命题与解题

利用虚功原理和势能极值法巧解竞赛难题

姜晓斌 （东莞市东莞中学松山湖学校 广东 523808）

摘 要 以第40届全国中学生物理竞赛复赛中一道热力学试题为例，针对热力学平衡稳定性问题，提出基于虚功原理的普适性解法，突破传统动力学分析的复杂性，为物理竞赛教学提供高效的思维工具。

关键词 热力学 动力学方程 虚功原理 简谐运动 泰勒展开
文章编号 1002-0748(2025)12-0040 **中图分类号** G633·7 **文献标识码** B

直接通过受力分析，而后使用动力学方程来分析解决热力学平衡问题，具有逻辑严密、清晰易懂的特点，也是大多数学生在竞赛试题分析过程中经常使用的一种方法。但是这种方法往往需要繁杂的分析计算，这与竞赛对学生知识迁移以及高阶抽象建模能力的培养要求不符。因此本文基于虚功原理和势能极值法，对热力学平衡问题进行更高效和更高阶的问题解决，以实现物理竞赛对学生综合素质培养的高阶要求。

1 试题呈现

例题 如图1所示，将一个粗细均匀、两端封闭的细玻璃管弯成半径为 r 的半圆环（玻璃管的横截面半径远小于 r），竖直固定于水平地面上，两端面与地面接触；玻璃管内有一质量为 m 的活塞（薄金属片），活塞与管内壁密接，两者之间的摩擦可忽略不计，活塞在半圆环内相对于竖直方向的角位置记为 θ。活塞两边管内各有 $n$mol 的理想气体，且其温度始终与外界温度 T（绝对温度）相同。已知重力加速度为 g，普适气体常量为 R，所有涉及的气体状态变化的过程均可视为准静态过程。

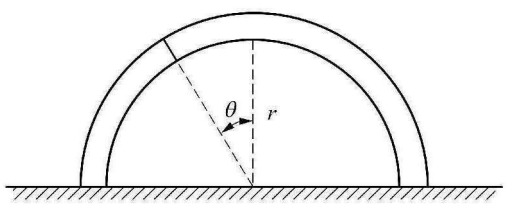

图1

（1）当温度 T 高于某临界温度 T_c 时，玻璃管的正中央（$\theta=0$）是活塞的稳定平衡位置。求临界温度 T_c 的表达式，并计算活塞在该平衡位置附近做微振动的圆频率；

（2）当温度 $T=T_c$ 时，分析并判断活塞在玻璃管正中央时平衡的稳定性。

解答如下几问时，可将 T_c 看作为已知参量，不必代入（1）中的结果。

（3）当 $T<T_c$ 时，求活塞的稳定平衡位置与竖直方向的夹角 θ_0 所满足的方程，并给出温度略小于 T_c 时 θ_0 的近似表达式（保留至非零的最低阶）；

（4）、（5）略。

2 常规解法：动力学方程和简谐运动模型

2.1 动力学方程分析

根据题目要求易知，该题的主要研究对象是细玻璃管中的活塞，从常规动力学方法的角度，需要对活塞进行受力分析，列出动力学平衡方程，再解方程即可。又根据题目要求平衡位置附近微振动的圆频率可知，本题在运算过程中需要使用到小量的Taylor展开，具备一定的运算量。

解析：（1）对活塞进行受力分析（见图2），其动力学方程为

$$mr\ddot{\theta}=mg\sin\theta-\frac{nRT}{r\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}+\frac{nRT}{r\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$$

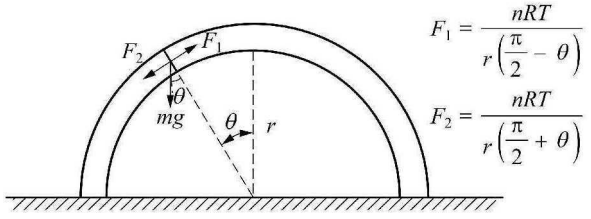

图2

中国知网 https://www.cnki.net

又由题目可知，活塞在平衡位置附近做微振动，所以对该位置进行Taylor展开至一阶，有

$$\sin\theta\approx\theta\quad \frac{1}{\frac{\pi}{2}-\theta}\approx\frac{2}{\pi}+\frac{4\theta}{\pi^2}$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\theta}\approx\frac{2}{\pi}-\frac{4\theta}{\pi^2}$$

将其代入活塞的动力学方程，可以解得活塞的运动方程为

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{r}\left(g-\frac{8nRT}{mr\pi^2}\right)\theta$$

若圆环的正中央为稳定平衡位置，则需要满足

$$g-\frac{8nRT}{mr\pi^2}<0$$

即 $T>\dfrac{mg\pi^2r}{8nR}=T_c$，$\omega=\sqrt{\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{8nRT}{mr\pi^2}-g\right)}$。

(2) 当 $T=T_c$ 时，此时需要考虑平衡的稳定性，便需要将小量展开至更高阶，所以对平衡位置进行更高阶的Tgylor展开，有

$$\sin\theta\approx\theta-\frac{\theta^3}{6}$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\theta}\approx\frac{2}{\pi}+\frac{4\theta}{\pi^2}+\frac{8\theta^2}{\pi^3}$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\theta}\approx\frac{2}{\pi}-\frac{4\theta}{\pi^2}+\frac{8\theta^2}{\pi^3}$$

将其再次代入活塞的动力学方程，由此可以解得活塞的运动方程近似为

$$\ddot{\theta}=-\frac{24+\pi^2}{6\pi^2}\frac{g}{r}\theta^3$$

则活塞的回复力正比于 θ^3，所以该位置为稳定平衡位置。

(3) 当 $T<T_c$ 时，要求活塞的平衡位置满足条件，只需令活塞受到的合力为0，则有

$$mg\sin\theta_0-\frac{nRT}{r\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)}+\frac{nRT}{r\left(\frac{\pi}{2}+\theta_0\right)}=0$$

由此可得 $\dfrac{2nRT}{mgr}=\left(\dfrac{\pi^2}{4}-\theta_0^2\right)\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$。

如此，便可将物理问题转化为数学函数恒成立问题，所以对右侧进行函数处理。令 $f(\theta_0)=\left(\dfrac{\pi^2}{4}-\theta_0^2\right)\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$，易知该函数是单调递减函数，且当 $\theta_0\to0$ 时，$f(\theta_0)$ 取最大值 $\dfrac{\pi^2}{4}$，所以上述非零解的条件为 $T<\dfrac{\pi^2mgr}{8nR}=T_c$，此时有 $\dfrac{T}{T_c}=\left(1-\dfrac{4\theta_0^2}{\pi^2}\right)\dfrac{\sin\theta_0}{\theta_0}$。

当 T 略小于 T_c 时，$\theta_0\to0$，则

$$\frac{T}{T_c}=\left(1-\frac{4\theta_0^2}{\pi^2}\right)\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\approx1-\frac{24+\pi^2}{6\pi^2}\theta_0^2$$

此时，$\theta_0=\pm\sqrt{\dfrac{6\pi^2}{24+\pi^2}\dfrac{T_c-T}{T_c}}$。

点评：使用常规动力学方程解决该问题，逻辑清晰严密，能较有效地体现出对学生力学问题分析能力的培养要求。但是该题目直接使用动力学方程解决，又需要多次用到Taylor展开，计算的复杂程度明显较高，不符合竞赛对学生建模以及思维能力的培养要求。

2.2　简谐运动近似法

由题干信息以及题目要求易知，活塞在平衡位置附近做微小振动，这符合简谐运动特点，故可通过将问题抽象建模成简谐运动，以简化题目的运算。

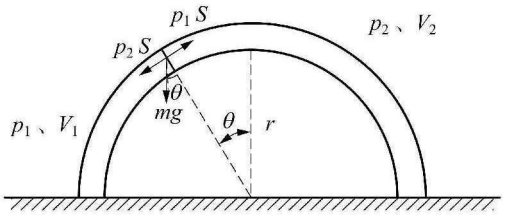

图3

解析：(1) 如图2所示，设活塞左侧气体的压强和体积分别为 p_1、V_1，右侧气体的压强和体积分别为 p_2、V_2，$\theta=0$ 时两侧的气体体积为 V_0，则有

$$V_0=\frac{\pi}{2}Sr,V_1=V_0\left(1-\frac{2\theta}{\pi}\right),V_2=V_0\left(1+\frac{2\theta}{\pi}\right)$$

又由热力学物态方程 $p_iV_i=nRT=p_0V_0$ 以及压力差的存在，所以对活塞有

$$(p_1-p_2)S=p_0V_0S\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$$

又因为 θ 在平衡位置附近是小量，则可有如下Taylor近似展开

$$\frac{V_0}{V_1}-\frac{V_0}{V_2}=\frac{1}{1-\frac{2\theta}{\pi}}-\frac{1}{1+\frac{2\theta}{\pi}}=\frac{\frac{4\theta}{\pi}}{1-\frac{4\theta^2}{\pi^2}}\approx\frac{4\theta}{\pi}$$

中国知网　https://www.cnki.net

所以，压力差为

$$(p_1-p_2)S=p_0V_0S\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)\approx p_0S\frac{4\theta}{\pi}$$

故恢复力为

$$\begin{aligned}F&=p_0S\frac{4\theta}{\pi}-mg\theta\\&=\left(p_0S\frac{4}{\pi}-mg\right)\frac{1}{r}\cdot(r\theta)\end{aligned}$$

若 $p_0S\frac{4}{\pi}-mg>0$，则 $F>0$，此时振动可稳定平衡。又因为 $p_0V_0=p_0S\cdot\frac{\pi r}{2}=nRT$，$p_0S=\frac{2nRT}{\pi r}$，所以有 $g<\frac{8nRT}{\pi^2mr}$，即 $T>\frac{mg\pi^2r}{8nR}=T_c$。

则 $\omega=\sqrt{\frac{1}{r}\left(\frac{8nRT}{mr\pi^2}-g\right)}$。

(2) $T=T_c$ 表示在一阶近似下，回复力大于临界值，即此时一阶回复力近似为零，若需分析其平衡稳定性，则需进行更高阶的近似分析。由 Taylor 展开至三阶，有

$$\begin{aligned}(p_1-p_2)S&=p_0V_0S\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)\\&\approx p_0S\left(\frac{4\theta}{\pi}+\frac{160\theta^3}{\pi^3}\right)\end{aligned}$$

$$mg\sin\theta\approx mg\left(\theta-\frac{\theta^3}{6}\right)$$

所以恢复力的三阶项为

$$F(\theta^3)=\left(\frac{16p_0S}{\pi^3}+\frac{mg}{6}\right)\theta^3$$

显然，$\frac{16p_0S}{\pi^3}+\frac{mg}{6}>0$，所以该平衡稳定。

(3) 解法与 2.1 相同。

点评：通过将活塞的运动看成简谐运动并通过建构简谐运动模型，利用恢复力解决问题(1)和(2)，其相比直接使用动力学方程分析，不仅使问题分析逻辑严密且直观，还大幅度减少小量泰勒展开的使用，即降低了题目的计算量。如此不仅能够培养学生的力学分析能力，还能够培养学生的抽象建模能力以及问题迁移能力，符合竞赛对学生的培养要求。

3　创新解法：虚功原理与势能极值法

3.1　虚功原理的广义坐标建模

虚功原理是解决力平衡问题较为重要的工具，通过判断物体运动受到的约束条件，确定系统的自由度和虚位移，而后引入广义坐标，如此便可利用虚功对题目进行分析。

该题中，以活塞为研究对象，其受到两个约束条件，分别为：在圆管中运动和压力差的作用，由此便可确定系统的自由度为 1。之后确定系统的广义坐标为活塞偏离竖直方向的角度 θ。

解析：(1) 取 θ 为广义坐标，$\theta=0$ 处活塞位置为势能零点，向下为正方向，则管中两侧气体体积变化为

$$\delta V_1=Sr\delta\theta,\ \delta V_2=-Sr\delta\theta$$

由虚功原理得

$$-p_1\delta V_1-p_2\delta V_2-mgr\sin\theta\delta\theta=0$$

即 $(p_2-p_1)Sr=mgr\sin\theta$，因

$$\begin{aligned}p_2-p_1&=\frac{nRT}{V_0-Sr\theta}-\frac{nRT}{V_0+Sr\theta}\\&=\frac{2nRTSr\theta}{V_0^2-S^2r^2\theta^2}\end{aligned}$$

且 θ 为小角，所以平衡条件为

$$\frac{2nRTS^2r^2\theta}{V_0^2-S^2r^2\theta^2}\approx mgr\theta$$

即 $\frac{2nRTS^2r^2}{V_0^2-S^2r^2\theta^2}\approx mgr$。

将 $V_0=S\frac{\pi r}{2}$ 代入上式并化简得

$$\frac{8nRT}{\pi^2}=mgr$$

解得此时 $T_c=T=\frac{mg\pi^2r}{8nR}$。

点评：直接使用虚功原理 $\delta W=0$ 虽然只能解决问题(1)，无法解决后续问题，对于题目整体而言作用有限，但其思维量和计算量相对常规解法均较小，而且该方法能够对学生抽象建模、问题分析以及知识迁移等能力进行培养，符合竞赛对学生的培养发展要求。

3.2　势能极值与平衡稳定性判定

该题的难点在于动力学过程的分析以及对题目运算的处理，如此便无法高效解决该题，但若利用势能极值对平衡稳定性判定的方法，便可高效解决该问题。

解析：(1) 取 θ 为广义坐标，取 $\theta=0$ 处活塞位置为势能零点，则活塞的重力势能为

$$U_1=-mgr(1-\cos\theta)$$

设活塞左侧气体的体积为 V_1，活塞右侧气体的

中国知网　https://www.cnki.net

体积为V_2，初始时两侧气体的体积为V_0，则有

$$V_1 = V_0 - Sr\theta,\ V_2 = V_0 + Sr\theta$$

$$V_0 = Sr\frac{\pi}{2}$$

其中θ为小量。

因为气体处于等温压缩或膨胀状态，故气体的势能可以视为气体所做功的负值，即

$$U_2 = -nRT\left[\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)+\ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)\right]$$

$$= -nRT\ln\left(\frac{V_1V_2}{V_0^2}\right)$$

代入V_1、V_2，可得

$$U_2 = -nRT\ln\left[1-\left(\frac{Sr\theta}{V_0}\right)^2\right]$$

$$\approx nRT\left(\frac{Sr\theta}{V_0}\right)^2$$

所以系统的总势能为

$$U_{\text{total}} = U_1 + U_2$$

$$= -mgr\frac{\theta^2}{2} + nRT\left(\frac{Sr\theta}{V_0}\right)^2$$

由平衡条件得

$$\frac{\partial U_{totol}}{\partial\theta} = -mgr\theta + 2nRT\frac{S^2r^2}{V_0^2}\theta = 0$$

又因为$V_0 = Sr\frac{\pi}{2}$，即$\frac{Sr}{V_0} = \frac{2}{\pi}$，所以有

$$T_c = T = \frac{mgr\pi^2}{8nR}$$

此时，系统的总势能为$U_{\text{total}} \approx \frac{1}{2}\left(-mgr + \frac{8nRT}{\pi^2}\right)\theta^2$，易得系统的等效劲度系数$k = -mgr + \frac{8nRT}{\pi^2}$。又因为转动惯量$I = mr^2$，所以微振动圆频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} = \sqrt{\frac{1}{r}\left(-g + \frac{8nRT}{m\pi^2 r}\right)}$$

（2）对总势能U_{total}求二阶偏微分，并代入V_0，可得

$$\frac{\partial^2 U_{\text{total}}}{\partial\theta^2} = -mgr + 2nRT\frac{S^2r^2}{V_0^2}$$

易知，当$T \geqslant T_c$时，$\frac{\partial^2 U_{\text{total}}}{\partial\theta^2} \geqslant 0$，如此便可知$T = T_c$时，总势能取极小值，由此便可以判定此时平衡稳定。

（3）当$T < T_c$时，总势能极小值出现在θ_0处，此时θ_0不再是小角，则平衡条件为

$$\frac{\partial U_{\text{total}}}{\partial\theta} = 0 = -mgr\sin\theta_0 + \frac{2\frac{S^2r^2\theta}{V_0^2}nRT}{1-\left(\frac{Sr\theta}{V_0}\right)^2}$$

根据题目条件，上式可化为

$$T = \left(\frac{\pi^2}{4} - \theta_0^2\right)\frac{mgr}{2nR}\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$$

所以$\frac{T}{T_c} = \left(1 - \frac{4\theta_0^2}{\pi^2}\right)\frac{\sin\theta_0}{\theta_0}$。

又因为当温度略小于T_c时，$\sin\theta_0 \approx \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6}$，即$\frac{\sin\theta_0}{\theta_0} \approx 1 - \frac{\theta_0^2}{6}$，故有

$$\frac{T}{T_c} = \left(1 - \frac{4\theta_0^2}{\pi^2}\right)\frac{\sin\theta_0}{\theta_0} \approx 1 - \frac{24+\pi^2}{6\pi^2}\theta_0^2$$

所以$\theta_0 = \pm\sqrt{\frac{6\pi^2}{24+\pi^2}\frac{T_c - T}{T_c}}$。

点评：直接使用势能曲线和平衡稳定判定的方法，属于从能量的角度对问题进行建模分析，该方法与前述三种方法相比，不仅可以避免常规力学分析方法的繁杂，还可以弥补虚功原理只能解决问题（1）的缺点，使整个题目的解题过程中（1）、（2）、（3）有所串联，大大提高了本问题的解题效率。

该方法非常巧妙，在培养学生从能量角度分析问题能力的同时，还能够简化题目的思维模式以及计算难度，符合竞赛对于学生的培养要求，适合推广。

4　总结与教学建议

上述四种方法对于竞赛教学而言，各有优劣。常规方法中的动力学方程分析方法，适合在学生刚学完力学有关内容，并且已经掌握泰勒展开的时候进行训练，以让学生掌握基本的力学问题分析思路，并且实现对学生计算能力的培养。

简谐运动近似法则适合在学生学完机械振动或者进行拔高培养期间进行训练，如此不仅能够培养学生的问题抽象建模能力，还能够引导学生进行知识迁移，使学生意识到简谐运动不仅可以用于解决力学问题，还可以解决热力学问题，以实现建模和思维能力的进一步提高。

创新方法中虚功原理和广义坐标分析的部分，

（下转第18页）

中国知网　https://www.cnki.net

(2) 也可以采用点按红外遥控器上的按钮▶||的方式,在演示过程中通过演示装置上的预留孔实现静态“F”和动态旋转箭头“↗”的切换。

(3) 使用内置锂电池供电,并搭配了充放电管理模块。

(4) 该装置为立式套装(见图 9),切实为一线物理教师所想,为广大学生上好物理课所用,便于使用,便于搬运、移动和存放,由于使用低成本工业化电子模块,成本低廉,易于推广。

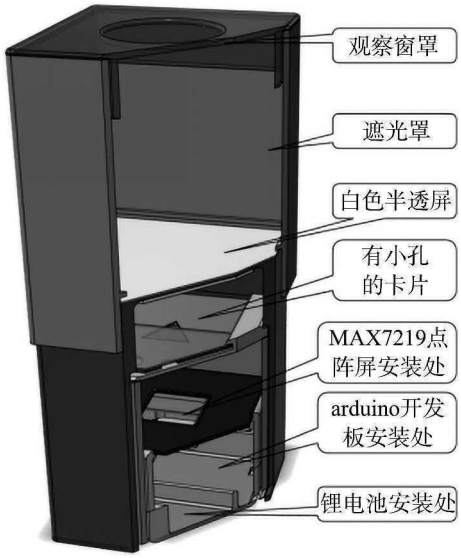

图 9

(5) 该装置采用 3D 建模,尺寸精确,3D 打印,选黑色及其他深色遮光,选 1 mm 白色厚板做屏,且和对应黑色可调节像距的暗箱一次性打印,由于采用了打印机暂停换丝技巧,使得两种不同颜色的材料浑然一体,解决了技术难题。

(6) 利用该装置,成功解决了一些上面提到的疑难习题,化解了关于小孔成像的教学难点。

(7) 动态光源部分也可以作为研究凸镜成像规律实验的光源。

4　实验流程图

利用本装置的光源盒进行小孔成像演示实验的流程如图 10 所示。

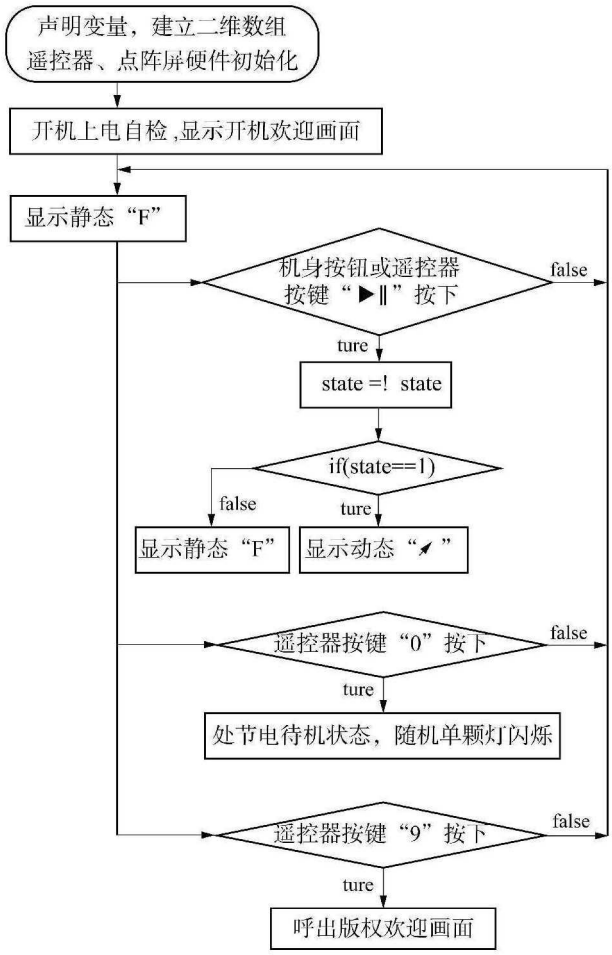

图 10

参考文献

[1] 杨述武,等. 普通物理实验 3(光学部分)[M]. 北京:高等教育出版社,2015.

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中物理课程标准(2017 年版 2020 年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020.

(上接第 43 页)

虽然在本题目中只能解决问题(1),但其对热力学问题较为新颖的处理方法,能够有效地在学生学完虚功原理部分内容后对学生关于平衡问题的解决思路提供参考,以实现学生自主对其他模型的平衡问题进行迁移应用。

创新方法中关于势能极值分析的部分,从能量的角度出发,将复杂问题简单化处理,极大程度地简化了问题分析的复杂程度,适合在学生学完全部内容后综合应用时进行拔高练习,并且可以推广至多自由度系统平衡问题,如弹性膜振动、多体热力学耦合等,为学生解决复杂竞赛题提供统一框架。

参考文献

[1] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学Ⅰ[M]. 北京:高等教育出版社,2023.

[2] 黄洪才,陈伟宏. 物理竞赛教程(高中第一分册)[M]. 上海:华东师范大学出版社,2020.

中国知网　https://www.cnki.net