

美国M·I·T·物理学导论丛书

A·P·弗伦奇 著

牛顿力学

1

郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

3
8

52.03

美国 M·I·T· 物理学导论丛书

牛 顿 力 学

1

A·P·弗伦奇 著
郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

内 容 简 介

本书根据美国 W. W. Norton & Company. Inc. 出版的 A. P. French 著《牛顿力学》(*Newtonian Mechanics*)一书 1971 年版译出.

《牛顿力学》为美国麻省理工学院教育研究中心的《M. I. T. 物理学导论丛书》(M. I. T. Introductory Physics Series)中的一卷. 中译本按原书的三个部分分成三册出版, 第一册为"牛顿动力学入门"; 第二册为"经典力学的运用"; 第三册为"专题". 第一册内容包括六章: 粒子世界; 空间、时间和运动; 加速运动; 力和平衡; 自然界中的各种力; 力、惯性和运动.

本书可作为高等学校物理学课程的教学参考书, 也可供有关科技人员参考.

美国 M·I·T·物理学导论丛书

牛顿力学

I

A·P·弗伦奇 著

郭敦仁 何成钧 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 6.125 字数 135,000

1978 年 12 月第 1 版 1980 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—33,500

书号 13012·0264 定价 0.55 元

译者前言

本书是美国麻省理工学院《物理学导论丛书》中的一卷，是近年出版的一本比较好的大学物理课教学用书.

本书从历史发展的角度，由人们日常所见所及的实际力学现象出发，引入牛顿力学的基本概念和原理，然后逐步展开，在广泛的自然现象和近代科学技术的范围内，比较深入地讨论了这些概念和原理，使人读之有一种生动活泼、启人心智的感觉. 加上丰富的插图，更突出了这些特点. 因之，本书不是一些定义和定理的枯燥陈述，而是把牛顿力学这一近代科学的基石，以一种引人入胜的、富有生命力的形式介绍给初入大学的青年学生，避免使这门学科成为他们出于某种责任感而不得不勉强接受下来并用力去记住的一堆知识. 这对目前我国大学理工科的普通物理教学可能起一点他山之石的作用. 本书篇幅较多，题材较广，作为教学用书时教师需要按不同教学大纲的要求作适当的抉择. 关于这一点，作者在序言中有所建议，可供参考.

我们认为，本书作为一本大学水平的参考读物介绍给广大读者(从青年工人、农村知识青年到大学生和普通科技人员)是有益的. 对中学物理教师和高等学校物理教师也有一定的参考价值.

本书的习题部分由北大朱生传同志协助翻译，人民教育出版社物理编辑杨再石同志对译文提出了许多宝贵意见，谨在此表示谢意. 限于我们的水平，尽管我们作了一定的努力，译文中一定还存在着缺点和错误. 我们诚恳地期待来自各方面同志们的批评和指正.

郭敦仁　何成钧

1978年12月于北京

序

M.I.T.[麻省理工学院]的教育研究中心（原科学教学中心）的工作是致力于课程改革和与之有关的教学过程和辅助设备以及主要是对于大学本科水平的学生的学习过程本身的研究. 这个中心设立于 1960 年，由已故的 F.L. 弗里德曼教授为主任. 自 1961 年以来这中心就主要由美国全国科学基金会支持；也曾得到凯特林基金会，壳牌公司基金会，维多里亚基金会，W.T. 格兰特基金会以及宾格基金会的慷慨资助.

这个中心的工作的一个直接成果就是这一套 M.I.T. 物理学导论丛书. 这个丛书的意图是以一套篇幅不大的书，总起来把基础物理学的各个主要领域都包罗在内. 这套书企图强调实验和直觉在建立物理理论中的相互作用. 这套书的各卷试图为基础课程提供各种类型的可能的基础，其范围是从那些主要是强调经典物理的内容到那些包含着相当分量原子物理和量子物理的内容. 我们试图使各卷在水平和处理方式上彼此一致，但是并不想使之成为紧密交织的一整套；与之相反，每卷的布局相当独立，可作为一个单独的组成部分用于多种不同的课程设置.

本卷所包含的内容准备使之成为或多或少是独立的牛顿力学引论，以使一个对本科目基础很弱或毫无基础的学生能从头学起，逐步地达到相当精通的程度. 本卷分为三部分，为使用时提供一大致的指导. 第一篇，**牛顿动力学入门**，意图为两个目的服务. 首先，它几乎是从头起讨论运动学和动力学的基本概念. 其次，它试图切实地把力学的学习置于物理现象的世界和必然是不完善的一些物理理论的来龙去脉中. 这是作者本人的一个有意识的反应：

反对把力学阐述为同真实脱离的“应用数学”，以及在多少代(特别是那些在英国教育制度下成长起来的)学生中造成的使之误解的严格性印象．一个在应用牛顿定律方面已经有一些专长的学生将发现从第一篇中学不到多少分析的和定量的东西，但是把它通读一遍也还是能够从它的较广泛内容中得到一些益处的．

第二篇，**经典力学的运用**，无疑是本书的核心．有些教师将愿意从这里开始而把第一篇降到背境阅读材料的地位．最初的重点放在应用牛顿第二定律于单个物体．稍后，重点转移到两个或多个质点的系统以及关于动量和能量的守恒定律．篇幅颇长的一章专用于在整个牛顿体系中值得引以为荣的课题——万有引力理论和它的成就，这至今仍被誉为人在自身所处的庞大宇宙中寻找秩序的努力的一个顶峰．

第三篇，**若干专题**，主要是处理非惯性系、有心力运动和转动的动力学问题．如果这本书确是用作力学的入门讲授的基础，这些材料的大部分，也许除了有关转动和角动量的基本特征之外，可以视为选读的内容．毫无疑问，全书包括的材料超出了一学期课程里所能全部讲授到的内容；但是可以考虑把第一篇和第二篇作为初学者能够接受的整体，而把第二篇和第三篇作为已经有些预备知识的学生的教材．

经典力学的一个最为令人满意之处在于它的原理可以应用于范围广阔的和多种多样的物理体系．在本卷中我们作了努力以求清楚地提及这类应用，并同本丛书的其他各卷一样，从原出处作恰当的摘引以“证实”这种陈述．经过这样用它自己的历史予以充实之后，经典力学，在作者看来，有一种令人激动之处，为任何晚近发展的物理理论领域所不及．

本卷，同本丛书的其余各卷一样，要感谢许多人包括学生和教师的关心、批评和建议．就本卷而言，特别要向洛杉矶西方学院

的 A. M. 赫德森教授致谢，他同作者一起工作，准备了初步的教材，五年后发展成今天的这一版本. 还要谢谢伊法·M·哈喀拉和威廉·H· 英格汉姆他们在准备出版的手稿中所给予的无可估价的帮助.

A. P. 弗伦奇

剑桥，麻萨诸塞州
1970 年 7 月

目　录

序 …… V
引言 …… 3

第一篇　牛顿动力学入门

第一章　粒子世界 …… 19
§1　粒子观 …… 19
§2　电子和核子 …… 22
§3　原子核 …… 23
§4　原子 …… 24
§5　分子；活细胞 …… 26
§6　沙子和尘埃 …… 29
§7　地球上的其他物体 …… 30
§8　行星和卫星 …… 30
§9　恒星 …… 33
§10　星系 …… 34
习题 …… 36
第二章　空间、时间和运动 …… 41
§1　什么是运动 …… 41
§2　参照系 …… 44
§3　坐标系 …… 46
§4　位移矢量的相加 …… 51
§5　矢量的分解 …… 54
§6　矢量加法和空间的性质 …… 57
§7　时间 …… 59
§8　长度和时间的单位和标准 …… 61
§9　时-空图 …… 64

§10 速度……65
§11 瞬时速度……66
§12 相对速度和相对运动……70
§13 行星运动:托勒密与哥白尼之争……71
习题……76
第三章 加速运动……83
§1 加速度……83
§2 直线运动的分析……85
§3 关于增根的评注……91
§4 二维弹道问题……93
§5 单个原子的自由落下……96
§6 自由落下运动的其他特点……100
§7 匀速圆周运动……103
§8 极坐标中的速度和加速度……104
习题……107
第四章 力和平衡……115
§1 静力平衡中的力……115
§2 力的单位……118
§3 平衡条件;作为矢量的力……119
§4 物体接触时的作用与反作用……123
§5 转动平衡;转矩……124
§6 无接触的力;重量……128
§7 滑轮和绳……130
习题……132
第五章 自然界中的各种力……141
§1 力的基本类型……141
§2 引力……142
§3 电力和磁力……146
§4 核力……148
§5 中性原子间的力……150
§6 接触力……151

§7 摩擦接触力……153
结束语……155
习题……156
第六章 力，惯性和运动……163
§1 惯性原理……163
§2 力和惯性质量：牛顿定律……166
§3 关于牛顿定律的一些评述……169
§4 质量和力的标度……172
§5 连续作用的力的效果……175
§6 牛顿定律的不变性；相对性……176
§7 特定的力的规律下的不变性……179
§8 牛顿定律和时间反转……180
结束语……182
习题……184

开始时是力学

麦克斯·冯·劳埃,《物理学史》(1950)

我奉献这一作品，作为哲学的数学原理,因为哲学的全部责任似乎在于——从运动的现象去研究自然界中的力，然后从这些力去说明其他现象。

牛顿,《原理》前言 (1686)

引　言

宇宙的最突出的特征之一是运动. 银河系相对于其他河外星系运动,所有的恒星都在运动,诸行星则以恒星为背景作不同的运动. 在日常生活中首先吸引我们注意的是那些与运动有关的事件. 甚至你们现在正读着的、表面上似乎毫无动静的书也是由在其平衡位置附近迅速运动着的原子构成的. 十七世纪的法国哲学家雷内·笛卡儿说过,"给我物质和运动,我就能造出宇宙来."无疑,如果我们想了解我们周围的世界,运动就是我们必须在各种程度上学会去处理的现象.

艾萨克·牛顿发展了一个严谨的和强有力的有关运动的理论,按照这个理论,任何客体的运动的**变化**是它受**力**作用的结果. 由此,他创立了叫做经典力学或牛顿力学这一学科,这是本书所要讲的主题. 它是科学史上的一个里程碑,因为它以理性的、惊人地成功的关于因和果的图式代替了仅仅涉及现象的描述. 的确,牛顿力学的严格因果性广泛地对西方的思想和文明的发展有着深刻的影响,由此引起有关科学、哲学和宗教之间的相互关系的一些基本问题,并在社会意识观念以及人类奋斗的其他领域中有所反响.

经典力学是一门引人入胜的双重性格的学科. 因为它从同人类一样悠久的日常经验出发,而又使我们面对有关我们周围宇宙的某些最深刻的问题. 一枚被抛出去的卵石的飞行,或一个苹果的落下,竟包含着有关天体的力学的线索并且竟然最终涉及我们能够对空间和时间的本性所提出的某些最基本的问题,这不是很值得注意的吗?有时,力学被阐述成似乎只包含一些自明的或已

揭示了的真理的惯常应用. 没有什么比这离事实更远的了；它是一个极好的例子，说明一个物理理论如何通过观察与假设之间持久的相互影响慢慢地演化并逐渐精炼起来.

我们对于力学的感性认识之丰富给人以深刻的印象，通过眼、手和脑的协作，我们直接解决了数不清的动力学问题而无需借助于数学分析. 就象莫里哀的那个著名角色 M. 若尔丹得悉他终生在说着散文而不自知那样，每个人就熟悉力学定律的后果来说都是专家，尽管他也许从来没有看到过写在纸上的这些定律. 技术高超的运动员具有几乎使人难以置信的判断力和控制力，恰到好处地运用其肌力的大小和方向以达到一想望的结果. 例如，有人曾经估计，在那关键性的一次击球时，只要低一毫米，1962 年的世界棒球联赛冠军就会易手[①]. 然而，对物体运动的这种个人身体的感受和控制与用物理的定律和方程予以分析是很不相同的两回事. 经典力学的任务就是发现和表述基本的原理，使它们能应用于任何情形，特别是应用于相互作用的无生命客体. 在这方面，我们对自己的肌肉的作用和效果的深悉，虽然代表着某种了解(也是重要的一种)，却并无多大帮助.

经典力学最大的胜利是牛顿自己对太阳系的运行的成功分析. 人类自远古以来就观察天体的运动. 他们注意到某些规律并学会去预言诸如行星的会合和日、月蚀这样一些现象. 然后，在十六世纪，丹麦天文学家第谷布拉积聚了许多有关行星运动的、从未有过那么精确的细心记录. 他的助手，J. 开普勒，在积年累月地钻研这些大量资料之后，发现所有观测结果可以总括如下：

1. 诸行星在以太阳为一焦点的椭圆上运动.

2. 在相同时间内，太阳和一指定的行星之间的连线所扫过的

① P. Kirkpatrick, *Am. J. Phys.*, 31, 606 (1963).

面积是一样的.

3. 一个行星的年的平方除以行星到太阳的平均距离的立方对所有行星都一样.

这代表了人类对天体力学知识的一个伟大进步，但它依然只是一种描述，而不是理论. "为什么?"仍是个尚待解决的问题. 于是出了牛顿和他的力是运动改变之因的概念，以及他所假定的一种特殊的力的定律——引力的反平方定律. 利用这些，他证明开普勒的定律只不过是事物图式的一个必然结果，这图式还包括了下掉的苹果以及其他一些地上的运动. (在本书的后面我们将详述牛顿的这一伟大成就.)

即使万有引力只不过是把行星的周期同距离联系起来，它仍不失为一个光辉的理论. 然而，如同物理学中任何其他好的理论一样，它还具有预见性的价值，即可以把它应用到它所由来的情形之外的场合. 探讨一个理论的预见性可能包含寻求迄今尚未想到的现象，或者可能关系到承认某一已经熟知的现象必须符合新格局. 不论是哪一种情形，理论都面临考验，是站得住还是失败. 对于牛顿的引力理论，起初的考验差不多全在已知效应的分析方面，但已是一张相当丰富的单子了. 这里列出一些牛顿给予过**定量**解释的现象:

1. 地球和木星由于它们的自转而中部凸出.
2. 在地球表面上不同纬度处重力加速度的变化.
3. 由于太阳和月球的联合作用而产生潮汐.
4. 彗星在太阳系中运行的轨道.
5. 由于太阳和月球的引力转矩的作用而产生的地球自转轴方向的缓慢变化. (这一变化的全周期约为 25,000 年，所谓"岁差"就是它的表现.)

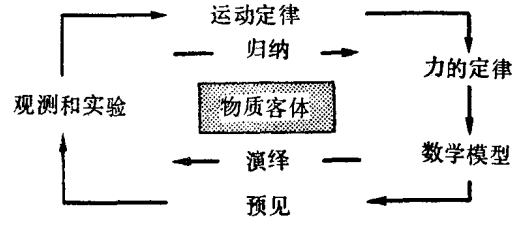
对自然现象的这一惊人的明察代表了牛顿纲领的最后部分，

正如在我们开头的引语中他所描述的"…然后由这些力去说明其他现象."这一质朴的词句不仅隐藏着无数的成就，而且也隐藏着数学在这一发展中所起的巨大作用．牛顿在他的万有引力理论中创造了今天可称之为太阳系的一个数学模型的东西．一旦造出了这模型，他就随之而引出无数的其他关系．实施这一工作纯粹是数学的，但最后的一步——对结论的考验——则包含回到物理的经验世界，将他的预见与天文学上的定量数据详细核对．

虽然牛顿的宇宙力学图象在他的时代已多方面获得证实，但他未能活着看到它的一些最大的胜利．也许其中给人印象最深刻的是应用他的定律去认出前所未知的太阳系成员．经过对已知行星运动作长期艰苦的分析，人们推断，一定有另外的行星在起着干挠作用．于是在1846年发现了海王星，1930年发现了冥王星．每次都是按推算来确定望远镜的指向去寻找一新行星，可以通过它在恒星的总背景中位置的变化认出来．还有比这更出色和更令人信服的证据说明这理论的正确性的吗？

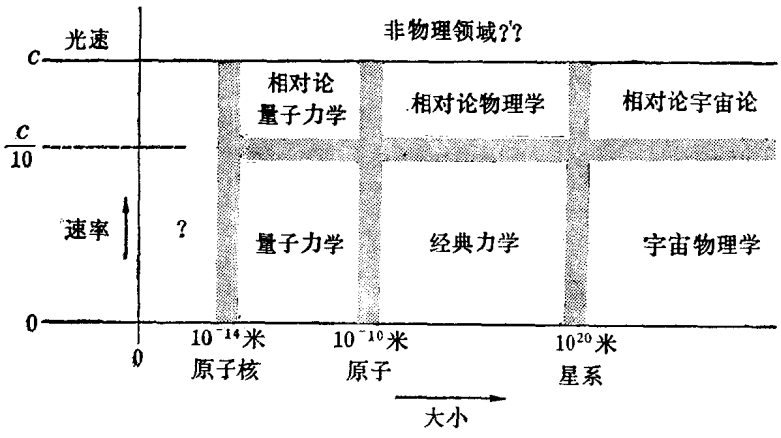
或许本书的每一读者对于经典力学和它的精确数学表述先前都有些了解，这可能使他难以认识到，同任何其他物理理论一样，它的发展并不仅仅是把数学逻辑无区别地应用于一堆数据．牛顿是不得已被迫接受反平方定律的吗？不是的．这是揣测、直觉和想象的结果．用牛顿自己的话来说："我开始考虑到把重力引伸到月球的轨道，而…由开普勒关于行星周期的法则…导出保持行星于轨道的力必须与它们到公转中心的距离的平方成反比；并由此将保持月球于其轨道所需的力同在地球表面上的重力作比较，发现两者相当接近."这类智慧的飞跃，虽然少有象牛顿的那样伟大，但是在任何理论和模型的创立中都是有的．它是一种归纳的过程，且超越直接经验之外．某些事实甚至可能暂时被弃于一旁，或者为了利于追求主要目的而置之不问，因为一个部分正确的理

论总比完全没有理论来得好些. 在所有的阶段上，实验和理论之间经常是互相影响的，在过程中新的观测不断出现，而理论的改进是永远存在着可能性的. 下面的图表示意人类探索物质与运动的模式，其所关联的内容越出了经典力学的范畴.



经典力学的巨大成就使得一度认为似乎不需要更多的东西来说明整个物理现象的世界了. 这一信念在将近十九世纪末时达到顶峰，当时有些乐观的物理学家以为物理学在原则上已是完善的. 他们选择这时候作出这一结论是太不幸了，因为在接着的几十年内，物理学经历了它自牛顿以来的最大变动. 放射性的发现，电子和原子核的发现，以及电磁学的精微处都要求有根本性的新概念. 而我们今天知道，牛顿力学同任何一个物理理论一样都有其基本局限性. 对异常高速运动的分析要求修改对空间和时间的描述，这由爱因斯坦的狭义相对论作了清楚的说明. 在分析原子或亚原子尺度的现象时，要求由量子理论来描述的、更为激烈的修正. 而牛顿的关于引力理论的特定形式，尽管很成功，也必须接受包含在爱因斯坦的广义相对论里的修正. 但这并不改变这一事实，即在一很大的范围内和各种各样的情况下，牛顿力学仍然提供我们一种手段去分析和预见从电子到星系等物理客体的运动. 在下图中非常定性地指出它的有效范围和局限性.

在本书中阐述经典力学的主题时，我们将尝试着去指明如何可以逐步扩大它在物理世界中的应用范围和我们自己的眼界. 我们所尝试着去阐明的力学完全不是一门呆板的学科，即把力学描



写为"应用数学",一开始就给定一些法则,而我们唯一可做的事是把这些法则应用于各种各样的情况,这不能认为是正确的.我们想要提供另一途径,在其间的每一阶段上人们都能意识到是在根据部分的或有限的资料从事工作,是在利用着一些没有严格地证明为正确的假设.而这正是物理学工作的精髓.牛顿自己就说过许多,在《原理》的第三篇的开头他提出了四条"哲学中推理的法则",其中最后一条如下:

"在实验哲学中,尽管可以设想任何相反的假定,我们应把根据现象而用普遍归纳法推得的论断看作严格正确的或非常接近于正确的,直到出现其他的现象,这时,那些论断或是成为更加精确,或是应容许例外."那些等待着完备知识的人是注定要使自己完成不了一个实验或建立不起一个有用的理论的.但是为了免得把这当作对马虎和肤浅思想的鼓励,我们用乔治·波雅的一个小小寓言① 来结束这一引言.他是以数学家的身分写的,但对物理学家

① 这一告诫性故事出现在名为《*Induction and Analogy in Mathematics*》("数学中的归纳和类比")一书中,Princeton University Press, Princeton, N. J., 1954. 这书及其姊妹篇, *Patterns of Plausible Inference*("似乎有理的推断的典范")是任何科学家都喜欢读的.

(及其他人)的告诫是明白的.

逻辑学家,数学家,
物理学家,和工程师

"你看这位数学家,"逻辑学家说道. "他看到头 99 个数小于 100,就用他的所谓归纳法断言一切数都小于一百." "一个物理学家相信,"数学家说道,"60 是可以被 1,2,3,4,5和 6 除尽的. 他再考查少数几个随便选取的(他认为如此)数,如 10,20和 30. 由于60也能被这些数除尽,他就认为实验证据已够." "是的,请看工程师们吧,"物理学家说,"一位工程师猜测所有的奇数都是素数. 他论证说,至少 1 可看作一素数. 然后,无可置疑,3,5 和 7 也是素数. 于是到了 9,一个尴尬情形;它不象是一个素数. 然而 11 和13 又肯定是素数. '回到 9,'他说,'我断言 9 必是一个实验误差.'"但在完成了他的取笑之后,波雅加了如下的评论.

> 归纳法之能导致错误是太显然了.然而,意外的是,归纳法有时也引导到真理,既然错误的机会似乎居压倒之势,那我们是应当从归纳法在其中要失败的明显情形开始研究呢,还是研究归纳法在其中获得成功的那些异常情形呢?研究宝石比研究普通的卵石更为吸引人是可以理解的,此外,在把矿物学家引导到结晶学这一奇妙的科学方面,宝石的贡献当比卵石的大得多.

有了这番鼓励,我们将在第一章中开始走上学习经典力学之路;那(经典力学)是物理学家的宝藏中最完善的和光洁的宝石之一. 但我们还要以一些预备性的练习来作为这一引言的结尾.

题外练习

下面是本书主题之外的一些练习，希望能够引起读者的兴趣．它们大多是有关量级估计（估计到 10 的最近方次）和得当的近似方面的．这在物理学家试探着去解决问题时起重要作用，但在教科书中很少得到强调或者系统地作介绍．例如，人人都学过二项式定理，但有多少学生会想到以它为工具，用下列近似

$$(a^2+b^2)^{1/2}\approx a\left(1+\frac{b^2}{2a^2}\right)\quad(\text{设 } a>b)$$

来求出一直角三角形斜边的相当准确值呢？（甚至在 $a=b$ 的最坏情形下，所得结果也只差约百分之六——得 1.5 而不是 1.414…）．此外，需要练习和有意识的努力以养成习惯，去粗略地估算各种量的大小和一个物理系统中各种可能效应的相对重要性．例如，处理物体在液体中运动时，是否能很快地确定，对于给定速度和线度的物体，阻力主要来源于粘滞性呢，还是湍流？留意尺度大小改变时所产生的影响，可以得到对体系的性质的有价值的洞察．［这方面一个极佳的例子是 J. B. S. Haldane 的一篇著名论文，《*On Being the Right Size*(关于正确尺寸)》，重登在 *The World of Mathematics*, Vol. Ⅱ, 1956.］运用这类方法和思路，可以加深人们对物理现象的体会，并增进人们对世界为何物以及它如何表现自己的感觉．

令人惊异的是，利用相对来说并不算多的一些初级知识，如下面所列举的，人们就可以做很多事情．

物理量的大小

重力加速度(g)	10 米/秒^2
固体和液体密度	10^3-10^4 千克/米^3

海平面上空气密度	1 千克/米^3（近似）
一天的长短	10^5 秒（近似）
一年的长短	3.16×10^7 秒$\approx10^{7.5}$ 秒
地球半径	6400 千米
指粗在臂长距离的张角	1°（近似）
纸的厚度	0.1 毫米（近似）
纸夹的质量	0.5 克（近似）
最高的山、最深的海	10 千米（近似）
地月距离	3.8×10^5 千米
地日距离	1.5×10^8 千米
大气压	相当于 1 千克/厘米^2 或 10 米水柱
阿伏伽德罗数	6.0×10^{23}
原子质量	1.6×10^{-27}——4×10^{-25} 千克
原子的线度	10^{-10} 米（近似）
在 STP① 下气体的分子(数)/厘米^3	2.7×10^{19}
固体中的原子(数)/厘米^3	10^{23}（近似）
基元电荷(e)	1.6×10^{-19} 库仑
电子质量	10^{-30} 千克（近似）
光速	3×10^8 米/秒
光的波长	6×10^{-7} 米（近似）

数 学 值

$\pi^2\approx10$　　$\log_{10}4\approx0.60$

① STP 表示标准温度和压强——译者注.

$e \approx 2.7$　　$\log_{10} e \approx 0.43$

$\log_{10} 2 \approx 0.30$　　$\log_{10} \pi \approx 0.50$

$\log_{10} 3 \approx 0.48$　　$\log_e 10 \approx 2.3$

角(弧度)＝弧长/半径.　　全圆周＝2π弧度.

1 弧度$\approx 0.16 \times$全圆周$\approx 57°$.

立体角(立体弧度)＝面积/(半径)^2. 全球面＝4π 立体弧度.

1 立体弧度$\approx 0.08 \times$全球面[①].

近　似

二项式定理:

$x \ll 1$ 时，　　$(1+x)^n \approx 1+nx$

例如，　　$(1+x)^3 \approx 1+3x$

$$(1-x)^{1/2} \approx 1-\frac{1}{2}x \approx (1+x)^{-1/2}$$

$b \ll a$ 时，　　$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \approx a^n\left(1+n\frac{b}{a}\right)$

其他展开式:

$\theta \ll 1$ 弧度时，$\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \longrightarrow \theta$

$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \longrightarrow 1$

$x \ll 1$ 时，　　$\log_e(1+x) \approx x$

$\log_{10}(1+x) \approx 0.43x$

下面的问题没有给答案. 对于其中大多数来说，你自己将是最好的裁判. 你也许需要翻阅一本百科全书或其他参考书来核查一下你的一些假设或结论. 如果你现在还不准备解决全部这些问题，不要紧；你以后总是可以回过头来考虑它们的.

① 全球面立体角$=4\pi$ 立体弧度，因此 1立体弧度$=\frac{1}{4\pi}\times$全球面——译者注.

1　自从太阳系形成以来，地球绕它自身的轴所转次数的数量级是什么？

2　在人类的平均寿命期间，一个人的心跳多少次？呼吸多少次？

3　对下列两项作出合理估计：(a)自有人类以来你的祖先(不计近亲繁殖)总数有多少？(b)你头上有多少根头发？

4　目前世界人口约为 3×10^9.

(a)问每人有多少平方公里(千米)土地？这面积若是正方形，其边长是多少英尺？

(b)如果假定自有人类以来人口每 50 年加倍，问人类是从何时开始的？如果每 50 年加倍继续下去、那么经过多久以后人就会肩并肩地站在地球的全部陆地面积上？

5　估计下列质量的数量级：(a)一点灰尘；(b)一粒盐(或糖，或沙子)；(c)一只老鼠；(d)一头象；(e)一平方英里面积上 1 英寸深的雨水；(f)一座 500 英尺高的小山；(g)珠穆朗玛峰.

6　估计下列人和物中原子数目的量级：(a)一针头；(b)一个人；(c)地球大气；(d)整个地球.

7　估计现在地球上的生物的质量占地球总质量的几分之几.

8　估计(a)地球上海洋中水的总体积，和(b)海洋中盐的总质量.

9　据估计，在目前(已知)的宇宙中约有 10^{80} 个质子.如果所有这些质子一个挨一个地堆成一个球，问球的半径多大？忽略球形物体紧聚时中间的空隙，并取质子的半径约为 10^{-15} 米.

10　太阳(以辐射能的形式)每秒钟失去大约 4 百万吨质量.问自从太阳系诞生以来它损失了它质量的几分之几？

11　以分钟计，估量一下，如果戏院建筑被堵塞，大约 1000 名听众耗掉有用氧气的 10% 的时间.一般成人吸收其本人每次吸进去的氧的大约六分之一.

12　落在地球上的太阳能大约是 2 卡/厘米^2/分(钟).以兆瓦或马力计，估量落在 100 平方英里面积——约为一相当大的城市的面积——上的太阳能的功率.这功率与这样一座城市所需要的功率相比如何？(1 卡＝4.2 焦耳；1 瓦＝1 焦耳/秒；1 马力＝746 瓦.)

13　先估计一个汽车轮胎在用坏之前所走的总英里数，然后估计，车轮转一周，橡胶厚度磨损了多少.考虑结果的物理意义.

14　一块廉价手表，每天慢 2 分钟.

(a) 它与准确时间的偏离的百分比是多少?

(b) 一根尺子(正常长度为1英尺=12英寸)的长度与准确的12英寸可以相差多少,而仍然使尺子具有同这块表一样的准确度?

15 天文学家第谷布拉用一象限仪来观测恒星和行星的角位置. 象限仪的一个窥视孔在它的曲率中心处,另一孔则在它的弧上。这种象限仪之一的半径约为2米,而第谷的测量的准确程度通常信为1分弧$\left(\frac{1}{60}^{\circ}\right)$. 问他要达到这一准确程度,窥测孔的直径应是多大?

16 木星的质量约为地球的300倍,但它的平均密度大约只有地球的五分之一.

(a) 一个具有木星的质量和地球的密度的行星,其半径为何?

(b) 一个具有地球的质量和木星的密度的行星,其半径为何?

17 完全相同的物质球在空间的给定体积内紧密地挤在一起.

(a) 考虑为什么只要这体积的线度比单个球的半径大得多,那么,在计算这体积所含的总质量时,人们不需要知道球的半径,而只要知道其物质的密度.

(b) 考虑如果允许选用两种尺寸的球,就有装下更多的物质的可能性.

(c) 证明,在(a)中球的总面积**确是**与球的半径有关(在设计象过滤器一类的东西时这是一个重要的考虑,因为过滤器的吸收能力是与给定体积里总的外露面积成正比的).

18 计算下列表面面积与体积的比值:(a) 一半径为r的球,(b) 边长为a的一个立方体,(c) 一正圆柱体,直径和高都等于d. 对于一定的体积,这些形状中哪一个的表面积最大?哪一个最小?

19 地球直径对太阳的张角是多少秒弧?一个足球要放在离观察者多远的地方其张角才同前述张角相等?

20 从太阳的下缘碰着地平线起到太阳整个没入地平线下的时间约需2分钟.

(a) 太阳的直径在地球上的张角近似地等于多少?(用度数和弧度表示.)

(b) 一个直径为$\frac{3}{4}$英寸的硬币要放在离眼睛多远的地方才刚好遮住这日轮?

(c) 这太阳对地球所张的立体角等于多少(用立体弧度表示)?

21 地球上的一个大圆（例如，一经圈）偏离一直线每英里多少英寸？

22 一近似的球面的粗糙度可用 $\Delta r/r$ 作为其粗略量度，其中 Δr 是不规则地方的高度或深度．试估计一柑桔，一乒乓球和地球的这一比值．

23 一个相当大的陨石落到地球上，问它击中一建筑物的机会是多少（用 10^n 分之 1 来表示）？击中一个人的机会是多少？

24 两个学生要想用下述步骤来测声速．他们之中的一个，在离另一个一定距离的地方，点燃一爆竹．第二个学生在看见火光时揿停表，而在听见砰声时停住表．声音在空气中的速率大约为 300 米/秒，而学生们必须考虑所记录时间的可能误差（由于信号不确定），约 0.3 秒．如果他们想使测得的声速误差在 5 %以内，他们做这实验时的距离至少应当多远？

25 一直角三角形，直角的邻边是 5 米和 1 米长．只用二项式展开的头两项，计算其斜边的长度．估计这一近似结果的百分误差．

26 测一球的半径时，误差为 1 %，问体积的百分误差是多少？

27 以你的算尺上的刻度为纵标，一普通尺子的刻度为横标，画出一张半对数坐标纸．在它上面画出函数 $y=2^x$ 的图形来．

28 响度和亮度的主观感觉曾鉴定为近似地与强度的对数成正比，因而强度的**倍数**与感觉的相同的算术增加相关联．（例如，强度与 2，4，8 和 16 成比例，相应的感觉将按这些数增加．）在声学中这一关系导致用**分贝**来作为声强的量度．取最弱的可听得见的声强 I_0 为参考值，声强 I 的分贝级的定义是

$$\mathrm{dB}=10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

（a）可忍受的噪声级约为 120dB．问这一声音的强度是阈强 I_0 的多少倍？

（b）在描写恒星的相对亮度（从地球上看）时，也用类似的对数标度，称为**星等**．相差"一星等"的恒星，其表观亮度之比大约等于 2.5．因之，一个"一等"（非常亮的）恒星要比一个二等星亮 2.5 倍，比一个三等星亮 $(2.5)^2$ 倍，以此类推．（这些差别主要是由于距离的不同．）用帕洛马的 200 英寸望远镜能观察到的最弱的星大约为 24 等．问从这样一颗星射来的光量是我们从一等星接收到的几分之一？

29 宇宙显得正在经历着一普遍的膨胀，从我们看，河外星系是在后退，速率同它们的距离成正比．这一结果表示为赫伯定律，$v=\alpha r$，其中常数 α 与 $r\approx10^{26}$ 米时 v 等于光速 c（$=3\times10^{8}$ 米/秒）相应．这意味宇宙中单位体积的质量在随时间而减小．

(a) 假定在任何时刻宇宙都是一个体积为 V 的球．证明单位时间内体积的相对增加量

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}=3\alpha$$

(b) 计算每秒和每世纪平均密度的相对减小．

30 下面表中顺序列出各行星的平均轨道半径，以地球的轨道半径为单位来表示．行星以(n)为序号：

n	行　星	r/r_E
1	水　星	0.39
2	金　星	0.72
3	地　球	1.00
4	火　星	1.52
5	木　星	5.20
6	土　星	9.54
7	天王星	19.2

(a) 以 $\log(r/r_E)$ 为纵标，序号 n 为横标作一图．（或者，用另一方法，在半对数坐标纸上画出 r/r_E 对 n 的图形．）在同一图中，重画代表木星，土星和天王星的点，相应的 n 各增加 1（即，$n=6,7$ 和 8）．这样，代表这七个行星的点可以大致凑在一直线上．

(b) 如果在修改过的图中的 $n=5$ 代表火星与木星的轨道之间的小行星带，图中与此相应的 r/r_E 之值是多少？试与小行星带的实际平均半径比较．

(c) 如果认为 $n=9$ 代表天王星外面的下一个行星(海王星)问在你的图中相应的 r/r_E 之值是多少？试与观测值比较．

(d) 在(b)和(c)的启示下，看看你的图是否可以看作一个有预见性价值的物理定律的表示法．（作为历史事实，它确是如此用过的．参看第八章将近结尾时有关发现海王星的叙述．）

第一篇

牛顿动力学入门

对我说来似乎很可能上帝在开始时就把物质做成实心的、有质量的、硬的、不能穿透的、可运动的粒子……

牛顿,《光学》(1730)

第一章　粒子世界

§1　粒子观

牛顿力学的要点是把一个给定物体的运动用周围环境作用于它的力来分析.因此,从一开头我们考虑的就是各种各样的分立物体.特别感兴趣的是那些可以当作质点来处理的物体;这种物体称为粒子①.在严格意义下,自然界中没有什么东西符合这一定义.尽管如此,你已多年生活在粒子世界中——电子、原子、棒球、地球卫星、恒星、星系——并对粒子是什么有了极好的概念.如果你读过乔治·奥韦的有名政治讽刺文"兽苑",你也许记得这句讥嘲语:"所有动物都是同等的,但某些动物比其他动物要更同等一些."与此有些类似,你也许觉得某些粒子(例如电子或质子)比其他更具有粒子性.但无论如何,某物是否粒子,只能根据特定的问题——特定种类的实验和观测——来判断.

因此,对于"某物是否粒子?"的问题,回答并不是干脆的"是"或"否",而是"要看…."例如,原子和原子核,如果你不极重地撞击它们,看起来(即表现出)就象粒子.行星和恒星,如果你离它们很远(见图 1-1)看起来也象粒子(不论是目视还是它们的表现).但是这些物体中的每一个都有空间延伸和内部结构,而且总是存在着某种情况,使人们必须把这些因素考虑进去.常常是这样:不是把一个给定的物体描绘成一个点状粒子,而是这种理想粒子的组合物,这些粒子或多或少是牢固地相互联系着的.(如果这种联系足够强,就有可能使用另一种虚构物——理想"刚体"——使分

① 确实,牛顿自己是保留"粒子"一词,用来表示现今我们称为"基本粒子"(原子以及其他这类自然构件)的,但自那时以来,用法变了.

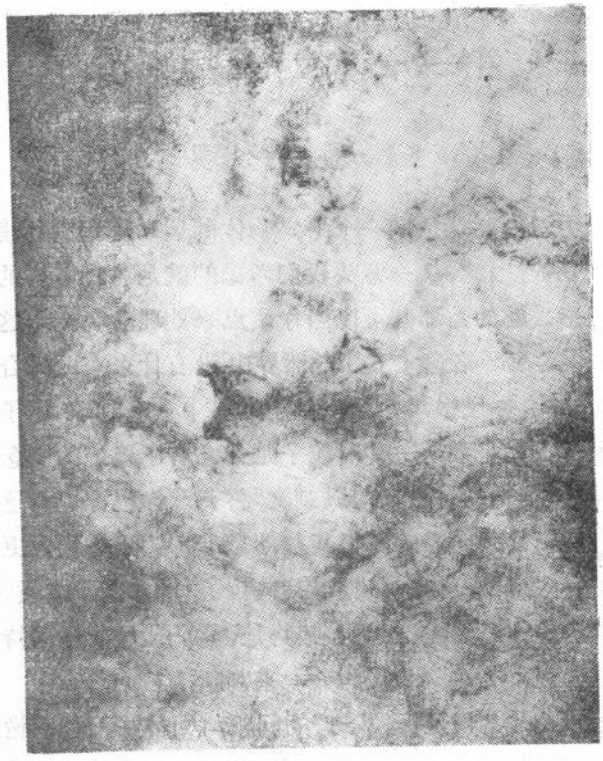


图 1-1　部分夜空的照片.

析，特别是有关转动的分析进一步简化.）但是，在目前，我们将限于考虑这样的物体，它以可辨认的个体形式存在着，并在适当情况下表现为理想的动力学意义下的粒子.

我们需要什么知识去建立关于一个粒子的正确描述呢？这里是少数几个明显的条款，我们把它们写下来，并不认为它们是完备的（也没有严格地分门别类）.

1. 质量

2. 大小

3. 形状

4. 内部结构

5. 电荷

6. 磁性

7. 与同类的其他粒子的相互作用

8. 与不同类的粒子的相互作用

虽然这表只是部分的，它已经很可观了，立刻全部予以处理是不现实的. 因此我们提一个较有节制的问题：**最少**要几个性质才足以表征一个粒子？如果我们谈的是所谓"基本"粒子(电子、介子等)，那么**电荷**态(正、负或中性)是一个重要论据，还有**质量**，这两者在许多情形下可能足够用以辨认出这样的一个粒子. 大多数其他由大量原子组成的物体，在正常情况下是中性的. 无论如何，在许多问题中，质量是我们考虑一个粒子的动力学表现时起作用的唯一性质，假如我们认为作用于它的力是独立地规定的话①. 然而，同时知道，至少是近似地知道物体的大小，是很重要的. 不仅因为这是关于任何物体的极有用的数据之一，而且它的数值将帮助我们去判断，在给定的情形下，那粒子能否合理地作为一个质点来处理.

鉴于许多细节须在以后来补充，我们将从粒子是具有质量和大小的物体这一最起码的描述开始. 我们的探讨并不详尽. 相反，只要符合于说清楚事物的一般图式，我们力求把探讨的范围减至最小，只考虑某些典型粒子的质量和线度. 我们将从最小的和最轻的粒子开始，逐渐加码，直到看起来是一个根本性的限度为止. 你将体会到，这一叙述虽然简略，却是从形形色色的极为分散的领域中大量艰苦的观测和研究的结果中抽出来的.

---

① 当然，如果我把这些力看作是由物体同它的环境的特征性相互作用(例如，引力)而来的，那么还应当知道这种相互作用的规律. 这是第五章的主题.

关于单位

在本书中最常用的是米千克秒(MKS)单位制. 你可能对它已经很熟悉了,至少是质量、长度和时间的基本单位,否则你现在就应学会. 但是,我们偶尔也用到其他单位. 在力学中从一个单位制换算到另一个,没有什么问题,因为它只牵涉到应用一些简单的数值因子. (这与电磁学不同,那儿基本量的选择影响着理论的详细表述.)在附录中有 MKS 单位和其他单位的表.

§2 电子和核子

从物理和化学的观点看,物质结构的主要构件是电子、质子和中子. 质子和中子,作为原子核的组分,实际是等价的,统称为**核子**. 有关所谓基本粒子的大量研究,以及关于核子的研究,没有提供什么证据说明有比 50 年前科学上所知道的粒子小得多(或轻得多)的粒子存在着. 因此,虽然亚原子粒子的研究是一个非常丰富和复杂的领域,充满着奇妙的和从未臆想过的现象,物理世界的微观限度仍能很好地由电子和核子这样一些熟悉的粒子来代表.

电子,质量约为 10^{-30} 千克(更准确一点,是 9.1×10^{-31} 千克),是物质的熟知组分中最轻的(与其他组分相差 10 的三次方以上). (在放射性 β 衰变中发射的、难以捉摸的中微子显得是根本没有质量的,因而被放在一比较特殊的范畴内!)电子的大小不是一件能够无异议地说清楚的事情. 的确,大小的概念对于**任何**物体都是难以明白地和唯一地给予定义的. 但是如果我们把电子看作一个带电的球,则其半径可估计为 10^{-15} 米量级. 就目前我们的知识说,电子可以恰当地看作一种基本粒子,意思是,没有证据表明它可以分解为其他组分.

核子,质量为 1.67×10^{-27} 千克,是原子的另一基本成分. 在

它处于带电形式(质子)时，它(象电子一样)是完全稳定的，即它能孤立地、无限地生存下去．在它处于中性形式(中子)时，它不能孤立地生存着，而是放射性地衰变(半衰期约为13分钟)为一个质子、一个电子和一个中微子．中子自发地产生氢原子的组分这一事实，曾使某些宇宙学家提出中子代表着宇宙中真正的原始粒子的想法——但这只是一种猜想．核子的直径约为 3×10^{-15} 米——意思是，核物质显得是局限在大致确定的这一大小的区域内的．不象电子，核子似乎具有复杂的内部结构，其中结合着各种类型的介子．但从原子物理的观点看，它们可以看作原始粒子．

§3 原 子 核

如我们所知，质子和中子结合而成的原子核是各种各样稳定的普通物质的基础．最小和最轻的原子核自然是单个质子．在自然界中出现的最重的原子核（^{238}U——铀-238的核）含238个核子，质量为 4.0×10^{-25} 千克．所有原子核的单位体积的质量都差不多相同，因而它们的直径大致正比于核子数的立方根．因此，原子核的直径约在 3×10^{-15} 到 2×10^{-14} 米这范围内．

在论述原子核的大小时，定了一个非常方便的长度单位．它是以意大利物理学家 E. 费米①的名字来命名的：

$$1\text{ 费米(F)}=10^{-15}\text{ 米}=10^{-13}\text{ 厘米}$$

这样，原子核的直径就在大约3到20F的范围内．

原子核物质的密度是巨大的．已知铀原子核的质量约为 4×10^{-25} 千克，半径约为10 F，你可以推算出(做做看!)它的密度大

① E. Fermi (1901—1954)是伽利略以后意大利最伟大的物理学家，也是20世纪最卓越的科学家之一，在理论和实验两方面的工作都有天赋．1942在芝加哥大学，他是作为第一个创造自身能持续下去的核链式反应的学者在公众中获得声誉的．

约是 10^{17} 千克/米^3. 这密度是如此之大(它比水的密度大~10^{14}的因数),以致实际上我们不能体会它，尽管现在有证据说明某些天文学物体(中子星)是由大量这种原子核物质组成的.

§4 原　子

在能够对单个的原子计数之前很久就有了大量关于原子质量的知识. 根据原子价和化学化合的概念，化学家们建立了相对质量的标度，其基础是指定氢的质量为 1. 又引进了**摩尔**这个量;1 摩尔的任何元素或化合物的质量,以克来表示,数值上等于这元素或化合物的相对质量. 此外，根据元素化合成化合物时它们的相对比例知道，一摩尔的任何物质都一定含有唯一相同数目的原子(或化合物情形中的分子)——这数目以阿伏伽德罗常数著称. 但这数目本身是未知的. 显然,如果这个数目能确定,单个原子的质量就可以求出.

在电解中特征性的质量传输的存在给了相对原子质量以确证性的证据,不仅如此,它还指出了确定绝对质量的途径，因为看来清楚的是，电解现象导源于一特征性的原子电荷单元. 所需要确定的是这单元(e)的大小——这是 1909 年密立根的精确测量最后予以完成的一个功绩. 在表 1-1中列出一些有代表性的原子质量值.

近代有关原子质量的精确测量是以质谱学为根据的（见第七章§6 关于这方面的原理的说明)，引用时表示为**一原子质量单位**(amu). 这单位现今定义为同位素碳 12 的质量的 1/12.

$$1\text{ 原子质量单位}=1.66043\times10^{-27}\text{ 千克}$$

由于任何原子的质量几乎都集中于它的原子核(对于氢，99.95%,到铀上升至 99.98%),我们可以说，在第一级近似下一个

原子的质量就是它的原子核的质量. 但是,按大小说,原子要高出好几个数量级. 我们方才曾看到,原子核直径的量级约为 10^{-14} 米. 原子的半径则典型地约为这值的 10^4 倍——即量级为 10^{-10} 米. 要体会这一因数的意义,一个办法是设想 i 这个字母上的点代表一中等重的原子核,则原子的外层边界约在 10 英尺开外. 默想在你的卧室或书房的中央悬浮着一粒细砂,你就可以体验到在三维空间中那意味着什么. (原子核确是非常之小的.)

表 1-1 原子质量

元 素	电解质量传输 kg/C(千克/库仑)	电荷 每一离子	近似相对质量	原子质量 kg(千克)
H	1.04×10^{-8}	e	1	1.67×10^{-27}
C	6.22×10^{-8}	$2e$	12	2.00×10^{-26}
O	8.29×10^{-8}	$2e$	16	2.66×10^{-26}
Na	2.38×10^{-7}	e	23	3.81×10^{-26}
Al	9.32×10^{-8}	$3e$	27	4.48×10^{-26}
K	4.05×10^{-7}	e	39	6.49×10^{-26}
Zn	3.39×10^{-7}	$2e$	65	1.09×10^{-25}
Ag	1.118×10^{-6}	e	107	1.79×10^{-25}

在描写原子的大小或原子在其中紧密相挤的固体和其他凝聚态里原子间的距离时,以 10^{-10} 米为距离的单位非常方便. 这单位以十九世纪瑞典物理学家 A. J. 埃恩斯特罗姆(Ångstrom)命名

$$1\text{ 埃}(\text{Å})=10^{-10}\text{ 米}=10^{-8}\text{ 厘米}=10^{5}\text{费米(F)}$$

值得注意的是,最重的原子并不显著地大于最轻的那些原子,尽管在我们顺着周期表考查各元素时,它们的大小有着系统的变化,在碱金属原子处出现明显的高峰(见图 1-2).

原子是如此之小,要真正认识到即使是在最微小的物体里也存在着巨大数量的原子这一点是不容易的. 例如,能够用一架好的显微镜看到的最小物体的直径约为一微米的十分之几,而质量的量级为 10^{-17} 到 10^{-16} 千克. 然而这一极小的物体却含有大约

10 亿个原子. 或者(举另一个例子), 一非常高的实验室真空可能含有压强为几倍于 10^{-11} 大气压的余气. 但在一立方厘米的这一真空中也同样有约 10 亿个原子.

在正常大气压下,气体的原子或分子相互间的距离,平均而言约为它们直径的 10 倍. 这说明(虽然只是勉强地),把气体看成一种粒子的聚集, 粒子大部分时间是在互相独立地运动着的图象是正确的.

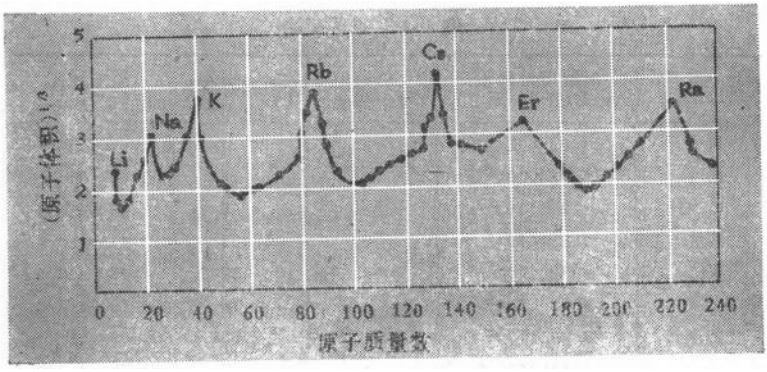


图 1-2 相对原子半径(根据原子体积推算)对原子质量数, A.

§ 5 分子; 活细胞

我们初次对分子有所认识大约是在初等化学课中,那儿,十分合理地限于注意简单的、由少数原子组成的分子——H_2O, CO_2, Na_2SO_4, C_6H_6, 等等, 其分子量的量级为 10 或 100, 直径约为几埃(Å). 这些分子因而不论在大小或质量上都比我们刚讨论过的单个原子大不了多少. 可是,通过生物化学和生物物理的发展,我们才逐渐知道有相当大的和复杂的分子. 由于它们有这样的特点: 一定类型的所有分子都有同一的分子量, 我们完全有理由把它们看作粒子. 可以描绘为单个分子的最大物体, 它的分子量的

量级为 10^{7} 原子质量单位——因之，质量的量级为 10^{-20} 千克，长度的量级为 10^{-7} 米. 然而，这类物体的自身结构和它们在生物学过程中的牵连，远比它们作为粒子的不可靠的身分更为重要. 一个蛋白质分子的粒子动力学是一个相当微不足道的题目——也许只限于这分子在离心机中的行为——而弄明白它的结构却是需要(并值得)明智的化学家和结晶学家最勤奋的努力的课题. 企图在这里讨论这种问题是既冒昧又不恰当的，但用图 1-3 来指明这类粒子的大小的范围也许是值得的. 描述生物体系的一个方便的长度单位是**微米**:

$$1\text{ 微米}(\mu)=10^{-6}\text{ 米}=10^{4}\text{ 埃}(\text{Å})$$

在图 1-3 中所示的最大物体(细菌)横约 1 微米，在一架好的显微镜(分辨限度约为 0.2 微米——略小于光的一个波长)下可以看得见.

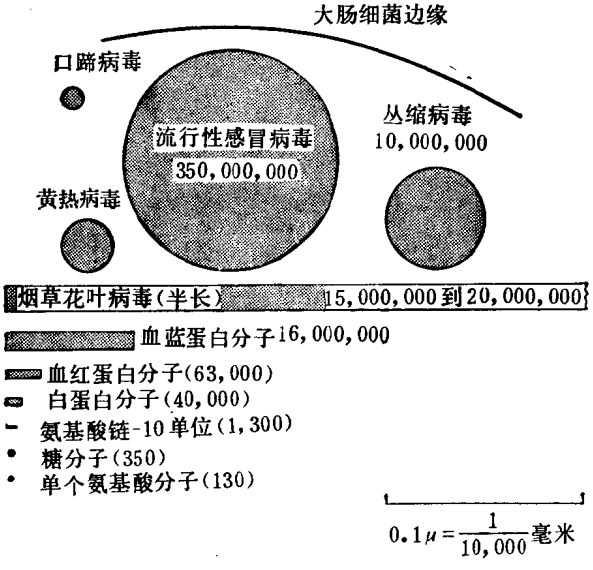


图 1-3　显微镜的和亚显微镜的物体的大小，由细菌到分子.

图 1-3 包括一些病毒，它们有介于生物和无生物之间的一种特异的地位——具有相当确定的大小和质量，可分离出来(多半作为结晶物)，然而在合适的环境下又能增殖. 图 1-4 是某些病毒微粒的电子显微镜照片. 它们差不多是在普通照片的意义下我们能够清晰地造影的最小物质微粒. (你可能曾经见过用一种叫做场离子显微镜装置观察到的原子排列的"照片". 那不是单个原子的直接的影像，虽然照片上的花样确实揭露出它们的空间关系.①)

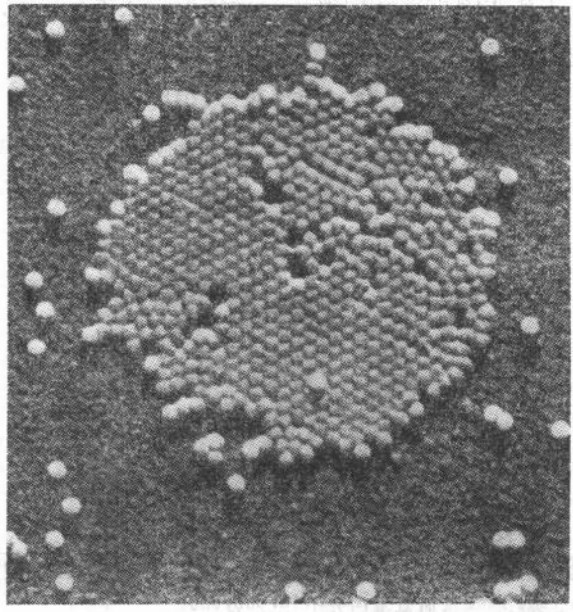


图 1-4 小儿麻痹症病毒的球状颗粒.

如果沿着这条生物学道路再走一步，那么，当然我们就会遇到活细胞，对于生物学家它们有一种象原子之对于物理科学家那样重要的意义. 把生物细胞看作粒子肯定是恰当的，然而它们属于

① 电子和质子显微镜技术的不断改进越来越深入到微小粒子的世界. 在 1969 年，用电子显微镜曾拍摄到一个蛋白质分子的螺旋状结构.

这样的特殊种类，其中的大多数都在物理学的研究范围之外．不过它们也确实在有关物理的大小尺度方面向我们提供某些有利的参考之点，这也许是我们在这里提到它们的唯一理由——此外，为了提醒我们，也许还有这样一个理由，生物体系也是属于由基本的原子相互作用来确定的一个范畴之内的．

虽然某些单细胞可能小于 1 微米(某些细菌)或大于 1 厘米(例如鸡蛋的蛋黄)，大多数生物器官的细胞直径的量级平均约在 10^{-5} 米(10 微米)．一个人，容积约 0.1 米^3，含有大约 10^{14} 个细胞，每一细胞(平均)又含有大约 10^{14} 个原子．

§6 沙子和尘埃

我们地球的很大一部分面积为微粒所覆盖，这些微粒来源于巨大岩层的碎裂．这些微粒主要是石英(SiO_2 结晶)，化学上非常不活动(惰性)，正是俗话称作“微粒”的那种物体——虽小但看得见，又无生命．地球的表面，以及表面上边的大气，满载着这种微粒．其中最大的(比如说，横约 1 毫米)几乎是牢固地静止在地上．其他较小的，阳光下看得见是在飞舞的尘雾，则显得似乎无下落趋势．一个微粒的命运依赖于风(或空气阻力)和重力的联合效果．风吹来的沙堆，发现是由直径最大约 1 毫米到最小约 0.01 毫米的微粒形成的．小于这尺寸的物质倾向于停留在空中飞来飞去，最

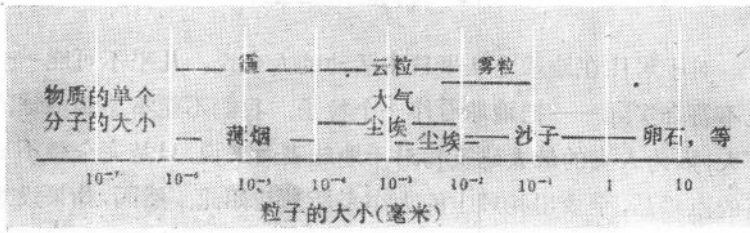


图 1-5　地球表面或其上方所发现的微粒大小的分布．

小的尘粒直径的量级为 10^{-4} 毫米 (=0.1 微米). 图 1-5 所示是关于沙子、尘埃和其他微粒大小的大致分类.

§ 7 地球上的其他物体

我们的最直接的经验领域包含由最小的沙粒到最大的人造物体这一范围. 其中的物体一方面大到能独立地用肉眼或触觉来了解,但又不是大到使我们无法直接感知它们. 通常,100 已是一个大数,涉及人的大小尺寸的 1000 倍或 1/1000 就接近于极限了,在这极限内,我们与物理世界的接触可以认为是完全的和直接的. 超出这范围,我们就主要是依靠间接的证据、想象力和类比了.

由于大多数(在地壳中出现的)固体物质的密度的数量级为几千个千克/米^3,从沙粒(1 毫米)到悬崖或堤坝(1 千米)的直径范围可推知其质量范围约为 1 毫克到 10^{12} 千克(即 10^9 吨). 的确,如果以质量(或是同它关联的、在地球表面重力作用下的重量)为判据,则刚才所说的范围远超出人的感觉力. 以重量来表示,不妨说我们的直接经验所能感觉到的是轻到大约 10 毫克或重到 1000 千克的物体——也就是以量级为 0.1 千克(或几英两)为中心乘以因数 $10^{\pm 4}$ 之值.

§ 8 行星和卫星

对于居住在地球上从事日常活动的人来说,几乎不可能——也不符合实际——把地球看作一个粒子. 我们不能不感到地球的广大,因为人类的最大建筑物对于地球表面来说,只是完全微不足道的点缀品,至少用物理上的大小来衡量是如此. 然而,如果设想我们在空间中倒退 1 亿英里,那我们的观点就将非常不同了. 地

球将失去它的特殊地位，而降到同其他行星相平等的地位．在这一尺度下，它们都可以被看作**粒子**，在它们各自的轨道上，绕着一个庞大得多的粒子——太阳运动着．在开普勒的行星轨道的数学描述中，以及其后牛顿关于这些运动的动力学理论中，行星都可以恰当地看作质点——它们的广延和内部结构都无关紧要．理由当然很简单，那就是，在太阳系的尺度下，行星比质点大不了多少，这一看夜空就会明白．地球的直径约为地球到太阳的距离的10^{-4}——太阳自身的直径也不过是这同一距离的10^{-2}．因此，取这种比值为零，就可以得到太阳系动力学一个很好的一级近似，是不足为奇的．

但是我们不应当满足于停留在这种近似上面；事实上也不可能．当牛顿把他的注意从行星转向潮汐时，地球的物理广延就成为关键之点了，因为正是由于这一点，才有可能存在产生潮汐的力——由于月球的引力效应在等于地球直径的距离内有差异而产生的．但无论如何，只要我们摆脱了以地球上的物体和现象为对象的限制，那么，构成太阳系的那些粒子就成为我们首先注意的对象了．

行星可以描绘为大致是球形的粒子，但由于自转而稍显扁平．它们直径的差别相当可观——水星和木星约差 30 倍．由于平均密

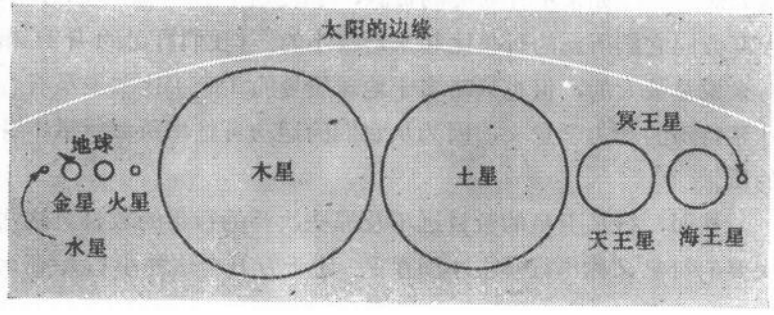


图 1-6　行星和太阳的相对大小．

度相差不很大(地球的密度最大,为水的密度的 5.5 倍),它们的质量差别确是非常大的.水星和木星仍处于两极端,它们的质量相差约 6000 倍. 图 1-6 用准确的比例尺度画出这些主要行星.同时也画出太阳的大小,以作比较. 太阳的密度大致与木星的相同,但直径为后者的 10 倍, 质量约为 1000 倍. 表 1-2 给出了这些数据.

表 1-2 关于行星的数据

	平均半径, 千米	R/R_E	M/M_E	平均密度 千克/米^3
水 星	2.42×10^3	0.38	0.054	5400
金 星	6.10	0.96	0.815	5100
地 球	6.37	1.00	1.000	5520
(月球)	(1.74)	(0.27)	(0.012)	(3360)
火 星	3.37	0.53	0.108	3970
木 星	69.9	10.98	317.8	1330
土 星	58.5	9.20	95.2	680
天王星	23.3	3.66	14.5	1600
海王星	22.1	3.48	17.2	2250
冥王星	3.0	0.47	0.8?	?
(太阳)	(6.96×10^5)	(1093)	(3.33×10^5)	(1400)

九个主要行星差不多占了太阳周围物质的质量的全部 (单是木星就占差不多三分之二),但其他俘获物的数量是巨大的. 首先是天然卫星. 如果不计人类的贡献, 行星大约有 30 颗卫星, 其中大部分同它们所属的行星比起来是极小的. (我们自己的月亮相对来说是最大的, 但也只略多于地球质量的 1%.) 这些卫星有着非常特殊的动力学意义, 因为从它们的运动可推出所属行星本身的质量.

然而, 行星卫星的数目远不及那些次要的行星的数目. 这些次要的行星又称小行星或小游星①. 千千万万个这种小行星在火

① "小游星"一词来源于这些小物体在望远镜中看起来象恒星.

星与木星轨道之间绕着太阳作轨道运动. 就大小而言，它们直径的范围为500英里到1英里或更小，它们很可能是由于一个较大的物体碎裂而来的. 如果天文学家沃耳特·巴第对它们的描绘——"天空中的寄生虫"——确有代表性的话，那它们就是职业天空守望者所不怎么喜爱的东西了.

§9 恒　星

恒星是一个壮丽的复杂结构，用人类的标准来说，大得几乎不能想象，而又有着动人的内部动力学，包括核反应、引力和电磁学. 但当我们凝视天空时，这一切都看不见，除非我们用一个天体物理学家的眼睛——和仪器——来看. 我们所看到的恒星只是一些亮点，它们，即使是用最强有力的望远镜来考查，也(与行星不同)仍然象是点源. 相对于它们的直径来说，事实上，恒星之间的距离比我们太阳系的行星之间的距离大得多.

一个便于说明天文距离的单位是**光年**，等于光在真空中走一年的距离:

$$1\text{ 光年}=9.46\times10^{15}\text{ 米}$$

离太阳**最近的**恒星约在4光年开外，或大约25,000,000,000,000英里! 太阳近邻的其他一些恒星相互之间相隔约10光年或10^{17}米，这使直径与间距之比约为10^{-7}或10^{-8}. 因此，一恒星群或系是一个非常好的质点组的例子，尽管这些质点是惑人地巨大. 在实验室里所能达到的最佳真空也未必能比得上同这些粒子的间距与直径之比相应的真空度. 人们只要看一看星际空间的极端空虚——在那里有些地方每立方厘米含有不到一个氢原子——就知道能否找到一个更为空虚的系统了.

大多数被认为是恒星的物体其质量都在$10^{\pm2}$太阳质量的范

围内．在这一意义下，我们的太阳可以看作一个平均的或典型的恒星．按大小或发光度(总辐射)来说，变化范围要大得多，但要想对这些特点给予有价值的说明，就真地需要讨论到恒星的演化和内部机制，而此处肯定不是作此尝试的地方①．因此我们将满足于如下的注述：恒星，简单地看作物质的聚合体，质量约在10^{28}到10^{32}千克之间(因此含有大约10^{54}到10^{58}个原子)，当我们讨论它们在空间中的运动时，由于它们之间的巨大距离，仍然可以把它们看作粒子．

§10 星　系

在1900年，“星系”和“宇宙”是看作同义词的．我们的宇宙显得主要是由庞大数目的恒星——数十亿——组成的，它们散布在空间各处(见图1-1)．但在这儿或那儿可以看到云状物——星云，离我们足够近或足够大，使我们能够观测到其大小甚至结构，而不象恒星那样表现为点状物．1900年的时候，已知有几千星云，并将它们分了类．但它们是什么呢？引天文学家爱伦·森德吉的话说：“1900年以前无人知道．1920年只有极少数人知道．1924年以后所有天文学家都知道．”②因为在1924年，伟大的天文学家爱德温·赫伯用如画的言词提出结论性的证明说星云是在银河系所占空间以外很远处的“宇宙岛”．我们的银河系（用大写G来区

① 关于这方面的广泛讨论，可参阅(例如)F. Hoyle,《*Frontiers of Astronomy*》, Harper & Row, New York, 1955.

② 森德吉在一本书的序言中动人地讲了这一发展的故事．这本动人的书的名称是《*The Hubble Atlas of Galaxies*》, 1961年Carnegie Institution of Washington, D.C.出版．还可参看Hubble(赫伯)本人的经典著作,《*The Realm of the Nebulae*》, Dover Publications, New York, 1958.

别①)只是同类的无数星系之一. 事实上,早在 1755 年,哲学家伊曼努·康德就首先提出过这样一种宇宙图象. 当然,在那时,这不过是一个纯粹假想.

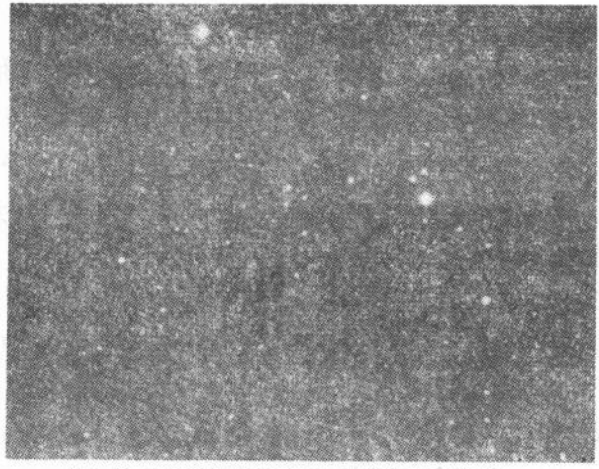


图 1-7 北冕座中的星系团. 距离约 600 兆光年.

再引森德吉的话: "星系是宇宙中恒星的最大的单个集合体. 它们之于天文学同原子之于物理学一样."据我们迄今所知, 它们是可观测的物体图式中最大的粒子.

单独一个星系就可能包含有 10^6 直到 10^{11} 个恒星. 我们的银河系看来是大星系之一, 直径约 10^{21} 米 (10^5 光年). 我们已经见到,在单个星系内的诸恒星实是相距异常之远的,因而在星系中物质的平均密度非常、非常低——只有大约 10^{-20} 千克/米^3. 但是,即便如此,星系仍代表着物质的显著集中. 平均来说,星系与星系之间的距离约为它们直径的 100 倍, 虽然它们有趋向以群集的形式,在也许小于此 10 倍的间隔下存在. 因此,即使是星系,在适当大的尺度下,也可以看作粒子,它们之间的相互作用可以近似地当作质点间的作用来处理(见图 1-7).

① 英文中,星系一般用 galaxy,银河系用 Galaxy——译者注.

天文探测表明，星系在空间中分布的密度大致是均匀的．如果假定，直到观测的理论极限，这一点仍然是真实的话，我们就能对整个宇宙的内含物作出某种估计．因为根据这一情形，宇宙似乎可以用一个半径约为10^{10}光年（10^{26}米）的球来表示．星系一般显出是在离我们而去，速率与其距离成正比，在10^{10}光年的距离处，其后退速率将会达到光速．在这速率下，由于"星系红移"（波长和频率移动的一种形式，是由于辐射源的运动而产生的——一般称为多普勒效应），往回传输到我们这儿来的能量将降到零，从而对可知的宇宙的广延设置了一个天然极限．

如果设空间的物质平均密度处处都是10^{-26}千克/米^3（单个星系内部密度的10^{-6}），并假定宇宙的全部体积的量级为$(10^{26})^3$，即10^{78}米^3，则宇宙的总质量约为10^{52}千克（相当于大约10^{79}个氢原子）．这相当于一共大约10^{11}个星系，每一星系含大约10^{11}个恒星．这些数目是如此惊人地巨大，使得任何想在脑中给整个宇宙造一形象的企图成为不可能．但至少有一件事似乎是可以肯定的，这就是，我们描写物理世界的基础——即我们开头所说的"粒子观"——在我们经验的整个范围内，从原子核到宇宙，都在某种程度上证明是恰当的．对自然的这种描写法确有意义，而所包括的范围——距离约为10^{40}，质量约为10^{80}——又如此之广这一事实，不仅在审美观上令人喜悦，而且也使人想到，我们对原子的行为所作的物理描述，至少是其中的某一些，将被发现也可以应用于星系的行为．如果我们要为研究自然，特别是为经典力学的应用，找一个统一的题目，那么，这粒子观就是一个强有力的候选者．

习　题

1-1　把你认为在物理上是重要的各种各样物体（例如，原子核、细胞和恒星）的直径、体积、质量的数量级作一个表．对于其中的直径和质量的数

据，用一条直线上的标记点来表示，这直线是按 10 的递次幂取对数作划分的．这表在有关宇宙的标度方面应当会给你一有用的总的概念．

1-2　估计下列情况中的原子数目：

(a) 你用肉眼所能看到的物质的最小微粒；

(b) 地球．

1-3　计算一茶匙核物质——紧密堆积的原子核或中子——的近似质量，用吨来表示．

1-4　一个真空泵把一个瓶子抽空到压强为 10^{-6} 毫米汞柱(约为大气压的 10^{-9})．估计下列各量之值：

(a) 每立方厘米的分子数目；

(b) 分子间的平均距离．

1-5　在一个经典性实验中，E. 卢瑟福和 T. 罗伊兹[*Phil. Mag.*, **17**, 281 (1909)]证明过，在放射性衰变中发射出的 α 粒子是正常氦原子的原子核．他们是通过收集由衰变产生的气体，并测量它的光谱来证明的．他们以一个放射性气体氡为源(氡本身是镭的衰变产物)．氡的半衰期是 3.8 天；就是说，在任何瞬间存在的任何给定数目的原子，经过 3.8 天后，有一半存留下来而一半衰变掉．当实验开始时，氡发射 α 粒子的速率约为每秒 5×10^{9}(个)．六天后，已收集到足够的氦气，使管子在放电时显示出一完整的氦光谱．在这实验中收集到的氦气，在 STP 下测量，体积是多少？[残存的放射性原子的数目，作为时间的函数，由指数衰变律 $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ 给出．在任何瞬间，单位时间内的蜕变数目是 $|dN/dt|=\lambda N_0e^{-\lambda t}$．给了半衰期之值，你就能推算出常数 λ 之值．]

1-6　赫伯定律[$v(r)=\alpha r$]所描述的宇宙普遍膨胀，暗示宇宙中每单位体积的质量的平均量每秒钟约减少 $1/10^{17}$(见前言中题外练习 29)．按照某种理论(已不怎么严格有效)，这损失由空间中不断产生新物质予以补偿．

(a) 如果整个宇宙体积处处都在产生新物质，试近似地计算每年每立方米要产生多少个氢原子才能获得所需要的新质量．

(b) 有人(J. G. 金)曾假设，新物质的产生，如果发生的话，很可能不是均匀地在整个空间中进行，而是以与一定体积内现有的旧物质的量成正比的速率进行．根据这个假设，计算与装有 5 千克水银的一个容器中每天产生的新质量相当的氢原子的数目．(J. G. 金由此得出结论，检验这一假设是可以实行的．)把你的结果换算成在 1 托(1 毫米汞柱)压强下测得的氢气的相应

体积.

1-7 T. 罗斯伯里在他的"人的生命"①一书中提到，在一个人的表皮上生活着的各种微生物的全部（除掉肠系统内表面上更大量的微生物）可以很容易地容纳在一枚顶针的底部. 假定这些微生物的平均半径为 5 微米（1微米 $=10^{-6}$ 米），问我们每个人成天携带着的这种生物的总数的数量级是多少？把结果同地球上的总人口比较一下.

1-8 看来某些行星很可能是由环绕着太阳的一个星云凝聚而形成的，这星云的外直径大致与冥王星的轨道相当.

(a) 假定这星云的形状是一个圆盘，厚度约等于它的半径的十分之一，问它的平均密度是多少千克/米^3？（不要把太阳的质量也计算在内.）

(b) 一个较好的图象是一气体云，其厚度大致与半径成正比地增加. 假定木星是由这云的一环形部分形成的，这环沿着径向延伸的距离为从小游星带至土星的轨道的距离的一半，厚度等于这径向延伸. 问星云的这一部分的平均密度是多少？

（用地球轨道的半径来表示，冥王星轨道的半径大约是 40 单位，小游星带大约在 3 单位处，而土星轨道的半径则大约是 9.5 单位.）

1-9 一个大的球状星团的核心可能典型地在约 5 光年的半径之内含有约 30,000 颗恒星.

(a) 估计在这样一个核心中恒星之间的平均距离与恒星的直径之比.

(b) 如果这同一比值是一气体中分子之间的距离与分子的直径之比，这气体的真空度大约是多少？

① "*Life on Man*"(Viking, New York, 1969).

我不给时间、空间、位置和运动下定义，因为那是大家都知道的.

牛顿，《原理》(1686)

第二章　空间、时间和运动

§1　什么是运动

无疑你是熟悉运动的所有各种表现形式的，但当你被要求给运动以确切的定义时，你如何回答呢？很可能在你的陈述中要用“在时间过程中位置的变化，”或与此相当的词来表达你的中心思想．因为要给运动以任何精确的说明，我们似乎不得不依赖于运用分开的空间和时间的概念．一个物体，如果在不同时刻占据不同位置，我们就说它是在运动着，任何频闪观测照片，如图 2-1 所示的，都生动地表明这一脑海中的构图．

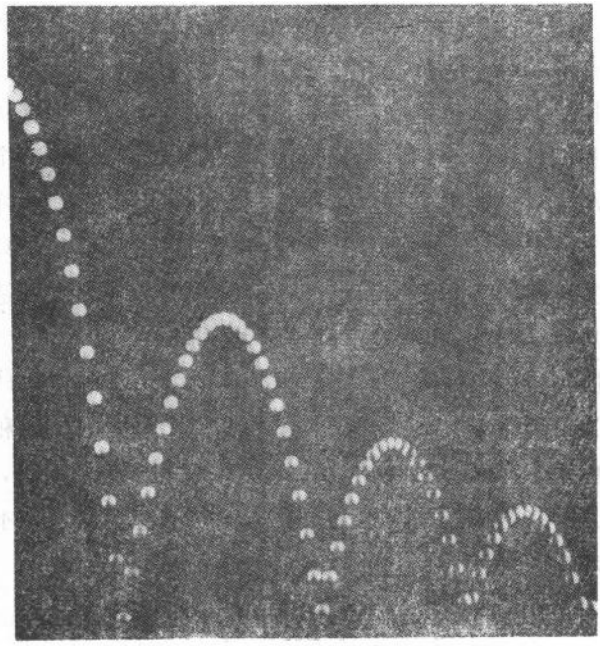


图 2-1　运动的频闪观测照片．

我们所有的人在以下意义下都是牛顿的信徒，那就是，我们关于空间和时间的直感观念是与牛顿本人的那些观念密切协调的．下面几段有意把这些观念用简单的话表示出来．描述似乎是自然的和言之有理的，但其中隐含了许多观念，它们在进一步推究时，被发现是天真的和难予或不可能为之辩护的．因此，以下的叙述（特用括号分开以强调其暂时性）不应当从它的表面意义来接受，而应当抱着一点健康的怀疑的态度来阅读．

〔**空间**，在牛顿的观点看来，是绝对的，其意义在于它是永存的，而且不依赖于是否有任何物质存在于其中或者在其中运动．引牛顿自己在《原理》[①] 中的话说："绝对空间的自身，与任何外在的东西无关，永远保持不变和不动．"

〔因此，空间是某种不动的三维模架，可以把物体放置在它里面，物体能在其中运动而不会在物体和空间之间产生任何相互作用．宇宙中的每一物体都存在于空间和时间中的一特定点．一个运动的物体在时间过程中经历着连续的位置变化．尽管实际上不可能，我们可以设想用首尾相衔的米尺组成全空间的一个巨大三维立方网阵，以便把位置图示出来．我们可以设想把这样的测量伸展到宇宙中的任何一点．换言之，空间是自在的，我们只是做了把它标上记印的实际工作而已．还有，我们的物理测量是符合欧几里得几何定理的，即假定空间是欧几里得的．

〔**时间**，在牛顿的观点看来，也是绝对的，与任何物理客体和事件无关而流逝着．再引《原理》中的话说："绝对、真正、和数学的时间是自在的，与任何外在的东西无关，它均一地流逝着，又称为持续．"其语言是优美的，但却是使人愉快的空话．正如本章开头时所引牛顿的话，他并不企图给空间或时间下**定义**．

① 《原理》的全名是《*Philosophioe Naturalis Principia Mathematica*》．在本书原文中简称"Principia"．

〔没有人能够催快时间或推慢它的进程，时间的流逝在整个宇宙中是划一的．如果我们设想“现在”这一瞬时同时出现于宇宙中的每一行星和恒星上，并在一小时后记下这 60 分钟间隔的末尾，我们是假设这样一个时间间隔对于宇宙中的每一物体都是等同的，(原则上)可以通过在各地点的物理学、化学、或生物学过程去证实．为了测量时间间隔，原则上可以在米尺网阵的每一交点安放一座完全相同的钟，并把这些钟调到同步，使它们在通常意义上的同一瞬间指示着相同的时刻．既然是完全相同的钟，它们此后就将正确地记下绝对时间的流逝，并保持互相同步．

〔空间和时间，虽然彼此完全互相独立，但在某种意义下还是相互关联的，那就是，我们不可能设想物体存在于空间而根本没有时间，或存在于一有限时间内而“不在任何地方”．空间和时间两者都假定是无限可分的——没有最终结构．〕

上面五段话用日常生活的语言描述了关于空间和时间本性的某些常识性观念．在这些观念里，埋置了为着展示我们的宇宙图象而有意或无意地选用的假设．因此，不管直观地看它们是多么正确，其中的许多概念导至与经验不相符的结论，就不足为奇了．这首先表现在(我们在序言中提到过的)接近于或等于光速的异常高速运动有关的方面以及与电磁现象有关的方面；是爱因斯坦，在发展他的狭义相对论时，揭露了经典概念的一些最重要的局限性，包括牛顿自己的有关相对性的概念，他并示明这些概念须要怎样修正，特别是关于时间的概念．

问题的症结在于：一方面是绝对空间和时间的抽象观念，而另一方面是要有一个办法，按所测的时间间隔内测得的位置变化去描写一个物体的实在运动．牛顿自己很了解这一点，至少是在有关空间的测量方面．在《原理》中我们看到他评述道：“但由于我们的感官看不到或区分不开空间的分部，我们只好代以可感觉到

的(即可观测到的)测量.…因此,我们用相对的位置和运动代替绝对的. …因为可能没有真正静止着的物体可作为其他物体的位置和测量的参考."如果要得知任何关于绝对空间的知识, 那只能用推断的方式从这些相对量度得到. 因此, 我们的注意应转向我们唯有的、用以描写运动的基础——观测一个给定的物体如何相对于其他物体而运动.

§2 参 照 系

如果你听见什么人说"那辆车在运动,"你确知他描述的是那辆车相对于地面或附近的任何建筑物等的位置在改变着. 如果有人说"在车和地面间有着相对的运动",那会正当地被认为是令人厌烦的书呆子. 但这并不改变这样的事实, 即需要这句学究的语言才能表达那句日常用语的真正的内容. 我们承认局部环境——附着于地面、因而是相对静止的一群物体——为一**参照系**,并以它为标准来观察和测量其他物体的位置.

很清楚, 选取某一特殊的参照系来说明一物体的运动, 完全是一种从属于喜好和方便的事情, 但选一个参照系使在其中运动的描写最为简单倒是有很多优点的. 例如,一艘船,对于许多目的来说,是一个自有的天地,在它里面任何人的位置或走的路最有效是用三个互相垂直的轴来描述,这三个轴的方向是: 船首至船尾, 左舷至右舷, 以及上下(按甲板层次). 至于船本身相对于依附在地球上的参照系的匀速运动,只要旅客们信赖领航人员,他们可以不去注意或者根本不予理会.

地球本身是静止的吗? 我们不这样说. 我们已经习惯于这样的事实, 即地球同其他行星一样是不断地改变着它相对于一个由恒星表示的更大参照系的位置的. 而由于恒星在天空中组成一个

几乎是不变的参照点阵，我们就把它们的全体看作一个固定参照系，在其中地球既转动着又整体地移动着．但真实情况仍然是，我们的原始数据只有**相对**位置和位移；至于相信假设地球确在绕着地轴每 24 小时转一周而不是周围的恒星系绕着**我们**转更为合理这一点，是不能光靠原始观测就能够判断的（见图 2-2）．根据我们目前所知恒星的巨大质量和庞大数目，把运动简单地归之于小

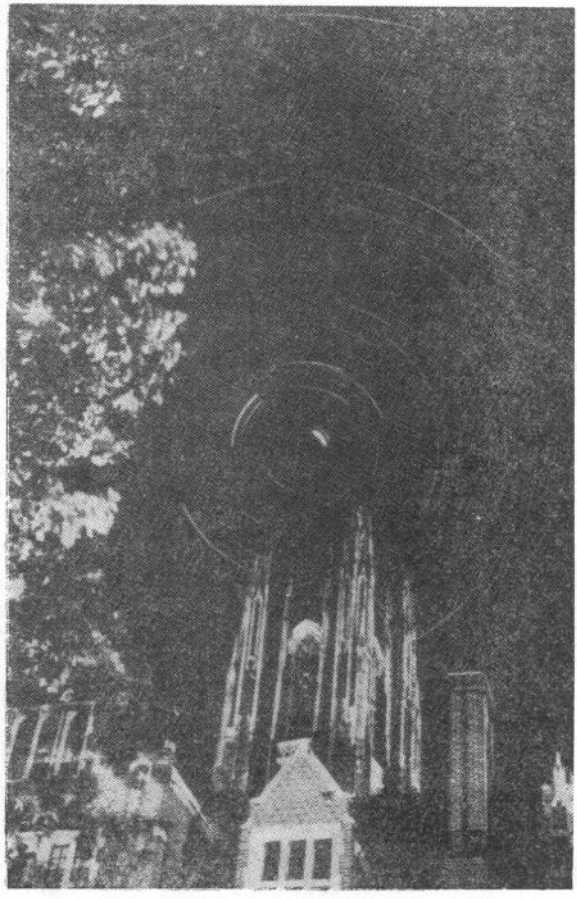


图 2-2　恒星的表观圆周运动．

小的地球确是更为**合理**的. 但是要把这一主观的判断提升为物理定律却会是很难的.

以后我们将看到，存在着强有力的**理论上的**理由，认为某些参照系要比其他的优越一些. 参照系的"最佳"选择最终是一个动力学的问题——即，依赖于运动和力的实际规律. 但是，对某一特殊参照系的选取，往往是不考虑动力学而作出的. 目前我们将只关心纯运动学问题，相对于任一给定的参照系来分析位置和运动.

§3 坐 标 系

参照系，按我们的定义，是互相保持相对静止的一群物理客体. 在任一这种参照系中，我们设立某**种坐标系**以进行位置和位移的测量. 我们可以自由地选择坐标系的原点和坐标系的类型，以便最好地符合我们的目的. 由于我们经验上的空间是三维的，我们一般需要标出三个独立的量来唯一地确定一点的位置. 但是，我们要考虑的大多数问题都是局限在一个平面上的运动，因此我们首先只讨论在二维情形中如何表示位置和位移.

无疑你们熟知，平面上一点的位置通常是由相对于互相垂直的两条直线来标记的，这两条线叫作坐标系的 x 和 y 轴，相交于

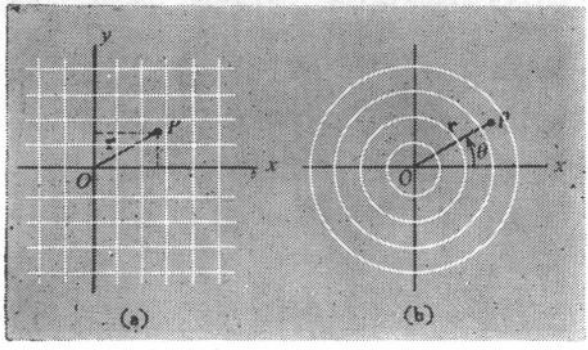


图 2-3 (a)方格子：平面笛卡儿坐标的基础. (b)平面极坐标格子.

原点 O. 相对于 O, P 点[图 2-3(a)]的位置用一个**位置矢量** $\mathbf{r}$(见图)来描写，$\mathbf{r}$ 由确定的长度和确定的方向来表征. 利用所说互相垂直的轴，我们可以用一对直角(笛卡儿)坐标(x,y)唯一地定出 $\mathbf{r}$; x 和 y 分别是 $\mathbf{r}$ 在 x 和 y 轴上的投影. 另外一种重要的表示 $\mathbf{r}$ 的方式是用极坐标(r,θ)，如图 2-3(b) 所示. 这里，r 是由 O 到 P 的距离，θ 是 $\mathbf{r}$ 与正 x 轴之间的夹角，按逆时针方向(习惯上称为正向)来量度. 用来标记 P 点位置的这两种方案之间有下列联系:

$$(\text{二维})\quad \begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \\ x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \end{cases} \tag{2-1}$$

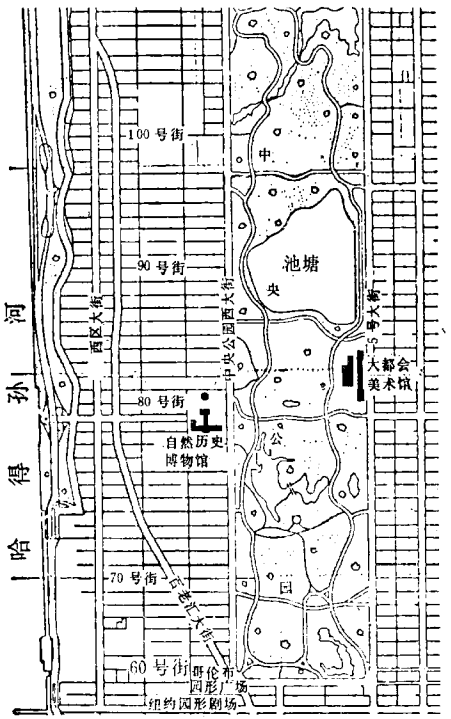
图 2-4 表明应用这些坐标的例子.

在各种场合下我们要用到**单位矢量**，它们代表沿基本坐标方向的单位长度位移. 在直角(笛卡儿)坐标系中，我们分别用 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{j}$ 来表示沿 x 和 y 方向的单位矢量. 位置矢量 $\mathbf{r}$ 可以写成它的两个矢量分量之和:

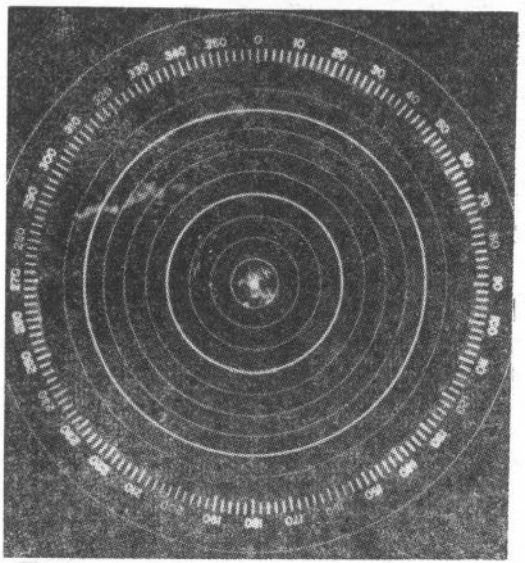
$$(\text{二维})\qquad \mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j} \tag{2-2}$$

在极坐标系中，我们将用符号 $\mathbf{e}_r$ 来表示在 θ 不变的情形下沿 r 增加的方向的单位矢量，用符号 $\mathbf{e}_\theta$ 来表示垂直于 $\mathbf{r}$ 沿 θ 增加方向的单位矢量. [此处所用的符号 $\mathbf{e}$ 来源于德文“Einheit”(“单位”)的字首.]在这种极坐标系中，矢量 $\mathbf{r}$ 简单地就是 $r\mathbf{e}_r$，令人感到奇怪，而且人们也不明白到底为什么要引进单位矢量 $\mathbf{e}_\theta$. 但是我们将看到，一旦我们讨论的是运动而不是固定的位移时，这矢量就变成十分重要的了，这是由于运动常常在垂直于 $\mathbf{r}$ 的方向上有分量的缘故.①

① 作者这一段话不很中肯. 在 $\mathbf{r}$ 的表示中之所以不出现 $\mathbf{e}_\theta$ 是因为 $\mathbf{r}$ 就在 $\mathbf{e}_r$ 的方向. 如果不是 $\mathbf{r}$ 而是一般的位移(方向不沿 $\mathbf{e}_r$)，则它的表达式中当然会出现 $\mathbf{e}_\theta$，这与是否运动无关(如果运动是沿着 $\mathbf{e}_r$ 方向的，照样不会出现 $\mathbf{e}_\theta$)——译者注.



(a)



(b)

图 2-4 (a)应用笛卡儿坐标的例子——纽约曼哈顿区的一部分. (b)应用平面极坐标的例子——雷达显示器，对着几个刚出现的雷暴雨(1970,3,3). 正北所示方位角为0°，粗一些的圆是 100 公里和 200 公里处的 $r=$常数；细一点的圆相隔 25 公里.

虽然上述的坐标表示法是人们所最熟悉的——也是本书中唯一地使用于二维问题的——值得一提的是，平面上的任何图形，只要能唯一地确定一点的位置，就是一个可用的坐标系．图 2-5 给出两例——一是以两条直线轴为基的非正交系，另一是以两组相交曲线为基的正交系．这类坐标系是用来突出地表现某些特定的物理体系所可能具有的对称性的类别的．

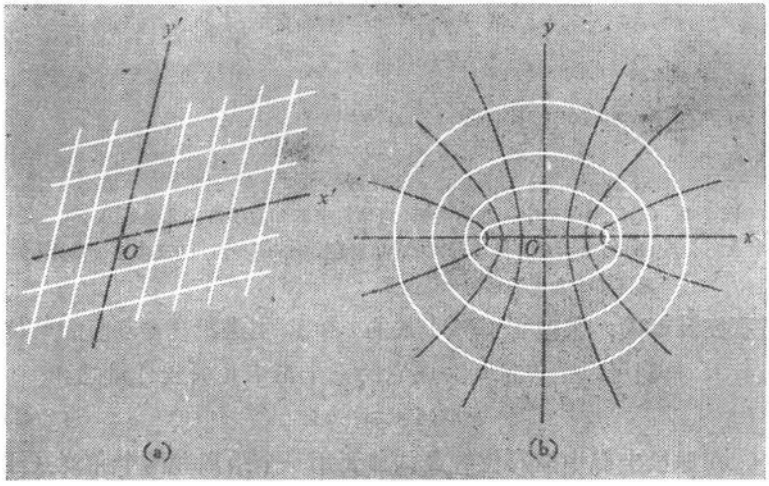


图 2-5　(a)斜交坐标系．常用于狭义相对论中明可夫斯基图(时-空图)的那一种．(b)正交曲线坐标系，由相交的共焦椭圆和双曲线组构成．

如果需要标明一点的所有三个空间坐标，那么普通最常用的坐标系是三维直角(笛卡儿)坐标(x, y, z)，和球极坐标(r, θ, φ)，两者都示明于图 2-6(a) 中．笛卡儿系几乎都采用右手的，意思是，正 z 轴这样来选取：当你沿着它向上看时，从正 x 方向到正 y 方向的转动过程与一右手螺旋的转动相当．循环地置换 x，y，z，再实施同样转动，仍是右手螺旋关系——由 $+y$ 到 $+z$，沿 $+x$ 轴看；由 $+z$ 到 $+x$，沿 $+y$ 轴看．你也许注意到，图 2-3(a) 所示的二维坐标系在这种约定下与一 $+z$ 轴相关联，这正 z 轴是从纸面伸出

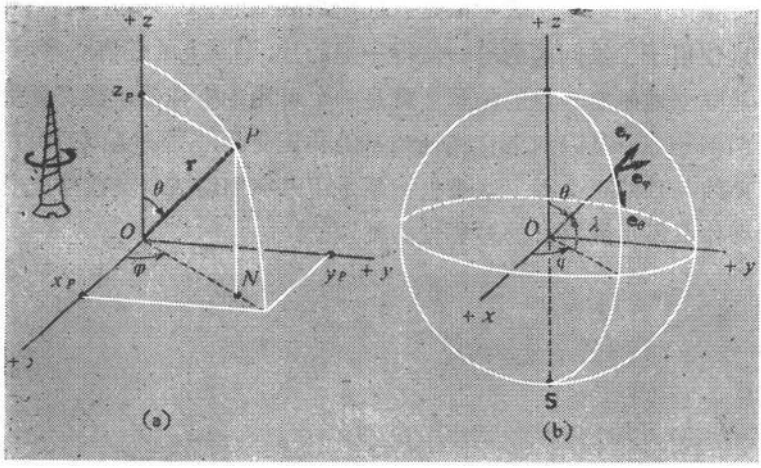


图 2-6 (a)三维情形中一点的坐标，用球极坐标和右手笛卡儿坐标表示．(b)用球面上的角坐标(纬度和经度)来标明一点，以及在这一点上局部笛卡儿坐标系的单位矢量．

对着你竖起的．类似于 (2-2) 式的 **i** 和 **j**，引进沿 $+z$ 方向的单位矢量 **k**，我们可以把矢量 **r** 写成它的三个笛卡儿矢量分量之和：

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{2-3}$$

在球极坐标中描写位置或位移要用一个距离和两个角度．(注意三维情形总是需要三个独立坐标的，不管它们取什么特殊形式．)所说的距离，就象平面极坐标那样，是离原点的距离 r．角度之一［图 2-6(a) 中标明 θ 的那一个］就是矢量 **r** 与正 z 轴之间的夹角；称为极角．另一个角是 zx 平面与 **r**-z 平面之间的夹角．这角可求出如下：由 **r** 的端点 P 作垂线 PN 至 xy 平面，N 为垂足，正 x 轴与投影 ON 之间的夹角就是．这角(φ) 称为方位角．由图中的几何关系可得直角坐标与球极坐标之间的下列关系：

$$\begin{aligned} x&=r\sin\theta\cos\varphi \\ y&=r\sin\theta\sin\varphi \\ z&=r\cos\theta \end{aligned} \tag{2-4}$$

如果令 $\theta=\pi/2$，并让 $z=0$，就回到二维的 xy 平面．于是，(2-4)式的前两个成为

$$x=r\cos\varphi$$

$$y=r\sin\varphi$$

很不幸，长期的传统习惯使我们用了 θ 来表示二维特殊情形下 $\mathbf{r}$ 与 x 轴之间的夹角．这不应导致混淆，但也需要对这些不一致的地方唤起注意．

我们从小就熟习的、球极坐标的一种重要应用是画地球表面的地图．图 2-6(b)指明这一画法．一给定点的经度就是 φ 角，而纬度是一个 λ 角，等于 $\pi/2-\theta$．(这使北纬为正，南纬为负．)在地球表面上的任何给定点，相互正交的一组三个单位矢量提供一个地区性坐标系；单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 直指上方，$\mathbf{e}_\theta$ 指正南，与地面平行，而第三个单位矢量则指正东，也平行于地面．同平面极坐标一样，矢量 $\mathbf{r}$ 简单地就是 $r\mathbf{e}_r$．

§4 位移矢量的相加

假定我们位于地平面上的一点 P_1 [图 2-7(a)] 并准备走到另一点 P_2．设想我们只选择东向和北向的路途(图中以 $+x$ 和 $+y$ 表示)．我们知道，有两种特殊的直接走法：(1)向正东走一定距离 s_x，然后向正北走一定距离 s_y，或者(2)向正北走 s_y，跟着向正东走 s_x．走这两位移分量的先后次序并不重要；同样都能到达 P_2 点．(2-2)式所表示的矢量 $\mathbf{r}$ 为两个矢量 $x\mathbf{i}$ 与 $y\mathbf{j}$ 之和就是这种相加的一个例子．线性位移的这一简单和熟知的性质体现了所有我们称之为矢量的那些量的主要特点，而且不限于互相垂直的相加．例如，在图 2-7(b)中我们说明首尾相接的三个位移矢量 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, 和 $\mathbf{C}$ 如何能够合成一个从最初的起点画到最后的终点的矢量 $\mathbf{S}$，这就

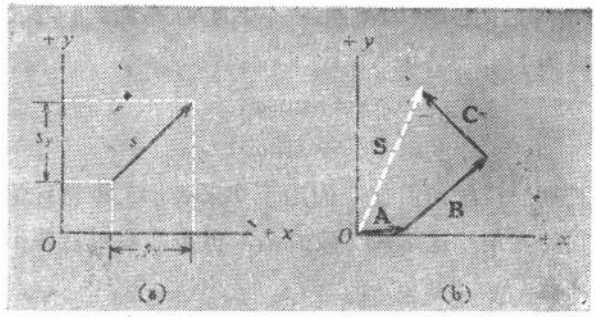


图 2-7 (a)一平面上的相继位移；最终位置与所作位移的次序无关．(b)一平面上几个位移矢量的相加．

是我们说的、把矢量A，B，和C **相加**的意思．矢量相加的次序并无关系；因此一物体的相继位移可以按矢量的加法规则合成，而不必去管各位移的先后．一般说来，我们说一个量是矢量就意味它是一个有方向的、并遵从位移加法的量．

我们常须考虑将一个给定的矢量乘上一数值．乘上一个正数 n 意味着把矢量的长度改变一因数 n 而不改变其方向．一矢量之负(乘－1)的定义是大小相同、方向相反的一个矢量，它与原矢量相加等于零．因此，乘上 $-n$ 的定义是将一矢量的方向倒转并把它的长度改变因数 n．这些操作见图 2-8．

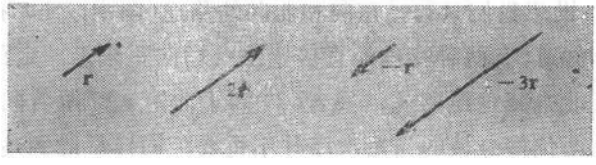


图 2-8 一给定矢量 **r** 的标量倍乘，包括负的倍乘．

只要注意减法基本上是加一负的量，我们就可以从一个矢量减去另一矢量．因此，如果要从矢量 A 减去矢量 B，我们就作矢量 $-\mathbf{B}$ 并把它与 A 加起来：

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$$

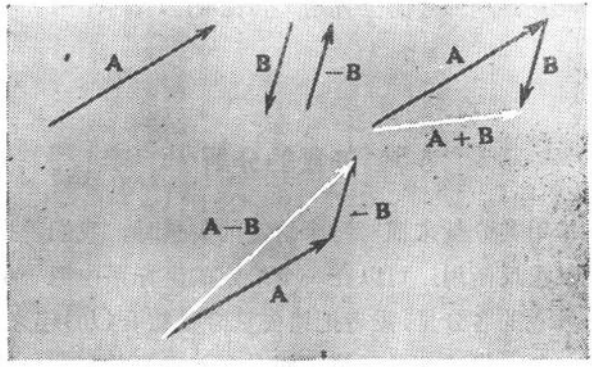


图 2-9　两给定矢量的相加和相减，注意矢量差的大小可以（象这里这样）大于矢量和的大小.

在图 2-9 中我们同时示明两给定矢量之和与差. 我们故意选取 **A** 和 **B** 的方向使矢量 **A**−**B** 比矢量 **A**+**B** 要长；这有助于强调这个事实：矢量的加法与简单的算术加法很不相同.

当两个点 P_1 和 P_2 相对于原点 O 的位置分别给定（图 2-10），而需要计算从 P_1 到 P_2 的矢量距离时，可以直接应用矢量的减

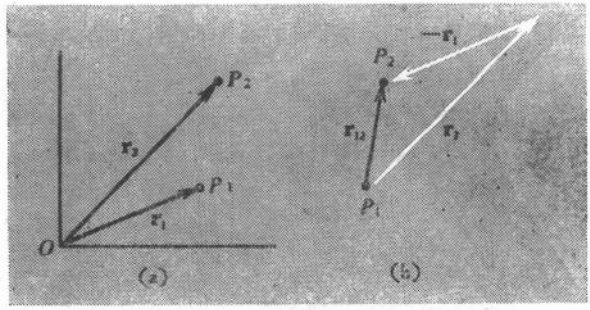


图 2-10　一点（P_2）相对于另一点（P_1）的相对位置矢量的作图法.

法. P_2 相对于 P_1 的位置用 $\mathbf{r}_{12}$ 表示，则

$$\mathbf{r}_{12}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$$

（下标“1 2”读作“一-二”，是描述两粒子体系时常用的标记.）类

似地，P_1 点相对于 P_2 的位置用 $\mathbf{r}_{21}$ 表示，$\mathbf{r}_{21}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$. 很清楚，$\mathbf{r}_{21}=-\mathbf{r}_{12}$.

§5 矢量的分解[①]

在讨论用其分量来描写一个给定的矢量时，我们曾指出，这一关系可以正反两用. 可以在一个给定的坐标系中把一个矢量分析(分解)成它的各分量，或者把诸矢量分量综合(加)起来，重新构成原来的矢量. 但这两种运算之间存在着重要差别. 分量的矢量和是唯一的——是我们所关注的特定矢量——而把一矢量分解为分量则有无穷多的作法，要看坐标系如何选择.

如果我们用正交轴坐标系(不论是笛卡儿坐标或极坐标还是任何其他的)，一矢量的分量很容易得到，只要轮流以该矢量与每一坐标轴的夹角的余弦乘该矢量的长度即可. 例如，如果矢量 $\mathbf{A}$ 是在 xy 平面上[见图 2-11(a)]，则它在 xy 坐标系里的分量是

$$A_x=A\cos\alpha \qquad A_y=A\cos\beta$$

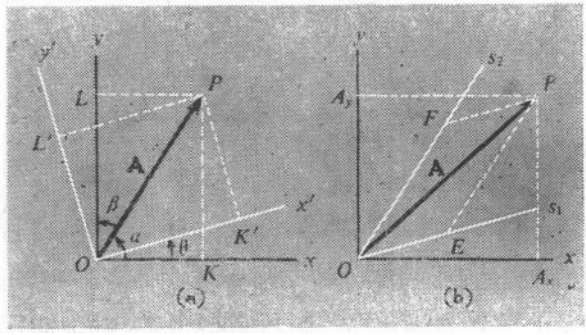


图 2-11 (a)一给定矢量在两不同直角坐标系中的分量由 $x\,y$ 平面中的一个角位移 θ 相连系. (b)一给定矢量在一直角坐标系和一斜交坐标系中的分量.

① 希望这一节总的说来对读者有所助益，但其中唯一为以后所特别需要的部分是两个任意矢量的标积.

我们知道 $\beta=(\pi/2)-\alpha$，但分别引进两个角度使我们可以把这程式推广到三维情形：分别用三个角度 α，β，γ 来表示一矢量与三个轴之间的夹角．在这一较普遍的情形中，诸角之间没有简单的联系，但存在着下列关系：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

二维情形相应于令 $\gamma=\pi/2$.

图 2-11(a)中的合矢量 **A** 当然可以写成

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}\\&=(A\cos\alpha)\mathbf{i}+(A\cos\beta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

这些结果可以很方便地用所谓两矢量的**标积**表示出来．标积一般定义如下：如果 θ 是两任意矢量 **A** 和 **B** 之间的夹角，则它们的标积 S 等于两矢量的长度之积乘上 θ 的余弦．标积也称为**点积**，因为它可以方便地写为 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$．因此

$$\text{标积}(S)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$$

如果我们现在选一正交坐标系的任一单位矢量为矢量 **B**，则 **A** 与这单位矢量的标积正是 **A** 在该单位矢量方向上的分量：

$$A_x=\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}\qquad A_y=\mathbf{A}\cdot\mathbf{j}$$

因此矢量 **A** 可写为

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i}+(\mathbf{A}\cdot\mathbf{j})\mathbf{j}$$

这一结果事实上可直接从 **A** 能够写为其沿 x，y 的两分量的一个矢量和的基本关系

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}$$

得到，求这式两边与单位矢量 **i** 的标积，有

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}=A_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})+A_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})$$

但 $(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})=1$，而 $(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})=0$，因为这些矢量都具有单位长度，而 θ 之值分别为 0 和 $\pi/2$．因此我们有一个多少是自动化的手续来逐个地挑出并计算每一分量．

如果只到此为止，则上面所作陈述似乎有些无谓地把问题复杂化．但在我们需要把一个给定的矢量在不同坐标系中的分量联系起来的，它的重要性就显得较为明白了．例如，考虑图 2-11(a)中所示的另一组坐标轴(x', y')；它们是从原坐标系(x, y)经过正向（逆时针方向）转动而得的．于是，矢量$\mathbf{A}$就有两个等价的表示：

$$\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}=A'_x\mathbf{i}'+A'_y\mathbf{j}'$$

如果要把A'_x用A_x和A_y表示出来，我们只须与$\mathbf{i}'$统作点积．其结果是

$$A'_x=A_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')+A_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')$$

看一下图 2-11(a)就会发现下列关系：

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}'=\cos\theta \qquad \mathbf{j}\cdot\mathbf{i}'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

因此

$$A'_x=A_x\cos\theta+A_y\sin\theta$$

类似地，

$$\begin{aligned}A'_y&=A_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')+A_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\\&=A_x\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+A_y\cos\theta\end{aligned}$$

而有

$$A'_y=-A_x\sin\theta+A_y\cos\theta$$

这一计算手续避免了那种使人疲倦的和有时是不便的．把矢量$\mathbf{A}$投影到不同坐标轴上去的几何考虑．

同样的方法可用于把一个矢量分解为非正交的分量．举一个例，试看图 2-11(b)的情形．坐标轴是Os_1和Os_2两条线，矢量$\mathbf{A}$在这坐标系中的分量是OE和OF．如果我们用$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$来表示沿这坐标方向的单位矢量，则有

$$\mathbf{A}=s_1\mathbf{e}_1+s_2\mathbf{e}_2=A_x\mathbf{i}-A_y\mathbf{j}$$

如果以$\mathbf{e}_1$点乘这式，则有

$$s_1+s_2(\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_1)=A_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{e}_1)+A_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_1)$$

只要知道各坐标轴之间的夹角，这就是一个包含两未知数 s_1 和 s_2 的线性方程．第二个方程可以通过改用 $\mathbf{e}_2$ 代替 $\mathbf{e}_1$ 来点乘前式而得，于是就能分别解出 s_1 和 s_2 来．重要的是认清楚，在这种情形下，基矢 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 不再是正交的，因而标积 $(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2)$ 不为零．不过，使用这种斜交坐标系是颇为特殊的．通常把一矢量沿一正交坐标系的三个独立方向分解较为合理和有用．

§6 矢量加法和空间的性质[①]

你也许不免认为矢量相加的基本规律以及其最终结果与相加的次序无关的事实多多少少是显而易见的．因此我们要指出，这决定性地依赖于我们的空间遵守欧几里得几何学的规律．如果我们所要论述的是限制在一个面所代表的二维世界中的位移，那么这面必须是平的．这并不只是一种学究式的考虑，因为我们最重要的二维参照系之一——地球表面——就是弯曲的．只要位移比曲率半径小得多，我们的表面对于实际目的可说是平的，我们的观测符合欧几里得平面几何，于是一切都很好．但如果沿表面的位移足够大，这一理想化就不能用了．例如，从赤道上的一点向东移 1000 英里，接着向北移 1000 英里所到达的地方并不同于两个次序相反的同等位移（仍是在两正交的大圆周上）所到达的地方；相差将近 40 英里！（见图 2-12）这实际意味着矢量加法的正确性是一个实验的问题，测试出来的偏离可用来推断有关我们在其中操作的空间的几何性质．例如，我们可以对球面上两相继位移的两种可能走法之间的差异进行精密测量并利用所得结果的数据来推算出球的半径．

① 本节可略去而不致失去连贯性．

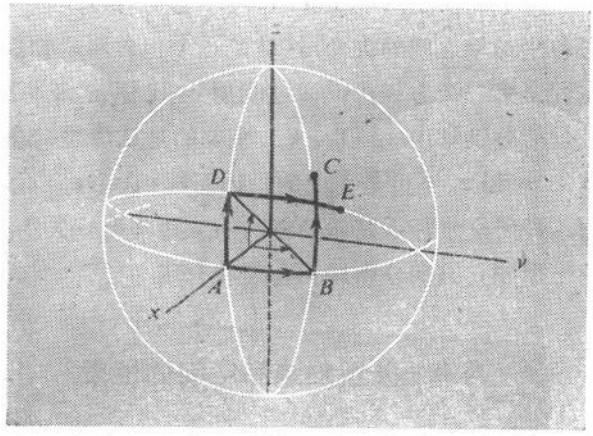


图 2-12　在一球面上相继的位移是不能对易的，如果位移的幅度比起球的半径不算小的话.

当我们承认我们日常经验的空间实在是三维的时候，我们当然要从另外一个观点来看待前面的分析. 我们认识到，在球面上的位移实际可以看成是在一个服从欧氏几何的三维世界中的位移，而不是仅仅二维的、就其本身看来是非欧几里得的世界. 但在这一点上一个非常有意义的推测就会出现：我们能否说我们的空间是严格的欧几里得空间呢？是否可能，沿三个基本坐标方向的位移相加的结果，在某种细微的程度上与相加的次序有关呢？如果发现事实的确如此，那么我们可以用类比的办法，引进一个与某种特征曲率半径相关联的第四维，从而使我们的三维非欧空间可以在一个四维的"超空间"中被描述为欧几里得的.

某些杰出的科学家，从伟大的卡尔·F·高斯（"数学王子"）①开

① 卡尔. F. 高斯(1777—1855)是古今一位出众的科学家. 在创造性和工作范围之广这些方面，无人曾超过他，也许也无人能同他相匹. 他深入探讨了天文学和大地测量学，并且也许是第一个认识到空间的非欧几里得可能性的人. 参阅 E. T. Bell 在 "*The World of Mathematics*"(J. R. Newman 编，Simm and Schuster, New York, 1956)中一篇关于他的文章.

始，曾企求用直接观测去试探欧氏几何的有效性，测的是一个闭合三角形的三个角，看加起来是否精确地等于 180°.（例如，在一球面所代表的非欧空间里，一个三角形的三角之和大于 180°.）通过这种观测不曾察觉三维空间与欧几里得特性有何背离之处. 然而，关于空间可能是“弯曲”的，以及只要能实施对足够大距离的观测就有可能显出这一曲率的看法，在理论宇宙学中占有重要位置.

你也许曾在别的地方——爱因斯坦的引力理论读到过关于空间的曲度. 这理论把局部的引力效应描写为一个质量极大的物体如太阳的周围空间的几何性质的改变. 我们将不在这里把这课题谈下去，不过在关于引力的一般陈述的末尾(第八章)，我们将非常简略地再次提到它.

§7 时　　间

在前几节中我们展开了有关空间位移的基本分析. 要描写运动，我们必须把这种位移同它们持续的时间间隔联系起来. 在作为定量的问题来考虑之前，让我们非常简略地补充一下在本章开头时所作的、关于时间的真实本质的论述. 当然，这是一个大问题，在历史上曾经、并至今仍然吸引着许多人——哲学家，科学家，人文学家等——的思考和推测. 我们只在不会超出物理科学的观点的范围内来检讨这问题的一两个方面.

时光流逝的感觉是深印于我们每一个人的，在某种原始的意义上，我们知道什么是时间. 但我们能说出它究竟是什么吗？著名的荷兰物理学家 H. A. 克拉默有一次说过：“我所喜爱的观念是，一般说来，在人类的思维世界中，特别说来，在物理科学中，最重要和最富有成果的是那些不可能给予确切意义的概念.”[①] 也

① “*Physical Science and Human Values*”(专题文集), Princeton University Press, Princeton, N. J., 1947.

许没有东西比时间更令人信服地适用这句话的了.尽管如此,如果我们试一试去分析这问题,我们也许会开始看到,这事也并不那样完全不可捉摸.即使时间的定义难以顺手拈来,人们可以认识到,我们关于时间流逝的概念是非常直接地与事物在**变化**的事实紧密相连的.特别是我们会注意到某些**重复出现的**事件或情况——如我们的脉搏,太阳的运行,季节等等.我们差不多是下意识地把这些东西当作某种早已存在的连续线上的标记——有点象路上的那些里程碑.但是,我们所具有的一切,就直接知识来说,只是一组标记;其余就是智力的构想了.因此,有一个连续地流逝的抽象时间概念也许很有价值,但我们的第一手经验只是观察到一种叫作"钟"的装置的行动.为了给某种过程的久暂或两事件间的时间间隔以定量的量度,我们直截了当地把起始点与终了点在同一个时钟上的读数关联起来.时钟利用了一种重复出现现象这一点并非本质的——只要注意古代的水钟①和刻烛,或它们的近代同类物如连续减弱的放射性源,就可以明白这一点——但我们的确要求它以某种可以识辨的途径,向我们提供一种标出相续时间间隔的方法,而事实上多数这种装置都是利用了某种重复现象的.

我们怎么知道我们选用的钟所定的相续时间间隔确是均等的呢?事实是我们并不知道;说到底,这是一种信念.没有一个钟是完善的,但我们学会了认出某些钟比其他钟要好些——好些是指这样的意义:它们用以划分我们的经验的段落是更接近于均等的.一位医生看着他的手表告诉我们,我们的脉搏不规则;然而手表本身在与一晶体振荡器相比时又显得不规则了;当该振荡器与以原子振荡为基础的钟相校时,它又表现出显著的漂移.不管时间的均匀流逝,作为一个最终的抽象是否有任何物理意义,值得注意的事

① 时漏(铜壶滴漏)——译者注.

实是，我们是按**假定**这种稳定流动的存在来从事时间测量的．我们对于任何一个钟的行为的评价是看它的一致性和重现性，因而在使用它时我们可以引用它所量度出的时刻或时间间隔并指明其可能误差的范围．然后，当我们从个别测量进到含时间的普遍方程时，我们就引进符号 t，并把 t 看作一个在数学意义上的连续变量．

§8 长度和时间的单位和标准

我们关于运动的讨论大都不用具体的位置和时间，而是用符号 $\mathbf{r}, t$ 等等来表示．但是永远不要忘记，在描述实际运动时，总是要牵涉到这些量的数值量度并使用公认的单位和标准的．距离和时间的公认标准的选择是我们对这种测量的最高程度的一致性和重复性不断追求的结果．这一过程的发展和现况简单地概括于下．

1．长度

长度的通行标准——米——是十八世纪后半叶在法国开展的，为了推行科学和文化秩序而连同米制的其余度量一起引进的．原先企图令米代表沿地球的一条子午线从地极（北极——译者注）到赤道的距离的一千万分之一（10^{-7}）．但事实证明在这一定义的基础上不可能制作任何充分精确的标准．于是，就把米确定为保存在巴黎附近色弗雷的一根特殊金属尺的长度，而最后又确定为一特征光谱线波长的倍数——最近（1960 以后）取为同位素氪 -86（^{86}Kr）的橘红色光的波长的 1,650,763.73 倍．

虽然用光波所代表的极小的长度单位意味着米可以极为精确地确定——$1/10^8$ 或更佳——但也存在着不便之处，即一米长的物体不能通过一步过程用普通光源发出的光波来直接量度．原因是测量依赖于观察光的干涉效应，而这种效应在所涉及的距离超过

一英尺时便会消失、激光的发展完全改变了这一情况，超过 100 米路程长度的干涉效应都已被观察到. 因此，很可能在将来的某个时候用从激光源获得的光学波长来确定米，也许是用氦-氖激光器中氖的特征谱线之一.

2. 时间

确定时间标准的过程含有一个使它与长度标准的建立很不相同的特点. 这就是，象爱伦·阿斯丁曾指出的"我们不能选一个特殊的时间标本并保存在手头作为参照."① 我们依赖于认准某种重复出现的现象并且**假设**它永远向我们提供同等长的时间间隔.

时间的标准——秒——原是基于地球自转不变的假定. 最初把秒定为平均太阳日的 1/86400——一平均太阳日就是一年间在地面上某一定地点从正午到正午或子夜到子夜时间的平均. 这是一个很尴尬的定义，因为按从正午到正午来量度的一天的长短不是常量；它是变的，因为地球的速率以及它到太阳的距离当它在轨道上运行一周的时间内是不断地变化着的. 逻辑上比较满意的秒的定义可以根据**恒星日**——这是任意指定的一恒星回到头顶上同一位置的时间. 如果地球自转真是均匀的，每一恒星日的长短自然一样.

事实上，要感谢几千年来异常精确的天文测量，使我们逐渐认识到，不论是太阳年的长短还是地球绕轴的转动都不是完全不变的，特别是后者，一直在经受着微细的、但是突然的变动. 人们发现，太阳年每世纪约增长 1/2 秒，因此 1956 年的秒重新被定为 1900 年回归年(太阳年)的 1/31,556,925.9747. (一回归年的定义是太阳相继两次通过春分点的时间间隔. 我们不准备在此说明人

① 爱伦. V. 阿斯丁，《*Standards of Measurement*,("量度的标准")Sci. Am., **218**(6), 50(1968). 但是有些人会辩论说，即使是用一根刚性的实物尺作为长度的标准，从哲学和逻辑上看也同样是有懈可击的.

们如何"抓住"1900 年的秒用于校准的目的.）应当承认这里所讨论到的变动是奇小的，能够把一年有多少秒用 12 位有效数字表示出来就说明了这一点.

最后，在 1967 年，国际上同意采纳用原子振动定出一个时间标准，秒的定义是相应于一个原子钟振动 9,192,631,770(周)次，这钟是用与同位素铯-133 的原子相关联的一个特征频率来控制的.

在与实际上如何把时间的单位和标准用可能达到的最高精确度予以确定的挑战很不相干的方面，存在着一些带有根本意义的问题. 由引力控制的天体运动所定义的时间是否在所有时代都与由原子内部的电力控制的原子振动所定义的时间保持一致呢？1938 年 P. A. M. 狄拉克①提出，万有引力常数可能缓慢地随着时间在变化——与之相关的一"时间常数"与宇宙年龄同量级，即约为 10^{10} 年. 如果这是真的，那么我们的天文标准和原子标准在时间长了以后是会出现差异的.

这种关于单位和标准的事情是我们大多数人不愿为之伤脑筋的. 我们以为我们知道得够清楚一米和一秒是什么意思. 而一把尺和一只表总是近在手头的. 但是也许上面的讨论有助于看到这些量度如何定义，再定义，并逐步精确化的详细故事是颇为动人的事情——特别也许是对于时间，天文上许多世纪以来的观测所贡献的数据其精细程度几乎是难以相信的②.

① 狄拉克，一位英国理论物理学家，是 1926—1930 年前后在量子理论的发展方面的领导人物之一. 由于这工作，他被授予诺贝尔奖金.

② 进一步可读，例如 N. Feather,《*An Introduction to the Physics of Mass, Length and Time*》, Edinburgh University Press, Edinburgh, 1959. 特别关于时间的问题(也许是最引人入胜的)，我们推荐下列书和文章：J. T. Fraser(编),《The Voice of Time》, George Braziller, New York. 1966; T. Gold and D. L. Schumacher (编),《*The Nature of Time*》, Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1967; G. M. Clemence,《Standards of Time and Freguency》, Science, **123**, 567(1956); Lee Coe,《*The Nature of Time*》, Am. J. Phys., **37**, 810 (1969); Richard Schlegel, 《*Time and the Physical World*》, Dover, New York, 1968.

§9 时-空 图

任何运动的描写，其原始数据总是位置和时间的一组相关联的量度．这类数据可能，例如，是天文学家的日志中的一张表，或是象图 2-1 那样的一张频闪观测照片．一般，要说明在某一时刻的位置，须用三个坐标，与互相独立的空间三维相应．但在许多情况下，运动可能限于一平面，只需两个坐标，或者限于一条线，因而只要一个位置坐标就够了．在最后这一情形下，特别是如果运动是沿着一直线的，把运动用时-空图表出往往是异常方便的，在图中通常总是把时间看作一个独立变量，沿横轴画，而把位置沿纵轴

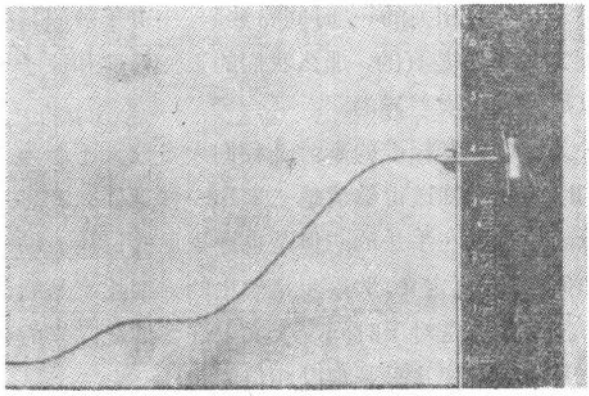


图 2-13 一维运动的时-空图的例子．

画．图 2-13 就是一张这样的图．它的优点在于以数值表所做不到的方式直接地揭示出一个运动的全貌．人们立刻认出离原点最大和最小的距离，运动暂停的时区，等等．①

① 这种相关联量的图示法往往提供一个比数值表或代数公式直接和明快得多的对情况的洞察．甚至一张随手画的草图都能使对情况的思考有很大的帮助．请习于画出表示物理关系的图并加以解释是一种很值得养成的能力．

§10 速　　度

运动的定量描述的核心概念是**速度**. 它是一个矢量. 在一维运动的情形中，速度的量度是我们能够从图 2-13 那样的时-空图提取的首批知识中的一个. 我们用以表示速度的方式——每小时多少英里，每秒多少米等等——经常提醒我们记得速度是一个**导出量**，是以空间和时间的分别量度为基础的. 你曾否想到过，虽然物理学家们发明了许多名称用作各种各样物理量的量度单位，他们却从来没有为速度的单位引进一个特殊名称呢？[不过航海的人们做了这事，用"浬"(或"节"——译者)为单位，等于每小时 1 海里.]在自然界，事物似乎另有其道，因为虽然我们至今还未认出任何东西可以直接承认为时间长短的基本自然单位，我们却真找到了速度的一个基本单位——光在真空中的速率(c):

$$c=(2.997925\pm0.000001)\times10^{8}\ \text{米/秒}$$

在高能粒子物理学中习惯于把速度表为 c 的分数. 与此相比，在有关高速飞行方面，用马赫数来表示一飞机的速率与声音在空气中的速率之比——分数或倍数. 但这并不改变我们对速度的基本描述方式：每单位时间多少单位距离.

一个速度的测量至少需要两个对物体位置的测量和相应的两个对时间的测量. 把这些测量表示为$(\mathbf{r}_1,t_1)$和$(\mathbf{r}_2,t_2)$. 根据这些，可以导出我们不太严谨地称之为那两点之间的平均速度的大小和方向:

$$\mathbf{v}_{\text{平均}}=\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{t_2-t_1}$$

但在大多数情况下，平均速度不是一个使人很关注的量. 有时我们可能发现 s 对 t 的图(设为一维运动)是一条直线，因而由任何

两对 s 和 t 的值推出的 v 值是一样的. 但存在着基本得多和普遍得多的问题: 在一个如图 2-13 所表示的非均匀的运动中, 对于确定和计算任意一瞬间的速度我们能做些什么呢? 下一节就是针对这问题的, 它对于运动的整个数学分析具有基本重要性.

§11 瞬时速度

理查·P·费曼讲过一个故事, 一位妇女由于驶车速度超过每小时 60 英里而被抓住. 她对警官说, "先生, 这不可能, 我才不过走了七分钟."① 这位妇女所提出的异议对我们(或警官)并无说服力; 我们明白, 争论之点不在于持续了一个长时间的均匀运动, 而在于可能是任意短的时间内所测出的运动性质. 为了把这事说得具体些, 我们设想沿着一条路的笔直街段上选定的一点 P 的两方安放着一系列等距离柱子, 比如说每隔 5 米一根(见图 2-14).

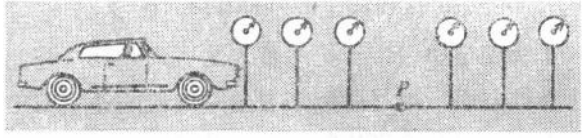


图 2-14 为了推断一辆汽车经过 P 点时的瞬时速度的装置.

在每根柱上有一装着长秒针的电钟. 这些钟是同步的并不停地走着. 在它的对面安上一架电影摄影机以拍摄柱子、钟面和路上情景. 现在来了一辆汽车; 摄影机开始拍摄, 照片记录洗出. 这很象赛马时在终点拍的照片. 每张片子为一框架, 其中, 比如说, 汽车

① 这故事, 经过费曼添加了一些有趣的和有教益的细节可以在《*The Feyman Lectures on Physics*》, vol. I 中找到. 这套讲义取材新鲜、富有创造性, 概括了整个物理学, 给每个人, 不论是初学者还是富有经验者, 都提供了丰富和激动人心的养料. 费曼, 我们这一时代的最杰出物理学家之一, 由于他在量子场论方面带根本性的贡献, 于 1966 年获得诺贝尔奖金.

的头部差不多正好同柱子成一线．现在把记录汇集起来．记下与中点P前后等距离的各对柱子上的数据．设每一对之间的距离为Δs(10 米的倍数)，时间读数之差为Δt．则比数$\Delta s/\Delta t$是以P为中心的距离Δs这一段路上的平均速度．现在以$\Delta s/\Delta t$为Δs的函数画一图，如图 2-15(a)所示．除非这汽车的运动非常怪，各个

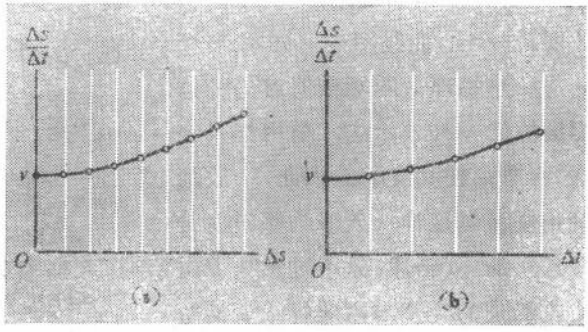


图 2-15　(a)$\Delta s/\Delta t$对Δs的曲线外推至$\Delta s=0$以计算瞬时速度ds/dt．(b)$\Delta s/\Delta t$对Δt的曲线外推至$\Delta t=0$以计算瞬时速度ds/dt．

数据点当可用一平滑曲线串起来，Δs越小，曲线越平滑．我们把曲线倒回去外推，则$\Delta s/\Delta t$在$\Delta s=0$处之值就是我们在中点P所测的瞬时速度．我们可以等效地把$\Delta s/\Delta t$之值对时间间隔Δt绘出如图 2-15(b)所示的曲线；$\Delta s/\Delta t$在$\Delta t=0$处之值还是一样，[①]尽管曲线本身看起来有些不同．这里，用物理学语言说明计算平均速度的极限是什么意思，那就是，在位置或时间的间隔趋于零时所算得的$\Delta s/\Delta t$．

上面所描述的过程与数学中求微商——这儿是位移[②]对时间的微商——的过程相应．用标准的微积分符号（这在上面的讨论中就差不多已经用上了），我们写出：

① 同$\Delta s/\Delta t$在$\Delta s=0$处之值一样——译者注．

② 应当是"位置"——译者注．

$$\text{瞬时速度 } v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \tag{2-5}$$

ds/dt 这个量是$\Delta s/\Delta t$ 的极限的同义词，在数学用语中叫做 s 对t 的一阶微商. 几何上它代表在 s 对 t 的曲线上一特定 t 值处（切线）的斜率.

[关于在物理数据曲线图中“斜率”一词的意义要说一下. 曲线图——如图 2-16 中的——是一个物理量的测量值对另一物理量的测量值的一种表示法，所用标尺完全是任意的，单由便利支配. 因此，一般地说，用量角规量出这样一条线的倾斜度是没有物理意义的. “斜率”只不过意味着由纵坐标代表的量的变化与横坐标代表的量的变化之比——例如，$(Q_2-Q_1)/(q_2-q_1)$. 在这比值中，分子和分母各为一纯数乘上一单位，而斜率则可表示为这两数之商，并附着它自己的特征单位——例如，米/秒.]

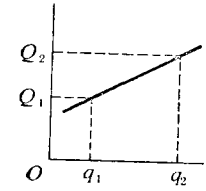


图 2-16 一物理量对另一物理量的曲线的“斜率”原本不是几何学的；它由变化量 ΔQ 和 Δq 的比值确定，而其中的每一个变化量可用任何合适的单位来量度.

如果把上述的概念用到空间中位移随时间的变化，我们就得到瞬时速度的普遍定义：

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{2-6}$$

在图 2-17(a)中我们指明 $\Delta\mathbf{r}$ 表示什么. 很清楚，如果我们把物体

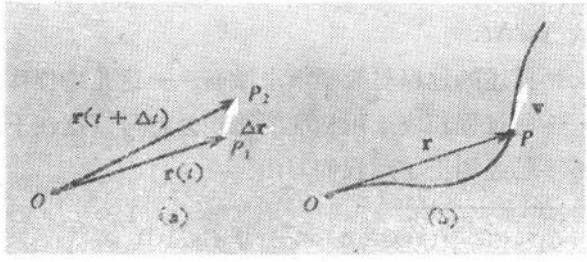


图 2-17 (a)定义位移的一微小变化的矢量图. (b)瞬时速度矢量，与路径相切.

走的路表示为图 2-17(b)中那样的一条连续曲线，则瞬时速度矢量与这曲线相切；这是隐含于定义中的.

由于这一不同于直线情形的新概念，我们要请大家注意**速度**和**速率**这两个词在技术上的差别（这一点并不总是得到人们遵守的）. 速率是速度矢量 v 的大小. 因此，按定义，速率是一个正的标量. 在我们分析直线运动时所用的符号 v 实际上表示了速度；它既可取正值也可取负值，当然，在一维情形下，这也就足以说明有关运动方向的一切了.

即使我们是在处理单一直线的运动，如果位移的参考原点不在该直线上，用矢量来描述位置和速度仍是必要的. 事实上从这个观点来考察一直线运动是很有益的[看图 2-18(a)]，因为它帮助我们在大一些的眼光下看一维情形. 我们会逐渐习惯于这样的概念：如果后者的参考原点 O 是任意的话，位移矢量 $\Delta\mathbf{r}$ 一般是与位置矢量 r 不同方向的. 这将使从描写直线路程过渡到描写一任意的曲线路程[图 2-18(b)]显得不那么突然. 它还强调这样一点，

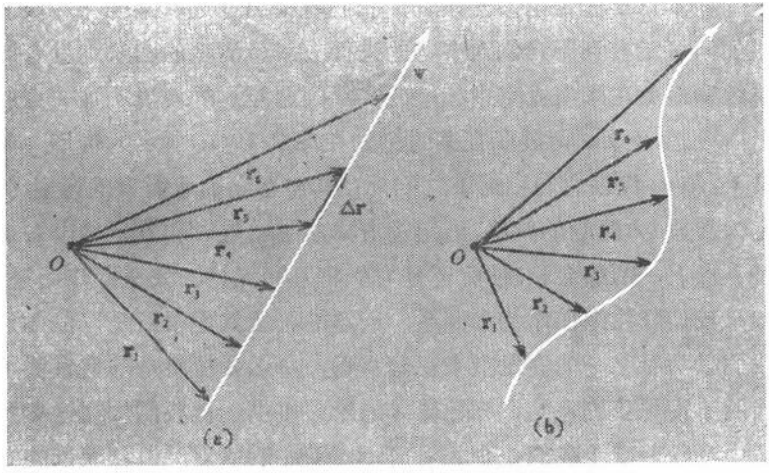


图 2-18 (a)在一直线运动中的矢量位置，参考原点不在这直线上. (b)对于一曲线路径的相应图.

即虽然在直线运动情形下把原点就选在直线本身上也许很方便，但这肯定不是必要的，也不总是可能的.

§12 相对速度和相对运动

由于速度矢量是位移矢量的时间微商，一物体相对于另一物体的速度恰是两速度的矢量差. 因为如果一物体位于 $\mathbf{r}_1$ 而另一物体位于 $\mathbf{r}_2$，则由物体 1 到物体 2 的矢量距离 $\mathbf{R}$ 由下式给出：

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$$

于是 $\mathbf{R}$ 的变化率就是物体 2 相对于物体 1 的速度 $\mathbf{V}$，而

$$\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}-\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

即

$$\mathbf{V}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1 \tag{2-7}$$

这相对速度 $\mathbf{V}$ 就是物体 2 在固着于物体 1 上的参照系中的速度.

在本章早先讨论参照系时，我们就指出过选取某些特殊参照系如何可能有利于我们对事物的进行有一最清楚的图象. 没有比航行和避免在海中或空中相撞的实际问题能更好地说明这一点的了. 设想，例如，两艘船在某时刻处在图 2-19(a)所示的情形. 矢量 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 代表它们相对于它们都在其中运动的水而言的速度(假定为常数). 两船的航线，沿运动方向从起始点 A 和 B 延伸出去交于一点 P. 两船会相碰吗！还是它们将互相保持一安全距离而过？如果我们盯住海洋作为参照系，问题的答案就不很清楚. 但如果我们以两船之一为立足点来观察事物，那么分析将是非常直截了当的. 设想我们是站在标记着 A 的船甲板上. 把我们放在这参照系中意味着赋予我们一个相对于水为 $\mathbf{v}_1$ 的速度. 但从**我们的**立足点来看，好象水和所有其他的东西都被赋予了一个与 $\mathbf{v}_1$ 相等、

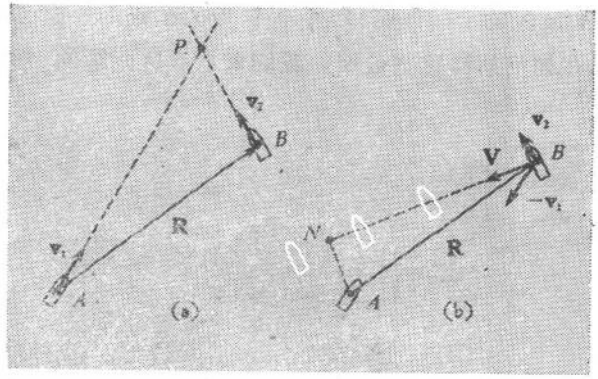


图 2-19 (a)沿着相交航线以匀速行驶的两艘船的路线. (b)B 船相对于 A 船的路线,表明尽管它们的路线相交叉,但不会相撞.

相反的速度. 因此, 对于在海洋参照系中观测到的每一运动我们都要按(2-7)式的含义给加上矢量 $-\mathbf{v}_1$. 按定义,这就自动地使 A 成为似乎是静止的,而船 B 相对于 A 的速度则如图 2-19 (b)所示,由 $\mathbf{v}_2$ 和 $-\mathbf{v}_1$ 相加而得.两船之间的矢量距离是不受这一观点改变的影响的. 因此, 现在我们可以看清整个图象了. B 沿所示直线进行, 图中用几个相继的位置指出. 它将与 A 错开距离 AN, AN 是由 A 到 $\mathbf{V}$ 的延长线的垂直距离.出现这一相距最近的时间等于距离 BN 被 $\mathbf{V}$ 的数值除. 因此, B 看起来是在 A 的船首稍偏一点的地方经过. 如果你曾有机会见到过这类比较靠近的相遇, 特别如果是在看不到标记的开阔海上,你就知道这是一种奇妙的经验,直观上颇为困惑, 因为所看到的另一艘船的运动似乎同它所指的方向无关.

§ 13 行星运动:托勒密与哥白尼之争

在研究运动,特别是有关它的相对性时,最引人入胜的一些问题起因于人类企图说明天体, 包括我们的地球, 在空间中的运动.

天文观测，最先的一门严密科学，提供极为精确的数据已数千年．但问题总在如何解释这些数据．我们来看看这问题的一些主要特色．

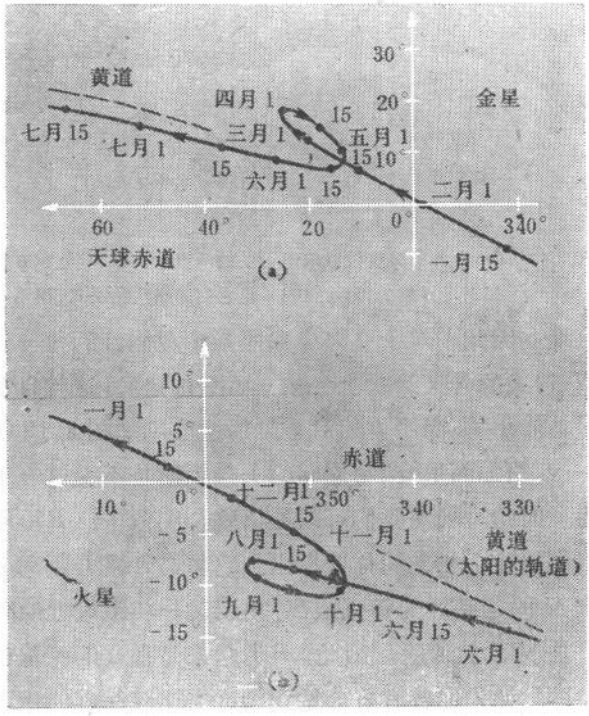


图 2-20　(a)在六个月时期内金星在星际间的路线，在一阶段上显出逆行．(b)对火星的一组类似的观测．

第一件要认识的事是，肉眼天文学几乎毫无例外地是研究方向而不是距离．这些不靠工具的观测对于恒星间的距离丝毫无所揭示．伟大的希腊天文学家阿里斯塔恰斯(～公元前三世纪)和伊巴谷(～公元前 150 年)确曾对太阳和月亮的距离作过合理的估计(对月亮很成功)①，但关于行星的距离，唯一的直接线索是通过它

① 见本章末习题，还有第八章．

们的表观亮度随时间的改变这样一些定量的证据，这使人想到，不管行星与地球之间的距离为何，它们是在经历着系统变化的．因此，实际仍然如此，天文学物体的位置首先只用它们的方向确定（这是我们用望远镜去寻找它们时唯一所需的），并可以把它们描绘成一个半径任意的大球——天球——面上的一些点，球心在地球，并用地球自身的转轴来确定一极轴和一赤道（参看图 2-2）．按这种表示法，行星运动的原始数据就是图 2-20 所示的那种式样．

早期的天文学家们的天才早已为人们所赞赏，他们能够看出这类形状奇怪的路线是各种轨道运动在天球上的投影．特别是他们坚信这些轨道一定是圆周运动的组合．这里不是详细论述这些问题的地方；杰出的讨论别处有的是．① 我们则将集中注意力于两个主要模型的理想化说明：一个是以地球为中心的（地心）太阳系，另一是以太阳为中心的（日心）太阳系．

根据日常经验，直观上最为合理的宇宙图象无疑是把地球放在万物的中心．除非是事后先见，我们之中没有一个人会用其他的说法来解释他的第一次印象．在这意义下，古代的描述，例如旧约圣经创世纪中的说法，是完全无可指责的．是亚历山大时代的天文学家托勒密（～公元 150 年）将这图象构成一个定量的行星运动模型，并把它写在他的巨著“Almagest”中．图 2-21(a)示明其要点．把地球每日自转的影响暂放一旁，太阳的运动大致是绕着地球为心走圆形路线，周期为一年②．但行星的运动都是复合性

---

① 例如，E. M. Rogers, 《*Physics for the Inquiring Mind*》. Princeton University Press. Princeton, N. J., 1960, 第十二-十八章，或 E. C. Kemble, 《*Physical Science, Its Structure and Development*》. MIT Press, Cambridge, Mass., 1966, 第 1-5 章；或一些极佳的初等天文学书籍的任何一本．

② 这一路线——太阳沿天球通过群星向东行——即大家所知的黄道．

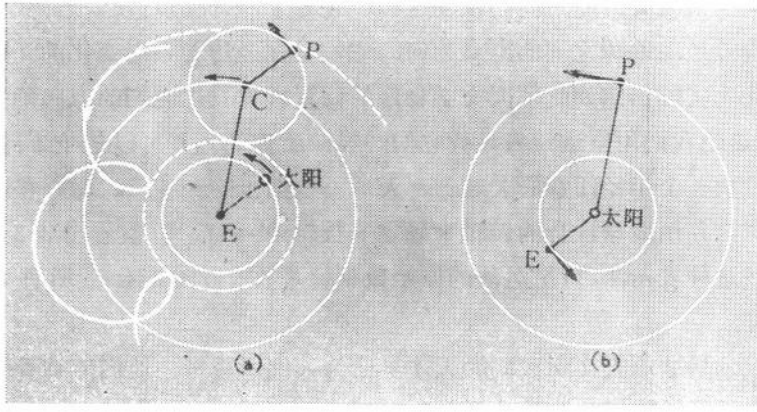


图 2-21 (a)在托勒密体系中解释的一行星的表观运动. 行星 P 在本轮上运动，本轮的中心则绕着地球 E 在一圆轨道上运行. (b)哥白尼学派对观察到的运动的解释. 认为(a)中的本轮是地球自身绕着太阳运动的反映.

的. 这种运动可以相当逼真地设想为一个点 C 在沿着一个圆形路线匀速地运行，而行星 P 则在另一个以 C 为中心的圆形路线上绕行. 这另一圆周称为**本轮**. 这两个运动迭加在一起，如果是在同一平面中，就产生了一个复杂的路线，可以有如图所示向回走的圈子. 如果把两个圆的地位对调一下，结果将完全相同(试验证这一点).

如果现在我们设想从地球上看这运动，并把它投影到天球上，或任何其他不变距离上去，我们就会得到同图 2-20 差不多的那种角方位的变动. 我们甚至可以更接近于真实地使本轮的平面略为倾斜于第一个圆的平面之外. 要符合某一特定行星的运动，需要选择两圆半径的适当比值以及各自走完一周所需时间. 一个值得注意的事实是，有两个案例(水星和金星)其第一圆的周期正好是 1 恒星年(即太阳沿黄道运行一整圈的周期)，另外三个案例(火星、木星和土星)则是本轮的周期为 1 恒星年. 确实，可以认为这是导

至我们现今看作是更真实的图象的关键性线索.

假定我们现在把太阳放在中心，如图 2-21(b)，并让地球沿着一个圆周运动，圆的半径与图 2-21(a) 中本轮的半径相同. 于是，如果行星 P 沿另一简单的圆运行，圆的半径与图 2-21(a) 中的第一圆的半径相等，则 E 和 P 的**相对**位置和速度可使之同以前完全一样. 我们在两图中都画出了 E 和 P 的位置以说明这一严格的对应. 在托勒密模型中，一个行星运动的两分量之一里面出现恒星年的原因现在很清楚了，整个描写的许多随意之处消失了. 就是这一新的、日心描述法，我们把它与哥白尼的名字联系在一起. 他在他的主要著作，"*De Revolutionibus Orbium Celestium*"(关于天球的运转)中对此作了极详细的介绍. 这书是在他去世的那一年，1543 年发表的. 实际，在大约 1800 年以前阿利斯塔克就已经第一次提出太阳占着中心位置的建议. 他根据别的观测知道太阳比地球大得多(然而他严重地低估了它到底有多大和多远). 但没有记录说明日心理论在哥白尼之前就在定量的细节方面有了发展. 顺带说一下，注意他对运动的相对性的清楚理解是很有意思的. 这里是他自己对这原理的陈述的译文："因为所有被看到的位置变化都是由于观察者或被注视着的物体的运动，或者是由于两者的位置都在改变而且各自的改变互不相同. 因为当物体都相对于同样一些物体作同等的运动时，在被注视的物体和观察者之间是觉察不出运动的。"①

恒星年不断出现在托勒密的图式中，而日心说却未能在更早得多的时期流行，似乎是令人惊异的，特别是当这一可能性在托勒密时代以前约 400 年就已被阿里斯塔恰斯认识到的情况下. 但是必须记住，我们所介绍的是一个大大过分简化了的太阳系模型，而

① 摘自 Arthur Berry, «*A Short History of Astronemy*», Dover Publications, New York, 1961.

古代的天文学家为这些理想化模型与精确的、严格的观测事实之间存在的矛盾所困恼是正当的. 托勒密和哥白尼两人都被迫引进许多辅助的圆运动以求得理论同观测之间哪怕是近似的一致. 哥白尼的图式，按哥白尼本人所发展的形式，比起托勒密的图式，实际上并不是显著地不那么随意和不那么复杂. 虽然引进动力学方面的考虑——力的规律和运动定律——改变了前文所述的关于各观察现象的解释，但不到理论能够摆脱圆为所有天体运动的基础这一束缚，问题是不会最后得到根本解决的. 在第八章中以及更充分地在第十三章中，我们将回到这些问题.

习　题

2-1　一条船从一点(可取为原点)出发，向东北方直线航行 30 英里，然后向 SSW (南南西)方向(一条向东的参照线逆时针旋转 $247\frac{1}{2}°$ 角所定的方向)航行 40 英里. 求出这条船最终位置的 x 坐标和 y 坐标(x 向东，y 向北)以及它离出发点的距离.

2-2　两个矢量的标积(点积) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta_{AB}$，其中 θ_{AB} 是两矢量之间的夹角.

(a) 用这两个矢量的笛卡儿分量表示证明

$$\cos\theta_{AB}=\frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{AB}$$

(b) 利用直角坐标和球极坐标之间的关系(2-4)式证明到球面上两点 (R,θ_1,φ_1) 和 (R,θ_2,φ_2) 的半径之间的夹角 θ_{12} 由下式给出

$$\cos\theta_{12}=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)$$

(注意沿通过两点的大圆量度的两点间的距离等于 $R\theta_{12}$，其中 θ_{12} 用弧度表示. 这可以用来计算，例如，地球表面上两点间的英里数.)

2-3　(a) 计算美国纽约(北纬 41°，西经 74°)和澳大利亚悉尼(南纬 34°，东经151°)的笛卡儿坐标. 把坐标原点取在地球中心，z 轴通过北极，x 轴通过经度为零处的赤道. 地球的平均半径为 6370 公里.

(b) 求出纽约和悉尼之间沿穿过地球的一条假想的直线隧道的距离.

(c) 将(b)的结果同利用大圆航线的这两点间的最短实际可能航线作比较. 你可以利用习题 2-2 (b)的结果来计算这路程, 或者用一根线在地球仪上直接测量它.

2-4 (a) 一粒子从半径为 R 的球的赤道上一点出发, 向东走一 α 角, 然后沿一个大圆① 向北极走一 β 角. 如果取这个点的初位置为 $x=R$, $y=0$, $z=0$, 证明它的终点坐标为 $R\cos\alpha\cos\beta$, $R\sin\alpha\cos\beta$, 和 $R\sin\beta$. 试验证 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

(b) 如果这同一粒子先向北走一 α 角, 然后把路线改变 90°, 沿一个开始时向东的大圆走一 β 角, 求它终点位置的坐标.

(c) 证明(a)中和(b)中两位移终点之间的直线距离 Δs 由下式给出:

$$\Delta s^2=2R^2(\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta)^2$$

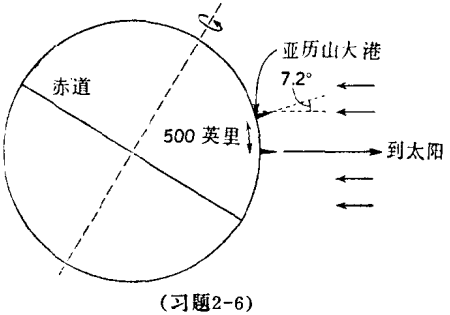
(d)利用上面的结果核对正文(见第二章§ 6——译者注)中所说的下列两种情况的终点有约 40 英里的差别: (1)在地球上沿赤道向东位移 1000 英里, 接着向北位移 1000 英里; (2)先向北位移 1000 英里, 接着在另一个开始向东的大圆上位移 1000 英里. (令 $R\alpha=R\beta=1000$ 英里. 可用近似式 $\cos\theta\approx1-\theta^2/2$.)

2-5 如果你发现自己被运送到一个未知的行星上去, 你能提出什么方法来?

(a) 验证这行星是球状的?

(b) 求出它的半径之值?

2-6 地球的半径是在 2000 多年前由埃拉托色尼通过卓越的分析求出的. 他住在尼罗河口的亚历山大港, 在仲夏日的中午观察到太阳光线与竖直方向成7.2°角(见图). 他还知道, 住在亚历山大港以南 500 英里地方的居民在同一天和同一时间看到太阳直接在头顶上. 根据这资料, 埃拉托色尼推出地球的半径. 他的答案是什么?



(习题2-6)

2-7 曾经有人建议, 用大约等于一核子的直径的距离来表示长度的基本单位, 而用光信号(亦即能得到的最快的一种信号)通过一核子直径的时间

① 通过球心的平面与球相截的圆——译者注.

来表示时间的单位．试用这些单位把宇宙的半径和年龄表示出来，并衡量其结果．

2-8　一个粒子限制在 $x=0$ 和 $x=a$ 两个反射壁之间沿着 x 轴运动．在这两个边界之间它以恒定速度自由运动．作出它的运动的时-空图．

(a) 如果壁是完全反射的，因而在到达任一壁上时，粒子的速度改变符号但不改变大小．

(b) 如果每次反射都使速度的大小减少一因数 f(即 $v_2=-fv_1$)．

2-9　一粒子在 $t=0$ 时从 $x=0$ 处以 $+v$ 的速度(沿 x)出发，与在 $t=0$ 时从 $x=x_0$ 处以速度 $-v/2$ 出发的一个全同粒子相碰撞．作出碰撞前和碰撞后运动的时-空图：

(a) 弹性碰撞、粒子交换速度的情况．

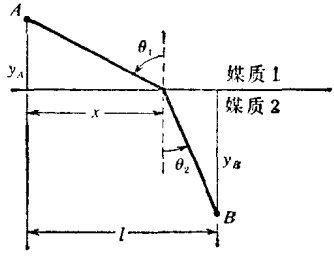
(b) 碰撞后两粒子粘在一起的情况．

2-10　一粒子沿曲线 $y=Ax^2$ 运动，它的 x 位置由 $x=Bt$ 给出．

(a) 用 $\mathbf{r}(t)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ 的形式表示出粒子的位置矢量．

(b) 计算在一任意时刻 t 粒子沿这一路径的速率 $v(=ds/dt)$．

2-11　光的折射可用纯运动学的考虑来理解．我们需要假设光在两点之间取最短的(时间上)路程(费马最小时间原理)．参看下图，设光在媒质 1 中的速率为 v_1，在媒质 2 中的速率为 v_2．计算光从 A 点走到 B 点所需的时间，表示为变数 x 的函数．对 x 求函数的最小值．已知



(习题 2-11)

$$v_1=c/n_1 \qquad\qquad v_2=c/n_2$$

其中 n_1 和 n_2 是大家知道的折射率．证明斯涅耳折射定律：

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

2-12　在 12:00 时，船 A 在某港口之东 10 公里和之北 20 公里处，并以 40 公里/小时的速度沿北偏东 30° 的方向航行．在同一时刻，船 B 在港口之

东 50 公里和之北 40 公里处，以 20 公里/小时沿北偏西 30° 的方向航行.

(a) 把这情况用图画出来，并求 B 相对于 A 的速度.

(b) 如果这两条船各自继续以上述速度运动，问它们相互间的最近距离是多少？出现在什么时候？

2-13 从 A 到 B 的距离是 l. 一架飞机以相对于空气的恒定速率 V 直线飞行，从 A 飞到 B 再返回. 如果速率为 v 的风吹方向如下：

(a) 沿着从 A 到 B 的直线.

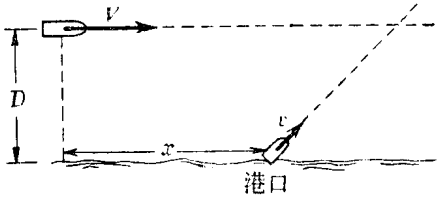
(b) 垂直于这直线.

(c) 与这直线成 θ 角.

试计算这一往返旅程所需的总时间. 证明，由于风的存在，往返的时间总是增加的.

2-14 一条船平行于平直的海岸线航行，离岸的距离为 D，速率为 V，一艘速率为 v ($<V$) 的海上警卫快艇从一港口出发去拦截这条船.

(a) 证明快艇必须在这条船驶过海岸线的某一点之前出发，这一点在快艇后边距离为 $D(V^2-v^2)^{1/2}/v$ 之处.



(习题 2-14)

(提示：画一矢量图，表示出快艇相对于这条船的速度.)

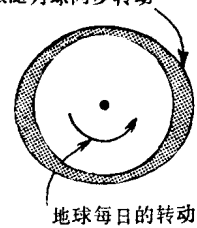
(b) 如果快艇在尽可能最迟的时刻出发，问它在什么地方和什么时间截住这条船.

2-15 相对于"固定的恒星"，在一恒星日中地球绕它的轴转一次——恒星日就是这样下定义的.

(a) 一年长约 366 恒星日. 问平均**太阳**日(从中午到中午)比恒星日长多少？

(b) 月球相对于恒星走完一周用 27.3 **恒星**日. 也就是说，在这个时间里从地球到月球的线相对于恒星转过了 360°. 由于月球的这一运动，相连两天的高潮之间的时间长于一个太阳日(24 小时). (高潮是指固定对着月球的

方向上的海洋膨胀——见图.）证明每天的滞后接近于50.5 分$\left(60\text{分}=\frac{1}{24}\text{太阳日}\right)$.



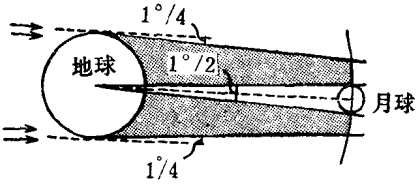
（习题 2-15）

2-16 (a) 金星和火星的轨道半径分别是地球轨道半径的 0.72 倍和1.52 倍. 它们的周期分别约为地球年的 0.62 倍和 1.88 倍. 利用这些数据作图以求出从地球上看到的金星和火星的表观角位置如何随着时间改变，假设所有三个行星的轨道都在同一平面上. 把你的结果与图 2-20 作比较.

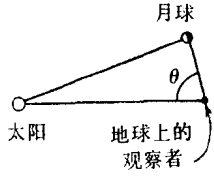
(b) 相对于黄道(地球自己的轨道平面)，金星和火星的轨道分别约倾斜 3.5° 和 2°. 试考虑金星和火星的表观路线如何受这附加因素的影响.

2-17(a) 你能提出什么方法来求出地球到月球的距离(不使用雷达和空间飞行)?

(b) 在 2000 多年以前，天文学家伊巴谷从观察到的月球被地球全蚀的持续时间求出月球的距离，用地球半径的倍数表示(见图). 来自太阳的光线有约$\pm\frac{1}{4}^\circ$ 的角散度，而月球本身所张的角大约正好是$\frac{1}{2}^\circ$ (同太阳的张角相差在2%以内.) 月球绕地球一圈约需 29 天，全蚀的持续时间约为 $1\frac{3}{4}$ 小时. 利用这些数据求得月球的距离.



（习题 2-17）



（习题 2-18）

2-18 天文学家阿里斯塔恰斯有这样一个想法：当月亮正好半满时，测量太阳和月球之间的角距离 θ(见图)，以比较从地球到太阳和到月球的距离. 利用我们现有的关于这些距离是多少的知识，评论这个方法的可能实现性. 阿里斯塔恰斯找出 $\theta=87^\circ$. 这意味着什么结果?计算这个角真正是多少? 如果这个角差$\pm0.1^\circ$，对距离引进的误差是多少?

现在，我们的作者的目的只是研究和说明加速运动的某些性质（不管产生这加速度的原因是什么）.

伽利略，《关于两种新科学的对话》(1638)

第三章　加速运动

§1　加　速　度

从纯描述性的观点来看，运动的中心特征是速度——位置随时间的瞬时变化率．但我们必须深入一些去讨论这样一个量，它在联系运动本身(运动学)和由力控制的运动(动力学)方面，证明是起关键性作用的．这就是**加速度**，它是速度随时间的变化率．我们仍将以直线运动的情形作为第一个例子来说明有关的基本概念．如果瞬时速度是时间的线性函数，如图 3-1 (a)，我们可以断言加速度在所有时刻都是一样的，等于从图中直线上任何两点算出的斜率①．另一情形，如果瞬时速度之值所确定的是某种曲

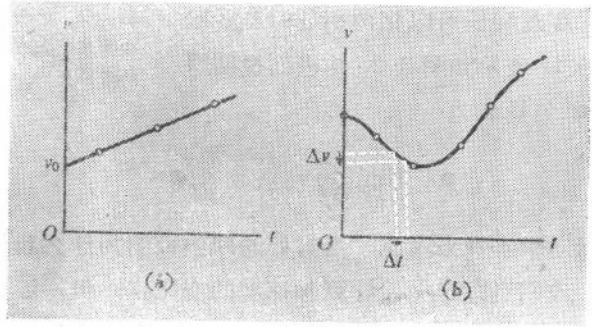


图 3-1　(a)匀加速运动的 v-t 图．(b)变加速运动．在所示的时间间隔 Δt 中加速度是负的．

① 加速度单位的表示可以规定为我们所选定的速度单位被我们认为方便的不论什么时间单位除．例如，一辆汽车的加速度可以最有效地和清晰地表示为每秒多少 m. p. h.(m. p. h. 即每小时多少英里)．但在更具分析性地去处理运动问题时，几乎必须始终使用同样的时间单位，例如，速度表示为米/秒，而加速度为米/秒^2．否则，当我们看到一个象 Δt 这样的符号时，我们必须停下来问问自己，这是用不同单位中的哪一种来量度的，那就会发生混乱和错误了．

线，如图 3-1(b)，我们就必须用一个极限过程去得到在某一特定 t 值的瞬时加速度：

$$\text{瞬时加速度}\quad a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt} \tag{3-1}$$

因而，加速度是速度对时间的一阶微商．但是如果我们希望把加速度的定义与位置对时间的原始记录联系起来，我们可以把它写成 s 对 t 的二阶微商：

$$a=\frac{d^2s}{dt^2} \tag{3-2}$$

一般，我们必须准备既要计算速度的大小的变化，也要考虑到它在方向上的变化．这就要求我们明确地把加速度作为矢量来考虑．正如我们以前考虑位置的矢量性变化那样，现在我们可以把两相邻时刻的瞬时速度矢量表示如图 3-2，并进而说明瞬时加速度矢量 **a** 为

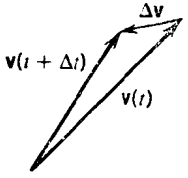


图 3-2　一速度的微小变化；大小和方向两者都在变．

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt}$$

从运动学本身来考虑，没有好的理由说明为什么我们应当到此为止．我们可以定义并计算加速度的变化率，但一般这并不代表任何具有基本物理意义的知识，因此我们对力学的讨论几乎全部建基于位移、速度和加速度这三个量．

你也许感到，特别是如果你事先对微积分有一些熟悉的话，我们对瞬时速度和加速度的论述是太冗长了．但不应错误地对待这一点；这些都是非常细微的概念．关于一个物体可以既**在**某一点又在**走过**那点的概念曾困惑过古代某些最有头脑的人．确实，这是希腊哲学家真诺的著名佯谬之一的主题．他争辩说，如果一个

物体在运动，那就不能说它在任何地方①.

如果你要检验你对这些概念掌握的程度，不妨试试看向某人解释一下，一个在某一点速度为零(即瞬时静止)的物体如何依然能够由于具有加速度而离开那一点. 这的确不是不值一谈的.

§2 直线运动的分析

给了直线运动中位置对时间的详细记录，用刚才说明的步骤我们就能求出相关联的速度和加速度的变化. 图 3-3 由上至下的

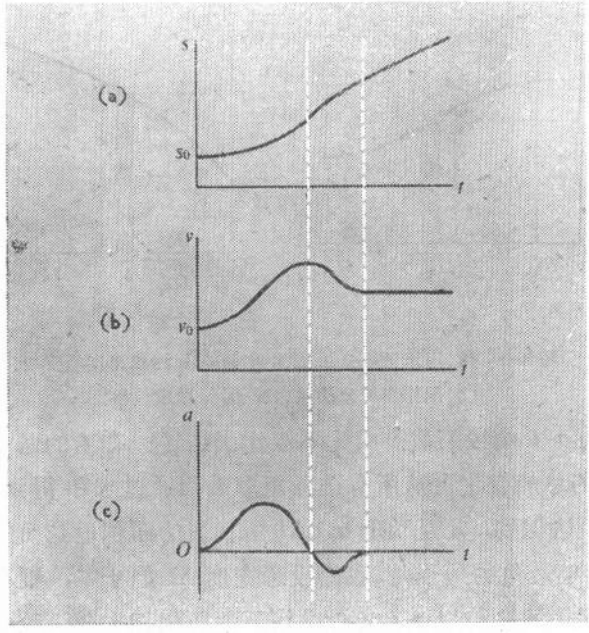


图 3-3 一组相关联的图形，表示各量与时间的依赖关系：(a)位置，(b)速度，(c)加速度.

① 在完全不同的基点上，量子力学中的测不准原理表明，我们没有能力去把一个运动物体的位置和速度都测得任意精确.

一列图形说明这方面的一个例子．但这种过程反过来如何呢？给定加速度为时间的函数，能从图形中推出速度和位移吗？速度和加速度的基本定义向我们启示了解决这问题的合宜步骤．由(3-1)式我们看到，在一个短时间 Δt 内速度的改变 Δv 至少是近似地由下式给出：

$$\Delta v = a\Delta t$$

当然，“近似地”是不够的，但我们知道，Δt 选得越小，Δv 越是接近--准确的、关于 v 的变化的说明．我们仍借助于图形表示．图 3-4(a)是加速度-时间图，显然可以看出 $a\Delta t$ 是一矩形狭条的面积，

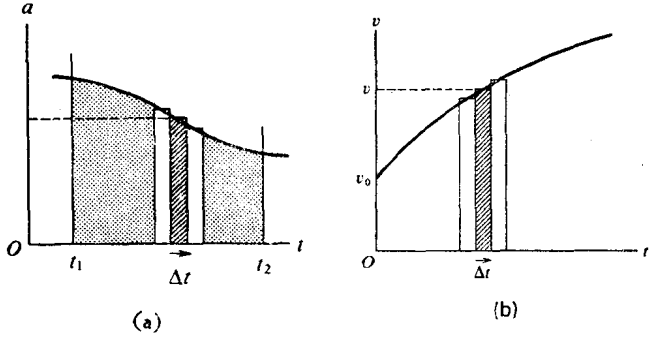


图 3-4 (a)用作图积分法从加速度-时间图求速度的改变．
(b)用作图积分法从速度-时间图求位移．

其顶端与 a-t 曲线相截．由此不难作出结论：在 t 的两个给定值之间，v 的总的变化可从所有这种矩形面积通过求和得到．(我们当然必须认识到，凡是负的 a，$a\Delta t$ 所代表的面积也是负的，因而 v 的改变也是负的．)于是，我们设想宽度 Δt 趋于零，则在此极限下，全部狭条之和与 a-t 光滑曲线下的面积相吻合．数学上把这面积写成一定积分：

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \qquad (3\text{-}3)$$

其中我们写出 $a(t)$以表明加速度是时间的一个特定的函数．这

积分常常是从速度为 v_0 的某一时刻(选作 $t=0$)计算到某一不定时刻 t. 因而有

$$v-v_0=\int_0^t a(t)dt \tag{3-4}$$

注意,从所知的加速度为时间的函数出发,上述积分只给我们以时间 t 内速度值的**变化**. 至于 v 在 $t=0$(或在其他某特定时刻)之值必须另外提供;v_0 是一个典型的**积分常数**的例子,它要求知道**初始条件**——或者知道在任意一 t 时刻 v 的特定值.

类似地,给了如图 3-4(b)那样的 v-t 曲线(它可能代表原始数据或者它本身就可能是从上述加速度的积分导来的),我们可以去求所通过的距离. 它等于速度-时间曲线,t 轴,以及两个给定的 t 值处的纵坐标所围的面积:

$$s_2-s_1=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \tag{3-5}$$

同样,通常多半是从 $t=0$ 到一任意时刻求积分,也同样必须提供一积分常数——$t=0$ 时的位置 s_0:

$$s-s_0=\int_0^t v(t)dt \tag{3-6}$$

当然,通常每每选 $s_0=0$,但不要忘记,速度-时间曲线下所包括的面积只给我们以位置的**变化**.

这些运动学方程在 $a=0$ 或 $a=$常数 时最简单的应用无疑是你们所熟悉的. 在第一种情形下,速度-时间图简单地是一个象图 3-5(a)所示的矩形. 如果加速度是常数(但不为零),那就是图 3-5(b)了. 匀加速度的大小由下式给出:

$$a=\text{斜率}=\frac{v-v_0}{t}$$

这与(3-1)式加速度的定义一致. 如果我们设 a 为给定的,则可按(3-4)式求积分,得到同样结果:

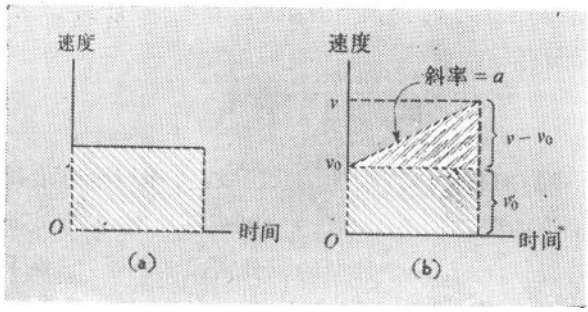


图 3-5 (a)速度-时间图，零加速度的特殊情形.
(b)速度-时间图，加速度为常数(正)的情形.

$$v-v_0=a\int_0^t dt=at \tag{3-7}$$

图 3-5(b)中代表所通过的距离的面积可以设想为由所示的两个阴影区构成的. 因此

$$s-s_0=v_0t+\frac{1}{2}(v-v_0)t$$

把最后两式合并，得

$$s-s_0=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

我们也可以认出它是按 $v(t)=v_0+at$ 计算(3-6)式中的积分的结果:

$$s-s_0=\int_0^t(v_0+at)dt=v_0t+\frac{1}{2}at^2 \tag{3-8}$$

有时，用(3-7)和(3-8)式把所有对时间的显明关系消去，较为方便. 所得结果是

$$v^2=v_0^2+2a(s-s_0) \tag{3-9}$$

为了便于参考，我们把这些方程重复于下:

运动学方程(只在 a 为常数时有效)

$$\begin{cases} v=v_0+at & (3\text{-}10a)\\ v^2=v_0^2+2a(s-s_0) & (3\text{-}10b)\\ s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 & (3\text{-}10c)\end{cases}$$

虽然这些有关加速运动的数学表达式整洁而且非常有用，应当记住，真正的匀加速度是永远不能无限地维持下去的．例如，每个人都学过如何去解在重力作用下自由下落的问题，其中用了加速度常数 g，实际上这并不合事实，因为当速度增加时空气的阻力会使加速度减小．对于低速度，误差也许不致大到使人关注的地步，但它是存在着的．以后我们要处理这样的情形：加速度以某种数学上很明确的方式随位置或时间而变化着．因而重点将从(3-10)式移到(3-4)和(3-6)式所表示的更为普遍的关系．在解运动学问题时，另一很重要的因素是数字计算机．不管加速度是否由一个数学上方便的函数来描述，获得有关运动问题——例如火箭或卫星的路线—— 的数值答案的真正技术是对相应于图 3-4 中那些狭条的小而有限的面积求和．这时，解运动问题的程序就不是通过数学的积分，而是由诸如下列的方程来表示：

$$\begin{aligned} v(t+\Delta t) &= v(t)+a(t)\Delta t \\ v(t) &= v_0+\sum a(t)\Delta t \\ s(t+\Delta t) &= s(t)+v(t)\Delta t \\ s(t) &= s_0+\sum v(t)\Delta t \end{aligned} \tag{3-11}$$

有许多运动问题，尽管其动力学过程是在三维空间中进行的，仍可按一维问题来处理．之所以如此，一个主要理由是往往可以把位置、速度和加速度诸矢量在一直角坐标系中分解为分量，然后对各分量分开进行处理．如同以前我们曾说过的，在这些情形下，即使我们知道我们是在处理有方向的量，也毋需使用矢量符号．只要沿给定的运动线选一参照轴并选定沿这轴线的一个方向为正，其反方向为负就行了．选什么方向为正是随意的，不过一旦为一个特殊问题的目的作出选择，就要贯彻始终．计算结果所得的有向量——例如，一粒子沿直线运动的未知的最终位置——总是理解为沿这轴的正向量度的．如果答案出现负值，则自动表明

其最终位置是在原点的负方．换言之，毋需预先设想(实际上这也是不明智的，因为会引起混乱)求得的量是正还是负，以及在什么方向；数学会告诉你的．

〔**例**〕 一粒子在 $t=0$ 时从 $x_0=10$ 米处出发，初速 $v_0=15$ 米/秒，匀加速度 $a=-5$ 米/秒^2，沿 x 方向．求 $t=8$ 秒时它的速度和位置．

我们有

$$v(t)=v_0+at$$

$$v(8)=15+(-5)8=-25 \text{ 米/秒}$$

又

$$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

$$x(8)=10+(15)(8)+\frac{1}{2}(-5)(8)^2=-30 \text{ 米}$$

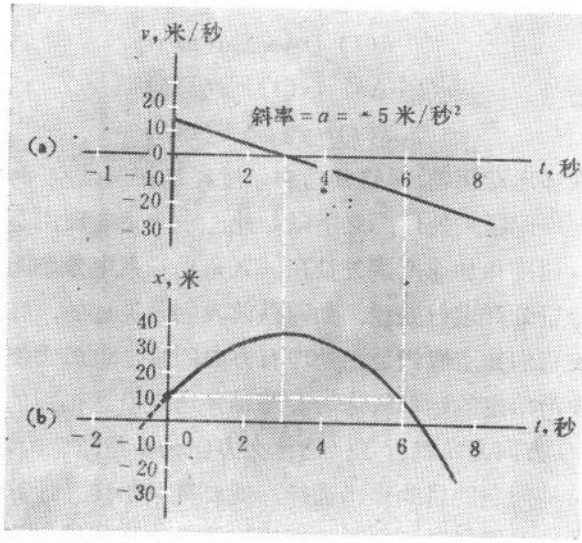


图 3-6 (a)速度-时间图，初始速度和(负的)匀加速度具特定值．(b)图(a)中所表示的运动的位置-时间图．

因此，在 $t=8$ 秒时，这粒子已反向通过原点到了另一方的一点，并沿着 x 的负向走去．一直到 $t=8$ 秒，运动的全过程都在图 3-6 的两图形中表示了出来．注意，只要对这些图一瞥就可以了解到若干情况．人们立刻看到，速度如何在 $t=3$ 秒时减到零，而在 $t=6$ 秒时达到初始值但方向相反．还看到 x 的极大值如何与 v 达到零并反向的瞬间相应，以及这粒子在 $t=6$ 秒时回到了它原来的位置 x_0，这时，v 达到其初始值 v_0 的负值，因而(从开始)直到那一瞬间，速度-时间曲线下的总面积为零．即使是这样一个简单的和直截了当的例子，它也显示出许多值得注意的特色．而看到各种细节如何配合在一起将大为加强我们对基本运动学的掌握．

§3 关于增根的评注

有时，在开动数学工具解运动学方程时，人们会给安上一些违反物理情况的增根．如何识别这些“不正确的”答案以及何时可以扔掉它们呢？

这些外加的答案有许多来源于这一事实：解问题时我们总要用一些初始条件来说明在 $t=0$ 我们开始跟踪粒子的运动时的情况．说明 $t=0$ 时粒子的位置和速度并不告诉我们任何有关这粒子过去的动力学历史的情况．实际上这粒子如何获得这些初值是无关紧要的．例如，设想一个物体静止地从地面上高度为 h 的地方自由下落，我们就有 $v_0=0, x_0=h$．这物体可能是由我们把它拿到初始位置然后从静止状态放手让它下落，也可能是被向上抛起达到最高的高度 h．在这两种情形中，粒子在高度为 h、速度为零的瞬间($t=0$)之后的运动是完全一样的．

增根的最常见来源是那联系着位移和时间的匀加速运动方程——即(3-10c)式．数学上这是 t 的一个二次方程，而且必须是这

样求解：位置为已知的情形下求出时间.

由于单有初始条件并不能使我们知道粒子早先的运动情况(除非另给有关的数据)，所以与一负的 t 值相应的这个方程的根可能是无效的. 为了说明这一点，试考虑上节中引作例题的问题. 假定我们要求出位于 $x=0$ 时的 t 值，我们有

$$x(t)=10+15t-\frac{5}{2}t^2$$

令 $x=0$，得下列二次方程：

$$t^2-6t-4=0$$

它的两个根是 $t=3\pm\sqrt{13}=6.6$ 秒或 -0.6 秒. 图 3-6(b)很清楚地显示出这两个根的来源，并说明负根是如何由于把图线往回外推到 $t=0$ 以前的时间区域内而来的. 但那很可能是不合理的. 当被问到时，我们可能会说："啊，对，我是在 $t=0$ 时把粒子拿到距原点为 $+10$ 米的地方，然后以 15 米/秒的初速把它沿 x 的正向射出去的."如果情形真是这样，那么 $t=-0.6$ 秒时 $x=0$ 这个解就是完全虚假的；人们不得不承认它就是与事实不符. 不过，我们不应不先问一下(象刚才所做的那样)有无明白的物理上的理由，就弃掉增根.

增根的事情在物理学史上曾有过一个有趣的结果. 在量子力学中，当发展一个符合相对论的方程时，出现了这样的情形：一个电子的总能量有两个值，正的和负的. 负值一开始就被抛弃了，因为没有物理意义. 不是吗？我们能给小于零的动能以什么意义呢？然而，稍后，P. A. M. 狄拉克较细心地研究了这些负能态的性质，并引出一高度成功的电子理论，这个理论预见了正电子以及其他"反物质"粒子的存在.

§4 二维弹道问题

最著名和广泛地研究过的运动问题之一是近地面处的自由下落．它对如下的事实提供了一个说明：在由水平和竖直方向构成的直角坐标系中，运动的两个正交的分量是完全独立的(假定空气阻力可忽略——见第七章§13)．一个物体的路径可以看作两个分开的、同时在进行的运动，各别予以分析，就好象另外一个不存在一样．伽利略在他的"关于两个主要宇宙体系的对话(1632)"中首先认识到这一事实①．

我们将如图 3-7 所示考虑一物体从平地上方高为 h 之处以初

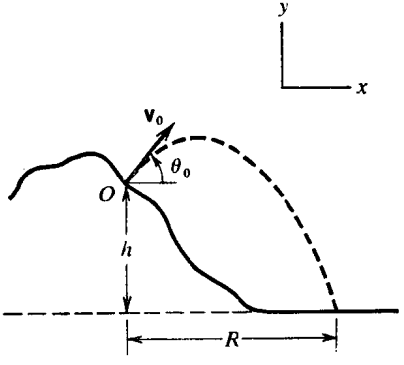


图 3-7　在没有空气阻力时重力作用下运动的理想的抛物线弹道．

① 伽利莱·伽利略，1564 年生于比萨，同年莎士比亚生，麦喀朗哲洛(意大利大画家——译者注)死．他的成就常被引述为近代科学的起源．伽利略有关天文学的著作，"关于两个主要宇宙体系的对话"，紧密结合了哥白尼模型，导致与教会权威抵触．当他按法律说是一个被审讯的犯人时，伽利略转而研究力学，并于 1638 年秘密地在荷兰发表了他研究的结果"关于力学和局部运动的两种新科学的论述和数学演示"，通常引为"两种新科学"(*Two New Sciences*，英译本，Dover Publications，New York)．这些书，大部分以虚构的对话形式写出，具有惊人的现代风味，使人对伽利略的洞察力和高度智慧印象深刻．它们很值得一读．

速率 v_0 和角度 θ_0 抛掷出去的运动．如你所知，假设速度的水平分量 v_x 保持不变，而其竖直分量 v_y 受到一向下的匀加速度，大小为 g(＝9.8 米/秒^2)，可以得到真实运动的近似．运动的这一近似描述很解决问题．只要空气阻力的影响不重要，这一般就要求物体紧密(密集)而速度相当小．后面我们还要讨论阻力影响重要的情形，那时，现在的理想化运动图象就当真显得不合适了．

让我们来看看如何回答以下问题：

1．物体飞行多久？

2．射程 R(所通过水平距离)多大？

3．着地时速度如何？

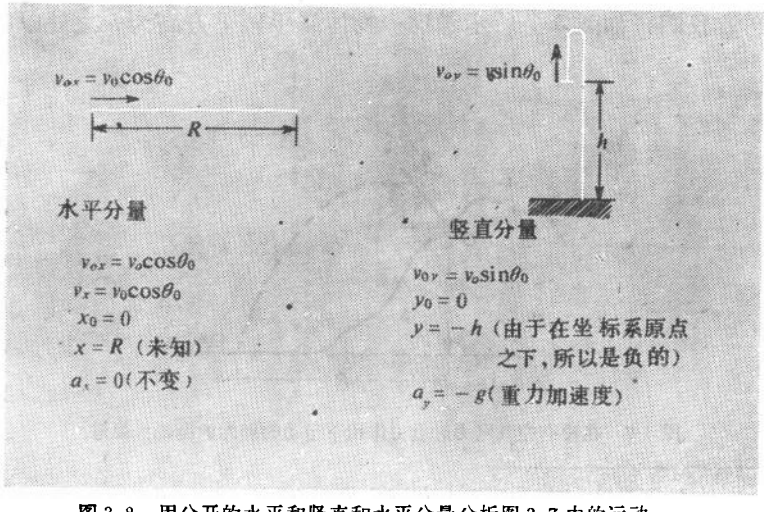


图 3-8　用分开的水平和竖直和水平分量分析图 3-7 中的运动．

我们选粒子的出发点为坐标原点，并取坐标的正向为向上(y)和向右(x)．于是，初始和终了坐标，初速度的分量，和加速度的分量就如图 3-8 所示．

〔关于正负号的规定要在此说一下．重力加速度用矢量 **g** 表示．在本书中我们用 g 表示这矢量的大小，即表示**正的**、等于

9.8 米/秒^2 或 32 英尺/秒^2 的量. 这符合通常习惯，把符号 A 用来表示一矢量 **A** 的正的标量大小. 在选定一坐标系之后，如果向上的竖直方向取作正，则矢量 **g** 的 y 分量成为 $-g$(即 $a_y=-9.8$ 米/秒^2). 在某些情形下，选向下的方向为正可能较为便利. 这时，**g** 的 y 分量必须等于 $+g$. 在一特定的计算中，对于什么是坐标的正向，我们当然必须前后一致，但我们有完全的自由去选择我们所喜欢的；最终答案的实际内容不可能与此有关.〕

现在回到图 3-7 和图 3-8 所描绘的弹道问题：

1. 物体飞行多久？

我们知道初速度，初始时和终了时的 y 值，以及竖直加速度. 因此，如果应用方程(3-10c)于 y 方向的运动，则除飞行时间 t 以外，其他量都是已知的：

$$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_y t^2$$

即

$$-h=(v_0\sin\theta_0)t+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

解这方程并取正根作为有物理意义的解.

2. 射程 R 多大？

应用方程(3-10c)于水平分量问题：

$$x=v_{0x}t+\frac{1}{2}a_x t^2$$

即

$$R=(v_0\cos\theta_0)t+0=v_0\cos\theta_0\cdot t$$

把计算 1 中得到的 t 的特定值代入此式.

3. 着地时速度如何？

v 的分量可以从方程(3-10b)用计算 1 中得到的 t 值求出：

$$v_x=v_{0x}+a_x t \qquad v_y=v_{0y}+a_y t$$

$$v_x=v_0\cos\theta_0 \qquad v_y=v_0\sin\theta_0+(-g)t$$

于是从这些分量得

v 的大小：　　$v=(v_x^2+v_y^2)^{1/2}$

v 的方向：　　$\tan\theta=\dfrac{v_y}{v_x}$

(在这一情形下，$\tan\theta$ 是负的，因为 θ 表示着指向水平之下的方向.)或者，我们可以直接从方程(3-10b)计算 v^2 的大小如下：

$$v_x^2=v_{0x}^2=v_0^2\cos^2\theta_0$$

$$v_y^2=v_{0y}^2+2a_yy=v_0^2\sin^2\theta_0+2(-g)(-h)$$

因此，

$$v^2=v_x^2+v_y^2=v_0^2+2gh$$

v 的方向于是可以由下列关系算出：

$$\sin\theta=\frac{v_y}{v}$$

§5　单个原子的自由落下

在真空中运动的原子投下清晰的影子，证明它们是按直线走的.另一方面，原子和分子，作为普通物质的样品，在地面上的重力作用下，一定会真的象通常一样自由落下. 这一效应并不很显著，因为被蒸发出来的原子具有很高的平均速率——大约同来复枪子弹一样——不过是可以测出的.一束原子(初始时水平地运动)，当它一方面以这速率走了一水平距离 L 而同时又在重力下竖直落下时，能落下多远呢？图 3-9(a) 说明这问题. 它同上节的弹道问题正相象，只是现在水平距离已知而要求的是竖直距离 y. 如果选所示的 O 点为原点，而原子从那里以速率 v 水平地出发，则

水平分量：

$$x=v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2$$

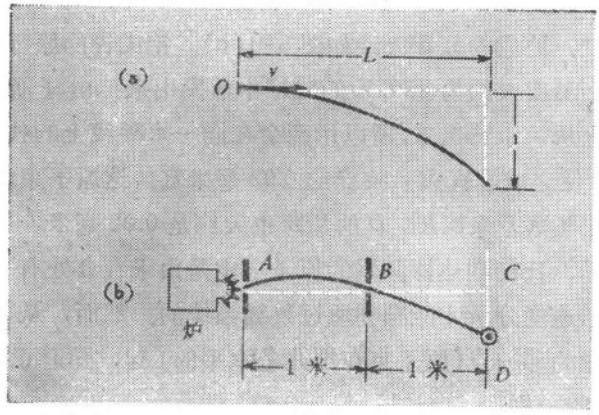


图 3-9 (a)在真空中具有初始水平速度的原子的轨道. 竖直方向的位移是大大夸张了的. (b)必须通过狭缝 A 和 B 到达探测器 D 的原子束中原子的抛物线轨道.

所以,

$$L=vt$$

竖直分量:

$$y=v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$$

$$y=0+\frac{1}{2}(-g)t^2$$

消去 t,得

$$y=\frac{-g}{2}\left(\frac{L}{v}\right)^2$$

假定我们把这结果应用于一束速率约为 500 米/秒的原子. 当走了水平距离 1 米时,飞行时间将是 1/500 秒(2 毫秒)而应有

$$y=-\frac{9.8}{2}\left(\frac{1}{500}\right)^2\approx-2\times10^{-5}\text{ 米}$$

可见与直线路径的偏离是极小的,只有一毫米的百分之几.

尽管这效应很小，它曾由伊斯特曼等人①在一个实验中精确地研究过．他们的装置大致如图 3-9(b)．铯或钾的原子从放在真空里面温度大约为 450°K 的"炉"中蒸发出来．由于原子在各个方向上从炉中冒出来，所以用两个在同一水平线上的狭缝 A 和 B（见图），使之成准直束．狭缝约 0.02 毫米宽．这原子束由一水平的热丝探测器 D 来探测，D 的横跨也大约是 0.02 毫米②．如图 3-9(b)所示，任何到达探测器的原子一定是由于在 A 处有一小的朝上的初始速度分量才能顺利通过狭缝系统的．然而，从 A 和 B 之间半当中的那一点（原子束在那儿是水平的）起，弹道正同图 3-9(a)所示的一样．

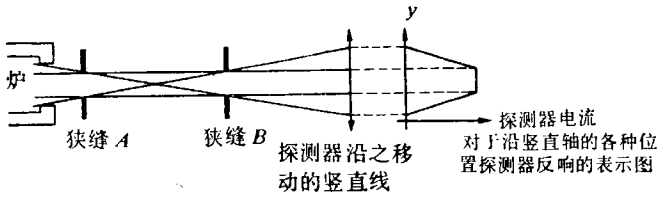
探测器竖直地横跨原子束而动，由撞在丝上的原子所产生的离子电流被记录下来．如果没有任何因重力而产生的偏转，横跨原子束的强度分布应当是如图 3-10(a) 中所示的梯形，因为中心区域被"半影"区镶上了边．这些半影区是双缝系统的产物．我们把一些结果表示于图 3-10(b)中．

这些图形的最显著的特点是它们揭示了一原子束中原子的速率范围很广．有些原子动得如此之快，根本很少受到偏转；另外一些却动得如此之慢，它们的偏转比最可几偏转（与强度分布的极大值相应）要大许多倍．全曲线必定反映出炉中的原子在一特定温度下速率的特征分布．

---

① Estermann, O. C. simpson, and O. Stern, *Phys. Rev.*, **71**, 238. (1947). 在大约同时，有关于热中子自由落下的类似实验的报导见 L. J. Rain water and W. W. Havens, *Phys. Rev.*, **70**, 136(1946).

② 一个中性的Cs 或 K 原子，碰着热丝就会失去一个电子而电离．邻近的一个相对于热丝为负电势的电极把这些正离子收集起来，所产生的电流可以用一个灵敏的静电计或电流计测出．如果用一细直丝，它就会象一个宽度与它的直径相同的探测器那样工作．有些原子（如卤素）则趋向于捕获电子而成为负离子；电极电势的正负号可相应地予以调整．



(a)

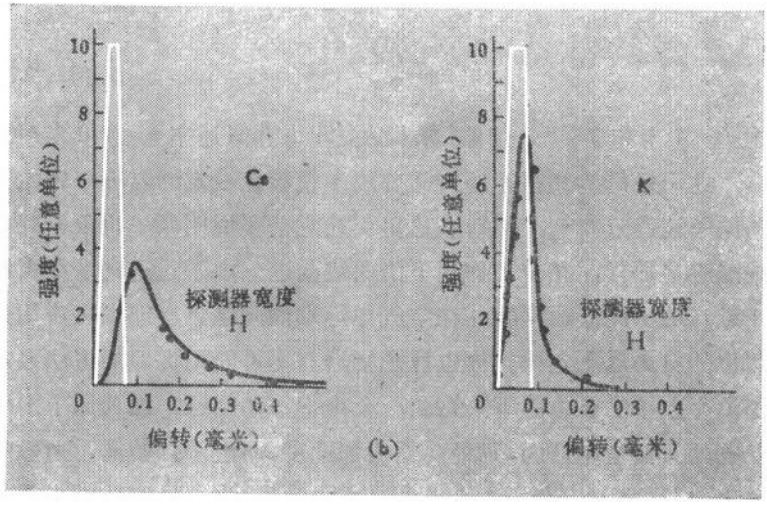


图 3-10 (a)通过两狭缝在直线上运动的原子所形成的几何影象放大图. 强度与探测器在任何给定位置所能"看到"的源的面积成正比. (b)铯和钾原子束的实际偏转数据.

我们不准备详论强度分布的形状，而把注意力放在峰值的位移[①]方面. 比较一下铯和钾的图线就明显地看到，钾原子(原子质量=39)在可以相比的温度下的运动平均要比铯原子(原子质量=133)的运动快得多. 这是不同气体的分子在同样温度下具有相同的**平均**动能这一事实的一种表现——我们只引这结果而不在此作进一步的讨论. 至于有关热运动速度的真实大小，让我们来看铯的

① 原文作"偏转"(deflection)——译者注.

曲线的峰值. 相对于一不受重力影响的原子束的中心，这峰值移动了约0.11 毫米. 在图 3-9(b)所示的装置中，如果 $AB=BC=L$，分析一下弹道就会发现(见习题 3-10)，速率为 v 的原子将被往下移动一距离 y，近似地由下式给出:

$$y\approx\frac{gL^2}{v^2}$$

因此

$$v\approx L\left(\frac{g}{y}\right)^{1/2}$$

把 $L=1$ 米和 $y=1.1\times10^{-4}$ 米代入，即得近似速率 $v=300$ 米/秒.

这一极好的和精密的实验曾用于检验在一定的温度下理论上的原子速度分布①. 我们在这里引述它是要说明原子也象棒球或地球卫星那样，在重力作用下沿曲线前进. 由于这运动是在真空中进行的，比起通常物体在空气中运动的问题更有理由去应用理想化的自由落下定律. 你也许想知道有无可能用类似的方法显示出单个电子的自由落下. 这是一个难得多的问题，因为原子由于在电的方面是中性的，只经受重力加速度，而电子却暴露于杂散的电力中，这些电力完全淹没了所有重力效应，除非采取特别小心的措施. 尽管如此，仍有过一些与这问题有关的实验，不过其结果的解释是一个相当复杂的问题.

§6 自由落下运动的其他特点

在地面附近的自由运动物体的理想化描述中，速度的水平分量总是保持不变而竖直加速度也总是同一值 g (向下). 指出以下

① N. B. Johnson and J. C. Zorn, *Am. J. Phys.*, **37**, 554(1969), 曾报导过用速度受过选择的原子做的类似实验.

事实也许是有意义的：在这假设下，与同一恒定水平速度 v_{0x} 相关联的每一弹道都是单一的抛物线的一部分——这曲线成为通用的(见图 3-11)，在它上面可以如图 标出任何一特殊弹道的起点和终点．这里面并没有什么深奥的东西，但它便于我们看到，任何一个具体的弹道都是一个大的图式的一部分．例如，它非常清楚地说明图 3-9 中所示的两束原子的路线之间的关系．

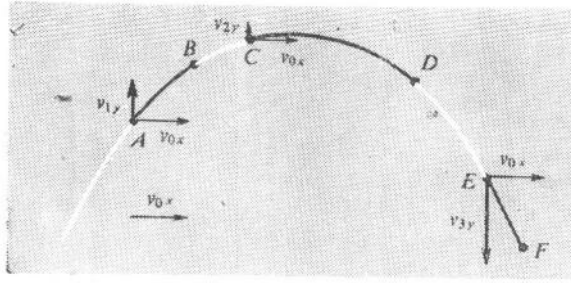


图 3-11 “通用抛物线”，包括在一定的朝下加速度和一定的水平速度分量下所有可能的抛物线弹道．曲线上 C 和 D 两点间用黑线标出的部分与图 3-9(b)的原子束弹道相应．

一个密切相关的特点是总速度矢量在运动过程中变化的方式．图 3-12 对此作了说明．设初速度用 $\mathbf{v}_1$ 表示．于是，在时间 Δt 之后，速度 $\mathbf{v}_2$ 就是 $\mathbf{v}_1$ 和一竖直(向下)的矢量 $\mathbf{a}\Delta t$ 相加的结果．类似地，在运动过程的相继阶段中，代表瞬时速度的每一矢量的终点都位于从 $\mathbf{v}_1$ 的终点所画的竖直线上．这结果体现着这一事实，即每一个这种矢量的水平分量都具有相同值．

这种自由落下问题的另一特点可用猎人与猴的古老示范来说明．猎人直接瞄准着攀在一根树枝上的猴子(见图 3-13)．这实际是一个错误，因为它没有考虑到子弹是沿着如图的抛物线前进这样一个事实．但猴子本身却犯了一个与此相抵的错误．当看到枪直接瞄准着它时，一见枪的闪光它立刻跳离树枝．因此子弹和猴子同时开始落下(略去任何由于传送闪光的时间延迟以及更无

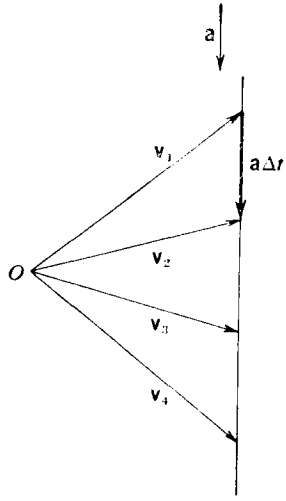


图 3-12　竖直向下匀加速运动的一系列相继速度矢量；同无空气阻力时在重力作用下自由落下的情形一样.（这一类型的图称为速端曲线.）

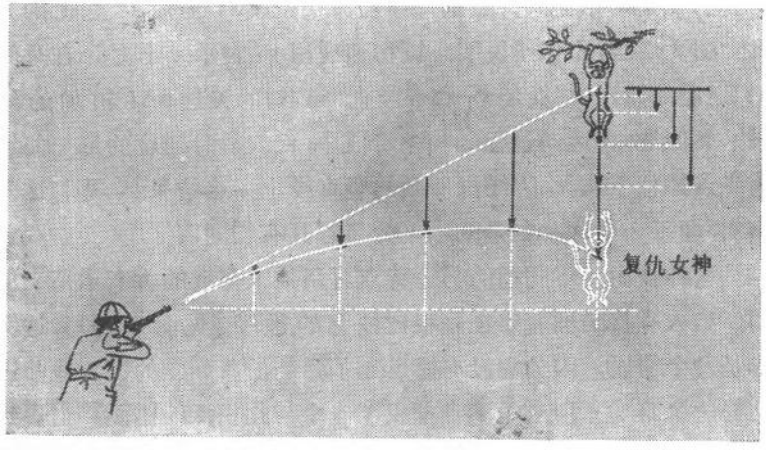


图 3-13　经典的射猴示范. 子弹与猴子在相等时间内经历了相等的重力位移，因而注定会相遇，如果猴子一见枪的火光就放手的话.

理由去考虑的猴子的反应时间). 于是,不论子弹需要多少时间走完从枪到猴子落下的竖直线的水平距离,子弹和猴子单单由于重力加速度而引起的位移都同样是$\frac{1}{2}gt^2$. 因此,子弹的弹道与猴子落下的直线必然相交于猴子同时到达的那一点——对猴子来说是悲惨的后果. 注意这结果与子弹的速度和 g 之值两者都不相关;只要子弹在无重力时是直奔猴子原来所在位置的. 表面上看这很奇怪,但按加速运动的基本分析却是易于理解的.

§7 匀速圆周运动

最使人感兴趣的可能是把速度和加速度的定义直接应用于匀速率圆周运动问题. 在这一情形中,如果取圆心为原点,则矢量 $\mathbf{r}$ 总是具有相同的长度,而只以匀速改变其方向. 瞬时速度永远与 $\mathbf{r}$ 成直角,它的大小 v 则是不变的. 由此我们就能计算加速度. 因为在一短时间 Δt 内,所走距离为 $v\Delta t$,沿圆弧由 P_1 到 P_2[图 3-14(a)]. 因此,两相应矢量 $\mathbf{r}$ 的方向之间的夹角 $\Delta\theta$ 由下式给出:

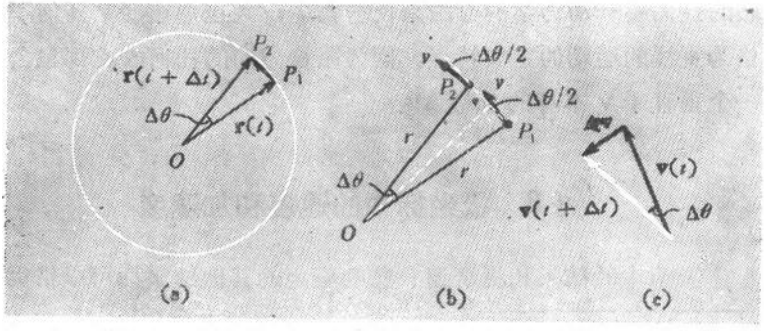


图 3-14 (a)在一匀速圆周运动中的小位移(P_1P_2). (b)在这小线元的起点和终点的速度矢量. (c)用于计算速度的变化,$\Delta\mathbf{v}$ 的矢量图.

$$\Delta\theta=\frac{v\Delta t}{r}$$

假定画出这角的平分线[图 3-14(b)]并看与这平分线平行和垂直的速度的变化. 开始时速度有一离开 O 的分量 $v\sin(\Delta\theta/2)$ 和一横向分量 $v\cos(\Delta\theta/2)$. 继而它有一**向着** O 的分量 $v\sin(\Delta\theta/2)$, 以及仍与前同向的横向分量 $v\cos(\Delta\theta/2)$. 因此, 速度变化的大小是 $2v\sin(\Delta\theta/2)$, **向着** O. 图 3-14(c)说明如何从矢量图得出相同结果, 图中的 $\Delta\mathbf{v}$ 是这样确定的矢量, 它与 $\mathbf{v}(t)$ 相加等于 $\mathbf{v}(t+\Delta t)$.

当 $\Delta\theta$ 趋于零时, $\sin(\Delta\theta/2)$ 与 $\Delta\theta/2$(用弧度来量度)几乎无区别①. 因此有

$$|\Delta\mathbf{v}|=2v\sin(\Delta\theta/2)\to v\Delta\theta$$

但 $\Delta\theta=v\Delta t/r$, 因此

$$|\Delta\mathbf{v}|=v^2\Delta t/r$$

而加速度的大小为

$$\text{(匀速圆周运动)}\qquad |\mathbf{a}|=\frac{v^2}{r}\tag{3-12}$$

它的方向是沿径向朝里而不论所走的圆周路径是顺时针方向还是逆时针方向. 这加速度称为**向心加速度**, 是与任何圆周运动相关联的. 需要一动力学的办法来使一物体得到这加速度是任何不严格为直线的运动的主要特点, 因为路径方向的任何改变都包含有一个垂直于 $\mathbf{v}$ 本身的分量 $\Delta\mathbf{v}$.

§8 极坐标中的速度和加速度

上节中的结果和更普遍一些的应用的其他结果都可以借助于

① 数学上这近似相当于 $\theta\to0$ 时 $(\sin\theta)/\theta\to1$. 我们将常常运用这一近似. 关于它的讨论, 可看, 例如 G. B. Thomas Jr., 《*Calculus and Analytic Geometry*》(微积分与解析几何), 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960, P. 172. (读者可参考任何一本关于微积分的书——译者注.)

平面上的极坐标很好地予以阐明. 这一类型的分析特别适用于原点代表某种力心的情形——例如，太阳作用于一个在轨道上运行的行星. 出发点是把位置矢量 $\mathbf{r}$ 写成标量距离 r 和单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 的乘积:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \tag{3-13}$$

现在来看 $\mathbf{r}$ 随时间的变化. 这可能是由于它的长度在改变，或者由于它的方向在改变，或是两者兼而有之. 我们暂限于 $\mathbf{r}$ 的长度

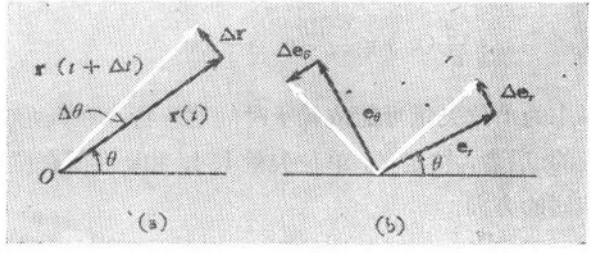


图 3-15 (a)在一匀速圆周运动中，一短时间 Δt 内位移的矢量变化 $\Delta\mathbf{r}$. (b)在 Δt 内单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$ 的改变，说明 $\Delta\mathbf{e}_r$ 何以平行于 $\mathbf{e}_\theta$ 而 $\Delta\mathbf{e}_\theta$ 则平行(但相反)于 $\mathbf{e}_r$.

保持不变的圆周运动. 于是，如图 3-15(a)所示，在一短时间 Δt 内，$\mathbf{r}$ 的变化同图 3-14(a)差不多一样. 这一变化($\Delta\mathbf{r}$)的**方向**是在单位矢量 $\mathbf{e}_\theta$ 的方向，$\mathbf{e}_\theta$ 垂直于 $\mathbf{e}_r$ 如图 3-15 (b). 它的大小清楚地由图 3-15(a)看出是等于 $r\Delta\theta$ 的. 因此有

$$\Delta\mathbf{r} = r\Delta\theta\mathbf{e}_\theta$$

除以 Δt，并让 Δt 趋于零，得

(圆周运动) $$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \tag{3-14a}$$

如果用符号 ω(以弧度/秒来量度)来表示角速度 $d\theta/dt$，我们有

(圆周运动) $$\mathbf{v} = \omega r\mathbf{e}_\theta = v\mathbf{e}_\theta \tag{3-14b}$$

上面结果的推导包含着这样一个重要事实，即单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 是随着时间而变的. 虽然按定义它的长度不变，它的方向却是与 $\mathbf{r}$

的方向一致地在变．实际上我们可以根据 (3-14a) 式的特殊情形 ($r=1$)，求得 $\mathbf{e}_r$ 的变化率的显明表达式：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_r)=\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta=\omega\mathbf{e}_\theta \tag{3-15a}$$

根据完全类似的方式，如图 3-15(b)所示，θ 的变化包含着另一单位矢量 $\mathbf{e}_\theta$ 的变化．如果 θ 的变化如图所示是正的，那么可以看到 $\mathbf{e}_\theta$ 的变化是在 $-\mathbf{e}_r$ 的方向，而由下式给出：

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_\theta)=-\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r=-\omega\mathbf{e}_r \tag{3-15b}$$

极坐标系中的单位矢量可能依赖于时间这一特点在直角坐标中是没有对应的；后者，按定义，单位矢量 **i**，**j**，和 **k** 对所有位置矢量 **r** 都具有相同的方向．

一旦有了(3-14a)和(3-14b)两式，我们就可以计算加速度，只要对时间再求一次微商．如果限于**匀速**圆周运动的情形，r 和 ω 两者都不变，因而有

$$\text{(匀速圆周运动)}\quad \mathbf{a}=\omega r\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_\theta)=-\omega^2 r\mathbf{e}_r=-\frac{v^2}{r}\mathbf{e}_r \tag{3-16}$$

这样，(3-12)式所表示的结果就自动地连同正确的方向一起出来了．如果我们把这加速度称作**径向**加速度，大小为 a_r，则

$$a_r=-\omega^2 r$$

如果仍限于在一圆周上运动，但去掉匀速运动这条件，则加速度 **a** 就还有一个横向分量．从(3-14b)式出发，有

$$\text{(任意圆周运动)}\quad \mathbf{a}=\frac{dv}{dt}\mathbf{e}_\theta-v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_r \tag{3-17}$$

a 的径向分量同匀速圆周运动的一样(因 $d\theta/dt=v/r=\omega$)，但它现在同一个横向分量 a_θ 相关联．因此有

$$\text{（任意圆周运动）}\begin{cases} a_r = -\dfrac{v^2}{r} = -\omega v = -\omega^2 r \\ a_\theta = \dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt} = r\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases} \tag{3-18}$$

（其中 $\omega = d\theta/dt$）

习　题

3-1　$t=0$ 时，在一高建筑物的顶部有一静止的物体掉下来。在时刻 t_0，第二个物体从同一点落下.

（a）忽略空气阻力，证明两物体的竖直间隔为 l 的时刻 t 由下式给出：

$$t = \frac{l}{gt_0} + \frac{t_0}{2}$$

对于 $l < \frac{1}{2}gt_0^2$ 的情形，你怎样解释这一结果呢？

（b）上述公式暗示，存在一个 t_0 的最佳值使间距 l 在可能的最短时间 t 内达到某一指定值. 计算 t_0 的这一最佳值，并解释这结果.

3-2　下面一些细致的测量数据，是从一张频闪观测照片上取下的，照片拍的是一个在作加速运动的粒子. 距离是从出发点量起的，而时间的零点则取在能够分开辨认的第一个位置上：

根据这些数据画一直线图，证明它们符合方程 $s = \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$，并求出 t_0.

时　间 （频闪光点）	距离（毫米） （照片中）
0	0.56
1	0.84
2	1.17
3	1.57
4	2.00
5	2.53
6	3.08
7	3.71
8	4.39

3-3 已知在倾斜的地板上滚动的儿童玩具车具有恒定的加速度．取 $t=0$ 时 $x=0$，观察到玩具车在 $t=1$ 秒时位于 $x=3$ 米处，而在 $t=2$ 秒时位于 $x=4$ 米处．

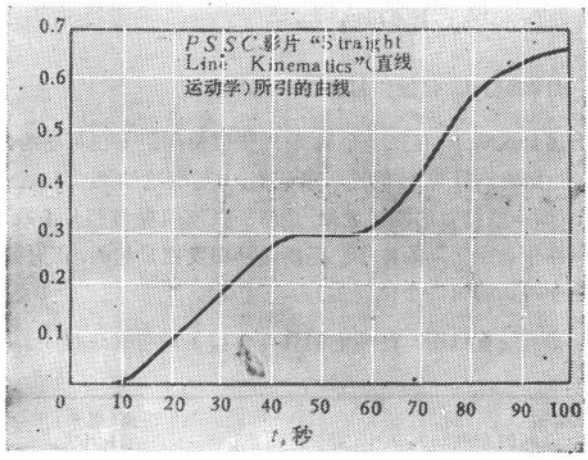
(a) 玩具车的加速度和初速度是多少？

(b) 画出玩具车直至 $t=4$ 秒的位置对时间的函数关系图．

(c) 在什么时候玩具车位于 $x=2$ 米处？

3-4 教员宿舍中一居民看到一个非法的装满水的气球经过他的窗子竖直降落．根据闪电的反光，他观察到气球从窗子的顶部到底部(距离为 2 米)用了 0.15 秒．假设气球是从静止状态降落下来的，问违法者距他窗子的底部多高？

3-5 下图是一个直线运动的距离对时间的实况记录．



(习题 3-5)

(a) 求出在 $t=25$、45 和 65 秒时的瞬时速度之值．

(b) 对整个路程作一 v 对 t 的函数关系的草图．

(c) 根据(b)粗略地估计一下加速度具有最大正值和最大负值的时间．

3-6 1965 年不同距离的女子短跑世界记录如下：

60 米	7.2 秒
100 码	10.3 秒
100 米	11.2 秒

(a) 作一精确的距离(米)对时间(秒)的关系图.

(b) 这图将向你表明,假定短跑运动员在一短时间 τ 内具有某一加速度 a,然后以一恒定速率 v 继续跑下去,则数据可以符合得很好. 建立一个用 a、τ 和 t 来表示距离 x 的方程.

(c) 求出符合(b)中所描述的 v、a 和 τ 的数值. 如果这一描述是正确的,问短跑运动员在达到她们的恒定速度前跑了多少米?

3-7 两辆汽车一前一后在一条笔直的公路上行驶. 每辆汽车都具有 70 英尺/秒(约 50 mph)①的速率,它们之间的距离为 90 英尺. 后面一辆汽车的司机决定超车,以 6 英尺/秒^2 加速,直至速率达到 100 英尺/秒(约 70 mph),然后他继续以这一速率行驶直到他超过前一辆汽车 90 英尺. 问在这一行动开始到结束的时间内,超车的那辆车沿公路行驶了多远?如果眼看有一第三辆汽车从相反方向以 88 英尺/秒(约 60mph)的速度开过来,问在超车操作开始时,第三辆汽车同超车的那一辆车之间的最短安全距离是多少?(如果你是一个司机,应注意这个距离是多大.)

3-8② 在《失乐园》第一卷中,约翰·米尔顿用下面的诗句来描写伏尔坎从天堂跌落到地球上来:

他从早晨掉到中午,
又从中午落到带露水的晚上,
整整一个夏日;同落日一起,
象陨星一样从天顶跌落下来,…

(这一险恶的跌落使伏尔坎跛足,是天神岳夫把他从天堂扔出来的结果.)

(a) 显然,在这个路程中空气的阻力可忽略,因为大部分是通过外层空间. 如果我们假设在全程中加速度之值总是 g (9.8 米/秒^2),问根据米尔顿的数据,天堂有多高?伏尔坎在进入大气层顶部时速度多大?

(b) (难得多)实际上应当考虑这一事实,即加速度与到地球中心的距离的平方成反比. 试求天堂的高度和进入大气层速率的修正值.

3-9 一粒子在竖直平面内以恒定加速度运动. 下面是在相继的三个瞬间粒子的 x(水平)和 y(竖直)的坐标值:

---

① mph 为 miles per hour(英里/小时)的缩写——译者注.

② 该题所谓天堂是不存在的,但为保持原文的完整性,仍译出,供读者参考——编注.

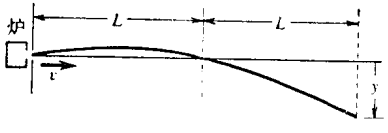
t，秒	x，米	y，米
0	4.914	4.054
2×10^{-2}	5.000	4.000
4×10^{-2}	5.098	3.958

运用速度和加速度的基本定义($v_x=\Delta x/\Delta t$ 等)计算：

(a) 在 0 至 2×10^{-2} 秒和 2×10^{-2} 至 4×10^{-2} 秒的时间间隔内平均速度的 x 分量和 y 分量.

(b) 加速度矢量.

3-10 (a) 下图[与图 3-9(b)相似]表示在真空中一束原子的一条抛物线轨道，原子束通过位于同一水平线上相隔为 L 的两窄缝，并走了另一水平距离 L 到达探测器.



(习题 3-10)

证明原子在低于第一窄缝的竖直距离 y 之处到达探测器，$y\approx gL^2/v^2$，其中 v 是原子的速率.（可以假设 $y\ll L$.）

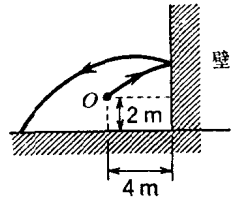
(b) 一个铷原子束(原子量 85)经过位于同一水平线上相距 1 米的两窄缝，并走了另一距离 2 米到达探测器. 当探测器位于窄缝的水平线下 0.2 毫米时，记录到最大的强度. 问在这些条件下探测到的原子的速率是多少？与图 3-10(b)所示的 K 和 Cs 的结果作比较. 问在第一窄缝处速度的初始竖直分量是多少？

3-11 (a) 伽利略在他的著作《两种新科学》("*Two New Science*", 1638 年)中说过，在地平面上给定初速的投射体，理论上发射方向与水平线成 45° 角时得到最大射程. 此外，对于所有 45°±δ (其中 δ 是<45° 的任意角) 的射角相应的射程是彼此相等的. 如果你以前未做过这种计算的话，试验证这些结论.

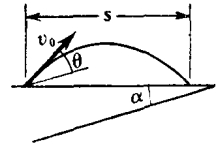
(b) 证明：对于任何一个投射角 θ (相对于水平线)，投射体所能达到的最大高度是当重力不存在的情况下在同一时刻投射体所达高度的一半.

3-12 一个完全弹性球被投向一栋房子的墙上，并被弹回越过投掷者的

头，如图所示．当球从投掷者手里扔出时，球在地面上方 2 米，离墙 4 米，$v_{0x}=v_{0y}=$ 10米/秒．问球在投掷者后面多远的地方碰到地面？（假设 $g=10$ 米/秒^2．）



3-13　一个人站在一平滑的山坡上，山坡与水平线成恒定角度α．他扔出一个初速为 v_0、与水平线成 θ 角（向上）的小石子（见图），



（习题 3-13）

（a）证明，如果空气阻力可以忽略，小石子落在斜坡上距离为 s 之处，则

$$s=\frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

（b）由此证明，对于给定的 v_0 和 α 值，s 的最大值在 $\theta=45^\circ-\alpha/2$ 时得到，并由下式给出：

$$s_{最大}=\frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

（如果你喜欢的话，可用微积分，但并非必要．）

3-14　一个棒球被击出了体育场，并被观察到飞过距离本垒 400 英尺、高为 50 英尺的看台．球离球棒时与水平线成 45° 角，而且被击时是在地面之上 4 英尺高处．如果空气阻力可以忽略（实际上不能），试由这些数字推知球的初速为多大．（$g=32$ 英尺/秒^2）

3-15　一个停表的指针长为 2.5 厘米，转一整周为 10 秒．

（a）求针尖在 6 秒和 8 秒两标志点之间的位移矢量．（取表面中心为直角坐标的原点，y 轴向上通过 $t=0$ 处．）

（b）求针尖过表面上 4 秒标志点时的速度和加速度．

3-16　计算下列情况下的向心加速度．用 g（≈10 米/秒^2）的分数或倍数表示：

（a）一个站在地球上纬度 45° 处的人朝向地球轴的加速度；

（b）月球朝向地球的加速度；

（c）以大约 2×10^6 米/秒的速率在半径为 0.5 埃的轨道上（玻尔原子模型的第一轨道）绕质子运动的电子的加速度；

（d）自行车轮圈边缘上一点的加速度，车轮直径为 26 英寸，车的行进速

度为 25 英里/小时.

3-17 一粒子在一平面内运动，它的位置可用直角坐标(x, y)或极坐标(r, θ)来描述，其中$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

(a) 把a_x和a_y分别作为$r\cos\theta$和$r\sin\theta$对时间的微商来计算，其中r和θ都假设与t有关.

(b) 证明在极坐标中的加速度分量由下式给出:

$$a_r=a_x\cos\theta+a_y\sin\theta$$

$$a_\theta=-a_x\sin\theta+a_y\cos\theta$$

把由(a)得到的a_x和a_y代入，即得在极坐标中的a_r和a_θ的普遍表达式.

3-18 一粒子按照方程$x=0.05\sin(5t-\pi/6)$沿x轴振动，其中x以米为单位，t以秒为单位.

(a) $t=0$时粒子的速度和加速度是多少?

(b) 作图表明这个运动可作为一匀速圆周运动的投影.

(c) 利用(b)求出粒子在以负速度通过$x=0.04$米这位置之后，到它以正速度再通过这同一点之前的时间.

对我说来似乎很清楚，从未有人确实认为或者曾经认为“力”是动量的变化率。

C.D. 布罗德，《科学思想》(1923)

第四章　力和平衡

象本书开头时说过的，牛顿在创立力学科学方面的成就在于发展了作用于一物体的力与物体运动的改变之间的定量关系．比这更进一步，他宣称力学的主要任务是从观测到的运动去推知力．但这并不改变这样的事实：**力**的概念独立于运动的定量规律而存在，而且是始源于非常主观的经验——在推或拉的动作中感受到的肌肉作用．我们将从这一观点开始，首先看平衡状态的力而不是立刻投入动力学中去．这样做确有点过时，因为正象你可能已经知道的那样，力的绝对量度的公认单位是用不平衡的力所产生的运动来下定义的．那是我们一定要涉及的，而在那时我们将进入力学的心脏．尽管如此，力的定量观念还是可以(而且过去是)在另一范畴中发展的——就是，研究静止物体的**静力平衡**．事实上我们对力学中两个最重要的力——引力和电荷间的库仑力——的基本了解，其大部分就是通过对静力平衡情况的实验室观测得到的，所用的技术仍然是重要的和广为应用的．

在讨论平衡的力时，我们将从熟悉的、看起来很直接的一些经验开始．然而，在讨论了一些运动问题之后，我们将认识到，其中牵涉到一些隐含着的假设和没有想到的细微之处；于是我们就有条件以更深刻的洞察力和更开阔的观点回到平衡的问题．正如我们早先说过的那样，那样的阐述是很好的物理叙述；但是，我们不想什么事都一蹴而成，而是从容易的阶梯逐步延伸我们概念的范围和精致的程度．

§1　静力平衡中的力

让我们来看一个很简单的物理体系——弓手的弓．在图 4-1

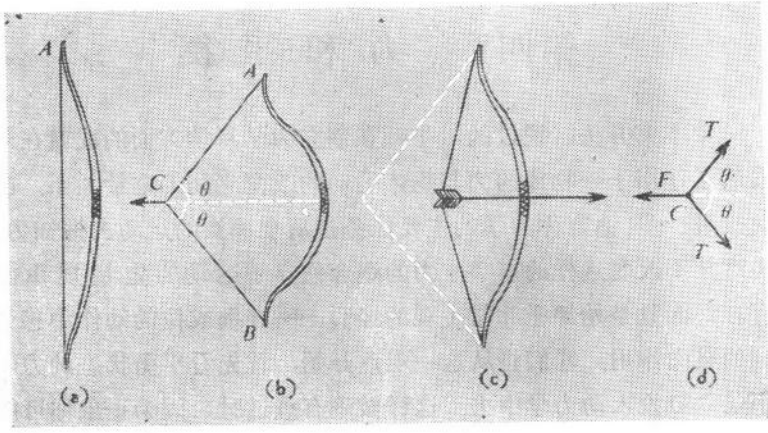


图 1-1 (a)一弓手的弓，处于静止状态的简图.(b)弓弦的中点向后拉，需要沿着两段弦的夹角的平分线施加力.(c) 发射过程中的箭矢.(d)在(b)的情况中施加于弓弦中点的诸力.

(a)中我们把弓的静止状态明示出来；弓弦是直的和绷紧的. 我们知道，要把弓拉成图 4-1(b)所示的情形并保持之，是必须用力的. 去掉那力，弓弦就猛地回向它的绷直情形，可能同时射出一支箭[图 4-1(c)]. 要把弓保持着图 4-1(b)的形状必须满足一些什么条件呢？撇开在这状况下人的、主观的方面，我们可以说，在C点的力是平衡的. 但这意味着什么呢？力是不能脱离现实而存在的；它是作用在**某物**上的. 我们不能设想一个力而无被它作用的物理客体. 这里，拟议的物体是弓弦上紧挨着C点的某一小部分. 弦的这一小段受到它的相邻部分的弦沿着方向CA和CB的拉力，以及一个第三力，那是由弓手沿角ACB的平分线施加于它的. 我们可以分开另作一图如 4-1(d)；它表明在C点的那一小段弦在三个力的作用下处于平衡——力F来自弓手，另外两个力T，根据对称性，大小相同，来自于弦. 后两个力合起来成一力，与F相等反向，沿对称线. 但是我们怎么**知道**平衡时需要弓弦提供一个与F

相等反向的合力呢？你也许会说，这是显然的，但我们可以用一个真实的实验来支持这一直觉．它将包含一个假设，即完全相同的物体在同样的形变下，将提供同样大小的拉力或推力．例如一小绳圈可以在两个完全相同并同样地伸长的弹簧线圈沿相反方向拉着时保持静止．这种相等并反向的力的平衡是所有平衡情况中最简单的．

象弓手的弓那样的问题对你不是新问题．但我们要指出，对它们的分析包含着我们能够给各个力指定数值大小并作比较．我们如何能做到这一点呢？当阿基米德在 2000 多年以前发现杠杆定

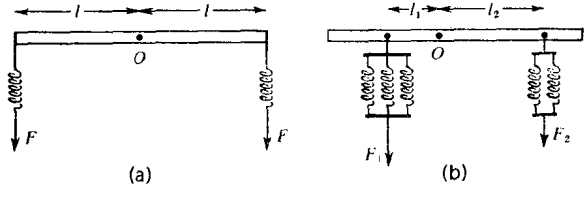


图 4-2 （a）在简单的等臂装置中相等的力的平衡．
（b）不相等的力按杠杆定律平衡．

律时就说明了这方法．相等的力当作用于支点 O[图 4-2(a)]两侧等距离的地方时平衡．不相等的力也能平衡[图4-2(b)]，只要条件 $F_1 l_1 = F_2 l_2$ 得到满足．仅仅考虑对称性就可以使人想到第一个结果，但第二个结果却要以实验为根据①．要建立它，我们需要有办法得到一个给定的力的倍数．一个方法就是制作一些完全相同的弹簧．我们首先证实，当伸长的幅度相等时，它们在等臂的装置中一个一个地互相平衡．然后我们可以在支点一侧同样距离处附上几个弹簧，而用一个弹簧或不同倍数的几个弹簧附在支点的另一侧的适当距离处去平衡它们，如图 4-2(b)．（注意这样一种过程并不需要假定单个弹簧的力如何随伸长而变化．）一旦杠杆定律

① 阿基米德认为他能够用纯粹逻辑得到这结果，但并不如此．见习题 4-5．

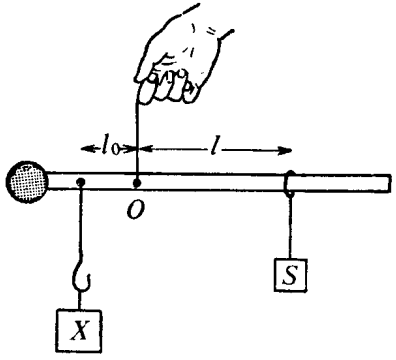


图 4-3　一"提秤"的基本装置，用一标准重量(S)称一未知重量(X)，(S)可沿水平臂移动.

用这种办法得到证实，我们就可以用它来量度一未知力，按一任意标准表示出来. 这技术至少是从阿基米德的时代以来就用于称物体的重量(见图 4-3)，而其基本原理——用适当选择的杠杆臂可以使一小力同一大力平衡——则用于许多熟悉的机械装置.

§2 力的单位

对于以平衡中的力为目的的这一初步研究，我们并不严格地需要力的绝对值. 引进力的任意一种单位，而把其他的力表示为这单位的倍数就可以了. 然而，以惯用的量度来表示力常常比较方便，因此，在作进一步的讨论之前，我们先说说这些量度是什么. (不管怎样，你可能早就见到过它们.)

我们最常用的力的**单位**是**牛顿**(N)，在这里和全书中都如此. 这个力具有这样的大小，能给 1 千克质量以 1 米/秒^2 的加速度；它代表 MKS 制中力的基本单位. 这一定义的详细基础将在第六章中讨论；我们目前只需要知道这单位完全确定某一一定的力. 这单位的大小也可以了解如下：在地球表面上 1 千克质量受

到的重力大约是 9.8 牛顿. 地球对一中等大小的苹果的拉力约为 1 牛顿——鉴于旧时的传说(很可能是真的): 一个苹果的落下引起了牛顿对引力的深思,这是最恰当的说明.

在 CGS(厘米-克-秒)制中,力的单位是**达因**(dyn),定义是能给 1 克质量以 1 厘米/秒^2 加速度的力. 由于 1 厘米$=10^{-2}$ 米, 而 1 克$=10^{-3}$ 千克,我们有下列关系:

$$1 \text{ 达因} = 10^{-5} \text{ 牛顿}$$

(在这样说时,我们假定 $F=ma$ 这关系是已经建立了的,因此, 当 m 和 a 各乘上一给定的因数时, 相应的 F 即乘上这些因数之积.) 因此,达因是一个非常小的力,约等于地球对 1 毫克质量(例如,大约为一$\frac{1}{8}$平方英寸的纸片质量)的拉力.

我们有时会提到的唯一其他的力是**磅**. 不象牛顿和达因, 磅是(或者至少原来是)直接根据地球对一标准物体的拉力来量度的. 只要我们认识到, 引力对任何一个物体所产生的拉力随地点而变,这定义就失去其确切性而必须加以调整. 然而,撇开这些细节上的困难,我们仍可说 1 磅是大小约等于 4.5 牛顿的力. 每当我们购买那些在弹簧秤上称重量的东西时, 我们是在同意用磅那种力的重力单位. 我们以后(第八章)将更详细地讨论其实用含义.

§3 平衡条件;作为矢量的力

一给定物体的静力平衡需要两个不同性质的条件:

1. 物体不受任何使它整个地移动的合力;我们称它处于**平动平衡**.

2. 物体不受任何使它扭转或转动的净余影响;我们称它处于**转动平衡**.

头一个条件一般包含在不同方向作用的诸力的合并，象开始时的弓弦例子中那样．在牛顿时代之前很久，人们就已经知道力是**矢量**．这话的含义远比说它有一特征方向要深得多；它还表明力按矢量的原型(位移)的同样规律相加．例如，设想一个环松松地套在一短桩上．假定环上系着三根绳，绳受到拉力，大小比例为3:4:5，由伸长相同的相应数目的全同弹簧表示[见图 4-4(a)]．于

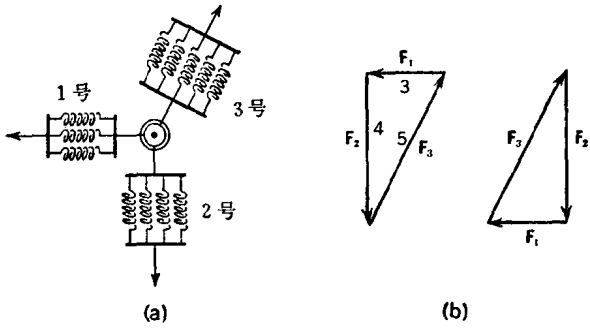


图 :-4 (a)一物体在三个非平行力的作用下平衡．(b)两个等价的矢量图，说明平衡条件 $\Sigma\mathbf{F}=0$.

是，实验表明，即使取掉短桩，环仍保持平衡，只要诸力的方向准确地同一3-4-5 的三角形对应．这意味着，长度与力的大小成正比的矢量形成一闭合三角形，这三角形有两种画法，如图 4-4(b)所示．用专门术语来讲，我们说这三个力矢量加起来为零：

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3=0$$

加法与次序无关是矢量的一个基本特性(见第二章)．因此，如果有许多力作用于同一物体，它们的相加可用许多不同的办法来表示；如图 4-5 中给出的例子．一个主要特点是，不管怎样，只要存在平衡，诸力矢量就形成一闭合多边形(即它们加起来为零)．由于力可以作用在三维空间中的任何方向，这力多边形不一定局限在一平面上．因而单说力矢量加起来为零，一般意味着可分解为三个各自分开的“力矢量加起来为零”，分别从属于三个独立地选择的方

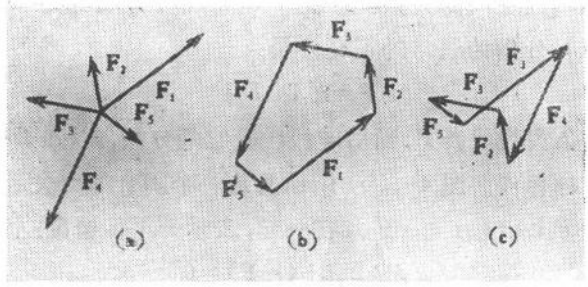


图 4-5 (a) 几个力作用在同一点上. (b) 力矢量形成一闭合多边形, 表明平衡. (c)同(b)等价的矢量图.

向——常常，但非必须，选为一直角坐标系的三个互相正交的轴. 几何上，可以把它想象成那闭合矢量多边形在不同平面上的投影; 不论如何因此而变形，投影而得的多边形总是一个闭合的图形. 我们用代数的语言表达，投影意味着把一个力矢量沿着选好的方向分解为分量. 于是，对平移而言的第一个平衡条件可写出如下:

矢量表示法:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\cdots=0 \tag{4-1a}$$

分量表示法:

$$\begin{aligned} F_x&=F_{1x}+F_{2x}+F_{3x}+\cdots=0\\ F_y&=F_{1y}+F_{2y}+F_{3y}+\cdots=0\\ F_z&=F_{1z}+F_{2z}+F_{3z}+\cdots=0 \end{aligned} \tag{4-1b}$$

值得注意的是把力矢量加起来的过程同把各个力矢量分解成

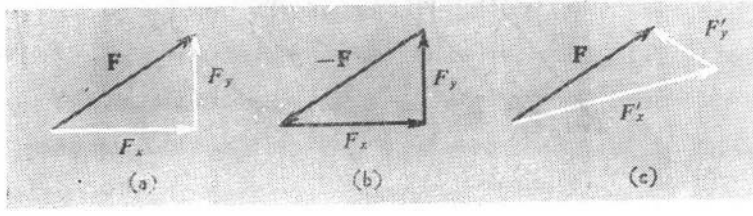


图 4-6 (a)把一力分解为正交分量. (b)**F**的分量按矢量与力$-\mathbf{F}$相加，得零. (c)把 **F** 分解为非正交的分量.

为分量的过程之间的关系. 在图 4-6(a) 中我们示明在 xy 平面上的一个力 **F** 分解为通常的正交分量:

$$\mathbf{F}=F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$$

我们用一条实线代表 **F**，而用虚线代表它的分量，以强调分量是 **F** 本身的一种替代. 图 4-6(b) 所示的是一个闭合的力矢量三角形，其中矢量 $F_x\mathbf{i}$ 和 $F_y\mathbf{j}$ 同 $-\mathbf{F}$ **加在一起**，表示一平衡情况:

$$F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}+(-\mathbf{F})=0$$

我们于是可以认识到，任何其他的一对矢量，只要加上 $-\mathbf{F}$ 之后等于零，就完全与 **F** 本身等价. 因此，有无穷多种方式听凭我们把一个给定的力分解成分量. 例如图 4-6(c)中的两个力 $F_{x'}$ 和 $F_{y'}$ 代表着把 **F** 分析为斜交坐标系分量的做法; 其中 F_x 可能碰巧比 **F** 本身还大的情况并不说明这一分解方式无效.

类似地，如果任意一组力加起来为零，如图 4-7(a)，则其中之一(这里用 $\mathbf{F}_E$ 表示)可看作所有其他力的**平衡力**(即平衡者). 大小等于 $\mathbf{F}_E$ 但方向相反的力完全等价于这些其他力的矢量和: 即它们的**合力**如图 4-7(b)所示，为 $\mathbf{F}_R$. 熟悉这些简单关系对于合成或分解力的问题可能很有帮助，并能加强我们对一般平衡情况的了解.

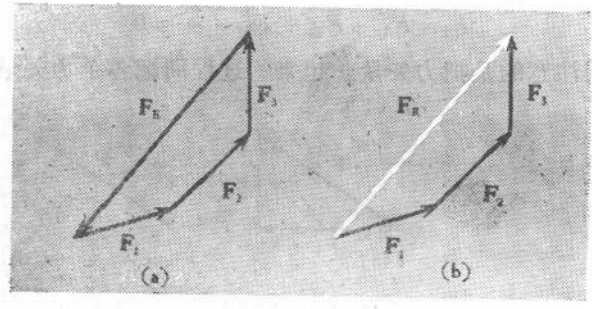


图 4-7 (a)一组力 $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ 和 $\mathbf{F}_3$ 为平衡力 $\mathbf{F}_E$ 所平衡.
(b)同一组力 $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ 和 $\mathbf{F}_3$ 的合力 $\mathbf{F}_R$.

§4 物体接触时的作用与反作用

我们已经用了一种一致性原则以规定如何复制一个具有一定大小的力或制备为其已知倍数的力. 我们假定全同的弹簧在受到相等的拉伸或压缩时所确定的力是相等的. 这一假设在分析平衡情况时导致一致的结论. 现在来描写一简单的实验, 任何两人都能用一对全同的弹簧来做的实验. 两人面对面地站着, 其中之一, A, 定为主动的一方. 他的目标是通过他所持的弹簧去推被动一方 B 所持弹簧的尾部, 而 B 则试图避免被推向后. 每人所受推力的大小按他所持弹簧的压缩量来测定.

当然你是知道这实验的结果的. 不管 A 和 B 的动作如何, 两弹簧的压缩总是相同的; 两者的压缩量只能随之一起改变. 这实验以特别直接的方式显示出一种现象, 用大家所熟悉的说法就是: 作用与反作用相等反向. 它的普遍说法是, 不管所牵涉到的两物体相接触的细节如何, 也不管它们的相对硬度或柔软性如何, 每一物体作用于另一物体的力的大小总是严格相等的. 特别要注意的是, 就它们定义的方式而言, 这两个力不能都作用于同一物体. 这也许是多余的或不言而喻的注解, 但是在初等力学中, 许多计算都是由于没有能够认识到这一点而告失败的.

对应于一个作用力而产生的反作用力总是伴随着一定程度的形变. 例如, 你推墙, 这是一个自觉的肌肉动作; 但墙如何会回推呢? 答案是它变形了, 尽管感觉不到, 而正是这种弹性形变使墙产生一接触力施加于你. 一个表面, 不论看起来是多么刚硬, 在推或拉之下总要变一点点, 否则它是不会提供一个反力的. 当我们在一张舒适的沙发椅上坐下时所发生的事情与我们在水泥地板上坐下时所发生的事情并无根本的差异. 但是, 在一种情形下, 弹簧柔

顺而可见地退让寸许，在另一种情形下，那些弹簧实质上是紧密堆集在固体结构中的一个个原子，一微小的、等于原子直径几分之一的形变就足以产生所需的支承.

§5 转动平衡；转矩

现在来看一物体静力平衡的第二个条件，假定第一个条件 $\Sigma \mathbf{F}=0$ 已满足. 事实上，一物体现在是否处于平衡要看力的作用是否会产生一总的扭转. 图 4-8(a)用尽可能简单的例子说明这问题. 一物体受到两相等反向的力的作用. 如果象图 4-8(a)那样，力的作用是沿着它们的作用点 A 和 B 的连线，则物体确实平衡；它没有转动的趋势. 在任何其他情形下[例如图 4-8(b)所示的

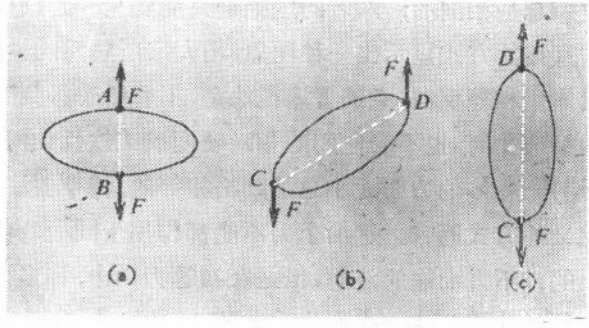


图 4-8 (a)转动平衡，相等反向的力作用于一广延物体上的不同点. (b) 相等反向的力，作用方式使转动平衡不可能. (c)如果能自由转动，物体将从(b)的方向转到平衡方向.

情形]，物体一定要扭转. 如果力的方向在物体转动时保持不变，则物体最后将达到平衡的方向，如图 4-8(c)所示. 怎样从这种为我们所熟悉的常识建立一个用于转动平衡的定量判据呢？

杠杆定律提供了这方面的线索. 再看看图 4-2 所示的情形. 特别是看情形(b). 对支点 O，力 F_1 和 F_2 取得平衡的条件是要求

$F_1 l_1 = F_2 l_2$. 力与其杠杆臂的乘积说明它的"杠杆率"，或扭转能力；专门术语称作**转矩**. F_1 和 F_2 对 O 的转矩大小相等、方向相反——F_2 产生的转矩是顺时针的，F_1 产生的则是逆时针的. 我们称其中之一为正的，另一为负的；于是，平衡条件就可以表示为另一形式：**总转矩等于零.**

虽然上面所描写的情况异常简单，也还有一眼看不到的内容，因为还有一个力作用在杆上支点所在之处；这力的大小一定等于 F_1+F_2 以满足第一平衡条件. 因此，全部力的排列如图 4-9 所示.

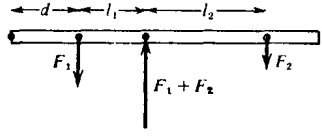


图 4-9　作用在一根有支轴的杆（重量可忽略）上的全部力；杆处于转动平衡，支点两侧各有一力作用.

无疑，这第三个力对于支点 O 本身来说并无转矩作用. 但是，如果我们考虑，比如说，绕杆的左方与 F_1 的作用点相距为 d 的端点的转矩，那将如何呢？很清楚，对这新的原点来说，在 O 点的力产生着一个逆时针方向的转矩——但结果是，如果条件 $F_1 l_1 = F_2 l_2$ 得到满足的话，它的作用正好被 F_1 和 F_2 所产生的转矩之和平衡掉（后两转矩，对新的、假想的支点来说，都是顺时针方向的）. 如果这结果对于你是新的话，就该花一点时间想想，使你确信这是对的. 它说的是，如果作用于一物体上的力的矢量和为零，而且绕任意一点的转矩之和为零，则绕任何其他点的转矩也是零.

迄今，我们只限于讨论平行力的转矩的平衡. 现在让我们从更普遍的角度来讨论这问题. 设有一力 F 作用在一物体上或其内某处的一点 P[图 4-10(a)]. 看 F 对某另一点 O 所产生的转矩，O 可能是一真实支点的位置，也可能只是一任意点. 令由 O 到 P 的矢量距离为 r. 首先要注意的事是 r 和 F 确定它们之间的一个平

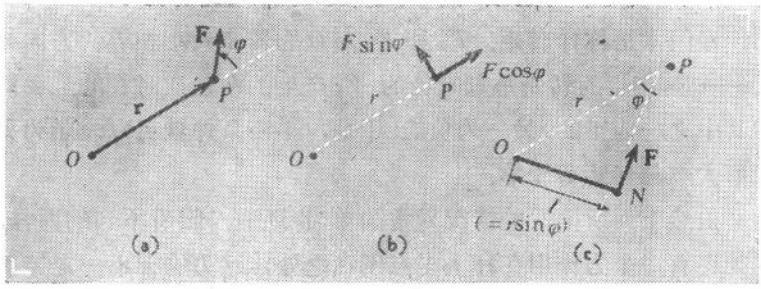


图 4-10 (a)力 **F** 作用于离支点矢量距离为**r**之处. (b)把 **F** 分解为沿着和垂直于 **r** 的分量.(c)求出 **F** 的有效杠杆臂以计算其转矩.

面，我们选它为作图的平面.如此熟悉、因而已成为第二性的经验告诉我们，如果O真是支点，那么 **F** 将会产生一个转动，转轴垂直于 **r** 和 **F** 所在的平面. 因此，最为合理的是把这轴的方向同转矩本身关联起来，看作某种矢量. 那么转矩的大小如何呢？我们可以用两种方法来计算它. 第一，示明于图 4-10(b)，是把这力分解成沿着 **r** 和垂直于 **r** 的分量. 如果 **r** 与 **F** 之间的角是φ，则这两分量分别为$F\cos\varphi$和$F\sin\varphi$. 径向分量代表一直接通过O点的力，因而对转矩无贡献. 垂直于 **r** 的横向分量则产生一个大小为$rF\sin\varphi$的转矩. 另一个看出这结果的方法是由图 4-10(c) 联想到的，在其中总力 **F** 的有效杠杆臂是从O画到 **F** 的作用线上的垂直线ON. 于是，**F** 所产生的转矩恰好同它真的作用在N点并垂直于长为$l=r\sin\varphi$的杠杆臂所产生的转矩一样①.

我们引进单一的符号M来表示转矩的大小. 于是有

$$M=rF\sin\varphi \qquad (4\text{-}2a)$$

这式未包含有关转矩**方向**的必要说明，但在矢量代数中有一简洁的、特别为了这一目的而发明的表示法. 这就是所谓两矢量的叉

① 列昂纳多·达·芬奇用此法设想到一个力的有效杠杆臂而称它作"力的神圣距离".

积或矢积.

给定两矢量 **A** 和 **B**，**叉积 C** 的定义是：一个矢量，垂直于 **A** 和 **B** 的平面，大小为

$$C = AB\sin\theta$$

其中 θ 是 **A** 和 **B** 之间两夹角的小者（另一夹角是 $2\pi-\theta$）. 当然，垂直于 **A** 和 **B** 的平面有两个相反的矢量方向. 为了立下一个明确的规定，我们这样来着手：设想矢量 **A** 转一 θ（小的那一个）角直到它沿着 **B** 的方向[见图 4-11(a)]. 这确定了旋转的方向. 如

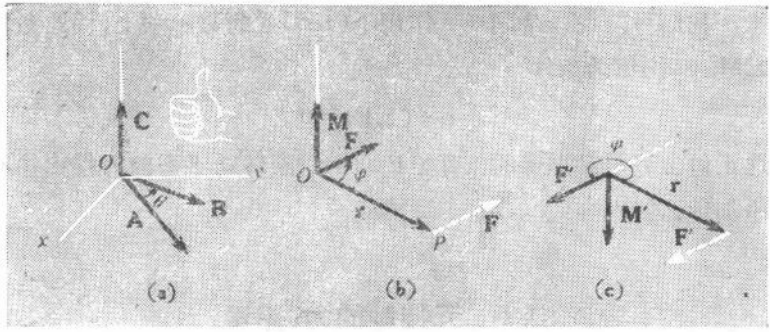


图 4-11　(a) 两任意矢量 **A** 和 **B** 的叉积 **C**. (b) 转矩矢量 **M**，为 **r** 和 **F** 的叉积. (c) 产生与(b)中的转矩方向相反的转矩矢量的情况.

果把右手的手指按旋转的方向曲起来，拇指伸出（做做看！），则叉积的方向沿着拇指的指向. 数学上包括所有以上这些性质的表示法是

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

要小心注意两因子的次序，这是紧要的；次序颠倒将改变正负号：

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

用这一矢量符号，则作为一个矢量的转矩完全为下式所确定：

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad (4\text{-}2b)$$

图 4-11(b) 和(c)对两个不同的 φ 值说明这一点：在每一情形中，

绕 M 所指方向的右手旋转代表 F 所要引起的旋转的方向，这你是可以验证的. 最后，我们可以写下所有作用在一物体上的转矩的矢量和，而平衡的第二个条件——对转动而言——可以写成

$$\Sigma\mathbf{M}=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2+\mathbf{r}_3\times\mathbf{F}_3+\cdots=0 \qquad (4\text{-}3)$$

如果受一组力作用的物体可以看作一理想粒子(即一质点)，转动平衡条件就成为多余的了.因为所有的力都作用在同一点上，它们不会对这点产生转矩；而如果条件 $\Sigma\mathbf{F}=0$ 也满足，它们对任何其他点的总转矩也等于零. 要把这一情况用正式的语言表达出来，我们可以说，是同一 $\mathbf{r}$ 作用于(4-3)式的每一项上，因此条件 $\Sigma\mathbf{M}=0$ 约化为条件

$$\mathbf{r}\times(\Sigma\mathbf{F})=0$$

这正包含着平动平衡的条件$\Sigma\mathbf{F}=0$[①]；而转动平衡的方程式并不添加什么新内容.

§6 无接触的力；重量

图 4-12 描绘一对情况，看起来是如此简单并包含如此熟悉的结果，以致你可能永远不会停下来怀疑一下它们之间的关系. 在图4-12 (a) 中示明的是一个物体系于两弹簧秤之间，水平地由一对相等反向的力拉着——一个清楚的静力平衡情形. 在图 4-12 (b)中，同一物体挂在一弹簧秤下面，弹簧在竖直方向上拉着它.经验告诉我们，这也是一个静力平衡情形，但如果只从可见的关联物体去考虑，这相当清楚地是一个非平衡状态. 如何摆脱这困境呢？这似乎是一个平凡的或者甚至是无意义的问题. 事实上这却是一个非常深刻的问题.眼下我们只从静力平衡的观点来考查它.

① 应当是"包含在平动平衡的条件 $\Sigma\mathbf{F}=0$ 之内——译者注.

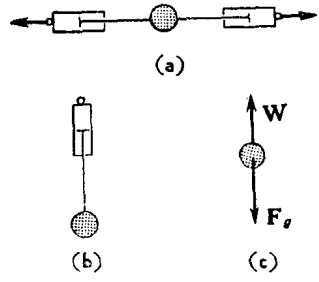


图 4-12 (a)物体在相等反向的水平力(来自弹簧秤)作用下平衡.(b)物体在单一的一个竖直方向接触力(来自一个弹簧秤)的作用和一个看不见的影响(重力)下平衡.(c)在(b)中弹簧秤上的读数确定物体被测出的重量(W).根据推理,引力 $\mathbf{F}_g$ 与 $\mathbf{W}$ 相等反向.

以后我们将看到,它具有许多宽广得多的派生问题.

试想我们是第一次遇到图 4-12中(b) 的情形,而已有的经验背景则是别种静力平衡.你从这以前的经验知道,平衡总是与作用力的矢量和为零相应的.你习惯于有形的和看得见的证据,表明这些力确实是通过绳、弹簧等等在作用着.现在你看到的一种平衡情况却是整个视界中好象只有一个单独的力在作用着.但你对平衡条件的普遍正确性的信念是如此之强,以致你会说:"即使是没有其他接触,也一定有另一个力,与弹簧所提供的力相等反向,作用在这物体上."因之你就假设有一重力把物体向下拉.但你对它仅有的量度是反抗这重力的弹簧秤上的读数.

正是通过这样一些事情,我们才假设和接受向下的重力的存在,它作用于地球表面上或其邻近的每一物体.要保持一物体相对于地球静止,我们必须对它施加一向上的力.这一平衡力的大小,比如说用弹簧秤量出来的,就是我们所说的一物体的**重量**.这是一个重要的定义;我们把它重说一遍:**一物体的重量的定义是大小为 W 的向上的力,必须施加于物体才能使它相对于地球保持静止**.这是一个称为**操作型**定义的例子;在定义中我们说明要得到

所涉及的量的实际量度所需的实际步骤. 特别要注意的是，我们不把一物体的重量定义为它所受的重力. 如果与支承弹簧的联系中断，因而物体开始自由落下，则按我们的定义物体现在是**无重量的**(失重)，尽管没有迹象表明物体所受的重力在这联系中断时有任何改变. (我们将在第八章中进一步讨论失重.)

如果我们回到物体由弹簧的拉力而保持相对于地球为静止的情况，则我们关于力作用于物体的图象将如图 4-12(c)所示. 根据这确是一静力平衡的假设，我们可以说弹簧力 $\mathbf{W}$ 同重力 $\mathbf{F}_g$ 是相等反向的，因而 $\mathbf{W}$ 的大小在这情况下确实为 $\mathbf{F}_g$ 的大小提供了一个量度. 但要牢记，在我们的用语中，重量和重力不是同义词. 保持这一区分将使我们有好得多的准备以便以后去处理牵涉到重力的动力学问题.

§7 滑轮和绳

用滑轮和绳来传送力，其中的物理学比人们可能想到的要多，而且包含一些很好的、有关静力平衡原理的应用. 试看跨过一个半径为 R 的滑轮的一条绳[图 4-13(a)]. 设这绳被力 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 拉着如图所示. 这要是一个静力平衡情形，滑轮必须处于平动和转动都是平衡的状态. 先看转动平衡. 如果支点基本上无摩擦，则滑轮上的转矩只是力 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 所产生的. 由于两者都是沿切线方向施加作用，它们的杠杆臂相等，长为 R(设滑轮的支点准确地在中心). 因此，要净余转矩为零，$\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 的大小必须都等于同一值 T，我们把它叫做绳中**张力**——在绳上任何一点沿绳长方向绳所施拉力的大小. 因此，滑轮能够改变作用力的方向而不改变其大小. 不过，要满足平动平衡的条件，支点必须能够提供一个力 $\mathbf{F}_3$，与 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 的矢量和相等反向. 这力必然是沿着绳的两直线段之

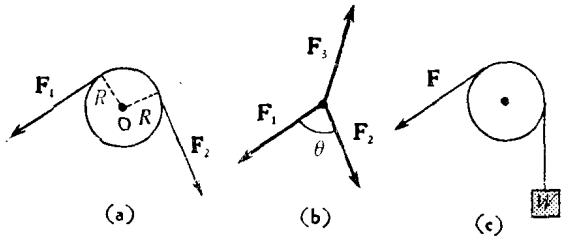


图 4-13 (a)一根绳的两段中的张力，绳跨过一静止的圆滑轮，力必须满足转动平衡条件.(b)一滑轮静力平衡时所包含的一组三个力.(c)滑轮，作为把一定大小的力施加于任何需要的方向的一种装置.

间夹角 θ 的平分线，而大小必等于 $2T\cos(\theta/2)$[见图 4-13(b)].

如果有一跨过一滑轮的绳，它一端的张力来自一悬挂着的物体，就需要一个大小等于物体重量 W 的力 $\mathbf{F}$ 来维持平衡[图 4-13(c)].这意味滑轮-绳系统可以用来在任何需要的方向上提供大小为 W 的一个力. 图 4-14 所示是典型的这类装置，它利用这些特点在一个简单实验中就能研究三个共点力的平衡. 在滑轮可以当作理想的滑轮的范围内，$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$，和 $\mathbf{F}_3$ 的大小依次等于悬挂着的物体的重量 W_1，W_2 和 W_3.

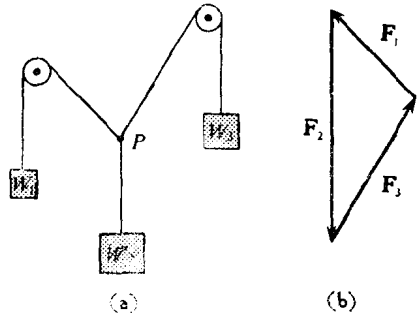


图 4-14 (a)简单的静力平衡装置，包括三个非平行力(绳的张力)，作用于 P 点.(b)表明平衡条件的矢量图.

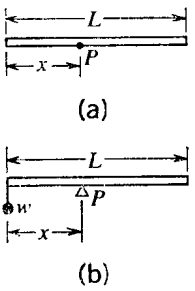
习　题

4-1　两个人各抓住一条绳子的一端并以大小为F的相等反向的力拉它，试明确地论证绳中的张力是F而不是$2F$.

4-2　大家知道，作用于一物体上的总重力可以用一作用于唯一确定点——“重心”——的单力来代表，而不管物体的取向如何.

(a) 对于一均匀棒，重心(CG)与几何中心吻合. 利用这一事实证明：对P点的总重力转矩[见图的(a)部分]可认为是在棒的中心处的单力W产生的，或者是由作用于P点所划分的两段的中心、大小为Wx/L和$W(L-x)/L$的两个单力产生的.

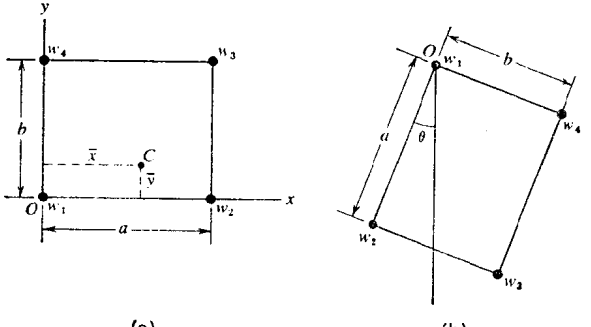
(b) 如果一根棒或杆具有重量W，并在一端挂一重量为w的小物[见图的(b)部分]，利用上述两种方法中较简单的一种，证明如果$x=LW/2(W+w)$，则当支点放在P处时系统达到平衡.



(习题 4-2)

4-3　图(a)表示一块重量可以忽略的矩形板，在它的四角上都放有单个的集中的重物.

(a) 要求出这系统的重心(CG)位置，可按下法进行：选锐角O为原点，并引x轴和y轴如图. 设想这板绕着沿y的水平轴转，计算在离这轴多大距离$\bar{x}$处施加一向上的力$W(=w_1+w_2+w_3+w_4)$使系统保持转动平衡. 其次，设想板绕着沿x的水平轴转，计算相应的距离$\bar{y}$. 然后证明重心C就在$(\bar{x},\bar{y})$这点.



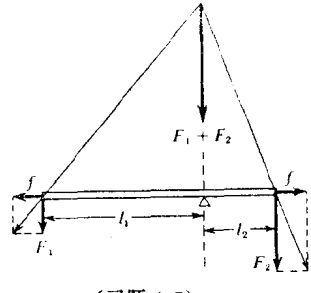
(习题 4-3)

(b) 一个定重心位置的实验方法是:相继从板的两个犄角(或者任何其他两点①)将这块板挂起来，并标出每一种情况下跨过板的铅直线方向. 要证明这种方法与(a)一致，可设想板在一竖直平面内从 O 点下挂[图(b)]，并根据对这样挂起的板 w_2, w_3 和 w_4 所产生的转矩平衡的直接考虑，说明引自 O 点的竖直线通过 C(因此 $\tan\theta=\bar{y}/\bar{x}$).

4-4 你刚写完一封 20 页的信给你的好友，并想立刻付邮，以便信在早晨第一批收走. 你存有邮票，但不巧这时是凌晨两点，区内邮局已关门，而你没有自己的称信天平. 但你有一把 12 英寸的尺子和一个镍币，你还碰巧从什么地方得知镍的密度约为 9 克/厘米^3. 这把尺本身在它的中点平衡. 当镍币放在尺上 1 英寸的标志点上时，平衡点在 5 英寸标志点处. 当信放在尺上，中心位于 2 英寸标志点时，平衡点在 $3\frac{1}{4}$ 英寸处. 邮资率是每半盎司(英两) 20 分(国际空邮). 你应该贴多少邮资的邮票？(这问题是从实际生活中提出的. 你可能喜欢做一个类似的实验，也许用一个不同的硬币作为你的标准重量.)

4-5 (a) 如在正文中(第四章第一节)说到的，阿基米德给出过他认为是杠杆定律的理论证明. 根据离支点等距离 l 的相等的力 F(由于对称性)一定平衡这一点，他论证，同样由于对称性，这些力中的一个可以用一个在支点处的力 $F/2$ 和另一个在 $2l$ 处的力 $F/2$ 来代替. 说明这一论证法有赖于所要证明的东西的正确性.

(b) 一个弱点较少的论证法是以力按矢量合成的实验知识作为根据. 假定有平行力 F_1 和 F_2 施加于棒上，如图所示. 设想引进图中所示的两相等反向、大小为 f 的力. 这就产生出两个合力矢量，它们相交于一点，这一点决定着它们的合力(大小为 F_1+F_2)的作用线. 证明这合力与棒相交于使 $F_1l_1=F_2l_2$ 的支点.



(习题 4-5)

4-6 求如图所示两种情况下绳中的张力. 在每一情况中，重量 W 都处于静力平衡.

---

① 两点不能同时位于通过重心的任何直线上——译者注.



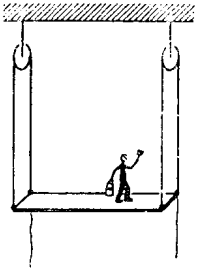
(习题 4-6)

4-7 (a) 一条晒衣绳绷紧在相距 10 米的两根柱子之间，绳的弛垂可以忽略. 当把一件质量为 0.5 公斤的湿衬衫挂在绳的中点时，中点被拉下来 8 厘米. 问晒衣绳中的张力是多少？

(b) (向 *E. W.* 西尔斯致谢)一辆汽车陷进沟里，但司机有一根绳子. 司机知道自己没有足够的力气把汽车直接拉出来. 于是，他用绳子把汽车同碰巧在离汽车 50 英尺地方的一棵树紧系起来，然后在绳的中央用力横拉. 如果在司机的拉力是 500 牛顿(50 公斤)时，绳的中点横向移下 3 英尺，问施加于汽车的力有多大？如果这足够使汽车开始移动，而司机把绳子的中点再横拉 2 英尺，问汽车会移动多远(设绳子不再有任何伸长)？对这种情况如此来处理象是一个实际的方法吗？

4-8 证明，如果作用在一个物体上的三个力保持平衡，这三个力一定共面，而且它们的作用线一定相交于一点(除非这三个力都是平行的).

4-9 油漆工常常在吊板上工作，吊板的两端用跨过定滑轮的长绳拉着，如图中所示. 每根绳子的一端系在吊板上. 在滑轮的另一边，绳子套在吊板的一个钩子上，使吊板可保持任何要求的高度. 一个重 175 磅的油漆工在这样一个吊板上工作.

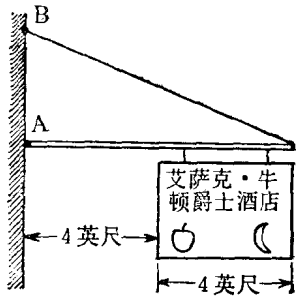


(习题 4-9)

(a) 记住他必须能够从这头移动到那头，问绳中的最大张力是多少？

(b) 假设他用的是一条不能支持大于 150 磅的绳子. 有一天，他发现墙上有一牢固的钉子，就把绳子套在这钉上以代替套在吊板的钩上. 但是他一撒手，绳就断了，他跌倒在地上. 为什么？

4-10 一块重 100 磅的小酒店招牌如图所示那样悬挂着. 支臂重 50 磅，能在墙上自由转动，这系统用一根拉线来固定，拉线不得承受超过 250 磅



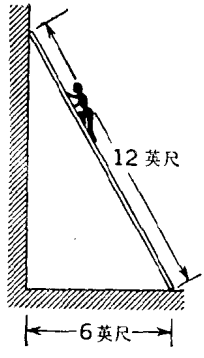
（习题 4-10）

的张力.

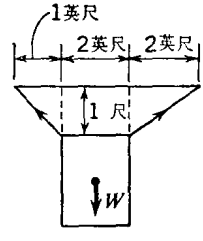
(a) B 点在 A 点上方的最小安全距离是多少?

(b) 在这些条件下, 施加于支臂上 A 点的力的大小和方向如何?

4-11　一个人开始爬上一长 12 英尺的梯子(见图), 人重 180 磅, 梯子重 20 磅, 梯子所停靠的墙非常光滑, 这意味着在梯子和墙接触处力的切向(竖直)分量可以忽略. 梯脚放在离墙 6 英尺处. 如果梯子同地面接触处的切向(水平)力超过 80 磅, 梯子(上面载有人的重量)将要滑动. 问人能安全地爬到梯上多高的地方?



（习题 4-11）



（习题 4-12）

4-12　你要想把一张照片挂在墙上某个地方, 但只在照片边沿的左方 1 英尺和右方 2 英尺的点上有可利用的钉子(见图). 如图所示, 你用适当长度的绳子把这些钉子同照片顶部的犄角系起来, 但照片将挂得不正. 除非你加上一个某种平衡重量.

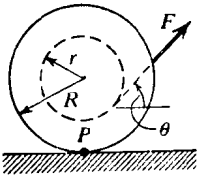
(a) 如果照片连同它的框架重 10 磅，问最轻的可能平衡重量是多少？你应把它放在什么地方？（提示：求出绳中两张力的交点.）

(b) 在没有平衡重量的情形下，这照片会挂得怎么样？（如果你想超出定性讨论之外，就得准备对付一些比较费事的三角学.）

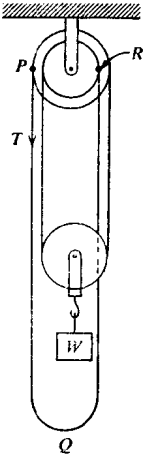
4-13 一个约约(yo-yo，一种玩具——译者注)停在一张桌上（见图），它的绳子的自由端沿着与水平线成 θ 角的方向被轻拉着，如图所示.

(a) 尽管约约可以自由滚动，约约能保持不动的 θ 临界值是多少？(如果你考虑对桌上接触点 P 的转矩，这问题可以用几何学来解决.)

(b) 对于较大或较小的 θ 值，会出现什么情形？（如果你有一个约约，用实验来检验你的结论.）



（习题 4-13）



（习题 4-14）

4-14 简单而广泛应用的链式起重机是以一种称作差动滑轮的部件为基础的. 在这装置中，两个直径稍有差别的滑轮用一根共同的固定转轴刚性地连在一起. 一条环链绕过这些滑轮，并绕着一个自由滑轮，负载 W 悬挂在它下面(见图). 设差动滑轮的组件的半径分别为 a 和 $0.9a$，如果

(a) 链条本身的重量可以忽略，

(b) (更现实一些)计及链条自由地悬着的部分(PQR)具有重量 w 这事实，问要在链条自由地悬着的部分的一边向下施加多大的拉力才足以防止负载下降(忽略摩擦)？

4-15 力 $\mathbf{F}$ 的分量为 $F_x=3\text{N}$，$F_y=4\text{N}$，和 $F_z=0$，作用点在 $x=0$，$y=5$

米，和 $z=4$ 米．求 **F** 对原点的转矩 **M** 的大小和方向（用方向余弦——即 **M** 与坐标轴夹角的余弦——来表示）．

4-16　用定性的但是细心的分析说明竖直下推自行车踏板的动作如何产生一水平力使自行车加速向前行．（显然，后轮与地面的接触在这一情形中起着主要作用．）

因而自然将是非常自洽也非常简单的，所有天体的巨大运动都在引力吸引下进行……而差不多所有它们的粒子的微小运动都在某些其他的吸引和排斥力之下进行……

牛顿，《光学》(1730)

第五章　自然界中的各种力

§1　力的基本类型[①]

所有的力都来自不同物体间的相互作用．看来很久以前，这些相互作用必定多得弄不清，近代科学发展的最重要特色之一是越来越认识到只有少数几种基本不同的相互作用．目前我们所知道的力有：

1．引力，由于物体的质量而在物体之间产生的．

2．电磁力，由于静止的或运动的电荷而产生的．

3．核力，亚原子粒子之间，当距离小于约 10^{-15} 米时的主要相互作用．

即使是这样程度的分类，也可能被证明是不必要地过大；理论物理学家的梦想是找出一种统一的概念，使我们能够把**所有**这些力认作同一事物的各个方面．阿尔伯特·爱因斯坦的晚年大部分花在这问题上，但无所获．目前，假设有几种不同类型的力似乎是有意义的，而且也是方便的．

在以下的几节中我们将简单地看看这三种基本类型的力，举一些物理系统为例，说明这些力在其中是重要的．在我们所作的分类之外，加上我们将称之为"接触力"的一类力——这类力出现在普通物体的机械接触中——不仅有用，而且从经典力学的观点

---

① 关于这一题目的一个极佳的背景资料是 PSSC 影片《Forces》(力)，Zacharias 制，Education Development Center (教育发展中心)，Inc.，Newton，Mass.，1959 出品．本章的标题是借用来的，那是刚好 100 年以前大科学家迈克尔·法拉第在伦敦所作一系列通俗讲演的标题．这书的纸面封皮本尚可得到(Viking. New York，1960)，颇为明快易读．

来看是非常重要的．虽然这些力只不过是大量原子之间的基本电磁力的宏观表现，它们对于描述力学现象中的大多数常见的相互作用是如此有用，把它们单独归类是值得的．

§2 引　力

我们的全部经验使我们想到物质客体之间的引力作用是一个普遍现象．它总是一个吸引性的相互作用．地球作用于它表面附近不同物体上的力可以用，例如，弹簧秤来作比较，在各种情形下，这些引力都正比于受吸引物体的、称为质量的属性．(这一熟知的、似乎简单的说法，其内容和含义将是后面几章中要详论的．)

牛顿所得出的引力相互作用的普遍规律说，任何粒子吸引任何其他粒子的力正比于两粒子质量的乘积，而与它们之间的距离的平方成反比，并作用在两粒子的连线方向上．实验上发现，这力与受它作用的粒子的速度没有测得到的依赖关系①．质量为 m_1 的粒子施加于质量为 m_2 的粒子的力 $\mathbf{F}_{12}$，其大小可写为

$$F_{12}=G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2} \tag{5-1}$$

r_{12} 是从 m_1 的中心到 m_2 的中心的距离，G 是一个比例常数，称为引力常数．这一力的规律适用于质点和有限大小的均匀球．G 的数值是 0.677×10^{-10} 米^3/千克·秒^2．

(5-1)式以及它前面的文字表述，是本书中一物理定律的定量表示的第一个例子．值得费几句话讨论一下它究竟说些什么．在物理学中，每一个实验关系的数学陈述不外乎说明一些数之间的关系．m_1 和 m_2 无非是用某种任意选定的单位表示的粒子 1 和 2

① 广义相对论中分析了对这一速度无关性的背离．只有当引力作用中量级为 v^2/c^2（c 为光速）的效应能被探测到时，这些背离才是可察觉的．

的质量的**数值量度**. 质量是为了帮助我们描述自然界而发展的一种概念——力和距离的概念也是如此.但我们面对的总是一些数.因此,与(5-1)式完全等价的陈述是:

任何粒子吸引任何其他粒子的力F的数值量度与它们质量的数值量度之积成正比,而与它们之间的距离的数值量度的平方成反比.

任何时候当你读到一个物理关系的数学陈述时,记住上面那句话中**数值量度**一词.它们差不多永远不会明白地写在陈述里面,然而如果没有它们,就有把这一陈述的真实内容看过头的危险.例如,引力定律的通俗简略陈述的习惯形式是这样开始的:"两粒子之间的相吸引力与它们的质量的乘积成正比…".人们也许要问,两质量的乘积是什么意思?那是一种什么样的物理量?甚至非常高明的科学家,由于力图在这类并合的"量纲"中看出某种特殊意义,也不时地陷入几乎是玄学的辩论中去.只要使自己记住,象(5-1)式这样的方程究竟表示什么,就能避免任何这种混乱.

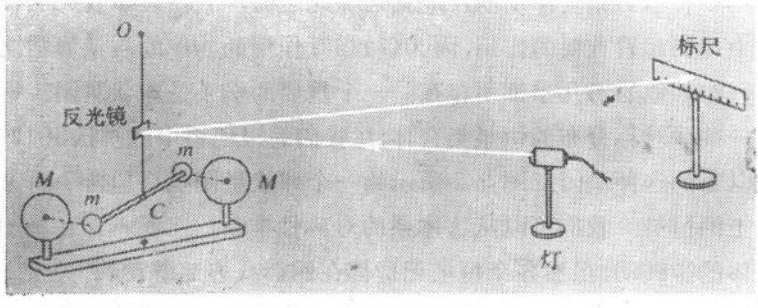


图 5-1 重力扭秤实验简图.

测量G的经典实验是英国物理学家H.卡文迪许于1798年做的.这实验包含测量不太大的实心铅球之间的引力,用力一巧妙的机械装置——扭秤——来测出这微小的吸力.图5-1示明这装置的基本结构.两个小铅球安在一轻质杆的两端.用一根系在杆

的中点的极细金属丝，把杆沿水平方向悬挂起来．小铅球的附近对称地安放着两个较大的铅球，这两对大和小质量之间的引力使杆在水平面上转动．当金属丝的扭转所产生的回复效应恰好与相吸引的力平衡时，杆就停在一个平衡方向上．一束光，从附在丝上的一面小反光镜反射回来，把这微小的角偏转在远处的墙上放大为由反射光形成的光点的相当大的移动（“光杠杆”作用）．这一类型的扭秤装置，配合着光杠杆，是所有机械装置中最灵敏的装置之一．

在实验室条件下引力是异常之弱的，这些实验所包括的都是一些相对来说较小的物体之间的相互作用，对它们进行探测和量度都需要异常细致的操作．例如，现代型式的卡文迪许装置用了两个小的悬挂铅球，每一个的质量为 15 克，大球则每个 1.5 千克．小球与大球之间从中心到中心的距离约为 5 厘米．在这些条件下，相吸的引力约仅为 6×10^{-10} 牛顿．一根人发的重量都差不多比这大 10,000 倍！

尽管引力相互作用内在地就是如此之弱，它在大多数天文体系中却仍起着首要的作用，因为(1)相互作用的物体的质量异常之大，(2)其他的力几乎都不存在．一个重要的例子是球状星团．这是一些球对称分布的恒星集合体；在我们的银河系中已辨认出 120 个以上的这种星团．图 5-2 所示的一个球状星团也许包含一百万以上的恒星．我们可以从这体系的对称性推断，可能不存在星团整体的净转动，虽然各个恒星无疑都在四面八方地游动着．关于一个个恒星的真实运动的直接实验证据非常贫乏．如果我们看看靠近星团边缘上的一个“静止的”恒星，所有其他恒星的合力（由于对称性）应当是指向星团中心的，这将使该恒星加速，并在中心处达到最大速率．当这恒星到达星团中心时，作用于它的合力将趋于零（仍按对称性考虑）．由于已经得到了相当大的速率，这恒星将

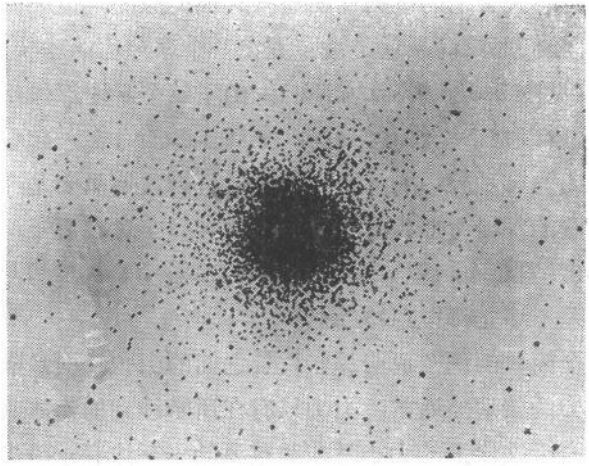


图 5-2　球状星团，由于引力而聚集在一起（武仙座球状星团 $M13$）.

穿过中心，并由于所有其他恒星的吸引力的合力（在任何时刻这都是一个指向星团中心的合力）而逐渐慢下来. 这恒星最后到达沿直径与出发位置相对的一点. 因此，一颗恒星可以沿着直径经中心而作振动. 由于星与星之间的间隔远远大于任何一颗星的直径，它们之间发生碰撞的机会是非常小的，即使在中心处也是如此（虽然照片并没有使人联想到这一点）.

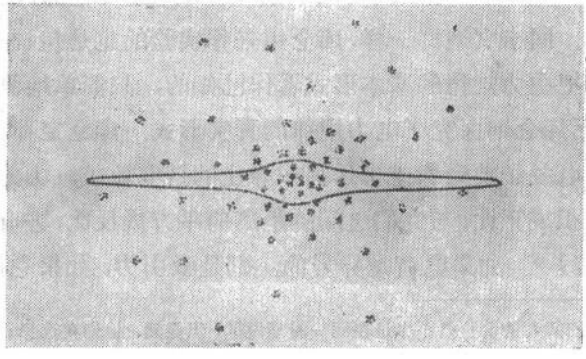


图 5-3　与我们银河系相关的一群球状星团简图.

有清楚的天文上的证据说明还有其他类似的、但规模更大得多的体系.我们的银河系就是被包围在一个球对称的球状星团"晕圈"中的（见图 5-3 中所示的简图）.由于每个星团都保持着它的密集特征,所以每一个都可以看作一"质点",而合在一起它们就构成球状星团的某种超星团.直接观测的证据表明星团是在各个方向上移动着的,没有理由怀疑单个星团可以穿过我们银河系的中心作振动(就象单个恒星可以在星团中振动一样),星与星相撞的机会仍然差不多是可以忽略的.

这两个简单的例子说明那些质量之间的引力吸引是唯一控制着运动的力的情形.通常,引力只有在所牵涉到的物体其中至少有一个具有天文学上的大小时才是重要的——注意正是由于地球属于这一类,重力才在我们日常生活上施加主要影响.我们可以想到这普遍规律的某些例外,例如中性的氢原子在它们的相互引力吸引之下聚集而形成一原始星系的最初阶段.

§3 电力和磁力

带电粒子相互作用的力在自然界中具有根本的重要性.电力的基本规律是 19 世纪法国物理学家 C. A. 库仑发现的,因而用了他的名字.同卡文迪许一样,库仑用来作实验的也是扭秤①.但是,卡文迪许把引力规律的基本形式看作已知的,只简单地测定了引力常数,而库仑则探究了电力规律的真实形式.库仑定律说:一个静止的带电粒子要吸引或排斥另一静止的带电粒子,力的大小与电荷的乘积成正比,与它们之间的距离的平方成反比,方向沿着两粒子的连线②.如果电荷是异号的,则是吸引力,如果它们同号,

① 他们两人的实验差不多是在同一时期做的,但显然,他们在选择和发展扭秤的技术方面是彼此独立地进行的.

② 注意,我们默契地以为应在恰当的地方插入"的数值量度"一词.

则是排斥力.如果令 q_1 和 q_2 代表粒子所带电荷，则粒子 1 施加于粒子 2 的力的大小由下式给出：

$$F_{12}=k\frac{q_1q_2}{r_{12}^2} \tag{5-2}$$

与万有引力定律的形式完全一样. 电荷的量度单位是库仑(C). 库仑定律中的常数 k 之值为 9×10^9 牛顿·米^2/库仑^2(N·m^2/C^2).

库仑是一个很大的电量——比通常在自然界中发现的孤立电荷的电量要大很多. 一库仑的电荷从离开它 1 英里远的同样电荷受到的排斥力约为 3500 牛顿(约 800磅). 然而一个直径为 1/8 英寸不带电的水珠在它的氢原子和氧原子的原子核中却含有差不多 1000 库仑的正电荷，由等量的带负电的电子平衡着(你自己核对一下这一点).

比较一下电力和引力的大小是很有意义的. 考虑，例如，早先提到过的引力扭秤. 在每一铅球中只要每10^{18} 个电子中少掉一个电子，则由于球上电荷的不平衡而产生的电力就可与引力相比. 通过这类例子，我们可以意识到，与引力相比电力强度的巨大.

虽然重力总是存在着，在所有的化学和生物过程中，电力是具有压倒优势的最重要的动因，在日常所见大小的(即那些小于天文尺度的) 物理客体的相互作用中也是如此. 是电力把原子聚合在一起，是它赋予物质客体以刚度和抗张强度，它又是化学反应中唯一有关的力.

前面我们已经讨论了静止的带电粒子之间的电力. **运动着**的带电粒子之间也互相有电力作用. 但在这一情形下还出现另外一种力，我们称它为磁力. 它有如下的重要性质：它与电荷的速度有关，而且总是在垂直于带电粒子运动的方向作用于带电粒子上. 我们将在第七章中更为精确地讨论这种磁力.

显示出磁力的一个例子是从太阳射出来并趋近于地球的质子

(带正电)的轨道. 图 5-4 示明当质子经过地球磁场的附近时，它们在赤道平面中接近地球的可能轨道. 有把握认为地球本身的磁场也是由于地球内部带电粒子运动而产生的结果，这是一个很基本的例子，说明运动电荷之间的电磁相互作用.

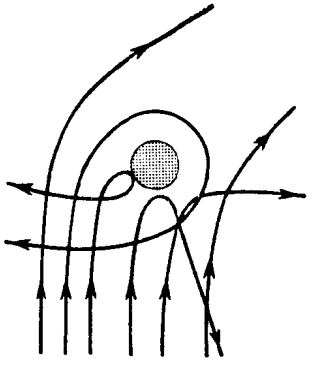


图 5-4 动能约为 14 千兆电子伏的质子接近地球的磁赤道面处并被地球磁场偏转的计算轨道.

实际上，根据相对论的观点，磁力并不是什么新的和不同的东西. 相对于一个观察者是运动着的电荷对于另一观察者来说可能是静止的. 因此，如果我们承认相对论的基本思想，那么我们就可以预期有可能把在一个参照系中观察到的磁力同在另一参照系中观察到的库仑力联系起来. 有关这一思想的详细阐述可参看，例如，本丛书的**狭义相对论**那一卷.

§4 核　力

虽然电力承担着把原子结合在一起的作用，但它们本身却妨碍着原子核的存在. 因为我们知道，原子核含有质子，在电性上互相排斥而又没有产生抵偿作用的负电荷使之稳定. 但自然界提供了另一种力，称为**强相互作用**，是它把原子核中的核子(质子和中子)束缚在一起的. 虽然在足够短的距离内它比库仑力要强得多，它的性质直到最近还是相对地不为人所知的，原因是它的极端短程性. 对于大于约 10^{-13} 厘米(=1F——费米)的距离，核力很快就变得可略而不计地小了，但在小于此距离内，它却超过核子之间的一切其他相互作用而占支配地位. 这是一种异常复杂类型的相互

作用，直到大约0.4费米它还是吸引力，距离要是再小它就成为强排斥力了．它部分是非中心力——即，不同于引力和库仑力，它的方向并不在相互作用的粒子的连线上．有点象库仑力只存在于带电粒子之间那样，强的核相互作用只存在于某一类粒子之间，这类粒子称为**强子**（希腊文 hadros：重，庞大之意）．这类粒子，除核子本身外，还包括若干稍轻一点的粒子（介子）和稍重一点的粒子（重子）；所有这些粒子都是不稳定的，寿命极短（10^{-8} 秒或更短）．

另外还有一类与核相互作用关联的力，我们知道它存在着，但还没有十分了解它．它被称为"弱相互作用"．这种力的力程甚至比强相互作用的力程还要短，而它的强度则估计只有强作用的 10^{-15}．这一弱作用只有在某些类型的核过程如 β-衰变中才是重要的．

把相距为 10^{-15} 米（即离开约一核子直径）的两质子之间的各种不同相互作用力的大小作一比较是有教益的：弱的核相互作用

相互作用类型	力的近似值，牛顿
引　力	2×10^{-34}
库仑力	2×10^{2}
核力（强）	2×10^{3}

的大小，在它有效的范围内，量级约为电力的 10^{-13}，但是即便如此，它也大于算得的、相隔同样距离的两粒子之间的引力，约为后者的 10^{23} 倍．

核力在讨论牛顿力学时实际是没有地位的．确实，就是"力"这个词在有关核的相互作用方面也是成问题的，因为任何关于两核粒子之间的力的说法，最好也只是一个相隔甚远的间接推论．我们无法援引任何可与卡文迪许和库仑关于引力和电力的观测相比的直接观测．此外，核力的问题象所有其他亚原子物理中的事物

一样，需要量子力学的概念和方法，而在这理论中诸如力这样的概念差不多是没有什么用的．因此，当我们说到经典或牛顿力学时，我们真正关注的是，在其中有关的相互作用类型只是电磁的或引力的那些情形．

§5 中性原子间的力

一个极其重要的事实是，不同于引力，各个粒子间的电力既有吸引性的也有排斥性的，原因是存在着两种不同号的电荷．电荷的这一二元性使得有可能存在着宏观上电中性的物质和由于有同样数目的质子和电子而呈现中性的单个原子①．

所以，从表面上看，两中性原子在分隔开时完全不会互相施加力(通常可忽略的引力除外)．但实际上不然．只有当一原子中的正和负电荷都位于同一点时**才会**如此．然而我们知道，电子和原子核是稍为分开一点的．此外，原子也并不是一个刚性结构；虽然当原子孤立时电子所带负电荷分布的"重心"与带正电的原子核重合，但如果有另外的粒子趋近时这一情况是会被扰乱的．这方面的一种表现是中性原子之间存在一特征性吸引力——以荷兰大物理学家 J. 范德瓦耳斯命名的力．这力在两原子互相接近时迅速增大，比 $1/r^2$ 快得多——或者(用另外一种略为不同的说法) 这力随着距离的增加而比两异号电荷之间的吸引力快得多地减小下来．

范德瓦耳斯力的基础当然仍是点电荷之间力的反平方定律，但其详细特性不用量子力学是不能计算的．计算结果表明，这是同类中性原子之间按 $1/r^7$ 变化的一种力．

但是，还存在另一种力，它在人们企图把中性原子挤压到一起

① J. G. 金曾根据直接研究一容积的气体的中性程度，证明在普通物质中正和负电荷的基本单位相差不会超过大约 $1/10^{22}$(私人通信)．

时开始起作用.这是一个正的(排斥)力，随距离减小而增加，甚至比范德瓦耳斯力更快.其结果是，一中性原子施加于另一中性原子的力，作为它们中心之间距离 r 的函数，有如图 5-5 那种形式的变化.在 r 的某一数值处，力经过零这点,这数值(r_0)可以想作是两个原子的半径之和——即一个原子的直径,如果两原子相同的话.

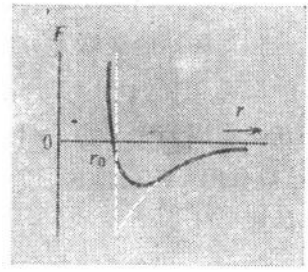


图 5-5　两中性原子间的力,作为它们中心之间的距离的函数,定性的图形表示.

当 r 继续减小到 r_0 以下时 F 的排斥成分增长得如此之陡峭，使原子差不多象硬球；这种情况的一个表现是凝聚物的高度不可压缩性. 图 5-5 中的虚线指明对原子间的力予以理想化的结果，在 $r<r_0$ 时相应于完全不可穿透性,而在 $r>r_0$ 时相应于范德瓦耳斯吸引力. 这一模型可以很有效地用于分析真实气体与理想气体定律之间的偏离.

由于所有在经典力学中要处理的物体差不多都是电中性的，这一基本的原子相互作用——中性粒子间的电力——具有根本性重要意义,这是我们接下去要讨论的.

§6 接 触 力

我们要处理的许多物理体系都是日常经验中的普通物体，它们受到诸如摩擦,杆和梁的推和拉,绳和缆的张力等作用力. 每一个这种力都包含着我们朴素地称之为与被观察物体的物理"接触"的概念.

例如考虑静止在水平桌面上的一本书. 这书是由书和桌子的

表面层邻接部分的原子之间无数电磁相互作用的总和支承着的. 对这些相互作用的亚微观分析复杂得使人不敢去做. 然而，对大多数目的来说，我们可以不理会这一复杂性而把所有这些相互作用归并在一起成为一个力，叫它做**接触力**. 这是一种比较人为的分类，但很有用. 广义地说，所有我们熟悉的、具有机械性质的力，包括液体或气体施加于一个面上的力，都是这一意义下的接触力. 我们在上节中的讨论清楚地说明它们是电**中性**的物体间相互施加作用的电力. 当一光滑的硬物紧压着另一光滑的硬物时，由于正负电荷分布的变形，就产生出这种力. 这种力的特性是，它们随物体间距离的变化比带有电荷的物体间按反平方律的变化要快得多. 因而，接触力实际上是非常短程的力；当物体间相隔大于大约一原子直径时，它们立刻下降到可忽略的大小. 但是，它们确实与分开的距离有系统的依赖关系. 这一事实表明，我们关于"接触"的概念的基本含义并非那么明确的. 如图 5-6 所示：由于互相间的电力排斥而看起来是分开的两个带电球与看起来是接触着的两个不带电的同样的球，它们所表示的情况并无**根本性**区别. 两种情形都是上面的球居于最终的平衡位置，作用于它的总电力正好同它的重量平衡①. 对于任何更小的距离，电力都要超过重量. 但是如果我们把力随距离的这种变化展示出来如图 5-7，我们将看到一种极大的差异. 对于不带电的物体，从可以略而不计的力到极为巨大的力之间的过渡是如此之突然这一事实，支持了我们如下的

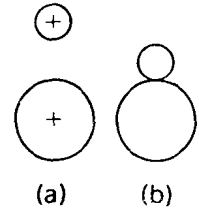


图 5-6 (a)两带电球，显然未接触，上面那个球的重量①为电的排斥力所平衡. (b)两不带电的球，看起来是相接触的. 在其尺寸放得足够大时，这种明晰的几何边界接触的假象就会消失.

① 作者此处所说的重量实际是指前章中一再强调不是重量的重力 F_g，以后凡是提到重量的地方，都是指重力 F_g，不再另注——译者注.

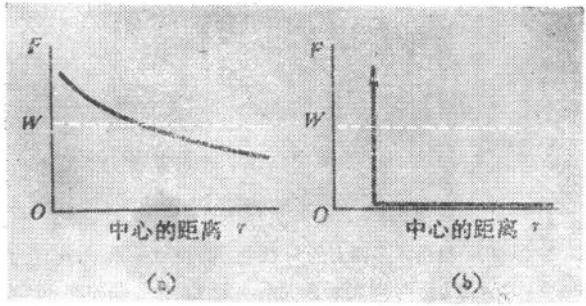


图 5-7　(a)图 5-6(a)中带电球之间的作用力对距离的定性曲线. 接触是"软"的——即 F 与 W 之差缓慢地随 r 而变. (b)图 5-6(b)两球不带电的情形下相应的比较曲线. 接触是"硬"的——只在一异常小的 r 值范围内出现 F 与 W 接近相等的情况.

印象：物体是完全刚性的，具有一个轮廓清楚的几何边界，在这边界外没有相互作用. 然而，不要忘记，这是一种理想化，而只要测量够精细，就会发现力随距离的变化总是连续的.

§7　摩擦接触力

前节的讨论集中在把两物体简单地推到一起时起作用的接触力. 这种力是垂直于接触面的——我们称之为**法向力**，法向是按这词的几何意义说的. 但更为重要的和使人感兴趣的是切向的摩擦力，这力出现在我们企图沿一表面往一旁拖一物体的时候. 图 5-8(a)所示是静止在水平面上的一块物体，它的重量由法向接触力 N 支持着. 现在我们施加一水平力 P. 假定 P 的大小逐渐地从零增加着. 开始，好象没有发生什么；那物体丝毫不动. 根据对平衡情况的分析，我们知道这意味着有一个与 P 相等反向的力通过物体与表面的接触而存在着. 这就是摩擦力 $\mathcal{F}$. 它自动地调节以平衡 P，正象当我们有意从物体的顶部在竖直方向往下使劲压它时，法向力 N 会自动地增加一样. 在这两种情形下，我们都可以设想

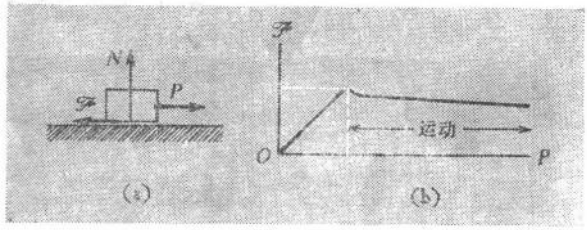


图 5-8 (a)在一粗糙水平面上的一块物体，受到一水平方向拉力 P. (b)摩擦力$\mathscr{F}$与 P 的函数关系，定性曲线. 条件$\mathscr{F}=P$ 直到 $\mathscr{F}=\mu N$ 这一点都可以满足. 此后，平衡必然要被破坏.

沿接触面的电荷分布有了微细的变形，恰足以产生所需的力. 但是，当P增加到超出某一定值时，摩擦力$\mathscr{F}$不再能同它相匹，这时平衡被破坏而运动接着发生. $\mathscr{F}$对P的曲线大致如图 5-8(b). 一旦$\mathscr{F}$达到其最大极限值，它甚至会在P进一步增加时先下降. 不过此后它将趋向于保持一差不多是不变的常数值. 然而，整个$P>\mathscr{F}$的区域都与运动相应，而细说起来 $\mathscr{F}$ 可能与速度有关. 唯一完全确定的是静力平衡区域，在整个这区域内可令 $\mathscr{F}=P$，如图 5-8(b)中曲线上 45° 线所表示的部分. 另一要注意的特点是以下的经验事实：$\mathscr{F}$的极限值粗略地与法向力N成正比，因而两者之商——摩擦系数(μ)——是两相接触面的一个特性.

$$\mathscr{F}_{\text{最大}}=\mu N \tag{5-3}$$

以上的讨论适用于两个固体表面的接触. 如果接触是经过润滑的，性质就很不同了. 事实上这时面对的是一流体（液体或气体）与一固体相接触时的特性. 所谓**流体摩擦**的基本特性可以这样来研究：让一流动的流体以一定的速率 v 流过一固定的固态物体[见图 5-9(a)] 并测出后者所受的力. 在 v 值的很大范围内，这一流体摩擦可以很好地用下列公式来描写：

$$R(v)=Av+Bv^2 \tag{5-4}$$

其中的 A 和 B 对于一给定的物体和一给定的流体是常数. 第一项

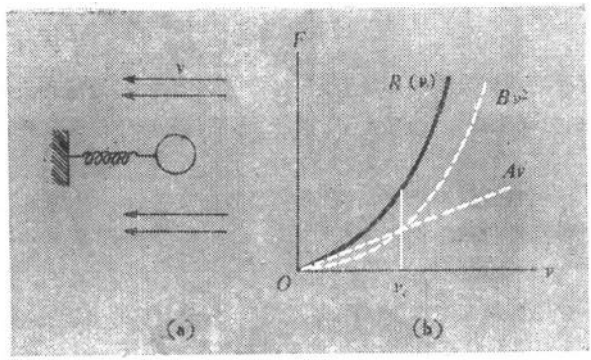


图 5-9 (a)在流动的流体中一个球所受的力.(b)流体摩擦的合力由分开的两项组成,这两项分别与相对流速的一次方和二次方成比例.

依赖于流体的粘滞性，第二项则与所产生的湍流有关. 由于第二项同第一项之比与 v 成正比，可知在速率足够高时湍流所产生的流体摩擦占主导,不管比值B/A多么小,同样的考虑保证在速率足够低时摩擦力主要来源于粘滞项,与 v 成正比[见图 5-9(b)].

结 束 语

在这一章中我们对三种主要类型的相互作用给予了简单说明并指出它们占主导作用的领域. 扼要重述一下: 核力只在原子核的距离内重要,引力只在牵涉到具有天文尺度的物体时重要,而几乎一切物体最终都依赖于电磁相互作用. 学习物理学实质上是要去了解这些相互作用以及所有由此产生的推论. 在力学中大部分是有限的目标:认为力是给定的,而考虑它们在其中起作用的各种动力学情况. 但是,我们将要讨论两种经典事例——引力和 α-粒子的散射——在这些事例中牛顿力学提供了找出力的基本规律的线索. 本章提供了一种预习，因为它概述了我们目前的知识状态而未对如何得到这些知识作详细讨论. 真正的工作还在后头.

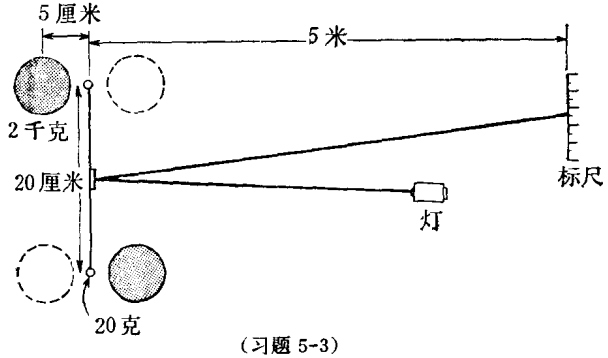
习　题

5-1　在地球到太阳的连线上，离地球多远的地方，地球和太阳施加于一个质量的引力成为相等反向的？把这一结果与月球绕地球的轨道半径作比较.

5-2　一根铅垂线，受到离它 20 英尺处停放着的一辆 10 吨卡车的引力吸引，问铅垂线被拉离正常竖直方向的偏角(用弧度表示)是多少？你想这一影响能被探测出来吗？

5-3　在一套卡文迪许型仪器中(见图)，每个大球为 2 千克，每个小球为 20 克．小球的连结臂长为 20 厘米，小球和与它相近的大球的球心之间的距离是 5 厘米．悬丝的扭转常数为 5×10^{-8} 米·牛顿/弧度．悬置系统的角偏转根据离它 5 米远的标尺上反射光点的位移来推算．(记住，反射光方向的变化是镜子所转角度的两倍.)

当大球从它们的初位置移动到另一边的等价位置(虚线)时，观察到光点的平均位置移动了 8 厘米.



(习题 5-3)

(a) 忽略每个小球所受较远处大球的影响，按照这些数据推算 G 的数值.

(b) 如果考虑较远大球的影响，估计一下(a)中结果所需的百分修正.

5-4　原来的卡文迪许实验是用大尺寸的仪器来做的．为了使引力和转矩尽可能大，这是自然的．然而，这要求用结实和刚硬的线来悬挂质量．很久以后(1895 年)，C. V. 博伊斯用熔石英的细丝来做悬线，制成一台小型仪器．看看仪器所能达到的灵敏度如何依赖于它的尺寸，是一个有益的练习

题. 设想有两种形式的卡文迪许仪器 A 和 B，它们都用实心铅球，B 中所有质量的半径和间距以及扭丝的长度都相对于 A 按某一因数 L 的比例缩小. 然后，为了使每一台仪器都达到最大灵敏度，我们设计时用尽可能细的扭丝，只要它能承受悬置质量的重量而不断掉. 对于给定了材料和圆截面的扭丝，最大可能悬置负载与 d^2 成正比，d 是它的直径，而它的扭转常数与 d^4/l 成比例，l 是它的长度. 利用这些资料，比较一下用这两台不同尺寸的仪器所能得到的最大偏转角.（记住，扭丝的**长度**也同样有一个尺度因数 L 的差别.）

5-5 按原来的玻尔理论，氢原子的半径是 0.5 埃.

(a) 相距为这个距离的质子和电子的库仑力是多少？引力是多少？

(b) 质子和电子必须离开多远，它们间的库仑力刚好与距离为 0.5 埃时的引力相等？这一距离可以同什么熟悉的天文距离相比？

5-6 假使能把电子加给地球和月球，直至产生出来的库仑力刚好与引力平衡. 问达到这种情况时，电子的最小**总**质量是多少？

5-7 对一个在纬度 45° 上生活的人来说，在白天，月球施加于他的引力的最大值和最小值之间的近似分数差值是多少？引力的这种改变是由于地球的转动使人与月球间的距离发生变化而引起的. 这种力的效应在自然界中的一个表现形式是什么？

5-8 你知道库仑力和引力两者都遵从一反平方定律. 假定向你提出：引力的来源是正电荷的自然单位（如质子所带的）同负电荷的自然单位（如电子所带的）之间有微小差别. 因而，含相等数目的质子和电子的“中性”物质，事实上并不完全是中性的.

(a) 正的基元电荷同负的基元电荷之间应有多大的相对差值才能使普通“中性”物质之间的“引”力具有正确的量值？怎样用实验室实验来寻找这样一个差值？

(b) 这个理论站得住吗？

5-9 (a) 丁文（第 150 页）引述了两个紧聚在一起的核子的核力之值，但也指出，借助于力来描述核相互作用是不很实际的. 你能够提出任何一种可以测量这样的核力的方法吗？

(b) 按照最早和最简单的核相互作用的理论描述之一（汤川秀树所作），距离大的两个核子之间的吸引力由下式给出：

$$F(r) = -\frac{A}{r}e^{-r/r_0}$$

其中，距离 r_0 约为 10^{-15} 米．常数 A 约为 10^{-11} 牛顿·米．问质子与中子之间的距离大约多大则核力与这两粒子之间的引力相等？

5-10　你能够想出任何体系或过程，在其中引力、电磁力和核力都起着重要作用吗？

5-11　如正文中提到的，中性分子之间力的吸引部分(长程)按 $1/r^7$ 变化．对于不少分子，这种范德瓦耳斯力的数量级可用下列方程很好地表示出来：

$$F_{VW}(r)\approx -10^{-76}/r^7$$

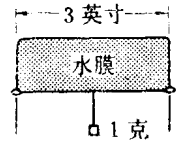
其中 F_{VW} 用牛顿表示，r 用米表示．将下列情况下的范氏力的大小同两个基元电荷间的库仑力[(5－2)式，$q_1=q_2=e=1.6\times10^{-19}$ 库仑]作比较：

(a) $r=4$ 埃．(这一距离大约等于一个氧原子或氮原子的直径，因而，它刚刚超过碰撞时两个这种分子中心的最接近距离．)

(b) r 之值相应于标准温度和气压下一气体中分子间的平均距离．

5-12　液体膜的表面张力似乎是接触力的最弱形式之一．一根拉伸着的金属线的张力似乎是接触力的最强形式之一．然而，当我们用单个原子在接触中的力来表示时，它们看来并不如此之不同．在这种看法下，试用下列数据来计算它们之值：

(a) 如果在一个宽 3 英寸的矩形线框和一根自由滑动的横线之间形成一层水膜(见图)，横线上须加约 1 克的重量来防止水膜收缩．这一收缩力可归结为沿着水膜每一边的单分子层内原子的接触．假定分子宽 3 埃并且是密堆集的，计算每一分子的力．

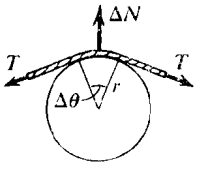


(习题 5-12)

(b) 当把一个约 10 公斤的重量挂在一根直径为 0.025 英寸的铜线下端时，铜线就断了．首先，计算这一致断力(用吨/英寸^2 表示)．如果假设裂痕是铜线的一个水平横截面的上边和下边的原子之间接触的断裂，计算每一原子的力，设一个原子的直径约为 3 埃．

5-13　一个历史悠久用来近似地找出一根长的均匀棒或杆的中点的巧妙方法，是用两个食指在棒(或杆)的任意两点将它水平地支着，然后把手指移到一起．(当然，单用一个手指来直接找它的平衡点也能很好地做到！)用你所知道的关于静力平衡的基本原理和摩擦力的一个性质来解释这一巧法的工作原理；所说摩擦力的性质是：摩擦力有一最大值，等于一常数 μ(摩擦系数)乘以垂直于两物体间接触面的力的分量．

5-14 (a) 一根紧绷着的绳子与一根半径为 r 的圆棒(滑轮)接触，绳子盖住的一段弧张一小角 $\Delta\theta$(见图)．证明绳子沿径向压在滑轮上的力(因而，滑轮反推绳子的法向力 ΔN)等于 $T\Delta\theta$．



(习题 5-14)

(b) 从而证明，单位长度上的法向力等于 T/r．对于一定的 T 值，这是一种当 r 减小时变得更大的压力．(这有助于解释为什么在用绳子紧捆包裹时绳在包裹的棱角处勒得最深，棱角处的 r 是最小的．)

(c) 如果接触处不完全光滑，则弧两端的张力之值在发生滑动以前可相差某一量 ΔT．ΔT 之值等于 $\mu\Delta N$，其中 μ 是绳与棒(滑轮)间的摩擦系数．试据此推出指数关系

$$T(\theta)=T_0e^{\mu\theta}$$

其中 T_0 是施加于绳的任意一段弧 (θ) 的一端上的张力，而 $T(\theta)$ 是在另一端的张力．

(d) 上述结果表明，通过把绳子缠绕在一个圆柱体上，绳子有经得起大的张力的可能性，这是自古以来就被水手们利用的一种现象．假定，举例说．绳子与船坞上系缆柱之间接触处的 $\mu=0.2$．设 $T_0=100$ 磅，计算与绳绕柱一，二，三，四整圈相应的 T 值．

(注意到 T 与 T_0 成比例是重要的．这一点使得水手们可以通过把一根绳绕在一个连续转动的机动鼓轮上随意产生一个大的拉力或不施加力．这种装置可视为一种力的放大器．)

5-15 在一个非常灵敏的扭秤实验中，如卡文迪许实验，由于缓慢气流的流体摩擦引起的、推动悬置系统的杂散力可能很重要．为了作出定量计算，考虑习题 5-3 中所描述的重力扭秤实验．对于所说尺寸的悬置球($r\approx0.8$ 厘米)，由于速率为 v 的空气气流而引起的力近似地由下式[(5-4)式]给出

$$R(\text{牛顿})=2.5\times10^{-6}v+5\times10^{-5}v^2$$

其中 v 用米/秒表示．计算使空气气流产生的力与这一实验中作用于球上的引力(即一个 2 千克的球施加于两中心相距为 5 厘米处的一个 20 克的球上的力)相等的 v 之值．

(**提示**：不要为解 v 的二次方程操心．只要找 v 的两个值，使对 R 作贡献的两项**分别**都等于引力即可．这样得到的两 v 值中较小的一个显然已足够妨碍实验．)

说每种物品都被赋予了一玄妙的品质，它以之为根据而行动并产生显见的效应，等于什么也没有说。但是，根据现象推出两三条关于运动的普遍原理，然后说明所有实在物的特性和行动如何随那些原理而来，就是哲学的一大进步，尽管那些原理的根由尚未被发现。

牛顿，《光学》(1730)

第六章　力，惯性和运动

§1 惯性原理

在前几章中，物质、运动和力量作为分开的课题来处理的．现在我们来讨论牛顿动力学的中心问题：物质客体的运动是如何受到力的影响的？作为开端，我们提出一个表面看来是简单得多的问题：关于一个不受力的物体的运动，我们能说些什么？正是由于伽里略对这问题的分析，动力学科学才真正开始①．

我们在第四章中看到过，静力平衡情况的研究如何引导我们到一个基本原理：对于一个静止着的物体，总的作用力为零．有什么比这更自然的事：把这说法反过来而推断，如果一物体所受的合力为零，则物体一定保持静止——而作为它的一种推论，必然会断言，要维持一物体运动，必须保持一合力．毕竟经验证明的是，在地球表面上运动着的物体，如果听其自然，是会逐渐停下来不动的，而要保持一物体稳恒地运动着，必须不断地施加作用力．但是，伽利略第一个认识到，超出普通经验的外推是可能的；这一点在他的惯性原理中表达了出来．最初，这原理简单地断言，一物体如果免于受到一切阻力，它将在一水平面上以不变的速率继续

① 无疑，你在读这一章之前已用牛顿的定律解过许多问题．不要因此而假定下面的讨论是多余的．要动手做点什么的愿望——写下方程并运用它们——是非常合理的．一个物理学理论的定量应用是这门科学的不可或缺的部分；物理学不是一种旁观者的娱乐．但要获得真正的洞察和理解——方程是从哪里来的？它们真正说些什么？——人们还必须考查其基本假设和现象．物理学中的某些最巨大的进展正是这样发生的．爱因斯坦由于对时间的本性深入思考而达到狭义相对论．而牛顿．当他有一次被问到他是如何获得关于自然界的问题的洞察时，回答道"不断地对它们深思．"

下去. 伽利略本人就认识到，这一断言只是在极限意义下才真确. 因为一真正的水平面必然与地表面相切；因而，如果延伸得足够远，一定看得出它是在向高处走(图6-1)，而沿着它向外走去的物体必然最终会慢下来①.

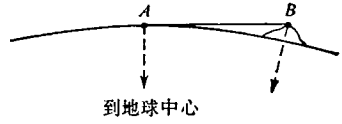


图 6-1　地球表面上惯性运动的限制. 一物体水平地从 A 点出发沿一真正的直线前进，可能在一小山顶上 B 点停下来. 在这过程中它必然会慢下来.

随后，艾萨克·牛顿在《原理》一书中说明他的运动"第一定律"时，用普遍形式陈述了惯性原理："每一物体都保持它的静止状态，或沿一直线的匀速运动状态，除非它受到作用力而被迫改变那种

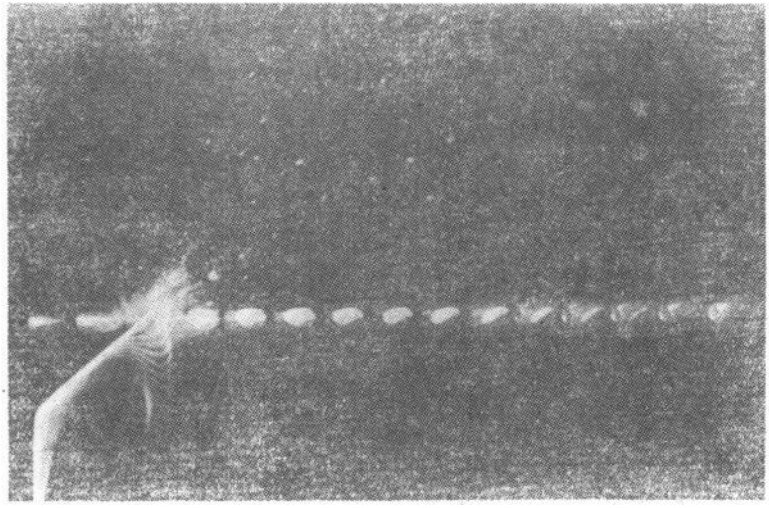


图 6-2　一个匀速运动——一颗子弹的飞行，速率约为 1,500 英尺/秒；每秒 30,000 次闪光的频闪观测照象.

① 有关伽利略自己对这些事的讨论见他的《*Dialogues Concerning Two New Sciences*》(H. Crew 和 A. de Salvio 译). Dover Publications, New York.

状态."这是一个大家熟悉的说法，可能我们都在第一次遇到力学时学过，图 6-2 是它的一个实际的例证. 但它真正说些什么呢？我们必须认识的第一件事是象我们在第二章中讨论过的，每一个关于物体运动的陈述都包含着一个物理的参照系；我们只能相对于其他物体来量度位移和速度. 因此，惯性原理不仅仅是关于各个物体的行为的陈述；它比这深入得多. 事实上我们可以把它倒过来作一大致如下的陈述：

存在着某些参照系，相对于它们，一物体的运动如果不受到任何外力的影响，将沿一直线作匀速运动(包括速率为零).

惯性定律在其中成立的参照系称为**惯性系**，于是，一给定参照系是否惯性系的问题就成为观察和实验的事情了. 在地球表面上实验室范围内所作的大多数观测都表明，附着于那实验室的参照系是适宜的(惯性系——译者). 不管怎么说，伽利略就是在这样一种参照系里面凭借观测而首先得出惯性原理的！更为苛求的详尽研究表明，这一参照系并不够好，我们还需要高瞻远瞩——但我们将在以后这样做. 目前，我们限于介绍这原理的主要部分，它不受以后精确化的影响.

阿瑟·爱丁顿爵士是一位具有识见、能作出深透而诙谐的评论的人，提出了他自己关于惯性原理的说法："每一物体都继续处于静止或沿一直线匀速运动的状态中，除非到了它不再继续这样."[①]换言之，他认为说到底这是一个白花气力的命题.（他是在为讨论广义相对论和引力铺平道路.）然而爱丁顿的这一评论，以一种富有色采的方式，使人们注意到牛顿力学的最根本的东西：任何对直线轨道的偏离都被认为隐含着力的存在. 没有偏离就没有

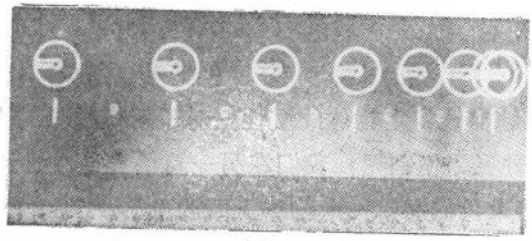
① A. S. Eddington, «*The Nature of the Physical World*» (Ann Arbor Paperbacks), University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1958.

力——反之亦然. 必须认识到，我们不能用实验性的试验来“证明”惯性原理，因为我们永无把握说受试验的物体真是不与任何外界发生相互作用，比如同那些极远的而质量异常大的物体的相互作用. 此外还有那远非无聊的问题：真实物理意义下一直线的定义；这肯定不是直觉地显而易见的，也不是一个抽象的数学问题. (你将如何为此目的而给一直线下定义呢？) 尽管如此，可以声称，惯性原理是根据经验的一个有效的推广；它是观察到的运动的一个可能的诠释，而我们对它的有效性的信念是随着人们利用它所能成功地关联起来的现象之众多而增强的.

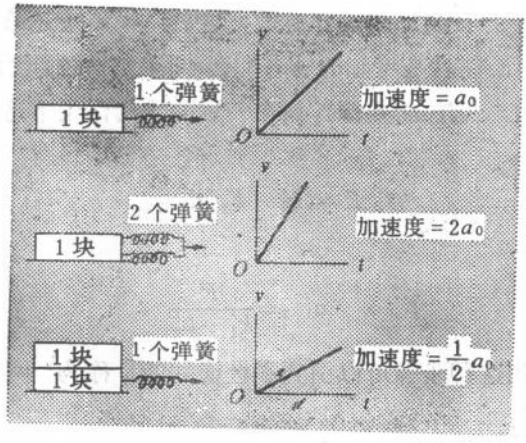
§2 力和惯性质量：牛顿定律

惯性定律的含意是，一物体运动的“自然”状态是速度恒定的状态. 与此紧密相连的是承认一物体与一外在的物理体系之间的相互作用的效果是改变运动状态. 举例说，我们毫不怀疑，一个网球的运动是受球拍影响的，一罗盘针的运动是受一磁体影响的，而地球的运动是受太阳影响的. “**惯性质量**”是专门用语，用来说明物体的这样的性质：它决定着在一定的力作用下一物体改变其运动状态的难易. 让我们来看，对事物的这一描述如何能使其定量化.

“力”是一个抽象的术语，但我们曾看到如何把它同一些实际的操作联系起来，如压缩弹簧，拉长橡皮筋，等等. 我们可以用这种手段，施加一定大小的力，容易地研究作用于一物体上的推或拉的效果. 如果我们施加一个力于本来是以恒定速度运动的一个物体，则观察变得特别明确. 可以获得这一理想情形的非常逼真的近似方法是用气垫支承一平底物——例如把物体放在一张水平桌子上，桌面穿了许多洞，空气通过这些洞从下面吹来. 于是就可以水平地拉这物体而作下列观察(此外还见图 6-3):



(a)



(b)

图 6-3 (a)一匀加速运动的频闪观测照片，闪光的时间间隔为$\frac{1}{5}$秒。

(b)简单的动力学实验，可用作阐明牛顿第二定律的基础。

1. 一弹簧，受一定量拉伸，使物体的速度随时间而线性地变化——一定的力对于一定的物体所产生的加速度是常数.

2. 加一根同前一根完全一样并等量拉长的弹簧，与第一根弹簧并排地施加作用，加速度就增一倍. 也就是说，如果按我们在静力平衡中(见第四章)比较力的准则，所用的力为某力的一定倍数，则对于一定物体所产生的加速度与总力成正比.

于是，可以写下表示力 F 与加速度 a 之间的关系的简单方程：

$$a=kF$$

或

$$F=k'a$$

其中 k 和 k' 描述特定物体的惯性. 对于所得结果的上述两种表述中哪一种更为便利呢？我们在另一简单实验中找到答案.

3. 如果我们在第一个物体上面放上另一个完全一样的物体，看到的是，一定的弹簧装置所产生的加速度被减到只有第一个物体时的一半. 我们可以最容易地把这一结果用上述第二个方程表达出来，因而惯性是可加的——即两不同物体的惯性常数 k' 可以简单地加在一起，而立刻得到在一定的力的作用下这组合体系的加速度

$$F=(k_1'+k_2')a_{1+2}$$

即

$$a_{1+2}=\frac{F}{k_1'+k_2'}$$

就是用这种步骤可以引到举世皆知的、称为"牛顿（第二）定律"的方程:

$$F=ma=m\frac{dv}{dt} \qquad (6\text{-}1)$$

其中比例因数 m（与上面定义的 k' 完全相同）称为物体的**惯性质量**，F 是作用于它的合力. 牛顿定律的这一基本表述包含着这样的特征: 力和加速度是矢量，加速度总是在合力的同一方向上.

一个有趣的而常被忽视的历史事实是，牛顿对力学基本定律的陈述并非方程(6-1)的形式; 方程 $F=ma$ 在《原理》一书中从未出现过. 作为代替，牛顿说的是"运动"（他意指动量）的改变而把它同力×时间之值联系起来. 换言之，牛顿关于第二运动定律的说法实质上是:①

① 更确切地说，应为 $F\Delta t=\Delta(mv)$——译者注.

$$F\Delta t = m\Delta v \tag{6-2}$$

我们将在第九章中看到，牛顿表述这定律的方式，据推测，来源于他所能获得的特定类型的证据：碰撞过程的结果．如图 6-3 所示的那种直接的实验，在牛顿当时的有限技术条件下是不可能的．(对于牛顿，唯一易于得到的匀加速运动是重力下的运动，而这当然不会容许对作用于一定物体的力 F 作任何**独立的**控制——除非是把用斜面产生的一驱动力 $mg\sin\theta$ 算作满足这一目的．)

§3 关于牛顿定律的一些评述

尽管(6-1)式简单而为人们所熟悉，它却包含着丰富的物理概念——的确，包括了差不多整个经典力学的基础．首先是假设位移和时间间隔的定量测量，使我们能得到一物体在一定时刻的加速度的唯一确定值．如果我们回想，位移只能相对于其他物理客体来测量，就看到，同惯性原理相似，这离不开参照系的选择．事实上，我们默契地假设用来测量加速度的参照系是一个惯性系．对于图 6-3 所示的种种基本实验，都由地球担当着这一任务．

其次就是已强调过的特征：加速度矢量与合力矢量同方向．这是一个重要结果；它代表着这样的事实：几个不同的力的加速效果按线性方式相加．例如，假定一个物体与两个弹簧相系[见图 6-4(a)]．弹簧 1 在 x 方向上施一力 $\mathbf{F}_1$ 于物体．如果是单独作用，它将产生一沿 x 的加速度 F_1/m．弹簧 2 在 y 方向上施一力 $\mathbf{F}_2$．如果是单独作用，它将产生一沿 y 的加速度 F_2/m．于是，实验事实证明——不能由纯逻辑预知——两弹簧联合起来施加作用所产生的加速度，正好是我们按矢量加法把 $\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 合成合力 $\mathbf{F}$[图 6-4(b)] 并把这一个单力施加于质量 m 所计算出来的加速度．观测到的加速度 $\mathbf{a}$ 等于 $\mathbf{F}/m$．这一结果提供了“运动的独立性”的动

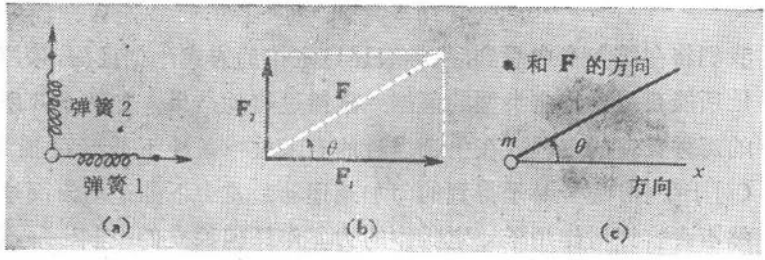


图 6-4 (a)两弹簧沿垂直方向拉一物体. (b) 按矢量相加的规律计算的合力. (c) 观测到的物体的加速度同(b)中求出的合力矢量所产生的加速度一样.

力学基础,在第三章的弹道问题中,我们是根据纯运动学的效果来讨论这种独立性的. 它告诉我们,一物体的瞬时加速度是所施加的诸力、或它们各自产生的加速度**线性迭加**的结果. 如果这结果不成立,那么对于力所产生的运动的预料和分析将会是极其复杂和困难的.

让我们在此加一点说明和告诫. 加速度的**瞬时**分量的线性迭加并不意味着我们总是可以自动地,比如说,对一物体运动的 y 分量发展的全过程进行计算,而不管在 x 方向会出现什么情况. 举一个我们以后将要详细讨论的例子,如果一个带电粒子在一磁场中运动,则在一给定方向的力的分量依赖于与这方向垂直的速度分量. 在这种情形中我们必须不断地注视着那垂直的速度分量随时间而变化的方式.

在一物体只受一个力的作用的情形中,人们可能会这样想:直观上讲,加速度和力显然是在同一方向上的. 因此,也许值得指出,如果牵涉到高速粒子的话,这就不普遍地真确,因为速度足够高,需要按狭义相对论修正运动学和动力学①.

最后来说一说定律中的断言:一定的力作用于一特定的物体

① 参看,例如,本丛书的狭义相对论那一卷.

时，该物体的速度将按某一变化率 a 而变化，a 的大小只与 F 的大小和方向以及一个表征物体的标量——它的惯性质量 m——有关. 这是一个很值得注意的结果；让我们进一步来考虑它.

牛顿定律断言，任何不变的力，例如来自一拉长的弹簧的力，所产生的加速度在所有情形下都具有同一数值. 因而，按这一说法，不管物体开始时是静止的或是以高速运动着的，都是如此. 真的总是如此并普遍如此吗？不！实际情形是，对于极高的速率——光速的一个较大分数——作用在一定物体上的一定的力所产生的加速度确是与 v 有关的. 在这些高速情形下，牛顿力学让位于爱因斯坦的狭义相对论，这理论描写说：一物体的惯性有规律地随速率按下列公式增加

$$m(v)=\frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} \tag{6-3}$$

图 6-5 表明由实验数据证实的这一关系. m_0 称为物体的“静止质量”，代表着在所有可以应用经典力学的情形下我们简单称之为惯性质量的那个量，因为对于任何 $v \ll c$，按(6-3)式，m 之值与 m_0 相

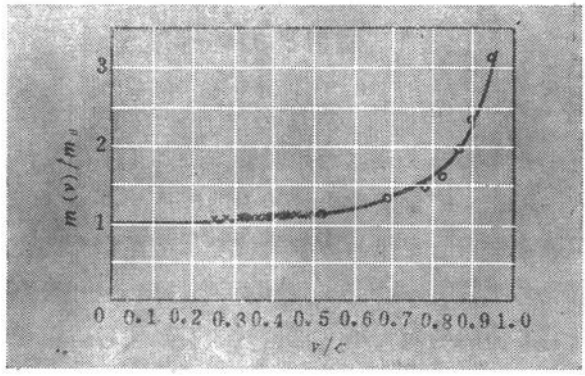


图 6-5　惯性质量随速率的增加，在高速电子实验中显示出来. 根据以下各家的数据：考夫曼(1910, 圆圈)，布赫勒(1909, 实心圆)和盖耶-拉凡希(1915, ×).

差极少.

由(6-1)式表示的牛顿定律的另一内容是,受一定力作用的物体,其基本动力学与 d^2v/dt^2 无关,也与任何更高阶的速度对时间的微商无关. 任何这种复杂性丝毫不出现,这本身就是一个值得注意的结果,就目前我们所知,即使在非常高速的"相对论"区域里,这结果也仍旧成立. 不过,曾经有人指出,如果考虑心理效应,而不仅仅是基本的物理学,那么,$d^2v/dt^2(=da/dt)$的存在及其大小可能是重要的. 我们都知道在一辆车中对"平稳加速"的良好感觉;平稳加速的意思是加速度接近于不变. 很快地改变加速度会产生极其不舒服的感觉,甚至有人曾建议,应当引进 da/dt ——称为"急动"——的一个单位作为这种效应的量度!

从上面的讨论中我们能作出的结论是,牛顿定律的应用范围虽然最终受到限制,但它确实表示着除高速原子性粒子的领域外差不多所有物体的加速度同作用于它的力之间的关系,误差微不足道.

§4 质量和力的标度

假定一定的力作用于一定的物体上所产生的加速度是唯一地确定的,于是我们可以把这一相同的力施加于不同物体. 这种观测资料可用来建立测量惯性质量和力的标度. 在采取这一步骤时,我们选定牛顿的定律为力学的核心. 虽然迄今为止我们是用静力学情况来比较力,从现在起我们将要转向动力学,以力所产生的运动来定义力的绝对大小. 这也意味着,代替以前根据静力学测量预先确定力的大小,转而接受这样的想法,即牛顿力学可以作为一个分析工具,用来从观测到的加速度推算出产生加速度的力. 由于力和惯性质量的量度是由单一的方程 $F=ma$ 相联系,在我们

的定义中存在着循环论法的危险. 但我们不准备钻研这问题的细微之处，而只是简单地介绍一个实际性的方法，说明如何建立这些量的测量标度.

我们的观察容许我们作这样的假设，即每次当一个弹簧拉到同一长度时，它施加于与它系在一起的物体的力是同等大小的——因为我们观测到的是一个可重复再现的加速度. 于是，我们可以取若干个不同的物体，标上 1, 2, 3, …，每次用同样的力（即同等伸长的弹簧）去拉其中之一，并测出各个加速度：$a_1, a_2, a_3, \cdots$. 我们可以用这些实验结果来**确定**惯性质量的一个标度，因为我们有

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 = m_3 a_3 \cdots$$

所以

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{m_3}{m_1} = \frac{a_1}{a_3}, \text{等等} \tag{6-4}$$

可选一特定物体（例如 m_1）为一标准单位质量，称之为一“千克”. 于是，所有其他惯性质量的量度都可以用这标准物体得到. 原先，千克的定义是 1000 厘米^{3}的水在密度最大时的温度（约为 4°C）下的质量，但现时，它是一特制的铂-铱合金柱体的质量，这柱体保存在法国色弗勒的国际度量衡局里.（这物体本来是想让它恰好等于一升水，但是在发现了一个小的差异之后，决定改用这金属物为标准，因为在耐久性、可复制性和便利性上它一般都较为优越.）

如果惯性质量确是物体自身的属性，那么(6-4)式中的比值一定与所用的力无关. 用拉伸量与前不同的弹簧重复上述步骤，得到不同的加速度，但实验表明，各质量之比仍同前. 这些实验上确定的质量比与作用力的大小无关的事实确立了惯性质量是物体的一种特征属性.

一旦建立了惯性质量的标度，力的定量标度也就由牛顿定律

枝生出来，因此在 MKS 制中，如我们在第四章中第一次讨论力时提到过的，力的单位(**牛顿**)的定义是给予 1 千克质量以 1 米/秒^{2}加速度的力:

$$1\text{ 牛顿} = 1\text{ 千克}\cdot\text{米}/\text{秒}^2$$

在其他单位制中，力的动力学单位可以完全同样地下定义. 我们在第四章中特别提到过，一牛顿大约等于一个苹果所受的重力，即质量为几个英两(俗称盎司——译者)的重力.

在叙述 $F=ma$这规律如何可以根据种种简单实验予以公式化时，我们介绍了质量所代表的惯性属性是可加的这一结果. 你也许会觉得这是显然的，不值得用实验来检验. 只要所考虑的是普通的物体，对问题的这一常识性反应是合理的. 但要认识到，这里，在原则上，存在一个合法性问题: 设想我们分开地测量过一质子和一电子的惯性质量，然后让它们结合在一起形成一氢原子. 这原子的惯性质量是否等于电子和质子的质量之和呢？不；稍为小了一点. 为什么呢？因为当质子和电子结合在一起形成原子时，有一微小的质量当量以辐射的形式逃逸掉. 反过来，如果一物体是由内聚力把若干部分聚合起来的，那么在把那些部分分离时，必须施加作用力，因而各个部分的质量之和就大于原物体的质量. 对于通常物体，这一差异是量不出来地小，但在原子和原子核体系中，它可能成为总质量中有分量的部分，提供计算核反应能等等的基础.

现在回到观测到的宏观物体惯性质量的可加性，我们可以看出，这一特性充分证明下述步骤是正确的，即用一块块的某种材料制作一套标准质量，使各体积之间具有简单的比值——例如 1:2:5:10…. 牛顿本人就认为质量对体积的这一比例关系是基本的，体现了一定物质的密度是常数的概念. 事实上，在《原理》中最先的一句话就是质量等于密度乘体积这一定义——这定义曾引起激

烈争论，因为某些评论认为它是循环论的．他们说，“除非作为质量与体积之商，不然，怎样给密度下定义呢？”但牛顿的图象是，固态物质由小的微粒构成，这些微粒以一种均匀的方式紧堆在一起，而在他看来，以这一内部结构为基础似乎更合逻辑．于是，计算一块物质的质量就实质上成为数它所含的粒子数，然后乘以单个粒子的质量．

§5 连续作用的力的效果

在本章和下章中我们主要考虑的是力的瞬时效果．但是让我们初步看一下一个问题，它是本书后面要非常广泛地分析的主题．这问题是：当一个力作用于一物体并维持一会儿时，效果如何？你无疑知道，对这问题能给出不止一种答案，要看我们究竟是考虑力所作用的时间呢还是距离．为了取尽可能简单的情形，我们假定一恒定的力 F 作用于一质量为 m 的物体，物体在时间为零时是静止的．于是，有 $F=ma$，由此确定出一恒定加速度．因此，所产生的运动由初等形式的运动学方程来描述：

$$v=at$$

$$x=\frac{1}{2}at^2$$

在时刻 t，物体已走一总距离 x，我们可以计算 F 的总效果的两种可能量度：

$$Ft=mat=mv$$

$$Fx=(ma)\left(\frac{1}{2}at^2\right)=\frac{1}{2}mv^2$$

于是，我们得到与运动物体相关联的两个基本动力学属性：物体的动量和物体的动能．

用乘积 Ft 来量度的 F 的效果称为它的**冲量**；用乘积 Fx 来量度的 F 的效果自然是我们称之为**功**的东西. Ft 和 Fx 分别用牛顿·秒和牛顿·米来量度. 前者，它确定动量的量度，不具有为它而特设的单位. 但后者在 MKS 制中却是用功或能量的基本单位——焦耳——来表示的. 因此有

冲量——→动量，用牛顿·秒表示(＝千克·米/秒)

功——→动能，用牛顿·米表示(＝焦耳)

§6 牛顿定律的不变性；相对性

我们曾经强调过牛顿定律的实验基础如何牵涉到相对于一个惯性参照系来观测运动. 一定的运动其实际表现形式是随参照系的不同而变的. 因此，有必要看看动力学的结论如何与参照系的选择无关——这意味牛顿力学包含着一相对性原理.

首先要建立的一点是，如果我们认定了任何一个惯性系 S (即这样一个参照系，在其中不受力的物体作匀速直线运动)，那么任何相对于 S 有一不变速度的其他参照系 S' 也是一个惯性系. 这结论直接来自下列事实：如果一物体在 S 中具有瞬时速度 $\mathbf{u}$，而 S' 相对于 S 的速度是 $\mathbf{v}$，则物体相对于 S' 的瞬时速度由下式给出(见第二章)：

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}-\mathbf{v}$$

因此，如果 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 都是恒定速度，则 $\mathbf{u}'$ 也是，而该物体在 S' 中观测起来是遵守惯性定律的.

为了进一步讨论这问题，我们在两个参照系中立起直角坐标系，取 x 轴沿速度 $\mathbf{v}$ 的方向(见图 6-6)。令两坐标系的原点 O 和 O' 在 $t=0$ 时重合，并且在该时刻 S' 的 y 和 z 轴也同 S 的两相应轴重合. 设一运动物体在晚一点的时刻 t 位于 P 点，这时原点 O'

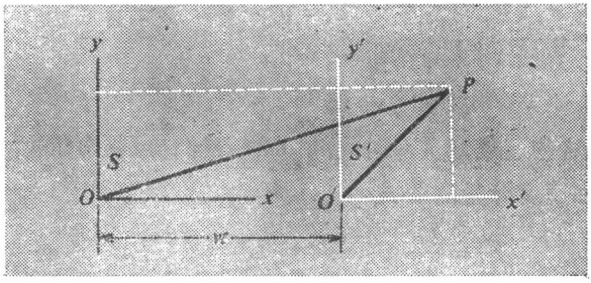


图 6-6　一粒子P的运动，相对于两个参照系，参照系的相对速度为v.

沿着S的x轴移动了一距离vt. 因而P在两坐标系中的坐标由下列方程联系着.（鉴于伽利略在运动学方面的先驱性工作，特别是他的有关惯性定律的明白陈述，这些方程本当以伽利略变换为名.）

$$\left.\begin{array}{l}\text{（伽利略变换：}\\ S'\text{ 相对于 }S\\ \text{以恒定速率}\\ v\text{ 沿}+x\text{ 方}\\ \text{向运动）}\end{array}\right\}\quad\begin{aligned}x'&=x-vt\\ y'&=y\\ z'&=z\\ t'&=t\end{aligned}\tag{6-5}$$

最后这方程表示出牛顿的关于一普遍的、绝对的时间流逝的假定，但也体现着明确的约定：在两参照系中取相同的时间零点，因而两参照系中的所有时钟都互相一致.

然后，我们就可以从事于求出在这两参照系中测得的一瞬时速度的分量之间的关系. 对于x分量有

$$u'_x=\frac{dx'}{dt'}\qquad u_x=\frac{dx}{dt}$$

令$x'=x-vt, dt'=dt$，有

$$u'_x=\frac{d}{dt}(x-vt)=u_x-v$$

速度的所有三个分量的变换如下：

$$u'_x = u_x - v$$
$$u'_y = u_y \qquad (6\text{-}6)$$
$$u'_z = u_z$$

最后，求这些速度分量对时间的微商，我们得到(由于 v=常数)三个有关加速度分量的等式：

$$\frac{du'_x}{dt'} = \frac{du_x}{dt} \qquad \frac{du'_y}{dt'} = \frac{du_y}{dt} \qquad \frac{du'_z}{dt'} = \frac{du_z}{dt}$$

因此，在两参照系中测得的任何加速度都是**相同的**：

$$\mathrm{a}' = \mathrm{a} \qquad (6\text{-}7)$$

由于这恒等式对于任何两个惯性系都成立，而不论它们的相对速度为何，我们就说加速度在经典力学中是**不变量**．这一结果是牛顿力学中相对性的中心特点(在按狭义相对论对运动的描述中它不再有效)．

为了阐明这些概念的应用，考虑那简单而熟悉的、在重力作用下自由落下的粒子的例子．假定当 $t=0$ 两坐标系 S 和 S' 的轴重合时，在 S' 中的一实验者让一粒子在这参照系中从静止状态落下．在 S 和 S' 中看到的粒子轨道都画在图 6-7 中．在每一参照系

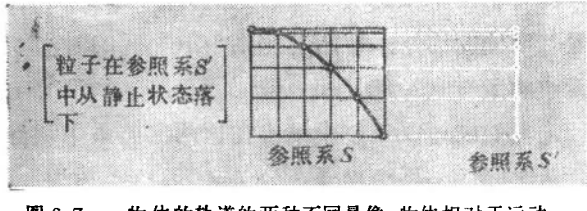


图 6-7　一物体的轨道的两种不同景像，物体相对于运动参照系从静止状态落下．

中都看到粒子循预期的轨道运动，轨道遵从具有竖直加速度 g 的运动学方程．在 S 中，粒子有一初始水平速度，所以它的轨道是一条抛物线，而在 S' 中粒子在重力作用下直线下降．在这两个不同参照系中的观察者都同意，方程 $\mathrm{F}=m\mathrm{a}$(他们在此处用相同的 F)

适于说明任何粒子以任何方式被扔出后的轨道. 因此，只要是有关动力学的实验，两参照系是等价的——两者中的任何一个都可以假定是不动的而另一个是动的，用相同的力学定律对观察到的运动作出正确解释. 这是一个简单例子说明牛顿定律本身的**不变性**.

§7 特定的力的规律下的不变性[①]

在这一节中我们将稍为更仔细一点来考虑牛顿第二运动定律的变换包含着一些什么. 这一定律的变换意味什么呢？除非我们有一明确的力的**规律**，否则 $F=ma$ 就只能看作是一个从观测到的运动推算出 F 的公式. 故此，我们来考虑两物体之间相互作用所规定的力. 为简单起见，假定这相互作用是由比如拉长的橡皮筋提供的，因而这力只是物体间距离 r 的函数；即我们可设 $F=f(r)$. 为了进一步简化，让我们假定运动局限于 x 轴. 于是，物体 1 施加于物体 2 的力在参照系 S 中测量时可写为

$$F_{12}=f(x_2-x_1) \tag{6-8}$$

当我们应用牛顿定律于物体 2 时，可以单用 S 中的量度写为

$$F_{12}=f(x_2-x_1)=m_2a_2 \tag{6-9}$$

现在我们来重写这方程，使它完全由参照系 S' 中的量度来表示. 由(6-5)式有

$$x_2-x_1=(x_2'+vt)-(x_1'+vt)=x_2'-x_1'$$

因而

$$F_{12}=f(x_2'-x_1')$$

但根据所设的力的规律，函数 $f(x_2'-x_1')$ 正是用 S' 中的量度所确定的力 F'_{12}，因此我们可令

① 这一节可略去而不失连贯性.

$$F_{12}=F'_{12}$$

现在转到(6-9)式的右方，按伽利略变换，$a=a'$；而在牛顿动力学中惯性质量是一恒量：$m_2=m'_2$．因此可写

$$F'_{12}=f(x'_2-x'_1)=m'_2a'_2 \tag{6-10}$$

我们在这里明确地看到，只要伽利略变换正确地反映参照系之间位移和时间的变换，牛顿的运动定律，相对于惯性系的特定选择，如何不变．一个更为复杂的力的规律，只要它仅包含两相互作用物体的**相对**位置和速度，也具有同样的不变性．但是，如果力与**绝对**位置和速度有关——例如力的规律具下列形式

$$F_{12}=f(x_2^2-x_1^2)$$

则运动方程的形式不再在所有惯性系中都一样了．在我们的经验中没有出现过任何这种情形，而使物理定律在实验室中同在以匀速运动的火车或飞机上显得不同．如果物理定律对于不同的观察者是不同的话，那就可能成为导至某一独特的参照系的线索．确实，长久以来人们就认为一定存在着一个独特的参照系，其形式是弥漫于空间的一种媒质，光可以传播于其中．(不然，光如何能从恒星来到地球？)但爱因斯坦说明了如何能维护所有惯性系的等价性以及所有物理学定律的不变性，只要将伽利略的运动学和牛顿的动力学用新的形式代替，而这新的形式又在中等或低速度的范围内与旧的相合．

§8 牛顿定律和时间反转

这一节的主题可以较鲜明地但略欠精确地作为一个问题提出：时间可逆吗？试看图 6-8 中两张频闪观测照片．第一张所示的是一个单独物体在重力下竖直地运动．它是在落下呢还是"落上"？第二张所示的是两物体的碰撞．哪些是物体碰撞前所走的

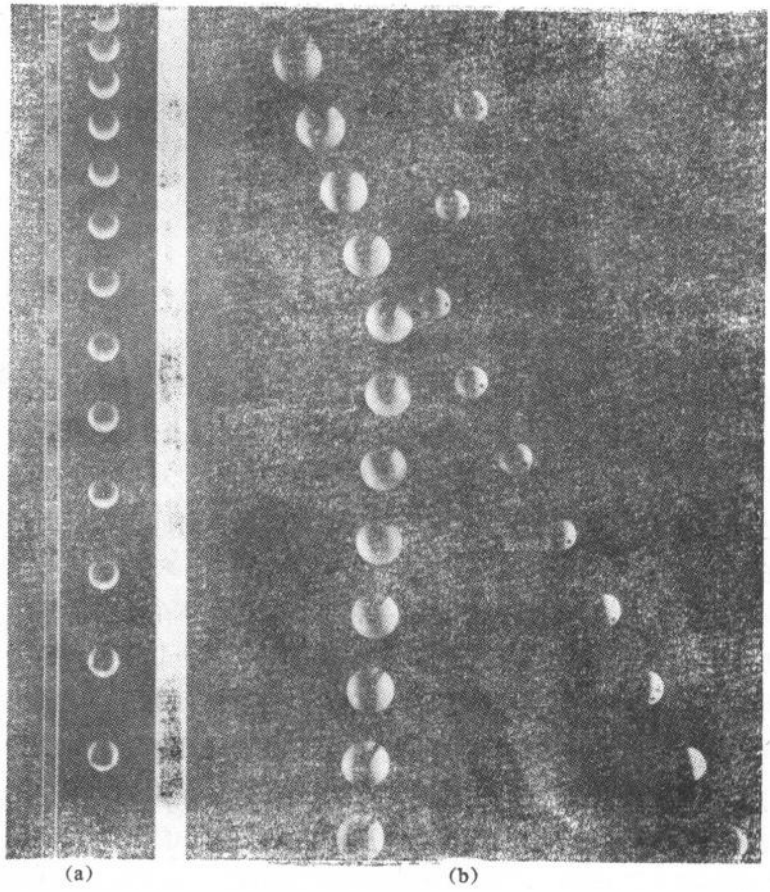


图 6-8 (a)一物体在重力下竖直地运动的频闪观测照片．它在朝哪个方向运动(上或下)呢？(b)一弹性碰撞的频闪观测照片．它的时间顺序对于所有意图和目的都是完全可逆的．

路线呢？两种情形的答案都一定是"我们不知道."这两事件序列的运动图象都可以反向而行，而观察者却不可能查出任何违反牛顿定律之处．原因是一个粒子集合的所有速度都可以反向而不违反牛顿运动定律．一个**时间反转**运算(在运动学方程中以 $-t$ 代替 t)把每一个 v 都换成 $-v$，但保留加速度不变．(例如，重力保

持向下.)这是由于加速度含对时间的二阶微商之故. 因此，任何根据对一动力学过程的反序观察结果而得出的关于力的结论都同按过程的本身顺序所作的结论完全一样. 我们看不出吸引明显地转为排斥，或任何这类情况.

然而，当我们倒转过来观看一普通影片时，很快就会从无生物的行为——更不用说人的反序动作的可笑效果，按照十分不同的理由. 这种效果显得很奇怪——明显地看出大多数物理作用是有很明确的方向的. 例如，设想这样一个序列：一块玻璃从桌上掉下来，在地上摔成小碎片. 如果我们看到一影片，在其中那些碎片自己聚集起来成为一整片的玻璃，然后跳到桌面上去，这显然是难以相信的——自然界不会出现这样的事. 然而，对于单个原子之间的碰撞的"微型影片"则其过程的每一阶段在时间上都应当是完全可逆的.

这样我们就面对着一难题：牛顿定律暗示，单个粒子的基本动力学行为在时间上是可逆的，但是对于一个包含非常大量粒子的体系，其基本动力学行为又显然在时间上是不可逆的. 要解决这个谜须要对多粒子体系作详细的统计分析——这课题名为统计力学. 只要我们处理的是包含少数几个粒子的体系，如本书中所要讨论的情形，就不会发生与时间反转相关联的问题，因而我们将不进一步考虑它们.

结 束 语

经过本章的学习你可能已经明显地感到由牛顿第二定律代表的经典力学是一个复杂的，并在许多方面是精微的事物. 这定律的准确内容，在牛顿提出它的第一种说法之后近三个世纪，仍然是一个在辩论着的问题. 在一篇题为《牛顿运动定律的由来和本质》

(The Origin and Nature of Newton's Laws of Motion)的杰出讨论中，一位作者(布来恩·埃里斯)说道："但是牛顿第二运动定律的情况怎样？这一定律的逻辑地位怎样？它是力的一个定义吗？质量的定义吗？或是把力、质量和加速度联系起来的经验命题吗？"①埃里斯认为这定律具有所有这些涵义，他论证道：

> 看看牛顿第二定律在实际上是怎样用的．在某些领域中牛顿的第二定律无疑是真的用来确定力的标度的．举例说，我们能用什么别的办法来测量行星间的引力呢？同样无疑的是，牛顿的第二定律有时真的是用来确定质量的标度．质谱仪的使用就是一个例子．然而在另外一些领域中，当力、质量和加速度都容易且独立地测得时，牛顿的第二运动定律就起着把这三个量经验地关联起来的作用．且看例如在弹道学和火箭学中牛顿第二定律的应用．…设想牛顿第二运动定律，或**任何**一个定律，必须有一唯一的作用，而我们能够对这作用作普遍的描述并称之为逻辑地位，是一个没有根据的、不合理的假定．

由于力和质量两者都是抽象的概念而不是客观的实在，我们可能会设想一种对自然界的描述，其中这两个概念都省却了．但是，正如一位物理学家(D. H. 弗里许)曾评述过，"不管我们对最终的实在如何想法，最方便是跟随牛顿把对我们的观测的描述分为"力"和"质量"，前者是使质量加速的东西，后者是力使之加速的东西．如果不能够把所观测到的现象最好地归为**不同的力**作用于**同一组**质量的结果，则上述说法不过是同义重复．"埃里斯把这同一思想说得更为详细：

> 事实上存在着许多各种各样的步骤可以用来确定作用于一给定体系的各个力的大小——静电力由电荷和距离的测量确定，弹性力由应变的测量确定，磁力由电流和距离的测量确定，引力由质量

① 发表于一论文集，《*Beyond the Edge of Certainty*》(Robert G. Colodny, 编辑)，Prentice-Hall, Eaglewood Cliff, N. J., 1965.

和距离测的量确定，等等．一个经验的事实是，当所有这种力的测量都做过而且合力的大小也确定，就发现所考虑的体系的动量变化率与这合力的大小成正比．

而这就是，通过牛顿第二定律的简洁表述，我们对全部有关运动物体的经验的绝大部分，获得一极为富有成果的和准确的描述①．

习　题

6-1　对图 6-3(a)的频闪观测照片所表示的数据作一图解分析，以检验这是否真的在恒定力作用下的加速度．

6-2　一艘质量为 15 吨的游艇在停机后以 0.3 米/秒的速率漂向码头(一吨等于 10^3 千克)．当船离码头 1 米时，在码头上的一个人能触及这条船，此后他以 700 牛顿的力去推这船试图止住它．他能够在船碰到码头之前使它停住吗？

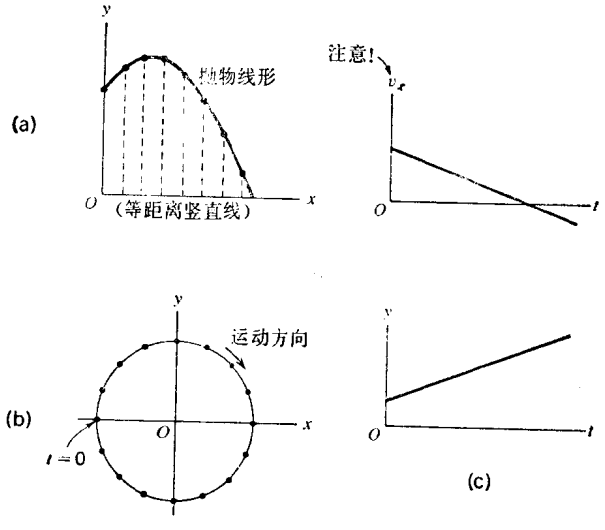
6-3　(a) 一个质量为 80 千克的人，从离地面仅 0.5 米的窗台上跳到混凝土的院子里．着地时他忘了弯曲膝部，致使他的运动在约 2 厘米的距离中停下来，这个使他的骨骼剧烈震动的平均力有多大？

(b) 如果这人从高于地面 1.5 米的壁架上跳下来，但在他的脚着地时把膝部弯起来，使他的重心再下降一个高度 h，问 h 必须是多少才使地面施加于它的平均力仅为他的正常体重的三倍？

6-4　一个质量为 2 千克的物体受到 xy 平面内下列各力的联合作用：5 牛顿沿 $\theta=0$，10 牛顿沿 $\theta=\pi/4$，以及 20 牛顿沿 $\theta=4\pi/3$．方向 $\theta=0$ 与 $+x$ 方向相应．$t=0$ 时，物体位于 $x=-6$ 米和 $y=3$ 米这一点，并具有速度分量 $v_x=2$ 米/秒，$v_y=4$ 米/秒．求出在 $t=2$ 秒时物体的速度和位置．

---

① 关于这些问题的进一步讨论，《*American Journal of Physics*》是一个不竭的泉源．参看例如下列文章：L. Eisenbud，《*On the Classical laws of Motion*》，*Am. J. Phys.*，**26**，144(1958)；N. Austern，《*Presentation of Newtonian Mechanics*》，*Am. J. Phys.*，**29**，617(1961)；R. Weinstock，《*Laws of Classical Motion: What's F? What's m? What's a?*》，*Am. J. Phys.*，29，698(1961)．



(习题 6-5)

6-5 所示各图提供有关三个不同粒子在 xy 平面内运动的资料. 在图(a)和图(b)中, 小点指明在相等时间间隔处的位置. 对每种情况写出描写力的分量 F_x 和 F_y 的方程.

6-6 一观察者先测得一个向他趋近的物体的速度为 10^{-2} 米/秒. 过一秒钟后, 测得速度为 2×10^{-2} 米/秒. 因为观察者的仪器需要整整一秒钟来确定一速度, 所以不可能有中间读数. 如果物体的质量为 5 克, 观察者对下列问题能作出什么结论:

(a) 受到的作用力的大小如何?

(b) 这力所提供的冲量如何?

(c) 这力所作的功如何?

6-7 一质量为 2 千克的粒子, 按方程

$$x=0.2\sin\left(5t-\frac{\pi}{6}\right)$$

沿着 x 轴振动, 其中 x 以米为单位, t 以秒为单位.

(a) 在 $t=0$ 时作用于粒子的力多大?

(b) 作用于粒子的力的最大值是多少?

6-8 一辆质量为 10^3 千克的汽车沿着一条水平的笔直公路行驶, 当司

机突然看到前方 100 米远处有一棵倒下的树阻塞着道路时，车的速率为 28 米/秒(稍大于 60 英里/小时)．司机在他的反应时间(0.75 秒)容许下立刻刹车，而在离树 9 米处停了下来．

(a) 假设制动器引起的是匀减速运动，问减速力多大？它是汽车的重量的几分之几？(取 $g=9.8$ 米/秒^2)

(b) 如果汽车是在 $\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$的下坡路上，而制动器的减速力同前，问汽车以多大的速率撞树？

6-9 一质量为 m 的粒子沿着 xy 平面内的一条路径运动，路径由下列方程描述：

$$x=A(\alpha t-\sin\alpha t)$$

$$y=A(1-\cos\alpha t)$$

(a) 画出这路径的简图．

(b) 求出产生这运动的、与时间有关的力矢量．你能够提出一个在实际上产生这种运动的方法吗？

6-10 一段长为 l 的绳子，能承受的最大张力为 T，用来挥动一质量为 m 的粒子，使它沿着圆轨道急转．如果这圆是(a)水平的，(b)竖直的，问粒子旋转的最大可能速率是多少？