初中物理培优中等效电阻的计算技巧与模型建构

王雄杰 （宁波艺术实验学校 浙江 315000）

摘 要 文章介绍了四种巧解复杂电路中(或特殊形状电阻)等效电阻的方法——节点法、等势法、整体法与割补法，并辅之以典例进行方法剖析，以提升资优生的物理思维能力。

关键词 等效电阻 初中物理培优 计算技巧
文章编号 1002-0748(2024)3-0047 **中图分类号** G633·7 **文献标识码** B

等效电阻是指将复杂电路中的多个电阻用一个电阻来代替，用来模拟复杂的电路，以便更容易地计算电路的电流和电压。区别于大学用基尔霍夫定律寻求等效电阻的数值解，在中学的培优辅导中更加倾向于通过观察分析多电阻连接时的对称性，通过恰当地分析电路，将复杂电路简化成与原电路有相同效果的简单电路进行处理。本文列举了四种在培优辅导中常用的等效电阻计算技巧，避免了使用基尔霍夫定律的复杂计算，且对物理思维的养成与训练大有裨益。

1 节点法

节点法是根据电势从高到低标记电路中的各个节点，从而起到分析并简化电路的作用。在初中电学知识中，如图1所示，我们把电压类比成水压，电流类比成水流，而电势可以类比成水位的高低，便于初中生理解电势的含义。每次经过一个用电器，电势下降，导线连接的节点，电势不变(忽略导线电阻)，遵循这两条规律，我们很容易对复杂电路进行节点的标记，最后将相同节点(即等势点)连接在一起，从而起到简化电路的效果。

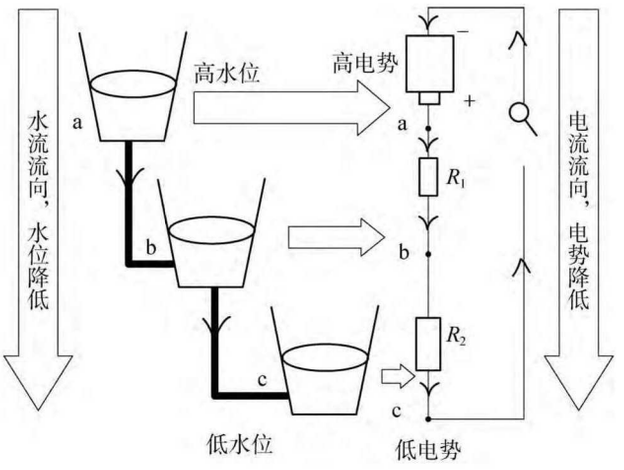

图1

下面将用两道实例进行解法剖析，以便更好地感受节点法的巧解之处。

例1 如图2所示电路中，闭合开关S，灯L_1、L_2正常发光。由于电路中某一电阻阻值发生变化，突然发现L_1变暗，L_2变亮，电流表的读数变小。根据分析，引起这一现象的原因可能是（ ）

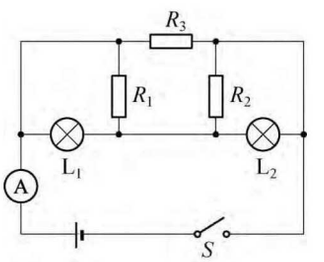

图2

(A) R_1变大 (B) R_1变小
(C) R_2变小 (D) R_2变大

分析求解：如上电路图，用常规方法进行电路分析，难以摸清电流的流向与各个元件的串并联关系，无从下手，对于这样的复杂电路用节点法进行简化能取得较好的效果。

① **标记节点**：节点的标记是最重要的一环，如图3所示，首先标记最高电势“1”节点(电源正极)与最低电势“0”节点(电源负极)。标记好“1”“0”节点后，不能盲目地根据电阻数量进行其他节点的标记，应先根据导线相连处电势不变的原则，尽可能多地标记出相同节点。

分析后发现，整个电路中其实只剩下一个中间节点，即标记为“2”节点。

② **简化电路**：标记好节点后，将节点从高到低连接在一起，并连接相同节点，并在节点与节点之间放入电路元件，例如“1”“2”节点之间会并联小灯L_1

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

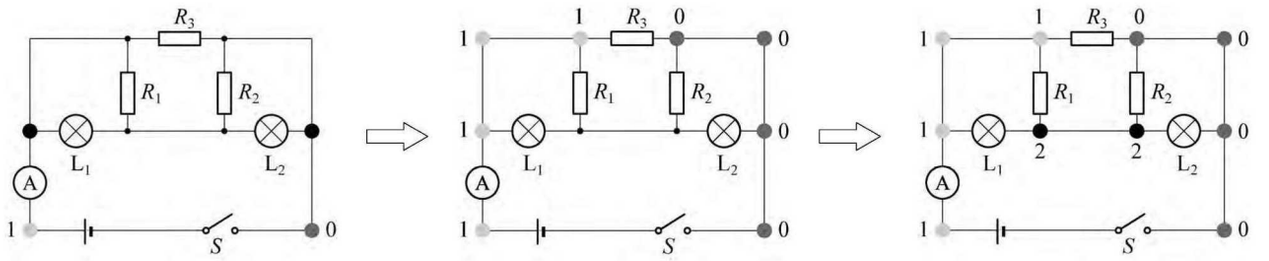

图 3

与电阻 R_1，“2”“0”节点之间会并联小灯 L_2 与电阻 R_2，“1”“0”节点之间会连接电阻 R_3，因此可以做如图 4 等效电阻简化：

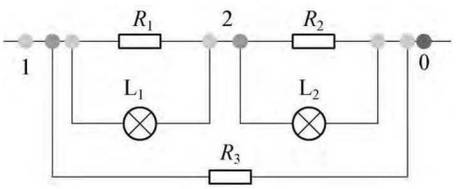

图 4

简化成等效电阻后，其中电流的流向与各元件之间的串并联关系都能非常清晰地呈现，例如本题中 L_1 变暗，L_2 变亮，是因为 R_2 的电阻变大从而让右侧并联部分获得了更大的电压，左边并联部分的电压变小。或是因为 R_1 的电阻变小从而让右侧的并联部分获得更大电压，且与 R_3 无关。进一步，我们还可以求解其电路的总电阻，求解干路中电流表的读数等等。

例 2　如图 5 所示若在 a、b 间接一只理想电流表，电流表的读数为_____A。

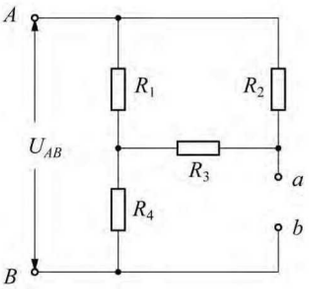

图 5

分析求解：

① **标记节点：**

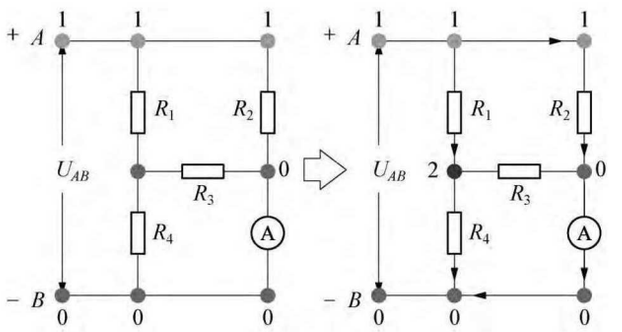

图 6

② **简化电路：**

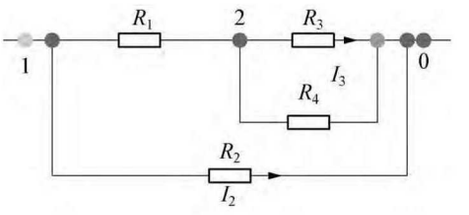

图 7

完成等效电阻简化后，不光能清晰地看到电路的流向，知道电流表的测量对象为通过 R_3 的电流加上通过 R_2 的电流，还能一目了然地看清楚各个元件之间的串并联关系，对后续电流的计算有相当大的好处。

例 3　如图 8 所示 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_0$，求等效电阻 R_{AB}。

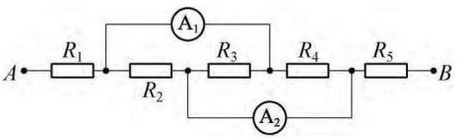

图 8

分析求解：

① **标记节点：**

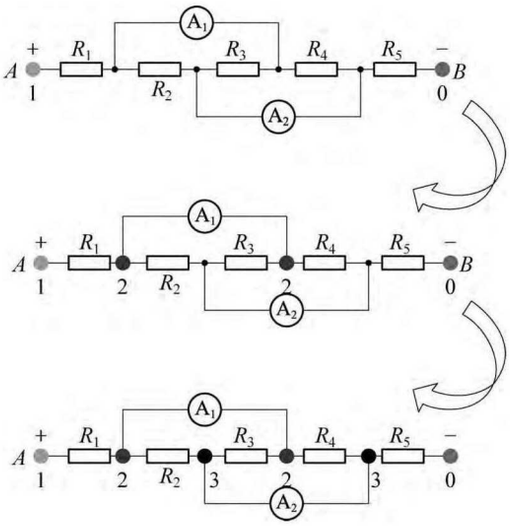

图 9

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

② 简化电路：

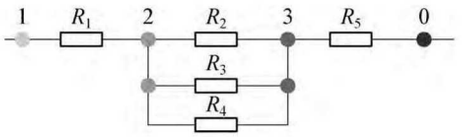

图 10

完成电路简化后，我们可以非常清晰地看到各个电阻之间的串并联关系，即 R_2、R_3、R_4 并联，再整体与 R_1 与 R_5 串联，因此等效电阻的阻值为：$R_{AB}=R_1+R_{并}+R_5=R_0+\frac{R_0}{3}+R_0=\frac{7R_0}{3}$。类似的复杂电路我们均可以利用节点法来理清电流方向与各个元件之间的串并联关系，为后续的计算做准备。

2　等势法

等势法是简化电路一个重要技巧，其重点就是找出电路中的等势点或者等势面，对其进行拆分、连接、折叠等，从而起到事半功倍的效果。上文所提及的节点法实际上就是利用等势法将等势点连接在一起，利用“凡接在同样两个等势点上的用电器为并联关系”的原则将其进行等效电阻简化。

但等势法更多地应用在具有对称性的复杂电路中，在这样的电路中，以两端连线为对称轴完全对称的点就是等势点，或是以其两端连线的中垂线（面）作为等势线（等势面），其上的每一个点都是等势的，例 4 如图 11 所示：

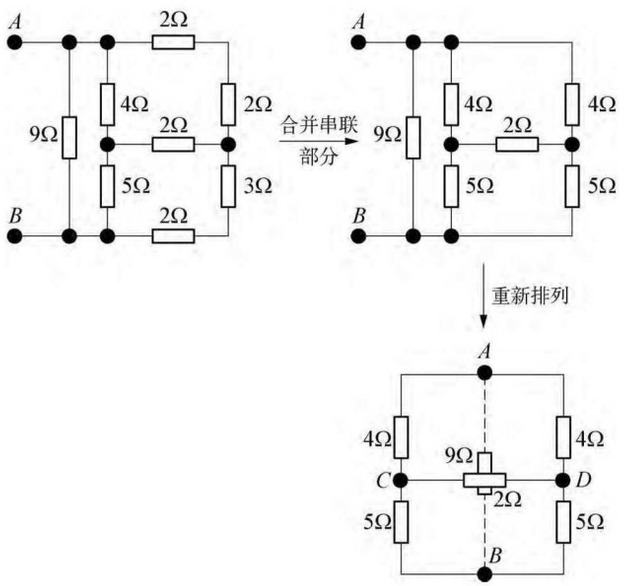

图 11

利用寻找等势点的第一条规律有：以 A、B 的连线为对称轴，C、D 两点完全对称，为等势点。

例 5 如图 12 所示，网络中所有边的电阻均为 R。

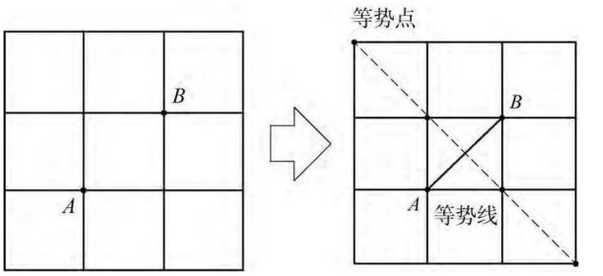

图 12

利用寻找等势点的第二条规律有：作 A、B 两端连线的中垂线为等势线，线上的每一个点都是等势点。

在找到等势点后可以将接在等势点间的导线或电阻或不含电源的支路断开（即“去元”），也可以用导线或电阻或不含电源的支路将等电势节点连接起来，且不影响电路的等效性。以上两题为例，求等效电阻 R_{AB}。

例 4　分析求解：

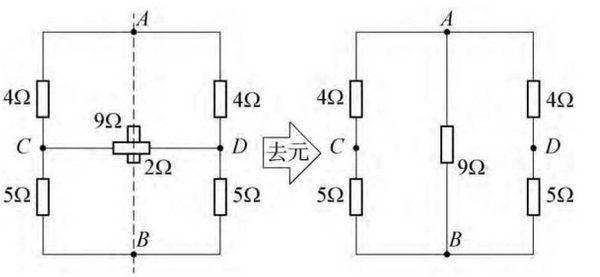

图 13

因此等效电阻 R_{AB} 为 9 Ω 并联 9 Ω 并联 9 Ω，R_{AB} 等于 3 Ω。

例 5　分析求解：

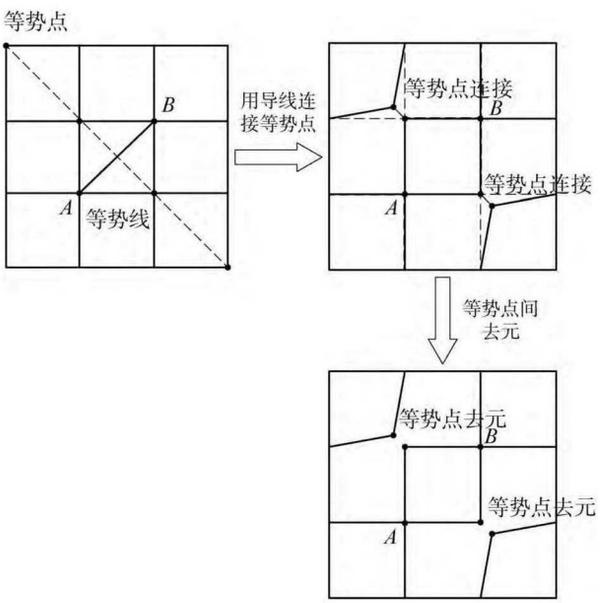

图 14

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

再利用电路有关于 AB 轴对称的特点，可认为是相同的部分上下并联，再次等效如下电路：

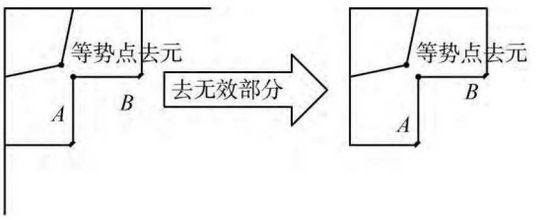

图 15

因此 $R_{AB}=\frac{1}{2}R_{并}$，$\frac{1}{R_{并}}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{R+R+R+R+R}=\frac{7}{10R}$，$R_{并}=\frac{10}{7}R$，所以 $R_{AB}=\frac{5}{7}R$。

类似地，可以利用其鲜明的对称性求解的还有三角形类网络电阻。

例 6　如图 16 所示，9 个电阻均为 4 Ω 的电阻连成的电路，求如下网状电路中电阻 R_{AB}。

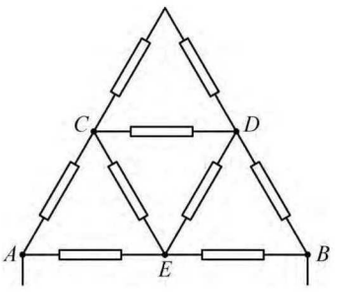

图 16

分析求解：

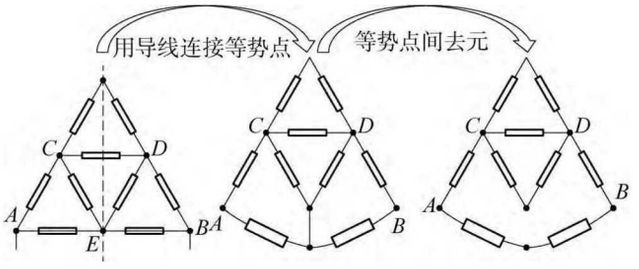

图 17

所以 $\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{R+R+\frac{1}{2}R}=\frac{9}{10R}$，得 $\frac{1}{R_{AB}}=\frac{10R}{9}$。

最后，等势法还能应用在有对称性的立体模型中进行等效电阻的求解，将立体模型中的等势点进行折叠，从而简化为平面模型。

例 7　如图 18 所示，12 个电阻均为 R 的电阻，组成一个立方体框架，求电阻 R_{BD} 与电阻 R_{AB}。

分析求解：

(1) 找等势点(面)

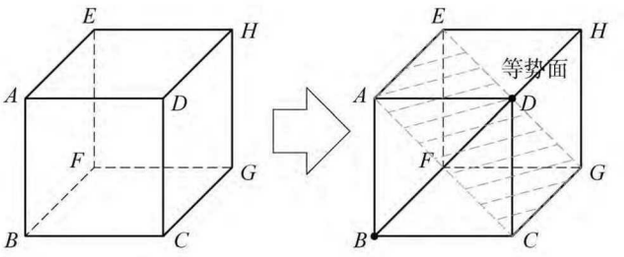

图 18

(2) 折叠等势点

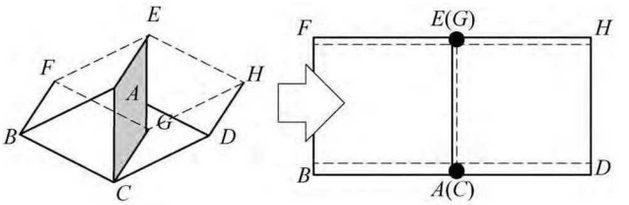

图 19

其中，EF 与 GF 并联，HE 与 HG 并联，AB 与 CB 并联，DA 与 DC 并联，EA 与 GC 并联。再根据其对称性找到新的等势点：$E(G)$ 与 $A(C)$ 点，去除等势点之间的导线(去元)后，最终得到如下的等效电阻。

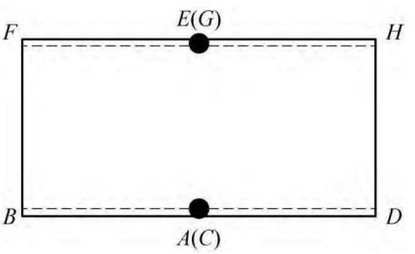

图 20

因此 $\frac{1}{R_{BD}}=\frac{1}{\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R}+\frac{1}{R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R+R}=\frac{4}{3R}$，得 $R_{BD}=\frac{3R}{4}$。

同理，对于 R_{AB} 也有类似的等效电阻转化方法。

可等效为 AD 与 AE 并联，BF 与 BC 并联，EF 与 DC 并联，EH 与 DH 并联，FG 与 CG 并联。在计算 A、B 间电阻之前，我们可以先计算 E、F 间的阻值。

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

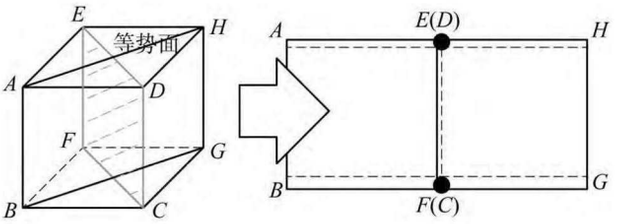

图 21

$$\frac{1}{R_{EF}}=\frac{1}{\frac{1}{2}R}+\frac{1}{R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R}=\frac{5}{2R}$$

得 $R_{EF}=\frac{2R}{5}$。

$$\frac{1}{R_{AB}}=\frac{1}{R}+\frac{1}{\frac{2}{5}R+\frac{1}{2}R+\frac{1}{2}R}=\frac{12}{7R}$$

得 $R_{AB}=\frac{7R}{12}$。

3　整体法

整体法是把电路的几个部件看作一个整体，以“先整体，后隔离”的思维将“整体”与“部分”隔离开，将不变的部分从一个变化的过程中隔离开，从而化繁为简、变难为易，较多地应用在“类并联电路”或是“类无限延伸电路”中。

下面分别举“类并联”模型与“类无限延伸”模型的例题进行解法剖析。

例 8　如图 22 所示的电阻网络中，AC、CB、BD、DA 四边形的电阻为 r，其余各边的电阻都相等，但阻值未知，测得 AB 两点之间的总电阻为 R. 若将 AC、CB、BD、DA 四根电阻丝皆换成阻值为 $2r$ 的电阻，则 A、B 两点之间的总电阻 $R'=$_____。

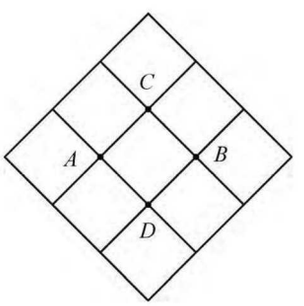

图 22

分析求解：如图所示的电阻网络中，各个节点有非常复杂的分流方式，各电阻相互嵌套，要理清各电阻之间的串并联关系更是难上加难，因此我们不能用常规的串并联电阻的特点来求解，而是要抓住一个不变的“整体”与变化的“部分”。在题目中，AC、CB、BD、DA 四根电阻丝在发生改变，即变化的“部分”，而其他与之并联的电阻网络则是那不变的“整体”，因此我们要将两者隔离开进行分析。

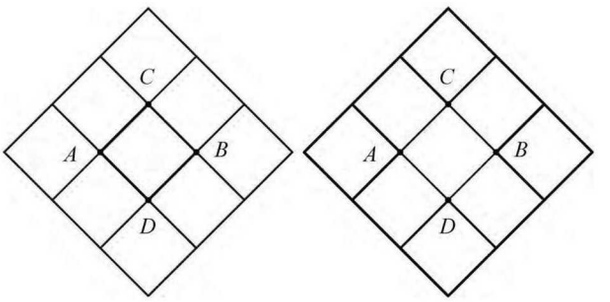

图 23

无论电阻网络的连接方式有多么复杂，但在整个过程中具有整体的不变性，因此，可以将其当作一个定值电阻 R_0 并联在 A、B 两点之间。此时，仅需要考虑变化的部分对总电阻带来的影响，我们可以将电路简化成如图 24 所示等效电阻的形式，有：

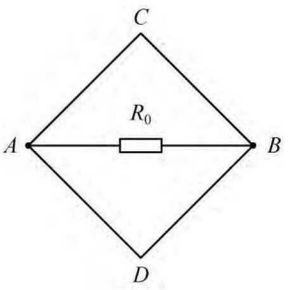

图 24

$$\frac{1}{R_{总}}=\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_{ACB}}+\frac{1}{R_{ADB}}$$

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_0}+\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r}$$

得 $\frac{1}{R_0}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r}$。

当 AC、CB、BD、DA 四根电阻丝皆换成阻值为 $2r$ 时，有：

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R_0}+\frac{1}{4r}+\frac{1}{4r}$$

将 $\frac{1}{R_0}$ 代入得，$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}-\frac{1}{r}+\frac{1}{2r}$，所以 $R'=\frac{2Rr}{2r-R}$。

例 9　如图 25 所示，电路中共有 100 个电阻，其中：$R_1=R_3=R_5=\cdots=R_{99}=2\Omega$，$R_2=R_4=R_6=\cdots R_{98}=4\Omega$，$R_{100}=2\Omega$，则电路中 A、B 间总电阻为 $R_{AB}=$_____Ω，若在 A、B 间加 10 V 的电压，则流过电阻 R_{100} 的电流为_____A。

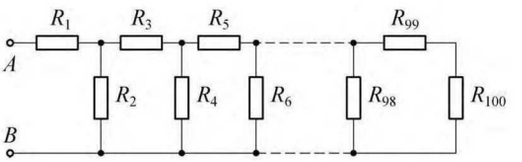

图 25

分析求解：类似的超长电路或者无限延伸电路，必然存在一种特殊的规律，需要适当的划分“整体”与“部分”，将两块隔离开进行分析。

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

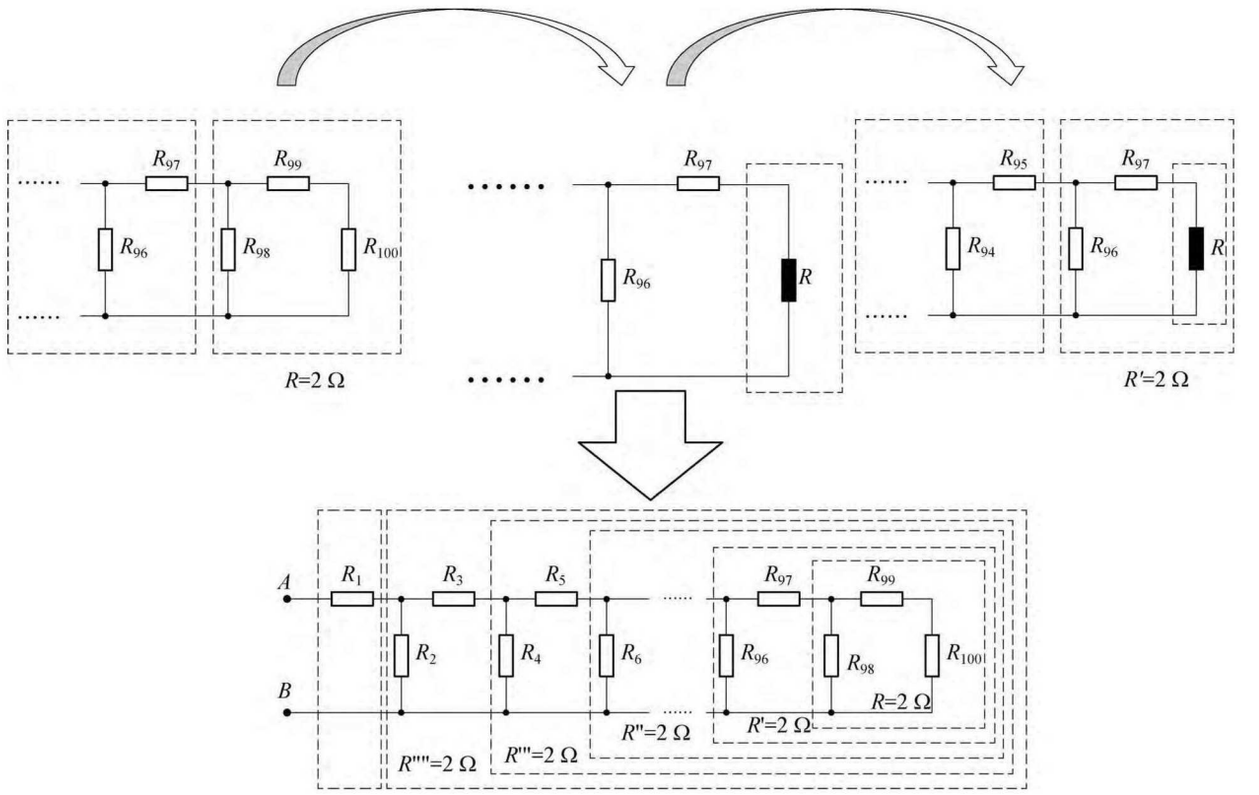

图 26

经过多次的整体与隔离分析，最终可以等效为 R_1 串联一个 2 Ω 的等效电阻，因此 A、B 间的总电阻为 4 Ω。且对于每个分流点来说都是 4 Ω 的 R_{2n} 与 4 欧姆的 R^* 进行分流，因此每次都是平分电流，流过电阻 R_{100} 为总电流的 $\frac{1}{2^{49}}$，因为总电阻为 4 Ω，总电流为 $\frac{5}{2}$ A，所以 $I_{100}=\frac{5}{2^{50}}$ A。

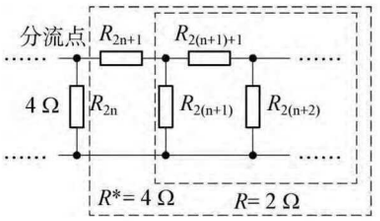

图 27

4　割补法

除了上述方法外，在解题过程中还经常会遇到片状或特殊形状的电阻，这时往往需要结合电流的流向，采用“割补”的方式将其转化为各向同性的电阻，进而计算其等效电阻的阻值，例如：

例 10　如图 28 所示，薄片形电阻的长与宽之比为 3∶2，左边两角截去半径为 r 的圆角，右边处挖去一个半径也为 r 的圆孔，测得 A、B 间的电阻为 R，求 C、D 间的电阻值。

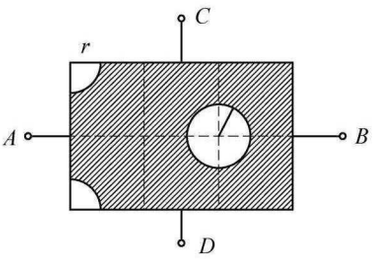

图 28

分析求解：根据题目描述，很难建立起 AB 方向与 CD 方向的电阻的关系，两个方向通电流时，电阻的长度、横截面积均有相当大的不同，同时也无法进行直接计算，这时候根据题目所给的条件进行割补尤为关键。根据长宽之比为 3∶2，我们可以将长分割为 3 份，宽分割为 2 份：

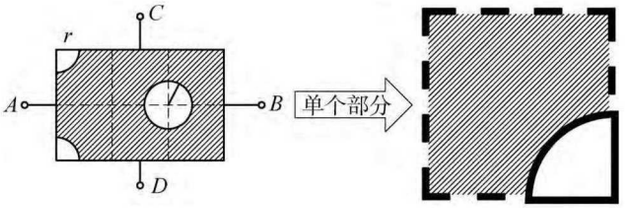

图 29

如上所示，利用“割”的方式将该薄片电阻分割为 6 块，每一块都具有相同的形状，而这单个部分无论从哪个方向通过电流，都会有相同的电阻 R_0。

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

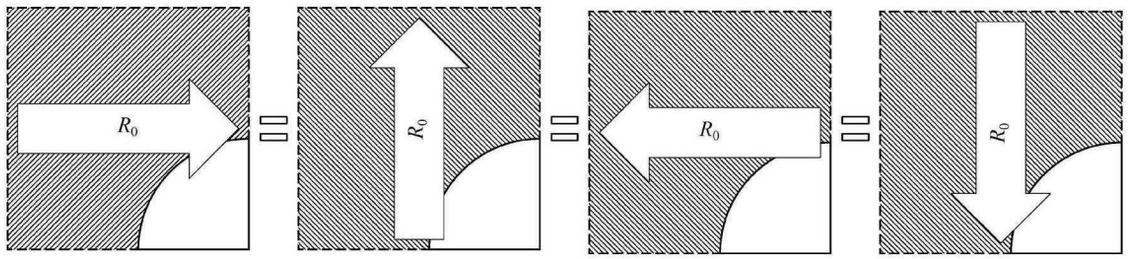

图 30

因此有，AB 方向可以看作 3 组（R_0 并 R_0）的串联，有：

$$R_{AB}=\frac{1}{2}R_0+\frac{1}{2}R_0+\frac{1}{2}R_0=\frac{3}{2}R_0=R$$

同理，CD 方向可以看作 2 组（R_0 并 R_0 并 R_0）的串联，有：

$$R_{CD}=\frac{1}{3}R_0+\frac{1}{3}R_0=\frac{2}{3}R_0$$

代入上式有 $R_{CD}=\frac{2}{3}R_0=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}R=\frac{4}{9}R$。

例 11　如图 31 所示，在材质均匀的圆形薄电阻片上，挖出一个偏心小圆孔。在彼此垂直的直径 AB 和 CD 两端引出四个电极 A、B、C、D。试求 R_{AB} 与 R_{CD} 的大小关系。

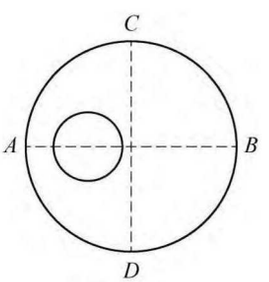

图 31

分析求解：由于偏心圆孔的存在，两个方向上电阻的变化完全不同，这里我们需要用补的方式补成一个圆，这样就能具有各向同性的效果，取其中一块分析。

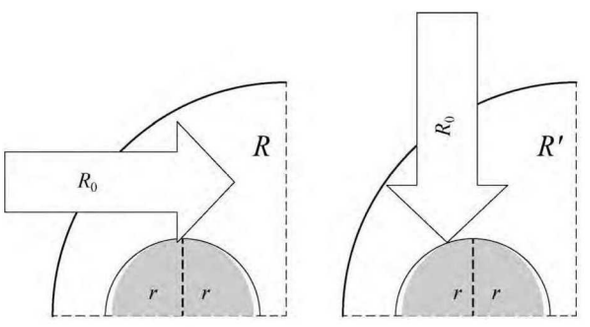

图 32

如图 32 所示，由于补上部分的 1/4 圆具有各向同性的效果，因此每一片的电阻都可以设为 r，当横向通过时缺孔圆片的电阻设为 R；当纵向通过时，缺孔圆片的电阻设为 R'。由于补上半圆后的1/4 圆片再次各向同性，因此补上后的电阻都可以设为 R_0。

对于横向而言，可以看作是 R 与 $2r$ 的并联，因此有 $\frac{1}{R_0}=\frac{1}{R}+\frac{1}{2r}$。

对于纵向而言，可以看作是 R' 与 $1/2r$ 的串联，因此有 $R_0=R'+\frac{1}{2}r$。

$$R'+\frac{1}{2}r=\frac{R\times 2r}{R+2r}<\frac{R\times 2r}{2r}=R$$

得 $R>R'$。

设右半侧 1/4 圆片的电阻为 r'（各向同性），有

$$R_{AB}=\frac{R+r'}{2}>\frac{R'+r'}{2},\ R_{CD}=\frac{2R'\times 2r'}{2R'+2r'}=\frac{2R'r'}{R'+r'}。$$

必有 $R_{AB}>R_{CD}$。

5　总　结

中学阶段的物理培优不应该盲目地进行拔苗助长的教学，例如提前讲授高中或大学的知识，应该着重于对初中物理知识的拓展与深化，并逐步引导学生采用物理的思维和创新的方法巧解繁杂的问题，感受物理思维与常规思维的差异，体会其优越性，进一步激发学有余力的同学动脑思考的求知欲望，实现对资优生的潜力挖掘。“他山之石可以攻玉”，本文中总结归纳的四种等效电阻的解题技巧，希望能对教师的培优教学和学生竞赛解题能力有所帮助。

参考文献

[1] 徐杰. 复杂网络等效电阻的计算[J]. 中学物理教学参考，1997(8)：2.
[2] 顾春杰，王军明. “田字变化”类型的网络电路求解[J]. 物理通报，2010(9)：3.
[3] 张恩德，俞晓明，赵磊. 田字形不对称电阻网络等效电阻的计算[J]. 物理与工程，2008，18(2)：3.
[4] 季德璜. 有限电阻网络等效电阻的一种计算方法[J]. 物理教师，2004.
[5] 马桂君. 比较薄片形导体的电阻要考虑电流场的分布[J]. 高中数理化，2014(13)：2.

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net