·问题讨论·

鱼和鸟的相望

——关于鱼和鸟的折射成像研究

杨严辉
(佛山市第三中学,广东 佛山 528000)

摘 要:讨论在空气中观测水中物体的视深和在水中观测空中物体的视高都涉及光的折射成像问题.以鱼和鸟作为观测者或被观测者,利用光的折射定律分析游鱼观鸟、鸟观游鱼、飞鸟观鱼和鱼观飞鸟 4 种情况下鸟或鱼的像的变化情况,推导出它们的像的函数表达式或者参数方程,再利用 Geogebra 软件画出函数或者参数方程的图像,并加以验证.

关键词:折射成像;游鱼观鸟;鸟观游鱼;飞鸟观鱼;鱼观飞鸟

在歌曲《飞鸟和鱼》中有一句歌词:“我是鱼,你是飞鸟,要不是你一次失速流离,要不是我一次张望关注,哪来这一场不被看好的眷与恋.”也许鱼并不知道,鱼看到的鸟其实是鸟的虚像,鸟的位置、形状和大小都与实际情况不同,就算鸟在空中某个位置不变,鱼在水下不同的位置张望鸟,鱼看到鸟的位置也是会改变的.这些现象都是光的折射让鱼产生的错觉.不管是鱼观鸟还是鸟观鱼,它们看到对方的像都与实际情况不同,都涉及光的折射成像原理.

光的折射成像与平面镜成像不同.在平面镜成像中,点光源发出的所有光线经过平面镜反射后所有反射光线的反向延长线都相交于同一点,平面镜成像的形状大小与物体完全一致,而光在水中折射成像比较复杂.如图 1 所示,用 Geogebra 软件画出鱼看到鸟的折射光路图,静止在水面上方的鸟在 S 点发出的光经水面 P 点折射后进入水中(水的折射率 $n=1.33$),改变 P 点的位置,跟踪折射光线和折射光线的反向延长线,可以看出这些折射光线的反向延长线并不相交于同一点.

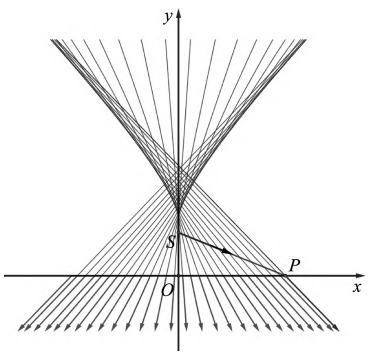

图 1 折射光路图

鱼眼睛的瞳孔很小,只有很小一部分折射光线能进入鱼眼睛,所有进入鱼眼睛的折射光线的反向延长线的交点就是鱼在水中看到鸟的像.所有相邻折射光线的反向延长线的交点的集合就是静止在水面上方鸟的像的轨迹.从图 1 可以看出,当鱼在鸟的正下方时,鱼看到鸟的像的高度最低,即视高最小.鱼和鸟的水平距离越大,鸟的视高越大.可见水面上方物体经水面折射后所成的像的形状和大小都会发生改变.

不仅鱼观鸟有错觉,鸟观鱼也有错觉,它们看到对方的位置都与真实位置不同.本文以鱼和鸟作为观测者或被观测者,利用光的折射定律分析游鱼观鸟、鸟观游鱼、飞鸟观鱼和鱼观飞鸟 4 种情况下鸟或鱼的像的变化情况,推导出它们的像的函数表达式或者参数方程,再利用 Geogebra 软件画出函数或者参数方程的图像,并加以验证.

1 游鱼观鸟

如图 2 所示,以水面上的 O 点为坐标原点建立平面坐标系 xOy,假设鸟在 O 点正上方高度为 h 的 S 点处静止不动,水下的鱼在 xOy 平面内从远处向 x 轴负方向游过来,当鱼游到 M 点时,从 S 点发出的两条光线 SA 与 SB 经过水面折射后进入鱼的眼睛,入射角分别为 i 和 $(i+\mathrm{d}i)$,AM 与 BN 为折射光线,折射角分别为 r 和 $(r+\mathrm{d}r)$.两条

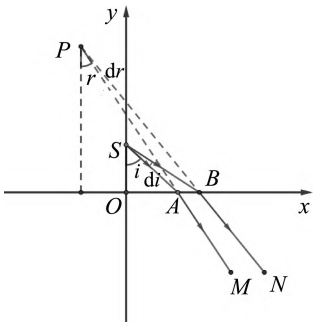

图 2 折射光路图

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

折射光线的反向延长线的交点$P(x,y)$就是鱼看到鸟的虚像.A的坐标为$(L,0)$,AB的距离为微元$\mathrm{d}L$(图 2 中$\mathrm{d}L=0.81$),水的折射率为n,则鱼水平游走过程中看到鸟的像的位置如何变化?

由折射定律得

$$\sin i=n\sin r. \tag{1}$$

两边微分得

$$\cos i\mathrm{d}i=n\cos r\mathrm{d}r. \tag{2}$$

由几何关系得

$$\frac{h}{\cos i}\mathrm{d}i=\mathrm{d}L\cos i. \tag{3}$$

$$\frac{y}{\cos r}\mathrm{d}r=\mathrm{d}L\cos r. \tag{4}$$

由式(2)~(4)得

$$y=\frac{nh\cos^3 r}{\cos^3 i}. \tag{5}$$

又因为$\cos r=\sqrt{1-\sin^2 r}$,

$$\sin i=\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}},\cos i=\frac{h}{\sqrt{L^2+h^2}}.$$

可得

$$y=\frac{1}{n^2h^2}[n^2h^2+(n^2-1)L^2]^{\frac{3}{2}}. \tag{6}$$

点P的横坐标为

$$x=L-y\tan r. \tag{7}$$

又因为$\tan i=\frac{\sin i}{\cos i}$,结合以上各式可得

$$x=-\frac{1}{n^2h^2}(n^2-1)L^3. \tag{8}$$

由式(6)(8)得

$$y=[(n^2-1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{2}{3}}h^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}}. \tag{9}$$

式(9)的函数图像就是游鱼观鸟的像.当鱼游到鸟的正下方时,$x=0$,$y=nh$,即视高为nh.

用 Geogebra 软件画出该函数的图像,如图 3 所示,其中S表示鸟在空中静止的位置.

改变入射点A的位置,跟踪P点的轨迹可以验证该函数图像就是游鱼观鸟的像,如果$\mathrm{d}L$较大($\mathrm{d}L=1.31$),P的轨迹与函数图像有一点偏差,如图 4 所示.

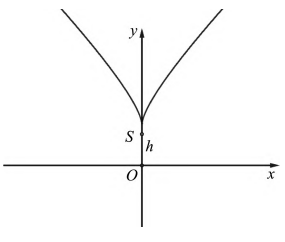

图 3 游鱼观鸟的像

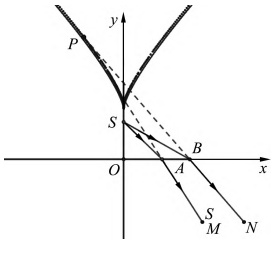

图 4 $\mathrm{d}L$ 较大时P的轨迹

如果$\mathrm{d}L$很小($\mathrm{d}L=0.01$)时(此时两条光线SA与SB已重合),可见P的轨迹与函数的图像重合,如图 5 所示.由此可验证式(9)的函数图像就是游鱼观鸟的像.

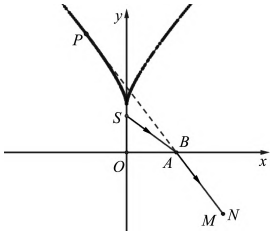

图 5 $\mathrm{d}L$ 很小时P的轨迹

2 鸟观游鱼

如图 6 所示,以水面上的O点为坐标原点建立平面坐标系xOy,假设鸟在O点正上方高度为h的M点处静止不动,水下的鱼在xOy平面内从远处向x轴负方向游过来,鱼的深度为d,当鱼游到S点时,从S点发出的两条光线SA与SB经过水面折射后进入鸟的眼睛,入射角分别为r和$(r-\mathrm{d}r)$,AM与BN为折射光线,折射角分别为i和$(i-\mathrm{d}i)$,两条折射光线的反向延长线的交点$P(x,y)$就是鸟看到鱼的虚像.A的坐标为$(L,0)$,AB的距离为微元$\mathrm{d}L$($\mathrm{d}L=0.51$),水的折射率为n,则鸟看到水中游过来的鱼的像的位置如何变化?

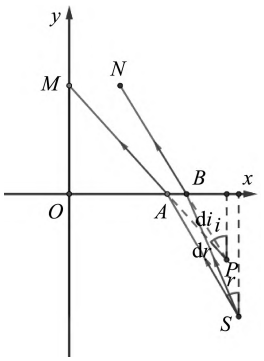

图 6 折射光路图

由折射定律得

$$\sin i=n\sin r. \tag{10}$$

两边微分得

$$\cos i\mathrm{d}i=n\cos r\mathrm{d}r. \tag{11}$$

由几何关系得

$$-\frac{y}{\cos i}\mathrm{d}i=\mathrm{d}L\cos i, \tag{12}$$

$$\frac{d}{\cos r}\mathrm{d}r=\mathrm{d}L\cos r, \tag{13}$$

由式(11)~(13)得

$$y=-\frac{d\cos^3 i}{n\cos^3 r}. \tag{14}$$

又因为$\cos r=\sqrt{1-\sin^2 r}$,

$$\sin i=\frac{L}{\sqrt{L^2+h^2}},\cos i=\frac{h}{\sqrt{L^2+h^2}},$$

结合以上各式可得

$$y=-n^2dh^3[n^2h^2+(n^2-1)L^2]^{-\frac{3}{2}}. \tag{15}$$

点P的横坐标为

$$x=L+|y|\tan i. \tag{16}$$

又因为$\tan i=L/h$,可得

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$x=L\{1+n^2dh^2[n^2h^2+(n^2-1)L^2]^{-\frac{3}{2}}\}. \quad (17)$$

鸟看到游鱼的像可用参数方程来表示为

$$x=L\{1+n^2dh^2[n^2h^2+(n^2-1)L^2]^{-\frac{3}{2}}\}, \quad (18)$$

$$y=-n^2dh^3[n^2h^2+(n^2-1)L^2]^{-\frac{3}{2}}, \quad (19)$$

其中 L 为参数.

当鱼游到鸟的正下方时，$L=0$，$y=-d/n$，即视深为 d/n.

用 Geogebra 软件画出该参数方程的图像，如图 7 所示，其中 M 为鸟静止的位置，虚线表示鱼水平运动的轨迹.

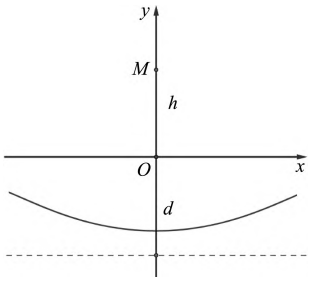

图 7 鸟观游鱼的像

改变入射点 A 的位置（改变参数 L），跟踪 P 点的轨迹可以验证该参数方程的图像就是鸟观游鱼的像，如果 $\mathrm{d}L$ 较大（$\mathrm{d}L=0.31$），P 的轨迹与参数方程的图像有一点偏差，如图 8 所示.

如果 $\mathrm{d}L$ 很小（$\mathrm{d}L=0.01$）时（此时两条光线 SA 与 SB 已重合），可见 P 的轨迹与参数方程的图像重合，如图 9 所示. 由此可验证参数方程(19)的图像即为鸟观游鱼的像.

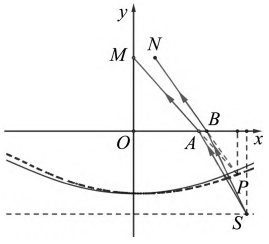

图 8 $\mathrm{d}L$ 较大时 P 的轨迹

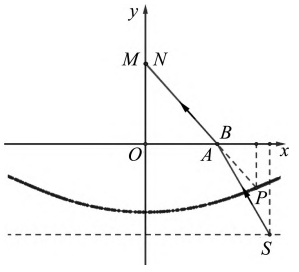

图 9 $\mathrm{d}L$ 很小时 P 的轨迹

3 飞鸟观鱼

如图 10 所示，以水面上的 O 点为坐标原点建立平面坐标系 xOy，假设鱼在 O 点正下方深度为 d 的 S 点处静止不动，空中的鸟在 xOy 平面内从远处向 x 轴负方向水平飞过来，当鸟飞到 M 点时，从 S 点发出的两条光线 SA 与 SB 经过水面折射后进入鸟的眼睛，入射角分别为 r 和 $(r+\mathrm{d}r)$，AM 与 BN 为折射光线，折射角分别为 i 和 $(i+\mathrm{d}i)$，两条折射光线的反向延长线的交点 $P(x,y)$ 就是鸟看到鱼的虚像. A 的坐标为 $(L,0)$，AB 的距离为微元 $\mathrm{d}L$（$\mathrm{d}L=0.71$），水的折射率为 n，则鸟在水平飞行过程中看到鱼的像的位置如何变化？

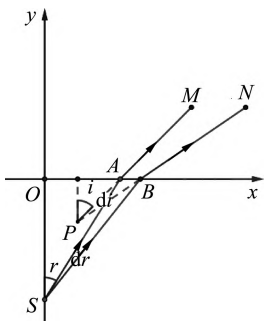

图 10 折射光路图

由折射定律得 $\sin i=n\sin r$. 两边微分得 $\cos i\mathrm{d}i=n\cos r\mathrm{d}r$.

由几何关系得

$$-\frac{y}{\cos i}\mathrm{d}i=\mathrm{d}L\cos i, \quad (20)$$

$$\frac{d}{\cos r}\mathrm{d}r=\mathrm{d}L\cos r. \quad (21)$$

可得

$$y=-\frac{d\cos^3 i}{n\cos^3 r}. \quad (22)$$

又因为 $\cos i=\sqrt{1-\sin^2 i}$，

$$\sin r=\frac{L}{\sqrt{L^2+d^2}},\cos r=\frac{d}{\sqrt{L^2+d^2}}.$$

类似可得

$$y=-\frac{1}{nd^2}[d^2-(n^2-1)L^2]^{\frac{3}{2}}. \quad (23)$$

点 P 的横坐标

$$x=L-|y|\tan i. \quad (24)$$

又因为 $\tan i=\dfrac{\sin i}{\cos i}$，可得

$$x=\frac{n^2-1}{d^2}L^3, \quad (25)$$

$$y=-\left[\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{d}{n}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}, \quad (26)$$

其中 $-\dfrac{d}{\sqrt{n^2-1}}<x<\dfrac{d}{\sqrt{n^2-1}}$.

式(26)的函数图像为飞鸟观鱼的像，当鸟在鱼的正上方时，$x=0$，$y=-d/n$，即视深为 d/n；当光线 SA 的入射角 r 等于临界角时，$x=\pm d/\sqrt{n^2-1}$，$y=0$，即视深为 0.

用 Geogebra 软件画出该函数的图像，如图 11 所示，其中 S 为鱼的位置.

改变入射点 A 的位置，跟踪 P 点的轨迹可以验证该函数图像就是飞鸟观鱼的像，如果 $\mathrm{d}L$（$\mathrm{d}L=1$）较大，P 的轨迹与函数图像有一点偏差，如图 12 所示.

如果 $\mathrm{d}L$ 很小（$\mathrm{d}L=0.01$）时（此时两条光线 SA 与 SB 已重合），可见 P 的轨迹与函数的图像重合，如图 13 所示. 由此可验证式(26)的函数图像就是飞鸟观鱼的像.

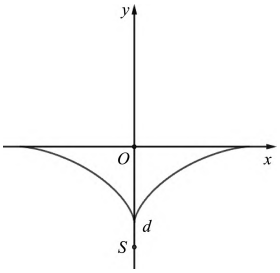

图 11 飞鸟观鱼的像

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

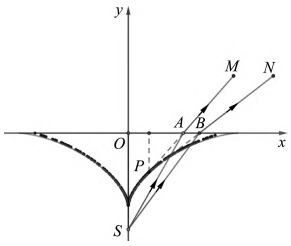

图 12　dL 较大时 P 的轨迹

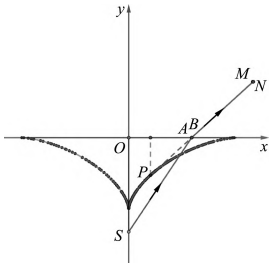

图 13　dL 很小时 P 的轨迹

4　鱼观飞鸟

如图 14 所示，以水面上的 O 点为坐标原点建立一竖直平面坐标系 xOy，假设鱼在 O 点正下方深度为 d 的 M 点处静止不动，空中的鸟在 xOy 平面内从远处向 x 轴负方向水平飞过来，高度为 h，当鸟飞到 S 点时，从 S 点发出的两条光线 SA 与 SB 经过水面折射后进入鱼的眼睛，入射角分别为 i 和 $(i-\mathrm{d}i)$，AM 与 BN 为折射光线，折射角分别为 r 和 $(r-\mathrm{d}r)$. 两条折射光线的反向延长线的交点 $P(x,y)$ 就是鱼看到鸟的虚像. A 的坐标为 $(L,0)$，AB 的距离为微元 dL(dL=0.61)，水的折射率为 n，则鱼看到水平飞过来鸟的像的位置如何变化？

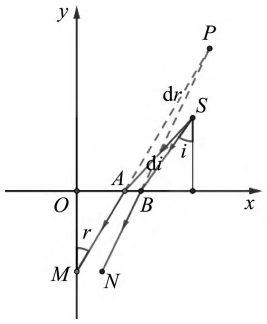

图 14　鱼观飞鸟的像

由折射定律得

$$\sin i=n\sin r. \tag{27}$$

由几何关系得

$$\frac{h}{\cos i}\mathrm{d}i=\mathrm{d}L\cos i, \tag{28}$$

$$\frac{y}{\cos r}\mathrm{d}r=\mathrm{d}L\cos r, \tag{29}$$

将式(27)微分结合式(28)(29)得

$$y=\frac{nh\cos^3 r}{\cos^3 i}. \tag{30}$$

又因为 $\cos i=\sqrt{1-\sin^2 i}$，

$$\sin r=\frac{L}{\sqrt{L^2+\mathrm{d}^2}},\cos r=\frac{\mathrm{d}}{\sqrt{L^2+\mathrm{d}^2}}.$$

可得

$$y=nhd^3\left[d^2+(n^2-1)L^2\right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{31}$$

P 的横坐标为

$$x=L+y\tan r. \tag{32}$$

又因为 $\tan r=\dfrac{L}{d}$，鱼看到飞鸟的像可用参数方程来表示

$$x=L\{1+nhd^2\left[d^2-(n^2-1)L^2\right]^{-\frac{3}{2}}\}, \tag{33}$$

$$y=nh\,d^3\left[d^2-(n^2-1)L^2\right]^{-\frac{3}{2}}. \tag{34}$$

其中 $-\dfrac{d}{\sqrt{n^2-1}}<L<\dfrac{d}{\sqrt{n^2-1}}$.

此参数方程的图像就是鱼看到飞鸟的像，当鸟在鱼的正上方时，$L=0$，P 的坐标为 $(0,nh)$，即视高为 nh；当 $L=\pm d/\sqrt{n^2-1}$ 时，像的坐标为 $P(\infty,\infty)$，即鸟的像在无穷远处.

用 Geogebra 软件画出该参数方程的图像，如图 15 所示，其中 M 为鱼所在的位置，虚线表示鸟水平飞行的轨迹.

改变入射点 A 的位置(改变参数 L)，跟踪 P 点的轨迹可以验证该参数方程的图像就是鱼观飞鸟的像，如果 dL 较大(dL=0.61)，P 的轨迹与参数方程的图像有一点偏差，如图 16 所示.

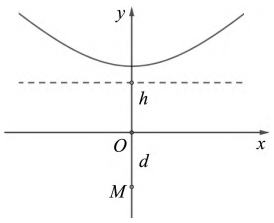

图 15　鱼观飞鸟的像

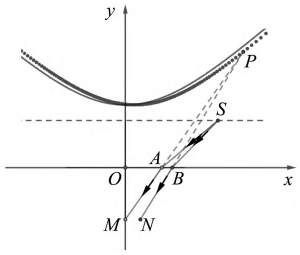

图 16　dL 较大时 P 轨迹图

如果 dL(dL=0.01)很小时(此时两条光线 SA 与 SB 已重合)，可见 P 的轨迹与参数方程的图像重合，如图 17 所示. 由此可验证参数方程(34)的图像就是鱼观飞鸟的像.

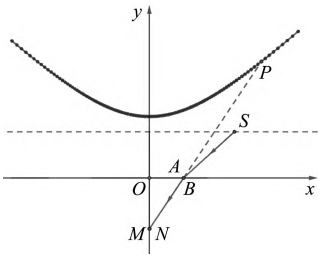

图 17　dL 很小时 P 轨迹图

青山飞鸟舞长空，碧涧游鱼戏水中. 莫道秋波遮望眼，高低远近不相逢. 鱼和鸟的折射成像各不相同，它们看到对方的像都是经过水面折射后的虚像，鱼和鸟都会感觉到对方飘忽不定忽近忽远. 正如泰戈尔的诗："世界上最遥远的距离，是飞鸟和鱼的距离，一个翱翔天际，一个却深潜海底."距离很美却又很无奈，关于距离，每个人心中都有自己的定义和遐想，或是咫尺若天涯，或是千里共婵娟.

参考文献：

1　夏清华，屈少华. 水中物体的视深度[J]. 物理通报，1999(1)：13－14.

2　郭守月，戴结林. 观测水中物体视深时常被忽视的因素[J]. 物理通报，2003(1)：3－5.

(收稿日期：2023－05－29)

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net