对于“多次测量取平均值”问题的深入讨论

刘 芳[1]　孙德峰[2]　郑萌萌[3]

（1. 北京教育学院丰台分院，北京　100073；2. 北京市第十二中学，北京　100071；
3. 曲阜师范大学物理工程学院，山东 曲阜　273165）

摘　要：实验是物理学发展的基础，也是学生物理学习的重要内容.误差分析是实验的重要环节之一，是改进实验、达成实验目的的关键.“多次测量取平均值”是学生熟知的减小偶然误差的重要操作，正确的“多次测量取平均值”才能减小偶然误差，错误的“多次测量取平均值”不仅不能减小实验误差，更将直接导致科学性错误.

关键词：物理实验；误差；测量；偶然误差；平均值

物理学是基于观察与实验的一门基础学科.《普通高中物理课程标准》指出：实验是物理学习的重要环节，是培养学生物理学科素养的重要途径和方式，要尽可能让学生自己动手多做实验，以提升学生的物理学科核心素养.[1]普通高中物理课程要求的学生必做实验有 21 个，其中包含观察类实验 1 个、制作类实验 1 个、验证类实验 2 个、探究类实验 8 个、测量类实验 9 个.除观察类和制作类实验外，误差分析是其余几种类型实验中达成实验目的的重要环节，更是锻炼学生解决真实问题、提升综合能力、发展学生核心素养的有效路径.

多次测量取平均值是测量类实验中减小偶然误差的一项重要操作.对于多次测量取平均值，有以下几个问题值得深入探讨.

1　为什么多次测量取平均值可以减小偶然误差？

测量时，不管使用如何精密的仪器，由于测量的主观性造成的偶然误差都是不可避免的.“多次测量取平均值”的就是对 n 次的测量结果取算数平均值，即

$$\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}.$$

假设某次测量时，待测量的真实值为 X，n 次测量的结果分别为 $X_1,X_2,X_3,\cdots,X_n$，则每次的测量值与真实值之差分别为 $\Delta X_1=X_1-X$，$\Delta X_2=X_2-X,\cdots,\Delta X_n=X_n-X$.虽然我们无法确定某次测量时测量值比真实值偏大还是偏小，但从统计和概率的角度分析，当测量次数无限多时，这些偏大或偏小的差值可以相互抵消，因此无限多次测量的算术平均值可近似为真实值.实际实验中，测量是不可能进行“无数次”的，那么“多次测量取平均值”中的多次取多少合适呢？误差理论中用下面的表达式描述测量结果算术平均值的标准偏差与测量次数之间的关系

$$d_{\overline{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{n(n-1)}}.$$

上述表达式表明测量结果算术平均值的标准偏差比任何一次测量的实验标准差小，增加测量次数，可以减少平均值的标准偏差，提高测量的准确度.这正是实际实验时把多次测量后的平均值来作为测量结果的本质原因.对上述表达式进一步分析表明，$n>10$ 以后，平均值的标准偏差随着 n 的增大而减小得较为缓慢，因此实验中的测量次数 n 一般取为 $6\sim10$ 次.中学阶段的物理实验教学中，综合考量课时、学生能力等因素，对于多次测量取平均值的测量次数一般取为 6 次，这样得到的测量结果已基本满足实验要求.

2　对多次测量的所有测量结果取平均值一定能减小偶然误差吗？

实际测量中，如果未对测量结果进行评估而直接取平均的做法有时候不仅不能减小误差，反而会增大误差.比如在“测量金属丝的电阻率”的实验中，测量金属丝两端的电压 U 和电流 I，然后利用 $R=U/I$ 来求得金属丝的电阻 R.某次测量的数据如表 1 所示.

表 1　测量数据表

实验次序	1	2	3	4	5	6
电压 U/V	0.20	0.40	0.50	0.75	0.80	1.00
电流 I/A	0.13	0.26	0.34	0.40	0.54	0.68
电阻 R/Ω	1.54	1.54	1.47	1.87	1.48	1.47

如果不对实验结果进行评估，直接对 6 次测量的结果取平均值，可以得到

中国知网　https://www.cnki.net

$$\bar{R}=\frac{R_1+R_2+\cdots+R_6}{6}=1.56\ \Omega.$$

观察上面的测量结果不难发现，第 4 组数据的测量结果 $R=1.87\ \Omega$ 与其他测量结果偏差较大，产生如此大的偏差的根本原因应当不是误差，而是测量时某些不当操作造成的.这样的测量结果在误差理论中被称为“坏值”，判断某一测量结果是否为“坏值”的依据被称为拉依达准则，其表达式为

$$|X_i-\bar{X}|>3d,\text{其中 }d=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n}}.$$

代入数据运算可知第 4 次的测量结果的确特别异常，可以确定为“坏值”，因此最后进行数据处理时应当舍弃第 4 组数据后再取平均，结果为

$$\bar{R}=\frac{R_1+R_2+\cdots+R_5}{5}=1.50\ \Omega.$$

通过以上的分析可知，在多次测量取平均值的操作中，应当先对实验数据做初步的评估，去除其中偏差较大的数据即“坏值”，然后再进行取平均值的运算才能更好地减小偶然误差.

3 对于间接测量量，如何进行“多次测量后取平均值”的操作才是科学的？

根据问题 1 的分析可知，对于直接测量，多次测量取平均值的操作不管是学生还是教师都没有异议.但对于间接测量中的多次测量取平均值，学生某次实验中的操作引起了笔者的兴趣和后续的反思.在“单摆测量重力加速度”中，测量不同摆长 l_1、l_2、l_3 的单摆对应的周期分别为 T_1、T_2、T_3 的实验数据如表 2 所示.

表 2 测量数据表

实验次序	1	2	3
摆长 l/m	0.40	0.60	0.80
周期 T/s	1.26	1.55	1.79

实验数据处理时，有学生认为可以先对摆长 l 和周期 T 分别取平均，得到

$$\bar{l}=\frac{l_1+l_2+l_3}{3}=0.40\ \text{m},\bar{T}=\frac{T_1+T_2+T_3}{3}=1.53\ \text{m}.$$

再根据单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 可得 $g=\frac{4\pi^2}{T^2}l$，得到重力加速度的测量值为

$$\overline{g_1}=\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\bar{l}=10.1\ \text{m/s}^2.$$

无独有偶，笔者撰稿时进行文献检索时发现，上述对间接测量量取平均值的做法不仅是学生存在的错误认知，也在一些教师中存在争议：部分教师(比如文献 2)支持上述做法，以初中物理“测量物质的密度”实验为例，对上述做法的可行性进行了评估；部分教师(比如文献 3)则对上述做法存在异议，从 3 个方面给出了反对的理由.其实只要利用数学知识进行深入探讨，就可以非常明显地发现上述做法是完全错误的.

利用单摆测量重力加速度 g 的实验中多次测量取平均值的正确操作：根据单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 可得 $g=\frac{4\pi^2}{T^2}l$，利用摆长 l_1、周期 T_1 得到一个重力加速度的测量值 g_1，同理可得 g_2、g_3，则重力加速度的测量值为

$$\overline{g_2}=\frac{g_1+g_2+g_3}{3}=\frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{l_1}{T_1^2}+\frac{l_2}{T_2^2}+\frac{l_3}{T_3^2}\right)=9.88\ \text{m/s}^2.$$

两种数据处理方法得到的结果虽然较为接近，但其实截然不同，这是因为

$$\overline{g_1}=\frac{4\pi^2}{\bar{T}^2}\bar{l}=\frac{4\pi^2\cdot 3(l_1+l_2+l_3)}{(T_1+T_2+T_3)^2},$$

$$\overline{g_2}=\frac{4\pi^2}{3}\left(\frac{l_1}{T_1^2}+\frac{l_2}{T_2^2}+\frac{l_3}{T_3^2}\right),$$

$$\overline{g_1}\neq\overline{g_2}.$$

文献[2]中，作者以密度的测定为例说明两种操作得到的平均值相同，这是由于密度和质量、体积之间存在关系 $\rho=m/V$ 的一种特殊情况.这种利用特殊情况下的相等即作为所有物理实验中取平均值正确操作的依据显而易见是不科学的.与文献[3]中论述的 3 个理由不同，上述分析过程对文献[2]中做法的科学性错误提供了更加有说服力的证据.

综上所述，对于间接测量量，“多次测量取平均值”必须先利用每一组实验数据得到每一次测量结果，然后对多个测量结果取平均才是“多次测量取平均值”的正确操作.

4 在间接测量中，为什么利用图像进行“多次测量取平均值”的操作能够更好地减小偶然误差？

答：在测量类实验中，“多次测量取平均值”除直接对多次测量结果直接取平均值外，利用物理量之间的关系作图是处理实验数据的方式之一.比如测量金属丝的电阻率实验中，通过作 $U-$

中国知网 https://www.cnki.net

I 图像得到金属丝的电阻；在测量电源电动势和内阻的实验中，通过作 $U-I$ 图像同时得到电源的电动势和内阻；在利用单摆测量重力加速度的实验中也可以通过作 T^2-l 的图像得到重力加速度.

仍以前文测量金属丝的电阻率实验中测量金属丝的电阻数据为例.如图 1 所示，利用实验中的数据作 $U-I$ 图像时，可以非常清晰地发现第 4 组实验数据偏差较大.后续作图时自然剔除第 4 组数据，利用其他 5 个实验点的分布作直线，使尽量多的点落在线上，或者让其他点均匀分布在线的两侧.直线是由无数个点组成的，因此这样一个作直线的过程相当于对无数组数据取平均值，根据前文的分析可知，测量的次数越多，取平均值后其偏差的总和就越趋近于 0，求得的平均值就越接近真实值.[4]

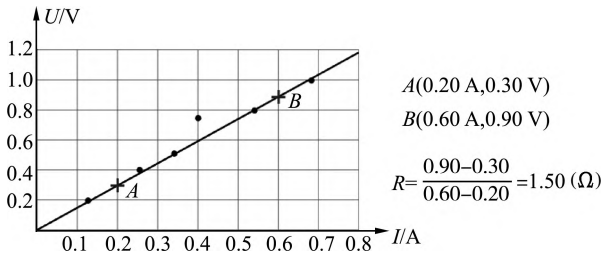

图 1　$U-I$ 图

值得提醒的是在利用图像求直线的斜率时，应当在直线上选取距离尽量大且坐标较为容易直接读出的两点（比如图中的 A、B）进行运算，如果直接使用直线上的两个实验点来求斜率，相当于只利用两组实验数据对测量结果求平均值，这将使利用图像处理实验数据这一操作毫无意义，得到的测量结果也将存在较大误差.

5　小结

实验是物理学习的重要环节，是培养学生物理学科核心素养的重要途径和方式.物理实验在培养学生的探究能力和科学态度等方面具有重要地位.以上关于测量类实验中“多次测量取平均值”问题系统、深入地讨论不仅可以帮助教师厘清错误认识，更有助于引导学生在物理学习过程中对于物理概念、规律和方法等不仅要“知其然”，更要“知其所以然”.只有深入理解物理知识的本质，才能形成应用知识在新情境中解决问题的迁移能力，进而实现物理学科核心素养的有效提升.

参考文献：

1　中华人民共和国教育部.普通高中物理课程标准[S].北京：人民教育出版社，2020.
2　何述平.密度测定的数据处理方法分析[J].物理教师，2018，39(1)：92－93，97.
3　田川.对多次测量取平均值的探讨——以“密度的测量”为例[J].实验教学与仪器，2019，36(3)：10－11.
4　王爱生.取平均值为什么会减小误差[J].物理教师，1997，18(9)：26.

（收稿日期：2024－01－26）

（上接第 51 页）

跨学科项目化教学融入综合型实践活动的一次教学尝试，以“驱动入项－项目构建－应用重构－分享提炼”为教学主线，从多学科视角进行探索，意在跨越学科藩篱，实现具有核心素养的综合型人才培养.将跨学科项目化学习和“课题研究”栏目相融合，不仅为“课题研究”栏目的开展提出了一种全新的教学策略，也为跨学科项目化学习的探索提供了一片沃土.从而促使学生得以在真实复杂情境中，自主深入地探索项目，科学创新地设计项目，合作互助地实施项目，落实发展学生的核心素养.

参考文献：

1　中华人民共和国教育部.普通高中物理课程标准（2017 年版 2020 年修订）[S].北京：人民教育出版社，2020.
2　人民教育出版社，课程教材研究所，物理课程教材研究开发中心.普通高中教科书物理必修第 1 册[M].北京：人民教育出版社，2019.
3　印晓明.“科学实践”视角下的学科核心素养培育——以人教版普通高中物理教材编排变化为例[J].基础教育课程，2020(23)：35－39.
4　夏雪梅.跨学科项目化学习：内涵、设计逻辑与实践原型[J].课程·教材·教法，2022，42(10)：78－84.
5　母小勇.“还原”物理课程的跨学科实践逻辑[J].物理教师，2022，43(9)：2－8，14.
6　侯恕，荆鹏，刘雨欣.数字化转型下跨学科实践的理论探索与推进策略——基于变构学习模型视角[J].物理教师，2023，44(10)：33－37.
7　蔡雨，马玲，马晓波，等.递进型物理与工程跨学科项目化学习实践——以制作“港珠澳大桥”桥梁模型项目为例[J].物理教师，2023，44(9)：72－79.

（收稿日期：2024－04－01）

中国知网　https://www.cnki.net