美国M·I·T·物理学导论丛书

A·P·弗伦奇 著

牛顿力学 3

郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

美国M·I·T·物理学导论丛书

牛 顿 力 学

3

A·P·弗伦奇 著
郭敦仁 何成钧 译

人民教育出版社

内 容 简 介

本书根据美国 W. W. Norton & Company, Inc. 出版的 A. P. French 著《牛顿力学》(Newtonian Mechanics)一书1971年版译出.

《牛顿力学》为美国麻省理工学院教育研究中心的《M. I. T. 物理学导论丛书》(M. I. T. Introductory Physics Series)中的一卷. 中译本按原书的三个部分分成三册出版, 第一册为"牛顿动力学入门"; 第二册为"经典力学的运用"; 第三册为"专题", 第三册包括三章: 惯性力和非惯性系; 有心力作用下的运动"; 广延系统和转动动力学, 以及附录. 本册还包括本书第一、第二、第三册的全部习题的答案.

本书可作为高等学校物理学课程的教学参考书, 也可供有关科技人员参考.

美国 M·I·T·物理学导论丛书

牛顿力学

3

A·P·弗伦奇 著

郭敦仁 何成钧 译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.375 字数 190,000

1982年2月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 00,001—16,300

书号 13012·0720 定价 0.77 元

目　录

第三篇　若干专题

第十二章　惯性力和非惯性系……3

§1　从无加速参照系中观察到的运动……4

§2　从一加速参照系中观察到的运动……5

§3　加速参照系和惯性力……7

§4　加速度计……11

§5　加速参照系和重力……15

§6　离心力……18

§7　离心机……23

§8　科里奥利力……26

§9　旋转木马上的动力学……31

§10　在一转动参照系中的普遍运动方程……32

§11　作为一转动参照系的地球……37

§12　潮汐……43

§13　潮汐高度；太阳的作用……49

§14　寻求一基本惯性系……51

§15　关于惯性的起源的揣测……56

习题……61

第十三章　有心力作用下的运动……71

§1　问题的基本特点……71

§2　等面积定律……73

§3　角动量守恒……76

§4　有心力运动中的能量守恒……79

§5　有效势能曲线的应用……81

§6　有界轨道……84

§7　无界轨道……85

§8　在一反平方力场中的圆轨道……89

§9 圆轨道的微扰……91
§10 行星的椭圆轨道……94
§11 由椭圆推导出反平方定律……100
§12 椭圆轨道：解析处理法……102
§13 在一椭圆轨道中的能量……107
§14 地球表面附近的运动……109
§15 行星际的输运轨道……110
§16 根据初始条件计算轨道……112
§17 一族相关联的轨道……114
§18 作为两体问题的有心力运动……116
§19 从力的定律推算轨道……118
§20 卢瑟福散射……123
§21 散射截面……128
§22 一个历史性的简述……132
习题……136
第十四章 广延系统和转动动力学……147
§1 多粒子系的动量和动能……147
§2 角动量……152
§3 作为一基本量的角动量……157
§4 角动量守恒……158
§5 广延物体的转动惯量……163
§6 有关转动惯量的两个定理……168
§7 转动物体的动能……172
§8 角动量守恒和动能……176
§9 扭转振动和刚性摆……181
§10 在力和转矩共同作用下的运动……185
§11 冲力和转矩……190
§12 回转运动的背景……193
§13 稳定进动的回转仪……200
§14 关于进动的补充……203
§15 导航回转仪……206
§16 作为回转仪的原子和原子核……208

§17 用$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$来说明回转运动……210
§18 章动……214
§19 二分点的进动(岁差)……217
习题……223
附 录……231
§1 米制单位……231
§2 换算因数……232
§3 一般常数……234
参考书目……235
一些经典著作……235
传记……236
强调历史方面和哲学方面的著作……237
天文学方面……239
一些一般性教科书……241
力学教科书……241
工程力学教科书……243
专门课题……244
习题答案……246

第三篇

若干专题

在开始学习力学时，人们有这样一种印象：在科学的这个分支里一切都是单纯的、带根本性的而且一成不变的．很少有人去怀疑存在着一个重要的、将近三百年没有人注意到的线索，这个被忽视的线索是和力学的基本概念之一——质量——有关的．

A. 爱因斯坦和 L. 因费耳德，
《物理学的演化》(1938).

第十二章　惯性力和非惯性系

设想你坐在一辆汽车里，在很平滑的道路上行驶．你正抱着一个沉重的包．车在行动着，但从你所坐的地方你看不到车速计．突然，你有了这么一个感觉：这个包不再仅仅是压在你的膝上，而且还开始水平地向后推你．尽管除了你以外这包没有同任何物体接触，当你抱着它使它相对于车和你不动时，这效果就象是有一个力作用于它并传递给你一样．如果你不把它这样抱住，那它就真会被推向后面．你注意到从车顶上由一条原先是竖直的线悬挂着的吉祥物正是这样被推向后面了．

你怎样来解释所观察到的这个现象呢？如果你对于这类现象从前有过经验的话，你会毫不迟疑地说这是与汽车的速度增加（即一正加速度）相关联的．如果你对牛顿定律有充分的理解，那么尽管这是你第一次经验到的这种现象，你也会得到同样的结论．汽车的加速度要求一切同它相联系的物体有一加速度；根据$F=ma$，这个包的加速度需要你的手给它一个大小恰当的力．然而，感觉到的却象是包裹受到某一外加的力——一"惯性力"——只要企图改变一个物体的运动状态，它就起作用．

这些外加的力构成重要的一类力．在傅科摆、高速离心机的作用、宇航员在发射过程中受到的所谓 g 力，以及旋风在北半球和南半球所采取的旋转方向这一类现象中，起作用的就是这类力．然而，在以下的意义上，这些力都有同一独特之点，即无法把它们的来源追溯到某个其他物理体系，而对所有以前考虑过的力，这却是可能的．例如，引力、电磁力和接触力的来源是别的质量、别的电

荷、或者同别的物体的“接触”. 但是当一个物体被加速时所出现的附加力却没有这样的物理客体作为其来源. 这些惯性力是不是真实的力呢？这问题，以及它的答案，是与我们用以分析运动的参照系的选择紧紧相连的. 因之，让我们从一个无加速参照系的角度对动力学作一回顾来开始这一分析.

§1 从无加速参照系中观察到的运动

一个无加速的参照系属于我们称之为**惯性系的**那一类参照系. 在第六章中阐述动力学的基本思想时，我们曾看到，这些参照系(伽利略的惯性定律在其中成立)具有独特的重要意义. 我们还看到过，如果认准了一个这样的参照系，任何别的、相对于它具有任意恒定速度的参照系也是惯性的，而且我们有关作用于一个物体的力的推断在两者中是一样的.

如我们所知，作为一个好的一级近似，地球表面就确定着一个惯性系. 因之，一切在地球上以恒定速度运动的任何系统也是如此. 伽利略本人是对这一事实表示出明确认识的第一个人，而他所讨论过的一个方面对于我们现在的起点是有用的. 在他的《关于两个世界体系的对话》中，他支持哥白尼的太阳系观点而反对托勒密，指出从一条船的桅杆顶上落下的一石块总是落在桅杆的脚下，不管这条船是否在动. 伽利略由此论证说，一个落体的竖直路径并不足以使人得出地球是静止不动的结论. 这里是在一个相对于地球从静止而下落的物体和另一个相对于船从静止而下落的物体之间进行比较. 如果我们只考虑一个相对于一运动着的船从静止而下落的物体，它的路径在以船为参照系中是竖直的，而在以地球为参照系中则是抛物线. 更普遍一点说，如果我们考虑一个相对于地球以任意速度抛出的物体，它随后所走的路径从不同的惯性参照系中来看会具有各不相同的形状(参看图 12-1)，但所有的都

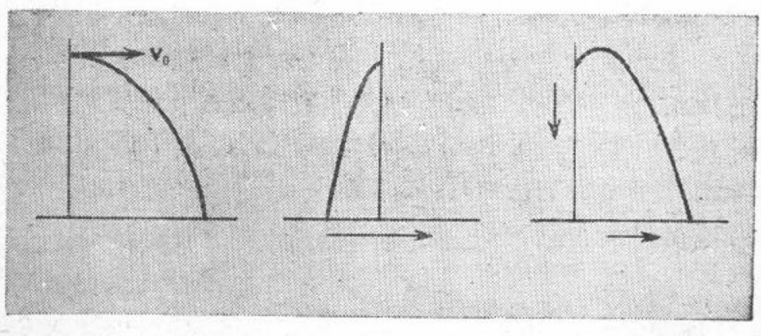


图 12-1 (a) 地球表面上观测到的、在重力作用下的抛物线轨迹，初速 v_0 在水平方向. (b) 在水平速度大于 v_0 的参照系中观察到的同一运动. (c)在既有水平速度又有铅直速度的参照系中观察到的同一运动.

是抛物线，而且分析起来全都表明落体具有竖直加速度 g，来自重力 $\mathbf{F}_g(=m\mathbf{g})$. 现在我们把这结果同人们在一自身具有加速度的参照系中所发现的情况对比一下.

§2 从一加速参照系中观察到的运动

假定在一相对于地球表面有恒定水平加速度的参照系中，一物体从静止而下落. 我们来看看它随后的运动相对于地球和相对于加速系会是什么样子. 我们取这加速度的方向作为正 x 轴，并竖立两个直角坐标系：相对于地球静止的 S 和固定于加速参照系的

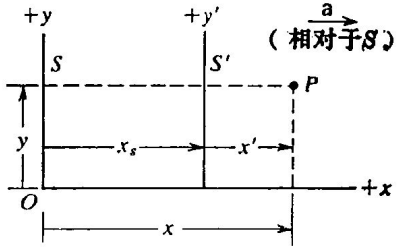


图 12-2 在两个作加速相对运动的参照系中，一粒子的诸坐标之间的关系.

S'(图 12-2). 令这两个参照系的原点在 $t=0$时重合,并假定在这时刻 S' 相对于 S 的速度是 v_0. 两坐标系的纵坐标以向上为正,物体是在 $t=0$ 从静止的位置 $x=x'=0, y=y'=h$ 下落的.

在 S 和 S' 中看起来轨迹会是什么样子呢?对于在 S 中的观察者来说,答案是我们已知的. 对于他来说,这物体是在以一个初始水平速度 v_0 而自由下落的[图 12-3(a)]. 因之我们有

$$(\text{在 } S \text{ 中观测到的})\begin{cases} x=v_0t \\ y=h-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

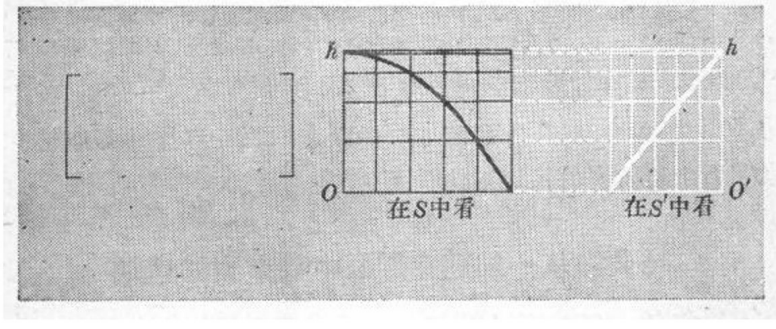


图 12-3 (a) 在重力下一粒子的抛物线轨迹,参照系为地球.(b)同一运动,在具有恒定水平加速度的 S' 参照系中去看.

这两个方程唯一地确定物体在 t 时刻的位置,但要描述在 S' 中观测到的运动,我们必须把这些结果用 S' 参照系中测得的坐标 x' 和 y' 表达出来. 为了转换到 S' 参照系,我们把下式代入

$$x'=x-x_s$$

$$y'=y$$

其中 x_s 是 S 和 S' 的原点沿 x 轴的距离(见图 12-2).

我们知道

$$x_s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

把这些值代入，得

$$(\text{在 } S' \text{ 中观测到的})\begin{cases} x' = v_0 t - \left(v_0 t + \frac{1}{2} a t^2\right) = -\frac{1}{2} a t^2 \\ y' = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

因之，在 S' 中观测到的粒子的路径是一条**直线**，其方程为

$$x' = -\frac{a}{g}(h - y')$$

见图 12-3(b)．在这加速的参照系中，物体看来不仅有一恒定的向下的加速度分量，而且还有一个在 $-x$ 方向的恒定水平加速度分量，从而使它沿着一条非竖直的直线路径运动．[一个类似的简单例子是第三章中所描述的枪击猴子的故事．如果我们选择那下落的猴子静止的参照系来描述这些事件，其结果就几乎是不证自明的了．对这一参照系来说，子弹正好是沿着一条直对猴子的直线飞行，而地面却以 9.8 米/秒^2 加速向上升．]

图 12-3(b)所表示的、不为人们所熟悉的运动并没有什么神秘之处．它是从一个本身在加速着的参照系去描述普通的自由下落运动的直接的运动学结果．我们可以充分有效地利用这条完全在 S' 里面测得的路径去揭示这一参照系的加速度，只要真正的竖直方向为已知．但是，通过动力学的方法来了解这加速度却具有更大的意义．这正是下一节所要讨论的．

§3 加速参照系和惯性力

从上面所说，惯性系显然有一个特殊的地位．所有的惯性系在以下的意义上是**等价的**，即用动力学实验不可能揭示它们在任何绝对意义上的运动——只有它们的相对运动才有意义．从这一动力学的等价性就有了被称为牛顿的相对性原理：

没有任何动力学观测使我们能认为一个惯性系比另一个

惯性系更优越.因而没有任何动力学实验会告诉我们,我们是否正以一恒定的速度通过空间.

可是,正如我们刚刚看到的,两个参照系之间的相对加速度却是以动力学方法可以侦断出的.正如在加速参照系中观测到的,物体具有意料所不及的加速度.因之,由于牛顿定律在力和加速度之间建立了连系,我们就有了一个定量的根据,从测得的加速度来计算相关联的惯性力的大小.反之,更为重要的是,我们有了一个动力学根据,从有关的惯性力推断出一相应加速度的大小.这是所有称为加速度计的仪器的基本原理.它们是根据某个物理质量的惯性而工作的.

为了使分析清楚明白,我们考虑一粒子P相对于上一节所讨论过的、并在图 12-2 中表示出来的那两个参照系(一个惯性系S和一加速系S')的运动.我们还是有

$$x=x'+x_s$$

$$y=y'$$

因之,在这两个参照系中测得的、P的速度分量由下式给出

$$u_x=u_x'+v_s$$

$$u_y=u_y'$$

其中v_s在任何特定时刻都等于dx_s/dt.如果S'有一恒定的加速度,我们可以令$v_s=v_0+at$,但是加速度恒定这条件对于我们的分析是完全不必要的.

对这些瞬时速度求微商,我们就得到

$$a_x=a_x'+a_s$$

$$a_y=a_y'$$

其中a_s是参照系S'的瞬时加速度.虽然我们选择了用笛卡儿分量来开始从事计算,但是很明显,一个单独的矢量陈述就把在S中测得的、P的加速度 **a** 和在S'中测得的、它的加速度 **a**′ 以及S'本身

的加速度 $\mathbf{a}_s$ 连系起来了：

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\mathbf{a}_s \tag{12-1}$$

以 m 统乘方程(12-1)，我们认出左方给出作用于 P 上的(总的)实在力 $\mathbf{F}$，因为这决定着在一惯性系中测得的它的加速度的实在原因．这就是说，在 S 系中

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a} \tag{12-2}$$

但是，利用(12-1)式，我们有

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}'-m\mathbf{a}_s \tag{12-3}$$

我们现在遇到了这个关键性的问题：从在加速系 S' 中作观测的观点，如何解释方程(12-3)？

牛顿的观点——作用于一个物体的合力是加速运动的原因($\mathbf{F}_合=m\mathbf{a}$)——是如此深深铭刻在我们的思维中致使我们在一切时候强烈地要保存这一关系．当我们观察到一个物体在加速运动时，我们把它解释为加在这物体上的力的作用．我们能否为现在这加速参照系找到一个形式上是 $\mathbf{F}_合=m\mathbf{a}$ 的数学结构呢？能的．把除了 $m\mathbf{a}'$ 以外的项都移到左边去，而把这些项作为作用于 m 的力来处理，这样得到一合力 $\mathbf{F}'$，它正好具有能产生加速度 $\mathbf{a}'$ 的正确值：

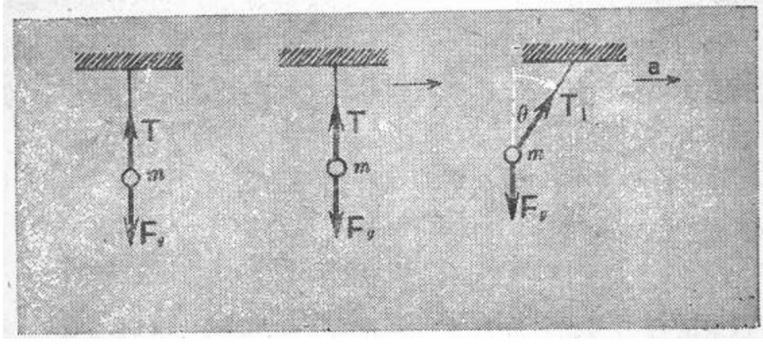
$$\mathbf{F}'=\mathbf{F}-m\mathbf{a}_s=m\mathbf{a}' \tag{12-4}$$

S' 系中的合力因此是由两部分组成的：一个具有分量 F_x 和 F_y 的"实在"力 $\mathbf{F}$，和另一个等于 $-m\mathbf{a}_s$ 的"虚假"力，它来源于这样一个事实：参照系本身具有加速度 $\mathbf{a}_s$．(12-4)式的一个重要特例是"实在"力 $\mathbf{F}$ 为零的情形，这时，在 S' 中观测到的粒子是在惯性力 $-m\mathbf{a}_s$ 的单独作用下运动．

(12-4)式所表达的结果并不仅是一个数学戏法．从一个在加速系中的观察者的观点，这惯性力是确实存在的．如果有人在 S' 中企图使一个物体"静止"而用弹簧把它拴着，就会观察到弹簧被

拉长或压缩了，正好提供一个力来抵消惯性力．因之，把这样的力说成是“虚假的”是有点使人误解的．人们期望有一个合适的标记以便区别惯性力和那些来自于真正的物理的相互作用的力，因而常用“赝力”这个词．然而，即使如此，对于真正处于加速系中的某个人所感受到的这种力来说，这还是不太公道的．也许最初的、纯粹是技术性的名词“惯性力”仍是最好的描述，它是不带有任何引起争论的色彩的．

作为一个例子，说明同一动力学情况可以从不同的观点来描述，一方面是一个惯性系，另一方面是一个加速系，让我们来考察一个从车顶上悬挂下来的单摆．设摆锤的质量为m．从附着于地球(假定是不转的)的参照系S的观点应用$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$，可以对车的可能运动作出力的隔离体图如图 12-4．在每一情形中，都只有两个



(a)　　(b)　　(c)

图 12-4　(a)在一个静止的车中，(b)在以匀速运动的车中，(c)在加速运动的车中，作用于一个悬挂着的质量的力．

“实在的”力作用于摆锤：重力$\mathbf{F}_g$和绳的张力$\mathbf{T}$．(a)和(b)两种情形没有加速度，因而应用$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$没有多大意义．在(c)的情形中，摆锤经受着一向右的加速度，悬绳同竖直方向有一角度，绳中的张力也有所增加(由T到T_1)．图 12-5(a)的隔离体图使我们在应用$\mathbf{F}=m\mathbf{a}$时得

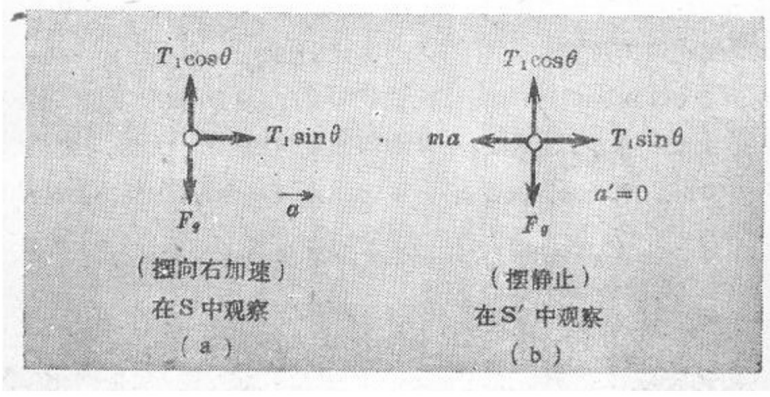


图 12-5　作用于一物体上的力，物体相对于一加速运 动的车静止
(a)在一惯性系中所作判断，(b)在加速参照系中的判断.

水平分量：　$T_1\sin\theta=ma$

竖直分量：　$T_1\cos\theta-mg=0$

然而，在 S' 系中，由于参照系的加速度，就会在与参照系的加速度相反的方向上有一个大小为 ma 的附加力. 图 12-5(b)给出在 S' 中看到的摆锤的隔离体图. 摆锤处于平衡状态. 因而应用 $\mathbf{F}'=m\mathbf{a}'$ 时(由于 $\mathbf{a}'=0$)有

$$T_1\sin\theta-ma=0$$

$$T_1\cos\theta-mg=0$$

因之，单摆处于平衡时的倾角由下列条件决定：

$$\tan\theta=\frac{a}{g} \tag{12-5}$$

§4　加 速 度 计

(12-5)式所表达的结果为简单的加速度计提供了一个理论根据. 如果我们先确定了真正的、表示 $\theta=0$ 的竖直方向，那么在以后的任何瞬间就可以通过方程

$$a = g\tan\theta$$

由所观测到的单摆倾角得知加速度 a 之值. 例如, 一个飞机的乘客在起飞过程中把他的领带或钥匙链自由地挂在他的手指上, 他就可以粗略地估计出起飞时的加速度, 这通常大致是不变的[图 12-6(a)]. 如果他同时记录下从起跑到飞起来的时间, 他就能对

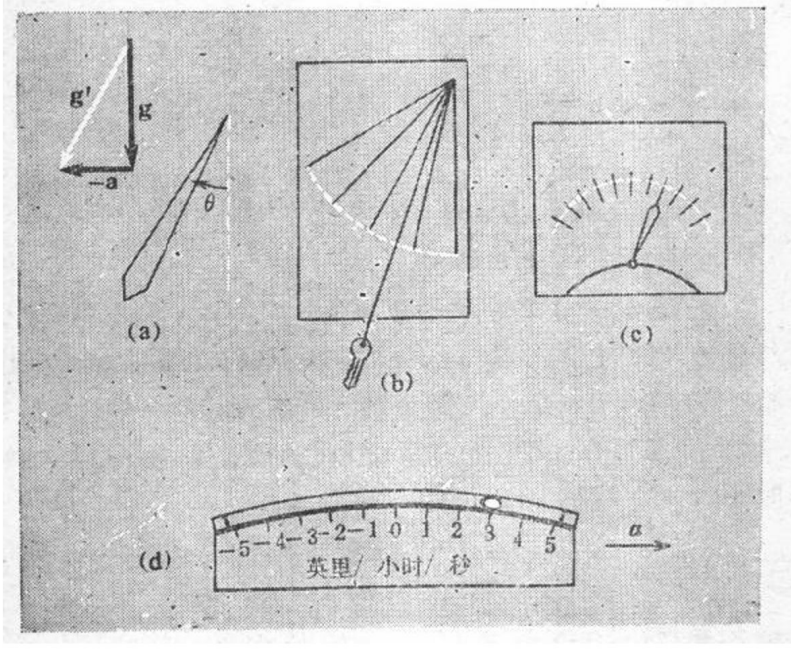


图 12-6 (a)在一加速飞行器中平衡地悬挂着的一条领带. (b) 以测出单摆的平衡倾角为根据的定量加速度计. (c)木工用的水平仪可用作加速度计(有一根可以绕一支点转动的指针浸在密度较大的液体中). (d)在一根装着液体的弧形管中封有一小气泡, 可直接读出加速度的大小.

助跑的距离和飞起时的速率作出相当好的估计. 如果他还想做得好些, 他还可以带一张如图 12-6(b)那样的卡片, 在卡片上象一个测角计那样标出角度, 甚至以某种方便的加速度量度单位(如英里/

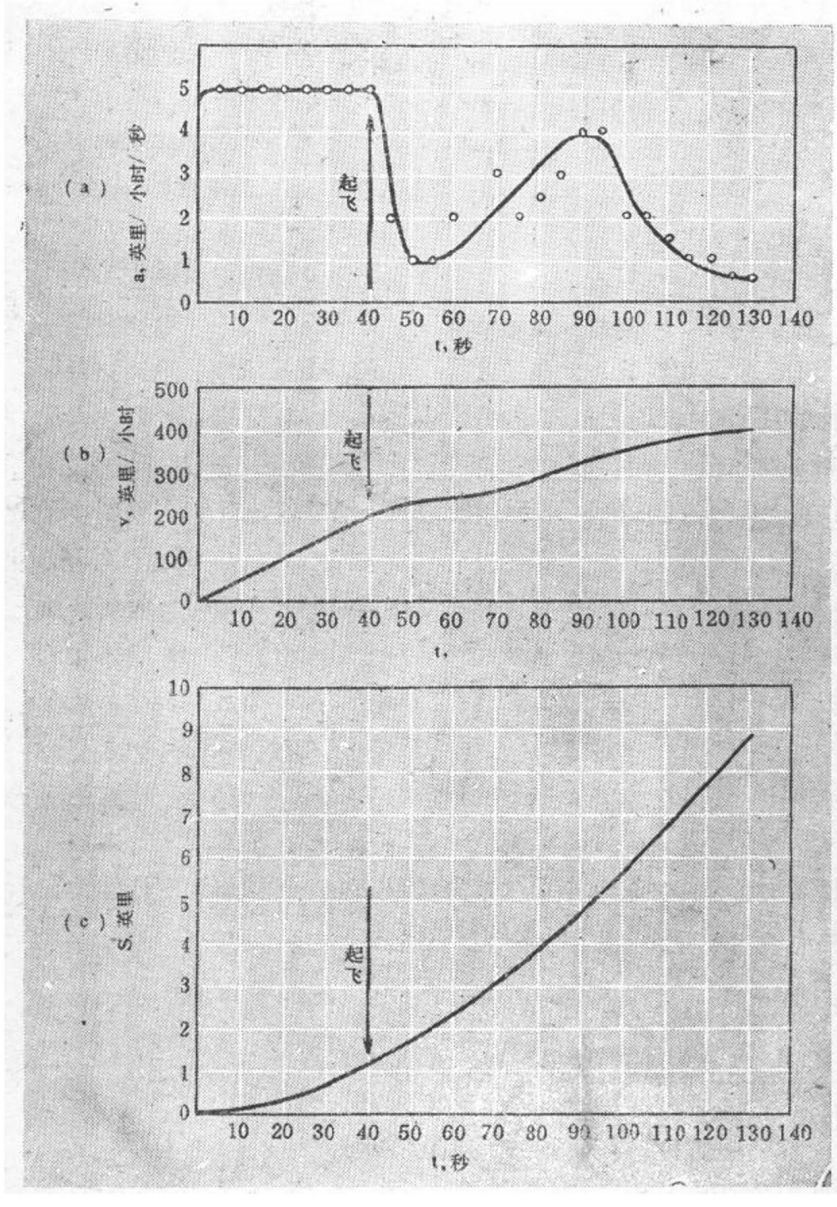


图 12-7 (a)用图 12-6(d)的加速度计记录下来的民用喷气飞机飞起前后的加速度.加速度计的装法是使它只记录加速度的水平分量. 注意 a 在飞起来的瞬间的迅速下降.(b)从(a)图的曲线用作图法求积分而得到的速度-时间曲线.(c)从(b)图用作图法求积分而得到的距离-时间曲线.

小时/秒)标出①. 另一种简单的加速度计是现成的、象木工所用的那种水平仪，有一完全浸没在一液体中可以绕支点转动的浮体[图 12-6(c)],所有这些装置都是利用这一事实：在一加速系中铅垂线的自然方向是由重力加速度矢量 **g** 和参照系本身的加速度 **a** 的负值的组合决定的.

把一段塑料弯成一圆弧，用水或丙酮充满直到只剩下一个小气泡[见图 12-6(d)]，便可制成一个和上面所说的几种装置同一基本类型而相当灵敏的加速度计，它还具有反应快和迅速达到平衡(即没有过分的超标或摆动)的优点. 图 12-7(a)表明用这样的加速度计在一架喷气式客机起飞过程中记录下来的加速度-时间曲线. 图 12-7(b)和(c)表明用数值积分法从这记录得出的速度和整个走过的距离.

更为高级的一类加速度计可以这样来制作：用带有电测量技术的、极为灵敏的应变规来详细记录一个附有重物的弹性体系的形变. 图 12-8 是这类加速度计之一的示意图. 当装载着这加速度计的物体经受一加速度时，摆锤所感受到的惯性力就会使它偏移. 然而，如图所示，摆锤是电容电桥的两个电容的一部分，这就会使电桥稍稍不平衡. 于是就得到一个误差信号，它既用来量度加速度又用来驱动一个线圈使摆锤受一回复力. 这种加速度计能具有从大约 10^{-5}"g"到 $10g$ 以上的有效范围.

---

① 在 Elizabeth A. Wood 所写的一本叫做 *Science for the Airplane Passengir* (《为飞机乘客用的科学》Ballantine, New York, 1969)的书的封底上有一个这种测角计，并在书中对它的用途作了说明. 书中还描述了大量的其他方法告诉飞机乘客如何能够在他们的旅途中发现和应用科学原理.

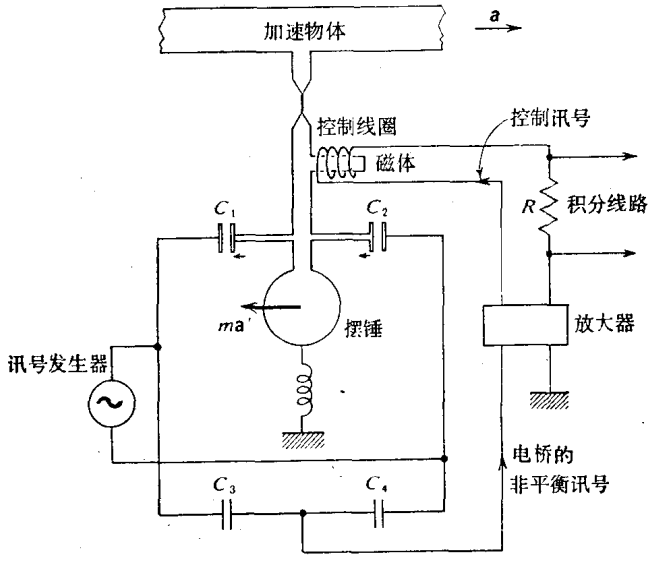


图 12-8　电力机械加速度计系统.

§5　加速参照系和重力

在所有关于加速参照系的讨论中，我们都假设观察者知道“哪个方向是上”——也就是说，他们知道重力的大小和方向并且(如我们以上所曾作的)把它当作一个“实在的”力，其来源是地球的引力质量. 但是假定我们的参照系是一间完全封闭、与外界无联系的屋子. 那么通过全部在屋子里进行的动力学实验，我们能作出关于重力和惯性力的什么推断呢?

我们仍假定在附着于地球的参照系 S 中有一观察者. 这观察者并不孤立；他能够证实一个从静止下落的粒子的加速度是沿着一条垂直于地球表面因而是指向地球**中心**的.① 他能够作出正统

① 我们仍略去地球的转动，这转动使我们的说法不十分确切. 一个落体并不正好沿铅垂线下落，当讨论转动参照系时，我们将回到这问题.

的结论：这加速度来源于地球的巨大质量的引力．我们的第二个观察者被封闭在确定为参照系 S' 的那间屋子里．开始，是知道他的屋子的地板是水平的和墙壁是竖直的．在随后的测量中，S' 中的观测者发现一铅垂线和他原先认为是竖直的方向成一角度，而从静止落下的物体是平行于他的铅垂线下落的．在 S 和 S' 中的观察者用无线电相互报告了他们得到的结果．S' 中的观察者于是推断他有三种不同的方法来解释在他的参照系中观察到的、作用于所有粒子的、平行于地板的分力．

1. 在重力之外，于 $-x$ 方向有一惯性力，这是由他的参照系在 $+x$ 方向的加速度引起的．

2. 他的参照系并无加速，但是在他的封闭房间外面的 $-x$ 方向放置了一个质量巨大的物体，从而对于他的参照系中的所有质量都有一外加的引力在作用着．

3. 他的房间被倾斜了一 θ 角，而且在房间的下面又放置了一个质量使总重力增加．（这接近于不过是第二种解释的一个变相解释．）

在假定这三种解释都能同等好地说明在 S' 中所发生的一切时，我们必须假设在 2 和 3 两种可能解释中那外加的重物在整个房间里产生的重力场基本上是均匀的．

依据完全是在封闭的房间内部所作的一切动力学实验，是无法区别这些假设的，参照系的加速度所产生的效应完全同于引力的吸引效应，惯性力和引力都与被研究的物体的质量成正比，检察和测量它们的过程也完全一样．此外，它们都可以用一个在任何给定点有一定强度和方向的**场**（一加速度场）的概念来描述，放在这场中的一个物体毋需同它的环境有任何接触就感受到一定的力．这一切仅仅是一个有趣的类似，还是具有更深的含义呢？

在对此深思熟虑之后，爱因斯坦断定这里确实有着某种带根

本性的事物.特别是引力和惯性质量完全严格地成比例(在现今所能确定的程度上)这一点使他提出：至少在一个有限的区域内,一个引力场和一参照系的普遍加速度之间是没有任何物理上的区别可言的(参看图 12-9).

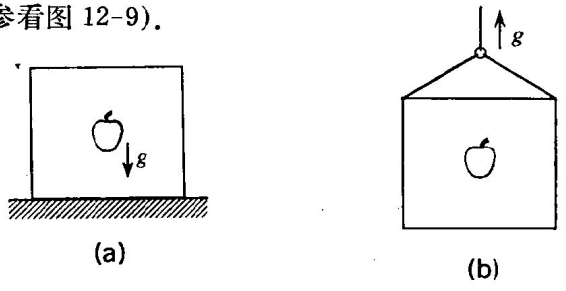


图 12-9 (a)在一个静置于地上的盒子内落下的苹果.(b)在外层空间中①一加速的盒子内的苹果,它的运动与前一情形(a)无法区分.

他于 1911 年② 宣布了这一点——这就是他的著名的等效原理.引

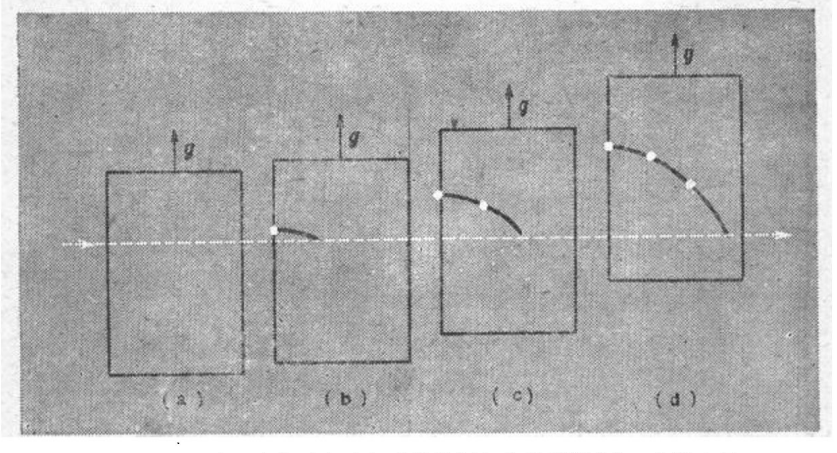


图 12-10 在一个竖直向上加速的封闭室中所观察到的一个沿水平方向运动的物体的相续行程.

① 意思是脱离了地球引力的空间——译者注.

② A. Einstein, Ann. Phys. (4)35, 898(1911), 见 *The Principle of Relativity*(《相对论原理》)一书的中译本.

力和惯性质量成比例一事现在成了必然的而不再是经验的、以及不可避免地是近似的了．它还意味着，通过一引力场的**任何东西**都必然要遵循一条弯曲的路径，因为如果我们用我们自身的参照系的等效加速度来替代引力场，则根据纯粹运动学和几何学，这样一种弯曲就会出现．特别，对于光线来说，也会出现这种情形(见图 12-10)．借助这些概念爱因斯坦从事创立他的广义相对论，那基本上是(如我们在第八章中指出过的)引力的一个几何理论．

§6 离 心 力

我们现在来考虑一种特殊的惯性力，只要是从一个**转动的**参照系的立场来描述和分析一粒子的运动，它总会出现．这个力——离心力——我们是熟悉的，例如当我们用绳系一物体而持绳的一端挥动使物旋转时好象是物在拉我们的那个力①．我们就来研究这类情况以便引入这概念．

设想一"链球"被挥动起来作水平圆周运动，速率恒定(图 12-11)．我们将从两个观点来分析这球的运动：一静止的参照系 S 和一个转动的参照系 S'，转速与球的(恒定)转速相同．为了方便起见，我们使两坐标系的 z 轴和 z' 轴(以及两原点)重合．S' 相对于 S 的转速以 ω (以弧度/秒为单位)来表示．图 12-11 表明相对于这两个参照系的分析．下面是主要结论：

1．从静止的(惯性的)参照系的观点来看，这球有一加速度 $(-\omega^2 r)$ 指向转轴．引起这加速度的力 F_r 是由链绳提供的，因而必有

$$(\text{在}S\text{中}) \qquad F_r = -m\omega^2 r$$

① "离心力"这个词来自拉丁文：*centrum*，意为中心，而 *fugere* 为逃离．

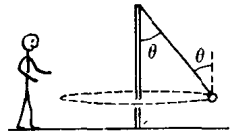
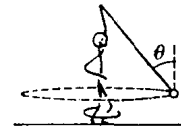
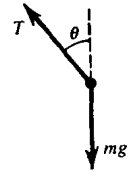
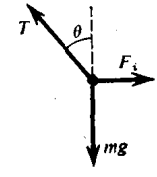
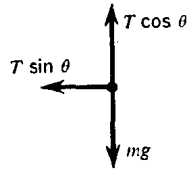
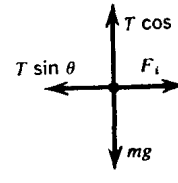
步　骤	从静止参照系S看	从转动参照系S'看
问题的草图		
	看到球以速率v在一半径为r的圆周上运动(角速为ω)	小孩以与球相同的角速转身;在他看来球是静止的
“把物体隔离,”画出所有作用于球的力		 T=弦中张力 mg=重力 F_i=惯性力,来源于从一转动参照系看问题
为了易于计算,我们把力分解为互相垂直的分量	 竖直方向	 竖直方向
现在我们按 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 分析问题	由于没有竖直方向的加速度,我们断言竖直方向的合力必为零;因而 $T\cos\theta=mg$ 水平方向 物体在一圆周上运动,因此是加速的;合力(所有三个力之和)是水平的,向着圆心,并且必须大小等于mv^2/r; $T\sin\theta=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2 r$ 力的方向沿向径向里	由于没有竖直方向的加速度,我们断言竖直方向的合力必为零;因而 $T\cos\theta=mg$ 水平方向 物体“静止”,因此作用于它的所有各力之和必为零;因而F_i与$T\sin\theta$的大小相同.根据左列的分析, $F_i=\frac{mv^2}{r}=m\omega^2 r$ 方向向外 我们称F_i为离心力

图 12-11　一悬挂着的球在一水平圆圈上运行.从地球参照系和随着球转动的参照系来分析其运动.

2. 从一个旋转的、与球严格同步的参照系的观点来看，这球的加速度为 0. 如果在力 F_r 之外，球还受到一个与 F_r 等值反向因而是沿着矢径向外的惯性力 F_i，牛顿定律就能在这转动的参照系中保持其正确性：

$$(\text{在 } S' \text{ 中})\begin{cases} F_r' = F_r + F_i = 0 \\ F_i = m\omega^2 r \end{cases}$$

这力 F_i 就是我们所称谓的离心力.

这离心力的大小是能够为一个处于这转动参照系 S' 中的观察者用实验方法量度的. 让他用一弹簧秤使一质量 m（从他的转动参照系看）保持静止不动（图 12-12）. 只要这质量不在转轴上，弹

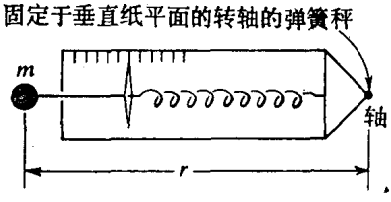


图 12-12　测量在一转动的参照系中保持一物体静止所需的力.

簧秤就会显示出正以一个与 m 和 r 成比例的向内的力作用于质量上. 如果 S' 中的观察者这时被告知他的参照系正以 ω 弧度/秒的角速度在转动，他就能证实这个力等于 $m\omega^2 r$. 这观察者于是把弹簧秤的伸长解释为它在反抗那存在于转动参照系中而作用于 m 上的离心力. 更进一步说，如果弹簧断掉，那么作用于这质量的总的力就只有离心力，而对这所谓的“虚假的”力的反应是物体在该瞬间有了一个向外的加速度 $\omega^2 r$. 再一次，按我们所能应用的任何判据（除了我们无法找到另一物理体系作为其来源之外）都说明这惯性力是“存在着”的.

我们已经看到，这离心力的大小由下式给出：

$$F_{离心}=m\frac{v^2}{r}=m\omega^2 r(沿径向向外) \qquad (12\text{-}6)$$

有一个很好的例子说明我们几乎本能地在没有别的力使之平衡的情况下利用这离心力，其情况如下：我们在清洗一条直的管子，我们要使它的内部干燥．第一步，我们要除去那些留在内壁上的较大水滴．为此，我们不是沿纵向摇动管子，而是沿一圆弧甩它[图 12-13(a)]．对我们开始这一转动时发生的情况加以分析，就会得到一个特别清楚的图象，说明在静止的和转动的两种不同的参照系内对这过程的描述的差异．它还向我们提供了推导离心力公式的另一不同途径．

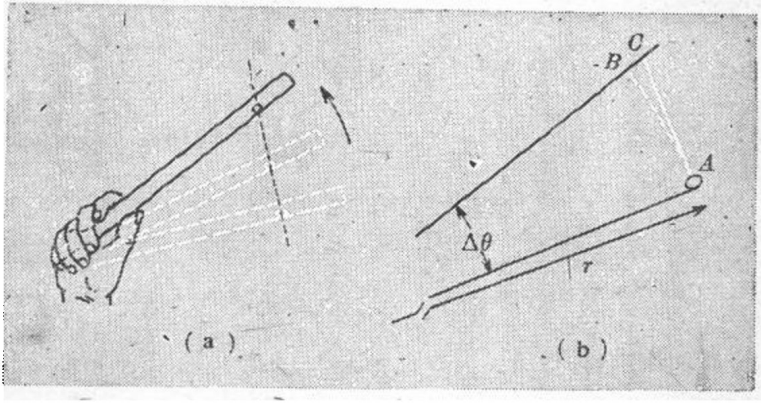


图 12-13　(a)把管子中的一滴水甩出去．(b)用离心力来分析开始时的运动．

假定一质量为m的水滴，位于管的内壁的A点[图 12-13(b)]，到转轴的距离为r．设管子非常光滑，因而这水滴在它沿着管子运动时不受阻力．但是，由于转动而产生的管子的横向运动必然要把这水滴带在一起走．于是，当管子突然开始动起来并转动一小角度$\Delta\theta$时，这水滴由于受到一个垂直于A点管壁的冲力，就沿直线AC运动．然而，这意味着它现在比固定于管壁因而沿圆弧AB运动时离转轴远了一些．事实上我们有

$$BC = r\sec\Delta\theta - r$$

今

$$\sec\Delta\theta = (\cos\Delta\theta)^{-1} \approx [1 - \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2]^{-1}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}(\Delta\theta)^2$$

因此

$$BC \approx \frac{1}{2} r(\Delta\theta)^2$$

但是我们可以用角速度ω和时间Δt来表示$\Delta\theta$：$\Delta\theta = \omega\Delta t$. 因之有

$$BC = \frac{1}{2}\omega^2 r(\Delta t)^2$$

我们立刻看出这是在有加速度$\omega^2 r$时在Δt时间内的径向位移. 因之可令

$$a_{离心} = \omega^2 r$$

而

$$F_{离心} = m\omega^2 r$$

于是，我们注意到，当径向上没有实在的力时，一个小的横向直线位移事实上表现为管子参照系在未被平衡的离心力作用下的一个小的纯径向位移. 水滴在沿着管壁向外运动这物理事实用两种描述都不难理解. （但是，我们还必须补充说，上面这样的分析只能应用于运动的开始阶段. 一旦这水滴得到可觉查的径向速度时，事情将变得更为复杂.）

“离心力”这个词常被误用. 举一个例，我们可能读到象这样的说法：“卫星在绕地球运动时之所以没有掉下来是由于离心力正好和重力抵消，因而没有使之下落的力.” 任何这种说法都是对牛顿第一定律的嘲笑——这定律说，所受合力为零的物体沿一直线

运动因为如果卫星被描述为正在沿着一弯曲的轨线绕地球而运行，它就一定受到一未被平衡的力的作用．唯一在其中离心力确实抵消了重力的参照系是卫星在其中看来一点都不动的那个参照系．当然，人们可以相对于以任意不同于轨道上物体的速率而转动着的参照系来描述这种运动．但在这种情况下，离心力只是惯性力的一部分，不能简单地应用"实在的"力和离心力的平衡．在这里要特别再次强调一下，在一个不转动的参照系中是没有叫离心力的那种东西的．那导使人们不正确地使用"离心力"这个词的长期存在着的混乱曾至少使一位作者感到极端烦恼．在一本别的方面都严谨而相当正规的教科书中，这位作者写道："对于这些人是没有什么可说的．他们中有些人是好公民．他们投那个为国家的繁荣负责的党的票；他们隶属于唯一真正的教会；他们向红十字会捐款——但是，在科学的庙堂里他们是没有地位的；他们亵渎了它．"①

§7 离 心 机

实验室用的离心机代表着离心力的动力学原理的一个极为重要的和直接的应用．一种简单类型的离心机的基本构造见图 12-14(a)．精心地平衡了的两个装有液体的管子悬挂于转子的光滑支点上．当转子以高速转动起来的时候，管子就向上和向外甩出直到近于水平位置，并且可以在这个位置连续维持许多小时．在两管之一的任何一点 P（距转轴 r）处[图 12-14(b)]，有一个大小为 $\omega^2 r$ 的等效引力场，可以使之远大于 g．例如，若 $r=15$ 厘米，而转子以每秒 25 转的速率转动（$\omega=50\pi$ 秒$^{-1}$），则 $\omega^2 r$ 之值大约是 4000 米/秒^2 或 $400g$．悬浮于液体中的微粒就以远比只在重力作

① W. F. Osgood, *Mechanics*, Macmillan, New York, 1937.

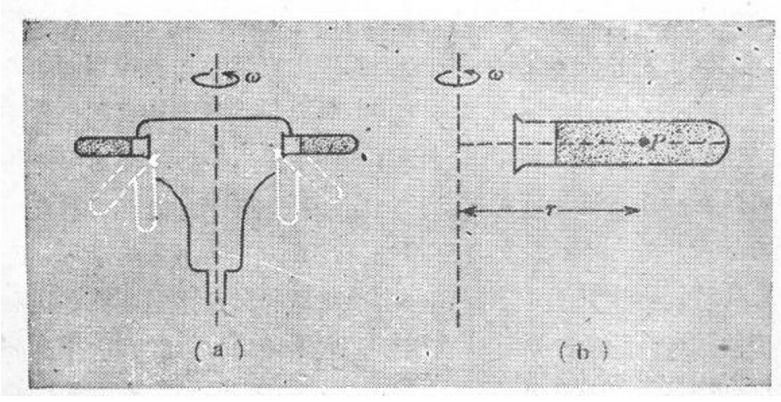


图 12-14 (a)简单离心机的竖直剖面图. (b)用离心力来分析径向沉积.

用下会有的下沉速度大得多的速度被驱向到管的外(底)端.

计算漂移速率的依据是我们在第五章中头一次遇到的、物体以低速通过一流体时所受到的阻力的公式. 对于一个半径为 r 和速率为 v 的球状粒子, 这阻力与乘积 rv 成正比. 如果介质是水, 则这阻力的大小近似地由下式给出

$$R(v)\approx 0.02rv$$

其中 R 以牛顿为单位, r 以米为单位, 而 v 以米/秒为单位. 当这个力正好与等效重力场的场强 g' 相关联的驱动力平衡时, v 就达到一稳定值. 在计算这驱动力时, 把浮力——即阿基米德原理——考虑进去是很重要的. 如粒子的密度为 ρ_p, 液体的密度为 ρ_l, 则驱动力由

$$F=\frac{4\pi}{3}(\rho_p-\rho_l)r^3g'$$

给出. 若引入粒子的真质量 $m(=4\pi\rho_p r^3/3)$, 这式可简化为

$$F=\left(1-\frac{\rho_l}{\rho_p}\right)mg'$$

举一个具体例子, 假定有半径为 1μ 的细菌粒子的水状悬浮

液，每一粒子的质量约为 5×10^{-15} 千克，密度约为水的 1.1 倍．如果取上面算得的 g' 之值 $400g$，可求出

$$F\approx2\times10^{-12}\text{ 牛顿}$$

从而得到漂移速率为

$$v\approx\frac{2\times10^{-12}}{2\times10^{-2}\times10^{-6}}\approx10^{-4}\text{ 米/秒}$$

这相当于每小时下沉几厘米的速率，这就可以在合理的时间内完成分离，而若只靠平常的重力，每天只会下沉一或两毫米。

上面的例子代表着人们认为多少是常规类型的离心作用，但在 1925 年，瑞典化学家 T. 斯维伯格开辟了一个全新的研究领域，当时他获得比 g 大千万倍的离心场，从而使他能通过对径向沉积的研究成功地测定了蛋白的分子量．他为此目的而研制成的机器被恰当地称为**超速离心机**，斯维伯格成功地获得高达约 50,000 g 的离心场．物理学家 J. W. 比姆斯又进一步发展了这种技术，他采用在真空中的磁性浮悬办法，完全取消了机械轴承．转子就在真空中转动，用精心控制的磁场来对抗重力的正常拉力，使它保持在一恒定的竖直水准上．用这种方法，比姆斯在一可用的离心机中产生了相当于大约 10^6g 的离心场，而对于微小物体（例如直径为 0.001 英寸的球体）产生 10^9g 的场．转子的断裂速率对此加了限制；它决定着 ω 的一个最大值，与 $1/r$ 成比例（见第 II 册 23 页）．由于离心场 g' 等于 ω^2r，而极限速率规定了 ωr 的上限，可以看出可能达到的 g' 之值是随 $1/r$ 而变的．

超速离心机方法的技术已达到异常精细的程度．在用于测定分子量时，可以在 10^8（病毒微粒）和低到 50 的范围内达到优于 1% 的精确度．用这方法去测定极低的分子量的可能性给人的印象特别深刻．比姆斯曾指出，在蔗糖水溶液中，一个质量为 340 原子质量单位、半径约为 5埃的单个蔗糖分子，按我们早先所说的那种

分析去计算，得到的下沉速率在平常的重力作用下将小于每100年1毫米.（如比姆斯指出过的，这样低的下沉率实际是没有意义的，因为它将完全被无规的热运动所淹没.）但是，如果有了 $10^5 g$ 的场，沉积过程的时间常数就会缩短到一天左右的量级，这样，测量就完全可能了①.

离心机和离心作用这一整个主题是惯性力这概念的一个非常良好的应用，因为用转动框架中的静态平衡或准静态平衡恰如其分地描述了这些现象.

§8 科里奥利力

我们已经看到，在以一给定角速度 ω 转动的参照系中，作用于质量为 m 的一个粒子的离心力，$m\omega^2 r$，只和质点到转轴的距离 r 有关. 可是，一般说来，在转动框架中还存在着另一种惯性力. 这就是**科里奥利力**②，它只和质点的速度（而不是和它的位置）有关. 我们将就某些特例以简易的方法引入这个力. 稍后，在引入转动的**矢量**表达式时，我们将推展一种简明的标记法，这种标记法所给出的离心力和科里奥利力的形式在任何类型的三维空间坐标系中都适用.

比较一粒子在一惯性参照系 S 中的直线运动和在一转动框架 S' 中所观察到的这同一粒子的运动，就很容易看出引入科里奥利力的必要。

设想 S' 是一个附着于以恒定角速度 ω 转动的一水平圆桌上的坐标系. 设竖直转轴定为 z' 轴，并假定桌面（在 $x'y'$ 平面内）没

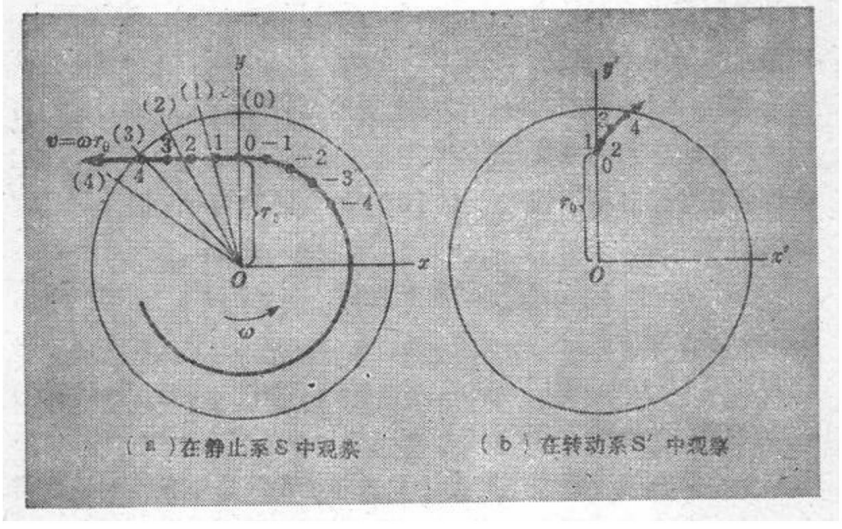
① 关于这一十分有趣的主题的进一步资料，见 T. Svedberg 和 K. O. Pederson, *The Ultracentrifuge*, Oxford Univ. Press, New York, 1960; J. W. Beams, "High Centrifngal Fields," *Physics Teacher* **1**, 103(1963).

② G. Coriolis, *J. de l'Ecole Poly technique, Cahier* **24**, 142(1835).

有摩擦. 一根缚于原点的绳系着一粒子使它保持在 y' 坐标轴离转轴的径向距离为 r_0' 之处. 这样, 在 S' 参照系中, 这粒子在绳子张力和离心力的共同作用处于平衡静止状态. (竖直方向的重力和桌面的垂直向上的力加起来总是等于零, 今后勿需考虑.)

现从一个在 $t=0$ 时刻与 S' 重合的惯性参照系 S 中来看这同一粒子. 在这静止的参照系中, 这粒子以恒定速率 $v_0=r_0\omega$ 在一半径 $r_0(=r_0')$ 不变的圆上运行, 它唯一受到的是那未被平衡的绳中张力. 当然, 在这惯性系中是没有离心力的.

在 $t=0$ 时, 这绳断了. 在 S 中这粒子就要以恒定速率 $v_0=\omega r_0$ 沿一直线运动如图 12-15(a) 所示. 要求出在 S' 中的运动, 我



(a) 从一静止的参照系 S 中看到的.

绳在 $t=0$ 时断掉. 黑点指明粒子在相继的等时间间隔 0, 1, 2, 3, …的位置. 在同一这些时刻, 转动的 y' 轴的位置由 (0), (1), (2), (3)…表出.

(b) 从转参照系 S' 中看到的. 粒子起初是静止的. 在绳断掉之后, 它开始沿径向向外运动. 但一旦当它获得一点速率, 它就会朝 y' 轴的右侧转向.

图 12-15 拴在一转动的盘上的物体的运动的两种描述. 物体于 $t=0$ 时在没有作用力的情况下开始运动.

们在**静止的参照系**中对 y' 轴的位置和粒子在相继的等时间间隔的各时刻的相应位置加以比较. 我们发现, 正象在 S' 中观察到的, 粒子不仅在径向方向上朝外运动, 而且向右离开那转动着的 y' 轴所形成的那条向径线愈来愈远. 这一结果描绘在图 12-15(b)中, 为了解释在转动参照系中观察到的这种运动, 必须假定在离心力之外还有一个侧向偏转力. 这一偏转力就是**科里奥利力**. 在下面的讨论过程中, 我们要确定其大小并证明它总是和参照系 S' 中的任何速度 $\mathbf{v}'$ 成直角的.

通过研究在这两个参照系中的另一简单的运动可以求出科里奥利力的大小. 和刚刚描述过的情况不同, 设想我们使一粒子在转动参照系中沿向径以恒定速度 $\mathbf{v}_r'$ 朝外运动. 在这一参照系中, 作用于粒子的合力必为零. 因之, 当粒子在运动时, 我们必须提供某一(向内的)实在的力以抵消变化着的(向外的)离心力. 我们将不去理会这些径向分量, 而集中注意力于横向分量上. 这样, 我们就可以在考虑时不去管离心力所引起的轨迹的变形, 因为那是纯径向的.

在这两个参照系中, 运动看起来将是怎样的呢? 图 12-16(b)表明物体在转动参照系中的直线轨迹. 但物体在静止参照系中路径却是图 12-16(a)中所表明的曲线 AB. 在 S 中横向速度 $v_\theta(=\omega r)$ 在 B 处比在 A 处要大, 因为 B 点离轴的径向距离大一些. 因而, 必须有一个**实在的**横向力以产生这个在静止参照系中看到的速度增加. 这一实在的力可以, 比如说, 由一弹簧秤来提供.

这运动在转动参照系中看是什么样子呢? 在 S' 中这物体以恒定速率向外运动, 因之没有加速度[图 12-16(b)], 如我们说过的, 这就意味着在这转动着的参照系中不能有合力作用于这物体上. 但是由于在 S' 中的一个观察者看到了弹簧秤在 $+\theta$ 方向施加着一个**实在的**侧向力于这物体, 他就推断说在 $-\theta$ 方向上存在着一个

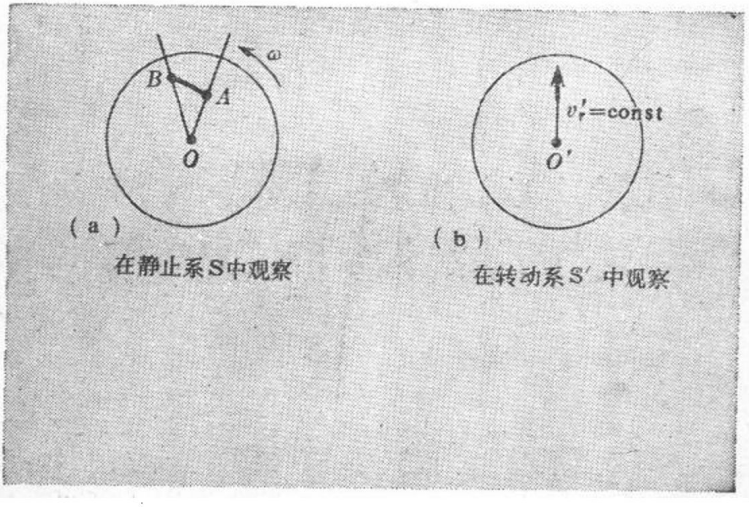


图 12-16 (a) 实验室里看到的、在转动的桌子上一粒子沿向径朝外运动的轨迹. (b) 在转动参照系本身中所见到的这一运动.

对抗的惯性力来平衡它. 这个力就是科里奥利力①.

要确定这个力的大小, 令图 12-17 中的 OA 和 OB 代表同一半径线在相隔 Δt 时间的相继位置. 令 OC 为角 $\Delta\theta$ 的平分线. 垂直于 OC 的速度在 Δt 时间里增加了 Δv_θ, 其中

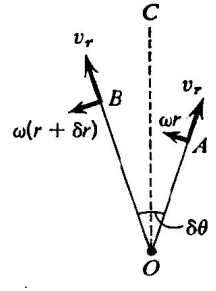


图 12-17 计算一粒子相对于一转动的桌子以匀速沿径向运动时的科里奥利力的根据.

$$\Delta v_\theta = [\omega(r+\Delta r)\cos(\Delta\theta/2) + v_r \sin(\Delta\theta/2)] - [\omega r\cos(\Delta\theta/2) - v_r \sin(\Delta\theta/2)]$$

① 事实上作者在这里分析到的只是科里奥利力的一半, 即下文中 $\Delta v_\theta \approx \omega\Delta r + v_r\Delta\theta$ 的第一部分——由于径向距离改变而引起的那一部分——译者注.

对于微小的角度，我们可以令其中的余弦为1而正弦等于角度，这就导出Δv_θ的一个很简单的表达式：

$$\Delta v_\theta \approx \omega \Delta r + v_r \Delta_\theta$$

因之，横向加速度a_θ由下式给出：

$$a_\theta = \omega(\Delta r/\Delta t) + v_r(\Delta\theta/\Delta t)$$

但

$$\Delta r/\Delta t = v_r \qquad \text{而} \quad \Delta\theta/\Delta t = \omega$$

因而

$$a_\theta = 2\omega v_r$$

$$F_\theta = 2m\omega v_r$$

这就是在S中判断产生**实在的**加速度所需的**实在的**力．但是在转动参照系S'中来看，既没有加速度也没有合力．因而就推断存在一个等于$-2m\omega v_r'$的科里奥利力．(注意$v_r = v_r'$．)这一惯性力沿负θ'方向，与弹簧力相反，并且与粒子运动的方向成直角：

$$F_\theta'(\text{科里奥利}) = -2m\omega v_r' \tag{12-7}$$

有一重要特点你可以自己来证明，那就是，如果我们考虑一沿向径**朝里**(v_r'为负)的运动，我们会推得存在的科里奥利力沿**正**θ方向的．所以，在这两种情形中，科里奥利力都是使物体相对于速度$\mathbf{v}'$本身的方向以相同的方式偏转——如果S'逆时针方向转，如我们所假定的，物体就向右偏折，而如果S'顺时针方向转，就向左偏折．事实上，如我们稍后要证明的，科里奥利力总是一个**偏转**力，在转动的参照系中观察，它的作用方向与运动的方向成直角．

从转动参照系的观点看，科里奥利力是很实在的．如果你想使你自己相信这一"虚假"力的真实性，不妨跨上一旋转木马的平台上并试着沿一半径线朝外或朝里行走．(不过要小心——科里奥利力是很出人意外并令人吃惊的，它很容易使人失去平衡！)

§9 旋转木马上的动力学

如我们刚刚提到过的那样，一个在转动参照系中运动的物体其行为可以和我们的直觉大相径庭．对于在转动参照系中静止的物体，熟悉作用于它的离心力的存在并不太困难，但是当物体运动起来时出现的离心力和科里奥利力的联合作用却是相当迷惑人，而有时又引人入胜．举例说，设想一个人站在一旋转木马的转台上的A点[图 12-18(a)]并企图扔一个球给在B点的某人(或瞄

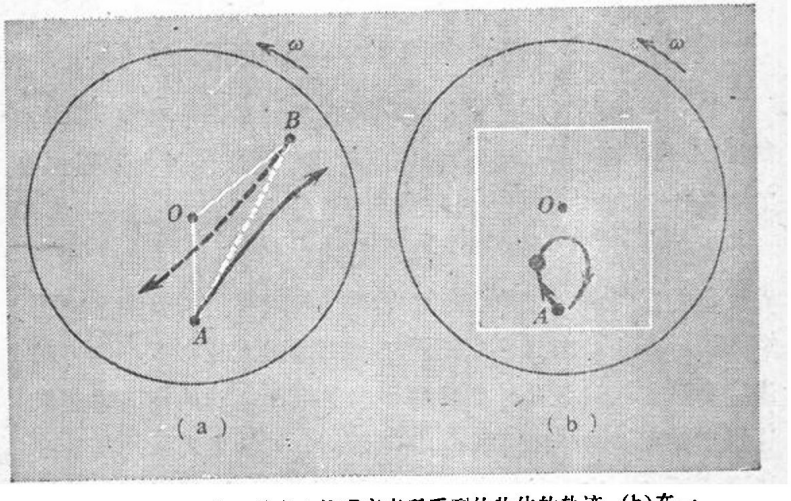


图 12-18 (a)在一转桌上的观察者所看到的物体的轨迹．(b)在一无摩擦的桌面上投出的物体可能回到它的起点．

准放在那里的投镖游戏板上的目标)．可是每一次投掷的物体都奇怪地偏到右边而错过目标．自然，人们可以把这事的一部分归过于离心力本身．但是应注意，由于离心力的大小是$m\omega^2 r$而科里奥利力的大小是$2m\omega v'$，两者之比与$v'/\omega r$成比例．于是，当我们使v'比转马台的实际边缘速率大得多时，这运动奇特性就几乎完全为科里奥利效应所控制．如果这一条件成立，则在一反时针方向

转的转马台上运动的物体总是向着 $\mathbf{v}'$ 的右侧偏转. 所以, 如果图 12-18(a) 中 A 和 B 位置上站着两个人在试图把一个球扔来扔去, 那么他们就必须瞄向左边才能扔得准.

这类行为的一个极端例子是可以使一个物体沿着一不断弯曲的路径回到它的起点, 尽管它并未受到任何实在的力, 这一现象曾在一部极为引人入胜并有教益的科教片"**参照系**"① 中演示出来. 一个熟练的操作者能在一平板玻璃桌面上扔出一块干冰使它沿着图 12-18(b) 中所示的轨迹走.

§10 在一转动参照系中的普遍运动方程②

这一讨论的目标是要把在一静止参照系 S 中和在一转动参照系 S' 中观察到的一个运动物体的位移对时间的微商联系起来. 为了准备这个讨论, 我们引入可以表示为一矢量的概念——角速度.

先考虑在一转盘上的一点 P [图 12-19(a)]. 它在与半径 OP 成直角的方向上有一纯切向速度 v_θ. 如果我们按第四章中引入转矩的同样办法来定义一个**矢量**, 我们就能同时在大小和方向上描述这个速度. 这就是; 如果**右**手的手指循转动的指向弯起来, 而让拇指如图 所示伸出, 则 $\boldsymbol{\omega}$ 由这样一个矢量来表示, 其长度与角速率成正比, 方向为拇指所指的方向. 因之, 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 指着正 z 方向, 它就确定了一个转动, 把每一个象 P 那样的点从正 x 轴朝正 y 轴转去. 从上面看, 盘在此情形下是沿反时针方向转动.

于是, P 的速度就由 $\boldsymbol{\omega}$ 和向径矢量 $\mathbf{r}$ 的矢量(叉)积给出:

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{12-8}$$

---

① "参照系", 制作者是 J. N. P. Hume 和 D. G. Ivey, Education Development Center, Newton, Mass., 1960.

② 对于一个愿意相信其最后结果的读者, 本节可以略去; 这最后结果是: 在一转动参照系中, 总惯性力是离心力和与(12-7)式的推广形式相应的科里奥利力之和.

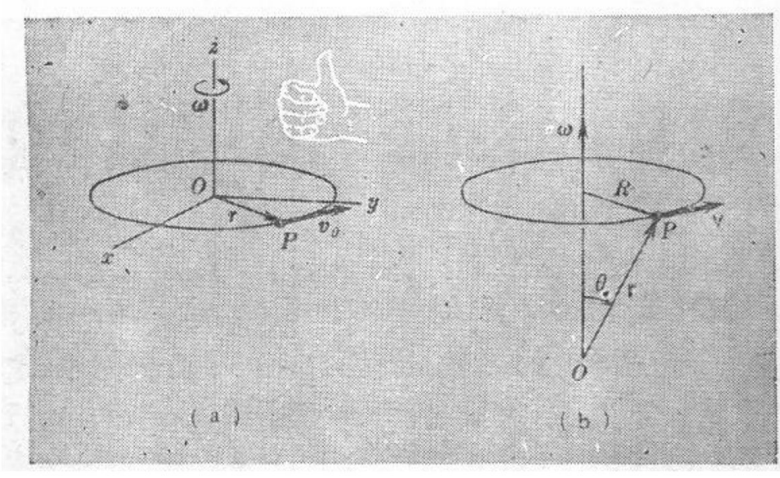


图 12-19　用角速度的矢量表示来确定一粒子在一转动桌上的线速度：$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$.

这一矢量积表示法在三维情形中也成立，只要 P 的位置矢量 $\mathbf{r}$ 是从转轴上的任意一点量起，如图 12-19(b)所示．P 在其上运动的那个圆的半径 $R=r\sin\theta$．因之有 $v=v_\theta=\omega r\sin\theta$，它的方向垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{r}$ 所确定的平面．而这恰好是(12-8)式所给出的．

其次，我们来看**任一**矢量在一小的时间间隔 Δt 中的变化如何由下列两个成分之和来表示：

1. 如果它只是一个固定在转动参照系内具有恒定长度的矢量时所发生的变化．

2. 在 S' 中观察到的、它的长度和方向都在变的那部分变化．

在图 12-20(a) 中我们示明被限于一平面上的运动的这种分析．矢量 $\mathbf{A}$ 在 t 时刻由 CD 线表示．如果它相对于转动台保持不动，它在 $t+\Delta t$ 时刻的方向就是 CE，其中 $\Delta\theta=\omega\Delta t$．因之，单单由于转动，它的变化将由 DE 表示，$DE=A\Delta\theta=A\omega\Delta t$．从 S' 参照系的观点看来，这个变化是看不到的．然而，也可能会有由线段 EF 表示的那样一个变化，我们用 $\Delta\mathbf{A}_{s'}$ 来表示——它代表在 S' 中观

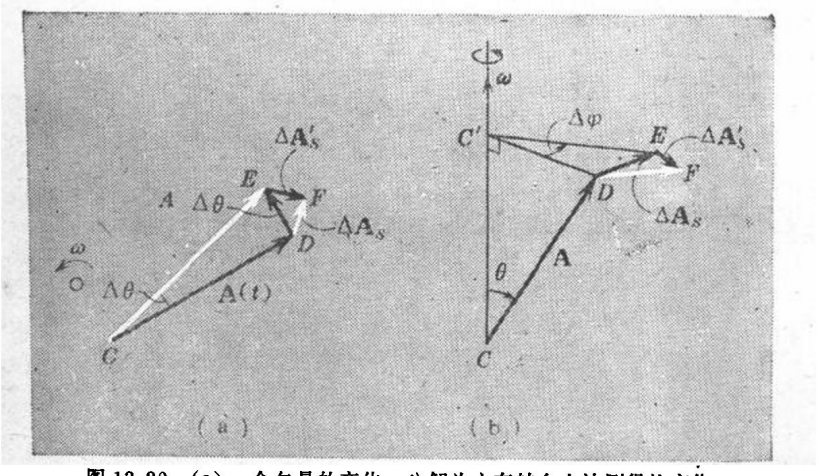


图 12-20 (a) 一个矢量的变化，分解为它在转台上被测得的变化和由于台本身在转动而来的变化. (b)对于以转轴上任意原点为参考的任意一矢量的类似分析.

测到的 **A** 的变化. 于是, DE 和 EF 的矢量和, 即线段 DF, 就代表在 S 中观测到的真正变化. 因此我们用 $\Delta\mathbf{A}_S$ 来表示.

在图 12-20(b)中, 我们示明对三维情形的相应分析. DE 的长度现在等于 $A\sin\theta\Delta\varphi$; 方向则垂直于 **ω** 和 **r** 所规定的平面. 由于 $\Delta\varphi=\omega\Delta t$, 我们有

矢量位移 $DE=(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A})\Delta t$

位移 $\Delta\mathbf{A}_{S'}$ 可能在相对于 DE 的任何方向上, 但这两者还是将合成一个总位移 DF, 那就是 $\Delta\mathbf{A}_S$. 因之我们有

$$\Delta\mathbf{A}_S=\Delta\mathbf{A}_{S'}+(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A})\Delta t$$

我们可以立刻从此得到在 S 和 S' 中观察到的 **A** 的变化率之间的一个关系:

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{S'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{A} \qquad (12\text{-}9)$$

这是一个非常有用的关系式, 因为 **A** 可以是任何我们要考虑的矢量.

首先，我们选 **A** 为位置矢量 **r**．于是 $(d\mathbf{A}/dt)_S$ 就是在 S 中观察到的真正速度 **v**，而 $(d\mathbf{A}/dt)_{S'}$，则是在 S' 中观察到的表观速度 **v′**．因之立刻有

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{12-10}$$

其次，我们选 **A** 为速度 **v**：

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_S=\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{S'}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} \tag{12-11}$$

$(d\mathbf{v}/dt)_S$ 是在 S 中观察到的真正加速度．但是，$(d\mathbf{v}/dt)_{S'}$ 这个量却是某种混杂物——它是在 S 中观察到的速度在 S' 中的变化率．如果我们把(12-10)式的 **v** 代入，我们可以使这一项的意义更清楚一些．这时，有

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{S'}=\left(\frac{d\mathbf{v}'}{dt}\right)_{S'}+\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{S'}$$

这式右边两项现在可以很容易认出了：$(d\mathbf{v}'/dt)_{S'}$ 是在 S' 中观察到的加速度 **a′**，而 $(d\mathbf{r}/dt)_{S'}$ 就是 **v′**．因之有

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_{S'}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'$$

代入(12-11)式，得

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$

我们不需要在右边既有 **v** 又有 **v′**，因此我们将再把(12-10)式的 **v** 代入．这最后给出

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}'+2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}'+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{12-12}$$

关于牵涉到三个矢量的叉乘的最后一项有一点要提起注意．按矢量代数的规则，要先求括弧内的叉积，然后再作另一叉乘．只要 **ω** 和 **r** 之间的夹角不是 0° 或 180°，所得结果在所有情形下都不为零．但是，如果用倒过来的(错误的)次序求叉积，则不论这两矢量之间的夹角为何，结果将都是零．

以物体的质量 m 遍乘(12-12)式，我们认出左边是在静止参照

系中看到的、作用于这质量的合力.

$$m\mathbf{a}=\mathbf{F}_{合}=m\mathbf{a}'+2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')+m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$$

在转动参照系中，物体m具有加速度$\mathbf{a}'$. 我们可以通过重新安排上述方程而在这加速的参照系中保持牛顿第二定律的形式；就是说，能把它写成

$$\mathbf{F}'_{合}=m\mathbf{a}' \tag{12-13a}$$

其中

$$\underbrace{\mathbf{F}'_{合}}_{\text{“实在的”力}}=\mathbf{F}_{合}\underbrace{-2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')}_{\text{科里奥利力}}\underbrace{-m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]}_{\text{离心力}} \tag{12-13b}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{惯性力}}$$

方程(12-13b)的数学形式表明科里奥利力和离心力两者都与$\boldsymbol{\omega}$所确定的转轴方向成直角. 离心力则总是沿径向由转轴朝外，这一点可以根据乘积$-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$中所涉及的矢量的几何关系，按图12-21所示的那样弄清楚. 这方程还表明，当$\boldsymbol{\omega}$反向时，科里奥利力也要反向，但离心力的方向却保持不变.

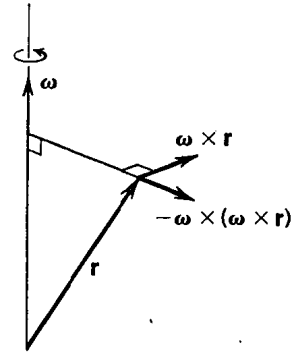


图 12-21　由矢量的旋转引起的向心加速度.

方程(12-13)中的$\mathbf{F}'$可以完全根据在转动参照系本身内测量到的位置、速度以及加速度来确定. 离心力那一项，由于含矢量$\mathbf{r}$，似乎与此矛盾，但是我们完全可以用$\mathbf{r}'$代替$\mathbf{r}$，因为在这两个参照系中的观察者对一运动物体在一给定时刻的矢量位置是可以取得一致的，只要他们选择同一原点.

总结来说，根据以上的计算，我们确立了下述结论：在一匀速转动的参照系中观察到的运动的动力学可以用以下三种范畴的力

来予以分析：

“实在的”力：$\mathbf{F}_{合}$ 这是作用于物体上的、所有“实在的”力之和，这些力如接触力、绳中张力、重力、电力、磁力，等等．在一静止的参照系中只看到这些力．

科里奥利力： $-2m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}')$ 科里奥利力是一个**偏转**力，它总是和质量 m 的速度 $\mathbf{v}'$ 成直角．如果物体在转动参照系中无速度，就没有科里奥利力．这是一个在一静止参照系中**看不到**的惯性力．注意负号．

离心力： $-m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})]$ 离心力只与位置有关，总是沿径向朝外．它是一个在一静止参照系中**看不到**的惯性力．我们也可以把它写为 $-m[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}')]$．注意负号．

§ 11 作为一转动参照系的地球

在这一节中我们将考察几个例子，看地球的转动是如何影响着在地球上发生的动力学过程的．

1. g 的地区值

如果有一粒子静止于地球表面附近纬度为 λ 的地方，那么在地球参照系中来判断，它受到了重力 $\mathbf{F}_g$ 和离心力 $\mathbf{F}_{离心}$ 如图 12-22(a) 所示．后者的大小，按 12-13(b)，由下式给出

$$F_{离心}=m\omega^2R\sin\theta=m\omega^2R\cos\lambda$$

其中 R 是地球的半径．在第八章中我们已讨论过这一离心力项是如何减小 g 的地区值并改变由铅垂线来确定的、当地的竖直方向的．实际上，从地球本身所确定的、我们的天然参照系的立场，分析起来要简单和清楚得多．如图 12-22(a)所示，我们有

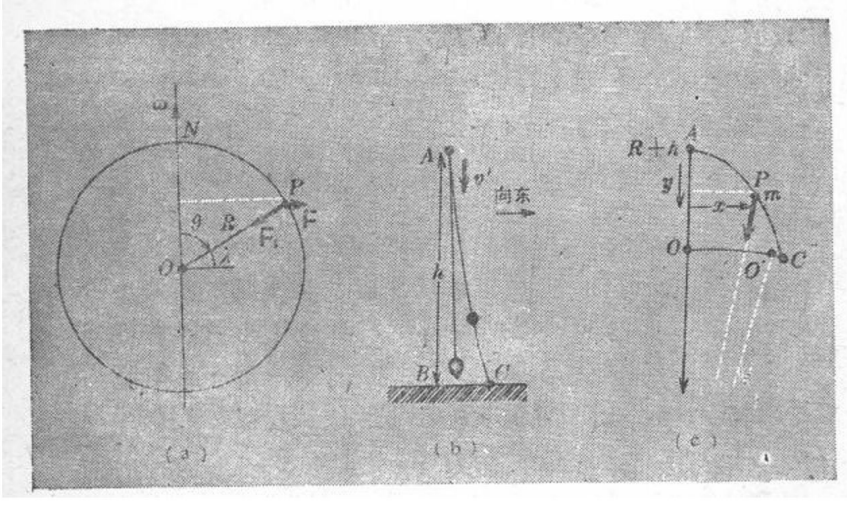


图 12-22 (a)作用于静止在地球上的物体的力，在一随同地球转动的参照系中来解释.(b)一物体相对于地球从静止下落，经受一向东的位移.(c)从一不随地球转动的参照系看(b)中的落体运动.

$$F_r' = F_g - F_{离心}\cos\lambda = F_g - m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$F_\theta' = F_{离心}\sin\lambda = m\omega^2 R\sin\lambda\cos\lambda \qquad (12\text{-}14)$$

2. 自由落体的偏差

如果一粒子由例如图 12-22(a)中的 P 点从静止状态下落，它将在分量由(12-14)式给出的合力 $\mathbf{F}'$ 的作用下开始向下加速．但是，只要它稍为有了一点速度，它就还要经受一科里奥利力

$$\mathbf{F}_{科里奥利} = -2m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}' \qquad (12\text{-}15)$$

速度 $\mathbf{v}'$ 是在包含着地轴的 PON 平面中的，因此科里奥利力必垂直于这平面，而且在考察了 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{v}'$ 的实际方向之后就知道它向东．因之，如果我们建立一个由当地的铅垂竖直线和当地向东的方向所确定的坐标系如图 12-22(b)，落体将向东偏离铅垂线 AB 而落到地面的 C 点上．这效应是非常之小的，但曾在仔细的实验中被探查到并测出来(见习题 12-24)．

要计算一个从给定高度 h 落下的物体应当偏离多少，我们利用下面这一事实，即(12-15)式中的v'值可用它的极佳近似值——自由竖直的简单下落速率

$$v'=gt$$

代入，此处，v' 是以向下为正. 于是，如果用 x' 来标明朝东的方向，就有

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=(2m\omega\cos\lambda)gt$$

对 t 求积分两次，得

$$x'=\frac{1}{3}g\omega t^3\cos\lambda \tag{12-16}$$

当下落的总距离为 h 时，有 $t=(2h/g)^{1/2}$，这给出

$$x'=\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\omega\cos\lambda}{g^{1/2}}h^{3/2} \tag{12-17}$$

把近似的数值($\omega=2\pi$ 日$^{-1}\approx7\times10^{-5}$ 秒$^{-1}$)代入，我们求得

$$x'\approx2\times10^{-5}h^{3/2}\cos\lambda \qquad (x' \text{ 和 } h \text{ 的单位是米})$$

因之，例如在纬度 45°处 $h=50$ 米的情况下，$x'\approx5$ 毫米，或大约$\frac{1}{4}$英寸.

也许值得提醒的是，如果要的话惯性力的效果总是可以从一惯性系的立场来计算的，在这惯性系中这些力根本不存在. 在目前所讨论的情形中，我们可以从这样的认识开始，即在地面上高度为 h 处的一个粒子比在它下面的地面上的一点有较大的向东的速度. 为了简单起见，让我们看如何在赤道上($\lambda=0$)运用这一点. 图 12-22(c) 表明在一个不转动的框架中看到的落体的轨迹. 这物体有一水平初速

$$v_{0x}=\omega(R+h)$$

经过时间 t 后，它在水平方向走了一段距离 x，很接近于 ωRt. 当

物体现在处于P点(见图)时，作用于它的重力在负x方向有一很小的分量:

$$F_x \approx -\frac{x}{R}F_g \approx -mg\omega t$$

因而

$$\frac{d^2x}{dt^2} \approx -g\omega t$$

求积分一次，得

$$\frac{dx}{dt} \approx v_{0x} - \frac{1}{2}g\omega t^2$$

把$v_{0x}=\omega(R+h)$这值代入，就给出一很好的近似

$$\frac{dx}{dt}=\omega(R+h) - \frac{1}{2}g\omega t^2$$

再求一次积分，有

$$x=\omega(R+h)t - \frac{1}{6}g\omega t^3$$

然而，地面上的O点也是以一恒定速率ωR在运动的．因之，当落体掉到地上C点时，O点到了O'，而$OO'=\omega Rt$．因此有

$$x'=O'C \approx \omega ht - \frac{1}{6}g\omega t^3$$

如果把$h=\frac{1}{2}gt^2$代入，我们立即得到（12-16）式在$\lambda=0$时所给出的结果．[当然，我们也可以把$t=\sqrt{2h/g}$代入而得(12-17)式．]

3. 大气环流的型式

由于科里奥利效应，沿径向朝里被驱向一低压区，或从一高压区被驱向外的气团还受到偏转力的作用．这就使在北半球绝大多数旋风都是反时针方向的，而在南半球则是顺时针方向的．这些优先的旋转方向的起源可以在图 12-23 中看出，图中所示是在北半球向一低压区运动着的空气的情况，科里奥利力的水平分量

使这些运动向右偏转. 于是, 当气团从各方趋向低压区的中心时, 它们就产生一总的逆时针方向的旋转. 对于在地球表面上向北或向南运动的空气, 科里奥利力是向着正东或正西而又平行于地球表面的. 设在纬度 45° 处气团的质量为 1 千克, 风速为 10 米/秒 (约每小时 22 英里), 则直接应用 (12-15)式, 得

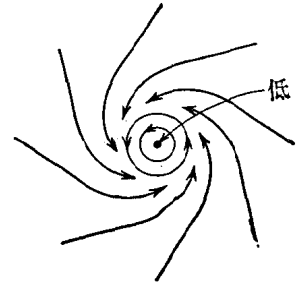


图 12-23 在北半球, 由于科里奥利力对运动气团的作用而形成的旋风.

$$F_{科}=2m\omega v'\sin\lambda=(2)(1)(2\pi\times10^{-5})\times(10)(0.707)\approx10^{-3}\text{ 牛顿}$$

如果我们所考察的是从东或西流入的空气, 则科里奥利力不会平行于地球表面, 但它们的平行于地球表面的分量将仍由上面所用的同一方程给出(试证实这一点.)

那总体运动的曲率半径的近似值可由下式得出:

$$F=m\frac{v^2}{R}$$

或

$$R=m\frac{v^2}{F_{科}}\approx1\times\frac{100}{10^{-3}}=10^5\text{ 米(约 60 英里)}$$

当气团在地球表面上成数百英里地运动时, 它们常形成巨大的涡旋——如图 12-24 由电视红外线观察气象卫星所拍摄的极为壮观的照片所示.

人们偶而会觉察到从浴盆里排出的水也由于科里奥利力而在一个方向旋转起来, 在大多数情况下, 作用于流水的科里奥利力比起存在着的其它较大的力是微不足道的; 可是, 如果做极端精

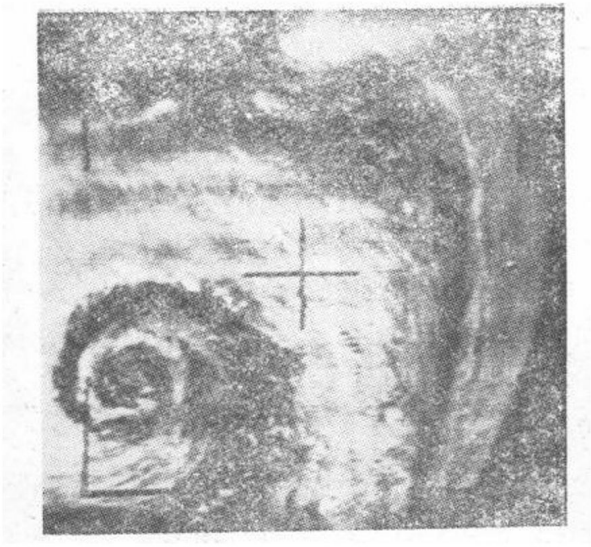


图 12-24　电视红外线观察卫星所拍摄的一旋风的照片.

确和细心的实验，是可以显示出其效应的①.

4. 傅科摆

关于科里奥利力的任何陈述，如果不提到以法国物理学家 J. B. 傅科命名的著名单摆实验，就不会是完整的. 傅科在 1851 年第一次显示一个单摆的摆动平面的缓慢转动如何能用来作为地球本身在转动的证据.

当然说我们只不过是看到了单摆下面的地球在转着的效应是容易的，但不免有点太随便. 这个说法用于一个悬挂在北极或南极的摆可能是恰当的. 我们甚至还可以进一步说，在一定的纬度 λ 上[见图 12-25(a)]，地球的角速度矢量在当地的竖直方向有一分量 $\omega\sin\lambda$. 这确实会引至正确结果——摆面在转动，其快慢相当于在时间 $T(\lambda)$ 内完成一周，$T(\lambda)$ 由下式给出:

① 见例如影片"浴盆涡旋"；这是从 A. H. Sharpiro 的"涡旋"(National Council of Fluid Mechanics, 1962)中摘出的.

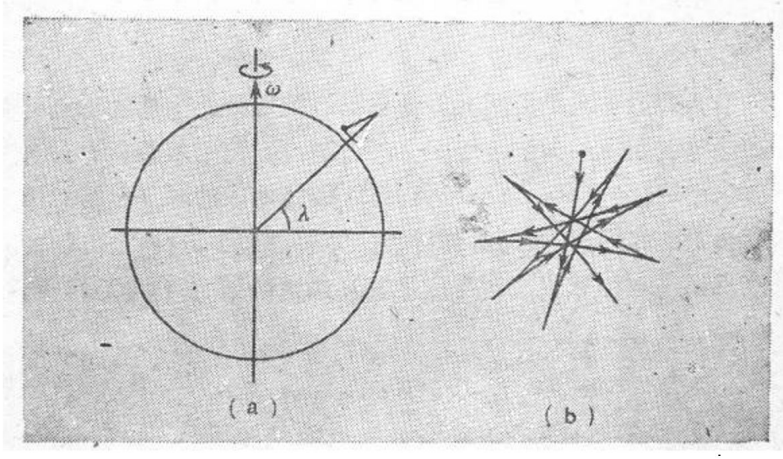


图 12-25 (a) 在纬度 λ 处一单摆沿南北方向摆动.(b)从上面看下来摆锤所走的路.

$$T(\lambda)=\frac{2\pi}{\omega\sin\lambda}=2\pi\csc\lambda \quad \text{小时} \tag{12-18}$$

但单摆总还是通过它的悬线和地球连在一起的，作用于摆锤的线中张力和重力都位于单摆最初开始摆动的竖直平面内.（因此，如果需要考虑的话，空气的阻力也是在这平面内的.）只有援用科里奥利力，才能给予这转动一明白的根据. 对于在北半球摆动的摆，科里奥利力的作用总是使摆锤的路线向右弯曲，如图 12-25(b)中以夸大了的形式所表示的. 正如科里奥利力作用于运动着的气团的情形，它的效应与摆动的方向并无关系——这同我们中的大多数人所可能有的直觉，以为摆在南北方向上摆动时的转动要比它在东西方向上摆动时的转动来得更明显些，并不一致.

§12 潮　　汐

如大家所知，海洋的潮汐基本上来自月球的引力作用，而在较小一些的程度上也来自太阳的引力作用. 所以我们本可在第八章

中作为万有引力的一个例子来讨论它. 但是, 引用本章中所发展的惯性力的概念将大有助于对这一现象的分析.

当人们第一次了解到潮汐现象时, 使他最为困惑的特点可能是在地球表面上的大多数地方每天有两次高潮而不是只有一次. 这对应于这样一个事实: 在任何时刻, 围绕地球的海平面的总体分布有两个突起部. 在我们所要讨论的简单模型中, 这两个突起部的最高点出现在地球表面离月球最近和最远的地方[图 12-26(a)].

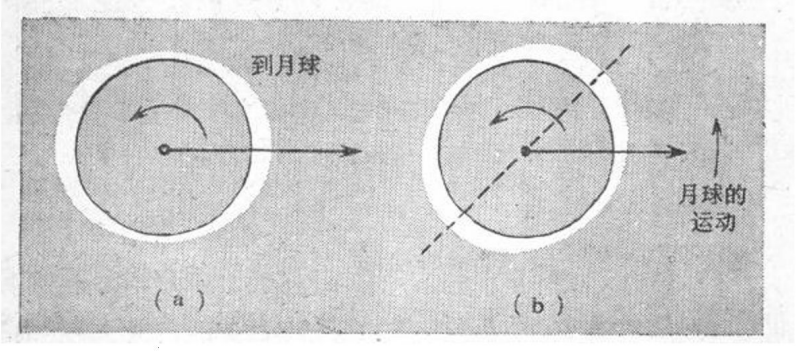


图 12-26 (a)两个潮汐突起部——假设它们不被地球的转动所带动的情形. 突起部的大小是大为夸张了的. (b)由于被地球的转动带向偏东, 潮汐突起部的接近于真实的部位.

当地球在 24 小时中不停地转动着时, 这两个突起部的位置将几乎保持不动, 那是由月球的差不多不动的位置所确定的. 因之, 如果设想地球完全都为水所包围, 则从固定于地球的固体表面上一点量出的这水的深度, 在每转一圈时都要经过两个极大值和两个极小值. 考虑到这两突起部会被陆地和海床的摩擦力拖着向东, 因而它们相对于月球的平衡位置更接近于图 12-26(b) 所指出的情形, 就会得到与观察到的事实更相近的近似.

作为这些初步论述的结尾, 我们也许应指出, 这些突起部事实上还要由于月球本身的运动而一直被慢慢地带着向东. 这一运动(每 27.3 天相对于恒星走一圈) 的结果是使地球上的一个指定点

要以大于 24 小时的时间相继两次经过一特定的潮汐突出部. 明确地说, 这使得在一给定地点相继的两次高潮之间的理论时间间隔是 12 小时 25 分而不是正好 12 小时 (见习题 2-15). 例如, 如果有一天观察到高潮发生于下午 4 时, 那么第二天的同样高潮预计要在大约午后 4 时 50 分发生.

现在让我们来考察动力学的情况, 首先要意识到的一点是, 由于两者之间的引力吸引, 地球作为一个整体有一向着月球的加速度是以什么形式表现出来的. 相对于地球——月球这体系的质心 (位于地球内离地心大约 3000 英里处), 地球的质心有一加速度 a_C, 其大小由牛顿定律给出:

$$M_E a_C = \frac{GM_E M_m}{r_m^2}$$

即

$$a_C = \frac{GM_m}{r_m^2} \tag{12-19}$$

其中 M_m 和 r_m 分别是月球的质量和距离. 也许一下看不出, 地球上的每一点都从月球的吸引得到这同样的加速度. 如果象图 12-27 所示的那样画一草图, 表示出地球的中心和月球在一段时间里走的弧线, 就很容易使人把地球——月球体系想成某种刚性的哑铃, 作为一个整体绕着质心 O 转动. 确实, 对于月球本身说, 它的确是这样运动的, 永远是同一面朝着地球, 但对于地球本身说, 事情就不一样了. 如果地球不绕它的轴转动, 那么它上面的每一点都会循着和地球的中心所画出的圆弧 C_1C_2 在大小和方向上完全相同的圆弧而动. 线段 A_1B_1 将平移到与之平行的线段 A_2B_2. 地球绕它的轴的自转只是迭加在这一普遍的位移和相关的加速度上.

这正是非惯性系出现的场合. 地球绕地——月体系的质心的

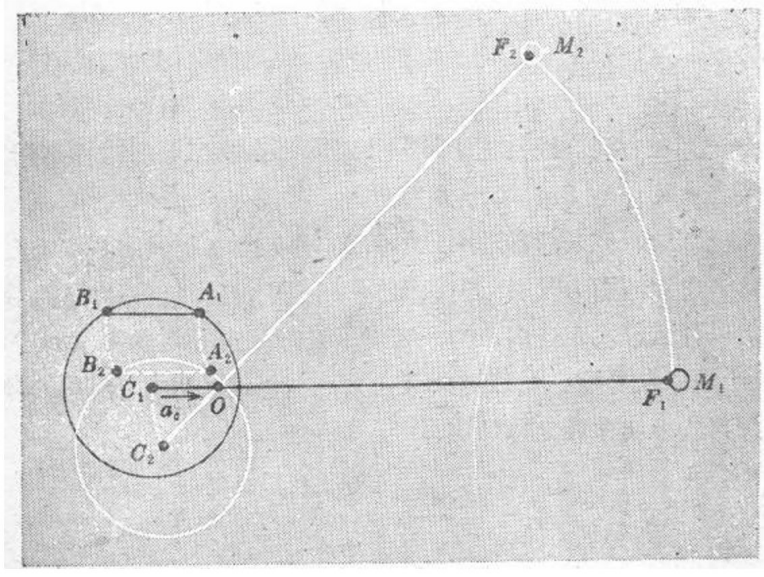


图 12-27　不涉及地球自转的地球绕月球的轨道运动；直线 A_1B_1 取为与直线 A_2B_2 平行.

轨道运动的动力学后果可以用一惯性力来正确地描述，这惯性力等于 $-ma_C$，作用于一质量为 m 的粒子，而不管这粒子是在地球内还是在其上. 然后再加上所有其他可能作用于这粒子的力.

在我们目前所用的模型——相当于所谓潮汐的**平衡理论**中，包围着地球的水一直运动到它达到一平衡位形，这位形从月球上的观察者看来是保持不动的. 可是我们知道，对位于地球中心的一粒子说，离心力和月球的引力吸引是等值反向的. 然而，如果我们考虑地球表面上离月球最近一点［图 12-28(a) 中的 A 点］的一粒子，则作用于它的引力要比离心力大，我们用 f_0 来表示这大出的量：

$$f_0=\frac{GM_m m}{(r_m-R_E)^2}-\frac{GM_m m}{r_m^2}$$

由于 $R_E \ll r_m (R_E \approx r_m/60)$，我们可用求这式的近似如下：

$$f_0=\frac{GM_m m}{r_m^2}\left[\left(1-\frac{R_E}{r_m}\right)^{-2}-1\right]$$

即

$$f_0\approx\frac{2GM_m m}{r_m^3}R_E \tag{12-20}$$

用完全同样的计算，可以求出在离月球最远处[图 12-18(a)中的B点]作用于质量为m的一粒子的潮汐产生力等于$-f_0$；由此我们认识到水被拉或被推离通过地球中心的中分面的倾向(见图).

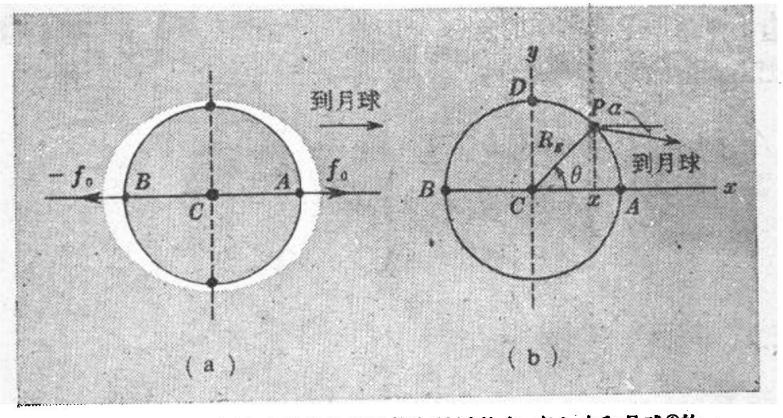


图 12-28　(a)在地球离月球最近的和最远的点，离心力和月球①的引力之差.(b)在任意一点P的潮汐产生力，图中表明存在一横向分量.

稍稍再进一步，我们可以对这问题得到深得多的见识．现在考虑在一任意点P [图 12-28(b)] 的一粒水珠．相对于地球中心C它的坐标为(x,y)，$x=R_E\cos\theta$，$y=R_E\sin\theta$．用类似于上面的计算，可求得作用于它的潮汐力在x方向的分量为

$$f_x\approx\frac{2GM_m m}{r_m^3}x=\frac{2GM_m m}{r_m^3}R_E\cos\theta \tag{12-21}$$

如果令$\theta=0$或π，就由此求出上面已经得到过的、在A点和B点

① 原文为"地球重力"——译者注.

的结果. 但是, 除这一个力之外, 平行于连结地球和月球中心的线, 还有一横向力, 因为从 P 到月球中心的线与 x 轴之间有一小角度 α, 而引力 $GM_m m/r^2$ 有一垂直于 x 的小分量

$$f_y = -\frac{GM_m m}{r^2}\sin\alpha \qquad (r \approx r_m)$$

而我们有

$$\tan\alpha = \frac{y}{r_m - x}$$

由于 α 是一个非常小的角[$\leqslant \tan^{-1}(R_E/r_m)$, 大约 1°], 我们不妨把上式近似为

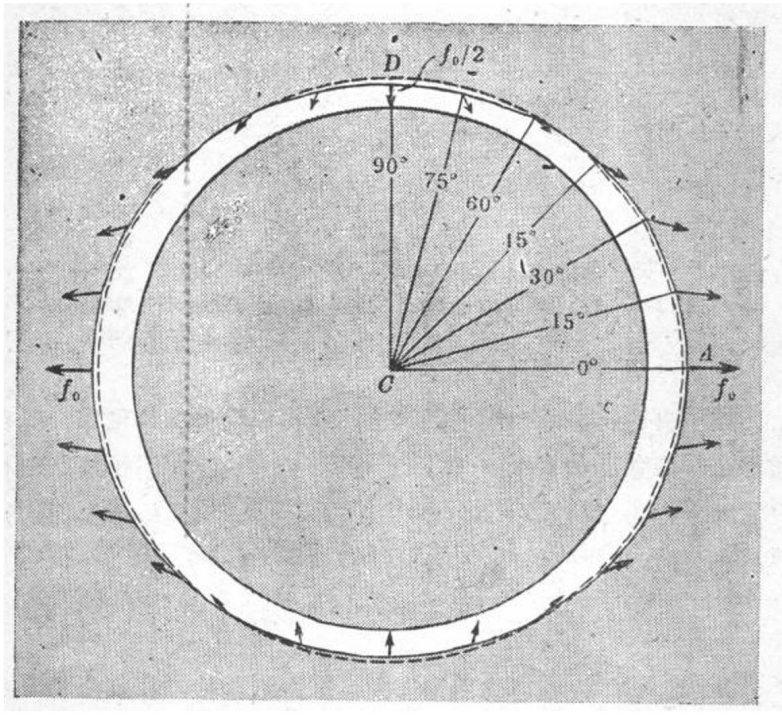


图 12-29　地球周围的潮汐产生力的型式. 虚线画的圆示明未受扰动的水面所在.

$$\alpha \approx \frac{y}{r_m} = \frac{R_E \sin\theta}{r_m}$$

于是，潮汐力的分量 f_y 就是

$$f_y \approx -\frac{GM_m m}{r_m^3} y = -\frac{GM_m m}{r_m^3} R_E \sin\theta \qquad (12\text{-}22)$$

我们看到这横向力在 $\theta = \pi/2$ 时最大，在那一点它等于 f_x 的最大值(f_0)的一半. 同时用(12-21)和(12-22)两式，我们可以展示出潮汐产生力的全貌如图 12-29 所示. 这图更令人信服地表明在那些方向上力是如何使水流动而以上面定性地描述过的方式重新公布的.

§ 13 潮汐高度；太阳的作用①

平衡的潮汐突起部应有多高呢？如果你熟悉实际潮汐变化，你可能对结果感到吃惊. 平衡的潮汐的上升和下降不到两英尺，这可以计算如下：把一粒水珠从图 12-29 中的 D 移动到 A，潮汐力所作的功等价于使这水滴上升一高度 h 时克服地球的正常引力所增加的引力势能②，h 是 A 和 B 之间的水平差. 现在，利用(12-21)和(12-22)式，有

$$dW = f_x dx + f_y dy$$

$$= \frac{GM_m m}{r_m^3}(2x dx - y dy)$$

$$W_{DA} = \frac{GM_m m}{r_m^3}\left[\int_0^{R_E} 2x dx - \int_{R_E}^0 y dy\right]$$

$$= \frac{3GM_m m}{2r_m^3} R_E^2$$

让这一大小的功和所增加的引力势能 mgh 相等，得

① 这一节远超出本章作为一整体的范围，但可能很有趣，因此加了进去.

② 这条件相当于认为水面是一等势能面.

$$h=\frac{3GM_mR_E^2}{2gr_m^3} \tag{12-23}$$

相关量的数值如下：

$$G=6.67\times10^{-11}\ \text{米}^3/\text{千克}\cdot\text{秒}^2$$

$$M_m=7.34\times10^{22}\ \text{千克}$$

$$r_m=3.84\times10^{8}\ \text{米}$$

$$R_E=6.37\times10^{6}\ \text{米}$$

$$g=9.80\ \text{米}/\text{秒}^2$$

把这些值代入(12-23)，求得

$$h\approx0.54\ \text{米}\approx21\ \text{英寸}$$

在许多地方实际值大大超过这计算值(十倍，甚至更多)，这只有通过对这问题作详细的动力学分析才能解释，其中狭窄港湾处水的集聚、共振效应都会完全改变这现象的尺度，我们所计算出的值应是在开阔洋面处的近似.

我们要在此考虑的最后一点是太阳的作用. 它的质量和距离如下：

$$M_s=1.99\times10^{30}\ \text{千克}$$

$$r_s=1.49\times10^{11}\ \text{米}$$

如果我们直接比较太阳和月球对地球上一粒子的引力，我们发现太阳在很大的比例上占上风：

$$\frac{F_s}{F_m}=\frac{M_s/r_s^2}{M_m/r_m^2}=\frac{M_s}{M_m}\left(\frac{r_m}{r_s}\right)^2\approx180$$

但是，就潮汐的产生而论，起作用的是从地球上的一点到另一点这些力的改变量. 这是用引力的**梯度**表示出来的：

$$F(r)=\frac{GM_m}{r^2}$$

$$f=\Delta F=-\frac{2GM_m}{r^3}\Delta r \tag{12-24}$$

令 $M=M_m$, $r=r_m$ 和 $\Delta r=\pm R_E$，我们就得到与(12-20)式相应的力 $\pm f_0$.

现在我们看到，来自太阳和月球的潮汐产生力的比值，按(12-24)式，是

$$\frac{f_s}{f_m}=\frac{M_s/r_s^3}{M_m/r_m^3}=\frac{M_s}{M_m}\left(\frac{r_m}{r_s}\right)^3$$

把数值代入，求得

$$\frac{f_s}{f_m}\approx 0.465$$

这就是说，月球的潮汐产生力超过太阳的，约为 2.15 倍. 这两者的效应是线性相加的——而且自然是矢量相加，依赖于月球和太阳的相对角位置. 当它们和地球共线时(无论是在同侧还是异侧)，就应有一潮汐极大值，等于月球单独产生的高潮的 1.465 倍. 这应当大约每隔两星期在新月或满月时出现一次. 在这期间（月半时)，当太阳和月球的角位置相离 90° 时，潮汐的幅度应降低到一极小值，等于月球单独产生的 0.535 倍. 因之，极大值和极小值之比约为 2.7.

§14 寻求一基本惯性系

我们在本章中讨论过的现象似乎使我们不怀疑一个人所用的参照系的加速度可以用动力学方法侦断出来，它们使人想到惯性系确具一很特殊的地位. 但是我们又怎能确有把握地说我们已经认出了一真正的惯性系，在其中伽利略的惯性定律是严格地成立的呢？

在我们最初开始讨论动力学时，我们看到过，地球本身在许多问题上是这样一个惯性系的很好的近似，特别是对于那些时间和距离的尺度都比较小的动力学现象如此. 但是我们现在已经看

到有了丰富的证据说明在地球表面上的实验室是加速的．如果实验室位于纬度 λ(见图 12-30)，室内的每一点都是向地球的转动轴加速着的，加速度的大小为

$$a_\lambda = \omega^2 R\cos\lambda$$

其中

$$\omega = 2\pi/86{,}400 \text{ 秒}^{-1}$$

$$R = 6.4\times10^6 \text{ 米}$$

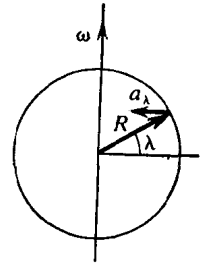
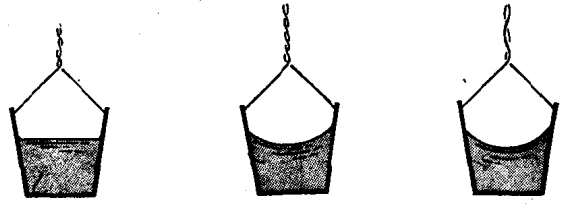


图 12-30　由于地球的转动而产生的指向地轴的加速度．

由此，

$$a_\lambda = 3.4\times10^{-2}\cos\lambda \text{ 米/秒}^2$$

如我们所知，固定于地球的一参照系的这一加速度并非加速参照系的最简单情形．本章开始时的线性加速参照系就详尽得多地被分析过．但是，正是那些与转动参照系相关联的现象导使牛顿相信绝对空间以及加速度的绝对性．在《原理》一书差不多是开头的地方他描述了用一桶水所作的一个著名的实验．这是任何一个人自己都能容易地重复的实验．水桶挂在一条扭得很紧的绳子上，然后放手．于是出现三个在图 12-31中所描述的关键性的观察结果．



(a)桶在转、水静止　　(b)桶和水一起转　　(c)桶静止、水在转

图 12-31　牛顿援用为转动及其相关加速度的绝对性的证据的实验的主要之点．

1. 开始，桶旋转得很快，但水几乎静止不动，在粘滞力经过足够的时间使它转起来以前．水面是平的，完全同水桶被放手前一样．

2. 水和桶一起转；水面变成了凹面(见习题 12-18)．

3. 桶突然被停止住，但整个水还是继续在转，而水面保持凹形①.

牛顿指出：很清楚，桶和水的相对运动并不是决定水面曲率的因素. 这现象的根本原因一定是水在空间的绝对转动及其伴随加速度. 利用 $F=ma$ 这关系，我们便可以定量地给予说明.

牛顿的论证是强有力的，他可以指出地球由于本身转动而鼓出作为支持他的看法的进一步的证据. 地球赤道的直径比两极间的直径大了约三百分之一，甚至用不着详细计算就似乎很显然这是和 a_λ/g 之值在赤道上约为 $1/300$ 而在两极处为零这一事实紧紧相连的(虽然，详细的计算还真有点麻烦).

自然，牛顿并未在此停下来. 他持有万有引力这把钥匙. 即使地球不转，它也不会是一个惯性系，因为整个地球是朝着太阳在加速的.

对于这系统

$$\omega=2\pi/(3.16\times10^{7}) \quad \text{秒}^{-1}$$

$$R=1.49\times10^{11} \text{ 米}$$

$$a_2=\omega^2R=5.9\times10^{-3} \quad \text{米/秒}^2$$

如果我们能设想一物体不受太阳引力吸引的影响，则在附着于地球的参照系中观察时，它不会遵从惯性定律. 按牛顿的观点，这加速度是实在的和绝对的，而且和一个十分确定的、由太阳提供的引力的存在相联系着.

对于牛顿说来，路差不多到头了. 对于他，恒星系统提供了一个他如此卓越地分析过的运动的活动场所. 附着于这些固定的恒星的一个参照系可以认为构成一真正的惯性系，即使它可能并不

① 牛顿并未提到过他实际做过这一实验的第三个步骤，但在人们自己去做这实验时，这很自然地是使实验完整的一步.

就是他相信的绝对空间.

今天,由于天文学家们的工作,我们对于那些“固定的”恒星中的某一些的运动知道得很多. 我们已开始觉察出我们的银河系是牵连在一普遍的转动之中的. 太阳看来是在径向距离大约为 2.5×10^4 光年的轨道上绕着银河系每 2.5×10^8 光年转一圈. 对于这一运动,我们将有

$$\omega\approx2\pi/(8\times10^{15}) \quad \text{秒}^{-1}$$

$$R\approx2.4\times10^{20} \text{ 米}$$

$$a_3\approx10^{-10} \text{ 米/秒}^2$$

初看起来,如果我们把太阳系看作是受到在它轨道里面所有恒星的吸引力而具有一向心加速度,则这一加速度就似乎能够用牛顿的万有引力定律给以合理的解释. 但是我们在地球上做的一切动力学实验都不要求我们去考虑这一极其微小的效应——甚至,对于大多数目的来说,也不必考虑地球绕太阳的转动. (然而,地球绕它自己的轴的转动却是一个要考虑的重要问题——而且,实际上是陀螺仪航行术那样一些事情中的一个重要助力.)图 12-32 示意我们处于其中的三个转动参照系(这里,我们略去了月球所引起的加速度).

但我们仍然还没有找到一个无加速度的物体可以把我们惯性参照系固着于其上. 事实上,我们可以把这一逗惹人的寻求作更进一步的引伸. 有某些证据表明,星系本身有聚集成团的趋向,每一星团包含数个到也许数千个星系. 我们所在的星团包含大约 10 个星系. 虽然各单个星系彼此之间可以有颇为复杂的运动,但这一星团却被认为是以一多少是共同的运动通过空间的.

那么,我们能够在它们上面附着惯性参照系的“固定”恒星或其他天体究竟何在呢? 看来,以“固定的恒星”为参照不是解决的办法,而且包含有一令人不安的形而上学因素(虽然我们惯常用这

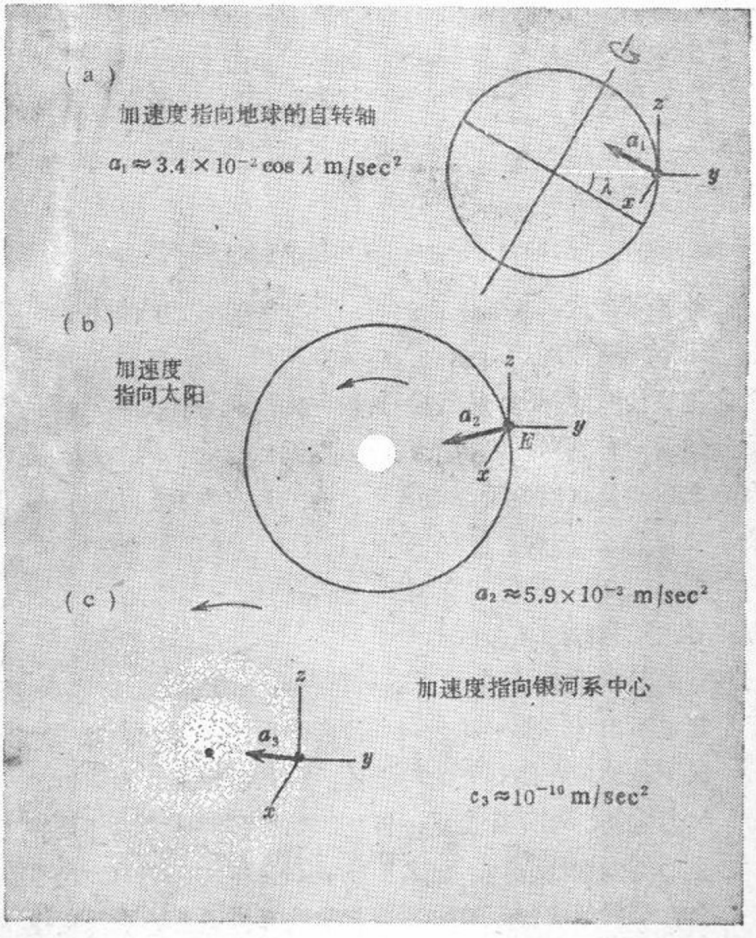


图 12-32　任何附着于地球表面的实验室参照系的各种加速度.

一措词作为建立一惯性系的简称). 这并不意味在天文学上寻找一惯性系是没有价值的. 因为, 至少到星系的水平, 那些对惯性定律的明显背离, 似乎可以追因到用以观察运动的参照系的、能够辨认出来的加速运动. 然而, 这个探索是未完成的, 因而似乎还会保留下去. 因此, 最终我们只好仰赖于一个以局部的动力学实验

和观测为基础的操作定义. 我们定义惯性系为这样一个参照系，在其中伽利略的惯性定律在实验上成立. 然而，惯性这性质的存在本身就仍然是一个深邃而令人神往的问题，因此在结束本章时，我们要对有关这一动力学的最根本特点作些评述.

§15 关于惯性的起源的揣测

并非每个人都接受牛顿的看法，认为与转动物体相关联的现象显示了加速度的绝对性. 哲学家和主教 G. 贝克莱也许是第一个人论证说①，一切运动，包括转动在内，只有作为相对于其他物体的运动才有意义. 他说，在一个别无他物的空间中是不能想象有两个球绕着它们的质心作圆运动的. 只有当我们引进由恒星所表示的背景时，我们才真有一个认识这类运动存在的基础.

大约 150 年后(1872 年)德国哲学家 E. 马赫以更有说服力的方式表达了相同的思想:

> 对我说来，只有相对运动存在着…而就这一点而言，我看不出转动和平动之间有什么区别. 显然，不论我们认为是地球在绕着它的轴而转，或是地球静止而诸恒星绕着它转，都无什关系…但是，如果我们认为地球是静止的而恒星绕它转，那么地球就不会变为扁平的，也不会有傅科的实验，等等——至少按我们通常的惯性定律的概念是如此. 可是，人们可以有两种方式来解决这困难. 或者，一切运动都是绝对的，或者，我们的惯性定律是错误地表达着的…我倾向于第二个方式. 惯性定律必须如此表达使得从第二个假定出发所得结果和从第一个假定出发所得结果完全一样，由于这个缘故，很明显，在

① 见他于 1717 年所写的小册子 *De Motu*；在牛顿的《原理》一书出版 30年后.

这定律的表达中必须把宇宙的全部质量都考虑进去.①

后来成为著名的**马赫原理**的这一深邃而新颖的思想，即任何一个给定物体的惯性依赖于其他质量的存在和分布，就是这样出世的. 爱因斯坦接受了这一思想并以之作为其宇宙论的核心原理.

如果人们认可这一观点的正确性，就会发现动力学的整个基础都包含在内了. 试考虑我们在第九章中叙述过的(见第二册130页) 求两个物体的惯性质量之比的方法. 这比值是由它们之间的相互作用所产生的加速度的比值的负倒数给出的:

$$\frac{m_1}{m_2}=-\frac{a_2}{a_1}$$

这看起来很简单和直截了当. 可是，很清楚，我们之所以能够对各个加速度给予确切的、区别于总的相对加速度的值完全依赖于我们已认定的一个在其中能测出这些加速度的参照系. 为此目的，其他物体提供的物理背景就是不可少的了.

在批判地考察了旋转运动的现象之后，马赫抨击了某些直觉的观念，这些观念比我们所有的、任何与直线运动关连的观念都根深蒂固得多. 他考虑了我们在上节中讨论过的、牛顿的旋转水桶实验所提供的证据. 十分清楚，水面的曲率是与相对于宇宙远处的大量物质存在着转动密切相关的. 当那相对转动停止时，水面就变成平的了. 当桶在转而水保持静止 (都是相对于恒星而言)时，水面保持其形状不受影响. 但是，马赫说，那可能只是一个程度的问题. 他写道:“没有人有资格说出如果那容器的壁厚和质量增加

---

① E. Mach, *History and Root of the Principle of the Conservation of Energy*, (2nd ed.), Barth, Leipzig(1909). 英译本, P. Jourdain, Open Court Publishing Co., London, 1911. 实际上，引文中的第一句话是摘自马赫的经典著作, *The Science of Mechanics*, 于 1883 年初次发行.

直到最后为若干里格①，这实验将会变成什么样."他本人的信念是，这一怪桶的旋转将真的对里面的水产生一等效的离心力作用，即便其中的水并无公认的意义下的转动.

这确是一个惊人的思想. 让我们用另一稍为不同的方式来表达它. 我们知道，相对于由恒星确定的惯性系，给一物体以加速度 **a** 时，会引起一个等于 $-m\mathbf{a}$ 的惯性力，它代表物体对于被加速这一作用的阻力. 在马赫看来，我们同样有权(实际上是被迫)接受在总是附着于该物体本身的参照系中对这现象的描述. 在这参照系中，宇宙的其余部分具有加速度 $\mathbf{a}'(=-\mathbf{a})$而这物体所经受到的惯性力 $m\mathbf{a}'$ 必须归因于其他质量的加速度.

这就使我们面对一个定量问题：如果在距离为 r 处的一质量 M 获得相对于一给定物体的加速度 **a**，问这质量对物体所受的总惯性力 $-m\mathbf{a}$ 的贡献是多少？由于我们知道这力与 m 成正比，我们可以根据对称性和相对性论证，M 的贡献也与 M 成正比，但在这一点上我们进入了一个更具推测性的领域. 电磁相互作用为我们提供一很有启发性的类比. 如果有两个电荷 q_1 和 q_2 相距为 r，我们知道 q_1 作用于 q_2 的静电力是

$$F_{12}=\frac{kq_1q_2}{r^2}$$

其中 k 是一常数，与单位的特殊选择有关. 但是，如果 q_1 获得一加速度 a，就有另一个力出现，它与 a 成正比而与距离成反比：

$$F'_{12}=\frac{kq_1q_2a}{c^2r}$$

其中 c 是光速. 由于这力随距离而减小比静电作用要缓慢，所以在距离相当大因而静电的 $1/r^2$ 力已变得可忽略时，这个力还保有可感觉到的大小. 事实上这正是信号可以用电磁辐射场作远距离

① 长度名(League)，约为三英里或三海里——译者注.

传输的依据.

现在让我们假定引力相互作用的类似情况. 静止时力的基本规律已知为

$$F_{12}=\frac{GMm}{r^2}$$

与 M 有一加速度相关联的、作用于 m 的力将是

$$F'_{12}=\frac{GMma}{c^2r} \tag{12-25}$$

在此基础上我们能够估计出来自有关各质量——地球的、太阳的、我们的银河系的，以及宇宙其余部分的——的贡献的相对大小. 我们只消计算这些物体的 M/r 之值就够了，计算结果见表 12-1，表中只列出 10 的最近幂次. (宇宙作为一整体的质量是在第一

表 12-1 对惯性的相对贡献

来 源	M，千克	r，米	M/r，千克/米	M/r(相对值)
地 球	10^{25}	10^{7}	10^{18}	10^{-8}
太 阳	10^{30}	10^{11}	10^{19}	10^{-7}
银河系	10^{41}	10^{21}	10^{20}	10^{-6}
宇 宙	10^{52}	10^{26}	10^{26}	1

章中引用过的、多少带有猜测性的数值.)可以看到，根据这一理论，一个近处的物体，即使是一个象地球本身那样巨大的质量，其影同整个宇宙的影响比较起来也是微不足道的.

如果宇宙间除了某一给定物体之外的一切物体都获得一相对于这物体的加速度 a，则把(12-25)式中除给定物体本身的 m 以外所有质量的 F'_{12} 统统加起来，就得到总的惯性力:

$$F_{惯性}=ma\sum\frac{GM}{c^2r}$$

但是这应当同我们所知道的、直接由 ma 之值给定的惯性力的大小一致. 因此，这理论要求下列恒等式成立:

$$\sum_{宇宙}\frac{GM}{c^2 r}=1 \qquad (12\text{-}26)$$

从表 12-1 中可以清楚地看出，即使是象我们银河系那样巨大的局部质量，也只代表一次要的贡献；与我们有关的是对整个宇宙中大致是均匀分布的物质求和．如果把它看成是一个以我们为中心的球，平均密度为 ρ，半径为 R_U（$\approx 10^{10}$ 光年 $=10^{26}$ 米），就有

$$\sum_{宇宙}\frac{M}{r}\to\int_0^{R_U}\frac{4\pi\rho r^2 dr}{r}=2\pi\rho R_U^2$$

但整个宇宙的总质量是

$$M_U=\frac{4\pi}{3}\rho R_U^3$$

因之，按照这一简单图象（以欧几里德几何为其基础），有

$$\sum_{宇宙}\frac{M}{r}=\frac{3}{2}\frac{M_U}{R_U}\approx 10^{26}\text{ 千克/米}$$

用 $G\approx 10^{-10}$ 牛顿·米^2/千克^2 和 $c^2\approx 10^{17}$ 米^2/秒^2 这样一些数值，我们得到

$$\sum_{宇宙}\frac{GM}{c^2 r}\approx 10^{-1}$$

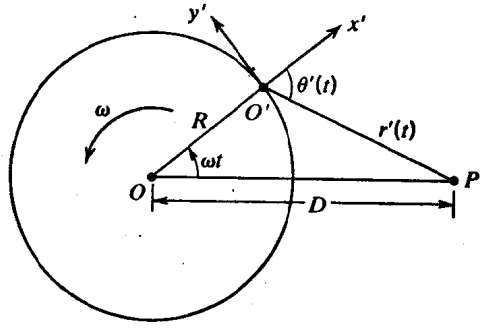
考虑到我们关于物质在整个空间中的分布的知识还有许多不确定之处，很多人会认为上面这个经验值与(12-26)式所要求的理论值（等于 1）差大约 10 倍是不必在意的．这结果至少是引起人们兴趣的，许多宇宙学家都接受了这一为马赫和爱因斯坦所支持的最初思想的发展，认为这在根本上是正确的①.

① 有关这一引人入胜的题目的进一步阅读材料，可参看 R. H. Dicke "The Many Faces of Mach," 载于 *Gravitation and Relativity*(H.-Y. chin and W. F. Hoffmann 编), W. A. Benjamin, New York 1964; N. R. Hanson, "Newton's First Law"和 P. Morrison, "The Physics of the Large," 两者均载于 *Beyond the Edge of Certainty*(R. G. Colodny 编), Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1965; D. W. Sciama, *The Unityof the Universe*, Doubleday, New York, 1961, 和 *The Physical Foundations of General Relativity*, Doubleday, New York, 1969.

习　题

12-1　一架单引擎飞机以恒定速率 v 水平地飞行. 在飞机参照系中，螺旋桨的每个叶梢都扫过一半径为 R 的圆，速率为每秒 n 转. 求出从地球上观察到的螺旋桨叶梢的轨道方程.

12-2　一个人从参照系(S')的原点观察一根柱子的位置 P，(S') 是刚性地固定在一旋转木马的边缘上的（见图）. 旋转木马(半径为 R)以角速度



(习题 12-2)

ω 在转动，柱子到转马的轴的距离为 D；在 $t=0$ 时，P 在 S' 中的坐标是 $x'=D-R, y'=0$(等价于 $r'=D-R, \theta'=0$).

(a) 求柱子的坐标 $r'(t), \theta'(t)$；再给出相应的 $x'(t)$ 和 $y'(t)$.

(b) 将(a)的结果进行微分，求柱子在笛卡儿坐标和极坐标中的速度和加速度.

(c) 画出柱子在 S' 中的路径图.

12-3　一男孩乘坐一铁路平板车在地平面上行驶，沿运动方向有一加速度 a. 他应当与竖直方向成多大角度扔出一球使他不必挪动他在车中的位置就能抓住它？

12-4　一列火车以 20 米/秒的速率在一笔直的轨道上运行，在进入一车站时它均匀地减速，并在 100 米处停了下来. 一质量为 10 千克的手提箱，它对车箱地板的摩擦系数 $\mu=0.15$，在列车减速期间滑下过道.

(a) 在这段时间里提箱的加速度(相对于地面)是多少？

(b) 这提箱在列车刚停下来时的速度是多少？

(c) 在列车已停下来时这提箱还继续下滑了一段时间. 当它也停止不动时, 它从列车地板上原来的位置移动了多远?

12-5 一个人用一弹簧秤量他自己的体重. 用牛顿为刻度的这秤指明他的体重为 700 牛顿, 如果在他乘电梯以下述方式从底层上第十二层时, 他重复地进行观测, 他所得的读数为何?

(a) 在第一层到第三层之间, 电梯的加速为 2 米/秒².

(b) 在第三层到第十层之间, 电梯以 7 米/秒的恒定速度运行.

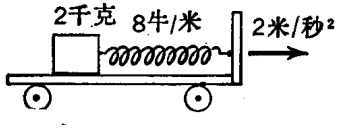
(c) 在第十层到第十二层之间电梯以 2 米/秒² 减速.

(d) 然后他又以类似的过程乘电梯下来.

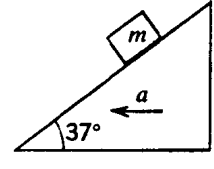
(e) 如果在另一次乘坐中秤上的读数为 500 牛顿, 你对他的运动能作何结论? 他在朝哪个方向运动?

12-6 如果一个箱子和货车底板之间的摩擦系数为 μ, 问这货车爬一与水平方向成 θ 角的小山时, 不致使箱子在底板上滑动的最大加速度是多少?

12-7 一块质量为 2 千克的物体静止在无摩擦的平台上. 把它系在一弹簧系数为 8 牛顿/米的水平弹簧上, 如图所示.



(习题 12-7)



(习题 12-8)

起初, 整个系统不动, 但在 $t=0$ 时平台开始以 2 米/秒² 的恒定加速度向右运动. 结果, 物体开始相对于平台作水平振动.

(a) 振动的振幅多大?

(b) 在 $t=2\pi/3$ 时, 弹簧比原来未伸长的情形长了多少?

12-8 一平面, 与水平线成倾角 $37^\circ\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$, 水平地向左加速运动 (见图). 加速度逐渐增大, 直至原相对于这斜面为静止的、质量为 m 的物块正好开始沿斜面上滑. 物块与斜面之间的静摩擦力由 $\mu=4/5$ 表征.

(a) 画图表明在固定于地板的惯性系中物块刚要滑动之前作用于它的各个力.

(b) 求出物块开始滑动时的加速度.

(c) 在与物块一同运动的非惯性系中重作(a)题.

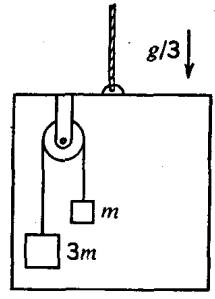
12-9　在飞机起飞时，一精神紧张的乘客解下他的领带，把它松松地挂在他的手指上．在起飞跑行的 30 秒的持续时间内，他观察到领带与竖直方向成 15°角．问飞机起飞时的速率多大？跑道需要多长？设跑道是水平的．

12-10　在长为 1 米的均匀钢杆(密度＝7500 千克/米^3，极限抗张强度为 5×10^8 牛顿/米^2) 的一端，施加一个方向背离杆的质心的力，使杆沿其长度加速．要杆不致断裂，最大容许的加速度是多少？如果超过这一加速度，杆在何处断裂？

12-11　(a) 一列火车以减速度 a 慢下来．餐车中一碗汤的液面与水平面成多大的角？一小孩在距离餐车前壁为 d 之处从高度 h 掷下一苹果．在小孩看来，苹果走的是什么路径？在什么条件下苹果会掉在地板上？打在前壁上呢？

(b) 作为进行上述观察的奖赏，孩子的双亲在下一站停车时给他买了一个充氦气的气球．他们带玩笑地问他，如果列车以加速度 a' 离开车站，气球会怎样．随后，他们惊异地发现他的预见是正确的．这个早熟的孩子的回答是什么？

12-12　一电梯具有等于 $g/3$ 的向下的加速度．电梯内装着一滑轮，其摩擦和惯性可忽略．滑轮上绕着一根绳，绳的两端挂两个物体，质量分别为 m 和 $3m$(见图)．



(习题　12-12)

(a) 计算质量为 $3m$ 的物体相对于电梯的加速度．

(b) 计算把滑轮连结到电梯顶部的杆施加于滑轮上的力．

(c) 一个完全被隔离于电梯里的观察者如何能用借助于一弹簧秤量出的各个力来说明 m 的加速度？

12-13　在下列各种情况下，求一长度为 L 的摆作小振动的平衡位置和周期：

(1) 在一列车中，列车以加速度 a 在一水平轨道上运行．

(2) 列车在一与水平成 θ 角的轨道上自由运转．

(3) 在一以加速度 a 下降的电梯中．

12-14　投掷 16 磅链球的世界纪录约为 70 米．假设链球在飞出以前绕

一半径为 2 米的圆周旋转，试估计投掷者必须能经受得住的拉力的大小.

12-15 (a) 一个人乘坐在一竖直加速度为 a 的电梯中. 他挥摆一桶水. 使它沿着半径为 R 的竖直圆周转动. 要使水不致溢出，他必须以多大的角速度挥动这桶？

(b) 如果这人是在一具有水平加速度 a 的列车上，他必须以多大的角频率挥动这桶？(圆周的平面仍是竖直的，并包含着列车加速的方向.)

12-16 考虑一根质料密度为 ρ 的细杆以恒定角速度 ω 绕着垂直于其长度的一根轴转动.

(a) 证明：如果要使这根杆沿着它的长度有一不变的应力 S (单位截面上的张力)，则它的截面积必须随着到转轴的距离的平方，指数地减小：

$$A=A_0e^{-kr^2} \quad \text{其中 } k=\rho\omega^2/2S$$

[考虑杆在 r 到 $r+\Delta r$ 之间的一小段，其质量为 $\rho A(r)\Delta r$，并注意在它两端的张力差 $\Delta T=\Delta(SA)$.]

(b) 最大角速度 $\omega_{最大}$ 是多少？用 ρ、$S_{最大}$ 和 k 表示.

(c) 钢的极限抗张强度约为 10^9 牛顿/米^2. 试估计“锥度常数” $k=100$ 米$^{-2}$ ($\rho=7500$ 千克/米^3) 的钢质转子每分钟转数(rpm)的最大可能值.

12-17 一球状流感病毒粒子，质量为 6×10^{-16} 克，直径 10^{-5} 厘米，在一超离心机的水悬浮液中. 它离竖直转轴 4 厘米，转速为每秒 10^3 转. 病毒粒子的密度为水的 1.1 倍.

(a) 从随着离心机转的参照系的观点来看，“g”的有效值是多少？

(b) 仍从转动参照系的观点看，作用于病毒粒子的总离心力是多少？

(c) 由于这离心力，粒子以不大的速率 v 沿径向朝外运动. 运动受到粘滞力 $F_{阻}=3\pi\eta vd$ 的阻碍，其中 d 为粒子直径，η 为水的粘滞系数，等于 10^{-2} cgs 制单位(克/厘米/秒). v 有多大？

(d) 试从固定于实验室的惯性系的观点来描述这情况. [在(b)和(c)中，必须考虑浮力效应. 想想一物体完全浸没在一不同密度的液体中的普通流体静力学问题.]

12-18 (a) 证明一旋转液体表面的平衡形状是抛物型的(或者，严格地说，是一旋转抛物面). 这一问题从转动参照系的观点来考虑最简单，只要知道，一液体经受不住与它的表面相切的力，因而趋向于使这种力消失的位形. 从一惯性系的观点来考虑这情况也是很有启发的.

(b) 曾经有人建议，天文望远镜用的抛物面反射镜可由一转动的水银

池来构成. 要制造一焦距为 20 米的反射镜, 转速(每分钟转数)应是多少?

12-19 作为初步近似, 在一运行于轨道上的飞船中任何地方所释放的一个物体都将相对于飞船保持同一位置. 但是, 更精确一点说, 它受到一个与它到飞船质心的距离成正比的净余力. 在飞船这非惯性系中所测出的这个力是由于到地球中心距离的改变致使重力和离心力都有微小的变化而引起的. 试求出这力与物体的质量 m、到飞船质心的距离 ΔR、飞船绕地球运动的轨道半径 R、以及距离地球中心为 R 处的重力加速度 g_R 的函数关系.

12-20 一半径为 5 米的圆台以角速度 $\omega=0.2$ 弧度/秒转动. 一个质量为 100 公斤的男子沿着这圆台的一根直径以恒定速度 $v'=1$ 米/秒行走, 在 $t=0$ 时, 他穿过中心, 而在 $t=5$ 秒时, 他跳离圆台的边缘.

(a) 画图说明这个人在 $t=0$ 到 $t=5$ 秒内所感受到的离心力与时间的函数关系.

(b) 画出类似的科里奥利力与时间的关系图. 对这两个图都给以正确的竖直标度(牛顿).

(c) 假设圆台从上面看是顺时针方向转动的, 用简图指出这些力的方向.

12-21 在一慢转唱片上(12 英寸, 每分钟 33 转), 一只虫子开始爬向唱片的边缘. 假设它的腿和唱片之间的摩擦系数是 0.1, 它能通过爬行或其他方法到达边缘吗?

12-22 一孩子坐在靠近一转动的旋转木马的地上相对于固定于地球的一参照系这孩子没有加速度(承认这是近似地真确的), 因而也不受力. 相对于固定于旋转木马、原点在它中心的极坐标.

(a) 孩子的运动如何?

(b) 他的加速度是什么?

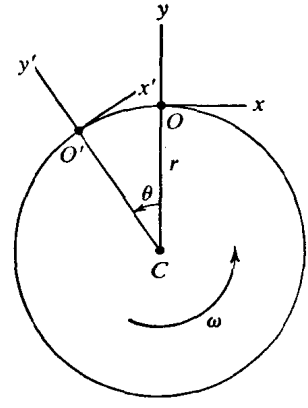
(c) 通过判定作用在这孩子身上的离心力和科里奥利力, 说明在转动参照系中所测出的这一加速度.

12-23 在正文(原书 p. 516)中, 横向(θ 方向)的科里奥利力是从考虑一物体在转动参照系中沿一向径线的运动推导出来的. 相应地, 如果考虑一物体在转动参照系中作**横向**运动, 我们可以得到由科里奥利力和离心力的效应而来的净余**径向**力. 考虑在一无摩擦的、以角速度 ω 转动的转台上的一粒子, 这粒子起初相对于转台静止, 到转轴的距离为 r.

(a) 建立一固定坐标系 S, 其 x 轴是横向的, y 轴沿径向, 原点 O 位于

$t=0$ 时粒子所处位置（见图）. 建立另一坐标系 S'，它的原点 O' 和 x' 以及 y' 轴随转台旋转，在 $t=0$ 时 S' 与 S 重合. 证明，在以后的时刻 t，在 S' 和 S 中测得的一个给定点的坐标由下列方程联系，其中 $\theta=\omega t$：

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta+r\sin\theta$$
$$y'=y\cos\theta-x\sin\theta-r(1-\cos\theta)$$



（习题 12-23）

(b) 假定在 $t=0$ 时给予这粒子一相对于 O' 沿 x' 方向的速度 v'. 它随后将沿着 x 方向相对于 O 以恒定速度 $v'-\omega r$ 运动. 根据这一点求出它在以后的时刻 t 的坐标 x' 和 y'.

(c) 对于 $\omega t\ll 1$ 的情况作近似，证明对于小的 t 值，可令

$$y'\approx\frac{1}{2}a'_r t^2,$$

其中 $a'_r=\omega^2 r-2\omega v'$. 这相应于所要求的、离心加速度和科里奥利加速度的合成.

(d) 如果你还有劲头，不妨应用同样的分析于起始速度是沿任意方向的情形.

12-24 在一篇题为“物体向南落下吗？”[*Phys. Rev.*, **16**, 246 (1903)]的文章中，E. 霍耳报道了他在马萨诸塞州，坎布里奇（北纬 42°）所做的近1000次试验的结果，在试验中他让物体落下一竖直距离 23 米. 他发现，平均说来，有一0.149 厘米的向东偏转和一0.0045 厘米的向南偏转.

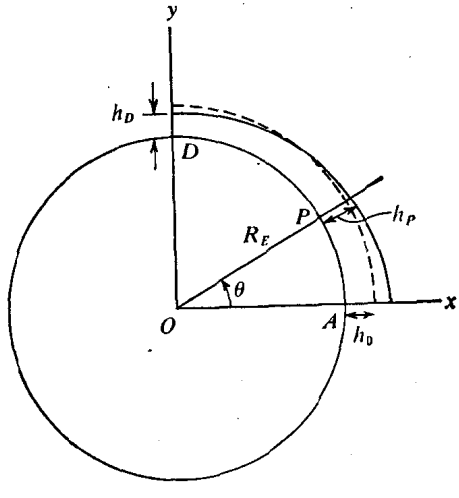
(a) 把这向东偏转同根据(12-17)式所预期的值比较一下.

(b) 考虑这样一个事实：有了相对于地球的一个向东的运动分量就会引起一向南的科里奥利力分量，不用作任何详细分析，试估计一下最终向南的偏转与主要的向东偏转之比的数量级. 你认为用这些说法能得到霍耳的向南偏转的结果的解释吗？

12-25 试计算在转动的地球上某人观察到的在通过两极的一圆形轨道上的卫星的科里奥利加速度. 求这轨道上所有各处的这一加速度的方向，由此解释为什么尽管卫星受到科里奥利力的作用它仍然总是通过两极. 在一赤道轨道上的卫星受到一类似的力吗？

12-26 设想一无摩擦的水平桌子，圆形，半径为 R，装上一完全弹性的边圈．一干冰球从边缘上的一点投向中心．冰球以恒定速率 v 来回反弹跨过桌子，但由于科里奥利力它并不完全沿着一直径的路线走．试考虑冰球的路径相对于桌子逐渐在转的速率，并把结果与处于同一纬度 λ 的傅科摆作比较．

12-27 在正文(50 页) 中平衡潮汐的高度是由考虑潮汐产生力把一水粒从 D 点带到 A 点(见图)所作的功计算出来的．



(习题 12-27)

考虑从 D 点到一中间点 P 的功，我们能够得到在一任意点的水的升高或降低的普遍表达式 $h(\theta)$；这升高或降低是相对于假使没有潮汐产生力时的水平面而言的．作以下两部分计算：

(a) 对于一质量为 m 的水粒，算出从 $D(x=0, y=R_E)$ 到 P $(x=R_E\cos\theta, y=R_E\sin\theta)$ 潮汐产生力的功积分．把这结果同重力的势能差 $mg(h_P-h_D)$ 等起来，就得到差数 h_P-h_D 的一个表达式．

(b) 水的总体积是一常数．因之，如果 h_0 代表没有潮汐产生力时水的深度，则一定有

$$\int_0^{\pi/2} 2\pi R_E^2[h(\theta)-h_0]\sin\theta d\theta=0$$

综合(a)和(b) 的结果，你应当能够证明：水平面相对于它未受扰动的状态的偏离与 $3\cos^2\theta-1$ 成正比．

什么原因使得行星绕着太阳转呢？在开普勒的时代有些人回答这问题说，那是安琪儿在行星的后面扑打着翅膀在推它们绕轨道转．你将看到，这答案离真实不远．唯一的差别是那些安琪儿坐在不同的方向扑打着翅膀在向里推．

R. P. 费曼，《物理定律的特征》(1965).

第十三章　有心力作用下的运动

我们曾经(特别是在第八章中)看到，在指向某一十分确定的中心的力的作用下物体的运动是力学中一个丰富多采的研究领域．在物理学史上，有过两次，对这种运动的分析曾与我们对自然的理解的根本性进展密切相连——一次是在宏观的尺度上对行星运动的解释，一次是卢瑟福对 α 粒子散射的研究，它使人们对亚原子世界第一次获得一清楚的看法．迄今为止，我们局限于讨论圆形轨道，可是就在这基础上我们已经能够学到不少东西．但现在我们将开始对于在有心力的作用下的运动作更普遍的分析．

§1　问题的基本特点

如我们在第十一章(见本书第二册259页)中看到过的，一个有心、同时又是保守的力场必须是球对称的；而自然界中的一些最重要的场(以电场和引力场最为著名)恰恰属于这一类．经常出现用球对称的模型来描述物理实在是同空间各向同性这一基本假设密切相连的，而且也是建立各种动力学系统的理论模型的直观性的自然出发点．

我们将从一质量为 m 的单个粒子在一球对称的有心力场中运动这一具体问题开始，至少是在开始的时候，我们将假设，产生这有心场的物体具有如此巨大的质量因而可以把它看作是一固定的中心以便取为分析这运动所需坐标系的原点．

首先一个要注意的事是这运动粒子的路径位于通过力心的一固定平面上．这平面由粒子的初速矢量 $\mathbf{v}_0$ 和粒子相对于力心的初位置矢量 $\mathbf{r}_0$ 确定．因为作用于粒子的力是在这一平面上，而且

因为初速度没有垂直于这平面的分量，所以运动必然被限制在这个 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{v}_0$ 的平面上．要分析这运动，我们必须先选一适当的坐标系．由于力 $\mathbf{F}$ 只是标量距离 r 的函数，而且是沿着矢量 $\mathbf{r}$ 的方向(正向或负向)，显然，用图 13-1(a)中所示的平面极坐标(r,θ)最为方便．这意味我们要用以这些坐标来表示的加速度矢量．在第三章(见本书第一册 103 页)中，我们曾对圆运动($r=$常数)的特殊情形计算过这一矢量．现在我们将导出包含 r 和 θ 二者都在变的、更为普遍的表达式．

应用图 13-1(a)中指明的单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$，我们有

$$\mathbf{r}=r\mathbf{e}_r \tag{13-1}$$

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta \tag{13-2}$$

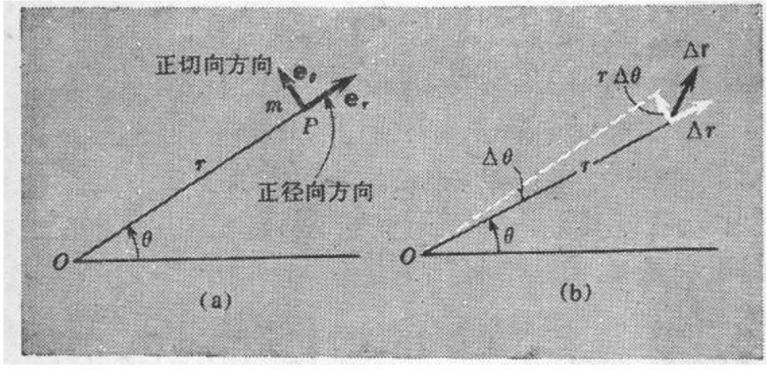


图 13-1 (a) 在平面极坐标系中，与径向和切向相关联的单位矢量 $\mathbf{e}_r$ 和 $\mathbf{e}_\theta$．(b)一元矢量位移 $\Delta\mathbf{r}$ 的径向和切向分量．

这个 $\mathbf{v}$ 的等式不难得出，只要认识到，位置的一普遍的无限小变化 $\Delta\mathbf{r}$，如图 13-1(b)所示，是由一长度为 Δr 的径向位移(θ 不变)和一长度为 $r\Delta\theta$(r 不变)的切向位移相加而成．另一法是只消将(13-1)式两边对 t 求微商，并记得 $d(\mathbf{e}_r)/dt=(d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$ [见(3-17a)].

我们现在来将(13-2)式两边对 t 求微商：

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta$$
$$+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{e}_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta$$

把 $d(\mathbf{e}_r)/dt=(d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta$ 和 $d(\mathbf{e}_\theta)/dt=-(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$ 代入，$\mathbf{a}$ 的这一表达式可改写为

$$\mathbf{a}=\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{e}_r+\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{e}_\theta \qquad (13\text{-}3)$$

从这式把总加速度的径向和切向分量分开提出将是方便的:

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad (13\text{-}4)$$

$$a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \qquad (13\text{-}5)$$

牛顿定律在平面极坐标中的陈述可以用这两分开的加速度分量来表达:

$$F_r=m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \qquad (13\text{-}6)$$

$$F_\theta=m\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] \qquad (13\text{-}7)$$

上面这两个方程提供了解决在一平面中相对于极坐标原点的任何运动问题的基础. 但是，我们将讨论把它们应用于有心力的特殊情况.

§2 等面积定律

在任何种类的保守有心力的情况中，我们只有 $F_r=F(r)$，而 $F_\theta=0$. 从其中的第二式立刻推知 $a_\theta=0$. 把(13-5)式 a_θ 的具体表示代入，有

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0 \qquad (13\text{-}8)$$

这方程隐含着一简单的几何结果：矢量 **r** 以恒定的速率扫过面积．看出这一点的一种方法是以 r 遍乘(13-8)式：

$$r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0$$

于是可以认出左方是乘积 $r^2\,d\theta/dt$ 对 t 的微商：

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}+2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

因此，如果对前式求积分，就有

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\text{常量} \tag{13-9}$$

在图 13-2 中我们表出 **r** 在一短时间 Δt 内扫过的面积 ΔA(阴影

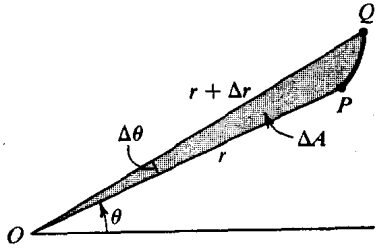


图 13-2　示明计算面积速度的基础（面积速度是径向矢量在单位时间内扫过的面积）．

部分)．这是一个三角形 POQ(当 PQ 足够短时我们认为它与一直线无区别)，因而有

$$\Delta A=\frac{1}{2}r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$$

扫过面积的瞬时速率就是 $\Delta A/\Delta t$ 在 $\Delta t\to 0$ 时的极限．由于在趋于这极限时 $\Delta r/r\to 0$，$\sin\Delta\theta\to\Delta\theta$，我们得到

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{13-10a}$$

这样我们就认出(13-9)式右方的那个常量是径向矢量 **r** 扫过面积的(**恒定**)速率的两倍．因此有

(对任何有心力) $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=$常量　　(13-10b)

方程(13-10b)所表达的结果是开普勒在他(比较后期)分析行星的运动时所首先发现的，他把它叙述于著名的、他的第二定律中(虽然按时间顺序应是第一)．牛顿按上面我们讨论过的相同动力学见地来理解它，即把它看作是在任何总是指向同一点的力的

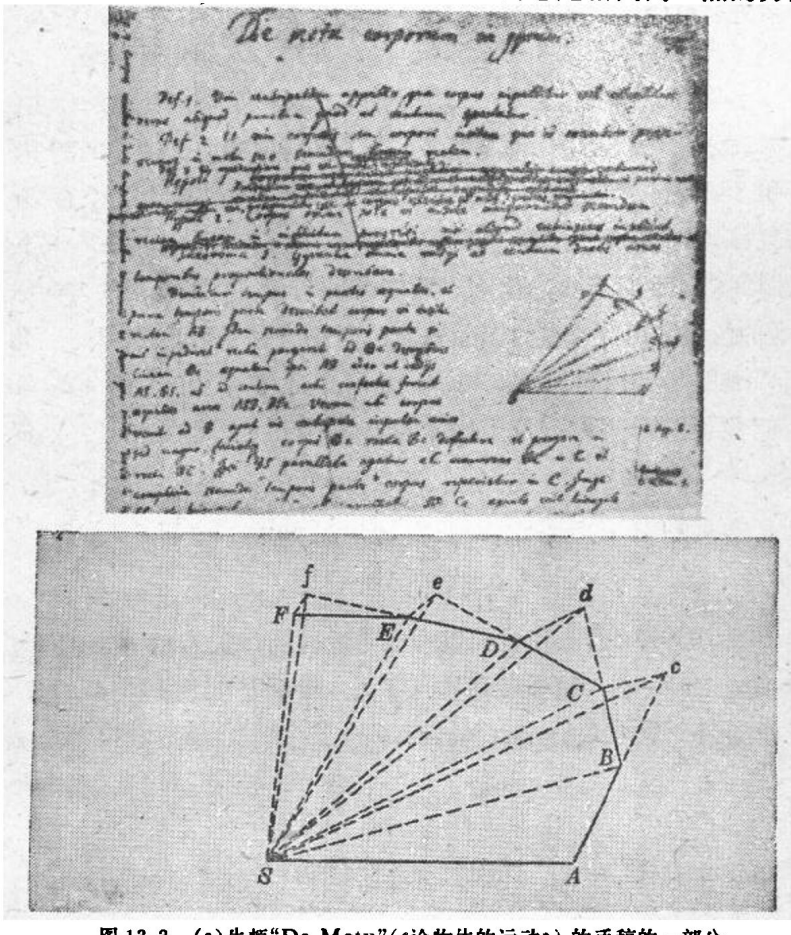


图13-3　(a)牛顿"De Motu"(«论物体的运动»)的手稿的一部分，表明他证明在有心力作用下的等面积定律的依据．(b)牛顿所画的图的放大．

作用下一物体运动的一个特点.

牛顿把这种力的作用形象化地看成是一连串小的敲击或冲击,它们在极限情况下就变成一连续作用的影响了. 他在 1684 年(在《原理》一书之前约两年)写下的一篇短文[①] 中陈述了他对这过程的这种看法. 图 13-3(a)是这作品的一个片断的复制品,说明牛顿考虑这问题的思路. 用他所绘的这草图的放大图[图 13-3(b)],我们可以更易于跟从牛顿的论证,和通常那样它是几何学的.

牛顿设想一物体沿着 AB 走,而后受到一个指向 S 点的冲击. 其结果是它现在沿 BC 而不是 Bc 走了. 类似的冲击把它带到 D、E 和 F 诸点. 为了使问题定量化,牛顿设想 BC 实际上是位移 Bc 与位移 cC 的组合,前者等于 AB,是物体以其原有速度在一等长的时间内继续走下去的位移,后者是平行于冲击作用的方向线 BS 的位移. 由此立刻可以用一简单的论述得到面积定律:三角形 SAB 和 SBc 因等底(AB 和 Bc)并同高面相等. 三角形 SBc 和 SBC 也因同底(SB)并位于同样的两条平行线之间而相等. 因而 $\Delta SAB=\Delta SBC$.

§3 角动量守恒

我们现在来给面积定律以一较为近代的和更为根本的色彩,这就是把它表达为**轨道角动量**的守恒. 设在 P 点[图 13-4(a)]一粒子受到一个力 $\mathbf{F}$ 的作用,我们有

$$\mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

现在对这式两边求它们同位置矢量 $\mathbf{r}$ 的矢(叉)积:

---

① 这篇短文题为"De Motu"(《论物体的运动》),包含着许多后来写进《原理》中的重要结果.

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{13-11}$$

右边是 **F** 相对于 O 点所产生的转矩 **M**.

现在引进粒子相对于 O 的**动量矩 l**:

$$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{13-12}$$

因而, **l** 同线动量 **p** 的关系与 **F** 同力矩 **M** 的关系相同. 它是一个矢量, 如图 13-4(a)所示, 垂直于 **r** 和 **v** 所决定的平面. 如果计算

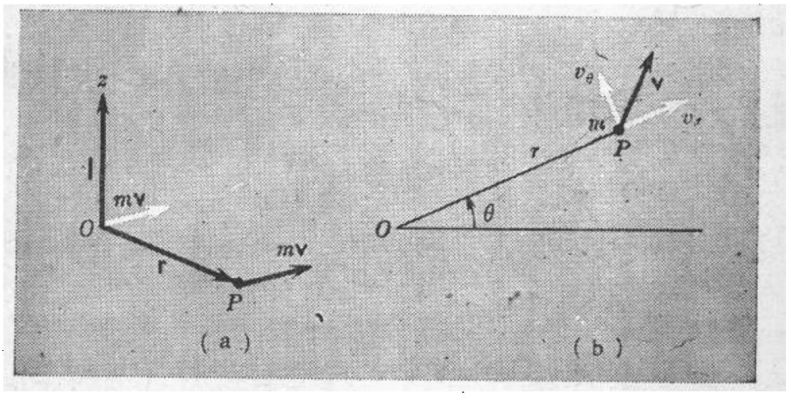


图 13-4 (a) 位置、线动量和轨道角动量之间的矢量关系. (b)把速度分解为径向和横向分量.

一下 **l** 的变化率——即 **l** 对 t 的微商——我们有

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$=\mathbf{v}\times m\mathbf{v}+\mathbf{r}\times m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

然而, $\mathbf{v}\times m\mathbf{v}$ 之值为零, 因为它是两平行矢量的叉积. 上列方程右边的第二项, 按方程(13-11), 等于作用力相对于 O 的转矩或力矩. 因而我们有以下的简单结果:

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\frac{d\mathbf{l}}{dt} \tag{13-13}$$

于是, 这就把 **F** 的力矩同粒子相对于 O 点的动量矩, 或轨道角动

量联系起来．如果取 **F** 为一沿径向指向 O 或背离 O 的有心力，则 **M** 之值为零．在这种情形下我们就有

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt}=0$$

而

$$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}=\text{常量} \tag{13-14}$$

这就是在有心力——或者没有力——的作用下运动的轨道角动量守恒的表述．

如果我们看着运动平面中的情况[图 13-4(b)]，则矢量 **l** 是由纸面朝上的，它的大小 l 由下式给出：

$$l=rmv_\theta=mr^2\frac{d\theta}{dt} \tag{13-15a}$$

这就是说，(13-10a)和(13-10b)所表达的扫过面积的恒定速率是

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{l}{2m} \tag{13-15b}$$

(13-14)和(13-15)两式所表达的结果很有用．正如我们以前曾经指出的，如果我们发现在某一过程中有一些量始终保持不变——即它们是"守恒的"——那么，它们就成为分析这种现象的强有力的工具．角动量就是这类守恒量，在分析有心力场的问题时特别有用．应当注意，角动量的守恒只依赖于转矩为零，而与机械能守恒或不守恒无关．最后这一点的一个很好的例子是在一条渐渐缩短的绳子的一端系着的物体，在转动时会变快（图13-5）．如果在一圈内 r 的缩短远小于 r 本身，则在每一瞬间速度 **v** 都几乎与 **r** 垂直，因而角动量 (rmv_θ) 非常接近于 mvr．拉着物体向内的绳中张力 **T** 相对于 O 不产生转矩，因之 $l=$常量．在 r 从 r_1 变到 r_2 时，有

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$

或

$$v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$$

因而，如果 r_2 比 r_1 小，那么动能就会增加

$$K_2-K_1=\frac{1}{2}mv_1^2\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)$$

与这动能增加相当的功一定是由绳中的张力提供的．在一平衡的轨道中应有

$$T=\frac{mv^2}{r}$$

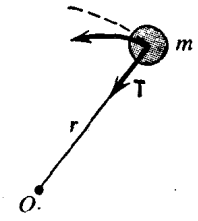


图 13-5　一物体运动轨迹的一小部分，物体系于一条长度渐渐地缩减的绳子的一端，绕着 O 点转．

把 $v=l/mr$ 代入，它成为

$$T=\frac{l^2}{mr^3}=\frac{mv_1^2r_1^2}{r^3}$$

在从 r 变到 $r+dr$ 时，T 作的功是 $-Tdr$（因为 T 沿径向朝里作用）．于是，从 r_1 到 r_2 所作的总功是

$$W=-mv_1^2r_1^2\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^3}=\frac{1}{2}mv_1^2r_1^2\left(\frac{1}{r_2^2}-\frac{1}{r_1^2}\right)$$

可以看出这等于刚才算出的 K_2-K_1 之值．这问题和地球卫星的向内蜗旋运动有许多共同之处，虽然在那一情况下轨道角动量守恒不能应用，因为空气阻力表现为一个横向力而提供一负的转矩（见本书第二册 288—290 页的讨论）．

§4　有心力运动中的能量守恒

如果我们是在处理一保守的有心力（不同于上面所分析的例子中的情形），我们可把总机械能守恒的表述写成如下形式：

$$\frac{m}{2}\left[v_r^2+v_\theta^2\right]+U(r)=E \tag{13-16}$$

此外，我们有(13-15a)式所给出的角动量守恒定律：

$$mrv_\theta=l$$

因而E和l这两个量是"运动常数". $U(r)$是粒子m在有心场中的势能. 轨道角动量的方程使我们能够把方程(13-16)简化为这样一个**形式**的问题: 只受到一保守力作用的粒子的一维运动. 这是处理有心力场问题的方法的关键. 从(13-15a)求取v_θ并把它代入(13-16)式, 即得

$$\frac{mv_r^2}{2}+\frac{l^2}{2mr^2}+U(r)=E \tag{13-17}$$

它描述着运动的径向部分. 它具有如下的形式

$$\frac{mv_r^2}{2}+U'(r)=E \tag{13-18}$$

其中

$$U'(r)=U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}$$

$U'(r)$这个量起着一维径向问题中**等效**势能的作用. 就径向运动而论, 多出的那一项$l^2/2mr^2$把位置矢量$\mathbf{r}$在实际运动中是不断地改变方向的这一事实全都计算在内了. 但是应当注意, 没有任何明显地依赖于角坐标θ或它对时间的微商的量出现在(13-18)式中.

$l^2/2mr^2$这一项常被归属为"离心"势能, 因为这势能的负梯度所表示的力为

$$F_{离心}=-\frac{d}{dr}\left(\frac{l^2}{2mr^2}\right)=\frac{l^2}{mr^3}$$

以$l=mr^2(d\theta/dt)$代入, 这式变为

$$F_{离心}=mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

这与一转动参照系中的离心力$m\omega^2 r$完全一样, 参照系以等于$d\theta/dt$的瞬时值的角速度ω在转动.

当然, 必须记住, 这"离心势能"实际上是粒子的动能的一部

分，即来自它与矢径的瞬时方向垂直的运动分量的那部分．这部分动能可以表示为只与径向位置有关的一个函数这一情况使我们能够把径向运动作为一个独立的一维问题来处理．

(13-17)式中的势能函数$U(r)$可以是r的任何函数．在展开这一讨论时，我们将首先考虑在r增加时$U(r)$趋于零的任何有心力场中运动的普遍性质．随后再着手处理一反平方力场的重要特殊情形，在这种力场中一粒子的势能与r成反比．

§5 有效势能曲线的应用

把第十章中的能量图方法应用于(13-17)或(13-18)式，可以很快地得到一粒子在有心场中运动的普遍性质．但是，在应用能量法于一维运动和用于能够象有心场的情形那样化为两个一维运动的二维运动之间，有两个重要差别．第一，在一维情形中，能量单独就能决定在一保守场中运动的普遍特性．然而在有心力场的情形中单单确定能量是不够的，还必须确定粒子的角动量l，运动依赖于两个参数E和l，不只是E．这一点在能量图上表现得很明白，因为$U'=U+(l^2/2mr^2)$的图线对于不同的l是不同的．于是，我们有整整一族等效势能曲线，对应于角动量的不同值，还必须就不同的l值来考虑具有一给定能量的运动如何．

此外，要把用这一方式得到的径向运动结果转换到粒子的实际运动，我们必须记住，在径向坐标r随着时间而改变的同时，θ也是如此．伴随着r的改变，矢量$\mathbf{r}$同时有一转动，粒子的实际轨道与两者都有关．矢量$\mathbf{r}$的转动一般是不均匀的，除非是圆运动的特殊情形，这时位置矢量$\mathbf{r}$的长度不随时间而改变．

角动量l和能量E决定着基本动力学条件，它们与在任意一时刻t_0的位置r_0和速度$\mathbf{v}_0$有下列关系：

$$E=\frac{mv_0^2}{2}+U(r_0)$$
$$l=mr_0(v_\theta)_0 \tag{13-19}$$

由于我们是在处理一个二维运动，就一共需要四个初始条件来完全地确定情况．说出 $\mathbf{r}_0$ 和 $\mathbf{v}_0$（每一个有两个分量）是什么就满足这一要求．

现在让我们看一个典型的能量图．在图 13-6(a) 中绘出了几条 $l^2/2mr^2$ 对 r 的曲线，它们对应于不同的角动量值，另一条 $U(r)$ 对 r 的曲线表示了随距离 r（从 $r=0$ 起）增加而增加的吸引力势能．当 $r\to\infty$ 时，$U(r)\to 0$．图 13-6(b) 表示出由同一函数

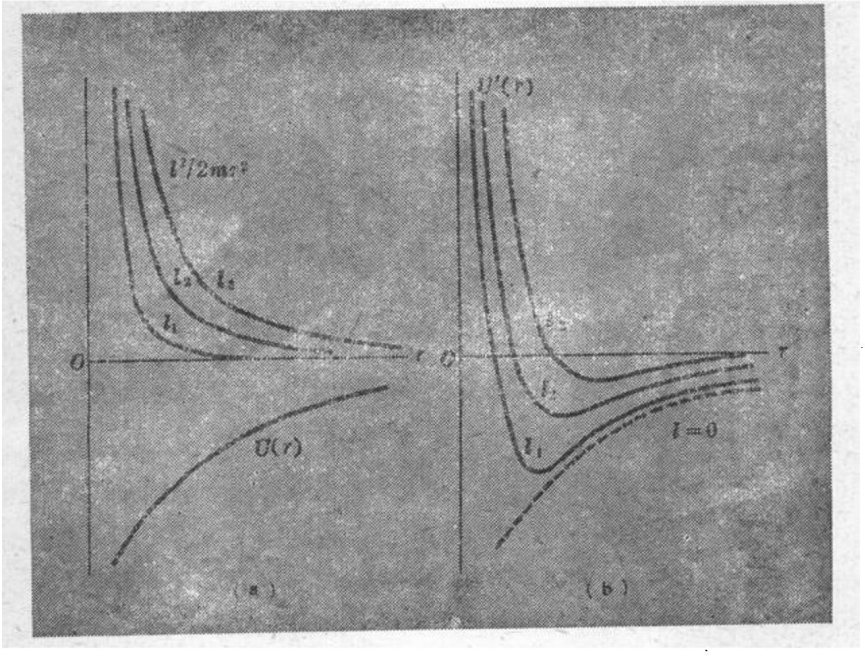


图 13-6 (a) 真正的势能 $U(r)$ 和若干属于不同 l 值的“离心势能”曲线．(b) 对于不同的轨道角动量合成的有效势能曲线．

$U(r)$ 与每一条不同的离心势能曲线相加而得到的几条有效势能

$U'(r)$的曲线.［要得到如图所示的、具有极小值的曲线，$U(r)$随r的变化必须不比$1/r^2$快.］让我们现在来看如何利用这种曲线去获取关于各种可能运动的一些有价值的定性结论.

在图 13-7 中我们画出了一条对应于一特定 l 值的有效势能

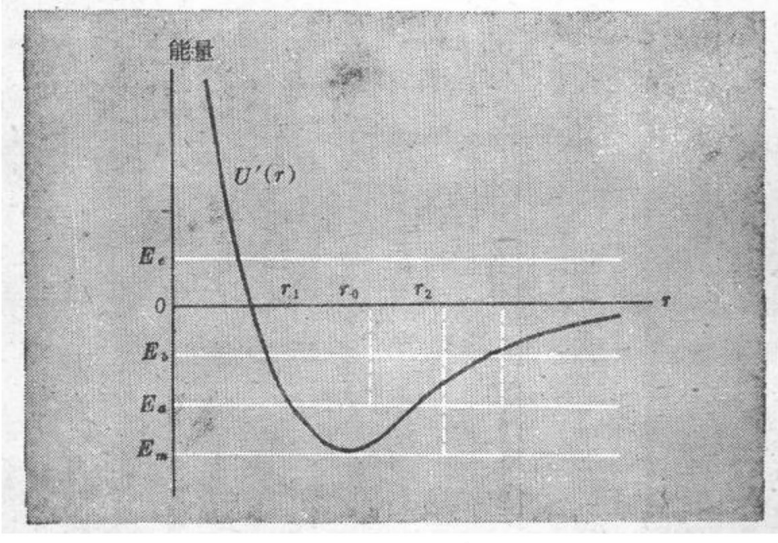


图 13-7　有效势能图，从它可推出对应于不同总能量值的径向运动的特性.

曲线. 于是我们看出，给定了这一 l 值，则对于任何小于 E_m［等于 $U'(r)$的极小值］的总能量，不会有什么有物理意义的情况出现. 对于E的这一最小可能值，不会出现径向运动；运动一定是一个半径等于 r_0 的圆运动. 对于在 E_m 和零之间的一个较大的E值区间（例如，$E=E_a$ 或 E_b），这径向运动将是周期性的. 对于所设的这 $U(r)$的形式，一切具有正的E值（例如 $E=E_c$）的运动都是无界的；有一最小可能的 r 值，但没有上限. 如果我们把E的值看作是给定的而轨道角动量是一个变量，就可能看出［最容易是从图 13-6 (b)来看］，有 l 的一最大容许值；任何在此值以下直至为零的值都

是允许的，其最大值则对应于一圆轨道.

§6 有界轨道

借助以上对运动的径向分量的分析，我们就可以着手对空间中实际轨道的形状发展出某些观念. 例如，设想我们遇到一个与图 13-7 中的能量 E_b 相应的情况. 它的径向运动局限于 r 的某极小值和极大值之间. 它具有周期性，周期为某一 T_r 值. 于此，我们知道粒子总是在图 13-8 所示的两个圆之间的面积内运动. 此外，

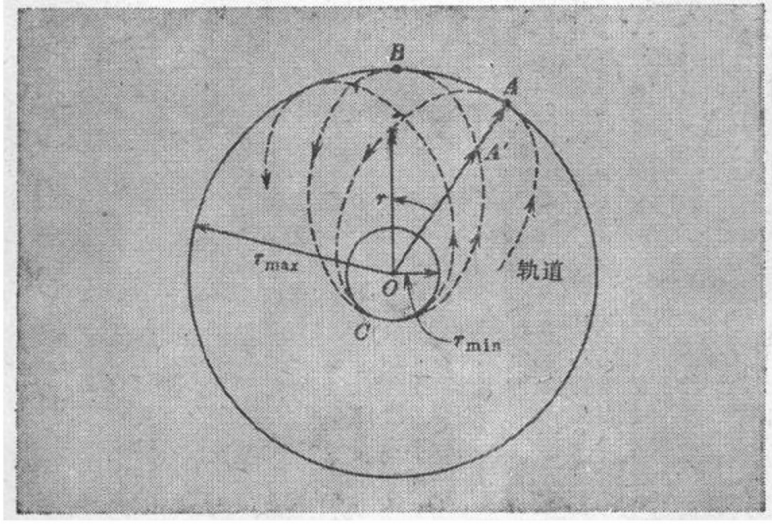


图 13-8 一个具有不同的径向周期和角周期的轨道运动的平面视图. 其效果是一个不断地在它自身的平面内转动(进动)着的、近于椭圆的轨道.

径距 $r_{极小}$ 和 $r_{极大}$ 代表径向运动的回转点. 轨道一定与这两个圆都相切，因为在这些点上径向速度是零，而切向速度则由于粒子有角动量不能为零. 我们来看粒子到达图上的 A 点之后如何. 它要如图所示那样朝里运动，它的轨迹在 C 点与内圆相切，然后继续运动直到又在 B 点与外圆相切. 在这一部分运动中它所费的时间

是径向周期 T_r. 另一方面，径向矢量总是在同一指向（顺时针或反时针）不断地改变其方向，而在经过一特征周期 T_θ 之后将转过 2π. 在图 13-8 中，OA 线代表粒子在某瞬间的矢量位置，OA' 线则代表经过时间 T_θ 后的矢量位置.

很清楚，轨道的特性强烈地依赖于这双周期运动的两个周期 T_r 和 T_θ 之间的比值. 如果这两个周期是可通约的（即它们的比值可以表示为两整数之比），则运动粒子最终将（经过等于 T_r 和 T_θ 的最小公倍数的一段时间后）正好回到初始时的同一位置，而轨道也因之闭合. 如果这两个周期正好相等，这一闭合将出现在只经过一径向周期和 θ 增加 2π 之时. 这意味，在图 13-8 中 A 点和 B 点将会重合. 人们看得出这是一个独特的并且（表面上看来）是完全不大可能出现的情况，然而，如果力是一个与 r 的平方成反比的吸引力，恰恰就有此情况. 因此，在自然界中最重要的那些力（引力和静电力）就产生具有这一显著特性的轨道，这一点我们马上要给予证明.

如果径向周期和角周期是可以相比但又肯定是不同的，则正好有图 13-8 所示的那种情况. 这图对应于 T_r 略大于 T_θ，因而径向矢量在 r 完成它从 $r_{极大}$ 变到 $r_{极小}$ 又重新回来之前就转过多于 2π 角的情形. 对于这一类轨道近似于一闭合曲线，但实际上又在转动着（向前或向后）的情形，我们说轨道在**进动**，研究轨道的进动在天文学体系中是重要的.

如果径向周期和角周期是不可通约的，则轨道将永远不会闭合，而最后将遍及于 $r_{极小}$ 和 $r_{极大}$ 之间的全部区域.

§7 无界轨道

我们早已指出过，正的总能量导致图 13-7 的有效势能中 r

有一下限但无上限．事实上这是一个相当普遍的结果，可应用于任何在 $r\to\infty$ 时趋于零的势能，因为它对应于粒子在无穷远处有一正的动能的情形．如果 $U(r)$ 是一斥力势能，处处是正的，那就（假定它单调地随 r 的增加而减小）根本没有有界的运动．图 13-9

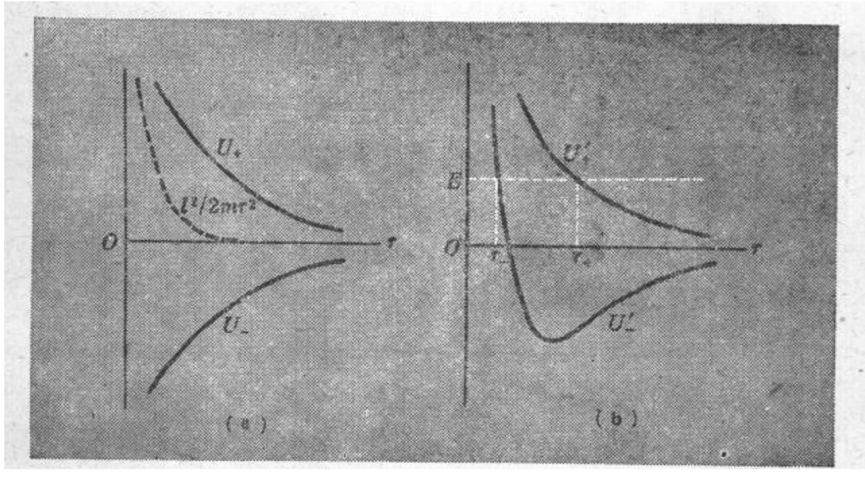


图 13-9 （a）离心势能曲线和两条可能由同号和异号的电荷相互作用产生、只是正负号不同的势能曲线．(b) 对应于(a)中两种情形的有效势能曲线，指明对于一给定的正能量，相趋的最近距离的差别．

比较了以一离心势能分别同只差一正负号的吸引和排斥势能相加而得到的两种情况．图 13-10 表明从一个具有给定能量的粒子所循的轨迹来看时，这两种情况的差别所在．在距力心很远的地方，因而 $U(r)$ 和 $l^2/2mr^2$ 两者都可以忽略时，粒子走一条直线，速率 v_0 等于 $(2E/m)^{1/2}$．这条运动线与通过力心的一条平行线偏开某一距离 b，它与角动量直接相关；事实上

$$l=mv_0b \tag{13-20}$$

因而，在图 13-9 中所假设的 E 和 l 的给定值由 v_0 和 b 之值表示出来，在图 13-10(a) 中，相应的是一吸引势能，而在图 13-10(b) 中

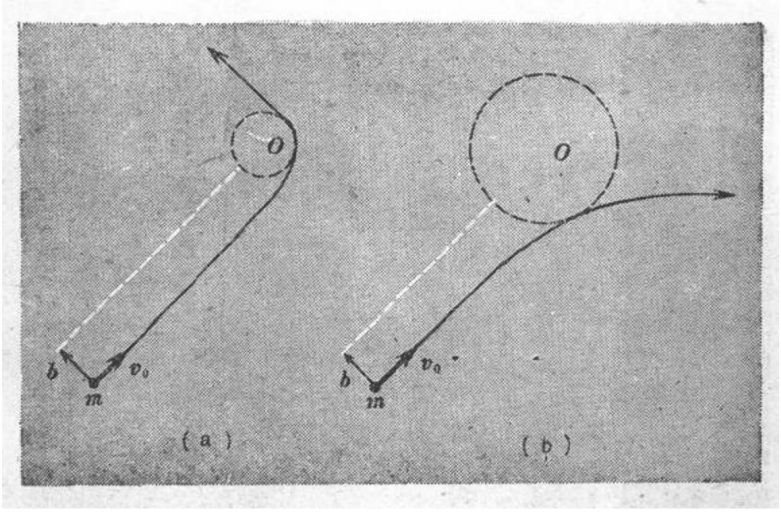


图 13-10 (a) 一粒子绕着一吸引力中心运动的轨迹的平面视图. 角动量由"碰撞参数"b 确定. (b) 具有同一碰撞参数但为排斥力心的相应轨迹.

是一排斥势能. 距离 b 称为**碰撞参数**, 它对表征一粒子在一无界轨道上从很远处趋近一力心的情况是一个很有用的量. 对于一给定的 v_0 值, b 的值通过(13-20)式完全确定角动量的值.

很清楚, 这些无界的轨道表示出粒子和力心只相遇一次; 没有象我们在图 13-8 中所示的那种有界轨道情况下那种反复回转的可能. 因之图 13-10 中所示的是表示单个碰撞或散射过程的情况. 这种过程在原子和原子核物理中是如此之重要, 我们将在以后回到这些问题上来.

某些势能会导致在同一能量下有界运动和无界运动两者都存在的可能性. 对于在 r 增加时比 $1/r^2$ 降值更快的任何吸引势能曲线 $U(r)$ 这种可能性都存在. 在图 13-11 中示明了一个例子. 只要 l 不为零, $U(r)$ 与离心势能之和给出一有效势能曲线, 曲线看起来十分象图 13-7 上下颠倒的形状. 对于一个比 $U'(r)$ 的极大值

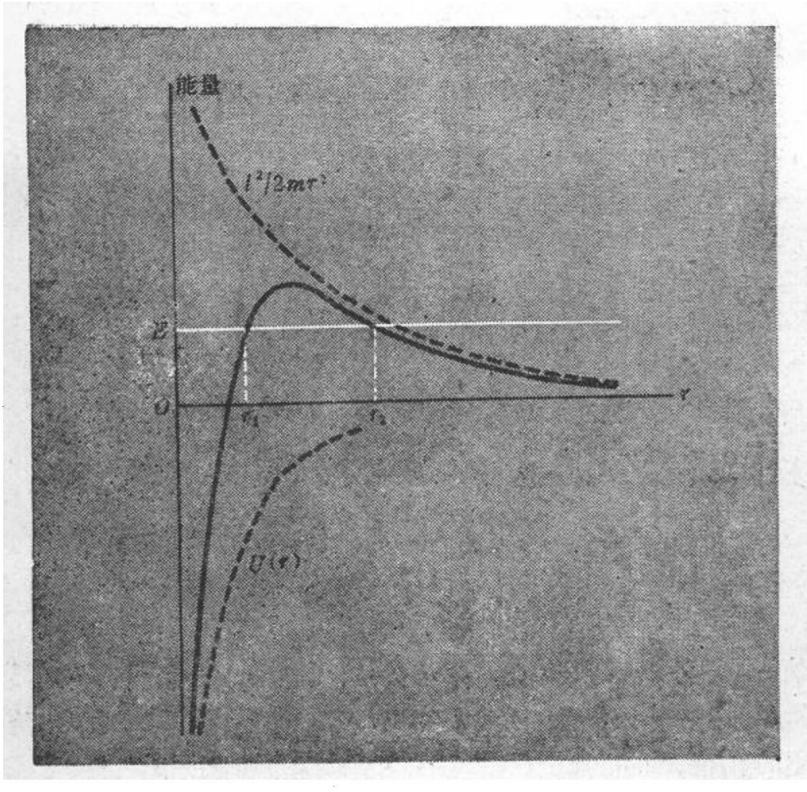


图 13-11　就一变化强于 $1/r^2$ 的吸引势能构成的有效势能图.

要小的正值总能量 E，现在就有两个不同的可能运动的范围：

$0 \leqslant r \leqslant r_1$　　有界轨道

$r_2 \leqslant r \leqslant \infty$　　无界轨道

这并非只不过是一个经院式的稀有之物. 代表，比如说，一个质子和一个原子核之间相互作用的有效势能曲线就与图 13-11 相象从而表明粒子或是囚禁于 r_1 之内，或是自由地在 r_2 之外，而不会有从一种状态过到另一种状态的可能性. 如我们在第十章中第一次提到过的，量子力学的引人入胜的结果之一是，通过经典力学的禁区的跃迁事实上能以一定的几率出现——这几率在大多数情形中

是太小了，因而没有什么意义，但在原子和原子核体系中它却可能变得非常重要.

§8 在一反平方力场中的圆轨道

作为前几节中所讨论的一般方法的一个定量例子，我们来看在一个按 $1/r^2$ 变化的有心吸引力的作用下圆形的或近于圆形的轨道的情形，这意味我们将主要从一个不同的观点来讨论我们在早先的几章中相当详细地分析过的一种情况. 这是有好处的，因为它使人更易看出不同的研究方法之间的关系.

为了具体起见，让我们来看一个质量为 m 的卫星在一质量大得多的行星的引力场中的运动. 对于这一情形，在质量为 M 的行星的引力场中的势能具有以下特殊形式[见(11-31)式]

$$U(r)=-\frac{GMm}{r} \tag{13-21}$$

其中 G 是万有引力常数，M 是吸引物体的质量. 对于这一情形，方程(13-17)变成

$$\frac{mv_r^2}{2}+\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}=E \tag{13-22}$$

在图 13-12 中就角动量 l 的两个值画出了等效势能曲线

$$U'(r)=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

如我们曾经看到的，圆轨道对应于在 l 之值给定时总能量等于 $U'(r)$ 的极小值的情形. 从上面 $U'(r)$ 的方程，让 l 固定，我们有

$$\frac{dU'}{dr}=-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{GMm}{r^2}$$

令 $dU'/dr=0$，就得到

$$\frac{l^2}{mr}=GMm=\text{常数} \tag{12-23}$$

所以轨道半径正比于轨道角动量的平方．这一点定性地表明在图13-12中．

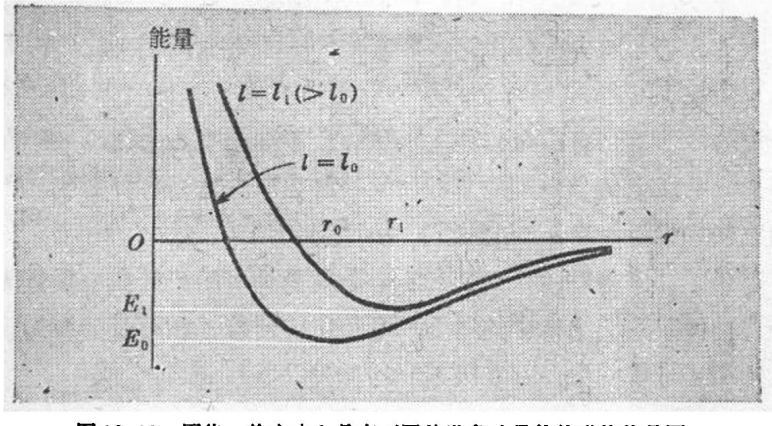


图13-12　围绕一给定力心具有不同轨道角动量的轨道的能量图．

让我们现在来看看这运动的能量．圆轨道的特征是径向速度分量 v_r 总等于零．因之，在方程(13-22)中可令

（圆轨道）　　$$E=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

但是由(12-23)式有

$$\frac{GMm}{r}=\frac{l^2}{mr^2}$$

因此能量可以用下列两种方式中的任何一个来表达：

（圆轨道）　　$$E=-\frac{l^2}{2mr^2}=-\frac{GMm}{2r} \tag{13-24}$$

第二个形式表示轨道半径与$|E|$成反比；第一个形式连同(13-23)式表明$|E|$与l^2成反比．这些性质也定性地在图13-12中指了出来．

在这种方法中，轨道的周期可以借助于面积定律得到．在本

章前面我们曾得到下列结果[(13-15b)式]:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{l}{2m}$$

对于圆轨道,总面积是 πr^2 而 l 之值就是 mvr. 因之有 $dA/dt=vr/2$, 从而得 $T_\theta=\pi r^2/(vr/2)=2\pi r/v$——一个并不令人吃惊的结果! 为了把 T_θ 用更有意思的形式表示出来,我们可以利用(13-23)式,令 $l=mvr$:

$$\frac{(mvr)^2}{mr}=GMm$$

从而给出

$$v=\left(\frac{GM}{r}\right)^{1/2}$$

利用这个 v 作为 r 的函数的明显表达式,我们于是再次得出表达开普勒第三定律的方程:

$$T_\theta=\frac{2\pi}{(GM)^{1/2}}r^{3/2} \qquad (13\text{-}25)$$

§9 圆轨道的微扰

在上节中我们限于重新展示若干熟悉的结果. 现在让我们利用有效势能方法所提供的见识来做点新的事情.

想象一卫星正在一个能量为 E_0、半径等于 r_0 的圆轨道上绕一球形行星运动, 行星的中心在 O 点[图 13-13(a)]. 假定当这卫星在 F 点时它沿 OF 线受到一个小的径向冲力, 冲力是从短暂开动它的控制喷射器之一获得的. 轨道将发生什么变化呢?

让我们借助图 13-13(b) 中的能量图来考察这问题. 初始时,卫星处于有效势能曲线上的极小点 M 所代表的状态. 冲力, 由于纯粹是径向的,不改变轨道角动量. 因而函数 $l^2/2mr^2$, 随之整个

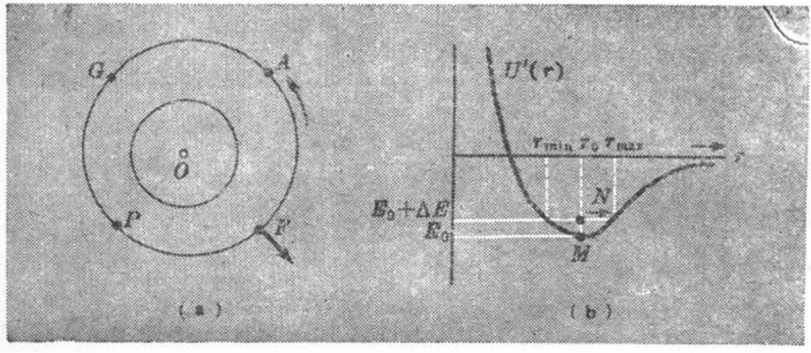


图 13-13 (a) 一径向冲力作用于原来是在以地球中心为圆心的圆轨道上运动的物体的结果. 冲力施加于 F 点,此后的路径是近乎圆形的路径 $FAGP$. (b)有效径向势能图, 用来分析(a)中所示的运动.

$U'(r)$函数, 都不受影响①. 但是, 这冲力确实略略增加了卫星的总能量. 因之, 在喷射器开动过后, 卫星立刻处于图 13-13(b)中 N 点所代表的状态; 它仍在$r=r_0$处, 但却有了一小的、与能量增加 ΔE 相应的径向速度. 但我们知道这意味着什么! $U'(r)$在其极小点M附近的形状近乎抛物线, 其结果是产生径向的简谐振动. 让我们来计算它们的周期.

在第十章中我们看到过, 对于在一势能曲线极小值附近的振动来说, 有效弹簧常数 k 如何等于在极小值点算出的, U 对距离的二次微商 [见本书第二册 214 页, 特别是(10-29)式]. 在目前的情形中我们有

$$U'(r)=\frac{l^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r}$$

① 我们假设由于喷射器的开动而引起的质量减小可以忽略. 实际上由于卫星的动能和引力势能都与 m 成比例, 即使质量有显著的损失, 也不影响结论. 重要的是卫星的速度 v 有所增加而横向分量 v_θ 却无任何改变.

$$\frac{dU'}{dr}=-\frac{l^2}{mr^3}+\frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{d^2U'}{dr^2}=\frac{3l^2}{mr^4}-\frac{2GMm}{r^3}$$

现在要在 $r=r_0$ 处计算这微商:

$$k=\frac{3l^2}{mr_0^4}-\frac{2GMm}{r_0^3}$$

但根据(13-23)式,我们可令 $l^2/mr_0=GMm$; 用这一关系,我们得到 k 的下述值:

$$k=\frac{GMm}{r_0^3}$$

我们可以立刻写出这些小的径向振动完成一循环的周期:

$$T_r=2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}=\frac{2\pi}{(GM)^{1/2}}r_0^{3/2} \qquad (13\text{-}26)$$

这和(13-25)式在 $r=r_0$ 时所给出的 T_θ 值完全一样, T_θ 是向径矢量扫过一整周 2π 的周期. 对于 $\Delta r\ll r_0$ 的情形, 这一角运动以几乎是恒定的 $d\theta/dt$ 值进行. 因之,当 θ 从 F 点前进 $\pi/2$ 时,卫星正好差不多在它离 O 点最远处, 这表示为图 13-13(a)中的 A 点. 再过四分之一周期后, 它位于 r 再次等于 r_0 的 G 点, 而再一四分之一周期就把它带到距离 O 点最近的 P 点. 轨道在原来喷射器开动的 F 点闭合并将按它的新形状延续下去,对于小的径向振动,这新的形状极为近似于一个圆,圆的半径与原轨道相同,但圆心移动了一个等于振动振幅的距离. 我们这里实际上是把一圆轨道变成一椭圆轨道(虽然我们未曾证明这一点). 我们已证明了的是:与角运动同步的微小径向振动产生一闭合的、重复着的、偏心轨道. 由较大的径向冲力所产生的大得多的(非对称)径向振动的同样效应实际上能够导致一明显地变扁了的闭合轨道,它与半径为 $r_{极小}$ 和 $r_{极大}$ 的两圆相切如图 13-14 所示. 但是, 不能认为我们的近似计算对

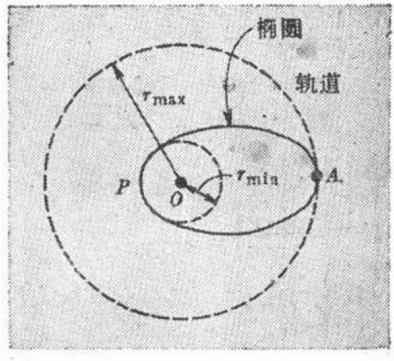


图 13-14　稳定的闭合椭圆轨道($1/r^2$ 的力)，其径向运动和角运动的周期相等.

于在这一比较极端的情形中轨道的闭合性有任何保证——虽然严格的分析证明它的确如此.

如果在中心的吸引物体是地球，则最远点 A 称为远地点，而最近点 P 称为近地点[远地点 apogee 和近地点 perigee来自希腊文: *ap* 意为离开; *peri* 意为靠近; *geos* 意为地球]. 词头 ap-和 peri-用得相当普遍，分别表示围绕一给定物体的轨道的最远点和最近点[例如, aphelion 为远日点, perihelion 为近日点, Helios 为太阳].

§ 10　行星的椭圆轨道①

在从事于轨道动力学的主题之前，我们将简略地叙述一下 J. 开普勒在建立"行星的轨道是一些简单的椭圆而不是复合的圆"这一命题中的卓越成就. 这一伟大发现几乎全部根据对一个行星——火星——的运动的分析. 火星的运动曾经在一很长的时期内使天文学们困惑和恼怒，因为它在运动中的明显不规则性大于任何其他行星的不规则性，并且使得任何用均匀圆周运动

① 这一节是历史性的插话，把它写入本书是因为"我们是如何知道我们所知道的东西的?"这问题总是值得提出来的，并且常常教给我们许多不亚于最终答案所教给我们的.

的复合来作不费力的分析落空.

要领略开普勒的发现的发展过程，我们必须时常记住这个事实：观察性天文学的原始数据是方向而非距离(在望远镜出现之前的日子里特别是这样)，尽管当时已了解得很清楚，行星的表观亮度与它们到地球的距离的不同有关，但精确的数据却只有角度位置. 从圆运动的迭加出发的整个理论机理主要是一种把观察到的每一行星的角位置作为时间的函数表示出来的方法.

开普勒在伟大的天文观察家第谷·布拉的指示下开始他对火星的研究，他是在 1600 年跟随第谷做助手的. 开普勒的任务是根据原始观测的积累构画出火星在空间的真正路径；在他达到为我们今天所熟悉的图象之前，他花了 6 年工夫，并走了许多弯路.

开普勒完全接受了太阳系的日心模型，而且他(不象哥白尼)一贯坚持这种观念：行星的路径一定是绕着太阳的一条光滑的、连续的曲线. 他的问题是根据从地球这一观察台——它本身也在以一种非均匀的方式绕着太阳作轨道运动——上的观测找出这一曲线. 因此，首先的任务是确立地球本身的轨道. 开普勒用好几种方法去攻这问题. 其中最直接地以观测为根据的那个方法是卓越的，开普勒已知火星年长 687 天. 他利用这一知识去确立火星一定已经回到了它的轨道上的一给定点 M[图 13-15(a)]的日期，他选择最初

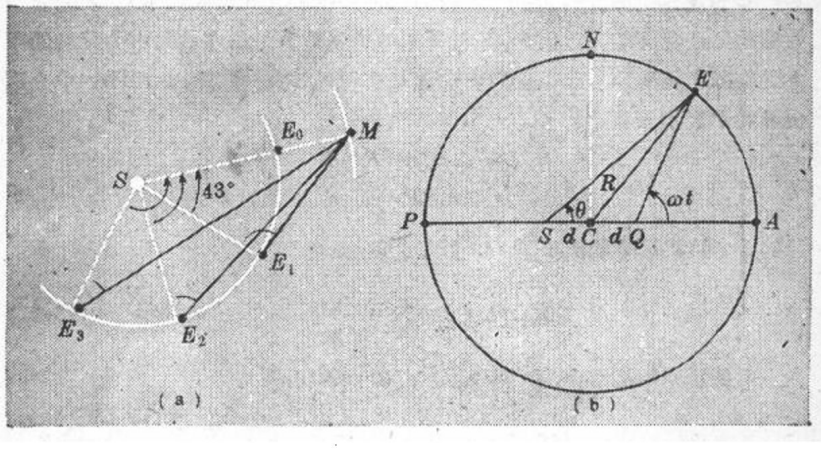


图 13-15 (a) 开普勒描绘出地球的轨道所用方法的原理：以火星的一个标准位置为参照标出地球在相继的火星年之末的位置. (b)一行星轨道的近似表示(太阳在 S)，根据假定 QE 线(Q 为等距偏心点)以恒定角速度转动得出.

与地球位于火星和太阳之间的连结线上的 E_0 点相应的那一火星位置作为这 M 点. (这一形态天文学家称之为 "**冲**".)在一火星年期间内,地球运行了约 667°,或者说比两公转少 43°. 因之,当下一次火星位于 M 点时,地球位于 E_1 点. 由于以恒星为背景的太阳和火星的角位置只是记录下来的事,开普勒就能够确定 E_1 点相对于基线 SM 的所在处. 用这同一基线使他能够确定在相继的火星年之末那些点 E_2, E_3, …的位置. 就这样构画出了地球的轨道.

开普勒所发现的是地球的轨道在形状上同圆形区别不出来——但太阳却不在圆心,而且地球相对于太阳(或者反过来)的角位置的变化率是不均匀的. 为了描述地球的运动,开普勒首先用了一个机智的和有效的窍门(那是托勒密发现的),那就是,找一虚假的中心,相对于它的角运动是均匀的. 图 13-15(b)指明开普勒是如何运用它的. 地球的轨道是以 C 为圆心、半径等于 R 的圆. 太阳在 S 点,到 C 点的距离为 d. 如果在 SC 的延长线上取一点 Q 使 $CQ=SC=d$,则 QE 线的**均匀**角速运动将使 SE 线(从太阳到地球)的倾角 θ 的变化差不多正好与实际情况相符. Q 点称为**等距偏心点**,因为它起着等(即均匀)角变化的中心的作用①.

开普勒从他对地球轨道的分析发现 d/R 这比值大约只有 0.018. 与此大小大体上差不多的数字被观测(由第谷·布拉开始的)所证实,所观测的是在一年的过程中测得的太阳角直径的变化. 图 13-16 示明近年来对这同一效应的某些观测结果. 因此,开普勒能够感到他的地球在空间中的轨道的图象是实际上正确的. 如果我们引进远日点和近日点[在图 13-15(b) 中分别由 A 和 P 表示],我们将有

$$r_{\text{极大}}=SA=R+d$$

$$r_{\text{极小}}=SP=R-d$$

任何一个这类轨道的**偏心率** ϵ 由下式定义:

$$\text{偏心率}(\varepsilon)=\frac{r_{\text{极大}}-r_{\text{极小}}}{r_{\text{极大}}+r_{\text{极小}}} \tag{13-27}$$

在上面所讨论的情形中,这等于比值 $d/R\approx 0.018$.

---

① 等距偏心点原文为equant point,中文译名[见《大众天文学》第二分册,286页,李珩译(1965)]的意思与本句后段的说明不甚一致;中译侧重于"等距"而说明侧重于"匀角速"——译者注.

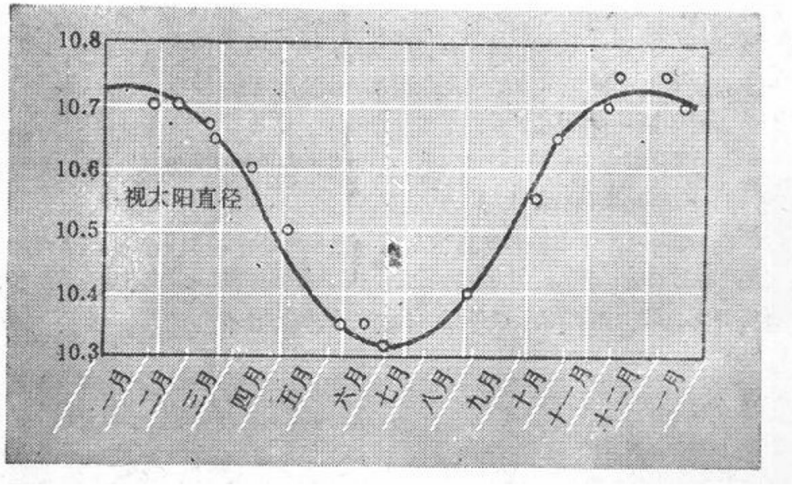


图 13-16　在一年期间太阳直径变化的证据，是根据用一望远镜看太阳成象大小的变化示明的.

我们能够理解为什么图 13-15(b)所示的模型如此行之有效. 首先，如我们在上节所看到的，一个遵从反平方定律的力可以导致一个很接近于圆形的轨道，但力心却不在其几何中心. 其次，利用图 13-15(b)中的等距偏心点 Q，其结果是接近于确定一围绕真正力心 S、具有恒定轨道角动量的运动. 特别是看一下近日点和远日点 P 和 A. 如果 QE 线以一恒定角速度 ω 转动，则在 A 点有 $v_\theta=\omega(R-d)$，而在 P 点有 $v_\theta=\omega(R+d)$. 但距离 SA 和 SP 分别等于 $R+d$ 和 $R-d$. 因而在这两点扫过面积的速率都是

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\omega(R^2-d^2)$$

在 N 点这速率等率等于 $\frac{1}{2}\omega(R^2+d^2)$. (验证这一点.)由此可知，当 $d^2/R^2\ll1$ 时，用这一构图法确定的"面积速度"是非常接近于恒定的. 因为对于地球的轨道 d^2/R^2 这比值大约只有 3×10^{-4}，上述的近似描述确是非常之好的.

在作了这冗长的介绍之后，对这故事的其余部分可以简单一点了. 有了关于地球轨道的知识，开普勒现在可以直截了当地构画出从太阳上所看到的火星的依次的角位置[图13-17(a)]. 他再次试把轨道表示为一具有一等距偏心点的偏心圆如图 13-17(b). 但这一次却行不通；计算出的角位置和观测

到的位置，作为时间的函数，它们之间有小的但是重要的差异．这差异小于10分弧，但开普勒对于第谷·布拉的观察的可靠性和精确性是如此之挚信，他宁肯放弃他的理论而不愿强使数据凑合他的想法．最后，他的巨大的分析性努力终于使他获得两个有决定意义的灼见：

1．以太阳为参照中心的等面积定律使得虚设的等距偏心点成为不必要的，而且同等有效（或者，实际上甚至更好）．

2．如果原来设想的圆轨道改良为一内接的椭圆，太阳位于其焦点之一如图13-17(b)中所示，则（应用面积定律于这新轨道）理论与观测之间的符合得异常之好．距离 SN 等于原来的那个圆的半径 CA.

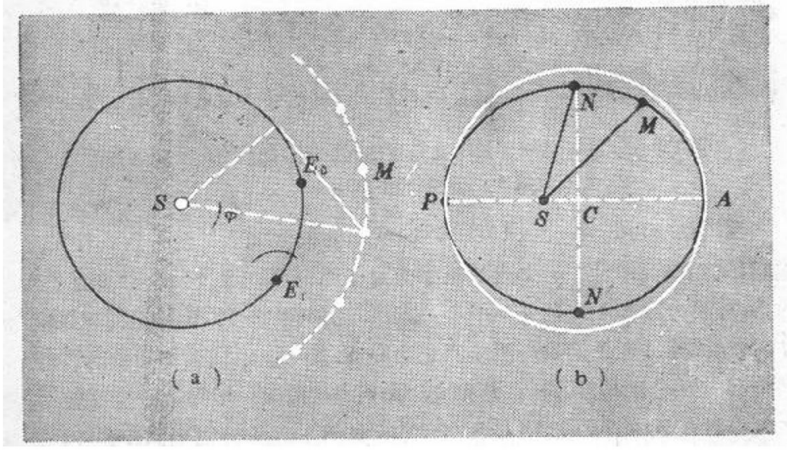


图13-17　(a) 当地球的轨道已知时，开普勒用以确定火星在它轨道上一点的位置．(b) 开普勒关于火星的轨道是一个椭圆而不是一个偏心圆的发现．[根据他本人在New Astronomy(《新天文学》)中所作的图．]

使得火星的运动如此难于解释（但假若不是这样，开普勒也许就不会被引导到他的伟大发现）是它的轨道的大离心率（约为0.09——大于地球五倍，而大于金星超过12倍）．但是应当注意，即使是在火星的情形中轨道的实际形状与圆的偏离也是极其小的；最短直径 NN' 与最长直径 PA 之间的差异[见图13-17(b)]小于200分之1．

开普勒将他辛勤劳动的全部进程——多次的失败以及最后的成功——发表于1609年出版的一本书中，书名为《*Astronomia Nova*(新天文学)》．这

是科学发现的一本经典作品.[①]

表 13-1　行星轨道数据

	半长轴(a)		偏心率	倾　角	周　期	
	AU	10^6千米	(ϵ)	(i),度	年	10^6秒
水　星	0.387	57.9	0.206	7.00	0.241	0.076
金　星	0.723	108.2	0.007	3.39	0.615	0.194
地　球	1.000	149.6	0.017	——	1.000	0.316
火　星	1.523	227.9	0.093	1.85	1.881	0.594
木　星	5.203	778.3	0.048	1.31	11.862	3.75
土　星	9.540	1427	0.056	2.50	29.46	9.31
天王星	19.18	2869	0.047	0.77	84.02	26.6
海王星	30.07	4498	0.009	1.78	164.77	52.1
冥王星	39.44	5900	0.249	17.2	248	78.4

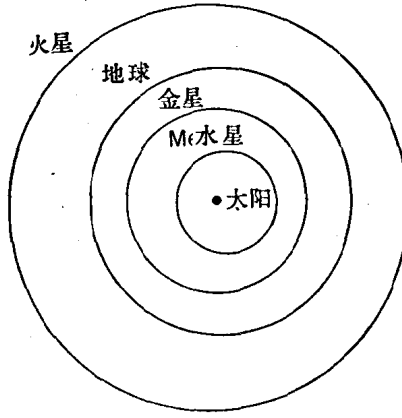


图 13-18　按比例绘制的四个内行星的轨道. 它们在形状上都与圆无异但不同心. 实际上都是以太阳为焦点之一的椭圆.

① 通常提到这本书时都简称它为《新天文学》. 然而, 它的全名译过来应是"新的因果性天文或天体物理, 关于行星运动的解说, 根据第谷·布拉伯爵的观测".

A. 柯斯特勒 (Koeslter) 的 *The Watershed* (《分水岭》), 1960, 是一本完整而有趣的关于开普勒的生活和工作的书. 关于开普勒通往他的第一和第二定律的途径的更详细和评论性的讨论可参看 Curtis Wilson 的一篇文章 "Kepler's Derivation of the Elliptical Path," *Isis*, 59, 5-25(1968).

一旦行星运动的基本特性被确立，前此早已有了的记录宝藏就使人们容易推算出其他行星的轨道参数. 表 13-1 列出所有主要行星的这些参数和有关数据的近代值.（倾角 i 是轨道平面与地球本身的轨道平面——即黄道——的夹角.）图 13-18 是按比例绘制的四个内行星的轨道在黄道平面上的投影.（这些倾角都如此之小，投影并不明显地改变轨道的形状，它们看起来都象是完善的圆）.

§11 由椭圆推导出反平方定律

1689 年牛顿收到哲学家 J. 洛克一封信. 洛克在信中说到他读过了《原理》（两年前已出版）但发现有些数学是他力所不能及的. 牛顿能否给他一个不那么令人生畏的解释来说明如何从观测到的行星的椭圆轨道推出反平方律呢？牛顿用了一个令人欣喜地简单的论证回答了他，我们将以它作为我们讨论的起点. 它所依据的是这些轨道的一个著名的特性——它们的几何对称性，尽管从运动学和动力学的观点看这些轨道是非对称的.

看看图 13-19 所表示的椭圆轨道. 在焦点 F 有一力心. 在几

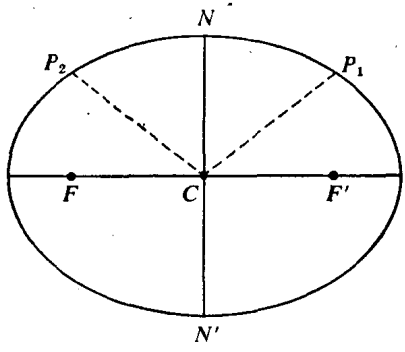


图 13-19 椭圆对其短轴 NN' 的几何对称性.

何中心 C 的另一侧等距离之处是空无一物的第二个焦点 F'. [开普勒原先模型中的等距偏心点 Q 就在这第二焦点上，见图 13-15 (b).] 椭圆具有完善的反射对称性，不仅对通过 F 和 F' 的主轴如

此，对通过C点的垂直轴(短轴)NN'也这样．但是如我们所知，在例如图中处于对称位置的P_1和P_2两点，速度是很不相同的；按等面积定律，在轨道上运行的物体在P_2点要比在P_1点快得多．

牛顿说，现在来看行星通过它的近日点p和远日点a[图13-20(a)]之时的运动，标出弧pq和ab，那是行星在刚通过这两

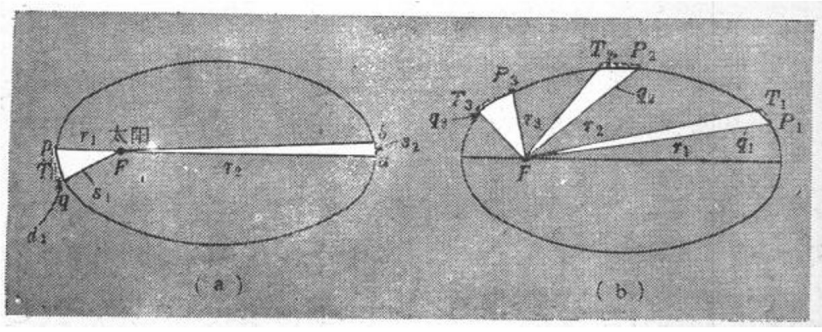


图 13-20　(a) 说明牛顿根据行星在近日点和远日点附近的运动推出反平方定律的简单论证法．(依据他自己画的图．)(b)从椭圆轨道和等面积定律推出反平方定律的几何作图法．

点之后在相等的一段短时间所要走的路程．利用行星在p点和a点的速度与纯粹从F点出发的向径垂直这一事实，可知这两段弧的长度是按等面积定律与到太阳的距离联系着的．因此有

$$r_1 s_1 = r_2 s_2$$

这一极好的近似．可是，如果不存在任何引力，则行星在通过p点后将沿切线pT运行．而由于吸引力，它循着曲线pq运动，在一短距离内这一段曲线同抛物线无异．(这正象牛顿对月球运动的分析——见第八章，本书第二册72页)行星"落下"了一段距离$Tq(=d_1)$，与切线pT的平方成正比．注意到偏差Tq实际上比pT小得多，可令

$$d_1 = C s_1^2$$

其中C是确定抛物线形状的常数．但是，根据对称性，椭圆在远日

点附近的抛物线性曲率同它在近日点的这曲率是完全一样的. 因之, 我们也可以令

$$d_2 = Cs_2^2$$

其中 C 是与前相同的常数, 而 d_2 则是行星从 a 到 b 时的偏差. 从这些结果, 结合面积定律, 可得

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

但是, 由于在相等时间内落下的距离是与加速度、因而与力成正比的, 可知在 p 点和 a 点作用于行星的引力也与距离 r_1 和 r_2 的平方成反比.

上述论证并不能说明反平方定律能应用于沿着轨道的其他的点, 不过可用这同一基本几何方法的引伸来达到这目的, 只是不再求助于轨道的几何对称性而已. 图 13-20(b)指明了这方法. 以不同的位置(P_1, P_2, P_3)为起点, 画出等面积的扇形. 这就确定了经过相等的时间间隔后行星到达的q_1, q_2, q_3 诸点. 再画出过 P_1, P_2 和 P_3 各点的切线. 于是, 由于引力而产生的径向位移就由 T_1q_1, T_2q_2和 T_3q_3 给出. 用非常细心的作图, 可以证实这些距离与 $1/r^2$ 成比例. 可是由于径向位移很小, 这图必须极端细心地来描绘①.

§ 12 椭圆轨道: 解析处理法

我们以椭圆的基本"针和线"定义开始, 这定义要求

$$r + r' = 2a \qquad (13\text{-}28)$$

如图 13-21 中所示, 其中椭圆的长轴等于 $2a$, 两焦点 F 和 F' 相隔

---

① 这方法曾在 *PSSC* 影片"椭圆轨道"中很好地介绍过. 影片制作者是 Aibert Baez, Education Develop ment Center, Newton, Mass., 1959. 还可参看 Baez 的文章, 载于 *Am. J. Phys.*, 28, 254(1960).

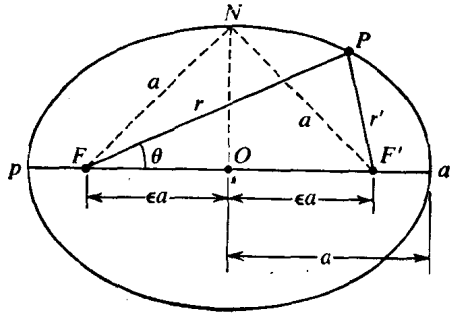


图 13-21　以力心在焦点F的椭圆的基本几何性质.

一距离$2\epsilon a$. 首先, 我们需要一点三角学来求出一任意点P的径向和角坐标(r,θ)之间的关系.

应用余弦定理于三角形FPF', 有

$$r'^2=r^2+(2\epsilon a)^2-4\epsilon a r\cos\theta$$

但由(13-28)式有

$$r'^2=4a^2-4ar+r^2$$

把r'^2的这两个表达式等起来, 我们得到

$$4\epsilon^2a^2-4\epsilon a\cos\theta=4a-4ar$$

因之

$$r(1-\epsilon\cos\theta)=a(1-\epsilon^2)$$

或

$$r=\frac{a(1-\epsilon^2)}{1-\epsilon\cos\theta} \tag{13-29}$$

引进椭圆的半短轴b, 图 13-21 中的距离ON, 可以稍为简化上式, 由三角形FON的几何关系, 有

$$b^2=a^2-(\epsilon a)^2=a^2(1-\epsilon^2)$$

利用这一关系, (13-29)式可写为

$$\frac{1}{r}=\frac{a}{b^2}(1-\epsilon\cos\theta) \tag{13-30}$$

借助这最后一个方程，连同表示为面积定律的轨道角动量守恒，我们可以推出作用于运动质点上的力在任何一点都与 $1/r^2$ 成比例. 主要的一步是算出加速度的径向分量，由(13-4)式我们有

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{13-31}$$

现将(13-30)式的两边对 t 求微商，得

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}=\frac{\epsilon a}{b^2}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

可是根据面积定律有

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C \tag{13-32}$$

其中 C 是一个常数(等于面积速度的两倍). 利用这式，前式给出

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{C\epsilon a}{b^2}\sin\theta$$

再求一次微商，得

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{C\epsilon a}{b^2}\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

再应用(13-32)式消去 $d\theta/dt$，有

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{C\epsilon a}{b^2}\frac{\cos\theta}{r^2}$$

要求得(13-31)式中的 a_r，我们必从它减去 $r(d\theta/dt)^2$. 由(13-32)式，它可以写为

$$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{C^2}{r^3}$$

把这式和前式合并(相减)，我们于是得到

$$a_r=-\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{\epsilon a\cos\theta}{b^2}+\frac{1}{r}\right)$$

这看起来复杂，但如果我们回头看一看 $1/r$ 的原方程[(13-30)式]，就看出

$$\frac{a\epsilon\cos\theta}{b^2}+\frac{1}{r}=\frac{a}{b^2}$$

因而上面 a_r 的方程中括号里的那一项不过是椭圆的一几何常数，而有

$$a_r=-\frac{C^2a}{b^2}\frac{1}{r^2} \tag{13-33}$$

这样，我们就从数学上证明了，对于任何在指向一焦点的有心力作用下，又已知是椭圆的轨道，这就是一个反平方定律在作用着.（但要注意"指向一焦点"那个条件. 完全有可能出现，例如，在一指向椭圆的几何中心的有心力作用下的椭圆轨道，但力的规律已不再是反平方的. 你猜得出是什么吗？见习题 13-23.）

我们可以立刻从 (13-33) 式发展出另一重要结果——开普勒的第三定律的严格形式. 我们曾说过，参数 C 等于扫过面积的恒定速率的两倍. 但椭圆的总面积是

$$A=\pi ab$$

因之轨道的周期

$$T=\frac{\pi ab}{C/2}$$

即

$$C=\frac{2\pi ab}{T}$$

把这值代入(13-33)式，得

$$a_r=-\frac{4\pi^2a^3}{T^2}\frac{1}{r^2} \tag{13-34}$$

然而，引进在轨道上的质量 m 和固定在 F 的质量 M 之间的引力的特定定律:

$$F_r=-\frac{GMm}{r^2}$$

我们得到径向加速度的另一表达式:

$$a_r = -\frac{GM}{r^2} \tag{13-35}$$

把(13-34)和(13-35)两式的右边等起来，我们得

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = GM$$

从而有

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \tag{13-36}$$

这个结果虽然和我们在第八章中确认的开普勒第三定律在形式上完全相同，却含有一重要的新特点．以前我们只考虑了圆轨道，现在我们看到，按(13-36)式，(对于一给定的M值)所有具有相同长轴的轨道都有同样的周期，而不论它们是圆的还是非常扁平的．如果我们考虑到起引力作用的质量必位于一焦点，就可能有象图 13-22 中所示的那样具有相同周期但偏心率不同的一群椭圆

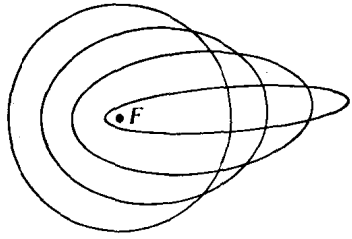


图 13-22　同一总能量的一族椭圆，有共同焦点 F，力心就位于 F 处．这些椭圆的长轴都相等．

轨道．

开普勒在叙述他的第三定律时说，行星的周期的平方与它们到太阳的平均距离成比例．我们现在看到，那个比较含糊的词："平均距离"有一非常明锐和精确的意义；它正好是一行星到太阳的最大距离和最小距离的平均．这与半长轴 a 等同，因为从(13-29)或从图 13-21，我们有

$$r_{极大}=a(1+\epsilon)$$

$$r_{极小}=a(1-\epsilon)$$

$$a=\frac{r_{极大}+r_{极小}}{2}$$

§13. 在一椭圆轨道中的能量

本节的目的是要证明，和轨道的周期一样，唯一与总能量有关的几何参数是椭圆轨道长轴的长度.

由于总能量是不变的，我们可以随意在轨道上的任意一方便的点去计算它. 我们将选长轴上的 a 点(图 13-21)，对它我们有

$$r=r_{极大}=a(1+\epsilon)$$

势能可直接写出:

$$U(r_{极大})=-\frac{GMm}{a(1+\epsilon)} \tag{13-37}$$

得出动能就稍难一些. 由于在 a 点的速度纯粹是横向的，我们有

$$K=\frac{1}{2}mv_\theta^2=\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

借助(13-32)式，这式成为

$$K=\frac{mC^2}{2r^2}$$

特别地

$$K(r_{极大})=\frac{mC^2}{2a^2(1+\epsilon)^2}$$

但常数 C 是面积速度的两倍，即我们前面看到过的 $C=2\pi ab/T$，因之

$$C^2=\frac{4\pi a^2b^2}{T^2}=\frac{4\pi^2a^4(1-\epsilon^2)}{T^2}$$

把(13-36)式的 T^2 代入，有

$$C^2=GMa(1-\epsilon^2)$$

用 C^2 的这一表达式于 $K(r_{极大})$ 的等式中，我们求得

$$K(r_{极大})=\frac{GMm(1-\epsilon)}{2a(1+\epsilon)} \tag{13-38}$$

把(13-37)和(13-38)两式所表示的结果结合起来，我们得到关于运动的总能量的公式如下：

$$E=-\frac{GMm}{2a} \tag{13-39}$$

由此可知任何椭圆轨道的总能量同于一个直径等于椭圆的长轴的圆轨道的总能量.

从(13-39)式可以看出，E 的任何增加都意味着长轴长度的增加；总能量保持是负的，但数值上变得小了一些. 一椭圆轨道的负总能量表明这样一个事实：在轨道上运动的物体为力心所束缚而不能逃逸，除非提供一至少等于 $GMm/2a$ 的正能量给它.

如果我们考虑一物体在它轨道上的任意一点，则它的引力势能是 $-GMm/r$ 而总能量，根据(13-39)式，必须等于 $-GMm/2a$. 因之有

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=-\frac{GMm}{2a} \tag{13-40}$$

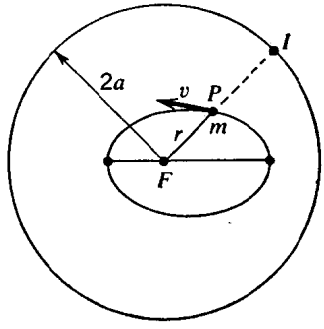


图 13-23　在一椭圆轨道上任何点 P 的一个粒子所具有的速率等于它从一个半径等于这椭圆的长轴的圆上由静止向内落到这点所将获得的速率.

由这方程确定的动能大小可以借助于一图形(图 13-23)来考虑. 以椭圆的焦点F为心画一个圆，它的半径等于这椭圆的长轴$2a$. 要求运动粒子在一点P的速率，可设想粒子是从圆上的I点在静止状态下释放而在引力吸引下从I落到P的. 于是,(13-40)式中的动能正好对应于从I位移到P时相关势能的改变. 如果有人能造一个装置，它会平稳地把这粒子引入P点的切线方向而不改变这速度的大小,则此后的运动将是所示的椭圆轨道.

§14 地球表面附近的运动

有了前面对于一般椭圆轨道的分析所提供的背景，我们可以认识到，迄今被当作是在一均匀的g场中的抛物线的所有在地球表面上的低水平线射道，实际上是在图 13-24 中所指出的椭圆的

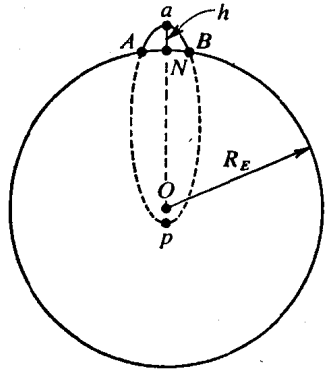


图 13-24 在地球表面上方的局部射道,看出来是以地心为远焦点的一椭圆的一小部分.

一小部分. 以抛物线作为这射道的近似实际上是非常之好的，但严格说来轨迹的高点还是应当看作是一很狭窄的椭圆的远地点a. 如果一物体从地球表面上的一点A以速率v射出去，它的总能量由下式给出:

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_E}=E=-\frac{GMm}{2a}$$

长轴 $2a$ 只比地球的半径大一点点，设为 H．我们于是可写

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_E}=-\frac{GMm}{R_E}\left(1+\frac{H}{R_E}\right)^{-1}$$

$$\approx-\frac{GMm}{R_E}+\frac{GMm}{R_E{}^2}H$$

因之

$$H\approx\frac{v^2}{2GM/R_E{}^2}=\frac{v^2}{2g}$$

这距离 H 是物体达到的最大高度 h 与距离 Op 之和，Op 是从地心到虚设的近地点的距离．在物体是竖直地射出时，椭圆退化为一直线，近地点移到与地心重合．在这一情形中 h 之值变成和 H 相等，即等于 $v^2/2g$，恰好同我们直接用简单运动学算出来的结果一样．

§15 行星际的输运轨道

一个向来被认为是相当学院式的问题现在成了一个非常实际的问题，那就是，把一艘宇宙飞船从地球送到另一行星上去．最有效的方法不是让这飞船沿着从太阳引出的一条向径线朝里或朝外瞄准，而是让它航行于一椭圆轨道上，这轨道与地球的轨道和问题中的另一行星的轨道平滑地相连接．

举一个具体例子．考虑从地球到达金星的问题．我们将用这两行星的轨道是以太阳为共同中心的圆这一相当好的近似．于是，输运轨道将如图 13-25 所示，从地球轨道上的 E 点沿切线方向出发，而在 V 点与金星轨道相切地连接起来，因而这输运轨道的长轴是地球和金星轨道半径之和，总计为 $1.72AU$．这一长轴的大小在两行星的长轴的大小之间，因而，由方程(13-39)可知其总能量也在与起始和终了的两圆轨道相关联的能量值之间．因此，要实现

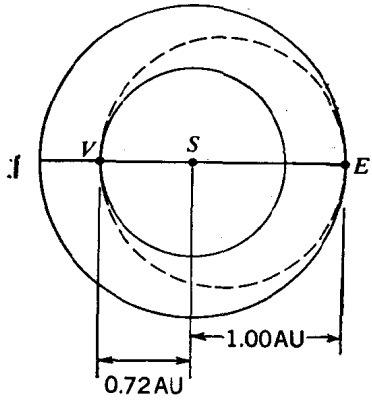


图 13-25　从地球到金星的行星际间的输运轨道. 轨道是一个椭圆，它和两行星的圆轨道相切.

这一输运，飞船需要在 E 点突然减速，而(如果要它进入金星的轨道)在 V 点又需要作另一突然的减速. 现在我们来作定量计算.

适合于地球轨道的速率 v_0 由下式给定:

$$\frac{GM_S m}{r_E^2}=\frac{mv_0^2}{r_E}$$

其中 M_S 是太阳的质量. 因此

$$v_0^2=\frac{GM_S}{r_E} \tag{13-41}$$

这一速率的实际大小可以直接从地球的轨道半径 r_E ($=1.49\times10^8$ 千米)和一年的长短 T_E ($=3.16\times10^7$ 秒)得知. 于此，有

$$v_0=\frac{2\pi\times1.49\times10^8}{3.16\times10^7}=29.6\text{ 千米/秒}$$

根据方程(13-40)，要这宇宙飞船循着这输运轨道运行，它在 E 点所必需的速率 v_1 由下式给出:

$$E=-\frac{GM_S m}{1.72r_E}=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GM_S m}{r_E}$$

所以，

$$v_1^2=\frac{GM_S}{r_E}\left(2-\frac{1}{0.86}\right)=0.84\,\frac{GM_S}{r_E}$$

因之，由方程(13-41)得

$$v_1\approx 0.92v_0\approx 27.2\text{ 千米/秒}$$

可见所需的减速是相当小的——大约只是 2.5 千米/秒.

一旦进入输运轨道，宇宙飞船要用它轨道周期的一半时间才在 V 点接上金星的轨道. 由于按开普勒第三定律的推广形式，T^2 与长轴的三次方成比例，我们有

$$T=\left(\frac{1.72}{2.00}\right)^{3/2}T_E=0.80T_E$$

因而航程需要大约 0.40 地球年，或者说，大约 146 天. 在这段时间内，宇宙飞船的速率将不断增加. 再次应用能量守恒条件，在 V 处的速率 v_2 由下式给出:

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GM_Sm}{0.72r_E}=-\frac{GM_Sm}{1.72r_E}$$

所以

$$v_2^2=\frac{GM_S}{r_E}\left(\frac{1}{0.36}-\frac{1}{0.86}\right)=1.62v_0^2$$

$$v^2\approx 1.27v_0\approx 37.7\text{ 千米/秒}$$

金星的轨道速率约为 34.9 千米/秒. 因而，有一个足以使飞船减速约 2.8千米/秒的冲力就能完成这一输运过程. 从这例子可以看到，自由轨道运动的一些性质如何可以明智地加以利用，以便在火箭推进方面花较小的能量就能完成这种输运.

§16 根据初始条件计算轨道

假定一粒子以速度 $\mathbf{v}_0$ 从 P 点发射出去，P 点到力心 F 的矢量距离是 $\mathbf{r}_0$(图 13-26). 我们怎样推算出它此后的轨道的大小、形状和取向呢?

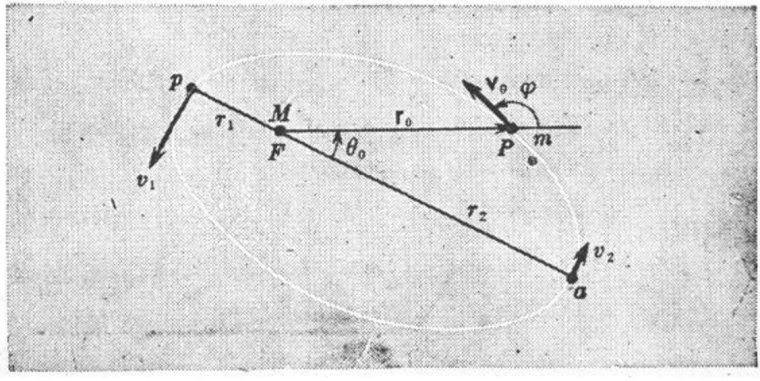


图 13-26　以任意速度 v_0 在距力心的矢量距离为 r_0 之处发射一粒子所形成的椭圆轨道(总能量给定为小于零).

首先要做的事是试探一下其总能量是正的还是负的（或者，偶然也可以是零）. 只有在总能量是负值时我们才有一有界的轨道，我们在这里只限于注意这种情形，即限于闭合的椭圆轨道. 从 v_0 和 r_0 之值我们得知总能量，从而求出长轴的长度:

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{GMm}{r_0}=-\frac{GMm}{2a} \tag{13-42}$$

于是我们知道了 a.

其次我们可以利用轨道角动量是确定的这一事实:

$$l=|\mathbf{r}_0\times m\mathbf{v}_0|=mv_0r_0\sin\varphi \tag{13-43}$$

在近地点($r=r_0$)和远地点($r=r_2$)v 和 r 的方向是正交的，因之可写

$$l=mv_1r_1=mv_2r_2$$

或

$$\frac{1}{r_1}=\frac{mv_1}{l}\qquad\frac{1}{r_2}=\frac{mv_2}{l}$$

我们可以把这两个等式中的任何一个所确定的 $1/r$ 之值代入远地点或近地点的总能量表达式中:

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm^2}{l}v_1=-\frac{GMm}{2a}$$

解这二次方程得出的根就是 v_1 和 v_2 之值，从而求出 r_1 和 r_2 之值．然后由下面的关系式定出偏心率：

$$r_1=a(1-\varepsilon)\qquad r_2=a(1+\varepsilon)$$

最后，相对于初始位置矢量成 θ_0 角的长轴的取向由这曲线的普遍极坐标方程[(13-29)式]

$$r_0=\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon\cos\theta_0}$$

来确定．这样，轨道就完全确定了，如图 13-26 所示．

§ 17　一族相关联的轨道

假若力心和发射点都已给定，则考虑和总能量的各种可能值对应的各类轨道是很有教益的．在一吸引的反平方力律的特殊情形中，可借助图 13-27 来说明这种情况．为简化起见，我们将假定

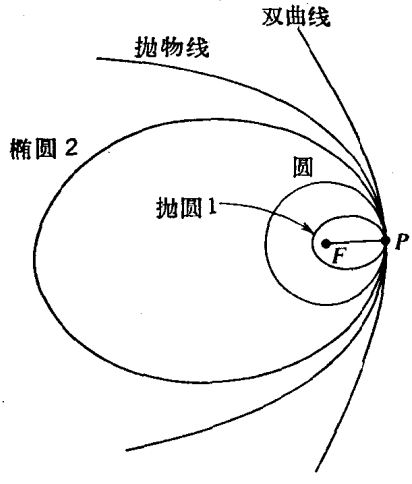


图 13-27　具有共同焦点（力心）和同一发射点的一族不同总能量的轨道．

一粒子从P点沿垂直于从力心F到P的FP线发射.

如果发射速率接近于零,则粒子将几乎沿一直线走向F;严格说,应该是一个异常狭窄的椭圆,其长轴仅略长于FP.

在发射速率稍高一点时,轨道将会象标有"椭圆 1"那样的轨道,发射点P是远地点.在某一更高的能量,轨道将是一个以F为心的完善的圆.当能量再增加时,轨道又成为椭圆,但P现在是近地点了——即力心成为离发射点较近的那个焦点.

最后是总能量恰好为零的情况.对其动力学的详细分析证明在这一情形下的射道是一条抛物线;粒子将离开力心越来越远,并将以逐渐小到零的速度趋向无穷远处.

发射速率的任何进一步增加将使射道成为一双曲线的一分支;粒子现在以可观的正值动能趋向无穷远处.

用这种逐渐演变的图象,我们看到,图 13-27 中所示的各类轨道之间并无明锐的区别,尽管它们在数学上是不同形的圆锥曲线.事实上,根据在P点附近所作的测量,要想确定一给定的射道是一椭圆、一抛物线、还是一曲线的一部分,可能是相当困难的事情.这是在分析彗星通过太阳系的路径时一个真正耐人寻味的问题,一个具有总能量只略略小于零的彗星的有界轨道几乎不能区别于一个正能量很小的双曲线轨道,如果那彗星只有当它穿入到太阳系的内部才看得见的话,一个突出的这种例子是那著名的、以牛顿的朋友哈雷的名字命名的彗星,他认出他在 1682 年所观察到的彗星是在以前大约每隔 76 年就趋近于太阳时曾被记录下来过的.利用开普勒第三定律,人们于是可以推断,它的轨道实际是一个椭圆,其长轴等于$(76)^{2/3}$乘地球轨道的直径,或者说,是$40AU$.在图 13-28 中示明这轨道与太阳系的其余部分的关系.在它最接近太阳时($\sim 0.6AU$),这彗星跑到金星的轨道里面去了,并显出很亮的光;在它相离最远的地方,它跑到海王星的轨道之外,而在它的

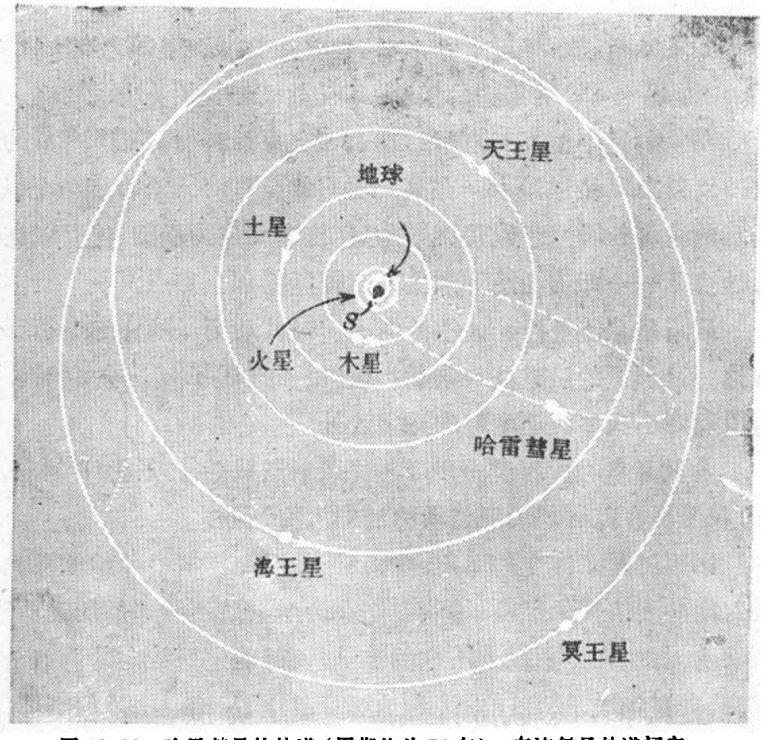


图 13-28　哈雷彗星的轨道（周期约为 76 年），在诸行星轨道间穿过的情形.

大部分路程中是看不见的.

§ 18　作为两体问题的有心力运动

诚然，我们是在一物体和另一物体之间的相互作用为运动的基础这个意义上作为两体问题来处理这些行星的运动等问题的，可是其中却有某些不彻底的地方. 我们用了牛顿定律来确定两质量（M 和 m）之间的力，但却假定一个质量（M）可以认为是不动的. 这对于 $M \gg m$ 的情形（例如，太阳和任何一行星）可以是很好的近似，但它永远不是严格地正确的，而在 M 和 m 可以相比时，它

一定会完全不对.

我们曾看到过在具有圆轨道的双星体系(本书第二册 111 页)中正确处理的例子;认清了两者都在运动，都以质心为原点来衡量每一个的位移；如图 13-29 所示. 粒子 P 和 Q 相对于质心 C 的坐标分别为 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$;从 Q 到 P 的矢量距离是 $\mathbf{r}$. 于是，我们有

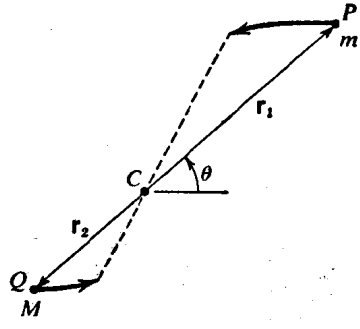


图 13-29 两体体系，其中两粒子围绕质心 C 沿着几何上相似的轨道运动，它们永远位于一条通过 C 的直线的两端.

$$\mathbf{r}_1=\frac{M}{M+m}\mathbf{r}$$

如果这两粒子只在它们之间的有心力 $F(r)$ 的作用下运动，就可能选择一个 C 在其中不动的参照系，而矢量 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 总是在正相反的方向，长度之比等于 M/m. 于是，P 相对于 C 的径向加速度是

$$a_{r1}=\frac{M}{M+m}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

因而，按牛顿定律的说法，P 的运动的径向分量可写为

$$F(r)=\frac{mM}{M+m}\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \qquad (13\text{-}44a)$$

(注意 F 是两粒子的总间距 r 的函数.) 把牛顿定律应用于另一粒子 Q 将得到完全相同的方程;它只包含相对坐标 r 和折合质量 $\mu[=mM/(M+m)]$. 因之可写

$$F(r)=\mu\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] \qquad (13\text{-}44b)$$

如果 F 是引力 $-GMm/r^2$，则从方程(13-44a)看出径向方程成为

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{G(M+m)}{r^2}$$

总质量 $M+m$ 在此起着以前的处理中单独由 M 所起的作用.

两体体系的两个伙伴围绕它们的公共质心沿着几何上相似的轨道运动这一事实在F.辛顿用计算机制作的影片中极佳地显示了出来. 图13-30所示是这影片的两幅静画面; 其中之一是从质心本身在运动着的参照系观察到的运动, 而另一幅则是相对于质心系的运动.

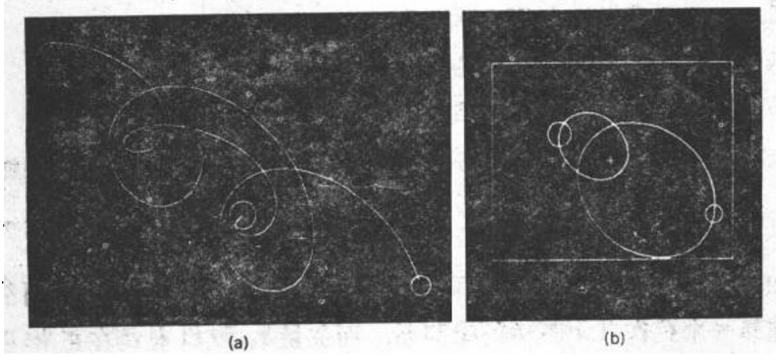


图13-30 (a)从一任意参照系所可能观察到的双星系两个成员的路径.(b)在CM(质心)系中看同一运动.

§19 从力的定律推算轨道[①]

在本章的前面我们曾表明如何根据行星的轨道是以太阳为焦点之一的一个椭圆这个观察事实, 推断出一个反平方律在起作用. 可是随后我们又指出, 抛物线和双曲线轨道也是可能的. 我们是怎样知道这一点的呢?答案是,如我们在第七章中说过的, 牛顿第二定律可以在两个主要方式上来运用. 我们可以从运动推算出力,也可以从力推算运动. 一般说来,后者比前者要容易, 并且还导致具有大得多的普遍性的结果. 例如, 对靠近地球表面一特定物体的局部射道轨迹的分析使我们得出有一恒定的竖直加速度g在作用的结论. 但是如果我们从这一加速度的事实出发, 我们

① 这一节可略去而不致失去连贯性.

可以很快地推论出：靠近地球表面的**所有**射道(忽略空气阻力)都是抛物线或抛物线的一部分．类似的情况对有心力也成立，我们将显示在这种问题中演绎地运用牛顿定律的力量．

如我们曾看到的，控制这类运动的基本方程是

$$F = ma_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

(13-45)

$$r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C = \frac{l}{m}$$

轨道的**形状**是可以不考虑时间就能描绘出来的；在这类问题中，它只不过是曲线的空间描述，由 r 作为 θ 的函数给出．因之我们感兴趣的是把由微商 d^2r/dt^2 和 $d\theta/dt$ 所表示的、对时间的明显依赖关系消去．做到这一点的关键在于应用(13-45)的第二个方程．可令

$$d\theta/dt = \frac{C}{r^2}$$

我们发现，在这一分析中引进 r 的倒数作为变量有很大好处．叫它作 u，我们有

$$r = \frac{1}{u}$$

(13-46)

$$\frac{d\theta}{dt} = Cu^2$$

再取 r 对 t 的一次微商，有

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$$

应用连锁法则，我们可以把重写如下：

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}$$

[最后一步用了(13-46)式.]再求微商,得

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-C\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt}=-C^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \tag{13-47}$$

用(13-46)和(13-47)两式，我们得到应用牛顿定律于运动的径向分量的下列表达式:

$$F_r=ma_r=-C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u\right) \tag{13-48}$$

运动的径向方程的这一特殊表述形式在我们把 F_r 表示为 r 的具体函数时立刻显示出来. 特别是对固定于原点的质量 M 的引力作用下运动的情形,我们有

$$F_r=-\frac{GMm}{r^2}=-GMmu^2$$

把它代入(13-48)式,立刻导致下面的简单方程:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{C^2}=A \tag{13-49}$$

其中 A 是一个运动常数. 如果我们将它改写为

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(u-A)=-(u-A)$$

很容易看出求积分得到的解可以写成(适当选择 θ 的零点)

$$u-A=B\cos\theta$$

其中 B 是另一常数. 现在回到变量 r,我们就有下列轨道方程:

$$\frac{1}{r}=A+B\cos\theta \tag{13-50}$$

我们要立刻指出方程(13-50)的一个特点,这是由于我们对 θ 的零点的特殊选择而来的. 那就是，当 θ 由零起在正或负的方向上增加,$1/r$ 之值都要减小,因而 r 之值增加(假定 B 是正数). 因之,与 $\theta=0$ 相应的点是轨道的近地点;这时 r 正经过它的极小值，我们将用 r_1 表示它[见图 13-31(a)].

(13-50)式有一几何解释,这可以参看图 13-31(b)来描述.稍

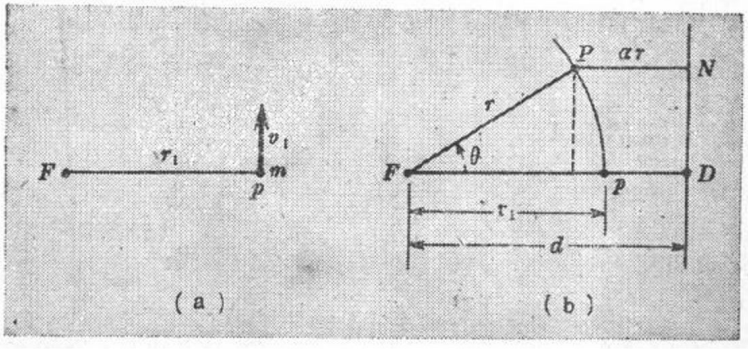


图 13-31 (a)在反平方力的作用下粒子在它轨道的近地点. (b)轨道的一部分,示明焦点、粒子的位置和准线(DN 线)之间的几何关系.

为改写一下这方程,有

$$\frac{1}{B}=d=\alpha r+r\cos\theta$$

其中 $d=1/B,\alpha=A/B$. 如果我们取一长为 d 的线段 FD 通过近地点,并在 D 点作一轴线与它垂直,则轨道就是这样一个动点 P 的轨迹,P 点到直线 DN 的垂直距离等于它到焦点 F 的距离($d-r\cos\theta$)乘上一常数 α,这正是各种圆锥曲线的一般作图法.

为了更充分地说明这结果,我们必须考虑(13-50)式中常数 A 和 B 之值. A 值是在(13-49)式中定义的:

$$A=\frac{GM}{C^2}$$

今 C 是 $r^2d\theta/dt$ 的恒定值,我们可以把它用近地点处的径向距离和速率表示出来:

$$C=r_1v_1$$

因而

$$A=\frac{GM}{r_1^2v_1^2}$$

但是在近地点的势能和动能由下列表达式给出:

$$U_1=-\frac{GMm}{r_1} \qquad K_1=\frac{1}{2}mv_1^2$$

这使我们能够把 A 写为

$$A=-\frac{U_1}{2r_1K_1}$$

B 之值由令 $\theta=0$ 时的方程(13-50)本身立刻得出:

$$B=\frac{1}{r_1}-A=\frac{1}{r_1}\left(1+\frac{U_1}{2K_1}\right)$$

现在来看 B 和 A 之差:

$$B-A=\frac{1}{r_1}\left(1+\frac{U_1}{K_1}\right)=\frac{E}{r_1K_1}$$

其中 E 是在轨道上每一点的总能量. 这是问题的关键, 因为现在我们可以按照 E 的值是零、是负、或是正来辨明三种不同的情况, 这些情况与我们早先讨论过的三种类型的轨道相应:

$$\begin{aligned}
&E=0(B=A,\alpha=1): \quad \frac{1}{r}=A(1+\cos\theta)\\
&E>0(B>A,\ \alpha<1): \quad \frac{1}{r}=A(\alpha_h+\cos\theta) \qquad (13\text{-}51)\\
&E<0(B<A,\ \alpha>1): \quad \frac{1}{r}=A(\alpha_e+\cos\theta)
\end{aligned}$$

这些方程依次确定一抛物线、一双曲线、和一椭圆. 前两个方程清楚地表明 r 可以变到无穷大(在第一式中当 $\theta\to\pi$, 在第二式中当 $\cos\theta\to-\alpha_h$). 第三式在 $\theta=\pi$ 和零两处分别确定 r 的极大值和极小值, 进一步的分析将把轨道参数的具体值同运动的动力学常数——即能量和轨道角动量的大小——联系起来.

许多涉及不是反平方的力律的问题也可以用本节开头时所发展的直到获得(13-48)式的方法有效地解决.

§20 卢瑟福散射

作为在反平方有心力场中运动的另一个例子，我们来考察一带点粒子在一电场中的偏转，这电场是由一个质量大得多、带有同号电荷的物体产生的．这个场是排斥性的，遵从库仑定律，具有等效势能

$$U'(r)=\frac{kq_1q_2}{r}+\frac{l^2}{2mr^2} \tag{13-52}$$

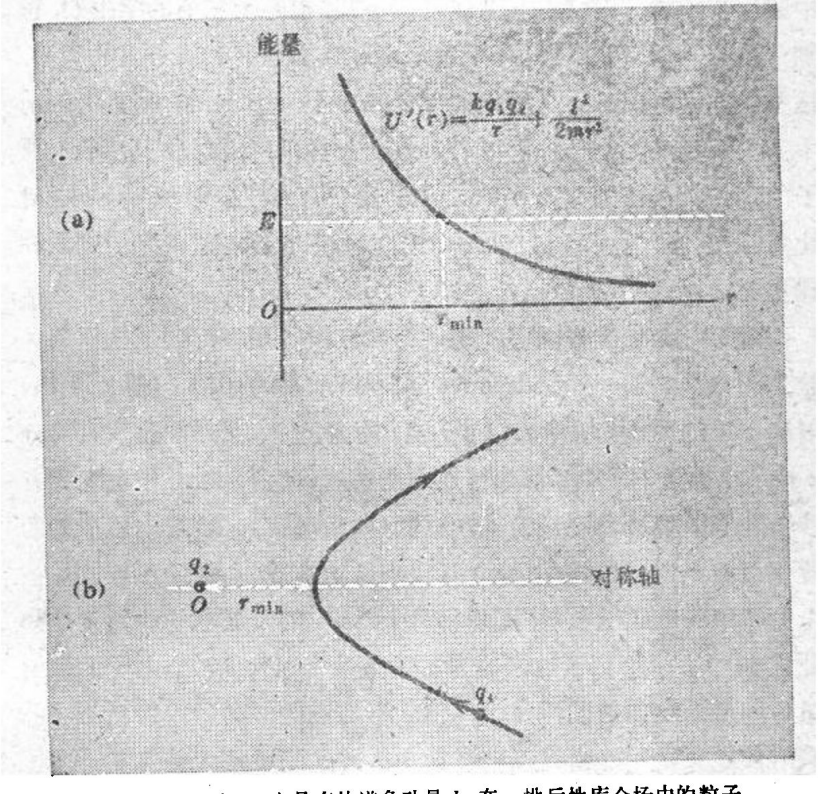


图 13-32 (a)一个具有轨道角动量 l、在一排斥性库仑场中的粒子的有效径向势能图．(b)一α粒子(q_1)在一个重原子核电荷(q_2)附近的轨迹的平面视图．

图 13-32(a) 画出了 $U'(r)$ 的图形. k 是库仑定律中的比例常数, q_1 和 q_2 是两粒子上的电荷.

只有对于正的能量(E) 运动才是可能的, 而且一切这种运动都是无界的, 由一最接近距离 $r_{极小}$ 表征, 其值依赖于运动粒子的能量. 由于这粒子在离去的路径上重复着它在进来时所曾有过的一切径向速率之值, 并且由于粒子的角速度($d\theta/dt$)只和它到 O 的距离 r 有关, 其轨迹一定象图 13-32(b)中所示的那样是对称的.

历史上, 对于这类运动的理解在本世纪的最重要的实验之一中起过基本的作用. 在 1910 年前后, 卢瑟福爵士和他的学生们, 特别是盖革和马斯登, 进行了一系列薄金属箔散射 α 粒子束的实验. 这些实验显示原子质量的绝大部分集中于一个小的、带正电的核中. 推测起来; 原子中的电子是象云一样围绕着这原子核的. 原子的这一有核模型与 J. J. 汤姆孙早先提出的模型形成鲜明的对比, 按照后者, 原子基本上是一个分布着正电荷的球, 电子则嵌在球里面.

图 13-33 是这样的实验之一的示意图, 用一薄的金箔作为 α 粒子的靶子. 从一钋源出来的一束经过准直的 α 粒子(氦原子核)射到厚度约为 4×10^{-7} 米(4000 埃) 的金箔上, 虽然观察到大部分 α 粒子穿过金箔, 主要都偏转很小的角度(向前散射), 但也发现有少数粒子的偏转角度是大于 90° 的(向后散射). 遭到向后散射的比例是极小的, 只有百万分之几. 卢瑟福推想, α 粒子不可能是被金原子中的电子所散射, 因为相对于 He^{2+} 的质量电子的质量是如此之小. 实际上, 由于这一质量比的数量级是 1/7000, 电子的散射效应即使是在向前的散射中也是微不足道的. 向后散射的出现, 只有假定 α 粒子**非常接近地**经过一个比它的质量**大得多**的质量, 才能解释. 这一论点引导卢瑟福提出一原子模型: 它有一个非常小的但很重的原子核. 如果这是一个正确的模型, 那么人们应该

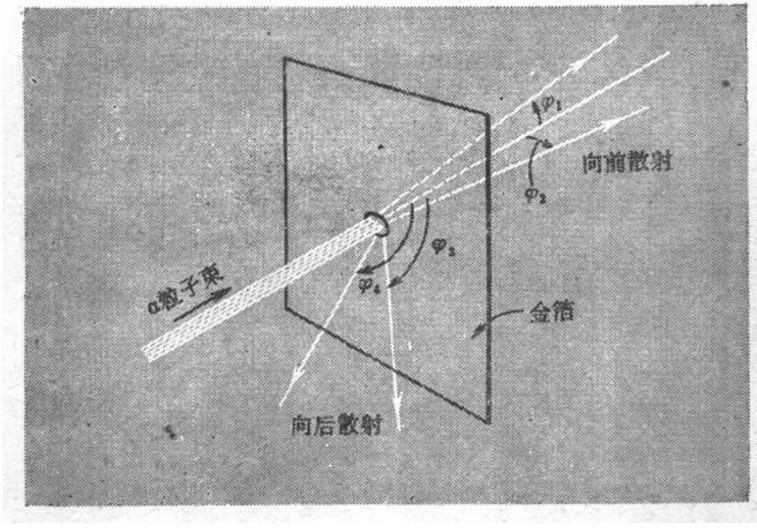


图 13-33　被一薄金属箔中的原子核散射的α粒子.

能够预言,在质量大得多的、带正电的金原子核周围的库仑场作用下被散射到不同方向上去的α粒子的相对数目. 这件事做了,定量的实验结果同计算相符. 让我们来看这一有关散射的计算是怎样得出的.

对于一薄箔来说,被其中一个金原子核(在金箔中每立方毫米大约有 6×10^{19} 个金原子)散射过的一个α粒子,在它从金箔中穿出来之前再被第二个原子核散射而作较大偏转的机会是很小的. 因此,我们可以认为这粒子束的所有散射都是一次散射的结果. 于是,首先我们必须求出一α粒子被一个金原子核散射的偏转. 其次,由于我们不能注视着每一α粒子,我们必须计算偏转了某一角度的粒子的相对数目,其中要考虑到所有可能的"瞄准误差".

虽然我们可以利用计算卫星轨道的方法去求得被一金原子核散射的α粒子的偏转,但我们将介绍一个简单得多而又更为直接的论证. 考虑一α粒子(电荷 q_1,质量 m)以速率 v_0 奔向一电荷为

q_2 的金原子核，如图 13-34 中所示.

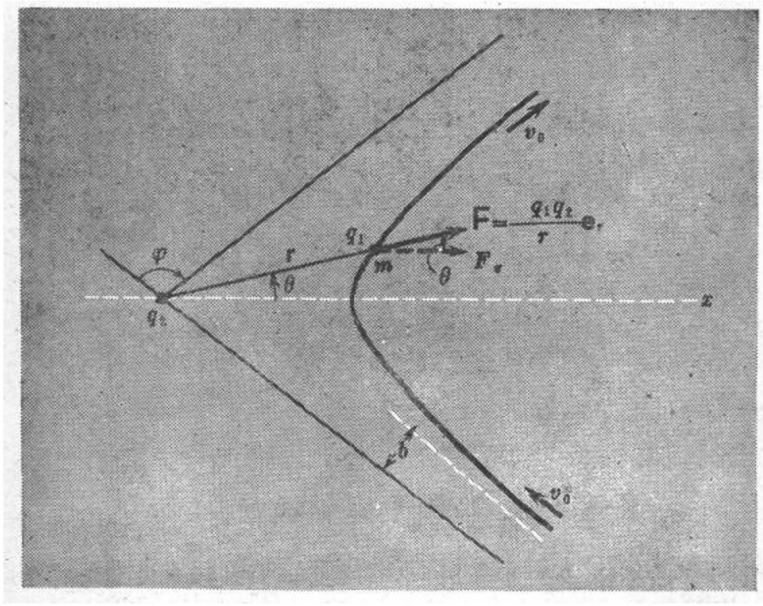


图 13-34　卢瑟福散射的几何关系.

显然，v_0 越是对准电荷 q_2，偏转也越大. 图中的距离 b 是在本章(见87页)早先定义过的碰撞参数，是瞄准误差的一个量度. 因为在离 q_2 很远的地方 m 在 q_2 的场中的势能小到可以忽略，那里的动能 $\frac{1}{2}mv_0^2$ 就是运动的总能量. 在碰撞中这一总能量是守恒的. 因之，在散射后 α 粒子又重获它的初始速率，而这过程的唯一效果是使它的运动改变方向，其大小等于图 13-34 中的角 φ. 的确，α 粒子在趋近于金的原子核时是慢下来了，但在它离开的途中又重获它原先的速率. 此外，m 绕 q_2 的角动量是守恒的，这一恒定的角动量 l 由下式给出:

$$l=mv_0b=mr^2\frac{d\theta}{dt}=\text{常数} \tag{13-53}$$

在散射过程中，动量的总变化 $\Delta(m\mathbf{v})$是图 13-35 中所示的、大小各等于 mv_0 的那两个矢量之差，其大小等于

$$\Delta(mv)=2mv_0\sin\frac{\varphi}{2} \tag{13-54}$$

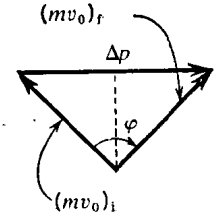


图 13-35　一散射过程的总的动力学效果，用只改变 α 粒子动量的方向而不改变其大小的 Δp 来表示.

它一定等于图 13-34 的力 $\mathbf{F}$ 在散射过程中所提供的总冲量. 这冲量是矢量

$$\Delta\mathbf{p}=\int\mathbf{F}dt$$

从图 13-34 的对称性，我们看到只有 $\mathbf{F}$ 的分量 F_x 对这冲量有贡献，因为来自 x 轴下方轨迹上各点的 F_y 的垂直方向贡献正好同在 x 轴上方各点的相应贡献抵消. 这是讲得通的，因为如图 13-35 中所示，$\Delta(m\mathbf{v})$是平行于 x 轴的. 因之，牛顿运动定律给出

$$\Delta p=\int F_x dt=\int F\cos\theta dt=\Delta(mv)=2mv_0\sin\frac{\varphi}{2}$$

而我们必须算出其中的积分. 把这积分写为

$$\Delta p=\int\frac{kq_1q_2\cos\theta}{r^2}dt$$

并用(13-53)式，有

$$\Delta p=\frac{kq_1q_2}{v_0b}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta d\theta=\frac{kq_1q_2}{v_0b}(\sin\theta_2-\sin\theta_1) \tag{13-55}$$

θ_1 和 θ_2 是 θ 在散射前和后之值. 从图 13-34 我们看到

$$\theta_1=-\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) \text{ 和 } \theta_2=+\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$

因 $\sin[(\pi-\varphi)/2]=\cos(\varphi/2)$, (13-55)式便为

$$\Delta p=\frac{2kq_1q_2}{v_0b}\cos\frac{\varphi}{2}$$

把 Δp 的这一表达式同(13-54)式给出的 $\Delta(mv)$之值等起来，我们求得

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{kq_1q_2}{mv_0^2b} \tag{13-56}$$

这式告诉我们对于每一碰撞参数 b 之值一能量给定的粒子的散射角. 如果 α 粒子束基本上是单一能量的，我们就可以着手用(13-56) 式去计算被偏转了不同角度 φ 的入射粒子的相对数目. 这包含求出入射粒子的碰撞参数在 b 和 $b+db$ 之间的分数，从而得到被散射到相应的角度 φ 的范围中去的分数.

§21 散射截面

人们习惯于用名为散射的粒子的散射截面这一个量来表示不同偏转角度的被散射粒子的相对数目，截面的原始定义简单地是每一散射中心对入射束所呈现的有效靶面积，为了定量地阐明这一概念，考虑一散射箔的一块很小的四方形的大大地放大了的图象[图13-36(a)]，并想象我们能够透视这箔的纵深. 每一散射中心遮挡掉一面积 σ，我们将假设这箔如是之薄，使得从正面看去时在它的各不同深度处的诸截面彼此没有覆盖(见图).

这金属箔的材料具有一个表示其特征的数目 n，等于单位体积中的原子数. 因之，如果这薄片是一个边长为 l、厚度为 Δx 的方块，则其中原子的数目就是 $nl^2\Delta x$. 我们把每一原子同一原子核截面 σ 相联系，于是对入射粒子说来，被遮挡掉的面积是 $\sigma nl^2\Delta x$.

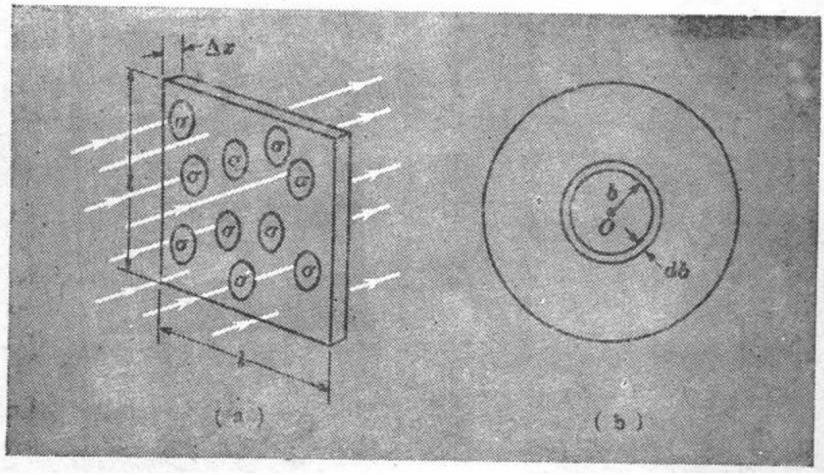


图 13-36 (a) 一部分的散射箔示意图，每一原子核表现为一有效靶面积 σ. (b)一个原子核的总靶面积可以再分为若干部分截面，与碰撞参数 b 的相邻值之间的环状面积相应.

被这部分面积从中挡住的总面积正好是 l^2，这就意味，在总面积中被挡住的分数 f 是

$$f=\frac{\sigma n l^2 \Delta x}{l^2}=\sigma n \Delta x$$

由于入射粒子，从原子间距离的尺度来量度，是完全无规则地打到靶子上的(即使粒子束就整体来说其广度是限制于一范围内的——也许是一毫米上下)，落到一个原子核靶面积上粒子的比例数与上述比例数 f 完全一样. 因之，如果有 n' 个 α 粒子趋于散射箔，它们之中的 $\Delta n'$ 个受到原子核的某种散射相互作用，则

$$f=\frac{\Delta n'}{n'}=\sigma n \Delta x \tag{13-57}$$

因此，用一片厚度和成份都是已知的散射箔，从 $\Delta n'/n'$ 的测量，就可以推出一单个原子核的有效截面①.

① 在这一描述中我们忽略了围绕原子核的电子所提供的静电“屏蔽”、对于大的碰撞参数(可与原子的半径相比的)，这种屏蔽极大地影响着散射过程.

人们还常常象说总散射截面一样说到**部分**散射截面．这一概念在分析“卢瑟福散射”和许多类似的过程中特别重要，对部分截面有一很直接的解释．设想我们注视着一散射原子核，其中心在图 13-36(b)的O点．然后我们可以画一个在碰撞参数b和$b+db$之间的一个圆环，这圆环的面积确定一部分截面$d\sigma$：

$$d\sigma = 2\pi b db \tag{13-58}$$

可是方程(13-56)意味着在b值和相应的散射角φ之间有一个唯一的关系，这在图 13-37 中表示了出来．既然部分截面$d\sigma$完全

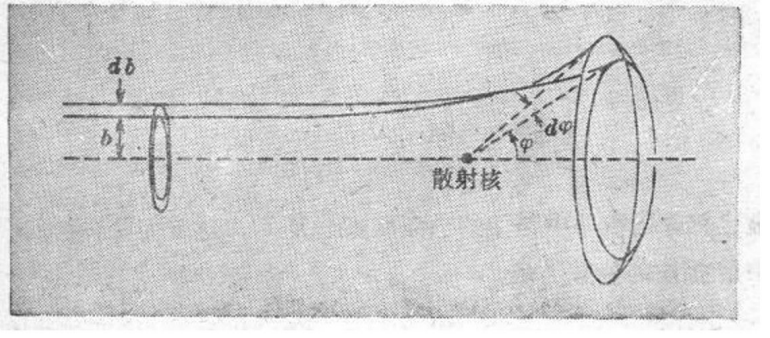


图 13-37　散射角与碰撞参数之间的关系．

由(13-58)式确定，应用(13-56)式就可以预知被散射到角度φ和$\varphi+d\varphi$之间的α粒子的相对数目．让我们来对此作定量的分析．

把方程(13-56)写成

$$b = \frac{kq_1q_2}{mv_0^2}\cot\frac{\varphi}{2}$$

我们有

$$db = \frac{kq_1q_2}{2mv_0^2}\csc^2\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

(我们略去了其中的负号，这负号表明当b增加时φ减小．)于是，(13-58)所给出的部分截面成为

$$d\sigma=\pi\left(\frac{kq_1q_2}{mv_0^2}\right)\frac{\cos(\varphi/2)d\varphi}{\sin^3(\varphi/2)}$$

可是，实际进行的散射实验是观测进入一探测器的 α 粒子的数目与 φ 的函数关系，而探测器是对箔上发生散射过程的地方张着一固定的立体角的．因之，这过程的一个直接量度是单位立体角中的散射量．这量度称为微分截面，它等于 $d\sigma$ 被 $d\Omega$ 除，$d\Omega$ 是含于方向 φ 到 $\varphi+d\varphi$ 之间的立体角元．由于

$$d\Omega=2\pi\sin\varphi d\varphi=4\pi\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

所以

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{4}\left(\frac{kq_1q_2}{mv_0^2}\right)^2\frac{1}{\sin^4(\varphi/2)} \tag{13-59}$$

库仑散射的这一理论结果于是可以拿来同实验观测比较，只要用一个与(13-57)式类似的方程，不过现在限于我们注目于一散射角为 φ 的方向上散射到某一立体角 $\Delta\Omega$ 中去的比例数：

$$\Delta f=n\Delta x\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)\Delta\Omega \tag{13-60}$$

在(13-59)式中，q_1 是 α 粒子上的电荷，($q_1=2e$，e 是基元电荷)，$q_2(=Ze)$是散射核上的电荷．mv_0^2 正好是 α 粒子的动能的两倍，所观测到的散射对散射核的原子序数 Z、对 α 粒子的能量以及对散射角 φ 的依赖关系都和(13-59)式所预计的符合得非常好．人们会料想，在下列两种情况下可能与理论有出入：

1．如果碰撞参数 b **大到**一原子半径的若干分之几，原子核的电荷将部分地被它周围的电子云屏蔽，而使散射角与(13-56)式的预计相比相应地减小．

2．如果碰撞参数**小到**这种程度，使 α 粒子进入到特殊的核力范围内，我们就不再能期望散射还与按对于点电荷的库仑律计算出来的结果相一致．

由于对卢瑟福散射律[(13-59)式]的第二类偏离发生于那些与散射核很接近的α粒子，它们在反向散射中变得很明显，特别是对于高能的α粒子．根据对那些反向散射开始偏离卢瑟福散射公式的α粒子的能量的观测，人们得到散射核的大小的一个上限、就金而论，人们以这种方式发现金原子核有一个小于大约1.5×10^{-14}米(=15F)的半径．这可以拿来同金原子的半径相比，后者约为1.5×10^{-10}米．因之，原子的半径与原子核的半径之比约为10^4，而原子的体积的数量级是原子核体积的10^{12}倍．故此那重的原子核是集中在原子的整个体积中异常小的部分内的，而α粒子的偏转是在它穿透原子中电子的静电屏蔽之后，走过原子核的邻近区域时发生的．

§22 一个历史性的简述

卢瑟福爵士(1871—1937)，生于新西兰，是一位有卓越技能的实验物理学家．他于1908年接受诺贝尔化学奖并于1919年成功地做了第一个物质嬗变的实验，当时他用α粒子轰击氮，产生出氧的一个同位素．对于导使他发现原子核的各个阶段，用卢瑟福本人的话来表达是很有趣的．他说：

> 由于我自己对下一阶段很感兴趣，所以我要略为详细地向你们说一说，并且我希望用这个例子来表明人们是如何常常由于偶然而发现真情的．在早些时候，我曾观测过α粒子的散射，而在我的实验室工作的盖革博士对它作了细致的观察．他发现，在重金属薄片里，散射通常是很小的，量级为一度，有一天盖革来见我，说道，“您是否认为我正在放射性方法上给予指导的年青的马斯登应该开始做点小的研究？”我当时也已想过这事，因此我

说，“何不让他看看是否有任何α粒子被散射一大角度？”我可以把心里话告诉你们，我不相信会有这种情形，因为我们都知道α粒子是一个很快的重粒子，具有巨大的能量，你能够证明，如果散射是由于多次小的散射积累而来，那么一α粒子被散射到反向的机会是非常之小的。可是我记得，在两三天之后盖革极为兴奋地跑到我那里说，“我们已能使某些α粒子被向后散射了…”这简直是我一生中所遇到的最难以置信的事件．这几乎同你们如果把一发15英寸的炮弹射向一张薄纸而它会回过来打中你们一样难以置信．经过考虑，我认识到，这一向后的散射一定是一个单次碰撞的结果，而当我作过计算后，我发现除非认为原子是一个其大部分质量集中于一微小的核里面的体系，是不可能得任何那一量级的散射的．就在那时，我就有了原子具有一带有电荷的、很小而很重的核心这一观念．我从数学上推出这散射所应遵从的规律，我并且发现，被散射一给定角度的粒子数应正比于散射箔的厚度、核电荷的平方，并与它速度的四次方成反比．这些推算后来都由盖革和马斯登在一系列精美的实验中予以证实。①

在本书的(见134页—135页)上我们复制了盖革和马斯登原论文的一些摘录．根据1910年最广泛地被接受的原子模来计算一下预期的向后散射(>90°)是很有趣的，那是汤姆孙模型，在其中负电子被设想为分布在一带均匀正电的球体里，球的半径约10^{-8}厘米．经过这原子的α粒子能够被这构成原子质量的绝大部分的

①引自 *Background to Modern Science*（《近代科学的背景》，一些科学家于1936年在剑桥大学讲演的文集；J. Needham 和 W. Pagel 编辑），Cambridge University Press, England(1938).

LXI. *The Laws of Deflexion of α Particles through Large Angles*.* *By* Dr. H. GEIGER *and* E. MARSDEN †.

IN a former paper ‡ one of us has shown that in the passage of α particles through matter the deflexions are, on the average, small and of the order of a few degrees only. In the experiments a narrow pencil of α particles fell on a zinc-sulphide screen in vacuum, and the distribution of the scintillations on the screen was observed when different metal foils were placed in the path of the α particles. From the distribution obtained, the most probable angle of scattering could be deduced, and it was shown that the results could be explained on the assumption that the deflexion of a single α particle is the resultant of a large number of very small deflexions caused by the passage of the α particle through the successive individual atoms of the scattering substance.

* Communicated to *K. Akad. Akad. d. Wiss. Wien.*
† Communicated by Prof. E. Rutherford, F.R.S.
‡ H. Geiger, Roy. Soc. Proc. vol. lxxxiii. p. 492 (1910); vol. lxxxvi. p. 235 (1912).

In an earlier paper *, however, we pointed out that α particles are sometimes turned through very large angles. This was made evident by the fact that when α particles fall on a metal plate, a small fraction of them, about 1/8000 in the case of platinum, appears to be diffusely reflected. This amount of reflexion, although small, is, however, too large to be explained on the above simple theory of scattering. It is easy to calculate from the experimental data that the probability of a deflexion through an angle of 90° is vanishingly small, and of a different order to the value found experimentally.

Professor Rutherford † has recently developed a theory to account for the scattering of α particles through these large angles, the assumption being that the deflexions are the result of an intimate encounter of an α particle with a single atom of the matter traversed. In this theory an atom is supposed to consist of a strong positive or negative central charge concentrated within a sphere of less than about 3×10^{-12} cm. radius, and surrounded by electricity of the opposite sign distributed throughout the remainder of the atom of about 10^{-8} cm. radius. In considering the deflexion of an α particle directed against such an atom, the main deflexion-effect can be supposed to be due to the central concentrated charge which will cause the α particle to describe an hyperbola with the centre of the atom as one focus.

The angle between the directions of the α particle before and after deflexion will depend on the perpendicular distance of the initial trajectory from the centre of the atom. The fraction of the α particles whose paths are sufficiently near to the centre of the atom will, however, be small, so that the probability of an α particle suffering a large deflexion of this nature will be correspondingly small. Thus, assuming a narrow pencil of α particles directed against a thin sheet of matter containing atoms distributed at random throughout its volume, if the scattered particles are counted by the scintillations they produce on a zinc-sulphide screen distance r from the point of incidence of the pencil in a direction making an angle ϕ with it, the number of α particles falling on unit area of the screen per second is deduced to be equal to

$$\frac{Qnlb^2 \operatorname{cosec}^4 \phi/2}{16r^2},$$

where Q is the number of α particles per second in the original pencil, n the number of atoms in unit volume of the material, and t the thickness of the foil. The quantity

$$b = \frac{2NeE}{mv^2},$$

where Ne is the central charge of the atom, and m, E, and v are the respective mass, charge, and velocity of the α particle.

The number of deflected α particles is thus proportional to (1) $\operatorname{cosec}^4 \phi/2$, (2) thickness of scattering material t if the thickness is small, (3) the square of the central charge Ne of the atoms of the particular matter employed to scatter the particles, (4) the inverse fourth power of the velocity v of the incident α particles.

* H. Geiger and E. Marsden, Roy. Soc. Proc. vol. lxxxiii. p. 495 (1909).
† E. Rutherford, Phil. Mag. vol. xxi. p. 669 (1911).

At the suggestion of Prof. Rutherford, we have carried out experiments to test the main conclusions of the above theory. The following points were investigated:—

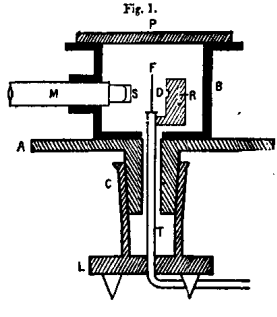
(1) Variation with angle.
(2) Variation with thickness of scattering material.
(3) Variation with atomic weight of scattering material.
(4) Variation with velocity of incident α particles.
(5) The fraction of particles scattered through a definite angle.

The main difficulty of the experiments has arisen from the necessity of using a very intense and narrow source of α particles owing to the smallness of the scattering effect. All the measurements have been carried out by observing the scintillations due to the scattered α particles on a zinc-sulphide screen, and during the course of the experiments over 100,000 scintillations have been counted. It may be mentioned in anticipation that all the results of our investigation are in good agreement with the theoretical deductions of Prof. Rutherford, and afford strong evidence of the correctness of the underlying assumption that an atom contains a strong charge at the centre of dimensions, small compared with the diameter of the atom.

(1) *Variation of Scattering with Angle.*

We have already pointed out that to obtain measurable effects an intense pencil of α particles is required. It is further necessary that the path of the α particles should be in an evacuated chamber to avoid complications due to the absorption and scattering of the air. The apparatus used is shown in fig. 1, and mainly consisted of a strong cylindrical metal box B, which contained the source of α particles R, the scattering foil F, and a microscope M to which the zinc-sulphide screen S was rigidly attached. The box was fastened down to a graduated circular platform A, which could be rotated by means of a conical airtight joint C. By rotating the platform the box and microscope moved with it, whilst the scattering foil and radiating source remained in position, being attached to the tube T, which was fastened to the standard L. The box B was closed by the ground-glass plate P, and could be exhausted through the tube T.

Fig. 1.



The source of α particles employed was similar to that used originally by Rutherford and Royds * in their experiments on the nature of the α particle. It consisted of a small thin-walled glass tube about 1 mm. in diameter, containing a large quantity of well purified radium emanation. The α particles emitted by the emanation and its active deposit could pass through the glass walls without much reduction of range. For these experiments the unhomogeneity of the source, due to the different α particles from the emanation, Ra A and Ra C, does not interfere with the application of the law of scattering with angle as deduced from the theory, as each group of α particles is scattered according to the same law.

By means of a diaphragm placed at D, a pencil of α particles was directed normally on to the scattering foil F. By

* E. Rutherford and T. Royds, Phil. Mag. vol. xvii. p. 281 (1909).

rotating the microscope the α particles scattered in different directions could be observed on the screen S. Although over 100 millicuries of radium emanation were available for the experiments, the smallness of the effect for the larger angles of deflexion necessitated short distances of screen and source from the scattering foil. In some experiments the distance between the source and scattering foil was 2·5 cm., and the screen moved in a circle of 1·6 cm. radius, while in other experiments these distances were increased. Observations were taken in various experiments for angles of deflexion from 5° to 150°. When measuring the scattering through large angles the zinc-sulphide screen had to be turned very near to the source, and the β and γ rays produced a considerable luminescence on it, thus making countings of the scintillations difficult. The effect of the β rays was reduced as far as possible by enclosing the source in a lead box shown shaded in the diagram. The amount of lead was, however, limited by considerations of the space taken up by it, and consequently observations could not be made for angles of deflexion between 150° and 180°.

In the investigation of the scattering through relatively small angles the distances of source and screen from the scattering foil were increased considerably in order to obtain beams of smaller solid angle.

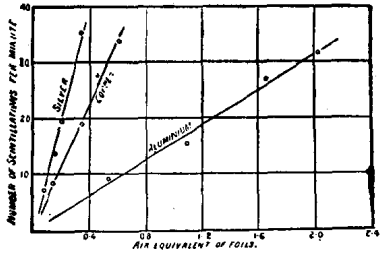
TABLE II.

Variation of Scattering with Angle. (Collected results.)

I. Angle of deflexion, ϕ.	II. $\frac{1}{\sin^4\phi/2}$	III. Silver. Number of scintillations, N.	III. Silver. $\frac{N}{\sin^4\phi/2}$	IV. Gold. Number of scintillations, N.	IV. Gold. $\frac{N}{\sin^4\phi/2}$
150°	1·15	22·2	19·3	33·1	28·8
135	1·38	27·4	19·8	43·6	31·2
120	1·79	33·0	18·4	51·9	29·0
105	2·33	47·3	18·7	69·5	27·5
75	7·25	136	18·8	211	29·1
60	16·0	320	20·0	477	29·8
45	46·3	989	21·3	1435	30·8
37·5	93·7	1760	18·8	3300	35·3
30	223	5260	23·6	7800	35·0
22·5	690	20300	29·4	27300	39·6
15	3445	103400	30·6	132000	38·4
30	223	5·3	0·024	8·1	0·014
22·5	690	16·6	0·024	8·4	0·012
15	3445	93·0	0·027	48·2	0·014
10	17380	506	0·029	200	0·0115
7·5	54600	1710	0·031	607	0·011
5	276300	...	...	3320	0·012

Variation with Thickness of Material.

In investigating the variation of scattering with thickness of material, it seemed necessary to use a homogeneous source of α particles, for according to the theory the effect of the change of velocity with increasing thickness will be very appreciable for α particles of low velocity.



For all the metals examined the points lie on straight lines which pass through the origin. The experiments therefore prove that for small thicknesses of matter the scattering is proportional to the thickness.

TABLE VII.

Variation of Scattering with Velocity.

I. Number of sheets of mica.	II. Range R of α particles after leaving mica.	III. Relative values of $1/v^4$.	IV. Number N of scintillations per minute.	V. $\frac{N}{v^4}$.
0	5·5	1·0	247	25
1	4·76	1·21	290	24
2	4·05	1·50	334	23
3	3·33	1·91	44	23
4	2·51	2·84	81	28
5	1·84	4·33	101	23
6	1·04	9·22	236	25

Summary.

The experiments described in the foregoing paper were carried out to test a theory of the atom proposed by Prof. Rutherford, the main feature of which is that there exists at the centre of the atom an intense highly concentrated electrical charge. The verification is based on the laws of scattering which were deduced from this theory. The following relations have been verified experimentally:—

(1) The number of α particles emerging from a scattering foil at an angle ϕ with the original beam varies as $1/\sin^4\phi/2$, when the α particles are counted on a definite area at a constant distance from the foil. This relation has been tested for angles varying from 5° to 150°, and over this range the number of α particles varied from 1 to 250,000 in good agreement with the theory.

(2) The number of α particles scattered in a definite direction is directly proportional to the thickness of the scattering foil for small thicknesses. For larger thicknesses the decrease of velocity of the α particles in the foil causes a somewhat more rapid increase in the amount of scattering.

(3) The scattering per atom of foils of different materials varies approximately as the square of the atomic weight. This relation was tested for foils of atomic weight from that of carbon to that of gold.

(4) The amount of scattering by a given foil is approximately proportional to the inverse fourth power of the velocity of the incident α particles. This relation was tested over a range of velocities such that the number of scattered particles varied as 1 : 10.

(5) Quantitative experiments show that the fraction of α particles of Ra C, which is scattered through an angle of 45° by a gold foil of 1 mm. air equivalent ($2{\cdot}1\times10^{-5}$ cm.), is $3{\cdot}7\times10^{-7}$ when the scattered particles are counted on a screen of 1 sq. mm. area placed at a distance of 1 cm. from the scattering foil. From this figure and the foregoing results, it can be calculated that the number of elementary charges composing the centre of the atom is equal to half the atomic weight.

FACSIMILE EXCERPTS FROM THE *PHILOSOPHICAL MAGAZINE* VOLUME 25, 1913

盖革和马斯登论文的复制图

正电荷的静电排斥所偏转①. 在一单次碰撞中的最大偏转是很小的. 然而, 在足够厚的箔中可能出现来自多个原子的"多重散射", 产生一较大的总偏转. 对于象盖革和马斯登在他们有些实验中所用的 10^{-4} 厘米厚的金箔, 汤姆孙理论所预言的、散射角大于 90°的 α 粒子比例数将大约是 10^{1000} 分之一! 这等于说它永远不会发生. (为了便于比较, 试回想一下, 在可观察到的宇宙的全部星系中所有的电子、质子和中子的总数只不过大约是 10^{80}.)无怪当盖革和马斯登观测到对这一厚度的金箔竟然在每 10^4 个 α 粒子中差不多有一个被散射一大于 90° 角时, 卢瑟福感到吃惊了.

习　题

13-1　在某一有心力 $F(r)$的作用下, 所有圆轨道的半径矢量扫过面积的速率都一样, 与轨道半径的大小无关, 试求出 F 与 r 的变化关系.

13-2　在玻尔的氢原子模型中, 一个电子(质量 m) 在有心库仑力 $F(r)=-ke^2/r^2$ 的作用下, 绕着一个差不多是不动的质子在一圆形轨道上运动.

(a) 求出电子的速率 v 作为 r 的函数的表达式.

(b) 求轨道角动量 l 作为 r 的函数的表达式.

(c) 引进玻尔的假设 (现已放弃的所谓"旧量子论"): 在一圆道中的角动量等于 $nh/2\pi$, 其中 h 是普朗克常数, 求符合这一条件的轨道半径的表达式.

(d) 由等式

$$U(r)=-\int_{\infty}^{r}F(r)\,dr$$

计算这体系的势能. 从而求出这量子化体系的总能量作为 n 的函数的表达式.

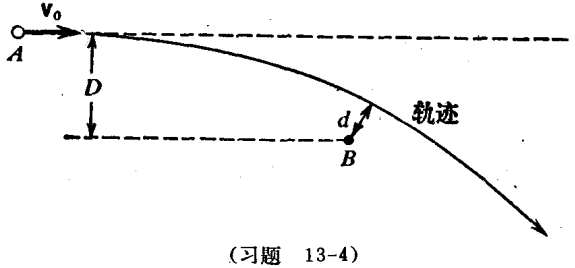
(e) 对于这原子的最低能态 (对应于 $n=1$), 计算轨道半径的数值和使原子电离所需的能量, 用电子伏来量度. ($k=9\times10^9$ 牛顿·米^2/库仑^2; $e=$

① 象早先提到过的, 电子与 α 粒子相比是这样轻, 在两者碰撞时, 它们一下就会被推开.

1.6×10^{-19} 库仑；$m=9.1\times10^{-31}$ 千克；$\hbar=h/2\pi=1.05\times10^{-34}$ 焦耳·秒.)

13-3 用一根长为 l 的绳子把一质量 m 连结到一固定点 O. 起初，绳子是松弛的，质量以恒定速率 v_0 沿一直线运动. 质量与 O 的最接近距离为 h，当这质量与 O 的距离达到 l 时，绳子就绷紧了，而质量进入一个以 O 为心的圆形轨道. 求这质量的最终动能与初始动能的比值. (忽略重力效应.)能量到哪里去了？

13-4 质量为 m 的粒子 A 受到第二个粒子 B 的引力作用，B 保持在原点不动. 起初，当 A 离 B 很远($r=\infty$)时，A 具有速度 $\mathbf{v}_0$，方向沿图中所示直线. B 与这条直线之间的垂直距离为 D，粒子 A 由于 B 的作用而偏离原来的路线，沿着图中所示的射道运动. 这轨道与 B 之间的最短距离是 d. 试推算 B 的质量，用上述已知量和引力常数 G 表示.



(习题 13-4)

13-5 一质量为 m 的粒子在一排斥性的有心力 Am/r^3 的场中运动，A 是常数. 在离力心很远的地方，粒子的速率为 v_0. 碰撞参数为 b. 证明 m 到力心的最近距离为

$$r_{最小}=(b^2+A/v_0^2)^{1/2}$$

13-6 一个不转动的球状行星，没有大气层，质量为 M，半径为 R. 从它的表面上发射出一质量为 m 的粒子，速率等于逃逸速率的四分之三. 根据总能量和角动量守恒，计算粒子(a)沿径向发射和(b)沿切向发射所达到的最远距离(从行星的中心算起). 对(b)的情形画一草图，表示下式所给出的有效势能曲线

$$U'(r)=-\frac{GMm}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}$$

画一直线代表这运动的总能量，并由此验证你的结果.

13-7 设想有一不转动的球状行星，质量为 M，半径为 R，没有大气层、

从这行星的表面发射一卫星，速率为 v_0，方向与当地的竖直线成 30° 角．在随后的轨道中，这卫星所达到的离行星中心最大的距离为 $5R/2$．用能量和角动量守恒原理，证明

$$v_0=(5GM/4R)^{1/2}$$

13-8　一粒子在一有心**吸引**力 $-k/r^3$ 的影响下运动．在很远(差不多是无穷)处，它有一不为零的速度，方向**不**指向中心．试构画出运动的径向分量的有效势能曲线．你对速度的径向分量与 r 的依赖关系能作出什么结论？

13-9　在绕地球作圆形轨道运动的一个卫星上发射一枚小火箭．不用详细计算，试按下列各种发射情况考虑轨道如何改变：(a)向前；(b)向后；(c)向着地球；(d)垂直于轨道平面．

13-10　两艘宇宙飞船在绕地球的、丝毫不差的同一圆轨道上航行，不过一艘在另一艘后面几百码处．后面一艘中的一个宇航员想要投掷一份火腿三明治给在另一艘飞船中的同伴．他如何能做到？定性地描述他所能选用的各种传输路线．(这问题是 L．杜布里季博士在 1960 年 4 日 27 日对美国物理学会的一次餐后讲演中提出的．)

13-11　一地球卫星的椭圆轨道的长轴为 $2a$，短轴为 $2b$．地心与另一焦点之间的距离为 $2c$．周期为 T．

(a) 证明 $b=(a^2-c^2)^{1/2}$．

(b) 考虑卫星在近地点($r_1=a-c$) 和远地点($r_2=a+c$) 的情形．在这两点，它的速度矢量和它的半径矢量成直角．证明，能量守恒意味

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{a-c}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{a+c}=E$$

还证明角动量守恒意味

$$\frac{\pi ab}{T}=\frac{1}{2}(a-c)v_1=\frac{1}{2}(a+c)v_2$$

(c) 从上面那些关系，推出下列与正文中(13-36)式和(13-39)式相应的结果：

$$T^2=4\pi^2a^3/GM \quad 和 \quad E=-GMm/2a$$

13-12　一质量为 m 的卫星，在绕地球的一椭圆轨道上．当卫星在它的近地点时，它到地心的距离为 R_0，运行速率为 v_0．地球的质量 M 比 m 大得多．

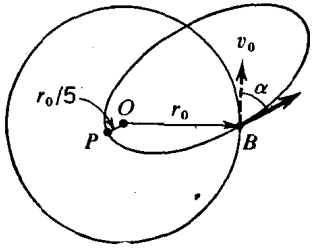
(a) 如果椭圆轨道的长轴是 $4R_0$，卫星在远地点(距地球最远处)的速率是多少？用 G、M 和 R_0 表示．

(b) 证明这椭圆轨道的短轴的长度是 $2\sqrt{3}R_0$，并求出这卫星的周期，用 v_0 和 R_0 表示.

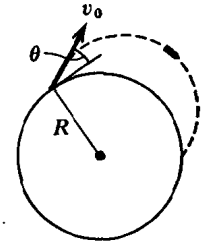
13-13 在固定于 O 点的一个质量的引力作用下，一质量为 m 的卫星以速率 v_0 在一圆轨道上运行.

(a) 取 $r=\infty$ 处的势能为零，证明这卫星的总机械能为 $-\frac{1}{2}mv_0^2$.

(b) 在轨道中的某点 B（见图），卫星的运动方向突然改变，但**速度的大小无任何变化**. 其结果是卫星进入一椭圆轨道，它最接近于 O 的距离（在 P 点）现在是 $r_0/5$. 卫星在 P 点的速率是多少？用 v_0 的倍数表示.



（习题 13-13）



（习题 13-15）

(c) 卫星的速度在 B 点转过了多大角度（图中 α）.

13-14 有一小卫星在绕地球的圆轨道中，轨道半径为 r_1. 现在改变卫星速度的方向，使它在绕地球的一个椭圆轨道中运动. 速度是这样改变的：卫星失去其轨道角动量的一半，但总能量不变. 试计算这新轨道的近地点和远地点的距离（相对于地心来量度），用 r_1 表示.

13-15 一实验火箭以初速率 v_0 和水平倾角 θ 从肯尼迪角发射（见图）. 略去空气摩擦和地球自转运动，计算火箭所能达到的、离地心的最大距离，用地球的质量和半径（M 和 R）、引力常数 G、θ 和 v_0 表示.

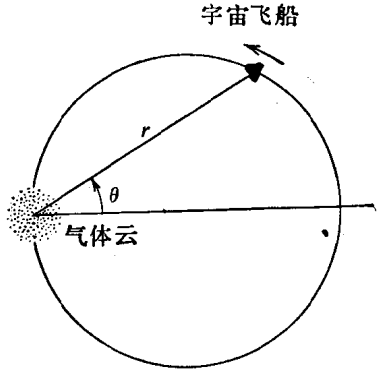
13-16 一质量为 m 的卫星绕着地球（质量为 M）在一半径为 r 的理想的圆轨道中运行. 卫星因爆炸而分裂为相等的两片，每片的质量为 $m/2$. 刚爆炸后两碎块的径向速度分量等于 $v_0/2$，其中 v_0 是卫星在爆炸前的轨道速率；在卫星参照系中，两碎块在爆炸瞬间表现为沿着卫星到地心的连接线分离.

(a) 用 G、M、m 和 r 表示出每一碎块的能量和角动量（以地心为参考）.

(b) 画一草图示明原来的圆轨道和两碎块的轨道在作图时，利用卫星椭圆轨道的长轴与总能量成反比这一事实.

13-17　一宇宙飞船处于绕地球的一椭圆轨道中，它携有一定量的燃料用于改变轨道．这燃料应该在轨道中的什么地点启用才能使离地球的距离最大？你是否注意到这问题同关于火箭在一滑运道上下滑之后的点火问题(习题 10-13)有什么相似之处？

13-18　一艘已经关掉引擎的宇宙飞船正在一团奇怪的气体云附近航行，飞船的指挥官注意到飞船在沿一圆形轨道走着，这轨道将直接引到这团云中去(见图)．他还根据飞船的运动推算出它相对于云团的角动量并无改变．什么(有心)吸引力能说明这样一个轨道？



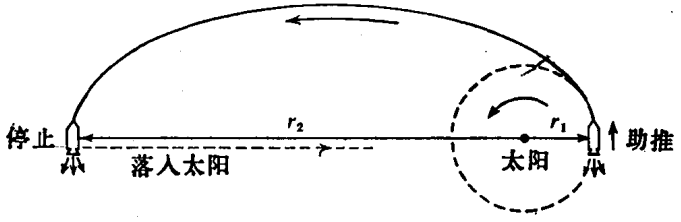
(习题　13-18)

13-19　(a) 仿效正文中对地球到金星的轨道转移的分析，试对地球到火星的轨道转移作一分析．假设地球和火星分别处于半径为 $1AU$ 和 $1.52AU$ 的圆形轨道中．

(b) 在(a) 部分中以及在正文的讨论中，诸行星的引力场都被略去了．(把问题简化为从一个轨道转移到另一轨道，而不是从一个行星的表面到另一个行星的表面．)在离地球多远的地方，地球的场与太阳的场大小相等？类似地，在离火星多远的地方，太阳的场与这行星的场相等？此外，把转移中对抗太阳引力所作的功和对抗地球引力所作的功以及从火星的引力场中获得的能量作比较．

13-20　用最可能小的冲量(由点燃一火箭引擎给予飞船)把一宇宙飞船从地球轨道上投降到太阳中去的问题不能通过在地球轨道运动的相反方向发射一火箭以使飞船的速度减低到零而得到解决．用一较小的火箭的一个两步过程可以实现这一目的．假设起初的轨道是一个以太阳为中心、半径等

于 r_1 的圆(见图),通过一短暂的火箭燃烧,使飞船在轨道速度的方向上切向地加速而进入一椭圆轨道,其近日点与发射点重合.在这一轨道的远日点,飞船受到一个足以使它的空间速度减低到零的向后冲量,使它随即掉进太阳中去.(同前面转移的问题一样,略去地球的引力效应.)



(习题 13-20)

(a) 对飞船的远日点 r_2 的一定值,计算在初级点火时所需要给予它的速率增量.

(b) 求出飞船在其远日点的速率,从而求出要使它掉进太阳中去而在两步中所必须给予它的速率增量之和.这一和数是火箭引擎所必须能够供给的总冲量的一个量度,对 $r_2=10r_1$ 的情形,把这一和数同飞船起初在地球轨道上的速率比较一下.

[注:这问题是在一篇名为"到太阳去的轨道"中所讨论的,见 E. Feenberg, "Orbit to the Sun," *Am. J. Phys.*, **28**, 497 (1960).]

13-21 太阳质量的丢失率约为 4×10^6 吨/秒.在有记载的历史这一段时间内(~5000 年),由此而引起的一年的长短的变化是多少?注意可以应用圆运动的方程(即使地球是螺线形地离开太阳),因为半径在一年间的变化比例数极小.描述这渐次改变所需的另一条件是相对于体系的质心的角动量从头到底守恒.(这问题曾以简化了的形式在习题 8-19 中给出过.)

13-22 一质量为 m 的粒子在一个重的力心 C 附近运动,受到吸引力 $-f(r)\mathbf{e}_r$,其中 r 是从 C 测量的这粒子的位置.如果这粒子还受到一减速力 $-\lambda\mathbf{v}$,而它起初时相对于 C 的角动量为 $\mathbf{L}_0$,试求它的角动量与时间的函数关系.

13-23 考虑位于一水平面内的一有心力 $\mathbf{F}(r)=-k\mathbf{r}$,其中 k 是一个常数.(这对例如实验室中所遇到的摆是一个好的描述,一个摆在物理上真正地限制只在一个竖直平面里摆动是少有的.)

(a) 一质量为m的粒子在这样一个力的影响下运动. 从不动的力心测量,粒子起初的位置为$\mathbf{r}_0$,速度为$\mathbf{v}_0$. 建立一笛卡儿坐标系,其xy平面含$\mathbf{r}_0$和$\mathbf{v}_0$. 求这粒子的位置(x, y)对时间的依赖关系. 这轨道对应于什么特殊几何曲线?(要记住这一相互作用同引力问题的差别.)哪些物理量是守恒的?

(b) 假定这粒子原来是在一半径为R的圆轨道上. 它的轨道速率是多少?如果在某一点它的速度加倍,在随后的运动中它的最大r值将是多少?

13-24 按广义相对论,一质量m绕质量M作轨道运动的引力势能有一修正的附加项$-GMmC^2/c^2r^3$,其中$C=r^2d\theta/dt$,c是光速. 因而半径为r的圆轨道的周期比牛顿理论所预计的要稍稍小一点.

(a) 证明半径为r的圆轨道的周期,由于这一相对论项引起的分数变化为$-(12\pi^2r^2/c^2T_0^2)$,其中T_0是牛顿理论所预计的周期.

(b) 由于根据开普勒第三定律有$T_0^2\sim r^3$,这一相对论性修正的效应对最接近太阳的行星最大,例如水星. 考虑这相对论项对径向和角向周期的影响,看你能否由此得到那著名的结果:水星轨道的近日点以每世纪43秒弧的速率在进动. 你也许会发现回过头去参看一下习题8-20对你有用,它所要处理的也正是这个问题.

13-25 一原子束沿着正x方向运行,穿过一每单位体积含有n个粒子的媒质,受到如下的衰减:

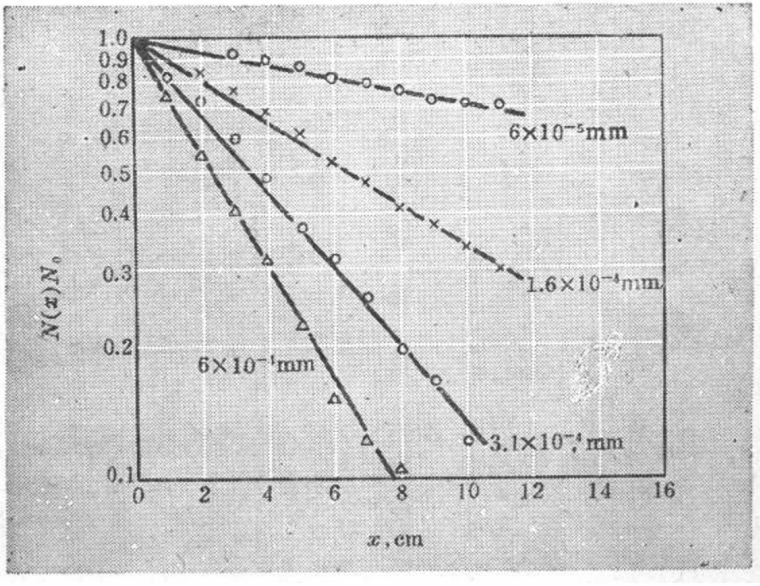
$$\frac{dN(x)}{dx}=-AnN(x)$$

其中A是媒质中的一个原子对原子束中一个原子的散射截面. 因此,如果原子束在$x=0$处含有N_0个原子,那么,在x处仍然在原子束中一起运行的数目正好是$N(x)=N_0e^{-Anx}$.

(a) 试提出一个能够给出上述结果的原子束衰减的简单模型.

(b) 下图总结了在不同的压强下被氩气衰减的钾原子束的一组测量(压强以毫米汞柱表示;温度始终为0°C). [这些数据来自J. G. 金的影片《根据原子束实验得到的原子大小(*The Size of Atoms from an Atomic Beam Experiment*)》, Education Development Center, Newton, Mass., 1961.]试推算一钾原子被一氩原子散射的截面.(在标准温度和压强下,1立方厘米的理想气体含2.7×10^{19}个分子.)检验一下对不同压强值的结果是否一致.

(c) 如果钾原子和氩原子都简单地看作是半径分别为r_K和r_A的硬球,则根据(b)中结果,r_K和r_A有什么含义?



（习题 13-25）

13-26 (a)在卢瑟福散射问题中，我们能够计算出能量给定的 α 粒子迎面趋近于一原子核时的最小迫近距离 d_0. 证明 $d_0=2kq_1q_2/mv_0^2$.

(b) 相距 10^{-14} 米的两质子之间的斥力为 2.3 牛顿. 试由此推算动能为 5 兆电子伏的 α 粒子(电荷 $2e$)趋近于金的原子核(电荷 $79e$)时的 d_0 之值.

(c) 引进 d_0 之后，散射到 φ 方向 $d\Omega$ 中的入射 α 粒子的分数表达式变为

$$df=\frac{1}{16}(n\Delta s)\,d_0^2\,\frac{d\Omega}{\sin^4(\varphi/2)}$$

其中 n 是单位体积中的原子核数目，Δs 是通过箔的路程长度.

令 $d\Omega=2\pi\sin\varphi d\varphi$, 证明散射角$\geqslant\varphi_0$的 α 粒子的比例数是

$$f(\geqslant\varphi_0)=\frac{\pi}{4}n\Delta s d_0^2\cot^2\frac{\varphi_0}{2}$$

(d) 10^{-4} 厘米厚的金箔受到能量为 5 兆电子伏的 α 粒子轰击. 在 1 百万个垂直入射到这金箔上的 α 粒子中，有多少会偏转 90° 或更大？(金的密度$=1.9\times10^4$ 千克/米^3; 原子量$=197$.)

在自然界中，我们所要与之打交道的不是物质点而是具有有限广延的物质体，但是我们可以把每一物体看作是由许许多多质点所组成的…．　这就把物质体的运动方程的问题约化为质点组力学的问题．

M. 普朗克，《力学概论》(1916)．

第十四章　广延系统和转动动力学

迄今为止，我们对动力学的讨论几乎全都限于看作是质点的粒子的平动．大概唯一例外的是我们关于双原子分子的振动的简短讨论(第十章)．然而，每一个粒子都是有结构的；它有一定的大小和程度不同的刚性．对任何实际物理客体的运动的充分描述必须在它质心的运动之外把它的转动和其他内部运动包括在考虑之内．在许多事例中，我们可以把一个复杂的、广延的物体看作是基础力学中的那种理想粒子的一个集合体．在本章中，我们将讨论若干课题，它们触及这样一些物理体系，这些体系既在许多方面有着很大的差异，可是却有一共同特点，即它们都包括两个或更多的单个粒子的运动．我们将把注意力特别放在粒子间有很强的相互作用的那些物理体系，而在某些例子中我们将认为相互作用是如此之强，以致体系实际上差不多是刚性的．所讨论的范围包括从分子到飞轮、到星系；尽管它们看起来似乎不一样(也的确如此)，但它们也有一些共同的重要性质．本章中的绝大部分是有关转动运动的内容，但我们将从推展两三个重要结论开始，这些结论是应用于任意多个从事于任何类型运动的粒子集合的瞬时运动的．

§1　多粒子系的动量和动能

在第九章中我们分析了在一任意参照系(实验室)中，以及在那由粒子本身确定的独特的质心(CM)系中描述两粒子体系的动力学．我们看到引入质心这概念如何使我们能够把相对于质心的运动与体系作为一个整体的运动分开来．我们现在来证明，这一可能

性对任何粒子系都是存在的；这结果使我们能够在分析任意形状和大小的完整物体时作出很重要的简化.

我们将假定我们的体系是由质量为 m_1, m_2, m_3, …的粒子组成的，它们的瞬时位置是 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \cdots$，瞬时运动速度是 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots$. 质心 C 的位置和速度由以下的方程确定:

$$M\mathbf{r}_c = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3 + \cdots$$

$$M\mathbf{v}_c = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + \cdots$$

其中

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$

我们可以把这些结果较简洁地表示如下:

$$M\mathbf{r}_c = \sum_i m_i\mathbf{r}_i$$

$$M\mathbf{v}_c = \sum_i m_i\mathbf{v}_i \qquad (14\text{-}1)$$

其中的角标 i 之值从 1 变到 N (N 是体系中粒子的总数).

现在来看 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 这规律应用于体系中的任何一个粒子 i 的情形. 一般说来，它可能受到一外力 $\mathbf{F}_i$，还可能受到体系的所有其他粒子的内部相互作用. 我们将用象 $\mathbf{f}_{ik}$ 这样的符号来表示后者，把它看作是第 k 个粒子施加于第 i 个粒子的力①. 于是，对于第 i 个粒子牛顿定律的具体形式就是

$$\mathbf{F}_i + \sum_{k\neq i}\mathbf{f}_{ik} = \frac{d}{dt}(m_i\mathbf{v}_i)$$

我们可以对体系中的每一其他粒子写出一个类似的方程并把它们加起来. 当我们这样做时，右方按(14-1)式正是质量为 M 的单个

① 早先，在处理只有两个粒子的体系时，我们用了符号 F_{12} 来表示由第一个粒子施加于第二个粒子的力，改过的定义对我们现下的目的更方便一些，也不会在我们将要简短地使用它们时引起任何混淆.

粒子以质心速度 $\mathbf{v}_c$ 运动的动量变化率. 左边是什么呢? 它的第一部分是所有外力之和($\mathbf{F}_{外}$), 不管它们是作用在哪一个粒子上的. 第二部分——让我们称它为 $\mathbf{f}_{内}$——是对出现于粒子之间所有成对的相互作用双重求和:

$$\mathbf{f}_{内}=\sum_{i}\sum_{k\neq i}\mathbf{f}_{ik}$$

可是如果你考虑这一和数所留下的是什么时, 你将看到它可以分成一系列成对的、诸如 $\mathbf{f}_{ik}+\mathbf{f}_{ki}$ 这样的贡献. (取最简单的具体情况, $N=3$, 详细地写出所有各项, 对你可能有帮助.)换句话说, 它是由这样一系列的项组成的, 每一项是两个粒之间的作用与反作用之和. 然而, 由于牛顿力学以作用与反作力等值反向为它的一个基本信条, 其中每一对都等于零, 从而全部内力之和 $\mathbf{f}_{内}$ 本身也是零. (自然, 这是一则古老的民间智慧, 用通俗的话说就是"你不能用你的鞋带把你自己提起来.") 因之, 对于无论什么粒子系来说, 我们都有同一个总质量为 M 的单个粒子完全一样的牛顿定律表达式:

$$\mathbf{F}_{外}=\frac{d}{dt}(M\mathbf{v}_c)=M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt} \tag{14-2}$$

图 14-1 是示明这一结果的一个生动例子. 一个具有数不清的内部相互作用的复杂物体, 在重力下它的质心循着一条简单的抛物线运动.

这体系的总动能也遵从一简单分析. 为此, 我们引入各粒子相对于质心的速度 $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3, \cdots$. 这样, 在实验室中测得的任一粒子的速度 $\mathbf{v}_i$ 可写为 $\mathbf{v}'_i+\mathbf{v}_c$. 而这一粒子的动能可写出如下:

$$K_i=\frac{1}{2}m_i v_i^2=\frac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i)$$

$$=\frac{1}{2}m_i(\mathbf{v}'_i+\mathbf{v}_c)\cdot(\mathbf{v}'_i+\mathbf{v}_c)$$

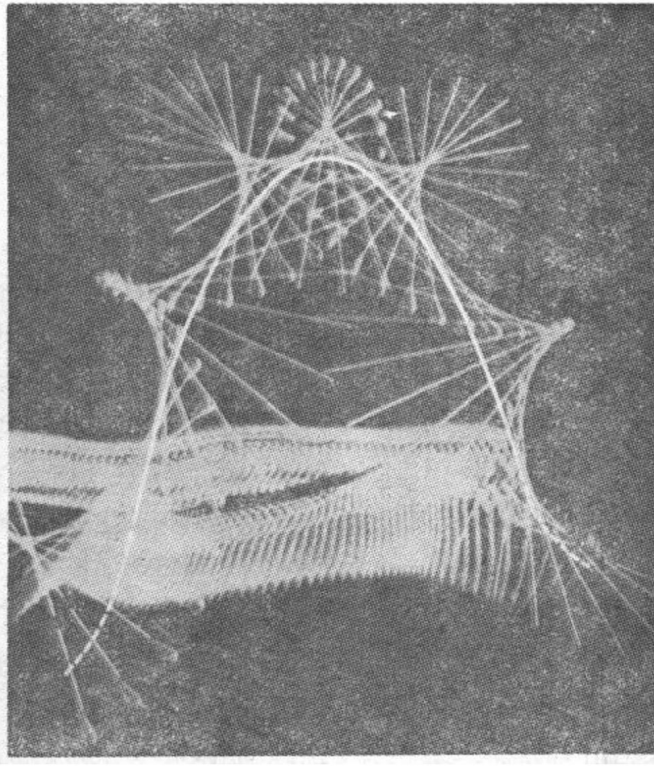


图 14-1　在重力作用下，一复杂物体的质心沿着一条简单的抛物线路径运行．这是一个乐队的鼓手扔鼓棒的照相，两次闪光之间的时间是 1/60 秒．虚线部分表示鼓棒扔出前和重被抓住后质心的轨迹．

$$=\frac{1}{2}m_i(v_i')^2+m_i(\mathbf{v}_i'\cdot\mathbf{v}_c)+\frac{1}{2}m_iv_c^2$$

因之有

$$K_i=K_i'+(m_i\mathbf{v}_i')\cdot\mathbf{v}_c+\frac{1}{2}m_iv_c^2$$

让我们现在来看把体系中所有粒子的这种单粒子的动能加在一起的结果，右方第一项是全部粒子相对于质心的动能 K'．最后一项给出的是总质量为M的一个粒子以质心的速率 v_c 运动的动能．

而中间一项为零，因为按质心的定义有

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = 0$$

从而

$$\left(\sum_i m_i \mathbf{v}'_i\right) \cdot \mathbf{v}_c = 0$$

因此，对任何粒子系，我们都可写

$$K = K' + \frac{1}{2} M v_c^2 \tag{14-3}$$

这类体系的一个很熟知的例子是一容器中的气体．如果这容器是静止在实验室内的，总动量为零(即实验室参照系和质心系重合而 $v_c = 0$)，但内部运动的动能 K' 却很大．假定我们有一摩尔分子气体，温度为 $T°\mathrm{K}$，它含有 N 个分子(N = 阿伏伽德罗常数)，每一个分子的质量是 m_0．内部运动的总动能是

$$K' = \frac{1}{2} m_0 (v_1'^2 + v_2'^2 + \cdots + v_N'^2)$$

引进均方速率 v_m^2，可以把它写为

$$K' = \frac{1}{2} N m_0 v_m^2 = \frac{1}{2} M v_m^2 \tag{14-4}$$

其中 M 是分子量．

然而，根据气体分子运动论[参看例如(9-39)式]，占有体积 V 的气体的压强 P 由下式给出：

$$P = \frac{1}{3} n m_0 v_m^2, \quad n = N/V \tag{14-5}$$

(n = 单位体积中的分子数，而我们已假设在体积 V 中有 N 个分子．)由(14-5)式，有

$$PV = \frac{1}{3} M v_m^2$$

把这式同(14-4)式合并，得

$$K'=\frac{3}{2}PV=\frac{3}{2}RT$$

其中R是普适气体常数①. 我们知道，一摩尔分子的气体在1大气压的压强($=1.013\times10^5$牛顿/米^2)和0°C之下占有的体积为22.4升. 因之，

$$K'=\frac{3}{2}(1.013\times10^5)(2.24\times10^{-2})\approx3.4\times10^3\text{焦耳}$$

这大约等于一发用于野战的16磅炮弹几乎以每小时70英里的速度飞行时的动能！幸亏分子运动是杂乱无章的.

§2 角动量

在第十三章中我们认识到一粒子相对于力心的角动量$\mathbf{l}$是一个重要的动力学量. 你一定记得，$\mathbf{l}$(动量矩)是由下式定义的:

$$\mathbf{l}=\mathbf{r}\times(m\mathbf{v})=\mathbf{r}\times\mathbf{p} \tag{14-6}$$

因而$\mathbf{l}$的实际大小与量度粒子的位置矢量$\mathbf{r}$时所特别选择的原点有关. 如果象我们所考虑的情况那样，有一十分明确的固定力心，那么原点的恰当选择是明显的. 然而，在一般情况下，一单个运动粒子的角动量却不是一个可以唯一地确定的量. 但是，只要有了两个或更多的粒子，或者有一不能近似地看作一质点的单个物体，就可以毫不含混地说到整个体系的**内部**角动量了. 让我们来看看何以如此.

作为讨论的引子，先看一很简单而特殊的情况. 质量为m_1和m_2的两粒子，由一很轻的刚性杆连结在一起，杆在两粒子的质心C处支于枢轴上[见图14-2(a)]. 这体系以角速ω绕着穿过C并垂直于图平面的一根轴转动. 我们将计算这两个粒子绕通过一任

① $R=8.32$焦耳/(摩尔·K)$=0.0821$升·大气压/(摩尔·°K).

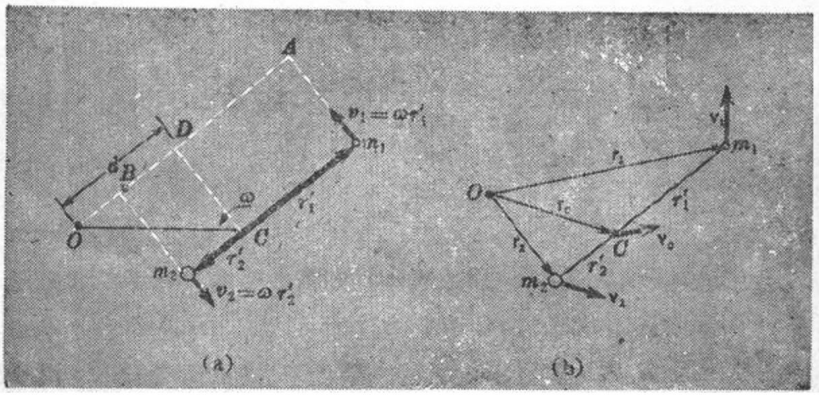


图 14-2　(a)一刚性的两体体系，在绕着质心 C 转动．其角动量可以相对于其质心 C 或相对于一任意点 O 来计算．(b)一任意的两粒子系的各个粒子和质心的运动．

意原点 O 的平行轴转动的总角动量．相对于 O，m_1 的轨道角动量是逆时针的，而 m_2 的角动量则是顺时针的．要计算总角动量的实际大小，可作一直线 OA 平行于连结两质量的直线，速度矢量是垂直于这直线的，并同它交于 A 和 B 两点．一条通过 C 并平行于这些速度矢量的直线交 OA 于 D 点，令 $OD=d$，则两粒子相对于 O 的总角动量由下式给出：

$$L_0=m_1v_1(d+r_1')-m_2v_2(d-r_2')$$
$$=(m_1v_1-m_2v_2)d+(m_1v_1r_1'+m_2v_2r_2')$$

其中 r_1' 和 r_2' 是两粒子到它们的共同质心的距离．第二个括号项是绕通过 C 的轴的总角动量 L_c．第一个括号项为零；这一点根据下述事实立刻得出，即我们认为 C 是静止的，因此是在零动量参照系中（或者，我们可写 $v_1=\omega r_1'$ 和 $v_2=\omega r_2'$ 在此引用了质心的定义．）因之，在这一情形下我们有 $L_O=L_c$——表明体系的转动角动量对平行于通过 C 的实际转轴的任何轴都具有同样值．因 $v_1=\omega r_1'$ 和 $v_2=\omega r_2'$，所以这个总角动量等于

$$L_c=(m_1r_1'^2+m_2r_2'^2)\omega$$

引进两粒子间的距离 r，有

$$r_1'=\frac{m_2}{m_1+m_2}r \qquad r_2'=\frac{m_1}{m_1+m_2}r$$

把这些值代入 L_c 的表达式中，得

$$L_c=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}r^2\omega=\mu r^2\omega \tag{14-7}$$

其中 $\mu[=m_1m_2/(m_1+m_2)]$是这体系的折合质量．(14-7)式是关于一个所谓"刚性转子"的角动量的重要结果，μr^2 这个量是一刚性连结体系的、称为**转动惯量** I 的一个例子．(以后我们还要讨论更复杂的情形．)对于这种体系，令

$$L_c=I\omega$$

比较方便，其中的 I 在目前情形中是

$$I=\mu r^2=m_1r_1'^2+m_2r_2'^2$$

现在让我们来考虑如图 14-2(b) 中所示的更普遍的、各自以任意速度运动的两粒子体系．我们仍以任意一原点 O 为总角动量的参考点，而这一次我们不再假设质心 C 相对于 O 是静止的．反之，我们假设它可以具有某一速度 $\mathbf{v}_c$．我们总是能够令我们的图形如此取向，使原点 O 和从 m_2 到 m_1 的矢量 $\mathbf{r}$ 位于纸面中，不过速度矢量 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ 和 $\mathbf{v}_c$ 则无须限制在这平面上．现在让我们来看分别与 m_1 和 m_2 关联的角动量的矢量和所确定的总角动量．

如果 m_1 和 m_2 相对于 O 的位置矢量是 $\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$，如图所示，则

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{r}_1\times(m_1\mathbf{v}_1)+\mathbf{r}_2\times(m_2\mathbf{v}_2)$$

引进粒子相对于质心的位置和速度：

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_c \qquad \mathbf{r}_2=\mathbf{r}_2'+\mathbf{r}_c$$

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_c \qquad \mathbf{v}_2=\mathbf{v}_2'+\mathbf{v}_c$$

于是

$$\mathbf{L}_0=(\mathbf{r}_1'+\mathbf{r}_c)\times m_1(\mathbf{v}_1'+\mathbf{v}_c)+$$

$$+(\mathbf{r}_2'+\mathbf{r}_c)\times m_2(\mathbf{v}_2'+\mathbf{v}_c) \tag{14-8}$$

它可以重新排列为四项之和如下：

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0=&(\mathbf{r}_1'\times m_1\mathbf{v}_1'+\mathbf{r}_2'\times m_2\mathbf{v}_2')\\&+(m_1\mathbf{r}_1'+m_2\mathbf{r}_2')\times\mathbf{v}_c\\&+\mathbf{r}_c\times(m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2')\\&+\mathbf{r}_c\times(m_1+m_2)\mathbf{v}_c\end{aligned}$$

可是根据质心的定义，上式中的第二和第三项为零，因为我们有

$$m_1\mathbf{r}_1'+m_2\mathbf{r}_2'=0$$

$$m_1\mathbf{v}_1'+m_2\mathbf{v}_2'=0$$

$\mathbf{L}_0$ 的表达式中的第一项是两粒子相对于 C 的角动量之和 $\mathbf{L}_c$，故此有

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{L}_c+\mathbf{r}_c\times M\mathbf{v}_c \tag{14-9}$$

其中

$$\mathbf{L}_c=\mathbf{r}_1'\times(m_1\mathbf{v}_1')+\mathbf{r}_2'\times(m_2\mathbf{v}_2')$$

因之，相对于 O 的总角动量是相对于质心的角动量之和加上与质心本身运动关联的轨道角动量．如果各粒子之间具有刚性联系，因而作为一个整体绕 C 转动，我们可以用(14-7)或(14-8)式给出(14-9)式中 $\mathbf{L}_c$ 的大小的明显表达式．

研究一下上述的分析，可以明白地看出，对于一任意多个粒子的体系，也有同等的结果；因而(14-9)式对普遍的角动量分析提供一强有力的依据．特别要注意的是，如果一任意运动粒子系的质心是静止的，则总角动量对任何参考点有相同的值 $\mathbf{L}_c$．举例说，一个旋转着的自行车轮(图 14-3)的角动量，对通过车架上一点 P 的水平轴和对通过 C 的、它本身的轴，具有相同的值，因为这轮子相对于这两点都没有平动速度．

对任何两粒子体系，不论它是否刚性相连，$\mathbf{L}_c$ 之值都可以便当地用两质量的相对坐标 $\mathbf{r}$ 和它们的相对速度来表示．拿(14-9)

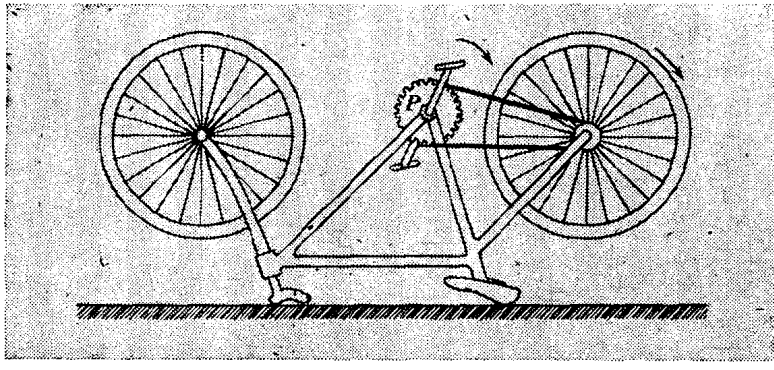


图 14-3　一自行车轮的转动角动量，对脚蹬转盘的轴 P 和对通过 C 的、它本身的轴都具有相同的值.

式 $\mathbf{L}_c$ 的表达式来说，

$$\mathbf{L}_c=\mathbf{r}_1'\times(m_1\mathbf{v}_1')+\mathbf{r}_2'\times(m_2\mathbf{v}_2')$$

我们先用 $\mathbf{r}$ 代替 $\mathbf{r}_1'$ 和 $\mathbf{r}_2'$. 根据定义

$$m_1\mathbf{r}_1'+m_2\mathbf{r}_2'=0$$

$$r_2'-r_1'=\mathbf{r}$$

有

$$\mathbf{r}_1'=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}\qquad \mathbf{r}_2'=\frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}$$

于是 $\mathbf{L}_c$ 可写为

$$\mathbf{L}_c=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(-\mathbf{r}\times\mathbf{v}_1'+\mathbf{r}\times\mathbf{v}_2')$$

即

$$\mathbf{L}_c=\mu\mathbf{r}\times(\mathbf{v}_2'-\mathbf{v}_1')=\mathbf{r}\times(\mu\mathbf{v}_{相对}) \tag{14-10}$$

对于一刚性体系以角速 ω 转动的情形，我们可以进一步写出

$$\mathbf{v}_{相对}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

如果 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直于 $\mathbf{r}$，这关系使(14-10)式还原为 (14-7)式；否则结果

要稍微复杂一些①.

§3 作为一基本量的角动量

前面的讨论确立了这样一点，即两个相联系的质量，看作有质量和大小的单一体系，具有一个可以恰当地描写为绕质心的内禀角动量的量. 不管质心的实际运动怎样，我们都能辨认出体系的这一转动性质. 但是，当在量子力学的进展中人们发现角动量有一等于普朗克常数 h 被 2π 除的自然单位时，角动量就具有了更为基本的面貌:

$$\text{角动量的基本单位}=\frac{h}{2\pi}$$
$$=1.054\times10^{-34}\text{ 千克·米}^2/\text{秒}$$

这自然是一个很微小的单位，但对于原子般大小的体系，它意味着异常高的转动速率. 让我们举例来看，在许多问题中，一个双原子分子，如 N_2，可以看作是我们曾讨论过的刚性体系——相隔距离固定的两质点. 氮分子有两个相同的原子核，每一个的质量约为 2.3×10^{-26} 千克，距离约 1.1 埃 ($=1.1\times10^{-10}$ 米). 它的转动惯量因之是[参看(14-8)式]

$$\begin{aligned}I&=2m(s/2)^2\\&=2(2.3\times10^{-26})(5.5\times10^{-11})^2\text{千克·米}^2\\&\approx1.4\times10^{-46}\text{ 千克·米}^2\end{aligned}$$

如果令

$$I\omega=1.054\times10^{-34}\text{ 千克·米}^2/\text{秒}$$

就得

---

① 实际上应为，$\mathbf{L}_c=\mu\mathbf{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$. 可是，按可应用于任何三重矢量乘积的普遍矢量恒等式: $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$，令 $\mathbf{A}=\mathbf{C}=\mathbf{r}$，$\mathbf{B}=\boldsymbol{\omega}$，得 $\mathbf{L}_c=\mu r^2\boldsymbol{\omega}-\mu\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})$.

$$\omega \approx 7.5 \times 10^{11} \text{秒}^{-1}$$

与此相应的频率(rps——转/秒)将是 $\omega/2\pi$，约为 10^{11} 秒$^{-1}$. 这一数量级的频率对于作为刚性转子的分子来说是具有典型性的，并可以通过微波波谱技术来研究（刚才提到的频率与3毫米的波长相对应).

可能注意到，这些转动频率比起第十章末计算出来的分子振动的典型频率要低得多(相差大约两个数量级). 在实际的分子中，经常存在着振动和转动的复杂混合，后者提供一迭加于前者的精细结构. 在分子光谱学中人们常说到由此产生的"转动——振动谱带".

更具基本性的是，宇宙中的一切基本粒子都显得有一内禀角动量，等于 $h/4\pi$ 的某一整数倍(包括零). 特别地，我们最熟悉的建造元件，核子和电子，内禀角动量正好是 $h/4\pi$. 然而，在这一级水平上，要确言什么东西(如果有的话)在转，还是一个争议未决的问题，人们不妨简单地满足于这样一个事实，即内禀角动量具有这样的重要性质：在这种粒子的一切相互作用和重新组合中它总是守恒的. 角动量的这一普遍守恒性是下一节的主题.

§4 角动量守恒

可以做许多有趣的实验来说明在没有外界的影响时，一个粒子系的总内部角动量是守恒的这一重要性质. 某些定性的演示无疑是你们所熟悉的——例如，一正在旋转着的滑冰者增加其转速，或者当一个体操运动员在开始翻筋斗后弯曲身体成弓状时的情形(图 14-4). 一毫无技巧的人(例如一位教授)也能作出类似的巧技，只要他坐在一张可以自由转动的凳子上，伸直双臂，两手各持一哑铃，让自己慢慢转动起来，然后把哑铃朝里拉[图 14-5(a)].

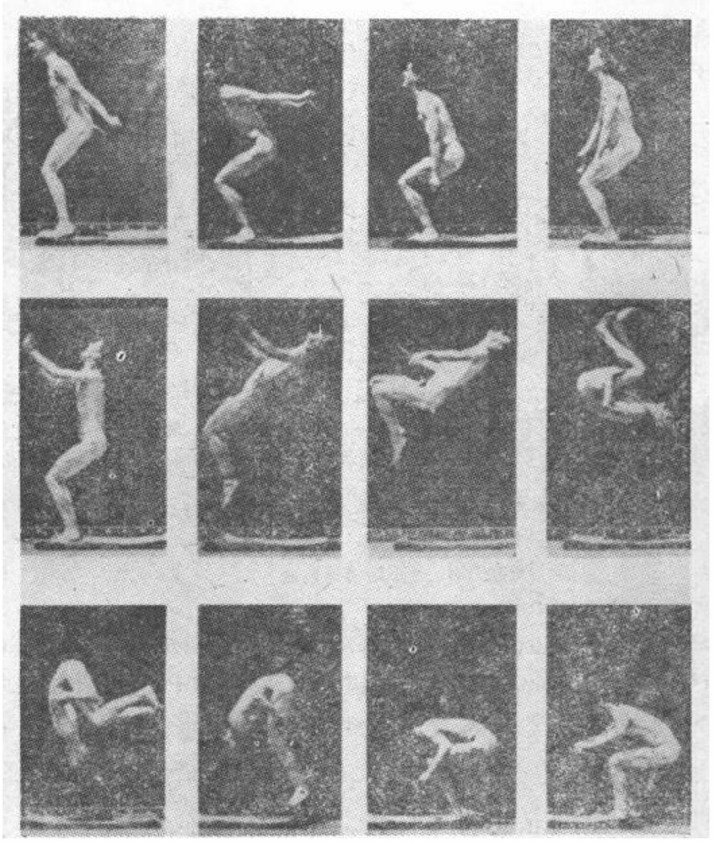


图 14-4　角动量守恒，一系列照片示明一个人在作后空翻的动作.

不论体系的内部如何重排，内部角动量总是守恒的，如果有一个好的飞轮——例如一个边缘上加有铅的自行车轮子——就可以显示出这守恒性的一些特别有趣的后果. 例如，一个人可以坐在一张支有转轴的凳上 [图 14-5(b)]，另一人递给他那已经转起来因而具有角动量 $\mathbf{L}_w$ 的轮子如图(相应于绕着朝上的竖直轴顺时针转). 坐在凳上的人自己并不在转，但整个体系，人＋凳①，有一

① 指持着转动轮子的人——译者注.

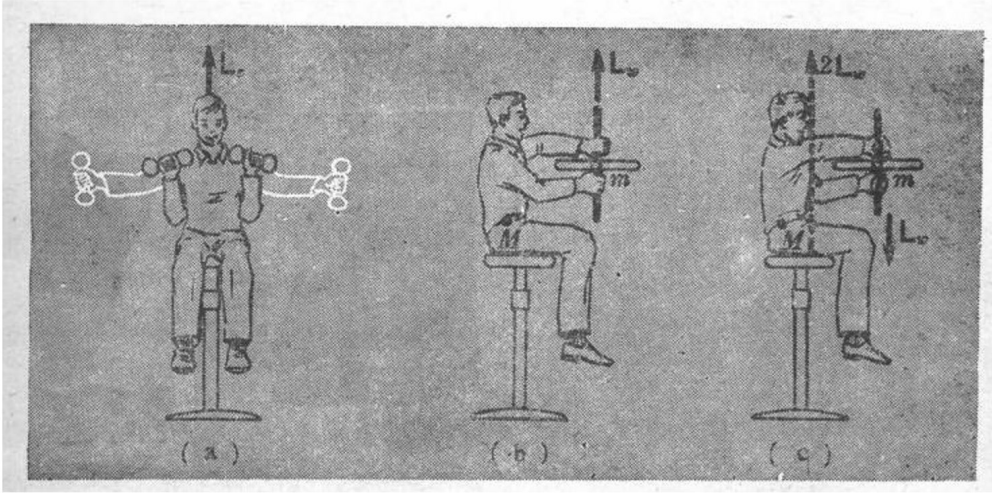


图 14-5　关于角动量守恒的实验：(a) 凳子上的人如果把哑铃朝里拉会转得快起来。(b)和(c)当坐在凳子上的人将旋转着的轮子倒过来时，他开始转动起来。

总的内角动量 $\mathbf{L}_w$. 如果现在把转轮倒过来，它相对于它自身质心的转动角动量将变为 $-\mathbf{L}_w$. 因而这两个质量 M(人的)和 m(轮的)的体系必然要得到一顺时针的转动，总角动量为 $2\mathbf{L}_w$[图 14-5 (c)]. 如果把在这一新的取向中的轮子交给助手，他将轮子倒过来，再交还给坐在转凳上的人，总角动量将增加到 $3\mathbf{L}_w$. 如果凳上的人再把轮子倒过来，则 $M+m$ 的总转动将增至 $5\mathbf{L}_w$. 可见角动量可以在这种动作中象一包包的东西那样传来传去——虽然我们在此已越出在一完全孤立的体系中总角动量守恒的范围.

角动量守恒的正规证明并不难. 按照(14-9)式，总的内部角动量(相对于质心或质心系中的任何其他点)是

$$\mathbf{L}_c = \Sigma \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i) \tag{14-11}$$

我们来看 $\mathbf{L}_c$ 随时间的变化. 求微商，有

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \Sigma \mathbf{v}'_i \times (m_i \mathbf{v}'_i) + \Sigma \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{a}'_i)$$

其中 $\mathbf{a}'_i$ 是第 i 个粒子相对于质心系的加速度. 头一个求和项为零，因为每一个乘积 $\mathbf{v}'_i \times \mathbf{v}'_i$ 都是等于零的. 在第二个求和项中，我们把 $\mathbf{a}'_i$ 写成矢量 $\mathbf{a}_i$ 和 $\mathbf{a}_c$ 之差，$\mathbf{a}_i$ 是第 i 个粒子在一惯性系中量得的真正加速度，而 $\mathbf{a}_c (=d\mathbf{v}_c/dt)$ 是质心的加速度. (认清这样一点是重要的，那就是，即使在一参照系中 $\mathbf{v}_c$ 在某瞬间为零，$\mathbf{a}_c$ 也还可能存在.)于是，我们有

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \Sigma \mathbf{r}'_i \times m_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_c)$$

$$= \Sigma \mathbf{r}'_i \times (m_i \mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i \mathbf{r}'_i) \times \mathbf{a}_c$$

然而，根据质心的定义，第二项中的和为零，第一项是所有作用在各个粒子上的力相对于 C 点的总转矩，因为 $m_i\mathbf{a}_i$ 是作用于任何给定粒子的合力. 这个力可能是一个外力 $\mathbf{F}_i$ 和一组内力 $\mathbf{f}_{ik}$ 之和；因而可写

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \sum_k \mathbf{f}_{ik}$$

把 $m_i\mathbf{a}_i$ 的这一表述代入 $d\mathbf{L}_c/dt$ 的方程，有

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \Sigma \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_k \mathbf{r}'_i \times \mathbf{f}_{ik}$$

可是，如我们早先对一粒子系的总线动量的讨论那样，我们可以把涉及内力的双重求和排成成对的项，在现下的情况中就是

$$\mathbf{r}'_i \times \mathbf{f}_{ik} + \mathbf{r}'_k \times \mathbf{f}_{ki}$$

但是，如果我们能够假设任何两粒子之间的相互作用是等值反向并沿两者的连线的力[图 14-6(a)]，则这样的每一对转矩之和都为零，因为每一个力相对于 C 的力臂 CD 都是相同的. 这样我们就得到一个很简单的方程：

$$\frac{d\mathbf{L}_c}{dt} = \Sigma \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \Sigma \mathbf{M}'_i \tag{14-12}$$

其中 $\mathbf{M}'_i$ 是 $\mathbf{F}_i$ 相对于质心系所施加的转矩. 方程(14-12)是转动

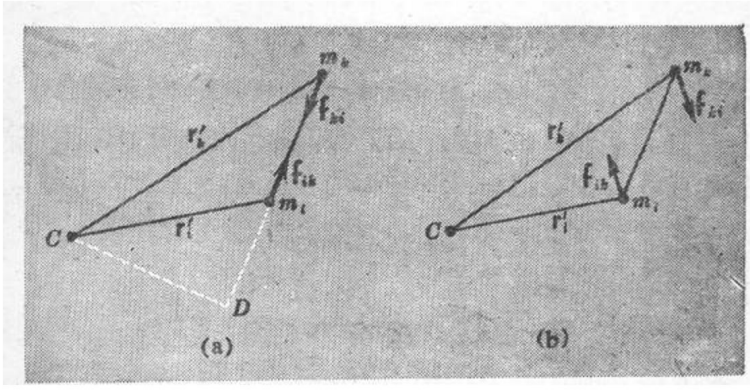


图 14-6 (a)两粒子间的等值反向的内力，如果是在它们连线的方向，不能产生相对于质心 C 的转矩．(b)如果这些力不是在粒子连线的方向，它们会产生一转矩，但却将被其他的内力所抵消(见正文)．

动力学的一个很基本的方程；我们用话把它表达出来为：

无论一个粒子系的质心由于施加在这体系上的总的外力的作用而具有什么样的加速度，相对于质心的内角动量随时间的变化率等于外力相对于质心的总转矩．

因此，在对于质心的总转矩为零的特殊情况中，则不管体系的内部如何调整，内角动量总是保持不变．

[在我们对方程(14-12)的推导中有一薄弱环节．这就是我们据以得出内部相互作用的总转据为零的论证，完全可以设想 $\mathbf{f}_{ik}$ 和 $\mathbf{f}_{ki}$ 这两个力大小相等、方向相反，因而符合牛顿第三定律，但并不在同一线上作用 [见图 14-6(b)]．在这情形下，它们将构成一力偶，相对于 C 或任何其他点有一转矩．然而，内力的总转矩为零，因而在无外力时总角动量守恒是一个普遍成立的结果；它并不有赖于那限制性的假设：各对粒子之间的相互作用是沿着它们间的连线的．支持这一命题的一个强有力的理论论证——实际上一点也不需要数学——可以根据空间的均匀性和各向同性作出．说明如下．

首先考虑一个粒子系的总线动量守恒. 如果体系的总势能 U 不受线性位移影响, 那么这守恒是成立的, 因为 $\mathbf{grad}\,U$ 为零相应于没有任何合力, 如果我们知道没有外力, 那么 U 在线性位移下的不变性多少带有公理性; 它相应于我们认为沿一条直线上的绝对位置在物理学中没有什么意义. 以与此完全类似的方式, 我们可以论证, 与一个粒子系的内力相关联的总势能 U 完全不受这体系整体地转动一任意角 θ 的影响. 正如我们可以从一个势能函数通过

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}$$

这类关系算出力, 我们也可以通过

$$M_z=-\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{14-13}$$

这类关系来计算转矩, 其中 M_z 是相对于 z 轴的转矩, θ 就是绕 z 轴转的. 因之, 如果 U 不依赖于 θ, 那就没有合转矩, 而不管内部相互作用的细致特点如何. 因此, 我们可以断言, 任何孤立系的总内角动量守恒一定是普遍成立的.]

§5 广延物体的转动惯量

对于一任意粒子系, 内禀转动角动量的定义是

$$\mathbf{L}_c=\Sigma\mathbf{r}_i\times(m_i\mathbf{v}_i) \tag{14-14}$$

这不过是(14-11)式的重述, 只是现在我们把原点选在质心处并用不带撇的符号 $\mathbf{r}_i$ 和 $\mathbf{v}_i$ 来表示各粒子相对于质心的位置矢量和速度. 我们现在来详细地考虑把(14-14)式应用于一个以角速 $\boldsymbol{\omega}$ 整体地转动着的体系, 特别地, 我们将注目于这样一个物体, 它具有明确的几何对称性并绕着一根通过质心的对称轴在转. 对这样一个物体中的每一粒子, 其线速度 $\mathbf{v}_i$ 由 $\mathbf{v}_i=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i$ 给出, 因而总角

动量为

$$\mathbf{L}_c=\Sigma\mathbf{r}_i\times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)\quad , \tag{14-15}$$

让我们来看一对粒子 i 和 j 对 $\mathbf{L}_c$ 的贡献，它们的质量相等(因对称性)并位于相对于转轴的对称位置如图 14-7(a)所示. i 粒子具有速度 $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i$，朝着图中平面的下面；这速度的大小 v_i 由下式给出：

$$v_i=\omega r_i\sin\theta_i=\omega R_i$$

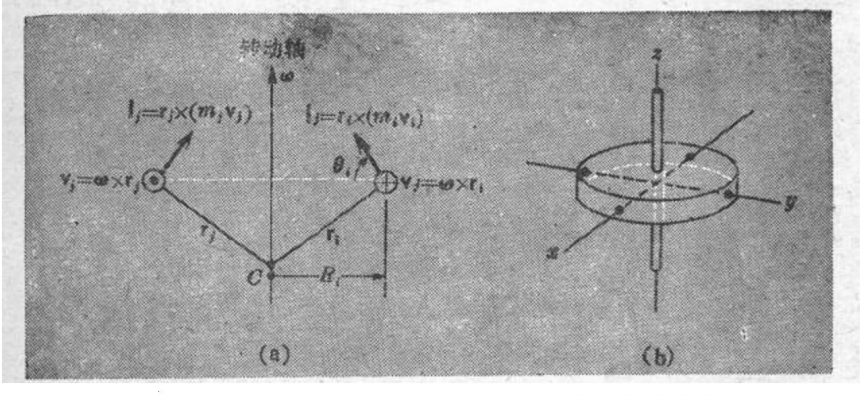


图 14-7　(a)两个处于对称位置的粒子对一刚性物体的总转动角动量的贡献. (b)一个具有明显对称性的物体的主自旋轴和另外两个惯量主轴.

其中 R_i 是粒子到转轴的垂直距离. 这粒子的角动量因之是在图中所表示的方向上的一个矢量 $\mathbf{l}_i$. 它的大小是 $|\mathbf{r}_i\times(m_i\mathbf{v}_i)|$，但由于 $\mathbf{v}_i$ 垂直于 $\mathbf{r}_i$ 本身，我们简单地有

$$l_i=m_i\omega R_i r_i$$

现在如果我们考虑 j 粒子的角动量 $\mathbf{l}_j$，我们看出它具有与 $\mathbf{l}_i$ 相同的大小，但指向这样一个不同的方向，使 $\mathbf{l}_i$ 和 $\mathbf{l}_j$ 垂直于转轴的分量相抵消，而它们平行于轴的分量相加起来. 因而，当我们考虑对整个体系求出(14-15)式所表示的和时，我们只须取每个粒子的角动量平行于 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量. 对粒子 i 来说，相关的贡献是 $l_i\sin\theta_i$，而

有

$$l_i \sin\theta_i = m_i \omega R_i r_i \sin\theta_i = m R_i^2 \omega$$

这很清楚，总角动量因之是一个方向与 ω 相同的矢量，从而我们可写

$$\mathbf{L}_c = (\Sigma m_i R_i^2)\,\boldsymbol{\omega} = I\boldsymbol{\omega} \tag{14-16}$$

其中

$$I = \Sigma m_i R_i^2 \tag{14-17}$$

(14-17)式是整个体系绕一给定的对称轴的转动惯量的定义.

如果我们考虑的是一个具有明显对称性的物体，如图14-7(b)中的飞轮，很清楚，那明显的轴——正常的转轴——并非它所具有的唯一对称轴. 如果把这正常转轴取作 z，则任何其他垂直于 z 并通过质心的轴，对于上面我们所介绍的那种分析来说，也是一根对称轴(虽然不具有完全的**转动**对称性). 由此我们认识到，除 I_z 以外，还有可能定义另外两个转动惯量，I_x 和 I_y，它们分别相应于一对独立的轴，它们都垂直于 z 并互相垂直. (I_x, I_y, I_z)这三个量称为物体的**主转动惯量**. 在图中所示的情形下，我们自然有 $I_x = I_y (\neq I_z)$.

重要的是认识到，只有当由 ω 的方向规定的转动轴与对应于主转动惯量的一个轴重合时，转动角动量矢量 $\mathbf{L}_c$ 才同 ω 本身平行，而可以简单地表示为 $I\omega$. 不过，我们所要考虑的大多数情况都是这种情形. [一个值得注意的事实是，对于任何物体，即使它不具有对称性，我们也仍然能够找到一组三个正交的转轴，使 $\mathbf{L}$ 和 ω 平行①. 这些轴的存在使我们能够对形状完全任意的物体识别

① 关于这一断言的证明，可参看，例如，K. R. Symon, *Mechanics*, 2 nd ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.

出三个主转动惯量.]

对于一个由如此众多的粒子组成因而实质上是连续的物体，我们可以把它绕一给定对称轴的转动惯量写成积分以代替求和:

$$I=\int r^2 dm \tag{14-18}$$

其中 dm 是位于离开通过质心的轴垂直距离为 r 之处的质量元.

特殊情形

1. 均匀环. (转轴垂直于环的平面.)如果环的质量为M，半径为R[图 14-8(a)]，我们简单地有

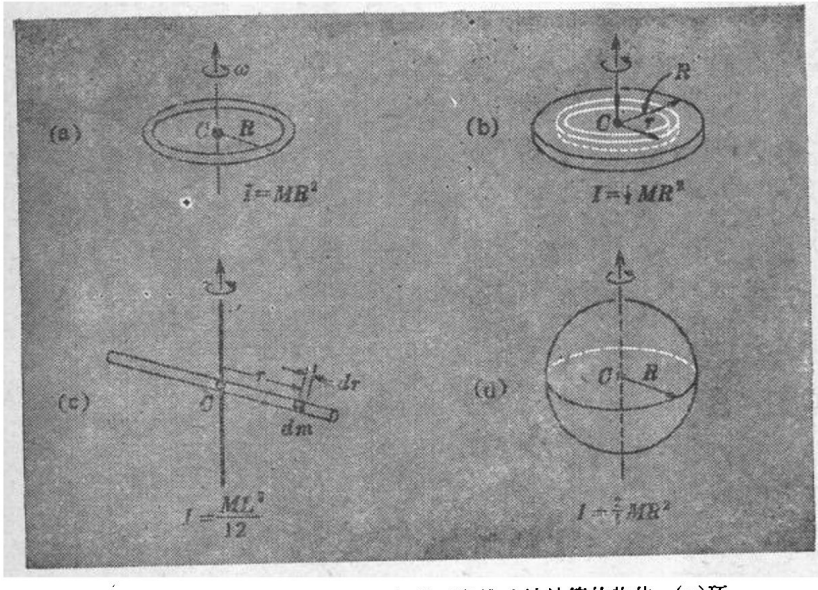


图 14-8 几何形状简单、转动惯量可以准确地计算的物体：(a)环，(b)盘，(c)杆或棒，以及(d)实心球.

(环) $I=MR^2$ (14-19)

2. 均匀圆盘. 这可以看成一些同心环的集合，如图 14-8(b). 单独的一个环是由位于 r 和 $r+dr$ 之间的物质构成的，因之它的

面积是 $2\pi r dr$，而整个盘的面积是 πR^2．故此，环的质量是

$$dm=\frac{2\pi r dr}{\pi R^2}M=\frac{2M}{R^2}r dr$$

把它代入(14-18)式中，有

$$\text{（圆盘）}\qquad I=\frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr=\frac{MR^2}{2} \tag{14-20}$$

这结果同样适用于可以看成是许多圆盘堆起来的长圆柱体．(转轴是圆柱体的轴．)

3. 均匀杆．(转轴通过杆的中心并和杆长垂直．)杆的长度为 L，因之径向距离 r 在两边都是从 0 到 $L/2$．如果杆是均匀的，我们有

$$dm=\frac{M}{L}dr$$

我们计算出从 $r=0$ 到 $r=L/2$ 的积分值 $\int r^2 dm$，并加倍以计及两端：

$$\text{（均匀杆或棒）}\qquad I=\frac{2M}{L}\int_0^{L/2} r^2 dr=\frac{ML^2}{12} \tag{14-21}$$

完全与此相同的结果也适用于长为 L 的一块平板绕穿过它的质心、位于板面内并垂直于长度 L 方向的轴的转动惯量．

4. 球．[任何通过中心的轴．参看图 14-8(d)．]

我们将不加证明地引用其结果．(差不多任何一本微积分教科书都有这结果的推导．)

$$\text{（球）}\qquad I=\frac{2}{5}MR^2 \tag{14-22}$$

也许要注意的是，在每一情形中，转动惯量都等于物体的质量乘上一特征线量的平方再乘上一个与 1 相差不很大的数值系数．在估计一个物体的转动惯量时，即使不作详细计算，也不致于发生

很大的差错．人们经常把转动惯量简写为总质量乘一长度 k 的平方，k 称为绕有关轴的**回转半径**：

$$I=Mk^2 \tag{14-23}$$

因之，对上面考虑过的各特殊情形，回转半径之值如下：

物体	回转半径(k)
环	R
圆盘	$R/\sqrt{2}\,(=0.707R)$
杆(长L)	$L/2\sqrt{3}\,(=0.289L)$
球	$R\sqrt{2/5}\,(=0.632R)$

§6 有关转动惯量的两个定理

借助于我们现在将要介绍的两个定理，常常可以使转动惯量的计算简化．第一个定理可应用于任何种类的物体；第二个定理则只能应用于在一定的近似程度下可以当作平的、厚度可略而不计的物体来处理的物体．

1．平行轴定理

当我们说到一个物体的“转动惯量”一词时，通常都是指绕通过它的质心的一根对称轴而言的．然而，在许多情形中，实际的物理上的转轴并不通过质心．在这类情形中我们可以利用一个定理，它把绕指定的轴的转动惯量直接同绕通过质心的一平行轴的转动惯量联系起来．

图 14-9(a) 说明这情况，假定所给定的轴垂直于纸面并通过 O 点．设想一通过 C 的平行轴，并把物体看作是由许多平行于纸面的薄片堆成的．从通过 O 的轴到通过 C 的轴的矢量 $\mathbf{h}$ 是一个常量．在任何一薄片内，我们可以考虑位于图中 P 点的质量元如 dm，它离 O 的矢量距离为 $\mathbf{r}$，离 C 的距离为 $\mathbf{r}'$．我们有

$$\mathbf{r}=\mathbf{h}+\mathbf{r}'$$

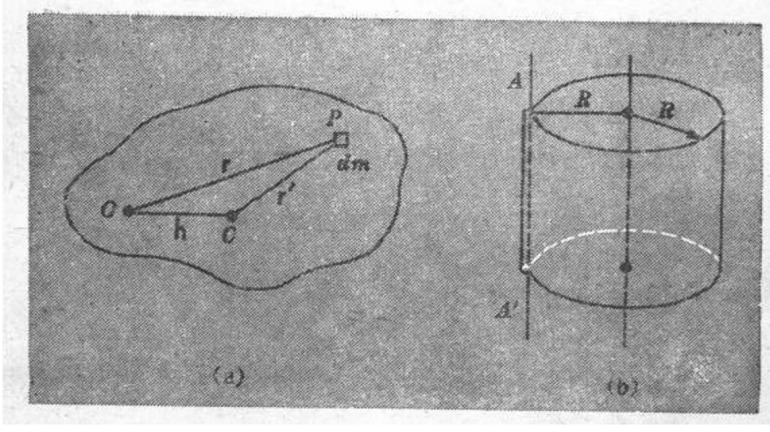


图 14-9 (a)示明平行轴定理的基础的图. (b) 利用平行轴定理使诸如求柱体绕铰链 AA' 的转动惯量的计算变得容易.

于是, dm 对绕通过 O 的轴的转动惯量的贡献 dI_0 是

$$dI_0 = r^2 dm = (\mathbf{h}+\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{h}+\mathbf{r}')dm$$
$$= h^2 dm + 2\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}'dm + r^2 dm$$

但右方最后一项正好是 dm 对绕通过 C 的平行轴的转动惯量的贡献. 因之我们有

$$dI_0 = h^2 dm + 2\mathbf{h}\cdot\mathbf{r}'dm + dI_c$$

我们现在可以对所有这种贡献求和或求积分, 先在一薄片内, 然后对构成整个物体的所有薄片进行. 其结果是

$$I_0 = h^2\int dm + 2\mathbf{h}\cdot\int \mathbf{r}'dm + I_c$$

根据质心的定义, 右方中间一项为零. 第一项简单地等于物体的总质量 M 乘上 h^2. 这样, 我们最终得到下列结果:

(平行轴定理) $I_0 = I_c + Mh^2$ (14-24a)

如果我们按(14-23)式把 I_c 用质量 M 和回转半径来表示, 我们可以把(14-24a)式写成另一形式:

(平行轴定理) $I_0 = M(k^2+h^2)$ (14-24b)

从(14-24a)和(14-24b)两式看出，一物体绕一任意轴的转动惯量总是大于它绕通过质心的平行轴的转动惯量.

〔例〕 一质量为M、半径为R的圆柱体，用铰链连着轴AA'，这轴位于柱的面上走向与柱轴平行，如图14-9(b)中所示. 问绕AA'的转动惯量是什么?

按(14-20)式，我们知道这一情形下的I_c是$MR^2/2$. 因之，由(14-24a)，和$h=R$，我们得

$$I_{AA'}=\frac{1}{2}MR^2+MR^2=\frac{3}{2}MR^2$$

2. 垂直轴定理

假定现在有从一薄片材料切割下来的一块任意形状的扁平物体[图14-10(a)]. 我们在这物体的平面上任取一原点O和一根垂直于平面的z轴，现在来看物体绕这z轴的转动惯量，离这轴距离为r处的一质量元dm所作的贡献为r^2dm，而有

$$I_z=\int r^2dm$$

但是，由于r位于xy平面中，我们有

$$r^2=x^2+y^2$$

因而可写

$$I_z=\int x^2dm+\int y^2dm$$

然而，由于物体是扁平的，右方第一项简单地就是物体绕y轴的转动惯量I_y，而第二项相应地是I_x. 因之有

(扁平物体) $$I_z=I_x+I_y \tag{14-25}$$

这称为垂直轴定理. 它的用处可以用两个不同类的例子来说明.

〔例1〕 有一物体，形状为一均匀矩形板[图14-10(b)]. 它绕通过它的中心并垂直于其平面的轴的转动惯量是什么?

根据(14-21)式，我们有

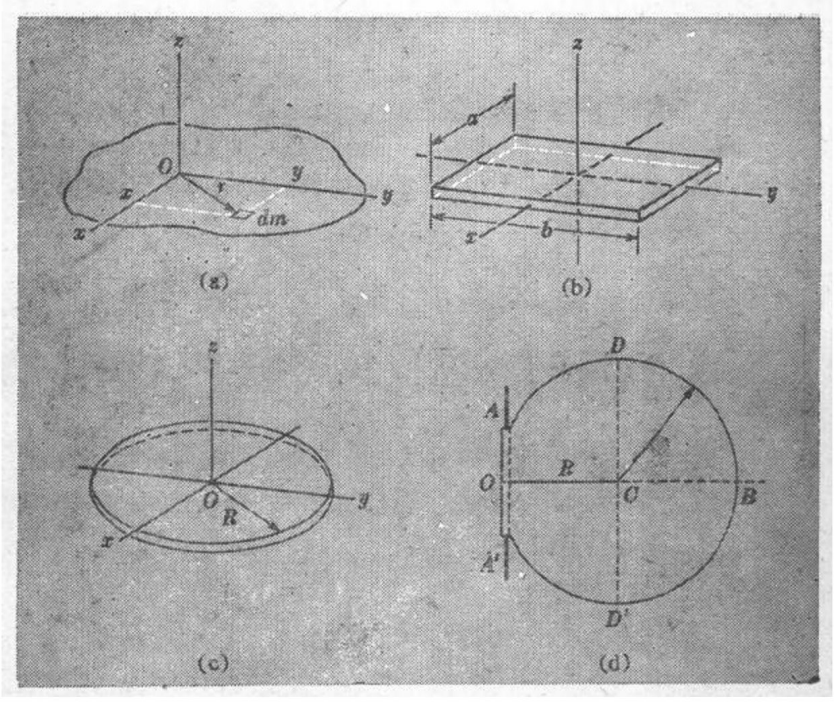


图 14-10 (a)说明垂直轴定理的基础的图. (b)和(c) 可以有效地应用垂直轴定理的扁平物体. (d) 同时利用平行轴和垂直轴两定理于计算一圆形盖绕轴 AA' 的转动惯量.

$$I_x=\frac{Mb^2}{12} \qquad I_y=\frac{Ma^2}{12}$$

随之立刻得

$$I_z=\frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

〔**例 2**〕 一均匀圆盘, 质量为 M, 半径为 R. 问以它的一个直径为轴[例如图 14-10(c)中的 x 轴]的转动惯量是什么?

这例子说明垂直轴定理的更为精辟的应用, 直接计算一个圆盘绕其直径的转动惯量是相当棘手的. 但我们知道绕任何一直径的转动惯量都相同, 由 (14-20) 式我们还知道绕通过圆心并垂直

于盘的轴的转动惯量 I_z. 因而我们立刻可写出

$$I_x+I_y=2I_x=I_z=\frac{MR^2}{2}$$

所以

$$I_x=\frac{MR^2}{4}$$

最后，在图 14-10(d)中，我们示明一种情形，对它可以同时利用上述两定理. 一圆盘(例如一圆柱形桶的盖)可以绕支轴 AA' 转，AA' 位于盘的平面中，同盘的边缘相切. 问盘绕 AA' 的转动惯量是什么?

从 (14-20) 式所给的、绕通过 C 并垂直于盘的轴的转动惯量 $MR^2/2$ 出发，我们先用垂直轴定理推出绕 DD' 轴的转动惯量为 $MR^2/4$. 然后，我们可以用平行轴定理，(14-24a)和(14-24b)，推算出绕 AA' 的转动惯量

$$I_{AA'}=\frac{MR^2}{4}+MR^2=\frac{5MR^2}{4}$$

这结果的本身并不值得去记忆它；重要的是认识到，这两定理提供给我们一种强有力的方法，把若干基本结果，例如(14-19)到(14-22)诸式所代表的结果，加以延伸，用来处理各式各样的较复杂的情况.

§7 转动物体的动能

一个转动着的体系，由于它绕其质心的转动，自然具有动能. 根据普遍有效的(14-3)式，这动能可以分开地算出来，加到与质心本身的运动相关联的任何动能上去. 当一"刚性"物体以角速 ω 绕一根轴转动时，它的一个质量为 m、离轴的距离为 r 的粒子的速率是 ωr，因而具有动能 $\frac{1}{2}m\omega^2r^2$. 因之，总的转动动能是

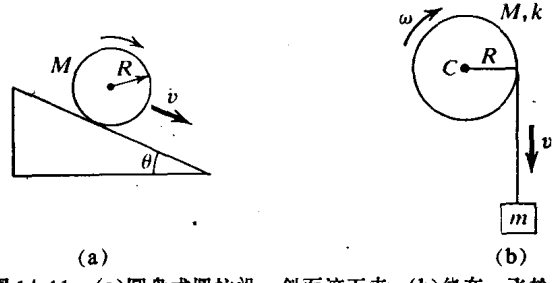
$$K_{转}=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma mr^2=\frac{1}{2}I\omega^2 \tag{14-26}$$

因此，如果质心相对于实验室的速率为 v_c，则在实验室中测出的总动能为

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}Mv_c^2 \tag{14-27}$$

对于在地上滚动的物体，v_c 和 ω 之间有一纯几何的关系(例如，对于半径为 R 的轮子，$v_c=\omega R$)．在这类情形中，动能可以只用 ω (或 v_c)来表示．

对于一个圆形的刚体在一斜面上滚下来的情形，我们可以应用能量守恒来计算它的加速度．例如，一实心的圆柱沿一倾角为 θ 的斜面滚下来[图 14-11(a)]，它在任何瞬时的总动能，由(14-27)式，令 $I=\frac{1}{2}MR^2$ 和 $\omega=v_c/R$，得出为



(a)　　(b)

图 14-11　(a)圆盘或圆柱沿一斜面滚下来．(b)绕在一飞轮上的绳子的末端所悬挂的质量的降落．

$$K=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v_c^2}{R^2}+\frac{1}{2}Mv_c^2$$

$$=\frac{3}{4}Mv_c^2$$

让我们在这里取掉 v_c 的下标 c 而让符号 v 表示我们可以恰当地称之为滚动物体的**平动速率**．于是，在一短时间 dt 内，总动能的变化为

$$dK=\frac{3}{2}Mvdv$$

可是，与此同时，有一相应的重力势能的变化．在时间 dt 内，圆柱的质心平行于斜面走了一距离 vdt，这意竖直方向的坐标有一(负的)改变，等于 $-vdt\sin\theta$．因而

$$dU=-Mgvdt\sin\theta$$

今

$$dK+dU=0$$

故有

$$\frac{2}{3}Mvdv-Mgvdt\sin\theta=0$$

而

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

有趣的是这结果与圆柱的质量和半径都无关；唯有它是一个实心的柱体这一点是重要的．所有实心球体在沿这种斜面滚下时都有某一与此不同的特征加速度．(是什么?)

可注意的是，为了产生转动动能，一滚动物体的线加速度总是比同一物体在同一斜面上无摩擦地简单滑下来时所当有的加速度要小．在效果上，转动惯性对运动起着一种制动的作用．这一惯性性质可以在稍为不同的情况[例如图 14-11(b) 所表示的情况]中加以利用．装在一根通过 C 的固定轴上的飞轮上绕着一条绳索，索的下端悬挂着一质量，在重力作用下降落．飞轮具有转动惯量 $I(=Mk^2)$，半径为 R，飞轮的角速度 ω 等于 m 的线速度 v 被 R 除．因之，整个体系的动能是

$$K=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}M\frac{k^2}{R^2}v^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(m+M\frac{k^2}{R^2}\right)v^2$$

但在下降一距离 h 后，m 的势能的变化简单地是 mgh. 因此，m 从静止降落一距离 h 后获得的速率 v 由下式给出：

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{Mk^2}{mR^2}\right)v^2=mgh$$

或

$$v^2=2\frac{g}{1+(Mk^2/mR^2)}h=2g'h$$

因此，加速度 g' 可以减小到 g 的一个任何所要求的分数，从而产生一缓和的、受控制的下降.

转动动能的另一个方面是，一个大的转动物体是一个贮能器，可能具有很大的容量. 在这一意义下，用飞轮作为贮能器是许多种机器的一个重要特点，这使机器对突然的负荷变动具有良好得多的稳动性，在麻省理工学院（M. I. T.）的国家磁铁实验室中有一个使人印象深刻的利用飞轮作为贮能器的例子. 有两个飞轮，各由圆形钢板组装而成，直径 190 英寸，质量为 85 吨，它们是用于产生极强的磁场的系统的一部分. 每一飞轮的正常转速是 390 转/分(rpm). 根据这些数字，对每一飞轮有

$$M=7.7\times10^4 \text{ 千克} \qquad R=2.4 \text{ 米}$$

$$I=\frac{1}{2}MR^2\approx2\times10^5 \text{ 千克·米}^2$$

$$\omega=2\pi\times390/60\approx40 \text{ 弧度/秒}$$

因此

$$K=\frac{1}{2}I\omega^2\approx1.6\times10^8 \text{ 焦耳}$$

当这两飞轮之一被当作能源时，它的转速可以在5秒钟内从390降到360转/分，这意味大约有40%的贮能可以取用，大约每秒8%．与此相应的输出功率接近15兆瓦——在它持续的时间内，足够一个大约有20,000居民的城镇的电能消耗率．

§8 角动量守恒和动能

对于一个改变其形状和大小的体系，角动量守恒对它的总动能有一些有趣的影响．举一个最可能简单的例子，考虑两质量绕着它们的质心转这样一个体系[图14-12(a)]．我们将假设在我们的参照系中这质心是不动的，但在没有外力时，它无需用一固定支点或仍任这类东西来定位．

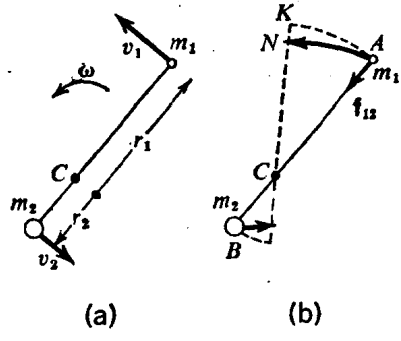


图14-12 (a)一对物体在固定距离绕着它们的质心转．(b)由于两物体间径向距离的变动而伴随着的转动位移．

假定这体系以角速ω绕一根垂直于图平面的轴转动着，则当两质量到C的距离分别为r_1和r_2时($m_1r_1=m_2r_2$)，我们有

$$v_1=\omega r_1 \qquad v_2=\omega r_2$$

于是我们可以立即着手写出总角动量和总动能的表达式：

$$L_c=(m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega$$

$$K=\frac{1}{2}(m_1r_1^2+m_2r_2^2)\omega^2$$

如果引进折合质量 $\mu[=m_1m_2/(m_1+m_2)]$、相对距离 $r(=r_1+r_2)$ 和转动惯量 $I(=\mu r^2)$，可使简化为

$$L_c=\mu r^2\omega=I\omega(=常数)$$

$$K=\frac{1}{2}\mu r^2\omega^2=\frac{1}{2}I\omega^2$$

合并这两式，我们得到以下的结果：

$$K=\frac{L_c^2}{2\mu r^2}=\frac{L_c^2}{2I} \tag{14-28}$$

现在来看，如果两粒子由于某种相互作用——例如连结它们的弹簧或弹力带的拉力——而彼此靠近，将会出现什么情况．L_c 之值保持不变，但 r 和转动惯量 I 减小；因而 ω 和 K 之值一定增大．这额外的能量从何而来呢？显然，它一定是由那些把这两个质量拉向一起的内力所作的功提供的．我们可以很直接地感受到这一点，只要我们做这样一个实验：坐在一转凳上，伸直两臂，双手握重物，然后把重物朝里拉向转轴[参看图 14-5(a)]，一个很简单的、从转动参照系本身的观点来解释这一效果的方法是看 r 有一小的改变时相关联的 K 的小改变．由(14-28)式我们有

$$\Delta K=-\frac{L_c^2}{\mu r^3}\Delta r$$

把 $L_c=\mu r^2\omega$ 代入，这式成为

$$\Delta K=-\mu\omega^2 r\Delta r$$

但 $\mu\omega^2 r$（从转动参照系的观点）是要使两质量飞离的离心力的大小．必须提供一与此等值反向的力来使两质量的距离保持为 r 不变，同时需要一定量的功把两质量拉向一起，这功等于这力乘上位移的大小 Δr．（注意，在我们所假设的情形中，Δr 是负的，因而 ΔK 是正的．）

当然，从不动的观察者来看，动能的改变可以用这样的事实来理解：如果 r 改变[图 14-12(b)]，则径向相互作用力 $\mathbf{f}_{12}$ 和 $\mathbf{f}_{21}$ 沿

质量的位移路径有分量，因而作了功，而如果两质量留在圆弧[例如图 14-12(b) 中的 AK]上运动，使径向力总是垂直于位移和速度，就不会有这种事情了.

一个收缩着的体系的转动动能的增加一定来自内部相互作用这一事实，限制了在一特定情形下这种收缩能够发生的可能性，如果所要求的动能增加大于内力所能供给的功，这种收缩就不会发生. 特别使人感兴趣的这类情况出现于缓慢地转动着的星系或恒星由于引力而产生的收缩和凝聚. 任何粒子系的相互引力能 U 总是负的，并且随着体系的线度收缩因而其中的粒子愈益靠近而更加负得多. (记得，对双粒子系，$U=-Gm_1m_2/r$.)因之，至少在定性方面，我们认识到需要一额外动能的源. 然而，更有甚者，因为对于体系的半径的一给定改变 ΔR，相应的改变 ΔK 和 ΔU 的大小，并不自动地就相等. 它们之间的关系依赖于 L_c 的大小，以及体系中物质的确切分布，如果 ΔK 大于 ΔU，则将要求总能量增加，而这是不可能发生的. 但如果 ΔK 小于 ΔU，那释放出来的引力能就会有剩余的，可用来加剧粒子的无规运动(加热)和向太空中辐射热和光.

借助于某些极度简化的假设，可以进行定量的讨论. 特别地，假定收缩以这样的方式出现：体系只在线度大小上有所改变，而不改变其密度或速度的相对分布. 这意味，如果线度缩小一因数 n，在离中心的距离为 r/n 处的密度将是原来在距离 r 处的密度的 n^3 倍. 于是，转动惯量 I 便简单地正比于体系的任一特征线度的平方——例如它的外半径 R 的平方，如果它可以看作是一个具有可辨认的边界的球状物的话. 因之，动能 $K(=L^2/2I)$ 按 $1/R^2$ 变化. 所假定的均匀收缩还使每一对粒子间的势能($\sim 1/r$)增加 n 倍. 从而使总的(负)势能 U 按 $1/R$ 变化，因此，在这些假设下，体系的总能量由下式给出：

$$E(R)=\frac{A}{R^2}-\frac{B}{R} \tag{14-29}$$

常数A的量纲以及也许其数量级都由$L^2/2M$确定，其中M是总质量．类似地，B正比于GM^2，其中G是万有引力常数．（一球状物体的引力自能的量级是$-GM^2/R$——见习题 11-31.）

这两部分对E的贡献及其和数在图 14-13 中用R的函数关系

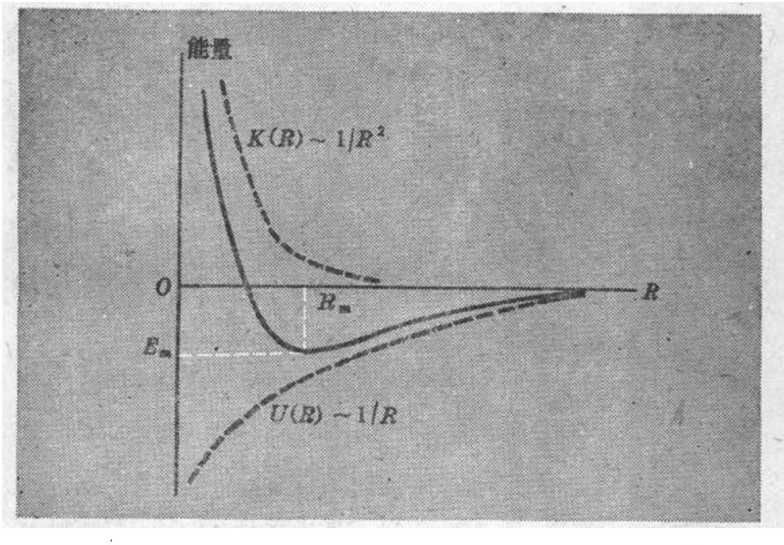


图 14-13　一个由引力吸引而聚合在一起的转动体系，它的动能、势能和总能量对半径的依赖关系．

图表示出来．整个情况使我们回想起在第十章和第十一章中讨论过的能量图，显然，我们可以算出与最小能量值的平衡位形相对应的半径R_m：

$$\frac{dU}{dR}=-\frac{2A}{R^3}+\frac{B}{R^2}$$

$$R_m=\frac{2A}{B}$$

如果令$A\approx L^2/2M$，$B\approx GM^2$，则

$$R_m \approx \frac{L^2}{GM^3} \tag{14-30}$$

它可能指明与此类似的星系的线度如何依赖于其质量和总角动量.

图 14-14 指明一团收缩着的旋转质量的较为可能的趋向. 由

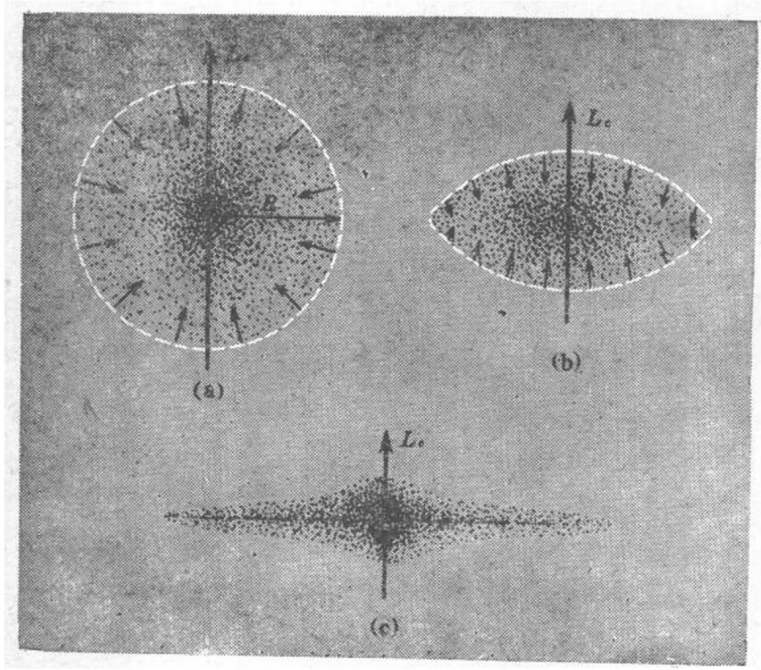


图 14-14 一旋转着的气体云收缩而成一盘状星系的相继级段.

于平行于 $\mathbf{L}_c$ 的方向的收缩可以在没有任何转动动能增加的情况下发生,所以这种形变在沿径向朝内、向着转动轴的收缩达到一限度之后还能继续下去是很合理的. 根据这个道理, 人们一定能理解图 14-14 的(a)、(b)和(c)各阶段的进程, 这进程很可能导致那种实际所观察到的星系结构(图 14-15).

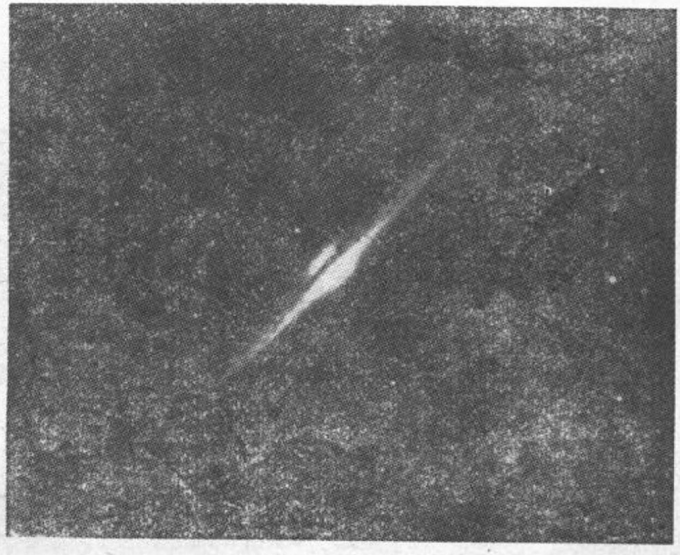


图 14-15　从几乎是对着棱边看去的一旋转星系的例子(后发座的 NGC4565).

§9　扭转振动和刚性摆

由一根线、纤维或其他对扭转有反响而提供转矩的装置下面悬一质量所构成的物理体系[图 14-16(a)]是最有用并广为应用的仪器之一. 这回复转矩来自悬体的弹性形变，并象第七章中在有关线性谐振子问题里讨论过的线性形变那样，这种角形变通常产生一正比于形变的回复效应.

这类扭转装置常用于静态测量——例如安培计，在其中通过的稳定电流(利用一永久磁铁)产生一稳定转矩,引起一稳定偏转,指明电流在表上的读数. 但这种体系的自由扭转振荡也是值得注意和重要的，用转动体系的总能量不变来分析这一振荡运动十分方便.

我们将假定所悬质量对扭丝所规定的轴有一转动惯量 I. 令

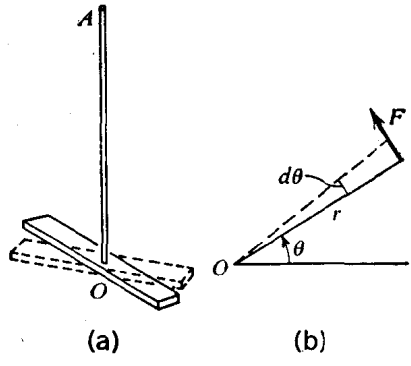


图 14-16 (a)简单扭摆.(b)扭转一扭丝时作功的图示.

绕这根轴(我们称之为 z 轴)的偏转角为 θ,于是,动能为

$$K=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{14-31}$$

势能U是把悬体的两端相对地扭转一 θ 角所作的功. 如果令悬丝规定一 z 轴,则所假定与 θ 成正比的回复转矩 M_z 为

$$M_z=-c\theta \tag{14-32}$$

其中 c 是**扭转常数**(单位为米·牛顿/弧度或量纲上等价的量).

不难通过与拉长的弹簧对比猜到,一个遵从方程(14-31)的体系所贮存的势能与 θ^2 成正比. 要定量地说明这一点,我们只须简单地想想. 假定我们沿扭线轴从上往下看 [图 14-16(b)],扭线下面悬着的是一根臂长为 r 的杠杆, 在杆的一端施加一力正好足够克服转矩 M_z. 这意味,

$$rF=-M_z$$

假定扭转角增加$d\theta$,则杠杆的端点移动一距离 $rd\theta$,而F作的功为

$$dW=Frd\theta=-M_zd\theta$$

因而,在体系从它的正常位形扭转一 θ 角时,体系中贮存的总势能为

$$U(\theta)=\int_0^{\theta} c\theta d\theta=\frac{1}{2}c\theta^2 \tag{14-33}$$

合并(14-31)和(14-33)，我们看出这体系的总机械能是

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}c\theta^2=E(=常数) \tag{14-34}$$

它具有我们熟悉的、一简谐振子的方程的形式，其周期当是

$$T=2\pi\left(\frac{I}{c}\right)^{1/2} \tag{14-35}$$

顺便说一下，值得注意的是，(14-32)式所给出的 M_z 与(14-33)式所给出的 $U(\theta)$ 之间的关系满足我们早先在讨论角动量守恒时引用过的、势能与转矩之间的普遍关系式[方程(14-13)]

$$M_z=-\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

与扭转振子的情况非常相似的是一种称为**刚性摆**的装置——一任意物体，可以自由地绕一水平轴摆动，如图 14-17(a)中所示. 让我们假定这轴到质心的距离为 h. 因此，在正常情况下，质心 C 在通过 O 的轴的下方竖直距离为 h 之处，但如果这体系移动一角度 θ，质心就沿半径为 h 的一圆弧升高距离 $h(1-\cos\theta)$；如果 θ 很小，则由此而来的重力势能的增加为

$$U(\theta)\approx\frac{1}{2}Mgh\theta^2 \tag{14-36}$$

这体系的**动能**等于与质心的线速度关联的动能加上绕质心的转动动能：

$$K=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

[在这方程中那代表绕 C 的转动能的一项包含着一个重要的特点. 如果物体绕通过 O 的真正转轴的角速度为 $d\theta/dt$，则它里面的每一点，对通过 C 的一平行轴或通过任意点的类似轴，也都具有这角

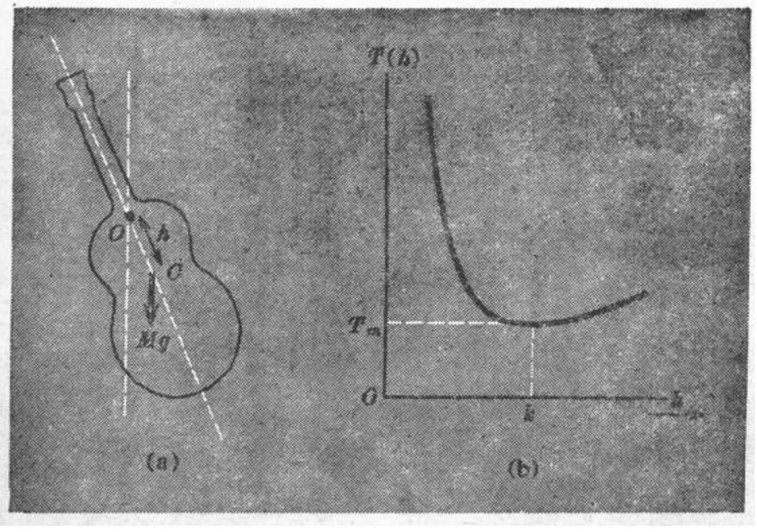


图 14-17　(a)刚性摆的例子. (b)一刚性摆的振动周期，表示为质心到悬点之间的距离 h 的函数.

速度 $d\theta/dt$. 我们不妨就说转动物体的角速度，而无需特别指明是绕哪一个轴的. 例如，在一转盘上任意作一条线，它都有与任一半径相同的角位移改变率.]

现在回到 K 的表达式，我们可令

$$v_c = h\frac{d\theta}{dt}$$

于是可写

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(Mh^2 + I_c)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

或

$$K(\theta) = \frac{1}{2}I_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

其中 I_0 是物体绕通过 O 的轴的转动惯量，而正如我们所知，物体中的每一点的全部运动都可以用纯粹是绕这根轴的转动来表示.

对我们目前的讨论来说，最有启发性的是把 I_c 写成 Mk^2 的形式，其中 k 是回转半径．这样做之后，有

$$K(\theta)=\frac{1}{2}M(h^2+k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{14-37}$$

于是把(14-36)和(14-37)式的结果加起来所得到的能量守恒方程是

$$\frac{1}{2}M(h^2+k^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}Mgh\theta^2=E(=常数) \tag{14-38}$$

这式规定着那样一些简谐振动，它们的周期以一种规律性的方式依赖于质心到轴的距离 h:

$$T(h)=2\pi\left(\frac{h^2+k^2}{gh}\right)^{1/2} \tag{14-39}$$

这周期在 $h=0$(转动轴通过质心) 时变得无穷长，而在 $h=k$ 时有一极小值 T_m．图 14-17(b)中所示是 T 随 h 而变的综合情况．

对于任何给定的 h 值，振动的周期与一长度为 l

$$l=\frac{h^2+k^2}{h}$$

"等价单摆"的周期相等．

§10 在力和转矩共同作用下的运动

在本章差不多是开头的地方，我们阐述了两个结果，它们联在一起为分析广延物体在任何情况下的运动提供了基础．这些结果是:

1. 线动量的变化率等于外力之和．用质心的运动来表示，这一说法变成

$$\mathbf{F}_{合}=M\frac{d\mathbf{v}_c}{dt}=M\mathbf{a}_c \tag{14-40}$$

其中M是总质量.

2. 绕质心的角动量的变化率等于外力相对于质心的总转矩:

$$\mathbf{M}_c=\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_c) \tag{14-41}$$

在本节中我们将限于讨论转矩和角运动都是绕一根同物体的对称轴[就象在导致(14-16)式的讨论中所定义的]平行的轴的情形. 这意味着我们可令 $\mathbf{L}_c=I_c\boldsymbol{\omega}$, 而方程(14-41)取下列特殊形式:

(特殊情形, $\mathbf{L}_c \parallel \boldsymbol{\omega}$)

$$\mathbf{M}_c=I_c\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=I_c\boldsymbol{\alpha} \tag{14-42}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是代表角加速度的矢量.

让我们立即来考虑一个可以应用方程(14-40)和(14-42)的具体情况. 一架飞机正在降落, 当它的起落架上的轮子初与地面接触时, 轮子有一很大的水平速度 v_0, 但无角运动; 因此, 轮子在开始时一定要滑行. 任何见过飞机降落的人都会注意到, 初始时由于这一剧烈的滑行而引起的橡皮焚烧而喷出的一股浓烟. 在着陆后, 轮子在两个与外界接触的地方——它的轴和轮与地面相接触之处——受到力的作用. 在轮轴处的力通过质心, 因而不产生转矩. 与地面接触的力的法线分量N也通过质心; 此外, 由于N是竖直的, 它不影响轮子的水平运动. 因之, 在分析轮子的前进运动和它的转动运动时, 只有两个力要考虑. 一是在轮轴处推轮子前进的力F, 和一个向后作用的摩擦力 $\mathscr{F}$, 如图 14-18(a)中所示. 于是, 按(14-40)有

$$F-\mathscr{F}=Ma_c$$

我们可以猜出来 a_c 是负的, 因为轮子是固着于机身的(我们希望如此)而轮子作用于机身的反作用力 $-F$ 代表一未被平衡的力, 它的作用是使整个飞机减速. 如果我们假设 a_c 是不变的, 则有

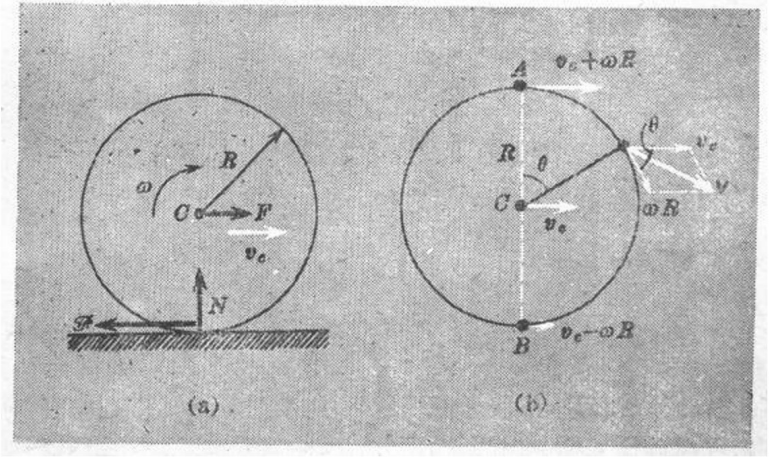


图 14-18　(a)一飞机的着陆轮的受力和运动. (b)轮上任何点的速度都是中心的线运动和绕中心的转动的迭加，这一点在图中的任意一点 P 和顶部及底部的两点 A 和 B 所代表的特殊情形中作了说明.

$$v_c = v_0 + a_c t \quad (a_c < 0) \tag{14-43}$$

当我们考察这运动的转动部分时，我们看到只有摩擦力 $\mathscr{F}$ 产生一对 C 的转矩. 此外，尽管 $\mathscr{F}$ 起着使线运动慢下来的作用，它的转矩却是在使角运动加快的方向. 事实上，按(14-42)式，我们有

$$M_c = R\mathscr{F} = Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = Mk^2\alpha$$

其中 k 是轮子的回转半径，R 是它的实际半径. 如果我们进一步假设角加速度 α 不变，就有

$$\omega = \alpha t \tag{14-44}$$

只要还在滑行，(14-43)和(14-44)式就分别起着决定轮子的线速度和角速度的作用. 在任何瞬间，轮子边缘上任何一点的合速度是质心的水平速度 v_c 和沿切线、大小为 ωR 的速度的矢量

和，如图 14-18(b)中所示. 这就使我们能够确定滑行停止的条件. 滑动意味着在某瞬间与地面相接触的轮上的点与地面之间存在着相对的运动. 由于地面是我们在这个问题中所用的静止参照系，滑行的停止要求轮子上的最低点 B 的速度为零. 但是这一速度 v_B 是向前的 v_c 和向后的 ωR 之和，故有

$$v_B = v_c - \omega R$$

因此，当

$$v_c = \omega R$$

时，滑行停止而开始滚动. 应用(14-43)和(14-44)式，我们看到这将出现在满足下列方程的 t 时刻：

$$v_0 + a_c t = \alpha R t$$

再用确定 a_c 和 α 之值的动力学方程，就可求出 t 以及这时候 v_c 从它的初始值 v_0 减低了多少，要完全解决这问题，我们还应考虑空气阻力和所有各个轮子的 $-F$ 那类的力一起对飞机的全部质量产生的线减速度.

上述问题是一个很有价值的问题，因为它强调了对线运动和角运动的分别考虑. 另一方面，它不适于作确切的计算，一个比较简单的同类问题是一个球(例如，一地滚球)沿着地板水平地投出的情形[图 14-19(a)]. 在这情形中，摩擦力独自产生线减速度和角加速度. 此外，我们可以应我们所知的摩擦系数和球的重量来确定$\mathscr{F}$的大小：

$$\mathscr{F} = \mu N = \mu M g$$

于是，运动方程成为

$$-\mu M g = M a_c$$

$$\mu M g R = M k^2 \alpha$$

因而，如果我们假设球以水平速度 v_0 出发而无转动，则

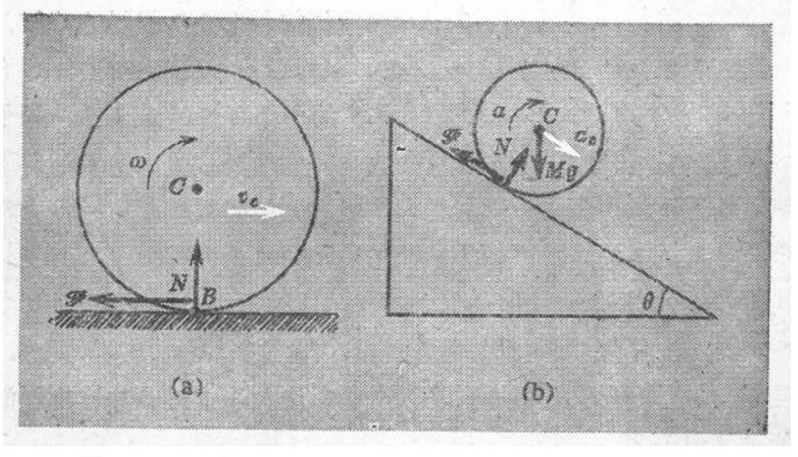


图 14-19　(a)沿着地板投出的一个球的力和运动.(b)圆形物体在一斜面上加速下降,它可能滚动或滑动,与斜面的倾角和摩擦系数有关.

$$v_c = v_0 - \mu g t$$

$$\omega = \frac{\mu g R}{k^2} t$$

于是,滚动($v_c = \omega R$)将在下列方程所确定的时刻 t 开始:

$$v_0 - \mu g t_{滚} = \mu g \frac{R^2}{k^2} t_{滚}$$

或

$$t_{滚} = \frac{v_0}{\mu g (1 + R^2/k^2)}$$

因此,在这时刻的线速度是

$$v_{滚} = \frac{v_0}{1 + k^2/R^2}$$

在理想的情形下,这球将以这速率无限地一直滚动着.

如果我们能假设从一开头就是滚动,那么计算将更为直截了当.例如,考虑我们先前曾用能量守恒解决过的这样一个问题:一圆柱体在一斜面上滚下来,现在我们要明显地用所作用的力和转

矩来予以分析［见图 14-19(b)］. 我们把斜面上的接触力分解为法线的和切线的分量N和$\mathscr{F}$. 由于在与斜面垂直的方向上没有加速度, $N=Mg\cos\theta$. 这确定了$\mathscr{F}$的一个可能的最大值, 等于$\mu Mg\cos\theta$. 在计算过程的某些地方我们须要核验一下看看关于滚动的假设是否与这一限制相容. 但在开始时我们按这一点进行计算是有保证的. 沿斜面的滚动和线加速度的方程如下:

$$\mathscr{F}R=Mk^2\alpha$$

$$Mg\sin\theta-\mathscr{F}=Ma_c$$

然而, 在这情形下, 我们还有那无滑动时线加速度和角加速度之间的纯几何关系:

$$a_c=\alpha R$$

利用这一"约束方程"来解两动力学方程, 我们立得

$$a_c=\frac{g\sin\theta}{1+k^2/R^2}$$

如果把$k^2=R^2/2$(相应于一均匀圆盘或圆柱体)代入, 我们就再次得到(174 页)上的结果. 一旦我们有了这个解所要求的a_c和α之值, 我们就应当核验一下看看相关联的$\mathscr{F}$值是否在前述的最大可能值之下. 如果不是, 我们就必须从头来起, 令$\mathscr{F}$等于它的最大值μN, 并分开来计算线加速度和角加速度. 不过, 无论是哪种情况, 这问题都能确定地解出.

我们可以容易地增添这类分析的例子, 但只要清楚地掌握了由方程(14-40)和(14-42)所规定的基本方法, 则对任何特殊的这类问题的求解是不应引起什么困难的.

§ 11 冲力和转矩

任何玩过用棒或球拍击球这类游戏的人都会有这样的经验: 当击球恰在点子上时有一种满意之感, 好象是毫不费力地由球棒

或球拍自己打出似的. 也许,更常有的是,当球没有碰在最佳点上时,有吃力费劲甚至刺痛手的感觉. 这些都是一个刚性物体(例如球棒)由于被球碰撞, 受到一突然的冲量而发生的动力学现象的表现.

这类行为的最简单的例子是给一不受任何约束的物体一个冲量. 为此, 设想如图 14-20(a)所示的一个物体, 它静止在一无摩

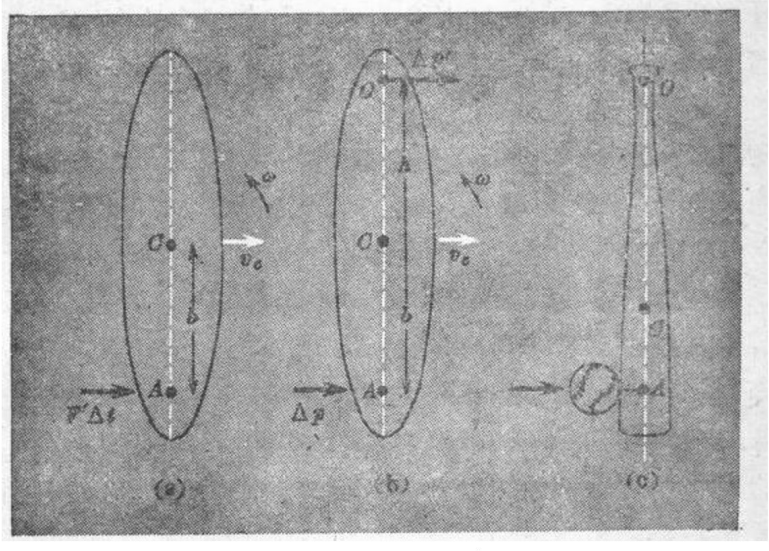


图 14-20 (a) 一个对于反冲是完全自由的物体由于通过 A 点的力而突然获得一冲量. (b)物体象(a)中那样获得一冲量,但现在是被迫绕 O 点转动. (c) 一悬挂着的棒球棒被球打着. 如果碰撞点选得正确,球棒将绕 O 转动而不致在该点产生任何冲力.

擦的水平面上,在 Δt 时间内受到一个力 F 的作用, 作用线距质心 C 的距离为 b. 其结果是质心获得一速度 v_c 而物体则获得一角速度 ω,应用我们的基本方程[(14-40)式和(14-42)式],有

$$F\Delta t = Mv_c$$

$$bF\Delta t = Mk^2\omega$$

如果以 Δp 表示冲量的大小，代表 F 对时间的积分，那么无论它的实际变化如何，我们有

$$v_c=\frac{\Delta p}{M}$$

$$\omega=\frac{b\Delta p}{Mk^2}$$

这两方程一起决定了物体中每一点随后的运动．$b\Delta p$ 这个量是由于线冲量绕 C 点而来的角冲量．而且，正如线冲量具有线动量的量纲，因而角冲量也具有角动量的量纲．

如果这物体是系附在通过某点 O 的一固定轴上，O 点离质心的距离为 h[图 14-20(b)]，则情况将大为改变．我们必须假设，除由 F 产生的冲量 Δp 以外，还伴有支点作用于物体的另一冲量 $\Delta p'$，现在我们有

$$\Delta p+\Delta p'=Mv_c$$

$$b\Delta p-h\Delta p'=Mk^2\omega$$

如果认为 Δp 和 M、k 以及 h 之值为已知，就有三个待定的未知量——v_c、ω 和 $\Delta p'$——而迄今还只有两个方程．但我们还有一个约束方程；就是，O 点必须保持静止，如图 14-20(b)所示，我们必须有

$$v_0=v_c-\omega h$$

这就要求

$$v_c=\omega h$$

如果我们从这些方程解出 $\Delta p'$（做一下！），就会得到

$$\Delta p'=\frac{bh-k^2}{h^2+k^2}\Delta p$$

显然，$\Delta p'$ 可正可负，要看 b、k 和 h 的确实值而定．现在我们可以认出使 $\Delta p'$ 为零的一个条件——$\Delta p'$ 为零意味着即使支点是在 O 处，在冲量 Δp 作用时也并不需要供给任何约束力，或者换句话

说，O 点自动地保持静止，由上列关于 $\Delta p'$ 的方程，这必要条件是

$$bh-k^2=0$$

或

$$b=\frac{k^2}{h}$$

这指明着物体的轴上一点 A，在质心下面距离为 k^2/h 处．A 到支点本身的距离 l 由下式给出：

$$l=h+\frac{k^2}{h}=\frac{h^2+k^2}{h}$$

如果你回顾一下 (14-39) 式，你将看出 l 与一单摆的长度完全相同，这单摆所具有的周期同于设我们的物体绕一通过 O 的水平轴摆动的周期．

这里，我们实际有了一个良好的动力学基础来找到以棒或拍击球时正确地打应当打在棒或拍的哪一点上，这个点称为**撞击中心**．如果我们，举例说，把一根棒球棒悬在一条长绳上[图14-20(c)]，就可以直接研究在各种不同距离的点击球时的效果，这些点都位于质心的另一边远离 O 点周围之处，而 O 点则通常是握棒之点．如果 CA 太大，则撞击使 O 点反冲到左方（假定如图所示，球来自左方）．如果 CA 太小，则 O 反冲到右方．如果 CA 正好是合适值 (k^2/h)，因而 A 是撞击中心，则棒将开始自由地绕 O 点转，O 点的作用象是一个天然的支点．因此，我们可以这样用一摆的实验预先找到 A 的最佳位置，然后看在实际中效果如何．

§ 12 回转运动的背景

人人都被回转装置困惑过，或许每个人都感到它们的行为有点越出力学的常轨，即使理智上知道是不可能如此的．然而，无可否认，回转运动常常似乎使人感到异外和古怪，而这自然也是它们

的魅力的主要来源.

要懂得和理解回转效应，首要的条件是充分注意到角动量是一个矢量. 而在以角动量为中心量时，人们还必须学会主要是用转矩而不是用力、用角速度和角加速度而不是用线速度和线加速度来思考问题. 一旦做到这一点，回转现象就成为很容易理解的事了.

一个有效的、虽然只是经验性的、演示角动量的矢量性的途径是证明几个分开的飞轮的转动角动量可以使之加起来为零①. 这一点可以通过把那些飞轮安装在一个可以自由转动的盘上做到[图 14-21(a)]. 每一飞轮有它自己的驱动马达，其转速可以测量

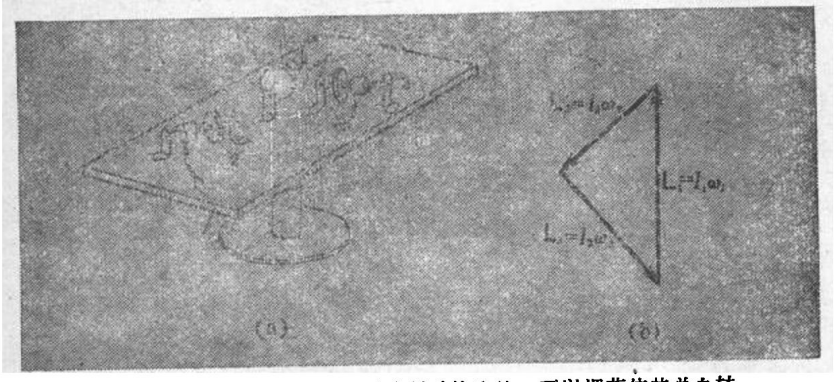


图 14-21 (a) 一组三个用马达驱动的飞轮，可以调节使其总自转角动量为零. (b)三个角动量的矢量相加，结果为零.

和控制. 飞轮的相对转动惯量也是已知的. 我们将取图中所示三个不同取向的飞轮的情形来考虑. 调节这体系使对支点处于静态平衡，并在飞轮不转动时所有取向都一样. 如果使飞轮之一以高速自转，体系获得一容易认出来的回转稳定性；即整个盘倾向于保

① 这里所描述的实验是在影片“Angular Momentum—A Vector Quantity”(“角动量——一个矢量”)中演示的；这部影片的制作者是 A. Lemonick, Education Development Center, Newton, Mass., 1962.

持一定的取向，再让第二个飞轮转动起来定性方面的情况并不改变.但如果让第三个飞轮也转动起来，人们会突然达到回转稳定性消失的情况；盘将突然变得象是只有几个不动的重物在它上面那样. 这时就有可能证实，这一情况出现在三个角动量的矢量和为零的时候，如图 14-21(b)中所示. 这些角动量之值是 $\mathbf{L}_1=I_1\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{L}_2=I_2\boldsymbol{\omega}_2$, $\mathbf{L}_3=I_3\boldsymbol{\omega}_3$.

上面所说的是特别简单易见的情况，因为飞轮彼此独立，每一飞轮对其角动量只有一易于确定的贡献. 然而它对于回转问题的分析却是基本的，它使我们认识到这种可能性：一个单独的物体可能沿不同的轴同时对它的总角动量有所贡献. 对此，一个我们先前无需考虑的、然而必不可少的预备知识是，角速度本身作为一个矢量的充分含义. 如果可以说到一个转动物体的角速度矢量，则物体中的每一点的瞬时线速度，$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$，也一定能够描述为角速度沿三个正交轴的分量 ω_x, ω_y 和 ω_z 所引起的线速度的矢量和. 这一描述的有效性还要求：如果 $\boldsymbol{\omega}$ 只有一个分量——比如说，ω_x——则物体的运动将是纯粹绕问题中的(x)轴的转动.

为了明白这些概念如何正确地应用于一个简单的具体情形，我们来看图 14-22 中所示的情况. 一均匀矩形板，让它以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 绕一根轴(位于板的平面上)转，这轴与平行于一对边的 x 轴成 δ 角. 考虑具有坐标(x, y)或等价的(r, θ)的 P 点的运动，由 $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ 所给出的 P 的瞬时速度垂直于图面向上，其大小正好等于 ω 和 P 到转轴的垂直距离 PN 的乘积. 因之，有

$$v=\omega r\sin(\theta-\delta)$$
$$=\omega r\sin\theta\cos\delta-\omega r\cos\theta\sin\delta$$

但是，把 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\mathbf{r}$ 沿 x 和 y 轴分解，我们有

$$\omega_x=\omega\cos\delta \qquad \omega_y=\omega\sin\delta$$
$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$

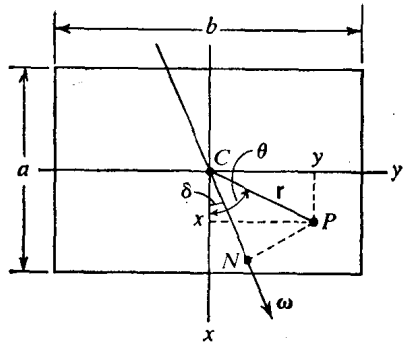


图 14-22　角速度是矢量，一个转动着的板的转动动力学可以完全用 ω 沿 x 和 y 轴的分量来分析.

这意味 v 的表达式可以重写为

$$v=\omega_x y-\omega_y x$$

我们看到，在物理意义上，这正是我们把两个分别绕 x 和 y 轴、角速度为 ω_x 和 ω_y 的独立转动迭加起来时所得结果.

现在让我们着手来计算整个板绕 ω 轴的角动量. 在 P 点的一质量元 dm 的线动量是 vdm 乘上距离 PN，由于 v 本身等于 ω 乘 PN，所以绕 ω 轴的转动角动量由下列积分给出:

$$L_\omega=\int dm\omega r^2\sin^2(\theta-\delta)$$

把 $\sin^2(\theta-\delta)$ 这式完全展开，有

$$L_\omega=\omega\cos^2\delta\int r^2\sin^2\theta dm+\omega\sin^2\delta\int r^2\cos^2\theta dm$$

$$-2\omega\sin\delta\cos\delta\int r^2\sin\theta\cos\theta dm$$

即

$$L_\omega=\omega\cos^2\delta\int y^2dm+\omega\sin^2\delta\int x^2dm$$

$$-2\omega\sin\delta\cos\delta\int xydm$$

头两个积分按定义分别是绕 x 和 y 两主轴的转动惯量 I_x 和 I_y. 第三个积分（是被称为**惯性积**的一个例子）则为零，这可以从以下事实看出：对于每一位于 (x, y) 的质量元 dm，在 $(x, -y)$ 处也有相等的一质量元，因此我们有

$$L_\omega = I_x\omega\cos^2\delta + I_y\omega\sin^2\delta$$

引进 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量 ω_x 和 ω_y，这式可写为

$$L_\omega = I_x\omega_x\cos\delta + I_y\omega_y\sin\delta \qquad (14\text{-}45)$$

这表明，绕 $\boldsymbol{\omega}$ 轴的角动量正好等于绕 x 和 y 轴的独立角动量 $I_x\omega_x$ 和 $I_y\omega_y$ 在 $\boldsymbol{\omega}$ 轴上的投影的迭加. [一般说来，角动量 $I_x\omega_x$ 和 $I_y\omega_y$ 的矢量和还有一垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 的分量，而板的**总**角动量矢量是 L_ω 与这另一分量之和. 我们将不打断目前的讨论来考虑 $\mathbf{L}$ 的这另一分量. （但可参看习题 14-30.）]

最后，让我们看一下总转动动能. 它的定义是

$$K = \int \frac{1}{2}v^2 dm$$

令 $v = \omega r\sin(\theta - \delta)$，这成为

$$K = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2\sin^2(\theta - \delta)dm$$

我们看到 K 的表达式中所含积分正是在计算 L_ω 时出现的同一积分，因此我们有

$$K = \frac{1}{2}(\omega^2\cos^2\delta)I_x + \frac{1}{2}(\omega^2\sin^2\delta)I_y$$

把 $\omega\cos\delta = \omega_x$，$\omega\sin\delta = \omega_y$ 代入，得结果

$$K = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 \qquad (14\text{-}46)$$

这样，我们就看到（至少在上面所讨论的特殊情形中）一转动物体的动力学如何能分析为与绕主轴的分量转动相关联的各自的贡献.

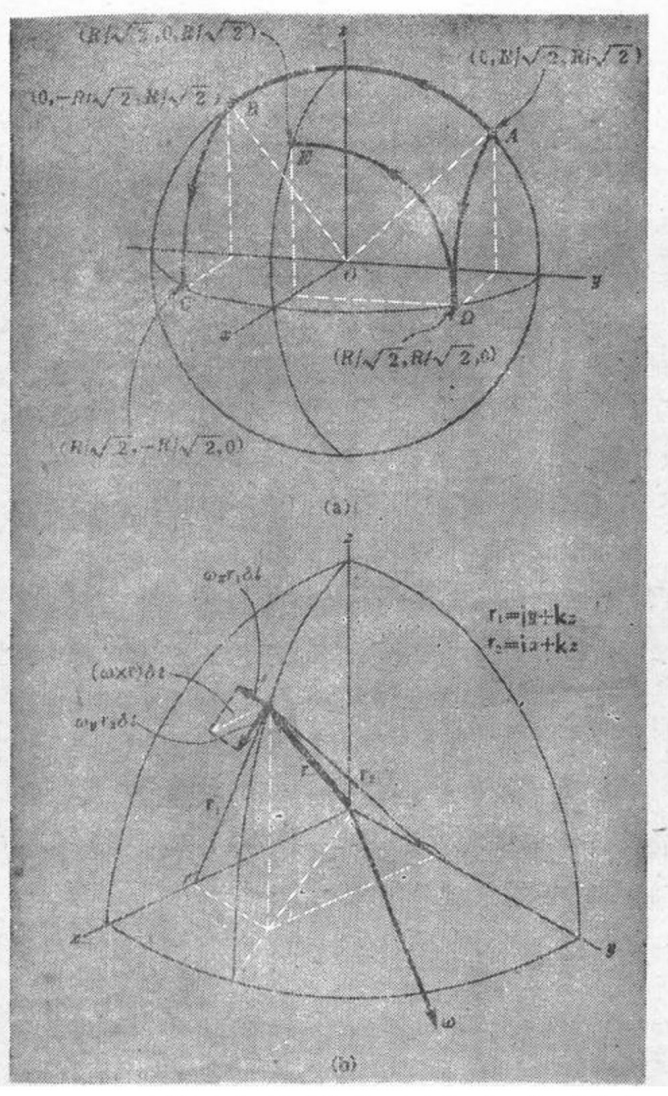


图 14-23 (a)有限角位移不能对易，从 A 点出发，绕 x 轴 y 轴的两个相继的 90° 顺时针转动导致很不相同的两点 C 和 E，依赖于这两个转动进行时的次序.(b)角速度的定义所依据的无限小位移具有对易性，从而判明 ω 作为矢量的正确性，小位移 $(\omega\times\mathbf{r})\delta t$ 可以作为位置矢量 $\mathbf{r}$ 绕 x 和 y 轴的小转动之和而得.$\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}_2$ 是从矢量 $\mathbf{r}$ 的尖端分别垂直于 x 和 y 轴的矢量.

虽然我们在这里不再进一步讨论这一问题，但不难证明我们所得到的形式是普遍成立的.[①] 基本出发点仍是角速度的矢量性，我们将对这一点作若干附加评述以结束这一讨论　对于一个可以绕其质心或某任意固定点转动的刚体说，体内任一点的运动都是限制于一球面上的. 任何给定的位置变化都可以通过绕三根选定的轴的转动来达成. 然而，这些有限的角**位移**不可能表示为以 x, y 和 z 为轴的转动矢量，因为(如我们在第二章中注释过的)两个相继的这种位移的结果与它们进行的次序有关 [图 14-23(a)示明一个比较极端的例子]，因而，不存在一个单一的角位移，它代表两个或更多的转动的合成而由一根轴的方向和一个数量来表征. 但是，角**速度**的定义却同线速度的定义相似，是以极限为零的 δt 时间内的无穷小位移为依据的. 当我们考虑这一类型的位移之和时 [图 14-23(b)]，我们发现这矢量和是唯一的，与相加的次序无关，并且总是能够用单一的一个无穷小角转动 $\omega\delta t$ 来代表，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是 $\mathbf{i}\omega_x$, $\mathbf{j}\omega_y$ 和 $\mathbf{k}\omega_z$ 的矢量和. (在我们的图中，为简单起见设 $\omega_z=0$.) 如果我们想要把任何一点 P 的线速度的计算用分量表出，就有

$$\mathbf{v}=(\mathbf{i}\omega_x+\mathbf{j}\omega_y+\mathbf{k}\omega_z)\times(\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z)$$

应用 $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}=\mathbf{k}$ 等关系，很容易从这式得出

$$\mathbf{v}=\mathbf{i}(\omega_y z-\omega_z y)+\mathbf{i}(\omega_z x-\omega_x z)+\mathbf{k}(\omega_x y-\omega_y x)$$

应该注意到，最后一项正好同我们的转动平板的特例中的 $\mathbf{v}$ 值相应(在那里，我们取 $\omega_z=0$, 而 z 则处处为零). 正如用正交分量表示任一矢量叉积那样，把 $\mathbf{v}$ 写成下列行列式常常很方便:

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

① 参看，例如，K. R. Symon, 前引书(见 165 页原文 p. 645)

§ 13 稳定进动的回转仪

一个回转仪基本上就是一个飞轮，安装得使它有三个不同的可能转轴，如果需要的话这些轴可以做成互相正交的．第一个轴是飞轮自身正常自旋的轴；另外两个轴则使这个自旋轴能在任何方向倾斜．图 14-24 示明如何把飞轮安装在一对自由支撑的常平

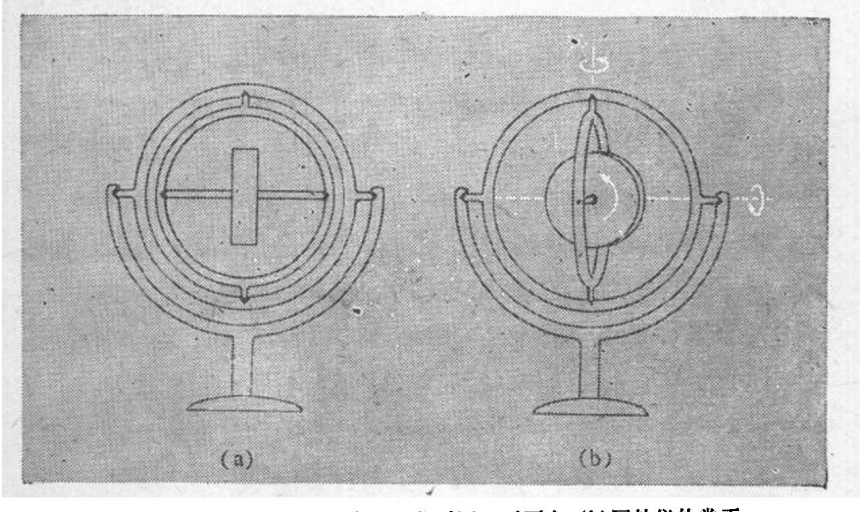


图 14-24 (a)回转仪，其常平环位于同一平面上．(b)回转仪的常平环互相垂直，示明有三个可能的、相互垂直的转轴．

环内而做到这一点．我们关心的不是这一装置的细节而是这飞轮对各种各样转矩的反响，假定所有角位置都有可能．

能够用回转仪做出的一个最简单而又最使人惊异的戏法是先让它绕一水平轴自转起来，然后把它的轴的一端安放在一支点上，如图 14-25(a)中所示意的那样．这回转仪就开始**进动**；即，它的轴 OA 不是向下倒去，而是开始这样转起来：其终端 A(在最初有一些我们将在后面讨论的不规则运动之后）以匀速描出一水平圆周径迹．我们能用作用在这飞轮上的转矩的直接效果来解释这一

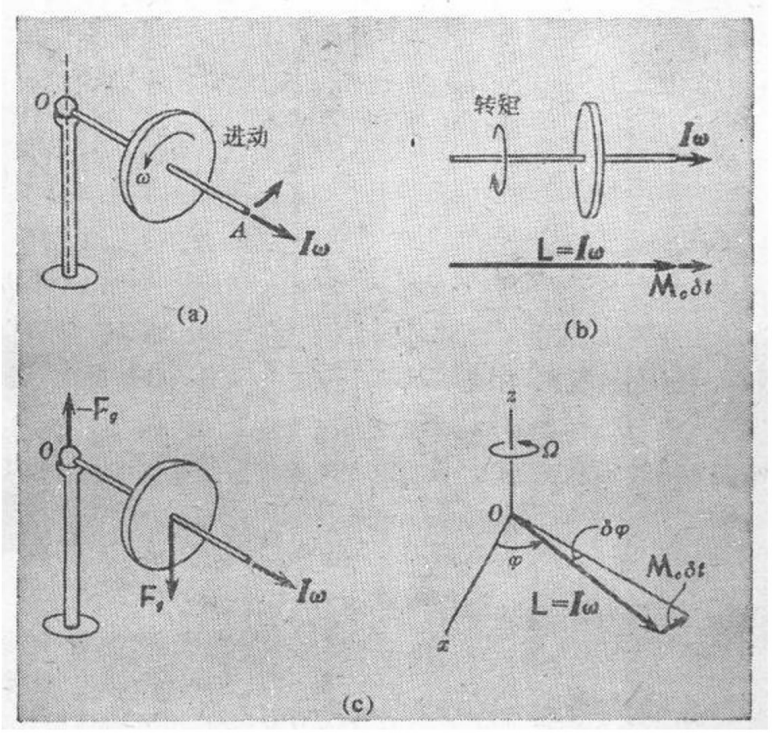


图 14-25　(a)在稳定进动中的回转仪.(b)把绕自旋轴本身的角动量加到飞轮上去.(c)把垂直于初始自旋轴的角动量加到飞轮上去,结果产生进动.

点,但作为引导,让我们先考虑一不同的情况,这情况可能看起来是儿戏般地简单.飞轮以角速 ω 绕着它的轴自旋[图 14-25(b)],在时间 δt 内有一绕同一个轴的转矩**M**作用着.当然,转速就会加快或减慢.在一转矩的作用下,角动量的变化率的普遍方程[(14-41)式]是

$$\mathbf{M}_c = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_c)$$

但在现下的情形中,它约化为方程(14-42)的特殊形式:

$$\mathbf{M}_c = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

而有

$$\mathbf{M}_c\,\delta t = \delta\mathbf{L} = I\delta\boldsymbol{\omega}$$

这表明角动量矢量只简单地变长或变短而不改变其方向.

现在来考虑发生进动的状况，轴的一端被支着的飞轮受到一作用于其质心的向下的力 $\mathbf{F}_g$ 和一个相等的、相反的力作用于支点 O[图 14-25(c)]. 这两个力构成一力偶，它的轴是水平的并与自旋轴垂直. 在时间 δt 内，这一力偶的转矩把大小为 $\mathbf{M}_c\,\delta t$、方向与 $\mathbf{L}$ 垂直的角动量加给飞轮，其结果是改变 $\mathbf{L}$ 的方向而不改变其大小. 如果以 φ 表示飞轮的轴与某标准水平参考轴 (x) 之间的夹角，就有

$$M_c\,\delta t = L\delta\varphi$$

如果从支点 O 到质心的距离为 l，我们有

$$M_c = F_g l = M_g l$$

其中 M 是飞轮的质量. 令 $L = I\omega$，就得出

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_g l}{I\omega} \tag{14-47}$$

其中 Ω 是绕竖直(z)轴的进动角速度，如图 14-25(c)中所示. (14-47) 式给出回转仪稳定特性的定量表达式. 必要条件是 $I\omega$ 很大，使在一转矩作用下进动角速度 Ω 小，而在一定限度内可以使一实用的回转仪体系的 Ω 可以忽略不计.

注意这里所牵及的各个矢量的方向之间的关系. 自旋角动量是水平的(一个我们立即就要加以放宽的条件)，转矩矢量也是水平的并且总是垂直于 $\mathbf{L}$. 进动由方向沿着 z 轴的角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 来描述，它同时垂直于 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{M}$.

以上的讨论说明稳定的进动是转矩和角动量的变化率之间的

基本矢量关系的直接结果．最后再说一点，它可能使我们对结果的前前后后更为明白．如果我们不给飞轮以任何初始自旋就把它的轴的一端放在支点 O 上，则飞轮当然要立刻掉下来，它的质心在一竖直平面上走一圆弧．我们在这里所看到的仍然是由重力转矩所加给的绕水平轴的角动量，不过在这一情形下没有预先存在的自旋角动量同它相加而已，结果显得(并且确是)非常不同．

§ 14 关于进动的补充

在上节中描述的那种稳定进动并不限于绕水平轴自旋着的飞轮．一个回转仪，在它的轴放置于同竖直轴成一 θ 角时[图 14-26 (a)]，将很快地进入我们所曾讨论过的那类进动．它的轴扫出一个半角为 θ 的锥面，如图所示．此外，定量的测量会表明，对于一给定的自旋角速度值 ω，完成进动一周所需时间几乎与 θ 无关，而

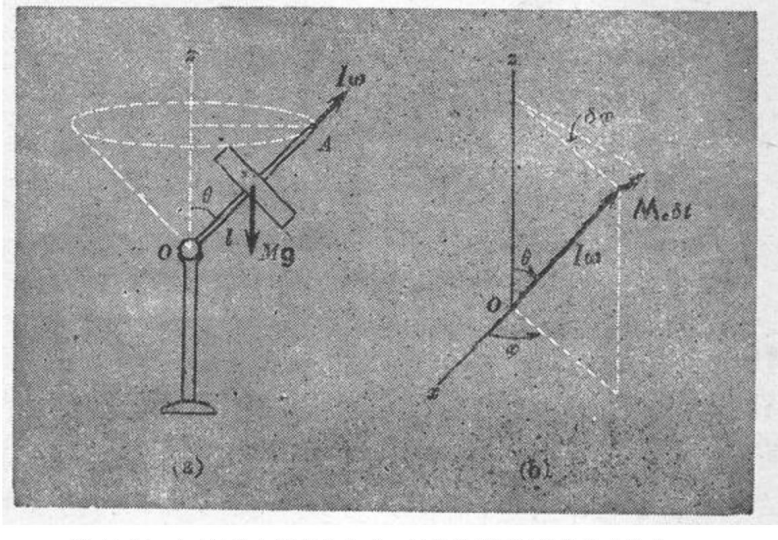


图 14-26 (a)转轴与竖直方向成一任意角的回转仪的稳定进动．
(b)矢量图，示明(a)中角动量在短时间 δt 内的变化．

总是差不多接近于 $2\pi/\Omega$，其中 Ω 是按(14-47)式算出的. 这个结果是完全合理的，因为在倾角为 θ 时重力转矩减少到 $Mgl\sin\theta$，但在 δt 时间里绕 z 轴的转动量［见图 14-26(b)］等于角冲量 $M_c\delta t$ 被 $\mathbf{L}$ 在水平面上的**投影** $I\omega\sin\theta$ 除. 因而这两量的商与 θ 无关. 然而，尽管它似乎很有理，这结果并不十分正确. 原因是进动本身含有对角动量的额外贡献，必须把它算进去. 我们将对此给予一初步的论述来说明其后果.①

考虑回转仪的自旋轴上一点 P 的运动［图 14-27(a)］. 它的

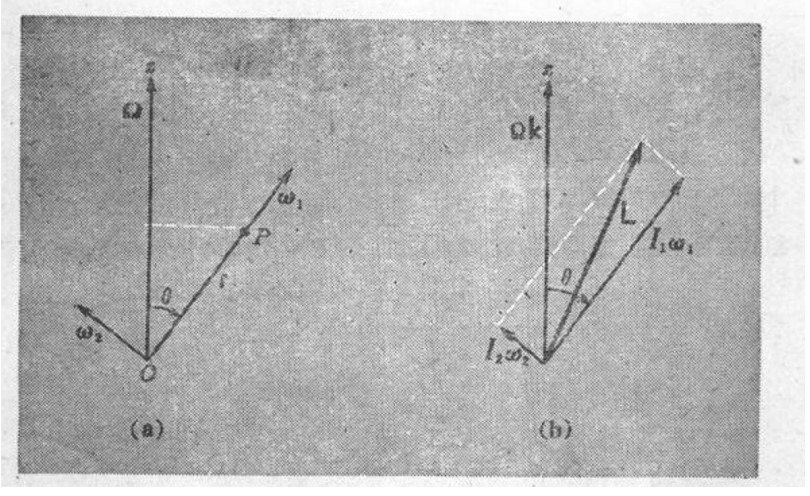


图 14-27 (a) 一进动着的回转仪，有一进动角速度绕垂直于自旋轴的一根轴转. (b)一进动着的回转仪的总角动量并不与自旋平行.

瞬时速度完全来自进动，大小为 $\Omega r\sin\theta$，方向垂直于图平面向下. 这同一运动也可以另描述为整个飞轮绕着与自旋轴垂直的一根轴以某一角速度 ω_2 转动. 我们所要做的只是令

$$\omega_2=\Omega\sin\theta$$

① 本节余下的部分可以略去不读而不失连贯性.

用这一 ω_2 之值我们可以描述回转仪上任何一点由于进动而具有的附加速度. 但是, ω_2 的方向同飞轮的惯量主轴之一相应. 因而我们能够用角速度 ω_1 和 ω_2 以及绕这些轴的转动惯量 I_1 和 I_2 来写出总角动量的表达式:

$$\mathbf{L}=I_1\boldsymbol{\omega}_1+I_2\boldsymbol{\omega}_2 \tag{14-48}$$

我们现在是知道 $\mathbf{L}$ 如何随着时间而改变的, 因为在稳定进动的情形下整个体系以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 绕竖直 (z) 轴转. 因此我们有以下简单而非常重要的方程:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{L} \tag{14-49}$$

与以速度 $\boldsymbol{\Omega}$ 转的任何矢量的变化率相应. 在目前的情形下, 它成为

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=I_1(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_1)+I_2(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_2)$$

可是, 如果我们审视一下这情况的几何关系 [图 14-27(a)和(b)], 我们就看到 $I_1\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_1$ 是一个长度为 $I_1\Omega\omega_1\sin\theta$ 冲纸面向下的矢量, 而 $I_2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega}_2$ 是长度 $I_2\Omega\omega_2\cos\theta$ 冲纸面向上的矢量. 两者在一起形成一水平矢量, 冲纸面向下, 大小为

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|=I_1\omega_1\Omega\sin\theta-I_2\omega_2\Omega\cos\theta$$

但我们知道 $\omega_2=\Omega\sin\theta$. 因而

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|=I_1\omega_1\Omega\sin\theta-I_2\Omega^2\sin\theta\cos\theta$$

把这角动量的改变率与同方向的重力转矩等起来, 就得

$$Mgl\sin\theta=I_1\omega_1\Omega\sin\theta-I_2\Omega_2^2\sin\theta\cos\theta$$

或

$$Mgl=I_1\omega_1\Omega-I_2\Omega^2\cos\theta \tag{14-50}$$

对 $\theta=\pi/2$(自旋轴水平) 的特殊情形, 我们重新得到前节中(14-

47)式所表示的简单结果. 但是我们看到,一般说来, 我们面对的是一个二次方程, 导致两个不同的Ω值. 其中之一代表着一较慢的进动,速率与 $Mgl/I_1\omega_1$ 相差不很远,这代表正常情况. 但原则上还有一较快的进动, 尽管要把回转仪起动得正好获得这种进动是困难的. 在实用中,只要回转仪以通常很大的 ω_1 值转动, 快进动的可能性可予忽略.

§ 15 导航回转仪

我们在这里将就回转仪用作导向、引航和控制的设备给予一非常粗略的讨论. 作为主题的引子, 我们将描述回转仪的行为中另一简单而又乍看使人惊奇的特点. 如果使一个支在其常平环里的回转仪旋转起来, 而它的外常平环绕一水平轴自转起来 [图 14-28(a)],则那携带着飞轮的内常平环将会从它原来所在的水平面中倾斜出来, 并在摆动几次被摩擦阻尼之后回转仪的自旋轴停在竖直方向.

这一行为可以定性地来理解, 只要认识到支撑那内常平环的支点能提供绕竖直方向和绕飞轮的自旋轴的转矩而不能提供绕连结支点本身的轴的转矩. 最后这一点意味着绕 AA' 轴的角动量是守恒的, 可以用它来解释为什么会开始倾斜. 要使回转仪的自旋轴在一水平面中转动, 这本身就会引进一个沿 AA' 的角动量分量. 倾斜运动提供一等值反向的角动量分量以保持绕 AA'的角动量等于零. 通过作用于 A 和 A' 点的力所能提供的转矩能够完成使绕BB' 轴的角动量抵消掉的主要任务,并产生绕竖直轴的角动量,相应于使自旋角动量 $I\omega$ 从水平方向转到竖直方向上来. 这一过程将持续下去,直到飞轮的轴完全同转矩的轴方向一致.

现在设想有一如上所述装置的回转仪位于赤道上的某一点,令它自转起来,转轴起初是水平的,指着东-西方向[图 14-28(b)],

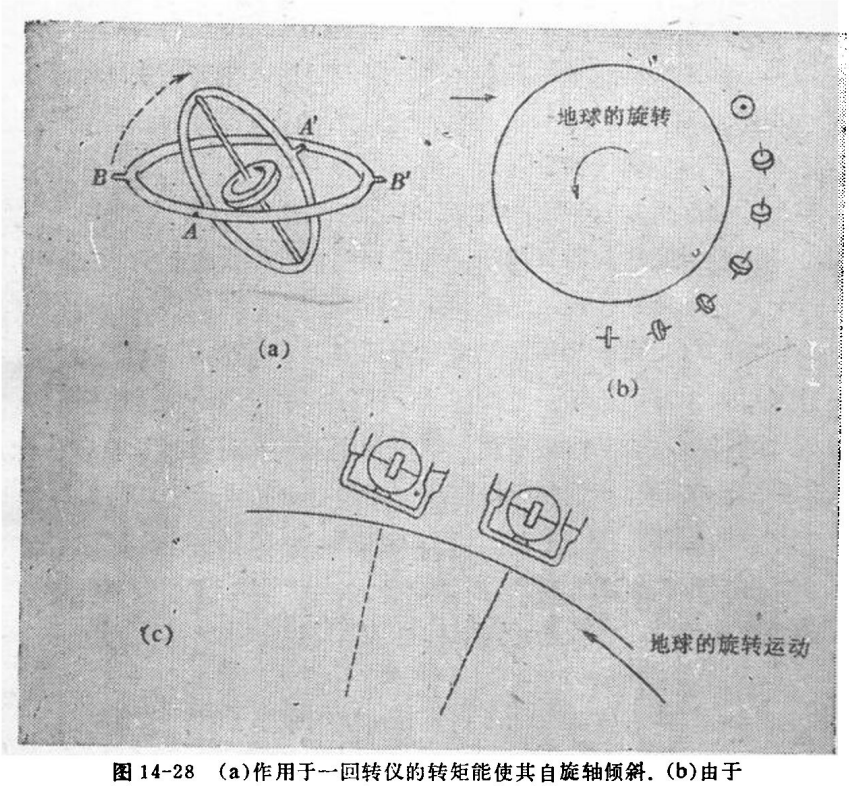


图 14-28 (a)作用于一回转仪的转矩能使其自旋轴倾斜. (b)由于地球的转动而引起的转矩使一回转仪改变其取向. (c)回转仪罗盘的原理. 地球的转动使附在回转仪支架上的 U 形管中的水平面有了差别, 所产生的转矩使回转仪的轴转到南-北方向.

地球本身的转动将会施加一转矩于这回转仪, 转矩的轴正好平行于地球的转轴. 回转仪将因此而在时间过程中经历图 14-28(b)中所指明的各相继位置直到它的自旋轴指着正北, 以后它将持续地指着这一方向而起罗盘作用.

为了制造一般导航用的这类非磁性罗盘——回转罗盘——常利用罗盘不平衡时会出现的重力转矩. 这一用法在图 14-28(c)中示意地指出, 一装有液体的U形管固定于内常平环上. (外常平环在图中略去, 但必须假设它存在着.) 如果我们设想开始时回转

仪的轴是东-西向的，则由于地球的转动，要保持这一指向U形管两臂中的液面就会出现差别，因为新的地区水平与原来的水平成一角度．这一水平差产生一净余重力转矩，平行于地球的轴，于是回转仪将以所描述的方式重新取向：在外常平环内转动，直到含U形管的平面和回转仪的自转轴平行于当地的南-北子午线为止．

惯性导航系统所利用的也是与此很相似的现象．回转仪一旦绕一选择好的轴转起来，任何会使它偏离这一方向的运动将产生一转矩，可用来作为一误差信号去控制修正动作，基本上相同的技术可用于稳定船舶和各种运载工具以抗衡不利的翻滚运动．

回转现象的某些最重要的应用是在飞机仪表方面．一个自由的(完全平衡的)回转仪能恒定地指示出一个选定的参照方向以检验正确的航程，而一个具有引力负载的回转仪则可用来在任何时刻认准真正的竖直方向，从而确定一人为的水平，依靠它飞行员就能量度倾斜和爬升的角度．

§ 16　作为回转仪的原子和原子核

我们早先提到过基本粒子所具有的内禀"自旋"角动量．大部分原子核和中性原子也有这种角动量，其大小相当于自然单位 $h/2\pi$ 的简单倍数．这就赋予这些粒子一天然的回转稳定性．但是，自旋角动量总是伴有内禀磁性的；就象是原子或原子核含有一小磁棒，指向沿着自旋轴，在有磁场的情形下导致稳定的进动．

借助于一个简单的经典模型，可以很好地描绘这基本现象．图14-29绘出一球状粒子，它的轴同一个磁场成 θ 角．如果设想这粒子内有一磁棒，这磁棒的北极和南极将受到方向相反而平行于**B**的一对力，如图所示．这两个力产生一转矩，轴的方向垂直于图平面向外．在没有自旋时，这转矩只是使磁铁(经过几次最初的摆动之后)与磁场的取向一致，如同一罗盘针那样．然而，在有一内

禀角动量L存在时，情况就变了，导致绕所指出的方向的进动.

如果我们把磁铁描绘为具有磁极强度m相距为l的偶极子，就很容易导出进动速率的一个表达式. 作用于每一磁极的力等于mB，因而转矩为

$$M_c = mBl\sin\theta$$

可以把ml写为一个单独的量μ——粒子的**磁偶极矩**. 于是有

$$M_c = \mu B\sin\theta \qquad (14\text{-}51a)$$

如果把磁场和磁矩写成矢量，则转矩可以由下列方程完整地表示出来：

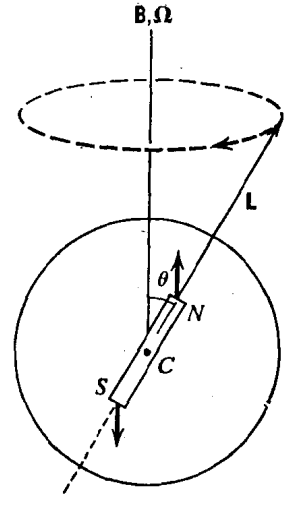


图 14-29　原子和原子核象自旋着的磁铁，在一磁场中进动.

$$\mathbf{M}_c = \boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B} \qquad (14\text{-}51b)$$

令这转矩等于由进动角速度Ω产生的角动量改变的变化率，就有

$$\mu B\sin\theta = \Omega L\sin\theta$$

或

$$\Omega = \frac{\mu B}{L} \qquad (14\text{-}52)$$

这一进动的存在和速率，可以通过拾取转动着的原子或原子核磁体在放在附近的电磁感应圈中产生的微弱电讯号而探测出来. 当然，从单独一个粒子发出的讯号是微弱得几乎难以想象的，但如果用一个含有大量完全相同、并都以同一方式进动的粒子的试品，这效应就成为可测的了①. 用这个方法探测原子核的自旋磁性称为

① 我们将不在此讨论用以观测这进动的特殊技术. 要获得一个入门的介绍，再没有比阅读F. Bloch和E. M. Purcell的《诺贝尔讲演集，物理学》(*Nobel Lectures, Physics*, 1942—1962, Elsevier, Amsterdam, 1964)更好的了.

核磁感应，是由F. 布洛赫和 E. M. 泊色耳(互相独立并用不同的方法)首先于 1946 年加以研究的. 由于这一工作，他两人分享了 1952 年的诺贝尔奖金，泊色耳在他的诺贝尔讲演中说道："我至今还没有失去一种惊异和欢悦的感觉，这一精细的运动竟然会存在于我们周围一切普通的东西之中，只对那些寻找它的人才显示出来. 我记得，在我们进行最初一些实验的冬天…用新的眼光去看着白雪，雪堆在我门口的阶沿上…一大堆质子在地球的磁场中安详地进动着."

(质子在地球的磁场中实际的进动频率约为 2500 转/秒. 但是，一些基本性实验中所用的磁场比这大约要大 10,000 倍，因之相应的进动圆频率Ω之值要高得多.)

§17 用 $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ 来说明回转运动①

虽然从头到尾使用角度量肯定是最富有成果的、研究回转现象的途径，人们还是想知道这些运动如何归结到单个粒子的牛顿定律的基本命题. 因此我们将在此给出一个用这种术语来分析的简单例子.② 设想一个由四个相同的质量 m 制成的简单回转仪，它们对称地安在距离一锭子为 r 的地方，它们的质心距离支点为 l [图 14-30(a)]. 考虑质点之一（第一个）位于最高点，沿水平方向运行. C 点由于进动而具有线速度 $V(=\Omega l)$，而每一质量则具有一相对于 C 的速度 $v(=\omega r)$. 于是质点 1 具有瞬时速度 $v_1(=v-V)$，相对于进动方向是向后的，质点 3 在这瞬间具有速度 $v_3(=v+V)$，方向向前(我们设 $v>V$)，在短时间 δt 内，进动把转

① 这一节可以略去而不失连贯性.

② 这一分析受益于 F. W. Sears 的一篇文章，*Am. J. Phys.*, **7**, 342(1939). 还可以参看 E. F. Barker, *Am. J. Phys.*, **28**, 808(1960)；和 J. L. Snider, *Am. J. Phys.*, **33**, 847(1965).

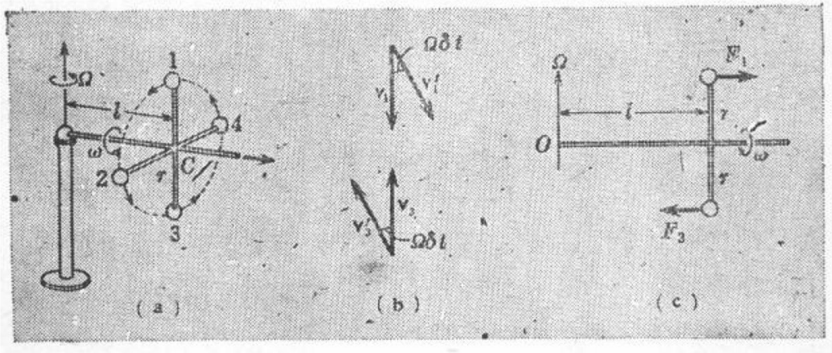


图 14-30　(a)由四个集中的质量构成的简单回转仪. (b)在一短时间 δt 内速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 的变化. (c)改变质量 1 和3 的速度所需的力，相应于进动转矩.

轴转了一角度 $\Omega\delta t$，这就以图 14-30(b) 所示的方式改变速度 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_3$ 的方向. 物理上这意味质量 1 要沿离开轴向外的径向加速，而质量 3 则沿径向朝里加速，提供这些额外加速的力必来自支撑的辐条，而如果我们从侧面去看所出现的情况(水平地、垂直于自旋轴看过去)，我们就看出那些辐条必须提供一绕 C 点的净余顺时针转矩. 质量 2 和 4 不需要任何这种力和转矩，因为它们的瞬时速度是在竖直方向，在进动中没有改变取向.

我们一直是在作定性的讨论，因为就上面那样说并不十分正确. 如果我们用图 14-30(b) 中的画法来计算各质量的径向加速度，应有

$$a_1 = \Omega v_1 = \Omega(v - \Omega l) = \Omega v - \Omega^2 l$$

$$a_2 = -\Omega v_3 = -\Omega(v + \Omega l) = -\Omega v - \Omega^2 l$$

在这两者中我们都能认出在一个半径为 l 的圆上的向心加速度(来自进动)，这是应该的，但 $\pm\Omega v$ 这两项却不能概括其余. 个中的原因比较细微. 我们所计算的是永远停留在转子的竖直直径的顶端和底端的速度矢量的变化. 然而，在 δt 时间内，那些质量，由

于在转动，是会从这些位置上走开的，这就相应于对径向加速度还有另一贡献 $\pm\Omega v$. （如果你感兴趣，你将在下面找到更为严格的讨论.）于是，我们最后得到下列正确表达式：

$$F_1 = 2m\Omega v - m\Omega^2 l$$

$$F_2 = -2m\Omega v - m\Omega^2 l$$

你可能认出，这正是在一个以角速度 Ω 绕竖直轴转动的参照系中在水平方向上以速率 v 运行的粒子所需要用来平衡科里奥利力和离心力之和的那些力.

F_1 和 F_3 合起来相对于质心的净余顺时针转矩是

$$M_c = 4m\Omega v r = 4mr^2\omega\Omega$$

但是我们知道 $4mr^2$ 正是四个质量这整个体系绕自旋轴的转动惯量. 因之我们有 $M_c = I\omega\Omega$，这正是所要求的. 最后，如我们所知，这个转矩是由作用于所有四个质量的重力通过转子的支架提供的.

正式的分析

考虑一质量为 m 的粒子位于图 14-31 中所示的 P 点. 建立一

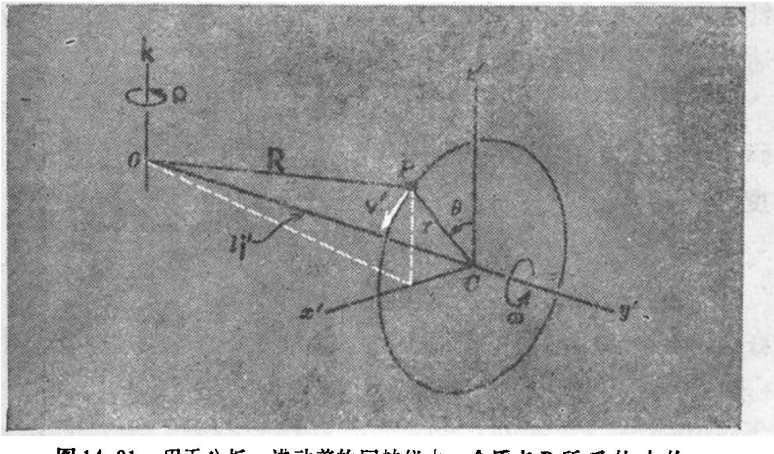


图 14-31　用于分析一进动着的回转仪中一个质点 P 所受的力的图示.

个以进动角速度 $\Omega\mathbf{k}$ 转动的坐标轴 x', y', z'（相应单位矢量为$\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}', \mathbf{k}'$）. 在这进动参照系中m的速度 $\mathbf{v}'$ 是

$$\mathbf{v}' = v\cos\theta\mathbf{i}' - v\sin\theta\mathbf{k}'$$

在这参照系内，粒子的运动只是在半径为 r 的圆周上运动，而必须由下列牛顿定律来描述：

$$\mathbf{F}' = -m\omega^2\mathbf{r}$$

但是，在一静止参照系中量得的、作用于m的真实力与 $\mathbf{F}'$ 有下列关系[参看(12-13 b)式]：

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}_{真} + \mathbf{F}_{科} + \mathbf{F}_{离}$$

由此得

$$\mathbf{F}_{离} = -m\omega^2\mathbf{r} + 2m\Omega\mathbf{k}\times\mathbf{v}' + m\Omega\mathbf{k}\times(\Omega\mathbf{k}\times\mathbf{R})$$

其中

$$\mathbf{R} = l\,j' + \mathbf{r} = l\,j' + r\sin\theta\mathbf{i}' + r\cos\theta\mathbf{k}'$$

可是我们有

$$\mathbf{k}\times\mathbf{v}' = v\cos\theta(k\times\mathbf{i}') = v\cos\theta\mathbf{j}'$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{R} = l(\mathbf{k}\times\mathbf{j}') + r\sin\theta(\mathbf{k}\times\mathbf{i}')$$

$$= -l\mathbf{i}' + r\sin\theta\mathbf{j}'$$

把这些代入上式，得

$$\mathbf{F}_{离} = -m\omega^2\mathbf{r} + 2m\Omega v\cos\theta\mathbf{j}' + m\Omega\mathbf{k}\times(-\Omega l\mathbf{i}' + \Omega r\sin\theta\mathbf{j}')$$

或

$$\mathbf{F}_{离} = -m\omega^2\mathbf{r} + 2m\Omega v\cos\theta\mathbf{j}' - m\Omega^2(l\mathbf{j}' + r\sin\theta\mathbf{i}') \quad (14\text{-}53)$$

在总力的这一表达式中我们认明有三个不同的贡献：

1. 维持m在绕C的圆周上运动所需的力.

2. 与科里奥利加速度相应的力

3. 当m到进动轴的径向距离为任何$ON(=l\mathbf{j}' + r\sin\theta\mathbf{i}')$时，它获得向心加速度(相对于进动轴)所需的力.

于是我们可以把特定的 θ 值代入(14-53)式中，这些特定值是

与构成自旋转子的任何一组粒子的瞬时位置相应的 θ 值. 我们可以立刻验明，如果令 $\theta=0$ 和 π 就会得出两个力，它的水平分量等于前面引述过的 F_1 和 F_3.

§18 章　　动[①]

无论有关回转仪进动的分析是如何令人信服，人们仍会感到奇怪，回转仪怎能象它所表现出的那样似乎完全不顾重力的作用. 答案是：这种豁免实在只是表面上的. 如果使一个转轴的两端都支着的飞轮绕一水平轴自转起来（图 14-32），则当取去一端的支持（A）时，首先出现的是这一端确实要开始竖直地下沉. 然而，此后就立刻开始了在一水平面中的进动，而且当这种情形出现时下沉运动就慢了下来，直到 A 点完全在水平方向运动. 但事情并不就此不变；紧接着出现的是，进动慢了下来，而转轴的端点重新升起，（理想地）升到它的初始位置. 这一全部过程一次次地重复着如图中所示. 这过程称为**章动**（按拉丁语是“点头”），它总是要出现的，除非回转仪在起动时的运动恰好符合稳定进动所需的条件，总的效果是飞轮的重心保持在一低于起始点的平均水平上，而我们可以猜想到，由此释放出来的重力势能提供了进动所需的动能[②].

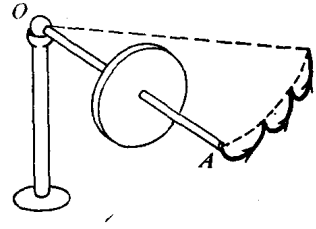


图 14-32　一个进动着的回转仪的章动.

正式的分析

我们将给上面讨论过的那类情况的章动以简单的分析，在这

① 本节可以略去而不失连贯性.

② 应是“进动和章动所需的动能”——译者注.

类情况中飞轮轴一端的支撑在 $t=0$ 时突然撤掉，图 14-33(a)指出在含自旋轴的竖直平面中看去的一些基本特点. 以 φ 表示这个平面绕一竖直轴进动的角度. 飞轮有一自旋角动量 $I_1\omega$; 它绕另外两主轴的转动惯量是 I_2 和 $I_3(I_2=I_3)$.

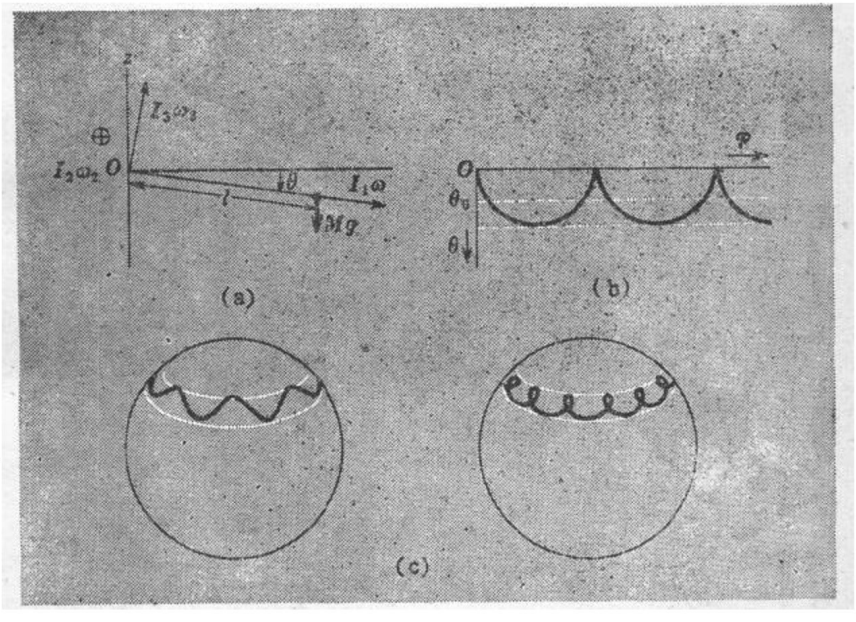


图 14-33 (a) 自旋轴起初在水平方向的回转仪的章动的中间阶段. (b)章动角(θ)同进动角(φ)的关系. (c)不同初始条件的章动例子.

由于绕竖直轴没有转矩作用，绕 Oz 轴的角动量是守恒的. $I_1\omega$ 的下倾将引进一竖直分量 $I_1\omega\delta\theta$; 这必被进动速度 Ω 的改变所产生的角动量 $I_3\delta\Omega$ 抵消. 因之,

$$I_3\delta\Omega=I_1\omega\delta\theta$$

这式可以立刻求积分而给出

$$\Omega=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{I_1\omega}{I_3}\theta \tag{14-54}$$

(我们令 $\theta=0$ 时 $d\varphi/dt=0$)

其次，让我们来看能量守恒，θ 随时间的改变意味着有绕垂直于自旋轴的水平轴的转动动能，而进动则意味着绕竖直轴的转动动能．释放出的重力势能等于 $Mgl\delta\theta$，因而我们有

$$Mgl\delta\theta=\frac{1}{2}I_2\delta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}I_3\delta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

统除以 δt 并趋近极限 $\delta t\to 0$，得

$$Mgl\frac{d\theta}{dt}=I_2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+I_3\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

把(14-54)式的 $d\varphi/dt$ 代入，有

$$Mgl\frac{d\theta}{dt}=I_2\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{(I_1\omega)^2}{I_3}\theta\frac{d\theta}{dt}$$

消去 $d\theta/dt$，并令 $I_2=I_3$，得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{Mgl}{I_3}-\left(\frac{I_1\omega}{I_3}\right)^2\theta$$

这方程具有以下形式：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-k^2(\theta-\theta_0)$$

其中 $k=I_1\omega/I_3$，$\theta_0=MglI_3/(I_1\omega)^2$．它的解是在 $\theta=\theta_0$ 附近的简振动：

$$\theta=\theta_0(1-\cos kt)$$

把 θ 的这一表达式代入(14-54)式并求积分，得

$$\varphi=\theta_0(kt-\sin kt)$$

θ 和 φ 的这种同时变化合成一角度上的圆滚线运动，如图 14-33(b)中所示．

如果改变初始条件，可以出现不同的章动，如图 14-33(c)中所示，但按上述分析的基础原理，它们全都可以理解．

§19 二分点的进动(岁差)

用牛顿第一个提出解释的另一大天文学问题来结束本书是适宜的. 那就是地球的缓慢进动: 地球在太阳和月球的引力吸引所产生的转矩作用下,象一个回转仪那样进动.

故事开始于古代的天文学家,他们通过令人惊奇的细心观测,发现"恒"星的天球似乎是在非常缓慢地由西向东相对于天球赤道和黄道的交线所确定的参照线转动着[图 14-34(a)]. 这参照线也确定了二分点的位置, 在这两点太阳正好在天球(和地球)赤道平面上,因而在全地球各处的昼夜之长相等. 由于所涉及的只是相对运动, 这现象描绘为一缓慢的**西向**漂移或是二分点本身的进动. 是希腊天文学家喜帕恰斯大约在公元前 130 年发现这现象并报道其大小约为每年 36″弧(真正的值接近于 50″). 他还认识到, 由于存在这二分点的进动, 就有了两个不同定义的年——或者是两次春分之间的时间, 在这时间里太阳回到它相对于地球的同一位置,或者是那稍为长一点的时间(长约 20 分), 太阳回到它相对于恒星的同一位置. 这两个时间分别是大家所知的**回归年**和**恒星年**.

对于喜帕恰斯说来,二分点的进动(岁差)只是一个经验事实,这一点直到 1543 年仍保持如此, 在那一年哥白尼在他的*De Revolutionibus* 中提出了解释: 地球的轴, 虽然总是相对于地球的轨道平面保持相同的倾角($66\frac{1}{2}^\circ$), 但它相对于这平面的法线画出一半角为 $23\frac{1}{2}^\circ$ 的锥面 [图 14-34(b)]. 哥白尼还断定平均进动速率是每年 50.2″,相应于整个进动周期约为 26,000 年. (这里引用的数字是异常之好的, 但哥白尼却由于误信一些不好的数据而错误地认为进动速率不是常数.)

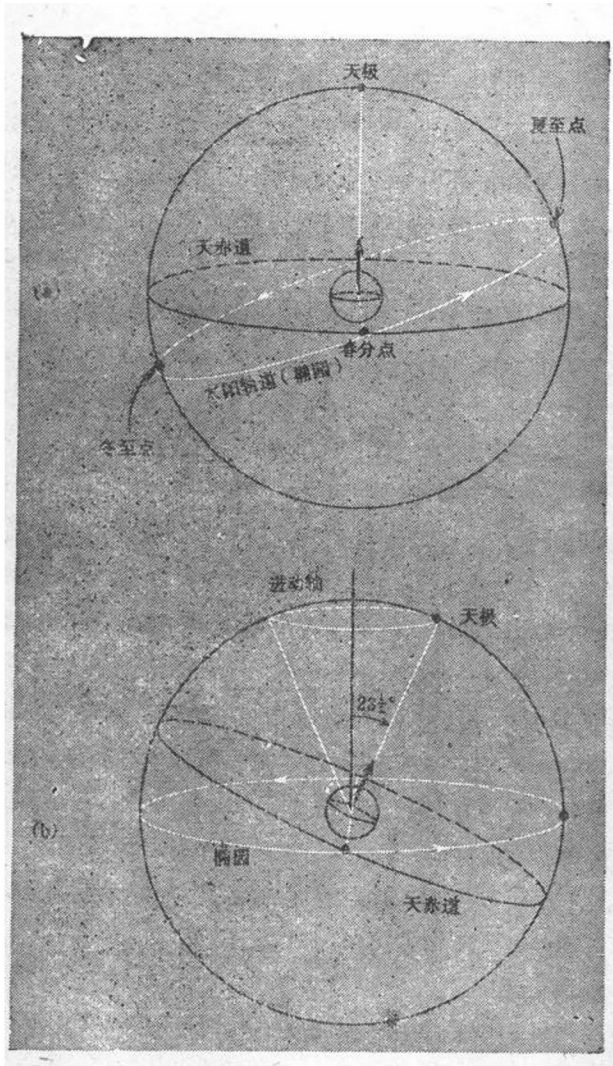


图 14-34 二分点的进动（岁差）(a) 用黄道绕天球的运动来描绘，和(b) 用地球的自转轴相对于一垂直于黄道的固定轴所画出的锥面来描绘.

因之，在牛顿当日，二分点的进动(岁差)的描述性说明是确立了的，但它的原因仍然是一神秘的事物．于是，在《原理》(第三卷：世界的体系，命题 39)中，牛顿给出了一个定量的动力学解释．它与对潮汐的解释见 49 页有着一些共同的东西；月亮是主要的原因，但太阳也起着重要作用，其比例同在潮汐作用中的比例正好一样[参看(12-25)式]．

图 14-35 表出以现代的说法来描述这现象的基础，用了回转

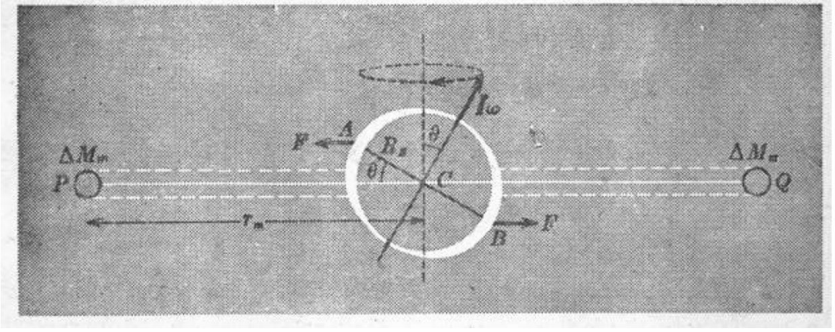


图 14-35　进动转矩来源于地球赤道的鼓出部和一环状物之间的引力吸引，这环代表月球质量在它的轨道上的有效分布．

仪进动的动力学．地球的自转轴同黄道平面的法线成 θ 角，因而地球赤道的鼓出部($\Delta R/R_E \approx 1/300$)的取向如图，是非对称的．如我们已经知道的，进动的周期极其之长，因之，从地球的观点来看，在自转轴的方向没有多少改变的一段时间(例如 100 年)内，太阳和月球都已走了很多转．在效果上这意味太阳或月球所代表的质量，从地球上看去，是环绕着它的轨道均匀地抹开的．换言之，地球周围的引力环境就象是有两个物质环那样；表示月球的那一个环见图 14-35．

进动的来源现在清楚了．地球在 A 点附近的鼓出部受到一指向图的左方的合力，而在 B 点附近的鼓出部则受到一相等的向右

的力．连在一起这两个力构成一转矩，转矩的轴由图平面指向上．由于地球从西到东的稳定转动意味着有一图中所示方向的自旋角动量 $I\omega$，结果是一进动，在进动中自旋角动量矢量的尖端画出一从东到西的圆圈．

实际的进动速率怎样呢？对此我们将指出一极轻捷的途径，目的只是为了求得一数量级．（你也许会自己设计一好得多的计算．）很清楚，最大的效应来自图 14-35 的平面——即含自旋轴和黄道的法线的那个平面——左近所牵涉到的物质的相互作用．如果考虑 A 附近一质量元 ΔM_E，受到月环的 P 和 Q 处相等的物质元 ΔM_m 的作用，则作用于 ΔM_E 的力为

$$F_m=\frac{G\Delta M_m\Delta M_E}{(r_m-R_E\cos\theta)^2}-\frac{G\Delta M_m\Delta M_E}{(r_m+R_E\cos\theta)^2}$$

或

$$F_m\approx\frac{4G\Delta M_m\Delta M_E R_E\cos\theta}{r_m^3} \tag{14-55a}$$

让我们随意地认为我们可以这样来得到总进动力的近似，即在上式中用地球的鼓出部和月环中心线 $\pm45°$ 角范围内的物质（见图 14-36 的平面视图）．这样就有 $\Delta M_m=M_m/4$．要估计 ΔM_E，我们必须计算鼓出部所含物质的体积．它的厚度约为 $R_E/300$，它的长度已选为赤道周长的四分之一，即 $\pi R_E/2$，余下的是还要找到它从北到南的一个长度．我们试用从南纬 $22\frac{1}{2}^\circ$ 到北纬 $22\frac{1}{2}^\circ$ 这一范围；这差不多正是从黄道平面到北回归线，代表地球周长的八分之一，即 $\pi R_E/4$．因之，我们这小块东西的体积将是

$$\Delta V_E\approx\frac{R_E}{300}\frac{\pi R_E}{2}\frac{\pi R_E}{4}=\frac{\pi^2R_E^3}{2400}$$

整个地球的体积是 $4\pi R_E^3/4$；因而

$$\frac{\Delta V_E}{V_E}\approx\frac{\pi^2}{2400}\frac{3}{4\pi}\approx10^{-3}$$

由于地球表面附近物质的密度只大约是平均密度的一半，我们就这样确定了一块物质，其质量近似地为

$$\Delta M_E \approx 5\times 10^{-4} M_E$$

这就完成了计算中最棘手的(也是最不可靠的)部分．把我们所得的 ΔM_m 和 ΔM_E 之值代入(14-55a)中，有

$$F_m \approx 5\times 10^{-4}\frac{GM_m M_E R_E \cos\theta}{r_m^3} \tag{14-55b}$$

显然，类似的计算可以应用(或否!)于地球-太阳之间的相互作用，从而得到总的、产生转矩的力

$$F \approx 5\times 10^{-4} GM_E R_E \cos\theta\left(\frac{M_m}{r_m^3}+\frac{M_s}{r_s^3}\right) \tag{14-56}$$

虽然 F 中数值系数的大小很可怀疑，这方程的**形式**是正确的．特别是，我们明白地看出，太阳和月球的相对贡献是何等地同计算潮汐力时相似，由同样的质量和距离的组合决定．

让我们现在转到计算转矩和进动速度．转矩简单地是

$$M_c = 2R_E F\sin\theta$$

如果我们把地球看作一均匀球，转动惯量就是 $2M_E R_E^2/5$，因而进动方程为

$$2R_E F\sin\theta = \frac{2}{5}M_E R_E^2 \omega\Omega\sin\theta$$

或

$$\Omega = \frac{5F}{M_E R_E \omega}$$

$\omega \approx 7\times 10^{-5}$ 秒$^{-1}$．把(14-56)的 F 代入，就有

$$\Omega \approx \frac{2.5\times 10^{-3} G\cos\theta}{\omega}\left(\frac{M_m}{r_m^3}+\frac{M_s}{r_s^3}\right)$$

$$\approx 2.5\times 10^{-9}\left(\frac{M_m}{r_m^3}+\frac{M_s}{r_s^3}\right)$$

今

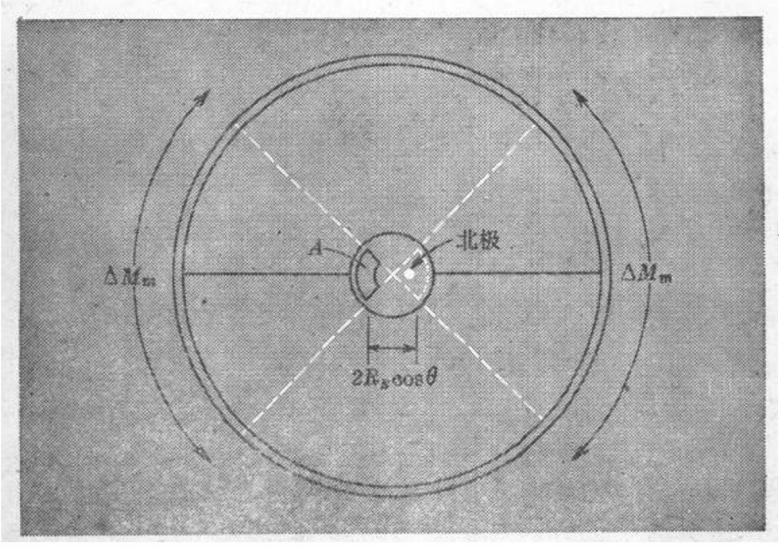


图 14-36　平视图，说明由于月球作用于地球赤道的鼓出部而来的、产生进动的转矩的粗略模型.

$$M_m \approx 7\times10^{22} \text{ 千克} \qquad r_m^3 \approx 6\times10^{25} \text{ 米}^3$$

$$M_s \approx 2\times10^{30} \text{ 千克} \qquad r_s^3 \approx 4\times10^{33} \text{ 米}^3$$

因之

$$\Omega \approx (2.5\times10^{-9})(1.7\times10^{-3}) \approx 4\times10^{-12} \text{ 秒}^{-1}$$

而

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 1.5\times10^{12} \text{ 秒} \approx 50{,}000 \text{ 年}$$

我们可以试着去把这结果略为修整得好一些——例如，我们有点低估了地壳的平均密度，而(在把地球看作一均匀球时)又有点高估了转动惯量. 这两者都使我们低估了进动速率而得到太大的进动周期值. 但鉴于在计算中的其他部分所作的粗糙假设，我们也就不必对这类的微小修正过于重视了. 重要的事情是，用相当简单的方法，我们证实了二分点进动(岁差)确能用牛顿的动力学原

理去理解. 但牛顿是第一个做到这一点的!

习　题

14-1　(a) 试设计一判据来判明一两粒子体系是否受到外力，用这判据于下述一维体系. 观察到的是，一质量为 m 的粒子走路径

$$x(t)=A\sin\omega t+L+vt$$

另一质量为 M 的粒子走路径

$$X(t)=B\sin\omega t+Vt$$

除掉 $mA=-MB$ 之外，不同的常数是任意的.

(b) 试用于体系

$$x(t)=A\sin\omega t \quad 和 \quad X(t)=B\sin(\omega t+\varphi)$$

其中 A 和 B 的关系同前，而 $\varphi\neq 0$.

14-2　考虑一个三粒子体系，每一粒子的质量为 m，它们始终保持在同一平面内. 这些粒子互相作用着，其方式总符合牛顿第三定律，如果在下列表中给出的不同时刻粒子 A, B 和 C 具有所说的位置，试判断有无任何外力作用于这体系

时　间	A	B	C
0	(1,1)	(2,2)	(3,3)
1	(1,0)	(0,1)	(3,3)
2	(0,1)	(1,2)	(2,0)

14-3　两个溜冰的人，各重 70 千克，以 4 米/秒的速率在相距 1.5 米的平行线上沿相反方向滑行. 当他们快要相遇而过时，两人互相拉起手，而绕着他们的共同质心作圆运动.

(a) 他们的总角动量是多少?

(b) 第三个溜冰的人以 2 米/秒的速率沿另一与前两者同方向的平行线滑行，这条线离较近的那条线 6 米远. 从他的立脚点看，另外两个溜冰者转圈时的总角动量为何?

14-4　一个一氧化碳(CO)的分子沿着一直线运动，动能等于室温下的 kT 值(k=玻耳兹曼常数$=1.38\times10^{-23}$焦耳/°K). 这分子还绕着它的质心

转动，总角动量等于 $\hbar(=1.05\times10^{-34}$ 焦耳·秒)，CO 分子的原子核之间的距离为 1.1 埃．试比较其转动运动的动能和平动的动能，这一结果对于在室温下激发 CO 气体分子的这种转动运动的难易有什么启示？

14-5　一质量为 M、半径为 R 的均匀圆盘以初始角速度 ω_0 绕一竖直轴自由地转动．然后将沙粒以细流形式倾注在盘上半径为 $r(<R)$ 处堆积起来，沙粒以匀速 μ(单位时间的质量)加入．

(a) 在一给定瞬间，角速度和转动动能随时间而变化的变化率是多少？

(b) 经过多长时间后转动动能减少到其初始值的一半？这一能量发生了什么情况？

14-6　两个人，每人质量 100 千克，站在一质量为 200 千克、半径为 3 米的转台的直径的两端．初始时，转台每 2 秒钟转一圈．这两人以相同的快慢向转台的中点走去．

(a) 计算最终的转速和转动动能增长的速率．

(b) 分析，至少是定性地、转动动能是如何出现增加的．

(c) 这两人，当他们走向中心时，在离转轴的径向距离多远的地方受到最大的离心力？

14-7　估计一飓风中的动能．取空气的密度为 1 千克/米^3．

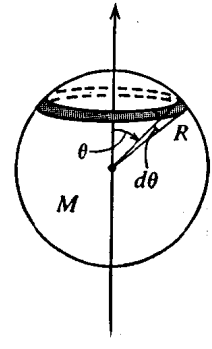
14-8　计算一连续体转动惯量近似值的一种有用方法是把物体看作是由集中的质量构成的，然后计算 Σmr^2 之值．举例说，取一根质量为 M、长度为 L 的均匀长杆(其横向大小远小于 L)．我们知道，它绕一端的转动惯量是 $ML^2/3$．试就下述三种情况进行分析：

(a) 最原始的近似是认为全部质量 M 集中在中点，距离端点为 $L/2$ 之处．你发现这一近似很差是不足为奇的．

(b) 其次，认为这杆是由两个质量组成的，每个质量等于 $M/2$，分别距离端点 $L/4$ 和 $3L/4$．

(c) 考察一下进一步细分——例如，分为 3 分、5 分、10 分——所得到的改进．

14-9　(a) 计算一质量为 M、半径为 R 的薄壁球壳绕一通过它的中心的轴的转动惯量．把这球壳看成一组环，各环由与题图中的轴成各种 θ 角、位于 $d\theta$ 角范围内的物质组成(见图)．



(习题　14-9)

(b) 证明一密度均匀的实心球绕一通过它

中心的轴的转动惯量公式：$I=2MR^2/5$. 你可以仿(a)中所说的方法进行计算，不过要把体系考虑为一堆圆盘而不是圆环.

14-10 (a)计算一薄正方板绕通过它中心并垂直于它的平面的轴的转动惯量.（利用垂直轴定理.）

(b) 恰当地利用平行轴和垂直轴定理，计算一个中空的正立方盒绕通过两个对面中心的轴的转动惯量.

(c) 利用(a)中结果，推导一均匀实心正立方体绕通两对面中点的轴的转动惯量.

(d) 对于一质量为 M、边长为 a 的立方体，你应得结果 $Ma^2/6$. 值得注意的是，绕**任何**通过这立方体中心的轴的转动惯量都具有与此相同的值. 试着看你在证实这一结果方面能走多远，不妨考虑其他特殊的轴——例如，通过这立方体的两对角的轴或是通过对边两中点的轴.

14-11 参考图 11-19(a) 所示在地球内部密度随径向距离而变化的情况. 利用这个图，把地球绕它的轴的转动惯量与具有相同质量和半径而密度均匀的球的转动惯量比较一下. 你不妨把地球看成是由一个中心核和两个厚的同心球壳组成，各自具有近似均匀的密度. 这三个区域的界限相应于图中所示的密度突变.[另一法是，把地球看成是由三个叠合的实心球组成——一个基本球，占据着地球的整个体积，密度为最外层的($r>0.54R_E$)，另外两个球的密度相应于相邻区域的平均密度差.]

14-12 (a) 一质量为 M、半径为 R 的圆箍沿一斜面**滚**下，斜面与水平成 θ 角. 这意味，当它中心的线速度为 v 时，它的角速度为 v/R. 证明这滚动圆箍的动能是 Mv^2.

(b) 有一个关于一野营物理学家的传说故事，说他有一罐头肉汤和一罐头豆，但两者的标签都已脱落，因而他让它们在一块板上滚下来以辨认它们. 你想会出现什么情况呢？这方法有效吗？（试试看！）

14-13 一滑雪者站在$-30°$的雪坡上享受着山中空气，突然注意到一个巨大的雪球向他滚来. 当他注意到雪球时，它离他只有 100 米远并以速率 25 米/秒运行. 这滑雪者几乎立刻以 10 米/秒的速度滑动并开始以加速度 $g\sin\theta(=g/2)$沿斜坡下滑，他能逃得掉吗？（设这雪球具有一恒定的、相应于一个给定半径的球无滑动地在斜坡上滚下来的加速度，又设这雪球绕通过它中心的轴的转动惯量为 $2MR^2/5$.）

14-14 上题提出另外一个问题. 如果一物体在一斜坡上滚下来，并在

途中集聚物质，那么怎样把它的加速度同一个不这样增加物质的类似物体作实际比较呢？为了使你自己能够考虑一相对地简单的情况，可以以圆柱体而不是球体为例，这柱体在滚动时不断增加其大小．不妨对柱体半径的增长率与当时的半径 R 和瞬时速率 v 的依赖关系作任何看起来是合理的假设．

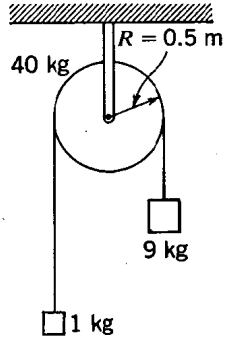
14-15　9 千克和 1 千克的两个质量挂在一根绳子的两端，绳子绕过一质量为 40 千克、半径 0.5 米的滑轮$\left(I=\frac{1}{2}MR^2\right)$，如图所示．这体系从静止状态释放，这时 9 千克的质量下降，滑轮开始转动．

(a) 9 千克质量的加速度是多少？

(b) 在 9 千克的质量下降 2 米后，滑轮的角速度是多少？

(c) 在滑轮和 9 千克质量之间那部分绳子中的张力是多少？滑轮与 1 千克质量之间的绳中的张力是多少？

(d) 如果绳子与滑轮之间的摩擦系数为 0.2，那么为了防止滑动，绳子最少要绕滑轮多少圈．（参考习题 5-14.）



（习题　14-15）

14-16　一娱乐园，有一下坡跑道，竞赛者乘一小车在斜率为 30° 的这跑道中下滑．每一小车有四个轮子，每一个的质量为 20 千克、直径 1 米．车架的质量为 20 千克．

(a) 如果乘车者的质量为 50 千克，车的加速度是多少？（设一个轮子的转动惯量为 $0.8MR^2$，R 为轮的半径．）

(b) 如果有两个乘车者，质量分别为 50 和 60 千克，同时出发，问当胜者通过斜坡下面 60 米的终线时他们之间的距离是多少？

14-17　一根长为 $3b$ 的均匀杆，支在离一端 x 处象一个摆那样摆动．问，要使这个摆的周期同一个长为 $2b$ 的单摆的周期一样，x 之值(s)应当是多少？

14-18　(a) 一块质量为 m 的油灰粘在一质量为 $2m$、半径为 R 的均匀圆盘十分接近边缘之处．圆盘放置在一张桌子的边上，它在桌上可以滚动而不滑动．平衡位置显然是那块油灰最靠近桌面时的位置．试求在这位置左右作小振动的周期和等价单摆的摆长．

(b) 一圆圈挂在墙壁上的一根钉子上，求它作小振动的周期和等价单摆

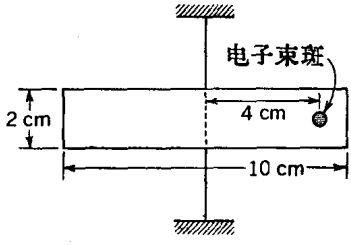
的摆长.

(在这些以及类似的问题中,可从能量守恒的方程出发.体系越复杂,这种方法的好处比直接应用牛顿定律的好处越大.)

14-19 一质量为 M、半径为 R 的均匀圆柱体可以绕一根轴转,但受到一蜷线弹簧的制约(就象你的表里面的摆轮那样).当柱体从它的平衡位置扭转 $-\theta$ 角时,弹簧施加一回复力矩等于 $-c\theta$.试建立这体系的角摆动的方程并求出其周期 T.

14-20 假设你的两腿多少有点象刚性摆那样摆动,试估计跨一步的大致时间.据此估计你安适地行走的速率,用每小时多少英里表示.它与你实际的步伐比较怎样?

14-21 一架用来测量电子的动量的扭秤,由一 $10\times2\times0.005$ 厘米的矩形薄铝箔叶片固着在一非常细的竖直丝上构成,如图所示.扭摆的周期是20秒,铝的密度为水的 2.7 倍.



(习题 14-21)

(a) 悬丝的扭力常数是多少(用米·牛顿/弧度表示)?

(b) 在离开轴 3 厘米处要施加多大的、垂直于叶片表面的水平力才能产生 10° 的角偏转?

(c) 一束 1 毫安的电子经过 500 伏加速垂直地打在叶片上大约离轴 4 厘米之处.设电子就停止在叶片上,那会产生多大的稳定角偏转?

14-22 长为 l、圆截面半径为 a 的一根线或丝的扭力常数是 $c=E_s\pi a^4/2l$,其中 E_s 是材料的一个弹性常数,称为切变模量,以牛顿/米^2 量度.这样一根丝所能承受的最大负荷等于其截面面积 πa^2 乘上材料的抗张强度,也用牛顿/米^2 量度.玻璃丝的 E_s 约为 2.5×10^{10} 牛顿/米^2,抗张强度约为 10^9 牛顿/米^2.

(a) 试计算在一重力扭秤中能安全承受住两个质量各为 20 克的铅球的

玻璃丝的最细直径，安全系数设为 3 左右.

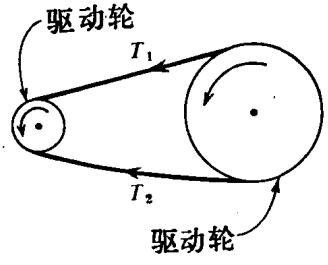
(b) 如果这两个球是在一根长为 20 厘米的轻质杆的两端、而且悬丝的长度也是 20 厘米，这体系的扭转振动的周期是多少？（测量这个周期是推算悬丝的扭力常数的实用方法.）

(c) 如果把质量各为 2 千克的两个铅球分别放在小悬球的近旁，两者的球心距离小球心 5 厘米，所产生的角偏转多大？如果让从扭杆上一面镜子反射出来的光射在 5 米外的标尺上，上述偏转所引起的、光点的线位移是多少？把这结果同习题 5-3 中所用、有关一卡文迪许实验的图作一比较.

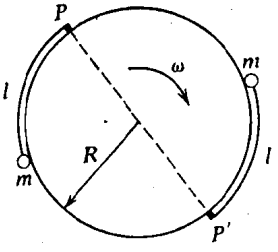
14-23 一个厚度均匀的轮子，质量为 10 千克，半径为 10厘米，通过一条皮带由一电动机驱动(见图). 电动机上的驱动轮的半径为 2 厘米，电动机能传送大小为 5 米·牛顿的转矩.

(a) 设皮带在轮上不打滑，问把大轮从静止加速到每分钟 100 转需要多长时间？

(b) 如果皮带与轮子之间的摩擦系数为 0.3，轮子两旁的皮带中的张力是多少？（设皮带与轮子的接触面跨及轮子周边的一半.）



(习题 14-23)



(习题 14-24)

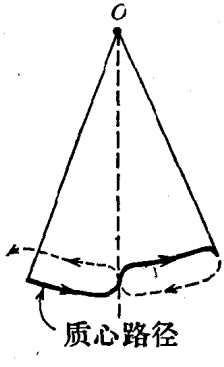
14-24 使一以半径为 R 转动的宇宙飞船停止转动的一种可能方案是让系在飞船的两点 P 和 P' 上、长为 l 的绳子两端处的两个小质量 m 甩开(见图). 初始时，这两个质量是贴在图中所示的位置上并随着飞船的船体转动的. 当这两个质量甩开到最大距离，使绳子沿径向伸直开时绳的两端 P 和 P' 就脱离飞船. 对给定的 m、R 和 I(飞船的转动惯量)，l 之值应是多少才能使飞船在这一操作后处于不转动的状态？把这结果应用于一艘可以看作是一质量为 M、半径为 R 的均匀圆盘的飞船.（也许还可以代入一些数字.）

14-25 把秋千“反复荡高”以求增大其运动的幅度的技术可以通过看别

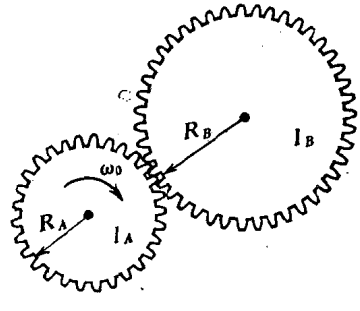
人的榜样或者通过反复摸索(不太容易)学到. 这动作的力学不是显而易见的. 按照这过程的一种模型,荡高的组成如下: 在每次通过竖直线或最低点时荡秋千者突然升高其质心(站起来并保持在座位的上方),随后, 在每一反转点,回到荡板上静坐着(见图). 设吊绳总是直的, 而且在这"摆"的有效摆长瞬间改变时,角动量守恒不仅能应用于低点处荡高的运动, 也可以应用于反转点之处.

(a) 按上面所指出的各点作出分析,并证明增大幅度是可以达到的.

(b) 考虑上述分析中哪些方面可能有缺点. 还有, 这一理想化的技术与孩子们日常实际荡秋千所用的方法很相符吗?[上面所提示的分析见于 P. L. Tea, Jr., and H. Falk, "Pumping on a Swing," ("荡秋千") *Am. J. Phys.*, **36**, 1165(1968).]



(习题 14-25)



(习题 14-26)

14-26 两齿轮 A 和 B,半径分别为 R_A 和 R_B,转动惯量分别为 I_A 和 I_B,装在两根平行的轴辊上,彼此并不怎么接触(见图). 两者都能完全自由地在它们各自的轴辊上转动. 初始时 A 以角速度 ω_0 转动, 而 B 则静止. 在某时刻,轴辊之一略为移动,使两齿轮啮合. 试求出两齿轮的最终角速度,用所给的诸量表示. (**注意**: 别想随便运用角动量守恒. 而应考虑由于接合而产生的力和转矩.)

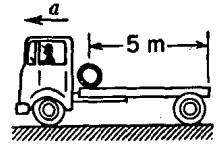
14-27 一节直径较大而管壁相对地薄的钢管, 如图所示装放在一辆平板运货车上. 卡车的司机没有注意到这管子并未捆绑好就以 $0.5g$ 的加速开动车子. 结果, 管子(相对于车板)无滑动地向后滚去而掉到地上. 车板长 5 米.

(a) 管子掉到地上时它的水平速度是多少?

(b) 在这一时刻它的角速度是多少?

(c) 如果管子和地面之间的摩擦系数为 0.3, 它在开始无滑动地滚动之前要滑行多远?

(d) 当它的运动变为无滑动的滚动时, 它的线速度是多少?



(习题 14-27)

14-28 (a) 用弹子棒击台球时要击在球中心的上方多远处才能保证球开始无滑动地滚动?

(b) 如果球与桌面之间的摩擦系数是μ, 试分析在球心的高度处击球的后果.

14-29 一人猛踢在一竖直均匀柱子的底端, 柱子是插在地上的有 6 英尺露出在地面上. 不幸柱子的入土处已腐烂, 就在该点折断. 要领会为何"不幸"二字是恰当之词, 可探寻一下柱子顶端随后的运动.

14-30 参考(原书 p. 673)关于一矩形板绕它平面内的一根轴转动的讨论. 利用这讨论中的符号和解题法证明: 绕这板的平面内一根垂直于 ω 的轴的角动量分量 L' 等于 $I_x\omega_x$ 和 $I_y\omega_y$ 在这个方向上的分量之和, 即

$$L' = I_x\omega_x \sin\delta - I_y\omega_y \cos\delta$$

14-31 一形如均匀圆盘、半径为 5 厘米的飞轮装在一根轴上, 这轴恰好能装配在一直径为 12 厘米的常平环的直径上. 令飞轮以每分钟 1000 转的速度转起来, 并把常平环在它与转轴的一端相遇之点支着. 计算进动速率, 用每分钟多少转表示.

14-32 在大多数汽车中, 引擎的转轴都是指向着车身的前后的, 引擎的回转特性在高速转动时不能忽略. 当汽车沿着路上的一个弯道行驶时, 这回转特性有使车头起伏的倾向. 如果汽车的引擎是横着装的, 相应的效应怎样? 试对这种效应的重要性作出某些定量的估计. 想一想是左转弯道还是右转弯道对于驾驶这车有使失去控制的更大的危险性.

14-33 看看你能否接受正文中所提出的挑战, 对二分点的进动作一更为使人敬佩的计算.

附　录

§1 米制单位

建立一种单位制并设置长度、质量和时间的定量量度标准包括着大量实际问题，也涉及一些哲学问题(如第二章中所讨论的)．原标准是在不断地修订和改进的，目前的倾向是把一些具有可复演性和易得性的优点的原子或原子核方面的现象结合进去．

1．质量

标准千克是一个保存在法国塞夫勒的铂-铱圆柱体，其质量定义为正好等于1千克，质量的副标准用杠杆天平与这一原始标准作比较得到．

2．长度

从前的标准是定义为一根铂-铱杆上两道刻痕之间的距离．现已由原子标准代替，原子标准所定义的米等于同位素氪-86的橘红色谱线的1,650,763.73个波长的距离．

3．时间

(自1967年以来)秒已定义为一原子钟振荡9,192,631,770周的时间，这钟是由与同位素铯-133相关联的一个特征频率来控制的．

4．词冠

用词冠来表示千克、米和秒这些基本单位的一定倍数作为量度的单位．下面是这种词冠(以及每一词冠所代表的基本单位的倍数)的一张表，

词　冠	缩　写	倍　数
太(tera-)	T	10^{12}
吉(giga-)	G	10^{9}
兆(mega-)	M	10^{6}
千(kilo-)	k	10^{3}
厘(centi-)	c	10^{-2}
毫(milli-)	m	10^{-3}
微(micro-)	μ	10^{-6}
纳(nano-)	n	10^{-9}
皮(pico-)	p	10^{-12}
飞(femto-)	f	10^{-15}
阿(atto-)	a	10^{-18}

此外，特别有用的、米的倍数有特殊的名称：

10^{-15} 米＝1 费米(F)

10^{-10} 米＝1 埃(Å)

10^{-6} 米＝1 微米(μ)

§2 换算因数

所引数值大都四舍五入到三位有效数字，如要精确值，可参考技术手册或高等物理学教本.

平面角　1 弧度＝57.3°(57°20′)
＝(1/2π)周＝0.159 周

立体角　1 球面度＝(1/4π)球＝0.0796 球

长　度　1 英寸＝2.54 厘米
1 英尺＝30.5 厘米
1 米＝39.37 英寸
1 千米＝0.621 英里＝3281 英尺
1 英里＝5280 英尺＝1609 米

1 天文单位 $=1.49\times10^{8}$ 千米

1 光年 $=9.46\times10^{12}$ 千米

1 秒差距 $=3.08\times10^{13}$ 千米

质量，重量和力　（g 的标准值取为 9.80665 米/秒^2）

1 牛顿 $=10^{5}$ 达因 $=0.225$ 磅

1 千克质量重 2.2 磅（或 9.8 牛顿）

1 磅物体的质量为 0.4536 千克，重为 4.448 牛顿

体　积　1 升是 1 千克的水在它的密度最大时（3.98°C, 1 大气压）的体积 $=1000.028$（厘米）^{3}

1 立方英寸（1 米^3）$=16.4$（厘米）^{3}

1 立方英尺 $=0.0283$ 米^3

1 加仑（美）$=231$（英寸）^{3}

1 加仑（英）$=277$（英寸）^{3}

时　间　（全部是平均太阳日（秒））

1 年 $=365.2$ 天 $=3.16\times10^{7}$ 秒

1 天 $=8.64\times10^{4}$ 秒

速　率　1 英尺/秒 $=0.305$ 米/秒 $=1.10$ 千米/小时 $=0.682$ 英里/小时

1 英里/小时 $=0.447$ 米/秒 $=1.61$ 千米/小时 $=1.47$ 英尺/秒

压　强　1 大气压 $=76$ 厘米汞柱 $=1.013\times10^{5}$ 牛顿/米^2

1 毫米汞柱 $=1$ 托 $=133$ 牛顿/米^2

能量和功　1 焦耳（1 牛顿·米）$=0.738$ 英尺·磅

$=6.24\times10^{18}$ 电子伏

$=0.239$ 卡 $=10^{7}$ 尔格

1 电子伏 $=1.60\times10^{-19}$ 焦耳

等价能量 $(E=mc^2)$：

1 电子质量 $=0.511$ 兆电子伏

1 质子质量 $=938.2$ 兆电子伏

1 中子质量 $=939.5$ 兆电子伏

1 原子质量单位 $=931.1$ 兆电子伏

1 千瓦·小时 $=3.6\times10^{6}$ 焦耳

§3 一般常数

c 光在真空中的速率 $=3.00\times10^{8}$ 米/秒

G 引力常数 $=6.67\times10^{-11}$ 牛顿·米^2/千克^2

N_0 阿伏加德罗常数 $=6.02\times10^{23}$/分子量

h 普朗克常数 $=6.63\times10^{-34}$ 焦耳·秒

$\hbar$ 普朗克常数/$2\pi=1.05\times10^{-34}$ 焦耳·秒

e 电子电荷 $=1.60\times10^{-19}$ 库仑

m_e 电子静止质量 $=9.11\times10^{-31}$ 千克

M 核子静止质量(质子或中子；两者的精确质量略有差异) $=1.67\times10^{-27}$ 千克

M_p/M_e (质子/电子)质量比 $=1836$

1 原子质量单位 $=\frac{1}{12}C^{12}$ 的质量 $=1.66\times10^{-27}$ 千克

注意： 天文数据见本书 第一册 32 页，第二册 68 页，103 页，本册 99 页.

参考书目

把这书目在某种程度上予以分类看来是有用的，尽管这种划分并非总是恰如其分的．特别是，除了按习惯列出各种类型和不同深浅的教科书之外，力学的发展与观测性天文学和整个科学观点的兴起之间的深刻牵连也提醒人们要对这些方面加以特别注意．由于讲授力学常常是更具综合性的入门课程的一部分，所以也开列了几本为这一目的而写的书．对于这么广泛的课题，难于说出"完备"二字；如因无知或疏忽而漏掉许多本应包括进去的书名，作者谨先致歉意．

一些经典著作

Ptolemy, C., *The Almagest*(R. C. Taliaferro 译)Encyclopaedia Britannica, Inc., Great Books, Vol. 16, pp. 1-478, Chicago, 1952.

本书结合托勒密的地心宇宙观展示出在差不多2000年前已经积累起来了的、关于天空的、了不起地详细和精确的知识．

Copernicus, N. *On the Revolutions of the Heavenly Spheres* (1543) (C. G. Wallis 译), Encyclopaedia Britannica, Inc., Great Books, Vol. 16, pp. 505-838, Chicago, 1952.

一篇完整的文件，说明引导哥白尼据以提出他的日心宇宙图象的证据和推理．

Kepler, J., *Astronomia Nova*(Commentaries on the Motion of Mars) (1609), Johannes Kepler, Gesammelte Werke, Vol. 3, C. H. Beck, Munich, 1937.

本书详细说明开普勒对火星轨道的分析．它包含开普勒关于行星运动的头两个定律的叙述．(不幸的是无英译本可读．)

——., *The Harmonies of the World*(1619) (C. G. Wallis 译), Encyclopaedia Britannica, Inc., Great Books, Vol. 16, pp. 1009-1085, Chicago, 1952.

这书的科学重要性在于它包含开普勒第三定律的叙述. 不过, 本书的大部分是关于开普勒终生迷恋于对宇宙的几何和数值对称性的追求的见证.

Galilei, G., *The Starry Messenger* (1610) (Stillman Drake 译), 载于*Discoveries and Opinions of Galileo*, Doubleday Anchor, New York, 1957.

伽利略自己对他用他新发明的望远镜所作的第一次发现的说明, 包括他观察木星的月亮的样本.

——., *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems* (1632) (Stillman Drake 译), Univ. of California, Berkeley, California, 1953.

伽利略把他对哥白尼系的支持生动地戏剧化了.

——., *Two New Sciences* (1638) (H. Crew 和 A. Disalvio 译), Dover, New York, 1952.

主要是伽利略关于运动的讨论. 也介绍了一些他对物质的结构和强度的某些思想.

Newton, I., *Principia* (Mathe matical Principles of Natural Philosophy) (1687). F. Cajori 所修订的、A. Motte 的译本 (1729). Univ. of California Press, Berkeley, California, 1960.

这本非凡的书仍可称为最伟大的科学巨著. 任何读过它的人都必定对(剑桥"三一学院"的教堂中牛顿的雕像上)有关牛顿的描绘引起共鸣; 雕像上的铭文说他是"以其创造能力超越全人类"的人.

传　记

Andrade, E. N. da C., *Sir Isaac Newton*, Doubleday Anchor, New York, 1958.

Armitage, A., *Copernicus*, Yoseloff, New York and London, 1957.

——., *John Kepler*, Roy, New York, 1966.

Caspar, M., *Kepler* (C. D. Hellman 译), Abelard-Schuman, London and New York, 1959.

De Santillana, G., *The Crime of Galileo*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1955.

Fermi, L. and Bernardini, G., *Galileo and the Scientific Revolution*, Basic Books, New York, 1961.

Koestler, A., *The Watershed*, Doubleday Anchor, New York, 1960(根据同一作者所著 *The Sleepwalkers* 一书的主要部分, Macmillan, New York, 1959).

Moore, P., *Isaac Newton*, Putnam, New York, 1958.

More, L. T., *Isaac Newton*(1934), Dover, New York, 1962.

North, J. D., *Isaac Newton*, Clarendon Press, Oxford, 1967.

强调历史方面和哲学方面的著作

Arons, A., *The Development of the Concepts of Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.

Ball, W. W. R., *An Essay on Newton's Principia*, Macmillan, London, 1893.

一本非常引人入胜的、研究 Principia 及其来源的书.

Colodny, R. (编), *Beyond the Edge of Certainty*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

论文集, 其中许多是关于经典力学的基础的.

Cooper, L. N., *An Introduction to the Meaning and Structure of Physics*, Harper and Row, New York, 1968.

Dijksterhuis, E. J., *The Mechanisation of the World Picture*(C. Dikshoorn 译), Clarendon Press, Oxford, 1961.

Dugas, R., *A History of Mechanics*(J. R. Maddox 译), Routledge and Kegan Paul, London, 1957.

Einstein, A. and Infeld, L. *The Evolution of Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1938.

一本概观性的书, 用简单的、非数学性的语言一般地把力学的观点从物理理论的来龙去脉中去考察.

Gillispie, C. G., *The Edge of Objectivity*, Princeton Univ. Press,

Princeton, New Jersey, 1960.

副标题为"An Essay in the History of Scientific Ideas",这一优雅而具学者风度的书用了好几章来谈及力学的发展.

Gold, T. (编), *The Nature of Time*, Cornell Univ. Press, Ithaca, New York, 1967.

一会议报道，一些卓越的科学家出席了这次会议，并讨论了他们的思想.

Hanson, N. R., *Patterns of Discovery*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1958.

作者既精通物理又精通哲学,讨论了一些理论是如何问世的. 这书以量子理论结尾,但在中间探索了经典力学，这是一项引起争论的和不寻常的研究工作.

Herivel, J. W., *The Background to Newton's Principia*, Clarendon Press, Oxford, 1965.

类似于 Rouse Ball 的书(见上),但利用了一些较新近的学识.

Hesse, M., *Forces and Fields*, Nelson, London, 1961.

关于"超距作用"概念的细心而有学者风度的研究.

Holton, G. and Roller, D. H. D., *Foundations of Modern Physical Science*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1958.

Jammer, M., *Concepts of Force*, Harper Torchbooks, New York, 1962. *Concepts of Mass*, Harper Torchbooks, New York, 1964. *Concepts of Space*, Harper Torchbooks, New York, 1960.

在这三本专著中,作者主要是从哲学的观点讨论力学的原始概念.

Kemble, H., *Physical Science, It Structure and Development*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1966.

一本很好的一般概观性的书.

Lindsay, R. B. and Margenau, H., *Foundations of Physics*, Dover, New York 1957.

对物理学中的基本理论概念作了专门性的、并以充分讨论充实了的说明.

Mach, E., *The Science of Mechanics* (9th ed., 1933) (T. J. Mc Cor-

mack 译), Open Court Publishing Co., La Salle, Illinois, 1960.
第一本对经典力学的基础作了透彻评论的书(第一版, 1883), 至今仍值得一读.

Magie, W. F., *A Source Book in Physics*, McGraw-Hill, New York, 1935.
先驱者们著作的便于理解的摘录.

Poincaré, H., *Science and Hypothesis* (1903), Dover, New York, 1952.
十九世纪数学物理学的伟人之一的名著, 对科学的基础方面作了有名的检查.

Reichenbach, H., *The Philosophy of Space and Time*, Dover, New York, 1957.
着重介绍相对论(特殊和广义)方面的内容.

Schlegel, R., *Time and the Physical World*, Dover, New York, 1968.

Small, R., *An Account of the Astronomical Discoveries of Kepler* (1804), Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wisconsin, 1963.
关于开普勒的研究工作的详细阐述的复印本. 虽已老旧, 但无近代的复本.

Truesdell, C., *Essays in the History of Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1968.
论文集, 富有插图画像和有关力学的经典著作的复制品. 这位博学的作者(一位应用数学家)提出了许多尖刻的评论.

Whitrow, G. J., *The Natural Philosophy of Time*, Nelson, London, 1961.
一位宇宙论专家写的长篇论文.

天文学方面

Abell, G., *Exploration of the Universe*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

Abetti, G., History of Astronomy (B. B. Abetti 译), Abelard-Schu-

man, New York, 1952.

Baker, R. H. and Fredrick, L. W., *An Introduction to Astronomy* (第七版), Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1968.

Berry, A., *A Short History of Astronomy* (1898), Dover, New York, 1961.

一本极佳的说明事实的书.

Cohen, I. B., *The Birth of a New Physics*, Doubleday Anchor, New York, 1960.

一本极佳的、半普及性的小书，阐述从经典的观测天文学到牛顿的总的发展过程.

Dreyer, J. L. E. (W. H. Stahl 修订), A *History of Astronomy from Thales to Kepler*, Dover, New York, 1953.

Duncan, J. C., *Astronomy* (5th ed.), Harper and Row, New York, 1955.

Hoyle, F., *Astronomy*, Macdonald, London, and Doubleday, New York, 1962.

一本优美的、有大量插图的阐述天文学的书，载有许多有关天文学的历史发展方面使人神往的文件.

Hubble, E., *The Realm of the Nebulae* (1936), Dover, New York, 1958.

发现河外宇宙的故事，作者是在阐明这问题方面做得最多的人.

King, H. C., *Exploration of the Universe*, Signet Books, New York, 1964.

一本极佳的、简短原始资料集.

Krause, A., *Astronomy* (M. and H. Seddon 译), Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1961.

Kuhn, T. S., *The Copernican Revolution*, Vintage Books, New York, 1959.

Lodge, O. J., *Pioneers of Science*, Macmillan, London, 1893.

根据与牛顿力学有关的天文学发展史的一系列演讲编写的. 充满了有趣的细节.

Motz, L. and Duveen, A., *Essentials of Astronomy*, Wadsworth,

Belmont, California, 1966.

Pannekock, A., *A History of Astronomy*, Allen and Unwin, London, 1961.

Turner, H. H., *Astronomical Discovery*, Edward Arnold, London, 1904.

一些一般性教科书

Adair, R. K., *Concepts in Physics*, Academic Press, New York, 1969.

Atkins, K. R., *Physics*, Wiley, New York, 1965.

Borowitz, S. and Bornstein, L. A., *A Contemporary View of Elementary Physics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M., *The Feynman Lectures in Physics*, Vol. I, Addison-Wesley, Recding, Massachusetls, 1963.

Ford, K. W., *Basic Physics*, Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1968.

Halliday, D. and Resnick, R., *Physics for Students of Science and Engineering*, Vol. I, Wiley, New York, 1966.

Miller, F., Jr., *College Physics*, Harcourt, Brace & World, New York, 1959.

P. S. S. C., *College Physics*, Heath, Lexington, Massachusetts, 1968.

Rogers, E. M., *Physics for the Inquiring Mind*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.

Sears, F. W., and Zemansky, M. W., *University Physics*, Part I, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.

Weidner, R. T. and Sells, R. L., *Elementary Classical Physics*, Allyon and Bacon, Boston, Massachusetts, 1965.

力学教科书

Alonso, M. and Finn, E. J., *Mechanics* (Fundamental University

Physics Vol. I), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1967.

Arthur, W., and Fenster, S. K., *Meehanics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

Becker, R. A., *Introduction to Theoretical Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1954.

Bradbury, T. C., *Theoretical Mechanics*, Wiley, New York, 1968.

Bullen, K. E., *Introduction to the Theory of Mechanics* (7th ed.), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1965.

Cabannes, H., *General Mechanics* (2nd ed.), (S. P. Sutera 译), Blaisdell, Waltham, Massachusetts, 1968.

Easthope, C. E., *Three-dimensional Dynamics* (2nd ed.), Butturworths, London, 1964.

Feather, N., *An Introduction to the Physics of Mass*, Length and Time, Edinburgh Univ. Press, Edinburgh, 1959.

Frank, N. H. *Introduction to Mechanics and Heat*, McGraw-Hill, New York, 1939.

Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1951.

Hill, R., *Principles of Dynamics*, Macmillan, New York, 1964.

Ingard, U., and Kraushaar, W. L., *Introduction to Mechanics, Matter and Waves*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1960.

Kibble, T. W. B., *Classical Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1966.

Kittle, C., Knight, W. D., and Ruderman, M. A., Mechanics (Berkeley Physics Course, Vol. I), McGraw-Hill, New York, 1965.

Landan, L. D. and Lifshitz, E. M., *Mechanics*, (J. B. Sykes 和 J. S. Bell 译), Pergamon, Oxford, 1960.

Lindsay, R. B., *Physical Mechanics*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1961.

Marion, J. B., *Classical Dynamics*, Acdemic Press, New York, 1965.

Maxwell, J. C., Matter and Motion (1877), Dover, New York, 1954.

McCusky, S. W., *Introduction to Advanced Dynamics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1959.

Osgood, W. F., *Mechanics*, Macmillan, New York, 1937.

Pohl, R. W., *The Physical Principles of Mechanics and Acoustics*, Blackie, London and Glasgow, 1932.

Rutherford, D. E., *Classical Mechanics* (2nd ed.), Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1957.

Skinner, R., *Mechanics*, Blaisdell, Weltham, Massachusetts, 1969.

Slater, J. C., and Frank, N. H., *Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1947.

Sommerfeld, A., *Mechanics* (Lectures on Theoretical Physics, Vol. I) (M. O. Stern 译), Academic Press, New York and London, 1964.

Symon, K. R., *Mechanics* (2nd ed.), Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1960.

Taylor, E. F., *Introductory Mechanics*, Wiley, New York, 1963.

Young, H. D., *Fundamentals of Mechanics and Heat*, McGraw-Hill, New York, 1964.

工程力学教科书

Beer, F. P., and Johnston, E. R., Jr., *Vector Mechanics for Engineers* (2vols.), McGraw-Hill, New York, 1962.

Chorlton, F., *Textbook of Dynamics*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1963.

Christie, D. E., *Vector Mechanics* (2nd ed.), McGraw-Hill, New York, 1964.

Halfman, R. L., *Dynamics: Particles, Rigid Bodies and Systems*, Vol. I, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.

Huang, T. C., *Engineering Mechanics*, Addison-Wesley, Reading,

Massachusetts, 1967.

Meriam, J. L., *Dynamics*, Wiley, New York, 1966.

专门课题

Arnold, R. N., and Maunder, L., *Gyrodynamics*, Academic Press, New York and London, 1961.

Ball, K. J. and Osborne, G. F., *Space Vehicle Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1967,

Blitzer, L. (编), *Kinematics and Dynamics of Satellite Orbits* (AAPT reprint volume), American Institute of Physics, New York, 1963.

Chalmers, B., *Energy*, Academic Press, New York and London, 1963.

Danby, J. M. A., *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Macmillan, New York, 1962.

Darwin, G. H., *The Tides* (1898), Freeman, San Fancisco and London, 1962.

Garland, G. D., *The Earth's Shape and Gravity*, Pergamon, Oxford, 1965.

Gray, A., *A Treatise on Gyrostatics and Rotational Motion* (1918), Dover, New York, 1959.

Greenhood, D., *Mapping*, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1965.

Kisch, B., *Scales and Weights*, Yale Univ. Press, New Haven, Connecticut, 1965.

Maemillan, D. H., *Jides*, C. R. Books, London, 1966.

Mott-Smith, M., *The Concept of Energy Simply Explained*, Dover, New York, 1964.

Powles, J. B., *Particles and Their Interactions*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.

Roy, A. E., *Foundations of Astrodynamics*, Macmillan, New York, 1965.

Ryabov, Y., *An Elementary Survey of Celestial* Mechanics, (G. Yankovsky 译), Dover, New York, 1961.

Scarborough, J. B., *The Gyroscope: Theory and Applications*, Wiley (Interscience), New York, 1958.

Theobald, D. W., *The Concept of Energy*, E and F. N. Spon, London, 1966.

Van der Kamp, P., *Elements of Astromechanics*, Freeman, San Francisco and London, 1964.

Vertregt, M., *Principles of Astronautics*, Elsevier, Amsterdam, London and New York, 1965.

习题答案

第一章

1-2 (a) 10^{11}—10^{13} 个原子; (b) 10^{50} 个原子.

1-3 10^9 吨.

1-4 至少有一个的几率≈1.

1-5 (a) 10^{10} 个分子/厘米^3; (b) 5×10^{-4} 厘米.

1-6 6×10^{-5} 厘米^3.

1-7 (a) 3×10^{-9} 个氢原子/(米^3·年);

(b) 3×10^{15} 个氢原子/天或在气压为 1 托时约为 10^{-1} 厘米^3.

1-8 大约有 10^9 个微生物, 这数目可与世界人口总数相比.

1-9 (a) $\bar{\rho}\approx5\times10^{-11}$ 千克/米^3; (b) $\bar{\rho}_{\text{海}}\approx2\times10^{-9}$ 千克/米^3.

1-10 (a) 近似于 10^6; (b) $p\approx5\times10^{-15}$ 大气压 $\approx T=300^\circ\text{K}$ 时 4×10^{-12} 毫米汞柱.

第二章

2-1 $x=5.9$, $y=-15.8$, $r=16.9$(英里).

2-3 (a) 纽约: $(x, y, z)=(1330, -4620, 4180)$ 千米;

悉尼: $(x, y, z)=(-4620, 2560, -3560)$ 千米;

(b) 12,100 千米; (c) $s_{\text{最小}}=16{,}000$ 千米.

2-4 (b) $(x, y, z)=R(\cos\alpha\cos\beta, \sin\beta, \sin\alpha\cos\beta)$.

2-6 $R_E\approx(25{,}000/2\pi)\approx4000$ 英里.

2-7 $R_U\approx10^{41}$ 基本长度单位; $T_U\approx10^{41}$ 基本时间单位.

2-10 (a) $\mathbf{r}(t)=Bt\mathbf{i}+AB^2t^2\mathbf{j}$; (b) $v=B[1+(2ABt)^2]^{1/2}$.

2-11 $t_{AB}(x)=[(y_A^2+x^2)^{1/2}/v_1]+\{[y_B^2+(l-x)^2]^{1/2}/v_2\}$.

2-12 (a) $|\mathbf{v}|=20\sqrt{3}$ 千米/小时, 方向为北 120°偏西; (b) 最小距离 2.6 千米大约在 13 点 17 分钟出现.

2-13 令 $T_0=2l/V_0$, 结果是: (a) $T_0/(1-v^2/V^2)$;

(b) $T_0/(1-v^2/V^2)^{1/2}$;

(c) $T_0\frac{[1-(v\sin\theta/V)^2]^{1/2}}{(1-v^2/V^2)}$.

2-14 (b) 快艇追上那船时，它在岸的下游离港口为 $Dv/(V^2-v^2)^{1/2}$ 之处，时间为离开港口后 $DV/v(V^2-v^2)^{1/2}$.

2-15 (a) 约 4 分钟.

2-17 (b) 3.8×10^5 千米.

2-18 $\theta=87°$意味 f（太阳的距离/月球距离）$=19$. 正确的 θ 值是 89° 51′，相当于 $f=385$. 对 $\Delta\theta=\pm0.1°$，$150\leqslant f\leqslant1300$.

第 三 章

3-1 (b) $t_0=(2l/g)^{1/2}$，$t=t_0$（即要等到距离为 l 时才让第二个物体下落）.

3-3 (a) $a=-2$ 米/秒^2，$v_0=4$ 米/秒；

(c) $t=(2\pm\sqrt{2})$ 秒.

3-4 10 米.

3-5 (a) $v(25)\approx35$ 英里/小时，$v(45)\approx5$ 英里/小时，$v(65)\approx40$ 英里/小时；

(c) $t_+\approx58$ 秒，$t_-\approx80$ 秒.

3-6 (b) $x=a\tau(t-\tau/2)$；

(c) $v=10$ 米/秒，$a=4.17$ 米/秒^2，

$\tau=2.4$ 秒. 达到稳定速度的距离 $=12$ 米.

3-7 超车的那辆车走了大约 775 英尺；最小距离 ≈1523 英尺 ≈0.3 英里.

3-8 (a) $y_{天堂}\approx1.9\times10^6$ 千米，$v_{进入}\approx620$ 千米/秒.（设白昼为 17.5 小时，这是在米耳顿写书的地方——英格兰一年中最长的白天时间.

(b) $y\approx9\times10^4$ 千米，$v\approx10$ 千米/秒.

3-9 (a) 在第一段时间中，$v_x=4.3$ 米/秒，$v_y=-2.1$ 米/秒；

(b) $a_x=a_y=+30$ 米/秒^2.

3-10 (b) $v\approx380$ 米/秒. 这相应于图 3-10(b) 中 Cs 和 K 的相同 $mv^2/2$ $(\sim T)$ 值；$v_y\approx1.3\times10^{-2}$ 米/秒.

3-12 在投掷者后面 $2(1+\sqrt{35})$ 米 ≈13.8 米.

3-14 $v\approx120$ 英尺/秒 ≈84 英里/小时.

3-15 (a) $\mathbf{r}(t=8)-\mathbf{r}(t=6)=-0.91\,\mathbf{i}+2.80\,\mathbf{j}$, 其中 $\mathbf{r}(t=0)=2.5\,\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t=2.5)=2.5\,\mathbf{i}$.

(b) $\mathbf{v}(t=4)=\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[-\mathbf{i}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-\mathbf{j}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$;

$\mathbf{a}(t=4)=\left(\frac{\pi^2}{10}\right)\left[-\mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\mathbf{j}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right]$.

3-16 (a) $3\times10^{-3}g$; (b) $6\times10^{-4}g$; (c) $8\times10^{21}g$; (d) $40g$ (都是近似值).

3-17 (a) $a_x=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\sin\theta$,

$a_y=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\cos\theta$;

(b) $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$, $a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$.

变量上方的每一个点"·"表示对时间的一次求微商: 例如, $\dot{r}=\frac{dr}{dt}$, $\ddot{\theta}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

3-18 (a) $v=\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$米/秒, $a=\left(\frac{5}{8}\right)$米/秒^2;

(c) $t=\frac{2}{5}\left[\pi-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right]$秒$\approx 1$ 秒.

第 四 章

4-3 (a) $(\bar{x},\bar{y})=(1/W)[a(w_2+w_3),b(w_3+w_4)]$.

4-4 80 分.

4-6 从竖直的那根绳开始, 按顺时针次序, 张力依次为

(a) W, $W/(\tan\varphi\cos\theta+\sin\theta)$, $W/(\tan\theta\cos\varphi+\sin\varphi)$;

(b) W, $W\cot\theta$, $W\csc\theta$.

4-7 (a) 约 150 牛顿; (b) 作用于汽车的力约为 2100 牛顿; 中点再移动 2 英尺时汽车要移动 7 英寸.

4-9 (a) 100磅.

4-10 (a) 3.5 英尺;

(b) $F=235$ 磅, 方向在水平线上方 12°.

4-11 $\frac{2(8\sqrt{3}-1)}{3}\approx 8.6$ 英尺.

4-12 (a) 5 磅; 沿框架左边缘的任何地方.

4-13 (a) $\theta=\cos^{-1}(r/R)$.

4-14 (a) $\frac{W}{20}$; (b) $\frac{(W-w)}{20}$.

4-15 $M=25$ 米·牛顿; $\cos(\mathbf{M}\wedge\mathbf{i})=-\frac{16}{25}$,

$\cos(\mathbf{M}\wedge\mathbf{j})=+\frac{12}{25}$, $\cos(\mathbf{M}\wedge\mathbf{k})=-\frac{3}{5}$.

第 五 章

5-1 2.6×10^5 千米$\approx\frac{2}{3}\times$月球绕地球运动的轨道半径.

5-2 3.5×10^{-4} 秒弧. 否.

5-3 (a) $G\approx6.24\times10^{-11}$ 牛顿·米^2/千克^2;

(b) 1.4%以上.

5-4 $(\Delta\theta)_A=(\Delta\theta)_B$.

5-5 (a) $F_G=9.2\times10^{-8}$ 牛顿; $F_G=4.1\times10^{-47}$ 牛顿;

(b) 2.4×10^6 千米, 稍大于地球到月球距离的 6 倍.

5-6 650 千克.

5-7 约 5%.

5-8 大约是 10^{-18}.

5-9 $R\approx10^{-13}$ 米.

5-11 (a) $F_{VW}\approx4\times10^{-2}F_G$; (b) $F_{VW}\approx10^{-6}F_G$.

5-12 (a) 4×10^{-11} 牛顿; (b) 20 吨/英寸^2;

3×10^{-11} 牛顿.

5-14 (d) 350 磅, 1,230 磅, 4,330 磅, 15,200 磅.

5-15 $v\approx0.44$ 毫米/秒.

第 六 章

6-2 能——刚刚好.

6-3 (a) $F_{平均}\approx1.96\times10^4$ 牛顿; (b) $h=0.5$ 米.

6-4 $x=(5\sqrt{2}-7)$ 米≈0.07 米,

$v_x=(5\sqrt{2}-3)$ 米/秒≈4.07 米/秒,

$y=[11-5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})]$ 米≈0.75 米,

$v_y=[4-5(2\sqrt{3}-\sqrt{2})]$米/秒

≈ -6.25 米/秒.

6-5 (a) $F_x=0$, $F_y=-k$; (b) $F_x=-kx$, $F_y=-ky$; (c) $F_x=-k$, $F_y=0$.

6-6 (a) $F\geqslant 5\times10^{-5}$ 牛顿; (b) $\Delta p=5\times10^{-5}$ 牛顿·秒; (c) $W=7.5\times10^{-7}$ 焦耳.

6-7 (a) $F(t=0)=5$ 牛顿; (b) $F_{最大}=\pm10$ 牛顿.

6-8 (a) $F=-5.6\times10^{3}$ 牛顿, $F/mg=\frac{4}{7}$;

(b) $v\approx\sqrt{42}$米/秒$\approx$15 英里/小时.

6-9 (b) $F(t)=mA\alpha^2(\mathrm{i}\sin\alpha t+\mathrm{j}\cos\alpha t)$; 附一质量于滚动着的轮子的边缘.

6-10 (a) $v_{最大}=(Tl/m)^{1/2}[1-(mg/T)^2]^{1/2}$;

(b) $v_{最大}=[(T-mg)l/m]^{1/2}$.

第 七 章

7-1 $T_A=T_0+2ma$; $T_B=\frac{1}{2}T_0+ma$.

7-2 (a) $a=0.6$ 米/秒^2; (b) $F_C=3.2$ 牛顿.

7-3 (c) $a=[P(\cos\theta+\mu\sin\theta)/m]-\mu g$;

(d) $\tan^{-1}\mu$.

7-4 (b) $T=m_1m_2g\sin\theta/(m_1+m_2)$;

$a_2=m_2g\sin\theta/(m_1+m_2)$.

7-5 (a) $T_l=T_r=F/2$; (b) 这关系在动力学上的重要形式是: $2a_P(t)=a_m(t)+a_M(t)$;

(c) $a_m=(F/2m)-g$; $a_M=(F/2M)-g$;

$a_P=-g+[(M+m)F/4Mm]$.

7-6 (a) $T_A=2250$ 牛顿; $T_B=T_C=1125$ 牛顿;

(c) $F_C=375$ 牛顿.

7-8 9 米/秒.

7-9 (a) $T(l)=F(1-l/L)$, 其中 l 是到拉着的那一端的距离. 绳在竖直方向加速也不会改变 $T(l)$ 之值.

(b) $T(l)=\left[M+m\left(1-\frac{l}{L}\right)\right]a$;

$T(l)=\left[M+m\left(1-\frac{l}{L}\right)\right](a+g)$.

7-10 (a) $v=2.466\times10^7$ 米/秒; (b) $(e/m)=1.75\times10^{11}$ 库仑/千克;
(c) 相对论修正要求把所得值增加 0.5%.

7-11 7 英尺.

7-12 $\mu=0.09$.

7-13 2800 伏.

7-14 $\nu_{最大}=(g/l)^{1/2}/2\pi$.

7-15 $F=(0.98)\sqrt{2}\approx1.4$ 牛顿, 位于运动平面内, 方向在从轮圈到中心的直线上方 45°.

7-16 在 1300 英尺高度开始摆脱.

7-17 (a) 12°; (b) 44 米/秒≈97 英里/小时.

7-19 (a) $t_1=(mlT/F^2)^{1/2}$; (b) $a(t_1/2)=(T^2+16F^2)^{1/2}/4m$;
(c) $s=3lT/2F$.

7-20 $v\approx9\times10^7$ 米/秒; $V_0=90$ 兆伏——按牛顿力学; 相对论修正使 V_0 约增大 10%.

7-21 (a) $v_{最小}=(gr/\mu)^{1/2}$; (b) $\varphi=\tan^{-1}\mu$;
(c) 9 米/秒=20 英里/小时; 31°.

7-22 (a) $r\leqslant0.03$ 毫米; (b) $r\geqslant2$ 毫米;
(c) 9.5 米/秒; 4.6 米.

7-23 (a) 0.97μ; (b) 3(负的); (c) 530.

7-24 $v_0'=v_0/4$; $v_1'=2v_1+(7/4)v_0$.

7-25 约 1 毫秒.

7-26 50 厘米/秒, $\frac{1}{10}$秒.

7-27 (a) 200 牛顿/米;
(b) $x(t)=5\cos10t$ (x 用厘米表示, 伸长为正, t 用秒表示);
(c) $x(t)=10\sin10t+5\cos10t$ (x 用厘米, t 用秒).

7-28 $\omega=(6g/5h)^{1/2}$.

7-29 $\omega=(\rho_0g/\rho l)^{1/2}$.

7-30 (a) $2(T/mL)^{1/2}$; (b) $[TL/mD(L-D)]^{1/2}$.

7-31 (a) $gT^2/4\pi^2$; (b) $\mu gT^2/4\pi^2$.

7-32 (a) 约 1.6 厘米; (b) 不会($a_{最大}<g$).

第 八 章

8-1 $T_s\approx 2.88\times10^{-4}T_E\approx 2\frac{1}{2}$小时.

8-2 $\frac{5\sqrt{10}}{4}\approx 4.0<T_A/T_E<3\sqrt{3}\approx 5.2$.

8-3 (a) $R-R_E\approx$1,700 千米;

(b) $t\approx\frac{5}{11}$小时$\approx$27分+20秒,

8-4 $R-R_J\approx 9\times10^7$ 米$\approx 9R_J/16$.

8-5 $v\approx 1.7\times10^3$ 米/秒; $T\approx 6.5\times10^3$ 秒$\approx$1 小时 50 分.

8-6 $\Delta r/r\approx 5.1\times10^{-6}$; 或 $\Delta r\approx$210 米.

8-7 (a) $\Delta x\approx10^{-4}$ 米$\approx$0.1 毫米.

(b) $f\approx 1.35\times10^{-4}$ 转/秒$\approx$0.49 转/小时.

8-8 $M_E\approx 9\times10^{24}$ 千克, $\Delta\theta\approx 13\alpha$.

8-9 不, $\Delta g\approx 3.5\times10^{-2}$ 毫伽.

8-10 $T=(3\pi/\rho G)^{1/2}$; $T_{H_2O}\approx 1.2\times10^4$ 秒.

8-11 $\rho_{太阳}\approx 1.3\times10^3$ 千克/米^3.

8-12 (a) $M\approx10^5$ 千克, $R=1.9$ 米;

(b) 不.

8-15 (a) $T=(7.4\times10^5)(D^3/M)^{1/2}$; (b) $\frac{10}{11}$.

8-16 (a) 离地心 0.73 R_e;

(b) $\Delta T\approx(6.6\times10^{-3})T_月\approx$4 小时.

8-17 $M_{总}\approx10^{11}M_{太阳}$.

8-19 $\Delta T\approx 2.5\times10^{-3}$秒.

第 九 章

9-4 $v_2=28\frac{v_0}{45}$; $v_2=\frac{v_0}{15}$.

9-5 $v=\left(\frac{v_0}{4}\right)\left(5-2\sqrt{2}\right)^{1/2}\approx 0.37v_0$,

$\theta=\tan^{-1}\left[\frac{1}{(2\sqrt{2}-1)}\right]\approx 29°$.

9-6 在两种情况下都是扔两次.

9-7 $F_{平均}=36$ 牛顿.

9-8 $\Delta x=2.35$ 厘米.

9-9 $v=73$ 英尺/秒$=22$ 米/秒,

$F=350$ 牛顿≈ 80 磅.

9-10 (a) $v_0=[Mg/\pi R^2\rho]^{1/2}$; (b) $v_0=15.5$ 米/秒.

9-11 (a) $a=(\mu v_0/M_0)-g$; (b) $\mu=7\times 10^3$ 千克/秒.

9-12 (b) $v_2=v_0\ln\left[\frac{n}{rn+(1-r)}\right]$; (c) $n=\sqrt{N}$.

(d) $v_{最大}=2v_0\ln\left[\frac{N^{1/2}}{rN^{1/2}+(1-r)}\right]$;

(e) $v=v_0\ln\left[\frac{N}{rN+(1-r)}\right]$.

9-14 (a) $n=2$; (b) $F=2A\rho v^2$; (c) $F=\pi r^2\rho v^2$.

9-15 (a) $m_2/m_1=3$; (b) $v_{质心}=u_1/4$;

(c) $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2\right)$; (d) $\frac{9}{16}\left(\frac{1}{2}m_1u_1^2\right)$.

9-17 (c) $m_n=0.12m_0$, $v_n=2.8v_0$, $KE_n=0.95KE_0$.

9-18 (a) B; (b) $E_2=4E_0/5$, $E_8=E_0/5$.

9-19 (a) 意味着 $v_1=150$ 英里/小时;

(b) $\frac{5}{8}$.

9-20 (a) $v_1=\frac{3}{4}u$, $v_2=\frac{1}{4}u$;

(b) 损失 $E_0/8$.

9-21 (a) $M=2m$, $v=\frac{u}{\sqrt{3}}$, $\theta=\pi/6$.

(b) $\theta_m^*=2\pi/3$, $\theta_M^*=5\pi/3$.

9-23 实验室: $v=0.48u$, $\theta=-34°$;

质心系: $v=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)u$, $\theta=-111°$.

9-24 (a) $M_n=(1.2\pm0.4)$原子质量单位;

(b) $v_{初始}=(3.1\pm0.4)\times10^7$ 米/秒.

9-25 (a) 质子; (b) 是的,在实验误差之内.

9-26 (a) $v_n^*=12.7\times10^6$ 米/秒, $v_{c\,12}^*=1.06\times10^6$ 米/秒;

(b) $v_{n\,实验室}=10^7$ 米/秒, $\theta=132°$;

(c) $n=50$.

9-27 (b) $\theta=\tan^{-1}[(M-m)/(M+m)]^{1/2}$.

9-28 (a) 2.01 兆电子伏$\leqslant KE_p\leqslant$8.98 兆电子伏;

(b) $\theta_{最大}\approx68.5°$, $KE(\theta_{最大})=0.25$ 兆电子伏.

9-29 (a) $d=mL/(M+m)$.

第 十 章

10-1 $F_0^2T^2/8m$.

10-2 (a) 10 米/秒; (b) $5\sqrt{6}\approx12.2$ 米/秒.

10-3 (a) $x(t)=F^3(t)/6C^2m$;

(b) $x(t)=[v_0F(t)/C][1+(F^2(t)/6Cmv_0)]$.

10-4 (b) 杠杆, l_2/l_1; 斜面, $\csc\theta$; 滑轮组, 6; 曲柄, $R/(b-a)$.

10-5 (b) 约 15 英寸.

10-6 (a) 5×10^4 牛顿; (b) 5×10^5 焦耳;

(c) 2.5×10^5 焦耳.

10-7 (a) $mu^2/2$; $m(u^2+2uv)/2$, 其中 m 是球的质量.

10-8 (a) $F\omega R$.

10-9 (a) 1.95×10^6 英尺·磅 ($=1.33\times10^6$ 焦耳);

(b) 118 分钟$\approx$2 小时; (c) 7.80×10^6 英尺·磅.

10-12 (a) 2.4×10^{12} 焦耳; (b) 3.8×10^6 人·天$\approx10^4$ 人·年.

10-13 (a) $Um/M(M+m)g=H_0$;

(b) $(2gh)^{1/2}$, $(2gh)^{1/2}+[2Um/M(M+m)]^{1/2}$;

(c) $H_0+2(H_0h)^{1/2}$, 这比(a)中的结果高 $2(H_0h)^{1/2}$.

10-14 10^{-5} 电子伏.

10-15 $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{1/2}[(1+2mv^2k_2/k_1^2)^{1/2}-1]^{1/2}$.

10-17 $\left(\frac{gL}{2}\right)^{1/2}$.

10-18 (a) $(m_1+m_2)g$.

10-19 (b) 4 焦耳; (c) $x\leqslant 0$ 米, $x>2$ 米.

10-20 约 39 秒.

10-22 (b) $r-(Mg/k)$;

(c) $\Delta T\fallingdotseq(\pi/\omega_0)+(2/\omega_0)\sin^{-1}\{1/[1+(\omega_0T_0/2)^2]^{1/2}\}$,

其中T_0=完全刚性地板的回弹周期;$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{M}}$. 注意, 当 $\omega_0T_0\gg 1$

(即, 当 $H\gg Mg/k$)时, $\Delta T=\pi/\omega_0$; 当 $\omega_0T_0\ll 1$ 时, $\Delta T=2\pi/\omega_0$.

10-23 (b) $16\pi^2$ 焦耳=1.62 焦耳.

10-24 (a) $U(x)=+\left(\frac{k_1x^2}{2}\right)-\left(\frac{k_2x^3}{3}\right)$;

(b) $k_2=\left(\frac{k_1}{2b}\right)$; (d) $v=\left(\frac{k_1b^2}{3m}\right)^{1/2}$.

10-25 $\left(\frac{3mv^2}{2\alpha}\right)^{1/3}$.

10-26 $(2+\sqrt{3})\left(\frac{mb}{3U_0}\right)^{1/2}$.

10-27 (b) $A=\left(\frac{k}{8l_0^2}\right)$.

10-30 (a) $\left(\frac{3mv^2}{2}\right)+\left(\frac{kL^2}{8}\right)$; (b) v;

(c) $\left(\frac{3kL^2}{8m}\right)^{1/2}$; (d) $2\pi\left(\frac{2m}{3k}\right)^{1/2}$.

10-31 (a) 5.4 电子伏; (b) 1.9×10^{13} 赫.

10-32 (b) $r_0=(mB/6A)^{1/(m-6)}$; $D=(n-6)A/nr_0^6$.

10-33 (b) $r_0=(nB/Ae^2)^{1/(n-1)}$; (c) $u=N_0(n-1)Ae^2/nr_0$;

(d) $u=180$ 千卡/克分子.

第十一章

11-2 $a=g\frac{(2-\sqrt{3})}{6}$ ($2m$ 沿 30°斜面加速下滑); $T=mg\frac{(1+\sqrt{3})}{3}$.

11-4 (a) $(gl)^{1/2}$; (b) $2mg$; (c) $2(gl)^{1/2}/(n+1)$;

(d) $\cos\theta=1-(n-1)^2/2(n+1)^2$.

11-6 (a) $\left(\frac{l}{\mu}\right)\left[\frac{m}{(M+m)}\right]^2$; (b) $\mu_{\text{临界}}=3m/2M$.

11-7 (a) $mg\left(5+\frac{2h}{r}\right)$方向竖直朝上;

(b) $g\left(3+\frac{2h}{r}\right)$.

11-8 (a) $(5gl)^{1/2}$; (b) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$.

11-9 $(3+\sqrt{3})m$.

11-10 (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$; (b) $\cos^{-1}\left[\left(2+\frac{v_0^2}{gR}\right)\Big/3\right]$;

(c) 5.8 米.

11-11 (a) $\theta=\cos^{-1}\left[\frac{(4+\sqrt{3})}{26}\right]$;

(b) $\theta_{\text{变弯}}=\cos^{-1}[-2(r\cos\beta-L\cos\alpha)/3(L-r)]$;

(c) $\cos\alpha=\left(\frac{r}{L}\right)\cos\beta-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[1-\left(\frac{r}{L}\right)\right]$.

11-12 (a) 9 毫米; (b) 5.4 秒.

11-13 每星期要慢将近 2 秒.

11-14 (a) $q=2L\sin(\theta/2)[mg\tan(\theta/2)/k]^{1/2}$.

11-16 (a) $M=2\pi R^2h\rho_s/[(\Delta T/T)+(h/R)]$;

(b) 10 秒/天.

11-17 (a) 对于 $0<r<R, F(r)=0$;

对于 $R<r<2R, F(r)=GMm/r^2$;

对于 $2R<r, F(r)=3GMm/r^2$.

(b) $-2GMm/R$; (c) $2(GM/R)^{1/2}$.

11-18 (b) $T_{\text{隧道}}=(3\pi/\rho G)^{1/2}=1$ 小时 49 分;

(c) $T_{\text{卫星}}=T_{\text{隧道}}$.

11-19 按照这个判据, 地球能保持住所有四种气体; 月球只能保住 N_2 和 CO_2; 火星, 除 H_2 以外的所有气体. 应注意, 一温度较高的年代会导致失去较重的气体.

11-21 (a) $v_{\text{逃逸}}=(5GM/2R)^{1/2}$; (b) 发射点有一相对于质心系的速率

$0.12v_{逃逸}$，因而所需发射速率可以降低.

11-22 (a) 8.4×10^8 焦耳；(b) 2.7×10^9 焦耳；

(c) 5.8×10^9 焦耳；“小山顶”离地球大约为 $0.9D$，要克服它，在地球表面上需要的动能大约是 6.1×10^9 焦耳.

11-23 (a) $F(z)=-2GMmz/(r^2+z^2)^{3/2}$；

(b) $U(z)=-2GMm/(r^2+z^2)^{1/2}$；

(c) 对于 $z\gg r$, $F(z)\approx-2GMm/z^2$,

$$U(z)\approx-2GMm/z;$$

对于 $z\ll r$, $F(z)\approx-2GMmz/r^3$,

$$U(z)\approx-2GM(1-z^2/2r^2)/r;$$

(d) $T_P=\dfrac{T_0}{2\sqrt{2}}$.

11-24 对于所给路线(直线)，

(a) $KE=\dfrac{k_1a^2}{2}+\dfrac{k_2b^2}{2}$；(b) $KE=\dfrac{(k_1+k_2)ab}{2}$.

情形(a)的力是保守力.

11-25 (a) $F_N(r)=[-\lambda e^{-r/r_0}/(r_0r)][1+(r_0/r)]$；

(b) $F_N(r=1.4F)\approx-4.2\times10^3$ 牛顿，

$F_C(r=1.4F)\approx1.2\times10^2$ 牛顿；

(c) 当 r 刚超过 $5F$ 时 $F_N(r)=10^{-2}F_N(r_0)$；在那里库仑力约为 10 牛顿.

11-28 (a) $\theta=45°$；(b) $\theta=\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{\mu}\right)$；

(c) $\theta\approx50.8°$.

11-30 (a) $g=2\pi G\sigma\{1-[h/(R^2+h^2)^{1/2}]\}$；

(b) 对于 $R=2h$, $g=0.55(2\pi G\sigma)$；

对于 $R=5h$, $g=0.80(2\pi G\sigma)$；

对于 $R=25h$, $g=0.96(2\pi G\sigma)$；

(c) 0.08 秒/年.

第十二章

12-1 $x=vt$, $y=-R\sin2\pi nt$, $z=H+R\cos2\pi nt$，其中观察者的 x 轴取

在沿飞行的方向，H是螺旋桨中枢的(恒定的)高度，螺旋桨的转动(在驾驶员看来)是顺时针的．坐标和时间的原点选在最为简单之处．

12-2 (a) $r'(t)=(R^2+D^2-2RD\cos\omega t)^{1/2}$；

$$\theta'(t)=\tan^{-1}\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right],$$

其中 $x'(t)=D\cos\omega t-R, y'(t)=-D\sin\omega t.$

(b) $\dfrac{dx'}{dt}=-\omega D\sin\omega t$； $\dfrac{dy'}{dt}=-\omega D\cos\omega t$；

$\dfrac{d^2x'}{dt^2}=-\omega^2 D\cos\omega t$； $\dfrac{d^2y'}{dt^2}=\omega^2 D\sin\omega t.$

12-3 $\tan^{-1}(a/g)$(竖直线的前方)．

12-4 (a) -1.5 米/秒^2(相对于地面)；

(b) $+5$ 米/秒(相对于地面)；(c) 33 米．

12-5 (a) 840 牛顿；(b) 700 牛顿；(c) 560 牛顿；

(d) 560 牛顿，700 牛顿，840 牛顿；

(e) 升降机具有一$\dfrac{20}{7}$米/秒^{2}的向上加速度；

升降机运动的方向则未确定．

12-6 $a_{\text{最大}}=\mu g\cos\theta$．

12-7 (a) 0.5 米；(b) 0.25 米．

12-8 (b) $a_{\text{滑动}}=31g/8$．

12-9 速率为79米/秒(≈175 英里/小时)，用了跑道1180米$\left(\approx\dfrac{3}{4}\text{英里}\right)$．

12-10 $a_{\text{最大}}=6.7\times10^4$ 米/秒^2．

12-11 (a) $\tan^{-1}(a/g)$；苹果沿直线掉下，这直线与“直降”成一向前倾角 $\tan^{-1}(a/g)$．因之，如果$(h/d)<(a/g)$，它就掉到地板上；否则就会碰到墙壁；(b) 气球相对于(向上的)竖直方向前倾一角度 $\tan^{-1}(a'/g)$．

12-12 (a) $a_{\text{滑}}=\dfrac{g}{3}$，向下；(b) $F_P=2mg$．

12-13 (a) 在向下的竖直线后方成一角度 $\tan^{-1}(a/g)$ 处平衡；$T=2\pi[l/(a^2+g^2)^{1/2}]^{1/2}$；(b) 当绳子垂直于轨道(即在竖直方向后面 θ

角处)时它是平衡的；$T=2\pi[l/(g\cos\theta)]^{1/2}$；(c) 当绳子竖直向下时它是平衡的，只要 $a<g$；$T=2\pi[l/(g-a)]^{1/2}$.

12-14 500 磅≈2200 牛顿.

12-15 (a) $\omega\geqslant\left[\dfrac{(a+g)}{R}\right]^{1/2}$；

(b) $\omega\geqslant\left[\dfrac{(a^2+g^2)^{1/2}}{R}\right]^{1/2}$.

12-16 (b) $\omega_{最大}=(2kS_{最大}/\rho)^{1/2}$；

(c) $\omega_{最大}\approx 5.2\times10^3$ 秒$^{-1}$，或约为 50,000 转/分钟.

12-17 (a) $g_{有效}\approx$160,000×正常的"g"；

(b) $F=9.5\times10^{-9}$ 达因；(c) $v=0.1$ 毫米/秒.

12-18 15π 转/分钟.

12-19 $F_{总}=3mg_R(\Delta R/R)$.（注意，$F_{总}$作用在径向位移 ΔR 的方向.）

第十三章

13-1 $F\sim\dfrac{-1}{r^3}$.

13-2 (a) $v=(ke^2/mr)^{1/2}$；(b) $l=(ke^2mr)^{1/2}$；

(c) $r_n=n^2h^2/4\pi ke^2m$；

(d) $U(r_n)=-4\pi^2k^2e^4m/n^2h^2$；因而

$E(r_n)=-2\pi^2k^2e^4m/n^2h^2$；

(e) $r_1\approx0.5\times10^{-10}$ 米≈0.5 Å；

$-E_1\approx14$ 电子伏.

13-3 $KE_{末}/KE_{初}=h^2/l^2$.

13-4 $m_B=v_0^2(D^2-d^2)/2Gd$.

13-6 (a) $r_{最大}=16R/7$；(b) $r_{最大}=9R/7$.

13-12 (a) $v=v_0/3=(GM/6R_0)^{1/2}$；

(b) $T=2\sqrt{3}\,(2\pi R_0/v_0)$.

13-13 (b) $v_P=3v_0$；(c) $\alpha=\cos^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

13-14 $\left[1\pm\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]r_1$.

13-15 $\left\{R/2(1-\alpha)\right\}\{1+[1-4\alpha(1-\alpha)\cos^2\theta]^{1/2}\}$,

其中 $\alpha=\dfrac{v_0^2R}{2GM}$.

13-16 (a) $E=-3GMm/16r$; $l=m(GMr)^{1/2}/2$.

13-18 $F\sim\dfrac{-1}{r^5}$.

13-19 (a) 用正文讨论中的符号, $v_1=1.1v_0=32.6$ 千米/秒; $T=(1.26)^{3/2}T_E\approx1.4T_E$, 因而飞行时间是 0.7 年, 又 $v_2=0.72v_0\approx21.3$ 千米/秒. 注意 $v_0=29.6$ 千米/秒和 $v_{火星}=24.0$ 千米/秒; (b) 在离开地球约 2×10^{-3} 天文单位(AU) 处 $g_E=g_{太阳}$; 在离开火星约 10^{-3} AU 处 $g_{火星}=g_{太阳}$; 反抗太阳所作的功$\approx5\times$反抗地球所作的功$\approx-25\times$反抗火星所作的功.

13-20 (a) $(r_{ap}/r_E)=[1+(\Delta v_1/v_0)]^2/\{2-[1+(\Delta v_1/v_0)]^2\}$, 其中 r_{ap} 是用 AU 表示的远日点距离, v_0 是地球的轨道速率, Δv_1 是增量.

(b) $$\left(\frac{v_{ap}}{v_0}\right)=\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]\left(\frac{r_E}{r_{ap}}\right)$$
$$=\left\{2-\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]^2\right\}\Big/\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right];$$

因而, $$[(\Delta v)_{总需要}/v_0]=\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)+\left(\frac{v_{ap}}{v_0}\right)$$
$$=\left[1-\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right]\Big/\left[1+\left(\frac{\Delta v_1}{v_0}\right)\right].$$

13-21 在 5000 年中一年延长了约 20 毫秒.

13-22 $L(t)=L_0e^{-\lambda t/m}$.

13-23 (a) $$x(t)=x_0\cos\omega_0t+\left(\frac{v_{x_0}}{\omega_0}\right)\sin\omega_0t;$$
$$y(t)=y_0\cos\omega_0t+\left(\frac{v_{y_0}}{\omega_0}\right)\sin\omega_0t,$$

其中 $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$. 轨道为一椭圆; 总能量和角动量守恒.

(b) ω_0R; $r_{最大}=2R$.

13-25 (b) 1.7×10^{-14} 厘米^2; (c) $r_A+r_K=7.4$ 埃.

13-26 (b) $d_0=4.5\times10^{-12}$ 米; (d) 约为 50.

第十四章

14-3 (a) ±420 焦耳·秒；正或负看转动的方向；

(b) ±2310 焦耳·秒，如果第三个溜冰者滑行的方向与靠近他的那人最初滑行的方向相同；±1470 焦耳·秒，如果第三个溜冰者滑行的方向与靠近他的那人的方向相反.

14-4 $KE_{转动}\approx 0.01 KE_{平动}$.

14-5 (a) $d\omega/dt=-[\mu r^2 I_0/(I_0+\mu r^2 t)^2]\omega_0$；

$dE_{转动}/dt=-[\mu r^2 I_0/(I_0+\mu r^2 t)^2][I_0\omega_0^2/2]$，

其中 $I_0=MR^2/2$.

(b) $t=I_0/\mu r^2=(M/\mu)(R^2/2r^2)$.

14-6 (a) $\omega_{最后}=3\omega_0$；转动 KE 增加一因数 3.

(c) $\dfrac{R}{\sqrt{6}}$.

14-7 $10^{17\pm1}$焦耳.

14-8 在下面的答案里，I_n 代表把杆看作 n 个相等的质点这样近似而得的值.

(a) $I_1=\dfrac{ML^2}{4}$；(b) $I_2=\dfrac{5ML^2}{16}$；

(c) $$I_n=\left(\frac{M}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)L}{(2n)}\right]^2$$

$$=\left[\frac{ML^2}{3}\right]\left[1-\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right].$$

14-9 (a) $I=2MR^2/3$.

14-10 (a) $I=Ma^2/6$，板的边长为 a，质量为 M；

(b) $I=5Ma^2/18$，箱的边长为 a，质量为 M；

(c) $I=Ma^2/6$，立方体的边长为 a，质量为 M.

14-13 是的.

14-15 (a) $\dfrac{4g}{15}$；(b) $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$秒$^{-1}$；

(c) 66 牛顿；12.7 牛顿(用 $g=10$ 米/秒^2)；

(d) 在最少的半圈之外再绕一整圈.

14-16 (a) $0.35g=3.4$ 米/秒^2; (b) 6.6 米.

14-17 $x=6$.

14-18 (a) $T=2\pi(3R/g)^{1/2}$; 等价单摆之长为 $3R$.

(b) $T=2\pi(2R/g)^{1/2}$; 等价单摆之长为 $2R$.

14-19 $T=2\pi R(M/2c)^{1/2}$.

14-21 (a) 2.2×10^{-8} 米·牛顿/弧度;

(b) 1.3×10^{-7} 牛顿; (c) 7.7°.

14-22 (a) 2.9×10^{-8} 米·牛顿/弧度;

(b) 12 分钟;

(c) 7.5×10^{-3} 弧度$=0.43°$; 7.5 厘米.

14-23 (a) $(\pi/30)$秒≈0.105 秒;

(b) $T_1\approx82$ 牛顿; $T_2\approx32$ 牛顿.

14-24 $l=R[\sqrt{1+(I/2mR^2)}-1]$;

$I=MR^2/2$ 时, $l=R[\sqrt{1+(M/4m)}-1]$.

14-26 $\omega_{Af}=\omega_0/[1+(I_BR_A^2/I_AR_B^2)]$;

$\omega_{Bf}=-(R_A/R_B)\omega_{Af}$.

14-27 (a) 5 米/秒, 在卡车运动的方向;

(b) $\omega=-$(5 米/秒)$/r$, 其中 r 是管的半径.

(c) $\dfrac{5}{4\mu}=4.16$ 米; (d) 0.

14-28 (a) $h=\dfrac{2r}{5}$.

14-31 $\dfrac{108}{\pi^2}\approx11$ 转/分钟.