21世纪高等学校物理学精品教材

# 物理学中的张量分析

刘连寿　郑小平　著

科学出版社
www.sciencep.com

• 21 世纪高等学校物理学精品教材 •

# 物理学中的张量分析

刘连寿　郑小平　著

科 学 出 版 社

北　京

**图书在版编目(CIP)数据**

物理学中的张量分析/ 刘连寿,郑小平著.—北京：科学出版社,2008

21 世纪高等学校物理学精品教材

ISBN 978-7-03-023034-8

Ⅰ.物… Ⅱ.①刘…②郑… Ⅲ.张量分析—高等学校—教材 Ⅳ.O183.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 145639 号

责任编辑：张颖兵 / 责任校对：曾 莉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 11 月第 一 版 开本：A5(890×1240)

2008 年 11 月第一次印刷 印张：6

印数：1—3 000 字数：136 000

**定价：22.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前　言

张量是学习和研究物理学的一个必不可少的数学工具.对物理学作定量研究,需要采用坐标系,可是物理量在不同坐标系中的分量值是不同的,因而必须知道这些分量在坐标变换时的变换规律.这就是张量的任务.

描述自然规律的物理定律和定理在坐标变换时,左右两边必须同样变换,才能保证这些定律和定理在任意坐标系中都成立.而如果左右两边都是张量,就能满足这一要求.因此,所有的物理定律和定理都具有张量等式的形式.

在经典物理学中,在不涉及各向异性连续介质时,还可以设法回避张量的概念,将一阶张量归结为矢量、二阶张量归结为并矢.到了相对论力学、电动力学和引力理论中,空间成为非欧氏的,甚至是弯曲的,运用张量分析就是不可避免的了.

但是,在现有的物理专业教学计划中,没有设立“张量”这门课,只在电动力学课中用到张量时略加说明.市面上也看不到适合物理专业用的张量教材,只是在一些电动力学教材中有关于张量的附录,而有一些关于张量的书则过于“数学化”,难度较大.这些对于从事物理学的教学和研究是非常不够和不便的,本书的编写就是试图填补这一空缺.

张量是在不同的空间中定义的.要懂得张量,必须先建立“空间”的概念.在经典力学中用到的是通常的(真)欧氏空间;在相对论力学和电动力学中要用到伪欧氏空间;而在广义相对论(引力理论)中则会遇到弯曲空间.本书按照这一顺序,逐一介绍

各种不同的空间,并分别在不同的空间里讨论张量分析,这样就能较为严格而清晰地建立起各种空间中的张量的概念.显然,这种做法的效果是仅将张量作为物理教材的附录所难以达到的.

本书是供物理专业的学生、教师和研究人员使用的.为了避免过于抽象,没有对不同的空间分别给出其纯数学的定义,而是采用了循序渐进的办法,以大家熟悉的(真)欧氏空间为基础,去掉其中矢量点积的定义,使之成为无度量的仿射空间,然后再加进新的点积定义,而得到伪欧氏空间.这种办法比较符合于物理专业学生的思维方式,较纯数学的处理方法易于掌握和应用.

本书第 1 章介绍三维欧氏空间中的张量,着重强调张量的定义中所包含的“在一个坐标系中给出分量”和“规定坐标变换时分量的变换规律”两个要素.在介绍张量运算时,反复强调一种运算作为张量运算的条件是运算结果仍是张量.这样就让读者牢固地建立起物理规律在坐标变换时应该有“协变性”的概念.这一章用相当篇幅讨论了一阶张量的运算,即矢量分析——梯度、散度、旋度.由于充分利用了二阶单位张量和三阶完全反对称张量作为工具,使得这一讨论十分清楚,一些复杂的运算变得非常简单.

第 2 章讨论仿射空间和伪欧氏空间中的张量.首先从物理上说明有必要从伽利略相对性原理发展到爱因斯坦相对性原理,而这使得原有的空间概念必须改变,特别是矢量点积要变.接着介绍了从欧氏空间中抽去矢量点积后,得到的仿射空间中的张量,特别说明了区分上、下标的必要性.在此基础上,加进不同的矢量点积,得到伪欧氏空间.根据新的点积定义,推导了洛伦兹变换,仔细地分析了其几何意义;并介绍了伪欧氏空间——闵可夫斯基空间中的张量在相对论力学、电动力学和相对论流体力学中的应用.

接下来,本应进而讨论弯曲空间中的张量分析,但为了便于读者接受,先用第3章来讨论欧氏空间中的弯曲坐标,例如球坐标和柱坐标.许多读者对这类坐标运用得很熟练,但并不清楚局部标架和整体标架的本质差别.这一章里强调了这一差别,指出弯曲坐标中的张量(包括一阶张量——矢量)只能定义在局部标架中,因而出现了一个如何将它们“平行移动”的问题.通过讨论平行移动,引入了“联络”,得到了它在坐标变换时的变换规律,以及协变微分和克里斯托费尔符号.这样就为进一步讨论弯曲空间中的张量打下了很好的基础.

第4章讨论弯曲空间中的张量,完全承袭了上一章在欧氏空间中讨论曲线坐标得到的结果,特别是联络及其变换规律、协变微分和克里斯托费尔符号.但是,弯曲空间和平直的(真、伪)欧氏空间不同的地方在于,它有非零曲率.本章介绍了曲率张量的定义及几个有关的定理.最后,讨论了弯曲空间中张量分析的应用——爱因斯坦的广义相对性原理、引力场方程和基本粒子的内部对称性.

本书的部分内容,曾于1987年作为《张量及其在物理学中的应用》一书由湖北教育出版社出版,并曾在一些高校作为选修课教材使用.这次出版,做了大幅度的增补和修订.由于作者学识所限,书中疏漏和不妥之处在所难免,希望读者提出宝贵意见.

刘连寿

2008年6月于武昌桂子山

# 目　　录

**第 1 章　三维欧氏空间中的矢量与张量** …… 1
1.1　张量的定义 …… 1
1.2　矢量代数 …… 4
1.2.1　坐标基矢 …… 4
1.2.2　任意矢量的点积与叉积 …… 6
1.2.3　δ符号和 ε符号的几个公式 …… 9
1.2.4　三矢量的连乘积 …… 11
1.3　坐标变换 …… 12
1.3.1　基矢的变换 …… 12
1.3.2　赝矢量与赝标量 …… 15
1.3.3　矢量分量的变换规律 …… 17
1.3.4　正交变换 …… 18
1.4　三维欧氏空间中张量的定义 …… 20
1.4.1　三维欧氏空间 …… 20
1.4.2　张量的定义 …… 21
1.4.3　一阶和二阶张量的整体符号 …… 28
1.5　三维欧氏空间中的张量运算 …… 31
1.5.1　张量的运算 …… 31
1.5.2　三阶完全反对称赝张量 …… 34
1.5.3　三维欧氏空间中的二阶张量 …… 37
1.6　矢量场与张量场　梯度　散度　旋度 …… 42
1.6.1　导数张量 …… 42
1.6.2　梯度　散度　旋度 …… 44
1.6.3　高阶导数与乘积的导数 …… 48

习题 1 …… 51

**第 2 章 仿射空间与伪欧氏空间中的张量** …… 54
2.1 改变空间性质的必要性 …… 54
2.2 仿射空间中的张量 …… 57
2.2.1 仿射空间的定义 …… 58
2.2.2 仿射空间中的坐标系及其变换 …… 60
2.2.3 逆变张量与协变张量 …… 63
2.2.4 张量运算 …… 66
2.2.5 由仿射空间到欧氏空间 …… 67
2.3 伪欧氏空间中的张量 …… 69
2.3.1 伪欧氏空间的建立 …… 69
2.3.2 伪欧氏空间中的坐标基矢 …… 72
2.3.3 伪欧氏空间中的张量 …… 73
2.4 闵可夫斯基空间 …… 78
2.4.1 洛伦兹变换 …… 79
2.4.2 复欧氏空间 …… 83
2.4.3 洛伦兹变换的几何意义 …… 89
2.4.4 光锥 …… 91
2.4.5 洛伦兹收缩 …… 93
2.4.6 相对论力学中的张量分析 …… 95
2.5 闵可夫斯基空间中的张量场 …… 98
2.5.1 电动力学方程的四维表述 …… 98
2.5.2 相对论流体力学方程 …… 105
习题 2 …… 111

**第 3 章 平直空间中的曲线坐标** …… 113
3.1 局部标架 …… 113
3.1.1 曲线坐标 …… 113

3.1.2　局部标架 …… 116
3.1.3　拉梅系数 …… 117
3.1.4　曲线坐标中的体积元 …… 119
3.1.5　曲线坐标中的梯度、散度、旋度 …… 120
3.2　曲线坐标中的张量 …… 121
3.2.1　坐标变换 …… 122
3.2.2　张量的定义与运算 …… 123
3.2.3　度规张量 …… 124
3.2.4　弧长与体积 …… 125
3.3　平行移动与联络 …… 127
3.3.1　矢量的平行移动 …… 128
3.3.2　联络的变换规律 …… 130
3.3.3　克里斯托菲尔符号 …… 131
3.4　协变导数 …… 133
3.4.1　一阶协变张量场的协变导数 …… 133
3.4.2　一阶逆变张量场的协变导数 …… 136
3.4.3　高阶张量场的协变导数 …… 137
3.4.4　协变微分 …… 137
3.4.5　矢量场的散度与旋度 …… 138
3.5　曲线坐标小结 …… 141
3.5.1　空间一固定点的局部标架中的张量 …… 141
3.5.2　空间不同点的局部标架之间的联络 …… 142
习题 3 …… 145

**第 4 章　黎曼空间中的张量** …… 148
4.1　黎曼空间与仿射联络空间 …… 148
4.1.1　流形中的张量 …… 148
4.1.2　仿射联络空间 …… 150
4.1.3　里奇引理 …… 152

4.1.4 黎曼空间 …… 153
4.2 平行移动对路径的依赖性 曲率张量 …… 157
4.2.1 平行移动对路径的依赖性 …… 157
4.2.2 曲率张量的定义 …… 158
4.2.3 曲率张量的性质 …… 161
4.2.4 协变曲率张量 …… 162
4.2.5 里奇张量与标量曲率 …… 164
4.2.6 二维黎曼空间的高斯曲率 …… 164
4.3 黎曼空间的测地线 …… 166
4.3.1 测地线的定义 …… 166
4.3.2 测地线的微分方程 …… 167
4.3.3 黎曼空间中的测地线 …… 169
4.4 广义相对性原理 …… 173
4.4.1 有引力场存在时时空的弯曲 …… 173
4.4.2 基本粒子的内部对称性 …… 176
习题 4 …… 181

# 第 1 章　三维欧氏空间中的矢量与张量

## 1.1　张量的定义

在物理学中常常会遇到一些不能单用一个数字表示的量.最简单的例子是力 $\boldsymbol{F}$、速度 $\boldsymbol{v}$、加速度 $\boldsymbol{a}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、电极化强度 $\boldsymbol{P}$ 等.这些量除了大小以外还有方向,通常称它们为**矢量**.许多物理规律用公式表示出来都是矢量之间的等式.例如,牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a} \tag{1.1.1}$$

电介质的极化定律

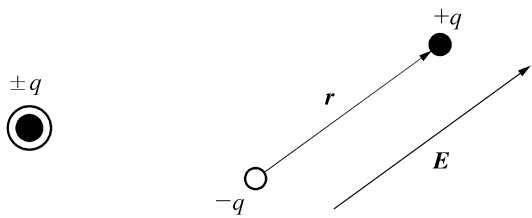
$$\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{E} \tag{1.1.2}$$

式中,$m$ 和 $\alpha$ 分别是粒子的质量和介质的电极化率.

我们来较仔细地讨论后一个例子.在电介质中加上电场 $\boldsymbol{E}$,使得介质的分子极化.在未加电场时,分子的正电荷中心与负电荷中心重合(图 1.1(a)).外电场 $\boldsymbol{E}$ 将分子的正、负电荷中心拉开一个距离 $\boldsymbol{r}$(图 1.1(b)).用 $\pm q$ 表示分子中正、负电荷的电量,则有电偶极矩

$$\boldsymbol{d}=q\boldsymbol{r}$$

单位体积中的电偶极矩称为介质的**电极化强度** $\boldsymbol{P}$.




(a) 加电场前 (b) 加电场后

图 1.1 外电场 $\boldsymbol{E}$ 使介质分子极化的示意图
实心圆表示正电荷中心，空心圆圈表示负电荷中心

式(1.1.2)表示介质的电极化强度与加在介质上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 成正比.比例系数 $\alpha$ 表征了所讨论介质的性质，称为**电极化率**.

但是，式(1.1.2)只适用于各向同性介质.某些介质在不同方向有不同性质.这种不同方向有不同性质的介质称为**各向异性介质**.对于这种介质，在不同方向加同样强度的电场，所产生的电极化强度的大小不同，而且其方向也不一定和所加的电场方向一致.这种介质的电极化规律不能简单地用式(1.1.2)表示，它们的电极化率不是一个简单的数.这是物理量不能用一个单一的数字表示的又一例子.

所有这些不能用一个单一的数字表示的物理量都是张量的例子.

究竟什么是张量呢？让我们以上面举过的两个例子——矢量和各向异性介质中的电极化率为例，来加以说明.

通常定义矢量 $\boldsymbol{A}$ 为“既有大小，又有方向的量”，这种定义不便于推广.下面我们采用 $\boldsymbol{A}$ 的另一定义，即矢量 $\boldsymbol{A}$ 为“具有三个分量 $A_x$，$A_y$，$A_z$ 的量”.为了便于书写，将 $x$，$y$，$z$ 三个方向分别用 1，2，3 表示.于是矢量 $\boldsymbol{A}$ 可以用三个数表示为($A_1$，$A_2$，$A_3$)，或简写为 $A_i$($i$=1，2，3).它有一个下标 $i$.

各向异性介质中的电极化率将一个矢量 $\boldsymbol{P}$ 和另一个矢量 $\boldsymbol{E}$ 建立对应关系，而 $\boldsymbol{P}$ 并不和 $\boldsymbol{E}$ 简单成正比，其方向也不一定和 $\boldsymbol{E}$ 平行.但是，当电场 $\boldsymbol{E}$ 不太强时，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 的对应关系仍然是线性关系①，它可以用分量表示为

$$\begin{cases} P_1 = \alpha_{11} E_1 + \alpha_{12} E_2 + \alpha_{13} E_3 \\ P_2 = \alpha_{21} E_1 + \alpha_{22} E_2 + \alpha_{23} E_3 \\ P_3 = \alpha_{31} E_1 + \alpha_{32} E_2 + \alpha_{33} E_3 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

或缩写为

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} E_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.1.4}$$

由此可见，各向异性介质的电极化率可以用 9 个数 $\alpha_{ij}$（$i$，$j$=1，2，3）表示，它有两个下标 $i$，$j$.

但是，矢量分量的值与坐标系的选择有关.当我们将坐标系（$Oxyz$）转一个角度成为（$Ox'y'z'$）时，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量也由（$A_x$，$A_y$，$A_z$）变为（$A_{x'}$，$A_{y'}$，$A_{z'}$）.在不同的坐标系中，同一矢量的分量有不同的值.矢量（如力 $\boldsymbol{F}$、加速度 $\boldsymbol{a}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$、电极化强度 $\boldsymbol{P}$）是客观的物理量，它们应该与坐标系的人为选择无关；然而，为了定量地表示它们，又必须选定一个坐标系给出它们的分量.这是一个矛盾.解决这一矛盾的方法是，规定矢量分量在坐标变换时的变换规律.知道了这一变换规律，只要在一个坐标系中给出某一矢量的分量，也就等于在任意坐标系中都给出了它的分量.这样给出的矢量就是一个与坐标系无关的客观物理量.

只要在一个坐标系中给出分量，同时给出坐标变换时分量

① 可以认为 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{E}$ 的解析函数，满足条件：当 $\boldsymbol{E}$=0 时，$\boldsymbol{P}$=0.如果 $\boldsymbol{E}$ 不太强，可以将这一函数展开成泰勒级数，只取不为 0 的第一项.这就是式(1.3).

的变换规律，就能定义一个与坐标系的选择无关的客观物理量．这就是定义张量的方法．

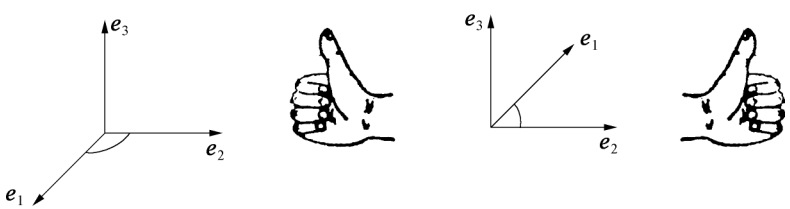
张量按它的角标数来分类，有 $n$ 个角标的张量叫 $n$ 阶张量．一个 $n$ 阶张量的完整定义包括在一个坐标系中给出 $3^n$ 个数，以及规定这些数在坐标变换时的变换规律两部分．

张量分量在坐标变换时的变换规律是张量定义中的一个不可缺少的部分．因此，在 1.4 节中给出张量的定义和运算之前，下两节中先讨论三维空间中的矢量代数和坐标变换．

## 1.2 矢 量 代 数

### 1.2.1 坐标基矢

本章中的全部讨论都采用直角坐标系(笛卡儿坐标系)，这种坐标系的三个坐标轴方向的单位矢量用 $\boldsymbol{e}_i$ ( $i$=1, 2, 3)表示．可以区分下面两种情况：如果由 $\boldsymbol{e}_1$ 按右手螺旋旋转到 $\boldsymbol{e}_2$ 可以得到 $\boldsymbol{e}_3$(图 1.2(a))，则称为**右手坐标系**；如果由 $\boldsymbol{e}_1$ 按左手螺旋旋转到 $\boldsymbol{e}_2$ 得到 $\boldsymbol{e}_3$(图 1.2(b))，就称为**左手坐标系**．




(a) 右手坐标系　　(b) 左手坐标系

图 1.2　两类坐标系

这一节只讨论右手坐标系．

三个单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ ( $i$=1, 2, 3)称为**坐标基矢**．由于它们相互

垂直,所以不同 $\boldsymbol{e}_i$ 的点积为 0;而由于它们是单位矢量,所以同一个 $\boldsymbol{e}_i$ 的自乘(点积)等于 1.亦即

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

定义**二阶对称 δ 符号**为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{1.2.2}$$

则可以将式(1.2.1)写为

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \tag{1.2.3}$$

由定义式(1.2.2)可知,$\delta_{ij}$ 对它的两个下标对称,即

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \tag{1.2.4}$$

矢量的乘积除点积外还有叉积.两个矢量的叉积是一个垂直于这两个矢量所成平面的矢量,而其大小等于这两矢量的大小之积再乘上两个矢量夹角的正弦.由此立即可知,一个矢量和自身的叉积为 0.因此

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = 0 \quad (i = j) \tag{1.2.5}$$

另一方面,由于三个矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 相互垂直,且长度都等于 1,所以有

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_2 \end{cases} \tag{1.2.6}$$

式(1.2.5)和(1.2.6)可以借助于三阶完全反对称 ε 符号合写成一个式子.**三阶完全反对称符号** $\varepsilon_{ijk}$ 有三个下标,每个下标都可以取 1, 2, 3 三个值.按定义,$\varepsilon_{ijk}$ 对它的三个下标中任意两

个的交换都反对称,即

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \tag{1.2.7}$$

由此立即可知,$\varepsilon_{ijk}$的$3^3$(=27)个分量中,凡是有两个下标取相同值的分量都是0;不为0的分量只是$i$, $j$, $k$各不相等,分别取1, 2, 3三个值的6个分量.又由于有式(1.2.7),因而这6个分量中只有一个是独立的.取这一个独立分量为

$$\varepsilon_{123} = 1 \tag{1.2.8}$$

就完全确定了$\varepsilon_{ijk}$.式(1.2.7)和(1.2.8)合起来是$\varepsilon_{ijk}$的定义.它可以写为

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (i = j \text{ 或 } j = k \text{ 或 } k = i) \\ \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{321} = 1 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

式(1.2.9)第二行可以表述为$\varepsilon_{ijk}$,当$i$, $j$, $k$为1, 2, 3的偶排列时等于+1;当$i$, $j$, $k$为1, 2, 3的奇排列时等于−1.

利用$\varepsilon_{ijk}$可以将式(1.2.5)和(1.2.6)合写为

$$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{e}_k \tag{1.2.10}$$

实际上,由$\varepsilon_{ijk}$的性质,当$i=j$时,式(1.2.10)的右边为0,这就是式(1.2.5).当$i \neq j$时,式(1.2.10)的右边和式的三项中只有$k \neq i$, $k \neq j$的一项不为0,而由式(1.2.9)就得到式(1.2.6).

式(1.2.3)和(1.2.10)表达了坐标基矢$\boldsymbol{e}_i$($i$=1, 2, 3)的基本性质,它们是以下讨论矢量代数的出发点.

### 1.2.2 任意矢量的点积与叉积

任意矢量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$可以用坐标基矢展开为

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} a_i\boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3\boldsymbol{e}_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} b_i\boldsymbol{e}_i \end{cases} \tag{1.2.11}$$

$a_i$（$i$=1，2，3)和 $b_i$（$i$=1，2，3)分别是矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的分量.

在深入讨论之前,先对角标作一些说明.凡是进行了作和的角标称为**哑标**,如式(1.2.11)中的 $i$ 和式(1.2.10)中的 $k$.哑标实际上并不取任何特定的值,而是取遍 1，2，3 三个值.在进行作和以后,哑标不再存在.例如式(1.2.10)的右边 $k$ 是哑标,左边就不再有 $k$.反之,不作和的角标称为**自由标**.任何等式左、右两边的自由标必须正好对应,如式(1.2.10)中的 $i$ 和 $j$.

由于哑标只是对角标 1，2，3 作和的代号,所以它可以换用任意符号.例如,式(1.2.10)右边的 $k$ 换成 $l$ 或 $m$ 或任何其他符号均可.而对自由标就不能任意改动,如果要改动自由标,必须对一个等式的各项中出现的这个指标同时改动.

一条重要的规则是,当两个和式相乘时,哑标不能重复.如果这两个和式原来采用的哑标相同,则在将它们相乘时,应该将其中一个哑标换成其他符号.

现在来考虑任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积和叉积.为了避免哑标重复,先将式(1.2.11)中第二式的下标 $i$ 改为 $j$.如是有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j \boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j$$

将式(1.2.3)、(1.2.10)代入,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_i b_j \delta_{ij} \tag{1.2.12}$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_i b_j \boldsymbol{e}_k \tag{1.2.13}$$

根据式(1.2.7)，$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{kij}$，代入式(1.2.13)并改换哑标符号，可以将其改写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i a_j b_k \tag{1.2.14}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个矢量，式(1.2.13)、(1.2.14)是它按坐标基矢展开的展开式，因此它的分量是

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i=\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j b_k \tag{1.2.15}$$

下面来将所得到的点积和叉积的公式化成通常的形式.

式(1.2.12)右边的作和式中含有 $\delta_{ij}$ 因子.由于 $\delta_{ij}$ 的性质(1.2.2)，在对 $j$ 作和时，不为 0 的只有 $j=i$ 的一项，因而有

$$\sum_{j=1}^{3}b_j\delta_{ij}=b_i \tag{1.2.16}$$

这可以总结成一条有用的规则：

如果在一个式子的某一项中，含有因子 $\delta_{ij}$ 并对 $j$ 求和，就可以去掉这个 $\delta_{ij}$ 和作和符号，并将这一项里的其他因子中的下标 $j$ 都换成 $i$.

将式(1.2.16)代入式(1.2.12)得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_i b_i=a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3 \tag{1.2.17}$$

再来看式(1.2.15).当 $i=1$ 时,由 $\varepsilon$ 符号的性质(1.2.9),右边的 $j$ 和 $k$ 必须等于 2 和 3,而且当 $j=2$, $k=3$ 时有正号,当 $j=3$, $k=2$ 时有负号.当 $i=2$, 3 时也有类似情况.于是有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases} \tag{1.2.18}$$

式(1.2.17)和(1.2.18)就是通常点积和叉积的公式.

## 1.2.3　$\delta$ 符号和 $\varepsilon$ 符号的几个公式

在进一步考虑三个矢量的连乘积之前,先来证明 $\delta$ 符号和 $\varepsilon$ 符号的几个有用的公式.

首先来看用 $\varepsilon$ 符号写出三阶行列式展开式的公式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,\ j,\ k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k \tag{1.2.19}$$

**证**　三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

的展开式的每一项都是三个因子的乘积——从每一行都取一个而且只取一个因子,从每一列也取一个而且只取一个因子.因此,展开式的一般项可以写成

$$\pm\, a_i b_j c_k \quad (i \neq j \neq k)$$

其中取正号还是取负号，要视 $i$，$j$，$k$ 是偶排列还是奇排列而定.这样，利用 $\varepsilon$ 符号的性质(1.2.9)，就可以写出式(1.2.19).

下面再来证明一个将 $\varepsilon$ 符号和 $\delta$ 符号相联系的公式

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{1.2.20}$$

**证** 先分析等式左边.根据它的两个 $\varepsilon$ 因子知

$$i\neq j\neq k \qquad l\neq m\neq k$$

结合这两个不等式可知，等式左边不为 0 的条件是

$$i=l \qquad j=m \qquad i\neq j$$

或

$$i=m \qquad j=l \qquad i\neq j$$

在第一种情况下.排列 $i$，$j$，$k$ 和 $k$，$l$，$m$ 有相同的奇偶性，因而 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=+1$；在第二种情况下，排列 $i$，$j$，$k$ 和 $k$，$l$，$m$ 的奇偶性相反，因而 $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=-1$.由此得

$$\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}=\begin{cases}+1 & (i=l,\ j=m,\ i\neq j)\\ -1 & (i=m,\ j=l,\ i\neq j)\end{cases} \tag{1.2.21}$$

而在其余情况下，它都等于 0.

再来看式(1.2.20)的右边.当 $i=l$，$j=m$，$i\neq j$(因而 $i\neq m$)时，只有第一项，因而等于+1；当 $i=m$，$j=l$，$i\neq j$(因而 $i\neq l$)时，只有第二项，因而等于−1.这些都和式(1.2.21)相符.还剩下一种情况要考虑，即

$$i=j=l=m$$

此时，等式(1.2.20)左边为 0，而右边的两项都等于 1，相减为 0.这样就完成了式(1.2.20)的证明.

### 1.2.4　三矢量的连乘积

三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的连乘有两种,一种是 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$,另一种是 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

利用式(1.2.15)和(1.2.17),有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\sum_{i=1}^{3}a_i(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_i=\sum_{i,\ j,\ k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k \tag{1.2.22}$$

利用式(1.2.19),可以将它写成行列式

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} \tag{1.2.23}$$

将这一行列式的三行进行轮换,其值不变,因而得

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{1.2.24}$$

容易证明,$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$是由三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 形成的平行六面体的体积.

**证**　$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 是一个垂直于($\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$)平面的矢量,其长度 $s=bc\sin\theta_{bc}$ 等于两个矢量 $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 所形成的平行四边形的面积.而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}=(a\cos\theta_{as})s$ 等于由 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 形成的平行六面体的高 $a\cos\theta_{as}$ 乘底面积 $s$,因而等于这一平形六面体的体积.

再来看三个矢量的连叉乘 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$. 先用式(1.2.15)得

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_k=\sum_{l,\ m=1}^{3}\varepsilon_{klm}b_lc_m$$

再用一次式(1.2.15)得

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_i=\sum_{j,\ k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})_k$$

$$=\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}a_jb_lc_m$$

利用式(1.2.20)可以完成上式中对 $k$ 的作和,即

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]_i=\sum_{j,\ l,\ m=1}^{3}(\delta_{il}\delta_{jm}a_jb_lc_m-\delta_{im}\delta_{jl}a_jb_lc_m)$$

$$=b_i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-c_i(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

在得到后一行时用了式(1.2.12)和(1.2.16).上式对于 $i=1$, 2, 3 都对,因而可以合写成矢量等式

$$[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\qquad(1.2.25)$$

用类似的办法不难计算更多个矢量的连乘积.

## 1.3 坐 标 变 换

这一节讨论不同坐标系之间的变换.我们不考虑坐标平移,而只讨论坐标原点不动的变换,其中包括转动、镜面反射和反演.这三种变换都保持矢量点积的公式(1.2.12)不变,统称为**正交变换**.

下面先考虑基矢的变换,然后再看矢量分量的变换.

### 1.3.1 基矢的变换

设原来坐标系的基矢为

$$\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3 \tag{1.3.1}$$

转动后的坐标基矢为

$$\boldsymbol{e}_{1'},\ \boldsymbol{e}_{2'},\ \boldsymbol{e}_{3'} \tag{1.3.2}$$

这三个矢量在原坐标系(1.3.1)中的分量用

$$(A_{1'1},\ A_{1'2},\ A_{1'3})$$

$$(A_{2'1},\ A_{2'2},\ A_{2'3})$$

$$(A_{3'1},\ A_{3'2},\ A_{3'3})$$

表示,因而有

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = A_{1'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{1'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{1'3}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = A_{2'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{2'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{2'3}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = A_{3'1}\boldsymbol{e}_1 + A_{3'2}\boldsymbol{e}_2 + A_{3'3}\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

这就是新旧坐标基矢之间的变换公式,它可以缩写成

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{3} A_{i'i}\boldsymbol{e}_i \quad (i' = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.3.4}$$

为了求 $A_{i'i}$,先改写式(1.3.4)中的哑标 $i$ 为 $l$,再用 $\boldsymbol{e}_i$ 点乘左、右两边,并利用式(1.2.3)得

$$\boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{l=1}^{3} A_{i'l}\boldsymbol{e}_l \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{l=1}^{3} A_{i'l}\delta_{li}$$

利用 $\delta$ 符号的性质求出对 $l$ 的作和,得

$$A_{i'i} = \boldsymbol{e}_{i'} \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{1.3.5}$$

由于 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 都是单位矢量,所以它们的点积就是它们夹角的余弦.因此,$A_{i'i}$ 等于新旧坐标轴夹角的余弦.

下面分几种情况讨论.

1. 坐标转动

在坐标转动过程中.坐标轴夹角的余弦 $A_{i'i}$ 可以在 $-1$ 到 $+1$之间连续地变化.在此过程中,三个坐标基矢结合成一个整体一道转动,因此坐标系的类型不变,即右手坐标系转动后仍然是右手坐标系,左手坐标系转动后仍然是左手坐标系.

2. 镜面反射

为了具体起见,假定是对 $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ 所在平面的镜面反射(图1.3).此时,第一个坐标基矢改号而另外两个基矢不变.用公式写出就是

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = -\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = \boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1.3.6}$$

和式(1.3.3)比较可见

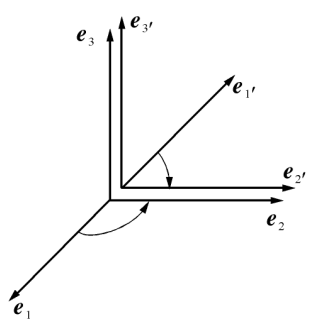


图 1.3 镜面反射

$$\begin{cases} A_{1'1} = -1,\ A_{2'2} = A_{3'3} = 1 \\ A_{i'i} = 0 \quad (i' \neq i) \end{cases} \tag{1.3.7}$$

由图 1.3 可见,镜面反射的结果,坐标系的类型发生改变——右手坐标系变成左手坐标系,左手坐标系变成右手坐标系.

3. 反演

三个坐标基矢都改号的变换叫反演(图 1.4).用公式写出就是

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{1'} = -\boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_{2'} = -\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_{3'} = -\boldsymbol{e}_3 \end{cases} \tag{1.3.8}$$

和式(1.3.3)比较可见

$$\begin{cases} A_{1'1} = A_{2'2} = A_{3'3} = -1 \\ A_{i'i} = 0 \quad (i' \neq i) \end{cases} \tag{1.3.9}$$

比较图 1.3 和图 1.4 可见,反演可以看成是先进行对 $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ 平面的镜面反射,然后绕第 1 轴转 180°而得到.由于转动不改变坐标系的类型,所以反演和镜面反射一样,使坐标系的类型发生变化——右手坐标系变成左手坐标系,左手坐标系变成右手坐标系.这一点也可以直接从图 1.4 看到.

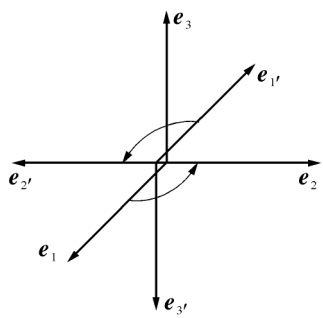



图 1.4　反演

## 1.3.2　赝矢量与赝标量

坐标基矢叉乘的定义式(1.2.10)(即式(1.2.6)),以及由它推出的两个任意矢量叉乘的公式(1.2.15)(即式(1.2.18))在任意坐标系中都有相同的形式.然而,在两类不同的坐标系中,坐标基矢之间有不同的旋转关系(图 1.2).因此,在这两类坐标系中,矢量的叉乘实际上得到不同的结果——在右手坐标系中,矢量的叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之间形成右手螺旋关系;而在左手坐标系中,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 之间形成左手螺旋关系.

我们常说两矢量的叉乘是一个矢量,现在发现它是一个

特殊的“矢量”.它的特殊性在坐标系的类型发生变化时显示出来.例如,假定在右手坐标系中计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,则它和 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 形成右手螺旋关系.经过坐标反演,坐标系变成左手坐标系,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 有左手螺旋关系(图 1.5).因此,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在坐标反演时改变方向.

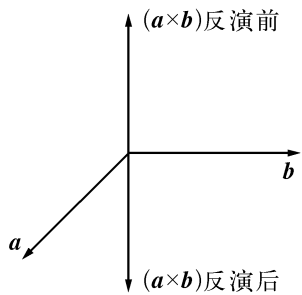



图 1.5 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 在反演后改变方向

这种在坐标反演时要改变方向的矢量叫做**赝矢量**①.除了两个真矢量的叉乘是赝矢量以外,角速度矢量、角动量矢量都是赝矢量的例子.

角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 是两个真矢量 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的叉乘积,因而是赝矢量.角速度原本是绕轴的转动,我们用矢量来表示它.按定义,角速度矢量沿转动轴,而其方向按右手或左手螺旋规则确定.采用右手还是左手规则,决定于所在的坐标系是右手还是左手.当坐标反演时,坐标系的类型改变,角速度矢量的方向也随之改变.所以角速度矢量是赝矢量.

由于坐标转动不改变坐标系的类型,所以如果只考虑坐标转动,赝矢量和真矢量没有区别.

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是两个真矢量,则它们的点积是一个在转动和反演下都不变的数.这样的数称为**标量**.

如果一个真矢量和一个赝矢量点乘,则所得到的数只在转动下不变,而在反演时要改号.这样的数称为**赝标量**.例如,三个真矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的混合连乘积 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 就是一个赝标量(因为 $\boldsymbol{a}$ 是真矢量,而 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 是赝矢量).

---

① 赝矢量又称为**轴矢量**,相应地称真矢量为**极矢量**.

### 1.3.3　矢量分量的变换规律

一个矢量(真矢量)$\boldsymbol{a}$用坐标基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 展开为

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.3.10}$$

在坐标变换(包括转动和反演)时,基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 发生变化(1.3.4),而作为一种客观物理对象的 $\boldsymbol{a}$ 应保持不变,因此 $\boldsymbol{a}$ 的分量 $a_i$ 必须相应地变化.

写出 $\boldsymbol{a}$ 用新坐标基矢 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 的展开式

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i'=1}^{3} a_{i'} \boldsymbol{e}_{i'} \tag{1.3.11}$$

它和式(1.3.10)应该相等,故有

$$\sum_{i'=1}^{3} a_{i'} \boldsymbol{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.3.12}$$

将等式左边的哑标改写为 $l'$,并用 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 点乘左、右两边,再利用式(1.2.3)和(1.3.5),得

$$a_{i'} = \sum_{i=1}^{3} A_{i'i} a_i \quad (i' = 1, 2, 3) \tag{1.3.13}$$

和式(1.3.4)比较可见,矢量的分量和坐标基矢有相同的变换规律.

如果 $\boldsymbol{a}$ 是赝矢量,情况就有所不同.在坐标反演时,赝矢量要改变方向(图 1.5).因此,式(1.3.12)应改写为

$$\sum_{i'=1}^{3} a_{i'} \boldsymbol{e}_{i'} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i & \text{(当坐标转动)} \\ \displaystyle -\sum_{i=1}^{3} a_i \boldsymbol{e}_i & \text{(当坐标反演)} \end{cases} \tag{1.3.14}$$

而式(1.3.13)应相应地写成

$$a_{i'}=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i'i}a_i & \text{（当坐标转动）}\\ -\sum\limits_{i=1}^{3}A_{i'i}a_i & \text{（当坐标反演）}\end{cases}\tag{1.3.15}$$

这说明，赝矢量的分量在坐标转动时和坐标基矢一样地变换，而在坐标反演时和坐标基矢的变换相差符号.

## 1.3.4 正交变换

以上所讨论的几种坐标变换(转动、反演和镜面反射)都保持矢量点积的公式(1.2.17)不变，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=\sum_{i'=1}^{3}a_{i'}b_{i'}\tag{1.3.16}$$

这样的变换称为**正交变换**.下面讨论正交变换的条件.

将式(1.3.13)代入式(1.3.16)，得

$$\sum_{i=1}^{3}a_ib_i=\sum_{i'=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}A_{i'j}a_ib_j$$

为使此式对于任意的矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 都成立，需要

$$\sum_{i'=1}^{3}A_{i'i}A_{i'j}=\delta_{ij}\tag{1.3.17}$$

式(1.3.17)是正交变换所应满足的一个条件.利用它可以得到式(1.3.13)的逆变换式.将式(1.3.13)右边的哑标改写为 $j$，然后用 $A_{i'i}$ 乘等式两边，并对 $i'$ 作和可得

$$\sum_{i'=1}^{3} A_{i'i}\boldsymbol{a}_{i'} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i'=1}^{3} A_{i'i}A_{i'j}\boldsymbol{a}_j$$

将式(1.3.17)代入,并利用 $\delta_{ij}$ 的性质算出对 $j$ 的作和,得

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{i'=1}^{3} A_{i'i}\boldsymbol{a}_{i'} \tag{1.3.18}$$

如果说式(1.3.13)是由 $\boldsymbol{a}_i$ 到 $\boldsymbol{a}_{i'}$ 的“正变换”,那么式(1.3.18)就是由 $\boldsymbol{a}_{i'}$ 到 $\boldsymbol{a}_i$ 的逆变换.用 $A^{-1}_{ii'}$ 表示这一逆变换的系数

$$\boldsymbol{a}_i = \sum_{i'=1}^{3} A^{-1}_{ii'}\boldsymbol{a}_{i'} \tag{1.3.19}$$

则由式(1.3.18)可知

$$A^{-1}_{ii'} = A_{i'i} \tag{1.3.20}$$

如果将($A_{i'i}$)看成一个矩阵,则($A^{-1}_{ii'}$)是它的转置逆矩阵.式(1.3.20)表明,正交变换矩阵的转置逆矩阵等于它自身.这可以简写为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A} \tag{1.3.21}$$

满足这一条件的矩阵称为**正交矩阵**.

将式(1.3.18)和 $b_i$, $b_{i'}$ 的类似式子代入式(1.3.16)中,不难证明

$$\sum_{i=1}^{3} A_{i'i}A_{j'i} = \delta_{i'j'} \tag{1.3.22}$$

式(1.3.17)、(1.3.22)和式(1.3.21)(或(1.3.20))等效.它们是正交矩阵所应满足的条件.

式(1.3.17)和(1.3.22)这两式有直观的意义.注意,$A_{i'i}$ 的第一个下标 $i'$ 是矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} A_{1'1} & A_{1'2} & \cdots \\ A_{2'1} & A_{2'2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{1.3.23}$$

的行标号，而 $A_{i'i}$ 的第二个下标 $i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列标号.式(1.3.22)的右边当 $i'\neq j'$ 时等于0，这表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同行的对应元素相乘作和等于0；而式(1.3.22)的右边当 $i'=j'$ 时等于1，这表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 同一行的各元素的平方和等于1.将每一行的三个元素看成一个矢量的三个分量，则上述论断可以表述为，正交矩阵的不同行所代表的矢量相互正交，而每一行所代表的矢量长度为1.类似地，式(1.3.17)表明，正交矩阵的不同列所代表的矢量相互正交，而每一列所代表的矢量长度为1.

## 1.4 三维欧氏空间中张量的定义

### 1.4.1 三维欧氏空间

普通的三维空间称为三维欧氏空间①.“欧氏”两个字表示这一空间中的几何学是初等欧几里得几何.

欧几里得几何中有一条“勾股弦定理”，它指出：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方，即

$$a^2+b^2=c^2$$

如图1.6所示.如果在三维空间中有一个矢量 $\boldsymbol{x}$，它的三个分量是 $x^1$，$x^2$，$x^3$，则将勾股弦定理应用两次可见，$\boldsymbol{x}$ 的长度的平方($\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$)等于三个分量的平方和，即

① 在本书中，不加说明的“欧氏空间”都指真欧氏空间.

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{3}x_i^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i x_j\delta_{ij} \tag{1.4.1}$$

如图 1.7 所示.

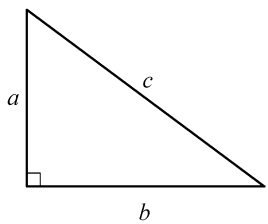



图 1.6　直角三角形的勾股弦

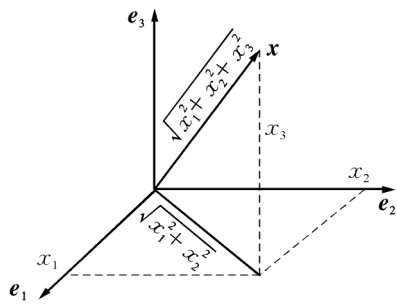



图 1.7　三维欧氏空间中矢量的长度

式(1.4.1)是式(1.2.12)

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i y_j\delta_{ij}$$

的特例.我们在这里强调,它成立的条件是欧几里得几何学中的勾股弦定理,因而只在欧氏空间中才成立.可以用式(1.2.12)作为欧氏空间的定义.

**定义 1.1**　矢量点积的公式具有式(1.2.12)形式的空间称为(**真**)**欧氏空间**.

下面给出三维欧氏空间中张量的定义.

## 1.4.2　张量的定义

### 1. 一阶张量

前面已经指出,一阶张量的最简单例子是矢量.现在我们要为它下一个精确的定义.

把矢量称为一阶张量是强调它在坐标变换时的变换性质.考虑一个矢量 $\boldsymbol{x}$,它在某一坐标系 $\boldsymbol{e}_i$($i=1,2,3$)中的分量是 $x_i$($i=1,2,3$).当坐标变换时,$\boldsymbol{x}$ 的分量也要发生变换,如式(1.3.13)和(1.3.15).但是,矢量 $\boldsymbol{x}$ 是一个客观存在的与坐标系的选择无关的对象.我们所关心的是矢量 $\boldsymbol{x}$ 本身所具有的与坐标系的选择无关的性质;然而,在定量地研究这些性质时,又必须利用 $\boldsymbol{x}$ 在一定的坐标系中的分量 $x_i$.这是一个矛盾,而"张量"的概念正是从这一矛盾中引出的.

为了解决上述矛盾,在某一坐标系中给出一阶张量的分量 $x_i$ 的同时,还规定它在坐标变换时的变换规律.这样一来,就等于知道了它在任意坐标系中的分量,从而得到了一个与坐标系的选择无关的客观物理量.

遵循这一思路,我们将前面得到过的变换规律式(1.3.13)和(1.3.15)提升作为定义来定义一阶张量.

**定义 1.2** 在坐标系 $\boldsymbol{e}_i$($i=1,2,3$)中给定三个数 $x_i$($i=1,2,3$).如果当坐标变换

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}\boldsymbol{e}_i \tag{1.4.2}$$

时,它按

$$x_{i'}=\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i \tag{1.4.3}$$

变,则称它为**一阶张量**;如果它按

$$x_{i'}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i & (\text{当坐标转动})\\ \displaystyle-\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}x_i & (\text{当坐标反演})\end{cases} \tag{1.4.4}$$

变,则称它为**一阶赝张量**.

显然,矢量的三个分量构成一个一阶张量.但不要以为一阶张量只能由矢量的分量构成.例如,设有一个不经过原点的平面,它的方程可以写成

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 1 \tag{1.4.5}$$

不难证明,当坐标变换为式(1.4.2)时,三个分量 $a_i$($i$=1, 2, 3)也按规律(1.4.3)变换.因此,它们也构成一阶张量.

2. 二阶张量

作为二阶张量的例子,考虑在 1.1 节中讨论过的各向异性介质中的电极化率 $\alpha_{ij}$.$\alpha_{ij}$ 在两个一阶张量 $E_j$ 和 $P_i$ 之间建立线性联系:

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} E_j \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.4.6}$$

在坐标变换(1.4.2)时,$E_j$ 变成 $E_{j'}$,$P_i$ 变成 $P_{i'}$,相应地 $\alpha_{ij}$ 也变成 $\alpha_{i'j'}$,使式(1.4.6)不变:

$$P_{i'} = \sum_{j'=1}^{3} \alpha_{i'j'} E_{j'} \quad (i' = 1, 2, 3) \tag{1.4.7}$$

将一阶张量 $E_j$ 和 $P_i$ 的变换规律

$$E_{j'} = \sum_{j=1}^{3} A_{j'j} E_j \qquad P_{i'} = \sum_{i=1}^{3} A_{i'i} P_i$$

代入式(1.4.7),得

$$\sum_{i=1}^{3} A_{i'i} P_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{j'=1}^{3} \alpha_{i'j'} A_{j'j} E_j$$

将式(1.4.6)代入,并改写右边的哑标 $j'$ 为 $l'$,得

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}\alpha_{ij}\boldsymbol{E}_j=\sum_{j=1}^{3}\sum_{l'=1}^{3}\alpha_{i'l'}A_{l'j}\boldsymbol{E}_j$$

这一等式对任意 $\boldsymbol{E}_j$ 都成立,因而有

$$\sum_{i=1}^{3}A_{i'i}\alpha_{ij}=\sum_{l'=1}^{3}\alpha_{i'l'}A_{l'j}$$

用 $A_{j'j}$ 乘左、右两边,对 $j$ 作和,将式(1.3.22)代入,然后用 $\delta$ 符号的性质求出对 $l'$ 的作和,得

$$\alpha_{i'j'}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}A_{i'i}A_{j'j}\alpha_{ij} \tag{1.4.8}$$

这就是二阶张量 $\alpha_{ij}$ 在坐标变换时的变换规律.与式(1.4.2)比较可见,$\alpha_{ij}$ 的两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律进行变换,这可以作为二阶张量的定义.

**定义 1.3** 在任一坐标系中给出具有两个下标的 9 个数,当坐标变换时,这两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律进行变换,则这 9 个数构成一个**二阶张量**.

这一定义中谈到的是二阶"真"张量.如果所给的 9 个数在坐标反演时,除了两个下标分别独立地按照和坐标单位矢量的变换规律相同的规律变换之外,还要改号,则得到的是**二阶赝张量**.

从以上对于一阶和二阶张量的定义可以看出,在张量的定义中包含两个要点:第一,在某一坐标系中给出一组数;第二,给出这一组数在坐标变换时的变换规律.由于有了第二点,所以尽管张量分量的具体数值是在某一特定的坐标系中给出的,实际上也就知道了它在任意坐标系中的分量数值.而这样一来,就有了可能深入研究张量所具有的与坐标系无关的性质.

下面,在介绍了高阶张量的一般定义以后,将要进一步说明如何利用张量计算来研究张量所具有的与坐标系无关的不变性质.先来看两个二阶张量的例子.

**例 1.1**　当弹性物体发生形变时,在它内部的各部分之间会出现相互作用力,称为应力.

考虑这样一个物体内部的一个小元面积(图 1.8),设其大小为 $\mathrm{d}\alpha$,法线方向单位矢量为 $\boldsymbol{n}$,则 $\mathrm{d}\alpha=\boldsymbol{n}\mathrm{d}\alpha$ 是代表这一元面积的矢量.位于这一元面积左边部分的物体(图 1.8 中用 I 表示)对位于它右边部分的物体(图 1.8 中用 II 表示)作用一个力 $\boldsymbol{f}$.一般说来,$\boldsymbol{f}$ 的方向和 $\mathrm{d}\alpha$ 的方向不同,它包含平行于 $\mathrm{d}\alpha$ 的压应力和垂直于 $\mathrm{d}\alpha$ 的切应力两部分,但当 $\mathrm{d}\alpha$ 很小时,力 $\boldsymbol{f}$ 和面积元 $\mathrm{d}\alpha$ 有线性关系.改变 $\mathrm{d}\alpha$ 的大小和方向,力 $\boldsymbol{f}$ 的大小和方向也随之改变,因而可以写

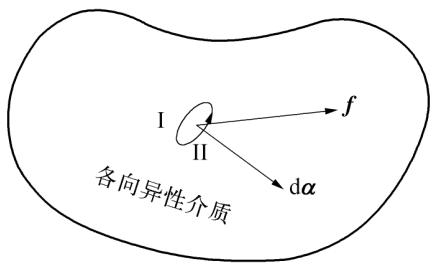


图 1.8　各向异性介质中的应力

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{F}(\mathrm{d}\alpha)$$

其中,$\boldsymbol{F}(\mathrm{d}\alpha)$表示以 $\mathrm{d}\alpha$ 为自变量的一个线性矢量函数.将 $\boldsymbol{f}$ 和 $\mathrm{d}\alpha$ 用某一坐标系中的分量表示

$$\boldsymbol{f}:\ f_1,\ f_2,\ f_3$$
$$\mathrm{d}\alpha:\ \mathrm{d}\alpha_1,\ \mathrm{d}\alpha_2,\ \mathrm{d}\alpha_3$$

则上述函数关系可以写成

$$\begin{cases} f_1=\sigma_{11}\mathrm{d}\alpha_1+\sigma_{12}\mathrm{d}\alpha_2+\sigma_{13}\mathrm{d}\alpha_3 \\ f_2=\sigma_{21}\mathrm{d}\alpha_1+\sigma_{22}\mathrm{d}\alpha_2+\sigma_{23}\mathrm{d}\alpha_3 \\ f_3=\sigma_{31}\mathrm{d}\alpha_1+\sigma_{32}\mathrm{d}\alpha_2+\sigma_{33}\mathrm{d}\alpha_3 \end{cases}$$

或缩写成

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\, \mathrm{d}\alpha_j \tag{1.4.9}$$

容易证明,这一式子中的 $\sigma_{ij}$ 是一个二阶张量(称为应力张量).重复由式(1.4.6)到式(1.4.8)的推导,就可以证明这一诊断.

**例 1.2** 证明按式(1.2.2)定义的二阶对称 $\delta$ 符号

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{1.4.10}$$

是一个二阶张量.

**证** 假定在某一坐标系中按式(1.4.10)给出了 $\delta_{ij}$.我们所要证明的是,如果在坐标变换时,让它按二阶张量的规律变,则在新坐标系中,它的分量仍然取式(1.4.10)所规定的值.

按张量的变换规律(1.4.8)有

$$\delta_{i'j'} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} A_{i'i} A_{j'j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} A_{i'i} A_{j'i}$$

但是,根据正交变换的性质(1.3.22)有

$$\sum_{i=1}^{3} A_{i'i} A_{j'i} = \begin{cases} 0 & (i' \neq j') \\ 1 & (i' = j') \end{cases}$$

这就证明了,按式(1.4.10)定义的 $\delta_{ij}$ 在坐标变换后,其各个分量的值不变.也就是说,在任意坐标系中都按式(1.4.10)定义的二阶对称 $\delta$ 符号是一个二阶张量.

3. 高阶张量

高阶张量的定义可以从一阶和二阶张量的定义推广而来.

**定义 1.4**　在任一坐标系中给出具有 $\nu$ 个下标的 $3^{\nu}$ 个数，当坐标变换时，这 $\nu$ 个下标分别独立地按照和坐标基矢的变换规律相同的规律变换，

$$a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \tag{1.4.11}$$

则这 $3^{\nu}$ 个数 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 构成一个 **$\nu$ 阶张量**.

如果 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 在坐标转动时按式(1.4.11)变，而在坐标反演时，比式(1.4.11)差一个符号，

$$a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} & \text{（当坐标转动）} \\ \displaystyle -\sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} & \text{（当坐标反演）} \end{cases} \tag{1.4.12}$$

则 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 构成一个 **$\nu$ 阶赝张量**.

以上各式中的作和符号没有写出作和范围，而隐含着从 1 到 3 的作和.这一规定在本章中全部适用，以下不再一一指出.

实际上，上述定义是张量的普遍定义，其中包括 $\nu=0$ 的零阶张量，即标量(赝标量)，以及 $\nu=1$，2 的一阶、二阶张量(赝张量).下面再举一个三阶张量($\nu=3$)的例子.

**例 1.3**　有些晶体有压电效应.当它由于形变而产生应力时，会出现电场.用 $\sigma_{jk}$ 表示应力张量(见例 1.1)，$D_i$ 表示由于压电效应产生的电感应矢量 $\boldsymbol{D}$ 的分量，则 $D_i$ 是 $\sigma_{jk}$ 的函数.这一函数关系可以写成

$$D_i = \sum_{jk} 4\pi \gamma_{ijk} \sigma_{jk} \tag{1.4.13}$$

式中，$\gamma_{ijk}$ 是一个三阶张量(称为压电张量).

**证** 当坐标变换时，$D_i$ 和 $\sigma_{jk}$ 分别按式(1.4.3)和(1.4.8)变换为

$$D_{i'} = \sum_i A_{i'i} D_i \tag{1.4.14}$$

$$\sigma_{j'k'} = \sum_{jk} A_{j'j} A_{k'k} \sigma_{jk} \tag{1.4.15}$$

将式(1.4.15)按式(1.3.18)的形式写成逆变换

$$\sigma_{jk} = \sum_{j'k'} A_{j'j} A_{k'k} \sigma_{j'k'} \tag{1.4.16}$$

将式(1.4.16)和(1.4.13)一并代入式(1.4.14)，有

$$\begin{aligned} D_{i'} &= \sum_{ijk} 4\pi A_{i'i} \gamma_{ijk} \sigma_{jk} \\ &= \sum_{ijk} \sum_{j'k'} 4\pi A_{i'i} A_{j'j} A_{k'k} \gamma_{ijk} \sigma_{j'k'} \end{aligned}$$

但是，在新坐标系中，压电效应的规律式(1.4.13)也应成立，即

$$D_{i'} = \sum_{j'k'} 4\pi \gamma_{i'j'k'} \sigma_{j'k'}$$

比较以上二式，得

$$\gamma_{i'j'k'} = \sum_{ijk} A_{i'i} A_{j'j} A_{k'k} \gamma_{ijk} \tag{1.4.17}$$

这就证明了 $\gamma_{ijk}$ 是三阶张量.

### 1.4.3 一阶和二阶张量的整体符号

以上我们是在笛卡儿坐标中给出张量的分量来定义张量.但是，一阶和二阶张量也可以用整体符号表示，这种表示在有些

情况下用起来比较方便.

以一阶张量为例,它用分量写出是 $a_i$,将 $a_i$ 乘上坐标基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 并作和,就得到

$$\boldsymbol{a}=\sum_i a_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4.18}$$

式中,$\boldsymbol{a}$ 就是代表一阶张量的整体符号.它就是通常的矢量符号.

与此类似,将二阶张量的分量 $a_{ij}$ 乘上坐标基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 并作和,得到代表二阶张量的整体符号

$$\ddot{\boldsymbol{a}}=\sum_{ij} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{1.4.19}$$

注意,上式右边并排书写的两个矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 之间不进行任何矢量运算——既不叉乘,也不点乘.它们是两个独立的单位矢量,共同构成二阶张量的基.有时称两个矢量并列,不进行叉乘或点乘,为**并矢**.

将式(1.4.18)中的哑标 $i$ 改为 $l$,再用 $\boldsymbol{e}_i$ 点乘,得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i=\sum_i a_l(\boldsymbol{e}_l\cdot\boldsymbol{e}_i)$$

利用式(1.2.3)就可看到,上式右边等于 $a_i$,即

$$a_i=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{1.4.20}$$

这是由整体符号 $\boldsymbol{a}$ 求分量 $a_i$ 的公式.

类似地,将式(1.4.19)中的哑标 $i$, $j$ 改写为 $l$, $m$,再用 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $\boldsymbol{e}_j$ 分别从左边和右边点乘,得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_i\cdot\ddot{\boldsymbol{a}}\cdot\boldsymbol{e}_j&=\sum_{lm} a_{lm}(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_l)(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_j)\\&=\sum_{lm} a_{lm}\delta_{il}\delta_{mj}=a_{ij}\end{aligned}$$

即

$$a_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{a}} \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{1.4.21}$$

这是由二阶张量的整体符号 $\overrightarrow{\overrightarrow{a}}$ 求分量 $T_{ij}$ 的公式.

**例 1.4** 将电极化的规律式(1.4.6)写成整体符号的形式.

**解** 电极化率 $\alpha_{ij}$ 写成整体符号是

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} = \sum_{ij} \alpha_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \tag{1.4.22}$$

将它和电场强度

$$\boldsymbol{E} = \sum_i E_i \boldsymbol{e}_i \tag{1.4.23}$$

点乘,得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} \cdot \boldsymbol{E} &= \sum_{ij} \sum_k \alpha_{ij} E_k \boldsymbol{e}_i (\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) \\ &= \sum_{ij} \sum_k \alpha_{ij} E_k \boldsymbol{e}_i \delta_{jk} \\ &= \sum_i \boldsymbol{e}_i \left( \sum_j \alpha_{ij} E_j \right) \end{aligned}$$

将式(1.4.6)代入,得

$$\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} \cdot \boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{e}_i P_i = \boldsymbol{P} \tag{1.4.24}$$

这就用整体符号写出了电极化规律式(1.4.6).

从这个例子看到,写成整体符号的二阶张量,可以和矢量(一阶张量)点乘,得到另一矢量.这种点乘一般说来与次序有关,即 $\boldsymbol{E} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}}$ 一般说来不等于 $\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}} \cdot \boldsymbol{E}$,只在 $\overrightarrow{\overrightarrow{\alpha}}$ 是对称二阶张量——$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ 时,两者才相等.

一个重要的二阶张量是 $\delta_{ij}$(见例 1.2),它称为二阶**单位张**

量,其整体符号是

$$\overset{\leftrightarrow}{e}=\sum_{ij}\delta_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\sum_i\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i \tag{1.4.25}$$

它和任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 的点积还等于这一矢量自身,即

$$\overset{\leftrightarrow}{e}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\overset{\leftrightarrow}{e}=\boldsymbol{a} \tag{1.4.26}$$

**证**

$$\overset{\leftrightarrow}{e}\cdot\boldsymbol{a}=\sum_i\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{a})=\sum_i\boldsymbol{e}_i a_i=\boldsymbol{a}$$

对于 $\boldsymbol{a}\cdot\overset{\leftrightarrow}{e}$ 也有同样结果.

## 1.5　三维欧氏空间中的张量运算

本节先讨论三维欧氏空间中张量的几种代数运算,然后再举一些例子.张量场以及它的微分运算将在下一节讨论.

### 1.5.1　张量的运算

张量运算的基本要求是,运算结果所得到的仍然是一个张量.这一要求的理由是,只有这样才能使运算在坐标变换下具有不变性,从而能够在任意坐标系中进行.

张量的代数运算包括加法、乘法、缩并和置换.

1. 张量的加法

设有两个同阶张量 $a_{i_1i_2\cdots i_\nu}$ 和 $b_{i_1i_2\cdots i_\nu}$,它们的和是对应分量分别作和,即

$$c_{i_1i_2\cdots i_\nu}=a_{i_1i_2\cdots i_\nu}+b_{i_1i_2\cdots i_\nu} \tag{1.5.1}$$

容易证明，如果在任一坐标系中都按此计算，则 $c_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 构成一个 $\nu$ 阶张量，即它按 $\nu$ 阶张量的变换规律变换. 这就是说，按式(1.5.1)定义的加法运算对坐标变换具有不变性.

注意，只有阶数相同的张量才能相加.

2. 张量的乘法

设有两个张量 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}$，$b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$，则它们的乘积是

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu} b_{i_{\mu+1} i_{\mu+2} \cdots i_{\mu+\nu}} \tag{1.5.2}$$

很容易证明，按此式定义的 $c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}}$ 是一个 $\mu+\nu$ 阶的张量.

注意，进行乘法的两个张量的阶数不一定相同，乘积张量的阶数等于它们二者的阶数之和.

还应注意，在式(1.5.1)和(1.5.2)中，下标 $i_1$，$i_2$，…，$i_{\mu+\nu}$ 都只能取 1，2，3 这三个值；而“下标的下标”1，2，…，$\mu+\nu$ 是用来标志各个不同下标的符号，取从 1 到 $\nu$[在(1.5.1)中]和从 1 到 $\mu+\nu$[在(1.5.2)中]的整数值.

张量乘法的最简单例子是两个一阶张量相乘得二阶张量. 设有两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的分量 $a_i$，$b_j$ 构成两个一阶张量；它们的乘积

$$c_{ij} = a_i b_j \tag{1.5.3}$$

是一个二阶张量，称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**并矢**. 利用式(1.4.19)定义的整体符号，可将并矢写为

$$\vec{\vec{c}} = \sum_{ij} c_{ij} \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \Big( \sum_i a_i \boldsymbol{e}_i \Big) \Big( \sum_j b_j \boldsymbol{e}_j \Big) = \boldsymbol{ab}$$

3. 张量的缩并

设有一个二阶以上的张量 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$（$\nu \geqslant 2$），任意选定它的两

个下标，例如第 1 个和第 $\nu$ 个下标，将这两个下标取相等值的那些分量抽出来并作和，得

$$c_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}} = \sum_{l} a_{l i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1} l} \tag{1.5.4}$$

则 $c_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}}$ 称为 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 对下标 $i_1$ 和 $i_\nu$ 的**缩并**，它有 $\nu-2$ 个下标，我们来证明它是一个 $\nu-2$ 阶张量.

**证**　在坐标变换时，$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 变为

$$a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$$

在新坐标系中，类似于式(1.5.4)，有

$$\begin{aligned} c_{i'_2 i'_3 \cdots i'_{\nu-1}} &= \sum_{l'} a_{l' i'_2 i'_3 \cdots i'_{\nu-1} l'} \\ &= \sum_{l'} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{l' i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_{\nu-1} i_{\nu-1}} A_{l' i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \end{aligned}$$

利用式(1.3.17)计算对 $l'$ 的作和，得到 $\delta_{i_1 i_\nu}$，从而又可以算出对 $i_\nu$ 的作和.于是有

$$c_{i'_2 i'_3 \cdots i'_{\nu-1}} = \sum_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_{\nu-1} i_{\nu-1}} \left( \sum_{i_1} a_{i_1 i_2 \cdots i_{\nu-1} i_1} \right)$$

将此式中的哑标 $i_1$ 改写成 $l$，和式(1.5.4)相比得

$$c_{i'_2 i'_3 \cdots i'_{\nu-1}} = \sum_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}} A_{i'_2 i_2} A_{i'_3 i_3} \cdots A_{i'_{\nu-1} i_{\nu-1}} c_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}}$$

这就证明了 $c_{i_2 i_3 \cdots i_{\nu-1}}$ 是一个 $\nu-2$ 阶的张量.

缩并运算是一种重要的张量运算.常常还会用到将两个张量先乘起来再缩并的运算.例如，将一个三阶张量 $a_{ijk}$ 和一个二阶张量 $b_{lm}$ 相乘，得到一个五阶张量

$$c_{ijklm} = a_{ijk} b_{lm}$$

然后，再将 $j$ 和 $l$ 缩并，$k$ 和 $m$ 缩并，得到一个一阶张量

$$d_i = \sum_{jk} c_{ijkjk} = \sum_{jk} a_{ijk} b_{jk} \tag{1.5.5}$$

有时简称 $d_i$ 为 $a_{ijk}$ 和 $b_{jk}$ 的缩并.

许多物理规律的数学表达式都含有张量的缩并.例如，各向异性介质的电极化规律，式(1.4.6)的右边是二阶张量 $\alpha_j$ 和一阶张量 $E_j$ 的缩并；各向异性介质中的应力，式(1.4.9)是二阶张量 $\sigma_{ij}$ 和一阶张量 $\mathrm{d}\alpha_j$ 的缩并；压电效应式(1.4.13)是三阶张量 $\gamma_{ijk}$ 和二阶张量 $\sigma_{jk}$ 的缩并.由于缩并以后仍然是张量，所以这些等式都是张量之间的等式.在坐标变换时，等式两边都按张量规律变，所以在任意坐标系中等式都成立.通常说，这种等式在坐标变换时是**协变的**.这句话的意思是说，由于等式左、右两边按同一规律变，所以在坐标变换过程中，等式始终成立.

4. 指标的置换

将一个张量 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$ 的任意两个下标，例如 $i_p$ 和 $i_q$ 的位置互换，仍然得到一个张量

$$b_{i_1 \cdots i_p \cdots i_q \cdots i_\nu} = a_{i_1 \cdots i_q \cdots i_p \cdots i_\nu} \tag{1.5.6}$$

这称为指标置换运算，也是一种重要的张量运算.

## 1.5.2 三阶完全反对称赝张量

现在来证明，按式(1.2.9)，或式(1.2.7)和(1.2.8)定义的三阶完全反对称 $\varepsilon$ 符号是一个三阶赝张量.为此先证明，张量指

标的对称性和反对称性在坐标变换下不变.

**证**　设张量 $a_{ijk\cdots m}$ 对下标 $jk$ 对称,即

$$a_{ijk\cdots m} = a_{ikj\cdots m} \tag{1.5.7}$$

此式右边是原张量对指标 $jk$ 置换的结果,所以仍然是一个张量.式(1.5.7)是张量之间的等式,因而在坐标变换下协变,在新坐标中也成立,即

$$a_{i'j'k'\cdots m'} = a_{i'k'j'\cdots m'}$$

即张量 $a_{ijk\cdots m}$ 对 $jk$ 的对称性在坐标变换下仍然保持.

同理,如果 $a_{ijk\cdots m}$ 对 $jk$ 反对称,即

$$a_{ijk\cdots m} = -a_{ikj\cdots m} \tag{1.5.8}$$

则由于它是张量等式,所以也是在任意坐标系中都成立.

现在来按式(1.2.7)和(1.2.8)定义一个有三个下标的量 $\varepsilon_{ijk}$,它对三个下标都反对称,即

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \tag{1.5.9}$$

而且

$$\varepsilon_{123} = 1 \tag{1.5.10}$$

我们在任意坐标系中都这样定义 $\varepsilon_{ijk}$,问题是这样得到的 $\varepsilon_{ijk}$ 是不是张量.

为了回答这一问题,假定在一个特定坐标系中按以上方式定义了 $\varepsilon_{ijk}$,然后让它按张量的变换规律变,看看在新坐标系中式(1.5.9)和(1.5.10)是否仍然成立.

由于下标的反对称性在坐标变换下保持,所以只要式(1.5.9)在一个坐标系中成立,它就在任意坐标系中都成立.需要检验的只是式(1.5.10).

由于下标的完全反对称性，$\varepsilon_{i'j'k'}$ 的 6 个不为 0 的分量或者相等，或者相差符号

$$\varepsilon_{1'2'3'} = \varepsilon_{2'3'1'} = \varepsilon_{3'1'2'} = -\varepsilon_{2'1'3'} = -\varepsilon_{1'3'2'} = -\varepsilon_{3'2'1'}$$

我们来计算 $\varepsilon_{i'j'k'}$ 的平方

$$\sum_{i'j'k'} (\varepsilon_{i'j'k'})^2 = \sum_{i'j'k'} \varepsilon_{i'j'k'}\varepsilon_{i'j'k'} = 6(\varepsilon_{1'2'3'})^2 \qquad (1.5.11)$$

另一方面，利用张量的变换性质有

$$\sum_{i'j'k'} (\varepsilon_{i'j'k'})^2 = \sum_{\substack{i'j'k' \\ ijk \\ lmn}} A_{i'i}A_{j'j}A_{k'k}\varepsilon_{ijk}A_{i'l}A_{j'm}A_{k'n}\varepsilon_{lmn}$$

再利用正交变换的性质式(1.3.17)，得

$$\sum_{i'j'k'} \varepsilon^2_{i'j'k'} = \sum_{\substack{ijk \\ lmn}} \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \sum_{ijk} \varepsilon^2_{ijk} = 6\varepsilon^2_{123} \qquad (1.5.12)$$

结合式(1.5.10)和(1.5.11)可见

$$\varepsilon^2_{1'2'3'} = 1 \qquad \varepsilon_{1'2'3'} = \pm 1 \qquad (1.5.13)$$

按式(1.5.10)，在坐标变换前，$\varepsilon_{123}=1$；而由式(1.5.13)知道，在坐标变换后，$\varepsilon_{1'2'3'}$ 可能等于+1，也可能等于−1.

由于坐标转动是连续变换，不可能引起从+1 到−1 的突变，所以在坐标转动下 $\varepsilon_{1'2'3'}=+1$，符合式(1.5.10).

当坐标反演时，按式(1.3.9)有

$$A_{1'1} = A_{2'2} = A_{3'3} = -1$$

$$A_{1'2} = A_{2'1} = A_{2'3} = A_{3'2} = A_{3'1} = A_{1'3} = 0$$

因此

$$\varepsilon_{1'2'3'} = A_{1'1}A_{2'2}A_{3'3}\varepsilon_{123} = (-1)^3 \times 1 = -1$$

和式(1.5.10)差符号.

我们看到,如果让 $\varepsilon_{ijk}$ 按三阶真张量的规律变换,则在坐标转动下式(1.5.10)仍然成立,而在坐标反演下和式(1.5.10)差符号.我们希望在任意坐标系中,式(1.5.9)和(1.5.10)都成立,因此 $\varepsilon_{ijk}$ 应该在坐标转动下和三阶真张量的变换相同,而在坐标反演下,和三阶真张量的变换规律差符号.这也就是说,$\varepsilon_{ijk}$ 应该按三阶赝张量的规律变.

这样,我们就证明了,在任意坐标系中都按式(1.5.9)和(1.5.10)定义的 $\varepsilon_{ijk}$ 是一个三阶赝张量,称为**三阶完全反对称赝张量**.

### 1.5.3　三维欧氏空间中的二阶张量

除一阶张量(矢量)以外,二阶张量是在实际中用得最多的一种张量.下面我们着重讨论二阶张量的性质.

1. 将二阶张量分为对称和反对称部分

如果一个二阶张量 $b_{ij}$ 对它的两个下标的交换对称,即

$$b_{ij} = b_{ji}$$

就称它为**二阶对称张量**;而如果二阶张量 $c_{ij}$ 对下标的交换反对称,即

$$c_{ij} = -c_{ji}$$

就称它为**二阶反对称张量**.

一般说来,任意张量 $a_{ij}$ 既不对称,又不反对称.取它的分量

$a_{ij}$ 和下标置换后的分量 $a_{ji}$ 之和用 2 除，得到一个新的张量

$$b_{ij} = a_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \tag{1.5.14}$$

这一运算称为下标 $ij$ 的**对称化**，我们用圆括号将 $ij$ 括起来表示对称化运算．显然 $b_{ij}$ 是一个对称张量．

如果取 $a_{ij}$ 和 $a_{ji}$ 之差用 2 除，得

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \tag{1.5.15}$$

这一运算称为下标 $ij$ 的**反对称化**，用下标 $ij$ 加方括号表示．显然，$c_{ij}$ 是一个反对称张量．

将以上二式相加，得

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]} \tag{1.5.16}$$

这样就将一个任意的二阶张量展开成了对称部分和反对称部分之和．

2. 反对称二阶张量

我们来特别研究一下反对称二阶张量 $b_{ij}$．根据它的反对称性知道，只有当 $i \neq j$ 时 $b_{ij}$ 才不等于 0，因而它只有 6 个不为 0 的分量．这 6 个分量组成三对相差符号

$$b_{12} = -b_{21} \qquad b_{23} = -b_{32} \qquad b_{31} = -b_{13} \tag{1.5.17}$$

排成矩阵形式就是

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & -b_{31} \\ -b_{12} & 0 & b_{23} \\ b_{31} & -b_{23} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.18}$$

可见,有实质意义的(可以独立取值的)只有三个分量 $b_{12}$, $b_{23}$, $b_{31}$.我们来证明,这三个分量组成一个赝矢量.

为此,取三阶赝张量 $\varepsilon_{ijk}$ 和 $b_{jk}$ 缩并,然后用 2 除得到一个一阶赝张量(即赝矢量)

$$a_i = \frac{1}{2}\sum_{jk}\varepsilon_{ijk}b_{jk} \tag{1.5.19}$$

利用式(1.2.9)和(1.5.17),得

$$\begin{cases} a_1 = b_{23} = -b_{32} \\ a_2 = b_{31} = -b_{13} \\ a_3 = b_{12} = -b_{21} \end{cases} \tag{1.5.20}$$

因而式(1.5.18)可以写成

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.21}$$

因此,反对称二阶张量实质上等同于一个赝矢量①.

**例 1.5**　已知磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是一个赝矢量,试将它写成一个反对称二阶张量.

**解**　按式(1.5.21),与 $\boldsymbol{H}$ 对应的二阶张量是

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 \\ -H_3 & 0 & H_1 \\ H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5.22}$$

① 这一结论只在三维欧氏空间中成立.因为,只是在三维欧氏空间中,完全反对称赝张量才是三阶的.

或

$$\begin{cases} F_{11} = F_{22} = F_{32} = 0 \\ F_{12} = -F_{21} = H_3, \ F_{23} = -F_{32} = H_1 \\ F_{31} = -F_{13} = H_2 \end{cases} \tag{1.5.23}$$

它称为**磁场强度张量**.

3. 二阶张量的不变量

利用二阶张量的 9 个分量可以组成一些在坐标变换时不变的量(即标量).在实际问题中这些不变量具有重要的物理意义.

设有一个二阶张量 $a_{ij}$,将它的两个下标缩并,就得到一个零阶张量,即标量

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{1.5.24}$$

它称为张量 $a_{ij}$ 的**迹**.

如果 $a_{ij}$ 对下标 $ij$ 反对称,则所有 $i=j$ 的分量都是 0,因此,反对称二阶张量的迹为 0.

**例 1.6** 求两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的并矢的迹.

**解** $a_i$ 与 $b_j$ 的并矢是

$$c_{ij} = a_i b_j$$

它的迹是

$$\sum_{i=1}^{3} c_{ii} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

因此,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的并矢的迹就是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的点积.

二阶张量的迹可以利用 $\delta_{ij}$ 改写为

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = \sum_{ij} a_{ij}\delta_{ij} \tag{1.5.25}$$

因此，二阶张量 $a_{ij}$ 的迹是它与 $\delta_{ij}$ 的缩并.

为了得到 $a_{ij}$ 的另一个不变量，可以利用三阶完全反对称张量 $\varepsilon_{ijk}$ .取两个 $\varepsilon_{ijk}$ 和三个 $a_{ij}$ 缩并，将全部下标缩并掉，得到一个零阶张量(标量)

$$\frac{1}{3!}\sum_{\substack{ijk\\lmn}} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn} \tag{1.5.26}$$

不难证明，这样得到的不变量就是 $a_{ij}$ 的行列式，即

$$\frac{1}{3!}\sum \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}a_{il}a_{jm}a_{kn} = |a_{ij}| \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.5.27}$$

**证**　由于式(1.5.26)中有 $\varepsilon_{lmn}$，对 $l$，$m$，$n$ 作和，只有 $l$，$m$，$n$ 分别等于 1，2，3 的 6 项不为 0.首先看 $l=1$，$m=2$，$n=3$ 的一项.根据式(1.5.10)和(1.2.19)，有

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{123}a_{i1}a_{j2}a_{k3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

对 $l$，$m$，$n$ 作和中的另外 5 项由 $\varepsilon_{123}$ 的下标交换而得到.例如，交换 1⇌2，有

$$\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{213}a_{i2}a_{j1}a_{k3} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

可以看出,所有这 6 项都相等,都等于 $a_{ij}$ 的行列式.这就证明了式(1.5.26).

## 1.6 矢量场与张量场 梯度 散度 旋度

以上讨论了三维欧氏空间中的张量以及它的几种代数运算.在这一节里讨论张量场以及它的微分运算.

近代物理认为不存在“超距作用”,粒子之间的作用通过“场”传递.例如,荷电粒子 $q_1$ 和 $q_2$ 之间的静电作用是通过 $q_1$($q_2$)产生电场,而 $q_2$($q_1$)受到电场的作用.同样,地球对月球的作用是地球产生引力场,而月球受到这一引力场的作用.

电力和引力都是矢量.电场和引力场是在空间每一点都有一个(电力或引力)矢量.在空间每一点都给定一个矢量就称为给定了一个矢量场.推广到在空间的每一点 $M(x_1, x_2, x_3)$,都给定一个同阶的张量,例如三阶张量 $a_{ijk}(M)$,就称它为一个**张量场**.

张量场

$$a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1, x_2, x_3)$$

的每一个分量都是 $M$ 的坐标 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 的函数.我们假定,这一函数的性质足够“好”,可以对 $x_1$, $x_2$, $x_3$ 求导到所需要的阶数.

### 1.6.1 导数张量

设有一个 $\nu$ 阶张量场 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M)$.它对 $x_l$ 的偏导数是

$$\partial_l \, a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M) \equiv \frac{\partial}{\partial x_l} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M) \tag{1.6.1}$$

我们来证明,它是一个 $\nu+1$ 阶的张量.

**证**　$M$ 点的坐标 $x_l$($l=1, 2, 3$)是一个一阶张量.它在坐标变换时的变换规律是

$$x_{l'} = \sum_l A_{l'l} x_l \tag{1.6.2}$$

根据式(1.3.18),上式的逆变换是

$$x_l = \sum_{l'} A_{l'l} x_{l'} \tag{1.6.3}$$

$\nu$阶张量的变换规律是

$$a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \tag{1.6.4}$$

将此式对 $x_{l'}$求导得

$$\partial_{l'} a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} \frac{\partial}{\partial x_{l'}} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \tag{1.6.5}$$

但是,$a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}$是 $x_l$ 的函数,而 $x_l$ 又是 $x_{l'}$ 的函数,如式(1.6.3),根据复合函数求导的法则

$$\frac{\partial}{\partial x_{l'}} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_l} a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \frac{\partial x_l}{\partial x_{l'}}$$

而由式(1.6.3),有

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_{l'}} = A_{l'l} \tag{1.6.6}$$

和上式一道代入式(1.6.5),得

$$\partial_{l'} a_{i'_1 i'_2 \cdots i'_\nu} = \sum_{l i_1 i_2 \cdots i_\nu} A_{l' l} A_{i'_1 i_1} A_{i'_2 i_2} \cdots A_{i'_\nu i_\nu} \partial_l a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu} \quad (1.6.7)$$

这就证明了式(1.6.1)是一个 $\nu+1$ 阶的张量.我们称它为张量场 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}(M)$的**导数张量**.它也依赖于空间点 $M$,因而是一个 $\nu+1$阶张量场.

将导数张量和 $\delta_{ij}$, $\varepsilon_{ijk}$用不同方法缩并,可以得到各种不同的张量场.下面举一些简单的、用途广泛的例子.

## 1.6.2 梯度 散度 旋度

标量场和矢量场(零阶和一阶张量场)的导数张量称为梯度、散度和旋度.它们在物理学中有着广泛的应用.下面来仔细地讨论它们.

1. 标量场的梯度

设有一个零阶张量场,即标量场 $a(M)$.它的导数张量是一个一阶张量场,称为这一标量场的**梯度**

$$(\mathbf{grad}\, a)_i = \frac{\partial}{\partial x_i} a \quad (1.6.8)$$

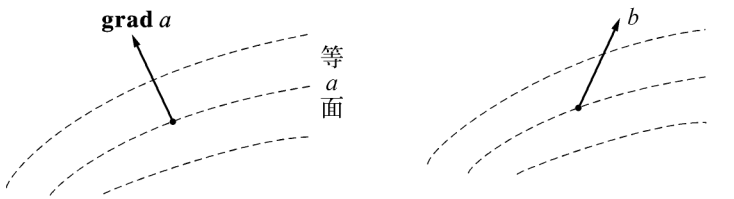
或用简写符号

$$\nabla a \equiv \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} a \quad (1.6.9)$$

写为

$$\mathbf{grad}\, a \equiv \nabla a = \frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{x}} \equiv \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{e}_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (1.6.10)$$

在三维空间中将 $a(M)$的值相同的点连结起来成为一个曲面，称为 $a$ 的**等值面**，简称**等 $a$ 面**．梯度$\underset{\nabla}{}a(M)$垂直于 $M$ 点处的等 $a$ 面(图 1.9(a))．它的方向表征了标量场 $a(M)$变化最快的方向，它的大小等于标量场 $a(M)$沿这一方向的变化率．




(a) 垂直于等$a$面移动时，$a$的变化率是$a$的梯度　　(b) 沿$\vec{b}$方向移动时，$a$的变化率是$a$沿$\vec{b}$的方向导数

图 1.9　等 $a$ 面与方向导数

电势(或引力势)场 $U(M)\equiv U(\boldsymbol{r})$ 是标量场的例子．它的梯度改号是电场(或引力场)强度矢量，即

$$-\underset{\nabla}{}U(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{1.6.11}$$

设 $\boldsymbol{b}$ 为一单位矢量，它决定空间中的一个方向(图 1.9(b))．从某一空间点 $M$ 出发，沿矢量 $\boldsymbol{b}$ 的方向移动时，$a$ 的变化率称为标量场 $a(M)$沿 $\boldsymbol{b}$ 的**方向导数**．它等于

$$\frac{\partial a}{\partial \boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}\cdot\underset{\nabla}{}a\equiv\sum_{i=1}^{3}(\vec{b}\cdot\vec{e}_i)\frac{\partial a}{\partial x_i} \tag{1.6.12}$$

2. 矢量场的散度　高斯定理

再来看一阶张量场 $a_i(M)$，即矢量场 $\boldsymbol{a}(M)$，它的导数张量是一个二阶张量场

$$\partial_l a_i\equiv\frac{\partial}{\partial x_l}a_i \tag{1.6.13}$$

将它和 $\delta_{li}$ 缩并，得到一个标量场，称为 $a_i$ 的**散度**

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_{li} \delta_{li} \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial \boldsymbol{x}_l} = \sum_i \frac{\partial \boldsymbol{a}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} \tag{1.6.14}$$

或用简写符号

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{a} \tag{1.6.15}$$

电磁学中的高斯定理告诉我们，通过封闭面的电通量等于封闭面所包围的体积 $V$ 中的总电荷的 $4\pi$ 倍，即

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{1.6.16}$$

式中，$\rho$ 是电荷密度.而数学分析的高斯定理则指出

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}V \tag{1.6.17}$$

上二式右边的积分区域 $V$ 是任意体积，因而被积函数相等，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{1.6.18}$$

电荷密度 $4\pi\rho$ 是产生电场的源头.矢量场的散度的物理意义是产生这一矢量场的源头.

高斯定理式(1.6.17)可以写成

$$\oint \sum \boldsymbol{E}_i \mathrm{d}S_i = \int_V \sum \frac{\partial \boldsymbol{E}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} \mathrm{d}V$$

去掉积分号、作和号和被积函数 $\boldsymbol{E}_i$，可将上式写成由封闭面的面积分向封闭面所包围的体积的体积分转化的规则

$$\mathrm{d}S_i \to \mathrm{d}V \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} \tag{1.6.19}$$

3. 矢量场的旋度　斯托克斯定理

将$\partial_j a_k$ 和 $\varepsilon_{ijk}$缩并，得到一个赝矢量场，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**旋度**

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k \tag{1.6.20}$$

明显写出来就是

$$\begin{cases} (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_1 = \dfrac{\partial a_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_2 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})_3 = \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{cases} \tag{1.6.21}$$

旋度的简写符号是

$$\mathbf{rot}\ \vec{a} \equiv \underset{\nabla}{\times} \boldsymbol{a} \tag{1.6.22}$$

和矢量场沿封闭面的面积分可以化为此矢量场的散度对封闭面所包围的体积的体积分相类似，矢量场沿闭合回线的线积分可以化为此矢量场的旋度对闭合回线所包围的面积的面积分，即

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.6.23}$$

其中，沿闭合回线积分的方向按右手螺旋决定面积元 $\mathrm{d}\vec{\sigma}$的正法线方向。或写为

$$\begin{aligned} \oint \sum_i A_i \mathrm{d}x_i &= \int_S \sum_i \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \mathrm{d}\sigma_i \\ &= \int_S \sum_i \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} A_i \mathrm{d}\sigma_j \end{aligned}$$

去掉积分号、对 $i$ 的作和号和被积函数 $A_i$，可将上式写成由闭合回线的线积分向闭合回线所包围的面积的面积分转化的规则：

$$\mathrm{d}x_i \to \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\,\mathrm{d}\sigma_j\,\frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.6.24}$$

## 1.6.3 高阶导数与乘积的导数

利用以上建立的工具，能很方便地得到矢量场的高阶导数与乘积导数的公式.下面举几个例子.

**例 1.7** 计算 **rot rot** $\boldsymbol{a}$.

**解** 将式(1.6.20)应用两次，得

$$(\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\boldsymbol{a})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla \times \boldsymbol{a})_k$$

$$= \sum_{jklm} \varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{klm}\,\frac{\partial}{\partial x_l}a_m$$

由于 $\varepsilon_{klm}$ 是常张量，可以提到求导之外，所以可以利用式(1.2.20)算出对 $k$ 的作和

$$(\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\boldsymbol{a})_i = \sum_{jlm} (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,\frac{\partial}{\partial x_l}a_m$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}a_i$$

定义**拉普拉斯算子**为

$$\triangle \equiv \nabla^2 = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{1.6.25}$$

得

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\boldsymbol{a} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\boldsymbol{a} - \triangle\boldsymbol{a} \tag{1.6.26}$$

这就是常用的 **rot rot**$\boldsymbol{a}$ 的公式.

**例 1.8**　计算 **rot**($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$).

**解**　利用式(1.6.20)和(1.2.15),得

$$\begin{aligned}[\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]_i &= \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k \\ &= \sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}(a_l b_m)\end{aligned}$$

对 $k$ 的作和可以利用式(1.2.20)算出,而对 $a_l b_m$ 的求导按普通函数乘积求导法则计算

$$\begin{aligned}[\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]_i &= \sum_{jlm}(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})\left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j}b_m + a_l\frac{\partial b_m}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_j b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - b_i\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial x_j} \\ &\quad + a_i\sum_j\frac{\partial b_j}{\partial x_j} - \sum_j a_j\frac{\partial b_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{a} \\ + \boldsymbol{a}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}\end{aligned} \tag{1.6.27}$$

这就是叉积的导数 **rot**($\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$)展开的公式.

**例 1.9**　计算 **grad**($\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$).

**解**　按定义有

$$[\mathbf{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})]_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_j a_jb_j\Big)$$

$$=\sum_j\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}b_j+a_j\frac{\partial b_j}{\partial x_i}\right)\qquad(1.6.28)$$

此式右边不能直接用梯度、散度、旋度表出,需要用一点技巧.先算第一项,在其中插进两个 δ 符号,并利用一次式(1.2.20),得

$$\sum_j\frac{\partial a_j}{\partial x_i}b_j=\sum_{jlm}\delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial a_l}{\partial x_m}b_j$$

$$=\sum_{jlm}\delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial a_l}{\partial x_m}b_j-\sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial a_l}{\partial x_m}b_j$$

$$=\sum_j b_j\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\sum_{jklm}\varepsilon_{ijk}b_j\varepsilon_{kml}\frac{\partial}{\partial x_m}a_l$$

$$=[(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\nabla\times\boldsymbol{a}]_i$$

对式(1.6.28)右边第二项也类似地计算,得

$$\mathbf{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\times\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}$$

$$+(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}\qquad(1.6.29)$$

这就是点积的导数 $\mathbf{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$展开的公式.

推导以上这些公式的关键在于,将张量计算和求导运算分离开,前者利用 δ 符号和 ε 符号计算,而剩下的求导运算和通常微积分的计算相同.利用这一规则可以算出更复杂的公式,例如

$$(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}+(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=\nabla\cdot(\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\ddot{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{E}^2/2)$$

这一公式的推导留作习题.

# 习　题　1

1. 利用矢量方法求证球面三角形中的余弦定理

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A$$

式中，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ 分别为大圆弧 $BC$，$CA$，$AB$ 所对应的圆心角；$A$ 为大圆弧 $BA$ 与 $CA$ 所在平面的夹角(图 1.10).

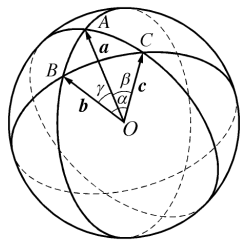



图 1.10　第 1 题图

2. 基矢 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 满足 $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$，试证明：

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)} \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)} \qquad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)}$$

3. 试证明：任一矢量 $\boldsymbol{r}$ 可以用基矢 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 写成

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2 + (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$$

4. 若 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu j_1 j_2 \cdots j_\nu}$ 和任意 $\nu$ 阶张量 $b_{j_1 j_2 \cdots j_\nu}$ 的缩并恒为 $\mu$ 阶张量，试证明：

$$a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu j_1 j_2 \cdots j_\nu}$$

为 $\mu+\nu$ 阶张量.

5. 上题可作为张量识别定理，其实张量识别定理还可表述为，若 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}$ 和任意 $\nu$ 阶张量 $b_{j_1 j_2 \cdots j_\nu}$ 的乘积为 $\mu+\nu$ 阶张量，则 $a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}$ 为 $\mu$ 阶张量.试求证此定理.

6. 根据张量识别定理证明：$\delta_{ij}$ 是二阶张量，$\varepsilon_{ijk}$ 为三阶张量.

7. 利用克罗内克(Kronecker)符号 $\delta_{ij}$ 和三阶完全反对称张量 $\varepsilon_{ijk}$ 证明：

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})] - \boldsymbol{a}[\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})]$$

$$= \boldsymbol{c}[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d})] - \boldsymbol{d}[\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})]$$

8. 试证明：

$$\mathrm{div}(\varphi\delta_{ij}) = \mathbf{grad}\ \varphi$$

$$\mathrm{div}(\varphi p_{ij}) = \varphi \mathrm{div}\ \overset{\cdot\cdot}{p} + \mathbf{grad}\varphi \cdot \overset{\cdot\cdot}{p}$$

其中，$\overset{\cdot\cdot}{p}$是二阶张量 $p_{ij}$ 的整体符号.

9. 将并矢张量 $\boldsymbol{ab}$ 分解为对称部分和反对称部分，试证明：与反对称部分相当的矢量为 $\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

10. 将张量$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}$分解为对称部分 $s$ 和反对称部分 $\omega$，试证明：

(1) $\omega = \frac{1}{2}\mathbf{rot}\boldsymbol{a}$；

(2) $\mathrm{d}\boldsymbol{a} = s\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\mathbf{rot}\boldsymbol{a} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

11. 流体运动比刚体运动复杂，它除平动外，还有形变运动.因此，在某一点邻域内流体微团的运动速度可写为 $v_i = v_{0i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\delta x_j$，若将二阶张量$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ 分解成反对称张量 $a_{ij}$ 和对称张量 $s_{ij}$，则得到亥姆霍兹(Helmholtz)速度分解定律

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{rot}\boldsymbol{v} \times \delta\boldsymbol{x} + \mathbf{grad}\phi$$

写出反对称张量 $a_{ij}$、对称张量 $s_{ij}$，并求出 $\phi$.

12. 流体应力张量 $\overset{\cdot\cdot}{p}$可分解为 $p_{ij} = -P\delta_{ij} + \tau_{ij}$，其中，$\overset{\cdot\cdot}{p}$ 是二阶张量 $p_{ij}$ 的整体符号，$P$ 为流体压力函数，$\tau_{ij}$ 为偏应力张量，它是速度梯度张量各分量的线性齐次函数，即 $\tau_{ij} = c_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$，对于各向同性流体，试推导：

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(s_{ij} - \frac{1}{2}s_{kk}\delta_{ij}\right) + \mu' s_{kk}\delta_{ij}$$

其中，$s_{ij}$ 为张量 $\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的对称部分；$\mu$，$\mu'$ 为常数，分别是动力学黏性系数和膨胀黏性系数.

提示：四阶各向同性张量可写为 $a_{ijkl} = \nu\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

13. 试证明：

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{E} + (\nabla \times \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{E} = \nabla \cdot (\boldsymbol{E}\boldsymbol{E} - \ddot{e}\boldsymbol{E}^2/2)$$

# 第 2 章　仿射空间与伪欧氏空间中的张量

在上一章里讨论了三维(真)欧氏空间中的张量.这一章讨论仿射空间与伪欧氏空间中的张量.

伪欧氏空间具有和真欧氏空间不同的性质,它们是在仿射空间中分别引入不同的度规张量而得到的.伪欧氏空间又可以等效地表示为复欧氏空间.

## 2.1　改变空间性质的必要性

人们对于时间和空间的认识是逐步深入的.

假定在某一参考系[①] $K$ 中,质点的坐标是( $x_1$, $x_2$, $x_3$ ),而时间是 $t$.另一参考系 $K'$相对于 $K$ 沿 $x_1$ 方向以速度 $v$ 运动.在 $K'$中,上述质点的坐标是( $x_{1'}$, $x_{2'}$, $x_{3'}$ ),而时间是 $t'$.根据初等的时空观念,应有

$$x_{1'} = x_1 - vt \qquad x_{2'} = x_2 \qquad x_{3'} = x_3 \tag{2.1.1}$$

$$t' = t \tag{2.1.2}$$

这叫做**伽利略变换**.

在伽利略变换下,粒子的速度改变为

① 本章谈到的参考系都是惯性系.凡是不加说明地用“坐标”这个词,就是指所考虑的参考系中三维几何空间的坐标.

$$\frac{\mathrm{d}x_{1'}}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}-v \qquad \frac{\mathrm{d}x_{2'}}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}x_{3'}}{\mathrm{d}t'}=\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.3}$$

而加速度不变，即

$$\frac{\mathrm{d}^2x_{i'}}{\mathrm{d}t'^2}=\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\quad(i=1,2,3) \tag{2.1.4}$$

在牛顿第二定律

$$F_i=m\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\quad(i=1,2,3) \tag{2.1.5}$$

中，只包含加速度而不包含速度.因此，在伽利略变换下，牛顿定律的形式不变.

牛顿运动定律成立的参考系叫**惯性系**.相对于一个惯性系做匀速运动的参考系也是惯性系.按照经典时空观，不同惯性系之间的变换是伽利略变换.由于在伽利略变换下，牛顿定律的形式不变，所以无法用力学实验区分不同的惯性系.这叫做**伽利略相对性原理**.伽利略相对性原理排除了利用力学实验确定在不同的惯性系中哪一个是绝对静止系的可能性.

但是，在电磁运动规律——麦克斯韦方程组(式(2.5.16)(2.5.17))中，包含有电磁波的传播速度(即光速)$c$.如果伽利略变换式(2.1.1)和(2.1.2)能适用，则在参考系 $K'$ 和 $K$ 中的光速之间应有关系式(2.1.3)(为简单起见，假定电磁波沿第一轴传播)：

$$c'=c-v \tag{2.1.6}$$

这样，麦克斯韦方程在 $K'$ 和 $K$ 中就有不同形式.因此，应该有可能利用电磁学(光学)实验来判断不同惯性系中哪一个是“静止系”.

然而,实验表明,作出这样的判断是不可能的.这就是说,用电磁学(光学)实验也无法区分不同的惯性系.这叫做**爱因斯坦的狭义相对性原理**.

按照实验证实了的爱因斯坦狭义相对性原理,在一切参考系中,电磁波的传播速度(光速)都有相同数值,即

$$c' = c \tag{2.1.7}$$

而不像式(2.1.6)那样发生改变.然而式(2.1.6)是伽利略变换式(2.1.1)和(2.1.2)的结论.实验事实否定了式(2.1.6),也就指出了伽利略变换的局限性.

假定在一个惯性系 $K$ 中做一个假想实验,它是在 $t_1$ 时刻在 $(x_1, y_1, z_1)$处发出一束光,在 $t_2$ 时刻到达$(x_2, y_2, z_2)$.显然有

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 \tag{2.1.8}$$

转到相对于 $K$ 以匀速 $\boldsymbol{v}$ 运动的另一惯性系 $K'$,这一实验成为在 $t_1'$时刻在$(x_1', y_1', z_1')$处发出一束光,在 $t_2'$时刻到达$(x_2', y_2', z_2')$,因而有

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = c'^2(t_2' - t_1')^2$$

实验结果是,在一切惯性系中光速都相等,如式(2.1.7),即有

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = c^2(t_2' - t_1')^2 \tag{2.1.9}$$

定义间隔 $\mathrm{d}\tau$的平方为

$$\mathrm{d}\tau^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{2.1.10}$$

由式(2.1.8)和(2.1.9)可见①

$$d\tau'^2 = d\tau^2 \tag{2.1.11}$$

也就是说,间隔在不同惯性系之间变换时保持不变.这是爱因斯坦狭义相对性原理的数学表述.

为了达到间隔不变的要求,在不同惯性系之间变换时,时间和空间坐标必须结合在一起变,而不是像式(2.1.1)和(2.1.2)伽利略变换那样相互独立地分别变换.这表明,有必要改变时间和空间相互独立的旧时空观,建立一种一维时间和三维空间结合在一起成为一个四维“时空”的新时空观.

## 2.2　仿射空间中的张量

新的时空观要求将时间和空间结合,构成一个四维“空间”.按式(2.1.10)定义的“间隔”在惯性系之间变换时保持不变,是构建这个四维空间的出发点和必须满足的要求.

如果将惯性系之间的变换看成是四维空间中的转动,而将按式(2.1.10)定义的 $d\tau^2$ 看成是分量为($dt$, $dx$, $dy$, $dz$)的四维矢量的自点积,即这个四维矢量长度的平方,则“在惯性系之间变换时,间隔不变”就成为“在四维空间转动时,矢量的长度不变”的自然结果.

比较式(2.1.10)和欧氏空间中矢量自点积的公式(1.4.1)可见,新的四维空间和四维(真)欧氏空间的“矢量点积”的定义不同.因此,我们首先从欧氏空间中去掉矢量点积的定义式(1.4.2),看看在空间概念中还剩下些什么.然后再在这一基础上增

① 式(2.1.8)和(2.1.9)只表明,当 $d\tau^2 = 0$ 时,式(2.1.11)成立.对于一般情况式(2.1.11)成立,需要作一些讨论,这里略去.

添新的矢量点积公式,从而得到所需要的新的空间.

### 2.2.1 仿射空间的定义

在欧氏空间中去掉矢量点积以后得到的空间称为**仿射空间**.

在仿射空间中不存在矢量的点积,这样一来,欧氏空间的哪些性质随之消失了呢? 消失了的性质有:

(1) 两矢量的正交性.两矢量正交的条件是 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$,既然不存在矢量的点积,也就不存在正交性.

(2) 矢量的长度和两矢量之间的角度.矢量的长度是 $\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$,两矢量之间的角度是 $\arccos\dfrac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}\sqrt{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}}}$. 既然不存在矢量的点积,也就不存在 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$.

(3) 坐标变换的正交性.正交变换的定义是保持矢量点积不变的变换.既然不存在矢量的点积,也就无所谓正交变换.

特别是,正交变换的性质式(1.3.21),或式(1.3.17)和(1.3.22)不能再用了;而在研究欧氏空间中的张量时,这一性质是广为利用了的.因此,对于仿射空间中的张量,必须专门加以讨论.

以上是仿射空间不同于欧氏空间的地方.除此以外,在其他方面,仿射空间则有着和欧氏空间的许多共同点.例如,在仿射空间中还保留着矢量的加法,它满足

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x} \tag{2.2.1}$$

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \tag{2.2.2}$$

以及数与矢量的乘法,它满足

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x} \tag{2.2.3}$$

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y} \tag{2.2.4}$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x} \tag{2.2.5}$$

特别是

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x} \tag{2.2.6}$$

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{2.2.7}$$

注意,式(2.2.7)右边的 $\boldsymbol{0}$ 不同于数字 0.它是一个矢量,称为**零矢量**.

在式(2.2.3)中令 $\alpha=1$, $\beta=-1$, 得

$$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0} \tag{2.2.8}$$

$-\boldsymbol{x}$ 称为 $\boldsymbol{x}$ 的**逆矢量**.

总结上述,我们得到仿射空间的定义.

**定义 2.1**　仿射空间是一些元素的集合,这些元素称为矢量.在这一集合中定义了:

(1) 矢量的加法,如式(2.2.1)和(2.2.2).

(2) 数与矢量的乘法,如式(2.2.3)～(2.2.6).

在这一集合中存在:

(3) 零矢量,满足式(2.2.7).

(4) 逆矢量,满足式(2.2.8).

比较一下仿射空间和欧氏空间.它们的不同之处在于,仿射空间中没有矢量的点积,从而就没有长度和角度,简言之就是没有度量;而仿射空间和欧氏空间的相同之处在于,两者都有由式(2.2.1)～(2.2.5)表示的线性运算.这表明,仿射空间是无度量的线性空间,而欧氏空间是有(欧氏)度量的线性空间.

## 2.2.2 仿射空间中的坐标系及其变换

仿射空间没有度量,因而不能像欧氏空间中那样用正交归一性(式(1.2.1))来定义坐标基矢.但是,仿射空间中的矢量有线性相关和线性无关性.仿射空间中的坐标基矢是利用矢量的线性无关性来定义的.下面我们先来说明,什么是线性相关和线性无关,再利用它建立仿射空间中的坐标系,讨论坐标系之间的变换.

**定义 2.2** 设有 $m$ 个矢量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_m$,如果可以找到一组不是全部为 0 的数 $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_m$,使得

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}_m = 0 \tag{2.2.9}$$

则称 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_m$ **线性相关**;反之,如果不存在这样一组不全为 0 的数,使式(2.2.9)成立,则称 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_m$ **线性无关**.

**定义 2.3** 如果在一个仿射空间中可以找到 $n$ 个线性无关的矢量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, …, $\boldsymbol{x}_n$,而任何 $n+1$ 个矢量都是线性相关的,则称这一仿射空间为 ***n* 维仿射空间**.

在 $n$ 维仿射空间中任意选 $n$ 个线性无关的矢量,把它们记做

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \tag{2.2.10}$$

并称它们为**坐标基矢**.在这一空间中的任意矢量 $\boldsymbol{x}$ 必须和这一组基矢线性相关;否则空间至少是 $n+1$ 维而不是 $n$ 维.这一线性关系可以写成

$$\alpha \boldsymbol{x} + \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n = 0$$

式中的系数 $\alpha \neq 0$,否则上式成为 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 之间的一个线

性关系式，与以上的假设矛盾.因此，可以改写上式为

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1-\frac{\alpha_2}{\alpha}\boldsymbol{e}_2-\cdots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n$$

将这一展开式的系数改写为

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha}=x^1\qquad -\frac{\alpha_2}{\alpha}=x^2\qquad \cdots\qquad -\frac{\alpha_n}{\alpha}=x^n$$

注意，这里 $x^1$，$x^2$，…，$x^n$ 的 1，2，…，$n$ 是上标，而不是方次.由上式得到

$$\boldsymbol{x}=x^1\boldsymbol{e}_1+x^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x^n\boldsymbol{e}_n=\sum_{i=1}^{n}x^i\boldsymbol{e}_i \tag{2.2.11}$$

这就是任意矢量 $\boldsymbol{x}$ 用坐标基矢(2.2.10)的展开式.这里的一组数 $x^i$（$i=1,2,\cdots,n$）称为矢量 $\boldsymbol{x}$ 在仿射坐标系(2.2.10)中的**逆变分量**(“逆变”两字的含义见下面).

如果在同一仿射空间中，另选一组 $n$ 个线性无关的矢量

$$\boldsymbol{e}_{1'},\ \boldsymbol{e}_{2'},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{n'} \tag{2.2.12}$$

作为新的坐标基矢，就构成一个新的仿射坐标系.将它们用老坐标基矢(2.2.10)展开，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{1'}=A_{1'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{1'}^{2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+A_{1'}^{n}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{e}_{2'}=A_{2'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{2'}^{2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+A_{2'}^{n}\boldsymbol{e}_n\\ \cdots\cdots\\ \boldsymbol{e}_{n'}=A_{n'}^{1}\boldsymbol{e}_1+A_{n'}^{2}\boldsymbol{e}_2+\cdots+A_{n'}^{n}\boldsymbol{e}_n\end{cases} \tag{2.2.13}$$

或简写为

$$\boldsymbol{e}_{i'}=\sum_{i=1}^{n}A_{i'}^{i}\boldsymbol{e}_i\quad(i'=1,2,\cdots,n) \tag{2.2.14}$$

这就是新、老坐标基矢之间的变换公式.

我们来研究一下变换矩阵 $A_{i'}^{i}$ 的性质.

应该注意,无论是老坐标基矢(2.2.10),还是新坐标基矢(2.2.12),都不存在“正交”和“单位长度”的性质,而只有线性独立的性质.这是研究变换矩阵 $A_{i'}^{i}$ 性质的唯一根据.

我们可以将式(2.2.13)中的 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, …, $\boldsymbol{e}_n$ 看成 $n$ 个独立变量,而 $\boldsymbol{e}_{1'}$, $\boldsymbol{e}_{2'}$, …, $\boldsymbol{e}_{n'}$,是它们的 $n$ 个线性齐次函数.这 $n$ 个线性齐次函数线性无关的条件是系数行列式不为 0,即

$$|A_{i'}^{i}|=\begin{vmatrix} A_{1'}^{1} & A_{1'}^{2} & \cdots & A_{1'}^{n} \\ A_{2'}^{1} & A_{2'}^{2} & \cdots & A_{2'}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n'}^{1} & A_{n'}^{2} & \cdots & A_{n'}^{n} \end{vmatrix}\neq 0 \tag{2.2.15}$$

这就是仿射坐标系之间的变换矩阵 $A_{i'}^{i}$ 所满足的唯一条件.

由于变换矩阵 $A_{i'}^{i}$ 的行列式不等于 0,所以存在逆矩阵 $(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$.按定义,逆矩阵 $(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$ 和矩阵 $A_{i'}^{i}$,有如下关系:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{i'}^{i}(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{j'}=\delta_{i'}^{j'} \\ \sum\limits_{i'=1}^{n}(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}A_{i'}^{j}=\delta_{i}^{j} \end{cases} \tag{2.2.16}$$

式中,符号 $\delta_{i}^{j}$ 的定义是

$$\delta_{i}^{j}=\begin{cases} 0 & (i\neq j) \\ 1 & (i=j) \end{cases} \tag{2.2.17}$$

将式(2.2.14)中的哑标 $i$ 改写为 $l$,用 $(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$ 乘左、右两边,对 $i$ 作和,利用式(2.2.16)得到由 $\boldsymbol{e}_{i'}$ 变回到 $\boldsymbol{e}_{i}$ 的变换:

$$\boldsymbol{e}_i = \sum_{i'=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_i^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2.2.18)$$

但是，必须特别注意，$A_{i'}^{i}$ 不再是正交矩阵，因而不存在式(1.3.21)那样的 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$ 的关系，即一般说来

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_i^{i'} \neq A_{i'}^{i} \qquad |A_{i'}^{i}| \neq \pm 1$$

也就是说，变换矩阵 $A_{i'}^{i}$ 的行列式虽一定不为 0，但不一定等于 $\pm 1$. 这是它和欧氏空间中的变换矩阵 $A_{i'i}$ 不同的地方.

## 2.2.3　逆变张量与协变张量

现在转入研究仿射空间中的张量.

我们从任意矢量的展开式(2.2.11)开始，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{e}_i$$

在新坐标系中，同一矢量的展开式是

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i'=1}^{n} x^{i'} \boldsymbol{e}_{i'}$$

将式(2.2.18)代入式(2.2.11)，得

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x^i \left[ \sum_{i'=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_i^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} \right]$$

$$= \sum_{i'=1}^{n} \left[ \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{A}^{-1})_i^{i'} x^i \right] \boldsymbol{e}_{i'}$$

和上式比较，得

$$x^{i'}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}x^{i}\quad(i'=1,2,\cdots,n)\tag{2.2.19}$$

我们看到,矢量 $\boldsymbol{x}$ 的分量 $x^{i}$ 在发生坐标变换(2.2.14)时,用转置逆矩阵$(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$ 进行变换①.

**定义 2.4** 在 $n$ 维仿射空间的任一坐标系中给出一组数 $x^{i}$ ($i=1,2,\cdots,n$). 如果当坐标基矢由矩阵 $A_{i'}^{i}$ 变换时,这一组数由转置逆矩阵$(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$ 变换,则这一组数 $x^{i}$ 构成一个**一阶逆变张量**.

在仿射空间中,除了可以定义逆变张量以外,还可以定义协变张量.我们来看一个例子.

设 $x^{i}$ 为仿射空间中点的坐标,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i}x^{i}=1\tag{2.2.20}$$

是仿射空间中一个平面的方程(比较式(1.4.5)).当坐标变换时,由于 $x^{i}$ 变成 $x^{i'}$, $a_{i}$ 也必须相应地变成 $a_{i'}$ 才能保持方程(2.2.20)的形式不变,即

$$\sum_{i'=1}^{n}a_{i'}x^{i'}=1\tag{2.2.21}$$

为了得到 $a_{i}$ 的变换规律,先写出式(2.2.19)的逆变换.将式(2.2.19)中的哑标 $i$ 改写为 $l$,用 $A_{i'}^{i}$ 乘两边,对 $i'$ 作和,利用式(2.2.16),得

---

① 在变换(2.2.14)中,$A_{i'}^{i}$ 的下标是矩阵的前一角标,上标是后一角标;而在变换(2.2.19)中,$(\boldsymbol{A}^{-1})_{i}^{i'}$ 的上标是矩阵的前一角标,而下标是后一角标.这意味着已经进行了矩阵的转置.

$$x^{i}=\sum_{i'=1}^{n}A_{i'}^{i}x^{i'} \tag{2.2.22}$$

这就是式(2.2.19)的逆变换.

将式(2.2.22)代入式(2.2.20),得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=1}^{n}a_{i}A_{i'}^{i}x^{i'}=\sum_{i'=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{i}A_{i'}^{i}\Big)x^{i'}=1$$

与式(2.2.21)比较可见

$$a_{i'}=\sum_{i=1}^{n}A_{i'}^{i}a_{i} \tag{2.2.23}$$

这说明,在坐标变换(2.2.14)下,$a_i$ 和坐标基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 的变换规律相同.

**定义 2.5**　在 $n$ 维仿射空间的任一坐标系中给出一组数,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果当坐标变换时,它们和坐标基矢有相同的变换规律,则这一组数 $a_i$ 构成**一阶协变张量**.

我们看到,仿射空间中的张量有协变和逆变两种,这是和欧氏空间不同的地方.产生这一差别的原因在于,仿射空间中的变换矩阵不是正交矩阵.

一般的高阶张量可以类似地定义.

**定义 2.6**　在仿射空间的任意坐标系中给定一组数

$$a_{i_1i_2\cdots i_\nu}^{j_1j_2\cdots j_\mu} \tag{2.2.24}$$

它有 $\nu$ 个下标,$\mu$ 个上标.如果当坐标变换时,每个下标独立地按坐标基矢的变换规律变,而每个上标独立地按坐标基矢变换矩阵的转置逆矩阵变:

$$a_{i_1'i_2'\cdots i_\nu'}^{j_1'j_2'\cdots j_\mu'}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_\nu\\ j_1j_2\cdots j_\mu}}A_{i_1'}^{i_1}\cdots A_{i_\nu'}^{i_\nu}(\boldsymbol{A}^{-1})_{j_1}^{j_1'}\cdots(\boldsymbol{A}^{-1})_{j_\mu'}^{j_\mu'}a_{i_1i_2\cdots i_\nu}^{j_1j_2\cdots j_\mu} \tag{2.2.25}$$

则称式(2.2.24)这一组数为**$\nu$阶协变、$\mu$阶逆变的张量**.

在这一定义中的仿射空间设为 $n$ 维的,则所有的指标 $i_1$, $i_2$, …, $i_\nu$; $j_1$, $j_2$, …, $j_\mu$ 都取从 1 到 $n$ 的值.式(2.2.25)中的作和从 1 到 $n$.

由定义可见,张量的下标都是协变指标,上标都是逆变指标,两者不能混淆.

### 2.2.4 张量运算

仿射空间中的张量运算和欧氏空间中的张量运算类似,但必须注意区分协变指标和逆变指标.

1. 张量的加法

在进行张量加法时,两个张量的协变指标数和逆变指标数必须分别相等,即

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} + b_{i_1 i_2 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_\mu} \tag{2.2.26}$$

2. 张量的乘法

在进行张量乘法运算时,因子中的协变指标在乘积中也是协变指标,因子中的逆变指标在乘积中也是逆变指标,即

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_{\mu+\nu}}^{j_1 j_2 \cdots j_{m+l}} = a_{i_1 i_2 \cdots i_\mu}^{j_1 j_2 \cdots j_m} b_{i_{\mu+1} i_{\mu+2} \cdots i_{\mu+\nu}}^{j_{m+1} j_{m+2} \cdots j_{m+l}} \tag{2.2.27}$$

3. 指标缩并

在指标缩并时,只能将一个上指标和一个下指标缩并,例如:

$$c_{i_1 i_3 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_{\mu-1}} = \sum_{l=1}^{n} a_{i_1 l i_3 \cdots i_\nu}^{j_1 j_2 \cdots j_{\mu-1} l} \tag{2.2.28}$$

利用上、下指标的变换规律和式(2.2.16)不难证明，上式左边是一个 $\nu-1$ 阶协变、$\mu-1$ 阶逆变的张量.

特别要注意，两个协变指标(或两个逆变指标)不能缩并.如果将两个同类指标“缩并”，所得到的结果不再按张量规律变换，因而没有任何意义.

可以证明，按式(2.2.17)定义的 $\delta_i^j$ 是一个一阶协变、一阶逆变的张量；而按式(1.4.10)定义的 $\delta_{ij}$ 在仿射空间中不再是一个张量.仿射空间中的指标缩并运算可以看成是所给张量和 $\delta_i^j$ 相乘后再缩并的结果.

4. 指标置换

只有同类型的两个指标才能置换，上指标和下指标不能置换.

## 2.2.5　由仿射空间到欧氏空间

在仿射空间中没有定义矢量的点积，也就没有矢量的长度和角度，因此仿射空间是没有度量的空间.在仿射空间的基础上加进矢量点积的定义，就得到一个有度量的空间.依赖于所给的不同的点积定义，可以得到本质上不同的空间.下面我们先说明，如何从仿射空间过渡到真欧氏空间.在下一节里再讨论伪欧氏空间.

在一个 $n$ 维仿射空间中定义矢量的点积如下：

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j \tag{2.2.29}$$

式中

$$g_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases} \tag{2.2.30}$$

这样就使仿射空间变成了欧氏空间①.

欧氏空间中的坐标变换要求保持矢量点积的公式(2.2.29)不变,因而只能是正交变换(参看式(1.3.20))

$$(\boldsymbol{A}^{-1})_i^{i'}=A_{i'}^{i} \tag{2.2.31}$$

在正交变换下,按式(2.2.30)定义的 $g_{ij}$ 是一个二阶张量,称为欧氏空间的**度规张量**.

由于有了度规张量,在欧氏空间中多了一种张量运算——**升降指标**.对于一个逆变张量 $x^i$,可以利用度规张量 $g_{ij}$ 将它的上标降成下标,有

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}g_{ij}x^j \tag{2.2.32}$$

此式右边是张量的乘积与缩并,因而所得到的 $x_i$ 是一个协变张量.

利用 $g_{ij}$ 的定义式(2.2.30),可以求出式(2.2.32)中对 $j$ 的作和,得

$$x_i=x^i \tag{2.2.33}$$

由此可见,在欧氏空间中,每一个逆变张量都对应有一个协变张量,而且各对应分量的数值相等.因此,在欧氏空间中没有必要

① 广义地说,欧氏空间包括真欧氏空间和伪欧氏空间.但是,在本书中是在狭义的意义下使用"欧氏空间"这个词.凡是未加说明的"欧氏空间"都指真欧氏空间.

区分协变和逆变、下标和上标.这正是我们在上一章中讨论欧氏空间时,能够只用下标而不用上标的原因.

## 2.3　伪欧氏空间中的张量

### 2.3.1　伪欧氏空间的建立

我们已经看到,由实验确立的光速不变性迫使我们改变原有的时空观念.现在来看按照光速不变的要求,时空观念应如何改变.

考虑一个参考系

$$K(x^1, x^2, x^3, t)$$

和以速度 $\boldsymbol{v}$ 相对它运动的参考系

$$K'(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, t')$$

我们用这两个参考系研究下面这个物理过程:在某一时刻,从某一地点 $A$ 发出一个光信号,经过一段时间后传播到了另一地点 $B$.

在参考系 $K$ 中,这一过程是在时刻 $t_A$ 从位置$(x_A^1, x_A^2, x_A^3)$发出的光信号,在时刻 $t_B$ 传播到了另一位置$(x_B^1, x_B^2, x_B^3)$.由于光以速度 $c$ 传播,所以①

$$(x_B^1 - x_A^1)^2 + (x_B^2 - x_A^2)^2 + (x_B^3 - x_A^3)^2 = c^2(t_B - t_A)^2 \tag{2.3.1}$$

根据同样的考虑,在坐标系 $K'$ 中有

① 注意区分代表平方的上角 2 和代表逆变张量不同分量的上标 1, 2, 3.

$$(x_B^{1'}-x_A^{1'})^2+(x_B^{2'}-x_A^{2'})^2+(x_B^{3'}-x_A^{3'})^2=c^2(t'_B-t'_A)^2 \tag{2.3.2}$$

以上两式中的 $c$ 是同一个数,原因是光速不变.

如果坐标和时间按照伽利略变换式(2.1.1)和(2.1.2)变,则以上两式不可能同时满足.我们现在要根据以上两式能同时满足的要求来修改坐标和时间的变换公式.

为了形式上更对称,令

$$ct=x^0 \quad ct'=x^{0'} \tag{2.3.3}$$

于是式(2.3.1)和(2.3.2)可以改写成

$$(x_B^0-x_A^0)^2-(x_B^1-x_A^1)^2-(x_B^2-x_A^2)^2-(x_B^3-x_A^3)^2=0 \tag{2.3.4}$$

$$(x_B^{0'}-x_A^{0'})^2-(x_B^{1'}-x_A^{1'})^2-(x_B^{2'}-x_A^{2'})^2-(x_B^{3'}-x_A^{3'})^2=0 \tag{2.3.5}$$

修改后的坐标和时间的变换规律应该使这两个式子同时得到满足.为此,只需要在两个参考系之间存在以下关系:

$$\begin{aligned}&(x_B^0-x_A^0)^2-(x_B^1-x_A^1)^2+(x_B^2-x_A^2)^2+(x_B^3-x_A^3)^2\\=&(x_B^{0'}-x_A^{0'})^2-(x_B^{1'}-x_A^{1'})^2-(x_B^{2'}-x_A^{2'})^2-(x_B^{3'}-x_A^{3'})^2\\=&\mathrm{d}\tau^2\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

式(2.3.6)表明,在惯性系之间变换时,空间坐标 $x^1$, $x^2$, $x^3$ 和时间 $x^0(=ct)$ 结合在一起进行变换.因此,可以将它们看成是一个四维“空间”矢量的 4 个分量.由式(2.3.6)可见,$\mathrm{d}x^0$ 的平方减去 $\mathrm{d}x^1$, $\mathrm{d}x^2$, $\mathrm{d}x^3$ 的平方和在惯性系之间变换时保持不变.因此,可以将按式(2.3.6)定义的 $\mathrm{d}\tau$,即间隔,看成是四维

空间中矢量的“长度”.

在这样一个四维空间中,矢量长度的平方不等于 4 个分量的平方和,而是等于 0 分量的平方减去 1, 2, 3 三个分量的平方和.这样的空间不是真欧氏空间.

利用如下定义的 $g_{\alpha\beta}(\alpha=0,1,2,3;\beta=0,1,2,3)$ ①:

$$g_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & (\alpha\neq\beta)\\ 1 & (\alpha=\beta=0)\\ -1 & (\alpha=\beta=1,2,3)\end{cases} \tag{2.3.7}$$

来定义四维空间中矢量的点积

$$x\cdot y=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta} \tag{2.3.8}$$

明显写出来就是

$$x\cdot y=x^{0}y^{0}-x^{1}y^{1}-x^{2}y^{2}-x^{3}y^{3} \tag{2.3.9}$$

这样,矢量长度的平方就是

$$x\cdot x=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=(x^{0})^{2}-(x^{1})^{2}-(x^{2})^{2}-(x^{3})^{2} \tag{2.3.10}$$

只要坐标变换时,按此式定义的矢量长度不变,就得到式(2.3.6),从而达到了光速不变的要求.

将按照式(2.3.7)和(2.3.8)定义的矢量点积加进仿射空间中,所得到的空间称为四维**伪欧氏空间**.

---

① 在本章中,我们用拉丁字母 $i$, $j$, $k$, $l$, $m$, $n$ 表示三维空间的指标,取值 1, 2, 3;用希腊字母 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\mu$, $\nu$, $\rho$ 表示四维空间的指标,取值 0, 1, 2, 3.无角标的黑体字母表示三维矢量;无角标的白体字母表示四维矢量。有时为了避免混淆,在表示四维矢量的字母下加波线.

## 2.3.2 伪欧氏空间中的坐标基矢

四维伪欧氏空间中的坐标基矢是 $\underline{e}_\alpha(\alpha=0,1,2,3)$[①].用它们展开矢量 $\underline{x}$ 和 $\underline{y}$,

$$\begin{cases}\underline{x}=\sum\limits_{\alpha=0}^{3}x^{\alpha}\,\underline{e}_\alpha\\ \underline{y}=\sum\limits_{\beta=0}^{3}y^{\beta}\,\underline{e}_\beta\end{cases}\tag{2.3.11}$$

计算 $\underline{x}$ 和 $\underline{y}$ 的点积

$$\underline{x}\cdot\underline{y}=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}(\underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\beta)x^{\alpha}y^{\beta}\tag{2.3.12}$$

和式(2.3.9)比较可见

$$g_{\alpha\beta}=\underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\beta\quad(\alpha=0,1,2,3;\ \beta=0,1,2,3)\tag{2.3.13}$$

由 $g_{\alpha\beta}$ 的定义式(2.3.8)知道

$$\begin{cases}\underline{e}_\alpha\cdot\underline{e}_\beta=0\quad(\alpha\neq\beta)\\ \underline{e}_0\cdot\underline{e}_0=1\\ \underline{e}_1\cdot\underline{e}_1=\underline{e}_2\cdot\underline{e}_2=\underline{e}_3\cdot\underline{e}_3=-1\end{cases}\tag{2.3.14}$$

第一个式子表明,不同的坐标基矢相互正交(在伪欧氏空间的意义下),后两个式子则表示这些基矢都是“单位矢量”.但是,必须注意,对应于空间轴的基矢 $\underline{e}_k$ 和自身的点积等于 $-1$ 而不是

① 这里,为了便于区分,在四维空间的矢量下加波线.

$+1$.也就是说，$\underline{e}_k$ 的“长度” $\sqrt{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_k}$ 是虚单位 i 而不是实单位 1，

$$\sqrt{\underline{e}_k \cdot \underline{e}_k} = \mathrm{i} \quad (k = 1, 2, 3) \tag{2.3.15}$$

这是伪欧氏空间不同于真欧氏空间的地方.

### 2.3.3　伪欧氏空间中的张量

伪欧氏空间是在仿射空间的基础上建立起来的，所以伪欧氏空间中的张量具有仿射空间中的张量的一切性质.但是，由于补充了度量关系式(2.3.7)和(2.3.8)：

$$x \cdot y = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta = 0) \\ -1 & (\alpha = \beta = 1, 2, 3) \end{cases}$$

所以又出现了一些仿射空间中所没有的新性质.

首先，让我们来证明，按式(2.3.7)定义的 $g_{\alpha\beta}$ 是一个张量.这是因为，四维空间中的坐标变换应该使得按式(2.3.8)定义的矢量点积是不变的量，即标量.但是，式(2.3.8)右边是两个一阶逆变张量 $x^{\alpha}$，$x^{\beta}$ 和 $g_{\alpha\beta}$ 的缩并，由此就知道 $g_{\alpha\beta}$ 是一个二阶协变张量.它称为**协变度规张量**.

定义

$$g^{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta = 0) \\ -1 & (\alpha = \beta = 1, 2, 3) \end{cases}$$

则不难看到

$$\sum_{\gamma=0}^{3} g_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta} \tag{2.3.16}$$

式中，$\delta_{\alpha}^{\beta}$按式(2.2.17)定义，

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases} \tag{2.3.17}$$

我们知道，$\delta_{\alpha}^{\beta}$在仿射空间中是一阶逆变一阶协变的张量，因而在伪欧氏空间中也是，而由式(2.3.16)可见，它可以由 $g^{\beta\gamma}$和二阶协变张量 $g_{\alpha\gamma}$缩并得到，由此知 $g^{\alpha\beta}$是一个二阶逆变张量，称为**逆变度规张量**.

可以将伪欧氏空间的度规张量写成矩阵形式

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{伪欧氏}} = (g^{\alpha\beta})_{\text{伪欧氏}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.3.18}$$

而相应地，四维真欧氏空间的度规张量则是

$$(g_{\alpha\beta})_{\text{真欧氏}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.19}$$

由于有了度规张量 $g_{\alpha\beta}$和 $g^{\alpha\beta}$，使得在伪欧氏空间中存在一种仿射空间中所没有的张量运算——**升降指标**运算.

以三阶逆变张量 $a^{\alpha\beta\gamma}$为例，作度规张量 $g_{\alpha\rho}$和 $a^{\rho\beta\gamma}$的缩并.为

了书写简单，以下我们采用一种通用的记法：如果在某一项中有一个上指标和一个下指标相同，就意味着对于这一对指标从 0 到 3 作和.这叫做**爱因斯坦约定**.利用这一记法，可以将 $g_{\alpha\rho}$ 和 $a^{\rho\beta\gamma}$ 的缩并写成

$$\sum_{\rho=0}^{3} g_{\alpha\rho} a^{\rho\beta\gamma} \equiv g_{\alpha\rho} a^{\rho\beta\gamma} \tag{2.3.20}$$

这样得到的是一阶协变二阶逆变的张量

$$a_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} = g_{\alpha\rho} a^{\rho\beta\gamma} \tag{2.3.21}$$

在上标 $\beta\gamma$ 前的小圆点表示这里有一个指标被降了下来.由式(2.3.7)，$g_{\alpha\rho}$ 是一个已知的张量，所以 $a_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$ 由原来的张量 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 完全确定.可以认为它们两者代表同一对象.

同样，也可以将 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 中的第二个上标降下来，即

$$a_{\beta}^{\alpha\cdot\gamma} = g_{\beta\rho} a^{\alpha\rho\gamma} \tag{2.3.22}$$

$a_{\beta}^{\alpha\cdot\gamma}$ 和 $a_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$ 是两个不同的一阶协变、二阶逆变的张量，但是它们都和 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 一样，代表同一对象.

当然，也可以将 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 的第三个上标 $\gamma$ 降下来，或将它的任意两个上标降下来，甚至将三个上标都降下来.这样得到的结果都和 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 代表同一对象.

将 $a^{\alpha\beta\gamma}$ 的三个上标都降下来，得到三阶协变张量

$$a_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\rho} a^{\mu\nu\rho} \tag{2.3.23}$$

从 $a_{\alpha\beta\gamma}$ 出发，上升指标也可以得到

$$a_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma} = g^{\beta\mu} g^{\gamma\nu} a_{\alpha\mu\nu} \tag{2.3.24}$$

以及

$$a_{\beta}^{\alpha\cdot\gamma} = g^{\alpha\mu} g^{\gamma\nu} a_{\mu\beta\nu} \tag{2.3.25}$$

$$a^{\alpha\beta\gamma} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} g^{\gamma\rho} a_{\mu\nu\rho} \tag{2.3.26}$$

等等.

利用式(2.3.16)和(2.3.23)可以证明,式(2.3.24)和(2.3.21)中的 $a_{\alpha}^{\cdot\beta\gamma}$ 相同,式(2.3.25)和(2.3.22)中的 $a_{\beta}^{\alpha\cdot\gamma}$ 相同.由此可见,在伪欧氏空间中,张量的指标可以任意地上升和下降.因此,协变张量和逆变张量的区分没有实质性意义.

**例 2.1** 试求和一阶逆变张量 $x^{\alpha}$($\alpha=0,1,2,3$)对应的协变张量.

**解** 利用度规张量 $g_{\alpha\beta}$降指标

$$x_{\alpha} = g_{\alpha\beta} x^{\beta} \tag{2.3.27}$$

根据式(2.3.7),上式的明显形式是

$$\begin{cases} x_0 = g_{00} x^0 = x^0 = ct \\ x_1 = g_{11} x^1 = -x^1 = -x \\ x_2 = g_{22} x^2 = -x^2 = -y \\ x_3 = g_{33} x^3 = -x^3 = -z \end{cases} \tag{2.3.28}$$

由此可见,协变张量 $x_{\alpha}$ 的时间分量(第 0 分量)和逆变张量 $x^{\alpha}$ 的时间分量相等;而空间分量(后三个分量)和逆变张量 $x^{\alpha}$ 的空间分量相差符号,即

$$\begin{cases} x^{\alpha}:(x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z) \\ x_{\alpha}:(x_0 = ct,\ x_1 = -x,\ x_2 = -y,\ x_3 = -z) \end{cases} \tag{2.3.29}$$

这就是相互对应的一阶逆变张量和一阶协变张量.

注意，在真欧氏空间中，协变张量和逆变张量的对应分量全都相等(式(2.2.33))，因此协变张量和逆变张量完全没有区别.在伪欧氏空间中，协变张量和逆变张量的对应分量并不全相等(式(2.3.28))，因此需要区分协变张量和逆变张量.但是，和仿射空间中不一样，这种区分没有实质性意义.同一物理对象既可以用协变张量表示，又可以用逆变张量表示.

在式(2.3.8)中，矢量的点积是用它的逆变分量写出的.采用协变分量可以将矢量的点积改写成另外几种等效的形式：

$$x \cdot y = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} = g^{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta} = x_{\alpha} y^{\alpha} = x^{\alpha} y_{\alpha} \tag{2.3.30}$$

注意，当两个逆变指标，或两个协变指标缩并时，会出现度规张量；而当一个逆变和一个协变指标缩并时，不出现度规张量.这从式(2.3.30)可以清楚看到.明显写出就是

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x^{0} y^{0} - x^{1} y^{1} - x^{2} y^{2} - x^{3} y^{3} \\ &= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 \\ &= x^{0} y_0 + x^{1} y_1 + x^{2} y_2 + x^{3} y_3 \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

在四维伪欧氏空间中的完全反对称张量是四阶赝张量 $e^{\mu\nu\lambda\rho}$.它的定义是对任意两个指标的交换都反对称，而

$$e^{0123} = 1 \tag{2.3.32}$$

相应的协变赝张量是对任意两个指标的交换都反对称，而

$$e_{0123} = -1 \tag{2.3.33}$$

如果 $A^{\mu\nu}$ 是一个反对称二阶张量，则

$$A^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} e^{\mu\nu\lambda\rho} A_{\lambda\rho} \tag{2.3.34}$$

称为它的**对偶张量**.如果 $A^{\mu\nu}$ 是一个二阶真张量,则它的对偶张量 $A^{*\mu\nu}$ 就是一个二阶赝张量.它们的乘积

$$A^{\mu\nu}A^{*}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}e_{\mu\nu\lambda\rho}A^{\mu\nu}A^{\lambda\rho}$$

是一个赝标量.

类似于式(1.2.20)有

$$e^{\mu\nu\lambda\rho}e_{\alpha\beta\lambda\rho}=-2(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta}-\delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}) \tag{2.3.35}$$

证明留给读者.

## 2.4 闵可夫斯基空间

真欧氏空间和伪欧氏空间统称为欧氏空间.

**定义 2.7** 在仿射空间中加上非对角元为 0,对角元为±1 的度规所形成的空间称为**欧氏空间**.如果所有对角元均有相同符号,则称为**真欧氏空间**;如果对角元中既有+1 又有−1,则称为**伪欧氏空间**.

将度规张量整体乘上−1,不改变空间的性质,因此所有对角元均为+1 或均为−1 的空间都是真欧氏空间,两者没有差别.同样,$\nu$ 个对角元为+1,$n-\nu$ 个对角元为−1,和 $\nu$ 个对角元为−1,$n-\nu$ 个对角元为+1 的 $n$ 维伪欧氏空间有完全相同的性质.

**定义 2.8** 度规张量有三个对角元有相同符号,而另一个有不同符号的四维伪欧氏空间称为**闵可夫斯基空间**.

闵可夫斯基空间是狭义相对论的数学基础.它的度规张量可以是式(2.3.18),即

$$g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

或

$$g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\tag{2.4.1}$$

两者完全等效.

本节对闵可夫斯基空间作进一步的讨论.

## 2.4.1　洛伦兹变换

闵可夫斯基空间作为一种伪欧氏空间,其坐标变换应该使矢量点积的表达式(2.3.7),(2.3.8)保持不变.

将式(2.3.7),(2.3.8)同欧氏空间中矢量点积的公式(2.2.29),(2.2.30)相比较可见,真欧氏空间的矢量点积全部是分量的平方和,而伪欧氏空间(闵可夫斯基空间)的矢量点积中既有各个空间分量的平方和,又有时间和空间分量的平方差.正是在这里体现出伪欧氏空间(闵可夫斯基空间)区别于真欧氏空间的特殊性.在研究伪欧氏空间(闵可夫斯基空间)的特点时,为了简单起见,可以只考虑由一个空间分量($x^1$)和一个时间分量($x^0$)组成的1+1维伪欧氏空间.

我们来推导闵可夫斯基空间中的坐标变换矩阵.

只考虑 1+1 维闵可夫斯基空间.这一空间中的矢量是

$$\begin{cases} \underline{x} = x^0\ \underline{e}_0 + x^1\ \underline{e}_1 \\ \underline{y} = y^0\ \underline{e}_0 + y^1\ \underline{e}_1 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

矢量点积的公式是

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x^0 y^0 - x^1 y^1 \tag{2.4.3}$$

由式(2.3.14),为使此式成立,要求

$$\begin{cases} \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_0 = 0 \\ \underline{e}_0 \cdot \underline{e}_0 = 1 \\ \underline{e}_1 \cdot \underline{e}_1 = -1 \end{cases} \tag{2.4.4}$$

现在变换到新坐标系$\underline{e}_{1'}$, $\underline{e}_{0'}$(式(2.2.13)):

$$\begin{cases} \underline{e}_{0'} = A^0_{0'}\ \underline{e}_0 + A^1_{0'}\ \underline{e}_1 \\ \underline{e}_{1'} = A^0_{1'}\ \underline{e}_0 + A^1_{1'}\ \underline{e}_1 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

为了保持矢量点积的形式不变,要求

$$\begin{cases} \underline{e}_{1'} \cdot \underline{e}_{0'} = 0 \\ \underline{e}_{0'} \cdot \underline{e}_{0'} = 1 \\ \underline{e}_{1'} \cdot \underline{e}_{1'} = -1 \end{cases} \tag{2.4.6}$$

将式(2.4.5)代入,并利用式(2.4.4),得

$$A^0_{1'} A^0_{0'} - A^1_{1'} A^1_{0'} = 0 \tag{2.4.7}$$

$$(A^0_{0'})^2 - (A^1_{0'})^2 = 1 \tag{2.4.8}$$

$$(A^0_{1'})^2 - (A^1_{1'})^2 = -1 \tag{2.4.9}$$

令 $A^0_{0'} = a$, $A^1_{1'} = b$, 代入式(2.4.7),得

$$\frac{A^1_{0'}}{a} = \frac{A^0_{1'}}{b}$$

令这一比值等于 β,则有

$$A_{0'}^{1} = \alpha\beta \qquad A_{1'}^{0} = b\beta$$

将此两式代入式(2.4.8)和(2.4.9),得

$$a^2(1-\beta^2) = 1$$

$$b^2(1-\beta^2) = 1$$

因而

$$a = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \qquad b = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

由此就有

$$A_{0'}^{0} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \qquad A_{0'}^{1} = \frac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$A_{1'}^{0} = \frac{\beta}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \qquad A_{1'}^{1} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}$$

代入式(2.4.5),得

$$\begin{cases} \underline{e}_{0'} = \dfrac{\underline{e}_0 + \beta\underline{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \\ \underline{e}_{1'} = \dfrac{\beta\underline{e}_0 + \underline{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.10}$$

在第一个式子中,根号前取负号表示时间轴反向,即时间反演;在第二个式子中,根号前取负号表示空间反演.

不考虑时间反演和空间反演,则式(2.4.10)的根号前应取正号,由此得

$$\begin{cases} \underline{e}_{0'} = \dfrac{\underline{e}_0 + \beta \underline{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \underline{e}_{1'} = \dfrac{\beta \underline{e}_0 + \underline{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.11}$$

这就是由光速不变的要求所得到的时间—空间坐标变换公式.

二维矢量$\underline{\boldsymbol{x}}$的协变分量和坐标基矢同样地变换：

$$\begin{cases} x_{1'} = \dfrac{x_1 + \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x_{0'} = \dfrac{x_0 + \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.12}$$

利用式(2.3.28)得到逆变分量的变换规律

$$\begin{cases} x^{1'} = \dfrac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ x^{0'} = \dfrac{x^0 - \beta x^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.13}$$

再将式(2.3.3),即

$$x^0 = ct \qquad x^{0'} = ct'$$

代入,并写 $x^1 = x$, $x^{1'} = x'$, 得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - \beta c t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\beta}{c} x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.14}$$

这叫做**洛伦兹变换**.它对应于闵可夫斯基空间中 $x$，$ct$ 轴在($x$，$ct$)平面上的转动.

在 3+1 维空间中,如果 $K'$系相对于 $K$ 系以速度沿 $x$ 轴方向运动,则除式(2.4.14)之外还有

$$y' = y \qquad z' = z \tag{2.4.15}$$

为了确定常数 β的意义,考虑一个固连在 $K'$坐标系中 $x' = 0$ 处的物体,由式(2.4.14)的第一式知,在 $K$ 系中当 $t = 0$ 时它位于 $x = 0$; 而到时刻 $t$,它的位置 $x$ 满足

$$x - \beta c t = 0$$

因而它的运动速度是

$$v = \frac{x}{t} = \beta c$$

由于这一物体固连在 $K'$坐标系中,因而 $v$ 就是 $K'$相对于 $K$ 的速度.由上式得

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{2.4.16}$$

由式(2.4.14)可见,在 $\beta \ll 1$($v \ll c$)时,洛伦兹变换回到伽利略变换,式(2.1.1)和(2.1.2).

## 2.4.2　复欧氏空间

### 1. 伪欧氏空间与复欧氏空间

以上讨论各种空间时,都假定张量的分量取实数值.这样的空间称为实空间——实真欧氏空间、实仿射空间和实伪欧氏空

间.有时,允许张量的分量取复数值更为方便.

回顾前面讨论的伪欧氏空间.在这一空间中,时-空坐标$\underline{x}$的逆变分量是$x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^0=ct$,度规张量是式(2.3.18),即

$$(g_{\alpha\beta})_{伪欧氏}=(g^{\alpha\beta})_{伪欧氏}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

这一度规张量的特点是其(三个)空间分量和时间分量的符号相反.也可以定义

$$g'_{\alpha\beta}=\begin{cases}0 & (\alpha\neq\beta)\\ 1 & (\alpha=\beta=1,2,3)\\ -1 & (\alpha=\beta=0)\end{cases}\qquad(2.4.17)$$

也就是式(2.4.1),即

$$(g_{\alpha\beta})'_{伪欧氏}=(g^{\alpha\beta})'_{伪欧氏}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\qquad(2.4.18)$$

有这一度规张量的空间也称为闵可夫斯基空间,其物理性质和按式(2.3.18)定义度规张量的空间的物理性质完全相同.

在这一空间中,时—空坐标的逆变分量是$x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$, $x^0=ct$,度规张量是式(2.4.18).由于矢量的分量$x^\alpha$取实值,所以是实空间;而由于度规张量中既有+1又有-1,所以是伪欧氏空间.因此,这是一个实伪欧氏空间,在这一空间中有

$$\underline{x}\cdot\underline{x}=\sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3}g'_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}+(x^{3})^{2}-(x^{0})^{2} \tag{2.4.19}$$

正是由于这 4 个平方项中三正一负，所以是伪欧氏空间而不是真欧氏空间.

如果能使式(2.4.19)变成平方和，就能得到一个真欧氏空间.为此，改写式(2.4.19)为

$$\underline{x}\cdot\underline{x}=(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}+(x^{3})^{2}+(\mathrm{i}x^{0})^{2} \tag{2.4.20}$$

令

$$x^{4}=\mathrm{i}x^{0}=\mathrm{i}ct \tag{2.4.21}$$

则有

$$\underline{x}\cdot\underline{x}=(x^{1})^{2}+(x^{2})^{2}+(x^{3})^{2}+(x^{4})^{2} \tag{2.4.22}$$

这样，我们可以定义一个四维复欧氏空间[①]：

$$x^{1}=x\qquad x^{2}=y\qquad x^{3}=z\qquad x^{4}=\mathrm{i}ct \tag{2.4.23}$$

按式(2.4.22)，这一空间的度规张量 $g_{ab}(a,\ b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 是

$$g_{ab}=\begin{cases}0 & (a\neq b)\\ 1 & (a=b)\end{cases} \tag{2.4.24}$$

和式(2.2.30)比较可见，这一空间是真欧氏空间，由于它的分量中有复数，所以是复真欧氏空间，它和以上讨论的实伪欧氏空间等效.

由式(2.4.18)和(2.4.19)定义的复欧氏空间和实欧氏空间

① 在这一节里，我们用字母 $a$，$b$，$c$，$d$ 表示复欧氏空间的指标，它们取值 1，2，3，4.

式(2.2.29)和(2.2.30)有相同的度规张量,因此在这一空间中,张量的协变和逆变分量没有区别,见式(2.2.33).从这个意义上,用复欧氏空间计算比用伪欧氏空间计算较为方便.

2. 复欧氏空间中的坐标转动与洛伦兹变换

考虑 1+1 维的复欧氏空间

$$x^1 = x \qquad x^4 = \mathrm{i}ct \tag{2.4.25}$$

其中的矢量点积按式(2.4.22)是

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = (x^1)^2 + (x^4)^2 \tag{2.4.26}$$

在这一复欧氏空间中进行坐标转动

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 \cos\theta - x^4 \sin\theta \\ x^{4'} = x^1 \sin\theta + x^4 \cos\theta \end{cases} \tag{2.4.27}$$

则矢量点积的形式保持不变,即

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = (x^{1'})^2 + (x^{4'})^2 \tag{2.4.28}$$

将式(2.4.25)代入式(2.4.27)得到 $x$ 和 $t$ 的变换规律

$$\begin{cases} x' = (\cos\theta)x + (-\mathrm{i}\sin\theta)ct \\ ct' = (-\mathrm{i}\sin\theta)x + (\cos\theta)ct \end{cases} \tag{2.4.29}$$

考虑一个固连在 $K'$ 系中 $x' = 0$ 处的物体,由式(2.4.29)知,当 $t = 0$ 时它位于 $x = 0$,而在 $t$ 时刻,它的位置 $x$ 满足

$$(\cos\theta)x + (-\mathrm{i}\sin\theta)ct = 0$$

因而,$K'$ 系相对于 $K$ 系的速度是

$$\frac{v}{c} = \frac{x}{ct} = \mathrm{i}\tan\theta \tag{2.4.30}$$

由此式可见，式(2.4.29)是相互做匀速运动的坐标系之间的变换，即洛伦兹变换.同时，由此式又可见，$\tan\theta$是纯虚数而不是实数，因而复欧氏空间中的“转动”式(2.4.27)只是形式上和普通实欧氏空间中的转动相同，实际上并不一样.因为它的“转动角度”$\theta$是虚数而不是实数.

我们知道，虚宗量的三角函数和双曲函数之间有关系：

$$-\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}y)=\tanh y$$

令

$$\theta=-\mathrm{i}y \tag{2.4.31}$$

则式(2.4.30)成为

$$\beta=\frac{v}{c}=\tanh y \tag{2.4.32}$$

由此式定义的 $y$ 是实参数，称为**快度**.利用公式

$$\begin{cases}\cosh y=\cos(\mathrm{i}y)\\ \sinh y=-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}y)\end{cases} \tag{2.4.33}$$

可将洛伦兹变换式(2.4.29)用快度表出为

$$\begin{cases}x'=(\cosh y)x-(\sinh y)ct\\ ct'=-(\sinh y)x+(\cosh y)ct\end{cases} \tag{2.4.34}$$

利用双曲函数的公式和式(2.4.32)，有

$$\begin{cases}\cosh y=\dfrac{1}{\operatorname{sech} y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\\ \sinh y=\cosh y\tanh y=\dfrac{\tanh y}{\sqrt{1-\tanh^2 y}}=\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\end{cases} \tag{2.4.35}$$

代入式(2.4.34)就回到了式(2.4.14).

由式(2.4.32)可以解出快度[①]

$$y = \operatorname{artanh}\frac{v}{c} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right) \tag{2.4.36}$$

由此可见,快度是表征运动速度的一个参量.

用快度 $y$ 表征运动速度的好处是,在相继进行两次洛伦兹变换时,快度简单地相加.如果 $K_1$ 相对于 $K$ 有速度 $v_1$(快度 $y_1$),$K_2$ 相对于 $K_1$ 有速度 $v_2$(快度 $y_2$),则 $K_2$ 相对于 $K$ 的速度 $v \neq v_1 + v_2$,可是相应的快度

$$y = y_1 + y_2 \tag{2.4.37}$$

这可以从 $\mathrm{i}y$ 是"转动角度"直接看出,因为两次转动的总转动角应等于两个转动角之和.从式(2.4.34)出发,利用双曲函数的公式也不难证明这一论断.

将式(2.4.32)代入式(2.4.37),得

$$v = \tanh(y_1 + y_2) = \frac{\tanh y_1 + \tanh y_2}{1 + \tanh y_1 \tanh y_2}$$

再用式(2.4.32)得

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2} \tag{2.4.38}$$

这是相对论的速度合成公式.

---

① 第二等式不难利用双曲函数的定义

$$\frac{v}{c} = \tanh y = \frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}}$$

得到证明.

### 2.4.3　洛伦兹变换的几何意义

从复欧氏空间中的式(2.4.27)明显可见，洛伦兹变换是 $x$，$\mathrm{i}ct$ 轴在($x$，$\mathrm{i}ct$)平面上的转动.转动角

$$\theta=-\mathrm{i}y=-\mathrm{i}\operatorname{artanh}\frac{v}{c}=-\mathrm{i}\operatorname{artanh}\beta$$

是与新老参考系之间的相对速度 $v$ 有关的一个纯虚数.我们来讨论这一“转动”的几何图像.

回到闵可夫斯基空间.洛伦兹变换式(2.4.14)是以匀速沿 $x$ 方向作相对运动的两个惯性系之间的变换，

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-\beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y'=y \\ z'=z \\ ct'=\dfrac{ct-\beta x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{2.4.39}$$

式中，$\beta=\dfrac{v}{c}$ 是以光速为单位的，新老惯性系之间的相对速度，见式(2.4.16)，这里假定它沿 $x$ 方向.

应注意，虽然在闵可夫斯基空间中，坐标、时间和坐标系的“转动角”$\theta$ 都是实数，然而度规中有 $-1$，因而一切三角函数都要换成双曲函数.特别是，“直角三角形”的三边中以底边为最长.以图 2.1 为例，

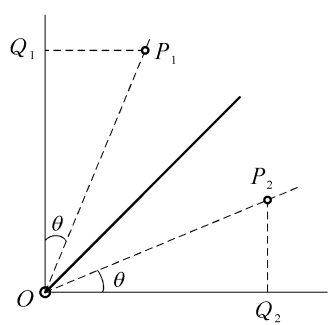



图 2.1　闵可夫斯基空间中的直角三角形

$$\overline{OQ_i} = \overline{OP_i}\cosh\theta \qquad \overline{Q_iP_i} = \overline{OP_i}\sinh\theta \quad (i=1,2)$$

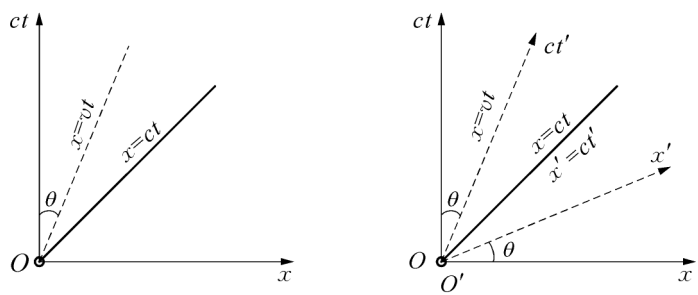
由 $\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$，有

$$\overline{OQ_i}^2 - \overline{Q_iP_i}^2 = \overline{OP_i}^2 \quad (i=1,2)$$

这表明，底边$\overline{OQ_i}$是最长边，

$$\overline{OQ_i} > \overline{OP_i} \quad (i=1,2) \tag{2.4.40}$$

选取一个惯性系 $K$.以 $x$ 和 $ct$ 作为横轴和纵轴形成一个平面(图 2.2(a)).注意，和这一平面垂直的轴有两个，即 $y$ 轴和 $z$ 轴.这是因为，我们讨论的是一个四维空间，在这一空间中，和二维$(x, ct)$平面垂直的不是一根一维直线，而是一个二维$(y, z)$平面.因此，“在$(x, ct)$平面上的转动”，实质上是四维空间中，以$(y, z)$平面为“轴”的转动.




(a) 匀速运动物体的世界线　　(b) 和匀速运动参考系对应的坐标转动

图 2.2　闵可夫斯基空间中的坐标转动

图 2.2(a)中的坐标原点 $O$ 描述的是一个质点在 $t=0$ 时刻位于 $(x=y=z=0)$ 的事件.随着时间的演化，质点将离开 $O$ 点运动，在$(x, y, z, ct)$图上画出一根曲线，称为**世界线**.图中的虚线是质点沿 $x$ 方向以匀速 $v$ 运动的世界线 $x=vt$. 它和 $ct$ 轴夹角 $\theta$的双曲正切

$$\tanh\theta=\frac{x}{ct}=\frac{v}{c}=\beta \tag{2.4.41}$$

是质点以光速为单位的运动速度.

图中用实线画出了在 $O$ 点发出的光(以光速运动)的世界线 ($x=ct$). 显然,它位于 $x$ 轴和 $ct$ 轴的平分角线上.由于质点运动的速度恒小于光速,质点运动的世界线(虚线)和 $ct$ 轴的夹角一定小于实线和 $ct$ 轴的夹角.

设另一惯性系 $K'$和 $K$ 在初始时刻 ($t'=t=0$) 的坐标原点 ($x'=0$) 和 ($x=0$) 重合.让 $K'$系的坐标原点 ($x'=0$) 固连在上述以速度 $v$ 沿 $x$ 轴运动的质点上.当时间演化,$t'$增加时,$x'=0$ 的点将沿着这一质点的世界线运动,形成 $K'$系中的时间轴($t'$轴即 $x'=0$ 轴).这表明,在由 $K$ 系变换到 $K'$系时,$ct$ 轴向着光锥转动 $\theta$角成为 $ct'$轴(图 2.2(b)).

由于光速不变,光传播的世界线在不同惯性系中都相同,因而 $K'$系中光的传播线 $x'=ct'$ 和 $K$ 系中光的传播线 $x=ct$ 重合.

另一方面,在 $K'$系中,从 $O$ 点发出的光的世界线 $x'=ct'$ 也应该是 $x'$轴和 $ct'$轴的平分角线,因此在 $ct$ 轴向着光锥转动成 $ct'$轴的同时,$x$ 轴也向着光锥转到 $x'$轴,以保持光的世界线为 $x'$轴和 $ct'$轴的平分角线(图 2.2(b)).

### 2.4.4　光锥

在 $K$ 系中,将光的传播线 $x=ct$ (图 2.3 中的实线)线绕 $ct$ 轴旋转,得到一个锥面,称为**光锥**.它是在四维空间中的一个三维锥面①.

① 如果只讨论沿 $x$ 轴的一维运动,可以丢掉 $z$ 轴,只考虑三维闵可夫斯基空间 ($x$, $y$, $ct$).此时,光锥是三维空间中的一个二维锥面;但在实际的三维运动情况下,必须将光锥理解为是四维空间中的三维锥面.

四维闵可夫斯基空间中的点$(x,\ ct)$描述的是在$t$时刻在位置$x$处发生的一件事,称为一个**事件**.它可以是质点在$t$时刻运动到$x$点,也可以是$t$时刻在$x$处发出光或收到光信号等.

在不同的惯性系中,两个事件可以是在同一地点发生,也可以是在不同地点发生;可以是在同一时刻发生,也可以是在不同时刻发生.这依赖于这两个事件在光锥图中的相对位置.

设一个事件的位置在光锥的原点$O(x=y=z=ct=0)$,另一个事件位于四维空间的$P(x,\ y,\ z,\ ct)$点.它们之间的间隔平方

$$\mathrm{d}\tau^2=(c\mathrm{d}t)^2-(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)=\tau^2=(ct)^2-\boldsymbol{r}^2$$

在惯性系之间变换时不变,见式(2.1.11).

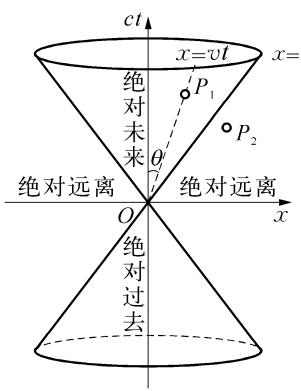


图 2.3 光锥

设$P$点位于光锥内部,如图 2.3 中的$P_1$,则有$(ct)^2>\boldsymbol{r}^2$,因而$\boldsymbol{r}^2$可以在某一惯性系中等于 0(两事件$P_1$和$O$发生于同一地点),而$(ct)^2$在任何惯性系中都不可能等于 0(两事件不能是同时发生).因此,光锥内部的区域按$t$的符号而称为**绝对未来**$(t>0)$,或**绝对过去**$(t<0)$.

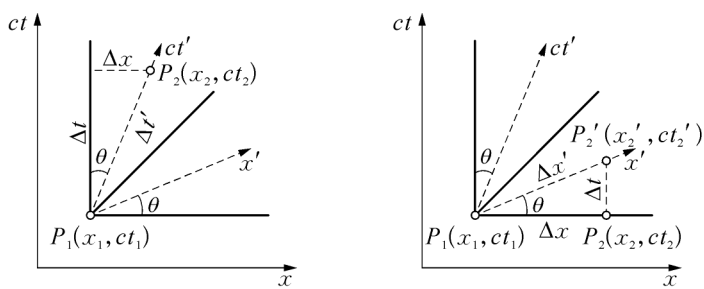
如果$P$点位于光锥外部,如图 2.3 中的$P_2$,则有$\boldsymbol{r}^2>(ct)^2$,因而$(ct)^2$可以在某一惯性系中等于 0(两事件同时发生),而$\boldsymbol{r}^2$在任何惯性系中都不可能等于 0(两事件不可能在同一地点发生).因此,光锥外部的区域称为**绝对远离**.

## 2.4.5　洛伦兹收缩

为简单计，暂时只考虑 1+1 维($x$, $ct$)的闵可夫斯基空间.

设在某一惯性系 $K$，一个不稳定粒子在 $t_1$ 时刻位于 $x_1$，如图 2.4(a)中的 $P_1$.到 $t_2$ 时刻，它运动到 $x_2$ 发生衰变，如图2.4(a)中的 $P_2$.相对于 $K$ 系而言，这一粒子以速度 $v$ 沿 $x$ 方向运动.在 $K$ 系中测到粒子的寿命是 $T_v = \Delta t = t_2 - t_1$. 另一参考系 $K'$随粒子一道运动，$t'$轴沿粒子的世界线$\overline{P_1P_2}$.粒子在 $K'$系中静止，因而 $K'$称为粒子的**固有系**.在 $K'$系中测量粒子的寿命，得 $T_0 = \Delta t' = \overline{P_1P_2}$. 由图 2.1 和式(2.4.40)知，$\Delta t > \Delta t'$，即在粒子运动的参考系中测得粒子的寿命 $T_v$ 比粒子在自己的固有系中的寿命长，

$$T_v > T_0$$




(a) 运动时钟延缓　　(b) 洛伦兹收缩

图 2.4　洛伦兹变换的时空效应

这称为**运动时钟延缓**.由图 2.4(a)，$\Delta t = \Delta t' \cosh\theta$. 利用双曲函数公式

$$\cosh\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\theta}}$$

得

$$T_v = T_0 \cosh\theta = \frac{T_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.4.42}$$

再来看物体长度在运动时的变化.

设有一根棒子沿 $x$ 轴放置,如图 2.4(b)中的 $P_1P_2$.其长度为 $l_0 = \Delta x = x_2 - x_1$.当它以速度 $v$ 沿 $x$ 方向运动时,$x$ 轴成为 $x'$轴.棒的长度成为 $l_v = \Delta x'$.由图知,$\Delta x' < \Delta x$,即运动物体的长度比它在静止系的固有长度短,

$$l_v < l_0$$

这称为**洛伦兹收缩**.由 $\Delta x = \Delta x' \cosh\theta$,得

$$l_v = l_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.4.43}$$

当一个三维物体以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时,它沿 $\boldsymbol{v}$ 方向的长度按式(2.4.43)收缩,而垂直于 $\boldsymbol{v}$ 的两个方向上没有收缩.因而三维体积 $V$ 收缩为

$$V = V_0\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.4.44}$$

式(2.4.42)和(2.4.44)表明,四维体积元在洛伦兹变换下不变.这也可以直接看到.实际上,

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'(c\mathrm{d}t') = J\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(c\mathrm{d}t)$$

式中,$J$ 是雅可比行列式,由式(2.4.14)可见

$$J = \frac{\partial(x',\ y',\ z',\ t')}{\partial(x,\ y,\ z,\ t)} = 1 \tag{2.4.45}$$

因而有

$$\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\mathrm{d}t' = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t \tag{2.4.46}$$

是标量.

### 2.4.6　相对论力学中的张量分析

在高速情况下,相对论规律起作用,所有的三维矢量都要扩展成四维.

三维位置矢量扩展到四维就是

$$\boldsymbol{r}(x,\ y,\ z) \rightarrow x^{\mu}(x,\ y,\ z,\ ct) \tag{2.4.47}$$

而四维速度矢量定义为 $x^{\mu}$ 对固有时的导数(乘以光速 $c$ 以使之具有速度的量纲):

$$u^{\mu} = c \cdot \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left( \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \tag{2.4.48}$$

由于 $\mathrm{d}\tau$ 是标量,$u^{\mu}$ 和 $\mathrm{d}x^{\mu}$ 一样是四维矢量.

$u^{\mu}$ 乘上 $m$ 定义为**四维动量矢量**,或**能量—动量四维矢量**:

$$p^{\mu} = mcu^{\mu} = \left( \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}},\ \frac{1}{c}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \left( \boldsymbol{p},\ \frac{E}{c} \right) \tag{2.4.49}$$

其空间(1, 2, 3)分量和时间(0)分量(乘 $c$)分别是三维动量和能量:

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.4.50}$$

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2.4.51}$$

时空四维矢量 $x^\mu$ 的长度,即它的自点积开方,是它相对于原点($x=y=z=ct=0$)的间隔

$$\sqrt{x^2}\equiv\sqrt{g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta}=\sqrt{(ct)^2-\boldsymbol{r}^2}=ct\sqrt{1-\beta^2}=\tau \tag{2.4.52}$$

见式(2.1.10).四维速度矢量的自点积等于 $c^2$,即

$$u^2=u_\mu u^\mu=c^2 \tag{2.4.53}$$

能量—动量四维矢量 $p^\mu$ 的长度(自点积开方)则是质点的质量 $m$ 乘 $c$:

$$p^2\equiv g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta=\frac{1}{c^2}(E^2-c^2\boldsymbol{p}^2)=m^2c^2 \tag{2.4.54}$$

这就是爱因斯坦的质能关系

$$E^2=c^2\boldsymbol{p}^2+m^2c^4 \tag{2.4.55}$$

式(2.4.54)表明,一个质点的四维动量的长度等于它的质量 $m$ 乘 $c$.也就是说,质点的四维动量 $p$ 的端点形成闵可夫斯基空间的一个半径为 $mc$ 的球壳.因此,常称式(2.4.54)为质点的**质壳条件**.

由于 $E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4)$ 是标量,可以定义它的 $\delta$ 函数

$$\delta(E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4))=\begin{cases}0 & (E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4)\neq 0)\\ \infty & (E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4)=0)\end{cases}$$

$$\int\delta(E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4))\mathrm{d}E=1$$

由 $\delta$ 函数的性质,上述积分可化为

$$\int \frac{1}{2E}\left[\delta(E-\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4})+\delta(E+\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4})\right]\mathrm{d}E=1 \tag{2.4.56}$$

代入四维动量的多重积分，得

$$\int f(E,\ \boldsymbol{p})\delta(E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4))\mathrm{d}E\mathrm{d}p^1\mathrm{d}p^2\mathrm{d}p^3$$

$$=\int f(E,\ \boldsymbol{p})\frac{1}{2E}\left[\delta(E-\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4})\right.$$

$$\left.+\delta(E+\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4})\right]\mathrm{d}E\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$$

考虑到能量应取正值，只取上式中的第一个 δ 函数.利用它完成对 $E$ 的积分得到

$$\int f(E,\ \boldsymbol{p})\delta\left[E^2-(\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4)\right]\mathrm{d}E\mathrm{d}p^1\mathrm{d}p^2\mathrm{d}p^3$$

$$=\int f(E,\ \boldsymbol{p})\Big|_{E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4}}\frac{1}{2E}\mathrm{d}^3\boldsymbol{p} \tag{2.4.57}$$

常称$\dfrac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{2E}$为**不变积分元**，它是一个标量.事实上，$\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$ 是三维动量空间的体积元.在四维(能量—动量)空间中，它是一个三维超球面(质壳面).这一超球面可表示为一个和它垂直的方向，即能量方向上的矢量.而 $E$ 正是这一方向上的矢量，因而两者之比是标量.

再来看由 $n$ 个质点组成的系统.它有总四维动量

$$P^\mu=\sum_{a=1}^{n}p_a^\mu \tag{2.4.58}$$

它的长度 $M_{\text{不变}}c$ 是一个标量，

$$\boldsymbol{P}^2=\frac{1}{c^2}\left[\left(\sum_a \boldsymbol{E}_a\right)^2-c^2\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a\right)^2\right]=M_{\text{不变}}^2c^2 \tag{2.4.59}$$

$M_{\text{不变}}$ 称为这一 $n$ 质点系统的**不变质量**.它等于在系统质心系中的总能量(除以 $c^2$),因为在质心系中 $\sum \boldsymbol{p}_a=0$.

## 2.5 闵可夫斯基空间中的张量场

### 2.5.1 电动力学方程的四维表述

我们来讨论分布在空间中并随时间变化的电荷和电磁场.有关的量都是四维时空坐标的函数.

用 $\rho$ 表示时空点 $x^{\mu}$ 处的电荷密度.它实际上是 $x^1$，$x^2$，$x^3$ 附近一个小体积元中在时刻 $t$ 的电荷密度.用 $\boldsymbol{v}$ 表示这一小体积元的速度,则三维电流密度矢量是 $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$,写成分量形式

$$j_i=\rho\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\quad(i=1,2,3)$$

采用复欧氏空间,将它扩展到四维,得

$$J_a=\rho\frac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}\quad(a=1,2,3,4) \tag{2.5.1}$$

具体写出就是

$$\boldsymbol{J}=\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\qquad J_4=\mathrm{i}c\rho \tag{2.5.2}$$

电荷密度 $\rho=\dfrac{Q}{\mathrm{d}V}$，其中电荷 $Q$ 是标量，而 $J_a=\rho\dfrac{\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}t}=\dfrac{Q\mathrm{d}x_a}{\mathrm{d}V\mathrm{d}t}$，由于 $\mathrm{d}V\mathrm{d}t$ 是标量，见式(2.4.46)，所以 $J_x$，$J_y$，$J_z$，$\mathrm{i}c\rho$ 构成一个四维矢量 $J$，称为**四维电流密度矢量**.如果采用实伪欧氏空间，则四维电流密度矢量的逆变分量是

$$j^1=J_x\qquad j^2=J_y\qquad j^3=J_z\qquad j^0=c\rho \tag{2.5.3}$$

在积分形式的电荷守恒定律($\mathrm{d}\sigma$ 是面元，$S$ 是包围体积 $V$ 的封闭面)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\oint_S\boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\sigma$$

的左边交换对时间的微分和对空间的积分，并对右边利用高斯定理进行变换得

$$-\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{j}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

由此得电荷守恒定律的微分形式，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

写成四维就是

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}=0 \tag{2.5.4}$$

或

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial j_{\mu}}{\partial x_{\mu}}=0 \tag{2.5.5}$$

注意,对逆变坐标的求导$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$中的$\mu$是协变指标;对协变坐标的求导$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$中的$\mu$是逆变指标.因而上两式中对$\mu$的作和是张量的协变指标和逆变指标的缩并,是允许的运算.上述论断证明如下.考虑零阶张量场(标量场)$f$的导数$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$,标量$f$的微分

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\mathrm{d}x^{\mu}$$

是标量.由于$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}$和一阶逆变张量$\mathrm{d}x^{\mu}$的缩并是标量,所以是一个一阶协变张量.同理可证,标量场$f$对协变坐标的导数$\frac{\partial f}{\partial x_{\mu}}$是一个一阶逆变张量.有时简写

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\equiv\partial_{\mu} \tag{2.5.6}$$

明显地显示出其协变性.

注意,式(2.5.4)或(2.5.5)中的两个求和指标$\mu$一个是逆变一个是协变,因而在展开求和时不出现度规张量,见式(2.3.31).例如,

$$\sum_{\mu=0}^{3}\frac{\partial j^{\mu}}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial j^{0}}{\partial x^{0}}+\frac{\partial j^{1}}{\partial x^{1}}+\frac{\partial j^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial j^{3}}{\partial x^{3}}$$

再来看能量密度和动量密度.我们知道,能量和动量组成一

个四维矢量.能量密度和动量密度是它们被体积元 $\mathrm{d}V$ 除,而体积元不是标量,所以能量密度和动量密度不组成四维矢量.

体积元 $\mathrm{d}V$ 在四维空间中是一个三维超平面.它等效于一个垂直于它,即在 0 方向的一个矢量.能量本身也在 0 方向,所以能量密度 $\varepsilon$ 在四维空间中是一个二阶张量 $T^{\mu\nu}$ 的 00 分量,

$$\varepsilon = T^{00} \tag{2.5.7}$$

我们假定 $T^{\mu\nu}$ 是一个对称张量, $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.

动量 $p^i$ ($i=1, 2, 3$) 本身有一个上标 $i$,取密度后又添加一个上标 0,因而它等于张量 $T^{\mu\nu}$ 的 $i0$ 或 $0i$ 分量除以 $c$,即

$$p^i = \frac{1}{c} T^{0i} = \frac{1}{c} T^{i0} \tag{2.5.8}$$

由此可见,在四维空间中有能量-动量张量

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon & cp^1 & cp^2 & cp^3 \\ cp^1 & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ cp^2 & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ cp^3 & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} \tag{2.5.9}$$

为了看到张量 $T^{\mu\nu}$ 的纯空间分量 $T^{ik}$ 的意义,我们来写出它的守恒方程

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \tag{2.5.10}$$

在 $\mu = 0$ 和 $i$ 时,分别得

$$\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{0k}}{\partial x^k} = 0 \tag{2.5.11}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial T^{i0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^{k}}=0 \quad (i=1,2,3) \tag{2.5.12}$$

将式(2.5.7)代入(2.5.11),并对 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$ 积分得

$$-\frac{1}{c}\int_V \frac{\partial}{\partial t}\varepsilon \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\int_V \frac{\partial}{\partial x^{k}}T^{0k}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$

利用高斯定理和式(2.4.45),将右边的体积分化为面积分,得

$$-\frac{\mathrm{d}}{c\mathrm{d}t}\int_V \varepsilon \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\oint_S T^{0k}\mathrm{d}\sigma^{k} \tag{2.5.13}$$

上式左边是单位时间体积 $V$ 中能量的减少(除以 $c$),因而右边应是单位时间从封闭面 $S$ 流出的能量(除以 $c$).可见 $T^{0k}$ 就是能流密度矢量 $\boldsymbol{S}$ 的 $k$ 分量(除以 $c$),即

$$cp^{k}=T^{0k}=T^{k0}=\frac{1}{c}S^{k} \tag{2.5.14}$$

式(2.5.11)和(2.5.13)分别是能量守恒定律的微分和积分形式.由(2.5.14)可见,动量等于能流密度除以 $c^2$.

用同样的方法处理式(2.5.12),类似式(2.5.13)有

$$-\int_V p^{i}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\oint_S T^{ik}\mathrm{d}\sigma^{k} \tag{2.5.15}$$

左边是单位时间体积 $V$ 中动量 $i$ 分量的减少,右边则是单位时间从封闭面 $S$ 流出的动量 $i$ 分量.因此,$T^{ik}$ 在三维欧氏空间中是**动量流密度张量**,它等于单位时间通过和 $k$ 垂直的单位面积流过的动量 $i$ 分量.

最后,我们来讨论电磁运动方程.

1860 年,麦克斯韦根据当时已发现的一系列电和磁的规

律,包括法拉第的电磁感应定律,建立了电和磁统一的运动方程:

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \end{cases} \tag{2.5.16}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \end{cases} \tag{2.5.17}$$

分别称为第一对和第二对麦克斯韦方程组.式中的 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 分别是电场强度和磁场强度.

电磁波(光)以光速运动,因而电磁运动方程(2.5.16)和(2.5.17)是相对论性的方程.我们来把它们写成四维形式.

在式(1.5.22)中已经看到,在三维欧氏空间中,磁场的分量 $H^k$ 可以组成一个三维反对称二阶张量①

$$F^{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} H^k \tag{2.5.18}$$

利用式(2.5.3)改写式(2.5.17)为

$$\begin{cases} \left(\nabla \times \boldsymbol{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)^i = \dfrac{4\pi}{c} j^i \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{4\pi}{c} j^0 \end{cases}$$

① 在欧氏空间中,上下标没有差别.另外,为了和四维电磁场张量的通常定义式(2.5.20)相一致,式(2.5.18)和(1.5.22)差符号.

此两式右边分别是四维矢量，即一阶张量，$j^{\mu}$ 的空间和时间分量.左边第二项中的 $E^{i}$ 有一个指标 $i$，而 $\frac{\partial}{c\partial t}$ 带有一个指标 0，因而 $E^{i}$ 应该是一个二阶张量的 $0i$ 分量.考虑到式(2.5.18)这一二阶张量应反对称，因而有

$$E^{i}=F^{0i}=-F^{i0} \tag{2.5.19}$$

这样就得到四维电磁场张量

$$F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.20}$$

由于 $F^{\mu\nu}$ 对 $\mu$，$\nu$ 反对称，所以可以按式(2.3.34)定义它的对偶张量

$$F^{*\mu\nu}=\frac{1}{2}e^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho} \tag{2.5.21}$$

将它对 $x^{\nu}$ 求导得到 4 个三阶反对称张量.令它们等于 0，即

$$e^{\mu\nu\lambda\rho}\frac{\partial F_{\lambda\rho}}{\partial x^{\nu}}=0 \quad (\mu=0,1,2,3) \tag{2.5.22}$$

这就是第一对麦克斯韦方程(2.5.16)，证明留给读者.第二对麦克斯韦方程(2.5.17)的四维形式则是

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}=-\frac{4\pi}{c}j^{\mu} \quad (\mu=0,1,2,3) \tag{2.5.23}$$

证明也留给读者.

## 2.5.2　相对论流体力学方程

流体(液体和气体)由大量分子组成.流体力学不考虑其分子结构,而讨论流体的一个小体积元中所有分子的集体性质.所讨论的速度、能量、动量等都是小体积元中流体的量,而小体积元中分子的无规则热运动已消去.这些量的值依赖于小体积元位置的时空坐标,因此它们都是四维伪欧氏空间(闵可夫斯基空间)中的张量场.下面,我们讨论相对论流体力学的张量结构,度规张量有式(2.3.18)的形式.

1. 四维粒子流和能量—动量张量

在某一时空点 $x^{\mu}=(ct,\ \boldsymbol{x})$,粒子数密度 $n(\vec{x},\ t)$和粒子流密度$\vec{j}(\vec{x},\ t)$构成四维粒子流

$$N^{\mu}(x)=(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},\ t),\ cn(\boldsymbol{x},\ t)) \tag{2.5.24}$$

流体的能量-动量张量和电磁场情况下的式(2.5.9)类似,由能量密度 $T^{00}(x)=c\rho=\varepsilon(\boldsymbol{x},\ t)$,能流密度 $cT^{0i}(x)_{\alpha}=\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\ t)$,动量密度 $c^{-1}T^{0i}(x)=c^{-2}\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},\ t)$,压强张量(动量流密度张量)$T^{ij}$构成,即

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} T^{00}(\boldsymbol{x},\ t) & T^{0i}(\boldsymbol{x},\ t) \\ T^{i0}(\boldsymbol{x},\ t) & T^{ij}(\boldsymbol{x},\ t) \end{pmatrix} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.5.25}$$

2. 流体的 4-速度

在式(2.4.53)中已看到,按四维速度的定义,它的平方应等

于光速的平方.因此流体的 4 -速度张量 $u^{\mu}(x)$在任一时空点均应满足条件

$$g^{\mu\nu}(x)u_{\mu}(x)u_{\nu}(x)=c^{2} \tag{2.5.26}$$

利用流体 4 -速度可以将度规张量分解为

$$g^{\mu\nu}=c^{-2}u^{\mu}(x)u^{\nu}(x)+\Delta^{\mu\nu}(x) \tag{2.5.27}$$

张量 $\Delta^{\mu\nu}(x)$称为投影张量,它作用在任一矢量上得到正交于 $u_{\mu}$ 的矢量,故满足

$$\Delta^{\mu\nu}(x)u_{\nu}=0 \tag{2.5.28}$$

改写式(2.5.27)得

$$\Delta^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}-\frac{1}{c^{2}}u^{\mu}(x)u^{\nu}(x) \tag{2.5.29}$$

由式(2.5.26)和(2.5.29)知

$$\Delta^{\mu\nu}=\Delta^{\nu\mu}\quad \Delta^{\mu\nu}\Delta_{\nu\sigma}=\Delta^{\mu}_{\sigma}\quad \Delta^{\mu}_{\mu}=3 \tag{2.5.30}$$

为进一步理解 $\Delta^{\mu\nu}$的意义,注意到在局域静止系中有

$$\Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{LR}}=\mathrm{diag}(0,-1,-1,-1)$$

其中,符号 diag(…)表示一个 4×4 的矩阵,其对角元是括号中的 4 个数,而非对角元是 0。显然,$\Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{LR}}$反映度规张量 $g^{\mu\nu}_{\mathrm{LR}}$的空间部分。

流体的 4 -速度有不同的定义.常用的两种分别基于四维粒子流和能量—动量,它们是

(1) 埃卡特(Eckart)定义

$$u^{\mu}(x)=\frac{cN^{\mu}}{\sqrt{N^{\nu}N_{\nu}}} \tag{2.5.31}$$

(2) 朗道-利夫席茨(Landau-Lifshitz)定义

$$u^{\mu}(x)=\frac{cT^{\mu\nu}u_{\nu}}{\sqrt{u_{\rho}T^{\sigma\rho}T^{\sigma\tau}u_{\tau}}} \tag{2.5.32}$$

3. 粒子数密度　能量密度　压强张量

利用流体的 4 -速度,我们能定义流体的宏观物理量,如粒子数密度、能量密度、压强张量等.

(1) 粒子数密度

$$n=c^{-2}N^{\mu}u^{\mu} \tag{2.5.33}$$

在小体积元的局域静止系中

$$n=c^{-1}N^{0}_{\mathrm{LR}}$$

下标 LR 表示局域静止系.

(2) 能量密度

$$\varepsilon=c^{-2}u_{\mu}T^{\mu\nu}u_{\nu} \tag{2.5.34}$$

在局域静止系中

$$\varepsilon=T^{00}_{\mathrm{LR}}$$

(3) 压强张量

$$P^{\mu\nu}=\Delta^{\mu}_{\sigma}T^{\sigma\tau}\Delta^{\nu}_{\tau} \tag{2.5.35}$$

当回到局域静止系时

$$P^{00}_{\mathrm{LR}}=0 \qquad P^{0i}_{\mathrm{LR}}=P^{i0}_{\mathrm{LR}}=0$$

$$P^{ij}_{\mathrm{LR}}=T^{ij}_{\mathrm{LR}} \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

将 $P^{\mu\nu}$ 分解为“可逆”和“不可逆”的部分

$$P^{\mu\nu} = -p\Delta^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} \tag{2.5.36}$$

得

$$\Pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu}_{\sigma} T^{\sigma\tau} \Delta^{\nu}_{\tau} + p\Delta^{\mu\nu} \tag{2.5.37}$$

其中，$p$ 为静流体压强，$\Pi^{\mu\nu}$ 称为粘滞压强张量.

4. 四维粒子流与能量—动量分解

将四维粒子流写为 $N^{\mu} = g^{\mu\nu} N_{\nu}$. 利用式(2.5.27)和(2.5.33)，上式可分解为

$$N^{\mu} = nu^{\mu} + \Delta^{\mu\nu} N_{\nu} = nu^{\mu} + V^{\mu} \tag{2.5.38}$$

在流体 4-速度埃卡特定义下，有 $\Delta^{\mu\nu} N_{\nu} = 0$，上式简化为

$$N^{\mu} = nu^{\mu} \tag{2.5.39}$$

将能量-动量张量写为 $T^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} T_{\lambda\sigma}$. 代入式(2.5.27)和(2.5.34)，并利用式(2.5.35)，可将它分解为

$$T^{\mu\nu} = T^{(0)\mu\nu} + T^{(1)\mu\nu} \tag{2.5.40}$$

式中，

$$T^{(0)\mu\nu} = c^{-2} \varepsilon u^{\mu} u^{\nu} - p\Delta^{\mu\nu} \tag{2.5.41}$$

$$T^{(1)\mu\nu} = c^{-2} (u_{\sigma} T^{\sigma\lambda} \Delta^{\mu}_{\lambda} u^{\nu} + u^{\mu} u_{\sigma} T^{\sigma\lambda} \Delta^{\nu}_{\lambda} u^{\nu}) + \Pi^{\mu\nu} \tag{2.5.42}$$

在流体 4-速度朗道-利夫席茨定义下，有 $\Delta^{\mu\nu} T_{\nu\sigma} u^{\sigma} = 0$，则式(2.5.42)简化为

$$T^{(1)\mu\nu} = \Pi^{\mu\nu} \tag{2.5.43}$$

5. 流体力学基本方程

我们首先讨论随体导数.利用流体 4 -速度,可将四维导数分解成类时和类空部分:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu} &= g^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\\ &= c^{-2}u^\mu u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+(g^{\mu\nu}-c^{-2}u^\mu u^\nu)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\\ &= c^{-2}u^\mu u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\end{aligned}\tag{2.5.44}$$

我们将上式第一项称为**随体时间导数**,而第二项称为**随体梯度**,因为在局域静止系,$u^\nu\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$退化为$\dfrac{\partial}{\partial t}$,而 $\Delta^{\mu\nu}\dfrac{\partial}{\partial x^\nu}$退化为$-\dfrac{\partial}{\partial x}$.有了这个准备,我们来分别写出流体的连续性方程、运动方程和能量方程.

(1) 连续性方程.在四维时空,流体粒子数守恒定律为

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}N^\mu(x)=0\tag{2.5.45}$$

代入

$$N^\mu = nu^\mu + V^\mu$$

和

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = c^{-2}u_\mu u^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu}+\Delta^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

且利用 $V^{\mu}u_{\mu}=0$，得连续性方程

$$u^{\mu}\frac{\partial n}{\partial x^{\mu}}=-n\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{\nu}}-\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}}+c^{-2}V^{\mu}u^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}u_{\mu} \tag{2.5.46}$$

(2) 运动方程.在四维时空，能量-动量守恒定律为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu}=0 \tag{2.5.47}$$

为了获得流体的运动方程，我们用 $\Delta$ 对上式进行缩并

$$\Delta^{\mu}_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x^{\sigma}}T^{\nu\sigma}=0 \tag{2.5.48}$$

若记 $W^{\mu}=u^{\nu}T_{\nu\sigma}\Delta^{\sigma\mu}$，则根据式(2.5.40)～(2.5.42)，能量-动量张量写为

$$T^{\mu\nu}=c^{-2}\varepsilon u^{\mu}u^{\nu}-p\Delta^{\mu\nu}+c^{-2}(W^{\mu}u^{\nu}+u^{\mu}W^{\nu})+\Pi^{\mu\nu} \tag{2.5.49}$$

将上式代入式(2.5.48)，且考虑 $W^{\mu}u_{\mu}=0$，得流体运动方程

$$\begin{aligned}c^{-2}(\varepsilon+p)u^{\nu}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}}=&\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial p}{\partial x^{\nu}}-\Delta^{\mu}_{\sigma}\Delta^{\lambda}_{\sigma}\frac{\partial\Pi^{\sigma\nu}}{\partial x^{\lambda}}+c^{-2}\left(\Pi^{\mu\nu}u^{\sigma}\frac{\partial u_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right.\\&\left.-\Delta^{\mu\nu}u^{\sigma}\frac{\partial W_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}-W^{\mu}\Delta^{\nu\sigma}\frac{\partial u_{\nu}}{\partial x^{\sigma}}-W^{\nu}\Delta^{\sigma}_{\nu}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\sigma}}\right)\end{aligned} \tag{2.5.50}$$

(3) 能量方程.用流体 4-速度 $u^{\mu}$ 对式(2.5.47)进行缩并运算

$$u_{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}T^{\mu\nu}=0 \tag{2.5.51}$$

将 $T^{\mu\nu}$ 代入，且考虑 $\Pi^{\mu\nu}u_\nu=0$，得到能量方程为

$$u^\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\mu}=-(\varepsilon+p)\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}+\Pi^{\mu\nu}\Delta^{\mu\nu}\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$+\Pi^{\mu\nu}\Delta^\sigma_\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\sigma}-\Delta^\sigma_\mu\frac{\partial W^\mu}{\partial x^\sigma}+2c^{-2}W^\mu u^\nu\frac{\partial u_\mu}{\partial x^\nu}\quad(2.5.52)$$

## 习　题　2

1. 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，求证 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 线性相关.

2. 若 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，求证 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 线性相关.

3. 计算四维时空中 $e_{\mu\nu\rho\sigma}e^{\mu\nu\rho\sigma}$ 之值.

4. 在四维时空中试证下列关系成立：

(1) $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\delta\rho}=-6\delta^\rho_\sigma$；

(2) $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\beta\mu\nu}=-2(\delta^\mu_\gamma\delta^\nu_\delta-\delta^\nu_\gamma\delta^\mu_\delta)$；

(3) $e_{\alpha\beta\gamma\delta}e^{\alpha\mu\nu\sigma}=-(\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\gamma\delta^\sigma_\delta-\delta^\mu_\beta\delta^\sigma_\gamma\delta^\nu_\delta+\delta^\nu_\beta\delta^\sigma_\gamma\delta^\mu_\delta-\delta^\nu_\beta\delta^\mu_\gamma\delta^\sigma_\delta+\delta^\sigma_\beta\delta^\mu_\gamma\delta^\nu_\delta-\delta^\sigma_\beta\delta^\nu_\gamma\delta^\mu_\delta)$.

5. 从洛伦兹变换式(2.4.29)出发，证明快度变换式(2.4.37).

6. 证明洛伦兹变换(2.4.14)的雅可比等于 1，即式(2.4.45).

7. 在 3+1 维闵可夫斯基空间中推导 $K'$ 系相对于 $K$ 系沿任意方向以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的洛伦兹变换式.

8. 在伪欧氏空间，定义四维速度 $u^\alpha=\dfrac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}s}$，求 $g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$，并证明

$$(p^0)^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2+m^2\quad(p^\alpha=mu^\alpha)$$

9. 定义张量 $M^{\alpha\beta\gamma}\equiv x^\alpha T^{\beta\gamma}-x^\beta T^{\alpha\gamma}$，试证明：若 $\dfrac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=0$，则

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma}M^{\alpha\beta\gamma}=0$$

10. 定义角动量 $J^{\alpha\beta}=\int\mathrm{d}^3xM^{\alpha\beta\gamma}$，若 $M^{\alpha\beta\gamma}$ 满足第 5 题，试证明：

$\dfrac{\mathrm{d}J^{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t}=0$.

11. 证明式(2.5.22)、(2.5.23)展开成三维形式就是麦克斯韦方程组(2.5.16)、(2.5.17).

12. 写出伪欧氏空间的四维电磁能量—动量张量

$$T_{em}^{\alpha\beta}=F_{\gamma}^{\alpha}F^{\beta\gamma}+\frac{1}{4}\delta^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}F_{\gamma\delta}$$

13. 对于理想流体,在随流体运动参考系中有

$$T^{ij}=p\delta_{ij}\qquad T^{0i}=T^{i0}=0\qquad T^{00}=\varepsilon$$

求在实验室坐标系中的 $T^{\mu\nu}$.

14. 在随流体运动坐标系中,有 $N^{i}=0$, $N^{0}=n$,其中 $n$ 为流体数密度,求在实验室坐标系中的 $N^{\alpha}$.

15. 若 $u^{\mu}(x)$为流体的 4 -速度,试证明: $u^{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x^{\nu}}u_{\mu}=0$.

16. 由理想流体的能量—动量张量守恒定律 $\dfrac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=0$ 导出流体的运动方程和能量方程.

提示:能量方程由 $u_{\alpha}\dfrac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\beta}}=0$ 导出.

17. 由埃卡特和朗道-利夫席茨的流体 4 -速度定义,验证 $u^{\mu}(x)u_{\mu}(x)=c^{2}$.

18. 试讨论:在复欧氏空间中,相对论流体力学基本方程的表述形式.

# 第 3 章　平直空间中的曲线坐标

前两章中讨论的仿射空间以及由它得到的真、伪欧氏空间都是**平直空间**.在这种空间中存在以直线和平面为坐标线和坐标面的坐标系,称为**仿射坐标系**.但是,在平直空间中也可以有以曲线和曲面为坐标线和坐标面的坐标系,称为**曲线坐标系**,例如在平直的欧氏空间中也可以采用球坐标系和柱坐标系.在所研究的对象具有特殊对称性,例如球对称或柱对称的情况下,采用曲线坐标系更为方便.

在物理学中也常常需要讨论**弯曲空间**,例如将球面看做一个二维曲面,就是一个弯曲空间.在有引力存在的情况下,四维空间也成为弯曲空间.在这样的弯曲空间里不存在仿射坐标系,所能有的只是曲线坐标系.这一章讨论平直空间中的曲线坐标,为下一章中研究弯曲空间打下基础.

## 3.1　局 部 标 架

为了具体起见,先考虑三维欧氏空间.拉丁字母 $i$, $j$, $k$ 和希腊字母 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ 都取由 1 到 3 的值.

### 3.1.1　曲线坐标

在三维欧氏空间的一个连通区域 $\Omega$ 中给定一个直角坐标系 $\boldsymbol{e}_i$($i=1, 2, 3$). 区域 $\Omega$ 中的任一点 $M$ 在这一坐标系中的分

量用大写字母 $X_i(i=1,2,3)$ 表示.

设有 $X_i$ 的三个连续可微的单值函数

$$x_\alpha = x_\alpha(X_1, X_2, X_3) \quad (\alpha=1,2,3) \tag{3.1.1}$$

它的反函数

$$X_i = X_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i=1,2,3) \tag{3.1.2}$$

假定也单值连续可微,则 $x_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 可以代替 $X_i(i=1,2,3)$ 作为 $\Omega$ 中的点的坐标,称为**曲线坐标**.

**例 3.1** 令

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2} \\ x_2 = \arccos\dfrac{X_3}{\sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}} \\ x_3 = \arccos\dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} \end{cases} \tag{3.1.3}$$

式中,$0\leqslant x_2\leqslant\pi$;$0\leqslant x_3\leqslant\pi$ $(X_2\geqslant 0)$,$\pi<x_3<2\pi$ $(X_2<0)$;所有根号都取正值.反过来,

$$\begin{cases} X_1 = x_1\sin x_2\cos x_3 \\ X_2 = x_1\sin x_2\sin x_3 \\ X_3 = x_1\cos x_2 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

$$0\leqslant x_1<\infty \qquad 0\leqslant x_2\leqslant\pi \qquad 0\leqslant x_3<2\pi \tag{3.1.5}$$

则除了在 $x_1=0$ $(X_1=X_2=X_3=0)$ 一点外,式(3.1.3)和(3.1.4)都是单值连续可微的函数,因而$(x_1, x_2, x_3)$形成曲线坐标.习惯上写

$$x_1 = r \qquad x_2 = \theta \qquad x_3 = \varphi \tag{3.1.6}$$

称为**球坐标**.

**例 3.2**　令

$$\begin{cases} x^1 = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \\ x^2 = \arccos \dfrac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \\ x^3 = X_3 \end{cases} \tag{3.1.7}$$

式中，$0 \leqslant x^2 \leqslant \pi$ ($X_2 \geqslant 0$)，$\pi < x^2 < 2\pi$ ($X_2 < 0$)；所有根号都取正值.反过来，

$$\begin{cases} X_1 = x^1 \cos x^2 \\ X_2 = x^1 \sin x^2 \\ X_3 = x^3 \end{cases} \tag{3.1.8}$$

$$0 \leqslant x^1 < \infty \qquad 0 \leqslant x^2 < 2\pi \qquad -\infty < x^3 < \infty \tag{3.1.9}$$

则除了 $x^1 = 0$ ($X_1 = X_2 = 0$) 一条直线外，式(3.1.7)和(3.1.8)都是单值连续可微的函数.因而($x^1$，$x^2$，$x^3$)形成曲线坐标.习惯上写

$$x^1 = \rho \qquad x^2 = \varphi \qquad x^3 = z \tag{3.1.10}$$

称为**柱坐标**.

由式(3.1.2)知，$X_i$ 是 $x^\alpha$ 的函数，而由式(3.1.1)，$x^\alpha$ 又是 $X_j$ 的函数.根据复合函数求导法则，可以求 $X_i$ 对 $X_j$ 的导数

$$\frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial X_j}$$

但是，$X_i$ 对 $X_j$ 的导数在 $i = j$ 时为 1，在 $i \neq j$ 时为 0，因而

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial X_j} = \delta_{ij} \tag{3.1.11}$$

同理,利用式(3.1.1)和(3.1.2)计算 $x_\alpha$ 对 $x_\beta$ 的导数,可得

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_\alpha}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_\beta}=\delta_{\alpha\beta} \tag{3.1.12}$$

## 3.1.2 局部标架

在直角坐标系中,坐标线和坐标面是一些相互垂直的直线和平面.坐标基矢 $\boldsymbol{e}_i(i=1,2,3)$ 既是沿坐标线 $X_i$ 在 $X_i$ 增加方向上的单位矢量,又是垂直于"等 $X_i$ 面"的单位矢量(图3.1).它们是三个大小和方向都不变的常矢量,满足正交单位条件

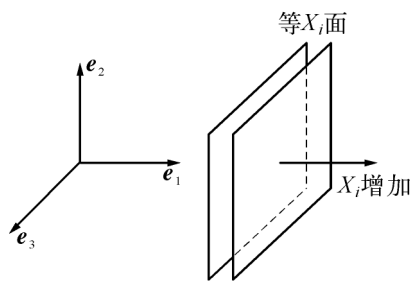



图 3.1 直角坐标基矢与坐标线、坐标面的关系

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij} \tag{3.1.13}$$

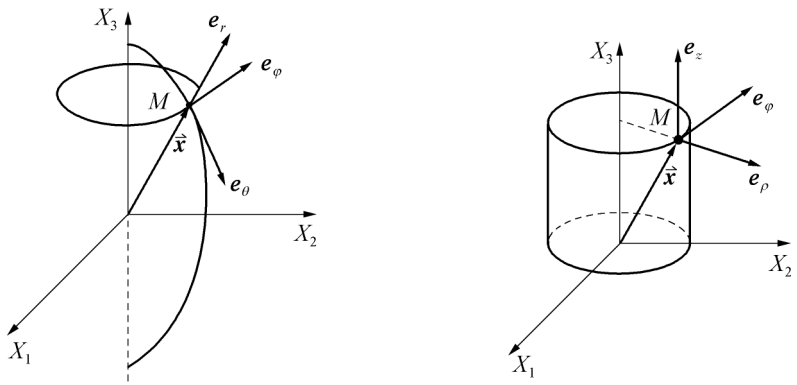
曲线坐标的定义式(3.1.2)可写为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x^1,x^2,x^3) \tag{3.1.14}$$

式中,$\boldsymbol{x}$ 是空间点的矢径.在此式中,令某一个 $x_\alpha$ 改变,其余两个 $x_\beta(\beta\neq\alpha)$ 保持不变,所得到的点的集合形成一条曲线,称为**坐标线** $x_\alpha$.另一方面,如果固定 $x_\alpha$ 而让 $x_\beta(\beta\neq\alpha)$ 变,则得到一个曲面,称为**坐标面**——等 $x_\alpha$ 面.对于曲线坐标,坐标线和坐标面一般说来是曲线和曲面.

考虑空间的任一点 $M$,其矢径为 $\boldsymbol{x}$.在这一点和坐标线 $x_\alpha$ 相切并指向 $x_\alpha$ 增加方向的单位矢量用 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 表示.三个 $\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 形成一组坐标基矢,它们在空间不同点有不同方向,因此

称由它们组成的坐标系为**局部标架**.图 3.2 中以球坐标和柱坐标为例画出了点 $M$(矢径为 $\boldsymbol{x}$)的局部标架.




(a) 球坐标系中的局部标架　　(b) 柱坐标系中的局部标架

图 3.2　点 $M$ 的局部标架

如果在空间的每一点 $M$,局部标架的基矢 $\boldsymbol{e}_\alpha(M)$ 都相互正交,即

$$\boldsymbol{e}_\alpha(M)\cdot\boldsymbol{e}_\beta(M)=\delta_{\alpha\beta} \tag{3.1.15}$$

则称这一曲线坐标为**正交曲线坐标**.球坐标和柱坐标都是正交曲线坐标(图 3.2).

### 3.1.3　拉梅系数

对式(3.1.14)求微分,得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha \tag{3.1.16}$$

如果只有一个 $x_\alpha$ 增加 ($\mathrm{d}x_\alpha>0$),而另两个保持不变($\mathrm{d}x_\beta=0$ 当 $\beta\neq\alpha$),则矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 沿坐标线 $x_\alpha$ 的切线,指向 $x_\alpha$ 增加的方向.

此时，式(3.1.16)右边的和式中只剩下含$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}$的一项.由此可见，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}$是沿坐标线$x_\alpha$的切线指向$x_\alpha$增加方向的一个矢量.但是，这一方向上的单位矢量是$\boldsymbol{e}_\alpha$，因而有

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha} = H_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \quad (\text{对 } \alpha \text{不作和}) \tag{3.1.17}$$

式中，$H_\alpha$称为**拉梅系数**，它等于上式左边矢量的模，即

$$H_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\right)^2} \tag{3.1.18}$$

另一方面，由式(3.1.1)可知，$x_\alpha$是$\boldsymbol{x}$的函数.可以把$x_\alpha(\boldsymbol{x})$看成标量场，它的梯度是指向“等$x_\alpha$面”的正法线方向的矢量.对于正交曲线坐标，“等$x_\alpha$面”的法线方向就是坐标线$x_\alpha$的切线方向(图3.2).因此，

$$\nabla x_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial \boldsymbol{x}} = h_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha \quad (\text{对 } \alpha \text{不作和}) \tag{3.1.19}$$

取式(3.1.17)与式(3.1.19)的点积，并利用式(3.1.12)和(3.1.15)，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha} \cdot \nabla x^\beta &= H_\alpha h_\beta \delta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\beta}{\partial X_i} = \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{对 } \alpha, \beta \text{不作和})\end{aligned}$$

式中，上、下两行的右边在$\alpha \neq \beta$时是恒等式$(0=0)$，而在$\alpha=\beta$时成为

$$H_\alpha h_\alpha = 1 \quad (\text{对 } \alpha \text{不作和})$$

或

$$h_\alpha = \frac{1}{H_\alpha} \tag{3.1.20}$$

**例 3.3**　求球坐标的拉梅系数.

**解**　采用习惯的符号式(3.1.6),则式(3.1.4)成为

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 = r\cos\theta \end{cases} \tag{3.1.21}$$

代入式(3.1.18),不难得

$$H_r = 1 \qquad H_\theta = r \qquad H_\varphi = r\sin\theta \tag{3.1.22}$$

这就是球坐标的拉梅系数.

### 3.1.4　曲线坐标中的体积元

将矢径的微分 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 按曲线坐标中的局部标架 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 展开,利用式(3.1.17),得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x_\alpha}\mathrm{d}x_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \boldsymbol{e}_\alpha H_\alpha \mathrm{d}x_\alpha \tag{3.1.23}$$

因此,$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在局部标架 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 中的分量是

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\alpha = H_\alpha \mathrm{d}x_\alpha \quad (\text{对 } \alpha \text{不作和}) \tag{3.1.24}$$

例如,在球坐标中,根据式(3.1.22)有

$$(\mathrm{d}\boldsymbol{x})_r = \mathrm{d}r \qquad (\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\theta = r\mathrm{d}\theta \qquad (\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\varphi = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{3.1.25}$$

在正交曲线坐标中，三个 $\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 相互垂直，因而 $(\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 形成一个长方体的三条边.这个长方体的体积 $\mathrm{d}\tau$ 是曲线坐标中的体积元，

$$\mathrm{d}\tau=\prod_{\alpha=1}^{3}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})_\alpha=\prod_{\alpha=1}^{3}H_\alpha\mathrm{d}x_\alpha \tag{3.1.26}$$

例如，球坐标中的体积元是式(3.1.25)中三个式子的连乘积，即

$$\mathrm{d}\tau=r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{3.1.27}$$

### 3.1.5 曲线坐标中的梯度、散度、旋度

利用式(3.1.24)容易得到标量场的梯度

$$\nabla\varphi=\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{x}}\right]_\alpha\boldsymbol{e}_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\boldsymbol{e}_\alpha \tag{3.1.28}$$

矢量场的散度和旋度也可以利用拉梅系数写出，其结果是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial x_1}+\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial x_3}\right] \tag{3.1.29}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\left[\frac{\boldsymbol{e}_\alpha}{H_\beta H_\gamma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}(a_\gamma H_\gamma)\right] \tag{3.1.30}$$

这两个公式的证明将在 3.4 节中给出.

结合式(3.1.28)和(3.1.29)可以得到拉普拉斯算子

$$\triangle\equiv\nabla^2=\nabla\cdot\nabla \tag{3.1.31}$$

的表达式

$$\triangle = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\right] \tag{3.1.32}$$

## 3.2　曲线坐标中的张量

现在来考虑不同曲线坐标之间的变换性质.为了普遍起见,以下不局限于三维空间,也不局限于正交曲线坐标.

考虑 $n$ 维欧氏空间.其中任一点的矢径 $\boldsymbol{x}$ 在直角坐标中的分量是 $X^1, X^2, \cdots, X^n$.仿照式(3.1.1)和(3.1.2)定义曲线坐标

$$x^\alpha = x^\alpha(X^1, X^2, \cdots, X^n) \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.2.1}$$

$$X^i = X^i(x^1, x^2, \cdots, x^n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.2.2}$$

但是,我们并不假定有式(3.1.15)型的等式,即局部标架的基矢之间不一定相互正交,而且基矢的长度也不一定为 1.然而,式(3.1.16)仍然成立,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha}\mathrm{d}x^\alpha$$

和前面同样地分析可以知道,$\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha}$是沿坐标线 $x^\alpha$ 的切线,指向 $x^\alpha$ 增加方向的矢量.因此,可以直接取

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n) \tag{3.2.3}$$

作为**坐标基矢**.由于坐标基矢没有正交性和单位长度性,“协变”和“逆变”不等同,因而在以下的讨论中有必要区分上、下指标.

### 3.2.1 坐标变换

给定曲线坐标 $x^{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,n)$. 由式(3.2.2),有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x^{1},x^{2},\cdots,x^{n}) \tag{3.2.4}$$

设有连续可微的单值函数

$$x^{\alpha'}=x^{\alpha'}(x^{1},x^{2},\cdots,x^{n})\quad(\alpha'=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.5}$$

它的反函数

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'})\quad(\alpha=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.6}$$

也是连续可微的单值函数,则 $x^{\alpha'}(\alpha'=1,2,\cdots,n)$ 也是一个曲线坐标.将式(3.2.6)代入式(3.2.4),有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'}) \tag{3.2.7}$$

在原曲线坐标 $x^{\alpha}$ 中,局部标架的基矢是 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$(式(3.2.3));在新曲线坐标 $x^{\alpha'}$ 中,局部标架的基矢是

$$\boldsymbol{x}_{\alpha'}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha'}}\quad(\alpha'=1,2,\cdots,n) \tag{3.2.8}$$

根据复合函数求导的法则,

$$\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha'}}=\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$$

由式(3.2.3)就有

$$\boldsymbol{x}_{\alpha'}=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{x}_{\alpha} \tag{3.2.9}$$

这就是曲线坐标局部标架基矢之间的变换法则.反之,有

$$\boldsymbol{x}_{\alpha}=\sum_{\alpha'=1}^{n}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\boldsymbol{x}_{\alpha'} \tag{3.2.10}$$

将式(3.2.9)与式(2.2.14)比较可见，在曲线坐标的变换中，$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$代替了仿射坐标变换中的 $A_{i'}^{i}$．实际上，后者是前者的特例——当 $x^{\alpha}$ 和 $x^{\alpha'}$ 都是仿射坐标时，它们之间有线性关系，因而 $\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$化为常数矩阵 $A_{\alpha'}^{\alpha}$，参看式(1.6.6)．

### 3.2.2　张量的定义与运算

在曲线坐标中张量的定义和仿射坐标中张量的定义式(2.2.25)形式上相同，只要作代换

$$A_{i'}^{i}\longrightarrow\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}(M)\qquad A_{j}^{j'}\longrightarrow\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}(M) \tag{3.2.11}$$

这里用宗量 $M$ 标明$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$和$\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}}$都是空间点的函数，而不是常数．

**定义 3.1**　在曲线坐标 $x^{\alpha}$ 中，在空间任一点 $M$ 给出一组数

$$\boldsymbol{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}^{\beta_1\cdots\beta_\mu} \tag{3.2.12}$$

如果当曲线坐标变换时，它变为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha'_1\cdots\alpha'_\nu}^{\beta'_1\cdots\beta'_\mu}=\sum_{\substack{\alpha_1\cdots\alpha_\nu\\ \beta_1\cdots\beta_\mu}}\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_\nu}}{\partial x^{\alpha'_\nu}}\frac{\partial x^{\beta'_1}}{\partial x^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta'_\mu}}{\partial x^{\beta_\mu}}\boldsymbol{a}_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}^{\beta_1\cdots\beta_\mu} \tag{3.2.13}$$

式中，所有的量都取 $M$ 点的值，对所有指标的作和都是从 1 到 $n$，则称这一组数为在 $M$ 点的一个 $\nu$ 阶协变、$\mu$ 阶逆变的张量．

张量的代数运算可以仿照式(2.2.26)～(2.2.28)来定义．

但是,张量场的微分运算比较复杂,留到下两节中讨论.

### 3.2.3 度规张量

在本节中,到此为止还没有用到空间的度量性质,因此一切讨论都适用于仿射空间.往下要用到欧氏空间(包括真欧氏空间和伪欧氏空间)的度量性质,引进度规张量.

任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 按曲线坐标中的标架基矢 $\boldsymbol{x}_\alpha$(式(3.2.3))展开为

$$\boldsymbol{a}=\sum_\alpha a^\alpha \boldsymbol{x}_\alpha \qquad \boldsymbol{b}=\sum_\alpha b^\alpha \boldsymbol{x}_\alpha$$

取两者的点积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}_\beta)a^\alpha b^\beta \tag{3.2.14}$$

定义度规张量为

$$g_{\alpha\beta}=\boldsymbol{x}_\alpha\cdot\boldsymbol{x}_\beta\equiv\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^\beta}=\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^i}{\partial x^\beta} \tag{3.2.15}$$

则矢量点积的公式(3.2.14)成为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\,a^\alpha b^\beta \tag{3.2.16}$$

由此式可见,$g_{\alpha\beta}$是二阶协变张量.

还可以定义二阶逆变度规张量

$$g^{\alpha\beta}=\sum_i\frac{\partial x^\alpha}{\partial X^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial X^i} \tag{3.2.17}$$

利用式(3.1.11)和(3.1.12),可以证明

$$\sum_{\beta} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \tag{3.2.18}$$

在曲线坐标中，$g_{\alpha\beta}$是 $\boldsymbol{x}$ 的函数，可以看成是二阶张量场.一般说来，它是不对角的，但是在正交曲线坐标中 $g_{\alpha\beta}$对角.为了看到这一点，将式(3.1.17)代入式(3.2.15)，得到正交曲线坐标中的协变度规张量

$$g_{\alpha\beta} = H_{\alpha} H_{\beta} \delta_{\alpha\beta} = H_{\alpha}^{2} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{对 } \alpha, \beta \text{不作和}) \tag{3.2.19}$$

将式(3.1.19)和(3.1.20)代入式(3.2.17)，得到正交曲线坐标中的逆变度规张量

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{H_{\alpha} H_{\beta}} \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{H_{\alpha}^{2}} \delta_{\alpha\beta} \quad (\text{对 } \alpha, \beta \text{不作和}) \tag{3.2.20}$$

如果讨论的是平直的仿射坐标系，则 $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\alpha}$ 是常矢量，见式(2.2.11)，因而按式(3.2.15)定义的 $g_{\alpha\beta}$是常数张量，即

$$g_{\alpha\beta} \text{ 是常数张量} \quad (\text{对于仿射坐标系}) \tag{3.2.21}$$

对于斜交坐标系，$g_{\alpha\beta}$不是对角的，但总可以通过坐标变换变到坐标基矢为单位矢量的直角坐标系，使 $g_{\alpha\beta}$对角，而且其对角元为$\pm 1$.

### 3.2.4　弧长与体积

考虑矢径 $\boldsymbol{x}$ 的微分

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_{\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}} \mathrm{d}x^{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathrm{d}x^{\alpha}) \boldsymbol{x}_{\alpha} \tag{3.2.22}$$

由此式可见，$\mathrm{d}x^{\alpha}$ 是矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 在局部标架 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 中的分量.

$\mathrm{d}\boldsymbol{x}$的长度是

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{x}|=\sqrt{\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\sqrt{\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}} \tag{3.2.23}$$

在一级近似下,它等于弧长的微分$\mathrm{d}s$,因而

$$\mathrm{d}^2s=\sum_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{3.2.24}$$

再来看区域$D$的体积$V_D$.在直角坐标中,我们有

$$V_D=\int_D\mathrm{d}X^1\mathrm{d}X^2\cdots\mathrm{d}X^n \tag{3.2.25}$$

按式(3.2.1)和(3.2.2)作变量代换,得

$$V_D=\int_D J\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\cdots\mathrm{d}x^n \tag{3.2.26}$$

式中,变换的雅可比$J$是矩阵$\dfrac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}$的行列式的绝对值,即

$$J=\left|\det\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}\right| \tag{3.2.27}$$

按式(3.2.15)

$$g_{\alpha\beta}=\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}}=\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta}}$$

它可以看成是两个矩阵

$$B_{\alpha i}\equiv\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}\qquad C_{i\beta}\equiv\frac{\partial X^i}{\partial x^{\beta}}$$

的矩阵积.这两个矩阵的行列式相等,

$$\det B_{\alpha i}=\det C_{i\beta}=\det\frac{\partial X^i}{\partial x^{\alpha}}$$

因而，$g_{\alpha\beta}$的行列式

$$g \equiv \det g_{\alpha\beta} \tag{3.2.28}$$

等于

$$g = \left( \det \frac{\partial X^i}{\partial x^\alpha} \right)^2 \tag{3.2.29}$$

这样，由式(3.2.26)得

$$V_D = \int_D \sqrt{|g|}\, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \cdots \mathrm{d}x^n \tag{3.2.30}$$

## 3.3　平行移动与联络

在上一节里，我们在空间的任一点 $M$，给出了曲线坐标中张量的定义，如式(3.2.13).现在来讨论在空间的不同点，按这种方式定义的张量之间的关系.

在三维欧氏空间的直角坐标系中给定一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量 $a_i$($i=1, 2, 3$) 就完全确定了这个矢量.在空间任一点，用这三个分量可以作出这同一个矢量，其原因是直角坐标的基矢 $\boldsymbol{e}_i$ 是三个常矢量，与空间点无关.

在曲线坐标中则不然，坐标基矢 $\boldsymbol{e}_\alpha$ 依赖于空间点 $M$.因此，在空间的不同点，同样的三个分量 $a^\alpha$ 决定不同的矢量.反之，如果在空间某一点 $M$ 给定了一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 的三个分量 $a^\alpha$，则将这一矢量平行移动到另一点 $N$，它的分量将要变化.当矢量平行移动时，它在曲线坐标中的分量如何变化？这就是我们所要讨论的问题.

这一节里将假定所考虑的是 $n$ 维空间.在 3.3.1 和 3.3.2 小节中是 $n$ 维仿射空间，而在 3.3.3 小节中是 $n$ 维欧氏空间(包

括真欧氏空间和伪欧氏空间).

### 3.3.1 矢量的平行移动

将一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 按 $M$ 点的局部标架展开:

$$\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha}a^{\alpha}(M)\boldsymbol{x}_{\alpha}(M)=\sum_{\alpha}a^{\alpha}(M)\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}}(M)$$

我们来讨论如何将 $\boldsymbol{a}$ 由 $M(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 移动到 $N(x^1+\mathrm{d}x^1, x^2+\mathrm{d}x^2, \cdots, x^n+\mathrm{d}x^n)$,要求在此过程中,保持 $\boldsymbol{a}$ 不变.这一要求意味着 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}=0$, 因而

$$\begin{aligned}0&=\sum_{\alpha}(\mathrm{d}a^{\alpha})\boldsymbol{x}_{\alpha}+\sum_{\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{\alpha}\\&=\sum_{\alpha}(\mathrm{d}a^{\alpha})\boldsymbol{x}_{\alpha}+\sum_{\alpha\beta}a^{\alpha}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\beta}}\mathrm{d}x^{\beta}\end{aligned}$$

将上式右边第二项中的哑标改写为 $\beta\gamma$,这一项中包含的

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}$$

是在点 $M$ 的一个矢量(对于固定的 $\beta$、$\gamma$),因而可以将它用 $M$ 点的局部标架 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 展开:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}=\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\tag{3.3.1}$$

代入上式,得

$$\sum_{\alpha}\left[\mathrm{d}a^{\alpha}\right]\boldsymbol{x}_{\alpha}=-\sum_{\alpha}\left[\sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}\right]\boldsymbol{x}_{\alpha}$$

由于三个基矢 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 相互独立,所以它们的系数应分别相等.因而,

矢量平行移动的条件是

$$\mathrm{d}a^{\alpha} = -\sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} \tag{3.3.2}$$

这就是决定矢量平行移动时其分量变化的公式.

由式(3.3.1)定义的 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 称为**联络**.式(3.3.2)表明,矢量平行移动时其分量 $\mathrm{d}a^{\alpha}$ 线性地依赖于 $a^{\beta}$ 和 $\mathrm{d}x^{\gamma}$.这一线性关系中的系数就是联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

为了看到矢量的协变分量 $a_{\alpha}$ 在平行移动时如何变化,利用它和逆变分量 $a^{\alpha}$ 的缩并 $\sum_{\alpha}a_{\alpha}a^{\alpha} = c$ 是标量的性质.求微分得

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{d}c &= \sum_{\alpha}(a^{\alpha}\mathrm{d}a_{\alpha} + a_{\alpha}\mathrm{d}a^{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha}\left[a^{\alpha}\mathrm{d}a_{\alpha} - \sum_{\beta\gamma}a_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}\right] \end{aligned}$$

在第 2 项中交换哑标 $\alpha \rightleftharpoons \beta$, 注意 $a^{\alpha}$ 是任意矢量,就得

$$\mathrm{d}a_{\alpha} = \sum_{\beta\gamma}\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}a_{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} \tag{3.3.3}$$

这就是决定矢量平行移动时其协变分量变化的公式.

由定义式(3.3.1)可见,联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 对指标 $\beta\gamma$ 对称,即

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{3.3.4}$$

注意,只是在曲线坐标中,联络才不为 0.如果是仿射坐标(式(2.2.11)),则

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\alpha}} = \boldsymbol{e}_{\alpha}$$

是常矢量,它对 $x^{\beta}$ 的导数为 0,因而

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0 \quad (\text{对于仿射坐标}) \tag{3.3.5}$$

### 3.3.2 联络的变换规律

联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 是有三个指标的量，共有 $3^3$（$=27$）个分量.但是，它并不是一个三阶张量，因为它在坐标变换时不按张量规律变.

我们来研究联络的变换规律.

在坐标系 $x^{\alpha'}$ 中，类似于式(3.3.1)有

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} = \sum_{\alpha'} \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\boldsymbol{x}_{\alpha'} \tag{3.3.6}$$

由式(3.2.9)得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma'}} = \sum_{\gamma} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}}$$

对 $x^{\beta'}$ 求导，得

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} = \sum_{\gamma} \frac{\partial^2 x^{\gamma}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\boldsymbol{x}_{\gamma} + \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}$$

将右边第一项中的哑标 $\gamma$ 改写为 $\alpha$，代入式(3.3.6)并利用式(3.3.1)和(3.2.10)，得

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha'} \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\boldsymbol{x}_{\alpha'} &= \sum_{\alpha}\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}} + \sum_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\boldsymbol{x}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha'}\left(\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\boldsymbol{x}_{\alpha'}\end{aligned}$$

令两边 $\boldsymbol{x}_{\alpha'}$ 的系数相等，得

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \sum_{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{3.3.7}$$

这就是联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 在坐标变换时的变换规则.

式(3.3.7)右边第二项正好是逆变张量指标 $\alpha$ 和协变张量指标 $\beta\gamma$ 的变换规则,然而还多出了第一项.这表明联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 和张量有不同的变换规则,因而它不是一个张量.

### 3.3.3　克里斯托菲尔符号

在本节的讨论中,直到现在为止,还没有用到欧氏空间的性质.现在假定所研究的是欧氏空间(包括真欧氏空间和伪欧氏空间)中的曲线坐标,此时有度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 可供利用.

我们来讨论联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 和度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的关系.将

$$\boldsymbol{x}_{\lambda}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}$$

点乘式(3.3.1),得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}=\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}_{\lambda}$$

按式(3.2.15),有 $\boldsymbol{x}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}_{\lambda}=g_{\alpha\lambda}$. 定义

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\sum_{\alpha}g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{3.3.8}$$

则上式成为

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}}\cdot\frac{\partial^{2}\boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} \tag{3.3.9}$$

由式(3.3.8)可见,$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$ 可以看成是将 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 的上标下降的结果.反之,将 $\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$ 的第一个下标上升,又可以回到

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=g^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda,\beta\gamma} \tag{3.3.10}$$

这里用了度规张量的性质(3.2.18).

为了进一步求出 $\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$ 与度规张量的关系,由度规张量的定义式(3.2.15)有

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}} = g_{\lambda\gamma}$$

对 $x^{\beta}$ 求导,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^{\gamma}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\beta}} = \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}$$

将式(3.3.9)代入,得

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma} + \Gamma_{\gamma,\lambda\beta} = \frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} \tag{3.3.11}$$

将三个指标进行轮换 $\lambda\to\beta\to\gamma\to\lambda$,得到又一方程

$$\Gamma_{\beta,\gamma\lambda} + \Gamma_{\lambda,\beta\gamma} = \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} \tag{3.3.12}$$

再轮换一次,得到第三个方程

$$\Gamma_{\gamma,\lambda\beta} + \Gamma_{\beta,\gamma\lambda} = \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}} \tag{3.3.13}$$

这是三个未知量 $\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}$, $\Gamma_{\gamma,\lambda\beta}$, $\Gamma_{\beta,\gamma\lambda}$ 的三个联立方程.将式(3.3.11)加上式(3.3.12)减去式(3.3.13)后用 2 除,可以得

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right) \tag{3.3.14}$$

此式右方的表达式称为**第一类克里斯托菲尔符号**.

将式(3.3.14)代入式(3.3.10),得

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right)\tag{3.3.15}$$

此式右方的表达式称为**第二类克里斯托菲尔符号**.这两个式子建立了联络与度规张量的关系.

在正交曲线坐标中,度规张量对角.将式(3.2.19)和(3.2.20)代入式(3.3.14)和(3.3.15),得

$$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\beta}}\delta_{\lambda\gamma}+\frac{\partial H_{\beta}^{2}}{\partial x^{\gamma}}\delta_{\lambda\beta}-\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\lambda}}\delta_{\gamma\beta}\right)\quad(\text{对 }\beta,\ \gamma\text{不作和})\tag{3.3.16}$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}=\frac{1}{2}\frac{1}{H_{\alpha}^{2}}\left(\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\beta}}\delta_{\alpha\gamma}+\frac{\partial H_{\beta}^{2}}{\partial x^{\gamma}}\delta_{\alpha\beta}-\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\alpha}}\delta_{\gamma\beta}\right)\quad(\text{对 }\alpha,\ \beta\text{不作和})\tag{3.3.17}$$

## 3.4　协 变 导 数

在上两节里讨论了曲线坐标中的常矢量,现在来考虑矢量场.在直角坐标系中,矢量场(即一阶张量场)对坐标的导数是二阶张量场,如式(1.6.1);而在曲线坐标中,由于坐标基矢不是常矢量,单纯对坐标求导,不能形成张量.我们的任务是要寻找一种能形成张量的“求导”运算.

### 3.4.1　一阶协变张量场的协变导数

考虑一个矢量场 $\boldsymbol{a}(M)$,它的协变分量是 $a_{\alpha}(x^{1},\ x^{2},\ \cdots,\ x^{n})$.当坐标变换时,$a_{\alpha}$ 变为

$$\boldsymbol{a}_{\alpha'}=\sum_{\alpha}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{a}_{\alpha} \tag{3.4.1}$$

将它对 $x^{\beta'}$ 求导,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}&=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta'}}+\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}\boldsymbol{a}_{\alpha}\right)\\&=\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\alpha}\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}\boldsymbol{a}_{\alpha}\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

由于右边多出了第二项,所以$\dfrac{\partial \boldsymbol{a}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$不是二阶张量.

式(3.4.2)右边第二项是老坐标对新坐标的二阶导数.为了计算它,利用式(3.3.7)有

$$\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}=\sum_{\lambda}\frac{\partial^{2}x^{\lambda}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}}+\sum_{\lambda\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}$$

用$\dfrac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}$乘左、右两边,对 $\alpha'$作和,注意到

$$\sum_{\alpha'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda}}=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda}}=\delta_{\gamma}^{\alpha}$$

得

$$\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}=\sum_{\alpha'}\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}-\sum_{\beta\gamma}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \tag{3.4.3}$$

将式(3.4.2)中的自由指标 $\alpha'$改写为 $\gamma'$,并将右边第一项中的哑标 $\alpha$改写为 $\gamma$,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}=\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}+\sum_{\alpha}\frac{\partial^{2}x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\boldsymbol{a}_{\alpha}$$

将式(3.4.3)代入上式,得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}=\sum_{\beta\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}+\sum_{\alpha\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\boldsymbol{a}_{\alpha}$$

$$-\sum_{\alpha\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \tag{3.4.4}$$

将式(3.4.1)代入式(3.4.4)得

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma'}}{\partial x^{\beta'}}-\sum_{\alpha'}\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}\boldsymbol{a}_{\alpha'}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}\right)\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \tag{3.4.5}$$

由此可见,具有两个自由下标 $\beta\gamma$ 的表达式

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\boldsymbol{a}_{\alpha} \tag{3.4.6}$$

服从二阶协变张量的变换规律.我们称它为协变张量场 $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 的**协变导数**,记为

$$\nabla^{\beta}\boldsymbol{a}_{\gamma}=\sum_{\alpha}(\nabla^{\beta})^{\alpha}_{\gamma}\boldsymbol{a}_{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)\boldsymbol{a}_{\alpha} \tag{3.4.7}$$

我们看到,为了使求导运算成为一种协变运算,需要将求导算符 $\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}$ 换成“协变导数”算符 $\nabla^{\beta}$.算符 $\nabla^{\beta}$ 有两个附加指标 $\gamma$ 和 $\alpha$,可以把它们看成是矩阵指标,当 $\nabla^{\beta}$ 作用到 $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ 上时,这两个指标按照矩阵乘法规则对指标 $\alpha$ 缩并.这样,由普通导数向协变导数的过渡可写为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\xrightarrow{\text{作用在协变张量场上}}(\nabla^{\beta})^{\alpha}_{\gamma}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{3.4.8}$$

### 3.4.2 一阶逆变张量场的协变导数

考虑逆变张量场 $a^{\alpha}(M)$.为了得到它的协变导数,最简单的办法是取它和一个协变张量场 $b_{\alpha}(M)$的缩并

$$\varphi(M)=\sum_{\gamma}a^{\gamma}(M)b_{\gamma}(M)$$

这是一个标量场,它对 $x^{\beta}$ 的导数是一阶协变张量场.由上式得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}=\sum_{\gamma}a^{\gamma}\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\gamma}\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}b_{\gamma}$$

上式左边是一阶协变张量,而右边两项都不是张量.我们来改写这个式子,使右边两项都具有张量的性质.为此,参考式(3.4.6)左边第二项的形式写出恒等式

$$-\sum_{\alpha\gamma}a^{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}b_{\alpha}+\sum_{\alpha\gamma}b_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}=0$$

此式左边的两项只不过是哑标的符号不同,因而相减为 0.将它加到上式右方,得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\beta}}=\sum_{\gamma}a^{\gamma}\left(\frac{\partial b_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}b_{\alpha}\right)+\sum_{\gamma}b_{\gamma}\left(\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\right)$$

此式的左边和右边第一项都是一阶协变张量,因而右边第二项也是一阶协变张量.然而,这一项是括号中的表达式

$$\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\sum_{\alpha}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}+\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\right)a^{\alpha}\qquad(3.4.9)$$

和一阶协变张量 $b_{\gamma}$ 缩并的结果,因而式(3.4.9)是一个一阶协变一阶逆变的张量.它就是所要求的逆变张量场 $a^{\alpha}(M)$的协变

导数，记为

$$\sum_{\alpha}(\underset{\nabla}{}^{\beta})_{\alpha}^{\gamma}\boldsymbol{a}^{\alpha}=\sum_{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}\delta_{\alpha}^{\gamma}+\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}\right)\boldsymbol{a}^{\alpha} \tag{3.4.10}$$

因此，当作用到逆变张量场上的时候，由普通导数向协变导数的过渡是

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}\xrightarrow{\text{作用在逆变张量场上}}(\underset{\nabla}{}^{\beta})_{\alpha}^{\gamma}\equiv\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}\delta_{\alpha}^{\gamma}+\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma} \tag{3.4.11}$$

### 3.4.3　高阶张量场的协变导数

协变导数的运算可以推广到任意的高阶张量场.以一阶协变一阶逆变的张量场 $\boldsymbol{a}_{\gamma}^{\lambda}(M)$为例，它的协变导数是

$$\underset{\nabla}{}^{\beta}\boldsymbol{a}_{\gamma}^{\lambda}=\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}\boldsymbol{a}_{\gamma}^{\lambda}-\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}^{\lambda}+\Gamma_{\beta\alpha}^{\lambda}\boldsymbol{a}_{\gamma}^{\alpha} \tag{3.4.12}$$

### 3.4.4　协变微分

通常，一个函数对自变量的导数乘以自变量的微分就得到这一函数的微分.在曲线坐标中，一个张量场对坐标的协变导数乘以坐标的微分就称为这一张量场的**协变微分**.

例如，在式(3.4.7)上乘以 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\beta}$ 对 $\beta$ 作和，得到协变张量场 $\boldsymbol{a}_{\gamma}$ 的协变微分

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\,\boldsymbol{a}_{\gamma}&=\sum_{\alpha\beta}(\underset{\nabla}{}^{\beta})_{\gamma}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^{\beta}\\&=\sum_{\beta}\frac{\partial \boldsymbol{a}_{\gamma}}{\partial \boldsymbol{x}^{\beta}}\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^{\beta}-\sum_{\alpha\beta}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\boldsymbol{a}_{\alpha}\mathrm{d}\,\boldsymbol{x}^{\beta}\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

在式(3.4.10)上乘以 $\mathrm{d}x^{\beta}$ 对 β作和,得到逆变张量场 $a^{\gamma}$ 的协变微分

$$\begin{aligned}\mathrm{D}a^{\gamma} &= \sum_{\alpha\beta}(\nabla_{\beta})^{\gamma}_{\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \\ &= \sum_{\beta}\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\mathrm{d}x^{\beta}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

式(3.4.13)和式(3.4.14)右边第一个和式分别是通常的全微分

$$\mathrm{d}a_{\gamma}=\sum_{\beta}\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\mathrm{d}x^{\beta}\qquad \mathrm{d}a^{\gamma}=\sum_{\beta}\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{3.4.15}$$

因而,协变微分和全微分的关系是

$$\mathrm{D}a_{\gamma}=\mathrm{d}a_{\gamma}-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a_{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{3.4.16}$$

$$\mathrm{D}a^{\gamma}=\mathrm{d}a^{\gamma}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{3.4.17}$$

比较式(3.4.17)和(3.3.2),(3.4.16)和(3.3.3),并注意到联络对两个下标的对称性,可以看到,矢量平行移动的条件是它的协变微分等于0.

从这里可以看出协变微分的意义.在曲线坐标中移动一个矢量,它的分量会发生变化,但这一变化不能反映矢量的真实改变.这是因为,局部标架基矢的变化,也会引起矢量分量的变化.从矢量分量的变化中扣除由于标架基矢的变化所引起的部分,才是矢量的真实改变,而这就是矢量的协变微分.如果协变微分等于0,就表示移动过程中矢量没有变化,即平行移动.

### 3.4.5 矢量场的散度与旋度

现在将本节的结果应用到三维真欧氏空间的正交曲线坐标

中，来推导散度和旋度的公式(3.1.29)和(3.1.30).

1.6节中用笛卡儿坐标计算矢量场的散度和旋度，是先求这一矢量场的导数，得到一个二阶张量场；然后再通过指标的缩并，得到标量场(散度)和赝矢量场(旋度).要想将这一方法推广应用到曲线坐标中，需要用协变导数代替普通导数.

按照式(3.4.10)，矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的协变导数

$$\sum_{\alpha}(\underset{\nabla}{}^{\beta})_{\alpha}^{\gamma}a^{\alpha}$$

是一阶协变一阶逆变的张量.将它的两个指标缩并，得到一个标量场，就是矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度

$$\underset{\nabla}{}\cdot\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\gamma}(\underset{\nabla}{}^{\gamma})_{\alpha}^{\gamma}a^{\alpha}=\sum_{\alpha\gamma}\left(\frac{\partial a^{\gamma}}{\partial x^{\gamma}}+\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma}a^{\alpha}\right)\tag{3.4.18}$$

这和笛卡儿坐标中散度的公式相比，多出了以联络为系数的第二项.

按照式(3.3.15)，联络 $\Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}$ 可以用度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 表出.在正交曲线坐标系中，按照式(3.3.17)，有

$$\sum_{\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha}^{\gamma}=\frac{1}{2}\sum_{\gamma}\frac{1}{H_{\gamma}^{2}}\frac{\partial H_{\gamma}^{2}}{\partial x^{\alpha}}=\sum_{\gamma}\frac{1}{H_{\gamma}}\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\tag{3.4.19}$$

代入式(3.4.18)，可以得到 $\underset{\nabla}{}\cdot\boldsymbol{a}$.但是，还应注意，式(3.4.18)右方的 $a^{\alpha}$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在基矢 $\boldsymbol{x}_{\alpha}$ 构成的标架中的分量，而在正交曲线坐标中计算 $\underset{\nabla}{}\cdot\boldsymbol{a}$ 时，习惯于用 $\boldsymbol{a}$ 在归一化基矢 $\boldsymbol{e}_{\alpha}$ 所构成的标架中的分量 $\bar{a}^{\alpha}$：

$$\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha}a^{\alpha}\boldsymbol{x}_{\alpha}=\sum_{\alpha}\bar{a}^{\alpha}\boldsymbol{e}_{\alpha}\tag{3.4.20}$$

将式(3.1.17)代入，得

$$a^{\alpha}=\frac{1}{H_{\alpha}}\bar{a}^{\alpha}\quad(\text{对 }\alpha\text{不作和})\tag{3.4.21}$$

将式(3.4.19)和(3.4.21)代入式(3.4.18),得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\frac{\bar{a}^{\alpha}}{H_{\alpha}}+\sum_{\alpha\gamma}\frac{1}{H_{\alpha}H_{\gamma}}\frac{\partial H_{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\bar{a}^{\alpha}\tag{3.4.22}$$

经过简单的运算,不难将这个式子化成式(3.1.29)的形式.

在往下计算矢量场的旋度之前,先让我们注意一个事实.在曲线坐标中,二阶对称符号 $\delta_{\alpha\beta}$ 不是一个二阶张量,但是,如果是正交曲线坐标,则

$$H_{\alpha}H_{\beta}\,\delta_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}\quad(\text{对 }\alpha\text{、}\beta\text{不作和})\tag{3.4.23}$$

和

$$\frac{1}{H_{\alpha}H_{\beta}}\delta_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}\quad(\text{对 }\alpha\text{、}\beta\text{不作和})\tag{3.4.24}$$

分别是二阶协变张量和二阶逆变张量,见式(3.2.19)和(3.2.20).

同样的道理,三阶完全反对称符号 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 在曲线坐标中也不是张量,但是在正交曲线坐标中

$$\delta_{\alpha\beta\gamma}=H_{\alpha}H_{\beta}H_{\gamma}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\quad(\text{对 }\alpha\text{、}\beta\text{、}\gamma\text{不作和})\tag{3.4.25}$$

和

$$\delta^{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{H_{\alpha}H_{\beta}H_{\gamma}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\quad(\text{对 }\alpha\text{、}\beta\text{、}\gamma\text{不作和})\tag{3.4.26}$$

分别是三阶协变张量和三阶逆变张量.为了证明这一结论,将式(3.4.24)与式(3.4.25)作缩并,利用式(1.5.12),得

$$g^{\alpha\alpha'}g^{\beta\beta'}g^{\gamma\gamma'}\delta_{\alpha\beta\gamma}\delta_{\alpha'\beta'\gamma'}=\delta^{\alpha\alpha'}\delta^{\beta\beta'}\delta^{\gamma\gamma'}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha'\beta'\gamma'}=\sum_{\alpha\beta\gamma}(\varepsilon_{\alpha\beta\gamma})^{2}=6$$

这一缩并的结果是标量，说明 $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ 是三阶协变张量.

利用式(3.4.26)与协变导数式(3.4.7)缩并，可以得到一个赝矢量场，称为 $\boldsymbol{a}$ 的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\delta^{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\left(\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\lambda}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}a_{\lambda}\right)$$

$$=\sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{H_{\alpha}H_{\beta}H_{\gamma}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\left(\frac{\partial a_{\gamma}}{\partial x^{\beta}}-\sum_{\lambda}\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}a_{\lambda}\right)$$

由于 $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 对指标 $\beta\gamma$ 反对称，$\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}$ 对 $\beta\gamma$ 对称，它们相乘以后对 $\beta\gamma$ 作和得 0.因而上式括号中只剩下第一项.

注意，代表矢量分量的是一阶张量的逆变分量而不是协变分量，因而第一项中的 $a_{\gamma}$ 应该升指标.于是有

$$\nabla\times\boldsymbol{a}=\sum_{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{H_{\alpha}H_{\beta}H_{\gamma}}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\boldsymbol{x}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}(g_{\gamma\lambda}a^{\lambda})\quad(3.4.27)$$

将式(3.1.17)、(3.4.21)和(3.4.23)代入上式，得到式(3.1.30).

## 3.5　曲线坐标小结

让我们来小结一下曲线坐标不同于平直坐标的特点.

曲线坐标的特点来源于坐标线的弯曲.它使得不可能在全空间中建立统一的坐标系，而只能在空间不同点分别建立自己的坐标系，称为**局部标架**.下面先在空间某一点的局部标架中讨论张量的定义和运算，然后再讨论空间不同点的张量之间的关系.

### 3.5.1　空间一固定点的局部标架中的张量

在一固定点处的局部标架的坐标基矢，由式(3.2.3)定义为

在这一点和坐标线相切并指向坐标值增加方向的矢量，即

$$\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

不同曲线坐标之间的变换矩阵不是常数矩阵.它的每一个矩阵元$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}$都是空间坐标的函数.由式(3.2.10)知，这一矩阵决定了坐标基矢的变换，即

$$\boldsymbol{x}_{\alpha'} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \boldsymbol{x}_\alpha \quad (\alpha' = 1, 2, \cdots, n)$$

对于一个有上、下指标的张量，凡是按照矩阵$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}$变的指标称为**协变指标**，凡是按其转置逆矩阵$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$变的指标称为**逆变指标**.据此可以在这一点的局部标架中定义协变和逆变张量.

以上的讨论对有度规和无度规的空间都适用.度规用坐标基矢的点积来定义，即

$$g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{x}_\alpha \cdot \boldsymbol{x}_\beta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\beta}$$

有了度规以后，就有了矢量的长度.式(3.1.18)定义坐标基矢的长度为拉梅系数，即

$$H_\alpha = \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial x^\alpha} \right| \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n)$$

### 3.5.2 空间不同点的局部标架之间的联络

如果只是在空间每一点的局部标架中定义张量，而不同点

的张量之间没有联系，则所定义的张量没有任何用处．我们来建立不同点的张量之间的联系．

在平直坐标中，坐标基矢 $\boldsymbol{e}_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,n)$ 是常矢量，当在空间中移动时，一个任意矢量 $\boldsymbol{a}=\sum a^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma$ 的变化是

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\left(\sum_\gamma a^\gamma \boldsymbol{e}_\gamma\right)=\sum_\gamma(\mathrm{d}a^\gamma)\boldsymbol{e}_\gamma \tag{3.5.1}$$

由此可见，在平直坐标中，$\mathrm{d}a^\gamma$ 是一个一阶逆变张量，它可以用来表征矢量 $\boldsymbol{a}$（即一阶逆变张量 $a^\gamma$）在空间中移动时的变化．

在曲线坐标中则不然．此时，坐标基矢 $\boldsymbol{x}_\gamma$ 不是常矢量，当在空间中移动时，它会发生变化，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\gamma=\sum_\beta\frac{\partial \boldsymbol{x}_\gamma}{\partial x^\beta}\mathrm{d}x^\beta=\sum_\beta\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\mathrm{d}x^\beta=\sum_\alpha\sum_\beta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{3.5.2}$$

式中，已将 $\dfrac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}$ 用坐标基矢 $\boldsymbol{x}_\gamma$ 展开为

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}=\sum_\alpha\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\boldsymbol{x}_\alpha$$

展开系数 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ 起到了将不同点的坐标基矢联结起来的作用，称为曲线坐标的联络，其上标 $\alpha$ 是一个逆变张量指标，而两个下标 $\beta\gamma$ 不是张量指标．在坐标变换时，它们的变换规律见式(3.3.7)．

因此，在曲线坐标中计算任意矢量 $\boldsymbol{a}=\sum a^\gamma\boldsymbol{x}_\gamma$ 在空间中移动时的变化，除了如式(3.3.1)那样考虑矢量分量 $a^\gamma$ 的变化以外，还要考虑坐标基矢 $\boldsymbol{x}_\gamma$ 的变化．因而，

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\mathrm{d}\left(\sum_\gamma a^\gamma\boldsymbol{x}_\gamma\right)=\sum_\gamma(\boldsymbol{x}_\gamma\mathrm{d}a^\gamma+a^\gamma\mathrm{d}\boldsymbol{x}_\gamma) \tag{3.5.3}$$

将式(3.5.2)代入得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\sum_{\gamma}\left(\mathrm{d}a^{\gamma}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}\right)\boldsymbol{x}_{\gamma}$$

和式(3.5.1)比较可见,在曲线坐标中,表征矢量 $\boldsymbol{a}$ 在空间中移动时的变化,不再是单纯的 $\mathrm{d}a^{\gamma}$,而是

$$\mathrm{D}a^{\gamma}=\mathrm{d}a^{\gamma}+\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}$$

称为一阶逆变张量(矢量)$a^{\gamma}$ 的协变微分.它也是一个一阶逆变张量.

类似地有协变张量场 $a_{\gamma}$ 的协变微分(式(3.4.16))

$$\mathrm{D}a_{\gamma}=\mathrm{d}a_{\gamma}-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a_{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}$$

它是一个一阶协变张量.

从上两式各项中抽掉 $\mathrm{d}x^{\beta}$,得到一阶逆变张量(矢量)$a^{\gamma}$ 和一阶协变张量场 $a_{\gamma}$ 的协变导数(式(3.4.11),(3.4.8))

$$\sum_{\gamma}\left(\nabla_{\beta}\right)^{\alpha}_{\gamma}a^{\gamma}=\sum_{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\gamma}+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\right)a^{\gamma}$$

$$\sum_{\gamma}\left(\nabla_{\beta}\right)^{\gamma}_{\alpha}a_{\gamma}=\sum_{\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}-\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}\right)a_{\gamma}$$

它代替了平直空间中的普通导数

$$\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}a^{\alpha}=\left(\sum_{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\alpha}_{\gamma}\right)a^{\gamma}\qquad\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}a_{\alpha}=\left(\sum_{\gamma}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\delta^{\gamma}_{\alpha}\right)a_{\gamma}$$

如果在空间中移动时,矢量 $a^{\gamma}$ 没有发生变化,就称为平行移动,其条件是 $\mathrm{D}a^{\gamma}=0$ ($\mathrm{D}a_{\gamma}=0$),即式(3.3.2),(3.3.3),

$$\mathrm{d}a^{\gamma}=-\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\gamma}_{\beta\alpha}a^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}\qquad\mathrm{d}a_{\gamma}=\sum_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a_{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta}$$

这一部分中的讨论，不论空间有无度规都适用.如果按式(3.2.15)引入度规，则联络可以用度规表出为

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\sum_{\lambda}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

称为第二类克里斯托菲尔符号.

以上关于曲线坐标的小结既适用于平直空间中的曲线坐标，也适用于弯曲空间中的曲线坐标.所不同的是，在平直空间中，总可以通过适当的坐标变换从弯曲坐标转到平直坐标，而在弯曲空间中却做不到这一点.

在弯曲空间中不存在平直坐标，不存在直线，所能有的只是曲线坐标.在弯曲空间中，还多了一个要素，即空间的曲率.在弯曲空间中，不存在直线，和直线对应的是测地线.这些将在下一章中讨论.

## 习　题　3

1. 证明柱坐标系是正交的.

2. 求椭球坐标系($\lambda$, $\mu$, $\nu$)的拉梅系数：

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda^2}=1\quad(\lambda<c^2<b^2<a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2-\mu^2}+\frac{y^2}{b^2-\mu^2}+\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=1\quad(c^2<\mu<b^2<a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2-\nu^2}+\frac{y^2}{b^2-\nu^2}+\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=1\quad(c^2<b^2<\nu<a^2)$$

3. 求椭圆柱坐标系($\lambda$, $\mu$, $\nu$)的体积元：

$$x=a\cosh\mu\cos\nu\qquad y=a\sinh\mu\sin\nu\qquad z=z$$

其中，$\mu \geqslant 0$，$0 \leqslant \nu \leqslant 2\pi$，$-\infty < z < +\infty$.

4. 设$(u_1, u_2, u_3)$为正交坐标系，试证明：

$$\boldsymbol{e}_1 = H_2 H_3 \nabla u_2 \times u_3$$

5. 试证明：正交坐标系中

$$\nabla \cdot (a_1 \boldsymbol{e}_1) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x_1}(a_1 H_2 H_3)$$

6. 试求柱坐标系与球坐标系中的雅可比.

7. 试证明：$\Gamma_{\lambda,\beta\gamma} = \Gamma_{\beta,\lambda\gamma}$.

8. 试证明：

$$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = \Gamma_{p,mq} + \Gamma_{q,mp} \qquad \frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma^q_{mn} - g^{qn}\Gamma^p_{mn}$$

9. 证明两种克里斯托菲尔符号不是张量.

10. 求直角坐标系、柱坐标系和球坐标系的克里斯托菲尔符号.

11. 具有张量属性的物理量所满足的客观物理规律不因采用的坐标系不同而变化，但张量分量所满足的方程具有不同形式，试将下列笛卡儿坐标系描述的方程

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \omega_i$$

改写成球坐标系和柱坐标系描述的方程.

12. 设$\overset{\frown\frown}{p}$为二阶对称张量，推导在曲线坐标系中的$\nabla \cdot \overset{\frown\frown}{p}$.

13. 质点的欧拉(Euler)坐标 $x^j$ 是其拉格朗日(Lagrange)坐标 $\xi^i$ 和参数 $t$ 的函数 $x^j = x^j(\xi^i, t)$，则欧拉基矢的导数为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = u^j \Gamma^k_{ji} \boldsymbol{e}_k$$

对于欧拉坐标系的矢量场 $\boldsymbol{u}$，求出它对参数 $t$ 的全导数$\dfrac{Du^i}{Dt}$.

14. 格林(Green)变换公式给出了张量函数的体积分与封闭域的面

积分交换,即

$$\int_V \mathrm{d}V(\nabla \cdot \boldsymbol{P}) = \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{P}$$

斯托克斯(Stokes)变换公式给出了张量场函数面积与它沿曲面闭合周界的线积分变换即

$$\int_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}(\nabla \times \boldsymbol{P}) = \oint_l \mathrm{d}\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{P}$$

试证上述两个公式.

15. 求证对于保守力矢量场 $\boldsymbol{F}$,必定存在势函数 $\varphi$,使 $\boldsymbol{F} = \nabla\varphi$.

# 第 4 章　黎曼空间中的张量

这一章讨论弯曲空间，重点考虑有度量的弯曲空间——黎曼空间.

弯曲空间的最简单例子是三维欧氏空间中的曲线和曲面，它们分别是一维和二维弯曲空间.在近代物理学中，弯曲空间有重要的应用.按照广义相对论，有引力场存在的时空是四维弯曲空间——四维伪黎曼空间.基本粒子内部对称性的空间也是一种弯曲空间.

在 4.1 节中给出黎曼空间和仿射联络空间的定义；4.2 节中讨论平行移动和曲率张量；4.3 节讨论弯曲空间中的短程线——测地线；4.4 节中简单说明几个物理应用的例子.

为了简化书写，在本章中我们采用约定：凡是在一项中有相同的上、下指标就隐含对这一指标从 1 到 $n$ 作和（$n$ 是空间的维数）.

## 4.1　黎曼空间与仿射联络空间

考虑一个 $n$ 维弯曲空间.由于空间是弯曲的，所以在其中不可能建立以直线为坐标线、以平面为坐标面的仿射坐标系，而只能建立曲线坐标系.既然一切坐标系都是曲线坐标系，以下就省去“曲线”两个字，而直接称它们为“坐标系”.

### 4.1.1　流形中的张量

我们从最一般的情况开始.假定研究一种几何对象，在它里

面可以建立以 $n$ 个实数为分量的坐标系 $x^{\alpha}(\alpha=1,2,\cdots,n)$，并且可以通过双方单值的连续可微函数变换到另外的坐标系 $x^{\alpha'}(\alpha'=1,2,\cdots,n)$：

$$\begin{cases} x^{\alpha'}=x^{\alpha'}(x^1,x^2,\cdots,x^n) & (\alpha'=1,2,\cdots,n) \\ x^{\alpha}=x^{\alpha}(x^{1'},x^{2'},\cdots,x^{n'}) & (\alpha=1,2,\cdots,n) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

所有这些坐标系完全等效，对它们没有任何优先的选择.

如果所讨论的对象仅仅只有上述性质，它的几何结构就非常贫乏.唯一的几何性质是可以建立坐标系，而且可以用连续可微的单值函数(4.1.1)进行坐标变换，除此以外没有任何其他几何性质.这种非常不定型的几何对象称为**流形**①.

在流形中，可以按照式(3.2.12)，(3.2.13)的方式定义张量.

**定义 4.1**　在流形上的任一点 $M(x^{\alpha};\ \alpha=1,2,\cdots,n)$ 给出一组数

$$a_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}^{\beta_1\cdots\beta_\mu} \tag{4.1.2}$$

如果当坐标按式(4.1.1)变换时，它变为

$$a_{\alpha'_1\cdots\alpha'_\nu}^{\beta'_1\cdots\beta'_\mu}=\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha_\nu}}{\partial x^{\alpha'_\nu}}\frac{\partial x^{\beta'_1}}{\partial x^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial x^{\beta'_\mu}}{\partial x^{\beta_\mu}}a_{\alpha_1\cdots\alpha_\nu}^{\beta_1\cdots\beta_\mu} \tag{4.1.3}$$

则称这一组数为在 $M$ 点的一个 $\nu$ 阶协变、$\mu$ 阶逆变的张量.

注意，按约定，式(4.1.3)右方隐含对指标 $\alpha_1,\cdots,\alpha_\nu$；$\beta_1,\cdots,\beta_\mu$ 从 1 到 $n$ 作和.

---

① 能在整体上建立统一坐标系的流形是初等流形.对于一般的流形，不能在整体上建立统一的坐标系，而只能分区建立坐标系，再用适当的方式将它们黏合起来.

同一点上的张量可以按通常的方式(2.2.26)～(2.2.28)进行代数运算.

但是,由于流形中既没有度规张量,又没有联络,所以流形中的张量不具有度量性质,而且不同点的张量之间没有任何联系.因此,对于流形中的张量不能进行求导运算,也不能升、降指标.

### 4.1.2 仿射联络空间

对于一个流形,可以不规定它的度量性质,而规定不同点的张量之间的联系.也就是说,可以不给定度规张量 $g_{\alpha\beta}$,而给定联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

按定义,联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 是有三个指标的一组数,当坐标变换为式(4.1.1)时,它变为(参看式(3.3.7))

$$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}=\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}+\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{4.1.4}$$

在一个流形上,按这种方式给定联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 以后,这一流形就成为**仿射联络空间**.

注意,在上述定义中,并没有要求 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 对指标 β、γ 对称.定义

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{4.1.5}$$

为**挠率**.在一般仿射联络空间中挠率不为 0.但是,在本书中,我们只讨论挠率为 0 的仿射联络空间,即只考虑 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 对 β、γ 对称

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} \tag{4.1.6}$$

的情况.

在一般的流形中,不同点的矢量之间不存在“平行”的性质.但是,在有了联络以后,就可以定义平行移动.

**定义 4.2**　如果在曲线坐标中移动 $\mathrm{d}x^{\alpha}$ 时，矢量 $a^{\alpha}$ 或其协变分量 $a_{\alpha}$ 改变为

$$\mathrm{d}a^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} \qquad \mathrm{d}a_{\alpha} = \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}a_{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} \tag{4.1.7}$$

我们就说矢量 $a^{\alpha}$ 在这一坐标中**平行移动**(参看式(3.3.2)).

平行移动应该是一个与坐标系的选择无关的几何性质.因此，如果在坐标系 $x^{\alpha}$ 中式(4.1.7)成立，则按式(4.1.1)变换到坐标系 $x^{\alpha'}$ 后，和式(4.1.7)同样的式子也应当成立，我们来证明这一论断.

**证**　按张量的变换性质，有

$$a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}a^{\alpha'} \tag{4.1.8}$$

求此式的微分，利用式(4.1.7)，得

$$\mathrm{d}a^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\mathrm{d}a^{\alpha'} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\gamma'}}a^{\alpha'}\mathrm{d}x^{\gamma'}$$

在最后一项中将哑标 $\alpha'$ 改写为 $\beta'$，移项，并利用式(4.1.8)，得

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}}\mathrm{d}a^{\alpha'} = -\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}a^{\beta'}\mathrm{d}x^{\gamma'} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}a^{\beta'}\mathrm{d}x^{\gamma'}\right)$$

将左边的哑标 $\alpha'$ 改写为 $\lambda'$，然后在左、右两边同乘以 $\dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}$ 并对 $\alpha$ 作和；利用复合函数导数公式

$$\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\lambda'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\lambda'}} = \delta^{\alpha'}_{\lambda'}$$

得

$$\mathrm{d}a^{\alpha'} = -\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\beta'}\partial x^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}\right)a^{\beta'}\mathrm{d}x^{\gamma'}$$

将联络的变换规则式(4.1.4)代入,得

$$\mathrm{d}\,a^{\alpha'} = -\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}a^{\beta'}\,\mathrm{d}\,x^{\gamma'}$$

这就证明了平行移动与坐标系的选择无关.

从以上的证明可以看出,我们规定联络有变换性质式(4.1.4),就是为了保证平行移动与坐标系无关.

### 4.1.3 里奇引理

仿射联络空间没有度量性质.度量性质要通过定义度规张量而引入.这里遇到一个问题:能不能在全空间中定义一个统一的度规张量?我们知道,仿射联络空间是弯曲空间,不同点的张量一般说是不同的.那么,能否有全空间统一的度规张量呢?回答是肯定的.其根据是里奇引理:度规张量的协变导数为0,即

$$\nabla^{\beta} g_{\gamma\gamma'} = 0 \tag{4.1.9}$$

**证** 我们来计算度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的协变导数(比较式(3.4.8))

$$\nabla^{\beta} g_{\gamma\gamma'} = \frac{\partial g_{\gamma\gamma'}}{\partial x^{\beta}} - \sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}g_{\alpha\gamma'} - \sum_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma'}g_{\gamma\alpha} \tag{4.1.10}$$

将联络与度规张量之间的关系式(3.3.15)代入式(4.1.10),得

$$\nabla^{\beta} g_{\gamma\gamma} = \frac{\partial g_{\gamma\gamma'}}{\partial x^{\beta}} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\lambda} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right) g_{\alpha\gamma'}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha\lambda} g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma'}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma'}} - \frac{\partial g_{\gamma'\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right) g_{\gamma\alpha}$$

利用式(3.2.18)不难看到,上式右边各项全部消去得0,即得式(4.1.9).

按照里奇引理，在空间中移动 $\mathrm{d}x^{\beta}$ 时，度规张量 $g_{\gamma\gamma'}$ 的改变

$$\mathrm{D}g_{\gamma\gamma'} = (\nabla_{\beta} g_{\gamma\gamma'})\mathrm{d}x^{\beta} = 0$$

也就是说，在空间中移动时，度规张量不发生改变，因而可以在全空间中定义统一的度规张量.

### 4.1.4　黎曼空间

以上我们在流形中定义联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 得到仿射联络空间.进一步在仿射联络空间中定义度规，就可以得到既有度量性质，又有平行移动性质的黎曼空间.

如果在 $n$ 维仿射联络空间中给定一个不退化的对称二阶协变张量场

$$g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

来作为度规张量，则这一流形就成为**黎曼空间**.

所谓“非退化”是说 $g_{\alpha\beta}$ 的行列式不等于 0，即

$$\det g_{\alpha\beta} \neq 0 \tag{4.1.11}$$

而所谓“对称”是指对指标 α、β 对称，即

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} \tag{4.1.12}$$

如果二阶逆变张量场

$$g^{\alpha\beta}(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

是对称的，即

$$g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha} \tag{4.1.13}$$

并且满足

$$g^{\alpha\beta}g_{\alpha\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma} \tag{4.1.14}$$

则称 $g^{\alpha\beta}$ 为**逆变度规张量**.

利用度规张量可以定义矢量的标积①.矢量 $a^{\alpha}$ 和 $b^{\beta}$ 的标积定义为它们和度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 的缩并,即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta} \tag{4.1.15}$$

利用度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 和 $g^{\alpha\beta}$ 可以用类似于式(2.3.21)~(2.3.26)的方式将张量指标上升或下降.因此,在黎曼空间中,张量的协变和逆变指标的区分没有实质意义.

利用度规张量还可以定义黎曼空间中的弧长.在黎曼空间中的曲线可以用参数方程表示为

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{4.1.16}$$

当参数 $t$ 改变 $\mathrm{d}t$ 时,$x^{\alpha}(t)$ 改变 $\mathrm{d}x^{\alpha}$,由 $x^{\alpha}(t)$ 决定的点扫过曲线上的一段弧.这一段弧长的平方在略去高级小量的情况下等于以 $g_{\alpha\beta}$ 为系数的二次型,即

$$\mathrm{d}s^{2} = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} \tag{4.1.17}$$

这一个二次型可能是正定的,也可能是非正定的.在前一情况下,称为**真黎曼空间**;而后一情况称为**伪黎曼空间**.对于真黎曼空间,弧长 $\mathrm{d}s$ 永远是实数;而对于伪黎曼空间,沿不同的曲线,弧长可以是实的,可以是虚的,也可以等于 0.如果沿某一方向弧长为 0,就称这一方向为**迷向**的方向.

但是,联络和度规之间存在一定的关系,见式(3.3.15),在

① 实际上,在弯曲空间中只有张量而没有矢量.但是,在弯曲空间的每一点,可以定义一个平直的切空间.这一个切空间中的矢量和弯曲空间这一点上的一阶逆变张量有一一对应关系.因此,可以简称弯曲空间中的一阶逆变张量为"矢量",以下我们采用这种简化语言.

仿射联络空间中定义度规时，必须使这一关系得到满足.我们来推导这一关系.

考虑两个矢量 $a^{\alpha}$ 和 $b^{\alpha}$.它们的标积是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^{\alpha}b_{\alpha}=g_{\alpha\beta}a^{\alpha}b^{\beta}$$

如果让这两个矢量同时沿某一曲线平行移动，它们的标积应保持不变，因而应该有

$$0=a^{\alpha}(\mathrm{d}b_{\alpha})+(\mathrm{d}a^{\alpha})b_{\alpha}$$

将式(4.1.7)代入，并交换哑标符号，得

$$a^{\alpha}\mathrm{d}b_{\alpha}=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}b_{\alpha}=\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}b_{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}a^{\alpha}$$

由于 $a^{\alpha}$ 是任意的，因而

$$\mathrm{d}b_{\alpha}=\Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma}b_{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}\tag{4.1.18}$$

这是协变张量 $b_{\alpha}$ 的平行移动公式(比较式(4.1.7)).

另一方面，又可以写

$$\mathrm{d}b_{\alpha}=\mathrm{d}(g_{\alpha\beta}b^{\beta})=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}b^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}+g_{\alpha\beta}\mathrm{d}b^{\beta}$$

将式(4.1.7)和(4.1.8)代入，得

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}b_{\lambda}\mathrm{d}x^{\gamma}=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}g_{\lambda\beta}b^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}b^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}b^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}$$

这一式子对于任意的 $b^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}$ 都应成立，因而有

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}-(g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}+g_{\lambda\beta}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma})=0$$

定义(参看式(3.3.8))

$$\Gamma_{\alpha,\beta\gamma}=g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\tag{4.1.19}$$

就有(比较式(3.3.11))

$$\Gamma_{\alpha,\,\gamma\beta}+\Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma}=\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} \tag{4.1.20}$$

在写出这一式子时,利用了联络对 β、γ 的对称性(挠率为 0),因而由式(4.1.19)有

$$\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}=\Gamma_{\alpha,\,\gamma\beta} \tag{4.1.21}$$

和 3.3 节中一样,对式(4.1.20)进行三个指标的轮换,可以得到类似的另两个式子

$$\Gamma_{\gamma,\,\beta\alpha}+\Gamma_{\alpha,\,\gamma\beta}=\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} \tag{4.1.22}$$

$$\Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma}+\Gamma_{\gamma,\,\beta\alpha}=\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \tag{4.1.23}$$

由此可以解出(参看式(3.3.14))

$$\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right) \tag{4.1.24}$$

即 $\Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma}$ 等于由度规张量组成的第一类克里斯托菲尔符号.

和式(3.3.15)同样,可以得到

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}=\frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}\left(\frac{\partial g_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}}+\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}}-\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right) \tag{4.1.25}$$

即 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 等于由度规张量组成的第二类克里斯托菲尔符号.

式(4.1.25)是联络和度规之间的关系.实际上我们可以先在流形中定义度规,然后按照式(4.1.25)定义联络.这样定义的联络称为**黎曼联络**.

## 4.2　平行移动对路径的依赖性　曲率张量

### 4.2.1　平行移动对路径的依赖性

将上一节的公式和第 3 章中的公式对比,不难看到它们的类似性.仿射联络空间中联络的变换性质式(4.1.4)和平行移动的定义式(4.1.7),同仿射空间的曲线坐标中的相应公式(3.3.7)和(3.3.2)形式上完全相同;黎曼空间中的标积和弧长的公式(4.1.15)和(4.1.17),同欧氏空间的曲线坐标中的相应公式(3.2.16)和(3.2.24)形式上完全相同;而黎曼联络和度规张量之间的关系(克里斯托菲尔符号式(4.1.24)和(4.1.25)),同欧氏空间的曲线坐标中的相应公式(3.3.14)和(3.3.15)在形式上也完全相同.很自然地会发生一个问题:怎样看到所研究的是弯曲的仿射联络空间和黎曼空间而不是平直的仿射空间和欧氏空间呢?在这一节里,我们要回答这个问题.

假定空间是平直的,就一定存在平直的仿射坐标系.在这种坐标系中,度规张量是常数张量而联络等于 0(见式(3.2.21)和(3.3.5)).即使首先给定的是曲线坐标,度规张量是张量场而联络不为 0,也总可以通过坐标变换变到仿射坐标系,使度规张量变为常张量而联络变为 0.可是,如果空间本身是弯曲的,则不存在平直的仿射坐标系,因而不可能找到一个坐标变换,使度规张量变为常张量而联络在整个空间中变为 0.这说明,仅仅是坐标弯曲而空间不弯曲,和空间本身弯曲在实质上是不同的.

我们的目的是要找到一个能判断空间是否弯曲和弯曲程度

的量.从以上的讨论可见,仅仅从联络和平行移动、度规张量和弧长的公式,只能看出坐标的弯曲性,而不能判断空间是否弯曲.判断空间弯曲性的判据是平行移动对路径的依赖性.

假定所考虑的空间是平直的,将一个矢量从空间的某一点 $M$ 平行移动到另一点 $N$,所得到的结果是完全确定的,和所经过的路径无关.然而,如果空间是弯曲的,情况就不是这样,矢量平行移动的结果,不仅依赖于移动的起点和终点,而且与移动所经过的路径有关.举一个简单例子.在球面赤道上的一点 $M$ 沿赤道线方向作一矢量 $\boldsymbol{a}(M)$.将这一矢量沿经线 $MN$ 平行移动到北极 $N$,得到 $\boldsymbol{a}(N)$.如果将 $\boldsymbol{a}(M)$ 先沿赤道平行移动到另一点 $P$,然后再沿经线 $PN$ 平行移动到北极 $N$,则将得到一个不同于 $\boldsymbol{a}(N)$ 的矢量 $\boldsymbol{a}(N)'$(图 4.1).这表明,将矢量 $\boldsymbol{a}(M)$ 由 $M$ 点平行移动到 $N$ 点的结果,与移动所经过的路径有关.这是弯曲空间的特征性质.

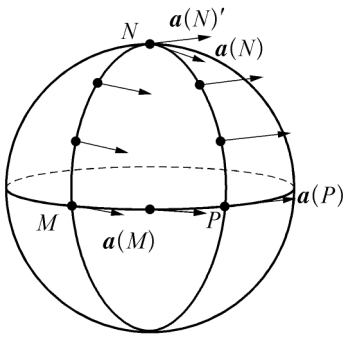


图 4.1 球面上矢量的平行移动与路径有关

## 4.2.2 曲率张量的定义

为了定量地描述弯曲空间的上述特征性质,可以利用协变微分的工具.

在所研究的空间中选取一个二维曲面,它的参数方程是

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u, v) \tag{4.2.1}$$

固定 $v$ 的值让 $u$ 变化和固定 $u$ 的值让 $v$ 变化,得到这一曲面上

的两个曲线族(图 4.2).当沿这两个曲线族中的曲线移动时,$x^\alpha$ 的微分分别是

$$\mathrm{d}_u x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\mathrm{d}u \qquad \mathrm{d}_v x^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\mathrm{d}v \tag{4.2.2}$$

按照式(3.4.16),协变张量场 $\boldsymbol{a}_\gamma$ 沿曲线族 $u$ 和 $v$ 中的曲线的协变微分分别是

$$\mathrm{D}_u \boldsymbol{a}_\gamma = \mathrm{d}_u \boldsymbol{a}_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta \tag{4.2.3}$$

$$\mathrm{D}_v \boldsymbol{a}_\gamma = \mathrm{d}_v \boldsymbol{a}_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_v x^\beta \tag{4.2.4}$$

现在让 $\boldsymbol{a}_\gamma$ 沿 $u$ 方向移动,然后再沿 $v$ 方向移动,这样得到二阶微分 $\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u\boldsymbol{a}_\gamma$(图 4.2).反过来,先沿 $v$ 移动,再沿 $u$ 移动,得到二阶微分 $\mathrm{D}_u\mathrm{D}_v\boldsymbol{a}_\gamma$.如果是平直空间,这两个方向的移动可对易,因而按不同次序进行的二阶微分相等;而在弯曲空间中,这两个二阶微分不相等,它们的差标志了空间弯曲的程度.

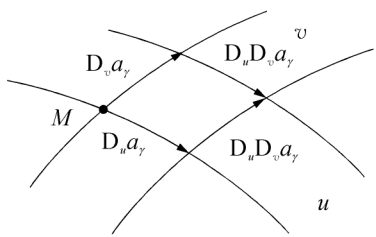


图 4.2　沿两个方向协变微分的不可对易性

将式(4.2.3)中的 $\mathrm{D}_u\boldsymbol{a}_\gamma$ 代替式(4.2.4)中的 $\boldsymbol{a}_\gamma$,得

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u\boldsymbol{a}_\gamma &= \mathrm{d}_v\mathrm{d}_u\boldsymbol{a}_\gamma - \mathrm{d}_v(\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta)\\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\mathrm{d}_u\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_v x^\beta + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\boldsymbol{a}_\mu \mathrm{d}_u x^\alpha \mathrm{d}_v x^\beta\\ &= \mathrm{d}_v\mathrm{d}_u\boldsymbol{a}_\gamma - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_v\mathrm{d}_u x^\beta\\ &\quad - \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}(\mathrm{d}_v\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta + \mathrm{d}_u\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_v x^\beta)\\ &\quad - \mathrm{d}_v\Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\boldsymbol{a}_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta + \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\boldsymbol{a}_\mu \mathrm{d}_u x^\alpha \mathrm{d}_v x^\beta\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{D}_u\mathrm{D}_v\boldsymbol{a}_\gamma$ 也有类似的式子,只不过是脚标 $u$ 和 $v$ 互换.显然,在 $u$ 和 $v$ 互换时,上式右方的头两项不变;对于第三项来

说,只不过是括号中作和的两项交换位置,因而整个第三项也不变.因此,在 $D_v D_u a_\gamma$ 和 $D_u D_v a_\gamma$ 相减时,这三项消去.于是有

$$D_v D_u a_\gamma - D_u D_v a_\gamma = -\mathrm{d}_v \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} a_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta + \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} a_\mu \mathrm{d}_u x^\alpha \mathrm{d}_v x^\beta$$

$$+ \mathrm{d}_u \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} a_\lambda \mathrm{d}_v x^\beta - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda} a_\mu \mathrm{d}_v x^\alpha \mathrm{d}_u x^\beta$$

将

$$\mathrm{d}_i \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}_i x^\alpha \quad (i = u,\ v)$$

代入上式,并在第二和第三项中交换哑标 $\alpha \rightleftharpoons \beta$,在第二和第四项中交换哑标 $\lambda \rightleftharpoons \mu$,得

$$(D_v D_u - D_u D_v) a_\gamma = \left( \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \right) a_\lambda \mathrm{d}_u x^\beta \mathrm{d}_v x^\alpha$$

引进一个符号

$$R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} - \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \qquad (4.2.5)$$

则上式成为

$$(D_v D_u - D_u D_v) a_\gamma = R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda} a_\lambda \mathrm{d}_v x^\alpha \mathrm{d}_u x^\beta \qquad (4.2.6)$$

我们看到,对 $a_\gamma$ 按不同次序进行协变微分的差,线性地依赖于 $a_\lambda$ 及 $\mathrm{d}_v x^\alpha$, $\mathrm{d}_u x^\beta$;这一线性关系的系数是一个四阶张量 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda}$,这一张量标志了在不同方向上按相反次序进行协变微分之差;而这一差值的存在又是由于空间弯曲,差值的大小标志空间弯曲的程度.因此,张量 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda}$ 是空间弯曲程度的标志,称为**曲率张量**,又叫做**黎曼-克里斯托菲尔张量**.

### 4.2.3　曲率张量的性质

曲率张量的定义式(4.2.5)可写为

$$\begin{cases} R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot}_{\cdot}{}^{\lambda} = A^{\gamma}_{\beta,\ \alpha\gamma} - A^{\lambda}_{\alpha,\ \beta\gamma} \\ A^{\lambda}_{\beta,\ \alpha\gamma} = \dfrac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} \end{cases} \tag{4.2.7}$$

由此立即看出，$R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot}_{\cdot}{}^{\lambda}$ 对头两个下标 αβ 反对称

$$R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot}_{\cdot}{}^{\lambda} = -R^{\cdot\cdot}_{\beta\alpha,\ \gamma}{}^{\cdot}_{\cdot}{}^{\lambda} \tag{4.2.8}$$

利用曲率张量不仅可以写出协变张量场 $a_\gamma$ 的交错协变微分式(4.2.6)，而且可以写出逆变张量场 $a^\lambda$ 的交错协变微分.为此考虑标量场 $a^\gamma b_\gamma$，它的协变微分是

$$\mathrm{D}_u(a^\gamma b_\gamma) = \mathrm{D}_u a^\gamma \cdot b_\gamma + a^\gamma \cdot \mathrm{D}_u b_\gamma$$

再沿 $v$ 方向求一次协变微分，得

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u(a^\gamma b_\gamma) = {} & \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u\, a^\gamma \cdot b_\gamma + \mathrm{D}_u a^\gamma \cdot \mathrm{D}_v\, b_\gamma \\ & + \mathrm{D}_v\, a^\gamma \cdot \mathrm{D}_u b_\gamma + a^\gamma \cdot \mathrm{D}_v\mathrm{D}_u b_\gamma \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

由于 $a^\gamma b_\gamma$ 是标量场，对它的协变微分等于通常的微分，因而

$$(\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v)(a^\gamma b_\gamma) = (\mathrm{d}_v\mathrm{d}_u - \mathrm{d}_u\mathrm{d}_v)(a^\gamma b_\gamma) = 0$$

在式(4.2.9)中交换 $u$，$v$ 再相减，右边第二、三项消去，于是有

$$(\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v)a^\gamma \cdot b_\gamma + a^\gamma \cdot (\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v)b_\gamma = 0$$

改写第一项的哑标为 λ，将第二项移到右边并利用式(4.2.6)，得

$$(\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v)a^\lambda \cdot b_\lambda = -R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot}_{\cdot}{}^{\lambda} a^\gamma \mathrm{d}_v x^\alpha \mathrm{d}_u x^\beta \cdot b_\lambda$$

这一式子对任意 $b_\lambda$ 都成立,因而有

$$(\mathrm{D}_v\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_v)a^\lambda = -R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot}\, a^\gamma \mathrm{d}_v x^\alpha \mathrm{d}_u x^\beta \tag{4.2.10}$$

这是逆变张量场 $a^\lambda$ 的交错协变微分公式.

为了进一步得到曲率张量的更多性质,需要用到空间无挠率的假定,即联络对两个下标对称(式(4.1.6)),

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$$

在此情况下,按式(4.2.7)定义的 $A^\lambda_{\beta,\ \alpha\gamma}$ 对指标 $\alpha\gamma$ 对称,即

$$A^\lambda_{\beta,\ \alpha\gamma} = A^\lambda_{\beta,\ \gamma\alpha} \tag{4.2.11}$$

将式(4.2.7)的第一式对指标 $\alpha\beta\gamma$ 轮换得

$$R^{\cdot\cdot}_{\beta\gamma,\ \alpha}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} = A^\lambda_{\gamma,\ \beta\alpha} - A^\lambda_{\beta,\ \gamma\alpha}$$

$$R^{\cdot\cdot}_{\gamma\alpha,\ \beta}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} = A^\lambda_{\alpha,\ \gamma\beta} - A^\lambda_{\gamma,\ \alpha\beta}$$

将此两式和式(4.2.7)的第一式相加,注意到式(4.2.11),可见右边的三个正项和三个负项正好相消,因而有

$$R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} + R^{\cdot\cdot}_{\beta\gamma,\ \alpha}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} + R^{\cdot\cdot}_{\gamma\alpha,\ \beta}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} = 0 \tag{4.2.12}$$

这一重要恒等式称为**里奇(Ricci)恒等式**.

对曲率张量求协变导数可以得到另一个重要恒等式

$$\nabla_\mu R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} + \nabla_\alpha R^{\cdot\cdot}_{\beta\mu,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} + \nabla_\beta R^{\cdot\cdot}_{\mu\alpha,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot} = 0 \tag{4.2.13}$$

称为**比安基(Bianchi)恒等式**.对此的证明从略.

### 4.2.4 协变曲率张量

在曲率张量 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma}{}^{\cdot\lambda}_{\cdot}$ 的定义式(4.2.5)中只包含联络,因而适

用于任意的仿射联络空间.我们感兴趣的是有联络的黎曼空间,因而有度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 可供利用.利用它将 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda}$ 的上标降下来,得

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} = R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda} g_{\lambda\delta} \tag{4.2.14}$$

称为**协变曲率张量**.

将联络和度规张量的关系式(4.1.25)代入曲率张量的定义式(4.2.5),再代入式(4.2.14),经过化简得

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} = \frac{1}{2}\left( \frac{\partial^2 g_{\alpha\delta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial^2 g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial^2 g_{\beta\delta}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^2 g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}\partial x^{\delta}} \right) + g_{\mu\nu}\left( \Gamma^{\mu}_{\alpha\delta}\Gamma^{\nu}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\mu}_{\beta\delta}\Gamma^{\nu}_{\alpha\gamma} \right) \tag{4.2.15}$$

注意到联络对下标的对称性式(4.1.6),不难看出上式右方在 $\alpha \rightleftharpoons \gamma$, $\beta \rightleftharpoons \delta$ 时不变,因此协变曲率张量在前、后两对指标交换(而保持每对指标的内部顺序)时不变,即

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} = R_{\gamma\delta,\ \alpha\beta} \tag{4.2.16}$$

由于曲率张量 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda}$ 对头两个指标反对称(式(4.2.8)),所以协变曲率张量也对头两个指标反对称,即

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} = -R_{\beta\alpha,\ \gamma\delta} \tag{4.2.17}$$

和式(4.2.16)结合可见,$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta}$ 对后一对指标也反对称,即

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} = -R_{\alpha\beta,\ \delta\gamma} \tag{4.2.18}$$

注意,曲率张量 $R^{\cdot\cdot}_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}{}^{\cdot\lambda}$ 所满足的里奇恒等式中的三项只是前三个指标轮换,而最后一个上标 $\lambda$ 保持不动.因此,将这一指标下降后得到的协变曲率张量 $R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta}$ 也满足类似的恒等式

$$R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta} + R_{\beta\gamma,\ \alpha\delta} + R_{\gamma\alpha,\ \beta\delta} = 0 \tag{4.2.19}$$

### 4.2.5 里奇张量与标量曲率

我们看到，曲率张量是四阶张量.利用指标缩并，可以从它得到较低阶的张量.

将 $R_{\alpha\beta,\ \gamma\cdot}^{\cdot\cdot\ \ \cdot\lambda}$ 的第二和第四指标缩并，得到一个二阶张量

$$R_{\alpha\beta}=R_{\alpha\delta\beta\cdot}^{\cdots\ \ \ \delta}=g^{\gamma\delta}R_{\alpha\delta\beta\gamma}=\frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta}}{\partial x^{\delta}}-\frac{\partial\Gamma_{\delta\beta}^{\delta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}\Gamma_{\delta\mu}^{\delta}-\Gamma_{\beta\delta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\delta} \tag{4.2.20}$$

称为**里奇张量**.

容易证明，里奇张量是对称二阶张量.实际上，根据协变曲率张量的对称性质式(4.2.16)，将式(4.2.20)中前、后两对指标换位，得

$$R_{\alpha\beta}=g^{\gamma\delta}R_{\alpha\delta,\ \beta\gamma}=g^{\gamma\delta}R_{\beta\gamma,\ \alpha\delta}$$

由于 $g^{\gamma\delta}$ 和 $\gamma\delta$ 对称，所以上式右方等于 $R_{\beta\alpha}$，因而有

$$R_{\beta\alpha}=R_{\alpha\beta} \tag{4.2.21}$$

进一步将里奇张量的指标缩并，得到一个标量

$$R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} \tag{4.2.22}$$

称为**标量曲率**.

### 4.2.6 二维黎曼空间的高斯曲率

对于二维黎曼空间，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$\delta$ 都只能取 1，2 两个值.此时，曲率张量 $R_{\alpha\beta,\ \gamma\delta}$ 只有一个实质性的分量

$$R_{12,12} = R_{21,21} = -R_{12,21} = -R_{21,12} \tag{4.2.23}$$

它和高斯曲率 $K$ 的关系是

$$K = \frac{R_{12,12}}{\det g_{\alpha\beta}} \tag{4.2.24}$$

**例 4.1**　计算半径为 $r$ 的球面的标量曲率和高斯曲率.

**解**　采用球坐标,如式(3.1.21),其中 $r$ 为常数.它是正交曲线坐标,其拉梅系数由式(3.1.22)的后两式给出:

$$H_\theta = r \qquad H_\varphi = r\sin\theta \tag{4.2.25}$$

度规张量(式(3.2.19)和(3.2.20))是

$$g_{\alpha\beta} = H_\alpha^2\delta_{\alpha\beta} \qquad g^{\alpha\beta} = \frac{1}{H_\alpha^2}\delta_{\alpha\beta} \quad (\text{对 } \alpha \text{不作和}) \tag{4.2.26}$$

而联络(3.3.17)是

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{1}{H_\alpha^2}\left(\frac{\partial H_\gamma^2}{\partial x^\beta}\delta_{\alpha\gamma} + \frac{\partial H_\beta^2}{\partial x^\gamma}\delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial H_\gamma^2}{\partial x^\alpha}\delta_{\gamma\beta}\right) \quad (\text{对 } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{不作和}) \tag{4.2.27}$$

将式(4.2.25)代入式(4.2.27),得到联络不为 0 的分量

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{1}{2}\sin 2\theta \qquad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \Gamma_{\varphi\theta}^{\varphi} = \cot\theta \tag{4.2.28}$$

代入式(4.2.5),得到曲率张量的不为 0 的分量

$$\begin{cases} R_{\theta\varphi,\ \cdot\ \varphi}^{\cdot\ \cdot\ \theta} = -R_{\varphi\theta,\ \cdot\ \varphi}^{\cdot\ \cdot\ \theta} = -\sin^2\theta \\ R_{\theta\varphi,\ \theta}^{\cdot\ \cdot\ \varphi} = -R_{\varphi\theta,\ \theta}^{\cdot\ \cdot\ \varphi} = 1 \end{cases} \tag{4.2.29}$$

和式(4.2.26)一道代入式(4.2.14)得到协变曲率张量的不为 0 的分量

$$R_{\theta\varphi,\,\theta\varphi} = -R_{\varphi\theta,\,\theta\varphi} = -R_{\theta\varphi,\,\varphi\theta} = R_{\varphi\theta,\,\varphi\theta} = r^2\sin^2\theta \tag{4.2.30}$$

代入式(4.2.20),得到里奇张量的不为0的分量

$$R_{\theta\theta} = 1 \qquad R_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta \tag{4.2.31}$$

再代入式(4.2.22),得到标量曲率

$$R = \frac{2}{r^2} \tag{4.2.32}$$

由式(4.2.25)和(4.2.26)有

$$\det\, g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\theta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\theta \tag{4.2.33}$$

和式(4.2.30)一道代入式(4.2.24),得到高斯曲率

$$K = \frac{r^2\sin^2\theta}{r^4\sin^2\theta} = \frac{1}{r^2} \tag{4.2.34}$$

可见,球面的高斯曲率等于半径的负二次方.

## 4.3 黎曼空间的测地线

### 4.3.1 测地线的定义

在平直空间的一个连通区域的两点之间可以连接各种不同的线,其中有一种特殊的线——直线.在两点之间有一条而且只有一条直线.

仿射联络空间和黎曼空间一般说来是弯曲的,其中只有曲线而没有直线.在这类空间的两点之间有没有类似于平直空间中的直线那样的特殊的线呢?答案是肯定的——有,那就是测地线.

弯曲空间中的测地线有哪些和平直空间中的直线相类似的性质呢？要回答这个问题，先要问：平直空间中的直线的本质性质是什么？当然，直线是直的，但是这只是表观的性质，而不是本质的性质.这一性质依赖于空间的平直性，不能推广到弯曲空间.

平直空间中直线的本质性质是：

(1) 在某一点和直线相切的矢量，在沿这一直线平行移动时，始终和这一直线相切；

(2) 在两点之间连接的各种线中，以直线为最短.

这两点是平直空间中直线的本质性质，将它们推广到弯曲空间，就得到测地线.

在仿射联络空间中没有度规张量，不能比较弧的长短，因而测地线只能具有上述第一点性质.

**定义 4.3**　过仿射联络空间的一点作一条曲线，如果和这条曲线相切的矢量沿这一曲线平行移动时，始终和它相切，则称这一曲线为**测地线**.

在有联络的黎曼空间中，也可以用这作为测地线的定义.在此情况下可以进一步证明，测地线具有和平直空间中的直线类似的第二条性质，在本节中将给出这一证明.

### 4.3.2　测地线的微分方程

设一曲线 $C$ 的参数方程是

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b) \tag{4.3.1}$$

过这曲线上一点 $M$ 的矢量

$$a^{\alpha}(M) = \left.\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\right|_{M} \tag{4.3.2}$$

和这曲线在 $M$ 点相切.按定义,如果曲线是测地线,则将 $a^{\alpha}$ 沿曲线 $C$ 平行移动到 $N$ 点所得到的矢量 $a^{\alpha}(N)$仍然和这一曲线相切,因而和$\left[\dfrac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\right]_N$只差一常数因子

$$a^{\alpha}(N)=\lambda\left.\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\right|_N \tag{4.3.3}$$

可以设法将比例常数 λ吸收到参数中去.为此,选新参数为

$$\tau=\int_a^t\frac{\mathrm{d}t}{\lambda(t)} \tag{4.3.4}$$

由此解出 $t$,代入式(4.3.1),得到以 $\tau$为参数的曲线方程

$$C:\ x^{\alpha}=x^{\alpha}(\tau)\quad\left(0\leqslant\tau\leqslant\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{\lambda(t)}\right) \tag{4.3.5}$$

由式(4.3.4),知

$$\mathrm{d}\tau=\frac{\mathrm{d}t}{\lambda(t)} \tag{4.3.6}$$

因而

$$\left.\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\right|_N=\lambda\left.\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}t}\right|_N=a^{\alpha}(M)$$

这里的 $N$是曲线 $C$ 上的任意点,所以当以 $\tau$为参数时,在曲线 $C$的任意点上都有

$$a^{\alpha}=\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau} \tag{4.3.7}$$

按平行移动的公式(4.1.7),

$$\mathrm{d}a^{\alpha}=-\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}\mathrm{d}x^{\gamma}$$

因而，由式(4.3.7)有

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}=-\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x^{\gamma}$$

用 $\mathrm{d}\tau$ 除，得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^{2}}+\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}\tau}=0 \tag{4.3.8}$$

这就是**测地线的微分方程**.

方程(4.3.8)是 $x^{\alpha}(\tau)$ 的二阶常微分方程.在初始条件

$$(x^{\alpha})_{\tau=\tau_0}=a^{\alpha}\qquad\left(\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\right)_{\tau=\tau_0}=b^{\alpha} \tag{4.3.9}$$

之下，这一方程有唯一确定的解.这表明，过空间任一点

$$M:\ x^{\alpha}=a^{\alpha} \tag{4.3.10}$$

沿任一方向

$$\left.\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau}\right|_{M}=b^{\alpha} \tag{4.3.11}$$

有一条而且只有一条测地线.

对于平直的空间，可以选取仿射坐标，使联络 $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}=0$，此时测地线方程(4.3.8)成为直线的方程

$$\frac{\mathrm{d}^{2}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\tau^{2}}=0$$

因此，平直空间中的测地线是直线.

### 4.3.3　黎曼空间中的测地线

以上在给出测地线的定义和推导测地线的微分方程时，没

有用到空间的度量性质,因而适用于任意仿射联络空间.

现在假定所讨论的是黎曼空间.此时,以上所给出的测地线的定义和测地线的微分方程仍然适用.除此以外,还可以计算沿测地线的弧长.

首先应该注意,如果所讨论的是伪黎曼空间,则弧长平方的二次型(4.1.17)不是正定的.沿某些方向弧长为 0.在这种方向上的测地线称为迷向的.以下只考虑非迷向的测地线,弧长可能是实数(弧长的平方大于 0)或虚数(弧长的平方小于 0),但不等于 0.

现在来讨论非迷向曲线的弧长,并证明:当固定两个端点时,所有这些弧长中以非迷向测地线的弧长最短①.

**证** 设非迷向曲线的参数方程为

$$C:\ x^{\alpha} = x^{\alpha}(\lambda) \tag{4.3.12}$$

令

$$F = g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{4.3.13}$$

则根据式(4.1.17),有

$$\mathrm{d}s^{2} = g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = F\mathrm{d}^{2}\lambda \tag{4.3.14}$$

积分得曲线 $C$ 的弧长为

$$s = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda \tag{4.3.15}$$

对于不同的曲线 $C$,$x^{\alpha}$ 是 $\lambda$ 的不同函数,由式(4.3.14)得到不同的 $s$ 值.因此,$s$ 是 $x^{\alpha}(\lambda)$的泛函,即

① 更确切地说是有极值.

$$s = s(x^{\alpha}(\lambda)) \tag{4.3.16}$$

弧长为极值的条件是泛函 $s$ 的变分为 0,即

$$\delta s = \delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda = 0 \tag{4.3.17}$$

由式(4.3.13)知,$F^{1/2}$ 是 $x^{\alpha}$(包含在 $g_{\alpha\beta}$ 中)和 $\dot{x}^{\alpha} \equiv \dfrac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}$ 的函数.因而,

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F^{1/2}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^{\alpha}}\delta x^{\alpha} + \frac{\partial F^{1/2}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\delta\dot{x}^{\alpha}\right)\mathrm{d}\lambda = 0$$

将

$$\delta\dot{x}^{\alpha} = \delta\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\delta x^{\alpha})$$

代入上式,并进行分部积分,得

$$0 = \frac{\partial F^{1/2}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\delta x^{\alpha}\Bigg|_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right)\right)\delta x^{\alpha}\,\mathrm{d}\lambda$$

我们所考虑的是两个端点固定不变的那些曲线的弧长,因而在端点处($\lambda = \lambda_1$ 和 $\lambda = \lambda_2$),$\delta x^{\alpha} = 0$.这样,上式右方第一项为 0.而在第二项中,变分 $\delta x^{\alpha}$ 是任意的,因而要使积分为 0,必须被积函数为 0,即有

$$\frac{\partial F^{1/2}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{\partial F^{1/2}}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) = 0 \tag{4.3.18}$$

这就是泛函极值式(4.3.17)的欧拉方程.

由式(4.3.18),有

$$\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}\right) = 0$$

或

$$\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\frac{1}{2F^{1/2}}\right)\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}-\frac{1}{2F^{1/2}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}=0$$

去掉公共因子$\frac{-1}{2F^{1/2}}$并将第三项写成第一项,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha_1}}-\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}-\frac{1}{2F}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}=0 \tag{4.3.19}$$

我们可以选沿曲线的弧长 $s$ 作为曲线的参数 $\lambda$,从而 $\dot{x}^{\alpha}=\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}$.因而式(4.3.13)成为

$$F=g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}=g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} \tag{4.3.20}$$

由此有

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}}=2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}=2g_{\alpha\beta}\dot{x}^{\beta}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma}$$

另一方面,按式(4.3.14),当取 $s$ 为参数时,

$$\mathrm{d}s=F^{1/2}\mathrm{d}s$$

所以沿整个曲线 $C$,$F$ 保持为常数(=1),有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=0 \tag{4.3.21}$$

将式(4.3.20)和(4.3.21)代入式(4.3.19),得

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial x^{\alpha}} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(2g_{\alpha\beta}\,\dot{x}^{\beta}) - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} \\
&= 2g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2 x^{\beta}}{\mathrm{d}s^2} + 2\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}
$$

将右边第二项的因子 2 写成两项之和，并在其中的一项中交换哑标 $\beta \rightleftharpoons \gamma$，得

$$
g_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}^2 x^{\beta}}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0
$$

与式(4.1.24)比较可见，第二项的系数正是第一类克里斯托菲尔符号.将指标 $\alpha$ 改写为 $\lambda$，和 $g^{\alpha\lambda}$ 缩并，利用式(4.1.25)，得

$$
\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0
$$

这正是测地线的微分方程(4.3.8).这就证明了，使弧长取极值的非迷向曲线是测地线.

## 4.4　广义相对性原理

在这一节里，我们简单地讨论在物理学中应用弯曲空间的两个例子.它们分别取自四维时空中的广义相对性原理(广义相对论)和电荷空间中的广义相对性原理(局域规范理论).

### 4.4.1　有引力场存在时时空的弯曲

引力场有一个重要的基本特性：不论质量或电荷如何，只

要有相同的初始条件，一切物体在引力场中都会以相同的方式运动.这一特性和**引力质量等于惯性质量**的基本事实相联系.它使得在引力场中的运动和在没有引力场的非惯性系中的运动看起来没有差别.

在非惯性参考系中，时空度规是弯曲的.从一个简单例子可以看到这一点.在惯性参考系中取直角坐标，时空间隔的平方是

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{4.4.1}$$

变换到沿 $x$ 方向以加速度 $a$ 运动的非惯性系：

$$x = x' + \frac{a}{2}t^2 \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = t'$$

时空间隔的平方成为

$$\mathrm{d}s^2 = (c^2 - a^2t^2)\mathrm{d}t^2 - 2at\mathrm{d}x'\mathrm{d}t - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2$$

可以将它写为(略去撇号)

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\alpha\beta=0}^{3} g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta \tag{4.4.2}$$

式中，度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 不是常张量.不管时间 $t$ 的变换规律如何，也不能把这个式子化成时空坐标的平方和(差)的形式①.这样的 $x^\alpha$ 是弯曲坐标，见式(3.2.21).

以上例子说明，在非惯性系中，时空坐标是弯曲的.然而，如果不存在引力场，总可以通过坐标变换，变到惯性系，使度规张量成为常张量，相应的时空坐标是平直的闵可夫斯基坐标.当有引力场存在时，情况就不同.物理的引力场总是非均匀的，在无

① 如果是仿射坐标系，度规张量是常张量，就总可以把它对角化，并使对角元素变为±1.

穷远处它必定趋于 0，而不能保持为常数.因此无论如何进行坐标变换也不能把它完全消除掉.用数学语言说就是，在有引力场存在的情况下，时空度规张量 $g_{\alpha\beta}$ 是时空坐标的函数，无论怎样进行坐标变换也不能把它在整个时空中变成常张量.因此，有引力场存在的时空是弯曲的黎曼空间，在这一空间中，不存在特殊的惯性系，一切参考系都是非惯性系，它们都能等效地用来描述物理规律，这就是**爱因斯坦的广义相对性原理**.

从爱因斯坦的广义相对性原理出发可以建立引力场的方程.这里不赘述，只讨论质点在引力场中的运动.

设有一质点在引力场中运动.在没有引力场时，质点沿直线运动，其方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{4.4.3}$$

在有引力场存在的情况下，质点沿黎曼空间中的测地线运动，其方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\gamma}}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{4.4.4}$$

式中，联络 $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 代表引力场.式(4.4.4)就是质点在引力场中运动的方程.

我们来考虑低速运动的质点在弱稳定引力场中的运动方程.在弱引力场中，度规张量接近于闵可夫斯基空间中的式(2.3.18)，

$$g^{a\lambda} = (g^{a\lambda})_{\text{伪欧氏}} + h^{a\lambda} \tag{4.4.5}$$

其中 $h^{a\lambda}$ 是小量.略去 2 阶小量，第二类克里斯托菲尔符号(4.1.25)成为

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(g^{a\lambda})_{\text{伪欧氏}}\left[\frac{\partial h_{\lambda\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\beta\lambda}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial h_{\gamma\beta}}{\partial x^{\lambda}}\right] \tag{4.4.6}$$

代入测地线方程(4.4.4),并注意到式(4.4.1)

在惯性系中:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \tag{4.4.7}$$

4 速度 $u^\mu = c\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = c\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}$,得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{2c^2}u^\beta u^\gamma (g^{\alpha\lambda})_{\text{伪欧氏}}\left[\frac{\partial h_{\lambda\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\beta\lambda}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\gamma\beta}}{\partial x^\lambda}\right]$$

在低速情况下 $u^\mu$ 的空间分量远小于 0 分量,因而在对 βγ 求和中只需保留 $\beta = \gamma = 0$ 的项.又由于只考虑稳定场,上式方括号中的头两项为 0 而第 3 项中对 λ 的作和只剩下 $\lambda = 1, 2, 3$ 的项.再注意到在低速情况下 $u^0 = c$,见式(2.4.48),就得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{1}{2}(\mathrm{grad}\ h_{00})^\alpha$$

在低速情况下 $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2$,见式(4.4.7),得

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\mathrm{grad}\left[\frac{m}{2}c^2h_{00}\right] \tag{4.4.8}$$

这就是弱稳定引力场中运动的牛顿方程,其中 $\dfrac{m}{2}c^2h_{00}$ 是牛顿引力势.注意上式左边的 $m$ 是惯性质量,而右边的 $m$ 是引力质量.两者严格相等是广义引对论的基本假设.

## 4.4.2 基本粒子的内部对称性

弯曲空间在近代物理学中的另一个重要应用是用到基本粒子的内部对称性上.

不考虑引力场，因而四维时空仍然是平直的闵可夫斯基空间.但是，除了四维时空以外，基本粒子还有内部自由度，如电荷、同位旋、奇异数等.这种内部自由度所在的空间称为**电荷空间**.

按照量子场论，基本粒子由场算符 $\psi_i(x)$ 描述，其中角标 $i$ 表征粒子的内部自由度.如果粒子内部自由度的空间(电荷空间)有 $m$ 维，则 $\psi_i(x)$ 有 $m$ 个分量($i=1, 2, \cdots, m$)①，它们都是时空坐标 $\boldsymbol{x}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ 的函数.

如果粒子除了带电以外没有其他内部性质，相应的内部空间，即电荷空间中只有一个变量——电荷 $Q$，因而是一维空间.同位旋空间是高维电荷空间的例子.实验事实表明，质子和中子对强作用而言性质完全相同.忽略电磁作用，可以将它们看成同一粒子——核子的两个态.相应的电荷空间是二维的.如果把 $\Lambda$ 粒子和质子、中子共同看成同一粒子的三个态，则相应的电荷空间是三维的.

假定电荷空间有 $m$ 维.用 $m\times m$ 维幺正矩阵 $\boldsymbol{U}=(U_i^j)$ 对 $\psi_i(x)$ 进行变换

$$\psi_i \longrightarrow \psi_i' = (\boldsymbol{U}\psi)_i = U_i^j\psi_j \tag{4.4.9}$$

其中的变换矩阵 $U$ 依赖于 $n$ 个连续变化的实参量 $\theta_\alpha$($\alpha=1, 2, \cdots, n$)：

$$\boldsymbol{U} = U(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n) \tag{4.4.10}$$

变换式(4.4.9)称为**规范变换**.如果系统对规范变换式(4.4.9)不变，则称这一系统具有**规范不变性**.

可以将 $\psi$ 看成是电荷空间中的一阶张量，而将式(4.4.9)看成是这一张量所经受的“坐标变换”.电荷空间中的广义相对性原理要

① 如果粒子有自旋，则场算符还有自旋自由度.这里忽略这种情况，只讨论无自旋的粒子.

求运动方程不仅对于四维时空中的洛伦兹变换是协变的,而且对于电荷空间中的变换式(4.4.9)也是协变的.换句话说,运动方程不仅应是四维时空中的张量等式,也应是电荷空间中的张量等式.

在运动方程中除了场算符 $\psi_i$ 以外,还包含有场算符的时空导数$\partial_\mu\psi_i$.为了使运动方程具有协变性,$\partial_\mu\psi_i$ 和 $\psi_i$ 必须有相同的变换规律.即要求$\partial_\mu\psi_i$ 和 $\psi_i$ 一样,也是电荷空间中的一阶张量.如果变换矩阵 $U$ 与时空点 $x^\mu$ 无关,是整体规范变换,则这一要求自然满足

$$\partial_\mu\psi_i \longrightarrow \partial_\mu\psi_i' = \partial_\mu(U_i^j\psi_j) = U_i^j(\partial_\mu\psi_j) \qquad (4.4.11)$$

因此,由 $\psi_i$ 和$\partial_\mu\psi_i$ 组成的运动方程,在整体规范变换下能够满足电荷空间中的协变性要求.

但是,如果变换矩阵 $\boldsymbol{U}$ 与时空点 $x^\mu$ 有关,情况就不同了.这样的变换称为**局域规范变换**.在局域规范变换下,不同时空点的场算符经受不同的规范变换.此时,$\partial_\mu\psi_i$ 不再按电荷空间的张量规律变

$$\partial_\mu\psi_i \longrightarrow \partial_\mu\psi_i' = \partial_\mu(U_i^j\psi_j) = U_i^j\partial_\mu\psi_j + (\partial_\mu U_i^j)\psi_j$$

比电荷空间中张量的变换规律(右边第一项)多出了第二项.

为了得到一个在电荷空间中服从张量变换规律的求导算符,应该仿照式(3.4.8)引进协变导数[①]:

$$\partial_\mu \longrightarrow (\underset{\mu}{\nabla})_j^i \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta_j^i - \Gamma_{\mu j}^i \qquad (4.4.12)$$

注意,这里的"联络"$\Gamma_{\mu j}^i$ 的三个指标中,有两个指标($i$, $j$)是电荷空间的指标,而另一指标($\mu$)是四维时空的指标.在 $\psi_i$ 经受规范

① 在现在所讨论的问题中,有两个空间——四维时空和电荷空间.恰当地描述这类问题的数学工具是纤维丛.这超出了本书的范围.但是,仅仅只是形式地引用前面的一些公式,也能得到很多有用的结果,如式(4.4.12)、(4.4.17)、(4.4.23).

变换式(4.4.9)时，$\Gamma^{i}_{\mu j}$ 的指标 $i$、$j$ 经受变换，而指标 $\mu$ 不变.因而在引用式(3.4.7)和(4.1.4)等公式时，应该令 $\beta' = \beta \to \mu$；$\alpha$，$\gamma \to i$，$j$；$\alpha'$，$\gamma' - i'$，$j'$，从而有

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \longrightarrow U^{i}_{i'} \qquad \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \longrightarrow (U^{-1})^{i'}_{i} \qquad \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \longrightarrow 1 \tag{4.4.13}$$

因此，按照式(3.4.7)，当 $\psi_i$ 经受变换式(4.4.9)时，协变导数的变换是

$$\underset{\nabla}{}^{\mu}\psi_i \equiv (\partial_\mu \delta^{j}_{i} - \Gamma^{j}_{\mu i})\psi_j \longrightarrow U^{i}_{i'}(\partial_\mu \delta^{j}_{i} - \Gamma^{j}_{\mu i})\psi_j \equiv U^{i}_{i'} \underset{\nabla}{}^{\mu}\psi_i \tag{4.4.14}$$

它和 $\psi_i$ 的变换式(4.4.5)相同，都是电荷空间中的一阶张量，因而用 $\psi_i$ 和协变导数 $\underset{\nabla}{}^{\mu}\psi_i$ 组成的运动方程能满足电荷空间中的协变性要求.

我们看到，要求运动方程除了四维时空中的洛伦兹协变性以外还有电荷空间的协变性，自动导致除物质场 $\psi_i(x)$ 以外出现新的场 $\Gamma^{i}_{\mu j}(x)$.按式(4.1.4)，$\Gamma^{i}_{\mu j}$ 的变换规律是

$$\Gamma^{i}_{\mu j} \longrightarrow \Gamma^{i'}_{\mu j'} = U^{j}_{j'}\Gamma^{i}_{\mu j}(U^{-1})^{i'}_{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}U^{i}_{j'}\right)(U^{-1})^{i'}_{i} \tag{4.4.15}$$

它可以按电荷空间的指标 $ij$ 排成一个矩阵

$$\Gamma^{i}_{\mu j}(x) \equiv [A_\mu(x)]^{i}_{j} \tag{4.4.16}$$

这一矩阵的每个分量都是四维时空中的一阶张量场(即矢量场)$[A^{i}_{j}(x)]_\mu$，称为**规范场**.

将式(4.4.16)代入式(4.4.15)得到规范场的变换规律.它

可以写成电荷空间中矩阵乘法的形式：

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x)' = \boldsymbol{U}A_\mu(x)\boldsymbol{U}^{-1} + \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{U}\right]\boldsymbol{U}^{-1} \tag{4.4.17}$$

在物质场受到变换式(4.4.9)的同时，规范场受到变换式(4.4.17).这样得到的场 $\psi(x)'$，$A_\mu(x)'$ 和原有的场 $\psi(x)$，$A_\mu(x)$一样，描述同一物理情况.这就是推广到电荷空间的相对性原理.现代的粒子物理理论就建立在这一原理的基础上.

利用 $\Gamma^i_{\mu j}$ 可以定义平行移动.仿照式(4.1.18)，如果沿曲线

$$C:\ x^\mu = x^\mu(\tau) \tag{4.4.18}$$

移动 $\mathrm{d}x^\mu$ 时，$\psi_k$ 的改变是

$$\mathrm{d}\psi_k = \Gamma^j_{\mu i}\psi_j \mathrm{d}x^\mu \tag{4.4.19}$$

就称 $\psi_k$ 沿曲线 $C$ 平行移动.

仿照式(4.2.6)可以写出对 $\psi_k$ 的交错协变微分的公式

$$(\mathrm{D}_\nu\mathrm{D}_u - \mathrm{D}_u\mathrm{D}_\nu)\psi_k = R^{\cdot\cdot}_{\mu\nu,\ i}{}^{\cdot j}\psi_j \mathrm{d}_\nu x^\mu \mathrm{d}_u x^\nu \tag{4.4.20}$$

式中，曲率张量 $R^{\cdot\cdot}_{\mu\nu,\ i}{}^{\cdot j}$ 按式(4.2.5)定义，即

$$R^{\cdot\cdot}_{\mu\nu,\ i}{}^{\cdot j} = \frac{\partial\Gamma^j_{\mu i}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^j_{\nu i}}{\partial x^\mu} + \Gamma^k_{\mu i}\Gamma^j_{\nu k} - \Gamma^k_{\nu i}\Gamma^j_{\mu k} \tag{4.4.21}$$

由 $R^{\cdot\cdot}_{\mu\nu,\ i}{}^{\cdot j}$ 的指标构成可以看出，它是电荷空间中的二阶张量，可以排成矩阵

$$R^{\cdot\cdot}_{\mu\nu,\ i}{}^{\cdot j} \equiv \left[F_{\mu\nu}(x)\right]^j_i \tag{4.4.22}$$

它的每一个分量都是四维时空中的二阶反对称张量场$\left[F^j_i(x)\right]_{\mu\nu}$.

按式(4.4.16)定义的 $A_\mu(x)$(略去电荷空间的矩阵指标，下

同)是规范场的**势**,而按式(4.4.22)定义的 $F_{\mu\nu}(x)$是规范场的**场强**.它们之间的关系可以通过将式(4.4.16)和(4.4.22)代入(4.4.21),得

$$F_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}}+[A_{\mu},\ A_{\nu}] \tag{4.4.23}$$

右方的括号代表两个(电荷空间中的)矩阵的对易子:

$$[A_{\mu},\ A_{\nu}]\equiv A_{\mu}A_{\nu}-A_{\nu}A_{\mu} \tag{4.4.24}$$

作为例子,考虑普通的带电粒子.其电荷空间是一维空间.此时,电荷空间中的变换矩阵 $\boldsymbol{U}$ 是(1×1)的矩阵,也就是一个数.为了保证归一化不变,这个数的模为 1,

$$U(x)=\mathrm{e}^{iQ\theta(x)} \tag{4.4.25}$$

它实际上就是波函数的(局域)相位变换.

此时,$A_{\mu}(x)$(式(4.4.16))和 $F_{\mu\nu}(x)$(式(4.4.22))都不再是电荷空间中的矩阵,而只是闵可夫斯基空间中的四维矢量和二阶张量.由于 $A_{\mu}$, $A_{\nu}$ 不再是电荷空间中的矩阵,它们可对易,$[A_{\mu},\ A_{\nu}]=0$,因而式(4.4.23)成为

$$F_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial A_{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}} \tag{4.4.26}$$

这就是电磁场张量和电磁势之间的关系.

## 习　题　4

1. 对协变张量场 $a_{\lambda}$ 求 $(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-\nabla_{\beta}\nabla_{\alpha})a_{\lambda}$,说明:满足什么条件空间是平直的.

2. 试证明:曲率张量 $R_{\alpha\beta,\gamma\lambda}$ 满足比安基恒等式

$$\nabla^{\mu} R^{\lambda}_{\alpha\beta,\ \gamma} + \nabla^{\alpha} R^{\lambda}_{\beta\mu,\ \gamma} + \nabla^{\beta} R^{\lambda}_{\mu\alpha,\ \gamma} = 0$$

3. 试证明：曲率不变量 $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ 满足

$$\nabla^{\gamma} R = 2 g^{\alpha\beta} \nabla^{\beta} R_{\alpha\gamma}$$

提示：利用曲率张量 $R_{\alpha\beta,\ \gamma\lambda}$ 的对称、反对称性质以及比安基恒等式.

4. 求半径为 $R$ 的柱面的高斯曲率.

5. 定义爱因斯坦张量 $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$，试证明：$\nabla^{\mu} G^{\mu\nu} = 0$.

6. 在狭义相对论中，无外场能量-动量张量满足守恒条件 $\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^{\alpha}} = 0$，把它推广到引力场（黎曼空间）情况有 $\nabla^{\mu} T^{\mu\nu} = 0$，对比第 4 题，推测 $G^{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$ 的关系，并证明弯曲空间（引力场存在）总动量不守恒 $\frac{\mathrm{d} P^{\mu}}{\mathrm{d} t} \neq 0$.

7. 写出电磁场能量-动量在弯曲空间（引力）的形式.

8. 分析导出引力场中的麦克斯韦方程.

9. 设在引力场中质点还受外力 $f^{\alpha}$ 作用，导出方程

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} \tau^2} = f^{\alpha} - m \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{\mathrm{d} x^{\mu}}{\mathrm{d} \tau} \frac{\mathrm{d} x^{\nu}}{\mathrm{d} \tau}$$

10. 由爱因斯坦场方程 $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$，试证明：静态球对称理想流体的恒星结构方程为

$$\frac{\mathrm{d} P}{\mathrm{d} \tau} = - \frac{G(\varepsilon + p)[m(r) + 4\pi r^3 p]}{r[r - 2Gm(r)]}$$

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \varepsilon(r') \mathrm{d} r'$$

其中，$\varepsilon$，$p$ 为固有能量密度和压强.