、螺线管中的电流的磁场分布(定性);

※安培环路定理及在对称电流体系中的应用;

※圆线圈中的电流在轴线上和环面上的磁场;

☆磁矩;

安培力,洛伦兹力,带电粒子荷质比的测定;

质谱仪,回旋加速器,霍尔效应.

5. 电磁感应

法拉第电磁感应定律;

楞次定律;

※感应电场(涡旋电场);

自感和互感,自感系数;

※通电线圈的自感磁能(不要求推导).

6. 交流电

交流发电机原理,交流电的最大值和有效值;

☆交流电的矢量和复数表述;

纯电阻、纯电感、纯电容电路,感抗和容抗;

※电流和电压的相位差;

整流,滤波和稳压;

☆谐振电路,☆交流电的功率;

☆三相交流电及其连接法;

☆感应电动机原理;

理想变压器;

远距离输电.

7. 电磁振荡和电磁波

电磁振荡,振荡电路及振荡频率,赫兹实验;

电磁场和电磁波;

☆电磁场能量密度,能流密度;

电磁波的波速,电磁波谱;

电磁波的发射和调制,电磁波的接收,调谐,检波.

近代物理学

1. 光的本性

光电效应，※康普顿散射；

光的波粒二象性，光子的能量与动量.

2. 原子结构

卢瑟福实验，原子的核式结构；

玻尔模型；

用玻尔模型解释氢光谱；

※用玻尔模型解释类氢光谱；

原子的受激辐射，激光的产生（定性）和特性.

3. 原子核

原子核的尺度数量级；

天然放射性现象，原子核的衰变，半衰期；

放射线的探测；

质子的发现，中子的发现，原子核的组成；

核反应方程；

质能关系式，裂变和聚变，质量亏损.

4. 粒子

“基本粒子”，轻子与夸克（简单知识）；

四种基本相互作用；

实物粒子具有波粒二象性；

※物质波；

※德布罗意关系；

※不确定关系 $\Delta p\Delta x\geqslant\frac{h}{4\pi}$.

5. ※狭义相对论

爱因斯坦假设；

洛伦兹变换；

时间和长度的相对论效应，多普勒效应；

☆速度变换；

相对论动量，相对论能量，相对论动能；

相对论动量和能量关系.

6. ※太阳系、银河系、宇宙和黑洞的初步知识

参考文献

[1] 程稼夫.中学奥林匹克竞赛物理教程:力学篇[M].2版.合肥:中国科学技术大学出版社,2013.

[2] 程稼夫.中学奥林匹克竞赛物理教程:电磁学篇[M].2版.合肥:中国科学技术大学出版社,2014.

[3] 沈晨.更高更妙的物理:冲刺全国高中物理竞赛[M].4版.杭州:浙江大学出版社,2012.

[4] 舒幼生.奥赛物理题选[M].3版.北京:北京大学出版社,2017.

[5] 舒幼生.力学(物理类)[M].北京:北京大学出版社,2005.

[6] 赵凯华,罗蔚茵.新概念物理教程[M].北京:高等教育出版社,1999.

[7] 程守洙,江之永.普通物理学[M].7版.北京:高等教育出版社,2016.

[8] 江四喜.高中物理竞赛辅导教程:新大纲版[M].杭州:浙江大学出版社,2017.

[9] 江四喜.物理竞赛专题精编[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2013.

[10] 舒幼生,钟小平.新编高中物理竞赛培训教材[M].杭州:浙江大学出版社,2010.

[11] 郑永令.高中物理奥林匹克竞赛标准教材[M].北京:北京教育出版社,2004.

[12] 陈信义.大学物理教程[M].3版.北京:清华大学出版社,2005.

[13] 舒幼生,胡望雨,陈秉乾.物理学难题集萃:上册[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2014.

[14] 舒幼生,胡望雨,陈秉乾.物理学难题集萃:下册[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2014.

[15] 范小辉.新编高中物理奥赛指导[M].南京:南京师范大学出版社,2012.

[16] 沈克琦.高中物理学[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2015.