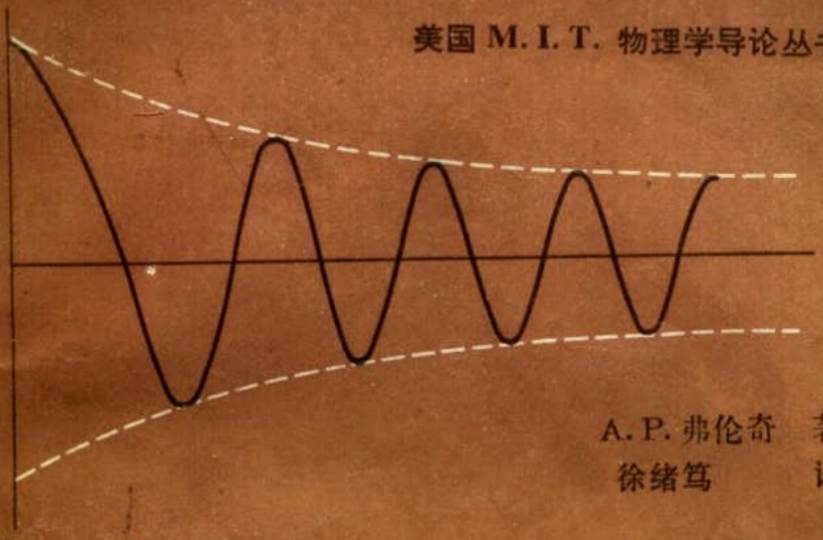
美国 M. I. T. 物理学导论丛书



A. P. 弗伦奇 著
徐绪笃 译

振动与波

人民教育出版社

O572.2-0
7

美国 M. I. T. 物理学导论丛书

振 动 与 波

A. P. 弗伦奇著
徐绪笃 译

1982.6.-7
藏
4012008

本书系根据美国 W. W. Norton & Company, Inc. 出版的 A. P. FRENCH 著 *Vibrations and Waves*(《振动与波》)一书的 1971 版译出的。它是美国麻省理工学院教育研究中心的《M. I. T. 物理学导论丛书》中的一卷。

本书是一本关于振动与波的入门书，大部分论述均限于力学系统。包括的内容有：周期振动及其叠加；物理系统的自由振动；受迫振动与共振；耦合振子及简正模；连续系统的简正模及傅里叶分析；前进波；边界效应和干涉。书中通过大量图象，对理论做了清楚的说明。每章后附有习题，书末有答案。

本书可作为高等学校物理课程的参考书，也可供有关科技人员参考。

美国 M. I. T. 物理学导论丛书

振 动 与 波

A. P. 弗伦奇著

徐绪笃 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.5 字数 249,000

1981 年 2 月第 1 版 1982 年 2 月第 1 次印刷

印数 00,001—10,500

书号 13012·0582 定价 0.92 元

序

麻省理工学院[M. I. T.]教育研究中心(前身为科学教育中心)的任务是,研究课程的改进,研究教学过程及其辅助设施,以及研究学习过程——其中主要是研究学院或大学水平的学生的学习过程。该中心是麻省理工学院于1960年设立的,主任是已故F. L. Friedman教授。自1961年以来,这个中心主要受到国家科学基金会的援助,同时也得到了凯特林基金会、壳牌石油公司基金会、维多利亚基金会、W. T. 格兰特基金会以及宾基金会的慷慨支持。

该中心的一项直接成果,就是编著一套由若干卷篇幅较短的书组成的麻省理工学院物理学导论丛书,其内容涉及基础物理的各个主要领域。丛书力求强调实验和直觉知识在建立物理理论中的相互影响。编者的意图是想使丛书为入门课程提供种种可能的基础,所以其内容为从重点强调的经典物理部分,一直延伸到体现相当份量的原子和量子物理部分。各卷书在论述的水平和风格上都力求一致,但并不企图把它们构成一个不可分割的整体;相反,每卷书都是按合理的自成体系的方式设计的,因而在许多不同类型的课程组织中,均可作为单个的组成部分使用。

本卷的内容,是想作为研究一般性振动与波动的入门,但几乎所有的讨论均局限于力学系统。因此除个别场合外,具备初等运动学和动力学方面的良好运算知识就够了。其所以决定对本书的范围作这样的限制,是由于本书在陈述上并非叙述性的而是定量的和解析性的。把电学和光学体系结合一起来讨论的吸引人的想法,对著者来说,一直是强烈的;但后来感到论题所涉及的大部分内容,均能以力学位移和标量波动方程非常简捷地表达出来,而对其它系统只要适时地给出一些暗示也就可以了。

至于数学基础，则设想学生已较好地掌握了微积分，从而能认出谐振子的牛顿定律表述乃是一个微分方程，并能顺利地证明它的解是用正弦式函数来表示的。本书在前阶段就引用复指数来分析振动系统，而偏微分方程则在相当后的阶段才作必要的引入。如果学生已预先在微积分课程中具有了微分方程的某些知识，那肯定是好事，虽然著者并不认为这是必要的条件。

本书与惯常的入门课程相比，较为强调了对简正模概念的介绍。著者相信，如正文所述，这样做能大大增进学生对下述问题的理解：连续体的动力学何以能与单个或几个粒子的动力学联系起来的。还有一点没明说，然而却是著者非常注意的一点：通过论述和运用一组简正模的诸特性，如正交性和完全性，当学生在以后的量子力学中再度遇到这些特性时，就会给他一种旧识重温的感觉。

虽然本书着重于解析的方法，但也致力于把理论跟实际现象的例子结合起来，尽可能展示出原始的数据和图象。著者力图使论点与"事实相符"的作法，成为这套丛书的一个共同特色。

如同本丛书其它各卷一样，这一卷也从许多师生的意见、批评和建议中获益甚多。特别要向塔夫脱大学的 J. R. Tessman 教授致谢，他深入地参与了我们这个物理学导论计划的最早期工作，并于 1963—1964 年间与著者一起，在麻省理工学院首次试教过某些部分。其后的许多撰写与重写部分，都曾同他详细讨论过。尤其是本卷现版第五章中引入的耦合振子和简正模，大部来自他在课堂上采用过的讲法。

感谢教育研究中心的职员协助了本卷的准备工作，特别要提到的是热心努力打出最后原稿的 M. Ransohoff，以及给图例提供许多说明并进行拍片的 J. Rosenfeld。

A. P. French

1970 年 7 月于麻省坎布里奇

目　录

序……V

第一章　周期运动……1

§1-1　正弦式振动……2

§1-2　简谐运动的描述……4

§1-3　旋转矢量表示法……6

§1-4　旋转矢量与复数……8

§1-5　引入复指数……11

§1-6　应用复指数……12

习题……14

第二章　周期运动的叠加……17

§2-1　一维振动的叠加……17

§2-2　两个同频率振动的叠加……18

§2-3　不同频率振动的叠加；拍……20

§2-4　多个同频率振动的叠加……25

§2-5　两个垂直振动的合成……27

§2-6　同频率的垂直运动……29

§2-7　不同频率的垂直运动；利萨如图形……33

§2-8　平行叠加与垂直叠加的对比……36

习题……37

第三章　物理系统的自由振动……39

§3-1　基本的质量-弹簧问题……40

§3-2　运用复指数求解谐振子方程……42

§3-3　弹性和杨氏模量……44

§3-4　浮体……48

§3-5　摆……50

§3-6　U形管中的水……52

§3-7　扭转振动……53

1982.6.7
图书馆
4012003

§3-8 “空气弹簧”……59
§3-9 含有重弹簧的振动系统……59
§3-10 自由振动的衰落……62
§3-11 非常大阻尼的效应……69
习题……70
第四章 受迫振动与共振……77
§4-1 谐和力作用下的无阻尼振子……78
§4-2 复指数方法用于受迫振动……82
§4-3 阻尼受迫振动……83
§4-4 变更阻力项的作用……89
§4-5 瞬变现象……93
§4-6 受迫振子吸收的功率……97
§4-7 共振举例:电共振(103)光学共振(107)核共振(109)核磁共振(111)……102
§4-8 非谐振子……112
习题……114
第五章 耦合振子及简正模……120
§5-1 两耦合摆……122
§5-2 对称考虑……123
§5-3 简正模的叠加……125
§5-4 耦合振子的其它示例……128
§5-5 简正频率的一般分析法……131
§5-6 两耦合振子的受迫振动及共振……134
§5-7 多个耦合振子……137
§5-8 N个耦合振子……138
§5-9 求N个耦合振子的简正模……141
§5-10 N个耦合振子简正模的性质……144
§5-11 纵振动……148
§5-12 N非常大……151
§5-13 晶体点阵的简正模……155
习题……157

第六章　连续系统的简正模　傅里叶分析……163
§6-1　紧张弦线的自由振动……164
§6-2　弦线上振动模的叠加……169
§6-3　紧张弦线的受迫谐振动……171
§6-4　棒的纵振动……173
§6-5　空气柱的振动……177
§6-6　气体的弹性……179
§6-7　简正模的全谱……182
§6-8　二维系统的简正模……184
§6-9　三维系统的简正模……192
§6-10　傅里叶分析……193
§6-11　傅里叶分析的实施……195
§6-12　简正模与正交函数……200
习题……201
第七章　前进波……205
§7-1　什么是波……205
§7-2　简正模与行波……206
§7-3　单一方向上的前进波……211
§7-4　具体媒质中的波速……214
§7-5　叠加……217
§7-6　脉冲波……220
§7-7　具有恒定形状的脉冲波之运动……228
§7-8　脉冲波的叠加……233
§7-9　色散；相速度与群速度……235
§7-10　截止现象……239
§7-11　机械波的能量……243
§7-12　波所输运的能量……247
§7-13　动量流和机械辐射压力……249
§7-14　二维及三维波……250
习题……252
第八章　边界效应和干涉……258
§8-1　脉冲波的反射……258

§ 8-2 阻抗；无反射端……265
§ 8-3 纵波与横波的对比；偏振……270
§ 8-4 二维波……271
§ 8-5 惠更斯-菲涅耳原理……272
§ 8-6 平面波的反射和折射……276
§ 8-7 多普勒效应以及有关的现象……280
§ 8-8 双缝干涉……286
§ 8-9 多缝干涉(衍射栅)……291
§ 8-10 单缝衍射……296
§ 8-11 真实缝系统的干涉图样……301
习题……305
参考书目提要……310
习题答案……315
索引……321

这些都是弹簧和有弹力的物体的现象，就我所知迄今它们尚未被简约成法则，故对它们的能力，以及一般来说对弹力的原因所作解释的全部尝试，都是很不充分的。

胡克 (R. Hooke)：《*De Potentia Restitutiva* (论回复力)》(1678 年)

第一章 周期运动

力学系统的振动或振荡，是整个物理学中最重要的研究领域之一。实质上，每个系统都具有振动的能力，而且大多数系统都能以多种多样的方式自由地振动。粗略地说，小物体的主要固有振动多半是急速的，而大物体的则多半是迟缓的。例如，蚊虫的翅膀每秒振动数百次，并发出能听得见的音调来。整个地球在经受了一次地震的颠簸之后，也会以大约每小时一次的回摆率继续振动。人体本身就是振动现象的一个宝库，正如一位作者所说的那样①：

> 总之，我们的心脏在跳动，我们的肺脏在摆动，当我们觉着冷的时候就颤抖，我们有时会打鼾，而我们所以能够听和说就因为耳鼓和喉头在振动。使我们看得见东西的光波需要振动。只有摆动双腿，我们才能走动起来。如果舌尖不摆动的话，我们就不能说出"振动"一词，……。就连组成我们自身的那些原子，也都在振动着。

上述这些现象所共有的一个特点，便是**周期性**。有一种方式

① 引自 R. E. D. Bishop: 《Vibration (振动)》(1965 年纽约 Cambridge University Press 版)。这本书特别对工程中的振动问题有生动而具魅力的普遍说明。

的运动或位移，它一次又一次地重复着。这种方式可以是简单的，也可以是复杂的；图 1-1 示出了两种振动情形的例子——第一种有比较复杂的循环，是一只猫心脏内压力变化的情形，而第二种几乎是纯正弦的曲线，是音叉的振动。在这两个图形中，水平轴都表示稳定的推进着的时间，因而能够定出相等的时间长度——周期 T 来，在一个周期之内，振动完成一个完全的循环。

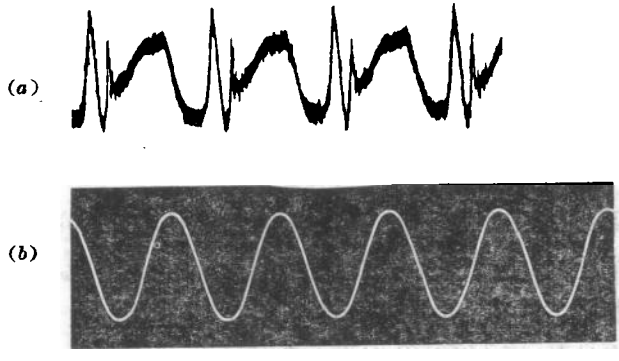


图 1-1 (a) 猫心脏内的压力变化。[仿自 Straub(叫 E. H. Starling): 《Elements of Human Physiology (人体生理学基础)》(1907 年伦敦 Churchill 版)。] (b) 音叉的振动。

在本书中，我们将研究多种方式的周期运动，并由此而推进到与之紧密相关的前进波现象。我们将从讨论振动的纯运动学描述开始。然后研究振动系统的某些动力学性质，而这些动力学特性将会使我们看到，振动运动乃是一个真正的物理问题，而并不仅仅是一种数学的练习。

§ 1-1 正弦式振动

我们的注意力将完全集中到图 1-1(b) 所例举的那种正弦式振动上去。这有两方面的原因，即物理的和数学的，而这两者对整个论题来说都是基础。物理方面的原因是，纯正弦式振动事实上

确实存在于各式各样的力学系统中，它起因于与离开平衡位置的位移成正比的回复力。如果位移足够小的话，这种运动几乎总是可能的。例如，若在弹簧上系一物体，则当物体离开平衡位置的位移为 x 时，作用于物体上的力就可写为

$$F(x)=-(k_1x+k_2x^2+k_3x^3+\cdots)$$

此处 k_1、k_2、k_3 等量是一组常数。而且我们总能找到 x 值的某个范围，使得在此范围内的 x^2、x^3 等项之总和，依据某种指定的标准（譬如 10^3 分之一或 10^6 分之一），与 $-k_1x$ 这项相比是可以略去不计的，除非 k_1 本身是零。若物体的质量为 m，且略去弹簧的质量，则物体的运动方程便是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k_1x$$

不难验明，满足此方程解的形式为

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{1-1}$$

式中 $\omega=(k_1/m)^{1/2}$。这一简短的讨论可以作为一个提示，即正弦式振动——简谐运动——最可能出现在微振动之中，并且一般说来，它仅是真实运动的一种近似，虽然也许是非常接近于真实运动的近似。

第二方面即数学方面的原因是，在法国数学家傅里叶（J. B. Fourier）1807 年发表的一个著名定理中，发现纯正弦式振动具有深远的重要性。按照傅里叶定理，任何以周期 T 规则地重复着的扰动，均可由周期为 T、$T/2$、$T/3$ 等值，且各有适当振幅值的一组纯正弦式振动来构成（或者说都能分解成这样的一组纯正弦式振动），即形成一个由基波及其全部谐波构成的无穷级数。虽然往后我们还要进一步讲述这个问题，但一开始还是让大家注意到傅里叶定理，为的是要澄清一下：对简谐运动的集中研究，并非是要限制我们讨论的范围或其适用性，相反，对于正弦式振动的透彻了

解，将会打开一切周期现象问题的大门。

§1-2 简谐运动的描述

由式(1-1)所描述的这种形式的运动，即简谐运动 SHM①，可用如图 1-2 所示的 x-t 图来表达。大家看得出来，任何这种正弦式扰动的特征是：

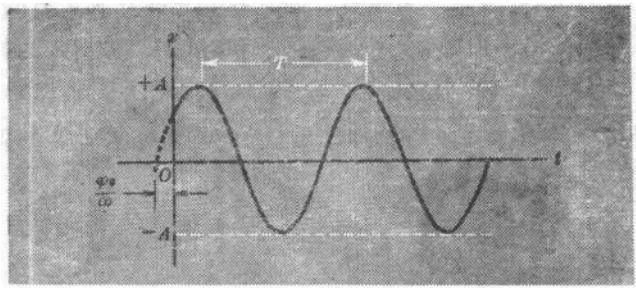


图 1-2 具有周期 T 及振幅 A 的简谐运动。

1. 它被限制在 $x=\pm A$ 的范围内。正量 A 就是运动的**振幅**。

2. 运动所具有的周期 T，等于相邻两最大值之间的时间，或更一般地说，是位移 x 和速度 dx/dt 都自相重复的两相邻时刻之间的时间。由给出的基本方程式(1-1)

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

可知，周期应该对应于正弦函数中的幅角增加 2π。于是便有

$$\omega(t+T)+\varphi_0=(\omega t+\varphi_0)+2\pi$$

因此得

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{1-2}$$

如果人们指出在 $t=0$ 时（就此问题而言，也可是其它指定时间）x 及 dx/dt 两者的数值，则此瞬时的情况就完全指明了。令该二量在特定时刻 $t=0$ 时分别由 x_0 及 v_0 所表示。于是便有下列等式：

① 我们将经常使用这种既方便而又广泛应用的缩写方法。

$$x_0 = A\sin\varphi_0$$

$$v_0 = \omega A\cos\varphi_0$$

若已知该运动由式(1-1)形式的方程所描述，则可用这两个关系式算得振幅 A 及角 φ_0(运动的初相角)为

$$A = \left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad \varphi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

这里假定已独立地知道了该运动的角频率 ω 值。

当式(1-1)成立时，它就规定着 x 在时间 t 的全部范围(从$-\infty$至$+\infty$)内随 t(看成是纯数学变量) 作正弦式的变化。由于任何真实振动都有个开始和终了，因此纵使振动在持续时是纯正弦式的，它也不能单独地由式(1-1)给出合适的描述。例如，一个简谐振动若开始于 $t=t_1$，而终止于 $t=t_2$，那么用数学语言来完整地描述它，总共就需要三段陈述：

$$-\infty < t < t_1, \quad x = 0$$

$$t_1 \leqslant t \leqslant t_2, \quad x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$t_2 < t < \infty, \quad x = 0$$

在完全描述一个物理上真实谐振动时，对式(1-1) 的有效性所加的这种限制，应该始终牢记在心上。这并不是数学上的诡辩。从严格的**物理**标准看来，一个振动事实上是不会呈现为纯正弦式的，除非它延续了非常多个周期。举例来说，一个作如图 1-1(b) 那样振动的音叉发出了声音，假定我们让耳朵只接收这声音中一个完整的循环，则听觉效果就决不会是该音叉特征频率的纯音，而是一种混杂的刺耳声①。更细致地讨论这个现象，现在还为时过早，而且

① 用一台自动的波分析器，就能更加令人信服地把这种声音的复杂性显示出来，因为大家知道，我们所听到的声音，并不是进入耳内声波的严格复制品，而是耳朵自身的振动附加了畸变。例如，可参阅 W. A. Van Bergeijk, J. R. Pierce, E. A. David: 《Waves and the Ear (波动与耳朵)》[1960 年纽约 Doubleday (Anchor Book)版]。

亦不恰当；这又是一个傅里叶分析的问题。目前重要的是，在于承认实际物理体系的简谐振动应该是持续长久的，即应该呈现出通常所说的振动的稳恒状态，这样，式(1-1)本身才能用作该体系的一种可接受的描述。

§1-3 旋转矢量表示法

描述简谐运动最有用的方法之一，便是把它看成匀速圆周运动的投影。例如，设想一个半径为 A 的盘子，以 ω(rad/s)的角频率绕竖直轴旋转着。假定在盘的边缘上附有一个栓钉 P，并且假定水平方向的平行光束，把栓钉的影子投射在一个竖直的屏上，如图1-3(a)所示。于是这个影子便以 $2\pi/\omega$ 为周期和 A 为振幅，在屏

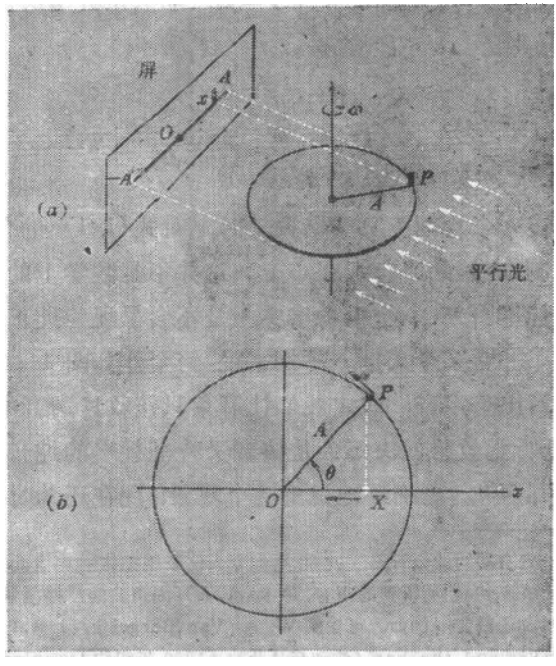


图 1-3 简谐运动作为匀速圆周运动在其自身平面内的投影。

上沿着一条水平线作简谐运动。

更抽象地说，我们可以把 SHM 想象为匀速圆周运动的**几何投影**。所谓几何投影，意即从 P 点的瞬时位置向给定直线作垂线的过程。图 1-3(b)表示的是，可以把旋转矢量 OP 的端点投影在圆的一个直径上的情形。特殊地说，我们选择水平轴 Ox 作为实际振动所处的直线。这样，P 点的瞬时位置，便由恒定的长度 A 和变化的角度 θ 来规定。倘若取反时针方向为正向，那就跟惯用的极坐标相符了；因而 θ 的实际值可写为

$$\theta=\omega t+\alpha$$

此处的 α 乃是 θ 在 $t=0$ 时的值。

按上所述，实际运动的位移 x 便由下式给出：

$$x=A\cos\theta=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{1-3}$$

表面上看来，此式跟原先描述简谐运动的式(1-1)不同。然而，使它们相等所需要的条件是很易于满足的，因为对任何 θ 角都有

$$\cos\theta=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

而使式(1-1)与(1-3)相等就要求

$$A\sin(\omega t+\varphi_0)=A\cos(\omega t+\alpha)$$

即

$$\sin(\omega t+\varphi_0)=\sin\left(\omega t+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

当两角相等或相差 2π 的整数倍时，两角的正弦就相等。现取这些可能性中最简单的情形，于是可使

$$\varphi_0=\alpha+\frac{\pi}{2} \tag{1-4}$$

服从上述条件则式(1-1)和(1-3)等效，这就容许我们在描述任何简谐振动时，可以采用正弦或余弦函数。然而在今后的许多分析中，在利用匀速旋转矢量在平面极坐标参考轴上的投影来

描述位移时，选定余弦的形式将被证明是极为有利的。充分地运用这个手段，要牵连到某些数学上的概念，而这便是下面几节的课题。

§1-4 旋转矢量与复数

采用匀速圆周运动作为描述SHM的纯几何学基础，它所包括的东西比前面已介绍的还多些。前面提出的这个圆周运动，可以在圆平面的任一直线上定出具有振幅A及角频率ω的SHM来。特殊地说，倘若设想有个y轴垂直于实际运动的真实物理轴Ox，那么除沿x的真实振动外，旋转矢量OP还给我们在y上定出一个相伴随的正交振动来，致使

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t+\alpha) \\ y &= A\sin(\omega t+\alpha) \end{aligned} \tag{1-5}$$

而且，纵使这个沿y的运动实际上并不存在，我们仍可精确地继续推演下去，犹如始终在处理一个质点作式(1-5)所描述的二维运动似的，只是在最后，我们仅仅把x分量抽出来就行了，因为它才是所述运动具有物理意义的结果。

这里有一种毫不含混的办法，可以建立和保持该运动物理上的真实与非真实分量之间的区别。设矢量OP(图1-4)具有平面极坐标(r,θ)。那么其直角(笛卡儿)分量(x,y)，便由下式所规定：

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

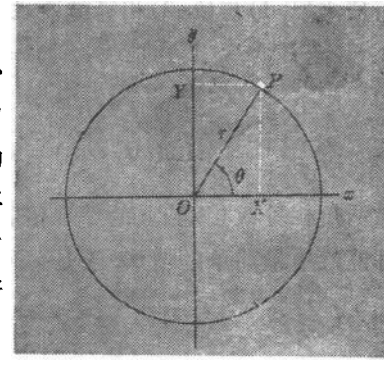


图1-4 旋转矢量的笛卡儿坐标和极坐标表示法。

这样，完整的矢量r，就能表示成这两个正交分量的矢量和。如果

采用通常的矢量分析表示法，就得引入单位矢量 $\mathbf{i}$ 来标明沿 x 的位移，以及单位矢量 $\mathbf{j}$ 标明沿 y 的位移。因此可以使

$$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y$$

然而，在无损于信息内容的情况下，可采用下列方程来定义矢量：

$$\mathbf{r}=x+jy \tag{1-6}$$

现在，有必要作一个开始的规定，由此得知式（1-6）的含义如下：

1. 没有任何限定因子的位移 x，其方向是平行于 x 轴的。

2. 项 jy，作为一个规定，可当成是平行于 y 轴方向所形成的位移。其实，习惯上把常用的矢量符号也一齐废去而引入一个量 z，把它理解为 x 加上 jy 的结果，亦即等同于上面所定义的 $\mathbf{r}$。于是有

$$z=x+jy \tag{1-7}$$

我们现在来扩充对符号 j 的说明：作为一项规定，j 可当成是把它后面的任何量作 90° 反时针旋转的符号。试考察下面的特例：

（a）欲构成量 jb，就在 x 轴上截取一段距离 b 并转过 90°，从而在 y 上获得一长度为 b 之位移。

（b）欲构成量 j^2b，则首先按上法获得 jb，再将它继续转过 90° 即得，也就是把 j^2b 等同于 $j(jb)$。于是，这马上便导致了一个重要的恒等式。朝相同方向连续旋转两个 90°，就把在正 x 方向的位移 b，变换成位移 $-b$ 了。这就建立起一个代数的恒等式：

$$j^2=-1 \tag{1-8}$$

于是，从代数上来说，量 j 本身可视为 -1 的一个平方根。（而 $-j$ 则是另一个平方根，它同样满足上面的方程。）①

① 对 $\sqrt{-1}$ 使用符号 j，是颇为自然地出自我们准几何学的考虑。可是在一些数学课本中，你会经常发现那儿使用的符号却是 i。物理学家和工程师们倾向于采用符号 j，而把 i 这个符号留给电流用——这一考虑并非毫无意义，因为我们在此所阐明的数学技术，在电路问题中有它一些非常重要的应用。

(c) 设矢量 z 具有长度为 a 的 x 分量和长度为 b 的 y 分量[图 1-5(a)],则 jz 为何？我们有

$$z=a+jb$$

$$jz=ja+j^2b$$

$$=ja+(-b)$$

上式右方诸新矢量分量之和示于图 1-5(b)。可见，处理的办法是一致的！合矢量 jz，恰是由原矢量 z 再转过 90° 而得到的。

无论你以前是否接触过上述这种分析，你应能看出我们正走在几何与代数之间的分界线上，或更恰当地说，走在分界的桥上。象在例(c)中假定的那样，如果量 a 及 b 均为实数，则组合量 $z=a+jb$ 就是所谓的复数。但按几何学的语言来说，它就应看成是沿着某个轴的一段位移，且此轴与 x 轴之交角为 θ，使得 $\tan\theta=b/a$，这在图 1-5(a)中看得很清楚。

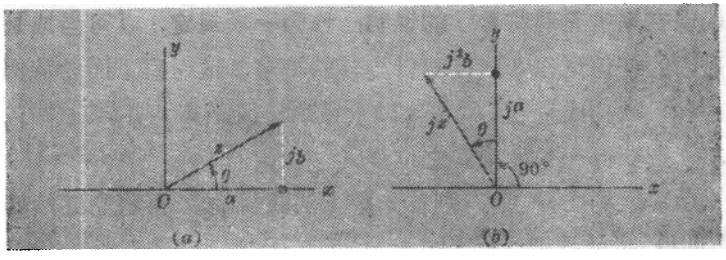


图 1-5 (a) 矢量在复数平面上的表示法。(b) 用 j 乘 z 相当于旋转 90°。

在这种用复数表示矢量的方法中，为了分析简谐运动，我们有一种选出与物理上有关部分的自动方法。如果用复数去求解振动问题，若所得到的最后结果具有 $z=a+jb$ 的形式，且 a 及 b 均为实数，那么量 a 就是所求的量，而 b 则可以弃去。

仅具有 jb 形式的量(b 为实数)，叫做纯虚数。从下述的数学观点看来，这也许是个不适宜的词儿。因为在把数的概念从实数扩展到复数时，出现了“虚”分量 jb 和实分量 a 等同的状况。可

是，当把它用来分析一维振动时，正如大家业已看到的，这样的命名，跟假想的二维运动在物理上的真实与非真实部分，倒是完全一致的。

§1-5 引入复指数

上节的讨论，还不能视为对先前的分析增添了很多的东西。但现在可以来讨论数学函数这个主要的角色了，本节的目标即在于此。这就是复指数函数，或说得更具体些，此指数函数中的指数就是上节末尾所讲的那种数学上的虚数。引用这个函数后，我们将会发现：我们这时所作的尝试，与处理振动问题时所用方法相比，常常会有很多好处。这些好处，并不会立即全都显示出来，但在你更深入地探讨这个论题时，你便会愈来愈多地感受到这一点。

我们从正弦及余弦函数的级数展开式开始：

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\cdots \tag{1-9}$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots \tag{1-10}$$

这些展开式，如果你原来不熟悉的话，借助于泰勒(Taylor)定理就能容易地得出①。

现在让我们来构成下列的组合：

$$\cos\theta+j\sin\theta=1+j\theta-\frac{\theta^2}{2!}-j\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\cdots \tag{1-11}$$

---

① 依据泰勒定理：

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots$$

所以，

$$\sin\theta=\sin 0+\theta\cos 0+\frac{\theta^2}{2!}(-\sin 0)+\frac{\theta^3}{3!}(\cos 0)\cdots$$

$$\cos\theta=\cos 0+\theta(-\sin 0)+\frac{\theta^2}{2!}(-\cos 0)+\frac{\theta^3}{3!}(\sin 0)\cdots$$

大家知道 -1 可表述成 j^2，故上式可改写为

$$\cos\theta+j\sin\theta=1+j\theta+\frac{(j\theta)^2}{2!}+\frac{(j\theta)^3}{3!}+\cdots+\frac{(j\theta)^n}{n!}+\cdots \quad (1\text{-}12)$$

然而此式的右方，恰是指数为 $j\theta$ 的指数级数。因此，我们能够写出下列的恒等式：

$$\cos\theta+j\sin\theta=e^{j\theta} \quad (1\text{-}13)$$

这是一个非常戏剧性的结果，从数学上来说，它给平面几何(由三角函数表达)和代数(由指数函数表达)提供了一个清晰的联系。R. P. 费因曼(R. P. Feynman) 曾称其为“令人惊异的珍宝……数学中最非凡的公式”①。此式是欧勒(L. Euler) 于 1748 年建立的。

让我们来陈示这一结果的几何特性。采用“实”轴 Ox 及“虚”轴 Oy(图 1-6)，我们画 OA 的长度等于 $\cos\theta$，AP 的长度等于 $\sin\theta$。它们的矢量和就是 OP；它明显地是个**单位长度**，且跟 x 轴成 θ 角。更一般地说，可用 $e^{j\theta}$ 去乘任何复数 z，根据几何术语来描写就是，使代表 z 的那个矢量，沿着正方向转过 θ 的角度，但不改变其长度。(练习：**试证明之**。)

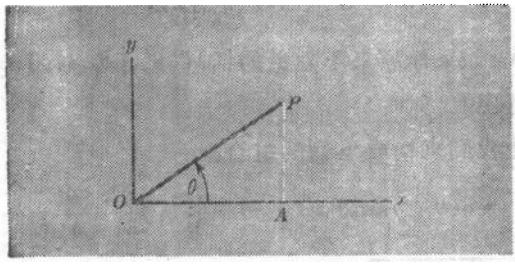


图 1-6　欧勒关系式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$ 的几何解释。

§ 1-6　应用复指数

为什么说，引进式(1-13) 对振动分析是一项如此重要的贡献

① 见 R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands: 《Feynman Lectures on Physics(费因曼物理讲义)》第一卷(1963 年麻省里丁城 Addison-Wesley 版)。

呢？主要原因在于指数函数的特殊性质——每进行一次微分或积分之后，它都能保持原形不变，而我们将要研讨的问题、都正是些含有周期性位移以及这些位移对时间之微商的问题。象常常碰到的那样，如果基本的运动方程含有正比于速度和加速度、以及位移本身这样的一些项时，那么，采用简单的三角函数去描述运动，就会导致一个由正弦和余弦项组成的麻烦的混合体。例如，若

$$x=A\cos(\omega t+\alpha)$$

则

$$\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 A\cos(\omega t+\alpha)$$

另一方面，如果我们采用组合 $x+jy$ 来计算，而 x 及 y 如式(1-5)给出的那样，则有

$$z=A\cos(\omega t+\alpha)+jA\sin(\omega t+\alpha)$$

即

$$z=Ae^{j(\omega t+\alpha)}$$

其中

$$x=z \text{ 的实部}①$$

于是

$$\frac{dz}{dt}=j\omega Ae^{j(\omega t+\alpha)}=j\omega z$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(j\omega)^2Ae^{j(\omega t+\alpha)}=-\omega^2 z$$

这三个矢量分别用三个图形示于图 1-7 中。因为它们所描述的是三种不同的物理量：位移、速度、加速度。可以看出，每一图形中

① 经常缩写成 Re(z)。

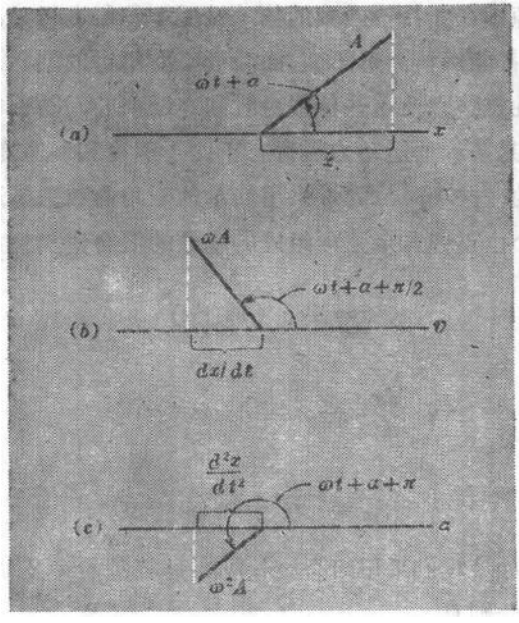


图 1-7 (*a*) 位移矢量 z 及其实数投影 x。(*b*) 速度矢量 dz/dt 及其实数投影 dx/dt。(*c*) 加速度矢量 d^2z/dt^2 及其实数投影 d^2x/dt^2。

物理上有关的分量，就是所讨论矢量的实数分量；其周相关系是一目了然的，因为已知每个因子 j 的意思，就是在周相角上超前 $\pi/2$。这是一个非常浅显的例子，不能真正显示出此方法的威力，不过我们马上就要涉及到内容更为充实的应用。

习　题

1-1　今有由方程 $z=z_1z_2$ 所规定的一矢量 z，其中 $z_1=a+jb$，$z_2=c+jd$。

(*a*) 试证 z 的长度是 z_1 及 z_2 长度的乘积。

(*b*) 试证 z 跟 x 轴的交角，是 z_1 及 z_2 分别与 x 轴交角的和。

1-2　今有由方程 $z=z_1/z_2(z_2\neq 0)$ 所规定的一矢量 z，其中 $z_1=a+jb$，$z_2=c+jd$。

(*a*) 试证 z 之长度是 z_1 及 z_2 长度之商。

(*b*) 试证 z 与 x 轴的交角，是 z_1 及 z_2 分别与 x 轴交角之差。

1-3 试证：用 $e^{j\theta}$ 去乘任何复数 z 可用几何语言表述为，使代表 z 的那个矢量，沿着正方向转过 θ 角度，但不改变其长度。

1-4 (*a*) 若 $z=Ae^{j\theta}$，推导 $dz=jzd\theta$，且在矢量图中解释此关系式的意义。

(*b*) 试求矢量 $(2+j\sqrt{3})$ 及 $(2-j\sqrt{3})^2$ 的大小及方向。

1-5 将 $e^{j\theta}$ 对 θ 连续求微商时，只需将其乘以 j 就行了，即

$$\frac{d}{d\theta}(Ae^{j\theta})=jAe^{j\theta}$$

应用正弦式表达式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，证明此规则成立。

1-6 已知欧勒关系式 $e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$，求

(*a*) $e^{-j\theta}$ 之几何表达式。

(*b*) $\cos\theta$ 之指数表达式。

(*c*) $\sin\theta$ 之指数表达式。

1-7 (*a*) 运用合适的级数，验证公式 $\cos\theta=(e^{j\theta}+e^{-j\theta})/2$ 及 $\sin\theta=(e^{j\theta}-e^{-j\theta})/2j$。

(*b*) 运用 xy 平面上的矢量图，以几何的方法显示上述关系式。

1-8 运用 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 的指数表达式，证明下列三角恒等式：

(*a*) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，(*b*) $\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos2\theta$

(*c*) $2\sin\theta\cos\theta=\sin2\theta$

1-9 一货物由数学家定出的价值是 j^j 元，你愿意付两角钱买它吗？(记住，$\cos\theta+j\sin\theta=e^{j\theta}$)

1-10 试证明微分方程 $d^2y/dx^2=-ky$ 具有的解是

$$y=A\cos kx+B\sin kx$$

式中 A 及 B 是任意常数。再证此解能写成如下的形式：

$$y=C\cos(kx+\alpha)=C\mathrm{Re}[e^{j(kx+\alpha)}]=\mathrm{Re}[(Ce^{j\alpha})e^{jkx}]$$

且将 C 及 α 表示为 A 及 B 的函数。

1-11 系于弹簧末端的一物体，以 5cm 的振幅及 1Hz(周/秒)的频率振动着。在 $t=0$ 时，物体处于平衡位置($x=0$)。

(*a*) 求描述物体位置的各种可能方程，位置应是时间的函数，且具有 $x=A\cos(\omega t+\alpha)$ 的形式，并给出 A、ω 及 α 的具体数值。

(*b*) 在 $t=8/3$ s 时，则 x、dx/dt 及 d^2x/dt^2 各为何值？

1-12　一质点以匀速率 50cm/s 作圆周运动。它绕行一次完整行程的周期是 6s。在 $t=0$ 时，质点与圆心的连线跟 x 轴成 30° 的交角。

(*a*) 求质点的 x 坐标方程，坐标应是时间的函数，具有 $x=A\cos(\omega t+\alpha)$ 的形式，并给出 A、ω 及 α 的具体数值。

(*b*) 求 $t=2$s 时的 x、dx/dt 及 d^2x/dt^2 值。

"……那动荡起伏哟，各条道路皆自由——令我向往。"

M. Barsley (1937 年)：《*On his Julia, walking* (他的朱丽雅之遭遇)》(根据 R. Herrick 的诗)

第二章　周期运动的叠加

§2-1　一维振动的叠加

在许多物理场合中，同一系统会同时受到两个或多个谐振动的作用。这样的例子，在声学中特别普遍。留声机的钢针、传声器的膜片或者人的耳鼓膜，通常就受到这些谐振动的某种复杂组合的作用，其总效果仍是位移为时间之某种形式的函数。我们将考察这种组合过程的某些特殊情形，它们都遵从下述很基本的假定：

两个或多个谐振动之合量，就是这些单个振动的和。在目前的讨论中，我们是把它当作一个纯数学问题来处理的。不过，这终究会变成一个**物理**问题：两个一起作用着的扰动所产生之位移，是否等于它们单独产生的位移之直截了当的叠加呢？对此，答案可以是或否，这要依位移是否跟产生它的力严格地成正比而定。假如简单的相加能很好地成立，那就称此系统为**线性的**，我们的大多数讨论即限于这样的系统。目前，如刚才说的，我们正专注于两个或多个位移(均为时间之正弦式函数)相加的纯数学问题；这里并不涉及结果的物理适用性问题。

§2-2 两个同频率振动的叠加

设有两个由下式所描述的 SHM:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$$

它们的组合即为

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \qquad (2\text{-}1)$$

将此位移表述成一个单一的谐振动

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

是可能的。描述 SHM 的旋转矢量法，为用几何方法来求得这项结果提供了一个非常好的途径。在图 2-1(*a*)中，令长度为 A_1 的旋转矢量 OP_1，在时间 t 时与 x 轴成$(\omega t + \alpha_1)$的交角，令长度为 A_2

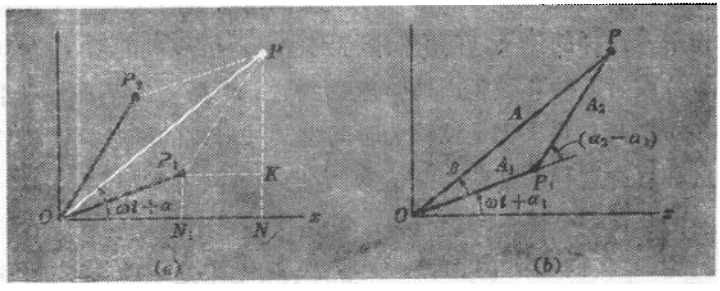


图 2-1 (*a*) 两个同周期旋转矢量的叠加。 (*b*) 用以作出合旋转矢量的矢量三角形。

的旋转矢量 OP_2 之交角为$(\omega t + \alpha_2)$。根据矢量加法的平行四边形定律可知，它们的和即是矢量 OP。由于 OP_1 及 OP_2 以相同的角速度 ω 旋转，故可把平行四边形 OP_1PP_2 当成一个刚性的图形，整个地以同样的速率旋转着。矢量 OP 也能从 OP_1 及 P_1P 的矢量和求得；因为 P_1P 是跟 OP_2 相等的。由于$\angle N_1OP_1 = \omega t + \alpha_1$ 以及 $\angle KP_1P = \omega t + \alpha_2$，故 OP_1 及 P_1P 之夹角恰为 $\alpha_2 - \alpha_1$。因此有

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)$$

若矢量 OP 与矢量 OP_1 之夹角为 β [见图 2-1(b)]，则

$$A\sin\beta=A_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)$$

合振动的周相常数 α 由下式给出：

$$\alpha=\alpha_1+\beta$$

采用复指数的形式，可以很直接地得到同样结果。旋转矢量 OP_1 及 OP_2 由下列方程所描述：

$$z_1=A_1e^{j(\omega t+\alpha_1)}$$

$$z_2=A_2e^{j(\omega t+\alpha_2)}$$

故其合量为

$$z=z_1+z_2=A_1e^{j(\omega t+\alpha_1)}+A_2e^{j(\omega t+\alpha_2)}$$

我们来看看采用指数形式的好处。这里我们可以从中提出公因子 $\exp j(\omega t+\alpha_1)$，于是有

$$z=e^{j(\omega t+\alpha_1)}[A_1+A_2e^{j(\alpha_2-\alpha_1)}] \tag{2-2}$$

记住 $e^{j\theta}$ 只是一个进行 θ 角正旋转的表示，所以方括号内的两项之和，就意味着长度为 A_2 的矢量，是以 $(\alpha_2-\alpha_1)$ 的交角跟长度为 A_1 的矢量相加的；而前面的因子 $\exp[j(\omega t+\alpha_1)]$ 则告诉我们，这整个的图形被转到了如图 2-1(b) 所示的方位。倘若不是利用了这些几何学的技巧，那么，对式(2-1)中之两项进行求和的任务，就会是既麻烦而又非常乏味的。

一般说来，合扰动的 A 及 α 值已不能再简化了，但两个振幅相同的特殊情形却是值得注意。若把两振动间的**周相差**写成 δ，则稍微检视一下图 2-1(b)中矢量三角形的几何关系，便可得到下列结果：

$$\beta=\frac{\delta}{2}$$

$$A=2A_1\cos\beta=2A_1\cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{2-3}$$

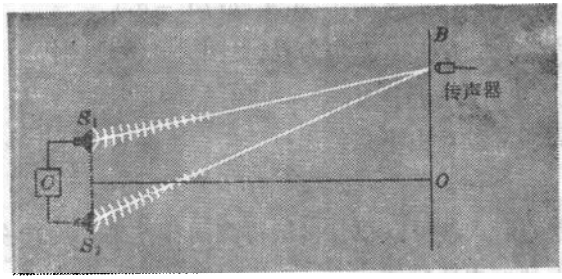


图 2-2　在两扬声器所发信号的叠加中，探测周相差为传声器位置之函数的仪器配置图。

这种叠加的一个典型情形示于图 2-2 中，两个等同的扬声器为同一个正弦信号发生器所策动，其声振动被相当远处的一个传声器所拾取。若传声器顺着 OB 线移动，则周相差 δ 便从 O 处的零值起，稳定地增加起来。如果声波的波长远小于扬声器间的距离，那么，合振幅 A 就会在 O 和 B 之间的一些点处降为零，而在诸零值之间的中点处①，达到可能的最大值 $2A_1$。（在第八章中将对这些情况作更详细的讨论。）

§2-3　不同频率振动的叠加；拍

设想有两个振动，其振幅 A_1 和 A_2 不同，且角频率 ω_1 和 ω_2 也不同。显然，这跟上节的例子不同，这里两振动间的周相差是连续变化的。一般说来，在这种情况下标明非零的初周相差已无重大意义了。因此，为使数学简化，可假定两振动之初周相均为零，从而可写出

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

它们在某任意时刻的合位移(OX)，示于图 2-3 中。合矢量的长度

① 确切地说，是在相邻的两个零值之间的中点处。——译者注。

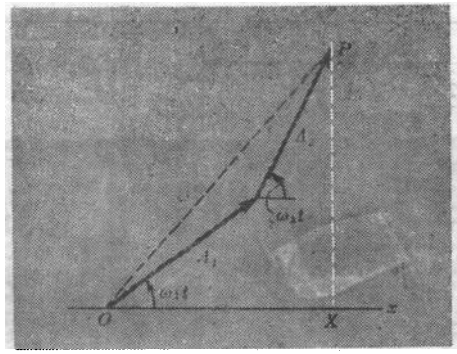


图 2-3　不同周期之旋转矢量的叠加。

OP，显然应始终介于 A_1 及 A_2 的和与差之间；而位移 OX 本身的量值，则介于零与 A_1+A_2 之间。

除非 ω_1 及 ω_2 具有某种简单的关系，否则合位移便是时间的一个复杂函数，也许甚至会达到永不重复自己的地步。合运动具有任何真正周期性的条件是，分运动的周期应是可公度的，亦即存在两个整数 n_1 及 n_2，使得

$$T=n_1T_1=n_2T_2 \tag{2-4}$$

合运动的周期，便是在采用 n_1 及 n_2 的最小整数值写出上面这个关系时，所得出的 T 值①。

纵使两周期或频率能够表达成相当小的整数之比，但运动的一般图象也并不特别简单。图 2-4 示出的两个正弦式分振动，其频率分别为 450 及 100Hz。合振动重复的周期则为 0.02(s)，这是根据式(2-4)，从条件

$$T=\frac{n_1}{450}=\frac{n_2}{100}$$

中推算出来的，此处要求 $n_1=9, n_2=2$。

① 举例说，若比值 ω_1/ω_2 为无理数(譬如$\sqrt{2}$)，则无论经过多么长的时间，位移的图样也不会有重复出现的时候。

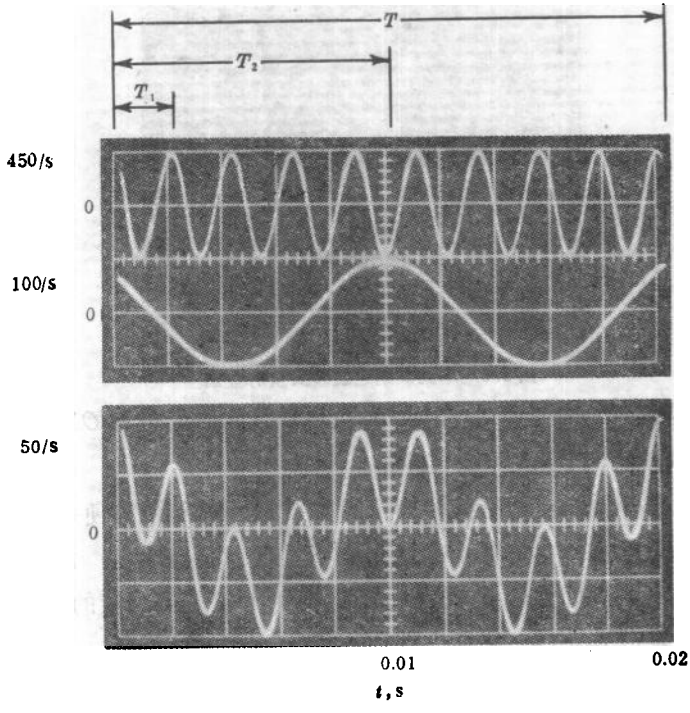


图 2-4　具有可公度周期($T_1=1/450$s, $T_2=1/100$s)的两正弦式曲线的叠加。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

在由两个可公度周期构成的这类振动里，合振动的图象，显著地依赖于分振动的相对初周相，图 2-5(a) 和(b)示出了这种效应。大家看到，两幅图都使用了具有给定振幅及频率值的分振动，仅仅是两种情形下的周相关系不同而已。饶有兴味的是，若它们是落于耳鼓膜上的空气振动，则听觉对这两种组合产生的效应却几乎是分辨不清的。看来，人耳对混合谐振动中的周相是相当不敏感的，这时起主要作用的是振幅和频率。当然，如果不同的周相关系导致了极不相同的波形，那也会产生极为不同的听觉效应；当以特定的周相关系参与叠加的频率，不只是两个而有许多个的时候，就

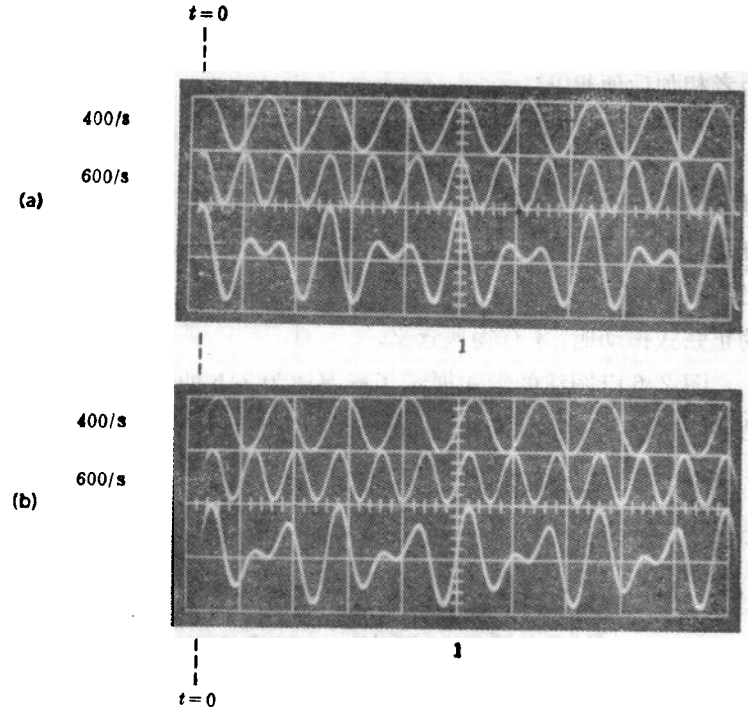


图 2-5 （*a*）具有可公度频率 $400s^{-1}$ 及 $600s^{-1}$ 的两正弦式曲线的叠加，它们的最大值于 $t=0$ 时相重合。（*b*）还是同样两曲线的叠加，但它们的零值在 $t=0$ 时相重合。（麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。）

会出现这样的情形。

倘若两 SHM 的频率非常接近，合成的扰动便呈现出所谓**拍**的现象。这种现象可描述如下：合成的振动基本上是一种频率等于两个分振动频率的平均值，而振幅则是随时间呈周期性变化的扰动。合振动每变一周就包含着若干周的基本振动。

最易于分析的拍效应，是考虑下面两个相同振幅的 SHM 的相加：

$$x_1 = A\cos\omega_1 t$$

$$x_2 = A\cos\omega_2 t$$

两者相加后便得①

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \tag{2-5}$$

显然，作为一个纯数学结果，此种加法适用于 ω_1 及 ω_2 的**任何**值。可是，用它来描写拍现象，则仅当 $|\omega_1-\omega_2| \ll \omega_1+\omega_2$ 时，亦即在相当数目的周数内，振动近似于具有恒定振幅和 $(\omega_1+\omega_2)/2$ 角频率的正弦式振动时，才有物理意义。

图 2-6 以图线的形式展示了频率比为 7:6 的两个振动合成的结果。这已差不多是能使叠加归于拍振动的最大比值了。可以看

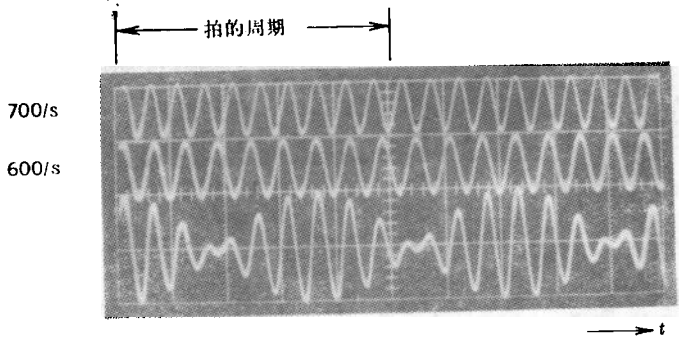


图 2-6　具有近乎相等频率 ($600s^{-1}$ 及 $700s^{-1}$) 的正弦曲线之叠加以产生拍。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

① 你会想起下列的三角公式:

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$

$$\cos(\theta-\varphi) = \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi$$

因而

$$\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi) = 2\cos\theta\cos\varphi$$

在此式中，令 $\theta+\varphi=\alpha$，$\theta-\varphi=\beta$，于是得

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

对我们所讨论的情形来说，可使 $\alpha=\omega_1 t$，$\beta=\omega_2 t$。

出，能够包住合位移的包络线，是由下列的一对方程来规定的：

$$x=\pm 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) \tag{2-6}$$

这是因为，式(2-5)中振动得快的因子 $\cos(\omega_1+\omega_2)t/2$ 总处于±1的限度之内，故式(2-6)就描述了该振动中较慢的振幅调制。对照图 2-6 即可看出，调制扰动的两个相邻零值之间的时间，就是式(2-6)所描述的调制因子的**半周期**，亦即该时间等于 $2\pi/(|\omega_1-\omega_2|)$。由此可知，听觉所察觉的(譬如来自两个音叉的)**拍频**，就只是该两个分频率之差，而不是此值的一半，正象刚一看见式(2-5)时想到的那样。就拿一个具体的情形来说，当两个并排放着的音叉在进行每秒 255 及 257 次的振动时，它们的组合效应，便是每秒出现两次最大响度的中音C (每秒振 256 次)。

§2-4 多个同频率振动的叠加①

上面所讲的这些处理办法，不难推广到任意多数目的振动叠加中去。普遍的情形并不是很重要的，但有一种特殊的情况，是极有兴趣又是应用很广的。这就是一些SHM的叠加，它们的频率和振幅都一样，且相继两振动的周相差也都相同。这个问题，跟光学及别的波动过程中的多源干涉效应的分析，有着特殊的关系。

这情形示于图 2-7 中。假定有N个分振动，每个振动都具有A_0的振幅，而在周相上却与下一个振动相差角度δ。为简便计，令第一个分振动的方程为

$$x=A_0\cos\omega t$$

则合扰动的方程将是

$$X=A\cos(\omega t+\alpha)$$

从图 2-7 的几何图形可以看出，这些分矢量构成了一个(不完整

① 略去此节也无损于课文的连续性。

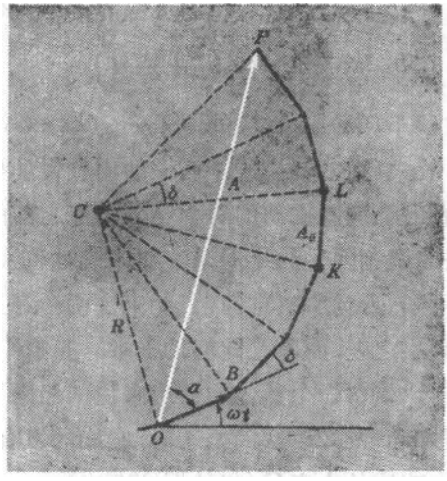


图 2-7　几个周期相同、周相差增量相同的旋转矢量之叠加。

的)正多边形的各个相继边。任何这样的多边形,均可想象为内接于一个圆内,此圆具有某一半径 R,圆心为点 C。多边形所有的角(例如 K 及 L 点)都处在圆上,而且由任一振幅 A_0(例如 KL)对 C 所张的角,均等于相邻矢量间的夹角 δ。因此,合矢量 A 对 C 所张的总角度 OCP 就等于 $N\delta$。这样,便可写出下列的几何关系:

$$A=2R\sin(N\delta/2)$$

$$A_0=2R\sin(\delta/2)$$

因而

$$A=A_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}, \tag{2-7}$$

至于周相角 α,乃是合振幅 A 相对第一个分矢量所旋转的角度,即

$$\alpha=\angle COB-\angle COP$$

而

$$\angle COB=90°-\frac{\delta}{2}$$

$$\angle COP=90°-\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

因此

$$\alpha=\frac{(N-1)\delta}{2} \tag{2-8}$$

所以在 x 轴上的合振动，是由下式所描述的：

$$X=A_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\cos\left[\omega t+\frac{(N-1)\delta}{2}\right] \tag{2-9}$$

此式是分析衍射光栅性能的基本方程，而光栅乃是一种光学器件，它能从一束光中获得很多个周相差相等的相同光扰动。

§2-5 两个垂直振动的合成

虽然在进行分析时，曾引入了平面旋转矢量的辅助概念，使得真实的运动可由该矢量在某个特定方向上的投影来表达，但是迄今所讨论的一切，都只是物理上的一维谐运动。现在将要讨论的则是**本质上不同**的问题：把发生在相互垂直方向上的两个真实谐振动组合起来，因而真实的合运动乃是真正的二维运动。这是个颇具物理兴趣的问题，而且也适于在此讨论，因为分析这问题所用的技术，与本章前面所用的一样。我们即将讨论的这种形式的运动，还可以直截了当地推广到三维的振动中去，而这种振动，一般说来，例如可设想为发生在本质上是三维结构的晶体点阵中受到弹性束缚的一个原子身上。

现假定一质点同时经历着下述的位移：

$$\begin{aligned} x&=A_1\cos(\omega_1 t+\alpha_1)\\ y&=A_2\cos(\omega_2 t+\alpha_2)\end{aligned} \tag{2-10}$$

重复运用旋转矢量技术，就能勾画出这个运动来。具体的作法示于图 2-8 中。首先画出两个圆来，其半径分别为 A_1 及 A_2。用第一个圆定出 P_1 点的 x 位移 C_1X。用第二圆定出 P_2 点的 y 位移 C_2Y。这两个位移共同描绘出 P 点相对于原点 O 的瞬时位置，而 O 则处于边长为 $2A_1$ 及 $2A_2$ 的矩形中心。

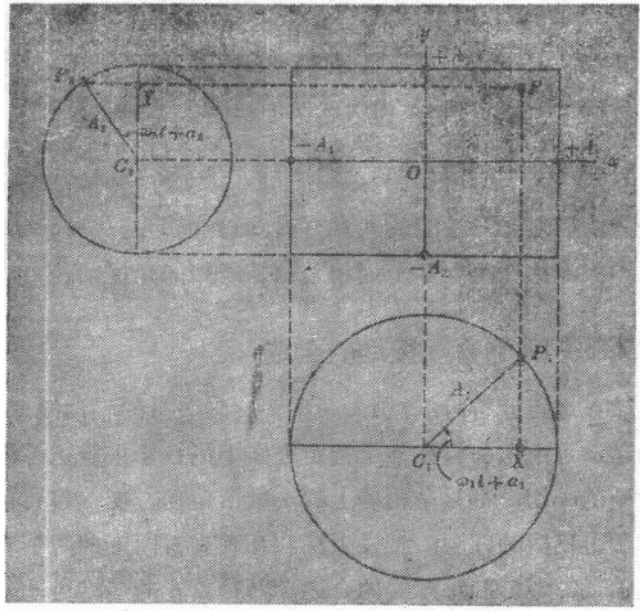


图 2-8　简谐振动垂直叠加时的几何表示法。

我们立即可以看出一个特点：无论两个分运动的频率和周相具有什么样的关系，P 点的运动总被限制在这个矩形之内，而且，在运动轨迹与这些边界线相接触的每一点处，矩形的边都与轨迹相切①。在对频率和周相未作某些具体说明的情形下，我们对此问题已不能再多说什么了，但 ω_1 和 ω_2 为不可公度的情形除外，对这种情形还可作个一般的说明。这时，P 的位置永不会自相重复，而若运动持续的时间足够地长，则即使不从严格的数学观点而从物理观点来看，运动的轨迹也将趋于充满整个约束矩形的内部空间。

这些合运动中最有兴趣的例子，是分频率具有简单的数字比，

① 也许，合运动走近矩形角处的情形是个例外，因为角处的几何条件并无明晰的规定。

且初周相之差为 2π 的简单分数的情形。这时，合运动便在二维空间内形成一个闭合的曲线，其周期则是各分周期之最小公倍数。这类问题最好通过特定的例子来讨论，那就让我们来看几个这样的例子吧。

§2-6 同频率的垂直运动

适当地选定所谓 $t=0$ 的这个时刻，便可把分振动写成如下的简单形式：

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos(\omega t+\delta)$$

式中的 δ，就是分运动之间的初周相差，而在此情形中，也是以后全部时间里的周相差。由于分运动的频率相等，所以只要进一步对 δ 指定特殊的值，就能迅速地作出各种可能运动的定性图象来：

(*a*) $\delta=0$。此时

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos\omega t$$

所以

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

这是个直线运动，并发生在矩形的一条对角线上，且使 x 及 y 永远具有同样的符号，都为正号或都为负号。这在光学中就叫做线偏振。

(*b*) $\delta=\pi/2$。则有

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos(\omega t+\pi/2)=-A_2\sin\omega t$$

运用 $\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$ 这个关系，就可容易地得到此轨迹的形状，即

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

这乃是主轴处于 x 及 y 轴的椭圆方程。

然而要注意，上述方程所说明的比这要多得多。我们所研究的是运动学而不是几何学，并且椭圆是按着一定的方向描绘出来的。当 t 从零开始增长时，x 便从其最大正值开始减小，而 y 则立即从零开始趋向负值。这就意味着椭圆轨迹是按**顺时针**方向描绘出来的。

(*c*) $\delta=\pi$。则有

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos(\omega t+\pi)=-A_2\cos\omega t$$

所以

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$

此运动与(*a*)中的情形相仿，只是处在矩形的另一条对角线上。

(*d*) $\delta=3\pi/2$。这就给出

$$x=A_1\cos\omega t$$

$$y=A_2\cos\left(\omega t+\frac{3\pi}{2}\right)=+A_2\sin\omega t$$

我们因而得到跟情况(*b*)相同的椭圆，但现在的运动却是**反时针**的。

(*e*) $\delta=\pi/4$。请注意，我们在此又返回到周相差 0 与 $\pi/2$之间，亦即介于(*a*)和(*b*)之间的中间情况。它不如刚才讨论过的那些情形明显，因而需借助于图 2-8 的几何作图法。此方法对这个特殊情形的应用，示于图 2-9 中。在两参考圆上，示出了 P_1、P_2 点每隔八分之一周期(即 $\pi/4\omega$)时的各个瞬间位置。各点均按顺序标号，始于 $t=0$ 的时刻，此时C_1P_1(见图 2-8)平行于 x 轴，而 C_2P_2 则处于自正 y 轴沿反时针方向转过 δ 角即 45° 的位置。于是，如图 2-9 所示，从P_1 及 P_2 这些对应位置的投影，就可得到一组交点，这些交点代表 P 点在矩形内运动时的各瞬时位置。这些点定出的轨迹，乃是处于斜轴上的、且**顺时针**绕向的椭圆，而椭圆的解析方程，

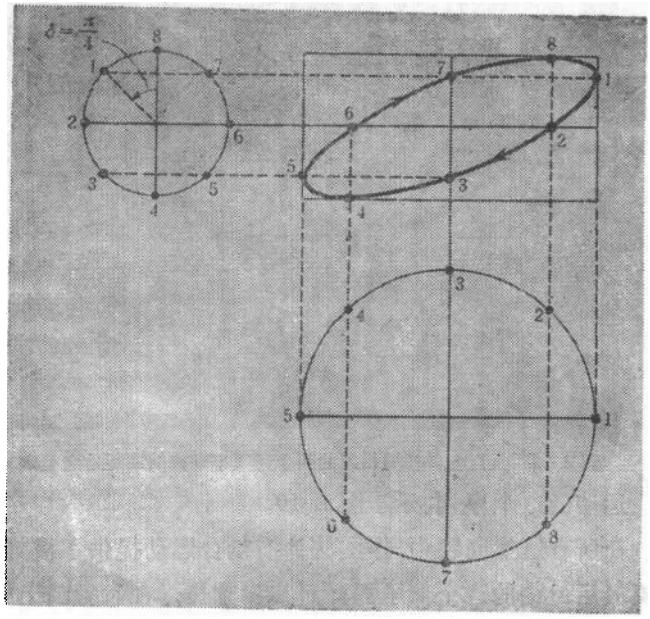


图 2-9　初周相差为 $\pi/4$ 的两垂直简谐振动之叠加。

只要从 x 及 y 的方程

$$x = A_1 \cos \omega t$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \pi/4)$$

$$= \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos \omega t - \frac{A_2}{\sqrt{2}} \sin \omega t$$

中消去 t 便可得到。

借助于最后这个例子就可看出，当设想周相差 δ 由零增至 2π 时，合运动的图样是怎样演变的。从 $\delta=0$ 时的对角线上的直线运动开始，逐渐变成了顺时针的椭圆运动，在 $\delta=\pi/2$ 时椭圆展至最大宽度，然后就逐渐闭拢，直至 $\delta=\pi$ 时变成沿另一对角线上的直线运动。超过 $\delta=\pi$ 以后，复又经历了类似序列的椭圆运动，但现在却都是反时针绕向的了，直至 $\delta=2\pi$ 时才回到了与 $\delta=0$同样的状

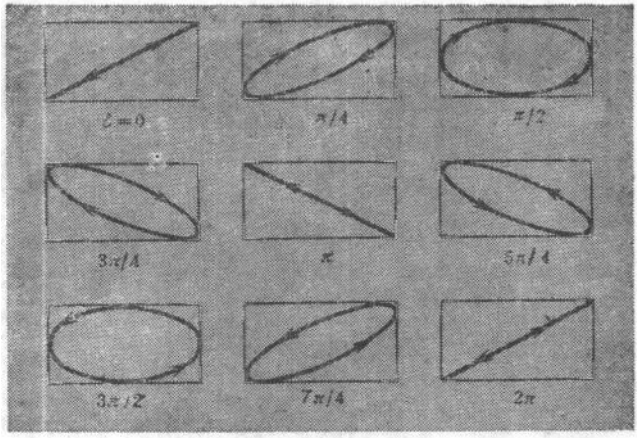


图 2-10　具有各种初周相差的两个同频率垂直简谐运动之叠加。

态。运动的这个序列，示于图 2-10。

在所有这类问题中，作图法为描绘合运动提供了极好的办法。就象最后讨论的这个例子那样，其步骤是：在参考圆上标出一系列的点子，它们对应于一系列相等的时间增量，尤其应标出对应于周期之合适的分倍量，诸如八分之一，十二分之一或十六分之一的那些点子。当熟悉了这番过程以后，便能作出更为简洁的图形来

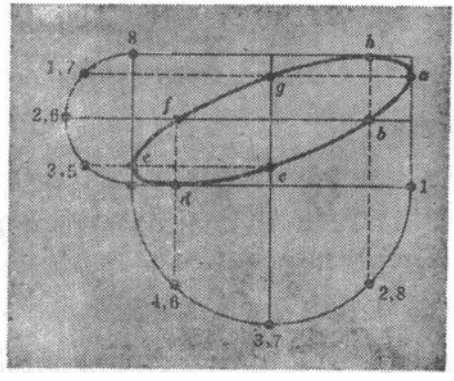


图 2-11　垂直振动叠加的简略作图法。

了：直接在约束矩形的两个相邻边上，各作一个半圆。为了说明这个办法，让我们仍以 $\omega_1=\omega_2$、$\delta=\pi/4$ 的情形为例。由于我们是按 2π 的偶分倍数来划分参考圆的，故圆上两个不同点的投影，将会给出相同的位移值。这样，只要画出半个圆来，就能获得跟整圆一样多的资料了，只是有不少点需要重复地使用两次，如图 2-11 所示。当按正确的时间顺序，在参考圆上标出各点的号码以后，便可象前面那样得出各个交点来了，从而也就定出了真实运动的坐标。（为避免混淆计，在这个较为简洁的作图说明中，我们以字母代替数码来标注这些交点，即 $a=1$、$b=2$ 等。）

纵使对时刻的选择，并不对应于全周期的偶分倍数，或者甚至于并不对应于**相等的**分倍数，也仍然能在半圆上对应于参考圆的完整一周，标出诸点的正确序列。这只要想象此圆已沿其主直径对折起来就行，而此主直径，乃是与此圆所描述的分运动相平行的。然而，还是按上面所做的那样，把点子配起对来比较省事。

§2-7 不同频率的垂直运动；利萨如图形

把上述分析推广到不同频率的运动上去，乃是一个简单而又愉快的练习。我们给出这类结果的几个示例。

图 2-12 示出了在 $\omega_2=2\omega_1$ 及 $\delta=\pi/4$ 时所勾画出来的图形。这里，把以频率 ω_2 运动的参考圆划分成八个相等的时间间隔，亦即让每段圆弧所张之角为 45°。在 ω_2 绕行一整周中，ω_1 仅绕行半周，据此，在考虑到已知的初周相差为 45°的条件下，可标出各参考圆上的各个点。为了得到一完整周期的合运动，当然也需要让 ω_1 经历一个整周；这就要求在达到标号为“9”的这一点以后，再顺着原来的半圆折回来，并且第二次地走过对应于绕圆 ω_2 一周时半圆上所有各点。这样，最后就得出了一个闭合的轨迹，它有着一个交叉点，而这样的轨迹将会无限地重复下去。由于利萨如(J. A.

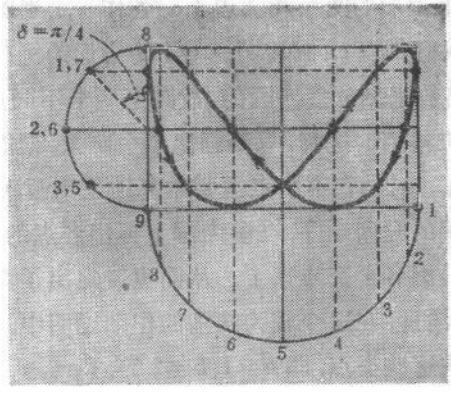


图 2-12　利萨如图形的作图法。

Lissajous, 1822～1880 年)曾广泛地研究了这种运动，所以这种曲线就被称为利萨如图形。倘若使振幅随时间慢慢地衰减，图形就会变得更加奇特而具美感。图 2-13 示出的一组曲线，都是在$\omega_2=2\omega_1$

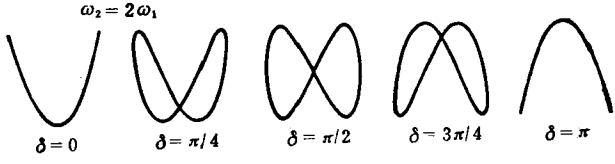


图 2-13　在 $\omega_2=2\omega_1$ 时具有各种初周相差的利萨如图形。

时的情形，但初周相差的大小各不相同。

当频率比更为复杂时，合成曲线就变得愈加奇妙，图 2-14 示出了各种各样的例子。把不同的正弦式电压加到阴极射线示波器的 x 和 y 偏转板上，通过调节振幅、频率及周相，就能容易地得到这样的图样。只要利萨如图形没有跑到约束矩形的角落里去，那就可以用观察来找出分振动的频率比；它就是图形与矩形两邻边的切点数目之比。读者应该对此结论作出理论上的证明，并用它来校验图 2-14 中的各种曲线。

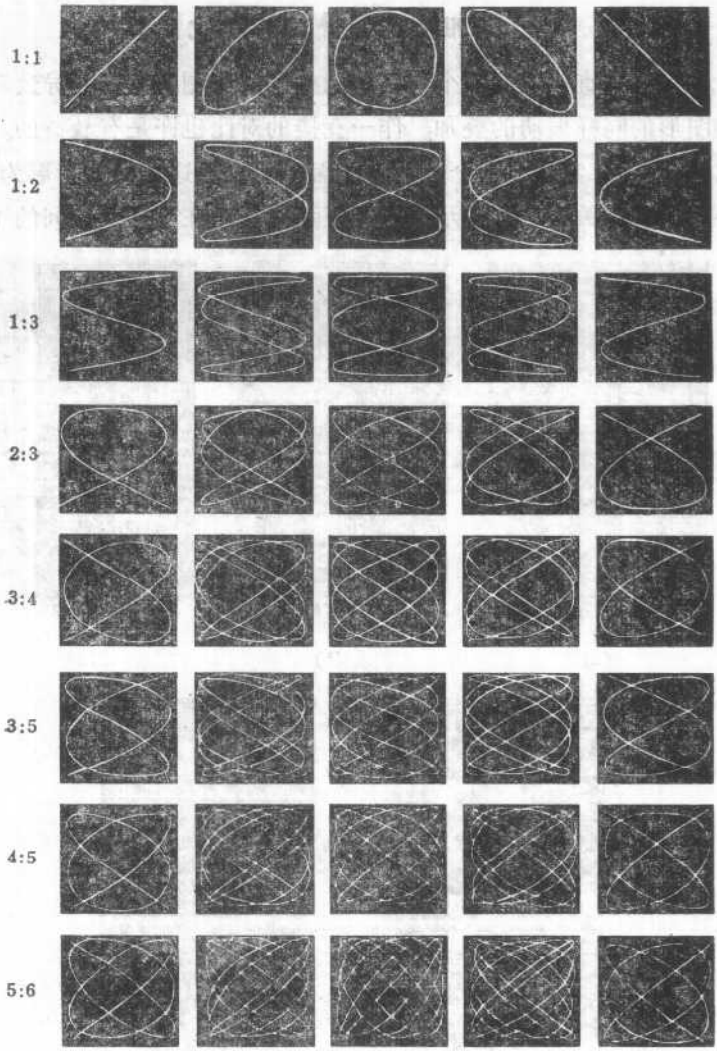


图 2-14　各种频率比时不同初周相差的利萨如图形。[引自坡印廷(J. H. Poynting)，汤姆孙(J. J. Thomson)，塔克(W. S. Tucker)：《Sound(声学)》(1949 年伦敦 Griffin 版)。]

§2-8 平行叠加与垂直叠加的对比

把同一直线上的两个谐振动的叠加，与相互垂直并导致利萨如图形的同样振动的叠加，作一直接的对比也许是有教益的。在图 2-15 中，我们以两个同频率同振幅的振动这一简单情形为例，展示了这种关系。图中示出了两正弦式振动在 0 与 π 之间的不同

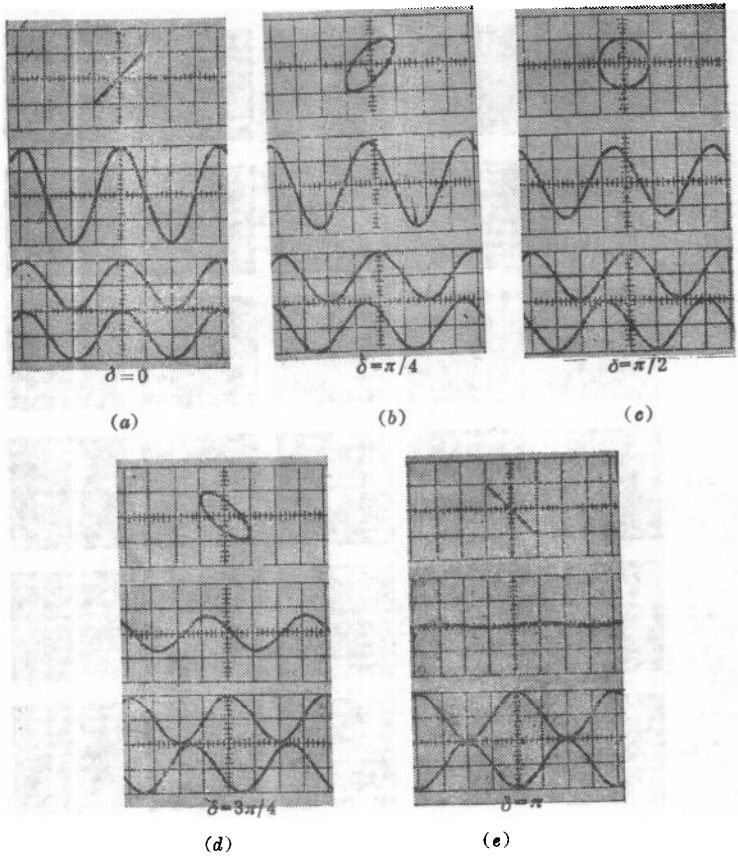


图 2-15 比较两谐振动相加的结果(i)两振动处于同一直线；(ii)两振动相互垂直以形成利萨如图形。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

周相差下合成时的情形。每张图最下方的两条曲线，表示每个振动的原始位移，它们是双线示波器上具有线性时基的 y 向偏转量。在这一对曲线的上方，乃是这两个 y 向偏转量直接相加而得出的合成正弦曲线。最上面示出了利萨如图形，这是在关掉示波器的时基并把两个原始的正弦式信号加于 x 及 y 偏转板后得到的。

如果两原始信号为 $A\cos\omega t$ 及 $A\cos(\omega t+\delta)$，于是便有下述结果：

平行叠加

$$y_1 = A\cos\omega t$$

$$y_2 = A\cos(\omega t+\delta)$$

$$y = y_1 + y_2 = \left(2A\cos\frac{\delta}{2}\right)\cos\left(\omega t+\frac{\delta}{2}\right)$$

[注意，当 δ 由 0 增至 π 时，振幅就正比于 $\cos(\delta/2)$ 而平滑地减小。]

垂直叠加

$$x = A\cos\omega t$$

$$y = A\cos(\omega t+\delta)$$

消去两式中对时间的明显依赖，则有

$$x^2 - 2xy\cos\delta + y^2 = A^2\sin^2\delta$$

这是一条椭圆曲线，它在 $\delta=0$ 或 π 时就退化为一直线，而在 $\delta=\pi/2$ 时则退化为一圆，如照片中所示的那样。

习　题

2-1　将下列各式表达成 $z=\mathrm{Re}[Ae^{j(\omega t+\alpha)}]$ 的形式：

(*a*) $z=\sin\omega t+\cos\omega t$

(*b*) $z=\cos(\omega t-\pi/3)-\cos\omega t$

(*c*) $z=2\sin\omega t+3\cos\omega t$

(*d*) $z=\sin\omega t-2\cos(\omega t-\pi/4)+\cos\omega t$

2-2 一粒子同时受到三个简谐运动的作用，三者频率相同，且都在 x 方向上。若振幅分别为 0.25、0.20 及 0.15mm，且第一及第二个运动间的周相差为 45°，第二与第三个运动间的周相差为 30°，试求合位移的振幅，以及它相对于第一个分量(振幅为 0.25mm)的周相。

2-3 处于同一直线上的两振动之表达式为

$$y_1 = A\cos 10\pi t$$

$$y_2 = A\cos 12\pi t$$

试求拍的周期，并细心绘出一个拍周期的合扰动草图。

2-4 求下列各情形中合运动的频率：

(*a*) $\sin(2\pi t - \sqrt{2}) + \cos(2\pi t)$

(*b*) $\sin(12\pi t) + \cos(13\pi t - \pi/4)$

(*c*) $\sin(3t) - \cos(\pi t)$

2-5 两相互垂直的振动的表达式为

$$x = 10\cos 5\pi t$$

$$y = 10\cos(10\pi t + \pi/3)$$

作出合运动的利萨如图形。

2-6 作出下列运动的利萨如图形：

(*a*) $x = \cos 2\omega t$ ， $y = \sin 2\omega t$

(*b*) $x = \cos 2\omega t$ ， $y = \cos(2\omega t - \pi/4)$

(*c*) $x = \cos 2\omega t$ ， $y = \cos \omega t$

很明显，每个弹性体里的自然法则或定律是，它使自己回复到自然位置的力或能力始终正比于它所挪开的距离或空间，而无论是使物体的各部分彼此间稀疏或分离，还是使这些部分互相凝聚或挤合得更近些，情况都是如此。不仅那些能观察到这些现象的物体如此，而且所有其它有弹力的物体，不论金属、木头、石头、焙土、毛发、兽角、丝绸、骨头、肌肉、玻璃以及类似物，都是如此。但这与受弯曲物体的特殊形状以及弯曲这些物体的方法方便与否有关。

胡克：《*De Potentia Restitutiva*》(1678 年)

第三章　物理系统的自由振动

胡克在上述这段关于物体之弹性的论述中，未免言过其实了。正如我们在第一章开始不久时指出的，在任何实际的物理系统中，回复力只**近似**地是位移的线性函数。然而值得注意的是，物理系统的许多种形变，包括伸长、压缩、弯曲、扭转或所有这些形变的组合，都是由正比于位移的回复力形成的，从而导致了简谐运动或者谐振动的叠加。本章将考察这些运动的一些例子，特别强调采用下述的方式，即把运动的运动学特征，跟通常能用纯静力学测量得出的性质联系起来。我们从进一步研究这样的系统开始：它是相当多振动问题的原型，即一质量在胡克提出的那种回复力的作用下，所进行的一维振动。下一节所讨论的很多内容，可能大家都是熟悉的，但在进一步深入以前，重要的是确实弄清它。

§3-1 基本的质量-弹簧问题

在第一章中首次谈到这种系统时，我们把它的特征描述为：一个质量为m的物体，受到一个弹簧[图 3-1(a)]，或某种等效器件例如一根细线[图 3-1(b)]的作用，此时它们提供了一个回复力，这个回复力等于某个常数k乘以离开平衡位置的位移。这表明，对一种特别简单的系统来说，下述两个特点对建立振动运动是根本性的：

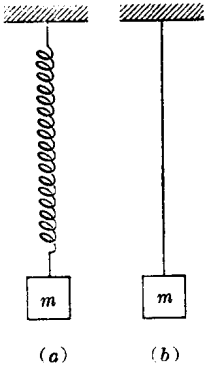


图 3-1 (a) 质量-弹簧系统。(b) 质量-细线系统。

1. 一个能够携带动能的惯性部分。

2. 一个能够贮存弹性势能的弹性部分。

假定胡克定律是适用的，由此而得出的势能，与物体离开平衡位置的位移之平方成正比。假定系统的全部惯性都集中在弹簧末端的质量上，所得出的动能恰等于$mv^2/2$，而v为所系物体的速率。应该指出，这两项假定乃是上述普遍条件 1 和 2 的特殊情形，对许多振动系统的实例来说，这些特殊条件并不适用。可是，如果一个系统实际上能够看成是一个集中的质量系在线性弹簧的末端（此处"线性"是指其弹性而不是几何性），那么，我们便能用以下的两方式之一来写出它的运动方程：

1. 用牛顿定律($F=ma$)：

$$-kx=ma$$

2. 用总机械能(E)守恒：

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

当然，第二式乃是第一式对位移 x 积分的结果，但它们都是描述系统运动的**微分方程**。重要的是，无论在何处对物理系统分析时出现了这些微分方程，都要能够认出它们来。它们可以写成明显的微分形式：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0 \tag{3-1}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E \tag{3-2}$$

不管什么时候，在你看到一个方程类似于它们中的任何一个时，你就能得出结论说，位移 x 为时间之函数的形式是：

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{3-3}$$

此处的 ω^2 乃是弹簧常数 k 与惯性常数 m 之比值 (k/m)。这函数对于式(3-1)或(3-2)完全适合，纵然系统本身并不是单个物体系于无质量弹簧时，情况也是如此。

可以看出，式(3-3)中的常数 ω，在任何情形下都由给定的 m 及 k 值所规定。此式还含有另外两个常数，振幅 A 及初周相 α，它们在任一特定情形中，都对系统在 $t=0$ 时(或其它指定时间)的运动状态，提供了完全的说明。在牛顿定律之原始陈述的式(3-1)中，并不含有任何可调节的常数。通常称为式(3-1)之"第一次积分"的式(3-2)，在数学上介于式(3-1)及(3-3)之间，并含有**一个**可调节的常数，这就是总能量 E，它等于 $kA^2/2$。对原始微分方程(牛顿定律)每积分一次总要多引入一个常数，尽管在特殊情形下该常数可能变为零。可从逆过程来理解这一点，即任何一次的求导，都会失掉一个常数项。

§ 3-2 运用复指数求解谐振子方程

作为将来进行计算时的一个范例，让我们运用复指数来展示出基本微分方程[式(3-1)]的熟知解[式(3-3)]。由于实际上引入计算过程的不是单个的 k 及 m，而是其比值 k/m，故一开始我们便可把式(3-1)改写为更简洁的形式：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{3-4}$$

这说明，x 及其对时间之二阶导数的线性组合等于零，或等效地说，d^2x/dt^2 乃是 x 自身的倍数。大家知道，指数函数就具有这后一种性质；因此可令

$$x=Ce^{pt} \tag{3-5}$$

这里，为使量纲正确，所引入的系数 C 应具有距离的量纲，而系数 p 则应使 pt 成为无量纲量，即 p 应具有(时间)$^{-1}$的量纲。这样，代入式(3-4)后便有

$$p^2Ce^{pt}+\omega^2Ce^{pt}=0$$

欲使此式对任何 t 及任何 C 值都能满足，则需

$$p^2+\omega^2=0$$

因此

$$p^2=-\omega^2$$

$$p=\pm j\omega \tag{3-6}$$

这里每一个 p 值均满足原方程。我们没有理由舍弃任何一个，必须一齐接受它们以及它们各自的 C 值。于是，式(3-5)就成为

$$x=C_1e^{j\omega t}+C_2e^{-j\omega t} \tag{3-7}$$

现在，用 SHM 的旋转矢量描述法来解释式(3-7)。右方的第一项，对应于以角速率 ω 作反时针旋转的矢量 C_1，第二项则对应于以同样转速作顺时针旋转矢量 C_2。倘若 C_1 及 C_2 的长度相等，

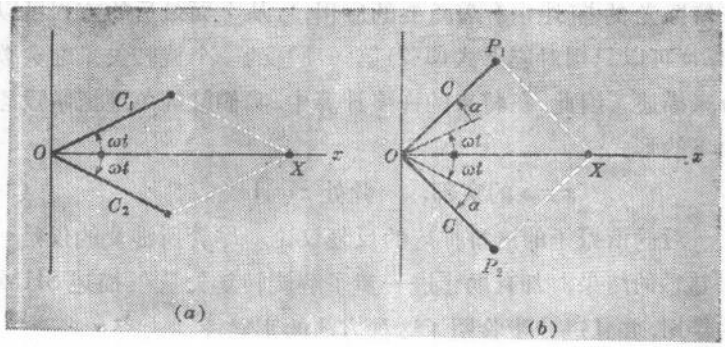


图 3-2 (a) $C_1=C_2$ 时，式(3-4)复数解的叠加。
(b) 初周相角不为零时，式(3-4)复数解的叠加。

它们组合起来就给出一个沿 x 轴的谐振动，如图 3-2(a)所示。但是，从式(3-7)看来，C_1 及 C_2 并非必须为实数不可。如果 C_1 相对于 t 所规定的方向转过了某个角度 α，又倘若 C_2 相对于 $-\omega t$ 转过了 $-\alpha$，而且仍使两矢量之长度相等，如图 3-2(b)所示①，那么，这样仍能正好满足式(3-7)。于是，这个不大受限制的条件便导致了通常的结果：

$$\begin{aligned} x &= Ce^{j(\omega t+\alpha)}+Ce^{-j(\omega t+\alpha)} \\ &= 2C\cos(\omega t+\alpha) \\ &\equiv A\cos(\omega t+\alpha) \end{aligned}$$

式(3-7)中的 C_1 及 C_2，或者上式中的 A 及 α，都能同样好地表达两个积分常数，它们在求二阶微分方程②式(3-4)之最终解(x 为 t 之函数)的过程中，是必须引入的。

上面的分析还附带说明，一个直线的谐运动，可由两个相同而反向转动的真实圆运动叠加而成，这与两个相同而互相垂直的直线振动，产生出一个圆形利萨如图形的情况相反。(这两项结果，

① 再没有其它的关系，能够导致只沿 x 轴的振动了。读者试证明此点。
② 微分方程的阶，由出现在方程中导数的最高阶来规定。

在偏振光的描述中有着重要的应用。）从上面最后的方程可以看出，x 可以只用对应于式(3-7)第一项① 的一个旋转矢量之实数部分来描述。因此，在将来的许多计算中，我们就简单地把解设想为如下的形式：

$$x = z \text{ 的实部}, \quad \text{此处 } z = Ae^{j(\omega t + \alpha)} \tag{3-8}$$

对简谐振子的这番推广的反复议论，尽管所涉及的仅是一些很熟悉的结果，却有助于进一步了解旋转复矢量在描述 SHM 中的作用，并且进一步验明了这种方法的正确性。

§3-3 弹性和杨氏模量

现在让我们转到物性上来，它控制着质量-弹簧型系统的频率。如若是考察实际的螺旋弹簧，那么问题就复杂了。把一载荷系于这样的弹簧下，如图 3-3 所示，便产生了两种不同的效应，而两者都不是简单的伸长过程。试想一重物W悬于螺旋弹簧竖直轴上的一点，则其作用是，在弹簧金属线的近似水平轴线上的每一点，都产生了一个转矩 WR。其效应之一，也是大多数弹簧的主要效应，是使金属线绕自身的轴线发生扭转，而重物之下降，首先就是这种扭转过程的结果。但是还有第二个效应：弹簧的各圈会紧缩或松散一些，以使整个弹簧绕竖直轴扭转。这个过程使各圈发生弯曲，亦即改变了它们的曲率②。诚然，最终的结果虽可表达为

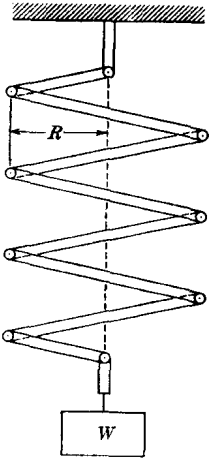


图 3-3 悬有质量的螺旋弹簧。

① 或仅用第二项也行。

② 弹簧究竟是紧缩或松散，取决于制成弹簧的材料是什么。

所加载荷跟载荷所移过的距离之间的比例关系，即弹簧常数 k，可是，在讲弹性与基本物理性质的联系时，我们还是避开熟识的螺旋弹簧而来谈些更为简单的问题为好。

一根棒或线的单纯伸长，是各种情况中最易讨论的一种。处于静力平衡条件下的这种系统，其品性可描述如下：

1. 用给定材料做成的具有一定横截面积的棒或线，在给定力作用下所产生的伸长量 Δl，与原长 l_0 成正比。其无量纲的比值 $\Delta l/l_0$，称为**胁变**。此结果也能用另一种说法来表述：在对给定的棒作**静力**实验时，棒上各点的位移，与它们到固定端的距离成正比，如图 3-4(a) 所示，因为在这种静力的情形下，施于一端的力 ΔP，将沿着整个棒长引起量值为 ΔP 的张力。

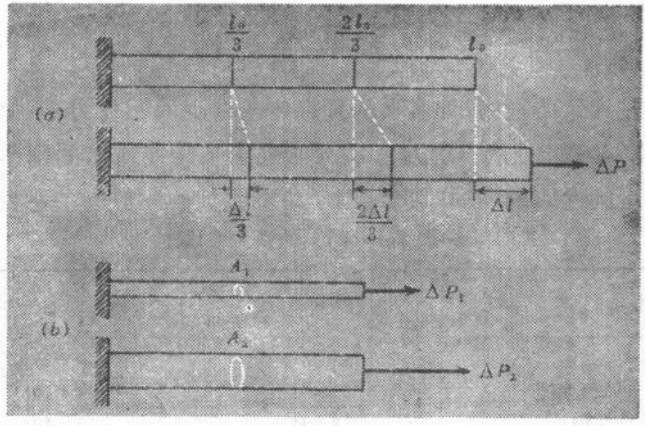


图 3-4 (a) 在静力条件下，棒的纵向均匀伸长。(b) 具有不同横截面 A_1 及 A_2 的两根棒，受到张力 ΔP_1 及 ΔP_2 的作用。

2. 此外还发现，欲使同一材料但横截面积不同的棒产生同样的胁变($\Delta l/l_0$)，则所施之力需与横截面积成正比，如图 3-4(b)所示。比值 $\Delta P/A$ 称为**胁强**，它具有单位面积力，即压力的量纲。

3. 倘若胁变很小，伸长量约小于原长 l_0 的 0.1%，则胁强跟

胁变间的关系是线性的，是符合胡克定律的。在此情形下就可写：

$$\frac{\text{胁强}}{\text{胁变}}=\text{常数}$$

任一给定材料的这个常数值，便叫做杨氏弹性模量[就是这位杨氏(T. Young)，于1801年还以其光学上的干涉实验而载入科学史册]①，通常用符号Y表示。若用dF表示由伸长了的线或棒施于另一物体之力，则可使

$$\frac{dF/A}{dl/l_0}=-Y$$

即

$$dF=-\frac{AY}{l_0}dl \tag{3-9}$$

倘若选用x来表示伸长量，用F表示力，上述结果便可改写成

$$F=-\frac{AY}{l_0}x \tag{3-10}$$

这便是通常所说的，伸长了的弹性体所产生的回复力，而弹簧常数k便等同于此处的AY/l_0。表3-1列出了几种熟知的固体材料杨氏模量的近似值。同时也示出了极限强度的近似值，它表明在此

表3-1 材料的张力性质

材　　料	杨氏模量 N/m²	极限强度N/m²
铝	6×10^{10}	2×10^{8}
黄铜	9×10^{10}	4×10^{8}
铜	12×10^{10}	5×10^{8}
玻璃	6×10^{10}	10×10^{8}
钢	20×10^{10}	11×10^{8}

胁强作用下，材料大概就要破裂了。要注意，杨氏模量表达的是相应于100% 伸长的胁强，这情形在实际张拉样品时是难于接近的。

① 他还首次为从闻名的罗塞达石上辨认出埃及的象形文字，作出了重要的贡献。[罗塞达石(Rosetta Stone)是1799年在埃及罗塞达发现的石碑。——译者加注。]

在胁强比此值少二或三个数量级，亦即胁变值在0.1～1%之间时，就要发生破坏了。从对线或棒的直接张拉中，是不可能得到象在螺旋弹簧中那么易于达到的大比例长度变化的。

若质量为m的物体悬于一根金属线的末端，则从回复力定律的式(3-10)可以得出，它以很小的振幅作振动时的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{AY}} \tag{3-11}$$

例如，考虑1 kg的质量悬于直径为1mm而长为1m的钢丝下，则

$$A=\frac{\pi d^2}{4}\approx 0.8\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$$

因而

$$k=\frac{AY}{l_0}\approx 1.6\times 10^5\ \mathrm{N/m}$$

所以

$$T\approx\frac{2\pi}{400}\approx 1.6\times 10^{-2}\mathrm{s}$$

或

$$\nu=\frac{1}{T}\approx 60\mathrm{Hz}$$

大家看得出来，这钢丝犹如一个非常刚硬的弹簧，其振动不仅频率相当高，而且若是不超过材料强度的限度，则其振幅也必是非常之小的，在1m的长度中只占1 mm的一个很小分数。

式(3-11)所表述的结果，可用物理上更为鲜明的方式予以重写；这就要引用**长度的增加量**h，它乃是把质量为m的物体，第一次悬于金属线下而处于**静力**平衡时产生的。由式(3-10)便有

$$mg=\frac{AY}{l_0}h$$

所以

$$\frac{ml_0}{AY}=\frac{h}{g}$$

故从式(3-11)便得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{3-12}$$

此周期跟长度为 h 的单摆周期一样。这就给计算周期提供了一个非常直截了当的办法，它只要根据静力伸长的一次测量，而无需详细知道金属线的特征，以及所悬质量的大小。

杨氏模量所描述的宏观弹性，当然应该能以材料内部原子间的微观相互作用来分析。显然，若金属线的整个长度增加了 1%，这就意味着各个原子之间在此方向上的间隔，也总计增加了 1%。这样，从原则上说，就能把弹性模量，与由原子间作用力的势能曲线所描述的原子性质联系起来了。然而，我们在此不拟继续这方面的讨论，因为当前关心的还是宏观上的描述。我们将代之以讨论其它几个简谐运动的例子。

§ 3-4 浮体

若将浮体从正常的平衡位置稍微压低或提升，这时浮体所排开液体重量的增加量或减少量，就起着回复力的作用，而周期运动便发生了。如果浮体与液面相交的部分具有固定的横截面积时，此情形可以变得特别简单。这方面一个很好的实际例子，是用于测量蓄电池酸液或抗凝液比重的那种比重计(图 3-5)。

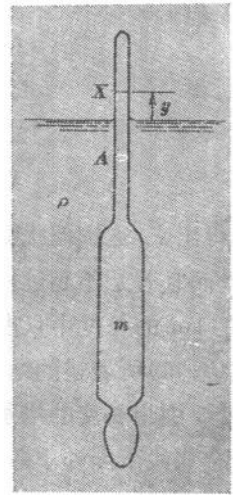


图 3-5 简单的比重计，在移离正常漂浮位置时，就能进行竖直振动。

令比重计的质量为 m，液体的密度为 ρ。用 A 来表示横截面积。那么，如果比重计高于其正常漂浮水平的距离是 y，则所排开

的液体体积等于 Ay，其运动方程(牛顿定律)就成为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-g\rho Ay$$

从而给出

$$\omega=\sqrt{\frac{g\rho A}{m}}\quad 及\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho A}} \tag{3-13}$$

例如，普通型式的蓄电池比重计具有 $m\approx 10\text{g}$，$A\approx 0.25\text{cm}^2$。假定它置于比重为 1.2 的蓄电池酸液中。则在采用 MKS 单位时，便有

$$m\approx 10^{-2}\text{kg}$$
$$A\approx 2.5\times 10^{-5}\text{m}^2$$
$$g\approx 10\text{m/s}^2$$
$$\rho\approx 1.2\times 10^{3}\text{kg/m}^3$$

这就得出

$$T\approx 1\text{s}$$

就大得很多的物体来说，可以考虑船舶所发生的这种运动。一艘大船的侧边，在某种程度的近似下可以认为大致是竖直的，而其底部也多少算是平坦的，如图 3-6 所示。在此情形下，就能非常方便地把船的质量用吃水深度 h 来表达：

$$m=\rho Ah$$

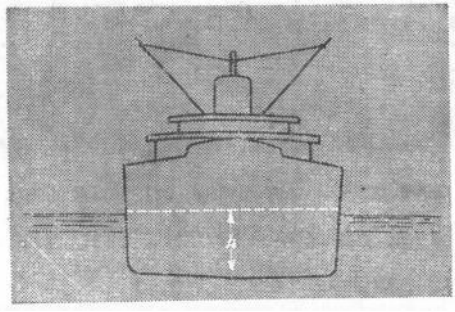


图 3-6　漂浮船舶的横截面。

式中 ρ 是水的密度，A 为船在吃水线处的水平横截面积。代入式(3-13)① 便得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \tag{3-14}$$

这恰似单摆的方程，此方程也能用于悬在金属线下的质量之竖直振动[式(3-12)]。举例来说，如果船吃水 10m，那么这种竖直振动的周期就大约是 6s。然而这种振动，在船舶振动的总图象中，并不是主要成份。波浪的作用，更易于激起左右摇摆以及前后颠簸，但这些并不会使船舶的质量中心位置相对于水面发生什么重大的起落。

§ 3-5 摆

图 3-7(a) 示出的乃是大家熟悉的一种振动系统，即所谓的“单摆”，然而它却比我们迄今考察过的一维振子，要复杂得多(虽

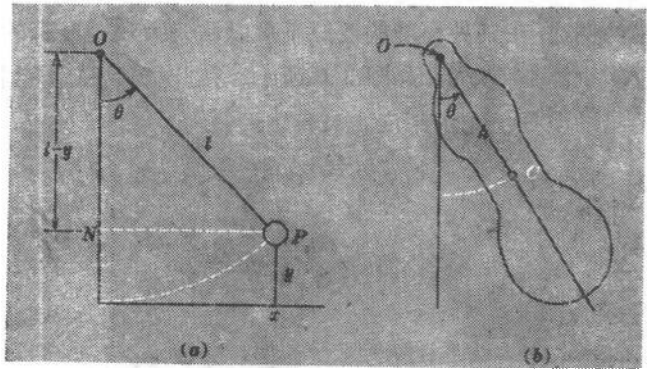


图 3-7 (a) 单摆。(b) 悬在水平轴上的任意形状的物体(刚体摆)。

说应该承认，在讨论浮体之竖直振动时，我们已顺利地避开了被排开液体的运动这个棘手的问题)。

① 原文为式(3-12)。——译者注。

摆的问题实质上是个二维的问题，尽管其实际的位移完全可用唯一的角度 θ 来表明。虽说位移主要在水平方向上，但运动实质上是由质心起落而伴随着重力势能的变化这个事实所决定的。所以，对摆的分析，实际上很适于从能量守恒的陈述入手，而且由于其最终结果几乎是完全熟悉的，这就为能量方法提供了一个很好的例证，这种方法对于分析更为复杂的系统，有着很大的价值。

现在来看图 3-7(a)，若是 θ 角微小，则 $y \ll x$，于是从图中几何关系可得①

$$y \approx \frac{x^2}{2l}$$

式中 l 是弦线的长度。而能量守恒的陈述是

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E, \quad \text{式中} \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

因此，由已经给出的那些近似关系，便可近乎正确地使

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mg}{l}x^2 = E$$

大家看得出来，依据式(3-2)，此式规定出 $\omega = \sqrt{g/l}$ 的简谐运动。

为着给较复杂的摆作准备，这里改用角位移 θ 来陈述此问题。由此便有

$$v = l\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad \text{(精确地)}$$

$$y = l(1 - \cos\theta) \approx \frac{1}{2}l\theta^2$$

这样，能量守恒的近似陈述便是

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 = E$$

现在来考察一个任意物体在竖直面内的自由摆动。令其质心

---

① 在三角形 ONP 中，由毕达哥拉斯(Pythagoras)定理得 $l^2 = (l-y)^2 + x^2$，所以 $x^2 = 2ly - y^2 \approx 2ly$。

C 与悬挂点的距离为 h，如图 3-7(b)所示。于是在角偏移为 θ 时，所增加的势能为 $mgh\theta^2/2$。而动能，则是整个物体绕 O 点的转动能量。由于物体内每一点都具有 $d\theta/dt$ 的角速率，故此动能应写为 $I(d\theta/dt)^2/2$，式中的 I 乃是物体绕通过 O 的水平轴之转动惯量。因此有

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}mgh\theta^2=E$$

在许多场合下，引用绕通过质心的平行轴之转动惯量是方便的。若把它写为 mk^2，此 k 为物体的“回转半径”，则相对于质心的转动动能便是 $mk^2(d\theta/dt)^2/2$；此外，还应加上质心本身因瞬时线速率 $h(d\theta/dt)$ 而具有的动能。于是，能量守恒方程也可写为

$$\frac{1}{2}mk^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(h\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}mgh\theta^2=E$$

由此可得

$$\omega^2=\frac{gh}{h^2+k^2}$$

$$T=2\pi\left(\frac{h^2+k^2}{gh}\right)^{1/2} \tag{3-15}$$

§ 3-6 U形管中的水

若液体盛在一个 U 管的装置里，管的竖直臂有着恒定的横截

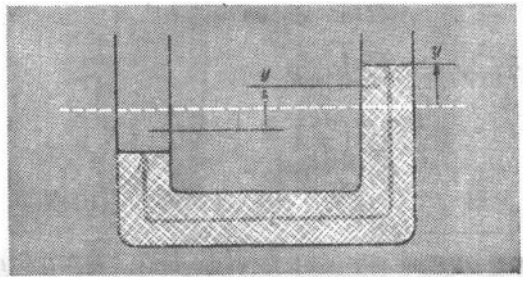


图 3-8 U形管中的振动液柱。

面，如图 3-8 所示，这便构成了一个类似于摆的系统。该系统的运动虽是二维的，但却完全能够用液面离开平衡位置的竖直位移 y 来描述①。设液柱的全长为 l，其横截面积为 A。于是，若液体的密度是 ρ，则液体的总质量 m 为 ρAl。再假定液体的每一部分都以同样的速率 dy/dt 运动。那么，在图 3-8 所示的情况中，重力势能的增加量，就相当于从左边管内取一段长度为 y 的液柱，把它升高 y 的距离后，再置于右边液柱的顶部。因此可使

$$U=g\rho Ay^2$$

于是机械能守恒就给出如下方程：

$$\frac{1}{2}\rho Al\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+g\rho Ay^2=E$$

所以

$$\omega^2=\frac{2g}{l}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}=\pi\sqrt{\frac{2l}{g}} \tag{3-16}$$

要看到此式与单摆方程的相似性，但也要看到微妙的差别——此情形下的液柱周期，与摆长为 $l/2$ 的单摆一样。

§ 3-7 扭转振动

在一个被扭转的物体中，回复**转矩**的形成，贮存势能的实现，这些都是熟知的力学事实。如果转矩 M 正比于物体两端间的角位移，则可使

$$M=-c\theta \tag{3-17}$$

式中 c 是系统的扭转常数。因而所贮之势能为

① 事实上，两个侧臂并非一定要竖直的，只要直的就行；两横截面也并非一定要相等，只要是恒定就行；而连结的管道也可以具有不同的横截面，只要采用合适的几何尺寸因子，以两侧臂中液体的位移和速率，来表达任一部分液体的位移和速率就行了。

$$U=-\int Md\theta=\frac{1}{2}c\theta^2$$

倘在扭转系统的一端接有转动惯量为 I 的物体，使物体获得了 θ 的角偏转，在不计扭转系统本身的转动惯量时，则能量守恒的陈述形式便是

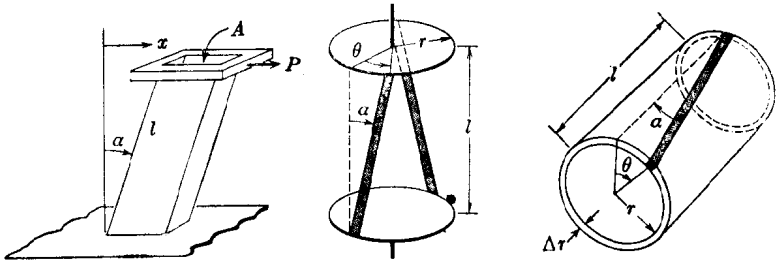
$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}c\theta^2=E$$

从而

$$\omega^2=\frac{c}{I}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{c}} \tag{3-18}$$

扭转常数与被扭转材料之基本弹性性质的关系，不象弹簧常数与伸长的线或棒之杨氏模量的关系那么直接。这一根本过程，叫做材料的**切变**形变。设一矩形的材料块，底部粘固在桌上，顶面粘着一平板[图 3-9(a)]。今对此板施一水平力 P，其方向平行于块体顶部的两个棱边，从而造成了如图所示的形变①。此时，块体就有两个侧面从矩形变成了平行四边形。这样，形变就可用**切变角**



(a)　　(b)　　(c)

图 3-9　(a) 矩形块的切变形变。(b) 在切变形变期间，作用于矩形条带上的转矩。(c) 被扭转的管子可想象成是(b)中那种条带的大量集合。

① 为保持桌子的平衡，必须施以 $-P$ 的水平力，以及量值为 lP 的反时针转矩，使得块体不受到任何平动的合力或任何的合转矩。

α 来表征。若以高度为 l 之块体顶端的实际横向位移 x 来表示 α，便有(近似地)

$$\alpha=\frac{x}{l}$$

人们发现，切变角是与所施横向力对块体顶部面积 A 之比值成正比的。而**切胁强** P/A 与切变角 x/l 之比值，就用**切变模量**或**刚性模量**来表示，通常以 n 表记。如果把受切变的材料对板的作用力用 $F(=-P)$ 来表示，则可使

$$n=\frac{-F/A}{\alpha}$$

或

$$dF=-nAd\alpha=\frac{-nA}{l}dx \tag{3-19}$$

这么一来，这些关系式恰好与纵向形变的式(3-9)及(3-10)，具有同样的形状，而且，刚性模量 n 与杨氏模量 Y 也有着同样的物理量纲。对大多数材料来说，这两个模量具有相同的数量级，虽说 n 的重要性通常比 Y 的要小些。表 3-2 列出了表 3-1 中的那些材料的两个模量值。该表还列出了第三个模量，所谓**体积弹性模量** K，它描述材料对体积改变的阻力。

表 3-2　弹性模量值

材　　料	Y, N/m^2	n, N/m^2	K, N/m^2
铝	6×10^{10}	3×10^{10}	7×10^{10}
黄铜	9×10^{10}	3.5×10^{10}	6×10^{10}
铜	12×10^{10}	4.5×10^{10}	13×10^{10}
玻璃	6×10^{10}	2.5×10^{10}	4×10^{10}
钢	10×10^{10}	8×10^{10}	16×10^{10}

为从切变过程中引出对回复转矩的计算，试考虑图 3-9(b)所示的情形。安置在两个转轴上的半径为 r 的两圆盘，由一对矩形

条带状的材料连结起来。当一个转轴被转动了一个小角 θ 时，每根条带的端部便横向地移过了一段距离 $r\theta$。于是切变角为

$$\alpha=\frac{r\theta}{l}$$

若每根条带的横截面积为 A，则它在盘的切向上所提供的回复力是

$$F=-nA\frac{r\theta}{l}$$

这就意味着，每根条带施予盘一个绕转动轴的**转矩**，其量值为 rF。

假设现有一个薄壁的管子，其平均半径为 r，壁厚为 Δr，如图3-9(c)所示。可以把它想象成由一些平行于圆筒轴线的薄条带集合起来的整体，这些条带都提供了绕此轴线的回复转矩。这样，当管的两端相对地扭转了 θ 角时，管子所提供的转矩就是

$$\Delta M=-\frac{nAr^2\theta}{l}$$

式中

$$A=2\pi r\Delta r$$

因而

$$\Delta M=-\frac{2\pi nr^3\Delta r}{l}\theta$$

最后，就象经常碰到的那样，当被扭转的物体是一个实心圆柱棒、金属线或纤维时，那么总转矩便可从上述结果的求和或积分得出。于是有

$$M=-\frac{\pi nr^4}{2l}\theta \qquad \text{(实心圆柱体)} \qquad (3\text{-}20)$$

§ 3-8 “空气弹簧”

本书的重要论题之一，就是分析空气柱的振动以及乐音的产生。把一段封闭的气柱看得很象一个弹簧，这种考虑乃是这方面的一个有用基础。玻意耳(R. Boyle)正是采用这样的方式来设想气体

的弹性的，而本节的标题，便是引自他论述这个问题时所采用的书名①。(玻意耳采用“弹簧”这个词，实际意思是指具有弹性的性质。)

为使现在的讨论与前面对质量-弹簧系统的分析，尽可能紧密地结合起来，假定有个一端封闭的圆柱形管子，配有质量为m的、气密而又能自由移动的活塞，如图 3-10 所示。这段被封闭的空气柱的作用，犹如一个极硬的弹簧，很难突然地推压或拉伸；当你用手指捂住自行车打气筒的出气口，然后移动气筒的把手时，这个效应便清楚地演示出来。

活塞有一个确定的平衡位置，依管子是水平还是竖直而有所不同。若管子象图示的那样是竖直的，则管内气体的压力p必须高于大气压力才能足以支持活塞的重量，正如弹簧的初始伸长一样。现在若使活塞移动一段距离y来增长空气柱，则筒内的压力即行下降，从而对m提供了一个回复力。这样，便能写出如下的方程：

$$F=A\Delta p$$

这里的Δp乃是压力的改变量。

压力的变化量有多大呢？人们首先想到的可能是，完全可以用玻意耳定律把它算出来，即从

$$pV=\text{常数}$$

得出

$$p\Delta V+V\Delta p=0 \quad (3\text{-}21)$$

现在

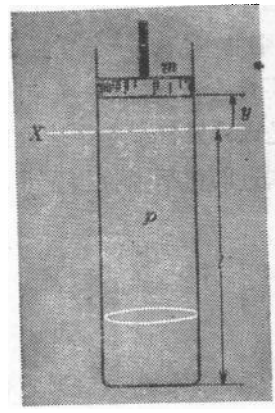


图 3-10　竖直空气柱上的活塞。

① 玻意耳：《*New Experiments Physico-Mechanical Touching the Spring of Air and Its Effects, Made for the Most Part in a New Pneumatical Engine*(从物理力学上研究空气弹簧及其效应的新实验——为一种新型气动引擎的最主要部分而作)》(1660 年英国牛津版)。

$$\Delta V = Ay$$

$$V = Al$$

于是得到

$$\Delta p = -\frac{py}{l}$$

从而

$$F = -\frac{Ap}{l}y \tag{3-22}$$

试将此式与实心棒伸长或压缩的式(3-10)相比较，可以看出，式(3-22)中压力 p 所起的作用，恰跟弹性模量相似。的确，在假定可以应用玻意耳定律的情形下，它**确是**空气的弹性模量。然而，它并不是杨氏模量，因为杨氏模量只能用具有自然边界的固体样品定出来。在确定和测量杨氏模量的情形中，材料柱在伸长时可以自由地作横向收缩，而在压缩时又可自由地作横向膨胀，但对气体来说，则非得给它一个实际是刚性壁的容器不可。所以，适当的模量就要对应于，样品在均匀胁强作用下总**体积**的变化，而这均匀胁强则是以遍及样品整个表面的压力变化的形式出现的。这就是前面提到过的**体积弹性模量** K，它一般的定义式为

$$K = -\frac{dp}{dV/V}$$

$$= -V\frac{dp}{dV} \tag{3-23}$$

假如你记得玻意耳定律所描述的是气体在恒定温度下压力与体积的关系，那么，从式(3-21)便可得出气体的**等温**体积弹性模量的定义：

$$K_{等温} = p \tag{3-24}$$

对大气压下的气体来说，此模量因而约等于 $10^5 \mathrm{N/m^2}$，亦即比熟悉的固体材料要小五或六个数量级(见表 3-2)。

重要的问题是，空气柱的弹簧常数是否真是由等温弹性来规定的。一般说来并非如此。当气体骤然被压缩时，由于对气体做了功而使它变热了；换言之，组成气体的那些粒子，平均说来要运动得快些了。而运用玻意耳定律，去计算具有一定长度变化的空气柱之压力变化以及回复力，就抹煞掉这个效应了。根据气体分子运动论，压力与分子速率的均方值成正比，因此，变热的结果，就使得回复力要比不考虑此效应时的大些，气体柱之弹性模量也比式(3-24)所指出的 p 值大些。经验证实了这个结论。压力是以大于体积之反比的因数而变的。在完全绝热，即没有任何热量流入或流出气体的情况下，所得出的压力-体积关系如下[①]：

$$pV^{\gamma}=\text{常数} \qquad (\text{绝热}) \tag{3-25}$$

从而就有

$$\ln p+\gamma\ln V=\text{常数}$$

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dV}+\frac{\gamma}{V}=0$$

$$K_{\text{绝热}}=-V\frac{dp}{dV}=\gamma p \tag{3-26}$$

常数 γ 在正常室温下的值，对于单原子气体接近于 1.67，双原子气体的为 1.40，其它所有气体的则小于 1.40。这就加强了绝热条件下的弹性，从而提高了密闭体积中气体的振动频率。

§3-9 含有重弹簧的振动系统

我们至今所讲的弹簧，就象是没惯性似的，纯粹起着弹性势能贮存器的作用。当然这充其量不过是一种近似而已，在某些情况下，弹簧自身的惯性竟还是个主角哩。为了说明这个问题，试考虑教本的著者们所喜爱的一个题目：在总质量为 M 且弹簧常数为 k

① 式(3-25)的严格基础，将在讨论气体中的声速时予以考察。

的均匀弹簧上，系一质量为m的物体①。此时的振动周期，与弹簧无质量时有何不同？我们即使不进行任何计算也能指出，此周期将会增长。可是，增长了多少呢？

简单的且从表面看也是合理的办法是，假定弹簧各个部分所经历的位移，正比于它们到固定端的距离，如图 3-11 所标明的那样，也正象图 3-4 所示的那种静力伸长一样。这样，若弹簧的远端在某时刻伸长了x的位移，我们便能算出弹簧此时的总动能来。

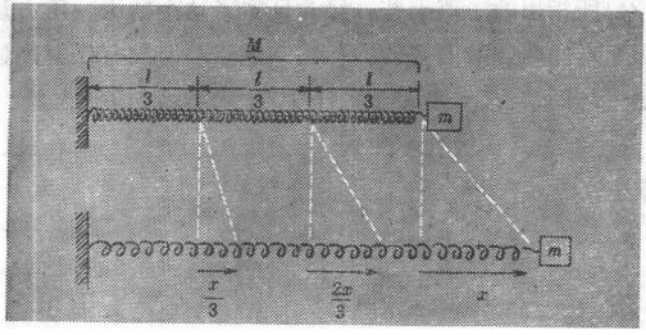


图 3-11　重弹簧的均匀伸长。

令弹簧在松弛时的长度为l，任一点至固定端的距离为$s(0\leqslant s\leqslant l)$。现考虑处于$s$及$s+ds$之间的一个弹簧元。其质量为

$$dM=\frac{M}{l}ds$$

其位移为x的s/l倍。于是这段小弹簧元的动能是

$$dK=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{l}ds\right)\left(\frac{s}{l}\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$=\frac{M}{2l^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 s^2 ds$$

将此式积分，且把dx/dt当作常数因子看待，便可得出弹簧在任一给定瞬时的总动能，即有

① 正如本节后文所表明的，考察这个题目并非只有卖弄学问的意义。

$$K_{\text{弹簧}}=\frac{M}{2l^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\int_0^l s^2\,ds$$

$$=\frac{1}{6}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

于是，整个系统的能量守恒就可陈述为

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{6}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E$$

从而给出

$$\omega^2=\frac{k}{m+M/3}$$

这就犹如给无质量弹簧的一端所系的质量，再加上 $M/3$ 的质量似的。

然则，真是这样吗？举个极端的例子来看，假定把所系质量 m 统统去掉，使弹簧自己成为系统中全部动能以及全部弹性势能的贮存者。那么，它自由振动的频率是否即为 $\omega=\sqrt{3k/M}$？答案是否定的！因为上面的计算，是假定均匀弹簧处在**静力**伸长的情形之下的，即伸长量与到固定端的距离成正比。可是，这只有在弹簧各点上的拉力一样时才成立。当具有质量分布的弹簧经历着加速度时，这个条件便无论如何也不能适用了。弹簧上的拉力必随各点的距离而变。上述 ω 的方程仅是一种近似而已；但在 $M\ll m$ 时它还是正确的，此时弹簧上各点的力大致**是**恒定的（而对于 $m=0$ 来说，自由端处的回复力必降为零，此点具有加速度，但不系有质量）。

上述的例子，虽说在此讨论得并不完全，但却在简单的质量-弹簧系统与伸长物体的自由振动之间，建立了重要的联系。是的，作自由振动的棒或空气柱，**确实**象一个未系任何质量的重弹簧。对我们来说，更严格地分析这种系统的行为，是有着重要的意义的，这将在第六章中进行。然而，现时却可利用上面的粗糙讨论，来指

出经严格处理所得结果的**本质**如何，即对质量为M弹簧常数为k的均匀弹簧，所求出的自由振动频率$\nu(=\omega/2\pi)$的基本形式为

$$\nu=\text{常数}\sqrt{\frac{k}{M}} \tag{3-27}$$

(式中的常数是个纯数因子)，因为这是k和M的唯一的组合，它具有频率的量纲。我们甚至还能再前进一步。假定式(3-27)成立，那就可用材料的几何线度、密度以及弹性模量，来置换k及M。例如，假设有一实心棒，其长为l，横截面积为A，密度为ρ，杨氏模量为Y。于是有

$$M=\rho Al①$$

$$k=\frac{AY}{l}\qquad[\text{式(3-10)}]$$

故而

$$\nu=\frac{\text{常数}}{l}\sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{3-28}$$

我们可以用这样的方程来描述棒的纵向振动，尽管那个纯数的常数尚未确定出来。

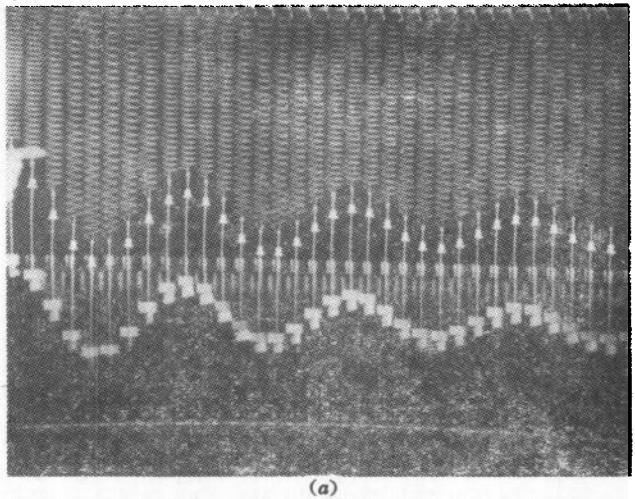
§3-10 自由振动的衰落

任何真实物理系统的自由振动，都要随着时间的推移而逐渐平息下来。每个这样的系统都不可避免地有着耗散的特性，而振动的机械能就是通过它们而耗尽的。就象我们得知存在着一个振动系统这件事本身，也同样包含着能量损失一样，譬如我们听见音叉的振动，便是它把能量传给空气，尔后又由空气传至我们耳朵的结果。因此，数学上用一个振幅恒定的正弦式变化关系，去描述这些自由振动，那就决不是严格正确的了。现在就来考虑如何引进

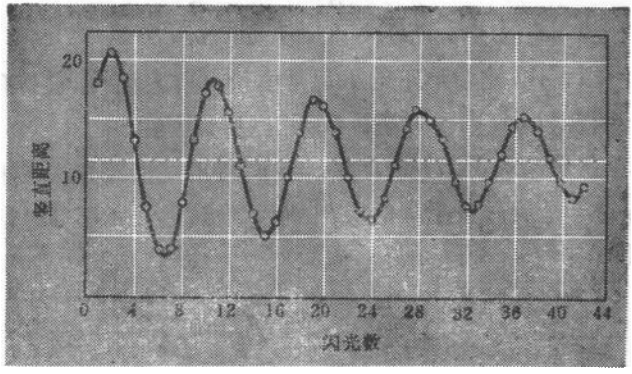
① 原文误为$M=Al$。——译者注。

耗散力来修改自由振动方程。

我们仍把讨论限于基本的质量-弹簧系统。图 3-12 示出了这种系统振动衰落的实例。为了加强阻尼，在运动的质量上系了一个叶片，并把叶片浸在液筒里；图 3-12(*a*)的多次闪光照片，清楚地示出了运动的过程。图 3-12(*b*) 的线图，是直接依据对这种照



(*a*)



(*b*)

图 3-12 (*a*) 阻尼自由振动的多次闪光照片。照相机向一旁平移，以便把相继拍得的象分开。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。) (*b*) 阻尼振动的线图，是对上述的照片进行测量而绘出的。

片所作的测量而绘出的。

流体对运动物体的阻力，乃是物体速度的某一函数，其量值可用下式很好地表示出来：

$$R(v)=b_1v+b_2v^2$$

式中 v 乃是速度的量值 $|\mathbf{v}|$。这阻力的作用方向，与 $\mathbf{v}$ 的方向相反。倘若 v 小于比值 b_1/b_2，则阻力可仅由线性的一项给出。在此情形下，牛顿定律对运动质量的陈述便可写成

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-bv$$

即

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0 \tag{3-29}$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

式中

$$\gamma=\frac{b}{m}\qquad\omega_0^2=\frac{k}{m} \tag{3-30}$$

由此可以看出，这情形下的阻尼是由量 γ 所表征的，它具有频率的量纲，而常数 ω_0，则表示系统在无阻尼时的角频率。

现在来探求式(3-30)的解。我们将用复指数方法来求解，为此，假定 x 是旋转矢量 z 的实部，而 z 则满足象式(3-30)这样的方程，即

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_0^2z=0 \tag{3-30a}$$

假定它的解具有式(3-8)那样的形式：

$$z=Ae^{j(pt+\alpha)} \tag{3-31}$$

它含有两个必不可少的常数 A 及 α，为的是按位移及速度的初始

值来调整我们的解。将此解代入式(3-30α)得

$$(-p^2+jp\gamma+\omega_0^2)Ae^{j(pt+\alpha)}=0$$

欲使此式适合所有的 t 值，则必须使

$$-p^2+jp\gamma+\omega_0^2=0 \tag{3-32}$$

这是个含有复数的条件；也就是它实际上包含着两个条件，分别适合于实数分量和虚数分量。倘若量 p 为纯实数，则上式便不能被满足了，因为 $jp\gamma$ 项这时就成了纯虚数而无法抵消为零。故而要使

$$p=n+js$$

式中 n 及 s 都是实数。从而

$$p^2=n^2+2jns-s^2$$

将它们代入式(3-32)便得

$$-n^2-2jns+s^2+jn\gamma-s\gamma+\omega_0^2=0$$

这便有了两个分立的方程：

实部：　$-n^2+s^2-s\gamma+\omega_0^2=0$

虚部：　$-2ns+n\gamma=0$

从第二个方程得出

$$s=\frac{\gamma}{2}$$

再将它代入第一方程便得

$$n^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

现在回到式(3-31)。把 p 写为复数 $n+js$，便有

$$z=Ae^{j(nt+jst+\alpha)}$$

$$=Ae^{-st}e^{j(nt+\alpha)}$$

因此

$$x=Ae^{-st}\cos(nt+\alpha)$$

把 n 及 s 之显值代入，就得出了如下的解：

$$x=Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t+\alpha) \tag{3-33}$$

式中

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}=\frac{k}{m}-\frac{b^2}{4m^2} \tag{3-34}$$

图 3-13 是式(3-33)在 $\alpha=0$ 这个特殊情形下的标绘图。图中还标绘出了阻尼振动曲线的包络线①。曲线诸零值的间隔一样，都是 $\omega\Delta t=\pi$，其间又相继穿插着极大与极小值，但诸极大与极小值只是近似地处于两零值的中点。显然，ω 可视为阻尼振子的固有角频率。

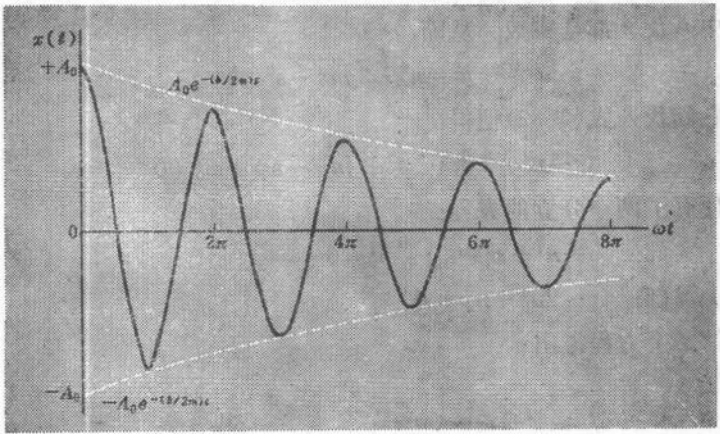


图 3-13　急速阻尼的谐振动。

图 3-13 的曲线画的是振动急速衰落的情形。然而，如果阻尼不大，那么运动在许多周内，都是近似于恒定振幅的 SHM。在此情形下，阻尼效应可用总机械能 E 的指数衰落来表述。因为若 $\gamma\ll\omega$，就可以认为在时间 t 附近的几周振动，能很好地用具有恒定振幅 A 的 SHM 来描述，致使

$$A(t)=A_0e^{-\gamma t/2} \tag{3-35}$$

而由于简谐振子的总机械能是

① 图中符号略有改变，以 A_0 代替 A 表示运动在 $t=0$ 时的振幅。

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$

所以，采用上述 A 值后便有

$$E(t)=\frac{1}{2}kA_0^2e^{-\gamma t}$$

即

$$E(t)=E_0e^{-\gamma t} \tag{3-36}$$

总能量的这种衰落示于图 3-14。

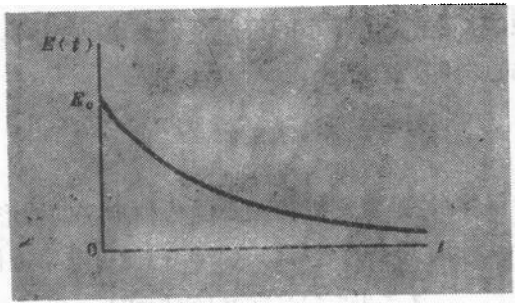


图 3-14　在阻尼谐振动中总能量的指数衰落。

大家记得，对阻尼过程的这全部分析，是根据假定：耗散是由与速度成正比之阻力所引起的。若是应用了某种另外的阻力定律，譬如 $R(v)\sim v^2$，情况就会完全不同了，并且也更难于处理。然而值得指出的是，象式(3-35)描述的能量之指数衰落，却可能是并确实是在许多不同种类的耗散过程存在的。例如在一个振荡电路里，电阻器的能量耗散率正比于电流的平方，而电路里的总电磁能也是如此。这情形，事实上非常类似于具有粘滞阻尼的力学振子。

在原子物理和核物理中，同样也有许多相互作用使系统产生指数的能量衰落，从而使这些系统的行为，类似于一个具有粘滞阻尼的简单的力学振子。所以，分析这样的力学振子，会有助于深入认识所有类似的现象，尽管它本身只是个特殊的情形。

前面的分析清楚表明，阻尼振子是由两个参数 ω_0 及 $\gamma(=b/m)$ 来表征的。常数 ω_0 是无阻尼振动的角频率，而 γ 乃是能量减至初始值的 $1/e$ 时所需时间之倒数。所以 ω_0 及 γ 有着相同的量纲。为便于把我们的结果应用于不同种类的物理系统，就规定了一个叫做振动系统 Q 值的参数(Q 指品质而言)，它即是上述两量的比值：

$$Q=\frac{\omega_0}{\gamma} \tag{3-37}$$

Q 是个纯数，对能量耗散率小的振动系统来说，它比 1 大得多。采用 Q 值后，式(3-34)变成

$$\omega^2=\omega_0^2\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) \tag{3-38}$$

若 Q 比 1 大得多(这是我们极为关心的一种重要的情形)，则式(3-38)给出 $\omega\approx\omega_0$，而振子的运动[式(3-33)]便可非常近似地写成为

$$x=A_0e^{-\omega_0t/2Q}\cos(\omega_0t+\alpha) \tag{3-39}$$

应该注意，Q 值与振动振幅降为 $1/e$ 倍时所经历的振动周数密切相关。因为，依据式(3-39)可有

$$A(t)=A_0e^{-\omega_0t/2Q}$$

现若用振动的完整周数 n 来量度时间 t，则由近似关系 $\omega\approx\omega_0$，可使 $t\approx2\pi n/\omega_0$。因此，在用所经历的周数来表述时，便可使

$$A(n)\approx A_0e^{-n\pi/Q} \tag{3-40}$$

故而在经历了大约 Q/π 周的自由振动后，振幅将降为 $1/e$ 倍。

采用 ω_0 及 Q 后，式(3-30)便可改写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \tag{3-41}$$

在许多情形下，它是描述很多种力学与非力学物理系统自由振动(包括阻尼自由振动)的最方便的基本微分方程形式。

§3-11 非常大阻尼的效应①

大家会注意到，阻尼自由振动方程[式(3-33)]的建立，实质上依赖于我们能给这些振动引入下式所规定的角频率 ω：

$$\omega^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

然而，倘若 $\omega_0[=(k/m)^{1/2}]$小于 $\gamma/2(=b/2m)$，则如何？在此情形下，运动压根儿就不再是振动了。只要参看式(3-33)前面的分析，从对问题求解的形式中，便能获得深刻的暗示。大家知道，运动的微分方程[式(3-30)]为下述形式的解所满足：

$$x=\mathrm{Re}[Ae^{-\gamma t/2}e^{j(nt+\alpha)}]$$

式中

$$n^2=\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}$$

现假定 $\omega_0^2<\gamma^2/4$，于是可使

$$n^2=-(\gamma^2/4-\omega_0^2)$$

若进一步求解 n，则有

$$n=\pm j(\gamma^2/4-\omega_0^2)^{1/2}=\pm j\beta(\text{比方说})$$

因此便有 $e^{jnt}=e^{\mp\beta t}$，从而根据下列两个可能的指数之一

$$e^{-(\gamma/2+\beta)t} \quad \text{或} \quad e^{-(\gamma/2-\beta)t}$$

就可规定出 x 随 t 作指数的衰落。严格的分析表明，这两个指数一般说都是必要的，所以，x 随 t 的完整变化方程为

$$x=A_1e^{-(\gamma/2+\beta)t}+A_2e^{-(\gamma/2-\beta)t} \tag{3-42}$$

式中

$$\beta=\left(\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2\right)^{1/2}$$

---

① 这跟那些振动问题并非严格有关，但却有紧密的联系，为完整起见，故增加了此节。

两个可调节的常数 A_1 及 A_2（可具有正号或负号），会使这个解适合于 x 及 dx/dt 在某瞬时（譬如 $t=0$）所具有的任何给定值。

与这种强阻尼运动有关的最后一个问题是：若 ω_0 跟 $\gamma/2$ **恰好相等**，则情况会怎样？此时，式(3-42)的右方就会约化成形式完全一样的两项，并且只留下了一个可调节的常数。然而这已不再是可以接受的解了；因为必需要有两个可调节的常数才行。于是，适于这种情形的解的形式是

$$x=(A+Bt)e^{-\gamma t/2} \tag{3-43}$$

你可用代入法验明，如果恰好 $\omega_0=\gamma/2$ 或 $\gamma=2\omega_0$ 的话，它是满足式(3-30)的基本运动方程。这个非常特殊的情形，对应于所谓的**中肯阻尼**。在真实的力学系中，阻尼常数 γ 的值，常是有意识地调整到符合这个条件，因为在中肯阻尼的情形下，原先静止而现在忽然受到恒力作用的系统，就会平滑地移向一个新的平衡位置，而不致振动或动过了头。这种特性，对电表及其它类似器件的活动部分来说，是非常有利的，利用这一点，人们在接上电表或闭合电键之后，就会尽快地得到一个稳定的读数。

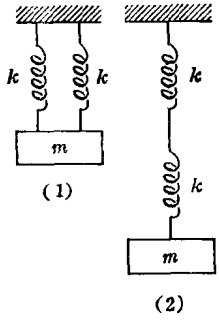
习　题

3-1　质量为 1g 的物体，悬于一弹簧下作振动。在 $t=0$ 时，其位移为 43.785cm，加速度为 -1.7514cm/s^2。问弹簧常数为多少？

3-2　一质量 m 悬于弹簧常数为 k 的均匀弹簧下。

(*a*) 此系统的振动周期多大？

(*b*) 如果质量 m 按下述办法悬挂（见图），系统的振动周期又多大？



(1) 它悬在并排的两个相同的弹

簧下。

(2) 它悬在首尾相连的两个相同的弹簧下。

3-3 一平台在竖直方向作简谐运动，振幅为 5cm，频率为每秒 $10/\pi$ 次。在平台到达路径的最低点时，将一木块放于平台上。

(*a*) 木块于何点处离开平台？

(*b*) 木块上升的高度，高出平台所达到的最高点多少？

3-4 直径为 d 的圆筒漂浮着，浸入液体中的高度为 l。其总高度为 L。假设无阻尼。在 $t=0$ 时，把圆筒按下一段距离 B，然后放开。

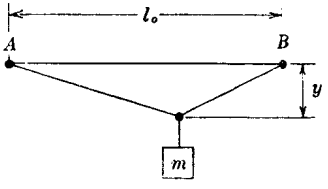
(*a*) 振动的频率多大？

(*b*) 画出 $t=0$ 至 $t=$一个周期的速度随时间而变的图线。要使用正确的振幅及周相。

3-5 长度为 L 的均匀棒钉在柱子上，有三分之二的棒长处于钉子下方。则棒作微小振动的周期多大？

3-6 直径为 d 的圆环悬在钉子上。它在小振幅下振动的周期多大？

3-7 长度为 l_0 的一根未伸长的金属线，当其下端悬有一定质量时，就被拉长了 $10^{-3}l_0$ 的距离。若将这根线水平地系在相距为 l_0 的 A、B 两点上，把那个质量悬在线的中点处，如图所示，试求中点下沉的距离 y 以及线中的张力各为多少？



3-8 (*a*) 质量为 0.5kg 的物体，悬于长度为 2m、直径为 0.5mm 的钢丝一端。(杨氏模量$=2\times10^{11}\mathrm{N/m^2}$。)则钢丝的伸长量是多少？

(*b*) 将此物体向上抬起一段距离 h(钢丝便松弛了)，然后放开物体下落，致使钢丝受到突然的一拉。钢的极限强度是 $1.1\times10^9\mathrm{N/m^2}$。那么，使钢丝不致被拉断的最大可能 h 值是多少？

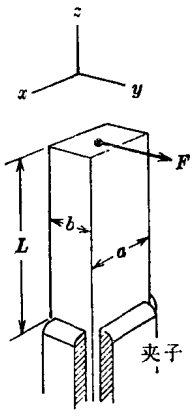
3-9 (*a*) 一实心钢球，悬在长为 2m、半径为 1mm 的钢丝末端。钢的极限强度为 $1.1\times10^9\mathrm{N/m^2}$。则钢丝所能承受的最大球的半径及质量各是多少？

(*b*) 此系统作扭转振动的周期是多少？(钢的切变模量$=8\times10^{10}\mathrm{N/m^2}$。球绕通过球心轴线的转动惯量$=2MR^2/5$。)

3-10 长为 0.5m 的金属棒，具有 $2\mathrm{mm^2}$ 的矩形横截面积。

(*a*) 使棒竖直并在其底端悬以 60 kg 的质量，它就会伸长 0.25mm。试

求棒材料的杨氏模量是多少(N/m^2)？

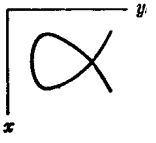


(*b*) 如图所示，棒的底部被夹紧，其顶部受到 y 方向(即平行于长度为 b 的棱边)力 F 的作用。结果产生的静止偏移量 y 为

$$y=\frac{4L^3}{Yab^3}F$$

倘使撤去 F 力，并将一个远大于棒之质量的质量 m 附于棒的顶端，则 y 方向与 x 方向(即平行于长度为 b 及 a 之棱边)的振动频率之比为多少？

(*c*) 将此质量沿某一横向方向拉开后释放。它便描绘出如图的轨迹。那么，a 跟 b 的比值为多少？



3-11 (*a*) 一圆柱形管子的一端封闭，另端配有气密而可自由移动的活塞(质量为 m)，管内封有气体。试求此气柱在绝热条件下的振动频率。

(*b*) 直径为 2cm 的钢珠在竖直的玻璃管内振动，管膛与钢珠密合，而管子是装在 12 升的大瓶上的，瓶内的空气为一个大气压。试证，振动的周期应约为 1s。(假定压力作绝热变化时 $\gamma=1.4$。钢的密度$=7600kg/m^3$。)

3-12 线性振子的运动，可以用以 x 为横坐标、dx/dt 为纵坐标的线图来表示。因而，振子的经历是一根曲线。

(*a*) 证明无阻尼振子的这种曲线是个椭圆。

(*b*) 试证(至少定性地)，若引入了一个阻尼项，则曲线将蜷入原点。

3-13 试证 $x=Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ 是方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

的一个可能解，并用 γ 及 ω_0 表出 α 及 ω。

3-14 质量为 0.2kg 的物体，悬于弹簧常数为 80N/m 的弹簧下。此物体受到阻力 $-bv$ 的作用，此处 v 是它的速度(m/s)。

(*a*) 试写出此系统自由振动的运动微分方程。

(*b*) 若阻尼频率为无阻尼频率的$\sqrt{3}/2$，则常数 b 为多少？

(*c*) 此系统的 Q 值多大？振动经 10 个整周后，振幅减弱为几分之几？

3-15 许多振动系统，虽然能量损失或耗散的机制并不类似于粘滞阻尼，但它们所贮存的**平均**能量也呈现出随时间而指数地减少，即 $\bar{E}=\bar{E}_0e^{-\gamma t}$。运用 $Q=\omega_0/\gamma$ 的定义便可确定这些振子的 Q 值了，此处的 ω_0 是固有角频率。

(*a*) 当在钢琴上弹响“中音 C”这个音键时，其振动能量约在 1s 内减至初始值的一半。中音C的频率为 256Hz。系统的 Q 值多大？

(*b*) 若高八度的音调(512Hz)也大约在相同的时间内衰落其能量，则其 Q 如何？

(*c*) 一个自由的阻尼谐振子，由质量 $m=0.1$kg 的物体系在弹簧常数 $k=0.9$N/m 的弹簧上组成，此物体在阻尼系数为 b 的粘性液体里 ($F_{粘}=-bv$)，进行着阻尼振动的运动。它的平均能量在 4s 内衰落至初始值的 $1/e$。试求振子的 Q 是多少？ b 值是多少？

3-16 根据经典电磁理论，一个加速运动的电子在单位时间内辐射的能量为 Ke^2a^2/c^3，此处 $K=6\times10^9$N-m²/C²，e=电子电量(C)，a=瞬时加速度(m/s²)，c=光速(m/s)。

(*a*) 若一电子沿一直线以频率 ν(Hz)及振幅 A 进行振荡，则在振荡一周的时间内，它辐射了多少能量？(假定每一周的运动均可用 $x=A\sin 2\pi\nu t$ 来描述。)

(*b*) 此振子之 Q 多大？

(*c*) 在运动能量降至初始值的一半以前，振荡经历了多少个周期？

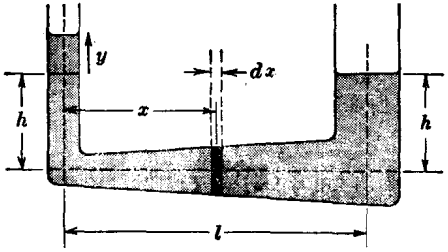
(*d*) 设 ν 为一典型的光学频率(即可见光频率)，试估算此辐射系统之 Q 以及“半衰期”的近似值。

3-17 U形管两个竖直臂的半径分别为 r 和 $2r$，水平连结管的长度为 l，其半径从 r 线性地增大至 $2r$。U 形管内所盛液体，在两臂内均达到 h 的高度。今使液体振动起来，且在某一时刻，细臂内的液面高出平衡水平面的距离为 y。

(*a*) 试证液体的势能为 $U=\dfrac{5}{8}g\rho\pi r^2y^2$。

(*b*) 试证水平管内一小段液体(见图)的动能为

$$dK=\frac{1}{2}\rho\frac{\pi r^2dx}{(1+x/l)^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$



(注意，若液体在任何地方都不堆积，则管内每处的速度跟横截面积之乘积都应有同样的值。)

(*c*) 运用(*b*)的结果，证明全部运动液体的总动能为

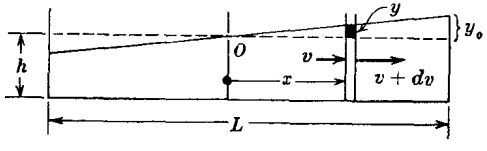
$$K=\frac{1}{4}\rho\pi r^2\left(l+\frac{5}{2}h\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

(不计拐角处的一切麻烦。)

(*d*) 试从(*a*)及(*c*)，计算振动的周期，设 $l=5h/2$。

3-18 此题目在需要把许多部分综合在一起的意义上来说，比起一般题目来要雄心勃勃得多。但是如果你依题示而抓住各部分的要领，那就会发现这些单个部分并不特别困难，而且从整体上来说，这个题目为用能量守恒方法分析振动问题的能力，提供了一个例证。

大家无疑对浴盆中水的乱晃现象是熟悉的。在最简单的运动里，近似地说，水面只是如图示那样的倾斜，但多少还是保持为平面的。在湖泊里也发生类似的现象，叫做静振[①]。设想湖的横截面是矩形的，如图所示，其长为 L，



水深为 $h(\ll L)$。这问题与单摆问题相似，其动能几乎完全来自湖水的**水平**流动，而**势能**则取决于湖水在竖直面上非常微小的变化。下面是**近似**计算振动周期的步骤：

(*a*) 设某时刻湖边处水面的位置，相对于正常水面为 $\pm y_0$。试证，湖水

① 静振(seiche)，是湖水因气压变化而发生的振动。——译者注。

全部质量所增加的重力势能为

$$U=\frac{1}{6}b\rho gLy_0^2$$

式中 b 为湖的宽度。你可以先找出离中心 x 远处一片湖水所增加的势能，然后进行积分即得此结果。

(*b*) 假定湖水的流动主要是水平方向的，其速率 v 应随 x 而变，在 $x=0$ 处最大，在 $x=\pm L/2$ 处为零。由于水多少是不可压缩的，故可把 x 及 $x+dx$ 两处的流速差，与 x 处水面高度的变化率 dy/dt 联系起来。这是**连续性**条件。水在 x 处的流入率为 vhb，在 $x+dx$ 处的流出率为 $(v+dv)hb$。(这里假定 $y_0 \ll h_0$)它们的差值，应等于在 x 及 $x+dx$ 之间湖水体积的增加率 $(bdx)(dy/dt)$。利用这个条件，证明：

$$v(x)=v(0)-\frac{1}{hL}x^2\frac{dy_0}{dt}$$

式中

$$v(0)=\frac{L}{4h}\frac{dy_0}{dt}$$

(*c*) 由此证明，在任一时刻湖水作水平方向运动所具有之总动能为

$$K=\frac{1}{60}\frac{b\rho L^3}{h}\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2$$

欲得此结果，应先写出在 x 及 $x+dx$ 之间体积为 $bhdx$ 的一片湖水，以速率 $v(x)$运动时所具有的动能，然后在 $x=\pm L/2$ 间进行积分。

(*d*) 现在令

$K+U=$常数

此方程的形式为

$$A\left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2+By_0^2=\text{常数}$$

从而规定了具有一定周期的 SHM。试证，此周期仅取决于长度 L、深度 h 以及 g。[**注意**：此理论其实并不正确。水面实际上是一部分正弦波而并非水平平面。但我们所得的公式，其误差不超过 1%。(真正的答案是 $T=2L/\sqrt{gh}$)。]

(*e*) 日内瓦湖可近似地看作是个矩形的水池，其长度大约为 70km，平均水深约为 150m。观察到它的静振周期约为 73min。试将此值与你的公式相比较。

3-19 一质量 m 静置于无摩擦的水平桌上，并经由两相同的弹簧而连结在刚性支架上(见图)，每个弹簧的松弛长度为 l_0，弹簧常数为 k。此时，**每一弹簧都被伸长到甚大于 l_0 的长度 l**。m 离开平衡位置的水平位移，沿 AB 方向标作 x，垂直于 AB 方向标作 y。

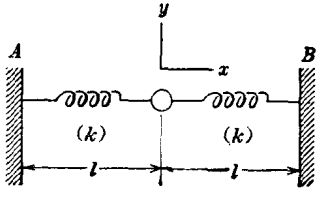
(*a*) 写出支配 x 方向微小振动的运动微分方程(即牛顿定律)。

(*b*) 写出支配 y 方向微小振动的运动微分方程(假定 $y \ll l$)。

(*c*) 计算 x 向和 y 向振动**周期**的比值，用 l 及 l_0 表示。

(*d*) 若在 $t=0$ 时将 m 自 $x=y=A_0$ 处以零速度自由释放，则在以后的任何时间 t，其 x 坐标及 y 坐标如何？

(*e*) 若 $l=9l_0/5$，试绘出 m 在(*d*)条件下的合成轨迹图。



公鸡把自己的头伸进一个空的玻璃容器内啼鸣，致使容器破碎，在此情形下就应偿付全部损失。

犹太教法典(第二章　*Baba Kamma* 条)

第四章　受迫振动与共振

上一章全部讨论的是各式物理系统的自由振动。现在，则要转而介绍在整个物理学中具有极其重要性的、值得注意的现象，它是系统——物理振子——在受到外部机构的周期性策动力作用时发生的。

关键的词儿是"共振"。每个人对此现象至少在定性上是熟悉的，大致说来，一个受策动的振子最显著的特征是这样的：大小一定的周期性力，依其频率不同就会产生很不相同的后果。特别是在策动频率接近固有频率的时候，那就象每个荡过鞦韆的人都知道的那样，只要重复施加很小的力，便能使振动达到很大的振幅。这就是共振现象。而大抵同样大小的力，若其频率甚高或甚低于共振频率，则效力甚微；它所产生的振幅，仍然很小。按本章开头所引的那段条文来看，此现象很久以来就为人们所认识了①。这种类型运动的典型情况是，不管策动力重复的频率如何，受策动系

① 正如A. Wood在《Acoustics(声学)》(1940年伦敦 Blackie & Son 版)一书中所论述的："看来难于相信的是，法典所规定的情况，却是从未发生过的。"无论如何，该事例看来确是有些奇特，但是法国物理学家 H. Bouasse 注意到了犹太教法典的这个条文并报告说，他自己曾饲养了大群公鸡，却没有一只鸡具有把头伸进到玻璃瓶里去的习性！

统都得被迫接受下来；起初它会明显地趋向于以自己的固有频率振动，但最终仍得屈服于外来的影响。

为了给共振现象的理论描述提供某些初步的认识，但又不过多地卷进分析的细节里去，我们将从一个简单而物理上不真实的振子开始，亦即它的阻尼效应可以完全略去不计。

§4-1 谐和力作用下的无阻尼振子

我们取在弹簧常数为 k 的弹簧上系一质量 m 的通常系统来研究。设想一正弦式策动力 $F=F_0\cos\omega t$ 作用于此系统。以 ω_0 表示系统的固有角频率值 $\sqrt{k/m}$。于是，运动方程 $ma=$净力，便可陈述为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx+F_0\cos\omega t$$

或

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F_0\cos\omega t \tag{4-1}$$

在详细地讨论这个运动微分方程之前，让我们先对情况作一番定性的考察。如果振子被驱离平衡位置以后就不再受策动了，那么振子将以其固有频率 ω_0 进行振动。可是周期性的策动力，则力图以它的频率 ω[①] 强加于振子。所以，我们可以预期这种情形下的实际运动，是 ω 及 ω_0 两个频率振动的某种叠加。的确，式(4-1)在数学上的完全解就是这两种运动的简单和。但由于任何真实系统中，都不可避免地存在着各种耗散力，因而自由振动终将消失。在初始阶段里，两种运动都是突出的，该阶段叫做**瞬变**阶段。然而在足够长的时间以后，事实上唯一存在的运动就只是受迫振动了，

① 为了避免累赘，今后在不致引起误会的地方，就把 ω 简称为“频率”以代替“角频率”。

它将以频率ω无衰落地持续振动下去。达到了这个地步，便出现了所谓的受策动振子的稳态运动。

往后，我们是要分析瞬变效应的，但目前先把注意力专门集中在稳态受迫振动上。固有振动的效应，只是在理想的无阻尼振子中，才会永不消失，然而为简单起见，我们暂时抹煞掉这个使人为难的事实，而不把阻尼带到受迫运动的问题中来。

这种运动的最显著特色，就是在接近$\omega=\omega_0$时的巨大响应，但在全面求解式(4-1)之前，我们要指出，在策动频率ω具有很低或很高值的极端情形下，运动所具有的某些特征。如果策动力的频率远低于自由振动的固有频率，那么可以预料，粒子的运动实际上跟策动力是同步的，其振幅跟恒力F_0所产生的位移$F_0/k(=F_0/m\omega_0^2)$，并无多大的差别。这相当于说，在很低频率时，式(4-1)中的$m(d^2x/dt^2)$项较kx项的作用要小些，换言之，响应是由弹簧的倔强性来控制的。另一方面，当策动力频率远大于自由振动的固有频率时，情况就反过来了。此时由于高频带来了大的加速度，kx项就变得比$m(d^2x/dt^2)$小了，因而响应便是由惯性来控制的。在此情形下，振动的振幅较小，且在周相上应与策动力相反，因为粒子在谐运动中的加速度，与其位移是180°异相的。在这些议论中，仍没有显示出共振振幅应大为超过低频或高频时的振幅，但我们现在就来阐明这一点。

为求得式(4-1)的稳态解，令

$$x=C\cos\omega t \tag{4-2}$$

换句话说，我们假定了运动是谐和的，有着与策动力一样的频率和周相，并且不存在系统的固有振动。要记住，式(4-2)只是个推测性的假定，倘若我们不能找出未定常数C的值，使它在任何ω及t值时都能满足式(4-1)，那么就得准备舍弃它。现将式(4-2)对t求导两次，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2C\cos\omega t$$

代入式(4-1)便有

$$-m\omega^2C\cos\omega t+kC\cos\omega t=F_0\cos\omega t$$

因之

$$C=\frac{F_0}{k-m\omega^2}=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{4-3}$$

式(4-3)就这样以总能满足式(4-1)的方式，满意地定出了 C。因此可以认为，受迫运动确实可用式(4-2)来描述，其中的 C 则按式(4-3)而依赖于 ω。这种依赖关系，如图 4-1 中的线图所示。注意，在 ω 通过 ω_0 的时候，C 便从巨大的正值突变到巨大的负值。共振现象，正是用 C 的量值，不论其符号如何，在 $\omega=\omega_0$ 时变为无限大这个结果来表示的。

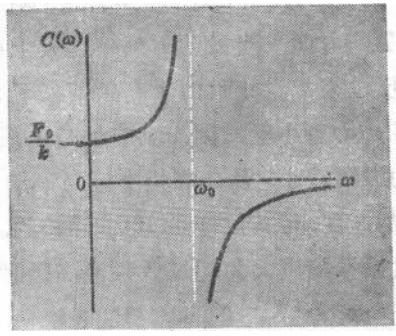


图 4-1　受迫振动的振幅是策动频率的函数(设阻尼为零)。$\omega>\omega_0$ 时振幅的负号，相应于位移的周相比策动力的周相落后 π。

虽然式(4-2)及(4-3)两者是完满地描述求解动力学问题的合适的方法，但还有一种更好的陈述此项结果的方式，它更符合于对谐运动的一般描述。这就是，把 x 表示为具有**正**值的振幅 A，且在 $t=0$ 时周相为 α 的正弦式振动：

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{4-4}$$

不难看出，这意味着使 $A=|C|$，并依策动频率 ω 是小于或大于 ω_0 而赋予 α 下列两值之一：

$$\omega<\omega_0: \qquad \alpha=0$$

$$\omega>\omega_0: \qquad \alpha=\pi$$

这样，系统在整个 ω 范围内的响应，便可分别用振幅 A 以及周相 α 的两种曲线来表达，如图 4-2 所示。A 在 $\omega=\omega_0$ 时具有无限大的值，α 值在通过 ω_0 时从零立即跃为 π，这些应是非物理性的答案，然而大家将会看到，它们描述了实际发生在阻尼系统中的一种数学上的极限情形。

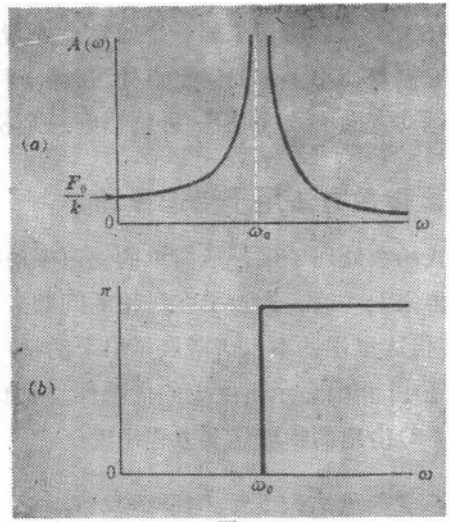


图 4-2 （a）阻尼为零时，受迫振动的绝对振幅是策动频率的函数。
（b）位移对策动力的周相落后是频率的函数。

位移相对于策动力的实际周相反转(即从同相变为 180° 的异相)，可用单摆的行为直接显示出来，这摆是靠水平地按照 SHM 来回移动其悬点而受策动的。图 4-3 示出了频率远低于或远高于共振时的情形。当此摆达到了稳态以后，若 $\omega<\omega_0$，则摆的行为就

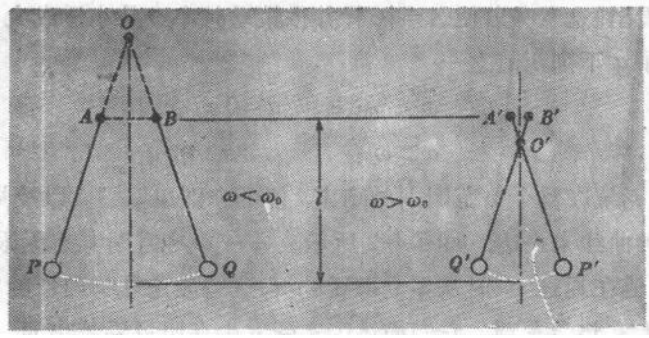


图 4-3　悬点沿 AB 线作受迫谐振动时所形成的单摆运动。(a) $\omega<\omega_0$。(b) $\omega>\omega_0$。

好象是它被悬在大于真实摆长 l 的一个固定点处，若 $\omega>\omega_0$，则摆的行为就犹如它被悬在小于 l 的固定点处。在前一种情形里，摆锤总是与悬点的运动方向一致，而后一种情形则总是相反的。

§4-2　复指数方法用于受迫振动

在用正弦式函数处理了这种最简单的受迫振动问题之后，让我们用复指数再来做一遍。这对现在讨论的问题来说，并没有什么特殊的价值，但这里用基本术语所展示出来的技巧，在即将处理的阻尼振子问题中，将会显示出巨大的优越性。我们的步骤如下：

1. 从式(4-1)给出的物理运动方程出发：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F_0\cos\omega t$$

2. 把策动力 $F_0\cos\omega t$ 设想为旋转矢量 $F_0\exp(j\omega t)$ 在 x 轴上的投影，如图 4-4(a)所示，且把 x 设想为以同样频率 ω 旋转的矢量 z 之投影[图 4-4(b)]。

3. 写出 z 所服从的微分方程：

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+kz=F_0e^{j\omega t} \tag{4-5}$$

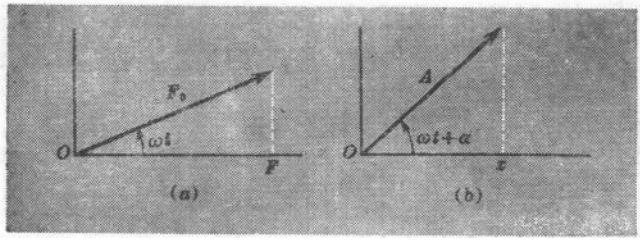


图 4-4 (*a*) 正弦式策动力的复数表示法。 (*b*) 受迫振动中位移矢量的复数表示法。

4. 试验其解

$$z=Ae^{j(\omega t+\alpha)}$$

代入式(4-5),给出

$$(-m\omega^2A+kA)e^{j(\omega t+\alpha)}=F_0e^{j\omega t}$$

它可改写为

$$(\omega_0^2-\omega^2)A=\frac{F_0}{m}e^{-j\alpha}$$

$$=\frac{F_0}{m}\cos\alpha-j\frac{F_0}{m}\sin\alpha \qquad (4\text{-}6)$$

这包含着两个条件,对应于方程两方的实部与虚部:

$$(\omega_0^2-\omega^2)A=\frac{F_0}{m}\cos\alpha$$

$$0=-\frac{F_0}{m}\sin\alpha$$

显然,它们立即导致由图 4-2 中两个线图所表达的解。

§4-3 阻尼受迫振动

在第三章末尾,我们分析过在与速度成正比的阻力作用下,一个质量-弹簧系统的自由振动。现在来考察,用如上节所说的那种力,作用于这样的系统所产生的后果。此时,牛顿定律的陈述变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-b\frac{dx}{dt}+F_0\cos\omega t$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

令 $k/m=\omega_0^2$, $b/m=\gamma$, 则上式可改写为

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4-7}$$

让我们来寻求此方程的稳态解。

为此, 可以立即运用复指数方法; 于是基本方程就变为

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\frac{dz}{dt}+\omega_0^2z=\frac{F_0}{m}e^{j\omega t} \tag{4-8}$$

现设其解为

$$z=Ae^{j(\omega t-\delta)} \tag{4-9}$$

随之有

$$x=\mathrm{Re}(z)$$

注意, 这里假设的 z 方程, 跟上节的稍有不同; 我们把 z 的初周相写为 $-\delta$ 以代替 $+\alpha$。为什么要这样作? 这可在式(4-6)中找到线索。该式的右方, 用几何学术语来说, 乃是长度为 F_0/m 的矢量, 相对于实轴旋转了 $-\alpha$ 的角度。现在我们将要得到一个非常类似的方程, 如果至少在形式上规定此角代表正向即反时针方向的旋转就可使问题得到简化。这就是说, δ 在形式上乃是策动力超前于位移的一个正周相角。

将式(4-9)代入式(4-8)便得到

$$(-\omega^2A+j\gamma\omega A+\omega_0^2A)\,e^{j(\omega t-\delta)}=\frac{F_0}{m}e^{j\omega t}$$

因此,

$$(\omega_0^2-\omega^2)A+j\gamma\omega A=\frac{F_0}{m}e^{j\delta} \tag{4-10}$$

这里, 确实表现了复指数方法的优美和明晰。式(4-10)可视为一种几何学的陈述。式的左方告诉我们, 先画出长度为 $(\omega_0^2-\omega^2)A$

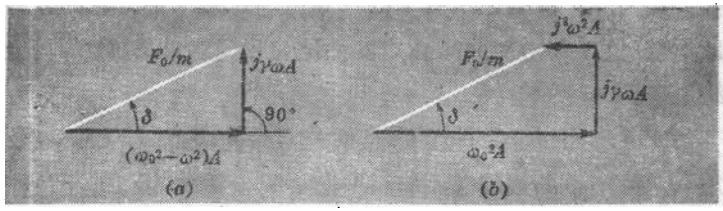


图 4-5　式(4-10)的几何表示法。

的矢量，然后垂直地接上一个长度为 $\gamma\omega A$ 的矢量。而右方，则是画出长度为 F_0/m 且跟实轴成 δ 交角的矢量。该方程要求这两道手续汇于一点，使这些矢量组成一个封闭的三角形，如图 4-5(a)所示①。显然，我们有

$$(\omega_0^2-\omega^2)A=\frac{F_0}{m}\cos\delta$$

$$\gamma\omega A=\frac{F_0}{m}\sin\delta$$

所以

$$A(\omega)=\frac{F_0/m}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2]^{1/2}}$$

$$\tan\delta(\omega)=\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{4-11}$$

当然，不引用复指数也能得出这些同样的结果。不妨简单地假设解的形式为

$$x=A\cos(\omega t-\delta) \tag{4-12}$$

把它代入式(4-7)，从而导致如下的方程：

$$(\omega_0^2-\omega^2)A\cos(\omega t-\delta)-\gamma\omega A\sin(\omega t-\delta)$$

$$=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

① 人们实际上可能更喜欢把式(4-10)的左方，按其原始面貌在书面上标记成如图 4-5(b)所示的三个矢量之和的形式：

$$\omega_0^2 A+j\gamma\omega A+(j)^2\omega^2 A$$

这就要作为一个适合于所有 t 的三角恒等式去求解。它的分析确实也不难，但在其透彻而又具启发性地说明问题这方面，却较上一方法逊色。

图 4-6 示出了，在假定 F_0 量值为常数的情形下，振幅 A 及周相角 δ 对频率 ω 的依赖关系。（记住，δ 乃是策动力超前于位移的角度，或是位移落后于策动力的角度。）这些曲线的概貌，显然跟图 4-2中无阻尼振子的类似。从式(4-11)中 $\tan\delta$ 的表达式可以看出，周相上的落后是从零（$\omega=0$ 时）连续地增至 180° 的（$\omega\to\infty$ 的极限情形）；它恰好在频率 ω_0 时通过 90°。而较不明显的是，在稍小于 ω_0 的频率 ω_m 时，就达到了最大振幅；然而对大多数有实际意义的情形来说，ω_m 和 ω_0 的差别都小得可以不计。

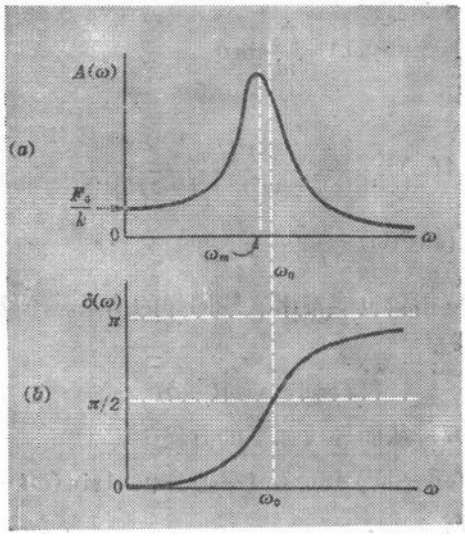
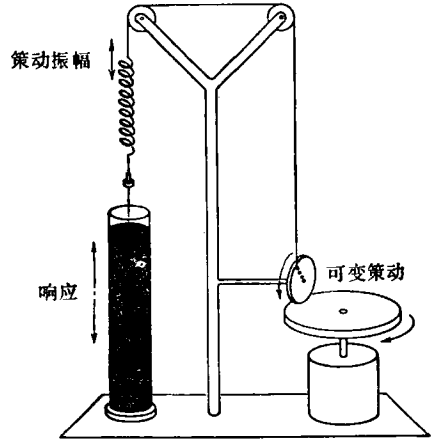
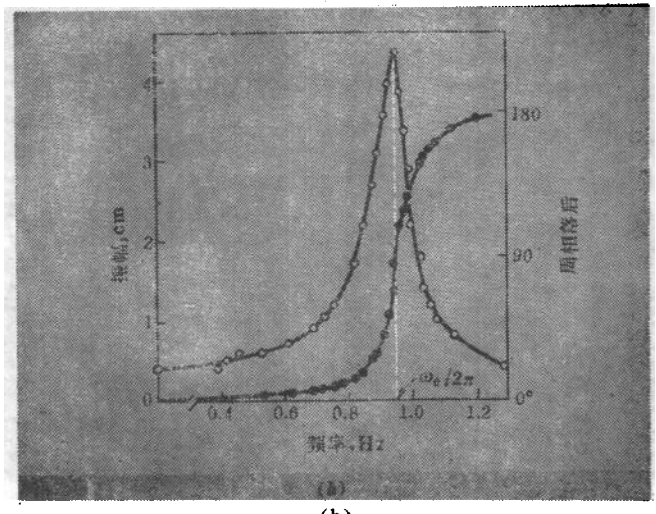


图 4-6 （a）阻尼受迫振动中振幅对策动频率的依赖关系。（b）位移相对于策动力的周相为策动频率之函数。

这是从计算中得出的受迫阻尼振子的一些特征。那么，它们与实际物理系统的表现吻合到什么程度呢？图 4-7 对此作出了回



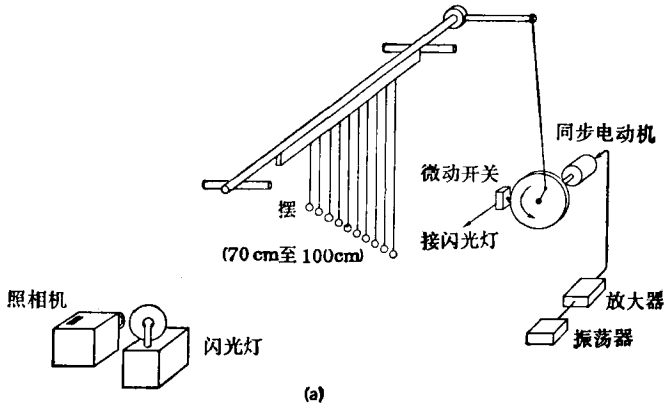
(a)

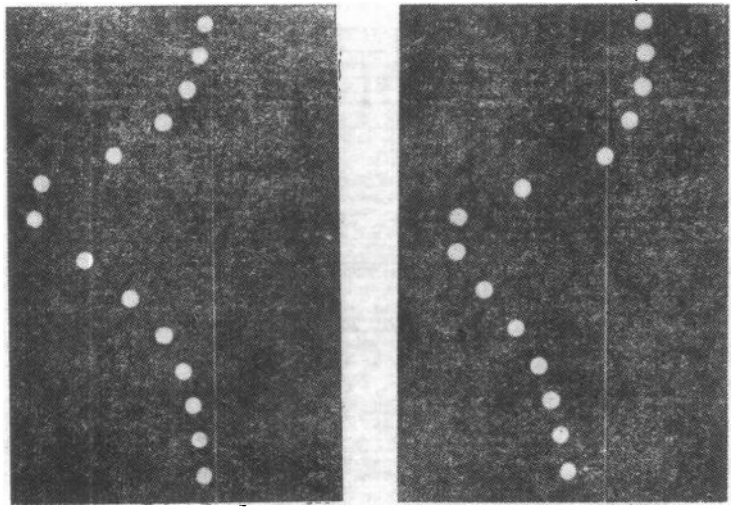


(b)

图 4-7 (*a*) 力学共振仪"德克萨斯塔"(麻省理工学院教育研究中心 J. G. King 制作)示意图。 (*b*) 用此仪器得出的振幅及周相落后之共振实验曲线 (麻省理工学院 1967 年级 G. J. Churinoff 测定)。

答,它是用我们讨论过的这种物理系统得出的实验结果。诚然,这不是一个自然系统,而是个专为显示这些特征而设计出来的人工





(b)

图 4-8 Barton 摆实验的新说明。 (*a*) 装置的一般略图。每当振动达到圆轮上一个可控点时，闪光灯就闪亮一次。 (*b*) 左图是策动力通过零时各摆的位移，右图为稍后一个瞬时的情形。注意右边照片里，较短的摆与棒的运动同向，较长的摆则与之反向，它们分别对应于 $\delta<90^\circ$ 及 $\delta>90^\circ$ 的情形。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

系统。然而它却能让我们看到，由数学分析(这毕竟与实物没有关联)所描述的行为的图样，与含有真实弹簧及真实粘滞阻尼机构的系统所具有之行为，事实上符合得很好。我们在图 3-12 中演示自由振动的衰落，也是用这个系统做出来的。

图 4-6 的特征，还能用另一种简单的、然而却是间接的办法，巧妙地演示出来：把具有某**固定**频率的策动力，施于一组有着不同固有频率的振子上。这个实验，用 E. H. Barton 于 1918 年设计的、现已加以改进了的装置，可以很容易地做出来。在这个装置中，许多个摆长不同的轻摆，悬于一根水平棒下，而棒则以棒上中部一个摆的共振频率振动着，如图 4-8(a) 所示。所有的摆都为这同一个频率所策动，如果沿着棒的方向来摄取这些轻摆锤运动的照片，那么至少能定性地显示出所期待的周相关系来。这可由图 4-8(b)的两幅照片表示出。一幅是，策动棒从左向右通过其平衡位置的瞬时，各个小摆的位移，另一幅是稍后一个瞬时的情形。那些短的摆(其 $\omega_0>\omega$) 具有 $\delta<90°$，那些长的摆(其 $\omega_0<\omega$) 却有 $\delta>90°$，故与策动棒的运动方向相反，而那个恰好共振的摆则落后 90°，亦即在棒通过零点时，它刚好位于最大的负位移处。

§4-4 变更阻力项的作用

在第三章末尾讨论自由振动的衰落时，我们引入了“品质因数”Q，它是个纯数，等于比值 ω_0/γ。Q 值愈大，耗散效应愈小，而对一定的振幅减少量来说，自由振动的周数也就愈多。现在我们来说明一下，在其它条件都不变的情形下，共振系统的性能是如何随着系统 Q 值的改变而变化的。

为此，可将表述 A 及 $\tan\delta$ 之式(4-11)写成更为方便的形式。首先，代入 $\gamma=\omega_0/Q$，就得到

$$A(\omega)=\frac{F_0/m}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\omega\omega_0/Q)^2]^{1/2}}$$
$$\tan\delta(\omega)=\frac{\omega\omega_0/Q}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{4-13}$$

进而，大家会看到，对许多情形来说，使用比值 ω/ω_0 作为变量，要比用 ω 自身方便些。记住了这一点，式(4-13)便可改写成如下的形式：

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{\omega_0/\omega}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}}\\ \text{或}\quad A&=\frac{F_0}{k}\frac{\omega_0/\omega}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}}\\ \text{以及}\quad \tan\delta&=\frac{1/Q}{\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}}\end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

图 4-9 示出了由式(4-14)算得的曲线，表明了在不同 Q 值时，振幅 A 及周相落后 δ 随频率而变的情形。δ 的大部分变化，大致发生在 $\omega_0(1-1/Q)$ 至 $\omega_0(1+1/Q)$ 的频率范围内，即在宽度为 $2\omega_0/Q$ 而中心在 ω_0 的频带之内。在 $Q\to\infty$ 的极限情形中，当 ω 通过 ω_0 时，周相落后就突然从零跃为 π。显然，频率 ω_0 乃是共振系统的一个重要性质，虽然它并不是系统不受外力时的振动频率(除非阻尼为零)。

对大于 $1/\sqrt{2}$ 的任何 Q 值来说，也就是除去阻尼最厉害的那些系统外，振幅 A 都经过一个最大值。正如我们早已知道的，这个最大的振幅 A_m，是在小于 ω_0 的频率 ω_m 时出现的。若以 A_0 表示 $\omega\to0$ 时的振幅 F_0/k，则不难证明下述的结果成立：

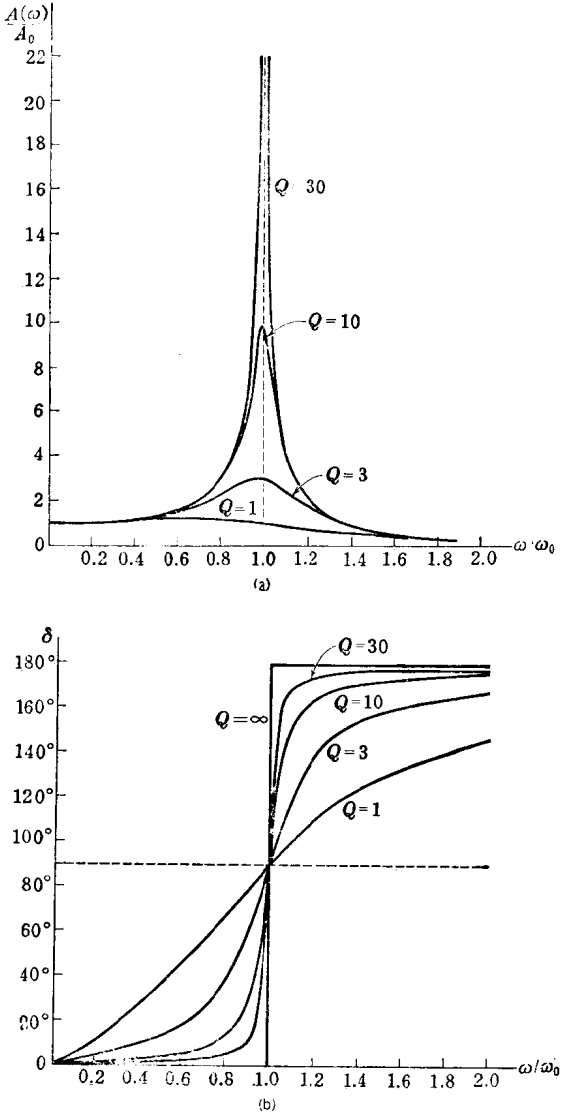


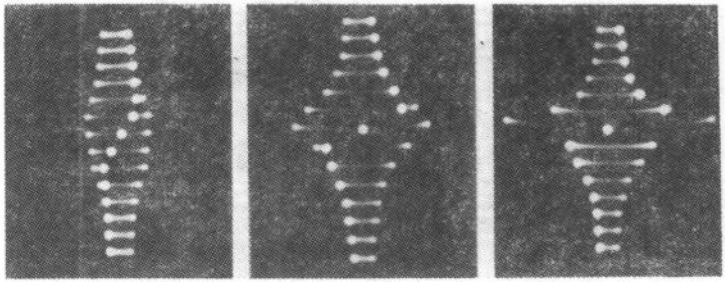
图 4-9 （a）不同Q值下振幅与策动频率的函数关系，设策动力的振幅恒定但频率是可变的。 （b）不同Q值下周相差δ与策动频率的函数关系。

$$\omega_m=\omega_0\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)^{1/2}$$
$$A_m=A_0\frac{Q}{\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}} \tag{4-15}$$

表 4-1 列出了一些特殊 Q 值时的 ω_m/ω_0 及 A_m/A_0 值。注意，在大多数情形下 ($Q\geqslant 5$)，振幅的峰值是接近于 Q 与由同样的 F_0 所产生之静位移的乘积的，并且是在频率很靠近 ω_0 的时候出现的。而在频率为 ω_0 时，振幅则刚好等于 QA。

表 4-1 阻尼系统的共振参数

Q	$\omega m/\omega_0$	Am/A_0
$1/\sqrt{2}$	0	1
1	$1/\sqrt{2}=0.707$	$2/\sqrt{3}=1.15$
2	$\sqrt{7/8}=0.935$	$8/\sqrt{14}=2.06$
3	$\sqrt{17/18}=0.973$	$18/\sqrt{35}=3.04$
5	$\sqrt{49/50}=0.990$	$50/\sqrt{99}=5.03$
$\gg 1$	$1-1/4Q^2$	$Q[1+1/(8Q^2)]$



(a) (b) (c)

图 4-10 长时间曝光下的 Barton 摆(参看图 4-8)照片，显示出共振的性质。摆锤是轻的泡沫聚苯乙烯球(取自 PSSC 静电实验用具)。 (a) 摆锤无负荷因而阻尼厉害，显示不出选择共振。 (b) 每个锤有轻的负荷(加一图钉)，给出中等程度的阻尼和较好的选择共振。 (c) 每锤负荷加重(一图钉加一小垫圈)，阻尼变小而 Q 大为提高。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)每张照片都叠印了一张瞬时闪光照片，以显示出各个受策动摆之间的周相关系。

图 4-9 表明了共振系统的调谐锐度是如何随 Q 而变化的。这个现象，可以用象图 4-8(a)那样的一列摆的装置显示出来。采用增加摆锤重量的办法，就可以增加 Q 而不改变 ω_0。图 4-10 示出了这些摆在长时间曝光下的照片，第一张是无负荷时的情形，其余两张则有不同程度的负荷。但照片还是清楚地显示出了调谐锐度的改善。尽管三张照片中振动的绝对振幅并不是严格相当的，在每张长时间曝光的照片上，都叠印了一张瞬时闪光照片，以便与图 4-9(b)相对照，显示出不同 Q 时各个受策动摆之间的周相关系。

§4-5 瞬变现象

我们前面所讨论的稳态，都是已经完全建立起来的状态。在这些状态中，似乎策动力 $F_0\cos\omega t$ 很早以前就已起作用了，而受策系统固有振动带来的全部痕迹，也早已消失干净。可是在任何真实情况中，策动力当然是在某个时刻才开始作用的——若无其它相反的理由，我们也可称这个时刻为 $t=0$——而只是在一些时间以后，稳态的局面才跟着来到。如果自由振动的阻尼确实极端微弱的话，这个瞬变阶段有时就会持续一段很长的时间；我们的讨论甚至可从阻尼实际为零的情形开始，这仍是由于它在数学上简单的缘故。

为使问题明确起见，假定有个质量-弹簧系统一直到 $t=0$ 时还是静止的。在 $t=0$ 时，加上了策动力，从此，运动即为本章开头引出的式(4-1)所支配：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=F_0\cos\omega t$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4-16}$$

大家业已知道，这个受迫运动的微分方程，是如何变成为下述的 x 方程的：

$$x=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t \tag{4-17}$$

然而，这方程并不含有可调节的积分常数；此解已完全为 m、ω_0、F_0 及 ω 诸值所规定。在读过第三章中关于求解二阶微分方程需要引入两个积分常数的叙述之后，现在不免令人诧异，在此情形中它们变成什么了。我们甚至可以专门地，也可谓是习惯地，来看看式(4-17)在 $t=0$ 时会得出什么结果，而这个时刻，根据现在的假定，乃是刚开始加上策动力的时候。然而得出的结果却是不可能的！譬如设 $\omega<\omega_0$，那么立即可知 $t=0$ 时的位移为正值。可是，没有一个惯性不为零的系统能在有限力的作用下，在零时间内移动一段非零的距离的。倘若设 $\omega>\omega_0$，结果就更为荒唐了：在**正向**力的作用下，质量竟会顿时移动一段**负向**的位移。很清楚，式(4-17)并没有说出全部历程，而这正是瞬变过程所要补充的。

从数学上来说，情况是这样的：假设我们找到了式(4-16)的一个解——称之为 x_1——于是便有

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_0^2x_1=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

又假定我们也给自由振动方程找到了一个解——称之为 x_2——则有

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+\omega_0^2x_2=0$$

那么，把两式直接相加就有

$$\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2}+\omega_0^2(x_1+x_2)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

这样一来，x_1+x_2 的组合就象单独的 x_1 那样，也成为受迫运动方程的一个解了。从数学上看，我们没有理由拒绝 x_2 的加入；相反

地，若是注意到 $t=0$ 时出现的情况，倒要迫使我们不得不把它包括进来。此事还可进一步从纯物理学的观点来粗略地说明一下。在 $t=0$ 时给予系统一个短暂的冲击，必定会造成一个以固有频率 ω_0 进行的振动。只有当周期性的作用力持续了许多周，仿佛是使得系统学会了这种振动以后，它才会以某种不同的频率 ω 来进行振动。因此，人们应该预料这种运动，至少在初始的阶段，是由这两种频率构成的。

现在就来谈谈这些方程。具有频率 ω_0 的自由振动方程的确含有两个可调节的常数，即振幅和初周相，令它们为 B 和 β。我们要用它们来符合受迫运动的初始条件。依据上面所讲的概念，于是可以提出受迫运动方程的完全解是

$$x=B\cos(\omega_0 t+\beta)+C\cos\omega t \tag{4-18}$$

式中

$$C=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}$$

现在可让式(4-18)来符合初始条件了，在此即为 $t=0$ 时 $x=0$ 及 $dx/dt=0$。就 x 的条件而言，便有

$$0=B\cos\beta+C$$

另一方面，对式(4-18)求导便得

$$\frac{dx}{dt}=-\omega_0 B\sin(\omega_0 t+\beta)-\omega C\sin\omega t$$

因而在 $t=0$ 时便有

$$0=-\omega_0 B\sin\beta$$

这个条件要求 $\beta=0$ 或 π。取前者(其实两者所得最终结果是一样的)，就得到 $B=-C$，因而式(4-18)就变成

$$x=C(\cos\omega t-\cos\omega_0 t) \tag{4-19}$$

这是拍的典型例子，如图 4-11(a) 所示。在完全无阻尼的情形下，

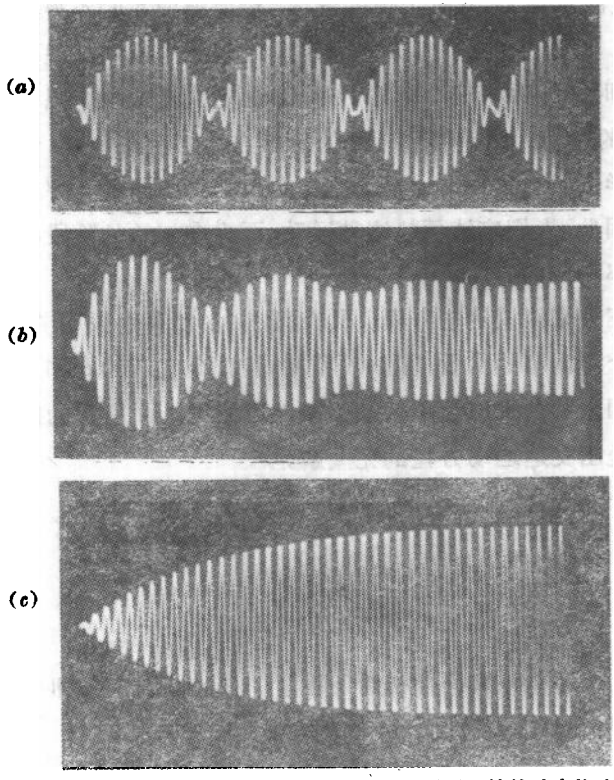


图 4-11 (a) 式(4-19) 所描述的无阻尼谐振子对周期性策动力的响应。这种拍的图样会无限地持续下去。 (b) 阻尼振子受离开共振的周期性策动力作用时的瞬变特性。 (c) 恰当共振时的瞬变特性，显示出向稳态的平滑增长。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

这拍会无限地持续下去；而仅仅对应于式(4-17)的稳态是永远也不会达到的。也许这里值得提一下，刚好在 $t=0$ 之后的那些条件，现在有着突出的意义。当 ωt、$\omega_0 t \ll 1$ 时，则可取

$$\cos\omega t \approx 1-\frac{\omega^2 t^2}{2}$$

$$\cos\omega_0 t \approx 1-\frac{\omega_0^2 t^2}{2}$$

所以

$$x \approx \frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\frac{(\omega_0^2-\omega^2)t^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2$$

这就恰是所期望的，在回复力起作用之前，质点是以 F_0/m 的加速度沿着作用力的方向开始运动的。

你或许疑虑，式(4-18)就算能被证明是受迫运动方程的**一个**解，那么它是否即是该方程的**解**。在此我们只好断言，对这样的微分方程来说，有个唯一性定理，如果我们找到的解具有所需数目的可调节常数，那么它确实就是这问题的唯一解①。

现在转到假定具有阻尼的这种较为真实的情况中来，我们能够毫不费力地提出自由运动与稳态运动的组合如下：

$$x = Be^{-\gamma t/2}\cos(\omega_1 t+\beta) + A\cos(\omega t-\delta) \qquad (4\text{-}20)$$

式中

$$\omega_1 = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{1/2}$$

而 A 及 δ 均由式(4-11)给出。

这里不准备去探究使 B 及 β 值符合于 $t=0$ 时的 x 及 dx/dt 值的纯数学细节。它不过是比上面对无阻尼振子做过的那番手续较复杂点的翻版而已。图 4-11(b) 示出了运动所呈现的样式：一般地说，它看来象是企图作拍的运动，但终究归于用策动频率 ω 去作振幅恒定的运动了。图 4-11(c) 示出的瞬变效应要简单得多，这是阻尼振子受到等于其固有频率之策动时所发生的情形。

§4-6 受迫振子吸收的功率

一件常是重要而有兴味的事情，就是要知道欲使受迫振子的

① 更充分的讨论，例如可参阅 W. T. Martin 及 E. Reissner：《Elementary Differential Equations(初等微分方程)》(1961 年麻省里丁城 Addison-Wesley 第二版)。

振动保持固定的振幅，在单位时间内必须供给它多少能量。和别的动力学问题一样，输入的瞬时功率 P，可用策动力乘速度来计算：

$$P=\frac{dW}{dt}=F\frac{dx}{dt}=Fv$$

我们仍从无阻尼振子开始，此时由于没有耗散效应，故而输入的**平均**功率应为零。依据业已列出的诸方程，且假定是稳态的解，于是有

$$F=F_0\cos\omega t$$

$$x=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t=C\cos\omega t$$

所以

$$v=-\omega C\sin\omega t$$

$$P=-\omega CF_0\sin\omega t\cos\omega t$$

这个正比于 $\sin 2\omega t$ 的输入功率，在一半时间内为正值，在另一半时间内则为负值，因而在振动的任何整数倍半周期内，其平均值都为零。这即是说，能量在四分之一周内输入系统，而在其后的四分之一周内又被取了出来。

现在来看阻尼的受迫振子，我们有

$$x=A\cos(\omega t-\delta)$$

所以

$$v=-\omega A\sin(\omega t-\delta)$$

这也可写为

$$v=-v_0\sin(\omega t-\delta)$$

式中的 v_0，对任何给定的 F_0 及 ω 值来说，是 v 的最大值。取式(4-14)的 A 值，便有

$$v_0(\omega)=\frac{F_0\omega_0/k}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}} \tag{4-21}$$

在 $\omega=\omega_0$ 时，v_0 值恰好经过其最大值，此现象可称之为速度共振。

现在就来考虑维持受迫振动所需要的功和功率。我们有

$$P=-F_0v_0\cos\omega t\sin(\omega t-\delta)$$
$$=-F_0v_0\cos\omega t(\sin\omega t\cos\delta-\cos\omega t\sin\delta)$$

即

$$P=-(F_0v_0\cos\delta)\sin\omega t\cos\omega t+(F_0v_0\sin\delta)\cos^2\omega t \tag{4-22}$$

若是在任何整倍数的周数内求输入功率的平均值，那么式(4-22)第一项为零。而 $\cos^2\omega t$ 的平均值则为 1/2[①]，因此平均输入功率便是

$$\bar{P}=\frac{1}{2}F_0v_0\sin\delta=\frac{1}{2}\omega AF_0\sin\delta$$

借助式(4-14)及(4-21)，此结果变为

$$\bar{P}(\omega)=\frac{F_0^2\omega_0}{2kQ}\frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{1}{Q^2}} \tag{4-23}$$

大家看到，这个输入功率跟速度一样，**恰在** $\omega=\omega_0$ 时经过其最大值，而不论 Q 值为何。此最大功率是

$$P_m=\frac{F_0^2\omega_0Q}{2k}=\frac{QF_0^2}{2m\omega_0} \tag{4-24}$$

在不同 Q 的情形下，$\bar{P}$ 对 ω 的依赖关系示于图 4-12(a)。可以看到，对于很低或很高的频率来说，输入功率下降而趋于零，并且除低 Q 值的情形而外，曲线相对于最大值是接近于对称的。**这就便于为这些功率共振曲线定义一个宽度，这个宽度就是在输入功率为最大值之一半处的两个 ω 之差**。这样定义的宽度，对大多数感兴趣的大 Q 值来说，就格外地清楚和有用。它说明，共振实际上发生于

① 譬如，由于 $\cos^2\omega t=\frac{1}{2}(1+\cos2\omega t)$，而在一整周中 $(\cos2\omega t)_{平均}=0$。

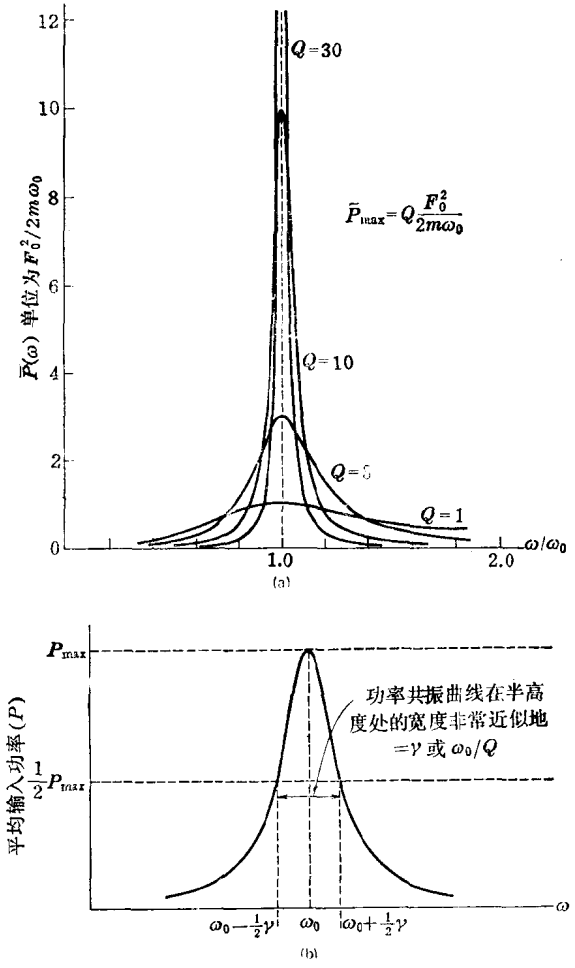


图 4-12 (*a*) 不同 Q 值下受迫振子所吸收之平均功率与频率的函数关系。(*b*) 用功率曲线来确定共振曲线的锐度。

ω_0 附近的一个狭窄的频带之内。于是可以根据下述的代数运算，写出 $\bar{P}(\omega)$ 的近似方程：

$$\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\omega\omega_0}$$

$$=\frac{(\omega_0+\omega)(\omega_0-\omega)}{\omega\omega_0}$$

若 $\omega\approx\omega_0$，就可使

$$\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\approx\frac{2\omega_0(\omega_0-\omega)}{\omega_0^2}\approx\frac{2(\omega_0-\omega)}{\omega_0}$$

将它代入式(4-23)的分母，便有

$$\bar{P}(\omega)=\frac{F_0^2\omega_0}{2kQ}\frac{1}{\frac{4(\omega_0-\omega)^2}{\omega_0^2}+\frac{1}{Q^2}}$$

$$=\frac{F_0^2(\omega_0/Q)}{2(k/\omega_0^2)}\frac{1}{4(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0/Q)^2}$$

我们在前面已经碰到过 ω_0/Q 这个量了。它乃是阻尼常数 γ $(=b/m)$，表征阻尼振子在不受策动力时的能量衰落率：

$$E=E_0e^{-(\omega_0/Q)t}=E_0e^{-\gamma t} \tag{4-25}$$

[见式(3-36)]。这样，上述 $\bar{P}$ 的方程便可写成如下简单的形式(我们还记得 $k=m\omega_0^2$)：

$$(近似的)\bar{P}(\omega)=\frac{\gamma F_0^2}{2m}\frac{1}{4(\omega_0-\omega)^2+\gamma^2} \tag{4-26}$$

由此即可定出，当 $\bar{P}(\omega)$ 降为最大值 $\bar{P}(\omega_0)$ 的一半时，$\omega_0\pm\Delta\omega$ 中的 $\Delta\omega$ 为

$$4(\Delta\omega)^2=\gamma^2$$

即

$$2\Delta\omega\approx\frac{\omega_0}{Q} \tag{4-27}$$

这样，大家看到，**受迫**振子共振曲线的宽度，当用输入功率来量度时[图 4-12(*b*)]，就等于**自由**振动衰落到初始能量的 $1/e$ 时，所需时间之倒数。于是可以预言，若观察到一系统具有非常狭窄的共振响应(这可用振幅或吸收功率来度量)，那么，它自由振动的衰落将是非常之缓慢的。当然也可反过来说，观察自由振动衰落得

快慢如何，就能告诉我们受迫振子的响应是宽还是窄。那么，所谓“慢”或“快”，“宽”或“窄”的标准若何？式(4-26)及(4-27)提供了答案。要说共振是狭窄的，则其宽度就应该只是共振频率的一个小分数，即

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega_0}\ll 1 \tag{4-28a}$$

要说自由振动的衰落是缓慢的，则振子在一个周期振动里所损失的能量，也应该只是其能量的一个小分数。即由式(4-25)可有

$$\frac{\Delta E}{E}\approx -\gamma\Delta t$$

若使时间 Δt 为 $2\pi/\omega_0$，即近似等于阻尼自由振动的周期[式(3-40)]，那么便有

$$\frac{\Delta E}{E}\approx -\frac{2\pi\gamma}{\omega_0}$$

因而缓慢的衰落就意味着

$$\frac{2\pi\gamma}{\omega_0}\ll 1 \tag{4-28b}$$

由于 $\gamma=2\Delta\omega=\omega_0/Q$，所以式(4-28$a$)及(4-28$b$)所描述的条件，便都可表述为：无量纲的 Q 值必须很大。

受迫振动共振宽度与自由振动减少量之间的这个关系，乃是许多种物理振动系统的特征，并不限于这里作为示例的力学系统。事实上，不管什么时候，这样的物理系统，在自由振动中都表现出能量随时间而指数地减少，它也显示了策动响应具有共振的特征。

§4-7 共振举例

在前面讨论的过程中，我们也偶而提及这样的事实，即许多系统从表面上看，与系在弹簧上的质量很少有什么共同之处，然而却呈现出相似的共振特性。但由于那时是集中研究简单力学系统的

特性，所以我们的分析很详细，也很专门。现在我们再来扩大视野，谈谈完全不同系统的某些共振问题。

若是按这种方式来扩展我们的概念，那就要求能用更为一般的术语来说明共振的含义；首先就可以提出这样的问题，即质量-弹簧系统特性的真实本质是什么？撇开数学不谈，我们可以这么说：系统受到了一个外来机构的作用，而此机构的一个参数即频率是变化的。当频率经过某一定值时，系统的响应便要经历一个急骤的变化，这可以从对系统的振幅及周相或者对它所吸收之功率，进行测量而得知。响应的形式，是由两个量即频率 ω_0 和频带宽度 $\gamma(=\omega_0/Q)$ 所描述的，它们表征着受迫系统的个性。而共振，乃是在策动机构与系统之间相互作用为最大的情况下，去策动该系统时所产生的现象。无论用什么样的特定标准来判断，都可以说相互作用在 ω_0 或近于 ω_0 处具有极大值，而最显著的变化就发生在极大值附近约 $\pm\gamma$ 的范围之内。

当把这些概念移用来研究其它物理系统的共振特性时，就会发现，表征共振的量并不总是频率、吸收的功率、以及振幅。这一点，在下面即将讨论的某些示例中，就会看出来。

电共振

最常见而又重要的共振系统之一，便是由一个电容器和一个线圈构成的电系统，如图 4-13 所示。对这种系统的分析，跟前面研究过的力学系统，有着惊人的相似性。我们先来考察自由振荡，暂时略去由电阻带来的耗散过程。首先简要地介绍一下各个部件的基本电学性能。

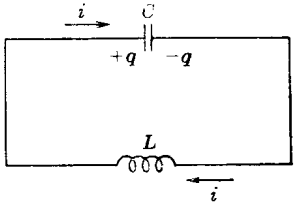


图 4-13　电容器和电感器的串联：基本的电共振系统。

电容器是储存电荷以及伴随而来的静电势能的器件。其电容

C，定义为加于电容器极板上的电荷量 q 除以这电荷所产生的电势差：

$$C=\frac{q}{V_c}$$

因此

$$V_c=\frac{q}{C}$$

至于线圈的作用，则需作较详细的描述。在直流的条件下，线圈对电流的流通并无妨碍，但若电流是随时间而变化的，则线圈（今后将称之为电感器）就要反抗这种变化（楞次定律）。在此情形下，电感器的两端就有了电势差 V_L，它跟电流 i 的变化率成正比。而电感 L 则为下述关系所定义：

$$V_L=L\frac{di}{dt}$$

此式说明，为了使电流具有 di/dt 的变化率，则电感器的两端就必具有电压 V_L。

在仅由这两个部件组成的电路里，V_c 与 V_L 之和必为零，因为设想经由电容器再通过电感器而绕行一圈以后，便又回到了电路中的同一点。于是就有

$$\frac{q}{C}+L\frac{di}{dt}=0 \tag{4-29}$$

而 q 与 i 是有着直接联系的，因为电路中的电流，正是单位时间内流过任一点的电荷。电流 i 在连向电容器极板的导线内流过 dt 时间后，就给极板增加了 $dq=idt$ 的电量，因而便有

$$i=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q}{dt^2}$$

所以式(4-29)就可写为

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C}q=0 \tag{4-30}$$

而这个式子恰似质量-弹簧系统 SHM 的基本微分方程：q 担当着 x 的角色，L 出现在 m 的位置上，而 $1/C$ 则取代了弹簧常数 k。因此可以肯定地认为存在着自由的电振荡，从而

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

现在来考虑引入电阻为 R 的电阻器所产生的效果，如图 4-14 (*a*) 所示。在有电流 i 时，电阻器的两端必然加上了 $V_R(=iR)$ 的电压。于是，沿电路绕行一圈净电压降落为零的陈述，便是

$$\frac{q}{C}+iR+L\frac{di}{dt}=0$$

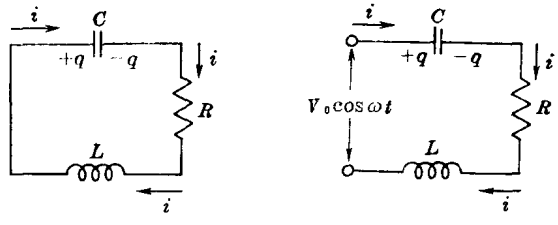


图 4-14 (*a*) 电容器、电感器、电阻器相串联。(*b*) 串联的电容器、电感器、电阻器被正弦式电压所策动。

即

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$$

或者

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=0 \tag{4-31}$$

此式中的 R/L，正好起着阻尼常数 γ 的作用，故而这种电路中电容器极板上的电量以及电压 V_C，将进行指数式阻尼谐振荡。

最后，倘若电路为外加交变电压所策动，那就得到典型的受迫

振子的方程：

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{1}{LC}q=\frac{V_0}{L}\cos\omega t \tag{4-32}$$

与下式作比较：

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4-33}$$

若是考虑系统的能量，那么式(4-32)及(4-33)的联系就更为密切。正如 Fdx 乃是策动力 F 在位移 dx 内所做的功一样，Vdq 就是电路中通过 dq 电量时，策动电压 V 所做之功。人们可把此振荡看作是，能量在电容器与电感器之间作周期性的转移，且不断地在电阻器中有所耗散。从力学方程与电学方程的对比中，可将各个类似的量分类列出，如表 4-2 所示。

表 4-2　力学的与电学的共振参数

力学系统	电学系统
位移 x	电量 q
策动力 F	策动电压 V
质量 m	电感 L
粘滞力常数 b	电阻 R
弹簧常数 k	电容的倒数 $1/C$
共振频率 $\sqrt{k/m}$	共振频率 $1/\sqrt{LC}$
共振宽度 $\gamma=b/m$	共振宽度 $\gamma=R/L$
势能 $\frac{1}{2}kx^2$	静止电荷的能量 $\frac{1}{2}q^2/c$
动能 $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2=\frac{1}{2}mv^2$	运动电荷的电磁能 $\frac{1}{2}L(dq/dt)^2=\frac{1}{2}Li^2$
共振时吸收的功率 $F_0^2/2b$	共振时吸收的功率 $V_0^2/2R$

我们对这个电共振现象讨论得相当详细，是由于它和力学共振现象极其相似的缘故。后面其它的例子虽说在物理上也极为重要，但并不能完全归入这种图象中去，故在处理上就简略些了。

光学共振

大量的证据表明，原子在发射和吸收光的过程中，表现得象个锐调谐的振子。若进行辐射的原子，实际上处于相互孤立的情况下(如低压气体中的原子)，那么它的光谱便是由一些分立的、很窄的谱线组成的，即辐射的能量聚集在某些特定的波长上。而白炽的固体(例如灯泡的灯丝)，则发射连续的光谱，但这里的情况是完全不同的，因为固体中的每个原子，都跟它周围的原子联结得很牢，这就剧烈地改变了那些主要能对可见或近可见辐射有贡献的电子的动力学状态。

刚才讲了，原子象振子一样发射出它们的特征频率。可是，这将如何与辐射的光子描述相适应？又如何跟辐射过程是原子发生量子性跳变的这种图象相适应？这答案是无法说清楚的。在量子理论问世以前，人们想象电子是在原子内描绘着圆形的轨道，并发射出频率等于其轨道运动频率的光。然而现在却只能说，依据 $E=h\nu$，光的频率是由原子两个状态之间的能量差所决定的；而此频率，再也不能被等同于原子自身的振动频率了。尽管如此，原子视作振子的这个概念，在某些方面还是要用的。倘若用干涉仪来分析原子发出的光，就会发现它是由一些有限长度的波列组成的。把这些波列的长度用 c 除，就定出了一个时间 τ 来，它对应于辐射原子处在受激态时的平均寿命，而当一群受激原子向外辐射能量时，其剩余的能量则是按指数律 $e^{-t/\tau}(=e^{-\gamma t})$ 衰落的。可见，无论是光子图象或波动图象，均不能单独地说明问题的始末，而把原子视为阻尼振子的这个模型，却对辐射过程的某些重要方面，提供了一种可接受的描述。

如前所述，自由振动的固有频率，同时大约也是发生共振吸收的频率。在可见光的情形里，这频率是如此之高($\approx 10^{15}$Hz)，以致不可能进行测量，但我们却能够用特征波长来描述发射和吸收。光

共振吸收的最著名事例，大概要算夫琅和费(J. von Fraunhofer)谱线了。这是在太阳光谱的分析中观察到的一些暗线；它们由于夫琅和费在 1814 年对记下的 576 条暗线进行了细心的研究之后，才被这样命名的。图 4-15(*a*)示出了太阳光谱的一部分；在 5890 和

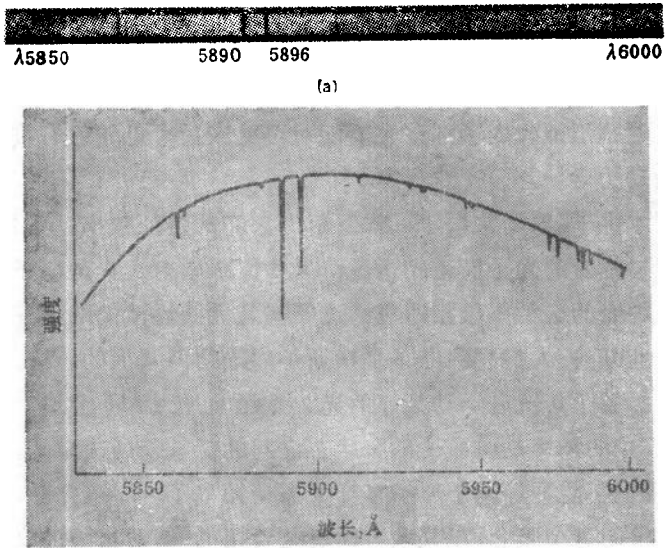


图 4-15 (*a*) 太阳光谱的一部分，示出了位于 5890 和 5896Å 处的两条著名的钠*D* 线。[引自 F. A. Jenkins 及 H. E. White: 《Fundamentals of Optics (光学基础)》(1957 年纽约 McGraw-Hill 版)。] (*b*) 定性地表示出在(*a*)所示的范围内，太阳光谱的强度与波长的函数关系。

5896Å 处的两条显眼的夫琅和费谱线，都是钠的谱线。图 4-15(*b*)定性地示出了强度对波长的标绘图式样；在夫琅和费谱线的波长处，强度尖锐地下落了，但并不为零。(夫琅和费并不是第一个观察到吸收谱线的人①，而是他首先辨认出其中一些暗线的波长，跟实

① 首先是渥拉斯顿(W. H. Wollaston)于 1802 年注意到它们的。到 1895 年，美国物理学家罗兰(H. A. Rowland)已对记下的 1100 条暗线作过经典性的研究。今天在 3000 至 13,000Å 的范围内，已录有约 26,000 条暗线。

验室光源产生之发射光谱的明线相合。然而直到 1861 年，才由基尔霍夫(Kirchhoff)及本生(Bunsen)，将太阳光谱与纯元素的弧光谱及电花光谱，进行了细致的对比。)

可以肯定，夫琅和费谱线乃是共振吸收过程的结果。其情景是：由靠近太阳表面的灼热而相对密集之物质所发出的连续辐射，在向外穿过太阳大气中较稀薄的蒸汽原子时，被有选择地过滤过。要是能够画出光吸收谱线的详细形状，并能将其宽度与自然发射衰落的特征时间($=1/\gamma$)联系起来，那就好了。但这是极难做到的。主要的障碍在于多普勒(Doppler)效应。直接和间接的证据都表明，受激原子发射可见光的典型寿命约为 10^{-8}s，故而 γ 约为 10^{8}s^{-1}。而发射光的角频率按 $2\pi c/\lambda$ 计算，则约为 4×10^{15}s^{-1}。这样，可算出谱线的宽度 $\delta\lambda$ 如下：

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda}\approx\frac{\delta\omega}{\omega_0}=\frac{\gamma}{\omega_0}\approx\frac{10^8}{4\times10^{15}}\approx2\times10^{-8}$$

(因而在 $\lambda\approx5000$Å 时，$\delta\lambda\approx10^{-4}$Å。)但是，除非采取了特别的预防措施，发光原子是处于每秒数百米的无规则热运动之中的，这就能估计出谱线的多普勒增宽为

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{v}{c}\approx10^{-6}$$

由此看来，多普勒效应比由原子辐射真实寿命所产生的效应，要大 100 倍左右。而原子间的相互碰撞，也会对此产生干扰，所以，探求共振谱线的形状，在更大的程度上有赖于推理，而不是对光谱的直接观测。

核共振

在核物理文献中，有着数不清的核共振事例；图 4-16 示出了其中一个。这种核共振的过程，与我们迄今所讨论过的那些情形，颇有一些不同之处。图 4-16 的主题是核反应；线图示出的是，以能量在 875keV 附近的不同能量的质子，去轰击氟靶时所产生之

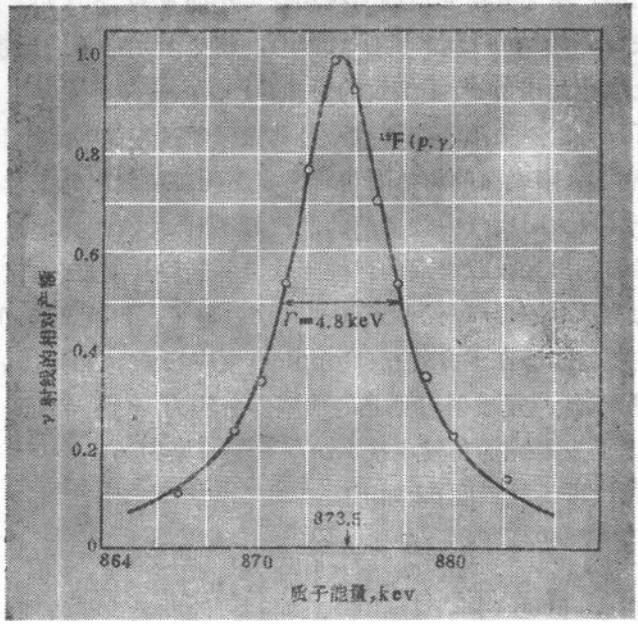


图 4-16　在核反应 $p+^{19}F\longrightarrow^{20}Ne+\gamma$ 中，γ 射线的产额是施轰质子能量的函数。[引自 R. G. Herb, S. C. Snowden, O. Sala 的数据，见 Phys. Rev.（物理评论）1949 年第 75 期第 246 页。]

γ 射线的相对产额。那么，共振系统是什么呢？它并不是受到轰击的氟，而是处于受激态用 $^{20}Ne^*$ 表示的复核 ^{20}Ne。这是由一个氟核俘获一个质子后形成的。该复核是不稳定的，它的衰变方式之一，便是放射出 γ 射线。其全过程如下：

$$^1_1H+^{19}_9F\rightarrow^{20}_{10}Ne^*\rightarrow^{20}_{10}Ne+\gamma$$

（式中各下标数码是核中的质子数，而上标则是质子加中子数之总和。）

这里，可控制的参数，即相互作用中的独立变量，不是频率而是施轰质子的能量。这就规定了共振的基本性质：$^{20}Ne^*$ 在其静止参照系中的总能量。测量此系统的响应，不是用振幅或所吸收之

功率，而是用入射质子产生 γ 射线的几率。这个几率，可用每个氟核呈现在入射质子流中的有效靶面积，或有效截面 σ 来描述。最后，共振曲线细致的形状，与力学振子吸收功率曲线的近似形式（高 Q 时）[见式(4-26)及图 4-12]，有着非常相似的解析形式。象图 4-16 这样的核共振，能够很好地用下列方程来描述：

$$\sigma(E)=\frac{\sigma(E_0)}{\frac{4(E_0-E)^2}{\Gamma^2}+1} \tag{4-34}$$

这样，能量 E_0 便对应于共振曲线的峰值，而 Γ 则给出了曲线半高度处的总宽度。按此规定出来的能量宽度 Γ，与力学或电学共振的频率宽度 γ 是完全类似的。图 4-16 中的整个曲线，便是用合适的 E_0 及 Γ 值按式(4-34)绘制的，可以看到，它跟实验数据符合得很好。

核磁共振

作为物理学其它领域中共振现象的最后一个例子，我们举出的共振过程是：性能象个小磁体的原子核，能在磁场里翻转。这是由量子现象决定的，即原子磁体相对于磁场的方向，只能具有几个

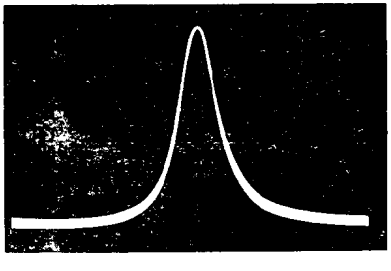


图 4-17　含有 $MnSO_4$ 顺磁催化剂的水中质子的磁共振谱线。此谱线得自与吸收相对应的那部分核感应信号。这是从阴极射线示波器上拍得的照片，其竖直偏转来自整流并放大了的信号，水平偏转对应于恒定场的不同值。[引自《Nobel Lectures: Physics(1942～1962)（诺贝尔获奖人演讲词，1942～1962 年物理学部分）》(1964 年荷兰阿姆斯特丹 Elsevier 版)。]

分立的可能取向。举个特殊的例子来说，如质子只有两个可能的取向。如果把一个取向粗略地比喻为普通指南针的指北取向，那么另一个取向便是与此相反的。在这两种取向之间有着确定的能量差，它相当于把核磁体从一位置移至另一位置时，反抗磁力所做的功。这个能量差，与质子所在的磁场强度成正比。此时，如果有刚好具备着这份能量的光子路过这里，它就能把质子从一个取向转至另一取向。要实现这一点，可以注入频率恰好的电磁辐射；当质子处于约 5000G(高斯)的磁场中时，则共振频率约为 21MHz。倘若把大约 $1cm^3$ 水中的全部质子都这样翻转过来，那它们就能通过电磁感应，在拾波线圈中产生出易于检测的电压了。如果磁场保持恒定不变，这信号便是注入辐射频率的共振函数。然而更为方便的作法是，使用一个恒定的、严格确定的射频，而去改变外加磁场的强度 B。这样，核磁共振信号的量值便可表达成场强的共振函数了：

$$V(B)=\frac{V_0}{\frac{4(B_0-B)^2}{(\Delta B)^2}+1} \tag{4-35}$$

式中 B_0 是刚好共振时的场强，ΔB 是半高度处的共振宽度。

布洛赫(F. Bloch)与帕赛尔(E. M. Purcell)因完全独立地研究了这个现象，而共同获得了 1952 年度的诺贝尔物理学奖金。图 4-17 就是从布洛赫在颁奖仪式上的演讲稿中引来的。

§4-8 非谐振子

本章至此，整个读来颇象是个成功的陈述。什么事情都办到了。我们写下了微分方程，并在每种情形中，都获得了一个恰好适合于它的解析解。我们指出的实际物理系统显然都是完全遵从非常简单的数学模型的。难道自然界真是这么谐调吗？回答是，在一

定情形下(它们是大量的、各式各样的，且有着巨大的物理重要性)，一个系统确实是能够以令人惊异的准确度被表述成阻尼振子的，它具有正比于位移的回复力和正比于速度的阻力。然而这只是个令人深感意外的幸运而已，我们事实上一直走在一条非常狭窄的小路上。为了体会一下前面讨论的那些情况是如何之特殊和顺当，我们来简要地看看，对运动方程的修正将会造成什么样的效果。

我们原来的方程，是弹簧上所系质量的无阻尼自由振动的方程，即：

$$F=m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

这个式子，只有当弹簧对任一伸长量或缩短量都遵从线性关系，即遵从胡克定律时才成立。但是，没有一个真实的弹簧是完全如此的。许多弹簧产生相等的伸长和缩短量时，所需力的大小是略有差异的。这种不对称性的最简单的情形，可用F正比于x^2的项来表达。也有另一种情况，即弹簧对正位移和负位移倒是对称的，但F却不是严格地正比于x。这种对称效应的最简单的情形，可由F正比于x^3的项来描述。那么，这些情况下的运动方程可写为：

$$\text{非线性、不对称：}\ m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+\alpha x^2=0 \qquad (4\text{-}36a)$$

$$\text{非线性、对称：}\ m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+\beta x^3=0 \qquad (4\text{-}36b)$$

倘若对上述任一方程试用$x=A\cos\omega_0 t$形式的解，你会立即发现这是不行的；运动再也不能描述为具有某个单一频率ω_0的谐振动了。代之而有的是一种叫做非谐和的振子。其运动仍是周期性的，即假定无阻尼时，某种给定的运动状态会在相等的时间间隔$T=2\pi/\omega_0$内重复出现，但现在需用ω_0的一组无限多的谐波来代替$x=A\cos\omega_0 t$描述运动；亦即应使x的形式为

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_0 t-\delta_n)$$

才会满足上述的微分方程。

同样，阻力不是随 v 而是随 v^2 或 v^3 而变的情形，也使得对阻尼振子运动的描述，不可能再是简洁的解析形式了。

倘若一个具有非线性项(回复力的、阻尼力的、或两者都是)的振子，受到了正弦式策动力的作用，那么情况将如何？我们不欲全部写出答案，而留给大家在空闲的时间去考虑。譬如取一振子，其自由振动为式(4-36a)所描述，再加上一个纯粘滞力($\sim dx/dt$)，并假定受到策动力 $F=F_0\cos\omega t$ 的作用。设 $\alpha x^2\ll kx$，且使 $k/m=\omega_0{}^2$，看你能否确定出使系统呈现出共振特性的频率或者诸频率 ω 是什么。研究了这个问题，你就会感到简谐振子的声誉并不坏，而且会体会到，为什么物理学家只要一有可能，总要采用它作为振动系统的模型。

习　题

4-1　试列表举出天然的共振系统，包括的范围尽可能宽广，并指出下述各量的数量级：(a) 各系统天然尺度，(b) 其共振频率。

4-2　如果策动力是 $F=F_0\sin\omega t$ 而不是 $F_0\cos\omega t$，试考虑如何求解受迫振子的稳态运动。

4-3　质量为 0.2kg 的物体，悬在弹簧常数为 80N/m 的弹簧下。物体所受之阻力为 $-bv$，此处 v 是其速度(m/s)，且 $b=4\mathrm{Nm^{-1}s}$。

(*a*) 写出此系统自由振动的运动微分方程，并求出此振动的周期。

(*b*) 物体受到正弦式策动力 $F(t)=F_0\sin\omega t$ 的作用，此处 $F_0=2\mathrm{N}$，$\omega=30\mathrm{s^{-1}}$。在稳态下，受迫振动的振幅是多少？

4-4　弹簧的一端固定，另一端系有质量为 m 的物块。此外，尚有粘滞阻尼的机构。对此系统进行了下述的观察：(1) 若以 mg 的力水平地推此物块，则弹簧的静力压缩量等于 h。(2) 若物块以某已知速率 u 运动时，则粘滞阻力等于 mg。

(*a*) 试对此整个系统(包括弹簧及阻尼器)写出质量作水平振动的微分方程,以 m、g、h、u 表之。

按 $u=3\sqrt{gh}$ 的情形,回答下列问题:

(*b*) 阻尼振动的角频率多大?

(*c*) 能量降为 $1/e$ 倍需要多长时间?以 $\sqrt{h/g}$ 的倍数表之。

(*d*) 此振子的 Q 多大?

(*e*) 此振子原来处于静止位置,在 $t=0$ 时因受子弹冲击而顿时运动起来(子弹的质量可以不计,但它沿正 x 方向运行的动量则不可忽略)。以后的运动为方程 $x=Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega t-\delta)$ 所描述。试求周相角 δ 的值,并绘出最初几周内 x 对 t 的略图。

(*f*) 若振子受到力 $mg\cos\omega t$ 的策动,此处 $\omega=\sqrt{2g/h}$,则振子于稳态响应时的振幅多大?

4-5 单摆的摆长 l 为 1m。在自由振动中,摆动的振幅在 50 次摆动后减为原来的 $1/e$ 倍。现使其悬点作振幅为 1mm 的水平 SHM,从而使摆作受迫振动。

(*a*) 若摆锤的水平位移为 x,悬点的水平位移为 ξ,试证摆锤作微小振动时的运动方程为

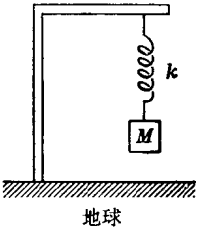
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+\frac{g}{l}x=\frac{g}{l}\xi$$

如果 $\xi=\xi_0\cos\omega t$,且使 $\omega_0^2=g/l$,试求稳态运动时此方程的解。

(*b*) 在恰好共振时,摆锤运动的振幅多大?(首先利用已知条件求出 Q。)

(*c*) 在什么角频率时,振幅为其共振值的一半?

4-6 设想一架简单的地震仪由悬于弹簧下的质量 M 所组成,弹簧装在固定于地面的刚性框架上,如图所示。弹簧力与阻尼力分别由相对于地面的位移及速度所决定,但动力学上有意义的加速度,则是 M 相对于固定恒星的加速度。



(*a*) 以 y 表示 M 相对于地球的位移,η 表示地面自身的位移,试证运动方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\gamma\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=-\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

(*b*) 若 $\eta=C\cos\omega t$,试求稳态振动时的 y。

(*c*) 绘出位移 y 的振幅 A 为 ω 之函数的线图(设 C 对所有 ω 均相同)。

(*d*) 典型的长周期地震计的周期约为 30s，Q 值约为 2。一次强烈地震可使地面以大约 20min 的周期振动，其振幅能使最大加速度约为 $10^{-9}\mathrm{m/s^2}$。若对这次地震进行监测，试问观测到的 A 值有多么大？

4-7 试考虑一个具有阻尼力的系统，以角频率 ω 做受迫振动。

(*a*) 系统的瞬时动能多大？

(*b*) 系统的瞬时势能多大？

(*c*) 平均动能与平均势能之比多大？答案用比值 ω/ω_0 表出。

(*d*) ω 是什么(一些)值时，平均动能与平均势能相等？在这些条件下，系统的总能量多大？

(*e*) 对任一 ω 值来说，系统的总能量如何随时间而变化？ω 是什么(一些)值时，总能量不随时间变化？

4-8 质量 m 受到阻力 $-bv$ 的作用，但**没有**类似弹簧那样的回复力。

(*a*) 试证其位移跟时间的函数形式为

$$x=C-\frac{v_0}{\gamma}e^{-\gamma t}$$

式中 $\gamma=b/m$。

(*b*) 在 $t=0$ 时，质量静止于 $x=0$ 处。此时，施以策动力 $F=F_0\cos\omega t$。试求稳态解 $x=A\cos(\omega t-\delta)$ 中的 A 及 δ 值。

(*c*) 写下通解[(*a*)及(*b*)之和]，并由 $t=0$ 时 $x=0$ 及 $dx/dt=0$ 的条件求 C 及 v_0 值。绘出 x 与 t 的函数图。

4-9 (*a*) 质量为 m 的受迫阻尼振子，其位移随时间而变的关系为 $x=A\sin\omega t$。阻力为 $-bv$。试由此计算在一周的振动内，反抗阻力作了多少功？

(*b*) 当策动频率 ω **小于**固有频率 ω_0 时，绘出振子在一个全周内的势能、动能、总能量的线图。要在重要的转折点和交点处标出其能量及时间值。

4-10 为维持受迫振动而输入的功率可以这样来计算，即承认此功率乃是单位时间内反抗阻力 $-bv$ 所做功的平均值。

(*a*) 试证：反抗此力所作的瞬时功率为 bv^2。

(*b*) 运用 $x=A\cos(\omega t-\delta)$，证明所做的平均功率为 $b^2\omega^2A^2/2$。

(*c*) 在任意频率下，代入 A 值，从而得出 $\bar{P}$ 的表达式(4-23)来。

4-11 有一阻尼振子，质量 $m=0.2\mathrm{kg}$，$b=4\mathrm{N\cdot m^{-1}\cdot s}$，$k=80\mathrm{N/m}$。设此振子受到力 $F=F_0\cos\omega t$ 的策动，此处 $F_0=2\mathrm{N}$，$\omega=30\mathrm{s^{-1}}$。

(*a*) 试求由 $x=A\cos(\omega t-\delta)$ 所描述的稳态响应中的 A 及 δ 值。

(*b*) 在一周内反抗阻力而耗散的能量是多少?

(*c*) 输入的平均功率是多少?

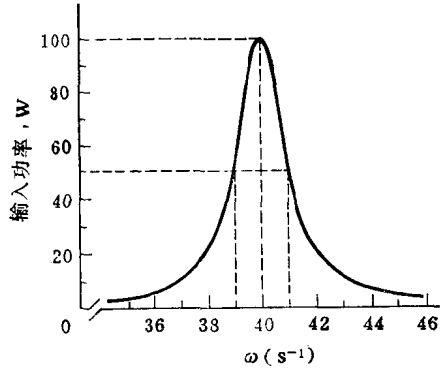
4-12 质量为 2kg 的物体悬在不计质量的弹簧下。此时，弹簧伸长了 2.5cm。弹簧的顶端以 1mm 的振幅沿上下方向作 SHM。系统的 Q 值是 15。

(*a*) 此系统的 ω_0 是多少?

(*b*) 在 $\omega=\omega_0$ 时，受迫振动的振幅是多少?

(*c*) 当频率比 ω_0 大 2% 时，为维持受迫振动而输入的平均功率是多少?[采用式(4-26)近似公式就行了。]

4-13 下图是某力学系统在力 $F_0\sin\omega t$ 策动下的功率共振曲线。此处 F_0 为常数，而 ω 是可变的。



(*a*) 求出此系统 ω_0 及 Q 的数值。

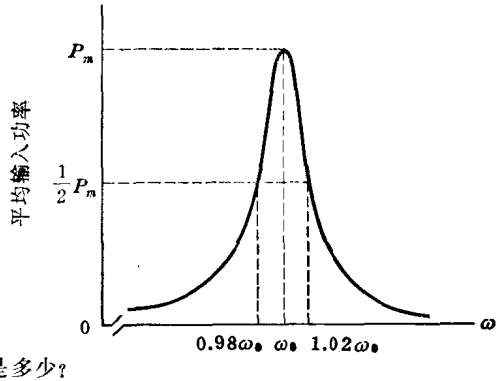
(*b*) 现撤去策动力。则系统的能量经过了多少周的自由振动之后，降到初始值的 $1/e^5$? ($e=2.718$。)(作为很好的近似，可使自由振动的周期等于 $2\pi/\omega_0$。)

4-14 下页图是具有阻尼的质量-弹簧系统之平均输入功率与策动频率的函数关系。(策动力为 $F_0\sin\omega t$，此处 F_0 为常数，ω 是变化的。)Q 值足够地高，致使平均输入功率在 ω_0 时达最大值，并在 $0.98\omega_0$ 及 $1.02\omega_0$ 时降为最大值的一半。

(*a*) Q 的数值是多少?

(*b*) 倘使撤去策动力，则能量的减少遵从如下的方程

$$E=E_0e^{-\gamma t}$$



试问 γ 的值是多少？

(*c*) 若撤去策动力，则每周损失掉能量的几分之几？

现建立一个新的系统，其弹簧常数增加一倍，质量与粘滞媒质未变，且施加同样的策动力 $F_0 \sin \omega t$。用原系统的相应量，求下列各量的值：

(*d*) 新的共振频率 ω_0'。

(*e*) 新的品质因数 Q'。

(*f*) 平均输入功率的最大值 $\bar{P}'_m$。

(*g*) 系统在共振时的总能量 E_0'。

4-15 今观察到一力学系统的自由振动具有某 ω_1 的角频率。当此系统受到力 $F_0 \cos \omega t$（此处 F_0 为常数，而 ω 是可变的）策动时，其功率共振曲线在最大功率一半处的角频率宽度为 $\omega_1/5$。

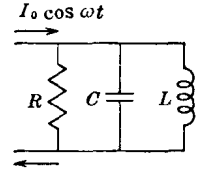
(*a*) 在什么角频率时输入的功率最大？

(*b*) 系统之 Q 值多大？

(*c*) 这是一个质量为 m、弹簧常数为 k 的质量-弹簧系统。试问阻力项 $-bv$ 中的常数 b 为何值？以 m 及 k 表之。

(*d*) 绘出振幅响应曲线，在曲线上要标出几个特征点来。

4-16 在图示的电路中，试求



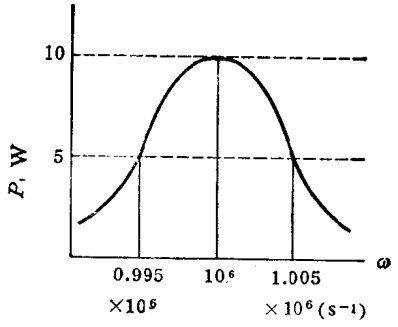
(*a*) 共振频率 ω_0。

(*b*) 共振宽度 γ。

(*c*) 共振时吸收的功率。

4-17 右图示出了振子吸收的平均功率，其策动力的幅值恒定，但角频率 ω 却是可变的。

(*a*) 刚好当共振时，每周对阻力做了多少功？（周期 $=2\pi/\omega_0$）



(*b*) 当刚好共振时，振子的总机械能 E_0 是多少？

(*c*) 若撤去策动力，则经历几秒后其能量降至 $E=E_0e^{-1}$ 的值？

相互联结着的质点的振动问题，乃是一项特别有趣而又重要的课题……它将会有许多应用。

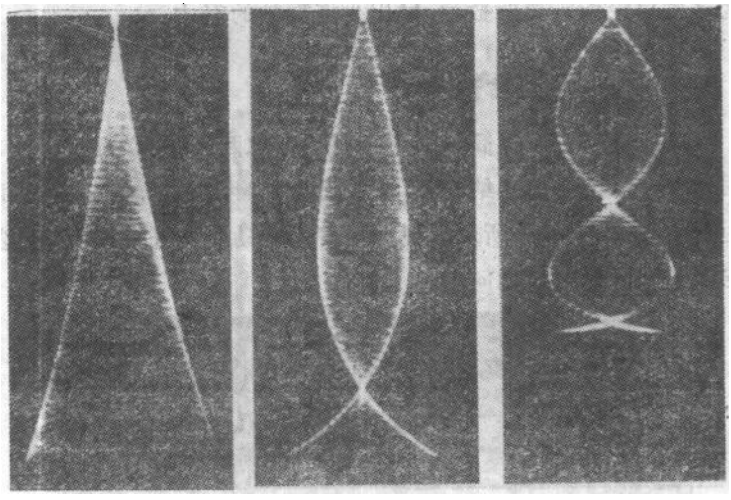
开耳芬(Lord Kelvin)：《*Baltimore Lectures*（在巴尔的摩的演讲）》(1884 年)

第五章　耦合振子及简正模[①]

在前两章的通篇内容中，我们的分析仅限于只具有一种自由振动的系统，它由单一的固有频率所表征。可是，一个真实的物理系统，通常都能以许多不同的方式进行振动，并可与许多不同的频率发生共振，就象一个大钢琴似的。我们把这些各式各样的特征振动，称为系统的**振动模**(mode)，或者按后面所讲的理由，称为系统的**简正模**(normal mode)。一个简单的例子是一端悬挂而下垂的一条柔软的链子。人们发现，有整整一系列的频率，都能使链上的每一点均以同样的频率作 SHM 振动，致使链上各部分的位移始终维持着固定的比例，亦即使得链子的形状保持恒定不变。图 5-1 示出了这种链子的头三种振动模式，其频率是依次提高的。实际上，这只是一维物体的情形，二维及三维物体的固有振动模，就更加多种多样了。

怎样着手来说明这众多的振动模并算出它们的频率呢？解决

① 假如要直接讨论实际连续媒质中的振动与波，那么这一整章可以撇开不读。另一方面，由于多粒子系统确是单个振子与连续体之间的天然链环，因此纵然是一般地熟悉一下本章的内容，也会有助于对后续章节的领会。而且在数学上，它也并不象初见时显得的那么困难。



(a) (b) (c)

图 5-1 上端固定的竖直链子之头三种简正模。(每一点的张力是由该点以下的链子重量提供的,所以张力随着至底端的距离而线性地增加。)

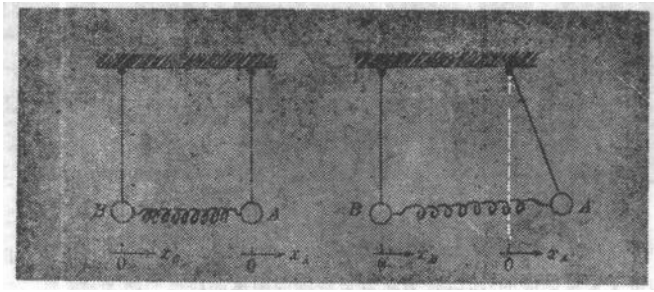
这问题的线索在于:一个连续的物体,可以看成是由大量的简单振子耦合起来的。例如,固体就是由许多原子和分子组成的。每个原子犹如一个振子那样,在平衡位置附近振动着。但每个原子的运动,都要影响到邻近的原子,所以固体的所有原子实际上都是耦合在一起的。于是问题就变为:这种耦合对单个振子的特性影响如何?

我们首先较细致地讨论一下,仅由两个耦合振子组成的系统的性质。由一个振子过渡到两个振子,看起来似乎是微不足道的,然而这种新系统,却有着某些新颖而出人意外的特点。此外,我们在分析这系统的特性中所发展起来的全部理论工具,实质上乃是我们处理最终关心的任意大数目耦合振子问题时所需要的。这就是说,我们能够从非常简单的情形入手,最终达到深入理解象晶体点阵这样复杂事物的动力学性质。这是个不小的收获,因而值得

为这番讨论所需要的数学，付出少许额外的努力。

§5-1 两耦合摆

让我们从一个很简单的例子开始。取两个相同的摆 A 及 B，用一根弹簧把它们连结起来，而弹簧松弛时的长度，恰与摆锤间的距离相等，如图 5-2 所示。现握住 B 摆不动而拉开 A 摆，然后松开它们。则情况将会如何？



(a) (b)

图 5-2 (a) 处于平衡位置的耦合摆。(b) 一个摆被移开时的耦合摆。

A 摆将作来回摆动，但其振幅却不断减少着。而起始时并未移开的 B 摆，逐渐开始振动起来，且其振幅不断增大。不久，A 与 B 就有着相等的振幅了。你或许会认为，现在该不致再变了吧。然而并非如此，过程仍在继续。A 的振幅继续减小，B 的振幅则继续增大，最后直到 B 的位移与 A 原先所具有的位移相等或大约相等，而 A 的位移则丧失殆尽。开始时的状况，现在却几乎颠倒了过来。这就不难指出以后的过程了。B 的运动又回过来转移给 A，如此继续下去。当初给予 A(以及弹簧) 的能量，并不始终局限于使 A 振动，而是逐渐转移给 B，并继续不断地在 A 和 B 之间来回传输。图 5-3 示出了这种耦合系统实际运动的记录。这两个摆的摆锤，就是接有手电筒灯泡的干电池，它们悬在天花板下，而由在地板上稳定移动着的照相机，从下面进行拍照。

我们所观察到的这种特性，自然应归之于耦合弹簧的作用。当 A 振动时，弹簧便会拉 B 和推 B。这就使 B 受到了策动力的作用而运动起来。与此同时，弹簧也要推拉 A，对其运动是时而帮助时而妨碍的。而在 B 开始运动以后，弹簧对 A 的作用则是妨碍多于帮忙。在一次振动之内，对 A 所作的净功为负值，故而 A 的振幅减小了。

图 5-3 中所记录的每个运动，看起来恰象是由两个振幅相同而频率不同的 SHM 所产生的拍。情况也确实如此。然而，要想详细地说明这一点倒并不容易，因为我们对物理现象的"感觉"，只在定性的方面有帮助。可是，只要稍微变更一下初始条件，问题就变得大为简单了。

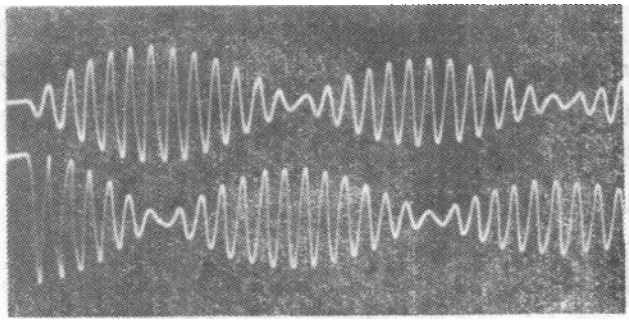


图 5-3　两个相同的耦合振子(在摆锤上装有手电筒灯泡的两个摆)的运动。第一个摆起初静止在平衡位置处。系统的阻尼是十分明显的。(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

§5-2　对称考虑

假定把 A 和 B 都向旁边拉开同样的程度[图 5-4(a)]，然后释放之。它们之间的距离，因与耦合弹簧的松弛长度一样，所以弹簧对每个摆都无作用力。A 与 B 将以相同的振幅作同周相的振动，始终保持着两者的距离不变。每个摆就等于是自由的、未经耦合

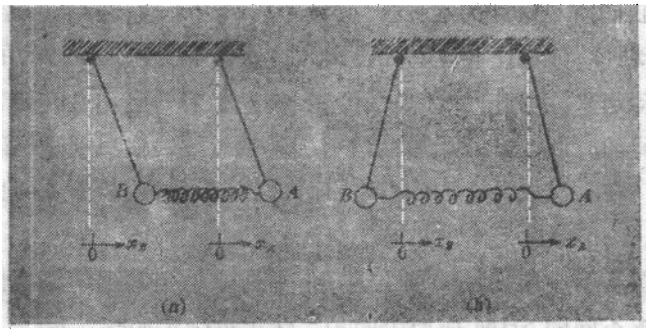


图 5-4 （a）两耦合摆的低简正模。 （b）两耦合摆的高简正模。

的。它们均以其自由振动的固有频率 $\omega_0(=\sqrt{g/l})$ 进行振动。所以，运动方程便是

$$\begin{aligned} x_A &= C\cos\omega_0 t \\ x_B &= C\cos\omega_0 t \end{aligned} \tag{5-1}$$

这里 x_A 及 x_B，乃是每个摆离开其平衡位置的位移。这表示耦合系统的一种**简正模**。两质量以同样的频率振动，且各有恒定的振幅(两者相同)。

我们能够找到几种简正模呢？另外只有一种了。把 A 和 B 按相反方向拉开同样的程度[图 5-4(b)]，然后释放之。现在耦合弹簧被拉长了；半周以后将被压缩，它对两摆是要施予作用力的。而 A 和 B 排列的对称性说明，它们的运动是互为镜象的。

如果两摆是自由的，任何一个摆又都被移开一小段距离 x，那么回复力便是 $m\omega_0^2 x$。但现在耦合弹簧被拉长或被压缩了 $2x$ 的距离，产生的回复力就应为 $2kx$ 了，此处 k 是弹簧常数。因此，A 的运动方程便是

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2}+m\omega_0^2x_A+2kx_A=0$$

或

$$\frac{d^2x_A}{dt^2}+(\omega_0^2+2\omega_c^2)x_A=0$$

式中已令 $\omega_c^2=k/m$。这是一个简谐运动的方程，其频率 ω' 为

$$\omega'=(\omega_0^2+2\omega_c^2)^{1/2}=\left(\frac{g}{l}+\frac{2k}{m}\right)^{1/2}$$

依据给定的初始条件，则得该方程的解为

$$x_A=D\cos\omega' t \tag{5-2a}$$

由于 B 的运动乃是 A 的镜象，故而

$$x_B=-D\cos\omega' t \tag{5-2b}$$

可见，每个摆均按简谐运动作振动，但由于耦合弹簧的作用增加了回复力，因而使频率增大而超过了无耦合的振动。在这种振动中，A 及 B 的运动显然总是 180° 异相的，于是这种方式的振动便构成了第二种简正模。

在此不妨指出，倘将一个摆夹住不动，那么另一摆在重力及耦合弹簧的作用下，角频率便等于 $(\omega_0^2+\omega_c^2)^{1/2}$。这时，如果想把此种运动在某种意义上视为仅是一个摆的特征运动，那么，单个摆的频率就介于两简正模频率之间。

§5-3 简正模的叠加

在上述的两情形中，要是没有阻尼力的话，则运动一经开始，便将无改变地持续下去。在两种振动模中，不会发生能量的转移。其所以引入这两种易于求解的情形，重要的原因在于，摆从静止开始的任何运动，均可用这两种情形的组合来描述。下面就来看看这是怎么办到的。

设某时刻 A 摆处于 x_A，而 B 摆处于 x_B（图 5-5）。此时弹簧伸长了 x_A-x_B，故有 $k(x_A-x_B)$ 的力拉着 A 及 B。这样，作用在 A 上的回复力为

$$m\omega_0^2 x_A+k(x_A-x_B)$$

而作用于 B 的便是

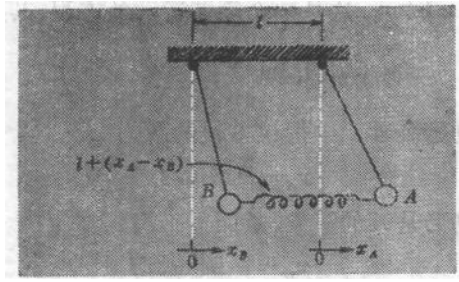


图 5-5　处于任意位形的耦合摆。

$$m\omega_0{}^2x_B-k(x_A-x_B)$$

于是 A 及 B 的运动方程就为

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x_A}{dt^2}+m\omega_0{}^2x_A+k(x_A-x_B)=0 \\ m\frac{d^2x_B}{dt^2}+m\omega_0{}^2x_B-k(x_A-x_B)=0 \end{aligned} \tag{5-3}$$

仍令 $\omega_c{}^2=k/m$，它们便可写为

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_A}{dt^2}+(\omega_0{}^2+\omega_c{}^2)x_A-\omega_c{}^2x_B=0 \\ \frac{d^2x_B}{dt^2}+(\omega_0{}^2+\omega_c{}^2)x_B-\omega_c{}^2x_A=0 \end{aligned} \tag{5-4}$$

第一个方程描述了 A 的加速度，含有 x_B 的一项。第二个方程则含有 x_A 的一项。这两个微分方程不能独立地求解，必须联立求解。给予 A 的运动并不会始终局限于 A，而会影响到 B，反之亦然。

其实，求解这两个方程并不难。若将两式相加即得

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A+x_B)+\omega_0{}^2(x_A+x_B)=0$$

而以第一式减第二式则得

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_A-x_B)+(\omega_0{}^2+2\omega_c{}^2)(x_A-x_B)=0$$

它们都是熟知的简谐振动方程。第一式中的变量是 x_A+x_B，频率

为 ω_0。第二式中，变量为 x_A-x_B，频率为 $\omega'=(\omega_0^2+2\omega_c^2)^{1/2}$。这两个频率，恰是前面验明了的两简正模的频率。倘若令 $x_A+x_B=q_1$ 及 $x_A-x_B=q_2$，于是就有 q_1 及 q_2 的两个独立方程：

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\omega_0^2q_1=0$$

$$\frac{d^2q_2}{dt^2}+\omega'^2q_2=0$$

它们的可能解（虽然不是最一般的解）是

$$q_1=C\cos\omega_0 t$$

（特殊情形） (5-5)

$$q_2=D\cos\omega' t$$

式中的 C 及 D，均为依赖于初始条件的常数。［可以看出，式(5-5)之缺乏一般性，就在于我们让两个初周相等于零了。］

我们在此得出了两种独立的振动。它们是简正模的另一种描述，即分别表述成变量 q_1 及 q_2 的振动，这两个变量就被称之为**简正坐标**。q_1 值的变化与 q_2 无关，反之亦然。

对原来的坐标 x_A 及 x_B 来说，其解则为

$$x_A=\frac{1}{2}(q_1+q_2)=\frac{1}{2}C\cos\omega_0 t+\frac{1}{2}D\cos\omega' t$$

（特殊情形） (5-6)

$$x_B=\frac{1}{2}(q_1-q_2)=\frac{1}{2}C\cos\omega_0 t-\frac{1}{2}D\cos\omega' t$$

当 $C=0$ 时，两摆均以频率 ω' 振动；或当 $D=0$ 时，两摆均以 ω_0 的频率振动。它们是单个简正模的频率，故而叫做**简正频率**。由此可见，简正频率的特征就在于，x_A 与 x_B 两者都能以此频率来振动。

现在，让我们应用式(5-6)来分析图 5-3 中的耦合运动。在 $t=0$ 时，初始条件为

$$x_A=A_0,\ \frac{dx_A}{dt}=0;\ x_B=0,\ \frac{dx_B}{dt}=0$$

可以看出，初始速度的条件是与式(5-6)自动吻合的，因为对 t 的求导，仅给出 $\sin\omega_0 t$ 及 $\sin\omega' t$ 的项，而它们在 $t=0$ 时都是零。由初始位移的条件，便有

$$x_A=A_0=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}D$$

$$x_B=0=\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}D$$

所以

$$C=A_0 \qquad D=A_0$$

将它们代回式(5-6)，从而得出在这种特定起始条件下的结果如下：

$$x_A=\frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t+\cos\omega' t)$$

$$x_B=\frac{1}{2}A_0(\cos\omega_0 t-\cos\omega' t)$$

也可改写为

$$\begin{aligned} x_A&=A_0\cos\left(\frac{\omega'-\omega_0}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega'+\omega_0}{2}t\right)\\ x_B&=A_0\sin\left(\frac{\omega'-\omega_0}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega'+\omega_0}{2}t\right)\end{aligned} \tag{5-7}$$

这每一个式子，就象在第二章中讨论过的那样，乃是具有调制振幅的、角频率为$(\omega'+\omega_0)/2$的正弦式振动。在一个摆之振幅为极大那个瞬时，另一摆的振幅恰好为零，虽然前者在此瞬时的实际位移，是由$(\omega'+\omega_0)t/2$的瞬时值来决定的。

§5-4 耦合振子的其它示例

把两个摆或其他振子耦合起来的方式是多种多样的；下面来

举几个例子。

图 5-6 示出了两摆是如何通过一个辅助质量 $m \ll M$，用弦线连结于主悬线上而耦合起来的。由装置的对称性来看，可以推断简正模将是 $x_B = \pm x_A$ 的那些运动。若 $x_A = +x_B = q_1$，质量 m 则随着两个主质量 M 一道起落，但若 $x_A = -x_B = q_2$，质量 m 则在两 M 分离最远时处于最高点，并在两质量互相靠近时向下降落。这样，就有了两个不同的简正模频率，一般说来，它们都跟单个摆的频率不同。

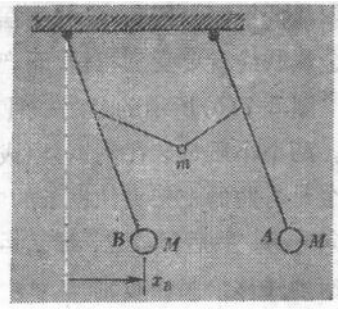


图 5-6　质量耦合摆。

另有四种力学耦合系统示于图 5-7。第一图(*a*)中的两个摆

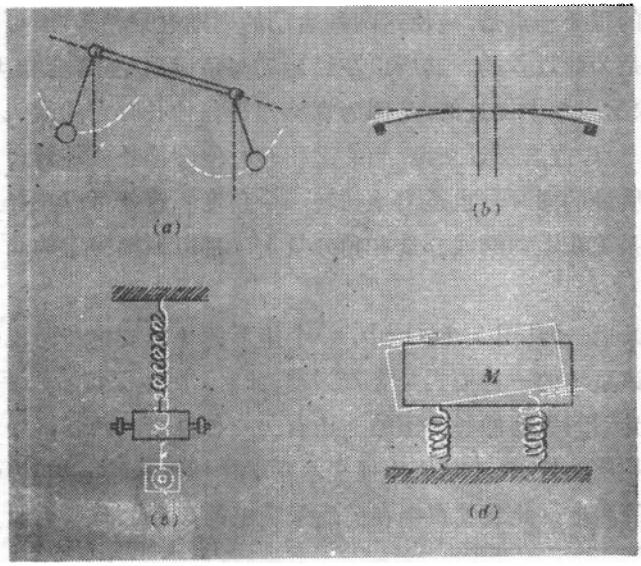


图 5-7　(*a*) 由水平扭转棒耦合起来的两个刚性摆。(*b*) 处于金属条带两端的质量。(*c*) 威耳伯孚斯摆。(*d*) 弹簧上的矩形块体。

锤是装在刚性棒上的，棒的上端夹紧在金属线上。两摆在垂直于金属线的平面内摆动。除非两摆以相等的振幅作同周相的摆动，否则金属联线就要受到扭转，而产生出正比于角位移差的耦合转矩。

图 5-7(*b*)所示的是另一种系统，耦合是由弹性回复力提供的。两个小质量装在钢锯条(或其它的弹性金属条带)的两端，由一个易弯曲的支架夹住锯条的中点。如果把一个质量象图示那样拉向一旁，然后释放之，那么运动便以典型的简正模叠加的形式，迅速地转移给另一质量。

图 5-7(*c*)所示的一种奇妙装置，叫做威耳伯孚斯摆①。一个带有可调外突柱的质量，悬于螺旋弹簧之下。倘若把质量往下拉然后释放，运动起初是简单的竖直振动，而随着时间的推进，此种运动逐渐消失，为质量绕竖直轴的一种有力的旋转振动所取代。然后，当旋转振动又减弱时，竖直的线振动就又恢复了。操作这个玩意儿的重要一点是，应使这两种运动的周期近乎相等；而可调外突柱就是为此设置的。其所以在线运动与角运动之间会出现耦合，正象第三章中说过的，是因为螺旋弹簧在伸长时它的端头要稍微扭转一点，或者反过来说，当它被扭转时便会伸长或缩短。如果在拉下质量的同时，也适当地扭转一个角度，这就可以在释放之后，使系统在运动的线分量和角分量上，都以振幅恒定的简正模振动。

在最后一幅[图 5-7(*d*)]中，一个矩形的块体支撑在两根弹簧上面。该系统的一种模式是竖直振动，此时，块体保持着水平，而两弹簧受到同等的伸长和压缩。还有另一种模式，两弹簧经历着相等而相反的位移；于是块体便绕水平轴作扭转振动，但并不改变其重心的高度。此装置跟搁在前后弹簧上的车厢，有些类似。倘

① 这是以英国的一位物理学教授 L. R. Wilberforce 的姓来命名的，他在 1894 年发表了这种装置的详细研究成果。

若把它的前端抬起尔后放开，你就会发现，振动在稍迟一会儿的时候，便转移到后端去了，如果在此期间阻尼还未来及使系统静止下来的话。

§5-5 简正频率的一般分析法

假定从对称考虑难于发现简正模，或者不易解出联立的微分方程。那么，将如何排除困难而求得解答呢？我们可使用在式(5-6)那里所讨论过的特征。由于 x_A 及 x_B 均能以同一种简正频率振动，故而可使

$$\begin{aligned} x_A &= C\cos\omega t \\ x_B &= C'\cos\omega t \end{aligned} \tag{5-8}$$

而后看看是否有这样的 ω、C、C' 等值，使得这些表达式是式(5-4)

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_A}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_A - \omega_c^2 x_B &= 0 \\ \frac{d^2x_B}{dt^2} + (\omega_0^2 + \omega_c^2)x_B - \omega_c^2 x_A &= 0 \end{aligned} \tag{5-4}$$

的解。若是有合适的 ω 值，那它们就是简正频率。诚然，前面业已证明 C 及 C' 的量值必定是相等的，但在目前分析问题的方法中，我们就装作还不知道这一点。况且 C 与 C' 的相等，仅在我们考虑过的非常特殊的问题中才是正确，它在更一般的情形下并不成立。

把式(5-8)代入式(5-4)即得

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C \qquad & -\omega_c^2 C' = 0 \\ -\omega_c^2 C + (-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2)C' &= 0 \end{aligned}$$

对于任意一个 ω 值来说，这两个式子构成了未知振幅 C 及 C' 的联立方程。倘若这是两个独立的方程，那就只有一种解，即 $C=0$ 及 $C'=0$，显然，这意味着，对任意的 ω 值来说，式(5-8)并不是该问题的解。

可是，假如这两个方程不是独立的，亦即第二式如果刚好为第

一式的倍数，那么，事实上我们就只有关于两振幅C及C'的一个方程了。在这种情形下，C可以具有任意值。然而一旦选定了C，C'也就固定了。

这么一来，ω应具有什么值，才能使这两个方程不独立，并能导致C及C'的非零解呢？从第一方程可有

$$\frac{C}{C'}=\frac{\omega_c^2}{-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2} \tag{5-9a}$$

而从第二方程可有

$$\frac{C}{C'}=\frac{-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2}{\omega_c^2} \tag{5-9b}$$

在C及C'都不为零时，这两式的右方必相等。因此

$$\frac{\omega_c^2}{-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2}=\frac{-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2}{\omega_c^2}$$

或是

$$(-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2)^2=(\omega_c^2)^2$$

所以

$$-\omega^2+\omega_0^2+\omega_c^2=\pm\omega_c^2$$

$$\omega^2=\omega_0^2+\omega_c^2\pm\omega_c^2$$

这里有ω的两个解；命其为ω'及ω''，即

$$\omega'^2=\omega_0^2+2\omega_c^2$$

$$\omega''^2=\omega_0^2$$

它们的正平方根，就是系统的两种简正频率；我们再次得到了业已熟悉了的结果。

从式(5-9)能够得出对每一种简正模的C与C'之间的关系。对$\omega=\omega'$来说，

$$\frac{C}{C'}=-1$$

而对$\omega=\omega''$则有

$$\frac{C}{C'}=+1$$

于是，就得出了式(5-8)的两种特殊形式，它们都是耦合运动微分方程[式(5-4)]的解：

$$\begin{aligned} x_A &= C\cos\omega_0 t \qquad & x_A &= D\cos\omega' t \\ & \text{以及} & & \\ x_B &= C\cos\omega_0 t & x_B &= -D\cos\omega' t \end{aligned} \tag{5-10}$$

这里，由于振幅的量值是任意的，并且只由初始条件所决定，因此我们采用了两个不同的符号C与D，来表示不同简正模时所具有的振幅。

这两个微分方程因为是线性的，即只出现了x_A、x_B、d^2x_A/dt^2、d^2x_B/dt^2各量的一次方项，故而上述两个解之和也是一个解：

$$x_A = C\cos\omega_0 t + D\cos\omega' t$$

(特殊情形) $$x_B = C\cos\omega_0 t - D\cos\omega' t \tag{5-11}$$

于是又一次得出了前面式(5-6)给出的解①。但现在所用这个方法，却是纯解析的、一般的方法，事先无需求助于系统的对称性。

作为这番讨论的结束，让我们来给出此种耦合系统自由振动方程的通解吧。不难看出，初周相不为零的解，也同样是适合微分方程式(5-4)的，尽管在一种特定的模式中，x_A和x_B之间有着系统的周相关系。明确地说，代替式(5-10)可有下列的一般形式：

$$\begin{aligned} \text{低振动模：} \quad & x_A = C\cos(\omega_0 t + \alpha) \\ & x_B = C\cos(\omega_0 t + \alpha) \\ \text{高振动模：} \quad & x_A = D\cos(\omega' t + \beta) \\ & x_B = -D\cos(\omega' t + \beta) \end{aligned} \tag{5-12}$$

① 与式(5-6)相比，式(5-10)中各式都少了一个因子2，但这全然是无区别的，因为可通过x_A及x_B的初始值来定出各个系数的值。

由于这儿有了四个可调节的常数，于是便可使这些解对两摆的任意初始位移及初始速度值都适合。这就取消了初始速度为零的限制，而正是它要求我们给早先的解标明"特殊情形"的字样。

§5-6 两耦合振子的受迫振动及共振

迄今为止，我们只是考察了两耦合振子系统的自由振动，并从而发现，系统作为一个整体，能以特征固有频率(恰好两种)而振动。但是，在系统受到了外来机构任一频率的策动时，情况将会如何呢？实际经验的直观知识告诉我们，当策动频率接近固有频率之一时，振动就出现大的振幅，而在远离这些固有频率时，受策系统的响应便相对地小些。下面就要详细地研究，如何从最简单的一种可能情形的运动方程中得出这个结论来，这个情形，便是业已验明了简正模的两个不计阻尼的相同摆的耦合。

现在的讨论，跟第四章中对单个受迫振子的分析几乎一样。这儿也要假定阻尼效应足够地小，以致在运动方程中可以略去不计，但是，也许要在振动了很多周以后，瞬变过程消失了，每个摆才会按策动力的频率进行恒定振幅的运动。

假设摆 A 受到谐和策动力 $F_0\cos\omega t$ 的作用（例如用正弦式地来回移动其悬点的办法即可），摆 B 的运动只受到本身的回复力及耦合弹簧的控制。于是牛顿定律对摆 B 的陈述，仍跟自由振动时的一样，而 A 的方程，也只是增加了 $F_0\cos\omega t$ 这一项而已，然而这个增加，却表达了物理情况的重大变化。这样，两个运动方程就变为[参看自由振动方程的(5-3)式]：

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2}+m\omega_0^2x_A+k(x_A-x_B)=F_0\cos\omega t$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2}+m\omega_0^2x_B-k(x_A-x_B)=0 \qquad \left(\omega_0^2=\frac{g}{l}\right)$$

用 m 遍除之后就变为

$$\frac{d^2x_A}{dt^2}+(\omega_0^2+\omega_c^2)x_A-\omega_c^2x_B=\frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\frac{d^2x_B}{dt^2}+(\omega_0^2+\omega_c^2)x_B-\omega_c^2x_A=0 \qquad \left(\omega_c^2=\frac{k}{m}\right)$$

这里无需分别处理 x_A 及 x_B，可以直接引用简正坐标 $q_1(=x_A+x_B)$ 和 $q_2(=x_A-x_B)$，因为大家已经知道，它们能够用来表征系统的整体运动。把上述微分方程加起来就得到

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\omega_0^2q_1=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{5-13a}$$

相减则得

$$\frac{d^2q_2}{dt^2}+\omega'^2q_2=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{5-13b}$$

式中

$$\omega'^2=\omega_0^2+2\omega_c^2$$

这么一来，问题得到了显著的简化。就好象是固有频率为 ω_0 及 ω' 的两个谐振子一样。于是能够明确地写出方程的稳态解：

$$\begin{aligned} q_1&=C\cos\omega t \qquad \text{式中} \quad C=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\\ q_2&=D\cos\omega t \qquad \text{式中} \quad D=\frac{F_0/m}{\omega'^2-\omega^2}\end{aligned} \tag{5-14}$$

这里的振幅 C 和 D，恰好呈现出象图 4-1 中单个振子的那种共振特性。由此便可得出两摆的振幅 A 及 B 对频率的依赖关系，因为我们有

$$x_A=A\cos\omega t \qquad \text{式中 } A=\frac{1}{2}(C+D)$$

$$x_B=B\cos\omega t \qquad \text{式中 } B=\frac{1}{2}(C-D)$$

故而得出下列结果：

$$A(\omega)=\frac{F_0}{m}\frac{(\omega_0^2+\omega_c^2)-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)}$$
$$B(\omega)=\frac{F_0}{m}\frac{\omega_c^2}{(\omega_0^2-\omega^2)(\omega'^2-\omega^2)} \tag{5-15}$$

这两个量随 ω 而变的情形，示于图 5-8。在较低频率共振占优势的频率范围内，A 和 B 的位移始终同号，即两者是同周相的。而在较高频率共振占优势的频率范围内，两位移则反号，因而有 180°的异相。当引入非零的阻尼时，就好像单个受策动的振子那样，会导致周相随频率的变化关系在通过共振时成为平滑的了。

这里，特别应当对图 5-8 中的一个特点给予说明，因为它在物

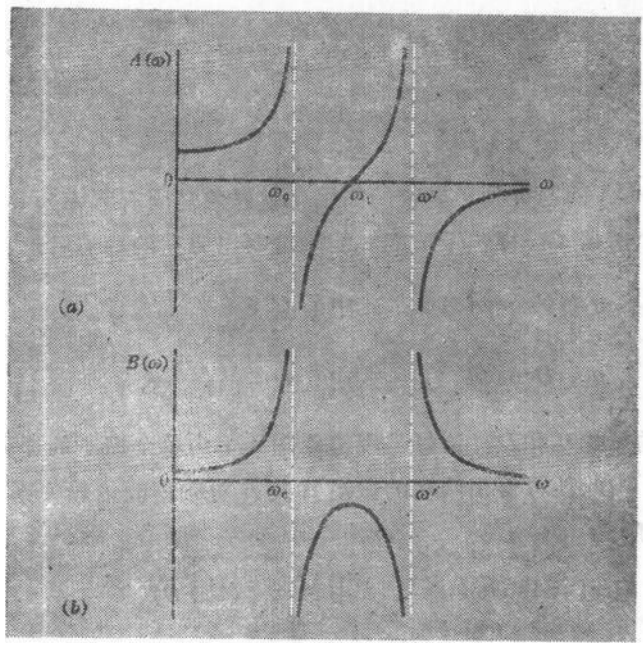


图 5-8　两个不计阻尼的耦合摆之受迫响应。简正模具有频率 ω_0 及 ω'。
(a) 第一个摆的振幅与策动频率的函数关系。[$\omega_1=(\omega_0^2+\omega_c^2)^{1/2}$]
(b) 第二个摆的振幅与策动频率的函数关系。

理上似乎(也确实)是不可能的。这指的是，在两个共振频率之间的某一定频率 ω_1 处，$A=0$ 而 B 不为零。可是，根据前面对问题所假设的条件可以明白，B 摆所受的周期力，是靠了 A 摆的运动才有的。在任何真实的系统中，A 摆锤必需有微小的振动不可。这个显出明显异常的频率 ω_1，正是在一个摆完全固定不动而另一摆跟耦合弹簧相连的情况下，单个摆所具有的固有频率，即 $\omega_1=(\omega_0^2+\omega_c^2)^{1/2}$。对完全没有阻尼力的情形来说，$A$ 摆的任何微小振动所造成的具有频率 ω_1 之任何微小策动力，都会使 B 摆产生任意大的响应。倘若存在着阻尼力，不管它多么微弱，都会破坏这种条件，这就意味着，振幅 $A(\omega)$ 在接近 ω_1 时虽然会变得很小，但却决不致完全降为零。然而要想充分地描述这个问题，那就得把系统当成一对具有阻尼的振子的组合，来进行详细的考察才行，可是，分析的复杂性却要大为增加了。

从本节的讨论里需要弄明白的主要点，就是确认能够用观察共振的办法，找出耦合系统的简正模来，而系统各组成部分在共振时的稳态运动，恰好与这同一系统以同样频率作自由振动时的情形一样。

§5-7 多个耦合振子

任何真实的宏观物体，诸如一块固体，都含有许多粒子，而不只是两个，故而人们切望解决任意数目的相同的振子，耦合在一起的问题。前面各节的工作已为此做好了准备。对这种系统的研究，使我们能够描述连续媒质的振动问题，并由此容易地过渡到对波动的分析。

我们也可以从牛顿定律直接过渡到连续媒质力学①。但是，

① 在本章开始处的注释中已经说过，读者为此可直接阅读第六章。

现在选择的这条道路，即经由耦合系统振动模而转到连续媒质力学，就更富有意味，而且实质上也更正确，因为真正的连续媒质是没有的。再者，你或许乐于知道，我们现在的这条道路也正是牛顿及其后继者们所走过的。这一点，多半还值得作些题外的介绍吧。

牛顿之后不久，著名的伯努利(Bernoulli)家族的两位成员，约翰·伯努利(John Bernoulli)和他的儿子丹尼耳(Daniel)，对一行相互联系着的质点动力学，进行了细致的研究。他们证明，N个质点的系统刚好具有N种独立的振动模(只对一维运动而言)。尔后，丹尼耳在1753年发表了这种系统的叠加原理：振动系统的一般运动，可描述为简正模的叠加。大家记得，本章在前面已展示过关于两振子系统的这项结果。正如对晶体点阵振动理论作出了重要贡献的布里渊(L. Brillouin)所说①：

> 伯努利的这项研究，是把质点系运动而不是把单个质点运动表述为定律的第一次尝试，在这个意义上来说，它开创了有别于力学的理论物理学。叠加原理是重要的，因为它是傅里叶级数的特殊情形，而且它已适时地被推广成为傅里叶定理的一种表示了。

(我们将在第六章中阐述傅里叶分析的概念。)

在作了这番序言式的说明之后，现在我们就可以转入对N个粒子系统的细致分析了。

§5-8 N个耦合振子

在处理两振子系统的运动时，我们的注意力局限于所谓的纵振动，即两摆锤是沿着它们的连线运动的。大家即将看到，对横振动的处理完全与之雷同，而此时粒子的振动方向是跟它们的连线相垂直的。由于横振动比纵振动更便于设想和显示，所以下面就

① 见L. Brillouin:《Wave Propagation in Periodic Structures (周期性结构中的波动传播)》(1953年纽约Dover版)。

来分析典型多粒子系统的横振动。

试考虑在一根柔软的弹性弦线上系着N个等同的粒子，每个粒子的质量是m，相互间的距离都是l。今把弦线固定在两点上，一个点在第一粒子左侧距离l处，另一个则在第N个粒子右侧的距离l处(图 5-9)。

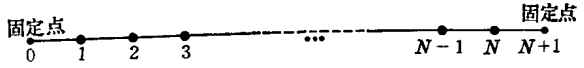


图 5-9　处于无质量弦线上的N个等距离的粒子。

粒子的标号从 1 至N，或者，如果把两固定端作为零位移的粒子也包括进来的话，那就是从 0 至$N+1$。若弦线中的初始张力是T，而且，如果只限于考虑粒子的微小横向位移，那么粒子振动时弦线张力的任何增加，均可略去不计。例如，假定粒子 1 移至y_1，粒子2 移至y_2(图 5-10)；它们之间的弦线长度就变为$l'=l/\cos\alpha_1$。在$\alpha_1 \ll 1$ rad 时，$\cos\alpha_1 \approx 1-\alpha_1^2/2$，故而$l' \approx l(1+\alpha_1^2/2)$。于是，长度的增加量为$l\alpha_1^2/2$，而与此量成正比之张力增加量，较之与$\alpha_1$的一次方成正比的项来说，确是可以略去不计的。

在图示的位形中，粒子 2 受到的x向合力为　$-T\cos\alpha_1+T\cos\alpha_2=\frac{1}{2}T(\alpha_1^2-\alpha_2^2)$，它是$\alpha$的二次方项之差。对微小的$\alpha_1$及$\alpha_2$值来讲，这差值就更小了，因而可不必考虑它所引起的后果。

图 5-10 示出的是诸粒子在横向运动中某一瞬时的位形。这里只需关心y向的位移就行了，它们都比l小。作用于一个典型

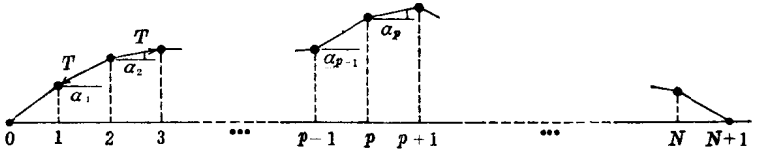


图 5-10　长弦线上作横向位移的各个质点的受力图。

粒子即第 p 个粒子的 y 向合力为

$$F_p=-T\sin\alpha_{p-1}+T\sin\alpha_p$$

各正弦量的近似值是

$$\sin\alpha_{p-1}=\frac{y_p-y_{p-1}}{l}$$

$$\sin\alpha_p=\frac{y_{p+1}-y_p}{l}$$

所以

$$F_p=-\frac{T}{l}(y_p-y_{p-1})+\frac{T}{l}(y_{p+1}-y_p)$$

此力应等于质量 m 乘第 p 个粒子的横向加速度。于是

$$\frac{d^2y_p}{dt^2}+2\omega_0^2y_p-\omega_0^2(y_{p+1}+y_{p-1})=0 \qquad (5\text{-}16)$$

式中已使

$$\frac{T}{ml}=\omega_0^2$$

我们可以给N个粒子中的每一个，都写出类似的方程。这样便有了N个微分方程的集合，其中的 p 值从 1 至N。大家还要记住，$y_0=0$ 及 $y_{N+1}=0$。

考察一下式(5-16)在 $N=1$ 及 $N=2$ 时的简单特殊情形，是有好处的。若 $N=1$ 便有

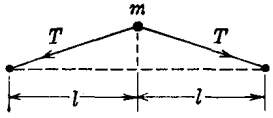
$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\omega_0^2y_1=0$$

这是角频率为 $\omega_0\sqrt{2}=(2T/ml)^{1/2}$ 的横向谐运动，而这个结论也能直接从对图 5-11(a)的考察中得到。若 $N=2$ 则有

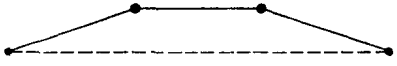
$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+2\omega_0^2y_1-\omega_0^2y_2=0$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+2\omega_0^2y_2-\omega_0^2y_1=0$$

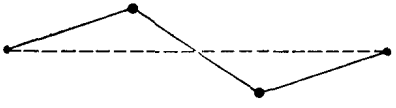
它们与两耦合摆的式(5-4)相似，只是现在因 ω_0 跟 ω_e 相等而简化



(a) $N=1$ $(\omega=\omega_0\sqrt{2})$



(b) $N=2$ 较低振动模 $(\omega=\omega_0)$



(c) $N=2$ 较高振动模$(\omega=\omega_0\sqrt{3})$

图 5-11 两种最简单的有载荷弦线系统的简正模。(a) $N=1$，只有一种振动模。(b) $N=2$ 较低振动模。(c) $N=2$ 较高振动模。

了，所以式(5-4)中的 $\omega_0^2+\omega_c^2$ 就对应于这里的 $2\omega_0^2$，那里的 ω_c^2 在此变成了 ω_0^2。在这种情形中，诸简正模的角频率之间，存在着确定的数值关系；它们的实际值分别为 ω_0 及 $\omega_0\sqrt{3}$。$N=2$ 的两种振动模示于图 5-11(b)及(c)中。这里，弦线的实际位形，使得诸固有频率间的关系，几乎是不言自明的了，可是当粒子数目更多的时候，结论就很不明显了，我们还得依靠更为一般的分析形式才行。

§5-9 求N个耦合振子的简正模

我们基本上把前面用于两个微分方程的那种分析方法，应用到N个方程上来。所谓探求诸简正模，也就是要找到这样的一些正弦式解，使得每一粒子均以同样的频率振动。设

$$y_p=A_p\cos\omega t \quad (p=1,2,\cdots,N) \tag{5-17}$$

式中 A_p 及 ω 为第 p 个粒子的振动振幅及频率。假如我们找出了

A_p 及 ω 的值，使得式(5-17)的诸式能够满足式(5-16)的 N 个微分方程，这就完成了我们的任务。注意，从式(5-17)也能够得出任何粒子的速度来，即

$$\frac{dy_p}{dt}=-\omega A_p\sin\omega t \qquad (p=1, 2, \cdots, N)$$

这样，由于把式(5-17)选作试探解，就使我们自动受到了附加边界条件的约束，亦即每个粒子在 $t=0$ 时速度为零，每个粒子都是从静止开始运动的。

把式(5-17)代入式(5-16)的诸微分方程，便得

$$\begin{aligned}
&(-\omega^2+2\omega_0^2)A_1-\omega_0^2(A_2+A_0)=0\\
&(-\omega^2+2\omega_0^2)A_2-\omega_0^2(A_3+A_1)=0\\
&\qquad\vdots\\
&(-\omega^2+2\omega_0^2)A_p-\omega_0^2(A_{p+1}+A_{p-1})=0\\
&\qquad\vdots\\
&(-\omega^2+2\omega_0^2)A_N-\omega_0^2(A_{N+1}-A_{N-1})=0
\end{aligned}$$

这一串看起来颇为吓人的 N 个联立方程，可以写成如下较为简洁的形式：

$$(-\omega^2+2\omega_0^2)A_p-\omega_0^2(A_{p-1}+A_{p+1})=0 \qquad (p=1, 2, \cdots, N) \tag{5-18}$$

前面弦线两端固定所要求的这种边界条件，现在就意味着 $A_0=0$ 及 $A_{N+1}=0$。

当前的问题在于，是否能用同一个 ω^2 值来满足所有这 N 个方程。大家早已看过如何处理只含有两个耦合振子时的这种问题。除去振幅全都为零的平凡解以外，假若有一个解存在的话，那就会导致如式 (5-9) 所描述的对振幅之比值的限制条件。在现今这个较为复杂的问题中，也遇到了同样的情况。如果把式(5-18)改写成

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p}=\frac{-\omega^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2} \qquad (p=1, 2, \cdots, N) \tag{5-19}$$

即可看出，对任一特定的 ω 值来说，右方都是恒量，因而左方的比值也必是恒量而与 p 值无关。那么，诸 A_p 究竟为何值时才能满足这个条件，并同时给出 $A_0=0$ 及 $A_{N+1}=0$ 来呢？

我们不拟**求解**式(5-19)，而只留心一种不寻常的结果，它会给出解决问题的线索。假定粒子 p 的振幅可以标记成如下的形式：

$$A_p=C\sin p\theta \tag{5-20}$$

式中 θ 为某一角度。若用相似的方程来规定相邻两粒子 $p-1$ 及 $p+1$ 的振幅，那么便有

$$\begin{aligned}A_{p-1}+A_{p+1}&=C[\sin(p-1)\theta+\sin(p+1)\theta]\\&=2C\sin p\theta\cos\theta\end{aligned}$$

但 $C\sin p\theta$ 正是 A_p，故而有

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p}=2\cos\theta \tag{5-21}$$

这就意味着，式(5-20)所描述的方法是成功的。式(5-21)的右方是个恒量，与 p 无关，这正是我们所需要的、与式(5-19)相当的条件。它能满足原来式(5-18)中的全部 N 个方程。剩下的任务，就是找出 θ 的值来。运用在 $p=0$ 及 $p=N+1$ 时 $A_p=0$ 的这个要求，就能做这一点。第一个条件是自动满足的；第二个条件，则只需让 $(N+1)\theta$ 等于 π 的整数倍就能很好地成立。因而可使

$$\begin{aligned}(N+1)\theta&=n\pi\qquad(n=1,2,3,\cdots)\\\theta&=\frac{n\pi}{N+1}\end{aligned} \tag{5-22}$$

把 θ 代入式(5-20)便得到

$$A_p=C\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \tag{5-23}$$

这么一来，诸简正模的容许频率也就被确定了，因为从式(5-19)至(5-22)诸式可得

$$\frac{A_{p+1}+A_{p-1}}{A_p}=\frac{-\omega^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2}=2\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)$$

所以，

$$\omega^2 = 2\omega_0^2\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{N+1}\right)\right]$$

$$= 4\omega_0^2\sin^2\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

取其平方根便得

$$\omega = 2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \tag{5-24}$$

§5-10 N个耦合振子简正模的性质

在求出了N个耦合振子这个问题的数学解之后，现在来更细致地研究一下，这些方程所描述的运动是怎样的。

首先，大家看到，根据式(5-24)，整数n的不同值将定出不同的简正模频率。因此，用n值来标示一种振动模及其特有的频率是适宜的。于是我们令

$$\omega_n = 2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right] \tag{5-25}$$

其次应该看到，某粒子或振子的运动，既取决于它在直线上的号数p，也取决于振动模的号数n。故其运动振幅可写为

$$A_{pn} = C_n\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right) \tag{5-26}$$

式中C_n，规定了粒子特定振动模n被激发时所具有的振幅。当整个粒子集体以第n种振动模振动时，第p个粒子的实际位移则为

$$y_{pn}(t) = A_{pn}\cos\omega_n t \tag{5-27}$$

式中的ω_n及A_{pn}，分别由式(5-25)及(5-26)给出。此式暗示着每个粒子在$t=0$时是静止的，但和两振子的问题一样，它也能满足任意的起始条件而只需使

$$y_{pn}(t) = A_{pn}\cos(\omega_n t-\delta_n) \tag{5-27a}$$

这里，可以给每一不同的振动模指定各自的周相δ_n。

究竟有多少种简正模呢？大家知道，两个耦合振子的简正模恰好有两种。倘使你直觉地认为，N个振子只有N种独立的振动模，那么你就说对了①。然而此事已隐含在式 (5-25)及(5-26)之中了，因为 ω_n 及 A_{pn} 对每个 n 的整数值是确定的。关键之点就在于，超过了 $n=N$时，这两个方程在物理上并不描述什么新的情况。

就振动模频率而言，借助图 5-12，就可得到清楚的说明。这是式(5-25)的线图，是在 ω 规定为总是正值的范围内绘制的。从 $n=1$ 至 $n=N$，这有N种不同的特征频率。在 $n=N+1$ 时，这对

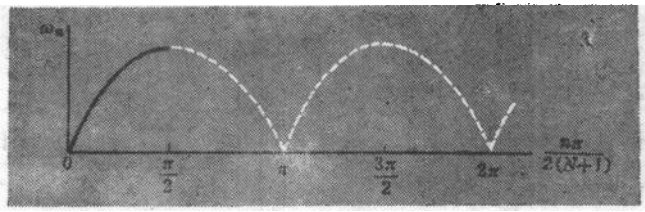


图 5-12　振动模频率与振动模号数的函数关系图。将 ω_n 对 $n\pi/2(N+1)$ 作图，要比对 n 本身作图方便些。

应于横轴上的$\pi/2$处，频率达到了最大值 $\omega_{max}(=2\omega_0)$，但它并不对应于一种可能的运动，因为正如式(5-26)所表明的那样，在此 n 值时所有的振幅 A_{pn} 均为零。对于 $n=N+2$ 的情形，我们有

$$\omega_{N+2}=2\omega_0\sin\left[\frac{(N+2)\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$=2\omega_0\sin\left[\pi-\frac{N\pi}{2(N+1)}\right]$$

$$=2\omega_0\sin\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right]$$

所以，

$$\omega_{N+2}=\omega_N$$

与此类似，$\omega_{N+3}=\omega_{N-1}$，等等。而且，在每一相继的 $N+1$ 个 n 值

① 这是一维系统的情形。二维的是 $2N$ 种，三维则是 $3N$ 种。

的范围内，都会出现相似的重复。

再前进一小步即可看到，粒子在简正模中的相对振幅也是自相重复的。例如，从式(5-26)有

$$\begin{aligned} A_{p,N+2} &= C_{N+2}\sin\left[\frac{p(N+2)\pi}{N+1}\right] \\ &= C_{N+2}\sin\left[2p\pi - \frac{pN\pi}{N+1}\right] \\ &= -C_{N+2}\sin\left[\frac{pN\pi}{N+1}\right] \\ &\sim A_{p,N} \end{aligned}$$

而且不难证明，在 $n>N+1$ 的任何别的情形中，都会出现类似的匹配。

现在来看看各种简正模是什么样儿的。第一种简正模由 $n=1$ 给出，于是各粒子的位移为

$$y_{p1} = C_1\sin\left(\frac{p\pi}{N+1}\right)\cos\omega_1 t \qquad (p=1, 2, \cdots, N)$$

在某一给定的时刻，因子 $C_1\cos\omega_1 t$ 对全部粒子都是同样的，只有因子 $\sin[p\pi/(N+1)]$ 区分着不同粒子的位移。图 5-13(*a*)中的

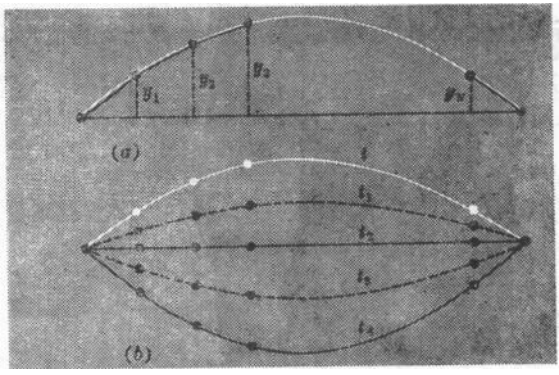


图 5-13 (*a*) $\sin[p\pi/(N+1)]$ 为 p 之函数的标绘图。诸粒子处在由整数值 p 所规定的位置上，并由直的弦线段连结着。(*b*) 对于最低简正模各粒子在不同时刻的位置。

白色曲线，乃是在 p 从 0 连续变至 $N+1$ 时，$\sin[p\pi/(N+1)]$ 对 p 的标绘图。然而，实际的粒子是按分立值 $p=1, 2, \cdots, N$ 来定位的。所以，正弦曲线仅是各粒子定位的一个规准，而弦则是由连结各粒子的直线段所组成的。

随着 t 的增加，每个粒子均以频率 ω_1 在 y 方向上振动。不同 t 时的一组正弦曲线，以及各粒子相应的位置，均示于图 5-13(b)。第二种简正模，$n=2$，故

$$y_{p2}=C_2 \sin\left(\frac{p2\pi}{N+1}\right)\cos\omega_2 t \quad (p=1, 2, \cdots, N)$$

诸粒子在不同时刻的位移，示于图 5-14 中。倘若粒子数目是奇数，则在直线的中点处有一个粒子，它在这种简正模中会保持静止不动，如图 5-14 所示。记住，ω_2 与 ω_1 不同，所以这种形式振动的频率与前一个不同，事实上约为其两倍左右。

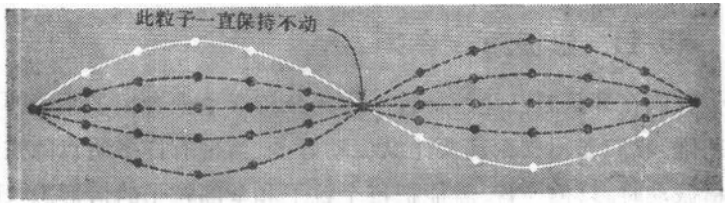


图 5-14　具有第二种简正模($n=2$)时，各粒子在不同时刻的位置。

图 5-15 示出的是，紧张的弦线上有四个粒子时的一系列简正模图形。这些图形，非常漂亮地显示了位移的形状在抵达 $n=5$ 以后，是如何逆着前面的顺序重复的，尽管所有那些决定 A_{pn} 的正弦曲线都不相同。这些对小的 N 值所作的图形，使大家也能体会到下述一点是如何的令人惊异：每一粒子在此系统的每种简正模中的位移，都落在一根正弦曲线上，而连结着这些粒子的弦线，则可能会有着完全不同的路径。

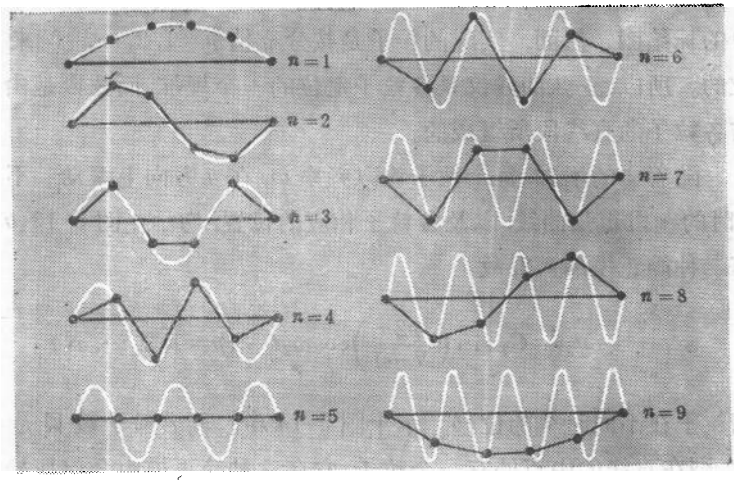


图 5-15　有载荷之振动弦线 $N=4$ 时的诸种简正模。注意，$n=6、7、8、9$ 的图样乃是 $n=4、3、2、1$ 图样的重复但反号。[按 J.C. Slater, N.H. Frank: 《Mechanics(力学)》(1947 年纽约 Mc Graw-Hill 版)改制。]

§5-11　纵振动

我们在开头时已经解释过，作为分析大量耦合振子系统特性的基础，我们选用横振动要比纵振动好些。当带有许多质点的弦线作横振动时，只需一瞥，就能把每个粒子和全部粒子的情形悉收眼底，并且印入脑海之中了。但是，现在却要来看看如何把这同样的分析应用于下述的粒子系统：诸粒子由许多弹簧连成一根直线，而粒子只限于沿此直线运动。这样似乎像一个非常人工化的系统，可是，以此系统为模型来表达晶体中的一行原子，倒是非常的恰当，并且只消略加推广，就成为一段气柱了。

现在仍假定每个粒子的质量为 m，在静止时仍然相距 l [图 5-16(*a*)]。只是这里的回复力，是由弹簧的伸长或缩短来提供的；每个弹簧的弹簧常数，可以写为 $m\omega_0^2$。令各个粒子离开其平衡位

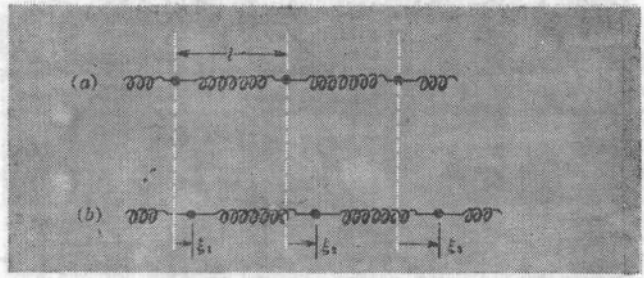


图 5-16 (a) 处于平衡状态的、由弹簧耦合的粒子。 (b) 由弹簧耦合的粒子发生了微小的纵向位移。

置的位移，分别由 ξ_1、ξ_2、…、ξ_n①来表示[见图 5-16(b)]。

这样，第 p 个粒子的运动方程便是

$$m\frac{d^2\xi_p}{dt^2}=m\omega_0^2(\xi_{p+1}-\xi_p)-m\omega_0^2(\xi_p-\xi_{p-1})$$

即

$$\frac{d^2\xi_p}{dt^2}+2\omega_0^2\xi_p-\omega_0^2(\xi_{p+1}+\xi_{p-1})=0 \tag{5-28}$$

它和式(5-16)的形式完全一样，因而从数学上看，我们在有载荷弦线的横振动中所发现的全部特点，现已在这个新系统中找到了它的相应表现。这就是说，第 p 个粒子在第 n 种简正模中的运动为

$$\xi_{pn}(t)=C_n\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos\omega_n t \tag{5-29}$$

式中

$$\omega_n=2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

目前已经可以对这种系统进行非常精细的定量研究了，这是由于采用了气垫的缘故；从支撑面上的许多小孔中喷出气流，其压力略大于大气压，就能几乎完全无摩擦地支持住在支撑面上滑动

① 我们在此采用了希腊字母 ξ，为的是让通常的 x 去表示距一端的总距离。

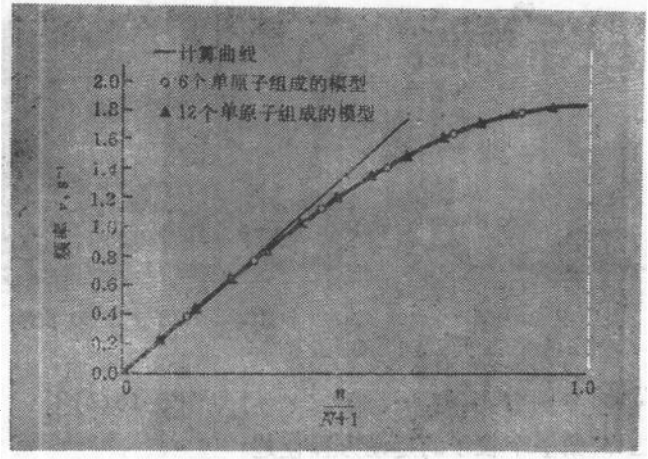


图 5-17　用弹簧耦合起来的一行相同的粒子，其振动模频率 ν_n 的实验值对振动模号数的标绘图。[注意，横轴是$n/(N+1)$而不是 n；这可使两种不同N值($N=6$ 及 $N=12$)的数据，都能与同一条理论曲线进行比较。][引自 R. B. Runk, J. L. Stull, O. L. Anderson 的文章，载于 Am. J. Phys.（美国物理学杂志)1963 年第 31 期第 915 页。]

的物体。图 5-17 示出的，便是采用这种装置得出的测量结果①。每个粒子的质量约为 0.15kg，弹簧常数能使频率 ω_0 为 $5.68s^{-1}$。

在图中，把各种简正模频率 $\nu_n(=\omega_n/2\pi)$的观测值，标绘成变量 $n/(N+1)$的函数。线图包括对 6 个质点(和 7 个弹簧)的系统，以及对 12 个粒子(和 13 个弹簧)的较长而仍然相似的系统所做的测量。由于 ω_0 对两者都是一样的，故而两系统的结果就该落在同一根曲线上：

$$\nu_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{\omega_0}{\pi}\sin\left(\frac{n}{N+1}\frac{\pi}{2}\right)$$

可以看出，实验值与理论值相符得极好。

① 见 R. B. Runk, J. L. Stull, O. L. Anderson 的文章，载于 Am. J. Phys.（美国物理学杂志)1963 年第 31 期第 915 页。

§5-12 N非常大

现假定耦合系统中粒子的数目变成非常之大。为使讨论清晰起见，我们将取紧张弦线上的粒子横振动作为讨论对象。事实上，真实弦线本身，就是大量靠得很近的原子的集合体。我们可以再一次肯定，由此所得的结论，同样适用于由弹簧连结的一行粒子之纵振动。

在使N增加的同时，我们让相邻粒子间的距离 l 缩短，从而使弦线的长度 $L=(N+1)l$ 保持恒定。我们也要使每个粒子的质量减少，使得总质量 $M=Nm$ 也保持恒定。

那么，简正频率将会如何呢？我们已知

$$\omega_n=2\omega_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

式中 $\omega_0=(T/ml)^{1/2}$。首先来考虑振动模号数 n 不大时的简正模。由于此时N变得很大了，故可使

$$\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]\approx\frac{n\pi}{2(N+1)}$$

所以

$$\omega_n\approx2\left(\frac{T}{ml}\right)^{1/2}\frac{n\pi}{2(N+1)}=\left(\frac{T}{m/l}\right)^{1/2}\frac{n\pi}{(N+1)l}$$

而由于$(N+1)l=L$是弦线的总长度，m/l乃是单位长度的质量即线密度 μ。因此可近似地得到

$$\omega_n=n\frac{\pi}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{5-30}$$

特别是

$$\omega_1=\frac{\pi}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

故有 $\omega_n=n\omega_1$。诸简正频率乃是最低频率 ω_1 的整数倍。然而要记住，这仅是一项近似的结果，只有在 $n\ll N$的情形下它才是一项

很好的结果。

粒子的位移又怎样呢？大家已经知道第 p 个粒子在第 n 种振动模中的位移是

$$y_{pn}=C_n\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)\cos\omega_n t$$

我们可以改用从弦线固定端到粒子的距离 x 代替 p 来标记粒子。现有

$$x=pl$$

故

$$\frac{pn\pi}{N+1}=\frac{pln\pi}{(N+1)l}=\frac{n\pi x}{L}$$

这就能用 $y_n(x,t)$ 代替 y_{pn} 来表示，当弦线以第 n 种振动模振动时，位于 x 处的粒子在 t 时刻的 y 向位移。即

$$y_n(x,t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (5\text{-}31)$$

由于 N 变得非常大，这些给粒子定位的 x 值就愈益靠近起来，从而可以把 x 看作是由 0 变至 L 的一个连续变量。这么一来，图 5-13、5-14 及 5-15 中的白色正弦曲线，都是弦线在不同振动模中的真实位形了。由此，无需多作想象，便能把这种运动与弦线上传播的波扰动的可能性联系起来，然而我们目前还暂不去涉及这个论题。

现在来考虑**最高**的可能的振动模 $n=N$。既然 N 非常之大，故有

$$\omega_{max}=2\omega_0\sin\left[\frac{N\pi}{2(N+1)}\right]\approx 2\omega_0\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\omega_0 \qquad (5\text{-}32)$$

在这种振动模中，我们即将证明，每个粒子在每一瞬时的位移，均与其左右两粒子的位移反号，而且，除最靠近两固定端的粒子而外，这些位移在量值上也大致相等。于是，纵振动的情况大体如图 5-18(a)所示，横振动的较形象化的情形，如图 5-18(b)所示。

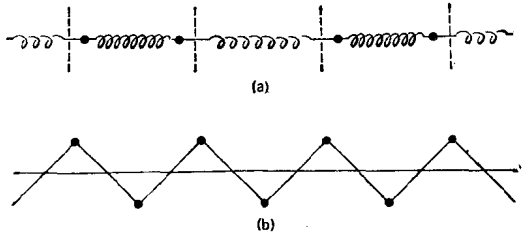


图 5-18 (*a*) 一行由弹簧耦合的粒子以最高振动模作纵振动。(*b*) 处于紧张的弦线上的一行粒子以最高振动模作横振动。

相邻粒子位移的这种关系，可借助于式(5-26)

$$A_{pn}=C_n\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

来推得。令 $n=N$，便有

$$A_{p,N}=C_N\sin\left(\frac{pN\pi}{N+1}\right)$$

且可写为

$$A_{p,N}=C_N\sin(p\pi-\alpha_p)$$

式中

$$\alpha_p=\frac{p\pi}{N+1}$$

首先要注意，当 p 变为 $p+1$ 时，振幅便要易号，因为 $p\pi$ 角此时从 π 的奇数倍变成了偶数倍(或者反过来说也是一样)，而且由于 $p\leqslant N$，故对每个 p 来说，角 α_p 均小于 π。这就使得 $(p\pi-\alpha_p)$ 的相继值处于反向的象限之内了。因而可使

$$\text{(最高振动模, } n=N)\quad \frac{A_p}{A_{p+1}}=-\frac{\sin\left[\dfrac{p\pi}{N+1}\right]}{\sin\left[\dfrac{(p+1)\pi}{N+1}\right]} \tag{5-33}$$

其次要注意，除改变符号这一点而外，式(5-33)还描述了，诸粒子

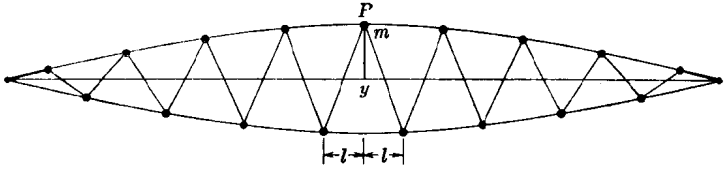


图 5-19　两端固定的弦线上一整行粒子在最高振动模中的振幅。

的振幅在两固定端间绘出的半正弦曲线上的分布，如同图 5-19 对一行作横振动的粒子所示的那种情形一样①。因此，在这行粒子的大部分中心区域内，位移几乎相等而方向相反。例如，考虑具有1000个粒子的一行粒子。此时，在$100 \leqslant p \leqslant 900$的范围内，相邻振幅的差异便小于 1%。仅在接近弦线的端点处，才与图 5-18 (*b*) 有显著的不同。因而不难看出，频率为什么会近乎等于 $2\omega_0$。试考察图 5-19 中的 P 粒子。如若它在某时刻的位移是 y，则两相邻粒子的位移就约为 $-y$。这样，当连结弦线上的张力为 T 时，那么每一连线所产生的横向分力，就近似等于 $(2y/l)T$，则 P 的运动方程为

$$m\frac{d^2y}{dt^2} \approx -2T\,\frac{2y}{l}$$

或

$$\frac{d^2y}{dt^2} \approx -\frac{4T}{ml}y = -4\omega_0^2 y$$

(记住，这里也象通常那样是假定 $y \ll l$ 的，故图中横向位移的量值是画得大为夸张了的。) 这样，上式便给出了角频率近似等于 $2\omega_0$ 的 SHM，而稍微考虑一下，你就会相信，精确的频率正如式(5-32)所要求的那样，是略略小于 $2\omega_0$ 的。

迄今为止，在对简正模的全部讨论中，我们均有充分的理由对

① 注意，此项结果即使在较小 N 的最高振动模中也是成立的，例如可参看图 5-15 中的第四图。

所用的边界条件，给予足够的重视，例如，一行粒子的两端究是固定的，还是自由的。然而，通过刚才的讨论我们就会明白，一行大量粒子的很高振动模的性质，是较少地依赖于精确的边界条件的，虽说那些低振动模是严格与之有关的。所以，上面对系统最高振动模频率的计算，只需承认相邻粒子的位移近乎相等且反向就行了。即使假定线的一端固定而另一端自由，也会同样得到最高振动模频率的相同近似值。但是应该承认，这只是近似正确的，从原则上说，精确的边界条件效应，总应考虑才是。

§5-13 晶体点阵的简正模

我们只是提一提这个论题而已，因为要阐明这个问题，事实上需要一整本书才行。然而上节的分析，已非常成功地转入到固体振动方式的描述上来了。这并不奇怪，因为我们早已注意到，在只涉及微小位移的情形下，相邻原子间的相互作用是与弹簧的作用极为相象的。而固体的结构，多少是一种规则性的点阵结构，这就说明，在谈到晶体点阵的振动行为时，常把它比之为三维的弹簧床，是完全可以的。

倘使把式(5-29)及(5-30)应用于固体，我们可以设想点阵内一个主方向上的一行原子，以μ表示其单位长度上所有原子的总质量，或一个原子的质量除以原子间的距离l。那么，张力T是什么呢？我们在第三章中曾引用过一种有力的暗示，用内弹性力算出了弹簧常数来。从量纲上看，比值T/μ，与杨氏模量对密度的比值Y/ρ是一样的。这一点，从图 5-16 所示的紧张弹簧上来考虑时，甚至会更易于得到启发。因此，我们来考虑把晶体的振动频率$\nu(=\omega/2\pi)$表述为如下关系式的可能性，即：

$$\nu_n=2\nu_0\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right],\quad \text{式中}\quad \nu_0=\frac{1}{2l}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2} \tag{5-34}$$

大家知道(见表 3-1)，固体 Y 值的数量级为 $10^{11}\mathrm{N/m^2}$，由而于密度 ρ 的数量级为 $10^4\mathrm{kg/m^3}$，故比值 Y/ρ 有 $10^7\mathrm{m^2/s^2}$ 的数量级。原子间距 l 的数量级为 $10^{-10}\mathrm{m}$。因而可得

$$\nu_0 \approx 10^{13}\mathrm{s}^{-1}$$

这是点阵能够提供的最高频率。而诸低振动模频率完全可以仿照式(5-30)写出:

$$\nu = \frac{1}{2L}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2}$$

式中 L 是晶体的厚度①。因此，1cm 厚的晶体其最低振动频率的数量级为 $10^5\mathrm{Hz}$。

再来谈最高的可能振动模，此时，相邻原子的位移互相反向(见图 5-18)。当光照射到诸如 NaCl 这类离子性晶体上时，就能非常有效地激发起这种运动，因为 Na^+ 及 Cl^- 离子总是被光波的电场推向相反的方向的。由上面非常粗糙的计算可见，在频率为 $10^{13}\mathrm{Hz}$ 数量级时，即对应于数量级为 $3\times10^{-5}\mathrm{m}$ 或 30μ 的波长时，

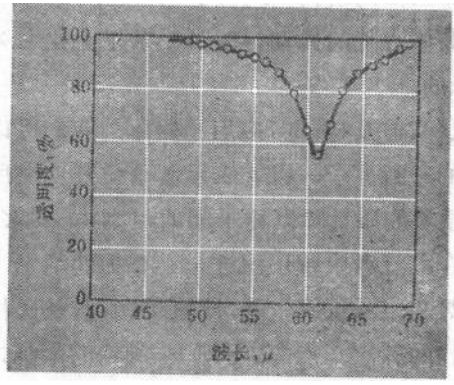


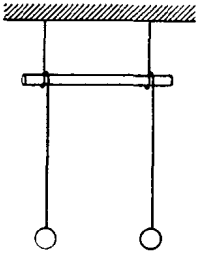
图 5-20　红外辐射通过 NaCl 薄膜(0.17μ)的透明度。[依照 R. B. Barnes 的文章，载于 Z. Physik（物理学杂志）1932 年第 75 卷第 723 页。]

① 应指传播方向上的长度而言。——译者注。

可以期望光和点阵之间会出现共振的情形。这种波长的光是红外光。图 5-20 所示的，正是这种共振的一个漂亮的示例，表现为晶体对波长 60 μ附近的光的吸收增加了。观测时用的是一片很薄的 NaCl，其厚度仅约 10^{-7}m。

习　题

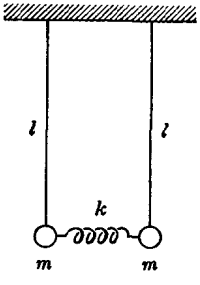
5-1　对耦合振子系统的特性获得感受，最好的办法是由你自己来制作一个，并在不同的条件下用它进行实验。试做一对同样的摆，把它们用一根吸饮料的麦秸管连结起来，并使此管能处于绳上的任何距离处（见图）。研究下述两种运动：在两摆的平面内作相向或相离的振动，以及垂直于此平面的振动。试测出诸简正模周期，以及运动从一摆转移至另一摆又转移回来的周期。你的结果是否跟书中所述的相符？



5-2　两个同样的摆由一根轻的耦合弹簧连结着。每个摆的长度为 0.4 m，它们所在处的 $g=9.8\text{m/s}^2$。在连有耦合弹簧的情形下夹住一个摆，此时得知另一摆的周期恰为 1.25s。

(*a*) 若两摆都不被夹住，则两种简正模的周期是多大？

(*b*) 当把一摆拉开并释放了以后，试问一摆的两个相继的最大可能振幅之间，所经历的时间多长？



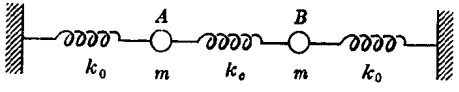
5-3　质量 m 悬在弹簧常数为 k 的弹簧下。弹簧在静力平衡时的长度为 l。若把此质量向旁拉开并释放之，那么，接着发生的运动将是下列两运动的组合：(*a*) 摆的摆动和(*b*) 弹簧的伸长与缩短。试在不用大量数学的情形下，考察这个装置作为耦合系统的特性。

5-4　两个谐和振子 A 及 B，质量均为 m，弹簧常数分别为 k_A 及 k_B，由

一根弹簧常数为 k_C 的弹簧耦合在一起。设 $k_C^2=k_Ak_B$，试求简正频率 ω' 及 ω''，并描述振动的简正模。

5-5　两个同样的无阻尼振子 A 及 B，质量均为 m，固有(角)频率均为 ω_0，其耦合方式使得 A 受到耦合力 $\alpha m(d^2x_B/dt^2)$ 的作用，B 受到耦合力 $\alpha m(d^2x_A/dt^2)$ 的作用，这里的 α 是小于 1 的耦合常数。试描述此耦合系统的简正模，并求出它们的频率。

5-6　两个同样的质量置于实际无摩擦的水平气轨上，由三根相同的弹簧把它们连于刚性支架之间，如图所示。图中的坐标 x_A 和 x_B，表示它们沿弹簧线离开平衡点的位移。若把一质量夹住，则另一质量作一次完全振动的



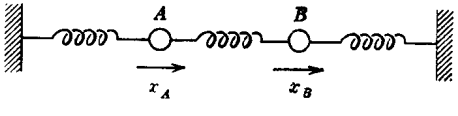
周期 $T(=2\pi/\omega)$ 为 3s。

(*a*) 倘两质量是自由的，则系统两种简正模的**周期**是多少？绘出每一振动模中 x_A 及 x_B 对 t 的线图。在 $t=0$ 时，质量 A 处于正常的静止位置上，质量 B 被拉开了 5cm 的距离。两质量就是在这个瞬时从静止释放的。

(*b*) 写出以后每个质量的位移为时间之函数的方程。

(*c*) 表征运动从 B 传到 A 又返传回来的这种周期性转移的时间是多少秒？在一周以后，是否恰好又产生了 $t=0$ 时的情况？试解释之。

5-7　两物体 A 和 B，质量均为 m，如图那样由弹簧连结起来。耦合弹簧的弹簧常数为 k_c，另两个弹簧的弹簧常数是 k_0。当 B 被夹住时，A 的振动频率 ν_A 为 $1.81s^{-1}$。较低简正模的频率 ν_1 是 $1.14s^{-1}$。



(*a*) 证明 A 及 B 的运动方程是

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2}=-k_0x_A-k_c(x_A-x_B)$$

$$m\frac{d^2x_B}{dt^2}=-k_0x_B-k_c(x_B-x_A)$$

(*b*) 令 $\omega_0=\sqrt{k_0/m}$，试证简正模的角频率 ω_1 及 ω_2 为

$$\omega_1=\omega_0,\qquad \omega_2=[\omega_0^2+(2k_c/m)]^{1/2},$$

以及当 B 被夹住(x_B 永为零)时 A 的角频率为

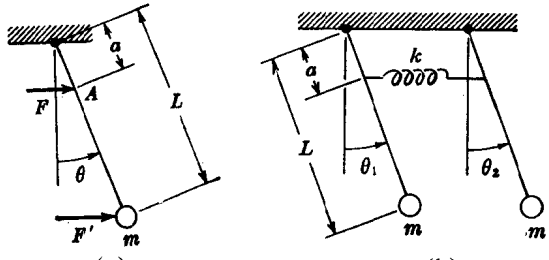
$$\omega_A=[\omega_0^2+(k_c/m)]^{1/2}$$

(*c*) 运用上面的数据算出较高简正模频率 ν_2 的预期值。(观测值为 $2.27s^{-1}$。)

(*d*) 仍从这些数据算出两弹簧常数的比值 k_c/k_0。

5-8 (*a*) 如图所示，力 F 作用于摆的 A 点处。那么，角 $\theta(\ll 1rad)$ 为何值时方是新的平衡位置？应施予 m 多大的力 F'，可得同样的效果？

两个同样的摆，是由两个相同的质量装在刚性而无重量的棒上构成的，并按图示的样子装配起来。担任耦合的是一根轻的弹簧，其位置如图示那样，在两棒处于竖直位置时，弹簧并无伸长。



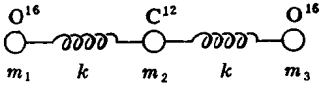
(*b*) 试以 θ_1 及 θ_2 写出微小振幅振动时的运动微分方程。(略去阻尼。)

(*c*) 试描述两摆在每一种简正模下的运动。

(*d*) 算出系统诸简正模的频率。

[**提示**：这里可以充分利用系统对称性的优越性，尤其在(*c*)(*d*)中如此，最后，把用这种方法所获得的答案代入方程中进行核实。]

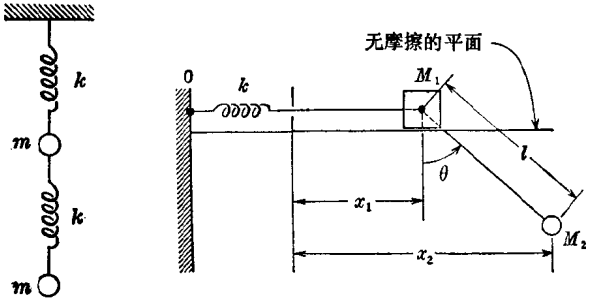
5-9 CO_2 分子可以比拟成这样一个系统：由弹簧常数为 k 的两根相同的弹簧，把中心的质量 m_2 与另两个质量 m_1 及 $m_3(=m_1)$ 连结在一起。



(*a*) 建立并求解两种简正模的方程，此时诸质量都沿着它们中心的连线振动着。[m_3 运动的方程乃是 $m_3(d^2x_3/dt^2)=-k(x_3-x_2)$，对 m_1 及 m_2 也能写出类似的方程。]

(*b*) 令 $m_1=m_3=16$ 单位，$m_2=12$ 单位，并假定这种经典的描述是适用的，那么两种振动模的频率比为何？

5-10　两相等质量，如左下图示那样用两根同样的无质量弹簧连接起来，弹簧常数为k。若只考虑竖直方向的运动，试证两种简正模的角频率由$\omega^2=(3\pm\sqrt{5})k/2m$给出，并且简正模频率之比为$(\sqrt{5}+1)/(\sqrt{5}-1)$。求出每种振动模中两质量的振幅比。（**注意**：勿需考虑诸质量的重力，因为它们与位移无关，故而对形成振动的回复力来说并无贡献。重力只是使质量的平衡位置发生移位，你也不必去求出移位是多少。）



5-11　右上图中的质量M_1，置于无摩擦的平面上，由倔强常数为k的弹簧联于支架O。质量M_2经由长度为l的弦线悬于M_1上。

(*a*) 运用微小振动的近似关系

$$\sin\theta\approx\tan\theta\approx\frac{x_2-x_1}{l}$$

且从$F=ma$出发，导出M_1及M_2的运动方程：

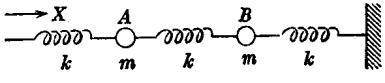
$$M_1\ddot{x}_1=-kx_1+M_2\frac{g}{l}(x_2-x_1)$$

$$M_2\ddot{x}_2=-\frac{M_2g}{l}(x_2-x_1)$$

(*b*) 若$M_1=M_2=M$，运用这些方程求出系统的诸简正频率。

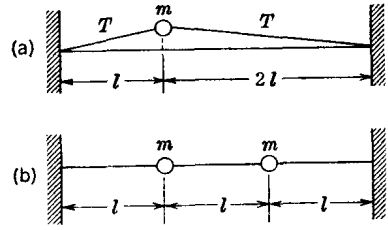
(*c*) 在$M_1=M_2=M$以及$g/l\gg k/M$时，各种简正模的运动是怎样的？

5-12　在无摩擦的水平面上，两个相等的质量m，由弹簧常数为k的三根同样的弹簧联着（见图）。系统的一端是固定的；另端受策动而进退着，其



位移 $X=X_0\cos\omega t$。求两质量的位移，并绘出它们的线图来。

5-13　长为 $3l$ 的弦线可不计其质量，两端系在固定的支架上。弦线中的张力为 T。



（a）如图，质量为 m 的粒子系于距弦线一端为 l 的地方。建立 m 作微小横振动的方程，并求出周期。

（b）质量为 m 的另一粒子系于图示的地方，从而把弦线等分成三段，每段的张力为 T。画出弦线及诸粒子在横振动的两分立的简正模中的形象。

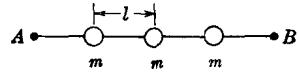
（c）算出具有较高频率的那种简正模的 ω 来。

5-14　课文中的式(5-26)

$$A_{pn}=C_n\sin\left(\frac{pn\pi}{N+1}\right)$$

是描述相互连结着的诸粒子，在各种简正模中所具有之振幅的方程，而为了体会一下此方程的运用，试取 $N=3$ 的情形，算出在 3×3 的阵列中各粒子（$p=1,2,3$）于各种简正模（$n=1,2,3$）时的振幅相对值。

5-15　如图所示，一根不计质量的弹性弦线上等距离地带有质量为 m 的三个粒子，系于相距为 $4l$ 的两固定点 A 及 B 之间，因被紧张而具有张力 T。



（a）设诸粒子在某时刻所具有的微小横向位移分别为 y_1、y_2 及 y_3。试写出每个粒子的运动微分方程。

（b）画出通过 A 及 B 的各种正弦曲线后，就能从中得出诸简正模的状态。试作出这些曲线，并求出在系统每一种可能的振动模中 A_1、A_2 及 A_3 的相对值及其符号。

（c）令(a)中诸方程的 $y_1=A_1\sin\omega t$、$y_2=A_2\sin\omega t$、$y_3=A_3\sin\omega t$，运用(b)中的比值 $A_1:A_2:A_3$，求出各种振动模的角频率。

5-16　试考虑N个耦合振子的系统，受到频率为$\omega<2\omega_0$的策动，即$y_0=0$、$y_{N+1}=h\cos\omega t$。试求N个振子所具有的振幅。[**提示**：运动的微分方程跟无策动时的一样，仅边界条件不同而已。因此，可用$A_p=C\sin\alpha p$作为试探解，并确定出α及C的必要值。(**注意**：若$\omega>2\omega_0$，则α为复数，波在空间内按照指数律而受阻尼。)]

5-17　课文中已经证明，一行粒子的最高简正模频率，可由考虑直线中部附近一个粒子，与有着几乎相等而反向的位移的邻近粒子来求得。试证这同一个频率，也可通过考虑直线上的**第一个**粒子，受到连向固定端和第二个粒子的两段弦线中的张力作用而计算出来(参看图5-19及有关的讨论)。

这里我们涉及到了数学中最古老的分支之一，弦线振动的理论，它起源于希腊数学家毕达哥拉斯的观念。

N. Wiener: 《*I Am a Mathematician*(我是数学家)》(1956 年)

第六章　连续系统的简正模　傅里叶分析

本章的讨论，并不限于振动的弦线。这么说来，人们倒满可以探问一下它的重要性若何。除了音乐团体中的一部分人之外，最终会有谁是靠了紧张的弦线过日子呢？然而事实是，从对这个几乎不合常理的基本物理系统所作的充分分析中，即通过弄明白其动力学、固有振动、对不同频率的响应而得出的结论和概念，在整个物理学领域内，包括电磁理论、量子力学以及其他各个部分里，都存在着它的相似内容。我们根本不是为研究弦线而来研究弦线的，只是由于它提供了一个近乎理想的出发点而已。尤其在纯力学范围内，我们能够从对弦线的分析中，进而了解到几乎任何一个可视为具有连续结构的系统之振动特性如何。当然，大家知道，就充分微观的尺度来说，这种分析必然是失效的；我们将不得不回到任何一块材料都是由大量分立的、有着强相互作用的粒子所构成的图象上来。这就是第五章的论题。可是，任何一块看起来或摸起来都足够大的普通物质是如此的近乎均匀和连续，以致于从这种宏观的观点出发，对物质特性作出清新的分析是有益处的。而且就大多数场合来说，这种分析也是合情合理的。于是这将是指导本章的基本思想。

§6-1 紧张弦线的自由振动

从本章开头引用的那句话看来，对振动弦线的研究已有悠久的历史了。其原因，当然是由于从远古以来在音乐中就采用了紧张的弦线。据说毕达哥拉斯曾经观察过，如何把一根紧张弦线划分成长度具有简单比数的两段时，就会给出悦耳的声音来。当然，我们目前的兴趣并不在音乐的效果上，而是在这样的力学事实上，即两端固定的弦线是具有一些确定的固有振动状态的，如图 6-1 所示。它们叫做**驻立振动**，意思是指弦线上每一点都以恒定振幅作 SHM 的横振动，并且弦线各部分的振动频率都是一样的。这

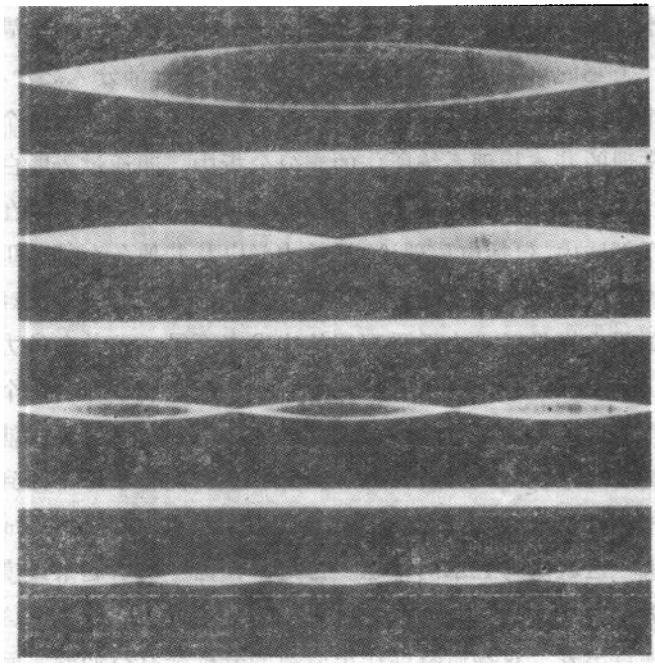


图 6-1 在各种简单的振动模下（$n=1, 2, 3, 5$）的弦线振动。[引自 D. C. Miller:《The Science of Musical Sounds(乐音科学)》(1922 年纽约 Macmillan 版)。]

些驻立振动，便是所谓的弦线的**简正模**。除最低简正模外，在简正模中还存在一些位移始终为零的点。它们叫做**波节**；而振幅最大的那些位置，叫做**波腹**。因此，说这些基本振动状态是驻立的还有另一层意思，即各个波节在弦线上都保持在固定的位置上。这一点特别清楚地体现在图 6-1 中，因为这些照片是用长时间曝光摄得的。

现在来考察这种振动的动力学。假定弦线的长度是 L，它的两个端点固定在 $x=0$ 和 $x=L$ 处。还假定弦线具有均匀的线密度(单位长度的质量)μ，且为张力 T[①]所紧张。令弦线的某个部分，在某瞬时的位形如图 6-2 所示的那样。我们在第五章考察过与此等效的问题，即由无质量的弦线连结起来的粒子问题，并且证明

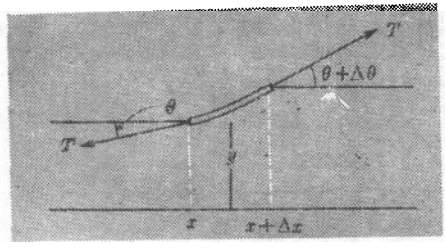


图 6-2　一小段具有质量的弦线在横振动中的受力图。

了：在系统偏离平衡位形而有了形变时，作为一种很好的近似，可以认为张力仍保持不变。于是，长度为 Δx 的一小段弦线所受到的净力便为

$$F_y=T\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta$$

$$F_x=T\cos(\theta+\Delta\theta)-T\cos\theta$$

式中的 θ 及 $\theta+\Delta\theta$，乃是线段两端即 x 和 $x+\Delta x$ 处的切线方向角。

假定横向位移 y 是微小的，那么 θ 及 $\theta+\Delta\theta$ 也均属微小的角

① 本章内不用 T 来表示振动周期了。

度。在此情形下便有

$$F_y \approx T\Delta\theta$$

$$F_x \approx 0$$

这样，支配着线段横向运动的方程，便很近于是

$$T\Delta\theta = (\mu\Delta x)a_y \tag{6-1}$$

由于 θ 体现着在给定 t 值时的 y 随 x 而变的关系，而 a_y 则在给定 x 值处的 y 随 t 而变的关系，所以在用 x、y、t 来重写式(6-1)时，就应该使用偏导数。这样便有下述关系：

$$\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\sec^2\theta\Delta\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

但 $\sec\theta \approx 1$，因而

$$\Delta\theta \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

同时

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

所以式(6-1)就变为

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{6-2}$$

由此方程可以清楚看出，T/μ 具有速率平方的量纲，这恰恰证明了：在一根具有 μ 及 T 这些值的长弦线上，**前进**波就是以这个速率传播的。然而，我们将在第七章再来处理这方面的问题。目前则简单地规定速率 v 为

$$v = \left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \tag{6-3}$$

并从而把式 (6-2)写成如下更为简洁的形式:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{6-4}$$

现在，我们就来寻求此方程相应于物理上驻立振动情况的解。这就意味着，弦线上各点的运动与时间的依赖关系，有着 $\cos\omega t$ 的形式，而运动的振幅，则为弦线端点到该点的距离 x 的函数。(此处假设的时间依赖关系，要求弦线各点在 $t=0$ 时是瞬时驻立的①。若不是这样，则需引入初相角。)

因此我们假定

$$y(x,t)=f(x)\cos\omega t \tag{6-5}$$

从而给出

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\omega^2 f(x)\cos\omega t$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{dx^2}\cos\omega t$$

(注意，按刚才的规定，f 仅是 x 的函数，故可写为 d^2f/dx^2而不写为偏导数)。将它们代入式(6-4)便得到

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=-\frac{\omega^2}{v^2}f$$

这是大家熟悉的微分方程，正弦或余弦函数均可满足它。记得，我们曾规定 $x=0$ 处是弦线的一个固定端，其横向位移在所有时间内都为零，因此，可接受的解就应具有下述的形式:

$$f(x)=A\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \tag{6-6}$$

但是尚有另一个边界条件，即在 $x=L$ 处的位移也总为零。故又应该有

---

① 意思是指，弦线各点此时的位移均为最大值，使波腹和波节区分得最为清楚；而不能是任何别的情形，例如各点位移均为零时的情形。——译者注。

$$A\sin\left(\frac{\omega L}{v}\right)=0$$

所以

$$\frac{\omega L}{v}=n\pi \tag{6-7}$$

式中 n 为任意(正)整数。

引用单位时间内的周数 ν(等于 $\omega/2\pi$)，将会是方便的。这样，容许的驻立振动频率便是

$$\nu_n=\frac{nv}{2L}=\frac{n}{2L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \tag{6-8}$$

式中的 n，依此算法，可为 1, 2, 3, …至无限大①。

式(6-7)暗示出，弦线的总长度应该恰好是整数个半正弦曲线，认识到这一点，便可清楚地描绘出弦线在任一特定的振动模(数)n 中任一瞬时的形状。这样，便能对振动模(数) n 规定出**波长** λ_n，使得

$$\lambda_n=\frac{2L}{n} \tag{6-9}$$

因而可使

$$\frac{\omega}{v}=\frac{n\pi}{L}=\frac{2\pi}{\lambda_n}$$

这样，依式(6-6)，弦线在振动模(数) n 时的形状就可表征为

$$f_n(x)=A_n\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n}\right)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6-10}$$

而弦线运动的完整描述则为

$$y_n(x,t)=A_n\sin\frac{2\pi x}{\lambda_n}\cos\omega_n t \tag{6-11}$$

式中

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}=n\omega_1$$

① 这个 ν 对 L、T、μ 之函数依赖关系的根本形式，是伽利略(Galileo)发现的。

根据上述分析，一根给定的紧张弦线之所有可能频率，均为最低可能频率 ω_1 的整数倍，因此人们对这种基本的振动模，即**基谐模**，抱有特殊的兴趣。我们对一根振动弦线所辨认出来的特征音调，就是由这个基谐模的频率规定的，并且它也规定出了，从具有给定质量和长度的弦线上，获得某一律音所需要的张力的大小。

例题 小提琴的E弦要调谐到640 Hz的频率。从弦马至端点的长度和质量分别为33cm及0.125g。所需之张力为何？

由式(6-8)有

$$\nu_1=\frac{1}{2L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

并使 $\mu=m/L$，此处 m 为总质量。这就给出

$$\begin{aligned}T&=4mL\nu_1^2\\&=4(1.25\times10^{-4})(0.33)(6.4\times10^2)^2 \qquad \text{(MKS)}\\&\approx68\text{N}\end{aligned}$$

这拉力约为15 lb①。(实际小提琴上的四根弦之总拉力约为50 lb。)

§6-2 弦线上振动模的叠加

在诸如钢琴这样的弦乐器中，弦线是在某个选定点上受到一次敲击的。当碰击的瞬间以及此后的短暂时间里，弦线被迅速地推向该点的近旁，其形状丝毫不象一根正弦曲线。可是稍迟一会儿，它便演变成一种由基谐模及其几个最低谐模直接叠加而成的运动了。这些振动能够同时进行，并且事实上还是相互无关地进行的，这在物理上乃是一桩非常重要的事实。其所以发生这种情况，就在于系统的性质使得基本动力学方程(6-2)是**线性的**，即在式中只出现位移 y 的一次方。这样，若 y_1、y_2、y_3 等为该方程相应

① 10牛顿≈2.2磅(lb)。

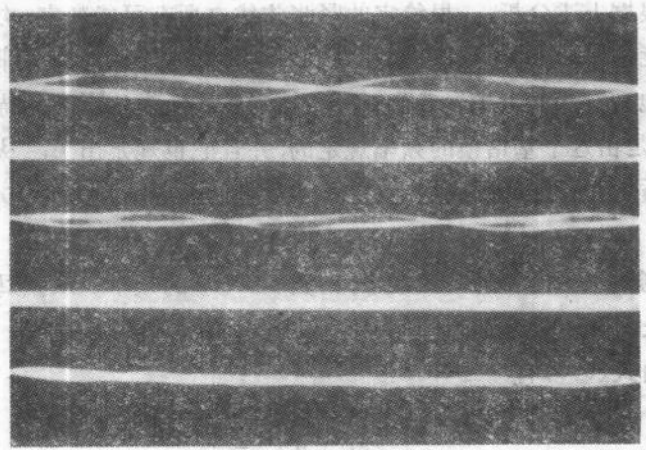


图 6-3　由简单振动模组合起来所形成的弦线之复合振动。[引自 D. C. Miller: 《The Science of Musical Sounds》(1922 年纽约 Macmillan 版)。]

于各单个谐模的解，那么它们之和也能满足此基本方程，因此所描述的运动，也就一定能分解成这样的一些分量。图 6-3示出了这种复合或叠加振动的几个例子。它们相互之间的独立性，可用下述方法演示出来：立即止住弦线上某一点的横向运动，而这一点乃是某些谐模的波节，但却不是其他谐模的波节。凡在此点为一波节的那些分振动，将不受影响而继续进行下去；其他的分振动则均被制止住了。例如，当敲击钢琴键并一直捺住不放，使琴弦在其长度的三分之一处受触压而发出响亮的声音时，则除去三、六等倍数的基频而外，其他的分振动就都遭到了制止。

振动系统各种简正模的这种独立作用原理和叠加原理，对于复杂扰动的分析有着根本的重要性；的确，它乃是傅里叶分析的基石。振动弦线中出现的这种现象，首先是由 D·伯努利在 1753 年讨论清楚的。由于真实的弦线实际上并不能用理想化的方程来完全描述，所以各种振动模的独立作用并不真正是完全的，虽说在某些

情况下非常近乎如此。

§6-3 紧张弦线的受迫谐振动

如上所述，两端固定的弦线之自由振动，是严格限于基频及其整数倍的频率的。现在，正如在第四章中对简谐振子所做过的那样，我们来考察一下弦线对周期性策动力的响应问题。为使讨论简单明确起见，设想弦线 $x=L$ 的一端仍是牢牢固定着的，而 $x=0$ 的一端，却被迫以某任意角频率及振幅 B 进行着横振动。

假定稳态的解跟式(6-5)的形式一样，为

$$y(x,t)=f(x)\cos\omega t$$

只是现在要服从于下列的条件：

$$y(0,t)=B\cos\omega t$$

$$y(L,t)=0$$

由于基本运动方程仍是式(6-4)，故 $f(x)$ 仍应为 x 的正弦式函数。因此可令

$$f(x)=A\sin(Kx+\alpha)$$

从式(6-4)可得 $K=\omega/v$，所以

$$f(x)=A\sin\left(\frac{\omega x}{v}+\alpha\right)$$

这恰似式(6-6)，只是多了一个可调节的参数 α。根据 $x=L$ 处的边界条件，于是有

$$\sin\left(\frac{\omega L}{v}+\alpha\right)=0$$

所以

$$\frac{\omega L}{v}+\alpha=p\pi$$

式中 p 为整数。而从 $x=0$ 处的边界条件得到

$$B=A\sin\alpha$$

因此，

$$A=\frac{B}{\sin\left(p\pi-\frac{\omega L}{v}\right)} \tag{6-12}$$

此项结果表明，在端点处的受迫位移具有某给定振幅的情形下，当策动频率接近式(6-8)所规定的诸固有频率之一时，整个弦线的响应就会是很大的。的确，依据式(6-12)，在刚好是固有频率时，被策动的振幅就会变为无限大，而图 6-4 所示的，便是在这些频率附近时的大致情形。然而大家知道，阻尼力的存在将消除掉这些不现实的无限大，实际的表现，仅是在 $\omega\approx\omega_n$ 时 $A/B\gg1$ 而已。

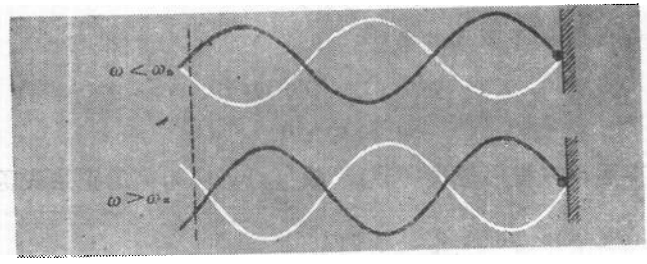


图 6-4　在略低及略高于振动之简正模固有频率的策动下，弦线的位形。

上述结果的重要特点在于，只要受迫的这个点处在一种固有振动的**波节**附近时，那么，用微小的策动振幅便会激起巨大的受迫响应来。该点显然不能恰好是波节，因为按规定我们正是在这里强使其运动的。此外，在任何真实的系统中，象图 6-4 所示的那种大振幅响应，只是在微小的周期性策动力作用了许多个振动周期之后，才会达到的。没有这样的魔术，能够把表现为共振振动振幅的巨大能量，立即馈入到系统里去。这跟图 4-11(c)中指出的，受迫阻尼振子在瞬变阶段中缓慢增长的情形，非常相象。

[熟悉钢琴设计，并读过上文的人，谁都会对于在波节或靠近波节处策动弦线以获得共振响应这件事，感到有些迷惑不解。实

际情形是，琴槌敲打在琴弦全长约七分之一的地方。其目的与效果，是止住难听的第七谐模，而不是象上述分析可能暗示的那样，去助长这种发音。关键在于，在恰为某种谐模的波节点上，施以单次的撞击(这跟周期性的施力相反)，使得此点具有不为零的位移，并不是激发该系统这种特定固有振动的方法。]

熟悉了弦线自由和受迫振动的这些基本特点之后，下面来研究呈现出同样特性的另外一些系统。

§6-4 棒的纵振动

当顺着长度方向敲击金属棒的一端时，便会产生非常高的声频振动。倘若使棒得到适当的支撑，譬如用一细夹子夹住其中点，那么振动就会持续好一会儿。系统的 Q，尤其在最低的可能固有频率时，是非常之高的，因而在某些情形下可以产生惊人的纯音。

我们曾在第三章中，结合系在重弹簧上的物体问题，简要地触及过这种系统的性质。大家知道，振动的固有频率应与 $\sqrt{Y/\rho}$ 成正比，此处 Y 是杨氏模量，ρ 是密度。现在就来更仔细地讨论这个问题。

此问题实际上与紧张弦线的问题十分相似，只是你也许会发现非常难于想象它，因为现在的位移是与 x 同方向而不是横向的了。我们将用符号 ξ 来代表棒中每个粒子离开平衡位置的位移。粒子原先至某截面的距离为 x，此面假定是固定的，或无论如何也是永无加速度的。这样就可以考察一薄片棒体的运动方程了，它在不受扰动时是处于 x 及 $x+\Delta x$ 之间的，见图 6-5(a)。

如图 6-5(b)所示，阴影部分的物质整个地移开了，而且也伸长了，当然图中的位移是过份夸大了的。这片物质受到两个反向的拉力 F_1 及 F_2 的作用。现在，F_1 的量值取决于 x 处原子间距的

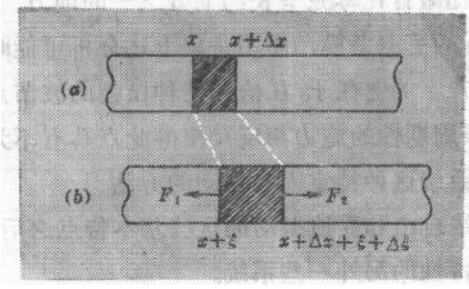


图 6-5 (*a*) 有质量的棒。(*b*) 有质量的棒在非静力条件下发生了纵向位移。阴影部分的材料含量与(*a*)中的阴影部分一样。

微小变化。同理，F_2 取决于 $x+\Delta x$ 处原子间距的微小变化。此两力一般说来是略有差异的。由于形变，使得此薄片中的全部物质都处在有胁强的状态之下，而这胁强的平均值则可用整体的胁变确定出来。薄片的原长为 Δx，现在增加了 $\Delta\xi$。所以，

$$\text{平均胁变}=\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

$$\text{平均胁强}=Y\frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

由此可见，我们可以规定**在特定 x 值处**的胁强，就是在该点的 $Y(\partial\xi/\partial x)$ 之值①。于是，对位于 Δx 远处的一点来说，便有

$$(\text{在 } x+\Delta x \text{ 处的胁强})=(x \text{ 处的胁强})+\frac{\partial(\text{胁强})}{\partial x}\Delta x$$

这么一来，若棒的横截面积为 α，则有

$$F_1=\alpha Y\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$F_2=\alpha Y\frac{\partial\xi}{\partial x}+\alpha Y\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x$$

故而

① 注意这是偏导数，因为在给定 x 处的胁强也是随 t 而变的。

$$F_2-F_1=\alpha Y\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x$$

这便结束了计算中概念上的困难部分。

现对 x 及 $x+\Delta x$ 之间的物质运用牛顿定律。如果密度为 ρ，那么质量便是 $\rho\alpha\Delta x$。其加速度乃是位移对时间的二阶导数，这位移，在 Δx 为零级小量的极限情况下，就正好是 ξ 了［参看图 6-5(b)］。于是就有

$$\alpha Y\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Delta x=\rho\alpha\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

或者

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \tag{6-13}$$

其中 $v=(Y/\rho)^{1/2}$。它真的象紧张弦线的式(6-2)了，故可指望其解的形式为

$$\xi(x,t)=f(x)\cos\omega t \tag{6-14}$$

然而在边界条件上却有着重大的差别。在大多数情形下，棒的两端不会都是固定的。通常安排的棒是：要么只夹住一端而让另一端自由，要么夹住中点使两端自由。

这里仅考察一端固定的情形。这就极接近于早先在第三章中初步考察过的重弹簧的振动了。令固定端在 $x=0$ 处，自由端在 $x=L$ 处。大家知道，式(6-13)表明，ξ 在任一时刻都与 x 成正弦式的变化关系，所以也可象式(6-6)那样，使

$$f(x)=A\sin\left(\frac{\omega x}{v}\right) \tag{6-15}$$

$x=L$ 处的条件，应该表明该端是个自由端。用物理学的术语来说，就是这儿的胁强为零，即没有邻接的物质来继续拉棒的这一端点，反之，也没有邻接的物质需要被加速。因此，在 $x=L$ 处便有

$$F=\alpha Y\frac{\partial\xi}{\partial x}=0$$

根据式(6-14)及(6-15)，这就意味着

$$\cos\left(\frac{\omega L}{v}\right)=0$$

或

$$\frac{\omega L}{v}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi \tag{6-16}$$

式中 n 为正整数①。于是，棒的固有频率便由下式给出：

$$\nu_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)v}{2L}=\frac{n-\frac{1}{2}}{2L}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2} \tag{6-17}$$

依据式(6-16)所给的条件可以看出，棒的长度应为正弦曲线**四分之一波长**的奇数倍②。图 6-6 示出了最低的三种振动模，但要记住，位移实际是纵向的，而不是横向的。

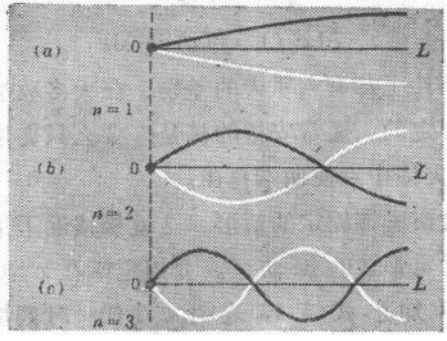


图 6-6　具有质量的棒被夹住一端时之诸纵向简正模。为清晰起见，纵向位移被表示为好象横向的一样。

这种一端被夹住的棒，其最低振动模所具有之频率为

$$\nu_1=\frac{1}{4L}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2} \tag{6-18}$$

---

① 在式(6-16)中采用$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$而不用$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$，我们就能用1，2，3等数来标示诸种振动模了。

② 原文误为整数倍。——译者注。

例如，假定有 1m 长的铝棒，此时

$$Y \approx 6\times 10^{10}\mathrm{kg/m/s^2}$$

$$\rho \approx 2.7\times 10^{3}\mathrm{kg/m^3}$$

得出

$$\nu \approx 1200\mathrm{Hz}$$

有兴趣的是，把现在的精确结果即式(6-18)，跟第三章中得到的结果(见第 62 页上的讨论)来作一比较，如假定(这是错误的)胁强与胁变在振动期间的任何瞬时，沿整个棒到处都是一样的话，则求得一端固定的棒之频率公式为

$$\text{(错误的)} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{3k}{M}\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{3}}{2\pi L}\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2}$$

这样，$\sqrt{3}/2\pi = 1/3.6$ 代替了式(6-18)中的系数 1/4，使得对频率的估算，大约要超过 10%。

§6-5 空气柱的振动

显然，空气柱或其它的气柱系统，和固体棒几乎是等效的。两者都有内弹性，我们在第三章就已开始了的这种对比，在目前的讨论中还可得到进一步的加深。

就空气柱来说，值得考察一下具有一个开口端或两开口端时的全部振动模。开口端所表示的(无论如何是近似的)情况是，在振动期间的压力变化为零，且是空气运动最大的地方。另一方面，闭端则是运动为零而压力变化最大的地方。当空气盛在一端封闭而另一端开口的管子里时，它的振动模及其频率，由图 6-7(*a*)所示的几种情形来定出，它们都是一端为波节另一端为波腹。但若如图 6-7(*b*)所示，管的两端都是开口的，那么就可以得到另一组振动，两端的位移都是波腹。对于一定长度的管子来说，各种可能的频率，都是图 6-7 中第一图所示的一端封闭管子之最低振动模频率的整数倍。所有奇数倍的皆属于闭管的情形，而偶数倍的则

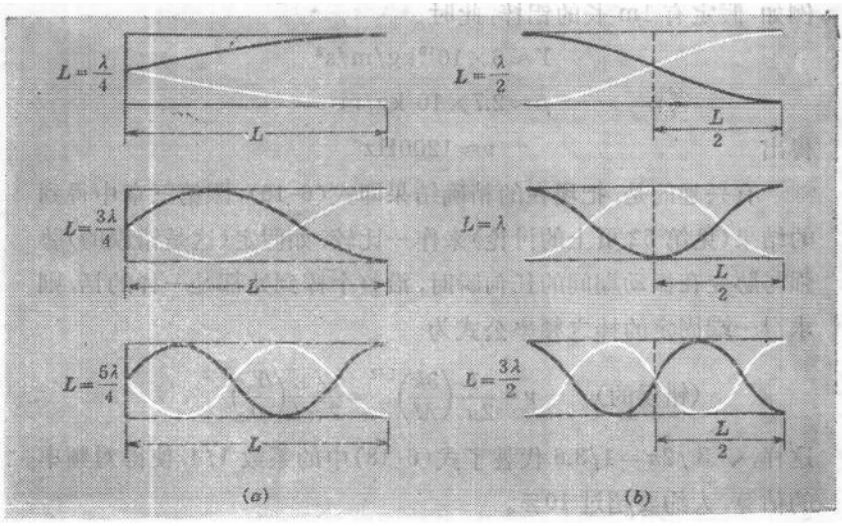


图 6-7 （a）一端开口管的前三种简正模。（b）两端开口管的前三种简正模。

都属于开管情形。可以看出，凡开管的中心都是波节，这跟 $L/2$ 柱长的闭管的振动模相对应。还可以看出，两端都封闭的管子，有着跟两端都开口的管同样的固有频率集合，所不同的，只是对调了一下波节和波腹的位置而已①。

---

① 这里甚至没有说到实际乐器中空气柱振动的细微区别。可是，振动模的基本类型太多，此处不便列举。标准"烟道式"风琴管的吹口（处于底端），总是波腹，而其顶端则可以是封闭的或是开口的。长笛实质上象一个开口的风琴管，但在簧乐器中，包括簧风琴管以及由唇起着簧作用的黄铜乐器，装有簧的一端近乎是个闭端，当然另一端便是开口的了。簧的作用，就象是个具有空气柱共振频率的策动源。它于靠近波节的一点处把能量馈送进去，这和在弦线的一端策动弦线的情形极相类似。如果你想多知道些这方面的情况以及音乐物理学中其他一些引人入胜的问题，这里推荐的几本书可供入门之用：A. Benade：《*Horns, Strings and Harmony*（喇叭、弦乐器与和声学）》1960 年纽约 *Doubleday* 出版的 *Science Study Series*（科学学习丛书）；Sir J. Jeans：《*Science and Music*（科学与音乐）》1961 年纽约 *Cambridge University Press* 版；J. J. Josephs：《*The Physics of Musical Sound*（乐音物理学）》1967 年美国新泽西州普林斯顿 *Van Nostrand* 出版的 *Momentum Books*（重要图书）；J. Backus：《*The Acoustical Fountations* of *Music*（乐音的声学基础）》1969 年纽约 W. W. Norton 版。

§6-6 气体的弹性

上面的描述使我们能列举出空气柱的诸种相对频率，现在则来考虑一定长度气柱的**绝对**频率。这实质上就是要正确地算出式(6-13)基本微分方程中的速率 v 来。而这就意味着，必须对气体采用相应的弹性模量 K，以代替杨氏模量 Y。在第三章中已经指出，气体的模量是由下式来定义的：

$$K=-V\frac{dp}{dV}$$

而且，对气体的振动来说，p 及 V 的变化是在绝热条件下进行的，也即热量既不传入也不传出，气体的温度要发生升降，因而 p 及 V 的关系便不能由玻意耳定律来描述了。下面就来进行具体的推算。

假定一根横截面积为 A，长度是 l 的管子，为一活塞所封闭，里面盛有压力为 p 和密度为 ρ 的气体(图 6-8)。根据理想气体分子运动论，压力由下式给出：

$$p=\frac{1}{3}\rho v^2_{rms} \tag{6-19}$$

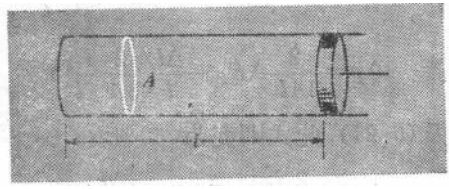


图 6-8　配备了活塞的管子。

式中 v^2_{rms} 是分子的均方速率①。如果管中气体的总质量为 m，则式(6-19)可改写为

$$p=\frac{m}{3Al}v^2_{rms}$$

① 此处的脚注 rms 表示方均根的意思。

若引入全部粒子的总平动动能 E_k：

$$E_k=\frac{1}{2}mv_{rms}^2$$

则代入上式后，便能进一步得出

$$p=\frac{2}{3A}\frac{E_k}{l} \tag{6-20}$$

现在，考虑活塞作这样的运动，使得气柱内各处的压力发生变化，而且活塞对气体所做的功都保存于气体之内，因此功就代表着气体内能的变化。压缩气体所需之力实际上等于 pA，因而气柱的长度变化为 Δl 时，对气体所作之功便是

$$\Delta W=-pA\Delta l$$

当 Δl 为负值时，此功为正。如果假定此功全部用来增加分子的平动动能，于是便有

$$\Delta E_k=-pA\Delta l \tag{6-21}$$

然而，在长度变化 Δl 的同时，不仅伴随着 E_k 的变化，也还有 p 的变化；由式(6-20)微分便有

$$\Delta p=\frac{2}{3A}\left(\frac{1}{l}\Delta E_k-\frac{\Delta l}{l^2}E_k\right)$$

所以

$$\Delta p=\frac{2}{3Al}\Delta E_k-\frac{\Delta l}{l}\left(\frac{2}{3A}\frac{E_k}{l}\right)$$

而依式(6-20)及(6-21)，此式则变为

$$\Delta p=\frac{2}{3Al}(-pA\Delta l)-\frac{\Delta l}{l}(p)$$

$$=-\frac{5}{3}p\frac{\Delta l}{l}$$

因为气柱的横截面积是假定保持不变的，故 $\Delta l/l$ 的值便等于体积的相对变化 $\Delta V/V$。所以

$$K_{绝热}=-V\frac{\Delta p}{\Delta V}=\frac{5}{3}p \tag{6-22}$$

它就好象是刚好等于 p 的等温弹性模量(见第三章)。用 K 的这个绝热值所定出的速率 v 为

$$v=\left(\frac{1.667p}{\rho}\right)^{1/2}$$

实际上，此式对某些气体是成立的，但并不是对所有的气体都成立，也不适用于空气。那么，在导出此式的过程中做了哪些假定呢？它们是：第一，在压缩时对气体所做的功全部用来增加气体的能量，而没有热量散失给周围的物质；第二，气体所获得的这些能量全都用于提高分子的平动动能，而没有把一部分能量用于增加分子的内部运动能量。

就所有气体的声振动来说，看来第一个条件都是能满足的。可是第二个条件则仅适用于这样的分子，它们实际上象个坚实的弹子球，这特别指的是 He、Ne、A 等单原子气体。至于其他的气体，包括空气在内，对气体(或由气体)所做的某些功，则使得分子内部的转动或振动能量发生了变化。因此，对一定的体积变化来说，这个在式(6-20)中决定着压力的平动动能，其变化量就要小于上述计算所给出的值了，所以，正如在第三章中说过的，在绝热振动中气体的弹性可表述为

$$K_{\text{绝热}}=\gamma p \tag{6-23}$$

式中 $1<\gamma\leqslant 5/3$。

空气的 γ 值近于 1.40，对处于室温及常压下的空气应有

$$p\approx 1.0\times 10^5\text{N/m}^2$$

$$\rho\approx 1.2\text{kg/m}^3$$

这样，对于长度为 1m 且一端封闭的管子，其最低振动模所具有的频率，可类比于式(6-18)给出：

$$\nu_1=\frac{1}{4L}\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2}$$

$$\approx 84\text{Hz}$$

§6-7 简正模的全谱

前面几节讨论了不同类型的物理系统的固有振动，或者叫做简正模。撇开细节上的差别不谈，这些系统都假定具有下列的共同特点：

1. 每个系统实际上都被看作是一维的，而且有着有限的长度。

2. 每个系统在结构上都被看作是连续而均匀的。

3. 每个系统都受其端点处边界条件的约束。

4. 每个系统都为回复力所控制，而这回复力是与离开平衡位置的位移成正比的。

从这些条件可以推知，每个系统都具有一整套各不相同的诸种振动模，每种振动模都由一个模号数 n、一个频率 ν_n 以及一个波长 λ_n 来表征，而波长 λ_n 则与系统的长度 L 及模号数直接有关。同时还表明，对任一给定的系统来说，诸特征频率是随着 n 而线性变化的。现在，让我们对这些结果提出几个问题。

首先，一个给定的系统能有多少种不同的振动模呢？如果从处理该问题所得出的表面数值来理解，不同振动模的数目应该是无限大，虽说是不连续的。这对吗？不完全对。倘若你了解上一章的讨论，那你就会明白，一行 N 个相互作用着的粒子，在一种类型的（例如纯横向或纯纵向的）振动中，总共有着 N 种不同的简正模。譬如 1m 长的棒，可认为是由许多行的原子构成的，而原子间距的数量级为 1Å。这样，就大约只有 10^{10} 种简正模，并不是无限多。但 10^{10} 当然是个可怕的数目，在大多数的物理考虑中，几乎就是无限大了。然而，主要之点在于由此能够看出给定系统全部可能的简正模之**全集**或**全谱**来，并能肯定，当振动模号数 n 取 1 至 N 或取 1 至∞的全部可能值时，就把所有的简正模列举完了。

第二，具有给定长度L的均匀一维系统所容许的驻立振动之波长是哪些？这取决于边界条件。这里专门谈一下两端位移为零的情形。此时，大家知道，波长λ_n是由特别简单的关系式(6-9)给出的：

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

它只依赖于运动方程的形式，从这个意义来说，它是个纯几何学的结论，而与诸如媒质的弹性和密度这样的量无关。它对任何n值都能很好地成立。

第三，简正模的频率又如何呢？ν_n对n的线性关系，在对声学现象中独具重要性的最初一些谐频中，看来是以极大的准确性成立的，那么，在非常高的振动模中是否也成立呢？就两端固定的系统来说，大家记得有一个特别简单的结果，即式(6-8)：

$$\nu_n=\frac{nv}{2L}$$

式中v为速率，是由媒质的惯性和回复力的性质所唯一决定的。但是ν_n对n的这种简单的正比关系，一般说来并不对。在简单的一维系统中，频率随振动模号数的增加越来越少，至最高的可能的振动模号数N时，便达到了极限频率，如图6-9所示①。系统的振动

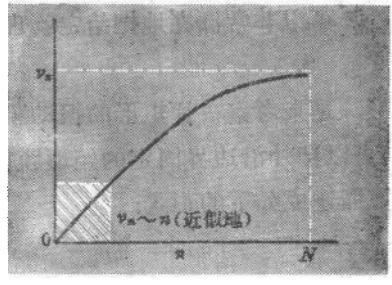


图6-9　一维系统的振动模频率随模号数而变化，直至最大的可能频率为止。在阴影面积内，ν_n和n的关系很近于是线性的。

① 进一步的讨论，参见第五章。

频率不可能高于此值。在我们所描述的这种一维系统中，这个现象非常直接地依赖于下述事实，即参与运动的粒子数并不是无限的多。然而事实上，ν_n 对 n 的正比关系只是个特殊的结果，并不能普遍地应用于二维及三维系统①。虽然如此，它还是保留了重要的特点的：具有特定边界条件的一维系统，具有着不可胜数的(甚至是无限多的)特征固有振动模。

作为对简正模的这番普遍性讨论的结束，让我们提醒以下两条已经说到过的极为重要的特点：

1. 在决定简正模的特征上，**边界条件**(目前应用于一维系统的两端)起着决定性的作用。

2. 在基本运动方程是**线性**的情形下，每种或全部振动的简正模，均能以振幅及周相的任意相对值而存在。

§6-8 二维系统的简正模

现在来对诸如紧张的弹性片或薄的金属板这类实质上是二维系统的简正模，作一番简要的考察。和一维系统一样，特定的边界条件(现在主要是环绕着各个棱边的)，使得可以容许的运动只限于几种特殊的类型，即限于与所述边界条件相一致的诸简正模。而简正模的这种特性，可以非常漂亮地把给定物理系统所具有的任何对称性表示出来。

最简单的情形，是来考察一片矩形的振动膜。类比一维振动弦线的情形，我们可以把外沿边界固定的矩形膜所具有之简正模，用正弦及余弦函数描述成如下的形式：

---

① 即便是在作连续结构来处理的一维系统中，倘若系统是不均匀的话，那么振动模频率之间的关系，也会变得非常不同。例如，一根紧张的弦线，若其粗细是从一端连续增大到另一端的，或者如图 5-1 所示的，一根竖直悬挂着的均匀的链子，其张力是从顶端往下稳定地减小的，就都是这种不均匀的系统。

$$z(x,y,t)=C_{n_1n_2}\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L_x}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi y}{L_y}\right)\cos\omega_{12}t$$

式中的简正模频率为

$$\omega_{12}=\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{n_1\pi}{L_x}\right)^2+\left(\frac{n_2\pi}{L_y}\right)^2\right]^{1/2} \tag{6-24}$$

其中

S＝力/单位长度(表面张力)

σ＝质量/单位面积

$n_1, n_2=1, 2, 3, \cdots$

L_x, L_y＝膜的边长

此方程看起来不免有点吓人，但其结构还是可以明确地看出的，只需对比一下紧张弦线的简正模方程就清楚了：

$$y_n(x,t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t$$

式中

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

式(6-24)中的两正弦函数之乘积，保证了沿边界的位移 z 始终是零，而 ω 的值，则由两个而不是一个整数来表征。倘若你愿意的话，可以把整个膜设想成一组紧张的弦线，这些弦线都平行于(譬如说) x 的方向，而且都满足此方向上的相同的波长条件。此外，还应当把这些弦线看作是沿着平行于 y 方向上的一些直线而横着连结起来的，并且在 $y=0$ 及 $y=L_y$ 之间满足某种另外的波长条件。

由考察在某任意 x 及 y 处的一小片矩形膜的情形，见图 6-10 (a)，我们就可以建立起实际的动力学关系来。所谓表面张力 S，就是在表面内垂直作用于所考察线段单位长度上的力。这样，若该小膜片棱边的长度为 Δx 及 Δy，则在 xz 平面内的力每端为

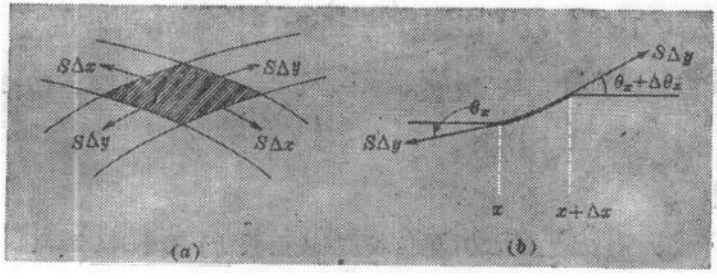


图 6-10 (*a*) 弹性膜上一小片面积 $\Delta x\Delta y$ 的受力图。 (*b*) 受力图在 xz 平面内的横截面。

$S\Delta y$, 在 yz 平面内的力为 $S\Delta x$。小膜片的质量是 $\sigma\Delta x\Delta y$。倘若作出 xz 平面内的侧视图如图 6-10(*b*)，那么，这情景就恰似图 6-2 了。在 xz平面内，由于膜的曲率而产生的横向力为

$$S\Delta y\Delta\theta_x=S\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x\Delta y$$

但是，膜在 yz 平面内也是弯曲的，由此而产生的力便是

$$S\Delta x\Delta\theta_y=S\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta x\Delta y$$

总的力乃是它们之和，受到加速的质量为 $\sigma\Delta x\Delta y$。因而运动方程 $(ma=F)$就变为

$$\sigma\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=S\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Delta x\Delta y$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sigma}{S}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{6-25}$$

此运动方程实际上是式(6-2)的直接推广。由此可知，会有如下形式的驻立振动存在：

$$z(x,y,t)=f(x)g(y)\cos\omega t$$

于是，就立即可以得到式(6-24)所给出的 f、g、ω 的表达式。

我们在上一节说过，二维系统的诸种振动模频率，一般并不呈

现出简单的数字关系，哪怕是最简单的可能几何形状(方块)，也是如此。另一方面，在全部 t 内位移均为零的那些点，则由平行于矩形边的一些直线，即节线连结起来，它们以非常简明的方式和边界处所具有的几何条件相对应。

图 6-11 示出了矩形片的几种最低振动模，此片几乎是但又不完全是方形的。其边长取为 $1.05L$ 及 $0.95L$，面积差不多刚好等于 L^2。这里把诸种可能的频率表达成频率 ω_1 的倍数是很方便的，其中 ω_1 定义为

$$\omega_1=\frac{\pi}{L}\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2} \qquad \left[\nu_1=\frac{1}{2L}\left(\frac{S}{\sigma}\right)^{1/2}\right]$$

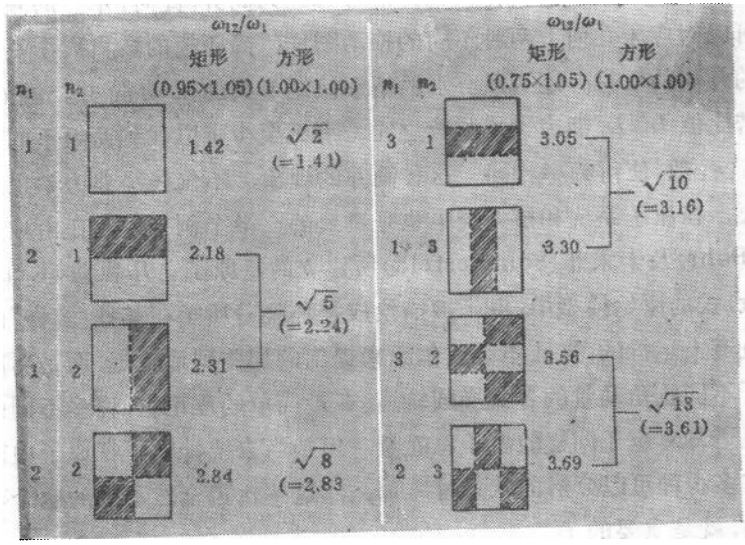


图 6-11　矩形的和同样面积的方形的平面之简正模的对比。阴影面积和白亮面积的位移都垂直于图面，但两者的符号相反，并在节线处变为零。

这是边长为 L 的方形膜可以振动的最低频率，此膜的两个对边是固定的，而另两个边是自由的。由式(6-24)可得该矩形膜的简正模频率为

$$\omega_{12}=\omega_1\left[\left(\frac{n_1}{1.05}\right)^2+\left(\frac{n_2}{0.95}\right)^2\right]^{1/2}$$

在图 6-11 中，虚线表示节线，而阴影部分的膜在任何时刻都有着同方向的位移。

正方形膜的简正模频率为$\sqrt{2}\,\omega_1$、$\sqrt{5}\,\omega_1$、$\sqrt{8}\,\omega_1$等。我们有意识地选择了一个几乎是但又不完全是正方形的膜，为的是引起我们对一个有趣而又重要的特点的注意。大家注意到，矩形膜中的振动模趋向于成对出现，此时不同的 n_1 和 n_2 值是互易的。这些成对振动模的频率十分相似，并且处于正方形膜时所具有之频率的两侧。此种极限的情形(正方形)，称之为**简并**；此时，单一的频率可以对应于几何上两种不同的振动图样，简正模的数目大于不同的频率的数目。还可以有别的情形使矩形膜的振动简并。例如，若比值 L_x/L_y 能表达成整数之比，那么至少可以找到两组不同的 n_1、n_2 数，使得频率相同。这种简并的现象，不仅在经典力学里重要，在原子系统和核系统中也是重要的。举个例来说，在由玻尔(Bohr)及索末菲(Sommerfeld)所建立的氢原子之开普勒(Kepler)式的原始模型中，电子被描绘成是环绕着质子在某些"容许"的轨道上运行的，这儿不是玻尔原来提出的那些圆形轨道，而是对应于不同轨角动量的各式椭圆轨道。在最简单的理论里，许多不同的轨道却对应于同样的电子总能量，但是当去统计电子在原子中能有多少种可以分辨的状态时，那么，这些轨道全然不同的这个事实，就是重要的了。

用金属线框架所形成的具有固定边界的肥皂膜之振动，逼真地演示出了简正模的情景。图 6-12 示出的，就是用此办法得出的矩形膜的两种振动模。

另一类非常重要的二维系统的振动情形，是从圆形边界得出的。如果我们仍看固定边界的情形，那么，简正模便通过同心圆和

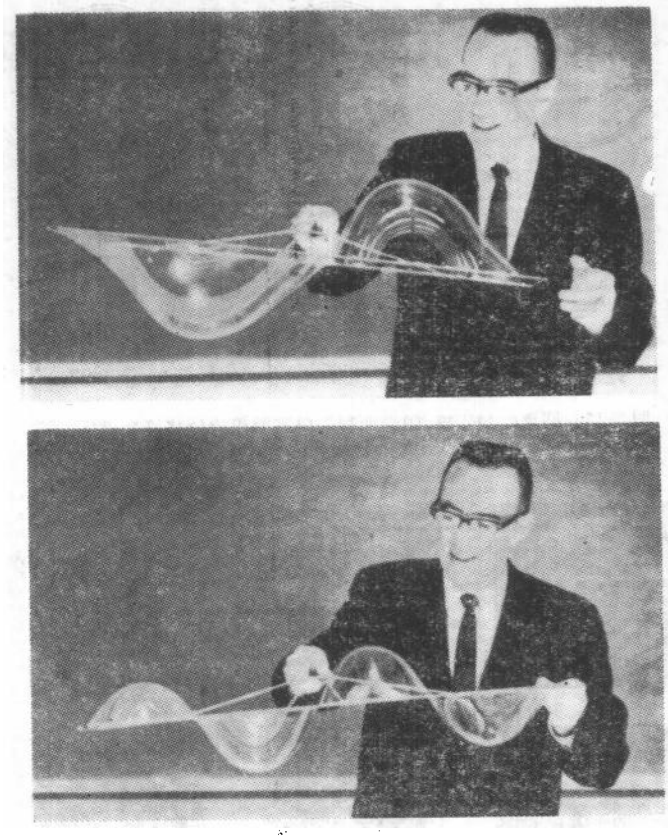


图 6-12　肥皂膜的简正模。(由 A. M. Hudson 演示，使用了特制的肥皂膜溶液，是由清净剂、甘油及少量的糖混合而成的。)

直径线表示出了装置的对称性。可能的振动是非常多样化的；图 6-13 展示了这种系统的六种最低振动模。

倘使在肥皂膜的近旁，用扬声器发射出合适的频率来策动时，就能在膜上激发起矩形和圆形系统的更为复杂的振动模来。图6-14 示出了几个例子；在此照片中，白线是由最大位移的反射光造成的，它们并不是节线。

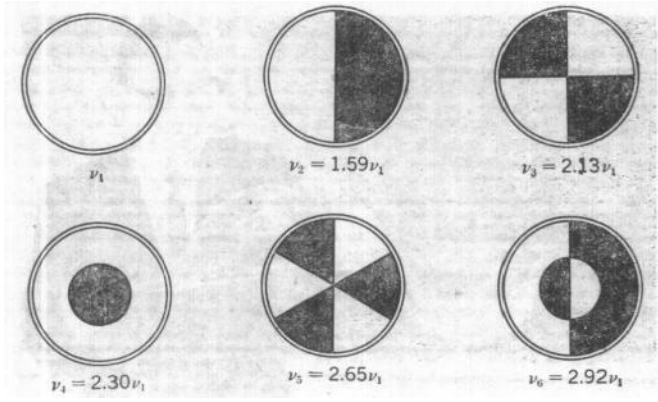


图 6-13　圆盘的简正模。阴影面积和白亮面积的位移符号相反，并在节线处变为零。

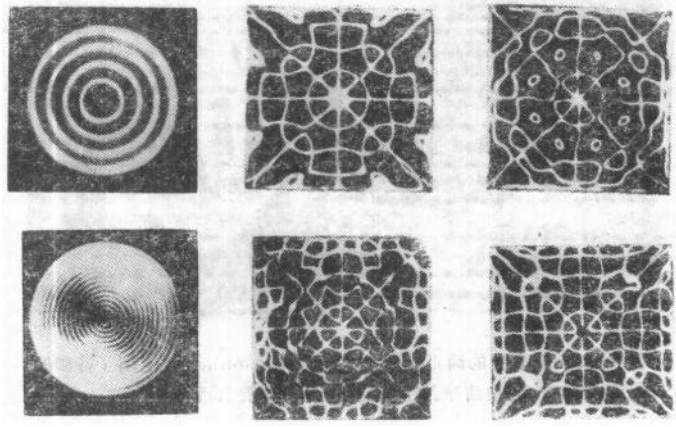


图 6-14　肥皂膜诸振动模的最大位移。[伯格曼(L. Bergmann)摄，麻省理工学院 U. Ingard 教授供稿。]

克拉尼(E. F. Chladni, 1756-1827 年)设计了一种能够观察出金属板振动的方法，此板被夹住一点，或者支于三点或更多的点上。撒在板上的细沙，最终都汇集到没有运动的节线上来了。可以用拉动提琴弓的办法来使板受到激发，或者拿一小块“干冰”接

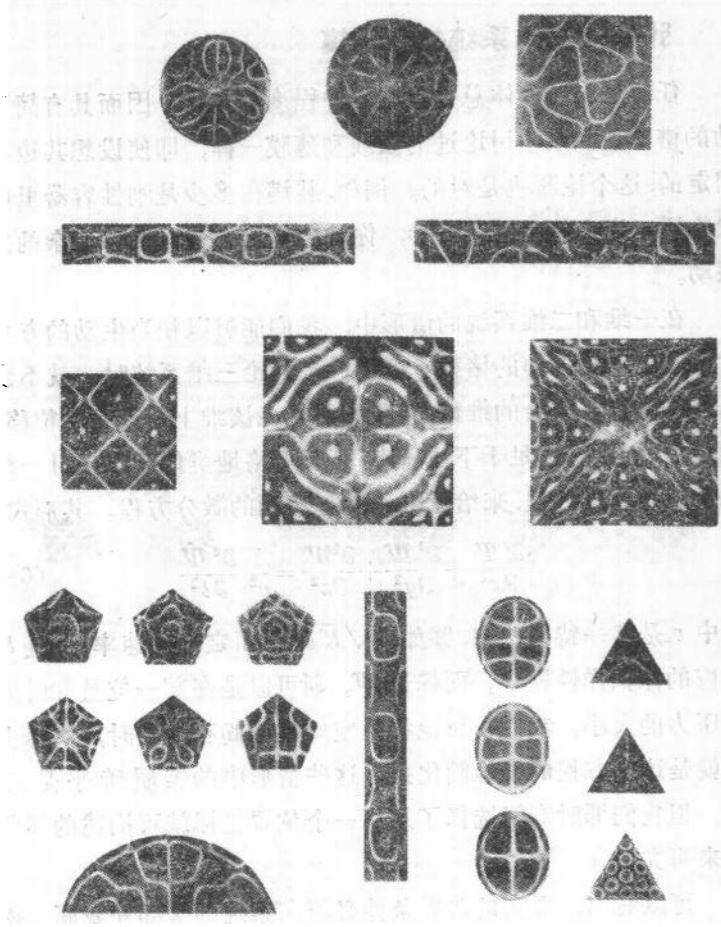


图 6-15　显示出节线的克拉尼图形。[引自 M. Waller: 《Chladni Figures: A Study in Symmetry(克拉尼图形: 对称性的研究)》(1961 年伦敦 Bell 版)。]

触板面也行。用手指触及板上的某点,就会使全部振动停止下来,除非这点是有节线通过的。图 6-15 展示了 M. Waller 制备的一些特别美丽的克拉尼图形。

§6-9 三维系统的简正模

任何材料的固体总会具有某种程度的弹性，因而具有简正振动的谱。正如刚才讨论过的弦线和薄膜一样，即使设想其边界是固定的，这个论断也是对的。例如，装满在多少是刚性容器里的胶状物质，当突然叩击容器时，你就会觉出它在以一种复杂的方式振动。

在一维和二维系统的情形中，我们能够以相当生动的方式来讨论和显示横振动的诸种特征模。当讨论三维系统时，就不会象以前那样再有空余的维数，让我们看见在该维上所产生的位移了。因此，我们只好满足于下述一点：可以严格地类似于以前对一维和二维所建立的方程，来给三维建立起运动的微分方程。其形式为

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{6-26}$$

式中 v 是某一特征速率，譬如由 $\sqrt{K/\rho}$ 值所定出的速率，此处 K 为相应的体积弹性模量。而标量 Ψ，则可以是在某一位量和时间下的压力的大小。我们在讨论棒或空气柱的简正振动时，实际上用的就是这个方程的一维简化式。这些情形中的媒质确乎是三维的，但我们那时专门选择了只用一个位置坐标就可描述的那些振动来研究。

可以看出，现在的边界条件必须在系统的全部外表面上指定出来。对于整个边界是固定的矩形块来说，不妨设想它有跟矩形膜非常相象的一组简正模。只是现在的诸节点处于一组曲面上，并且每一种简正振动是由三个一组的整数，而不是由薄膜时的两个或弦线时的一个整数来表征的。除此而外，我们对此不想再多加讨论了。现在，再回过来研究一维的问题，以及在这种系统中许多简正模同时存在的问题。

§6-10 傅里叶分析

假定有一根长度为L的弦线，两端是固定的。那么正如我们已经看到的，根据动力学的某些假定，它便能以无限多简正模中的任一种模进行振动。考虑到对某种模式而言，能有选择其振幅和周相的必要的自由，我们令

$$y_n(x,t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t-\delta_n) \tag{6-27}$$

进而可以设想，**所有的**振动模都是允许出现的，所以，完整地说明弦线运动的方程便是

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t-\delta_n) \tag{6-28}$$

弦线的真实运动如何，当然是非常难于想象的；但只要导致式(6-27)的那些物理假定是正确的，我们便可以设想这种形式的任意合成是可能的。

现设想对这个振动着的系统拍摄一张闪光照片。它便会显示出此系统在某特定时刻t_0时的位形。这样，量$\cos(\omega_n t_0-\delta_n)$就可当作一组定数来处理，而弦线于任一指定$x$值处的位移便可写为

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6-29}$$

式中

$$B_n=A_n\cos(\omega_n t_0-\delta_n)$$

于是，可作如下的论断：**弦线所能具有的任一种轮廓形状，是由x在$x=0$及$x=L$之间的函数y所描述的(根据在$x=0$及$x=L$处$y=0$的条件)，并且，可将此函数分解成由式(6-29)中的诸正弦函数所组成的无穷级数。**

看来，上面的论述有着很大的任意性。然而，倘若把连续的弦线，看作是一行N个连结着的粒子在$N\to\infty$时的极限情形，那么这种任意性就不存在了。在这里，第五章讨论所提供的那些见解，对我们是有帮助的。大家已经清楚，在粒子数有限的情形下，是如何恰好具有N种简正模的。而每种简正模的描述，又都包含了两个可调节的常数——振幅和周相。那么，N个粒子在相互作用影响下所形成的**任一种**运动，便可用诸简正模的叠加来描述。由于总共存在着$2N$个可调节的常数，就使我们能够给每个粒子指定任何初始的位移和速度值。可见，上面的那个论述，只是把这些结果应用到任意大数目的相互连结着的粒子时，所得出的合乎逻辑的结论而已。

当然，真实物理系统中的粒子数，并不是无限大。因此，当涉及到这种极限的情形时，事实上就把问题从物理世界转移到数学世界去了。而式(6-29)的这种异常之简明的论述，就成为整个数理物理学中最强有力的技术之一——傅里叶分析的基础。伟大的法国数学家拉格朗日(Lagrange, 1736-1813年)，以力学作为他研究的特殊领域，他曾经用了我们在前面所遵循的那条思路，建立了弦线振动的理论，而早在1759年就达到了发表式(6-29)所表述的结果的地步。然而却是另一位法国数学家傅里叶于1807年才第一次断定，在给定的区间内，肯定能够用这样一个级数来描写一个完全任意的函数。表面上看来，这个结论是非常靠不住的，它与常识相违，然而它却是对的。我们即将考察它的一个应用特例，不过，我们还是先来指出在振动系统动力学解中所包含的另一项结果吧。

现在来考虑式(6-28)所给出的连续弦线的一般横向运动。根据本章早先对连续弦线所作的计算，频率ω_n乃是基频ω_1的整数倍[参看式(6-11)及其前面的分析]。如果我们集中注意一个特定

x 值处的情形，那么 $A_n\sin(n\pi x/L)$ 便可写成为一个恒定的系数 C_n，于是就有

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(\omega_n t-\delta_n)\qquad \text{式中 } \omega_n=n\omega_1 \qquad (6\text{-}30)$$

可见，此式说的是，弦线上任一点的每一种可能运动，在 $2\pi/\omega_1$ 的时间内(此处 ω_1 为最低振动模的频率)，都是周期性的运动，而且，这种周期性的运动还可以写成为：含有 ω_1 之全部可能谐频的、具有合适振幅及周相的纯正弦式振动的组合。因此，这乃是时间上的傅里叶分析，而不是空间上的。你可能会注意到，式(6-29)和(6-30)所表达的展开式，在形式上略有不同。这不仅是，一个由正弦函数构成，而另一个由余弦函数来构成，还在于，如果就变量的整个区间来说，$n\pi x/L$ 按 π 的整数倍变化，而 $n\omega_1 t$ 则是按 2π 的整数倍变化的。然而，只要我们的兴趣仅仅是在指定的范围之内来表述这个函数，而不是在其外面，那就勿需虑及此项差异了①。

§6-11 傅里叶分析的实施

如若进行傅里叶分析，那就得能够定出各个正弦或余弦函数分量的系数来。这个过程叫做谐波分析。而正弦及余弦函数的性质，就使得谐波分析成为一项很简单的任务了。

试考虑由式(6-29)给出的 $y(x)$ 的展开式：

---

① 实际上，在 $0<\omega_1 t<\pi$ 的区间内，一个任意的函数 $y(t)$ 都能为甚至比式(6-30)还简单的表达式所满足，并且与式(6-29)是严格类似的。此函数可以只用余弦或只用正弦函数描述如下：

只用余弦：$y(t)=\Sigma C_n\cos n\omega_1 t$

只用正弦：$y(t)=\Sigma D_n\sin n\omega_1 t$

由于余弦表达式是 $\omega_1 t$ 的偶函数，正弦表达式是奇函数，所以，在 $\pi<\omega_1 t<2\pi$ 的区间内，这两种表达式的性能就完全不同了。(这就是说，它们在 $\pi<\omega_1 t<2\pi$ 的区间内所描述的，不再是同一个函数了。——译者注。)

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

假定我们是求某特定的 n 值，譬如 n_1 值的振幅。为此，我们将方程的两边乘以 $\sin(n_1\pi x/L)$，并在 x 从 0 至 L 的区间对 x 积分：

$$\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_0^L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)dx \tag{6-31}$$

此式右方，似乎有无限多项。现在，我们先来考察一下被积函数为正弦函数乘积的这种积分的性质。对于任何两个角 θ 及 φ 来说，我们有

$$\cos(\theta-\varphi)=\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi$$
$$\cos(\theta+\varphi)=\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi$$

因此

$$\sin\theta\sin\varphi=\frac{1}{2}[\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)]$$

于是可使

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)=\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\frac{(n-n_1)\pi x}{L}\right]-\cos\left[\frac{(n+n_1)\pi x}{L}\right]\right\}$$

这样，

$$\int\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{2\pi(n-n_1)}\sin\left[\frac{(n-n_1)\pi x}{L}\right]-\frac{L}{2\pi(n+n_1)}\sin\left[\frac{(n+n_1)\pi x}{L}\right]$$

当把积分限 $x=0$、$x=L$ 代入后，则所有的 $\sin(n\pm n_1)\pi x/L$ 值均为零。这样，初看起来，式(6-31)的右方似乎统统被消去了。可是我们注意到，量$(n-n_1)$出现在一个积分式的**分母**上。因此，在 $n=n_1$ 时，就有一个 0/0 形的积分。于是立即可知，尽管所有其

他的项皆为零，而这一项并不是零。因为若 $n=n_1$，则所计算的积分便是

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^L\left[1-\cos\left(\frac{2n_1\pi x}{L}\right)\right]dx$$

对给定的积分限而言，余弦这一项没有什么贡献，但另一项则给出了 $L/2$。于是我们便得到了下述的等式：

$$\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{L}{2}B_n$$

即

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L y(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (6\text{-}32)$$

在对 $y(x)$ 的谐波分析时，该式可以定出任一 n 值时所具有的振幅 B_n。

如果 $y(x)$ 是一条纯经验的曲线，那么，傅里叶系数 B_n 的计算，就要靠计算机或图解积分方法了。但若 $y(x)$ 的形式可用严格的

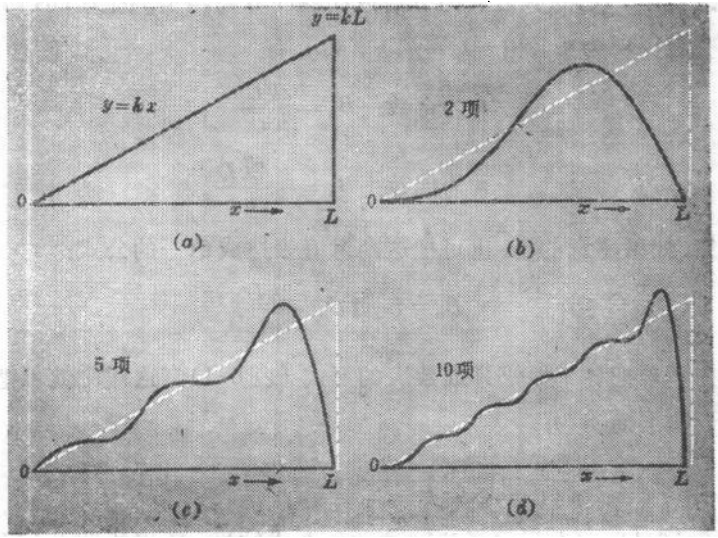


图 6-16 (a) 要进行分析的函数——三角形锯齿。(b)、(c)、(d) 分别采用了 2、5、10 项的部分傅里叶合成。

解析函数来描述时，那就可以得到一个可用于所有 B_n 的一般公式。让我们以图 6-16(a)所示的图形为例，来说明这番程序吧。这象是一根斜拉到一端的弦线。当然，恰好在 $x=L$ 处应有 $y=0$；然而我们假定，对任意靠近端点的那些点来说，y 的方程仍能很好的成立。于是，对诸 B_n 的计算可按如下的方式进行：

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L kx\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

采用分部积分，便得

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{2k}{L}\left\{-\frac{L}{n\pi}\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L+\frac{L}{n\pi}\int_0^L\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right\}\\&=\frac{2k}{n\pi}\left\{-\left[x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L+\frac{L}{n\pi}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]_0^L\right\}\\&=-\frac{2kL}{\pi}\frac{\cos n\pi}{n}\end{aligned}$$

可以看出，B_n 的值依 n 为奇数或偶数而分为两类，因为 $\cos n\pi$ 的值交替出现为+1 和−1。所以事实上有

$$n\text{为奇数：}\ B_n=\frac{2kL}{n\pi}$$

$$n\text{为偶数：}\ B_n=-\frac{2kL}{n\pi}$$

当然，如果愿意的话，也可把这两组值表达成单一的公式：

$$B_n=(-1)^{n+1}\frac{2kL}{n\pi}$$

现在不难把各个振幅列成数表的形式（表 6-1）。这样，就可把三角形图形描述为：

$$y(x)=\frac{2kL}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cdots\right\}$$

图 6-16(b)—(d)示出了不同项数的合成结果，所用的前五个系数的数值，列于表 6-1 中。只要采用的项数足够多，孜孜以求，我们就

表 6-1 B_n/kL 的值

n	B_n/kL
1	$\frac{2}{\pi} = 0.636$
2	$-\frac{1}{\pi} = -0.318$
3	$\frac{2}{3\pi} = 0.212$
4	$-\frac{1}{2\pi} = -0.159$
5	$\frac{2}{5\pi} = 0.127$

能使合成的结果符合得愈好。颇为令人惊异的是，我们只采用了这么少的几项，就已能表示出图形的一般趋势了，它是如此根本地不同于任何的正弦曲线，特别是在一个端点处，它远远地偏离了零值。

构成傅里叶分析的这些正弦曲线，是所谓**正交函数**的一个例子。当然，“正交”一词原是属于几何学术语的。在傅里叶分析中，两正弦函数的正交性是用下面的结果来描述的：

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n_1\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi x}{L}\right)dx = 0 \qquad \text{在 } n_1 \neq n_2 \text{ 时} \tag{6-33}$$

此式乍一看来似与几何条件并无联系，然而它并不象人们所想象的相差得那么远。因为，若有两矢量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，其相互正交即垂直的条件，乃是它们的标积为零。用它们的分量表示此条件时，可以写为

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0 \tag{6-34}$$

现在若象采用数值计算法来计算积分时那样，把式(6-33)的连续积分用对非常大数目的N个分离项之求和代替，那么就可将x的某个特定值写为x_p，且

$$x_p = \frac{pL}{N}$$

于是式(6-33)便可换写成如下的陈述：

$$\frac{L}{N}\sum_{p=1}^{N}\sin\left(\frac{n_1\pi p}{N}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi p}{N}\right)=0 \qquad \text{在 } n_1\neq n_2 \text{ 时}$$

如果把两个普通矢量正交性的条件写为如下的形式:

$$\sum_{p=1}^{3}A_pB_p=0 \qquad \text{在 } \boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B} \text{ 时}$$

那么纯从形式上来看,这两种陈述的差别仅在于,一种含有只由三个分量所完全描述的量,而另一种则含有需要N个(在极限时是无限多个)分量描述的量。把一个任意函数分解成一组正交函数(不一定非是正弦或余弦函数)的这种可能性,乃是理论物理和工程学中最为重要且广为使用的方法之一。

§6-12 简正模与正交函数

作为结束语,让我们回过头来对实际物理系统作几点说明。大家已经看到,一根均匀弦线的诸种特征振动,是如何可以理想地为诸正弦函数所描述的,并且从刚才讨论的意义上看,它们又都是正交函数。每一种不同振动模的存在,跟所有其他的振动模无关,这样,从原则上说,人们可以改变某一振动模的振幅而不致影响别的任何振动模。如此说来,加在单独振动模上的那个形容词"简正",乃是它们相互独立性的真实的表征,它跟垂直方向上的位移所具有的那种相互独立性,是完全类似的①。

从动力学来看,这种正交性也是成立的。当弦线以叠加起来的简正模进行振动时,其总能量正好是各种振动模能量之和。倘若对某任意x值处的一小段弦线来写出动能及势能之和的表达式,那么它就含有两种类型的项:(1) 含有幅角相同的正弦平方或余弦平方的项,它们各属于单一的振动模;(2) 含有不同幅角的正

① "简正"的英文原文是"normal",它还有"正交"、"垂直"、"法线"、"正常"等含义,所以作者才这么说。——译者注。

弦乘积或余弦乘积的项，这些是来自不同振动模的交叉项。当对整个弦长求能量之总和时，由于正交性条件式(6-33)，这第 2 类的项全都为零。因此，诸基本振动模确实在动力学上是地地道道相互正交的。

对于系统诸简正模之独立性或正交性的这种讨论，实际上在第五章分析两耦合摆的运动时就已开始了。也许你接受了我们的建议，而在初次阅读本书时撇下了第五章。但无论是否如此，现在回过去参阅一下第五章的开头部分，那会是很有帮助的，并且要把注意力集中在探求来自那里的主要发展线索，从而使你回忆起贯穿这整个论题的共同思路。

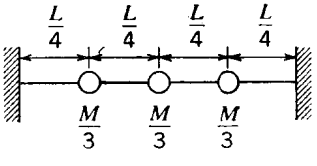
习　题

6-1　一根长度为 2.5m、质量为 0.01kg 的均匀弦线，处于 10N 的张力作用下。

(*a*) 其基谐模的频率是多少？

(*b*) 如果横向地拉开弦线，尔后在距离一端为 0.5m 处触止它，那么还保留了哪些频率？

6-2　一根紧张的弦线，长为 L，总质量为 M，张力为 T。在弦线作横振动时，它的三种最低简正模频率是什么？试将这些频率与下述情形中的三种简正模频率作比较：质量为 $M/3$ 的三个质点，等距离地置于总长为 L、张力为 T 的无质量弦线上。



6-3　课文中在推导紧张弦线的自由振动时，略去了重力。这种省略是正确的吗？如果要考虑重力效应，则分析将如何进行？

6-4　试证：课文中对水平弦线自由振动的分析，也同样适用于竖直的弦线，只要 $T \gg mg$。

6-5　质量为 m、长度为 L、张力为 T 的紧张弦线，受到了两个策动源的策动，策动源每端一个。两源具有相同的频率 ν 和振幅 A，但相互间恰为 180° 的异相。试问：与弦线驻立振动相一致的 ω 的最小可能值是什么？

6-6 一均匀棒的中点被夹住，两端是自由的。

(*a*) 棒在纵振动中的固有频率是哪些？

(*b*) 第 n 种振动模的波长为多少？

(*c*) 第 n 种振动模的诸节点位于何处？

6-7 推导空气柱振动的波动方程。你的最终结果应为

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{K}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

式中 ξ 是离开平衡位置的位移，ρ 是质量密度，K 是弹性模量。

6-8 在空气柱的振动中，试证：

(*a*) 开口端表示振动时压力变化为零的条件，因而是空气具有最大运动的地方(波腹)。

(*b*) 闭口端是运动为零的地方(波节)，因而压力的变化最大。

6-9 房间中两相对的墙壁是瓷砖砌的。其余的两堵墙、地板和天花板均镶有吸音材料。房间产生声共振的最低频率为 50Hz。

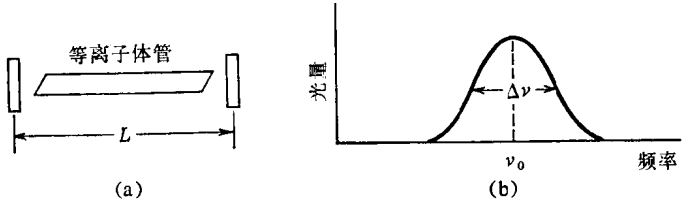
(*a*) 一种复杂的噪声出现在房中，房间仅激发出最低的两种振动模，且在 $t=0$ 时使得每种振动模都具有最大的振幅。试分别对每种振动模画出 $t=0$、$t=1/200$s、$t=1/100$s 时，位移对 x 的图线。

(*b*) 现观察到两墙之间不同地点空气中尘埃粒子的最大位移(无需同时在各点出现！)如下：

x	$L/4$	$L/2$	$3L/4$
ξ_{max}	$+10\mu$	$+10\mu$	-10μ

试问两种振动模中的每种振动模的振幅各是多少？

6-10 把一根等离子体管置于一个光学共振腔中，就能构成一台激光器；这共振腔由两块反射能力强的平面镜组成，对光波来说，其作用如同两堵刚性的墙壁一样（见图）。等离子体管是通过激发共振腔的诸简正模而产生



(a) (b)

激光的。

(*a*) 共振腔的诸简正模频率为多少？以两镜间距离 L 及光速 c 表示你

的答案。

(*b*) 假定等离子体管发出的光集中于频率为 $\nu_0=5\times10^{14}$Hz 处，光谱宽度为 $\Delta\nu$，如图所示。而 $\Delta\nu$ 的值，使得频率凡在 $\nu_0\pm1.0\times10^9$Hz 范围内之共振腔的所有简正模，均能被等离子体所激发。

(1) 若 $L=1.5$m，则会有多少种振动模被激发？

(2) 倘欲只激发**一种**简正模(因而激光器仅有一种频率输出)，则 L 的最大值为多少？($c=3\times10^8$m/s)

6-11 (*a*) 试求：长度为 L、两端固定、以振幅 A 进行着第 n 种特征振动模振动的弦线之总振动能。弦线中的张力是 T，其总质量为 M。(**提示**：试考虑弦线呈直线状这个瞬时的累积动能，此时它所贮存的势能决不会超过根本不振动时的势能。)

(*b*) 计算此弦线的总振动能，设其振动为下列两种简正模的叠加：

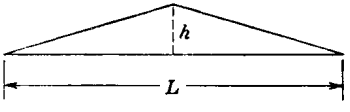
$$y(x,t)=A_1\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\omega_1 t+A_3\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(\omega_3 t-\frac{\pi}{4}\right)$$

(你应当能证实，它乃是两种振动模各自能量之和。)

6-12 长为 L 的弦线，两端被夹住，且具有张力 T，现将其中点向旁拉开 h 的距离，然后释放之。

(*a*) 它后来的振动能量为多少？[**提示**：试考虑弦线获得初始形变时对张力所做之功。]

(*b*) 图示的形状经多少时间重现一次？假定由横向位移造成的长度微小增加，并不使张力改变。



6-13 考虑边长为 L 的一个均匀立方体，它里面的特征波速率为 v。试证：此系统在频率 ν 到 $\nu+\Delta\nu$ 之间的振动模的总数是

$$4L^3\nu^2\Delta\nu/\pi^2v^3 \qquad \text{设 } \pi v/L\ll\Delta\nu\ll\nu_0。$$

[**提示**：因为 $\nu L/\pi v=(n_1^2+n_2^2+n_3^2)^{1/2}$，令 $x=n_1$、$y=n_2$、$z=n_3$，试考虑一立方点阵。于是，在点阵任一区域内的点子数，就等于此区域的体积，而相应于给定频率 ν 的诸种振动模，也就跟距离原点为 $r=\nu L/\pi v$ 处的这些点子相对应了。故而，欲求的结果即为 $4\pi r^2\Delta r$。对正方形片的答案如何？棒呢？若把立方体改换成边长为 a、b、c 的矩形体，则答案将如何变化？]

6-14 试求下列诸函数的傅里叶级数($0\leqslant x\leqslant L$)：

(*a*) $y(x)=Ax(L-x)$。

(*b*) $y(x)=A\sin(\pi x/L)$。

(*c*) $y(x)=\begin{cases}A\sin(2\pi x/L), & 0\leqslant x\leqslant L/2\\ 0, & L/2\leqslant x\leqslant L\end{cases}$。

6-15 试求长度为 L 的弦线运动的傅里叶级数，若

(*a*) $y(x,0)=Ax(L-x)$；$(\partial y/\partial t)_{t=0}=0$。

(*b*) $y(x,0)=0$；$(\partial y/\partial t)_{t=0}=Bx(L-x)$。

海洋是由海水或波浪或者是由两者组成的吗？在大西洋上，我的一些旅伴所强调的意见，说是由波组成的；然而我想，正常和无偏见的答案，则会说它是由水组成的。

Sir A. Eddington: 《*New Pathways in Science*(科学上的新途径)》(1935年)

第七章 前 进 波

§7-1 什么是波

对许多人或许大多数人来说，一提到"波"这个字，便会联想到一幅海洋的景象，来自大海的滚滚波涛冲刷着海滩。要是你在海边留心观察过这个现象，那你可能会感到，尽管它很壮观，但却包含着好景不常的因素。你看，浪峰竞相袭来，使你感到了海水对大地的轰击——而波浪确实能造成巨大的破坏，说明它是带有能量的——可是一旦高耸的波浪过去了，消散了，此时的海水却并不比原先更多地冲到海滩上来。那一番向前的冲击，并不意味着海水有了什么重大程度的整体移动。公海上的长波(叫做余波)，传得既快又远。到达加利福尼亚州海岸的波，是由七千多英里以外的南太平洋风暴产生的，以每小时40英里或更高的速度传来。显然，大海本身并没有以这样壮观的方式移动；它只是担当着传播某种效应的职能而已。在此，我们看到了所谓波动的根本特点。某种状态经由媒质从一处传至另一处，但媒质自身却并未转移。局部的效果，是与远处的原因有关联的，而原因和效果之间却有着一

段时滞，它取决于媒质的性质并表现在波速上。所有的媒质，固体、液体、气体，都能通过波来传递能量和信息，而我们对于耦合振子和简正模的研究，已为理解这个重要的现象铺平了道路。

虽然水上的波是最熟悉的一种波，但也是属于用基本物理过程分析起来最为复杂的一种波。因而就不准备多谈它了。我们将转到老的支助者——紧张的弦线上来，因为大家对它已知道得不少了，现在正可应用到当今的讨论中来。

§7-2 简正模与行波

为了给紧张弦线建立某种特定的简正模，人们可制做一个样板，使它跟弦线于该种振动模最大振幅时的形状完全一样，并让弦线来吻合于它。然后，将这约束物突然从弦线上拿开，就会使弦线仅以这种振动模继续振动下去了。

然而更为可能的是，上下摇动弦线的一端，使之在所要求的模频率下作简谐运动，从而建立起此种振动模来。但这样实际上会发生什么状况呢？驻立振动并不马上出现。出现的是，一个**行波**开

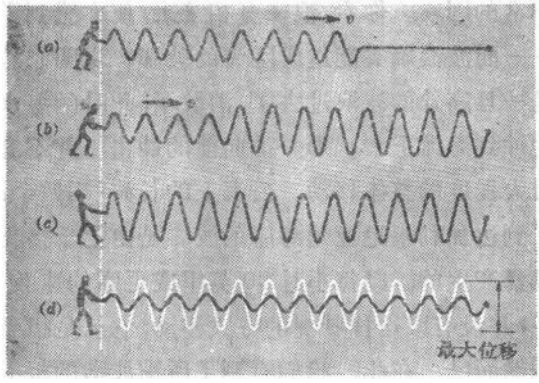


图 7-1 (*a*) 发生行波。 (*b*) 行波加上被反射的行波。 (*c*) 处于最大振幅时的合成驻波(简正模)。 (*d*)就是(*c*)里的驻波，但这时的位移比最大值小得多。

始沿着弦线移动，它在任一瞬时，都是 x 的正弦式函数[图 7-1(a)]。可是，当这个前进着的波抵达弦线的固定端($x=L$)时，便发生反射过程(我们将在第八章中更仔细地考察它)，于是弦线上任一点的运动，就变成了这两个反向行进着的扰动的合成结果[图 7-1(b)]。在反射波回到策动端以后，如果频率与弦线的长度、张力、单位长度的质量符合了应有的关系，那就会展现出一个驻波来，这就是所期望的简正模[图 7-1(c)]。此后，弦线便以该简正模的特征方式继续振动；亦即弦线的每一点继续进行着 SHM 的横振动，而那些节点则始终保持静止[图 7-1(d)]。简正模一旦以这种方式建立起来，策动器又供给它必需的能量，那么 $x=0$ 的一端便可握住不动了。

此刻，引入我们对于紧张弦线简正模的形式分析的结果，是有用处的。大家知道，长度为 L 而两端固定的连续弦线，原则上可在无限多种简正模下振动。这些振动模为下式所描述：

$$y_n(x,t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t \tag{7-1}$$

式中

$$\omega_n=\frac{n\pi}{L}\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \tag{7-2}$$

T 为弦线中的张力，μ 是单位长度的质量。大家记得 n 是个整数，并且，要是理想化地用于真正连续的弦线，n 就要一直延伸到无限大①。下面，让我们稍许用点初等数学，把式(7-1)整理成另外的形式。对于给定的两个角 θ 及 φ 来说，可有等式：

$$\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)=2\sin\theta\cos\varphi$$

因而

---

① 不过要记住，n 确实有一个有限的上限，而且表达 ω_n 的式(7-2)严格地说也只是个近似式，在大 n 时就失效了。

$$\sin\theta\cos\varphi=\frac{1}{2}[\sin(\theta+\varphi)+\sin(\theta-\varphi)]$$

将此结果用于式(7-1)，便有

$$\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t=\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{L}-\omega_n t\right)+\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+\omega_n t\right)\right]$$

于是，弦线作横振动时的第 n 种简正模可由下式来描述：

$$y_n(x,t)=\frac{1}{2}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}-\omega_n t\right)+\frac{1}{2}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+\omega_n t\right) \tag{7-3}$$

若是再运用 ω_n 的式(7-2)，就有

$$y_n(x,t)=\frac{1}{2}A_n\sin\left[\frac{n\pi}{L}\left(x-\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right)\right]+\frac{1}{2}A_n\sin\left[\frac{n\pi}{L}\left(x+\sqrt{\frac{T}{\mu}}t\right)\right] \tag{7-4}$$

最后，正如在第六章讨论简正模时大家已看到的，以及在式(7-4)中量纲上所显示出来的那样，这里可以规定出一个特征速率 v 来：

$$v=\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2} \tag{7-5}$$

下面我们将要证明的是，式(7-4)在数学上清楚地描述了两列反向传播着的行波。

先来看式(7-4)右方两项中的第一项。其形式如下：

$$y(x,t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \tag{7-6}$$

式中 $\lambda=2L/n$。首先设想假若时间在某瞬时被冻结了，那么此扰动的轮廓便是一个正弦波，其两峰之间，或任何具有同样位移及斜率值的其它两个相继的 x 值之间，都有着 λ 的距离。当然，量 λ 就是这个特定扰动的波长。其次，让我们来看 y 值(它对应于一定的

x 及 t 值)，并考虑在稍后一个时刻即 $t+\Delta t$ 时，这同样的 y 值会在何处出现。假如这时相应的位置是 $x+\Delta x$，那就应该有

$$y(x, t)=y(x+\Delta x, t+\Delta t)$$

因而

$$\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]=\sin\left\{\frac{2\pi}{\lambda}[(x+\Delta x)-v(t+\Delta t)]\right\}$$

由此可知，Δx 与 Δt 值的关系为

$$\Delta x-v\Delta t=0$$

即

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=v$$

这就说明，整个波是以 v 的速率在 x 方向上移动的，如图 7-2 所示。

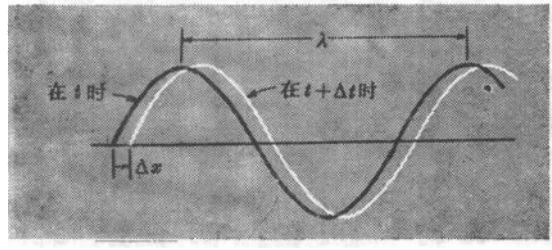


图 7-2　波在正 x 方向上行进时的位移增量。

采用完全类似的办法即可看到，式(7-4)中第二项所描述的，乃是有着同样波长而以速率 v 沿着负 x 方向行进的波。两个具有相同波长和振幅但反向运动着的波的叠加，在数学上似乎是跟驻波完全等效的。然而说到这里，我们必须引入一个重要的限制条件。式(7-6)以及正弦函数之幅角为$(x+vt)$的姊妹式，它们所描述的曲线乃是有着无限广延性的正弦波，也就是说，这些方程自动地规定了这些波存在于所有的 x 和所有的 t 里。可是，作为我们出发点的这个系统，却是一根长度为 L 的有限弦线，而不是无限的。这

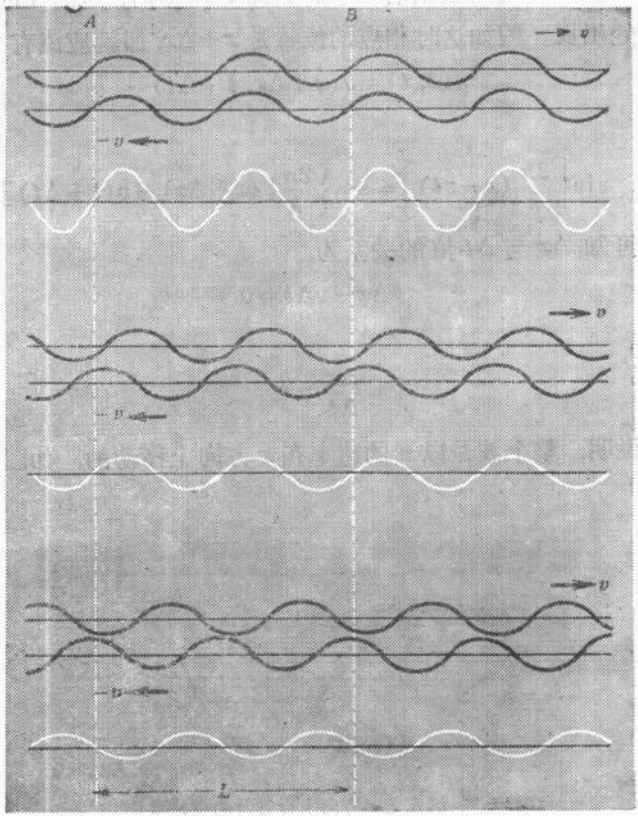


图 7-3　沿相反方向行进着的两列完全相象的正弦式波，以及合成起来的驻波。

样，用行波来对简正模所作的这种新的描述，其实是不对的。然而这个矛盾不难弄清。图 7-3 示出了两个反向运动的波在前进中的几个相继阶段。也示出了两者纵标相加的结果，从而得到了合成位移与 x 的函数关系。在相距 L 的 A 及 B 点处，位移在所有时间内都为零，这当然正是原先那种陈述所要求的。在这两点之间，位移的变化严格地与式(7-1)相符。于是可以说，在只涉及 $x=0$ 及

$x=L$ 之间的情况时，用无限波列所作的描述才是正确的。可见，在这两个极限点之外并不继续存在扰动的这个事实，早在我们以一个单一的方程

$$y_n(x,t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t$$

来作为简正模的方程时，就已隐瞒掉了的一个物理条件，因为函数 $\sin(n\pi x/L)$ 当然是个遍及 x 整个域的函数。我们早该十分当心了；用 x 的连续函数对振动弦线作正规的描述，应该全部写出如下的三个不同区域：

$$\left.\begin{aligned}&-\infty\leqslant x<0:\ y(x,t)=0\\&0\leqslant x\leqslant L:\ y_n(x,t)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega_n t\\&L<x\leqslant\infty:\ y(x,t)=0\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}7)$$

进行上述的说明是重要的，因为正象我们开始在第一章中评述过的那样，人们是如此容易忘掉实际的边界条件，对于给定的物理情况所施加的限制。人们易于轻率地把一种数学描述，运用于它的适用限度以外。好了，谈完了这一点，下面就让我们运用想象力来扩大已有概念的应用吧。

§7-3 单一方向上的前进波

上一节我们谈到，紧张弦线的简正振动是怎样能描述成两个前进正弦波之组合的，这两个波除行进方向外，彼此是等同的。那么为什么不可以设想，在足够长的弦线上，有可能建立起只在一个方向上行进的正弦波呢？正如图 7-1(*a*)所表明的，这种波开始时是可以实现的，现在只要设想弦线的固定端离得非常之远，亦即弦线的总长 L 比波长 λ 大得很多就行了。当在 $x=0$ 处振动了许多周以后，扰动的前锋已经移动到视野以外(图 7-4)，那么，我们见到 $x=0$ 平面右方的全部情景，就都在下式[式(7-6)]的描述之中了：

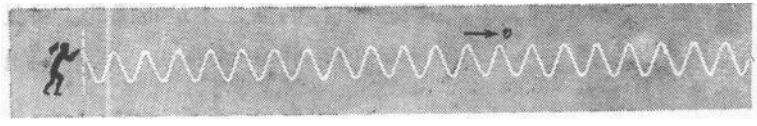


图 7-4　在长弦线上产生的行波。

$$y(x,t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

这个波的产生，来源于弦线的左端在作 SHM 的上下振动，其振幅为A，频率 ν 为

$$\nu=\frac{v}{\lambda}\qquad(\text{或 }\omega=2\pi v/\lambda)\tag{7-8}$$

显然，在 $x=0$ 处，y 为 t 的函数，其方程为

$$y_0(t)=-A\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right)=-A\sin\omega t$$

而在任一给定的 t_0 时，**弦线**的形象则为下式所描述：

$$y(x,t_0)=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt_0)\right]=A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\varphi_0\right)$$

式中的 φ_0，对于这个瞬时所描述的波的形象来说，乃是个恒定的角度。倘若弦线 $x=0$ 的这端，在 $t=t_1$ 以前一直静止着，在 $t=t_1$ 至 $t=t_2$ 期间作正弦式振动，而从 t_2 以后复归静止，那么弦线上就会出现一列有限长的正弦波，任何时刻都包含在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 之间，如图 7-5 所示。离开 $x=0$ 端最远的是此扰动的前锋端，它对应于 $t=t_1$ 时振动的始端，而后面的一端则对应于 $t=t_2$ 时振动的终端。故而有

$$x_1-x_2=v(t_2-t_1)$$

这个特例说明了一个非常重要的结论：

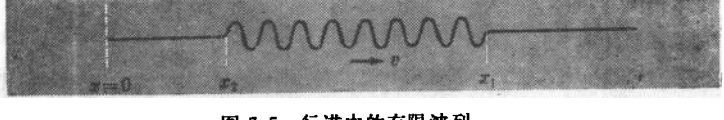


图 7-5　行进中的有限波列。

沿着弦线以恒定速率 v 而传播的波动，实际上乃是一种转换的手段，它把固定位置处的位移随时间的变化关系，转换成了任一指定时刻的位移随位置的相应的变化关系①。

对任何纯正弦式扰动来说，波速 v 可由 $\nu\lambda$ 的乘积来决定[见式(7-8)]。而依据式(7-5)，紧张弦线上所有波长的波，其 v 均具有同样的值 $\sqrt{T/\mu}$。这种 v 之不依赖于 λ 或 ν 的情形，在波动中并**不是**普遍成立的。但在目前，我们仍限于考虑可以假定它有效的那些情形。

下面来建立由式(7-7)描述的一维波传播所遵循的微分方程。这将是位移 y 对 x 和 t 的偏导数之间的关系式。于是有

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2\pi}{\lambda}A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{2\pi v}{\lambda}A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

那么，是否可以把波的微分方程写成

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t}?$$

这样做并无不可，但它不免对波的式样有所约束，因为这方程只适用于沿**正** x 方向行进的波。为此，如假定取沿负 x 方向行进的波方程

$$y=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

那么就有

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2\pi}{\lambda}A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

---

① 这里隐瞒了一个微妙之点。后面我们将会看到，不能当然地认为，一个在有限期间内的正弦式振动，会产生空间上有限范围的纯正弦式波。但在这时，波源上所发生的事情跟弦线上发生的事情之间，也仍然存在着对应的关系。

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{2\pi v}{\lambda}A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x+vt)\right]$$

故而

$$\frac{\partial y}{\partial x}=+\frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t}$$

可是，若形成**二阶**导数，那就可得到适用于在每一方向上行进的、具有任一波长的正弦波关系式了：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{7-9}$$

此式并不陌生，它正是我们在第六章中作为出发点的那个运动方程[式(6-4)]，并从而得出了紧张弦线或其它受有线性回复力的一维连续系统的诸种简正模。

§7-4 具体媒质中的波速

在遵从式(7-9)的任何系统里，任一波长的正弦式波均能以速率 v 行进。因此，算出某特定情形中的 v 值将是一件有趣味的事情。例如，假定具有 $\mu=0.5\text{g/m}$ 的弦线或金属丝，被 100N 的力所紧张。那么，对这种弦线上的横波来说，就有

$$v=\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}\approx 450\ \text{m/s}$$

另方面，单位长度质量约为 1 kg/m 的粗绳索或者长橡皮水管，若为同样的张力所紧张，则波速仅约 10m/s，实际上也还是够快的。

我们在建立式(7-9)时，只是用了横波；但大家在第六章已经看到，弹性物质柱的纵振动，恰好也遵从着同样形式的方程：

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \tag{7-10}$$

这是沿着一维行进的压缩波的基本微分方程，这种波总括起来可以通称之为**声波**，虽然人耳只能测知其中有限范围内的频率。现

在不妨考察一下这种声波在不同物质中的速率如何。

1. **固体棒**。顺着棒长或杆长行进的波，其 v 值是由杨氏模量及密度来决定的：

$$v=\left(\frac{Y}{\rho}\right)^{1/2}$$

表 7-1 列出了一些材料的杨氏模量、密度，以及在这些材料中声速的计算值和观测值的数据。可以看出，典型的速率是每秒几千米，而且计算值与观测值相符得也不太坏。值得提醒的是，杨氏模量是以静态测量为基础的，而声的传播则依赖于材料对迅变胁强的响应，因此，不要指望会恰好相符。另外，采用杨氏模量，还要假定在压缩波或减压波通过时，材料能自由地向侧边膨胀或收缩（当然是非常轻微的）。但是，块状材料是不能自由这么做的；对形变的阻力事实上增大了，因而会提高速率的计算值。然而这种差异并不很大，在 15% 左右，对于当前的讨论来说，可以不再考虑它。

这些弹性波在固体中的速率是相当高的。例如，地震在花岗岩中产生的压缩波约有 5 km/s 的速率，大约在一小时内可绕地球半圈。

表 7-1 杨氏模量及声速

材 料	Y, N/m²	ρ, kg/m³	$\sqrt{Y/\rho}$, m/s	v, m/s
铝	6.0×10^{10}	2.7×10^{3}	4700	5100
花岗岩	5.0×10^{10}	2.7×10^{3}	4300	~5000
铅	~1.6×10^{10}	11.4×10^{3}	1190	1320
镍	21.4×10^{10}	8.9×10^{3}	4900	4970
派热克斯玻璃 (Pyrex)	6.1×10^{10}	2.25×10^{3}	5200	5500
银	7.5×10^{10}	10.4×10^{3}	2680	2680

2. **液柱**。液体和气体一样，其弹性特性是由体积弹性模量 K 来表征的。一般说来，液体比固体更具有压缩性，而密度却小不

了多少;这就意味着,声波在液体里行进时要比固体里慢些。最重要的情形是水。对水施加大约 500 atm(1atm≈10^5N/m^2)的压力时,其体积大约减小 2.3%。由此给出的体积弹性模量约为 2.2×10^9N/m^2,并且当 $\rho\approx10^3$kg/m^3 时,故有

$$v=\left(\frac{K}{\rho}\right)^{1/2}\approx1500\text{m/s}$$

此值很近于实际值,大多数液体传送压缩波的速率约在 1km/s 左右。

3. **气柱**。大家在第六章已经看到,气柱的振动频率是如何取决于绝热弹性模量的。绝热弹性模量与等温模量有着很重大的差别。这种重大的差别来源于气体的高度可压缩性,意即在压力变化时要对气体作大量的功。尽管固体或液体中的振动也可能是绝热的,但它们的可压缩性小得多,按此方式而接受的能量,相对说来也少得多,因而其等温和绝热的弹性模量就差得不多了。

在第六章中已经指出,气体的绝热弹性模量为

$$K_{\text{绝热}}=\gamma p\qquad\left(1<\gamma\leq\frac{5}{3}\right)$$

故而

$$v=\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right)^{1/2}\tag{7-11}$$

对空气而言,$\gamma\approx1.4$,$\rho\approx1.2$kg/m^3,从而给出

$$v\approx340\text{ m/s}$$

对式(7-11)还得再多说几句。质量为 m、分子量为M的实际上的理想气体,其普适气体方程是

$$pV=\frac{m}{M}RT$$

式中 R为气体常数,T 为绝对温度。由于比值 m/V 就是密度 ρ,故式(7-11)将给出

$$v=\left(\frac{\gamma RT}{M}\right)^{1/2}\tag{7-12}$$

这样，所期望的气体中的声速是：(*a*) 与压力或密度无关，(*b*) 与绝对温度的平方根成正比，(*c*) 与分子量的平方根成反比。结论(*a*)及(*b*)对任何气体都是正确的，至少在 p 或 T 的广大范围内是如此，而(*c*)则在比较同类分子(比如都是二原子分子)的不同气体时，才会得到证实。

倘若回想一下分子运动论对气体压力的简单计算，那就能看出式(7-11)的另一个特别有趣的特点来。该计算导致如下的结果[式(6-19)]：

$$p=\frac{1}{3}\rho v_{\mathrm{rms}}^2$$

式中 v_{rms} 为分子的方均根速率。由此可得

$$v_{\mathrm{rms}}=\left(\frac{3p}{\rho}\right)^{1/2} \tag{7-13}$$

对比一下式(7-11)及(7-13)可见，前面算出的气体中之声速，与分子自身的平均速率几乎是相等的。由于气柱的一端受到撞击的信息，必须经由分子自身来传送，因而声速与分子速率(每秒几百米)的这种近似相等就不难理解了。

§7-5 叠加

大家已经看到，怎样使紧张的弦线，以任意选配的简正模之叠加来进行振动的。现在就来考察与此密切相关的问题，即在长弦线上或其它这类媒质上，建立起具有几种不同波长的前进波问题。让我们先看两个波的非常简单的情形，它们的振幅相同，都沿正 x 方向行进，且分别为式(7-7)那样的方程所描述：

$$\begin{aligned} y_1&=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_1}(x-vt)\right] \\ y_2&=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_2}(x-vt)\right] \end{aligned} \tag{7-14}$$

大家知道，由于系统中位移的线性叠加遵从式 (7 9)那样的方程，故而合成的位移即是 y_1 及 y_2 之和。于是有

$$y=y_1+y_2=A\left\{\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_1}(x-vt)\right]+\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda_2}(x-vt)\right]\right\}$$

由于我们假定两波具有同样的速度 v，因而合成扰动就象一个形状不变的结构那样运动着，正如具有单一波长的波象一个刚性的正弦曲线以速率 v 向前运动一样。至于合成的形状并不难考虑，只要使 $t=0$ 就行了；这样，就有

$$y=A\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_1}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_2}\right)\right]$$

倘若两种波长相差得不很多，这样的合成则如图 7-6 所示。它看起来恰似第二章中讨论过的拍的情形。它确实是一种拍的现象，尽管这里的调制振幅已不是时间的函数而是位置的函数了。在讨论这类叠加波以及其它有关问题时，最好是引用波长的倒数。这个量 $k(=1/\lambda)$，叫做**波数**；它是单位距离上所具有的完整波长的数目，当然并不一定非是个整数不可①。

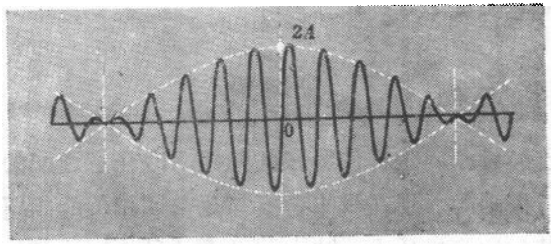


图 7-6　波长稍有差异的两个行波之叠加。

若采用波数，则合成波形的方程可写为

$$y=A[\sin 2\pi k_1 x+\sin 2\pi k_2 x]$$

① 注意！由于在波的数学描述中，极为频繁出现的是组合量 $2\pi/\lambda$，因此在理论物理中，用"波数"一词及符号 k 去标示这个组合量，已成为通常的做法了，它等于我们现在这种表示法中的 $2\pi k$。

或者

$$y=2A\cos[\pi(k_1-k_2)x]\sin\left(2\pi\frac{k_1+k_2}{2}x\right) \qquad (7\text{-}15)$$

调制因子的两相邻峰值间的距离，是由量 $\pi(k_1-k_2)x$ 增加 π 时所对应的 x 变化量来定出的。现将此距离以 D 表示，则有

$$D=\frac{1}{k_1-k_2}=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

倘若两波长几乎相等，那就可以写为 λ 及 $\lambda+\Delta\lambda$，于是便近似地有

$$D\approx\frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$$

这就意味着，在调制包络线的两相邻零值之间，近似地包含着 $\lambda/\Delta\lambda$ 个波长。

在弦线的一端，同时施加两种不同频率和振幅的振动①，便能在弦线中产生这种合成的行波了。这在数学上，可通过考虑式(7-14)规定的位移在 $x=0$ 处的情况来表示。于是就有

$$y_0(t)=-A\left[\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda_1}\right)+\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda_2}\right)\right]$$

比值 $2\pi v/\lambda$ 规定着每一振动的角频率 ω，故有

$$y_0(t)=-A[\sin\omega_1 t+\sin\omega_2 t]$$

显然，这乃是时间上的拍的情形，在此，我们所看到的是，在波源中依赖于时间的扰动，在媒质中产生了依赖于空间的扰动的一个特例。

波的这种叠加，可以用声波特别漂亮地演示出来。声音从波源传至接收器的过程中，要两次用到上述的原理。在波源处，位移随着时间作某种变化，结果就形成一列声波离开声源而去。这些波或其某一部分，在此后的某个时间落到探测器上，便在里面产生

---

① 此处的振幅应是相同的，见下文。——译者注。

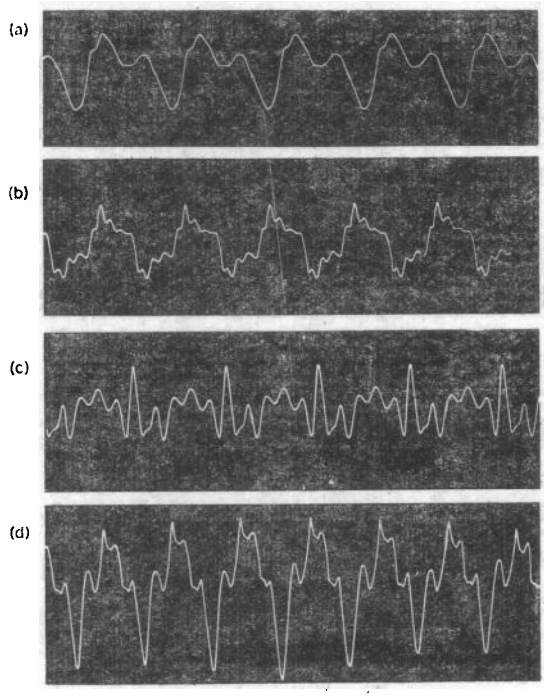


图 7-7　波形图　(a)长笛的　(b)单簧管的　(c)双簧管的　(d)萨克管的。[引自 D.C. Miller: 《Sound Waves and Their Uses(声波及其应用)》(1938年纽约Macmillan 版)。]

一个依赖于时间的位移，在理想情形下，它恰与波源处发生的位移具有相同的形式。图 7-7 所选择的几个例子，示出了乐器中的谐波是怎样组合起来而产生出一再自相重复的图样的。这些图样表达的是接收器的响应，然而我们可以想象为空气在某一瞬时的扰动，在空间距离上是周期性的，并且与所接收到的信号相对应。

§7-6　脉冲波

你也许会认为波含有一整列的峰与谷，但这并非完全必要。确有无数的情况，是单个、孤立的脉冲扰动，从媒质中的一处行进至

另一处。譬如，某人发出的招呼或命令的语言传至另一人，就是一例。取一根紧张的弹簧(或弹性弦线)，猛摇其一端然后保持不动，使其产生一个局部的形变，这样就能建立起这种脉冲来。图 7-8 示出了这种脉冲随后的行为。它以匀速向前行进，因而在任一瞬时只是弹簧的有限区域受到扰动，其前后的区域则是静止的。脉冲就是这样继续行进的，直至抵达弹簧的远端点，才会发生某种反射的过程。然而只要脉冲不间断地延续下去，看上去它就保持着同样的形状，如图 7-8 所示。怎样才能把这种脉冲的特性，与我们学过的正弦式波联系起来呢？傅里叶分析给出了答案。通过下面的讨论，大家就会看出这种联系是如何建立起来的。这项研究很有价值，因为它使我们能够去考虑无论什么样的讯号传递问题。

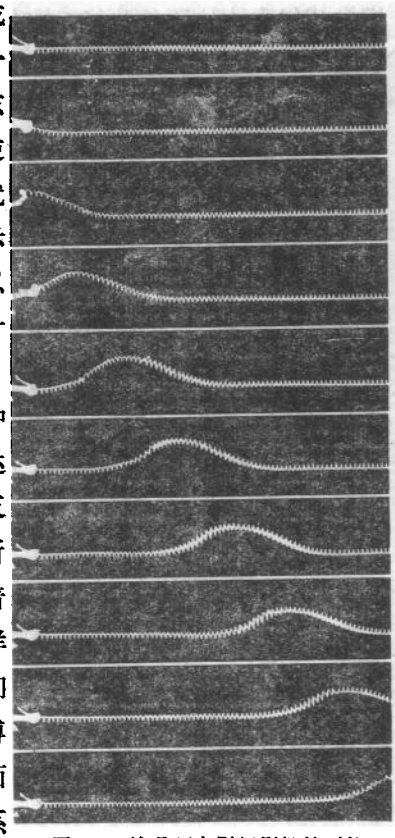


图 7-8　这是用电影摄影机拍下的一组照片，显示出了弹簧上脉冲的产生及其运动。[引自 PSSC(美国物理科学研究会)：《Physics》(1965 年波士顿 Heath 版)。]

首先，设想有一根无限长的绳索，并使其一端作简谐运动的上下振动，其周期为 1 hr。为明确起见，假定此绳索具有 100N 的张力和 1 kg/m 的线密度。这样，波速 $\sqrt{T/\mu}$ 便是 10m/s，而波长则为此速率 v 除以频率 $\nu(=1/3600\text{s}^{-1})$，或等价地说即是此速率乘以周期(3600s)，从而给出 $\lambda=36{,}000\text{m}$，或者大约 22 英里！让我

们设想绳索比这还长几倍，比如说共有 100 英里。这么个特殊的装置，在物理上当然是荒唐的，然而这样的考虑却有助于展示出基本概念。

现在假定绳索的一端是以基频的诸种谐频之组合进行振动的。其第二个谐频会产生波长为 18,000 m 的正弦波，第廿二谐频会产生波长约为 1 英里的波，而第 36,000 谐频便会产生 1 m 波长的波了。这里列举的虽是些特例，但要点在于，它使我们能够看出，在绳索的策动端上能够加上成千成万种不同的正弦式振动，它们的频率都是同一个最低基频的整数倍，并且，它们都在绳索上形成了以同样速率行进的波动。结果便出现了一个沿着绳索移动的、重复的扰动图样。该图样基本上类似于图 7-6 及 7-7 所示的那些样子，只是此时的重复距离相当长，事实上等于 1 hr^{-1} 的基频所对应的那个波长。

那么，现在我们就来引用傅里叶定理所说的那个引人注意的可能性吧。大家在第六章已经看到[式(6-30)]，该定理断言，**任何**依赖于时间的、以 $2\pi/\omega_1$ 的周期重复着的位移图样，均能表示成 ω_1 及其所有整数倍谐频的无限序列的线性组合，即

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(n\omega_1 t-\delta_n) \tag{7-16}$$

而其逆命题便是：可以用基频 $\omega_1/2\pi$ 的各谐频的全谱，来合成出任何一种重复的图样。

特别是，可以设想一种在重复周期的大部分时间内为**零**的扰动；图 7-9 示出了几个例子。根据傅里叶定理，每一种以及任何别的这类时间上的重复函数，均可用始终为时间之连续函数的一些正弦式振动来构成。要实现在重复周期 $2\pi/\omega_1$ 的大部分时间内不存在任何位移，就得用正确的谐频组合，使得在此区域内形成完全的抵消，但在周期内我们所期望的那部分时间里，形成特定的非零

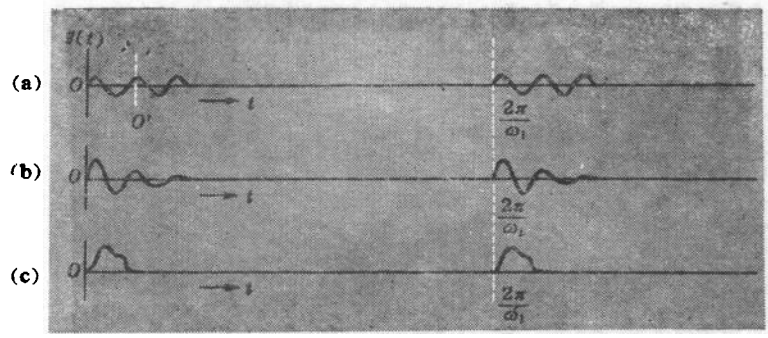


图 7-9　周期性重复扰动的示例，它们在重复周期的大部分时间内为零。

扰动。

应当指出，与式(6-30)等同的式(7-16)表明，为了表达任一周期性函数，$n\omega_1 t$ 的正弦函数及余弦函数都是需要的，因为我们有

$$C_n \cos(n\omega_1 t - \delta_n) = A_n \sin n\omega_1 t + B_n \cos n\omega_1 t$$

可是，某些形式的 $y(t)$，却可以只用正弦函数或余弦函数来描述。具体地说，若 $y(t)$ 是 t 的偶函数，则对任何 t 而言 $f(-t) = +f(t)$，于是傅里叶分析只要余弦函数就行了；而倘若是个奇函数，由于 $f(-t) = -f(t)$，那就只用正弦函数就行了。这样的简化总是可能的，只要函数 $y(t)$ 对其时间上的中点有着奇对称或偶对称就行。然而，为了利用这种对称性，你也许需要移动一下 t 的原点。例如图 7-9(a)中的函数 $y(t)$，是由 $2\frac{1}{2}$ 周的正弦波以及随后的零扰动组成的，对于图中的时间原点来说，既不为奇对称也不为偶对称。可是，倘若把原点移至正弦波列中部峰值处的 O' 点，那么此函数对 O' 来说，就是个偶函数了。同样，在规则的区间内重复的任何整数个正弦波，通过适当地移动原点后，均可表示成奇函数。在这些情形中，单个的重复周期，最宜于用 $t = -\pi/\omega_1$ 至 $t = +\pi/\omega_1$ 之间的时间来度量，而不宜用 0 至 $2\pi/\omega_1$ 之间的时间

来度量。图 7-10 示出了对典型的偶脉冲或奇脉冲应用这番手续的情形。

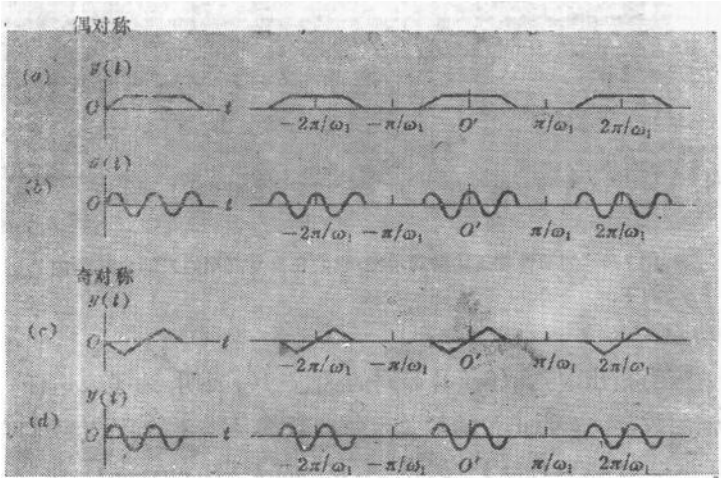


图 7-10 移动原点以取得不同种类脉冲的对称性。

例① 假定我们要求产生的波，其形式为：第 1000 谐频的波共 100 周，占去了基波重复周期的十分之一，而随后 90% 的时间内则是零扰动。这类似于图 7-10(*d*) 的情形。对于波列的中点来说，在 $-\pi/\omega_1$ 至 $+\pi/\omega_1$ 的重复周期内，此函数是由下列诸方程来描述的：

$$\begin{aligned} y(t)&=A_0\sin N\omega_1 t \qquad 0\leqslant|t|\leqslant\frac{100\pi}{N\omega_1} \\ y(t)&=0 \qquad\qquad \frac{100\pi}{N\omega_1}\leqslant|t|\leqslant\frac{\pi}{\omega_1} \end{aligned} \tag{7-17}$$

式中

$$N=1000$$

因为这是个奇函数，故而可以分解成只是函数 $\sin n\omega_1 t$ 的全集，亦

① 跳过此例并不影响正文的连贯性。

即式(7-16)中的周相角 δ_n 全都等于 $\pi/2$:

$$y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin n\omega_1 t \tag{7-18}$$

而诸系数 C_n 的求得,则要利用诸正弦函数在一个全周期 $2\pi/\omega_1$ 内积分的正交性:

$$\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1}\sin n_1\omega_1 t\sin n_2\omega_1 t\,dt=\begin{cases}0 & \text{当 } n_1\neq n_2 \text{ 时}\\ \dfrac{\pi}{\omega_1} & \text{当 } n_1=n_2 \text{ 时}\end{cases}$$

因此,在给式(7-18)乘以 $\sin n\omega_1 t$ 并积分后,便得

$$C_n=\frac{\omega_1}{\pi}\int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1}y(t)\sin n\omega_1 t\,dt$$

将式(7-17)所给的 $y(t)$ 代入此式,于是得

$$C_n=\frac{\omega_1 A_0}{\pi}\int_{-100\pi/N\omega_1}^{100\pi/N\omega_1}\sin N\omega_1 t\sin n\omega_1 t\,dt$$

(注意,现在的积分限是 $\pm 100\pi/N\omega_1$,因为被积函数在此限之外是零)。计算此积分可运用下述的关系式:

$$\sin N\omega_1 t\sin n\omega_1 t=\frac{1}{2}[\cos(N-n)\omega_1 t-\cos(N+n)\omega_1 t]$$

所以

$$\int\sin N\omega_1 t\sin n\omega_1 t\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(N-n)\omega_1 t}{(N-n)\omega_1}-\frac{\sin(N+n)\omega_1 t}{(N+n)\omega_1}\right]$$

代入 t 的上下限,则 $\omega_1 t$ 将取 $\pm 100\pi/N$ 值。因此便有

$$C_n=\frac{\omega_1 A_0}{\pi}\left\{\frac{\sin\left[\dfrac{100\pi(N-n)}{N}\right]}{(N-n)\omega_1}-\frac{\sin\left[\dfrac{100\pi(N+n)}{N}\right]}{(N+n)\omega_1}\right\}$$

这里,引用一下近似计算。大家看到,当 $n\approx N$ 时,大括号内的第一项的分母较小,而第二项的分母则总是大的。每一项分子的最大可能值都为 1。因此就大多数情形来说,可以略去第二项不计,于是可以写出 C_n 的简化近似表示式:

$$C_n \approx \frac{A_0}{\pi}\left\{\frac{\sin\left[\dfrac{100\pi(N-n)}{N}\right]}{N-n}\right\}$$

或者

$$C_n \approx \frac{100A_0}{N}\left(\frac{\sin\theta_n}{\theta_n}\right) \qquad \text{式中} \quad \theta_n = \frac{100\pi(N-n)}{N}$$

这些 C_n 仅在 $n=N$ 的附近才有相当大的值。函数 $(\sin\theta_n)/\theta_n$ 在 $\theta_n=0$ 时为 1，在 $\theta_n=\pm\pi$ 时降为零，而在此之前，函数以不断减小着的振幅在正负值之间摆动①。若按假定 $N=1000$，则在 $n=N\pm10$ 时 $\theta_n=\pm\pi$。这就意味着，这群 $N=1000$ 的谐频的 100周其频谱主要是由一串子频率构成的，如图 7-11 所示，其中唯独 $n=1000$ 的振幅最大。

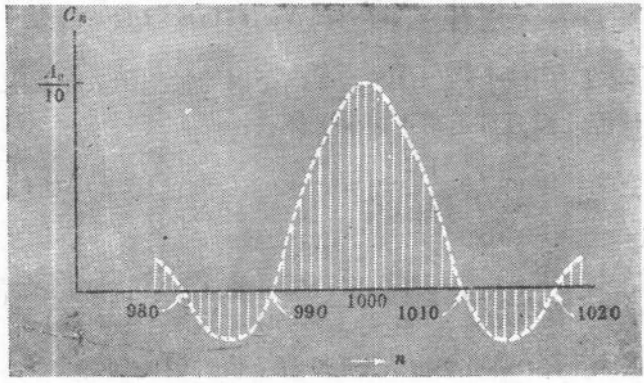


图 7-11　在 1000 周的时间间隔内，重复 100 周的纯正弦波所构成的讯号之频谱，即由傅里叶分析得出的振幅对频率之标绘图。

倘若我们所选择的振动持续了更多的周数，那么，它那个由无限多纯谐频组成的频谱，便会变窄了，而在无限多周的极限情形

① 正象在讨论受迫振子时看到的那样，可以用改变周相 π 的办法，来描述 C_n 表现为负值的情形。因此，可以用正值的 C_n 再配以等于 $3\pi/2$ 或 $-\pi/2$（而不是 $\pi/2$）的周相 δ_n，来描述这些贡献。

下，频谱当然就只单单剩下纯谐频 $N=1000$ 自己了。反之，仅由给定谐频少数几周所构成的脉冲，在傅里叶合成法中便要用到非常宽的频谱，亦即有许多谐频具有相当的振幅①。脉冲持续时间与频谱宽度之间的这种实质上的反比关系，乃是一种非常基本的关系。我们在第一章中予以关注的正是这个结论，事实上是要指出，完全纯粹的正弦式扰动其实是不存在的。当然，如果一个正弦式振动譬如说持续了一百万周，那么它的频谱，才会真的很近于一根单独的锐线。

现在回过来定性地谈谈，具有长时间静止间隔的重复性振动的问题。这个发生在某处的振动，假定已分解成了诸傅里叶分量的全谱。那么，如果每个分频率的波速都是一样的，则这些间断而周期性重复着的振动，便会激起一些在媒质中行进的等间隔的孤立脉冲。例如，有一根很长的绳索，设想它具有产生象图 7-9(c) 那样的脉冲波的可能性，脉冲波全长为几米，且由 36km 的基本重复距离间隔开来。那么这些脉冲，无论从哪方面来说，都应是单独的孤立的扰动。事实上，不难看出，傅里叶分析原理可以推广到极限的情形，即重复的周期无限长，因而行波波形的重复距离也为无限长的情形。由此可知，一个单独的、不重复的、作为时间或位置之函数的位移图样，是可用诸正弦式扰动的全(连续)谱来描述的，这些正弦式扰动的周期或波长值，一直可扩展到无限大。

因此在上面的说法中，只有满足诸纯正弦式波的速率与频率或波长无关的条件下，我们才能看出，任何孤立脉冲在媒质中传播时其形状无任何改变。下面就来考察一下，这种脉冲运动的某些特点。

---

① 你当能自行验明，前面的分析已暗示出了这种性质。

§ 7-7 具有恒定形状的脉冲波之运动

若给定的脉冲满足上述条件，那就可以用非常普遍的说法来讨论它的特性了。假定该脉冲是从左向右运动的，且在我们称之为 $t=0$ 的时刻，由方程

$$y_{(t=0)}=f(x)$$

所描述。如果整个脉冲的行进速度是 v，那么在较后的时间 t，原先存在于某特定 x 值(比如 x_1)处的位移，现在则出现于 x_2 处了，而

$$x_2=x_1+vt$$

若欲求出这个新 t 值时刻的脉冲方程，只需承认脉冲在 t 时的图象跟 $t=0$ 时的一模一样，无非是 x 的原点移动了一段距离 vt 而已(见图 7-12)。这在数学上可以表述为，对于 x 及 t 任何值其横向位移是

$$y(x,t)=f(x-vt) \tag{7-19}$$

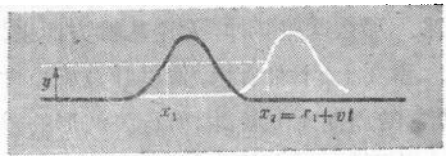


图 7-12 某行进脉冲的运动。

正象纯正弦波的特殊情形一样，若欲验证所选取的这个解析形式，只需考察先在 (x,t) 处出现，而后在 $(x+\Delta x,\ t+\Delta t)$ 处出现的某 y 值的条件就行了。同样，一个从右向左行进的脉冲可以表述为

$$y(x,t)=g(x+vt) \tag{7-20}$$

函数 f 和 g 的确切形式，并无关紧要。全部问题就在于，y 应能表达为 $x\pm vt$ 之函数。因此，譬如说可以规定从左向右运动的、具有某种形状的脉冲服从方程

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(x-vt)^2} \tag{7-21}$$

图 7-13(*a*)画出了此脉冲在 $t=0$ 以及稍后一点时间的图形。脉冲峰值的高度应是 b，它在 $t=0$ 时应通过 $x=0$ 这一点。在 $x=vt\pm b$ 的点处，脉冲高度将下降为最大值的一半，而在 $|x-vt|>3b$ 处的高度则会降至峰值的 10% 以下。人们还可以采用幂函数、指数函数、三角函数等，写出任何数目的其它可能的脉冲形状来。但是所有这些脉冲，只要能正确地为式(7-19)或(7-20)所描述，那么它们就会以同样的方式行进，保持其形状不变并具有同样的运动速率 v。

就对波的理解而言，非常重要的一点就在于领会：粒子纯粹沿着横向(y)的位移，是怎样造成波的轮廓沿着传播方向(x)而运动的。举例来说，图 7-13(*a*)中的脉冲之所以向右运动，就是因为在任一瞬时，峰值左边各点的横向位移在减少，而峰值右边各点的横向位移在增加。这些运动的自然结果，乃是峰值位移随着时间的流逝，而出现在愈来愈大的 x 值之处。

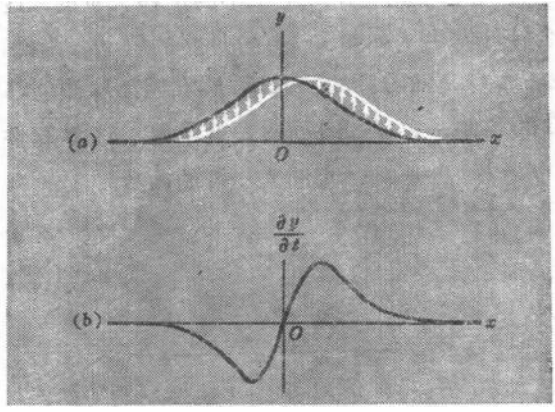


图 7-13　(*a*) 式(7-21)所描述之脉冲的位移增量。(*b*) 在脉冲位移发生增量期间横向速度的分布。

让我们来计算式(7-21)所描述的脉冲的横向速度分布。媒质(弹簧、弦线或者别的什么)中任一粒子的横向速度，乃是某个给定 x 值处 y 对 t 的变化率，即

$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}$$

这里使用了偏导数符号，是由于承认 y 为 x 和 t 的函数，且 x 在此是固定的。于是，从式(7-21)便有①

$$v_y=\frac{-b^3}{[b^2+(x-vt)^2]^2}\frac{\partial}{\partial t}[b^2+(x-vt)^2]$$

即

$$v_y(x,t)=\frac{2b^3(x-vt)v}{[b^2+(x-vt)^2]^2} \tag{7-22}$$

此式决定着任一点在任一时刻的横向速度。假定现在想求 $t=0$ 时的横向速度分布，此时脉冲峰值正通过 $x=0$ 这一点。则在式(7-22)中使 $t=0$ 便有

$$v_y(x,0)=\frac{2b^3vx}{(b^2+x^2)^2}$$

这个速度分布的标绘图示于图 7-13(b)，而且不难看出，这些速度是怎样在短暂的时间 Δt 内，产生了小的位移矢量的，这些小的位移使得整个脉冲发生了如图 7-13(a)那样的移动。当然，应当看到，速度分布本身是随着脉冲一起运动的，因而脉冲的峰值处始终满足 $v_y=0$ 的条件。式(7-22)的形式就体现了这个条件，因为它表明 v_y 跟 y 一样，也是组合变量 $x-vt$ 的函数。

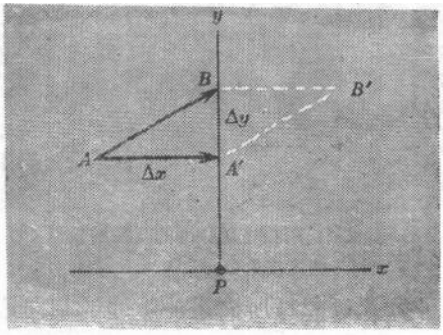


图 7-14　媒质的横向位移与行进脉冲的纵向位移之间的关系。

① 下式分母原书误为$[b^2-(x-vt)^2]^2$。——译者注。

你也许早已看出，在横向速度与脉冲轮廓的斜率之间，有着密切的联系。为此，假定该脉冲的瞬时图象所表示的脉冲的一小部分，是处在直线 AB 上的(见图 7-14)。其斜率可用 $A'B/AA'$ 来度量。而在某个短暂的时间间隔 Δt 内，AB 便运动到了 $A'B'$；此段时间由下式给出：

$$\Delta t = \frac{AA'}{v}$$

式中 v 乃是脉冲行进的速度。倘若我们限于观察由竖直线所标示的特定 x 值处的情况，则会看到在脉冲通过时，横向位移由 PB 变到 PA' 了。此位移量恰是距离 $A'B$ 的负值，与此相应的横向速度便是

$$-A'B/\Delta t = -v(A'B/AA')$$

现在用偏导数的语言来表述。斜率 $A'B/AA'$ 乃是在 t 为某固定值时的 $\Delta y/\Delta x$ 值，从上述的讨论可知，在极限情形时下述关系成立：

$$v_y = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

由于 v_y 乃是在 x 为某定值处的 $\Delta y/\Delta t$ 值，故上式可改写为

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial y}{\partial x}$$

因此，任一点处的横向速度便与脉冲轮廓在该点的斜率成正比了。

这番分析的完成，就在于要记住 v 本身乃是在 y 为某固定值时的 $\Delta x/\Delta t$ 之极限值，即

$$v = \frac{\partial x}{\partial t}$$

把这些关系结合起来，便得到了下述结果：

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} \tag{7-23}$$

将式(7-23)视做与普通微分法中的链式法则相象，乃是骗人的——

请注意其负号。此处得出的这个关系，乃是更普遍情形中的特殊情况，其中的某个量 y 乃是位置和时间二者的函数。它在给定时刻会随位置而变，而在给定位置处又随时间而变。那么，在相隔 Δt 的两时刻，对 y 在相距 Δx 的两点作两次相继的观测，其差量 Δy 可以表示为

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x$$

因而 y 的整个变化率便是

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial t}+v\frac{\partial y}{\partial x} \tag{7-24}$$

式中 v 为速度 $\Delta x/\Delta t$。算符 $\partial/\partial t+v\partial/\partial x$ 常称为**交叉导数**。如果观测点，例如由于流体的整体运动，而以某一规定的速度运动时，则交叉导数就规定了求 y 的时间变化率的方法。倘若在式(7-24)中代入 $dy/dt=0$ 的条件，这就相当于只注意某特定 y 值的情形，正象我们为定出任意的脉冲轮廓上具有给定位移的点的运动时，所采取过的做法一样。然而这么一来，$dy/dt=0$ 的这个条件就把式(7-24)转换成为式(7-23)所表述的那种特殊的陈述了。

容易看出，一般的方程(7-19)及(7-20)，都满足同样的基本波动微分方程。[当然，我们事先已经肯定了这一点，因为我们一开始就认识到，任何这种行进着的脉冲，都是由遵从式(7-9)的诸正弦式波叠加而成的。]该两个方程是

$$y(x,t)=\begin{cases}f(x-vt)\\g(x+vt)\end{cases}$$

对其中的第一式来说，我们有

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{df}{d(x-vt)}\frac{\partial(x-vt)}{\partial x}=f'$$

式中 f' 乃是 f 对整个自变数 $(x-vt)$ 的导数。再求一次导数得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f''$$

式中 f'' 便是 f 对$(x-vt)$的二阶导数。现在来对 t 求导:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=f'\frac{\partial(x-vt)}{\partial t}=-vf'$$

而第二次的求导是

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=(-v)^2f''=v^2f''$$

将这两个二阶导数作对比,可知

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

于是又得到了式(7-9)。倘使对描述在负 x 方向上行进的任意扰动的函数 $g(x+vt)$,也进行这同样的推算,那么每次对 t 的求导,唯一的差别是出现了 $+v$ 的因子以代替 $-v$。因而在两次求导后便可看出,函数 f 和 g 都是遵从那同一个方程的。

§7-8 脉冲波的叠加

上节中,我们只限于考虑单个脉冲。然而在这种脉冲的特性里,最重要而又有兴趣的特点,是行进在相反方向上的两个脉冲能够互相穿过对方,并在相遇以后仍显出各自的原形。这乃是叠加又一次以非常明显的形式在起作用。图 7-15 示出的,也许就是这种叠加中最惊人的一种形式。两个对称的脉冲行进在相反的方向上;它们完全一样,只是一个为正另一个为负而已。当它们相互穿过的时候,有一刹那整个弹簧或弦线呈直线状;这好象是脉冲互相湮没了对方似的,而且就某种意义来说,也正是如此。可是直觉告诉我们,每个脉冲波都携有正值的能量,而这却是不能平白地抹掉的。果然,两脉冲确实又出现了①。那么,是什么东西使它们在通

① 空前的最敏锐的观察者之一,列奥纳多·达·芬奇(Leonardo da Vinci)广泛地研究过波的现象,并且看出了这种叠加的结果,但并未理解其机理。因此他写道:"所有由物击水造成之影响,均能互相穿透而不遭破坏。一波决不致穿透另一波;它们只是从相遇点反跳回去而已。"参阅《The Notebooks of Leonardo da Vinci (达·芬奇的笔记)》,由 E. McCurdy 译成英文,1956 年纽约 Braziller 版。

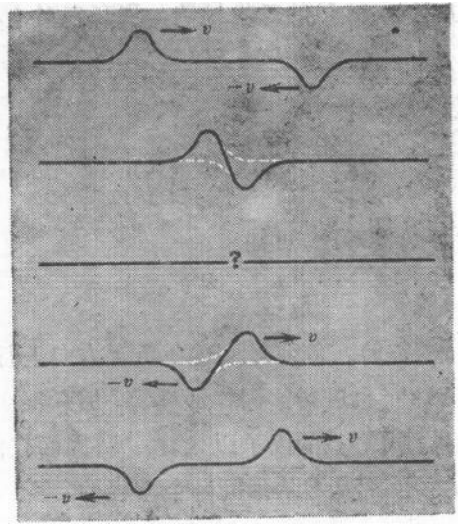


图 7-15　上下左右相互颠倒的、沿相反方向行进的两个脉冲，依次叠加的情形。

过零位移阶段时保持着记忆，从而能原封不动地又恢复到原来的形状呢？这便是系统各个部分的速度。在横向形变为零的瞬时，弦线有着反映两叠加脉冲特征的横向速度分布，而向右行进的对称正脉冲，与向左行进的相同的负脉冲，其速度分布是完全一样的。这是式(7-23)所暗示了的，因为同时调换 $\partial y/\partial x$ 及 $\partial x/\partial t$ 的符号仍使 v，不变，并且，倘若你给两相继时刻出现的两脉冲画一幅草图，也就会立即清楚了。因此，横向位移虽然相消，但横向速度却相加起来，于是对这一瞬时来说，系统的全部能量就因有这些速度而变成了动能。然而，目前还是让我们专心于此问题的纯运动学方面吧。

为了某些目的，假定脉冲轮廓具有简单的形状，诸如图 7-16 所示的矩形、三角形、梯形，是较为方便的。例如对三角形脉冲，脉冲两侧边上各点的横向速度都相同，这样，就容易分析这种脉冲叠

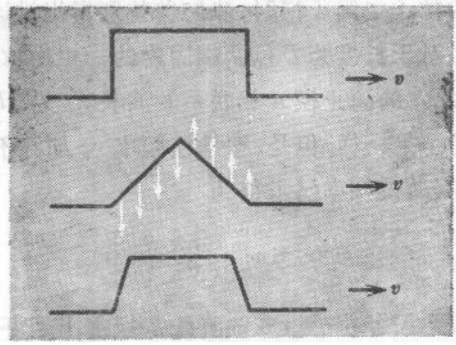


图 7-16　几何上理想化的简单类型的脉冲。

加的结果。可是应该看到，这类形状的脉冲并不合乎自然界的情况。譬如矩形脉冲的传播，就要求在竖直边通过时，横向速度为无限大。而且，具有尖锐棱角的脉冲轮廓（诸如梯形），就暗示着横向速度的不连续变化，这就意味着无限大的加速度和需要无限大的力。因此，任何真实的脉冲，都有着圆滑的棱角和倾斜的侧边，而不论其形状是如何之奇特异样。

§7-9　色散；相速度与群速度

大家知道 前进正弦波的方程是式(7-7)：

$$y(x,t)=A\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]$$

对于可以看成具有连续质量分布的紧张弦线来说，乃有式(7-5)的关系：

$$v=\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

根据这些方程，处于给定张力下的给定的弦线，将以同样的速率 v 传播着各种波长的正弦式波。可是这个理想化的陈述，对任何实际的弦线来说，在某种程度上肯定是会失效的。在第五章中讨论

一行相互连结的粒子之简正模时，我们曾特别指出过这种限制。在那儿出现的是，对于长度为 L 且两端固定的一根由粒子组合而成的弦线来说，与给定的简正模 n 相联系的波长 λ_n 为 $2L/n$，这与当作连续弦线时的结果一样，但是，振动模频率 ν_n 却并不简单地与 n 成正比。的确，振动模频率已求得为

$$\nu_n = 2\nu_0 \sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]$$

从而对由有限数的 N 个粒子组成的直线，规定出了可能频率的上限值 $2\nu_0$[见式(5-25)]。在 $n \ll N$ 时，它便退化为连续弦线的 ν_n 正比于 n 的结果。可是在 n 增大时，ν_n 值的上升就比这种正比关系所要求的越来越慢了。

因此一般说来，一定可以看到，在弦线上的波中那些频率高而波长短的纯正弦式波，将趋向于以比长波为慢的速率行进。这便是所谓的**色散**的一个例子，说明波速是随波长而变的。

在许多不同的媒质里，由于不同的基本物理机理，都会产生色散现象。但我们要强调的，不是把我们引导到一连串色散性质的那些非常具体的分析，而在于色散这个事实本身。这词儿所指的是，起初在一块儿的事物现在被分离开来，此外别无他意。大家看到，白光通过棱镜后便分成了不同的颜色。红色的光波在玻璃中的速度，要比蓝色光波的大些，光进入棱镜时的折射，服从斯涅耳(Snell)定律：

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{c}{v}$$

因而，由于速度的变化，折射角便随颜色而变化。在一维问题里，色散意味着两个长而有限的、具有不同波长的波列，随着时间的流逝而分开得愈来愈远，尽管它们原来是重叠着的。而且，单个波列本身也是一些速度稍有不同的纯正弦波的混合物，随着时间的流

逝，它也会畸变而愈益散开。只有实际是无限广延的纯正弦波，因为具有唯一的波长和频率，才会在色散媒质中以唯一的既定速度运动。（当然，在一些特定的情况下，色散是可以忽略不计的，尤其是真空中的光波，其色散严格地为零。）

为了更具体地讨论色散的后果，我们来考察两个波长稍有不同的正弦式波，在弦线上沿同一方向（但也许以不同的速率）行进时发生的情形。现为简便计，假定它们的振幅相等，且为下列方程所描述：

$$\begin{aligned} y_1 &= A\sin 2\pi(k_1 x - \nu_1 t) \\ y_2 &= A\sin 2\pi(k_2 x - \nu_2 t) \end{aligned} \tag{7-25}$$

它们很象在计算速度相同的两个波之波形时，所写出的式(7-14)。而为了便于处理这些方程，这里用波数 k 来代替 $1/\lambda$，且明确地用频率 ν 来取代比值 v/λ。一般说来，此时我们可假定这两波有着不同的特征速率：

$$v_1 = \frac{\nu_1}{k_1} = \nu_1\lambda_1, \quad v_2 = \frac{\nu_2}{k_2} = \nu_2\lambda_2$$

这两个波叠加起来所给出的合成扰动为

$$y = A[\sin 2\pi(k_1 x - \nu_1 t) + \sin 2\pi(k_2 x - \nu_2 t)]$$

运用前面用过的三角学关系，此式就变为

$$y = 2A\cos\pi[(k_1 - k_2)x - (\nu_1 - \nu_2)t]\sin 2\pi\left[\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}t\right]$$

在 $t = 0$ 时，它看起来正和图 7-6 的叠加波一样。但现在我们要来考虑随着时间的流逝，所可能发生的变化。上述 y 的表示式，可以解释为一个有着短波长的迅变波，其振幅被一个长波长的包络所调制。这两个波式的扰动，都在运动。**但它们却可以有不同的速率**。而最大可能振幅的位置，则必定是以包络的速率运动的。

若两合成波的波长几乎相同，合成扰动的描述就可简化了，为此使

$$k_1-k_2=\Delta k \qquad \nu_1-\nu_2=\Delta\nu$$

$$\frac{k_1+k_2}{2}=k \qquad \frac{\nu_1+\nu_2}{2}=\nu$$

于是得

$$y=2A\cos\pi(x\Delta k-t\Delta\nu)\sin 2\pi(kx-\nu t) \tag{7-26}$$

那么，由此式便可列出两个特征速度来。一个是平均波数 k 之波峰的运动速率，这叫做**相速度** v_p：

$$v_p=\frac{\nu}{k}=\nu\lambda \tag{7-27}$$

另一个是调制包络的运动速度。由于这包络包裹着一群短波，故此速度就称为**群速度** v_g：

$$v_g=\frac{\Delta\nu}{\Delta k}\to\frac{d\nu}{dk} \tag{7-28}$$

迄今为止，我们只涉及过波的一种速度，即相速度。其所以给它起了这样的名称，是因为它表达了与基本短波扰动中一个固定的周相值相关的速度，比如表达着位移为零的一个点之 x 随 t 而前进的情形。

群速度在物理上有着极大的重要性，因为每个波列的长短有限，而且除在个别情形下需要了解单个波峰的运动以外，我们所观察的都是波群的运动。并且还了解到，波扰动的能量也是以群速度进行传输的。实际上，为处理这类问题，需要用的不只是两个正弦波，而是象前面讨论过的那样，需要用到足以定出单个孤立脉冲或波群的全谱才行。如此求得的群速度值，仍然是式(7-28)。

当然，色散的存在确实对分解任意脉冲为纯正弦波这件事，给予了重要的暗示。如果这些正弦波具有不同的特征速率，那么扰动的形状就必然随着时间而发生变化。特别是原来高度定域了的脉冲，一定会在运动当中变得愈来愈散开。

深水中的波，即所谓的“重力波”，为相速度与群速度的区别提

供了明显的例证。这些波有着强烈的色散；对某种既定的波长而言，其波速——现在应称为相速度——是与波长的平方根成正比的。于是可使

$$v_p = C\lambda^{1/2} = Ck^{-1/2}$$

式中C为常数。但依式(7-27)，$v_p = \nu/k$。故有

$$\nu = Ck^{1/2}$$

因此，

$$\frac{d\nu}{dk} = \frac{1}{2}Ck^{-1/2}$$

而$d\nu/dk$乃是群速度，因此便得

$$v_g = \frac{1}{2}v_p$$

由此可见，分量波的波峰将迅速地在波群内跑过去，起初振幅增加，而后又明显地消失了。你也许在海面上或深水的什么地方，注意到过这种奇妙的效应。

气体中的声波，和我们讨论过的其他弹性振动一样，乃是无色散的，至少在我们理论能正确描述的范围内是如此。这是件幸运的事。试设想一下不同频率的声音以不同的速度穿过空气时，所要造成的那种混乱和听觉的痛苦吧。聆听交响乐的演奏，便要成为一场真正的恶梦了。当然也会有补救的办法，例如可以用气体棱镜来分解声音，就象用玻璃棱镜把光分解开来一样。然而对人类来说，欣慰的是并未出现这样的可能性。

§7-10 截止现象[①]

与色散性质紧密联系着的一个很显著的效应，就是所谓的截止现象。这个词的意思是，色散媒质不让某个临界频率以上（或可

① 略去本节，并不影响内容的连贯性。

能是以下)的波通过。这个效应已隐含在对一行N个分离粒子的简正模分析中了,那时我们得到了[见式(5-24)]

$$\omega_n = 2\omega_0 \sin\left(\frac{n\pi l}{2L}\right)$$

式中 $L=(N+1)l$。可以设想在不改变相邻粒子间距 l 的情况下,使线的长度 L 无限增加。此时,波数 $k_n(=n/2L)$事实上变成了连续变量,故可把频率 ν 和波数 k 的关系写为

$$\nu(k) = 2\nu_0 \sin(\pi k l) \tag{7-29}$$

显然,式(7-29)不容许 $\nu(k)$的值大于 $2\nu_0$。由此可见(正如在第145页讨论过的),这里存在着一个最大的简正模频率 $\nu_m(=2\nu_0 = \omega_0/\pi)$。此频率 ν_m 对应于波数 k_m,从而使

$$\pi k_m l = \pi/2$$

或者对应地等于 $2l$ 的波长 λ_m。不过,倘使有了这样的一行粒子,又没有什么东西会妨碍我们用**大于** ν_m 的频率去抖动它的一端,那么,事实上在这种情况下会发生什么现象呢?

为了解答这个疑问,我们现在回到描述耦合系统以某频率 ν(或 ω)振动的相邻粒子振幅的方程上来。由式(5-19)可知,三个相邻粒子振幅 A_{p-1}、A_p、A_{p+1} 之间的关系为

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p} = \frac{-\nu^2+2\nu_0^2}{\nu_0^2} \tag{7-30}$$

现在来考察一下,此式对不同的 ν 值所给出的图象如何。

(*a*) $\nu=0$。在此情形下,

$$A_p = \frac{1}{2}(A_{p-1}+A_{p+1})$$

振幅随线上的距离成线性的变化;这是简单的静力平衡的情形[图7-17(*a*)],此时线的一端被横向地拉离了正常的静止位置。有效波长是无限大。

(*b*) $\nu \ll \nu_0$。此时有

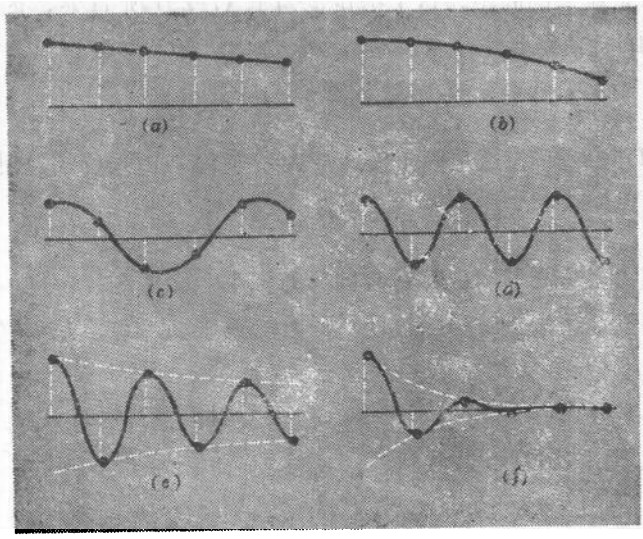


图 7-17　弦线左端受策动时各粒子振幅间的关系。（a）静力平衡，$\nu=0$。（b）$\nu \ll \nu_0$。（c）$\nu=\sqrt{2}\nu_0$。（d）最高振动模，$\nu=2\nu_0$。（e）$\nu>2\nu_0$。（f）$\nu \gg 2\nu_0$。

$$A_p > \frac{1}{2}(A_{p-1}+A_{p+1})$$

任一振幅都大于两相邻振幅的平均值，但大得不很多。结果使得连结粒子的光滑曲线，产生一个朝向轴线的微小曲率[图 7-17(b)]，从而保证了正弦式的形式。

（c）$\nu=\sqrt{2}\nu_0$。这是一个很特殊的情形。此时有

$$\frac{A_{p-1}+A_{p+1}}{A_p}=0$$

记住，此关系必须为每一三个相继的粒子组所满足，不是只适用特定的一组。这就要求有

$$A_{p+1}=-A_{p-1}$$

但对比值 A_{p-1}/A_p 却似乎没有什么要求。于是，这种情况就可能要象图 7-17(c)所示的那样了。显然，此频率所对应的波长为 $4l$，

此处 l 是粒子的间距。这个结论也为式(7-29)所肯定，因为在 $k=1/4l$ 时便得到

$$\nu=2\nu_0\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\,\nu_0$$

(*d*) $\nu=2\nu_0$。这是简正模的最大频率 ν_m。由式(7-30)便有

$$A_p=-\frac{1}{2}(A_{p-1}+A_{p+1})$$

这就要求正负交替的位移具有同样的大小，如图 7-17(*d*)所示，也是在第五章快结束时讨论过的。此时的波长是 $2l$，与式(7-29)相符。

(*e*) $\nu>2\nu_0$。假定 ν 大于 $2\nu_0$，但大得不很多。这时 A_p 与 A_{p-1} 及 A_{p+1} 的平均值反号，且

$$|A_p|<\frac{1}{2}\left|A_{p-1}+A_{p+1}\right|$$

这表明连结正负交替粒子的光滑曲线，具有**背离**轴线的微小曲率。若线的左头是受策动的，则图 7-17(*e*) 就是位移的合理表述。振幅符号交替改变，其量值按几何比例即按指数律而减小。这就是截止现象。

若使 $\nu=2\nu_0+\Delta\nu$，且让 A_{p-1}/A_p、A_p/A_{p+1} 等比值等于 $-(1+f)$，此处 f 为某个小的分数。则从式(7-30)便有

$$\frac{A_{p-1}}{A_p}+\frac{A_{p+1}}{A_p}=\frac{-\nu^2}{\nu_0^2}+2$$

因此，

$$-(1+f)-(1-f)^{-1}=\frac{-(2\nu_0+\Delta\nu)^2}{\nu_0^2}+2$$

所以，

$$-1-f-(1-f+f^2\cdots)=\frac{-[4\nu_0^2+4\nu_0\Delta\nu+(\Delta\nu)^2]}{\nu_0^2}+2$$

即

$$-2-f^2+\cdots=-2-\frac{4\Delta\nu}{\nu_0}-\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^2$$

于是近似地有

$$f=2\left(\frac{\Delta\nu}{\nu_0}\right)^{1/2}$$

可见，愈是高于临界频率 ν_m，沿线各点的振幅就衰减得愈厉害，对比一下图 7-17(*e*)及(*f*)就清楚了。

(*f*) $\nu\gg2\nu_0$。这是比临界截止频率高得很多的情形。此时可以很近乎正确地使

$$\frac{A_{p-1}}{A_p}=-\frac{\nu^2}{\nu_0^2}$$

这么一来，例如设 $\nu=2\nu_m=4\nu_0$，那就几乎等于说，只有线上受到某外来策动源激励的第一个粒子，才会显出合适的响应；而线上其馀部分则表现得几乎象个刚性的构件一样。

§7-11 机械波的能量

媒质的各个粒子在传播波的任一瞬时，都处于不同的运动状态之中。显然，媒质此时就有了它在正常静止状态下所没有的能量。这能量来自形变的势能和运动的动能。下面就来计算一下，紧张的弦线上正弦式波的一个全波长所携带的总能量。

为求解此问题，首先来考虑处在 x 及 $x+dx$ 之间的一小段弦线，它是如此之短以致实际上可看成是一段直线，如图7-18所示。现在仍作如下的通常假定：弦线中粒子的位移是严格横向的，并且弦线因偏离其正常长度和位形而产生的形变，并不改变张力 T 的量值。

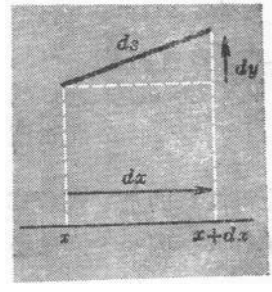


图 7-18 传送着弹性横波的一小段弦线之位移和伸长。

这一小段弦线的质量是 μdx，横向速度(u_y)为 $\partial y/\partial t$。故对这

段弦线来说，便有

$$\text{动能}=\frac{1}{2}\mu dx\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

于是对于一维媒质来说，其**单位长度**的动能——**动能密度**为

$$\text{动能密度}\equiv\frac{dK}{dx}=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \tag{7-31}$$

而势能，则在求出弦线形变时比直线时变长了多少以后，便可计算出来。用假定为恒量的张力T乘此伸长量，就可得到形变中所做之功。这样，对这段弦线来说，便有

$$\text{势能}=T(ds-dx)$$

式中

$$ds=(dx^2+dy^2)^{1/2}=dx\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2}$$

倘假定横向位移是**微小**的，则$\partial y/\partial x\ll 1$，这就可把上式近似地用二项式展开中的前两项来表示，即

$$ds-dx\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

所以，

$$\text{势能}\approx\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

因而可得

$$\text{势能密度}\equiv\frac{dU}{dx}\approx\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{7-32}$$

值得注意的是，式(7-31)及(7-32)给出的动能密度和势能密度是**相等**的。因为大家已经看到，弦线上行波的形式是

$$y(x,t)=f(x\pm vt)=f(z)\text{（譬如说）}$$

式中

$$v=\left(\frac{T}{\mu}\right)^{1/2}$$

因而

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f'(z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\pm vf'(z)$$

所以，

$$\frac{dK}{dx}=\frac{1}{2}\mu v^2[f'(z)]^2$$

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{2}T[f'(z)]^2$$

它们是相等的，因为 $T=\mu v^2$。尽管还不能认为这两个能量密度的相等，对所有可能的情形都能很好成立，但它却与大家所知道的下述一点相符，即具有线性回复力的简单力学系统之总能量，平均说来划分为相等的两部分。

现设，我们有某特定正弦式波为下式所描述：

$$y(x,t)=A\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right) \tag{7-33}$$

于是在任一给定 x 值处便有

$$u(x,t)=\frac{\partial y}{\partial t}=2\pi\nu A\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$=u_0\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

式中 $u_0(=2\pi\nu A)$ 是横向运动的最大速率。让我们来考察一下这个横向速度分布在 $t=0$ 时的情况。此时有

$$u(x)=u_0\cos\left(\frac{-2\pi\nu x}{v}\right)=u_0\cos\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right)$$

由于 $\nu/v=1/\lambda$，此式同样可以写为

$$u(x)=u_0\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

这样，动能密度便是

$$\frac{dK}{dx}=\frac{1}{2}\mu u^2=\frac{1}{2}\mu u_0^2\cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

在 $x=0$ 至 $x=\lambda$ 这段弦线中的总动能则为

$$K=\frac{1}{2}\mu u_0^2\int_0^{\lambda}\cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)dx$$

即

$$K=\frac{1}{4}(\lambda\mu)u_0^2 \tag{7-34}$$

这就是在扰动的一个全波长内所携带的动能。(你不难验证,在任何两个相距为 λ 的 x 值之间,对给定时刻的动能密度进行积分,也会得出同样的答案。)

这同一部分弦线内的势能,大家已经知道,应和动能相等。然而为明确起见,我们还是来计算一下。由式(7-33),可得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2\pi\nu A}{v}\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

于是在 $t=0$ 时就有

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{t=0}=-\frac{2\pi\nu A}{v}\cos\left(\frac{2\pi\nu x}{v}\right)=-\frac{2\pi A}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

这样,式(7-32)的势能密度便是

$$\frac{dU}{dx}=\frac{2\pi^2A^2T}{\lambda^2}\cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

在一个波长的范围内进行积分,得

$$U=\frac{\pi^2A^2T}{\lambda}$$

令 $T=\mu v^2=\mu\nu^2\lambda^2$,则有

$$U=\pi^2A^2\mu\nu^2\lambda \tag{7-35}$$

如果运用等式 $u_0=2\pi\nu A$,即可看出此式与式(7-34)给出的 K 值是相等的。

于是可写出每一个波长范围内的总能量 E:

$$E=\frac{1}{2}(\lambda\mu)u_0^2 \tag{7-36}$$

而当一段长度为 λ 的弦线，全都以波之最大横向速度 u_0 运动时，其动能便等于 E。

虽然在这计算中我们选用了正弦式的波，但对别的波形也能得到同样的结果(习题 7-23 便是一例)。

§7-12 波所输运的能量

设想有一根很长的弦线，其一端作横振动，于是就产生一正弦式波沿着弦线传播出去。上节的计算清楚表明，这过程必须有不断输入的能量才行。因为，当波把弦线上每一段新的 λ 长度投入运动时，就必须供应它由式(7-36)所表示的那么多能量。所以，在弦线一端的策动源，就必须供应它与此能量相当的功才行。下面就来看看如何证明这一点。

我们仍取上节的正弦式波动方程[式(7-33)]：

$$y(x,t)=A\sin 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

假定弦线处于 $x=0$ 处的一端，受到了策动 (图 7-19)。数量上等于张力 T 的策动力 F，应施于弦线的切线方向上，如图所示。假定

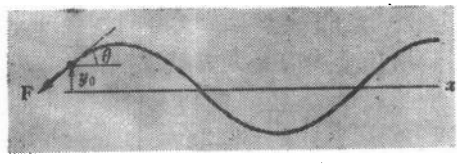


图 7-19 紧张弦线上所产生的正弦式波，及某任意时刻所施的力矢量。

端点的运动是纯横向的，其运动由下式给出：

$$y_0(t)=A\sin 2\pi\nu t$$

而 F 在此横向运动方向上的分量为

$$F_y=-T\sin\theta\approx-T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$$

由式(7-33)知

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{2\pi\nu A}{v}\cos 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

所以,

$$F_y=\frac{2\pi\nu AT}{v}\cos 2\pi\nu t$$

现在可以计算在任何给定时间内所做的功了，即对 $F_y dy_0$ 进行积分:

$$W=\int F_y dy_0=\frac{2\pi\nu AT}{v}\int\cos 2\pi\nu t d(A\sin 2\pi\nu t)$$

$$=\frac{(2\pi\nu A)^2T}{v}\int\cos^2 2\pi\nu t dt$$

由于 $2\pi\nu A$ 乃是横向运动的最大速率 u_0，故可将此式表达得更简单些。即可使

$$W=\frac{u_0^2T}{v}\int\cos^2 2\pi\nu t dt$$

对 $t=0$ 至 $t=1/\nu$ 作积分，便能算出一个全周期波的功来。于是有

$$W_{周}=\frac{u_0^2T}{2v}\int_0^{1/\nu}(1+\cos 4\pi\nu t)dt$$

但 $\cos 4\pi\nu t$ 这一项在全周内并无贡献,故有

$$W_{周}=\frac{u_0^2T}{2v\nu}\tag{7-37}$$

由于 $T=\mu v^2$ 及 $\nu=v/\lambda$,上式可以表示成另一种形式

$$W_{周}=\frac{1}{2}(\lambda\mu)u_0^2=2\pi^2\nu^2A^2\lambda\mu\tag{7-38}$$

而这恰为式(7-34)及(7-35)给出之每一波长的动能值及势能值的两倍。

单位时间内所做的功，以平均输入功率P表示，它是用式(7-37)的每周功乘以单位时间的周数ν来求出的。即

$$P=\frac{u_0^2T}{2v}=\frac{1}{2}\mu u_0^2v \tag{7-39}$$

(忆及$T=\mu v^2$)。大家看得出来，P就等于波加给弦线单位长度上的总能量$\frac{1}{2}\mu u_0^2$乘以波速v。而这里的v，至少在波抵达弦线的远端以前，可理解为单位时间内被卷入扰动的弦线长度。能量并不滞留在波源处，而是顺着弦线流走了，这样，弦线便成了把能量从一点输运至另一点的媒质，输运的速率等于波速v①。(注意，某部分弦线一旦完全卷入波动后，其平均能量便保持恒定不变了。)

§7-13 动量流和机械辐射压力

在机械波输运能量的同时，人们自然会想到也必有动量的输运。而且不免会推测，输运的能量与输运的动量之比，实际上就是波速v(这很象粒子能量对动量之比，除因子$\frac{1}{2}$外，实质上就等于粒子的速率)。然而一般说来，情况并非如此。计算波的动量，就得仔细考虑媒质的性质，其结果可能是出人意外的。譬如会得出这样的结论，完全遵从胡克定律的棒中之纵波，可能根本不传送动量。在这个意义上说，完全弹性的媒质是不存在的。这样，对真实媒质中动量流的计算，就变成一项精细的、有时是困难的工作了。

和动量流密切相关的一个问题，是波施于吸收它或反射它的物体上之机械力的问题。例如现已完全证实，气体中的纵波(声波)对其路径上的物面施有压力，这种压力的存在必然与波所输运的动量有关。在这个特殊的情形里，波对物面所施之力，在数量级上

① 此处假定无色散。若是色散媒质，那就变成：是群速度表征着输运能量的速度。

确实为能流率除以波速——电磁波也正好是这种关系。然而应该再次强调，确切的结果取决于所采用的媒质的状态方程，即描述胁强随密度变化的方程。动量流以及随之而来的纵向力之存在，实质上是由运动方程的非线性所决定的，而严格的正弦式波的解并不适合这些方程。这问题超出了目前的讨论范围，所以就不再多说了①。

§7-14 二维及三维波

在第六章里，所介绍的系统简正模的几个例子，实质上都是二维的——肥皂膜和薄平板。最简单的情形是受均匀张力S作用的薄膜（事实上肥皂膜就是个好的例子），而S便是在膜平面内垂直作用于任一直线单位长度上的张力。若在膜平面内引入直角坐标x, y，并以第三个坐标z来描述横向位移，那么正如我们所看到的，能得出如下的波动方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{7-40}$$

而波速v则由下式给出：

$$v^2=\frac{S}{\sigma}$$

式中σ为薄膜的面密度，即单位面积的质量。

倘若此系统是矩形对称的，那么立即可以对它应用式(7-40)，并得到直线形波的解，其形式为

$$z(x, y, t)=f(\alpha x+\beta y-vt)$$

在具有矩形边界的系统里，这些波的适当叠加则相当于图 6-11 所

① 对于波之动量及压力的较充分讨论，请参看 R. T. Beyer 的论文《Radiation Pressure in a Sound Wave（声波中的幅射压）》，载 1950 年 Am. J. Phys.（美国物理杂志）第 18 卷第 25 页；以及 R. B. Lindsay 的书《Mechanical Radiation（机械辐射）》，1960 年纽约 McGraw-Hill 版。

示出的那些简正模。

另一方面，如果系统固有的对称性是圆形，譬如使薄膜的一个点作横向运动所产生的波就可能是这样的情形，那么最好引用平面极坐标 r、θ 来代替 x 及 y。我们来研究完全对称的情形，这时位移 z 在给定 r 值后与 θ 无关。这样，式(7-40)就变成了如下的形式：

$$(\text{圆柱对称})\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{7-41}$$

此方程的解所表述的行波，具有向外扩展的圆形波阵面。大抵从直觉上便能看出，振动的振幅是随着 r 的增加而减小的，因为扰动乃是从半径增大着的圆周上发散出去的。求得的精确解是用特殊函数，即贝塞耳(Bessel)函数来表示的。在 r 足够大的时候，式(7-41)左方①的第二项与第一项相比，几乎可以略去不计，那么，方程在某种近似下，便回复到振幅恒定的平直波阵面方程了。(更确切地说，振幅近似地随 $1/\sqrt{r}$ 而减小。)这当然与人们的印象相符，因为在距离圆形波的原点非常远的地方，人们只会看到波阵面的一小部分周界。

最后，我们也能对三维媒质，诸如一块弹性固体或没有管道限制的空气，建立起波动方程。这正是第六章中应用过的：

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{7-42}$$

式中的 Ψ 为某个变量，比如某处的压力值。此式左方诸导数算符的组合，名曰拉普拉斯算符(是以 P. S. de Laplace 的姓来命名的，他跟拉格朗日是相近的同时代人)，并以一个特定的符号 ∇^2 表记(读作"del 平方")。于是可将式(7-42)改写为另一种形式

$$\nabla^2 \Psi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \tag{7-43}$$

和二维媒质的情形一样，如果系统具有矩形对称性，那就适于找波

① 原文误为右方——译者注。

动方程的平面波解:

$$\Psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt)$$

但是另一方面,如果说的是球对称,正象地下深处发生一次小爆炸所产生的波那样,我们就引用半径 r 及两个角度来规定一点的位置。对于系统中波的振幅仅与 r 有关的情形,微分方程则退化成

$$(\text{球对称})\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{7-44}$$

不难证明,简谐波是满足这个方程的,波的振幅随 r 成反比地减小,即

$$\Psi(r, t) = \frac{C}{r}\sin 2\pi(\nu t - kr) \tag{7-45}$$

大家记得,一维波的能流正比于振幅的平方,于是从式(7-45)可以看出,$[\Psi(r, t)]^2$ 对时间的平均值乘以半径为 r 的球面积 $4\pi r^2$,即得与产生波之点源的距离无关的能量流出率。这在无耗散或吸收的情形下,正是人们所期待的答案。

习　题

7-1　试证明下列诸方程均能用来描述同一个前进波:

$$y = A\sin 2\pi(x - vt)/\lambda$$

$$y = A\sin 2\pi(kx - vt)$$

$$y = A\sin 2\pi[(x/\lambda) - (t/T)]$$

$$y = -A\sin\omega(t - x/v)$$

$$y = A\mathrm{Im}\{\exp[j2\pi(kx - vt)]\}$$

7-2　在弦线上行进着的横波,其方程为 $y = 0.3\sin\pi(0.5x - 50t)$,式中 y 及 x 的单位是 cm,t 为 s。

(*a*) 试求波的振幅、波长、波数、频率、周期及速度。

(*b*) 试求弦线中任一粒子的最大横向速率。

7-3　沿负 x 方向行进的纵波,振幅为 0.003m,频率为 $5s^{-1}$,波速为3000 m/s。其方程如何?

7-4　一波的频率为 $20s^{-1}$，波速为 80m/s。

(*a*) 位移在周相上相差 30° 的两个点，相距有多远？

(*b*) 在一给定点处，时间相隔 0.01s 的两位移之周相差为何？

7-5　一根均匀的长弦线，质量密度是 0.1kg/m，被 50N 的力所拉紧。弦线的一端($x=0$)作横向的正弦式振动，其振幅为 0.02m，周期为 0.1s，从而在 $+x$ 方向建立了行波。

(*a*) 速度多大？

(*b*) 波长多大？

(*c*) 若策动端($x=0$)在 $t=0$ 时的位移 y 为 0.01m，且 dy/dt 为负，则行波的方程如何？

7-6　现观察到，一脉冲从长弦线的一端行进至另一端，需要 0.1s。弦线跨过一滑轮后悬一重物给弦线提供张力，重物的质量为弦线的 100 倍。

(*a*) 弦线的长度为多少？

(*b*) 第三简正模的方程为何？

7-7　在张力和单位长度的质量均与 7-6 题相同的一根很长的弦线上，建立了下列方程所描述的行波：

$$y(x,t)=0.02\sin\pi(x-vt)$$

式中 x 及 y 的单位是 m，t 是 s，v 是波速(这你能算出来)。试求弦线上 $x=5$m 处的一点在 $t=0.1$s 时的横向位移和速度。

7-8　现观察弦线上行波通过的两个点。它们位于 $x_1=0$ 及 $x_2=1$m 处。发现两点的横向运动如下：

$$y_1=0.2\sin 3\pi t$$

$$y_2=0.2\sin(3\pi t+\pi/8)$$

(*a*) 频率是多少 Hz？

(*b*) 波长为多少？

(*c*) 波行进的速率是多少？

(*d*) 波行进的方式如何？说明你的理由。

(**当心**！仔细考虑一下所给的有限信息，看看是否有含糊不清的地方。)

7-9　一个对称的三角形脉冲在弦线上沿正 x 方向运动着，其最大高度为 0.4m，全长为 1.0m，波速为 24m/s。在 $t=0$ 时，整个脉冲位于 $x=0$ 至 $x=1$m 之间。画出 $x=x_2=+1$m 处横向速度对时间的标绘图。

7-10　使紧张弦线的一端($x=0$)作横向运动，从 $t=0$ 开始以 0.5m/s 的

恒速运动了 0.1s，然后仍以恒速在下一个 0.1s 内返回到正常的位置。这样造成的脉冲波以 4m/s 的速率运动着。

(*a*) 画出 $t=0.4$s 及 $t=0.5$s 时弦线的形状图。

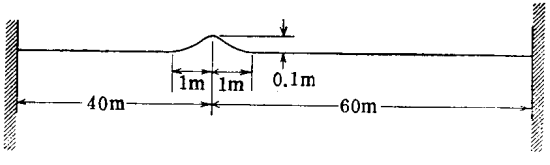
(*b*) 画出 $t=0.4$s 时横向速度对 x 的标绘图。

7-11 设一个行进着的脉冲波为下式所描述：

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(x-vt)^2}$$

其中 $b=5$cm，$v=2.5$cm/s。画出此脉冲在 $t=0$ 及 $t=0.2$s 时的轮廓。把两曲线的纵坐标直接相减，便得出了 $t=0.1$s 时横向速度为 x 之函数的相应的图象。将此图形，与计算任意 t 的 $\partial y/\partial t$ 在 $t=0.1$s 所得的结果进行比较。

7-12 如图所示，在两端固定而长度为 100m 的弦线上，有一脉冲。它以 40m/s 的速率向右行进，且保持着形状不变。



(*a*) 试作一清晰图形，表明脉冲处于图示的位置时，弦线的横向速度是如何随弦线的距离而变的。

(*b*) 弦线的最大横向速度是多少(近似地)？

(*c*) 若弦线的总质量是 2kg，则弦线中的张力是多少？

(*d*) 在同样材料并受同样张力作用的一根很长的弦线上，向左(即在负 x 方向上)行进着振幅为 0.2m、波长为 5m 的正弦式波，试用数字的形式写出描述此波的方程 $y(x,t)$。

7-13 行进在紧张弦线上的一个脉冲，由下式所描述：

$$y(x,t)=\frac{b^3}{b^2+(2x-ut)^2}$$

(*a*) 画出 $t=0$ 时 y 对 x 的标绘图。

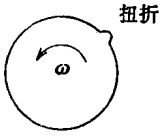
(*b*) 脉冲行进的速率及方向如何？

(*c*) 弦线上一给定点之横向速度为

$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}$$

试算出 $t=0$ 时作为 x 之函数的 v_y，且作图示出脉冲在 Δt 的短时间内是如

何运动的。

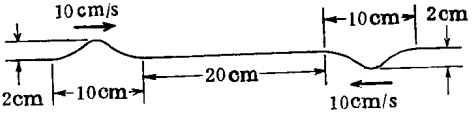


7-14　用均匀弦线做成的一个闭合曲线，以恒定的角速度 ω 迅速地旋转。弦线的质量为 M，半径为 R。旋转的结果使得在弦线里形成了张力 T。

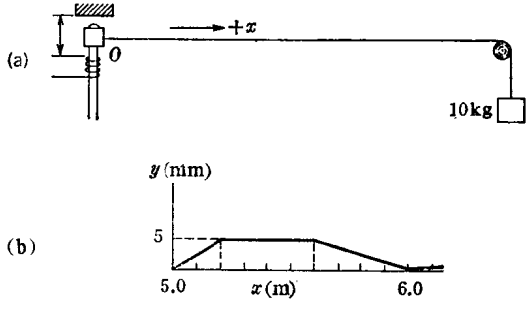
( ) 试考虑一小段弦线的瞬时向心加速度，从而证明张力应等于 $M\omega^2R/2\pi$。

(*b*) 弦线的某点突然遭受形变，造成了一个如图所示的扭折。试证：这可使弦线产生一个相对于实验室保持静止的畸变，而不论 M、ω、R 的特定值如何。然而，这是全部的情节吗？(记住，弦线上的脉冲可沿两条路行进。)

7-15　两个相同的脉冲，振幅相等但相反，在弦线上传播时互相逼近着。它们在 $t=0$ 时的情形，示于图中。试**用缩尺按比例**画出 $t=1$s、$t=1.5$s、$t=2$s 时，弦线的轮廓以及弦线各质量元的速度轮廓图。



7-16　现欲研究磁性启动开关之活动接触片，其运动实际是快速的竖直运动。为此，将触片系于水平钓丝的一端 O，丝的总质量为 $5g(5\times10^{-3}\text{kg})$，全长 12.5m。丝的另一端跨过一个小而实际无摩擦的滑轮后，下悬质量为 10 kg 的物体，如图所示。触片被驱动了，使原来断开的开关进入接通的位置，并在短时间内保持接通，然后再断开。稍隔一会儿，对弦线进行了快速闪光照相，发现它在 5m 和 6m 之间发生了形变，如图所示($x=0$ 乃是弦线系住触片的 O 点)。



(*a*) 开关**完全接通**的时间有多久？

(*b*) 画出触片的位移**作为时间之函数**的标绘图，取 $t=0$ 为触片第一次开始运动的时刻。

(*c*) 触片的最大速率为多少？它出现在开关接通的时候或断开的时候吗？

(*d*) 拍照时的 t 值为何？

(设 $g=10\text{m/s}^2$。)

7-17 下述两波在媒质中进行了叠加：

$$y_1=A\sin(5x-10t)$$

$$y_2=A\sin(4x-9t)$$

式中 x 的单位是 m，t 为 s。

(*a*) 写出合成扰动的方程。

(*b*) 其群速度为何？

(*c*) 合成扰动中，振幅为零的相邻点之间的距离为多大？

7-18 水上短波长($\lesssim$1cm)的涟波运动，是受表面张力控制的。这种涟波的相速度为

$$v_p=\left(\frac{2\pi S}{\rho\lambda}\right)^{1/2}$$

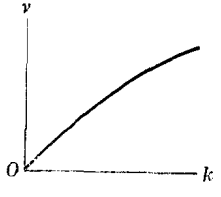
式中 S 为表面张力，ρ 为水的密度。

(*a*) 试证：由接近某给定波长 λ 的诸波长所构成的扰动，其群速度等于 $3v_p/2$。

(*b*) 对观察到的行进在水面上的涟波群之运动，这意味着什么？

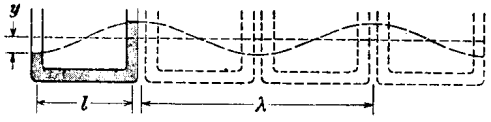
(*c*) 若波群只由两个波组成，波长为 0.99cm 及 1.01cm，则波群峰值间的距离是多少？

7-19 在某媒质中，波的频率 ν 与波数 k 的关系，如图所示。试在所示范围内，对任一波长之群速度和相速度的相对量值，作出定性的说明，并阐明根据是什么。



7-20 试考察横截面积均匀、具有两竖直臂的U形管。令液柱的总长度为 l。设想液体来回振动着，因而在任一瞬时，两臂中的液面相对于平衡位置液面的距离为 $\pm y$，且全部液体具有 dy/dt 的速率。

(*a*) 写出液体势能加动能的表达式，从而证明振动周期为 $\pi\sqrt{2l/g}$。



(*b*) 设想可以用一系列这样的管子，来定出水波的一系列的峰和谷(见图)。取用(*a*)的结果和这种类比所暗示的条件 $\lambda \approx 2l$，导出水上的波速大致如 $(g\lambda)^{1/2}/\pi$。(假定U形管竖直臂中只有液体的一小部分。)

(*c*) 运用精确的答案 $v=(g\lambda/2\pi)^{1/2}$，计算海洋中波长为 500m 的波的速率。

7-21 试考虑有着 N 个耦合振子的系统($N \gg 1$)，相邻振子的间距为 l。

(*a*) 求第 n 种振动模的波长及频率。

(*b*) 求此振动模的相速度及群速度。它们在 $n \ll N$ 及 $n=N+1$ 时各为何？

7-22 你所接受的课题是，对运行在单线公路上的一行汽车之动力学作出分析。对此课题的一种想法是，假定这行汽车的品性就象一群耦合振子。你将如何以容易处理的方法来处理这个问题？可以作出一些假定。

7-23 使紧张弦线的一端在时间 τ 内以恒速 u_y 作横向运动，又以 $-u_y$ 的速度在下一个 τ 内回到了出发点。结果在弦线上形成了一个三角形脉冲，并以速率 v 沿弦线运动。计算此脉冲所携带的动能和势能，且证明它们之和等于施于弦线一端的横向力所做之总功。

7-24 试考虑一正弦式纵波 $\xi=\xi_0\cos 2\pi k(x-vt)$，行进在质量密度为 ρ、横截面积为 S、杨氏模量为 Y 的棒中。若棒内的胁强仅由波所引起，试证：动能密度为 $\frac{1}{2}\rho S(\partial\xi/\partial t)^2$，势能密度为 $\frac{1}{2}YS(\partial\xi/\partial x)^2$。从而证明，每个波长内的动能以及每个波长内的势能，均等于 $\frac{1}{4}(\rho S\lambda)u_0^2$，式中 u_0 是粒子速度 $(\partial\xi/\partial t)$ 的最大值。

7-25 证明：球对称波的波动方程[式(7-44)]，可为振幅随 r 反比减小的简谐波所满足。

"我们在这章中，将看到各种声音是如何吵闹和搏斗的，而当它们的力量相当，就相互消灭掉，而归于沉寂。"

R. Ball: 《*Wonders of Acoustics*（声学奇观）》(1867 年)

第八章　边界效应和干涉

上一章讨论的波，可以被设想为无阻挡地行进在具体的媒质中。本章主要讨论，当行波遇到障栏，即不同的媒质或者小障碍物时，所发生的某些效应。这些效应有着广阔的研究领域，而我们所介绍的，只不过是对这些现象分析的初步一瞥而已。下面仍从我们的老伙伴即紧张的弦线开始，来考察一下弦线上的行波在遇到某种不连续性时，会发生什么情况。

§8-1　脉冲波的反射

在讨论紧张弦线上驻波和行波之间的关联时，我们一定要考察存在于有限长度弦线两端的条件。经验告诉我们，摇动弦线的一端所产生的行波，在远端处经历某种反射过程后，便能建立起驻波。出去的波和回来的波，共同产生出在一些固定位置为波节的驻波图样。

更定量一些，可以看出，两端固定的弦线上某一简正模，可以看成是由两个相同振幅、波长和频率，且按相反方向行进着的正弦波，叠加而成的。具体来讲，我们注意到下列的两种陈述，在数学上是等价的：

简正模：

$$y(x,t)=A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\omega t$$

两行波：

$$y(x,t)=\frac{A}{2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}-\omega t\right)+\frac{A}{2}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}+\omega t\right)$$

如果运用第二种陈述，并专门留意 $x=0$ 或 $x=L$ 处的条件，那么就有

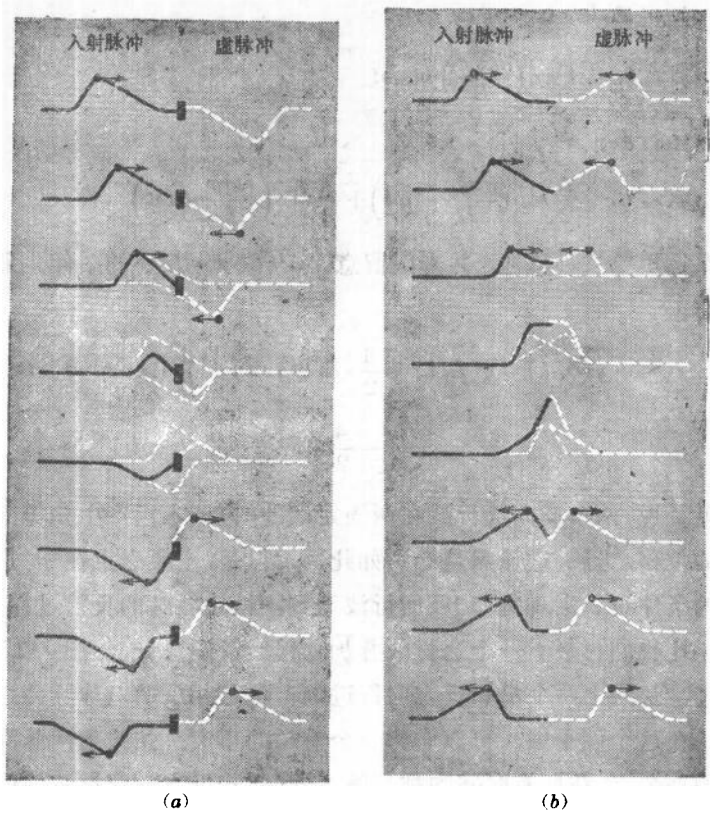
$$y(0,t)=y(L,t)=\frac{A}{2}\sin(-\omega t)+\frac{A}{2}\sin\omega t$$

$$=-\frac{A}{2}\sin\omega t+\frac{A}{2}\sin\omega t$$

这就是说，两个反向的行波在两固定端处，应该永远产生相等而相反的位移，当然，这显然是必须如此的。但是，主要之点在于，这同样的条件也一定规定着，任何行波遇到刚性边界时的反射过程。

让我们再来看一个这样的叠加过程。我们曾结合图 7-15 讨论过，弦线上两个沿相反方向行进的、位移相反的对称脉冲之叠加。在这个例子里，可以看到一个有趣的事实：弦线上两脉冲相遇的那个点，在所有时间内都是静止的！按相反方向穿过弦线的这两个波，任何时候都不在该点造成位移。倘使把该点看作是固定在墙上的，这对于波的图样并无丝毫影响。循此思路便可看出，当一脉冲波入射到弦线的固定端时，将会发生：从这端点反射出一个位移相反的脉冲，又朝着波源传了回去。

这种倒转过来的反射现象，并不那么不可思议，只要考虑到，正位移的到来会对维持该端固定的支撑物，施一向上的作用力（见图 8-1）。依据牛顿第三定律，支撑物便反过来对弦线施一方向相反的反作用力，从而便产生一个极性**相反**的脉冲，向着波源传播回去。



(*a*) (*b*)

图 8-1 (*a*) 固定端的反射。(*b*) 自由端的反射。在考虑反射时，可以设想弦线好像是超过其真实终端而无限延伸一样。可以认为脉冲是继续进入到弦线的假想部分，就象那儿没有支撑物一样；与此同时，一个在弦线假想部分内行进的"虚"脉冲，现在却进入到真实弦线上来而构成了反射脉冲。反射脉冲的特性，取决于该端是固定的还是自由的。[图形是根据 F. W. Sears 及 M. W. Zemansky 所著《University Physics (大学物理)》第三版第一卷 (1963 年麻省里丁城 Addison-Wesley 版)改画的。]

倘若弦线的端头完全可以自由运动 (比如给它系上一个无质量的环，并把环套在一根无摩擦的竖直棒上①)，则正脉冲的到来，

① 获得"自由"端的另一办法，是给它系上一段质量非常微小的弦线。

便会反过来对弦线施一向上的反作用力，从而产生出一个正极性的脉冲。这个正脉冲于是就顺着弦线往回传。这样，“自由”端的反射便产生出一个极性**相同**的脉冲，向着波源传去。

如果把具有一定张力和单位长度质量的一根弦线，与另一根不同 μ 的弦线连结起来，那么一般说来，在不连续处便要发生某种反射及某种透射。定量地来看这个过程，可设想具有 $f_1(t-x/v_1)$ 形式的脉冲在线密度为 μ_1 的一根紧张弦线上运动着，而这弦线在 $x=0$ 处与线密度为 μ_2 的另一根弦线相连（图 8-2）①。假定在连结处发生了部分反射和部分透射，则两弦线中的横向位移便可设想由下列两方程给出：

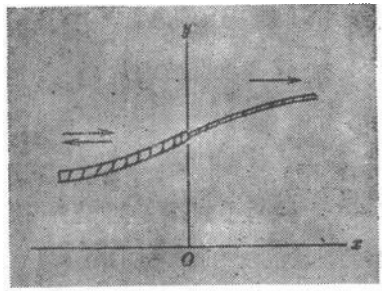


图 8-2　在不同弦线的连结处之反射和透射。

$$y_1(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)+g_1\left(t+\frac{x}{v_1}\right)^{②}$$
$$y_2(x,t)=f_2\left(t-\frac{x}{v_2}\right) \tag{8-1}$$

由于两弦线的一端是相互连结着的，故两弦线在 $x=0$ 这点的横向位移应该相同。不仅如此，两弦线在每一时刻都应以相同的斜率

① 在这个问题的分析中，把脉冲写成 $f(t-x/v)$ 的形式，来代替常用的 $f(x-vt)$ 的形式更为合适，这主要是因为波从一种媒质过渡到另一媒质时，波长要发生改变而频率则不变。所以，我们把变化的因子不与 t 而与坐标 x 放在一起。

② 原文误为 $g\left(t+\frac{x}{v_1}\right)$。本节最后两式也同此。——译者注。

相连结并具有相同的张力，否则连结处的质量元就要赋予很大的加速度了。于是有下列的两个条件:

$$y_1(0,t)=y_2(0,t)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial y_2}{\partial x}(0,t)$$

即

$$f_1(t)+g_1(t)=f_2(t) \tag{8-2}$$

$$\frac{1}{v_1}f_1'(t)-\frac{1}{v_1}g_1'(t)=\frac{1}{v_2}f_2'(t) \tag{8-3}$$

对式(8-3)进行积分，便有

$$v_2f_1(t)-v_2g_1(t)=v_1f_2(t) \tag{8-4}$$

从式(8-2)及(8-4)解出以 f_1 表示的 g_1 及 f_2，得

$$\begin{aligned} g_1(t)&=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}f_1(t)\\ f_2(t)&=\frac{2v_2}{v_2+v_1}f_1(t)\end{aligned} \tag{8-5}$$

由此看来，式(8-5)的两个式子，只是描述了任意 t 值时在 $x=0$ 处的情况。然而，我们现在就来引出一个有几分巧妙而又极为重要的推论。式(8-5)所表达的，乃是有着同样幅角值的 f_1、g_1、f_2 诸值之间的关系。对此幅角的任何给定值，比如对 τ 来说，那就有 $g_1(\tau)=$常数$\times f_1(\tau)$，以及 $f_2(\tau)=$常数$\times f_1(\tau)$。可是，决不要把 τ 仅仅解释为 $x=0$ 处的 t 值。它可以用来规定所有其他的 x 及 t 值，而 x 和 t，乃是根据能对给定行波作出基本说明所需要的方式联系在一起的。因此，函数 f_1 才被**规定**为幅角 $t-x/v_1$ 的函数，函数 g_1 被**规定**为幅角 $t+x/v_1$ 的函数。现在按照式(8-5)的要求，这两个幅角应假定等于同样的 τ 值。我们显然不能用同样的一对 x 和 t 值，故分别以 x_f、t_f 和 x_g、t_g 来标记。于是有

$$\tau=t_f-\frac{x_f}{v_1}=t_g+\frac{x_g}{v_1}$$

若使 $t_f=t_g=t$，则必有

$$x_g=-x_f$$

而这就意味着，在任何给定的时刻，任何给定的 x 值处之脉冲 g_1 所具有的位移，直接与 f_1 于同一时刻在 $-x$ 位置处所算出的值相关。具体地说，根据式(8-5)的第一式便有

$$g_1\left(t+\frac{-x}{v_1}\right)=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right) \tag{8-6a}$$

这说明，反射脉冲除量值按因子 $(v_2-v_1)/(v_2+v_1)$ 下降以外，其方向相对于入射脉冲而言，乃是左右颠倒的。而倘若 $v_2<v_1$，那它又是上下颠倒的。

同样，也可以把透射波形 f_2 与入射波形 f_1 联系起来。在给定 t 值时，相应的诸 x 值(称之为 x_1 及 x_2)由下列关系所规定：

$$\tau=t-\frac{x_1}{v_1}=t-\frac{x_2}{v_2}$$

因此 $x_2=(v_2/v_1)x_1$，而式(8-5)的第二式则要求满足

$$f_2\left(t-\frac{v_2x/v_1}{v_2}\right)=\frac{2v_2}{v_2+v_1}f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right) \tag{8-6b}$$

这就告诉我们，和入射脉冲相比，透射脉冲不仅高度改变，而且沿 x 轴的尺度也改变了。

应该注意，在应用上述关系时，倘若脉冲 f_1 是从负 x 方向入射的，且连结点在 $x=0$ 处，那么，函数 f_1 及 g_1 只有当 $x\leqslant 0$ 时才代表物理上的真实位移，而 f_2 则只有在 $x\geqslant 0$ 时才代表物理上的真实位移。例如，当运用式(8-6a)去求反射脉冲 g_1 在某个负 x 值处的真实位移时，那就要考虑入射脉冲 f_1 若是继续进入到正 x 的区域所会发生的位移，再将此位移乘以因式 $(v_2-v_1)/(v_2+v_1)$ 就行了。图 8-3 示出了在 $v_2=v_1/2$ 的特殊情形下，由某入射脉冲产生的反射和透射脉冲的发展过程。

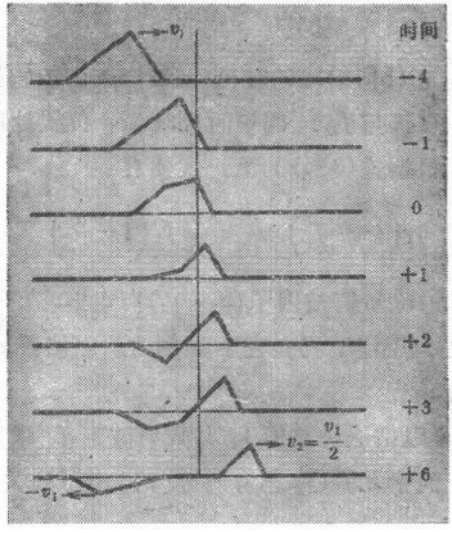


图 8-3　三角形脉冲波在两弦线连结处的部分反射和部分透射。脉冲是从具有较高波速的弦线入射的。$\left(v_2=\frac{1}{2}v_1。\right)$

下面是式(8-6a)的两种极端情形:

a. 弦线 2 有着无限大的质量:

$$v_2=0$$

$$g_1\left(t+\frac{-x}{v_1}\right)=-f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$$

b. 弦线 2 无质量或者不存在:

$$v_2=\infty$$

$$g_1\left(t+\frac{-x}{v_1}\right)=f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)$$

它们就是图 8-1 所示的两种情形。图 8-4 示出了在紧张弹簧上行进的脉冲,产生反射和透射的几个实例。

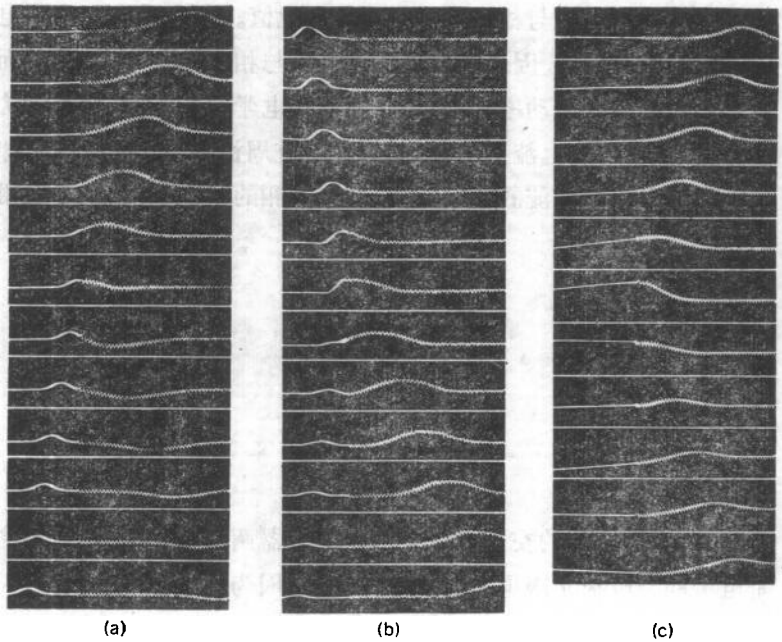


图 8-4　脉冲遇到两种媒质交界时的照片。（a）脉冲从轻的弹簧（右）传至重的弹簧。在连结处，脉冲部分被透射和部分被反射。可以看出反射脉冲是上下颠倒了的。（b）脉冲从重的弹簧（左）传至轻的弹簧。在连结处，脉冲部分被透射和部分被反射。反射脉冲仍然是朝上的。（c）弹簧上的脉冲在和很轻的线连结处的反射。整个脉冲仍是朝上地返回来。照片上的模糊不清，表明在脉冲通过时，线上的粒子处于高速的运动之中。你能确定出每一画面中这种运动的方向吗？［照片引自 *PSSC*（美国物理科学研究会）：《*Physics*（物理学）》（1965 年波士顿 Heath 版）。］

§8-2　阻抗；无反射端①

若对受策动力作用的物理系统引入**力阻抗**的概念，那么上节所讨论的那种特性，就能够以非常清晰的方式来论述了。这种阻

① 略去此节并不影响连贯性。（但此节并不难，可能还很有好处，会使你对基本电路元件的性质有所了解。）

抗被定义为策动力与相应的运动速度之比值。可以看出，它跟电阻的概念极为相象，因为电阻是所加电压与相应的电流之比值（而电流即是电荷的流动率）。但力学系统与电学系统一样，在策动力和速度（或电压和电流）之间，一般说是有周相差的。而欧姆定律所表达的电压和电流的关系，却总是同周相的。例如，若加于电阻器两端的电压为

$$V=V_0\cos\omega t$$

则形成的电流便是

$$I=I_0\cos\omega t$$

式中

$$I_0=\frac{V_0}{R}$$

可是，如果这同样的交变电压是加在电容器两极板上的，那就不会是电流而是电荷 q 跟电压同周相了，这是因为

$$q=CV$$

$$I=\frac{dq}{dt}$$

故若

$$V=V_0\cos\omega t$$

则有

$$I=-\omega CV_0\sin\omega t$$

即

$$I=I_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$$

式中

$$I_0=\omega CV_0$$

因此，在这一情形下，V 和 I 有着 90° 的周相差。倘将电阻器与电容器串联起来，并把电压跨接于该组合的两端，则周相差既不为

0° 也不是 90°。因此，在这些更为一般的情形里，策动电压对电流的比值就同时包含了量值和周相，而具体说明这两个项目的量，便叫做系统的**阻抗**。大家会记得，在有阻尼的力学振子中(第四章)，策动力与位移的关系也完全有同样的特征，并且正如那时已表明的，采用复数来表示振幅及周相关系，乃是一种简明而又经济的办法。其实，习惯上就是用单个复数 Z 来表征阻抗，用复指数来表示电压和电流的。这样，为了定出电容器的阻抗，就要使

$$V=V_0e^{j\omega t}$$

$$q=CV_0e^{j\omega t}$$

$$I=\frac{dq}{dt}=j\omega CV_0e^{j\omega t}=j\omega CV$$

因此

$$Z_C=\frac{V}{I}=\frac{1}{j\omega C}$$

现在回到弦线上行波的问题上来，首先考察一下对某点施以横向策动力而产生这种波的情形。假定弦线处于该点的右侧，则所产生波的形式为

$$y(x,t)=f(t-x/v)$$

于是有

$$v_y=\frac{\partial y}{\partial t}=f'\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$F_y=-T\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{T}{v}f'\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

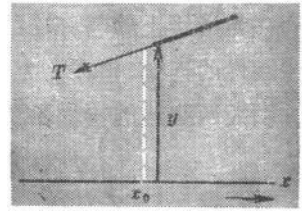


图 8-5　紧张弦线受策动的一端之情况。

(注意，作用于弦线的力，乃是 $T\partial y/\partial x$ 的负值，见图 8-5。)

这样，阻抗 Z 便由下式所定义：

$$Z=\frac{F_y}{v_y}=\frac{T}{v} \tag{8-7}$$

由于 $v=\sqrt{T/\mu}$，因而以张力和线密度的术语来称呼弦线的特性

阻抗，对我们来说是一样的，其公式为

$$Z=(T\mu)^{1/2} \tag{8-8}$$

这是个纯实数的量；策动力和速度总是彼此同相的，用电学的术语来说，这种阻抗是纯（电）阻性的。

现在使用这同样的语言，来考察两种不同弦线连结处的情况。和先前一样，仍选 $x=0$ 处为连结点，并假定波是从弦线 1 沿着负 x 方向入射的。因此，式(8-1)仍是所期待之解的形式：

$$y_1(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v_1}\right)+g_1\left(t+\frac{x}{v_1}\right)$$

$$y_2(x,t)=f_2\left(t-\frac{x}{v_2}\right)$$

而在 $x=0$ 处就要求

$$\begin{aligned} v_y&=f_1'(t)+g_1'(t)=f_2'(t)\\ F_y&=\frac{T_1}{v_1}f_1'(t)-\frac{T_1}{v_1}g_1'(t)=\frac{T_2}{v_2}f_2'(t)\end{aligned} \tag{8-9}$$

（在第二个方程中，我们仅要求两**横向**力应当一样。例如，可以设想两张力 T_1、T_2 具有不同的量值，如果两根紧张的弦线是经由一个套在光滑棒上的圆环连结起来的，这对 x 方向的位移来说，将呈现为刚性的连结，但在 y 方向上却并无阻滞。）

引入两弦线的特性阻抗 Z_1、Z_2，于是便有下列的两个条件：

$$f_1'(t)+g_1'(t)=f_2'(t)$$

$$Z_1f_1'(t)-Z_1g_1'(t)=Z_2f_2'(t)$$

由此两式我们能够得到恰似式(8-5)及(8-6)一样的结果，只是现在有

$$\begin{aligned} g_1(0,t)&=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}f_1(0,t)\\ f_2(0,t)&=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}f_1(0,t)\end{aligned} \tag{8-10}$$

大家看到，用现在的话来说，当行波遇到连结处的时候，其反

射量的多寡全由连结处所呈现的特性阻抗来决定。当然，并不一定非是另一根弦线不可，凡由一定的 F_y/v_y 值所表征的其他任何东西都行。从式(8-10)还可看出前面讨论过的两条结论：(1) 阻抗 Z_2 为无限大时，便得到 $g_1(0,t)=-f_1(0,t)$，(2) 阻抗 Z_2 为零时，就得出 $g_1(0,t)=+f_1(0,t)$。

下面我们就来考察一下**零反射**的可能性。依式(8-10)的第一方程可知，这发生在 $Z_2=Z_1$ 的时候。满足这一点的途径之一，是采用另一根恰好具有同样张力和线密度的弦线，当然这就根本无需连结了。另一种办法[式(8-8)]是，第二根弦线虽有不同的张力和线密度，但却满足 $T_2\mu_2=T_1\mu_1$。**然而还有第三个办法，这就是把第一根弦线的端头浸入具有适当稠度的油箱中**。因为大家对粘滞阻力的定律是很熟悉的，在低速的情形下，由该定律得出此力是与速度成正比的，而这正是我们根据式(8-7)所表述的基本定义去规定一个恒定阻抗时，所需要的定律。当然，单有这样的正比关系是不够的；F/v 的实际值还必须等于弦线之 $\sqrt{T\mu}$ 值才行。但无论如何，弦线在此便有了理想端头的可能性。在弦线上沿着一个方向行进的波，进入到油箱中就消失了。用这样的办法来终止弦线，就可以使弦线表现得犹似无限长一样；人们就说，这油箱所体现的负载是与弦线完全匹配的。前进波运送至弦线末端的全部能量，统统在这儿被接住并吸收掉了。很明显，这与从电源把电能尽可能有效地输送给负载的问题，是类似的，而正确的阻抗匹配这件事，在实用上当然十分重要——这是能够联系到简单紧张弦线的特性上来的问题之普遍存在又一例证。

最后谈一下连结的问题。从一种媒质完全突然地过渡到另一种媒质，这样的事情是没有的。过渡总是发生在某段非零的、哪怕只有一个原子直径大小的距离之内。前面所作的种种计算，仅当过渡区的长度甚小于波长的时候，才是对情况的很好描述。但如

果波长足够短，或者过渡足够地缓慢，那就不会有可以感知的反射量了。极端的情形是，设想某些性质沿着弦线完全均匀地变化。例如，图5-1所示竖直悬挂的均匀弦线，其μ为恒量但T则随离开底端向上的距离而线性地增大；或者是一根均匀变细的弦线，但其张力则处处一样。这时就不存在适合式(8-1)或(8-9)的那种不连续了。入射波就象是被牵着鼻子似的，一往直前。其波长均匀地改变着，因而入射波能够在与先前大不相同的条件下，从远端射出。这种周密的渐变系统，经常用于声波和电波的传播中。

§8-3 纵波与横波的对比；偏振

此刻来对波扰动的基本类型——我们在研究一维波传播中所碰到的横波与纵波——作一简要的说明，看来是适时的。

紧张的弦线，实质上是横波的运载者。而长的**弹簧**，则既能载运横扰动又能载运纵扰动。从这个意义上来说，弹簧更类似于真实的固体，因为固体也能够载运横(切变)波和纵(压缩)波。液柱或气柱则与固体大不一样，它们在改变形状时并没有弹性阻力，而只在改变密度时才有。所以，流体(比如空气)柱，只能载运纵波，除非(而这是一种很重要的例外)重力或表面张力，对横向形变提供了事实上的弹性回复力，才不如此。

对横波来说，我们需要看到振动可以具有两种不同的偏振方向，它们互相垂直又都与传播的方向垂直。这些不同的偏振状态甚至可以具有与其相应的不同的波速，例如在晶体媒质里，原子在一个方向上的间距比另一方向更为稠密些，就是这样的情形。由此可见，在各向异性晶体的某给定方向上，就可以有三种不同的波速，一个是纵波的，另外两个则分别是不同方向上的横偏振波。

在考察任何一种一维波遇到边界或障栏的情形时，前两节所

展示的结果对此已有描述。然而值得指出的是，一种给定的分界面，对于纵波和横波来说，却可能有着不同的作用。例如，假定在具有光滑竖直壁的桶内盛着水。那么水和桶壁之间的分界面，对纵波而言则几乎成了完全刚性的边界，但对横波来说，却是完全自由的边界。因此，若是建立起驻波，那么桶壁对水的纵振动乃是波节，而对横振动则是波腹。

§8-4 二维波

我们现在要结束纯一维问题的讨论了，以便对大多数情形下至少需要二维空间才能显现出来的现象，例如表面波，进行某些研究。这些现象，包括行波方向的改变现象，或来自不同方向的扰动抵达某点时的叠加现象。其实，在三维波的传播中也同样会产生这些现象，只是二维的情形较容易考虑些，并且也体现了大多数的重要概念。

从根本上说，我们将要与二维波动方程的各种解打交道，而这波动方程就是第七章采用过的式(7-40)及(7-41)中的一个①：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{8-11}$$

但在大多数情形中，我们可以只注意两种特殊形式的波就行了：

1. 平面波或直线波，这后一情形更适合于描述表面上的波。这样的波，是由线度大于波长的直线形或平面形物体的振动产生的。

2. 圆形波，是由线度小于波长的物体产生的。这种波在三维

① 注意，这第二个方程乃是一种特殊的情形，它假定位移 z 与方向 θ 无关。

中就叫做球面波。

正如在第七章中叙述过的，离开波源甚远处的圆形波，实际上就变成了直线波，这常常可简化对它们特性的分析。尤其是在大 r 处，作为某种近似，对因 r 进一步增大而原则上本应计及振幅的进一步减少量，现在我们可以略去不计。这种简化，特别在考察由两个或多个小波源所引起的干涉效应时，是要用到的。

我们不准备严格地**求解**方程(8-11)。而是根据情况，先假定所研究的是直线波或是圆形波，然后再去考察它们在不同物理情况下的特性。要想对波传播的任一问题进行完全而精确的求解，这在原则上就意味着，要把受到所有边界处特定条件约束的基本微分方程解出来。只有**极少**数的情形才能作出这样严格的分析，因此人们便采用了物理上合理的近似方法，而这已在大多数情形下，成功地获得了充分的验证。这种近似处理的方法，主要是以惠更斯(C. Huygens)于 1678 年首先提出的、并由菲涅耳(J. A. Fresnel) 于 1816 年以及后来的人所进一步发展了的概念为基础的。这个概念就是：当波在媒质中前进时，处于波前上的每一点，都可看作是一个新的波源。详细地展示这个概念，乃是下一节的课题。

§8-5 惠更斯-菲涅耳原理

假定在水箱中的某点发生一个扰动，例如一个小东西落入水中，或者用笔尖触动一下水面。这就形成了一个扩展着的圆形脉冲波。倘若不计色散效应，那就可以说脉冲是以某个速率 v 扩展的。假如脉冲是 $t=0$ 时在原点处形成的，则距离原点为 r 处的媒质粒子，便在 $t=r/v$ 时投入运动。而惠更斯的看法是，那些在 $t+\Delta r/v$ 时出现于 $r+\Delta r$ 处的效应，乃是由 r 处的媒质在 t 时的扰动所造成的，这就十分明确地把扰动看成是从媒质中一点传至邻

近点的某种事物了。惠更斯和菲涅耳都曾把这种概念应用于光的传播，但在此情形下，媒质的行为是观察不出来的。不过，这样的图景完全可以从观察水面上的涟波行为而获得启发。特别是从波源发出的波，如果遇到只有一个很小的孔的壁垒时（所谓"很小"是指其宽度小于波长），那么这孔看来就恰似一个新的点波源那样，向外发生圆形波。这个现象示于图 8-6。它与原始波是直线形的或是圆形的，并没有关系；在两种情形中，小孔都起着圆形波源的作用。这非常合乎道理，因为壁垒的作用就在于止住整个原始扰动的传播，而只让小孔处媒质的位移自由地继续向前传过去。

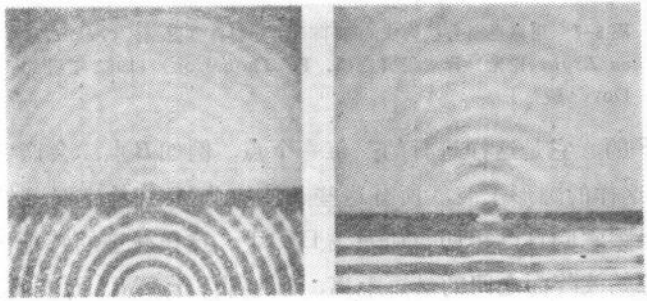


图 8-6　处于波前上的狭孔处所产生之惠更斯子波。（*a*）初波是圆形的。［引自 R. W. Pohl:《*Physical Principles of Mechanics and Acoustics*（力学与声学的物理原理）》(1932 年伦敦 Blackie 版)。］（*b*）初波是直线形的。［引自教育发展中心（*Education Development Center*，麻省牛顿城）摄制的影片《*Ripple Tank Phenomena*(涟波槽中的现象)》第二集。］

惠更斯原理能够漂亮地说明下述事实：一个不受阻碍的圆形脉冲波，会产生出紧接着的圆形波阵面，而直线性的脉冲则会产生出紧接着的直线性波阵面。引自惠更斯原著①的图 8-7，表明了如何从给定的圆形波阵面 HBGI，于稍后时刻形成圆形波阵面

① 惠更斯:《*Treatise on Light*(论光)》1690 年版，由汤普森译成英文(1962 年纽约 Dover 版)。

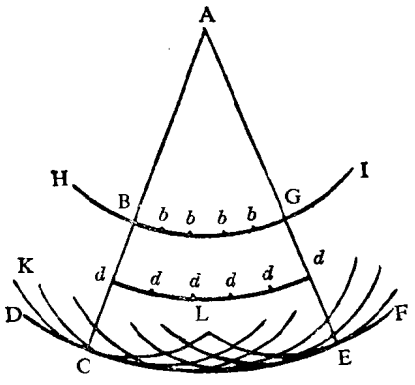


图 8-7　用惠更斯方法构成的波阵面。[引自惠更斯：《*Treatise on Light*(论光)》译者汤普森(S. P. Thompson)(1962 年纽约 Dover 版)。]

DCEF 的。它是这样进行的：每一个点，例如 B 点，会产生一个 KCL 这样的圆形子波，所有这些子波的总和，在给定时刻便构成了一条跟它们自己相切的加强线 DCEF。这条轨迹的特征在于，它与原始波阵面之间的最短距离，处处都等于 $v\Delta t$，而 Δt 便是波阵面从 HBGI 移到这儿所经历的时间。采用同样的作图法，即可说明直线形波阵面，会产生出跟自己相平行的后继波阵面来。

然而，这里面还含有没看到的事情。按照上面所描述的惠更斯作图法，那就得规定出**两个**后继的波阵面，而不只是一个。除了离开波源向远处传去的这个新波阵面而外，还应有另一个朝着波源传回来的波阵面。然而大家知道，这件事并没有发生。如果要使惠更斯这种对于波传播的摹想成为可接受的方法，那它就得与行波的单一方向性相符。为此，就要求媒质中某点于某瞬时向外发出的扰动，在各个方向上并不具有相同的强度才行。具体地说，若 O (图 8-8)是真实的原始波源，S 为惠更斯子波的波源，P 是记录扰动的一点，那么，S 附近区域的扰动在 P 处所产生的效应，就

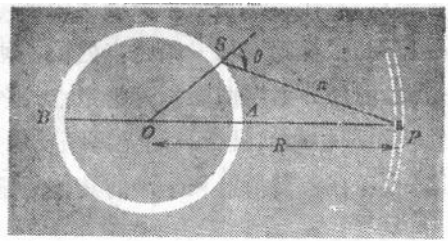


图 8-8　在由 O 发出的扩展着的圆形波上，S 点起着次级波源的作用，它在 P 处的效应，取决于倾斜角 θ 以及距离 SP。

应是 OS 和 SP 之夹角 θ 的函数 $f(\theta)$。具体地说，在 $\theta=\pi$ 时，$f(\theta)=0$。

就目前我们所进行的讨论而言，惠更斯作图法对于波传播的分析，提供了一种有用的但实质上却是**定性**的方法。想用它多解决点什么问题，事实上是很困难的。人们必须对波前上的次级波源规定出这样的一些性质，使得由此能产生出合乎要求的精细的效应来。1859 年亥姆霍兹 (H. Helmholtz) 按这种说法提出了对惠更斯原理的一种特殊的数学表述，后来基尔霍夫在 1882 年又进一步发展了它①。撇开此方法的人为性不说，它在分析一束光因受到某些障碍物的部分遮挡，而发生光的干涉现象时，倒是非常有价值的。但是大家将会看到，即使不用数学表述，惠更斯方法也仍然不失为一种指导。

上面我们处理的多半是连续的正弦式波，而不是单个的脉冲，然而我们已经看到，即使是单个脉冲，也能经由傅里叶分析而描述成无限多波列的叠加。这就意味着，在每一时刻我们都能把任一

① 这是对三维波的传播而言的。实际上，令人惊讶的是，此原理对二维的表述和应用，竟比三维的更为困难也更欠清晰。可是，这其中的奥秘却是全然不宜于在此讨论的。对惠更斯原理更充分的讨论，可参阅 B. Rossi: 《Optics(光学)》(1957 年麻省里丁城 Addison-Wesley 版)，或者，在透彻的数学讨论方面，可参阅 B. B. Baker, E. T. Copson: 《*The Mathematical Theory of Huygens' Principle* (惠更斯原理的数学理论)》(1950 年纽约 Oxford University Press 版)。

选定曲面上的每一点，看作是惠更斯子波的次级波源。此时，波本身虽在前进着，但正弦式扰动在任一给定点处的振幅，却是与时间无关的。这即是说，由任一指定曲面抵达给定点的各个扰动，通常只要考虑它们的**相对**周相如何就行，而无需顾及它们对时间的明显依赖关系。这一点，在考察衍射和干涉的具体问题时，就会弄清楚了。

§8-6 平面波的反射和折射

和弦线上的波一样，一般说来，波在遇到两种媒质的边界时，也可料想会发生部分的反射和部分的透射。但是对二维或三维波来说，还应考虑到改变方向的可能。

最简单的情形，就是直线形的波遇到直线边界时的情形。此时便有大家所熟悉的由斯涅耳定律所描述的反射定律和折射定律。这些结论，也不难由惠更斯作图法得出。在图 8-9 中，线段 AA' 表示波在 A 点刚好碰到边界时的直线形波阵面。稍迟一会儿，波阵面在原来的媒质中前进到 BB' 的位置［图 8-9(a)］。在波阵面相

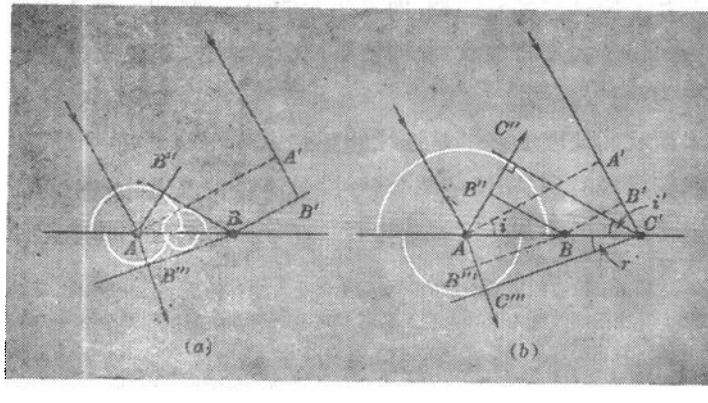


图 8-9 (a) 用惠更斯作图法得出的反射和折射。(b) 用惠更斯作图法证明斯涅耳定律。

继抵达边界上 AB 之间的各个点时，这些点就变成了新的惠更斯子波的中心，这些子波一方面进入第二种媒质中去，一方面返回到原媒质中来。而这些子波的切线，便是新的波阵面了。

再过一会儿，原波阵面触及到边界上的 C' 点[图 8-9(b)]。就在这个时刻，早先从 A 点出发并传回原媒质的子波，现在已有了 AC'' 的半径。而与此子波相切的线段 $C'C''$，也会与 AA' 之间各点于边界处所发出的诸子波相切①。故线段 $C'C''$ 乃是新的波阵面。若 i 及 i' 分别表示入射波阵面及反射波阵面与边界的交角，则从图中的几何学关系可知

$$\sin i=\frac{A'C'}{AC'}=\frac{AC''}{AC'}=\sin i'$$

而边界跟波阵面的交角，等于边界的法线与波阵面法线之间的夹角。但波阵面的法线方向，便是所谓的射线方向(至少在光学中如此称呼)，也即是一窄束前进波的方向②。所以 i 及 i' 所表示的，乃是射线遇到直线形边界时的入射角和反射角。

(实际说来，上述对反射过程的讨论，实难与惠更斯次级子波通常所要求的性质，即在返回方向上的振幅应该小得变成零的这种性质相一致。然而可以证明，陡峭边界的出现，造成了一种崭新的局面，使得产生强的返回子波，变成了可能。)

对折射过程的分析与此相仿。仍参看图 8-9(b)，此时则应标出，在波阵面自 AA' 处起直到触及边界上 C' 点的这段时间内，从 A 出发的惠更斯子波在第二种媒质中所前进的半径。而对此子波(以及此时刻的所有其他子波)所作的切线 $C'C'''$，便成了媒质 2 中的波阵面。假若波在两媒质中的速度分别为 v_1 及 v_2，且所经历

---

① 这一点，你应能自行予以证明。

② 射线方向与波阵面的这种正交性，似乎显然是如此的，但在各向异性的媒质中，实际上却不成立，此时的惠更斯子波将是椭圆形的，而不是圆形的。

的时间为 Δt，则有

$$A'C' = v_1 \Delta t \qquad AC''' = v_2 \Delta t$$

如果 $C'A$ 与 $C'C'''$ 的夹角叫折射角 r，那么从几何学关系便得到

$$\sin i = \frac{v_1 \Delta t}{AC'} \qquad \sin r = \frac{v_2 \Delta t}{AC'}$$

因此，

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} \tag{8-12}$$

至于计算反射波和透射波的实际振幅，却不是一项轻而易举的课题。的确，这不是一件简单的事情。纵波（压缩波）的行为不同于横波，而进一步就横波来说，位移垂直于图 8-9 平面的情形（假定此图是对水波画的），又不同于位移处在该平面之内的情形。这就是说，横波的行为取决于偏振的状态。由于有这些复杂性，这里就不拟分析此类问题了。不过可以指出，在 $i=0$ 时的正入射情形下，实质上就又成了一维问题。但这时，正如前面（第 271 页）在谈到流体媒质与实际静止而光滑的固体边界接触时所说过的那样，纵扰动与横扰动仍是有区别的。此时，任何入射波的反射实际上都达 100%。但若为纵波，边界就成了完全刚性的，在边界处的反射波位移应与入射波的相等而相反；而如若是横波的话，则边界并不提供任何的阻力，所发生的反射也不会改变位移的符号（参看早先对一维边界问题的讨论）。

图 8-10 中的示例，乃是在涟波槽中观察到的水波的反射和折射。在折射中可以清晰地看出，扰动在进入第二媒质后所发生的波长的改变（按 v_2/v_1 的比例）。

至于圆形波在直的或弯曲的边界上所发生的反射或折射，这里就不讨论了。这些情形都能用惠更斯子波的特性作出精确的分析。人们清楚地看到，平面镜及透镜是如何变更入射的波阵面而

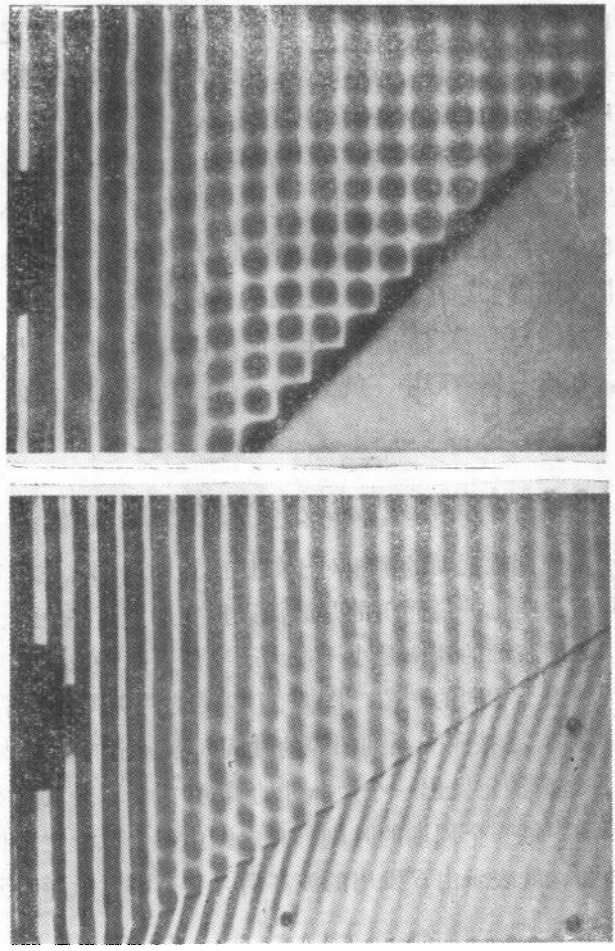


图 8-10 (*a*) 直线形水波在刚性边界上的反射($i=45°$)。(*b*) 水波在具有不同水深，因而具有不同波速的两区域交界处的折射。[引自教育发展中心(麻省牛顿城)摄制的影片"涟波槽中的现象"第一集。]

导致了聚焦或散焦效应的。其它诸如此类的现象，也可以依据斯涅耳定律，而描述成是射线路径变更的结果。

对折射也许值得指出的特殊问题是，只要波速随位置而变，波

阵面的方向就要发生变化。在一定的条件下，这种情况也可以发生在单一的媒质之内。例如，气体中压缩波（声波）的速率，乃是温度的函数。[具体说，$v\sim\sqrt{T}$，见第七章中式(7-12)]。因此，若气体中存在着温度梯度，那么穿行在气体里的波就会逐渐弯曲。此外，倘媒质自身处于运动之中，使得不同的部分具有不同的速度，那这也会发生折射。在地球表面附近的空气中，可能温度梯度和速度梯度两者都存在。那么，根据这些梯度的符号，以及波的传播方向不同，一列声波既可能往上弯而远离地面，也可能反过来扑向地面。在后一种情形中，就会使声音在相当远处的可闻度得到提高。

§8-7 多普勒效应以及有关的现象

倘若周期性扰动的源相对于媒质而运动，那么它所产生的波的图样就会变化。最简单的是波源以恒定的速度在直线上运动的情形。依据波源的速率是小于或大于它所产生的波之速率，而呈现出两种很不相同的图象。图 8-11 就是这两种图象的示意图。波源的位置 S，是按照一系列相等的时间间隔标出的。这些时刻，例如，也许是波源每发出一个短脉冲的瞬时，或是区分波源在连续正弦式振动中每一个周期的时刻。总之图中每个以给定的位置 S 为圆心的圆，就表示由 S 发出的波在后来某个瞬时所影响到的各个点之轨迹。

令波源的速率为 u，波速为 v。那么在发出一个圆形波的 t 时间以后，波阵面的半径便是 vt，而波源也已运动了 ut 的距离。若 $u<v$，其情况如图 8-11(a) 所示。此时的圆形波阵面，是一个套在一个里面的。各个相继波阵面之间的距离，在顺着波源运动的方向上最短，在与此相差 180° 的方向上则最长。设图 8-11(a) 中相邻 S 位置间的时间间隔是 τ，则波阵面间的上述两种距离，便是

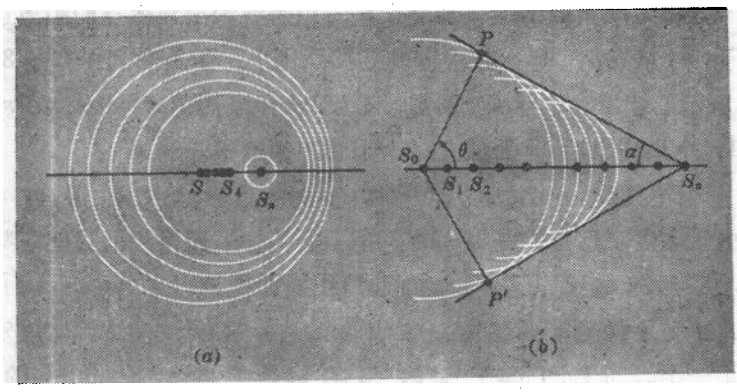


图 8-11　在相等的时间间隔内，由波源所产生的各个相继的波阵面。此时 (a) 波源以小于波速而运动。 (b) 波源以大于波速而运动。

$(v-u)\tau$ 及 $(v+u)\tau$。但 $v\tau$ 乃是波源静止时任一方向上波阵面之间的距离。因此，从运动波源所发出的波，其波长就会随方向而呈现出有规则性的变化来；这便是多普勒 (Doppler) 效应。特殊地说来，我们有：

$$\lambda_{\min}=\lambda_0\left(1-\frac{u}{v}\right) \qquad \lambda_{\max}=\lambda_0\left(1+\frac{u}{v}\right)$$

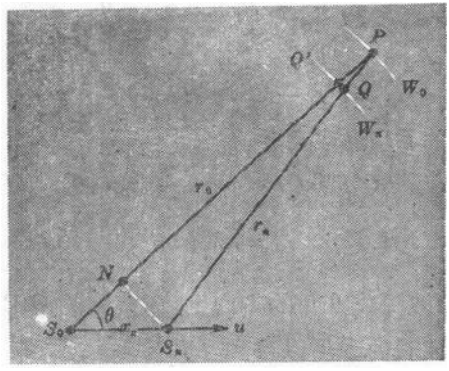


图 8-12　波源从 S_0 运动至 S_n 时，由波源发出之抵达远处 P 点的波。

其他方向上的情形较为复杂些，但若波源至观察点的距离远大于一个波长时，那么分析也就能够简化了。于是我们便有图 8-12 所示的情形。S_0 和 S_n 两点，分别表示波源在 $t=0$ 及 $t=n\tau$（即 n 个周期以后）时的位置。由于波源的速率是 u，故有

$$S_0S_n=x_n=un\tau$$

而由于假定观察点 P 是很远的，所以角 S_0PS_n 便很小。这就意味着，从 S_0 和 S_n（以及全部的中间点）出发而抵达 P 之各个波阵面，都几乎是平行的。假定从 S_0 发出的波 W_0，刚好到达 P。这就定出了一个时间 t_P，它等于 r_0/v。但 S_n 则是在 $t=n\tau$ 时发出波的；故在 t_P 时它仅行进了 $t_P-n\tau$ 的时间；其波阵面便在 W_n 处，即

$$\begin{aligned}S_nQ&=v(t_P-n\tau)\\&=r_0-vn\tau\end{aligned}$$

而波阵面之间的距离，则既可等于 QP 也可等于 $Q'P$，两者的差异是微不足道的。倘令 $S_nP=r_n$，那就有

$$QP=r_n-S_nQ=r_n-r_0+vn\tau$$

但若自 S_n 对直线 S_0P 作一垂线，则同样由于角 S_0PS_n 很小而有 $NP\approx r_n$，于是

$$r_0-r_n\approx S_0N=x_n\cos\theta$$

即

$$r_0-r_n\approx un\tau\cos\theta$$

将它代入前面的 QP 表达式，便有

$$\begin{aligned}Q'P\approx QP&\approx vn\tau-un\tau\cos\theta\\&=n\lambda_0\left(1-\frac{u\cos\theta}{v}\right)\end{aligned}$$

然而，在与运动波源成 θ 角的方向上，观察到的 $Q'P$ 或 QP 是跨越了扰动的 n 个波长的。所以得到

$$\lambda(\theta)=\lambda_0\left(1-\frac{u\cos\theta}{v}\right)\tag{8-13}$$

这就非常简洁地说明，多普勒效应取决于波源速度在观察者方向上的分量。至于这些相继的波阵面在通过观察点P时的**频率**，则等于波速除以波长。故有

$$\nu(\theta)=\frac{\nu_0}{1-\frac{u\cos\theta}{v}} \tag{8-14}$$

这个方程最适于陈述声学中的多普勒效应，因为该效应是通过从运动波源接收到的音调上的变化，来进行探测的。

现在来叙述波源速度超过波速的情形。这便是如图 8-11(b)所示的情景。假定 $t=0$ 时波源位于 S_0 处。尔后，在 $t=n\tau$时，波源位于S_n处，而$S_0S_n=nu\tau$，且由 S_0 发出的波阵面业已达到了 $nv\tau$ 的半径。此时，在 S_n 处才正好开始发出波来。倘若从 S_n对 S_0发出的圆形波阵面作切线，则这些切线也与所有其他的中间圆相切。前面关于惠更斯作图法的经验告诉我们，各子波在这些切线上构成了加强线，它们因而便成了以速率 v 向外传播的直线形波阵面。这些波阵面与波源运动线的夹角 α，是由下述关系式决定的：

$$\sin\alpha=\frac{S_0P}{S_0S_n}=\frac{v}{u} \tag{8-15}$$

比值 u/v 叫做马赫(Mach)数，而角 α 便是**马赫角**，它只在马赫数大于 1 的时候才存在。

图 8-13 示出的是，马赫数小于和大于 1 的运动波源，在涟波槽中所产生的波图样之实例。

为了更明显地看出在 $u>v$ 时，圆形波的轨迹何以集聚成为直线形波阵面的，试考察一下各圆形波相继抵达 P 点的时间如何，这 P 点离开运动波源甚远。可以再参看一下图 8-12。现仍假定 S_0 在 $t=0$ 时发出一波，S_n 在 $t=n\tau$ 时发出一波。两波抵达 P 的时间分别为

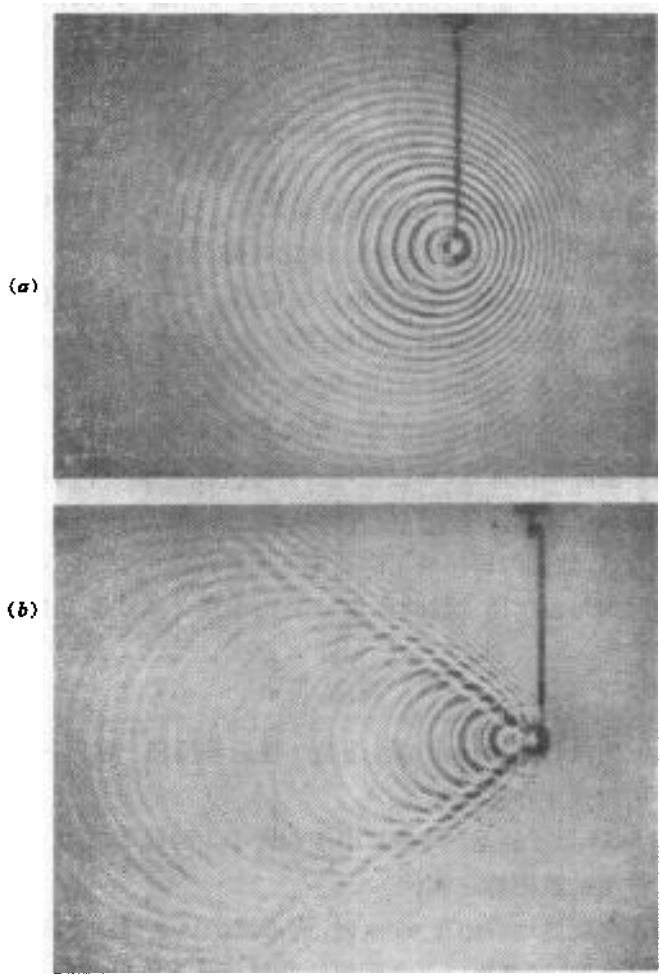


图 8-13　运动波源在涟波槽中产生的水波。[引自教育发展中心(麻省牛顿城)摄制的影片"涟波槽中的现象"第三集。] (a) 波源速率小于波速(多普勒效应)。(b) 波源速率大于波速(冲击波)。

$$t_0 = \frac{r_0}{v}$$

$$t_n = n\tau + \frac{r_n}{v}$$

因而

$$t_n - t_0 = n\tau - \frac{r_0 - r_n}{v}$$

仍令 $r_0 - r_n \approx x_n \cos\theta = nu\tau\cos\theta$，从而给出

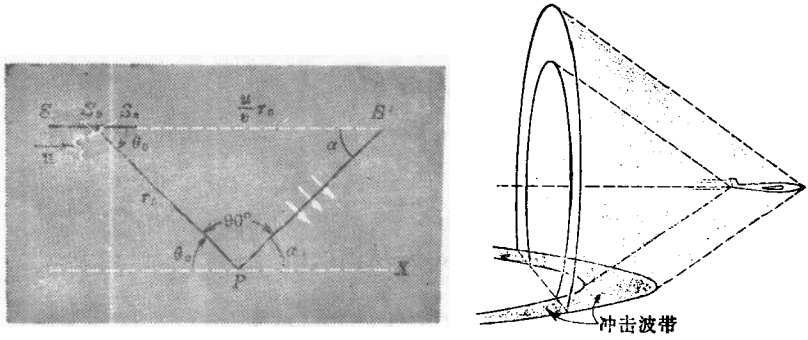
$$t_n - t_0 \approx n\tau\left(1 - \frac{u\cos\theta}{v}\right)$$

显然，若 $u < v$，则 t_n 总是大于 t_0 的，亦即各波到达的次序，与发出它们时的次序一样。可是如果 $u > v$，那么时间的顺序就取决于 θ 了。特别是会有这么一个 θ 值，使得所有的波阵面都于同一瞬时到达 P。令此角为 θ_0，则有

$$\cos\theta_0 = \frac{v}{u} \tag{8-16}$$

此 θ 值乃是马赫角的余角，它规定出一个垂直于直线形波阵面的方向。而诸圆形子波的这个聚集区，就是沿着这个方向行进的。由此，即可理解象声暴这样的效应是如何产生的了。如果波源 S［图 8-14(a)］以大于波速的速率行进，而观察者位于 P 处，则从 P 以 θ_0 的角度引至波源运动方向的线段，将与波源的运动线相交于 S_0 点。在波源通过了 S_0 以后的 r_0/v 时间，P 将突然接收到集聚的子波，这些子波虽是波源在从 S_0 前进一小段的距离中发出来的，但却同时到达了 P。［在此时刻，波源本身业已越过 S_0 而行进了 ur_0/v 的距离，见图 8-14(a)。］在此时刻之前，P 是接收不到扰动的。当这些集聚的子波越过 P 以后，仍会继续有诸正常的子波到来，但由于不是同时到达而未获加强，所以就显得太弱了。

实际上，以超声速行进的飞机会产生双重的声暴，因为它形成了两个主要的激震前沿，一个在机首，一个在机尾。当飞机作恒速



(a) (b)

图 8-14 (a) 在 $\theta_0=\cos^{-1}(v/u)$的方向上，运动波源($u>v$) 发出的诸脉冲同时集聚于观察点 P。 (b) 声暴的产生。

的水平飞行时，它们便以锥面的形式一直跟着飞机前进[见图 8-14(b)]。它们与地面的交截线，具有双曲线的形状。当此图样扫过某特定点时，就会在该处听到声暴①。

§8-8 双缝干涉

现在来更清楚地考察一下，前进波受到障栏阻挡时的情况。依照惠更斯原理的观点，原始波阵面上每个未遭阻挡的点都起着一个新波源的作用，而在障栏另侧的扰动，就是由这些次级波源所发出的全部波叠加而成的。由于所有的次级波源本是由原始波策动起来的，所以它们之间便具有确定的周相关系。这个条件称为**相干性**，这说明，各次级扰动之间在其抵达任意的更远点时，仍具有规则性的周相关系。结果，在障栏的另侧区域内，就会出现一种特征性的干涉图样。

最简单的，也是作为分析所有其他情形之基础的情况，乃是遭

① 更充分的说明，例如可参阅 H. A. Wilson, Jr. 的文章 "Sonic Boom(声暴)"，载于 Scientific American(科学的美国人)杂志，1962 年元月号第 36—43 页。

到阻挡的原始波中只有两个很窄的孔未受阻挡的情形。在二维系统中，这两个窄孔就成了点波源。在三维波中类似的情形是，两条长而平行的狭缝，起着线波源的作用。我们在第 2 章中第一次考察谐振动叠加时，曾经简要地讨论过这种装置，而且，你也许还知道它与杨氏的历史性实验是有联系的，这个实验以毫不含糊的方式显示了光波的干涉现象，这大约是在 1802 年完成的。

图 8-15 画的是接近两条狭缝 S_1 及 S_2 的波阵面的情形，这里假定两缝很窄，但宽度相同。为简便计，还假设两缝离开原波源点很远，且距离相等。这样，次级波源 S_1 及 S_2 便是同相的了。如果原始波是连续的简谐扰动，那么 S_1 和 S_2 便随而发出简谐波。因此，只要把由 S_1 及 S_2 在某一时刻传到任意一点 P 的扰动加起来，就可得到该点的扰动了。一般地说，需要考虑两个特征性的因素：

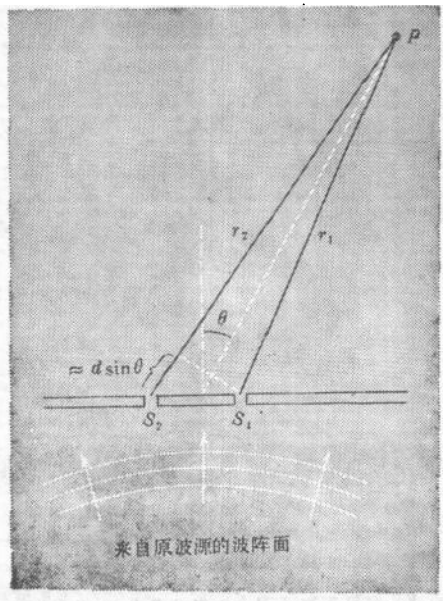


图 8-15　双缝干涉，

1. 从 S_1 及 S_2 传到 P 的扰动，其振幅并不一样，理由有二。首先，距离 r_1 及 r_2 是不同的，而一个扩展着的圆形扰动之振幅，是随着与波源距离的增大而减小的。第二，角度 θ_1 与 θ_2 不同，而惠更斯子波的振幅，正如前面结合着图 8-8 所讨论过的，乃是随着倾斜角的增大而减小的。

2. 抵达 P 的两扰动之间，存在着周相差，这是与时间差 $(r_2 - r_1)/v$ 相对应的，此处的 v 是波速。

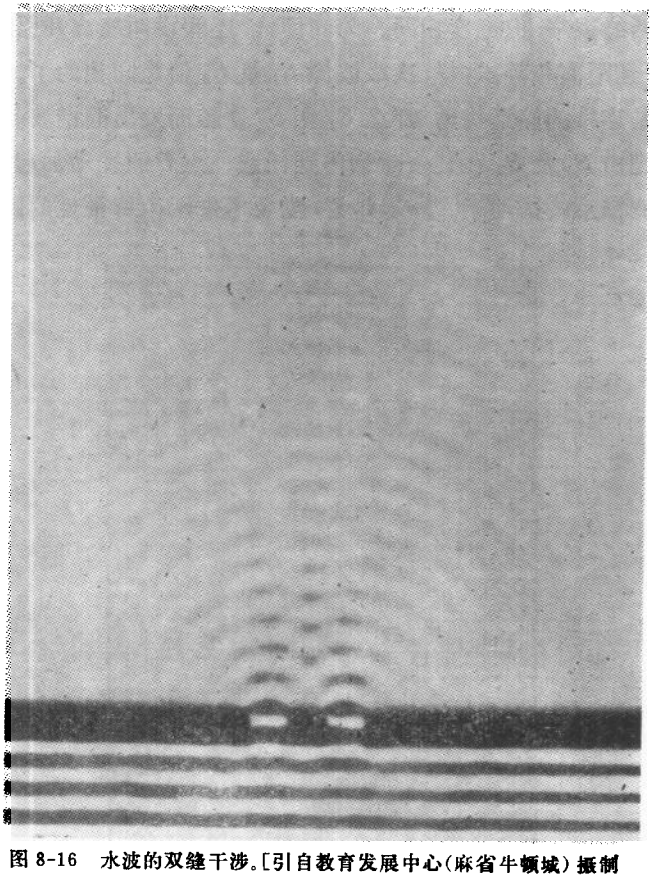


图 8-16　水波的双缝干涉。[引自教育发展中心(麻省牛顿城)摄制的影片"涟波槽中的现象"第二集。]

这里集中研究 r_1 及 r_2 大于 S_1、S_2 的间距 d 的情形。这样，S_1 及 S_2 在 P 处形成的**振幅**差异，便可略去不计了。但是两扰动间仍可能具有**周相**差，而正是这种重要的差别，主宰了合成波图样的一般形象。典型的结果可见图 8-16，这是对涟波槽所摄的一幅照片。片上呈现出**节线**的轨迹，在这些节线上，合扰动几乎始终为零。算出这些节线的位置并不难。对任一点来说，譬如图 8-15 中的 P 点，位移乃是时间之函数，其形式为

$$y_P(t)=A_1\cos\omega\left(t-\frac{r_1}{v}\right)+A_2\cos\omega\left(t-\frac{r_2}{v}\right) \qquad (8\text{-}17)$$

这里假定 S_1 及 S_2 处扰动对时间的依赖关系是 $\cos\omega t$。式(8-17)具体地说明了这样一个事实：每一波源处的位移序列，将在 r/v 的时间以后，对 r 远处的一点激发起同样的位移序列。因此，如果令 $A_1\approx A_2$(比如说 $=A_0$)，那么

$$y_P(t)=A_0\left[\cos\omega\left(t-\frac{r_1}{v}\right)+\cos\omega\left(t-\frac{r_2}{v}\right)\right]$$

$$=2A_0\cos\omega t\cos\left[\frac{\omega}{2v}(r_2-r_1)\right]$$

引用波长 $\lambda=v/\nu=2\pi v/\omega$ 后，便有

$$y_P(t)=2A_0\cos\omega t\cos\left[\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}\right] \qquad (8\text{-}18)$$

根据量 $\pi(r_2-r_1)/\lambda$ 为 $\pi/2$ 之某奇数倍的条件，便可定出某一根节线了。因此可使

$$\frac{\pi(r_2-r_1)}{\lambda}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

或

$$r_2-r_1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (\text{诸节线}) \qquad (8\text{-}19)$$

式中 n 为任何正整数或负整数(或者零)。这些节线乃是一组双曲线，它们把缝前的整个区域分割得清清楚楚。而在节线之间的区域

内还可以画出另一组双曲线，它们乃是确定**最大**位移的线，意即在两根节线之间离开缝的某一距离处，合扰动的振幅达到了最大值。不难看出，产生这种情况的条件是

$$r_2-r_1=n\lambda \qquad \text{(干涉中的诸最大值)} \tag{8-20}$$

干涉图样的一般形象，是由一个重要的参数所支配的，这就是两缝的间距 d 与波长 λ 的无量纲比值。这一点，从考察离缝甚远即 $r\gg d$ 的情形中，便可得到最简洁的说明。此时，参看一下图 8-15 便知，可使 r_2-r_1 的值等于 $d\sin\theta$ 而不致引起什么误差。因此，干涉中诸最大值的条件就变为

$$d\sin\theta_n=n\lambda \qquad \sin\theta_n=\frac{n\lambda}{d} \tag{8-21}$$

而在任意方向上的振幅便是

$$A(\theta)=2A_0\cos\left(\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}\right) \tag{8-22}$$

由此可见，在离缝较远的地方，干涉实质上是方向性的效应。这就是说，如果在与两缝连线相平行的线上来观测诸节线和诸干涉最大的位置，就会发现相邻最大值(或零值)所具有的**线性**间距，是跟距离缝的远近成正比的。

图 8-17 漂亮地展示了在两种不同的 d/λ 值时，双缝系统干涉图样的一般特点。这不是真实的波图样，而是把两组同心圆叠加后得出的模拟品①。

通常特别感兴趣的，是 d/λ 很大的情形。在光的干涉中尤其如此，这时的波长($\sim 6\times10^{-7}$m)与缝距(典型值$\sim$0.1mm)相比，简直是极其微小的了。在此条件下($\lambda/d\approx10^{-2}$)，便可把式(8-21)中的 $\sin\theta_n$ 用 θ_n 来代替，因而任两个相邻的干涉最大之间的角度

① 是用新泽西州巴林顿城 Edmund *Scientific Co.* (Edmund 科学仪器公司)出品的"*Moiré Patterns*(莫阿图样)"产生器制备的。

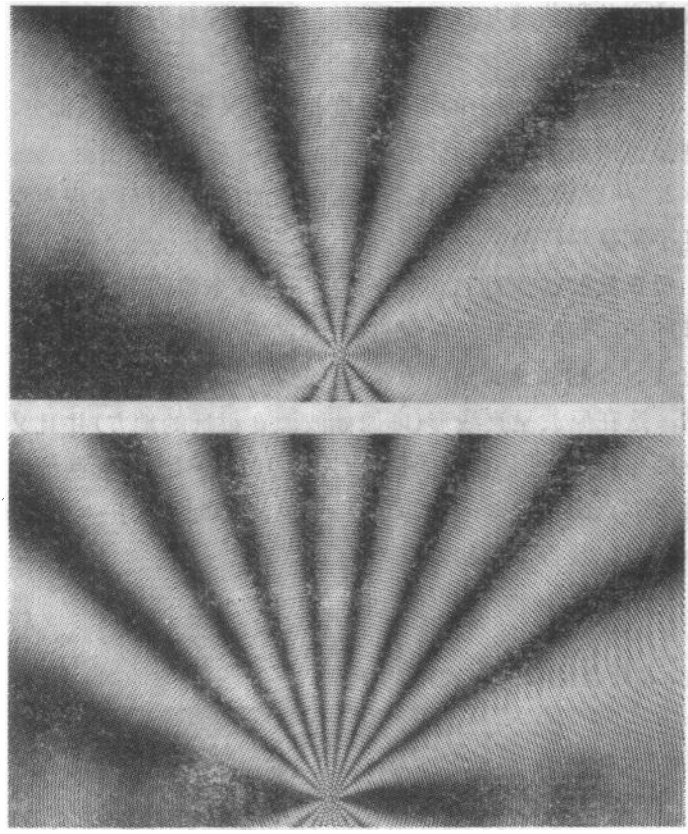


图 8-17　近似于双波源干涉的莫阿(Moiré)图样。(是用新泽西州巴林顿城 Edmund 科学仪器公司出品的“莫阿图样”产生器制备的。)(麻省理工学院教育研究中心 J. Rosenfeld 摄。)

间隔，就变得很近于 λ/d 值了。这样，在离开缝的某一距离 D 处，相邻的干涉最大之间，便有着相等的间距 $D\lambda/d$。

§8-9　多缝干涉(衍射栅)

在讨论双缝问题时，我们较为细致地指出了干涉图样是如何形成的。在较为复杂的情形中，我们将限于考察在距离比孔系统

之线度大的那些地方的干涉状况。为此容许我们作出如下的两项假定：

1. 原始波阵面上的那些宽度相等而又未遭阻挡的部分，对任一观察点所贡献的振幅都是相等的。

2. 从原始波阵面上各个未遭阻挡的部分，引至某观察点的联线几乎都是平行的。

现在就按这种假定，来分析由一行N个等间距的缝所造成的干涉图样。和双缝时一样，此时也假定每个缝都具有相同的、很小的宽度。令相邻缝的间距为d。假定各个缝受到的都是同周相的策动，这在原波呈直线形(即原始波源在很远的地方)并且又跟缝的平面平行时，就是这样的情形(图 8-18)。于是，相邻两缝的次级波传至P点的路程差，便等于$d\sin\theta$。这就定出了一个时间差$d\sin\theta/v$，以及得出周相差δ为

$$\delta=\frac{\omega d\sin\theta}{v}=\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} \tag{8-23}$$

这样，P处合位移的形式便是

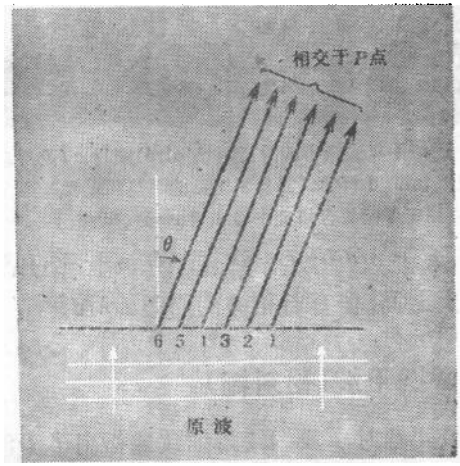


图 8-18　多缝干涉。

$$y_P(t)=A_0\cos(\omega t-\varphi_1)+A_0\cos(\omega t-\varphi_1-\delta)$$
$$+A_0\cos(\omega t-\varphi_1-2\delta)+\cdots(\text{至}N\text{项})$$

式中 $\varphi_1=2\pi r_1/\lambda$，乃是与第一个缝至 P 点的距离 r_1 相对应的周相差。

这种叠加问题，早在第二章中就已考察过了。只要对长度为 A_0、相互间交角为 δ 的 N 个矢量求矢量和，便可得到合振幅 A 了（见图 2-7）。其结果是

$$A=A_0\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \tag{8-24}$$

下面来考察一下，当已知 δ 的方程(8-23)时，A 是如何取决于 θ 角的。借助于一系列的矢量图，诸如图 8-19 对 $N=10$ 的特殊情形所画出的一些矢量图，便能异常方便地做到这一点。

1. 当 $\delta=0$ 时，诸分矢量都处于同一根线上，加在一起，有

$$A=NA_0$$

因此，它乃是合振幅的最大可能值，也是在式(8-21)给出的每个 θ 值处所出现的值。这即是说，缝距为 d 的一行 N 条缝，在与同间距双缝系统的同样方向上，会出现这些所谓的**主最大**。

2. 当 $\delta=2\pi/N$、$4\pi/N$、$6\pi/N$ 等值时，诸分矢量构成了封闭的多边形，故而有

$$A=0$$

此结果也可从式(8-24)清楚地看出来，因为在所有这些情形下，角 $N\delta/2$ 是 π 的整数倍，所以使得分子为零了。

3. 在这些零值之间，会有一些 δ 值以及相应的 θ 值，使得位移具有中等的最大值。它们叫做多缝干涉图样中的**辅峰**，其振幅比主最大要小很多，虽然它们确切的角位置和相对振幅不大容易估算，但在你试图用式(8-24)去计算 A 的各最大值时，便会发现

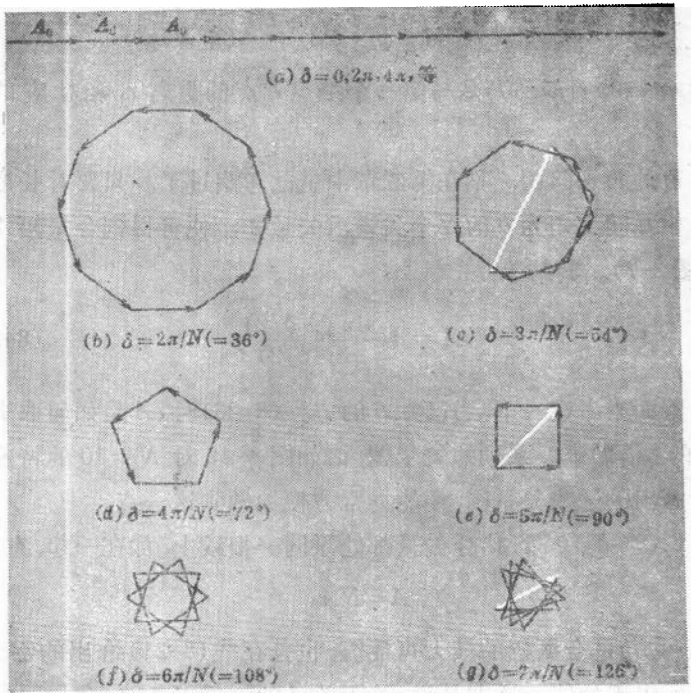


图 8-19　衍射栅($N=10$)的矢量图。(a) $\delta=0, 2\pi, 4\pi$ 等。 (b) $\delta=2\pi/N(=36°)$。 (c) $\delta=3\pi/N(=54°)$。 (d) $\delta=4\pi/N(=72°)$。 (e) $\delta=5\pi/N(=90°)$。 (f) $\delta=6\pi/N(=108°)$。(g) $\delta=7\pi/N(=126°)$。

这一点。图 8-19(c)中 $\delta=3\pi/N$ 时所画出的振幅，近似等于第一个辅峰的振幅，它大约只及主最大振幅的五分之一。

4. 在 $N-1$ 个零值和 $N-2$ 个辅峰之后，便轮到 $\delta=2\pi$，它确定了衍射图样中的下一个主最大。

图 8-20 对比了相等缝距的双缝系统及 10 条缝系统的振幅随 δ 而变的情形。(注意竖直轴的标度不同。) 这些曲线所以呈现为"皮球弹跳"式的样子，是由于把 A 始终取为正值的缘故，而式(8-

24)则是在相邻的两对零值之间，交替地给出正值和负值的。采用较多的缝，结果就会使主最大尖锐起来。正是由于这个性质，才使得衍射光栅成了光谱学中一种有价值的工具，因为它为具有一定

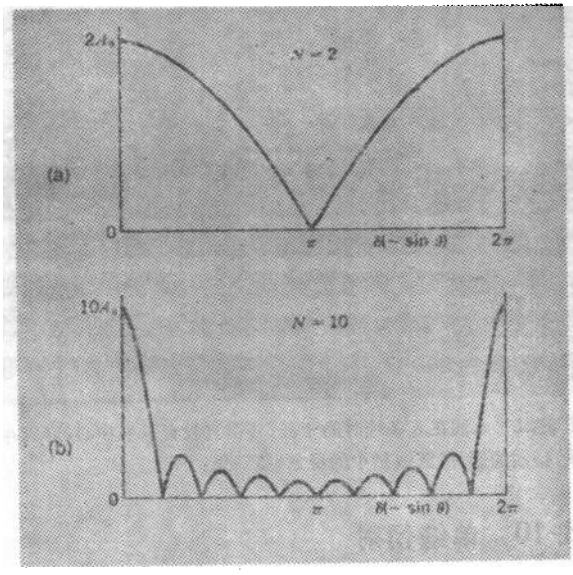


图 8-20 (*a*) 双缝干涉中振幅随周相差而变的情形。 (*b*) 10 条缝干涉中振幅随周相差而变的情形。

波长的光提供了很尖锐的角分辨率。这时，大部分的强度，都集中到各主最大方向附近的狭窄的角范围内了，而这些主最大就是所谓的图样之第零级最大(直进而无偏角的)、第一级最大、第二级最大等。图 8-21 示出了涟波槽里产生的多缝干涉图样 ($N=8$)。在此，波实际上聚集成为三束，一个是零级，两个是第一级，这在图上显示得很清楚。(为什么不出现更高的级次?)

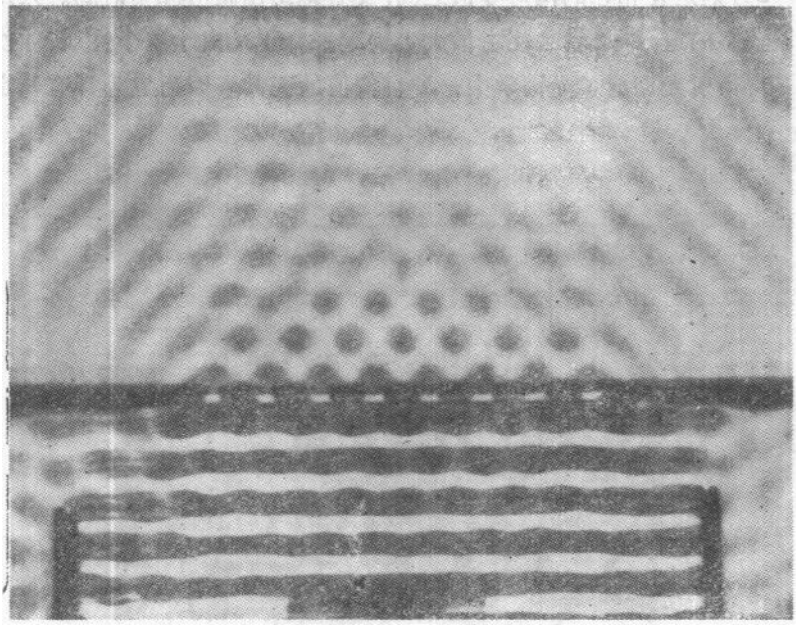


图 8-21　水波在 8 条缝时的干涉。[引自教育发展中心(麻省牛顿城)摄制的影片"涟波槽中的现象"第二集。]

§8-10　单缝衍射

大家清楚，单个的缝或孔是不可以任意地窄的，这个事实起源于单个缝各部分之间具有特征性的干涉品性。我们在前面有意避开了讨论这个问题，因为对N条缝的分析会为此提供一些有价值的基础。

图 8-22 是个宽度为 b 的单狭缝之大为放大了的图形。假定它的所有部分现在受到了入射平面波的同周相策动。如图所示，若是从与法线成 θ 角的方向上，来研究缝在远方所产生的扰动，那么从缝的两侧边到观测点，其路程的净差值为 $b\sin\theta$，相联系的周相差为 $2\pi b\sin\theta/\lambda$。如果设想把缝划分成宽度均为 Δs 的很多个

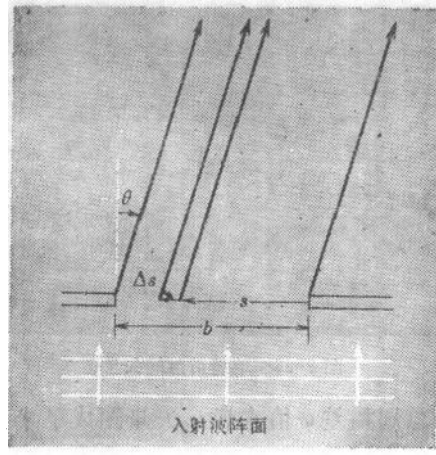


图 8-22　单缝衍射。

条带，则距离缝侧边为 s 的某个条带，在观测点产生的位移应与 Δs 成正比，而且相对于缝侧边处发出的波来说，还应具有 $2\pi s\sin\theta/\lambda$ 的周相。倘若大家接受了对情况的这种描述，那就可以象图 8-19 对衍射栅那样来绘出矢量图，从而得出合振幅对 θ 的函数关系来。这相当于令 $N=s/\Delta s$，令 $\delta=2\pi\Delta s\sin\theta/\lambda$。然而，这种把缝划分成有限数目的条带的作法，当然是人为的。我们倒是应该来设想这种描述在 $\Delta s\to 0$ 及 $N\to\infty$ 时的极限情形。这样，就有周相随缝上各点的不同距离，而连续的成比例的变化了。这就意味着矢量图变成了一段光滑的圆弧，并具有如下的性质：

1. 其两端处切线的夹角，即是总的周相差 $2\pi b\sin\theta/\lambda$。

2. 如果缝的各个部分彼此都能产生出同周相的效应，那么弧的长度则对应于在给定 r 及 θ 值的条件下，缝所能提供出的总振幅。而倘若不计惠更斯子波中的倾斜因数，那么弧长则始终等于缝在 $\theta=0$ 时于距缝某距离 r 处所产生的振幅 A_0。

现在来计算合振幅就很方便了。图 8-23 指明了这种计算的

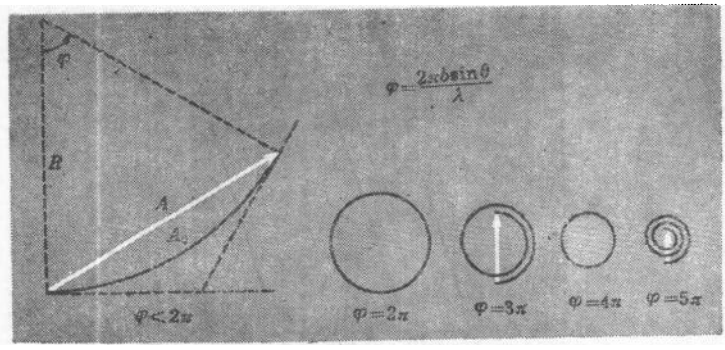


图 8-23　单缝衍射的矢量图

基础。对某个总周相差 φ 值来说，矢量图成了半径为 R 的一段圆弧，从而使

$$A_0 = R\varphi$$

在此情况下，合振幅 A 便是这段弧的弦长，因而得

$$A = 2R\sin(\varphi/2)$$

于是便有

$$A = A_0\frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2} \quad \text{式中} \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi b\sin\theta}{\lambda} \qquad (8\text{-}25)$$

因此，这个合振幅随方向而变的关系便具有 $(\sin\alpha)/\alpha$ 的形式，此处 $\alpha = \varphi/2$。这种函数（更正规的说法是零阶的贝塞耳函数），在 $\varphi/2$ 是 π 的整数倍时都为零。它的一般形象示于图 8-24(a)。图 8-24(b)则是不考虑符号时重新画出的曲线，而它和衍射栅的振幅曲线[图 8-20(b)]十分相似，则是很容易看出来的。

由此分析可知，单个缝也能产生出具有节线系统的衍射图样，如图 8-25 所示。它实质上象是衍射栅中央(零级)最大值附近的图样，而不象双缝的图样。诸辅峰相对地说来是微弱的；它们的振幅，在 $\alpha = 3\pi/2、5\pi/2$ 等值，亦即在 $\varphi = 3\pi、5\pi$ 等值时，是与 $(\sin\alpha)/\alpha$ 的值近似成正比的。(并不恰好如此，因为诸最大值不是正好在

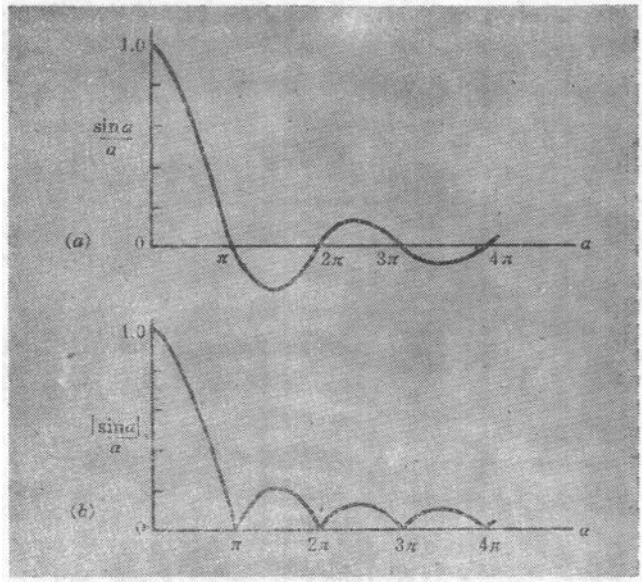


图 8-24　单缝衍射中振幅随方向而变的情形。($\alpha=\pi b\sin\theta/\lambda$，式中 θ 是观测的方向，b 是缝的宽度。)　(a) 振幅和周相结合在一起的情形(由十或一值示出)。　(b) 振幅绝对值的情形。

这些周相值时发生的。) 相对于 $\alpha=0$ 时的振幅为 1 来说，其他这些最大值的相对振幅大约为 $2/3\pi$(0.21)、$2/5\pi$(0.13)等(见图 8-24)。

应当看到，出现第一个零值的方向，使得从缝两侧边引出的路程之差，刚好等于一个完整的波长。如果人们把单缝设想成邻接一起的两个缝，每个的宽度为 $b/2$，那么这就很有意义了。从这两部分(或其他相应的两个点)的中点发出的波，其路程差便是 $\lambda/2$，而这正是发生相消性干涉的条件。单缝的其他节线，也可用类似的方式来理解。

不要忘记，我们所有的讨论，都是对远离单缝或诸缝的那些观测点而言的。这一点，在我们已经认识了有限缝宽所形成的后果

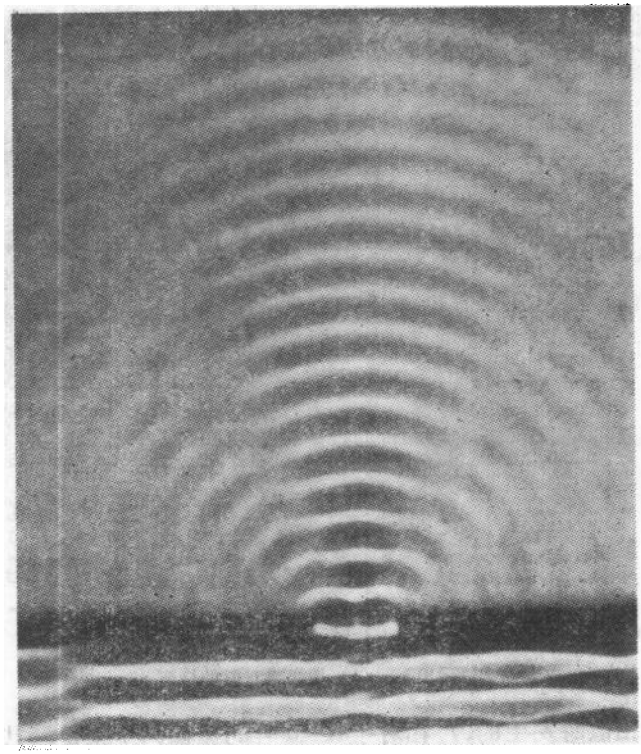


图 8-25　水波的单缝衍射。[引自教育发展中心（麻省牛顿城）摄制的影片"涟波槽中的现象"第二集。]

时，就格外重要了。当然，在靠近缝的地方我们是以更为直接得多的方式，来观察缝宽的效应的。可这时，由于只允许入射波阵面上宽度为 b 的这部分波穿过来，因而在此区域内存在着强烈的扰动。但在障栏后方的所有其他点，却仍处于几何的阴影之中。那么，究竟应该离开多远才能用衍射角来进行描述呢？这可以建立一个如下的判据：宽度为 b 的单缝，其衍射图样的中央最大所扩展的角范围为 $\pm\theta_m$，而

$$\sin\theta_m=\frac{\lambda}{b}$$

[这由式(8-25)得来。] 在距离缝为D的地方（图8-26），这个最大所规定的线性展开量，等于$\pm D\tan\theta_m$。另一方面，此缝的纯几何象，则始终有着b的宽度。因此，使衍射现象占主导地位的条件便是

$$D\tan\theta_m \gg b$$

倘若λ小于b，那就可使$\tan\theta_m \approx \sin\theta_m = \lambda/b$，于是上述条件便成了

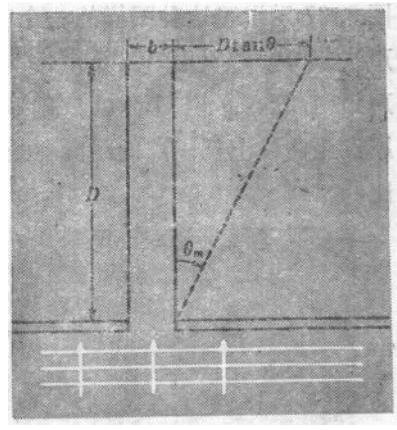


图 8-26　夫琅和费衍射的条件。

$$D \gg \frac{b^2}{\lambda} \tag{8-26}$$

这个重要的判据，确定了前面所讨论过的这种衍射所应遵从的条件，这种衍射称为夫琅和费衍射。

§8-11　真实缝系统的干涉图样

我们已经讨论过有限缝宽的效应，现在就可以来分析任一种凿孔壁垒的衍射或干涉图样了（这两个名词实际上可以互相通用）。然而在作这种分析的时候，将不再考虑合振幅，而考虑**强度**，即合成波传送给各点处一定大小的邻域内的能量率如何。大家知道，一定频率或波长的波在媒质中所传输的功率，是与振幅的平方成正比的。所以我们实质上所关心的，乃是算出距离衍射孔一定距离处，A^2与方向的函数关系。下面就具体讨论单缝、双缝、及多缝（栅）的特殊情形。

1. **单缝**。对单缝来说，在式(8-25)的基础上便有

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \quad \text{式中} \quad \alpha = \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda} \tag{8-27}$$

图 8-27 示出了这种图样的一个美丽的示例，这是由R. W. Pohl用声波获得的。所用的波长 λ 为 1.45cm，相当于约为 23kHz 的超声频率，缝宽 b 为 11.5cm。第二幅图样是**极坐标图**；在此图中，由原点至曲线上任一点的距离，是和该特定方向上的强度成正比的。

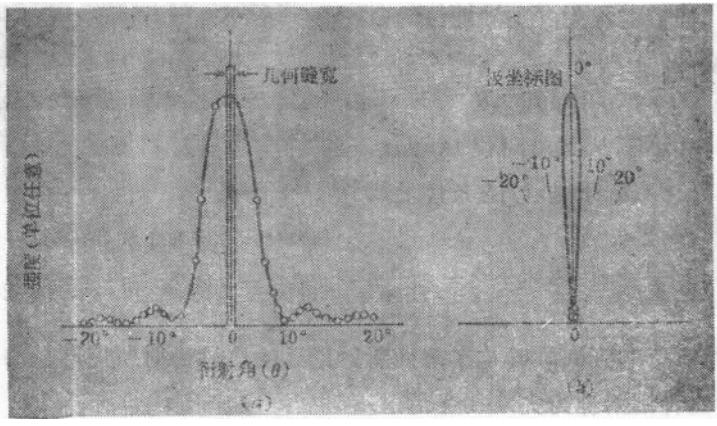


图 8-27 (*a*) 声波($\lambda=1.45$cm)的单缝衍射。(*b*) 同一图样的极坐标图，从 0 以某一方向引至曲线所得的线段长度，便是该方向上的相对强度。[仿自 R. W. Pohl: 《*Physical Principles of Mechanics and Acoustics*》(1932 年伦敦 Blakie 版)。]

由于大家已经知道 A^2 而不是 A 本身，才是对能流这个最重要的量的量度，因而便能更好地理解：何以中央最大要比其他的最大更为重要得多。从理论上说，最重要的即最靠近中央最大的辅峰，其高度大约只及中央最大的 5%，大约 93% 的总透射能，都分布在中央最大两侧的零值之间。附带说明一下，把象图 8-24(*b*) 那样的曲线，对纵标进行平方之后，就会消除掉各零值处斜率的不连续性了(试用有关方程自行证明之)。

2. **双缝**。在此情形中，我们把如下两个效应结合在一起：单独一个缝的特征衍射图样和两缝之间的干涉。其强度的表达式为

$$I(\theta)=4I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \tag{8-28}$$

式中 $\alpha=(\pi b\sin\theta)/\lambda$, $\delta=(2\pi d\sin\theta)/\lambda$。而 I_0 则是单独一个缝在 $\theta=0$ 时所具有的最大强度。上述方程，乃是根据不计缝宽时双缝

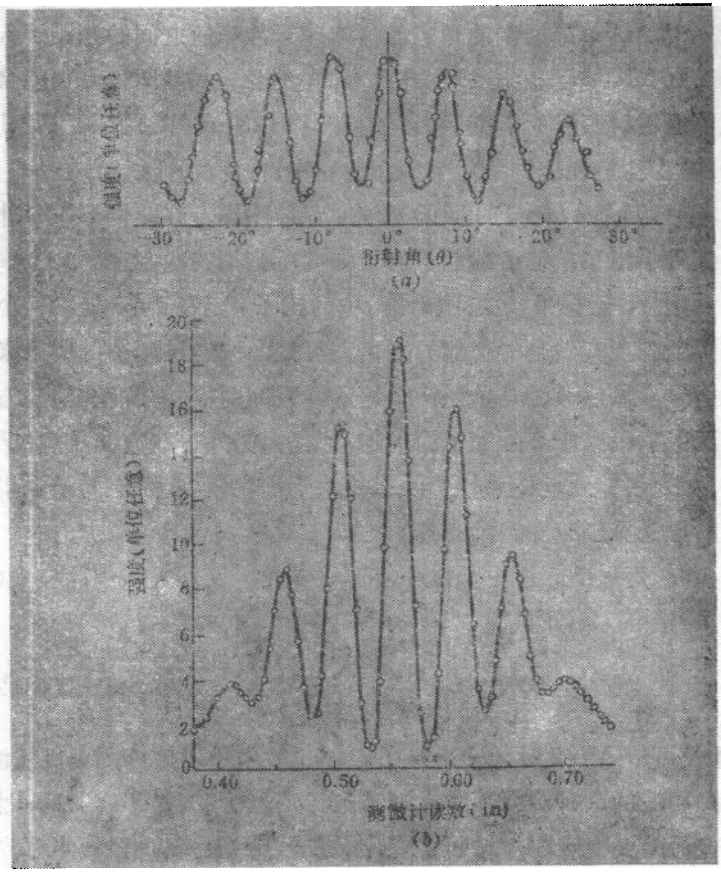


图 8-28　双缝衍射图样，显示出单个缝的宽度的影响。(*a*) 声波的图样，$\lambda=1.45$cm。[根据 R. W. Pohl:《*Physical Principles of Mechanics and Acoustics*》(1932 年伦敦 Blackie 版)。(*b*) 光波的图样，$\lambda=7300$Å。[引自 A. P. French, J. G. King, D. J. Cronin 的论文："*An Interference Fringe Photometer*（干涉条纹光度计）"，载美国物理学杂志 1965 年第 33 期第 628 页。]

干涉的式(8-22)，并结合式(8-27)得出的。

只要对双缝干涉图样进行仔细的测量，那就会显示出单缝图样对基本的干涉效应所施加的这种调制作用。由于两缝之间的距离(即两缝中心间的距离)d，肯定大于(也许是很大于)单个缝的宽度b，因此，单缝调制的角宽度，就比干涉峰值之间的角距要大得多。如果和缝距相比，缝宽是极窄的，那么，双缝图样就可能会处在单缝衍射图样的中央最大之内。图 8-28(a)(又是引自 Pohl 的著作)，便是在这种条件下($b/d\approx1/10$)得到的声波干涉图样。图 8-28(b)乃是 $b/d\approx1/4$ 时的光波的双缝图样。在此情形中，非常精细地示出了单缝衍射因子对于强度所施加的限制。

这里，值得来谈谈式(8-28)中的因子 4。在 $\theta=0$ 处，两个缝造成的强度竟然是一个缝的四倍。可是，波通过两个缝所传来的总能量，显然只能是单独一个缝所传来的两倍。强度在某些方向上所以能以大于 2 的因子而扩增，那是以另外一些方向上(在节线上)存在着零强度作为补偿的缘故。干涉现象，实质上乃是资用能量的一次重新分配。

3. **衍射栅**。适用于这种情形的公式，就是式(8-27)与式(8-24)的组合。由此得出

$$I(\theta)=I_0\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2\left[\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}\right]^2 \tag{8-29}$$

[此式可用 $N=2$ 时又一次得出式(8-28)来予以检核。]对机械波，例如声波的这种多缝图样之细节进行定量研究，是不容易的；因为在普通的实验室内，总归有着各式各样无关的表面和物体对波进行着散射，因而造成了本底噪声。然而图 8-29 表明，人们所期望的图样之主要特色却仍被展现出来了。这是 R. W. Pohl 用七条缝的衍射栅和 1.45 cm 波长的声波得到的。

和对双缝系统一样，这里也可以注意一下资用能量的重新分

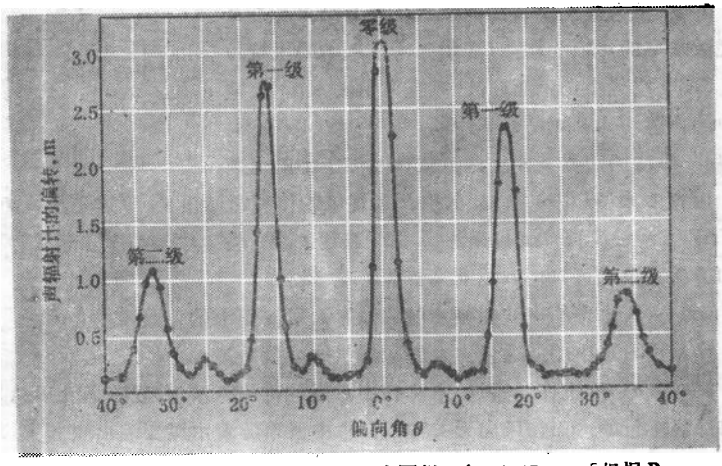


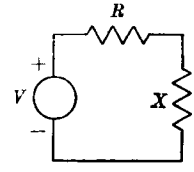
图 8-29　声波衍射栅($N=7$)的强度图样，$\lambda=1.45$cm。[根据 R. W. Pohl: ‹*Physical Principles of Mechanics and Acoustics*› (1932 年伦敦 Blackie 版)。]

布问题。如果不考虑因式$(\sin\alpha/\alpha)^2$的变化，则每个主最大所达到的强度，便等于单个缝的N^2倍。可是，这主最大所具有的宽度，却大约只占两个最大之间距的$1/N$。所以，由这两个因子的组合，便得出累积强度等于单独一个缝的N倍。

习　题

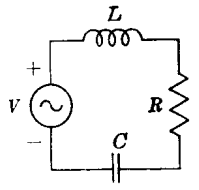
8-1　两根连在一起的弦线，具有张力T和质量密度μ_1及μ_2。设想有一个行波入射到边界处。试分别求出，在$\mu_2/\mu_1=0$、0.25、1、4、∞时，反射振幅对入射振幅之比，以及透射振幅对入射振幅之比。

8-2　两根连结在一起的弦线，具有张力T和质量密度μ_1及μ_2。设想有一行波入射于边界处。试证：反射波的能通量加上透射波的能通量，等于入射波的能通量。[**提示**：波的能通量(能量密度乘波速)，是与A^2/v成正比的，此处A为振幅，v为波速。]



8-3　试考察图中所画的电路。求：使电阻X具有最大耗散功率时的电阻值。

8-4 试考察图中所画的电路。使电阻 R 具有最大耗散功率的 ω 值为何？（**提示**：考虑电路的阻抗。）



8-5 空气中的平面声波，垂直入射到水面上。空气中的声速约为 334m/s，水中的声速约为 1480m/s。[适用于纵波的边界条件，是波位移及波压力的连续性。后者由 $K(\partial\xi/\partial x)$ 给出，其中 K 是媒质的体积弹性模量。（这是从 $\Delta p=-K\Delta V/V=-K\Delta\xi/\Delta x$ 得来的。）由于波速 v 由 $(K/\rho)^{1/2}$ 给出，故反射系数和透射系数均可只用 ρ 及 v 来表述。]

(*a*) 进入水中的声波振幅为何？以占入射波振幅的分数表示之。

(*b*) 进入水中的能通量占入射能通量的分数是多少？

8-6 (*a*) 你也许观察过，水波在向海岸前进的时候，其波阵面几乎总是与海岸线平行的，而与风向无关。根据水中波速随着水深变浅而减慢的事实，试用惠更斯原理解释上述现象。

(*b*) 为了更具体地分析 (*a*)，假定原来在 x 方向行进的波，现在进入到波速 v 随垂直于行进方向的距离 y 作规则变化的区域里。（例如，x 可以是平行于海岸的方向，而 y 则是垂直于海岸的方向。）试证：波的方向将开始描绘出半径为 R 的圆弧，使得

$$R=\frac{v}{dv/dy}$$

8-7 (*a*) 正如课文里式(7-12)所展示的，气体中的声速是与绝对温度 T 的平方根成正比的。利用这个事实以及上题中的结果，证明：当竖直方向 (z) 上存在着温度梯度时，声波在开始转向时的曲率半径为

$$R=\frac{2T}{dT/dz}$$

(*b*) 在平静的日子里，大气的温度大致随高度而线性的下降。试画出从高悬在大气中的波源所发出的声“射线”的路径。假定地面处的声速为 1100ft(英尺)/s，温度在每增加 500ft 高度时降低 1°C，试估算：地面的观察者开始听到飞行在 15,000ft 高空处的飞机时的水平距离。

8-8 (*a*) 一辆以 60mi(哩)/hr 速度行驶着的警车，经过一个无事的旁观者时，开响了频率为 2000Hz 的警报器。试问：旁观者听到警报器频率的全部变化量是多少？

(*b*) 警车继续在街上行驶着，街的远处耸立着一堵高砖墙。当从墙上反

射回来的声音与直接来自警报器的声音叠加之后，旁观者听到的是什么？

8-9 已知受热而激发的钠原子，发出特征波长为 $\lambda\approx6000\text{Å}$ 的光。但又知钠汽光源的辐射并不是完全单色的，而是包含了分布在 $(6000\pm.02)\text{Å}$ 范围内的诸波长。若钠谱线的这种增宽，主要是多普勒效应引起的(也确是如此)，试确定钠光源的大致温度。(光速$=3\times10^8\text{m/s}$。)

8-10 瑞利(Rayleigh)在其名著《声学理论》(第二卷第 298 节)中写道，倘若观察者以恰好两倍于声速的速度从音乐演奏会离去，那他"就会听见音乐作品在节拍和音调上都不错，但都是倒过来演奏的"。这个议论尽管表面上看来确也讲得通，但你还是仔细想想，这个趣闻究竟说的是什么。

8-11 声波从波源水平地传至接收器。假定波源的速率为 u，接收器的速率为 v(在同一方向)，并且有速率为 w 的风从波源吹向接收器。若波源所发射的声波频率为 ν_0。静止空气中的声速为 V，试证：接收器记录到的频率为

$$\nu=\nu_0\frac{V-v+w}{V-u+w}$$

注意，倘波源与接收器的速度一样，则接收到的信号频率，并不因为有风而有所差异。

8-12 课文中论述过运动波源对与波源运动方向成 θ 角的远方观察者，所产生的多普勒效应的理论。并且证明了所收到的频率由式 (8-14) 给出：

$$\nu(\theta)=\frac{\nu_0}{1-\dfrac{u\cos\theta}{v}}$$

(*a*) 试证：倘若波源静止而**观察者**具有 $-u$ 的速度，因而波源与观察者的相对速度仍和先前一样，则观察者所检测到的频率为

$$\nu'(\theta)=\nu_0\left(1+\frac{u\cos\theta}{v}\right)$$

(*b*) 试求 ν 及 ν' 之间的近似差值。然而，物理学中具有极其重要意义的一个事实是，真空里的光波与空气中的声波大不一样，它并不存在这种差别；而答案中出现的，只有波源与观察者的**相对**速度。这是构成爱因斯坦(Einstein)狭义相对论的特征之一，亦即并不存在这种与声波情形相同的媒质，致使光速相对于此种媒质具有什么特征性的速度。

8-13 频率为 ν_0 的声源，在距地面 h 高度处以匀速 u 沿 x 方向作水平运动。一观察者位于地面上 $x=0$ 的地点；声源在 $t=0$ 时经过此点。

(*a*) 试证：地面上某时刻 t_R 所接收到的信号，乃是声源在前一时刻 t_S 所发出的，从而

$$\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)t_S=t_R-\frac{1}{v}\left[h^2\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)+u^2t_R^2\right]^{1/2}$$

(*b*) 试证：所接收到的信号频率，作为**发出**时刻 t_S 的函数时，便是

$$\nu(t_S)=\frac{\nu_0}{1+\dfrac{u}{v}\cdot\dfrac{ut_S}{(h^2+u^2t_S^2)^{1/2}}}$$

(而 ν 作为**接收**时刻 t_R 之函数的表达式，则更要复杂得多。)

(*c*) 当声源由远及近时，接收到的声频为 5500Hz；而当它向远方离去时，接收到的声频便降为 4500Hz。此外，在声源经过头顶的 4s 时间内，观测到的频率从 5100Hz 降至 4900Hz。试算出声源的速率及高度。为简化运算，可以采用近似。(这种分析应用在：从接收到的人造卫星上发出之无线电频率随时间的变化中，来推断卫星的速率及高度。)

8-14 (*a*) 波长为 λ 的声源 S，置于距平面反射墙一小段距离 d 处。试证：这样得出的干涉图样，恰跟没有此墙而在墙后 d 距离处置有另一声源 S' 时，所产生的图样一样。证明此"象源"应与 S 有 180°的异相，并考虑，这与两个同周相声源的正常双源装置相比，对形成干涉图样有何含意。

(*b*) 如果一个高保真度的扬声器置于离墙 1ft 的地方，那么在一间中等大小的房间(比如 12ft×18ft)内，能产生两种或更多种干涉条纹的声频范围是什么？若你坐在距离扬声器 12ft 远的地方，且头部离墙 3ft，则因干涉效应而趋向于被遏止的频率是哪些？

8-15 今有缝距为 0.05mm 的一个 N 条缝的衍射栅，且波长 $\lambda=5000$Å。

(*a*) 近似地说，可有几级主最大？

(*b*) 两振幅 A 及 A_0 之比值为何？(A_0 为 $N=1$ 时所形成的振幅。)

(*c*) 试证：你对(*b*)的答案在 $N=2$ 时，将约化为课文中对双缝系统所导出的结果。

(*d*) 若 $N=100$，试求(近似地)第一级辅峰对主最大的振幅之比。

8-16 今用波长为 5000Å 的光以及宽度为 0.05mm 的单缝来进行夫琅和费衍射实验。

(*a*) 测试屏应放在多远的地方？

(*b*) 若采用的是双缝系统，当此两个(同样的)缝中心之间的距离分别为

0.1mm 及 0.05mm 时，则旁侧的第一级最大与中央最大的强度之比各为何？

8-17　频率为 2000Hz 的声波，垂直入射于一堵高墙上，墙上有一道 18 in 宽的竖直的间隙。一人在墙后 50ft 远处，平行于墙行走着。在多长的距离范围内，他所听见的声音强度大于最大值的 50%？大于 5%呢？

参考书目提要

关于机械振动和机械波的入门内容，当然在许多普通物理课本中都有。尤其在一些较老的书籍中，对声波和音乐都有着极好而又富有兴趣的讨论(例如,纽约 Dover 1959 年出版的 L. W. Taylor, *Physics, The Pioneer Science*, 或者麻省理工学院 1965 年出版的 R. A. Millikan, D. Roller, E. C. Watson, *Mechanics, Molecular Physics, Heat, and Sound*, 这些都是相当早版的重版书)。在这些以及其他许多方面，都明显地表现了科学家和音乐之间的亲密关系。

下面开列的参考书目都加了注解，它们或者与本书的个别论题，或者与本书的全部内容有关。一般说来，这些参考书与本书的水平是相当的，虽然其中有些肯定是较深些，而且在个别论题的处理上，许多书都远为详细得多。

Backus, J., *The Acoustical Foundations of Music*, 1969 年纽约 Norton 版。

这是关于乐音物理学的书，是为给音乐家而不是科学家开设大学课程写的。

Barker, J. R., *Mechanical and Electrical Vibrations*. 1964 年伦敦 Methuen 出版的"Methuen 专论"(也有纽约 Wiley 的版本)。

这是从理论工程学的观点写的一本书，它对振动系统进行了相当透彻的分析讨论。

Benade, A., *Horns, Strings and Harmony*, 1960 年纽约 Doubleday 出版的"科学研究丛书"。

本书作者是位物理学家，也是位热心的音乐家，他以轻快简明的语言写了这本令人喜欢的书。几乎没有什么数学，但却富于物理概念和成果。

Bishop, R. E. D., *Vibration*. 1965 年纽约 Cambridge University Press 版。

它对振动问题作了非常精细而普遍的叙述，特别注意到工程上的问题。这是根据在伦敦英国科学知识普及会举办的第 133 届著名的圣诞节讲座上的演讲而写成的。

Bland, D. R., *Vibrating Strings*, 1960 年伦敦 Routledge and Kegan Paul 出版的"数学丛书藏书"。

该书对弦线上的振动和波动作了细致的数学分析，包括阻力效应和耗散效应的某些考虑。

Booker, H. G., *A Vector Approach to Oscillations*, 1965 年纽约 Academic 版。

这是用复数矢量法分析振动运动的书，非常方便地示出了这种方法的功能和使用范围。

Braddick, H. J. J., *Vibrations, Waves, and Diffraction*, 1965 年纽约 McGraw-Hill 版。

此书在简单地叙述过几乎跟本书同样的一套理论论题之后，进而特别讨论了傅里叶分析以及惠更斯原理的数学基础。

Brillouin, L., *Wave Propagation in Periodic Structures*, 1953 年纽约 Dover 版。

这是关于晶体点阵的振动与波之理论的经典著作，是从电路理论及电气工程学的观点进行分析的，但却附有对固体之原子理论中诸基本问题的应用。

Coulson, C. A., *Waves*, 1941 年英国爱丁堡城 Oliver & Boyd 版［也有纽约 Wiley(边缘科学)版］。

这是一本关于各种波和简正模问题之数学理论的一般入门书。

Crawford, F. S., *Waves*, (伯克利物理丛书第三卷)1968年纽约 McGraw-Hill 版。

此书从简正模问题开始，对波的物理学进行了非常透彻而丰富的讨论。它在考虑机械波的同时，广泛地考虑了电磁波和光学问题。它汇集了一些难于理解的东西，但也对许多惹人喜爱的家庭小实验进行了细致的讨论。确实是部杰作。

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 1956 年纽约 McGraw-Hill 版。

这是从工程观点出发，讨论振动问题的一本著名而优秀的教本。

Feather, N., *Vibrations and Waves*, 1961 年英国爱丁堡大学出版（也有 1964 年伦敦 Penguin Books 版）。

这不象是课本而是一篇扩展了的论文，其中有对许多件有兴趣的小事的

说明和评论。对机械振动、声波和水波、干涉和衍射现象都有很详细的讨论。

Jeans, J. H., *Science and Music*, 1961 年纽约 Cambridge University Press 版。

此书首先是为非理工科人员使用准备的。几乎没有数学，但却很详细地论述了乐音的产生和收听。

Josephs, J. J., *The Physics of Musical Sound*, 1967 年纽约 Van Nostrand Reinhold 出版的"要素图书"之一。

此书范围与 Benade 及 Jeans 的完全一样，但在涉及物理学的时候，却具有较高的技术和理论水平。

Kinsler, L. E., and Frey, A. R., *Fundamentals of Acoustics*, 1962 年纽约 Wiley 版。

此书把声波的产生、传输和接收中的理论和实践紧密地联系起来了。主要是为声学工程师写的。

Lindsay, R. B., *Mechanical Radiation*, 1960 年纽约 McGraw-Hill版。

这是对机械波和声学详细理论的专著。很深，而且非常详细。

Magnus, K., *Vibrations*, 1965 年伦敦 Blackie 版。

此书是关于机械振动之数学分析的，对非线性系统给予了相当的注意。

McLachlan, N. W., *Theory of Vibrations*, 1951 年纽约 Dover 版。

这是一本分析线性和非线性力学系统简明理论的入门书。

Morse, P. M., *Vibration and Sound*, 1948 年纽约 McGraw-Hill 版。

此书是对振动系统以及声波的传输和散射问题的权威性理论著作。大大高于本书的水平。

Morse, P. M., and Ingard, K. U., *Theoretical Acoustics*, 1968 年纽约 McGraw-Hill 版。

这基本上是上本书的大为扩充了的现代修订本。

Pain, H. J., *The Physics of Vibrations and Waves*, 1968 年纽约 Wiley 版。

就其一般情形来说，完全与本书相似。它更加纯理论些(因而在这方面也更深一点)，且对电磁波理论作了较为明确的讨论。

Pearson, J. M., *A Theory of Waves*, 1966 年波士顿 Allyn & Bacon 版。

这是一本相当成熟的关于机械波和电磁波之形式理论的入门书。

Pohl, R. W., *Physical Principles of Mechanics and Acoustics*, 1932 年伦敦 Blackie 版。

此书以各种可能的方式，把论题的展开紧紧地与观察、实验和论证结合起来。只有很少的数学，但并不能说它是初等的，因为它充满了物理学。这是根据著者在哥廷根大学的著名讲座中的演讲写成的。

Rayleigh, Lord(J. W. Strutt), *The Theory of Sound*, 1945 年纽约 Dover 版。

这是关于此论题的宏大的经典理论专著。第一卷讲的是振动系统，第二卷是流体中的波。数学水平是高的，但全书充满了引人入胜的观测细节。

Stephens, R. W. B., and Bate, A. E., *Wave Motion and Sound*, 1950 年伦敦 Edward Arnold & Co. 版。

对于一门自成体系的机械振动和声学的课程来说，这是一本有兴趣而组织得极好的课本。些许高于本书的水平。它把论题和实际应用非常有效地联系了起来。

Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations*, 1950 年纽约 Wiley"边缘科学"版。

此书从本书停止的地方开始，专门讨论振动系统的数学分析。只能供有雄心的读者阅读。

Stoker, J. J., *Water Waves*, 1957 年纽约 Wiley"边缘科学"版。

对各种水波进行了非常仔细而深入的理论研究。

Sutton, O. G., *Mathematics in Action* 1960 年纽约 Harper Torchbooks 版。

这是一本把数学应用于物理问题的非正规而令人喜爱的入门书。其所以将其列入参考书目，是因为它有着非常美好的一章，名曰"*An Essay on Waves*(论波)"。

Temple, G., and Bickley, W. G., *Rayleigh's Principle*, 1956 年纽约 Dover 版。

本书是一本详细的数学分析入门书，用此方法从计算总能量可以求得复杂力学系统的诸特征频率。(瑞利原理是说，弹性系统的最低振动模所具有之动能和势能的分布，使得频率为最小值。)

Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, 1937 年纽约 Van Nostrand Reinhold 版。

这是一本关于把数学原理细致地应用于力学振动系统的有名的较老的专著。

Towne, D. H., *Wave Phenomena*, 1967 年麻省里丁城 Addison-Wesley 版。

对波传播进行了细致的讨论，着重于电磁波和光波。理论和实验溶合得很好。明显地高于本书的水平。

Waldron, R. A., *Waves and Oscillations*, 1964 年 Van Nostrand Reinhold 出版的"要素图书"之一。

从理论和实验方面，对机械波和电磁波进行了很好的简要概述。包括对遵导波的讨论。

Wood, A., *Acoustics*, 1940 年伦敦 Blackie 版。

对声振动和声波的理论及观测，作了非常透彻而普遍的叙述。此书内容十分广博，充满了著者在长期而专志的研究中所积累起来的入微之处。

Wood, A. (经 J. M. Bowsher 修订), *The Physics of Music*, 1961 年伦敦 Methuen 版。

此书与 Jeans 的书很相似，但更着重于细节和专业性。所有这一类的书，都承认是得惠于亥姆霍兹(H. von Helmholtz)十九世纪的伟大专著，*The Sensations of Tone* 的。

习 题 答 案

第 一 章

1-4 (*b*) $r_1=\sqrt{7}$, $\tan\theta_1=\sqrt{3}/2$; $r_2=7$, $\theta_2=-2\theta_1$ ($\tan\theta_2=-4\sqrt{3}$)。

1-9 愿意；它约值两角一分。

1-10 $C=(A^2+B^2)^{1/2}$; $\tan\alpha=-B/A$。

1-11 (*a*) $A=5\text{cm}$; $\omega=2\pi\text{s}^{-1}$; $\alpha=\pm\pi/2$。

(*b*) (当 $\alpha=+\pi/2$ 时)$x=5\sqrt{3}/2\text{cm}$; $dx/dt=5\pi\text{cm/s}$;

$d^2x/dt^2=-10\sqrt{3}\,\pi^2\text{cm/s}^2$。

1-12 (*a*) $A=150/\pi$ cm; $\omega=\pi/3\ \text{s}^{-1}$; $\alpha=\pi/6$。

(*b*) $x=-75\sqrt{3}/\pi$ cm; $dx/dt=-25$ cm/s;

$d^2x/dt^2=25\pi/\sqrt{3}$ cm/s^2。

第 二 章

2-1 (A, α)的值是

(*a*) $\sqrt{2}$, $-\pi/4$; (*b*) 1, $-2\pi/3$;

(*c*) $\sqrt{13}$, $-\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$; (*d*) $2-\sqrt{2}$, $3\pi/4$。

2-2 $A\simeq0.52\text{mm}$; $\delta\simeq33.5°$。

2-3 1s。

2-4 (*a*) $\nu=1\,\text{s}^{-1}$; (*b*) $6.25\,\text{s}^{-1}$; (*c*) $0.49\,\text{s}^{-1}$。

第 三 章

3-1 $k=25\text{dyn}$(达因)/cm。

3-2 (*a*) $T_0=2\pi(m/k)^{1/2}$; (*b*) $T_0/\sqrt{2}$; (*c*) $\sqrt{2}T_0$。

3-3 (*a*) $y=2.5\text{cm}$; (*b*) 1.25cm。

3-4 (*a*) $\omega=(g/l)^{1/2}$。

3-5 $2\pi(2L/3g)^{1/2}$。

3-6 $2\pi(d/g)^{1/2}$。

3-7 $y=l_0/20$；张力$=5\times$物重。

3-8 (*a*) 0.25mm; (*b*) 0.23m。

3-9 (*a*) 半径 22cm, 360kg; (*b*) 66 s。

3-10 (*a*) $5.9\times10^{11}\mathrm{N/m^2}$; (*b*) b/a; (*c*) 1.5。

3-11 (*a*) $\omega=(\gamma pA/ml)^{1/2}$。

3-14 (*b*) $4\mathrm{N\cdot s/m}$; (*c*) $Q=1$。

3-15 (*a*) $Q_0=512\pi/\log_e 2$; (*b*) $2Q_0$; (*c*) $Q=12$, $b=0.025\mathrm{kg/s}$。

3-16 (*a*) $8\pi^4\nu^3A^2Ke^2/c^3$; (*b*) $mc^3/4\pi\nu Ke^2$; (*c*) $(Q\log_e 2)/2\pi$;
(*d*) $Q\simeq2.5\times10^7$, 半衰期$\simeq5\times10^{-9}\mathrm{s}$。

3-17 (*d*) $2\pi(2h/g)^{1/2}$。

3-19 (*c*) $T_x/T_y=(1-l_0/l)^{1/2}$;
(*d*) $x(t)=A_0\cos(2k/m)^{1/2}t$, $y(t)=A_0\cos[2k(l-l_0)/ml]^{1/2}t$。

第 四 章

4-3 (*a*) $T=\pi/5\sqrt{3}\,\mathrm{s}$; (*b*) 1.3cm。

4-4 (*b*) $(35g/36h)^{1/2}$; (*c*) $3(h/g)^{1/2}$;
(*d*) $Q=3$; (*e*) $\delta=\pi/2$; (*f*) $0.90h$。

4-5 (*b*) 15.7cm; (*c*) $\omega_0\pm0.017\mathrm{s^{-1}}$。

4-6 (*d*) 约 200 Å。

4-8 (*b*) $A=F_0/m\omega(\omega^2+\gamma^2)^{1/2}$, $\tan\delta=-\gamma/\omega_0$。

4-9 (*a*) $\pi b\omega A^2$。

4-11 (*a*) 1.3cm, 130°; (*b*) 0.063J; (*c*) 0.30W。

4-12 (*a*) $19.8\mathrm{s^{-1}}$; (*b*) 1.5cm; (*c*) 0.086W。

4-13 (*a*) $\omega_0=40\mathrm{s^{-1}}$, $Q=20$; (*b*) 16。

4-14 (*a*) $Q=25$; (*b*) $\gamma=0.04\omega_0$; (*c*) 0.08π;
(*d*) $\sqrt{2}\,\omega_0$; (*e*) $\sqrt{2}\,Q$; (*f*) $\bar{P}_m$; (*g*) E_0。

4-15 (*a*) $1.005\omega_1$; (*b*) $Q=5$(很近似地);
(*c*) $0.2(mk)^{1/2}$(近似地)。

4-16 (*a*) $\omega_0=(LC)^{-1/2}$; (*b*) $\gamma=1/CR$; (*c*) $P_m=I_0^2R/2$。

4-17 (*a*) $2\pi\times10^{-5}\mathrm{J}$; (*b*) $10^{-3}\mathrm{J}$; (*c*) $10^{-4}\mathrm{s}$。

第 五 章

5-2 (*a*) 1.27s, 1.23s; (*b*) 40s(近似地)。

5-4 $m\omega^2=\left(\frac{k_A+k_B}{2}+k_C\right)\pm\left[\left(\frac{k_A-k_B}{2}\right)^2+k_C^2\right]^{1/2}$。若$k_C^2=k_Ak_B$，则 $\omega'=[(k_A+k_B+k_C)/m]^{1/2}$，$\omega''=(k_C/m)^{1/2}$。

5-5 $\omega=\omega_0(1\pm\alpha)^{-1/2}$。

5-6 (*a*) $\sqrt{6}$s, $3\sqrt{2}$s; (*c*) $3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)/2$s。

5-7 (*c*) 2.29s^{-1}; (*d*) $k_C/k_0=1.52$。

5-8 (*d*) $(g/L)^{1/2}$, $[(g/L)+(2ka^2/mL^2)]^{1/2}$。

5-9 (*d*) $\left(\frac{11}{3}\right)^{1/2}=1.91$。

5-10 在"慢"振动模中，振幅比(上/下)$=(\sqrt{5}-1)/2$；在快振动模中，比值$=(\sqrt{5}+1)/2$。

5-11 (*b*) $\omega^2=[(k/2M)+(g/l)]\pm[(k/2M)^2+(g/l)^2]^{1/2}$。

5-13 (*a*) 周期$=2\pi(2ml/3T)^{1/2}$; (*c*) $\omega=(3T/ml)^{1/2}$。

5-15 (*c*) $(2-\sqrt{2})^{1/2}\omega_0$, $\sqrt{2}\omega_0$, $(2+\sqrt{2})^{1/2}\omega_0$，此处$\omega_0=(T/ml)^{1/2}$。

5-16 $\alpha=\cos^{-1}[1-(\omega^2/2\omega_0^2)]$, $C=h/\sin[\alpha(N+1)]$。

第 六 章

6-1 (*a*) $\nu_1=10$s^{-1};

(*b*) $\nu=50$, 100, 150等s^{-1}(所有50 s^{-1}的整数倍)。

6-2 $\nu_A=n\nu_1(n=1,2,3)$, $\nu_1^2=T/4ML$; $\nu_B=0.84\nu_1$, $1.55\nu_1$, $2.04\nu_1$。

6-5 $\omega=\pi(T/LM)^{1/2}$。

6-6 (*a*) $\omega_n=[(2n-1)\pi(Y/\rho)^{1/2}]/L$; (*b*) $\lambda_n=L\Big/\left(n-\frac{1}{2}\right)$;

(*c*) $x=L\left(n-\frac{1}{2}\pm k\right)\Big/(2n-1)\,(k=0,\cdots,n-1,\cdots)$。

6-9 (*b*) $A_1=10\mu$, $A_2=10(1-1/\sqrt{2})\simeq 3\mu$。

6-10 (*a*) $\nu_n=nc/2L$; (*b*) (1) 21, (2) 15cm。

6-11 (*a*) $(A^2n^2\pi^2T)/4L$; (*b*) $(A_1^2+9A_3^2)\pi^2T/4L$。

6-12 (*a*) $TL\{[1+(2h/L)^2]^{1/2}-1\}\simeq 2Th^2/L$;

(*b*) 每 $2(ML/T)^{1/2}$s 一次。

6-14 $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\pi x/L)$，其中

(*a*) $B_n=\begin{cases}8AL^2/(n\pi)^3 & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数;}\end{cases}$

(*b*) $B_1=A$，$B_n=0$，此时 $n\neq 1$;

(*c*) $B_n=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}4A}{\pi(n^2-4)} & n\text{ 为奇数}\\ A/2 & n=2\\ 0 & n\text{ 为偶数，}n\neq 2。\end{cases}$

6-15 $y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\pi x/L)$，其中

(*a*) $C_n=\begin{cases}8AL^2\cos(n\omega_1 t)/(n\pi)^3 & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数;}\end{cases}$

(*b*) $C_n=\begin{cases}8BL^2\sin(n\omega_1 t)/n^4\pi^3\omega_1 & n\text{ 为奇数}\\ 0 & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

(ω_1=最低振动模的角频率)。

第 七 章

7-2 (*a*) $A=0.3$cm，$\lambda=4$cm，$k=0.25$cm^{-1}，$\nu=25$s^{-1}，$T=0.04$s，$v=100$cm/s；(*b*) 15πcm/s。

7-3 $\xi=0.003\sin 2\pi[(x/600)+5t)]$。

7-4 (*a*) $\frac{1}{3}$m；(*b*) 72°

7-5 (*a*) 22.4m/s；(*b*) 2.24m；

(*c*) $y(x,t)=0.02\sin(2.80x-62.8t+0.52)$。

7-6 (*a*) 10m；(*b*) $y=A\sin(3\pi x/L)\cos(30\pi t)$。

7-7 $y=$零；$\partial y/\partial t\simeq 6$m/s。

7-8 (*a*) $\nu=1.5$Hz；

(*b*) $\lambda=\frac{16}{16n-1}$m，$n=1,2,3,\cdots$若系正向运动的波，

$\frac{16}{16n+1}$m，$n=0, 1, 2, 3, \cdots$若系负向运动的波；

(*c*) $v=+8/5$ m/s等，$v=-24$m/s等；(*d*) 数据不充分。

7-12 (*b*) v_y(最大)≈ 4m/s；(*c*) $T=32$N；

(*d*) $y(x, t)=0.2\sin 2\pi(8t+x/5)$。

7-13 (*b*) $v=u/2$，方向$=+x$；

(*c*) $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=\frac{4b^3u}{(b^2+4x^2)^2}x_0$。

7-16 (*a*) 8×10^{-4}s；(*c*) $v_{max}=12.5$m/s，在断开期间；

(*d*) $t=1.2\times10^{-2}$s。

7-17 (*a*) $y(x, t)=2A\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{9}{2}x-\frac{19}{2}t\right)$；

(*b*) 1m/s；(*c*) 2πm。

7-18 (*c*) 50cm。

7-20 (*c*) 28m/s$\simeq$63mi(哩)/hr。

7-21 (*a*) $\lambda_n=2l(N+1)/n$，$\omega_n=2\omega_0\sin[n\pi/2(N+1)]$；

(*b*) $v_p(n)=\omega_n\lambda_n/2\pi$，

$$v_g(n)=[2l\omega_0(N+1)/\pi]\left\{\sin\left[\frac{(n+1)\pi}{2(N+1)}\right]-\sin\left[\frac{n\pi}{2(N+1)}\right]\right\}。$$

第 八 章

8-1 $g_1/f_1=1, \frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -1$；$f_2/f_1=2, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, 0$。

8-3 $X=R$时耗散最大。

8-4 $\omega=(LC)^{-1/2}$时耗散最大，已知L, C, R给定。

8-5 (*a*) 5.5×10^{-4}；(*b*) 1.1×10^{-3}。

8-7 (*b*) 接近20 mi(哩)。

8-8 (*a*) 频率共下降320 Hz。

8-9 $T\simeq900$ K。

8-12 (*b*) $\nu(\theta)-\nu'(\theta)\simeq\nu_0(u\cos\theta/v)^2$。

8-13 (*c*) 速率$\simeq0.1v=110$ft/s，高度$\simeq$1100至1200ft。

8-14 (*b*) 所有高于约 1300Hz 的声频；凡为 2200（近似地）Hz 的整数倍频。

8-15 (*a*) 100；

(*b*) $A/A_0=\sin(100\pi N\sin\theta)/\sin(100\pi\sin\theta)$；(*d*) $\frac{1}{5}$。

8-16 (*a*) 远大于 5mm 的距离；

(*b*) 在 $d=0.1$mm 时，比值约为 0.44；

在 $d=0.05$mm 时，约为 0.05。

8-17 欲 $I/I_{max}\geqslant 0.5$ 时，在最大值两侧各约 8ft。

欲 $I/I_{max}\geqslant 0.05$ 时，两侧各约 16ft。

索　引

二　画

二维及三维波(*2-and 3-dimensional waves*) 250, 271
力阻抗(*mechanical impedance*) 265, 267

三　画

三维系统的简正模(*normal modes of 3-dimensional system*) 192
干涉(*interference*) 258, 272, 288, 291, 301
干涉图样(*interference patterns*) 288, 291, 293, 296
马赫数(Mach *number*) 283

四　画

中肯阻尼(*chitical damping*) 70
双缝(*double slit*) 286, 302
气体的弹性(*elasticity of gas*) 59, 179
风琴管(*organ pipes*) 178
无阻尼自由振动(*undamped free oscillations*) 40
反射(*reflection*) 207, 258, 276
切变模量(*shear modulus*) 55
不同频率简谐振动的叠加(*superposed* SHM *of different frequencies*) 20, 27, 33
夫琅和费(J. von Fraunhofer)谱线(*Fraunhofer lines*) 108
夫琅和费衍射(Fraunhofer *diffraction*) 301
巴顿(E. H. Barton)摆(Barton's *pendulums*) 89, 92
开耳芬(Lord, Kelvin) 120

五 画

主最大(*principal maxima*) 293
正交性(*orthogonality*) 199, 225
正交性与简正模(*orthogonality and normal modes*) 200
矢量图(*vector diagrams*) 8, 26, 294, 298
平行简谐振动的叠加(*superposed parallel* SHM) 18, 25
节线(*nodal lines*) 187, 289, 298
电共振(*electrical resonance*) 103
电阻抗(*electrical impedance*) 267
布洛赫(F. Bloch) 112
布里渊(L. Brillouin) 138
本生(R. W. Bunsen) 109

六 画

交叉导数(*convective derivative*) 232
色散(*dispersion*) 235
有载荷的弦线(*loaded string*) 141, 149
有载荷的弦线之简正模(*normal modes of loaded string*) 141, 149
过阻尼振子(*overdamped oscillator*) 69
刚体摆(*rigid pendulum*) 50
刚性模量(*rigidity modulus*) 55
同频率简谐振动的叠加(*superposed* SHM *of equal frequency*) 18, 29
冲击波(*shock waves*) 284, 286
共振(*resonance*) 80, 99, 135, 157
共振频率(*resonant frequency*) 106
共振宽度(*resonance width*) 99
共振参数(*resonance parameters*) 106
共振参数表(*table of resonance parameters*) 106
光学共振(*optical resonance*) 107
多普勒(Doppler) 109, 280
亥姆霍兹(H. Helmholtz) 275

汤普森(S. P. Thompson) 273
汤姆孙(J. J. Thomson) 35
毕达哥拉斯(Pythagoras) 51, 163
达芬奇(Leonardo da Vinci) 233

七 画

杨氏(T. Young)模量(Young's *modulus*) 44, 173, 179, 215
体积弹性模量(*bulk modulus*) 55, 58, 215
阻尼振动(*damped oscillations*) 63
阻尼简谐振动(*damped* SHM) 67
阻尼自由振动(*damped free oscillations*) 68
阻尼振子(*damped oscillator*) 68
阻尼谐振子(*damped harmonic oscillator*) 68
阻尼振子的能量(*energy of damped oscillator*) 67
阻抗匹配(*impedance matching*) 269
扭转振子(*torsional oscillator*) 130
角简谐振动(*angular* SHM) 51, 53, 130
纵振动(*longitudinal oscillations*) 138, 148, 151, 214
纵波(*longitudinal waves*) 249, 270, 278
折射(*refraction*) 276
声(*sound*) 181, 214
声速(*speed of sound*) 215
声速表(*table of speed of sound*) 215
抗张强度(*tensile strength*) 46
连续弦线的简正模(*normal modes of continuous string*) 165, 236
连续弦线的受迫振动(*forced vibration of continuous string*) 171
连续弦线与傅里叶分析(*continuous string and Fourier analysis*) 163, 194
连续弦线上的前进波(*progressive waves on continuous string*) 206
克拉尼(E. F. chladni)图形(Chladni *figures*) 191
利萨如(J. A. Lissajous)图形(Lissajous *figures*) 33
伽利略(G. Galileo) 168
伯努利(D. Bernoulli) 138, 170

伯努利(J. Bernoulli) 138

八 画

周期性(*periodicity*) 1
周相落后(*phase lag*) 81, 87
空气柱(*air columns*) 56, 148, 177, 216
空气弹簧(*spring of air*) 56
空气的弹性模量(*elastic moduli of air*) 58
单摆(*simple pendulum*) 50, 81
单缝(*single slit*) 296
单缝衍射(*single-slit diffraction*) 294
波(*waves*) 205
波数(*wave number*) 218
波动方程(*wave equations*) 214
波速(*speed of waves*) 208
波与简正模(*waves and normal modes*) 206
波的能量(*energy in waves*) 238, 243
波的能流(*energy flow in wave*) 249
波所输运的能量(*energy transport by wave*) 247
波的动量流(*momentum flow in waves*) 249
波的叠加(*superposition of waves*) 217, 233
受迫振动(*forced vibrations*) 77
受迫无阻尼振子(*undamped forced oscillator*) 78, 95
受迫阻尼振子(*damped forced oscillator*) 83, 86, 97
受迫耦合振子(*forced coupled oscillators*) 134
受策动的单摆(*driven simple pendulum*) 81
受策动的耦合摆(*driven coupled pendulum*) 134
拍(*beats*) 23, 96, 218
非谐振子(*anharmonic oscillator*) 112
垂直简谐振动的叠加(*superposed perpendicular* SHM) 217
声爆(*sonic boom*) 285
驻波(*standing waves* 或 *stationary waves*) 207, 258

胁变(***strain***) 45, 174
胁强(*stress*) 45, 174, 250
弦线中的截止现象(***cut-off phenomena in string***) 242
拉普拉斯(P. S. de Laplace)算符(***Laplacian***) 251
拉格朗日(J. L. Lagrange) 194, 251
坡印廷(J. H. Poynting) 35
罗兰(H. A. Rowland) 108
欧勒(L. Euler)公式 12

九 画

绝热压缩(*adiabatic compression*) 180
相角(*phase angle*) 5, 19, 26, 29, 80, 84, 90, 212, 225
相速度(*phase velocity*) 235
相干性(*coherence*) 286
复数(*complex numbers*) 8
复指数(*complex exponentials*) 11, 42
复指数的运用(*use of complex exponential*) 42, 68, 82
前进波(*progressive waves*) 166, 205
前进波的叠加(*superposition of progressive waves*) 217
前进波的能量(*energy in progressive waves*) 243
脉冲波(*wave pulses*) 220
脉冲波的运动(*motion of wave pulses*) 220, 228
脉冲波的叠加(*superposition of wave pulses*) 233
脉冲波的反射(*reflection of wave pulses*) 220, 258
脉冲波的傅里叶分析(*Fourier analysis of wave pulses*) 222, 275
品质因素 Q(*quality factor* Q) 68, 89
重力波(*gravity waves*) 238
指数衰落(*exponential decay*) 67
衍射(光)栅(*diffraction grating*) 291
胡克(R. Hooke) 1, 39
胡克定律(Hooke's *law*) 40, 113
威尔伯孚斯(L. R. Wilberforce)摆(Wilberforce *pendulum*) 130

玻意耳(R. Boyle)定律(Boyle's *law*) 57, 1179
费因曼(R. P. Feynman) 12

十 画

振幅的定义(*definition of amplitude*) 4
能量密度(*energy densities*) 245
部分反射(*partial reflection*) 261
核共振(*nuclear resonance*) 109
浮体的简谐振动(SHM *of floating objects*) 48
速度共振(*velocity resonance*) 99
特征阻抗(*characteristic impedance*) 267
泰勒(Taylor)定理(Taylor's *theorem*) 11
爱丁顿(A. S. Eddington) 205

十一画

涟波槽照片(ripple tank photographs) 279, 284, 288, 296, 300
弹性(*elasticity*) 39, 44
弹性模量(*elastic moduli*) 46, 179
弹性模量表(*table of elastic moduli*) 46, 55
弹簧的振动(*vibration of spring*) 40, 44
谐振子(*harmonic oscillator*) 42, 171
谐振子的能量(*energy of harmonic oscillator*) 41, 67
偏振(*polarization*) 29, 44, 270
旋转矢量(*rotating vectors*) 6, 8
液柱的简谐振动(SHM *of liquid column*) 52
密勒(D. C. Miller) 164, 170, 220
基尔霍夫(G. Kirchhoff) 109, 275
菲涅耳(J. A. Fresnel) 272

十二画

晶体点阵(*crystal lattice*) 121, 138, 155, 270
等温压缩(*isothermal compression*) 58

棒的振动(*vibration of rods*) 173
棒的简正模(*normal modes of rods*) 176
棒中的声速(*speed of sound in rods*) 215
傅里叶(J. B. Fourier) 3
傅里叶定理(Fourier's *theorem*) 3, 222
傅里叶分析(Fourier *analysis*) 6, 163, 170, 193, 221
傅里叶综合(Fourier *synthesis*) 222, 227
惠更斯(C. Huygens)原理(Huygens' *principle*) 272
惠更斯原理的运用(*use of* Huygens' *principle*) 276
普赛尔(E. M. Purcell) 112
斯涅耳(Snell)定律(Snell's *law*) 236, 276, 279
渥拉斯顿(W. H. Wollaston) 108

十三画

截止(*cut-off*) 239
群速度(*group velocity*) 235
辐射压力(*radiation pressure*) 249
摆的简谐振动(SHM *of pendulums*) 51
叠加(*superposition*) 17
简并(*degeneracy*) 188
简谐振动(SHM) 3
简谐振动的几何表示法(*geometric representation of* SHM) 6
简谐振动的叠加(*superposition of* SHM's) 17
简正模(*normal modes*) 120, 124, 154, 163, 184
简正模的叠加(*superposition of normal modes*) 125, 169
简正模的性质(*properties of normal modes*) 144
简正模的谱(*spectrum of normal modes*) 182
简正模的简并(*degeneracy of normal modes*) 188
简正模的正交性(*orthogonality of normal modes*) 200
简正模与行波(*normal modes and traveling waves*) 206
简正频率(*normal frequencies*) 127, 131, 151
输入给受迫振子的功率(*power input to forced oscillator*) 97

输入给共振系统的功率(*power input to resonant system*) 98
瑞利(Lord Rayleigh, 即 J. W. Strutt) 307

十四画

膜的简正模(*normal modes of membranes*) 188
磁共振(*magnetic resonance*) 111
静振(*seiche*) 74

十五画

横波(*transverse waves*) 270, 278
横振动(*transverse oscillations*) 138, 151
耦合振子(*coupled oscillators*) 120, 134, 137, 138, 141, 240
耦合摆(*coupled pendulum*) 122, 140, 201

十七画

瞬变(*transients*) 78, 93