从一道高考试题谈竖直圆轨道类试题的命题设计

吴 俊 (上海市教育考试院 上海 200433)
涂 泓* (上海师范大学数理学院 上海 200234;
上海师范大学上海市星系和宇宙学半解析研究重点实验室 上海 200234)

摘 要 2025年上海物理等级考中的竖直圆轨道主题以 $v-\theta$ 图形式呈现题给信息,使小滑块沿竖直光滑圆轨道运动这一学生熟悉的模型展现出一定的新意。在此基础上继续利用这一模型,进一步开发 $v-t$ 图呈现数据的方式,设计出能力要求更高的创新试题。

关键词 试题设计 竖直圆轨道 $v-t$ 图
文章编号 1002-0748(2025)12-0048 **中图分类号** G633·7 **文献标识码** B

2025年上海物理等级考中第四个主题的情境如图1所示:一光滑圆轨道竖直固定放置,一小滑块以一定的水平初速度从最低点出发,仅在重力和轨道对其弹力作用下沿圆轨道顺时针运动。此题所选取的滑块沿竖直光滑圆轨道运动模型虽然是学生较为熟悉的,但通过改变已知条件的呈现方式,给出如图2所示的 $v-\theta$ 图,使试题有别于这一模型的常见题型。题目利用文字、图象等信息呈现方式,考查学生运用机械能守恒、圆周运动、动量定理、机械功率等概念解决问题的能力。从整体层面看,试题任务的复杂度和计算量兼顾了整体加考学生的教学实际,对参加考试的学生有较好的区分度。

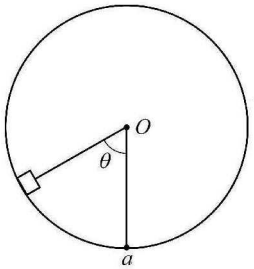

图1

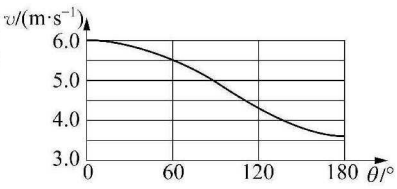

图2

教育部颁布的《普通高中物理课程标准(2017年版2020年修订)》中明确提出:"试题的情境要具有一定的问题性、真实性、探究性或开放性""评价学生的物理学科核心素养,应尽量创设类型多样的、具有一定复杂程度的、开放性的真实情境作为试题的任务情境"。在寻找情境、设计任务时,通常有以下途径:

① 从生活实际中寻找灵感,挖掘任务情境;
② 从教材、练习册上寻找学生熟悉的情境;
③ 从科普文章、科普纪录片中获取任务情境;
④ 从专业教材、科研论文中攫取任务情境。

而除了上述途径外,对于已经考过的试题,可以对其任务情境"再利用",通过略微改变原题的条件、重新设计任务设问等方式,将"陈题"变为"新题"。以上述试题为例,除试卷中呈现的 $v-\theta$ 图外,这一情境也可用速率 v 随时间 t 变化的 $v-t$ 图形式呈现。由于此情境的 $v-t$ 关系不存在解析解,因此以 $v-t$ 图形式呈现的试题要求学生从函数图象中挖掘更多有用信息并将其转化为物理语言,对模型建构、科学推理及创新思维能力提出更高要求。

1 小滑块的速率随时间变化的关系

设圆轨道半径为 R,质量为 m 的小滑块从 $t=0$ 时刻以大小为 v_0 的水平初速度从最低点出发。在滑块沿轨道运动的过程中,t 时刻滑块与 O 点的连线绕 O 点转过的角度为 θ,速率为 v。根据机械能守恒定律,有

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2$$

由此可解得

$$v=\sqrt{v_0^2-gR(1-\cos\theta)} \qquad ①$$

* 通讯作者:涂泓。

中国知网 https://www.cnki.net

又$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{v}{R}$，因此

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{R}\sqrt{v_0^2-gR(1-\cos\theta)} \qquad ②$$

虽然此微分方程无解析解，但可通过差分法求方程②的数值解得到θ随t的变化关系，代入①式可求得v随时间t变化的关系。若滑块初速度足够大，使得滑块可沿圆轨道做完整的圆周运动，则由②式还可以利用椭圆积分计算出该运动的周期。

若初速度不足以使滑块到达轨道最高点，则小滑块脱离轨道前仍然用与完整圆周运动相同的数值方法，而滑块沿圆轨道运动过圆心O的等高点后脱离圆轨道做斜抛运动，则可通过

$$N=m\left(\frac{v^2}{R}+mg\cos\theta\right) \qquad ③$$

求得轨道对滑块弹力N随时间t变化的关系。N一旦减小到0，将此时滑块速度大小记为v_1、滑块速度方向与水平面间夹角记为θ_1、此时的时刻记为t_1，则滑块从t_1时刻开始做斜抛运动，从该时刻之后，滑块速度v随时间t的变化关系可根据斜抛运动的规律求出

$$\begin{cases}v_x=v_1\cos\theta_1\\ v_y=v_1\sin\theta_1-g(t-t_1)\\ v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}\end{cases} \qquad ④$$

解得：

$$v=\sqrt{v_1^2-2v_1g(t-t_1)\sin\theta_1+g^2(t-t_1)^2} \qquad ⑤$$

进而得到小滑块脱离轨道后做斜抛运动的$v-t$图。将小滑块脱离轨道前的数值计算结果和脱离轨道后的解析计算结果结合起来，便得到小滑块先沿圆轨道运动一段时间后脱离轨道做斜抛运动的完整的$v-t$图。

这一情境除可设计成计算轨道半径等一般计算题外，由于其涉及圆周运动、能量守恒、牛顿定律，并可结合临界问题等多个物理核心概念，因此该情境非常适合设计综合程度较高的物理试题。本文以一道综合任务试题的设计为例，说明这一情境可考查的知识和能力，并总结在试题任务设计过程中的注意点。

2　综合任务设计

利用如图1所示的情境，可以以数值计算得到的$v-t$图为呈现方式，设计任务，考查学生获取信息、建模推理、论证分析和综合应用能力。基于以上考虑，在明确图象提供的信息以及学生可以利用的规律后，可以对任务进行精巧设计，扩充问题的综合性，考查学生解决实际问题的能力。竖直圆轨道情境可利用$v-t$图做如下改编，构成一道综合程度较高的题目。

例题　有半径分别为0.60 m、0.70 m、0.80 m、1.2 m、1.4 m和1.6 m的六个光滑圆轨道。某同学选择其中一个，将其竖直固定放置。将一质量$m=50$ g的小滑块置于轨道最低点a，在$t=0$时使滑块获得一水平初速度v_a，其速率v随时间t变化的关系如图3所示，曲线上$t=0.257$ s处的切线如图中虚线所示。（结果均保留2位有效数字）

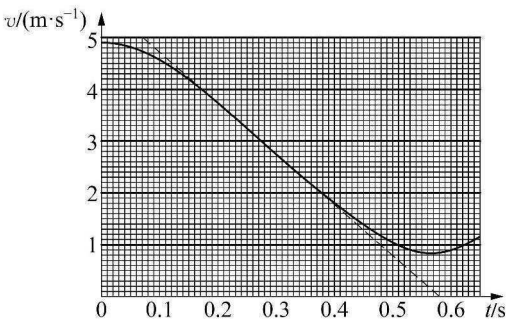

图3

（1）滑块在0～0.110 s内通过的路程约为_____m。

（2）所选圆轨道的半径R为

（A）0.60 m　　（B）0.70 m

（C）0.80 m　　（D）1.2 m

（E）1.4 m　　（F）1.6 m

（3）$t=0.257$ s时滑块的角速度大小约为_____rad/s，加速度大小约为_____m/s^2。

（4）滑块从开始运动到第一次运动到最高点的过程中，轨道对滑块的冲量大小约为_____N·s。

（5）求$t_e=0.80$ s时滑块的速度v_e。

解：（1）所求距离即曲线上0～0.110 s内曲线下包围的“面积”。过曲线上$t=0$的点作如图4所示虚线，使0～0.110 s范围内虚线下包围的“面积”大致与曲线下包围的“面积”相等，则0～0.110 s内滑块经过的距离

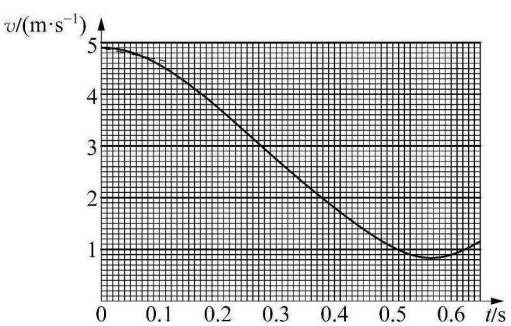

图4

中国知网　https://www.cnki.net

$$s \approx \frac{4.90+4.62}{2} \times 0.11\,\mathrm{m} \approx 0.53\,\mathrm{m}$$

(2) 所给 $v-t$ 曲线上切线斜率的绝对值即为滑块运动的切向加速度大小。滑块在轨道上向上运动过程中，当其与轨道圆心 O 的连线与竖直方向间夹角为 θ 时的受力如图 5 所示，则滑块运动切向加速度 $a_\tau = g\sin\theta$，由图 3 中虚线可得 $t = 0.257\,\mathrm{s}$ 时滑块运动的切向加速度大小为

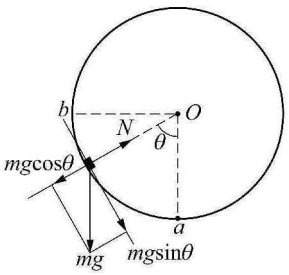

图 5

$$a_\tau = \frac{5.0}{0.58-0.07}\,\mathrm{m/s^2} \approx 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

据此由图可知 $t = 0.257\,\mathrm{s}$ 时滑块运动到与圆心 O 等高处的 b 点，滑块在 a、b 点的速度大小 $v_a = 4.90\,\mathrm{m/s}$，$v_b = 3.20\,\mathrm{m/s}$。滑块从 a 运动到 b 的过程中，应用动能定理

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgR$$

解得 $R = \dfrac{v_a^2 - v_b^2}{2g} = \dfrac{4.90^2 - 3.20^2}{2\times 9.8}\,\mathrm{m} \approx 0.70\,\mathrm{m}$。

故选 B。

(3) $t = 0.257\,\mathrm{s}$ 时，滑块角速度 $\omega_b = \dfrac{v_b}{R} = \dfrac{3.20}{0.70}\,\mathrm{rad/s} \approx 4.6\,\mathrm{rad/s}$。

此时向心加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_b^2}{R} = \dfrac{3.20^2}{0.70}\,\mathrm{m/s^2} \approx 14.6\,\mathrm{m/s^2}$。

滑块的加速度大小 $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{9.8^2 + 14.6^2}\,\mathrm{m/s^2} \approx 18\,\mathrm{m/s^2}$。

(4) 由(2)知滑块可运动通过与圆心 O 等高处 b，此后无论滑块可沿圆轨道运动到轨道最高点(见图 6)，还是沿圆轨道运动一段距离后脱离轨道做斜抛运动(见图 7)，该过程中均仅重力做功，机械能守恒。当滑块运动到最高点时，其重力势能最大、动能最小，即速率最小，由图 4 可以看出当 $t_c = 0.568\,\mathrm{s}$ 时滑块速度大小最小为 $v_c = 0.82\,\mathrm{m/s}$，且此时滑块速度必然没有竖直方向的分量，即滑块速度方向与其开始运动时的速度方向相反。设滑块从开始运动到第一次运动到最高点过程中，轨道对滑块的冲量为 I，由动量定理得矢量三角形如图 8 所示，则

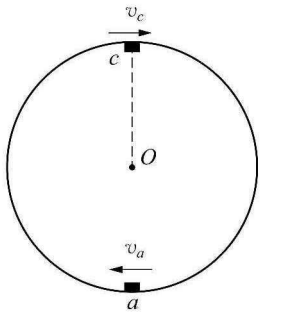

图 6

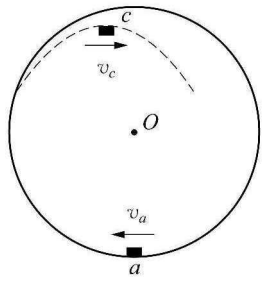

图 7

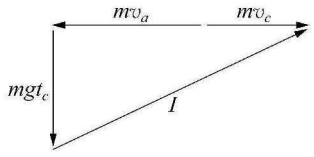

图 8

$$I = \sqrt{[m(v_a+v_c)]^2 + (mgt_c)^2}$$
$$= 0.050 \times \sqrt{(4.90+0.82)^2 + (9.8\times 0.568)^2}$$
$$\approx 0.40\,\mathrm{N\cdot s}$$

(5) 若滑块可沿圆轨道运动到轨道最高点，则有

$$\frac{1}{2}mv_a^2 \geqslant 2mgR$$

即 $v_a \geqslant 2\sqrt{gR} = 5.24\,\mathrm{m/s}$。

可见，滑块不能沿圆轨道运动到轨道最高点。设滑块运动到如图 9 所示的 d 点时脱离圆轨道，则有

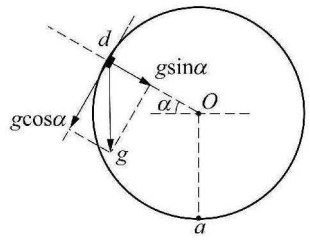

图 9

$$\frac{v_d^2}{R} = g\sin\alpha$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_d^2 + mgR(1+\sin\alpha)$$

联立解得：$\alpha = \arcsin\left(\dfrac{v_a^2}{3Rg} - \dfrac{2}{3}\right) = \arcsin\left(\dfrac{4.90^2}{3\times 0.70\times 9.8} - \dfrac{2}{3}\right) = 30^\circ$，$v_d = \sqrt{Rg\sin\alpha} = \sqrt{0.70\times 9.8\times \sin 30^\circ}\,\mathrm{m/s} = 1.85\,\mathrm{m/s}$。

由图 3 可知，此时 $t_d = 0.40\,\mathrm{s}$。之后滑块做斜抛运动。

在 0.40～0.80 s 过程中滑块在水平和竖直方向的位移为

中国知网 https://www.cnki.net

$$x = v_d(t_e - t_d)\sin\alpha$$
$$= 1.85 \times (0.80 - 0.40) \times 0.5\,\mathrm{m} = 0.37\,\mathrm{m}$$

$$y = v_d(t_e - t_d)\cos\alpha - \frac{1}{2}g(t_e - t_d)^2$$
$$= \left[1.85 \times (0.80 - 0.40) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (0.80 - 0.40)^2\right]\mathrm{m}$$
$$= -0.14\,\mathrm{m}$$

0.80 s时滑块与轨道圆心O的距离$d = \sqrt{(-R\cos\alpha + x)^2 + (R\sin\alpha + y)^2} \approx 0.31\,\mathrm{m} < R$，所以在此过程中滑块未与圆轨道相碰。

0.80 s时滑块速度水平分量为

$$v_{ex} = v_d\sin\alpha = 1.85 \times 0.5\,\mathrm{m/s} = 0.925\,\mathrm{m/s}$$

竖直分量为

$$v_{ey} = v_d\cos\alpha - g(t_e - t_d)$$
$$= \left[1.85 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 9.8 \times (0.80 - 0.40)\right]\mathrm{m/s}$$
$$\approx -2.32\,\mathrm{m/s}$$

则

$$v_e = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2} = \sqrt{0.925^2 + (-2.32)^2}\,\mathrm{m/s}$$
$$= 2.50\,\mathrm{m/s}$$

$$\tan\beta = \frac{v_{ey}}{v_{ex}} = \frac{-2.32}{0.925} \approx -2.70$$

所以此时速度方向斜向右下，与水平方向间夹角为68°。

3　设计说明

虽然滑块沿光滑竖直圆轨道运动模型的力学题很多，但将物体沿竖直圆轨道运动后接着做斜抛运动试题不多，且通过改变数据呈现方式和挖掘任务，可以很好地反映学生实际解决问题的能力。例题围绕一幅$v-t$图展开，所考查的概念涉及到$v-t$图、机械能守恒、圆周运动线速度与角速度关系、向心力与向心加速度、动量、冲量、动量定理、共点力合成与分解、抛体运动等多个力学中的重要内容。试题题型丰富，对学生从图象中提取有用信息有一定的要求。整套试题围绕竖直圆轨道展开，根据考查目的合理设计任务题型，任务难度逐级递增。

在设计试题数据以及作图标度时，除考虑数据的合理性以外，还要考虑数据的科学性。为保证计算出的轨道半径有2位有效数字，试题所给$v-t$图中最好能读到3位有效数字。

小题(1)考查了对$v-t$图中曲线下包围“面积”的物理意义的理解。从知识层面看考查的知识点相对单一，但从能力角度看，试题刻意选择0.110 s这一位于次刻度上的时间点而非0.1 s的主刻度，从而考查学生严谨、细致的科学精神和科学态度。

小题(2)需要学生能将实际问题中的对象和过程转换成所学的物理模型，明确滑块运动切向加速度的来源以及分析所给$v-t$图中曲线切线的物理意义。本题实际是一道计算题，学生的错误情况较为开放，设计成填空较好，但考虑到后续问题需要用到轨道半径R，若本题改为填空，会因读数误差造成各同学算出的半径各不相同，进而影响后续各题的答案。所以试题设计为选择题，以便正确作答的同学得到相同的轨道半径，进而使得后续答案相对统一，便于阅卷。

考虑到本题学生错误情况可能各不相同，所以在设计试题和选项时设计了多种可能的错误选项，适当增加选项个数，从常规的4个增加到6个，有利于降低因学生猜测正确造成的试题对学生能力的测量误差。

为了能提高试题的区分度和信度，在设计选择题时，应合理设计迷惑项，使得每个迷惑项都对应于一种典型的错误。例如学生若错误地认为0.565 s时滑块沿轨道运动到圆轨道最高点则算出的半径为0.6 m；若学生错误地认为0.565 s时滑块运动到圆轨道最高点，而在时间一半，即0.282 s时滑块运动到与圆轨道圆心等高处，则算出半径接近0.8 m；若学生在计算过程中误将半径算成直径，则会选择1.2 m、1.4 m或1.6 m。

小题(3)对圆周运动相关规律进行考查，第一空即增加了试题考查的覆盖面，同时也平衡试题的整体难度。第二空从知识点层面看是针对加速度的矢量性进行考查，而从能力素养层面看则是考查学生对运动的深刻认识。学生往往会将加速度简单地理解为向心加速度或切向加速度，而对于这样的错误情况，则可以在阅卷时通过分层评分的方式将之与完全不懂的学生区分开。

在任务设计时，还要精细考虑试题用词。在小题(4)中，只能表述为“运动到最高点”而不是“沿圆轨道运动到最高点”。同时，滑块斜上抛后理论上还会落回圆轨道而再次沿轨道向上运动，为表述严谨而没有歧义，所以在设问中表述为“第一次运动到最高点”。

中国知网　https://www.cnki.net

小题(4)(5)作为本情境的最后两问，难度明显提升。在设计任务数据时，滑块被设计为无法沿圆轨道运动到圆环最高点，从而使本题有别于同类型的大多数试题。按试题所给数据，滑块沿轨道运动到其与圆心的连线与水平方向间的夹角为30°时，其与轨道间的作用力即为0，之后做斜上抛运动。这样设计，既拓宽了试题考查知识点的覆盖面，同时又避免了思维定势。学生不能根据思维定势“想当然”地认为滑块一定能沿圆轨道运动到最高点，而是要做有依据的判断。所以这样的设计能考查科学思维中的科学推理和科学论证的要素，能很好地体现课标中关于学业质量水平4里“能恰当使用证据证明物理结论”的要求。其中小题(5)作为本题的最后一小问，要求学生能主动判断滑块是否能运动到轨道最高点，在适当提升难度的同时提高整体区分度，体现了课标科学思维中对分析和论证的要求。相比于直白地询问学生速度是否为矢量，小题(5)在具体问题中问速度而非问速率能更好地反映学生对速度矢量性的认识。作为本情境的最后一问，对学生建模、分析和论证均有一定要求。

4　任务设计的注意点

分析以上具体试题任务设计过程，可总结得出以下注意点：

① 设计数据的合理性。比如根据一般材料密度，设计小滑块质量与轨道半径间的关系，使得问题既便于计算，又符合实际。

② 选择题型有利于达成考查目的。对于错误结果明确且有限的试题，可以采用选择题的题型，通过设置迷惑项的方式来考查，且考查结果便于统计分析；对于错误原因多样但思考分析过程单一的试题，可以采用填空题的题型，通过观察解答结果来推测学生的水平；对于思维过程复杂、解答步骤较多的试题，可以采用计算或者论证的题型，通过观察解答过程和专业表达来判断学生的水平。

③ 平衡整卷计算量和书写量。由于考试时长的限制，试卷中涉及计算、论证的试题应合理取舍与调整。计算类试题若结果表达式不是非常复杂，则采用字母题比采用数值计算能更有效地节省考生的运算时间。

④ 合理设计图表数据。若欲考查数据估读能力、从函数图线上选取过程或数据点的能力，则在设计数据以及绘制图线时就要精细选择合适的分度和作图范围，以便达到考查目的的同时便于学生计算。

5　思考与建议

很多教师在自己寻找情境、设计情境类试题时感到困难，没有适合学生的情境，或者在某情境下没有适合学生作答的任务，而本题的改编给出了一条设计情境类试题的途径。

虽然小滑块沿光滑竖直圆轨道运动是学生非常熟悉的情境，但试题采用以速率-时间图象给出已知条件的方式较为少见。学生在日常学习中学过速度-时间图、示功图等曲线下包围的“面积”的物理意义，也学过位移-时间图、速度-时间图中曲线上某点切向斜率的意义。而本题通过对函数图象点的坐标、切线斜率、包围“面积”等的考察可引导学生关注学以致用而非死记硬背，引导教师重视对分析、推理方法的介绍和教学，而非机械僵硬地介绍速度-时间图、示功图等某几种特殊图象。

矢量的学习是高中有别于初中的一个重要方面。试题通过在具体问题中考察学生对动量、冲量矢量性的认识，相较于直白询问动量、冲量是否是矢量或某一动量或冲量的方向，能更好地反映出学生对动量、冲量的矢量性理解的深刻性。教师在日常教学活动中也可以多创设一些具体的问题情境来培养学生对一些物理规律和观念的理解和认识。

论证与分析是课标中科学思维的重要成分，虽然试题中所给的是圆轨道，但物块是否能沿轨道做完整的圆周运动是需要挖掘图象所给信息通过建模、分析、论证才能确定的。教师在教学过程中应更多地关注培养学生理性分析、科学推理、合理论证的思维品质。

本题的改编关注方法应用、观念内化、科学思维，使得任务不落“陈题”的俗套，可以真实地反映学生运用所学知识，通过建模、分析来解决实际问题的能力。教师在日常教学中除提供原题、真题给学生练习外，可以对一些传统的试题情境，通过改变数据呈现方式、变换已知条件、利用函数图象等方法改变试题的样式，并精巧设计任务链，考查学生概念理解与观念内化程度、知识迁移与应用能力、科学推理与分析本领。

参考文献

[1] 部攀. 创新情境与问题设计考查学科关键能力——2024年高考物理热学试题分析及启示[J]. 理科考试研究，2025(2)：30—34.

[2] 秦建如. v-t 图在高中物理教学中的妙用[J]. 中学物理教学参考，2014(6)：36—38.

[3] 吴磊峰. 指向核心素养测评的高中物理命题[J]. 浙江考试，2023(11)：14—19.

中国知网　https://www.cnki.net