教研员论坛

谈谈几个与矢量相关联的物理概念的分解问题

赵 坚* （昆明市五华区教育体育局 云南 650031）
卢玉龙 （南京师范大学附属中学秦淮科技高中 江苏 210007）

摘 要 从日常教学中发现的问题出发，通过具体的实例阐述力、速度、场强三个常见矢量分解时的区别。强调为什么有些问题中矢量分解时遵循平行四边形定则，而有的问题中则要区别矢量在两个不同方向的投影与分量问题，不能不加区别地乱用平行四边形定则。

关键词 矢量 分解 投影 分矢量 矢量分量 平行四边形定则
文章编号 1002-0748(2025)7-0043 **中图分类号** G633·7 **文献标识码** B

1 问题引入

众所周知，矢量是一个非常重要的概念，矢量的合成与分解遵循平行四边形定则（或三角形定则），在高中物理中比较典型的矢量有力、速度和电场强度等。在日常的教学活动中我们发现，学生在对力进行分解时的正确率普遍较高，学生也较容易理解；但是学生在对速度、电场场强进行分解时则经常会出错。同样是矢量的分解，为何会出现如此大的差异？笔者对此进行了较为详细的探讨研究，发现问题的关键在于部分教师对于其中所包含的一些关键环节或问题并设有清楚的认识，只知生搬硬套地使用平行四边形定则，而不去考虑作为矢量的物理概念本身的区别与联系；并没真正理解分解的概念，而是纯粹从数学的角度利用平行四边形定则想当然地分解矢量，从而出现错误的分解方式。较为突出的问题集中表现在：根据数学知识，一个矢量按照平行四边形定则沿着任意给定的两个方向进行分解，其分解方式具有不确定性；但是在某些具体的物理问题中，为何会对一些物理量的分解加以限制？这与数学对矢量的要求矛盾吗？鉴于此，本文将试图对此作出较详细的探讨，以期为教学提供参考。

2 问题探讨

2.1 力的分解

在人教版《物理（必修第一册）》教材中给出了力的分解的定义，即求一个力的分力的过程叫作力的分解[1]，力的分解遵从平行四边形定则（或三角形定则）。如果不加限制，对于某一条对角线，可以作出无穷多个不同的平行四边形。换言之，如果没有约束条件，某个力 F 可以分解为无数对大小不同、方向各异的分力。一个力究竟应该如何分解，要视具体问题而定，一般按照有利于问题解决的方向进行分解。而无论具体问题怎样，该力的两个分力 F_1、F_2 一定是相互独立的关系，这是由力的客观性和独立性所决定的。而按照平行四边形定则所得到的这两个彼此独立的分力，它们的夹角可以按照题意取任意的角度（见图1）。

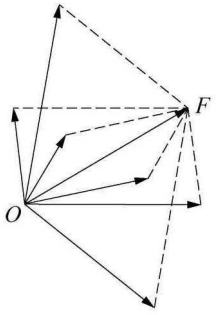


图1

2.2 速度的分解

速度同样也是矢量，学生在遇到速度分解的问题时往往会依葫芦画瓢，仿照力的分解方式来分解速度，这样就很容易出现错误的分解情况。究其原因，主要来源于两个方面：其一，对同一参考系中的合速度判别不清，对题目中给定的某一已知分运动这一约束条件没有细加考虑；其二，对于相对运动中所涉及的不同参考系下速度的合成问题，没有考虑到彼此之间的关联与变化。

* 通讯作者：赵坚。

中国知网 https://www.cnki.net

例1　如图2所示，某人通过跨过定滑轮O的轻绳拉动水面上的小船，已知人向左匀速运动的速度为v_0，试求当绳与水平方向夹角为θ时船的速度v。

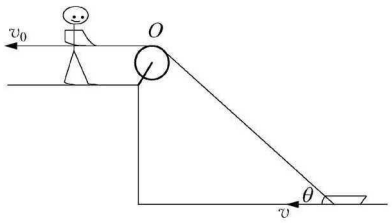


图2

例1是典型的“拉船近岸”问题，问题涉及的各个速度均为同一参考系。

错误解法1：如图3所示，将绳拉小船的速度v_0作为合速度，小船沿水平面方向运动的速度v为v_0的分量，即$v=v_0\cos\theta$。

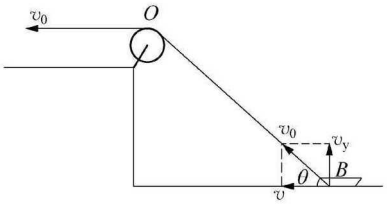


图3

错因分析：此种解答的错误在于把绳拉小船的速度v_0当成合速度，而把小船沿水面的真实运动速度当成前者的一个正交分量，从而颠倒了合速度与分速度。反过来看，假如我们承认此错误观点，那么v_0除沿水平方向有一分量v外，还应该在竖直向上方向上有一分速度，这表明小船应离开水面升空，这显然与实际情况相悖。

错误解法2：如图4所示，根据平行四边形定则将船速v分解为沿绳方向的v_1和竖直向下的v_2，由于$v_1=v_0$，则由几何关系可得$v=v_1\cos\theta=v_0\cos\theta$。

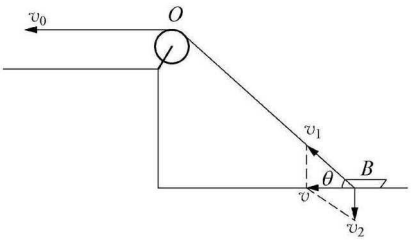


图4

错因分析：在这种解答中，既然将沿绳方向绳拉小船的运动当成一个分运动，并认为$v_1=v_0$，那么，另一个分运动的方向就不能随意确定，亦即另一个分运动方向确定的基本原则是：它的独立存在应当不影响已经确定的第一个分运动的效果。此解答中假想的竖直向下的分速度v_2显然违背了这一原则，因为由于这个假想的分运动存在，小船又将以$v_2\sin\theta$（v_2在沿绳方向上的投影）的速度沿绳反方向远离O点，如此一来，题目已经明确的小船以速度v向O点靠近的这一事实就会因这个假想的分运动的出现而遭到破坏，使得小船沿绳方向的速度变为$v_1-v_2\sin\theta=v_0-v_2\sin\theta$，这显然与题意不符。那么，这是否违背速度作为矢量可沿着任意给定的两个方向进行分解的原则呢？回答是肯定的，并不违背。事实上，按照这种方法进行分解时v_1与v_0并不相等！其原因在于速度作为矢量可以沿任意两个方向分解，但这是对任一个分速度的大小没有任何约束限制的情况说的，错误解法2之所以不对，在于对其中一个分速度的大小已经作出约束。假如我们仍然坚持要以此种方式进行分解，就必须放弃“$v_1=v_0$”这个条件，而把v_1作为未知量。如图4所示，有

$$v=v_1\cos\theta,\ v=v_2\cot\theta$$

此时，小船沿绳方向靠近O点的速度v_0应等于v_1与v_2沿绳方向的投影之差，即

$$v_1-v_2\sin\theta=v_0$$

将以上三式消去v_1、v_2，可得正确答案：$v=\dfrac{v_0}{\cos\theta}$。

通常，教师在教学中讲解此问题时，往往告诉学生要将船速v正交分解为沿绳方向的v_3和垂直于绳的v_4，如图5所示。这样由几何关系可得$v=\dfrac{v_3}{\cos\theta}$。又因为$v_3=v_0$，所以$v=\dfrac{v_0}{\cos\theta}$。但部分教师未能告诉学生这样分解以及$v_3=v_0$的原因。其实，这主要是因为，当绳端一点$A$运动到$A_1$，船由$B$运动到$B_1$时，船的实际运动是水平向左的，但我们可以想象成船先沿以O为圆心、OB为半径的圆弧运动到B_2，此过程中A点不动，然后船沿绳B_2O斜向上运动到B_1，此过程中A运动到A_1，由于绳不可伸长，故有$AA_1=B_2B_1$，易得$v_3=v_0$[2]。

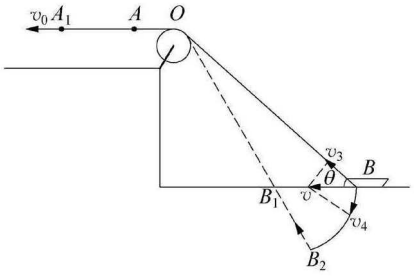


图5

小结：从上述例子的分析可以看出，在同一参考系中，运用速度合成和分解法解题时，应注意正确判断合速度，即所研究的对象在选定参考系中的真实运动速度，对于如何选择两个分运动的方向，应根据题意给出的条件，如果根据题意已经把某一已知的运动当作一个分运动，那么，第二个分运动的方向就

中国知网　https://www.cnki.net

不能随便指定。什么情况采用正交分解，什么情况不采用正交分解，须视具体情况而定。但必须遵循的基本原则是：第二个分运动的存在，不应影响（或改变）已确定的第一个分运动的效果。

例 2　某条河流的水流速度恒定且平行于河岸，一只小船正以速度 $v_{船}$ 渡过该河流，如图 6 所示。渡河过程中船头与上游河岸的夹角始终为 θ，求船相对于水流的速度 $v_{相}$ 和水流速度 $v_{水}$。

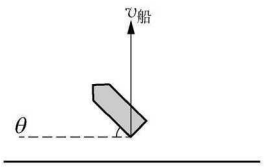


图 6

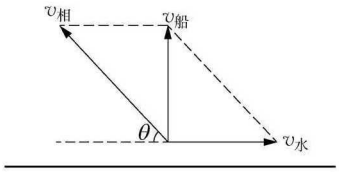


图 7

解析：例 2 是典型的小船过河问题，这类问题涉及相对运动的速度合成定理，即绝对速度等于相对速度和牵连速度的矢量和。由于这类问题中的三个速度并非完全是在同一参考系中的速度，所以在这种情况下我们也可以说相对速度和牵连速度是绝对速度的两个分量。值得注意的是，由于引入了静止参考系、运动参考系以及相对于运动参考系的运动等概念，故在物理思想和方法上比单纯的同一参考系下的速度合成和分解前进了一步。针对这类问题，由于速度合成、分解和相对运动的速度合成定理都是速度合成，故对许多问题的解答既可用前者，也可用后者，但应该要清楚它们之间的本质区别。就本问题而言，如果用速度合成法，那么，船对岸的真实运动速度是合速度，水的流速和船的划行速度（以岸为参考系）当作彼此独立存在的二个分运动的速度，其中划速是指水不流动时船对岸的速度，因此船对岸的速度等于二个分速度的矢量和。如图 7 所示，将渡河速度 $v_{船}$ 分解为相对于水流的速度 $v_{相}$（沿船头方向）和水流速度 $v_{水}$（沿河岸方向），由于两个不同参考系中的速度是相互独立的，无需进行正交分解，由几何关系可得

$$v_{相}=\frac{v_{船}}{\sin\theta},\ v_{水}=\frac{v_{船}}{\tan\theta}$$

如果运用相对运动的速度合成定理，那么，岸被当作静止参考系，河水被当作运动参考系，小船作为考察运动的研究对象，水的流速 $v_{水}$ 是牵连速度，划速 $v_{相}$ 是相对速度，而船对岸的速度 $v_{船}$ 就是绝对速度，三者满足相对运动的速度合成定理。

应当清楚，这两种方法并非仅仅是名称的变换，事实上第二种方法已经包括了新的观点和物理思想。

例 3　已知 A 舰向正东以 30 km/h 的速度航行，B 舰向正北以 30 km/h 的速度航行。求 B 舰相对于 A 舰的速度。

解析：此类问题与例 2 不同，因为做相对运动的两物体并没有直接关联，故仅靠速度分解和合成的知识是不够的，必须有相对运动的观点才能解决相对运动问题。然而，虽然是以运动的合成分解知识为基础，但在物理观念和方法上却是一个质的飞跃，因此，对于这类问题要强调相对运动的意义，避免把它作为矢量合成分解法的简单推广。特别是在中学物理教学中，部分教师讲解速度的合成和分解时渗入相对运动的观念，固然可以起到开阔思路的作用，但不宜过多地把相对运动问题作为一般的要求让学生掌握。

以海面为静止参考系，A 舰当作运动参考系，则 B 舰的绝对速度 $v_B=30$ km/h，方向为正北。牵连速度 $v_A=30$ km/h，方向为正东。故 B 舰相对于 A 舰的速度（相对速度）为 $v_{BA}=v_B-v_A$，作出矢量三角形，如图 8 所示，可得：$v_{BA}=30\sqrt{2}$ km/h，方向为北偏西 45°。

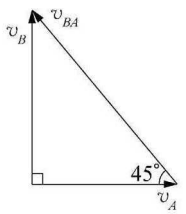


图 8

小结：通过以上例 2、例 3 的分析可以看出，上述两例表面上都是速度的分解和合成，但实际上是有本质区别的。倘若两个分速度在两个不同的参考系中，则它们是相互独立的（如例 2），便可以与分解力的方式一样根据问题的实际情况进行分解，而无需进行正交分解，即两个分速度可以不相互垂直。倘若做相对运动的二个物体并没有直接关联（如例 3），那么仅靠速度分解和合成的知识是不够的，必须运用相对运动的观点才能解决具体问题。

2.3　场强的分解

我们知道，电场强度（场强）是电磁学中一个非常重要的物理量，用来描述电场的强弱和方向，也是矢量。场强的定义是电场中某处试探电荷所受的静电力与该电荷的电荷量之比。从本质来看，场强的合成和分解与力相似，都遵循平行四边形定则（或三角形定则）。这可从场强的定义式 $E=\frac{F}{q}$ 中看出，式中 q 是标量，而 E 和 F 是矢量，故 E 和 F 应遵循同样的合成分解法则，即平行四边形定则。另外，由于我们可从库仑力的叠加原理直接获得场强的叠加原理，按照场强的叠加原理，由若干个点电荷共同激发的电场在某点的场强等于各个点电荷单独存在时在

中国知网　https://www.cnki.net

该点激发的电场场强的矢量和，亦即电场强度 E 是空间点的矢量函数，这样，知道静电场中某点的电场强度 E，就可以求出在该点的电荷 q 所受到的电场力 F。例如，图9中已知两点电荷 Q_1、Q_2 在 P 点形成的电场场强为 E，求点电荷 Q_1 在该点产生的电场强度 E_1 与点电荷 Q_2（为负电荷）在该点产生的电场强度 E_2。因为 E_1 与 E_2 相互独立，故只需将合场强 E 按照平行四边形定则分解为 E_1 和 E_2 即可。

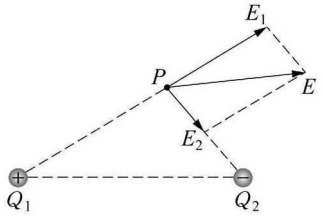


图9

在教学实践中，我们经常会遇到由电场在某两个方向的分量来求实际电场的问题。针对这类问题我们发现，有时采取由原场强正交分解即可得到正确答案（如例4），有时这样做却不行（如例5）。为什么会是这样的？

例4　如图10所示，平行于纸面的匀强电场中有直角三角形 ABC，AB 垂直于 AC 且 $AB=AC=8\,\mathrm{cm}$，A、B、C 三点的电势分别为8 V、0、0，求该匀强电场的场强。

解析：沿 AB 方向的场强为 $E_1=\dfrac{U_{AB}}{d}=1\,\mathrm{V/cm}$，沿 AC 方向的场强为 $E_2=\dfrac{U_{AC}}{d}=1\,\mathrm{V/cm}$，由于 AB 垂直于 AC，故 E_1 和 E_2 相互独立，因此根据平行四边形定则求出原场强为 $E=\sqrt{2}E_1=\sqrt{2}\,\mathrm{V/cm}$，方向与 AB 成45°夹角斜向右上方（见图11）。

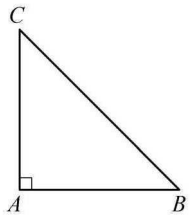


图10

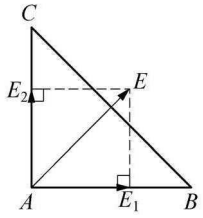


图11

例5　如图12所示，平行于纸面的匀强电场中有等边三角形 ABC，其边长为8 cm，A、B、C 三点的电势分别为8 V、0、0，求该匀强电场的场强。

错解：沿 AB 方向的场强为 $E_1=\dfrac{U_{AB}}{d}=1\,\mathrm{V/cm}$，沿 AC 方向的场强为 $E_2=\dfrac{U_{AC}}{d}=1\,\mathrm{V/cm}$，根据平行四边形定则作出 E 和 E_1、E_2 的关系如图13所示，由几何关系可得 $E=\sqrt{3}E_1=\sqrt{3}\,\mathrm{V/cm}$。

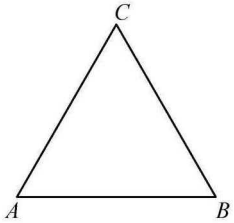


图12

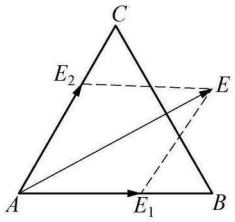


图13

分析探讨：从例4、例5的题干条件和解答来看，我们发现，例4中两个场强分量是相互垂直的，所得到的结果是正确的；而例5中两个场强分量并不相互垂直，解答结果是错误的。其中原因到底为何？对此，相关文献也做过不少探讨[4-11]，但未能从本质上作出清楚说明。事实上，由场强和电势之间的关系就已经作出了明确的回答。

我们知道，场强等于电势的负梯度：$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，电势梯度是一个矢量，其方向垂直于等势面，指向电势增加的方向，其大小等于沿这个方向单位长度电势的增量。在直角坐标系中，$\boldsymbol{E}=-\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$，场强沿坐标系的分量分别为：$E_x=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$，$E_y=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$，$E_z=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$。这表明，场强沿某坐标轴的分量等于电势对该坐标的偏导数的负值，并且它们之间是相互独立的。因此，要确定场强分量与对应电势的关系，除非场强分量彼此相互垂直。换言之，在例5情况下，只有当两个场强分量相互垂直时，才可以由原场强正交分解所得，反之合成亦然。例5的错误在于：此时两个方向的场强分量通常并不是原场强真正意义上的分解所得，而是原场强在这两个方向的投影矢量，此处的 E_1 和 E_2 两个分量并不相互独立。若按照图13的方式分解，E_2 便会影响 E_1 的独立性，同理 E_1 也会影响 E_2 的独立性，故原场强不能由 E_1、E_2 根据平行四边形定则合成得到。

正确解法：如图14所示，E_1、E_2 应为原场强 E 在 AB 和 AC 两个方向上投影得到的矢量分量，根据几何关系可得 $E=\dfrac{2}{\sqrt{3}}E_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{V/cm}$，方向与 AB 成30°夹角斜向右上方。

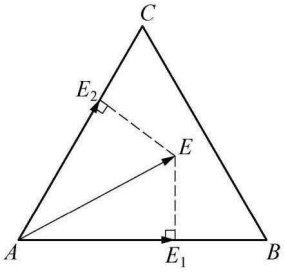


图14

中国知网　https://www.cnki.net

小结：通过例4与例5的比较不难发现，例4中两个场强 E_1 和 E_2 相互垂直，彼此独立，是原场强的分量，故可以按照平行四边形定则合成得到原场强；而例5中的 E_1 和 E_2 不是原场强的分量，而是原场强在这两个方向的投影分量，故通过这两者求出原场强的过程不能称为场强的合成，当然也不能用平行四边形定则来求解。因此，在同一匀强电场中讨论场强的合成与分解问题时，要注意不能单纯从场强的定义式 $E=\frac{F}{q}$ 来分析，而是要从场强与电势的梯度关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$ 入手，并关注各分量与相对应的电势关系。

3　归纳总结

矢量的分解是高中物理教学中的一个常见的概念，物理学中涉及的矢量分解与数学对于矢量的分解原则并不矛盾，但要注意一些物理量在分解时的约束条件限制，同时矢量的分解容易与矢量的投影相混淆。矢量的分解是把原矢量分解成两(几)个相互独立的分矢量，反之矢量的合成是把两(几)个相互独立的分矢量合成一个合矢量；而矢量的投影是把原矢量垂直投影到两(几)个不同的方向上，不同于矢量的分解，不同方向的投影分量通常并不独立。反之由两(几)个不同方向的投影分量求解原矢量的过程也不是矢量的合成，平行四边形定则并不适用。这就要求教师在平时的教学过程中严格区分以上不同的概念，同时借助于具体的实例进行分析阐述，帮助学生理解不同情形下矢量分解的差异，避免因概念的混淆而走入矢量分解的误区。

参考文献

[1] 彭前程，黄恕伯. 物理(必修第一册)[M]. 北京：人民教育出版社，2019：73—74.

[2] 陈恩谱. 物理原来可以这样学[M]. 长沙：中南大学出版社，2018：14—15.

[3] 卢玉龙，邵云. 从一道例题看习题教学中思维能力的进阶[J]. 物理教学，2022(8)：59—61.

[4] 李晋. 合成法“巧解”匀强电场中的电场强度[J]. 中学物理教学参考，2019(6)：62—63.

[5] 李立昌. U＝Ed 与 E＝U/d 的拓展应用[J]. 教学考试，2019(7)：74—75.

[6] 刘大明. 电场强度为什么不能“合成”[J]. 数理化学习，2020(11)：53—54.

[7] 郭威. 对“简捷求解一类匀强电场典型问题的解析式”再探讨[J]. 物理教师，2020(4)：70—71.

[8] 隆勇. 简捷求解匀强电场场强矢量的一个代数方法[J]. 物理教学，2020(9)：62—63.

[9] 杨清元. 对“合成法”求解匀强电场中电场强度的思考[J]. 物理通报，2020(10)：47—49.

[10] 杨勇. 求解匀强电场的策略研究——以两种条件下的匀强电场的求解方法为例[J]. 教学考试，2021(3)：32—36.

[11] 段石峰. 对“合成法”求解匀强电场中电场强度的修正[J]. 物理教学，2022(6)：49—50.

[12] 缪钟英，罗启蕙. 力学问题讨论[M]. 合肥：中国科学技术大学出版社，2018.

(上接第73页)

除了直接运用，也可以与原有知识进行对照。例如，对比1.5和1.6，发现速端曲线同为圆形，但圆心发生了偏移，这是因为多了一个电场的驱动，电场对于速度的影响是周期性的，相当于使得粒子某一方向产生了稳定的速度分量。配速法中，构造以速度 v 沿 x 轴正向做匀速直线的分运动，用对应的洛伦兹力分力平衡电场力，使得 $qvB=qE$，即 $v=\frac{E}{B}$，而这正是速端曲线的圆心偏移量。两相对比，让学生能更好地体会电场在这里施加的作用效果。

6　小　结

高中阶段典型运动的速端曲线图象主要为射线、线段和圆，特征显著。速端曲线长度反映加速度的大小在时间上的累积；速端曲线的切线方向反映加速度方向(注意时序)，斜率变化情况体现加速度方向变化情况。

教学中，了解速端曲线，可以为学生认识高中物理中的典型运动增加一个新的视角，培养学生多维度思考问题的能力。同时，还可以培养学生的数理表征及逻辑推理能力。对于一些特定的问题，例如根据速端曲线分析运动性质、判定瞬时加速度方向或结合题设进一步分析受力情况，定量解决一些特殊位置的速度求解问题等，均有一定用途。将之与已经掌握的其他方法加以对照，可以加深理解。

参考文献

[1] 何明旺，陈思颖. 科学视觉素养视角下的高考物理图类试题分析[J]. 物理教学，2024(12)：10—15.

[2] 蒋炜波，赵坚. 2024年全国高考物理卷试题命题理念探析与变革启示[J]. 物理教学，2024(10)：50—54.

[3] 杜敏. 物理(必修2教师教学用书)[M]. 北京：人民教育出版社，2010：28—33.

[4] 吴寿宠，龙沈军，龙丹. 创新情境构建，提升科学思维——2024年高考新课标卷物理第13题的溯源和拓展[J]. 物理教师，2024(11)：73—75，80.

中国知网　https://www.cnki.net