有心引力场中天体运动的解法探究*

——以第41届全国中学生物理竞赛复赛第6题为例

周璐璐 谢雅凤 彭俊霖 叶晴莹** （福建师范大学物理与能源学院 福建 350117）
唐 政 （福州金山中学 福建 350008）

摘 要 有心力问题在物理竞赛中占据重要地位，文章以第41届全国物理竞赛复赛第6题为例，提供多种新的解题方法，并分析各解法的特点，旨在帮助学生熟悉并突破此类难点，提高解决有心力问题的能力。

关键词 天体运动 有心力场 一题多解 物理竞赛
文章编号 1002-0748(2025)9-0062 **中图分类号** G633·7 **文献标识码** B

有心力是一种特殊类型的力，其方向始终指向惯性系中的某一固定点，形成的力场称为有心力场[1]。在行星绕太阳运动和电子绕原子核运动中，分别受到的万有引力和库仑引力都可近似视为有心力。作为自然界中最普遍的一种力，有心力问题在物理学研究中占据重要地位，常常出现在行星运动模型和粒子散射模型中。因此，研究有心力问题具有重要的意义，本文将以第41届全国中学生物理竞赛复赛第6题为例进行探讨。

1 试题分析

例题 爱因斯坦的广义相对论预言星光会在太阳附近发生偏折。1919年，英国天文学家埃丁顿率领一支队伍，藉发生日全食的机会对这个现象进行了观测，验证了上述预言。下面对此进行分析。

(1) 先在牛顿的动力学和万有引力理论的框架下考虑。若质量为 m 的质点在位于坐标原点 O 的质量为 $M(M\gg m)$ 的引力场中运动，其轨道是圆锥曲线。在平面极坐标系 (r,θ) 中，轨道方程为 $r(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}(-\pi<\theta\leqslant\pi)$，$p(p>0)$ 称为半通径，$e(e\geqslant 0)$ 称为偏心率。若 $e>1$，则存在 $\theta_{\max}$，使 $-\theta_{\max}<\theta<\theta_{\max}$，试确定 $\theta_{\max}$ 及其取值范围。

(2) 上面第一问中的质点的轨道的参数 p 和 e 由质点的能量 E（含动能和相互作用势能）和相对于 O 点的轨道角动量的大小 L 决定。试导出 $p=p(E,L)$ 和 $e=e(E,L)$ 的函数关系。

(3)、(4)略。

天体运动是中学物理竞赛中常见的问题。其中，天体绕恒星运动的问题可简化为质点在有心力作用下运动的问题。在物理竞赛中一般通过能量守恒和角动量守恒推导出质点的运动方程，但从课程教学法的角度来看，采用一题多解的方法，从不同视角剖析问题，有助于培养学生的综合分析和灵活应变的能力，提升学生对物理现象和物理本质的认识，促使他们更积极地参与学习和探索。

在平方反比的有心力场中，除了满足能量守恒定律和角动量守恒定律外，还满足龙格-楞次矢量守恒，这些定律对质点的轨道运动施加了相应的约束[2,3]。此外，比耐公式在平方反比的有心力场中实现了轨道微分方程的线性化，将其简化为二阶常系数线性非齐次微分方程[1]。因此，在求解有心力场中质点的轨道运动问题时，可以采用多种解法，从而获得更全面的理解。下面将针对该题的第二问提出有别于标准答案的新解法，以供参考。

2 第二问的新解法

2.1 解法一：运用能量守恒定律和角动量守恒定律求解

当 $r(\theta)=\dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ 且 $e>1$ 时，轨道为双曲

* **基金项目**：本文系福建省教育科学规划2023年教育考试招生重点专项课题“高考综合改革背景下物理试题情境研究”（课题编号：FJJYKS23-25），和福建师范大学研究生教育精品课程（编号：zlgc202202003），及福建省高校物理学学科联盟教学改革项目“认知科学视域下《大学物理》学习的科学思维坐标系形成机制及培养研究”（项目编号：FJPHYS-2022-B02）的研究成果。

** **通讯作者**：叶晴莹。

中国知网 https://www.cnki.net

线[4]。如图 1 所示，设 M 位于双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点，则左分支为质点的运动轨道。

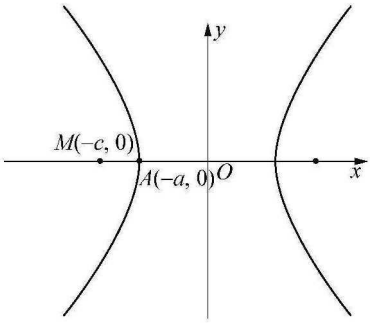


图 1

设质量为 m 的质点在离 M 无穷远处的速度为 v_0；在离 M 最近处（即图 1 中 A 点）速度为 v_1，由图 1 可知，此时 m、M 相距 $r_{\min}=c-a$。

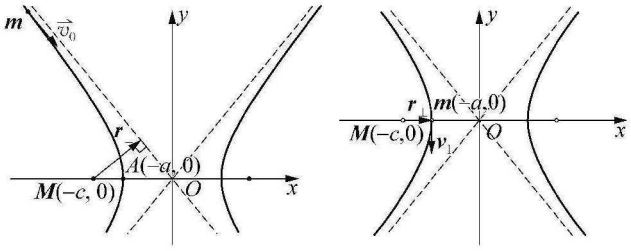
m、M 之间仅存在引力作用，系统能量守恒。对 m、M 构成的系统运用能量守恒定律得

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{c-a} \qquad ①$$

设 m 对左焦点的角动量为 $\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}_{\perp}\times m\vec{v}$，其中 $\vec{r}_{\perp}$ 为 $\vec{r}$ 在垂直于 $\vec{v}$ 方向的分量。当 m 在离 M 无穷远处时，m 无限逼近渐近线，因此 $\vec{r}_{\perp}$ 可近似看作如图 2(a)所示的有向线段，由双曲线的性质可知，焦点距离渐近线的距离为 b，则角动量的大小 $L_0=mv_0b$；当 m 在离 M 最近位置时，$\vec{r}_{\perp}$ 为 $\vec{r}$ 在垂直于 $\vec{v}_1$ 方向的分量。如图 2(b)所示，角动量的大小 $L_1=mv_1(c-a)$。

m 的受力方向指向 M，所以它对左焦点的力矩为零，因此 m 对左焦点的角动量守恒。由角动量守恒定律可得

$$L=mv_0b=mv_1(c-a) \qquad ②$$



(a) m 离 M 无穷远时　　(b) m 离 M 最近时

图 2　两种情况分析

已知双曲线中 $c^2=a^2+b^2$，将其与①、②式联立得 $v_0=\sqrt{\frac{GM}{a}}$。　③

将③式代入①式得 $a=\frac{GMm}{2E}$。　④

再将 $c^2=a^2+b^2$ 与②、③式联立得

$$c=\sqrt{a^2+\frac{L^2a}{GMm^2}} \qquad ⑤$$

联立④、⑤式得

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \qquad ⑥$$

将 $\theta=0$，$r=c-a$ 代入 $r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$，可得

$$p=\frac{c^2-a^2}{a} \qquad ⑦$$

将④、⑤式代入⑦式得 $p=\frac{L^2}{GMm^2}$。　⑧

点评：本解法依据能量守恒与角动量守恒定律，并利用轨道中的近日点和无穷远处这两个特殊位置，直接确定轨道离心率 e、轨道参数 p 与质点能量 E、相对于焦点的角动量 L 之间的关系。该解法思路清晰、计算简便，但依旧需要学生理解并运用物理定律，掌握能量和角动量的守恒概念。同时，要利用轨道的特定位置来简化问题，培养了学生的空间想象能力和问题解决的灵活性。

2.2　解法二：利用比耐公式求解

已知有心力场中的轨道微分方程，即比耐公式为

$$\vec{F}=-mh^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u\right)\vec{e}_{\mathrm{r}} \qquad ⑨$$

式中：$u=\frac{1}{r}$；$h=\frac{L}{m}$，L 为相对于力心的角动量。

万有引力 $\vec{F}(\boldsymbol{r})=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}}=-GMmu^2\vec{e}_{\mathrm{r}}$，为有心力，将其与 $h=\frac{L}{m}$ 代入⑨式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{GMm^2}{L^2} \qquad ⑩$$

此为非齐次线性方程。

对应齐次方程的通解为 $u_1=A\cos\theta+B\sin\theta$，原方程的特解为 $u_2=\frac{GMm^2}{L^2}$，可得原方程的通解为

$$u=A\cos\theta+B\sin\theta+\frac{GMm^2}{L^2} \qquad ⑪$$

将⑪式对 θ 求一阶导数，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=-A\sin\theta+B\cos\theta \qquad ⑫$$

如图 3 所示，$r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 把指向轨道拱点

中国知网　https://www.cnki.net

的直线作为极轴[1]。当$\theta=0$时，r取极值，有$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}=0$，可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}=-\frac{1}{r^2}\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}=0 \tag{13}$$

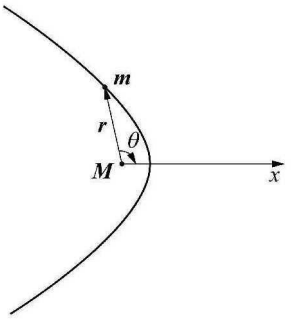


图3

当$\theta=0$时，位矢$\vec{r}$与速度$\vec{v}$垂直，则有$L|_{\theta=0}=mvr$，此时质点的能量为

$$E=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{L^2}{2m}u^2-GMmu \tag{14}$$

由⑭式且$u>0$可解得

$$u|_{\theta=0}=\frac{m}{L^2}\sqrt{G^2M^2m^2+\frac{2EL^2}{m}}+\frac{GMm^2}{L^2} \tag{15}$$

将⑬、⑮式代入⑫式，可解得$A=\frac{m}{L^2}\sqrt{G^2M^2m^2+\frac{2EL^2}{m}}$，$B=0$。将其代入⑪式可解得

$$r=\frac{1}{u}=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\cdot\cos\theta} \tag{16}$$

对比轨道方程$r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$可得

$$p=\frac{L^2}{GMm^2},\ e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \tag{17}$$

点评：本解法直接利用比耐公式计算，减少了繁琐的积分计算，帮助学生提高解决问题的效率和灵活性。此外，它还强调了数学与物理的紧密结合，增强了学生运用数学工具解决物理问题的能力，特别是在处理力学计算问题时的简化技巧。此解法要求学生不仅要理解比耐公式的推导和物理意义，还需掌握如何将其应用于实际问题。

2.3　解法三：利用龙格-楞次矢量守恒求解

已知在平方反比力场中，龙格-楞次矢量$\vec{B}=\vec{v}\times\vec{L}+V(r)\vec{r}$是一个守恒量，其中$V(r)$为力场的势能[2]。万有引力属于平方反比力，势能为$V(r)=-\frac{GMm}{r}$，则龙格-楞次矢量变为$\vec{B}=\vec{v}\times\vec{L}-GMm\vec{e}_r$，其大小为

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{\vec{B}\cdot\vec{B}}\\&=\sqrt{(\vec{v}\times\vec{L}-GMm\vec{e}_r)\cdot(\vec{v}\times\vec{L}-GMm\vec{e}_r)}\\&=\sqrt{(\vec{v}\times\vec{L})\cdot(\vec{v}\times\vec{L})-2GMm\vec{e}_r\cdot(\vec{v}\times\vec{L})+(GMm)^2}\end{aligned} \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}&(\vec{v}\times\vec{L})\cdot(\vec{v}\times\vec{L})\\&=(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{L}\cdot\vec{L})-(\vec{L}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{L})=v^2L^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&GMme_r\cdot(\vec{v}\times\vec{L})=GMm\vec{L}\cdot(\vec{e}_r\times\vec{v})\\&=\frac{GM}{r}\vec{L}\cdot(m\vec{r}\times\vec{v})=\frac{GM}{\vec{r}}\vec{L}\cdot\vec{L}=\frac{GML^2}{r}\end{aligned}$$

将上述两式代回⑲式可得

$$\begin{aligned}B&=\sqrt{v^2L^2-\frac{2GML^2}{r}+(GMm)^2}\\&=\sqrt{\frac{2L^2}{m}(T+V)+(GMm)^2}\\&=\sqrt{\frac{2L^2E}{m}+(GMm)^2}\end{aligned} \tag{19}$$

将龙格-楞次矢量$\vec{B}$和位矢$\vec{r}$点乘，可得

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{r}&=(\vec{v}\times\vec{L})\cdot\vec{r}-GMmr\\&=(\vec{r}\times\vec{v})\cdot\vec{L}-GMmr=\frac{L^2}{m}-GMmr\end{aligned} \tag{20}$$

$$\vec{B}\cdot\vec{r}=Br\cos\theta \tag{21}$$

式中θ为$\vec{B}$与$\vec{r}$的夹角。已知$\vec{B}$的方向是由焦点指向最近的顶点，即极坐标系的极轴，因此θ也为极坐标系的极角。

联立⑳、㉑式可得

$$r=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\frac{B}{GMm}\cos\theta} \tag{22}$$

将⑲式代入㉒式，得

$$r=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\cdot\cos\theta} \tag{23}$$

对比轨道方程$r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$可得

$$p=\frac{L^2}{GMm^2},\ e=\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$$

中国知网　https://www.cnki.net

点评：本解法利用龙格-楞次矢量 $\vec{B}$ 处理质点在平方反比有心力场中的运动，无需求解微分方程，提升了解题的效率和技巧；还培养了学生的矢量运算能力和几何思维，更好地将数学工具与物理现象结合起来。此解法要求学生不仅要理解龙格-楞次矢量的物理意义，还需掌握矢量运算的相关知识。

2.4　解法四：利用微积分方法求解

(1) 思路一

系统的能量 E(包括动能和相对作用势能)和相对于 O 点的轨道角动量的大小 L 可分别表示为

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2-\frac{GMm}{r} \tag{24}$$

$$L=mr^2\dot{\theta} \tag{25}$$

联立㉔、㉕式得

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{L^2}{m^2r^2}+\frac{2GM}{r}} \tag{26}$$

联立㉕、㉖式得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=\frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{L^2}{m^2r^2}+\frac{2GM}{r}}} \tag{27}$$

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{\frac{2Em}{L^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2GMm^2}{L^2r}}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{r}-\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2+\frac{G^2M^2m^4}{L^4}+\frac{2Em}{L^2}}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right) \tag{28}$$

令 $\left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^{-1}=A$，$\frac{G^2M^2m^4}{L^4}+\frac{2Em}{L^2}=B$，则㉛式化简得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right)^2+B}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{r}\right)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-\left[\frac{1}{\sqrt{B}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right)\right]^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{B}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right)\right) \tag{29}$$

令 $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{B}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right)$，代入㉙式可得

$$\mathrm{d}\theta=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\pm\mathrm{d}\varphi \tag{30}$$

对㉝式积分得 $\varphi=\pm(\theta+C)$，式中 C 为积分常数。则有

$$\cos(\theta+C)=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{B}}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{A}\right) \tag{31}$$

将㉞式中的 A、B 展开得

$$r=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\cdot\cos(\theta+C)} \tag{32}$$

一般情况下，把指向轨道拱点的直线作为极轴，则 $C=0$[1]。㉜式变为

$$r=\frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}\cdot\cos\theta} \tag{33}$$

对比轨道方程 $r(\theta)=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ 可得最终结果。

(2) 思路二

基于思路一㉚式可知

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}=\frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{L^2}{m^2r^2}+\frac{2GM}{r}}}$$

令 $u=\frac{1}{r}$，则有 $\mathrm{d}r=-r^2\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$，将其代入上式，可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+u^2=\frac{2Em}{L^2}+\frac{2GMm^2u}{L^2} \tag{34}$$

对㊲式两边求 θ 的一阶导数，有

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{GMm^2}{L^2} \tag{35}$$

后续的解答思路与解法二一致。

点评：本解法将质点能量、相对于 O 点的角动量用极坐标 r、θ，以及时间 t 表示，联立消去时间 t，从而得到 r 和 θ 的微分方程，再借助微积分解得轨道方程。此解法强调分析和综合能力，特别是在处理复杂积分时，锻炼了学生的计算能力和耐心。对于高中物竞生来说，这种解法可能较为困难，但它促使学生在解题过程中培养出系统思考和问题解决的能力。

(下转第80页)

中国知网　https://www.cnki.net

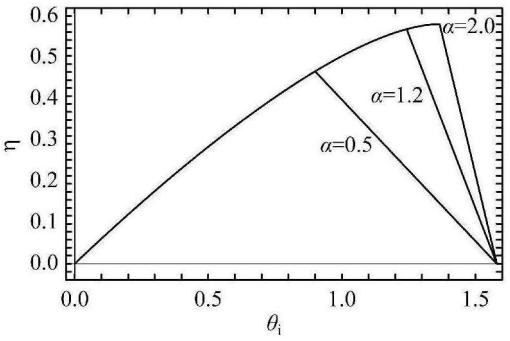


图 3　不同品质因子 α 下的 $\eta-\theta_i$ 关系图

拟合。当入射速度小于和等于 6.7 m/s 时，乒乓球的回旋角速度与理论推导的结果吻合较好，而当入射速度大于 6.7 m/s 时，理论与实验间的偏差逐渐变大。究其原因，当乒乓球旋转速度较大时，还需考虑空气阻力和空气密度对其的影响，而且回旋速度越大空气阻力的作用效果越明显。

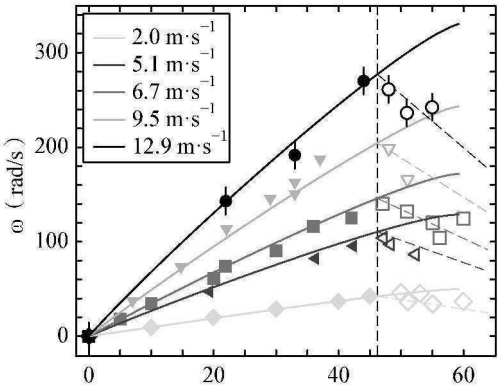


图 4　改变入射速度和角度时的实验测量图

设计意图：科学推理方面，该环节引导学生在系统性理论推导的基础上，分析不同条件下乒乓球回旋速度的影响因素。科学解释方面，笔者通过呈现 η 与 θ_i 的理论图象，引导学生阐述图象中的转折点、整体变化趋势并分析其背后蕴含的原因；通过观察学生的表达结果，评估学生对力与运动关系、品质因子概念等的理解深度。知识整合方面，笔者呈现实验测量与理论拟合的结果图，启发学生思考产生偏差的原因，起到引导学生进行整合与推理的作用。

3　小　结

（1）强化趣味性与操作性，激发深度探究的动机。

问题情境重视选择具有趣味性的科技前沿或者生活场景，以此缓解竞赛培优课堂的枯燥与单调。对于情境选择，笔者建议适当阅读物理学术期刊如 Physical Review E、The Physics Teacher 等，筛选符合竞赛生认知水平的研究论文，根据教学需要既可用于教学主题介绍，又能用于设计问题链。此举能提升问题链的趣味性与操作性，进而在问题解决中激发学生的求知欲和思维火花，达成深度探究。

（2）克服机械化与片面化，彰显过程评价与反馈。

传统的竞赛培训教学多是纯理论推导与纸笔测验，不仅增加学习内容的抽象性，还缺乏学生积极反馈的环节。融入问题链的物理竞赛培训教学，注重培养学生的关键能力，通过自主思考、组内讨论、小组展示等形式，开展过程性评价，让学生在互评中进行自我纠错与实时反馈。教学的全过程，教师扮演辅助者与引导者的角色，适时调节课堂进度与补充必要的学习内容。

参考文献

[1] 胡成，何迪倩，石美玲. 课前学习诊断支持下的物理问题链教学设计　以“波长、频率和波速”教学为例[J]. 物理教学，2024(1)：7　11.

[2] 刘智勇，李刚. 析物理竞赛试题，谈“关键能力”培养[J]. 物理教师，2024(12)：93　94，96.

[3] RÉMOND T，DOLIQUE V，RINALDI R G. Oblique impact of a buckling table-tennis ball on a rigid surface [J]. Physical Review. E，2023，107(5)：055007.

（上接第 65 页）

3　总　结

有心力问题在高中物理竞赛中占据着重要的地位。它不仅涉及基础的力学概念，如牛顿定律、能量守恒以及角动量守恒，还结合了几何和数学知识的应用，能够锻炼学生的综合思维能力。本文从多个视角剖析 2024 年第 41 届全国中学生物理竞赛复赛第 6 题的解法，通过一题多解的方式研究有心力问题，训练学生举一反三、分析问题和解决问题的能力，帮助学生掌握处理这类问题的方法。

参考文献

[1] 管靖，刘文彪. 理论力学简明教程[M]. 北京：科学出版社，2008：34　36.

[2] 周国全. 龙格-楞次矢量的张量积形式及其应用[J]. 大学物理，2015(1)：12　15，29.

[3] 李力. 在普物教学中用守恒量研究开普勒运动的一点补记[J]. 物理与工程，2013(1)：15.

[4] 於罗英. 高中物理竞赛中“天体的运动”解法探究[J]. 物理教学，2019(8)：64　68.

中国知网　https://www.cnki.net