微分几何与理论物理

Differential Geometry and Theoretical Physics

拉格朗日力学

电磁场论

广义相对论

Laniakea









目录

第一章 微分流形 2
1.1 流形的引入和定义 2
1.1.1 光滑流形的定义 3
1.1.2 复流形 3
1.2 切向量与切空间 4
1.2.1 切向量的一般定义 6
1.2.2 切空间T_PM与切丛TM 7
1.3 余切空间、(r,s)型张量以及外微分形式 8
1.3.1 切空间的对偶空间：余切空间 8
1.3.2 张量的一般定义 8
1.3.3 外微分形式与$stoke's$公式 9
第二章 张量分析与黎曼几何 12
2.1 张量变换律与张量代数 12
2.1.1 张量变换律 12
2.1.2 张量代数 12
2.2 平移与联络 13
2.3 协变微商 15
2.4 测地线及其方程 16
2.5 流形的度量 17
2.5.1 距离和度规 17
2.5.2 张量指标的升降 17
2.6 $Christoffel$符号 17
2.7 挠率和曲率 18
2.7.1 挠率张量及其几何意义 18
2.7.2 曲率张量及其几何意义 19
2.7.3 保持平移不变性的无挠黎曼流形下的曲率张量 20
第三章 流形上的变分——拉格朗日力学 22
3.1 泛函与变分 22
3.1.1 泛函的概念 22
3.1.2 变分 欧拉-拉格朗日方程 22
3.2 对称性与守恒律——诺特定理 24
3.2.1 相空间与拉格朗日动力系统 24
3.3.2 对称与诺特定理 24
3.3 极值原理 25
第四章 电磁场论 26
4.1$Minkowski$时空 26
4.2 粒子与场的相互作用 26
4.2.1 场的四维势与粒子的电荷 26
4.2.2 粒子在场中的运动方程 26
4.3 电磁场张量及其作用量 28
4.4 四维电流向量 29
4.5 麦克斯韦方程组及其外微分形式表达 29
4.5.1. 麦克斯韦方程组 29

4.5.2 外微分形式的表达 31
第五章 广义相对论 32
5.1 广义相对论的思想以及作用量 32
5.2 爱因斯坦场方程 33
5.3 广义相对论的运动方程 36
第六章 理论实践 38
6.1 牛顿第二定律 38
6.2 麦克斯韦方程组的应用 38
6.2.1 库仑定律 38
6.2.1 电磁场的泊松方程 38
6.3 引力场的泊松方程 39
6.4 牛顿近似及能动张量系数的确定 39
6.4.1 运动方程的牛顿近似 40
6.4.2 场方程的牛顿近似 40
6.5 一个特解——史瓦西度规 42
6.5.1 真空场方程 42
6.5.2 球对称度规 42
6.5.3 史瓦西解 42
6.6 黑洞的预言和发现 44
6.6.1 奇点与视界——黑洞 44
6.6.2 黑洞的发现 45

第一章 微分流形

1.1 流形的引入和定义

“流形”实际上是欧氏空间$\mathbb{R}^n$的推广，在许多物理问题中都自然地会出现流形，例如考虑图 1 的平面单摆，图中 $0 \le \theta \le 2\pi$，该单摆所考虑的空间则是圆周S^1。复杂的情况可以考虑复摆（图 2），可以看出，该复摆所考虑的空间是两个圆周的直积$S^1 \times S^1$，在拓扑学上可以用环面表示（图 3）。

图 1 单摆

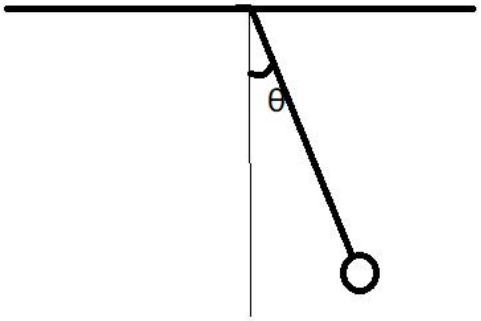


图 2 复摆

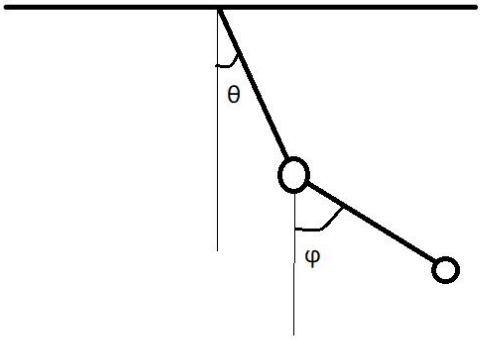
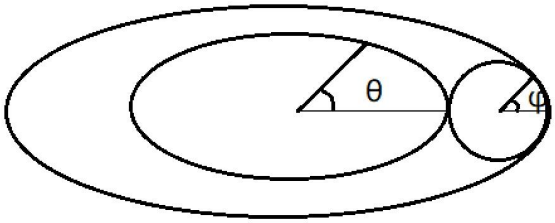


图 3 环面



众所周知，$\mathbb{R}^n$的基向量不会随着空间点的变化而变化，是整体坐标系，但对于曲线坐标系，基向量将会随着空间点的变化而发生改变（此处的基向量特指直角正交基），例如上述受力质点的运动，引力场的空间分布，这种就是局部坐标系，从局部上说，它们同胚于$\mathbb{R}^n$，这样的空间的就是我们将要叙述的流形。

定义 1.1 若集合M中的每一点P都被包含在同胚于欧氏空间$\mathbb{R}^n$某一区域V的域$U \subseteq M$中，则称M为n维流形，简称流形。

流形M局部地与$\mathbb{R}^n$的区域同胚，并且说流形的维数为n，记为$dim\,(M) = n$。

于是在n维流形中，可以指出一个拓扑U_i和U_i到$\mathbb{R}^n$中的区域V_i的同胚

$$\begin{aligned} \varphi_i &: U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^n \\ P &\mapsto \varphi_i(P) \end{aligned} \tag{1.1}$$

并且拓扑覆盖M。一般而言，V_i之间可以相交。集合U_i和同胚φ_i一起称为图。

假设在$\mathbb{R}^n$中有一个笛卡尔坐标系$(x^1, \ldots, x^n)$，于是复合函数

$$x^k = x^k\big(\varphi_i(P)\big) = x^k(P), P \in U_i \tag{1.2}$$

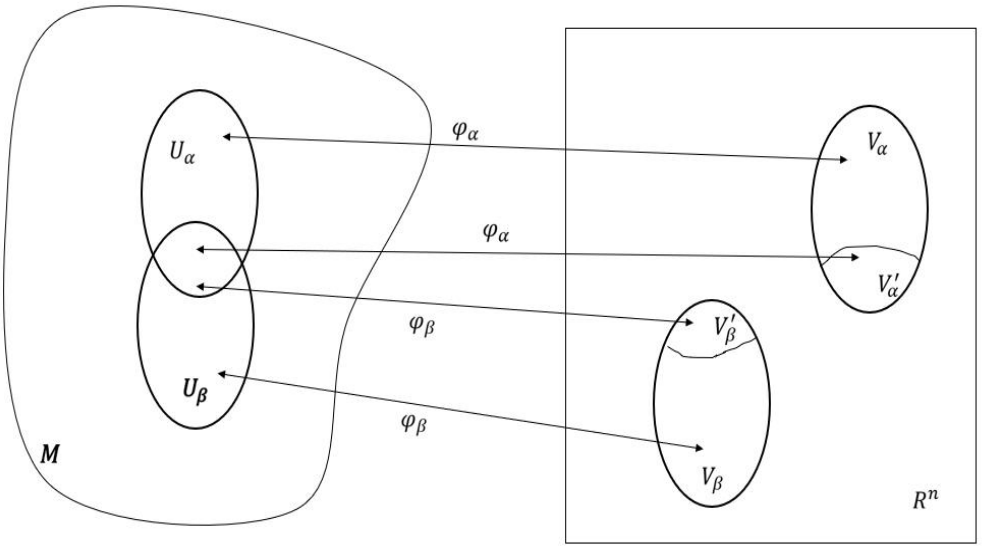
给出了开集U_i上的函数组，称为图U_i，φ_i上的局部坐标系，同胚给出了U_i在$\mathbb{R}^n$上的坐标，图的全体$\{U_i，\varphi_i\}$称为图册。

1.1.1 光滑流形的定义

刚刚指出，$\mathbb{R}^n$中不同的V_i可以有交集，而不同的U_i之间也可以有交集，它们又各自有其上的笛卡尔坐标系，因此在图交集处有多套笛卡尔坐标系，下讨论它们的变换问题，并给出光滑流形的定义。

定义 1.1 可用图 4 直观地表达。

图 4 流形的定义



可以看到，图交集$U_\alpha \cap U_\beta$通过两个同胚φ_α、φ_β映到了$\mathbb{R}^n$中的两个区域V'_α、V'_β（它们可能有交，可能无交），U_α的局部坐标系为(x_α^k)，U_β的局部坐标系为(x_β^k)，流形的同胚保证了不同局部坐标系之间转换的实现：

$$x_\beta^k = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha^k) = x_\beta^k(x_\alpha^k) \tag{1.3}$$

定义 1.2 n维流形M，其图册$\{U_i，\varphi_i\}$的局部坐标系(x_γ^k)满足条件：对任何一对图U_α、U_β，坐标变换函数$x_\beta^k = x_\beta^k(x_\alpha^k)$在它们的定义域上连续可微，则称$M$是$n$维光滑流形。

定义 1.3 对于光滑流形M，若所有的坐标变换函数在其定义域上C^r类光滑函数，则称M是C^r类光滑流形。

定义 1.4 设$f: M_1 \to M_2$是流形M_1、M_2之间的同胚，且f、f^{-1}都是C^r类光滑映射，则称f为C^r类微分同胚，M_1和M_2称为微分同胚的流形。

1.1.2 复流形

复流形可用同样的方法定义，只不过是将$\mathbb{R}^n$换成$\mathbb{C}^n$，此处不再重复。

以下介绍一个重要的复流形的例子：$Minkowski$流形。我们指出，它是描述相对论和电磁场论强大的数学工具。

1908 年$Minkowski$引入了时空的概念，它是我们现实世界三维空间里加入一个时间的维度，并赋予度量

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{1.4}$$

我们可以采取一个特殊的单位制使得光速$c = 1$, 于是度量的微元和度量矩阵为

$$(ds)^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$\eta^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

若将时空视为一个复流形，某点的坐标可表示为(ict, x, y, z), 按欧氏空间的内积来定义度量，实际上可以看出该度量正是（1.4）。

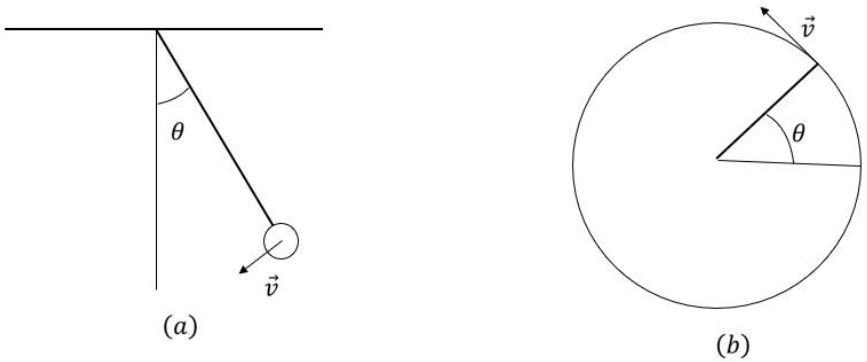
上述时空便是$Minkowski$流形。应当指出，此处的度量并非严格满足度量公理（正定性，对称性，三角不等式）的度量，它是用来描述所考虑时空中的“间隔”，这种度量与传统意义的度量的区别所在，我们将在后面讨论。而$Minkowski$流形采取这样的度量则是时空与光速不变原理这一相对论基本假设的相互作用所导致的。

1.2 切向量与切空间

我们在物理实体所处的空间引入了流形的概念，但是为描述物体的运动，我们需要引入新的数学概念。

众所周知，为了描述质点的运动，除了需要知道它的位置外，还必须知道它的速度，例如图 1 所示的单摆，其速度与轨迹相切，其位置和速度可以用下图表示：

图 5 单摆的状态空间

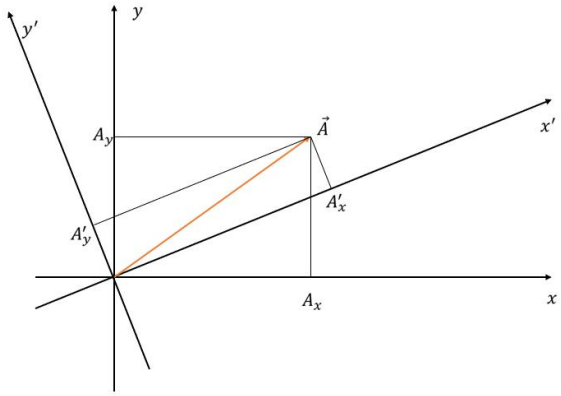


也就是S^1加上每点的切线，得到描述单摆状态的空间图 5（b），可以用来描述它的位置和速度。则速度向量$\boldsymbol{v}$可以称为S^1某点上的切向量，该点上的所有切向量便构成了切空间。以下我们一般地讨论流形的切向量与切空间问题。

我们知道，流形M与$\mathbb{R}^n$不同，流形中每一点的坐标系是局部的, 因此在流形上定义切向量需要把握向量最基本的性质，为此，我们考察一固定向量$\boldsymbol{A}$以及

它在两个不同直角坐标系中的情况，如图 6。

图 6



$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} = A_x^{'}\boldsymbol{i} + A_y^{'}\boldsymbol{j} \tag{1.6}$$

图中直角坐标系之间的夹角为α。由线性变换的知识易得，两个直角坐标系中的分量有如下关系

$$\begin{pmatrix} A_x^{'} \\ A_y^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

可见，对于一固定向量$\boldsymbol{A}$而言，给定一个坐标系，就有一组分量与之对应，即$\boldsymbol{A}$是坐标系集合到$\mathbb{R}^2$的一个映射，这一映射还需满足分量变换关系（1.7）。

而流形M中的点可以用不同的坐标系表示，于是某点的切向量是一个映射$T:\{x\} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$，$\{x\}$是$P$点的坐标系全体，接下来我们寻找切向量应有的变量变换法则。

仍考虑单摆，从图 5（b）可以看出，在某点P的切向量

$$\boldsymbol{v} = R\frac{d\theta}{dt} = R\boldsymbol{\omega} \tag{1.8}$$

R是圆周S^1的半径，$\boldsymbol{\omega}$是质点的角速度，我们也可以用另一半径不同的圆周$S^{1'}$表示同一个速度$\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{v} = R^{'}\frac{d\theta^{'}}{dt} = R^{'}\frac{d\theta^{'}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{1.9}$$

对比（1.8）可以看出

$$R = R^{'}\frac{d\theta^{'}}{d\theta} \tag{1.10}$$

我们可以说，在P点，$\frac{d\theta}{dt}$是其切空间的基，R是$\boldsymbol{v}$的分量，分量变换规则为（1.10）。

由此可以一般地说，对于一个超曲面$M = M(x^1, \ldots, x^n)$，按泰勒公式在$P(x_0^1, \ldots, x_0^n)$展开：

$$M(x_0^1 + \Delta x^1, \ldots, x_0^n + \Delta x^n) = M(x_0^1, \ldots, x_0^n) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial M}{\partial x^i}\Delta x^i + o\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta x^i)^2\right) \tag{1.11}$$

其线性部分$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial M}{\partial x^i}\Delta x^i$表示超曲面$M$在点$P$的切平面，这正与速度是圆周某点上的切向量吻合，于是类似（1.10），可以定义切向量的分量变换规则。

设有两个不同坐标系$\left(x_\alpha^k\right)$、$\left(x_\beta^k\right)$，且有光滑函数组

$$x_\alpha^k = x_\alpha^k\left(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n\right), k = 1, \ldots, n \tag{1.12}$$

一超曲面M上的切向量$\boldsymbol{v}$在两个坐标系下分别表示为

$$\boldsymbol{v} = \sum_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\alpha^i}\xi^i = \sum_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\beta^i}\eta^i \tag{1.13}$$

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\beta^i}\eta^i = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\alpha^j}\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\eta^i = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\eta^j \\ &= \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\alpha^i}\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\eta^j = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial M}{\partial x_\alpha^i}\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\eta^j\end{aligned} \tag{1.14}$$

对比（1.13）（1.14）可得

$$\xi^i = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\eta^j \tag{1.15}$$

此即切向量要求的分量变换规则。

1.2.1 切向量的一般定义

定义 1.5 设M是n维光滑流形，$P \in M$，P的每一个局部坐标系$\left(x_\gamma^k\right)$对应一个数组$\left(\xi_\gamma^k\right)$，且满足

$$\xi_\alpha^k = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}\xi_\beta^k \tag{1.16}$$

则称此对应为M在P点上的切向量。（1.16）可简洁地表达为

$$\boldsymbol{\xi_\alpha} = \begin{pmatrix}\xi_\alpha^1 \\ \vdots \\ \xi_\alpha^k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^1} & \cdots & \frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^1} & \cdots & \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_\beta^1 \\ \vdots \\ \xi_\beta^k\end{pmatrix} = \frac{\partial\left(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n\right)}{\partial\left(x_\beta^1, \ldots, x_\beta^n\right)}\boldsymbol{\xi_\beta} \tag{1.17}$$

1.2.2 切空间T_PM与切丛TM

定义 1.6 在$P \in M$的所有切向量的集合称为M在P点的切空间T_PM。

变换法则（1.16）具有线性性，于是可以得出如下定理：

定理 1.1 T_PM是线性空间。

定理 1.1 说切空间是线性空间，一个自然的问题是，这个线性空间的基底是什么，以下讨论切向量在切空间的基底表达。

定义 1.7 将一光滑映射γ：$\mathbb{R} \to M$称为流形M上的曲线，若$\exists t \in \mathbb{R}\ s.t.\gamma(t) = P \in M$, 则称曲线过$P$点。结合（1.2），可以把曲线写为参数形式$(x^k(t))$。

定理 1.2 在流形M上的曲线γ取一个局部坐标系$(x) = (x^i)$的一组对应$\left(\frac{dx^i}{dt}\right)$是切向量。

***Proof*：** $\frac{dx'^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt}$, 是切向量$\boldsymbol{Q.E.D.}$

定义 1.8 设$P \in M$，$\boldsymbol{\xi} \in T_PM$，$\gamma(t)$是过$P$点的光滑曲线$\gamma(t_0) = P$，且在$P$的切向量是$\boldsymbol{\xi}$。设$f: M \to \mathbb{R}$是流形$M$上的光滑函数。称数

$$\frac{d}{dt}f\big(\gamma(t)\big)\Big|_{t=t_0} = \xi(f) \tag{1.18}$$

为f沿着切向量$\boldsymbol{\xi}$的导数，也称为f沿着$\boldsymbol{\xi}$的微分。

若f是C^∞类的，可将f在$P\big(x_0^1, \dots, x_n^1\big)$泰勒展开为

$$\begin{aligned} f(x^i) = f\big(x_0^i\big) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P \big(x^i - x_0^i\big) \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}(x^i)\big(x^i - x_0^i\big)\big(x^j - x_0^j\big) \end{aligned} \tag{1.19}$$

其中h_{ij}是拉格朗日型余项，对（1.19）两边同时作一微分运算D（D可以是偏微分运算$\frac{\partial}{\partial x^i}$或是它们的组合）有

$$Df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P D\big(x^i - x_0^i\big) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D[h_{ij}(x^i)\big(x^i - x_0^i\big)\big(x^j - x_0^j\big)] \tag{1.20}$$

上式右边第二项在P点为 0，于是在P点有

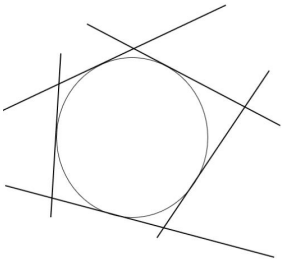
$$Df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P D\big(x^i - x_0^i\big) \tag{1.21}$$

令$\xi^i = D\big(x^i - x_0^i\big)$，得向量$\boldsymbol{\xi} = (\xi^i)$，于是$Df = \xi(f)$，从而得知，微分与切向量等同，$\frac{\partial}{\partial x^i}$是一个切向量，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$构成切空间$T_PM$的基底。

定义 1.9 流形M的所有切空间的并是M的切丛$TM = \cup_{P\in M} T_PM$。

圆周S^1上的切丛就是其上所有切线的并（图 7）。

图 7 圆周的切丛



1.3 余切空间、(r,s)型张量以及外微分形式

1.3.1 切空间的对偶空间：余切空间

我们改写（1.18）：

$$\xi(f)=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_P\xi^i \tag{1.22}$$

而对于f我们有其全微分以及切向量$\vec{\xi}$的基底展开：

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.24}$$

定义一种新运算$\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j \tag{1.25}$$

便能将（1.22）到（1.24）联系起来：

$$\xi(f)=\langle df,\boldsymbol{\xi}\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i,\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i \tag{1.26}$$

再定义$df(\boldsymbol{\xi})=\langle df,\boldsymbol{\xi}\rangle$，那么$df$便可作为一种映射，将切向量$\boldsymbol{\xi}$映到$\mathbb{R}$上，显然$df$是线性的，于是$df$是切空间$T_PM$上的一个线性泛函，全体的$df$便构成切空间的对偶空间，称之为余切空间，记为$T_P^*M$，余切空间的基底自然是$\{dx^i\}$。

1.3.2 张量的一般定义

对于一个线性空间V及其对偶空间V^*，有定义

定义 1.10 设V是n维线性空间，V^*是其对偶空间，(r,s)是一对非负整数。则$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r个V^*}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s个V}$上的一个$r+s$重线性函数称为$(r,s)$型张量，其中$r$称为逆变阶数，$s$称为协变阶数。

而我们考虑T_PM以及T_P^*M上的张量T便是

$$T\in\mathcal{L}(\underbrace{T_P^*M\times\cdots\times T_P^*M}_{r个T_P^*M}\times\underbrace{T_PM\times\cdots\times T_PM}_{s个T_PM},\mathbb{R}) \tag{1.27}$$

定义 1.11 $(r,0)$型张量称为r阶逆变张量，$(0,s)$型张量称为s阶协变张量。

有关于张量的具体运算和性质我们将在第二章讨论。

1.3.3 外微分形式与$stoke's$公式

所谓的外微分形式实际上是T_PM以及T_P^*M上的**反对称**协变张量，为了将（1.27）更加清晰地表达出来，我们定义张量积。

定义 1.12 $\alpha \in \mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_r, \mathbb{R}), \beta \in \mathcal{L}(W_1 \times \cdots \times W_s, \mathbb{R})$，其中$V_i$、$W_j$是线性空间，则$\alpha \otimes \beta$是$V_1 \times \cdots \times V_r \times W_1 \times \cdots \times W_s$上的$r+s$重线性函数，定义为

$$\alpha \otimes \beta(v_1, ..., v_r, w_1, ..., w_s) = \alpha(v_1, ..., v_r) \cdot \beta(w_1, ..., w_s) \tag{1.28}$$

其中$v_i \in V_i$、$w_j \in W_j$。

利用张量积，构造(r,s)型张量

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \tag{1.29}$$

为方便描述，我们将在后面一直采用爱因斯坦求和约定（除非特别声明，重复的指标将代表求和），则可设

$$\boldsymbol{\xi_k} = \xi_k^i \frac{\partial}{\partial x^i}, k = 1, ..., s, \boldsymbol{\xi_k} \in T_PM \tag{1.30}$$

$$df_l = \frac{\partial f_l}{\partial x^j} dx^j, l = 1, ..., r, df_l \in T_P^*M \tag{1.31}$$

并注意到

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(dx^j) = dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_j^i = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \tag{1.32}$$

且令

$$T\left(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) = T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \tag{1.33}$$

则

$$\begin{aligned} &T(df_1, ..., df_r, \boldsymbol{\xi_1}, ..., \boldsymbol{\xi_s}) \\ &= T\left(\frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1}, ..., \frac{\partial f_r}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r}, \xi_1^{j_1} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \xi_s^{j_s} \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f_r}{\partial x^{i_r}} \xi_1^{j_1} \cdots \xi_s^{j_s} T\left(dx^{i_1}, ..., dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\right) \\ &= T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} df_1\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right) \cdots df_r\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)(dx^{j_1}) \cdots \xi_s(dx^{j_s}) \\ &= T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}(df_1, ..., df_r, \boldsymbol{\xi_1}, ..., \boldsymbol{\xi_s}) \end{aligned} \tag{1.34}$$

$\Rightarrow$

$$T = T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \tag{1.35}$$

一个外微分形式正是

$$\omega = \omega_{j_1 \ldots j_s} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \tag{1.36}$$

不过此处的$\omega_{j_1 \ldots j_s}$是$\mathbb{R}^s$上的函数，为了体现反对称性，我们引入$wedge$积$\wedge$

$$a \wedge b = -b \wedge a \tag{1.37}$$

a、b是两个可相乘的量。从而可以正式定义：

定义 1.13 ω称为k−外微分形式，简称k−形式，且

$$\omega = \omega_{j_1\dots j_k}(x^{j_1},\dots,dx^{j_k})dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k} \tag{1.38}$$

在微积分中常遇到$P(x,y,z)dxdy+Q(x,y,z)dydz+R(x,y,z)dzdx$或$\rho(x,y,z)dxdydz$这样的对象，实际上它们是 2 −形式和 3 −形式。我们熟悉的积分变量变换公式：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \tag{1.39}$$

可以认为

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv \tag{1.40}$$

但是也有

$$dydx = \left|\frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}\right|dudv = -\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv = -dxdy \tag{1.41}$$

这正是反对称性的体现，于是我们可以写出

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dx\wedge dy \tag{1.42}$$

由（1.41）有

$$dx\wedge dx = 0 \tag{1.43}$$

从（1.42）我们得到了对外微分形式的积分，实际上也是流形上的积分，接下来运用外微分形式的性质来推导一般的积分变量变换公式。

设有$\int_D f(x^1,\dots,x^n)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$以及光滑函数组$x^i = x^i(u^1,\dots,u^n), i=1,\dots,n$。

则

$$\begin{aligned}\int_D f(x^1,\dots,x^n)dx^1\wedge\dots\wedge dx^n &= \int_D f(x^1,\dots,x^n)\left(\frac{\partial x^1}{\partial u^{i_1}}du^{i_1}\right)\wedge\dots\wedge\left(\frac{\partial x^n}{\partial u^{i_n}}du^{i_n}\right)\\ &= \int_D f(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial x^1}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial x^n}{\partial u^{i_1}}du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_n}\end{aligned} \tag{1.44}$$

注意到（1.43），则（1.44）的求和中应有i_1、…、i_n各不相同，于是

$$\begin{aligned}&\int_D f(x^1,\dots,x^n)\frac{\partial x^1}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial x^n}{\partial u^{i_1}}du^{i_1}\wedge\dots\wedge du^{i_n}\\ &= \int_D f(x^1,\dots,x^n)(-1)^{\sigma(i_1\dots i_n)}\frac{\partial x^1}{\partial u^{i_1}}\dots\frac{\partial x^n}{\partial u^{i_1}}du^1\wedge\dots\wedge du^n\\ &= \int_D f(x^1,\dots,x^n)(\\ &\qquad -1)^{\sigma(i_1\dots i_n)}\left|\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(u^1,\dots,u^n)}\right|du^1\wedge\dots\wedge du^n\end{aligned} \tag{1.45}$$

这是我们熟悉的结果。$dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$的几何意义是它是$\mathbb{R}^n$上的体积微元。

定义 1.14 k−形式ω的外微分d作用到ω上是

$$d\omega = d\omega_{j_1\dots j_k}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k} = \frac{\partial\omega_{j_1\dots j_k}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k} \tag{1.46}$$

实际上外微分d是我们通常微分的推广。

定理 1.3（$stoke's$公式）设D是一连通区域，∂D是其边界，且D是$k+1$ 维

的，∂D则是k维，ω是k−形式，则

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}d\omega \tag{1.47}$$

$\boldsymbol{Proof}$:对D做一个分割$I_{\alpha}^{k+1}=\{[x_{\alpha}^{1},x_{\alpha'}^{1}]\times\ldots\times[x_{\alpha}^{k+1},x_{\alpha'}^{k+1}]|\alpha\in\Lambda\}$，其中$\Lambda$是一个指标集，且分割满足$D=\cup_{\alpha\in\Lambda}I_{\alpha}^{k+1}$, $I_{\alpha}^{k+1}\cap I_{\beta}^{k+1}=\emptyset(\alpha\neq\beta)$，以及指标的取数趋于无穷时 $\max\{m(I_{\alpha}^{k+1})\}\to 0$，$m(I_{\alpha}^{k+1})$是$I_{\alpha}^{k+1}$的测度，则

$$\begin{aligned}\int_{D}d\omega&=\int_{D}\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_k}}{\partial x^{i}}dx^{i}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\\&=\sum_{\alpha\in\Lambda}\int_{I_{\alpha}^{k+1}}\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_k}}{\partial x^{i}}dx^{i}\wedge dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\\&=\sum_{\alpha\in\Lambda}\int_{I_{\alpha}^{k}}\int_{x_{\alpha}^{i}}^{x_{\alpha'}^{i}}\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_k}}{\partial x^{i}}dx^{i}\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\\&=\sum_{\alpha\in\Lambda}\int_{I_{\alpha}^{k}}\omega dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}=\int_{\partial D}\omega\end{aligned} \tag{1.48}$$

最后一步是因为在各个I_{α}^{k+1}上，边界上的积分值相消。$\boldsymbol{Q.E.D.}$

（1.47）是一个重要的公式，它是牛顿—莱布尼茨公式、格林公式和高斯公式的推广，例如对于二维区域上的 1−形式$P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，有

$$\begin{aligned}&\int_{\partial D}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{D}d[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]\\&=\int_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy\\&=\int_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\end{aligned} \tag{1.49}$$

正是格林公式。

第二章 张量分析与黎曼几何

微分流形研究的对象是光滑流形，是拓扑意义上的概念，而对流形引入满足公理度量，流形便成为黎曼流形，黎曼流形上的几何就是黎曼几何。

“物质告诉时空如何弯曲，时空告诉物质如何运动”，惠勒这句话高度概括了广义相对论，广义相对论的物理背景正是弯曲的时空。运动必然涉及到所考虑空间的几何结构，而黎曼几何正是广义相对论强大的理论工具。应当指出，广义相对论所使用的流形并非黎曼流形，而是洛伦兹流形，黎曼流形的度量要求正定性，但洛伦兹流形没有要求，比如前面例举的$Minkowski$流形就是一种洛伦兹流形的例子。但是黎曼流形和洛伦兹流形的区别仅在于度量是否具备正定性，因此广义相对论的分析方法仍可以基于黎曼几何。

我们从张量开始，随后将引入联络，测地线等黎曼流形的几何结构概念。

2.1 张量变换律与张量代数

我们把重点放在流形上的张量，即可用（1.35）表达的张量，它的定义是（1.27），从定义中可以看到，张量是逐点定义的，因此对于一个张量必须要考虑不同坐标系下的变换法则。而不同张量之间的运算也要在同一点上才有意义，因此变换律和运算都是在同一点上的。

2.1.1 张量变换律

对于同一个张量T，现考虑它在两个坐标系$(x),(x')$之中的表达：

$$T=T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\otimes dx^{l_1}\otimes\cdots\otimes dx^{l_s} \tag{2.1}$$

$$T=T'^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x'^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x'^{i_r}}\otimes dx'^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx'^{j_s} \tag{2.2}$$

并且这两个坐标系之间可通过

$$\begin{cases}x=x(x')\\x'=x'(x)\end{cases} \tag{2.3}$$

进行变换，那么就有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x^{k_\alpha}}=\dfrac{\partial}{\partial x'^{i_\beta}}\dfrac{\partial x'^{i_\beta}}{\partial x^{k_\alpha}}\\dx^{l_\alpha}=\dfrac{\partial x^{l_\alpha}}{\partial x'^{j_\beta}}dx'^{j_\beta}\end{cases} \tag{2.4}$$

联立(2.1)(2.2)(2.4)就有

$$T'^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}} \tag{2.5}$$

这便是张量变换律，实际上也可以以上式作为张量的定义。判别一个量是否是张量便看它在不同坐标系之间的变换律是否满足(2.5)。

2.1.2 张量代数

定义 2.1 张量的加减法定义为相应分量的加减，因此进行加减法的张量必须同阶。

定义 2.2 张量的乘法定义为

$$C_{j_1\cdots j_s l_1\cdots l_m}^{i_1\cdots i_r k_1\cdots k_n} = A_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r} \cdot B_{l_1\cdots l_m}^{k_1\cdots k_n} \tag{2.6}$$

一个（r,s）型张量与一个（n,m）型张量相乘结果是一个（$r+n,s+m$）型张量。

定义 2.3 张量的缩并定义为将一对上下指标变为重复进行求和，如

$$C_{\rho\lambda}^{\nu} = C_{\rho\mu\lambda}^{\mu\nu} \tag{2.7}$$

可见缩并使得（r,s）型张量变成一个（$r-1,s-1$）型张量。

在定义度规张量后，我们还定义张量指标的升降运算。应当指出，（0,0）型张量是标量，对一个（1,0）型张量和（0,1）张量相乘后再缩并得到的是标量：

$$C = A^{\mu}B_{\mu}$$

顺便指出，任何一个二阶逆变（协变）张量都可以写成一个对称张量和反对称张量的和，这类似于将函数分解为奇函数和偶函数的和：

$$T^{\mu\nu} = T^{(\mu\nu)} + T^{[\mu\nu]} \tag{2.8}$$

其中

$$T^{(\mu\nu)} = \frac{T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}}{2} \tag{2.9}$$

$$T^{[\mu\nu]} = \frac{T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}}{2} \tag{2.10}$$

2.2 平移与联络

前面说过，张量是逐点定义的，两个不同点上的张量无法直接进行运算。然而，研究一个张量场的微分，又必须考虑两点的张量之差，为使微分运算不破坏张量的性质，我们引入“平移”和“仿射联络”的概念。

设协变向量场A_{μ}在无限靠近的P,Q两点的向量分别为$A_{\mu}(P)$和$A_{\mu}(Q)$，在P点的向量$A_{\mu}(P)$平移到Q点后，记作$A_{\mu}(P\to Q)$，一般而言$A_{\mu}(P\to Q)\neq A_{\mu}(P)$，而张量的微分应要求

$$A'_{\mu}(P\to Q) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} A_{\alpha}(P\to Q) \tag{2.11}$$

平移后，$A_{\mu}(P\to Q)$相对于$A_{\mu}(P)$有一个增量，它正比于P,Q两点的位移dx^{μ}，这是微分线性性的要求，从一般性的角度看，增量$\delta A_{\mu}(P)$与$A_{\mu}(P)$的所有分量有关，于是

$$\delta A_{\mu}(P) = A_{\mu}(P\to Q) - A_{\mu}(P) = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(P)A_{\lambda}(P)dx^{\nu} \tag{2.12}$$

（2.12）引入了比例系数$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(P)$，成为在$P$点的仿射联络，简称联络，在$n$维流形中，联络有$n^3$个分量。

现在求联络的变换法则。

在Q点，可对P点进行$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}$的展开：

$$\begin{aligned}(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}})_Q &= \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\right)_P dx'^{\nu} \\ &= \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)_P dx^{\sigma}\end{aligned} \tag{2.13}$$

结合（2.12）（2.13），可将(2.11)写作

$$A'_{\mu} + \Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}A'_{\lambda}dx'^{\nu} = \left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}dx^{\sigma}\right)\left(A_{\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}A_{\lambda}dx^{\nu}\right) \tag{2.14}$$

上式各量都是在P点的值，故略去P。

注意到

$$\begin{aligned}A'_{\mu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}A_{\alpha} \\ dx'^{\nu} &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}dx^{\sigma}\end{aligned} \tag{2.15}$$

代入（2.14）并忽略微分的二阶及以上小量：

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}A_{\rho}dx^{\sigma} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}A_{\beta}dx^{\sigma} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}A_{\alpha}dx^{\sigma} \tag{2.16}$$

重复指标可以任意替换，因为其代表求和，把（2.16）右边第一项的β和第二项的α换成ρ可得：

$$\left(\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} - \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right)A_{\rho}dx^{\sigma} = 0 \tag{2.17}$$

而A_{ρ}、dx^{σ}是任意的，于是

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} \tag{2.18}$$

两边同乘$\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}$，有

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}} \tag{2.18}$$

$\Rightarrow$

$$\Gamma'^{\tau}_{\mu\gamma} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}} \tag{2.19}$$

这便是联络的坐标变换公式。以上公式我们用的是协变向量场A_{μ}，对于逆变向量场，我们有

$$\delta A^{\mu}(P) = A^{\mu}(P \to Q) - A^{\mu}(P) = -\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(P)A^{\lambda}(P)dx^{\nu} \tag{2.20}$$

$\boldsymbol{Proof}$:标量在平移中保持不变，故

$$\begin{aligned}&\delta(A_{\mu}A^{\mu}) = A_{\mu}\delta A^{\mu} + A^{\mu}\delta A_{\mu} = 0 \\ \Rightarrow\ &A_{\mu}\delta A^{\mu} = -A^{\mu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda}dx^{\nu} = -A^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A_{\mu}dx^{\nu} \\ \Rightarrow\ &\delta A^{\mu} = -A^{\lambda}\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda}dx^{\nu} \quad \boldsymbol{Q.E.D.}\end{aligned}$$

从(2.19)可以看出，联络不是张量（由于$\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}$的存在），但它也有两个下指标，类似二阶张量，可以将联络写为对称部分和反对称部分的和：

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} + \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} \tag{2.21}$$

其中

$$\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)} = \frac{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\mu\lambda}_{\nu}}{2} \tag{2.22}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} = \frac{\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\mu\lambda}_{\nu}}{2} \tag{2.23}$$

联络不是张量，但是当联络的差是张量，因为$\frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\gamma}}\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\rho}}$这一项将被减去，因此$\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$是张量，称为挠率张量。

2.3 协变微商

协变向量的普通微商定义是：

$$A_{\mu,\nu} \equiv \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \lim_{Q\to P}\frac{A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P)}{\Delta x^{\nu}} \tag{2.24}$$

因流形不同点张量的差$A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P)$不再是张量，故上式不再具有张量的性质。

为了使微商后的结果仍具是张量，我们需要定义新的微商，称为协变微商。协变微商用平移定义：

$$A_{\mu;\nu} \equiv \lim_{Q\to P}\frac{A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P\to Q)}{\Delta x^{\nu}} \tag{2.25}$$

而

$$A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P\to Q) = A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P) + A^{\mu}(P) - A^{\mu}(P\to Q) \tag{2.26}$$

则有

$$\begin{aligned} A_{\mu;\nu} &= \lim_{Q\to P}\frac{A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P) + A^{\mu}(P) - A^{\mu}(P\to Q)}{\Delta x^{\nu}} \\ &= \lim_{Q\to P}\frac{A^{\mu}(Q) - A^{\mu}(P)}{\Delta x^{\nu}} + \lim_{Q\to P}\frac{A^{\mu}(P) - A^{\mu}(P\to Q)}{\Delta x^{\nu}} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}A_{\lambda} \end{aligned} \tag{2.27}$$

这就是协变向量的协变微商公式。从(2.25)可以看出，协变微商和普通微商一样满足乘积微分规律：

$$(A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\cdot B^{k_1\cdots k_n}_{l_1\cdots l_m})_{;\lambda} = \left(A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)_{;\lambda}B^{k_1\cdots k_n}_{l_1\cdots l_m} + A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\left(B^{k_1\cdots k_n}_{l_1\cdots l_m}\right)_{;\lambda} \tag{2.28}$$

由于标量的平移不变性，故对标量场的协变微商等同于普通微商，利用这一点可求对逆变向量的协变微商：

$$(A^{\mu}B_{\mu})_{;\lambda} = (A^{\mu}B_{\mu})_{,\lambda} \Rightarrow A^{\mu}_{;\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu;\lambda} = A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu,\lambda}$$

将(2.27)代入上式有

$$A^{\mu}_{;\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu,\lambda} - A^{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}B_{\alpha} = A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu,\lambda}$$

$\Rightarrow$

$$A^{\mu}_{;\lambda}B_{\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}A^{\mu}B_{\alpha} + A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} = A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}A^{\alpha}B_{\mu} \Rightarrow A^{\mu}_{;\lambda} = A^{\mu}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}A^{\alpha}$$

此即逆变向量的协变微商公式，可以写成与(2.27)相对应的形式：

$$A^{\mu}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda} \tag{2.29}$$

可以从(2.27)和(2.29)归纳得出一般张量的协变微商公式：

$$\left(A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)_{;\lambda} = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,\lambda} + \sum_{k=1}^{r}\Gamma^{i_k}_{\rho\lambda}A^{i_1\cdots\rho^{[k]}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} - \sum_{l=1}^{s}\Gamma^{\rho}_{j_l\lambda}A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots\rho^{[l]}\cdots j_s} \tag{2.30}$$

其中$\rho^{[k]}$表示ρ在第k个指标。利用(2.30)，可以特别写出

$$T_{\mu\nu;\lambda} = T_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}T_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}T_{\mu\rho} \tag{2.31}$$

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = T^{\mu\nu}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}T^{\mu\rho} \tag{2.32}$$

$$T^{\mu}_{\nu;\lambda} = T^{\mu}_{\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}T^{\mu}_{\rho} \tag{2.33}$$

$$\delta^{\mu}_{\nu;\lambda} = 0 \tag{2.34}$$

(2.30)的证明实际上还可以利用张量的基底表达式，注意到对标量场的协变微分等同于普通微分，以及构成张量的基底也是张量和(2.27)(2.29)，无需归纳，通过计算也可以得到。感兴趣的读者可以自己试试。

2.4 测地线及其方程

定义 2.4 若一条流形中的曲线任意两点的切向量平移至同一点上是平行的，那么该曲线称为测地线。

由定义 1.7 知一条曲线的参数方程是

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda) \tag{2.35}$$

其上的切向量是

$$A^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} \tag{2.36}$$

它是一阶逆变向量。无限靠近的两点P、Q的坐标分别为(x^{μ})和$(x^{\mu} + dx^{\mu})$。为比较P、Q的切向量，必须将P点的切向量平移至Q点，比较$A^{\mu}(P \to Q)$和$A^{\mu}(Q)$。

测地线要求$A^{\mu}(P \to Q)$平行于$A^{\mu}(Q)$，即

$$A^{\mu}(Q) = F(\lambda + d\lambda)A^{\mu}(P \to Q) \tag{2.37}$$

其中$F(\lambda)$是$A^{\mu}(P)$平移至某点与它平行的切向量相比的比例系数，在P点是$F(\lambda)$，在Q点是$F(\lambda + d\lambda)$，于是显然有$F(\lambda) = 1$. 将$F(\lambda + d\lambda)$作一级展开并代入（2.37）得

$$A^{\mu}(Q) = (1 + f(\lambda)d\lambda)A^{\mu}(P \to Q) \tag{2.38}$$

其中$f(\lambda) = dF/d\lambda$。由（2.20）及（2.36）得

$$A^{\mu}(P \to Q) = A^{\mu}(P) - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(P)A^{\alpha}(P)dx^{\beta} = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda}d\lambda \tag{2.39}$$

另一方面，有

$$A^{\mu}(Q) = A^{\mu}(P) + dA^{\mu}(P) = \frac{dx^{\mu}}{d\lambda} + \frac{d^2x^{\mu}}{d\lambda^2}d\lambda \tag{2.40}$$

联立(2.38)（2.39）(2.40)并略去$d\lambda$的二阶无穷小量得

$$\frac{d^2x^{\mu}}{dt^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt} = f(t)\frac{dx^{\mu}}{dt} \tag{2.41}$$

我们还可以引入参数变换$\tau = \tau(t)$，使其满足：

$$\frac{d^2\tau}{dt^2} = f(t)\,\frac{d\tau}{dt} \tag{2.42}$$

测地线方程可以化简为

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = 0 \tag{2.43}$$

2.5 流形的度量

如前所述，引入满足正定性度量的流形便是黎曼流形。

2.5.1 距离和度规

定义 2.5 流形中无限靠近两点的距离ds是

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.44}$$

其中$g_{\mu\nu}$是度规张量，简称度规，距离ds也称之为线元。因为dx^μ和dx^ν是对称的，因此度规也是对称的：

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \tag{2.45}$$

例如在我们熟悉的$\mathbb{R}^3$当中，线元表达式是

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \tag{2.44}$$

它的度规张量为

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

由（1.5）定义的$Minkowski$流形的$\eta_{\mu\nu}$也是度规，不过它不具备正定性，$Minkowski$流形不是黎曼流形。我们将看到，物理所涉及的流形理论与度量的正定性无关，因此黎曼流形的方法也可以用于洛伦兹流形，$Minkowski$流形是洛伦兹流形的一种。

2.5.2 张量指标的升降

引入度规张量后，张量的指标可以借助其来进行升降。设$g = det(g_{\mu\nu})$，$g_{\mu\nu}$的代数余子式记为$\Delta^{\mu\nu}$。定义$g_{\mu\nu}$的逆变形式为$g^{\mu\nu} = \frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}$，从而有

$$g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\beta} = \frac{\Delta^{\alpha\lambda}}{g}g_{\lambda\beta} = \delta^\alpha_\beta \tag{2.45}$$

定义 2.6 张量$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$的指标升降运算是

升：
$$A^{\alpha i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots \bar{j_l}\cdots j_s} = g^{\alpha\beta}A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_l=\beta\cdots j_s} \tag{2.46}$$

降：
$$A^{i_1\cdots \bar{i_k}\cdots i_r}_{\alpha j_1\cdots j_s} = g_{\alpha\beta}A^{i_1\cdots \bar{i_k}=\beta\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \tag{2.47}$$

升运算将j_l指标上升至逆变指标的第一位，于是$\bar{j_l}$代表此指标消失；对降运算同理。升降运算实质上是两个张量相乘后再缩并，因此运算结果仍为张量。张量对加减法和乘法是封闭的。

2.6 $Christoffel$符号

我们在流形中定义了联络和度规，从而定义了黎曼流形。我们还讨论了流形中的平移，却没有对向量长度在平移下的变化加以限制，而在欧氏空间中，向量在平移下长度是不变的，我们要求黎曼流形能保持这一重要性质，这就对

联络产生了限制。

从（2.23）可以看出，挠率为0的流形的联络是对称的，称这种流形为无挠流形。我们指出，无挠黎曼流形的联络和度规存在关系，接下来就寻求这种关系。

由（2.20）可知

$$A^{\mu}(P\to Q)=A^{\mu}(P)-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}(P)A^{\lambda}(P)dx^{\nu} \tag{2.48}$$

要求平移不改变向量长度，有

$$g_{\mu\nu}(Q)A^{\mu}(P\to Q)A^{\nu}(P\to Q)=g_{\mu\nu}(P)A^{\mu}(P)A^{\nu}(P) \tag{2.49}$$

将度规在Q点对P点进行一级泰勒展开：

$$g_{\mu\nu}(Q)=g_{\mu\nu}(P)+g_{\mu\nu,\lambda}(P)dx^{\lambda} \tag{2.50}$$

（2.48）（2.50）代入（2.49）并略去dx^{λ}的高阶小量得

$$(g_{\mu\nu,\lambda}-g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}-g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda})A^{\mu}A^{\nu}dx^{\nu}=0 \tag{2.51}$$

$i.e.$

$$g_{\mu\nu,\lambda}-g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}-g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}=0 \tag{2.52}$$

该方程有三个指标μ,ν,λ，可进行指标轮换$(\mu\to\nu,\nu\to\lambda,\lambda\to\mu)$:

$$g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}-g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}=0 \tag{2.53}$$

$$g_{\lambda\mu,\nu}-g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}-g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=0 \tag{2.54}$$

将（2.53）和（2.54）相加并减去（2.52）得

$$g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}-g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}+g_{\lambda\mu,\nu}-g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}-g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}-g_{\mu\nu,\lambda}+g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}+g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}=0$$

注意到度规和联络的对称性，可将上式化为

$$g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\nu}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{2.55}$$

两边同乘$g^{\alpha\lambda}$可得：

$$g^{\alpha\lambda}g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu}+g_{\nu\lambda,\mu}-g_{\mu\nu,\lambda}) \tag{2.56}$$

这就是在上述要求下的对称联络和度规的关系。该联络称为$Christoffel$符号，简称克氏符。

（2.50）实际上正是度规$g_{\mu\nu}$的协变微分，也就是说

$$g_{\mu\nu;\lambda}=0 \tag{2.57}$$

从而也有

$$g^{\mu\nu}_{;\lambda}=0 \tag{2.58}$$

2.7 挠率和曲率

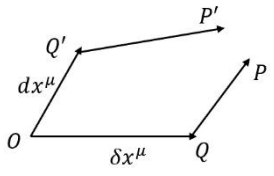
联络不是张量，但其反对称部分是张量（挠率张量）。我们指出，由联络还可以构造出另外一个张量——曲率张量。挠率张量和曲率张量是描述流形几何性质非常重要的两个量。

我们从几何效应出发，引出这两个效应对应的张量，也就是挠率张量与曲率张量，并同时得到它们的几何意义。

2.7.1 挠率张量及其几何意义

如图 8，流形中有两个无穷小向量dx^μ和δx^μ，起点同一。分别用OQ'和OQ表示。现将OQ'沿OQ平移变成OP，OQ沿OQ'平移变成$Q'P'$。在欧氏几何中我们知道，如此平移后四个向量必成平行四边形。但在流形中却比较复杂，P和P'一般不重合。平移后，两个向量分别是

图 8



$$\boldsymbol{QP} = dx^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} dx^\lambda \delta x^\nu \qquad (2.59)$$

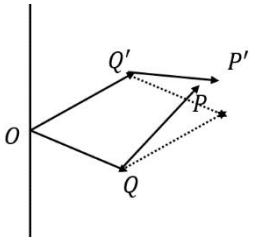
$$\boldsymbol{Q'P'} = \delta x^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \delta x^\lambda dx^\nu \qquad (2.60)$$

P与P'两点之差为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{OQ} + \boldsymbol{QP} - \left(\boldsymbol{OQ}' + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{P}'\right)\\ &= \delta x^\mu + dx^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} dx^\lambda \delta x^\nu - [dx^\mu + (\delta x^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \delta x^\lambda dx^\nu)] \qquad (2.61)\\ &= \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \delta x^\lambda dx^\nu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} dx^\lambda \delta x^\nu = \left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right)\delta x^\nu dx^\lambda = 2\Gamma^\mu_{[\nu\lambda]}\, \delta x^\nu dx^\lambda\end{aligned}$$

于是，只有挠率张量$\Gamma^\mu_{[\nu\lambda]}$为 0 时，上述平移才能形成平行四边形。在对平移变化不加限制的流形中，挠率几何效应的出现是自然的，这个平移过程可用更为直观的图像表示（图 9）。

图 9

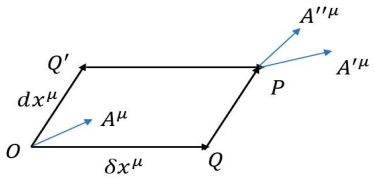


可以看到，平移后的向量与平移前的向量异面，这就是说，向量在平移的过程中发生了转动和伸缩（若在长度保持平移不变性的流形中，则只有转动），这就是挠率张量的几何意义。

2. 7. 2 曲率张量及其几何意义

现在讨论流形无挠的情况，也就是说联络是对称的，图 8 所示的平移可形成平行四边形。现再考虑另外一个向量A^μ，如图 10。

图 10



现将A^μ从O点出发，沿$O \to Q \to P$平移变成A'^μ，另一方面，A^μ沿$O \to Q' \to P$平移变成A''^μ。则有

$$A^\mu(O \to Q) = A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \delta x^\nu \qquad (2.62)$$

$$\begin{aligned}&A'^\mu = A^\mu(O \to Q \to P)\\ &= \left(A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda \delta x^\nu\right) - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(Q)(A^\alpha - \Gamma^\alpha_{\tau\sigma} A^\tau \delta x^\sigma)(dx^\beta - \Gamma^\beta_{\rho\gamma} dx^\rho \delta x^\gamma)\end{aligned} \qquad (2.63)$$

这里$A^\mu = A^\mu(O)$，$\Gamma^\mu_{\lambda\nu} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}(O)$，注意到在$Q$点联络可展开为

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(Q) = \Gamma^\mu_{\alpha\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta,\gamma} \delta x^\gamma \qquad (2.64)$$

于是（2. 63）化为

$$\begin{aligned}A'^\mu = A^\mu &- \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda(\delta x^\nu + dx^\nu) - \Gamma^\mu_{\lambda\nu,\gamma} A^\lambda dx^\nu \delta x^\gamma + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\nu_{\rho\gamma} A^\lambda dx^\rho \delta x^\gamma\\ &+ \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda_{\rho\gamma} A^\rho dx^\nu \delta x^\gamma\end{aligned}$$

上式的计算中已经略去三阶及以上的小量，同理可得

$$A''^{\mu} = A^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda}(\delta x^{\nu} + dx^{\nu}) - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma}A^{\lambda}dx^{\gamma}\delta x^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}A^{\lambda}dx^{\gamma}\delta x^{\rho} + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\gamma}A^{\rho}dx^{\gamma}\delta x^{\nu}$$

比较A'^{μ}和A''^{μ}：

$$A'^{\mu} - A''^{\mu} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma}A^{\lambda}(dx^{\gamma}\delta x^{\nu} - dx^{\nu}\delta x^{\gamma}) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}A^{\lambda}(dx^{\rho}\delta x^{\gamma} - dx^{\gamma}\delta x^{\rho}) + \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\gamma}A^{\rho}(dx^{\nu}\delta x^{\gamma} - dx^{\gamma}\delta x^{\nu})$$

注意到联络是对称的，于是上式第二项有

$$\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}A^{\lambda}(dx^{\rho}\delta x^{\gamma} - dx^{\gamma}\delta x^{\rho}) = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda}\left(\Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}dx^{\rho}\delta x^{\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\gamma\rho}dx^{\gamma}\delta x^{\rho}\right) = \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda}\left(\Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}dx^{\rho}\delta x^{\gamma} - \Gamma^{\nu}_{\rho\gamma}dx^{\rho}\delta x^{\gamma}\right) = 0$$

则

$$A'^{\mu} - A''^{\mu} = \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma}A^{\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\rho\gamma}A^{\rho}\right)\left(dx^{\gamma}\delta x^{\nu} - dx^{\nu}\delta x^{\gamma}\right) = \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\gamma}\right)A^{\lambda}\left(dx^{\gamma}\delta x^{\nu} - dx^{\nu}\delta x^{\gamma}\right)$$

$$= \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\gamma}\right)A^{\lambda}dx^{\gamma}\delta x^{\nu} - \left(\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\right)A^{\lambda}dx^{\gamma}\delta x^{\nu} = -R^{\mu}_{\lambda\nu\gamma}A^{\lambda}dx^{\gamma}\delta x^{\nu}$$

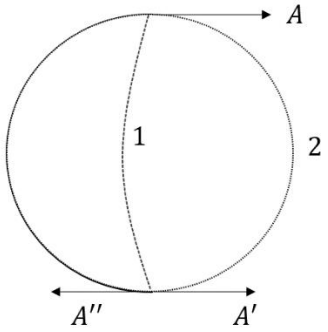
其中

$$R^{\mu}_{\lambda\nu\gamma} = \Gamma^{\mu}_{\lambda\gamma,\nu} - \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu,\gamma} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} \tag{2.65}$$

称为曲率张量。

流形存在曲率张量也就是说，向量沿不同的路径平移至某一点，结果是不一样的。参加图 11，一向量A在球面上分别从北极出发，经过 1 和 2 平移至南极，1 和 2 是两条经度相差 90 度的经线。最终向量A'和A''甚至是反向的。

图 11



2.7.3 保持平移不变性的无挠黎曼流形下的曲率张量

在广义相对论中，假设现实世界的时空流形是无挠的，也就是流形的联络是对称的，而我们的世界也具有平移不变性，因此**时空流形的联络是克氏符**。此时曲率张量也具有一些特殊性质。

从（2.65）可以直接看出，曲率张量对后一对指标反对称：

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\rho}_{\lambda\nu\mu} \tag{2.66}$$

将克氏符的度规表达式（2.56）代入曲率张量，还可以证明如下性质：

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} \tag{2.67}$$

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = R^{\mu}_{\nu\rho\lambda} \tag{2.68}$$

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} + R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} + R^{\rho}_{\nu\lambda\mu} = 0 \tag{2.69}$$

曲率张量还有一个重要的性质，比安基恒等式：

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu;\sigma}+R^{\rho}_{\lambda\nu\sigma;\mu}+R^{\rho}_{\lambda\sigma\mu;\nu}=0 \tag{2.70}$$

Proof:从张量变换律可以分析，倘若在某坐标系当中张量满足某个方程式，通过坐标变换，变换后的张量也满足该方程式。于是我们可以选取一个联络为 0 的坐标系来证明（2.70），注意流形的联络是逐点定义的，某点联络为 0 但其微商不为 0，从而曲率张量表示为

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu} \tag{2.71}$$

于是

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu;\sigma}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu;\sigma}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu;\sigma} \tag{2.72}$$

$$R^{\rho}_{\lambda\nu\sigma;\mu}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma,\nu;\mu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\sigma;\mu} \tag{2.73}$$

$$R^{\rho}_{\lambda\sigma\mu;\nu}=\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\sigma;\nu}-\Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma,\mu;\nu} \tag{2.74}$$

不难看出协变微商和普通微商可交换，从而上面三式相加就立得比安基恒等式

$$\boldsymbol{Q.E.D.}$$

由（2.66）（2.67）可以看到，反对称性导致

$$R^{\lambda}_{\lambda\mu\nu}=R^{\rho}_{\lambda\mu\mu}=0 \tag{2.75}$$

仅剩一种独立的缩并方式：

$$R_{\mu\nu}=R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \tag{2.75}$$

$R_{\mu\nu}$称为里奇张量，由（2.68）可知它是对称的，将里奇张量的一个指标升高后缩并得到一个标量，称为曲率标量：

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.76}$$

爱因斯坦引入一个张量：

$$G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.77}$$

称为爱因斯坦张量，也是对称的。

第三章 流形上的变分——拉格朗日力学

3.1 泛函与变分

3.1.1 泛函的概念

我们在第一章引入余切空间时，就接触了泛函，泛函将一个切向量映到实数上。我们推广这个例子，并给出泛函的确切定义。

在$\mathbb{R}^k$中，考察具有连通边界∂D的有界区域D。设(t^i)是D上的笛卡尔坐标，对于D上的所有的光滑函数向量

$$\boldsymbol{x}(t^i) = (x^1(t^i), \dots, x^n(t^i)) \tag{3.1}$$

由向量的性质可知所有的光滑函数向量是一个无限维线性空间$\mathcal{F}$，而泛函正是在这个空间上的映射。

定义 3.1 连续映射$J: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$称为$\mathcal{F}$上的泛函$J$。若还有$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{F}$，$a, b \in \mathbb{R}$，泛函$J$满足$J(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = aJ(\boldsymbol{x}) + bJ(\boldsymbol{y})$，则称$J$是线性泛函。

接下来给出一类重要的泛函，有两组变量：

$$\begin{matrix} t^\beta, 1 \le \beta \le k \\ x^i(t^\beta), 1 \le i \le n \end{matrix} \tag{3.2}$$

光滑函数L依赖于（3.2）给出的变量$L(t^\beta, x^i, x^i_{,t^\alpha})$，称为拉格朗日函数，则可设$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$，做出泛函$J(x)$：

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_D L(t^\beta, x^i, x^i_{,t^\alpha}) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k \tag{3.3}$$

这类泛函在物理学上有深刻的内涵和重大的理论意义。

3.1.2 变分 欧拉-拉格朗日方程

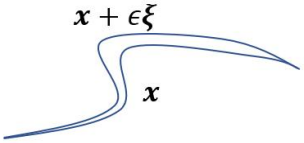
对于二元函数$f(x^1, x^2)$，在数学分析中关于f的方向导数我们有

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\boldsymbol{a}} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \varepsilon \boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x^1 + \varepsilon a^1) - f(x^2 + \varepsilon a^2)}{\varepsilon} \\ &= a^1 f_{,x^1} + a^2 f_{,x^2} = \boldsymbol{a} \cdot \nabla f \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2), \boldsymbol{a} = (a^1, a^2)$。我们通常对满足$\nabla f = 0$的点感兴趣，从（3.4）可以看出，$\frac{df}{d\boldsymbol{a}} = 0$当且仅当对任何$\boldsymbol{x_0} = (x_0^1, x_0^2)$的任何方向$\boldsymbol{a}$满足$\nabla f = 0$。我们将此概念推广到泛函的情形。

考虑$\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$以及$\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{F}$，$\boldsymbol{\xi}$的每个分量都足够小且$\boldsymbol{\xi}|_{\partial D} = 0$，称$\boldsymbol{\xi}$为$x$的摄动，将$\boldsymbol{x}$变为$\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}$称为对$x$进行一个摄动，如图 12。

图 12



可以类似（3.4），定义泛函J沿$\boldsymbol{\xi}$的方向导数是

$$\left.\frac{dJ}{d\boldsymbol{\xi}}\right|_{\boldsymbol{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{\xi}) - J(\boldsymbol{x})}{\varepsilon} \tag{3.5}$$

自然可以类似定义：

定义 3.2 对任意摄动$\boldsymbol{\xi}$，若$\left.\frac{dJ}{d\boldsymbol{\xi}}\right|_{\boldsymbol{x_0}} = 0$，称$\boldsymbol{x_0}$为

驻定曲线。

类比对函数u的微分du，可以将$J(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{\xi})-J(\boldsymbol{x})$称为对$J$的变分，记为$\delta J$，于是驻定曲线便是满足$\delta J=0$ 的$\boldsymbol{x_0}$。

我们导出关于（3.3）的驻定曲线的方程，令$d\sigma^k=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k$。

$$\delta J=\int_D\left[L(t^\beta,x^i+\varepsilon\xi^i,x^i_{,t^\alpha}+\varepsilon\xi^i_{,t^\alpha})-L(t^\beta,x^i,x^i_{,t^\alpha})\right]d\sigma^k \tag{3.6}$$

将上式被积函数的第一项在$\boldsymbol{x}$的按泰勒公式展开得

$$\delta J=\int_D\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}\xi^i\varepsilon+\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\xi^i_{,t^\alpha}\varepsilon+o(\varepsilon)\right]dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k \tag{3.7}$$

对$\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\xi^i_{,t^\alpha}$进行分部积分：

$$\begin{aligned}
&\int_D\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\xi^i_{,t^\alpha}dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k\\
=&\int_D\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}dt^1\wedge\ldots\wedge d\xi^{i[\alpha]}\wedge\ldots\wedge dt^k\\
=&\boldsymbol{\xi}|_{\partial D}\int_D\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\xi^i_{,t^\alpha}dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k-\int_D\xi^i\left(\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\right)_{,t^\alpha}d\sigma^k\\
=&-\int_D\xi^i\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\right)d\sigma^k
\end{aligned} \tag{3.8}$$

代入（3.7）有

$$\delta J=\varepsilon\int_D\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\right)\right]\xi^i d\sigma^k+\int_D o(\varepsilon)d\sigma^k \tag{3.9}$$

注意到

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_D\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}d\sigma^k=0$$

于是

$$\left.\frac{dJ}{d\boldsymbol{\xi}}\right|_{\boldsymbol{x}}=\int_D\left[\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\right)\right]\xi^i d\sigma^k \tag{3.10}$$

要求在$\boldsymbol{x_0}$有$\left.\frac{dJ}{d\xi}\right|_{\boldsymbol{x_0}}=0$，则

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial L}{\partial x^i_{,t^\alpha}}\right)=0,i=1,\ldots,n \tag{3.11}$$

这便是欧拉-拉格朗日方程，简称EL方程。在物理学中，若选取时间为自变量，则曲线的参数只有一个t，使用牛顿记号$\dot{x}=\frac{dx}{dt}$，$\dot{x}$特指对时间求导，EL方程变为

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\right)=0,i=1,\ldots,n \tag{3.12}$$

3.2 对称性与守恒律——诺特定理

我们熟知，对于一个力学系统，若无外力作用，则系统的动量守恒；若无外力矩作用，系统的角动量守恒；若无耗散作用（摩擦、热传导等），系统的能量守恒。这便是物理学中的守恒律。在牛顿力学框架中，守恒律无法被演绎得到，它们作为公理而存在，它们实际上是一个定理的特殊情况，该定理正是诺特定理。

3.2.1 相空间与拉格朗日动力系统

质点在流形中的运动轨迹是曲线γ：$\mathbb{R} \to M$，对应时间点的切向量是其速度，由此可诱导出一条切丛上的曲线λ：$\mathbb{R} \to TM$，λ刻画了质点的运动状态，从而可以将γ和λ共同考虑，来完备地描述质点的运动。

定义 3.3 $M \times TM$称为相空间。

EL方程的解是在相空间上的。

定义 3.4 相空间中的单参数变换

$$\begin{aligned} &h^\tau: M \times TM \to M \times TM \\ &(x(t), \dot{x}(t)) \mapsto (x(t+\tau), \dot{x}(t+\tau)) \end{aligned} \tag{3.13}$$

称为相流，其中$\tau \in \mathbb{R}$。从（3.13）中不难看出，$\{h^\tau | \tau \in \mathbb{R}\}$在映射复合的运算下和实数加法群之间存在同态，则$\{h^\tau | \tau \in \mathbb{R}\}$是群。将$h^\tau$投影到$M$上，可以看出此时$h^\tau$是微分同胚，我们将此论断推广到相空间上，于是$\{h^\tau | \tau \in \mathbb{R}\}$是单参数微分同胚变换群。

定义 3.5 M为一流形，TM为其切丛，拉格朗日函数$L: M \times TM \to \mathbb{R}$为一可微函数，映射$\gamma$：$\mathbb{R} \to M$称为具有流形$M$以及拉格朗日函数$L$的拉格朗日动力系统中的运动，要求$\gamma$还是以下泛函的驻定曲线

$$J(\gamma, \dot{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}) dt \tag{3.14}$$

$\dot{\gamma}$即前述的λ。记拉格朗日动力系统为(M, L)。

3.3.2 对称与诺特定理

定义 3.6 若拉格朗日动力系统为(M, L)对任意它在相空间上的点 $(x, \dot{x})$均有

$$L(h^\tau\ (x, \dot{x})) = L\ (x, \dot{x}) \tag{3.15}$$

其中h^τ是一相流，则称拉格朗日动力系统为(M, L)在h^τ变换下对称，或用更几何的说法，(M, L)关于h^τ对称。

定理 3.1（诺特定理）若拉格朗日动力系统(M, L)在一个单参数微分同胚群$\{h^\tau\}$下对称，则对应于L的EL方程有一个与时间无关的守恒量I，在流形的局部坐标(x)下，守恒量可写为

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \frac{\partial x(t+\tau)}{\partial \tau} \tag{3.16}$$

Proof:设$\varphi: \mathbb{R} \to M \times TM$是$EL$方程的解，从（3.15）可看出，$h^\tau(\varphi(\mathbb{R}))$仍满足$EL$方程。由定理的假设可知，在$\tau$处，有

$$\frac{dL(h^\tau\ (x, \dot{x}))}{d\tau} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau} = 0 \tag{3.17}$$

而且对任何τ，由EL方程有

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{3.18}$$

代入（3.17）得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \tau}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\frac{dx}{d\tau}+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)=0 \tag{3.19}$$

上式中的$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \tau}$即（3.16）中的$I$。$\boldsymbol{Q.E.D.}$

考虑一质点：

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2,\ \boldsymbol{x}=x_i\boldsymbol{e_i},i=1,2,3 \tag{3.20}$$

其中$\vec{e_i}$是运动空间的基向量，m是质点的质量，并设此系统关于如下变换对称

$$h^\tau:\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{e_i}$$

这就是说，系统沿$\boldsymbol{e_i}$轴运动，L不改变，由诺特定理可得，存在守恒量

$$I=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\cdot\frac{\partial x(t+\tau)}{\partial \tau}=m\dot{x}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{e_i}}{\partial \tau}=m\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{e_i}=m\dot{x}_i$$

即系统沿$\boldsymbol{e_i}$轴的动量守恒。如此便从诺特定理推导动量守恒定律。

3.3 极值原理

以上便是拉格朗日力学的大致框架，我们可以看到，拉格朗日函数L在其中意义非凡，事实上，在定义 3.5 中，我们认为客体的运动是一个泛函J的驻定曲线，但我们并没有论述我们真实世界里的运动是否都是泛函的驻定曲线，这实际上是拉格朗日力学的公理，称为极值原理，也称之为最小作用量原理，此处的作用量指的是泛函J。

从数学上看，考虑一个泛函在某点是否是极值还应当考虑二阶变分是否为 0，但不管二阶变分是否为 0，该点都要先满足EL方程——这一偏微分方程，在现实世界中，物体的运动在某一时刻必有唯一的初值，而偏微分方程也就有唯一的解，这样就意味着带着初值的泛函变分问题只有唯一的极值，从而也就不必考虑二阶变分。

如前所述，守恒律是牛顿力学的公理，实际上也是极值原理的推论，写出不同的L和变换，我们可以得到不同的定律。在推导动量守恒定律时，我们写下的L实际上是质点的动能。为何我们的世界会满足这样的原理，现在也没有一个演绎性的解释。从逻辑学上讲，一个演绎体系必须要有公理，只不过恰巧是极值原理成为了公理。从现实上说，在重力场中的物体总是倾向于处于势能最低处，水珠总是尽可能地保持球形使得表面积最小，人们都追求尽可能高的效益，摒弃尽可能多的负面影响……这些都是极值原理的体现，有人将其誉为掌控一切运动规律的原理。

往后还将看到，极值原理不仅在力学体系中表现出巨大的威力，我们指出，选取电磁场的作用量，便能得到电磁场理论，选取引力场的作用量，得到引力场理论（广义相对论）。这说明，极值原理不仅仅是一种物理理论，从哲学上讲，更是一种方法论。

第四章 电磁场论

电磁理论无疑是人类发展进程中最重要的理论之一，我们至今仍然享受着它带来的巨大福祉。在历史上，人们对电与磁的认识首先是基于现象，随后是不断归纳总结，最后逐渐抽象：从实验总结出电磁定律，再建立起麦克斯韦方程组，最后再利用数学方法写出电磁场作用量。在这里，我们走相反的道路，从作用量出发，利用流形上的变分以及极值原理，来建立电磁理论的框架。

4.1 $Minkowski$时空

在1.1.2节中，我们将$Minkowski$时空中的点设为(ict,x,y,z)，这是在欧氏空间中的度量进行的，而在第二章指出，$Minkowski$时空是洛伦兹流形，度量可以没有正定性，但可用（2.44）来定义长度，于是时空中的点应取为$x^i=(ct,x,y,z)$来与（1.5）所示的度规对应：

$$(ds)^2=-(cdt)^2+(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

设在(ct,x,y,z)处发出光信号，光以光速c在t'时刻到达(ct',x',y',z')处，则应该有

$$-c^2\left(t'-t\right)^2+\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2+\left(z'-z\right)^2=0 \tag{4.1}$$

由此可以看出时空将度规取为（1.5）而非欧氏空间度规的原因。我们将时间称为第0分量。

4.2 粒子与场的相互作用

4.2.1 场的四维势与粒子的电荷

我们是在4维时空上讨论的，故电磁场的性质应该用4维向量A^i表达，其分量是时间与空间的函数，时间分量称为标势φ，空间分量称为矢势$\boldsymbol{A}$：

$$(A^i)=(A^0,A^1,A^2,A^3)=(\varphi,\boldsymbol{A}),\ \boldsymbol{A}=(A^1,A^2,A^3) \tag{4.2}$$

而粒子与电磁场相互作用的性质与粒子的质量m和电荷e有关。

于是，可以写下粒子与场的相互作用的作用量S及其拉格朗日函数：

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-e\varphi\right)dt \tag{4.3}$$

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-e\varphi \tag{4.4}$$

其中$\boldsymbol{v}$是粒子的速度，即$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}$。

4.2.2 粒子在场中的运动方程

前面指出，EL方程的解就是粒子的运动，于是运动方程可从EL方程得到，按$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}$和$(x,y,z)=\boldsymbol{r}$改写$EL$方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{r}} \tag{4.5}$$

对于上式左边：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A} \tag{4.6}$$

其中$\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$是粒子在运动时的质量，因子$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$的存在是狭义相对论已知的结果。$m$是静止质量，$\boldsymbol{p}$是粒子动量。

对于右边，应当声明$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}$与（3.12）中的$\frac{\partial L}{\partial x^i}$对应，前者是向量形式，后者是分量形式：

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial L}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial L}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial L}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial L}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla L \tag{4.7}$$

其中由于$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则

$$\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{\partial[(\boldsymbol{r}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k})\boldsymbol{i}]}{\partial \boldsymbol{r}}=\boldsymbol{i}$$

对y、z类似，从而

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}=\nabla L=\frac{e}{c}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})-e\nabla\varphi \tag{4.8}$$

关于对向量内积的梯度运算，有

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})&=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times)\boldsymbol{v}\\&=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})\end{aligned} \tag{4.9}$$

联立（4.5）（4.6）（4.8）（4.9）得

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{p}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-e\nabla\varphi \tag{4.10}$$

注意到

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}=\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} \tag{4.11}$$

代入（4.10）得

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=-\frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-e\nabla\varphi+\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) \tag{4.12}$$

这就是粒子在电磁场中的运动方程，熟知$\boldsymbol{F}=\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$，故上式右边就是电磁场对粒子的作用力。可以看到，这个力的前两项与速度无关，第三项与速度有关且垂直于速度。我们定义

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4.14}$$

其中$\boldsymbol{E}$是电场，$\boldsymbol{B}$是磁场。则可改写（4.12）：

$$\boldsymbol{F}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}\vec{v}\times\boldsymbol{B} \tag{4.15}$$

上式中的$e\boldsymbol{E}$和$\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$正是我们已知的电场库伦力和磁场洛伦兹力。

4.3 电磁场张量及其作用量

我们给出一个有意义的表达式：

$$F_{ik}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{4.16}$$

只需利用$A_{i/k}$的协变性，写出坐标变换式再代入到（4.16），就可以验证F_{ik}满足张量变换律，因此F_{ik}是张量且是反对称的，而通过（4.13）（4.14）可以写出F_{ik}的分量

$$F_{ik}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{pmatrix} \tag{4.17}$$

其中$(E_x,E_y,E_z)=\vec{E},(B_x,B_y,B_z)=\vec{B}$是电场与磁场的空间分量，自然将$F_{ik}$称为电磁场张量。可将$F_{ik}$的指标升高：

$$F^{ik}=\eta^{i\alpha}\eta^{k\beta}F_{\alpha\beta} \tag{4.18}$$

得到逆变形式的电磁场张量：

$$F^{ik}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix} \tag{4.19}$$

可以看到在（4.3）所给出的作用量中，每项均有粒子的参与，第一项含有质量，第二、三项有粒子的电荷，并非是纯粹的电磁场作用量，现在写出电磁场的作用量S_f：

$$S_f=-\frac{1}{4}\int_D F_{ik}F^{ik}dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=-\frac{1}{4c}\int_D F_{ik}F^{ik}d\Omega \tag{4.20}$$

其中$d\Omega=dct\wedge dx\wedge dy\wedge dz$，是$Minkowski$时空某点的切空间上的体积元。

从而将包含粒子与场的系统的作用量拓展为：

$$S=\int_D(-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}+\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}-e\varphi)dt-\frac{1}{4c}\int_D F_{ik}F^{ik}d\Omega \tag{4.21}$$

注意到

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}dt-\varphi dt=\frac{1}{c}(A_1dx^1+A_2dx^2+A_3dx^3)+\frac{1}{c}A_0dx^0=\frac{1}{c}A_idx^i \tag{4.22}$$

可将作用量改写为

$$S=\int_D-mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}dt+\int_D\frac{e}{c}A_idx^i-\frac{1}{4c}\int_D F_{ik}F^{ik}d\Omega \tag{4.23}$$

4.4 四维电流向量

我们知道可以用电荷密度来表示电荷在空间中的分布$\rho(x,y,z)$，从而可以将粒子的电荷变为连续形式$e=\int_D \rho dx\wedge dy\wedge dz=\int_D \rho dV$ ，改写（4.23）中的第二项

$$\int_D \frac{e}{c}A_i dx^i =\frac{1}{c}\int_D \rho A_i dV\wedge dx^i = \frac{1}{c}\int_D A_i j^i dV\wedge dt = -\frac{1}{c^2}\int_D A_i j^i d\Omega \qquad (4.24)$$

其中$j^i=\rho\frac{dx^i}{dt}$称为四维电流向量，可将其写为$(j^i)=(c\rho,\rho\boldsymbol{v})=(c\rho,\boldsymbol{j})$。于是能把作用量写为更加统一的形式：

$$S=\int_D -mc^2\sqrt{1-v^2/c^2}dt -\frac{1}{c^2}\int_D A_i j^i d\Omega-\frac{1}{4c}\int_D F_{ik}F^{ik}d\Omega \qquad (4.25)$$

4.5 麦克斯韦方程组及其外微分形式表达

关于麦克斯韦方程组，费曼如此评价：在人类历史上，比如在一万年以后再来看，19 世纪最重大的事件无疑是麦克斯韦所发现的电磁学定律，这个最重要的科学发现的背景中还有同时期的美国内战，相比之下，这只是小小的省地级事件罢了。麦克斯韦方程组的重要性还体现在这一事实当中——它是一切关于电与磁问题的答案。

4.5.1. 麦克斯韦方程组

现有

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}-\nabla\varphi\,,\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$

注意到任何标量函数的梯度的旋度都为 0，则对电场求旋度有

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (4.26)$$

对于磁场，有因为任何向量的旋度的散度为 0，则

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \qquad (4.27)$$

由此便得到了第一对方程。

在拉格朗日力学中，我们是将作用量对坐标变分，得到了能够描述运动情况的运动方程，因此为了能够得到描述场的情况的方程，我们需要对势场变分，（4.25）第一项不含势，因此第一项变分为 0，从而

$$\delta S=-\frac{1}{c}\int_D[\frac{1}{c}j^i\delta A_i+\frac{1}{4}\delta(F_{ik}F^{ik})]d\Omega \qquad (4.28)$$

由变分的定义可以看出，它和微分有相似的性质：

$$\delta(F_{ik}F^{ik})=F_{ik}\delta F^{ik}+F^{ik}\delta F_{ik} \qquad (4.29)$$

利用张量指标的升降运算有

$$\begin{aligned}F_{ik}\delta F^{ik}&=\eta_{i\alpha}\eta_{k\beta}F^{\alpha\beta}\delta(\eta^{i\sigma}\eta^{k\gamma}F_{\sigma\gamma})=\eta_{i\alpha}\eta^{i\sigma}\eta_{k\beta}\eta^{k\gamma}F^{\alpha\beta}\delta F_{\sigma\gamma}\\&=\delta^{\sigma}_{\alpha}\delta^{\gamma}_{\beta}F^{\alpha\beta}\delta F_{\sigma\gamma}=F^{\sigma\gamma}\delta F_{\sigma\gamma}=F^{ik}\delta F_{ik}\end{aligned} \qquad (4.30)$$

于是（4.28）变为

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{2}F^{ik}\delta F_{ik})d\Omega = 0 \tag{4.31}$$

再代入电磁场张量的定义（4.16）可得

$$\begin{aligned}\delta S &= -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{2}F^{ik}\delta A_{k,i} - \frac{1}{2}F^{ik}\delta A_{i,k})d\Omega \\ &= -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{2}F^{ki}\delta A_{i,k} - \frac{1}{2}F^{ik}\delta A_{i,k})d\Omega \\ &= -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{2}F^{ik}\delta A_{i,k} - \frac{1}{2}F^{ik}\delta A_{i,k})d\Omega \\ &= -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i\delta A_i - F^{ik}\delta A_{i,k})d\Omega\end{aligned} \tag{4.32}$$

对于上式第二项有

$$\begin{aligned}&\int_D F^{ik}\delta A_{i,k}cdt\wedge dx\wedge dy\wedge dz = \int_D F^{ik}dx^0\wedge\ldots\wedge d\delta A_i^{[k]}\wedge\ldots\wedge dx^3 \\ &= \int_D \delta A_i|_{\partial D}F^{ik}dx^0\wedge\ldots\wedge\overline{dx^k}\wedge\ldots\wedge dz - \int_D \delta A_i F^{ik}_{,k}d\Omega \\ &= -\int_D \delta A_i F^{ik}_{,k}d\Omega\end{aligned} \tag{4.33}$$

上式利用了势的摄动在边界上为 0：$\delta A_i|_{\partial D} = 0$。则（4.31）变为

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int_D (\frac{1}{c}j^i + \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k})\delta A_i d\Omega = 0 \tag{4.34}$$

得到

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c}j^i \tag{4.35}$$

将上式的分量按$i = 1,2,3$ 写开

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{j_x}{c} \tag{4.36}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = -\frac{j_y}{c} \tag{4.37}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} - \frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{j_z}{c} \tag{4.38}$$

分别乘$\boldsymbol{e_x}, \boldsymbol{e_y}, \boldsymbol{e_z}$后相加可得

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{c} \tag{4.39}$$

而$i = 0$ 时易得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho \tag{4.40}$$

将（4.26）（4.27）（4.39）（4.40）写在一起便得到了麦克斯韦方程组：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho \\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{c}\end{cases} \tag{4.41}$$

麦克斯韦方程组完全确定了电磁场，是电动力学的基本方程。

4.5.2 外微分形式的表达

可利用外微分将方程表达为更紧凑的形式，构造 2-形式：

$$F = E_k dx^k \wedge dx^0 + \frac{1}{c} B_k dx^{\bar{k}} \tag{4.42}$$

$$F' = \frac{1}{c} B_k dx^0 \wedge dx^k + E_k dx^{\bar{k}} \tag{4.43}$$

其中$k = 1,2,3$，$dx^{\bar{1}} = dx^2 \wedge dx^3, dx^{\bar{2}} = dx^3 \wedge dx^1, dx^{\bar{3}} = dx^1 \wedge dx^2$。再构造 3-形式：

$$J = J_k dx^0 \wedge dx^{\bar{k}} + \rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{4.44}$$

通过计算可以得到

$$\begin{cases} dF = 0 \\ dF' = J \end{cases} \tag{4.45}$$

等价于（4.41），这就是麦克斯韦方程组的外微分形式表达。

第五章 广义相对论

在上述电磁理论当中，拉格朗日函数的选取发挥了决定性的作用。看起来似乎拉格朗日函数的选取是随意的，然而我们要说明，物理毕竟不是数学，在数学上而言，变分法可以得到一套某个拉格朗日函数的理论，理论总是对的，但是物理要求它能够描述世界，这就对拉格朗日函数做出了要求。当然我们还要说明，作用量并不都是在已知公式下凑出来的，广义相对论在历史上，是由两种路径同时得到的：一种是创新与归纳，一种是演绎，前者是爱因斯坦的工作，后者是希尔伯特的工作。爱因斯坦于 1915 年夏天在哥廷根大学出席讲座，介绍了他尚差一步的理论，希尔伯特在其中作为听众。在后续几个月，爱因斯坦和希尔伯特都察觉到，广义相对论蕴含着一个重要的场方程。最后是希尔伯特在同年 11 月 20 号率先发表文章，爱因斯坦在 11 月 25 号发表。但是是爱因斯坦关于引力坚持十数年如一日的思考，才造就了广义相对论大厦。希尔伯特作为 20 世纪杰出的大数学家，在吸收爱因斯坦的思想后，先于爱因斯坦得到场方程是不意外的。应当认为，广义相对论仍然属于爱因斯坦，希尔伯特自己也承认这一点。

5.1 广义相对论的思想以及作用量

在电磁学中，粒子要与另一粒子发生电磁作用，需要先形成一个场，再由场作用到其他粒子上。在引力理论中自然想到，是物体形成了引力场，从而将引力作用到其他物体上，更严格地说法应该是物体弯曲了时空，而其他物体在弯曲时空中的运动看起来就像是受到力的作用一样。因此在这里，是弯曲时空而非引力对物体产生作用。于是，引力场的作用量应当是一个描述时空流形弯曲的几何量，并且要求是标量，因为作用量也是标量。一个自然的想法是里奇标量R。而由于是在时空当中考虑的，积分区间在四维时空上，因此引力场的作用量S_g是

$$S_g = \int_D R d\Omega \tag{5.1}$$

但是此处的时空被物质弯曲，时空不再是$Minkowski$流形这样的平直时空，弯曲后的时空是洛伦兹流形。设$Minkowski$流形的坐标为(x)，引力场存在时的弯曲时空坐标为(x')，于是由流形上的积分变换公式（1.35），将（5.1）改为

$$S_g = \int_D R \left|\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right| d\Omega' \tag{5.2}$$

在$Minkowski$流形和弯曲后的洛伦兹流形中，同一线元分别为：

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{5.3}$$

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \tag{5.4}$$

由二次型理论可知

$$(dx'^0 \quad dx'^1 \quad dx'^2 \quad dx'^3)\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx'^0 \\ dx'^1 \\ dx'^2 \\ dx'^3 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$= (dx^0 \quad dx^1 \quad dx^2 \quad dx^3)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

并注意到（1.17），从而有

$$(g_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right)^T (\eta_{\mu\nu}) \frac{\partial(x)}{\partial(x')} \tag{5.6}$$

两边取行列式得

$$g = -\left|\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right|^2 \Rightarrow \left|\frac{\partial(x)}{\partial(x')}\right| = \sqrt{-g} \tag{5.7}$$

于是引力场作用量最终是

$$S_g = \int_D R\sqrt{-g}d\Omega' \tag{5.8}$$

当然，除了引力场外还需要考虑物质，设用来描述物质的拉格朗日函数是L_m，基于和上面一样的理由，物质作用量为

$$S_m = \int_D L_m\sqrt{-g}d\Omega' \tag{5.9}$$

则最后，引力系统的作用量是

$$S = \int_D R\sqrt{-g}d\Omega' \ + k\int_D L_m\sqrt{-g}d\Omega' \tag{5.10}$$

其中只给S_m配备了系数，原因是极值原理要求变分时$\delta S = 0$，这时即使S_g的系数不为 1，也可除去只保留其中一个。

5.2 爱因斯坦场方程

现在指出，此时要求的量是流形的度规，因为它刻画了流形的几何结构，于是变分的对象是度规，将作用量对度规变分

$$\delta S = \delta\left(\int_D R\sqrt{-g}d\Omega' \right) + k\delta\left(\int_D L_m\sqrt{-g}d\Omega' \right) \tag{5.11}$$

先计算δS_g：

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \delta\left(\int_D R\sqrt{-g}d\Omega' \right) = \delta\left(\int_D g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega' \right) \\ &= \int_D (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})d\Omega'\end{aligned} \tag{5.12}$$

由于变分与微分的相似性，改写$\delta\sqrt{-g}$，首先

$$g = g_{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu} \ \text{(对}\mu\text{不求和)} \tag{5.13}$$

注意到$\Delta^{\mu\nu}$不含$g_{\mu\nu}$，于是

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = \Delta^{\mu\nu} \ = gg^{\mu\nu} \tag{5.14}$$

从而将g对$g_{\mu\nu}$做全变分就有

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \text{ (对}\mu\text{不求和)} \tag{5.15}$$

并且

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = \delta(1) = 0 \text{ (对}\mu\text{不求和)} \tag{5.16}$$

则

$$\delta g = g\delta(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) - g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = - g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \text{ (对}\mu\text{不求和)} \tag{5.17}$$

那么

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \text{ (对}\mu\text{不求和)} \tag{5.18}$$

代入（5.12）得

$$\begin{aligned}\delta S_g &= \int_D (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})d\Omega' \\ &= \int_D (R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d\Omega' + \int_D g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}d\Omega'\end{aligned} \tag{5.19}$$

此处恢复对μ的求和，因为变分结果为 0 且积分与变分都具有线性性，故恢复求和不影响结果。对于$\delta R_{\mu\nu}$，先给出

$$\begin{aligned}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\alpha\lambda,\mu}+g_{\mu\lambda,\alpha}-g_{\alpha\mu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\alpha} + \frac{1}{2}(g^{\lambda\mu}g_{\alpha\mu,\lambda} - g^{\mu\lambda}g_{\alpha\mu,\lambda}) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\alpha} + \frac{1}{2}(g^{\mu\lambda}g_{\alpha\mu,\lambda} - g^{\mu\lambda}g_{\alpha\mu,\lambda}) = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}g_{\mu\lambda,\alpha}\end{aligned} \tag{5.20}$$

由（5.15）和（5.17）得

$$g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha} = - g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\alpha} \tag{5.21}$$

于是

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu} = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\alpha} = \frac{1}{2g}g_{,\alpha} = (ln\sqrt{-g})_{,\alpha} \tag{5.22}$$

从（2.19）可以看出，联络不是张量，但其变分是张量，因此联络的变分的协变微分可用（2.30）计算：

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})_{;\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})_{,\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} \tag{5.23}$$

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \tag{5.24}$$

由（2.65）可得

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \tag{5.25}$$

则$R_{\mu\nu}$的变分为

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{,\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \tag{5.26}$$

运用（5.23）（5.24）可化简（5.26）

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})_{;\nu} \tag{5.27}$$

注意到度规的协变微分是 0，于是

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu})_{;\nu} = (g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu})_{;\mu} - (g^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu})_{,\mu} \\ &= (g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - g^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu})_{;\mu} = \phi^{\mu}_{;\mu}\end{aligned} \tag{5.28}$$

其中

$$\phi^{\mu} = g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} - g^{\nu\mu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\nu} \tag{5.29}$$

显然是张量，用（5.22），将它的协变微分变为

$$\phi^{\mu}_{;\mu} = \phi^{\mu}_{,\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}\phi^{\alpha} = \phi^{\mu}_{,\mu} + \phi^{\alpha}(ln\sqrt{-g})_{,\alpha}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g}\phi^{\mu}_{,\mu} + \phi^{\mu}(ln\sqrt{-g})_{,\mu}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}\sqrt{-g}\phi^{\mu}_{,\mu} + \phi^{\mu}\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g})_{,\mu}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\phi^{\mu})_{,\mu} \tag{5.30}$$

于是

$$\int_D g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}d\Omega' = \int_D (\sqrt{-g}\phi^{\mu})_{,\mu}d\Omega' = (\sqrt{-g}\phi^{\mu})|_{\partial D} \tag{5.31}$$

最后一步是用了四维的$stoke's$公式，从（5.29）可以看到，可将联络的变分展开为对度规的全变分，又（5.31）的每项都含有度规的摄动，并且在边界上取值，故摄动为 0，因此

$$\delta S_g = \int_D (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d\Omega' \tag{5.32}$$

对物质项的变分比较简单，类比（3.10）

$$\begin{cases} (t) \to (x) \\ (x) \to (g^{\mu\nu}) \\ L \to L_m\sqrt{-g} \end{cases} \tag{5.33}$$

可直接写出

$$\delta S_m = \int_D \left[\frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial L_m\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\gamma}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}d\Omega' \tag{5.34}$$

定义

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial(L_m\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left(\frac{\partial L_m\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\gamma}}\right) \tag{5.34}$$

显然$T_{\mu\nu}$是张量，称为能动张量，于是

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int_D \sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}d\Omega' \tag{5.34}$$

最后

$$\delta S = \delta S_f + k\delta S_m = \int_D (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{k}{2}T_{\mu\nu})\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}d\Omega' = 0 \tag{5.35}$$

$i.e.$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \tag{5.36}$$

此处将系数吸收进待定系数里。这便是广义相对论的核心——爱因斯坦场方程，它决定了时空的几何。通过指标升降，我们还能写出场方程的其他形式：

$$R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R = kT^{\mu}_{\nu} \tag{5.37}$$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \tag{5.38}$$

5.3 广义相对论的运动方程

设有一个观测者观察一运动物体，由于洛伦兹流形局部同胚于$Minkowski$流形，故该观测者可用度量$(ds)^2 =- c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$来记录观察物体的运动。对于运动物体本身的参考系而言，它是静止的，因此观测者与运动物体的时间流速不同

$$(ds)^2 =- c^2(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 =- c^2(d\tau)^2 \tag{5.39}$$

τ为运动物体亲身经历的时间，称为固有时，则有

$$d\tau = i\frac{ds}{c} \tag{5.40}$$

定义物体的四维速度为：

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \mu = 0,1,2,3 \tag{5.41}$$

值得指出，四维速度有如下性质：

$$u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = g_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 =- c^2 \tag{5.42}$$

由于L_m是考虑物质的标量，积分微元包含了体积，则应取为物质的密度ρ和速度的乘积，（5.42）表明在四维时空中物体速度模值的平方是固定的，于是作用量为

$$S_m =- \int_D c^2\rho\sqrt{-g}d\Omega' \tag{5.43}$$

设$U^\mu = \rho u^\mu\sqrt{-g}$，则上式可写成

$$S_m = ic\int_D \sqrt{U^\mu U_\mu}d\Omega' \tag{5.43}$$

注意到ρu^μ是能流密度，满足连续性方程$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0$，并且因度规的协变微分为0从而$\sqrt{-g}$的协变微分也是0，因此U^μ的协变微分也为0，有

$$\begin{aligned}\delta\sqrt{U^\mu U_\mu} &= \frac{1}{2\sqrt{U^\mu U_\mu}}U^\alpha\delta U_\alpha = \frac{1}{2\sqrt{U^\mu U_\mu}}U^\alpha\delta\left(g_{\alpha\beta}U^\beta\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{U^\mu U_\mu}}U^\alpha U^\beta\delta g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-c^2}}\rho\sqrt{-g}u^\mu u^\nu\delta g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{5.44}$$

对（5.43）变分并代入上式得

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int_D \rho u^\mu u^\nu\sqrt{-g}\delta g_{\mu\nu}d\Omega' \tag{5.44}$$

注意到$T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$并对比（5.34）可得

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu \tag{5.45}$$

将比安基恒等式（2.70）中的ρ,σ指标缩并得

$$R^\sigma_{\lambda\mu\nu;\sigma} - R_{\lambda\nu;\mu} + R_{\lambda\mu;\nu} = 0 \tag{5.46}$$

上式第二项用到了曲率张量的反对称性和里奇张量的定义，两边乘$g^{\nu\lambda}$得

$$g^{\nu\lambda}R^\sigma_{\lambda\mu\nu;\sigma} + g^{\nu\lambda}R_{\lambda\nu;\mu} + g^{\nu\lambda}R_{\lambda\mu;\nu} = R^\sigma_{\mu;\sigma} - R_{;\mu} + R^\nu_{\mu;\nu} = 0 \tag{5.47}$$

$i.e.$

$$R^\nu_{\mu;\nu} - \frac{1}{2}R_{;\mu} = \left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu R\right)_{;\nu} = 0 \tag{5.48}$$

等价于

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu}=0 \tag{5.48}$$

由场方程的逆变形式（5.38）得

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}=0 \tag{5.49}$$

$i.e.$

$$(\rho u^{\mu}u^{\nu})_{;\nu}=u^{\mu}(\rho u^{\nu})_{;\nu}+u^{\mu}_{;\nu}\rho u^{\nu}=0 \tag{5.50}$$

注意到

$$u_{\mu}u^{\mu}_{;\nu}=g_{\mu\alpha}g^{\mu\beta}u^{\alpha}u_{\beta;\nu}=\delta^{\beta}_{\alpha}u^{\alpha}u_{\beta;\nu}=u^{\mu}u_{\mu;\nu} \tag{5.51}$$

则

$$\left(u_{\mu}u^{\mu}\right)_{;\nu}=u_{\mu}u^{\mu}_{;\nu}+u^{\mu}u_{\mu;\nu}=2u_{\mu}u^{\mu}_{;\nu}=0\Rightarrow u_{\mu}u^{\mu}_{;\nu}=0 \tag{5.52}$$

于是对（5.50）乘以u_{μ}缩并得$(\rho u^{\nu})_{;\nu}=0$，再代回（5.50）得

$$u^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}=0 \tag{5.53}$$

从（5.41）不难看出，u^{μ}是逆变张量，则

$$u^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}=u^{\nu}(u^{\mu}_{,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}u^{\lambda}) \tag{5.54}$$

将（5.41）代入上式有

$$u^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}=\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau}\frac{dx^{\nu}}{d\tau})=\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}=0 \tag{5.54}$$

正是测地线方程（2.43）。

也就是说，在引力场存在的弯曲时空当中，其背景是洛伦兹流形，运动方程是测地线方程。从测地线的定义可以看出，在平直时空当中，测地线是直线，那么当弯曲时空退化为平直时空时（即联络为 0），（5.54）变为直线方程：

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2}=0 \tag{5.54}$$

第六章 理论实践

前面说过，物理不是数学，它有其自身的特点，上述基于第一性建立的理论需要实践来验证，这里的实践既可以是现有理论和经典理论的联系，也可以是实验。我们分别就拉格朗日力学、电磁场论以及广义相对论的各自实践来检验它们的客观性。广义相对论也有其遗留任务：能动张量$T_{\mu\nu}$的系数k还未确定，这一章我们一并解决。

6.1 牛顿第二定律

牛顿第二定律是牛顿力学的核心，它同守恒律一样，在牛顿力学体系中作为公理存在。在拉格朗日力学中可推导出来，选取拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - \varphi(\boldsymbol{x})$$

其中$\varphi(x)$是外势场的势能，代入EL方程得

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{a} = -m\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}}$$

而$-\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}}$正是势场对单位质量物体的作用力，于是

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{6.1}$$

由此便得到了牛顿第二定律。拉格朗日力学包含了牛顿力学。

6.2 麦克斯韦方程组的应用

6.2.1 库仑定律

由（4.40），对其以带电粒子所处的位置为球心，半径为r的球上积分：

$$\int_D \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_{\partial D}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = \int_D \rho dV = e$$

∂D为球面，注意到与粒子距离相同的两点电场强度大小相同，则

$$\int_{\partial D}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{dS} = 4\pi r^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{e_r} = e \Rightarrow \boldsymbol{E} = \frac{e}{4\pi r^2}\boldsymbol{e_r}$$

若还有另一粒子电荷为e'，处于r，则两粒子的作用力为

$$\boldsymbol{F} = e'\boldsymbol{E} = \frac{ee'}{4\pi r^2}\boldsymbol{e_r} \tag{6.2}$$

这便是熟知的库伦定律，注意到此式没有介电参数，原因是在电磁篇中我们实际上采取了特殊单位制，为了方便，将常数消去。

6.2.1 电磁场的泊松方程

我们考虑静态电磁场的势，即$\frac{dA^\mu}{dt} = 0$。从（4.41）立得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi \right) = -\nabla^2\varphi = \rho$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{J}}{c} = \frac{\boldsymbol{J}}{c}$$

这便是电磁场的泊松方程

$$\begin{cases} \nabla^2\varphi = -\rho \\ \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \dfrac{\boldsymbol{J}}{c} \end{cases} \tag{6.3}$$

这是一个线性偏微分方程组，在给定边界条件后便可求解。当然，它未必有解析解，这类问题是数值分析中常遇到的，人们在实际应用的过程中更多也是采取偏微分方程数值解的方法。（6.3）的解是势场在空间中的分布，由此便能得到关于静态电磁场的全部信息，它在电与磁的工业应用中起着作用。

6.3 引力场的泊松方程

由牛顿的万有引力定律和库伦定律的相似性：

$$\begin{cases} F = -G\dfrac{mm'}{r^2} \\ F = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{ee'}{r^2} \end{cases}$$

此处以向外为正。可以设想，电场存在泊松方程，引力场也存在对应的泊松方程，对单位质量物体在引力场中的势能φ有

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \tag{6.4}$$

ρ是场源物体的密度。可类似库伦定律，通过$stoke's$公式从引力场的泊松方程得到万有引力定律。

6.4 牛顿近似及能动张量系数的确定

我们知道泊松方程（6.4）是在平直时空下的经典势场方程，如上一章所言，在弯曲时空退化为平直时空时，测地线方程退化为直线方程。我们指出，在近似为经典条件时，场方程退化为泊松方程。从而也就确定了能动张量的系数k。做出下列近似：

① 引力场是弱场：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{6.5}$$

其中$h_{\mu\nu}$是小量，$|h_{\mu\nu}| \ll 1$。

② 引力场是静态的，即

$$g_{\mu\nu,0} = h_{\mu\nu,0} = 0 \tag{6.6}$$

③ 引力场是空间缓变的，即

$$|g_{\mu\nu,i}| = |h_{\mu\nu,i}| \ll 1, i = 1,2,3 \tag{6.7}$$

④ 粒子做低速运动

$$\left|\frac{dx^i}{dx^0}\right| \ll 1\,,\ \left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \ll \left|\frac{dx^0}{d\tau}\right|\,,\ \left|\frac{dx^i}{d\tau}\right| \ll \tag{6.8}$$

上述近似能将方程退化为牛顿方程，故称为牛顿近似。

6.4.1 运动方程的牛顿近似

由（6.5）（6.6）（6.7）和$|h_{\mu\nu}| \ll 1$，时空的联络是克氏符，忽略二阶及以上的小量，可以化为

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}(h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\rho\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\rho}) \tag{6.9}$$

注意到（6.8），可将运动方程化为

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = 0 \tag{6.10}$$

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^{i}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{6.11}$$

由（6.10）易得

$$x^0 = a\tau + \xi \tag{6.12}$$

a和ξ都是常数。将上式代入（6.11）得

$$\frac{d^2x^i}{d(x^0)^2} = -\Gamma^{i}_{00} \tag{6.13}$$

利用（6.9）得

$$\frac{d^2x^i}{d(x^0)^2} = \frac{1}{2}h_{00,i} \tag{6.14}$$

注意到$x^0 = ct$，上式变为

$$\ddot{x}^i = \frac{1}{2}c^2h_{00,i} \tag{6.15}$$

可写为向量形式：

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2}c^2\frac{\partial h_{00}}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{6.16}$$

在6.1节中我们知道

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{6.17}$$

对比（6.16）（6.17）可知

$$\varphi = -\frac{1}{2}c^2h_{00} + \zeta \tag{6.18}$$

ζ为积分常数。在无穷远处，引力场消失，$\varphi = 0$，且度规恢复平直，$h_{00} = 0$，则ζ=0，即

$$\varphi = -\frac{1}{2}c^2h_{00} \tag{6.19}$$

6.4.2 场方程的牛顿近似

令$T = T^{\mu}_{\mu}$，将（5.37）缩并可得

$$R = -kT \tag{6.20}$$

将上式代入（5.36）可得

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \tag{6.21}$$

采用物体的随动坐标系，则$u^i=0$，按（5.45），

$$T=T_\mu^\mu=\rho u^\mu u_\mu=-\rho c^2 \tag{6.22}$$

依（6.9）具体计算，得

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0=0 \\ \Gamma_{0i}^0=-\frac{1}{2}h_{00,i} \\ \Gamma_{ij}^0=-\frac{1}{2}(h_{0i,j}+h_{0j,i}) \\ \Gamma_{00}^i=-\frac{1}{2}h_{00,i} \\ \Gamma_{0j}^i=\frac{1}{2}(h_{0i,j}-h_{0j,i}) \\ \Gamma_{jk}^i=\frac{1}{2}(h_{ij,k}+h_{ik,j}-h_{jk,i}) \end{cases} \tag{6.23}$$

其中$i,j,k=1,2,3$，联络均为一阶小量，于是忽略里奇张量的二阶及以上的小量，得

$$R_{\mu\nu}=\Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda-\Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda \tag{6.24}$$

⇒

$$R_{00}=-\frac{1}{2}h_{00,i,i} \tag{6.25}$$

注意到

$$R^{\mu\nu}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}\approx\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}R_{\alpha\beta} \tag{6.26}$$

在近似下有

$$R^{00}\approx R_{00}=-\frac{1}{2}h_{00,i,i} \tag{6.27}$$

将（6.21）改写为逆变形式，并只取 00 分量，有

$$R^{00}=k(T^{00}-\frac{1}{2}g^{00}T) \tag{6.28}$$

其中有非无穷小量出现，可将g^{00}与g_{00}近似为η^{00}与η_{00}，并注意到在随动坐标系中

$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}=\frac{1}{c}\sqrt{-g_{00}}dx^0 \tag{6.29}$$

⇒

$$T^{00}=\rho u^0u^0=-\frac{\rho c^2}{g_{00}} \tag{6.30}$$

于是（6.28）变为

$$h_{00,i,i}\approx(-2)k(-\frac{\rho c^2}{\eta_{00}}+\frac{1}{2}\eta^{00}\rho c^2)=-k\rho c^2 \tag{6.31}$$

注意到$\varphi=-\frac{1}{2}c^2h_{00}$即（6.19）可得

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{2}k\rho c^4 \tag{6.32}$$

对比引力场的泊松方程（6.4）可得

$$k=\frac{8\pi G}{c^4} \tag{6.33}$$

由此我们确定了能动张量的系数，得到了完整的爱因斯坦场方程：

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{6.34}$$

6.5 一个特解——史瓦西度规

爱因斯坦场方程是一个非线性二阶偏微分方程，实际上，它的未知量的个数是巨大的。但它仍有解析解，接下来我们将它求出来。

6.5.1 真空场方程

在引力系统的真空部分中（物质以外的部分），$\rho=0$，易推出$T=T_{\mu\nu}=0$，于是由（6.21）可知场方程变为

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{6.34}$$

6.5.2 球对称度规

我们可将$Minkowski$流形的度规改写为球坐标系下的形式：

$$(ds)^2=-c^2(dt)^2+(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2sin^2\theta(d\phi)^2 \tag{6.35}$$

可以想象这样一种物理背景，一个静止的质点，其引力场是各向同性的，并且是静态的，也就是说，在θ和φ的各个角度上，引力没有区别，则上式后两项保持不变，而各向同性允许引力在r的分布上有变化，则可加入一项与时间无关的乘子$a(r)$，对时间项也是如此，乘子为$b(r)$，则可写出静态的各向同性度规为

$$(ds)^2=-c^2b(r)(dt)^2+a(r)(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2sin^2\theta(d\phi)^2 \tag{6.36}$$

当$r\to+\infty$时，无引力场，（6.36）应退化为$Minkowski$流形的度规$\eta_{\mu\nu}$。

6.5.3 史瓦西解

（6.36）的协变与逆变度规分别为

$$(g_{\mu\nu})=\begin{pmatrix} b(r)c^2 & & & \boldsymbol{0} \\ & a(r) & & \\ & & r^2 & \\ \boldsymbol{0} & & & r^2sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

$$(g^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} \frac{1}{b(r)c^2} & & & \boldsymbol{0} \\ & \frac{1}{a(r)} & & \\ & & \frac{1}{r^2} & \\ \boldsymbol{0} & & & \frac{1}{r^2sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{6.38}$$

度规矩阵为对角阵，仅在对角线上有非零元，依联络公式

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\rho\nu,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}) \tag{6.39}$$

计算，不为 0 的联络分量分别是

$$\begin{cases} \Gamma^t_{tr}=\Gamma^t_{rt}=\dfrac{1}{2}\dfrac{b'}{b} \\ \Gamma^r_{rr}=\dfrac{1}{2}\dfrac{a'}{a}\,,\Gamma^r_{\phi\phi}=-\dfrac{rsin^2\theta}{a} \\ \Gamma^r_{tt}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{c^2b'}{a}\,,\Gamma^r_{\theta\theta}=-\dfrac{r}{a} \\ \Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\phi_{\phi r}=\Gamma^\phi_{r\phi}=\dfrac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\dfrac{1}{2}sin2\theta\,,\Gamma^\phi_{\phi\theta}=\Gamma^\phi_{\theta\phi}=\dfrac{cos\theta}{sin\theta} \end{cases} \tag{6.40}$$

进一步的计算则有

$$\begin{cases} R_{tt}=-\dfrac{c^2b''}{2a}+\dfrac{c^2}{4}\dfrac{b'}{a}\left(\dfrac{a'}{a}+\dfrac{b'}{b}\right)-\dfrac{c^2}{r}\dfrac{b'}{a}=0 \\ R_{rr}=-\dfrac{c^2b''}{2b}+\dfrac{c^2}{4}\dfrac{b'}{b}\left(\dfrac{a'}{a}+\dfrac{b'}{b}\right)+\dfrac{c^2}{r}\dfrac{a'}{a}=0 \\ R_{\theta\theta}=c^2-\dfrac{c^2r}{2a}\left(-\dfrac{a'}{a}+\dfrac{b'}{b}\right)-\dfrac{c^2}{a}=0 \\ R_{\phi\phi}=-c^2sin^2\theta R_{\theta\theta}=0 \end{cases} \tag{6.41}$$

其余分量为 0。不难看出，（6.41）只有两个独立方程：

$$\frac{R_{tt}}{b}-\frac{R_{rr}}{a}=-\frac{c^2}{ra}\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}\right)=0\Rightarrow ab'+a'b=0\Rightarrow ab=\xi \tag{6.42}$$

当$r\to+\infty$时，$a=1$，$b=-1$，则$\xi=-1$，于是$a=-\frac{1}{b}$，代入（6.41）第三式得

$$rb'+b+1=0 \tag{6.43}$$

解得$b=-1+\frac{\zeta}{r}$，注意到$b=g_{00}$，注意到在牛顿近似下$g_{00}=-1+h_{00}$，由（6.19）以及万有引力公式和势场与单位质量的作用力的关系得

$$\varphi=-\frac{GM}{r}=-\frac{c^2}{2}h_{00}\Rightarrow h_{00}=\frac{2GM}{c^2r} \tag{6.44}$$

于是$\zeta=\frac{2GM}{c^2}$，最后有

$$\begin{cases} g_{tt}=-c^2\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right) \\ g_{rr}=\left(1-\dfrac{2GM}{c^2r}\right)^{-1} \\ g_{\theta\theta}=r^2 \\ g_{\phi\phi}=r^2sin^2\theta \end{cases} \tag{6.45}$$

从而得到场方程的一个特解：

$$(ds)^2=-c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)(dt)^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}(dr)^2+r^2(d\theta)^2+r^2sin^2\theta(d\phi)^2 \tag{6.46}$$

称为史瓦西度规。此处球坐标系下的分量也按顺序称为第 0 分量，第 1 分量等等。

6.6 黑洞的预言和发现

6.6.1 奇点与视界——黑洞

从史瓦西度规（6.46）中可以发现，度规在两个地方有发散分量，一个是$r=0$，令一个是$r_s=\frac{2GM}{c^2}$，$r=0$ 称为奇点。现设有一个粒子在$r_0>r_s$处，沿径向向奇点运动，还有另一观测者在$r_1>r_s$处观测粒子，如我们在引入四维速度时所言，

$$(ds)^2=-c^2\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)(dt)^2+\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)^{-1}(dr)^2=-c^2(d\tau)^2 \tag{6.47}$$

上式中τ是粒子自己所经历的时间，也就是粒子的固有时，t是观测者观测到的时间，由于粒子是径向运动，上式中已经使用了$d\theta=d\phi=0$。由运动方程（5.54）以及注意到仅有部分度规非零（6.37）（6.38），有

$$\frac{du^0}{d\tau}+\Gamma^0_{01}u^0u^1=0 \tag{6.48}$$

⇒

$$\frac{du^0}{d\tau}=-\Gamma^0_{01}u^0u^1=-g^{00}g_{00,1}u^0u^1=-g^{00}\frac{dg_{00}}{d\tau}u^0 \tag{6.49}$$

⇒

$$\frac{du^0}{u^0}=-\frac{dg_{00}}{g_{00}}u^0 \tag{6.50}$$

上式可解得$g_{00}u^0=const$，它即（6.47）的第一项去掉负号的根号，必定非零，从而

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{const}{g_{00}} \tag{6.51}$$

我们看到，当粒子从r_0趋于r_s时，$g_{00}=-\left(1-\frac{2GM}{c^2r}\right)$趋于 0，$\frac{dt}{d\tau}$趋于无穷大，而$dr$显然是有限的，从而

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr/d\tau}{dt/d\tau}\to 0 \tag{6.52}$$

这就意味着，在观测者看来，粒子越接近r_s，粒子的速度越小，直至为 0，亦即观测者最后看到粒子静止了。但另一方面

$$u^\mu u_\mu=-c^2=g_{\mu\alpha}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\alpha}{d\tau}=g_{00}(u^0)^2+g_{11}(u^1)^2 \tag{6.53}$$

用g_{00}乘上，注意到$g_{00}g_{11}=-c^2$，得

$$-c^2g_{00}=(g_{00})^2(u^0)^2-c^2(u^1)^2=const-c^2(u^1)^2 \tag{6.54}$$

⇒

$$u^1=\sqrt{const+g_{00}} \tag{6.55}$$

此处的$const$也非零，从而在粒子自己看来

$$\tau=\int_{r_0}^{r_s}\frac{dr}{\sqrt{const+\frac{2GM}{c^2r}}}\ \text{收敛} \tag{6.56}$$

它向r_s运动的时间是有限的，换言之，它会看到自己穿过r_s面（不妨认为它是智子）。

综上，在r_s外的附近，观测者看到粒子越来越慢，在r_s上，粒子好像被冻结了一般，这不是粒子的速度为 0，而是r_s处的时空被严重弯曲，时间过的无限慢。在粒子看来，观测者所处的外界时光飞快，当粒子抵达r_s时，它会看到整个宇宙的终结（假若宇宙的寿命有限。关于宇宙的寿命和演化，这又是另外一个有趣的故事——宇宙学）。

现考虑新的情形，假设一光源在r_1处，观测者在r_2处，均在r_s外，两者均静止。光在两处的频率和波长分别为ν_1、λ_1和ν_2、λ_2，由光速不变原理可知

$$c = \nu_1\lambda_1 = \nu_2\lambda_2 \Rightarrow \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \tag{6.57}$$

而光行进λ_1和λ_2的固有时分别为τ_1和τ_2，于是

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c\tau_1}{c\tau_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \tag{6.58}$$

对于光自己的固有时和观测者的时间而言，有

$$\begin{cases} d\tau_1 = \sqrt{-c^2(1-\dfrac{2GM}{c^2r_1})}dt \\ d\tau_2 = \sqrt{-c^2(1-\dfrac{2GM}{c^2r_2})}dt \end{cases} \tag{6.59}$$

将上式积分并做商得

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1-\dfrac{2GM}{c^2r_1}}{1-\dfrac{2GM}{c^2r_2}}} \tag{6.60}$$

可以看到，当r_1趋于r_s时，ν_2为 0，也就是说，观测者看不到在r_s处发出的光，于是这片区域是黑色的，便将最长宽距小于等于 $2r_s$的天体称为黑洞。r_s称为黑洞的视界。

6.6.2 黑洞的发现

美国东部时间 2019 年 4 月 10 日 9 时（北京时间 10 日 21 时），在美国华盛顿、中国上海和台北、智利圣地亚哥、比利时布鲁塞尔、丹麦灵比和日本东京同时召开新闻发布会，以英语、汉语、西班牙语、丹麦语和日语发布 EHT（Event Horizon Telescope）的第一项重大成果：人类有史以来第一张黑洞照片。

2017 年，EHT 利用全球射电望远镜网络，联合了处于欧洲、北美洲和南美洲以及南极洲的射电望远镜阵列，成员有 [Array/Telescopes - EHT. EHT. 2017-03-17 [2017-06-11]

赫兹望远镜（ARO/SMT）
阿塔卡马探路者实验（APEX）
阿塔卡马亚毫米望远镜实验（ASTE）
毫米波天文学研究用组合阵列（CARMA）
加州理工学院亚毫米天文台（CSO）
IRAM 30 米望远镜（IRAM）

麦克斯威尔望远镜（JCMT）
大型毫米波望远镜（LMT）
亚毫米波阵列望远镜（SMA）
阿塔卡马大型毫米波/亚毫米波阵列（ALMA）
北方扩展毫米阵列（NOEMA）
南极望远镜（SPT）
这些射电望远镜通过网络组成了口径相当于地球直径的望远镜，对准五千五百万光年外的 M87 星系的中心黑洞，历时五天的观测，两年的数据处理，最后得到了这张意义重大且非凡的照片（图 12）。

它是广义相对论的又一次证实，它更证明了人类有能力去认知我们所处的宇宙，人类虽然渺小，但绝非微不足道。在浩瀚的宇宙中，在短暂的时间里，地球上的生命从大分子有机物进化到人类，生命可以理解时间的本质，去追溯 137 亿年前宇宙大爆炸时的余晖，星辰的产物在思索繁星，千亿亿亿个原子构成的有机集合体正在思考着原子的演化。

图 12　黑洞阴影[《The Shadow of the Supermassive Black Hole》]

