美国M·I·T·物理学导论丛书

A·P·弗伦奇 著

# 牛顿力学

2

郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

美国M·I·T·物理学导论丛书

# 牛顿力学

2

A·P·弗伦奇 著
郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

## 内 容 简 介

本书根据美国 W. W. Norton & Company. Inc. 出版的 A. P. French 著《牛顿力学》(Newtonian Mechanics) 一书 1971 年版译出.

《牛顿力学》为美国麻省理工学院教育研究中心的《M. I. T. 物理学导论丛书》(M. I. T. Introductory Physics Series) 中的一卷. 中译本按原书的三个部分分成三册出版, 第一册为"牛顿动力学入门"; 第二册为"经典力学的运用"; 第三册为"专题". 第二册内容包括五章: 运用牛顿定律; 万有引力; 碰撞和守恒定律; 动力学中的能量守恒、振动运动; 保守力和空间中的运动.

本书可作为高等学校物理学课程的教学参考书, 也可供有关科技人员、电大和中专学生、教师参考.

美国M·I·T·物理学导论丛书

# 牛 顿 力 学

2

A·P·弗伦奇 著

郭敦仁 何成钧 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 226,000

1982 年 2 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷

印数 00,001—16,500

书号 13012·0721 定价 0.88 元

# 第二篇

# 经典力学的运用

工程师可曾根据作用于一给定物体上的力和物体的质量预言它的加速度呢？当然是的.化学家可曾根据测量一个原子在一给定力场中的加速度来确定原子的质量呢？是的.物理学家可曾根据一已知质量在一力场中的加速度来测定场强呢？肯定是的. 那么，为什么要把这些任务中的任何一个单挑出来作为牛顿第二运动定律的任务呢？原因是事实上牛顿第二运动定律担当着各种各样的任务.

布来恩·埃里斯,《牛顿运动定律的由来和本质》(1961)

# 目　录

## 第二篇　经典力学的运用


**第七章　运用牛顿力学** ……1

§1　几个引例 ……1

§2　二维运动 ……8

§3　圆周运动 ……12

§4　变速率曲线运动 ……14

§5　在均匀磁场中带电粒子的圆轨道 ……16

§6　在磁场中的带电粒子 ……18

§7　质谱仪 ……21

§8　高速转动物体的破裂 ……21

§9　抗阻力运动 ……24

§10　受阻运动的详细分析 ……26

§11　由粘滞性控制的运动 ……32

§12　受阻运动的增长和衰减 ……35

§13　空气阻力和“运动的独立性” ……39

§14　简谐运动 ……40

§15　简谐运动增补 ……45

习题 ……49

**第八章　万有引力** ……61

§1　万有引力的发现 ……61

§2　行星的轨道 ……62

§3　行星的周期 ……66

§4　开普勒第三定律 ……69

§5　月亮和苹果 ……72

§6　求到月球的距离 ……75

§7　一个大圆球的引力吸引 ……78

§8　地球的其他卫星 ……81

§9　$G$ 的数值和地球的质量 ……84

§10　$g$ 随地区的变化 ……86

§11 太阳的质量……89
§12 求地球到太阳的距离……91
§13 质量和重量……94
§14 失重……100
§15 有关其他行星的知识……101
§16 海王星的发现……106
§17 太阳系之外的引力……111
§18 爱因斯坦的引力理论……115
习题……116
**第九章 碰撞和守恒定律**……123
§1 碰撞定律……123
§2 线动量的守恒……125
§3 动量矢量……126
§4 作用、反作用和冲量……129
§5 动量守恒原理的推广……134
§6 粒子流的作用力……136
§7 流体喷射器的反作用力……140
§8 火箭推进……143
§9 碰撞和参照系……147
§10 碰撞中的动能……149
§11 零-动量参照系……151
§12 二维碰撞过程……156
§13 弹性核碰撞……158
§14 非弹性和爆炸性过程……163
§15 什么是碰撞?……168
§16 受到外力的相互作用粒子……169
§17 气体的压强……171
§18 中微子……174
习题……175
**第十章 动力学中的能量守恒、振动运动**……185
§1 引论……185
§2 运动积分……186

§3 功、能量和功率……191
§4 重力势能……194
§5 一维情形增补……196
§6 一维运动的能量法……199
§7 能量法的一些例子……201
§8 用能量法处理谐振子……210
§9 小振动概述……213
§10 作为一个二体问题的线性振子……215
§11 含有能量贮存的碰撞过程……218
§12 双原子分子……222
习题……229
第十一章 保守力和空间中的运动……241
§1 保守力概念的引伸……241
§2 两相连质量的加速度……243
§3 在一竖直圆周上运动的物体……244
§4 伽利略的一个实验……247
§5 一抛物轨道上的质量……249
§6 单摆……252
§7 作为一谐振子的摆……254
§8 大振幅的摆……258
§9 万有引力：保守的有心力……259
§10 一球壳的引力……263
§11 球的引力……267
§12 逃逸速度……271
§13 关于保守力的判据的补充……275
§14 场……279
§15 等势面和势能的梯度……280
§16 在保守场中的运动……283
§17 耗散力的效应……288
§18 高斯定理……290
§19 高斯定理的应用……294
习题……296

# 第七章　运用牛顿定律

值得重新强调的事实是，牛顿定律可以用在两个主要方面：

1. 知道所有作用在一物体上的力，我们可以计算出它的运动.

2. 知道一物体的运动，我们可以推断出必然有些什么力在作用着①.

这样来分类也许似乎是非常明显的和相当平凡的，但实际并不如此. 第一类代表一种纯粹**演绎**的过程——运用已知的力的规律，并由此作出明确的预见. 第二类则包括力学的**归纳性**和**探索性**运用——利用观测到的运动去获悉迄今未知的、物体间相互作用的特点. 精于牛顿定律的演绎用法，对于在物理学和工程学上作出成功的分析和设计工作当然是基本的，并能带来巨大的智力上的满足. 但对于物理学家来说，真正使人兴奋的因素来自归纳过程，即通过对运动的研究，探索自然界的力. 正是通过这条道路，牛顿发现了万有引力定律，卢瑟福发现了原子核，而粒子物理学家探索着核子的结构(固然，最后这一领域需要用量子力学而不是牛顿力学来分析).

## §1　几个引例

在第八章中我们将要说到一些关于牛顿如何从行星运动的研究达到他对引力的洞察的事情. 但首先我们要讨论的是关于如何

① 如果力的规律也是已知的，这可以用来获得关于一未知质量的知识. 在前页的引文中把这归于第二类.

由给定的力计算运动. 某些最初的工作在某种程度上缺乏魅力——但同其他任何事物一样,那是科学的一个逃避不了的方向.而开始时的某些系统的基础工作，以后是会得到丰厚的酬偿的. 我们先限于力是常量的情形. 这样我们就能够运用匀加速度的运动学方程［(3-10)式］. 为了方便，我们在这里把那些方程再引述一下:

$$\text{运动学方程:}\ \left\{\begin{array}{ll} & v=v_0+at \\ \text{(只适于匀加} & s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ \text{速度)} & v^2=v_0^2+2a(s-s_0) \end{array}\right. \tag{7-1}$$

在任何给定问题中，我们的步骤总是首先分清所有作用于一物体上的力，并由 $F_{总}=ma$ 计算总加速度. 然后我们用这些运动学方程去描述此后的运动. 一般地说，这后一步骤只是一个数学练习；这个问题的真正的"物理"在于分析有哪些力出现. 不要被这些初等问题的表面平凡性所迷惑. 从表面上看，它们确实是无趣的和无关紧要的. 但用来分析它们的**方法**却具有突出的重要性——在很高级的问题中也采用与此完全相同的方法. 我们有意选择比较初级的体系作为开始来阐明其中的步骤，因而问题是陈旧的. 但如果你着眼于方法,它却是强有力的.

**例 1　光滑桌面上的物块**　所谓"光滑"面是指它不能沿它的切向施加任何力. 实际不存在这种面,但作为有用的理想化,某些面是足够地接近于光滑面的.

考虑一块质量为 $m$ 的物体水平地沿一无摩擦的表面被拉着.

问题: 这物块的运动如何?①

首先我们必须确定有些什么力作用**于这块物体上**. 为了帮助

---

① 在这一个例子和下一个例子中,我们作这样的假设: 相对于地面静止着的物体,其加速度为零. 这只是近似地正确——有关的充分讨论见第十二章.

分析，在脑子里把这块物体同设想的边界面[见图 7-1(a)]“隔离”开，并作一草图表明所有从外面通过这界面作用**于这块物体上**的力①. 它们是:

$\mathbf{F}_g$＝重力

$\mathbf{T}$＝绳中张力（一接触力）

$\mathbf{N}$＝桌子施加于这块物体的接触力，与桌面垂直

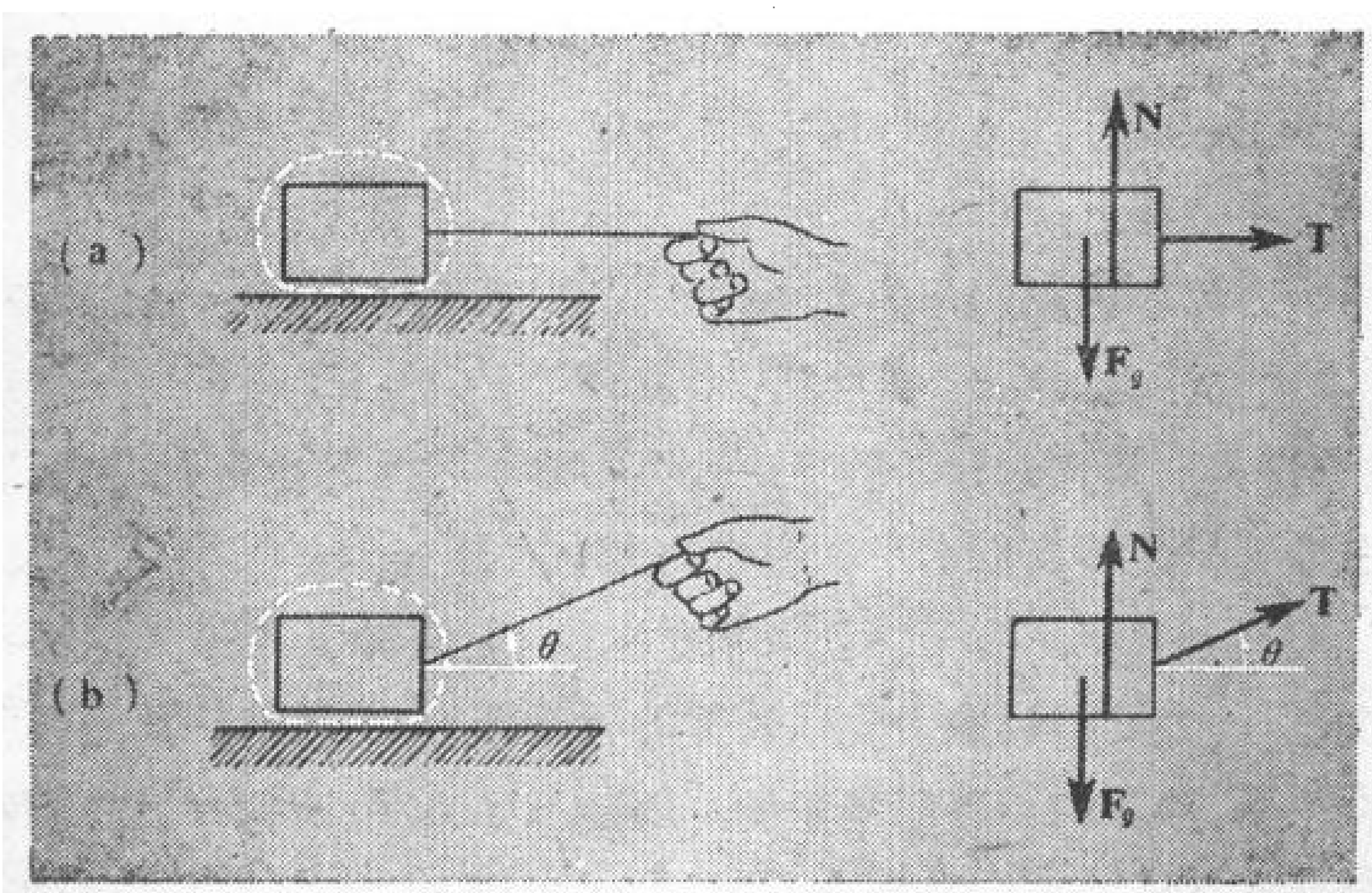



图 7-1 （a）一块物体在一完全光滑的表面上水平地被拉着.
（b）同一块物体由一条绳沿一任意方向被拉着.

我们在此引用了矢量记号，因为牵涉到的力显然不止一个方向. 在这一情形下，牛顿定律的完整表述是 $\mathbf{T}+\mathbf{N}+\mathbf{F}_g=m\mathbf{a}$. 由于假定这块物体沿竖直方向没有加速度，我们推断 $\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{F}_g$ 是相等反向的矢量；换言之，

$$\mathbf{N}+\mathbf{F}_g=0$$

用另一方式表示，我们可以说 $\mathbf{F}_g$ 的大小 $F_g$ 等于 $\mathbf{N}$ 的大小 $N$，因

① 在这些例子中，我们将把每一物体当作一个点状粒子，因而所有的力都作用在一单个点上.

为一个矢量的大小，不论矢量的方向为何，总是一个正的量．于是，沿 $y$ 方向，合力的分量为零的条件可以表示为 $N-F_g=0$．作用于这块物体上的合力——“净”力——因此（按矢量加法）等于 **T**，而有 $T=ma$（**T** 和 **a** 都在水平方向上）．

如果我们假设绳子不是沿水平方向拉着[图 7-1(b)]，问题就变得更有实际价值一些．牛顿定律最初的矢量表述形式上同前，但在把它分析为竖直和水平分量时，我们得到下列方程：

竖直方向上：$N+T\sin\theta-F_g=0$

水平方向上：$T\cos\theta=ma$

第一个方程告诉我们$N$的大小：

$$N=F_g-T\sin\theta$$

（绳中张力的竖直分量帮助支持这块物体，因而$N$小于$F_g$.）第二个条件直接告诉我们水平加速度的大小．

对这一分析，有一物理限制要注意．除非桌子能够把这块物体向下拉，如同能够向上支承物体的重量那样，力**N**必然是如图所示向上的，因而标量$N$总是正的．因此，如果 $T\sin\theta>F_g$，我们就不能满足所设条件．那么会出现什么情况呢？

**例 2　在粗糙桌子上的物块**　如例 1 一样，我们假设这块物体被绳子用力**T**拉着，并且，为简单起见，令拉力在水平方向上（见图 7-2）．虽然这肯定不是一个难题，但除非我们对摩擦力 **f** 的性

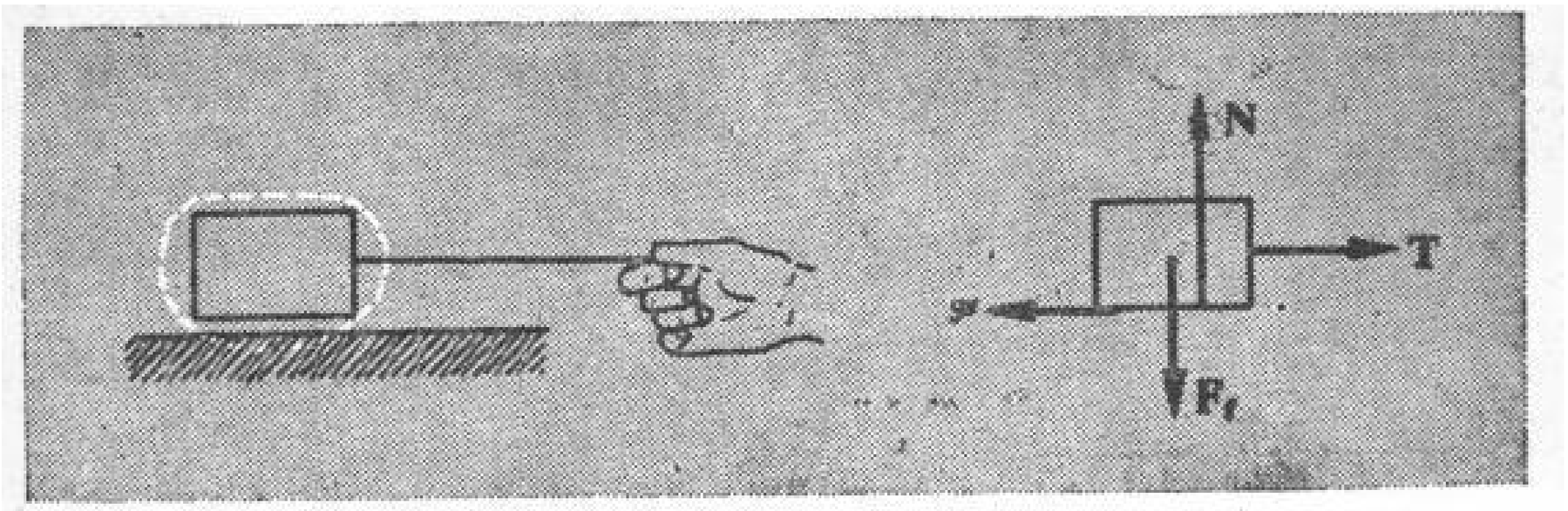



图 7-2　一块物体在一粗糙表面上被拉着．

质有某些知识，我们是说不出会发生些什么的．如果是“干摩擦”，可令 $f \leqslant \mu N$，其中 $\mu$ 是摩擦系数．在这情形下，$N$ 等于 $F_g$，因之，把 $F_g$ 写为 $m$ 乘重力加速度 $g$，有 $f \leqslant \mu mg$．不等式表明，摩擦力会自动调整，直到某一极限，以平衡力 T．因此，确定水平加速度的方程 $\mathbf{T}+\mathbf{f}=m\mathbf{a}$ 导致两种不同的表述：

如果　$T<\mu mg$：　$T-f=0$　　（因而 $a=0$）

如果　$T>\mu mg$：　$T-\mu mg=ma$　［因而 $a=(T/m-\mu g)$］

我们将不详细考虑如果T的作用方向与水平成一角度会发生些什么情况．但可以看出，这将改变N的大小，因而也改变了 f 的极限值．读者应当自己分析这一情况．

**例 3　在光滑斜面上的物块**　有两个力作用于这块物体上(图 7-3)：力N，垂直于(无摩擦的)斜面，和重力 $\mathbf{F}_g$．这些力方向不同，因而一定有不为零的合力，而物体一定要加速．如果我们愿意的话，可以引进水平和竖直坐标 $x$ 和 $y$ 而把 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 写成确定加速度 a 的分量 $a_x$ 和 $a_y$ 的方程：

$$N\cos\theta - F_g = ma_y$$

$$N\sin\theta = ma_x$$

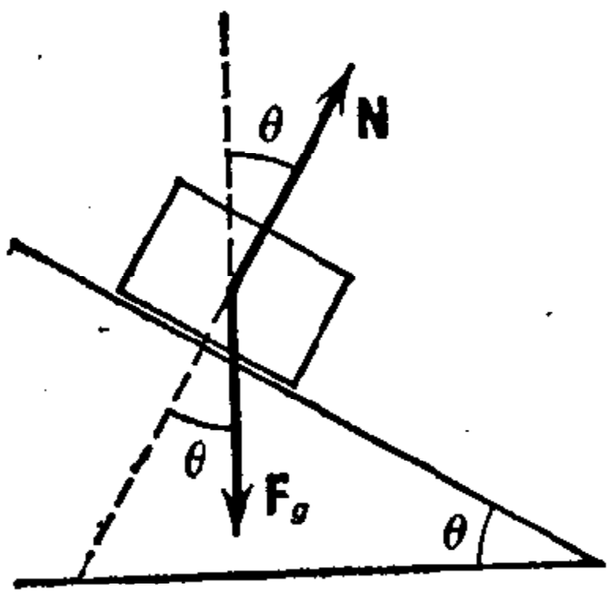



图 7-3　作用于放在完全光滑斜面上的一块物体上的力．

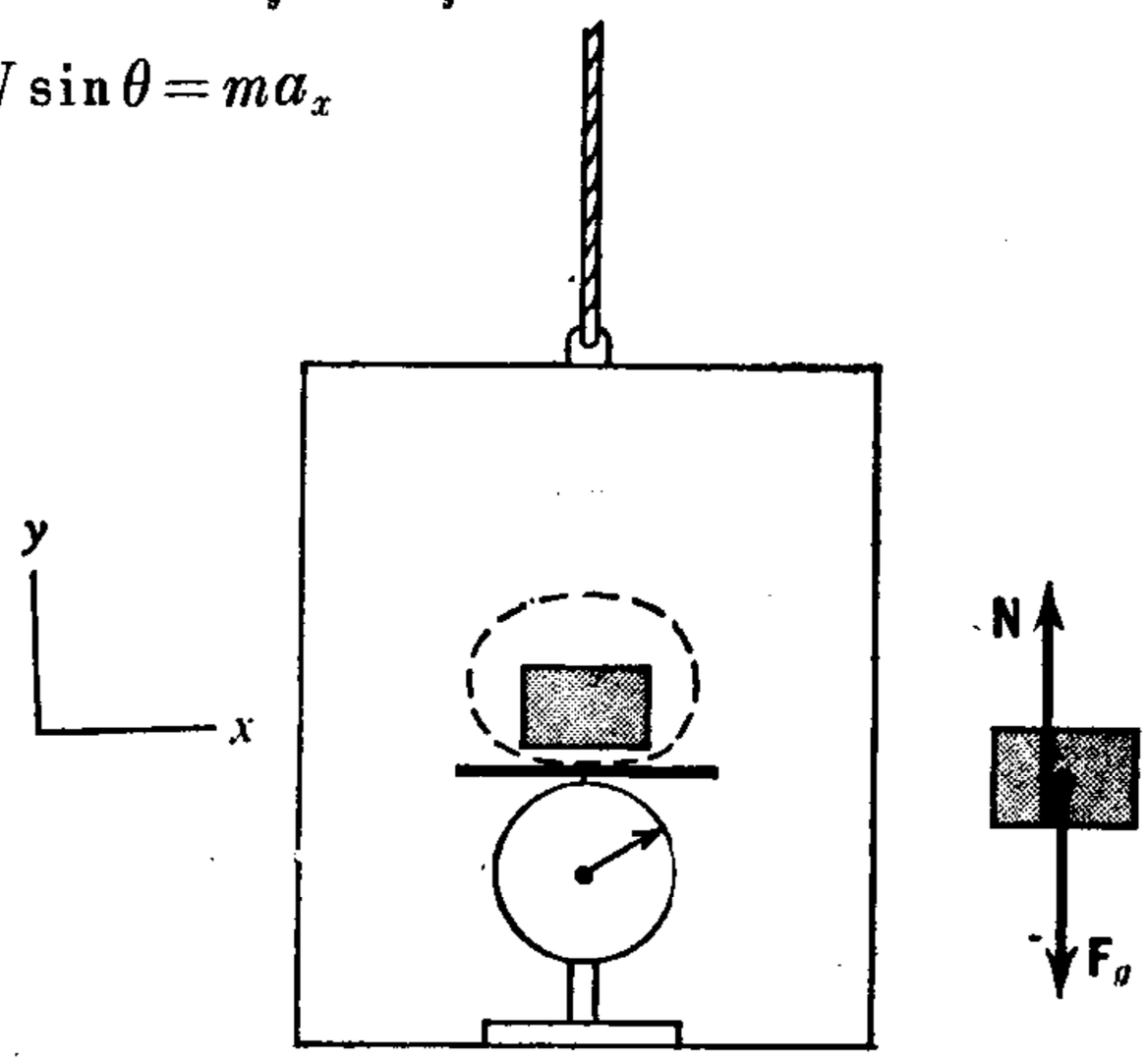



图 7-4　在一加速的升降机中静止着的物块；弹簧秤上记录的是它的表观重量．

然而，很清楚，a 是平行于倾斜方向的，因此，在这情形下引进坐标 $s$ 以表示沿斜面向下的距离会简单一些．把各个力分解为沿 $s$ 的和垂直于 $s$ 的，我们得

$$F_g \sin\theta = ma$$

$$N - F_g \cos\theta = 0$$

如果把重力的大小写成 $m$ 乘重力加速度 $g$，第一个方程给出

$$a = g \sin\theta$$

**例 4　在升降机中的物块**　在升降机里有一块物体放在一行李秤（弹簧秤）上（图 7-4）．问题：当升降机升和降时，秤上的读数如何？

心里把这块物体隔离开，我们就认出只有两个力作用于其上．它们是

$\mathbf{F}_g$ = 重力（向下）

N = 秤施加于物块的接触力（向上）

行李秤上记录的是N的大小，因为按相接触的物体的作用与反作用相等，施加于秤上的力是 $-\mathbf{N}$．这读数之值在任何情形下都是我们所称的这块物体的**重量测值**（$W$）．

如果升降机（连同物块和秤一起）有一加速度 a，以向上为正，则牛顿定律要求

$$\mathbf{N} - \mathbf{F}_g = m\mathbf{a}$$

因此，如果升降机不动或者以匀速向上或向下运动，秤上的读数都等于作用于这块物体上的重力．但是如果升降机有一正的（向上的）加速度，则

$$N = m(g + a)$$

这时，用这秤量出的物体的重量比作用于其上的重力要大．人们常常亲身感受到这一效应，好象是脚底下增加了作用力．这效应发生在升降机的两种情形中：（a）当升降机加速上升时，和（b）当

它减速下降时. 两种情形都包含向上的加速度. 类似地，如果升降机在上升时减慢下来或者正在开始向下运动，a 都向下，因而测出的重量小于 $F_g$. (顺带说一下，在升降机里人们有时感到的内部不舒服是直接与牛顿定律相连的. 如果升降机获一正的（向上的)加速度,人们的心脏和胃必然——字义上的——会在感受到周围组织的额外作用力以使它们随着加速之前略为下沉.)

**例 5　两相连质量**　这里是一个简单的例子，设计来说明一个要点，即人们可以自由地用自己的设想去隔离开一完整体系的**任何部分**，然后只在这部分上应用 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$. 图 7-5 所示是在一光滑(无摩擦力)面上的两质量,由一根轻的(无质量的)绳子相连着. 一水平力P拉着右方的质量. 关于这一情况，我们能作出什么推论呢?

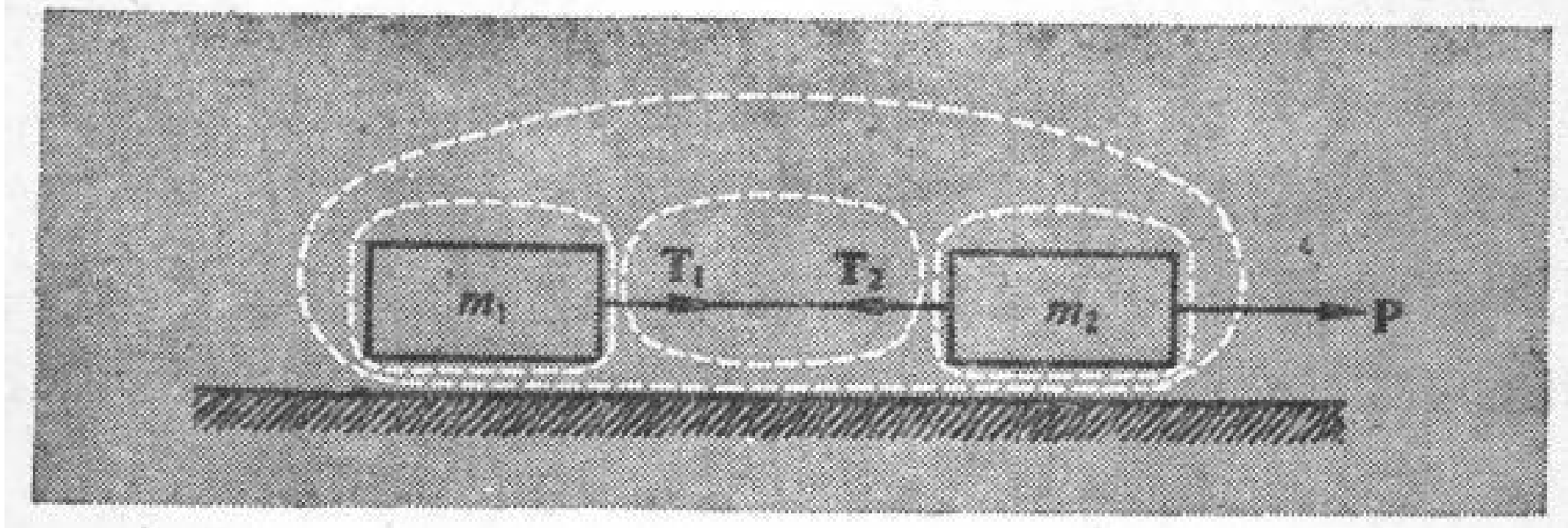



图 7-5　两相连物体在一完全光滑面上被水平地拉着. 牛顿定律必须应用于我们选来考虑的、这体系的任何部分.

首先,我们可以设想一隔离边界画在 $m_1$ 和 $m_2$ 以及连结它们的绳的周围. 作用于这体系的唯一的水平外力是 $P$，而总质量是 $m_1$ 加 $m_2$. 因此有

$$P=(m_1+m_2)a$$

这立刻告诉我们两质量所公有的加速度. 其次，我们可以设想一个只围绕着连结绳的隔离边界. 在图 7-5 中我们指出绳拉质量的力 $\mathbf{T}_1$ 和 $\mathbf{T}_2$;由作用同反作用相等，绳的两端受到的力是 $-\mathbf{T}_1$ 和

$-\mathbf{T}_2$. 这两个力之和一定要等于绳的质量乘它的加速度 **a**. 已设绳的质量可略而不计，这就意味 $\mathbf{T}_1$ 和 $\mathbf{T}_2$ 有相同的大小 $T$，我们称之为绳中的张力. （这一理想化结果当然是相当明显的；值得注意的是，在任何真实情形中，绳两端的张力会有差别，足以对绳本身的质量提供所需的加速力.）

最后，我们可以设想分别画在 $m_1$ 和 $m_2$ 周围的隔离边界，并应用牛顿定律于每一个质量的水平运动：

$$T = m_1 a$$

$$P - T = m_2 a$$

把这两个方程加起来，我们再次得到整个体系的运动方程. 但如果我们单看其中的一个方程，把已确定的 $a$ 值代入，将得到用 $P$ 和质量表出的张力 $T$.

我们再次承认这些问题的简单性. 但如果按照把这些问题提出来的精神——即，不是为了问题本身的目的，而是为了举例说明牛顿定律的系统运用方式——来研究它们，就会发现它们启示了一条可靠的途径，用以处理差不多任何包含直接应用 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 的问题.

## §2 二维运动

所有上节中的例子都是处理只沿着一个方向的运动. 这并不是一个严格的限制，因为根据“运动的独立性”，我们总是能够对任何给定时刻的情况，将力和加速度按照沿着分开的坐标方向的分量予以分析的. 其中最简单的是加速度 **a** 为一常矢量的情形. 这时，把加速度本身的方向选作一个坐标最方便；沿任何与此垂直的方向，加速度的分量按定义为零，而相应的速度分量一定是常数. 这一步骤的最为熟知的例子也许是在空气的阻力可以不计的理想化情形中对重力作用下的运动的分析. 在第三章中我们把它考虑

为一个纯粹运动学问题. 另一个例子是一电子束在阴极管中的运动,这里多了一个特点,就是我们能控制作用力. 下面我们将它作为动力学问题来考虑①.

图 7-6(a)是一个阴极射线管的草图,图 7-6(b)则是某些主要

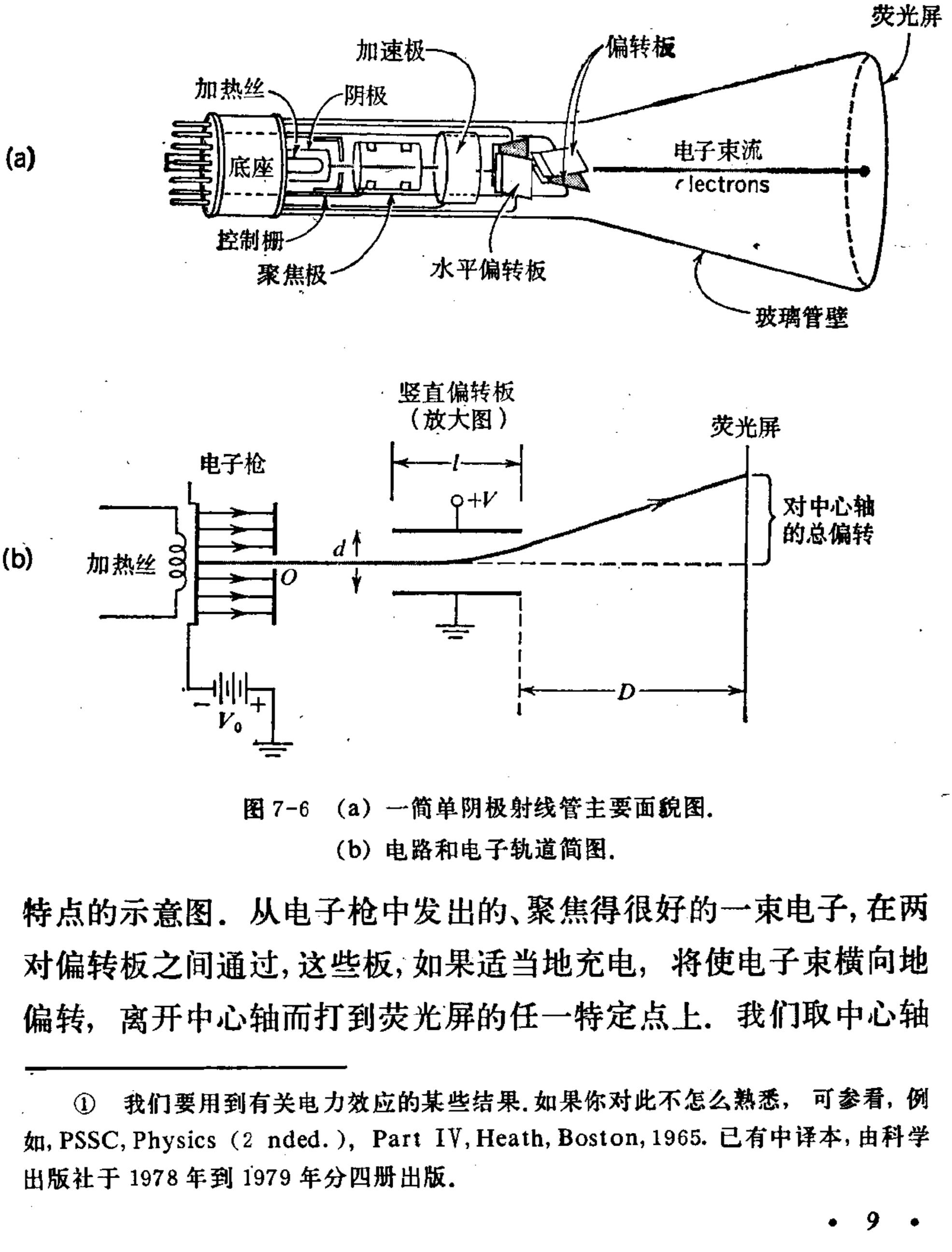



图 7-6 (a) 一简单阴极射线管主要面貌图.

(b) 电路和电子轨道简图.

特点的示意图. 从电子枪中发出的、聚焦得很好的一束电子,在两对偏转板之间通过,这些板,如果适当地充电,将使电子束横向地偏转,离开中心轴而打到荧光屏的任一特定点上. 我们取中心轴

① 我们要用到有关电力效应的某些结果. 如果你对此不怎么熟悉,可参看,例如, PSSC, Physics (2 nded.), Part IV, Heath, Boston, 1965. 已有中译本,由科学出版社于 1978 年到 1979 年分四册出版.

为 $z$ 方向，从而取垂直于 $z$ 并互相垂直的两横向偏转方向为 $x$ 和 $y$，如同在一个真的示波器中那样.

电子枪通过一电位差 $V_0$ 使电子加速. 这给每一电子以动能 $eV_0$(其中 $e$ 是基元电荷)，因而电子获得一纵向速度分量 $v_z$，由下式给出:

$$\frac{1}{2}mv_z^2 = eV_0 \tag{7-2}$$

因此，

$$v_z = \left(\frac{2eV_0}{m}\right)^{1/2}$$

离开电子枪之后，电子在 $z$ 方向不再经受加速或减速，因而它的 $z$ 坐标继续按变化率 $v_z$ 变化.

我们将假定 $y$-偏转板的上板和下板之间加上了电位差 $V$. 这意味着，如果一电子从一个板飞行到另一板，它将由于横向电力 $F_y$ 作功的结果而获得能量 $eV$. 如果设两板平行，相距为 $d$，而且 $d$ 比板的长度小，那么，在两板之间的所有各点上，力 $F_y$ 都有相同的值，因而电子所获能量也等于 $F_y d$. 因此，有

$$F_y = \frac{eV}{d}$$

给了这个 $F_y$ 之值，电子在这两板之间通过的全程中将有一向上的加速度，由下式给出，

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{eV}{md}$$

在竖直方向上电子将偏转多少呢？这与它在偏转板之间所费的时间有关. 如果板的水平方向长度为 $l$，而电子速度的水平分量为常数 $v_z$，则所费时间简单地为

$$t = \frac{l}{v_z}$$

由(7-1)式我们可以确定在这向上的力的作用时间内所产生的横

向位移：

$$s_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y = 0 + \frac{1}{2}\frac{eV}{md}\left(\frac{l}{v_z}\right)^2$$

但由(7-2)式，$mv_z^2/e$ 正好是 $2V_0$，所以我们得到

$$y = \frac{Vl^2}{4V_0 d} \tag{7-3}$$

这一表达式给出电子从偏转板间穿出来时的横向位移．打到荧光屏上那一点离开中心轴的总位移可以根据三角运算求出．当电子处在两板之间的时候，它的位移的 $z$ 和 $y$ 分量是

$$z = v_z t$$

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

由此消去 $t$，得 $y$ 与 $z^2$ 成正比，因此轨道是一抛物线．

一旦电子离开两板间的区域，不再有力作用于它，因而它将沿着一直线飞行，直线的倾角等于 $\arctan(v_y/v_z)$，其中 $v_y$ 是向上离开两板时的横向速度分量．由于

$$v_y = a_y t = \frac{eV}{md}\frac{l}{v_z}$$

$$\frac{v_y}{v_z} = \frac{eVl}{mdv_z^2} = \frac{Vl}{2V_0 d}$$

当电子从偏转板到屏上走了距离 $D$ 时，所增加的横向偏转 $Y$ 为

$$Y = D\frac{v_y}{v_z} = \frac{VlD}{2V_0 d} \tag{7-4}$$

如果象通常实际情形那样，$D \gg l$，总的横向偏转绝大部分包含于 $Y$ 中，因此我们可以用(7-4)式来估计一实际的示波器的近似灵敏度[灵敏度＝(斑点偏转)/(偏转电压)]．

我们可能会顺便地注意到(7-3)式和(7-4)式的一个显著特

点. 粒子作为一个电子所具有的一切显著特征都在式中消失了. 任何带负电的粒子,不论电荷和质量为何,原则上都能通过这系统而向上终止于屏上的同一点.

在一台实际的、如图 7-6(a)所示的示波器中, 偏转板不是平行的平板,因此(7-3)和(7-4)式并不严格地可以应用. 但是,这些方程仍然正确地指出偏转如何依赖于加速电压和偏转电压, 同时也以不那么明确的方式依赖于管子的特征尺寸.

## §3 圆 周 运 动

圆周运动问题通常多是这样来阐述, 好象它同我们迄今所讨论的牛顿定律的各种应用是分开的. 因此,也许值得强调一下,它同样是 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 的完全直接的运用. 唯一特殊之点是,加速度的径向分量完全由轨道的半径和瞬时速率确定.

先看最简单的情形, 假定一质量为 $m$ 的物体以匀速率 $v$ 沿着一半径为 $r$ 的圆周运行(图 7-7). 举例说, 这样一种运动可以建立如下: 在非常光滑的水平面(例如一气垫桌)上固定一短桩, 桩上系一根拉紧的绳子, 绳的另一端系着一个冰球, 然后给冰球一垂直于绳的任意速度 $v$. 于是, 象我们在第三章中看到过的, 物体的加速度纯粹是向着圆心的,大小为 $v^2/r$. 我们知道,要产生这一“向心”加速度,必须存在一相应的力:

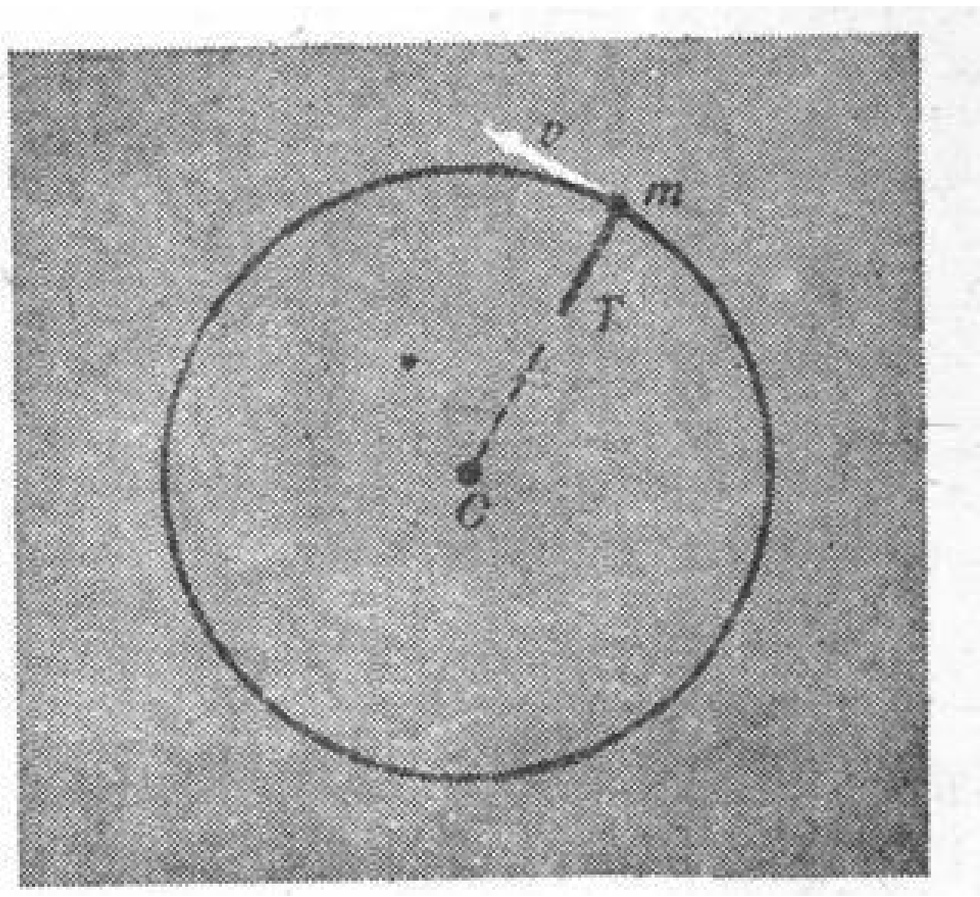



图 7-7 一粒子在一圆周上作匀速率运动的基本动力学情况.

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} \tag{7-5}$$

在我们所描写的假想情形中，这力是由拴物的绳中张力$T$提供的. 如果绳子不够结实，受不住所需的力的强度，它将断掉，而物体不再受力(至少在运动平面中如此)，将沿着切线方向飞走.

一辆汽车在斜坡弯道上的运动是这类问题的一个重要实际例子. 设路的曲率半径为$r$(在一水平面上测得)，如图 7-8(a)，斜坡的倾角为$\alpha$，如图 7-8(b). 一辆汽车以速率$v$走进或走出后一图形的平面时，应有向心加速度$v^2/r$. 斜坡的目的是使车辆能够以合理的速率，在纯粹垂直于路面的力(即无切向力)的作用下，维持在弯道中行驶——如果路面是水平的，则本应有一切向力，而如果路面与轮胎之间的接触不能提供这一切向力的话，就会发生打滑.

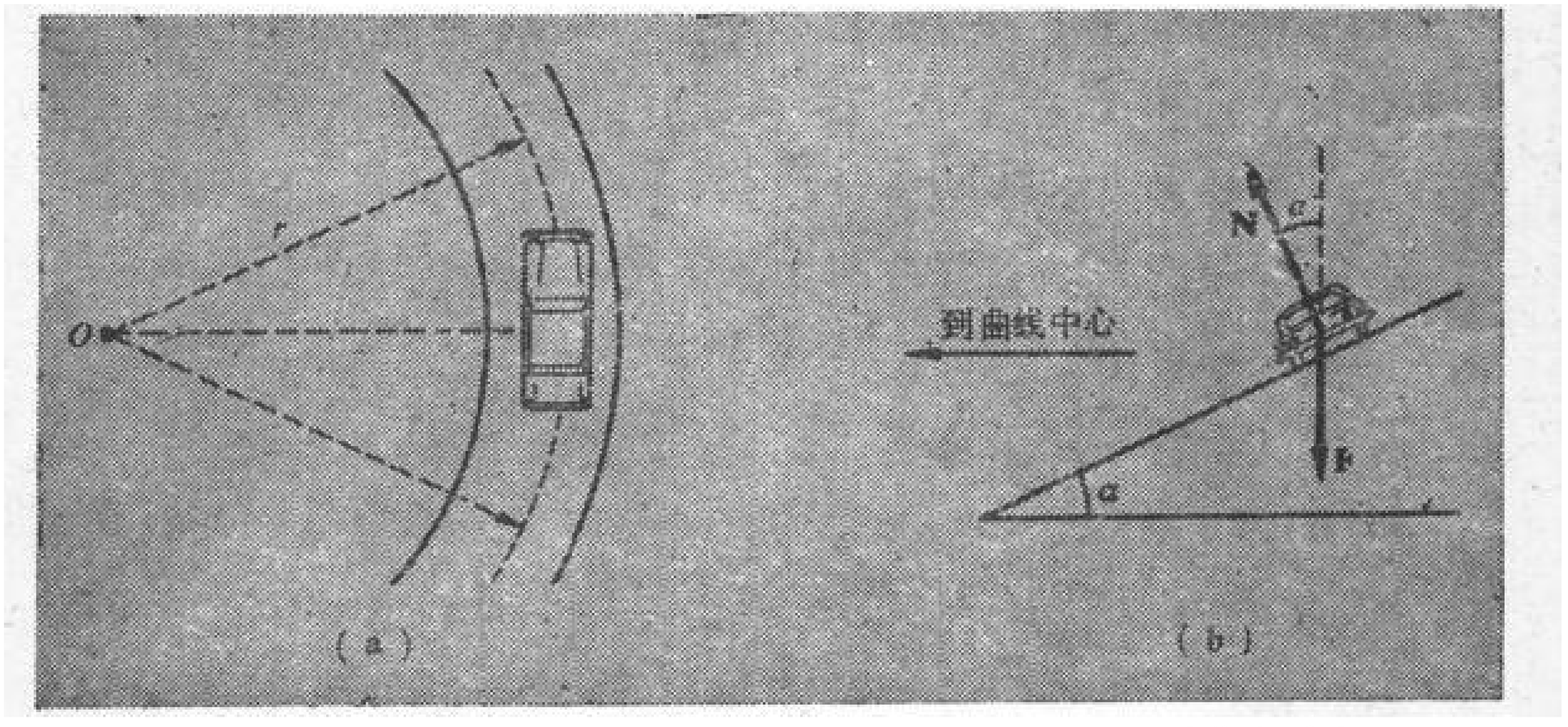



图 7-8 (a) 从上面竖直地下望所看到的弯道. (b) 直对着车后或车前所看到的斜坡弯道上的汽车.

接下去我们来考虑图 7-8(b)中所示的理想情形. 把各个力按竖直和水平方向分解，并应用$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$，有

$$\begin{aligned} N\sin\alpha &= \frac{mv^2}{r} \\ N\cos\alpha - F_g &= 0 \end{aligned} \tag{7-6}$$

以 $mg$ 代替 $F_g$, 解 $\alpha$, 得

$$\tan\alpha=\frac{v^2}{gr} \tag{7-7}$$

这式确定在给定的 $v$ 值和 $r$ 值之下斜坡的正确倾角. 另一看法是, 给定 $\alpha$ 和 $r$, (7-7)式确定应以什么速率在弯道上行驶. 如果行驶速率大于或小于此值, 那么由此产生的情况就需要引进垂直于N的摩擦力 f (极限大小为 $\mu N$), 沿着斜坡面向内或向外而作用(参看图 7-17).

## §4 变速率曲线运动

如果一粒子在它沿着一圆形轨道运行时改变它的速率, 那么, 除向着曲率中心的向心加速度外, 它还有一与轨道相切的加速度分量. 这切向加速度分量代表速度矢量大小的变化率. (这与向心加速度分量相反, 后者依赖于速度矢量方向的变化率.) 我们在第三章中推导过有关的结果[(3-18)式].

分别考虑这两个分量最便于处理这一情况:

$$\left.\begin{array}{l}\text{加速度的径向}\\ \text{分量(垂直于}\\ \text{轨道)}①\end{array}\right\}=a_r=-\frac{v^2}{r}\quad (r\text{ 是曲率半径})$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{横向加速度(与}\\ \text{轨道相切)}\end{array}\right\}=a_\theta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

[注意这(只)是速度矢量大小的变化] (7-8)

略为重作解释, 就可以把这些结果应用于沿任意曲线轨道运动的情形. 对于这种轨道上的每一点都有一曲率中心和与其相关

---

① 在第二章中我们正式讨论坐标系时, 我们把向外的径向确定为正. 我们在这里引进记号 $a_r$ 来表示沿这方向的加速度分量, 因此, 式中的负号表明这加速度实际上正如我们讨论过的那样是指向中心的(即向心的). 又参看本书第一册 105 页.

的一曲率半径（两者都随着沿轨道的运动而变）. 只要我们把记号 $r$ 和 $v$ 解释为曲率半径和速率的瞬时值，上面那些表示式就是完全普适的. 它们给出普遍曲线运动的瞬时加速度的分量——与轨道相切和与轨道垂直. 对于这种情形，图 7-9 指明一种更为合适的、用来表示这些加速度分量的记号.

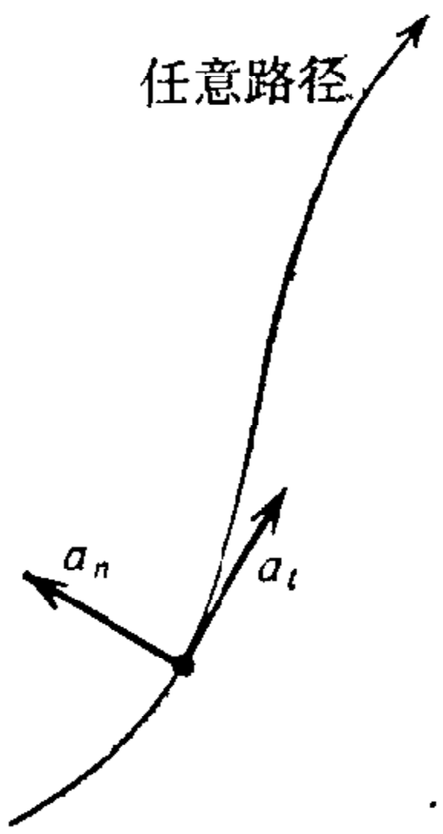



图 7-9　在一任意曲线路径上一点的加速度分量.

一粒在唱机转盘上的灰尘，起始时无滑动地随着转，提供一个简单而熟知的例子，说明一个粒子同时具有径向和切向加速度分量. 它的总加速度 **a**(图 7-10) 是互相垂直的 $a_r$ 和 $a_\theta$ 的组合：$a^2=(a_r^2+a_\theta^2)^{1/2}$. 转盘作用于粒子的净水平力必然是在 **a** 的方向上，大小等于 $ma$. 如果转盘与尘粒之间的接触不能提供这一大小的力，这种圆运动就是不可能的，尘粒将相对于表面而滑动.

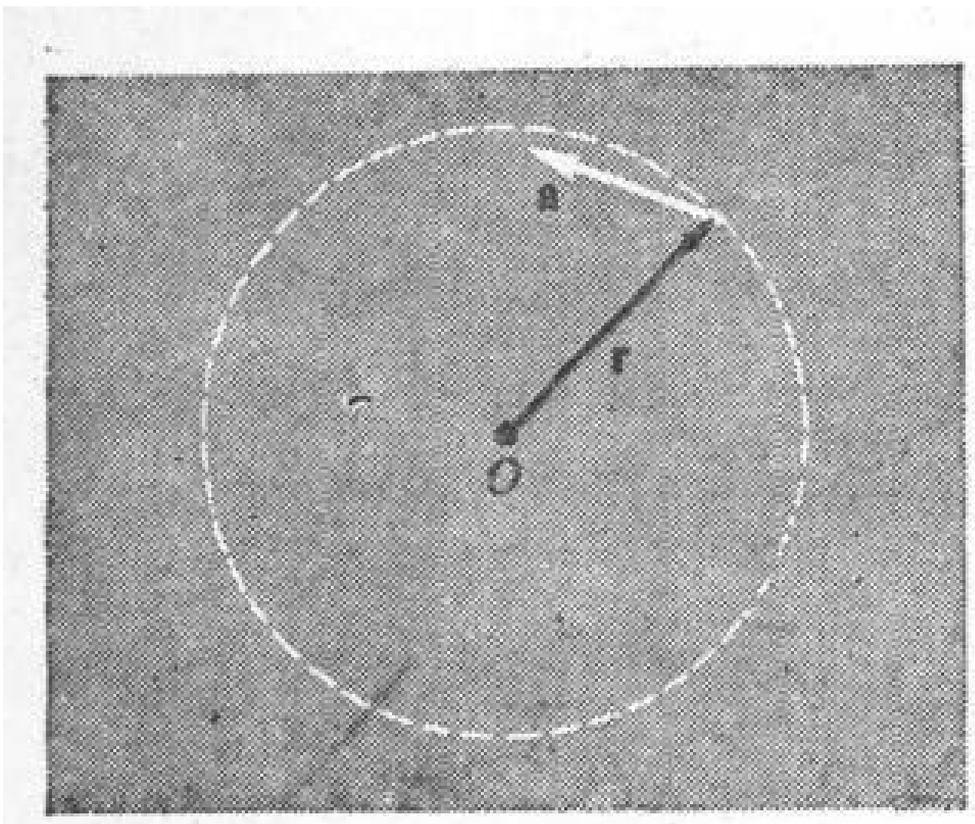



图 7-10　附在一圆盘上的一个粒子，当圆盘的角速度改变时粒子的净加速度矢量.

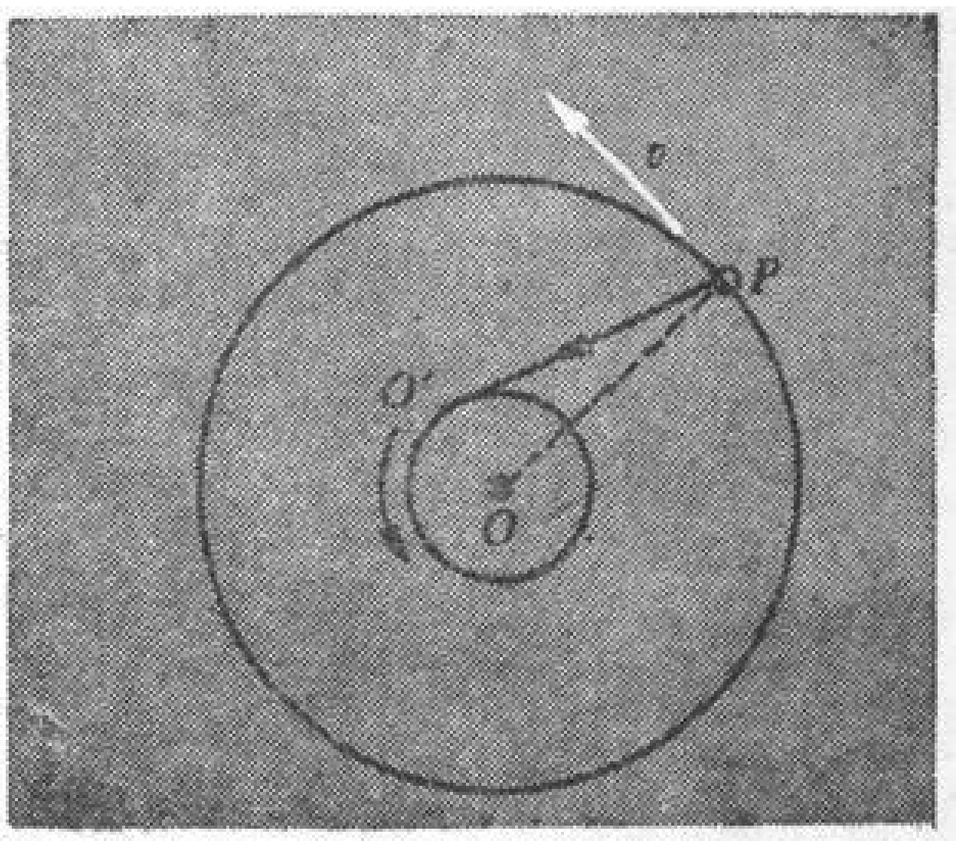



图 7-11　一粒子在绕 $O$ 点的圆轨道上运动. 要增加它的速率，绳子 $PO'$ 必须提供一个与这圆相切的力分量.

一根绳的一端系一物体，将它急转起来使物体从静止变到高速圆周运动(例如运动比赛中的“掷链球”).如果我们分析这过程，将看到绳子必须施行两种作用：(1) 提供切向力以增加物体的速率，(2)提供大小适当、等于 $mv^2/r$ 的向着圆心的力. 要完成这双重作用，绳子的拉力必须“领前”于物体，使它提供的张力有一切向分量如图 7-11 所示. 这作用可以维持下去，只要绳的内端 $O'$ 象图中所指出的那样不断地在一圆轨道上运动. 这是一种我们在实际中或多或少是本能地去做的事情.

## § 5 在均匀磁场中带电粒子的圆轨道

带电粒子在磁场中的行动是圆周运动的最重要例子之一. 18 页上的另一节中将总结磁力的特性，并说明一般情况下这力如何由下式给出：

$$\mathbf{F}_{磁}=q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{7-9}$$

其中 $q$ 是粒子的电荷(正的或负的).

设想一带(正)电 $q$ 的粒子在这页书的平面上运动，所在区域的磁场 $\mathbf{B}$ 垂直于纸面向里. 于是，由(7-9)式有

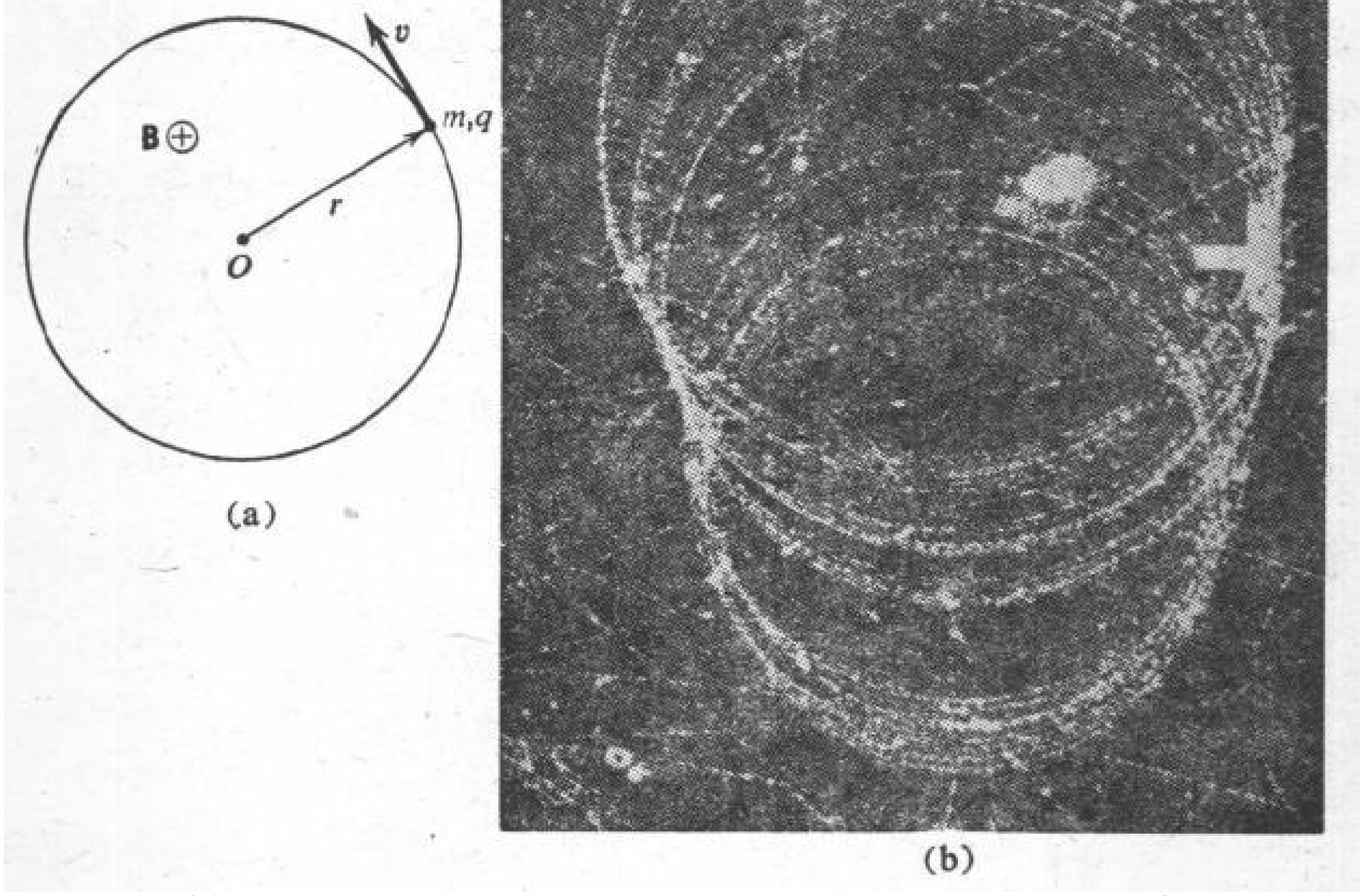
$$F=qvB. \tag{7-10}$$

这是一个纯粹的偏转力，永远垂直于粒子的运动. 因而速度 $\mathbf{v}$ 的大小不会改变，但它的方向则是均匀地随时间变化. 因此，虽然不存在通常意义下的力心，粒子还是描绘出一个中心在 $O$ 点、半径等于 $r$ 的圆周轨道[图 7-12(a)]. 向心加速度为 $v^2/r$，因而，按牛顿定律有

$$qvB=\frac{mv^2}{r}$$

由此得

$$r=\frac{mv}{qB} \tag{7-11}$$




(a)　　(b)

图 7-12　(a) 在一均匀磁场中带电粒子绕一圆轨道运行. (b) 在一云室中负电子和正电子由于受磁力作用而弯曲的轨迹. 其主要特点是, 初始能量为 30 兆电子伏的一个电子所走过的轨迹是一连串接近于圆形的轨道, 它的半径由于电子失去能量而减小.

因此这圆的半径是在给定的磁场中带有给定电荷的粒子的动量 $mv$ 的量度. 这一事实是核物理学家在云室或气泡室中 [见图 7-12(b)]确定带电粒子的动量的方法的基础. 如果一带电粒子的带电量已知, 则根据它在置于磁极之间的云室中形成的圆形轨迹的半径, 可以很容易地求得粒子的动量. 要得到周期 $T$(或角速度), 我们写出

$$qvB = m\omega v$$

或

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m}B \tag{7-12}$$

它与粒子的速率无关. (7-12) 式所给出的角频率称为“回旋加速器”频率，对于一定的磁场，它只与粒子的电荷同质量之比有关. 正是由于认识到这一点，E. O. 劳仑斯在 1929 年设计了第一台回旋加速器，在其中可以用恒定频率的交变电场把质子升举到较高的能量，用一磁场将带电粒子保持在一给定半径的轨道中是大多数高能核加速器的一个基本特点.

使速度限于垂直于B的平面内当然是一个很特殊的情形. 但如果这条件得不到满足，我们可以设想把 v 分解为两个分量，一个垂直于B，另一与B平行. 后者，按(7-9)式，没有与它关联的磁力，前者随时间的变化则完全与上面所描述的方式相同. 因此，总的运动是一螺旋线，它在与B垂直的平面上的投影是一个固定的圆周，如图 7-13 所示.

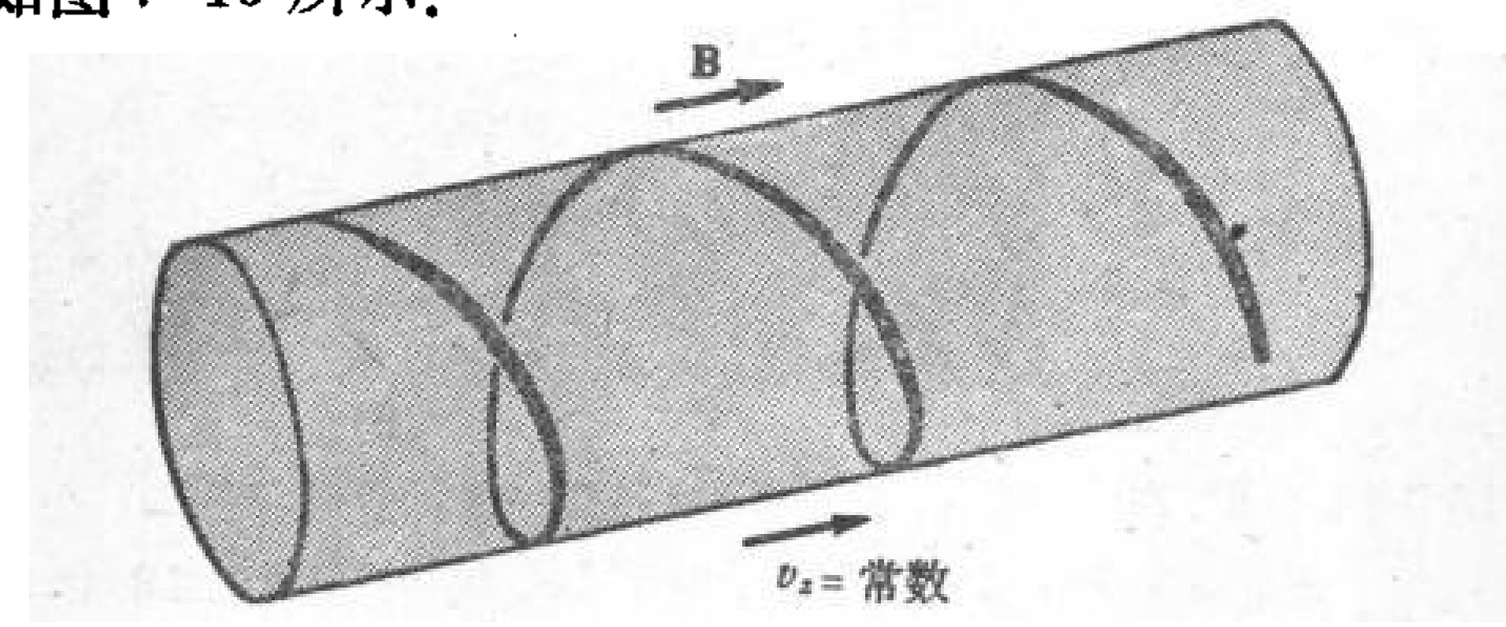



图 7-13　在平行于磁场的方向上有速度分量的带电粒子的螺旋线轨迹.

## §6　在磁场中的带电粒子

这是实验事实：在空间一给定点的一个带电粒子，当它在运动时它可能受到一个力，但如果它是不动的，则即使是在同一地点，它也不受力. 这种力的存在依赖于在邻近（然而，也可能是相当远）处有磁铁或电流出现. 细致的观测揭示出下列特点［参考图 7-14］:

1. 这力总是施加在与粒子的速度 v 相垂直的方向上. 如果速度反向，则力也反向.

2. 这力与粒子所带电量 $q$ 成正比. 如果电荷变号, 力就反向.

3. 对于给定的 $q$ 值和 v 的一给定方向, 力的大小与 v 的大小成正比.

4. 对于在给定地点平行于某一方向的运动, 力为零. 这方向同放在该点的一磁针的指向重合. 这方向称为磁场在该点的方向.

5. 对于任何其他方向的运动, 力的方向垂直于 v 的方向同磁场的方向所形成的平面.

6. 对于给定的 $q$ 和 v 以及一固定的磁场装置, 力的大小与 v 和磁场方向之间的夹角的正弦成正比.

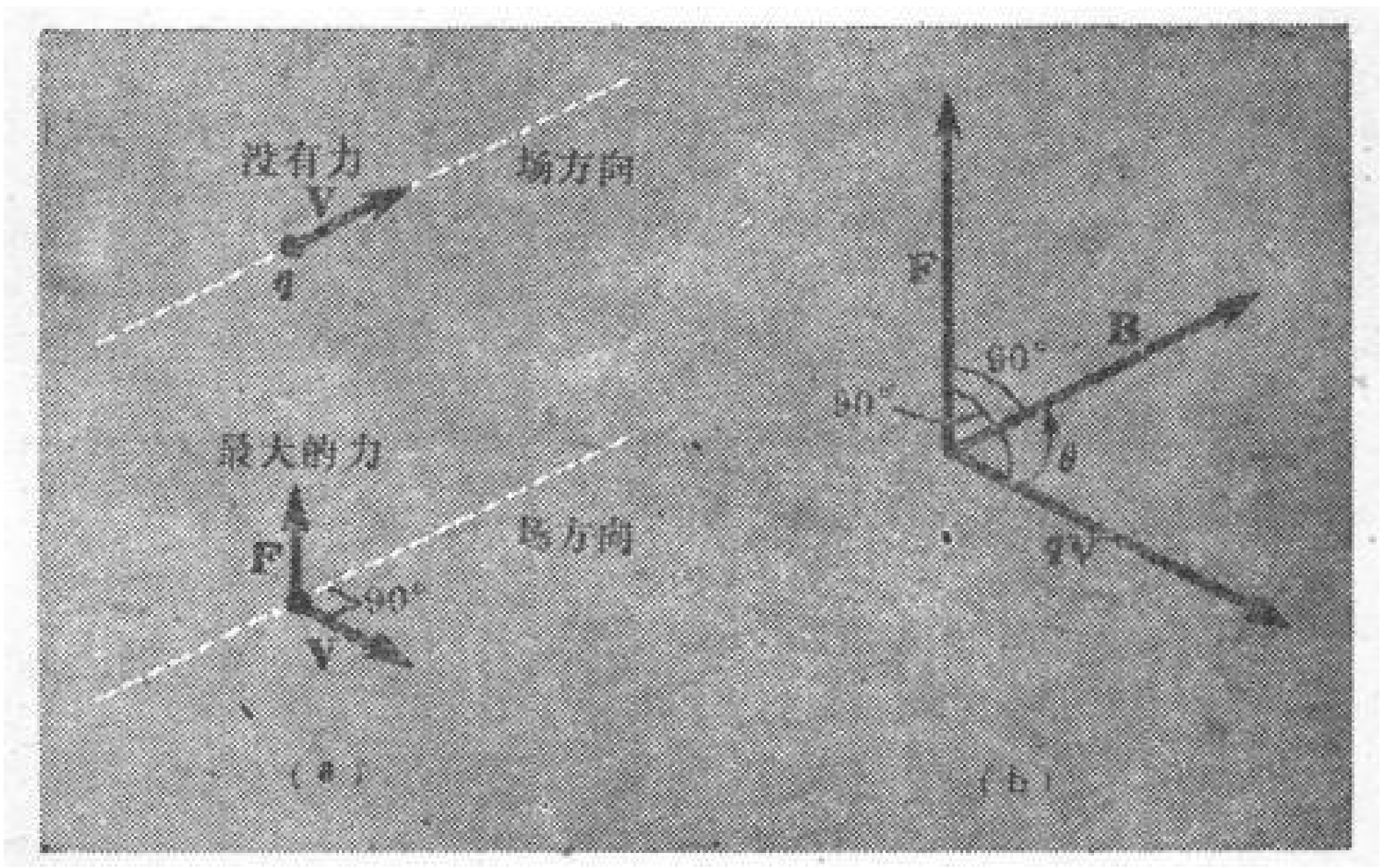


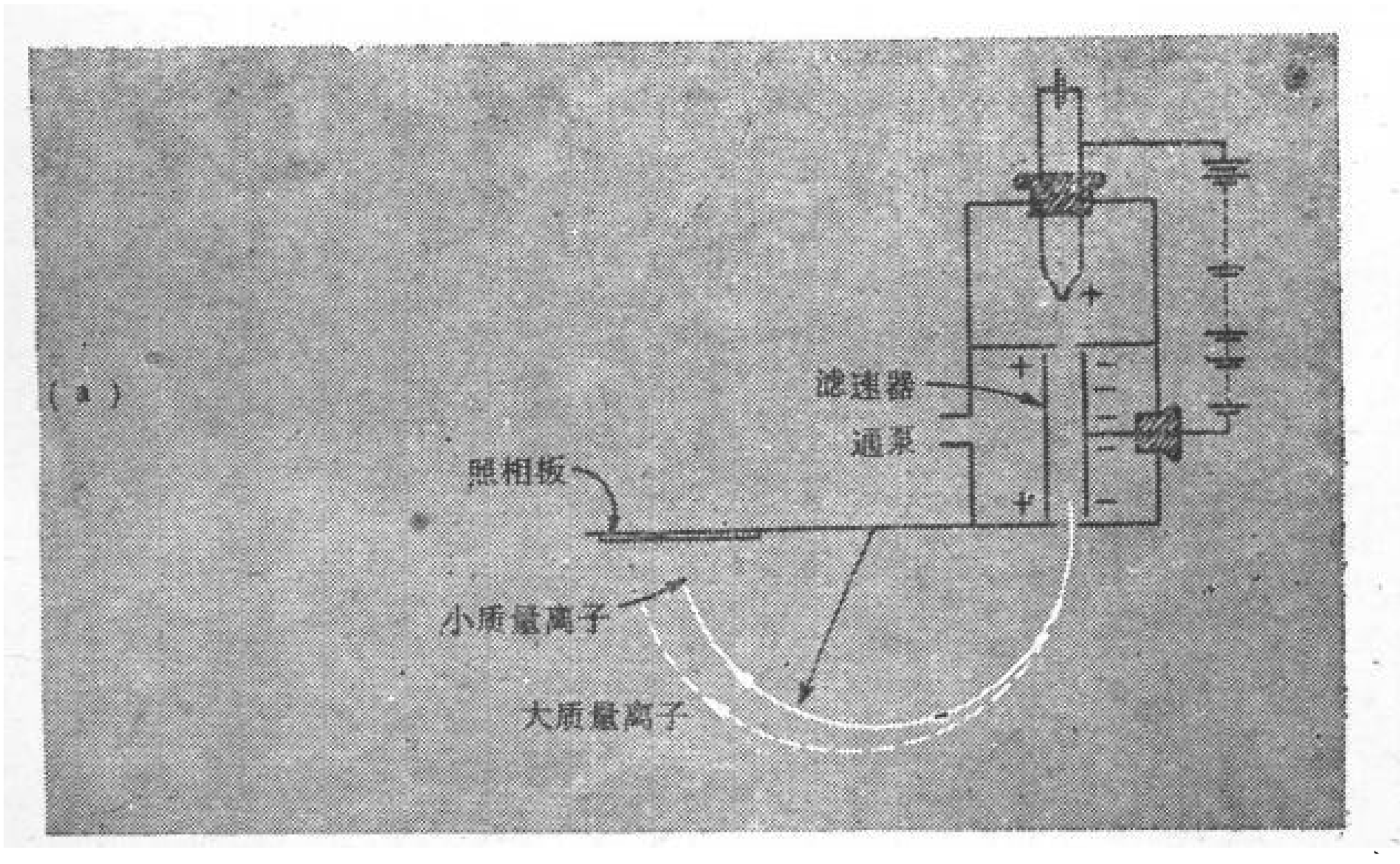

图 7-14 (a) 在一磁场中运动的带电粒子, 力为零和力为最大的情形. (b) 速度、磁场和磁力之间的普遍矢量关系.

所有以上结果可以归结为一个非常简洁的数学表述. 我们要引进磁场强度的定量量度并用矢量符号 **B** 来表示它, 其方式就是如图 7-14 所示的, 一带电粒子的 $q$v, **B**, 和 **F** 的方向之间的关系. (注意 $q$ 可正可负, 而 **F** 是垂直于含 v 和 **B** 的平面的.) 于是, **F** 之值连同大小和方向由下列含矢量的叉积(见本书第一册 125 页)的等式给出:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

然后我们可以用这式来确定磁场强度的定量量度如下: 一单位强

度的场，垂直地($\sin\theta=1$)作用于运动速率为1米/秒的1库仑电荷上，将产生1牛顿的力.



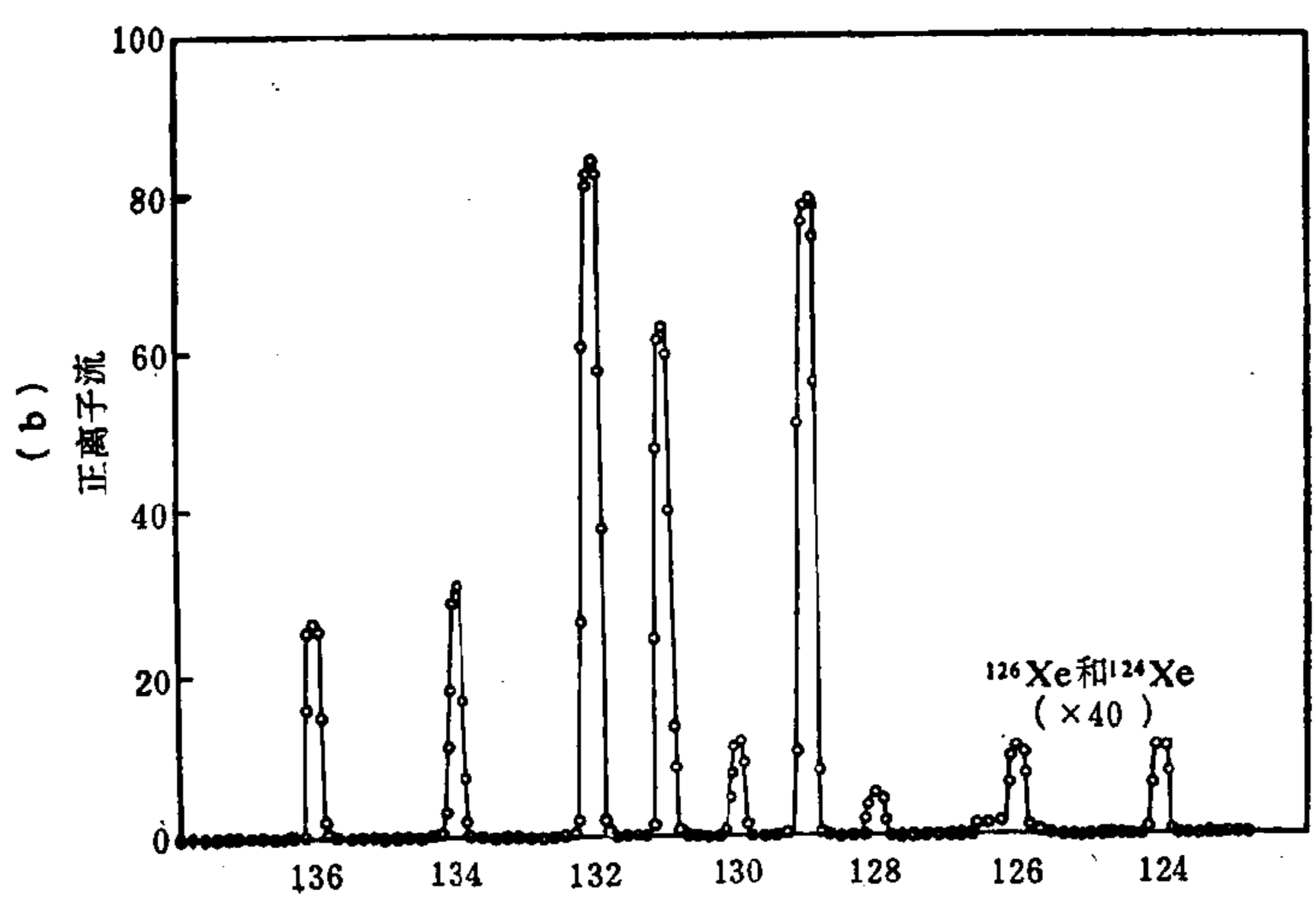




图 7-15 (a) 一简单形式的质谱仪的设计示意图. (b) 用一台象(a)中那样的质谱仪对氙同位素作同位素分离和质量分析的例子.

## §7 质 谱 仪

差不多所有用来获得原子和同位素质量的精确相对值的方法都以具有给定 $q/m$ 的粒子在一磁场中的特征曲率为基础. 这种装置常常是在两个方面利用磁场, 第一是作为速度选择器, 第二是上节中所描写的方式. 速度选择方面所利用的是这一事实: 如果一束带电粒子行经相距为 $d$、电位差为 $V$ 的平行板之间, 则电力为

$$F_{电}=\frac{qV}{d} \tag{7-13}$$

但磁力则按(7-10)式为

$$F_{磁}=qvB$$

把磁场加在垂直于电场的方向可以使这两个力的方向相反. 于是只有一种速率的粒子可以通过这"交叉场"而不偏转:

$$v=\frac{V}{Bd} \tag{7-14}$$

图 7-15(a) 是一个简单的质谱仪图, 它用的就是这一类型的滤速器, 接着是这样一个区域, 带电粒子(离子)在其中只受磁场的影响而走一半圆轨道. 图 7-15(b) 表明用这种仪器分离同位素的一个例子.

## §8 高速转动物体的破裂

在一转动物体内形成应力以及如果应力过大有破裂可能的问题, 提供了应用牛顿定律于匀速圆周运动的另一个好例子. 每当一物体(例如一轮子)转动时, 它的每一部分都有一指向转轴的加速度, 因而需要一相应的加速力. 例如, 假定有一半径为 $r$ 的细轮或轮箍绕着它的轴旋转, 每秒 $n$ 周[见图 7-16(a)]. 于是箍的任何小段, 例如图中所示的阴影部分, 一定要受到一个力, 这力等

于它的质量 $m$ 乘以向心加速度 $v^2/r$. 在这情形中角速度的大小由下式确定:

$$\omega = 2\pi n$$

因而瞬时速度

$$v = \omega r = 2\pi r n \qquad (7\text{-}15)$$

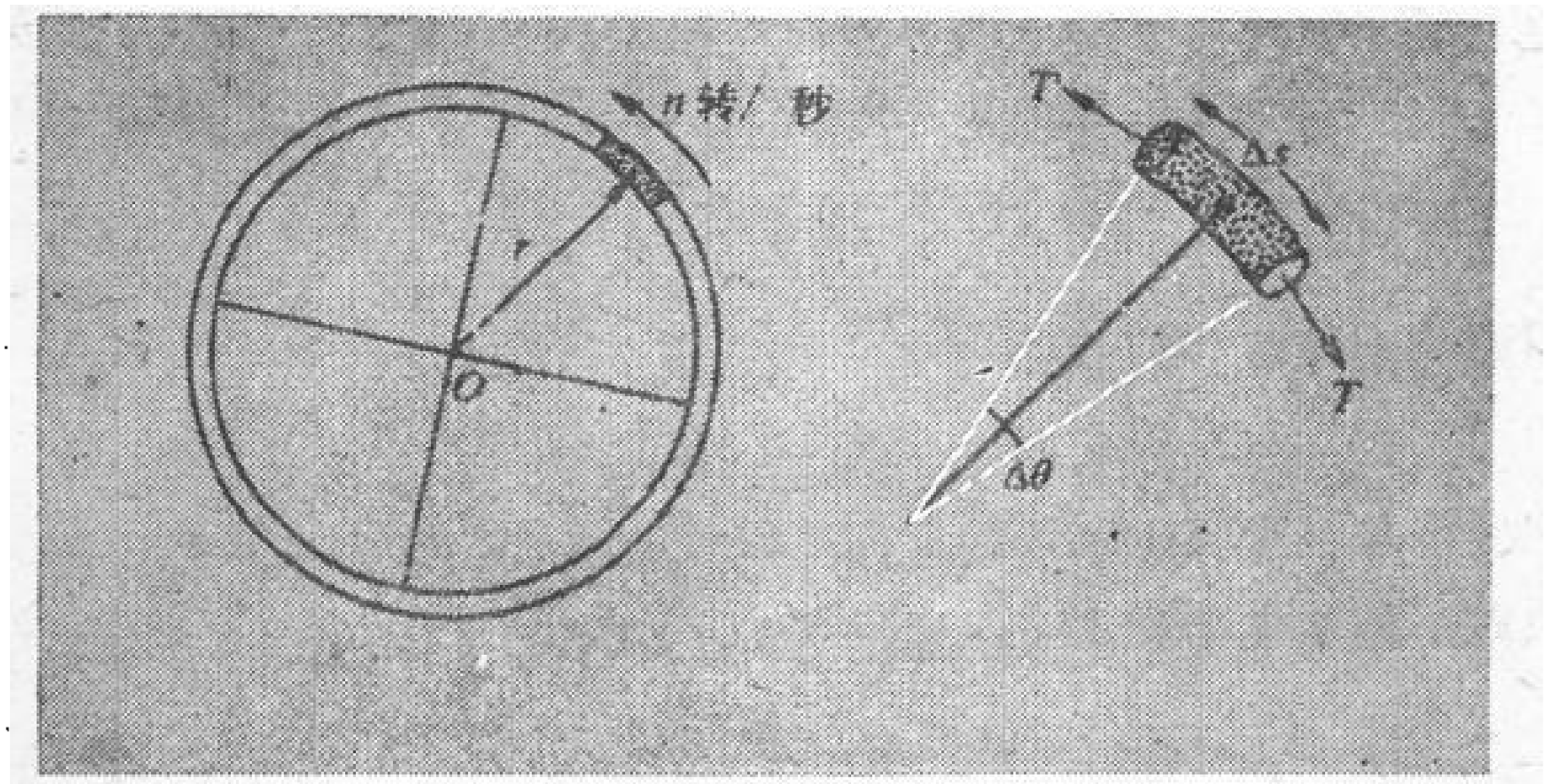



图 7-16 (a) 转动的轮箍. (b) 作用于轮箍的一小段上的力.

如果对图 7-16(a)画阴影的小部分物质作一隔离图[图 7-16(b)],很清楚,作用于它的力一定来自箍缘上与它接触的相邻的物质.①根据对称性,这些力在箍缘的每一点上都是切向的. (例如,如果施加于 $\Delta m$ 的一端的力有一沿半径向外的分量,那么,由于作用与反作用相等,同它接触的那部分物质一定要受到一个有沿半径向内的分量的力. 但对于一个均匀的轮箍来说,所有象 $\Delta m$ 这样的部分都是等价的;任何这类不对称性都是没有根据的.)因此,我们可以想象箍缘的这一小部分在两头受到大小为 $T$ 的力. 如果这一段的弧长为 $\Delta s$,则它在中心 $O$ 所张的角 $\Delta\theta$ 等于 $\Delta s/r$, 而每

① 我们假定轮的辐条的作用主要是给轮的边缘和轴以几何联系,其强度差不多可以不计.

一个力都有一沿着 $\Delta\theta$ 的平分线的分量，大小等于 $T\sin(\Delta\theta/2)$. 因此，由牛顿定律有

$$2T\sin(\Delta\theta/2)=\Delta m\frac{v^2}{r}$$

当 $\Delta\theta$ 很小时，取 $\sin(\Delta\theta/2)\approx\Delta\theta/2$，这式成为

$$T\Delta\theta\approx\Delta m\frac{v^2}{r}$$

即

$$T\frac{\Delta s}{r}\approx\Delta m\frac{v^2}{r}$$

或

$$T\Delta s\approx v^2\Delta m \tag{7-16}$$

现在用材料的密度 $\rho$ 和箍缘这一段的体积来表示质量 $\Delta m$. 如果箍缘的截面积为 $A$，则

$$\Delta m=\rho A\Delta s$$

把这式和(7-15)式的 $v=2\pi rn$ 代入(7-16)式，得下列结果：

$$T=4\pi^2n^2r^2\rho A \tag{7-17}$$

实验事实告诉我们，对一根给定材料做成的棒或杆，如果施加的力与截面积之比超过某一临界值——极限抗张强度 $S$，则在这张力下棒或杆将会断裂. 因此，我们可以从(7-17)式推断，我们所讨论的这一类轮箍有一临界转速

$$n_{\text{最大}}=\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{S}{\rho}\right)^{1/2} \tag{7-18}$$

超过这转速轮箍就会胀破. 例如，假定有一钢箍，半径为一英尺(即差不多 0.3 米). 钢的密度约为 7600 千克/米$^3$，极限强度约为 $10^9$ 牛顿/米$^2$. 从这些数据算出来的 $n_{\text{最大}}$ 约为 500 转/秒，或 30,000 转/分——比任何这类轮子在正常情形下被驱动时的转速要快得多. 然而，超速离心机的转子的转速却与此同数量级，达到与它们

的特定半径相应的断裂速率的若干分之一（见第 III 册 25 页）.

## §9 抗阻力运动

我们现在来考虑一类重要问题. 一物体受一恒定的驱动力$\mathbf{F}_0$作用，但它的运动被一阻力$\mathbf{R}$阻碍着，$\mathbf{R}$ 永远作用在与瞬时速度相反的方向上. 典型的这类力是一物体沿硬表面被拉动时的摩擦力，或空气对雨点的阻力，对运动着的车辆的阻力，等等. 一般说来，阻力是速率的函数，因之牛顿定律必须表示为

$$F_0 - R(v) = m\frac{dv}{dt} \tag{7-19}$$

象我们在第五章中看到过的，干摩擦的阻力事实上差不多与 $v$ 无关，如图 7-17(a)所示，因而可写

$$R(v) = \mathscr{F} \approx 常数$$

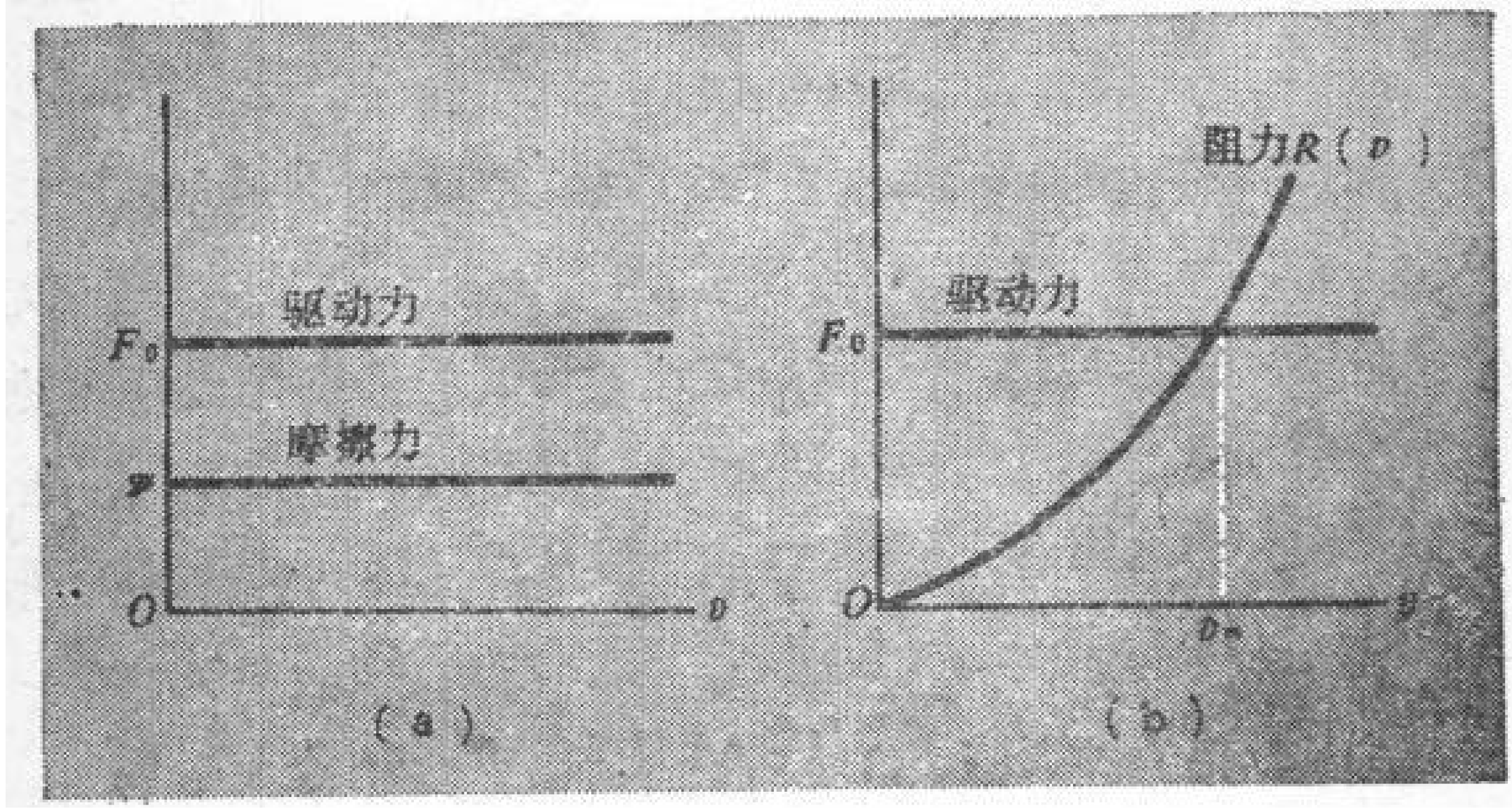



图 7-17 （a）一物体被干摩擦阻碍时的驱动力和阻力.（b）一物体被流体摩擦阻碍时的驱动力和阻力.

(7-19)式于是约化为在一恒定的总力作用下加速的简单情形，而由(7-1)式的运动学方程来描述. 对于流体阻力，情形大不相同，这时，$R(v)$单调地随 $v$ 而增加，如图 7-17(b)所示，由(5-4)式表示出这种关系为

$$R(v)=Av+Bv^2 \tag{7-20}$$

在此情形下，如果一物体从静止出发，在 $F_0$ 的作用下，起始加速度为 $F_0/m$，但净驱动力立刻就减到小于 $F_0$，因为当物体有了任何可查觉的速度时，从它自身作为参照系来看，它就处于速率为 $v$ 的风吹之下或相应的流体流过它．牛顿定律应用于这问题的形式现在必须是

$$m\frac{dv}{dt}=F_0-Av-Bv^2 \tag{7-21}$$

（在这方程中 $F_0, A, B$ 和 $v$ 都取为正的．我们必须细心去考虑，如果速度反向，牛顿定律用于这体系时恰当的形式是什么．）

方程(7-21)的求解，全然不象我们熟悉的、只含恒定力或与速度垂直的力的问题那样，是一件简单的事情．我们现在面对的是解一个棘手的微分方程的问题．我们不企图置身于这问题的所有正式数学方面．作为替代，这正是指出数值近似方法的价值的合适时机——换句话说，就是用有限小的时间间隔和数字计算机的方法．我们在第三章[(3-11)式]中曾扼要地描述过这方法的原理；这里我们有了一个很好的应用实例．然而，首先让我们看看这解的某些个别特点．

1．对于小的 $v$ 值的某一范围，加速度差不多是常数，而 $v$ 将以 $t$ 的线性函数开始，斜率为 $F_0/m$．

2．当 $v$ 增加时，$a$ 单调地减小，导致 $v$-$t$ 图中稳定下降的斜率(图 7-18)．

3．在任何给定的作用力下，存在一**收尾速率** $v_m$．这是 $R(v)$ 对 $v$ 的图线与纵坐标等于 $F_0$ 的一水平直线相交处的速率[见图 7-17(b)]．用代数表示，这是二次方程

$$Bv^2+Av-F_0=0$$

的正根．（负根代表什么情况？为什么要弃掉它呢？）

注意其间的对比：在 $R(v)$ 对 $v$ 的图线中 $v_m$ 是精确确定值，而如果视 $v$ 为 $t$ 的函数(图7-18)，则速度趋近于这数值的方式却是渐近的(原则上永远达不到).

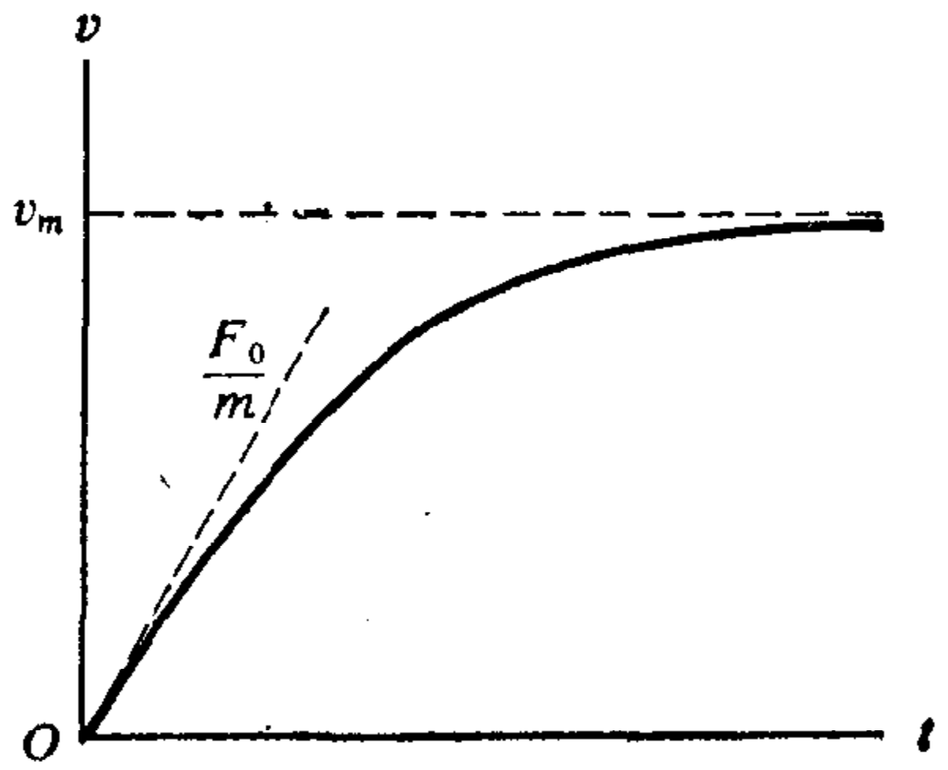



图 7-18　物体在阻滞性流体媒质中渐近地趋于极限速率.

很值得花点时间去考虑 $v=v_m$ 所代表的动力学状况. 这是一个在零净余力之下零加速度的运动，但它似乎同完全不受力的物体的无加速运动差得很远；而又肯定不是我们所理解的惯性原理的一个应用. 但让我们强调一下，同静力平衡一样，这是一种 $\Sigma \mathbf{F}=0$ 的情形. 任何时候当我们看到一辆汽车在一条直路上以每小时 80 英里的稳定速率风驰而过或者一架喷气飞机以每小时 600 英里的恒定速率掠过空中，我们看到的就是所受**净余**力为零的物体在行进. 这一基本动力学事实之所以使人难以理解是由于从实践的观点看重要的是这稳定运动建立之后还需要很大的驱动力 $F_0$ 来维持它.

## §10　受阻运动的详细分析

为了看看如何把牛顿定律实际运用于受阻运动，我们需要再介绍一个特点，这是在第五章中已经描述过的——即阻力中的两项不仅对 $v$ 的依赖关系不相同，而且对物体线度的依赖也不相同(见图 7-19). 具体说，对于半径为 $r$ 的球，有

$$A=c_1 r$$

$$B=c_2 r^2$$

而

$$R(v)=c_1 r v+c_2 r^2 v^2 \tag{7-22}$$

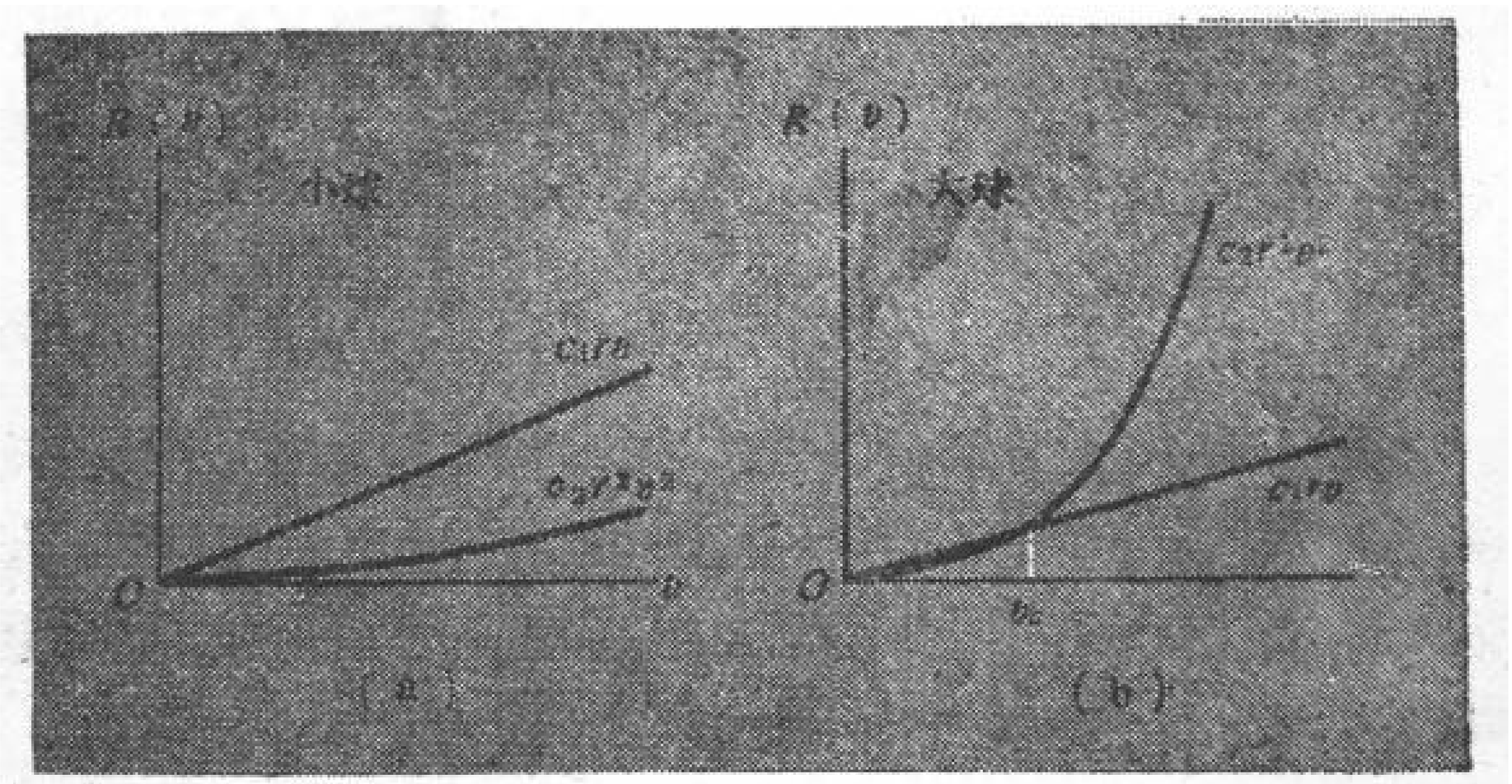



图 7-19 (a) 对于小物体，流体阻力的线性项和平方项，以粘滞性阻力占主导. (b) 对大物体的类似图形，除低速外平方项占主导.

因此，阻力中的两项在一临界速率 $v_c$ 下变成相等的，$v_c$ 由下式确定:

$$v_c = \frac{c_1}{c_2 r} \tag{7-23}$$

我们知道，如果 $v$ 够小，(因 $Bv^2/Av \sim v$) 与 $v$ 成正比的那一项占主导，但我们同样知道，对于比 $v_c$ 大得多的速率(比如 $v \gtrsim 10v_c$)，那平方项就占主导了. 如果阻滞性媒质是空气，$c_1$ 和 $c_2$ 两系数有下列近似值:

$$c_1 = 3.1 \times 10^{-4} \text{ 千克米}^{-1}\text{秒}^{-1}$$

$$c_2 = 0.87 \text{ 千克/米}^3$$

因此，如果 $r$ 用米表示，有

$$v_c \text{(米/秒)} = \frac{3.6 \times 10^{-4}}{r} \tag{7-24}$$

这意味着，对于一个象小卵石那样的物体，$r \approx 1$ 厘米，$v_c$ 之值只有每秒几厘米；在重力作用下自由降落中可获得 10 倍于此的速率(比如 0.5 米/秒)，所需时间约在 0.05 秒之内，距离约为 0.5 英寸.

(核对一下这些数值!)因此，对于实际有意义的问题(在下一节中我们将考虑一例外情形)，在一有阻力的媒质中受一恒定力作用的运动可以非常好地用方程(7-21)的简化形式来描述如下：

$$m\frac{dv}{dt}\approx F_0-Bv^2 \tag{7-25}$$

阻力项 $Bv^2$ 在普通的物体受重力作用穿过空气而落下的运动中相当重要．如果我们在方程(7-25)中令 $dv/dt=0$，$F_0$ 让它等于重力 $mg$，以计算**收尾速度** $v_t$ 的话，这一点变得非常明显．举前述半径为 1 厘米的小卵石为例．石头或岩石的密度大约是水的 2.5 倍，即约为 2500 千克/米$^3$．因此有

$$m=\frac{4\pi}{3}\rho r^3\approx 4(2.5\times 10^3)\times(10^{-2})^3\approx 10^{-2}\text{ 千克}$$

而 $F_0$ 之值约为 0.1 牛顿．对于这一大小的物体，系数 $B(=c_2r^2)$ 之值约为 $10^{-4}$ 千克/米．把这些数值代入方程

$$F_0-Bv_t^2=0$$

求得

$$v_t\approx 30\text{ 米/秒}$$

假定是真正的自由落下，这速率大约将在 3 秒钟内达到，竖直距离约为 150 英尺．于是我们可以肯定，阻力的影响在比这小得多的时间和距离内成为相当重要．这意味着，通常人们在初次接触力学时所遇到的许多在重力下自由落下的那类理想化的问题与真实不太相符．

现在来看用计算机解这些问题的步骤．有了计算机，处理完整的方程(7-21)和处理其近似方程(7-25)差不多同样地没有什么困难．但由于目的是讨论方法，我们将采用那较简单的近似形式．

选某一方便的小时间增量 $\Delta t$，而把从 $t=0$ 起的时间量度用 $\Delta t$ 的整数倍($n$)来表示．在最简单的做法中，我们设在每一小段时间里的加速度是不变的，等于在该段时间**开始时**的计算值．于是，对

等于零的起始速度，在第一个 $\Delta t$ 中的加速度取为 $a_0(=F_0/m)$. 在这段时间的末尾，速度 $v_1$ 由下式给出：

$$v_1 = 0 + a_0 \Delta t$$

根据这速度，我们算出在 $t = \Delta t$ 时刻的加速度 $a_1$：

$$a_1 = a_0 - \frac{B}{m} v_1^2$$

把这加速度用于下一段时间，计算在 $t = 2\Delta t$ 时刻的速度 $v_2$：

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t$$

我们知道在作这样的计算的第一步中，过高地估计了 $v_1$，但也看到，在这一特殊问题中，由此引起的误差在一定程度上又反过来被低估了的 $a_1$ 值抵偿掉. 图 7-20(a) 表示在相继的时间间隔中算出的 $a$. 对位置的改变($x_n$) 应用完全类似的处理方法，取上面的计算所给出的、并用图 7-21(a) 表示的一组速度值，运用下列公式：

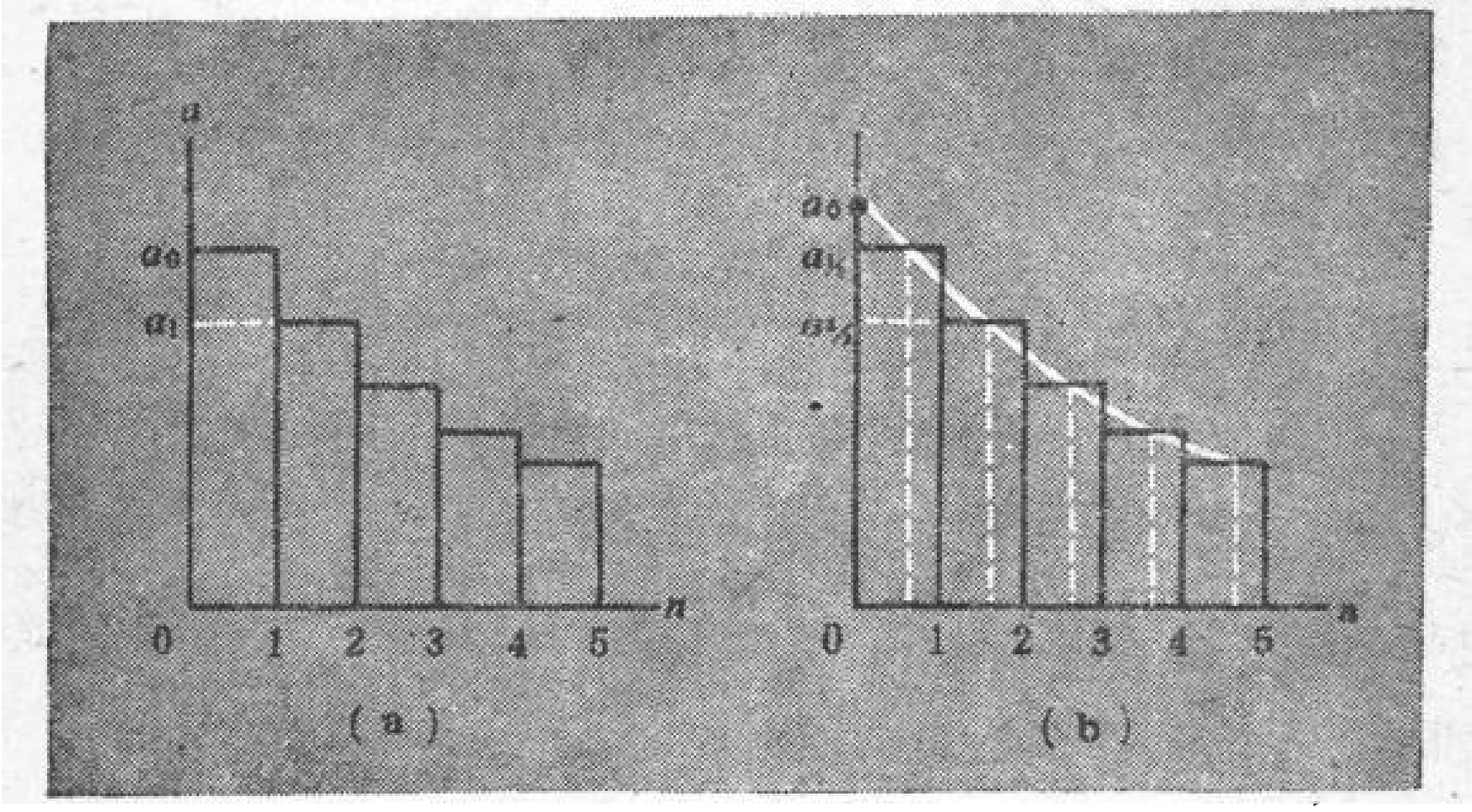



图 7-20 (a) 对于在一阻滞性媒质中从静止开始运动的物体，其加速度-时间的简单计算的基础. 根据每一时间间隔开始时的速率计算加速度. (b) 同一问题的改进了的方法，用根据每一时间间隔中点的速率计算的加速度.

$$x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t$$

因而应有

$$x_1 = v_0\Delta t = 0 \quad \text{(显然是低估)}$$

$$x_2 = x_1 + v_1\Delta t = v_1\Delta t$$

$$x_3 = x_2 + v_2\Delta t$$

$$\vdots$$

我们的 $x$-$t$ 图线是把图 7-21(a) 中的矩形面积按 $n$ 值逐次增大而加起来的结果.

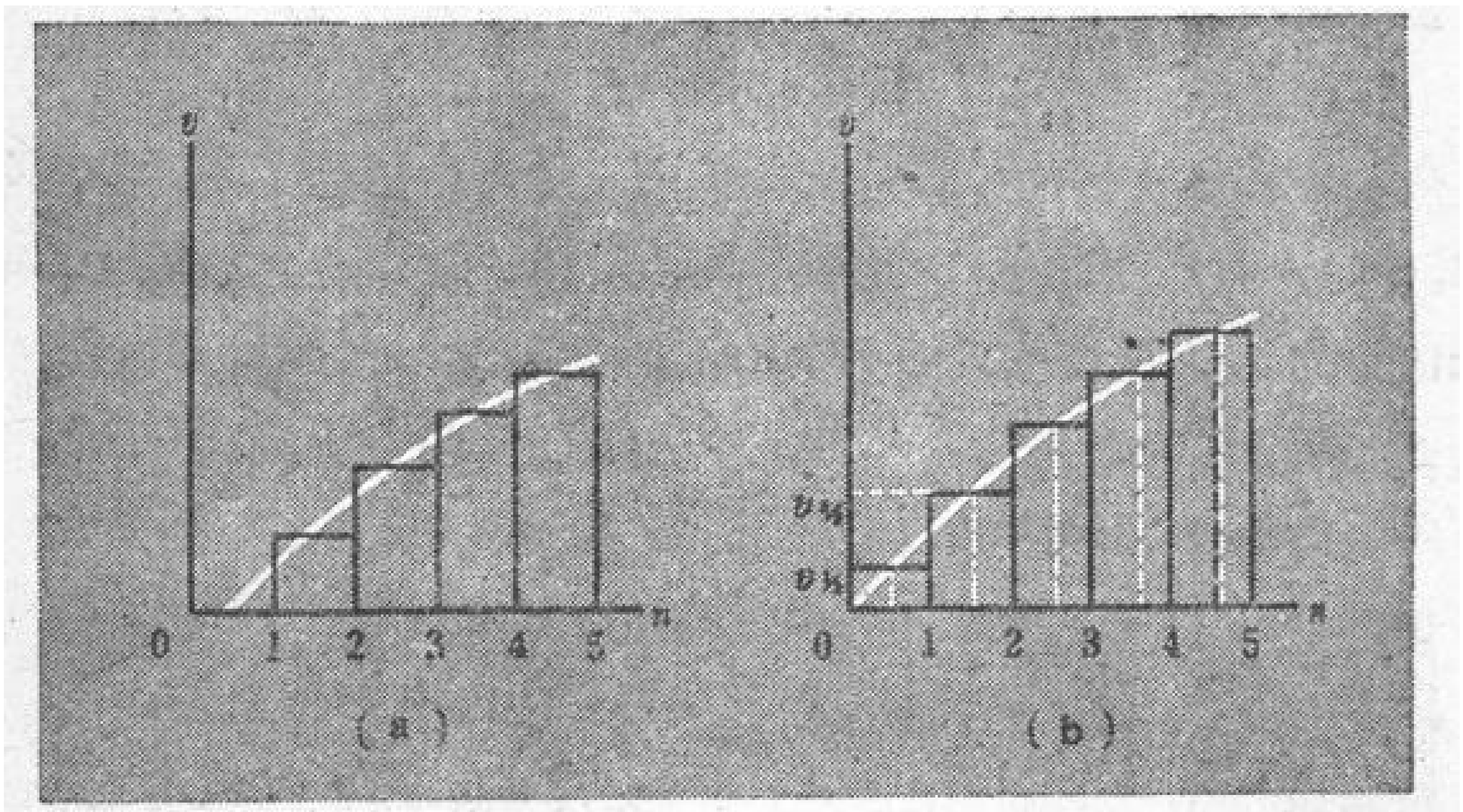



图 7-21 (a) 以相继时间间隔开始时的速度为基准的速度-时间图. (b) 改进图, 以时间间隔中点的速度为基准.

一个更为精确的分析是考虑到在一给定的时间间隔内用加速度或速度的较佳平均值——该段落**中点**的瞬时值. 这样, 在 $n\Delta t$ 到 $(n+1)\Delta t$ 这一段时间里的加速度就取为在 $\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t$ 时刻的瞬时值. 由此得下列公式:

$$v_{n+1} = v_n + a_{n+1/2}\Delta t$$

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1/2}\Delta t \tag{7-26}$$

这看起来很不错, 但当我们试行开始计算时, 我们将碰钉子. 要求出第一段时间末的速度 $v_1$, 现在需要 $v_0(=0)$ 和 $a_{1/2}$. 但后者按 (7-25) 式是有赖于是否知道 $v_{1/2}$ 的, 而我们还不知道它. (注意在

起先比较粗糙的方法中，我们能够直接从初值 $v_0$ 和 $a_0$ 开始.）因此我们被迫作一点妥协，不过我们仍将得到比以前要好一些的处理. 为此我们要做的是从方程

$$v_{1/2} \approx a_0 \frac{\Delta t}{2} \tag{7-27}$$

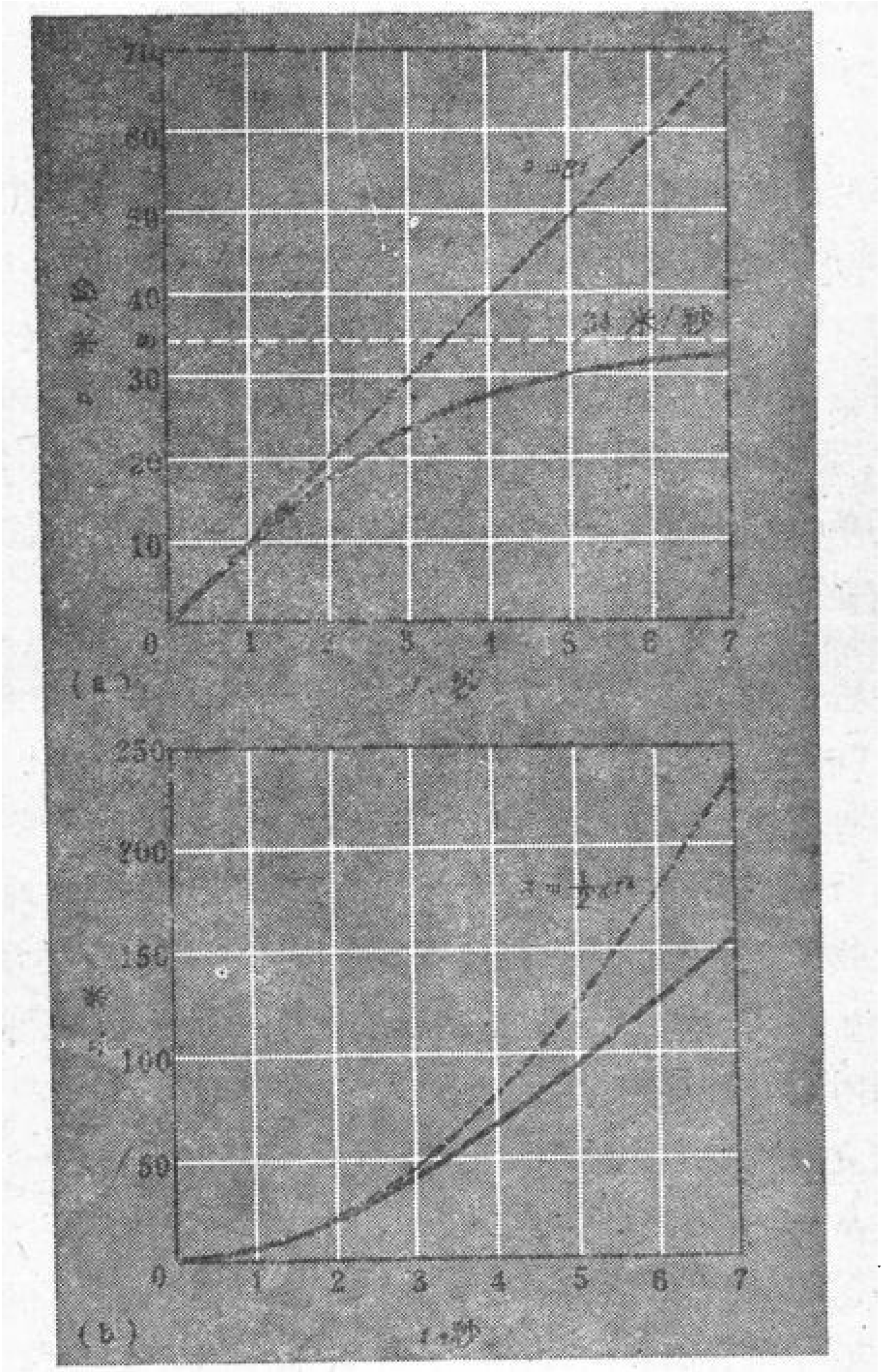



图 7-22　半径为 1 厘米的小卵石落下时理想的（无阻力的）和真实的速率对时间的不同依赖关系的比较. （b）这种小卵石落下时的理想的和真正的距离.

算出 $v_{1/2}$ 的近似值，然后我们就可以进行下去了. 图 7-20(b)和 7-21(b)用 $a$ 和 $v$ 对时间的图线表明这方法意味着什么.

图 7-22 中的图线表明，对于 1 厘米半径的小卵石在重力作用下在空气中落下时按实际计算而得的速率和距离随时间的变化；为了比较起见，同时给出了理想的自由下落曲线.

## §11 由粘滞性控制的运动

如果我们处理的是微观的或近于微观的物体，例如尘粒，那么，与上面所讨论的情形相反，阻力几乎全都来自粘滞项 $Av$，直到相当高的 $v$ 值. 例如，如果我们考虑的是一颗半径为 $1\mu(=10^{-6}$ 米)的微粒，则(7-24)式告诉我们，$Av$ 和 $Bv^2$ 的贡献成为相等的临界速率 $v_c$ 是 360 米/秒. 这意味着有一宽的低速率范围，在此范围内运动单由粘滞阻力控制，牛顿定律可以写成下列形式而不致引起任何显著误差:

$$m\frac{dv}{dt}=F_0-Av \tag{7-28}$$

其中 $A=c_1r$.

在这种条件下的运动在 R. A. 密立根的著名的、用来确定基元电荷的“油滴”实验中起着中心作用. 其基本思想是：通过求出一带电小物体在空气中的收尾速率测定作用于其上的电力. 如果这粒子的半径为已知，则阻力是完全确定的，而当 $v=v_t$ 时，驱动力必须同阻力等值反向.

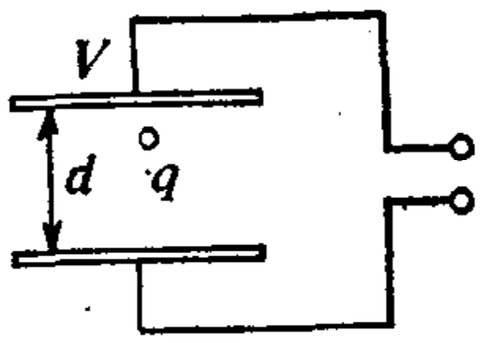


图 7-23 密立根实验中的基本平行板装置.

在密立根原来的实验中，带电微粒是从“喷雾器”喷出的雾气中的一些微小油滴. 这种油滴有很大的可能性在它们产生时带有正的或负的净余电荷. 为了施加电力于这些油滴，密立根用了图 7-23 中所示意的装置. 两平行金属板，相隔距离比它们的直径小

很多，与一蓄电池的两极相连①. 在两板之间任何地方，一电荷为 $q$ 的粒子所受的力是

$$F_{电}=q\frac{V}{d} \tag{7-29}$$

其中 $V$ 是加在板上的电位差，$d$ 是它们之间的距离，用米表示. 如果 $q$ 用库仑量度，则这式给出的 $F$ 的单位是牛顿. (又，可参看第 9 页所讨论的阴极射线示波器.)因而，如果在电驱动力和阻力 $Av$ 之间建立了动力学平衡，则应有

$$q\frac{V}{d}=Av_t=c_1rv_t$$

在油雾气中无规地产生的油滴的大小是各种各样的. 密立根发现最适合于他的实验的是那些最小的油滴(部分地是由于在它们自身的重量之下它们具有最低的收尾速率). 但这些油滴是如此之微小，甚至从中等放大率的显微镜中去看，在黑暗的背景下它们只显出为一些光点；无法直接测它们的大小. 然而，密立根用了一个聪明的技巧，再次利用粘滞性阻力的定律，把它应用于油滴在重力的单独作用下落下，两板间不加电压. 在这些条件下，有

$$F_0=mg=\frac{4\pi}{3}\rho r^3g$$

其中 $\rho$ 是油的密度(约 800 千克/米$^3$). 于是，在重力下落下的收尾速率由下式给出：

$$\frac{4\pi}{3}\rho r^3g=c_1rv_g$$

(重力)
$$v_g=\frac{4\pi}{3}\frac{\rho g}{c_1}r^2 \tag{7-30}$$

把近似值代入，得

---

① 密立根本人所用的板，横跨约 20 厘米，间隔 1 厘米，电压数千伏. 大多数近代的这种仪器都用较小的尺寸和电压.

(重力)　　$v_g \approx 10^8 r^2$　($v_g$ 用米/秒表示, $r$ 用米表示)

令 $r \approx 1\mu = 10^{-6}$ 米, 得

$$v \approx 10^{-4} \text{ 米/秒} = 0.1 \text{ 毫米/秒}$$

这样一个微滴, 在它自身的重量下, 要用 1 分钟在空气中下落 1 厘米, 因而能够对它的速率作精确测量. (顺带说, 很清楚, 对于这种运动阻力项 $Bv^2$ 是完全可以忽略的.)

值得注意的是这一体系的动力学稳定性. 的确, 这也是任何包括一恒定的驱动力和一个随速率单调地增加的阻力的情况所具有的性质. 如果微滴偶然慢下来一点, 就会有一净余力使它增速. 反过来, 如果它增速, 就会受到一净余的减速力. 如果人们足够细致地观察一落下的微滴的运动, 这一现象无疑会被发现, 因为空气由许多单个分子构成, 不会表现为一完全均匀的流体. 换言之, 微滴的速率会在某一平均值附近涨落, 尽管这些涨落极小.

在密立根实验的主要部分中, 带电微滴的竖直运动是用电力来研究的, 这电力或是顺着重力或是逆着重力. 因此, 如果我们把向下的速度取作正的, 则收尾速度的大小和方向都将由下式确定:

$$mg + \frac{qV}{d} = c_1 r v_t \tag{7-31}$$

其中 $V$ 是上板对下板的电压, $q$ 是微滴上的净电荷(正的或负的). 虽然收尾速度只能接近而永远不能真正达到(见图 7-18), 在密立根实验的条件下, 小油滴事实上却在非常短的时间内——在大多数情况中远小于 1 毫秒——达到这一速率(见下节).

密立根有办法在竖直方向上跟踪一给定的微滴达数小时, 利用它的电荷随心所欲地操纵其上下. 在这种长时间观测过程中, 微滴上的电荷常会自动改变, 因而得到几个不同的 $v_t$ 值. 在任何这类实验中, 关键性的观察结论是, 对于给定的电压 $V$, 速率 $v_t$ 限于一系列分立的明显值, 这意味着电荷本身是以分立的单元起作

用的．但密立根还进一步得到有关基元电荷的绝对大小的第一个精确数值①．

你也许会感到奇怪，为什么密立根要用这种迂回的方法来测定作用于一带电粒子上的电力．无论如何，原则上是可以把一个带电粒子悬在天平上，并以静态装置测量这力的．然而，在实际上，当只有几个基元电荷时，这力是异常之弱的，这种方法行不通．例如，一个净带电为 10 个基元电荷的粒子，在相距为 1 厘米、电位差为 500 伏的两板之间所受的力大约只有 $10^{-13}$ 牛顿，只等于作用于 10 皮克上的重力！

## §12 受阻运动的增长和衰减

我们已经看到，在一阻滞性流体媒质中受一恒定力的作用时，速度如何增加并渐近地趋于收尾值．如果这驱动力突然取消，会发生什么事情呢？我们可以猜想到，速度将会衰减而以类似的渐近方式趋于零，如图 7-24 所示．如果初始速率足够小，整个衰减只依赖于粘滞阻力而由方程(7-28)的一个特殊的简化形式——$F_0$

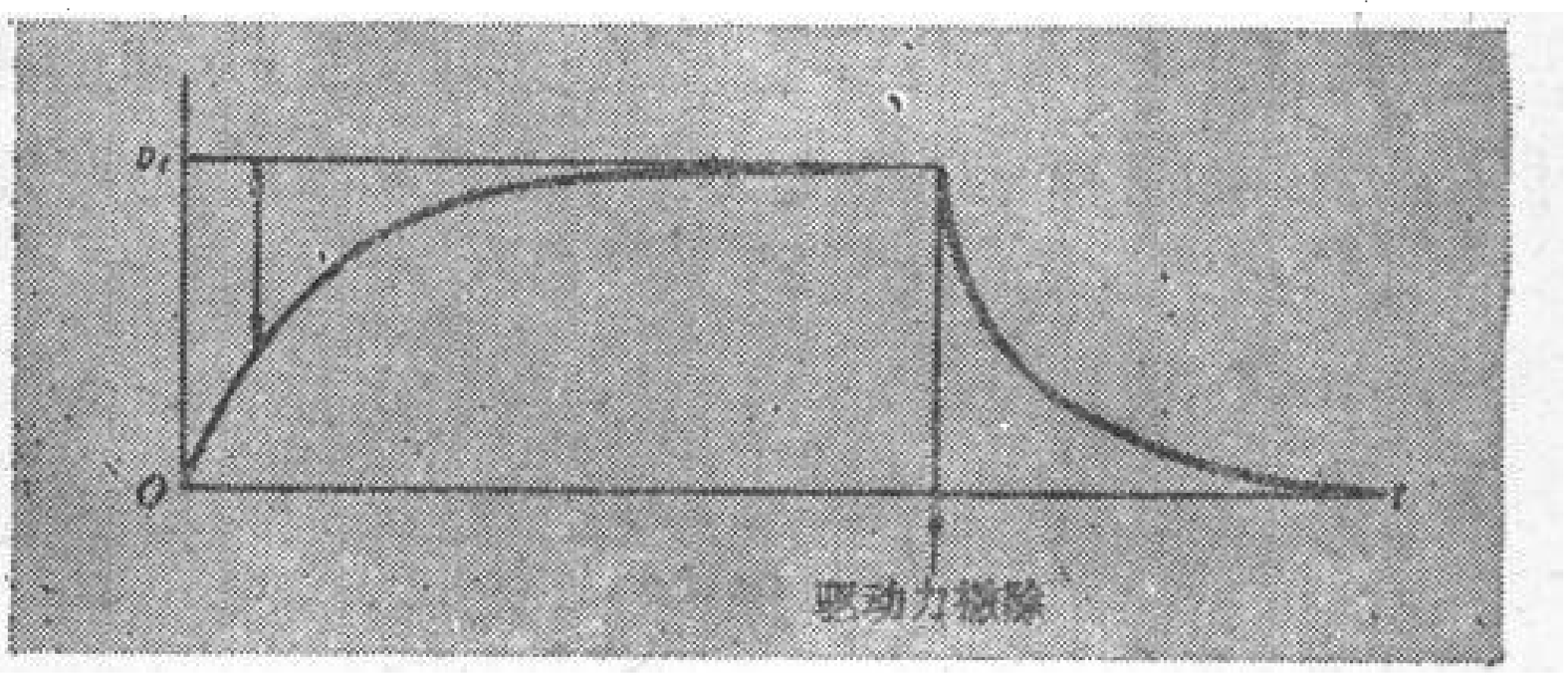



图 7-24　由与 $v$ 成正比的粘滞性阻力控制的粒子速度的增长和衰减．

① 要了解他本人对此(以及很多其他有教益的物理学)的充分而有趣的叙述，可看 R. A. Millikan, *The Electron* (J. W. M. Du Mond 编), University of Chicago Press (Phoenix Series), Chicago, 1963.

等于零——来支配:

$$m\frac{dv}{dt}=-Av$$

或

$$\frac{dv}{dt}=-\alpha v \tag{7-32}$$

其中 $\alpha=A/m$.

你也许认出方程(7-32)是一切形式的指数衰减的基本微分方程. 不管你认出与否，你可能想看看这方程如何能够实际上只用算术来求解——用数值分析方法和数字计算机技术. 我们把时间分为许多相等的间隔 $\Delta t$，而把方程(7-32)理解为这样一种关系式: 在 $t=n\Delta t$ 和 $t=(n+1)\Delta t$ 之间，$v$ 的改变与该间隔内的平均速度成正比:

$$\Delta v=v_{n+1}-v_n\approx-\alpha\left(\frac{v_{n+1}+v_n}{2}\right)\Delta t$$

解出来，得

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}\approx\frac{1-\alpha\Delta t/2}{1+\alpha\Delta t/2}=f$$

其中 $f$ 是一恒定比率，小于 1. 因此，在相等时间间隔里的速度按几何比例减小. 如果初速度是 $v_0$，在时刻 $t(=k\Delta t)$ 的速度就是

$$v(t)\approx v_0f^k$$

把前一方程中 $f$ 的表达式代入，并令 $k=t/\Delta t$，得

$$v(t)\approx v_0\left(\frac{1-\alpha\Delta t/2}{1+\alpha\Delta t/2}\right)^{t/\Delta t}$$

现在来看，当我们设想间隔 $\Delta t$ 越来越短而间隔的数目相应地越来越多时，这一表达式会变成什么. 为了简化讨论，我们令

$$\alpha\Delta t=\frac{1}{z}$$

则 $z$ 就是一个大数值的量，我们将让它趋于无穷.

除了在上述 $v(t)$ 的公式中让 $\alpha\Delta t=1/z$ 之外，我们还把指数 $t/\Delta t$ 用与它等值的 $\alpha zt$ 替代．这样我们就得到

$$v(t)\approx v_0\left(\frac{1-1/2z}{1+1/2z}\right)^{\alpha zt}$$

$$=v_0\left[\left(\frac{1-1/2z}{1+1/2z}\right)^{z}\right]^{\alpha t}$$

即

$$v(t)\approx v_0 p^{\alpha t}$$

其中

$$p(z)=\left(\frac{1-1/2z}{1+1/2z}\right)^{z} \tag{7-33}$$

让我们来看看当 $z$ 变得越来越大时 $p(z)$ 如何(表 7-1)。当 $z$ 增加时，数 $p$ 显然在趋近于一极限值，这值是 0.367879…正是有名的数 $e(=2.71828\cdots)$ 的倒数，$e$ 是自然对数(或纳皮尔对数)的底．因此，在方程(7-33)中可令

$$\lim_{z\to\infty} p(z)=0.367879\cdots=e^{-1}$$

表 7-1

| $z$ | $p(z)$ | $p$ 值的小数表示 |
|---|---|---|
| 1 | $(1/3)^1$ | 0.3333… |
| 2 | $(3/5)^2$ | 0.3600 |
| 3 | $(5/7)^3$ | 0.3644 |
| 4 | $(7/9)^4$ | 0.3659 |
| 5 | $(9/11)^5$ | 0.3667 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 10 | $(19/21)^{10}$ | 0.3676 |

因此我们得到 $v(t)$ 值的精确表达式：

$$v(t)=v_0 e^{-\alpha t} \tag{7-34}$$

(7-34)式中 $\alpha$ 的倒数具有时间的量纲，代表一表征这指数衰减过程的**时间常数** $\tau$．在小球穿过空气而运动的特殊情形中，$\tau$ 由

下式确定:

$$\tau=\frac{m}{A}=\frac{m}{c_1 r}$$

通过引进受重力作用而落下的收尾速度 $v_g$，可以把这式用含义更为鲜明的形式表示出来. 因为按(7-30)式有

$$v_g=\frac{mg}{c_1 r}$$

由此有

$$\tau=\frac{v_g}{g} \tag{7-35}$$

因此，$\tau$ 等于一个粒子在自由落下的条件下达到收尾速度所需的时间. 对于半径为 $1\mu$ 的一油滴，若 $v_g\approx 0.1$ 毫米/秒，则这时间$\tau$差不多只有 $10^{-5}$ 秒(=10 微秒).

在等于 $\tau$ 的若干倍的时间内，(7-34)式所给出的 $v(t)$减小到 $v_0$的一个很小的分数. 例如，如果在基本式

$$v(t)=v_0 e^{-t/\tau} \tag{7-36}$$

中令 $t=10\tau$，则 $v$ 之值变得比 $v_0$ 的 $10^{-4}$ 还要小，这对于许多目的都可以认为实际等于零.

多少是直观地看得清楚，在一粒子从静止开始，突然受一驱动力的作用之后，粒子的速度**增长**到它的极限值的过程，一定是衰减曲线的一种上下颠倒的变形. 事实上，如果收尾速度是 $v_t$，在粘滞性阻力的情况下，趋近于这值的过程由下式描述:

$$v(t)=v_t(1-e^{-t/\tau}) \tag{7-37}$$

如果把这式改写为

$$v_t-v(t)=(v)_t e^{-t/\tau}$$

我们可以明白地看到增长和衰减两曲线是如何紧密相关的. 的确，从(7-36)式，加上认识到这一对称性，人们几乎就能推出(7-37)式.

## §13 空气阻力和“运动的独立性”

当伽利略提出建议，认为一抛体的运动可分析为分离的水平部分和竖直部分，在水平方向上有一恒定速度，而在竖直方向上有一恒定的重力加速度时，他对于力学的概念性基础作了一个伟大的贡献．然而也许值得指出，如果人们把作用于普通大小的物体上的阻力计算进去的话，“运动的独立性”就被打破了．我们已经看到过，对于这样的物体，阻力的大小是如何与速率的平方成正比的．

考虑一物体在一竖直平面上运动(图 7-25)．在给定时刻，设其速度 v 的方向向上，与水平方向成一 $\theta$ 角，如图所示．




图 7-25　对一个在一竖直平面中运动的粒子，阻力和重力的矢量图．

于是，这物体就经受到重力 $\mathbf{F}_g$ 和阻力 $\mathbf{R}(v)$，$R$ 的大小为 $Bv^2$，方向与 v 相反．在任何时刻，牛顿定律都适用于运动的 $x$ 和 $y$ 分量，因此有

$$m\frac{dv_x}{dt}=-R_x=-Bv^2\cos\theta$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg-Bv^2\sin\theta$$

由于 $v\cos\theta=v_x$，$v\sin\theta=v_y$，我们可以把这两方程重写为

$$m\frac{dv_x}{dt}=-(Bv)v_x$$

$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg-(Bv)v_y$$

可见每一分离的速度分量所遵循的方程都含有总速度的大小，因而与每一瞬间在另一坐标方向上出现的情况有关. v 的数值愈大，两运动分量间的这一交叉关联也愈见重要. 因此我们确实不能不参考水平分量去计算一落体的竖直运动. 认识到这一事实，对那些习惯于认为落体的理想方程是理所当然的人也许是有益的. 在物理学的民间传说中有这么一件关于穷学生的故事，这学生用打赌的方法从他的不懂科学的老相识那里弄到钱. 他让他们注视两个全同的物体，一个从静止于地面上一定高度处直接掉下来，另一个则是在同一时刻沿水平方向射出，问哪一个先着地？受骗者（可怜的无知者！）常常会有某种含糊的意识，以为第二个物体，由于在水平方向上快速运动，一定多少要在空中呆得久一些. 但是，这当然可以证明是错的，不是吗？——看看第三章中关于重力下运动的分析就可以知道. 甚至直接实验也似乎证明了这一点，只要速度保持比较小. 但是上面所写的完整方程却表明，一个大的水平初速度会增加落下一给定竖直距离的时间. 教训：小心随意的理想化.

注意，如果阻力纯粹是粘滞性的，按 $v$ 的一次方变化，则运动的 $x$ 和 $y$ 分量可以完全分开来处理，那怕问题不是理想的自由落下. 因此，虽然对于一粒子在力的作用下的任何问题，人们总可以以牛顿定律的条文为出发点，但由此到对完整的运动作出分析的方式却可能决定性地依赖于各个问题的确切特性.

## §14 简 谐 运 动

一质量在一向着给定点、大小与质量到该点的距离成正比的吸引力作用之下的运动，是所有动力学问题中最重要的问题之一.

如果设运动限于 $x$ 轴上，则

$$F(x)=-kx \tag{7-38}$$

这种情况的一个好的近似如图 7-26(a) 所示的那样，一物体放在一非常光滑的水平桌上(例如用气悬) 并同一个水平的弹簧相连. 正常情况下物体静止于弹簧既不受压也未伸长的位置. 于是，不论在哪个方向 ($+x$ 或 $-x$) 上略为移动物体所引起的作用力都由(7-38)式很好地表示出来. 常数 $k$ 称为**弹簧常数**，用牛顿/米来量度. 弹簧力的这一线性规律是罗伯特·胡克于 1676 年发现，以后

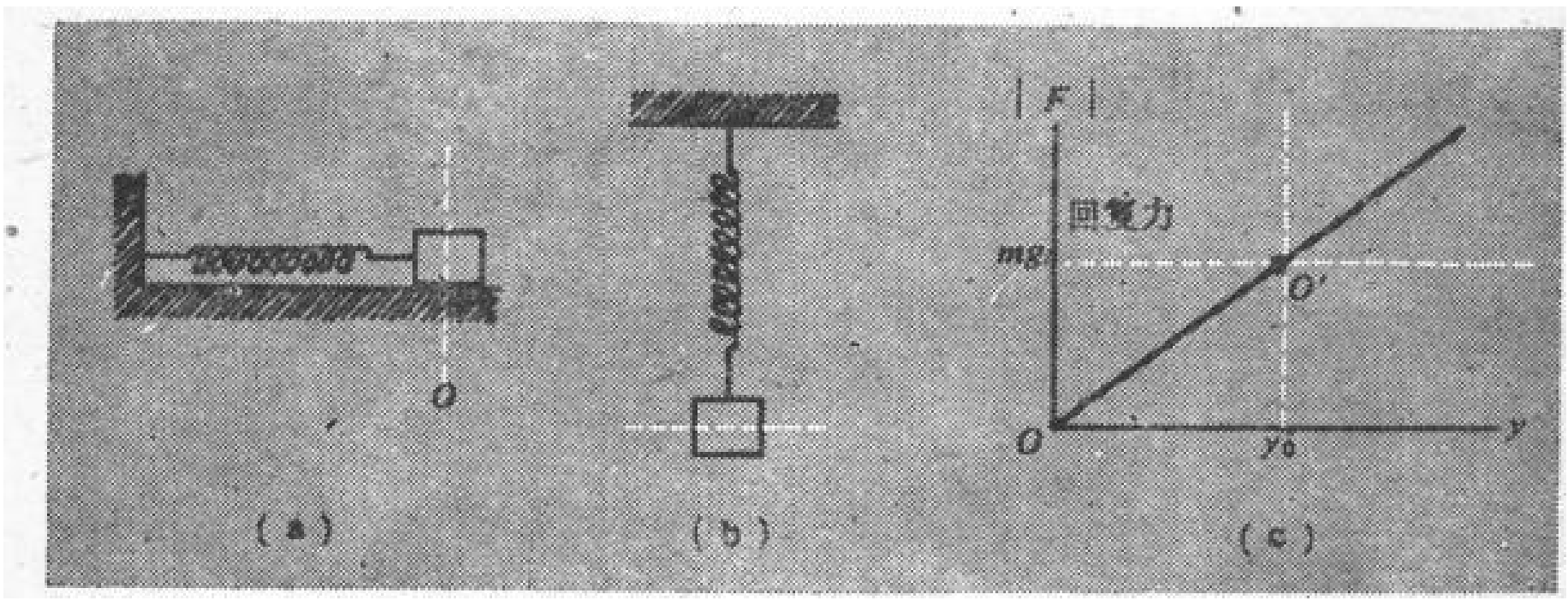



图 7-26 (a) 在一无摩擦力的水平面上的质量一弹簧体系. (b) 从一竖直弹簧下悬的质量. (c) 一线性规律的力对位移的图线；$O$ 和 $O'$ 是依次与(a)和(b)两种情形相应的平衡位置.

用他的名字命名的①. 在实用中，一个更为简单的，虽然在理论上是稍为复杂一些的装置是在一个竖直弹簧的下端悬挂一质量，如图 7-26(b). 在这一情形中正常的静止状态已含有弹簧的伸长，这伸长恰够支持物体的重量. 但是，要是从这平衡位置再上移或下移的话，就会导致一净余的回复力，其形式正是(7-38)式. 这就是在图 7-26(c) 中所表明的、弹簧所施的力的大小同它的伸长 $y$ 的函数关系. 如果取这图线上的 $O'$ 点为新原点，则净余回复力 $F-$

① 他首先在一有名的字谜游戏中宣布了这定律——ceiiinosssttuv. 两年后他揭晓称这就是拉丁语“ut tensio, sic vis”(“有多大的伸长就有多大的力”). 用这种方法(当时很流行)，胡克既可以居先发表他的发现，又毋需真让他的竞争者知道是什么一回事.

$mg$ 与多加的位移$(y-y_0)$成正比.

弹簧上的一质量这一动力学问题之所以很重要是因为非常多的物理体系在平衡位置附近有小位移时，都遵从象(7-38)式那样的基本方程. 在第十章中我们将对此作更详细的讨论；暂时我们只关心如何解这问题.

这是一个好实例，说明一开始就用计算机的解法而不用正式的数学. 基本运动方程，用 $ma=F$ 的形式来表示是

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \tag{7-39}$$

把它写成

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x$$

我们认明 $k/m$ 是一个常量，量纲为(时间)$^{-2}$. 用 $\omega^2$ 表示它，我们的基本方程成为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x \tag{7-40}$$

我们可以把这式看作是直接阐述$\frac{dx}{dt}$ 是如何随着时间变化的，并对小时间间隔内 $dx/dt$ 的近似变化值进行计算:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)=-\omega^2x$$

因而

$$\Delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=--\omega^2x\Delta t \tag{7-41}$$

这是当初定义 $d^2x/dt^2$ 的过程的反转(参看第三章). 为了具体起见，假定从 $t=0$ 开始，$x=x_0$ 和 $v(=dx/dt)=v_0$ 都是正数，如图 7-27 所示. 于是，在 $t=\Delta t$ 时刻，有

$$x\approx x_0+v_0\Delta t$$

$$\frac{dx}{dt}\approx v_0-\omega^2x_0\Delta t$$

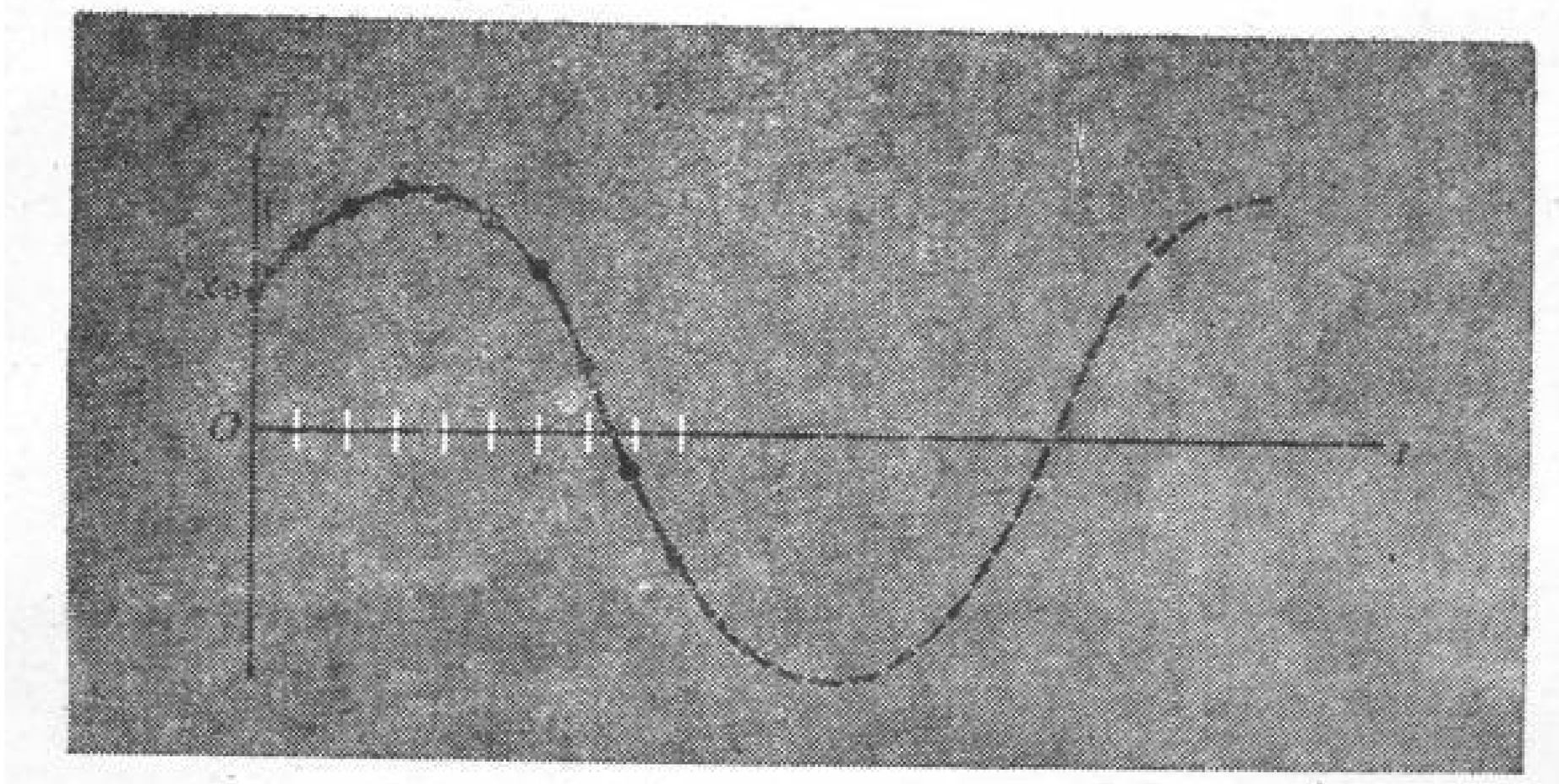


图 7-27　在简谐运动中位移对时间的图线.

这里，位移稍大了一些，斜率则稍小．用这些新数值，我们取另一步的 $\Delta t$ 来计算，如此下去．从(7-41)式可以得知以下几点：

1. 只要 $x$ 是正的，斜率 $dx/dt$ 在从 $t$ 到 $t+\Delta t$ 时总是减小．就是说，如果 $dx/dt$ 是正的，它就变小；如果 $dx/dt$ 是负的，它就变成负得更多．

2. $dx/dt$ 的变化率与 $x$ 成正比．图线的最大曲率在 $x$ 最大之处，而当 $x\to 0$ 时它差不多变成一直线．

3. 一旦 $x$ 成为负的，$dx/dt$ 就随每一时间增量 $\Delta t$ 变为负得少一些，或是正得多一些．

利用这些结果，我们可以构成一曲线的图象，这曲线总是弯向直线 $x=0$(即 $t$ 轴)的，因而必然形成一重复性的波伏状的图形．

任何曾经画过三角函数图线的人都一定认得出，图 7-27 看起来非常象正弦或余弦曲线．更明确地说，它使人想起拿它与下面关于距离 $x$ 作为时间的函数的解析表达式来比较：

$$x=A\sin(\alpha t+\varphi_0)$$

其中 $A$ 是在运动中 $x$ 所达到的最大值，$\alpha$ 是一常数，量纲为(时间)$^{-1}$，而 $\varphi_0$ 是一个可调整的角度，它使我们能在 $t=0$ 时对 $x$ 取

适当的值.

要检验这试用函数是否满足原来的运动微分方程[(7-40)式],须将 $x$ 对 $t$ 求两次微商:

$$v=\frac{dx}{dt}=\alpha A\cos(\alpha t+\varphi_0)$$

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\alpha^2 A\sin(\alpha t+\varphi_0)=-\alpha^2 x$$

我们看到,这解确实满足方程,只要令 $\alpha=\omega$. 这就给我们带来最后的结果:

$$x(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0)\qquad \text{其中}\omega=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}\qquad (7\text{-}42a)$$

(7-42a)式是称为**简谐运动**(SHM)①的特征方程,任何一个遵从这运动方程的体系都叫做**谐振子**. 常数 $A$ 是这运动的**振幅**,而 $\varphi_0$ (希腊文: phi; [fai]——译者)是所谓初位相($t=0$ 时). 正弦函数的整个宗量 $\omega t+\varphi_0$ 称为在任何给定时刻运动的"位相". (7-42a)式所表示的结果也同样可用 $t$ 的余弦函数而不是正弦函数来表示,即把 $x$ 写为

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0')\qquad (7\text{-}42b)$$

$\varphi_0'$ 是具有适当值的常数. 这一形式的解对于某些目的更为方便.

简谐运动由其**周期** $T$ 来表征,它确定相继的等时间隔,在间隔的终端运动状态在位移和速度两方面都完全重现. $T$ 之值很容易从(7-42)式得到,只要注意每当位相角($\omega t+\varphi_0$)改变 $2\pi$ 时, $x$ 和 $v$ 都经过了一循环的变化. 因此可令

$$\varphi_1=\omega t_1+\varphi_0$$

$$\varphi_1+2\pi=\omega(t_1+T)+\varphi_0$$

相减,得

---

① SHM 是英文 Simple Harmonic Motion(简谐运动)的缩写——译者.

$$2\pi = \omega T$$

或

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left(\frac{m}{k}\right)^{1/2} \tag{7-43}$$

这一结果的形式与人们的常识相应，即，如果$m$变大，振动将进行得缓慢一些，而如果弹簧变得硬一些（$k$大一点），振动就会快一点.

〔例〕 一根弹簧，质量可不计，竖直地从一固定点下悬. 当一个2千克的质量挂在弹簧的下端时，弹簧伸长了3厘米. 这体系的简谐运动周期多长？

首先，我们计算力常数$k$. 作用在这质量上的重力是$2\times 9.8$牛顿$=19.6$牛顿. 这力引起的伸长是0.03米，因此$k=19.6/0.03=653$牛顿/米. 于是，由(7-43)式有

$$T = 2\pi\left(\frac{2}{653}\right)^{1/2} = 0.35 \text{ 秒}$$

（你可能会注意到，我们没有必要规定好质量. 任何弹簧只要是挂上一质量后伸长3厘米，那么这同一质量随着它振动的周期就是0.35秒. 为什么？）

## §15 简谐运动增补

### 1. 适应初始条件

我们已经逐渐认识到（既作为普遍原则又通过各种例子），应用牛顿定律于各种问题时，要求得完整的解，不仅需要知道力的规律，而且还要规定两个独立的量，与由$a(=d^2x/dt^2)$到$x$的过程中引进的积分常数相应. 最普通是给定起始位置$x_0$和起始速度$v_0$. 这里，在分析一谐振子的运动时，我们同样需要初始条件或其等价的条件. 事实上它们表现为(7-42)式中的两个常数$A$和$\varphi_0$. 我们已经认明$A$是运动的振幅，$\varphi_0$是初位相. 如果给定的是$x_0$和$v_0$，

我们很容易解出 $A$ 和 $\varphi_0$ 如下：

由(7-42a)，

$$x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\omega A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

因此，

$$\begin{aligned} x_0&=A\sin\varphi_0 \\ v_0&=\omega A\cos\varphi_0 \end{aligned} \tag{7-44}$$

而得

$$\begin{aligned} A&=\left[x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \\ \tan\varphi_0&=\frac{\omega x_0}{v_0} \end{aligned} \tag{7-45}$$

### 2. SHM(简谐运动)的几何表示法

在简谐运动和均匀圆周运动之间存在着一个非常基本的联系．这一事实导致一种特别简单的办法来显示 SHM，予以形象化．设想有一水平圆盘，半径为 $A$，以恒定角速率 $\omega$ 绕着通过它中心的竖直轴旋转．假定有一短桩 $P$ 安在盘的边缘上，如图 7-28(a)所示．如果从边上(水平地)看这盘，则短桩似乎是在沿一水平直线来回运动[图 7-28(b)]．它沿这直线的运动正好同(7-42a)式相应，只要正确地选择短桩在 $t=0$ 时的角位置，使图 7-28(c)中的 $SOP$ 角等于 $\omega t+\varphi_0$ 即可．在这一表示法中，可以看出 $\omega$ 是 $P$ 绕着圆周运动的真正角速度．短桩的速度 v 不断改变方向，但大小总是 $\omega A$．把 v 分解到平行于 $Ox$ 的方向上，立得(7-44)式．因此，图 7-28(c)中 $B$ 点的运动在任何方向都与一粒子沿 $x$ 轴所作的简谐运动相对应．

### 3. SHM(简谐运动)与圆周运动的动力学关系

虽然方才的分析只是纯粹的几何描述，但它启发我们想到谐

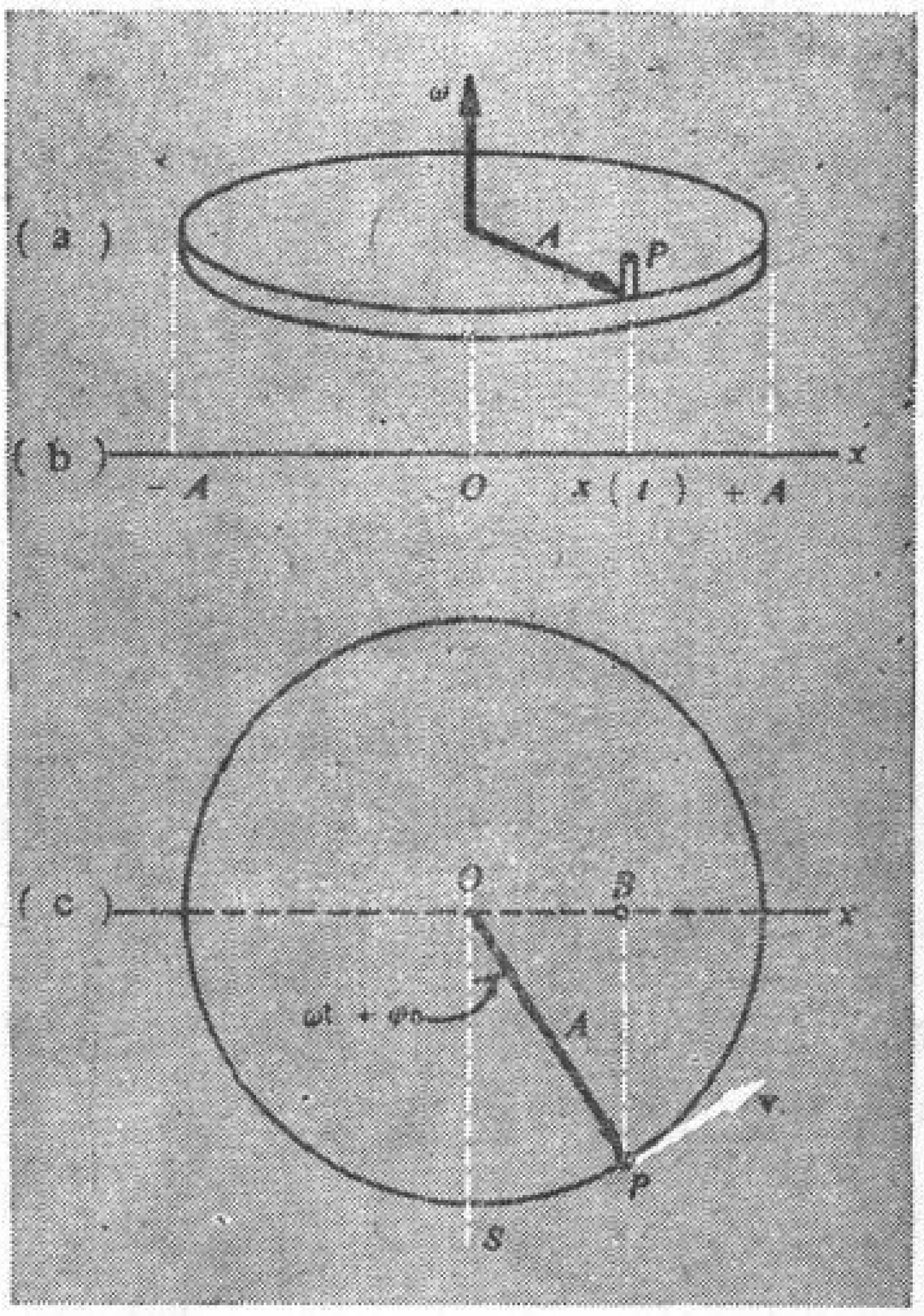



图 7-28 （a）在一匀速转动的盘上的短桩.（b）在含着盘的一平面内所看到的短桩的位移.（c）圆周运动与简谐运动的细致关系.

振子的真正线性运动与一匀速圆周运动的投影之间还有密切的动力学联系. 承认 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 就意味着，同样的运动必包含同样的、产生这种运动的力，而不管这力的特殊来源可能是什么. 这一等价性可以借助图 7-29 来理解. 一质量为 $m$ 的粒子，用一根系在圆心 $O$ 处固定支点上的绳牵着作圆周运动，圆的半径为 $A$. 如果粒子的恒定速率是 $v$，绳中的张力 $T$ 便是

$$T=\frac{mv^2}{A}$$

这里，$v^2/A$ 是 $m$ 的瞬时加速度 $a_r$ 的大小，方向向着圆心.

总的力和总的加速度在任何时刻都可以在一直角坐标系中分

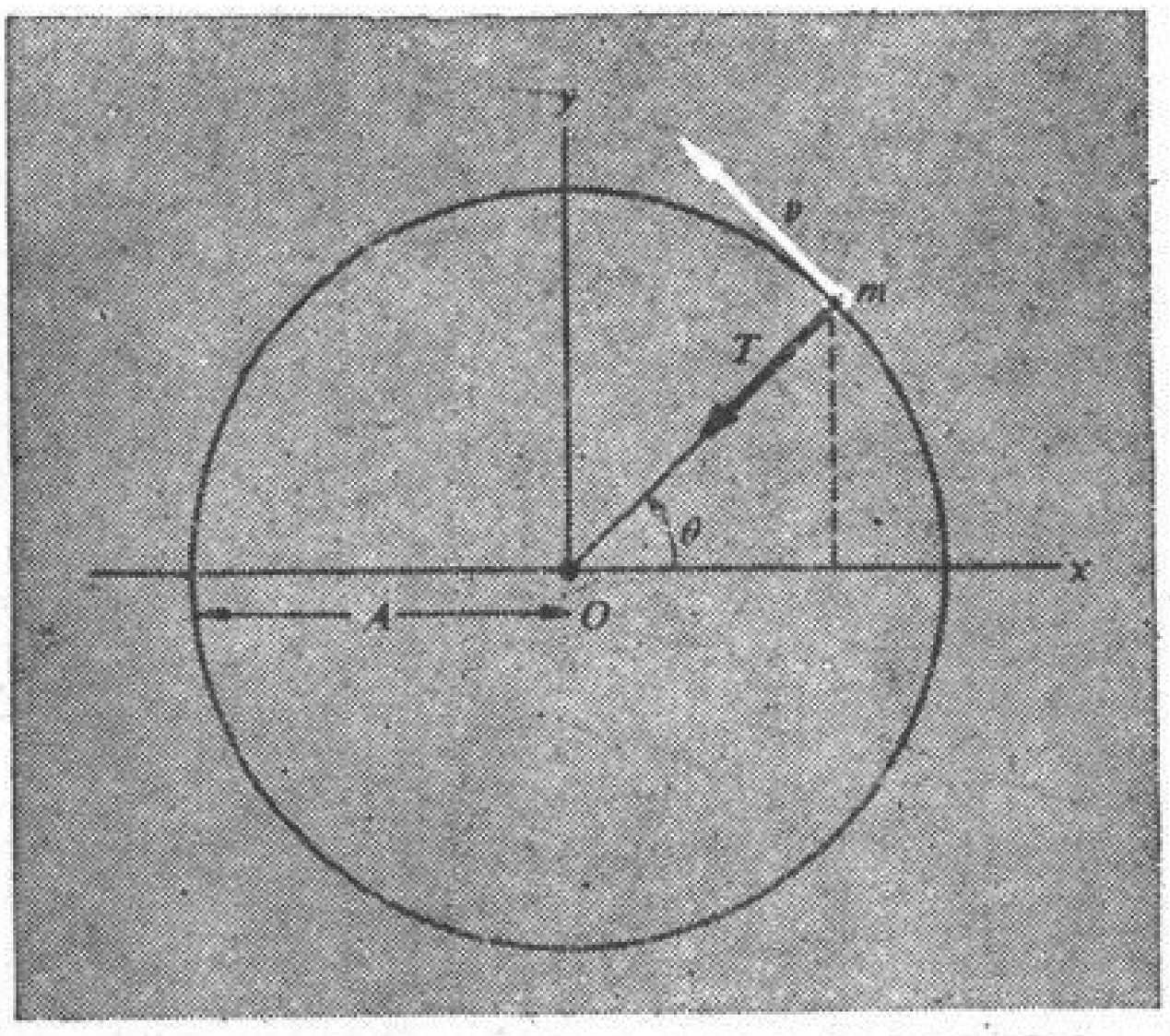



图 7-29　圆周运动和线性谐运动之间的动力学关系.

解为其 $x$ 和 $y$ 分量. (在正常情况下我们不会这样做, 因为 $T$ 和 $a_r$ 都有很确定的常数值.)单取 $x$ 分量, 有

$$F_x = -T\cos\theta = -\frac{mv^2}{A}\cos\theta$$

$$a_x = -\frac{v^2}{A}\cos\theta$$

于是, 完整的矢量方程 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ 的 $x$ 分量是 $F_x = ma_x$, 其中 $F_x$ 和 $a_x$ 之值如上.

为了显示这一分量运动在动力学上与 SHM 完全相同, 我们可以分开来看 $F_x$ 和 $a_x$ 的表达式. 引进角速度 $\omega$ 而令 $v = \omega A$, 有

$$F_x = -m\omega^2 A\cos\theta = -m\omega^2 x$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\theta = -\omega^2 x$$

其中第一个方程确定一与距离成正比的回复力, 完全同我们开始时的胡克定律[(7-38) 式]的说法一致. 第二个方程正好与方程 (7-40)相应, 那是我们对问题作运动学分析的起点:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

于是我们看到，动力学的对应在每一方面都是完全的．此外，它还告诉我们，如果我们想要的话，还可以走另一条路，把匀速圆周运动当作两个互相垂直的简谐运动的迭加．事实上这在某些范畴内是一个异常重要的和有用的步骤，不过我们不在此时此地花时间去探究它．

## 习　题

7-1　两架相同的滑翔机，每架质量为 $m$，在空中前后排列着被牵行，如图所示．起初，它们以恒定速率飞行，牵引绳 $A$ 中的张力为 $T_0$．然后，牵引机以加速度 $a$ 开始加速．在加速开始后的瞬间，$A$ 和 $B$ 中的张力多大？



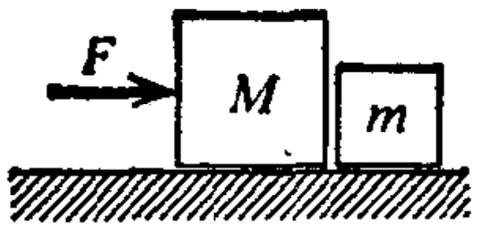

（习题　7-1）

7-2　质量 $M=3$ 千克和 $m=2$ 千克的两块物体，放在一张水平桌上，互相接触着．施加一恒定的水平力 $F=5$ 牛顿于物体 $M$ 上，如图所示．桌子与物体 $m$ 之间有一**恒定**的摩擦力 2 牛顿，但桌子与物体 $M$ 之间**无**摩擦力．

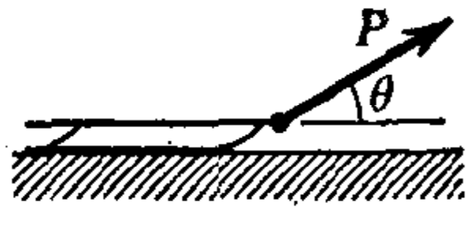
(a) 计算这两块物体的加速度．

(b) 计算两物体之间的接触力．

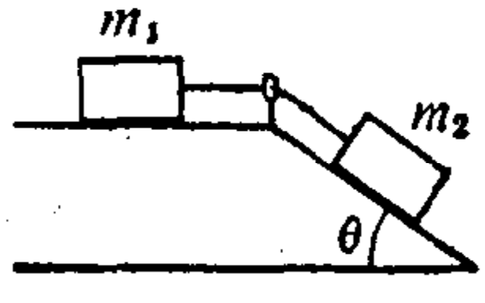
7-3　一具质量为 $m$ 的雪橇，被一与水平线成 $\theta$ 角、大小为 $P$ 的力拉行（见图）．雪橇在水平雪面上滑行．由经验知道，切向阻力等于雪施加于雪橇的垂直力 $N$ 的 $\mu$ 倍．




（习题　7-2）




（习题　7-3）




（习题　7-4）

(a) 作一隔离体图标明所有施加于雪橇上的力．

(b) 对运动的水平和竖直分量写出与 $F=ma$ 相应的方程。

(c) 求出水平加速度的表达式，用 $P$、$\theta$、$m$、$\mu$ 和 $g$ 表示．

(d) 对于给定大小的 $P$，求产生最大加速度的 $\theta$ 值．

7-4　一块质量为 $m_1$ 的物体静止在一无摩擦的水平面上；由一根无质

量的绳子穿过无摩擦的孔眼把这块物体同质量为 $m_2$ 静止在一无摩擦的斜面上的第二块物体相连(见图).

(a) 画出这两个质量的隔离体图,并分别写出它们的运动方程.

(b) 求绳中的张力和 $m_2$ 的加速度.

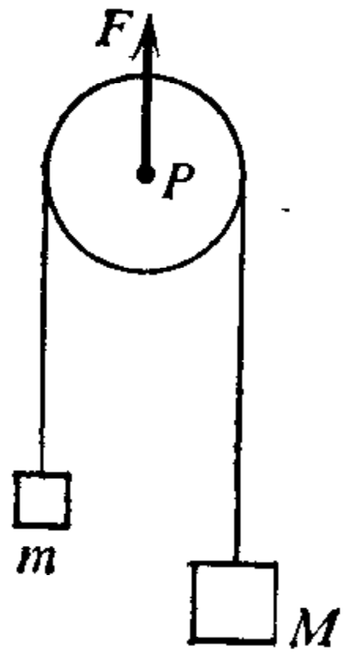
(c) 验证,当 $\theta=\pi/2$ 时,你的答案约化为预期的结果.

7-5 在图中,$P$ 是一个质量可忽略的滑轮. 一外力 $F$ 作用于它,如图所示.

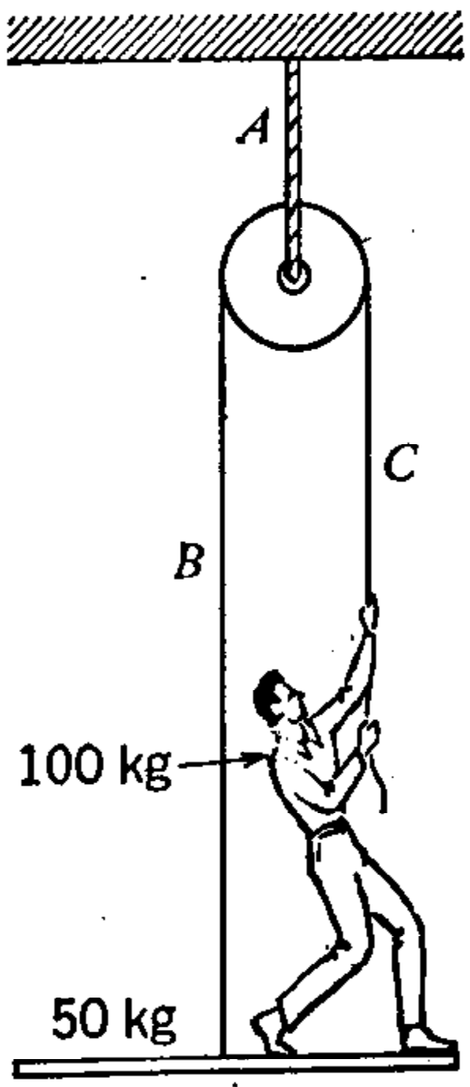
(a) 求出滑轮右边和左边绳中张力的关系. 同时求出 $F$ 和张力间的关系.

(b) 绳子的存在给 $m$、$M$ 的运动和 $P$ 之间提供了什么关系?

(c) 利用上述结果,并应用牛顿定律于每一物体上,求出 $m$、$M$ 和 $P$ 的加速度,用 $m$、$M$、$g$ 和 $F$ 表示. 检验这些结果,看它们对各种特殊的和简化的情况是否有意义.




(习题 7-5)




(习题 7-6)

7-6 一个人利用如图所示的绳子-滑轮装置,使他自己和他站在上面的踏板以 5 米/秒$^2$ 的匀加速度上升. 这人的质量为 100 公斤,踏板的质量为 50 公斤. 假设滑轮和绳子都无质量,而运动无摩擦,并忽略踏板的任何倾斜效应. 设 $g=10$ 米/秒$^2$.

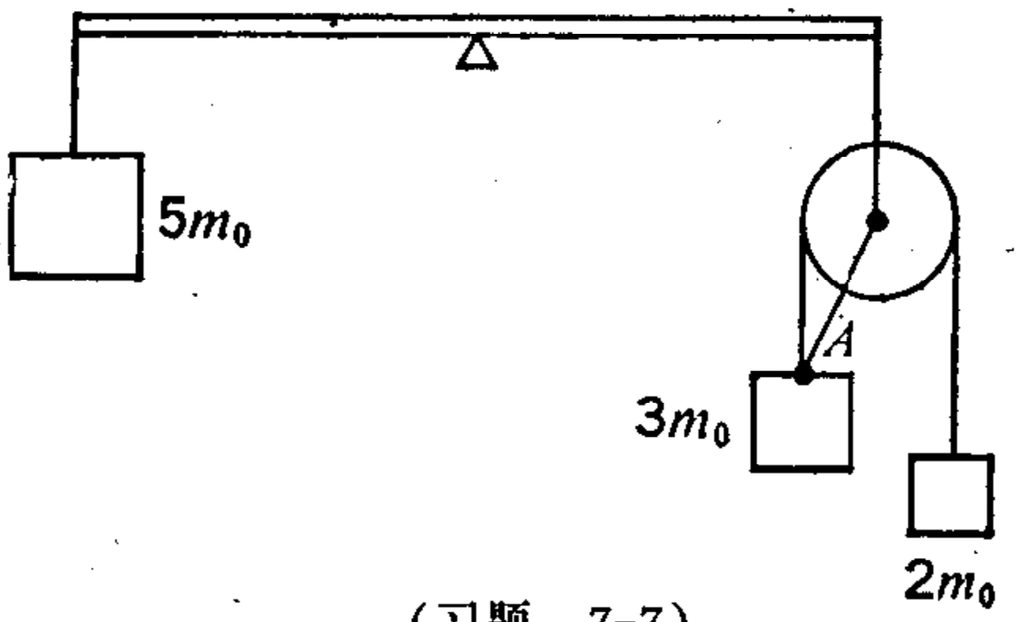
(a) 在绳子 $A$、$B$ 和 $C$ 中的张力多大?

(b) 画出人和踏板的隔离体图,并分开对每一隔离体图画出表示所有作

用力的图．标出每一个力并明确指出它们的方向．

(c) 踏板施加于人的接触力多大？

7-7　在一个等臂装置中，质量 $5m_0$ 由质量 $3m_0$ 和 $2m_0$ 来平衡；质量 $3m_0$ 和 $2m_0$．用一根绕过质量可忽略的滑轮的绳子连结着，并用绳子 $A$ 防止它们运动．如果绳 $A$ 突然断掉（例如用一根点燃的火柴），试分析会出现什么情况．




（习题　7-7）

7-8　一个人把一根绳子的顶端缚在他窗外的一个钩上，绳的底端悬离地面．绳的质量为 10 千克，人的质量为 70 千克．钩能承受 600 牛顿的拉力而不致脱开．如果窗在地面之上 15 米，问人在绳的顶端从静止出发滑下来到达地面时可能的最小速度是多少？

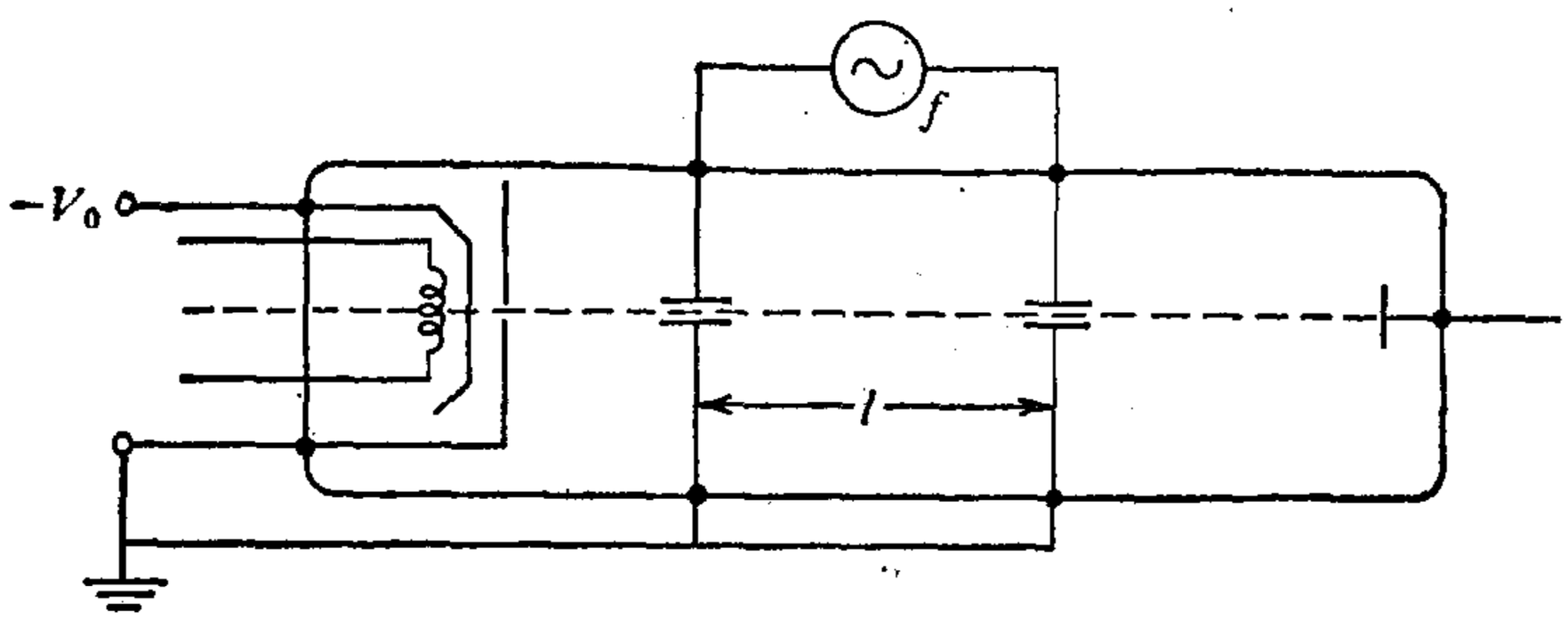
7-9　(a) 设有一根长为 $L$ 的均匀绳子，静止在一无摩擦的水平面上，一端被一个力拉着，使绳沿其长度方向加速．试推导出以沿长度的位置表示的绳中张力 $T$ 的函数．如果这绳是在恒定的重力场中竖直加速，$T$ 的表达式如何变化？

(b) 用(a)中的绳子使一质量 $M$ 加速．设绳的质量为 $m$，计算在水平和竖直情况下的张力．

7-10　1931 年 K．基尔希纳做了一个确定电子荷质比 $e/m$ 的实验．一电子枪(见图)产生一电子束，经过两个“门”，每一门由一对平行板组成，上板都连接到一个交变电源．只有当上极板电压的瞬时值为零时，电子才能径直通过一个门．如果两个门相隔的距离 $l$ 等于 50.35 厘米，而门电压以正弦形式变化，频率 $f$ 等于 $2.449\times10^7$ 赫(1 赫＝1 周/秒)，基尔希纳发现，当起始加速电压($V_0$)固定在 1735 伏时，电子能完全无偏转地通过两个门．在这些条件下，在两门之间的飞行时间与交变电压的半周相应．

(a) 由 $l$ 和 $f$ 直接推出的电子速率是多少？

(b) 这数据所含的 $e/m$ 值多大？




（习题 7-10）

(c) 由于特殊相对论而引起的修正是否重要？

[基尔希纳的原始文章见 *Ann. Physik*, **8**, 975(1931).]

7-11 已知某载有物件的汽车的重心位于前轴和后轴之间一半的地方. 发现当汽车驶上一 20° 的斜坡时, 驱动轮(在后方)开始打滑. 问要使这汽车驶上 25° 的斜坡, 所载物件(重量为空车重量的四分之一)必须向后移多远？(两轴之间的距离为 10 英尺.)

7-12 一小孩乘雪橇从静止出发, 沿着积雪的山坡滑下来. 小山具有 15° 的坡度, 山脚下是延伸得很远的平坦原野. 小孩从斜坡上 50 英尺处出发, 而在达到完全停止前在平原上继续滑行了 100 英尺. 求雪橇和雪之间的摩擦系数, 假设它在整个滑行过程中是恒定的. 略去空气阻力.

7-13 来自电子枪的电子束, 通过间距为 3 毫米、长为 2 厘米的两平行板之间. 在离开平行板后, 电子再往前走 25 厘米, 在一荧光屏上形成一斑点. 要想在偏转板上加 100 伏时使斑点竖直地偏转 3 厘米, 电子枪的加速电压 $V_0$ 必须多大？(首先证明, 一般, 如果偏转板引起的线位移可以忽略, 则所需电压为 $V_0=V(D/2Yd)$, 其中 $Y$ 是斑点在荧光屏上的线位移. 符号是第 11 页上所用的.)

7-14 一质量为 $m$ 的球系在一根长为 $l$ 的绳子的一端. 已知如果拉力等于球的重量的九倍时, 绳会断掉. 这球在一张无摩擦的桌子的支撑下作水平圆周运动, 绳的另一端系于一固定点 $O$. 问这质量不致使绳断掉的最大单位时间转数是多少？

7-15 一个 100 克的质量安在一根长为 20 厘米的非常轻的刚性棒的一端. 棒的另一端附在一电动机的转轴上, 使棒连同这质量在一竖直的圆中以 7 弧度/秒的恒定角速度转动.

(a) 画一力图来表明棒与竖直向下的方向成任意角度 $\theta$ 时所有作用在这质量上的力.

(b) 当棒指着水平方向，即 $\theta=90°$ 时，棒施加于这质量上的力的大小和方向如何？

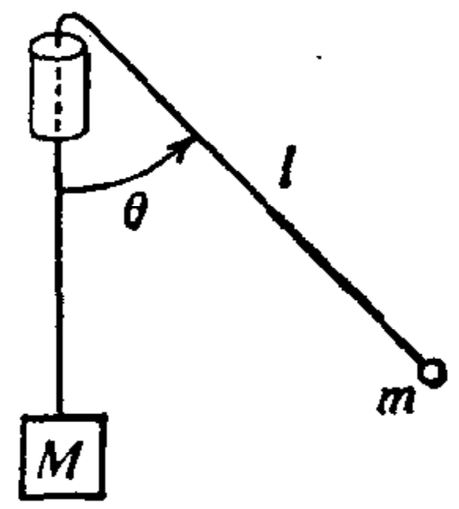
7-16 你正在你的“索普韦思骆驼”① 中以 60 英里/小时在 2000 英尺高度上飞行于圣·米歇尔附近，这时你突然注意到“红男爵”② 在你后面刚好 300 英尺处以 90 英里/小时飞行. 根据缴获的医案想到，“红男爵”在晕眩之前只能经受得住 $4g$ 的加速度，而你却能够经受得住 $5g$ 的加速度，于是你决定采取下述办法. 你开足马力笔直俯冲，然后沿一圆弧拉平起来，这圆弧刚好在擦着地面时成水平. 假设你开始摆脱之后的速率是恒定的，而你在圆弧中经受的加速度是 $5g$. 由于你知道“红男爵”将跟着你，你断定他必将因晕眩而坠毁. 假设两架飞机都从同一起始点以 $2g$ 的加速度俯冲（但初速率则是上面所给定的），你必须下降到什么高度，以使“红男爵”在企图尾随你而接着作圆弧飞行时一定或是坠毁，或是昏迷呢？假设“红男爵”的射击不怎么高明，必须要与离你的飞机接近到在 100 英尺以内才能将你击落，你的计划会成功吗？在开始下降后你想到，如果超过 300 英里/小时，你的机翼将会脱落. 由于你的飞机受到这一限制，你的计划正确吗？

7-17 把一水平公路上半径为 300 米的弯道修成倾斜的，使公路施加于一辆速率为 25 米/秒（≈55 英里/小时）的汽车的力与路面垂直.

(a) 倾斜角多大？

(b) 轮胎与公路之间的摩擦所能提供的最大切向力等于路面法向力的 0.4. 问汽车驶过弯道而无滑行的最高速率是多少？

7-18 一个大质量悬挂（静止不动）在一绳子的末端，绳子穿过一光滑管子与一小质量 $m$ 相连，小质量 $m$ 沿一半径为 $l\sin\theta$ 的圆形轨道旋转，其中 $l$ 为绳子从 $m$ 到管子顶端的长度（见图）. 对每一质量写出其动力学方程，并证明 $m$ 必须在时间 $2\pi(lm/gM)^{1/2}$ 内走完一周. 试考虑，在这一运动中，角度 $\theta$ 之值有什么限制.



（习题 7-18）

① 一种飞机型号的别名——译者注.

② 第一次世界大战中德军的一著名战斗机飞行员的绰号——译者注.

7-19　一模型火箭，放在一无摩擦的水平面上，用一根长为 $l$ 的绳把它连到一固定点，以使火箭沿半径为 $l$ 的水平圆轨道运动．如张力超过一定值 $T$，绳子将断掉．火箭发动机提供一个沿着火箭运动方向、大小恒定的推力 $F$．火箭的质量为 $m$，$m$ 不随时间明显地减小．

(a) 在 $t=0$ 时从静止出发，多少时间 $t_1$ 之后，火箭运行得足够快而使绳断掉？忽略空气阻力．

(b) 火箭在时刻 $t_1/2$ 的瞬时净加速度多大？用 $F$、$T$ 和 $m$ 来表示所得的答案．

(c) 在绳子断开的时刻 $t_1$ 到时刻 $2t_1$ 之间，火箭走了多少距离？设在绳子断掉后，火箭发动机继续运转．

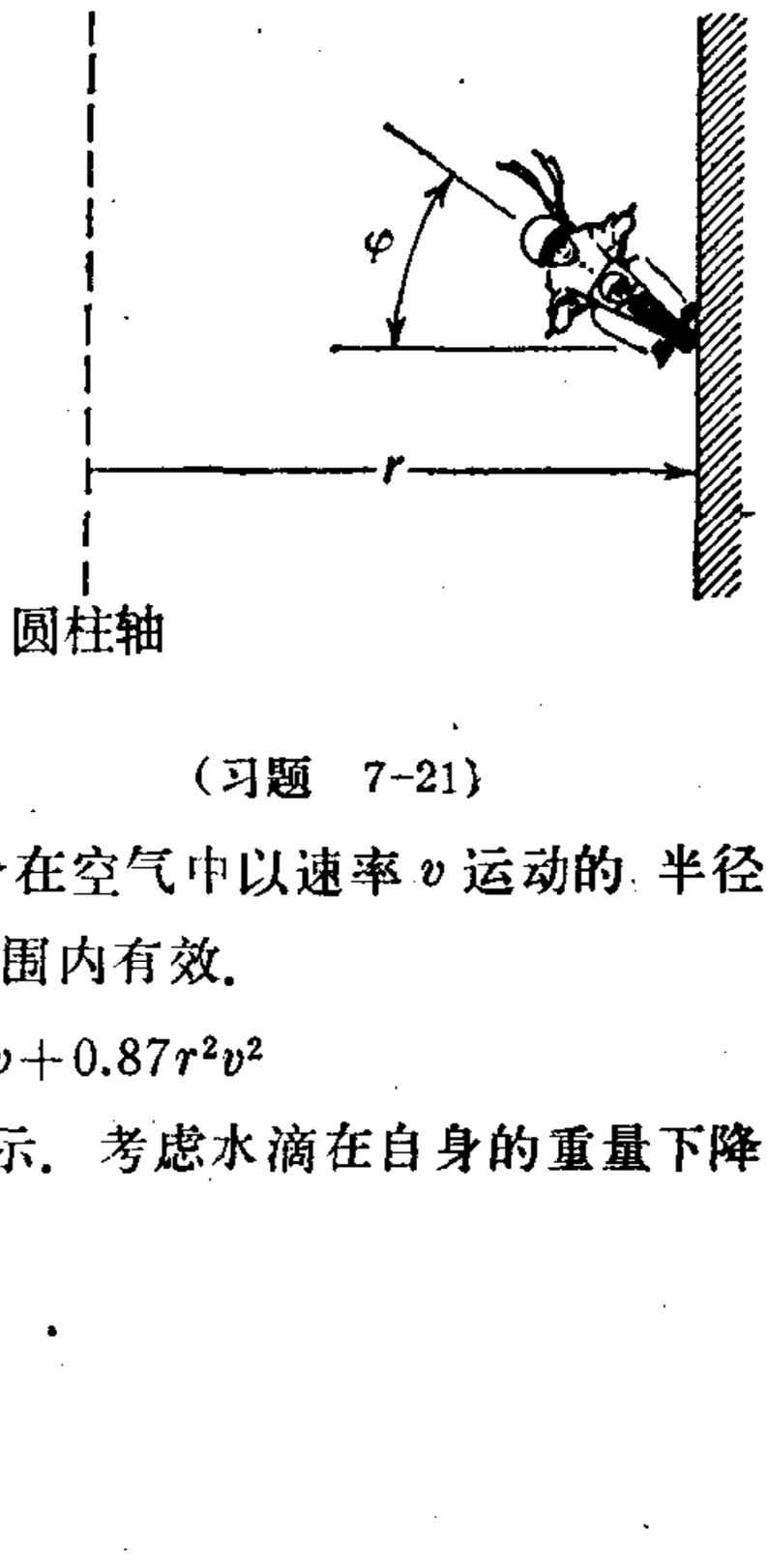
7-20　曾经有人推测过，很可能我们制作的最大的核加速器将是一个环绕着地球赤道的抽空管道．在赤道上，地球磁场的强度约为 0.3 高斯或 $3\times10^{-5}$ MKS 单位（牛顿·秒/库仑·米）．一个单电离的（即带有一个基元电荷的）铅原子（原子量 207）要以多大的速率绕着这样一个轨道运动，才能使磁力提供恰好的向心加速度？（$e=1.6\times10^{-19}$ 库仑．）要通过多大的电压才会使一个单电离的铅原子加速到这一恰好的轨道速率？

7-21　一车技演员骑着他的摩托车绕一竖直圆柱体的“绝壁”行驶（见图）．平行于圆柱体表面的最大摩擦力等于壁施于摩托车的法向力的 $\mu$ 倍．

(a) 车技演员必须用多大速率行驶才能避免下滑？

(b) 他必须对水平线倾斜一多大的角度？

(c) 如果 $\mu\approx0.6$（橡皮轮胎在干燥路面上的典型值），圆柱体的半径为 5 米，问车技演员行驶的最小速率应是多少？他与水平线成多大的角度？




（习题　7-21）

7-22　下面的表达式给出施加于一个在空气中以速率 $v$ 运动的半径为 $r$ 的球上的阻力．它在一个很宽的速率范围内有效．

$$R(v)=3.1\times10^{-4}\,rv+0.87r^2v^2$$

其中 $R$ 用牛顿表示，$r$ 用米、$v$ 用米/秒表示．考虑水滴在自身的重量下降落并达到收尾速率．

(a) 要收尾速率只由 $R(v)$的表达式的第一项单独确定到 1% 以内，相应的小 $r$ 值的范围是什么？

(b) 要收尾速率只由第二项单独确定到 1% 以内，相应的大 $r$ 值的范围如何？

(c) 计算一个半径为 2 毫米的雨点的收尾速率. 如果没有空气阻力，它从静止到达到这一速率之前降落的高度是多少？

7-23 用密立根油滴仪器进行一个实验. 两板相距 8 毫米. 实验所用的油滴密度为.896 千克/米$^3$. 在相距为 2.58 毫米的两条水平线之间对微滴计时. 极板不带电时，观察到一微滴从一线降落到另一线需要 23.6 秒. 当上极板相对于下极板为正 1100 伏时，微滴上升，花了 22.0 秒通过同一距离. 设阻力为 $3.1\times10^{-4}rv$(MKS 单位).

(a) 微滴的半径多大？

(b) 以基元电荷的数目来量度($e=1.6\times10^{-19}$ 库仑)，它的总电荷是多少？

(c) 保持微滴不动要多大电压？[用 (b) 部分中推得的电荷的精确值.]

7-24 在一密立根实验中，用了两个材料相同但半径不同的实心塑料球，半径分别为 $R$ 和 $2R$. 两球带有相等的电荷 $q$. 观察到大球达到收尾速率如下：(1) 极板不带电：收尾速率$=v_0$(向下)；(2) 极板带电：收尾速率$=v_1$(向上). 设作用于一个半径为 $r$、速率为 $v$ 的球上的阻力为 $c_1rv$，求小球的相应收尾速率，用 $v_0$ 和 $v_1$ 表示.

7-25 回顾性地分析一下传说中的伽利略在比萨斜塔所进行的实验. 设想这样一个实验是用两个铁球来做的，它们的半径分别为 2 和 10 厘米，同时从约为 15 米高处落下来. 用计算来近似地确定它们碰到地面的时间差. 你认为不用特殊的测量仪器这时间差能被探查到吗？(铁的密度 $\approx$7500 千克/米$^3$.)

7-26 估算一个充满空气的玩具气球(在空气中)降落时的收尾速率，气球的直径为 30 厘米，质量约 0.5 克(不计里面的空气). 使气球在百分之几的范围内达到这一收尾速度大约要多长时间？试对膨胀大小不同的气球作一些实际观察.

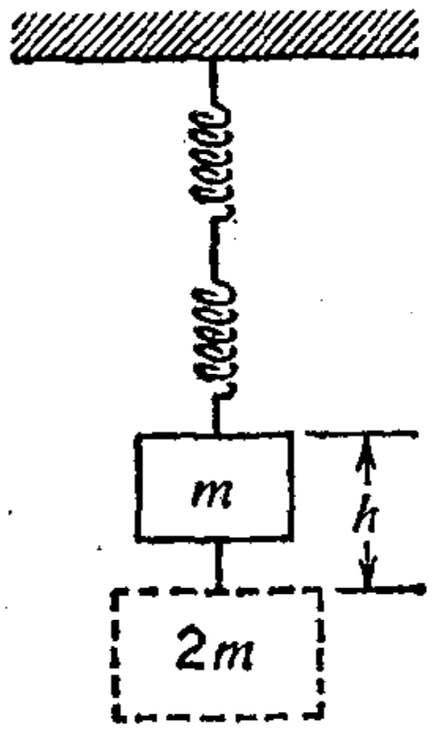
7-27 一根在伸长和压缩时都遵从胡克定律的弹簧在悬挂着一 2 千克的质量时伸长 10 厘米.

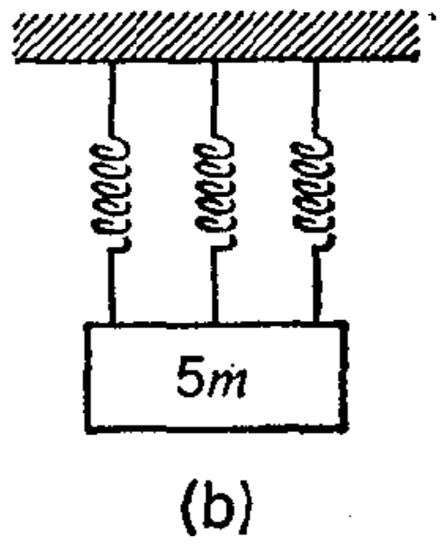
(a) 弹簧系数 $k$ 多大？

(b) 这弹簧和2千克质量同放在一光滑桌上. 拉这质量使弹簧伸长5厘米, 然后在 $t=0$ 时放开. 随后运动的方程如何?

(c) 如果不是在静止时放开, 而是这质量在 $x=5$ 厘米处沿着 $x$ 增加的方向以1米/秒的速率开始运动, 运动方程如何?

7-28 当质量是图(a)中的两倍时, 弹簧的末端下降了一附加高度 $h$. 问对于图(b)的排列, 振动频率是多少? 所有弹簧都是完全相同的.




(习题 7-28)

7-29 任何物体, 部分或全部浸没在流体中, 所受的浮力等于所排流体的重量. 一个密度为 $\rho$、长度为 $l$ 的均匀柱体, 浮在一密度为 $\rho_0$ 的流体中, 柱轴竖直. 这柱体在竖直方向作小幅度振动的频率是多少?

7-30 (a) 一质量为 $m$ 的小珠系在一根绳子的中点(绳本身的质量可忽略). 绳长为 $L$ 并在恒定的张力作用下. 求在这质量受到一微小的横向位移时它所作 SHM 的频率.

(b) 如果这质量不是在中点而是在距一端为 $D$ 的地方, 求这情况下的频率.

7-31 一块物体停放在一桌面上, 桌面在作简谐运动, 振幅为 $A$, 周期为 $T$.

(a) 如果振动是竖直的, 问使物体总是保持同桌子接触的最大 $A$ 值为何?

(b) 如果振动是水平的, 物体和桌面之间的摩擦系数为 $\mu$, 问使物体保持在桌面上无滑动的最大 $A$ 值为何?

7-32 空载时质量为1200千克的汽车的弹簧作小竖直振动的周期为0.5秒.

(a) 当质量各为75千克的一个司机和三个乘客上了汽车时，车下沉多少？

(b) 载着乘客的这辆车沿着一条水平公路行驶，突然间它驶上一段新路面，比原来路面升高2英寸. 假定这一来车轮和弹簧底端在车身开始向上运动之前就突然上升2英寸. 问在随后的回跳中，乘客会被抛离他们的坐位吗？并求所产生的简谐运动的最大加速度.

如果根据实验和天文观测，普遍地发现，地球周围的物体都受到向着地球的引力…大小与物体各自所含物质的量成正比；月球同样地…受引力作用而趋向地球…所有行星互相吸引；彗星也以同样方式趋向太阳；那么，由于这一规律，我们必须普遍地承认所有物体之间都存在着相互吸引的法则.

牛顿，《原理》(1686).

# 第八章　万有引力

## §1　万有引力的发现

在第六章和第七章中，我们已建立了一种动力学基础，那是牛顿本人第一个创建的．简括地说，它定量地把力认作是加速度的起因，并同联系加速度与速度和位移的纯运动学问题结合起来．作为一个独立的题目，我们现在来考虑一个最先的、也是最辉煌的例子，说明如何从对运动的研究推断出一个力的规律．

把这一伟大发现分为三方面来看比较方便，从历史上看，这也并非没有道理的：

1．分析有关行星绕太阳的轨道的数据，近似地认为这些轨道是以太阳为中心的圆．除牛顿外，还有几个同这问题密切有关的人．

2．在如下的意义下证明引力是万有的：在地球表面上制约物体运动的力的规律也是控制着天体运动的规律．似乎明显的是，通过对月球运动的分析，牛顿是这一结果的真正发现者．

3．证明行星的真正轨道是椭圆而不是圆，并能用力的反平方定律来解释．这一成就肯定是牛顿个人天才的产物．

在本章中我们将有可能相当充分地论述这些问题中的第一个，只需用到粒子的运动学和动力学中的基本结果．第二个问题要求我们去认识（正如牛顿本人最初也必须这样），如何分析一个象地球那样、从它的表面附近看显然不是一个几何点的物体的引力特性．我们在这里将介绍探讨这问题的一个途径，而在第十一章

中讨论引力问题的特点时完成这一史话．第三个问题与轨道的严格数学描述有关，是我们不准备在这一阶段中讨论的东西；这类轨道问题是第十三章的专题．

## §2 行星的轨道

在第二章中我们曾描述过，有关那些古典的行星——水星、金星、火星、木星和土星——运动的知识，早在公元 150 年前后天文学家托勒玫的时期就已经发展得异常之好了．这样说的意思是，这些行星的角位置，作为时间的函数，已经编成册，其精确度惊人，而且包括着一段很长的时间足以使人们非常清楚地知道它们在天空中回到同一位置的周期．然而我们以前曾指出过，这些结果的解释依赖于我们采用什么样的太阳系模型．下面我们来仔细看看原始观测数据以及根据它们所能作出的结论．

第一件要认识的事是，不管人们是否承认地球是宇宙的真正中心，但就所有原始的观测而论它**确是**中心．从这一占特殊地位的点来看，每一行星的运动，在初步近似下，可以描绘为一小的圆(本轮)，它的中心则循着一个大一些的圆(均轮)运动．某些有关两个特别的行星——水星和金星——运动的事实，则指出了一条通向一些更深远的结论的道路．这些事实是：

1．对于两个行星，本轮的中心 $C$［图 8-1(a)］绕着均轮走一周的时间正好是 1 太阳年——即，同于太阳绕着黄道走一整圈所需的时间．

2．水星和金星从来不会离太阳很远，它们总是在离地球到太阳的连线的一定角度范围内（对水星约为 $\pm 22\frac{1}{2}^\circ$，对金星约为 $\pm 46^\circ$）．如果我们转到哥白尼的日心系的话，这些事实都可以得到极佳的说明［图 8-1(b)］．我们看到，图 8-1(a) 的大圆在这一

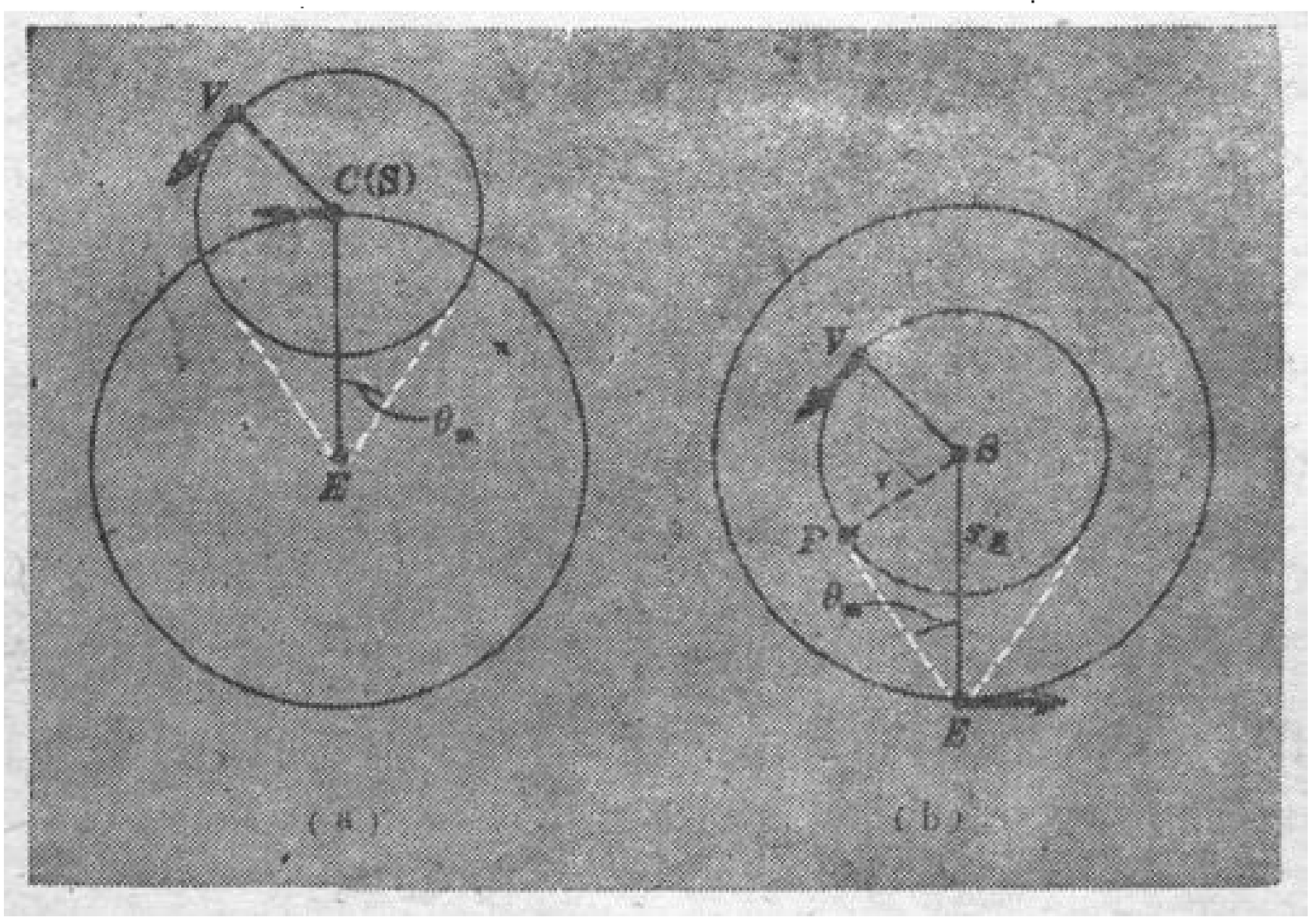



图 8-1 （a）从地球上看，太阳和金星的运动．金星总是位于太阳方向的角度范围 $\pm\theta_m$ 之内．（b）同一情况在日心系中的图象．

情形下与地球本身绕太阳的轨道相应，半径是 $r_E$，而小圆——本轮——则代表其他行星的轨道(金星或水星，视情形而定)．有了这一解释，我们就可以进行对行星本身的轨道半径作定量的推断．这是哥白尼图式超过托勒玫图式的关键性进展．虽然托勒玫有着极佳的数据，但对他说来这只不过是纯几何的参考资料，而有了哥白尼，我们就得到了一个真正的物理模型的基础．于是，在图 8-1 (b)中，行星 $P$ 离地-日线 $ES$ 的最大角偏离 $\theta_m$ 确定着行星轨道的半径，其关系是

$$\frac{r}{r_E}=\sin\theta_m \qquad (r_E>r) \tag{8-1a}$$

地球轨道的半径显然是测量其他天文学距离的一个自然单位，很久以来就已用于这一目的：

1 天文单位(AU) = 地球到太阳的平均距离

$(1.496\times10^{11}$ 米)

用这单位，则

水星: $r \approx \sin 22\frac{1}{2}^\circ \approx 0.38$ AU

金星: $r \approx \sin 46^\circ \approx 0.72$ AU

说到其他行星(火星、木星、土星)，情况就反过来了．这些行星不怎么接近太阳;相对于地-日线，它们行进整整 360°．这很容易解释，只要我们交换一下两个圆周运动分量的地位，把那大圆(均轮)取作行星的轨道(现在它比地球的大)，而本轮则看作地球绕日的轨道．例如，对于木星的情形，图 8-2(a)代表托勒玫的图象,而图 8-2(b)则是哥白尼的图象．于是，本轮的周期性角摆幅，$\pm\theta_m$,与轨道半径之比的关系现在是

$$\frac{r_E}{r} = \sin\theta_m \qquad (r_E < r) \tag{8-1b}$$

其中 $r$ 和 $r_E$ 的地位与(8-1a) 式中的正好倒过来．托勒玫所记录的火星、木星和土星的 $\theta_m$ 值分别约为 41°、11° 和 6°．由此得到下列结果:

火星: $r \approx \csc 41^\circ \approx 1.5$ AU

木星: $r \approx \csc 11^\circ \approx 5.2$ AU

土星: $r \approx \csc 6^\circ \approx 9.5$ AU

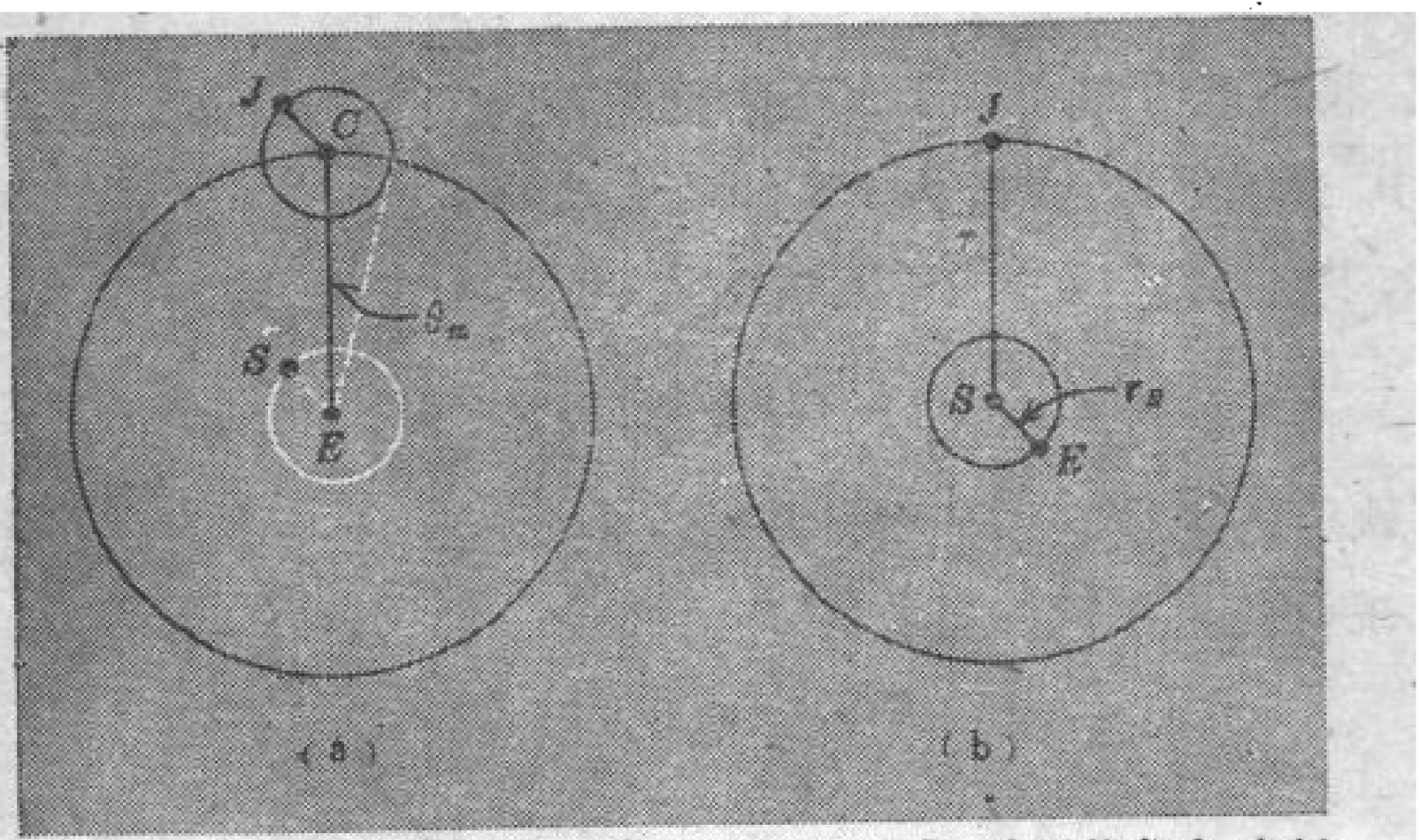



图 8-2 (a) 从地球上看，太阳和木星的运动．这里的角 $\theta_m$ 表征逆行(本轮)运动的大小．(b) 同一情况的日心系图象．

因此，哥白尼的图式(这是它的巨大成就)使得当时有可能利用长久以来所确立的数据，按行星离太阳由近到远的次序，画出行星在它们的轨道上的运行图．图 8-3 就是哥白尼于 1543 年在他的书(*De Revolutionibus*)中用来显示这些结果的历史性图形的复制品。

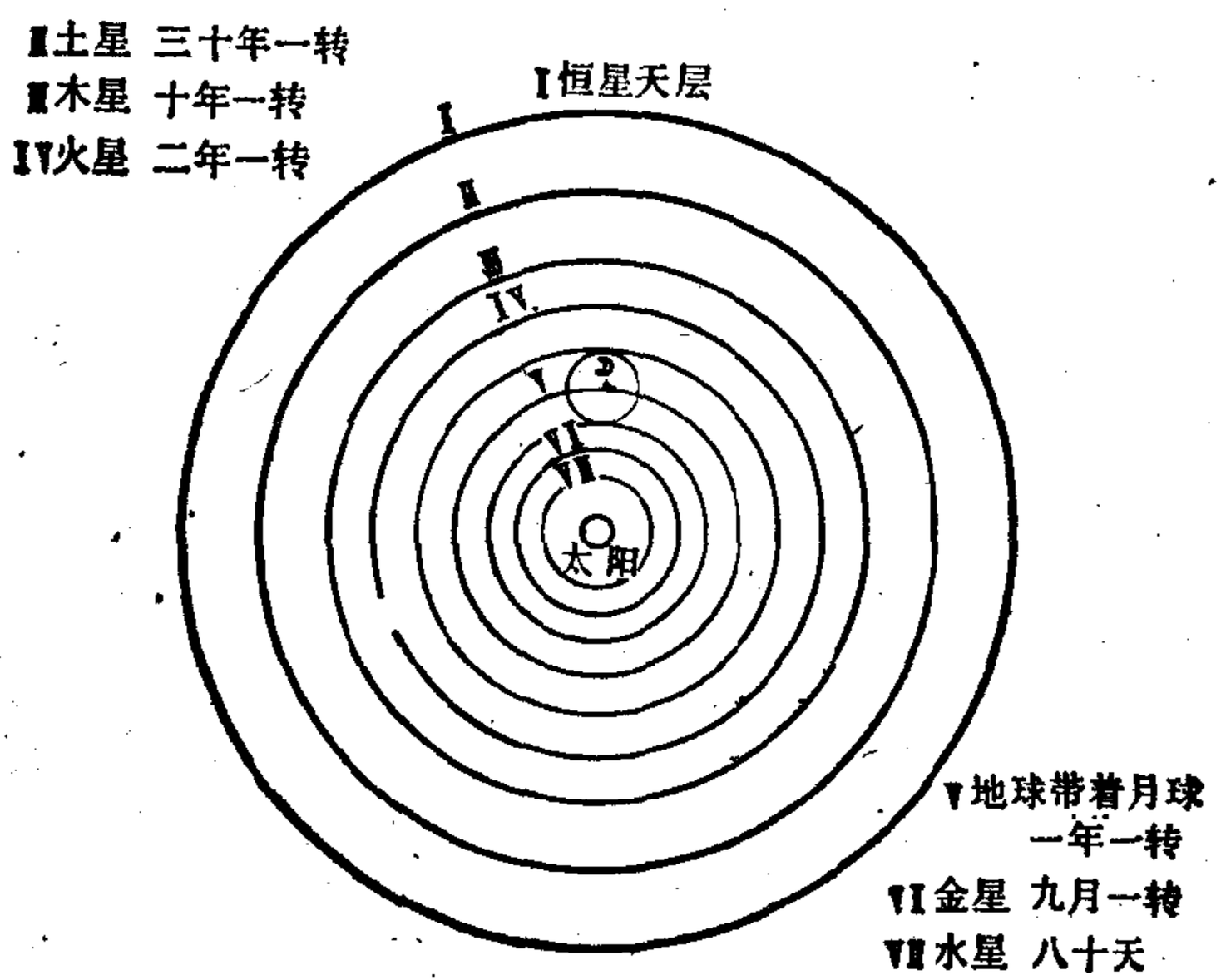



图 8-3　哥白尼的宇宙．

哥白尼所用的数据(在他之前 1400 年，托勒玫也用过)实际是太精确了以致不能用行星以恒定速率绕一公共中心作圆形轨道运动的简单图象来描述．因而哥白尼进行了详细的分析，找出每一行星的轨道中心偏离太阳有多远．但即便作了这一调整，行星角位置随时间的详细变化依然与这些数据不符合，除非令循轨道的运动是非均匀的．哥白尼，象他的前人托勒玫，引进外加的圆运动来解决这问题，但正象我们现在所知道的那样，这不是问题的答案．而我们也不准备讨论其复杂内容．目前，我们将用均匀圆周轨道这种基本理想化模型，而暂时不顾一些细致的改进，这些改进首先是由开普勒在他认识到行星的轨道是椭圆时掌握的．

## §3 行星的周期

确定行星的周期性的问题，就象寻求它们的轨道形状一样，必然也是从我们在地球这一运动台上所能观测到的事物开始. 最容易认识到的是太阳、地球和另一行星，经过某特定时间之后，回到同一相对位置这一循环情形. 这一循环时间称为问题中的行星的**会合周期**. 用太阳系的日心模型，很容易把这周期同这行星绕太阳走一整周的真正(恒星)周期联系起来.

先看最外边的行星之一，比如说木星的情形. 图 8-4(a) 所示是常常能观察到的情形. 太阳、地球和木星位于一条直线上. 在观察上这可以通过求出木星于午夜跨过天球子午线① 的日期来确定，这时它的位置离太阳算是 180°.

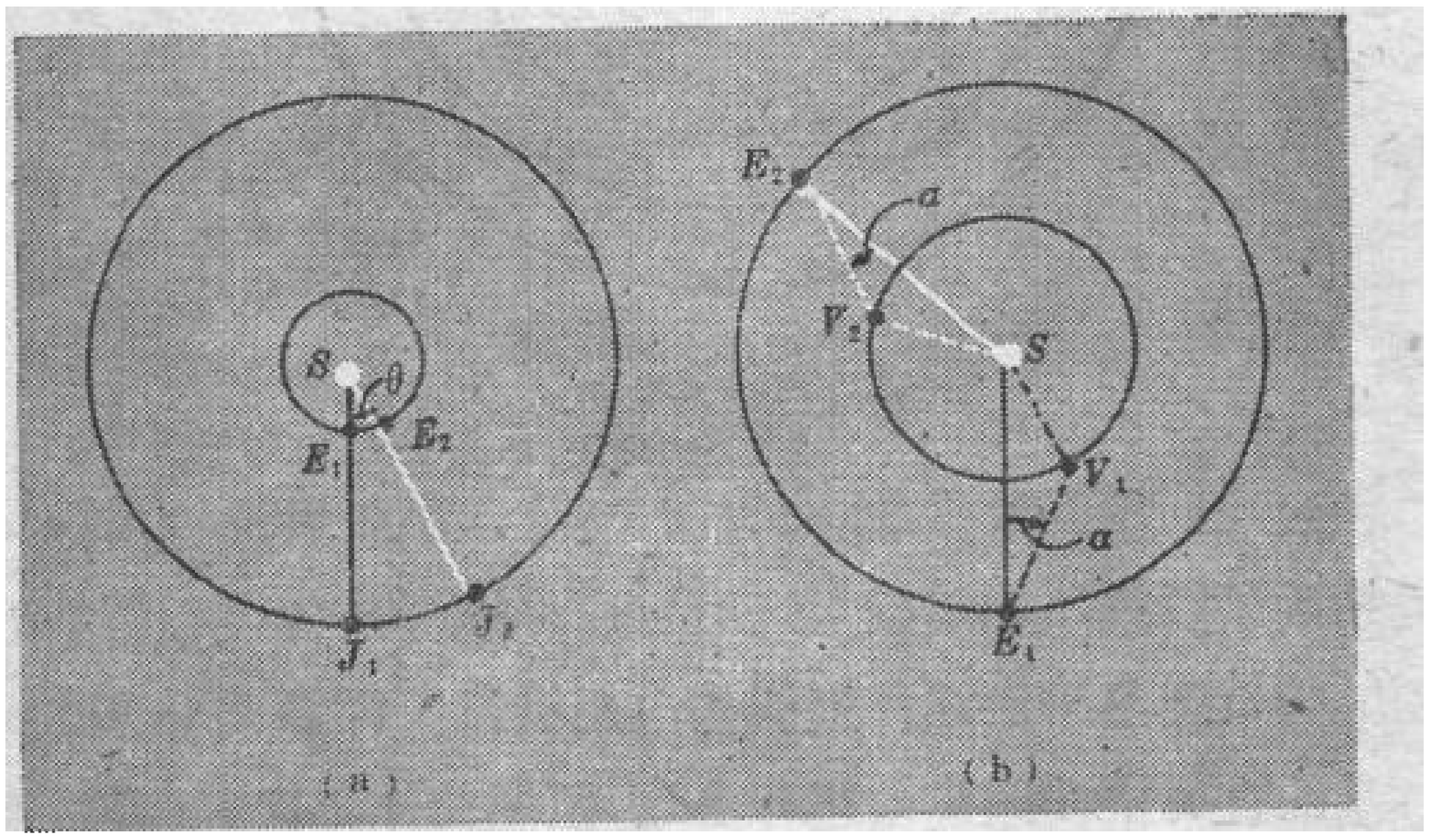



**图 8-4** (a) 太阳、地球和木星在一会合周期开始时的相对位置 ($SE_1J_1$) 和终了时的相对位置($SE_2J_2$). (b) 太阳、地球和金星的比较图；考虑了以下事实：要看到金星，它必须偏离太阳与地球之间的连线.

① 天球子午线是包含着地轴以及地球表面上的观察者所在之点的平面在天球上的投影. 因此它是天球上从北到南通过观察者头上的天顶的一个大圆. 正午就是太阳每天从东到西跨过这天球子午线的时刻.

如果一次这样排成一线的情况用地球和木星的位置 $E_1$ 和 $J_1$ 来代表，则下一次将在一年多以后当地球超出木星一圈时出现．这由 $E_2$ 和 $J_2$ 的位置表明．木星这时走了角距离 $\theta$，而地球则走了 $2\pi+\theta$．托勒玫和哥白尼两人都知道这两个位形相隔的会合周期是 399 天．我们一般用符号 $\tau$ 表示会合周期．于是，如果地球在单位时间内走 $n_E$ 转，木星在单位时间内走 $n_J$ 转，则有

$$n_E\tau = n_J\tau + 1$$

但 $n_E$ 和 $n_J$ 是两行星公转周期 $T_E$ 和 $T_J$ 的倒数，因此

$$\frac{\tau}{T_E} = \frac{\tau}{T_J} + 1$$

按 $T_J$ 解出，得

$$T_J = \frac{T_E}{1 - T_E/\tau} \tag{8-2a}$$

令 $T_E/\tau \approx 365/399 \approx 0.915$，得

$$T_J \approx \frac{T_E}{0.085} \approx 11.8 \text{ 年}$$

同样的观测和计算可应用于火星和土星以及其他我们现今所知的更靠外的行星．然而，当讨论到金星和水星时，情形就与确定轨道半径时那样，稍有不同．第一是实际困难，我们不能（至少用肉眼是如此）在这些行星与太阳成一线时观看到它们，因为那要直接对着太阳去看．这一点很容易规避，只要我们考虑任何其他情况［见图 8-4(b)］，在其中测出 $ES$ 和 $EV$ 之间的夹角．这一特殊情况的图形显示出金星是一颗晨星，在日出前约一小时，当地球从西转到东时，它出现在地平线之上．同一 $\alpha$ 角之值将在一会合周期之后再现．这需要 $1\frac{1}{2}$ 年——更确切些，约 583 天．然而，在这一情形中是金星超出地球一圈．因此，应用于靠外的行星的方程要由下式来替代：

$$n_V\tau = n_E\tau + 1$$

因而有

$$T_V = \frac{T_E}{1 + T_E/\tau} \tag{8-2b}$$

令 $T_E/\tau \approx 365/583 \approx 0.627$, 得

$$T_V \approx \frac{T_E}{1.627} \approx 224 \text{ 天}$$

一个奇怪的事实是，哥白尼在对他的太阳系模型作一般的介绍性说明时，引用的行星周期值是如此之粗糙，其中有些可以说是错误的. 这些数值在他的图(图 8-3) 中标了出来，又在他的书中重复: 土星, 30 年; 木星, 12 年; 火星, 2 年; 金星, 9 个月; 水星, 80 天. 最差的是火星$\left(2\text{ 年，而不是约 }1\frac{1}{2}\text{年}\right)$和金星$\left(9\text{ 个月，而不是约 }7\frac{1}{2}\text{个月}\right)$. 这似乎曾经使得有些人认为哥白尼对于事实只有粗略的知识，情形肯定不是如此. 可能是他对引用周期不很介意，因为他的真正兴趣在行星的轨道和距离的几何详情. 无论如何，事情的真相是，他在书中后面详细说到的有关周期和半径的定量知识是如此之精辟，即使是最好的现代值也大部分与他所引用的相差无几. 这在表 8-1 中表示了出来，表中列出了古典行星的哥

**表 8-1　行星轨道数据**

| | 轨道半径 (AU) | | 会合周期(天) | 恒星周期 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 行　星 | 哥白尼 | 现　代 | 哥白尼 | 哥白尼 | 现　代 |
| 水　星 | 0.376 | 0.3871 | 115.88 | 87.97 天 | 87.97 天 |
| 金　星 | 0.719 | 0.7233 | 538.92 | 224.70 天 | 224.70 天 |
| 地　球 | 1.000 | 1.0000 | —— | 365.26 天 | 365.26 天 |
| 火　星 | 1.520 | 1.5237 | 779.04 | 1.882 年 | 1.881 年 |
| 木　星 | 5.219 | 5.2028 | 398.96 | 11.87 年 | 11.862 年 |
| 土　星 | 9.174 | 9,5389 | 378.09 | 29.44 年 | 29.457 年 |

白尼数据和现代的数据.（顺带说一下，从托勒玫的数据中提取出的数值差不多同哥白尼的完全一样.这要赞颂那些天文学家，他们从大约公元前750年起直到大约公元130年托勒玫亲自观测时止，所作的测量提供了他的分析的基础.）

## §4 开普勒第三定律

表8-1中的数据清楚地指明行星的周期与距离之间的一个系统的关系.这在图8-5中用图线显示了出来.这一关系的精确形

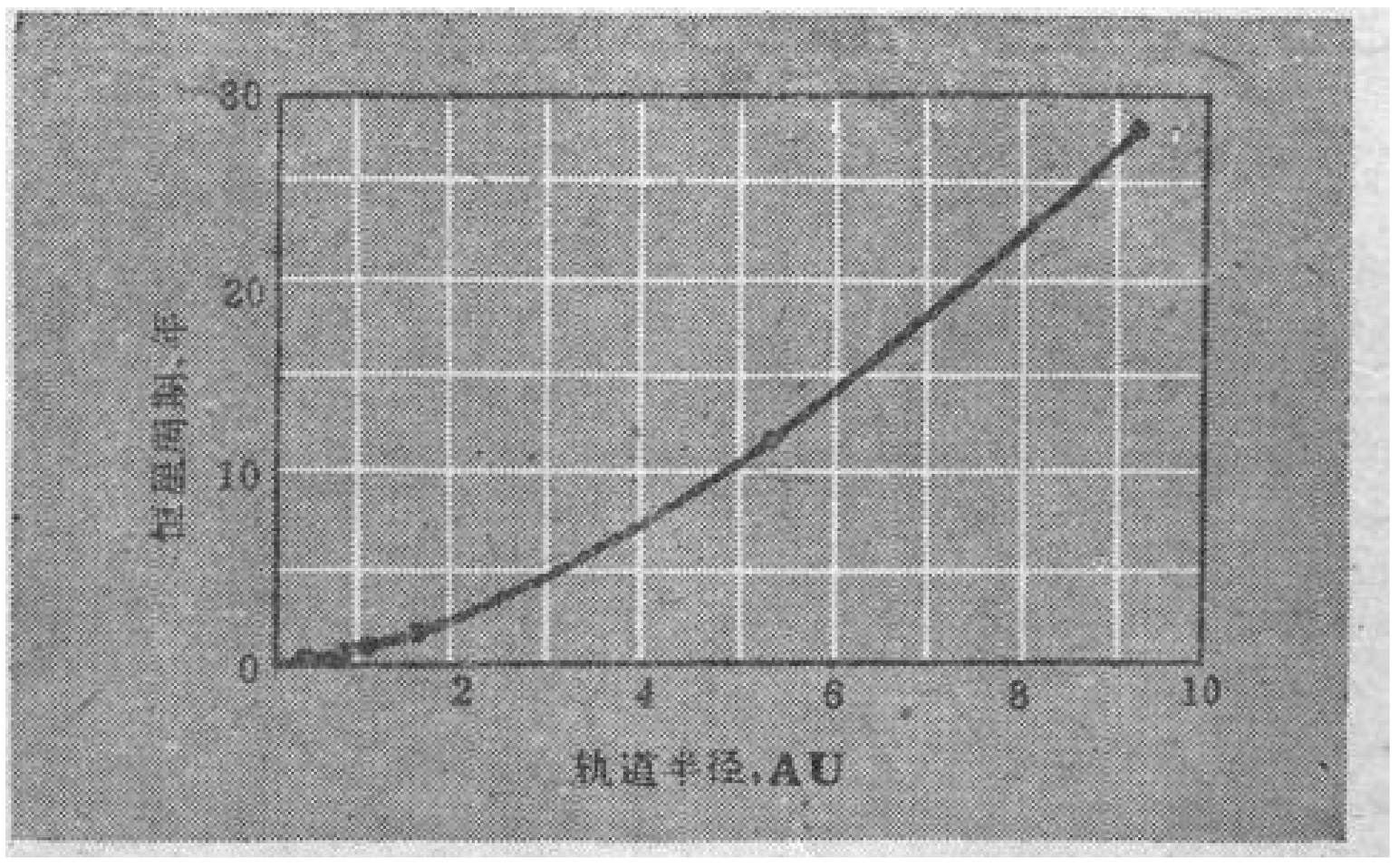



图8-5 联系行星轨道半径与周期的光滑曲线.

式是约翰·开普勒于1618年发现的，并在下一年发表于他的《*The Harmonies of the World*(宇宙的和谐)》一书中.在书里他因成功而喜悦地写道:“我起先以为我在做梦…但这是绝对肯定和精确的，任何两行星的周期之间存在的比例正好是它们的平均距离①的3/2次方之比….”表8-2所示是所开普勒所用的数据和比值$r^3/T^2$是否接近于常数的检验.图8-6是行星数据的另一不同表示法（实际上这是来自表8-1的哥白尼数据）——按现代式样在对数-对数坐标纸上表示出以下的关系:

① 指行星到太阳的距离——译者注.

$$T \sim r^{3/2} \tag{8-3}$$

**表 8-2　开普勒第三定律**

| 行　星 | 行星轨道半径$r$，AU | 周期$T$，天 | $r^3/T^2$<br>$(AU)^3/(天)^2\times10^{-6}$ |
|---|---|---|---|
| 水　星 | 0.389 | 87.77 | 7.64 |
| 金　星 | 0.724 | 224.70 | 7.52 |
| 地　球 | 1.000 | 365.25 | 7.50 |
| 火　星 | 1.524 | 686.98 | 7.50 |
| 木　星 | 5.200 | 4,332.62 | 7.49 |
| 土　星 | 9.510 | 10,759.20 | 7.43 |

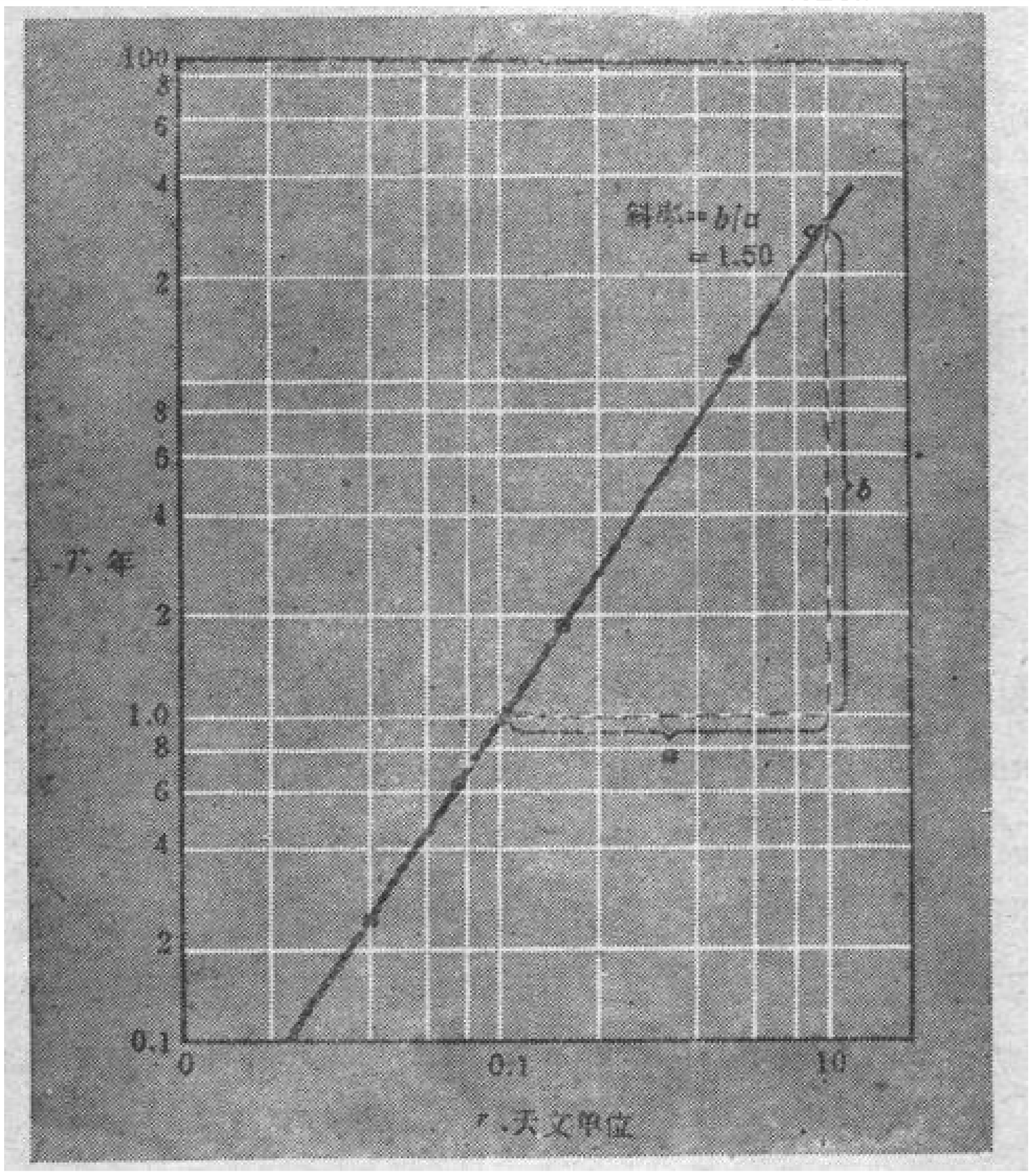



**图 8-6　行星的周期 $T$ 对轨道半径 $r$ 的对数-对数图，所用数据是哥白尼引用过的．图线表明，$T$ 与 $r^{3/2}$ 成正比（开普勒的第三定律）．**

这称为开普勒的第三定律．比这早 10 年，已经宣布过他的两个伟

大发现(在本书前言中引述过)，是有关各行星的椭圆轨道的.

开普勒第三定律的动力学解释还有待于牛顿在《原理》中对于这类问题的讨论. 如果我们仍用行星轨道是以太阳为中心的圆这样的简化图象，就能够对这个定律作非常简单的分析。这时，(8-3)式显然意味着一个反平方力的定律在起作用. 因为在半径为 $r$ 的圆轨道上，

$$a_r = -\frac{v^2}{r}$$

把 $v$ 用已知量 $r$ 和 $T$ 表示出来，有

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$a_r = -\frac{4\pi^2 r}{T^2}(\text{向心}) \tag{8-4}$$

于是，按牛顿定律，我们推得圆轨道上一质量 $m$ 所受的力必须是

$$F_r = ma_r = -\frac{4\pi^2 mr}{T^2} \tag{8-5}$$

然而，由开普勒第三定律，有

$$\frac{r^3}{T^2} = K \tag{8-6}$$

其中 $K$ 不妨称为开普勒常数——这同一值可应用于所有绕太阳运行的行星. 于是，由(8-6)式，我们得 $1/T^2 = K/r^3$，把它代入(8-5)式即得

$$F_r = -\frac{4\pi^2 Km}{r^2} \tag{8-7}$$

因此，用牛顿的动力学来分析，开普勒的第三定律含有这样的内容：作用在一行星上的力与其惯性质量成正比，而与它到太阳的距离的平方成反比. 与牛顿同时代的人，如哈雷，胡克和惠更斯都好象曾经在行星问题方面达到了某种反平方定律的描述，然而牛顿的表述，由于用了力作用于质量的明确概念，似乎是最鲜明

的. 一个影响按 $1/r^2$ 下降这一一般性概念可能并不很新颖，因为它是所有可以想象到的效应中看起来最为自然的——某种东西四向传播开，必定要覆盖与 $r^2$ 成正比、愈来愈大的球面积，因而其强度(如同从光源发出的光)按反平方关系愈益减弱.

象(8-7)式所要求的、力与被吸引质量成正比这一特点，只有牛顿才充分意识到它的重要性. 紧紧抓住一对物体相互施加作用的概念，牛顿看到，引力相互作用的倒易性必然意味着：力与施加吸引作用的物体的质量成正比，正同它与被吸引的质量成正比一样. 就另一物体而言，每一物体都是施加吸引力的动因. 因此，一对在引力相互作用下的粒子，作用于其中任何一个的力的大小一定要表成著名的万有引力的数学式:

$$F=-\frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{8-8}$$

其中 $G$ 是要由实验来求的常数，$m_1$ 和 $m_2$ 是粒子的惯性质量. 下面我们将回头来说有关实际确定 $G$ 的事情，但首先我们要讨论把牛顿引到有关引力的一些最伟大发现的著名问题.

## §5 月亮和苹果

这是一个老的、但仍吸引人的故事，说一个 23 岁的年轻人，牛顿，如何以前人从未用过的一种方式去考虑月球的运动. 以"固定的"恒星为参照，月球在空间的行迹是一条变曲率的线(不过总是弯向太阳)，这线一再跨越地球的轨道. 但是，对此当然还有显著得多的看法——即众所熟悉的地心观点，它显示月球是绕着地球走一近似于圆的轨道的. 就这方面的内容来讲，它很象我们刚讨论过的行星轨道的问题. 但牛顿有着非凡的洞察力，他在这一运动同落体的行动之间搭起了一座智慧之桥——落体是如此常见的现象，需要一位天才来认识它与此有关. 他看出月球也正如别的物

体一样要落向地球——例如，象他的花园中果树上的一只苹果掉下来一样. 无疑，这是一个非常特殊的情形，因为月球比起我们经验中的任何落体都要远得多. 但也许这是完全同类的事情.

牛顿自己是这样描写的①，他在 1665或 1666 年开始考虑到地球的重力会延伸到月球的轨道，具有开普勒第三定律所含有的反平方关系. 我们当然可以再次引用向心加速度公式，把它应用于月球，但追溯牛顿本人讨论这问题的方式是有启发性的. 实际上他这样说过：设想月球在它轨道上的任意点 $A$(图 8-7). 如果它不受任

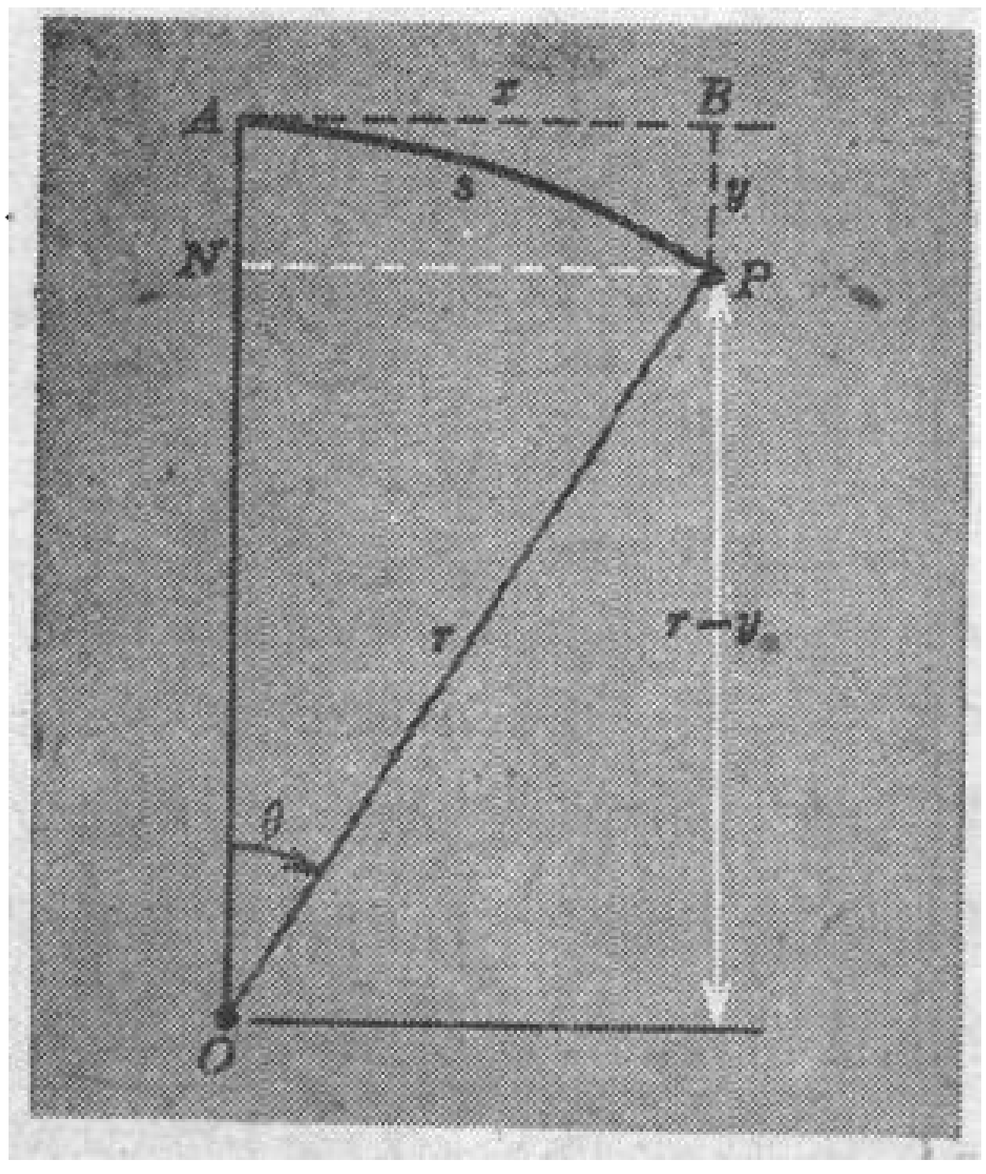



图 8-7　圆形轨道一小部分的几何，表明相对于切向直线位移 $AB(=x)$的偏离 $y$；$AB$ 是无重力时应走的路线.

何力，它将沿一直线 $AB$ 运行，$AB$ 与轨道在 $A$ 点相切. 但与此相违，它走的是弧线 $AP$. 如果 $O$ 是地球中心，则月球事实上向 $O$“落下”了距离 $BP$，纵然它的径向距离未变. 让我们来计算一下，在这意义下，月球一秒钟降落多远，并拿它同地面附近一水平抛射体在

① 见本书前言.

同样时间落下的、约为 16 英尺的距离比较.

首先, 谈点解析几何. 如果把距离 $AB$ 表示为 $x$, $BP$ 为 $y$, 则

$$y \approx \frac{x^2}{2r} \tag{8-9}$$

是非常好的近似. 得到这结果的一种方法是看直角三角形 $ONP$, 其中

$$ON = r - y \qquad NP = x \qquad OP = r$$

因此, 按勾股定理,

$$(r-y)^2 + x^2 = r^2$$

$$x^2 = 2ry - y^2$$

由于对任何小的 $\theta$ 角之值, $y \ll r$, 所以(8-9)式是一个好的近似. 此外, 由于($\theta$ 仍小)弧长 $AP(=s)$ 差不多等于距离 $AB$, 我们可以同样好地令

$$y \approx \frac{s^2}{2r} \tag{8-10}$$

要在这公式中代入数字, 我们需要知道月球轨道运动的半径和周期. 到月球的距离, 如牛顿知道的, 可按古代天文学家为了求地球半径和求月球的距离为地球半径的若干倍而设计的两步法求出. 图 8-8 和 8-9 以及相关的讨论(见本章 § 6)就是对这些经典测量的一种回顾. 大家所熟悉的最后结果是, 月球轨道半径约为 240,000 英里$\approx 3.8 \times 10^8$ 米. 它的周期 $T$ 是 27.3 天$\approx 2.4 \times 10^6$ 秒. 因此, 在一秒钟内它沿轨道走的距离是

$$\text{(一秒内)} \qquad s = \frac{2\pi \times 3.8 \times 10^8}{2.4 \times 10^6} \approx 1000 \text{ 米}$$

在这同一时间内, 它在竖直方向上落下一距离, 令为 $y_1$ 以资区别, 则[通过(8-10)式]

$$\text{(一秒内)} \qquad y_1 \approx \frac{10^6}{7.6 \times 10^8} = 1.3 \times 10^{-2} \text{ 米}$$

换句话说，在一秒内，当月球“水平地”走 1 千米距离时，它要竖直地落下 1 毫米多，或大约$\frac{1}{20}$英寸；它与直线轨道的偏离确实很小.

另一方面，在地面附近把一物体水平地抛出去时，在 1 秒钟内其竖直位移为

$$y_2=\frac{1}{2}gt^2=4.9\text{ 米}$$

因此，

$$\frac{y_1}{y_2}=2.7\times10^{-4}\approx\frac{1}{3700}$$

牛顿知道月球轨道的半径约为地球本身半径的 60 倍，这是古代希腊人首先证明了的. 如果反平方定律可以同样好地应用于所有从地球中心起的径向距离，我们就会料到 $y_1/y_2$ 约为 1/3600. 这肯定是正确的！然而，这是多么令人震惊的结果. 就算是距离为其直径许多倍的物体之间的吸引力遵守反平方定律，人们也仍然还有工作要做，那就是要证明在地面上离地几英尺远的物体是被这样吸引着，好象地球的整个质量都集中于地面下 4000 英里处的一点似的. 牛顿直到 1685 年还未能证明这一结果，这在牛顿对这问题的最初伟大洞察之后差不多 20 年. 他也没有发表过什么. 直到 1687 年，这结果才在《原理》中完整无瑕地刊行出来. 解决这问题的一个方法见本章 § 7 上（下面特别的一节之后）.

## § 6 求到月球的距离

### 1. 地球的半径

大约在公元前 225 年，在邻近尼罗河口亚历山大生长并工作的 Eratosthenes 报道了他在仲夏天正午所作的有关太阳投射影子的测量. 在亚历山大（图 8-8 中标为 $A$）太阳光线与当地的竖直方向成 7.2° 角，而在南面 500 英里外的赛尼（现今阿斯旺大坝所在地），相应的测量表明，正午的太阳正好在当顶.（换言之，赛尼差不多正好在北回归线上.）从这些数字立刻得出，500

英里长的弧 $AS$ 在地球中心的张角为 7.2° 或 $\frac{1}{8}$弧度. 因此

$$\frac{500}{R_{地}}=\frac{1}{8}$$

或

$$R_{地}\approx 4000 \text{ 英里}$$

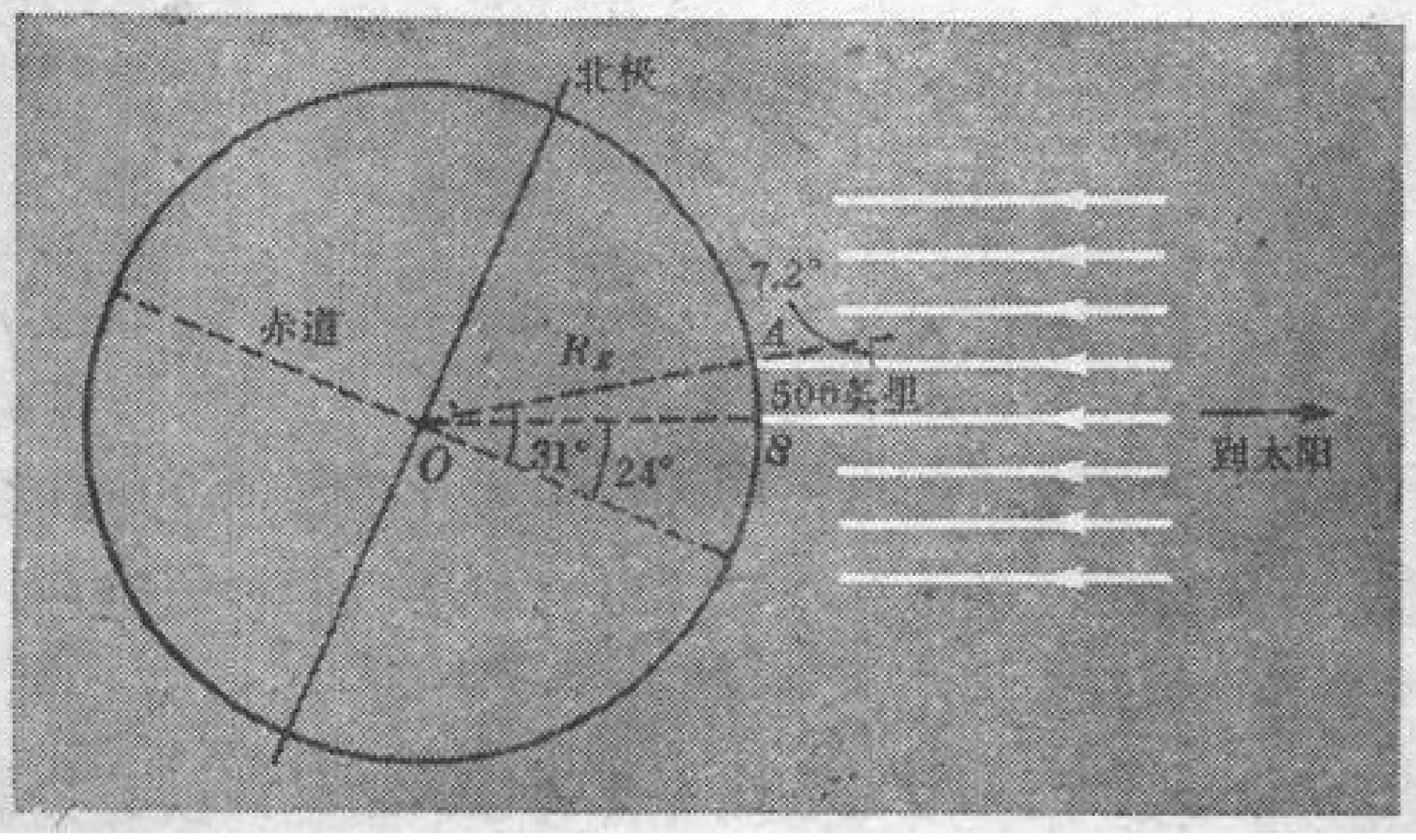



图 8-8 Eratosthenes 用于求地球半径的方法的基础. 当正午的太阳恰好在赛尼 ($S$) 地方当头时, 它的光线在亚历山大 ($A$)地方与竖直方向成 7.2° 角.

**2. 用地球半径来量度的月球距离**

伊巴谷,大部分时间生活在罗德岛上的一位希腊天文学家, 大约在公元前 130 年作了一些观测,由此得到月球距离的异常精确的估值. 他的方法是大约 150 年以前另一位大天文学家阿利斯塔克提出过的.

这方法包含对太阳、地球和月球位置之间的关系的清楚了解. 我们知道,太阳和月球对地球的张角差不多相同,同为 $\alpha$ 角. 伊巴谷 测得这角为 0.553° (≈1/103.5 弧度); 他还知道在他之前阿利斯塔克已发现太阳比月球要远得多. 伊巴谷利用这一知识分析由地球引起的一次月食(图 8-9). 图中阴影部分表示全荫的面积; 其边界线 $PA$ 和 $QB$ 的交角为 $\alpha$, 因为这是从太阳来的最靠边缘的光线之间的夹角. 月球通过阴影区,伊巴谷根据所测通过时间推出弧 $BA$ 对地球的张角为月球本身所张角的 2.5 倍. 因此, $\angle AOB\approx 2.5\alpha$.

现在来对几何关系作一分析. 如果从地球中心到月球的距离是 $D$, 则弧 $BA$非常接近于地球直径 $PQ$ 减去 $\alpha D$:

$$AB\approx 2R_{地}-\alpha D$$

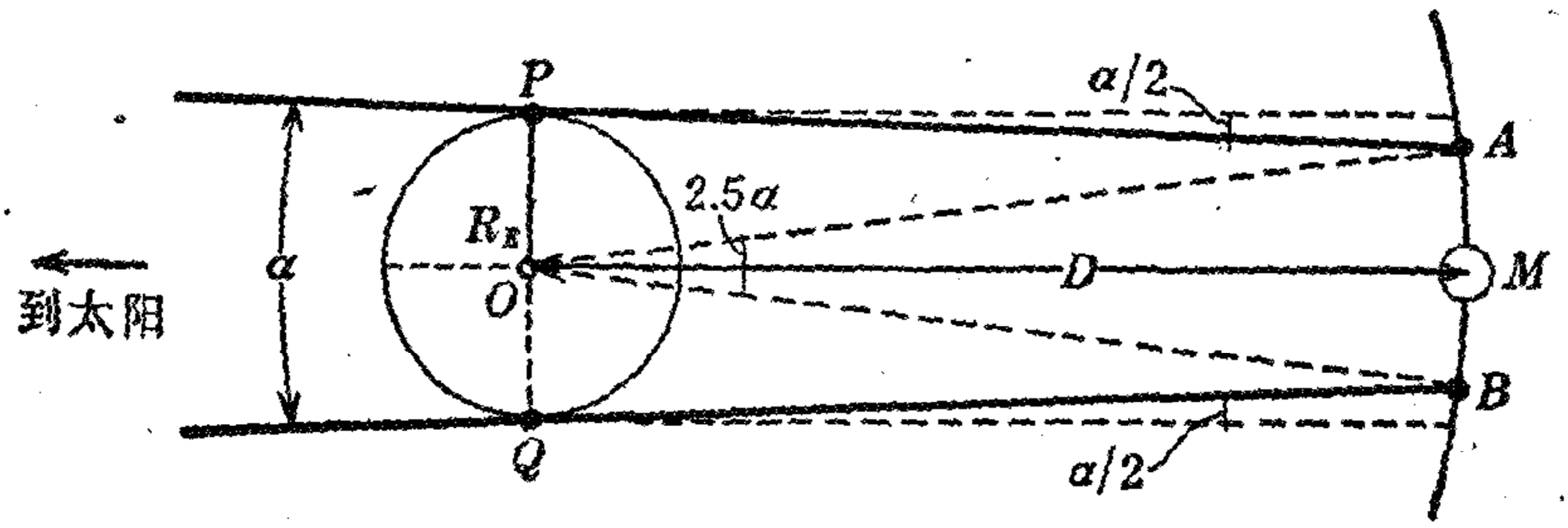



图 8-9　伊巴谷用来求月球距离的方法的基础. 这方法所依靠的是观测在地球的阴影中月全食的持续时间(亦即角宽度), 由弧 $AB$ 表示.

但还有

$$\frac{AB}{D}\approx 2.5\alpha$$

或

$$AB\approx 2.5\alpha D$$

把这式代入第一个方程, 有

$$3.5\alpha D\approx 2R_E$$

或

$$\frac{D}{R_E}\approx\frac{2}{3.5\alpha}$$

因 $\alpha\approx 1/103.5$ 弧度, 所以

$$\frac{D}{R_E}\approx\frac{207}{3.5}\approx 59$$

结合 $R_E$ 本身之值, 得

$$D\approx 236{,}000 \text{ 英里}$$

### 3. 近代的方法

用精确的三角测量方法得到的地球半径对月球的张角的平均值是 3,422.6″, 或 0.951°. 用地球半径的近代数值

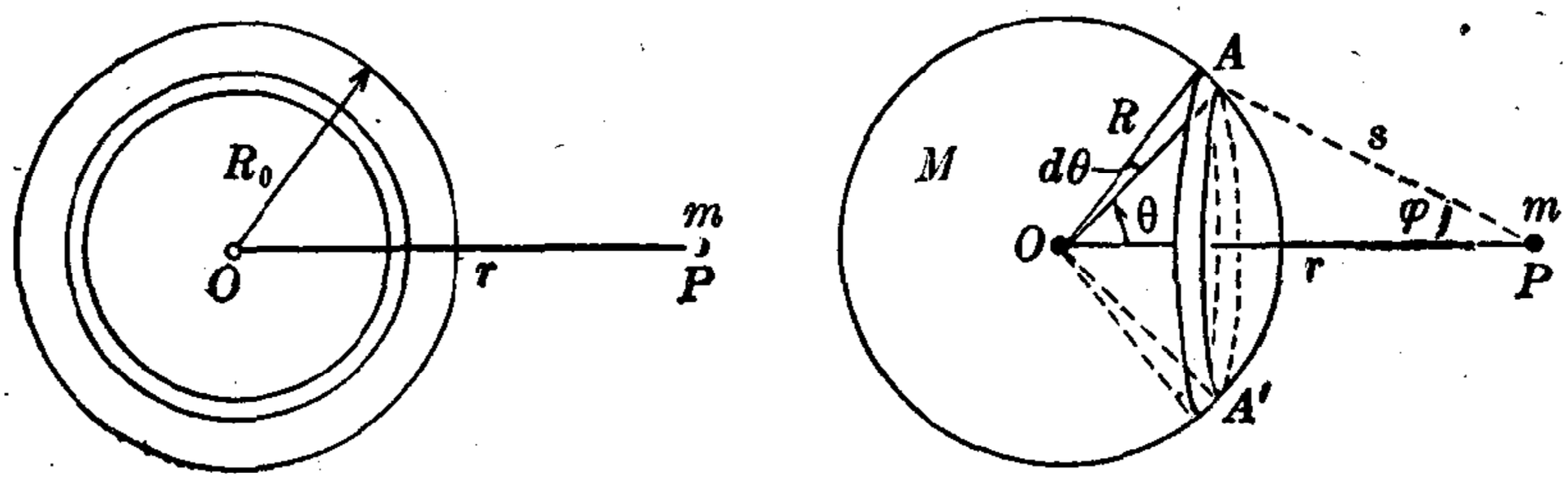
($R_E=6378$ 千米$=3986$ 英里).

我们所得到的月球平均距离差不多正好是 240,000 英里. 然而这类传统方法远不及精确测量雷达回波或激光反射回到地球的时间的技术. 这类信号的飞行时间(来回全程约为 2.5 秒)可以测准到一微秒的几分之一, 所确定的距离不仅达到前所未有的准确度, 而且实际上是瞬时值.

## §7 一个大圆球的引力吸引

长久以来就认为，牛顿之所以未能发表他关于地球重力的反平方定律可以延用到月球的发现，主要是由于他用了一个错误的地球半径数值而产生与实际数值的不一致. 这通过(8-10)式，就会使月球的落下距离发生错误，因为 $r$(月球轨道半径)是按伊巴谷发现的方法用地球的半径来计算的. 当牛顿第一次进行计算时，他住在乡下家中，手头没有参考书，而且可信的记录说明在他计算地球半径时假设了纬度 1° 是 60 英里；而正确值差不多是 70 英里. 尽管可能是这样，几乎仍可肯定，牛顿，由于对问题处理的卓越的彻底精神和严谨态度，不到他解决了大物体的引力问题，是永远不会认为他的理论是完善的. 让我们现在来看分析这问题的一种方法. (在第十一章中我们将以一种较高级的方式再次来解决它.)

假定有一大的实心球，半径为 $R_0$，如图 8-10(a)所示. 我们要想计算它对位于任意点 $P$ 的一质量为 $m$ 的小物体的吸引力. 我们将设这球的质料密度可能随着到它中心的距离而变化(在相当大的程度上来说地球的情况就是这样)，但在同样距离的所有各点上




(a) (b)

图 8-10 (a) 一实心球可看作是由一组薄的同心球壳构成的. (b) 单个球壳的引力效应可以通过把它看成许多圆带的集合而求得.

密度是相等的．于是我们可以把这实心球看作是由大量薄而均匀的球壳构成的，就象一个洋葱头的一层接着一层那样．球的全部引力效应可以用所有这些壳层的各别效应的迭加来计算．因而基本问题变为计算一任意半径的薄球壳所施的力，假定基本的力律是质点间的反平方定律．

在图 8-10(b)中，我们示明一质量为 $M$、半径为 $R$、厚度可以略不计的球壳和一个位于距离球心 $r$ 处、质量为 $m$ 的粒子．如果我们考虑球壳上 $A$ 点附近的一小片，它施加于 $m$ 的力是沿着直线 $AP$ 的．然而，根据这体系的对称性，很清楚，整个球壳的总作用力一定是沿 $OP$ 的；任何由 $A$ 点附近的物质产生的、垂直于 $OP$ 的分量力都要被 $A'$ 附近的物质所产生的等值反向的贡献抵消掉．因此，对于 $A$ 点附近的一质量元 $dM$，我们只须考虑它对沿 $OP$ 方向，也就是沿球心到 $m$ 的径向的力的贡献．因而有

$$dF_r = -\frac{GmdM}{s^2}\cos\varphi \tag{8-11}$$

现在来看球壳上的一条整带或环，即图中所示的阴影部分．它代表壳面上与 $OP$ 轴成 $\theta$ 角和 $\theta+d\theta$ 角之间的那一部分，$s$ 和 $\varphi$ 则是适用于这带的各个部分的同一平均值．因此，如果把带的质量计算出来，我们可以拿它代替(8-11)式中的 $dM$ 以求得整个带对沿 $OP$ 的总引力的贡献．因为带宽为 $Rd\theta$，周长为 $2\pi R\sin\theta$，所以它的面积等于 $2\pi R^2\sin\theta d\theta$．整个球壳的面积是 $4\pi R^2$，因此带的质量

$$dM = \frac{2\pi R^2\sin\theta d\theta}{4\pi R^2}M = \frac{M}{2}\sin\theta d\theta$$

代入(8-11)式，得

$$dF_r = -\frac{GMm}{2}\frac{\cos\varphi\sin\theta d\theta}{s^2} \tag{8-12}$$

现在的任务是对整个球壳求出 $dF_r$ 这些贡献之和；也就是在 $s$，$\varphi$

和 $\theta$ 值的全部范围内求和. 这看起来是一件可怕的工作, 但略微用一点微积分(牛顿的另一发明!), 问题就意外简单地得到解决.

根据这情况下的几何图形[图 8-10(b)], 可以把 $\theta$ 和 $\varphi$ 用两个固定的距离 $r$ 和 $R$ 以及变动的距离 $s$ 表示出来. 分别应用余弦定理两次, 有

$$\cos\theta=\frac{r^2+R^2-s^2}{2rR}$$

$$\cos\varphi=\frac{r^2+s^2-R^2}{2rs}$$

对第一式求微分, 有

$$\sin\theta d\theta=\frac{sds}{rR}$$

把 $\cos\varphi$ 和 $\sin\theta d\theta$ 之值代入(8-12)式, 得

$$dF_r=-\frac{GMm}{4r^2R}\frac{(r^2+s^2-R^2)ds}{s^2}$$

总力可由此通过积分求得, 积分从 $s$ 的最小值($=r-R$)到它的最大值($r+R$). 于是, 有

$$F_r=-\frac{GMm}{4r^2R}\int_{r-R}^{r+R}\frac{r^2+s^2-R^2}{s^2}ds \qquad (8\text{-}13)$$

这积分不过是两个初等形式的积分之和:

$$\int\frac{r^2+s^2-R^2}{s^2}ds=\int ds+(r^2-R^2)\int\frac{ds}{s^2}$$

$$=s-\frac{r^2-R^2}{s}$$

把上下限代入, 求得

$$\int_{r-R}^{r+R}\frac{r^2+s^2+R^2}{s^2}ds=[(r+R)-(r-R)]$$

$$-\left(\frac{r^2-R^2}{r+R}-\frac{r^2-R^2}{r-R}\right)$$

$$= 2R - (r-R) + (r+R) = 4R$$

把这定积分之值代入(8-13)式，即得

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2} \tag{8-14}$$

多妙的结果啊！异常之简单，球壳的半径$R$全然不出现．这是粒子之间反平方力律所独有的结果；没有其他力律对一延伸的球体的总效应会产生这样简单的结果．

一旦有了(8-14)式，一实心球体的总效应就随之而得，不论密度以何种特殊方式从中心到球面变化着(只要它仅与$R$有关)，整个球的作用确实就象它的质量全都集中在其中心一样．也不管被吸引的粒子离球面多远，只要它是在球外．停下来想想，这真是多么卓越的成果啊．你自问一下，在看来是平坦的地面上几英尺高处的物体会象是整个地球的质量(一总有 6,000,000,000,000,000,000,000 吨！)全集中在 4000 英里下面的一点(地球中心)那样受到吸引，这是显然的吗？不，远非如此．无怪乎牛顿在能使自己满意地确立地球上的重力同月球以及其他天体的运动之间的重大联系之前，有必要说服自己去相信这一结果．

## §8 地球的其他卫星

在牛顿的思考中相当明显地包含着地球还有其他卫星的可能性，——至少在理论上是如此．图 8-11 是牛顿书中的一幅插图；书名为“宇宙之体系”(收编在《原理》中)．图中所示是从近乎抛物轨道(虽然，表面上的抛物线轨道实际是椭圆的小部分)的短射程作过渡到一完全的圆形轨道，然后到大小任意的其他椭圆轨道。

让我们来推导一个公式，表明在离地心$r$处的一圆形轨道上水平地发射一卫星所需的速度$v$和周期$T$．维持圆周运动所需的力是由引力提供的：

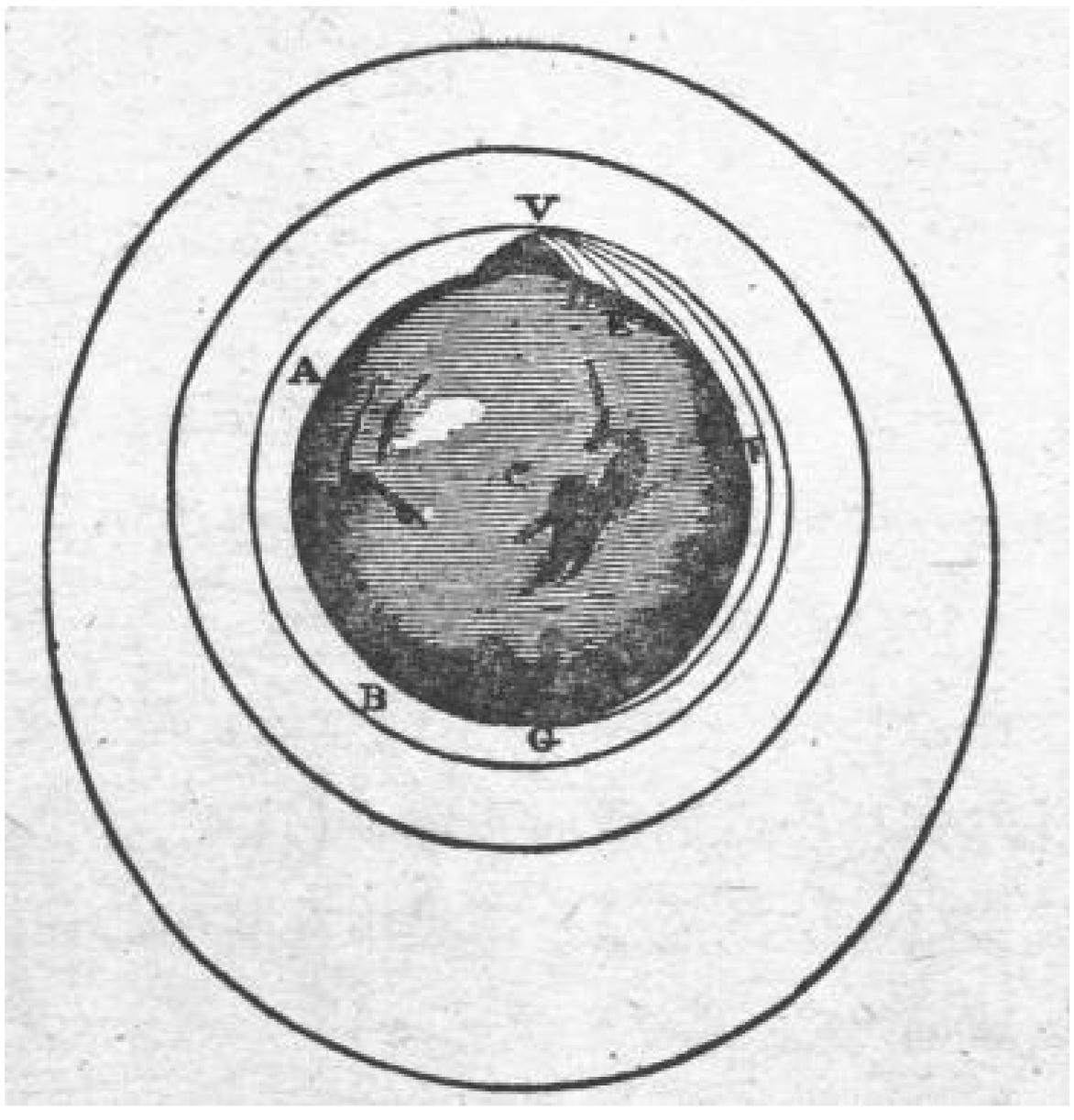



图 8-11　牛顿的图示表明从正常的抛物轨道过渡围绕着地球的完整轨道.

$$\frac{mv^2}{r}=G\frac{M_E m}{r^2}$$

其中$M_E$是地球的质量，$m$是卫星的质量，而$G$是引力常数. 解$v$，得

$$v=\left(\frac{GM_E}{r}\right)^{1/2} \tag{8-15}$$

通常把这结果用更为熟悉的量表示出来较方便. 为此，我们注意，作用于地球表面上一质量为$m$的物体上的引力，按(8-8)式，是

$$F_g=\frac{GM_E m}{R_E^2}$$

但这是可以令为$mg$的力，$m$是问题中的质量. 因此有

$$mg=\frac{GM_E m}{R_E^2}$$

或

$$GM_E=gR_E^2$$

代入(8-15)式，得

$$v=\left(\frac{gR_E^2}{r}\right)^{1/2}$$

于是，卫星的周期$T$由下式给出：

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi r^{3/2}}{g^{1/2}R_E} \tag{8-16}$$

把$g=9.8$米/秒$^2$，$R_E=6.4\times10^6$米代入，我们得到绕地球作半径为$r$的圆周运动的任何卫星的周期的数值公式：

$$\text{（地球卫星）}\qquad T\approx3.14\times10^{-7}r^{3/2} \tag{8-17}$$

其中$T$的单位是秒，$r$的单位是米.

例如，一个在最小实际可能高度(比如说，约200公里)的卫星．半径$r\approx6.6\times10^6$米，因此

$$T\approx5.3\times10^3\text{秒}\approx90\text{分钟}$$

第一颗人造卫星，斯普特尼克Ⅰ号(1957年10月)的轨道有如图8-12(a)．开始时它距地面的最大和最小距离分别为947和228公里，由此得到的平均$r$约等于6950公里．用这$r$值，(8-17)式给出的轨道周期差不多是96分钟，与观测数值很接近.

特别使人感兴趣的是同步卫星．它的轨道周期与地球绕地轴

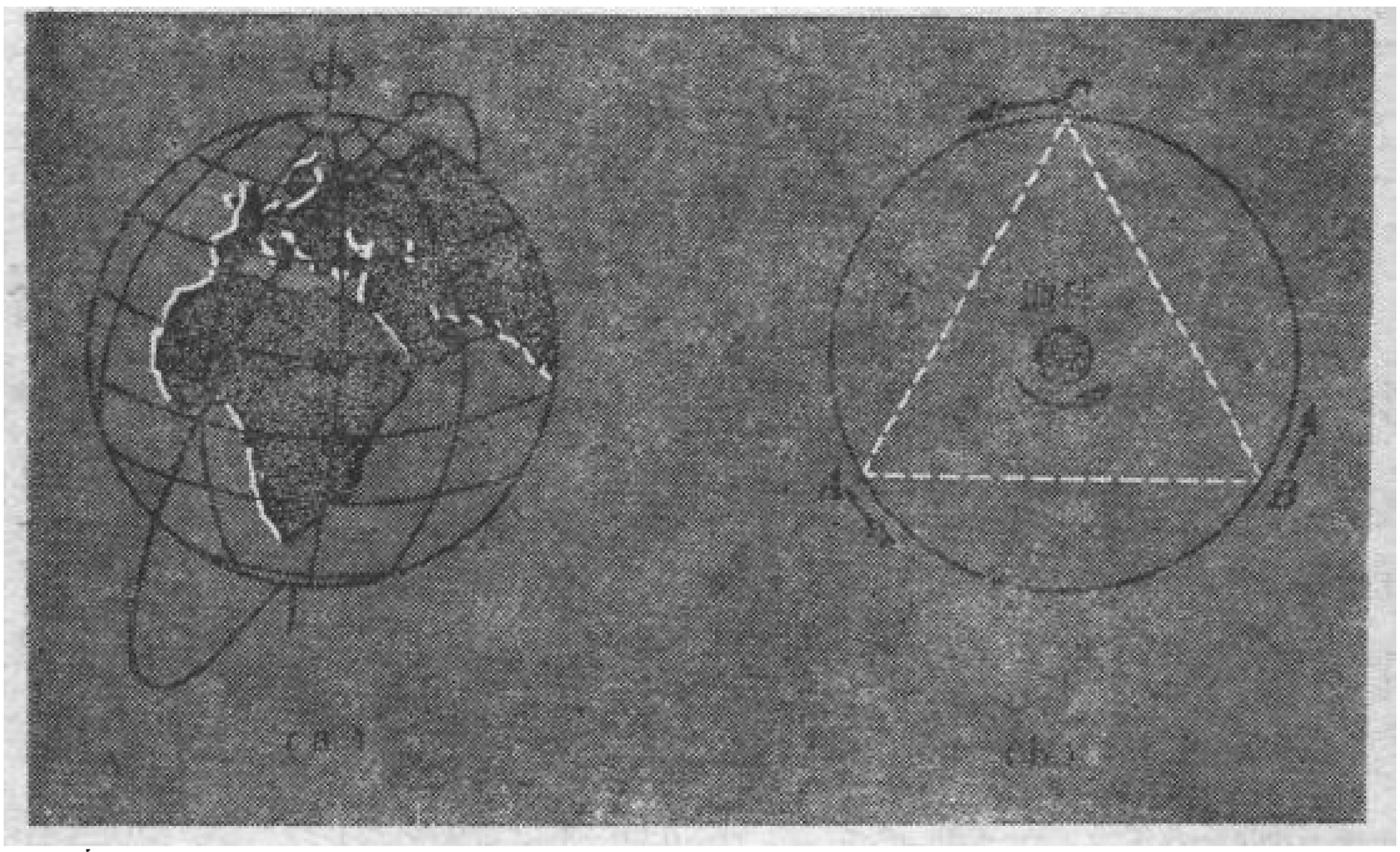


图 8-12　(a) 斯普特尼克Ⅰ号的轨道，那是第一颗人造卫星(1957年10月)．(b) 同步卫星通讯系统．相对于地球直径，轨道直径大约按比例尺度.

转动的周期相等. 如果把它们放置在地球赤道平面中的轨道上，这种卫星将停留在地面上空的同一点上. 一组三个这样的卫星，按图 8-12(b)所示，理想地排成一个正三角形阵，可以构成一全球通讯系统的基地而无盲点. 在(8-17)式中令 $T=1$ 天，可求出 $r\approx$ 42,000 公里或 26,000 英里. 因此，这种卫星必须是在地球表面上空约 22,000 英里高处，也就是在头顶上相距约 $5\frac{1}{2}$ 个地球半径之处. 第一个这种卫星是 1965 年 7 月成功地发射的辛康姆(同步通讯)II 号.

上面计算所根据的(8-16)式有一非常值得注意的特点. 在一个给定半径的圆轨道上运行的卫星，其周期与卫星的质量无关. 因而，一个庞大的、几吨重的宇宙飞船，只要 $r$ 之值相同，它的轨道周期就同一个轻飘的、象"回音"气球之一那样大约只有 100 公斤重的物体的周期完全一样——或者，对于这一点来说，同行星间质量只有几公斤的小碎片一样. 这结果是作用于任何物体的万有引力严格地与该物体的质量成正比的一个直接推论.

## §9 $G$ 的数值和地球的质量

(8-14)式所表示的结果虽然是从考虑一个大球和一小粒子得到的，人们可以很快地使自己信服，它对任何两个中心相距为 $r$ 的球形物体之间的力也是正确的表述. 因为假如我们有 图 8-13(a)所示的两个这样的球，我们对其中的一个球(比如，左边那一个)对另一球的每一粒子的吸引力作过的计算表明，左边的质量如同一个点一样[图 8-13(b)]. 因此就把问题约化为一个球(右边质量为$m$的那一个)与一个质量为$M$的质点之间的引力相吸问题. 但这时我们可以再度应用上节的结果. 这样就达到图 8-13(c) 中两个相距为 $r$ 的质点的情形，作为计算图 8-13(a)所示两个分布质量

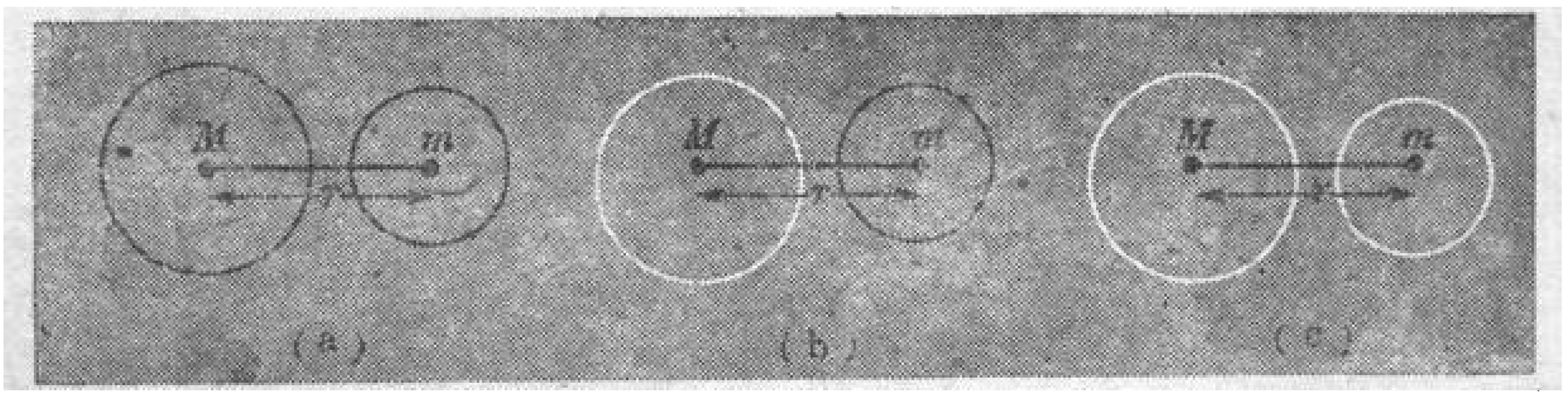



图 8-13 (a) 两相距不远的引力球. (b) 一个球($M$) 的效应可以按它是一个质点来计算. (c) 重复使用这论点, 两球间的吸引可以按两者都是质点来计算.

之间的吸引力的严格正确的依据.

上述结果对于分析第五章中已经描述过的实验是重要的. 那实验是为了通过测定两个已知质量的圆球之间的力来求出引力常数$G$的. 要从这样异常弱的相互作用获得最大可能效果, 通常这样来安排各个物体, 使得两球心的距离仅略大于它们的半径之和. 因此, 即使是在这种情形下, 也能按(8-14)式来计算力, 这是大为方便的. 但要注意这结果只适用于球体. 有些测定$G$的实验用的是柱体形质量, 这是由于它们比较易于高精度地加工之故. 在这种情形下计算总力就需要对空间分布的物质直接求积分了.

现今公认的$G$值是(曾在第五章中引用过)

$$G=6.670\times10^{-11}\ \text{米}^3/\text{千克}\cdot\text{秒}^2 \qquad (8\text{-}18)$$

这是在实验室里通过测量两已知质量之间的作用力得到的. 牛顿本人并不知道$G$的数值, 虽然他对地球的平均密度作过著名的猜测, 使他本来有可能获得一推测的数字. 在《原理》的第 III 册中, 他曾说起过如下的一点: "由于…我们地球上的普通物质, 在地表层中大约为水重的两倍, 而在稍下一点的矿藏中又为水重的三倍或四倍甚至五倍地更重一些, 很可能地球的全部物质的质量比地球全由水构成时的质量要大五或六倍…."

如果令$\rho$表示地球的平均密度, $R$为其半径, 则作用于刚好位于地球表面上、质量为$m$的一质点的引力为

$$F=\frac{GMm}{R^2} \tag{8-19}$$

其中

$$M=\frac{4\pi}{3}\rho R^3$$

因此

$$F=\frac{4\pi}{3}(G\rho R)m$$

但由于这正是使粒子自由落下时获得加速度 $g$ 的力，所以又有

$$F=mg$$

于是，由此得

$$g=\frac{4\pi}{3}G\rho R \tag{8-20}$$

如果在这式中令 $g=9.8$ 米/秒$^2$，$R\approx6.37\times10^6$ 米，而(用牛顿的估计)$\rho\approx5000$ 到 6000 千克/米$^3$，可求出

$$G\approx(6.7\pm0.6)\times10^{-11}\text{ 米}^3/\text{千克}\cdot\text{秒}^2$$

于此可见牛顿的估计几乎正中鹄的．实际上，当然，计算是反过来做的．把直接测定的$G$值[(8-18)式]代入(8-19)和(8-20)中去求地球的平均密度，其结果(用 $R=6.37\times10^6$ 米)是

$$M=5.97\times10^{24}\text{ 千克}$$

$$\rho=5.52\times10^3\text{ 千克/米}^3$$

## §10 $g$ 随地区的变化

如果我们认可地球是一个理想化的、完全对称的球体，则作用在地面上距离为 $h$ 处质量为 $m$ 的一个物体上的引力为

$$F=\frac{GMm}{(R+h)^2}$$

如果认定 $F$ 等于 $m$ 乘上该点的 $g$ 值，则

$$g(h)=\frac{GM}{(R+h)^2} \tag{8-21}$$

当 $h\ll R$ 时，这式表明 $g$ 差不多是严格地随高度而线性地减小．因为按二项式定理，可以把(8-21)式重写为

$$g(h)=\frac{GM}{R^2}\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2}=\frac{GM}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}+\frac{3h^2}{R^2}\cdots\right)$$

因此，对于小的 $h$，有

$$g(h)\approx g_0\left(1-\frac{2h}{R}\right) \tag{8-22}$$

其中 $g_0=GM/R^2$ 是在离地面非常近之点的 $g$ 值. [另一可供选择的方法是用微积分. 这方法在我们要算一个量的**相对**变化时非常有用. 它的原理是：对一个量的自然对数求微分，立刻导致它的相对变化. 对现在所讨论的情形，我们有

$$g(r)=\frac{GM}{r^2}$$

因此

$$\ln g=\text{常数}-2\ln r$$

求微分，

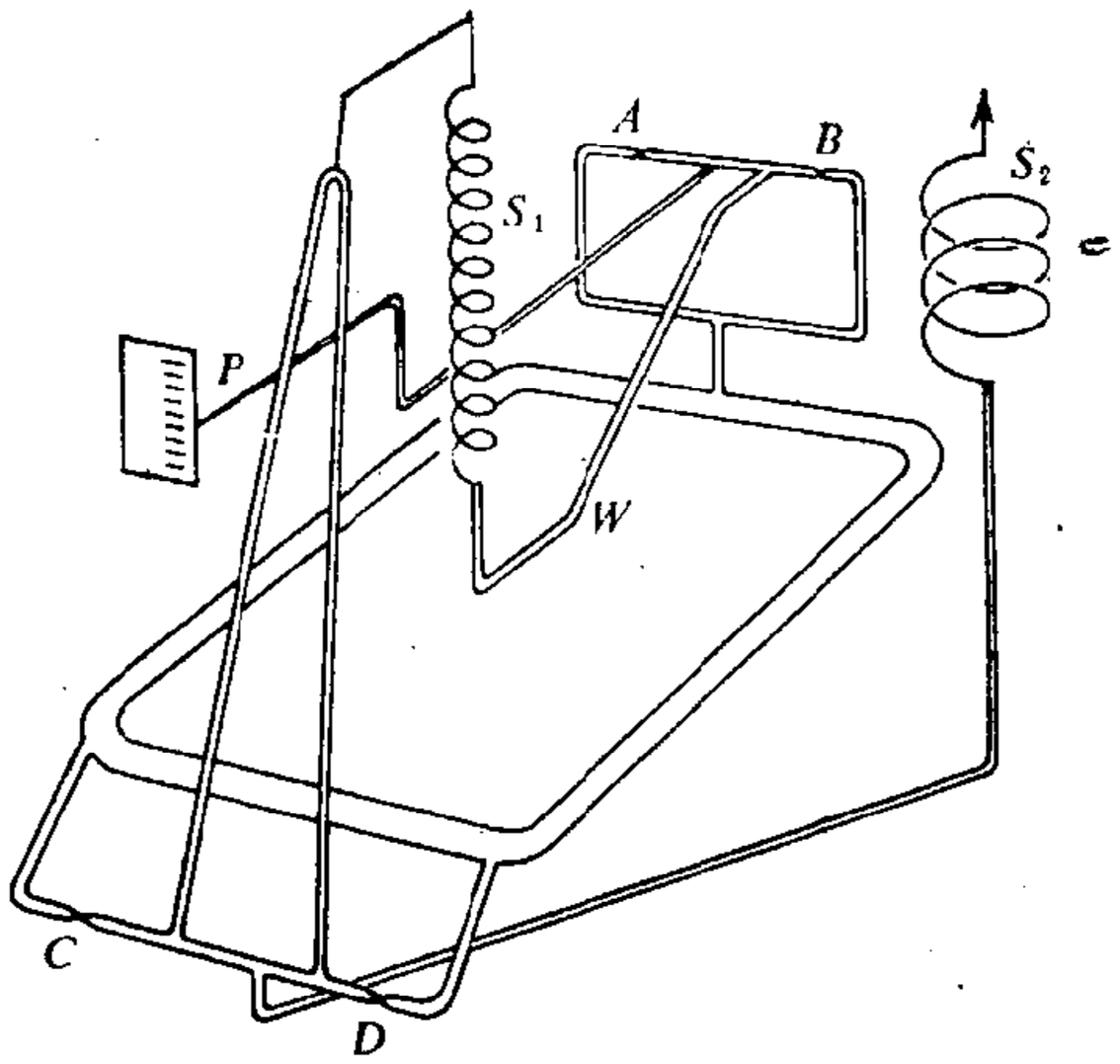
$$\frac{\Delta g}{g}\approx -2\frac{\Delta r}{r}$$

因此，令 $r=R$, $g=g_0$, 以及 $\Delta r=h$, 有

$$\Delta g\approx -2g_0\frac{h}{r}$$

而回到(8-22)式. 注意这方法使我们无需考虑原式中出现的任何相乘常数——例如 $g$ 的方程中的 $GM$ 之值. 认识这一事实就使我们能够在计算一个量的小变化时免掉许多不必要的算术运算，如果这个量与另一个量有很明确的函数关系的话.]

与牛顿同时代的 R. 胡克作过一些努力去探查重力吸引随高度的变化. 他的做法是看物体的重量在教堂塔的顶端和在深井的底部测量时有无差异. 不足为奇，他未能发现任何差异. 按(8-22)式，我们要升高到离地面大约 1000 英尺(例如帝国大厦的顶部)时，$g$ 才减小 10,000 分之 1. 然而，我们马上就将看到，用现代技术，这种变化是很容易探测出来的.




(a)

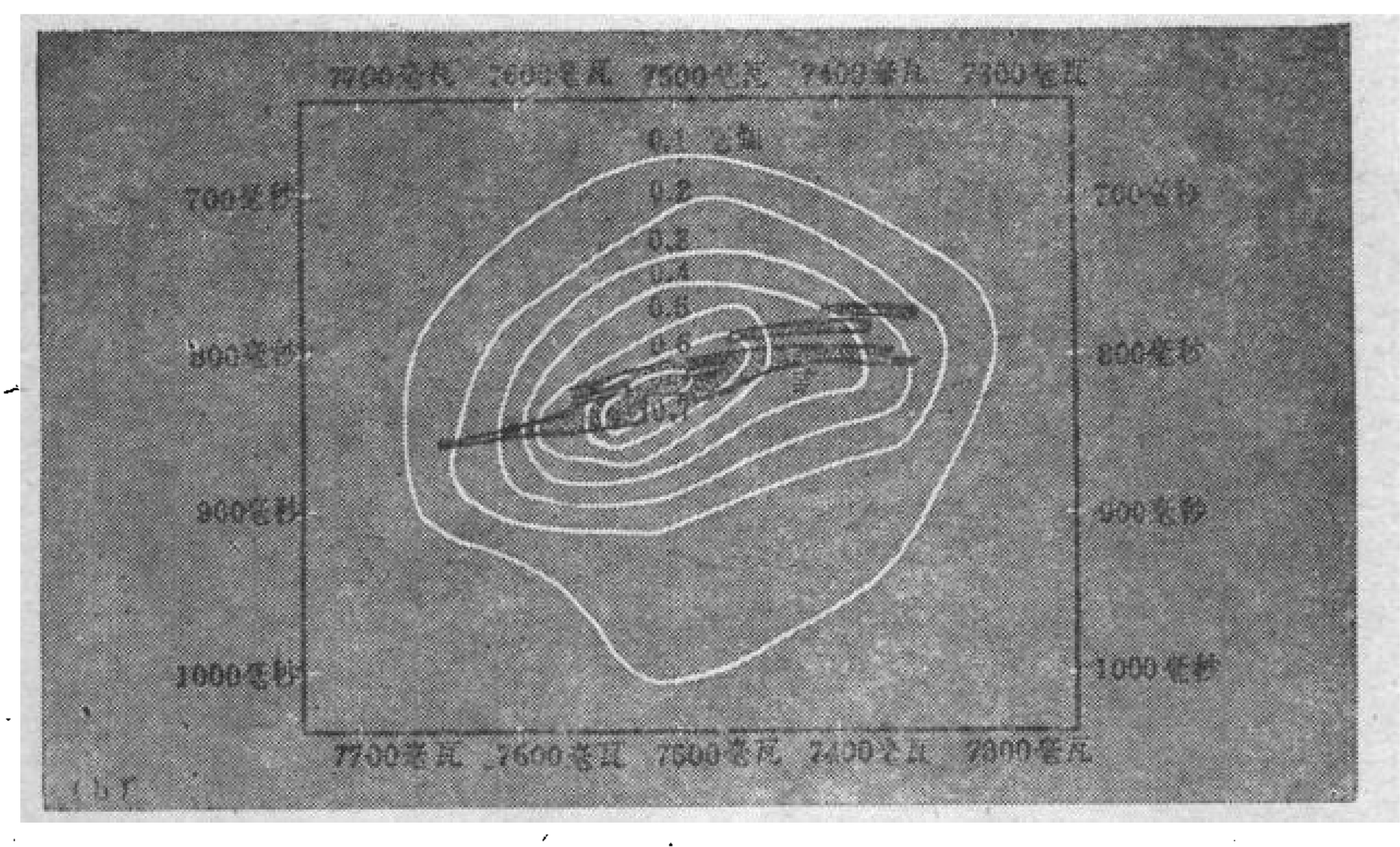



图 8-14 (a) 用熔石英制的灵敏重差计的基本特点草图. 标记为 $W$ 的那根臂起着主重量作用. 它支在 $A$ 和 $B$ 上, 并附有一根指针 $P$. 回复力由一控制弹簧 $S_1$ 提供, 借助校准过的弹簧 $S_2$ 可以得到一零读数. (b) 重力测绘的例子, 覆盖面积约为 400×500 米$^2$, 等 $g$ 值回线指出一矿床.

重力除了随高度有规律地变化之外，还要加上由于地壳物质不均匀而产生的变化．例如，一个人站在下面埋藏有盐或沙的地面上时，由于这些物质的密度比普通岩石小得多，他将发现 $g$ 值变小．这种变化，虽然非常之小，是可以用现代仪器异常准确地测出的，同时这已成为地球物理勘探中非常有价值的手段．

几乎所有现代重差计都是静态仪器，其中有一质量在重力和由一弹簧提供的弹性回复力的联合作用下处于平衡状态．换言之，它只是一个非常灵敏的弹簧秤．当这仪器从一地点挪到另一地点时，$g$ 的变化导致平衡位置的一个微小改变，而这一改变可以用灵敏的光学方法或者电学方法测出．后者例如把悬着的质量做成一调谐电路的一部分，线路的电容，因而频率，将由于质量的位移而变动．要真正能实用，这种仪器必须能探测出 $g$ 的相对变化，灵敏到 $10^{-7}$ 或更小．图 8-14(a) 画出了一个这种装置的基本结构．利用它我们可以在一个感兴趣的地区描绘出等 $g$ 值回线．图 8-14(b) 示明这样一种探测的结果，其中已把高度变化、地形等考虑了进去．这样的回线可以很好地指明矿藏所在．在重力勘探中测量的主要单位是伽(gal，以伽利略的字首命名)：

$$1\text{ 伽}=1\text{ 厘米/秒}^2\approx10^{-3}g$$

这单位太大了，不方便，因此多数测绘都象图 8-14(b) 那样，用毫伽(mgal)来标明回线(1毫伽$=10^{-3}$ 厘米/秒$^2\approx10^{-6}g$)．在最佳条件下，可能获得准确到 0.01 毫伽的相对测量．人们只要注意以下的事实：$g$ 改变 0.01 伽($10^8$ 分之 1)相应于在地球表面上升高约 3 厘米，就会意识到这一精确度是如何给人以深刻印象．

## § 11 太阳的质量

让我们回到太阳系的简单图象：每个行星都绕着一固定中心——太阳，作圆轨道运动(图 8-15)．在讨论开普勒第三定律时，

我们曾看到，运用牛顿定律如何推断出作用于行星的力；这力用行星的质量、轨道半径和周期来表示，就是[(8-5)式]：

$$F_r = -\frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

但按牛顿万有引力律所表示的力的基本规律[(8-8)式]，$F_r$ 之值为

$$F_r = -\frac{GMm}{r^2}$$

其中 $M$ 是太阳的质量．从这两个表达式相等，得

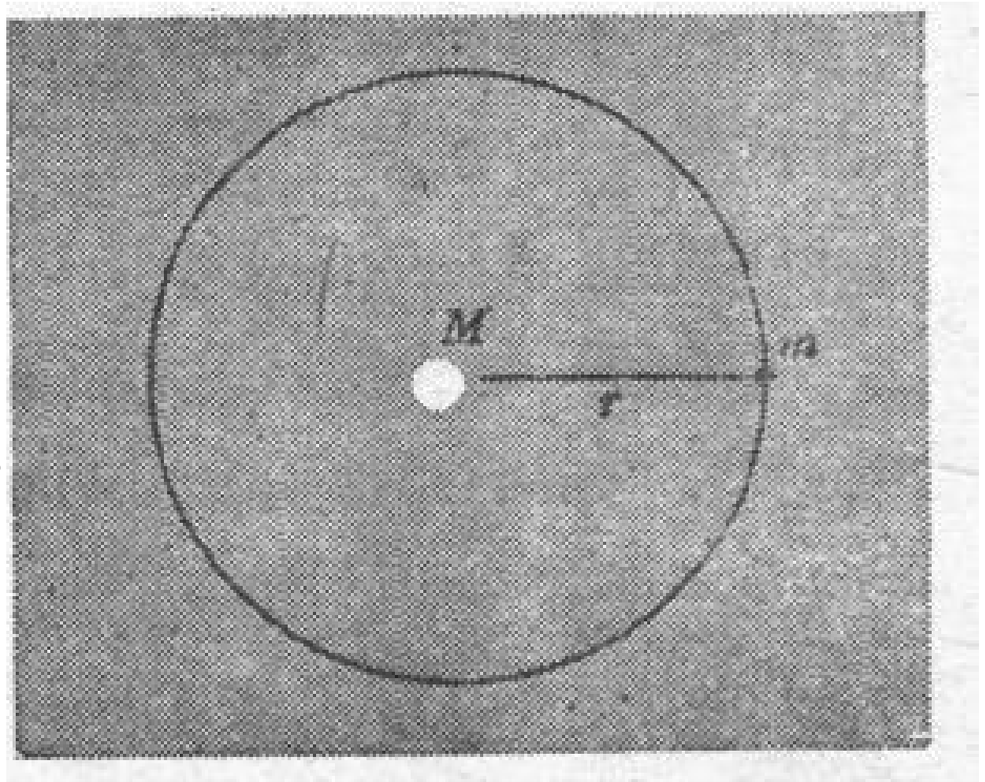



图 8-15　行星轨道，近似于一个圆，太阳在中心．

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM} \tag{8-23}$$

我们可能再次注意到早先在讨论地球卫星时评述过的特点，那就是，周期与轨道上物体的质量无关；在现在所讨论的情形中，物体就是地球本身或某其他行星．有关的是太阳的质量，而如果把(8-23)式反转过来，我们就得到一个用可观测量表示的、计算质量 $M$ 之值的方程：

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2} \tag{8-24}$$

开普勒第三定律表明 $r^3/T^2$ 之值对所有行星确实都是一样的．然而，陈述这一结果并不需要用到 $r$ 或 $T$ 的绝对数值．只要知道各行星的 $r$ 和 $T$ 之值是地球轨道半径和周期的多少倍或多少分之一就够了．但是，要从(8-24)推断出太阳的质量，用绝对值则是必要的．在本章的早些时候，我们曾看到，地球年的长短在古代已经知道得极为精确．但地球到太阳的距离则是相当晚近才知道的．这一知识的发展是一个有趣的故事，将在下面用专门的一节说一

说．其最终结果，用米来表示的平均距离，可以作为 $r$ 之值代入(8-24)式，连同其他必要的量一并开列于下：

$$r_E \approx 1.50 \times 10^{11} \text{ 米}$$

$$T_E \approx 3.17 \times 10^{7} \text{ 秒}$$

$$G \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ 米}^3/\text{千克}\cdot\text{秒}^2$$

由此求得

$$M_{\text{太阳}} \approx 2.0 \times 10^{30} \text{ 千克}$$

## § 12 求地球到太阳的距离

第一个试图估计地球到太阳的距离的是公元前三世纪的伟大希腊天文学家阿利斯塔克．他所得到的结果，虽然十分错误，却占有权威地位达好几个世纪．他的方法在原则上是正确的，但因太阳离得太远而失效，如图 8-16(a)所示．他知道月球的一半是由太阳照亮的，而月亮的盈亏(位相)则是由于从地球上看这被照亮的半球的结果．当月球正好是半满时，角 $SME$ 是 90°．如果在这个位置可以准确地测出从地球上的一点看太阳和看月球的两方向之间的夹角 $\theta$，我们就能推算出地球到月球之间的距离 $r_M$ 对太阳所张的角 $\alpha$．阿利斯塔克判断 $\theta$ 约为 87°，从而得 $\alpha \approx 3° \approx \frac{1}{20}$ 弧度，因此 $r_S \approx 20 r_M$．然而，由于所测的角是 $\theta$ 而不是 $\alpha$，最终结果的误差可能(事实上也确是)很大．现代的知识告诉我们，在图 8-16(a)所表示的情况下，$\theta$ 之值实际上大约是 89.8° 而不是 87°；$\theta$ 的这一微小改变把比值 $r_S/r_M$ 提高到几百而不是 20.

一个完全不同的攻这问题的方法始于开普勒，虽然这一方法直到很晚才有可能充分开展．即使如此，很快就知道了太阳比阿利斯塔克所断定的要远得多．这方法的基本点由图 8-16(b) 示明．它牵涉到对火星的观测．当火星最接近地球时，它位于一条连结这两行星和太阳的直线上．在这情形下，它们之间的距离是它们的轨道半径之差．现在，如果从地球上的两不同地点来看火星，那么相对于远得非常多的“固定”恒星背景，它应出现在略为不同的方向上．对于位于 $A$ 和 $B$ 两处的观察者而言，这一特殊的角差 $\delta$ 称为**视差**；它是地球半径对火星所在点的张角．要测出这一角度，我们并不需要在地球上的两个不同地点各有一观察者；地球的自转会在一个晚间的大约 6 小

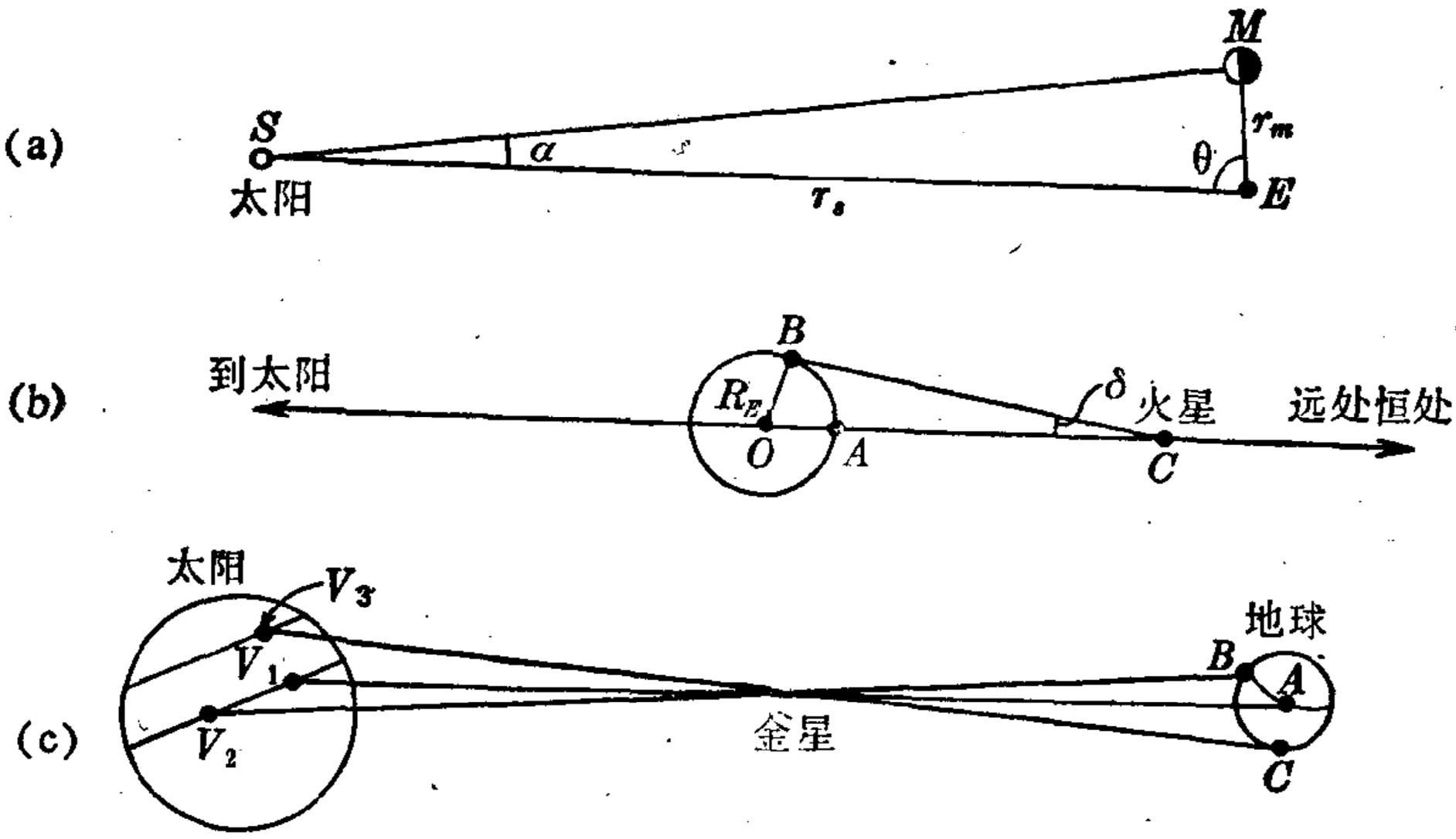



图 8-16 (a) 阿利斯塔克试图用来测太阳的距离的方法——在半月(上、下弦)时测角 $SEM$. (b) 建立太阳系标度的三角测量法——以地球的半径为基线求出火星的距离. (c) 通过从地球上不同点观测金星凌日，直接确定太阳的距离.

时中把 $A$ 点的观察者带到 $B$ 点去. 开普勒能够从他的老师第谷布拉非常仔细的观测中推断，$\delta$ 之值必然小于 3 分，约等于 1/1200 弧度；由此他作出结论：火星在这位置上的距离一定大于地球半径的 1200 倍，或者说，大约为 500 万英里. 于是，用从哥白尼图表[表 8-1]中得知的轨道半径的相对值，就知道太阳距离地球大于地球半径的 2400 倍，即大于 1000 万英里.

约翰·法兰姆斯第是与牛顿同时代的人. 牛顿多亏了他的观测（他是 1675 到 1720 的皇家天文学家）. 他把火星视差的上限减少约 25 秒，并作出结论：太阳的距离至少是 8 千万英里. 一位意大利天文学家卡西尼，在大约同时得到一明确值，约为 8 千 7 百万英里，用的是他本人在欧洲以及一位法国天文学家里歇，在南美洲卡宴地方所作的观测. 另一与牛顿同时代的人——爱德蒙·哈雷[①]——提出了一种方法，一百年后最终导致到太阳距离的第一次精确测量. 这方法牵涉著名的**金星凌日**，即从地球上看到的金星通过日轮.

---

① 爱德蒙·哈雷，以用他命名的彗星最著名于世. 他于 1720 年继法兰姆斯第任皇家天文学家. 但在这以前他就在物理学和天文学方面十分活跃. 他成为牛顿的一位挚友和钦仰者，而主要是由于他的协助和敦促，《原理》一书得以问世.

图 8-16(c)示明这方法的基本点. 当金星通过日轮时,它看起来象一小黑点. 它的表观路线, 以及它凌日的开始和终了时刻依赖于观测者在地球上的位置. 由于金星的运动是准确地知道的,它凌日的时刻可用来对处于不同位置的观测者所看到的金星的角位置差异作出准确的计量. 根据这些观测,可以推出金星的视差,然后就可以用完全类似于对火星的分析了. 这种凌日是相当稀有的,因为地球和金星的轨道不是在同一平面上, 但哈雷指出它们会成对出现于 1761 年和 1769 年,再度出现于 1874 年和 1882 年,然后于 2004 年和 2012 年. 根据其中前两次(都出现于哈雷去世后很久), 发现太阳视差确定是在 8.5 和 9.0 秒(弧)之间,相应的距离约为 9.2 和 9.7 千万英里之间. 这接近于现在公认的结果. (这类测量的最佳值是对小行星厄洛斯在它离地球最近时作的.)

进一步的改进来自 19 世纪末叶所作的观测. 其中最值得注意的改进之一是用已知的光速准确值,根据 6 个月时间内所观测到的木星月食的时间落后积累,去推算地球轨道的半径。这情况在图 8-17 中表示出来. 当地球从 $E_1$ 运动到 $E_2$ 时,木星仅从 $J_1$ 运动到 $J_2$. 这就导致额外的光行时间,使我们晚大约 16 分钟才知道, 例如,木星的月亮之一刚从这木星的后面显现出来. 知道在真空中光速为 186,000 英里/秒, 可推出地球的轨道半径等于这速率乘上大约 480 秒,即大约 9 千万英里. (最初, 丹麦天文学家略麦于 1675 年是反过来做这一计算的. 他根据地球到太阳距离的近似值,对光速作了第一次的定量估计.)

虽然近代对太阳的距离的测量高度准确,我们仍然必须考虑到这距离在一年的时间里是在变化着的事实. 然而, 如果忽略掉这一相对小的变化,我

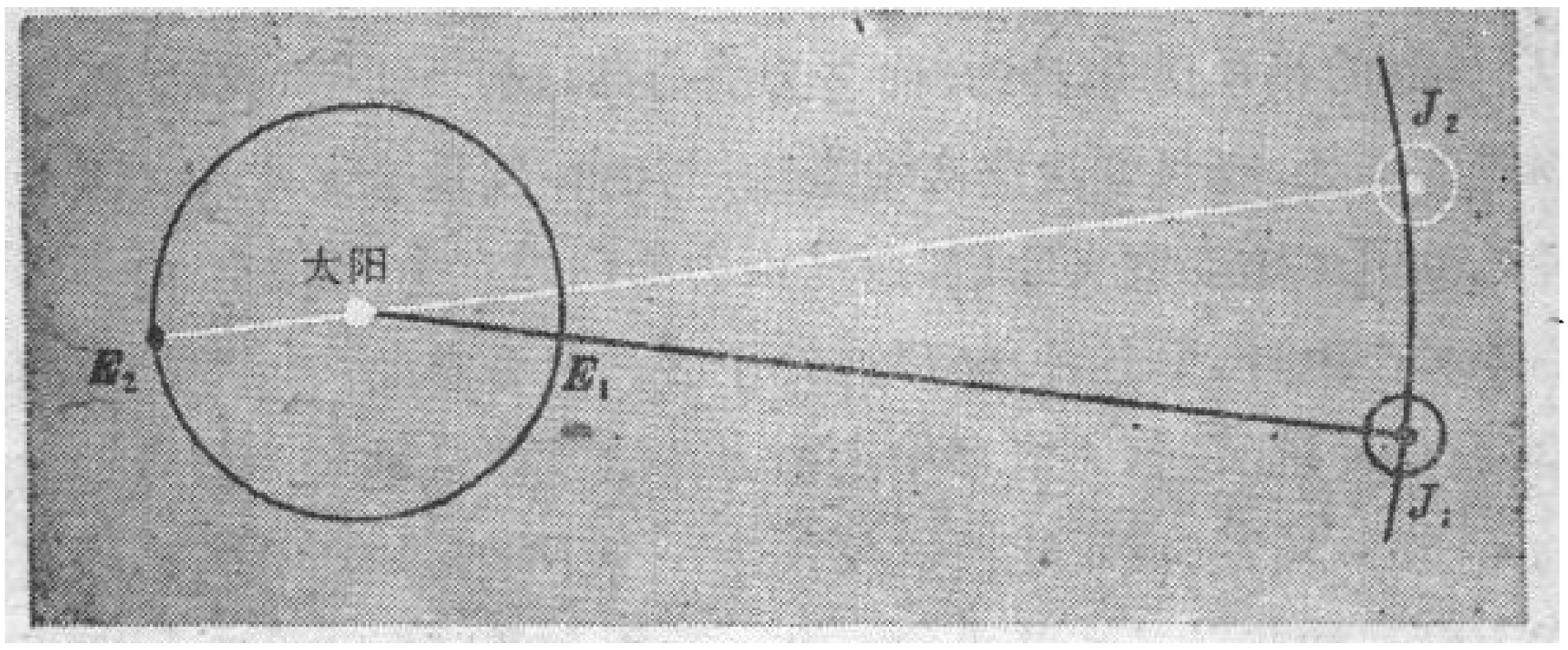



图 8-17　通过观测木星的月亮的月食和由于光在空间中行走所引起的表观延迟,测定地球的轨道直径。

们就可以使用本章开始不久时所引用过的这距离的平均值：

$$r_E = 1\mathrm{AU} = 1.496\times10^{11}\ \text{米}$$

## §13 质量和重量

也许牛顿对科学的最意义深远的贡献是他认识到一物体的惯性质量与地球作用于它的引力——约等于物体的重量测值的力——之间的基本联系.（记得，我们曾这样给过重量的定义，那就是使物体相对于地面为静止的力的大小，例如用弹簧秤所量得的.）

自伽利略时期以来，人们就已经知道在地球附近所有物体都以差不多相同的加速度 g 落下. 在牛顿之前，这只是一个运动学事实. 但按牛顿定律，它具有深刻得多的意义. 如果观测到一物体具有这一加速度，那就一定有一个力 $\mathbf{F}_g$ 作用于它，由 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$，得

$$\mathbf{F}_g = m\mathbf{g} \tag{8-25}$$

这样，就有一个具有极端重要意义的**动力学**事实：由于所有物体的加速度 g 都一样，产生这加速度的力一定严格地与惯性质量成正比. 为了理解这一结果多么非凡，设想我们从头开始研究纯静力学实验中两物体之间的吸引力. 我们用一个类似于弹簧的装置——扭秤——来平衡这力，从而测出它. 我们找到一个量，也许可以（与电的相互作用类比）称之为引力荷，$q_g$. 这个“荷”是任何一物体的特征，而且就这些实验来说，与惯性质量毫无干系，因为后者是单用加速度定义的（加速度由力的作用产生，例如，由一伸长的弹簧产生）. 用各种材料的，处于各种聚合态的，等等物体做实验，我们发现，在每一情形中这引力荷总是严格地与一独立地建立的量，惯性质量，成正比. 这仅仅是一个不平常的巧合呢，还是它指示着某种非常基本的事物？在一个很长的时间里，这一明显的巧合被看作是一个未获解释的自然界奥秘. 这得要一个爱因斯坦

的洞察力去猜想，在一定意义下，引力与加速度是**等价的**．爱因斯坦的“等价性假设”：引力荷 $q_g$ 与惯性质量 $m$ 是对同一量的量度，是他的广义相对论中引力理论的基石．我们将在第十二章中讨论非惯性参照系时回到这问题上来．

在使用等臂天平时[图 8-18(a)]，我们习惯于利用 $F_g$ 对 $m$ 的正比性．我们所做的事是使两个力的转矩平衡，但我们真正感兴趣的是物质的量相等．我们利用了这一事实，即两质量所在处的 $g$ 值在非常高的精确度上相同，而无需为 $g$ 的具体值烦心．多亏引力与质量的这种正比性，我们可以用一等臂天平和一组标准砝

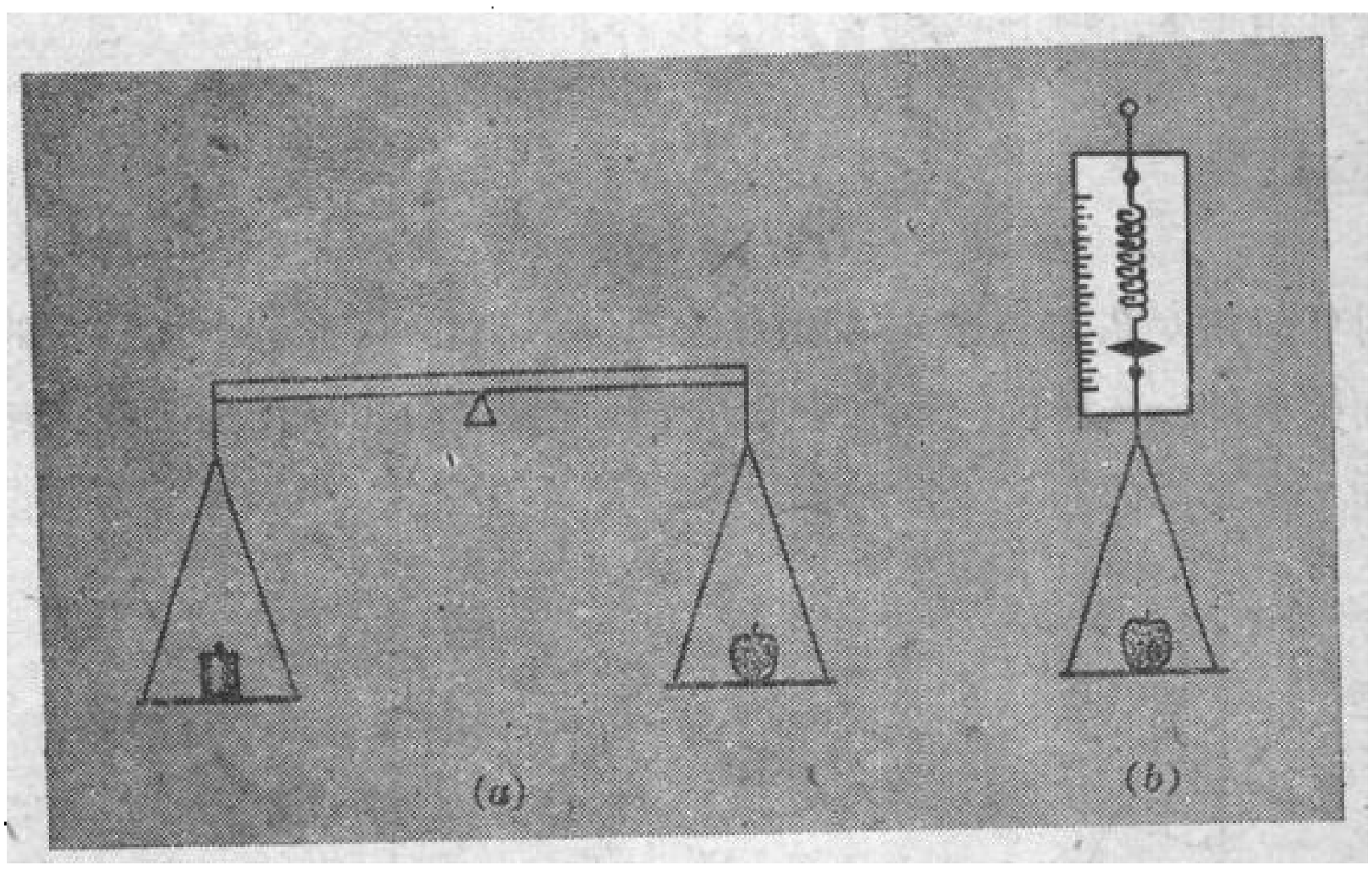



图 8-18 （a）用等臂天秤称重量——实际是直接比较质量，适用于任何 $g$ 值．（b）用弹簧秤来称重量——测的是重力，直接与 $g$ 值有关．

码量度出任何所需要的物质量，不论是在地球上，月球上，或火星上都一样．另一方面，弹簧秤[图 8-18(b)]则有一直接与 $g$ 的特定值有关的定标．它的读数实际上是力的读数，虽然我们用它们作为基准来量度出所需质量．我们可能遇上要在月球上用一弹簧秤于此目的，但如果秤上的标度刻的是千克，那我们应当把它遮住

而借助一些标准质量重新来定标于其上.

牛顿自己就已认识到，由同一地区的落体加速度完全相同所证实的、引力与惯性质量严格的正比性，是他用(8-8)式来表示的关于万有引力的陈述的关键点. 因此，他做了一系列很仔细的摆动实验，以验证一定长度的摆，如果用各种不同物体作摆锤，是否具有相同的周期. 为了了解如何做到这一点，我们考虑一惯性质量为$m$的物体悬挂在一根线上(图 8-19). 作用于它的两个力(略去空气阻力)是张力 **T** 和引力 $\mathbf{F}_g$. 在任何时刻，张力 **T** 都与摆锤的运动路线垂直，因而对切线方向的加速度 $a_\theta$ 无影响. 这切向加速度是由于 $\mathbf{F}_g$ 的切向分量. 由图 8-19，

$$F_\theta = ma_\theta = -F_g \sin\theta$$

因而

$$a_\theta = -(F_g/m)\sin\theta \qquad (8\text{-}26)$$

对任何角度 $\theta$，加速度 $a_\theta$ 都依赖于比值 $F_g/m$. 因此——对给定的初始条件——在任何角度 $\theta$ 上，摆锤的速度都由这比值确定. 从而一个来回的周期也依赖于这比值 $(F_g/m)$. 牛顿观测了摆锤

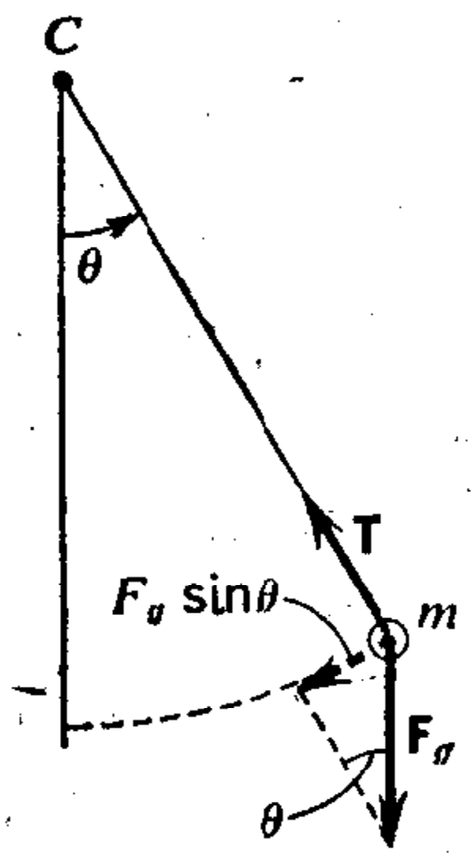



图 8-19　作用于单摆摆锤上的力.

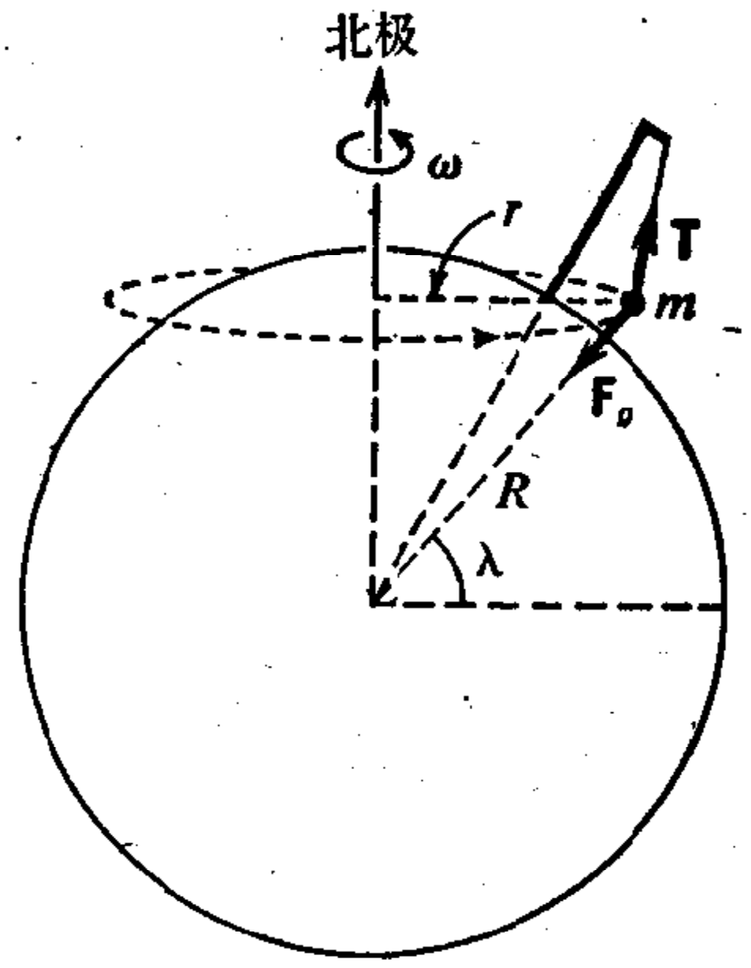



图 8-20　厄缶方法的基础；用于比较一物体的惯性质量和引力质量，物体相对于地球是静止的，因而有一向着地轴的加速度.

不同但摆长相等的各种摆的周期. 根据他的观测，所有这种摆的周期在实验误差范围内都相等，他作出结论：$F_g$ 与 $m$ 成正比，误差小于 1000 分之 1.

更晚近一点的实验(19 世纪在布达佩斯，男爵厄缶开始)利用了一个非常巧妙的思想使测量是静态的. 它依据于下列认识：一个悬挂着的、**相对于地球是静止的**物体，实际上具有一向着地轴的加速度，因为由于地球的转动，物体是在一圆轨道上运行的，圆的半径 $r=R\cos\lambda$，$\lambda$ 是纬度(见图 8-20). 这意味着一定有一个大小为 $m\omega^2 r$ 的合力作用于物体，其中 $m$ 是惯性质量. 这力是怎么来的呢？答案是：当一物体悬挂在地面附近的一根绳上时，这绳施一力 T 于物体，与引力 $F_g$ 的方向并不十分相同. 而如果 $F_g$ 不是严格与 $m$ 成正比，则 T 同 $F_g$ 之间的夹角对不同物体是不一样的. 为了找寻任何这种变化，用了一架非常灵敏的扭秤，在它的水平杆的

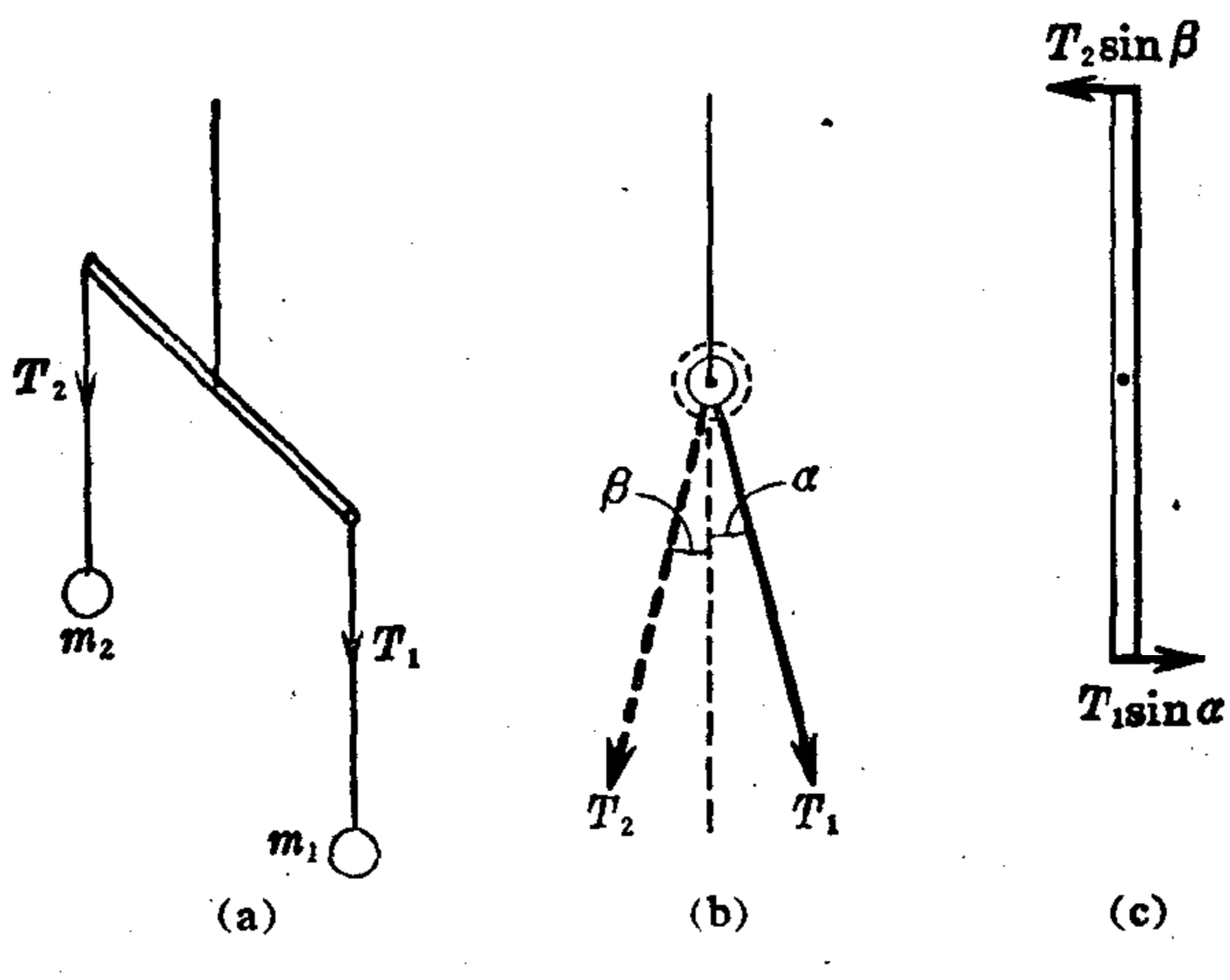



图 8-21　厄缶扭秤测量的原理：(a) 两近似于相等的质量挂在扭杆上. (b) 如果物体的惯性质量与引力质量的比值不完全相同，则悬线中的张力一定要在稍为不同的方向上. 平衡时主悬丝的方向必在 $T_1$ 和 $T_2$ 的方向之间. (c) 这就意味着可能有一净余转矩使扭杆绕一竖直轴扭转.

两端携带着两个不同的物体[图 8-21(a)]. 如果张力 $T_1$ 和 $T_2$ 的方向不同[图 8-21(b)], 就会有作用方向相对于水平杆是相反的微小水平分量[图 8-21(c)], 它们产生的转矩则是同向的. 另一方面, 如果 $T_1$ 和 $T_2$ 的方向完全相同, 那么, 即使它们的大小不怎么一样, 也不会有净余的转矩使扭力丝扭转. 为了探测是否存在任何这种转矩, 厄缶把整个仪器放在一个可以转动的箱里. 携带着两质量的水平杆安排在东-西方向上[图 8-22(a)], 读出它相对于箱的位置. 然后把整个系统转 180°, 如图 8-22(b)所示. 如果你以图 8-21 为基准, 分析一下这两种情形, 你将发现, 相对于箱的中线, 这一动作使扭转角反转了过来; 因而, 如果有任何转矩存在, 它是会显出来的.

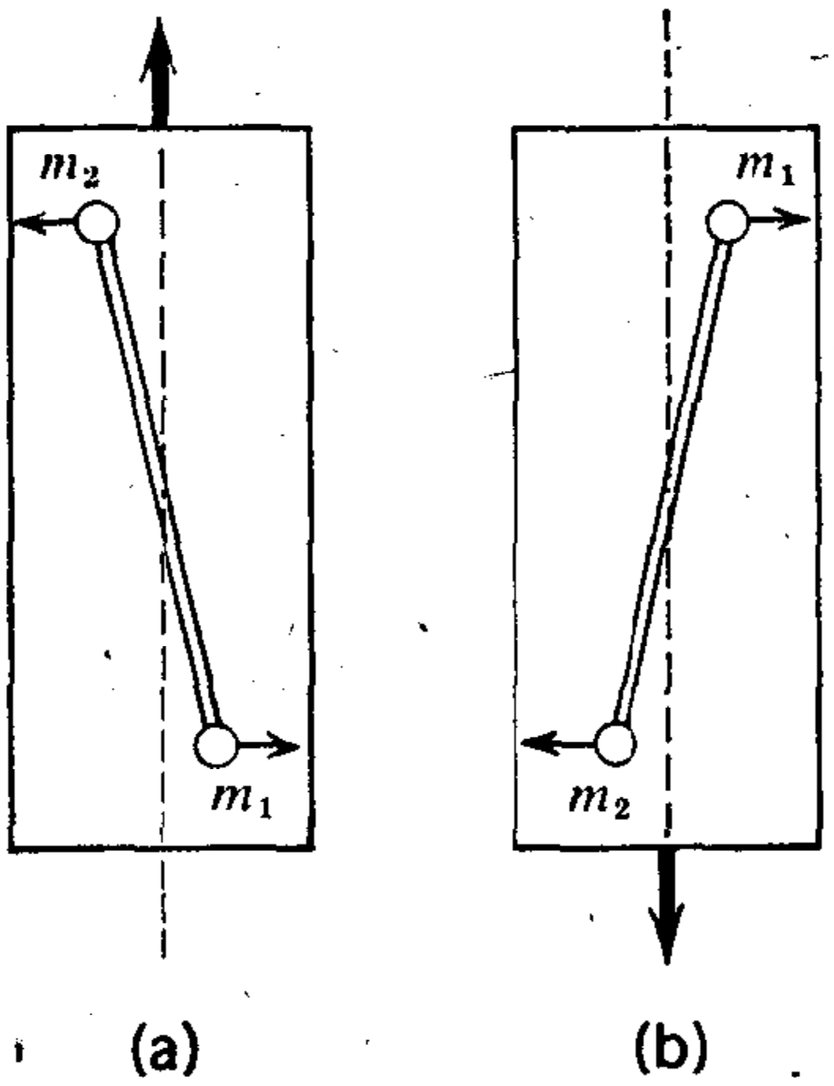



图 8-22 为了检验在厄缶实验中是否有一净余转矩, 整个仪器转 180°. 这将使转矩反向.

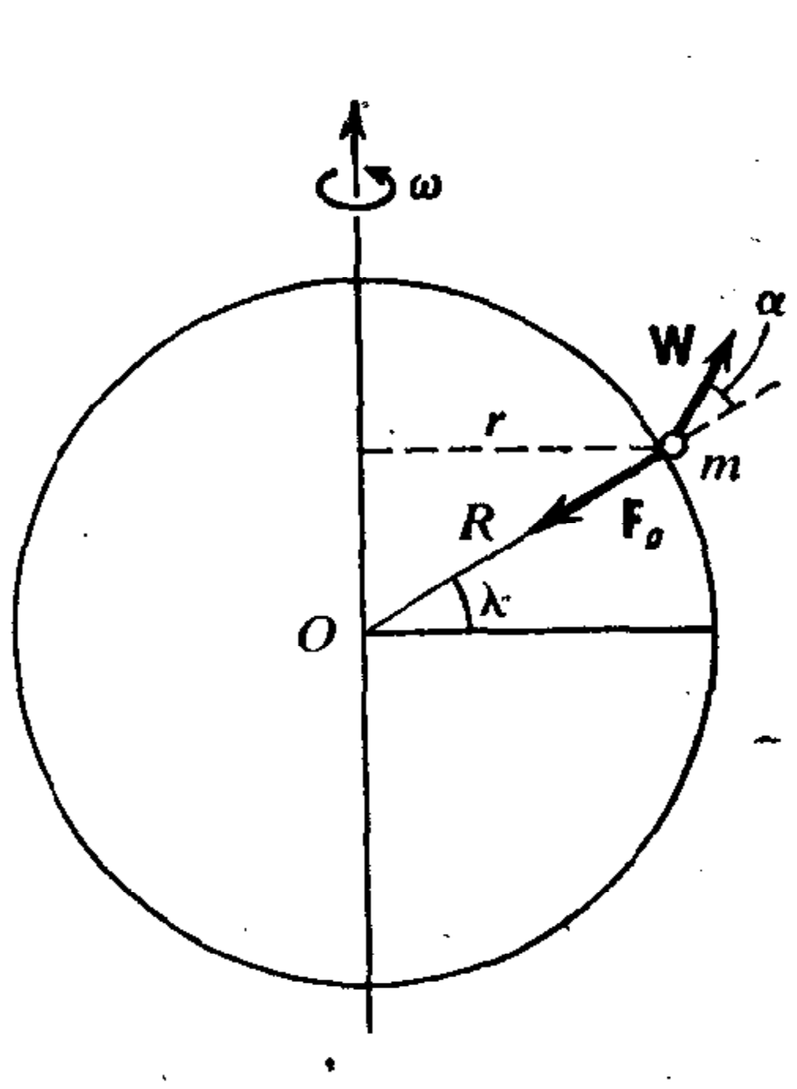



图 8-23 平衡一物体的重量所需的力在方向和大小上都不同于重力.

更晚近, R. H. 狄克同他的合作者曾做了一些精致的、近代化的这类实验①. 这些实验证明, $F_g$ 对 $m$ 的严格正比性正确到 $10^{10}$

① R. H. Dicke, *Sci. Am.* **205**, 84 (Dec. 1961).

分之 1, 或更佳.

上面实验的描述指出一紧密相关的现象——一物体重量的测值随着纬度有一系统变化. 如果我们理想化地把地球看作一个完善的球(图 8-23), 则物体的平衡要由一大小为$W$的作用力来维持, 力的方向与半径成$\alpha$角, 使下列条件得到满足:

$$W\sin\alpha = m\omega^2 r\sin\lambda$$

$$F_g - W\cos\alpha = m\omega^2 r\cos\lambda$$

其中 $r = R\cos\lambda$. 由于$\alpha$必然是一个非常之小的角, 可以在第二个方程中令$\cos\alpha \approx 1$, 而得

$$W \approx F_g - m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

由此,

$$W(\lambda) \approx W_0 + m\omega^2 R\sin^2\lambda$$

其中 $W_0$ 是在赤道上测得的重量. 令 $W_0 = mg_0$, 可得 $g$ 依赖于纬度的相应表达式:

$$g(\lambda) = g_0 + \omega^2 R\sin^2\lambda$$

如果在这式中代入 $\omega = 2\pi/86{,}400$ 秒$^{-1}$ 和 $R = 6.4\times10^6$ 米, $\omega^2 R \approx 3.4\times10^{-2}$ 米/秒$^2$, 连同 $g_0 = 9.8$ 米/秒$^2$, 得

$$g(\lambda) \approx 9.8(1 + 0.0035\sin^2\lambda) \text{ 米/秒}^2$$

这公式比它应得的更为成功. 因为我们不能忽略地球由于自转而稍扁的重要事实, 这使赤道半径要比地极半径约大 300 分之 1. 这一椭球性有两个结果: 它使赤道上的点要比别处的点离地心更远一些, 但这也产生了这样的效应, 就是围绕赤道区额外地增加了一条引力物质带. 把这些效应计算进去, 在海平面上的最终 $g$ 值相当好地由下式给出:

$$g(\lambda) = 9.7805(1 + 0.00529\sin^2\lambda) \qquad (8\text{-}27)$$

因此我们上面简单计算所得公式的形式是正确的, 但其中与纬度有关的修正项的系数之值只是真正数值的大约三分之二.

## §14 失　　重

在详细地讨论了质量、引力和重量之间的关系之后，用几句话来谈谈称为失重的性质是适宜的．我们在描述作用于一物体的引力同物体的被测重量之间非常明显的差异时，用了被测重量的一种**操作**定义．按我们的定义，重量就是维持物体使其相对于地球为静止的力的大小．我们关于失重的定义很自然地从这里导出：**一物体，只要是处在完全自由落下的状态，就是失重**．在这状态下，物体的每一部分都有着同样的加速度，而不论它所在地区重力强度的相应值为何．（在这样说时，我们假定在物体的线度上 $g$ 没有可觉察的变化．）一物体在被 约束或被支持而使其不落下时，不可避免地会在它的平衡状态中有内部应力和形变．这一点有时可能非常明显，例如，一滴水银在一水平面上静止时略呈扁平．在失重的自由落下状态中，所有这种应力和形变都会消失．例如，水银珠在自由状态下成一完善球形．

上述有关失重的定义可以在任何引力环境中应用，这是理所当然的．在一个宇宙密闭小舱里生活的各种古怪动力学现象，并不是由于它在离地球很远、因而引力大大地减小的区域，而简单地是由于座舱以及其中所有的东西都以同一加速度在自由落下，因之觉察不了．举例说，如果一宇宙飞船是在地面上空 200 英里高处绕地球的轨道上，作用于飞船以及它里面每一物体上的引力仍约为海平面上所测得的引力的 95%，但在此情形下与失重相关联的现象同在离地球 200,000 英里的另一宇宙飞船中的现象一样显著，而在后一情形中地球的引力吸引降低到地面附近的 $\frac{1}{2500}$．在两种情况下飞船里的一个物体，如果放开手不拿住它，都将悬在半空中．如果飞船只是简单地沿径向朝着地球的中心落下，而不是

循一圆形或椭圆形轨道绕着地球转，也会发生同样的事情．从这些观点来看，失重现象就一点也不神秘了，虽然它们仍然使人惊奇，因为它们与通常的经验太相矛盾了．

## §15 有关其他行星的知识

对引力的普遍性的认识给我们以强有力的工具去获得有关地球以外的诸行星的知识，而且实际上也获得有关一般天体的知识．特别地说，如果一个行星有自己的卫星，我们可以求出它的质量，所用的分析方法完全与我们从行星的运动推算太阳的质量类似．这是求有卫星的行星的质量的最简便途径．如果行星有不止一个

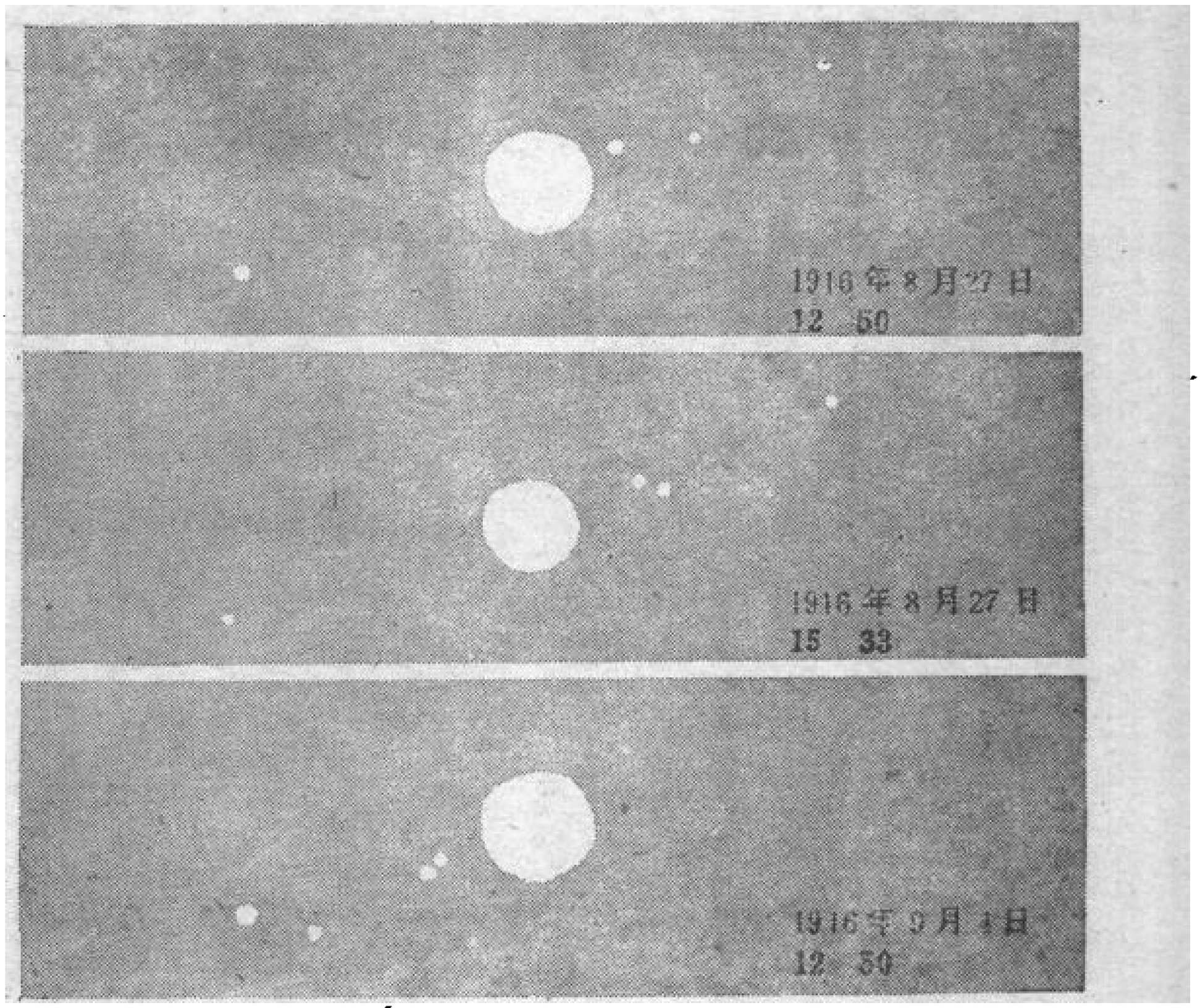



图 8-24 （a）通过一现代望远镜看到的木星及其最著名的四颗卫星．第一和第二张照片说明伽利略所观察到的、在一夜之间发生的显著变化，

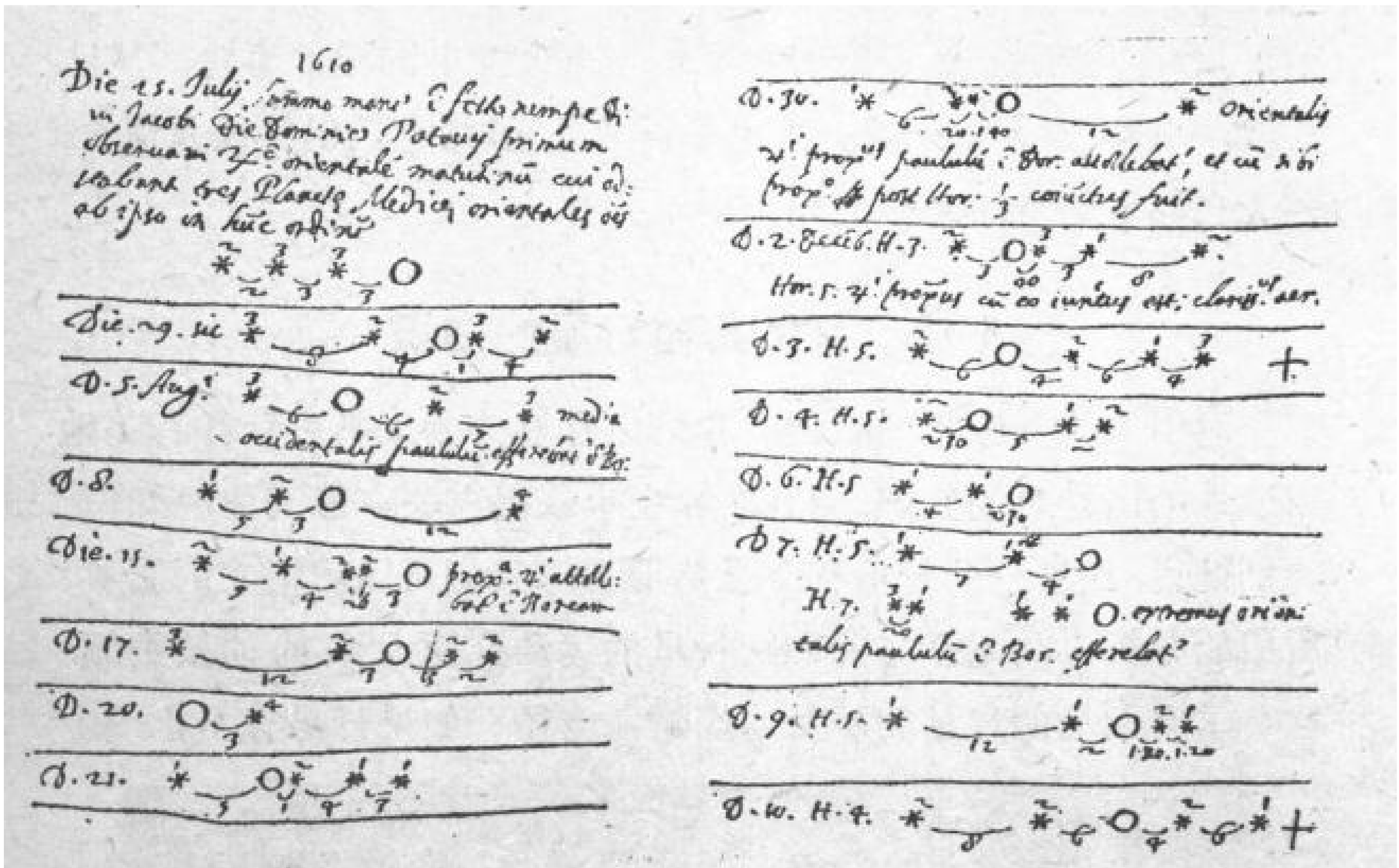



图 8-24 (b) 一页伽利略记录手稿的复制品，记的是他在1610年后半年中(七月至十月)的观测.

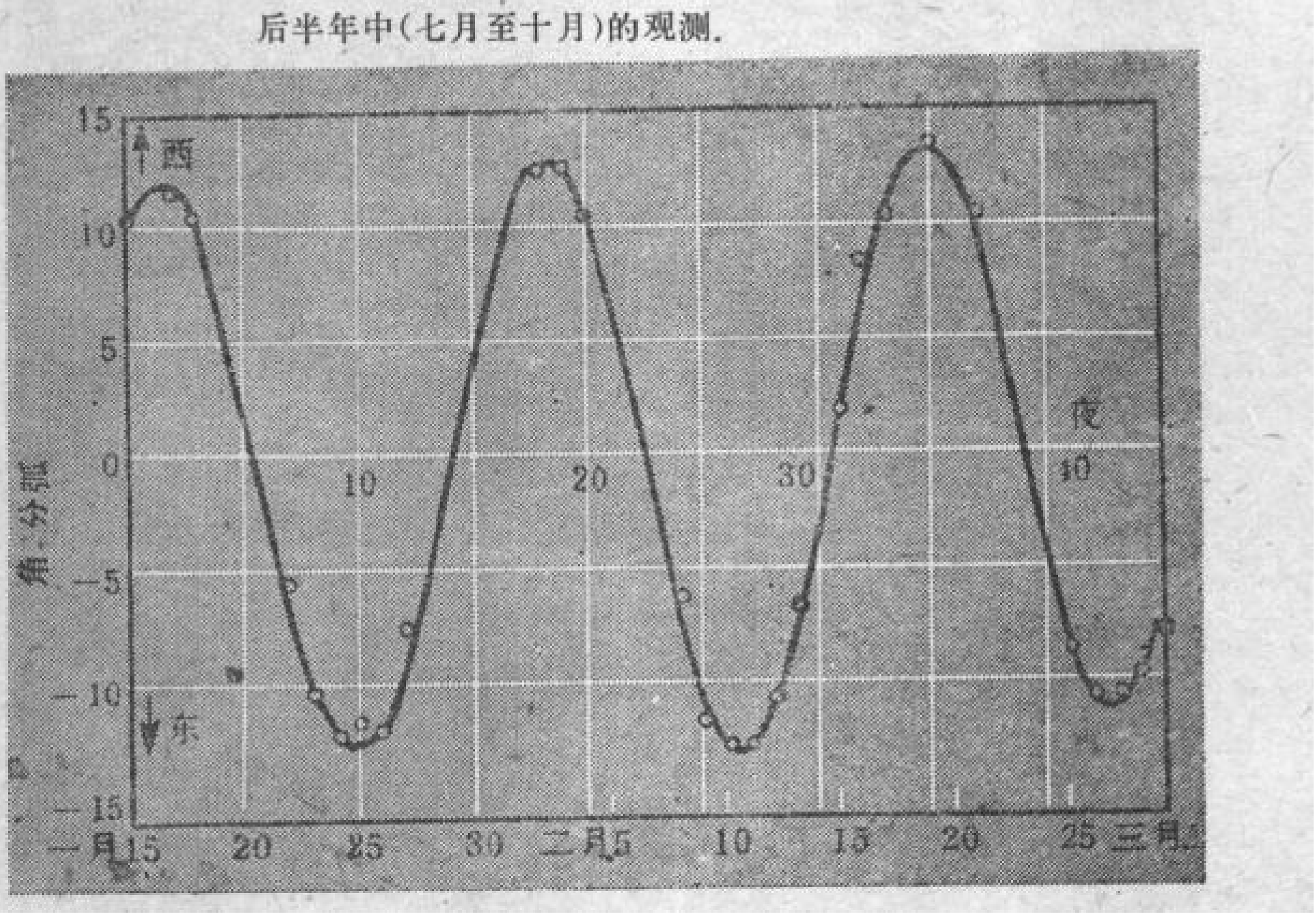



图 8-24 (c) 按伽利略本人记录画的图，说明木卫四的周期运动，那是他所能看到的四颗卫星中最靠外的一颗，约为16$^{9}/_{4}$天的周期清楚地显示了出来.

卫星，那么这些卫星还提供对开普勒第三定律的进一步检验，只要把这行星取作引力中心.

牛顿本人就曾应用这类分析于木星，用的是它最显著的四颗卫星的数据. 这些就是伽利略于 1610 年用他的新天文望远镜所发现而载入史册的卫星（或“月亮”）（见“木星的月亮”一节). 图 8-24(a)示明通过现代望远镜看到的它们位置的变迁，而图 8-24(b)则是伽利略自己在一连几个月里一夜复一夜地所作草图的复制. 图 8-24(c) 是据根伽利略的定量记录所画的曲线，所用的数据可以无疑地与四颗卫星中最外边的一颗相联系. 可以推断其周期约为 16 天. 伽利略毫不犹豫地对它的观测结果用四颗卫星遵循着圆形轨道来解释——这些轨道运动是从边上看的，因而表现为与我们的视线相垂直的简谐运动. 根据进一步的测量，伽利略得到所有四颗卫星轨道周期的相当精确值，同时还得到用木星自身半径的倍数来表示的卫星轨道半径的颇佳值.

**表 8-3 有关木星卫星的数据[a]**

| 卫　星 | $n=r/R_J$ | 周期 ($T$) | $n^3/T^2$, 秒$^{-2}$ |
|---|---|---|---|
| 木 卫 一 | 5.578 | 1.7699 天$\approx 1.53\times10^5$ 秒 | $7.4\times10^{-9}$ |
| 木 卫 二 | 8.876 | 3.5541 天$\approx 3.07\times10^5$ 秒 | $7.5\times10^{-9}$ |
| 木 卫 三 | 14.159 | 7.1650 天$\approx 6.19\times10^5$ 秒 | $7.5\times10^{-9}$ |
| 木 卫 四 | 24.903 | 16.7536 天$\approx 1.45\times10^6$ 秒 | $7.4\times10^{-9}$ |

[a] 同样的这些数据曾在 Eric Rogers, *Physics for the Inquiring Mind* (Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960) 一书中以引人注目的方式表示出来:

| 卫　星 | $r^3$(英里)$^3$ | $T^2$(小时)$^2$ |
|---|---|---|
| 木 卫 一 | $1.803\times10^{16}$ | $1.803\times10^3$ |
| 木 卫 二 | $7.261\times10^{16}$ | $7.264\times10^3$ |
| 木 卫 三 | $29.473\times10^{16}$ | $29.484\times10^3$ |
| 木 卫 四 | $160.440\times10^{16}$ | $160.430\times10^3$ |

你如何说服你的友人使他们相信如此接近的数值上的一致并非一个新的基本定律的证据?

牛顿在《原理》中用了与他同时代的约翰·法兰姆斯第所获得的、精确度较高的类似数据. 表 8-3 列出了这些数据，而在图 8-25 中用对数法(参看图 8-6)把它们画出来，示明它们如何给开普勒定律的正确性以另一例证. 其中的斜率准确地为 3/2.

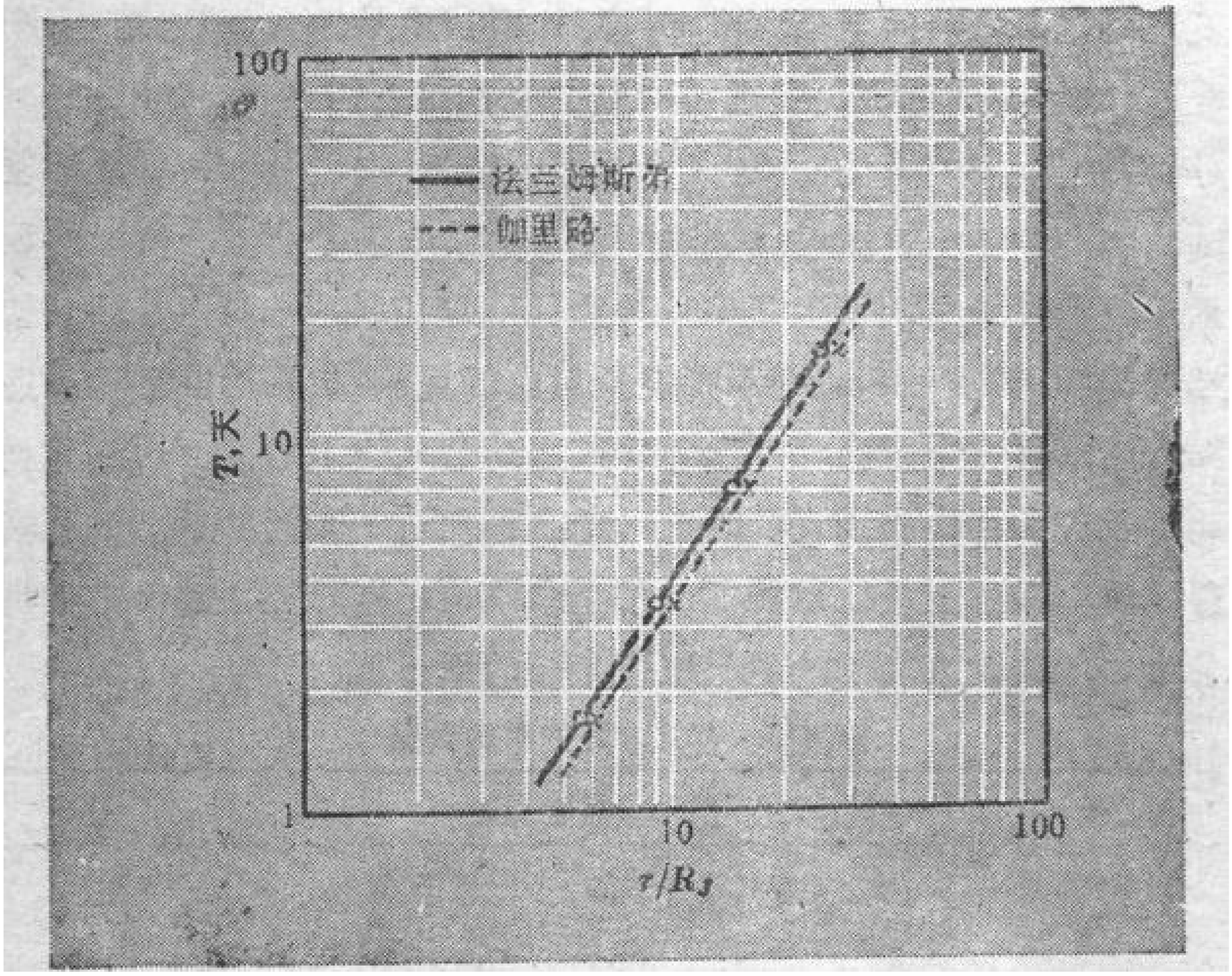



图 8-25　对数-对数曲线，显示可以应用开普勒第三定律于木星的卫星. 可以看出伽利略的结果略为不同于将近 100 年后约翰·法兰姆斯第得到的结果.

用木星的半径作为测轨道半径的单位不仅仅是为了方便. 正如我们在讨论太阳质量时曾经提到过的，在牛顿时代，太阳系的绝对大小还没有多大把握知道. 然而有趣的是，用表 8-3 中所示的数据，即使不知道半径的绝对值，也能推算出木星的平均密度 $\rho_J$. 类比于我们对地球卫星的分析[第 82 页，特别是(8-15)式]，有

$$v=\frac{2\pi r}{T}=\left(\frac{GM_J}{r}\right)^{1/2}.$$

由此，

$$M_J=\frac{4\pi^2r^3}{GT^2}$$

令

$$M_J=\frac{4\pi}{3}\rho_JR_J^3$$

得

$$\rho_J=\frac{3\pi}{G}\frac{n^3①}{T^2}$$

把 $n^3/T^2\approx7.5\times10^{-9}$ 秒$^{-2}$ 和 $G=6.67\times10^{-11}$ 米$^3$/千克·秒$^2$ 代入，得

$$\rho_J\approx1050\text{ 千克/米}^3$$

大约同水的密度一样.

如果一个行星自己无卫星，它的质量可以根据对行星之间彼此所施于轨道的微小干扰效应——称为摄动——的详细分析推测出来. 这一方法曾用于水星和金星. 但是，阐明这些相互作用是一件复杂而困难的事情，而至少在一件事上它提出过一个长时期未能充分解答的问题. 这就是两个质量最大的行星——木星和土星之间的相互作用，它使两者的轨道发生令人非常费解的不规则性. 这甚至使人考虑过，引力的基本规律可能需要加以修正，使略与严格的反平方关系偏离. 这奥秘是在《原理》出版差不多一个世纪之后，由法国数学家拉普拉斯，根据他伟大的同胞拉格朗日的工作，最终予以解决的. 原来是有一种奇异的共振效应在起作用，这是由于木星和土星的周期差不多是一个简单的算术关系($5T_J\approx2T_S$)这一事实而产生的. 这一关系使得通常在摄动中本来可以略去的项变大，其重复周期是如此之长(～900 年)，以致它象是在无限制地增长着. 当这奥秘最终获得解决时，对牛顿理论的信服当然就更进一步加强了.

① $n=r/R_J$——译者.

### 木星的月亮

1608 年在荷兰，汉斯·李坡歇取得也许是第一架成功的望远镜的专利权．伽利略知道了这事，不久就制造了他自己设计的望远镜．他的第三架仪器的放大倍数超过 30，使他获得激动心弦的发现．在他的 Starry .Messenger（星空信使）一书中他详述道：

> 今年(1610 年)的一月七日，晚间的第一小时，当我用一架望远镜观察天体时，木星呈现在我眼前，…我发觉在这行星之外还有三颗小星，虽然小却非常亮．尽管我认为它们是大群恒星中的几个，但它们恰好都位于平行于黄道的一条直线上有点引起我的好奇心…我没有注意它们同木星之间的距离，因为正如我说过的，在开头时我就以为它们是恒星．但是，在一月八日我再作同样的探究时——我不知道是什么使我这样做——我发现了一个非常不同的排列…．”

再观察不多的几个晚上，就足以使伽利略确信他看到的是什么：“我现在[一月十一日]已无疑问地肯定在天空中有三颗星绕着木星周游，就象金星和水星绕着太阳一样…．此外我还记录了观测的时间…．因为这些行星是如此之快地转圈，以致常常甚至可能记下它们的以小时计的变化．”

## § 16　海王星的发现

预见并发现从前未曾猜想它会存在的行星也许是引力理论的力量的最生动例证．值得注意的是，已知的行星的数目，自从古时候以来直到牛顿以后很久都不曾变过．然后，在 1781 年，威廉·赫歇耳注意到了我们现今称为天王星的物体．他当时是在从事恒星的系统探测，而他唯一赖以开始的线索是这物体略不怎么象附近的恒星那样是点状的．之后，有了一架具有不同倍数的放大率的望远镜，他证实象的大小随放大率而增；恒星却不是这样——它们保持在即使是最大的望远镜的分辨极限之下，所成的象总是同理想的点源成象没有区别．

一旦这物体吸引了他的注意，赫歇耳一夜复一夜地反复观测，证实它相对于其他恒星在运动着．他还发现，同各种其他情形中

曾经出现过的那样，在早先的一些星图中事实上已有关于这物体存在的记载(首先是在 1690 年约翰·法兰姆斯第记录的)．这些老而陈的数据突然间变得极有价值，因为它们是这物体在此之前将近一个世纪时期里的运动的现成记录．把它们与几个月中进行的新测量相结合，就证明这物体(最后称为天王星)确是我们太阳系中的一员，走着一个差不多是圆形的轨道，平均半径为 19.2AU，周期 84 年．

这是我们的主题故事的开始．发现天王星之后，它以及它的运动就成为不断研究的主题．积累的证据表明它的运动有某些极小的不规则性，不能归因于任何已知来源的摄动效应．图 8-26(a)，天文观测的惊人精确性的一幅杰作，表明自 1690 年以来随时间而变化着的反常性．怀疑开始增长，认为也许在天王星之外还有另一行星，其质量、周期和距离均属未知．有两个人——英国的 J. C. 亚当斯和法国的 U. J. 勒弗里埃——独立地对这问题做了工作．两人都用了如下的假设作为出发点：未知行星的轨道半径差不多正好是天王星轨道半径的两倍．其根据是一个奇异的、称为玻得定律的经验关系(实际上是 J. D. 提丢斯于 1772 年发现的，但由 J. 玻得发表)．这定律表达这样的事实，即已知行星的轨道半径粗略地符合下列公式：

$$R_n(\mathrm{AU}) = 0.4 + 0.3(2^n)$$

其中 $n$ 是一个适当的整数，对每个行星不同．令 $n=0, 1, 2$，得到金星、地球和火星的近似半径(对水星，要求 $n=-\infty$，这是难以辩解的)．令 $n=4, 5$ 和 6，可以得到相当好的木星、土星和天王星的半径值．(所缺的整数 $n=3$ 对应于火星与木星之间的小行星带．)图 8-27 示明诸轨道半径的这一关系，用了半对数作图法；很清楚，如果用一简单的指数关系式(在这图上是直线)，也几乎有同样的效果，但如果认可玻得定律，则 $n=7$ 给出 $r=38.8\mathrm{AU}$，而这正是亚

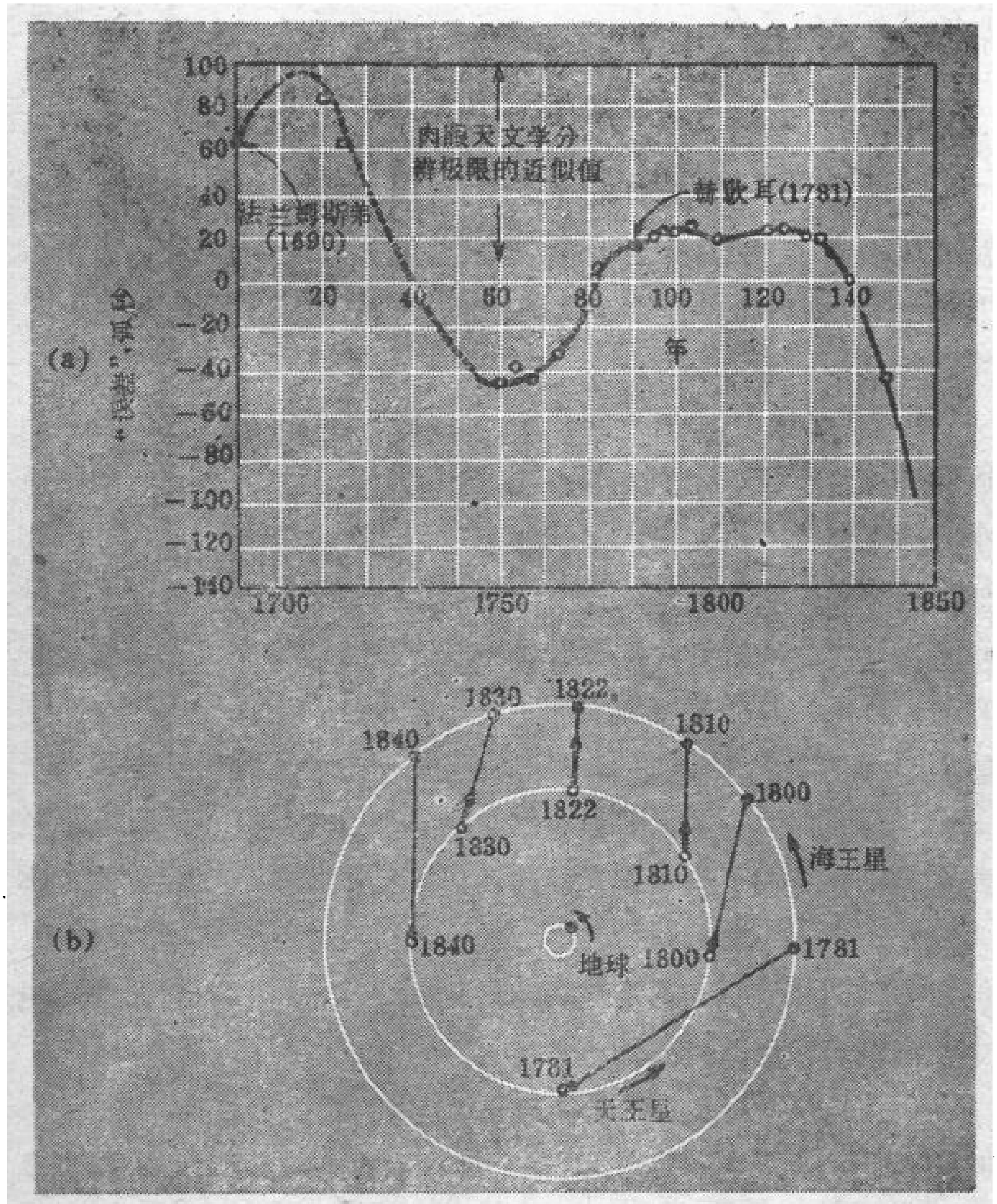



**图 8-26　(a) 在 1690 年和1840年之间观察到的、天王星位置的未获解释的剩余偏离. (b) 把这偏离归因于一另外行星的影响的根据. 箭头指出在不同时间内摄动力的相对大小.**

当斯和勒弗里埃所用的.

知道了半径, 周期就可以根据开普勒第三定律来确定. 于是, 就有可能画出一明确的图象, 如图 8-26(b)所示, 描绘出这新行星

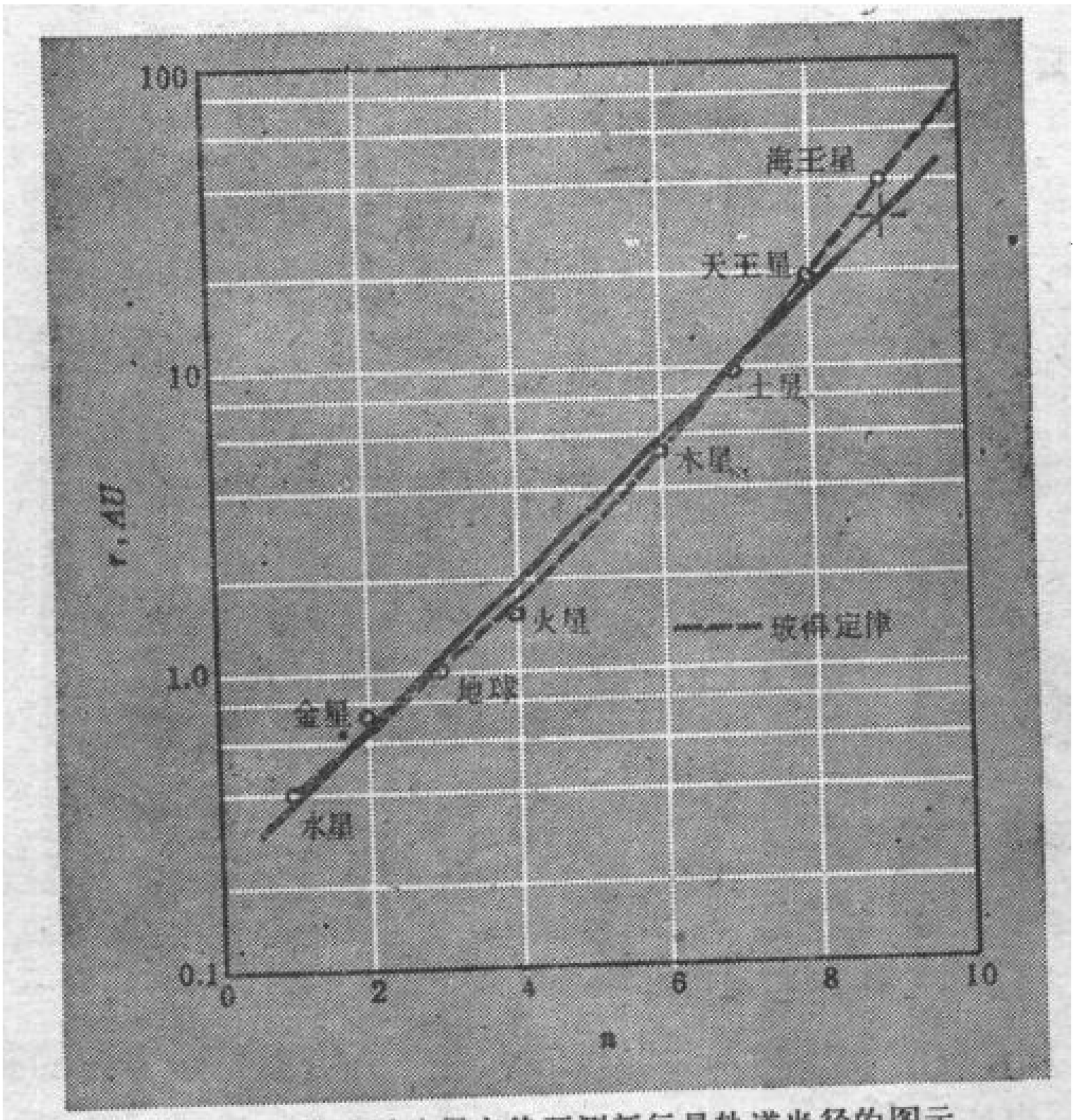



图 8-27　借助于玻得定律预测新行星轨道半径的图示.

是如何按其相对位置交错地使天王星在其轨道运动中加速和减速的. 通过辛劳的分析, 人们可以推断新行星在特定的时日出现在它轨道上的什么地方. 亚当斯于 1845 年 10 月向英国皇家天监 G.B. 爱里提供了这种情报. 爱里表示收到了亚当斯的信并询问了详情, 但此外就没有做任何事情. 勒弗里埃则直到 1846 年 8 月才完成了他的计算, 然后他向之致信的那位天文学家(德国的 J. G. 戈勒) 立刻进行探索并就在他第一夜的观测中认出了那颗新行星(海王星). 它所在的位置与预计的位置只相差大约 1 度(见图 8-28). 第二天晚上它就被看出是移动了, 因而证实了它的行星地位.

虽然海王星的发现在某些方面是一个巨大成就的故事, 它也

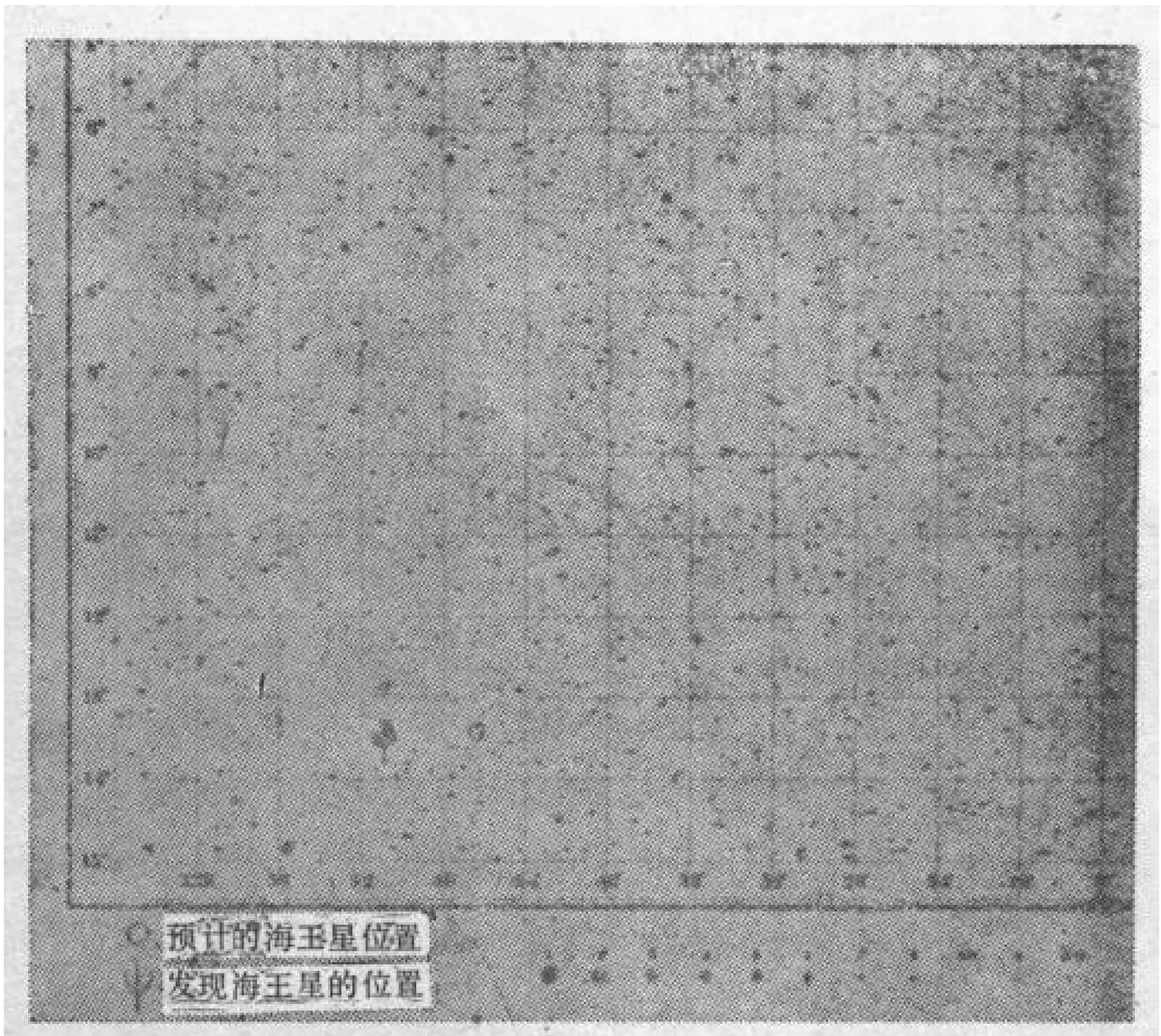



图 8-28　表明发现海王星的星图,1846 年 9 月 23 日.

是一个有关运气好坏和人类弱点的故事. 亚当斯是这方面的真正第一人,但他得不到他前辈的支持(在开始进行计算时，他刚从大学取得学士学位). 爱里则失去了他本来可能赢得的第一个认出海王星的人的荣誉. 但是亚当斯和勒弗里埃两人所预计的地点很可能毫无希望地导人入歧途，因为他们由于相信玻得的定律而引用的轨道半径(因而周期)远非正确的. 真正值约为 30AU，而不是象他们所设的、接近于 40，这意味着他们过高地估计了周期约 50%①. 因此，这行星在戈勒搜寻并发现它的那特别的一天如此之接近其预测位置,在很大程度上实在是一个幸运的偶然事件. 但不要让这成为贬低之言. 借助于运动规律和万有引力律，终究作出了一个伟大的发现，它仍是牛顿创造的宇宙动力学模型的最为

① 这也意味着他们过高地估计了产生观测到的、天王星的摄动所需的质量. 勒弗里埃给出的数字是大约为地球质量的 35 倍,而现今认可的数值约为其一半,

成功的明证①. 1930 年 C. 汤姆波夫根据海王星自身运动不规则性的详细记载，发现了冥王星，可说是原先的成就的回声.

## § 17 太阳系之外的引力

当牛顿写他的《宇宙体系》时，对恒星的距离或可能的运动是无所知的. 它们只提供一表面上是不动的背景，在这背景下太阳系进行(动力学)运动. 也有例外，人们发现有少数自远古以来就是肉眼天文学所知的著名恒星——例如天狼星——在历史性的长时期中移动了位置. 但对恒星运动的认真和系统的研究始于威廉·赫歇耳. 他的观测，以及由他的儿子约翰·赫歇耳和其他天文学

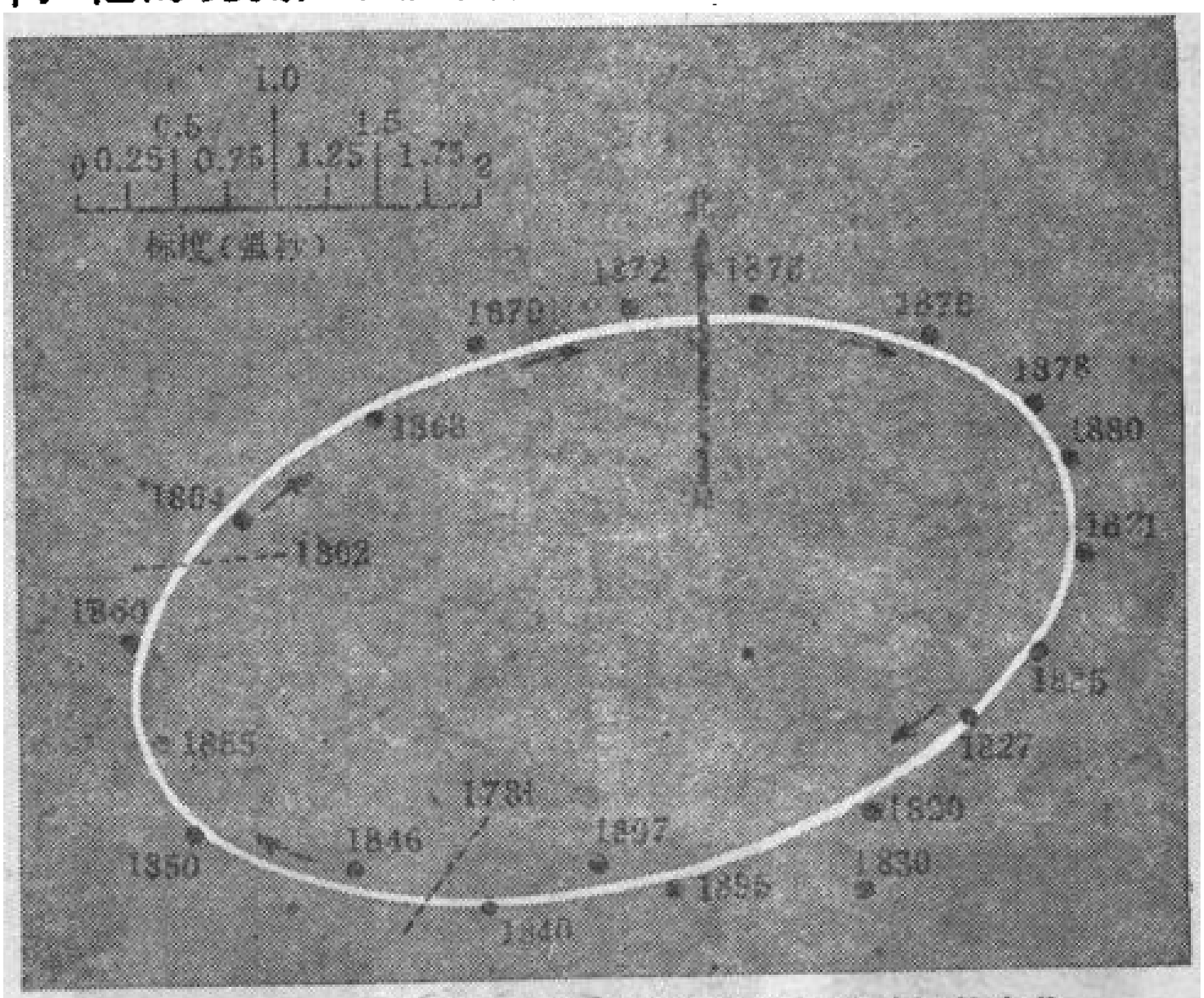
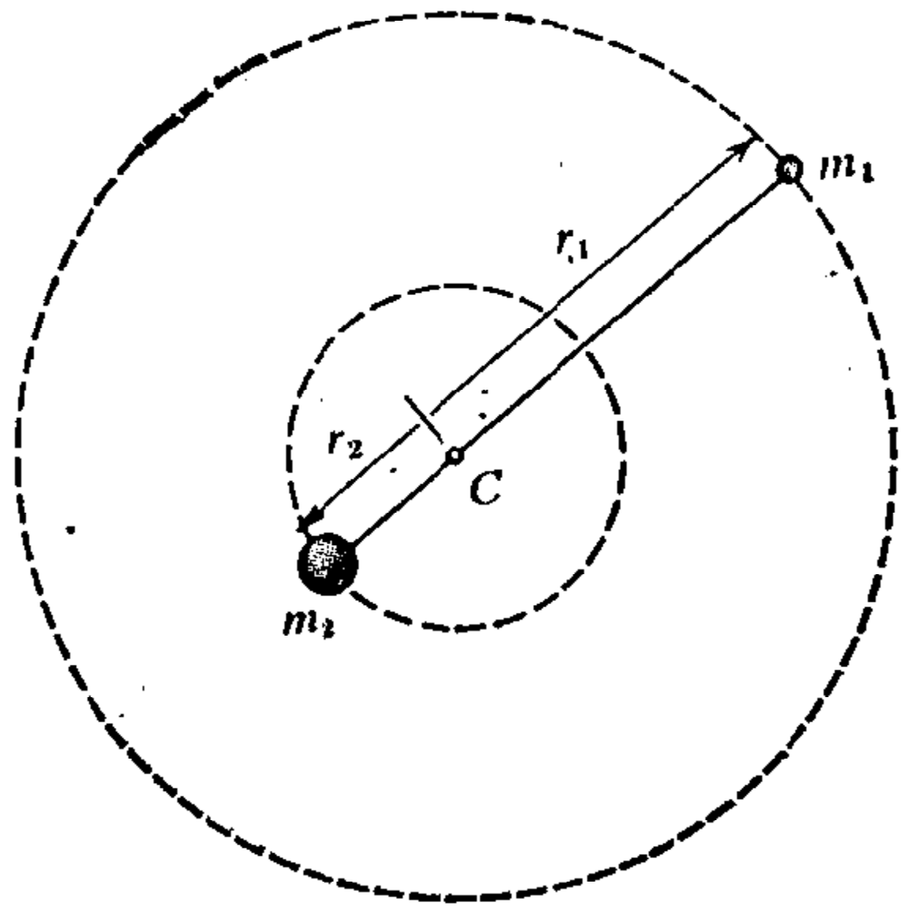



图 8-29 一双星系成员的相对位置矢量随时间的变化.

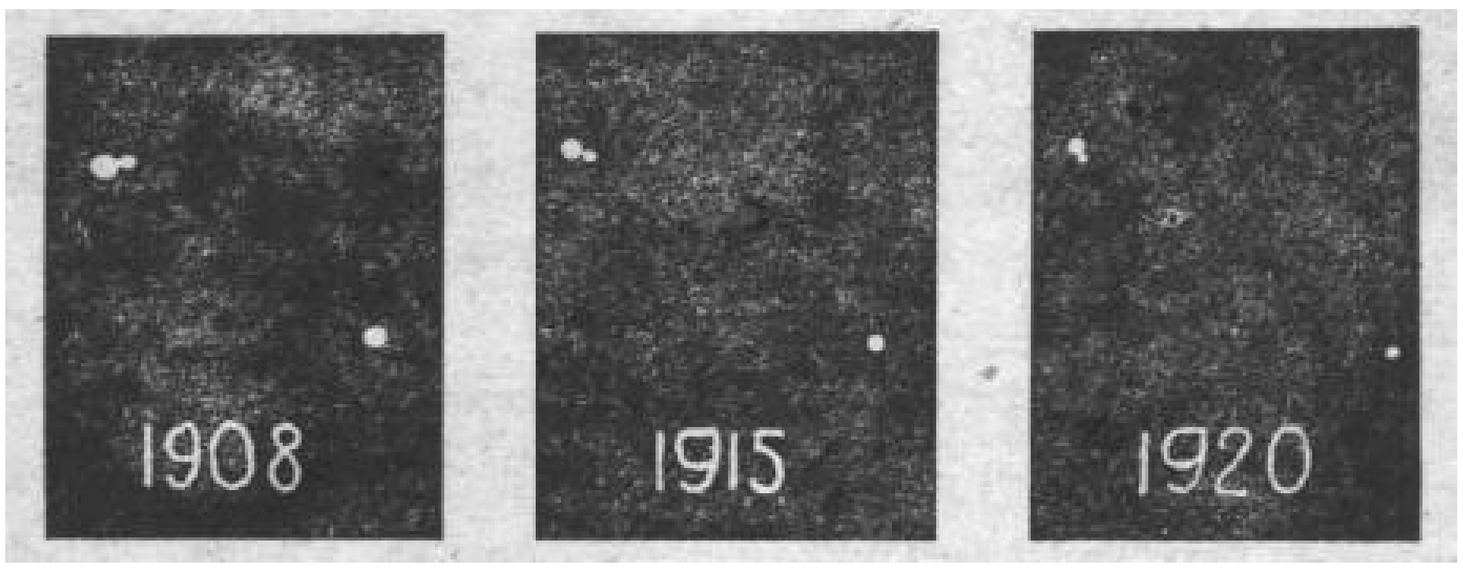
① 关于这整个事件的详情，见 Turner, *Astronomical Discovery*（天文学上的发现），Edward Arnold, London, 1904. 稍短一些但更易于理解的叙述在题为"John Couch Adams and the Discovery of Neptune"（"约翰·亚当斯和海王星的发现"）的一篇文章中可以找到，这篇文章刊登在 *The World of Mathematics* (J. R. Newman 编), Simon and Schuster, New York, 1956；作者是 H. Spencer Jones.

家所继续进行并加以改善的观测，揭示了两类结果．第一是各个恒星的连续的表观位移，其形式使人想到太阳系本身就被卷入我们相邻恒星的普遍运动中，速率的数量级是 10 英里/秒（可与地球绕日的轨道运动速率相比）．就此而言，它只是一个经验事实．但第二类结果就直接指明牛顿的动力学在起作用．因为赫氏父子发现许多成对的恒星显然是以**双星系**的形式互相绕着作轨道运动．图 8-29 示明早期的例子中记载得最好的一个，同时也是最先用开普勒定律予以详细分析的一个例子．（那是大熊星座的后掌之一，大熊座 -$\xi$.）

双星的周期依赖于系统的总质量，而不是依赖于各单个质量．在假定轨道是绕公共质心的圆的情形下，容易证明这一点[见图




(a)




(b)

图 8-30 （a）在圆轨道的情形下一双星系成员相对于质心 $C$ 的运动．（b）直接看到的双星系——克鲁格 60——运动的证据．

8-30 (a)]①. 两恒星总是在通过中心$C$的直线的两头. 如果对两恒星之一, 设质量为$m_1$, 写下$F=ma$, 有

$$G\frac{m_2m_1}{(r_1+r_2)^2}=\frac{m_1v_1^2}{r_1}=m_1\omega^2r_1$$

其中$\omega(=2\pi T)$是两星共同的角速度. 因此

$$\omega^2=\frac{Gm_2}{r_1(r_1+r_2)^2}$$

然而, 按质心的定义, 有

$$r_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}r$$

其中

$$r=r_1+r_2$$

立得

$$\omega^2=\frac{G(m_1+m_2)}{r^3}$$

于是, 如果两恒星之间的距离$r$可以从直接的天文观测得到（例如, 从有关它们的角距离的知识出发), 它们的质量之和就立刻确定. 要求出各单个质量, 还需要进行比较艰苦的工作: 以"固定"的恒星为背景测出每一颗星的绝对运动. 图 8-30(b) 示明一个真正的双星系的轨道运动, 那是令人信服的直接证据.

由于近代天文学的发展, 逐渐看出我们的太阳系及其相邻星体的系统运动是一个由引力控制着的更大的运动系统的一部分. 围绕着我们的整个宇宙是广大的星系, 它们中的大多数都清晰地显示出一普遍的转动, 例如图 8-31 所示. 最难以解释的构造是我们自身所在的星系——银河系. 然而, 最后终于弄清楚, 它的基本结构非常象图 8-31 的情形. 我们的太阳系在里面绕着中心作某种轨道运动, 半径约为$3\times10^{20}$米(≈30,000 光年), 而周

① 关于质心概念的充分讨论见第九章(153页).



图 8-31　旋转星系(猎犬座旋涡星系 $NGC5194$).

期估计约为 250 兆光年 ($\approx 8\times 10^{15}$ 秒). 用这些数字我们可以推算出在轨道里面引力质量的近似值,这些质量决定着这一运动. 由(8-24)式,有

$$M=\frac{4\pi^2}{G}\ \frac{r^3}{T^2}$$

用 $G\approx 7\times 10^{-11}$ 米/千克·秒$^2$,得

$$M\approx\frac{40}{7\times 10^{-11}}\times\frac{3\times 10^{61}}{6\times 10^{31}}\approx 3\times 10^{41}\text{ 千克}$$

由于太阳(一典型恒星) 的质量大约为 $2\times10^{30}$ 千克，我们看到这意味着核心中大约有 $10^{11}$ 颗恒星. 这不是一个真能独立地核对的数字. 它是对我们信念的一种最终的赞颂：我们相信引力定律的普遍性，有把握地用它来作出象上面所说的关于星系质量的结论。

## §18 爱因斯坦的引力理论

早先我们描述过牛顿如何认识到重量与惯性质量间的正比性是一个具有根本意义的事实；这在引导他作出结论，认为他的引力定律必是自然界的普遍规律，起着中心着用. 对于牛顿来说，这是一个严格的动力学结果，表明力律的基本性质. 但 1915 年阿伯特·爱因斯坦对此持有新的看法. 在他看来，所有物体，不论大小或物理状态或组合成分如何，都以同一加速度 $g$ 朝着地球降落这一事实意味着这一定是在某种真正深刻意义下的运动学或几何学结果，而不是动力学结果. 他认为这是与伽利略的惯性定律等值的，惯性定律表明物体有保持其直线运动的趋势.

根据这些想法，爱因斯坦发展了下述理论：行星(举例说)是在绕太阳走着它的特征路线，因为这样它走的是**短程线**——即从一点达到另一点的最经济之路. 他的主张是，虽然在没有大质量物体时短程线是欧几里得意义下的直线，但在有象太阳那样质量极大的物体时，附近空间的几何就要变易而使短程线成为曲线. 在这一观点下，一个大质量物体附近的情况不是用引力场的力，而是用“空间的曲率”来解释——“空间的曲率”是一个易懂的词句，用来概括非欧几何学、抽象、数学上复杂的描述.

在大部分情况中爱因斯坦的引力理论所给出的结果与牛顿的理论无什么区别；认为它比牛顿的理论来得好的根据似乎只是概念上的而不是实际上的. 但在行星运动的一个驰名的例子里，两

者的确有差异并有利于爱因斯坦的理论．这个例子就是所谓水星“近日点的进动”．这现象是，形状显著地是椭圆的水星轨道异常缓慢地在其自身的平面中转动着，或者说进动着，因而其长轴在每一整圈之末都沿着略为不同的方向．这一进动(大约每世纪 10 分弧）的大部分都可以按牛顿的引力定律用其他行星的干扰效应来理解①．但还留下一小小的、难解的残余转动，等于每世纪 43秒弧．用牛顿理论去解释它的各种企图——例如假设在水星自己的轨道里面有一未观察到的行星——都告失败，因为同有关太阳系的其他观测事实相矛盾．在另一方面，爱因斯坦的理论，毋需用任何备调整的参数，就能算出进动的速度，与观测结果完全一致．在效果上这相当于有一非常小的力存在着，这力与距离的关系不同于牛顿理论中占支配地位的 $1/r^2$ 力．这类干扰效应如何引起轨道的进动这一点将在第十三章中讨论．在爱因斯坦发展他的理论之前就有其他对基本引力定律的经验性修正——稍为偏离反平方定律——，但除了它们的任意特性之外，它们还导致对其他行星的错误预计．而在爱因斯坦的理论中，自动出现干扰项的大小正比于行星角速度的平方，因而对周期短的水星要比对任何其他行星重要得多．

## 习　题

8-1　有了开普勒第三定律应用于太阳系的知识，并知日轮对地球的张角约为$\frac{1}{2}^\circ$，试导出一个在圆形轨道上的假想行星掠过太阳表面的时间．

8-2　众所周知，四个内层行星和五个外层行星之间的空隙由小行星带占据，而不是由第十个行星占据．这小行星带延伸范围的轨道半径约从 2.5 到 3.0AU．试计算相应的周期范围，用地球年的倍数表示．

---

① 从地球上看，这运动的表观大小实际大约是每世纪 1.5°，但这里面大部分是由于地球自己的轴在不断地变更方向(岁差——见第十四章)之故．

8-3　计划放一个处于圆形轨道、周期为 2 小时的地球卫星.

(a) 这个卫星必须离地球表面多高?

(b) 如果它的轨道处于地球的赤道平面内，而且与地球的转动方向相同，问在赤道海平面的一给定地方能够连续地看到这颗卫星的时间有多长?

8-4　为了研究木星的大气低层中的著名"红斑"，把一个卫星放置在在绕木星的同步圆形轨道上. 这卫星将在木星表面上方多高的地方? 木星自转的周期为 9.9 小时，它的质量 $M_J$ 约为地球质量的 320 倍，半径 $R_J$ 约为地球半径的 11 倍. 你可能发现，方便的做法是先计算在木星表面处的引力加速度 $g_J$，表示为 $g$ 的倍数. 计算中要用到上述的 $M_J$ 和 $R_J$ 之值，然后用类似于正文中为地球卫星列出的关系式[(8-16)或(8-17)式].

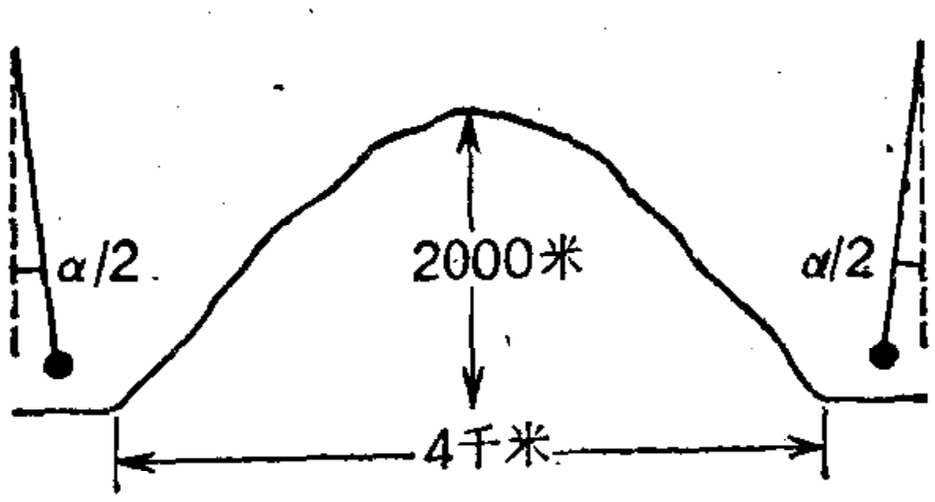
8-5　要把一个卫星放置于月球表面上方 10 公里高的圆形轨道上. 它的轨道速率必须多大? 转动周期为何?

8-6　要把一个卫星置于地球的同步圆形轨道上. 卫星的动力供应预期能维持 10 年. 如果在卫星的生存期内向东或向西的最大容许经度漂移为 10°，它的轨道半径的误差限度是多少?

8-7　在可缩回的圆珠笔中的弹簧的松弛长度约为 3 厘米，弹簧常数大概是 0.05 牛顿/米. 设想有两个各为 10,000 千克的铅球，放在无摩擦的面上，使得一个这样的弹簧在非压缩状态下刚好嵌入它们的最近两点之间. (a) 这两个球的引力吸引将使弹簧压缩多少? 铅的密度约 11,000 千克/米$^3$.

(b) 使这个体系在水平面内转动. 在什么转动频率下这两个质量之间的间距与弹簧的存在无关?

8-8　在 18 世纪，英国皇家天监纳维耳·马斯克林作了一个巧妙的尝试去求出地球的质量. 附图说明这方法的原理. 他观察了铅垂线被一座山的引力拉离其真实位置的程度. 在这座山的两侧之间测量了铅垂线方向的改变(通过瞄准恒星做到.)在考虑了地球的曲率所引起的当地竖直方向的改变之后，剩余的角度差 $\alpha$ 为 $2F_M/F_E$，其中 $\pm F_M$ 是山作用于铅锤的水平力，而




(习题 8-8)

$F_E=GM_Em/R_E^2$. （$m$是铅锤的质量.）

在一高约 2000 米的山底两侧测量到的 $\alpha$ 之值约为 10 秒弧. 假设这座山可近似地看成一锥形岩石（密度为水的 2.5 倍），它底部的半径等于它的高，它的质量可认为是集中在底部的中心. 试从这些数字推算出地球质量的近似值.（正确的答案是大约 $6\times10^{24}$ 千克.）试把这实验中的引力偏离 $\alpha$ 同与地球曲率关联的方向改变作一比较.

8-9 设想在海洋底部某一区域有一座粗略看是锥形的花岗岩小丘，高为 250 米，直径 1 千米. 周围的底部在各方向的数十公里内都比较平坦. 这区域的海洋深度为 5 千米，花岗岩的密度为 3000 千克/米$^3$. 这小丘的存在能被装备有一重差计的水面船只探测到吗？这重差计能探测到 $g$ 的改变到 0.1 毫伽.

（**提示**：设小丘在洋面上产生的场近似于位于底部周围平面、具有相同总质量的一质点的场. 注意在计算 $g$ 的改变时，你必须记住小丘排开了与它同体积的水. 即使在这样的深度，水的密度仍可以认为与其表面值差不多相等，约为 1000 千克/米$^3$.）

8-10 证明在接近于一球面的圆形轨道中运动的一个粒子的周期只与 $G$ 和球的平均密度有关. 对于平均密度等于水的密度的球，推算这周期之值是多少.（木星差不多与这情况相应.）

8-11 已知 $G$，地球年的长短，以及太阳的直径对地球的张角约为 0.55° 的事实，试计算太阳的平均密度.

8-12 一个在地球上能举起 50 千克的宇宙航行员，正在考察一个直径为 10 公里、密度为 3500 千克/米$^3$ 的小行星（近似于球状）.

(a) 假设他找到一个位置合适的把手，他能从小行星表面捡起多大的岩石？

(b) 这宇航员看到一块岩石从一悬崖上落下来. 岩石的半径只有 1 米，它接近表面时的速度为 1 米/秒. 他应当试图抓住它吗？（这显然是一个想象出来的问题. 纵使宇航员首先能到达那里，也不能期望小行星上有悬崖和松动的岩石.）

8-13 在正文中指出，当一个人是在一环绕着地球运行的卫星中时，他可以恰当地说是“失重”. 月球是一个卫星，但在许多论述中都说到，在那里我们只有正常重量的$\frac{1}{6}$. 这里有矛盾吗？

8-14 一位有献身精神的科学家从事于下列实验. 在一20层楼高的升降机井的底部安装一巨大的弹簧之后,他把升降机升至楼的顶部. 他带着一块停表,把自己安置在一密封的机箱内一浴室用的秤上, 持着便条纸和铅笔以记录秤上的读数, 并指令一位助手在 $t=0$ 时割断支持机箱的缆绳. 假定这科学家在第一次与弹簧相碰后还活着, 画出从 $t=0$ 直到第二次弹跳开始时他的重量测值对时间的关系的简图. (**注意**: 20层楼高是升降机获得收尾速度的充分距离.)

8-15 一质量为$M$的行星同一个质量为 $M/10$ 的卫星由互相间的引力吸引使它们保持在一起,并绕着它们的不动质心在一圆形轨道上转. 它们的中心之间的距离是 $D$.

(a) 这一轨道运动的周期多长?

(b) 在总的动能中,卫星所占比例多少?

(忽略行星和卫星绕它们自身的轴的任何自旋.)

8-16 我们考虑过绕地球的月球轨道问题,把地心看作一固定点而围绕着它在运动. 然而实际上地球和月球是绕着它们的共同质心在转的.

(a) 计算质心的位置,已知地球的质量是月球质量的81倍,它们的中心的距离是地球半径的60倍.

(b) 如果月球的质量与地球相比可以略去,一个月要长多少?

8-17 太阳显出是在绕着我们银河系的中心、以大约250公里/秒的速率沿一圆形轨道运动,轨道半径约为25,000光年(一光年$\simeq 10^{16}$米). 地球在一半径约为 $1.5\times10^{11}$ 米的近乎圆形的轨道上绕太阳一圈需1年. 这些事实对于使太阳保持在它的轨道上的相关总质量有什么意义? 求出这质量,用太阳质量$M$的倍数表示. (注意你无需引进$G$的数值来得到答案.)

8-18 (一个好的讨论题) 1747年,乔治·路易·勒萨盖用下列假设来解释引力的反平方定律: 大量看不见的粒子在所有方向上通过空间高速飞行. 太阳和行星这类物体挡住这些粒子,导致一种荫影效应, 与引力吸引的定量结果相同. 试考虑赞同和反对这个理论的论点.

(**建议**: 先考虑不透明物体完全挡住粒子的理论. 这一建议相当容易驳倒. 其次考虑另一种理论,其中物体使粒子变少的作用是不完全的或者甚至是非常小的. 这一理论很难不予考虑.)

8-19 太阳能量的连续输出相应于它的质量$M$的不断减少(根据爱因斯坦的关系 $E=Mc^2$),减少率约为 $4\times10^6$ 吨/秒. 这意味着行星的轨道周期要

逐渐增长，因为对于一个半径给定的轨道，$T\sim M^{-1/2}$[参看(8-23)式].

对这种效应作精确分析必须考虑到下列事实：当$M$减少时，轨道半径本身要增大——行星渐渐螺旋式地离开太阳．然而，假设 $r$ 保持恒定，我们就能得到这种效应大小的数量级估计，虽然稍为偏低．(较严格的处理见习题13-21.)

用 $r$ 恒定的假设，试估计在有精确天文观测的时期(约2500年)内，由于太阳质量减少而引起的、一年长短的近似增长．

8-20　在本章的末尾提到，爱因斯坦的引力理论在基本的牛顿引力之外导出一个小的修正项．对一个质量为 $m$、以速率 $v$ 在半径为 $r$ 的圆轨道中运行的行星，引力实际上变成：

$$F=\frac{GMm}{r^2}\left(1+6\frac{v^2}{c^2}\right)$$

其中 $c$ 是光速($v^2/c^2$ 阶的修正项是典型的相对论性效应.)

(a) 如果把在纯牛顿力 $GMm/r^2$ 作用下的周期表示为 $T_0$，证明修正的周期 $T$ 近似地由下式给出：

$$T\simeq T_0\left(1-\frac{12\pi^2r^2}{c^2T_0^2}\right)$$

(实际上这是把相对论性修正当做是代表 $G$ 值的一个小的分数增长来考虑，而用与牛顿轨道相应的 $v$ 值.)

(b) 从而证明：每转一圈，一行星在圆形轨道上所行经的角度要比在纯牛顿力作用下的角度约大 $24\pi^3r^2c^2T_0^2$，这也可以表成 $6\pi GM/c^2r$，其中 $M$ 为太阳的质量.

(c) 把这些结果应用于水星，并验证角度前进的累积总计约为每世纪43秒弧．这相应于所谓它的轨道的进动。

上帝…造物，包含运动和静止于其中，而…宇宙，按照他的旨意，保持着他最初所创造的运动和静止，不多也不少.

累纳·笛卡儿《哲学原理》(1644).

# 第九章　碰撞和守恒定律

在本章中我们将讨论一些在力学中居核心地位的概念和结果．它们立根于这样的事实，即至少要有两个粒子才能构成一动力学体系．迄今为止，我们对于这事实多少是掩盖了的，总是在说一些单个粒子如何受到种种力的作用．例如，一行星绕太阳的运动，或者一个电子在阴极的偏转极之间的运动，都是作为单个粒子受到一定的力的作用的问题来讨论，而这力则是由完全不能动的物体或结构提供的．但这是一个很特殊的看事物的方式，不能一般地证明其为正确．太阳拉一行星，给它一个加速度，但无疑，万有引力律并无偏爱——它具有完全对称的形式——行星也用相等相反的力回拉太阳．因而太阳也必然加速，并在所有行星的联合作用下走着某种路线．只是由于太阳比太阳系其余部分的质量大成百倍，我们才能在初步近似中忽略掉它的游移．但这只是一偶然的悬殊．基本动力学体系是由两个相互作用着的粒子构成的，两者的运动都必须予以考虑．通过碰撞过程，从实验上来研究这种体系，实际是动力学的真正起点．自从碰撞问题开始成为精确研究的课题以来，300 年间它从未失去在物理学中的重要性；因此让我们来细心地考虑它．

## §1　碰撞定律

1668 年伦敦皇家学会① 发布一项征求，要求从实验上把碰撞

① 这学会是在 1662 年正式获准成立的．（牛顿从 1703 年起直到逝世，一直是这学会的主席．）有几个较大的其他欧洲科学院在差不多同一时期成立．

现象弄清楚. 不久,约翰·瓦利斯(数学家),克里斯多夫厄·栾爵士(建筑师),和克里斯琴·惠更斯(物理学家, 牛顿同时代的伟大荷兰人)都对此作过贡献. 其成果包含我们今天熟悉的、关于在两物体之间的碰撞中动量和能量交换所应遵守的法则. 最为重要的是,它们同时包含了惯性质量的概念和线性动量的守恒原理.

这些实验表明, 在碰撞中起决定作用的量是牛顿称之为“运动的量”的东西, 它的定义是物体的速度同它所含物质的量的乘积——后者就是我们称为的惯性质量. 我们早就(在第六章中)讨论过牛顿关于质量的简单概念: 他不假思索地就假定两物体合并在一起时的总质量就是它们各别质量之和, 他又认为一均匀物质的不同大小部分的质量与它们的体积成正比是当然的. 从我们早先的讨论里,你当记得,这些假设,尽管似乎是合理的,但其正确性始终没有得到严格的证明.另一方面,应用这些假设于普通物体的动力学并未导致可觉察的不一致.牛顿以及与他同时代的人发现,如果这些常识性的概念被接受为质量关系的定量基础的话, 那么所有碰撞都可以非常简单地予以描述,这种描述的数学表示如下:

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2 \tag{9-1}$$

其中 $u_1$ 和 $u_2$ 是碰撞前的速度, 而 $v_1$ 和 $v_2$ 是碰撞后的速度(假设是一维运动). 这是一个非常有力的推广,因为它能应用于很不相同的各类碰撞——包括那些差不多是完全的反弹(象两玻璃球之间所发生的),直到那些根本不反弹(如两块布丁之间)的情形. 定性地说, 碰撞可用它们的弹性程度——即弹跳性——来描述. 一个定量的、然而是经验性的有关量度是 $v_2-v_1$(碰撞后的相对速度)与 $u_1-u_2$(碰撞前的相对速度)之比, 为牛顿及其他人所采用. 如果这比值为零,则称碰撞为完全非弹性碰撞. 如果这比值为一,则碰撞为弹性碰撞(有时, 为了更加鲜明一些, 称为“完全弹性碰撞”). 在这意义下, 一淬火过的钢球要比一橡皮球更有弹性. 在

早先的研究中，瓦利斯限于考察非弹性碰撞，栾和惠更斯则限于差不多是完全弹性的物体，而牛顿，在稍后，则另外做了一些其弹性介乎中间的物体的实验。

## §2 线动量的守恒

物理学者总是在寻找着物理过程中保持**守恒的**(即不变的)量．一旦他发现了这种量，它们就成为他用以分析问题的强有力的工具．开始时它们只是作为整理**过去**的经验的助力．但是当发现它们能够应用于在越来越多的事例时，它们的价值就大了起来，而人们开始借助于它们来作出有把握的**预见**．关于某一特定量的守恒说法就上升到**守恒定律**的地位．如果在某一新的事例中发现守恒律不对，人们对这定律可能是如此之信任反而从四周围去猜取补救的办法．果真找到了这种办法，守恒律就进一步得到加强．例如，在化学反应中，所有关于反应物质质量的可能测量都是以质量守恒定律为指导的．当化学平衡开始应用于研究化学反应时，人们发现，在某些过程中质量有所增加，在某些过程中有所减少，而在另一些过程中保持不变．但是当拉瓦锡通过各种事例证明质量只不过是**转移掉了**，而在一**封闭**系统中质量是**守恒的**时，整个图式就变得清楚了．于是，化学家就能利用这守恒律．例如，他们可以根据对固体和液体反应剂易做的测量有把握地推算出一气体生成物(从不封闭系统中跑掉)的质量．

关于守恒量的表述中包含着我们对宇宙的描绘的某些最有力的方面．在力学中，线动量守恒定律就是这种表述之一——我们甚至可以宣称它是动力学中唯一最重要的原理．它是直接以碰撞实验为基础的；这些结果概括于(9-1)式中．如果对一给定的粒子引进单独一个词，**动量**，来描写乘积 $mv$，我们就有一简洁的表述：

**两相碰撞粒子体系的总动量保持不变，即，总线动量是一个守恒量.**

关于两粒子碰撞的这一推广，其基础隐含着这样的假设：体系实际上是**孤立的**——粒子相互作用着，但不与任何其他东西相作用．在牛顿和其他人的实验中是这样做到这一点的：把要碰撞的物体悬在长线上，使它们象摆那样摆动，而在它们到达最低点时相碰．因此，在碰撞的那一短暂时间内，物体除了它们的相互作用外，实质上不受任何**水平力**的作用.

因为一物体所携有的动量，用牛顿的话来说，由“速度和物质的量联合地”确定——即由乘积 $mv$ 之值确定，而不是由 $m$ 和 $v$ 之值分开确定① ——所以引进一个单一的符号 $p$，来表示一质量 $m$ 沿一给定的线以速度 $v$ 运动的动量，较为方便．于是，

$$p_1+p_2=\text{常数} \tag{9-2}$$

这关系就描述了牛顿及其同时代人所研究过的那一类型的两体碰撞中的动量守恒.

## §3 动量矢量

到此为止我们的讨论是以一维碰撞为基础的．然而，重要的是要意识到——根据定义那是显然的——一粒子的动量是一个矢量，与粒子的速度同方向．因此，我们关于两物体碰撞时线动量守恒的表述实在应写为

$$\mathbf{p}_{1i}+\mathbf{p}_{2i}=\mathbf{p}_{1f}+\mathbf{p}_{2f} \tag{9-3}$$

其中下标 $i$ 和 $f$ 分别用来表明初始值和终了值(即碰撞前和碰撞后之值).

---

① 因而，举例说，一质量为 $\frac{1}{2}m$ 的物体以速度 $2v$ 运动着，与质量为 $m$ 的物体以速度 $v$ 运动着具有相同的动量.

这一单一矢量方程确定其中任何一个动量矢量的大小和方向，如果其他三个都是已知的话．极为常用的方便办法是把(9-3)式分为三个方程，分别用诸矢量沿三个相互正交的轴$(x, y, z)$的分量来表示．这些分量方程的每一个都必须分别得到满足．例如，如果质量为$m_1$和$m_2$的两物体，初始时和终了时的速度为$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$和$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$，(9-3)式成为

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \tag{9-4}$$

这包含下列三个**独立的**表述：

$$\begin{aligned} m_1u_{1x} + m_2u_{2x} &= m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \\ m_1u_{1y} + m_2u_{2y} &= m_1v_{1y} + m_2v_{2y} \\ m_1u_{1z} + m_2u_{2z} &= m_1v_{1z} + m_2v_{2z} \end{aligned} \tag{9-5}$$

在实际作数值计算时，这一矢量分解常常是必要的．但在涉及未规定的质量和速度的运算时，最好是用未分解的方程(9-3)或(9-4)，而不要以任何坐标系为参照．事实上这正是用矢量符号的真正得力(和经济)之处．

**例**．一质量为5千克的物体，沿水平方向在一无摩擦的表面上以16米/秒的速度运动，撞在一质量为3千克的物体上．碰撞后，测得5千克物体的速度大小为12米/秒，与原运动方向成30°

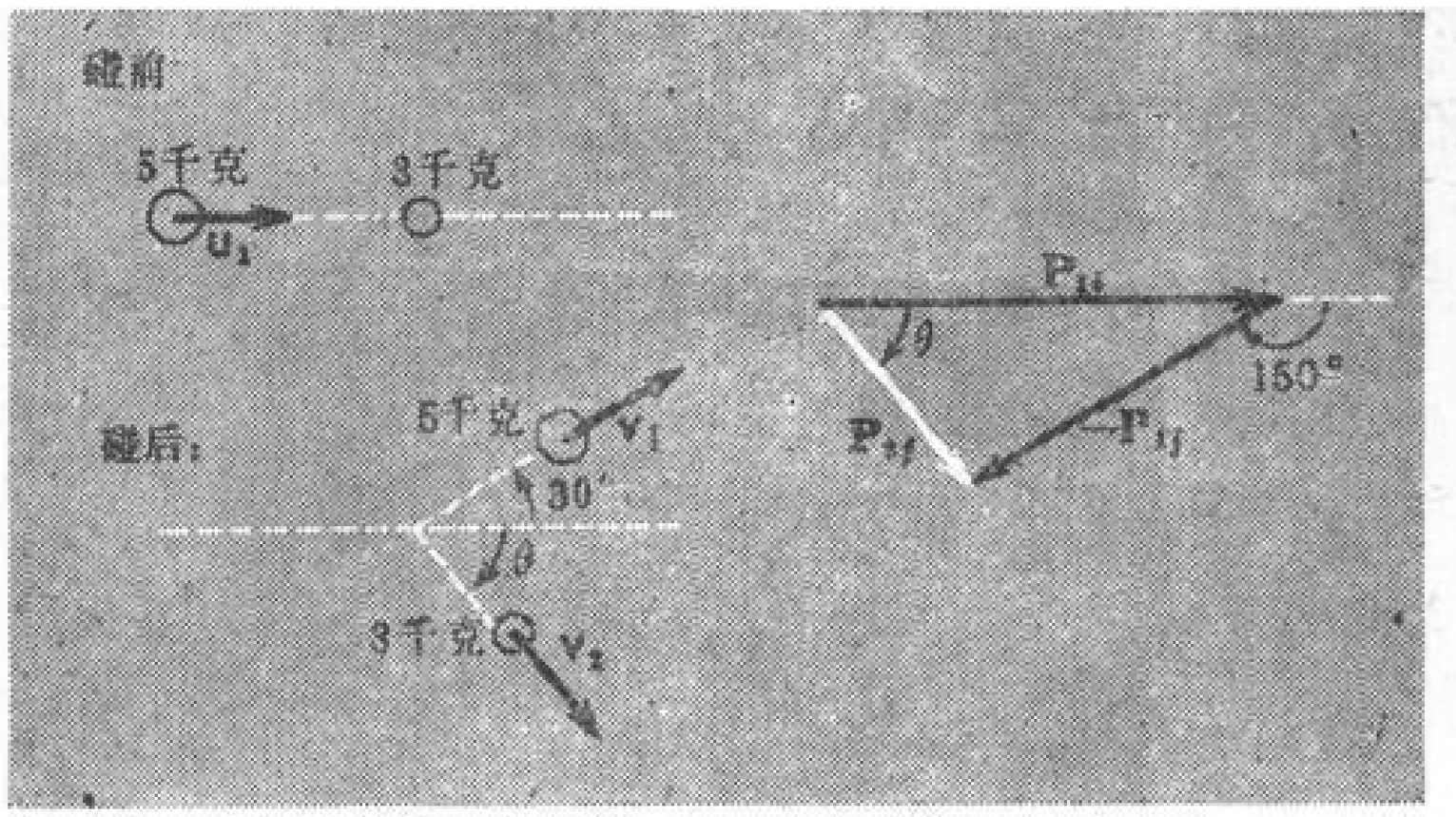



图 9-1　在一简单的碰撞情形中总动量矢量守恒．

角，如图 9-1 所示．问 3 千克物体的速度为何？我们可以选一 $xy$ 平面、把所有矢量包含于其中．令 $+x$ 轴沿 5 千克物体(粒子 1)开始时的运动方向．以 $\mathbf{p}_{1i}$ 表示 5 千克物体的初始动量，而 $\mathbf{p}_{1f}$ 和 $\mathbf{p}_{2f}$ 为终了时的动量．于是，有

$$\mathbf{p}_{1i}=\mathbf{p}_{1f}+\mathbf{p}_{2f} \qquad (\text{因 } \mathbf{p}_{2i}=0)$$

$$\mathbf{p}_{2f}=\mathbf{p}_{1i}-\mathbf{p}_{1f}=\mathbf{p}_{1i}-(-\mathbf{p}_{1f})$$

图 9-1 说明如何通过矢量作图求出 $\mathbf{p}_{2f}$．$\mathbf{p}_{1i}$ 的长度，按某适当的尺度，代表初始动量 80 千克·米/秒．$-\mathbf{p}_{1f}$ 的长度是 60 千克·米/秒，方向如图所示．$\mathbf{p}_{2f}$ 的长度可以直接从矢量三角形求出，而 $\mathbf{v}_{2f}$ 则等于 $\mathbf{p}_{2f}/m_2$．

另一法是把动量守恒用分量式写出．首先，我们列出已知量：

$$m_1=5\text{ 千克} \qquad m_2=3\text{ 千克}$$

$$u_{1x}=16\text{ 米/秒} \qquad u_{2x}=0$$

$$u_{1y}=0 \qquad u_{2y}=0$$

$$v_{1x}=6\sqrt{3}\text{ 米/秒}$$

$$v_{1y}=6\text{ 米/秒}$$

于是[用(9-5)式]有

沿 $x$：$80=30\sqrt{3}+3v_{2x}$

沿 $y$：$0=\quad 30+3v_{2y}$

因而

$$v_{2x}=(80-30\sqrt{3})/3\approx 9.3\text{ 米/秒}$$

$$v_{2y}=-10.0\text{ 米/秒}$$

$$v_2=[(9.3)^2+(10.0)^2]^{1/2}\approx 13.6\text{ 米/秒}$$

$\mathbf{v}_2$ 的方向与 $x$ 轴成 $\theta$ 角，使

$$\tan\theta=\frac{v_{2y}}{v_{2x}}=-\frac{10.0}{9.3}$$

$$\theta\approx -47^\circ$$

注意这一结果是只通过动量守恒得到的，它不需要关于物体间相互作用的详细知识. 但是，把各个物体的动量变化同碰撞时作用于它们的力联系起来将是我们下一步所关心的问题.

## §4 作用、反作用和冲量

我们开始时的讨论将沿着牛顿本人所采取的分析路子进行. 稍后我们再转而注意一个略为不同的方法，它更便于适应相对论动力学，而在经典力学范围内又与牛顿的分析相协调.

牛顿是从这样的观点来解释碰撞实验的：惯性质量的概念已经根据实验和象我们在第六章中所用的那些论证建立了. 在那种情形下，(9-4)式就是实际实验观测的总结；“运动的量”是守恒的. 于是我们可以用 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 来对碰撞时的作用力作出结论. 碰撞是包含两个物体的一种过程，每一物体都施加一力于另一物体. 物体 1 施一力 $\mathbf{F}_{12}$ 于物体 2；物体 2 也施一力 $\mathbf{F}_{21}$ 于物体 1 (图 9-2). 对这两个力之间的关系，除去它们是在同一时间作用外，我们不作任何假设. 在同一时间作用这假设当然是合理的，因为我们认识到，力是由于碰撞而存在的，而碰撞时间的长短对两物体必然一样.① 我们可以分别对每一物体应用 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$：

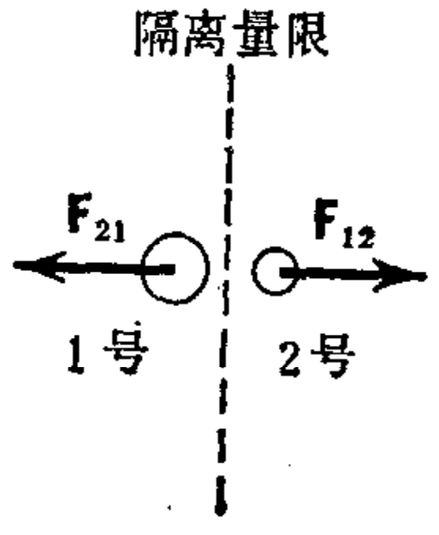



图 9-2 根据动量守恒的事实，推断作用力与反作用力相等.

$$\mathbf{F}_{21}=m_1\mathbf{a}_1 \qquad \mathbf{F}_{12}=m_2\mathbf{a}_2$$

即

① 然而这是那些直观上“显然”的情况的另一例子，并无约束力，事实上在那些需要用到狭义相对论的某些碰撞问题中这是要加以审核的.

$$\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1}\qquad\qquad \mathbf{a}_2=\frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2}\tag{9-6}$$

为了简化目下的这一论证，假定在整个碰撞持续的时间 $\Delta t$ 内，每一个力都保持不变．这样就有

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{u}_1+\frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1}\Delta t\qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{u}_2+\frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2}\Delta t\tag{9-7}$$

其中 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 是两物体的初速度，$\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是它们的终了速度．从这些方程，有

$$m_1\mathbf{v}_1=m_1\mathbf{u}_1+\mathbf{F}_{21}\Delta t$$

$$m_2\mathbf{v}_2=m_2\mathbf{u}_2+\mathbf{F}_{12}\Delta t$$

把两者加起来，得

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_1\mathbf{u}_1+m_2\mathbf{u}_2+(\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{12})\Delta t\tag{9-8}$$

但是，**根据实验**，有(9-4)式．因此我们**推得**

$$\mathbf{F}_{21}+\mathbf{F}_{12}=0$$

即

$$\mathbf{F}_{21}=-\mathbf{F}_{12}\tag{9-9}$$

这当然就是有名的牛顿第三定律的表述：“作用与反作用大小相等、方向相反．”

我们早就在本书的前面部分广泛地用过这一结果(隐含地或明显地)，而在第四章中我们指出过在静力平衡情况下所能提供的那种对此结果的实验支持．牛顿在把这结果发展到力随着时间变更的动力学情况时就说得很清楚，它是把(9-9)式看作是从观测结果得到的推论．在《原理》中他描述了一个实验：把一磁铁和一铁片浮在水上，并从静止状态释放它们．他注意到，在磁力的吸引把它们拉到一起之后，合并的质量没有运动．他用这来证明他所称的第三定律．他关于用摆作碰撞实验的描述(也在《原理》中)用了同样的术语．

引进这些相互作用力，我们现在可以把它们同碰撞中各个物

体的动量变化联系起来. 如果碰撞的持续时间是 $\Delta t$ 而 $\mathbf{F}_{21}$ 是粒子 2 作用于粒子 1 的恒定力, 则粒子 1 在碰撞中的动量变化是

$$\mathbf{F}_{21}\Delta t = \Delta \mathbf{p}_1$$

更普遍一些, 任何恒定力 $\mathbf{F}$ 在一短时间间隔 $\Delta t$ 内作用于一粒子, 它所产生的动量变化由下式给出:

$$\mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{p}$$

如我们在第六章中指出过的, 牛顿自己就是以这方程为基础, 而不是以 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$, 来发展动力学的. 我们还引进过专门名词, 把乘积 $\mathbf{F}\Delta t$ 称作在 $\Delta t$ 中力的**冲量**. 如果在其作用时间 $\Delta t$ 内 $\mathbf{F}$ 的大小和(或)方向是变的, 我们可以取极限 $\Delta t \to 0$ 而得下列方程:

(牛顿定律的再表述)　　$$\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad (9\text{-}10)$$

**根据 $\mathbf{F}$ 是作用在一粒子上的总力这假设写出的这方程于是成为牛顿动力学的基本表述.** 它在一定意义下比 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 的应用范围要广, 至少是它的一个更有效的表述. 例如, 一给定的力依次作用于几个质量不同的物体, 产生相同的动量变化但不相同的加速度. 简言之, 我们认识到, 动量凭它本身就**单独**是一个有价值的量, 而最重要的是它的这一性质: 在相互作用着的粒子所构成的孤立体系中它是**守恒的**.

在我们早先讨论的碰撞问题中, 我们把相互作用力看作不随时间而变的. 在大多数情形中, 这是很不现实的. 然而易见, 通过对(9-10)式求积分, 我们得到一变化的力所产生的总动量变化. 于此, 举例说, 如果一个力在 $t=0$ 和 $t=\Delta t$ 之间有某种任意变化, 它所产生的动量改变是

$$\Delta \mathbf{p}=\int_0^{\Delta t}\mathbf{F}dt \qquad (9\text{-}11)$$

在持续时间为 $\Delta t$ 的两体碰撞中, 我们实际所能观察到的只是: 碰撞后的总动量等于碰撞前的总动量. 按给予分开的物体的

冲量$\Delta \mathbf{p}_1$和$\Delta \mathbf{p}_2$来说，这一结果表示为下列条件：

$$\Delta \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_2 = 0$$

由此我们推断

$$\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{21} dt = -\int_0^{\Delta t} \mathbf{F}_{12} dt$$

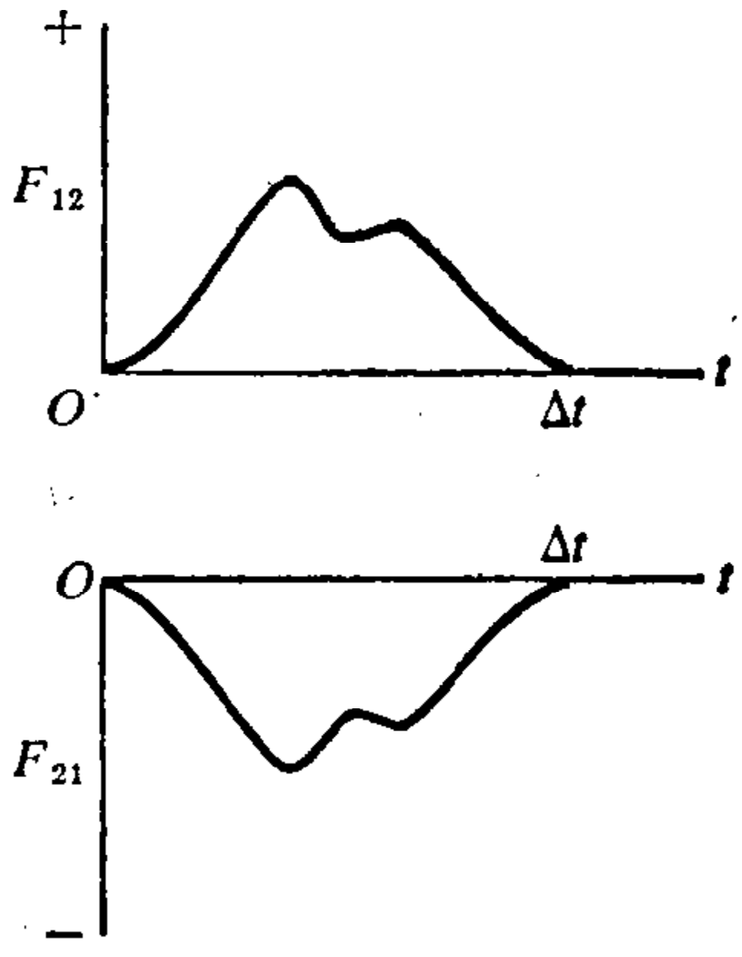



图 9-3　在碰撞过程中作用与反作用力的对应变化.

原则上，$\mathbf{F}_{12}$和$\mathbf{F}_{21}$在任何时刻都可以具有毫不相关的值，只要上述积分相等即可.但是，既然没有任何证据说明相反的情况，我们就假设它们在每一瞬间都是相等相反的.于是，在一维碰撞中，这些力作为时间的函数的图形，不管它们的精确形状如何，总是象图9-3所示的那样互成镜象.然而重要的是要认识到这是一个假设.并非总是真的如此：只要所考虑的是普通物体的“接触”碰撞，就不存在什么困难.但在物体相隔一距离而互相影响时(例如通过电的或引力等长程力)，牛顿第三定律也许不适用.因为没有相互作用是立刻传到的，而如果传播时间与运动时间相比不能忽略的话，瞬时作用与反作用的概念就不再能用了.在图9-4中提示了一个说

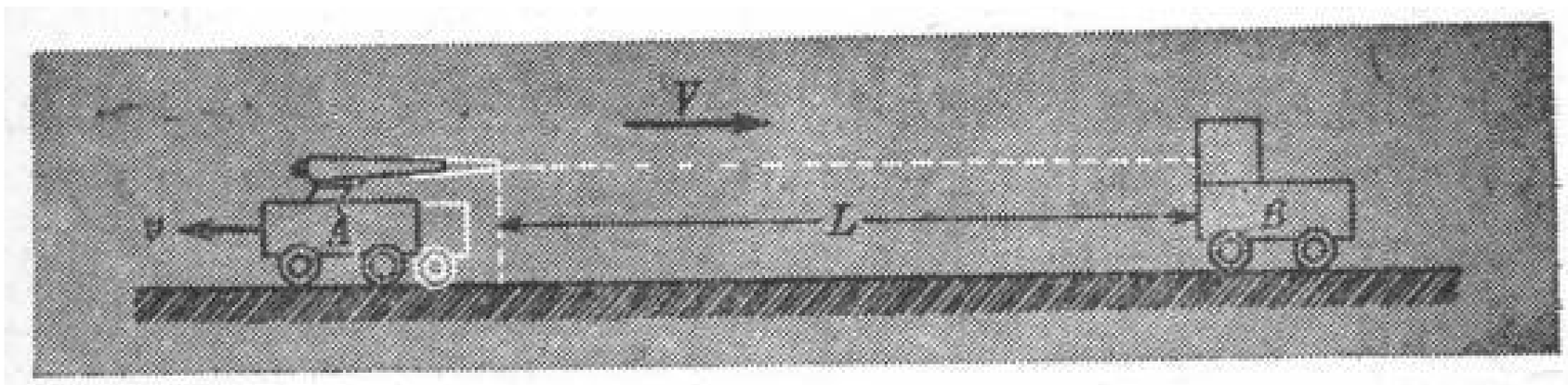



图 9-4　一时间延迟的相互作用，由一群飞过两分开的物体之间的间隙的粒子作媒介.

明这种延迟相互作用的简单机械模型.一辆车，$A$，携带着一尊炮，射出一连串速率为$V$的子弹.在离开它距离为$L$的地方有第

二辆车，$B$，载有一受到子弹射击的木块．假定子弹的动量很大，则因$V$值大，子弹很轻，因而从第一辆车传输给第二辆车的质量可忽略不计．再假定站在一定距离之外的观察者看不见这些子弹．(比如说，我们把它们做得很小，或者将它们涂黑并设置一黑暗背景．)于是，当一阵短促的射击从$A$发出时，我们看到这辆车开始由于反冲而后退，表面看是自发的，而$B$则保持静止．要等到经过时间$L/V$以后，$B$才开始在相反方向反冲．在这种情形下，作用与反作用相等实际上是不成立的．在整个相互作用已经完成，而所有子弹都被$B$吸收时，我们才知道动量最终是守恒的．但如果我们的注意限于两辆车，那么在相互作用的持续过程中，动量并非每时每刻都守恒的．

上述例子看起来似乎有点人为，因为，不管怎样，只要我们趋近一些去看，观察子弹离开$A$的瞬间或打在$B$上的瞬间，就可以保住作用-反作用原理．然而，这例子却提供了一个有趣的情况，类似于也许是最重要的延迟相互作用——电磁相互作用．我们知道，两个分开的电荷是通过电磁场产生相互作用的，而这种场的传播速率，虽然极大，仍是有限的——光速$c$．动量从一个电荷给另一个电荷的传递(比如说，由于第一个电荷的突然运动引起的)包含一时间差，这时间差等于两电荷之间的距离被$c$除．如果我们只注意带电粒子，我们将会看到第一个电荷的动量突然改变，而在同一时刻第二个电荷的动量并没有一个等值反向的改变①．因此，动量每时每刻都守恒这一点显出是失败的，除非我们把携带相互作用的电磁场与某种动量联系起来．而这正是电磁理论所提出的．当我们引入电磁场的量子化，并认识到辐射是以光子、或光量子的

---

① 在这种效应显得重要的情况下，“同一时刻”——即同时性——这概念本身就成问题．正是在这一点上牛顿力学本身不再是适当的，而按狭义相对论修正过的动力学就成为必要的了．

形式传送时，这图象就甚至更为生动．当我们把动量和能量赋予每一单个光子时，我们就显著地接近于上述经典模型．甚至有一个发展得很好的理论，把电荷之间的静态相互作用用不断交换“虚光子”来描绘．不过，在这一情形中，由于力不随时间而变，作用与反作用相等在每一瞬时都成立，相互作用的传播需要一有限时间就变得不明显了．

## §5 动量守恒原理的推广①

也许值得把上节的论述略加引伸．我们已看到，按牛顿的观点，动量守恒定律是如何紧密地与作用-反作用的概念连在一起的．但是，还有另一种处理简单碰撞的方式，把这种联系变松，以便于过渡到非牛顿力学．

这方式可以用一问题来明确：在一个碰撞实验中我们真正观察到的究竟是什么呢？答案是：我们的观察是纯运动学的——测量两物体碰撞前后的速度．假定两物体，$A$ 和 $B$，起始时速度分别为 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$，相碰撞后具有速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$．在任何单独的这类碰撞中，总是可能找到一组四个标量乘数($\alpha$)，使我们能够写出一个如下的方程：

$$\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2=\alpha_3\mathbf{v}_1+\alpha_4\mathbf{v}_2 \tag{9-12}$$

就这式子看，它是不怎么使人感兴趣的．但对各种各样的 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 之值所作的实验，却显示出值得注意的结果：对于给定的两物体的一个这种碰撞，我们可以通过令 $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_A$（$A$ 的一个标量性质）和 $\alpha_2=\alpha_4=\alpha_B$（$B$ 的一个相应标量性质），得到一个矢量恒等式．换言之，对一碰撞过程的纯运动学观测，容许我们对每一物体引进一唯一的动力学性质．注意，如果所牵涉到的任何一个速度变得可

① 这一节可删去而无损于连贯性，但如果你想看一下经典力学的基础如何可以通过不同的途径达到，我们就把它推荐给你．

与光速比拟时，这一简单情形就不成立了．在那种情形下，仍可按(9-12)式的形式构成一矢量平衡方程，但诸参数 $\alpha$ 必须是速率的显函数．事实上我们得到的是质量随速率而变的相对论公式[(6-3)式]①．

现在回到低速碰撞实验的结果．这些结果的基本表述是：在任何两给定物体的碰撞中，一个物体的速度变化与另一物体的速度变化之比总是一负的常数：

$$\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2=-\text{常数}(\mathbf{v}_1-\mathbf{u}_1) \tag{9-13}$$

正是由于发现这速度变化的比值表现为同一数值，而不论物体之间相互作用的类型、强度或持续时间为何，我们才推断这比值一定反映着物体本身某种内在的特性的量度．我们把这性质**定义**为惯性质量．

我们可以对一组多个物体 1，2，3，…建立一惯性质量量标，方法是逐对地求出在相互作用中的速度变化以确定惯性质量比，比如说物体 1 和 2 的

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{|\Delta\mathbf{v}|_1}{|\Delta\mathbf{v}|_2}$$

类似地，对物体 1 和 3

$$\frac{m_3}{m_1}=\frac{|\Delta\mathbf{v}'|_1}{|\Delta\mathbf{v}'|_3}$$

以此类推．如果 $m_1$ 是标准千克，我们就有了一个规程去确定任何其他物体的惯性质量．但是，我们还要做一些事．如果我们让物体 2 和 3 互相作用，则比值

$$\frac{m_3}{m_2}=\frac{|\Delta\mathbf{v}''|_2}{|\Delta\mathbf{v}''|_3}$$

必须与先前两次测量所得的同一比值相符．事实上确是如此，而正是这一实验的内在一致性使我们能用 $m_2$，$m_3$，…作为相应物体

① 进一步的讨论见本丛书的狭义相对论卷．

的惯性质量的量度.

用这种方法建立起惯性质量的相一致的量度之后，我们就可以把(9-13)式重写为

$$\frac{\mathbf{v}_1-\mathbf{u}_1}{\mathbf{v}_2-\mathbf{u}_2}=-\frac{m_2}{m_1} \tag{9-14}$$

整理一下，得

$$m_1\mathbf{u}_1+m_2\mathbf{u}_2=m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2 \tag{9-15}$$

这样就出现一个与通常动量守恒关系形式完全相同的方程，但要注意它是如何不同于牛顿式的分析的. 我们用了碰撞过程本身，通过(9-13)式来定义质量比. 一旦完成这一点，(9-15)式中的各项就**自动地**加成碰撞前后相同的总和.

事实上，我们这里所做的是给予动量守恒以首要地位. 作用和反作用是否相等的问题根本不发生. 这可能是很有价值的. 因此当我们遇到非-牛顿的相互作用(即，作用与反作用并**非**每时每刻都是等值反向的力)时，我们面对的问题是如何把它们纳入物理学中——是废弃动量守恒定律的受限制的形式呢，还是引伸动量的概念而保存这守恒律. 动量守恒原理已证明是如此之异常有力，所以人们选择了后一条路，而线动量守恒就成了相对论动力学的一个中心部分.

这种对碰撞过程基本结果的分析方法展示了运动学与动力学之间存在着的非常密切的关系. 如果我们改变对空间、时间与运动的描绘，可以预期，我们的动力学也一定要改变. 事实上这正是我们从伽利略和牛顿的运动学过渡到爱因斯坦的狭义相对论的运动学的情况.

## §6 粒子流的作用力

一粒子流或流体对一固体表面的撞击提供一有启发性的、应

用碰撞定律和线动量守恒律的情况. 假定有一粒子流，每一粒子的质量为 $m$, 速率为 $v$，打在一块质量 $M$ 上[图 9-5(a)], 而且所有粒子都打了进去. 设粒子通过一假想的、与粒子流垂直的固定平面的速率(即每秒通过的数目)为 $R$.

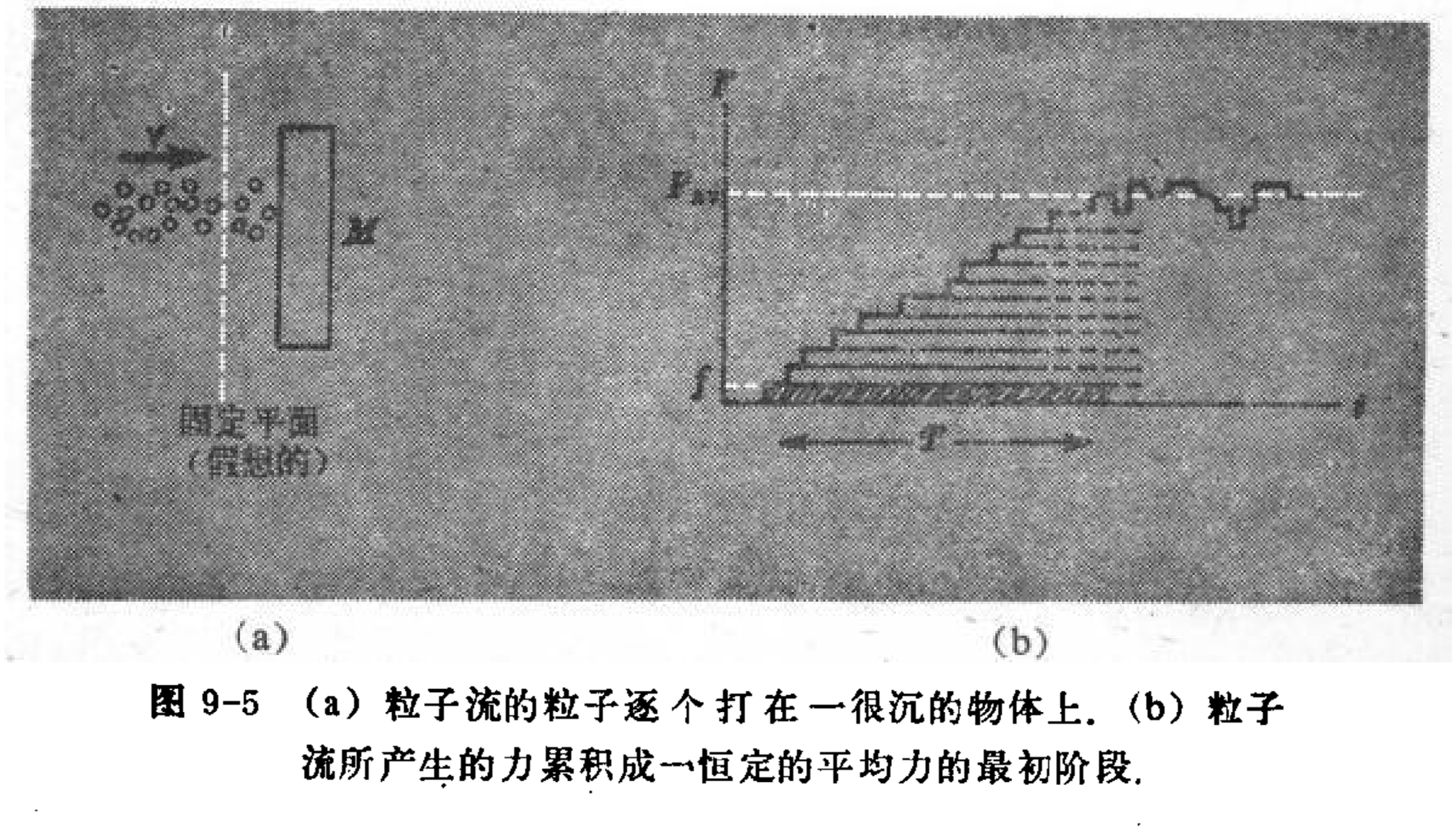



图 9-5 (a) 粒子流的粒子逐个打在一很沉的物体上. (b) 粒子流所产生的力累积成一恒定的平均力的最初阶段.

我们知道, 动量一定守恒，但如果物块异常之沉, 我们在观察这过程时可能得到这样的印象：粒子所带来的动量简直就是被消灭了, 因为物块获得的速度小到看不出来. 假定, 举例说, 当第一个粒子打在物块上时，物块是静止的. 在一段短时间 $\Delta t$ 之末, 已到达的粒子数是 $R\Delta t$，每一个粒子所传送的动量是 $mv$. 如果在这瞬间切断粒子流, 那么这物块连同粒子一起, 将继续以某一恒定速度 $u$ 运动(我们假设这物块至少在水平方向上的运动不受任何约束). 按线动量和质量守恒, 有

$$Rmv\Delta t = (M + \Delta M)u$$

其中

$$\Delta M = Rm\Delta t$$

令 $\Delta t$ 趋于零，我们得到两个方程，一个描写物块的加速度, 一个描写它的质量增长率:

$$\frac{du}{dt}=\frac{Rmv}{M} \tag{9-16}$$

$$\frac{dM}{dt}=Rm=\mu \tag{9-17}$$

其中我们引进了单一符号 $\mu$ 来表示粒子流输运质量的平均速率. 很清楚，如果$M$足够大，物块将保持不动；它的位移和它速度的增量在一定时间内可以继续忽略不计①. 但无论如何，只要物块在某一时刻是静止的，作用于它的力就必须等于 $Mdu/dt$. 因而，由(9-16)式, 有

$$F=M\frac{du}{dt}=Rmv=\mu v \tag{9-18}$$

可见一粒子流打击一静止表面时，它施加于面上的平均力由(9-18)式给出. “平均”这个词应予以强调. 我们的计算把粒子流当作真正是连续的，表现在计算$F$时令 $\Delta t\to 0$. 但这是一纯粹的数学步骤，并不符合物理的实在. 作用力是由单个分开的粒子的碰撞产生的, 当时间够短时，我们是可能发现这一点的. 在图 9-5(b)中, 我们试以下述非常简单的模型为基础，把这种观察的假想结果描绘出来. 假定每一单个粒子打到表面上时，经受一匀减速度使它在时间$T$内静止下来. 在这时间里，它一定受到一个力 $f$,

$$f=\frac{mv}{T}$$

如果把由于一个粒子到达而产生的、作用于物块上的力作为 $t$ 的函数画出来, 那将是一高为 $f$ 、宽为$T$ 的矩形, 如图 9-5(b)中小阴影面积所示, 这力会在某一时刻突然出现, 而在经过一时间$T$后又会突然降到零. 假定我们现在来看, 在第一次开放粒子束(例如把原先挡住粒子束不让它到达物块的启闭器打开)之后, 在时间的过

① (9-16)和(9-17) 式的正确性实际上依赖于这一条件. 如果物块有一速率 $u$, 则单位时间内打到它上面的粒子数从 $R$ 减少到 $R(1-u/v)$, 而 $du/dt$ 和 $dM/dt$ 之值要相应地减小.

程中,发生什么情况.当粒子相继到达时,每一个都对总的力加上它的一份贡献,因而总的力以不规则的阶跃形式增加着. 然而,在第一个粒子到达的一个$T$时间之后,这粒子对总力的贡献就会消失.此后,总力就再不会有净增加了, 因为按平均说,每当新粒子出现时, 早先那些粒子的作用也同时消失. 总力因此稳定于某一平均值$F$附近, 但将呈现统计性涨落. 如果单个粒子的作用在时间上有一定的重叠,如图所示,则总力差不多是不变的. 这相应于使相继到达的粒子之间的平均时间间隔比单个粒子静止下来所需时间短得多.

我们可以用上述微观图象来计算总力$F$. 它等于一个粒子的力乘上在任何一瞬间的有效粒子数. 这数等于在一次减速时间$T$内到达的总粒子数. [图 9-5(b)应能使这一点明白.]因单位时间内到达的粒子数为$R$,所以这数目是$RT$. 因此有

$$F_{平均}=(RT)f=RT\frac{mv}{T}$$

即

$$F=Rmv$$

与前一样.

值得注意, 粒子束作用于板(因而也是板作用于粒子束)的平均力与每一粒子减速度的实际大小完全无关. 这平均力就简单地等于粒子束的动量改变率.

这一粒子流的作用力曾被 W. 泡利和 G. 韦瑟利用来测一束银原子的平均速率.①一束原子, 从一"炉"中蒸发出来, 朝下向着一架非常灵敏的天平的盘上奔去. 作用于天平盘上的力因此由两部分组成: 一稳定的力, 如(9-18)式所给出的, 和一个随时间而线性地增加的力, 来自(9-17)式所给出的质量增长(见图 9-6):

① W. Pauli and G. Wessel, Z. Phys. 124, 691(1948).

$$F_{总}=\mu v+\mu g t$$

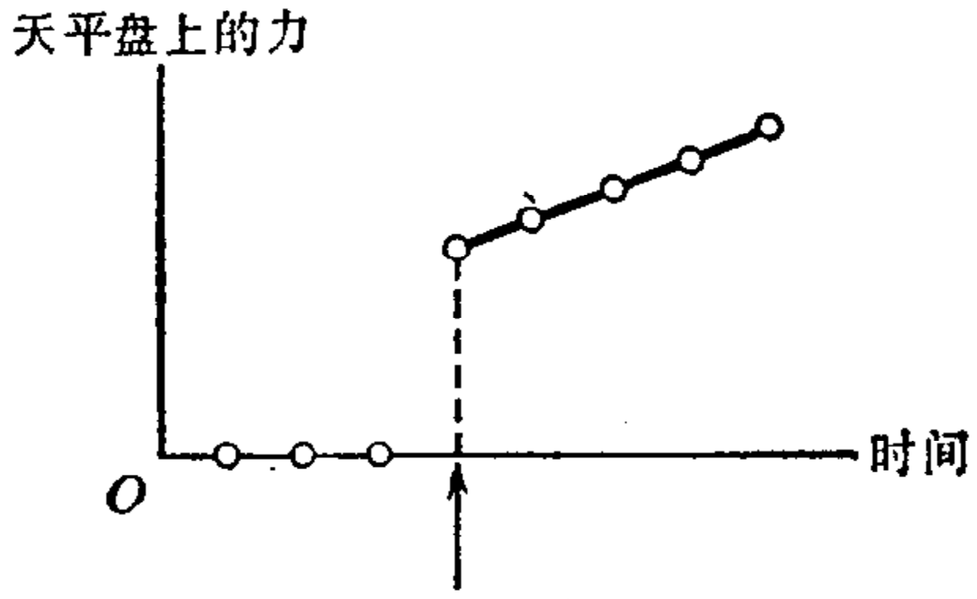



图 9-6　由于一束粒子打在一物体上而传输的动量和重量所产生的总的力与时间的依赖关系.

这里所牵涉到的力相当于几微克重量. 对于温度为 1363°K(=1090°C) 的炉子, 实验值近似地如下:

$$\mu v=3.4\times10^{-7}\text{ 牛顿}$$

$$\mu=5.6\times10^{-10}\text{ 千克/秒}$$

由此导出, 在 1363°K 下, 银原子的平均速率 $v$ 之值为

$$v\approx600\text{ 米/秒}$$

## §7　流体喷射器的反作用力

正如一粒子流碰撞到一表面上会产生一推力那样, 这种粒子流也必然施一反作力于最初产生它并给它以动量的系统. 在标准的液体或气体喷射器中, 粒子流的基本颗粒性由于太小而很难注意到, 因而任何这种喷射装置都显出受到一个稳定的反作用力, 如(9-18)式所给出的. 因此, 如果我们设想, 比如说, 在一火箭发动机的工作台试验中把发动机固定于一刚性结构上, 则燃烧着的燃料将以速率 $v_0$ 向后射出如图 9-7(a), 而作用于火箭的前向推力 $P$ 由下式给出:

$$P=\mu v_0$$

在庭园喷洒设施、消防水龙等方面, 我们看到同样的原理在起作

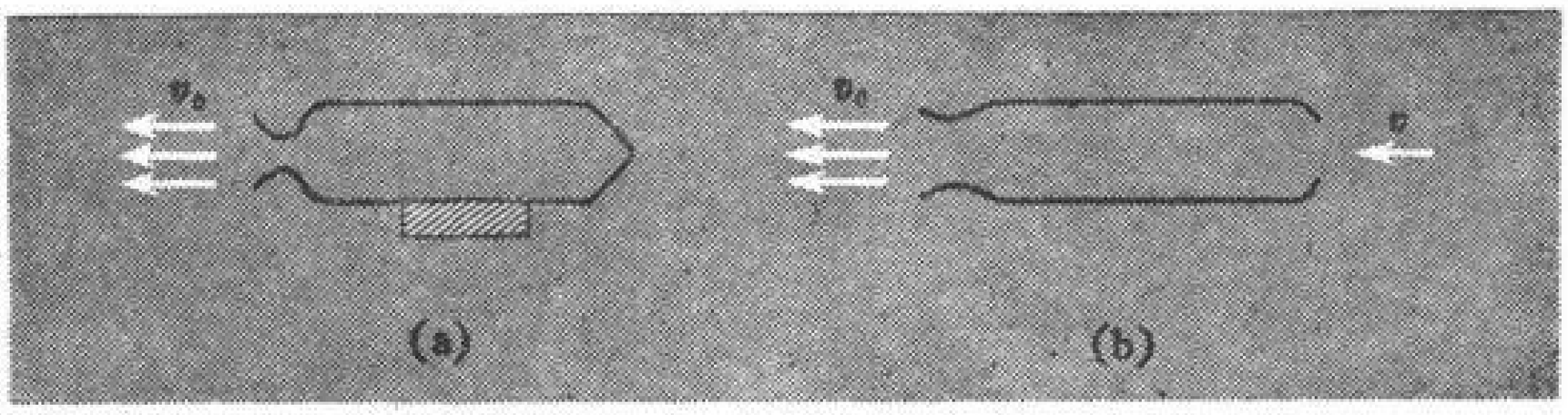



图 9-7　试验台装置的示意图：(a) 一火箭发动机，(b) 一喷气发动机，从前方吸入空气.

用，只是规模较小.

一架飞机的喷气发动机表现出这些动力学结果的稍为复杂一些的应用. 在这一情形中，从发动机前面进入并从它后端作为废气排出的空气，在整个动量传输过程中都起着重要作用. 飞机所携带的燃料的主要功用是给射出的气体以高速(相对于机身)，而大部分运动质量则由空气提供. 从发动机在其中是瞬时静止的参照系来分析，这一体系的动力学最为方便. 如果飞机以速度 $v$ 向前飞行，空气看起来就是以等值反向的速度从前面进入发动机，如图 9-7(b)所示. 于是，在后部，所有射出的物质都在这参照系中有一向后的速度 $v_0$. 因而，如果空气以每秒 $\mu_{空}$ 千克的速率通过发动机，而燃料以每秒 $\mu_{燃}$ 千克的速率燃烧着，则总的动量变化率确定一作用于发动机的向前总推力:

$$P=\mu_{燃}v_0+\mu_{空}(v_0-v) \tag{9-19}$$

**例.** 一喷气式飞机以每秒 250 米的速率飞行. 它的每架发动机每秒吸入空气 100 米$^3$，在飞行的高度上这相当于每秒 50 千克空气. 这空气用来燃烧燃料，每秒 3 千克. 全部气体以 500 米/秒的速率从燃烧室里喷射出来. 问每一发动机的推力是多少？把各数值直接代入(9-19)式中，有

$$P=3\times500+50(500-250)$$

$$=1.4\times10^4 \text{ 牛顿}$$

因此，四架这种类型的发动机将会产生大约为 12,000 磅的总驱动

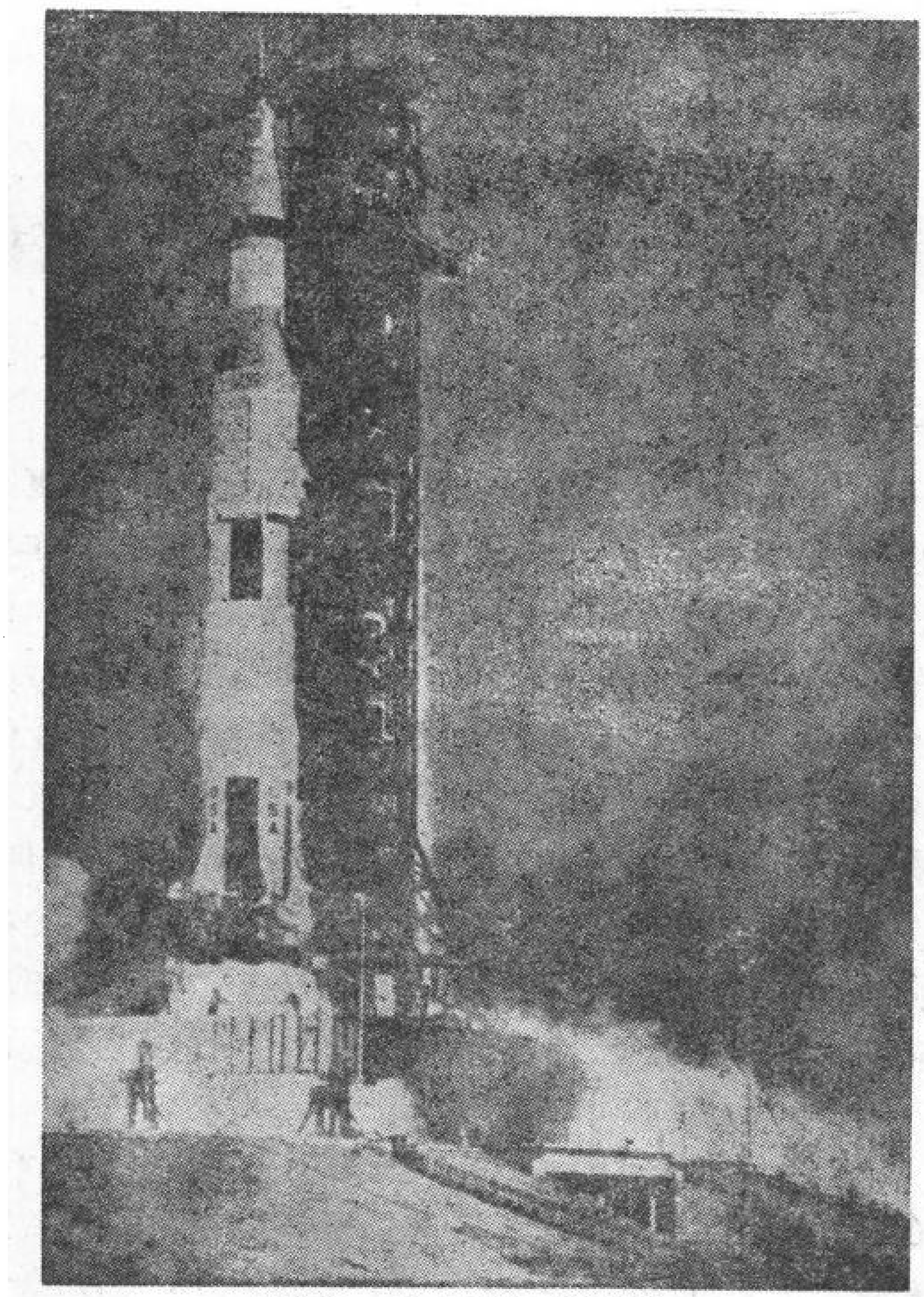


图 9-8　一枚土星 V 火箭的发射.

力，——接近于真实的数字.

这种反作用力的最为壮观的表现，至少在人类所制造的系统中，当推在肯尼迪角发射的火箭发动机的起始推力. 以下是根据关于土星 *V* 系统的第一级所发表的数据列出的近似数字.①

① NASA Facts [国家航空和宇宙航行局（美国）实况]: Space Launch Vehicles (太空运载火箭).

| | | |
|---|---|---|
| 燃烧率 | 15 吨/秒 | $=1.4\times10^4$ 千克/秒 |
| 总推力 | $7.6\times10^6$ 磅 | $=3.4\times10^7$ 牛顿 |
| 起飞时总质量 | 3100 吨 | $=2.8\times10^6$ 千克 |
| 燃烧时间 | 2.5 分钟 | $=150$ 秒 |

从这些数据可以推算出喷射出来的气体的速率大约是2500米/秒，而初始加速度是2米/秒$^2$．（要记得，在垂直起飞中首先必须克服作用于火箭上向下的引力拉力！）在第一级燃烧的末尾，已消耗掉大约 2250 吨燃料，这时的总质量大约下降到初始值的四分之一．对加速过程本身(不断失去质量)的分析是下一节的主题．

## §8 火箭推进

这在近年来已成为一个非常庞大的题目，因此很清楚，我们只能触及其基本动力学原理．对于任何实质性的讨论，读者应向别处寻觅．①但是实际上仍然是，任何火箭的运转都靠动量守恒的基本规律，把它应用于由火箭和它喷出的燃料所构成的体系．为简单起见，我们考虑火箭在一外层空间区域中的运动，那里的重力效应足够小，在一级近似中可略去．在这一假设下，唯一作用于火箭体的力来自喷出的燃料的推力．假定燃烧过的燃料相对于火箭的速率为 $v_0$．在时间 $t$ 和时间 $t+\Delta t$ 之间烧掉燃料为 $\Delta m$，它离开了火箭．喷射前后的情况由图 9-9示明，其中 $m$ 是火箭加上它在 $t+\Delta t$ 时刻剩下的燃料的总质量，$v$ 是它在 $t$ 时刻的速度．

燃料喷射是一种反过来的非弹性碰撞，因为起初质量 $m$ 和 $\Delta m$ 具有相同的速度．按动量守恒，有

---

① 例如，M. Barrère et al., *Rocket Propulsion*, Elsevier, Amsterdam, 1960; S. L. Bragg, *Rocket Engines*, Geo. Newnes, London, 1962; G. P. Sutton, *Rocket Propulsion Elements*, Wiley, New York, 1963.

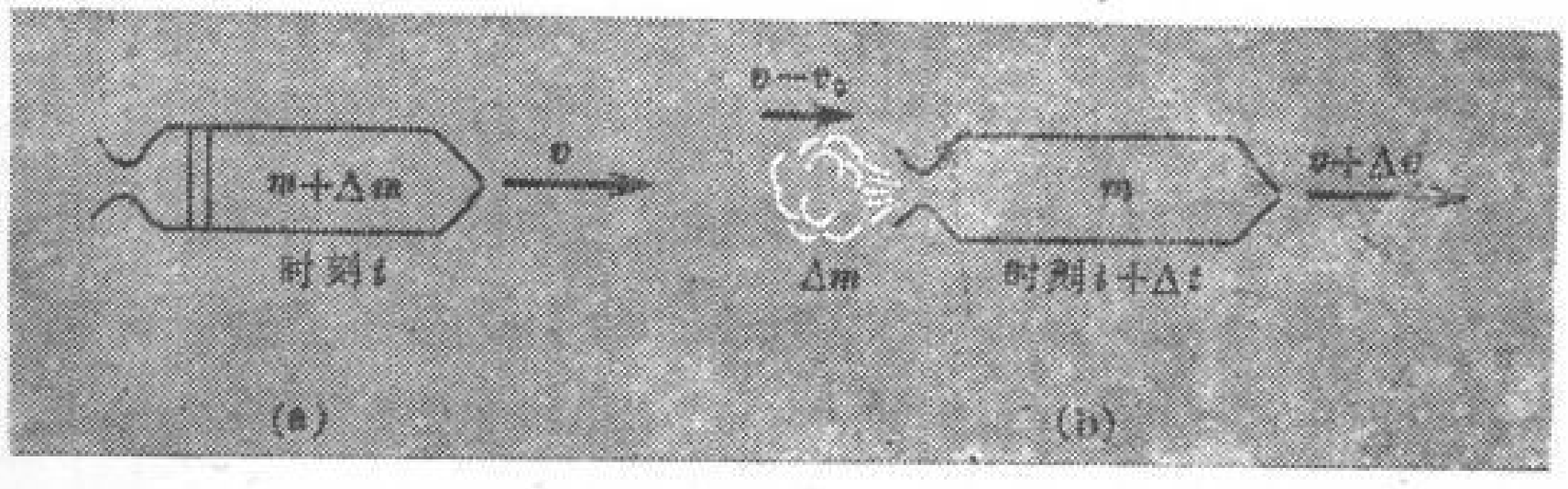



图 9-9　一火箭喷射一质量元 $\Delta m$，喷射前一刹那和喷射后一刹那的情况.

$$(m+\Delta m)v = m(v+\Delta v) + \Delta m(v-v_0)$$

所以，

$$mv + v\Delta m = mv + m\Delta v + v\Delta m - v_0\Delta m$$

而有

$$m\Delta v = v_0\Delta m$$

或

$$\Delta v = v_0\frac{\Delta m}{m} \tag{9-20}$$

这方程并不很精确.(为什么?)但是当我们让 $\Delta t$ 趋于零时，误差也趋于零. 只要 $\Delta v/v_0$ 比 1 小得多，(9-20) 式就是一非常好的近似. 给定火箭加燃料的初始总质量，和燃料烧尽时火箭的质量 $m_f$，可以算出火箭获得的速度. 设火箭的初速和终速为 $v_i$ 和 $v_f$，(9-20)式告诉我们，

$$v_f - v_i = v_0\Sigma\frac{1}{m}\Delta m$$

答案可用数值方法得到：作 $1/m$ 对 $m$ 的曲线(图 9-10)，然后求出

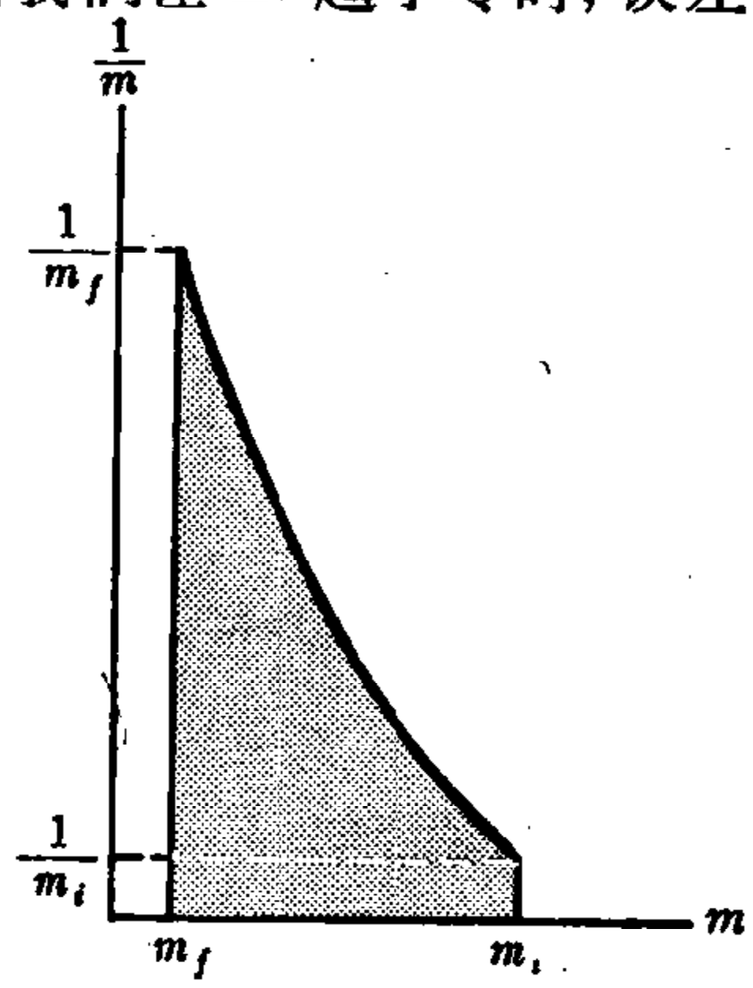



图 9-10　$1/m$ 对 $m$ 的图. 阴影部分的面积代表一给定质量变化所导致的速度增长的相对量度.

$m_f$ 和 $m_i$ 两界限间的面积(阴影部分). 这是一纯数值,乘上 $v_0$ 就给出速度的增加. 用解析的方法, 如果以 $m$ 表示在任何时刻火箭(加上剩余燃料)的质量,那么最好是把 $dm$ 解释为在 $dt$ 时间内火箭的质量的变化. 按照这样的定义,$dm$ 实际上是一负的量, 如果对它求积分,从燃烧过程开始到终了, 将给出 $m_f-m_i(<0)$ 之值. 按这种说法,速度的变化可写成下面的有限积分式:

$$v_f-v_i=-v_0\int_{m_i}^{m_f}=\frac{dm}{m}v_0\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \tag{9-21}$$

你应当自己来证明, 这确实与前述数值图解法的最后结果等价.

注意,时间在计算中全然不出现. 当然,如果我们要想考虑 $v$ 的增加率或推力的大小,时间是会出现的.

还要注意, 我们本有权在每时每刻都从火箭本身的参照系来看这情况. 在这一参照系中,喷出的燃料的速度总是正好为 $-v_0$, 因而立刻得到(9-20)式.

值得考查一下(9-21)式的某些含义. 第一件可注意的事是所获得的速度直接与喷出的气体的速率成正比. 通过化学燃烧过程所能达到的最高 $v_0$ 值的量级大约是 5000 米/秒, 而在实际上,由于燃烧的不完全以及其他损失,对于一定的燃料,很难比理想的理论值的 50%更好(参看土星V的第一级,用LOX-煤油混合物作燃料的数字——2500米/秒). 这些速度在普通情况下当然是非常高的, 但比起用电来加速带电粒子所能达到的速度就小了. 因此,对发展离子-炮引擎,甚至对制造一辐射排喷器以利用最高可能速率(光速)都感兴趣. 然而, 这两者都遇到同样的困难, 那就是质量的喷射率太小,以致能获得的推力也非常之小.

(9-21)式的另一主要特点是速度的增加与质量比之间的对数式变化关系. 这就使得在一定的有效载荷下赋予越来越大的最终速度所需的燃料量的要求迅速增加. 举例来说, 假定我们要求从

静止开始达到等于排出速度 $v_0$ 的速度，由(9-21)式，有

$$v_f - v_i = v_0 = v_0 \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$$

所以

$$\frac{m_i}{m_f} = e = 2.718\cdots$$

但要达到这速度的两倍，就要求

$$\ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) = 2$$

即

$$\frac{m_i}{m_f} = e^2 \approx 7.4$$

表 9-1 以更为方便的形式说明这种计算的结果．最后一列代表额

表 9-1

| $v_f - v_i$ | $v_0$ | $2v_0$ | $3v_0$ | $4v_0$ |
|---|---|---|---|---|
| $m_i/m_f$ | 2.7 | 7.4 | 20.1 | 54.5 |
| $(m_i - m_f)/m_f$ | 1.7 | 6.4 | 19.1 | 53.5 |

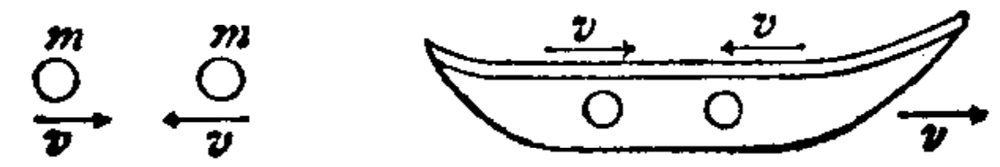
外所需的质量与有效载荷之比．产生非常大的质量比在实际问题上是不允许的，但用多级火箭(它还有其他优点)可避免这一困难(见习题 9-12, 177 页)．

一个乍一看似乎使人惊异的结果是，在原则上没有什么东西妨碍我们给火箭以大大超过排气速率 $v_0$ 的前冲速度．因而在运动的后面阶段里，我们会看见，相对于火箭在其中由静止状态出发的参照系，火箭和喷射出来的物质都在朝前运动．这并不违反动力学原理，而如果我们细致地分析一下所有最初在火箭内的物质的运动，就会发现这体系的总动量是始终为零的(只要外力，包括重力的影响可以忽略)．当然，应该强调指出，我们的全部分析，按其目下形式，只有在没有重力和空气阻力的情况下才成立．

## §9 碰撞和参照系

十七世纪对碰撞的研究，从而建立了动量守恒，主要是实验上的，但在从事研究者之中，有一位——克里斯琴·惠更斯——却应用了二十世纪物理学的精神卓越地分析两物体完全反弹的特殊情形．他以对称性和相对匀速运动的参照系的等价性作为他的论证的基础．分析是简单的但却有巨大的内在重要性．

图 9-11① 提供一幅恰如其分的十七世纪当时有关情况的背



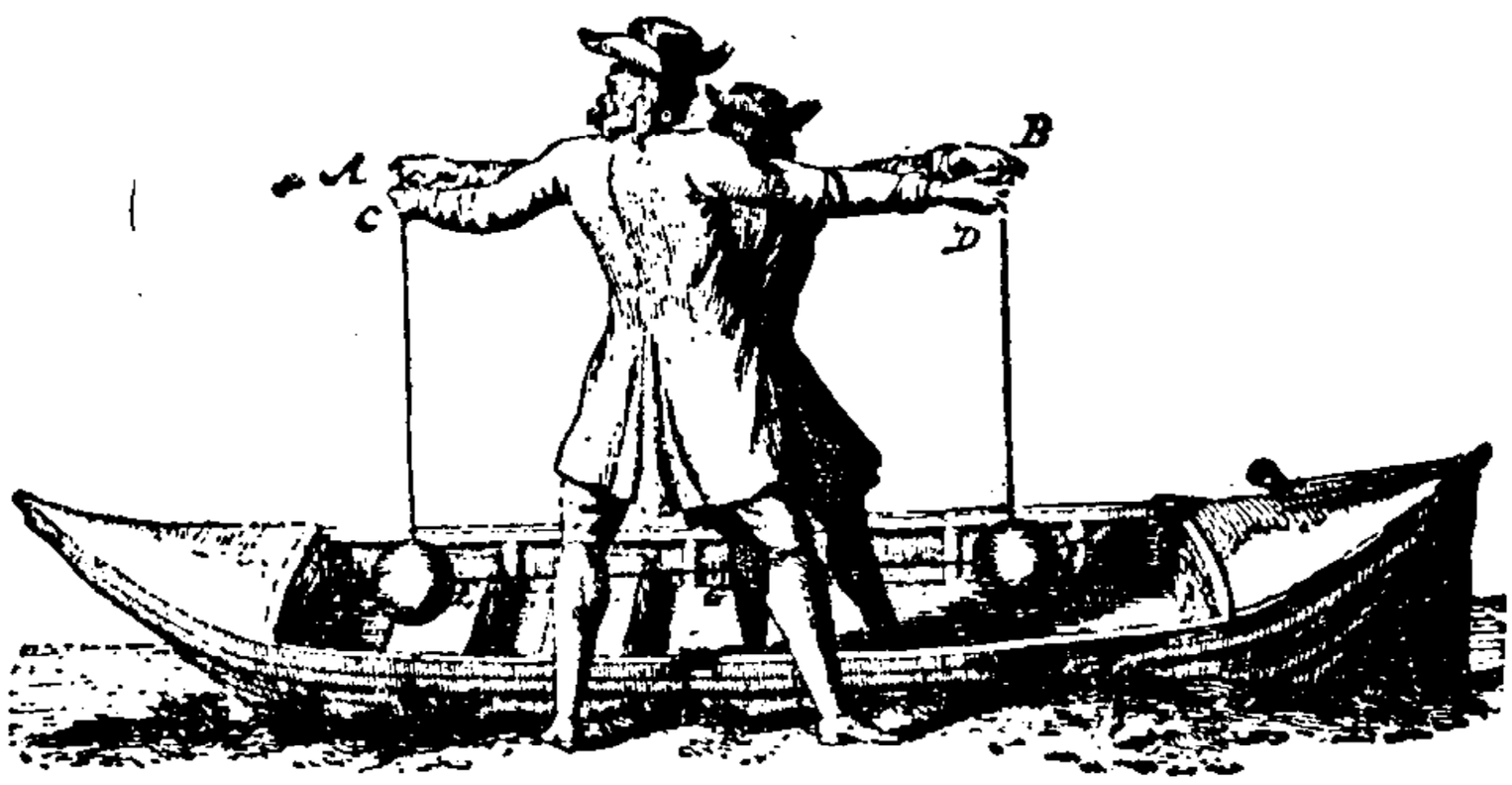




图 9-11　惠更斯的想象：两相等质量之间的弹性碰撞．图载于他的书 De Motu Corporum ex Percussione(1703)中．

景．虽然画面看起来也许有点古怪和陈旧，但思想是敏锐而新鲜的．惠更斯设想有两个相同的弹性质量，以等值反向的速率 $\pm v$ 相

---

① 采自 Ernest Mach, *The Science of Mechanics*(力学)，T. J. Cormack 译, Open Court Publishing Co., La Salle, Ill.，1960．原图来自惠更斯关于碰撞的论文(1700 年左右)．Mach(马赫)的书(非常易读，并且用了极少数学)本身就是讨论物理学中基本原理的里程碑．他关于惯性的来源的推测是爱因斯坦在广义相对论和宇宙论(见第十二章)方面的思想背景的重要部分．

碰．他假定它们反弹，速度完全反过来；这是一种对称性论证法．其次，惠更斯设想一完全相似的碰撞在一条船上发生，船自身以速度 $v$ 相对于岸在运动着．这碰撞，从陆地上的人看来，好象是一个静止质量受到一速度为 $2v$ 的质量的撞击．碰撞之后，头一个质量获得速度 $2v$，而第二个质量成为静止的．

更普遍些，如果船有一不同于 $v$ 的速率 $u$，则速度的交换如下：

| | 物体 1 | 物体 2 |
|---|---|---|
| 碰撞前： | $u+v$ | $u-v$ |
| 碰撞后： | $u-v$ | $u+v$ |

这样，惠更斯就根据理论对两全同质量的完全弹性碰撞所有可能的实验结果作出预言．所有结果的共同特点是，**相对**速度的大小在碰撞后同碰撞前具有相同数值．

惠更斯甚至走得更远．仍用一种对称性论证法，他推导出两不同质量之间的完全弹性碰撞的普遍性质．如果一运动物体 $A$ 撞击一不相同的静止物体 $B$，碰撞后它们将如图 9-12(a) 中所示以

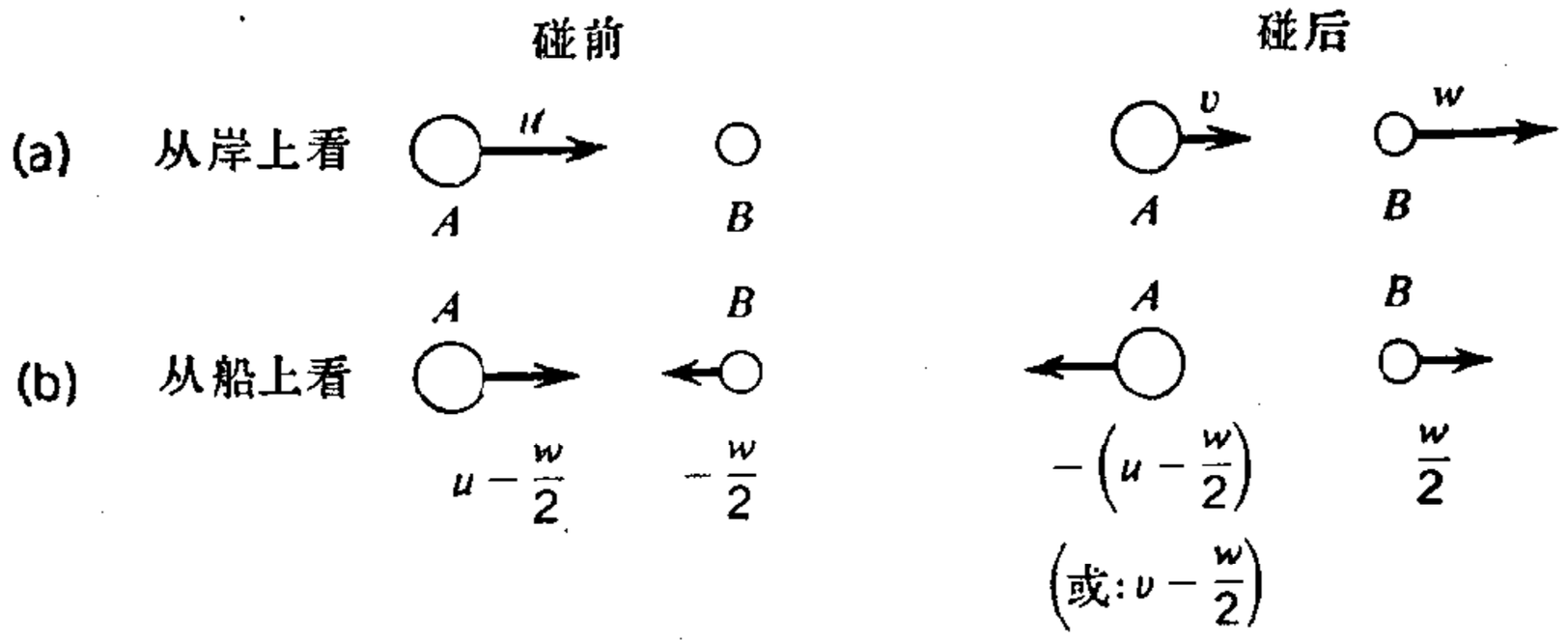



图 9-12　两不相等物体的弹性碰撞．（a）从实验室参照系看．(b) 从两速度简单地反过来的参照系看．

一速度 $v$ 和 $w$ 运动．设想这事件如图 9-12(b) 中所示，从以速度 $w/2$ 向右运动的小船上来看．则碰撞前物体 $B$ 被看到是在以速度 $w/2$ 向左运动，如图 9-12(b) 所示．惠更斯论证说，从这第二个参照系

中看 $B$ 的运动正好反过来必然意味着在这一弹性碰撞中 $A$ 的运动也正好反过来. 因而, $A$ 的最终速度在这参照系中必是 $-(u-w/2)$. 但这速度也等于 $v-w/2$, 因为 $A$ 的最终速度, 从岸上看, 是 $v$. 因此有

$$-(u-w/2)=v-w/2$$

$$w-v=u \tag{9-22}$$

于此, 惠更斯断言, 不论是怎样的两个物体, 在弹性碰撞中**相对**速度的大小保持不变. 但要注意, 这里含有某种超出线动量守恒的东西. 这额外的某种东西是我们曾经学到过的、称为动能的东西, 而它的守恒确定着一类非常特殊的碰撞. 让我们进一步来对此加以考虑.

## §10 碰撞中的动能

假定发生一一维碰撞, 如图 9-13(a)所示. 如果这体系实际上不受外界影响, 则线动量守恒:

$$m_1u_1+m_2u_2=m_1v_1+m_2v_2$$

又假定碰撞在(9-22)式所规定的意义下是完全弹性的. 在现在的问题中这意味着下列关系成立:

$$u_1-u_2=v_2-v_1$$

从这两个方程可解出终速 $v_1$ 和 $v_2$:

$$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}u_2$$

$$v_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1-\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_2$$

用这些 $v_1$ 和 $v_2$ 之值, 通过直截了当的代数运算, 得下列结果:

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1u_1^2+m_2u_2^2 \tag{9-23}$$

你一定认得, 这方程除各项都少一因子$\frac{1}{2}$外, 表示着碰撞后的总动

能等于起始时的动能．我们是根据对称性考虑达到这结论的，并没有明显地说到力或功．我们将在第十章中引进后面这些概念，但现时不需要它们．有些在力学方面的早期工作者认识到(9-23)式所代表的完全弹性碰撞中的守恒性质而把 $mv^2$ 这个量称为一运动物体的“活劲”(拉丁文 vis viva)．

既经在碰撞过程的描述中实际引进了动能，我们现在来阐明一重要结果，它不论总动能守恒与否都成立．假定图 9-13(a)代表在一参照系 $S$ 中观察到的一任意的一维碰撞．让我们从相对于 $S$ 以速度 $v$ 运动的另一参照系的观点考查这同一碰撞．(换言之，$S$ 和 $S'$ 由伽利略变换相联系．)于是，有

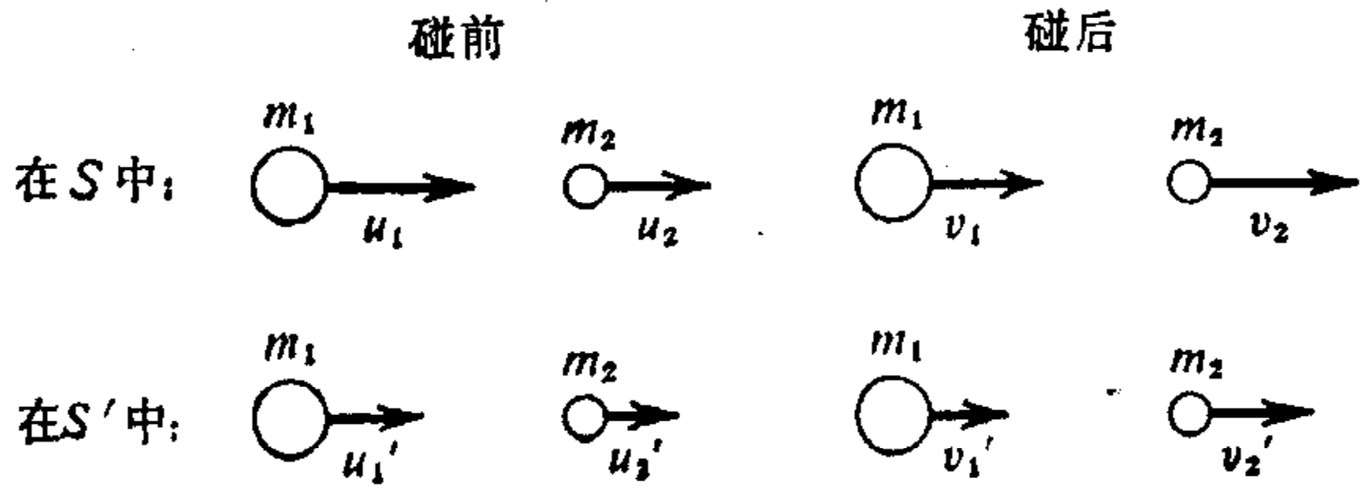



图 9-13　任意的一维碰撞，从两个不同的、相对速度为 $v$ 的参照系数看．

$$u_1' = u_1 - v \qquad u_2' = u_2 - v$$

$$v_1' = v_1 - v \qquad v_2' = v_2 - v$$

我们现在来证明，在初始和终了状态之间，动能的**变化**是一个不变量——即动能的变化在两参照系中数值相同．

**在 $S$ 中**

$$K_i = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (i \text{ 表示初始})$$

$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (f \text{ 表示终了})$$

$$\Delta K = K_f - K_i = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2\right)$$

在 $S'$ 中

$$K_i'=\frac{1}{2}m_1(u_1-v)^2+\frac{1}{2}m_2(u_2-v)^2$$

$$K_f'=\frac{1}{2}m_1(v_1-v)^2+\frac{1}{2}m_2(v_2-v)^2$$

$$\Delta K'=\left(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2\right)$$
$$-v[(m_1v_1+m_2v_2)-(m_1u_1+m_2u_2)]$$

根据动量守恒，对**任何**类型的碰撞，$\Delta K'$ 中方括号里面的项合并起来为零．因此

$$\Delta K'=\Delta K$$

这表示，如果在一参照系中，对于一给定的碰撞过程的动能的变化确定的话，那么在所有参照系中它都具有相同的值．知道这个量，加上动量守恒的事实，我们就可以在任何一维碰撞过程中，从确定的初速 $u_1$ 和 $u_2$ 预知 $v_1$ 和 $v_2$ 之值．$\Delta K$ 之值可以是正的，负的，或零．正值相应于爆炸过程，在这过程中相互作用的结果是给予分离着的粒子以额外动能．负值和零依次相应于非弹性和弹性碰撞，这两种碰撞的含义，我们早先已经说明过．

## §11 零-动量参照系

一个粒子或一粒子系的动量不是一个不变量；它依赖于我们用以观测运动的参照系．然而，如果我们把在两个不同的、相对作匀速运动的参照系中所描写的运动作一比较，则量出来的一粒子的动量差总是一个常数矢量 $m\mathbf{v}$，其中 $m$ 是粒子的质量，$\mathbf{v}$ 是两参照系的相对速度．对于任何一个粒子，我们总可以找到一个参照系，在其中粒子的总动量为零；这显然是这样一个参照系，在我

们测量动量的一瞬间，粒子在其中是静止的．类似地，对于任何粒子系我们可以找到一个参照系，在其中粒子系的总动量为零.① 这一零-动量参照系是极其重要的，不仅便于对碰撞和相互作用作一般性的观察，而且也便于研究其动力学内容，我们马上就要说明这一点．为了看一看如何认出这一零-动量参照系，我们以一简单的例子为始；两粒子 $m_1$ 和 $m_2$ 在一参照系 $S$ 中以匀速 $v_1$ 和 $v_2$ 沿 $x$ 轴运动(图 9-14)． 我们的任务是求出一参照系 $S'$ 相对于 $S$ 的速度 $\bar{v}$，使在 $S'$ 中总动量 $m_1v_1'+m_2v_2'$ 等于零.

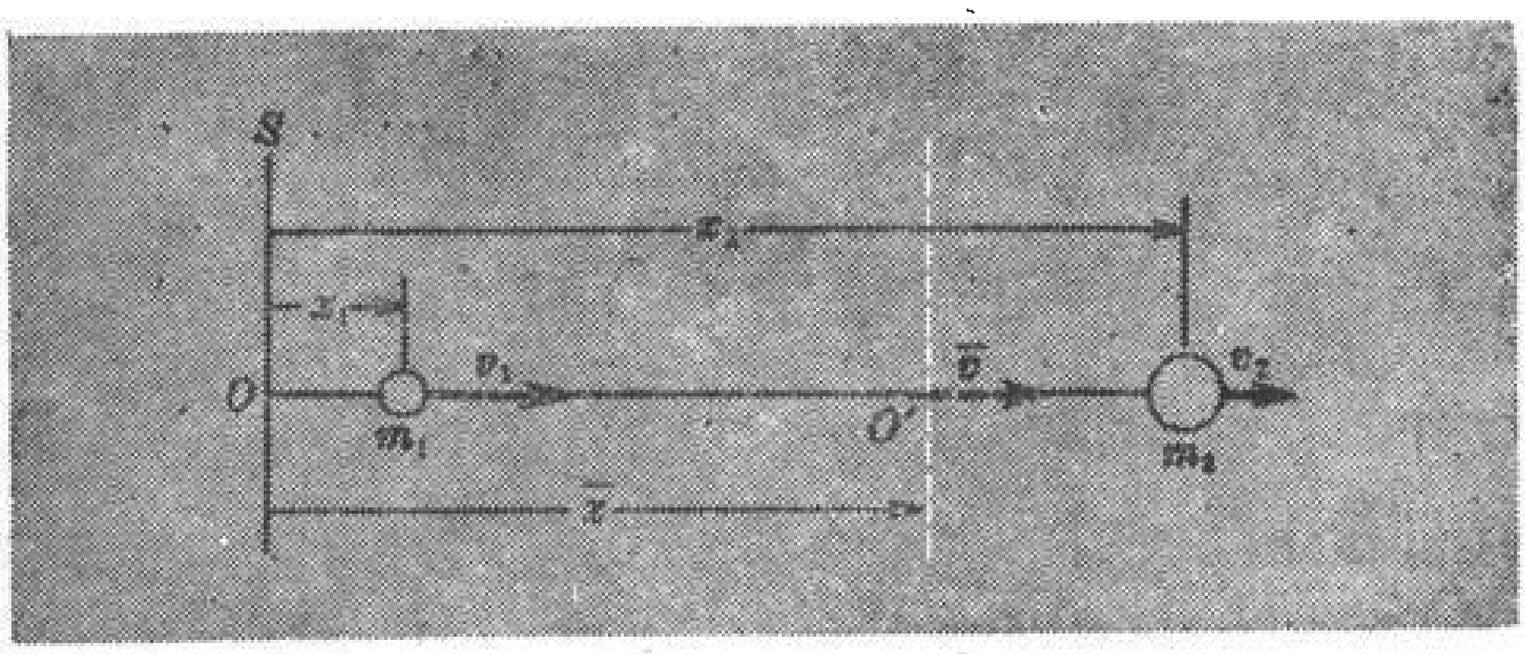



图 9-14　零-动量(质心)参照系定义的基础.

设 $O'$ 为 $S'$ 的原点，以速度 $\bar{v}$ 相对于 $O$ 而运动．由图 9-14 我们看到，$m_1$ 和 $m_2$ 相对于 $O$ 的速度是

$$v_1'=v_1-\bar{v}$$

$$v_2'=v_2-\bar{v}$$

因而，这两粒子在 $S'$ 中的动量是

$$m_1v_1'+m_2v_2'=m_1v_1-m_1\bar{v}+m_2v_2-m_2\bar{v}$$

要它为零，必须有

$$(m_1+m_2)\bar{v}=m_1v_1+m_2v_2 \qquad (9\text{-}24)$$

(9-24)式确定了参照系 $S'$ 相对于 $S$ 的速度，但留下 $O'$ 的位置 ($\bar{x}$) 供任意选择． 我们就利用这一自由来选 $O'$ 相对于 $m_1$ 和

① 以上两句原书有错误，译者作了修改——译者注.

$m_2$ 的位置，使其尽可能地简单．如果我们把(9-24)式重写成等价的形式：

$$(m_1+m_2)\frac{d\bar{x}}{dt}=m_1v_1+m_2v_2$$

或更好一些，写成

$$\frac{d}{dt}[(m_1+m_2)\bar{x}]=\frac{d}{dt}[m_1x_1+m_2x_2]$$

则使这式得到满足的最简单的办法显然是令两组方括号相等，因为它们之间的差值必是一常数，而我们选这常数为零．于是，我们得 $O'$ 在 $S$ 中的位置

$$\bar{x}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2} \tag{9-25}$$

按这个方式选择的零-动量参照系的原点称为 $m_1$ 和 $m_2$ 组成的两粒子系的质(量中)心．你一定认得，(9-25)式也是我们习惯于称之为两物体的重心的定义（参看图 9-15)．但是，原则上两者不一定是同一点．字义上，重心是这样一个点，通过它有单一的一个等效的力在作用着，其效果等于作用于各别物体的重力之和．如果两物体所在处的 $g$ 值不完全相同，则力 $F_{g1}$ 和 $F_{g2}$ 并不严格地与 $m_1$ 和 $m_2$ 成比例，在这情形下重心与质心就不会完全重合．这差别平常可忽略，但应当认识到，(9-25)式所给的定义与重力是否均匀、甚至是否存在无关．也许你已认识到，在前面关于碰撞和参照系的那一节中我们早已用过零-动量参照系．当惠更斯想应用对称性论证法于碰撞时，他正是以这参照系作为开始的．但现在我们在明显得多的形式下认出了它．

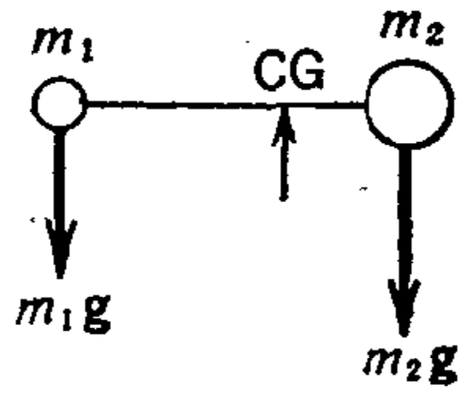



图 9-15　定义重心的基础，不一定与质心重合．

零-动量或质心(CM) 参照系的引进导致一非常重要并极其

有用的方法来分析一粒子系的动力学．为了以尽可能简单的方式来阐明其主要思想，我们仍考虑一维的两粒子系．在参照系$S$中(假定这是由我们的实验室确定的参照系)粒子的速度为$v_1$和$v_2$．在零-动量参照系($S'$)中它们的速度为$v_1'$和$v_2'$:

$$v_1' = v_1 - \bar{v}$$

$$v_2' = v_2 - \bar{v}$$

其中$\bar{v}$的定义是(9-24)式．令$m_1+m_2=M$，可写

$$\bar{v} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M} = \frac{P}{M} \tag{9-26}$$

其中$P$是总线动量，它在任何碰撞过程中都保持不变:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 常数 \tag{9-27}$$

现在把实验室参照系中测得的总动能$K$用质心速度$\bar{v}$以及$m_1$和$m_2$相对于CM的速度$v_1'$和$v_2'$表示出来:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m_1 (v_1' + \bar{v})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2' + \bar{v})^2 \\ &= \left( \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \right) + (m_1 v_1' + m_2 v_2') \bar{v} \\ &\quad + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}^2 \end{aligned} \tag{9-28}$$

但根据零-动量参照系的定义，有

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = 0$$

因此(9-28)式右方中间一项自动为零．头一项我们认出是两质量分别相对于CM的总动能$K'$;最后一项则等于质量为$M$的一个粒子以CM的速度$\bar{v}$运动的动能．这样，我们可写

$$K = K' + \frac{1}{2} M \bar{v}^2 \tag{9-29}$$

这是如此之重要的结果，我们再用一段话把它表示出来:

**一个两粒子体系的动能等于相对于体系的质心而运动的动能(内部动能)加上质量等于这体系的总质量的一个粒**

**子随着质心运动的动能.**

把动能这样分为两部分——注意，**只有**在新参照系是零-动量系时才能做到——的重大意义在于它打开了一条通向异常有力并使之简化的程序的途径. **我们有可能分析一体系(相对于 CM)的内部运动而不必管这体系作为一整体的运动.** (我们立刻就要证明，这结果不仅对一维运动成立，而是普遍成立的.)

(9-29)式的一个含义是，有一定量的动能就象是固着于质心的运动中一样. 当无外力作用时，速度 $\bar{v}$ 在整个碰撞过程中都保持不变，从而动能 $\frac{1}{2}M\bar{v}^2$ 也同样地保持不变. 这意味着，在两物体碰撞时，在实验室里测得的、它们的总动能中，只有一部分是可以用来转换于其他目的的. 这一部分可用的动能的大小实际就是 $K'$. 我们可以借助于(9-29)式算出它:

$$K' = K - \frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1+m_2)\bar{v}^2$$

把(9-20)式的 $\bar{v}$ 之值代入，通过简单的代数运算，得

$$K' = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_2-v_1)^2 \qquad (9\text{-}30a)$$

这方程所表示的 $K'$ 之值可以看作是一单个质量的动能，质量的有效值为 $m_1m_2/(m_1+m_2)$，运动速度等于相碰撞粒子的**相对**速度. 这有效质量称为这体系的**约化质量**，用符号 $\mu$ 表示. 于是，我们可以把(9-30a)写成较简洁的形式:

$$K' = \frac{1}{2}\mu v_{\text{相对}}^2 \qquad (9\text{-}30b)$$

其中

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

$$v_{\text{相对}} = v_2 - v_1 = v_2' - v_1'$$

举例说，质量为2单位的一个运动着的物体撞在一个质量为1单位的静止物体上，动能的三分之二固着在质心运动上，只有三分之一可在碰撞时用于产生形变等目的.

## §12 二维碰撞过程

一般地说，两相碰撞物体的速度矢量确定一平面，所以把我们对碰撞过程的分析推广到二维空间中去是重要的. 实际上我们必须准备远及三维情形，因为两粒子碰撞后的速度矢量所确定的平面不见得同它们的初速所确定的平面一样. 然而，许多碰撞过程是纯二维的，而为了简单起见，我们在讨论具体例子时将限于这种情形，即使其理论同样可用于三维情形.

有一件值得我们一开始就认识的事，即我们迄今所讨论过的纯一维问题的分析实际上导致关于某种类型的二维碰撞的预见，因为我们可以通过改变我们的观点把一个一维的碰撞转变成一个

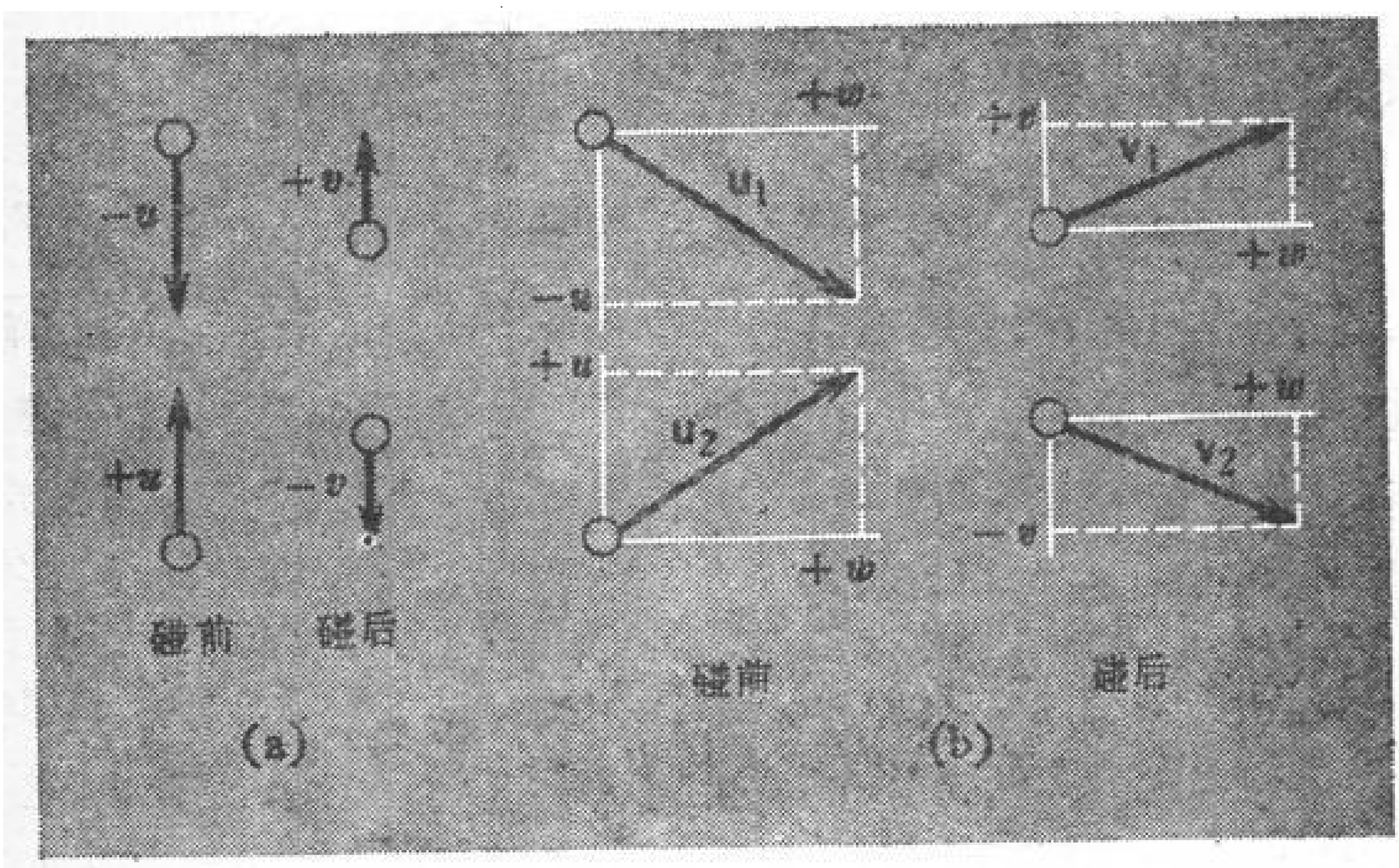
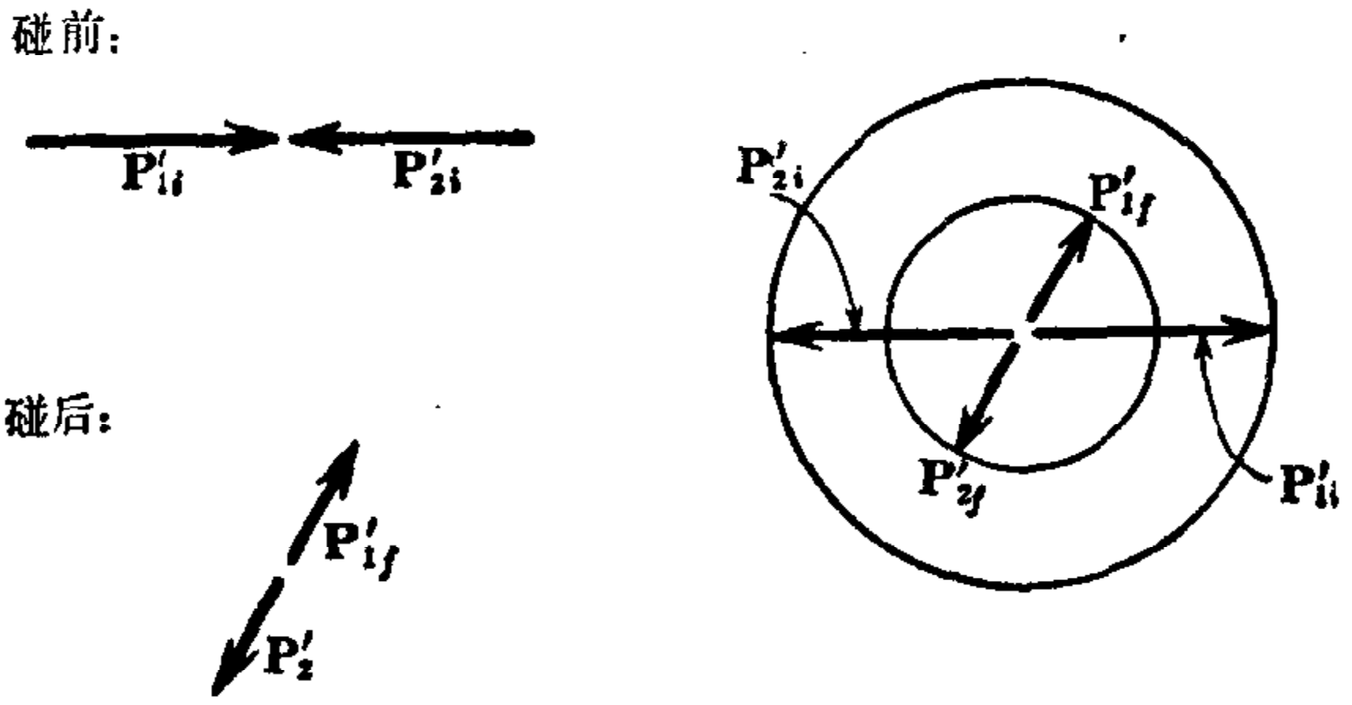



图 9-16 (a) 看起来是发生在一维中的碰撞，(b) 在另一参照系中看显现是二维的.

二维的. 例如,考虑两完全相同的球之间的非完全弹性碰撞,两球沿 $y$ 轴以相等相反的速度 $\pm u$ 互相趋近[见图 9-16(a)]. 假定这一碰撞的结果是使它们沿 $y$ 轴反弹回来, 速度减小到 $\pm v$(对称性要求最终速度相等相反). 然后, 图 9-16(b)示明这同一碰撞对于一个以速度 $-w$ 平行于 $x$ 轴运动的观察者会是怎样的. 这确定着整个一类斜碰撞问题,它们全都可以参照图9-16(a)的简单正碰撞来解决. 我们还可以更进一步, 从具有平行于 $y$ 方向的速度的参照系来看图 9-16(b)的碰撞. 这消除了所有表观对称性, 然而它却基本上是相同的碰撞. **所有那些在相碰一刹那两球沿它们的中心的连线具有给定的相对速度值的碰撞, 在动力学上都是等价的.**

这使人想到一个非常重要的方法来简化碰撞问题的分析. 设想你处在碰撞被描绘得最简单的参照系中;这一定是质心系,因为按定义, 碰撞粒子在其中是以等值反向的速度沿着一直线互相趋近的. 把这问题在 CM 系中解出来, 再用伽利略变换把所得结果换算到实验室参照系中去.

在零-动量系中看, 碰撞过程大为简化这一点在图 9-17 中给予了说明. 由于在这参照系中总动量为零, 所以粒子在分开时同




(a) (b)

图 9-17 (a) 一任意的碰撞, 在质心系中用等值反向的动量矢量来描绘. (b) 在质心系中, 动量矢量的尖端在一圆周上.

趋近时一样，都各具等值反向的动量，如图 9-17(a)所示．还有，最终动量的大小与它们在 CM 系中的方向无关．因而，如图 9-17(b)所示，矢量 $\mathbf{p}'_{1f}$ 和 $\mathbf{p}'_{2f}$ 可以绘在一个圆的直径上，其尖端位于这直径的两头．

$\mathbf{p}'_{1i}$ 和 $\mathbf{p}'_{1f}$ 的相对方向可以是任何情形，与相互作用的详情有关．当然，这两矢量的相对长度也依赖于详细的机制．在一完全弹性的碰撞中，有 $p'_f = p'_i$．在一完全非弹性碰撞中，$p'_f = 0$．（在例如火箭推进器那样一个爆炸过程中，情形相反，$p'_i = 0$ 而 $p'_f < 0$.）而在原子、化学或核反应过程中，$p'_f$ 可能小于、等于或大于 $p'_i$．现在，让我们来看一两个完全弹性碰撞的例子，以见识质心系观点的妙处．在这里，**弹性**碰撞的定义是，相对速度的大小不因碰撞而改变．象我们曾看到过的，这等于说，总动能同动量一样，是守恒的．用能量守恒来对此下定义以后将成为主要的．

## §13 弹性核碰撞

核物理学家生活在两个世界里，一是实验室，另一是粒子的质心系，他们研究这些粒子的碰撞和相互作用．知道如何灵活地从一个参照系很快地变到另一个，他就能够在两个世界中都获得丰富知识．让我们来看怎样做到这一点．

### 1：质子-质子碰撞

图 9-18 示明两质子的碰撞，是在照相乳剂中记录下来的．质子之一属于乳剂中的一个氢原子，在碰撞发生之前它基本上是静止的；另一个是进入乳剂中的，动能约为 5 兆电子伏．

这碰撞的最值得注意的特点是，碰撞后两质子的路线互成 90° 角．这对所有这种质子-质子碰撞都真确，除非出现能量高到牛顿力学不再适合于描述其状况的情形．先看质心系我们就能容易地理解这一点．令入射质子的速度在实验室中观测为 $v$．于是

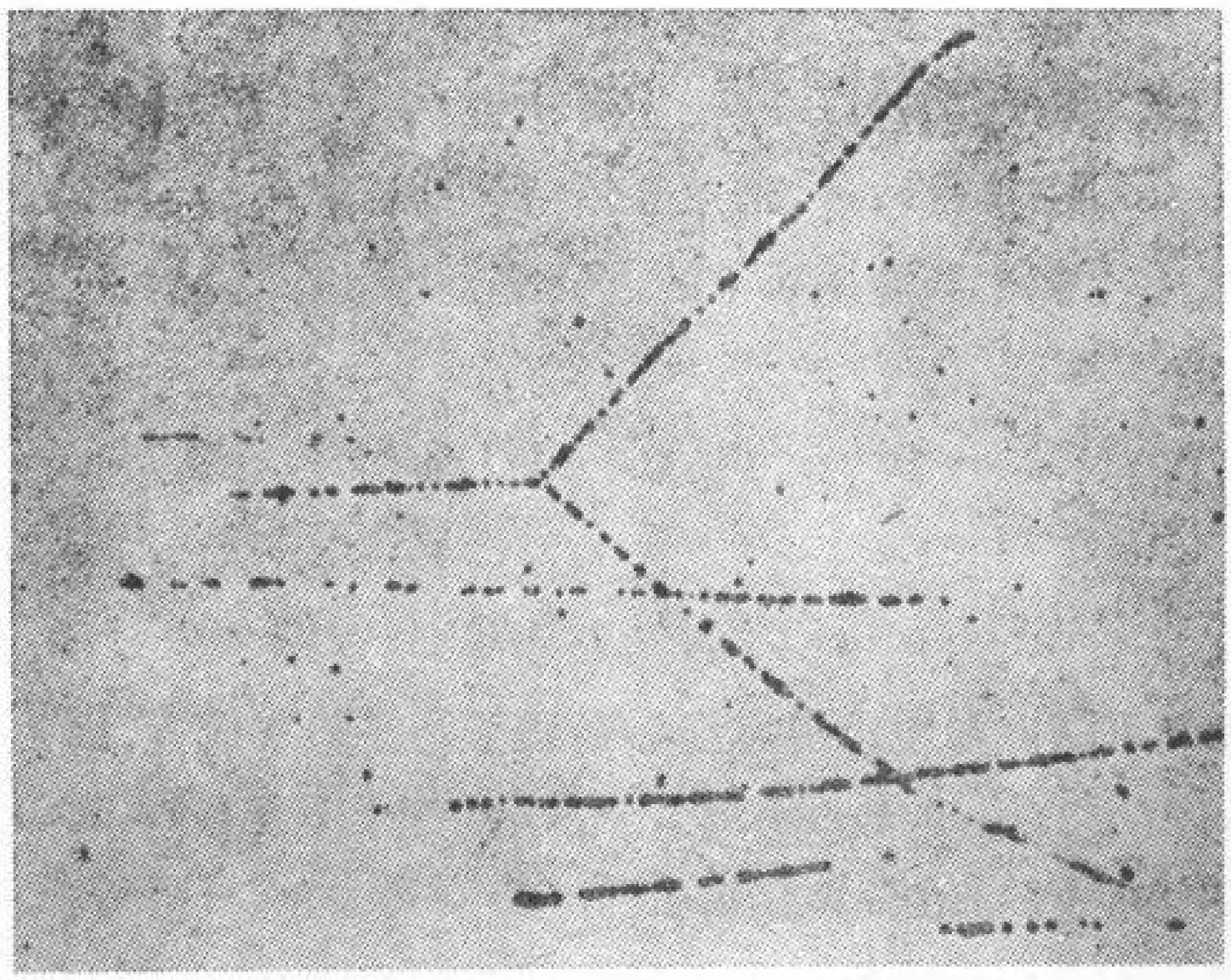


图 9-18　一入射质子与一在照相乳剂中原系静止的质子之间的弹性碰撞.

零-动量系的速度为 $v/2$，而在这参照系中两质子以等值反向的速度趋近和离开，如图 9-19 所示. 假定一个质子经碰撞后在 $\theta'$ 方

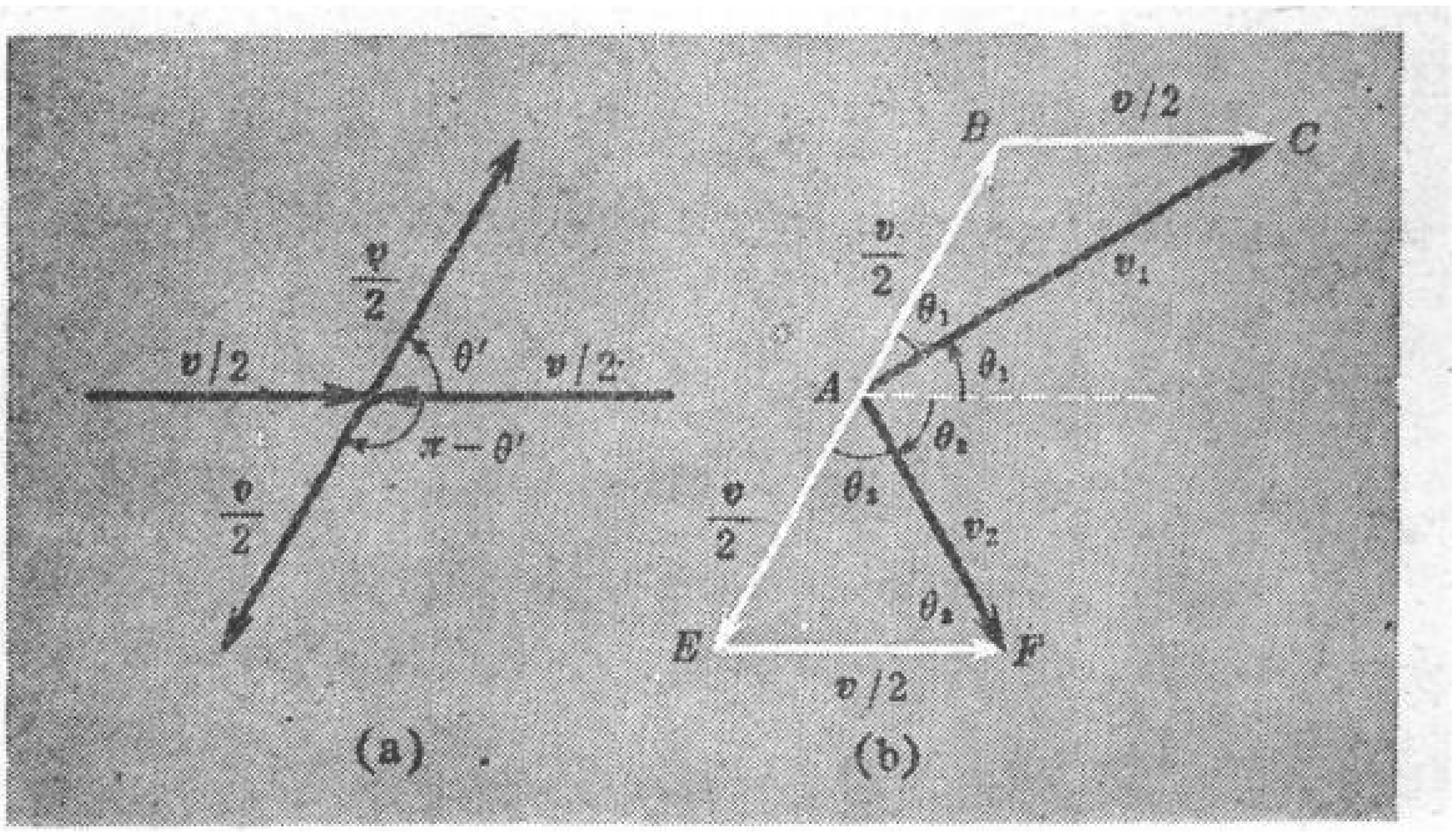



图 9-19　(a) 在质心系中所看到的两相等质量之间的弹性碰撞.
(b) 转换到实验室参照系，显出终了速度之间成 90° 角.

向飞出，因之另一个的方向为 $\pi-\theta'$，在趋近线的另一边．要回到实验室参照系，我们给每一质子加上速度 $v/2$，平行于原来的运动路线，如图 9-19(b)所示．但三角形 $ABC$ 和 $AEF$ 都是等腰的，因之在实验室中观察到的两质子的方向 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 是

$$\theta_1=\theta'/2$$

$$\theta_2=(\pi-\theta')/2$$

所以

$$\theta_1+\theta_2=\pi/2$$

此外，我们可以容易地求出碰撞后两质子的实验室速度，因为

$$v_1=2(v/2)\cos\theta_1=v\cos\theta_1$$

$$v_2=2(v/2)\cos\theta_2=v\sin\theta_1$$

我们看到，在任何这种碰撞中总动能是守恒的，因为

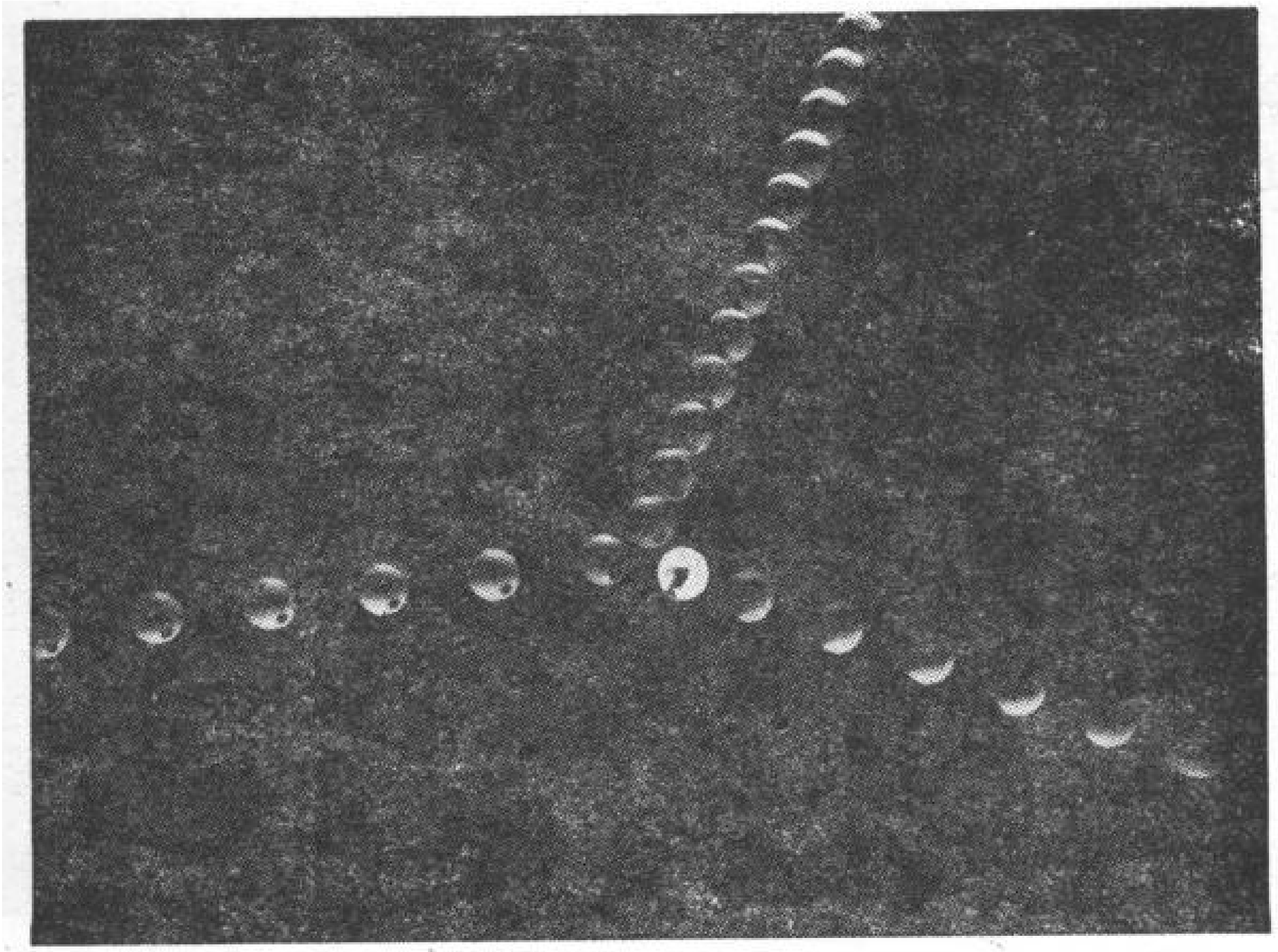


图 9-20　两相等质量之间的几乎完全的弹性碰撞，频闪观测照片．

$$\text{初始动能}=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{最终动能}=\frac{1}{2}m(v\cos^2\theta_1)^2+\frac{1}{2}m(v\cos\theta_2)^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}mv^2$$

图 9-20 所示是两相同宏观物体(台球)之间的类似碰撞;它不是完全弹性的,但十分逼真.

**2. 中子-原子核碰撞**

在核裂变过程中,中子以各种不同能量被射出,但平均能量的量级为 1 兆电子伏. 不过这些中子要在能量减少到 $10^{-2}$ 或 $10^{-1}$ 电子伏(热能)时,才最有效地引起进一步的裂变. 因此,每一慢中子反应堆的主要特点是使中子慢下来的手段. 最为广泛应用的方法是使中子与其他原子核(那些构成反应堆减速剂的物质)作弹性碰撞.

假定一质量为 $m$ 的中子与一质量为 $M$ 的原子核作弹性碰撞. 令中子在实验室中的初速为 $\mathbf{v}_0$; 在这参照系中被冲击的原子核假定是静止的. 图 9-21(a) 示明在质心系中所看到的这一碰撞, 质

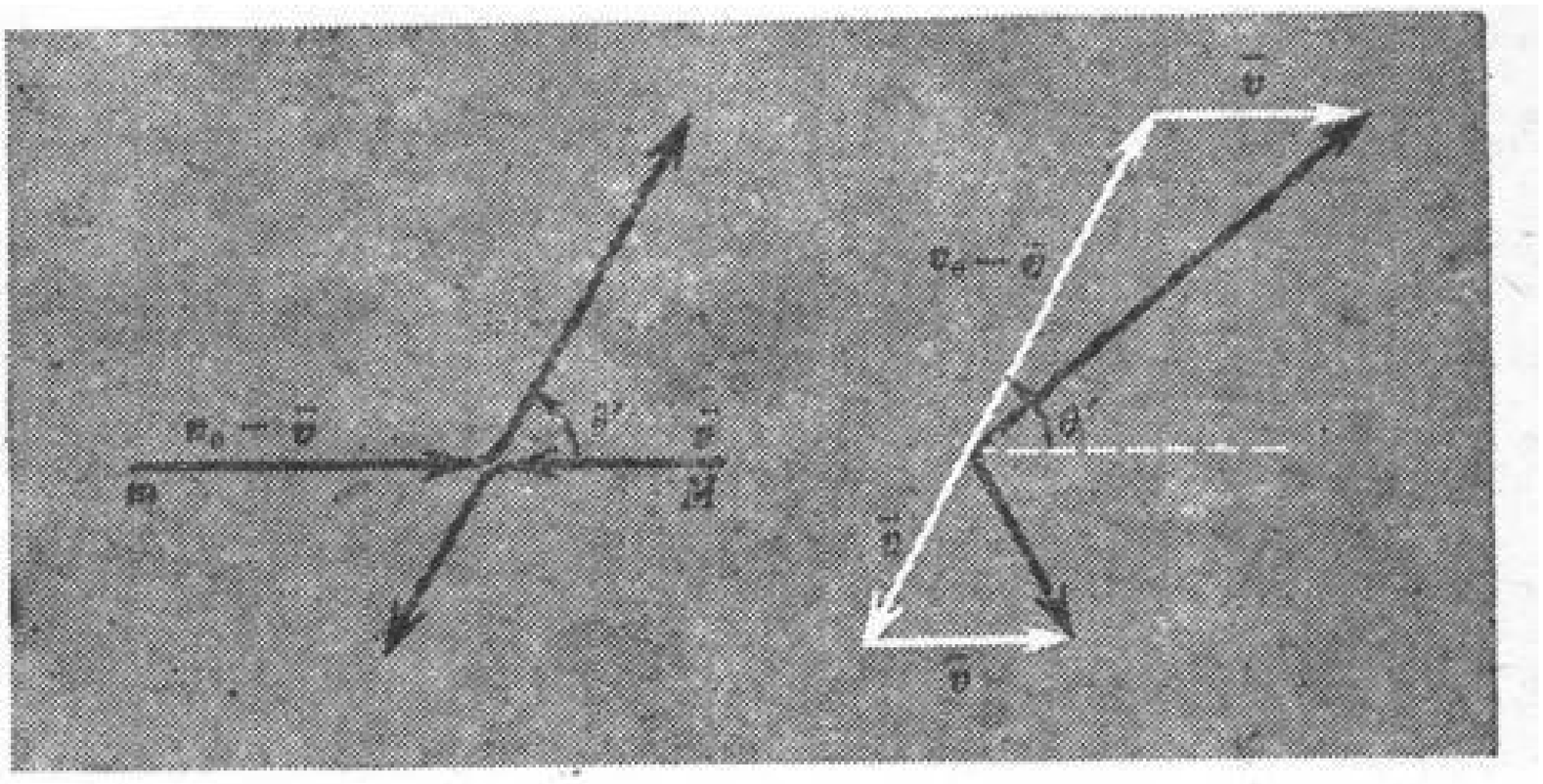


图 9-21 (a) 两不相等质量的弹性碰撞,在质心系中看. (b) 变换到实验室系;速度之间的夹角不同于 90°.

心系相对于实验室参照系的速度$\bar{\mathbf{v}}$由(9-24)式给出:

$$\bar{\mathbf{v}}=\frac{m}{M+m}\mathbf{v}_0 \tag{9-31}$$

如果碰撞使这中子在零-动量系中偏转一$\theta'$角,则它在实验室系中的终速是图9-21(b)中所示的$\mathbf{v}$. 对于任一给定的$\theta'$值, 在实验室中测得的终速的大小是易于计算的. (**练习**:你自己试作这一计算,并在这情形下证明,同两相等质量的情形一样, 在实验室中测得的总动能经过碰撞后保持不变.)

在实验室系中看, 中子的最大能量损失出现于它直接被向后散射($\theta'=\pi$)的情形. 这时,

$$v(\pi)=\bar{v}-(v_0-\bar{v})=-(v_0-2\bar{v})$$

$$v(\pi)=-v_0\left(1-\frac{2m}{M+m}\right)$$

$$=-\frac{M-m}{M+m}v_0$$

当$\theta'=0$时, 中子毫不损失能量. (这是一种什么碰撞?)因此, 碰撞后中子的能量介于以下极限之间:

$$K_{\text{极大}}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K_{\text{极小}}=\frac{1}{2}m\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2v_0^2 \tag{9-32}$$

因$K_{\text{极大}}$与减速剂原子核的质量无关, 所以是$K_{\text{极小}}$的表达式告诉我们, $M$的什么值最有利于极大地降低中子的平均能量. 而我们看到,$M=m$使$K_{\text{极小}}$等于零; 任何其他$M$值, 不论是大于还是小于$m$,都不能比这更好. 因此, 如果不涉及其他的考虑, 普通的氢应当是最佳减速剂, 因为这时$M$(质子质量)与$m$相差在$10^3$分之1以内. 但是,质子还会俘获慢中子,效率相当高, 因而使许多中子不能用于进一步引起裂变,而某些其他轻原子核(如氘、铍和碳)反而在使裂变中子减速和被俘获之间能较好地折衷的减速剂.

## § 14. 非弹性和爆炸性过程

我们现在转到这样的一些过程，在过程中，作为碰撞的一个结果，动能有净余的损失或获得．在分析这种过程时，重要的是进一步证实总动能的变化确是一个不变量，而我们在一维碰撞的基础上得到的结论是普遍成立的．为了证明这一点，我们首先重新推导用于在任意方向运动的两粒子的 (9-29)式．设粒子的质量为 $m_1$ 和 $m_2$，在实验室参照系($S$)中的速度为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$．CM 系($S'$)的速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 的定义是

$$\bar{\mathbf{v}}=\frac{m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2}{m_1+m_2} \tag{9-33}$$

如果在 $S'$ 中测得的粒子速度为 $\mathbf{v}_1'$ 和 $\mathbf{v}_2'$，则有

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1'+\bar{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2'+\bar{\mathbf{v}}$$

现在写下 $S$ 中的总动能，利用一粒子的动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 也可以表示为 $\frac{1}{2}m(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$，即矢量 $\mathbf{v}$ 同它自己的标积来表示这一事实，有

$$K=\frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+\frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)$$

$$=\frac{1}{2}m_1(\mathbf{v}_1'+\bar{\mathbf{v}})\cdot(\mathbf{v}_1'+\bar{\mathbf{v}})$$

$$+\frac{1}{2}m_2(\mathbf{v}_2'+\bar{\mathbf{v}})\cdot(\mathbf{v}_2'+\bar{\mathbf{v}})$$

现在来看这两标积之一，应用矢量点乘的分配律和交换律：

$$(\mathbf{v}_1'+\bar{\mathbf{v}})\cdot(\mathbf{v}_1'+\bar{\mathbf{v}})=\mathbf{v}_1'\cdot\mathbf{v}_1'+2\mathbf{v}_1'\cdot\bar{\mathbf{v}}+\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{v}}$$

$$=v_1'^{\,2}+2\mathbf{v}_1'\cdot\bar{\mathbf{v}}+\bar{v}^2$$

根据这结果以及上面 $K$ 的表示式中第二项的类似结果，有

$$K=\left(\frac{1}{2}m_1v_1'^{\,2}+\frac{1}{2}m_2v_2'^{\,2}\right)+(m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2')\cdot\bar{\mathbf{v}}$$

$$+\frac{1}{2}(m_1+m_2)\bar{v}^2$$

但我们还注意到，按零-动量参照系的定义，右方的第二项为零，因而我们回到(9-29)式的简单结果：

$$K=K'+\frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

把这式应用于两粒子系碰撞前和后的状态，有

$$K_i=K'_i+\frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

$$K_f=K'_f+\frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

假设总质量 $M$ 保持不变，而且，当无外力时 $\bar{v}$ 也不变．于是我们就再次得到下列结果：

$$K_f-K_i=K'_f-K'_i=Q$$

其中 $Q$ 是最终动能超出（代数地）初始动能的数量．$Q$的实际值当然可以是负的．

上面分析的结果实际上不用修改就可以推广到象核反应那样的过程，在其中终态的粒子实际为何物可能与开始时所有物很不相同．例如，设有质量为 $m_1$ 和 $m_2$ 的两原子核相碰撞，发生反应而产生两不同的原子核，质量为 $m_3$ 和 $m_4$．于是，我们写出如下的守恒关系：

质量：　$m_1+m_2=m_3+m_4=M$

动量：　$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=m_3\mathbf{v}_3+m_4\mathbf{v}_4=M\bar{\mathbf{v}}$

$$m_1\mathbf{v}'_1+m_2\mathbf{v}'_2=m_3\mathbf{v}'_3+m_4\mathbf{v}'_4=0$$

因而初始和最终动能可写成以下形式：

$$K_i=\frac{1}{2}m_1(v'_1)^2+\frac{1}{2}m_2(v'_2)^2+\frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

$$K_f=\frac{1}{2}m_3(v'_3)^2+\frac{1}{2}m_4(v'_4)^2+\frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

$K_f - K_i = Q$.

**例**. *D-D* 反应. 最著名的核反应之一 (一个重要的用核聚变产生能量的过程)是两个氘(氢 2)核的反应, 形成一氦 3 的原子核和一个中子:①

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{3}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}\mathrm{n} + 3.27 \text{ 兆电子伏}$$

这 3.27 兆电子伏代表动能的超量 $Q$, 是由新产生出来的粒子的质量(精确说, 是它们的静止质量)加起来略小于原来粒子的质量而得到的; 总能量, 包括质量当量, 当然保持不变.

假定现在有一动能为 1 兆电子伏的氘核撞击一静止的氘核. 在 CM 系中看到的终态是什么情形呢? (看图 9-22) 首先, 让我们来计算速度 $\bar{v}$. 氘核的质量约为 2 原子质量单位, 或 $3.34 \times 10^{-27}$ 千克. $1\mathrm{MeV} = 1.6 \times 10^{-13}$ 焦耳. 所以

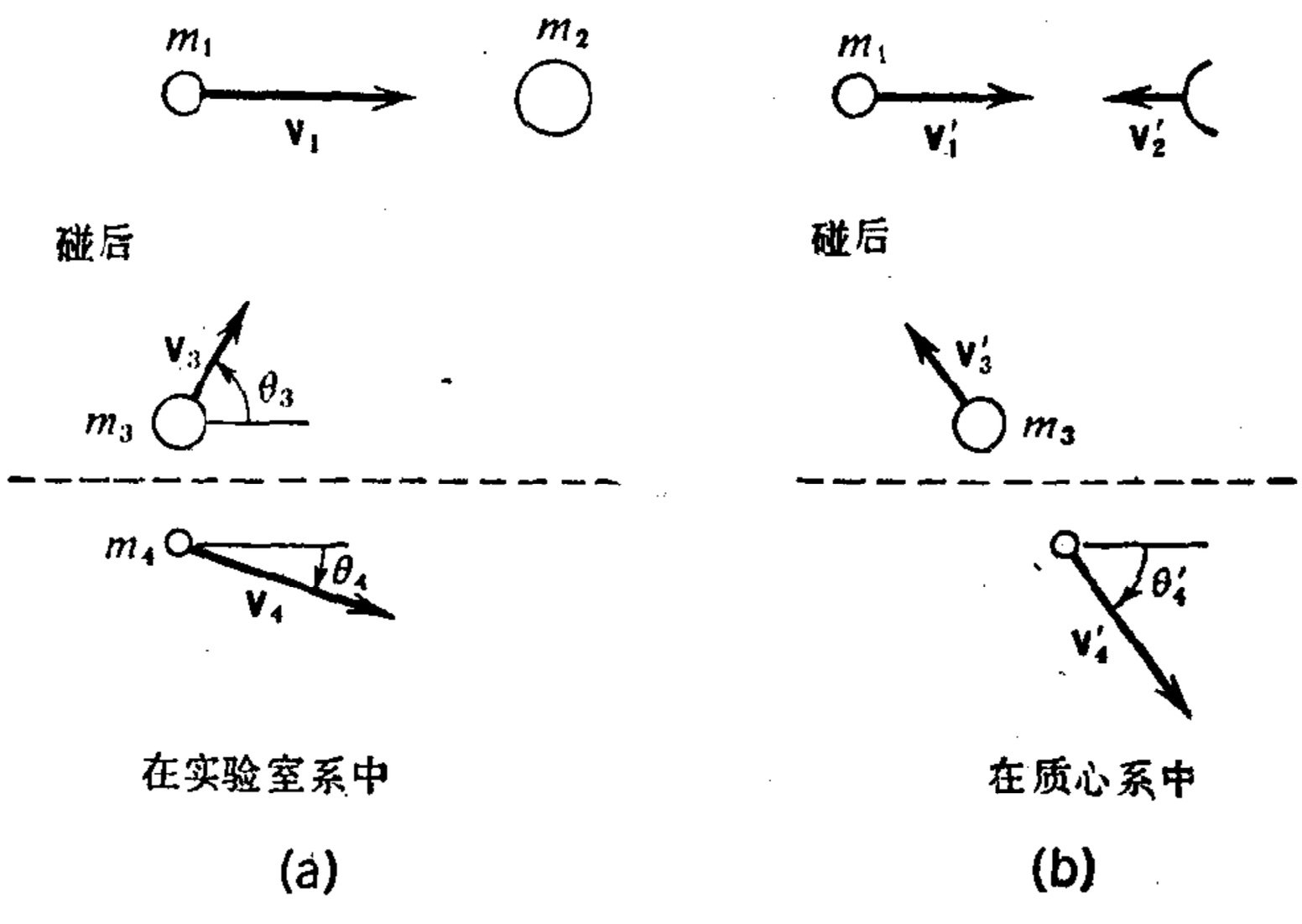



图 9-22 (a) 反应过程. 粒子 $m_1$ 和 $m_2$ 碰撞形成两不同粒子 $m_3$ 和 $m_4$. (b) 同一过程在 CM 系中来看.

① 在这式中, 对于一给定的核, 字母前的下标表示质子数, 而上标表示核子的总数(即质子数与中子数之和——译者). D 和 $^{2}_{1}\mathrm{H}$ 两者都代表一氘核.

$$v_1=\left(\frac{2K_1}{m_1}\right)^{1/2}\approx 1.0\times 10^7 \quad \text{米/秒}$$

因 $m_2=m_1$ 而 $m_2$ 原是静止的，故有

$$\bar{v}=v_1/2=0.5\times 10^7 \text{ 米/秒}$$

在 CM 系中两氘核具有相等相反的速度，其大小等于 $\bar{v}$. 因此，

$$K_i'=2\times\frac{1}{2}m_1\bar{v}^2=\frac{1}{4}m_1v_1^2$$

即

$$K_i'=\frac{1}{2}K_1=0.5 \text{ 兆电子伏}$$

[这里我们看到(9-30) 式的一特别的应用. 如果一运动物体同一个质量与它相等的静止物体相碰撞，则在 CM 系中的相对运动中只有一半初始动能可用.]

现在来看核反应的结果. 在 CM 系中的最终动能为

$$K_f'=K_i'+3.27 \text{ 兆电子伏}$$
$$=3.77 \text{ 兆电子伏}=6.03\times 10^{-13} \text{ 焦耳}$$

这能量分配给 $^3$He 和中子，使两者的动量数值相等. 分别以 $m_3$和 $\mathbf{v}_3'$ 及 $m_4$ 和 $\mathbf{v}_4'$ 表示 $^3$He 及中子的质量和速度，有

$$m_3\mathbf{v}_3'+m_4\mathbf{v}_4'=0$$

$$v_4'=\frac{m_3}{m_4}v_3'$$

于是，

$$K_f'=\frac{1}{2}m_3(v_3')^2+\frac{1}{2}m_4(v_4')^2$$
$$=\frac{1}{2}m_3(v_3')^2+\frac{1}{2}\,m_4\left(\frac{m_3}{m_4}\right)^2(v_3')^2$$
$$=\frac{1}{2}\frac{m_3(m_3+m_4)}{m_4}(v_3')^2$$

把 $m_3\approx 3$ 原子质量单位，$m_4\approx 1$ 原子质量单位代入，得

$$v_3' = \left(\frac{2\times 6.03\times 10^{-13}}{12\times 1.67\times 10^{-27}}\right)^{1/2} \approx 0.77\times 10^7 \text{ 米/秒}$$

因之，$v_4'$ $(=3v_3')\approx 2.3\times 10^7$ 米/秒.

这样，对于向外走的中子的任何特定方向 $\theta_4'$，我们就有了一个在 CM 系中看的最终情况的完全图象. 要回到实验室参照系，只要把矢量 $\mathbf{v}_3'$ 和 $\mathbf{v}_4'$ 都加上 CM的速度 $\bar{\mathbf{v}}$ 即可.

这样运用CM 系的巨大优点是，不管 $\theta_4'$ 所指定的最终方向是什么，$\mathbf{v}_3'$ 和 $\mathbf{v}_4'$ 的**大小**都具有相同值①，而在实验室参照系中 $\mathbf{v}_3$ (还有 $\mathbf{v}_4$) 的大小对于每一方向都有不相同的值. 但这并不意味**总是**要用 CM 参照系. 例如，人们也许想要回答这样的问题：在实验室中，相对于一束氘核的初始方向，沿某给定方向 $\theta_4$ 射出的中子速率是多少？在这一情形中，直接用从实验室中测得的能量和动量的方程来求是最容易的；这些方程是：

$$K_1 + Q = K_3 + K_4$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \qquad (9\text{-}34)$$

(在第一式中 $Q$ 代表 $K_f$ 和 $K_i$ 的差值，因之，在方才看过的例子中 $Q = +3.27$ 兆电子伏. $Q$ 可以是正的、负的或零，后者(零)代表弹性碰撞.)

注意方程(9-34)代表着三个独立的方程(一是动能的，两个是动量的——作为二维问题处理). 在终态下有四个未知量：$\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_4$ 这两矢量的大小和方向. 除非我们再加一个条件，例如粒子之一的方向，否则情况是不确定的. 这里，$Q$ 是当作已知量的(如同 $K_1$ 和 $\mathbf{p}_1$)，但我们可以根据对 $\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_4$ 的一组完全测量把它**推算**出来.

---

① 这里所说的"具有相同值"是指 $\mathbf{v}_3'$ ($\mathbf{v}_4'$)之值不随 $\theta_4'$ 而变；下文说"有不相同的值"是指 $\mathbf{v}_3$($\mathbf{v}_4$)之值随 $\theta_4$ 而变——译者注.

## §15 什么是碰撞？

我们已习惯于把“碰撞”这个词同某种突然的、猛烈的事件联系起来，因此也许有必要指出我们所阐明的结果可以应用于相当和缓的相互作用．主要特点只有以下这些：

1．实际上，相互作用限于某一有限的时间间隔内，从而我们

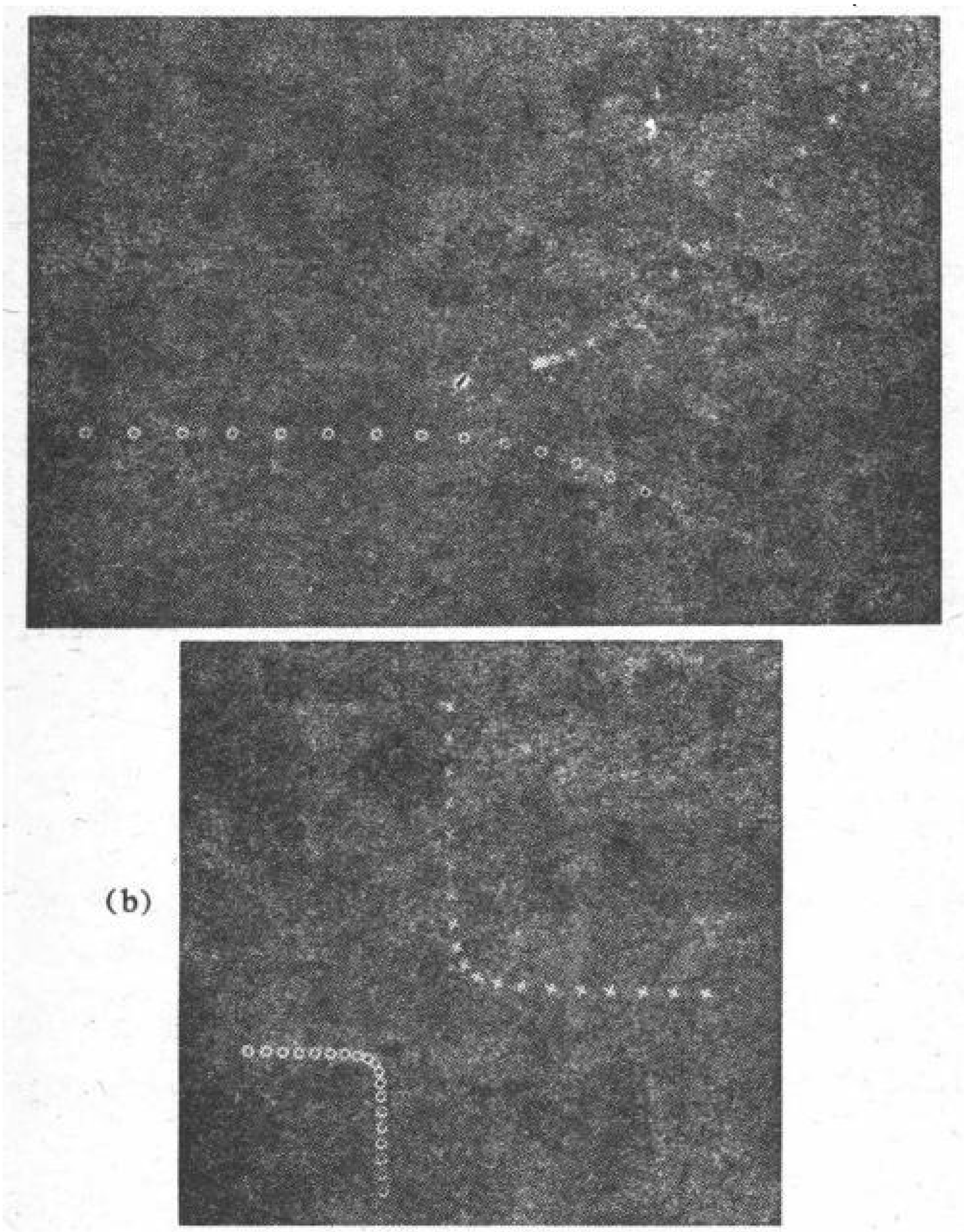



图 9-23 （a）发生于携带着永磁的两物体之间的“软”碰撞，没有通常意义下的接触；两物体的质量比为 2:1．(b) 完全相同的碰撞，用一随着两物体的质心运动的相机拍摄的照片．

能够说开始和终了.

2. 在碰撞持续的时间里,任何外力的影响可以忽略，因而体系象是孤立的一样.

图 9-23 所示是两个无摩擦的冰球相碰的频闪观测照相,冰球携有永磁体，竖着安放使两冰球相互排斥. 这里没有通常意义下的接触，但这肯定是物理学家所用词汇意义下的一种碰撞. 我们可以看出,除开在两物体极为接近的有限区域,速度的大小和方向都基本上是常数.

## §16 受到外力的相互作用粒子

讨论了线动量守恒和动量变化率与力的普遍关系，现在可以来考虑一相互作用粒子系在不免受到外力影响下的运动. 这当然是我们概念上的一个很重要的引伸，因为在实际上一个系统是永远不能孤立于其周围环境的.

只要看一个两粒子体系就够了. 推广到任意多个粒子是相当简单的，但将推迟到第十四章. 设 $m_1$ 和 $m_2$ 是两粒子的质量,$\mathbf{F}_1$ 和 $\mathbf{F}_2$ 是作用于它们的外力，$\mathbf{f}_{21}$ 和 $\mathbf{f}_{12}$ 是内部相互作用——$\mathbf{f}_{21}$ 是粒子 2 施于粒子 1 的力,而 $\mathbf{f}_{12}$ 则是粒子 1 施于粒子 2 的力.

对两粒子逐一应用牛顿定律,有

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{f}_{21}=m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}$$
$$\mathbf{F}_2+\mathbf{f}_{12}=m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \tag{9-35}$$

如果相互作用是牛顿式的(我们将认为是这种情形)，则牛顿第三定律要求

$$\mathbf{f}_{12}+\mathbf{f}_{21}=0$$

把上面两个方程(按矢量)相加,得

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=m_1\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}+m_2\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}$$

或

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\frac{d}{dt}(m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2) \tag{9-36}$$

其中内力 $\mathbf{f}_{12}$ 和 $\mathbf{f}_{21}$ 已不见. 这方程说明, 作用于这体系的所有外力之和等于体系的总动量矢量的变化率.

引进体系的质心的概念, 可以把这结果用非常简洁的方式表示出来. 令从某原点画出的两矢量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 给出两粒子的各别位置, 则质心的位置由下式给出:

$$\bar{\mathbf{r}}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} \tag{9-37}$$

这是(9-25)式的三维类似式, 并与早先(9-33)式质心速度矢量的定义对应, 因之

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2=M\bar{\mathbf{v}}$$

其中 $M(=m_1+m_2)$ 是体系的总质量. 据此, 我们有

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\mathbf{F}=M\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} \tag{9-38}$$

而这就证明了我们所要寻求的结果:

**一个两粒子系的质心的运动同单一的一个粒子的运动相同, 这单一粒子的质量等于体系的总质量, 所受的力是作用于各别粒子的所有外力之和.**

这结果的含义是重要的. 首先, 它提出处理一粒子系的运动的基本方法, 即把它的运动分析为如下的组合: (1)质心的运动和(2)粒子相对于它们的质心的运动. 后一运动是体系的内部运动, 如我们早先看到过, 是零动量的运动. 此外, (9-38)式还使我们能够应用有关单个粒子的动力学定律来处理广延物体的运动的某些方面. 特别地, 当一个广延物体作平移运动时, (9-38)式就包括全部内容了. 我们将在第十四章中回到这种问题.

顺带着说，(9-36)和(9-38)式还提供一个判据的基础，来判断一相互碰撞的粒子系是否基本上孤立的．在一个碰撞过程中，只有当任何外力的影响可以忽略时，动量守恒才在相当程度上成立．如果外力确实存在，则碰撞的持续时间 $\Delta t$ 必须够短，使 $F\Delta t$ 可忽略．另外一个说明这同一条件的方式是，相碰撞的粒子之间的相互作用力必须远大于任何可能在作用着的外力．

## §17 气体的压强

作为碰撞过程和动量转换的最后例子，我们来计算一气体的压强，其基础是：压强来自气体分子与构成容器四壁的原子的完全弹性碰撞．

我们将假设每单位体积的气体是由 $n$ 个粒子组成，每一粒子的质量为 $m_0$．最自然的算法是用下列假设：

1．所有的粒子都具有同一速率 $v$．

2．在任何时刻，可以被看作有三分之一在空间平行于某一定方向运动着，其余三分之二则各半地平行于另外两个方向运动，这两个方向互相垂直并垂直于第一个方向．

3．这气体是在一矩形容器中，容器的四壁是理想地平的和硬的．

就其说法而言，这些假设没有一个有丝毫真实性．头两个当然是虚假的，选一矩形容器也太特殊，而在原子的规模上，四壁是鼓鼓洼洼的和粘性的，而不是平的和硬的．尽管如此，我们根据这些假设所要作的计算却非常接近于产生正确结果．其原因是，由于一气体样品中存在着巨大数目的粒子，**按平均**，在集体的运动中有着本质上的对称性和总动能实际上完全守恒．个别的分子可能打到器壁上，在那里呆一短暂时间，再以不同角度和速率跳离——或许快一些，或许慢一些．但按平均说，我们可以把碰撞当作完全

弹性的，因为气体的动能，总的来说，既不随时间而增加，也不随之而减少.

在这基础上，我们可作以下非常简单的计算. 看容器一壁上的一小面积元 $\Delta A$. 将分子的运动分解，使 $\Delta A$ 的法线是三个互相垂直的方向之一，分子假设是沿着这三个方向运动的. 任何一个

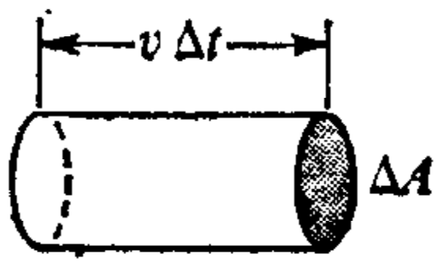



图 9-24　计算一气体的压强的最可能简单的途径. 在时间 $\Delta t$ 内，只有那些开始时位于长为 $v\Delta t$ 的柱体中的分子能到达器壁的面元 $\Delta A$.

分子都以动量 $m_0v$ 趋近于这器壁并以动量 $-m_0v$ 反弹回去；因而它提供一冲量 $2m_0v$. 在 $\Delta t$ 时间内有多少个分子打到 $\Delta A$ 上面呢？如果假定它们都有相同的速率 $v$，那么那些距离器壁比 $v\Delta t$ 远的分子便不能在 $\Delta t$ 时间内到达. 因此我们的注意应限于在一柱体内的分子，这柱体的截面为 $\Delta A$，长为 $v\Delta t$. 单位体积内有 $n$ 个分子，因而

$$\text{在柱体内的分子数目} = nv\Delta t\Delta A$$

但在这些分子中，只有**六分之一**不仅是沿着垂直于 $\Delta A$ 的线而且是特定地趋向 $\Delta A$，不是离开它，而运动的. 因此，

$$\text{在 } \Delta t \text{ 内与 } \Delta A \text{ 碰撞的数目} = \frac{1}{6}nv\Delta t\Delta A$$

$$\text{在 } \Delta t \text{ 内传给 } \Delta A \text{ 的总冲量} = 2m_0v \times \frac{1}{6}nv\Delta t\Delta A$$

$$= \frac{1}{3}nm_0v^2\Delta t\Delta A$$

但作用于 $\Delta A$ 上的平均力 $\Delta F$ 等于冲量被 $\Delta t$ 除，所以

$$\Delta F = \frac{1}{3}nm_0v^2\Delta A$$

我们称作压强 $p$[①]的，是沿法线方向作用于容器壁上单位面积的平均力．因此，我们得到

$$p=\frac{\Delta F}{\Delta A}=\frac{1}{3}nm_0v^2 \tag{9-39}$$

因 $nm_0$ 是气体单位体积的总质量，即密度 $\rho$，我们可以用另一方式让

$$p=\frac{1}{3}\rho v^2$$

或

$$v=\left(\frac{3p}{\rho}\right)^{1/2} \tag{9-40}$$

因此，如果我们的计算判明是正确的，我们就能根据对气体宏观性质的完全直接测量，推出那些看不见的分子的速率．以普通在大气压和室温下的氮气为例，有

$$p\approx 10^5 \text{ 牛顿/米}^2=10\text{千克/米}\cdot\text{秒}^2$$

$$\rho\approx 1.15 \text{ 千克/米}^3$$

所以

$$v\approx 500 \text{ 米/秒}$$

(9-39)式究竟站得住吗？这显然需要一更为细心的计算．我们曾从实验证据(第三章)看到，气体的分子在一定温度下是具有广为分布的速率的．因而我们公式中的 $v^2$ 应当用某种平方速率的平均，$v_m^2$，来代替．同时，我们当然不能凭借我们自己的计算对于数值因数 $\frac{1}{3}$ 寄以过多的信任——虽然事实上严格的理论证实了它．对这问题，一个可以接受的处理方法必须考虑分子从相当任意的方向趋近器壁的后果；尽管这并不改变结果的细节，但这只是偶然的．(结果是会改变的，如果我们考虑的是打在 $\Delta A$ 上的粒子数目而不是它们所施的力的话．)即便如此，我们所介绍的简单分

① 在本节中，$p$ 总是代表压强，不是动量．

析给了我们一个很有用的开端，用微观的语言来理解宏观性质．由于详细的气体动力理论不是我们现在所关心的，我们将满足于此．

## §18 中 微 子

在本章开头时我们指出过，物理学中的任何守恒律或守恒原理都是暂时性的，但如果在面临表面上的失败，而最后又得到证明为正确的话，其地位就可能大为加强．动力学的守恒定律最显著的成功发生在有关中微子方面——中微子是在放射性 $\beta$ 衰变过程中放射出来的、那难以理解的中性粒子．关于它的存在的预言起因于表观上的能量和角动量的不守恒，但最妙和最直接的证据是由表观上线动量的不守恒提供的．

这情况可以简单地说明如下：大家知道，$\beta$ 衰变过程包含从一原子核中射出一个电子，其结果是原子核的电荷增加一单位（如果这电子是一个普通的负电子的话）．如果没有其他粒子牵涉进去，这过程可写为

$$A \longrightarrow B + e^-$$

其中 $A$ 是原来的原子核，$B$ 是最终的原子核．如果 $A$ 基本上是孤立的，并在开始时是静止的，我们对线动量守恒的笃信会使我们预言，不论射出来的电子的方向（或能量）为何，原子核 $B$ 将不可避免地在相反方向上反冲．任何与此相违的事情，不管其他细节如何，都需要有其他粒子卷入．

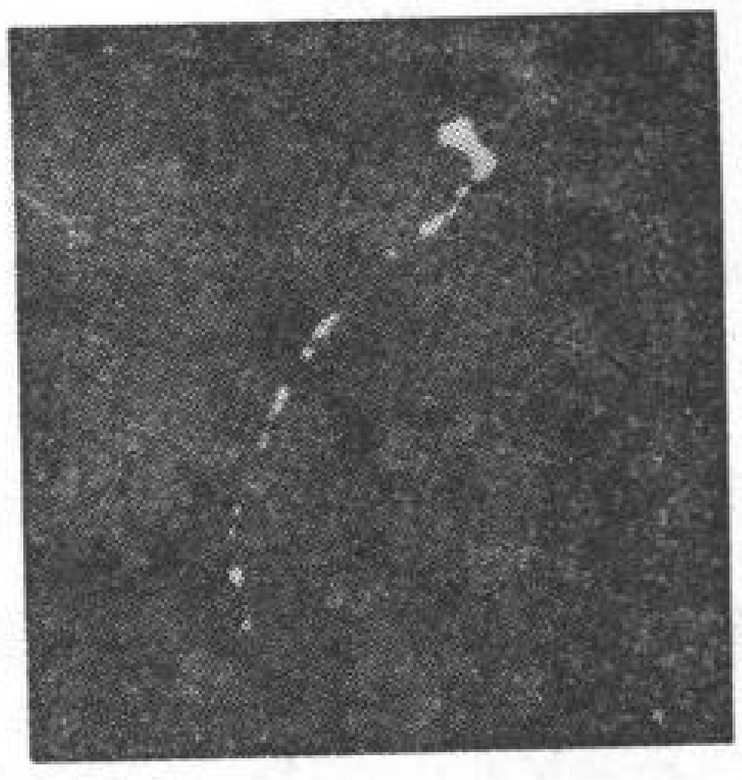


图 9-25 中微子的证据．在云室中所看到的氦 6 的 $\beta$ 衰变中电子和反冲的锂 6原子核的轨迹不共线．

图 9-25 示明氦 6 的 $\beta$ 衰变的一幅云室照片．衰变发生在图中顶部附近尖的弯头位置．指着“差不多西北”方向的粗短径迹是

反冲的锂 6 原子核；另一径迹是电子的．如果要最终的动量矢量相加之和同原来静止的 $^6$He 原子核一样——即等于零——那就一定有另一粒子——中微子——存在着．它之所以不出现，是由于它既无电荷，也几乎没有任何其他相互作用，这使它很容易逃过人们的注意——事实上，在它径直穿过地球时，它与任何物质相互作用的机会大约只有 $10^{12}$ 分之一．

## 习　题

9-1　一质量为 $m$ 的粒子以速度 $v_0$ 飞行，与一初始时静止的、质量为 $M$ 的粒子作完全非弹性碰撞．从 $m/M=0$ 到 $m/M=10$，画出末速 $v$ 与比值 $m/M$ 的函数关系图．

9-2　试考虑如何将线动量守恒应用于一个球从墙上弹开来的情况．

9-3　一只小鼠被放进一小封闭箱内，箱在一张桌子上．一只聪明的小鼠能操纵小箱在桌上的运动吗？小鼠能够用什么动作来使小箱行动？如果你是这样一只小鼠，而目的是为了逃避追捕者，你希望桌子的摩擦系数大呢还是小呢，或是可忽略的呢？

9-4　在《原理》一书中，牛顿提到，在一组碰撞实验中他发现，某种材料的两个物体分离时的相对速度为它们趋近时的相对速度的九分之五．假设一原先不动的、这种材料的物体，质量为 $3m_0$，被一质量为 $2m_0$、以初速 $v_0$ 运动的类似物体碰撞．求两物体的末速．

9-5　一质量为 $m_0$、以速率 $v_0$ 运动的粒子，碰到一质量为 $2m_0$ 静止的粒子．结果，质量为 $m_0$ 的粒子偏转了 $45^\circ$ 并具有末速 $v_0/2$．求质量为 $2m_0$ 的粒子碰撞后的速率和方向．动能守恒吗？

9-6　两个溜冰者（$A$ 和 $B$）质量都是 70 千克，各以 1 米/秒的速率互相趋近．$A$ 拿着一质量为 10 千克的滚木球，两人都能够以相对于它们自己为 5 米/秒的速率扔球．为了避免相撞，他们在相距 10 米时开始来回地扔球．扔一次够吗？扔两次（即 $A$ 接到回球）如何？如果球重为原来的一半，但他们能够扔得快一倍，他们须扔多少次？把全部情节画在一张时间对位移的图上，图中溜冰者的位置以横坐标来标示，时间的进展用纵坐标数值的增长来表示．（把溜冰者的初位置标在 $x=\pm5$ 米处，并将球的运动的空间-时间记录包括在图中．）这一情景提供对基本粒子之间的相互作用（在上述例子中是

排斥的)的现代观点的一简单模型. 吸引相互作用可以通过假定溜冰者交换的是一个飞去来器而不是一个球来模拟. [这些理论模型是由 F. Reines 和 J. P. F. Sells chop 在一篇题为 "Neutrinos from the Atmosphere and Beyond"("来自大气层和远方的中微子")的文章中引入的, 文章登在 *Sci. Am.*, **214**, 40[Feb. (1966).]

9-7 求每分钟射出 240 发子弹的机枪的平均反冲力; 假定每粒子弹的质量为 10 克, 腔口速度为 900 米/秒.

9-8 从一管嘴冒出来的水形成一竖直喷流. 这管嘴装在一根长的水平金属管的一端, 管的另一端夹住, 管子够细因而相当柔软. 喷流升高到管嘴上方 2.5 米处, 水的流速为 2升/分. 先前已由静态实验发现, 管嘴在竖直方向上的降低量与作用力成正比, 而在它上面悬挂一 10 克的质量会使它降低 1 厘米. 问这喷流的反作用力使管嘴降低多少?[这习题是以E. F. Schrader, *Am. J. Phys.*, **33**, 784 (1965) 所描述的一个演示实验为依据的.]

9-9 一城市的消防部门所使用的"标准消防水龙"每分钟输送 250 加仑的水. 当管嘴离房基 63 英尺时, 喷出的水能达到这建筑物上 70 英尺高处. 忽略空气阻力, 问

(a) 水龙的管口速度是多少?

(b) 如果水平地直对一竖直的墙壁喷水, 水龙所施的力将有多大? (设水沿墙壁面散开而无任何弹回, 因而碰撞实际上是非弹性的.)

9-10 一架直升飞机的总质量为 $M$. 它的主水平旋翼扫过一半径为 $R$ 的圆, 把整个这一圆面积上的空气从旋翼的上方拉了进去, 并驱使空气以速率 $v_0$ 竖直地向下运动. 空气的密度为 $\rho$.

(a) 如果这直升飞机在某固定高度翱翔, $v_0$ 之值必须是多大?

(b) 上述类型直升飞机的最大的一种重约 10 吨, $R\approx10$ 米. 在这情形中翱翔所需的 $v_0$ 多大? 取 $\rho=1.3$ 千克/米$^3$.

9-11 一起始质量为 $M_0$ 的火箭以恒定率 $|dM/dt|=\mu$ 排出燃烧过的燃料, 排料相对于火箭的速率为 $v_0$.

(a) 计算火箭从发射台竖直向上起动时的初始加速度.

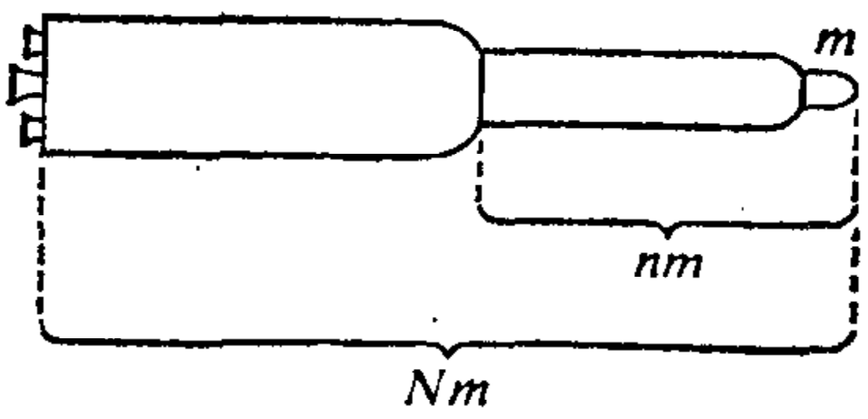
(b) 如果 $v_0=2000$ 米/秒, 则对于一个质量为 100 吨的这种火箭, 要给以等于 0.5g 的向上初始加速度, 每秒钟必须排出多少千克的燃料?

9-12 这一颇为复杂的问题是设计来说明使用多级火箭代替单级火箭作为运载工具所能获得的好处. 假定有效载荷(例如, 一空间密封舱)的质量

为 $m$, 装在一个两级火箭上(见图). 总质量——两装满燃料的火箭, 加上有效载荷——为 $Nm$. 在第一级火箭烧尽并分开后, 第二级火箭加上有效载荷的质量为 $nm$. 每一级火箭烧尽后的质量(套筒)与起始质量(套筒加上燃料)之比为 $r$, 排气速率为 $v_0$.

(a) 证明, 从静止出发(略去重力), 由第一级火箭燃烧获得的速度 $v_1$ 为

$$v_1 = v_0 \ln\left[\frac{N}{rN+n(1-r)}\right]$$




(习题 9-12)

(b) 求出由第二级火箭燃烧获得的增加速度 $v_2$ 的表达式.

(c) 把 $v_1$ 和 $v_2$ 加起来, 就得到用 $N$、$n$ 和 $r$ 表示的、有效载荷的速度 $v$. 设 $N$ 和 $r$ 为常数, 求 $v$ 为最大值时的 $n$.

(d) 证明, $v$ 为最大值的条件相应于在两级火箭中获得的速度相等. 求出 $v$ 的最大值, 并证明它对于 $r=0$ 和 $r=1$ 所描述的极限情形是有意义的.

(e) 求 $N$、$r$ 和 $v_0$ 之值相同的单级火箭有效载荷速度的表达式.

(f) 假定要想获得 10 千米/秒的有效载荷速度, 所用火箭的 $v_0=2.5$ 千米/秒, $r=0.1$. 证明这事可以用一个二级火箭来实现, 而用单级火箭是不可能的, 不论 $N$ 值多大.

(g) 如果你有劲头, 试把这分析推广到任意多级的情况. 能再次证明, 对于一给定的总起始质量, 如果设计各级火箭, 使每一级所贡献的速度增量相同, 即获得最大有效载荷速度.

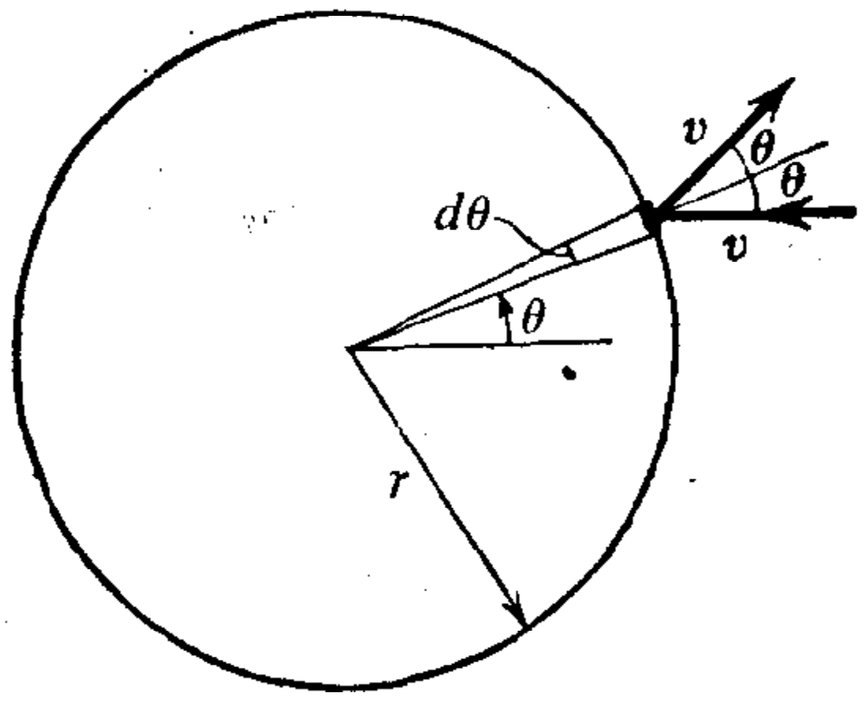
9-13 一质量为 $m$ 的一块物体, 开始时静止在一无摩擦的面上, 受到一连串粒子的轰击. 每个粒子的质量为 $\delta m(\ll m)$, 速率为 $v_0$, 沿正 $x$ 的方向. 碰撞是完全弹性的, 每一粒子都沿负 $x$ 的方向弹回, 证明这块物体经第 $n$ 个粒子碰撞后, 得到的速率非常接近于 $v=v_0(1-e^{-\alpha n})$, 其中 $\alpha=2\delta m/m$. 试考虑这结果对于 $\alpha n\ll 1$ 和对于 $\alpha n\to\infty$ 的有效性.

9-14 牛顿计算一物体在液体中穿行所受的阻力时, 假定液体的粒子(设想原是静止的)在受到物体碰撞时, 弹性地弹回.

(a) 按这个模型，阻力将依物体速率 $v$ 的某次幂 $n$ 而变化. 这 $n$ 值是多少?

(b) 假定一截面积为 $A$ 的平端物体，以速率 $v$ 在密度为 $\rho$ 的液体中运动. 想象每单位体积的液体由 $n$ 个粒子组成，每一粒子的质量为 $m$（因而 $nm=\rho$），如果每一粒子受到物体撞击时都弹性地从它反冲开，试求出阻力的明显表达式.

(c) 如果物体不是平端的，而是一个半径为 $r$ 的重球，以速率 $v$ 在密度




（习题 9-14）

为 $\rho$ 的媒质中穿行，阻力之值为何? 整个计算可按附在球上的一个参照系的观点来进行，因而液体粒子以速度 $-v_0$ 趋近球. 假设在这参照系中液体粒子象被镜子反射一样——入射角等于反射角（见图）. 你必须把球面看作分成许多圆带，与各种可能的 $\theta$ 值的小角度增量 $d\theta$ 相应.

9-15 一质量为 $m_1$、初速为 $u_1$ 的粒子碰到一个静止的、质量为 $m_2$ 的粒子. 碰撞是完全弹性的. 观察到碰撞后粒子具有等值反向的速度. 求

(a) 比值 $m_2/m_1$.

(b) 质心的速度.

(c) 两粒子在质心系中的总动能，用 $\frac{1}{2}m_1u_1^2$ 的分数来表示.

(d) 在实验室参照系中 $m_1$ 的最终动能.

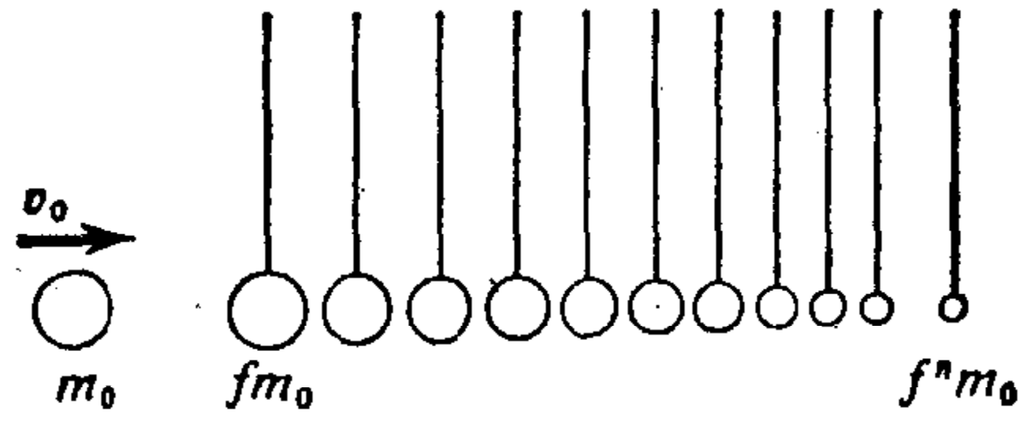
9-16 一质量 $m_1$ 与一质量 $m_2$ 碰撞. 把相对速度定义为在 $m_2$ 为静止的参照系中所观测到的 $m_1$ 的速度. 证明下列两种说法的等价性:

(1) 总动能是守恒的.

(2) 相对速度的大小不变.

(建议你解一个一维碰撞的问题，至少起初时如此.)

9-17　一碰撞装置是由一套$n$个分级的质量制成的，它们悬挂在一水平线上，彼此相近，但不接触．第一个质量为$fm_0$，第二个是$f^2m_0$，第三个是$f^3m_0$，等等，因而最后一个是$f^nm_0$．第一个质量被一质量为$m_0$、以速率$v$运动的粒子碰撞．这引起沿这些质量的一连串碰撞．




（习题　9-17）

(a) 假设所有碰撞都是完全弹性的，证明最后一个质量以下式给出的速率$v_n$飞开：

$$v_n=\left(\frac{2}{1+f}\right)^n v_0$$

(b) 由此证明，如果$f$接近于1，因而可写为$1\pm\epsilon(\epsilon\ll1)$，则这系统可以用来把入射质量的动能全部传递给最后一个质量，即使$n$很大．

(c) 对$f=0.9, n=20$，计算沿线中最后质量的质量、速率和动能，用入射粒子的质量、速率和动能来表示．将这结果同入射粒子直接碰撞线中最后一质量的结果作比较．

9-18　一2千克的质量与一8千克的质量弹性地相碰撞，压缩其中一个上面的弹簧缓冲器；当两质量分开时，缓冲器恢复了它的原始长度．假设碰撞是沿一条直线进行的(即正碰——译者)，而你能以下列不同方式引起这种碰撞，每种方式都具有相同的初始能量：

方式 A：8千克的质量具有16焦耳的动能，碰撞2千克的静止质量．

方式 B：2千克的质量具有16焦耳的动能，碰撞8千克的静止质量．

(a) 哪种方式引起的碰撞将使弹簧的压缩较大？不用真去求弹簧的压缩就作出你的抉择．

(b) 保持总起始动能为16焦耳这条件，在两质量之间应如何分配这能量，以获得弹簧的最大可能压缩？

9-19　在一次交通事故中(这是以一个真实的案情为依据的)，一质量为2000公斤、向南行驶的汽车在一交叉路中心撞上一质量为6000公斤、向西行驶的卡车．两辆车交接在一起沿着差不多是指向正西南的直线滑离公路．一

目击者断言卡车进入交叉点时的速率为50英里/小时.

(a) 你相信这目击者吗?

(b) 不管你是否相信他,总起始动能的几分之几由于这碰撞而转换成其他形式的能量?

9-20 质量为$2m$的一原子核A以速度$u$飞行,与一静止的、质量为10$m$的原子核B碰撞. 碰撞结果引起总动能改变. 碰撞后观察到原子核A以速率$v_1$与原来运动的方向成90°角飞行,而B以速率$v_2$与A的原运动方向成$\theta$角飞行($\sin\theta=3/5$).

(a) $v_1$和$v_2$的大小是多少?

(b) 由于相互作用的结果,获得或失去的能量为起始动能的几分之几?

9-21 一质量为$m$、初速为$u$的粒子与质量为$M$、初始是静止的粒子作**弹性**碰撞.碰撞结果,质量为$m$的粒子偏转了90°,速率减为$u/\sqrt{3}$. 质量为$M$的粒子以速率$v$与$m$的原始方向成$\theta$角反冲. (所有速率和角度都是在实验室参照系中观测的.)

(a) 求$M$(用$m$表示)和$v$(用$u$表示)以及角度$\theta$.

(b) 在质心系中两粒子偏转了多大角度?

9-22 试对两个磁化冰球碰撞的频闪观测照片进行测量(图9-23),以检验初态(最初的三时间单位)和终态(最后的三时间单位)之间的线动量和总动能是否守恒.

9-23 一质量为$2m$、速度为$u$的粒子碰到一质量为$2m$、原来静止的第二个粒子. 碰撞结果,产生一质量为$m$的粒子,与入射粒子的初始方向成45°角离去. 这一重新排列碰撞的另一产物是一个质量为$3m$的粒子. 假设这一碰撞不牵涉到总动能的显著改变,试计算质量为$3m$的粒子在实验室系和质心系中的速率和方向.

9-24 在一项历史性研究中,詹姆斯·查德威克于1932年通过研究快中子与氢核和氮核的弹性碰撞得到中子质量之值. 他发现,氢核(原来静止)的最大反冲速度为$3.3\times10^7$米/秒,而氮14核的最大反冲速度为$4.7\times10^6$米/秒,误差为±10%. 由此你能得知

(a) 中子的质量,

(b) 所用中子的初速度

是什么吗?(要计及氮的测量误差. 以一个氢核的质量为1原子质量单位,氮14核的质量为14原子质量单位.)

9-25　一幅云室照片表明一质量为 4 原子质量单位、初速为 $1.9\times10^7$ 米/秒的 $\alpha$-粒子与云室中气体的原子核碰撞. 这碰撞使 $\alpha$-粒子的运动方向改变 12°，并使它的速率减为 1.18 米/秒. 原来静止的另一粒子获得速度 $2.98\times10^7$ 米/秒，与 $\alpha$-粒子初始前进的方向成 18° 角. 这第二个粒子是什么？碰撞是弹性的吗？（在解释你的结果时，要计及用云室测量这些速率和角度，误差可达百分之几的事实.）

9-26　一核反应堆用石墨为减速剂. 如果用快中子轰击，可认为这一晶体点阵中原子的碳核对反冲实际上是自由的，尽管用热中子并不能把它们轰击出来. 一动能为 1 兆电子伏的快中子与一静止的碳 12 核弹性相碰撞.

(a) 在质心系中每个粒子的初速率是多少？

(b) 在质心系中测量时，碳核的速度由于碰撞转了 135°. 在实验室系中测量时，中子的最终速率和方向如何？

(c) 如果要中子的动能从 1 兆电子伏减为 1 千电子伏，中子大约必须与碳核作多少次弹性碰撞（包括方向的无规改变）？假设平均能量损失是最大值和最小值的平均.

9-27　(a) 质量为 $M$ 的一运动粒子与质量为 $m(<M)$ 的一静止粒子作完全弹性碰撞. 证明入射粒子的最大可能偏转角为 $\sin^{-1}(m/M)$. （使用实验室系和质心系中的矢量图会有所助益.）

(b) 质量为 $m$ 的粒子与质量为 $M(>m)$ 的静止粒子作完全弹性碰撞. 入射粒子偏转 90°. 较重的粒子与 $m$ 原来的方向成什么角度反冲？

9-28　正文（第 165 页）给了一个例子，分析两个氘核之间核反应的动力学. 另一可能的反应如下：

$$^2_1\mathrm{H}+{}^2_1\mathrm{H}\longrightarrow{}^1_1\mathrm{H}+{}^3_1\mathrm{H}+4.0\text{ 兆电子伏}$$

在这一情形中，反应产物是一个质子和一个氚核（后者是不稳定的氢 3 同位素或氚的核）. 假定一静止的氘核被一动能为 5 兆电子伏的入射氘核碰撞.

(a) 在这个反应中所产生的质子，其动能的最大和最小可能值是多少？

(b) 氚核的方向与入射氘核的方向所能成的最大角度（在实验室中观测的）是多少？当它沿这一方向射出时，在实验室测得的，它的动能是多少？（对这问题从头到底用原子质量单位和兆电子伏作单位，处理起来方便.）

9-29　一条质量为 $M$、长为 $L$ 的船浮在水中，不动；一质量为 $m$ 的人坐在船头上. 这人站起来，走到船尾再坐下.

(a) 如果假设水对船的运动完全不提供阻力，那么，由于人从船头走到

船尾，船会移动多远？

(b) 更现实一些，假设水提供一粘滞阻力 $-kv$，其中 $k$ 是常数，$v$ 是船的速度．证明在这情形下有奇怪的结果：船最后将回到它的起始位置．

(c) 考虑这一事实所引出的佯谬：按照(b)，任何非零的 $k$ 值，不论多小，都意味着船最终要处在它的出发点，但是一严格的零值却意味它最终是在另外某个地方．当 $k$ 的变化直到为零都可以设想是连续的，你如何解释最终位置的这一不连续跃变？要想得到启发，可看 D. Tilley, *Am. J. Phys.*, **35**, 546(1967) 一文中简短而明晰的分析．

能量守恒，作为一个原理…在本世纪前半叶的经典物理学中起了根本性的、或者象有些人愿意说的、最根本性的作用，而以后又在量子力学中…. 然而珍奇的是，这一热力学第一定律会如此富有成果地浇灌了力学这一块多石的、贫瘠的土壤.

C.G. 基利斯比，《客观性的极限》(1960).

人们也许会觉得奇怪，我们在讨论力学的基础方面已经走了这么远而几乎不提一提能量….我们确实无意于贬低这一概念的重要意义，而只是想强调，力学的逻辑基础是很可能毋需它的…. 立刻产生这样的问题：那么，为什么还要引进它呢？这就是我们想要讨论的内容.

R. B. 林德赛和 H. 马格瑙，《物理学的基础》(1936).

# 第十章　动力学中的能量守恒、振动运动

## §1 引　论

在所有物理概念中，能量也许是最为深远的．每一个人，不管他是否一位科学家，都认识到能量及其意义．能量是我们为了完成某些事物而付出的东西．能量这一个词的本身可能处于隐蔽地位，但我们认识到，每一加仑汽油，每一 Btu（英制热量单位——译者）的取暖用汽体，每一千瓦-小时的电，每一车用蓄电池，每一卡的食物热量，都这样或那样地代表着为了完成我们称之为**功**的泉源．我们不会想到要对力，或加速度，或动量付款．**能量**是世界性通货，有着显然是数不清的单位，而物理过程则代表着从一种单位转化为另一种单位．

上面的评述并未真正给能量以**定义**．不要紧．我们值得再一次去回忆 H. A. 克拉默所表示过的见解："最重要的和最富有成果的概念是那些不可能赋予明确意义的概念．"① 能量作为一个概念的巨大价值溯源于它的转换．它是**守恒的**——这是关键之点．虽然我们不能普遍地给能量下定义，但那并不意味它只是一个含糊的、定性的概念．我们已经建立了各种特殊**种类**能量的定量量度；如引力的、电的、磁的、弹性的、动力学的，等等．任何时候，如果出现能量似乎消失了的情形，总是能够认出并确定一新的能量形式，使我们能够维持守恒律．而守恒律，象我们在第九章开头时说过

① 见本书第一册 59 页，在那里我们在有关时间概念的讨论中引了克拉默的评述．

的，代表着物理学家的最有力的工具，用来组织他对自然的描绘.

在本书中我们将只涉及两种主要类别的能量，那是与经典力学有关的——与物体的整体运动关联的动能，和与弹性形变、引力吸引、电相互作用等相关联的势能. 如果能量从任何这些形式之一转变为化学能、辐射能或我们称之为热的分子和原子的无规运动，则从力学的观点看它们是消失了. 这是一个非常重要的特点，因为它意味着，如果我们把注意力局限于纯力学方面，那能量守恒就没有约束力；一定不能盲目假定能量是守恒的. 尽管如此，我们将看到，存在着许多物理情况，对它们说来总的机械能守恒是成立的，而在这种范围内，它对于物理问题的分析是有巨大价值的.

一个有趣的历史侧面是，在我们根究能量这一主题时，我们是暂时离开了牛顿的，虽然并未离开我们可以正当地称之为牛顿力学的范畴. 在整部《原理》中对宇宙的动力学作了使人敬佩的阐明，但没有一次用过、甚至提到过能量的概念！①对牛顿来说 $F=ma$ 就够了. 但我们将要看到，能量的概念虽然根源于 $F=ma$，还有它自身的特殊贡献. 我们将从功与动能之间的定量关联开始.

## §2 运 动 积 分

在第六章中，我们简单地说明了作用于一物体的力作功而相应地使物体的动能增加这一基本概念. 现在我们回到这题目上来，并大大地进一步加以发展.

我们仍从那简单而熟悉的情形开始：一质量为 $m$ 的物体 在一恒定力 $F$ 的作用下运动（我们先假设一直线运动，因而不必用矢量符号）. 于是，由牛顿定律有

---

① 但如我们在第九章中注明过的，有些牛顿同时代的人，特别是惠更斯和莱卜尼兹，确曾认识到一个类似于能量的量——“活劲”$mv^2$——在某些范畴，如碰撞和摆的运动中的重要性.

$$F=\frac{dp}{dt}=m\frac{dv}{dt}=ma$$

设这力作用了一段时间 $t$，在这时间内速度从 $v_1$ 变到 $v_2$. 这时有

$$Ft=mat=m(v_2-v_1) \tag{10-1a}$$

这表示 $F$ 的冲量等于线动量的改变. 但假如我们以力所作用的距离而不是时间来乘力，这时得到

$$Fx=max=ma\frac{v_1+v_2}{2}t$$

$$=\frac{1}{2}m(at)(v_1+v_2)$$

$$=\frac{1}{2}m(v_2-v_1)(v_1+v_2)$$

因此

$$Fx=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2 \tag{10-2a}$$

这表明；$F$ 所作的功等于动能的改变. 我们没有理由在(10-1a)和(10-2a)两式之间偏重其一，认为它表示出力的效果. 事实上，它们一般向我们说明着不同的事情. 但是，在发挥最后那句话之前，我们要提请注意，恒定力和恒定加速度的限制是不必要的，因为

$$F=m\frac{dv}{dt}$$

乘以 $dt$，求积分，得

$$\int_{t_1}^{t_2}Fdt=m\int_{v_1}^{v_2}dv=m(v_2-v_1) \tag{10-1b}$$

乘以 $dx$，求积分，得

$$\int_{x_1}^{x_2}Fdx=m\int_{x_1}^{x_2}\frac{dv}{dt}dx$$

但

$$\frac{dv}{dt}dx=\frac{dx}{dt}dv=vdv$$

因而

$$\int_{x_1}^{x_2} F dx = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \qquad (10\text{-}2\,\mathrm{b})$$

(10-1b)式左方是力的总冲量，而(10-2b)式的左方当然按定义是力所作的**功**. 这两个积分中的每一个都可以表示为相应的$F$对$t$或对$x$的相应曲线下一定界限内的面积(见图 10-1).

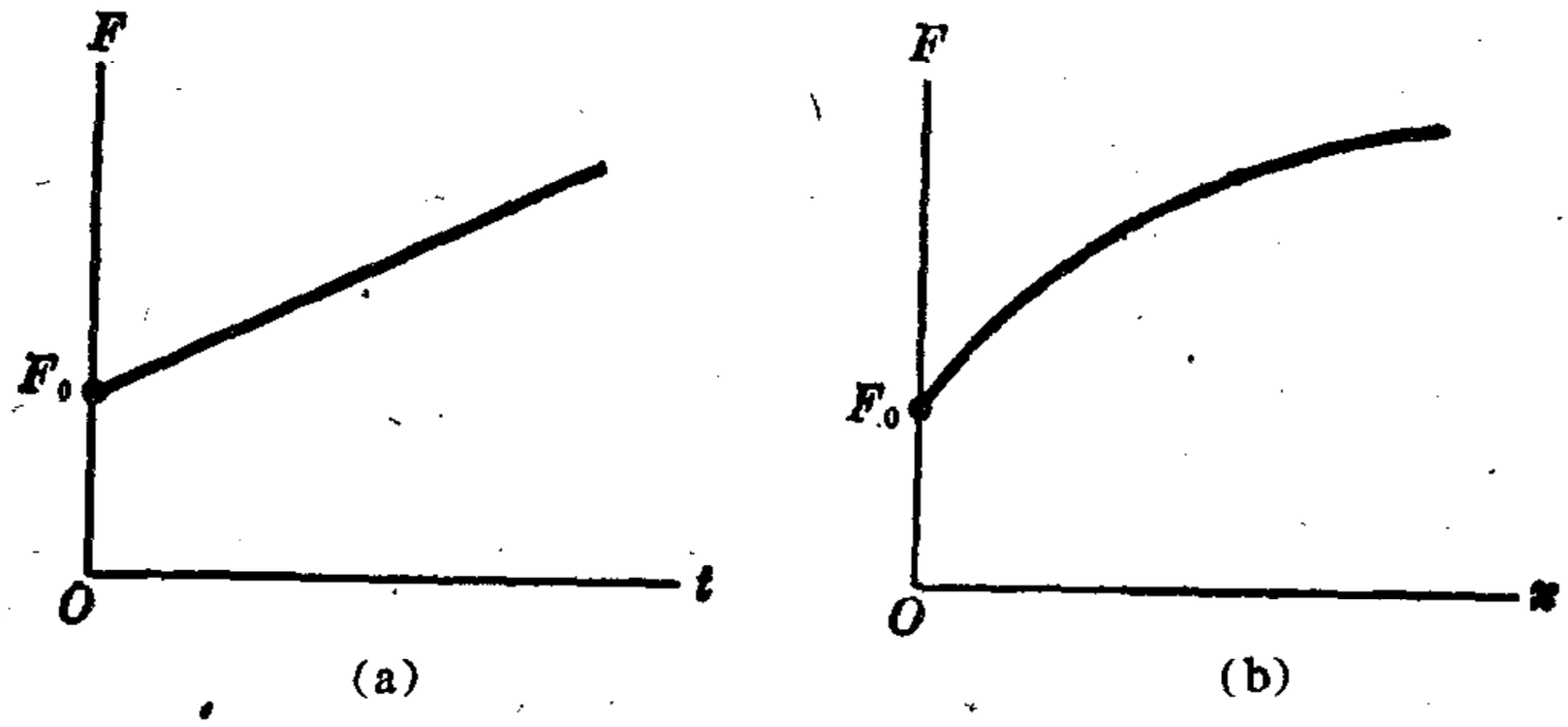



图 10-1 (a) 随时间按线性关系变化的力. 曲线下的面积是总冲量的量度. (b) 同一力，作为位移的函数的图线. 曲线下的面积是总的功的量度.

然而，(10-1b) 式和 (10-2b) 式的普遍相似性是容易使人误解的，因为力、位移、速度都是矢量. 一定大小的力作用的结果与力的方向相对于受这力作用的物体运动的方向有很大的关系. 因此，正如我们在圆周运动中看到的那样，有一个力不断地作用于物体上，结果是动量(也是矢量)不断地改变而速度的大小全然未变.

如果我们回到牛顿定律的原来的矢量表达形式:

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

事情就变得很清楚了. 我们仍然可以直接对$t$求积分:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

左边的表达式指明，如果力的方向随时间而变化，我们必须把$t_1$和$t_2$之间的时间分为相继的时间间隔$\Delta t$，而对所有小冲量

$\mathbf{F}\Delta t$ 求相应的矢量和. 这正是牛顿所设想的一个变化着的力的作用，例如一行星在它的轨道上绕太阳而运动时所受的作用(参看第十三章). 但是，把 $\mathbf{F}$ 对沿着轨道的距离元(它们本身也是矢量)求积分会是怎样呢？这本质上是一个物理学的、而不是一个数学的问题. 我们问的是：将一个力在某任意方向上作用于一物体的运动，其效果是什么？图 10-2 帮助我们提出解答. 如果一个力 $\mathbf{F}_1$ 对 $\mathbf{v}$

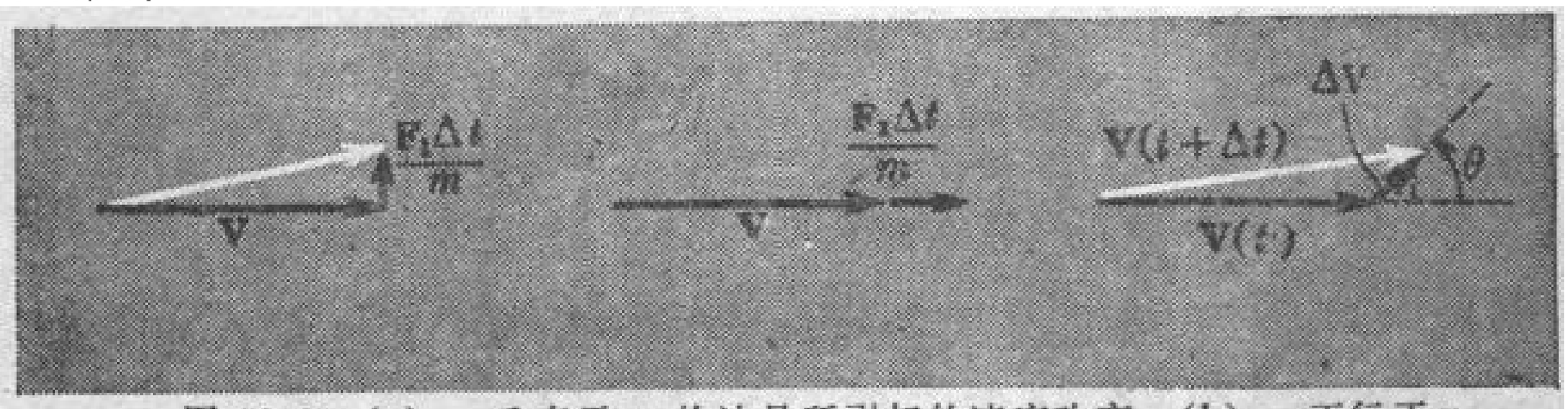



图 10-2 (a) 一垂直于 v 的冲量所引起的速度改变. (b) 一平行于 v 的冲量所引起的速度改变. (c) 一任意冲量所引起的速度改变.

**垂直地**施加作用，作用的时间 $\Delta t$ 非常之短，它将改变速度的方向，而不显著地改变其大小. 如果一个力 $\mathbf{F}_2$ 沿着 $\mathbf{v}$ 的方向施加作用，它将改变 $\mathbf{v}$ 的大小而不改变其方向. 因此，如果我们要想把注意力固定于 $\mathbf{v}$ 的大小的改变，我们就应当限于考虑沿 $\mathbf{v}$ 的方向的力或力的分量. 如果合力 $\mathbf{F}$ 的作用与 $\mathbf{v}$ 成 $\theta$ 角，它沿 $\mathbf{v}$ 的分量将是

$$|\mathbf{F}|\cos\theta = m\frac{|\Delta\mathbf{v}|\cos\theta}{\Delta t}$$

其中 $\Delta\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{v}$ 的矢量变化，等于 $\mathbf{F}\Delta t/m$[参考图 10-2(c)]. 在 $\Delta t$ 时间内走过的距离元，按速度矢量的定义，是

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$$

因而力沿 $\mathbf{v}$ 的分量乘上这位移是

$$|\mathbf{F}||\Delta\mathbf{r}|\cos\theta = m|\mathbf{v}||\Delta\mathbf{v}|\cos\theta$$

这是一个**标量**式；我们排除了任何有关 $\mathbf{F}$ 在改变 $\mathbf{v}$ 的方向方面的效用，而只要求知道有关 $\mathbf{v}$ 的大小的变化. 要把这一点表达得更

简洁一些，我们用两矢量的“点积”（或标积）的符号：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta=AB\cos\theta$$

据此，有

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}=m(\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v})$$

但我们可以在此运用一简明（而有用）的诀窍．看 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ 这个量．这是一个标量，它的大小正好是 $|\mathbf{v}|$ 的平方，即 $v^2$．既然

$$v^2=\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

则求微分，有

$$\Delta(v^2)=\Delta\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}=2\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}$$

（最后一步之所以可能是因为两矢量的标积与其中的次序无关，即交换律成立．）因此

$$\mathbf{v}\cdot\Delta\mathbf{v}=\frac{1}{2}\Delta(v^2)$$

随之，有

$$\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}=\frac{1}{2}m\Delta(v^2)$$

现在，对物体在这个力的作用下可能走的任何路线求积分，我们得到下列关系：

$$W=\int_{r_1}^{r_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2) \qquad (10\text{-}3)$$

这式以普遍的形式表示着作的功和动能的改变之间的关系．

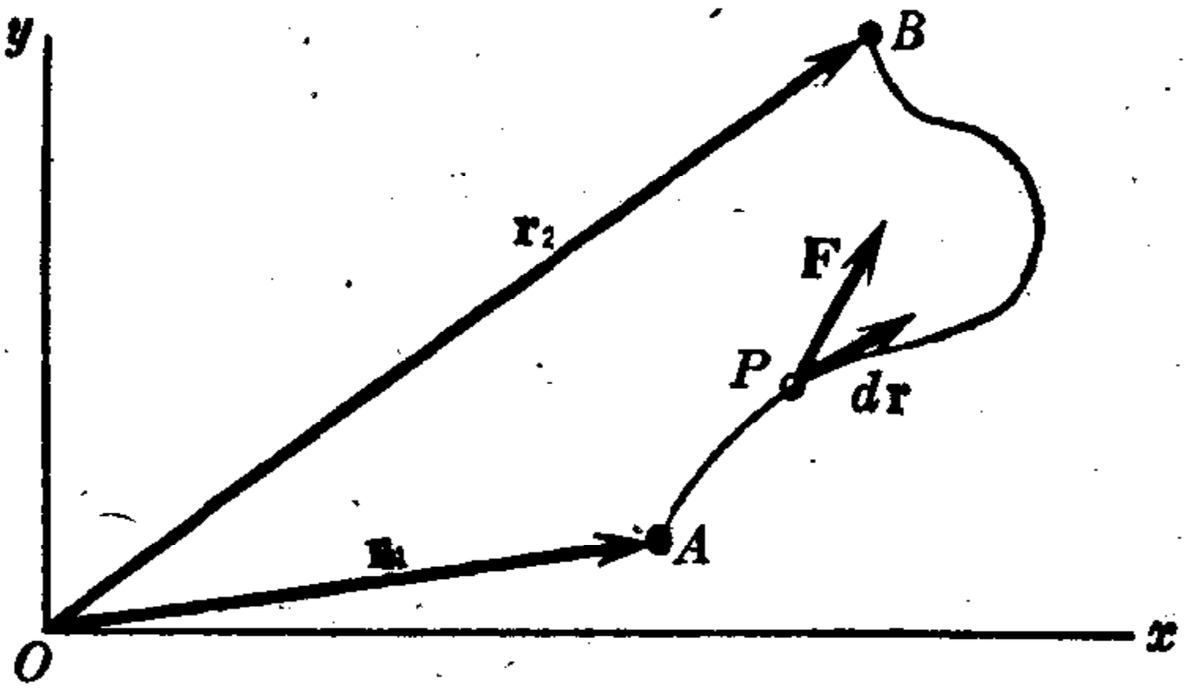



图 10-3　沿一给定路线计算所作的功．

图 10-3 说明，在从一点 $A(\mathbf{r}_1)$ 走到另一点 $B(\mathbf{r}_2)$ 的二维位移中计算(10-3)式功的积分时，包括什么.

(10-3)式揭示着功与能之间最重要的关系. 它们是标量. 一物体以速率 $v$ 竖直地运动与假定它以同样的速率水平地运动，具有完全相同的动能，尽管它们的矢量动量大不一样. 能量的这一标量性质在我们今后的工作中将被反复地利用.

## §3 功、能量和功率

本章所关注的主要是在功和机械能的概念的基础上发展某些普遍的动力学方法. 但在实际应用这些方法时，将牵涉到用恰当的单位来表示这些量的量度. 这一节的目的就是介绍某些有关的单位，以备今后参考.

我们的基本单位早已在第六章中介绍过，是 MKS 制中功或能量的单位——焦耳(J):

$$1\text{ 焦耳}=1\text{ 牛顿-米}=1\text{ 千克}\cdot\text{米}^2/\text{秒}^2$$

如果采用 CGS 制，则能量的单位是尔格:

$$1\text{ 尔格}=1\text{ 达因}\cdot\text{厘米}=10^{-7}\text{ 焦耳}$$

在作任何进一步的讨论之前，我们要引进一个似乎是离题的概念——功率，它的定义是作功的速率:

$$\text{功率}=\frac{dW}{dt}$$

(对于一力学体系，令 $dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$，得功率$=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$.) 功率是具有很大实用重要性的一个概念(和一个量)，因为完成某指定量的功所需的时间可能是极关重要的. 举例说，一台小的电动机可能同一台大的一样能够驱动一台起重机(也许需要附加几个齿轮)，但可能无法用它，因为完成一件工作的时间会太长. 功率主要是一个实用工程方面的概念；在有关动力学原理的发展中我们将不用它. 但

我们所采用的、功的量度之一常常是用功率的单位——瓦特——来表示的. 用力学量表示,

$$1\text{ 瓦特} = 1\text{ 焦耳/秒}$$

即

$$1\text{ 瓦特}\cdot\text{秒} = 1\text{ 焦耳}$$

当然,瓦特最常用于电方面,相应关系是瓦特=伏特×安培. 但重要的是知道它不是一个特定于电方面的量①. 家用方面(特别是与电费有关)的一个方便的能量单位是千瓦-小时(kWh):

$$1\text{ 千瓦-小时} = 3.6\times10^{6}\text{ 焦耳}$$

在化学和热学计算中,标准单位是千卡,其定义是把 1 千克的水从 15°C 升高到 16°C 所需的能量:

$$1\text{ 卡} = 4.2\times10^{3}\text{ 焦耳}$$

在原子和原子核物理学中, 能量的测量常表示为电子伏(eV)或其相关单位千电子伏 ($10^{3}$ eV), 兆电子伏($10^{6}$ eV)和京电子伏·($10^{9}$eV). 电子伏是一个基元电荷升高一伏电位差所需的能量:

$$1\text{ 电子伏} = 1.6\times10^{-19}\text{ 焦耳}$$

最后,正如爱因斯坦首先提出并为无数观测所证实了的,在我们习惯于称之为质量和习惯于称之为能量这两者之间, 存在着一等价性. 在经典力学中,质量与能量是作为完全分开的概念来对待的,但也许值得在这里就引用这一等价性, 以使所有可供选用的能量量度都列在一起:

$$1\text{ 千克的质量与 }9\times10^{16}\text{ 焦耳等价}$$

为了引起大家的兴趣,我们在表 10-1 中出示一些有代表性的

---

① 另一为大家熟悉的功率的单位自然是马力. 关于这, 我们只说 1 马力=746瓦, 使大家(以此作为一极粗略的顺手规则)能说大约需要 1 千瓦来驱动一台 1 马力的电动机.

实用上重要的各级功率大都可以方便地用以瓦特为基础的各种功率单位来说明——微瓦($10^{-6}$ 瓦,非常弱的无线电信号的典型), 毫瓦($10^{-3}$ 瓦), 千瓦($10^{3}$ 瓦),和兆瓦($10^{6}$ 瓦,常用于说明发电厂规模的单位). 为了比较, 值得说一下, 太阳的输出功率大约是 $3.8\times10^{26}$ 瓦!

## 表 10-1　各种东西的能量

$10^{50}$J
——与太阳等价的能量（$E=mc^2$）

$10^{40}$J
——我们银河系每天输出的能量
——地球的轨道运动(相对于太阳)动能
——太阳每天输出的能量

$10^{30}$J
——月球的轨道运动(相对于地球)动能

——地球上每天接受的太阳能

$10^{20}$J
——全世界在 1950 年用掉的能量($10^{20}$ J/年)
——一旋风的动能
——胡佛水坝每天输出的能量　两平方英里上每天接受的太阳能　燃烧 7000 吨煤　1 公斤 $U^{235}$ 完全裂变时释放的能量　与 1 克物质等价的能量　($E=mc^2$)

$10^{10}$J
——一吨 TNT 爆炸时的能量
——平均每日饮食所含能量
——1 千瓦-小时

$10^{0}$J
——步枪子弹的动能
——1 尔格($10^{-7}$ J)

$10^{-10}$J
——一原子质量单位的等价能量($E=mc^2$)
——一个 U 或 Pu 原子核裂变时(慢中子产生)的能量
——一个电子质量的等价能量

——在空气中产生一对离子所需的平均能量（～35 电子伏）

$10^{-20}$J
——把一个脱氧核酸分子(DNA)分裂为二所需能量(～0.1 电子伏)
——室温下每一分子的动能(0.025 电子伏)
——无线电广播波段上一光子的能量

$10^{-30}$J
——一电子以 1 米/秒速度运动的动能

物理例子，包含着不同的能量数量级，都用基本力学单位焦耳来表示.

## §4 重力势能

我们将从一简单的和非常熟悉的问题开始. 一物体被竖直地向上抛出，在重力作用下运动，因而在升高过程中不断失去速率. 取 $-y$ 轴，向上为正，并假定物体通过水平线 $y=y_1$ 时的速度为 $v_1$，到达 $y=y_2$ 时速度为 $v_2$(图 10-4). 于是，按纯运动学的描述，有

$$v_2^2=v_1^2+2a(y_2-y_1)$$

其中

$$a=-g$$

由此得到熟知的结果①

$$v_2^2=v_1^2-2g(y_2-y_1)$$

现在让我们用功和能来考虑这问题. 在 $y_1$ 和 $y_2$ 之间，动能($K$)的改变是

$$K_2-K_1=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

用前面运动学方程，这关系可写为

$$K_2-K_1=-mg(y_2-y_1)$$

但 $-mg$ 这个量正是物体从 $y_1$ 上升到 $y_2$ 时作用于其上的不变重力 $F_g$(见图 10-4). 于此，我们看到，$K$ 的变化恰好等于这重力所作的功，符合由(10-3)式表示的普遍结果:

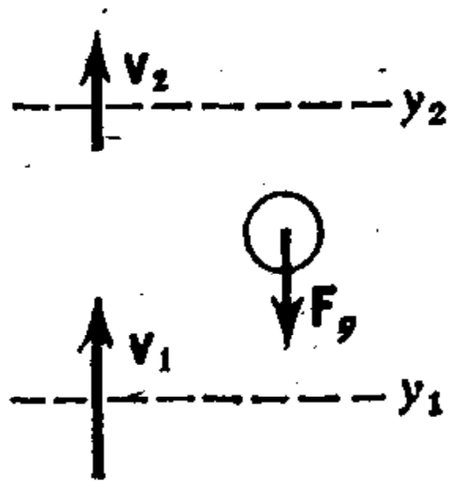



图 10-4 与重力作用下的竖直运动关联的速度变化.

$$K_2-K_1=F_g(y_2-y_1)$$

我们用另一方式写这方程，使与位置 $y=y_1$ 有关的量都出现

---

① 记得我们曾规定 $g$ 是一个正数，等于本地区重力加速度的数值，可用任何单位表示.

在一边，而与位置 $y=y_2$ 有关的量都出现在另一边．我们把结果表示成看起来似乎累赘的形式，但这样做的理由将立刻予以说明．我们的新表达式是

$$K_2+(-F_g y_2)=K_1+(-F_g y_1) \tag{10-4}$$

我们在这里所做的是有意地把数学表述如此安排，使两个量之和在不同的位置上具有相同值．这是能量守恒表述的形式性基础．我们通过等式

$$U(y)=-F_g y \tag{10-5}$$

给任何指定点 $y$ 处的**势能**下**定义**(这使在 $y=0$ 处 $U=0$)①．特别要注意 $U(y)$ 是重力所作的功的负值．把这样定义的势能代入(10-4)式，得

$$E=K_2+U_2=K_1+U_1 \tag{10-6}$$

其中 $E$ 是**总的机械能**．在(10-5)式中令 $F_g=-mg$，我们得到熟知

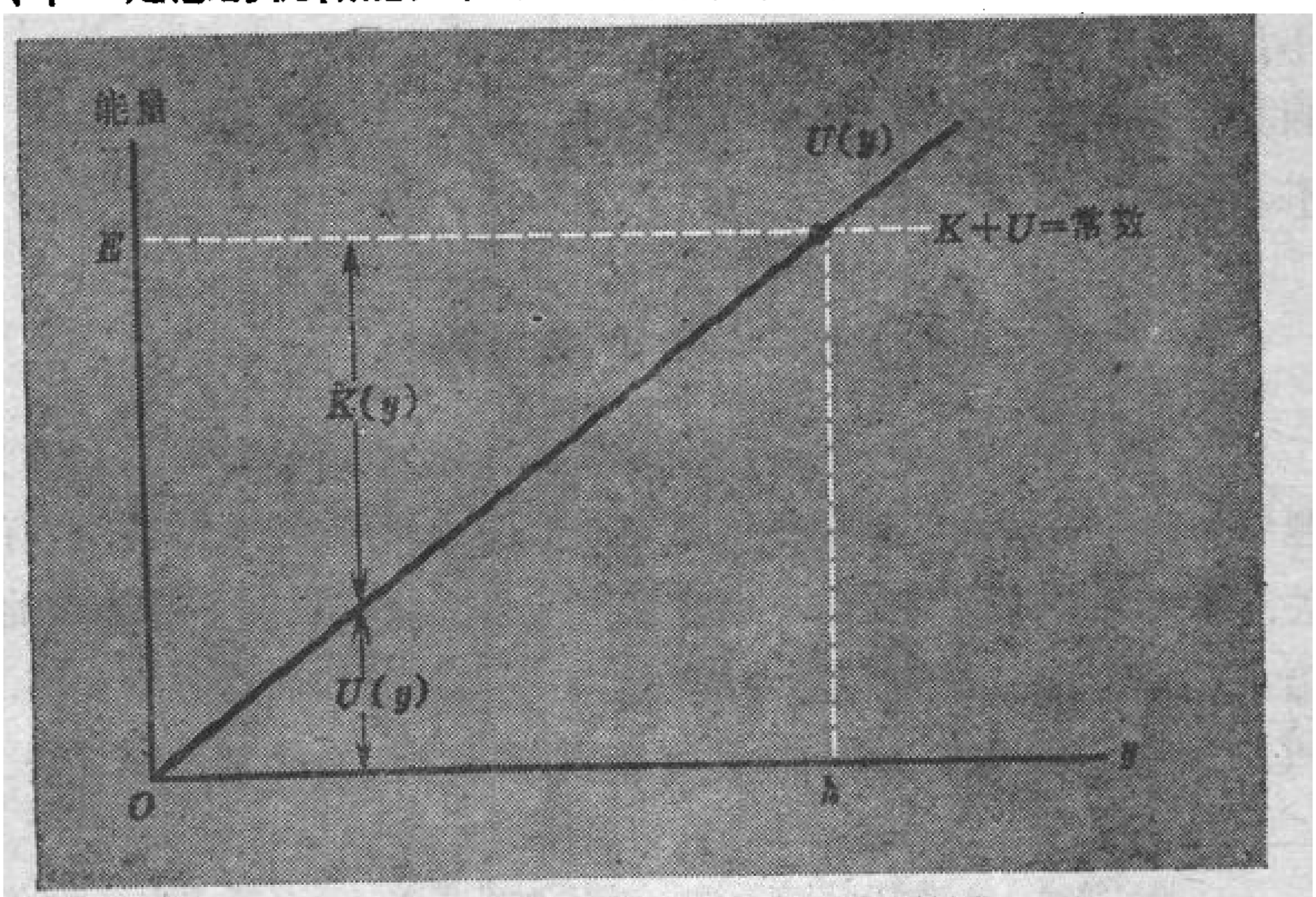



图 10-5　在一水平面之上竖直运动的能量图．

① 在本书中我们将始终用符号 $U$ 来表示势能．符号 $V$ 也是广为使用的，但我们在这里避免用它，因为我们太常用 $v$ 字(大写和小写)来表示速度了．

的结果

$$U(h)=mgh$$

表示在地面上(或其他水平线上，规定其势能为零)高为 $h$ 的地方一物体的势能. 对于这一情形，能量守恒的表述可以简单地表示如图 10-5. 我们不久还要对这类图线作进一步的阐述.

你们无疑是熟悉以另一种方式来解释上述最后一个方程中那样的势能 $U(h)$ 的. 它正好代表我们克服重力把一个物体升高距离 $h$ 而不给以任何动能所要作的功. 为了得到这一结果，我们必须提供一外力，$F_{外}$；如果这力比 $mg$ 大不了多少，物体将以可忽略的小加速度 ($F_{总}\approx 0$) 向上运动而达到某一高度(图 10-6)，速度则差不多为零.①

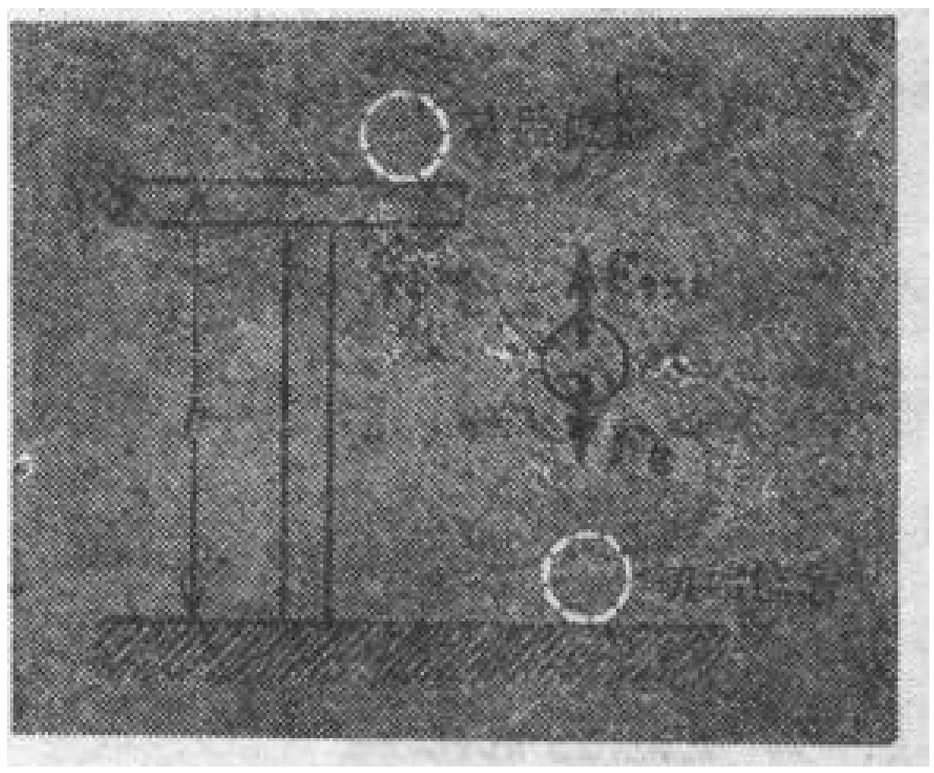


图 10-6　用一外力使一物体沿重力势能增加的方向运动.

## §5　一维情形增补

(10-6)式是任何一维问题中总机械能守恒的简洁表述，在问题中物体所受到的其周围环境对它的作用力只与物体的位置有关. 要更为普遍地导出这一能量守恒结果，假定周围环境施加的力 $F(x)$ 以任意方式随位置 $x$ 而变化——但对于任何给定的 $x$ 值，$F(x)$ 之值是唯一的. 当物体从 $x_1$ 运动到 $x_2$ 时，这力所作的功是

① 说得更精确些，我们可以在开始时的短暂时间里施一正好略为大于 $mg$ 的力，使物体动起来，然后在绝大部分行程中变为准确地等于 $mg$ 的 $F_{外}$(物体于是在无净余力的作用下以匀速继续向上运动)，最后在到达终点之前一短暂时间里让 $F_{外}$ 减为略略小于 $mg$，使物体在离它出发点为 $h$ 的高处停止下来.

$$W=\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx$$

把这功与动能的改变等起来，有

$$K_2-K_1=\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx \tag{10-7}$$

为了把它写成守恒的表述形式，我们引进一任意的参照点 $x_0$，而把功的积分表示如下：

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}F(x)dx-\int_{x_0}^{x_1}F(x)dx \tag{10-8}$$

代入(10-7)式，得

$$K_2+\left[-\int_{x_0}^{x_2}F(x)dx\right]=K_1+\left[-\int_{x_0}^{x_1}F(x)dx\right]$$

然后我们以下列等式作为任意点 $x$ 的势能 $U(x)$ 的定义：

$$U(x)-U(x_0)=-\int_{x_0}^{x}F(x)dx \tag{10-9}$$

还要注意右边的负号. 相对于参照点，某一点的势能总是规定为物体从参照点运动到所考虑的点的过程中力所作的功的**负值**. 参照点本身的势能值 $U(x_0)$，如果我们愿意的话，可取为零，因为在任何实际问题中我们只关心一点与另一点之间的势能差以及相关联的动能变化.

在得到(10-9)式时，我们把力看作主要量，而把势能当作次要的. 然而，当我们愈益深入力学中时，势能转居首要地位，而力成为导出量——事实上从字义上看也是如此，因为把(10-9)式两边对 $x$ 求微商，得

$$F(x)=-\frac{dU}{dx} \tag{10-10}$$

这一地位的颠倒不只是形式上的(虽然这证明它在理论上很有价值)，因为有许多物理情况，在其中我们测得的只是两个非常不同的态之间的能量差，而对其中的作用力我们没有直接的知识. 例

如，一金属的电子的功函数和一分子的离解能是在把一粒子从某一初始位置移开到无穷远处的这种过程中唯一可观测的量．至于力从一点到另一点如何变化着可能不怎么清楚——也许全然不知道．

我们常常要把动能用$m$和$v$表示出来，因而将一维的能量守恒方程写成

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x)=E \tag{10-11}$$

假设我们选定任一特殊$x$值．则(10-11)式成为$v$的二次方程，具有相等相反的两个根：

$$v(x)=\pm\left(\frac{2[E-U(x)]}{m}\right)^{1/2} \tag{10-12}$$

这是一个熟悉的结果的表达式，我们可以按重力作用下的运动来讨论．如果观察到一物体以速率$v$竖直地向上通过某点，过一会(在空气的阻力可以忽略的近似下)将会看到它以同样的速率向下通过这同一点．速度的方向反过来了，但动能则无得失．在这一情形下，力称为**保守的**．从(10-12)式可以看到，只要$U(x)$是$x$的一个单值函数，这结果总是成立的．这意味着，一粒子以任何速率通过任何一点之后，在它每次再通过该点时，我们将发现它总是具有相同的动能．

在什么条件下，力具有这种保守性呢？如果$F(x)$与被它所作用的物体的运动方向有关，则这力肯定不是保守的．试考虑，例如，在一物体的竖直运动中，除重力外再加上一阻力．当物体向上走通过某一点时，作用于它的总力(向下)大于$F_g$．在它到达最高点之后开始向下运动时，作用于它的总力(仍向下)小于$F_g$．因此，在它上升时对它作的总负功数值上大于在它下降时的总正功．两者相抵还余下负功，因而在物体回头通过指定点时，动能比原先少了．决定性的一点实际是，$F(x)$在从任意$x$值开始并终止于该值的任意

路程中所作的总功应为零；只有满足这一条件，我们才能确定一势能函数．也许看起来与此等价的一个条件是 **F** 为位置的单值函数．对于一维情形，这是正确的．但对于二维情形和三维情形，我们以后将看到(第十一章)，**F** 是 **r** 的单值函数这一条件是必要的，但不充分．在**所有**情况下，沿任何一条**闭合**路线所作的总功为零是确定保守力的条件，应作为基本定义记住．

## §6 一维运动的能量法

利用图 10-5 那样的能量曲线去获得一完整的、虽然也许是定性的、一维系统的运动图象，是一个极好的方法．

这样得到的知识常常足够用来获得对问题的物理上的洞察，而这些问题的解析解是复杂的，甚至是得不到的．事实上，即使能求得用不熟悉的函数表示的解析解，它们也往往很少有助于揭示运动的主要物理特征．一般的作法如下：把 $U(x)$ 作为 $x$ 的函数画出曲线，然后在同一图中画一些对应于不同总能量的水平直线．图 10-7 所示的就是一条这样的势能曲线和总能量的几个数值．

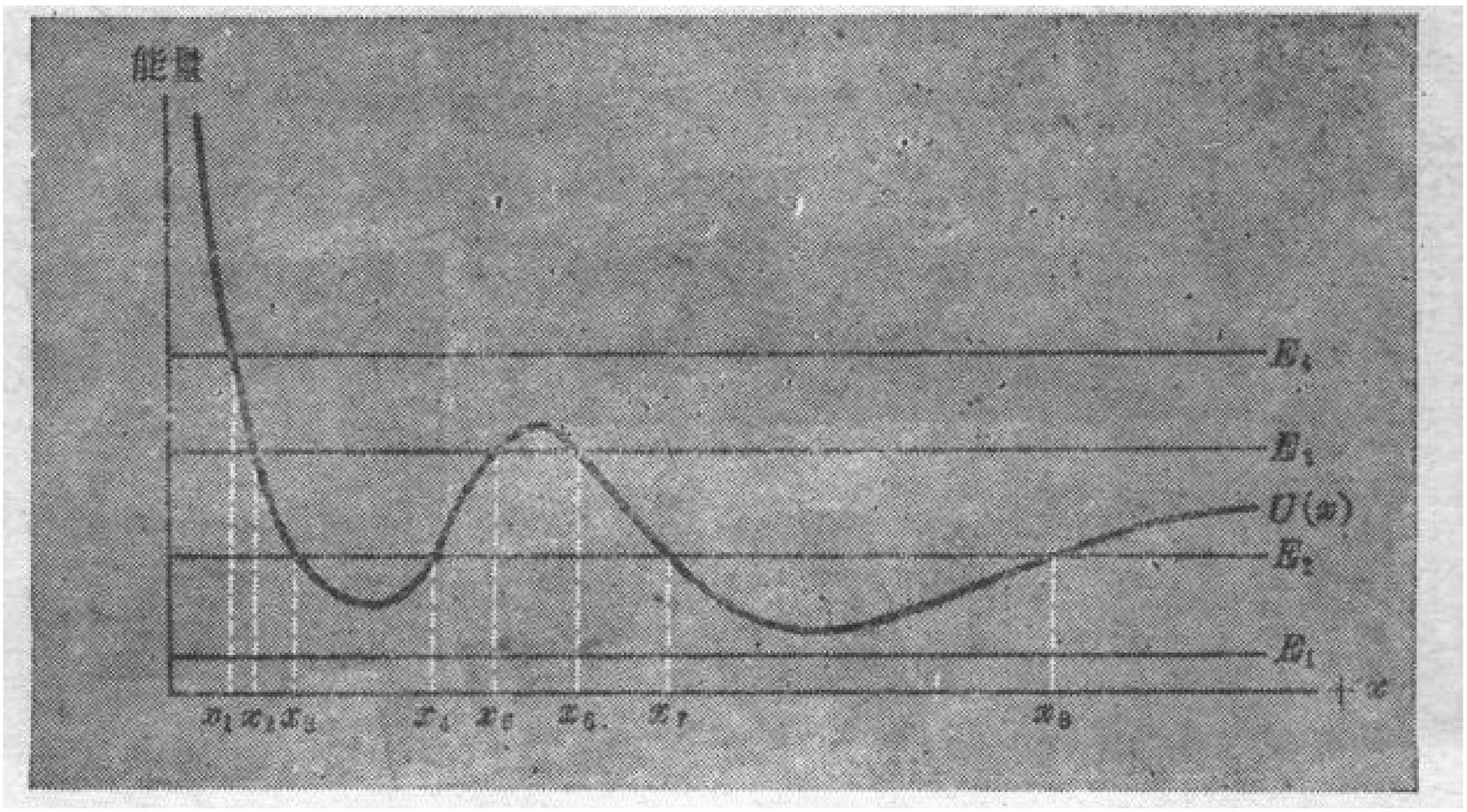



图 10-7 一个一维系统的设想能量图．

一粒子的动能等于 $E-U$，即等于从能量为常数的直线之一到 $U(x)$ 曲线上任何点 $x$ 的竖直距离. 对于一低能量 $E_1$，所有 $x$ 值的 $U(x)$ 都大于 $E_1$；这意味着 $K$ 是负的，因而 $v$ 是一虚数. 这种情况在经典力学中没有地位——但在涉及原子和原子核系统而需要用量子力学时，却一定不能轻易地将它抛弃. 对于较高的能量 $E_2$，运动可在 $x_3$ 和 $x_4$ 或 $x_7$ 和 $x_8$ 之间的两个区域中出现. 这代表着两个完全分隔开的情况，因为只要能量保持为 $E_2$，粒子就不能从一个区域越入另一区域. 看出这一点的一种途径当然是根据 $K$ 在 $x_4$ 和 $x_7$ 之间是不可能的负值. 但还有另一途径，作为如何"读"这种能量图的例子，很有价值.

假定有一粒子，总能量为 $E_2$，在某时刻位于 $x=x_3$ 这点. 它在这点的势能 $U(x_3)$ 等于总能量，因为这是 $U(x)$ 曲线与 $E=E_2$ 直线相交之处. 因此粒子的动能为零而在该瞬间静止. 但是有一力作用于它：

$$F(x)=-\frac{dU}{dx}$$

在 $x=x_3$ 处，$dU/dx$ 是负的，因而 $F(x_3)$ 是正的——即在 $+x$ 方向. 于是，粒子朝右方加速. 随着 $U(x)$ 曲线的斜率变小，作用于粒子的力，因之粒子的加速度，也减小，一直降到零，这时的 $x$ 值是 $U(x)$ 最小之处. 在这一点，粒子的速率最大，而当它再沿 $+x$ 方向运动时 $(dU/dx>0)$，它就要感受到一个朝 $-x$ 方向的力. 这能量图把所有这些情况展示在我们面前，并示明动能 $F_2-U$ 在粒子趋近 $x_4$ 时不断减小. 最后，在 $x_4$ 这点，速度已降到零——但仍有一沿 $-x$ 方向作用的力. 这时会出现什么现象呢？粒子重新获得速率，朝左方运动，直至它到达 $x_3$，同时速度降低到零. 这一运动的全部循环将不断重复，以至无穷，只要总能量不减少. 简言之，这是一个**周期**运动，对它我们可以看出许多主要特征而无需解

任何一个方程——只要看能量图告诉我们一些什么. 在 $x_7$ 和 $x_8$ 之间的运动也是周期性的.

一经指明了这方法，我们就可以较为简单地处置其他的可能性. 对于更高一些的能量 $E_3$, 有两种可能的运动. 或者是在 $x_2$ 和 $x_5$ 之间的周期运动，或者是无界运动: 一粒子从很大的 $x$ 值走来，加速地通过 $x_8$, 然后慢下来并在 $x_6$ 处反转其运动方向，离此向右运动并重复它在来路中所有速率的变化①. 最后, 对于更高的能量 $E_4$, 唯一可能的运动是无尽的; 一个从很大的 $x$ 值走来的粒子，加速, 慢下来, 加速, 再度慢下来, 并在 $x_1$ 处反转其运动方向, 此后就朝着 $x$ 不断增加的方向不回头地前进. 对于这些运动的每一个，在任何一点的速率都可以用图解法求得，只需量一下从恰当的等能量线到势能曲线上相应点的距离即可.

**注意**: 图 10-7 中的曲线几乎是过分形象化了. 它有可能使人误当作这样的图象: 一个粒子, 象轨道滑行车那样，在斜坡和高峰上滑下滑上. 不要忘记, 这是一个一维运动，它才是我们分析的主题. 竖标是能量, 与高度没有必然的联系.

在作了这种一般性的介绍之后，让我们举一些一维运动的具体例子, 看如何用能量法来予以分析.

## §7 能量法的一些例子

### 1. 弹跳的球

设有一球, 沿竖直方向运动, 重复地在地板上弹跳. 我们先设想没有机械能的耗散(损失)，因而其总能量保持为某一数值 $E$ 不变.

我们用 $y$ 表示球的重心(CG)的位置, 以球第一次接触地板时

① 速率的增减恰好与来时相反——译者注.

的 $y$ 为 $y=0$，并令这一位形与 $U=0$ 对应．当 $y>0$ 时，球的势能是

$$U(y)=mgy \qquad (y>0)$$

在任何真实的物理情况中，$y=0$ 是不代表球的重心所达到的最低点的．地板在略被压紧之前是不会对球施加任何力的．关于球，我们可作相同的论述．因此，这球必然要进入 $y<0$ 的区域．但是，当它真到了 $y<0$ 的区域时，它就要受到一个正的(向上的)力的作用，而当 $y$ 变得更加负时，这力增加得非常之快，完全压倒重力(负的)；后者当然对于所有的 $y$ 值都是存在着的．这一巨大的正力使在 $y<0$ 时势能非常陡地随 $y$ 而增加[见图 10-8(a)]．

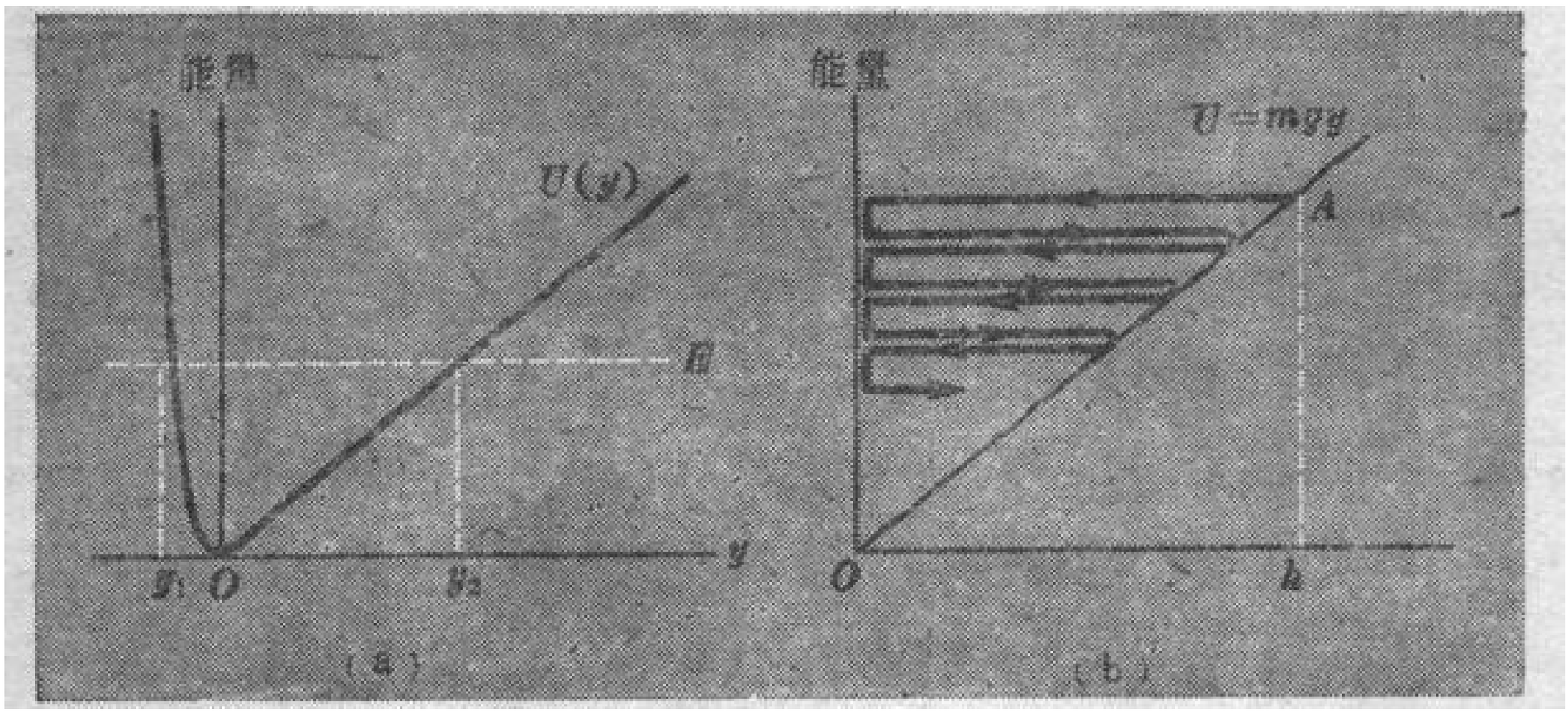



图 10-8 (a) 一个在竖直方向弹跳的球的能量图．(b) 把(a)理想化，代表这样一种情况：在 $y=0$ 处的碰撞是完全刚性的，但每次弹跳都有某些能量的耗散．

所以，对于任何给定的总能量，这球将如图中所示，在 $y_1$ 和 $y_2$ 两位置之间振动．这运动是周期性的——即球**在相同的方向**相继两次经过任一指定点的时间间隔是某一十分确定的 $T$．

在实际情形中，$y_1$ 在数值上可能比 $y_2$ 小得多．例如，如果是一个钢球在一玻璃板上弹跳，我们很容易有 $y_1$ 的量级为 0.01 厘米而 $y_2$ 为 10 厘米．因此，对于许多目的来说，我们可以近似地把

$y<0$ 时 $U(y)$ 对 $y$ 的关系画成一竖直的线，与图 10-8(a) 的能量轴重合．这代表物理上非真实的完善刚性——形变为零而又有一任意大的力在作用着．但是，如果这近似证明是正确可用的，我们对这情况就有一简单的定量描述．运动限于 $y\geqslant 0$ 并由下式确定：

$$\frac{1}{2}mv_y^2+mgy=E \qquad (y>0) \tag{10-13}$$

高度的最大值 $h$ 当然是由 $v_y=0$ 确定：

$$h=\frac{E}{mg} \tag{10-14}$$

要求出运动的周期 $T$，我们可以先算出球从 $y=0$ 运动到 $y=h$ 所需的时间，然后加倍．也就是说，

$$\frac{T}{2}=\int_{y=0}^{h}\frac{dy}{v_y} \tag{10-15}$$

因为球飞行的时间基元 $dt$ 等于 $dy$ 除以任何指定点的速率．

由(10-13)式，有

$$v_y=\pm\left[\frac{2(E-mgy)}{m}\right]^{1/2}$$

取正根，以与向上的运动相应，我们由(10-15)式得

$$T=2\int_0^h\left[\frac{m}{2(E-mgy)}\right]^{1/2}dy$$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^h\frac{dy}{[(E/mg)-y]^{1/2}}$$

注意到 $E/mg$ 恰是高度的最大值 $h$[(10-14)式]，我们可以把这式简化为

$$T=\sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^h\frac{dy}{(h-y)^{1/2}}$$

这是一个初等积分(把变数换为 $w=h-y$)，其结果是

$$T=2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

你当然会根据一物体以匀加速度降落的简单运动学问题认识到这结果的正确性，从而合理地提出异议，认为是杀鸡用牛刀的另一事例．但这是你应当集中注意力于它的**方法**，用一个熟悉的例子来说明它可能有利于此．不应忘记，大多数运动都涉及变加速度，因而标准的、适于匀加速运动的运动学公式不能应用．但(10-15)式，其中的 $v$ 在任何点都由能量方程确定，却可用于任何一维运动，而且，如果需要，可以用数值法求积分．

在离开这例子之前，让我们用它来阐明能量图的另一具有启发性的特色．我们知道，一弹跳球的总机械能事实上并不保持为常量，而是相当快地减少的．虽然当球在飞行时能量的损失很小，在每次弹回时损失却是可观的．图 10-8(b) 示明这一性质如何可以根据能量图予以说明．从 $A$ 点出发，整个运动的过程可以循着箭头的走向得知．回弹的最大高度一次比一次小，而运动不可避免地要在 $y=0$ 处终结，一看这图便知．

**2. 弹簧上的质量**

有非常多的物理系统——不仅是通常的机械系统，而且还有原子系统，甚至电学系统——可以用弹簧上的质量作类比来予以分析．之所以如此的理由在于以下两特点：

(1) 质量代表着惯性性质，而惯性在各种各样的系统中都有类似物，同时还起动能贮存器的作用．

(2) 弹簧代表按特定的力律贮存势能的工具，而这种力律在所有各种类型的物理相互作用中都有与它相似的东西．

我们早就(在第七章中)作为牛顿定律的应用研究过这问题——谐振子问题．但很值得按能量守恒的观点重新来分析这问题——部分是作为这方法的示范，而主要是因为用能量来描述开创了一条通向极为广泛的各种情况的途径．它不仅提供处理经典力学中较复杂的振动问题；它还提供在量子理论中表述相应问题

的基础.

我们的出发点仍然是由胡克定律所描绘的一理想弹簧的回复力:

$$F=-kx \tag{10-16}$$

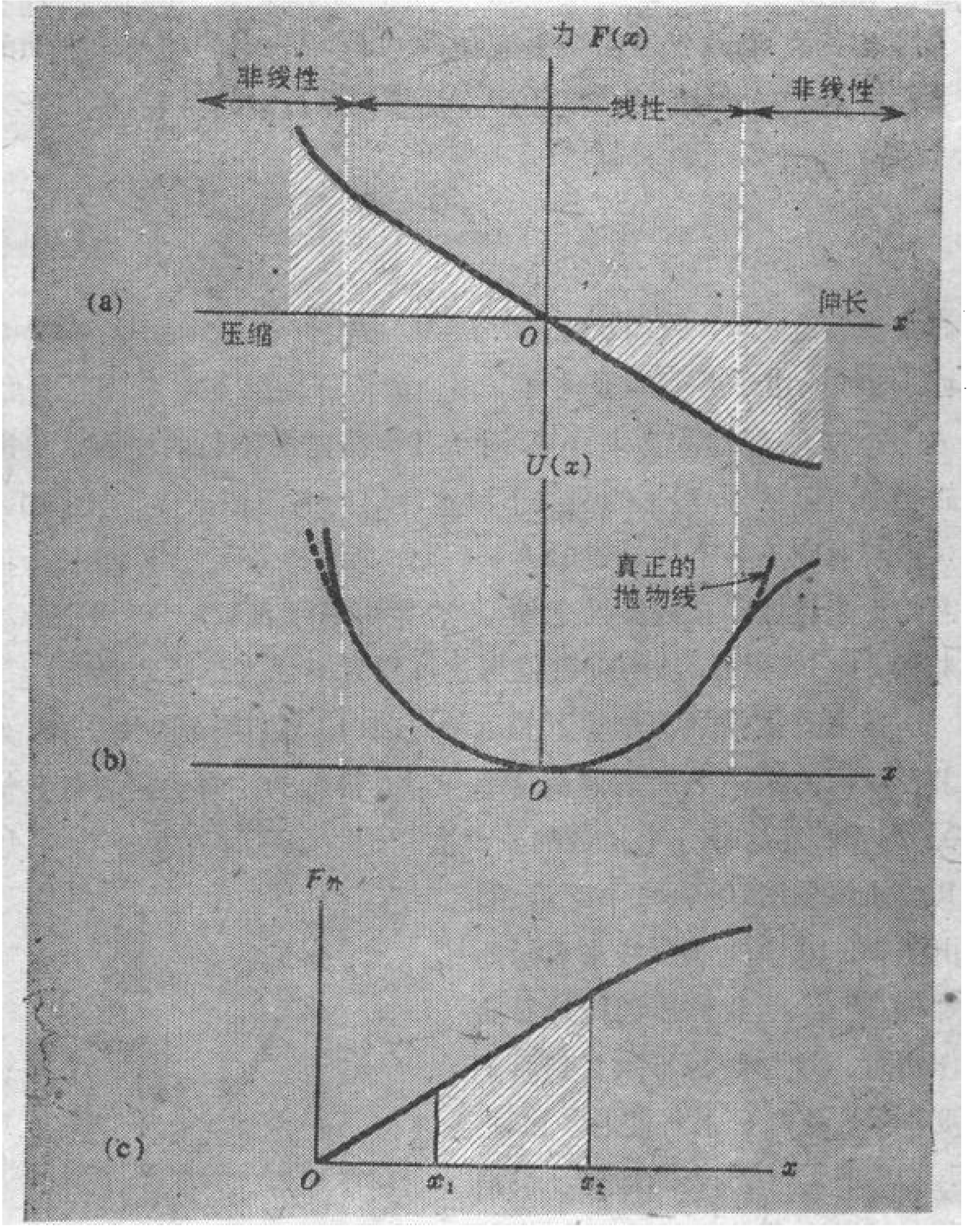



图 10-9 (a) 一弹簧的回复力对位移的图线. (b)与(a)关联的势能图. (c) 在一弹簧的静态形变中作用力对伸长的图线.

其中 $x$ 是弹簧的自由端相对于它松弛时位置的位移，$k$ 是弹簧的“力常数”，可用牛顿/米来量度，式中的负号给出这力的方向，与自由端的位移相反．除了在一有限范围内，没有真正的弹簧遵从这一定律．一真正的弹簧的性质可以用诸如图 10-9(a) 中那样的曲线来表示，曲线代表由弹簧施加的力 $F(x)$ 与它的伸长 $x$ 之间的函数关系．在曲线的线性范围内，贮存在弹簧中的势能，按(10-9)式，是

$$U(x)=-\int_0^x F(x)\,dx=+\int_0^x kx dx=\frac{kx^2}{2} \qquad (10\text{-}17)$$

其中我们选定 $x=0$(即松弛)时 $U=0$．图 10-9(b)示明这势能对 $x$ 的曲线．由于势能的变化可以用一个恰好足以克服弹簧自身的力的外力 $F_{外}$ 所作的功来计算，对于任何给定的伸长的增加，势能的增加可以从 $F_{外}$ 对 $x$ 的曲线下给定界限内的面积求得[见图 10-9(c)]．对应于各不同 $x$ 值的 $F_{外}$ 可以作为维持弹簧一定伸长 $x$ 所需的力来量度．在线性区之外(其边界用虚线表示)，可用图解法来求 $F(x)$ 的积分，从而以数值形式得到对于任意位移的势能．

在考察这弹簧力作用下的运动之前，让我们简单地看一下，如果在我们的例子中所用弹簧是由，比如，铅做的，将会出现什么情况．当我们从这样一个弹簧的原长度开始压缩它时，它将产生一力，其性质很象图10-9(a)中所示、而由图 10-10 中的 $OQ$ 线来表示的那样．但是，当我们取消掉外界的作用时，这弹簧将不回复到原长度，而是获得一永久性的、由图 10-10 中 $x_1$ 点代表的形变．很清楚，这样一根弹簧所产生的力是非保守的．力的大小不仅依赖

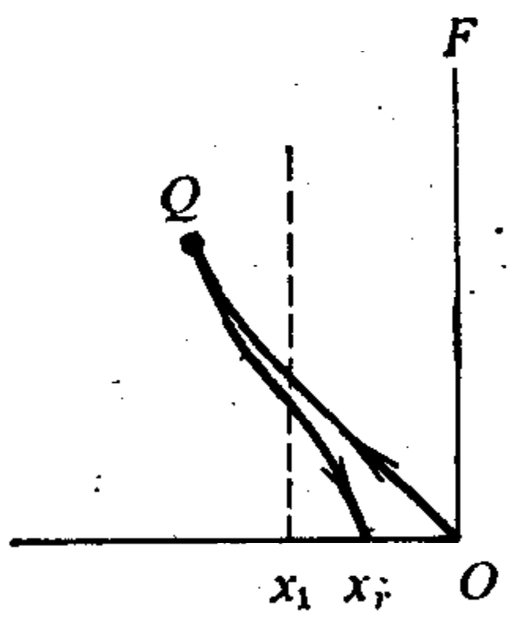



图 10-10　机械滞后．

于压缩程度，而且还与其过去的历史有关．当压缩到图 10-10 中 $x_1$ 这点时，力有两个值，一个与弹簧被缩短时相应，另一则与弹簧被松开时相应．这类行为称为**滞后**，其效果是机械能的耗散．

现在我们来更为详细地考虑如何用能量图帮助我们分析一谐振子的直线运动．在图 10-11 中所示的是势能 $U=\frac{1}{2}kx^2$ 对 $x$ 的曲线，以及两不同的能量，$E_1$ 和 $E_2$．

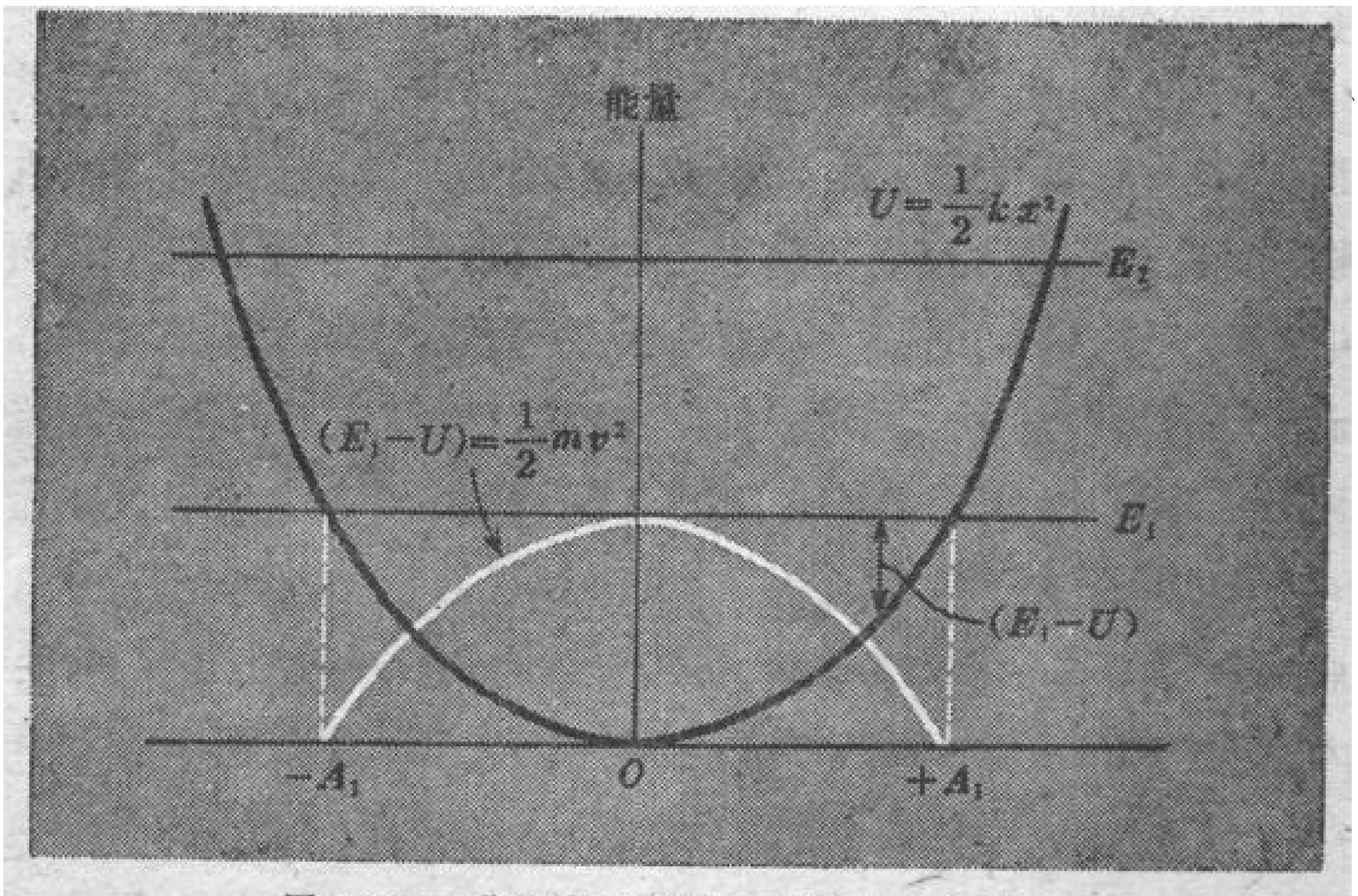



图 10-11　遵从胡克定律的一弹簧的能量图．

对于一给定的能量 $E_1$，象我们早已讨论过的，从水平线 $E_1$ 到曲线 $U=\frac{1}{2}kx^2$ 上的任意 $x$ 点的竖直距离等于粒子在 $x$ 点的动能．在 $x=0$ 处这值最大；在这一点上所有能量都是动能，粒子达到最大速率．粒子的动能，因而速率，在平衡位置的两边都小下来，而在 $x=\pm A_1$ 两点减到零．对于 $+A_1$ 之右或 $-A_1$ 之左的 $x$ 值，$E_1-U$ 成为负的；$v^2$ 为负，故不存在实数 $v$ 值．这是粒子永远(至少在经典力学中)不能进入的区域；因此 $x=\pm A_1$ 这两位置是这运动的**转向点**，而运动显然是振动性的．

运动的幅度 $A_1$ 由总能量 $E_1$ 决定. 因动能 $K_1$ $(=E_1-U)$ 在 $x=\pm A_1$ 处为零, 所以有

$$\frac{1}{2}kA_1^2=E_1$$

或

$$A_1=\left(\frac{2E_1}{k}\right)^{1/2} \tag{10-18}$$

对于大一点的能量 $E_2$, 振幅也按 $(E_2/E_1)^{1/2}$ 的比值增大, 但运动的定性特点相同.

有趣的是要注意从能量图推出的运动的一般特性对任何势能曲线都一样, 只要它在 $x=0$ 处有一极小值并相对于通过这一点的竖直轴是对称的. 所有这类运动都是周期性的, 但在细节方面互相有所不同, 例如, 速率与位置的关系, 和周期与振幅的关系. 假定运动的周期为 $T$. 则对于任何对称的势能图, 我们可设想将这时间分为四个相等的部分, 其中任何一部分都包含着有关这运动的主要知识. 因为, 假定在 $t=0$ 时粒子沿正 $x$ 方向走过 $x=0$ 这点. 令它在这一时刻的速度为 $v_m$——这是粒子在它运动中的最大速度. 在 $t=T/4$ 时, 粒子达到其最大正位移(图 10-11 中的 $x=+A_1$), 而 $v=0$. 然后它顺原路返回, 经过又一 $T/4$ 的时间之后到达 $x=0$ 并以 $v=-v_m$ 的速度通过这一点. 在另外的两个 $T/4$ 时间里, 它走到负位移的尽头 $(x=-A_1)$ 并在 $t=T$ 时再次以 $v=v_m$ 通过 $x=0$ 这点. 这一连串动作将无休止地重复. 此外, 知道了这问题的对称性, 我们就可以单独根据在第一个四分之一周期内的详细图形画出 $v$ 对 $t$ 的全部图形(见图 10-12, 其中的基本四分之一周期是用比其余都粗的线画出的).

在下节中我们将超出这里对质量-弹簧体系的、比较一般性的考查, 把非线性回复力包括进去, 并将从新展开适用于理想谐振子的详细结果的其余部分. 但在这样做之前, 我们将再看一个简单的例子, 说明能量方法的有用性.

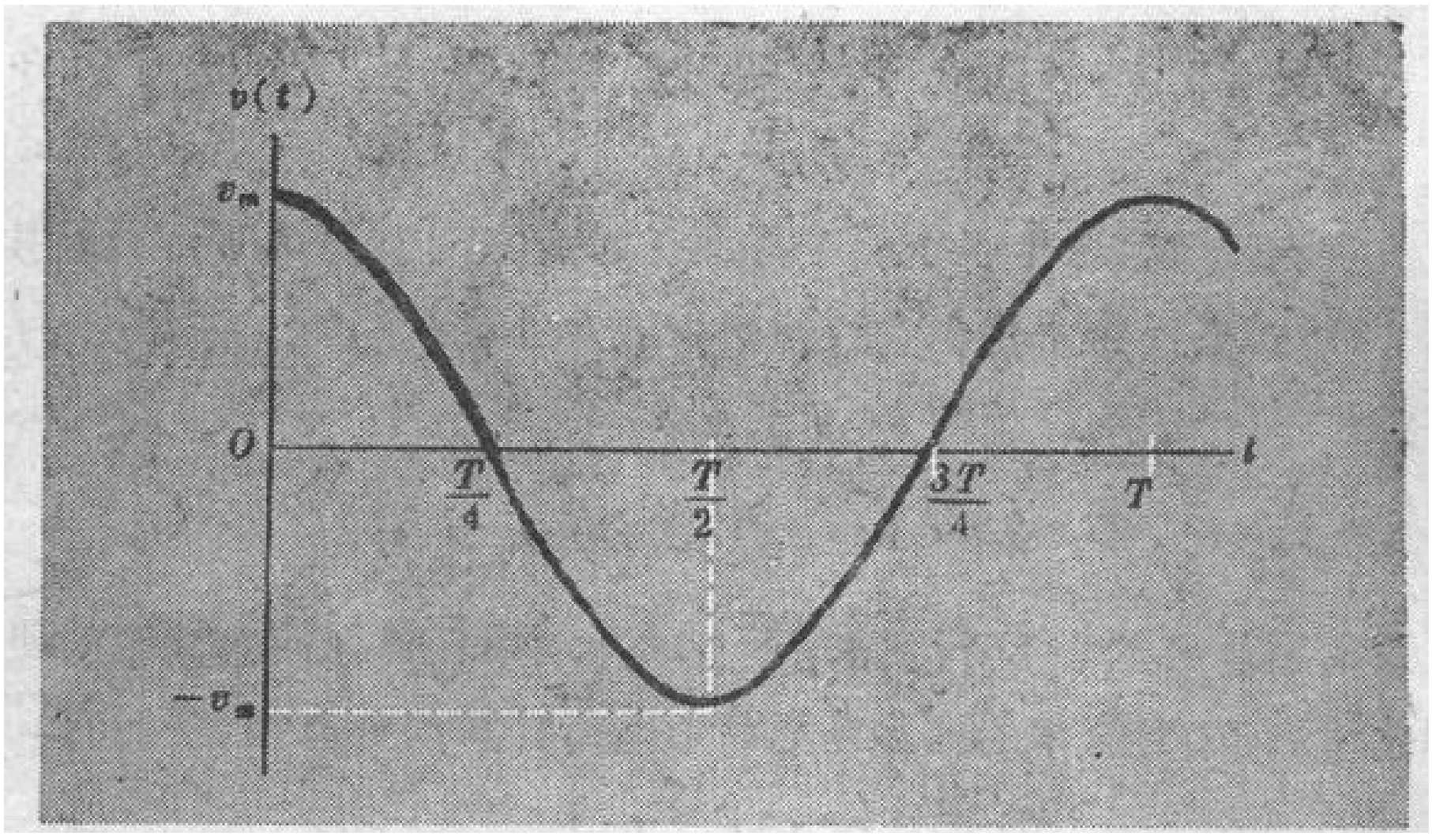



图 10-12　一粒子，在与位移成正比的回复力的作用下，速度随时间作正弦式变化．在头四分之一周期中的运动就足以确定曲线的其他部分．

## 3. 弹弓的动力学

弹弓是一种古代的和有效的器械，它把一拉长的弹性弦的势能转化为一质量的动能，用来以相当高的速度发射石头或其他投掷物．在图 10-13(a) 中我们示明这装置的要点．一弹性弦，自然长度(未拉长的)为 $2l_0$，两端缚在 $A$ 和 $D$ 点的固定支撑上($AC=CD=l_0$)．在弦的中点放一质量为 $m$ 的物体，然后把弦往后拉到 $B$

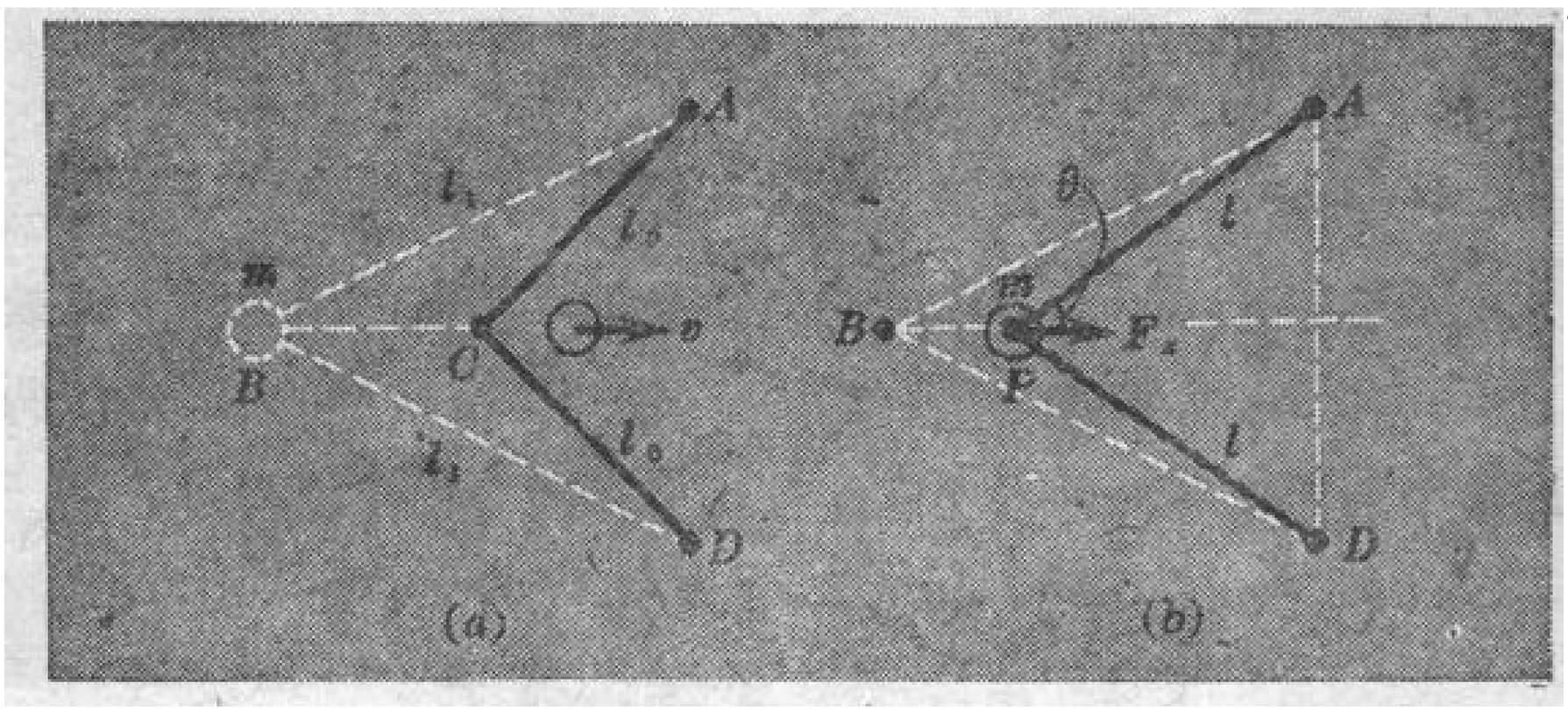



图 10-13　(a) 用弹弓发射一物体的起始和终了阶段．(b) 说明中间状态的瞬时作用力．

点．当放开手时，物体沿着 $BC$ 线运动，到 $C$ 点它开始以速率 $v$ 自由飞行．

我们假设弦产生一正比于其伸长的张力．于是我们可以用(10-17)式来计算质量在它的初始位置 $B$ 处贮存的能量．记住有两段弦，每一段的原长为 $l_0$，伸长到 $l_1$，因此

$$U=2\times\frac{1}{2}k(l_1-l_0)^2=k(l_1-l_0)^2$$

在弦的质量可忽略不计因而它本身的运动不耗费任何弹性能的理想化情形下，抛射体的最终动能与上面所计算的势能相等，而有

$$\frac{1}{2}mv^2=k(l_1-l_0)^2$$

因此

$$v=\left(\frac{2k}{m}\right)^{1/2}(l_1-l_0)$$

这一例子特别有力地显示出用标量，能量，而不用矢量，力，来作计算的好处．因为如果我们直接应用 $F=ma$ 来计算质量的最终速度，则如图 10-13(b) 中所示，我们必须考虑一任意时刻的事态，在这时刻质量位于 $B$ 和 $C$ 之间的某点 $P$，$AP=l$．在弦的两半中张力各为 $k(l-l_0)$，因而要把这两个张力分解，用它们沿 $BC$ 线的分量来求出瞬时加速度：

$$m\frac{dv}{dt}=F_x=2k(l-l_0)\cos\theta$$

这个关于 $dv/dt$ 的方程还必须在 $B$ 和 $C$ 两点之间求积分，或者，换一种做法，要计算变化着的力 $F_x$ 沿 $BC$ 路线作的总功．这两种做法中的无论哪一种都比直接应用机械能守恒要难得多．

## §8 用能量法处理谐振子

现在我们回头来分析一物体的振动，物体系于一弹簧，弹簧遵

从胡克定律. 对于一质量系于弹簧上、回复力与位移成正比的体系，基本能量方程为

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E \qquad (10\text{-}19)$$

其中$E$是总能量的某常数值. 因$v=dx/dt$，故可把上式写为

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2=E \qquad (10\text{-}20)$$

方程(10-19)已经把$v$表示为$x$的函数，但如要对运动作全面的描述，我们必须解方程(10-20)以求得$x$(因而$v$)为$t$的函数.

我们处理方程(10-20)的方法是求助于三角函数和它的微商的有关知识，这是在任何微积分课程的较早阶段上学过的. 我们先把这方程统除以$E$，得

$$\frac{m}{2E}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{k}{2E}x^2=1 \qquad (10\text{-}21)$$

我们注意到这是两项之和，包括一变数($x$)的平方和它的微商(对$t$)的平方. 其和等于1. 我们可以把这结果同人们非常熟悉的三角函数关系相连：如果$s=\sin\varphi$，则

$$\frac{ds}{d\varphi}=\cos\varphi$$

而

$$\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2+s^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1 \qquad (10\text{-}22)$$

方程(10-21)和(10-22)具有完全相似的形式，我们可以逐项对比：

$$\begin{aligned}\frac{m}{2E}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2&\equiv\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2\\ \frac{k}{2E}x^2&\equiv s^2\end{aligned} \qquad (10\text{-}23)$$

其中第二个方程可以通过设

$$x=\left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2}s=\left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2}\sin\varphi \qquad (10\text{-}24)$$

而得到满足. $\varphi$ 是什么呢？我们可以通过把(10-24) 式两边对 $t$ 求微商计算出 $dx/dt$ 而求出它:

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2}\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

但由(10-23)式的第一个方程有

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}\quad\frac{ds}{d\varphi}=\left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}\cos\varphi$$

比较 $dx/dt$ 的这两个表达式，就得到下列关于 $\varphi$ 的条件:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}=\omega \qquad (10\text{-}25)$$

其中 $\omega$ 是角速度(也称为圆频率)，是我们以前根据 $F=ma$ 解谐振子问题(第七章，44 页)时遇到过的.

把最后的方程对 $t$ 求积分，得

$$\varphi=\omega t+\varphi_0$$

其中 $\varphi_0$ 是初位相. 把这结果代回(10-24)式，得

$$x=\left(\frac{2E}{k}\right)^{1/2}\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad (10\text{-}26)$$

如果注意到 $(2E/k)^{1/2}$ 等于运动的振幅 $A$[(10-18)式]，我们最后得到的是同我们在第七章中求出的 $x(t)$[(7-42) 式]一样的方程.

[如果你前此已有一些微分方程方面的知识，你也许认为我们上面的求解方法太繁. 你可能倾向于立刻认识到，(10-20)式导致关系

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\omega^2(A^2-x^2)$$

因而可以通过直接求积分得到解:

$$\frac{dx}{dt}=\omega(A^2-x^2)^{1/2}$$

$$\omega dt=\frac{dx}{(A^2-x^2)^{1/2}}$$

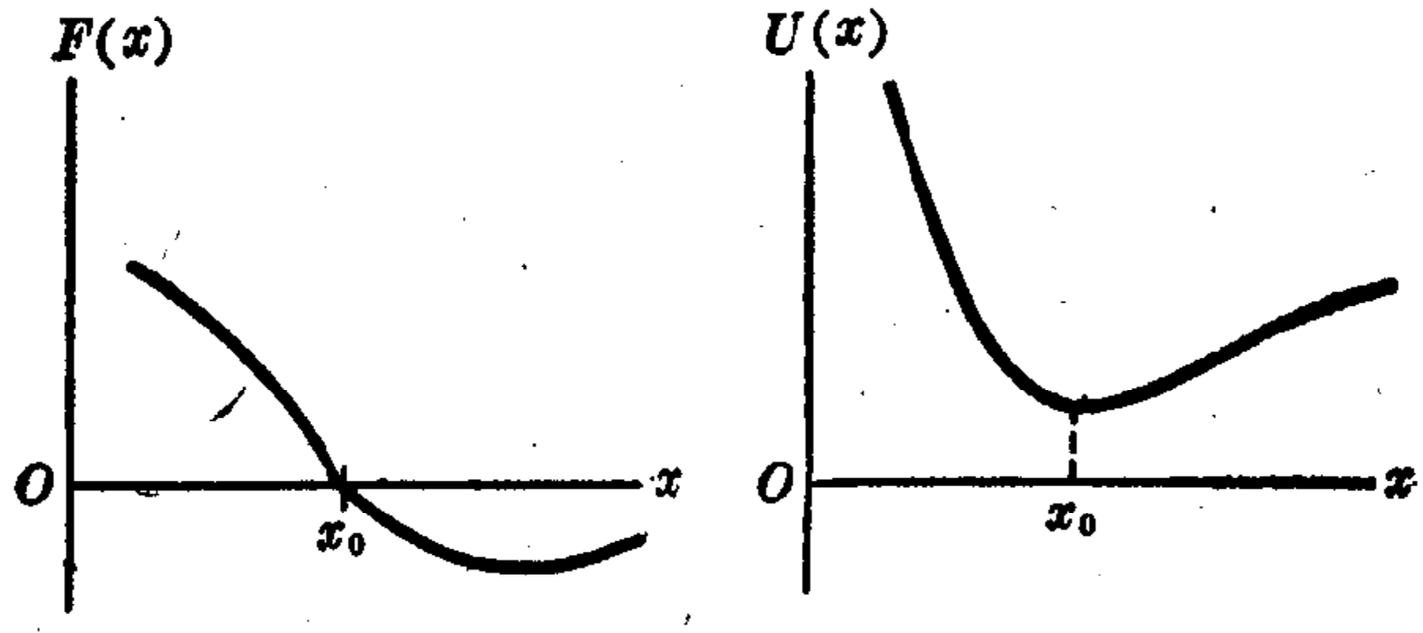
$$\omega t+\varphi_0=\sin^{-1}\left(\frac{x}{A}\right)$$

故有 $x=A\sin(\omega t+\varphi_0)$ 如前.]

(10-25)和(10-26)式告诉我们一些确实非常值得注意的事情：**一谐振子**(以弹簧上一质量为典型)**的周期完全与运动的能量或振幅无关**——这结果对于任何其他规律的力作用下的周期振动都不成立.由此得到的物理推论是非常重要的.我们极其倚重振动系统的应用. 如果对于一给定的系统，频率 $\nu$(定义为每秒振动的次数，即 $1/T$ 或 $\omega/2\pi$)随振幅而相当可观地变化着，情况将会变得极其复杂. 然而大多数振动系统都在某种近似程度下表现出上述谐振子的特性. 让我们来看看为什么.

## §9 小振动概述

有许多情形，其中一物体处于我们称为**稳定平衡**的状态. 它静止于某点——不受到净余力作用——但如果朝任何方向被移动,它就要受到一个倾向于使它回到原处的力. 这样一个力,除非它有病态特性(例如对某一可忽略不计的位移,力的数值有一不连续的跳跃)，将具有图 10-14(a) 中所示的那种随位置而变化的关系. 正常的静止位置用 $x_0$ 标记. 对这力函数求积分，可得图 10-




(a) (b)

图 10-14 (a) 在一个一维系统中，平衡位置两侧的力随位移的变化.
(b) 与(a)相关联的势能曲线.

14(b)中的势能曲线. 于是,我们可以构思出一幅图象, 物体就象所设想的、位于势能谷的底部,最低处为 $x=x_0$.

我们可以用多项式展开的方法来凑合一任意曲线. 现在我们把它应用于势能函数——但在这样做时,我们选一新的原点, $x_0$, 令

$$x=x_0+s$$

其中 $s$ 是离平衡点的位移. 势能曲线现在的形状如图 10-15, 可以用下列展开来凑合:

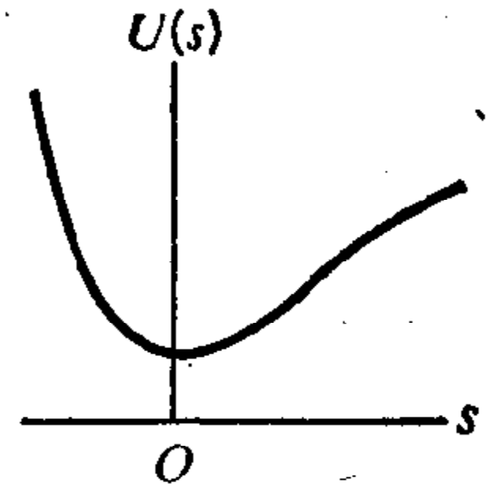



图 10-15 图 10-14(b)的势能曲线,改用位于平衡位置的点为原点.

$$U(s)=U_0+c_1s+\frac{1}{2}c_2s^2+\frac{1}{3}c_3s^3+\cdots \qquad (10\text{-}27)$$

(中间插入数值系数的理由稍迟片刻就将显出来.)

力与 $s$ 的函数关系由下列普遍关系给出:

$$F(s)=-\frac{dU}{ds}$$

从而有

$$F(s)=-c_1-c_2s-c_3s^2\cdots$$

但是,按定义,在 $s=0$ 处 $F(s)=0$; 因为 $s=0$ 是平衡位置. 所以 $c_1=0$, 而力的方程成为

$$F(s)=-c_2s-c_3s^2\cdots \qquad (10\text{-}28)$$

不论常数 $c_2$ 和 $c_3$ 的相对值是什么,总是有 $s$ 值的一个范围使含 $s^2$ 的项比含 $s$ 的项小得多, 因为两者之比是 $c_3s/c_2$, 只要 $s$ 取得够小,是可以使这比值任意小的. 因此,除非势能函数有某种非常特殊的性质(比如说 $c_2=0$),我们可以肯定,对于足够小的振动,它将同一个遵从胡克定律的弹簧的势能函数正好相似. 我们可写

$$U(s)\approx\frac{1}{2}c_2s^2 \qquad (10\text{-}29)$$

这意味着，运动的等效弹簧常数 $k$ 等于常数 $c_2$. 在本章的后面，我们将讨论这一分析的具体应用——分子振动.

## §10 作为一个二体问题的线性振子

迄今为止，在所有关于势能的讨论中，我们都按一单个物体在给定的力作用下的问题来分析. 如果要计算的是一个在地球表面附近的物体，我们很可以说：一质量为 $m$ 的物体，升到离地面高为 $h$ 处，**它的势能**是 $mgh$. 这样一种说法，对于粒子的质量比起与它相互作用的物体(一个或多个)的质量小得多的情况，是完全合理的. 在这种情形中，体系的质心实际上由那大一些的质量确定. 固着于这大一些的质量上的参照系既是一个动量为零的参照系，也是一个固定的参照系. 对于地球来说，一普通物体在它表面附近运动，正是这种情形. 任何两个物体之间的相互作用也属于这种情形，只要其中之一是刚性地附着于地球的. 然而，必须记住，严格说来，我们是在分析一**两个物体的体系**(地球和被高举的物体)：$mgh$ 是在地球与质量为 $m$ 的物体之间的**距离**增加了 $h$ 之后**这体系的**势能的增加. 换言之，势能是关联着两个物体的一种性质；它不能单独地附于这一个或那一个物体. 如果两相互作用粒子的质量可以相比，则由于它们之间的相互作用，两者都要加速，从而获得或失去动能. 我们现在要转而讨论的正是势能问题的这一基本的两体性.

假定有两粒子，质量为 $m_1$ 和 $m_2$，由一质量可忽略的弹簧相连，与 $x$ 轴平行地排列着(图 10-16). 设粒子如图相对于某原点 $O$，处于 $x_1$ 和 $x_2$ 的位置上. 如果弹簧确是无质量的，则在它两端作用于它的力一定等值反向(否则它将有一无穷大的加速度)，因而，如果承认在质量同弹簧接触之处作用与反作用相等，则作用于两质量上的力也应是等值反向的. 于是，以 $F_{12}$ 表示弹簧施加于质量 2

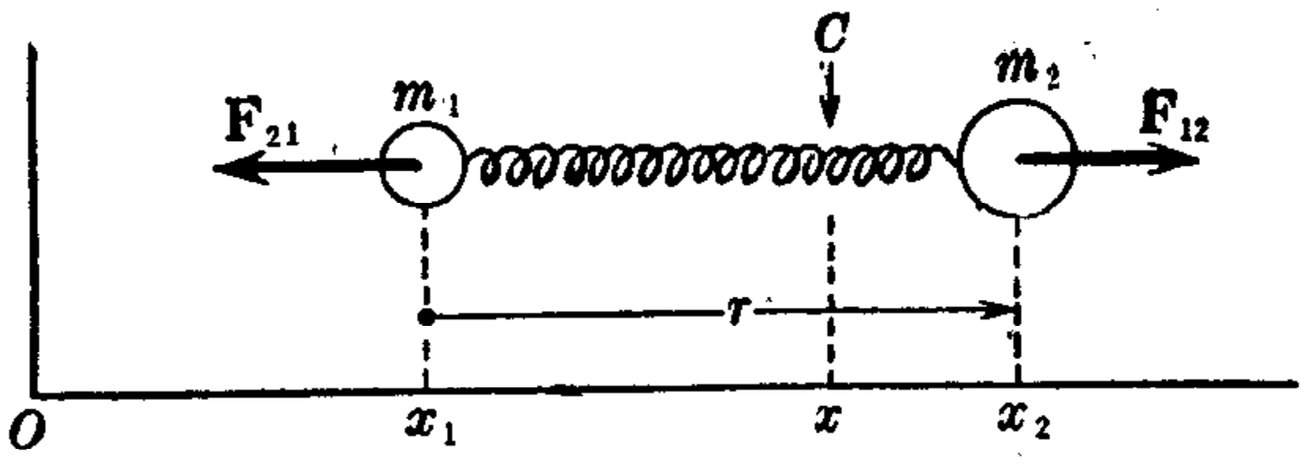



图 10-16　由一弹簧相连的两质量体系，图示两者的坐标和力.

的力，则弹簧施加于质量 1 的力等于 $-F_{12}$.

我们将把两质量的动能的变化同弹簧中所贮存的势能的变化联系起来.

**1. 弹簧的势能**

首先，假定 $m_1$ 移动一距离 $dx_1$ 而 $m_2$ 移动 $dx_2$. 弹簧作的功是

$$\begin{aligned} dW &= F_{12}dx_2 + F_{21}dx_1 \\ &= F_{12}(dx_2 - dx_1) \qquad (\text{因 } F_{21} = -F_{12}) \\ &= F_{12}d(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

很清楚，是 $x_2 - x_1$ 这差数而不是 $x_1$ 和 $x_2$ 分开确定弹簧的伸长(也就是贮存于其中的势能). 我们引进一特殊坐标 $r$ 来表示这差数:

$$r = x_2 - x_1$$

于是，

$$dW = F_{12}dr \qquad (\text{弹簧作的功}) \tag{10-30}$$

弹簧势能的变化等于 $-dW$. 引进势能函数 $U(r)$，有

$$\begin{aligned} dU &= -F_{12}dr \\ U(r) &= -\int F_{12}dr \end{aligned} \tag{10-31}$$

**2. 质量的动能**

在第九章中关于两体系统的讨论清楚地使我们想到应当引进这体系的质心，以它为各别质量运动的参照. 如我们曾看到的，这使我们能够只考虑质心系中的动力学而不管这体系的整体运动. 由(9-24)式，有

$$K = K' + \frac{1}{2}M\bar{v}^2$$

其中 $K'$ 是在质心系中测出的两质量的总动能. 同往常一样,以 $v_1'$ 和 $v_2'$ 表示相对于质心系的速度,则

$$K' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \qquad (10\text{-}32)$$

我们曾看到(155 页), 用两质量的**相对速度** $v_r$ 和**约化质量** $\mu$ 来表示 $K'$ 非常方便:

$$v_r = v_2' - v_1'$$

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

根据质心(即零-动量)系的定义有

$$m_1v_1' + m_2v_2' = 0$$

连同 $v_r$ 的方程,可求出

$$v_1' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}v_r \qquad v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_r$$

把这些值代入(10-32)式,我们重新得到(9-30a)式所表示的结果:

$$K' = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_r^2 = \frac{1}{2}\mu v_r^2 \qquad (10\text{-}33)$$

我们要考虑的是质量的动能的变化与弹簧对它们所作的功之间的关系. 假定没有外力作用, $\bar{v}$ = 常数, 这时,

$$dK = dK'$$

### 3. 运动

现在我们可以把前面的结果综合起来, 让动能的改变等于弹簧所作的功. 我们计算过用实验室坐标表示的 $dW$[(10-30) 式], 虽然, 象我们看到过的(也是可以预计的), 其结果只与 $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$ 有关——两者都等于相对坐标 $r$. 同样, 象我们刚才看到的, $dK = dK'$. 事实上我们可以令

$$dK' = F_{12}dr \qquad \text{(弹簧作的功)}$$

求积分，

$$K'=\int F_{12}dr+\text{常数}$$

而用(10-31)式，我们可以把它表述为质心系中的总机械能 $E'$：

$$K'+U(r)=E' \tag{10-34}$$

对于弹簧常数为 $k$、自然长度为 $r_0$ 的一根弹簧的情形，可令

$$r=r_0+s$$

$$U(s)=\frac{1}{2}ks^2$$

还有

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\frac{ds}{dt}$$

于是，能量守恒方程[(10-34)式]成为

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}ks^2=E' \tag{10-35}$$

其中

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

这正是线性振子的方程；其角频率 $\omega$ 和周期 $T$ 是

$$\omega=\left(\frac{k}{\mu}\right)^{1/2}\qquad T=2\pi\left(\frac{\mu}{k}\right)^{1/2} \tag{10-36}$$

要注意，约化质量 $\mu$ 比任一单个质量要小，因此对于一给定的弹簧，自由振动的周期比夹住质量中之一的情形要短.

## §11 含有能量贮存的碰撞过程

借助于在上一节中展开的分析，我们可以对在第九章中讨论过的某些类型的非弹性或爆炸性碰撞获得深入的理解.

我们这样来引进问题；设想一小的、不太难制作的机械装置.这装置是配备有缓冲器的一根弹簧，缓冲器在一导轨上滑行，并在

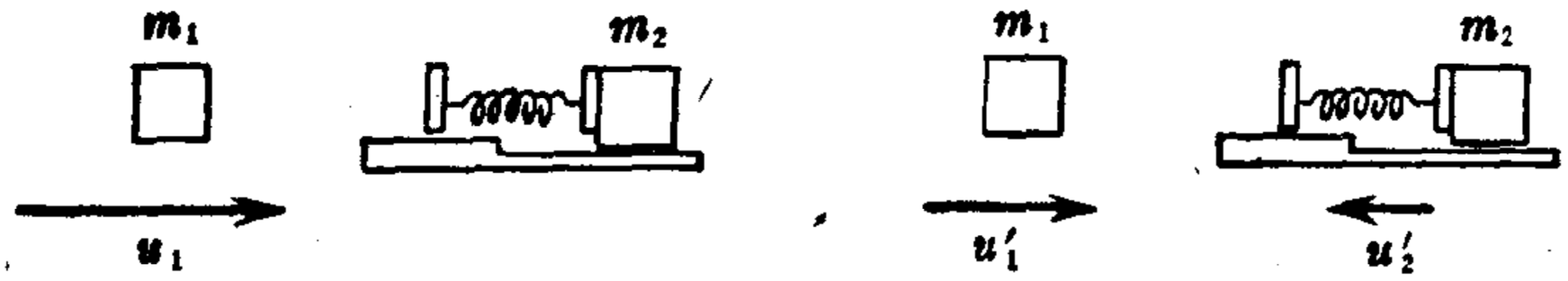



图 10-17 (a) 包含一具有贮能装置的物体的碰撞. (b) 在质心系中的同一碰撞. 如果在这参照系中总动能小于把弹簧压缩到临界量所需的功, 则碰撞是弹性的.

弹簧压缩到超过一定程度时被卡住 [见图 10-17(a)]. 假定这装置(设其质量可不计)系附在一质量为 $m_2$ 的物体上, 而有一质量为 $m_1$ 的物体同它相撞. 为简单起见, 我们设 $m_2$ 开始时是不动的, 而 $m_1$ 以速率 $u_1$ 趋近它.

如果 $u_1$ 很小, 这碰撞完全是弹性的. 当 $m_1$ 冲击弹簧时, 弹簧略被压缩, 但它将回到原来无拉伸的情形, 这时碰撞过程终了. 在弹簧受压的整个时间过程中, $m_2$ 受到一个使其加速的力, 向右; 而 $m_1$ 受到一减速力, 向左. 一定量的正功作于 $m_2$ 上, 而同等量的负功作于 $m_1$ 上. 总动能在碰撞前后是一样的, 但已重新分配过.

如果 $u_1$ 增加, 最后达到这样的情况, 即弹簧的最大压缩刚好把它带到被卡住的位置. 这时, $m_1$ 和 $m_2$ 是互相相对静止的, 而由于弹簧受阻不能再把它们推离开, 它们就保持着那样了. 换言之, 它们将象一个质量为 $m_1+m_2$ 的单个复合物体, 继续往前运动; 碰撞突然变成完全非弹性的.

什么东西决定着碰撞从弹性变为非弹性的临界条件呢? 最容易的是从质心系的角度来讨论这一点[图 10-17(b)]. 在这参照系中两质量的总动能是(参看前节)

$$K'=\frac{1}{2}\mu v_r^2$$

其中

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\qquad v_r=-u_1\quad(\text{因 }u_2=0)$$

如果用 $K_1$ 来表示 $m_1$ 在实验室参照系中的初始动能，则可写

$$K'=\frac{m_2}{m_1+m_2}K_1$$

当 $K_1$ 为临界值时，全部能量 $K'$ 都尽用于把弹簧压缩到被卡住的位置；这需要一确定量的功，等于弹簧在这一位形中贮存的能量 $U_0$. 因此，令

$$K'=\frac{m_2}{m_1+m_2}K_1=U_0$$

或

$$K_1=\frac{m_1+m_2}{m_2}U_0 \tag{10-37}$$

如果 $U_0$ 给定，则上式确定 $K_1$ 的一阈值，达到这值，非弹性碰撞就成为可能的，而低于这值，碰撞就只能是弹性的.

如果考虑更高的 $K_1$ 值，我们就得到这样的情况：弹簧压缩到超出其卡住点，但会回到那一临界长度而停下来. 在这一部分重新伸长中，它把 $m_1$ 和 $m_2$ 推离开，给它们一最终的相对速度和在质心系中相对运动的动能. 碰撞仍是非弹性的，但只是部分地如此. 相碰撞的质量原来的动能有一很明确的部分 ($U_0$) 被闭锁在卡住的弹簧中，而碰撞的动力学可以按此来分析. 我们在第九章中对非弹性和爆炸性碰撞的分析事实上正是用这方法作出的. 我们在那里(164 页)引进的、代表 $K_f-K_i$ 的量 $Q$ 就是现在情形下的 $-U_0$.

上面所描述的纯经典的动力学情况，在原子和原子核物理中有许多与之密切相似的碰撞过程，在这些过程中一入射粒子(例如电子或质子)打在一不动的靶粒子上，后者有着各种各样比它的正常“基态”内能要高的、极为分明的态. 这些特征态的明锐性和分立

性要用量子理论来理解，但这里需要的只是知道它们的存在. 研究电子或质子在与一定种类的靶粒子碰撞之后的动能分布，就可以获得所牵涉到的激发能级的有关知识. 在图10-18中给出这类分析

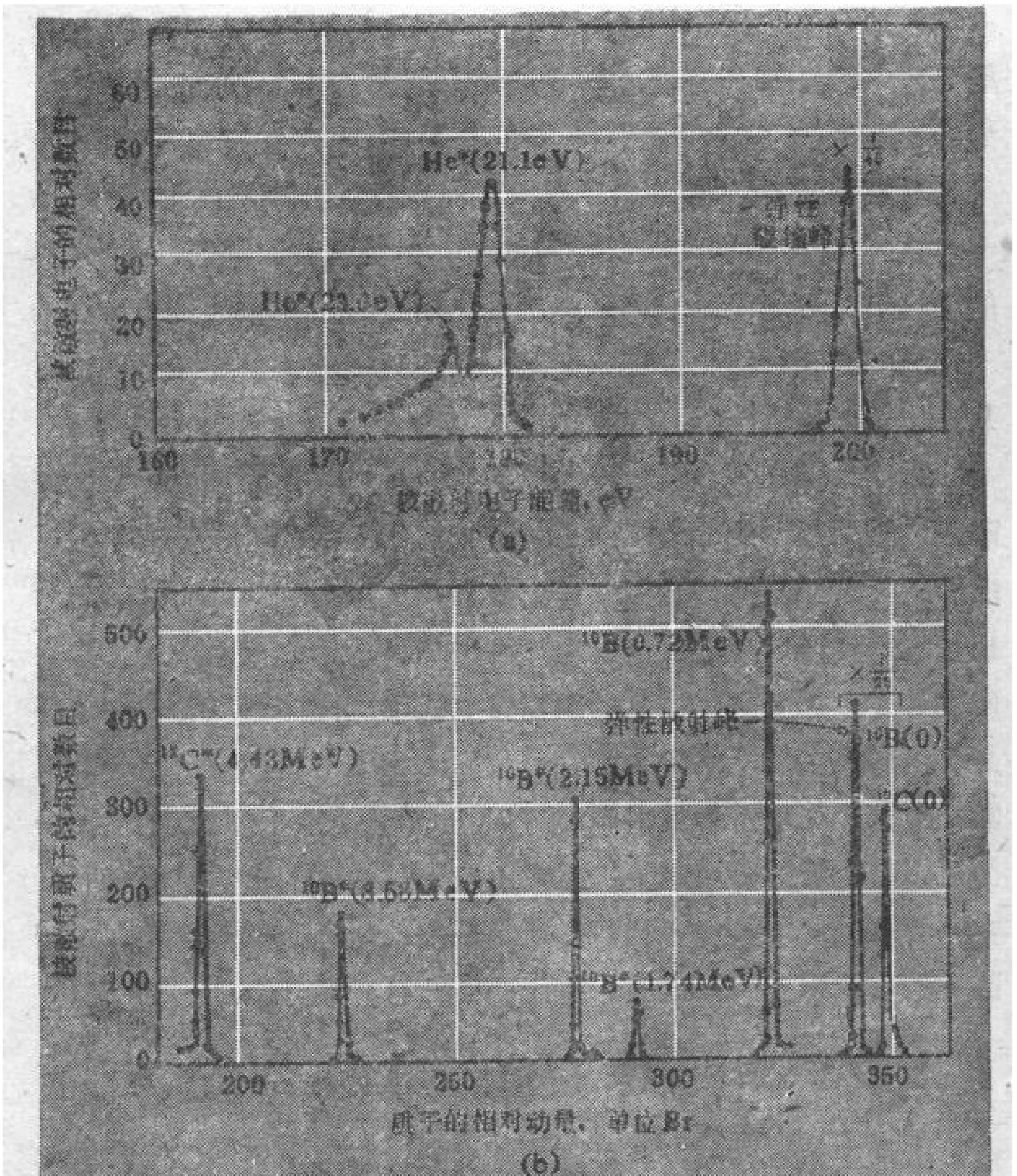



图 10-18　关于弹性和非弹性碰撞过程的实验结果，说明具有明确能量的特征激发态的产生：(a) 电子被中性氦原子散射. (b) 质子被硼 10 的原子核散射. 不可避免地也存在着一些沾染的碳.

的一些例子．入射粒子的轰击能量越高，可被激发并用这一方法来探查的激发态的数目也越大．图 10-18(a) 所示的是从电子被氦原子散射得到的数据，图 10-18(b) 则示明质子被硼 10 的原子核散射的一些结果．在前一情形中，靶粒子的质量是如此之大，在质心系中的有效动能($K'$)与电子的能量 $K_1$ 无甚差别．但在后一情形中，质心的效应相当大，我们必须用(10-37)式从 $K_1$ 的阈值来判断激发能 $U_0$．这些原子或原子核的散射与经典碰撞之间的一个重要差别是，即使是已经超过了非弹性碰撞的阈能，完全弹性的碰撞仍有可能以一定的几率出现．这是量子力学的普遍特点的一例，即，当几种结果都有可能时，我们只能知道事件发生的相对几率．

再简单地回到经典情形，我们当然可以设想一种机制，它会使碰撞的结果是动能的增加而不是减少．比如说，有一根本来是压缩着的弹簧，附有解扣机制，当它被初始的撞击触动时，弹簧就会被松开．这样一个过程——爆炸性碰撞——象贮存能量的非弹性碰撞那样，需要一定最低的阈能将它起动．同这情况非常相象的是化学爆炸系统，它需要雷管来起爆．可以做这样一个定量的实验，把一个简单雷管或火帽(象孩子的玩具手枪上用的)贴放在一个可以自由反弹的质量上，然后由一入射物体的撞击起爆(例如，在一气轨上)．在这些情形下，所需的阈动能要比把火帽安在一不能动的支持物上明显地大一些．

## § 12 双原子分子①

本章中所发展的方法可以非常有效地应用于象 HCl 或 $Cl_2$那样的一些双原子分子体系．在这种分子中，原子核扮演质点的角

① 本章的余下部分可以删去而不失连贯性，但这余下的部分确实介绍了一些除原子物理本身以外的、很有趣的内容．

色(这当然是一极好的近似,因为它们与一原子的直径相比是非常之小的),而原子外围的电子结构则扮演可贮存能量的弹簧系统的角色. 于是, 我们就有了两原子核沿着它们的连线作特征振动的物理基础,同时,这是分子内部运动的一种方式. 在讨论这种振动本身之前, 我们必须看看这类分子的势能曲线的形状和能量的大小.

我们从双原子分子中两原子的原子核有一相当确定的距离这一知识开始. 这距离称为键长,其量级总是 1 埃($10^{-10}$ 米). 存在着这样一个平衡距离的事实说明势能函数 $U(r)$ 在等于键长的距离 $r_0$ 处有一极小值. 确定这种势能的一个方法是设势能函数为

$$U(r)=\frac{A}{r^a}-\frac{B}{r^b} \tag{10-38}$$

其中 $A$ 和 $B$ 是正的常数, $a$ 和 $b$ 是适当地选取的正指数, $a>b$; 这式仍留有足够的余地使我们能按实验数据对其中的常数作经验性的调整. $A/r^a$ 这项是一正的势能, 它随距离的增加很快地下降,代表一排斥力. $-B/r^b$ 这项是一负的势能,也随 $r$ 的增加而下降,但比第一项下降得慢一些, 代表一吸引力. 这些函数以及由它们相加而得的 $U(r)$ 曲线都示明在图 10-19 中.

根据(10-38)式,我们可以确定平衡距离,这是使 $dU/dr=0$ 的距离:

$$\frac{dU}{dr}=-\frac{aA}{r^{a+1}}+\frac{bB}{r^{b+1}} \tag{10-39}$$

在 $r=r_0$ 处有

$$\frac{aA}{r_0^a}=\frac{bB}{r_0^b} \tag{10-40}$$

如果从实验上知道了 $r_0$, 这关系就确定了 $A$、$B$、$a$ 和 $b$ 这些参数之间的一个关系. 此外,在 $r=r_0$ 处,势能

$$U(r_0)=\frac{A}{r_0^a}-\frac{B}{r_0^b}$$

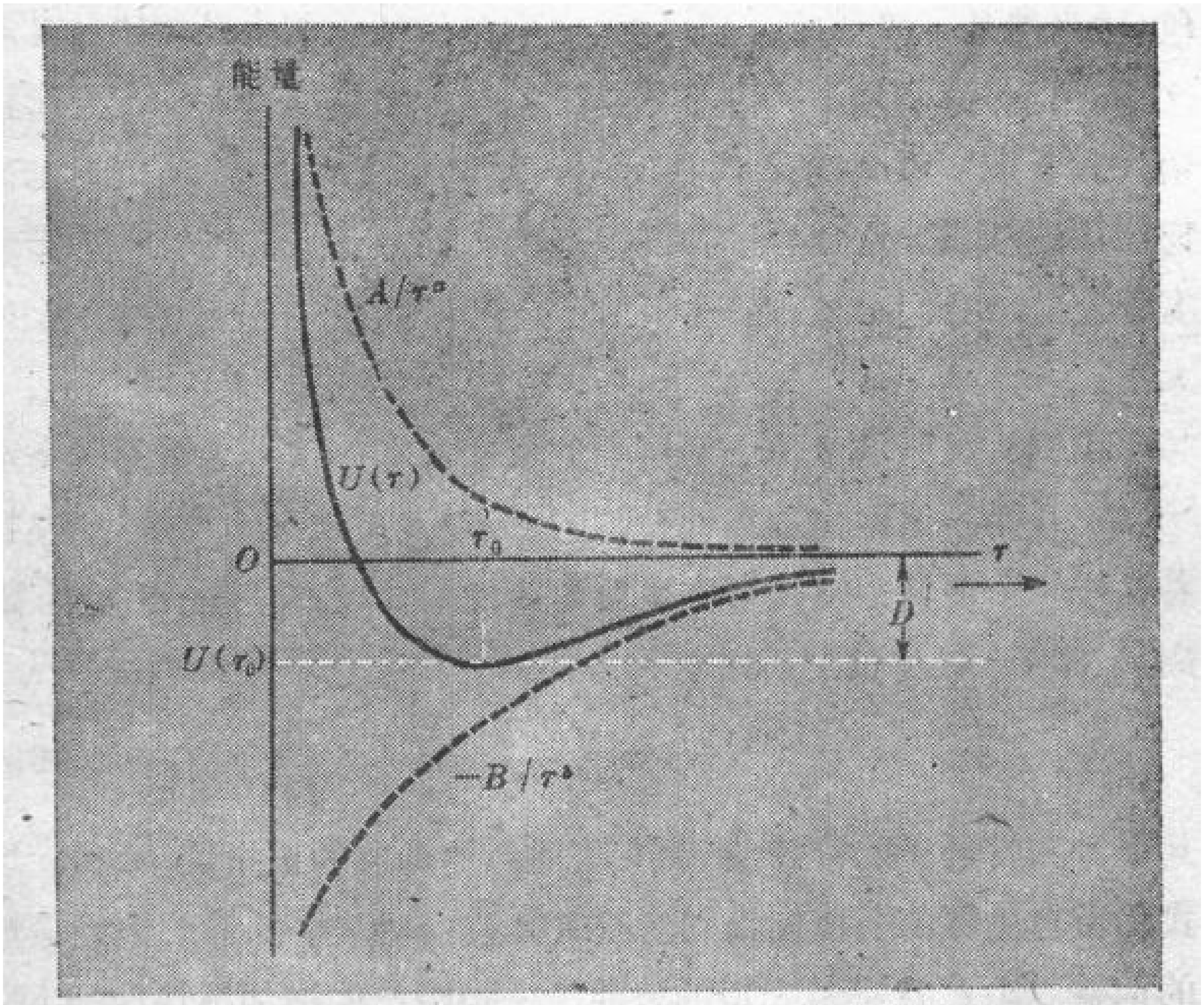



图 11-19　一双原子分子势能图的简单模型，确定两原子核的一平衡距离 $r_0$。

把(10-40)式的 $A/r_0^a$ 代入，得

$$U(r_0)=-\frac{B}{r^b}\left(1-\frac{b}{a}\right)$$

能量 $U(r_0)$ 是可以测量的，因为要将分子完全离解，我们必须加入一定的能量，离解能 $D$，等于 $U(r_0)$ 的负值(参看图 10-19)．它的典型数值是几个电子伏．因此可令

$$D=\frac{B}{r_0^b}\left(1-\frac{b}{a}\right) \tag{10-41}$$

(10-40)和(10-41)两式可以用来使参数的选择范围窄下来——有四个未知数和两个方程．但是，显然我们还必须或是求助于一些其他独立的知识，或是作一些特定的假设，或是两者兼而有之，以得到确定的定量结果．

### 1. 分子的弹簧常数

为了讨论分子振动这目的，我们真正需要知道的量是对于离开平衡位置的小位移分子的有效弹簧常数．在本章的前面部分里(214 页)，我们普遍地讨论过这一情况，并得到下列结果 [(10-29)式]：

$$U(s)\approx\frac{1}{2}c_2s^2$$

其中

$$s=r-r_0$$

可以认出，$c_2$ 就是弹簧常数，并可以从 $U(r)$ 的表达式推得：

$$k=\left(\frac{d^2U}{ds^2}\right)_{s=0}=\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} \tag{10-42}$$

把它应用于现下的问题，我们将(10-39)式两边对 $r$ 求微商：

$$\frac{d^2U}{dr^2}=\frac{a(a+1)A}{r^{a+2}}-\frac{b(b+1)B}{r^{b+2}} \tag{10-43}$$

这看起来复杂，但对于特殊值 $r=r_0$ 我们可以利用(10-40)式把它约化为一项：

$$\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}=\frac{a+1}{r_0^2}\frac{bB}{r_0^b}-\frac{b(b+1)B}{r_0^{b+2}}$$

所以

$$k=\frac{(a-b)bB}{r_0^{b+2}} \tag{10-44}$$

这仍然有点令人望之生畏，但如果你把(10-44)式同(10-41)式比较一下，就看到离解能 $D$ 的方程式含有十分相似的因子组合，而如果把 $D$ 看作已知，则 $k$ 的表达式可以大为简化如下．由(10-41)式，有

$$\frac{(a-b)B}{r_0^b}=aD$$

把这式代入(10-44)式，得

$$k=\frac{abD}{r_0^2} \tag{10-45a}$$

即使我们知道 $D$ 和 $r_0$，如果不给乘积 $ab$ 指定一个值，也不能由此再走一步．$ab$ 可以看作单一的一个可调参数，因而我们满足于一个最后的半经验方程：

$$k=C\frac{D}{r_0^2} \tag{10-45b}$$

其中 $C$ 是一个经验常数（$=ab$），大于 1.

实际上光谱学家喜欢势函数的一个十分不同的解析形式，称为摩尔斯势（因 P. M. Morse 而命名）．它具有与我们所用的势（见图10-20）相同的一般特点，但它以指数函数之差而不是以简单

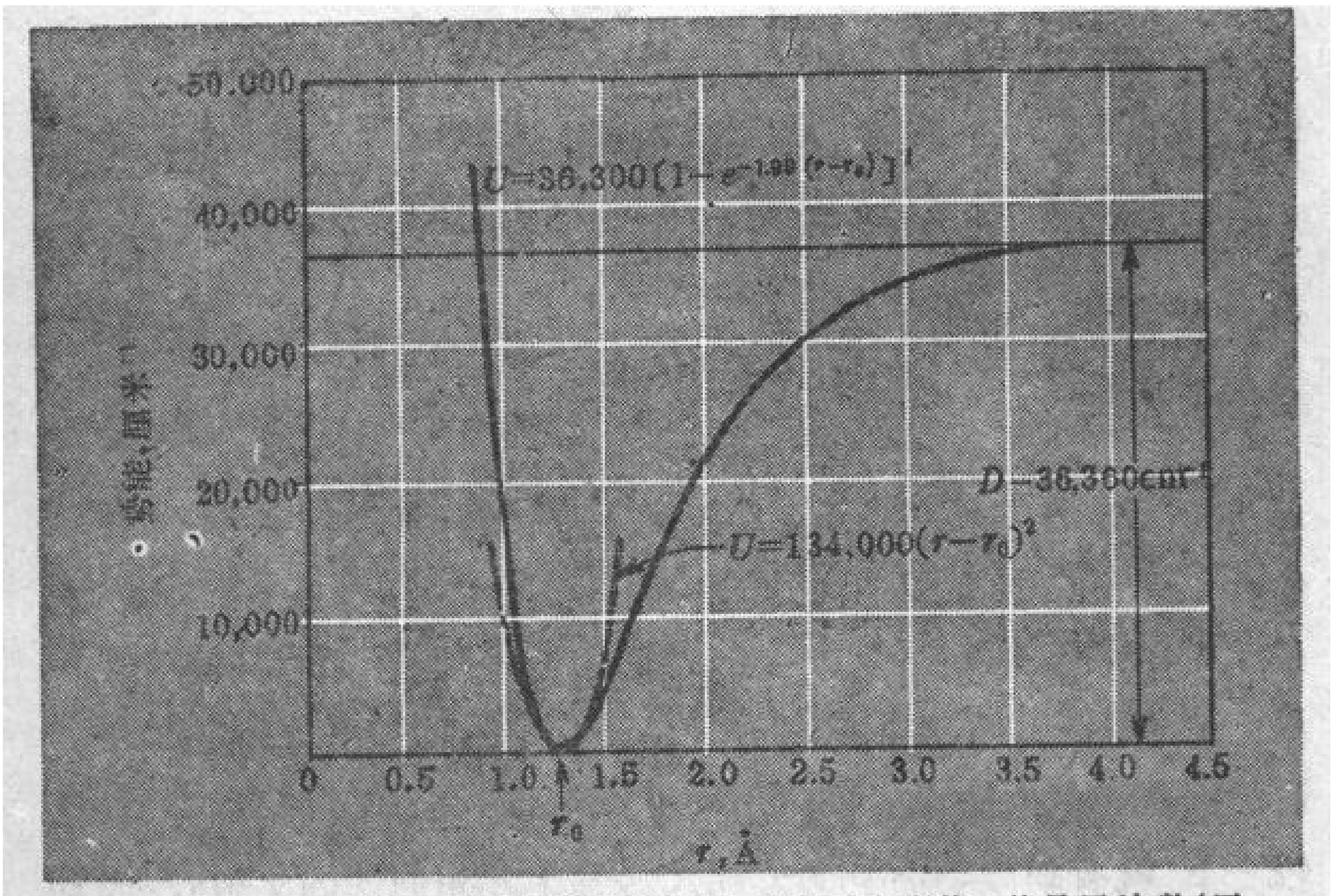



图 10-20　HCL 分子的经验势能图，根据摩尔斯势，能量用波数（厘米$^{-1}$）表示．

的、$r$ 的幂之差为基础．象我们所用的势那样，它也含有一些可调常数，这些常数可以从光谱学的数据推得．事实上只要分子振动的理论建立了起来，我们就可以利用观测把一些数值反馈到理论

公式中去．换言之，这是一条双行道．注意图 10-20 中纵坐标上我们所不怎么熟悉的单位(厘米$^{-1}$)；我们很快就要谈到这一点．

## 2. 分子振动

一双原子分子振动的周期由(10-36)和(10-45b)联合给出：

$$T=2\pi r_0\left(\frac{\mu}{CD}\right)^{1/2} \tag{10-46}$$

其中 $\mu$＝约化质量$=m_1m_2/(m_1+m_2)$，$m_1$ 和 $m_2$ 是两原子的质量．频率 $\nu$，每秒振动次数，证明是一个更为使人感兴趣的量：

$$\nu=\frac{1}{2\pi r_0}\left(\frac{CD}{\mu}\right)^{1/2} \tag{10-47}$$

让我们看对于一实际的分子这方程可能意味什么．我们取一氧化碳(CO)的下列数据：

$$m_1(^{12}\mathrm{C})=12\text{原子质量单位}=2.0\times10^{-26}\text{千克}$$

$$m_2(^{16}\mathrm{O})=16\text{原子质量单位}=2.7\times10^{-26}\text{千克}$$

$$r_0\approx1.1\text{埃}=1.1\times10^{-10}\text{米}①$$

$$D\approx10\text{电子伏}=1.6\times10^{-18}\text{焦耳}①$$

首先我们有

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}=\frac{12}{28}\times2.7\times10^{-26}\text{千克}$$

$$=1.16\times10^{-26}\text{千克}$$

所以

$$D/\mu\approx1.4\times10^{8}\text{米}^2/\text{秒}^2$$

因而

$$\nu\approx1.7\times10^{13}C^{1/2}\text{秒}^{-1}$$

如果略去因数 $C^{1/2}$，则

$$\nu\approx1.7\times10^{13}\text{秒}^{-1}$$

---

① 这些数值来自 *Smithsonian Physical Tables* (Smithsonian Institnt-ion, Washington, D.C. 出版)中的分子常数表．

由于分子振动主要是通过光谱学和吸收或发射辐射的波长测量来研究的，我们就来计算一下与 $\nu$ 相应的波长：

$$\lambda=\frac{c}{\nu}\simeq\frac{3\times10^{8}}{1.7\times10^{13}}\approx2\times10^{-5}\text{ 米}$$

可见光光谱从大约 $4.5\times10^{-7}$ 米延伸到 $7\times10^{-7}$ 米，因此我们所算出来的波长已进入红外．这正是我们找到与分子振动相关联的光谱线的地方．事实上 CO 有一基本振动谱线，波长大约是 $4.7\times10^{-6}$ 米——约为我们方才算得之值的四分之一．如果在(10-47)式中令 $C^{1/2}\approx4$ 我们本会得出这个值的．$C$ 的这个数值可能对应于，例如，$U(r)$ 的原来表达式[(10-38)式]中 $a=5$ 和 $b=3$．如果有一个按 $1/r^{6}$ 变化的短排斥力和一个按 $1/r^{4}$ 变化的长程吸引力，则势能就会呈现这一特定形式．然而，应当强调，我们关于势能的模型是非常之粗糙的，不应看作是有关分子间的力的精确知识的一个来源．我们引进它的目的只是为了示明一般如何去分析平衡位形附近的振动．

我们忽略了一个特点——一个关键性的特点；这就是，分子振动以及相关的辐射是量子化的．一辐射量子的能量是 $h\nu$(其中 $h$ 是普朗克常数)，它是由于在分子的两个明锐地确定的能量态之间的跃迁而产生的：

$$h\nu=E_1-E_2 \tag{10-48}$$

我们不准备在这里深入这一点，而只是指出，在相邻两振动能级之间的最小可能跳跃恰巧正与我们所计算的经典振子的频率相应．正是(10-48)式所表明的这个过程的基本量子性，使得频率 $\nu$ 而不是波长 $\lambda$ 成为重要的量．但是，由于光谱学家首先测的是波长，而 $\nu$ 与 $\lambda$ 成反比，所以有把结果直接用 $\lambda^{-1}$ 表出的习惯．要把它换算为等价的能量量度，我们必须利用对于任何光子都适用的关系：

$$E=h\nu=hc\lambda^{-1}$$

这一单位制还更进一步被推广，而在光谱学中普遍地用作能量的量度，不管是否牵涉到光子的发射. 举例说，在图 10-20 中，HCl 的离解能 $D$ 按下列单位给出：

$$D=36{,}300 \text{ 厘米}^{-1}=3.63\times10^{6} \text{ 米}^{-1}$$

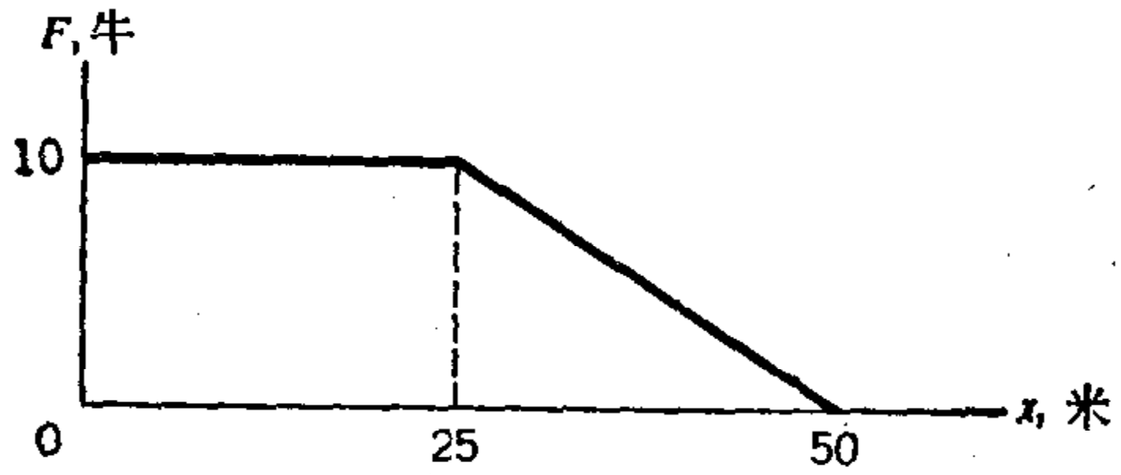
应用上述关系，把 $h=6.62\times10^{-34}$ 焦耳·秒代入，得到这情形下的

$$\begin{aligned} D&=(6.62\times10^{-34})\,(3\times10^{8})\,(3.63\times10^{6})\\ &=7.2\times10^{-19} \text{ 焦耳}\\ &=4.5 \text{ 电子伏(近似)} \end{aligned}$$

## 习　题

10-1　一质量为 $m$ 的粒子，$t=0$ 时静止，受到力 $F$ 的作用，$F$ 在 $t=0$ 时之值为 $F_0$，且随时间而线性地减小，在 $t=T$ 时变为 0. 问粒子在 $t=T$ 时的动能是多少？

10-2　一质量为 5 千克的物体受到一力的作用，这力随物体的位置而变化如题图所示. 如果物体在 $x=0$ 点从静止出发，问：(a) 在 $x=25$ 米处它的速率是多少？(b) 在 $x=50$ 米处它的速率是多少？



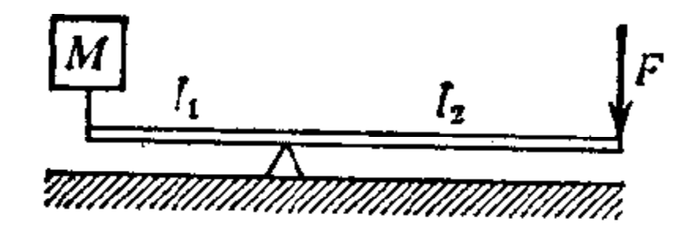

（习题 10-2 ）

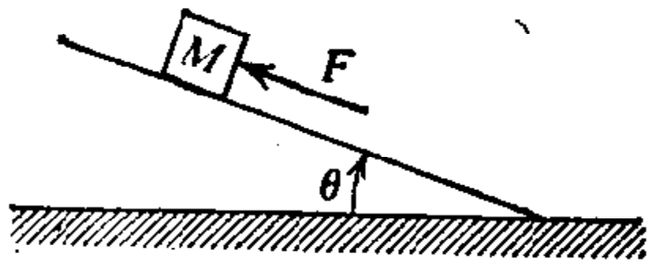
10-3　(a) 一质量为 $m$、原来静止的粒子，受到一力 $F$ 的作用，力随时间线性地增加：$F=Ct$. 试推导 $F$ 与粒子位置 $x$ 的关系，并把你的结果画出来.

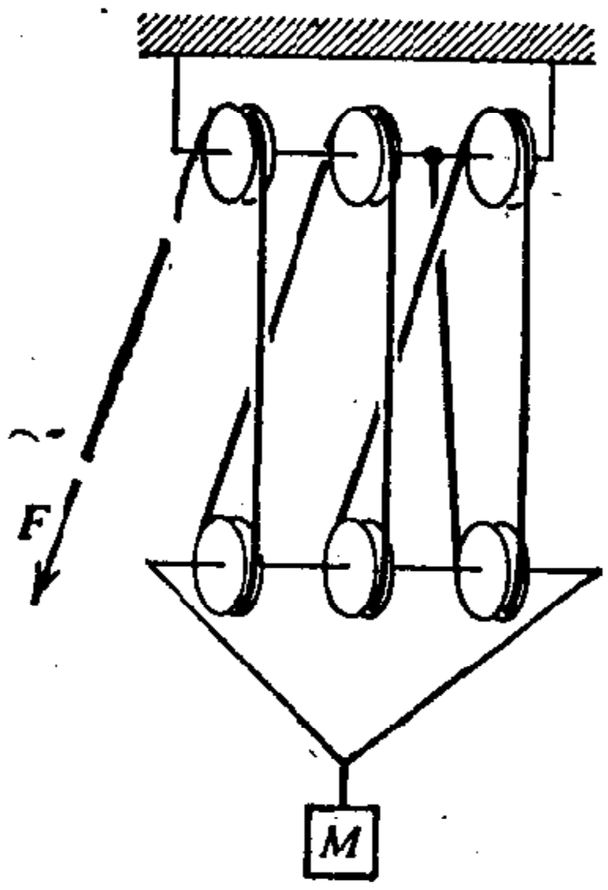
(b) 如果粒子具有初速度 $v_0$，$F$ 对 $x$ 的关系图如何改变？

10-4　(a) 自古以来，人们就利用了简单机械的“机械利益”，它的定义是要举起的负载与能够举起它的作用力之比. 试通过对功能关系 $dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ 的分析，并运用能量守恒，给“机械利益”以一推理的定义.

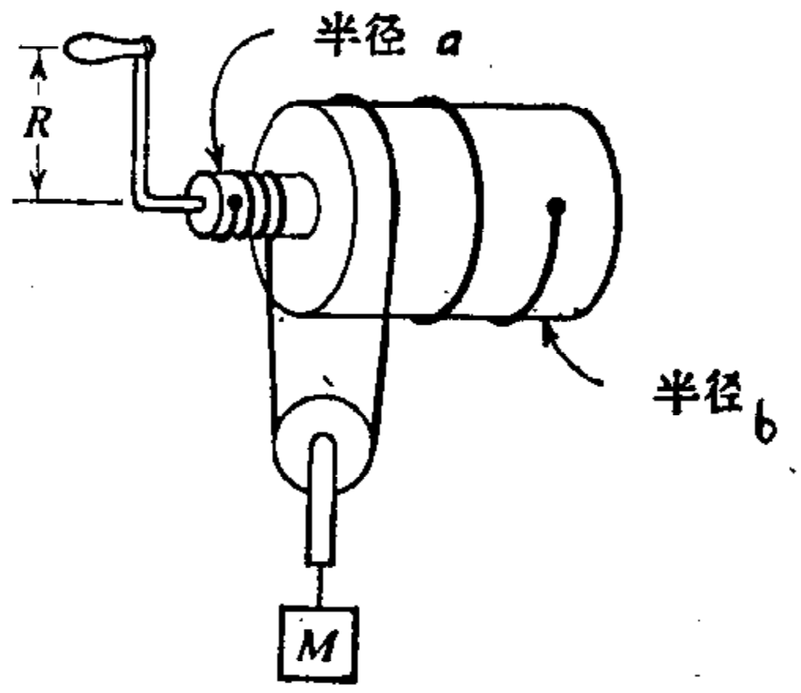
(b) 用你的定义计算题图中每一装置所提供的各别“机械利益”.




(a)




(b)

(习题 10-4)

10-5 (a) 斯坦福直线性加速器("SLAC") 把能量传给电子的速率近似于 200 千电子伏/英尺. 这个量与阴极射线管每单位长度给予电子的能量相比较如何? 用显象管呢?

(b) 相对论的效应在这个例子中异常显著(在运行 2 英里之后, SLAC 中的电子得到的速度与光速相差在 $10^{-7}\%$ 以内). 如果电子的动能由经典值 $K=\frac{1}{2}mv^2$ 给出, 电子要运行多远才能达到光速?

10-6 一火车车皮在一加煤斗下面行驶 10 米距离, 同时在 2 秒的时间内由加煤斗给装上 20 吨煤.

(a) 要使火车在这装煤过程中保持恒速运行, 作用于它的平均外加力必须是多少?

(b) 这个力所作的功是多少?

(c) 煤的动能增加多少?

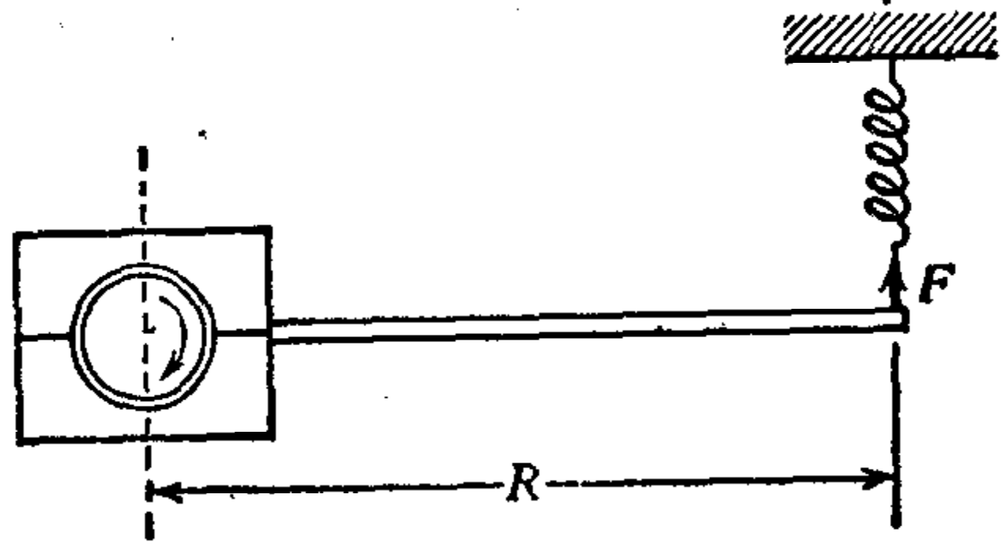
(d) 解释(b)和(c)之间的矛盾.

10-7 一辆汽车以恒定速率 $v$ 沿一笔直公路行驶. 车中一乘客向前直线地扔出一球, 球离手时**相对于他**的速率为 $u$.

(a) 在汽车参照系中测量, 球所得的能量是多少? 对于公路参照系呢?

(b) 把(a)中的答案同乘客所作的功和汽车所作的功联系起来. 确实弄清楚什么力、在多大距离内、作用在什么物体上.

10-8 测量一给定转速的引擎的输出功率的常用装置称为吸收功率计. 这是一个小的摩擦制动器——称为普朗尼制动器, 箝夹在引擎的输出轴上(如图), 容许轴转动, 而由一在已知距离 $R$ 外的弹簧秤使制动器定住.




(习题 10-8)

(a) 推导引擎马力的表达式, 用 $R$、$F$(弹簧秤上记下的力)和 $\omega$ (轴的角速度)这些量来表示.

(b) 你一定知道力 $F$ 与杠杆臂 $R$ 的乘积就是引擎所施加的转矩. 你所得的转矩与马力之间的关系同汽车引擎的公布数据一致吗? 解释为什么这里可能有差异.

10-9 一电泵用来抽空一受水浸的地下室, 室的面积为 30×20 英尺, 高为 15 英尺. 在一次暴风雨中, 室中积了 4 英尺深的水.

(a) 求把水抽到地面上来所需的功.

(b) 假设电泵是用一个效率为 50% 的一马力的马达驱动的, 这工作需要多长时间?

(c) 如果地下室的深度是低于地面 50 英尺而不是 15 英尺, 而水深仍为 4 英尺, 电泵须作多少功?

10-10 (a) 查阅一下关于铅球、铁饼和标枪的目前世界记录. 这些物体的质量依次为 7.15、2.0 和 0.8 千克. 略去空气阻力, 计算为了达到这些投掷记录, 最少要各给这些物体以多大的动能.

(b) 要在 2 米的一段距离内给予各物体以这些能量, 各需要多大的作用力.

(c) 你认为答案意味着空气阻力对这些项目中的任何一个有严重的限制吗?

10-11　一位反常的旅客在一上升的自动楼梯上往下走，以便总是停留在同一竖直高度上．驱动这自动楼梯的电动机是否比这个人不在那里时要多作功？尽你所能充分分析这一情况的动力学．

10-12　基萨的大金字塔最初建立时（自那时以来它已损失了其最外层的一部分）约为 150 米高，并有一边长为 230 米的正方形底部．它相当于是一块密度约为 2500 千克/米$^3$ 的实心石头．

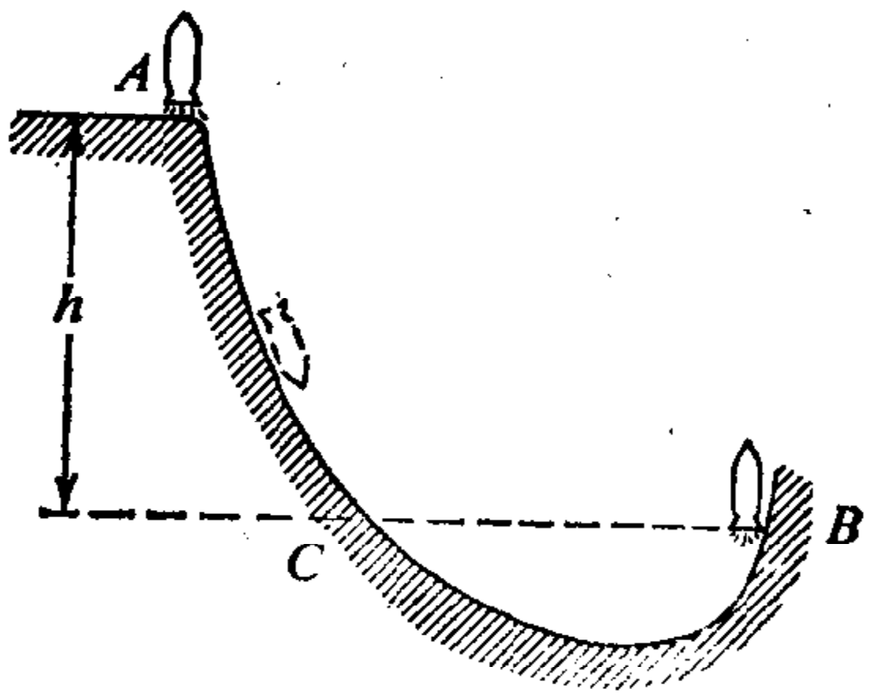
(a) 这金字塔的总重力势能有多少？以石头在地面处的势能为零．

(b) 假设建造金字塔时一个奴隶的食物摄入量为 1500 大卡/天，而这能量的 1% 是有效的有用功．建成这金字塔最少需要多少人-天？（希腊史学家希罗多德报道过，这项工作有 100,000 人卷入，干了 20 年．如果是这样，则效率不很高．）

10-13　有人宣称：如果一枚火箭不是在地平($A$) 处点火，而是让火箭从静止状态沿一无摩擦的道轨下滑，到一较低的水平面($B$) 时再点火，则它会上升到更高的高度——见图．为了分析这一主张，可考虑一简化的模型：火箭的壳体用质量$M$表示，燃料用质量$m$表示，而燃料燃烧时所放出的化学能则表示为$M$和$m$之间贮存有一定量势能的一压缩弹簧，这能量足以使$m$相对于$M$以速度$V$突然射出．（这相应于所有燃料在一瞬间燃烧和喷射，也就是爆炸．）然后作如下问答：

(a) 假设 $g$ 值与高度无关，计算如果在 $A$ 处从静止直接向上发射，火箭能上升多高？

(b) 令 $B$ 低于 $A$ 的竖直距离为 $h$，并假设火箭沿无摩擦道轨下滑到 $B$ 处时发射．问在弹簧松开之前一刹那火箭在 $B$ 点的速度是多少？在弹簧松开后的一刹那的速度呢？




（习题 10-13）

(c) 现在火箭能升到$A$的**上方**多高？这高度比前一情况高吗？高多少？

(d) 记住能量守恒，你能回答一怀疑者声称有一些能量丢失了的疑问吗？

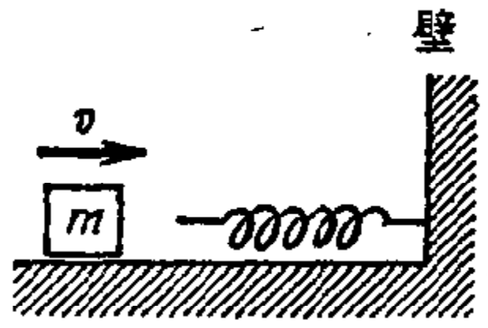
(e) 如果你有劲头，可考虑一较为实际的情况：燃料的喷射延续了一段时间，并假设在这段时间内喷射速率不变.

10-14 一中性氢原子在真空中从静止降落100米. 它到底时动能的数量级用电子伏表示有多大？（1电子伏$=1.6\times10^{-19}$焦耳，阿伏伽德罗数$=6\times10^{23}$.）

10-15 一弹簧所施的回复力为

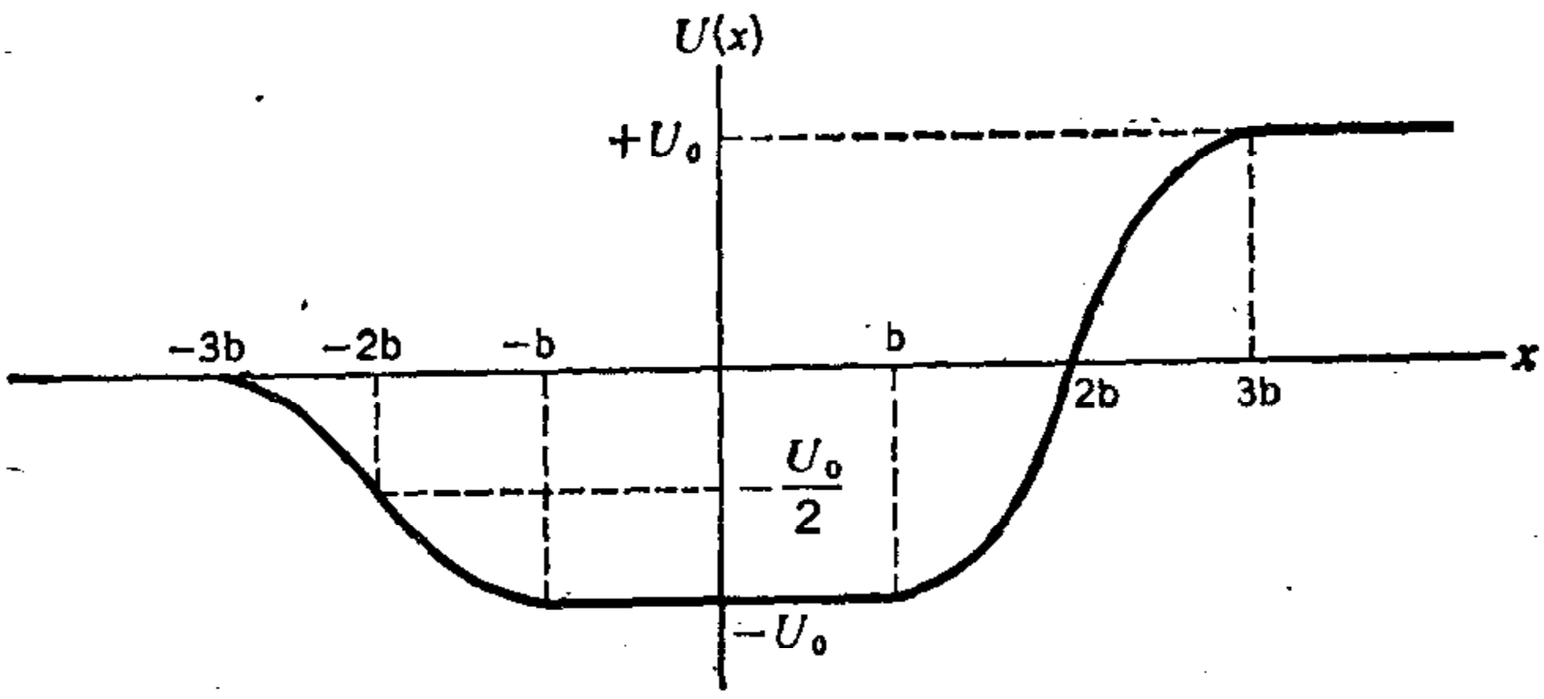
$$F(x)=-k_1x-k_2x^3$$

其中$x$是相对于它的未伸长长度的偏离. 这弹簧静止在一无摩擦的表面上，一质量为$m$的无摩擦物块以初速$v$碰到弹簧一端的尖针而扎住（见图）. 这质量被钉住后要行进多远才停下来？（假设弹簧的质量可忽略.）



（习题10-15）

10-16 一粒子沿$x$轴运动. 它的势能是位置的函数，如图所示. 对这一势能曲线，作一细致的徒手草图，表明力$F(x)$与$x$的函数关系. 在你的图上指出重要的特征和关系.



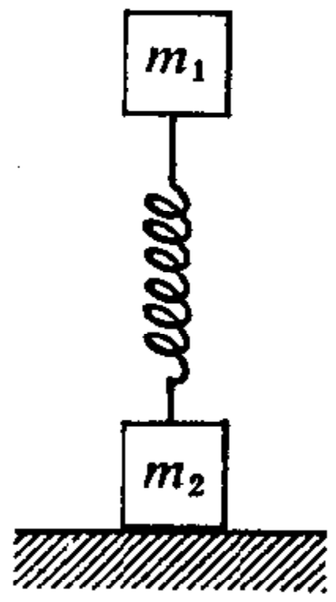
（习题10-16）

10-17 一质量为$M$、长为$L$的均匀绳，对称地褶挂在一半径为$R$、无摩擦的水平木桩上. 然后，让它稍受扰动，开始滑离木桩. 求这绳在完全离开桩的那一瞬间的速率.

10-18 两质量由一无质量的弹簧相连如图.

(a) 求必须施加于$m_1$的最小向下的力，以使在这力突然取消时，这整个集合物刚能离开桌面.

(b) 按时间反过来的情况来考虑这问题：用附在 $m_1$ 上的支承物使这集合物支持在桌子上方．放低这体系直至 $m_2$ 刚好接触桌面，然后松开支持物．问 $m_1$ 在停下来之前降落了多少距离？知道这一距离对你解决原来的问题有帮助吗？



（习题 10-18）

(c) 在你有了答案之后，现在(1)令 $m_2$ 为零和(2)令 $m_1$ 为零，对照你的直觉来检验这答案．特别是第二种情况，理论上的答案与你的常识相符吗？如果不符，试论误差的可能来源．

10-19 一粒子在一区域中运动，势能由下式给出：

$U(x)=3x^2-x^3$ （$x$ 用米表示，$U$ 用焦耳表示）

(a) 徒手画出 $x$ 为正值和负值两种情况下的势能图．

(b) 能使运动为振动的总机械能的最大值是多少？

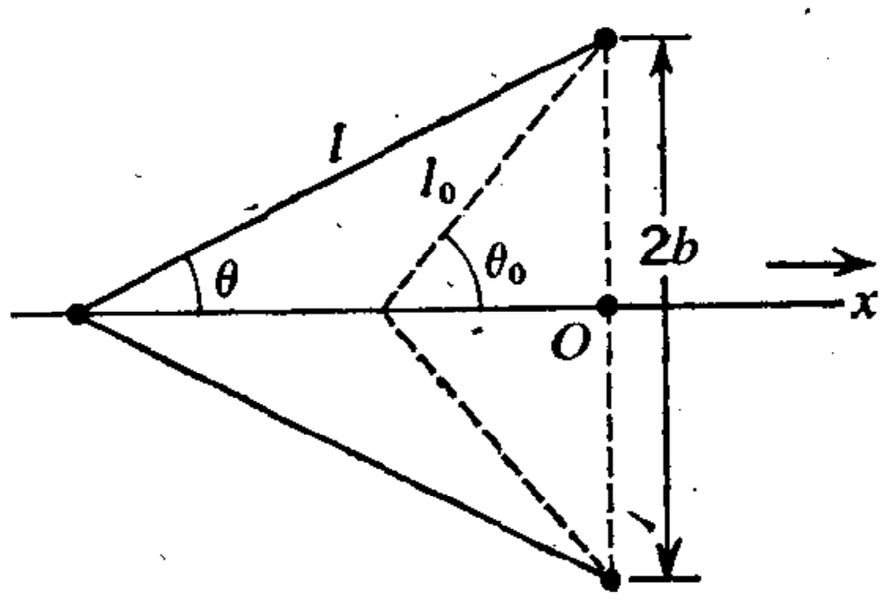
(c) 在 $x$ 的哪些范围内作用于粒子的力沿着正 $x$ 方向？

10-20 一高弹性的球（例如，一“超级球”）在地面上方距离为 $h$ 处从静止状态释放，而上下弹跳．每弹跳一次，球就失去其弹跳前一刹那的动能的一分数 $f$．如果 $h=5$ 米，$f=1/10$，试估算球将继续弹跳多长时间．

10-21 图示的弹弓的弹性弦松弛时的总长为 $2l_0$；弦的两端绷在相隔距离为 $2b$ 的固定支叉上．

(a) 证明，如果弦中的张力与它长度的增加成正比，则力在 $x$ 方向的分量为

$$F_x=2kb\left(\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\sin\theta_0}\right)\cos\theta$$



（习题 10-21）

(b) 注意到石子在弹弓中的位置为 $x=-b\cot\theta$，推导移动距离 $dx$ 所作的功的表达式．然后在 $\theta_0$ 和 $\theta$ 之间对这表达式积分，求出拉开弹弓时所作的总功．将这结果同考虑伸长了的弦所贮的能量而直接得到的结果（210 页）作比较．（在用上述方法进行了计算之后，你将会更加懂得用能量守恒来代替明显地含力的功积分的优点．）

10-22 一质量为 $M$、半径为 $r$ 的完全刚性球落到一可变形的地板上，地板施加的力与形变距离成正比，$F=ky$．

(a) 作图说明球的势能与高度 $y$ 的函数关系．（取未受扰动的地板面为

$y=0$.)

(b) 当球刚好停在地板上时，球心的平衡位置何在？（注意，这相应于势能曲线的极小值.）

(c) $M$的周期比它在一完全刚性的地板上弹跳的周期增加了多少？

10-23 一质量为 2 千克的粒子在一无摩擦桌面上，$t=0$ 时静止于位置 $x=0$. 从 $t=0$ 到 $t=2$ 秒，一个大小为 $F_x=4\sin(\pi t)$ 牛顿的力作用于这粒子.

(a) 画出这一期间内的加速度 $a_x$、速度 $v_x$ 和位置 $x$ 与 $t$ 的函数关系.

(b) 在 $t=0$ 到 $t=1$ 秒的期间内这力所作的总功是多少？

10-24 一质量可忽略的弹簧施加的回复力为

$$F(x)=-k_1x+k_2x^2$$

(a) 计算对于一位移 $x$ 弹簧中所贮存的势能. 取 $x=0$ 处的 $U=0$.

(b) 已知 $x=-b$ 处的贮能是 $x=+b$ 处贮能的两倍. 用 $k_1$ 和 $b$ 来表示，求出 $k_2$.

(c) 画出(b)中所确定的弹簧的势能图.

(d) 这弹簧平放在一光滑水平表面上，一端固定. 一质量$m$系在另一端，于 $x=0$ 处以等于 $k_1b^2/2$ 的动能沿正 $x$ 方向出发. 到 $x=+b$ 时它的运动有多快？

(e) 在振动区域的端点 $x$ 之值是多少？（为此，可用题(c)中你画出的图.）

10-25 一质量为$m$的物体，从负 $x$ 的区域出发运动，到达 $x=0$ 点时速率为 $v_0$. 当 $x\geqslant 0$ 时它受到一力

$$F(x)=-ax^2$$

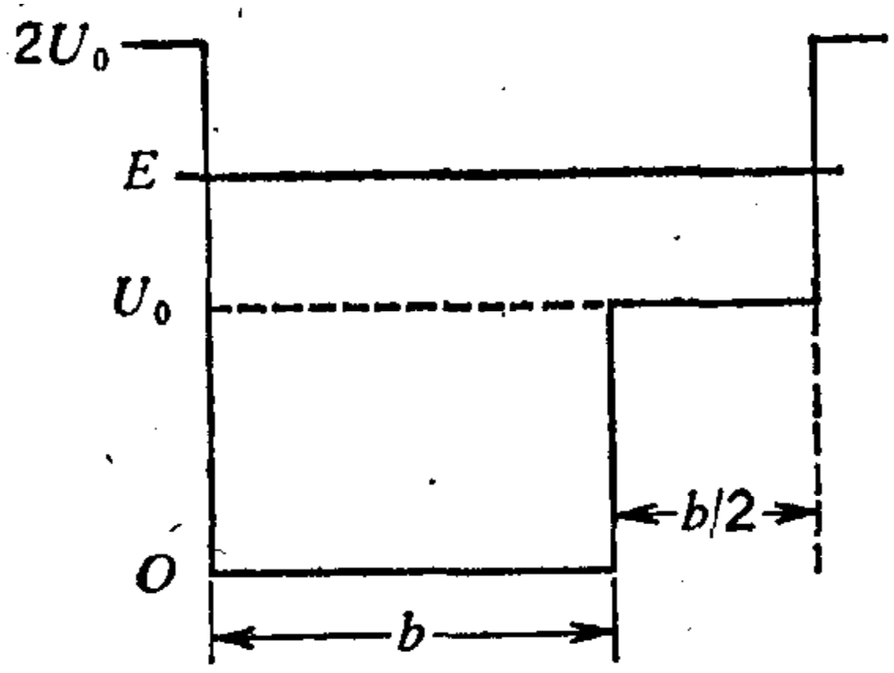
它能沿 $+x$ 轴走多远？

10-26 一质量为$m$的粒子的势能是它沿 $x$ 轴位置的函数如图所示.（$U$值的不连续跳跃在物理上并不真是这样，但可假设为一真实情况的近似.）如果这粒子的总机械能 $E$ 等于 $3U_0/2$，试计算振动的周期.

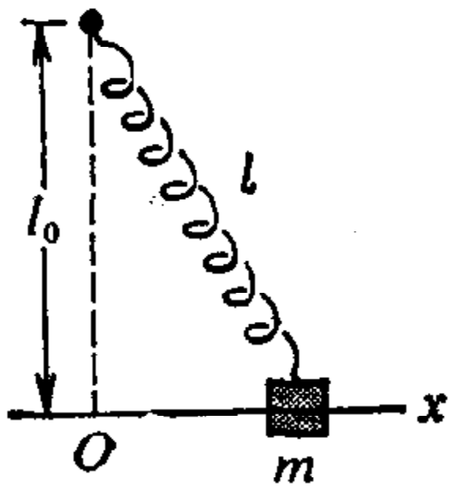
10-27 一质量为$m$的物体被约束在 $x$ 轴上运动（可能是用一无摩擦的导线或导轨），它系在一弹簧上，弹簧的松弛长度为 $l_0$，弹簧常数为 $k$，它的另一端固定在 $x=0, y=l_0$ 处(见图).

(a) 证明，在 $x$ 方向施加于$m$的力是

$$F_x = -kx\left[1-\left(1+\frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}\right]$$




（习题 10-26）




（习题 10-27）

(b) 证明，对于小位移($x \ll l_0$)，力与 $x^3$ 成正比，因而

$$U(x) \simeq Ax^4 \quad (x \ll l_0)$$

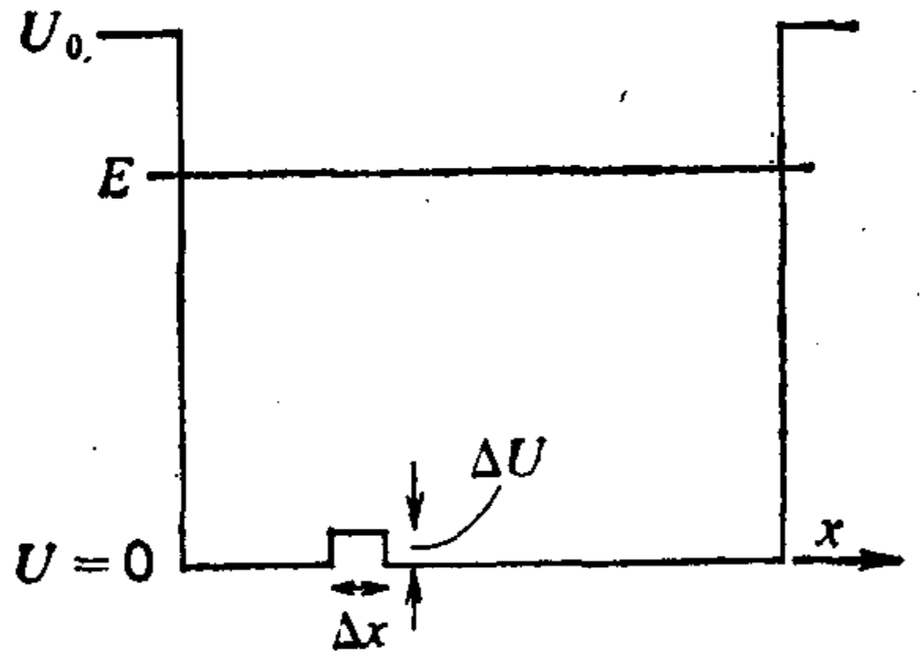
用上述常数来表示，$A$ 是什么？

(c) 一简谐振子的周期与其振幅无关．你对于上述运动的振动周期与振幅有关是怎样想的？（作一能量图可能有帮助．）

10-28 考虑一质量为 $m$ 的粒子在一力场中沿 $x$ 轴运动，粒子在力场中的势能为 $U = Ax^2 + Bx^4 (A>0, B>0)$．画出势能曲线，根据图线讨论，确定有关振动周期 $T$ 与振幅 $x_0$ 的某些关系．证明，对于足够小的振幅，因而 $Bx^4$ 同 $Ax^2$ 比较总是很小时，周期与振幅的近似依赖关系是

$$T = T_0\left(1-\frac{3B}{4A}x_0^2\right)$$

10-29 一质量为 $m$、能量为 $E$ 的粒子在图中所示两面竖直壁之间，也就是在 $U=0$ 内，来回弹撞．势能因引进一高为 $\Delta U$ ($\ll E$) 的宽为 $\Delta x$ 的




（习题 10-29）

矩形峰而稍有改变. 证明振动周期近似地改变了$(m/2E^3)^{1/2}(\Delta U\Delta x)$.[值得注意的是,势能的些小不规则性的效应仅仅与$\Delta U$和$\Delta x$的乘积有关,而与这些量的各别值无关. 这是这类小扰动效应——术语上称为微扰的特征.]

10-30 质量为$m$和$2m$的两物块停在一无摩擦的水平桌上. 它们由一弹簧连结,弹簧的质量可忽略,平衡长度为$L$,弹簧常数为$k$. 用一无质量的线连结物块,使弹簧压缩到长度$L/2$. 整个体系以速率$v$**垂直于**弹簧长度的方向上运动. 然后把线烧断. 用$m$、$L$、$k$和$v$表示:

(a) 体系的总机械能.

(b) 质心的速率.

(c) 两物块的最大相对速率.

(d) 体系的振动周期.

如果初速度是沿着、而不是垂直于弹簧的长度, (a)—(d)各题中的量如何改变?

10-31 一$Li^+$离子和一$I^-$离子相互间的势能,作为它们的间距$r$的函数,可以相当好地用下列等式表示:

$$U(r)=-\frac{Ke^2}{r}+\frac{A}{r^{10}}$$

其中第一项来自库仑相互作用,所含常数在MKS单位制中之值为

$$K=9\times10^9 \text{ 牛顿}\cdot\text{米}^2/\text{库仑}^2$$

$$e=1.6\times10^{-19} \text{ 库仑}$$

在LiI分子中两离子中心之间的平衡距离$r_0$约为2.4埃. 根据这些知识,讨论

(a) 要使两离子完全相互分离开,必须作多少功(用电子伏表示).

(b) 如果设$I^-$离子固定(因它比$Li^+$重得多),则$Li^+$离子在振幅非常小的振动中频率$\nu$是多少(用赫表示)? (用$d^2U/dr^2$在$r=r_0$处之值——见235页——计算等效弹簧常数$k$. 取$Li^+$的质量为$10^{-26}$千克.)

10-32 (a) 如果在按$r^{-7}$变化的范德瓦尔斯吸引力之外, 质量为$M$的两个全同的原子还受到一与$r^{-l}(l>7)$成正比的排斥力,证明

$$U(r)=-\frac{A}{r^6}+\frac{B}{r^n}\quad (n>6)$$

并把你的结果用对$r$的图线表示出来.

(b) 根据

$$\left.\frac{dU(r)}{dr}\right|_{r=r_0}=0$$

这一条件计算这分子中的平衡距离 $r_0$，用上述常数表示.

(c) 分子的离解能 $D$ 应等于 $-U(r_0)$. 用 $A$、$n$ 和 $r_0$ 表示，它的值是多少?

(d) 计算分子在平衡间距 $r_0$ 附近作小振动的频率. 证明它可由质量 $M$、常数 $n$、平衡间距、以及分子的离解能按下式给出:

$$\omega^2=\frac{12nD}{Mr_0^2}$$

10-33 在一个电荷正负相间的离子晶体点阵中，一离子的势能可写为

$$U(r)=-\frac{Ae^2}{r}+\frac{B}{r^n}$$

其中 $A$、$B$ 和 $n$ 都是常数，$e$ 是基元电荷，而 $r$ 是点阵中最近邻的距离，称为点阵常数. 这势能来自静电吸引的 $1/r^2$ 力，以及当把两相邻离子带到一起来时产生的短程斥力.

(a) 作 $U(r)$对 $r$ 的图. 在确实正确地认清 $r$ 的意义之后，你对晶体结构的稳定性能够说些什么?

(b)按平衡条件

$$\left.\frac{dU(r)}{dr}\right|_{r=r_0}=0$$

(这式确定在整个点阵的能量最小时离子间的距离.)计算点阵常数 $r_0$，用 $A$、$B$、$e$ 和 $n$ 来表示.

(c) 证明每摩尔的分子结合能为

$$u=-N_0U(r_0)\qquad N_0=\text{阿伏伽德罗数}\simeq 6\times10^{23}\ \text{摩尔}^{-1}$$

利用(b)中的结果，用 $r_0$ 来确定 $u$.

(d) 对于 NaCl 晶体，平衡点阵间距 $r_0$ 为 2.8 埃，指数 $n$ 约为 10. 如果 $r$ 用厘米表示，$e$ 用静电单位 ($e=4.8\times10^{-10}$静电单位)，则常数 $A$ 等于 1.7 (无量纲). 用这些数值计算 $u$ 的理论值，并同实验值 183 千卡/摩尔比较.

在数学物理中一个方法的成功不是由于巧妙的谋略，或是幸运的偶遇，而是因为它表达着一物理真理的某个方面.

O. G. 沙顿，《数学的运用》(1954).

# 第十一章　保守力和空间中的运动

## §1　保守力概念的引伸

在整个第十章中我们系统地应用了一个重要的简化和限制，把我们的讨论局限于一维运动．这显然妨碍了我们去研究一些最使人感兴趣的和最重要的动力学问题．在本章的叙述中我们将不受这限制，并在叙述中要示明能量分析法的更大优点．

作为讨论的开始，我们首先考虑地球表面附近在重力作用下的运动问题．设想有两根很光滑的管子把 $A$ 和 $B$ 两点连起来，$A$ 和 $B$ 分处于同一竖直平面的不同高度上(图 11-1)．一微粒，放在两管之一里面，静止于 $A$ 点，然后释手让它下滑而在 $B$ 点穿出．如果管子差不多是无摩擦的，则它们作用于粒子的力总是垂直于粒子运动方向的．因而这些力对粒子不作功；不论粒子的动能如何变化都不能归因于它们．这些力所作的事就是迫使粒子走一特殊路径从而在指定方向上在 $B$ 点穿出．如果它走的是路径 1，它就如图所示以速度 $v_1$ 穿出来；如果它走路线 2，则以速度 $v_2$ 穿出来．当然，在粒子沿着任一管子运动时，它的能量确是在变化的；引力在对它作功．但我们观察到一使人感兴趣的事实，即虽然速度 $v_1$ 和 $v_2$ 的方向不同，它们的大小却是一样的．**引力给予粒子的动**

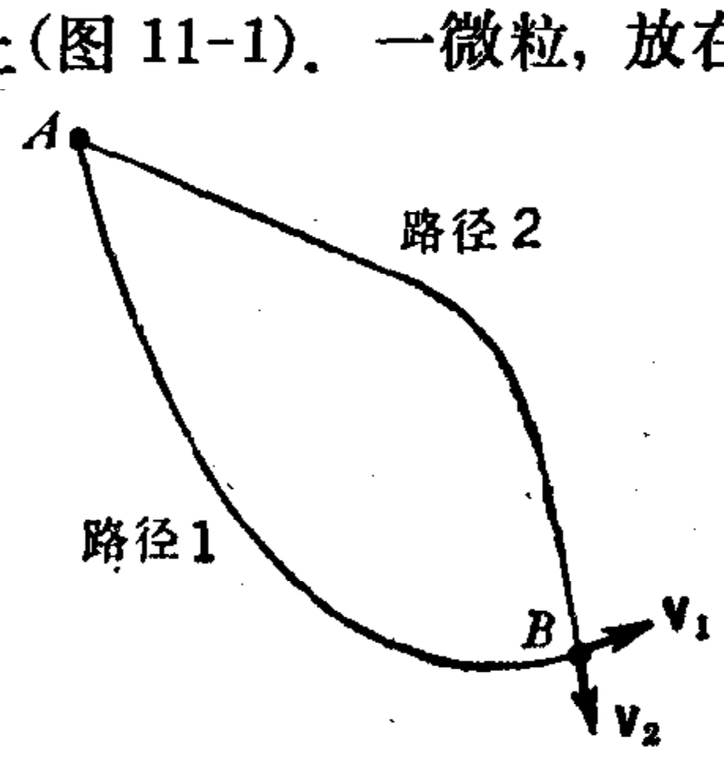



图 11-1　在竖直平面中的运动，给定两点之间的两条任选其一的路径．

**能对于所有从$A$开始到$B$终了的路径都是相同的.**

怎么会是如此呢？这是不难看出的. 当粒子走过某位移元$d\mathbf{s}$时，对它作的功$dW$是

$$dW = |\mathbf{F}_g||d\mathbf{s}|\cos\theta = \mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{s}$$

其中$\theta$是$\mathbf{F}_g$和$d\mathbf{s}$的方向之间的夹角. 但力$\mathbf{F}_g$是一个常量(即在任何点都一样)，分量为

$$F_x = 0 \qquad F_y = -mg$$

(我们取$y$轴向上为正). 位移元的分量是$(dx,\ dy)$. 按$dW$的基本定义为$|\mathbf{F}||d\mathbf{s}|\cos\theta$，有

$$dW = F_x dx + F_y dy$$

要看出这一点，可考虑$xy$平面上的任何两矢量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$，与$x$轴的夹角分别为$\alpha$和$\beta$(图 11-2). 于是，如果它们之间的夹角为$\theta$，则由一标准的三角学定理，

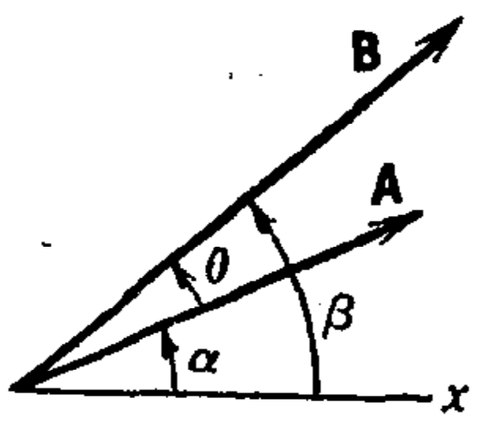


图 11-2　用各别分量求标积$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$以便在一任意位移中计算功$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

$$\cos\theta = \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

因此，标积$S(=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$为

$$S = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|(\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha)$$

但　$|\mathbf{A}|\cos\alpha = A_x$,　$|\mathbf{A}|\sin\alpha = A_y$

而$\mathbf{B}$的分量也类似. 因此有

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y \quad \text{(只适于二维情形)}$$

更普遍一些，如果两矢量还有不为零的$z$分量，则

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

于是，普遍地有

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{11-1}$$

在目前的二维问题里，$F_x = 0$而$F_y = -mg$，这式给出

$$dW = -mg\,dy$$

因此，对于竖直坐标从 $y_1$ 到 $y_2$ 的变化，不管 $x$ 坐标的变化如何或取的是什么路径，动能的改变都是

$$K_2-K_1=\int dW=-mg(y_2-y_1) \tag{11-2}$$

这完全是重复着我们在第十章中对纯竖直运动导出过的结果，并使我们能够再次定义一等于 $mgy$ 的重力势能 $U(y)$.

这结果大大地引伸了我们的能量法，用到除重力外还有所谓“约束力”的情形，这种约束力控制着一物体的路径，但由于它总是作用在与运动垂直的方向，所以不改变物体的能量. 让我们来看一些具体例子.

## §2 两相连质量的加速度

我们将从这样的问题开始：如果我们直接应用牛顿定律去处理它，就要对两质量分写两个 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 的方程. 问题是求图 11-3 所示的光滑平面上运动的两相连质量 $m_1$ 和 $m_2$ 的加速度的大小. 两质量的加速度是两个不同的矢量 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$，即使它们具有相同的数值 $a$. 因而，一个方程 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 是不够的. 然而，如果用能量这个标量，我们就可以利用位移的大小及其对时间的微商对两质量是共同的这一事实. 因此有 $|\mathbf{v}_1|=|\mathbf{v}_2|=v$，而这体系的总能量简单地是

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2$$

它在时间 $dt$ 内的变化是

$$\begin{aligned} dK&=(m_1+m_2)vdv \\ &=(m_1+m_2)vadt \end{aligned}$$

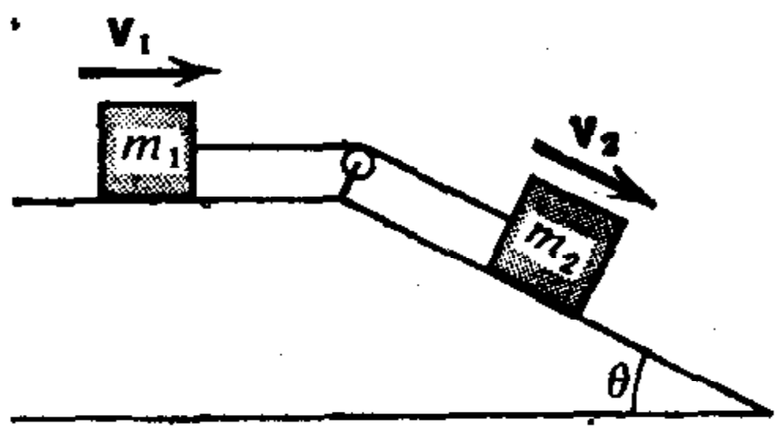


图 11-3 两相连质量的运动——应用能量守恒方法的一个简单例子.

今 $vdt$ 是每一质量平行于它所在的平面所走的距离，对于 $m_2$ 说，沿斜面向下走距离 $vdt$ 意味着它的竖直坐标变了 $dy=-vdt\sin\theta$

($y$ 向上为正). 相关的重力势能的变化因而是

$$dU = -m_2 g v dt \sin\theta$$

但是, 假定无摩擦力, 总机械能是守恒的, 而有

$$dK + dU = 0$$

因此,

$$(m_1 + m_2) v a dt - m_2 g v dt \sin\theta = 0$$

从而得到熟知的结果

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \sin\theta$$

## §3 在一竖直圆周上运动的物体

设一质量为$m$的粒子$P$固定在一根杆的一端, 杆长为$l$, 质量可忽略不计. 杆的另一端自由地支在一固定中心$C$处. 取这物体的正常静止位置为原点 (图 11-4), 则物体的位置可用一个角坐标$\theta$方便地来描写, 或者, 如果我们偏好, 也可以用沿着物体运动路线的圆弧上从$O$点算起的位移①$s$来描写(假定杆长不变)②.

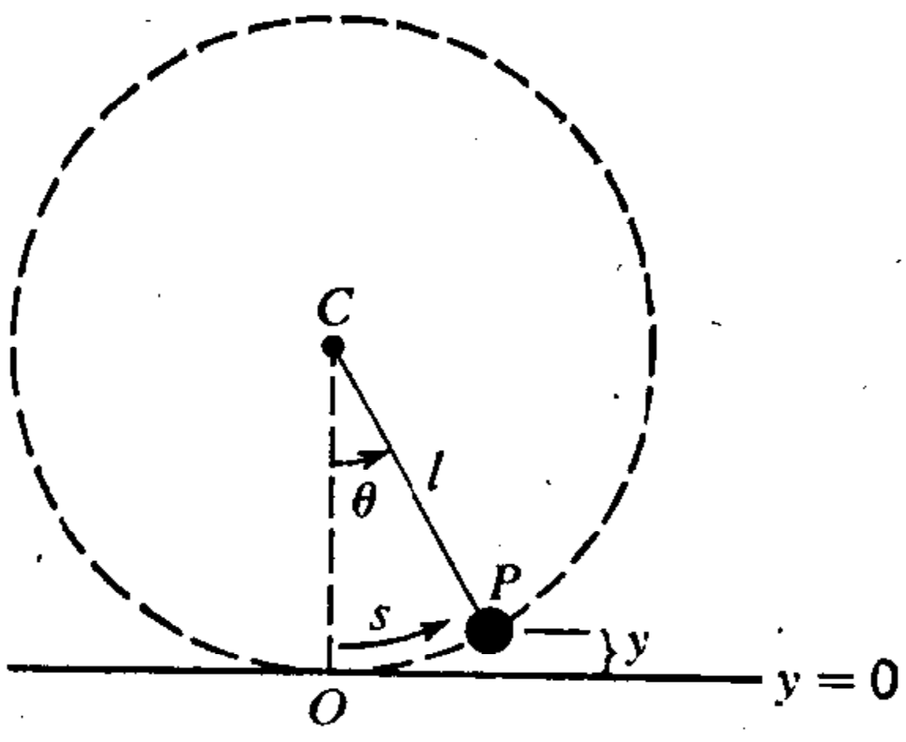



图 11-4 一单摆的运动.

如果角位移是$\theta$, 那么物体的$y$坐标就是

$$y = l(1 - \cos\theta)$$

因而势能

$$U(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) \qquad (11\text{-}3)$$

应用能量守恒的基本表述, 对于路线上的任何两点有

① 应为"弧长"——译者注.

② 因此, 这运动即使不是在一直线上, 在某种意义下它也是一维的, 但我们不在此强调这样一种体系的这一点.

$$K_1+U_1=K_2+U_2$$

用 $m$ 和 $v$ 表示 $K$，并把(11-3)式的 $U$ 代入，得

$$\frac{1}{2}mv_1^2+mgl\,(1-\cos\theta_1)$$

$$=\frac{1}{2}mv_2^2+mgl\,(1-\cos\theta_2)$$

因此，

$$v_2^2=v_1^2+2gl\,(\cos\theta_2-\cos\theta_1) \qquad (11\text{-}4)$$

显然，如果 $\theta_2>\theta_1$，则 $v_2<v_1$.

如果物体以速度 $v_0$ 从最低点出发，应有

$$v_2^2=v_0^2-2gl\,(1-\cos\theta_2)$$

借助于这一结果，我们就可以回答诸如以下的问题：需要多大的初速度物体才能到达圆周的顶点？以及，如果起始速度小于此，它能达到什么位置？

注意在这问题中能量法比直接用 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 要优越得多．物体的速度，其大小和方向都是在变的，它有径向的和横向的加速度，还有杆作用于物体的、未知的推力或拉力——而这些量没有一个是在计算任一 $\theta$（或 $y$）处的速率时需要考虑的．一旦用 (11-4)式求得 $v$[或者也许要回到(11-2)式，如果那样更为方便的话]，就可以进行求加速度分量和其他的量了．

然而，在这类问题中可能有一些细微之处．例如，假定我们以一根绳代替多少是刚性的杆来约束物体．这时，约束就只在一个方面起作用了；它可以沿径向往里拉而不能沿此向外推．我们可能遇到速度不足以使物体达到圆周顶点的情形（虽然用刚性杆也许可能）；物体将按抛物线落下[图 11-5(a)]．当绳中张力刚好降到零，而 $\mathbf{F}_g$ 沿圆的半径的分量恰好等于质量 $m$ 乘上所需向心加速度 $v^2/l$ 时，就达到脱离点了．如果一物体沿着一条有槽的金属

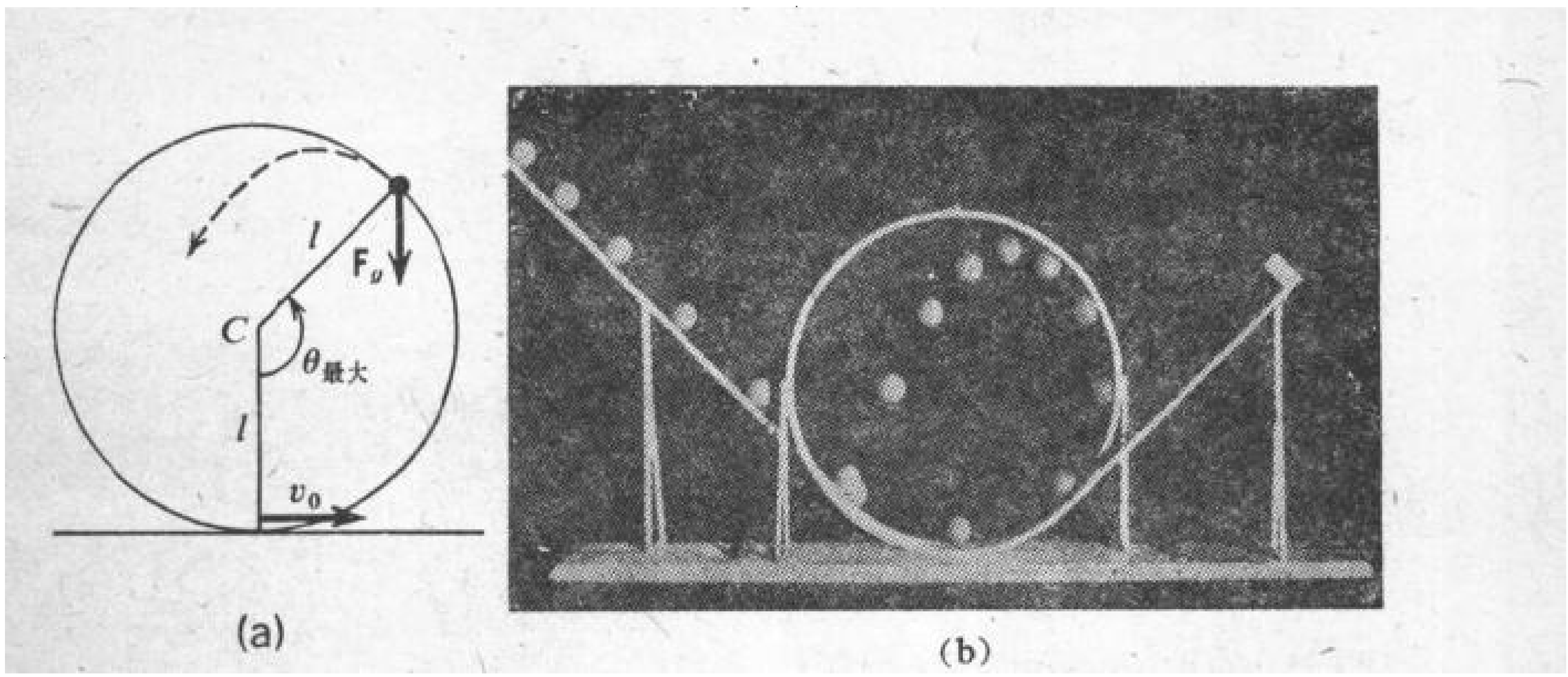



图 11-5 (a) 一单摆摆锤的轨迹，摆锤的起始速度不足以在绳中保持一张力使它能到达 $\theta=\pi$ 处.(b) 频闪观测照片，示明一个球从一圆形槽上掉下来，离开时那点的接触力为零.

圆形轨道运动，也会发生完全类似的情形。图 11-5(b) 就是一幅频闪观测照片，示明一物体从这种轨道上的一点离开而落下，在这一点上轨道所提供的法向作用力降到了零. 这一情况出现的角位置 $\theta_m$[参看图 11-5(a)]由牛顿定律确定:

$$mg\cos(\pi-\theta_m)=\frac{mv^2}{l} \qquad \left(设\frac{\pi}{2}<\theta_m<\pi\right)$$

其中

$$v^2=v_0^2-2gl(1-\cos\theta_m)$$

这导致下列结果

$$\cos\theta_m=\frac{2}{3}-\frac{v_0^2}{3gl}$$

因此我们推断，从 $O$ 点出发、$v_0$ 小于 $\sqrt{5gl}$ 的粒子将不能达到圆周的顶点，而如果支持粒子的是根刚性杆，则初速率只要等于 $2\sqrt{gl}$ 就够了. 因此，要注意，能量守恒原理不应盲目地运用；必须总是保持警觉，看是否在每一阶段上牛顿定律都在特殊的约束力有效的情况下得到满足.

## §4 伽利略的一个实验

伽利略在他的"*Dialogues Concerning Two New Sciences*"(«关于两门新科学的对话»)(1638)中首先明白地提出：一物体在重力作用下降落时获得的速率只与所走的竖直距离有关．他把这结果应用于一物体在不同斜率的光滑平面上下滑的匀加速运动，如图 11-6(a)所示，这图是以伽利略原书中的一幅插图为依据的．

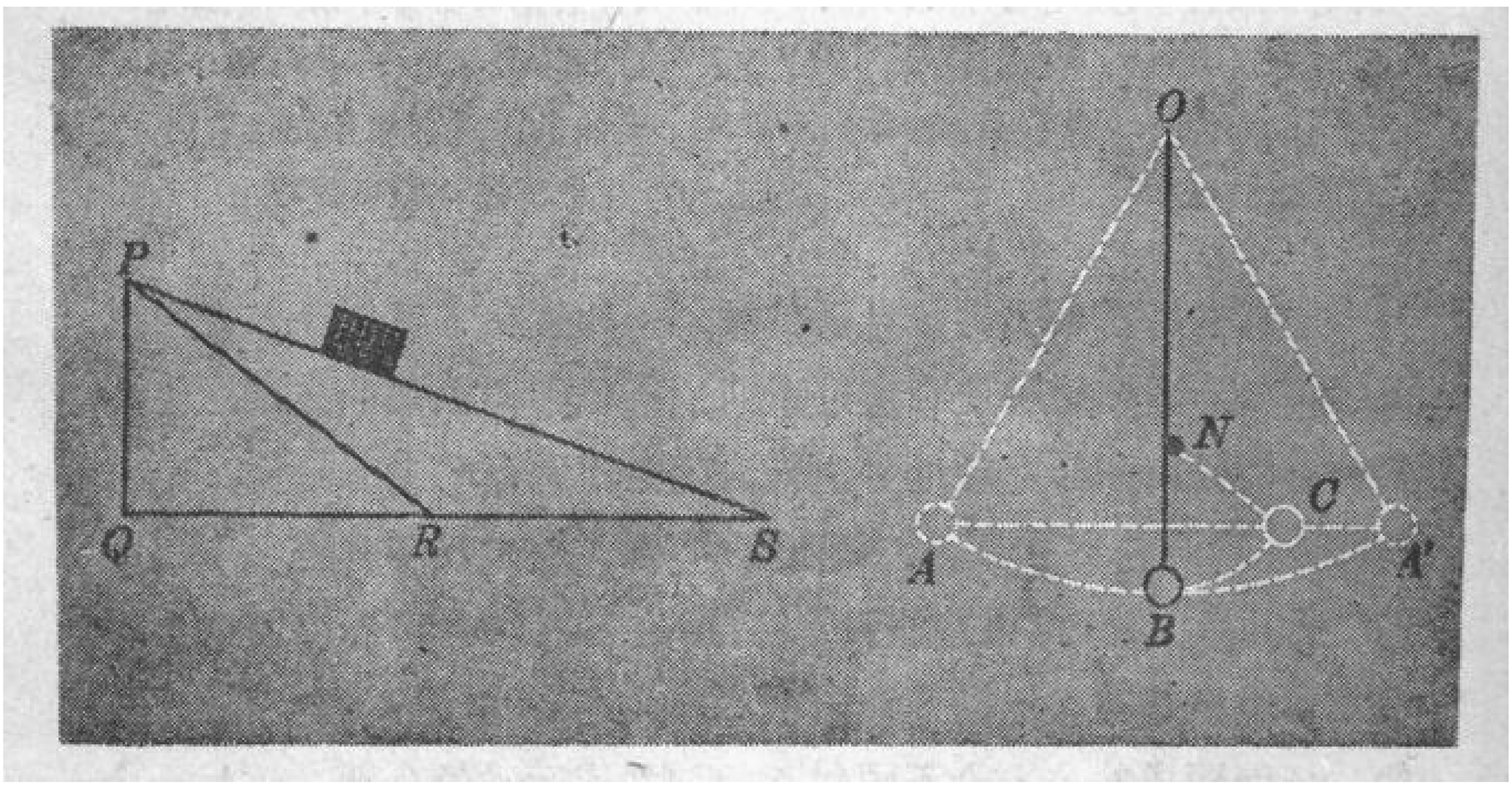



图 11-6 (a) 一块物体沿一无摩擦的平面滑下，获得的速率只与所走的竖直距离有关，与斜率无关．(b) 伽利略的摆实验，显示在理想斜面上运动的性质．

然而，他未能用这类斜面直接证明这一命题的正确性；代之，他做了一个非常聪明的实验，让一质量在一圆弧上摆动，并运用他非凡的科学洞察力于他在这情形中观察到的事实．下面是关于这实验的一个说明，取自伽利略本人的叙述，只对符号作了次要的改动；他的说明的清晰性和现代性是相当惊人的：

设想本页书代表一竖直的墙，上面钉了一枚钉子；从钉上用一根细的竖

直线 $OB$ 挂一个重为一、二英两的铅弹，线长从四英尺到六英尺［见图11-6(b)，根据伽利略本人所绘草图！］．在这墙上画一水平线$AA'$，垂直于竖直线$OB$(这线离墙约两指宽下悬)．现在把 $OB$ 线连同它所携的球移到 $OA$ 位置，然后释手，任其自由；起先看到它沿着弧 $ABA'$ 下降…直到它差不多到达水平线 $AA'$，略差一点是由于空气和悬丝的阻力之故．由此我们可以正确地推断，这球在通过弧 $AB$ 降到 $B$ 点时获得一动量，其大小恰够使它通过类似的弧 $BA'$ 到达同样的高度．

重复这实验多次之后，让我们现在在垂线 $OB$ 的近旁，比如$N$点，另外钉一枚钉子，露出墙外五、六指宽，使悬线再次携带着弹子沿 $AB$ 弧走．到$B$点时会碰到$N$处的钉子，而子弹被迫以$N$为心绕着走 $BC$ 弧…这时，大家将感兴趣地看到球摆到水平线 $AA'$ 上的 $C$点，并且你还看到，把障碍物(指$N$处的钉——译者)放低一点，也出现同样的事情．①

伽利略用这种方法使自己信服，一物体在下降任一竖直距离中所获得的速率足够使它通过不同的路径回到原来的高度．然后他加上沿任何弧线运动的可逆性，就能得到他的主要结论：悬着的物体，不论它是沿着 $AB$ 弧还是$CB$弧，或者任何其他在水平线 $AA'$ 上开始、最低点为$B$的弧下降，所达到的速率都是相同的．最后他可以设想这种运动是在斜率不同的连续相继的斜面上进行的，从而形成他关于沿不同斜面的匀加速运动的命题．这是一个极为重要的结果，因为他这时就可以根据观察一物体在一斜率非常小的斜面上滚下来时的运动推论在重力下的自由下落．这使他能够拉长整个现象的时间($a=g\sin\theta$！)，从而定量地测出距离与时间的关系，所用的钟是一个充满了水的容器，中有一孔，可以用他的指头启闭——一个卓越的简单装置．

---

① 引自英译本 *Dialogues Concerning Two New Sciences*.(译者 H. Crew 和 A. de Salvio) Dover Publications, New York.

## §5 一抛物轨道上的质量

设想我们将一根非常光滑的金属轨道向上对称地弯成抛物线形，顶点在$O$点(图 11-7)．令抛物线的方程为

$$y=\frac{1}{2}Cx^2 \tag{11-5}$$

其中$C$是一个常数．

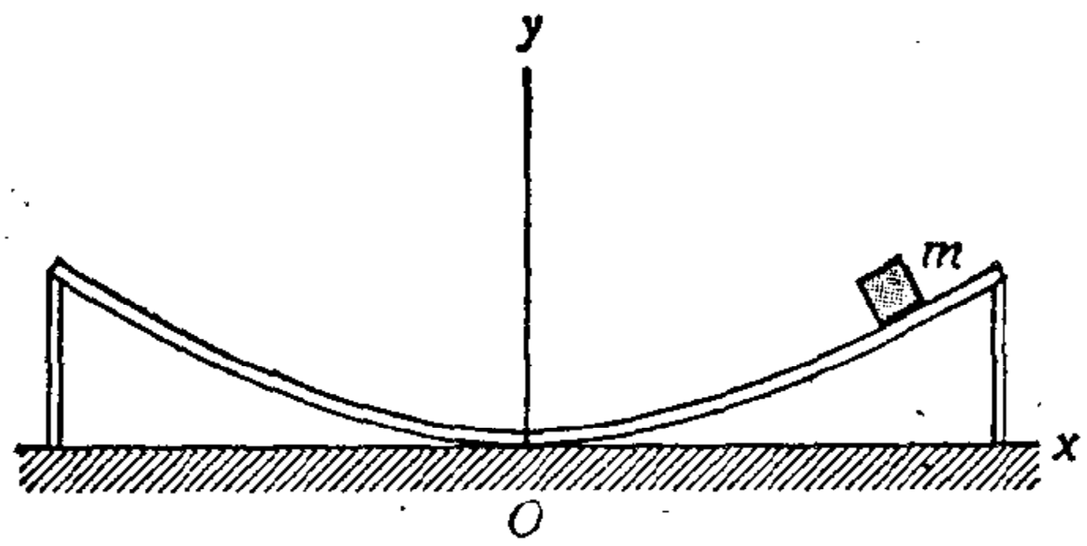



图 11-7 一粒子在一竖直的抛物线轨道上的运动．

设想一质量为$m$的物体可以自由地沿这轨道滑动，摩擦力可忽略不计．它的重力势能，任意地取在$O$点之值为零，是

$$U(y)=mgy$$

我们可以换一种方式用(11-5)把它写成$x$的函数：

$$U(x)=\frac{1}{2}mgCx^2=\frac{1}{2}kx^2 \tag{11-6}$$

其中$k$是一个常数，与弹簧常数具有相同的量纲(牛顿/米)．在任意点$(x, y)$上，这质量具有一速率$v$，必然是沿着轨道的，而且按能量守恒有

$$\frac{1}{2}mv^2+U=E \quad (=常数)$$

以$v_x$和$v_y$表示 v 的$x$和$y$分量，并用(11-6)式，有

$$\frac{1}{2}m v_x^2+\frac{1}{2}m v_y^2+\frac{1}{2}kx^2=E \tag{11-7}$$

这与线性谐振子的能量守恒方程有显著的相似之处．所差的只是

$\frac{1}{2}mv_y^2$这一项. 这使我们想到, 如果出现 $v_y$ 比 $v_x$ 小得多的情况, 在这轨道上运动的质量将会十分近似于一谐振子. 我们需要做什么才得以达到这一情况呢? 常识几乎立即告诉我们, 如果轨道仅仅微微弯曲, 使在任何点 $y \ll x$, 那么竖直运动将比水平运动小得多而出现近似的谐振运动.

这种运动可以用"线性气轨"① 做到并极佳地演示出来. 这种装置是一金属滑行物跨在一气垫上, 气是由轨道上的孔中喷出来的. 由于摩擦力小, 即使曲率异常之小, 振荡也能发生. 作为一个示例, 下面是一实际演示中轨道形状的规格(用间距为 1 英尺的螺丝定位; 因而未能用 MKS):

| $x$, 英尺 | ±1 | ±2 | ±3 | ±4 | ±5 | ±6 | ±7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$, 英寸 | $\frac{1}{64}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{25}{64}$ | $\frac{9}{16}$ | $\frac{49}{64}$ |

任取其中一对数值, 可定出(11-5)式中的常数 $C$, 例如,

$$x = 4 \text{ 英尺} = 1.22 \text{ 米}$$

$$y = \frac{1}{4} \text{英寸} = 6.35 \times 10^{-3} \text{ 米}$$

因此

$$C = 2y/x^2 \doteq 8.55 \times 10^{-3} \text{ 米}^{-1}$$

这运动的周期预期会是多长呢? $T$ 与质量 $m$ 和"弹簧"常数 $k$ 的关系是 $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$, 而按(11-6)式, $k = mgC$. 因此

$$m/k = (gC)^{-1} \approx 11.9 \text{ 秒}^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{11.9} \approx 21.6 \text{ 秒}$$

测出的周期与此相差在一秒的十分之几以内, 并在测量的准确度

---

① R. B. Runk, J. L. Stull, and O. L. Anderson, *Am. J. Phys.*, **31**, 915 (1963).

内与振幅无关.

在这个例子(以及其他在重力下运动的例子)中，运动的物体在其二维运动中确实是在一个与 $U(x)$ 对 $x$ 的曲线相应的路线上行进的. 这些都是真的二维运动，它们在物理上有别于第十章中讨论过的一维情形. 要懂得它们之间的差别，试看两个颇易实现的物理体系. 第一个是[图 11-8(a)] 一质量 $m$ 系附于一水平弹簧

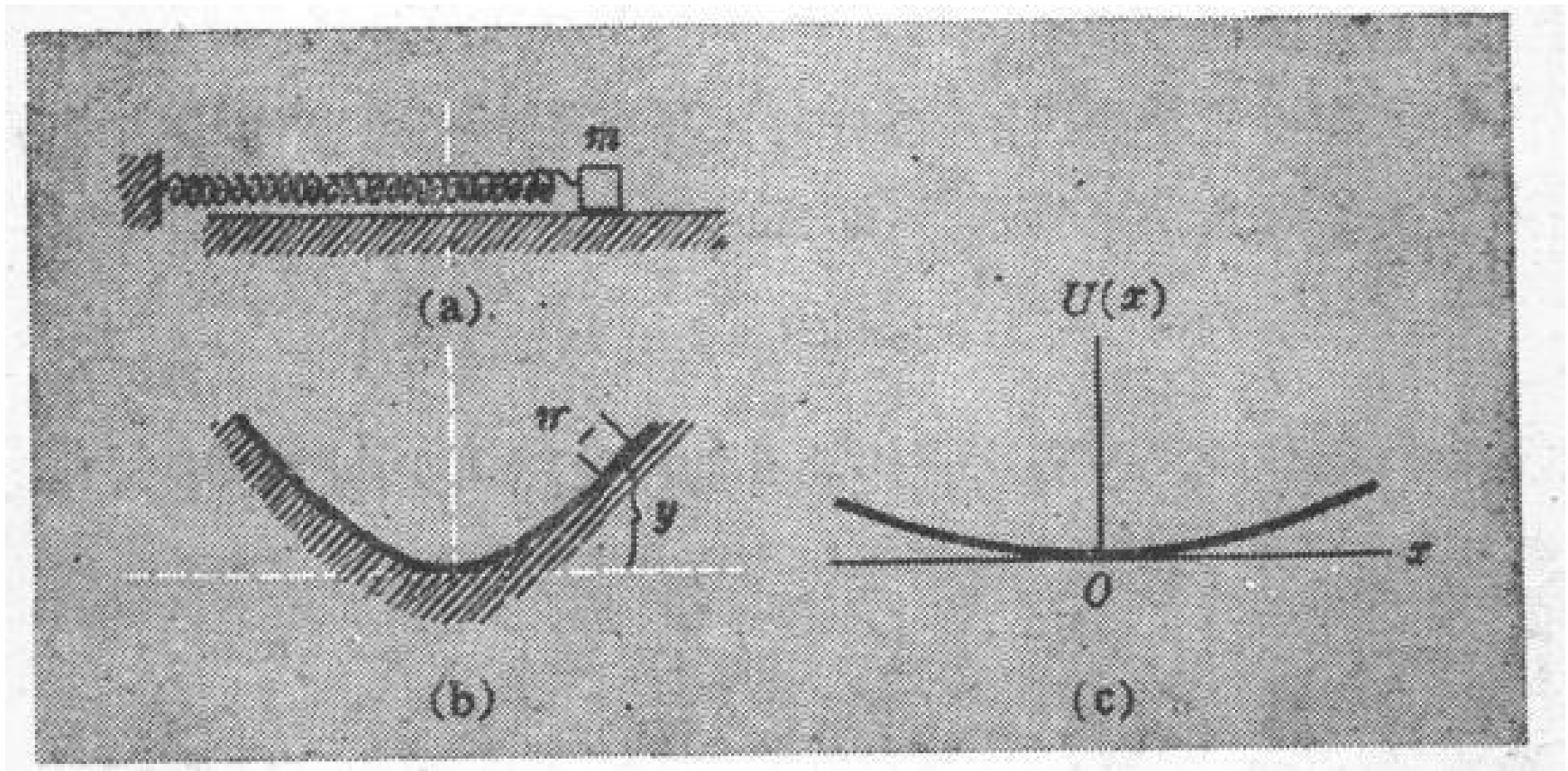



图 11-8 (a) 系附于一水平弹簧的质量. (b) 同一质量在一光滑的抛物线轨道上.(c) (a)和(b)的装置可使具有完全相同的势能随 $x$ 的变化，但两者的运动不同.

并静止在一光滑桌面上. 第二个是[图 11-8(b)] 同样的一个质量 $m$ 自由地在一抛物线轨道上滑行. 弹簧的强度和轨道的曲率都加以调整，使两个体系都具有图 11-8(c) 所示同样的抛物线形势能曲线. 如果从原点以同样速率 $v_0$ 水平地投出，两质量在任何其他 $x$ 值的地点都将有同样大小的速度. 如果让它们振荡，两体系都是周期性的，但它们的周期将不相同. 弹簧上的质量，不论振幅大小，周期都相同；另一体系则表现出周期不断地随振幅而改变(你认为它将如何变呢?). 只有在轨道的曲率非常小那种特殊情形下，两个运动才成为基本上相同的.

## §6 单　摆

单摆的讨论使我们又回到一物体在一竖直圆周上运动的问题．不过，这一次我们将仔细地予以讨论．它是一种重要类型的物理体系，超出它在时钟方面的应用，它也不象它的传统名称所说的那样简单．说简单主要是在它的结构上——理想化成为一无质量的刚性杆上的一质点．

如我们早先看到过的[(11-3)式]，势能 $U(\theta)$，用支杆与竖直方向之间的夹角 $\theta$ 来表示，可写成以下形式：

$$U = mgl\,(1-\cos\theta) = 2mgl\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (11\text{-}8)$$

如果我们把 $U$ 的这一表达式作为 $\theta$ 的函数画出来，就得到图 11-9.

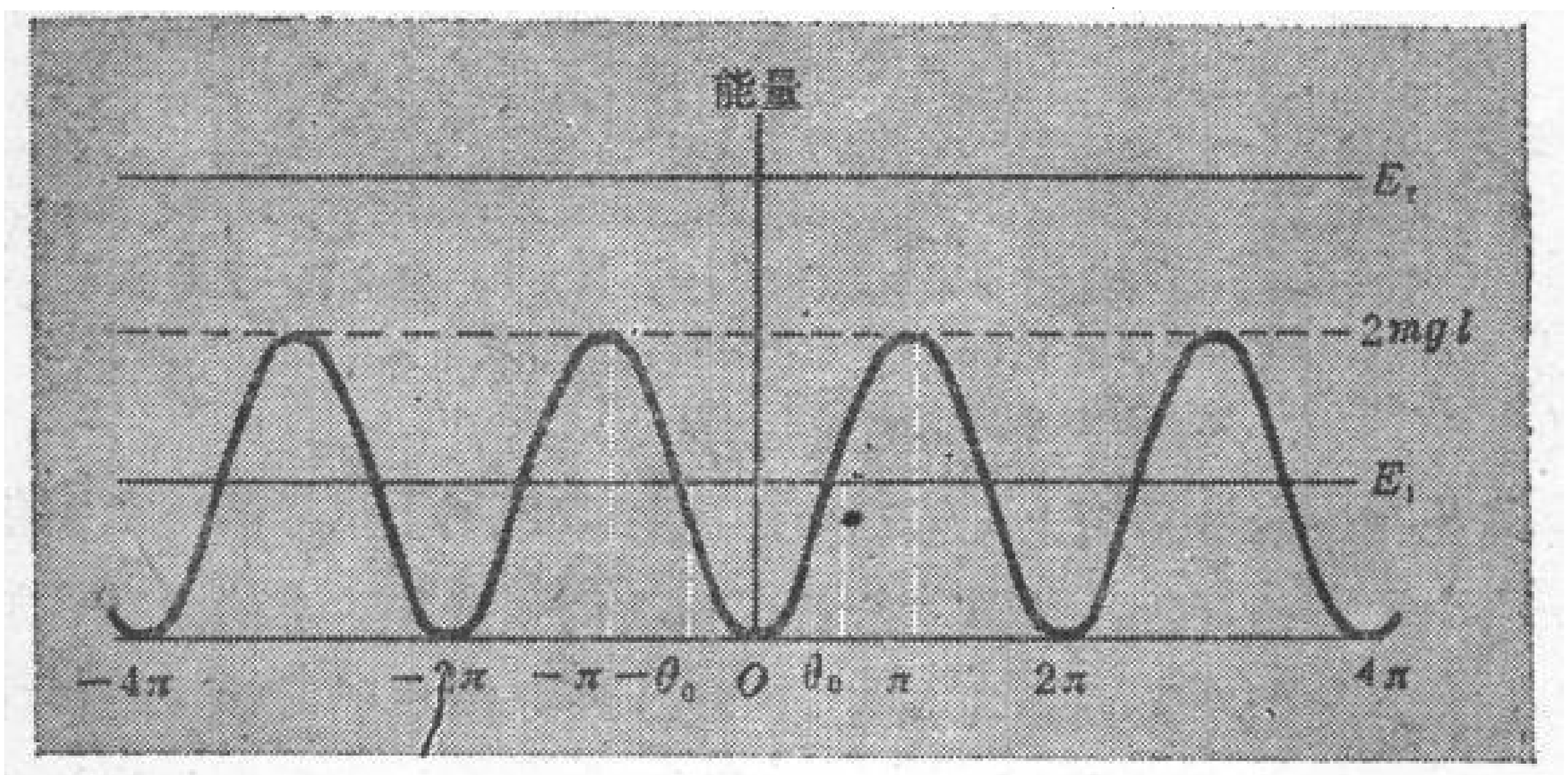



**图 11-9**　一刚性摆的能量图，以 $\theta$ 角为坐标．如果 $E$ 小于 $2mgl$，则这摆限于在 $\theta=0$ 附近振荡．

在图 11-9 中，$\theta$ 可以取所有从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的值．但是，这摆在空间的所有**位置**都由 $-\pi$ 和 $+\pi$ 之间的值描述．任何超出这范围的 $\theta$ 值都对应于这范围内的一个而且是唯一的一个 $\theta$ 角．后者由前者加上或减去 $2\pi$ 的整数倍而得到．

有两种可能的运动，看 $E$ 小于还是大于 $2mgl$ 而定(以一物体

静止于摆锤最低位置的能量为零).

如果总能量足够大（例如图中的 $E_2$），在运动中就没有回转点；$\theta$ 无限止地增加(或减少)，对应于摆作连续的转动而不是来回摆动. 摆锤的速率在 $\theta=0$(或 $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, 等等)时最大，而在 $\theta=\pm\pi$(或 $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi$, 等等)时最小. 从图 11-9 看很清楚，要产生这类转动运动，摆在摆动的最低点的动能至少必须等于 $2mgl$.

如果 $E<2mgl$，比如说 $E_1$，则运动是振荡的，$\theta$ 角从 $+\theta_0$ 变到 $-\theta_0$，然后再回转来(图 11-9). 但这运动并不是简谐的，除非振幅够小. 在 $O$ 点的邻近，我们可以用一抛物线(图 11-10)使与图 11-9 的势能曲线非常近似地吻合，因而对于这些小振幅，振荡正好与线性谐振子的一样. 证实这个陈述的一种办法是回忆在第十章中所作的普遍论证：差不多任何对称的势能曲线都可以在小位移的有限范围内用一抛物线来作近似. 另一种办法是注意在(11-8)式中如果 $\theta$ 小，我们可以令 $\sin(\theta/2)$ 近似地等于 $\theta/2$，因而有

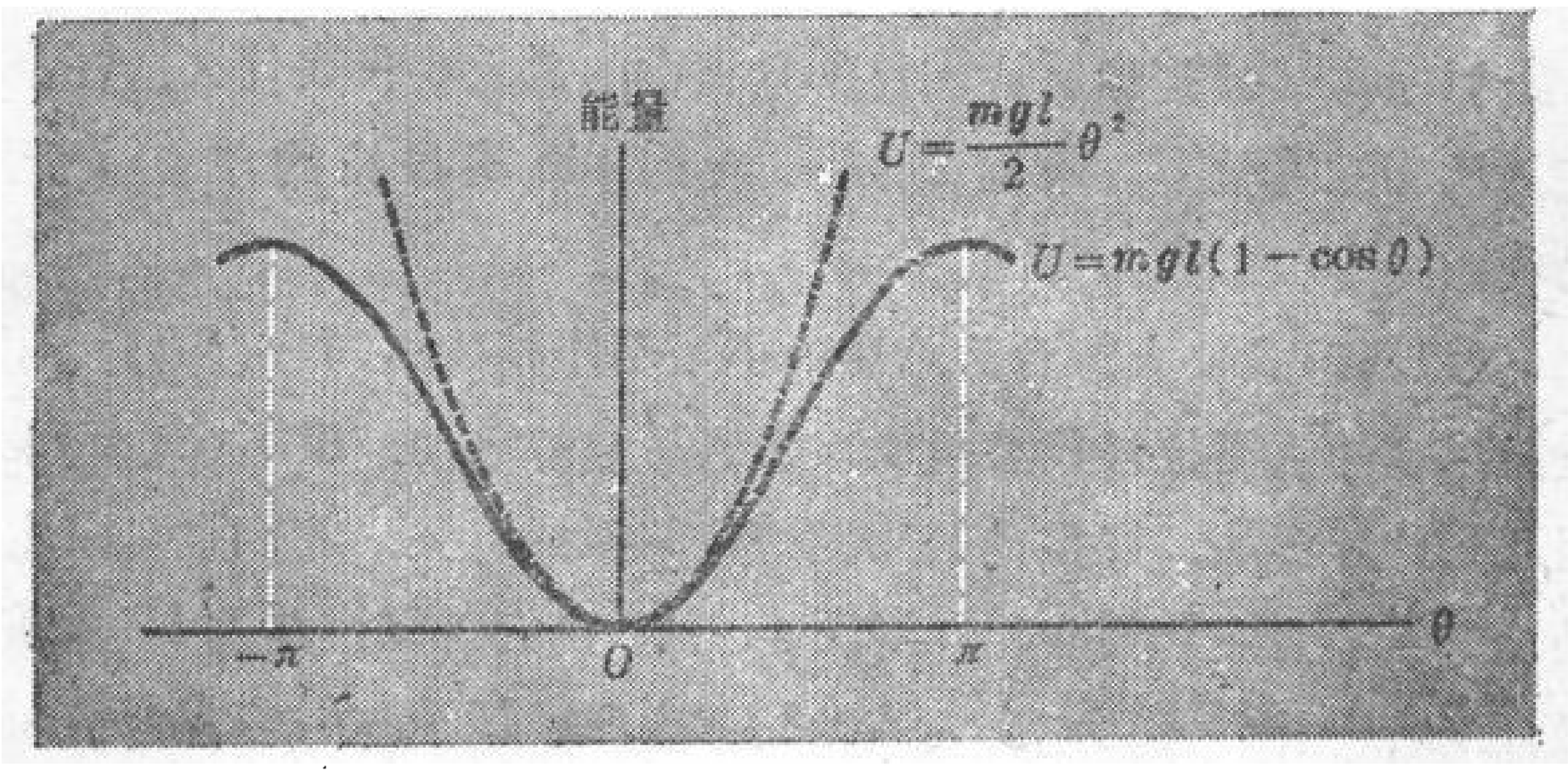



图 11-10　一单摆的势能曲线

$$U(\theta)\approx\frac{1}{2}mgl\theta^2 \tag{11-9}$$

第三种办法是运用牛顿把月球描写为一落体时所用过的同样近似. 把它应用于现在的问题，取 $O$ 为原点，则圆轨道的方程

为

$$x^2+(y-l)^2=l^2$$

(见图 11-11). 因此

$$y^2-2ly+x^2=0$$

$$y=l-(l^2-x^2)^{1/2}$$

$$=l-l\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)^{1/2}$$

如果 $x^2\ll l^2$，我们可以用二项式展开而得近似结果

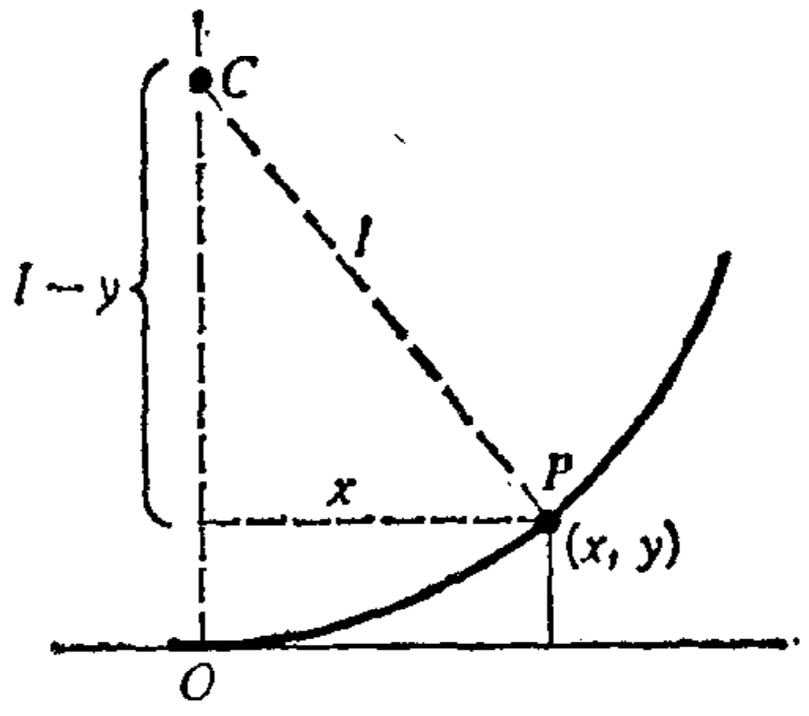



图 11-11 一单摆的位移的几何.

$$y\approx\frac{1}{2}\frac{x^2}{l} \tag{11-10}$$

[与(11-5)式比较，你就认识到那方程中的常数 $C$ 代表什么. 在描述过的实际实验中，这运动同一大约 400 英尺长的单摆的运动相象!]

(11-10)式使人想到对单摆的小振动作稍为不同一点的近似，就是用它的水平位移代替角位移来描写它的运动. 但不管我们采用那一种分析法，明显的是周期一定与振幅有关. 我们也可以定性地讨论清楚它如何变化. 看图 11-10，我们可以说摆的 $U(\theta)$ 曲线描绘着一种弹簧，它在大的伸长下变"软了". 与一理想弹簧所具有的抛物线特性比较，回复力在位移较大时相对地小了. 因而可能猜想到运动变缓慢而周期增长. 当然，存在着一使人无可置疑的极端情形. 那就是，如果能量恰好使摆刚到达 $\theta_0=\pi$ 时一点回复力也没有，那摆就会倒立着而无限地停留在那儿——虽然这在实际上当然是一不稳定的平衡. 即使是振幅比这小，周期的增长也是可观的. 如果你感兴趣，在下一节之后的一节中有对大振幅运动所作的分析. 但首先我们将详细研究小角度近似.

## §7 作为一谐振子的摆

摆锤在任意一点的速率等于 $ld\theta/dt$，因而能量守恒方程是

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+U(\theta)=E \quad \text{(严格的)}$$

用 $U(\theta)$ 的近似表示(11-9), 有

$$\frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2=E \quad \text{(近似的)}$$

或

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{g}{l}\theta^2=\text{常数} \tag{11-11}$$

迄今我们已多次遇到这方程，可以认出 $(g/l)^{1/2}$ 就是确定振动周期的那个量 $\omega$:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{1/2} \tag{11-12}$$

[注意: 是角位移 $\theta$ 本身在作简谐振动, 由下列方程描述

$$\theta(t)=\theta_0\sin(\omega t+\varphi_0) \tag{11-13}$$

这可能引起混淆; 摆的真正的角位移由纯数学的相角 $\omega t+\varphi_0$ 的正弦来描述, 摆的真正角速度是 $d\theta/dt$ ——不是 $(\omega t+\varphi_0)$ 中的 $\omega$, 后者只用来确定周期.]

由于单摆作为谐振子的切近近似而具有的性质是如此之重要, 我们还要进一步对它加以论述. 首先, 让我们花一点时间来考虑直接应用牛顿定律推导它的运动方程. 我们有两种做法，看我们是用线位移还是用角位移来分析这问题而定.

**1. 线性运动**

我们来看摆锤在与它的平衡位置相距为 $x$ 之处所受的水平力[图 11-12(a)]. 如果悬线的张力是 $F_T$, 则有

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-F_T\sin\theta=-F_T\frac{x}{l}$$

但是, 如果锤的加速度的竖直分量甚小, 可不计, 则

$$F_T\cos\theta\approx F_g=mg$$

对小角度 $\theta$, $\cos\theta\approx1-\theta^2/2\approx1$, 因之 $F_T\approx mg$, 而水平运动的方程

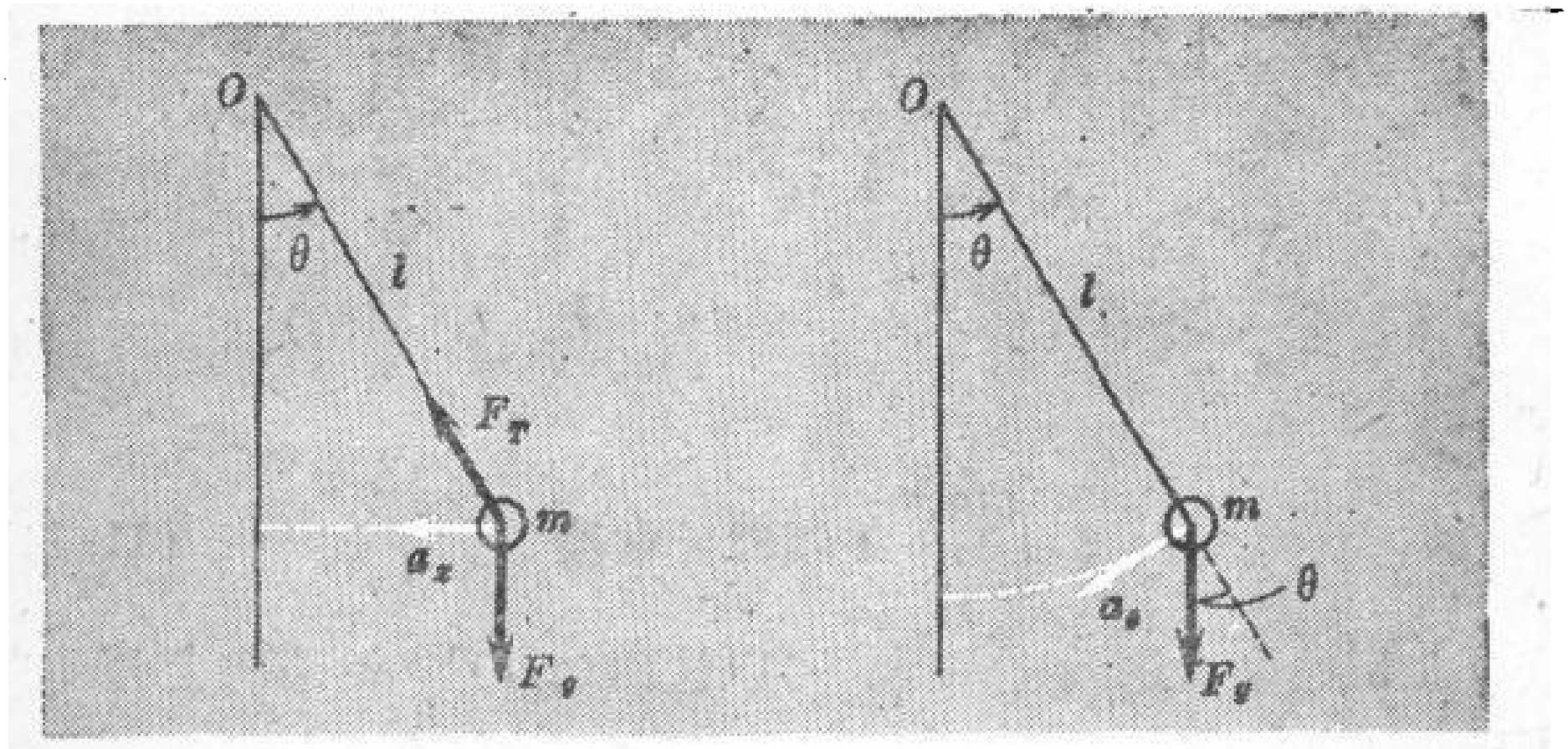



图 11-12　分析一单摆运动的基础.(a) 按水平位移分析. (b) 按角位移分析.

变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\approx-\frac{mg}{l}x$$

再次导致求周期 $T$ 的(11-12)式.

**2. 角运动**

在这一情形中我们考虑横向加速度 $a_\theta(=ld^2\theta/dt^2)$, 它是由 $\mathbf{F}_g$ 在摆锤运动的圆弧上沿切线的分量产生的[见图 11-12(b)].张力 $\mathbf{F}_T$ 之值(它实际随时间在变)不出现在对问题的这一处理法中. 我们简单地有

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-F_g\sin\theta=-mg\sin\theta$$

$\theta$ 很小时, $\sin\theta\approx\theta$, 而有

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}\approx-mg\theta$$

这导致(11-13)式, 把 $\theta$ 表为时间的函数. 可以看出, 用角变量来分析要比其他处理法"简明些", 只涉及一步近似 $\sin\theta\approx\theta$.

单摆的等时性——即其周期在一个宽广的范围内几乎完全与振幅无关——提供一使人印象深刻的例子,说明由与位移(离平衡

点）成正比的回复力所控制的系统这一显著的和独有的特性．假定我们有两个完全相同的摆，悬线都是 30 英尺长，从一高支点上下悬．每一个摆的周期都差不多是 6 秒．如果我们使其中之一摆动起来，摆幅只有一或二英寸，因而它的运动几乎觉察不到，同时使另一个以 5 英尺的振幅摆动，因而它以差不多 5 英尺/秒的速率扫过中心位置．两周期的差别是如此之小，在一百次上下的摆动中也难以看出它们的不同步．

当牛顿、惠更斯等人做有关碰撞现象的根本性实验时，摆的这一同时性对他们的助益是很大的，并且也许是关键性的(见第九章)．所有这些实验都是用等长的线悬挂质点来做的．只要小振幅近似有效，在同一时刻从任意位置释放的两质量［图 11-13 (a)］将在同一时刻到达它们的最低点［图 11-13(b)］，因而碰撞发生于两质量都沿水平方向以最大速度运动着的时候——这速度的大小由简谐运动方程给出.① 即使是角振幅足够大以致需要求 $v_{最大}$ 的严格方程：

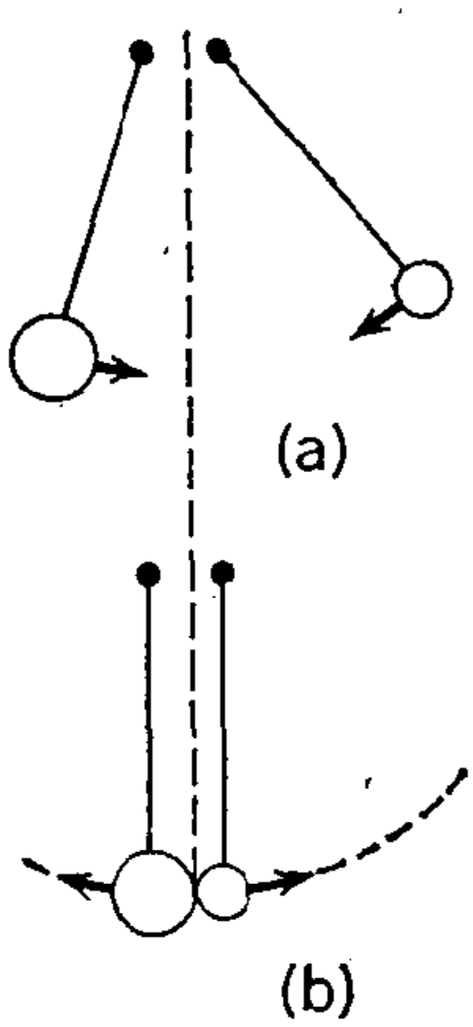



图 11-13 (a) 两个同长的摆从任意位置在同一时刻释放．(b) 摆的同时性保证碰撞发生于两质量都达到它们摆动的最低点时．

$$v_{最大}^2 = 2gl\,(1-\cos\theta_0)$$

两相撞的质量也将在差不多同一时刻到达它们的最低点，只要 $\theta_0$ 小于 90°，这对于系附在线上而不是在刚性杆上的物体是必要的．下一节将简单地讨论一下单摆的周期对振幅的细致依赖关系．

① 你可以很容易地证明这速度的大小，在小振幅近似下，与质量被释放前的最初拉开的水平距离成正比．

## §8 大振幅的摆①

为了找到单摆的周期如何偏离理想的小振幅周期，我们把能量守恒方程写成严格形式：

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+2\omega_0^2(1-\cos\theta)=2\omega_0^2(1-\cos\theta_0) \qquad (11\text{-}14)$$

其中 $\omega_0^2=g/l$，$\theta_0$ 是偏离竖直方向的最大角.

于是，振动的周期由下式确定：

$$T(\theta_0)=\frac{2}{\omega_0\sqrt{2}}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{(\cos\theta-\cos\theta_0)^{1/2}} \qquad (11\text{-}15)$$

对于小振幅，我们当然如前节所讨论的有 $T_0=2\pi/\omega_0$. (11-15)式的积分不能严格求出；②需要求助于数值方法，或把被积函数用级数展开而得周期的次一级近似：

$$T(\theta_0)\approx T_0\left[1+\frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right] \qquad (11\text{-}16)$$

如果 $\theta_0$ 不太大，这结果的另一可采用的形式是用水平振幅 $A(=l\sin\theta_0)$ 来表示的公式：

$$T(A)\approx T_0\left(1+\frac{A^2}{16l^2}\right) \qquad (11\text{-}17)$$

图 11-14 示明一些精确测量的结果，它们证实了 (11-17) 式.③ 摆长约为 3 米，所用的最大振幅约为 0.5 米，因而表示出来的 $\theta_0$ 之值达到 10°(≈0.17 弧度). 值得注意的是，由研究过的最小到最大的 $\theta_0$ 值，$T$ 的全部变化小于千分之二；各个点上则准确到 $1/10^5$，这很好地表明，在所说的 $\theta_0$ 范围内(11-17)式的有效性. 曲线还示明用一种特殊的摆支撑的结果，这支撑在 $\theta$ 增加时缩短摆长，使得 $T$ 随 $\theta_0$ 而增长的趋势几乎完全被抵消. 按理想，这支撑应当制

---

① 这一节可以略去而不致有失连贯性.

② 应当是，不能用初等函数表示(可以用椭圆函数表示)——译者注.

③ M. K. Smith, *Am. J. Phys.*, **32**, 632(1964).

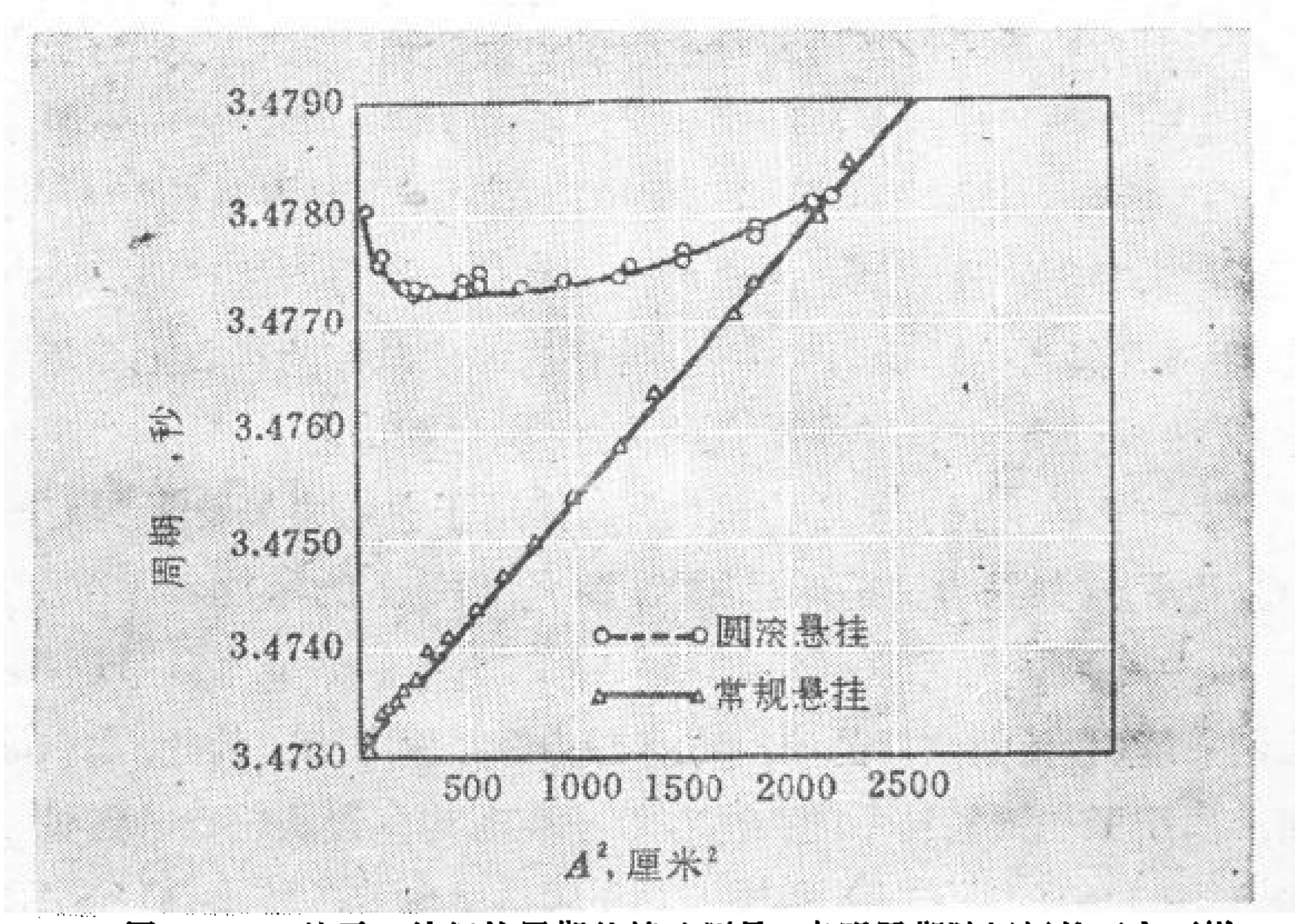



**图 11-14　关于一单摆的周期的精确测量，表明周期随振幅的平方而增加，以及把悬线的顶端夹在圆滚钳之间，使悬线的自由长度随振幅增加而变短，从而获得极接近的等时性.**

成这样的形状使摆所走的路线是一条圆滚线的一部分.（顺带说一下，通过用圆滚悬挂来使摆严格地同时① 的方法是惠更斯首先发现的. 1673 年他发表了一本巨著，名为“*Horologium Oscillatorium*”«钟表的摆动»，在书中许多重要的动力学结果是在时钟设计这一非常实际问题的框框里第一次予以介绍的.）

## §9　万有引力：保守的有心力

迄今我们讨论过的能量守恒问题只包括我们所熟知的在地球表面附近的重力——这是任何物体都要受到的力；对于在一定地区的给定物体，不论它在水平方向或竖直方向如何移动（在相当宽的限度内）②，这力的大小和方向实际都相同. 但是，如我们所知，

① 指周期不随振幅而变——译者注.

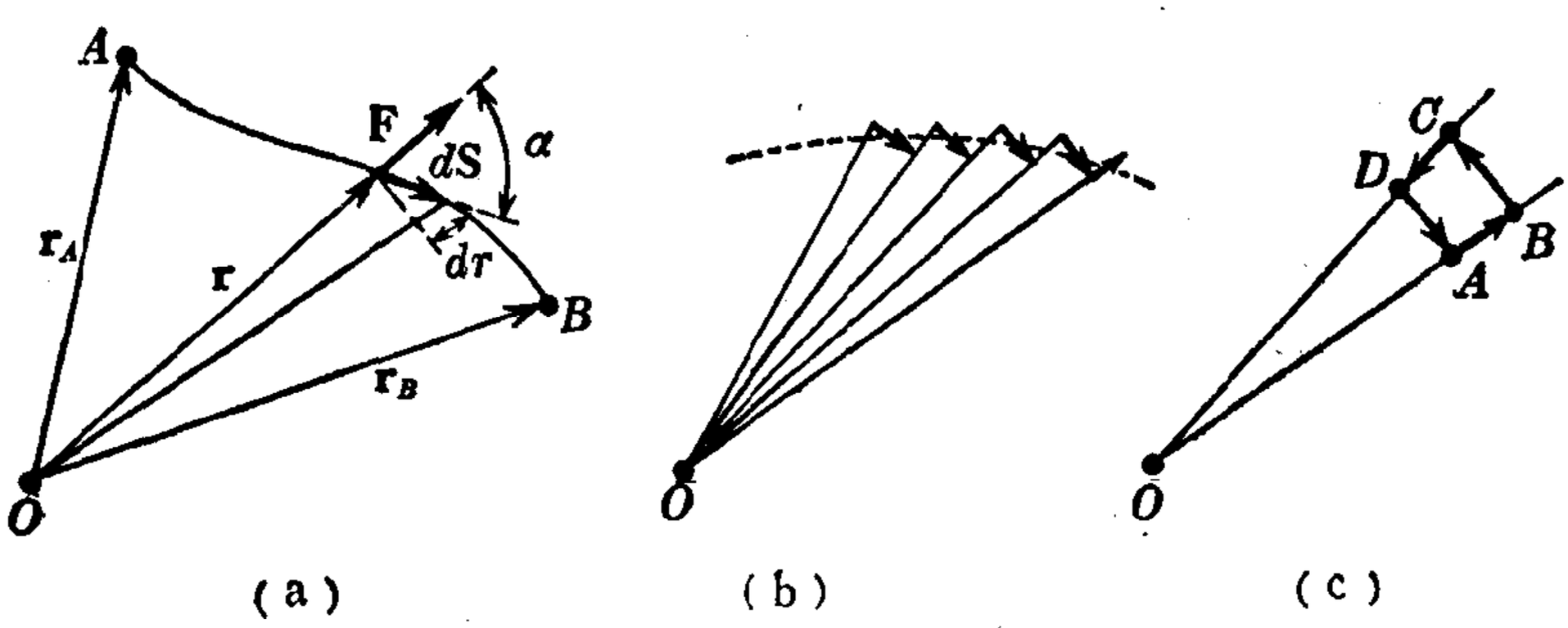
② 但要记得，不同地区的微小变化实际上是可以用灵敏的测重力仪器探查出来的（见第八章）.

基本的引力相互作用是沿着两个粒子中心的连线并随距离的平方成反比而变化的力．它是一类非常重要的力——**有心力**——的一个例子，这种力相对于一给定点是纯径向的，这个点称为“力心”．它还有球对称特性，就是说，力的大小只与到力心的径向距离有关，而与方向无关．我们将证明，所有这种球对称的有心力都是保守力，然后讨论具有 $1/r^2$ 特色的力，如引力和静电力．

设一粒子受到一有心力的作用，作用于它的力矢量 $\mathbf{F}$ 只有一个分量 $F_r$．如果力又是球对称的，则 $F_r$ 只是 $r$ 的函数：

$$F_r=f(r) \tag{11-18}$$

我们来证明，任何这样的球对称有心力都是保守力．为此，我们证明，作用于一试验粒子的力，在粒子变动其位置从一点 $A$ 到另一点 $B$[图 11-15(a)]时，所作的功与连结 $A$ 和 $B$ 的特定路线无关，




(a)　　(b)　　(c)

图 11-15　(a) 用于探讨在一有心力场中势能变化的图．(b) 把任意一条路线分析为需要作功的径向微元和无需作功的横向微元．(c) 在一保守有心力场中的闭合路线．

而只与这两个端点有关．如果这结论成立，那么下述情况就是正确的：如果粒子沿一路线从 $A$ 走到 $B$，然后沿任何其他路线从 $B$ 回到 $A$，作用于它的中心力总的说来对它没有作功，而且在它回到 $A$ 处时，它的动能同它早先出发时的动能一样(如果无其他的力对它作功的话)．这同一维运动中所定义的保守力完全对应．

设力心在$O$点[图 11-15(a)]，我们来看试验粒子沿所示路线经历一位移$d\mathbf{s}$时作用于它的有心力$\mathbf{F}$所作的功，这功是

$$dW=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=Fds\cos\alpha \qquad (11\text{-}19)$$

其中$\alpha$是$\mathbf{F}$的方向，即$\mathbf{r}$的方向，与$d\mathbf{s}$的方向之间的夹角．但由图看出

$$ds\ \cos\alpha=dr$$

其中$dr$是由于位移$d\mathbf{s}$而产生的到$O$点的距离的变化．把这一$ds\cos\alpha$值代入(11-19)式，有

$$dW=Fdr$$

其中力的大小$F=f(r)$，如(11-18)式所表明，只与$r$有关．于是，当试验物体从$A$运动到$B$时，作用于它的力$\mathbf{F}$所作的功是

$$W=\int_{r_A}^{r_B}f(r)\,dr \qquad (11\text{-}20)$$

由于这积分之值只依赖于它的上下限，而与路线无关，我们可以断定球对称的有心力是保守力．这一结果可以用另外一种方法得到，那就是，把实际的路线绘成如图 11-15(b)所示、由许多相继的小阶梯构成的路线．每一阶梯有一沿着$r$不变的一段弧线上运动的分量，因而力与这位移垂直，对$W$的贡献为零，另一分量是纯粹的径向位移，力与位移的方向一致，所以有心力作的功为$Fdr$．

[我们方才导出的结果的逆定理是下述重要命题：

**一中心力场，如果同时是保守场，那它一定是球对称的．**

要证明这一命题，设在图 11-15(a)中的$O$点存在一力心．设想一闭合的路线$ABCD$，由从$O$画出的两径向直线的很短部分和两圆弧$BC$及$DA$组成．由于按定义力是纯有心的，它在垂直于径向的方向无分量．因而，如果设想一粒子循$ABCD$走一圈，它将不受到沿$BC$和$DA$的力．于是，力为保守力的条件要求沿$AB$和$CD$作的功等值反号．既然这两条线是等长的，在每一条线上力

的大小的平均值必须相同. 设想路线中的这些小段的长度变得任意小, 我们就可以断定, 对于一特定的标量值 $r$, 力的大小是与矢量 $\mathbf{r}$ 的方向无关的. 这类球对称力场的最重要来源是球对称分布的质量或电荷.]

重要的是知道, 一个力可能是保守力而不必是有心的或球对称的. 例如, 一对相隔一定距离的两个不相等的密集质量, 它们的联合引力效应对位置和方向有一复杂的依赖关系, 但我们知道它是保守的, 因为它是分开的质量所产生的两个独自保守的力场的迭加.

给了(11-20)式所表示的结果, 我们可以着手来定义任何一个受到球对称有心力作用的物体的势能 $U(r)$:

$$U_B - U_A = -\int_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr \tag{11-21}$$

如果物体在 $A$ 和 $B$ 两点的动能分别为 $K_A$ 和 $K_B$, 则有(假定没有其他力作功)

$$K_B - K_A = W$$

和

$$K_A + U_A = K_B + U_B = E \tag{11-22}$$

因而我们建立了对于一个在任何有心力作用下运动的物体的能量守恒表述.

对于反平方力,

$$F(r) = \frac{C}{r^2} \tag{11-23}$$

因此, 在这种情形下, (11-21)式给出

$$U_B - U_A = -C\int_{r_A}^{r_B} r^{-2}\,dr$$

由此得

$$U_B - U_A = C\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{11-24}$$

剩下的只是选择势能的零点. 让 $r\to\infty$ 时 $U=0$ 比较方便，因为在离 $O$ 点的源无穷远的点，力等于零，用通俗的话说就是，在这情形下，一粒子的存在对另一粒子无影响. 现在把(11-24)式应用于 $r_A=\infty, U_A=0$ 的情形，试验粒子的势能成为 $U_B=C/r_B$——或者，如果去掉累赘的下标，

$$U(r)=\frac{C}{r} \tag{11-25}$$

这是试验粒子的势能，表示为它的位置的函数.

(11-25)式不论对于吸引力或排斥力都是正确的，对于吸引力常数 $C$ 是负的，对于排斥力则是正的. 特别地，对于受到一质点 $M$ (设它固定于原点 $O$)的引力吸引的质量为 $m$ 的粒子，有

$$F(r)=-\frac{GMm}{r^2} \tag{11-26}$$

$$U(r)=-\frac{GMm}{r} \tag{11-27}$$

注意最后这两个式子只适用于两个可看作质点的物体——即线度比互相之间的距离小的物体——之间的相互作用. 但是，象我们在第八章中看到过的，有些最使人感兴趣的和最重要的引力问题所涉及的是象地球那样的大球体所施加的引力. 在早先我们对这问题的讨论中，曾看到过，基本问题是一质点与一薄球壳物质之间的相互作用. 在第八章中我们阐明了如何正面去解决这问题——直接进行积分，计算对总的力的贡献. 现在我们要从势能的考虑来探讨这问题，在这过程中我们将看到势能概念在这类计算中的巨大价值.

## §10 一球壳的引力

同早先我们处理这问题时一样，设有一薄的均匀物质球壳，半径为 $R$、质量为 $M$ (图 11-16). 把一质量为 $m$ 的粒子放在距离球心

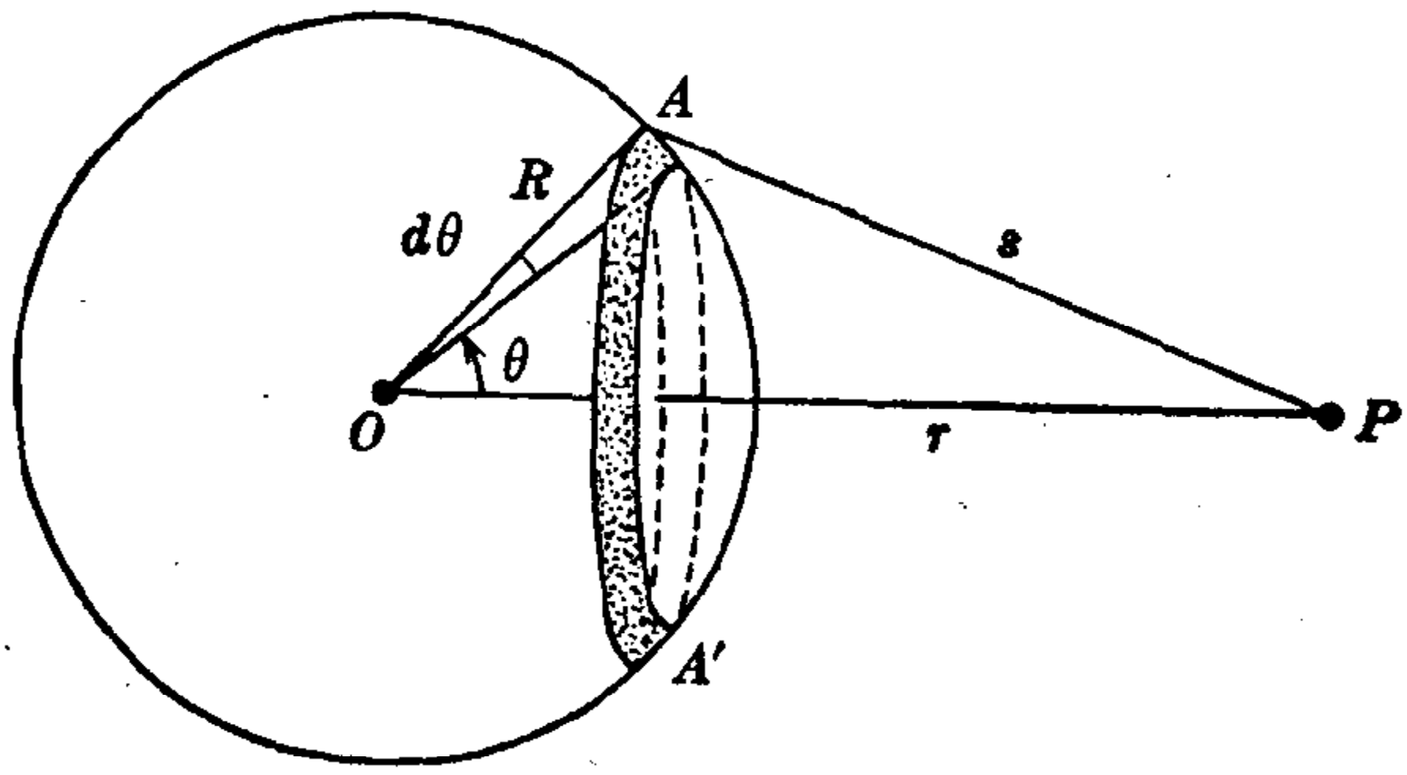



图 11-16　一薄物质球壳的圆带所产生的引力势能的图示.

为 $r$ 的某点 $P$. 如果我们直接按力来处理, 则象我们看到过的, 在诸如 $A$ 点附近的物质所产生的力必须分解为沿 $OP$ 线的分量. 换言之, 必须考虑所有各力的贡献的矢量和. 但是, 如果按势能来处理, 我们就可以利用它最重要的特性: **势能是一个标量**. 我们可以径直把球壳的所有部分对 $U$ 的贡献加起来. 然后, 作用于 $m$ 的力可以简单地从下列关系求得:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} \tag{11-28}$$

象我们直接计算力一样, 我们可以利用这体系的对称性, 考虑球上从角 $\theta$ 到 $\theta+d\theta$ 之间的带形区中的物质(图 11-16). 这带形区的

$$\text{面积} = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

$$\text{质量} = \frac{2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{4\pi R^2} M$$

即

$$dM = \frac{1}{2} M \sin\theta d\theta$$

所有在 $dM$ 中的物质到 $P$ 的距离都为 $s$. 因而 $dM$ 对 $U$ 的贡献, 按(11-27)式, 是

$$dU = -\frac{G m dM}{s} = -\frac{GMm}{2} \frac{\sin\theta d\theta}{s}$$

$m$ 的总势能因之是

$$U(r)=-\frac{GMm}{2}\int\frac{\sin\theta d\theta}{s} \tag{11-29}$$

计算这积分时，保持 $R$ 和 $r$ 不变，而让 $\theta$ 从 0 变到 $\pi$（$s$ 相应地随着变），以包括球壳所有部分的贡献．利用下面的事实可使计算简化：在三角形 $AOP$ 中有

$$s^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta$$

两边对 $\theta$ 求微商，记住 $R$ 和 $r$ 在计算(11-29)式的积分时是常数，得

$$2s\frac{ds}{d\theta}=2Rr\sin\theta$$

因此

$$\frac{\sin\theta d\theta}{s}=\frac{ds}{Rr}$$

但这式的左方正是(11-29)式积分中的表达式，因而(11-29)成为

$$U(r)=-\frac{GMm}{2Rr}\int_{\theta=0}^{\pi}ds \tag{11-30}$$

**(11-30)式是计算球形物体所产生的引力势能和力的关键性结果**．然而，在计算 $ds$ 的积分时，我们必须区别两种情形：

**情形 1．** $P$ 点在球壳**外**（即 $r>R$，如图 11-16）．$s$ 的上下限确定如下：

$$\theta=0 \quad s_{\text{最小}}=r-R$$

$$\theta=\pi \quad s_{\text{最大}}=r+R$$

因而

$$s_{\text{最大}}-s_{\text{最小}}=2R$$

$$U(r)=-\frac{GMm}{r} \quad \text{（点在壳外）} \tag{11-31}$$

**情形 2．** $P$ 点在球内（即 $r<R$），上下限现在是

$$\theta=0 \qquad s_{\text{最小}}=R-r$$

$$\theta=\pi \qquad s_{\text{最大}}=R+r$$

因而

$$s_{\text{最大}}-s_{\text{最小}}=2r$$

$$U(r)=-\frac{GMm}{R} \qquad \text{(点在壳内)} \qquad (11\text{-}32)$$

这两个结果无疑是相象的. 然而从它们推导出的力却十分不同. 如果我们现在按(11-28)式计算力, 必须记住 $R$(球壳半径)是常数. 只有 $r$, 从质量 $m$ 到 $O$ 的距离, 可变. 因此我们有

**情形 1.**

$$F_r=-\frac{GMm}{r^2} \qquad \text{(点在壳外)} \qquad (11\text{-}33)$$

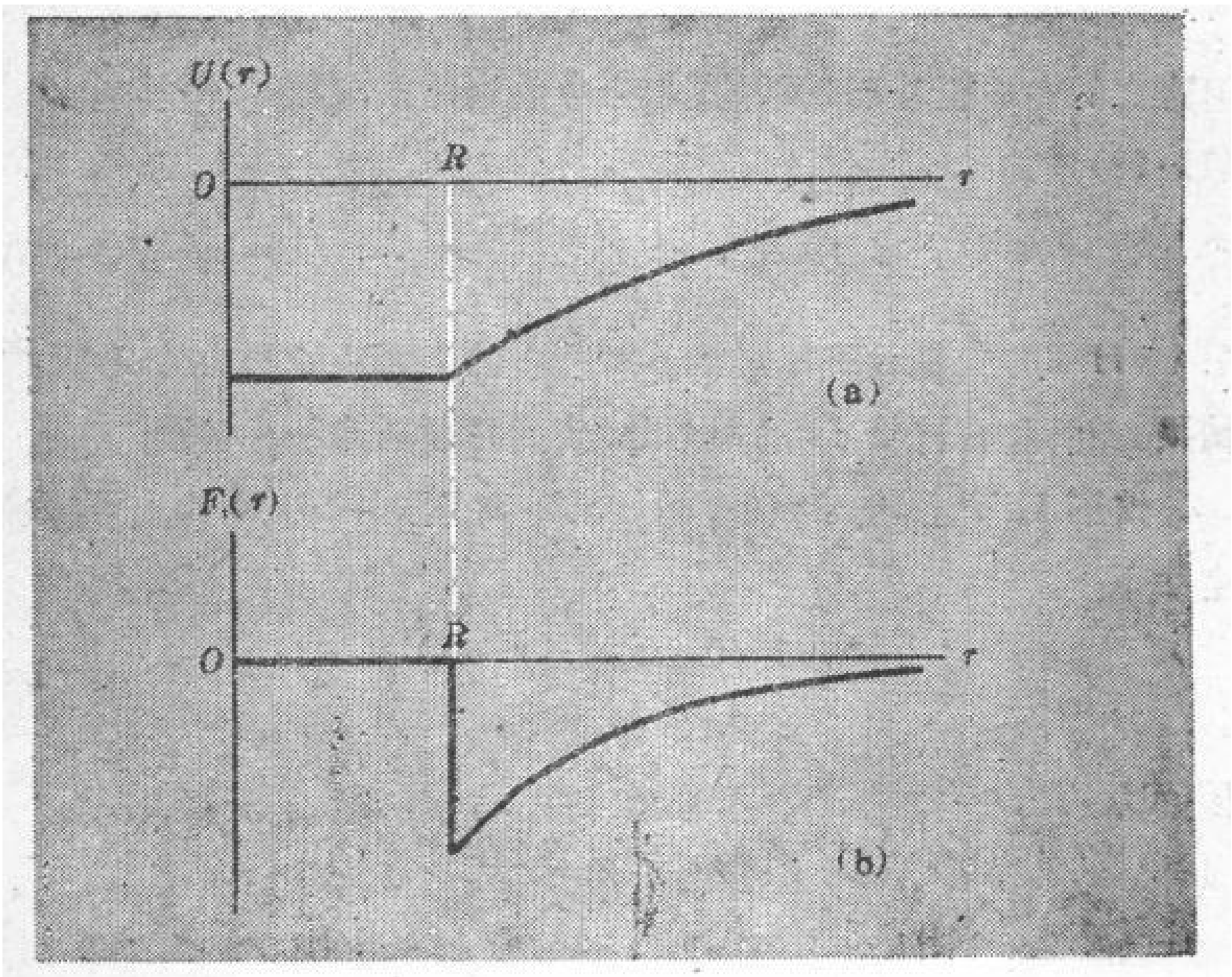



图 11-17 (a) 一质点的引力势能, 表示为它到半径为 $R$ 的球壳的中心的距离的函数. (b) 由(a)导出的 $F$ 随 $r$ 的变化.

**情形 2.**

$$F_r=0 \quad (\text{点在壳内}) \tag{11-34}$$

在图 11-17 中我们示明势能和力作为试验质量 $m$ 到壳心的距离 $r$ 的函数的图形. 在 $r=R$ 处的不连续性很易看出.

一旦我们得到这些结果, 实心球物质的问题就是一件简单的事情了.

## §11 球的引力

我们的主要假设是球可以看作是由相继的**均匀**球壳构成的, 尽管密度可能随到球心的径向距离而变化.

由于这一对称性假设, 我们可以立刻就这样一个球 (总质量为 $M$、半径为 $R$) 所施的引力作出一些结论.

**情形 1.** 观察点在球**外** ($r>R$). 由于每一球壳的作用都好象是它的全部质量集中于球心处, 整个球的作用也可以同样地来看待. 不管物质的密度如何随半径而变, 我们有

$$F(r)=-\frac{GMm}{r^2} \quad (\text{点在球外}) \tag{11-35}$$

这是我们早在第八章中就用了的结果, 那时, 我们是在讨论牛顿的著名比较: 月球和苹果的引力加速度.

**情形 2.** 观察点在球**内** ($r<R$). 于此我们必须谨慎, 但我们可以立刻作出两个明白的陈述:

a. 对于所有位于观察点之外的球壳对力的贡献, 按(11-34)式, 是零.

b. 对于所有位于观察点所确定的半径之**内**的球壳, 其质量, 按(11-33)式, 有效地集中在球心.

因此, 要确定这一情形下的力, 我们必须知道有多少质量被包含在通过观察点、半径为 $r$ 的球内.

**情形 2′.** (特殊情形) 与情形 2 相同, 但附加有条件, 就是球的

密度对所有的 $r$ 都一样——即球是**均匀的**. 在这情形下，我们知道，含于半径 $r$ 内的质量等于整个球的质量的 $r^3/R^3$，因为这是部分体积与整个体积之比. 因而，要考虑的质量是 $Mr^3/R^3$，有效地位于球心，即与试验质量相距为 $r$. 于是，这导致

$$F(r) = -\frac{GMm}{R^3}r \qquad \text{(点在均匀球内)} \qquad (11\text{-}36)$$

图 11-18(a)所示是适用一均匀球的(11-35)和(11-36) 式的联合效果. 我们也可以作一势能对 $r$ 的图线，$r$ 取从球心到质点 $m$ 的

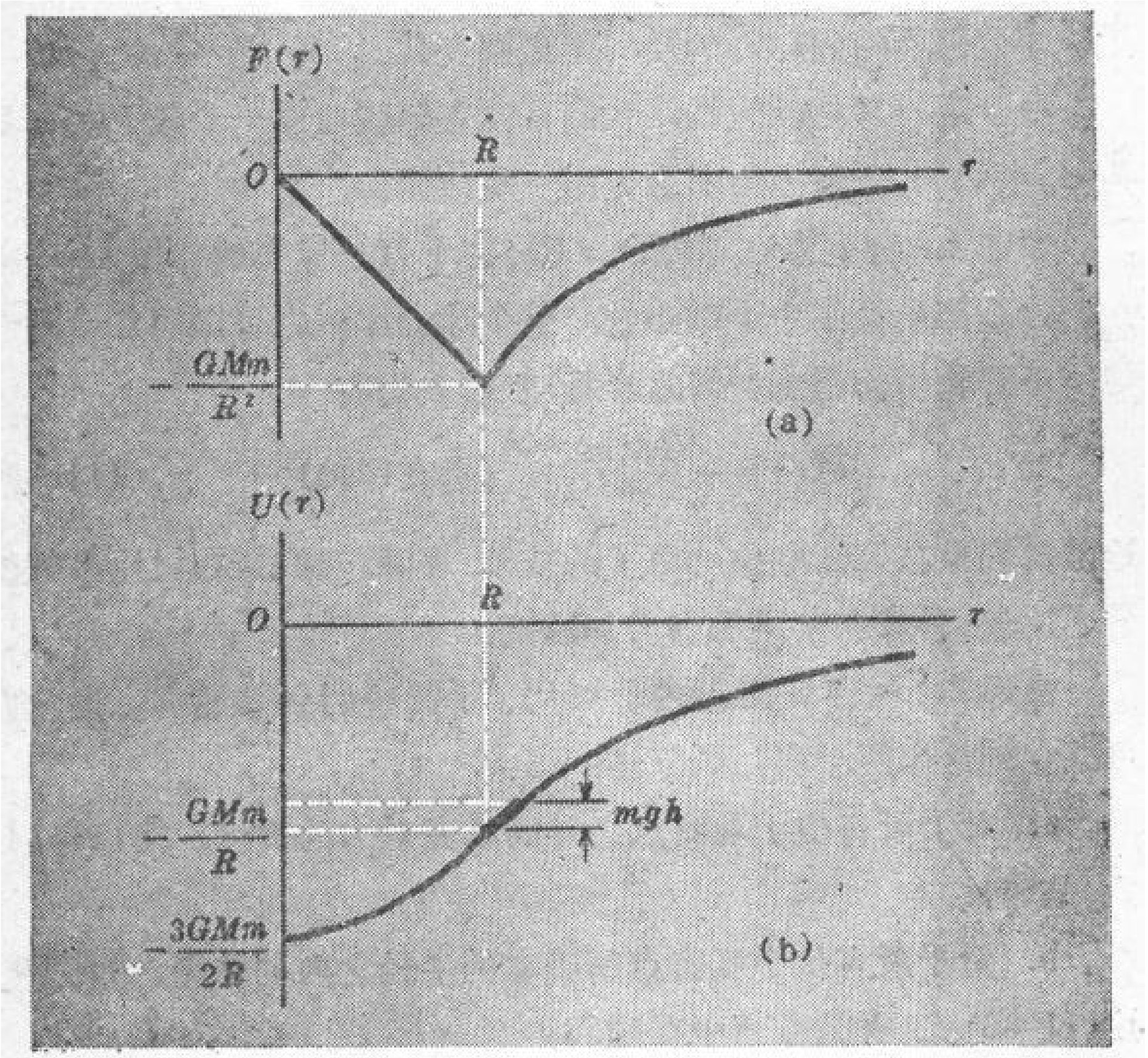



图 11-18 (a) 作用于一质点的力，表示为它到一均匀实心球(半径为 $R$)的中心的距离的函数.(b)相互间的势能随 $r$ 的变化，是从(a)用积分求得的. 在 $r=R$ 外面不远的地方 $U$ 近似地随 $r$ 而线性地增加相应于在地球表面附近观察到的重力.

距离的所有数值. 这示明于图11-18(b). 对于球内的点($r<R$),有

$$U(r)-U(R)=\frac{GMm}{R^3}\int_R^r r\,dr$$

$$=-\frac{GMm}{2R^3}(R^2-r^2)$$

但我们已知[在(11-31)式中令 $r=R$]

$$U(R)=-\frac{GMm}{R}$$

因此,我们得到

$$(r<R)\qquad U(r)=-\frac{GMm}{2R^3}(3R^2-r^2)\qquad(11\text{-}37)$$

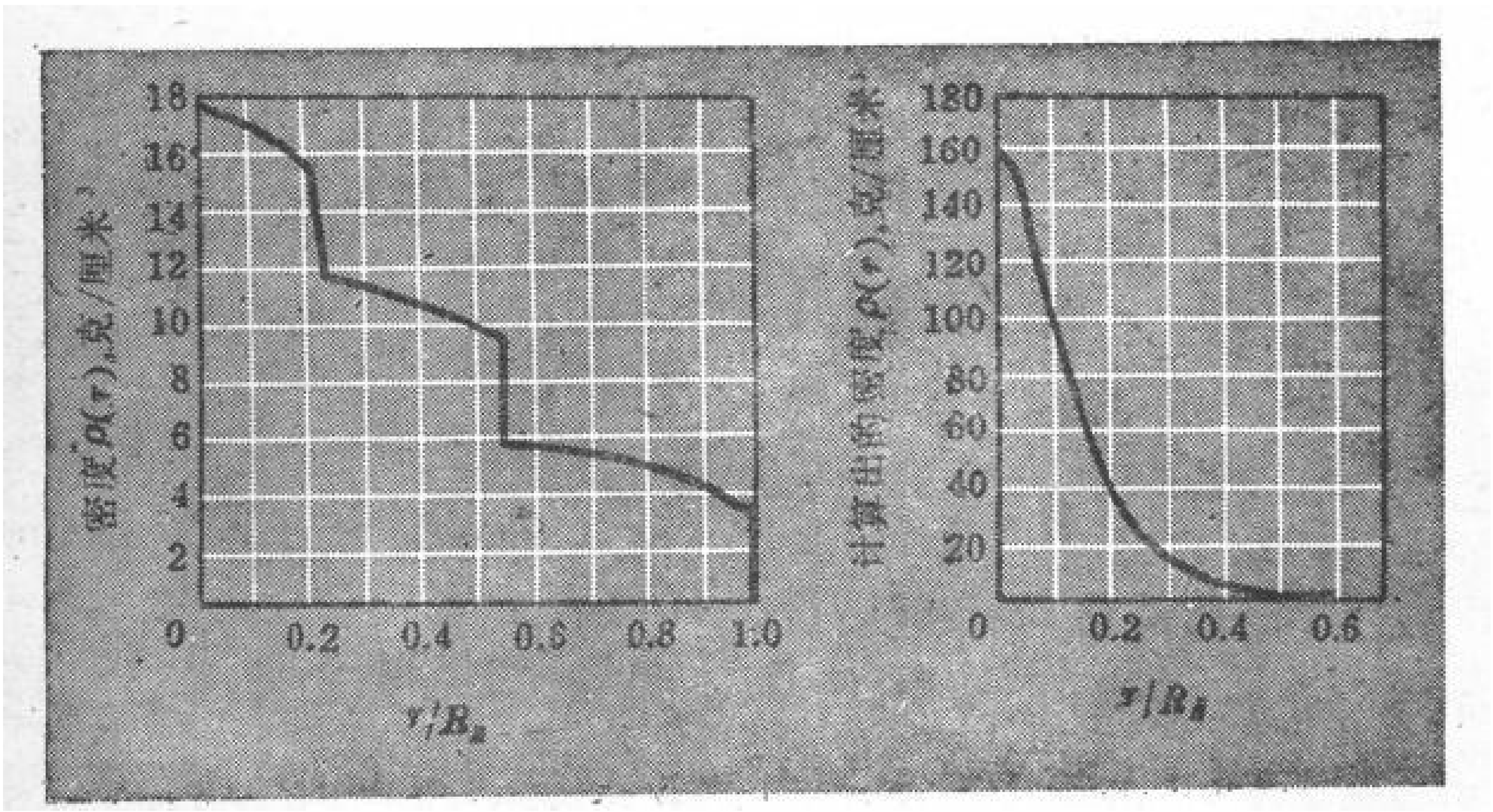
特别地,在 $r=0$ 处有

$$U(0)=-\frac{3GMm}{2R}$$

如果设想从 $r=0$ 出发,则如图 11-18(b)所示,势能按抛物线随距离而增加直到 $r=R$,然后平滑地转入按(11-31)式所描述的、$U$ 随 $r$ 连续增加(按双曲线——译者).

如我们曾看到的,图 11-18 中 $r>R$ 时 $F(r)$和$U(r)$的变化对于任何球对称分布的物质都有效;不需要球为均匀的. 另一方面,我们必须小心记住, $r<R$ 时 (11-36) 和(11-37)式只对整个球的密度是均匀的特殊情形有效. 因而, 它并不正确地描述地球和太阳那样一些物体内部的引力随径向距离的变化, 因为这种物体的密度随 $r$ 的变化是很急遽的(见图 11-19). 这否定了教科书中喜用的一个练习:"证明,在沿地球直径打通的一条隧道中,粒子会作简谐运动."不过, 实际上不可能开凿这样一条隧道也许是更强有力的反对理由.

如果人们习惯于认为在地球表面上距离为 $h$ 的地方一质量为




(a)　　(b)

**图 11-19　(a) 地球内部密度沿径向的变化. (b) 计算出来的太阳内部密度随径向距离的变化.**

$m$ 的物体的势能由公式 $U=mgh$ 给出，似乎很难使这结论与(11-31)式所表示的结果

$$U(r)=-\frac{GMm}{r}\qquad (r>R)$$

协调. 然而，实际上并不存在困难，只要我们认识到势能的零点本是任意的，前面那个简单公式只能应用于物体升高的距离比起地球的半径是异常之小的情形. 事实上从那更为普遍的公式[即(11-31)式]有

$$U(R+h)-U(R)=-\frac{GMm}{R+h}+\frac{GMm}{R}$$

$$\approx\frac{GMm}{R^2}h$$

但由于 $GMm/R^2$ 是作用于 $m$ 的重力 $mg$，所以

$$U(R+h)-U(R)\approx mgh$$

取 $U(R)=0$ 为势能的任意参照水平，就可以看到 $U=mgh$ 是一个

可以接受的近似，适用于地球表面附近的小位移．在图 11-18(b) 中指出了球外不远处的势能近似地随距离而线性增加的情形．

## §12 逃逸速度

设有一物体在一大的引力球，例如，行星的表面上．我们想把这物体射到太空中去使它永不返回．我们必需给它多大的速率呢？这问题用能量守恒来考虑是很容易的．在行星表面上($r=R$)势能是

$$U(R)=-\frac{GMm}{R}$$

在 $r=\infty$ 处，$U=0$．粒子要到达 $r=\infty$，必须在走过这一距离后还有一点动能 $K(\infty)$．因此，在将它射出时，它必须有一动能 $K(R)$，由守恒方程确定：

$$K(R)-\frac{GMm}{R}=K(\infty)$$

因此

$$K(R)\geqslant\frac{GMm}{R}$$

如果在这式中取等号，就达到临界情形，物体刚好能达到无穷远处，剩余速率为零．因此，当半径为 $R$ 时，最小的逃逸速率由下式给出

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{GMm}{R}$$

即

$$v_0^2=\frac{2GM}{R} \tag{11-38}$$

在计算从地球表面逃逸的速率时，把(11-38)式的结果用另一种形式来表达可能更方便，这种形式利用我们所知道的，在 $r=R_E$ 处一质量 $m$ 受到的引力等于 $m$ 乘上该地区的重力加速度 $g$ 之值：

$$\frac{GMm}{R_E^2}=mg$$

因此，

$$\frac{GM}{R_E}=gR_E$$

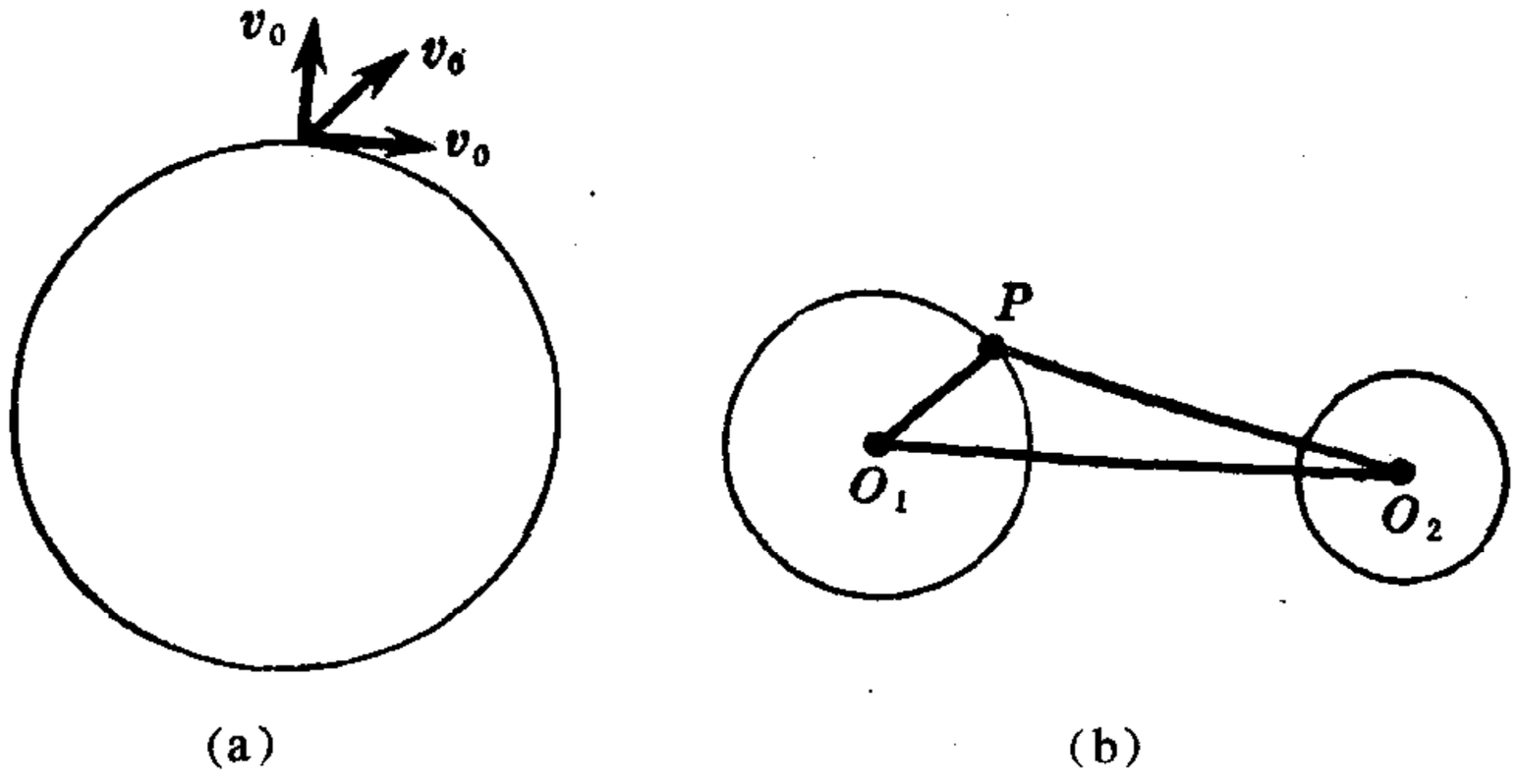
于是，由(11-38)式，有

$$v_0=(2gR_E)^{1/2} \tag{11-39}$$

把熟知的数值 $g\approx 9.8$ 米/秒$^2$，$R_E\approx 6.4\times 10^6$ 米代入，得

$$v_0\approx 11.2 \text{ 千米/秒}$$

这里，我们再次看到能量守恒的值得注意之点．为了计算**完全的逃逸**这目的，我们毋需规定逃逸物的投射方向．可以沿径向，或切线方向，或介于其间的任何方向．同一 $v_0$ 值可应用于所有情形[图 11-20(a)]．




(a)　　(b)

图 11-20　(a) 从一引力球逃逸的可能性依赖于速度的大小而与方向无关.(b) 从一双星系逃逸的速率与出发点 $P$ 在何处有关.

令人感兴趣的是，逃逸速率 $v_0$ 正好是一粒子擦着地面在一半径为 $R_E$ 的圆形轨道中运行的速率的 $\sqrt{2}$ 倍．

前面的计算假定了从它上面发生逃逸的那个物体是孤立于所有其他物体的．如果要计算的是，例如从双星系中之一的表面上[图 11-20(b)]逃逸的速率，那将会引起更复杂一些的逃逸问题．这时我们应当考虑发射点 $P$ 相对于这两颗星的中心 $O_1$ 和 $O_2$ 的位

置. 但是势能的标量性仍然使计算相对地简单. 质量 $m$ 在 $P$ 点的势能径直就是分别来自两恒星的势能之和. 要在临界速度下作完全的逃逸，发射方向仍然无关紧要.(只要射道不碰着另一恒星!)

最后这一类体系的一个特别重要的例子当然是地球-月球组合. 图 11-21(a)所示的正是这一情形的略图. 如果我们考虑一质量为 $m$ 的粒子，它的势能，作为在地球和月球中心的连结直线上位置的函数，是图 11-21(b)中所示的实线. 数学上它由下式给出:

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r} - \frac{GM_M m}{D-r} \tag{11-40}$$

其中 $D$ 是地球和月球中心之间的距离，$r$ 是粒子到地球中心的距

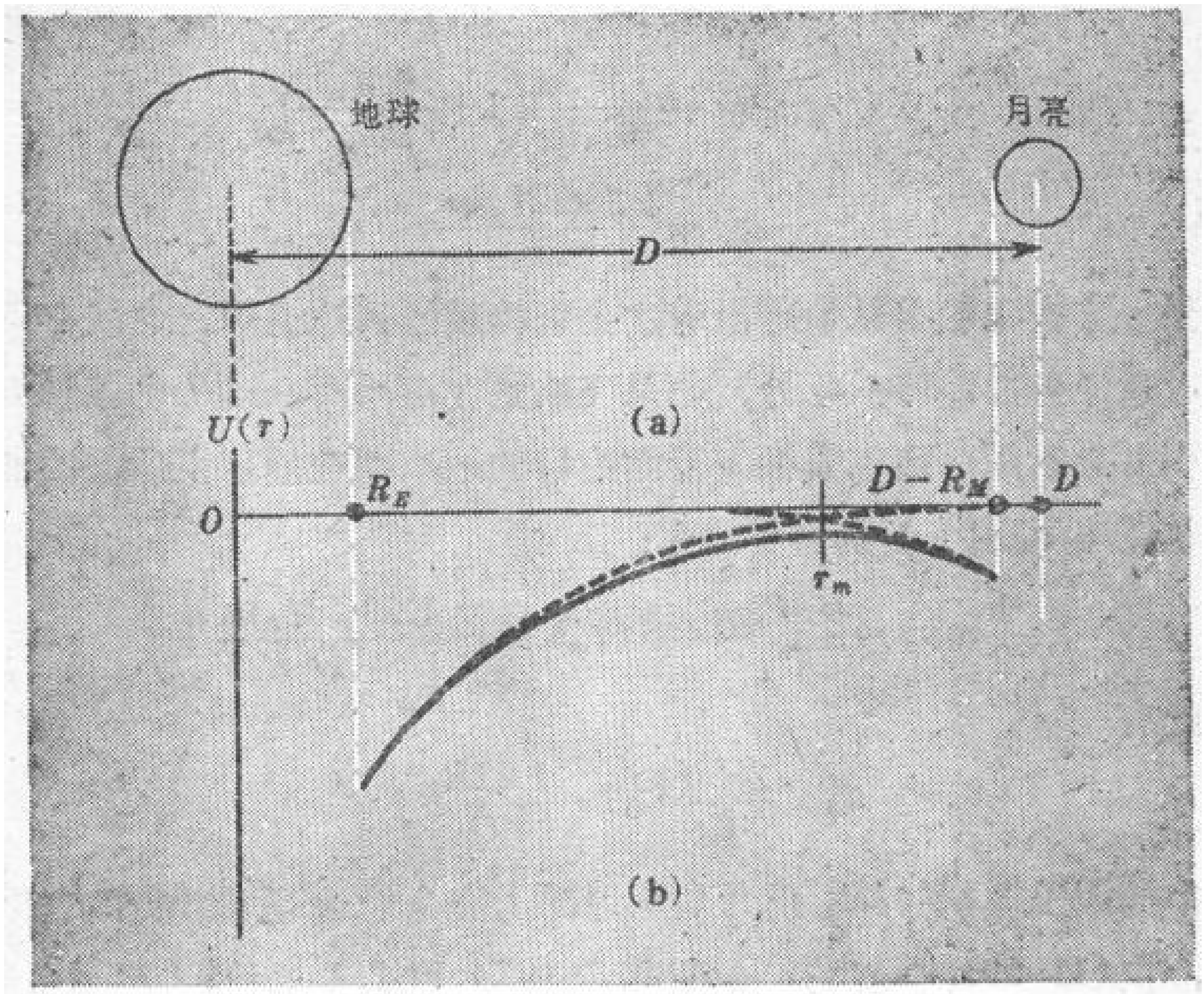



图 11-21 (a)地球-月球体系略图. (b) 沿地球和月亮中心连线一粒子的总势能的变化的形状.

离．这势能简单地是分别来自地球和月球的贡献之和．

$U(r)$的最大值出现在 $r=r_m$ 之处，在那一点 $(d\dot{U}/dr)_{r_m}=0$．这显然也是地球和月球所产生的吸引力等值反向的一点，因而有

$$\frac{GM_E m}{r_m^2}=\frac{GM_M m}{(D-r_m)^2}$$

由此得

$$r_m=\frac{D}{1+(M_M/M_E)^{1/2}} \tag{11-41}$$

$M_M/M_E$ 之值大约是$\frac{1}{81}$，因而 $r_m\approx 0.90D$．这大约是在离月球中心24,000英里的一点．在 $r$ 的这一数值处，按(11-40)式，$U(r)$之值是

$$U(r_m)=\frac{GM_E m}{0.9D}-\frac{GM_M m}{0.1D}$$

$$=-\frac{GM_E m}{0.9D}\left(1+\frac{9M_m}{M_E}\right)$$

$$\approx-\frac{1.23GM_E m}{D}$$

如果一宇宙飞船要从地球沿着这条直接航线到达月球，它就必须越过这一势能驼峰．此外，如果飞船是在离地面一刹那的最初火箭引发之后简单地靠惯性飞行而达目的地，则在地球上所需的最小初速率 $v_0$ 由下面的方程确定：

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GM_E m}{R_E}=U(r_m)=-\frac{1.23GM_E m}{D}$$

由此有

$$v_0^2=\frac{2GM_E}{R_E}\left(1-\frac{1.23R_E}{D}\right)$$

式中的因子 $2GM_E/R_E$ 正好是从地球上完全逃逸所需速率的平方，由(11-39)式给出并算得其数值为11.2千米/秒．把 $R_E/D\approx\frac{1}{60}$代入上面 $v_0^2$ 的表达式，我们求得 $v_0\approx 11.1$ 千米/秒．按这一

最小速度，飞行物体刚好能够越过地球和月球之间的势能“山”，然后落向月球，达到它的表面时速率大约是 2.3 千米/秒.（你应核对一下这些结果.）

## §13 关于保守力的判据的补充①

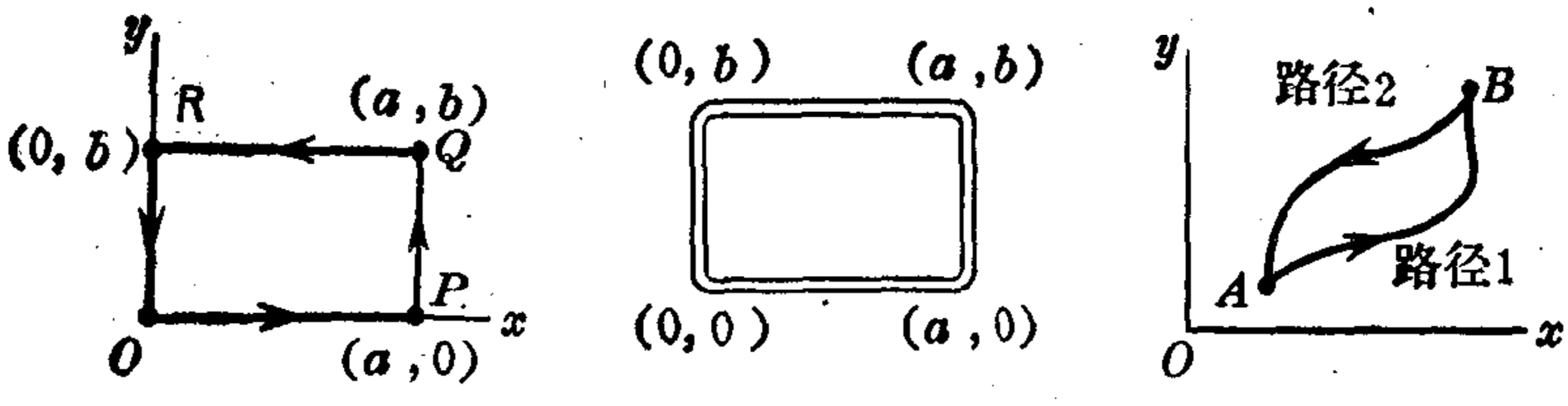
在讨论力和势能时，我们曾指出过，一个力为保守力的基本判据是这力在任何闭路上所作的功为零. 作为旁白，我们指出，在一维问题中，但也只是在一维问题中，如果力是位置的单值函数，则这条件自动满足. 我们现在举一简单的例子说明在二维情形中后面那条件并不是充足条件，即一个力 $\mathbf{F}(x, y)$，尽管是 $x$ 和 $y$ 的单值函数，也可能是非保守的.

我们的例子是这样的：设有一粒子，在 $xy$ 平面上的任何一点都要受到一个力的作用，这力的分量是

$$F_x = -ky$$

$$F_y = +kx$$

其中 $k$ 是一个常数，$x$ 和 $y$ 是粒子的坐标. 这样一个力显然只与粒子的位置有关. 现在让我们来计算，在粒子沿着图 11-22(a) 所示




(a) (b) (c)

图 11-22 (a)一平面上的矩形路线. (b) 成形的光滑管道迫使一粒子循图(a)中所示的路线运动. (c) 由两给定点 $A$ 和 $B$ 之间的两不同路线组成的闭路. 如果力是保守的，净余的功为零.

① 本节可删去而不失连贯性.

的闭路逆时针方向运动时作用于它的力所作的功. 也许有理由提出异议,认为在这个力的作用下,如果没有其他影响,粒子是永远也不会按这一路线运动的,但是(就象在第十章开头时第一次引进势能时那样)我们可以设想 **F** 恰好为另一力——例如由一弹簧提供的——所平衡,因而物体可以自由地走来走去而没有任何净余的作功. 或者,换一方式,我们可以设想有一如图 11-22(b) 中那样的非常光滑的管道,它迫使粒子沿一矩形的边运动而又不对粒子作功,因为管壁作用于粒子的力总是与粒子运动的方向成直角的. 在这一情形中我们应当加一条件,就是粒子具有足够的动能使它能够沿着这路线运动下去,即使 **F** 是在从它取走能量. 现在来进行计算.

从 $O$ 出发,让粒子沿 $x$ 轴走一距离 $a$ 到坐标为 $x=a$, $y=0$ 的的 $P$ 点. 在这一运动中,**F** 作的功是

$$W_1=\int_{x=0}^{a}F_x dx=-ky\int_0^x dx=0$$

因为在闭路的这一部分上处处 $y=0$. 其次,让粒子由 $P$ 运动到 $Q(x=a, y=b)$. 沿这路线 **F** 作的功是

$$W_2=\int_{y=0}^{b}F_y dy=+ka\int_0^b dy=kab$$

对于从 $Q$ 到 $R(0, b)$ 的路线,作的功是

$$W_3=\int_{x=a}^{0}F_x dx=-kb\int_a^0 dx=+kab$$

最后,当粒子从 $R$ 运动回到原点 $O$ 时,力所作的功 $W_4$ 为零,因为 $x$,因之 $F_y$,在这路线上处处为零:

$$W_4=0$$

因此走一圈作的功总起来是

$$W=W_1+W_2+W_3+W_4=2kab\neq 0$$

因而(11-41)式所表示的力 **F 不是**保守的,虽然它只与位置有关.

如果 $k$ 是正的，则沿这方向每走完一圈粒子的动能就增加 $2kab$. 反过来，如果粒子沿顺时针方向走，则其动能每次将减少这么多. 这似乎是——也的确是——一个非常人为的例子；然而，恰好是具有这一非保守性的力[虽然其解析表达式不同于(11-40)式所描述的]在物理学中，特别是在电磁学中，起着重要的作用.

对于这类情况的分析，还有另一种看法. 力为保守力的物理判据是，当被它作用的粒子循图 11-22(a)的路线走一整圈时，不论是沿哪个方向，作的净功(正或负)都为零. 让我们来看一更普遍的情形[图 11-22(c)]，其中粒子沿一路线从一点 $A$ 走到一点 $B$，然后沿另一路线从 $B$ 回到 $A$(仍假想有不作功的约束力在作用). 我们将假设所要研究的力(即不包括任何约束力)只是粒子位置的函数. 如果这力是保守的，就有

$$W=\int_{A}^{B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}+\int_{B}^{A}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=0$$

路线 1　　路线 2

由此得

$$\int_{A}^{B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=-\int_{B}^{A}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

路线 1　　路线 2

但是，如果力只是位置的函数，那么，我们可以把右方积分的上下限交换一下同时改变它的正负号. 因而，如果 $\mathbf{F}$ 是保守力，就有

$$\int_{A}^{B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{A}^{B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

路线 1　　路线 2

如果这条件得到满足，我们可以令

$$W_{AB}=\int_{A}^{B}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad (11\text{-}42a)$$

而不必标出哪一条特别路线. 又如果 $W_{AB}$ 对于所有从 $A$ 到 $B$ 的路线都一样，我们就可以断言力是保守的，并且势能函数可以由以

下的方程确定:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad (11\text{-}42b)$$

在计算象(11-42a)式那种作功的积分时，我们可能要把力 $\mathbf{F}$ 分解为其分量 $F_x$ 和 $F_y$，并把路线元 $d\mathbf{s}$ 分解为其分量 $dx$ 和 $dy$，从而得(二维问题)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy$$

但是，如果用的是这一式子，则应当总是记住，从根本说，**其中的积分规定要沿着粒子所走的一条实际指定的路线**. 这看起来好象是显然的，因为力必然是施加于粒子所在处. 然而，存在着许多情况，在其中不论物体在什么地方出现它都受到一个力(例如引力). 于是我们可以建立一纯**数学的**表述来确定对于任何给定的 $x$ 和 $y$ 的一个 $\mathbf{F}$ 值. 一般 $\mathbf{F}$ 的每一分量都是 $x$ 和 $y$ 两者的函数. 除非我们已经知道力是保守的，不然就有必要循着图 11-23 中那样给定的路线，而不能取比较简单的但也许是不正确的路线，例如，沿直线 $AC$ ($y=y_1=$常数)求 $F_x$ 从 $x_1$ 到 $x_2$ 的积分，接着，沿直线 $CD$($x=x_2=$常数)计算 $F_y$ 从 $y_1$ 到 $y_2$ 的积分.

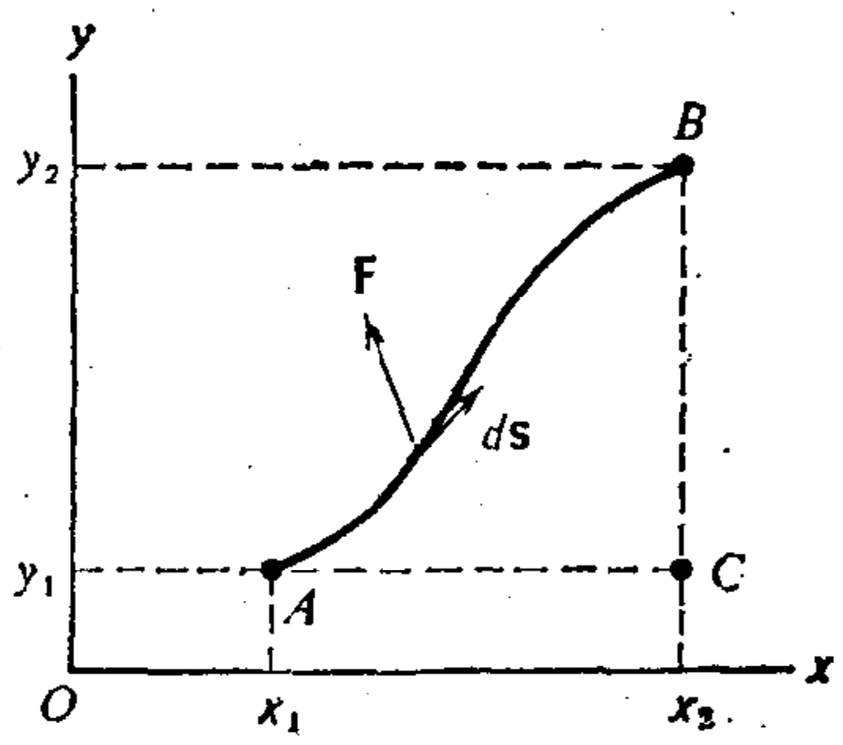



图 11-23. 沿着两点之间一特定路径所作的功的说明.

也许值得用下面的话来结束这一讨论: 在许多情形中，即使是有另外的非保守力作用于粒子，我们还是能运用势能的概念. 例如，在地球的引力场中运动的卫星可能受到地球大气上层的摩擦阻力. 这阻力是一耗散力，是非保守的，因之运动的总机械能不是常量，将随着运动的进行而减少. 尽管如此，我们仍旧可以正当地

谈论卫星在任何点所具有的引力势能.

## §14 场①

我们称之为引力、电力和磁力等的力是"超距作用"力. 在相互作用的物体之间没有明显的物理接触在起作用. 对于这类相互作用, **力场**的概念最为有用. 为了引进这概念, 考虑地球对它外面一粒子的引力吸引. 地球的拉力依赖于被吸引粒子的质量以及它相对于地心的位置. 这一吸引力除以被吸引粒子的质量, 只与地球以及被吸引物体的所在地点有关. 因此我们可以对空间的每一点确定一矢量, 大小等于地球对一粒子的拉力除以这粒子的质量, 方向则与这吸引力相同. 于是, 我们设想在整个空间中有许许多多矢量, 大小和方向在空间的每一点一般都不相同, 它们确定着地球对任意位置上一试验粒子的引力吸引. 这种矢量的全体称为一个场, 而各个矢量本身则称为场强, 或场的强度.

在这一例子里, 在一点$P$的引力场强$\mathbf{g}$是

$$\mathbf{g}=\frac{\mathbf{F}}{m}$$

这一场的强度是用加速度的单位(例如米/秒$^2$)来量度的, 并由引力定律明显地给出:

$$\mathbf{g}=-G\frac{M}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}=-G\frac{M}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{11-43}$$

其中$M$是地球质量, $\mathbf{r}$是$P$点相对于地心的位置矢量, $\mathbf{e}_r$是$\mathbf{r}$方向的单位矢量. (11-43) 式对于一理想的球形地球表面外所有的点都有效.

我们可以对此加以普遍化, 使适用于任意一物质分布所产生的场, 场强$\mathbf{g}$作为位置的函数定量地描述这引力场. 这场施加于

---

① 这一节可删去而不失连贯性.

一质量为$m$的物体的引力则由$\mathbf{F}=m\mathbf{g}$给出.

用场来描写力在说明电磁力时特别有用. 一个带电粒子或一群这种带电粒子所产生的电场由电场强度$\mathscr{E}$来描述, 其中

$$\mathscr{E}=\frac{\mathbf{F}}{q}$$

$\mathbf{F}$是作用于一正的试验电荷(电荷为$q$)的矢量力, $\mathscr{E}$与位置有关. 静止电荷产生的电场, 其情况与引力场相似.

为了使一个力场的特征形象化, 常借助于**场线**的概念. 从一任意点出发, 沿该点的场的方向画一无穷小线元. 如此达到场中相邻的一点之后, 再从这新的一点画另一线元, 照这样画下去. 在线元的长度趋于零的极限情形下, 我们将得到一光滑曲线, 其上任意点的切线就是该点场的方向. 这一构图——场线——并不真正存在, 但画出全部这种线可以得到一幅有关一力场的生动图象.

与力线概念密切相关的是等势能线或面. 我们因此在下一节中简单地讨论这一点.

## §15 等势面和势能的梯度

势能的概念, 除了在保守系统的动力学方面有它的用处之外, 还使我们能够以一比较简单的形式来定量地描述一保守力场. 原因是, 我们可以用一简单的、势能的**标量**场来计算相对来说比较复杂的力的**矢量**场. 这计算进行如下. 假使我们知道在空间的每一点一试验粒子的势能$U$, 即我们有一形如$U=f(x, y, z)$的关系, 其中单值函数$f(x, y, z)$依赖于我们所考虑的特定力场. 如果我们要想知道在空间的什么点试验粒子具有一给定的势能值, 比如说$U_0$, 我们就令$U=U_0$而得下列方程

$$f(x, y, z)=\text{常数}=U_0$$

这是一曲面的方程, 称为能量的**等势**面. 存在着一族这种等

势面，每一 $U_0$ 值对应一个面．由于按定义，把试验粒子从一点移动到同一等势面上的另一点不需要作功，因此，**力线处处与等势面垂直**．

我们要注意这里的两个量之间的区别．正如我们以**单位质量(或电荷，等)的力**作为场的定义，我们也用**单位质量(或电荷等)的势能作为势**($\varphi$)的定义．以引力的具体情形来说，我们有下列两对量：引力 $\mathbf{F}$(牛顿)与引力势能 $U$(焦耳)，和引力场 $\mathbf{g}$(米/秒$^2$)与引力势 $\varphi$(米$^2$/秒$^2$)．

力线和等势面(或二维情形的等势线)所构成的完全阵形提供一幅完整的场的图案．在二维情形中，我们看到两族曲线，不管看起来多么复杂，它们却是处处相互正交的．球形物体的引力场具有一简单的图案，其中力线是径向直线而等势面则是一族同心球[图 11-24(a)]．两个相近的球所产生的场的图案就不那么简单了[见图 11-24(b)]．(一种构画这种图形的方法见习题 11-26.)在画等势面时，按相继的相等势(或势能)增量来画常常比较简单；这使图象能够提供丰富的知识，就象一幅等高图那样——实际就是如此(见图 11-24)．

要获得力场的完全详细说明，除掉力矢量的方向外，还必须求出空间中每一点力矢量的大小．考虑在 $P$ 点的一试验粒子，令它移动 $d\mathbf{s}$ 到相邻的一点．它的势能的改变是

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -F_s ds$$

这可以写为

$$F_s = -\frac{dU}{ds} \tag{11-44}$$

用话来说就是，$\mathbf{F}$ 在任何方向的分量等于势能**在该方向**的变化率的负值．(11-44)式右方的微商称为**方向**微商，因为它的值与在 $P$ 点所选的 $d\mathbf{s}$ 的方向有关．(严格说来，我们应当用偏微商符

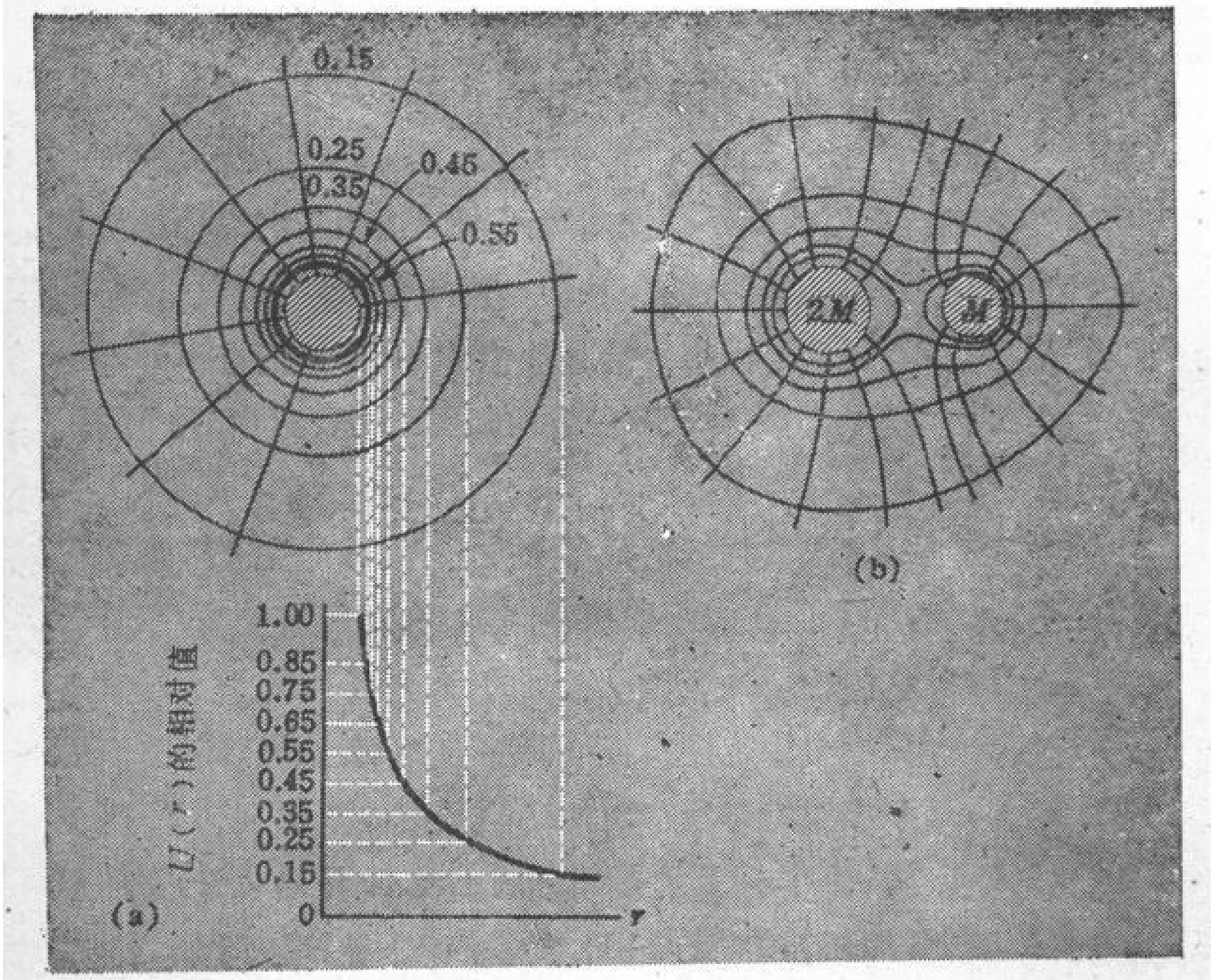



图 11-24 (a) 力律为 $1/r^2$ 的一个球的等势面和力线. (b)两相近的球构成的体系的等势面和力线,两球的质量为 $2M$ 和 $M$.

号 $F_s=-\partial U/\partial s$.)如果我是从 $P$ 运动到 $P$ 所在的同一等势面上的另一点，则在这方向上的 $dU/ds$ 为零. 但是，如果所到达的邻点不在含 $P$ 的同一等势面上,$dU/ds$ 就不是零了. 在一指定点,那个使 $dU/ds$ 之值**最大**的特别方向就是该点的力线的方向，而 $dU/ds$ 的这个最大值就是该点的力矢量之值.

$dU/ds$ 的这一最大值,连同相关的方向,称为势能的**梯度**；这是一个矢量，它的方向与等势面成直角. 用符号表示，我们把它写为

$$\mathbf{F}=-\mathrm{grad}U \tag{11-45}$$

为了帮助澄清有关梯度的概念，考虑一个二维的保守场，在

这情形中，等势的是线而不象三维情形那样是面①. 在图 11-25 中，我们画了两条等势线，一条对应于 $U=U_0$，另一对应于 $U=U_0+\Delta U$. 从 $U_0$ 上面的 $P$ 出发，我们可以经无数位移中的任何一个移动到等势线 $U_0+\Delta U$ 上去. 然而，对于给定的势能改变 $\Delta U$，沿力

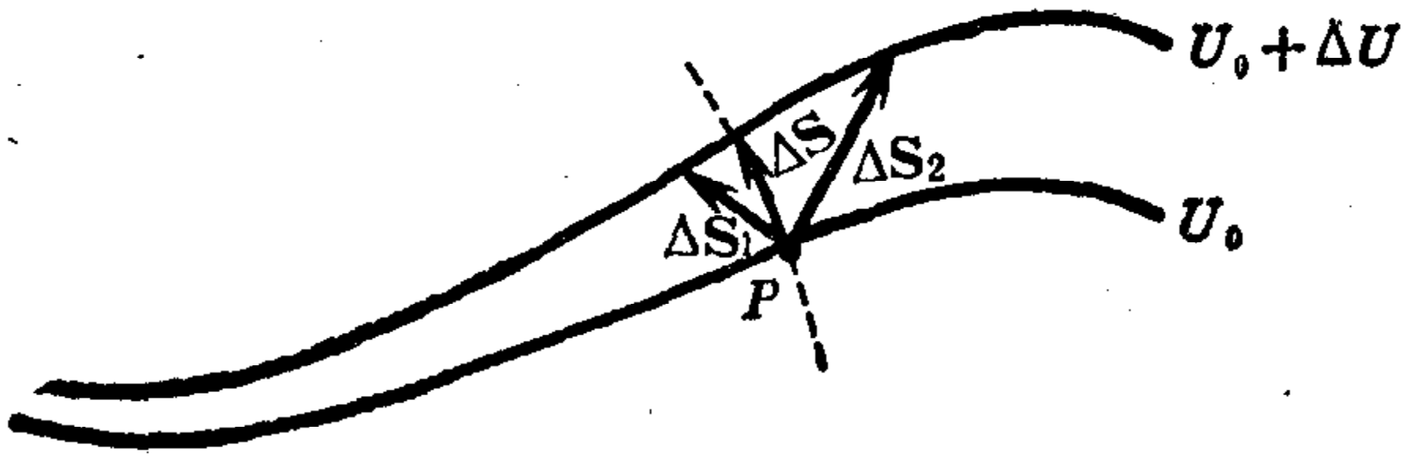



图 11-25　两等势线之间的不同路线.

线以达到这一改变的 $\Delta s$ 是最短的可能位移. 势能随位置的变化率在这一方向上最大，而且这就是势能梯度的方向. 这一点在图 11-25 中指了出来，在那里画了三个从 $P$ 出发的方向. 很清楚，$\Delta s$ 比 $\Delta s_1$ 和 $\Delta s_2$ 都要短，因而 $\Delta U/\Delta s$ 大于 $\Delta U/\Delta s_1$ 或 $\Delta U/\Delta s_2$.

## §16　在保守场中的运动

我们现在把注意转到粒子在一保守力场中**运动**的问题. 当然，我们已讨论过好些牵涉到在重力下运动的问题，但这里我们将试图指出，在应用到比较复杂的情况时能量方法的价值.

如果作用于一粒子的力只是来源于场，那么机械能守恒律就提供了解决问题的第一步. 然而，这定律，表示为

$$\frac{1}{2}mv^2+U(x,y,z)=E \qquad (11\text{-}46)$$

其中 $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$，并不包含事情的全部. 它是把牛顿的定律分别用于三个独立的坐标方向的联合结果，而在把这三个矢量方

① 实际是等势面的截面图——译者注.

程综合起来成为一个标量方程时就包含着丢弃一些东西，这些东西在原则上仍然是可以得知的. 已知$U$是一个保守的势，我们总可以求出它的梯度，也就可以求出力矢量[(11-45) 式]. 有了这个，加上初始条件($t=0$时 $\mathbf{r}_0$ 和$\mathbf{v}_0$ 之值)，我们用于解问题所需的东西就齐备了.

不过，我们在这里的兴趣是尽可能地利用能量守恒方程的好处，同时补充其他必要的知识，这额外的知识可能是明显地运用牛顿定律的一两个表述，这在我们即将讨论的例子中可以看到. 在适当的情况下，这种补充知识也可能包含在能量以外的某些量的守恒律中——特别是角动量. 这后一性质的利用是第十三章的主要关心的内容之一.

作为这方法的一个很好的例子，我们来看一带电粒子在电场和磁场的联合作用下的运动. 假定有一对平行的金属板安放在一抽空的管子里并如图 11-26 中所示与一蓄电池相连，因而在两板之间有一均匀电场$\mathscr{E}(=V/d)$. 两板放在一磁铁的两极之间，磁铁产生一均匀磁场$B$，方向与纸面垂直. 我们将假设电子从下面的板上出发时的能量和速度可以忽略. 这可以，例如，用如下的装置做到：将下板涂上一层光敏物并让光照射于其上，如同在商品光电管中那样.

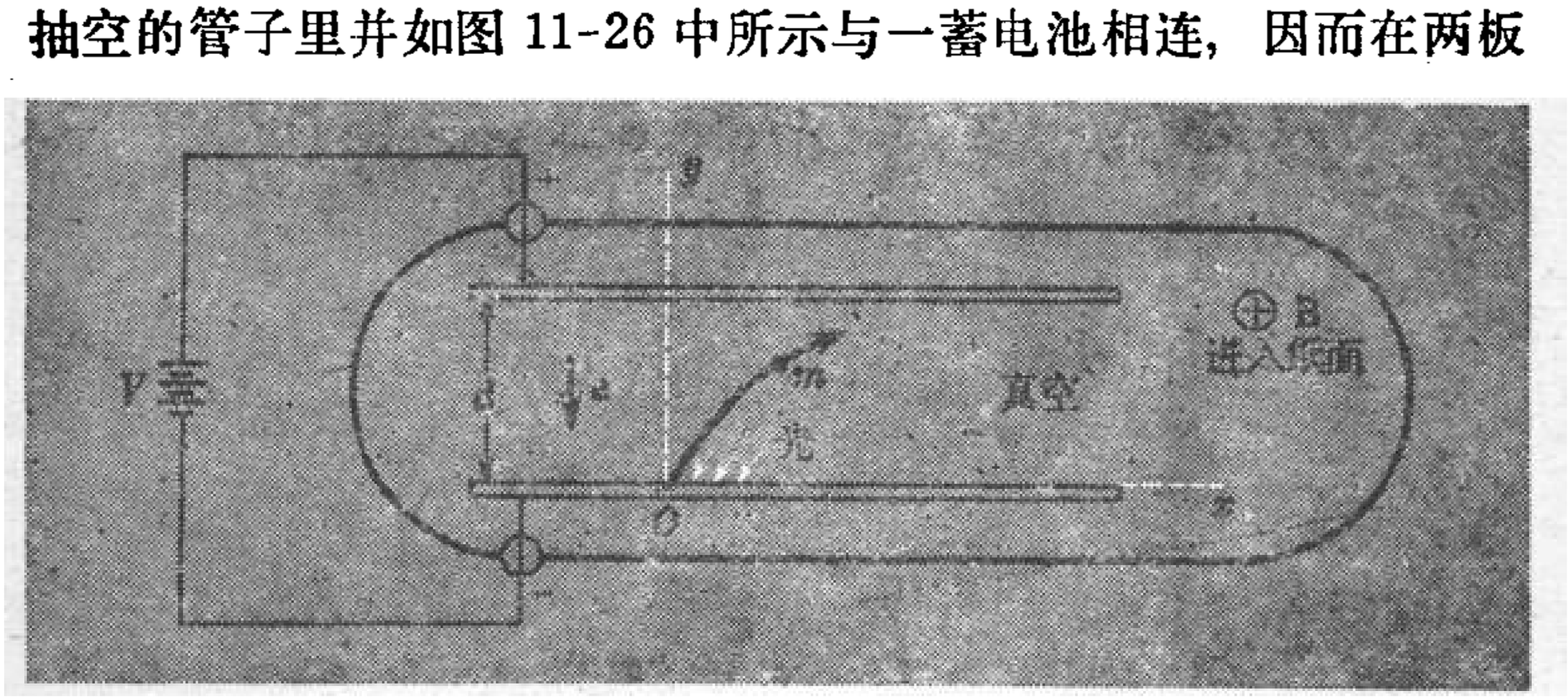



图 11-26　在电场和磁场的联合作用下一电子在真空中的运动.

设一带有电荷 $q=-e$ 的电子从 $O$ 发射，它将由于受到一等于 $eV/d$ 的恒定力而沿正 $y$ 轴方向竖直地加速，并将偏转到图中所指明的路线上．由于磁偏转力总是沿着与粒子速度相垂直的方向施加作用，因而不作功，所以它不直接影响粒子的能量，能量守恒的表述可以简单地写为

$$\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)-\frac{eV}{d}y=0 \qquad (11\text{-}47)$$

其中我们选定 $y=0$ 时 $U[=-(eV/d)y]$ 等于零，即，在下板上势能为零，动能则是可忽略的．

正如在本节开头时说的，要确定运动，我们需要更多的知识．由于电力的方向是沿 $y$ 轴的，在 $x$ 方向上作用于电子的力只有磁力的分量．要计算这力，可考虑把电子在它轨道上某点的速度矢量分解为 $x$ 和 $y$ 分量(图 11-27)．

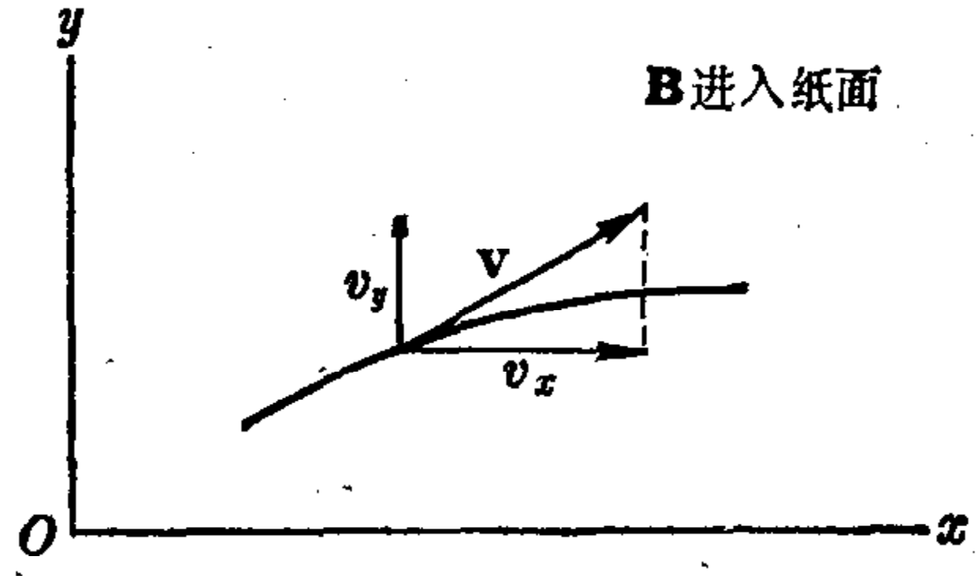



图 11-27　与 v 的 $x$ 和 $y$ 分量相关联把磁力分析为两分量．

与 $v_x$ 关联的磁力分量在这情形下是平行于 $y$ 轴的，与我们这里的问题无关，但速度分量 $v_y$ 产生一磁力分量 $F_x$，由下式给出：

$$F_x=ev_yB$$

相应地，运动的 $x$ 分量的牛顿运动定律是

$$ev_yB=m\frac{dv_x}{dt} \qquad (11\text{-}48)$$

从方程(11-47)和(11-48)可以解出粒子的运动如下：

因 $v_y=dy/dt$，方程(11-48)可写为

$$eBdy = mdv_x$$

求积分有

$$mv_x = eBy \tag{11-49}$$

因为当 $y=0$ 时 $v_x=0$. 现在把(11-49)式的 $v_x$ 值用到能量方程(11-47)中去得

$$\frac{mv_y^2}{2}+\frac{m}{2}\left(\frac{eB}{m}\right)^2 y^2-\frac{eV}{d}y=0 \tag{11-50}$$

这具有一维能量方程的形式; 总能量为零, 等效势能 $U'(y)$ 为

$$U'(y)=-\frac{eV}{d}y+\frac{1}{2}m\left(\frac{eB}{m}\right)^2 y^2$$

这一等效势能的曲线见图 11-28. 它与谐振子的势能 (以某一正的 $y$ 值为中心点)具有完全相同的形式, 其特征角频率 $\omega$ 是

$$\omega=\frac{eB}{m}$$

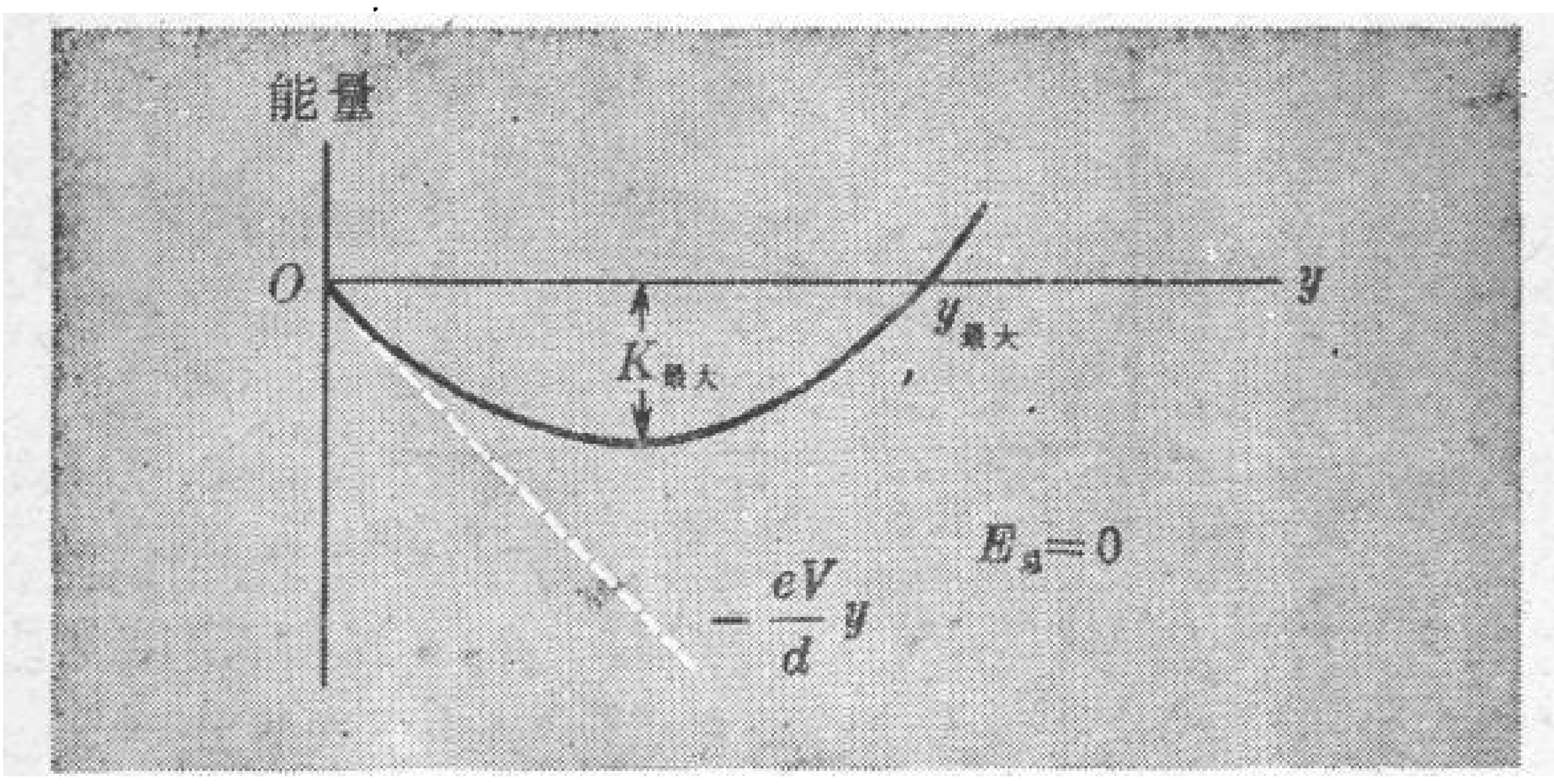



图 11-28　在图 11-26 的装置中运动的 $y$ 分量的等效势能曲线.

这包含一很使人感兴趣的结果. (11-50)式和图 11-28 表明, 当 $y$ 从零起增大时, 电子的动能增加到某一最大值, 然后再减小. 数学上, (11-50)式确定 $y$ 的一最大值, 由 $v_y=0$ 给出:

$$y_{最大}=2\frac{m}{e}\frac{V}{B^2d}$$

如果这值比两板间的距离 $d$ 小（如上面方程所示这情况可通过使 $B$ 够大而达到），则电子的 $y$ 方向位移将作简谐运动，角频率为 $\omega$，振幅等于 $\frac{1}{2}y_{最大}$. 取电子离开下面一块板的时刻为 $t=0$，则有

$$y=A(1-\cos\omega t) \qquad (11\text{-}51a)$$

这运动的 $x$ 分量如何呢？如果我们注视一下(11-49)式，就看到 $v_x$ 是与 $y$ 成正比的. 既然 $y$ 总是正的，$v_x$ 永远是在正 $x$ 方向上. 当我们把这一结论与沿 $y$ 方向的谐振动耦合起来时，就看到电子所走的路线是象图 11-29 所示那样一个接一个的兔跃. 明确说，由(11-49)式有

$$\frac{dx}{dt}=\frac{eB}{m}y=\omega y.$$

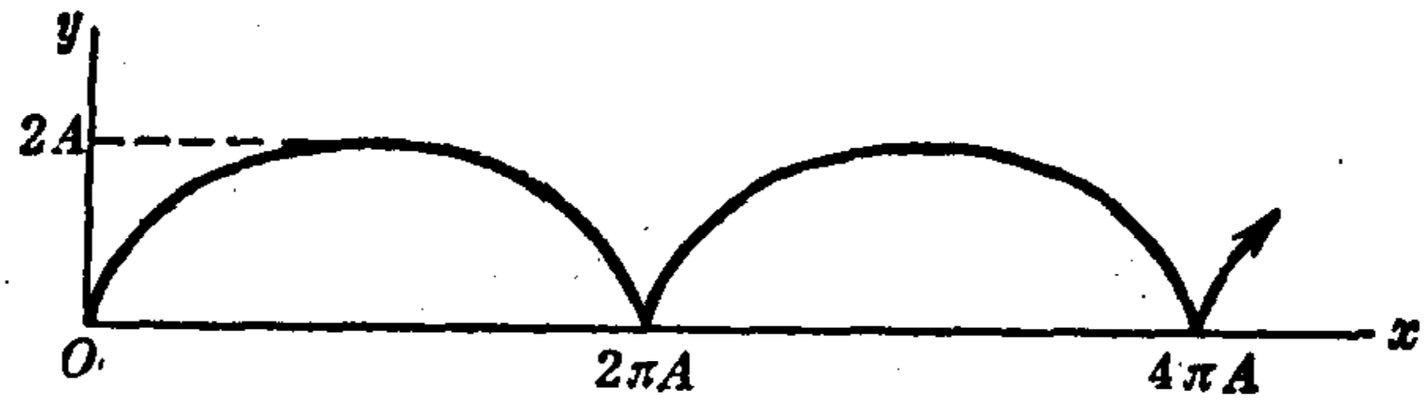



图 11-29　在一磁场中带电平行板之间的电子的旋轮线轨道.

其中 $\omega$ 是我们早先引进的同一角频率，$eB/m$. 于是，把从(11-51a)式得到的 $y$ 的明显表达式代入，得

$$\frac{dx}{dt}=\omega A(1-\cos\omega t)$$

对此求积分，令 $t=0$ 时 $x=0$，我们就求出

$$x=A(\omega t-\sin\omega t) \qquad (11\text{-}51b)$$

(11-51a)和(11-51b)两式联合起来表明，电子的轨迹事实上是一旋轮线——正象它是在一个半径为 $A$ 的轮子的边缘上随着轮子沿 $x$ 轴滚动一样.

## §17 耗散力的效应

早先我们提到过，即使是在有耗散力存在的情况下，一力场的保守性仍然可能有用．这方面特别令人感兴趣的例子是人造卫星轨道的缓慢衰变．

我们都知道，放在地球上空几百英里处的卫星最后是要落下来的．然而，它的降落是分散在数千转上的．因此，虽然真正的轨道是象图 11-30(a)所示的那样，不断朝里蜗旋，但在单转一圈时，运动还是非常接近于闭合轨道，为简单起见我们设它是圆．因此，在任何阶段上，牛顿定律可用通常的匀速圆周运动的方程来表述而误差将异常之小：

$$F=\frac{GM_m}{r^2}=\frac{mv^2}{r}$$

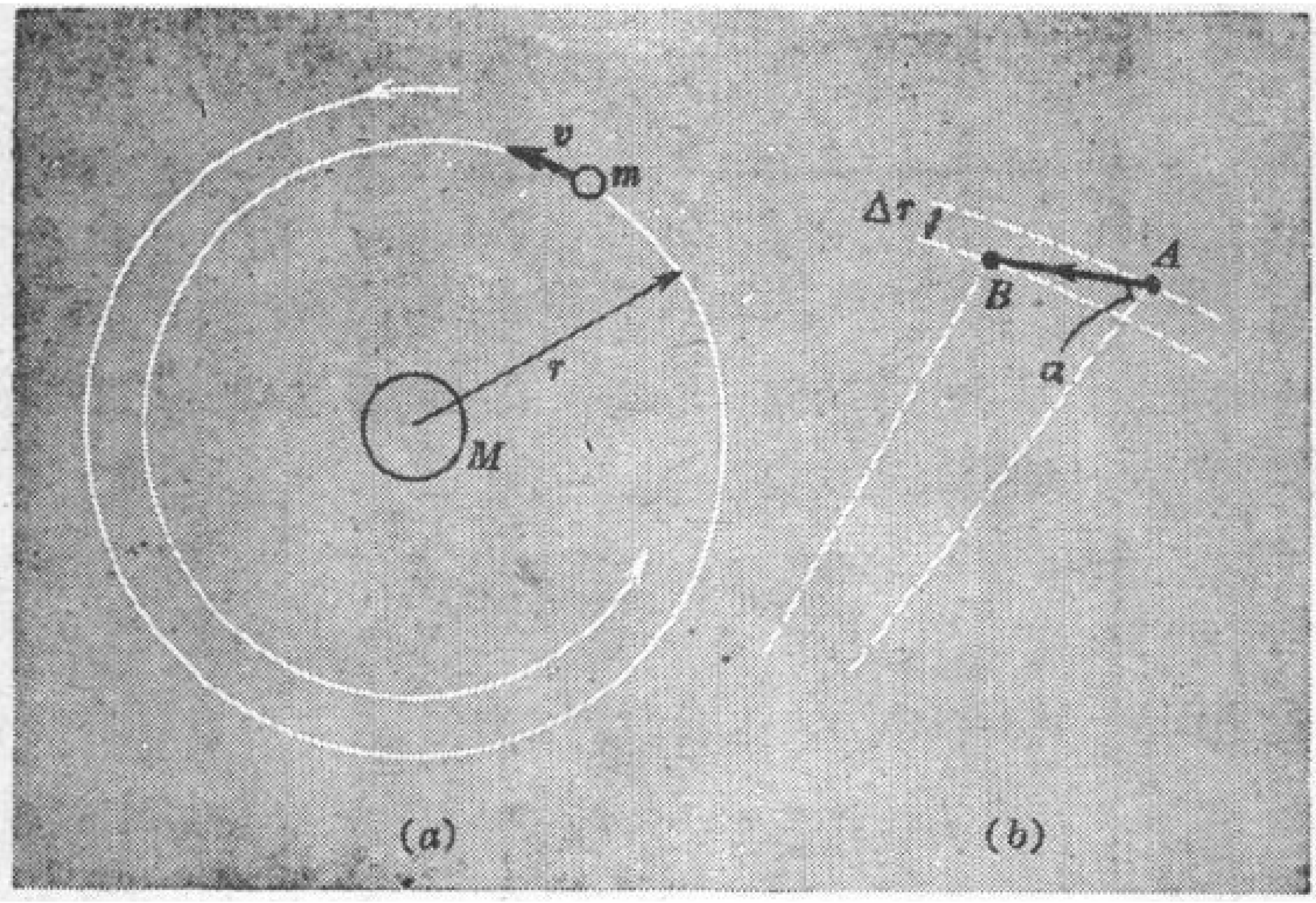



图 11-30 (a) 地球卫星在丢失能量时不断朝里蜗旋．(b) (a)中所示轨道的一小段．

因而对于 $r$ 的任何特别值，动能为

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{2r} \tag{11-52}$$

这表示着一非常奇特的特点. 当轨道半径逐渐变小时, 动能反而增加了——换言之, 卫星在加速. 尽管卫星的运动不断地受到一阻力的反对, 竟会发生这样的事. 如果没有这种力, 轨道的半径和速率将保持不变.

但是我们知道卫星是一定是丢失了能量的, 损失的量很明确. 这一点在我们考虑势能时变得很清楚:

$$U=-\frac{GMm}{r}$$

当轨道半径为 $r$ 时, 总能量 $E$ 是

$$E=K+U=-\frac{GMm}{2r} \tag{11-53}$$

当 $r$ 减小时, $E$ 负得更多. 我们可能注意到了在任何这种圆周运动中的下述关系:

$$E=-K=\frac{1}{2}U \tag{11-54}$$

但人们也许仍然感到奇怪: 为什么卫星在面对一阻力时还会加速? 图 11-30(b) 使人想到答案所在. $AB$ 线代表卫星轨道的一小段, 长度为 $\Delta s$. 起点 $A$ 位于半径为 $r$ 的圆上, 终点 $B$ 位于半径为 $r+\Delta r$ ($\Delta r$ 实际上是负的) 的圆上. 为了清晰起见我们大大地夸张了 $\Delta r$ 的大小. 于是我们看到, 当卫星由 $A$ 运行到 $B$ 时, 它在沿轨道的方向上受到一个引力吸引的分量. 如果阻力是 $R(v)$, 则沿 $\Delta s$ 方向作用于卫星的合力是

$$F=\frac{GMm}{r^2}\cos\alpha-R(v)$$

因而, 在距离 $\Delta s$ 中获得的动能, 等于所作的功, 是

$$\Delta K=F\Delta s=\frac{GMm}{r^2}\Delta s\cos\alpha-R(v)\Delta s$$

在右方的第一项中，我们可作代换

$$\Delta s\cos\alpha=-\Delta r$$

而在右方的第二项中作代换

$$\Delta s=v\Delta t$$

如果再代入 $\Delta K=mv\Delta v$，我们就得到下列方程：

$$mv\Delta v=-\frac{GMm}{r^2}\Delta r-R(v)\,v\Delta t$$

但是，对(11-52)式求微分，有

$$mv\Delta v=-\frac{GMm}{2r^2}\Delta r\,,$$

把这结果代入前式，得

$$mv\Delta v=2mv\Delta v-R(v)\,v\Delta t$$

因而

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=+\frac{R(v)}{m}$$

这是最为使人困惑的结果．那正号不是一个差误．卫星速率的增加与反对它的运动的阻力的大小成正比！这表观上的佯谬在我们认识到如下的事实时是可以解决的，那就是，阻力，由于把轨道从圆变为朝里的蜷线，成为一个中介物使得引力对卫星作正功，数值是阻力本身所作的负功的两倍．

## §18 高斯定理①

一质点或电荷产生的反平方力场的特殊情形是如此之重要，我们特别在此附加一节高斯定理的讨论，这定理是反平方定律的一个简洁而又强有力的表述．由于我们这里关心的主要是力学，所以我们将用引力场而不用电场来讨论这问题．我们从一个非常

① 本节可删去而不失连贯性．

初级的观察开始. 我们已看到过,一质点$M$的引力场 g 是

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r$$

这场在一以$M$为中心、半径为 $r$ 的球面上的每一点上都有作用. 如果约定沿径向向外是正的，则 g 的径向分量乘以球面的总面积给出一个量 $\phi$, 定义如下:

$$\phi = 4\pi r^2 g_r = -4\pi GM$$

我们将称 $\phi$ 为引力场 g 通过球面的**通量**.

$\phi$ 的一个值得注意的特点是它与 $r$ 无关. 如果有两个不同半径 $r_1$ 和 $r_2$ 的球, 都以$M$为中心, 则通过两者的 g 通量是一样的. 我们可以把这结果推广到包围着质量的任何形状的闭合面的情形[图 11-31(a)]. 如果在这面上的任意一点, 面的外向法线与 r 成 $\theta$

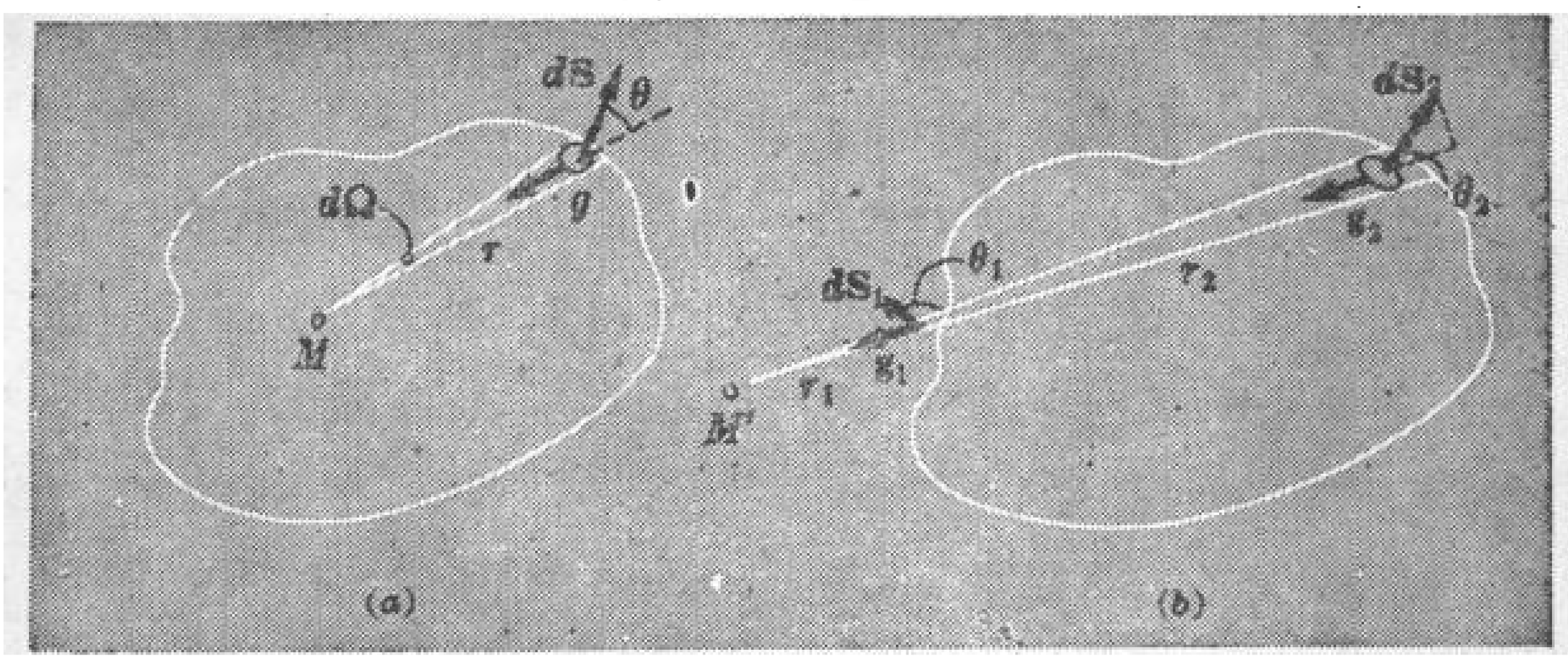



图 11-31 (a) 包围一质量为$M$的粒子的高斯面. 存在由于$M$而产生的总引力通量. (b) 不包围 $M'$ 的高斯面, $M'$ 所产生的总通量为零.

角, 如图所示, 我们可以把 g 分解为两个正交分量，与表面平行的和沿着法线的. 如果我们按字义设想通量是 g 场穿过表面的一种**流动**, 那么只有法向分量有贡献. 以面积元 $dS$ 乘它, 于是有

$$d\phi = -\frac{GM}{r^2}\cos\theta dS$$

$dS\cos\theta$ 是 $dS$ 在垂直于 r 的方向上的投影，而 $dS\cos\theta/r^2$ 是 $dS$

在$M$点所张的立体角元$d\Omega$. 因而可写

$$d\phi = -GMd\Omega$$

按照这一定义，通过表面的 g 通量的总量可以由对所有 $d\Omega$ 的贡献求积分而得到. 但这意味只须把全部立体角，$4\pi$，包含进去. 因而

$$\phi = \int d\phi = -GM\int d\Omega = -4\pi GM$$

与球面情形完全一样. 如果考虑的是面**外**一质点 $M'$ 的情形，结果将十分不同. 这时，一小立体角的锥面将与问题中的面相截两次①; 对通量的贡献为

$$d\phi = -GM'\left(\frac{dS_1\cos\theta_1}{r_1^2} + \frac{dS_2\cos\theta_2}{r_2^2}\right)$$

不难证明括号内的两项分别等于 $-d\Omega$ 和 $+d\Omega$，因而 $d\phi = 0$，并由此得知在这一情形中总通量也是零.

我们可以把这些计算正式化一点，用一矢量 $d\mathbf{S}$ 来代表一面积元，大小等于 $dS$，方向沿外向法线，如图 11-31 所示. 于是，按定义，通量元 $d\phi$ 等于标积 $\mathbf{g}\cdot d\mathbf{S}$. 然后，很明显，在图 11-31(b)中 $\mathbf{g}_1\cdot d\mathbf{S}_1$ 与 $\mathbf{g}_2\cdot d\mathbf{S}_2$ 是反号的.

假定现在有好些质量 $m_1, m_2, m_3, \cdots$，位于某种面之内，如图 11-32(a). 它们的引力场合起来在任何一点$P$产生一总引力场 g:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_3 + \cdots$$

总引力通量为

$$\phi = \int \mathbf{g}\cdot d\mathbf{S}$$

我们看到，这不过是各别质量的贡献之和:

---

① 应为偶数次——译者注.

$$\phi = \int \mathbf{g}_1 \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{g}_2 \cdot d\mathbf{S} + \int \mathbf{g}_3 \cdot d\mathbf{S} + \cdots$$

$$= -4\pi G(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots)$$

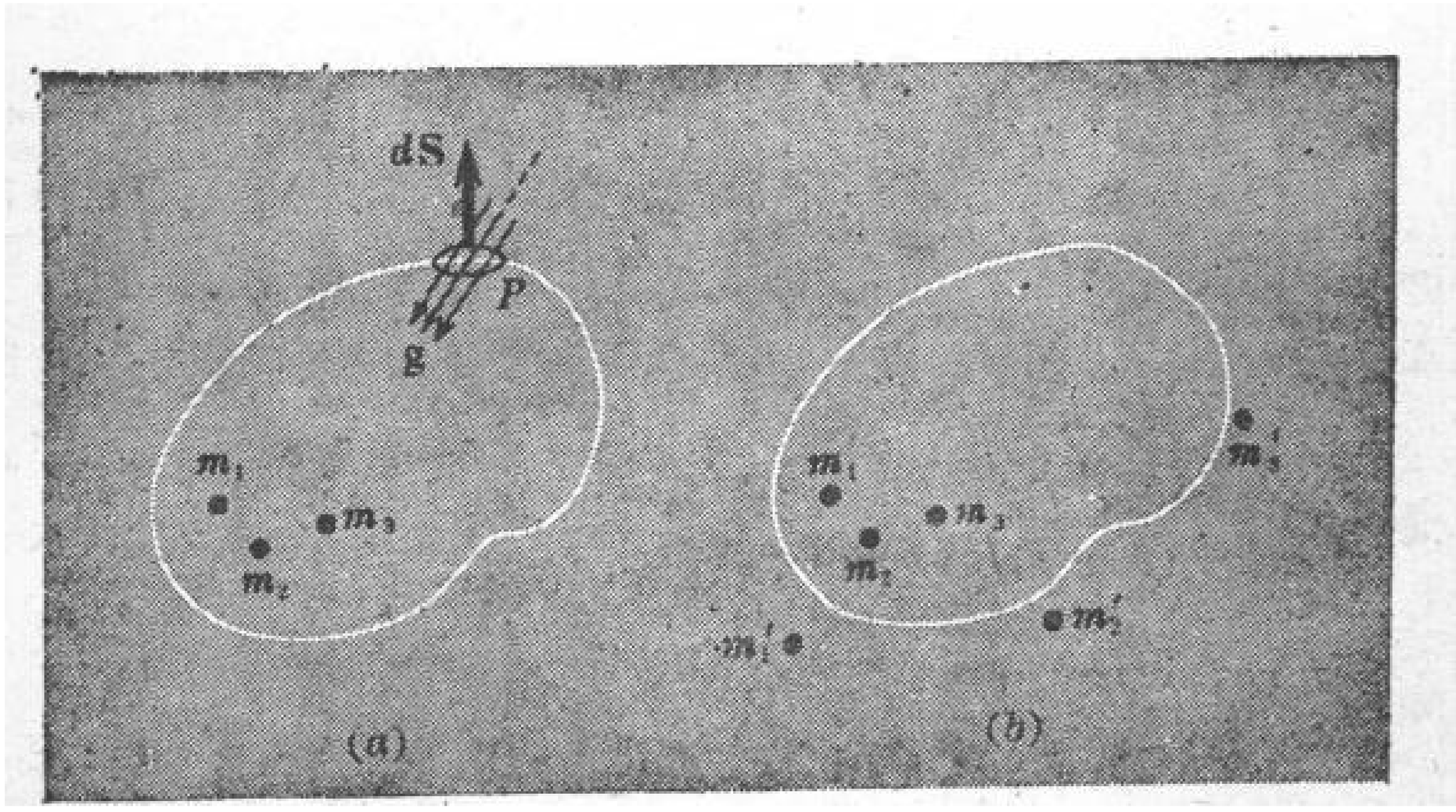



**图 11-32 (a) 计算在一给定面内一任意质量集合所产生的引力通量的基础. (b) 在面外加入质量并不改变总通量, 虽然它要改变各局部地区的场强.**

因而, 这总通量只与包含在面内的总质量有关, 而不管它们是如何分布的:

$$\phi = -4\pi G M_{\text{总}} \tag{11-55}$$

如果象图 11-32(b)中那样, 还有另外的一些质量 $m_1'$, $m_2'$, …位于面外, 我们以前的计算表明这些质量对通过这表面的总引力通量无所贡献. 因此, (11-55)式表现出是一个完全普遍的结果; 以高斯定律(或定理)知名, 它的有效性全在于力律是严格的反平方律. 在静电学中有与此严格平行的结果. 事实上高斯是在那一领域中首先发展出这一定律的.

如果一个物理体系具有某种明显的对称性, 高斯定理立刻导致有关场强的重要结论. 我们来看几个例子, 其中有些是我们早先用其他方法处理过的.

## §19 高斯定理的应用

### 1. 球外的场

假定我们要求知道一质量为$M$的孤立球外一点$P$的引力场，$P$到球心的距离为$r$[图 11-33(a)]. 如果球内的质量分布是对称的——即如果物质密度在距离球心同样远处的所有点上都一样——则引力场 g 本身在一半径为 $r$ 的球面上的所有点也具有同样的强度. 因而，如果我们作一半径为 $r$ 的球形“高斯面”，总引力通量将是

$$\phi = 4\pi r^2 g_r = -4\pi GM$$

由此立刻有

$$g_r = -\frac{GM}{r^2}$$

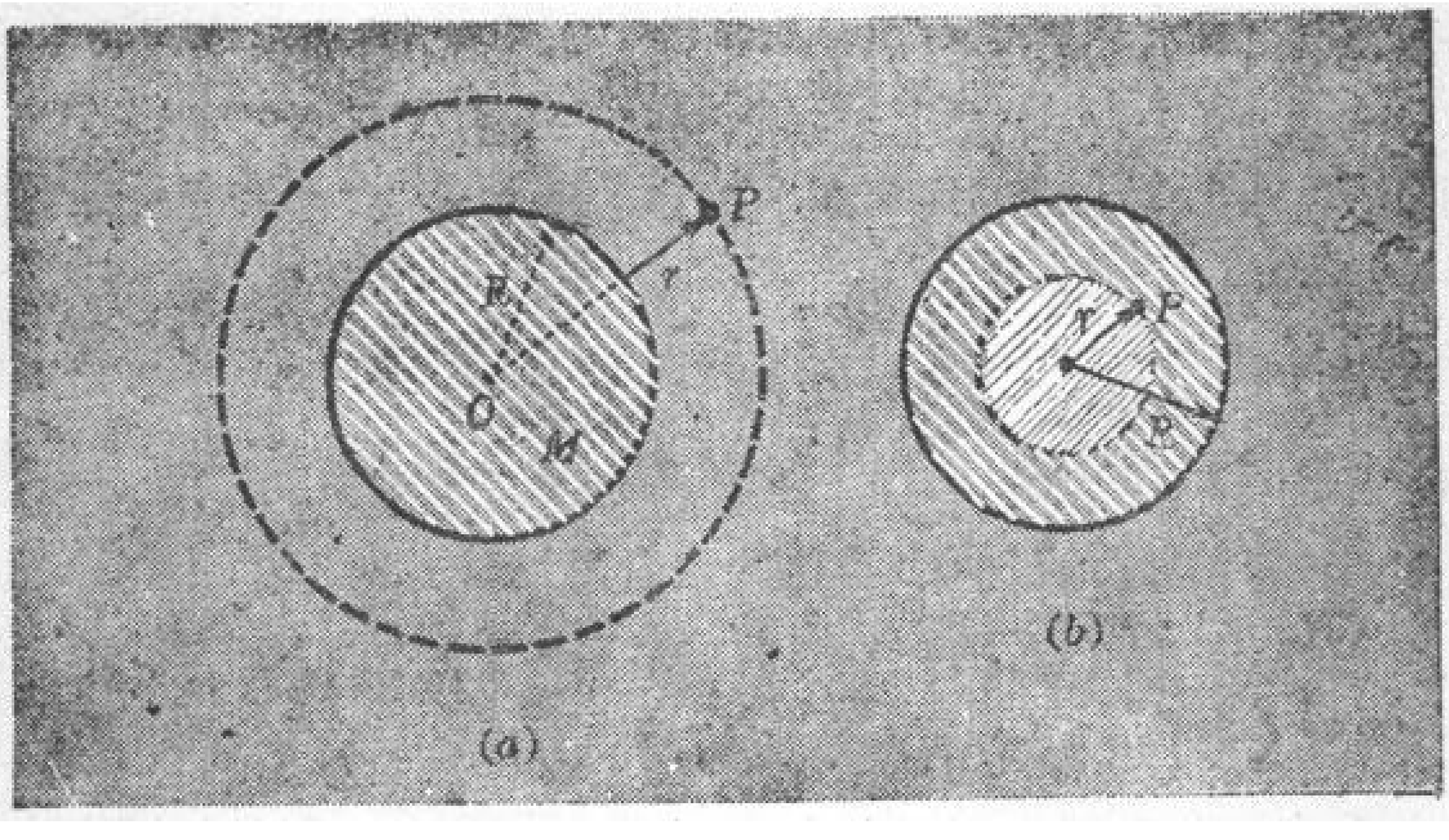



图 11-33　用高斯定理计算一实心球的引力场：(a)在球外的点，和(b)在球内的点.

当然，这结果完全是熟知的，但要注意之点是，一旦有了高斯的普遍定理，则对质量分布明显地去求积分，象我们在第八章所做的那样，就成为不必要的了.

### 2. 球内的场

对另一熟悉的问题：球对称分布质量**内部**的引力场[图 11-33(b)]，也可以用完全类似的方法来处理. 高斯定理立刻告诉我们，如果设想一半径为 $r<R$ 的球面，则这面外的物质对通过这面的g 通量全无贡献. 因而，如果包含在半径为 $r$ 的球面内的质量为 $m(r)$，我们立刻可以推算出

$$g_r=-\frac{Gm(r)}{r^2}$$

不过，所作的假定：在半径 $r$ 之内和之外这体系全都具有球对称性，是不可少的. 否则 g 之值在球面上的不同点可能不一样，这时，虽然面外的物质对总通量仍无贡献，在各点的场强却受到影响. 因此，我们必须象第一个例子中那样，假定球是有效地孤立的，即远离任何外边的质量.

### 3. 一扁平片的场

假定有一无穷大的片状物质，面密度为 $\sigma$(单位面积的质量). 这一情形的对称性告诉我们，场必定处处与这片垂直，并在它的两面具有相同的值 (图 11-34). 对这问题我们可以作这样一个高斯面：垂直于片的柱面，两端的形状不拘，但面积相同为 $A$. 于是，柱的弯曲侧面没有 g 通量通过. 柱内包含的质量恰好是 $\sigma A$. 因而通过表面的总引力通量是 $-4\pi G\sigma A$. 但按高斯定理，这应等于场强 $g$ 乘上两端的总面积. 因而有

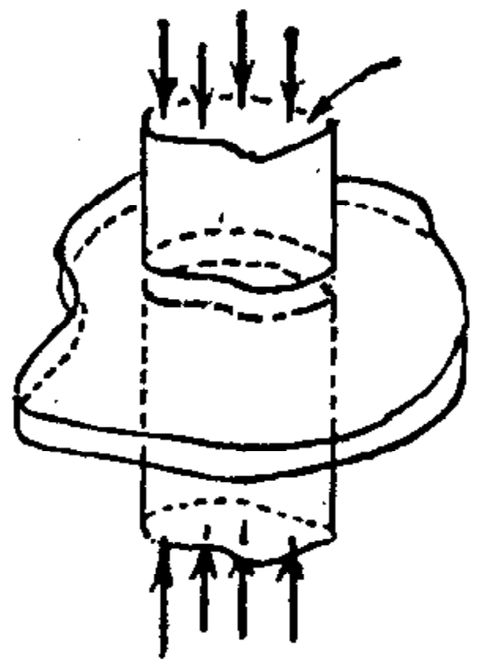


图 11-34　用高斯定律计算一扁平片状物质的引力场.

$$2Ag=-4\pi G\sigma A$$

因此

$$g = -2\pi G\sigma \tag{11-56}$$

这说明场的强度完全与离物质片的远近无关，如果它确是象所说的那样是无限延伸的话.

对引力体系来说，这例子不太真实. 但其结果在静电学中却是至关重要，在那里，大平面面积上的电荷分布是经常遇到的. 平行板容电器就是一个主要的例子，而在例如密立根实验中，带电板之间的所有点的场强是常数这一事实可以根据上面的计算立刻理解.

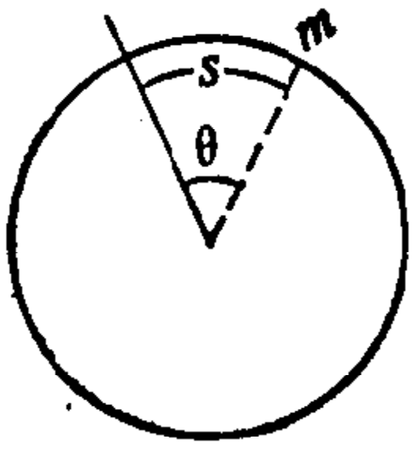
## 习　题

11-1　一质量为$m$的粒子沿着一弯成竖直圆圈(见图）的钢丝无摩擦地滑动. 粒子的位置可以用$\theta$，或者用弧长$s$，或者用粒子落下的竖直距离$h$来描述.

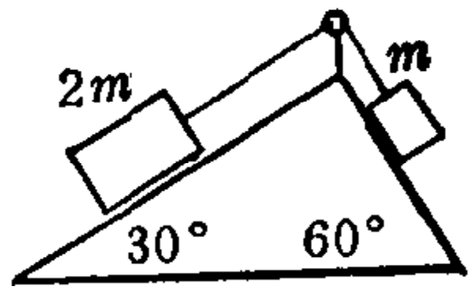
(a) 考虑沿粒子轨道的方向在任何点作用于粒子的力，并证明使粒子移动一弧长$ds$所作的功为

$$dW = F_s ds = mgR\sin\theta d\theta$$

(b) 把这式从 $\theta=0$ 到 $\theta=\theta_0$ 积分，证明所作的功为 $W=mgR(1-\cos\theta_0)$，并把这结果用粒子降落的竖直距离$h$表示出来.




(习题 11-1)




(习题 11-2)

11-2　质量为$m$和$2m$的两块物体静止在倾角分别为60°和30°的两个无摩擦平面上，并由一根穿过一摩擦可忽略的小孔的绳将它们连起来(见图). 用能量法求这两质量的加速度的大小，并导出绳中张力.

11-3　证明，如果让一绳子末端上的质量从绳子的初始水平位置(质量静止)沿一圆弧摆动下来，则在摆动的最低点绳中张力为质量简单地在那里挂着的三倍. (惠更斯在他 1673 年出版的关于摆钟的书的末尾引用过这一

结果.)

11-4　在一长为 $l$ 的绳的末端有一质量为 $m$ 的摆锤. 在绳与竖直线成 60° 角的位置(见图)将摆锤从静止状态释放, 如图所示. 在圆弧的最低点, 摆锤碰击一原先不动的、质量为 $nm$ 的物块, 物块在一无摩擦的水平面上. 碰撞是完全弹性的.

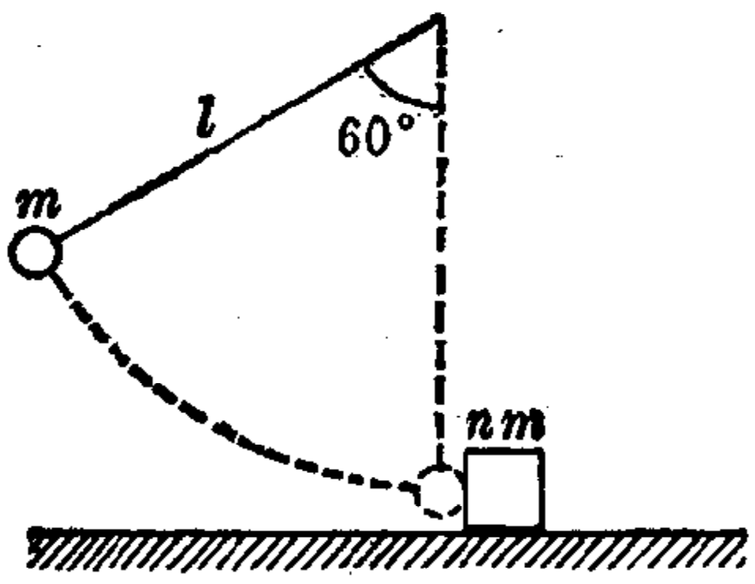
(a) 在碰撞发生之前一刹那摆锤的速率是多少?

(b) 在这一瞬间绳中张力是多少?

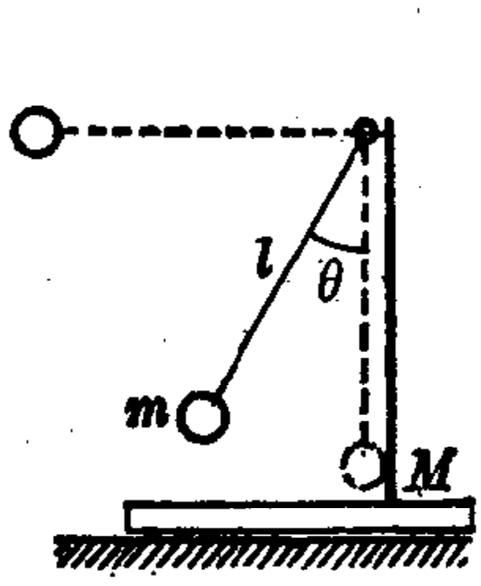
(c) 碰撞给予物块的速度是多少?

(d) 在碰撞后摆的摆动中, 绳与竖直线所成的最大角度 $\theta$ 是多少? (用 $\cos\theta=\cdots$ 的形式表示你得到的答案.)

11-5　一学生被指定做一个"动量守恒"实验, 在这实验中, $m_1$ 和 $m_2$ 两个质量用两根长度为 $l$ 的绳子悬挂着. 把质量 $m_1$ 拉开一水平距离 $x_i$, 然后释手. 它碰到 $m_2$ 并与 $m_2$ 粘在一起, 此后这联合质量摆动到某个终了位置 $x_f$. 这学生提出异议说在这过程中动量显然是不守恒的. 动量起初是零, 接着是增加, 随后又减小到零. 这学生还断言能量也是不守恒的. 请你仔细分析这实验实际是如何进行的以回答这学生的异议.




(习题 11-4)




(习题 11-6)

11-6　一质量为 $m$ 的油灰小球粘附在一根长为 $l$ 的绳子的一端, 绳的另一端绑在一立柱上, 立柱竖在静止于一水平桌的一块木板上, (见图). 木板和主柱的联合质量为 $M$. 木板与桌子之间的摩擦系数为 $\mu$. 把绳拉到水平位置, 然后让小球从静止状态摆动下来. 它与立柱作完全非弹性碰撞. 当球摆动下来时, 木板不移动.

(a) 碰撞后木板将移动多远?

(b) 要防止小球摆动下来时木板移向左边, $\mu$ 的最小值必须是多少? 假设 $m\ll M$, 使临界情况出现在 $\theta\simeq45°$ 处.

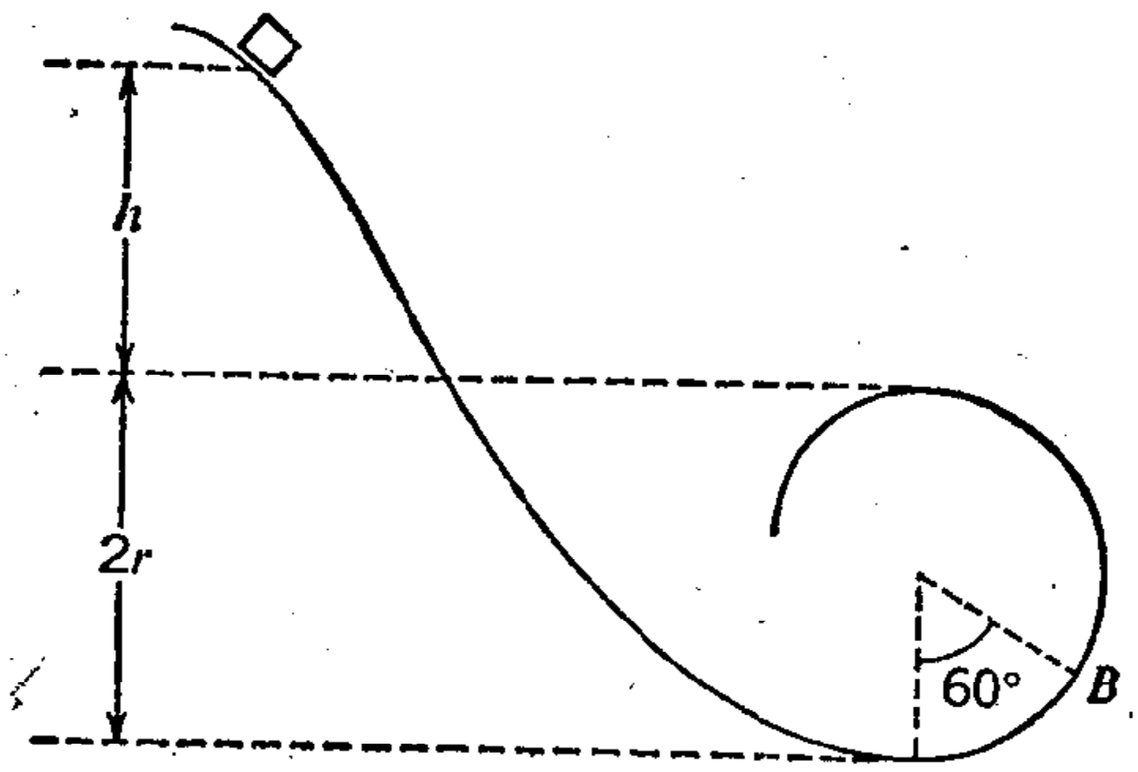
11-7　一质量为$m$的物体在一无摩擦的回圈装置上滑动. 物体在回圈顶部上方高度为$h$之处从静止状态释放滑下(见图).

(a) 当物体经过$A$点时, 轨道施加于物体的力的大小和方向如何?

(b) 画一隔离图来表示在$B$点作用于物体的力, 并求出在这点的径向加速度的大小.

(c) 证明物体必须从$h \geqslant r/2$处出发才能成功地在回圈上走一整圈.

(d) 对于$h<r/2$的情形, 物体在到达圆周顶点之前就要开始从轨道上掉下来. 证明发生这种情况的位置为$3\cos\alpha=2+2h/r$, 其中$\alpha$是对竖直线(向上)的角距离.




(习题 11-7)

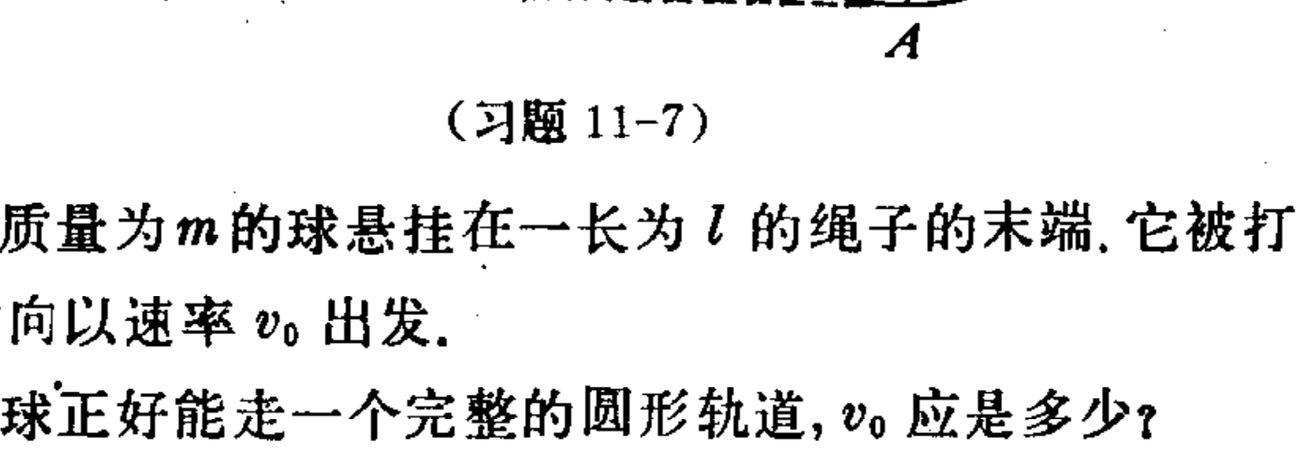
11-8　一质量为$m$的球悬挂在一长为$l$的绳子的末端. 它被打击后从这位置沿水平方向以速率$v_0$出发.

(a) 如果球正好能走一个完整的圆形轨道, $v_0$应是多少?

(b) 如果$v_0=\sqrt{4gl}$(即如果把球竖直地向上抛出, 它恰好升高$2h$), 问球开始离开它的圆形轨道掉下来时绳与竖直线成多大的角度?

(c) 在情况(b)中, 假设总机械能没有损失, 分析以后的运动.

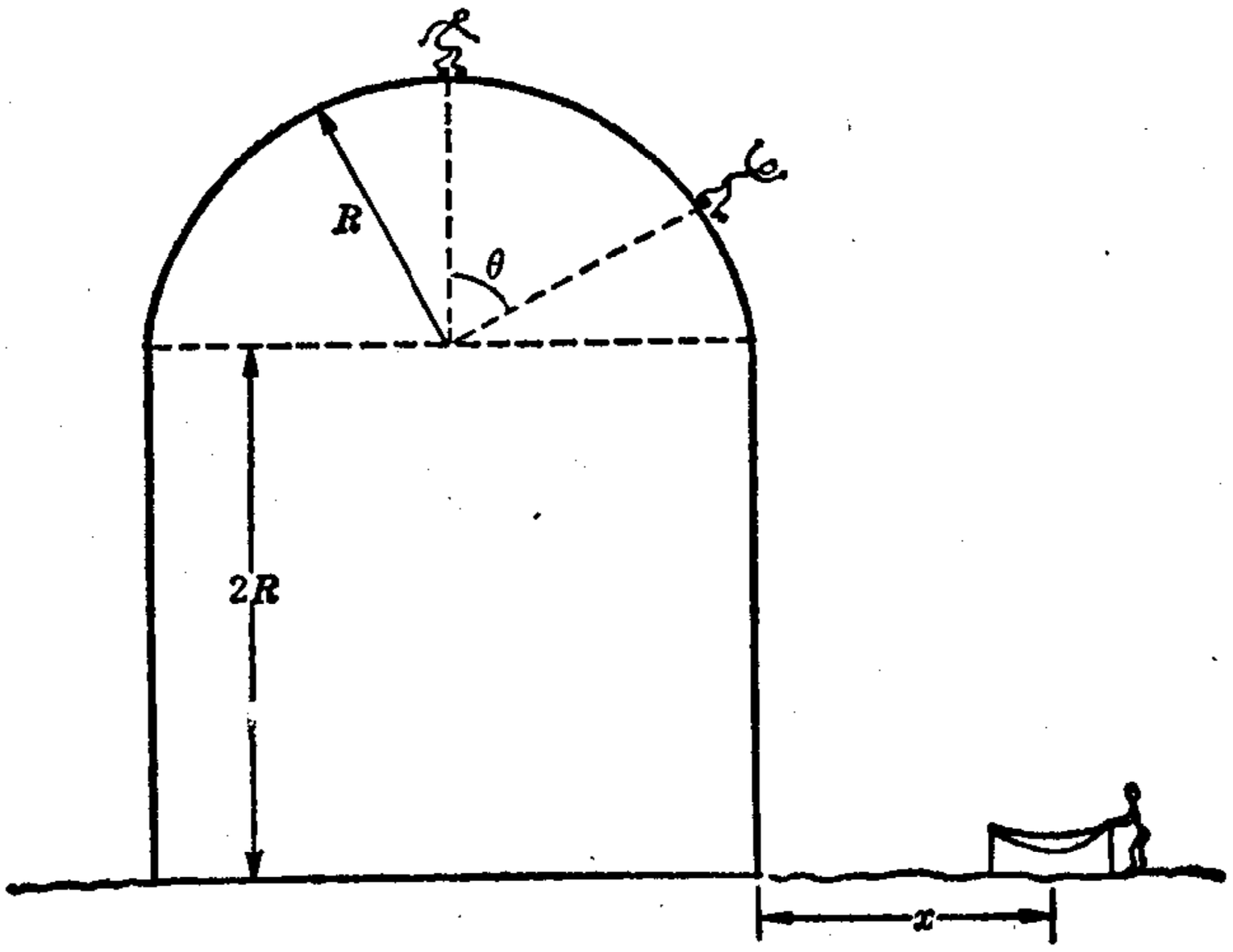
11-9　一质量沿一非常光滑的曲线滑运道滑下来, 如图所示. 在离滑运




(习题 11-9)

道末端多大水平距离处它碰到地面？

11-10　一胆大妄为的天文学者站在他的观象台的圆顶的顶点上（见图），脚蹬四轮溜冰鞋，以可忽略的初速度出发沿着圆顶表面滑下来。




（习题 11-10）

(a) 忽略摩擦，他在什么角度 $\theta$ 离开圆顶表面？

(b) 如果他以初速度 $v_0$ 出发，他将在什么角度 $\theta$ 离开圆顶？

(c) 对于图中所示的观象台，在情况(a)中，他的助手想用网来接住他，应在离房基多远的位置？

计算时用 $R=8$ 米和 $g\approx10$ 米/秒$^2$.

11-11　一长为 $L$ 的摆放置在与竖直线成 $\alpha$ 角处。一小木桩位于摆绳摆动的途中如图所示。摆从静止状态释放.

(a) 如果 $\alpha=60°$，$\beta=30°$ 和 $r=L\sqrt{3}/4$，问相对于竖直线摆锤所能达到的最大角度是多少？

(b) 证明，若 $0<(r\cos\beta-L\cos\alpha)<3(L-r)/2$，则在摆锤上升时绳将弯曲。这弯曲在什么角度 $\theta$ 发生？

(c) 一种狂欢节的竞技项目就是这样一个摆和木桩的装置。竞赛者要是能使摆锤打着木桩就获奖。在竞赛中，$L$、$r$ 和 $\beta$ 是固定的；竞赛者可在任意 $\alpha$ 处将摆锤从静止释放。求能得奖的 $\alpha$ 值。（把你的答案表成 $\cos\alpha=\cdots$ 的形式。）

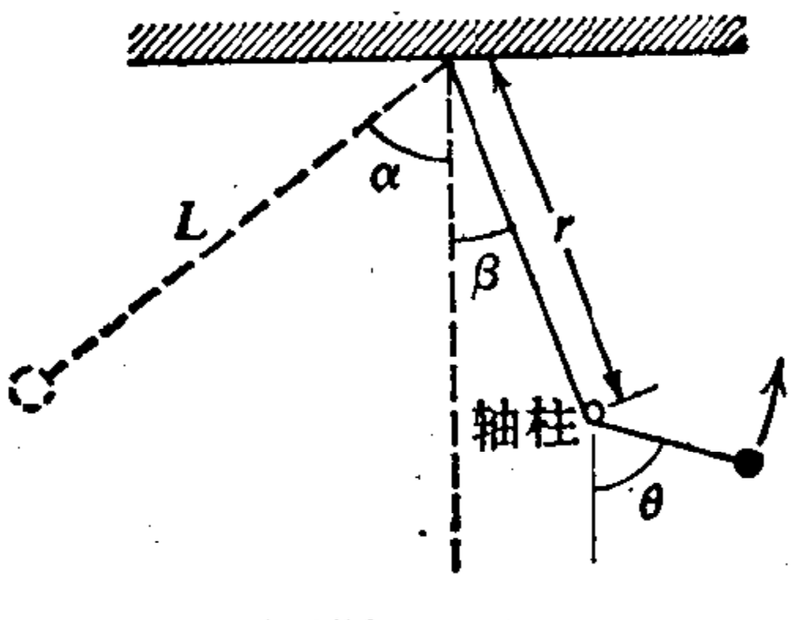
11-12　一无摩擦的气轨制成抛物线型 $y=\frac{1}{2}Cx^2$. 一物体沿这轨道振动，差不多是完全的简谐运动.

(a) 如果周期为 30 秒，轨道在 $x=\pm 2$ 米处比在 $x=0$ 处高出多少距离？

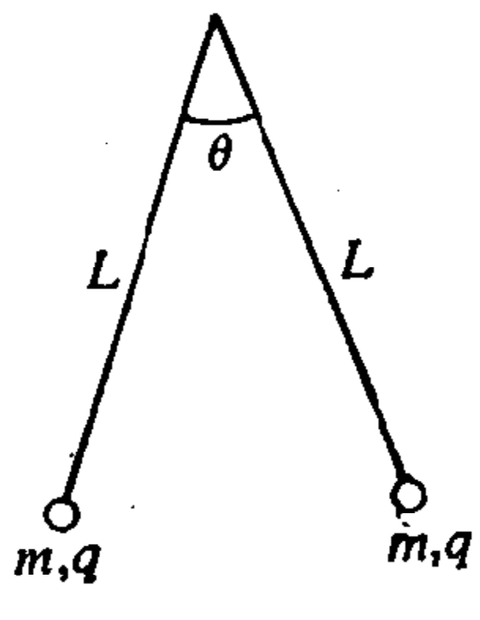
(b) 如果振幅为 2 米，物体沿正 $x$ 方向从 $x=-0.5$ 米运动到 $x=+0.5$ 米要花多少时间？(把简谐运动作为圆周运动的投影来描述对这题有用.)

11-13　一摆钟在地平面上保持准确时间. 如果将它放在高于地平面 20 米处，每星期它大概将快或慢多少秒？

(假设这摆钟是一单摆，$T=2\pi\sqrt{l/g}$，地球半径 $=6.4\times10^6$ 米，1 星期$\simeq 6\times10^5$ 秒.)




(习题 11-11)




(习题 11-14)

11-14　两个完全相同并带有相等电荷的乒乓球，用长度为 $L$ 的两根绳从同一点上悬挂下来(见图).

(a) 已知每球的质量为 $m$，平衡位置如图所示，问每球上的电荷是多少？(要记得，间距为 $r$ 的两电荷之间的静电力是 $F=kq_1q_2/r^2$.)

(b) 假设两球相向地稍为移动同样的距离，作适当近似以描述此后的运动. 求振动频率的表达式.

(c) 另一方面，如果两乒乓球是沿相同方向稍为移动同样距离，以后的运动将怎样？在这第二种情况下，它们是带电的或者只是用一无质量的杆分开，有没有关系？

11-15　证明，在地球的引力场中从无限远处来的自由落体到达地球表面时的速度，与从高度 $H=R_E$(=地球半径)处以地球表面的 $g$ 值等加速自由下落到达地面时的速度相同.

(b) 证明一物体从高为 $h$ ($h\ll R_E$) 处落下到达地球表面时的速率近似地为

$$\frac{dr}{dt}=v=(2gh)^{1/2}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h}{R_E}\right)$$

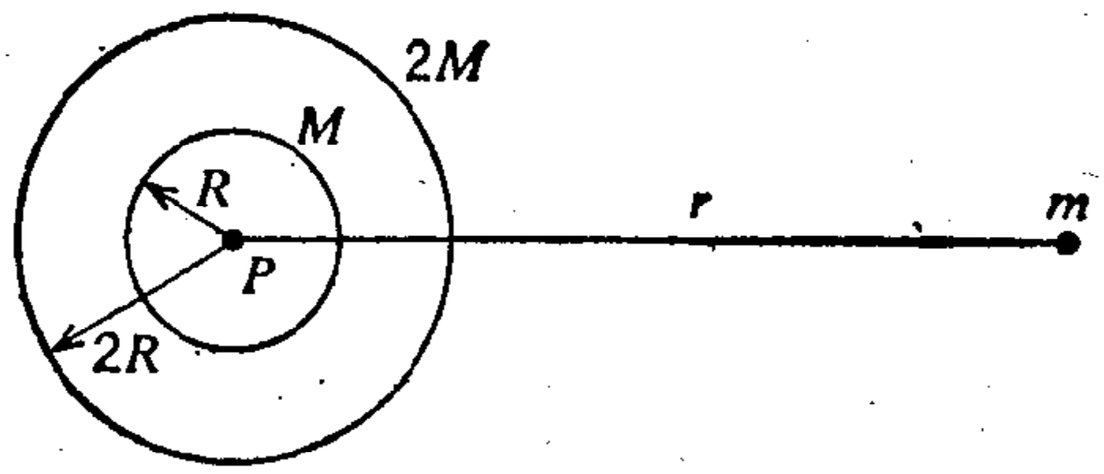
(c) 验证正文(272页)的说法：从一个引力球表面上逃逸所需的速率为 $v_0\sqrt{2}$，其中 $v_0$ 是一粒子在圆形轨道上掠过球面的速率.

11-16 一物理学家计划在他下矿井时通过观测摆的周期的变化来确定地球的质量. 他知道地球的半径 $R$，并测量了他所穿行过的地壳物质的密度 $\rho_s$，他下降的距离为 $h$ 和摆的周期的变化率为 $\Delta T/T$.

(a) 用这些测得的数据和地球的半径来表示地球的质量是多少.

(b) 假设地球全体的平均密度为三千米以上部分的平均密度的一倍.(这个假设实际上相当精确.)如果一摆钟在地面上是准时的，它在深矿井(三千米)处每天快多少秒？

11-17 图中所示是由两个均匀薄壁同心球壳构成的体系. 小球壳的半径为 $R$，质量为 $M$，大球壳的半径为 $2R$，质量为 $2M$，$P$ 点是它们的共同中心. 一质点 $m$ 在距离 $P$ 为 $r$ 处.




(习题 11-17)

(a) 在 $r$ 的下列三个范围内：$0<r<R$，$R<r<2R$，$r>2R$，这两球壳施于 $m$ 的引力 $F(r)$ 为何？

(b) 质点 $m$ 在 $P$ 点的引力势能为何？(取 $m$ 离 $P$ 无穷远时的势能为零.)

(c) 如果在离球壳非常远的地方将这质点从静止状态释放，它到达 $P$ 点时速率是多少？(设质点能够自由地穿过壳壁.)

11-18 假设月球是一个密度均匀的球，半径为 1740 米，质量为 $7.3\times10^{22}$ 千克. 设想有一直的光滑隧道穿过月球连结着它表面上的**任何两点**.

(a) 证明在重力作用下物体沿这隧道作简谐运动.

(b) 计算振动的周期.

(c) 把这结果同在月球表面以圆形轨道绕月球运行的卫星的周期作比较.

11-19 从一个质量为 $M$、半径为 $R$ 的球面上逃逸的速度 $v_e=(2GM/$

$R)^{1/2}$；质量为$m$的气体分子在温度为$T$时的平均速率$\bar{v}$约为$(3kT/m)^{1/2}$，其中$k$(=1.38×10⁻²³焦耳/°K)是玻耳兹曼常数. 详细计算表明，只有那些$v \lesssim 0.2v_c$的气体能在一行星的大气层中保留天文学时间(10⁹年)那样长久. 试用下面的数据判断 $H_2$、$NH_3$、$N_2$ 和 $CO_2$ 等气体有无任何一种能在地球、月球和火星上保持这样长的时间. $M_E=6.0\times10^{24}$千克，$R_E=6.4\times10^3$千米，$T_E=250°K$. 月球：$M=M_E/81, R=0.27R_E$ 和 $T=T_E$. 火星：$M=0.11M_E$，$R=0.53R_E$ 和 $T=0.8T_E$.

11-20 一双星系由两恒星组成，质量为$M$和$2M$，中心的距离为$D$. 作图表示一粒子的引力势能如何随它在通过两恒星中心的直线上的位置而变化. 你能推断一粒子沿这直线的可能运动吗？

11-21 一双星系由两个全同的恒星组成，每个的质量为$M$，半径为$R$，它们中心的距离为$5R$. 一粒子在一恒星的表面上最靠近另一恒星的点离开并逃逸到一实际上是无限远的距离.

(a) 不计两恒星的相互轨道运动，计算粒子的逃逸速率.

(b) 假设两恒星彼此总是以同一面相向(类似于月球对地球)，计算在这粒子的发射点处的轨道速率. 这一轨道运动的存在怎样影响逃逸问题？

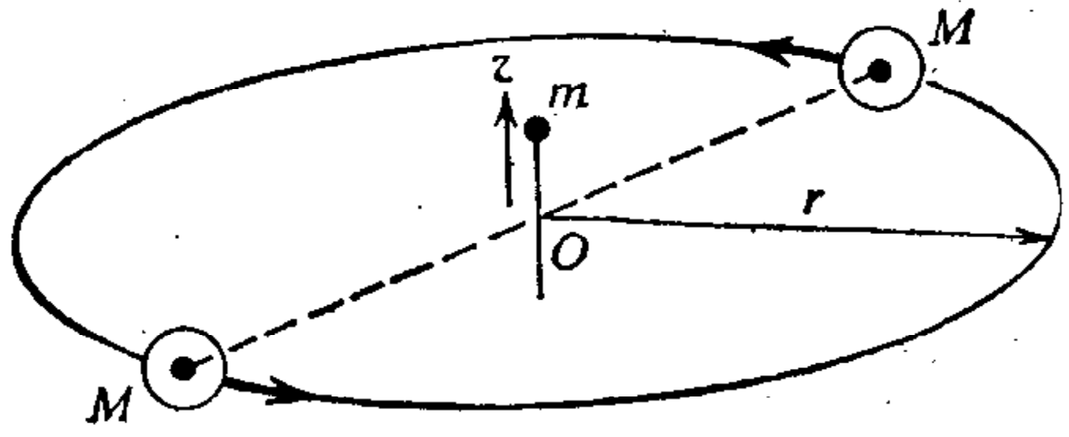
11-22 地球与月球相隔的距离 $D=3.84\times10^8$米. 不计它们对共同质心的运动，但要考虑它们的引力场，回答下列问题：

(a) 沿着去月球的方向，把一个 100 千克的有效载荷送到地面上方1000米的高度，必须作多少功？

(b) 计算这质量在月球表面和地球表面之间的势能差.

(c) 计算把有效载荷送到月球上所必需的初始动能. 它必须大于(b)中所给出的势能差，因为有效载荷必须克服一“势能山”. 求这山的顶点的位置，并计算从地球到它的势能差.

11-23 两个恒星，每个质量为$M$，绕着它们的质心运行. 它们的共同




(习题 11-23)

轨道的半径为 $r$（它们的间距为 $2r$）. 一质量为 $m(\ll M)$ 的小行星碰巧沿着这体系的轴线(垂直于轨道平面并通过质心的直线)移动, 如图所示.

(a) 如果小行星从质心出发移动一距离 $z$, 直接计算施加于小行星的力.

(b) 求出引力势能与位移 $z$ 的函数关系, 并用它来验证(a)题中的结果.

(c) 求出在 $z\gg r$ 和 $z\ll r$ 的情况下势能和力的近似表达式.

(d) 证明如果小行星离质心作微小位移, 它将作简谐振动. 把这振动的周期 $T_P$ 同这双星系的轨道周期 $T_0$ 作一比较.

11-24 一无摩擦的钢丝在水平面上的原点和 $x=a$, $y=b$ 这点之间拉开. 一粒珠子在钢丝上从原点出发, 并在一随位置而变化的力的作用下运动. 假如

(a) 力的分量为 $F_x=k_1x$, $F_y=k_2y$

(b) 力的分量为 $F_x=k_1y$, $F_y=k_2x$

($k_1, k_2>0$), 求这珠子在到达 $(a, b)$ 这点时的动能. 在一种情况中, 力是保守的, 而在另一种情况中则不是. 试通过考虑一不同的路径——例如从 $(0, 0)$ 到 $(0, a)$, 然后从 $(a, 0)$ 到 $(a, b)$——检验哪一个是保守的, 哪一个不是.

11-25 当两个核子(质子和中子)的间距 $r$ 大于 1 费（1 费 $=10^{-15}$ 米）时, 它们的相互作用的核力部分可以很好地用位势 $V(r)=-\lambda e^{-r/r_0}/r$ 来描述. 在这表达式中, $r_0=1.4$ 费, $\lambda=70$ 兆电子伏·费. (这个位势是湯川秀樹提出并以他的名字命名的.)

(a) 求作用于间距 $r>1$ 费的两个核子(的每一个)的核力的表达式.

(b) 计算相隔 1.4 费的两个质子的这种力, 并把它与这同一间距的库仑排斥力作比较.

(c) 估算核力减少到 $r=1.4$ 费时之值的 1%时的间距. 在这间距下的库仑力是多少?

(d) 最后的结果说明为什么湯川勢不出现在我们的宏观经验中. 注意 $r_0$ 表征着这种作用显得是重要的距离范围与核力相反, 万有引力和库仑力称为力程为无限的力. 指出为什么这样的描述是恰当的.

11-26 图 11-24(b)示明质量为 $2M$ 和 $M$ 的两个球的引力等势面和力线的图形. 这图的一种作法如下. 我们知道, 在任何一点 $P$ 的引力势为

$$\varphi_P=-\frac{G(2M)}{r_1}-\frac{G(M)}{r_2}$$

其中 $r_1$ 和 $r_2$ 是分别从两球心量度的. 等势面由 $\varphi_P$=常数确定. 为了勾画这些等势面，作一组以质量$M$的球为心的圆，其 $1/r_2$ 之值为算术数列，例如 $1/r_2=1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, \cdots$. 然后，以质量 $2M$ 的球为心，作一组半径为 $r_1$ 的圆，$r_1$ 为 $r_2$ 之值的两倍. 由于 $\varphi_P \sim (2/r_1)+(1/r_2)$，每一对相应的圆代表 $2M$和$M$对$\varphi$ 的相等贡献. 例如，对于 $10r_2=2.85$ 单位和 $10r_1=10$ 单位，$\varphi_P \sim (2/1\cdot0)+(1/0.285)=5.5$. 但是 $\varphi_P \sim 5.5$ 也可以在下列其他各对圆的交点得到：$r_2=0.33, r_1=0.80$; $r_2=0.40, r_1=0.67$; $r_2=0.67, r_1=0.50$. 把这些具有相同$(2/r_1)+(1/r_2)$值的交点连起来，就给出了一个等势面，其他等势面也可以用同样的方法画出. 一旦得到等势面，力线就可以作为处处垂直于等势面的线画出.(读者自己可以试着画画看.)

11-27 一科学幻想故事讲到一空间探测器在经过一中子星附近之后被收了回来的事. 发现装在这探测器中的一头不幸的猴子被肢解了. 得到的结论是，探测器所受到的巨大引力梯度$(dg/dr)$ 把猴子给撕裂了. 已知探测器曾经过一质量为 $10^{33}$ 克(约为太阳质量的一半)、半径为 10 千米的中子星的表面上空 200 千米 内的地方，这一解释合理吗？(探测器当时是处在自由降落状态.)

11-28 用一条笔直的滑运道把物品输送一水平距离. 滑运道的斜率可以自由选择. 物品以可忽略的速度到达滑运道的顶点，而且滑运道要选择得使运输时间最少.

(a) 如果表面是无摩擦的，需时最少的滑运道的倾角是多少？

(b) 如果摩擦系数为 $\mu$，相应的倾角是多少？

(c) 如果对给定的水平距离要设计一运动场滑梯使滑行时间最短，并且设小孩-滑梯面的摩擦系数为 0.2，滑梯要与水平成什么角度？(不计滑梯下端的弯曲部分.)

(d) 如果遇到(a)的最佳化问题，而又允许曲线形滑运道，你能粗略地设想最佳的设计形状是什么吗？

11-29 电荷为 $q$、质量为 $m$ 的粒子在匀磁场 $\mathbf{B}$(不随时间改变的)中运行，所受的磁力 $\mathbf{F}=kq\mathbf{v}\times\mathbf{B}$(其中的常数 $k$ 在 MKS 单位制中等于 1).

(a) 证明对于粒子的任意运动，作用于粒子的这样一种力作的功为零.

(b) 有这样的情况：一运动的带电粒子受一大小不变、方向与瞬时速度相反的力 $F_D$ 的作用而减速. (例如，沿一带电粒子的径迹的原子电离所引起的单位距离能量损失差不多是常量，这相应于一减速力.)证明，如果一粒子

在 $t=0$ 时具有速率 $v_0$，则在 $t>0$ 时，它的速率将是 $v(t)=v_0-F_D t/m$ 直到 $t=mv_0/F_D$，在这时刻以后，粒子将停住不动．注意，磁场的存在将不会影响这结果．

(c) 在只有磁力作用的情况下，初速度为 $\mathbf{v}_0$（垂直于 **B**）的粒子作圆周运动，半径 $r=mv_0/kqB$，圆频率 $\omega=kqB/m$．证明，此外还受到(b)中所描述的力作用的粒子要沿一螺旋线向内运动，并且到粒子静止之前它所作螺旋运动的圈数为 $(kqBv_0/2\pi F_D)$．

11-30 (a) 求在一薄圆盘（厚度 $d$，半径 $R$，密度 $\rho$）的质心上方距离为 $h$ 处的引力场的表达式．在计算这场时，假设面密度 $\sigma=\rho d$ 集中在试验点下方距离为 $h$ 处的一厚度可忽略的圆盘中．只要 $h\gg d$，这将给出一精确结果，并减少计算的复杂程度．注意，对于 $R\to\infty$，这计算与高斯定理的预期一致，这是必然的．

(b) 对于 $R=2h$，$R=5h$ 和 $R=25h$ 的情形，把(a)中得到的场表示成 $2\pi G\sigma$ 的分数．

(c) 当一摆钟的摆锤悬挂在一厚为 1 厘米的铅板上方 5 厘米时，这摆钟每年要快多少秒？（假定没有铅板时摆钟是准确的．）

11-31 任何质量的物质都具有一引力“自能”，这是由它的各部分间的引力吸引产生的．

(a) 证明一质量为 $M$、半径为 $R$ 的均匀球的引力自能等于 $-3GM^2/5R$．你可以这样来计算：把这球上各薄球壳所有可能的两两之间的相互作用积分起来（并记住，在这一计算中，每一球壳算了两次），直接求出这球的势能，或者，也许更为简单，想象这球是从无限远处取来物质逐层地凑集而成的．

(b) 计算地球的引力自能的数量级．核对一下它在能量标度表 10-1中所应列的地位．