力学丛书

李群和李代数对约束力学系统的应用

梅凤翔 著

科学出版社

03
M46

444924

力 学 丛 书

李群和李代数对约束力学系统的应用

梅凤翔 著



00444924

科 学 出 版 社

1999

内 容 简 介

本书全面系统论述李群和李代数对约束力学系统——完整约束系统、非完整约束系统和 Birkhoff 系统的应用.用李代数和李容许代数统一描述各类约束力学系统的运动微分方程,并建立 Poisson 积分理论.用李群研究各类约束系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性,并建立对称性与守恒量之间的关系.

图书在版编目(CIP)数据

李群和李代数对约束力学系统的应用/梅凤翔著 . - 北京:科学出版社,1999

(力学丛书)

ISBN 7-03-007514-5

Ⅰ.李… Ⅱ.梅… Ⅲ.①李群-应用-约束力②李代数-应用-约束力 Ⅳ.03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11969 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999 年 11 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1999 年 11 月第一次印刷 印张:16 5/8

印数:1—2 000 字数:428 000

定价: 66.00 元

前　言

学科的交叉与渗透是当代科学发展的一个显著特点.力学与数学,力学与物理学,历史上是分不开的,近代又走到一起来了.对此当代著名科学家都有精湛的论述.IUTAM 前主席、工程出身的 Koiter 指出,要想使力学进步,一定要用更加抽象更加精密的数学.Arnold V.I. 写道:“很多数学方法和概念都在经典力学中得到应用,如微分方程和相流,光滑映射和流形,李群和李代数,辛几何和各态历经理论”.我国著名科学家钱伟长先生多次指出,数学是汪洋大海,搞应用数学和力学的要善于大海捞针.本书致力于力学与数学的交缘,按林同骥先生的提法,当属“数学力学”新分支.

本书所论约束力学系统,包括通常理解的完整约束系统和非完整约束系统,以及新近认识的约束系统——Birkhoff 系统.

本书写作的第一个基本思想是用李代数和李容许代数统一描述各类约束力学系统,进而建立系统的 Poisson 积分理论.

对称性原理是物理学中更高层次的法则.寻求力学系统的守恒量问题,不仅在数学上有重要意义,而且反映深刻的物理本质.对称性与守恒量之间有潜在关系.近代寻求守恒量主要有两种方法:Noether 对称性与 Lie 对称性.本书写作的第二个基本思想是用李群研究各类约束力学系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性,进而找到与对称性相应的守恒量,最后研究两种对称性之间的关系.

本书内容共十章.第一、第二两章侧重李代数和李容许代数对约束力学系统的应用.第三章至第六章侧重 Noether 理论的应用.第七章至第九章侧重李理论的应用.第十章研究 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

第一章,约束力学系统运动方程的 Lie 代数结构.研究具有 Lie 代数结构的各类约束系统,包括 Lagrange 系统,Hamilton 系

统,特殊非完整系统,Poincaré-Chetaev 方程系统,广义经典力学系统,广义 Hamilton 系统,以及自治和半自治 Birkhoff 系统.将经典 Poisson 积分理论推广并应用于这些系统.

第二章,约束力学系统运动方程的 Lie 容许代数结构.研究具有 Lie 容许代数结构的各类约束系统,包括一般完整力学系统,Chaplygin 系统,一般非完整系统,非自治 Birkhoff 系统,以及一般约束 Birkhoff 系统.将经典 Poisson 积分理论推广并应用于这些系统的积分.

第三章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅰ).从 Hamilton 作用量在无限小群变换下的不变性出发,建立 Hamilton 系统,Lagrange 系统,广义坐标和准坐标下的完整力学系统,有多余坐标的完整系统,变质量完整系统,事件空间动力学系统,相对运动动力学系统,Chetaev 型非完整系统,以及非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论,包括 Noether 定理和逆定理的各种推广和应用.

第四章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅱ).以 Pfaff 作用量代替 Hamilton 作用量,研究 Pfaff 作用量在无限小群变换下的不变性,给出自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论.

第五章,约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅲ).从微分变分原理——D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理,Gauss 原理,万有 D'Alembert 原理出发,研究它们在无限小群变换下的不变性,建立各类完整系统和非完整系统的 Noether 理论.

第六章,约束力学系统的 Noether 理论(Ⅳ).从目前已知最普遍的微分变分原理——Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理出发,研究它在无限小群变换下的性质,建立自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论.

第七章,完整约束力学系统的 Lie 对称性.从微分方程在无限小群变换下不变性的 Lie 理论出发,研究各类完整力学系统 Lie 对称性与守恒量的两类问题——由 Lie 对称性求守恒量的正问题,以及由守恒量求 Lie 对称性的逆问题,包括 Lagrange 系统,

Hamilton 系统,广义坐标和准坐标下的完整系统,有多余坐标的完整系统,变质量完整系统,事件空间动力学,相对运动动力学系统,以及奇异 Lagrange 系统等.

第八章,非完整约束力学系统的 Lie 对称性.将 Lie 理论应用于各类非完整系统,包括广义坐标和准坐标下的非完整系统,变质量非完整系统,事件空间中非完整系统,非完整相对运动动力学系统,高阶非完整系统,非 Chetaev 非完整系统,以及具有可积微分约束系统.

第九章,Birkhoff 系统的 Lie 对称性.将 Lie 理论应用于自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统,并研究约束对 Lie 对称性的限制.

第十章,约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.研究 Lagrange 系统,Hamilton 系统,一般完整系统,非完整系统,Birkhoff 系统,以及约束 Birkhoff 系统两种对称性之间的关系.

本书初稿成于 1996 年春天,第二稿成于 1997 年春天,这两稿曾作为在北京理工大学为博士研究生和访问学者开设课程的教材.本书是在那两次教学实践基础上改写的第三稿.作者感谢博士生吴惠彬、朱海平、郭永新、杨明炎、吴润衡、尚玫、张毅、陈向炜、张睿超、郑改华、贾艳华和访问学者刘荣万副教授、傅景礼副教授、梁景辉副教授、李元成副教授等提出的有益建议,感谢北京理工大学张永发教授、史荣昌教授、湖南大学赵跃宇教授以及其他同仁的鼓励.作者深深感谢北京工业大学李子平教授和北京航空航天大学陆启韶教授的大力推荐.同时,作者深深感谢中国科学院科学出版基金的有力资助,国家自然科学基金委员会的支持,以及北京理工大学出版社出版基金的支持.限于水平,书中疏漏之处恳请读者指正.

作者　1999 年春天

《力学丛书》编委会

主　编：张　维

副主编：钱令希　郑哲敏

编　委：（按姓氏笔划为序）

丁　懋	卞荫贵	庄逢甘	朱兆祥
朱照宣	刘延柱	孙训方	李　灏
张涵信	周光垌	季文美	芮清泉
胡海昌	柳春图	贾有权	钱伟长
徐芝纶	徐华舫	郭尚平	谈镐生
黄文熙	黄克累	黄克智	程贯一

目　录

前　言 …… (xv)

第一章　约束力学系统运动方程的 Lie 代数结构 …… (1)

§1.1　代数基本概念 …… (1)

§1.2　Lagrange 系统和 Hamilton 系统的代数结构 …… (3)

1.2.1　Lagrange 系统的运动方程 …… (3)

1.2.2　Hamilton 系统的运动方程 …… (5)

1.2.3　系统的代数结构 …… (7)

1.2.4　系统的 Poisson 理论 …… (9)

1.2.5　算　例 …… (9)

§1.3　特殊非完整系统运动方程的代数结构 …… (12)

1.3.1　特殊非完整系统的运动方程 …… (12)

1.3.2　特殊非完整系统运动方程的代数结构 …… (15)

1.3.3　特殊非完整系统的 Poisson 理论 …… (15)

1.3.4　算　例 …… (16)

§1.4　Poincaré-Chetaev 方程的代数结构 …… (20)

1.4.1　Poincaré-Chetaev 方程 …… (20)

1.4.2　Poincaré-Chetaev 方程的代数结构 …… (23)

1.4.3　Poincaré-Chetaev 方程的 Poisson 理论 …… (24)

1.4.4　算　例 …… (25)

§1.5　广义经典力学系统的代数结构 …… (30)

1.5.1　广义经典力学的方程 …… (30)

1.5.2　广义经典力学系统方程的代数结构 …… (31)

1.5.3　广义经典力学的 Poisson 理论 …… (32)

1.5.4　算　例 …… (32)

§1.6　广义 Hamilton 系统的代数结构 …… (34)

1.6.1　广义 Poisson 括号 …… (34)

1.6.2　广义 Hamilton 系统的运动方程 …… (35)

1.6.3 广义 Hamilton 系统的 Poisson 理论 …… (35)
1.6.4 算 例 …… (36)
1.6.5 Nambu 力学 …… (38)
§1.7 自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构 …… (39)
1.7.1 Birkhoff 方程 …… (40)
1.7.2 自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构 …… (41)
1.7.3 自治和半自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 …… (42)
1.7.4 算 例 …… (44)
习题 …… (46)
参考文献 …… (47)
第二章 约束力学系统运动方程的 Lie 容许代数结构 …… (49)
§2.1 一般完整力学系统的代数结构 …… (49)
2.1.1 运动方程的逆变代数形式 …… (49)
2.1.2 方程具有相容代数结构 …… (50)
2.1.3 方程具有 Lie 代数结构的条件 …… (51)
2.1.4 方程具有 Lie 容许代数结构 …… (51)
2.1.5 系统的 Poisson 理论 …… (52)
2.1.6 算 例 …… (54)
§2.2 Chaplygin 方程的代数结构 …… (56)
2.2.1 Chaplygin 方程的两种形式 …… (57)
2.2.2 Chaplygin 方程的代数表示 …… (58)
2.2.3 Chaplygin 方程的 Poisson 理论 …… (63)
2.2.4 算 例 …… (64)
§2.3 一般非完整力学系统的代数结构 …… (67)
2.3.1 一般非完整系统的运动方程 …… (67)
2.3.2 运动方程的代数结构 …… (68)
2.3.3 系统的 Poisson 理论 …… (69)
2.3.4 算 例 …… (70)
§2.4 非自治 Birkhoff 系统的代数结构 …… (73)
2.4.1 非自治 Birkhoff 系统的运动方程 …… (73)
2.4.2 非自治 Birkhoff 系统的代数结构 …… (74)
2.4.3 非自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 …… (75)

2.4.4 算 例 …… (76)
§2.5 约束 Birkhoff 系统的代数结构 …… (77)
2.5.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程 …… (77)
2.5.2 约束 Birkhoff 系统的代数结构 …… (80)
2.5.3 约束 Birkhoff 系统的 Poisson 理论 …… (82)
2.5.4 算 例 …… (84)
习题 …… (88)
参考文献 …… (89)
第三章 约束力学系统的 Noether 对称性(I) …… (90)
§3.1 Hamilton 作用量与 Noether 对称性 …… (90)
3.1.1 Hamilton 作用量的变分 …… (91)
3.1.2 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 …… (92)
3.1.3 Killing 方程 …… (96)
3.1.4 算 例 …… (98)
§3.2 Lagrange 系统的 Noether 理论 …… (101)
3.2.1 Lagrange 系统的运动方程 …… (101)
3.2.2 Lagrange 系统的 Noether 定理 …… (102)
3.2.3 Lagrange 系统的 Noether 逆定理 …… (103)
3.2.4 力学中基本守恒定律的推导 …… (105)
3.2.5 算 例 …… (106)
§3.3 Hamilton 系统的 Noether 理论 …… (113)
3.3.1 相空间中 Hamilton 作用量的变分 …… (113)
3.3.2 相空间中 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 …… (114)
3.3.3 Killing 方程 …… (117)
3.3.4 Hamilton 系统的 Noether 定理 …… (119)
3.3.5 Hamilton 系统的 Noether 逆定理 …… (120)
3.3.6 算 例 …… (121)
§3.4 广义坐标下一般完整系统的 Noether 理论 …… (125)
3.4.1 系统的运动方程 …… (126)
3.4.2 广义 Noether 定理 …… (126)

3.4.3 广义 Noether 逆定理 …… (127)
3.4.4 算　例 …… (128)
§3.5 准坐标下一般完整系统的 Noether 理论 …… (132)
3.5.1 准坐标下 Hamilton 作用量的变分 …… (132)
3.5.2 Noether 对称变换、准对称变换和广义准对称变换
…… (134)
3.5.3 广义 Killing 方程 …… (139)
3.5.4 Noether 定理 …… (141)
3.5.5 Noether 逆定理 …… (142)
3.5.6 算　例 …… (143)
§3.6 有多余坐标完整系统的 Noether 理论 …… (146)
3.6.1 有多余坐标完整系统的运动方程 …… (147)
3.6.2 有多余坐标时 Hamilton 作用量的变分 …… (147)
3.6.3 有多余坐标时的对称变换、准对称变换和广义准对称变换 …… (148)
3.6.4 有多余坐标系统的广义 Noether 定理 …… (151)
3.6.5 有多余坐标系统的广义 Noether 逆定理 …… (152)
3.6.6 算　例 …… (153)
§3.7 变质量完整系统的 Noether 理论 …… (155)
3.7.1 变质量完整系统的运动方程 …… (155)
3.7.2 变质量完整系统的广义准对称变换 …… (156)
3.7.3 广义 Killing 方程 …… (157)
3.7.4 广义 Noether 定理 …… (158)
3.7.5 广义 Noether 逆定理 …… (159)
3.7.6 算　例 …… (160)
§3.8 事件空间完整系统的 Noether 理论 …… (162)
3.8.1 事件空间中完整系统的运动方程 …… (162)
3.8.2 事件空间中 Hamilton 作用量的变分 …… (163)
3.8.3 事件空间中对称变换、准对称变换和广义准对称变换
…… (164)
3.8.4 广义 Killing 方程 …… (167)
3.8.5 广义 Noether 定理 …… (168)

3.8.6 广义 Noether 逆定理 …… (169)
3.8.7 算 例 …… (170)
§3.9 相对运动动力学系统的 Noether 理论 …… (172)
3.9.1 相对运动动力学方程 …… (172)
3.9.2 相对运动动力学的广义 Noether 定理 …… (173)
3.9.3 相对运动动力学的广义 Noether 逆定理 …… (174)
3.9.4 算 例 …… (176)
§3.10 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论 …… (178)
3.10.1 Chetaev 型非完整系统的运动方程 …… (178)
3.10.2 相应完整系统的 Noether 理论 …… (179)
3.10.3 非完整系统的广义 Noether 定理 …… (179)
3.10.4 非完整系统的广义 Noether 逆定理 …… (181)
3.10.5 非完整系统与相应完整系统的 Noether 对称性
…… (182)
3.10.6 算 例 …… (183)
§3.11 非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论
…… (189)
3.11.1 非 Chetaev 型非完整系统的运动方程 …… (189)
3.11.2 相应完整系统的 Noether 理论 …… (190)
3.11.3 非完整系统的广义 Noether 定理 …… (191)
3.11.4 非完整系统的广义 Noether 逆定理 …… (192)
3.11.5 非完整系统与相应完整系统的 Noether 对称性
…… (193)
3.11.6 算 例 …… (194)
习题 …… (196)
参考文献 …… (198)
第四章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅱ) …… (200)
§4.1 Pfaff 作用量与 Noether 对称性 …… (200)
4.1.1 Pfaff 作用量的变分 …… (200)
4.1.2 对称变换,准对称变换和广义准对称变换 …… (202)
4.1.3 广义 Killing 方程 …… (206)
4.1.4 算 例 …… (207)

§4.2 自由 Birkhoff 系统的 Noether 理论 …… (210)
4.2.1 自由 Birkhoff 系统的运动方程 …… (210)
4.2.2 广义 Noether 定理 …… (210)
4.2.3 广义 Noether 逆定理 …… (211)
4.2.4 算 例 …… (213)
§4.3 约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论 …… (217)
4.3.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程 …… (217)
4.3.2 相应自由系统的 Noether 理论 …… (218)
4.3.3 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理 …… (219)
4.3.4 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 逆定理 …… (220)
4.3.5 约束 Birkhoff 系统与相应自由 Birkhoff 系统的对称性 …… (222)
4.3.6 算 例 …… (222)
习题 …… (226)
参考文献 …… (227)
第五章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅲ) …… (228)
§5.1 微分变分原理 …… (228)
5.1.1 D'Alembert-Lagrange 原理 …… (228)
5.1.2 Jourdain 原理 …… (229)
5.1.3 Gauss 原理 …… (230)
5.1.4 万有 D'Alembert 原理 …… (230)
§5.2 非等时变分 …… (231)
5.2.1 Lagrange 非等时变分 …… (232)
5.2.2 Jourdain 非等时变分 …… (233)
5.2.3 Gauss 非等时变分 …… (234)
5.2.4 Dolaptchiew 非等时变分 …… (235)
§5.3 基于 D'Alembert-Lagrange 原理的守恒量 …… (237)
5.3.1 D'Alembert-Lagrange 原理不变性条件 …… (237)
5.3.2 完整系统的守恒量 …… (238)
5.3.3 非完整系统的守恒量 …… (240)
5.3.4 算 例 …… (242)
§5.4 基于 Jourdain 原理的守恒量 …… (246)

5.4.1 Jourdain 原理不变性条件 …… (246)
5.4.2 完整系统的守恒量 …… (247)
5.4.3 非完整系统的守恒量 …… (247)
5.4.4 算 例 …… (250)
§5.5 基于 Gauss 原理的守恒量 …… (254)
5.5.1 Gauss 原理不变性条件 …… (254)
5.5.2 完整系统的守恒量 …… (255)
5.5.3 非完整系统的守恒量 …… (256)
5.5.4 算 例 …… (257)
§5.6 基于万有 D'Alembert 原理的守恒量 …… (260)
5.6.1 万有 D'Alembert 原理不变性条件 …… (260)
5.6.2 完整系统的守恒量 …… (260)
5.6.3 非完整系统的守恒量 …… (261)
5.6.4 算 例 …… (262)
习题 …… (263)
参考文献 …… (264)
第六章 约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅳ) …… (266)
§6.1 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理 …… (266)
6.1.1 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的建立 …… (266)
6.1.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的应用 …… (267)
6.1.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理与 D'Alembert-Lagrange 原理 …… (267)
§6.2 非等时变分 …… (268)
6.2.1 等时变分 …… (269)
6.2.2 非等时变分 …… (269)
6.2.3 无限小变换的生成元 …… (269)
§6.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件 …… (270)
6.3.1 用生成元表示的等时变分 …… (270)
6.3.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的变形 …… (270)
§6.4 自由 Birkhoff 系统的守恒量 …… (271)
6.4.1 守恒量的存在条件和形式 …… (271)

6.4.2 广义 Killing 方程 …… (272)
6.4.3 算 例 …… (273)
§6.5 约束 Birkhoff 系统的守恒量 …… (276)
6.5.1 约束对生成元的限制条件 …… (276)
6.5.2 相应自由系统的守恒量 …… (276)
6.5.3 约束 Birkhoff 系统的守恒量 …… (277)
6.5.4 算 例 …… (277)
习题 …… (279)
参考文献 …… (280)
第七章 完整约束力学的 Lie 对称性 …… (281)
§7.1 Lie 变换群和无限小变换 …… (281)
7.1.1 Lie 变换群 …… (281)
7.1.2 无限小变换 …… (283)
7.1.3 多参数 Lie 变换群和 Lie 代数 …… (286)
§7.2 常微分方程的不变性 …… (290)
7.2.1 一阶常微分方程的不变性 …… (290)
7.2.2 二阶常微分方程的不变性 …… (296)
§7.3 Lagrange 系统的 Lie 对称性 …… (303)
7.3.1 Lagrange 系统的运动方程 …… (303)
7.3.2 无限小变换与生成元 …… (303)
7.3.3 微分方程不变性的无限小判据 …… (304)
7.3.4 系统的结构方程和守恒量 …… (306)
7.3.5 Lie 对称性逆问题 …… (307)
7.3.6 算 例 …… (309)
§7.4 Hamilton 系统的 Lie 对称性 …… (319)
7.4.1 Hamilton 方程 …… (319)
7.4.2 变换群与生成元 …… (319)
7.4.3 Lie 对称性的确定方程 …… (320)
7.4.4 结构方程与守恒量 …… (320)
7.4.5 Lie 对称性逆问题 …… (321)
7.4.6 算 例 …… (323)
§7.5 广义坐标下一般完整系统的 Lie 对称性 …… (326)

7.5.1 系统的运动方程 …… (326)
7.5.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程 …… (327)
7.5.3 结构方程与守恒量 …… (328)
7.5.4 Lie 对称性逆问题 …… (329)
7.5.5 算 例 …… (330)
§7.6 准坐标下一般完整系统的 Lie 对称性 …… (333)
7.6.1 系统的运动方程 …… (333)
7.6.2 无限小变换与生成元 …… (334)
7.6.3 Lie 对称性的确定方程 …… (334)
7.6.4 结构方程与守恒量 …… (335)
7.6.5 Lie 对称性逆问题 …… (336)
7.6.6 算 例 …… (337)
§7.7 有多余坐标完整力学系统的 Lie 对称性 …… (341)
7.7.1 系统的运动方程 …… (341)
7.7.2 无限小群变换和确定方程 …… (342)
7.7.3 限制方程 …… (343)
7.7.4 结构方程与守恒量 …… (344)
7.7.5 Lie 对称性逆问题 …… (345)
7.7.6 算 例 …… (347)
§7.8 变质量完整力学系统的 Lie 对称性 …… (349)
7.8.1 系统的运动方程 …… (349)
7.8.2 无限小变换与确定方程 …… (350)
7.8.3 结构方程与守恒量 …… (351)
7.8.4 Lie 对称性逆问题 …… (352)
7.8.5 算 例 …… (354)
§7.9 事件空间中完整力学系统的 Lie 对称性 …… (356)
7.9.1 系统的运动方程 …… (356)
7.9.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程 …… (358)
7.9.3 结构方程与守恒量 …… (360)
7.9.4 Lie 对称性逆问题 …… (360)
7.9.5 算 例 …… (361)
§7.10 相对运动动力学系统的 Lie 对称性 …… (364)

7.10.1 相对运动动力学方程 …… (364)
7.10.2 无限小群变换与确定方程 …… (365)
7.10.3 结构方程与守恒量 …… (366)
7.10.4 Lie 对称性逆问题 …… (367)
7.10.5 算 例 …… (368)
§7.11 奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性 …… (370)
7.11.1 奇异 Lagrange 系统的运动方程 …… (370)
7.11.2 无限小群变换,确定方程和限制方程 …… (371)
7.11.3 结构方程与守恒量 …… (372)
7.11.4 Lie 对称性逆问题 …… (373)
7.11.5 算 例 …… (374)
习题 …… (377)
参考文献 …… (378)
第八章 非完整约束力学系统的 Lie 对称性 …… (380)
§8.1 广义坐标下一般非完整系统的 Lie 对称性 …… (380)
8.1.1 一般非完整系统广义坐标中的方程 …… (380)
8.1.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程 …… (381)
8.1.3 限制方程和附加限制方程 …… (382)
8.1.4 结构方程与守恒量 …… (383)
8.1.5 Lie 对称性逆问题 …… (384)
8.1.6 算 例 …… (385)
§8.2 准坐标下非完整系统的 Lie 对称性 …… (390)
8.2.1 系统的运动方程 …… (390)
8.2.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程 …… (392)
8.2.3 限制方程和附加限制方程 …… (392)
8.2.4 结构方程和守恒量 …… (393)
8.2.5 Lie 对称性逆问题 …… (394)
8.2.6 算 例 …… (396)
§8.3 变质量非完整系统的 Lie 对称性 …… (399)
8.3.1 系统的运动方程 …… (399)
8.3.2 无限小群变换与确定方程 …… (400)
8.3.3 限制方程和附加限制方程 …… (401)

8.3.4 结构方程与守恒量 …… (401)
8.3.5 Lie 对称性逆问题 …… (403)
8.3.6 算 例 …… (404)
§8.4 事件空间非完整系统的 Lie 对称性 …… (407)
8.4.1 系统的运动方程 …… (407)
8.4.2 无限小群变换与确定方程 …… (410)
8.4.3 限制方程和附加限制方程 …… (411)
8.4.4 结构方程与守恒量 …… (412)
8.4.5 Lie 对称性逆问题 …… (414)
8.4.6 取某坐标作为参数的情形 …… (415)
8.4.7 算 例 …… (416)
§8.5 非完整系统相对运动动力学的 Lie 对称性 …… (422)
8.5.1 非完整系统相对运动动力学方程 …… (422)
8.5.2 无限小群变换与确定方程 …… (423)
8.5.3 限制方程和附加限制方程 …… (424)
8.5.4 结构方程与守恒量 …… (424)
8.5.5 Lie 对称性逆问题 …… (425)
8.5.6 算 例 …… (427)
§8.6 高阶非完整系统的 Lie 对称性 …… (429)
8.6.1 系统的运动方程 …… (429)
8.6.2 无限小群变换与确定方程 …… (431)
8.6.3 限制方程和附加限制方程 …… (432)
8.6.4 结构方程与守恒量 …… (433)
8.6.5 Lie 对称性逆问题 …… (434)
8.6.6 算 例 …… (435)
§8.7 非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性 …… (438)
8.7.1 系统的运动方程 …… (438)
8.7.2 无限小群变换与确定方程 …… (439)
8.7.3 限制方程和附加限制方程 …… (440)
8.7.4 结构方程与守恒量 …… (440)
8.7.5 Lie 对称性逆问题 …… (441)
8.7.6 算 例 …… (442)

§8.8 具有可积微分约束系统的 Lie 对称性 …… (445)
8.8.1 可积一阶微分约束系统的 Lie 对称性 …… (446)
8.8.2 可积二阶微分约束系统的 Lie 对称性 …… (452)
习题 …… (457)
参考文献 …… (458)
第九章 Birkhoff 系统的 Lie 对称性 …… (459)
§9.1 自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性 …… (459)
9.1.1 自由 Birkhoff 系统的运动方程 …… (459)
9.1.2 无限小群变换与确定方程 …… (460)
9.1.3 结构方程与守恒量 …… (461)
9.1.4 Lie 对称性逆问题 …… (463)
9.1.5 算 例 …… (464)
§9.2 约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性 …… (466)
9.2.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程 …… (467)
9.2.2 确定方程、限制方程和附加限制方程 …… (468)
9.2.3 结构方程与守恒量 …… (469)
9.2.4 Lie 对称性逆问题 …… (470)
9.2.5 算 例 …… (471)
习题 …… (474)
参考文献 …… (475)
第十章 约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系 …… (476)
§10.1 Lagrange 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性 …… (476)
10.1.1 Lagrange 系统的 Noether 对称性 …… (476)
10.1.2 Lagrange 系统的 Lie 对称性 …… (478)
10.1.3 Lagrange 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系 …… (478)
10.1.4 算 例 …… (479)
§10.2 Hamilton 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性 …… (481)
10.2.1 Hamilton 系统的 Noether 对称性 …… (481)

10.2.2 Hamilton 系统的 Lie 对称性 …… (482)
10.2.3 Hamilton 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系
…… (483)
10.2.4 算 例 …… (483)
§10.3 一般完整系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性
…… (485)
10.3.1 一般完整系统的 Noether 对称性 …… (485)
10.3.2 一般完整系统的 Lie 对称性 …… (486)
10.3.3 一般完整系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系
…… (487)
10.3.4 算 例 …… (488)
§10.4 非完整系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性
…… (489)
10.4.1 非完整系统的 Noether 对称性 …… (489)
10.4.2 非完整系统的 Lie 对称性 …… (490)
10.4.3 非完整系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系
…… (491)
10.4.4 算 例 …… (492)
§10.5 自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性 …… (496)
10.5.1 自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性 …… (496)
10.5.2 自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性 …… (497)
10.5.3 自由 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系 …… (498)
10.5.4 算 例 …… (498)
§10.6 约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性 …… (500)
10.6.1 约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性 …… (500)
10.6.2 约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性 …… (502)
10.6.3 约束 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系 …… (503)
10.6.4 算 例 …… (503)

习题 …… (506)
参考文献 …… (507)
名词索引 …… (508)

第一章　约束力学系统运动方程的 Lie 代数结构

众所周知，完整保守系统的 Hamilton 方程具有 Lie 代数结构，而对具有 Lie 代数结构的系统可以建立 Poisson 积分理论.本章研究各类约束力学系统的 Lie 代数结构并建立系统的 Poisson 积分理论，包括代数基本概念，Lagrange 系统和 Hamilton 系统，特殊非完整系统，Poincaré-Chetaev 方程系统，广义经典力学系统，广义 Hamilton 系统，以及自治和半自治 Birkhoff 系统的 Lie 代数结构和 Poisson 积分理论.

§1.1　代数基本概念

在抽象代数的近代理论中，代数 U 是有元素 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 特征为 P(等于零或素数)的域 F 上元素 $a, b, c, \cdots$ 的一个向量空间，对所有元素 $a, b, c \in U$ 及 $\alpha \in F$，定义双线性(抽象)积 ab 满足右分配律

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1.1.1}$$

左分配律

$$(a + b)c = ac + bc \tag{1.1.2}$$

以及标律

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab) \tag{1.1.3}$$

如果除式(1.1.1)—(1.1.3)之外，还满足结合律

$$[a, b, c] \xlongequal{\text{def}} a(bc) - (ab)c \tag{1.1.4}$$

那么就说有一个结合代数.反之，为非结合代数.

常用几种代数如下[1]：

1. Lie 代数

Lie 代数是域 F 上的代数 L, 元素 a, b, c 满足规律

$$ab + ba = 0 \tag{1.1.5}$$

$$a(bc) + b(ca) + c(ab) = 0 \tag{1.1.6}$$

式(1.1.5)表示积具有反对称性, 式(1.1.6)表示积满足 Jacobi 恒等式.

2. Lie 容许代数

Lie 容许代数是域 F 上的代数 U, 使得附属代数 U^- 是一个 Lie 代数, 由积

$$[a, b]_U = ab - ba \tag{1.1.7}$$

表征的与 U 是同一向量空间.

结合代数 A 是 Lie 容许代数. Lie 代数都是 Lie 容许代数. 然而, 也有不少 Lie 容许代数不是 Lie 代数.

3. Jordan 代数

Jordan 代数是域 F 上的代数 J, 满足规律

$$ab - ba = 0 \tag{1.1.8}$$

$$[a^2, b, a] = 0 \tag{1.1.9}$$

4. Jordan 容许代数

Jordan 容许代数是域 F 上的代数 U, 使得附属代数 U^+ 是一个 Jordan 代数, 由积

$$\frac{1}{2}\{a, b\}_U = \frac{1}{2}(ab + ba) \tag{1.1.10}$$

表征的与 U 是同一向量空间.

结合 Jordan 代数是 Jordan 容许代数, 反之不成立.

5. 交错代数

交错代数是域 F 上的代数 U, 满足规律

$$a^2b = a(ab), ba^2 = (ba)a \tag{1.1.11}$$

§1.2 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的代数结构

本节讨论 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的代数结构和它们的 Poisson 积分理论.

1.2.1 Lagrange 系统的运动方程

如果一个有 n 个自由度的完整力学系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (1.2.1)$$

则称系统为 Lagrange 系统.

Lagrange 系统可分为三类:

1. 完整保守系统

对于完整保守系统,方程(1.2.1)中的 $L=T-V$ 为 Lagrange 函数或动势,其中 T 为系统动能,V 为系统势能.

2. 广义力有广义势的系统

此时广义力 Q_s 表为

$$Q_s=\frac{\partial U}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (1.2.2)$$

其中

$$U=A_s(\boldsymbol{q},t)\dot{q}_s+A(\boldsymbol{q},t) \qquad (1.2.3)$$

而方程(1.2.1)中的 $L=T+U$.

3. Lagrange 力学逆问题系统

有些完整非保守系统在一定条件下也可用方程(1.2.1)来描述.这就是所谓 Lagrange 力学逆问题.下述定理给出这个条件.

定理 1.2.1[2,3] 局部、完整、一般为非保守系统的方程写成基本形式

$$A_{ki}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}^i+B_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (k,i=1,\cdots,n) \qquad (1.2.4)$$

它在变量$(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$的星形区域$R^{*2n+1}$上(至少)是$C^2$类并且是规则的.对方程(1.2.4)在$R^{*2n+1}$上允许有常规 Lagrange 方程的有序直接解析表达式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}-\frac{\partial L}{\partial q^k}\equiv A_{ki}\ddot{q}^i+B_k \tag{1.2.5}$$

其充分必要条件是方程组在R^{*2n+1}上为自伴随的,即

$$\begin{cases} A_{ij}=A_{ji} \\ \dfrac{\partial A_{ik}}{\partial \dot{q}^j}=\dfrac{\partial A_{jk}}{\partial \dot{q}^i} \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}+\dfrac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}=2\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\dfrac{\partial}{\partial q^k}\right\}A_{ij} \\ \dfrac{\partial B_i}{\partial q^j}-\dfrac{\partial B_j}{\partial q^i}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial t}+\dot{q}^k\dfrac{\partial}{\partial q_k}\left(\dfrac{\partial B_i}{\partial \dot{q}^j}-\dfrac{\partial B_j}{\partial \dot{q}^i}\right)\right\} \end{cases} \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.1 中相同指标表示求和.

下面的定理给出构造函数 L 的方法.

定理 1.2.2[2,3] 在点$(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$的星形区域$R^{*2n+1}$上定义的、(至少)$C^2$类的、规则、自伴随完整非保守系统(1.2.4),其有序直接表达的 Lagrange 函数由下式给出

$$L=K(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+D_k\dot{q}^k+C(t,\boldsymbol{q}) \tag{1.2.7}$$

其中 $n+2$ 个函数 K, D_k, C 是下述超定偏微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}=A_{k_1k_2}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ \dfrac{\partial D_{k_1}}{\partial q^{k_2}}-\dfrac{\partial D_{k_2}}{\partial q^{k_1}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\dfrac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}-\dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial q^{k_2}}\right)\equiv Z_{k_1k_2}(t,\boldsymbol{q}) \\ \dfrac{\partial C}{\partial q^{k_1}}=\dfrac{\partial D_{k_1}}{\partial t}-B_{k_1}-\dfrac{\partial K}{\partial q^{k_1}}+\dfrac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^{k_1}\partial t}+\left[\dfrac{\partial^2 K}{\partial q^{k_1}\partial \dot{q}^{k_2}}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial B_{k_1}}{\partial \dot{q}^{k_2}}-\dfrac{\partial B_{k_2}}{\partial \dot{q}^{k_1}}\right)\right]\dot{q}^{k_2} \\ \qquad\equiv W_{k_1}(t,\boldsymbol{q}) \end{cases} \tag{1.2.8}$$

的解,而解给出为

$$\begin{cases} K(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \dot{q}^{k_1}\int_o^1 \mathrm{d}\tau'\{[\int_o^1 \mathrm{d}\tau A\, k_1 k_2(t,\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}})]\dot{\boldsymbol{q}}^{k_2}\}(t,\boldsymbol{q},\tau\dot{\boldsymbol{q}}) \\ D_{k_1} = [\int_o^1 \mathrm{d}\tau\tau Z_{k_1 k_2}(t,\tau\boldsymbol{q})]q^{k_2} \\ C = [\int_o^1 \mathrm{d}\tau W_k(t,\tau\boldsymbol{q})]q^k \end{cases} \tag{1.2.9}$$

注意到,Lagrange 力学逆问题中的 Lagrange 函数 L 一般说已不再具有动势的意义.

1.2.2 Hamilton 系统的运动方程

Lagrange 方程(1.2.1)经过 Legendre 变换可化为 Hamilton 正则方程.

给定一个 Lagrange 函数 $L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 在点(t, $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$)的区域 R^{2n+1} 上满足连续和规则性质

$$\begin{cases} L \in C^m(R^{2n+1}), m \geqslant 2 \\ \det(\dfrac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j})(R^{2n+1}) \neq 0 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Legendre 正变换

$$\begin{cases} G_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{p}) = p_k - \dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^k} = 0 \\ H = p_k\dot{q}^k - L = H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{cases} \tag{1.2.11}$$

诱导出由 R^{2n+1} 到点$(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$的像域 $\bar{R}^{2n+1}$ 的一一映射,并确定唯一非零新函数——Hamilton 函数 $H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$,它满足连续和规则性质

$$\begin{cases} H \in C^m(\tilde{R}^{2n+1}),\ m \geqslant 2 \\ \det\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right)(\tilde{R}^{2n+1}) \neq 0 \end{cases} \tag{1.2.12}$$

反之,在点$(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$的域$\tilde{R}^{2n+1}$上给定一个满足性质(1.2.12)的Hamilton函数$H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$,Legendre逆变换

$$\begin{cases} \tilde{G}_k(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{p}) = \dot{q}^k - \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\ L = \dot{q}^k p_k - H = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{1.2.13}$$

诱导出由$\tilde{R}^{2n+1}$到点$(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$的像域$R^{2n+1}$的一一映射,并确定唯一非零新函数——Lagrange函数$L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,它满足连续和规则性质(1.2.10).

Hamilton方程有形式

$$\begin{cases} \dot{q}^k - \dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\ \dot{p}_k + \dfrac{\partial H}{\partial q^k} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{1.2.14}$$

当Lagrange函数和Hamilton函数用Legendre变换联系时,Hamilton方程(1.2.14)与Lagrange方程(1.2.1)是等价的.

下面将Hamilton方程表为更有效的形式.

引入$2n$个分量的逆变向量[1]

$$a^\mu = \begin{cases} q^\mu & (\mu = 1, \cdots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, \cdots, 2n) \end{cases} \tag{1.2.15}$$

它张成一个相空间.Hamilton函数写成

$$H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = H(t, a^\mu) \tag{1.2.16}$$

利用逆变张量

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{1.2.17}$$

则 Hamilton 方程(1.2.14)表为

$$\dot{a}^{\mu} - \omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = 0 \qquad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n) \tag{1.2.18}$$

称其为相空间中解析方程的逆变范式.

引入逆矩阵

$$(\omega_{\mu\nu}) = (\omega^{\mu\nu})^{-1} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{1.2.19}$$

以及 $2n$ 个分量的协变向量

$$a_{\mu} \equiv \omega_{\mu\nu}a^{\nu} = \begin{cases} -p_{\mu} & (\mu = 1,\cdots,n) \\ q^{\mu-n} & (\mu = n+1,\cdots,2n) \end{cases} \tag{1.2.20}$$

则由方程(1.2.18)得到

$$\omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial H}{\partial a^{\mu}} = 0 \quad (\mu = 1,\cdots,2n) \tag{1.2.21}$$

称其为相空间中解析方程的协变范式.

1.2.3 系统的代数结构

Lagrange 系统和 Hamilton 系统都可用逆变代数形式的方程(1.2.18)来描述.

现在来构造代数. 研究某函数 $A(a) = A(q, p)$ 按方程(1.2.18)求对时间 t 的导数,有

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \qquad (\mu,\nu = 1,\cdots,2n) \tag{1.2.22}$$

将其定义为一个双线性积 $A \circ H$

$$\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \xlongequal{\text{def}} A \circ H \tag{1.2.23}$$

它满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \tag{1.2.24}$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \tag{1.2.25}$$

以及标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha (A \circ B) \tag{1.2.26}$$

因此,它具有相容代数结构.进而,还满足

$$A \circ B + B \circ A = 0 \tag{1.2.27}$$

$$A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0 \tag{1.2.28}$$

因此,代数结构归结为 Lie 代数结构.

展开积(1.2.23),有

$$\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial A}{\partial q^{k}} \frac{\partial H}{\partial p_{k}} - \frac{\partial A}{\partial p_{k}} \frac{\partial H}{\partial q^{k}} \tag{1.2.29}$$

它就是经典 Poisson 括号(A, H). Poisson 括号有如下性质:

$$(A, B) + (B, A) = 0 \tag{1.2.30}$$

$$(A, (B, C)) + (B, (C, A)) + (C, (A, B)) = 0 \tag{1.2.31}$$

这与 Lie 代数结构(1.2.27),(1.2.28)一致.于是有

定理 1.2.3 一切 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的运动方程不仅具有相容代数结构,而且具有 Lie 代数结构.

1.2.4 系统的 Poisson 理论

由于 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的运动方程都具有 Lie 代数结构,因此可以建立 Poisson 关于第一积分的理论.主要为如下 5 个定理[4,5]

定理 1.2.4 $I(a^\mu, t) = \text{const.}$是方程(1.2.18)第一积分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (I, H) = 0 \tag{1.2.32}$$

其中(I, H)为 Poisson 括号.

定理 1.2.5 Hamilton 函数 H 不显含 t 时,H 是系统的第一积分.

定理 1.2.6 如果方程(1.2.18)有两个不处于相互内旋的积分 $I_1(a^\mu, t)$和 $I_2(a^\mu, t)$,则它们的 Poisson 括号(I_1, I_2)也是系统的第一积分.

定理 1.2.7 如果方程(1.2.18)有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t)$,而 Hamilton 函数 H 不显含时间 t,则$\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$都是系统的第一积分.

定理 1.2.8 如果方程(1.2.18)有包含坐标 a^ρ 的第一积分,而 Hamilton 函数 H 不显含 a^ρ,则$\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}}, \cdots$都是系统的第一积分.

1.2.5 算 例

例 1 Hénon-Heiles 问题的方程为

$$\dot{q}_1 = p_1, \dot{q}_2 = p_2$$

$$\dot{p}_1 = -q_1 - 2q_1q_2, \dot{p}_2 = -q_2 - q_1^2 + q_2^2$$

它是一个 Hamilton 系统,故有 Lie 代数结构.

例 2 质点在线性阻力作用下的一维运动方程为

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} = 0$$

它不满足自伴随条件.将方程改写为

$$e^{\gamma t}\ddot{q} + e^{\gamma t}\gamma\dot{q} = 0$$

它则满足自伴随条件.逆问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}e^{\gamma t}\dot{q}^2$$

这样就可化为 Hamilton 系统,而因此具有 Lie 代数结构.

例 3 三维系统的运动方程为

$$(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\ddot{q}_1 + (2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\ddot{q}_2 + \dot{q}_2\ddot{q}_3 + \frac{1}{3}(q_2q_3 - 2q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_3 + 2q_2\dot{q}_2) = 0$$

$$(2\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2 + \dot{q}_3)\ddot{q}_1 + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\ddot{q}_2 + \dot{q}_1\ddot{q}_3 + \frac{1}{3}(2q_1\dot{q}_1 - 2q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_3 + q_1q_3) = 0$$

$$\dot{q}_2\ddot{q}_1 + \dot{q}_1\ddot{q}_2 + \dot{q}_3\ddot{q}_3 + \frac{1}{3}(\dot{q}_1q_2 + q_1\dot{q}_2 + q_1q_2) = 0$$

可以证明它满足自伴随条件,而 Lagrange 函数为[3]

$$L = \frac{1}{6}(\dot{q}_1^3 + \dot{q}_2^3 + \dot{q}_3^3) + \dot{q}_1^2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3 + \frac{1}{9}\dot{q}_1q_2(-2q_1 + 2q_2 - q_3) + \frac{1}{9}\dot{q}_2q_1(2q_1 - 2q_2 - q_3) + \frac{2}{9}q_1q_2\dot{q}_3 - \frac{1}{3}q_1q_2q_3$$

因此,系统的运动方程具有 Lie 代数结构.

例 4　三自由度完整系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)$$

试用 Poisson 理论求系统的积分.

首先,将运动方程表为逆变代数形式.广义动量为

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2 \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \\ p_3 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_3 + \dot{q}_1\cos q_2 \end{cases} \tag{1}$$

反解出广义速度,有

$$\dot{q}_1 = -\frac{1}{\sin^2 q_2}(p_3\cos q_2 - p_1),\ \dot{q}_2 = p_2$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{\sin^2 q_2}(p_3 - p_1\cos q_2) \tag{2}$$

于是 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2\sin^2 q_2}(p_1^2 + p_3^2 + p_2^2\sin^2 q_2 - 2p_1p_3\cos q_2) \tag{3}$$

令

$$a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = q_3, a^4 = p_1, a^5 = p_2, a^6 = p_3 \tag{4}$$

则

$$H = \frac{1}{2\sin^2 a^2}\{(a^4)^2 + (a^6)^2 + (a^5)^2\sin^2 a^2 - 2a^4a^6\cos a^2\} \tag{5}$$

其次,利用 Poisson 理论求系统的积分.因 H 不显含 t,由定理 1.2.5 知

$$H = h = \text{const.} \tag{6}$$

是系统的第一积分.利用 Poisson 条件(1.2.32)容易验证系统有积分

$$I_1 = a^5\cos a^1 + \frac{1}{\sin a^2}(a^6 - a^4\cos a^2)\sin a^1 = c_1 \tag{7}$$

因 H 不含 a^1，由定理 1.2.8 知，系统有积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial a^1} = -a^5 \sin a^1 + \frac{1}{\sin a^2}(a^6 - a^4 \cos a^2)\cos a^1 = c_2 \quad (8)$$

系统有三个积分(6)，(7)，(8)，因此是可积的.

§1.3 特殊非完整系统运动方程的代数结构

本节研究特殊非完整系统运动方程的代数结构和 Poisson 积分理论.特殊非完整系统是指以下三类非完整系统：相应完整系统的运动方程具有 Lagrange 形式的非完整系统；具有 Helmholtz 势的 Chaplygin 系统；实现非完整系统自由运动的非完整有势系统.特殊非完整系统运动方程都归结为 Lagrange 系统或 Hamilton 系统的运动方程，因此，运动方程具有 Lie 代数结构，而 Poisson 理论可全部地应用于这类系统.

1.3.1 特殊非完整系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定，系统的运动受有 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (1.3.1)$$

系统的运动可用 Routh 方程来描述[6]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s = 1, \cdots, n; \beta = 1, \cdots, g) \qquad (1.3.2)$$

在运动方程积分之前，可将约束乘子 λ_β 求出为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，由下述代数方程确定[6]

$$\frac{\Delta sl}{\Delta}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta + \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta sl}{\Delta}$$

$$\times\left\{-[k, m; s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + Q_s + \frac{\partial T_o}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}$$

$$= 0$$

$$(s, l, m, k = 1, \cdots, n; \beta, \gamma = 1, \cdots, g) \quad (1.3.3)$$

其中 Δ 为动能 T 中广义速度二次型系数矩阵的行列式，Δ_{sl} 为 Δ 元素(s, l)的代数余子式，B_s 为动能中一次型系数，T_o 为动能中不含广义速度的项.令

$$\Lambda_s = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (1.3.4)$$

其中 λ_β 已表为$t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$的显式,将其代入方程(1.3.2),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (1.3.5)$$

方程(1.3.5)可当作一个有 n 个自由度的完整系统来研究,其动能为 T,广义力为 $Q_s + \Lambda_s$.非完整系统(1.3.1),(1.3.2)的运动可在完整系统(1.3.5)的运动中找到,只要初始条件满足非完整约束方程(1.3.1)[6,7],即

$$f_\beta(t_o, \boldsymbol{q}_o, \dot{\boldsymbol{q}}_o) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (1.3.6)$$

方程(1.3.5)称为与非完整系统(1.3.1),(1.3.2)相应的完整系统的运动方程.研究一类特殊的非完整系统,与其相应的完整系统的广义力 $Q_s + \Lambda_s$ 具有广义势,即

$$Q_s + \Lambda_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (1.3.7)$$

$$U = A_s(t, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}_s + A(t, \boldsymbol{q})$$

将式(1.3.7)代入方程(1.3.5),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (1.3.8)$$

其中

$$L = T + U \quad (1.3.9)$$

将这类系统称为第一类特殊非完整系统.

假设非完整约束方程有形式

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta} = \varphi_\beta(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma) \quad (1.3.10)$$

$$(\beta = 1, \cdots, g; \sigma = 1, \cdots, \epsilon; \epsilon = n - g)$$

并设广义力有势,动能 T 和势能 V 都不含坐标 $q_{\epsilon+\beta}(\beta = 1,$

…, g),则系统的运动可用广义 Chaplygin 方程来描述,其形式为[6,7]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma}-\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right)=0 \quad (\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{1.3.11}$$

其中

$$L=T-V,\ \tilde{L}=\tilde{T}-V$$

$$\tilde{T}(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma)=T(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma,\varphi_\beta(t,q_\sigma,\dot{q}_\sigma))$$

方程(1.3.11)可表为

$$E_\sigma(\tilde{L})=\Phi_\sigma,\ \Phi_\sigma=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\right)E_\sigma(\varphi_\beta) \qquad (\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{1.3.12}$$

其中

$$E_\sigma=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial}{\partial q_\sigma} \tag{1.3.13}$$

为 Euler 算子.方程(1.3.12)仅含 q_σ, $\dot{q}_\sigma$, $\ddot{q}_\sigma$,因此可独立于约束方程(1.3.10)来进行研究.进而,假设方程(1.3.12)中的函数 Φ_σ 满足 Helmholtz 条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu}=\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma}\\ \dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu}+\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \ddot{q}_\nu}+\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial \ddot{q}_\sigma}\right)\\ \dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial q_\nu}-\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial q_\sigma}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \dot{q}_\nu}+\dfrac{\partial \Phi_\nu}{\partial \dot{q}_\sigma}\right) \quad (\sigma,\nu=1,\cdots,\epsilon)\end{cases} \tag{1.3.14}$$

此时可计算出函数 Ψ,使得

$$\Phi_\sigma=\frac{\partial \Psi}{\partial q_\sigma}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_\sigma} \qquad (\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{1.3.15}$$

在此情形下,方程(1.3,12)可写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial L'}{\partial q_\sigma}=0 \qquad (\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{1.3.16}$$

其中

$$L' = \tilde{L} + \Psi \tag{1.3.17}$$

将这类系统称为第二类特殊非完整系统.

某些非完整系统可实现自由运动,此时方程(1.3.2)中的 $\lambda_\beta = 0(\beta = 1, \cdots, g)$. 由式(1.3.3)得到非完整系统实现自由运动的充要条件是[8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l + \frac{\partial f_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta} \\
&\times\left\{-[k, m; s]\dot{q}_k\dot{q}_m + \left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + Q_s + \frac{\partial T_o}{\partial q_s} - \frac{\partial B_s}{\partial t} - \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\} \\
&= 0 \qquad (\gamma = 1, \cdots, g)
\end{aligned} \tag{1.3.18}$$

对这类非完整系统,方程(1.3.2)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{1.3.19}$$

进而,假设广义力有广义势,即

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{1.3.20}$$

则方程(1.3.19)成为 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{1.3.21}$$

其中 $L = T + U$. 将这类系统称为第三类特殊非完整系统.

1.3.2 特殊非完整系统运动方程的代数结构

前面所述三类特殊非完整系统的运动方程(1.3.8),(1.3.16)和(1.3.21)都具有完整保守系统 Lagrange 方程的形式. 因此,这类系统的方程都具有 Hamilton 形式. 于是有

定理 1.3.1 特殊非完整系统的运动方程具有相容代数结构,并且具有 Lie 代数结构.

1.3.3 特殊非完整系统的 Poisson 理论

特殊非完整系统的运动方程具有 Lie 代数结构,因此关于积

分完整保守系统运动方程的 Poisson 理论可推广并应用于这类系统.

特殊非完整系统的运动方程可表为形式

$$a^{\mu} - \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = 0 \tag{1.3.22}$$

对第一类和第三类特殊非完整系统,指标 μ, ν 由 1 至 $2n$;对第二类特殊非完整系统,则由 1 至 2ϵ.将某函数 $A(\boldsymbol{a}) = A(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$按方程(1.3.22)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} \overset{\text{def}}{=\!=} A \circ H \tag{1.3.23}$$

这个积就是 Poisson 括号(A, H).

经典 Poisson 理论给出如下结论.

定理 1.3.2 $I(a^{\mu}, t) = \text{const}.$是特殊非完整系统第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + (I, H) = 0 \tag{1.3.24}$$

定理 1.3.3 如果 Hamilton 函数 H 不显含时间 t,则 $H = h$ 是特殊非完整系统的第一积分.

定理 1.3.4 如果特殊非完整系统有两个不处于相互内旋的第一积分 $I_1(a^{\mu}, t) = c_1$ 和 $I_2(a^{\mu}, t) = c_2$,则它们的 Poisson 括号(I_1, I_2)也是系统的第一积分.

定理 1.3.5 如果特殊非完整系统有包含时间 t 的第一积分 $I(a^{\mu}, t) = c$,而 H 不显含 t,则$\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$都是系统的第一积分.

定理 1.3.6 如果特殊非完整系统有包含 a^{ρ} 的第一积分 $I(a^{\mu}, t) = c$,而 H 不显含 a^{ρ},则$\frac{\partial I}{\partial a^{\rho}}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}}, \cdots$都是系统的第一积分.

1.3.4 算 例

例 1 设系统位置由两个广义坐标 q_1, q_2 来确定,动能和势

能分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), V = 0 \tag{1}$$

系统所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - b\dot{q}_2 + t = 0 \tag{2}$$

由方程(1.3.3)可解得

$$\lambda = \frac{1}{1 + b^2 t^2} \tag{3}$$

而

$$Q_1 + \Lambda_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{1}{1 + b^2 t^2}, Q_2 + \Lambda_2 = -\frac{bt}{1 + b^2 t^2} \tag{4}$$

令

$$Q_1 + \Lambda_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_1}, Q_2 + \Lambda_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_2} \tag{5}$$

由此求得

$$U = \frac{1}{b}\dot{q}_1 \mathrm{arctg}bt + \frac{1}{2b}\dot{q}_2 \ln(1 + b^2 t^2) \tag{6}$$

因此,问题属于第一类特殊非完整系统.相应完整系统的方程有 Hamilton 形式,问题具有 Lie 代数结构.令

$$a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = p_1, a^4 = p_2 \tag{7}$$

则

$$H = \frac{1}{2}(a^3 - \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt)^2 + \frac{1}{2}[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)]^2 \tag{8}$$

由 Poisson 条件(1.3.24)知

$$I_1 = a^3 \tag{9}$$

$$I_2 = a^4 \tag{10}$$

是系统的第一积分.

例 2 半径为 a_0 的匀质圆球沿完全粗糙水平面的纯滚动运动.

取球心坐标(x, y)及 Euler 角 ψ, θ, φ 为广义坐标,系统动能为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma_0^2(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta) \tag{1}$$

非完整约束表示无滑动的滚动条件

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x} + a_0(\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi) = 0 \\ f_2 = \dot{y} + a_0(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

令

$$q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi, q_4 = x, q_5 = y \tag{3}$$

则系统运动微分方程为

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma_0^2(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_3\cos q_2 - \dot{q}_3\dot{q}_2\sin q_2) = Q_1 \\ \frac{2}{5}ma_0^2(\ddot{q}_2 + \dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2) = Q_2 + a_0(-\lambda_1\sin q_1 + \lambda_2\cos q_1) \\ \frac{2}{5}ma_0^2(\ddot{q}_3 + \ddot{q}_1\cos q_2 - \dot{q}_1\dot{q}_2\sin q_2) = Q_3 + a_0(\lambda_1\cos q_1 \\ \qquad + \lambda_2\sin q_1)\sin q_2 \\ m\ddot{q}_4 = Q_4 + \lambda_1, m\ddot{q}_5 = Q_5 + \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $Q_1, \cdots, Q_5$ 为施加外力的广义力. 在除重力外不施加其它外力的情形($Q_1 = \cdots = Q_5 = 0$)下, 条件(1.3.18)满足, 问题是第三类特殊非完整系统, 实现非完整系统的自由运动. 因此, 方程具有 Lie 代数结构.

对此问题, 嵌入约束后的 Lagrange 函数为

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}ma_0^2\left\{\frac{7}{5}\dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\sin^2 q_2 + \frac{2}{5}(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)\right\} \tag{5}$$

它是一个 Chaplygin 系统. 按公式(1.3.12)求得

$$\begin{cases} \Phi_1 = 0, \Phi_2 = -ma_0^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)\dot{q}_3\sin q_2 \\ \Phi_3 = ma_0^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)\dot{q}_2\sin q_2 \end{cases} \tag{6}$$

但是, 这些 $\Phi_\sigma(\sigma = 1, 2, 3)$不满足 Helmholtz 条件(1.3.14). 选新的 Φ'_σ 并保持 Chaplygin 方程不变, 有[7,8]

$$\begin{cases} \Phi'_1 = -\, ma_0^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2) \\ \Phi'_2 = -\, ma_0^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)\dot{q}_3\sin q_2 \\ \Phi'_3 = -\, ma_0^2 \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)\cos q_2] \end{cases} \tag{7}$$

这些 Φ'_σ 则满足 Helmholtz 条件(1.3.14).令

$$\Phi'_\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial q_\sigma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}_\sigma} \tag{8}$$

由此可求得

$$\Psi = \frac{1}{2} ma_0^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)^2 \tag{9}$$

而新的 Lagrange 函数为

$$L' = \tilde{L} + \Psi = \frac{1}{2}\frac{7}{5} ma_0^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2) \tag{10}$$

于是可化成 Hamilton 方程.问题是第二类特殊非完整系统,其运动方程有 Lie 代数结构.

令

$$a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = q_3, a^4 = p_1, a^5 = p_2, a^6 = p_3 \tag{11}$$

则 Hamilton 函数为

$$H = \frac{5}{14 ma_0^2 \sin^2 a^2}\{(a^4)^2 + (a^6)^2 + (a^5)^2\sin^2 a^2 - 2a^4 a^6 \cos a^2\} \tag{12}$$

因 H 不显含 t,故由定理 1.3.3 知,有积分

$$H = h = \text{const.} \tag{13}$$

利用式(1.3.24)可验证有积分

$$I_1 = a^5\cos a^1 + \frac{\sin a^1}{\sin a^2}(a^6 - a^4\cos a^2) = c_1 \tag{14}$$

利用定理 1.3.6,可由 I_1 生成新的积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial a^1} = -\, a^5\sin a^1 + \frac{\cos a^1}{\sin a^2}(a^6 - a^4\cos a^2) = c_2 \tag{15}$$

§1.4 Poincaré-Chetaev 方程的代数结构

Poincaré H. 1901 年利用无限小变换的 Lie 可迁群建立了完整力学系统的一类新型运动微分方程[9]. Chetaev N.G. 于 20 年代将这种思想发展到变换群为非可迁的、约束是非定常的、变量是不独立的情形[10,11]. 两位学者建立的方程称为 Poincaré-Chetaev 方程. Hamilton 系统的近代理论推广了经典理论, 所用的重要方法之一便是采用非正则坐标. 此时运动方程与正则变量下的方程相比较反而特别简单. 从这个意义上来说, Poincaré-Chetaev 方程理论对 Hamilton 系统的近代理论来说是非常高瞻远瞩的. 近代对这类方程的研究已取得重要成果[12~15].

本节研究 Poincaré-Chetaev 方程的代数结构, 包括 Poincaré-Chetaev 方程, 它的正则形式, 它的代数表示, 以及 Poisson 积分理论.

1.4.1 Poincaré-Chetaev 方程

研究有 k 个自由度的完整力学系统, 其在空间的位置由变量 $x_i(i=1,\cdots,n;n\geqslant k)$ 来确定. 如果 $n=k$, 那么 x_i 是独立的广义坐标; 如果 $n>k$, 那么 x_i 就是系统不独立坐标或多余坐标.

假设用某种方法引入加在微分不可积分约束组上的参数化, 那么广义速度有形式

$$\dot{x}_i = \xi_i^s(t,\boldsymbol{x})\eta_s + \xi_i(t,\boldsymbol{x}) \tag{1.4.1}$$

$$\operatorname{rank}(\xi_i^s) = k \qquad (i=1,\cdots,n;s=1,\cdots,k)$$

存在无限小线性算子的封闭组

$$X_o = \frac{\partial}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, X_s = \xi_i^s \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (s=1,\cdots,k) \tag{1.4.2}$$

它们确定非可迁作用群, 用变换

$$\mathrm{d}f = (X_o f + \eta_s X_s f)\mathrm{d}t, f(\boldsymbol{x},t) \in C^1 \tag{1.4.3}$$

将完整系统由时刻 t 的位置 x_i 过渡到时刻 $t+\mathrm{d}t$ 的无限接近的真实位置 $x_i+\mathrm{d}x_i$，并用变换

$$\delta f = \omega_s X_s f \tag{1.4.4}$$

过渡到无限接近的虚位置 $x_i+\delta x_i$. 这里 ω_s 称为虚位移参数，而 η_s 称为真实位移参数. 当 $n=k$，$\det(\xi_i^s)\neq 0$ 时，变换(1.4.2)是可迁的.

线性算子(1.4.2)是闭的，其对易子为

$$[X_i, X_j]f = X_iX_jf - X_jX_if = C_{ij}^s X_s f \tag{1.4.5}$$

$$(i, j, s = 0, 1, \cdots, k)$$

这里结构系数 C_{ij}^s 满足条件

$$C_{ij}^s = -C_{ji}^s,\ C_{oj}^o = 0 \tag{1.4.6}$$

而在一般情形可以是变的. 如果 $C_{ij}^s=\mathrm{const.}$，那么封闭组(1.4.2)是真实位移的 Lie 群，而虚位移算子 $X_s(s=1,\cdots,k)$ 是真实位移的 Lie 子群.

由 Poincaré 引出的参数 η_s 和 ω_s 有关系

$$\delta\eta_i = \frac{\mathrm{d}\omega_i}{\mathrm{d}t} + C_{rs}^i\eta_r\omega_s + C_{os}^i\omega_s \tag{1.4.7}$$

$$(r, s, i = 1, \cdots, k)$$

Poincaré 研究了所有 $C_{os}^i=0$ 的情形.

现在研究参数化(1.4.1)和算子封闭组(1.4.2)的实现. 假设完整约束用某个完全可积 Pfaff 组给出

$$\omega_j = a_{ji}(t, \boldsymbol{x})\delta x_i = 0 \tag{1.4.8}$$

$$(i = 1, \cdots, n;\ j = k+1, \cdots, n)$$

再取彼此独立并独立于式(1.4.8)的 k 个线性微分形式

$$\omega_s = a_{si}(t, \boldsymbol{x})\delta x_i \qquad (s = 1, \cdots, k)$$

于是可解出

$$\delta x_i = \xi_i^s(t, \boldsymbol{x})\omega_s \qquad (i, s = 1, \cdots, n)$$

这样，在虚位移上得到算子 X_s 的表达式以及关系(1.4.4). 对与完全可积方程相联的真实位移

$$\eta_j \mathrm{d}t \equiv a_{ji}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i + a_j(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}t = 0 \qquad (1.4.9)$$

$$(i = 1, \cdots, n; j = k+1, \cdots, n)$$

补充

$$\eta_s \mathrm{d}t \equiv a_{si}(t, \boldsymbol{x})\mathrm{d}x_i \qquad (s = 1, \cdots, k)$$

和 $\mathrm{d}t$.这样便得到算子表达式(1.4.2)和关系(1.4.3).由辅助形式 ω_i 和 $\eta_i \mathrm{d}t\,(i=1, \cdots, k)$选取的任意性,可建立参数的最方便的运动学含义,并且当结构参数 C_{ij}^s 为常数时将封闭组(1.4.2)简化为 Lie 群.

Chetaev 由 D'Alembert-Lagrange 原理导出了 Poincaré 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = C_{ri}^s \eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + C_{oi}^s \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + X_i L + Q_i \qquad (1.4.10)$$

$$(r, s, i = 1, \cdots, k)$$

其中 L 为借助关系(1.4.1)表为 $t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}$ 的 Lagrange 函数,Q_i 为非势广义力.在一般情形下,方程(1.4.10)必须与关系(1.4.1)联合.方程(1.4.1),(1.4.10)为包含 $k+n$ 个未知量 $x_1, \cdots, x_n, \eta_1, \cdots, \eta_k$ 的 $k+n$ 个方程.当 $n=k$, $Q_i=0$,且

$$X_o = \frac{\partial}{\partial t}, C_{oi}^s = 0 \qquad (i, s = 1, \cdots, k)$$

则方程(1.4.10)成为 Poincaré 原来的方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \eta_i} = C_{ri}^s \eta_r \frac{\partial L}{\partial \eta_s} + X_i L \qquad (i = 1, \cdots, k) \quad (1.4.11)$$

特别地,取

$$\dot{x}_s = \eta_s, X_s = \frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (s = 1, \cdots, k)$$

则有

$$C_{ri}^s = 0, X_i L = \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

此时方程(1.4.11)成为第二类 Lagrange 方程.

下面给出方程(1.4.10)的正则形式.令

$$y_i = \frac{\partial L}{\partial \eta_i}, H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = y_i \eta_i - L \qquad (1.4.12)$$

则有

$$X_iH = -X_iL,\ \eta_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \cdots, k)$$

由此以及式(1.4.12)可将 Poincaré 方程(1.4.10)引向 Poincaré-Chetaev 正则方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = C_{ri}^s \dfrac{\partial H}{\partial y_r} y_s + C_{oi}^s y_s - X_iH + Q_i \\ \eta_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i} \quad (i, r, s = 1, \cdots, k) \end{cases} \tag{1.4.13}$$

上述方程第二组可写成另一形式

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = X_o x_j + \frac{\partial H}{\partial y_r} X_r x_j \quad (j = 1, \cdots, n; r = 1, \cdots, k) \tag{1.4.14}$$

假设方程(1.4.13)中 $Q_i = 0$,关系(1.4.1)中 $\xi_i(t, \boldsymbol{x}) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$,此时有

$$X_o = \frac{\partial}{\partial t},\ C_{\alpha o}^s = 0 \qquad (\alpha, s = 1, \cdots, k)$$

于是,Poincaré-Chetaev 方程(1.4.13),(1.4.14)给出为[15]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = C_{ri}^s \dfrac{\partial H}{\partial y_r} y_s - X_iH & (i = 1, \cdots, k) \\ \dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial y_r} X_r x_j & (j = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{1.4.15}$$

1.4.2 Poincaré-Chetaev 方程的代数结构

当 $n = k$ 时,方程(1.4.15)可改写成形式

$$\dot{a}^\mu - \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \cdots, 2k) \tag{1.4.16}$$

其中

$$a^i = x_i,\ a^{k+i} = y_i \qquad (i = 1, \cdots, k) \tag{1.4.17}$$

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \xi_1^1\cdots\xi_1^k \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0\cdots 0 & \xi_k^1\cdots\xi_k^k \\ -\xi_1^1\cdots -\xi_k^1 & 0\cdots C_{k1}^s a^{k+s} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -\xi_1^k\cdots -\xi_k^k & C_{1k}^s a^{k+s}\cdots 0 \end{pmatrix} \tag{1.4.18}$$

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$按方程(1.4.16)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^\mu}\quad \Omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^\nu} \xlongequal{\text{def}} A\circ H \tag{1.4.19}$$

这个积满足反对称性

$$A\circ B + B\circ A = 0 \tag{1.4.20}$$

和 Jacobi 恒等式

$$(A\circ B)\circ C + (B\circ C)\circ A + (C\circ A)\circ B = 0 \tag{1.4.21}$$

于是得到

定理 1.4.1 Poincaré-Chetaev 方程(1.4.16)具有 Lie 代数结构.

积(1.4.19)构成广义 Poisson 括号. 文献[15]给出的某两个光滑函数 $f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$和 $\varphi(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$的广义 Poisson 括号为

$$(f,\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial y_\alpha}X_\alpha f - \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}X_\alpha\varphi + C_{\alpha i}^s\frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial\varphi}{\partial y_\alpha}y_s \tag{1.4.22}$$

$$(i,\alpha,s = 1,\cdots,k)$$

按照定义(1.4.19),它就是 $f\circ\varphi$.

1.4.3 Poincaré-Chetaev 方程的 Poisson 理论

因 Poincaré-Chetaev 方程(1.4.16)具有 Lie 代数结构,故积分完整保守系统的 Poisson 理论可以全部地推广并应用于这类系统.

定理 1.4.2 $I(a^\mu, t) = \text{const.}$是方程(1.4.16)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I\circ H = 0 \tag{1.4.23}$$

式(1.4.23)称为 Poincaré-Chetaev 方程关于第一积分的广义 Poisson 条件.

定理 1.4.3 如果 H 不显含时间 t, 则 $H = h$ 是系统(1.4.16)的第一积分.

定理 1.4.4 如果 $I_1(a^\mu, t) = c_1$ 和 $I_2(a^\mu, t) = c_2$ 是系统(1.4.16)的两个不处于相互内旋的第一积分, 那么 $I_3 = I_1 \cdot I_2$ 也是系统的第一积分.

定理 1.4.5 如果系统(1.4.16)有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$, 而 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 H 都不显含 t, 那么 $\frac{\partial I}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$, …都是系统的第一积分.

定理 1.4.6 如果系统(1.4.16)有包含变量 a^ρ 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$, 而 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 H 都不显含 a^ρ, 那么 $\frac{\partial I}{\partial a^\rho}$, $\frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}}$, …都是系统的第一积分.

1.4.4 算 例

例 1 求重刚体绕固定点转动的 Poincaré-Chetaev 方程.

刚体的动能为

$$T = \frac{1}{2} A_i \omega_i^2 \tag{1}$$

势能为

$$V = Mgx_o^i \gamma_i \tag{2}$$

其中 ω_i 为刚体角速度在与刚体相固联的惯性主轴上的投影, γ_i 为铅垂线与惯性主轴夹角余弦, x_o^i 为质心在固联轴中的坐标. 令

$$x_i = \gamma_i \tag{3}$$

$$\eta_i = \omega_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

而 γ_i 满足 Poisson 方程

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \omega_3 \gamma_2 - \omega_2 \gamma_3 \\ \dot{\gamma}_2 = \omega_1 \gamma_3 - \omega_3 \gamma_1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2$$

联合式(3),(4),并对比式(1.4.1)得

$$\begin{cases} \xi_1^2 = -x_3, \xi_1^3 = x_2, \xi_2^1 = x_3, \xi_2^3 = -x_1 \\ \xi_3^1 = -x_2, \xi_3^2 = x_1, \xi_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \end{cases} \tag{5}$$

研究光滑函数 $f(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,其导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \omega_1\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_2}\gamma_3 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_3}\gamma_2\right) + \omega_2\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_3}\gamma_1 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\gamma_3\right)$$

$$+ \omega_3\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\gamma_2 - \frac{\partial f}{\partial \gamma_2}\gamma_1\right) \tag{6}$$

由此得到算子(1.4.2)的表达式

$$\begin{cases} X_1 f = \gamma_3 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_3} \\ X_2 f = \gamma_1 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_1} \\ X_3 f = \gamma_2 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \dfrac{\partial f}{\partial \gamma_2} \end{cases} \tag{7}$$

由式(7)得到对易子,有

$$[X_1, X_2]f = X_1X_2f - X_2X_1f$$

$$= X_1\left(\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1}\right) - X_2\left(\gamma_3 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_3}\right)$$

$$= \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial \gamma_2} = X_3 f \tag{8}$$

类似地,有

$$[X_2, X_3]f = X_1 f, [X_3, X_1]f = X_2 f \tag{9}$$

由式(8),(9)知,不为零的结构系数为

$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1, C_{21}^3 = C_{32}^1 = C_{13}^2 = -1 \tag{10}$$

于是,式(1.4.18)成为

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & -x_3 & x_2 & 0 & -y_3 & y_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 & y_3 & 0 & -y_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 & -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

其中

$$y_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = a^{3+i} \tag{12}$$

而

$$H = \frac{1}{2A_i} y_i^2 + Mgx_o^i \gamma_i = \frac{1}{2A_i} (a^{3+i})^2 + Mgx_o^i a^i \tag{13}$$

因 H 不显含 t, 由定理 1.4.3 知 $H = h$ 是系统的积分. 利用广义 Poisson 条件(1.4.23)容易验证

$$I_1 = a^1 a^4 + a^2 a^5 + a^3 a^6 = C \tag{14}$$

是系统的第一积分. 实际上, 有

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + I_1 \circ H = \frac{\partial I_1}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu}$$

$$= a^4 \left[-a^3 \frac{a^5}{A_2} + a^2 \frac{a^6}{A_3} \right] + a^5 \left[a^3 \frac{a^4}{A_1} - a^1 \frac{a^6}{A_3} \right]$$

$$+ a^6 \left[-a^2 \frac{a^4}{A_1} + a^1 \frac{a^5}{A_2} \right] + a^1 \left[-Mgx_o^2 a^3 + Mgx_o^3 a^2 - a^6 \frac{a^5}{A_2} \right.$$

$$\left. + a^5 \frac{a^6}{A_3} \right] + a^2 \left[Mgx_o^1 a^3 - Mgx_o^3 a^1 + a^6 \frac{a^4}{A_1} - a^4 \frac{a^6}{A_3} \right]$$

$$+ a^3 \left[-Mgx_o^1 a^2 + Mgx_o^2 a^1 - a^5 \frac{a^4}{A_1} + a^4 \frac{a^5}{A_2} \right] = 0$$

例 2 系统的位置由 Euler 角 ψ, θ, φ 来确定, Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} A(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = \frac{1}{2} A(\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)$$

试列写 Poincaré-Chetaev 方程并研究系统的积分.

令

$$\begin{cases} q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi \\ x_i = q_i = a^i, \eta_i = \omega_i \\ y_i = \dfrac{\partial L}{\partial \omega_i} = A\omega_i = a^{3+i} \qquad (i = 1,2,3) \end{cases} \tag{1}$$

则

$$H = y_i\eta_i - L = \frac{1}{2A}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$= \frac{1}{2A}\{(a^4)^2 + (a^5)^2 + (a^6)^2\} \tag{2}$$

又

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{1}{\sin x_2}(\omega_1 \sin x_3 + \omega_2 \cos x_3) \\ \dot{x}_2 = \omega_1 \cos x_3 - \omega_2 \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = \omega_3 - (\omega_1 \sin x_3 + \omega_2 \cos x_3)\operatorname{ctg} x_2 \end{cases} \tag{3}$$

于是有

$$\begin{cases} \xi_1^1 = \dfrac{\sin x_3}{\sin x_2}, \xi_1^2 = \dfrac{\cos x_3}{\sin x_2}, \xi_1^3 = 0 \\ \xi_2^1 = \cos x_3, \xi_2^2 = -\sin x_2, \xi_2^3 = 0 \\ \xi_3^1 = -\operatorname{ctg} x_2 \sin x_3, \xi_3^2 = -\operatorname{ctg} x_2 \cos x_3, \xi_3^3 = 1 \end{cases} \tag{4}$$

研究光滑函数 $f(x_1, x_2, x_3)$，其导数为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \omega_1 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\sin x_3}{\sin x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cos x_3 - \frac{\partial f}{\partial x_3}\operatorname{ctg} x_2 \sin x_3 \right| \tag{5}$$

$$+ \omega_2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\cos x_3}{\sin x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\sin x_3 - \frac{\partial f}{\partial x_3}\operatorname{ctg} x_2 \cos x_3 \right| + \omega_3 \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right|$$

由式(5)得到算子(1.4.2)的表达式

$$\begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dfrac{\sin x_3}{\sin x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cos x_3 - \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\operatorname{ctg} x_2 \sin x_3 \\ X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \dfrac{\cos x_3}{\sin x_2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\sin x_3 - \dfrac{\partial f}{\partial x_3}\operatorname{ctg} x_2 \cos x_3 \\ X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{cases} \tag{6}$$

由式(6)得到对易子为

$$\begin{cases} [X_1, X_2]f = X_1X_2f - X_2X_1f = X_3f \\ [X_2, X_3]f = X_1f,\ [X_3, X_1]f = X_2f \end{cases} \tag{7}$$

于是有结构系数

$$C_{12}^3 = C_{23}^1 = C_{31}^2 = 1, C_{21}^3 = C_{32}^1 = C_{13}^2 = -1 \tag{8}$$

式(1.4.18)成为

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\sin a^3}{\sin a^2} & \frac{\cos a^3}{\sin a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos a^3 & -\sin a^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{ctg}a^2\sin a^3 & -\mathrm{ctg}a^2\cos a^3 & 1 \\ -\frac{\sin a^3}{\sin a^2} & -\cos a^3 & \mathrm{ctg}a^2\sin a^3 & 0 & -a^6 & a^5 \\ -\frac{\cos a^3}{\sin a^2} & \sin a^3 & \mathrm{ctg}a^2\cos a^3 & a^6 & 0 & -a^4 \\ 0 & 0 & -1 & -a^5 & a^4 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

由此便可列写出 Poincaré-Chetaev 方程(1.4.16).

因 H 不显含时间 t, 故由定理 1.4.3 知, 系统有第一积分

$$H = h \tag{10}$$

利用广义 Poisson 条件(1.4.23)可以验证系统有积分

$$I_1 = \frac{a^4}{A}(\cos a^3\cos a^1 - \sin a^3\sin a^1\cos a^2) + \frac{a^5}{A}(-\sin a^3\cos a^1 - \cos a^3\sin a^1\cos a^2) + \frac{a^6}{A}\sin a^1\sin a^2 = c_1 \tag{11}$$

因 $\Omega^{\mu\nu}$ 和 H 都不含 a^1, 故由定理 1.4.6 知, 系统有积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial a^1} = \frac{a^4}{A}(-\cos a^3\sin a^1 - \sin a^3\cos a^1\cos a^2) + \frac{a^5}{A}(\sin a^3\sin a^1 - \cos a^3\cos a^1\cos a^2) + \frac{a^6}{A}\cos a^1\sin a^2 = c_2 \tag{12}$$

§1.5 广义经典力学系统的代数结构

许多物理问题的微分方程是作为变分学问题而出现的.1848年—1858年由 Ostrogradsky 和 Jacobi 开创的广义经典力学理论,近50年得到很大发展,取得了许多重要结果.在物理学方面,特别在力学和场论中研究带高阶导数的 Lagrange 方程,例如关于带二阶导数的电磁理论.在数学方面,近代几何方法的描述已有较好结果,例如文献[16].本节讨论广义经典力学系统的代数结构,包括广义经典力学的方程,它的代数表示,以及 Poisson 理论的应用.

1.5.1 广义经典力学的方程

令 $L(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(k)}{q_s})$是独立变量 t,不独立变量 $q_s(s = 1, \cdots, n)$及其一阶至 k 阶导数的函数.积分

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(k)}{q_s})\mathrm{d}t \tag{1.5.1}$$

取驻值的条件为广义 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_s} + \cdots + (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial L}{\partial \overset{(k)}{q_s}} = 0$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{1.5.2}$$

令

$$p_{s/i} = (-1)^j \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\frac{\partial L}{\partial \overset{(i+j)}{q_s}}$$

$$(j = 0, 1, \cdots, k - i; i = 1, \cdots, k; s = 1, \cdots, n) \tag{1.5.3}$$

$$H = p_{s/i}\,\overset{(i)}{q_s} - L(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(k)}{q_s}) \tag{1.5.4}$$

则方程(1.5.2)表为形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overset{(i-1)}{q_s} = \frac{\partial H}{\partial p_{s/i}}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_{s/i} = -\frac{\partial H}{\partial \overset{(i-1)}{q_s}} \tag{1.5.5}$$

$$(i = 1, \cdots, k; s = 1, \cdots, n)$$

1.5.2 广义经典力学系统方程的代数结构

令

$$\begin{cases} a^1 = q_1, \cdots, a^n = q_n, \quad a^{n+1} = p_{1/1}, \cdots, a^{2n} = p_{n/1} \\ a^{2n+1} = \dot{q}_1, \cdots, a^{3n} = \dot{q}_n \\ a^{3n+1} = p_{1/2}, \cdots, a^{4n} = p_{n/2} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a^{(2k-2)n+1} = \overset{(k-1)}{q}_1, \cdots, a^{(2k-1)n} = \overset{(k-1)}{q}_n \\ a^{(2k-1)n+1} = p_{1/k}, \cdots, a^{2kn} = p_{n/k} \end{cases} \tag{1.5.6}$$

则方程(1.5.5)可表为逆变代数形式[17]

$$\dot{a}^\mu - \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, 2kn) \tag{1.5.7}$$

其中

$$\begin{cases} (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{bmatrix}_{2kn \times 2kn}, \\ M_i = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.5.8}$$

将某函数 $A(a)$按方程(1.5.7)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(a) = \frac{\partial A}{\partial a^\mu} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^\nu} \overset{\text{def}}{=\!=} A \circ H \tag{1.5.9}$$

这个积满足反对称性

$$A \circ B + B \circ A = 0 \tag{1.5.10}$$

和 Jacobi 恒等式

$$(A \circ B) \circ C + (B \circ C) \circ A + (C \circ A) \circ B = 0 \tag{1.5.11}$$

于是有

定理 1.5.1 广义经典力学系统的运动方程具有 Lie 代数结构.

1.5.3 广义经典力学的 Poisson 理论

积(1.5.9)实际上定义了一个广义 Poisson 括号(A, H),即

$$A \circ H = (A, H) \tag{1.5.12}$$

因此关于积分完整保守系统的 Poisson 理论可全部地推广并应用于广义经典力学系统.有如下结果.

定理 1.5.2 $I(a^\mu, t) = \text{const.}$是广义经典力学系统(1.5.7)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H = 0 \tag{1.5.13}$$

条件(1.5.13)称为广义经典力学系统关于第一积分的广义 Poisson 条件.

定理 1.5.3 如果 H 不显含时间 t,则 $H = h$ 是系统(1.5.7)的第一积分.

定理 1.5.4 如果 $I_1(a^\mu, t) = c_1$ 和 $I_2(a^\mu, t) = c_2$ 是系统(1.5.7)的不处于相互内旋的两个第一积分,那么 $I_3 = I_1 \circ I_2$ 也是系统的第一积分.

定理 1.5.5 如果系统(1.5.7)有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$,而 H 不显含 t,则$\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$都是系统的第一积分.

定理 1.5.6 如果系统(1.5.7)有包含变量 a^ρ 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$,而 H 不显含 a^ρ,则$\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho^2}}, \cdots$都是系统的第一积分.

1.5.4 算 例

广义经典力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\alpha_1 \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\alpha_2 \ddot{q}^2 \quad (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0) \tag{1}$$

试求它的代数结构及积分.

由式(1.5.3)求得

$$p_{1/1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \alpha_1 \dot{q} - \alpha_2 \dddot{q} \tag{2}$$

$$p_{1/2} = \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} = \alpha_2 \ddot{q}$$

式(1.5.4)给出为

$$H = p_{1/1}\dot{q} + p_{1/2}\ddot{q} - \frac{1}{2}\alpha_1 \dot{q}^2 - \frac{1}{2}\alpha_2 \ddot{q}^2 \tag{3}$$

令

$$a^1 = q, a^2 = p_{1/1}, a^3 = \dot{q}, a^4 = p_{1/2} \tag{4}$$

则有

$$H = a^2 a^3 - \frac{1}{2}\alpha_1 (a^3)^2 - \frac{1}{2\alpha_2}(a^4)^2 \tag{5}$$

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

方程具有 Lie 代数结构.

因 H 不显含 t,故由定理 1.5.3 知,系统有积分

$$H = h \tag{7}$$

由广义 Poisson 条件(1.5.13)可以验证系统有如下第一积分

$$I_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}a^2 \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t - \sqrt{\alpha_1\alpha_2}a^3 \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t + a^4 \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t = c_1 \tag{8}$$

因 H 不显含 t,故按定理 1.5.5 可由 I_1 生成新的积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial t} = a^2 \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t - \alpha_1 a^3 \mathrm{ch}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t + \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}a^4 \mathrm{sh}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}t = c_2 \tag{9}$$

由广义 Poisson 条件(1.5.13)知,系统有积分

$$I_3 = (a^2)^2 + a^2 = c_3 \tag{10}$$

因 H 不显含 a^2,故按定理 1.5.6 可由 I_3 生成新的积分

$$I_4 = \frac{\partial I_3}{\partial a^2} = 2a^2 + 1 = c_4 \tag{11}$$

§1.6 广义 Hamilton 系统的代数结构

本章以上各节讨论了约束力学系统运动方程的代数结构,其基本思想是从系统的运动微分方程出发,通过定义一个积来研究方程的代数结构,并将积分完整保守系统的 Poisson 理论加以推广、应用.所讨论的方程都是偶数维的.一方面,实际问题中有不少系统的方程是奇数维的;另一方面,与前面讨论的相反,也可由代数结构来定义动力学系统,并称之为动力学代数.本节用广义 Poisson 括号直接定义广义 Hamilton 系统,将 Poisson 理论推广并应用于这类系统,最后简单介绍 Nambu 力学.

1.6.1 广义 Poisson 括号

光滑流形 M 上的广义 Poisson 括号是定义在光滑函数空间 $C^\infty(M)$上的一种运算.这种运算通过两个函数 $F, G \in C^\infty(M)$ 确定 $C^\infty(M)$上的第三个函数$\{F, G\}^*$,并满足如下 4 条规律.

(1)双线性性质

$$\{aF + bG, K\}^* = a\{F, K\}^* + b\{G, K\}^* \tag{1.6.1}$$

(2)反对称性

$$\{F, G\}^* + \{G, F\}^* = 0 \tag{1.6.2}$$

(3)Leibniz 法则

$$\{F \cdot G, K\}^* = F \cdot \{G, K\}^* + G \cdot \{F, K\}^* \tag{1.6.3}$$

(4)Jacobi 恒等式

$$\{F, \{G, K\}^*\}^* + \{G, \{K, F\}^*\}^* + \{K, \{F, G\}^*\}^* = 0 \tag{1.6.4}$$

广义 Poisson 括号 $\{,\}^*$ 的结构矩阵 $J(x)$ 是一个 $m \times m$ 阶反对称矩阵，其元素由 $J_{ij}(x) = \{x_i, x_j\}^*$ 定义，称为结构元素[18].

利用 Leibniz 性质，对 $C^\infty(M)$ 中用局部坐标 x 表示的函数 F, G，有

$$\{F, G\}^* = J_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \tag{1.6.5}$$

矩阵 J 是 M 上一个 Poisson 括号的结构矩阵的充分必要条件是[18]

$$J_{ij}(\boldsymbol{x}) + J_{ji}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.6.6}$$

$$J_{il} \frac{\partial J_{jk}}{\partial x_l} + J_{jl} \frac{\partial J_{ki}}{\partial x_l} + J_{kl} \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_l} = 0 \tag{1.6.7}$$

$$(i, j, k, l = 1, \cdots, m)$$

1.6.2 广义 Hamilton 系统的运动方程

由广义 Poisson 括号可以定义广义 Hamilton 系统的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \{x_i, H\}^* = J_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, \cdots, m) \tag{1.6.8}$$

其中 H 为 Hamilton 函数.

1.6.3 广义 Hamilton 系统的 Poisson 理论

对任意函数 $F = F(\boldsymbol{x}, t)$，有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}^* \tag{1.6.9}$$

积分完整保守系统的 Poisson 理论可全部地推广并应用于广义 Hamilton 系统，有如下结果.

定理 1.6.1 $I(\boldsymbol{x}, t) = \text{const.}$ 是系统(1.6.8)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}^* = 0 \tag{1.6.10}$$

定理1.6.2 如果 Hamilton 函数 H 不显含时间 t，则 $H = h$

是广义 Hamilton 系统(1.6.8)的第一积分.

定理 1.6.3 如果 $I_1(\boldsymbol{x}, t) = c_1$ 和 $I_2(\boldsymbol{x}, t) = c_2$ 是广义 Hamilton 系统(1.6.8)的不处于相互内旋的两个第一积分,则 $I_3 = \{I_1, I_2\}^*$ 也是系统的第一积分.

定理 1.6.4 如果 $I(\boldsymbol{x}, t) = c$ 是系统(1.6.8)包含时间 t 的第一积分,而 Hamilton 函数 H 不显含 t,则 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

定理 1.6.5 如果 $I(\boldsymbol{x}, t) = c$ 是系统(1.6.8)包含变量 x_j 的第一积分,而 $J(x)$ 和 H 都不显含 x_j,则 $\frac{\partial I}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 I}{\partial x_j^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

1.6.4 算 例

例 1 刚体绕定点运动的 Euler 情形.

问题的运动微分方程为

$$\begin{cases} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_3\omega_1 \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ 为刚体角速度在与刚体相固联的惯性主轴上的投影, A_1, A_2, A_3 为刚体的主惯性矩.这是一个三维方程.令

$$x_1 = A_1\omega_1, x_2 = A_2\omega_2, x_3 = A_3\omega_3 \tag{2}$$

则方程表为形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_2A_3}x_2x_3, \quad \dot{x}_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_3A_1}x_3x_1 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_1A_2}x_1x_2 \end{cases} \tag{3}$$

进而表为广义 Hamilton 方程形式

$$\dot{x}_i = J_{ij}\frac{\partial H}{\partial x_j} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{4}$$

其中

$$(J_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$H = \frac{1}{2A_i}x_i^2 \tag{6}$$

因 H 不显含 t,据定理 1.6.2 知

$$H = h \tag{7}$$

是系统的积分.又

$$I_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{8}$$

满足条件(1.6.10),故系统有积分

$$I_1 = c_1 \tag{9}$$

例 2 三种群 Volterra 方程.

三种群 Volterra 方程可化成广义 Hamilton 系统,有形式[18]

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(e^{\xi_1} - 1) \\ q(e^{\xi_2} - 1) \\ s(e^{\xi_3} - 1) \end{bmatrix} \tag{1}$$

而 Hamilton 函数为

$$H(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = p(e^{\xi_1} - \xi_1) + q(e^{\xi_2} - \xi_2) + s(e^{\xi_3} - \xi_3) \tag{2}$$

据定理 1.6.2 知,系统有积分

$$H = h \tag{3}$$

利用式(1.6.10)知,系统有积分

$$I_1 = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3 = c_1 \tag{4}$$

例 3 Lorenz 方程的 Robbins 模型.

Lorenz 方程是混沌的最早例子,它的 Robbins 模型为[18]

$$\begin{cases} \dot{w} = -zy + \varepsilon(1 - w) \\ \dot{z} = wy - \varepsilon z \\ \dot{y} = z - \varepsilon\sigma y \end{cases} \tag{1}$$

当 $\epsilon=0$ 时,它可化为三维广义 Hamilton 系统

$$\dot{x}_i = J_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (i,j=1,2,3) \tag{2}$$

其中

$$x_1 = w, \quad x_2 = z, \quad x_3 = y \tag{3}$$

$$(J_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$H = x_1 + \frac{1}{2}x_3^2 \tag{5}$$

据定理 1.6.2 知,系统有积分

$$H = h \tag{6}$$

利用式(1.6.10)可以验证,系统有积分

$$I_1 = x_1^2 + x_2^2 = c_1 \tag{7}$$

这两个积分是处于相互内旋的,有

$$\{I_1, H\}^* \equiv 0 \tag{8}$$

1.6.5 Nambu 力学

Nambu 以 Liouville 定理为引导原理,提出了经典 Hamilton 力学对奇数维相空间的一种可能推广.

考虑 n 维相空间,假设相空间的运动由 n 元组 $x_i(i=1,\cdots,n)$来描述.对于任意函数 $\varphi(\boldsymbol{x}),\varphi_1(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_{n-1}(\boldsymbol{x})$,定义 Nambu 括号[18-20]

$$\{\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1}\} = \frac{\partial(\varphi,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \epsilon_{ij\cdots l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_j}\cdots\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_l} \tag{1.6.11}$$

其中 $\varepsilon_{ij\cdots l}$是广义 Levi-Civita 张量.

引进 $n-1$ 个 Hamilton 函数 $H_k(\boldsymbol{x})(k=1,\cdots,n-1)$, 则 Nambu 方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\dot{x}_i=\{x_i,H_1,\cdots,H_{n-1}\}\qquad(i=1,\cdots,n)\tag{1.6.12}$$

对于任意不显含 t 的函数$F(x_1,\cdots,x_n)$,则有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial(F,H_1,\cdots,H_{n-1})}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\{F,H_1,\cdots,H_{n-1}\}\tag{1.6.13}$$

显然,系统的 $n-1$ 个 Hamilton 函数均为系统的守恒量.

如果取 $n=3$,则 Nambu 系统成为三维广义 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dfrac{\partial(H_1,H_2)}{\partial(x_2,x_3)},\quad \dot{x}_2=\dfrac{\partial(H_1,H_2)}{\partial(x_3,x_1)}\\[2ex]\dot{x}_3=\dfrac{\partial(H_1,H_2)}{\partial(x_1,x_2)}\end{cases}\tag{1.6.14}$$

即

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_3} & -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2}\\[2ex] -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_3} & 0 & \dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\\[2ex] \dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}\\[2ex] \dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\\[2ex] \dfrac{\partial H_1}{\partial x_3}\end{bmatrix}\tag{1.6.15}$$

§1.7 自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构

用 Birkhoff 方程描述运动的力学系统或描述状态的物理系

统,称为 Birkhoff 系统. Birkhoff 方程是 Hamilton 方程经过非正则变换得到的, Hamilton 方程是 Birkhoff 方程的特殊情形. 对 Birkhoff 系统的研究成为数学物理学科,特别是分析力学的一个近代发展方向. 文献[1,21]对 Birkhoff 系统动力学进行了较全面的研究. 因为一切完整约束系统和非完整约束系统都有 Birkhoff 表示[21],因此, Birkhoff 系统可当作一类约束力学系统来研究. 本节讨论自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构,包括 Birkhoff 系统的运动方程,它的 Lie 代数表示,以及 Poisson 理论的应用.

1.7.1 Birkhoff 方程

Birkhoff 方程的一般形式为[1,21]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0 \qquad (1.7.1)$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n)$$

其中 $B=B(\boldsymbol{a},t)$ 称为 Birkhoff 函数, $R_\mu=R_\mu(\boldsymbol{a},t)(\mu=1,\cdots,2n)$ 称为 Birkhoff 函数组. 方程(1.7.1)可表为

$$\dot{a}^\mu-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)=0 \qquad (1.7.2)$$

其中

$$(\Omega^{\mu\nu})=\left(\left(\frac{\partial R_\beta}{\partial a^\alpha}-\frac{\partial R_\alpha}{\partial a^\beta}\right)^{-1}\right)^{\nu\mu} \qquad (1.7.3)$$

称为 Birkhoff 逆变张量,有

$$\Omega^{\mu\nu}=-\Omega^{\mu\nu} \qquad (1.7.4)$$

如果 R_μ 和 B 都不显含时间 t,则称系统是自治的;如果仅 R_μ 不显含 t,则称系统为半自治的. 对自治和半自治情形,方程(1.7.2)有简单形式

$$\dot{a}^\mu-\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu}=0 \qquad (\mu,\nu=1,\cdots,2n) \qquad (1.7.5)$$

1.7.2 自治和半自治 Birkhoff 系统的代数结构

将某函数 $A(a)$按自治形式或半自治形式的 Birkhoff 方程(1.7.5)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(a) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} \xlongequal{\text{def}} A \circ B \tag{1.7.6}$$

这个积满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \tag{1.7.7}$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \tag{1.7.8}$$

以及标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B) \tag{1.7.9}$$

满足式(1.7.7)—(1.7.9)的代数是一个相容代数.于是得

定理 1.7.1 自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程都具有相容代数结构.

积(1.7.6)满足反对称性

$$A \circ B + B \circ A = 0 \tag{1.7.10}$$

和 Jacobi 恒等式

$$A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0 \tag{1.7.11}$$

满足规律(1.7.10),(1.7.11)的代数是一个 Lie 代数.于是有

定理 1.7.2[1] 自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程具有 Lie 代数结构.

式(1.7.10),(1.7.11)等价地表为

$$\Omega^{\mu\nu} + \Omega^{\nu\mu} = 0 \tag{1.7.12}$$

$$\Omega^{\tau\rho}\frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial a^{\rho}} + \Omega^{\mu\rho}\frac{\partial \Omega^{\nu\tau}}{\partial a^{\rho}} + \Omega^{\nu\rho}\frac{\partial \Omega^{\tau\mu}}{\partial a^{\rho}} = 0 \tag{1.7.13}$$

$$(\mu, \nu, \tau, \rho = 1, \cdots, 2n)$$

式(1.7.6)可定义一个广义 Poisson 括号$[A, B]$

$$\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} \xlongequal{\text{def}} [A, B] \tag{1.7.14}$$

它满足 Lie 代数公理

$$[A, B] + [B, A] = 0 \tag{1.7.15}$$

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \tag{1.7.16}$$

1.7.3 自治和半自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论

自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程(1.7.5)具有 Lie 代数结构,因此,关于积分完整保守系统的 Poisson 理论可应用于这类系统.

定理 1.7.3 $I(a^{\mu}, t) = \text{const.}$是系统(1.7.5)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + [I, B] = 0 \tag{1.7.17}$$

其中[,]为广义 Poisson 括号(1.7.14).

证明 若 I 是积分,则有

$$0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\bigg|_{(1.7.5)} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} = \frac{\partial I}{\partial t} + [I, B]$$

反之亦然.证毕.

式(1.7.17)称为自治和半自治 Birkhoff 系统关于第一积分的广义 Poisson 条件.

在自治形式下,Birkhoff 函数 B 不显含 t,因此有

$$\frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

将 $I = B$ 代入式(1.7.17),显然成立.于是有

定理 1.7.4[1,21] 自治形式 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 $B = B(\boldsymbol{a})$是系统的第一积分.

假设 Birkhoff 系统(1.7.5)有两个第一积分

$$I_1(a^\mu, t) = c_1, \qquad I_2(a^\mu, t) = c_2$$

则它们必满足广义 Poisson 条件(1.7.17),即有

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + [I_1, B] = 0, \qquad \frac{\partial I_2}{\partial t} + [I_2, B] = 0 \quad (1.7.18)$$

作广义 Poisson 括号$[I_1, I_2]$,并对 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial}{\partial t}[I_1, I_2] = \left[\frac{\partial I_1}{\partial t}, I_2\right] + \left[I_1, \frac{\partial I_2}{\partial t}\right] + \frac{\partial I_1}{\partial a^\mu}\frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial t}\frac{\partial I_2}{\partial a^\nu}$$

对自治形式或半自治形式的 Birkhoff 系统,Birkhoff 函数组 R_μ 不显含时间 t,故有

$$\frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial t} = 0$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}[I_1, I_2] = [\frac{\partial I_1}{\partial t}, I_2] + [I_1, \frac{\partial I_2}{\partial t}] \qquad (1.7.19)$$

利用 Lie 代数公理(1.7.15),(1.7.16),有

$$[[I_1, I_2], B] = -[[I_2, B], I_1] - [[B, I_1], I_2]$$

$$= [I_1, [I_2, B]] + [[I_1, B], I_2] \quad (1.7.20)$$

联合式(1.7.19),(1.7.20)并注意到式(1.7.18),得到

$$\frac{\partial}{\partial t}[I_1, I_2] + [[I_1, I_2], B]$$

$$= [\frac{\partial I_1}{\partial t} + [I_1, B], I_2] + [I_1, \frac{\partial I_2}{\partial t} + [I_2, B]] = 0$$

对比广义 Poisson 条件(1.7.17),知$[I_1, I_2]$是系统的第一积分.于是有

定理 1.7.5 如果自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程

(1.7.5)有不处于相互内旋的两个第一积分 $I_1(a^\mu, t) = c_1$, $I_2(a^\mu, t) = c_2$,则它们的广义 Poisson 括号$[I_1, I_2]$也是系统的第一积分.

如果 $I(a^\mu, t) = C$ 是自治形式 Birkhoff 方程包含时间 t 的积分,将式(1.7.17)对 t 求偏导数,并注意到

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial \Omega^{\mu\nu}}{\partial t} = 0$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial I}{\partial t}) + [\frac{\partial I}{\partial t}, B] = 0$$

这表明,$\frac{\partial I}{\partial t}$是系统的积分.于是有

定理 1.7.6[21] 如果自治形式的 Birkhoff 方程有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t) = C$,那么$\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$都是系统的第一积分.

类似地,可证明下述定理.

定理 1.7.7[21] 如果自治形式和半自治形式的 Birkhoff 方程有包含变量 a^ρ 的第一积分,而 $\Omega^{\mu\nu}$和 B 都不显含 a^ρ,则$\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho^2}}, \cdots$都是系统的第一积分.

1.7.4 算 例

已知 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}\{(a^2)^2 + (a^3)^2\} \\ R_1 = R_2 = 0, R_3 = a^1 a^2, R_4 = \frac{1}{2}(a^2)^2 \end{cases} \tag{1}$$

试研究系统的积分.

由 R_μ 计算出 Birkhoff 张量

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ -a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Birkhoff 逆变张量为

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

由定理 1.7.4 知,系统有积分

$$B = \frac{1}{2}\{(a^2)^2 + (a^3)^2\} = \text{const.} \tag{4}$$

利用定理 1.7.3 容易验证系统有积分

$$I_1 = a^1 a^2 + a^3 a^4 = C_1 \tag{5}$$

因 $\Omega^{\mu\nu}$和 B 都不含a^1, a^4,故按定理 1.7.7 由 I_1 生成新的积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial a^1} = a^2 = C_2 \tag{6}$$

$$I_3 = \frac{\partial I_1}{\partial a^4} = a^3 = C_3 \tag{7}$$

作广义 Poisson 括号$[I_2, I_1]$,得

$$[I_2, I_1] = \frac{\partial I_2}{\partial a^\mu}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial I_1}{\partial a^\nu} = a^2 a^3 \tag{8}$$

由定理 1.7.5 知

$$I_4 = [I_2, I_1] = C_4 \tag{9}$$

是系统的积分.

本 章 小 结

本章讨论的 6 类约束力学系统的运动微分方程可统一地表为逆变代数形式

$$\dot{a}^{\mu} - \Omega^{\mu\nu} \frac{\partial H}{\partial a^{\nu}} = 0$$

其中 $\Omega^{\mu\nu}$满足反对称性和 Jacobi 恒等式.

将某函数 $A(a)$按上述方程求对时间的导数定义为一个积,这个积满足 Lie 代数公理.因此,用 Lie 代数统一了各类方程.

经典 Poisson 积分理论可全部地推广并应用于这些系统.

本章仅讨论有限维系统的 Lie 代数,未涉及无穷维系统的 Lie 代数,有兴趣的读者可参考新近的文献[22].

习 题

1. 试证二维系统

$$(\dot{q}_1 + 2\dot{q}_2)\ddot{q}_1 + 2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\ddot{q}_2 + q_2\dot{q}_2 - q_1\dot{q}_2 + q_1q_2 + \frac{1}{2}q_2^2 = 0$$

$$2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\ddot{q}_1 + (2\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\ddot{q}_2 + q_1\dot{q}_1 - q_2\dot{q}_1 + q_1q_2 + \frac{1}{2}q_1^2 = 0$$

可 Lagrange 化,其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{6}(\dot{q}_1^3 + \dot{q}_2^3) + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{3}(q_1 - q_2)(q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1) - \frac{1}{2}q_1q_2(q_1 + q_2)$$

2. 试证方程

$$t^2(\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5) = 0$$

有 Lie 代数结构,并证明它有积分

$$I = \frac{1}{2}t^2(t\dot{x}^2 + x\dot{x} + \frac{1}{3}tx^6) = \text{const.}$$

3. 用 Poisson 条件(1.3.24)证明 §1.3 中例 1 有积分

$$I = ba^1 - bta^3 + a^4 + t\mathrm{arctg}bt - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2) = C$$

4. 广义经典力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\alpha_2\dot{y}^2$$

$$(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$$

试研究它的代数结构及 Poisson 积分法.

5. 二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B = \frac{1}{2}(a^2)^2 + a^1t$$

Birkhoff 函数组为

$$R_1 = 0, R_2 = a^1$$

试研究它的代数结构及 Poisson 积分法.

参 考 文 献

[1] Santilli R. M., Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ, New York, Springer-Verlag, 1983.

[2] Santilli R. M., Foundations of Theoretical Mechanics Ⅰ, New York, Springer-Verlag, 1978.

[3] 梅凤翔,分析力学专题,北京,北京工业学院出版社,1988.

[4] 陈 滨,分析动力学,北京,北京大学出版社,1987.

[5] 梅凤翔、刘桂林,分析力学基础,西安,西安交通大学出版社,1987.

[6] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京,北京工业学院出版社,1985.

[7] Новоселов В.С., Вариационные Методы в Механике, Ленинград: ЛГУ, 1966.

[8] 梅凤翔,非完整系统的自由运动和非完整性的消失,力学学报,1994,26(4),470—476.

[9] Poincaré H., Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique, CR Acad. Sci., Paris, 1901, 132, 369—371.

[10] Chetaev N., Sur les équations de Poincaré. CR Acad. Sci., Paris, 1927, 185: 1577—1578

[11] Четаев Н.Г, Об уравнениях Пуанкаре, ПММ, 1941, 5(2), 253—262.

[12] Фам Гуен, Об уравнениях движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре-Четаева. ПММ, 1967, 31(2):253—259.

[13] Ghori Q.K., Hussain M. Poincaré equations for nonholonomic dynamical systems, ZAMM, 1973, 53, 391—396.

[14] Мархашов Л.М., Об уравнениях Пуанкаре и Пуанкаре-Четаева, ПММ, 1985, 49(1), 43—55.

[15] Румянцев В.В., Об уравнениях Пуанкаре-Четаева, ПММ, 1994, 58(3), 3—16.

[16] De León M. and Rodrigues P.R., Generalized Classical Mechanics and Field Theory, Amsterdam, ESPBV, 1985.

[17] 吴惠彬, Birkhoff 系统的几何理论, 北京理工大学博士学位论文, 1994.

[18] 李继彬、赵晓华、刘正荣, 广义哈密顿系统理论及其应用, 北京, 科学出版社, 1994.

[19] Nambu Y., Generalized Hamiltonian dynamics, Phys. Rev., 1973, D7, 2405—2411.

[20] 刘端、梅凤翔、陈滨, 分析力学的数学方法, 见: 陈滨, 现代数学理论与方法在动力学、振动与控制中的应用, 北京, 科学出版社, 1992, 1—17.

[21] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬, Birkhoff 系统动力学, 北京, 北京理工大学出版社, 1996.

[22] 张宝善、卢东强、戴世强, 新型 Poisson 括号意义下的无穷维 Lie 代数, 力学学报, 1998, 30(3), 307—313.

第二章　约束力学系统运动方程的 Lie 容许代数结构

本章讨论一般完整力学系统、Chaplygin 系统、一般非完整系统、非自治 Birkhoff 系统以及约束 Birkhoff 系统的代数结构. 一般说来, 这些系统的方程没有 Lie 代数结构, 但是有 Lie 容许代数结构. 一般说来, 经典 Poisson 积分理论不能全部地应用, 但可部分地应用于这些系统的积分问题.

§2.1　一般完整力学系统的代数结构

本节研究一般完整力学系统运动方程的代数结构. 将系统的运动方程部分正则化并表为逆变代数形式, 证明一切完整系统的运动方程都具有 Lie 容许代数结构, 将 Poisson 积分理论部分地应用于这类系统的积分.

2.1.1　运动方程的逆变代数形式

一般完整系统是指不能表为方程(1.2.1) 的完整系统. 此时, 运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s}-\frac{\partial L}{\partial q^s}=Q^s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\quad (s=1,\cdots,n)\tag{2.1.1}$$

令

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s},H=p_s\dot{q}^s-L\tag{2.1.2}$$

则方程(2.1.1) 可部分正则化为

$$\dot{q}^s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\qquad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q^s}+\widetilde{Q}^s\ (\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)\quad (s=1,\cdots,n)\tag{2.1.3}$$

其中

$$\tilde{Q}^s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = Q^s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t) \tag{2.1.4}$$

令

$$\tilde{Q}^s = -\Omega_{sk}\frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{2.1.5}$$

其中

$$(\Omega_{sk}) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

并令

$$a^\mu = \begin{cases} q^\mu & (\mu = 1,\cdots,n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1,\cdots,2n) \end{cases} \tag{2.1.7}$$

则方程(2.1.3) 可表为逆变代数形式

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} = 0 \qquad (\mu,\upsilon = 1,\cdots,2n) \tag{2.1.8}$$

其中

$$\begin{cases} S^{\mu\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon} \\ (\omega^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \\ (T^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & (-\Omega_{kk})_{n\times n} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{2.1.9}$$

可见，$S^{\mu\upsilon}$ 由反对称部分 $\omega^{\mu\upsilon}$ 和对称部分 $T^{\mu\upsilon}$ 组成.

2.1.2 方程具有相容代数结构

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.1.8) 求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^\mu}S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} \xlongequal{\text{def}} A \circ H \tag{2.1.10}$$

这个积满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \tag{2.1.11}$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \tag{2.1.12}$$

和标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha (A \circ B) \tag{2.1.13}$$

因此有相容代数结构.于是得

定理 2.1.1 一切完整约束力学系统的运动方程都具有相容代数结构.

2.1.3 方程具有 Lie 代数结构的条件

如果方程(2.1.8) 具有 Lie 代数结构,则必有

$$A \circ B + B \circ A = 0 \tag{2.1.14}$$

$$A \circ (B \circ C) + B \circ (C \circ A) + C \circ (A \circ B) = 0 \tag{2.1.15}$$

考虑到式(2.1.9),则上述条件归为对 $T^{\mu\upsilon}$ 的条件

$$T^{\mu\upsilon} + T^{\upsilon\mu} = 0 \tag{2.1.16}$$

$$T^{\tau\rho} \frac{\partial T^{\mu\upsilon}}{\partial a^{\rho}} + T^{\mu\rho} \frac{\partial T^{\upsilon\tau}}{\partial a^{\rho}} + T^{\upsilon\rho} \frac{\partial T^{\tau\mu}}{\partial a^{\rho}} = 0 \tag{2.1.17}$$

$$(\mu, \upsilon, \rho, \tau = 1, \cdots, 2n)$$

进而归结为

$$\Omega_{kk} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n) \tag{2.1.18}$$

$$\widetilde{Q}^{s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.1.19}$$

因此,一般完整系统的运动方程没有 Lie 代数结构.

2.1.4 方程具有 Lie 容许代数结构

前面已看到,在积(2.1.10) 定义下,一般完整系统的运动方程没有 Lie 代数结构.那么,是否有 Lie 容许代数结构?

由积(2.1.10) 定义一个新积

$$[A, B] \xlongequal{\text{def}} A \circ B - B \circ A \tag{2.1.20}$$

显然,新积有反对称性,即

$$[A, B] + [B, A] = 0 \tag{2.1.21}$$

新积的 Jacobi 恒等式为

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0 \quad (2.1.22)$$

展开得

$$\begin{aligned}&A\circ(B\circ C)-(B\circ C)\circ A+(C\circ B)\circ A-A\circ(C\circ B)\\&+B\circ(C\circ A)-(C\circ A)\circ B+(A\circ C)\circ B-B\circ(A\circ C)\\&+C\circ(A\circ B)-(A\circ B)\circ C+(B\circ A)\circ C-C\circ(B\circ A)=0\end{aligned} \quad (2.1.23)$$

用 $S^{\mu\upsilon}$ 表为

$$\begin{aligned}&(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{\upsilon\tau}-S^{\tau\upsilon})\\&+(S^{\upsilon\rho}-S^{\rho\upsilon})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{\tau\mu}-S^{\mu\tau})\\&+(S^{\tau\rho}-S^{\rho\tau})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{\mu\upsilon}-S^{\upsilon\mu})=0\\&(\mu,\upsilon,\tau,\rho=1,\cdots,2n)\end{aligned} \quad (2.1.24)$$

注意到式(2.1.9),式(2.1.24) 可归为对 $T^{\mu\upsilon}$ 的条件

$$\begin{aligned}&(T^{\mu\rho}-T^{\rho\mu})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(T^{\upsilon\tau}-T^{\tau\upsilon})\\&+(T^{\upsilon\rho}-T^{\rho\upsilon})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(T^{\tau\mu}-T^{\mu\tau})\\&+(T^{\tau\rho}-T^{\rho\tau})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(T^{\mu\upsilon}-T^{\upsilon\mu})=0\\&(\mu,\upsilon,\rho,\tau=1,\cdots,2n)\end{aligned} \quad (2.1.25)$$

因 $T^{\mu\upsilon}$ 是对称的,故式(2.1.25) 成立. 由于新积(2.1.20) 满足式(2.1.21) 和式(2.1.22),因此新积具有 Lie 代数结构,而积(2.1.10) 具有 Lie 容许代数结构. 于是有

定理 2.1.2[1] 一切完整约束力学系统的运动方程都具有 Lie 容许代数结构.

2.1.5 系统的 Poisson 理论

假设一般完整系统的运动方程(2.1.8) 有第一积分 $I(a^{\mu},t)=c$. 将其对 t 求导数并利用定义(2.1.10),得到

$$\frac{\partial I}{\partial t}+I\circ H=0 \quad (2.1.26)$$

式(2.1.26)称为一般完整系统对第一积分的广义Poisson条件.这是一个充分必要条件:如果 $I(a^\mu, t) = c$ 是方程(2.1.8)的第一积分,则它必满足条件(2.1.26);反之,如果 I 满足条件(2.1.26),则 $I = c$ 必为系统(2.1.8)的第一积分.于是有

定理2.1.3 $I(a^\mu, t) = c$ 是系统(2.1.8)第一积分的充分必要条件是广义Poisson条件(2.1.26).

令 $I = H$,则条件(2.1.26)成为

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial t} + H \circ H = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial a^\mu} S^{\mu v} \frac{\partial H}{\partial a^v} \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial a^\mu} T^{\mu v} \frac{\partial H}{\partial a^v} = \frac{\partial H}{\partial t} - \Omega_{ss} \left(\frac{\partial H}{\partial a^{n+s}} \right)^2 \\ &= \frac{\partial H}{\partial t} + \tilde{Q}^s \dot{q}^s \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

于是有

定理2.1.4 Hamilton函数 H 是系统(2.1.8)第一积分的充分必要条件是式(2.1.27).

推论 如果 H 不显含 t,且广义力 $\tilde{Q}_s$ 是广义陀螺力时,则Hamilton函数 H 是系统(2.1.8)的第一积分.

对一般完整系统,因运动方程没有Lie代数结构,积不能成为Poisson括号,故Poisson定理不成立.如果 $I_1(a^\mu, t) = c_1$ 和 $I_2(a^\mu, t) = c_2$ 是系统(2.1.8)的两个第一积分,那么 $I_1 \circ I_2$ 一般说不是系统的第一积分.

由广义Poisson条件(2.1.26)可找到一些限制,在此限制下可由已知积分生成新的积分.

将式(2.1.26)对时间 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial a^\mu}\right) S^{\mu v} \frac{\partial H}{\partial a^v} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} \frac{\partial S^{\mu v}}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial a^v} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} S^{\mu v} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial a^v}\right) = 0 \tag{2.1.28}$$

如果 $S^{\mu v}$ 和 H 都不显含 t,则式(2.1.28)成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial I}{\partial t} \circ H = 0 \tag{2.1.29}$$

比较式(2.1.29) 与(2.1.26) 知, $\frac{\partial I}{\partial t}$ 是系统的第一积分. 类似地, 可证明 $\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 是系统的第一积分. 于是有

定理 2.1.5 如果系统(2.1.8) 有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$, 而 $S^{\mu\nu}$ 和 H 不显含 t, 则 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

类似地, 有

定理 2.1.6 如果系统(2.1.8) 有包含变量 a^ρ 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$, 而 $S^{\mu\nu}$ 和 H 不显含 a^ρ, 则 $\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho^2}}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

定理 2.1.3— 定理 2.1.6 构成一般完整约束力学系统的 Poisson 理论.

2.1.6 算 例

例 1 平方阻尼振子方程为

$$\ddot{q} + \gamma \dot{q}^2 + q = 0 \tag{1}$$

这是一般完整约束系统的运动方程.

取

$$p = \dot{q}, H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \tag{2}$$

则方程(1) 化为

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} - \gamma p^2 \tag{3}$$

按式(2.1.5), 有

$$-\gamma p^2 = -\Omega_{11}\frac{\partial H}{\partial p} \tag{4}$$

于是得

$$\Omega_{11} = \gamma p \tag{5}$$

而

$$(S^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -rp \end{bmatrix} \tag{6}$$

系统运动方程具有 Lie 容许代数结构.

例 2 单自由度完整系统的 Hamilton 函数为

$$H = t(p^2 + q^2) \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q = -\frac{p^2 + q^2}{2tp} \qquad (t > 0, p \neq 0) \tag{2}$$

试证, $H = C$ 是系统的第一积分.

证明 因

$$\frac{\partial H}{\partial t} + Q\dot{q} = p^2 + q^2 - \frac{p^2 + q^2}{2tp}(2tp) = 0 \tag{3}$$

故由定理 2.1.4 知, $H = c$ 是系统的第一积分. 证毕.

例 3 不变磁场中电子运动方程为

$$m\ddot{x} - \frac{e}{c}H_3\dot{y} = 0, \quad m\ddot{y} + \frac{e}{c}H_3\dot{x} = 0, \quad m\ddot{z} = 0 \tag{1}$$

其中 m, e, c, H_3 皆为常数. 试研究 Poisson 理论的应用.

令

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z, p_1 = m\dot{q}_1, p_2 = m\dot{q}_2, p_3 = m\dot{q}_3 \tag{2}$$

则 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m}({p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2) \tag{3}$$

方程部分正则化为

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1}\dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2}, \dot{q}_3 = \dfrac{\partial H}{\partial p_3} \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} + \dfrac{ep_2}{cm}H_3, \dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} - \dfrac{ep_1}{cm}H_3, \dot{p}_3 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_3} \end{cases} \tag{4}$$

将其化为逆变代数形式, 有

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} = 0 \qquad (\mu, \upsilon = 1, \cdots, 6) \tag{5}$$

其中

$$S^{\mu\nu} = \omega^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}$$

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & I_{3\times3} \\ -I_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} & 3\times3 \\ 0_{3\times3} & (-\Omega_{kk})_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$$-\Omega_{11} = \frac{e}{c}H_3\frac{a^5}{a^4}, \quad -\Omega_{22} = -\frac{e}{c}H_3\frac{a^4}{a^5}, \quad \Omega_{33} = 0$$

亦即

$$\begin{cases} \dot{a}^1 = \dfrac{a^4}{m}, \dot{a}^2 = \dfrac{a^5}{m}, \dot{a}^3 = \dfrac{a^6}{m} \\ \dot{a}^4 = \dfrac{e}{c}H_3\dfrac{a^5}{m}, \dot{a}^5 = -\dfrac{e}{c}H_3\dfrac{a^4}{m}, \dot{a}^6 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

因

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \tilde{Q}^{5s}\dot{q}_s = 0 \tag{7}$$

故由定理 2.1.4 知,系统有积分

$$H = \frac{1}{2m}\{(a^4)^2 + (a^5)^2 + (a^6)^2\} = c \tag{8}$$

由广义 Poisson 条件(2.1.26) 可验证系统有积分

$$I_1 = a^4\sin\rho t + a^5\cos\rho t = c_1 \tag{9}$$

其中

$$\rho = \frac{eH_3}{cm}$$

利用定理 2.1.5,由 I_1 可生成新的积分

$$I_2 = a^4\rho\cos\rho t - a^5\rho\sin\rho t = c_2 \tag{10}$$

§2.2 Chaplygin 方程的代数结构

本节将非完整系统的 Chaplygin 方程表为两种形式,研究它们的代数结构,并将 Poisson 理论部分地应用于 Chaplygin 方程的积

分.

2.2.1 Chaplygin 方程的两种形式

Chaplygin 方程是一类简单而又重要的非完整系统的运动方程.假设力学系统的位形由 n 个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定,它的运动受有 g 个双面、理想、线性、齐次、定常的非完整约束

$$\dot{q}_{\epsilon+\beta}=B_{\epsilon+\beta,\sigma}(q_v)\,\dot{q}_\sigma(\beta=1,\cdots,g;\sigma,v=1,\cdots,\epsilon;\epsilon=n-g) \tag{2.2.1}$$

系统的动能 T 不含坐标$q_{\epsilon+\beta}(\beta=1,\cdots,g)$,所受广义力为有势力,且势能不含坐标 $q_{\epsilon+\beta}(\beta=1,\cdots,g)$. 系统的运动方程可表为 Routh 形式,有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_\sigma}-\dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma}=-\lambda_\beta B_{\epsilon+\beta,\sigma} & (\sigma=1,\cdots,\epsilon)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}_{\epsilon+\beta}}-\dfrac{\partial L}{\partial q_{\epsilon+\beta}}=\lambda_\beta\end{cases} \tag{2.2.2}$$

由约束方程(2.2.1) 和运动方程(2.2.2) 消去乘子 λ_β 后可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\Lambda_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,\cdots,n) \tag{2.2.3}$$

这就是与非完整系统(2.2.1),(2.2.2) 相应的完整系统的运动方程.令

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s},\qquad H=p_s\dot{q}_s-L \tag{2.2.4}$$

则方程(2.2.3) 可部分正则化为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{\Lambda}_s\ (\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\qquad(s=1,\cdots,n) \tag{2.2.5}$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_s(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\Lambda_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})) \tag{2.2.6}$$

称方程(2.2.5) 为 Chaplygin 方程的第一种形式.

Chaplygin 方程的第二种形式,即 Chaplygin 给出的方程,有形式[2,3]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_\sigma}+\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\partial B_{\epsilon+\beta,\upsilon}}{\partial q_\sigma}-\frac{\partial B_{\epsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\upsilon}\right)\dot{q}_\upsilon=0$$
$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{2.2.7}$$

其中

$$\begin{cases}\widetilde{L}=\widetilde{T}-V\\ \widetilde{T}(q_\sigma,\dot{q}_\sigma)=T(q_\sigma,\dot{q}_\sigma,B_{\epsilon+\beta,\sigma}\dot{q}_\sigma)\end{cases} \tag{2.2.8}$$

令

$$p_\sigma=\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma},\quad \widetilde{H}=p_\sigma\dot{q}_\sigma-\widetilde{L} \tag{2.2.9}$$

则方程(2.2.7) 可表为

$$\dot{q}_\sigma=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\sigma},\dot{p}_\sigma=-\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_\sigma}-C_{\epsilon+\beta}\omega_{\sigma\upsilon}^{\epsilon+\beta}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial p_\upsilon}$$
$$(\sigma=1,\cdots,\epsilon) \tag{2.2.10}$$

其中

$$\begin{cases}C_{\epsilon+\beta}=\left[\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\epsilon+\beta}}\right)\right]=(a_{\epsilon+\beta,\mu}+a_{\epsilon+\beta,\epsilon+\gamma}B_{\epsilon+\gamma,\mu})\,\dot{q}_\mu(q_\upsilon,p_\upsilon)\\ \omega_{\sigma\upsilon}^{\epsilon+\beta}=\dfrac{\partial B_{\epsilon+\beta,\nu}}{\partial q_\sigma}-\dfrac{\partial B_{\epsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_\upsilon}\end{cases} \tag{2.2.11}$$

这里 $a_{\epsilon+\beta,s}$ 为动能二次型系数.

2.2.2 Chaplygin 方程的代数表示

首先,研究Chaplygin方程第一种形式(2.2.5)的代数表示.令

$$a^s=q_s,a^{n+s}=p_s\qquad(s=1,\cdots,n) \tag{2.2.12}$$

则方程(2.2.5) 可表为逆变代数形式

$$\dot{a}^r-S^{rk}\frac{\partial H}{\partial a^k}=0\qquad(r,k=1,\cdots,2n) \tag{2.2.13}$$

其中

$$S^{rk}=\omega^{rk}+T^{rk} \tag{2.2.14}$$

这里

$$(\omega^{rk}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & \end{bmatrix} \tag{2.2.15}$$

是反对称的，而

$$(T^{rk}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & (-\Omega_{sl})_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{2.2.16}$$

是对称的，且

$$(\Omega_{sl}) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{nn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Lambda}_s = -\Omega_{sl}\frac{\partial H}{\partial p_l} \tag{2.2.17}$$

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.2.13) 求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^r}S^{rk}\frac{\partial H}{\partial a^k} \xlongequal{\text{def}} A \circ H \tag{2.2.18}$$

它满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \tag{2.2.19}$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \tag{2.2.20}$$

以及标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B) \tag{2.2.21}$$

因此有

定理 2.2.1 Chaplygin 方程的第一种形式(2.2.5) 具有相容代数结构.

按积(2.2.18) 再定义一个新积

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A \tag{2.2.22}$$

它具有反对称性

$$[A, B] + [B, A] = 0 \tag{2.2.23}$$

而 Jacobi 恒等式

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{2.2.24}$$

归结为对 S^{rk} 的条件

$$(S^{r\rho} - S^{\rho r})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{km} - S^{mk})$$

$$+ (S^{k\rho} - S^{\rho k})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{mr} - S^{rm})$$

$$+ (S^{m\rho} - S^{\rho m})\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}(S^{rk} - S^{kr}) = 0 \qquad (2.2.25)$$

$$(r, k, m, \rho = 1, \cdots, 2n)$$

考虑到式(2.2.14)— 式(2.2.17), 得知式(2.2.25) 恒成立. 满足式(2.2.23), 式(2.2.24) 规律的代数是一个 Lie 代数, 因此原来的积(2.2.18) 构成 Lie 容许代数. 于是得到

定理 2.2.2 Chaplygin 方程的第一种形式(2.2.5) 具有 Lie 容许代数结构.

Chaplygin 方程的第一种形式(2.2.5) 一般说来没有 Lie 代数结构, 这是因为 S^{rk} 中不仅包含反对称部分 ω^{rk}, 而且还包含对称部分 T^{rk}. 仅当对称部分为零, 即当

$$T^{rk} = 0 \qquad (r, k = 1, \cdots, 2n) \quad (2.2.26)$$

时, 才有 Lie 代数结构. 条件(2.2.26) 意味着

$$\tilde{\Lambda}_s = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (2.2.27)$$

在文献[4] 中讨论过非完整系统的自由运动, 即当 $\lambda_\beta = 0(\beta = 1, \cdots, g)$ 时的运动. 于是有

定理 2.2.3 当 Chaplygin 方程的第一种形式(2.2.5) 实现自由运动时, 便有 Lie 代数结构.

其次, 研究 Chaplygin 方程的第二种形式(2.2.10) 的代数表示. 令

$$a^{\upsilon} = q_{\upsilon}, a^{\varepsilon+\upsilon} = p_{\upsilon} \qquad (\upsilon = 1, \cdots, \varepsilon) \quad (2.2.28)$$

则方程(2.2.10) 可表为

$$\dot{a}^{\alpha} - \Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{H}}{\partial a^{\beta}} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, 2\varepsilon) \quad (2.2.29)$$

其中

$$(\Omega^{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0_{\varepsilon\times\varepsilon} & I_{\varepsilon\times\varepsilon} \\ -I_{\varepsilon\times\varepsilon} & (\alpha^{\sigma\upsilon})_{\varepsilon\times\varepsilon} \end{bmatrix} \qquad (2.2.30)$$

$$\alpha^{\sigma\upsilon} = -C_{\varepsilon+\tau}\omega_{\sigma\upsilon}^{\varepsilon+\tau} \quad (\tau = 1, \cdots, g) \tag{2.2.31}$$

$$\alpha^{\sigma\upsilon} = -\alpha^{\upsilon\sigma}$$

显然, $\Omega^{\alpha\beta}$ 是反对称的. 将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.2.29) 求对时间 t 的导数定义为一个代数积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\alpha}}\Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^{\beta}} \xlongequal{\text{def}} A \circ \widetilde{H} \tag{2.2.32}$$

它满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \tag{2.2.33}$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \tag{2.2.34}$$

和标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B) \tag{2.2.35}$$

满足条件式(2.2.33)— 式(2.2.35) 的代数是一个相容代数. 于是得

定理 2.2.4[5] Chaplygin 方程的第二种形式(2.2.10) 具有相容代数结构.

积(2.2.32) 具有 Lie 容许代数的条件为

$$\Omega^{\alpha\beta} + \Omega^{\beta\alpha} = 0 \tag{2.2.36}$$

$$\begin{aligned}(\Omega^{\alpha\delta} - \Omega^{\delta\alpha})\frac{\partial}{\partial a^{\delta}}(\Omega^{\beta\gamma} - \Omega^{\gamma\beta}) \\ + (\Omega^{\beta\delta} - \Omega^{\delta\beta})\frac{\partial}{\partial a^{\delta}}(\Omega^{\gamma\alpha} - \Omega^{\alpha\gamma}) \\ + (\Omega^{\gamma\delta} - \Omega^{\delta\gamma})\frac{\partial}{\partial a^{\delta}}(\Omega^{\alpha\beta} - \Omega^{\beta\alpha}) = 0 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, 2\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.2.37}$$

注意到式(2.2.30), 式(2.2.31), 知条件式(2.2.36) 自动成立, 条件式(2.2.37) 可简化为

$$\Omega^{\alpha\delta}\frac{\partial \Omega^{\beta\gamma}}{\partial a^{\delta}} + \Omega^{\beta\delta}\frac{\partial \Omega^{\gamma\alpha}}{\partial a^{\delta}} + \Omega^{\gamma\delta}\frac{\partial \Omega^{\alpha\beta}}{\partial a^{\delta}} = 0 \tag{2.2.38}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \cdots, 2\varepsilon)$$

而这正是Jacobi恒等式. 因此, 条件(2.2.38) 也是积(2.2.32) 具有

Lie 代数的条件.于是得

定理 2.2.5[5] Chaplygin 方程的第二种形式(2.2.10) 具有 Lie 容许代数的条件就是具有 Lie 代数的条件(2.2.38).

下面详细讨论 Jacobi 恒等式(2.2.38). 当指标 α, β, γ 有两个相同时,则等式(2.2.38) 恒满足.实际上,当 $\beta = \alpha$ 时,式(2.2.38) 为

$$\Omega^{\alpha\delta}\frac{\partial\Omega^{\alpha\gamma}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{\alpha\delta}\frac{\partial\Omega^{\gamma\alpha}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{\gamma\delta}\frac{\partial\Omega^{\alpha\alpha}}{\partial a^{\delta}}\equiv 0 \tag{2.2.39}$$

当 $\epsilon = 1$,即 Chaplygin 方程有一个自由度时,指标 α, β, γ 必有两个相同,等式(2.2.38) 恒成立.于是有

定理 2.2.6 如果 Chaplygin 方程有一个自由度,则它必有 Lie 代数结构.

然而,有一个自由度的 Chaplygin 方程描述的系统的约束方程必是可积的,而这归为完整保守系统.

等式(2.2.38) 中 α, β, γ 不相同的共有

$$C_{2\epsilon}^{3}=\frac{(2\epsilon)!}{(2\epsilon-4)!\,3!}$$

个.注意到指标 α, β, γ 有两个小于 ϵ 时,等式(2.2.38) 恒满足.这样,等式(2.2.38) 只有 $\frac{1}{2}C_{2\epsilon}^{3}$ 个需验证了.例如,当 $\epsilon = 2$ 时,不恒为零的等式数目为 $\frac{1}{2}C_{4}^{3}=2$,即

$$\Omega^{3\delta}\frac{\partial\Omega^{41}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{4\delta}\frac{\partial\Omega^{13}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{1\delta}\frac{\partial\Omega^{34}}{\partial a^{\delta}}=0$$

$$\Omega^{3\delta}\frac{\partial\Omega^{42}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{4\delta}\frac{\partial\Omega^{23}}{\partial a^{\delta}}+\Omega^{1\delta}\frac{\partial\Omega^{34}}{\partial a^{\delta}}=0 \qquad (\delta = 1,\cdots,4)$$

亦即

$$\frac{\partial a^{12}}{\partial a^{3}}=0,\frac{\partial a^{12}}{\partial a^{4}}=0 \tag{2.2.40}$$

当 $\epsilon = 3$ 时,不恒为零的等式数目为 $\frac{1}{2}C_{6}^{3}=10$,归结为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha^{12}}{\partial a^4} = \dfrac{\partial \alpha^{12}}{\partial a^5} = \dfrac{\partial \alpha^{12}}{\partial a^6} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha^{13}}{\partial a^4} = \dfrac{\partial \alpha^{13}}{\partial a^5} = \dfrac{\partial \alpha^{13}}{\partial a^6} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha^{23}}{\partial a^4} = \dfrac{\partial \alpha^{23}}{\partial a^5} = \dfrac{\partial \alpha^{23}}{\partial a^6} = 0 \\ \dfrac{\partial \alpha^{23}}{\partial a^1} + \dfrac{\partial \alpha^{31}}{\partial a^2} + \dfrac{\partial \alpha^{12}}{\partial a^3} = 0 \end{cases} \tag{2.2.41}$$

于是有

定理2.2.7 二自由度Chaplygin方程(2.2.10)具有Lie代数结构的条件为式(2.2.40);三自由度Chaplygin方程(2.2.10)具有Lie代数结构的条件为式(2.2.41).

2.2.3 Chaplygin方程的Poisson理论

一般说来,Chaplygin方程没有Lie代数结构,其原因是Jacobi恒等式不成立.因此,积分完整保守系统的Poisson理论不能全部地应用于积分Chaplygin方程,但可部分地应用.

定理2.2.8[6] $I(a^\alpha, t) = c$ 是系统(2.2.29)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I \circ \widetilde{H} = 0 \tag{2.2.42}$$

定理2.2.9[6] Chaplygin方程中嵌入约束后的Hamilton函数 $\widetilde{H}$ 是系统的第一积分.

证明 将 $I = \widetilde{H}$ 代入式(2.2.42),并注意到 $\dfrac{\partial \widetilde{H}}{\partial t} = 0$,便得.

定理2.2.10[6] 如果Chaplygin方程有包含时间 t 的第一积分 $I(a^\alpha, t) = c$,那么 $\dfrac{\partial I}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

证明 因 I 是系统的第一积分,故有式(2.2.42)成立.将式(2.2.42)对 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial a^\alpha}\right)\Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^\beta} + \frac{\partial I}{\partial a^\alpha}\frac{\partial \Omega^{\alpha\beta}}{\partial t}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^\beta}$$

$$+\frac{\partial I}{\partial a^{\alpha}}\Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^{\beta}}\right)=0$$

因

$$\frac{\partial \Omega^{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial t}=0$$

故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial a^{\alpha}}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)\Omega^{\alpha\beta}\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^{\beta}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)+\frac{\partial I}{\partial t}\cdot\widetilde{H}=0$$

对比式(2.2.42)知,$\frac{\partial I}{\partial t}$是Chaplygin方程的第一积分.类似地,可证明$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2},\cdots$都是系统的第一积分.证毕.

定理2.2.11[6] 如果Chaplygin方程有依赖于a^{ρ}的第一积分$I(a^{\alpha},t)=c$,而$\Omega^{\alpha\beta}$和$\widetilde{H}$都不显含a^{ρ},那么$\frac{\partial I}{\partial a^{\rho}},\frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}},\cdots$都是系统的第一积分.

2.2.4 算 例

例1 在恢复力矩作用下的Chaplygin雪橇的运动.

问题的Lagrange函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k^2\theta^2 \tag{1}$$

约束方程为

$$\dot{y}=\dot{x}\mathrm{tg}\theta \tag{2}$$

令

$$q_1=x,q_2=\theta,q_3=y \tag{3}$$

则系统的运动用Routh方程表为

$$m\ddot{q}_1=-\lambda\mathrm{tg}q_2,\quad J\ddot{q}_2=-k^2q_2,\quad m\ddot{q}_3=\lambda \tag{4}$$

相应完整系统的广义力为

$$\Lambda_1=-m\dot{q}_1\dot{q}_2\mathrm{tg}q_2,\quad \Lambda_2=0,\quad \Lambda_3=m\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{5}$$

Hamilton函数为

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_3^2) + \frac{1}{2J}p_2{}^2 + \frac{1}{2}k^2 q_2{}^2 \tag{6}$$

其中

$$p_1 = m\dot{q}_1, \quad p_2 = J\dot{q}_2, \quad p_3 = m\dot{q}_3 \tag{7}$$

按公式(2.2.17) 求得

$$\Omega_{11} = \frac{m}{J}p_2 \mathrm{tg} q_2, \quad \Omega_{22} = 0, \quad \Omega_{33} = -\frac{mp_1 p_2}{Jp_3} \tag{8}$$

于是

$$(S^{rk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{m}{J}p_2 \mathrm{tg} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{mp_1 p_2}{Jp_3} \end{pmatrix} \tag{9}$$

问题的运动方程的第一种形式具有 Lie 容许代数结构.

例 2 Chaplygin 雪橇的运动.

问题的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2, \quad V = 0 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$\dot{y} = \dot{x}\mathrm{tg}\theta \tag{2}$$

令

$$q_1 = x, q_2 = \theta, q_3 = y \tag{3}$$

则有

$$\begin{cases} \widetilde{L} = \dfrac{1}{2} m \dot{q}_1^2 (1 + \mathrm{tg}^2 q_2) + \dfrac{1}{2} J \dot{q}_2^2 \\ p_1 = \dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_1} = m \dot{q}_1 (1 + \mathrm{tg}^2 q_2), \quad p_2 = \dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_2} = J \dot{q}_2 \\ \widetilde{H} = \dfrac{1}{2m} p_1^2 \cos^2 q_2 + \dfrac{1}{2J} p_2^2 \\ B_{31} = \mathrm{tg} q_2, \quad B_{32} = 0 \\ \omega_{11}^3 = \omega_{22}^3 = 0, \quad \omega_{12}^3 = -\omega_{21}^3 = -\dfrac{1}{\cos^2 q_2} \end{cases} \tag{4}$$

令

$$a^1 = q_1, \quad a^2 = q_2, \quad a^3 = p_1, \quad a^4 = p_2 \tag{5}$$

则方程(2.2.29) 给出为

$$\dot{a}^\alpha - \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial \widetilde{H}}{\partial a^\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, 4) \tag{6}$$

其中

$$(\Omega^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & a^3 \mathrm{tg} a^2 \\ 0 & -1 & -a^3 \mathrm{tg} a^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

利用式(2.2.42),可知系统有第一积分

$$I_1 = a^2 - \frac{a^4}{J} t = c_1 \tag{8}$$

$$I_2 = (a^1)^2 - \frac{2J}{m} \frac{a^3 a^1}{a^4} \cos a^2 \sin a^2 + \left(\frac{J}{m} \frac{a^3}{a^4} \right)^2 \cos^2 a^2 \sin^2 a^2 = c_2 \tag{9}$$

由定理 2.2.9 知,系统有积分

$$I_3 = \widetilde{H} = c_3 \tag{10}$$

由定理 2.2.10 知,由 I_1 可生成新的积分

$$I_4 = \frac{\partial I_1}{\partial t} = -\frac{a^4}{J} = c_4 \tag{11}$$

由定理 2.2.11 知,由 I_2 可生成新的积分

$$I_5 = \frac{\partial I_2}{\partial a^1} = 2a^1 - \frac{2J}{m}\frac{a^3}{a^4}\cos a^2 \sin a^2 = c_5 \tag{12}$$

上述所得 5 个第一积分不全是独立的,因为有

$$c_5 = 2\sqrt{c_2} \tag{13}$$

实际上,由 4 个积分 I_1, I_3, I_4, I_5 便得到系统的运动规律.

§2.3 一般非完整力学系统的代数结构

本节研究一般非完整系统运动方程的代数结构,包括一般非完整系统的运动方程,方程的代数表示,以及 Poisson 理论的应用.

2.3.1 一般非完整系统的运动方程

与一般非完整系统方程(1.3.1),(1.3.2) 相应的完整系统的运动方程(1.3.5) 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q'_s + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.3.1}$$

其中 Q'_s 为广义力中的非势力,Λ_s 为广义非完整约束反力.令

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}, H = p_s \dot{q}_s - L \tag{2.3.2}$$

则方程(2.3.1) 可部分正则化为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + \Lambda'_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{2.3.3}$$

其中

$$\Lambda'_s(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = Q'_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), t) + \Lambda_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t), t) \tag{2.3.4}$$

令

$$a^s = q_s, a^{n+s} = p_s (s = 1, \cdots, n) \tag{2.3.5}$$

则方程(2.3.3) 可表为逆变代数形式

$$\dot{a}^{\mu} - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^{\upsilon}} = 0 \qquad (\mu, \upsilon = 1, \cdots, 2n) \tag{2.3.6}$$

其中

$$S^{\mu\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon} \tag{2.3.7}$$

$$(\omega^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_{n\times n} \\ -I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{2.3.8}$$

$$(T^{\mu\upsilon}) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & (-\Omega_{kk})_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{2.3.9}$$

$$\Lambda_s' = -\Omega_{sk}\frac{\partial H}{\partial p_k}, (\Omega_{sk}) = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Omega_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Omega_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

2.3.2 运动方程的代数结构

取某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.3.6) 求对时间 t 的导数作为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^{\upsilon}} \xlongequal{\text{def}} A \circ H \tag{2.3.11}$$

它满足右分配律,左分配律和标律.因此有

定理 2.3.1[7] 一切与一般非完整系统相应的完整系统的运动方程都具有相容代数结构.

积(2.3.11) 一般说没有 Lie 代数结构.由积(2.3.11) 定义一个新积

$$[A, B] \xlongequal{\text{def}} A \circ B - B \circ A \tag{2.3.12}$$

容易证明它满足 Lie 代数公理

$$[A, B] + [B, A] = 0 \tag{2.3.13}$$

$$[A,[B, C]] + [B,[C, A]] + [C,[A, B]] = 0 \tag{2.3.14}$$

因此有

定理 2.3.2[7] 一切与一般非完整系统相应的完整系统的运动方程都具有 Lie 容许代数结构.

2.3.3 系统的 Poisson 理论

一般非完整系统的运动方程没有 Lie 代数结构,但有 Lie 容许代数结构.因此,关于积分完整保守系统运动方程的 Poisson 理论可以部分地推广并应用于一般非完整系统.

定理 2.3.3[7] $I(a^\mu, t) = c$ 是系统(2.3.6)第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + I \circ H = 0 \tag{2.3.15}$$

条件(2.3.15)称为非完整系统对第一积分的广义 Poisson 条件.

将 $I = H$ 代入广义 Poisson 条件(2.3.15),得到

$$\frac{\partial H}{\partial t} + H \circ H = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial a^\mu} S^{\mu\upsilon} \frac{\partial H}{\partial a^\upsilon}$$

$$= \frac{\partial H}{\partial t} - \Omega_{ss}\left(\frac{\partial H}{\partial a^{n+s}}\right)^2 = \frac{\partial H}{\partial t} + Q_s' \dot{q}_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \dot{q}_s = 0 \tag{2.3.16}$$

于是有

定理 2.3.4 如果系统的 Hamilton 函数 H 不显含 t,非势广义力是陀螺力或不存在,且非完整约束方程对广义速度是齐次的,则 H 是与非完整系统相应的完整系统的第一积分.

将式(2.3.15)对 t 求偏导数,得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial a^\mu}\right) S^{\mu\upsilon} \frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} \frac{\partial S^{\mu\upsilon}}{\partial t} \frac{\partial H}{\partial a^\upsilon}$$

$$+ \frac{\partial I}{\partial a^\mu} S^{\mu\upsilon} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon}\right) = 0 \tag{2.3.17}$$

当 $S^{\mu\upsilon}$ 和 H 不显含时间 t,即当

$$\frac{\partial S^{\mu\upsilon}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{2.3.18}$$

时,式(2.3.17)成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial I}{\partial t} \circ H = 0 \tag{2.3.19}$$

对比式(2.3.15)知,$\frac{\partial I}{\partial t}$是系统的第一积分.类似地,可证明$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$是系统的第一积分.于是有

定理2.3.5[7,8] 如果系统(2.3.6)有包含时间t的第一积分$I(a^\mu, t) = c$,而$S^{\mu v}$和H都不显含t,则$\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$都是系统的第一积分.

将式(2.3.15)对a^ρ求偏导数,并设$S^{\mu v}$和H都不显含a^ρ,便可证明如下定理.

定理2.3.6[7,8] 如果系统(2.3.6)有包含变量a^ρ的第一积分$I(a^\mu, t) = c$,而$S^{\mu v}$和H都不显含a^ρ,则$\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho^2}}, \cdots$都是系统的第一积分.

因为一般非完整系统的运动方程没有Lie代数结构,两个积分I_1和I_2的积$I_1 \circ I_2$不能成为Poisson括号,因此,一般不是系统的积分.

2.3.4 算 例

例1 系统的位置由两个广义坐标q_1, q_2来确定,Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

试研究它的代数结构和Poisson积分法.

系统的运动方程表为

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu v}\frac{\partial H}{\partial a^v} = 0 \qquad (\mu, v = 1, \cdots, 4) \tag{3}$$

其中

$$a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = p_1 = \dot{q}_1, a^4 = p_2 = \dot{q}_2 \tag{4}$$

$$H = \frac{1}{2}\{(a^3)^2 + (a^4)^2\} \tag{5}$$

$$(S^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{t}{1+t^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^3}{a^4(1+t^2)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

系统的运动方程具有 Lie 容许代数结构.

利用广义 Poisson 条件(2.3.15),可以验证系统有积分

$$I_1 = a^3 + ta^4 - a^2 = c_1 \tag{7}$$

$$I_2 = a^3(1+t^2)^{1/2} = c_2 \tag{8}$$

例 2 Appell-Hamel 例.

问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$c^2\dot{q}_3^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \tag{2}$$

Routh 方程给出为

$$m\ddot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1, m\ddot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2, m\ddot{q}_3 = -mg - 2\lambda c^2\dot{q}_3 \tag{3}$$

由约束方程(2) 和 Routh 方程(3) 求得

$$2\lambda = -\frac{mgc^2\dot{q}_3}{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + c^4\dot{q}_3^2} \tag{4}$$

广义动量和 Hamilton 函数分别为

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1, p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_2, p_3 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = m\dot{q}_3 \\ H = p_s\dot{q}_s - L = \dfrac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + mgq_3 \end{cases} \tag{5}$$

公式(2.3.10) 给出 .

$$\begin{cases} -\dfrac{mgc^2 p_3 p_1}{p_1^2 + p_2^2 + c^4 p_3^2} = -\Omega_{11}\dfrac{p_1}{m} \\ -\dfrac{mgc^2 p_3 p_2}{p_1^2 + p_2^2 + c^4 p_3^2} = -\Omega_{22}\dfrac{p_2}{m} \\ \dfrac{mgc^4 p_3^2}{p_1^2 + p_2^2 + c^4 p_3^2} = -\Omega_{33}\dfrac{p_3}{m} \end{cases} \tag{6}$$

于是,方程(2.3.6) 成为

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} = 0\ (\mu, \upsilon = 1, \cdots, 6) \tag{7}$$

其中

$$a^1 = q_1, a^2 = q_2, a^3 = q_3, a^4 = p_1, a^5 = p_2, a^6 = p_3 \tag{8}$$

$$S^{\mu\upsilon} = \omega^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon} \tag{9}$$

$$(\omega^{\mu\upsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$(T^{\mu\upsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega_{33} \end{pmatrix} \tag{11}$$

因 $\Omega_{11}, \Omega_{22}, \Omega_{33}$ 不全为零,故系统没有 Lie 代数结构,但有 Lie 容许代数结构.

定理 2.3.4 给出积分

$$H = \frac{1}{2m}\left|(a^4)^2 + (a^5)^2 + (a^6)^2\right| + mga^3 = h \tag{12}$$

利用广义 Poisson 条件(2.3.15) 可验证系统有积分

$$I_1 = \left(a^1 - \frac{a^4}{a^5}a^2\right)^2 = c_1 \tag{13}$$

因 S^w 和 H 都不含 a^1, a^2,故按定理2.3.6可由积分 I_1 生成第一积分

$$I_2 = \frac{\partial I_1}{\partial a^1} = 2\left(a^1 - \frac{a^4}{a^5}a^2\right) = c_2 \tag{14}$$

$$I_3 = \frac{\partial I_1}{\partial a^2} = 2\left(a^6 - \frac{a^4}{a^5}a^2\right)\left(-\frac{a^4}{a^5}\right) = c_3 \tag{15}$$

利用广义 Poisson 条件(2.3.15) 可以验证系统有积分

$$I_4 = \left(a^6 + \frac{g}{c^2+1}t\right)^2 = c_4 \tag{16}$$

因此,利用定理2.3.5得到第一积分

$$I_5 = \frac{\partial I_4}{\partial t} = 2\left(a^6 + \frac{g}{c^2+1}t\right)\frac{g}{c^2+1} = c_5 \tag{17}$$

§2.4 非自治 Birkhoff 系统的代数结构

本节讨论非自治 Birkhoff 系统的代数结构,包括非自治 Birkhoff 系统的运动方程,它的代数结构以及 Poisson 积分理论.

2.4.1 非自治 Birkhoff 系统的运动方程

如果 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 $R_\mu(\mu = 1, \cdots, 2n)$ 都显含 t,则称为非自治的.非自治 Birkhoff 系统的方程为(1.7.2),即

$$\dot{a}^\mu - \Omega^{\mu\upsilon}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} + \frac{\partial R_\upsilon}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.4.1}$$

$$(\mu, \upsilon = 1, \cdots, 2n)$$

其中 $\Omega^{\mu\upsilon}$ 为 Birkhoff 逆变张量,满足

$$\Omega^{\mu\upsilon} = -\Omega^{\upsilon\mu} \tag{2.4.2}$$

2.4.2 非自治 Birkhoff 系统的代数结构

由于方程(2.4.1) 中出现项 $\frac{\partial R_\upsilon}{\partial t}$,给研究代数结构带来了困

难.

若取某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按非自治形式的 Birkhoff 方程(2.4.1) 求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\upsilon}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\upsilon}} + \frac{\partial R_{\upsilon}}{\partial t}\right) \overset{\text{def}}{=\!=} A \cdot B \tag{2.4.3}$$

则有

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\Omega^{\mu\upsilon}\frac{\partial C}{\partial a^{\upsilon}} \neq A \cdot B + A \cdot C \tag{2.4.4}$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \tag{2.4.5}$$

$$(\alpha \cdot A) \cdot B \neq (A \cdot B) \cdot \alpha \tag{2.4.6}$$

即不满足右分配律和标律.因此,积 $A \cdot B$ 不表征一个代数.在这个意义上说,非自治形式的 Birkhoff 方程没有相容代数结构[9].

为构成代数,将方程(2.4.1) 表为如下形式

$$\dot{a}^{\mu} - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial B}{\partial a^{\upsilon}} = 0 \quad (\mu, \upsilon = 1, \cdots, 2n) \tag{2.4.7}$$

其中

$$S^{\mu\upsilon} = \Omega^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon} \tag{2.4.8}$$

$$(T^{\mu\upsilon}) = \begin{pmatrix} T^{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & T^{2n2n} \end{pmatrix} \tag{2.4.9}$$

而

$$T^{\mu\mu}\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \overset{\text{def}}{=\!=} \Omega^{\mu\upsilon}\frac{\partial R_{\upsilon}}{\partial t} \tag{2.4.10}$$

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.4.7) 求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}S^{\mu\upsilon}\frac{\partial B}{\partial a^{\upsilon}} \overset{\text{def}}{=\!=} AB \tag{2.4.11}$$

这个积满足右分配律

$$A(B + C) = AB + AC \tag{2.4.12}$$

左分配律

$$(A + B)C = AC + BC \tag{2.4.13}$$

以及标律

$$(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB) \tag{2.4.14}$$

于是得

定理 2.4.1 非自治形式的 Birkhoff 方程(2.4.7) 在积定义式(2.4.11) 下具有相容代数结构.

由积式(2.4.11) 再定义一个新积

$$A \circ B \overset{\text{def}}{=\!=} AB - BA \tag{2.4.15}$$

它满足 Lie 代数公理

$$A \circ B + B \circ A = 0 \tag{2.4.16}$$

$$(A \circ B) \circ C + (B \circ C) \circ A + (C \circ A) \circ B = 0 \tag{2.4.17}$$

于是得

定理 2.4.2 非自治形式的 Birkhoff 方程(2.4.7) 在积定义式(2.4.11) 下具有 Lie 容许代数结构.

2.4.3 非自治 Birkhoff 系统的 Poisson 理论

假设 $I(a^\mu, t) = c$ 是方程(2.4.7) 的第一积分,则有

$$0 = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\bigg| = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} S^{\mu\upsilon} \frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} = \frac{\partial I}{\partial t} + IB \tag{2.4.7}$$

于是有

定理 2.4.3 $I(a^\mu, t) = c$ 是非自治形式 Birkhoff 方程(2.4.7) 第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t} + IB = 0 \tag{2.4.18}$$

式(2.4.18) 称为非自治 Birkhoff 系统对第一积分的广义 Poisson 条件.

将 $I = B$ 代入式(2.4.18),得

$$\frac{\partial B}{\partial t} + BB = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu} S^{\mu\upsilon} \frac{\partial B}{\partial a^\mu}$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} \Omega^{\mu v} \frac{\partial R_v}{\partial t} = 0 \qquad (2.4.19)$$

于是有

定理 2.4.4 $B(a^{\mu}, t) = c$ 是非自治形式 Birkhoff 方程(2.4.7) 第一积分的充分必要条件是式(2.4.19).

将式(2.4.18) 对 a^{ρ} 求偏导数,得

$$\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\frac{\partial I}{\partial a^{\mu}}\right) S^{\mu v} \frac{\partial B}{\partial a^{v}} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} \frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(S^{\mu v} \frac{\partial B}{\partial a^{v}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial a^{\rho}}\right) + \frac{\partial I}{\partial a^{\rho}} B + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}} \frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(S^{\mu v} \frac{\partial B}{\partial a^{v}}\right) = 0 \qquad (2.4.20)$$

由此得到

定理 2.4.5 如果非自治形式的 Birkhoff 方程(2.4.7) 有包含 a^{ρ} 的第一积分,而 $S^{\mu v}$ 和 B 都不显含 a^{ρ},那么 $\frac{\partial I}{\partial a^{\rho}}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho^2}}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

定理 2.4.3— 定理 2.4.5 就是非自治 Birkhoff 系统的 Poisson 积分理论.

2.4.4 算 例

二阶非自治 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B = \frac{1}{2}\{(ta^1)^2 + (a^2)^2\} \qquad (1)$$

$$R_1 = 0, R_2 = ta^1$$

试证 $B = C$ 是系统的积分.

证明 式(2.4.19) 左端为

$$t(a^1)^2 + t^2 a^1 \Omega^{12} a^1 \qquad (2)$$

因

$$\Omega^{12} = -\frac{1}{t} \qquad (3)$$

故式(2.4.19) 成立,定理 2.4.4 给出积分 $B = c$. 证毕.

§2.5　约束 Birkhoff 系统的代数结构

约束 Birkhoff 系统是指系统的变量 a^{μ} 不是彼此独立的 Birkhoff 系统.本节讨论约束 Birkhoff 系统的代数结构,包括系统的运动方程,它的代数结构以及 Poisson 理论的应用.

2.5.1　约束 Birkhoff 系统的运动方程

Pfaff-Birkhoff 原理为[9,10]

$$\delta A = \delta\int_{t_1}^{t_2}(R_{\mu}\dot{a}^{\mu} - B)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.5.1}$$

$$\mathrm{d}\delta a^{\mu} = \delta\mathrm{d}a^{\mu} \tag{2.5.2}$$

$$\delta a^{\mu}\big|_{t=t_1} = \delta a^{\mu}\big|_{t=t_2} = 0(\mu = 1,\cdots,2n) \tag{2.5.3}$$

由原理式(2.5.1) 出发,利用交换关系式(2.5.2) 及端点条件式(2.5.3),可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left(\frac{\partial R_{\upsilon}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\upsilon}}\right)\dot{a}^{\upsilon} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right\}\delta a^{\mu}\mathrm{d}t = 0 \tag{2.5.4}$$

由原理(2.5.4) 中积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,得到

$$\left\{\left(\frac{\partial R_{\upsilon}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\upsilon}}\right)\dot{a}^{\upsilon} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right\}\delta a^{\mu} = 0 \tag{2.5.5}$$

$$(\mu,\upsilon = 1,\cdots,2n)$$

称原理(2.5.5) 为 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理.

如果 a^{μ} 是彼此独立的,则由原理式(2.5.5) 中 δa^{μ} 的独立性导出 Birkhoff 方程(1.7.1).

如果系统的变量 a^{μ} 不是彼此独立的,而受到一些限制,这些限制表为约束方程

$$f_{\beta}(a^{\mu},t) = 0 \qquad (\beta = 1,\cdots,g;\mu = 1,\cdots,2n) \tag{2.5.6}$$

对式(2.5.6) 取等时变分,则得

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\delta a^{\mu} = 0 \tag{2.5.7}$$

用通常的 Lagrange 乘子法,由原理式(2.5.5) 和式(2.5.7) 得到

$$\Omega_{\mu\upsilon}\dot{a}^{\upsilon}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}} \tag{2.5.8}$$

$$(\beta=1,\cdots,g;\mu,\upsilon=1,\cdots,2n)$$

其中

$$\Omega_{\mu\upsilon}=\frac{\partial R_{\upsilon}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\upsilon}} \tag{2.5.9}$$

称为 Birkhoff 协变张量.由约束方程(2.5.6) 和方程(2.5.8) 消去 $\dot{a}^{\rho}$,可得到关于 λ_{β} 的代数方程

$$\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\lambda_{\beta}=-\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)-\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial t} \tag{2.5.10}$$

$$(\rho,\mu=1,\cdots,2n;\beta,\gamma=1,\cdots,g)$$

其中 $\Omega^{\rho\mu}$ 为 Birkhoff 逆变张量.令

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\right) \tag{2.5.11}$$

当 g 为奇数时,有 $\Delta=0$.于是有

定理 2.5.1[11] 如果约束 Birkhoff 系统的约束方程数目是奇数,那么约束乘子 λ_{β} 没有唯一解.

当 $\Delta\neq 0$ 时,可由式(2.5.10) 解出 λ_{β},有

$$\lambda_{\beta}=-\frac{\Delta_{\gamma\beta}}{\Delta}\left\{\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)+\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial t}\right\} \tag{2.5.12}$$

$$(\beta,\gamma=1,\cdots,g;\rho,\mu=1,\cdots,2n)$$

其中 $\Delta_{\gamma\beta}$ 为 Δ 元素(γ,β) 的代数余子式.由此得到

定理 2.5.2[11] 如果给定约束 $f_{\beta}=0(\beta=1,\cdots,g)$ 都是自由 Birkhoff 系统(1.7.1) 的积分,则约束乘子$\lambda_{\beta}=0(\beta=1,\cdots,g)$.

令

$$P_{\mu}=\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}=P_{\mu}(a^{\nu},t)\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{2.5.13}$$

其中 λ_{β} 用式(2.5.12) 替代.将式(2.5.13) 代入乘子方程(2.5.8),得到

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=P_{\mu}(a^{\nu},t)\qquad(\mu=1,\cdots,2n)\quad(2.5.14)$$

约束系统方程(2.5.6),(2.5.8)的解可在方程(2.5.14)的解中找到,只要施加约束对初始条件的限制

$$f_{\beta}(a_0^{\mu},t_0)=0\qquad(\beta=1,\cdots,g)\quad(2.5.15)$$

对于定常约束 Birkhoff 自治系统,方程(2.5.14)给出为

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}=P_{\mu}(a^{\nu})\qquad(\mu,\nu=1,\cdots,2n)\quad(2.5.16)$$

下面给出约束 Birkhoff 系统用独立变量表示的运动方程.

假设约束方程(2.5.6)可对 $g=2m$ 个变量$a^i(i=1,\cdots,2m)$解出,即表为

$$a^i=\varphi_i(a^k,t)\qquad(2.5.17)$$

$$(i=1,\cdots,2m;k=2m+1,\cdots,2n)$$

对式(2.5.17)取等时变分,得

$$\delta a^i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\delta a^k\qquad(2.5.18)$$

将式(2.5.18)代入原理式(2.5.5),并注意到 $\delta a^k(k=2m+1,\cdots,2n)$ 是彼此独立的,得到

$$\left(\Omega_{i\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^i}-\frac{\partial R_i}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\Omega_{k\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}=0\qquad(2.5.19)$$

$$(k=2m+1,\cdots,2n)$$

将式(2.5.17)两端对时间 t 求导数,得

$$\dot{a}^i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}\dot{a}^k+\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\qquad(2.5.20)$$

将式(2.5.20)代入方程(2.5.19),得到

$$\tilde{\Omega}_{kl}\dot{a}^l-\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k}-\frac{\partial R_k}{\partial t}-\frac{\partial R_k}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^k}+\left(\Omega_{ji}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^k}+\Omega_{ki}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}=0\qquad(2.5.21)$$

$$(l,k=2m+1,\cdots,2n)$$

其中 $\Omega_{\mu\nu}$, R_{μ} 中的 a^i 用 φ_i 替代,而

$$\tilde{\Omega}_{kl} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a^k}\Omega_{ij}\frac{\partial \varphi_j}{\partial a^l} + \left(\Omega_{il}\frac{\partial \varphi_i}{\partial a^k} + \Omega_{ki}\frac{\partial \varphi_i}{\partial a^l}\right) + \Omega_{kl} \quad (2.5.22)$$

$$\tilde{B}(a^k, t) = B(\varphi_i(a^k, t), a^k, t)$$

对于定常约束 Birkhoff 自治系统或半自治系统,有

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \quad (2.5.23)$$

此时方程(2.5.21) 有简单形式

$$\tilde{\Omega}_{kl}\dot{a}^l - \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^k} = 0 \qquad (l, k = 2m+1, \cdots, 2n) \quad (2.5.24)$$

2.5.2 约束 Birkhoff 系统的代数结构

首先,研究方程(2.5.14) 的代数结构. 将方程(2.5.14) 表为形式

$$\dot{a}^\mu - \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right) = 0 \ (\mu, \nu = 1, \cdots, 2n) \quad (2.5.25)$$

令

$$\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right) = T^{\mu\mu}\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \quad (2.5.26)$$

则方程(2.5.25) 表为逆变代数形式

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial a^\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \cdots, 2n) \quad (2.5.27)$$

其中

$$S^{\mu\nu} = \Omega^{\mu\nu} + T^{\mu\nu} \quad (2.5.28)$$

将某函数 $A(\boldsymbol{a})$ 按方程(2.5.27) 求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{A}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial A}{\partial a^\mu}S^{\mu\upsilon}\frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} \xlongequal{\text{def}} A \circ B \quad (2.5.29)$$

这个积满足右分配律

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C \quad (2.5.30)$$

左分配律

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \quad (2.5.31)$$

和标律

$$(\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B) = \alpha(A \circ B) \quad (2.5.32)$$

于是有

定理 2.5.3　约束 Birkhoff 系统的运动方程(2.5.14)具有相容代数结构.

由积(2.5.29)定义一个新积

$$[A,B]\overset{\text{def}}{=\!=}A\circ B-B\circ A \tag{2.5.33}$$

它具有反对称性

$$[A,B]+[B,A]=0 \tag{2.5.34}$$

并满足 Jacobi 恒等式

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0 \tag{2.5.35}$$

于是有

定理2.5.4　约束Birkhoff系统的运动方程(2.5.14)具有 Lie 容许代数结构.

方程(2.5.14)一般说来没有 Lie 代数结构.

其次,研究方程(2.5.21)的代数结构.将方程(2.5.21)表为形式

$$\dot{a}^k-\tilde{\Omega}^{kl}\left\{\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}+\frac{\partial R_l}{\partial t}+\frac{\partial R_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}-\left(\Omega_{ji}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\Omega_{li}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right\}=0$$
$$(k=2m+1,\cdots,2n) \tag{2.5.36}$$

令

$$\tilde{\Omega}^{kl}\left\{\frac{\partial R_l}{\partial t}+\frac{\partial R_i}{\partial t}\frac{\partial\varphi_i}{\partial a^l}-\left(\Omega_{ji}\frac{\partial\varphi_j}{\partial a^l}+\Omega_{li}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial t}\right\}=\tilde{T}^{kk}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^k} \tag{2.5.37}$$

则方程(2.5.36)表为逆变代数形式

$$\dot{a}^k-\tilde{S}^{kl}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}=0\qquad(k,l=2m+1,\cdots,2n) \tag{2.5.38}$$

其中

$$\tilde{S}^{kl}=\tilde{\Omega}^{kl}+\tilde{T}^{kl} \tag{2.5.39}$$

将某函数 $\tilde{A}(a^k)$ 按方程(2.5.38)求对时间 t 的导数定义为一个积

$$\dot{\tilde{A}}(\boldsymbol{a})=\frac{\partial\tilde{A}}{\partial a^k}\tilde{S}^{kl}\frac{\partial\tilde{B}}{\partial a^l}\overset{\text{def}}{=\!=}\tilde{A}\circ\tilde{B} \tag{2.5.40}$$

类似于前面讨论,得到

定理 2.5.5　约束 Birkhoff 系统的运动方程(2.5.21)具有相容代数结构.

定理 2.5.6　约束 Birkhoff 系统的运动方程(2.5.21)具有 Lie 容许代数结构.

对于定常约束 Birkhoff 自治系统或半自治系统,由式(2.5.37)知

$$\widetilde{T}^{kk} = 0 \qquad (k = 2m+1, \cdots, 2n) \tag{2.5.41}$$

此时,方程(2.5.38)有简单形式

$$\dot{a}^k - \widetilde{\Omega}^{kl} \frac{\partial \widetilde{B}}{\partial a^l} = 0 \qquad (k, l = 2m+1, \cdots, 2n) \tag{2.5.42}$$

由 $\widetilde{\Omega}^{kl}$ 具有反对性并满足 Jacobi 恒等式,得到

定理 2.5.7　定常约束 Birkhoff 自治系统和半自治系统的运动方程具有 Lie 代数结构.

2.5.3　约束 Birkhoff 系统的 Poisson 理论

首先,研究积分约束 Birkhoff 系统运动方程(2.5.27)的 Poisson 理论.

如果 $I(a^\mu, t) = c$ 是系统(2.5.27)的第一积分,则有

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.5.27)} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu} S^{\mu\upsilon} \frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} = \frac{\partial I}{\partial t} + I \circ B \tag{2.5.43}$$

反之,如果 I 满足式(2.5.43),则 $I = c$ 是系统的第一积分.条件式(2.5.43)称为约束 Birkhoff 系统方程(2.5.27)对第一积分的广义 Poisson 条件.

定理 2.5.8　$I(a^\mu, t) = c$ 是约束 Birkhoff 系统方程(2.5.27)第一积分的充分必要条件是式(2.5.43).

将广义 Poisson 条件(2.5.43)对 t 求偏导数,得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial I}{\partial t} \circ B + \frac{\partial I \partial}{\partial a^\mu \partial t}\left(S^{\mu\upsilon} \frac{\partial B}{\partial a^\upsilon}\right) = 0 \tag{2.5.44}$$

如果 $S^{\mu\upsilon}$ 和 B 都不显含 t,则上式成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial t}\right) + \frac{\partial I}{\partial t} \circ B = 0 \tag{2.5.45}$$

这表明，$\frac{\partial I}{\partial t}$ 是系统的积分. 于是有

定理 2.5.9　如果约束 Birkhoff 系统方程(2.5.27) 有包含时间 t 的第一积分，而 $S^{\mu\upsilon}$ 和 B 都不显含 t，那么 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

类似地，有

定理 2.5.10　如果约束 Birkhoff 系统(2.5.27) 有包含变量 a^ρ 的第一积分 $I(a^\mu, t) = c$，而 $S^{\mu\upsilon}$ 和 B 都不显含 a^ρ，那么 $\frac{\partial I}{\partial a^\rho}, \frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho 2}}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

因方程(2.5.27) 一般说没有 Lie 代数结构，故积 $A \circ B$ 不能成为 Poisson 括号，而两个积分 I_1 和 I_2 的积 $I_1 \circ I_2$ 不是系统的积分.

其次，研究积分约束 Birkhoff 系统运动方程(2.5.38) 的 Poisson 理论.

如果 $\tilde{I}(a^k, t) = c$ 是系统(2.5.38) 的第一积分，则有

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}\tilde{I}}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.5.38)} = \frac{\partial \tilde{I}}{\partial t} + \tilde{I} \circ \tilde{B} \tag{2.5.46}$$

条件(2.5.46) 称为约束 Birkhoff 系统(2.5.38) 关于第一积分的广义 Poisson 条件. 于是有

定理 2.5.11　$\tilde{I}(a^k, t) = c$ 是约束 Birkhoff 系统方程(2.5.38) 第一积分的充分必要条件是式(2.5.46).

类似于前面讨论，得到

定理 2.5.12　如果约束 Birkhoff 系统(2.5.38) 有包含时间 t 的第一积分 $\tilde{I}(a^k, t) = c$，而 $\tilde{S}^{kl}$ 和 $\tilde{B}$ 都不显含时间 t，那么 $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

定理 2.5.13　如果约束 Birkhoff 系统(2.5.38) 有包含变量

a^l 的第一积分 $\tilde{I}(a^k, t) = c$，而 $\tilde{S}^{kl}$ 和 $\tilde{B}$ 都不显含 a^l，那么 $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial a^l}, \frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial a^{l^2}},$ … 都是系统的第一积分.

对于定常约束 Birkhoff 自治系统和半自治系统，方程(2.5.42) 有 Lie 代数结构，因此关于积分完整保守系统的 Poisson 理论可完全地推广并应用于这类系统. 有如下结果.

定理 2.5.14 $\tilde{I}(a^k, t) = c$ 是约束 Birkhoff 系统(2.5.42) 第一积分的充分必要条件是

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial t} + [\tilde{I}, \tilde{B}] = 0 \tag{2.5.47}$$

其中

$$[\tilde{I}, \tilde{B}] = \tilde{I} \circ \tilde{B} \tag{2.5.48}$$

为广义 Poisson 括号.

定理 2.5.15 如果 $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ 是约束 Birkhoff 系统方程(2.5.42) 的不处于相互内旋的两个第一积分，那么 $\tilde{I}_3 = [\tilde{I}_1, \tilde{I}_2] = c$ 也是系统的第一积分.

定理 2.5.16 如果约束 Birkhoff 系统方程(2.5.42) 有包含时间 t 的第一积分 $\tilde{I}(a^k, t) = c$，则 $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

定理 2.5.17 如果约束 Birkhoff 系统方程(2.5.42) 有包含变量 a^l 的第一积分 $\tilde{I}(a^k, t) = c$，而 $\tilde{\Omega}^{kl}$ 和 $\tilde{B}$ 都不显含 a^l，那么 $\frac{\partial \tilde{I}}{\partial a^l}, \frac{\partial^2 \tilde{I}}{\partial a^{l^2}}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

2.5.4 算　例

例 1 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} \\ R_1 &= R_2 = 0, \quad R_3 = a^1, \quad R_4 = a^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

约束方程为

$$f_1 = a^1 + a^2 - b_1 = 0, \quad f_2 = a^3 + a^4 - b_2 = 0 \tag{2}$$

其中 b_1, b_2 为常数.试研究约束 Birkhoff 系统的积分.

由 R_μ 求得 Birkhoff 协变张量

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

及 Birkhoff 逆变张量

$$(\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

方程(2.5.8) 给出为

$$\begin{cases} \dot{a}^3 - a^1 = \lambda_1 \\ \dot{a}^4 - a^2 = \lambda_1 \\ -\dot{a}^1 - a^3 = \lambda_2 \\ -\dot{a}^2 - a^4 = \lambda_2 \end{cases} \tag{5}$$

由方程(2),(5) 求得

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}b_1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}b_2 \tag{6}$$

于是有

$$\begin{cases} \dot{a}^3 - a^1 = -\frac{1}{2}b_1, & \dot{a}^4 - a^2 = -\frac{1}{2}b_1 \\ -\dot{a}^1 - a^3 = -\frac{1}{2}b_2, & -\dot{a}^2 - a^4 = -\frac{1}{2}b_2 \end{cases} \tag{7}$$

取 a^1, a^3 为独立变量,则有

$$\dot{a}^3 - a^1 = -\frac{1}{2}b_1, \quad -\dot{a}^1 - a^3 = -\frac{1}{2}b_2 \tag{8}$$

系统是一个定常约束 Birkhoff 自治系统.

由定理 2.5.14 知,系统有积分

$$\tilde{B} = \frac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (b_1 - a^1)^2 + (b_2 - a^3)^2\} = h \tag{9}$$

$$\tilde{I}_1 = (a^1 - \frac{1}{2}b_1)\cos t + (a^3 - \frac{1}{2}b_2)\sin t = c_1 \tag{10}$$

利用定理 2.5.16,由 $\tilde{I}_1$ 可生成新的积分

$$\tilde{I}_2 = \frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial t} = -(a^1 - \frac{1}{2}b_1)\sin t + (a^3 - \frac{1}{2}b_2)\cos t = c_2 \tag{11}$$

三个积分 $\tilde{B}, \tilde{I}_1, \tilde{I}_2$ 不是彼此独立的.实际上,有

$$\tilde{B} \cdot \tilde{I}_1 = \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^k}\tilde{\Omega}^{kl}\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial a^l} = \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^1}\tilde{\Omega}^{13}\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial a^3} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial a^3}\tilde{\Omega}^{31}\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial a^1}$$

$$= (a^1 - b_1 + a^1)(-\frac{1}{2})\sin t + (a^3 - b_2 + a^3)(\frac{1}{2})\cos t = \tilde{I}_2 \tag{12}$$

例 2 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}\{(a^3)^2 + (a^4)^2\} \\ R_1 = R_2 = 0, R_3 = a^1, R_4 = a^2(t+1) \end{cases} \tag{1}$$

约束方程为

$$f_1 = a^1 a^2 - b_1 = 0, \quad f_2 = a^3 + a^4 - b_2 = 0 \tag{2}$$

其中 b_1, b_2 为常数.试证,系统的 Birkhoff 函数 B 是积分.

证明 由广义 Poisson 条件(2.5.43),需证明

$$\frac{\partial B}{\partial t} + B \circ B = 0 \tag{3}$$

因 B 不含 t,只需证明

$$B \circ B = \frac{\partial B}{\partial a^\mu}S^{\mu\upsilon}\frac{\partial B}{\partial a^\upsilon} = T^{\mu\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)^2 = 0 \tag{4}$$

由式(2.5.26) 知

$$T^{\mu\mu}\frac{\partial B}{\partial a^\mu} = \Omega^{\mu\upsilon}\left(\frac{\partial R_\upsilon}{\partial t} + P_\upsilon\right) \tag{5}$$

而

$$(\Omega^{\mu\upsilon}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{t+1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{t+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

于是有

$$\begin{cases} T^{33}a^3 = \dfrac{\partial R_1}{\partial t} + P_1 = P_1 \\ T^{44}a^4 = \dfrac{1}{t+1}\left(\dfrac{\partial R_2}{\partial t} + P_2\right) = \dfrac{1}{t+1}P_2 \end{cases} \tag{7}$$

最后,只需证明 $P_1 = P_2 = 0$. 实际上,方程(2.5.8) 给出为

$$\begin{cases} \dot{a}^3 = \lambda_1 a^2, (t+1)\dot{a}^4 = \lambda_1 a^4 \\ -\dot{a}^1 - a^3 = \lambda_2, -(t+1)\dot{a}^2 - a^4 - a^2 = \lambda_2 \end{cases} \tag{8}$$

由方程(2),(8) 求得

$$\lambda_1 = 0 \tag{9}$$

因此有

$$P_1 = \lambda_1 a^2 = 0, P_2 = \lambda_1 a^1 = 0 \tag{10}$$

证毕.

本章小结

本章讨论的 5 类约束力学系统的运动微分方程可统一地表为逆变代数形式

$$\dot{a}^\mu - S^{\mu\upsilon}\frac{\partial H}{\partial a^\upsilon} = 0$$

其中

$$S^{\mu\upsilon} = \Omega^{\mu\upsilon} + T^{\mu\upsilon}$$

这里 $\Omega^{\mu\nu}$ 满足反对称性和 Jacobi 恒等式.

将某函数 $A(a)$ 按上述方程求对时间的导数定义为一个积,这个积满足相容代数公理.由于 $T^{\mu\nu}$ 的出现,这个积不满足 Lie 代数公理.但可定义一个新积,它满足 Lie 代数公理,因此具有 Lie 容许代数结构.用 Lie 容许代数统一了各类方程.

经典 Poisson 积分理论可以部分地推广并应用于这些系统.

习　　题

1.试将 Emden 方程

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0$$

化成逆变代数形式(2.1.8),并利用式(2.1.36) 证明它有积分

$$I = \frac{1}{2}t^2\left(t\dot{x}^2 + x\dot{x} + \frac{1}{3}tx^6\right) = \text{const.}$$

2.已知二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_2^2$$

广义力为

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -\dot{q}_2^2$$

试将运动方程表为形式(2.1.8),并应用 Poisson 理论研究系统的积分.

3.试研究 § 2.2 中例 1 的 Poisson 积分理论.

4.系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}q_2^2$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0$$

试研究系统运动方程的代数结构及 Poisson 积分法.

5.试证如下命题:如果非自治形式的 Birkhoff 方程(2.4.7) 有包含时间 t 的积分,而 $S^{\mu\nu}$ 和 B 都不显含 t,那么 $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \cdots$ 都是系统的第一积分.

6.利用习题 5 的结果研究非自治 Birkhoff 系统

$$B = \frac{1}{2}[(a^1)^2 + (a^2)^2], R_1 = 0, R_2 = t + a^1$$

参考文献

[1] 梅凤翔,完整力学系统运动方程的代数结构,黄淮学刊,1995,11(2),20—24.

[2] Чаплыгин С. А. 著(张燮译). 非全定系统的动力学研究,北京,科学出版社,1956.

[3] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京,北京工业学院出版社,1985.

[4] 梅凤翔,非完整系统的自由运动和非完整性的消失,力学学报,1994,26(4),470—476.

[5] 梅凤翔,Чаплыгин 方程的代数结构,力学学报,1996,28(3),328—335.

[6] Mei Fengxiang, Shi Rongchang, Zhang Yongfa, Poisson's theory of the Chaplygin's equations, J. of BIT, 1995, 4(2). 123—129.

[7] 梅凤翔、史荣昌,非完整系统的代数结构及 Poisson 积分法,北京理工大学学报,1996(增刊),51—55.

[8] Мэй Фунсян, Алгеъраическая структура и теория Пуассона для уравнений *движения неголономных систем*, 1998, 62, (1), 162—165.

[9] Santilli R. M., Foundations of theoretical mechanics Ⅱ, New York, Springer-Verlag, 1983.

[10] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬,Birkhoff 系统动力学,北京,北京理工大学出版社,1996.

[11] 梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平,约束力学系统的运动稳定性,北京,北京理工大学出版社,1997.

第三章　约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅰ)

力学系统的守恒量(或称第一积分) 不仅具有数学重要性, 而且表现为深刻的物理规律. 寻求力学系统的守恒量有各种各样方法. 在分析力学发展初期, 主要是按物理定律导出动量守恒律, 动量矩守恒律和机械能守恒律, 或从运动微分方程出发导出广义能量积分, 循环积分等. 寻求守恒量的近代方法是研究作用量或微分方程在无限小变换下的不变性. 德国学者 Noether A. E. 1918 年研究了 Hamilton 作用量在相对广义坐标和时间的无限小变换下的不变性质[1]. 70 年代南斯拉夫学者 Djukić, Vujanović 等将 Noether 理论推广到无限小变换包含广义速度的情形, 从而解决了完整非保守系统的对称性与不变量问题[2]. 我国物理学家李子平 1981 年首先研究了线性非完整约束系统的对称变换, 将 Noether 理论推广到线性非完整系统[3,4]. 其后, 我国年轻力学工作者研究了变质量非完整系统[5], 非线性非完整系统[6—9] 的 Noether 理论, 给出广义准对称变换概念和一般非完整非保守系统的 Noether 理论[10—12], 以及其它各种推广[13—17].

本章基于 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性质, 研究完整约束系统和非完整约束系统的 Noether 理论, 包括 Hamilton 作用量与 Noether 对称性, Lagrange 系统, Hamilton 系统, 广义坐标下一般完整系统, 准坐标下一般完整系统, 有多余坐标完整系统, 变质量完整系统, 事件空间完整系统, 相对运动动力学, Chetaev 型非完整系统以及非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 对称性与守恒量.

§ 3.1　Hamilton 作用量与 Noether 对称性

本节研究 Hamilton 作用量与 Noether 对称性, 包括 Hamilton

作用量的变分，Noether 意义下的对称性，准对称性和广义准对称性，以及对无限小变换生成函数和规范函数的广义 Killing 方程.

3.1.1 Hamilton 作用量的变分

Hamilton作用量定义为系统Lagrange函数 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 在时间区间$[t_1, t_2]$ 上的积分，表为

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t \tag{3.1.1}$$

其中 γ 为某曲线.令

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.1.2}$$

其展开式为

$$t^* = t + \epsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*) = q_s(t) + \epsilon_\alpha \xi_s^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.1.3}$$

它是变换群 G_r 的无限小群变换，其中 $\epsilon_\alpha(\alpha = 1, \cdots, r)$ 为无限小参数，ξ_0^α, ξ_s^α 称为无限小变换的生成元或生成函数.在变换(3.1.2)下，曲线 γ 变换为邻近曲线 γ^*，相应的 Hamilton 作用量变换为

$$S(\gamma^*) = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*)\mathrm{d}t^* \tag{3.1.4}$$

作用量 S 的变分 ΔS 为差 $S(\gamma^*) - S(\gamma)$ 的相对 ϵ 的主线性部分.根据全变分与等时变分之间关系的公式，有[18, 19]

$$\Delta S = \delta S + \dot{S}\Delta t \tag{3.1.5}$$

以及

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\Delta L + L(\Delta t)^{\cdot}]\mathrm{d}t \tag{3.1.6}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)\mathrm{d}t + L\Delta t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

以及

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s \right\} \mathrm{d}t \tag{3.1.8}$$

将式(3.1.3) 代入式(3.1.7),并注意到

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \epsilon_\alpha (\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha) \tag{3.1.9}$$

得到

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_\alpha \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right)\bar{\xi}_s^\alpha \right\} \mathrm{d}t \tag{3.1.10}$$

其中

$$\bar{\xi}_s^\alpha = \xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha \tag{3.1.11}$$

公式(3.1.8),(3.1.10) 就是 Hamilton 作用量变分的基本公式.

3.1.2 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换

首先,研究 Noether 对称变换的定义与判据.

定义 3.1.1 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的不变量,即对每一个无限小变换,始终成立

$$\Delta S = 0 \tag{3.1.12}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 3.1.1 和公式(3.1.8),(3.1.10),得到如下判据.

判据 3.1.1 对于无限小群变换(3.1.2),如果满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta t = 0 \tag{3.1.13}$$

则变换(3.1.2) 为给定系统的对称变换.

判据 3.1.2 如果无限小群变换(3.1.3) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right)\bar{\xi}_s^\alpha = 0 \tag{3.1.14}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

则变换(3.1.3) 为给定系统的对称变换.

利用关系

$$\Delta t = \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \Delta q_s = \varepsilon_\alpha \xi_s^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (3.1.15)$$

并考虑到 Lie 群参数 ε_α 的独立性,则式(3.1.13) 可写成 r 个方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha = 0 \quad (3.1.16)$$

公式(3.1.16) 亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时,式(3.1.16) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0 = 0 \quad (3.1.17)$$

利用判据3.1.1或3.1.2,可以判断Lagrange函数为 L 的力学系统的 Noether 对称性.

其次,研究 Noether 准对称性.

设 L_1 是某个另外的 Lagrange 函数,如果变换(3.1.2) 精确到一阶小量满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L_1(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*)\mathrm{d}t^* \quad (3.1.18)$$

则称为准不变性. 由此确定的 L_1 与 L 有同样的运动方程,则变换(3.1.2) 称为准对称变换. 此时有

$$L_1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(t, \boldsymbol{q}) \quad (3.1.19)$$

将式(3.1.19) 代入式(3.1.18),得到

$$\begin{aligned}\int_{t_1^*}^{t_2^*} &\left[L(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}G(t^*, \boldsymbol{q}^*)\right]\mathrm{d}t^* \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t\end{aligned} \quad (3.1.20)$$

即

$$\begin{aligned}\int_{t_1^*}^{t_2^*} &L(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*)\mathrm{d}t^* - \int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t \\ &= -\int_{t_1^*}^{t_2^*} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*}G(t^*, \boldsymbol{q}^*)\mathrm{d}t^*\end{aligned} \quad (3.1.21)$$

上式左端在变换(3.1.2) 下是一阶小量, 因此, 右端应为同阶小量, 可用 ΔG 代替 G, 而

$$\Delta G(t^*, \boldsymbol{q}^*) = \Delta G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.1.22}$$

于是有

定义 3.1.2 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的准不变量, 即对每一个无限小变换(3.1.2), 始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{3.1.23}$$

其中 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$, 则称变换(3.1.2) 为准对称变换.

由定义 3.1.2 和公式(3.1.8), (3.1.10) 得到如下判据.

判据 3.1.3 对于无限小群变换(3.1.2), 如果满足

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.1.24}$$

则变换(3.1.2) 为给定系统的准对称变换.

判据 3.1.4 如果无限小群变换(3.1.3) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.1.25}$$

其中

$$\Delta G = \epsilon_\alpha G^\alpha \tag{3.1.26}$$

则变换(3.1.3) 为给定系统的准对称变换.

利用关系(3.1.15), (3.1.26), 注意到 ϵ_α 的独立性, 则式(3.1.24) 可写成 r 个方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha = -\dot{G}^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.1.27}$$

公式(3.1.27) 亦可作为系统准对称变换的判据. 函数 $G^\alpha = G^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 称为规范函数. 当 $\alpha = 1$ 时, 式(3.1.27) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0 = -\dot{G} \tag{3.1.28}$$

利用判据3.1.3或3.1.4,可以判断Lagrange函数为L的力学系统的 Noether 准对称性.

最后,研究 Noether 广义准对称变换.

假设作用在系统上的非势广义力为$Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})(s = 1, \cdots, n)$,如果精确到一阶小量满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\mathrm{d}t = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L_1(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*)\mathrm{d}t^* + \int_{t_1}^{t_2} Q_s\delta q_s\mathrm{d}t \tag{3.1.29}$$

则称作用量是无限小变换(3.1.2)的广义准对称不变量.

定义 3.1.3[11,12] 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的广义准不变量,即对每一个无限小变换(3.1.2),始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_s\delta q_s\right|\mathrm{d}t \tag{3.1.30}$$

其中$Q_s\delta q_s$为系统非势广义力的虚功之和,则称变换(3.1.2)为广义准对称变换.

由定义 3.1.3 和公式(3.1.8),(3.1.10) 得到如下判据.

判据 3.1.5 对于无限小群变换(3.1.2),如果满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta\dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + Q_s(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.1.31}$$

则变换(3.1.2)为给定系统的广义准对称变换.

判据 3.1.6[11,12] 如果无限小群变换(3.1.3)满足r个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + Q_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.1.32}$$

则变换(3.1.3)为给定系统的广义准对称变换.

利用关系(3.1.15),(3.1.26),注意到 ε_α 的独立性,则式(3.1.31)可写成 r 个方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha+\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot\xi_s^\alpha+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot q_s\right)\dot\xi_0^\alpha+Q_s(\xi_s^\alpha-\dot q_s\xi_0^\alpha)=-\dot G^\alpha$$

$$(\alpha=1,\cdots,r)\quad(3.1.33)$$

公式(3.1.33)亦可作为系统广义准对称变换的判据.当 $\alpha=1$ 时,式(3.1.33)给出 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot q_s\right)\dot\xi_0+Q_s(\xi_s-\dot q_s\xi_0)=-\dot G \tag{3.1.34}$$

文献[20]称式(3.1.34)为广义 Noether-Bessel-Hagen 方程.

利用判据 3.1.5 或 3.1.6,可以判断 Lagrange 函数 L,广义力 Q_s 的完整非保守系统的广义 Noether 对称性.

3.1.3 Killing 方程

无限小群变换(3.1.3)中的函数 $\xi_0^\alpha=\xi_0^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 和 $\xi_s^\alpha=\xi_s^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 称为生成函数,而式(3.1.25),(3.1.32)中的函数 $G^\alpha=G^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 称为规范函数.利用 Noether 理论寻求力学系统的守恒量,关键在于找到这些生成函数和规范函数.对于 Lagrange 系统,可利用判据 3.1.1 和 3.1.2 或式(3.1.16)来判断给定变换的 Noether 对称性,可利用判据 3.1.3 和 3.1.4 或式(3.1.27)来判断给定系统的 Noether 准对称性;反之,可利用这些判据来求变换的生成函数和规范函数.对于完整非保守系统,可利用判据 3.1.5 和 3.1.6 或式(3.1.33)来判断给定系统的 Noether 广义准对称性;反之,可利用这些判据找到变换的生成函数和规范函数.所有这些判据都是 r 个关系,而待求函数是 $(n+1)r$ 个或 $(n+2)r$ 个,因此,有时不便应用.通常将判据 3.1.2,3.1.4,3.1.6 的方程(3.1.14),(3.1.25),(3.1.32)展开并分解为对 $\xi_0^\alpha,\xi_s^\alpha,G^\alpha$ 的一阶偏微分方程组.这些偏微分方程组称为 Killing 方程或广义 Killing 方程.解 Killing 方程或广义 Killing 方程,便有可能找到这些生成函数和规

范函数.

将式(3.1.14)展开,得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)\xi_0^\alpha+L\left(\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left|\frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k-\ddot{q}_s\xi_0^\alpha\right.$$

$$\left.-\dot{q}_s\left(\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right)\right|+\frac{\partial L}{\partial q_s}(\xi_s^\alpha-\dot{q}_s\xi_0^\alpha)=0$$

分开含$\ddot{q}_k$和不含$\ddot{q}_k$的项,整理得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha+\dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha+\left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\ +\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=0\\ \left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k}=0\end{cases}\tag{3.1.35}$$

$$(k,s=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,r)$$

方程(3.1.35)是对$(n+1)r$个未知函数ξ_0^α, $\xi_s^\alpha(s=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,r)$的$(n+1)r$个一阶偏微分方程,称为Killing方程.给定系统的Lagrange函数L,便有可能由这些方程求出未知生成函数.

类似地,由式(3.1.25)得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha+\dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha+\left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\ +\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t}-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\\ \left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k}=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\end{cases}\tag{3.1.36}$$

$$(k,s=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,r)$$

由式(3.1.32)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) \\ + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + Q_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) \\ = -\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ \left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k} + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k} = -\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}_k} \end{cases} \tag{3.1.37}$$

$$(k, s = 1, \cdots, n; \quad \alpha = 1, \cdots, r)$$

方程(3.1.36),(3.1.37)称为广义Killing方程.它们是对于$(n+2)r$个未知函数$\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha, G^\alpha$的$(n+1)r$个一阶偏微分方程.给定Lagrange系统的Lagrange函数L和规范函数G^α,可由方程(3.1.36)求得Lagrange系统准对称变换的生成函数$\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$.给定完整非保守系统的Lagrange函数$L$和非势广义力$Q_s$以及规范函数$G^\alpha$,可由方程(3.1.37)求得完整非保守系统广义准对称变换的生成函数ξ_0^α, ξ_s^α.

3.1.4 算　例

例1　数学摆小振动的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}^2 - k^2\varphi^2) \tag{1}$$

其中φ为摆角,m为摆的质量,l为摆长,且

$$k^2 = \frac{g}{l} \tag{2}$$

取无限小群变换为

$$t^* = t + \varepsilon, \varphi^*(t^*) = \varphi(t) \tag{3}$$

有

$$\Delta t = \varepsilon, \Delta\varphi = 0, \Delta\dot{\varphi} = (\Delta\varphi)^{\cdot} - \dot{\varphi}(\Delta t)^{\cdot} = 0 \tag{4}$$

此时式(3.1.13)显然成立,故时间平移变换(3)是系统的Noether对称变换.

例 2　质量为 m 的质点在均匀力场中沿直线运动，Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx \tag{1}$$

其中 m, k 为常数.

取坐标平移无限小变换

$$t^* = t, \qquad x^* = x + \varepsilon \tag{2}$$

此时有

$$\Delta t = 0, \Delta x = \varepsilon, \Delta \dot{x} = 0 \tag{3}$$

式(3.1.24) 给出

$$\varepsilon k = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{4}$$

即

$$\Delta G = -\varepsilon k t \tag{5}$$

因此，坐标平移变换(2) 是 Noether 准对称变换.

例 3　Emden 方程为

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0 \tag{1}$$

试建立 Killing 方程并求解.

首先，将 Emden 方程(1) 化成 Lagrange 系统，其 Lagrange 函数为

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6\right) \tag{2}$$

取生成函数为

$$\xi_0 = \xi_0(t, x), \xi = \xi(t, x) \tag{3}$$

则 Killing 方程(3.1.35) 第二组自动成立，而第一组给出为

$$\begin{aligned} &2t\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6\right)\xi_0 - t^2 x^5 \xi \\ &- t^2\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}x^6\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x}\dot{x}\right) \\ &+ t^2 \dot{x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

由方程(4) 中分出不含$\dot{x}$, 含$\dot{x}$, $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$ 的项, 并令分别为零, 得到

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}\xi_0 x - t\xi - \frac{1}{6}tx\frac{\partial \xi_0}{\partial t} = 0 \\ -\frac{1}{6}x^6\frac{\partial \xi_0}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0 \\ \xi_0 - \frac{1}{2}t\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + t\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \xi_0}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\xi_0 x + t\xi + \frac{1}{6}tx\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \xi_0 - \frac{1}{2}t\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\mathrm{d}t} + t\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

方程(6) 有解

$$\xi_0 = t, \xi = -\frac{1}{2}x \tag{7}$$

由此生成的无限小变换是系统的 Noether 对称变换.

其次, 将 Emden 方程当作一个完整非保守系统的方程, 其 Lagrange 函数和非势广义力分别为

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{6}x^6, Q = -\frac{2}{t}\dot{x} \tag{8}$$

令

$$\xi_0 = \xi_0(t, x), \xi = \xi(t, x) \tag{9}$$

广义 Killing 方程(3.1.37) 给出为

$$\begin{aligned} &-x^5\xi - \left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{6}x^6\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x}\dot{x}\right) \\ &+\dot{x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x}\right) - \frac{2}{t}\dot{x}(\xi - \dot{x}\xi_0) = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial x}\dot{x} \end{aligned} \tag{10}$$

分出不含$\dot{x}$, 含$\dot{x}$, $\dot{x}^2$, $\dot{x}^3$ 的项, 并令分别为零, 得到

$$\begin{cases} -x^5\xi - \dfrac{1}{6}x^6\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} = -\dfrac{\partial G}{\partial t} \\ -\dfrac{1}{6}x^6\dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} + \dfrac{\partial\xi}{\partial x} - \dfrac{2}{t}\xi = -\dfrac{\partial G}{\partial x} \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{2}{t}\xi_0 = 0 \\ \dfrac{\partial\xi_0}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{11}$$

方程(11) 有解

$$\xi_0 = -t^3, \xi = \frac{1}{2}t^2x, G = 0 \tag{12}$$

由此生成的无限小变换是系统的 Noether 广义准对称变换.

§3.2 Lagrange 系统的 Noether 理论

本节研究 Lagrange 系统的 Noether 理论, 包括 Lagrange 系统的运动方程, 它的 Noether 定理, 它的 Noether 逆定理, 以及力学中基本守恒律的推导等.

3.2.1 Lagrange 系统的运动方程

如果一个有 n 个自由度的完整力学系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{3.2.1}$$

则称系统为 Lagrange 系统.

Lagrange 系统, 如在 § 1.2 中详细讨论的, 可分成三类:

- 完整保守系统
- 广义力有广义势的系统
- Lagrange 力学逆问题系统

3.2.2 Lagrange 系统的 Noether 定理

对于 Lagrange 系统,如果能找到对称变换或准对称变换,便可由 Noether 定理求得与之相应的守恒量(第一积分).

定理 3.2.1[12] 假定给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3) 是 Lagrange 系统的对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.2.2)$$

证明 因给定的无限小变换是系统的对称变换,故按定义 3.1.1 有

$$\Delta S = 0$$

考虑到式(3.1.10), ϵ_α 的独立性以及积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha = 0$$

对于 Lagrange 系统有方程(3.2.1),因此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) = 0$$

积分之,便得守恒量(3.2.2).证毕.

定理 3.2.2[12] 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3) 是 Lagrange 系统的准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = C_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.2.3)$$

证明 因给定的无限小变换是系统的准对称变换,故按定义 3.1.2 有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t$$

考虑到式(3.1.10), ϵ_α 的独立性以及积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha+G^\alpha\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha=0$$

对于 Lagrange 系统有运动方程(3.2.1),因此得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha+G^\alpha\right)=0$$

积分之,便得守恒量(3.2.3).证毕.

定理 3.2.1 和定理 3.2.2 称为 Noether 定理.定理指出,对 Lagrange 系统如能找到对称变换或准对称变换,便可求出系统的第一积分.

在已知系统 Lagrange 函数时,为寻求系统的对称变换,可利用公式(3.1.13) 或(3.1.16),或利用 Killing 方程(3.1.35);为寻求系统的准对称变换,可利用公式(3.1.24) 或(3.1.27),或利用广义 Killing 方程(3.1.36).

3.2.3 Lagrange 系统的 Noether 逆定理

对于 Lagrange 系统,如果已知系统的第一积分,便可由 Noether 逆定理找到相应的对称变换或准对称变换.

研究 Lagrange 函数为 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 的完整力学系统.假设 Hess 行列式

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{3.2.4}$$

则存在逆矩阵$(\tilde{h}_{sk})$,使得

$$\tilde{h}_{sk}h_{kl}=\delta_{sl}\qquad(s,l=1,\cdots,n) \tag{3.2.5}$$

提出如下问题:假设已知 Lagrange 系统的 r 个独立的第一积分

$$I^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=c_\alpha\qquad(\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.6}$$

需要求出相应的无限小变换(3.1.3),即由积分(3.2.6) 找到相应的生成函数 $\xi_0^\alpha,\xi_s^\alpha$,使其为对称变换.

为解上述问题,将 Lagrange 方程(3.2.1) 乘以 $\bar{\xi}_s^\alpha$ 并对 s 求和,得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\bar{\xi}_s^{\alpha}=0 \tag{3.2.7}$$

将式(3.2.6) 对 t 求导数,并将结果与式(3.2.7) 相加,展开得

$$\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s$$

$$-\left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\right\}\bar{\xi}_s^{\alpha}=0 \tag{3.2.8}$$

因沿任意轨道所有 $\ddot{q}_k$ 的系数应为零,故由式(3.2.8) 得

$$\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\bar{\xi}_s^{\alpha}=0 \quad (k=1,\cdots,n) \tag{3.2.9}$$

相对 $\bar{\xi}_s^{\alpha}$ 解代数方程(3.2.9),得

$$\bar{\xi}_s^{\alpha}=\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.10}$$

为使变换为对称变换,需令积分(3.2.6) 等于守恒量(3.2.2),即

$$L\xi_0^{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}=I^{\alpha} \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.11}$$

于是有

$$\xi_0^{\alpha}=\frac{1}{L}\left(I^{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}\right) \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.12}$$

这样,由方程(3.2.10),(3.2.12),在已知 $I^{\alpha}=c_{\alpha}$ 下,可找到相应的无限小变换.于是得到

定理3.2.3 如果已知 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分(3.2.6),那么系统存在由式(3.1.3),(3.2.10) 和(3.2.12) 确定的唯一无限小变换是系统的对称变换.

类似地,为使变换为准对称的,需令

$$L\xi_0^{\alpha}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}+G^{\alpha}=I^{\alpha} \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.13}$$

于是有

$$\xi_0^{\alpha}=\frac{1}{L}\left(I^{\alpha}-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_0^{\alpha}-G^{\alpha}\right) \quad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.2.14}$$

由函数 $G^{\alpha}=G^{\alpha}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 的任意性知,对应的无限小变换不是唯一的.于是得到

定理 3.2.4　如果已知 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分(3.2.6)，那么系统存在由式(3.1.3)，(3.2.10) 和(3.2.14)确定的无限小变换是系统的准对称变换.

定理 3.2.3 和定理 3.2.4 称为 Lagrange 系统的 Noether 逆定理.Noether 逆定理指出，对 Lagrange 系统可由已知第一积分找到相应的对称变换或准对称变换.

3.2.4　力学中基本守恒定律的推导

利用 Noether 定理可以导出 Lagrange 系统的基本守恒定律——动量守恒律、动量矩守恒律和机械能守恒律.

假设力学系统的 Lagrange 函数不依赖于时间 t，即 $L = L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$.Lagrange 函数 L 对 t 的不依赖性表明，Hamilton 作用量(3.1.1) 相对于无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon, q_s^*(t^*) = q_s(t) \qquad (3.2.15)$$
$$(s = 1, \cdots, n)$$

是不变的.实际上，对称变换判据 3.1.1 显然成立，有

$$\xi_0 = 1, \bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s = -\dot{q}_s \qquad (3.2.16)$$

Noether 定理 3.2.1 的积分(3.2.2) 给出

$$I = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = \text{const.} \qquad (3.2.17)$$

这个积分就是广义能量积分，或称 Jacobi-Painlevé 积分.特别地，当动能为广义速度的二次型时，上述积分为机械能守恒律.

假设力学系统的 Lagrange 函数 L 不依赖于某些广义坐标 q_1，$q_2, \cdots, q_m$，即这些坐标为循环坐标.此时，无限小变换

$$t^* = t, q_\alpha^*(t^*) = q_\alpha(t) + \varepsilon_\alpha, q_\beta^*(t^*) = q_\beta(t)$$
$$(\alpha = 1, \cdots, m; \beta = m+1, \cdots, n) \qquad (3.2.18)$$

使 Hamilton 作用量(3.1.1) 保持不变.实际上，有生成函数

$$\xi_0 = 0, \bar{\xi}_\alpha = \xi_\alpha - \dot{q}_\alpha \xi_0 = 1, \bar{\xi}_\beta = 0 \qquad (3.2.19)$$

而对称变换判据 3.1.1 显然成立.Noether 定理 3.2.1 的积分(3.2.2) 给出

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, m) \tag{3.2.20}$$

这些积分就是循环积分,表示系统的广义动量守恒,可以代表动量守恒律或动量矩守恒律.

3.2.5 算 例

例 1 平面 Kepler 问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}, (q_1^2 + q_2^2)^{1/2} \neq 0$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,研究 Noether 定理的应用.第一步,求系统的准对称变换.将 L 代入广义 Killing 方程(3.1.36),得到如下三个方程

$$-\mu({q_1}^2 + {q_2}^2)^{-3/2}(q_1\xi_1 + q_2\xi_2) + \left[\mu({q_1}^2 + {q_2}^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\right]$$
$$\times\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_2}\dot{q}_2\right) + \dot{q}_1\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)$$
$$+ \dot{q}_2\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2}\dot{q}_2\right) = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_1}\dot{q}_1 - \frac{\partial G}{\partial q_2}\dot{q}_2 \tag{1}$$

$$\left[\mu({q_1}^2 + {q_2}^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}({\dot{q}_1}^2 + {\dot{q}_2}^2)\right]\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_1\frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_1}$$
$$= -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_1} \tag{2}$$

$$\left[\mu({q_1}^2 + {q_2}^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}({\dot{q}_1}^2 + {\dot{q}_2}^2)\right]\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_1\frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_2} + \dot{q}_2\frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_2}$$
$$= -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_2} \tag{3}$$

假设生成函数有形式

$$\begin{cases} \xi_0 = c_0 \\ \xi_1 = g_1(\boldsymbol{q}) + f_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + f_2(\boldsymbol{q})\dot{q}_2 \\ \xi_2 = g_2(\boldsymbol{q}) + f_3(\boldsymbol{q})\dot{q}_1 + f_4(\boldsymbol{q})\dot{q}_2 \end{cases} \tag{4}$$

将式(4) 代入方程(2),(3),得

$$\dot{q}_1 f_1 + \dot{q}_2 f_3 = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_1}, \dot{q}_1 f_2 + \dot{q}_2 f_4 = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_2}$$

于是有

$$G = -\frac{1}{2}\dot{q}_1^2 f_1 - \dot{q}_1\dot{q}_2 f_3 - \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 f_4 + f_6(\boldsymbol{q}), f_2 = f_3 \quad (5)$$

将式(4),(5)代入方程(1),得

$$\begin{aligned}
&-\mu(q_1^2 + {q_2}^2)^{-3/2}[q_1(g_1 + f_1\dot{q}_1 + f_2\dot{q}_2) \\
&+ q_2(g_2 + f_3\dot{q}_1 + f_4\dot{q}_2)] \\
&+ \dot{q}_1\left\{\frac{\partial g_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\dot{q}_2\dot{q}_1\right. \\
&\left.+ \frac{\partial g_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\dot{q}_2^2\right\} \\
&+ \dot{q}_2\left\{\frac{\partial g_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_3}{\partial q_1}\dot{q}_1^2 + \frac{\partial f_4}{\partial q_1}\dot{q}_1\dot{q}_2\right. \\
&\left.+ \frac{\partial g_2}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}\dot{q}_2\dot{q}_1 + \frac{\partial f_4}{\partial q_2}{\dot{q}_2}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}_1^3\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \dot{q}_1^2\dot{q}_2\frac{\partial f_3}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\dot{q}_1{\dot{q}_2}^2\frac{\partial f_4}{\partial q_1} - \frac{\partial f_6}{\partial q_1}\dot{q}_1 \\
&+ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2\dot{q}_2\frac{\partial f_1}{\partial q_2} + \dot{q}_1\dot{q}_2^2\frac{\partial f_3}{\partial q_2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^3\frac{\partial f_4}{\partial q_2} - \frac{\partial f_6}{\partial q_2}\dot{q}_2
\end{aligned}$$

分开含$\dot{q}_1^3, \dot{q}_1^2\dot{q}_2, \dot{q}_2^3, \dot{q}_1^2, \dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_2^2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$的项以及不含$\dot{\boldsymbol{q}}$的项,得

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial q_1} \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial q_2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_2} + \frac{\partial f_4}{\partial q_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial q_1} \quad (8)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial f_4}{\partial q_2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial q_1} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial q_2} + \frac{\partial g_2}{\partial q_1} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial q_2} = 0 \quad (12)$$

$$-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}(q_1f_1+q_2f_3)=-\frac{\partial f_6}{\partial q_1} \tag{13}$$

$$-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}(q_1f_2+q_2f_4)=-\frac{\partial f_6}{\partial q_2} \tag{14}$$

$$-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}(q_1g_1+q_2g_2)=0 \tag{15}$$

由式(10),(11),(12),(15) 得

$$g_1=-c_1q_2,\quad g_2=c_1q_1 \tag{16}$$

由式(6) 知

$$f_1=f_1(q_2)$$

由式(7),(8),(9) 得

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial q_1\partial q_2}=-\frac{\partial^2 f_1}{\partial {q_2}^2}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_4}{\partial {q_1}^2}=c_2$$

于是有

$$\begin{cases} f_1=-c_2{q_2}^2-2c_3q_2+c_7 \\ f_2=c_2q_1q_2+c_3q_1+c_4q_2+c_5=f_3 \\ f_4=-c_2{q_1}^2-2c_4q_1+c_9 \end{cases} \tag{17}$$

由式(13),(14) 得

$$-\frac{\partial^2 f_6}{\partial q_1\partial q_2}=3\mu(q_1^2+q_2^2)^{-5/2}q_2(q_1f_1+q_2f_3)$$

$$-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}\left(q_1\frac{\partial f_1}{\partial q_2}+f_3+q_2\frac{\partial f_3}{\partial q_2}\right)$$

$$=3\mu({q_1}^2+{q_2}^2)^{-5/2}q_1(q_1f_2+q_2f_4)$$

$$-\mu({q_1}^2+{q_2}^2)^{-3/2}\left(f_2+q_1\frac{\partial f_2}{\partial q_1}+q_2\frac{\partial f_4}{\partial q_1}\right)$$

将式(17) 代入上式并比较 q 的同次幂系数,得

$$c_5=0,c_9=c_7 \tag{18}$$

于是得

$$\xi_0=c_0$$

$$\begin{cases} \xi_1 = -c_1 q_2 + (-c_2 q_2^2 - 2c_3 q_2 + c_7)\dot{q}_1 \\ \quad + (c_2 q_1 q_2 + c_3 q_1 + c_4 q_2)\dot{q}_2 \\ \xi_2 = c_1 q_1 + (c_2 q_1 q_2 + c_3 q_1 + c_4 q_2)\dot{q}_1 \\ \quad + (-c_2 q_1^2 - 2c_4 q_1 + c_7)\dot{q}_2 \end{cases} \tag{19}$$

由式(13),(14) 积分得

$$f_6 = \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}(c_4 q_1 + c_3 q_2 - c_7) \tag{20}$$

由式(5) 得

$$\begin{aligned} G = & -\frac{1}{2}\dot{q}_1^2(-c_2 q_2^2 - 2c_3 q_2 + c_7) \\ & - \dot{q}_1 \dot{q}_2(c_2 q_1 q_2 + c_3 q_1 + c_4 q_2) \\ & - \frac{1}{2}\dot{q}_2^2(-c_2 q_1^2 - 2c_4 q_1 + c_7) \\ & + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}(c_4 q_1 + c_3 q_2 - c_7) \end{aligned} \tag{21}$$

式(19),(21) 就是一般形式的生成函数和规范函数. 当 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_7$ 取特殊值时,可以得到以下 6 种对称性

(1) $c_0 = 1, c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0, G = 0 \tag{22}$$

(2) $c_1 = 1, c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -q_2, \xi_2 = q_1, G = 0 \tag{23}$$

(3) $c_2 = 1, c_0 = c_1 = c_3 = c_4 = c_7 = 0$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -\dot{q}_2^2 \dot{q}_1 + q_1 q_2 \dot{q}_2, \xi_2 = q_1 q_2 \dot{q}_1 - q_1^2 \dot{q}_2 \tag{24}$$

$$G = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 q_1^2 - q_1 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2$$

(4) $c_3 = 1, c_0 = c_1 = c_2 = c_4 = c_7 = 0$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -2q_2 \dot{q}_1 + q_1 \dot{q}_2, \xi_2 = q_1 \dot{q}_1$$

$$G = \dot{q}_1^2 q_2 - q_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} \tag{25}$$

(5) $c_4 = 1, c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_7 = 0$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_2 \dot{q}_2, \xi_2 = q_2 \dot{q}_1 - 2q_1 \dot{q}_2$$

$$G = \dot{q}_2^2 q_1 - q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} \tag{26}$$

(6) $c_7 = 1, c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2$$

$$G = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} \tag{27}$$

其中式(22),(23)对应系统的对称变换,式(24)—(27)对应系统的准对称变换.

第二步,利用 Noether 定理求相应的守恒量.对应于式(22)的对称变换,Noether 定理 3.2.1 的积分(3.2.2)给出为

$$I_1 = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} = \text{const.} \tag{28}$$

它是系统的能量积分.对应于式(23)的对称变换,积分(3.2.2)给出为

$$I_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\xi_s = -\dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1 = \text{const.} \tag{29}$$

它是动量矩积分.对应于式(24)的准对称变换,Noether 定理 3.2.3 的积分(3.2.3)给出为

$$I_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\xi_s + G = -\frac{1}{2}q_2^2\,\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}q_1{}^2\,\dot{q}_2^2 + q_1 q_2\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 = \text{const.} \tag{30}$$

对应于式(25)的准对称变换,积分(3.2.3)给出为

$$I_4 = \mu q_2(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} - q_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_2(q_1\,\dot{q}_1 + q_2\,\dot{q}_2) = \text{const.} \tag{31}$$

对应于式(26)的准对称变换,积分(3.2.3)给出为

$$I_5 = \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} - q_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_1(q_1\,\dot{q}_1 + q_2\,\dot{q}_2) = \text{const.} \tag{32}$$

积分 I_4, I_5 即所谓 Runge-Lenz 向量分量的守恒量.对应于式(27)的准对称变换,积分(3.2.3)给出为

$$I_6 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \mu(q_1{}^2 + q_2{}^2)^{-1/2} = \text{const.} \tag{33}$$

上述 6 个积分不全是独立的.实际上,有

$$I_6 = -I_1, I_3 = -\frac{1}{2}I_2^2 \tag{34}$$

其次,研究 Noether 逆定理的应用.假设系统有积分(32),来求与之相应的 Noether 对称性.由 L 的表达式得

$$h_{11} = h_{22} = 1, h_{12} = h_{21} = 0$$

于是

$$\tilde{h}_{11} = \tilde{h}_{22} = 1, \tilde{h}_{12} = \tilde{h}_{21} = 0$$

式(3.2.10),(3.2.14)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = q_2\,\dot{q}_2, \bar{\xi}_2 = -2q_1\,\dot{q}_2 + \dot{q}_1 q_2 \\ \xi_0 = \dfrac{1}{L}[\mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} + q_1\,\dot{q}_2^2 - q_2\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 - G] \end{cases} \tag{35}$$

这就是 Noether 准对称变换生成函数的一般形式.当取

$$G = 0 \tag{36}$$

则有

$$\xi_0 = \frac{1}{L}[\mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} + q_1\,\dot{q}_2^2 - q_2\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2] \tag{37}$$

若取

$$G = \mu q_1(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} + q_1\,\dot{q}_2^2 - q_2\,\dot{q}_1\,\dot{q}_2 \tag{38}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_2\,\dot{q}_2, \xi_2 = -2q_1\,\dot{q}_2 + \dot{q}_1 q_2 \tag{39}$$

例 2 Emden 方程.

Emden 方程有形式

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0 \tag{1}$$

它可化成 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\,\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right) \tag{2}$$

试研究它的 Noether 对称性与守恒量.

首先,应用 Noether 定理由对称性求守恒量.在 § 3.1 例 3 中

已求得 Emden 方程的 Noether 对称变换的生成函数为

$$\xi_0 = t, \xi = -\frac{1}{2}q \tag{3}$$

Noether 定理 3.2.1 的守恒量(3.2.2) 给出为

$$I = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right)t + t^2\dot{q}\left(-\frac{1}{2}q - \dot{q}t\right)$$

$$= -\frac{1}{2}t^3\dot{q}^2 - \frac{1}{2}t^2 q\dot{q} - \frac{1}{6}t^3 q^6 = \text{const.} \tag{4}$$

其次,应用 Noether 逆定理由已知积分求出相应的 Noether 对称性.假设系统有积分(4).由式(2) 求得

$$h_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = t^2, \tilde{h}_{11} = \frac{1}{t^2} \tag{5}$$

公式(3.2.10),(3.2.14)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \tilde{h}_{11}\dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}} = -t\dot{q} - \dfrac{1}{2}q \\ \xi_0 = \dfrac{1}{L}\left[-\dfrac{1}{2}t^3\dot{q}^2 - \dfrac{1}{2}t^2 q\dot{q} - \dfrac{1}{6}t^3 q^6 + t^2\dot{q}\left(t\dot{q} + \dfrac{1}{2}q\right) - G\right] \\ \quad = t - \dfrac{G}{L} \end{cases} \tag{6}$$

这就是 Noether 准对称变换生成函数的一般形式.若取

$$G = 0 \tag{7}$$

则有

$$\xi_0 = t, \xi = -\frac{1}{2}q \tag{8}$$

若取

$$G = t^3\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right) \tag{9}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi = -\frac{1}{2}q - t\dot{q} \tag{10}$$

§3.3 Hamilton 系统的 Noether 理论

本节讨论 Hamilton 系统的 Noether 对称性与守恒量，包括相空间中 Hamilton 作用量的变分，相空间中 Noether 对称变换，准对称变换和广义准对称变换，Killing 方程，Noether 定理，以及 Noether 逆定理等.

3.3.1 相空间中 Hamilton 作用量的变分

相空间中 Hamilton 作用量表为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [\, p_s \dot{q}_s - H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \,] \mathrm{d}t \tag{3.3.1}$$

令

$$t^* = t + \Delta t, q_s{}^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s, p_s^*(t^*) = p_s(t) + \Delta p_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.3.2}$$

其展开式为[4]

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon_\alpha \xi_s^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \\ p_s^*(t^*) = p_s(t) + \varepsilon_\alpha \eta_s^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \end{cases} \tag{3.3.3}$$

它是变换群 G_r 的无限小群变换，其中 $\varepsilon_\alpha (\alpha = 1, \cdots, r)$ 为无限小参数，ξ_0^α，ξ_s^α，η_s^α 称为无限小变换的生成元或生成函数. Hamilton 作用量(3.3.1) 的变分为

$$\begin{aligned} \Delta S = \delta S + \dot{S}\Delta t &= \int_{t_1}^{t_2} \left(p_s \delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \delta p_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\delta p_s \right) \mathrm{d}t \\ &\quad + (p_s \dot{q}_s - H)\Delta t \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\, p_s \delta q_s + (p_s \dot{q}_s - H)\Delta t \,] \right. \\ &\quad \left. + \left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \right)\delta q_s + \left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right)\delta p_s \right\} \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

以及

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left| \Delta(p_s \dot{q}_s - H) + (p_s \dot{q}_s - H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) \right| \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left| p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s} \Delta q_s \right.$$

$$\left. - \frac{\partial H}{\partial p_s} \Delta p_s + (p_s \dot{q}_s - H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) \right| \mathrm{d}t \tag{3.3.5}$$

注意到

$$\begin{cases} \Delta t = \varepsilon_\alpha \xi_0{}^\alpha \\ \delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \varepsilon_\alpha (\xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha) \\ \delta p_s = \Delta p_s - \dot{p}_s \Delta t = \varepsilon_\alpha (\eta_s^\alpha - \dot{p}_s \xi_0^\alpha) \end{cases} \tag{3.3.6}$$

则式(3.3.4) 可表为

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_\alpha \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [p_s \bar{\xi}_s^\alpha + (p_s \dot{q}_s - H) \xi_0{}^\alpha] + \left(- \dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} \right) \bar{\xi}_s^\alpha \right.$$

$$\left. + \left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s} \right) \bar{\eta}_s^\alpha \right| \mathrm{d}t \tag{3.3.7}$$

其中

$$\bar{\xi}_s^\alpha = \xi_s^\alpha - \dot{q}_s \xi_0^\alpha, \bar{\eta}_s^\alpha = \eta_s^\alpha - \dot{p}_s \xi_0^\alpha \tag{3.3.8}$$

公式(3.3.5),(3.3.7) 就是相空间中 Hamilton 作用量变分的基本公式.

3.3.2 相空间中 Noether 对称变换,准对称变换和广义准对称变换

首先,研究相空间中 Noether 对称变换的定义和判据.

定义 3.3.1 如果 Hamilton 作用量(3.3.1) 是在相空间中无限小变换式(3.3.3) 下的不变量,即对每一个无限小变换,始终成立

$$\Delta S = 0 \tag{3.3.9}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 3.3.1 和公式(3.3.5),(3.3.7) 得到如下判据

判据 3.3.1 对于无限小群变换(3.3.2),如果满足

$$p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial t} \Delta t$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s+(p_s\dot{q}_s-H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)=0 \tag{3.3.10}$$

则变换(3.3.2)是给定系统的对称变换.

判据 3.3.2 如果无限小群变换(3.3.3)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_s\bar{\xi}_s^\alpha+(p_s\dot{q}_s-H)\xi_0^\alpha]+\left(-\dot{p}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha+\left(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)\bar{\eta}_s^\alpha=0$$
$$(\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.3.11}$$

则变换(3.3.3)是给定系统的对称变换.

考虑到

$$\Delta\dot{q}_s=\epsilon_\alpha(\dot{\xi}_s^\alpha-\dot{q}_s\dot{\xi}_0^\alpha) \tag{3.3.12}$$
$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s}\qquad(s=1,\cdots,n)$$

及 ϵ_α 的独立性,则式(3.3.10)可写成 r 个方程

$$p_s\dot{\xi}_s^\alpha-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^\alpha-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^\alpha-H\dot{\xi}_0^\alpha=0\quad(\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.3.13}$$

公式(3.3.13)亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\alpha=1$ 时,式(3.3.13)给出 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\dot{\xi}_0=0 \tag{3.3.14}$$

利用判据 3.3.1 或 3.3.2,可以判断具有 Hamilton 函数为 H 的力学系统的 Noether 对称性.

其次,研究 Noether 准对称变换.类似于 §3.1 中的讨论,有

定义 3.3.2 如果相空间中 Hamilton 作用量是无限小群变换的准不变量,即对每一个无限小变换(3.3.2),始终成立

$$\Delta S=-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{3.3.15}$$

其中 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$,则变换(3.3.2)为准对称变换.

判据 3.3.3 对于无限小群变换(3.3.2),如果满足

$$p_s\Delta\dot{q}_s+\dot{q}_s\Delta p-\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t-\frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s$$

$$+ (p_s \dot{q}_s - H) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \qquad (3.3.16)$$

则变换(3.3.2)为给定系统的准对称变换.

判据 3.3.4 如果无限小群变换(3.3.3)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_s \bar{\xi}_s^\alpha + (p_s \dot{q}_s - H)\xi_0^\alpha] + \left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha + \left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\right)\bar{\eta}_s^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \ (\alpha = 1, \cdots, r) \qquad (3.3.17)$$

其中

$$\Delta G = \varepsilon_\alpha G^\alpha \qquad (3.3.18)$$

则变换(3.3.3)为给定系统的准对称变换.

利用关系(3.3.6), (3.3.12), 注意到 ε_α 的独立性, 则式(3.3.16)可写成 r 个方程

$$p_s \dot{\xi}_s^\alpha - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^\alpha - H\dot{\xi}_0^\alpha = -\dot{G}^\alpha (\alpha = 1, \cdots, r) \qquad (3.3.19)$$

其中 $G^\alpha = G^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 称为规范函数. 公式(3.3.19)亦可作为系统准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时, 式(3.3.19)给出 Noether 等式

$$p_s \dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 = -\dot{G} \qquad (3.3.20)$$

利用判据 3.3.3 或 3.3.4, 可以判断 Hamilton 函数为 H 的力学系统的 Noether 准对称性.

最后, 研究 Noether 广义准对称变换. 类似于 § 3.1 中的讨论, 有

定义 3.3.3 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的广义准不变量, 即对每一个无限小变换(3.3.2), 始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_s \delta q_s \right| \mathrm{d}t \qquad (3.3.21)$$

其中 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为系统非势广义力, 则变换(3.3.2)为广义准对称变换.

判据 3.3.5 对于无限小群变换(3.3.2), 如果满足条件

$$p_s \Delta \dot{q}_s + \dot{q}_s \Delta p_s - \frac{\partial H}{\partial t}\Delta t - \frac{\partial H}{\partial q_s}\Delta q_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\Delta p_s$$

$$+(p_s\dot{q}_s - H)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + Q_s(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.3.22}$$

则变换(3.3.2)为给定系统的广义准对称变换.

判据 3.3.6 如果无限小群变换(3.3.3)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[p_s\bar{\xi}_s^\alpha + (p_s\dot{q}_s - H)\xi_0^\alpha] + \left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha$$
$$+\left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\right)\bar{\eta}_s^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \qquad (\alpha = 1,\cdots,r) \tag{3.3.23}$$

则变换(3.3.3)为给定系统的广义准对称变换.

式(3.3.22)可写成 r 个方程

$$p_s\dot{\xi}_s^\alpha - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0^\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^\alpha - H\dot{\xi}_0^\alpha + Q_s(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = -\dot{G}^\alpha$$
$$(\alpha = 1,\cdots,r) \tag{3.3.24}$$

公式(3.3.24)亦可作为系统广义准对称变换的判据.当 $\alpha = 1$ 时,式(3.3.24)给出 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 + Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G} \tag{3.3.25}$$

利用判据3.3.5或3.3.6,可以判断 Hamilton 函数为 H,非势广义力为 Q_s 的完整非保守系统的 Noether 广义准对称性.

3.3.3 Killing 方程

由判据(3.3.10),(3.3.11)或式(3.3.13)来找到无限小对称变换生成函数 ξ_0^α, ξ_s^α, η_s^α,有时不便应用.通常将式(3.3.13)展开,用$\frac{\partial H}{\partial p_k}$代替$\dot{q}_k$,分出含$\dot{p}_k$的项和不含$\dot{p}_k$的项,并令分别为零,得到 Killing 方程

$$\begin{cases} p_s\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial p_k} - H\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial p_k} = 0 & (k = 1,\cdots,n) \\ p_s\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial t} + p_s\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} - \dfrac{\partial H}{\partial t}\xi_0^\alpha - \dfrac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s^\alpha - H\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t} - H\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = 0 \\ (\alpha = 1,\cdots,r) \end{cases} \tag{3.3.26}$$

类似地，对准对称变换，由式(3.3.19)得到广义 Killing 方程[4]

$$\begin{cases} p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial p_k} - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial p_k} = - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial p_k} & (k = 1, \cdots, n) \\ p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t} + p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} - \dfrac{\partial H}{\partial t} \xi_0^\alpha - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \qquad - \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \xi_s^\alpha = - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_s} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} & (3.3.27) \\ & (\alpha = 1, \cdots, r) \end{cases}$$

对广义准对称变换，由式(3.3.24)得到广义 Killing 方程

$$\begin{cases} p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial p_k} - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial p_k} = - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial p_k} & (k = 1, \cdots, n) \\ p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t} + p_s \dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} - \dfrac{\partial H}{\partial t} \xi_0^\alpha - \dfrac{\partial H}{\partial q_s} \xi_s^\alpha - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} \\ - H \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k} \dfrac{\partial H}{\partial p_k} + Q_s \left(\xi_s^\alpha - \dfrac{\partial H}{\partial p_s} \xi_0^\alpha \right) = - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_s} \dfrac{\partial H}{\partial p_s} & (3.3.28) \end{cases}$$

方程(3.3.26)是关于 $(n+1)r$ 个变量 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$ 的 $(n+1)r$ 个方程. 解 Killing 方程(3.3.26)，可得到 Noether 对称变换的生成函数 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$. 当取定规范函数 $G^\alpha (\alpha = 1, \cdots, r)$ 时，可由广义 Killing 方程(3.3.27)求得 Noether 准对称变换的生成函数 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$. 当取定规范函数 G^α 并给定非势广义力 Q_s 时，可由广义 Killing 方程(3.3.28)求得 Noether 广义准对称变换的生成函数 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$.

注意到，在 Killing 方程(3.3.26)—(3.3.28)中不出现生成函数 $\eta_s^\alpha (s = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r)$. 实际上，$\eta_s^\alpha$ 可用 $\xi_k^\alpha, \xi_0^\alpha$ 给出，因

$$\Delta p_s = \varepsilon_\alpha \eta_s^\alpha$$

$$\Delta p_s = \frac{\partial p_s}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial p_s}{\partial q_k} \Delta q_k + \frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k} \Delta \dot{q}_k$$

$$= \varepsilon_\alpha \left[\frac{\partial p_s}{\partial t} \xi_0{}^\alpha + \frac{\partial p_s}{\partial q_k} \xi_k^\alpha + \frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k} (\dot{\xi}_k^\alpha - \dot{q}_k \dot{\xi}_0^\alpha) \right]$$

故有

$$\eta_s^\alpha = \frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k^\alpha + \frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k^\alpha - \dot{q}_k\dot{\xi}_0^\alpha) \quad (3.3.29)$$

在式(3.3.29)中$\dot{\boldsymbol{q}}$用$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$，$\dot{\boldsymbol{p}}$用$\left(-\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right)$替代，则$\eta_s^\alpha$表为$t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$的函数.

3.3.4 Hamilton 系统的 Noether 定理

定理3.3.1 假设给定的有限群G_r的无限小变换(3.3.3)是Hamilton系统的对称变换，那么系统存在r个线性独立的第一积分，形如

$$I^\alpha = p_s\xi_s^\alpha - H\xi_0^\alpha = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.3.30)$$

证明 对Hamilton系统有方程

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, \cdots, n)$$

将其代入式(3.3.11)，便得积分

$$p_s\bar{\xi}_s^\alpha + (p_s\dot{q}_s - H)\xi_0^\alpha = c_\alpha$$

将式(3.3.8)代入上式，便得守恒量(3.3.30).证毕.

类似地，有

定理3.3.2 假设给定的有限群G_r的无限小变换(3.3.3)是Hamilton系统的准对称变换，那么系统存在r个线性独立的第一积分，形如

$$I^\alpha = p_s\xi_s^\alpha - H\xi_0^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \quad (3.3.31)$$

一般完整系统的运动方程可表为

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} + Q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.3.32)$$

定理3.3.3 假设给定的有限群G_r的无限小变换式(3.3.3)是系统(3.3.32)的广义准对称变换，那么系统存在形如式(3.3.31)的r个线性独立的第一积分.

定理3.3.1称为Hamilton系统的Noether定理，定理3.3.2称为Hamilton系统的广义Noether定理，定理3.3.3称为系统(3.3.32)的

广义Noether定理.利用定理3.3.1或3.3.2,可由Hamilton系统的对称变换或准对称变换求得系统的守恒量;利用定理3.3.3,可由系统(3.3.22)的广义准对称变换求得系统的守恒量.

3.3.5 Hamilton系统的Noether逆定理

假设Hamilton系统有 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \text{const.} \tag{3.3.33}$$

求与之相应的Noether对称性.由式(3.3.33)得

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I^\alpha}{\partial p_s}\dot{p}_s = 0 \tag{3.3.34}$$

即

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial p_s}\dot{p}_s = 0 \tag{3.3.35}$$

将Hamilton正则方程的第二组乘以 $\bar{\xi}_s^\alpha$ 并对 s 求和,得

$$\left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\left(\xi_s^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0^\alpha\right) = 0 \tag{3.3.36}$$

比较式(3.3.35)与式(3.3.36)中含 $\dot{p}_s$ 的项,得到

$$\xi_s^\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0^\alpha = \frac{\partial I^\alpha}{\partial p_s}$$

即

$$\xi_s^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0^\alpha + \frac{\partial I^\alpha}{\partial p_s} \quad (s = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.3.37}$$

再令积分(3.3.33)等于守恒量(3.3.30),即

$$p_s\xi_s^\alpha - H\xi_0^\alpha = I^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.3.38}$$

这样,由 $(n+1)r$ 个方程(3.3.37),(3.3.38)可找到生成函数 ξ_0^α, ξ_s^α,它们对应Hamilton系统的对称变换.于是有

定理3.3.4 如果已知Hamilton系统的 r 个线性独立的第一积分(3.3.33),那么系统存在由式(3.3.33),(3.3.37),(3.3.38)确定的唯一无限小变换是系统的Noether对称变换.

对于Noether准对称变换,令积分(3.3.33)等于守恒量

(3.3.31), 即

$$p_s\xi_s^\alpha - H\xi_0^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.3.39)$$

定理3.3.5 如果已知Hamilton系统的 r 个线性独立的第一积分(3.3.33), 那么系统存在由式(3.3.3), (3.3.37), (3.3.39)确定的无限小变换是系统的 Noether 准对称变换.

类似地, 有

定理3.3.6 如果已知系统(3.3.32)的 r 个线性独立的第一积分(3.3.33), 那么系统存在由式(3.3.3), (3.3.37), (3.3.39)确定的无限小变换是系统的 Noether 广义准对称变换.

定理 3.3.4 和 3.3.5 分别称为 Hamilton 系统的 Noether 逆定理和广义 Noether 逆定理. 根据这些定理可由已知积分找到相应的 Noether对称性和准对称性. 定理3.3.6称为系统(3.3.32)的广义 Noether 逆定理. 根据这个定理可由已知积分找到相应的 Noether 广义准对称性.

3.3.6 算 例

例 1 已知二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \qquad (1)$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先, 研究 Noether 定理的应用. 由式(1) 知

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1, p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 \\ H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L = \dfrac{1}{2}(p_1{}^2 + p_2{}^2) + q_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Noether 对称性判据式(3.3.13) 给出

$$p_1 \dot{\xi}_1 + p_2 \dot{\xi}_2 - \xi_2 - H\dot{\xi}_0 = 0 \qquad (3)$$

由此得到无限小变换生成函数

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \qquad (4)$$

$$\xi_0 = \xi_2 = 0, \xi_1 = 1 \qquad (5)$$

利用式(3.3.29) 可求得

$$\eta_1 = \eta_2 = 0 \tag{6}$$

Noether 定理 3.3.1 给出相应守恒量

$$I_1 = -H = c_1 \tag{7}$$

$$I_2 = p_1 = c_2 \tag{8}$$

它们分别为能量积分和循环积分.

其次,研究 Noether 逆定理的应用.假设系统有积分

$$I = p_1 = \text{const.} \tag{9}$$

来求相应的 Noether 对称性.式(3.3.37),(3.3.38) 给出

$$\begin{cases} \xi_1 = p_1\xi_0 + 1, \xi_2 = p_2\xi_0 \\ p_1\xi_1 + p_2\xi_2 - H\xi_0 = p_1 \end{cases} \tag{10}$$

由此解得

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0 \tag{11}$$

它对应积分(9) 的 Noether 对称变换.

例 2 Emden 方程的 Noether 对称性.

Emden 方程有形式

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0 \tag{1}$$

它可化为 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right) \tag{2}$$

于是有

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = t^2\dot{q} \\ H = p\dot{q} - L = \dfrac{1}{2}\dfrac{p^2}{t^2} + \dfrac{1}{6}t^2q^6 \end{cases} \tag{3}$$

首先,研究 Noether 定理的应用.第一步,求 Noether 对称性.Killing 方程(3.3.26) 给出

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial\xi}{\partial p} - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial p} = 0 \\ p\dfrac{\partial\xi}{\partial t} + p\dfrac{\partial\xi}{\partial q}\left(\dfrac{p}{t^2}\right) - \left(-\dfrac{p^2}{t^3} + \dfrac{1}{3}tq^6\right)\xi_0 \\ -t^2q^5\xi - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial q}\left(\dfrac{p}{t^2}\right) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

假设

$$\xi_0 = \xi_0(t), \xi = \xi(q) \tag{5}$$

则方程(4) 成为

$$\frac{p^2}{t^2}\frac{\partial\xi}{\partial q} - \left(-\frac{p^2}{t^3} + \frac{1}{3}tq^6\right)\xi_0 - t^2q^5\xi - H\frac{\partial\xi_0}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

即

$$\frac{p^2}{t^3}\left(t\frac{\partial\xi}{\partial q} + \xi_0 - \frac{1}{2}t\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right) - \frac{1}{6}tq^5\left(2q\xi_0 + 6t\xi + tq\frac{\partial\xi_0}{\partial t}\right) = 0 \tag{7}$$

由此得

$$\begin{cases} t\dfrac{\partial\xi}{\partial q} + \xi_0 - \dfrac{1}{2}t\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} = 0 \\ 2q\xi_0 + 6t\xi + tq\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

由方程(8) 第一个得

$$\frac{\partial\xi}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial\xi_0}{\partial t} - \frac{\xi_0}{t} = c_1 \tag{9}$$

由此得

$$\xi = c_1q, \xi_0 = -2c_1t \tag{10}$$

此时方程(8) 中第二式满足. 于是求得 Noether 对称性生成函数

$$\xi_0 = -2t, \xi = q \tag{11}$$

将式(11) 代入式(3.3.29) 求得生成函数

$$\eta = \frac{\partial p}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial p}{\partial q}\xi + \frac{\partial p}{\partial\dot{q}}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) = -t^2\dot{q} = -p \tag{12}$$

第二步, 求守恒量. Noether 定理 3.3.1 给出守恒量

$$I = p\xi - H\xi_0 = pq - \left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{t^2} + \frac{1}{6}t^2q^6\right)(-2t)$$

$$= \frac{p^2}{t} + pq + \frac{1}{3}t^3q^6 = \text{const.} \tag{13}$$

其次,研究 Noether 逆定理的应用.假设系统有积分(13),来求与其相应的 Noether 对称性.公式(3.3.37),(3.3.38) 给出

$$\xi = \frac{p}{t^2}\xi_0 + \frac{2p}{t} + q, p\xi - H\xi_0 = \frac{p^2}{t} + pq + \frac{1}{3}t^3q^6 \tag{14}$$

由此解得

$$\xi_0 = -2t, \xi = q \tag{15}$$

例 3 已知单自由度系统

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6, Q = -\frac{2}{t}\dot{q} \tag{1}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

问题仍然是 Emden 方程.取

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q}, H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}q^6 \tag{2}$$

则问题化为非保守系统(3.3.32).

首先,研究 Noether 定理的应用.为求系统的 Noether 对称性,可利用广义 Killing 方程(3.3.28),它给出

$$\begin{cases} p\dfrac{\partial \xi}{\partial p} - H\dfrac{\partial \xi}{\partial p} = -\dfrac{\partial G}{\partial p} \\ p\dfrac{\partial \xi}{\partial t} + p^2\dfrac{\partial \xi}{\partial q} - q^5\xi - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} - Hp\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q} - \dfrac{2}{t}p(\xi - p\xi_0) \\ \quad = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q}p \end{cases} \tag{3}$$

假设

$$\xi_0 = \xi_0(t, q), \xi = \xi(t, q), G = G(t, q) \tag{4}$$

则方程(3) 第一个成立.方程(3) 第二个分出含 p^3, p^2, p 和不含 p 的项,令其分别为零,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q} = 0 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial q} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} + \dfrac{2}{t}\xi_0 = 0 \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t} - \dfrac{1}{6}q^6\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q} - \dfrac{2}{t}\xi = -\dfrac{\partial G}{\partial q} \\ \quad -q^5\xi - \dfrac{1}{6}q^6\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} = -\dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{5}$$

方程(5) 有解

$$\xi_0 = -t^3, \xi = \frac{1}{2}t^2 q, G = 0 \tag{6}$$

由式(3.3.29) 求得

$$\eta = tq + \frac{7}{2}t^2 p \tag{7}$$

生成函数(6), (7) 对应系统的 Noether 广义准对称变换. 定理 3.3.3 的守恒量(3.3.31) 给出为

$$I = p\xi - H\xi_0 + G = \frac{1}{2}t^3 p^2 + \frac{1}{2}t^2 pq + \frac{1}{6}t^3 q^6 = \text{const.} \tag{8}$$

其次, 研究 Noether 逆定理的应用。假设系统有积分(8), 来求与之相应的 Noether 广义准对称变换. 公式(3.3.37), (3.3.39) 给出

$$\begin{cases} \xi = p\xi_0 + t^3 p + \dfrac{1}{2}t^2 q \\ p\xi - H\xi_0 = \dfrac{1}{2}t^3 p^2 + \dfrac{1}{2}t^2 pq + \dfrac{1}{6}t^3 q^6 \end{cases} \tag{9}$$

由此解得

$$\xi_0 = -t^3, \xi = \frac{1}{2}t^2 q \tag{10}$$

将式(10) 代入式(3.3.29), 求得

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\partial p}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial p}{\partial q}\xi + \frac{\partial p}{\partial \dot{q}}(\dot{\xi} - \dot{q}\,\dot{\xi}_0) \\ &= \dot{\xi} - \dot{q}\,\dot{\xi}_0 = tq + \frac{7}{2}t^2\,\dot{q} \end{aligned}$$

$$= tq + \frac{7}{2}t^2 p$$

据定理 3.3.6 知,生成函数(10),(11) 对应系统的 Noether 广义准对称变换.

§3.4 广义坐标下一般完整系统的 Noether 理论

本节讨论广义坐标下一般完整系统的 Noether 理论,包括系统的运动方程,广义 Noether 定理,以及广义 Noether 逆定理等.

3.4.1 系统的运动方程

一般完整系统在广义坐标下的方程表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.4.1)$$

其中 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数,$Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力.

3.4.2 广义 Noether 定理

对于一般完整系统,如能找到广义准对称变换,便可由广义 Noether 定理找到与其相应的守恒量,即第一积分.

定理 3.4.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3)是一般完整系统的广义准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.4.2)$$

证明 因给定的无限小变换是系统的广义准对称变换,故按定义 3.1.3 有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t$$

考虑到式(3.1.10),则上式表为

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0{}^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha+G^\alpha\right)+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}+Q_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha\right\}\mathrm{d}t$$

$$=0$$

考虑到系统的运动方程(3.4.1),ε_α 的独立性以及积分区间的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha+G^\alpha\right)=0$$

积分之,便得式(3.4.2).证毕.

定理 3.4.1 称为一般完整系统的广义 Noether 定理.

Lagrange 系统的 Noether 定理 3.2.1 和 3.2.2 是定理 3.4.1 的特殊情形.

利用定理 3.4.1 寻求一般完整系统的守恒量,其关键在于找到广义准对称变换.为寻求系统的广义准对称变换,可利用判据 3.1.5,3.1.6 或式(3.1.33),亦可利用广义 Killing 方程(3.1.37).

3.4.3 广义 Noether 逆定理

如果已知一般完整系统的第一积分,可由广义 Noether 逆定理找到与其相应的广义准对称变换.

假设系统(3.4.1) 有 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha=I^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=c_\alpha\qquad(\alpha=1,\cdots,r)\tag{3.4.3}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial I^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I^\alpha}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s=0\tag{3.4.4}$$

将运动方程(3.4.1) 两端乘以 $\bar{\xi}_s^\alpha$ 并对 s 求和,得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha=0\tag{3.4.5}$$

展开式(3.4.5) 并与式(3.4.4) 相加,得

$$\left(-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\bar{\xi}_s^\alpha+\frac{\partial I^\alpha}{\partial\dot{q}_k}\right)\ddot{q}_k+\frac{\partial I^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial I^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}+Q_s-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial t}\right)\bar{\xi}_s^\alpha=0\tag{3.4.6}$$

沿任意轨道所有 $\dot{q}_k$ 的系数应为零,于是得

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\bar{\xi}_s^\alpha = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n) \quad (3.4.7)$$

解此代数方程,得

$$\bar{\xi}_s^\alpha = \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.4.8)$$

其中

$$\tilde{h}_{sk} h_{kl} = \delta_{sl}, h_{sk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \qquad (3.4.9)$$

为使变换是广义准对称的,需令积分(3.4.3) 等于 Noether 广义准对称守恒量(3.4.2),即

$$L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.4.10)$$

由此解得

$$\xi_0^\alpha = \frac{1}{L}\left(I^\alpha - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha - G^\alpha\right) \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.4.11)$$

这样,由式(3.4.8),(3.4.11) 在已知一般完整系统的积分 I^α 下可找到相应的无限小广义准对称变换.于是有

定理 3.4.2 如果已知一般完整系统(3.4.1) 的 r 个线性独立的第一积分(3.4.3),那么系统存在由式(3.1.3),(3.4.8),(3.4.11) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

定理 3.4.2 称为一般完整系统的广义 Noether 逆定理.由式(3.4.11) 中函数 G^α 选取的任意性知,所得广义准对称变换不是唯一的.

Lagrange 系统的 Noether 逆定理 3.2.3 和 3.2.4 是定理 3.4.2 的特殊情形.

3.4.4 算 例

例 1 研究系统

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2, Q = -q\dot{q}^2 \qquad (1)$$

的 Noether 对称性与守恒量.

首先,应用广义 Noether 定理由对称性求守恒量.为寻求系统的广义准对称变换,可利用广义Killing方程(3.1.37).方程(3.1.37)给出

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\dot{q}^2\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right)+\dot{q}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \xi}{\partial q}\dot{q}\right)+(-q\dot{q}^2)(\xi-\dot{q}\xi_0) \\ =-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q}\dot{q} \\ -\frac{1}{2}\dot{q}^2\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}}+\dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}}=-\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \end{cases} \tag{2}$$

令

$$\xi_0=0,\xi=\xi(q,\dot{q}),G=G(q,\dot{q}) \tag{3}$$

则方程(2) 成为

$$\begin{cases} \dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial q}-q\dot{q}\xi=-\frac{\partial G}{\partial q} \\ \dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}}=-\frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \end{cases} \tag{4}$$

由此得

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial q\partial \dot{q}}=\frac{\partial \xi}{\partial q}+\dot{q}\frac{\partial^2 \xi}{\partial q\partial \dot{q}}-q\xi-q\dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}}=\dot{q}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \dot{q}\partial q}$$

即

$$\frac{\partial \xi}{\partial q}-q\dot{q}\frac{\partial \xi}{\partial \dot{q}}=q\xi \tag{5}$$

方程(5) 有解

$$\xi^1=e^{\frac{1}{2}q^2} \tag{6}$$

$$\xi^2=-\frac{1}{\dot{q}} \tag{7}$$

于是找到两组生成函数

$$\xi_0^1=0,\xi^1=e^{\frac{1}{2}q^2} \tag{8}$$

$$\xi_0^2=0,\xi^2==-\frac{1}{\dot{q}} \tag{9}$$

相应的规范函数为

$$G^1 = 0 \tag{10}$$

$$G^2 = -\frac{1}{2}q^2 - \ln \dot{q} \tag{11}$$

广义 Noether 定理 3.4.1 的守恒量(3.4.2) 分别给出

$$I^1 = \dot{q}e^{\frac{1}{2}q^2} = c_1 \tag{12}$$

$$I^2 = -\frac{1}{2}q^2 - \ln \dot{q} = c_2 \tag{13}$$

但这两个积分不是彼此独立的,因为

$$\ln I^1 = -I^2 \tag{14}$$

其次,利用广义 Noether 逆定理由已知积分求相应的 Noether 广义准对称变换.假设系统(1) 有积分

$$I = \frac{1}{2}q^2 + \ln \dot{q} = \text{const.} \tag{15}$$

公式(3.4.8),(3.4.11) 给出

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\partial I}{\partial \dot{q}} = \dfrac{1}{\dot{q}} \\ \xi_0 = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{2}q^2 + \ln \dot{q} - 1 - G\right) \end{cases} \tag{16}$$

取

$$\xi_0 = 0 \tag{17}$$

则有

$$G = \frac{1}{2}q^2 + \ln \dot{q} - 1, \xi = \frac{1}{\dot{q}} \tag{18}$$

若取

$$\xi_0 = 1 \tag{19}$$

则

$$G = \frac{1}{2}q^2 + \ln \dot{q} - 1 - \frac{1}{2}\dot{q}^2, \xi = \frac{1}{\dot{q}} - \dot{q} \tag{20}$$

式(17),(18) 以及式(19),(20) 都对应系统积分(15) 的广义准对称变换.

例 2　利用广义 Noether 定理求近似运动常量[20].

具有小的非保守性系统为

$$\ddot{q} + knq^{n-1} = -\mu(a\dot{q} + b\dot{q}^2) \tag{1}$$

其中 n 为整数, a, b, k 为常数, μ 为小参数, $\mu << 1$. 当 $\mu = 0$ 时, 系统是保守的, 非保守力

$$Q = -\mu(a\dot{q} + b\dot{q}^2) \tag{2}$$

变为零. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - kq^n \tag{3}$$

为求得系统的近似运动常量, 将规范函数和生成函数展开为

$$\begin{cases} G = G_0 + \mu G_1 + \cdots \\ \xi_0 = (\xi_0)_0 + \mu(\xi_0)_1 + \cdots \\ \xi = (\xi)_0 + \mu(\xi)_1 + \cdots \end{cases} \tag{4}$$

将式(4) 代入 Noether 等式(3.1.34), 得到

$$\begin{aligned} & -knq^{n-1}[(\xi)_0 + \mu(\xi)_1 + \cdots] + \dot{q}[(\dot{\xi})_0 + \mu(\dot{\xi})_1 + \cdots] \\ & + \left(-\frac{1}{2}\dot{q}^2 - kq^n\right)[(\dot{\xi}_0)_0 + \mu(\dot{\xi}_0)_1 + \cdots] \\ & -\mu(a\dot{q} + b\dot{q}^2)[(\xi)_0 + \mu(\xi)_1 + \cdots - \dot{q}(\xi_0)_0 - \mu\dot{q}(\xi_0)_1 - \cdots] \\ & = -\dot{G}^0 - \mu\dot{G}_1 - \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

分开含 μ 与不含 μ 的项, 得

$$\begin{cases} -knq^{n-1}(\xi)_0 + \dot{q}(\dot{\xi})_0 - \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + kq^n\right)(\dot{\xi}_0)_0 = -\dot{G}_0 \\ -knq^{n-1}(\xi)_1 + \dot{q}(\dot{\xi})_1 - \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + kq^n\right)(\dot{\xi}_0)_1 \\ -(a\dot{q} + b\dot{q}^2)[(\xi)_0 - \dot{q}(\xi_0)_0] = -\dot{G}_1 \end{cases} \tag{6}$$

方程(6)有解

$$\begin{cases} (\xi_0)_0 = 1, (\xi)_0 = 0, G_0 = 0 \\ (\xi_0)_1 = 2bq + \frac{2ant}{2+n}, (\xi)_1 = -\frac{2aq}{2+n} \\ G_1 = 2bk\frac{q^{(n+1)}}{1+n} \end{cases} \tag{7}$$

于是广义 Noether 定理 3.4.1 的守恒量(3.4.2) 给出为

$$I = \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - kq^n\right)\left[1 + 2\mu\left(bq + \frac{ant}{2+n}\right)\right]$$

$$+ \dot{q}\left\{-\mu\frac{2aq}{2+n} - \dot{q}\left[1 + 2\mu\left(bq + \frac{ant}{2+n}\right)\right]\right\} + 2\mu bk\frac{q^{n+1}}{1+n}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + kq^n\right)\left[1 + 2\mu\left(bq + \frac{ant}{2+n}\right)\right] - 2\mu\left(\frac{aq\dot{q}}{2+n} - bk\frac{q^{n+1}}{1+n}\right)$$

$$= \text{const}. \tag{8}$$

其中忽略了 μ^2 及更高阶小项,因此,它并不是运动常量.但是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \mu^2(\cdots\cdots) + \cdots \approx 0 \tag{9}$$

此时 I 称为广义浸渐不变量[20].

§3.5 准坐标下一般完整系统的 Noether 理论

本节研究准坐标下一般完整系统的 Noether 对称性与守恒量,包括准坐标下Hamilton作用量的变分,Noether对称变换,准对称变换和广义准对称变换,广义 Killing 方程,Noether 定理,以及 Noether 逆定理等.

3.5.1 准坐标下 Hamilton 作用量的变分

选取 n 个彼此独立、相容的准速度 ω_s 为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数

$$\omega_s = \omega_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.5.1}$$

并假设可反解出广义速度

$$\dot{q}_s = \dot{q}_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.5.2}$$

令系统的 Lagrange 函数 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 在准速度下为 $\tilde{L}$

$$\tilde{L}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})) \tag{3.5.3}$$

准坐标下 Hamilton 作用量为

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2}\tilde{L}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})\mathrm{d}t \tag{3.5.4}$$

而准坐标下的 Hamilton 原理表为[19,21]

$$\delta\tilde{S} = 0 \tag{3.5.5}$$

令

$$t^* = t + \Delta t, \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \Delta\pi_s(s = 1, \cdots, n) \tag{3.5.6}$$

或其展开式

$$t^* = t + \epsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, q, \omega), \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \epsilon_\alpha \xi_s^\alpha(t, q, \omega)$$
$$(s = 1, \cdots, n) \tag{3.5.7}$$

它是变换群 G_r 的无限小群变换，$\epsilon_\alpha(\alpha = 1, \cdots, r)$ 为无限小参数，$\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$ 为无限小变换生成函数. 注意，这里 $\pi_s, \pi_s{}^*$ 只是一种记号，表示准坐标变换前后的量，而 $\Delta\pi_s$ 有意义.

类似于式(3.1.5),(3.1.6)，有

$$\Delta\tilde{S} = \delta\tilde{S} + \dot{\tilde{S}}\Delta t \tag{3.5.8}$$

以及

$$\Delta\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \{\Delta\tilde{L} + \tilde{L}(\Delta t)^\cdot\} \mathrm{d}t \tag{3.5.9}$$

由式(3.5.9)得

$$\Delta\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \tilde{L}(\Delta t)^\cdot + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\Delta\omega_s \right| \mathrm{d}t \tag{3.5.10}$$

注意到[19]

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s\Delta t = \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\delta\pi_k + \dot{q}_s\Delta t$$
$$= \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}(\Delta\pi_k - \omega_k\Delta t) + \dot{q}_s\Delta t \tag{3.5.11}$$

$$\Delta\omega_s = \delta\omega_s + \dot{\omega}_s\Delta t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\pi_s) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\delta\pi_k + \dot{\omega}_s\Delta t$$
$$= (\Delta\pi_s)^\cdot - \omega_s(\Delta t)^\cdot - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}(\Delta\pi_k - \omega_k\Delta t) \tag{3.5.12}$$

则式(3.5.10)可写成如下形式

$$\Delta\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \left[\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s - \frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\omega_k\right) + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r} - \frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\right.\right.$$

$$\times \frac{\partial\, \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k \Big]\Delta t + \Big[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_k} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial\, \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_s}{\partial\, q_r}\Big)\frac{\partial\, \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\Big]\Delta\pi_k$$

$$+ \Big(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\Big)(\Delta t)^{\cdot} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}(\Delta \pi_s)^{\cdot}\Big\}\mathrm{d}t \qquad (3.5.13)$$

$$(s, k, r = 1, \cdots, n)$$

由式(3.5.8)得

$$\Delta \tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial L}{\partial \pi_s}\delta\pi_s + \frac{\partial L}{\partial \omega_s}\delta\omega_s\Big)\mathrm{d}t + \tilde{L}\Delta t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tilde{L}\Delta t + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\delta\pi_s\Big)$$

$$+ \Big[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial\, \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial\, q_r}\Big)\frac{\partial\, \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\Big]\delta\pi_s\Big\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\epsilon_\alpha\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^\alpha\Big)$$

$$+ \Big[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial\, \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial\, q_r}\Big)\frac{\partial\, \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\Big]\bar{\xi}_s^\alpha\Big\}\mathrm{d}t \qquad (3.5.14)$$

其中

$$\bar{\xi}_s^\alpha = \xi_s^\alpha - \omega_s\xi_0^\alpha \qquad (3.5.15)$$

式(3.5.13),(3.5.14)就是准坐标下 Hamilton 作用量变分的基本公式.

3.5.2 Noether 对称变换、准对称变换和广义准对称变换

首先,研究 Noether 对称变换.

定义 3.5.1 如果准坐标下 Hamilton 作用量是无限小群变换(3.5.6)的不变量,即对每一个变换,始终成立

$$\Delta S = 0 \qquad (3.5.16)$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 3.5.1 和公式(3.5.13),(3.5.14)得到如下判据

判据 3.5.1 对于无限小变换(3.5.6),如果满足条件

$$\Big[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_s}\Big(\dot{q}_s - \frac{\partial\, \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\Big) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial\, \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_s}{\partial\, q_r}\Big)\frac{\partial\, \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\Big]\Delta t$$

$$+\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_k}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\right]\Delta\pi_k$$

$$+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s\right)(\Delta t)^{\cdot}+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}(\Delta\pi_s)^{\cdot}=0 \qquad (3.5.17)$$

则变换为给定系统的对称变换.

判据 3.5.2 如果无限小群变换(3.5.7) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{L}\xi_0^\alpha+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right)+\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_k}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s}\right]\bar{\xi}_s^\alpha=0 \qquad (3.5.18)$$

$$(\alpha=1,\cdots,r)$$

则变换为给定系统的对称变换.

考虑到参数 ε_α 的独立性,由式(3.5.17) 可得 r 个方程

$$\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\omega_k\right)+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\omega_k\right]\xi_0^\alpha$$

$$+\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_k}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\right]\xi_k^\alpha+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\dot{\xi}_s^\alpha=0$$

$$(\alpha=1,\cdots,r) \qquad (3.5.19)$$

公式(3.5.19) 亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\alpha=1$ 时,式(3.5.19) 给出准坐标下的 Noether 等式

$$\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\omega_k\right)+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\omega_k\right]\xi_0$$

$$+\left[\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\pi_k}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\omega_s}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial\omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}\right]\xi_k$$

$$+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial\widetilde{L}}{\partial\omega_s}\dot{\xi}_s=0 \qquad (3.5.20)$$

利用判据3.5.1或3.5.2,可判断Lagrange函数为 $\widetilde{L}$ 的力学系统准坐标下的 Noether 对称性.

其次,研究 Noether 准对称性.

定义3.5.2 如果准坐标下 Hamilton 作用量是无限小群变换的准不变量,即对每一个无限小变换(3.5.6),始终成立

$$\Delta\tilde{S} = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{3.5.21}$$

其中 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$,则称变换(3.5.6) 为准对称变换.

由定义 3.5.2 和公式(3.5.13),(3.5.14) 得到如下判据

判据 3.5.3 对于无限小变换(3.5.6),如果满足条件

$$\left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s - \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\Delta t$$

$$+ \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\Delta\pi_s$$

$$+ \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right)(\Delta t)^{\cdot} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}(\Delta\pi_s)^{\cdot} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.5.22}$$

则变换为给定系统的准对称变换.

判据 3.5.4 如果无限小变换(3.5.7) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) + \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\bar{\xi}_s^\alpha = -\dot{G}^\alpha$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.5.23}$$

其中

$$\Delta G = \varepsilon_\alpha G^\alpha \tag{3.5.24}$$

则变换为给定系统的准对称变换.

考虑到 ε_α 的独立性,式(3.5.22) 可写成 r 个方程

$$\left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s - \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right) + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\xi_0^\alpha$$

$$+ \left[\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\xi_s^\alpha + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha$$

$$+ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_s}\dot{\xi}_s^\alpha = -\dot{G}^\alpha$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.5.25}$$

公式(3.5.25) 亦可作为系统准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时,式(3.5.25) 给出准坐标下 Noether 等式

$$\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\xi_0$$

$$+\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\xi_s$$

$$+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\dot{\xi}_s=-\dot{G} \qquad (3.5.26)$$

利用判据3.5.3或3.5.4可以判断Lagrange函数为 $\widetilde{L}$ 的力学系统准坐标下的 Noether 准对称性.

最后,研究 Noether 广义准对称性.

假设作用在系统上的非势广义力在广义坐标下为 $Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,在准坐标下为 $\widetilde{P}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})$,则有

$$\widetilde{P}_s=Q_k\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \quad (3.5.27)$$

此时运动方程表为[19]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}=\widetilde{P}_s$$

$$(s=1,\cdots n) \quad (3.5.28)$$

如果精确到一阶小量满足

$$\int_{t_1}^{t_2}\widetilde{L}(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}t=\int_{t_1^*}^{t_2^*}L_1(t^*,\boldsymbol{q}^*,\boldsymbol{\omega}^*)\mathrm{d}t^*+\int_{t_1}^{t_2}\widetilde{P}_s\delta\pi_s\mathrm{d}t \qquad (3.5.29)$$

则称作用量是无限小变换的广义准不变量.

定义3.5.3 如果准坐标下 Hamilton 作用量是无限小群变换的广义准不变量,即对每一个无限小变换,始终成立

$$\Delta\widetilde{S}=-\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)+\widetilde{P}_s\delta\pi_s\right\}\mathrm{d}t \qquad (3.5.30)$$

其中 $\widetilde{P}_s\delta\pi_s=Q_k\delta q_k$ 为系统非势广义力的虚功之和,则变换为系统的广义准对称变换.

由定义3.5.3和公式(3.5.13),(3.5.14)得到如下判据

判据3.5.5 对于无限小群变换(3.5.6),如果满足条件

$$\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\Delta t$$

$$+\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\Delta \pi_s$$

$$+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial L}{\partial \omega_s}\omega_s\right)(\Delta t)^{\cdot}+\frac{\partial L}{\partial \omega_s}(\Delta \pi_s)^{\cdot}$$

$$+\widetilde{P}_s(\Delta \pi_s-\omega_s \Delta t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \qquad (3.5.31)$$

则变换为给定系统的广义准对称变换.

判据 3.5.6 如果无限小群变换(3.5.7)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{L}\xi_0^{\alpha}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}\right)+\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}+\widetilde{P}_s\right]\bar{\xi}_s^{\alpha}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{\alpha}$$

$$(\alpha=1,\cdots,r) \qquad (3.5.32)$$

则变换为给定系统的广义准对称变换.

考虑到 ε_a 的独立性,式(3.5.31)可写成 r 个方程

$$\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\xi_0^{\alpha}$$

$$+\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\xi_s^{\alpha}+\left(\widetilde{L}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0^{\alpha}$$

$$+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\dot{\xi}_s^{\alpha}+\widetilde{P}_s(\xi_s^{\alpha}-\omega_s\xi_0^{\alpha})=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^{\alpha} \qquad (3.5.33)$$

$$(\alpha=1,\cdots,r)$$

公式(3.5.33)亦可作为系统广义准对称变换的判据.当 $\alpha=1$ 时,式(3.5.33)给出 Noether 等式

$$\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial \omega_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}\omega_k\right]\xi_0$$

$$+\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\xi_s$$

$$+\left(\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\dot{\xi}_s+\tilde{P}_s(\xi_s-\omega_s\xi_0)=-\dot{G}\quad(3.5.34)$$

利用判据3.5.5或3.5.6可以判断Lagrange函数为$\tilde{L}$,准坐标下非势广义力为$\tilde{P}_s$的完整非保守系统的Noether广义准对称性.

3.5.3 广义Killing方程

展开式(3.5.18),得

$$\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\dot{\omega}_s\right)\xi_0^\alpha+\tilde{L}\left(\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial\omega_s}\dot{\omega}_s\right)$$

$$+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\left[\frac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial\omega_k}\dot{\omega}_k-\dot{\omega}_s\xi_0^\alpha-\omega_s\left(\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial\omega_k}\dot{\omega}_k\right)\right]+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\pi_s}(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_k}\left[\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial t}+\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial q_l}\dot{q}_l\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial t}+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_m}\dot{q}_m+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\omega_m}\dot{\omega}_m\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\omega_k}{\partial q_r}\right]\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s}(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)=0$$

分开含$\dot{\omega}_s$与不含$\dot{\omega}_s$的项,得到

$$\left[\frac{\partial\tilde{L}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_s}\left(\dot{q}_s-\frac{\partial\dot{q}_s}{\partial\omega_k}\omega_k\right)\right]\xi_0^\alpha+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\pi_s}\xi_s^\alpha+\left(\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\left(\frac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_k}\left(\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial t}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\omega_k}{\partial q_r}+\frac{\partial^2\omega_k}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_l}\left(\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial t}+\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial q_m}\dot{q}_m\right)\right)\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_s}(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)=0$$

(3.5.35)

$$\left(\tilde{L}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_k}\omega_k\right)\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial\omega_s}+\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_k}\frac{\partial\xi_k^\alpha}{\partial\omega_s}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_m}\frac{\partial^2\omega_m}{\partial\dot{q}_r\partial\dot{q}_l}\frac{\partial\dot{q}_l}{\partial\omega_s}\frac{\partial\dot{q}_r}{\partial\omega_k}(\xi_k^\alpha-\omega_k\xi_0^\alpha)$$

$$=0\qquad(s,k,r,l,m=1,\cdots,n)$$

这就是准坐标下的Killing方程.

类似地,展开式(3.5.23),得到

$$
\begin{cases}
\left[\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_k}\left(\dot{q}_s-\dfrac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\right]\xi_0^\alpha+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}\xi_s^\alpha+\left(\widetilde{L}-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right) \\
\times\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k} \\
\times\left(\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial q_l}\dot{q}_l+\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial t}-\dfrac{\partial \omega_k}{\partial q_r}+\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\left(\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial t}+\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_m}\dot{q}_m\right)\right) \\
\times\dfrac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t}-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s \qquad (3.5.36) \\
\left(L-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \omega_s}+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\dfrac{\partial \xi_k^\alpha}{\partial \omega_s} \\
-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_m}\dfrac{\partial^2 \omega_m}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_s}\dfrac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}(\xi_k^\alpha-\omega_k\xi_0^\alpha)=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial \omega_s}
\end{cases}
$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

展开式(3.5.32),得到

$$
\begin{cases}
\left[\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_k}\left(\dot{q}_s-\dfrac{\partial \dot{q}_s}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\right]\xi_0^\alpha+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s}\xi_s^\alpha+\left(L-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\omega_s\right) \\
\times\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k} \\
\times\left(\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial q_l}\dot{q}_l+\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial t}-\dfrac{\partial \omega_k}{\partial q_r}+\dfrac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\left(\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial t}+\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_m}\dot{q}_m\right)\right) \\
\times\dfrac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)+\tilde{P}_s(\xi_s^\alpha-\omega_s\xi_0^\alpha)=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t}-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s \qquad (3.5.37) \\
\left(\widetilde{L}-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \omega_s}+\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\dfrac{\partial \xi_k^\alpha}{\partial \omega_s} \\
-\dfrac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_m}\dfrac{\partial^2 \omega_m}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\dfrac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_s}\dfrac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_k}(\xi_k^\alpha-\omega_k\xi_0^\alpha)=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial \omega_s}
\end{cases}
$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

方程 (3.5.36),(3.5.37) 称为广义 Killing 方程.

3.5.4 Noether 定理

定理3.5.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.5.7)是准坐标下 Lagrange 系统的对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^{\alpha} = \widetilde{L}\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^{\alpha} = c_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.5.38)$$

证明 因给定的无限小变换是系统的对称变换,故按定义3.5.1有

$$\Delta \tilde{S} = 0$$

考虑到式(3.5.14),ϵ_{α} 的独立性以及积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{L}\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}\right) + \left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\right.$$

$$\left. - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right]\bar{\xi}_s^{\alpha} = 0$$

对准坐标下 Lagrange 系统有运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \pi_s} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \omega_k}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} = 0 \qquad (3.5.39)$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{L}\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^{\alpha}\right) = 0$$

积分之,便得守恒量(3.5.38).证毕.

定理3.5.2 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.5.7)是准坐标下 Lagrange 系统的准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^{\alpha} = \widetilde{L}\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^{\alpha} + G^{\alpha} = c_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.5.40)$$

定理3.5.3 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.5.7)是准坐标下一般完整系统(3.5.28)的广义准对称变换,那么系统存

在 r 个线性独立的第一积分,形如(3.5.40).

定理3.5.1—3.5.3称为准坐标下完整力学系统的Noether定理.利用这些定理,可由系统的 Noether 对称性找到相应的守恒量.

3.5.5 Noether 逆定理

假设准坐标下 Lagrange 系统有第一积分

$$I^{\alpha} = I^{\alpha}(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) = c_{\alpha} \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.5.41)$$

来求相应的 Noether 对称性.将式(3.5.41) 对 t 求导数,得到

$$\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \omega_s}\dot{\omega}_s = 0 \qquad (3.5.42)$$

将方程(3.5.39) 两端乘以 $\bar{\xi}_s^{\alpha}$ 并对 s 求和,展开得

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \omega_s \partial \omega_k}\dot{\omega}_k + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \omega_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \omega_s \partial t} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \pi_s}\right.\\ &\left. + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_k}\left[\frac{\partial^2 \omega_k}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial t} + \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_m}\dot{\omega}_m\right) - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_r}\right]\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right\}\bar{\xi}_s^{\alpha}\\ &= 0 \end{aligned} \qquad (3.5.43)$$

将式(3.5.42) 与式(3.5.43) 相加,分出含 $\dot{\omega}_k$ 的项,令其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s^{\alpha}\left(\frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \omega_s \partial \omega_k} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_m}\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_k}\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s}\right) - \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \omega_k} = 0 \qquad (3.5.44)$$

$$(k = 1, \cdots, n)$$

令

$$\bar{h}_{sk} = \frac{\partial^2 \tilde{L}}{\partial \omega_s \partial \omega_k} + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \omega_m}\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_l}\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \omega_k}\frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \omega_s} \qquad (3.5.45)$$

则由式(3.5.44) 解得

$$\bar{\xi}_s^{\alpha} = \tilde{\bar{h}}_{sk}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \omega_k} \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.5.46)$$

其中

$$\tilde{\bar{h}}_{sk}\bar{h}_{kl} = \delta_{sl} \qquad (3.5.47)$$

欲使所得变换是 Noether 对称的，需令积分(3.5.41) 等于守恒量(3.5.38)，即

$$\widetilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^\alpha = I^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.5.48)$$

这样，由方程(3.5.46)，(3.5.48) 便可求出生成函数 $\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$，它对应系统的对称变换.于是有

定理 3.5.4 如果已知准坐标下 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分(3.5.41)，那么系统存在由式(3.5.7)，(3.5.46)，(3.5.48) 确定的唯一无限小变换是系统的对称变换.

类似地，为使变换是准对称的，需令

$$\widetilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.5.49)$$

于是有

定理 3.5.5 如果已知准坐标下 Lagrange 系统的 r 个线性独立的第一积分(3.5.41)，那么系统存在由式(3.5.7)，(3.5.46)，(3.5.49) 确定的无限小变换是系统的准对称变换.

进而有

定理 3.5.6 如果已知准坐标下一般完整系统(3.5.28) 的 r 个线性独立的第一积分(3.5.41)，那么系统存在由式(3.5.7)，(3.5.46)，(3.5.49) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

定理 3.5.4— 定理 3.5.6 称为准坐标下完整系统的 Noether 逆定理.利用这些定理，由已知积分可找到准坐标下完整系统的 Noether 对称性.

3.5.6 算 例

例 1 一质量为 m 的质点在指向定点的有心力作用下运动，力的大小为 $f(r)$，其中 r 为定点到质点的距离.取极坐标 r, θ 为广义坐标，则系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \int_0^r f(r)\mathrm{d}r \tag{1}$$

若取$\dot{r}$和$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$为准速度,试研究准坐标下系统的 Noether 对称性与守恒量.

取准速度为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{q}_1 = \dot{r}, \omega_2 = \frac{1}{2}q_1^2\dot{q}_2 = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \\ q_1 = r, q_2 = \theta \end{cases} \tag{2}$$

则有

$$\dot{q}_1 = \omega_1, \dot{q}_2 = \frac{2\omega_2}{q_1^2}, \omega_1 = \dot{q}_1, \omega_2 = \frac{1}{2}q_1^2\dot{q}_2 \tag{3}$$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 + \frac{4\omega_2^2}{q_1^2}\right) + \int_0^{q_1} f(q_1)\mathrm{d}q_1 \tag{4}$$

首先,利用 Noether 定理由对称性找到守恒量.式(3.5.19)给出

$$\begin{aligned} &\left[-4m\frac{\omega_2^2}{q_1^3} + f(q_1) + 8m\frac{\omega_2^2}{q_1^3}\right]\xi_1 \\ &-8m\frac{\omega_1\omega_2}{q_1^3}\xi_2 + m\omega_1\dot{\xi}_1 + 4m\frac{\omega_2}{q_1^2}\dot{\xi}_2 \\ &+\left[-\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 + \frac{4\omega_2^2}{q_1^2}\right) + \int_0^{q_1} f(q_1)\mathrm{d}q_1\right]\dot{\xi}_0 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

方程(5)有解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{6}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = q_1^2 \tag{7}$$

它们对应系统的 Noether 对称变换.Noether 定理 3.5.1 的守恒量式(3.5.38)分别给出

$$I^1 = \tilde{L} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s = -\frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 + \frac{4\omega_2^2}{q_1^2}\right) - \int_0^{q_1} f(q_1)\mathrm{d}q_1 = c_1 \tag{8}$$

$$I^2 = \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_2}q_1^2 = 4m\omega_2 = c_2 \tag{9}$$

其次,应用 Noether 逆定理由已知积分找到相应的 Noether 对称性.假设系统有积分

$$I = \omega_2 = \text{const.} \tag{10}$$

方程(3.5.46),(3.5.48) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = 0, \bar{\xi}_2 = \dfrac{q_1^2}{4m} \\ \tilde{L}\xi_0 + 4m\dfrac{\omega_2}{q_1^2} \cdot \dfrac{q_1^2}{4m} = \omega_2 \end{cases} \tag{11}$$

于是得

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{q_1^2}{4m} \tag{12}$$

它对应系统的 Noether 对称变换.

例 2 研究刚体绕定点转动的 Euler 动力学方程的 Noether 对称性与守恒量.

首先,应用 Noether 定理由已知对称性求出守恒量.令

$$\begin{cases} q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi \\ \omega_1 = \dot{q}_1 \sin q_2 \sin q_3 + \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \omega_2 = \dot{q}_1 \sin q_2 \cos q_3 - \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \omega_3 = \dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_3 \end{cases} \tag{1}$$

则

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \omega_1 \dfrac{\sin q_3}{\sin q_2} + \omega_2 \dfrac{\cos q_3}{\sin q_2} \\ \dot{q}_2 = \omega_1 \cos q_3 - \omega_2 \sin q_3 \\ \dot{q}_3 = -\omega_1 \sin q_3 \operatorname{ctg} q_2 - \omega_2 \cos q_3 \operatorname{ctg} q_2 + \omega_3 \end{cases} \tag{2}$$

又

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \tag{3}$$

其中 A, B, C 为主惯性矩.经过计算,式(3.5.26) 给出

$$(B\omega_1 - C\omega_3)\omega_2\xi_1 + (C\omega_2 - A\omega_1)\omega_3\xi_2$$

$$+ (A\omega_3 - B\omega_2)\omega_1\xi_3 - \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2)\dot{\xi}_0$$

$$+ A\omega_1\dot{\xi}_1 + B\omega_2\dot{\xi}_2 + C\omega_3\dot{\xi}_3 = -\dot{G} \tag{4}$$

由此求得

$$\begin{cases} \xi_0^1 = 1, \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_3^1 = 0, G^1 = 0 \\ \xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = A\omega_1, \xi_2^2 = B\omega_2, \xi_3^2 = C\omega_3, \end{cases} \tag{5}$$

$$G^2 = -\frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) \tag{6}$$

它们分别对应系统的对称变换和准对称变换. Noether 定理 3.5.2 的守恒量(3.5.40) 分别给出为

$$I^1 = \tilde{L} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\omega_s}\omega_s = -\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = c_1 \tag{7}$$

$$I^2 = \frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) = c_2 \tag{8}$$

其次,应用 Noether 逆定理由已知守恒量求出相应的 Noether 对称性.假设系统有守恒量

$$I = \frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) = \text{const.} \tag{9}$$

公式(3.5.46),(3.5.49) 给出为

$$\bar{\xi}_1 = A\omega_1, \bar{\xi}_2 = B\omega_2, \bar{\xi}_3 = C\omega_3 \tag{10}$$

$$\tilde{L}\xi_0 + A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 + G = \frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2)$$

方程(10) 有解

$$\begin{cases} \xi_0 = 0, \xi_1 = A\omega_1, \xi_2 = B\omega_2, \xi_3 = C\omega_3 \\ G = -\frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) \end{cases} \tag{11}$$

§3.6 有多余坐标完整系统的 Noether 理论

本节研究有多余坐标完整系统的 Noether 对称性与守恒量,包括有多余坐标系统的运动方程,有多余坐标时 Hamilton 作用量的变分,有多余坐标时的对称变换,准对称变换和广义准对称变

换,广义 Noether 定理,以及广义 Noether 逆定理等.

3.6.1 有多余坐标完整系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定.为方便计算及某些需要,选 m 个多余坐标 $q_{n+\gamma}(\gamma = 1, \cdots, m)$,并有 m 个理想双面完整约束

$$f_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (3.6.1)$$

约束(3.6.1)加在虚位移上的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\delta q_u = 0$$

$$(\beta = 1, \cdots, m; u = 1, \cdots, n + m) \quad (3.6.2)$$

由 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(3.6.2),利用通常的 Lagrange 乘子法,得到系统的运动微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u} = Q_u + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}$$

$$(u = 1, \cdots, n + m) \quad (3.6.3)$$

其中 $\widetilde{L}$ 为有多余坐标时的 Lagrange 函数,Q_u 为非势广义力,λ_β 为约束乘子.

3.6.2 有多余坐标时 Hamilton 作用量的变分

令有多余坐标时的 Lagrange 函数为 $\widetilde{L} = \widetilde{L}(t, q_u, \dot{q}_u)$,无多余坐标时为 $L = L(t, q_s, \dot{q}_s)$,则有

$$L(t, q_s, \dot{q}_s) = \widetilde{L}(t, q_s, q_{n+\gamma}(t, q_s), \dot{q}_s, \dot{q}_{n+\gamma}(t, q_s, \dot{q}_s)) \quad (3.6.4)$$

于是有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s = &\left[\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_{n+\gamma}}\frac{\partial q_{n+\gamma}}{\partial q_s} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}\frac{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}{\partial q_s}\right.\\ &\left. - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}\frac{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]\delta q_s\\ = &\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_{n+\gamma}}\delta q_{n+\gamma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}\delta q_{n+\gamma}\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}\left(\frac{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}{\partial \dot{q}_s}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\right)\delta q_u \tag{3.6.5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}\frac{\partial \dot{q}_{n+\gamma}}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u}\delta q_u \tag{3.6.6}$$

取无限小群变换

$$t^*=t+\Delta t,\ q_u^*(t^*)=q_u(t)+\Delta q_u \tag{3.6.7}$$

$$(u=1,\cdots,n+m)$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_u^*(t^*)=q_u(t)+\varepsilon_\alpha \xi_u^\alpha(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{3.6.8}$$

将式(3.6.4)— 式(3.6.6) 代入式(3.1.10),得到

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\widetilde{L}\xi_0^\alpha+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha\right)+\left(\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\right)\bar{\xi}_u^\alpha\right\}\mathrm{d}t \tag{3.6.9}$$

其中

$$\bar{\xi}_u^\alpha=\xi_u^\alpha-\dot{q}_u\xi_0^\alpha \tag{3.6.10}$$

类似地,式(3.1.8) 可写成形式

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\widetilde{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u}\Delta q_u+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\Delta \dot{q}_u\right\}\mathrm{d}t \tag{3.6.11}$$

公式(3.6.9),(3.6.11) 就是有多余坐标时 Hamilton 作用量变分的基本公式.

3.6.3 有多余坐标时的对称变换、准对称变换和广义准对称变换

首先,研究有多余坐标时的对称变换.

定义 3.6.1 如果有多余坐标时 Hamilton 作用量是无限小群变换的不变量,即对每一个无限小变换,下式始终成立

$$\Delta S = 0 \tag{3.6.12}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 3.6.1 和公式(3.6.9),(3.6.11) 得到如下判据

判据 3.6.1 对无限小群变换(3.6.7),如果满足条件

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\Delta q_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\Delta \dot{q}_u + \tilde{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = 0 \tag{3.6.13}$$

则变换(3.6.7) 为给定系统的对称变换.

判据 3.6.2 如果无限小变换(3.6.8) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha\right) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\right)\bar{\xi}_u^\alpha = 0 \tag{3.6.14}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

则变换(3.6.8) 为给定系统的对称变换.

公式(3.6.13) 可写成 r 个方程

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u^\alpha + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0^\alpha = 0 \tag{3.6.15}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

公式(3.6.15) 亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时,式(3.6.15) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0 = 0 \tag{3.6.16}$$

其次,研究有多余坐标时的准对称变换.

定义 3.6.2 如果有多余坐标时 Hamilton 作用量是无限小群变换的准不变量,即对每一个无限小变换,下式始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{3.6.17}$$

其中 $G = G(t, q_u, \dot{q}_u)$,则称变换为准对称变换.

由定义 3.6.2 和公式(3.6.9),(3.6.11) 得到如下判据

判据 3.6.3 对于无限小群变换(3.6.7),如果满足条件

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\Delta q_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\Delta \dot{q}_u + \tilde{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.6.18}$$

则变换(3.6.7)是给定系统的准对称变换.

判据 3.6.4 如果无限小群变换(3.6.8)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha\right) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\right)\bar{\xi}_u^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \tag{3.6.19}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

其中

$$\Delta G = \varepsilon_\alpha G^\alpha \tag{3.6.20}$$

则变换(3.6.8)是给定系统的准对称变换.

公式(3.6.18)还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u^\alpha + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0^\alpha = -\dot{G}^\alpha \tag{3.6.21}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

公式(3.6.21)亦可作为系统准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时,式(3.6.21)给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}u}\dot{\xi}_u + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0 = -\dot{G} \tag{3.6.22}$$

最后,研究有多余坐标时的广义准对称变换.

定义 3.6.3 如果有多余坐标时的 Hamilton 作用量是无限小群变换的广义准不变量,即对每一个无限小变换(3.6.7),下式始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_u\delta q_u\right|\mathrm{d}t \tag{3.6.23}$$

其中,$Q_u\delta q_u$ 为系统非势广义力的虚功之和,则变换(3.6.7)称为广义准对称变换.

由定义 3.6.3 和公式(3.6.9),(3.6.11)得到如下判据

判据 3.6.5 对于无限小群变换(3.6.7),如果满足条件

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\Delta q_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\Delta \dot{q}_u + \tilde{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + Q_u(\Delta q_u - \dot{q}_u \Delta t)$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.6.24}$$

则变换(3.6.7)为给定系统的广义准对称变换.

判据 3.6.6 如果无限小群变换(3.6.8)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha\right) + \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u} + Q_u\right)\bar{\xi}_u^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \tag{3.6.25}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

则变换(3.6.8)为给定系统的广义准对称变换.

公式(3.6.24)还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u^\alpha + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0^\alpha + Q_u(\xi_u^\alpha - \dot{q}_u\xi_0^\alpha)$$

$$= -\dot{G}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.6.26}$$

公式(3.6.26)亦可作为系统广义准对称变换的判据.当 $\alpha = 1$ 时,式(3.6.26)给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_u}\xi_u + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u + \left(\tilde{L} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0 + Q_u(\xi_u - \dot{q}_u\xi_0)$$

$$= -\dot{G} \tag{3.6.27}$$

类似于 §3.1 中的讨论,可以建立 Killing 方程.

3.6.4 有多余坐标系统的广义 Noether 定理

定理3.6.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.6.8)是有多余坐标系统(3.6.1),(3.6.3)的广义准对称变换,且变换满足条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\bar{\xi}_u^\alpha = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, m) \tag{3.6.28}$$

那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = \tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha + G^\alpha = c_\alpha$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.6.29}$$

证明　因无限小变换(3.6.8)是系统的广义准对称变换，故按定义3.6.3有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_u\delta q_u\right\}\mathrm{d}t$$

考虑到式(3.6.9),(3.6.20)，上式可写成

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha + G^\alpha\right)\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_u} + Q_u\right)\bar{\xi}_u^\alpha\right\}\mathrm{d}t\\ = 0\end{aligned}$$

将式(3.6.28)两端乘以 λ_β 并对 β 求和，再将结果与上式相加，得

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha + G^\alpha\right)\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial\tilde{L}}{\partial q_u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_u} + Q_u + \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\right)\bar{\xi}_u^\alpha\right\}\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

由此，利用方程(3.6.3)并考虑到 ε_α 的独立性和积分区间$[t_1, t_2]$的任意性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{L}\xi_0^\alpha + \frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha + G^\alpha\right) = 0$$

积分之，便得守恒量(3.6.29).证毕.

利用定理3.6.1可由已知广义准对称变换求得有多余坐标系统(3.6.1),(3.6.3)的守恒量.

3.6.5　有多余坐标系统的广义 Noether 逆定理

假设有多余坐标系统(3.6.1),(3.6.3)有积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, q_u, \dot{q}_u) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.6.30)$$

来求与其相应的广义准对称变换.由式(3.6.30)得

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial q_u}\dot{q}_u + \frac{\partial I^\alpha}{\partial\dot{q}_u}\ddot{q}_u = 0 \qquad (3.6.31)$$

将方程(3.6.3)两端同时乘以 $\bar{\xi}_u^\alpha$ 并对 u 求和，得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial q_u}-Q_u-\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\right)\bar{\xi}_u^\alpha=0 \tag{3.6.32}$$

将式(3.6.31)与(3.6.32)相加,分开含$\ddot{q}_v$的项,令其系数为零,得到

$$\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_v}\bar{\xi}_u^\alpha-\frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_v}=0 \tag{3.6.33}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_u^\alpha=\tilde{h}_{uv}\frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_v} \tag{3.6.34}$$

其中

$$\tilde{h}_{uv}h_{vw}=\delta_{uw},\ h_{uv}=\frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u \partial \dot{q}_v} \tag{3.6.35}$$

为使所得变换是广义准对称的,需令积分(3.6.30)等于 Noether 对称守恒量(3.6.29),即

$$\widetilde{L}\xi_0^\alpha+\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u^\alpha+G^\alpha=I^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \tag{3.6.36}$$

这样,由方程(3.6.34),(3.6.36)在给定规范函数G^α下可求得变换生成函数$\xi_0^\alpha,\xi_u^\alpha$.于是有

定理 3.6.2 如果已知有多余坐标完整系统(3.6.1),(3.6.3)的r个线性独立的第一积分(3.6.30),那么由式(3.6.8),(3.6.34),(3.6.36)确定的无限小变换,只要满足条件(3.6.28),必是系统的广义准对称变换.

利用定理 3.6.2 可由已知积分求得有多余坐标系统的 Noether 广义准对称变换.

3.6.6 算 例

已知有多余坐标完整系统的 Lagrange 函数为

$$\widetilde{L}=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\omega^2 q_1^2)-mgq_2 \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q_1=-m\dot{q}_2,\ Q_2=m\dot{q}_1 \tag{2}$$

完整约束为

$$f = q_2 - aq_1^2 = 0 \quad (a = \text{const.}) \tag{3}$$

试研究此系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用广义 Noether 定理由已知对称性求守恒量. 第一步,求广义准对称变换. Noether 等式(3.6.27) 给出

$$\begin{aligned} &- m\omega^2 q_1 \xi_1 - mg\xi_2 + m\dot{q}_1 \dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2 \dot{\xi}_2 \\ &+ \left\{ \frac{1}{2} m(-\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) + mgq_2 \right\} \dot{\xi}_0 \\ &- m\dot{q}_2(\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_0) + m\dot{q}_1(\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_0) = -\dot{G} \end{aligned} \tag{4}$$

方程(4) 有解

$$\xi_0^1 = 1, \xi_1^1 = \xi_2^1 = 0, G^1 = 0 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = 0, \xi_2^2 = 1, G^2 = mgt - mq_1 \\ \xi_0^3 = 0, \xi_1^3 = \dot{q}_1, \xi_2^3 = \dot{q}_2 \end{cases} \tag{6}$$

$$G^3 = \frac{1}{2} m\omega^2 q_1^2 + mgq_2 - \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{7}$$

第二步,验证条件(3.6.28). 条件(3.6.28) 给出为

$$\xi_2 - 2aq_1 \xi_1 = 0 \tag{8}$$

显然,变换(5),(7) 满足式(8),但变换(6) 不满足式(8). 第三步,利用定理 3.6.1, 求相应的守恒量. 定理 3.6.1 的守恒量式(3.6.29) 对式(5),(7) 分别给出为

$$I^1 = -\frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) - mgq_2 = c_1 \tag{9}$$

$$I^2 = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) + mgq_2 = c_2 \tag{10}$$

这两个积分都代表系统的广义能量积分,且有

$$I_1 = -I_2 \tag{11}$$

其次,利用广义 Noether 逆定理由已知积分求相应的广义准对称变换. 假设系统有积分

$$I = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) + mgq_2 = \text{const.} \tag{12}$$

求与其相应的广义准对称变换. 公式(3.6.34),(3.6.36)给出为

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = \dot{q}_1, \bar{\xi}_2 = \dot{q}_2 \\ \tilde{L}\xi_0 + m\dot{q}_1\bar{\xi}_1 + m\dot{q}_2\bar{\xi}_2 + G = \dfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) + mgq_2 \end{cases} \tag{13}$$

由此解得

$$\xi_1 = (1 + \xi_0)\dot{q}_1, \xi_2 = (1 + \xi_0)\dot{q}_2, \xi_0 = -1 - \frac{G}{\tilde{L}} \tag{14}$$

若取

$$G = -\tilde{L} \tag{15}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{16}$$

§3.7 变质量完整系统的 Noether 理论

本节研究变质量完整力学系统的 Noether 对称性与守恒量，包括系统的运动方程、广义准对称变换、广义 Killing 方程、广义 Noether 定理以及广义 Noether 逆定理等.

3.7.1 变质量完整系统的运动方程

假设系统由 N 个质点组成. 在时刻 t，第 i 个质点的质量为 $m_i(i = 1, \cdots, N)$；在时刻 $t + \mathrm{d}t$，由质点分离(或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定，并设质点质量依赖于时间、广义坐标和广义速度[22,23]

$$m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (i = 1, \cdots, N) \tag{3.7.1}$$

运动方程有形式[23]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{3.7.2}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数，Q_s 为非势广义力，P_s 为广义反推力，有[22,23]

$$P_s = (\boldsymbol{R}_i + \dot{m}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$
$$(s = 1, \cdots, n) \quad (3.7.3)$$

这里 $\boldsymbol{r}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度,而

$$\boldsymbol{R}_i = \frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i \quad (3.7.4)$$

其中 $\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度.

3.7.2 变质量完整系统的广义准对称变换

取时间和广义坐标的无限小群变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.7.5)$$

或其展开式

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon_a \xi_0^a(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon_a \xi_s^a(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

定义 3.7.1 如果 Hamilton 作用量是无限小群变换的广义准不变量,即对每一个无限小变换(3.7.5),下式始终成立

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + (Q_s + P_s)\delta q_s \right| \mathrm{d}t \quad (3.7.7)$$

其中 $(Q_s + P_s)\delta q_s$ 为系统非势广义力和广义反推力的虚功之和,则变换(3.7.5) 为变质量系统的 Noether 广义准对称变换.

由定义 3.7.1 和公式(3.1.8),(3.1.10) 得到如下判据

判据 3.7.1 对于无限小群变换(3.7.5),如果满足条件

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + (Q_s + P_s)(\Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t) \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

则变换(3.7.5) 为变质量系统的 Noether 广义准对称变换.

判据 3.7.2 如果无限小群变换(3.7.6) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + Q_s + P_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha = -\dot{G}^\alpha$$
$$(\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.7.9)$$

则变换(3.7.6) 为变质量系统的 Noether 广义准对称变换.

由 ϵ_a 的独立性,式(3.7.8) 可写成 r 个方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_0}\xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha$$

$$+ (Q_s + P_s)(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = -\dot{G}^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.7.10}$$

公式(3.7.10) 亦可作为系统广义准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时,式(3.7.10) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0$$

$$+ (Q_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G} \tag{3.7.11}$$

3.7.3 广义 Killing 方程

将式(3.7.9) 展开,得

$$\left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)\xi_0^\alpha + L\left(\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left\{\frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right.$$

$$\left. - \ddot{q}_s\xi_0^\alpha - \dot{q}_s\left(\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right)\right\}$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial q_s}(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) + (Q_s + P_s)(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha)$$

$$= -\frac{\partial G^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial G^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s - \frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s \tag{3.7.12}$$

在式(3.7.12) 中分出含 $\ddot{q}_k$ 和不含 $\ddot{q}_k$ 的项,整理得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) \\ \quad + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_s^a}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + (Q_s + W_s)(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) \\ = -\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t} - \dfrac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k \end{cases} \tag{3.7.13}$$

$$\left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0^\alpha}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s^\alpha}{\partial \dot{q}_k} + W_{sk}(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = -\frac{\partial G^\alpha}{\partial \dot{q}_k}$$

$$(k = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r)$$

其中 W_{sk}, W_s 由下式确定

$$P_s = W_{sk}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_k + W_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{3.7.14}$$

而

$$W_{sk} = \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_k}(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial^2 m_i}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{3.7.15}$$

方程(3.7.13) 称为广义 Killing 方程. 解广义 Killing 方程(3.7.13),便有可能求得广义准对称变换的生成函数 ξ_0^α, ξ_s^α.

3.7.4 广义 Noether 定理

定理3.7.1 假设给定有限群 G_r 的无限小变换(3.7.6)是变质量系统(3.7.1)—(3.7.3) 的广义准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.7.16}$$

证明 因给定的无限小变换是系统的广义准对称变换,故按定义 3.7.1 有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + (Q_s + P_s)\delta q_s\right\}\mathrm{d}t$$

考虑到式(3.1.10), ϵ_α 的独立性以及积分区间$[t_1, t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + Q_s + P_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha = 0$$

将方程(3.7.2) 代入上式,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha\right) = 0$$

积分之,便得守恒量(3.7.16).证毕.

定理 3.7.1 称为变质量完整力学系统的广义 Noether 定理. 利用定理 3.7.1 可由变质量系统的广义准对称变换求得系统的守恒量.

如果系统是常质量的,则定理 3.7.1 给出定理 3.4.1.

3.7.5 广义 Noether 逆定理

假设变质量系统(3.7.1)—(3.7.3)有 r 个线性独立的第一积分

$$I^{\alpha} = I^{\alpha}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = c_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.7.17}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 0 \tag{3.7.18}$$

将方程(3.7.2)两端同时乘以 $\bar{\xi}_s^{\alpha}$ 并对 s 求和,得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - P_s\right)\bar{\xi}_s^{\alpha} = 0 \tag{3.7.19}$$

将式(3.7.18),(3.7.19)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,令其系数为零,得到

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right)\bar{\xi}_s^{\alpha} - \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{3.7.20}$$

假设

$$\det(\omega_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right) \neq 0 \tag{3.7.21}$$

则由方程(3.7.20)可解得

$$\bar{\xi}_s^{\alpha} = \tilde{\omega}_{sk}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.7.22}$$

其中

$$\tilde{\omega}_{sk}\omega_{kl} = \delta_{sl} \tag{3.7.23}$$

再令积分(3.7.17)等于 Noether 广义准对称变换的守恒量(3.7.16),即

$$L\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha} + G^{\alpha} = I^{\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.7.24}$$

这样,由方程(3.7.22),(3.7.24)在给定规范函数 G^{α} 下可求出系统广义准对称变换的生成函数 ξ_0^{α}, ξ_s^{α}. 于是有

定理 3.7.2 如果已知变质量完整系统(3.7.1)—(3.7.3)的

r 个线性独立的第一积分(3.7.17),那么由式(3.7.6),(3.7.22),(3.7.24) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

定理3.7.2称为变质量完整系统的广义Noether逆定理.利用定理 3.7.2 由已知积分可找到系统相应的广义 Noether 对称性.

如果系统是不变质量的,则定理 3.7.2 给出定理 3.4.2.

3.7.6 算　例

一变质量质点,其质量为

$$m = m_0 e^{-\alpha t} \qquad (m_0 = \text{const.}, \alpha = \text{const.}, \alpha > 0) \tag{1}$$

Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{2}$$

非势广义力为

$$Q_1 = 0, Q_2 = \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_1 \tag{3}$$

微粒分离的绝对速度为零,即

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -\dot{q}_1 \boldsymbol{i} - \dot{q}_2 \boldsymbol{j} \tag{4}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用定理 3.7.1 由已知广义准对称性求系统的守恒量.

第一步,建立变质量系统的运动方程. 由式(3.7.3),(3.7.4) 和(4),得

$$P_1 = P_2 = 0 \tag{5}$$

方程(3.7.2) 给出

$$(m\dot{q}_1)^{\cdot} = 0, (m\dot{q}_2)^{\cdot} = \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_1 \tag{6}$$

第二步,求广义准对称变换的生成函数. Noether 等式(3.7.11) 给出为

$$\frac{1}{2}\dot{m}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\xi_0 + m\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\dot{\xi}_0$$

$$+ (\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = -\dot{G} \tag{7}$$

方程(7) 有解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 0, \xi_2^1 = 1, G^1 = -q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 \tag{8}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = 1, \xi_2^2 = 0, G^2 = 0 \tag{9}$$

它们对应系统的广义准对称变换.第三步,利用定理 3.7.1 求守恒量.对生成函数(8),(9),守恒量(3.7.16) 分别给出

$$I^1 = m(t)\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 = c_1 \tag{10}$$

$$I^2 = m(t)\dot{q}_1 = c_2 \tag{11}$$

其次,利用定理 3.7.2 由已知积分求相应的广义准对称变换.假设系统有积分

$$I = m(t)\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 = \text{const.} \tag{12}$$

求与其相应的广义准对称变换.公式(3.7.22),(3.7.24) 给出为

$$\bar{\xi}_1 = 0, \bar{\xi}_2 = 1 \tag{13}$$

$$L\xi_0 + m(t)\dot{q}_1\bar{\xi}_1 + m(t)\dot{q}_2\bar{\xi}_2 + G = m(t)\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2$$

由此解得

$$\xi_0 = -\frac{1}{L}(G + q_2 + \frac{1}{2}q_1^2), \xi_1 = \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0 \tag{14}$$

其中 G 为规范函数.当取

$$G = -q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 \tag{15}$$

时,有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{16}$$

当取

$$G = -q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 - L \tag{17}$$

时,有

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2 \tag{18}$$

这样,由式(15),(16) 或式(17),(18) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

§3.8　事件空间完整系统的 Noether 理论

本节研究事件空间完整系统的 Noether 对称性与守恒量，包括系统的运动方程，事件空间中 Hamilton 作用量的变分，对称变换、准对称变换和广义准对称变换，广义 Killing 方程，广义 Noether 定理，以及广义 Noether 逆定理等.

3.8.1　事件空间中完整系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定.建立$(n+1)$维扩充的位形空间，即事件空间.此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 和时间 t.引入记号

$$x_1 = t, x_{s+1} = q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (3.8.1)$$

那么，所有变量 $x_\alpha(\alpha = 1, \cdots, n+1)$ 可作为某参数 τ 的已知函数.令 $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ 是 C^2 类曲线，使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha \qquad (3.8.2)$$

不同时为零，有

$$\dot{x}_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'_\alpha}{x'_1} \qquad (3.8.3)$$

假设系统在位形空间中的 Lagrange 函数为 $L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，非势广义力为 $Q_s = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，则事件空间中的 Lagrange 函数为

$$\Lambda(x_\alpha, x'_\alpha) = x'_1 L\left(x_\alpha, \frac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right) \qquad (3.8.4)$$

事件空间中的广义力定义为[24]

$$\begin{cases} P_1 = -Q_s x'_{s+1} \\ P_{s+1} = x'_1 Q_s\left(x_\alpha, \dfrac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \dfrac{x'_{n+1}}{x'_1}\right) \end{cases} \qquad (3.8.5)$$

系统的运动方程表为参数形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha \ (\alpha = 1, \cdots, n+1) \qquad (3.8.6)$$

下面分析参数方程(3.8.6). 首先, 当

$$P_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{3.8.7}$$

时, 参数方程(3.8.6) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{3.8.8}$$

这就是完整保守系统的参数方程[25]. 其次, 方程(3.8.6) 的第一个 ($\alpha = 1$) 代表能量方程. 因

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_1} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -H, \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = x'_1\frac{\partial L}{\partial x_1} \tag{3.8.9}$$

故方程(3.8.6) 的第一个有形式

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} + t'\frac{\partial L}{\partial t} = t'Q_s\dot{q}_s \tag{3.8.10}$$

当

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \qquad Q_s\dot{q}_s = 0 \tag{3.8.11}$$

时, 有积分

$$H = \text{const.} \tag{3.8.12}$$

第三, ($n+1$) 个方程(3.8.6) 不是彼此独立的, 它们有如下联系

$$x_\alpha'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha\right) = 0 \tag{3.8.13}$$

最后, 当取 $t = \tau$ 时, 方程(3.8.6) 的第一个成为通常的能量方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_s\dot{q}_s \tag{3.8.14}$$

后面 n 个方程成为位形空间中的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.8.15}$$

3.8.2 事件空间中 Hamilton 作用量的变分

事件空间中 Hamilton 作用量为

$$S_e = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Lambda(x_\alpha, x'_\alpha)\mathrm{d}\tau \tag{3.8.16}$$

引入参数 τ 和事件空间中坐标 x_α 的无限小群变换

$$\tau^* = \tau + \Delta\tau, x_\alpha^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \Delta x_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{3.8.17}$$

或其展开式

$$\begin{cases} \tau^* = \tau + \epsilon_\mu \xi_0^\mu(\tau, x_\beta, x'_\beta) \\ x_\alpha^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \epsilon_\mu \xi_\alpha^\mu(\tau, x_\beta, x'_\beta) \end{cases} \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1; \mu = 1; \cdots, r) \tag{3.8.18}$$

作用量(3.8.16)的变分表为

$$\Delta S_e = \delta S_e + S_e' \Delta\tau \tag{3.8.19}$$

以及

$$\Delta S_e = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \{\Delta\Lambda + \Lambda(\Delta\tau)'\} d\tau \tag{3.8.20}$$

式(3.8.19)可表为

$$\Delta S_e = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \frac{d}{d\tau}\left(\Lambda\Delta\tau + \frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\delta x_\alpha\right) + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\delta x_\alpha \right\} d\tau \tag{3.8.21}$$

这里已用到交换关系

$$\frac{d}{d\tau}\delta x_\alpha = \delta x'_\alpha \tag{3.8.22}$$

注意到

$$\delta x_\alpha = \epsilon_\mu(\xi_\alpha^\mu - x'_\alpha \xi_0^\mu) \tag{3.8.23}$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha} x'_\alpha = \Lambda \tag{3.8.24}$$

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\right) x'_\alpha = 0 \tag{3.8.25}$$

则式(3.8.21)可表为

$$\Delta S_e = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \epsilon_\mu \left\{ \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha^\mu\right) + \left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\xi_\alpha^\mu \right\} d\tau \tag{3.8.26}$$

式(3.8.20)可表为

$$\Delta S_e = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left| \Lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x'_\alpha \right| \mathrm{d}\tau \qquad (3.8.27)$$

公式(3.8.26),(3.8.27)就是事件空间中 Hamilton 作用量变分的基本公式.

3.8.3 事件空间中对称变换、准对称变换和广义准对称变换

首先,研究事件空间中 Noether 对称变换.

定义 3.8.1 如果事件空间中 Hamilton 作用量是无限小群变换的不变量,即对每一个无限小变换,始终成立

$$\Delta S_e = 0 \qquad (3.8.28)$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 3.8.1 和公式(3.8.26),(3.8.27)得到如下判据

判据 3.8.1 对于无限小群变换(3.8.17),如果满足条件

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x'_\alpha + \Lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) = 0 \qquad (3.8.29)$$

则变换(3.8.17)为给定系统的对称变换.

判据 3.8.2 如果无限小群变换(3.8.18)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^\mu_\alpha\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\xi^\mu_\alpha = 0 \qquad (3.8.30)$$

$$(\mu = 1, \cdots, r)$$

则变换(3.8.18)为给定系统的对称变换.

式(3.8.29)还可简化为 r 个方程

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi^\mu_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^{\mu\prime}_\alpha = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, r) \qquad (3.8.31)$$

公式(3.8.31)亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\mu = 1$ 时,式(3.8.31)给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha = 0 \qquad (3.8.32)$$

利用判据3.8.1或3.8.2可以判断 Lagrange 函数为 Λ 的力学系统的 Noether 对称变换.

其次,研究事件空间中 Noether 准对称变换.

定义3.8.2　如果事件空间中Hamilton作用量是无限小群变换的准不变量,即对每一个无限小变换,下式始终成立

$$\Delta S_e = -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G)\mathrm{d}\tau \tag{3.8.33}$$

其中 $G = G(\tau, x_\alpha, x'_\alpha)$,则称无限小变换是 Noether 意义下的准对称变换.

由定义 3.8.2 和公式(3.8.26),(3.8.27) 得到如下判据

判据 3.8.3　对于无限小群变换(3.8.17),如果满足条件

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x'_\alpha + \Lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G) \tag{3.8.34}$$

则变换(3.8.17) 为给定系统的准对称变换.

判据 3.8.4　如果无限小群变换(3.8.18) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^\mu_\alpha\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\xi^\mu_\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\mu \tag{3.8.35}$$

$$(\mu = 1, \cdots, r)$$

其中

$$\Delta G = \xi_\mu G^\mu \tag{3.8.36}$$

则变换(3.8.18) 为给定系统的准对称变换.

式(3.8.34) 还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi^\mu_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^{\mu'}_\alpha = -G^{\mu'} \quad (\mu = 1, \cdots, r) \tag{3.8.37}$$

公式(3.8.37) 亦可作为系统准对称性判据. 当 $\mu = 1$ 时, 式(3.8.37) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha = -G' \tag{3.8.38}$$

利用判据3.8.3或3.8.4可以判断Lagrange函数为 Λ 的力学系统的 Noether 准对称变换.

最后,研究事件空间中 Noether 广义准对称变换.

定义3.8.3　如果事件空间中Hamilton作用量是无限小群变换的广义准不变量,即对每一个无限小变换,下式始终成立

$$\Delta S_e = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G) + P_\alpha \delta x_\alpha\right|\mathrm{d}\tau \qquad (3.8.39)$$

其中 $P_\alpha \delta x_\alpha$ 为事件空间中非势广义力的虚功之和，则称变换为 Noether 意义下的广义准对称变换.

由定义 3.8.3 和公式(3.8.26),(3.8.27) 得到如下判据

判据 3.8.5 对于无限小群变换(3.8.17),如果满足条件

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\Delta x_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\Delta x'_\alpha + \Lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta\tau) + P_\alpha(\Delta x_\alpha - x'_\alpha \Delta\tau)$$

$$= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\Delta G) \qquad (3.8.40)$$

则变换(3.8.17) 为给定系统的广义准对称变换.

判据 3.8.6 如果无限小变换(3.8.18) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^\mu_\alpha\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} + P_\alpha\right)\xi^\mu_\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\mu \quad (3.8.41)$$

$$(\mu = 1, \cdots, r)$$

则变换(3.8.18) 为给定系统的广义准对称变换.

式(3.8.40) 还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi^\mu_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^{\mu'}_\alpha + P_\alpha\xi^\mu_\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}G^\mu \qquad (3.8.42)$$

$$(\mu = 1, \cdots, r)$$

公式(3.8.42) 亦可作为系统广义准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时，式(3.8.42) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha + P_\alpha\xi_\alpha = -G' \qquad (3.8.43)$$

利用判据 3.8.5 或 3.8.6 可以判断事件空间中一般完整系统的广义准对称变换.

3.8.4 广义 Killing 方程

展开式(3.8.30),得

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\left(\frac{\partial \xi^\mu_\alpha}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi^\mu_\alpha}{\partial x_\beta}x'_\beta + \frac{\partial \xi^\mu_\alpha}{\partial x'_\beta}x''_\beta\right) + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi^\mu_\alpha = 0 \quad (3.8.44)$$

分出含 x''_β 和不含 x''_β 的项,得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha^\mu + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\left(\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x_\beta}x'_\beta\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x'_\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1) \end{cases} \tag{3.8.45}$$

偏微分方程组(3.8.45) 称为 Killing 方程. 解 Killing 方程便有可能找到事件空间中完整保守系统的 Noether 对称变换.

类似地,由式(3.8.35) 得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha^\mu + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\left(\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x_\beta}x'_\beta\right) = -\dfrac{\partial G^\mu}{\partial \tau} - \dfrac{\partial G^\mu}{\partial x_\alpha}x'_\alpha \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x'_\beta} = -\dfrac{\partial G^\mu}{\partial x'_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1) \end{cases} \tag{3.8.46}$$

方程(3.8.46) 称为广义 Killing 方程. 由此可找到事件空间中完整保守系统的准对称变换.

由式(3.8.41)得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha^\mu + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\left(\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x_\beta}x'_\beta\right) + P_\alpha \xi_\alpha^\mu = -\dfrac{\partial G^\mu}{\partial \tau} - \dfrac{\partial G^\mu}{\partial x_\alpha}x'_\alpha \\ \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\dfrac{\partial \xi_\alpha^\mu}{\partial x'_\beta} = -\dfrac{\partial G^\mu}{\partial x'_\beta}(\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1) \end{cases} \tag{3.8.47}$$

方程(3.8.47)称为广义 Killing 方程. 由此可找到事件空间中一般完整系统的广义准对称变换.

3.8.5 广义 Noether 定理

定理 3.8.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.8.18)是事件空间中完整保守系统(3.8.8) 的对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha^\mu = c_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, r) \tag{3.8.48}$$

证明 因给定无限小变换是系统的对称变换,故按定义 3.8.1 有

$$\Delta S_e = 0$$

考虑到式(3.8.26), ϵ_μ 的独立性以及积分区间$[\tau_1, \tau_2]$的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha^\mu\right)+\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\right)\xi_\alpha^\mu = 0$$

因系统的运动满足方程(3.8.8),故得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha^\mu\right) = 0$$

积分之,便得式(3.8.48).证毕.

定理 3.8.2 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.8.18)是系统(3.8.8)的准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\mu = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha^\mu + G^\mu = c_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, r) \tag{3.8.49}$$

定理 3.8.3 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.8.18)是系统(3.8.6)的广义准对称变换,那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如式(3.8.49).

定理 3.8.1— 定理 3.8.3 称为事件空间中完整力学系统的广义 Noether 定理.利用这些定理可由已知对称性找到与其相应的守恒量.

3.8.6 广义 Noether 逆定理

假设事件空间中完整力学系统有 r 个线性独立的第一积分.

$$I^\mu = I^\mu(\tau, x_\alpha, x'_\alpha) = c_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, r) \tag{3.8.50}$$

需要求出与其相应的 Noether 对称性.由式(3.8.50) 得

$$\frac{\mathrm{d}I^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial I^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial I^\mu}{\partial x_\alpha}x'_\alpha + \frac{\partial I^\mu}{\partial x'_\alpha}x''_\alpha = 0 \tag{3.8.51}$$

将方程(3.8.6) 两端乘以 ξ_α^μ 并对 α 求和,得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}-P_\alpha\right)\xi_\alpha^\mu = 0 \tag{3.8.52}$$

将式(3.8.52) 展开并与式(3.8.51) 相加,分出含 x''_β 的项,令其系

数为零,得到

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\xi^\mu_\alpha - \frac{\partial I^\mu}{\partial x'_\beta} = 0 \quad (\mu = 1, \cdots, n+1) \tag{3.8.53}$$

注意到,$(n+1)$ 个方程(3.8.53) 不是彼此独立的,不能由此求出所有 ξ^μ_α.为使变换是系统的广义准对称变换,需令积分(3.8.50)等于守恒量(3.8.49),即

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi^\mu_\alpha + G^\mu = I^\mu \tag{3.8.54}$$

这样,由方程(3.8.53),(3.8.54) 在已知规范函数 G^μ 下可以求得广义准对称变换的生成函数 ξ^μ_α.于是有

定理 3.8.4 如果已知事件空间中完整系统(3.8.6) 的 r 个线性独立的第一积分(3.8.50),那么系统存在由式(3.8.18),(3.8.53),(3.8.54) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

定理 3.8.4 称为事件空间中一般完整系统的广义 Noether 逆定理.利用这个定理可由系统的已知分求出与其相应的广义准对称变换.

3.8.7 算 例

二自由度完整系统在位形空间中的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q_1 = -\dot{q}_2, Q_2 = \dot{q}_1 \tag{2}$$

试研究系统在事件空间中的 Noether 对称性与守恒量.

首先,应用广义 Noether 定理由已知对称性求守恒量.第一步,建立事件空间中的运动方程.式(3.8.4),(3.8.5) 给出

$$\Lambda = x'_1\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right] - x_3\right\} \tag{3}$$

$$\begin{cases} P_1 = -Q_1 x'_2 - Q_2 x'_3 = 0 \\ P_2 = x'_1 Q_1 = -x'_3 \\ P_3 = x'_1 Q_2 = x'_2 \end{cases} \tag{4}$$

由此可建立运动方程(3.8.6). 第二步, 求 Noether 广义准对称变换. 利用 Noether 等式(3.8.43), 有

$$-x'_1\xi_3 - \left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right] + x_3\right\}\xi'_1 + \frac{x'_2}{x'_1}\xi'_2$$

$$+\frac{x'_3}{x'_1}\xi'_3 - x'_3\xi_2 + x'_2\xi_3 = -G' \tag{5}$$

方程(5) 有如下解

$$\xi_1^1 = 1, \xi_2^1 = \xi_3^1 = 0, G^1 = 0 \tag{6}$$

$$\xi_2^2 = 1, \xi_1^2 = \xi_3^2 = 0, G^2 = x_3 \tag{7}$$

$$\xi_3^3 = 1, \xi_1^3 = \xi_2^3 = 0, G^3 = x_1 - x_2 \tag{8}$$

这里对 ξ_0 没有限制. 第三步, 利用广义 Noether 定理求守恒量. 对生成函数和规范函数(6),(7),(8), 定理 3.8.3 的守恒量(3.8.49) 分别给出

$$I^1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_1} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right] - x_3 = c_1 \tag{9}$$

$$I^2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_2} + x_3 = \frac{x'_2}{x'_1} + x_3 = = c_2 \tag{10}$$

$$I^3 = \frac{\partial \Lambda}{\partial x'_3} + x_1 - x_2 = \frac{x'_3}{x'_1} + x_1 - x_2 = c_3 \tag{11}$$

其次, 应用广义 Noether 逆定理, 由已知积分求相应的 Noether 广义准对称变换. 假设系统有积分(11), 此时式(3.8.53), (3.8.54) 给出

$$\begin{cases} (x'_1)^{-3}[(x'_2)^2 + (x'_3)^2]\xi_1 + [-(x'_1)^{-2}x'_2]\xi_2 \\ \qquad + [-(x'_1)^{-2}x'_3]\xi_3 = -(x'_1)^{-2}x'_3 \\ [-(x'_1)^{-2}x'_2]\xi_1 + (x'_1)^{-1}\xi_2 = 0 \\ [-(x'_1)^{-2}x'_3]\xi_1 + (x'_1)^{-1}\xi_3 = (x'_1)^{-1} \end{cases} \tag{12}$$

$$\left|-\frac{1}{2}(x'_1)^{-2}[(x'_2)^2+(x'_3)^2]-x_3\right|\xi_1+(x'_1)^{-1}x'_2\xi_2$$

$$+(x'_1)^{-1}x'_3\xi_3+G=(x'_1)^{-1}x'_3+x_1-x_2 \tag{13}$$

方程(12)的系数行列式为零,因此三个方程不是彼此独立的.由方程(12),(13)可求得

$$\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=1,G=x_1-x_2 \tag{14}$$

§3.9 相对运动动力学系统的 Noether 理论

本节研究相对运动动力学系统的 Noether 对称性与守恒量,包括相对运动动力学方程,广义 Noether 定理,以及广义 Noether 逆定理等.

3.9.1 相对运动动力学方程

设载体极点 0 的速度 $\boldsymbol{v}_0$ 以及载体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为时间的已知函数.被载系统由 N 个质点组成,系统的位置由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定.系统的运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\dot{\omega}}+\Gamma_s$$

$$(s=1,\cdots,n) \tag{3.9.1}$$

其中 T_r 为系统相对运动动能,Q_s 为广义力,V^0 为均匀力场势能

$$V^0=M(\dot{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0)\cdot\boldsymbol{r}'_c \tag{3.9.2}$$

式中 M—— 系统总质量;$\boldsymbol{r}'_c$—— 质心在运动系中的矢径;V^ω 为离心力势能

$$V^\omega=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{3.9.3}$$

$\boldsymbol{\theta}^0$—— 系统在点 0 的惯量张量;$Q_s^{\dot{\omega}}$ 为广义回转惯性力

$$Q_s^{\dot{\omega}}=-(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times m_i\boldsymbol{r}'_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s} \tag{3.9.4}$$

Γ_s 为广义陀螺力

$$\Gamma_s = \gamma_{sk}\dot{q}_k, \gamma_{sk} = 2\boldsymbol{\omega}\cdot\left(m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_s}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}'_i}{\partial q_k}\right) \tag{3.9.5}$$

将广义力 Q_s 分为有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s

$$Q_s = Q'_s + Q''_s, Q'_s = \frac{\partial V}{\partial q_s} \tag{3.9.6}$$

令

$$L_r = T_r - V - V^0 - V^\omega \tag{3.9.7}$$

则方程(3.9.1) 写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} = Q''_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{3.9.8}$$

方程(3.9.8) 可作为 Lagrange 函数为 L_r, 广义力为 $Q''_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s$ 的一般完整系统来研究. 因此, §3.4 中的结果可以应用于系统(3.9.8).

3.9.2 相对运动动力学的广义 Noether 定理

定理 3.9.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3) 是系统(3.9.8) 的广义准对称变换, 那么系统存在 r 个线性独立的第一积分, 形如

$$I^\alpha = L_r\xi_0^\alpha + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.9.9}$$

证明类似于定理 3.4.1.

系统广义准对称变换的判据, 类似于判据 3.1.5, 3.1.6, 有

判据 3.9.1 对于无限小群变换(3.1.2), 如果满足条件

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L_r}{\partial q_s}\Delta q_s + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s + L_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)$$

$$+ (Q''_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s)(\Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{3.9.10}$$

则变换(3.1.2) 为系统(3.9.8) 的广义准对称变换.

判据 3.9.2 如果无限小群变换(3.1.3) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_r\xi_0^\alpha+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\right)+\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}+Q''_s+Q_s^{\omega}+\Gamma_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha$$

$$=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,r) \quad (3.9.11)$$

则变换(3.1.3) 为系统(3.9.8) 的广义准对称变换.

式(3.9.10) 还可写成 r 个方程

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0^\alpha+\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s^\alpha+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha+\left(L_r-\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha$$

$$+(Q''_s+Q_s^{\omega}+\Gamma_s)(\xi_s^\alpha-\dot{q}_s\xi_0^\alpha)=-\dot{G}^\alpha \quad (3.9.12)$$

$$(\alpha=1,\cdots,r)$$

公式(3.9.12) 亦可作为系统广义准对称变换的判据. 当 $\alpha=1$ 时, 式(3.9.12) 给出 Noether 等式

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L_r-\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0$$

$$+(Q''_s+Q_s^{\omega}+\Gamma_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dot{G} \quad (3.9.13)$$

为求得广义准对称变换的生成函数 $\xi_0^\alpha,\xi_s^\alpha$, 还可利用广义 Killing 方程. 将式(3.9.11) 展开, 分出含 $\ddot{q}_k$ 和不含 $\ddot{q}_k$ 的项, 得到如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0^\alpha+\dfrac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s^\alpha+\left(L_r-\dfrac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\ \quad+\dfrac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial t}+\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+(Q''_s+Q_s^{\omega}+\Gamma_s)(\xi_s^\alpha-\dot{q}_s\xi_0^\alpha)\\ \quad=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial t}-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\\ \left(L_r-\dfrac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial\dot{q}_k}+\dfrac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dfrac{\partial\xi_s^\alpha}{\partial\dot{q}_k}\\ \quad=-\dfrac{\partial G^\alpha}{\partial\dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,r) \quad (3.9.14)\end{cases}$$

3.9.3 相对运动动力学的广义 Noether 逆定理

假设系统(3.9.8) 有 r 个线性独立的第一积分

$$I^{\alpha} = I^{\alpha}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = c_{\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.9.15}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{3.9.16}$$

将方程(3.9.8) 两端同时乘以 $\bar{\xi}_s^{\alpha}$ 并对 s 求和,展开得

$$\left(\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} - Q''_s - Q_s^{\omega} - \Gamma_s\right)\bar{\xi}_s^{\alpha} = 0 \tag{3.9.17}$$

将式(3.9.16),(3.9.17) 相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\bar{\xi}_s^{\alpha} - \frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{3.9.18}$$

假设系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{3.9.19}$$

则由方程(3.9.18) 可解得

$$\bar{\xi}_s^{\alpha} = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.9.20}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kl} = \delta_{sl} \tag{3.9.21}$$

为使变换是广义准对称的,尚需令积分(3.9.15) 等于守恒量(3.9.9),即

$$L_r\xi_0^{\alpha} + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^{\alpha} + G^{\alpha} = I^{\alpha} \tag{3.9.22}$$

这样,由方程(3.9.20),(3.9.22) 便可求得系统广义准对称变换的生成函数 $\xi_0^{\alpha}, \xi_s^{\alpha}$.于是得

定理 3.9.2 如果已知系统(3.9.8) 的 r 个线性独立的第一积分(3.9.15),那么系统存在由式(3.1.3),(3.9.20),(3.9.22) 确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

3.9.4 算　例

研究相对运动动力学系统

$$\begin{cases} T_r = \dfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ Q_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_1} + m\dot{q}_2, Q_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_2} - m\dot{q}_1 \\ Q_3 = 0, V = V(q_1, q_2) \\ V^0 = \Gamma_s = Q_s^{\dot{\omega}} = 0 \qquad (s = 1,2,3) \\ V^\omega = -\dfrac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2)\omega^2 \end{cases} \tag{1}$$

的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用定理 3.9.1 由已知广义准对称性求守恒量. 由式(1)知

$$L_r = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V + \frac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2)\omega^2 \tag{2}$$

第一步,寻求广义准对称变换. Noether 等式(3.9.13)给出

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial q_1} + mq_1\omega^2\right)\xi_1 + \left(-\frac{\partial V}{\partial q_2} + mq_2\omega^2\right)\xi_2 + m\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + m\dot{q}_2\dot{\xi}_2$$

$$+ m\dot{q}_3\dot{\xi}_3 + \left[-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V + \frac{1}{2}m(q_1^2 + q_2^2)\omega^2\right]\dot{\xi}_0$$

$$+ m\dot{q}_2(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) - m\dot{q}_1(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = -\dot{G} \tag{3}$$

方程(3)有解

$$\xi_0^1 = -1, \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_3^1 = 0, G^1 = 0 \tag{4}$$

$$\xi_3^2 = 1, \xi_0^2 = \xi_1^2 = \xi_2^2 = 0, G^2 = 0 \tag{5}$$

$$\xi_3^3 = t, \xi_0^3 = \xi_1^3 = \xi_2^3 = 0, G^3 = -mq_3 \tag{6}$$

它们对应系统的 Noether 广义准对称变换. 第二步,利用定理 3.9.1 求守恒量. 对生成函数和规范函数(4),(5),(6),守恒量(3.9.9)分别给出

$$I^1 = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - L_r$$
$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + V - \frac{1}{2} m (q_1^2 + q_2^2) \omega^2$$
$$= c_1 \tag{7}$$

$$I^2 = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_3} = m \dot{q}_3 = c_2 \tag{8}$$

$$I^3 = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_3} t - m q_3 = m \dot{q}_3 t - m q_3 = c_3 \tag{9}$$

其次,利用定理 3.9.2 由已知积分求相应的广义准对称变换.假设系统(1) 有积分

$$I = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + V - \frac{1}{2} m (q_1^2 + q_2^2) \omega^2 + m \dot{q}_3$$
$$= \text{const.} \tag{10}$$

式(3.9.20),(3.9.22)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = \dot{q}_1, \bar{\xi}_2 = \dot{q}_2, \bar{\xi}_3 = 1 + \dot{q}_3 \\ L_r \xi_0 + m \dot{q}_1 \bar{\xi}_1 + m \dot{q}_2 \bar{\xi}_2 + m \dot{q}_3 \bar{\xi}_3 + G \\ \quad = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + V - \frac{1}{2} m (q_1^2 + q_2^2) \omega^2 + m \dot{q}_3 \end{cases} \tag{11}$$

由此解得

$$\begin{cases} \xi_0 = \frac{1}{L_r} \left[V - \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - G \right] \\ \xi_1 = \dot{q}_1 (1 + \xi_0), \xi_2 = \dot{q}_2 (1 + \xi_0), \xi_3 = \dot{q}_3 (1 + \xi_0) + 1 \end{cases} \tag{12}$$

取规范函数

$$G = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V \tag{13}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2, \xi_3 = \dot{q}_3 + 1 \tag{14}$$

若取

$$G = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - V + L_r \tag{15}$$

则有

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1 \tag{16}$$

§3.10 Chetaev型非完整系统的Noether理论

本节研究Chetaev型非完整系统的Noether对称性与守恒量，包括系统的运动方程，相应完整系统的Noether理论，非完整系统的广义Noether定理，以及广义Noether逆定理等.

3.10.1 Chetaev型非完整系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定.系统的运动受有 g 个双面理想Chetaev型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{3.10.1}$$

非完整约束(3.10.1)加在虚位移 δq_s 上的限制表为Appell-Chetaev条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \tag{3.10.2}$$

由D′Alembert-Lagrange原理和虚位移方程(3.10.2)，利用通常的Lagrange乘子法，可得到系统的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{3.10.3}$$

其中 L 为系统的Lagrange函数，Q_s 为非势广义力，λ_β 为约束乘子.

在运动微分方程积分之前，可由方程(3.10.1)，(3.10.3)求出 λ_β 为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数[19].这样，方程(3.10.3)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.10.4}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{3.10.5}$$

称方程(3.10.4) 为与非完整系统(3.10.1),(3.10.3) 相应的完整系统的运动方程.

3.10.2 相应完整系统的 Noether 理论

一般完整系统的广义Noether定理3.4.1和广义Noether逆定理3.4.2适应于与非完整系统相应的完整系统,有

定理 3.10.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3)是相应完整系统(3.10.4) 的广义准对称变换,即满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha + (Q_s + \Lambda_s)(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) = -\dot{G}^\alpha \quad (3.10.6)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.10.7)$$

定理 3.10.2 如果已知相应完整系统(3.10.4) 的 r 个线性独立的第一积分(3.4.3),那么由式(3.1.3),(3.4.8),(3.4.11)确定的无限小变换是系统的广义准对称变换.

3.10.3 非完整系统的广义 Noether 定理

因

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t = \epsilon_\alpha\bar{\xi}_s^\alpha \quad (3.10.8)$$

考虑到 ϵ_α 的独立性,式(3.10.2) 可写成

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g; \alpha = 1, \cdots, r) \quad (3.10.9)$$

这是非完整约束对无限小变换生成函数的限制,可称为Appell-Chetaev条件.

定义 3.10.1 如果无限小变换(3.1.3) 是广义准对称变换,且这些变换满足Appell-Chetaev条件(3.10.9),则称变换为非完整系统的 Noether 强广义准对称变换.

定理 3.10.3[11,12]　如果对给定的非完整系统(3.10.1),(3.10.3),无限小变换(3.1.3)是非完整系统的强广义准对称变换,那么系统存在形如(3.10.7)的 r 个线性独立的第一积分.

证明　首先,因变换(3.1.3)是广义准对称的,故按定义3.1.3有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_s\delta q_s\right\}\mathrm{d}t$$

或写成形式

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} + Q_s\right)\bar{\xi}_s^\alpha\right\}\mathrm{d}t = 0$$

其次,因变换是强广义准对称的,故有

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha\mathrm{d}t = 0$$

将以上二式相加,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_\alpha\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s} + Q_s + \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha\right\}\mathrm{d}t$$

$$= 0$$

利用方程(3.10.3),注意到 ε_α 的独立性以及积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha\right) = 0$$

积分之,便得式(3.10.7).证毕.

定理3.10.3称为Chetaev型非完整系统的广义Noether定理.利用这个定理可由已知广义准对称性找到相应的守恒量.

如果没有非完整约束,则定理3.10.3退化为定理3.4.1.

由定理3.10.3的证明过程可以看出,Appell-Chetaev条件

(3.10.9) 可放宽为条件

$$\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \bar{\xi}_s^\alpha = 0 \tag{3.10.10}$$

定义 3.10.2 如果无限小变换(3.1.3) 是广义准对称变换，且这些变换满足条件(3.10.10)，则称变换是非完整系统的 Noether 弱广义准对称变换.

定理 3.10.3 可进一步推广为

定理 3.10.4 如果对给定的非完整系统(3.10.1)，(3.10.3)，无限小变换(3.1.3) 是非完整系统的弱广义准对称变换，那么系统存在形如(3.10.7) 的 r 个线性独立的第一积分.

3.10.4 非完整系统的广义 Noether 逆定理

假设已知非完整系统(3.10.1)，(3.10.3) 的 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.10.11}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_s} \ddot{q}_s = 0 \tag{3.10.12}$$

将方程(3.10.3) 两端乘以 $\bar{\xi}_s^\alpha$ 并对 s 求和，展开得

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \right) \bar{\xi}_s^\alpha = 0 \tag{3.10.13}$$

将式(3.10.12)，(3.10.13) 相加，分出含 $\ddot{q}_k$ 的项，由其系数为零得到

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \bar{\xi}_s^\alpha - \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{3.10.14}$$

$$(k = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r)$$

假设系统非奇异，即设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right) \neq 0 \tag{3.10.15}$$

则由方程(3.10.14)解得

$$\tilde{\xi}_s^\alpha = \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} \tag{3.10.16}$$

$$(s = 1, \cdots, n; \alpha = 1, \cdots, r)$$

其中

$$\tilde{h}_{sk} h_{kl} = \delta_{sl} \tag{3.10.17}$$

为使变换为广义准对称的,需令积分(3.10.11)等于守恒量式(3.10.7),即

$$L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \tilde{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.10.18}$$

这样,由式(3.10.16),(3.10.18)可求得无限小变换的生成函数$\xi_0^\alpha, \xi_s^\alpha$.如果它们还满足条件(3.10.9),则必为系统的强广义准对称变换.于是得

定理3.10.5[11,12] 如果已知非完整系统(3.10.1),(3.10.3)的r个线性独立的第一积分(3.10.11),那么由式(3.1.3),(3.10.16),(3.10.18)确定的无限小变换,只要满足Appell-Chetaev条件(3.10.9),必是系统的强广义准对称变换.

定理3.10.5称为Chetaev型非完整系统的广义Noether定理.根据这个定理,可由非完整系统的已知积分找到相应的广义准对称变换.

如果没有非完整约束,则定理3.10.5退化为定理3.4.2.

定理3.10.5可放宽条件,有

定理3.10.6 如果已知非完整系统(3.10.1),(3.10.3)的r个线性独立的第一积分(3.10.11),那么由式(3.1.3),(3.10.16),(3.10.18)确定的无限小变换,只要满足条件(3.10.10),必是系统的弱广义准对称变换.

3.10.5 非完整系统与相应完整系统的Noether对称性

与非完整系统(3.10.1),(3.10.3)相应的完整系统(3.10.4)的对称性,要求满足条件(3.10.6).非完整系统(3.10.1),(3.10.3)

的对称性,不仅要求满足广义准对称变换条件(3.1.33),而且要求满足 Appell-Chetaev 条件(3.10.9)或条件(3.10.10).这表明,非完整系统的对称性一定是相应完整系统的对称性;反过来,则不一定.

定理 3.10.7 如果相应完整系统的无限小变换满足式(3.10.6),而且还满足 Appell-Chetaev 条件(3.10.9),那么相应完整系统的对称性导致非完整系统的强广义准对称性.

定理 3.10.8 如果相应完整系统的无限小变换满足式(3.10.6),而且还满足条件(3.10.10),那么相应完整系统的对称性导致非完整系统的弱广义准对称性.

3.10.6 算 例

例 1 系统的位形由两个广义坐标 q_1, q_2 来确定,系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), V = 0 \tag{1}$$

所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0 \qquad (b = \text{const.}) \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用广义 Noether 定理 3.10.3 由已知对称性求守恒量.

第一步,建立系统的运动方程.由式(1),(2)求得

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{1+b^2t^2} = \Lambda_1, \ddot{q}_2 = -\frac{bt}{1+b^2t^2} = \Lambda_2 \tag{3}$$

第二步,求相应完整系统的广义准对称性.式(3.10.6)给出

$$\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\dot{\xi}_0$$

$$+ \Lambda_1(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + \Lambda_2(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = -\dot{G} \tag{4}$$

方程(4)有解

$$\xi_1^1 = 1, \xi_0^1 = \xi_2^1 = 0, G^1 = \frac{1}{b}\text{arctg}bt \tag{5}$$

$$\xi_2^2 = 1, \xi_0^2 = \xi_1^2 = 0, G^2 = \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2) \tag{6}$$

$$\xi_0^3 = 0, \xi_1^3 = -bt, \xi_2^3 = 1, G^3 = bq_1 \tag{7}$$

$$\xi_0^4 = 1, \xi_1^4 = \dot{q}_1, \xi_2^4 = \dot{q}_2, G^4 = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{8}$$

这些生成函数和规范函数都对应于相应完整系统的广义准对称变换.第三步,求相应的守恒量.Appell-Chetaev 条件(3.10.9) 给出

$$\bar{\xi}_1 + bt\bar{\xi}_2 = 0 \tag{9}$$

式(5),(6) 不满足式(9),式(7),(8) 满足式(9).因此,式(7),(8) 对应非完整系统的强广义准对称变换.对式(7),(8),定理 3.10.3 的守恒量(3.10.7) 分别给出为

$$I^3 = -bt\,\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1 = c_3 \tag{10}$$

$$I^4 = 0 \tag{11}$$

因此,对应式(8) 的变换是平庸的.

其次,利用广义 Noether 逆定理 3.10.5 由已知积分找到相应的广义准对称变换.假设系统有积分

$$I = -bt\,\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1 = \text{const.} \tag{12}$$

求与其相应的广义准对称变换.式(3.10.16),(3.10.18) 给出为

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = -bt, \bar{\xi}_2 = 1 \\ L\xi_0 + \dot{q}(-bt) + \dot{q}_2 + G = -bt\,\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + bq_1 \end{cases} \tag{13}$$

因此解得

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{L}(bq_1 - G) \\ \xi_1 = -bt + \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0 \end{cases} \tag{14}$$

当取

$$G = bq_1 \tag{15}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -bt, \xi_2 = 1 \tag{16}$$

若取

$$G = bq_1 - L \tag{17}$$

则有

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = -bt + \dot{q}_1, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2 \tag{18}$$

式(15),(16) 或(17),(18) 都是非完整系统的强广义准对称变换.

例 2 Appell-Hamel 例.

问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_3 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} = 0 \tag{2}$$

首先,应用定理 3.10.3 由已知对称性求守恒量.第一步,寻求满足 Appell-Chetaev 条件(3.10.9) 的无限小广义准对称变换.条件(3.10.9) 给出

$$-(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}(\dot{q}_1\bar{\xi}_1 + \dot{q}_2\bar{\xi}_2) + \bar{\xi}_3 = 0 \tag{3}$$

广义 Killing 方程(3.1.37) 给出

$$\begin{aligned}
&-mg\xi_3 + \left[-mgq_3 - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\right] \\
&\times \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \xi_0}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) \\
&+ m\dot{q}_1\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \xi_1}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) \\
&+ m\dot{q}_2\left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \xi_2}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) \\
&+ m\dot{q}_3\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial t} + \frac{\partial \xi_3}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial q_3}\dot{q}_3\right) \\
&= -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_1}\dot{q}_1 - \frac{\partial G}{\partial q_2}\dot{q}_2 - \frac{\partial G}{\partial q_3}\dot{q}_3 \\
&\times \left[-mgq_3 - \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\right]\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} \\
&+ m\dot{q}_1\frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{q}_k} + m\dot{q}_2\frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{q}_k} + m\dot{q}_3\frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{q}_k} = -\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k}
\end{aligned}$$

$$(k = 1,2,3) \tag{4}$$

方程(3),(4) 有如下解

$$\xi_0^1 = -1, \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_3^1 = 0, G^1 = 0 \tag{5}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = -\frac{1}{\dot{q}_2}, \xi_2^2 = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2^2}, \xi_3^2 = 0, G^2 = -m\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} \tag{6}$$

$$\xi_0^3 = 0, \xi_1^3 = 0, \xi_2^3 = \dot{q}_3, \xi_3^3 = \dot{q}_2, G^3 = mgq_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 \tag{7}$$

$$\xi_0^4 = 0, \xi_1^4 = \dot{q}_3, \xi_2^4 = 0, \xi_3^4 = \dot{q}_1, G^4 = mgq_1 - m\dot{q}_1\dot{q}_3 \tag{8}$$

第二步,由广义准对称变换求相应的守恒量.对于式(5),(6),(7),(8),广义 Noether 定理 3.10.3 的守恒量(3.10.7) 分别给出

$$I^1 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = c_1 \tag{9}$$

$$I^2 = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} = c_2 \tag{10}$$

$$I^3 = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mgq_2 = c_3 \tag{11}$$

$$I^4 = m\dot{q}_1\dot{q}_3 + mgq_1 = c_4 \tag{12}$$

其次,应用定理 3.10.5 由已知积分找到相应的广义准对称变换.假设系统有积分

$$I = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mgq_2 = \text{const.} \tag{13}$$

式(3.10.16),(3.10.18) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = 0, \bar{\xi}_2 = \dot{q}_3, \bar{\xi}_3 = \dot{q}_2 \\ L\xi_0 + m\dot{q}_2\dot{q}_3 + m\dot{q}_3\dot{q}_2 + G = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mgq_2 \end{cases} \tag{14}$$

式(14) 满足条件(3).由式(14) 求得

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{L}(mgq_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 - G) \\ \xi_1 = \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = \dot{q}_3 + \dot{q}_2\xi_0 \\ \xi_3 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3\xi_0 \end{cases} \tag{15}$$

取

$$G = mgq_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 \tag{16}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = \dot{q}_3, \xi_3 = \dot{q}_2 \tag{17}$$

若取

$$G = mgq_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 - L \tag{18}$$

则

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 + \dot{q}_3, \xi_3 = \dot{q}_3 + \dot{q}_2 \tag{19}$$

它们都对应非完整系统的强广义准对称变换.

例 3 匀质圆球在完全粗糙水平面上的纯滚动问题.

令

$$q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi, q_4 = x, q_5 = y \tag{1}$$

分别为 Euler 角和球心坐标,系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2) \tag{2}$$

其中 m, a 分别为球的质量和半径.表示球在平面上作纯滚动的非完整约束方程为

$$\begin{cases} f_1 = \dot{q}_4 + a(\dot{q}_3\sin q_2\cos q_1 - \dot{q}_2\sin q_1) = 0 \\ f_2 = \dot{q}_5 + a(\dot{q}_3\sin q_2\sin q_1 + \dot{q}_2\cos q_1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

系统的运动方程表为

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)^{\cdot} = 0 \\ \frac{2}{5}ma^2\ddot{q}_2 + \frac{2}{5}ma^2\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2 = -\lambda_1 a\sin q_1 + \lambda_2 a\cos q_1 \\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3 + \dot{q}_1\cos q_2)^{\cdot} = \lambda_1 a\sin q_2\cos q_1 + \lambda_2 a\sin q_2\sin q_1 \\ m\ddot{q}_4 = \lambda_1, m\ddot{q}_5 = \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

由方程(3),(4) 容易求得

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{5}$$

这个问题属于非完整系统的自由运动,此时非完整性消失了[26].相应完整系统的对称性就是非完整系统的对称性,因为此时条件(3.10.10) 自动满足.

Lagrange 系统准对称性判据式(3.1.27) 给出

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{5}ma^2\,\dot{q}_2\,\dot{q}_3\sin q_2\cdot\xi_2+\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\,\dot{\xi}_0)\\
&+\frac{2}{5}ma^2\,\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\,\dot{\xi}_0)+\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)\\
&\times(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\,\dot{\xi}_0)+m\,\dot{q}_4(\dot{\xi}_4-\dot{q}_4\,\dot{\xi}_0)+m\,\dot{q}_5(\dot{\xi}_5-\dot{q}_5\,\dot{\xi}_0)\\
&+\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2)+\frac{1}{2}\,\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\,\dot{q}_1\,\dot{q}_3\cos q_2)\right]\dot{\xi}_0\\
&=-\dot{G} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

方程(6) 有如下解

$$\xi_1^1=1,\xi_0^1=\xi_2^1=\xi_3^1=\xi_4^1=\xi_5^1=0,G^1=0 \qquad (7)$$

$$\xi_3^2=1,\xi_0^2=\xi_1^2=\xi_2^2=\xi_4^2=\xi_5^2=0,G^2=0 \qquad (8)$$

$$\xi_4^3=1,\xi_0^3=\xi_1^3=\xi_2^3=\xi_3^3=\xi_5^3=0,G^3=0 \qquad (9)$$

$$\xi_5^4=1,\xi_0^4=\xi_1^4=\xi_2^4=\xi_3^4=\xi_4^4=0,G^4=0 \qquad (10)$$

$$\xi_0^5=1,\xi_1^5=\xi_2^5=\xi_3^5=\xi_4^5=\xi_5^5=0,G^5=0 \qquad (11)$$

非完整约束(3) 对无限小生成函数的限制为

$$\begin{cases}\bar{\xi}_4+a(\bar{\xi}_3\sin q_2\cos q_1-\bar{\xi}_2\sin q_1)=0\\ \bar{\xi}_5+a(\bar{\xi}_3\sin q_2\sin q_1+\bar{\xi}_2\cos q_1)=0\end{cases} \qquad (12)$$

显然,式(7),(11) 满足 Appell-Chetaev 条件(12),但式(8),(9),(10) 不满足条件(12).按定义 3.10.1,定义 3.10.2 知,与式(7),(11) 相应的变换是非完整系统的强广义准对称变换,与式(8),(9),(10) 相应的变换是非完整系统的弱广义准对称变换.应用定理 3.10.4,由式(7)— 式(11) 得到如下守恒量

$$I^1=\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1+\dot{q}_3\cos q_2)=c_1 \qquad (13)$$

$$I^2=\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3+\dot{q}_1\cos q_2)=c_2 \qquad (14)$$

$$I^3=m\,\dot{q}_4=c_3 \qquad (15)$$

$$I^4=m\,\dot{q}_5=c_4 \qquad (16)$$

$$I^5=-\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2+\dot{q}_5^2)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2+2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)=c_5 \tag{17}$$

§3.11 非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 理论

本节研究非 Chetaev 型非完整系统的 Noether 对称性与守恒量,包括系统的运动方程,相应完整系统的 Noether 理论,非完整系统的广义 Noether 定理,以及广义 Noether 逆定理等.

3.11.1 非 Chetaev 型非完整系统的运动方程

假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定.系统的运动受有 g 个双面理想非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{3.11.1}$$

非完整约束(3.11.1)加在虚位移 δq_s 上的限制为

$$f_{\beta s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\delta q_s=0\quad(\beta=1,\cdots,g;s=1,\cdots n) \tag{3.11.2}$$

一般说来,$f_{\beta s}$ 与 $\dfrac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}$ 无关.当

$$f_{\beta s}=\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s} \tag{3.11.3}$$

时,非 Chetaev 约束成为 Chetaev 约束,因此,非 Chetaev 型非完整约束更具一般性.

由 D′Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(3.11.2),利用通常的 Lagrange 乘子法,得到非 Chetaev 型非完整系统的运动方程[27]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta f_{\beta s}\quad(s=1,\cdots,n) \tag{3.11.4}$$

方程(3.11.1),(3.11.4)组成非 Chetaev 型非完整系统的封闭方程组.

在运动微分方程积分之前,可由方程(3.11.1),(3.11.4)解

出 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数.这样,方程(3.11.4) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + \Lambda'_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.11.5}$$

其中

$$\Lambda'_s = \Lambda'_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta f_{\beta s} \tag{3.11.6}$$

已表为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数. 称方程(3.11.5) 为与非完整系统(3.11.1),(3.11.4) 相应的完整系统的运动方程.

3.11.2 相应完整系统的 Noether 理论

一般完整系统的广义Noether定理3.4.1和广义Noether逆定理 3.4.2 适应于与非完整系统相应的完整系统(3.11.5),有

定理 3.11.1 假设给定的有限群 G_r 的无限小变换(3.1.3) 是相应完整系统(3.11.5) 的广义准对称变换,即满足条件

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s^\alpha \\ &\quad + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0^\alpha + (Q_s + \Lambda'_s)(\xi_s^\alpha - \dot{q}_s\xi_0^\alpha) \\ &= -\dot{G}^\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r)\end{aligned} \tag{3.11.7}$$

那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\xi_s^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.11.8}$$

定理3.11.1称为与非Chetaev非完整系统相应的完整系统的广义 Noether 定理.根据这个定理可由已知 Noether 对称性求得相应的守恒量.

对于Chetaev型非完整系统,定理3.11.1退化为定理3.10.1.

定理 3.11.2 如果已知相应完整系统(3.11.5) 的 r 个线性独立的第一积分(3.4.3),那么由式(3.1.3),(3.4.8),(3.4.11) 确定的无限小变换必是系统的广义准对称变换.

定理3.11.2称为与非Chetaev非完整系统相应的完整系统的广义 Noether 逆定理.根据这个定理可由已知积分找到相应的广义准对称变换.

对于 Chetaev 型非完整系统，定理 3.11.2 退化为定理 3.10.2.

3.11.3 非完整系统的广义 Noether 定理

因

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \epsilon_a \bar{\xi}_s^a \tag{3.11.9}$$

将其代入虚位移方程(3.11.2)，得到

$$f_{\beta s} \xi_s^a = 0 \tag{3.11.10}$$

$$(\beta = 1, \cdots, g; \alpha = 1, \cdots, r)$$

这是非 Chetaev 型非完整约束对无限小生成函数的限制条件.

定义 3.11.1 如果无限小变换(3.1.3) 是广义准对称变换，且这些变换满足条件(3.11.10)，则称变换为非 Chetaev 型非完整系统的强广义准对称变换.

定理 3.11.3 如果对给定的非 Chetaev 型非完整系统(3.11.1)，(3.11.4)，无限小变换(3.1.3) 是系统的强广义准对称变换，那么系统存在形如(3.11.8) 的 r 个线性独立的第一积分.

证明 首先，因无限小变换(3.1.3) 是广义准对称变换，故按定义 3.1.3 有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + Q_s \delta q_s \right\} \mathrm{d}t$$

或者写成形式

$$\int_{t_1}^{t_2} \epsilon_a \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \bar{\xi}_s^a + G^a \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + Q_s \right) \bar{\xi}_s^a \right\} \mathrm{d}t$$

$$= 0$$

其次，因变换是强广义准对称的，故有

$$\int_{t_1}^{t_2} \epsilon_\alpha \lambda_\beta f_{\beta s} \bar{\xi}_s^a \mathrm{d}t = 0$$

将以上两式相加，利用方程(3.11.4)，考虑到 ϵ_a 的独立性以及积分区间$[t_1, t_2]$ 的任意性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\xi_0^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \bar{\xi}_s^a + G^a \right) = 0$$

积分之,便得守恒量(3.11.8).证毕.

定理3.11.3称为非Chetaev非完整系统的广义Noether定理,根据这个定理可由已知广义准对称性求得系统的守恒量.

对于Chetaev型非完整系统,定理3.11.3退化为定理3.10.3.

由定理3.11.3的证明过程可以看出,条件(3.11.10)可放宽为条件

$$\lambda_\beta f_{\beta s}\xi_s^a = 0 \tag{3.11.11}$$

定义3.11.2 如果无限小变换(3.1.3)是广义准对称变换,且这些变换满足条件(3.11.11),则称变换为非Chetaev非完整系统的弱广义准对称变换.

定理3.11.4 如果对给定的非Chetaev非完整系统(3.11.1),(3.11.4),无限小变换(3.1.3)是系统的弱广义准对称变换,那么非完整系统存在形如(3.11.8)的 r 个线性独立的第一积分.

3.11.4 非完整系统的广义Noether逆定理

假设已知非完整系统(3.11.1),(3.11.4)的 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = c_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.11.12}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I^\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{3.11.13}$$

将方程(3.11.4)两端乘以 $\bar{\xi}_s^\alpha$ 并对 s 求和,展开得

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s - \lambda_\beta f_{\beta s}\right)\bar{\xi}_s^\alpha = 0 \tag{3.11.14}$$

将式(3.11.13)与(3.11.14)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零得到

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\bar{\xi}_s^\alpha - \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{3.11.15}$$

假设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{3.11.16}$$

则由方程(3.11.15) 解得

$$\bar{\xi}_s^\alpha = \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I^\alpha}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{3.11.17}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk} h_{kl} = \delta_{sl} \tag{3.11.18}$$

为使变换为广义准对称的，需令积分(3.11.12) 等于守恒量(3.11.8)，即

$$L\xi_0^\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, r) \tag{3.11.19}$$

这样，由方程(3.11.17)，(3.11.19) 可求得无限小变换生成函数 ξ_0^α，ξ_s^α，如果它们还满足条件(3.11.10)，则必为非完整系统的强广义准对称变换.

定理 3.11.5　如果已知非 Chetaev 型非完整系统(3.11.1)，(3.11.4) 的 r 个线性独立的第一积分(3.11.12)，那么由式(3.1.3)，(3.11.17)，(3.11.19) 确定的无限小变换，只要满足条件(3.11.10)，必为系统的强广义准对称变换.

定理 3.11.5 称为非 Chetaev 型非完整系统的广义 Noether 逆定理. 根据这个定理，可由系统的已知积分求得相应的广义准对称变换.

对于 Chetaev 型非完整系统，定理 3.11.5 退化为定理 3.10.5.

类似于定理 3.10.6，有

定理 3.11.6　如果已知非 Chetaev 型非完整系统(3.11.1)，(3.11.4) 的 r 个线性独立的第一积分(3.11.12)，那么由式(3.1.3)，(3.11.17)，(3.11.19) 确定的无限小变换，只要满足条件(3.11.11)，必为系统的弱广义准对称变换.

3.11.5　非完整系统与相应完整系统的 Noether 对称性

与 Chetaev 型非完整系统的定理 3.10.7，3.10.8 相类似，对于

非 Chetaev 型非完整系统有

定理 3.11.7　如果相应完整系统(3.11.5) 的无限小变换满足式(3.11.7),且满足条件(3.11.10),那么相应完整系统的对称性导致非 Chetaev 型非完整系统的强广义准对称性.

定理 3.11.8　如果相应完整系统(3.11.5) 的无限小变换满足式(3.11.7),且满足条件(3.11.11),那么相应完整系统的对称性导致非 Chetaev 型非完整系统的弱广义准对称性.

3.11.6　算　例

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 \tag{1}$$

非完整约束

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

为非 Chetaev 型的,虚位移满足

$$\delta q_1 - \delta q_2 = 0 \tag{3}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,应用广义 Noether 定理由已知对称性求守恒量. 第一步,建立系统的运动方程. 方程(3.11.4) 给出

$$\ddot{q}_1 + 1 = \lambda, \ddot{q}_2 = -\lambda \tag{4}$$

由方程(2),(4) 求得

$$\lambda = \frac{t - \dot{q}_1}{1 + t} \tag{5}$$

于是有

$$\Lambda'_1 = -\Lambda'_2 = \frac{t - \dot{q}_1}{1 + t} \tag{6}$$

第二步,研究相应完整系统的 Noether 对称性. 条件(3.11.7) 给出

$$\begin{aligned} &-\xi_1 + \left[-q_1 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\right]\dot{\xi}_0 + \dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2 \\ &+ \Lambda'_1(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + \Lambda'_2(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = -\dot{G} \end{aligned} \tag{7}$$

方程(7) 有解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = \xi_2^1 = 1, G = t \tag{8}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = \xi_2^2 = t, G = \frac{1}{2}t^2 - q_1 - q_2 \tag{9}$$

它们对应相应完整系统的广义准对称变换.第三步,研究非完整系统的广义准对称变换.条件(3.11.10) 给出

$$\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 = 0 \tag{10}$$

显然,式(8),(9) 都满足式(10),因此,它们也对应于非完整系统的强广义准对称变换. 第四步, 求守恒量. 对于式(8), (9), 定理3.11.3 的守恒量(3.11.8) 分别给出为

$$I^1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = c_1 \tag{11}$$

$$I^2 = \dot{q}_1 t + \dot{q}_2 t + \frac{1}{2}t^2 - q_1 - q_2 = c_2 \tag{12}$$

其次,应用广义 Noether 逆定理由已知积分求相应的广义准对称变换. 假设系统有积分(12),求与其相应的广义准对称变换. 式(3.11.17),(3.11.19) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = t, \bar{\xi}_2 = t \\ L\xi_0 + \dot{q}_1\bar{\xi}_1 + \dot{q}_2\bar{\xi}_2 + G = \dot{q}_1 t + \dot{q}_2 t + \frac{1}{2}t^2 - q_1 - q_2 \end{cases} \tag{13}$$

当取

$$G = \frac{1}{2}t^2 - q_1 - q_2 \tag{14}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = t \tag{15}$$

若取

$$G = \frac{1}{2}t^2 - q_1 - q_2 - L \tag{16}$$

则有

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = t + \dot{q}_1, \xi_2 = t + \dot{q}_2 \tag{17}$$

式(14),(15) 或式(16),(17) 都对应非完整系统的强广义准对称变换.

本章小结

自1918年德国学者Noether　A.E.发现力学系统的对称性与守恒量之间的潜在关系,70年代以来,Noether对称性的研究成为数学物理学科的一个热点.Noether对称性在不同学科分支内可以从不同角度出发进行多方面的研究.本章基于Hamilton作用量在无限小群变换下的不变性,侧重研究了约束力学系统的Noether理论,包括以下10类系统:

- Lagrange系统
- Hamilton系统
- 广义坐标下一般完整系统
- 准坐标下一般完整系统
- 有多余坐标完整系统
- 变质量完整系统
- 事件空间完整系统
- 相对运动动力学系统
- Chetaev型非完整系统
- 非Chetaev型非完整系统

对每类系统建立Noether定理和Noether逆定理,给出典型例子说明定理的应用.

习　题

1.一维系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + kx$$

非势广义力为

$$Q_x = -\beta \dot{x}$$

试证,无限小变换

$$t^* = t, x^* = x + \varepsilon$$

是系统的广义准对称变换.

2.系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}(t^2 \dot{x}^2 - \frac{a}{\nu + 2} t^{\nu+1} x^{2\nu+4})$$

其中 a, ν 为常数. 试建立广义 Killing 方程并求解.

3. 试用广义 Killing 方程(3.1.37) 证明, 完整非保守系统

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2, Q = \dot{q}^3$$

不存在形如

$$\xi_0 = \xi_0(t, q), \xi = \xi(t, q), G = G(t, q)$$

的非零解.

4. 试研究完整系统

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \ddot{y} + y = 0$$

的 Noether 对称性与守恒量.

5. 设准速度与广义速度关系为

$$\omega_s = a_{sk}(\boldsymbol{q}) \dot{q}_k, \dot{q}_s = b_{sk}(\boldsymbol{q}) \omega_k (s, k = 1, \cdots, n)$$

试在此情形下简化 Killing 方程(3.5.34).

6. 已知有多余坐标系统为

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2) - q_1$$

$$Q_1 = - \dot{q}_2, Q_2 = \dot{q}_1$$

$$f = q_2 - q_1^2 = 0$$

试研究它的 Noether 对称性与守恒量.

7. 设变质量系统的方程(3.7.2) 中 L, Q_s, P_s 都不含 t, 且 $(Q_s + P_s) \dot{q}_s = 0$. 试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

8. 试建立事件空间中完整保守系统的 Noether 理论.

9. 试在事件空间中研究系统

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_1$$

的 Noether 对称性与守恒量.

10. 相对运动动力学系统为

$$T_r = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 (9\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$V^0 = Q_\theta = \dot{Q_\theta^\omega} = 0$$

$$V^\omega = - \frac{2}{3} ml^2 \omega^2 \sin^2\theta$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

11. 试研究 Chaplygin 雪橇问题

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2$$

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \mathrm{tg} q_3 = 0$$

的 Noether 对称性与守恒量.

12. 非 Chetaev 非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2$$

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0$$

$$\delta q_1 - \delta q_2 = 0$$

试研究其 Noether 对称性与守恒量.

参考文献

[1] Noether A.E., Invariante Variationsprobleme, Nachr, Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys., 1918, KI, Ⅱ, 235.

[2] Djukić Dj. D., Vujanović B., Noether's theory in classical nonconservative mechanics, Acta Mechanica, 1975, 23, 17-27.

[3] 李子平,约束系统的变换性质,物理学报,1981,30(12):1659—1671.

[4] 李子平,经典和量子约束系统及其对称性质,北京,北京工业大学出版社,1993.

[5] 赵跃宇,变质量非完整系统的 Noether 定理,湖南省力学学会首届年会文集,1984.

[6] 罗勇、赵跃宇,非线性非完整约束系统的广义 Noether 定理,北京工业学院学报,1986,6(3):41—47.

[7] 赵跃宇,一般动力学系统的守恒律(Ⅰ),湘潭大学学报,1989,11(2):26—30.

[8] 赵跃宇,一般动力学系统的守恒律(Ⅱ),黄淮学刊,1990,6(1):27—34.

[9] 赵跃宇,一般动力学系统的守恒律(Ⅲ),湘潭大学学报,1991,13(1):43—50.

[10] 刘端,非完整非保守动力学系统的守恒律,力学学报,1989,21(1):75—83.

[11] 刘端,非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理,中国科学,A 辑,1990,20(11):1189—1197.

[12] 梅凤翔、刘端、罗勇,高等分析力学,北京,北京理工大学出版社,1991.

[13] 张解放,高阶非完整非保守系统的广义 Noether 定理,科学通报 1989,34(22):1756—1757.

[14] 罗绍凯,高阶非完整非有势系统相对于非惯性系的 Noether 定理,贵州大学学报,1991,8(2):106—113.

[15] 苏正雷、罗绍凯,高阶非 Четаев 型约束系统的广义守恒律,河南科学,1993,

11(2,30):137—142.
[16] 罗绍凯,变质量任意阶非线性非完整系统相对非惯性系的广义 Noether 定理,江西科学,1992,10(3):131—137.
[17] 俞慧丹、张解放、许友里,非完整系统相对于非惯性系的 Noether 定理,应用数学和力学,1993,14(6):499—506.
[18] Лурье А.И., Аналитическая Механика, Москва, Ф М, 1961.
[19] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京:北京工业学院出版社,1985.
[20] Vujanovic B., A study of conservation laws of dynamical systems by means of differential variational principles of Jourdain and Gauss, Acta Mechanica, 1986,65: 63—80.
[21] Новоселов В. С., Вариационные Методы в Механике, Ленинград:ЛГУ, 1966.
[22] Новоселов В.С.,Уравнения движения нелинеиных неголономных систем с переменными массами, Вестн ЛГУ, 1959, 7
[23] 杨来伍、梅凤翔,变质量系统力学,北京:北京理工大学出版社,1989.
[24] Mei Fengxiang, Parametric equations of nonholonomic nonconservative systems in the event space and the method of their integration, Acta Mechanica Sinica, 1990, 6(2): 160-168
[25] Румянцев В.В., On some problems of analytical dynamics of nonholonomic systems, Proc. of IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Torino: AAST, 1983, 697—715.
[26] 梅凤翔,非完整系统的自由运动与非完整性的消失,力学学报,1994,26(4):470—476.
[27] 梅凤翔,非完整动力学研究,北京:北京工业学院出版社,1987.

第四章　约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅱ)

在第三章中,从 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性出发,研究了约束力学系统的 Noether 对称性.本章则从 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性出发,研究 Birkhoff 系统的 Noether 对称性,包括 Pfaff 作用量与 Noether 对称性,自由 Birkhoff 系统的 Noether 理论,以及约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论等.Pfaff 作用量比 Hamilton 作用量更一般,Hamilton 作用量是 Pfaff 作用量的特殊情形.从这个意义上说,本章结果比第三章更具普遍性.

§4.1　Pfaff 作用量与 Noether 对称性

本节研究 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性质,包括 Pfaff 作用量的变分,Noether 意义下的对称变换,准对称变换和广义准对称变换,广义 Killing 方程等.

4.1.1　Pfaff 作用量的变分

积分

$$A(\gamma)=\int_{t_1}^{t_2}(R_\mu \mathrm{d}a^\mu - B\mathrm{d}t)\quad(\mu=1,\cdots 2n)\quad(4.1.1)$$

称为时间区间$[t_1,t_2]$上的 Pfaff 作用量[1—3].被积函数是一 Pfaff 形式

$$\omega_1 = R_\mu \mathrm{d}a^\mu - B\mathrm{d}t \qquad (4.1.2)$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组.γ 为某曲线.

Hamilton 作用量可表为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_s \dot{q}^s - H)\mathrm{d}t \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (4.1.3)$$

在式(4.1.1) 中取

$$a^\mu = \begin{cases} q^\mu & (\mu = 1, \cdots, n) \\ p_{\mu-n} & (\mu = n+1, \cdots, 2n) \end{cases} \quad (4.1.4)$$

$$R_\mu = \begin{cases} p_\mu & (\mu = 1, \cdots, n) \\ 0 & (\mu = n+1, \cdots, 2n) \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$B = H \quad (4.1.6)$$

则作用量(4.1.1) 成为 Hamilton 作用量(4.1.3). 因此, Hamilton 作用量是 Pfaff 作用量的特殊情形.

变换

$$t^* = f_0(t, a^\mu, b_\alpha), a^{\mu *} = f_\mu(t, a^\nu, b_\alpha) \quad (4.1.7)$$

$$(\mu, \nu = 1, \cdots, 2n)$$

构成一般形式的 r 参数有限变换群(有限连续群) G_r, 其中 $b_\alpha (\alpha = 1, \cdots, r)$ 为独立参数. 公式

$$t^* = t + \Delta t, a^{\mu *} = a^\mu + \Delta a^\mu \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \quad (4.1.8)$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon_\alpha \xi_0^\alpha(t, \boldsymbol{a}), a^{\mu *} = a^\mu + \varepsilon_\alpha \xi_\mu^\alpha(t, \boldsymbol{a}) \quad (4.1.9)$$

是变换群 G_r 的无限小变换, 其中 ε_α 为无限小参数, 具有一阶小量.

在变换(4.1.8) 下, Pfaff 作用量(4.1.1) 变为

$$A(\gamma^*) = \int_{t_1^*}^{t_2^*} \{R_\mu(t^*, \boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}a^{\mu *} - B(t^*, \boldsymbol{a}^*)\mathrm{d}t^*\} \quad (4.1.10)$$

作用量 A 的变分 ΔA 为差 $A(\gamma^*) - A(\gamma)$ 相对 ϵ 的主线性部分. 根据全变分 Δ 与等时变分 δ 之间的关系的公式, 有[4,5]

$$\Delta A = \delta A + \dot{A}\Delta t \quad (4.1.11)$$

以及

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t^2} \{\Delta(R_\mu \dot{a}^\mu - B) + (R_\mu \dot{a}^\mu - B)(\Delta t)^{\cdot}\} \mathrm{d}t \tag{4.1.12}$$

于是有

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\Delta t + R_\mu \delta a^\mu] \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right] \delta a^\mu \right\} \mathrm{d}t \tag{4.1.13}$$

以及

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ (R_\mu \dot{a}^\mu - B) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t} \right) \Delta t \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} \right) \Delta a^\mu + R_\mu \Delta \dot{a}^\mu \right\} \mathrm{d}t \tag{4.1.14}$$

注意到

$$\delta a^\mu = \Delta a^\mu - \dot{a}^\mu \Delta t = \epsilon_\alpha (\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu \xi_0^\alpha) = \epsilon_\alpha \bar{\xi}_\mu^\alpha \tag{4.1.15}$$

则式(4.1.13) 可写成

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \epsilon_\alpha \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right] \bar{\xi}_\mu^\alpha \right\} \mathrm{d}t \tag{4.1.16}$$

公式(4.1.14) 和(4.1.16) 就是 Pfaff 作用量变分的基本公式.

4.1.2 对称变换,准对称变换和广义准对称变换

首先,研究 Noether 对称变换的定义与判据.

定义 4.1.1 如果 Pfaff 作用量是无限小群变换的不变量,即对每一个无限小变换,始终成立

$$\Delta A = 0 \tag{4.1.17}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

由定义 4.1.1 和公式(4.1.14),(4.1.16) 得到如下判据.

判据 4.1.1 对于无限小群变换(4.1.8),如果满足条件

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \left(\frac{\partial R_\mu}{at}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t$$

$$+ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu + R_\mu \Delta \dot{a}^\mu = 0 \qquad (4.1.18)$$

则变换为给定系统的对称变换.

判据 4.1.2 如果无限小群变换(4.1.9)满足 r 个关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\bar{\xi}_\mu^\alpha = 0 \qquad (4.1.19)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

则变换(4.1.9)为给定系统的对称变换.

式(4.1.18)还可写成 r 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha - B\dot{\xi}_0^\alpha + R_\mu \dot{\xi}_\mu^\alpha = 0 \qquad (4.1.20)$$

公式(4.1.20)亦可作为系统对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时, 式(4.1.20)给出 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu - B\dot{\xi}_0 + R_\mu \dot{\xi}_\mu = 0 \qquad (4.1.21)$$

利用判据4.1.1或4.1.2可以判断Birkhoff函数为 B, Birkhoff函数组为 R_μ 的系统的 Noether 对称性.

其次, 研究 Noether 准对称变换.

设 R_μ^1 和 B^1 是另外的Birkhoff函数组和 Birkhoff 函数, 如果变换(4.1.8)精确到一阶小量满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2}[R_\mu(t, \boldsymbol{a})\ \dot{a}^\mu - B(t, \boldsymbol{a})]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1^*}^{t_2^*}[R_\mu^1(t^*, \boldsymbol{a}^*)\ \dot{a}^{\mu *} - B^1(t^*, \boldsymbol{a}^*)]\mathrm{d}t^* \qquad (4.1.22)$$

则称作用量是无限小变换的准不变量.由此确定的 R_μ^1, B^1 与 R_μ, B 有同样的运动方程,则变换称为准对称变换.此时有

$$R_\mu^1 = R_\mu + \frac{\partial G}{\partial a^\mu}, \quad B^1 = B - \frac{\partial G}{\partial t} \tag{4.1.23}$$

将式(4.1.23) 代入式(4.1.22),得到

$$\int_{t_1}^{t_2} [R_\mu(t, \boldsymbol{a})\dot{a}^\mu - B(t, \boldsymbol{a})]\mathrm{d}t = \int_{t_1^*}^{t_2^*} [R_\mu(t^*, \boldsymbol{a}^*)\dot{a}^{\mu *}$$

$$- B(t^*, \boldsymbol{a}^*) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t^*} G(t^*, \boldsymbol{a}^*)]\mathrm{d}t^* \tag{4.1.24}$$

式(4.1.24) 中 G 应为一阶小量,故可用 ΔG 来代替 G.于是有

定义 4.1.2 如果 Pfaff 作用量是无限小群变换的准不变量,即对每一个无限小变换(4.1.8),始终成立

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)\mathrm{d}t \tag{4.1.25}$$

其中 $G = G(t, \boldsymbol{a})$,则称变换(4.1.8) 为 Noether 准对称变换.

由定义 4.1.2 和公式(4.1.14),(4.1.16) 得到如下判据

判据 4.1.3 对于无限小群变换(4.1.8),如果满足条件

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t$$

$$+ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu + R_\mu \Delta \dot{a}^\mu = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) \tag{4.1.26}$$

则变换(4.1.8) 为给定系统的准对称变换.

判据 4.1.4 如果无限小群变换(4.1.9) 满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\bar{\xi}_\mu^\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \tag{4.1.27}$$

其中

$$\Delta G = \epsilon_\alpha G^\alpha \tag{4.1.28}$$

则变换(4.1.9) 为给定系统的准对称变换.

式(4.1.26) 还可写成 r 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha - B\dot{\xi}_0^\alpha + R_\mu\dot{\xi}_\mu^\alpha = -\dot{G}^\alpha$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r) \quad (4.1.29)$$

公式(4.1.29) 亦可作为系统准对称变换的判据. 当 $\alpha = 1$ 时, 式(4.1.29) 给出 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu - B\dot{\xi}_0 + R_\mu\dot{\xi}_\mu = -\dot{G} \quad (4.1.30)$$

利用判据4.1.3或4.1.4可以判断Birkhoff函数为 B, Birkhoff函数组为 R_μ 的系统的 Noether 准对称性.

最后, 研究 Noether 广义准对称变换.

如果变换(4.1.8) 精确到一阶小量满足条件

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}[R_\mu(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^\mu - B(t,\boldsymbol{a})]\mathrm{d}t &= \int_{t_1^*}^{t_2^*}[R_\mu^1(t^*,\boldsymbol{a}^*)\dot{a}^{\mu *} - B^1(t^*,\boldsymbol{a}^*)]\mathrm{d}t^* + \int_{t_1}^{t_2}\Lambda_\mu\delta a^\mu\mathrm{d}t \\ &(4.1.31)\end{aligned}$$

其中 $\Lambda_\mu = \Lambda_\mu(t,\boldsymbol{a})$, 则称作用量是无限小变换(4.1.8) 的广义准不变量.

定义 4.1.3[6] 如果 Pfaff 作用量是无限小群变换的广义准不变量, 即对每一个无限小变换(4.1.8), 下式始终成立

$$\Delta A = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + \Lambda_\mu\delta a^\mu\right\} \quad (4.1.32)$$

则称变换(4.1.8) 为 Noether 广义准对称变换.

由定义 4.1.3 和公式(4.1.14), (4.1.16) 得到如下判据

判据 4.1.5 对于无限小群变换(4.1.8), 如果满足条件

$$(R_\mu\dot{a}^\mu - B)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\Delta t$$

$$+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\Delta a^\mu+R_\mu\Delta\dot{a}^\mu+\Lambda_\mu(\Delta a^\mu-\dot{a}^\mu\Delta t)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G)$$

(4.1.33)

则变换(4.1.8)为给定系统的广义准对称变换.

判据 4.1.6 如果无限小群变换(4.1.9)满足 r 个方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu\xi_\mu^\alpha-B\xi_0^\alpha)+\left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\Lambda_\mu\right]\tilde{\xi}_\mu^\alpha=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G^\alpha$$

$$(\alpha=1,\cdots r)\qquad(4.1.34)$$

则变换(4.1.9)为给定系统的广义准对称变换.

式(4.1.33)还可写成 r 个方程

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha-B\dot{\xi}_0^\alpha+R_\mu\dot{\xi}_\mu^\alpha$$

$$+\Lambda_\mu(\xi_\mu^\alpha-\dot{a}^\mu\xi_0^\alpha)=-\dot{G}^\alpha$$

$$(\alpha=1,\cdots,r)\quad(4.1.35)$$

公式(4.1.35)亦可作为系统广义准对称变换的判据.当 $\alpha=1$ 时,式(4.1.35)给出 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu-B\dot{\xi}_0+R_\mu\dot{\xi}_\mu$$

$$+\Lambda_\mu(\xi_\mu-\dot{a}^\mu\xi_0)=-\dot{G}\qquad(4.1.36)$$

利用判据4.1.5或4.1.6可以判断Birkhoff函数为 B,Birkhoff函数组为 R_μ,附加项为 Λ_μ 的系统的 Noether 广义准对称性.

4.1.3 广义 Killing 方程

展开式(4.1.19),得

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)\xi_\mu^\alpha+R_\mu\left(\frac{\partial\xi_\mu^\alpha}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu+\frac{\partial\xi_\mu^\alpha}{\partial t}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha-B\left(\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0^\alpha}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu\right)$$

$$+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu(\xi_\mu^\alpha-\dot{a}^\mu\xi_0^\alpha)-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)(\xi_\mu^\alpha-\dot{a}^\mu\xi_0^\alpha)=0$$

(4.1.37)

式(4.1.37) 中含 $\dot{a}^{\mu}\dot{a}^{\nu}$ 的项显然为零,令含 $\dot{a}^{\nu}$ 的项的系数和不含 $\dot{a}^{\nu}$ 的项分别为零,得到

$$\begin{cases} R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}-B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}=0 \\ \dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}+B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial t}+\dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}-R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial t}=0 \end{cases} \tag{4.1.38}$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n;\alpha=1,\cdots,r)$$

偏微分方程组(4.1.38) 称为广义Killing方程.解广义Killing方程(4.1.38),就可能找到对称变换的生成函数 $\xi_{0}^{\alpha},\xi_{\mu}^{\alpha}$.

类似地,由式(4.1.27) 和式(4.1.34) 分别得到

$$\begin{cases} R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}-B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}=-\dfrac{\partial G^{\alpha}}{\partial a^{\nu}} \\ \dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}+B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial t}+\dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}-R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial t}=\dfrac{\partial G^{\alpha}}{\partial t} \end{cases} \tag{4.1.39}$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n;\alpha=1,\cdots,r)$$

和

$$\begin{cases} R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}+\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}-B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}-\Lambda_{\nu}\xi_{0}^{\alpha}=-\dfrac{\partial G^{\alpha}}{\partial a^{\nu}} \\ \dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_{0}^{\alpha}+B\dfrac{\partial \xi_{0}^{\alpha}}{\partial t}+\dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}^{\alpha}-R_{\mu}\dfrac{\partial \xi_{\mu}^{\alpha}}{\partial t}-\Lambda_{\mu}\xi_{\mu}^{\alpha}=\dfrac{\partial G^{\alpha}}{\partial t} \end{cases} \tag{4.1.40}$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n;\alpha=1,\cdots,r)$$

偏微分方程组(4.1.39) 和(4.1.40) 分别为准对称变换和广义准对称变换下的广义 Killing 方程.解广义 Killing 方程,在已知函数 $R_{\mu},B,\Lambda_{\mu},G^{\alpha}$ 下,可确定变换的生成函数 $\xi_{0}^{\alpha},\xi_{\mu}^{\alpha}$.

4.1.4 算　例

例 1　二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B=\frac{1}{2m}(a^{2})^{2}+\frac{1}{m}a^{2}f_{1}(t)+\frac{1}{2m}f_{1}^{2}(t)+f_{0}(t) \tag{1}$$

Birkhoff 函数组为

$$R_1 = a^2, R_2 = 0 \tag{2}$$

试求系统的对称变换和准对称变换.

首先,用 Noether 等式(4.1.30).式(4.1.30) 给出

$$-\left(\frac{1}{m}a^2\dot{f}_1 + \frac{1}{m}f_1\dot{f}_1 + \dot{f}_0\right)\xi_0 + \left(\dot{a}^1 - \frac{1}{m}a^2 - \frac{1}{m}f_1\right)\xi_2$$
$$-B\dot{\xi}_0 + a^2\dot{\xi}_1 = -\dot{G} \tag{3}$$

方程(3) 有如下解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 1, \xi_2^1 = 0, G^1 = 0 \tag{4}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = -\frac{t}{m}, \xi_2^2 = -1, G^2 = a^1 - \int\frac{f_1}{m}\mathrm{d}t \tag{5}$$

$$\xi_0^3 = 1, \xi_1^3 = \frac{f_1}{m}, \xi_2^3 = 0, G^3 = \frac{1}{2m}f_1^2 + f_0 \tag{6}$$

$$\xi_0^4 = 1, \xi_1^4 = \frac{f_1}{m} - \frac{t}{m}, \xi_2^4 = -1, G^4 = \frac{1}{2m}f_1^2 + f_0 + a^1 - \int\frac{f_1}{m}\mathrm{d}t \tag{7}$$

式(4) 对应系统的对称变换,式(5),(6),(7) 对应系统的准对称变换.

其次,用广义 Kiling 方程(4.1.39) 求对称变换和准对称变换.

方程(4.1.39) 给出

$$\begin{cases} a^2\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^1} + \xi_2 - B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^1} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^1} \\ a^2\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^2} - B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^2} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^2} \\ B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} + \left(\dfrac{1}{m}a^2\dot{f}_1 + \dfrac{1}{m}f_1\dot{f}_1 + \dot{f}_0\right)\xi_0 + \left(\dfrac{1}{m}a^2 + \dfrac{1}{m}f_1\right)\xi_2 \\ -a^2\dfrac{\partial\xi_1}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{8}$$

偏微分方程组(8) 有如下解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 1, \xi_2^1 = 0, G^1 = 0 \tag{9}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = -\frac{t}{m}, \xi_2^2 = -1, G^2 = a^1 - \int\frac{f_1}{m}\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\xi_0^3 = 1, \xi_1^3 = \frac{f_1}{m}, \xi_2^3 = 0, G^3 = \frac{1}{2m}f_1^2 + f_0 \tag{11}$$

$$\xi_0^4 = 1, \xi_1^4 = \frac{f_1}{m} - \frac{t}{m}, \xi_2^4 = -1, G^4 = \frac{1}{2m}f_1^2 + f_0 + a^1 - \int \frac{f_1}{m}\mathrm{d}t \tag{12}$$

结果与 Noether 等式给出的一致.

例 2 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组和 Birkhoff 函数分别为

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \tag{1}$$

$$B = \frac{1}{2}[a^3 - \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt]^2 + \frac{1}{2}[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)]^2 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性.

广义 Killing 方程(4.1.39) 给出

$$\begin{cases} a^3\dfrac{\partial \xi_1}{\partial a^1} + a^4\dfrac{\partial \xi_2}{\partial a^1} + \xi_3 - B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^1} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^1} \\ a^3\dfrac{\partial \xi_1}{\partial a^2} + a^4\dfrac{\partial \xi_2}{\partial a^2} + \xi_4 - B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^2} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^2} \\ a^3\dfrac{\partial \xi_1}{\partial a^3} + a^4\dfrac{\partial \xi_2}{\partial a^3} - B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^3} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^3} \\ a^3\dfrac{\partial \xi_1}{\partial a^4} + a^4\dfrac{\partial \xi_2}{\partial a^4} - B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^4} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^4} \\ \dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} + (a^3 - \dfrac{1}{b}\mathrm{arctg}bt)\xi_3 \\ \quad + [a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)]\xi_4 - a^3\dfrac{\partial \xi_1}{\partial t} - a^4\dfrac{\partial \xi_2}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{3}$$

方程(3) 有如下解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 1, \xi_2^1 = \xi_3^1 = \xi_4^1 = 0, G^1 = 0 \tag{4}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_2^2 = 1, \xi_1^2 = \xi_3^2 = \xi_4^2 = 0, G^2 = 0 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \xi_0^3 = 0, \xi_1^3 = -t, \xi_2^3 = 0, \xi_3^3 = -1, \xi_4^3 = 0 \\ G^3 = a^1 + \dfrac{1}{b}\int \mathrm{arctg}bt\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \xi_0^4 = 0, \xi_1^4 = 0, \xi_2^4 = -t, \xi_3^4 = 0, \xi_4^4 = -1 \\ G^4 = a^2 + \dfrac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{7}$$

式(4),(5) 对应系统的对称变换,式(6),(7) 对应系统的准对称变换.

§4.2 自由 Birkhoff 系统的 Noether 理论

本节研究自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,包括系统的运动方程,广义 Noether 定理,以及广义 Noether 逆定理等.

4.2.1 自由 Birkhoff 系统的运动方程

如果 Birkhoff 系统不受约束,即 $a^\mu(\mu = 1, \cdots, 2n)$ 是彼此独立的,则称为自由 Birkhoff 系统,其运动方程表为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \qquad (4.2.1)$$

$$(\mu, \nu = 1, \cdots, 2n)$$

在方程(4.2.1) 的右端添加一项 $-\Lambda_\mu(t, \boldsymbol{a})$,得到[6]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = -\Lambda_\mu \qquad (4.2.2)$$

$$(\mu = 1, \cdots, 2n)$$

称方程(4.2.2) 为广义 Birkhoff 方程.

4.2.2 广义 Noether 定理

定理 4.2.1[6,7] 对 Birkhoff 系统(4.2.1),如果有限群 G_r 的无限小变换(4.1.9) 是系统的对称变换,则系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha = c_\alpha \qquad (4.2.3)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

证明 因无限小变换(4.1.9) 是系统的对称变换,故按定义

4.1.1 有

$$\Delta A = 0$$

将式(4.1.16) 代入上式,得

$$\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_\alpha \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) a^{\cdot\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right] \bar{\xi}_\mu^\alpha \right| \mathrm{d}t = 0$$

将方程(4.2.1) 代入上式,由 ξ_α 的独立性和积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) = 0$$

积分之,便得式(4.2.3).证毕.

定理 4.2.2[6,7] 对 Birkhoff 系统(4.2.1),如果有限群 G_r 的无限小变换(4.1.9) 是系统的准对称变换,则系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (4.2.4)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

定理 4.2.3[6,7] 对广义 Birkhoff 方程(4.2.2),如果有限群 G_r 的无限小变换(4.1.9) 是系统的广义准对称变换,则系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \qquad (4.2.5)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

利用广义 Noether 定理 4.2.1 可由 Birkhoff 系统(4.2.1) 的已知对称变换求得相应的守恒量.利用广义 Noether 定理 4.2.2 可由 Birkhoff 系统(4.2.1) 的已知准对称变换求得相应的守恒量.利用广义 Noether 定理 4.2.3 可由广义 Birkhoff 系统(4.2.2) 的已知广义准对称变换求得相应的守恒量.

4.2.3 广义 Noether 逆定理

假设自由 Birkhoff 系统(4.2.1) 有 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, \boldsymbol{a}) = c_\alpha (\alpha = 1, \cdots, r) \qquad (4.2.6)$$

求相应的对称变换.由式(4.2.6) 知

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu = 0 \tag{4.2.7}$$

将方程(4.2.1)两端同时乘以 $\bar{\xi}^\alpha_\mu$ 并对 μ 求和,再将结果与上式相加,得

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu + \left[\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right]\bar{\xi}^\alpha_\mu = 0 \tag{4.2.8}$$

式(4.2.8)中含 $\dot{a}^\mu\dot{a}^\nu$ 的项显然为零.由式(4.2.8)中 $\dot{a}^\nu$ 的系数为零,得到

$$\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\xi^\alpha_\mu + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi^\alpha_0 = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, 2n) \tag{4.2.9}$$

因

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{4.2.10}$$

非退化,故由方程(4.2.9)可解得

$$\xi^\alpha_\mu = \Omega^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\xi^\alpha_0\right\} \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{4.2.11}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\rho} = \delta_{\mu\rho} \tag{4.2.12}$$

为使变换为对称变换,需令积分(4.2.6)等于守恒量(4.2.3),即

$$R_\mu\xi^\alpha_\mu - B\xi^\alpha_0 = I^\alpha \tag{4.2.13}$$

这样,由$(2n+1)r$个方程(4.2.11),(4.2.13)便可确定$(2n+1)r$个生成函数 $\xi^\alpha_0, \xi^\alpha_\mu$,它们对应系统的对称变换.于是得

定理4.2.4 如果已知自由Birkhoff系统(4.2.1)的 r 个线性独立的第一积分(4.2.6),那么由式(4.1.9),(4.2.11),(4.2.13)所确定的唯一无限小变换是系统的对称变换.

为使变换为准对称变换,需令积分(4.2.6)等于守恒量(4.2.4),即

$$R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = I^\alpha \tag{4.2.14}$$

于是有

定理4.2.5 如果已知自由Birkhoff系统(4.2.1)的 r 个线性独立的第一积分(4.2.6),那么由式(4.1.9),(4.2.11),(4.2.14)确定的无限小变换必是系统的准对称变换.

定理 4.2.4 和定理 4.2.5 称为自由 Birkhoff 系统的广义 Noether 逆定理.利用这些定理可由自由 Birkhoff 系统的已知积分求得相应的对称变换或准对称变换.

对于广义 Birkhoff 系统(4.2.2),公式(4.2.11) 需用下式取代

$$\xi_\mu^\alpha = \Omega^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} - \Lambda_\nu\right)\xi_0^\alpha\right\} \tag{4.2.15}$$

$$(\mu = 1, \cdots, 2n)$$

于是得

定理4.2.6 如果已知广义Birkhoff系统(4.2.2)的 r 个线性独立的第一积分(4.2.6),那么由式(4.1.9),(4.2.15),(4.2.14)确定的无限小变换必是系统的广义准对称变换.

4.2.4 算 例

例 1 二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B = \frac{1}{2}\{(ta^1)^2 + (a^2)^2\} \tag{1}$$

Birkhoff 函数组为

$$R_1 = 0, R_2 = ta^1 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用广义 Noether 定理由已知对称性求守恒量.第一步,求对称变换.Noether 等式(4.1.30) 给出

$$[a^1\dot{a}^2 - t(a^1)^2]\xi_0 + (t\dot{a}^2 - t^2a^1)\xi_1 - a^2\xi_2$$

$$-\frac{1}{2}[(ta^1)^2 + (a^2)^2]\dot{\xi}_0 + ta^1\dot{\xi}_2 = -\dot{G} \tag{3}$$

方程(3) 有解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -\frac{a^2}{t}, \xi_2 = ta^1, G = \frac{1}{2}(a^2)^2 - \frac{1}{2}(ta^1)^2$$

$$(t > 0) \tag{4}$$

它对应系统的准对称变换.第二步,利用定理 4.2.2 求对应的守恒量.定理 4.2.2 的守恒量(4.2.4) 给出

$$I = (ta^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 - \frac{1}{2}(ta^1)^2$$

$$= \frac{1}{2}[(ta^1)^2 + (a^2)^2] = B = \text{const.} \tag{5}$$

这表明 Birkhoff 函数 B 是系统的守恒量.

其次,利用广义 Noether 逆定理由已知积分求相应的对称变换.假设系统(1),(2) 有积分(5).公式(4.2.11),(4.2.14) 给出

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{t}\{a^2 + (a^2 + a^1)\xi_0\} \\ \xi_2 = \frac{1}{t}\{t^2a^1 + t^2a^1\xi_0\} \end{cases} \tag{6}$$

$$ta^1\xi_2 - \frac{1}{2}[(ta^1)^2 + (a^2)^2]\xi_0 + G = \frac{1}{2}[(ta^1)^2 + (a^2)^2]$$

当取

$$G = \frac{1}{2}(a^2)^2 - \frac{1}{2}(ta^1)^2 \tag{7}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -\frac{a^2}{t}, \xi_2 = ta^1 \tag{8}$$

当取

$$G = 0 \tag{9}$$

则有

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = \frac{a^1}{t}, \xi_2 = 0 \tag{10}$$

式(7),(8) 对应系统的准对称变换;式(9),(10) 对应系统的对称变换.

例 2　二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B = \frac{1}{6}t^2(a^1)^6 + \frac{(a^2)^2}{2t^2} \tag{1}$$

Birkhoff 函数组为

$$R_1 = a^2, R_2 = 0 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用广义 Noether 定理由已知对称性求守恒量. 第一步,用 Noether 等式求对称性. Noether 等式(4.1.30) 给出

$$-\left[\frac{1}{3}t(a^1)^6 - \frac{(a^2)^2}{t^3}\right]\xi_0 + \dot{a}^1\xi_2 - t^2(a^1)^5\xi_1 - \frac{a^2}{t^2}\xi_2$$

$$-\left[\frac{1}{6}t^2(a^1)^6 + \frac{(a^2)^2}{2t^2}\right]\dot{\xi}_0 + a^2\dot{\xi}_1 = -\dot{G} \tag{3}$$

方程(3) 有解

$$\xi_0 = -t, \xi_1 = \frac{1}{2}a^1, \xi_2 = -\frac{1}{2}a^2, G = 0 \tag{4}$$

第二步,由对称性求守恒量. 定理 4.2.1 的守恒量(4.2.3) 给出

$$I = \frac{1}{2}a^1a^2 + \frac{1}{6}t^3(a^1)^6 + \frac{(a^2)^2}{2t} = \text{const.} \tag{5}$$

其次,利用广义 Noether 逆定理由已知积分求相应的对称性. 假设系统(1),(2) 有积分(5). 式(4.2.11),(4.2.14) 给出

$$\begin{cases} \xi_1 = \left\{\dfrac{a^2}{t} + \dfrac{1}{2}a^1 + \dfrac{a^2}{t^2}\xi_0\right\} \\ \xi_2 = -\left\{\dfrac{1}{2}a^2 + t^3(a^1)^5 + t^2(a^1)^5\xi_0\right\} \\ a^2\xi_1 - B\xi_0 + G = \dfrac{1}{2}a^1a^2 + \dfrac{1}{6}t^3(a^1)^6 + \dfrac{(a^2)^2}{2t} \end{cases} \tag{6}$$

当取

$$G = 0 \tag{7}$$

则有

$$\xi_0 = -t, \xi_1 = \frac{1}{2}a^1, \xi_2 = -\frac{1}{2}a^2 \tag{8}$$

若取

$$G = \frac{1}{6}t^3(a^1)^6 - \frac{(a^2)^2}{2t} \tag{9}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{1}{2}a^1 + \frac{a^2}{t}, \xi_2 = -\frac{1}{2}a^2 - t^3(a^1)^5 \tag{10}$$

式(7),(8) 对应系统的对称变换;式(9),(10) 对应系统的准对称变换.

例3 广义 Birkhoff 系统为

$$\begin{cases} B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 + (a^4)^2] \\ R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ \Lambda_1 = -\frac{1}{1+b^2t^2}, \Lambda_2 = -\frac{bt}{1+b^2t^2}, \Lambda_3 = \Lambda_4 = 0 \end{cases}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,求广义准对称变换.Noether 等式(4.1.36) 给出

$$\dot{a}^1\xi_3 + \dot{a}^2\xi_4 - a^3\xi_3 - a^4\xi_4 - B\dot{\xi}_0 + a^3\dot{\xi}_1 + a^4\dot{\xi}_2 - \frac{1}{1+b^2t^2}(\xi_1 - \dot{a}^1\xi_0) - \frac{bt}{1+b^2t^2}(\xi_2 - \dot{a}^2\xi_0) = -\dot{G} \tag{1}$$

方程(1) 有解

$$\xi_0^1 = 0, \xi_1^1 = 1, \xi_2^1 = \xi_3^1 = \xi_4^1 = 0, G = \frac{1}{b}\text{arctg}bt \tag{2}$$

$$\xi_0^2 = 0, \xi_1^2 = 0, \xi_2^2 = 1, \xi_3^2 = \xi_4^2 = 0, G = \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \tag{3}$$

$$\begin{cases} \xi_0^3 = 0, \xi_1^3 = -t, \xi_3^3 = -1, \xi_2^3 = \xi_4^3 = 0 \\ G = a^1 - \frac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2) \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \xi_0^4 = 0, \xi_1^4 = 0, \xi_2^4 = -t, \xi_3^4 = 0, \xi_4^4 = -1 \\ G = a^2 - \frac{t}{b} + \frac{1}{b^2}\text{arctg}bt \end{cases} \tag{5}$$

式(2)—(5) 都对应系统的广义准对称变换.

其次，求守恒量. 定理 4.2.3 的守恒量(4.2.5) 应用于式(2)—(5)，得到如下守恒量

$$I^1 = a^3 + \frac{1}{b}\text{arctg}bt = c_1 \tag{6}$$

$$I^2 = a^4 + \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2) = c_2 \tag{7}$$

$$I^3 = -a^3t + a^1 - \frac{1}{2b^2}\ln(1 + b^2t^2) = c_3 \tag{8}$$

$$I^4 = -a^4t + a^2 - \frac{t}{b} + \frac{1}{b^2}\text{arctg}bt = c_4 \tag{9}$$

§4.3 约束 Birkhoff 系统的 Noether 理论

本节研究受有约束的 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量，包括约束 Birkhoff 系统的运动方程，相应自由系统的 Noether 理论，约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理，广义 Noether 逆定理，以及约束 Birkhoff 系统的对称性与相应自由系统的对称性之间的关系.

4.3.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程

如果 Birkhoff 系统中的变量 a^μ 不是彼此独立的，而受到一些限制，这些限制表为约束方程

$$f_\beta(a^\mu, t) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g; \mu = 1, \cdots, 2n) \tag{4.3.1}$$

对式(4.3.1) 取等时变分，得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\delta a^\mu = 0 \tag{4.3.2}$$

利用通常的 Lagrange 乘子法，由 Pfaff-Birkhoff-D′Alembert 原理和式(4.3.2) 得到系统带乘子的方程[3]

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \tag{4.3.3}$$

在运动微分方程积分之前，可求出 λ_β 作为 t, a^μ 的函数，λ_β 的

表达式为(2.5.12).令

$$P_\mu = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \tag{4.3.4}$$

其中 λ_β 用式(2.5.12) 替代.将式(4.3.4) 代入方程(4.3.3),得到

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = P_\mu(a^\nu, t) \tag{4.3.5}$$

称方程(4.3.5) 为与约束Birkhoff系统(4.3.1),(4.3.3) 相应的自由Birkhoff 系统的方程.只要运动的初始条件满足约束方程(4.3.1),相应自由系统(4.3.5) 的解就给出约束 Birkhoff 系统的运动.

4.3.2 相应自由系统的 Noether 理论

相应自由 Birkhoff 系统的方程(4.3.5) 同广义 Birkhoff 方程(4.2.2) 一致,只要取

$$P_\mu = -\Lambda_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{4.3.6}$$

因此,定理 4.2.3 和定理 4.2.6 可应用于相应自由系统,有

定理 4.3.1 对相应自由 Birkhoff 系统(4.3.5),如果有限群 G_r 的无限小变换(4.1.9) 是系统的广义准对称变换,即满足条件

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0^\alpha + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu^\alpha - B\dot{\xi}_0^\alpha$$

$$+ R_\mu\dot{\xi}_\mu^\alpha - P_\mu(\xi_\mu^\alpha - \dot{a}^\mu\xi_0^\alpha) = -\dot{G}^\alpha \tag{4.3.7}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

那么系统存在 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = R_\mu\xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = c_\alpha \tag{4.3.8}$$

$$(\alpha = 1, \cdots, r)$$

定理 4.3.2 如果已知相应自由 Birkhoff 系统的 r 个线性独立的第一积分(4.2.6),那么由式(4.1.9),(4.2.14) 以及式

$$\xi_\mu^\alpha = \Omega^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right)\xi_0^\alpha\right\} \tag{4.3.9}$$

$$(\mu = 1, \cdots, 2n)$$

所确定的无限小变换必是系统的广义准对称变换.

定理 4.3.1 和定理 4.3.2 分别称为相应自由 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理和广义 Noether 逆定理.

4.3.3 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理

约束 Birkhoff 系统的变换性质受到约束的限制.因

$$\delta a^{\mu} = \Delta a^{\mu} - \dot{a}^{\mu}\Delta t = \varepsilon_{\alpha}(\xi_{\mu}^{\alpha} - \dot{a}^{\mu}\xi_{0}^{\alpha}) = \varepsilon_{\alpha}\xi_{\mu}^{\alpha} \quad (4.3.10)$$

将式(4.3.10) 代入式(4.3.2),得到

$$\varepsilon_{\alpha}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad (4.3.11)$$

因 ε_{α} 彼此独立,故有

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad (4.3.12)$$

这就是约束(4.3.1) 对无限小变换生成函数 $\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha}$ 的限制.

定理 4.3.3 对约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3),如果无限小变换(4.1.9) 是对称变换,且变换满足条件(4.3.12),那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^{\alpha} = R_{\mu}\xi_{\mu}^{\alpha} - B\xi_{0}^{\alpha} = c_{\alpha} \qquad (\alpha = 1,\cdots,r) \quad (4.3.13)$$

证明 因变换(4.1.9) 是系统的对称变换,故按定义 4.1.1 有

$$\Delta A = 0$$

利用式(4.1.6),有

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_{\alpha}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_{\mu}\xi_{\mu}^{\alpha} - B\xi_{0}^{\alpha}) + \left[\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right]\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha}\right\}\mathrm{d}t = 0$$

由式(4.3.12) 得

$$\int_{t_1}^{t_2}\varepsilon_{\alpha}\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha}\mathrm{d}t = 0$$

将以上两式相加,注意到方程(4.3.3),ε_{α} 的独立性以及积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性,得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha) = 0$$

积分之,便得式(4.3.13).证毕.

类似地,可证明下述定理.

定理 4.3.4 对约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3),如果无限小变换(4.1.9)是准对称变换,且变换满足条件(4.3.12),那么系统存在 r 个线性独立的第一积分,形如

$$I^\alpha = R_\mu \xi_\mu^\alpha - B\xi_0^\alpha + G^\alpha = c_\alpha$$
$$(\alpha = 1, \cdots, r) \quad (4.3.14)$$

定理 4.3.3 和定理 4.3.4 称为约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 定理.根据这些定理,可由满足附加条件(4.3.12)的对称变换或准对称变换求得系统的第一积分.

如果系统没有约束,则定理 4.3.3 和定理 4.3.4 退化为自由 Birkhoff 系统的定理 4.2.1 和定理 4.2.2.

定理4.3.3和定理4.3.4的限制条件(4.3.12)可放宽为如下条件

$$\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \bar{\xi}_\mu^\alpha = 0 \quad (4.3.15)$$

于是有定理的进一步推广结果

定理 4.3.5 对约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3),如果无限小变换(4.1.9)是对称变换,且变换满足条件(4.3.15),那么系统存在 r 个线生独立的第一积分(4.3.13).

定理 4.3.6 对约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3),如果无限小变量(4.1.9)是准对称变换,且变换满足条件(4.3.15),那么系统存在 r 个线性独立的第一积分(4.3.14).

4.3.4 约束 Birkhoff 系统的广义 Noether 逆定理

假设约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3)有 r 个线性独立的第一积分

$$I^\alpha = I^\alpha(t, \boldsymbol{a}) = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, \cdots, r) \qquad (4.3.16)$$

求与其相应的对称变换或准对称变换.由式(4.3.16)得

$$\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu}=0 \tag{4.3.17}$$

将方程(4.3.3)两端同时乘以 $\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha}$ 并对 μ 求和，再将结果与式(4.3.17)相加，得

$$\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu}+\left(\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}-\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\right)\bar{\xi}_{\mu}^{\alpha}=0 \tag{4.3.18}$$

式(4.3.18)中含 $\dot{a}^{\mu}\dot{a}^{\nu}$ 的项显然为零. 利用条件(4.3.12)，由式(4.3.18)中 $\dot{a}^{\nu}$ 的系数为零得到

$$\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}+\Omega_{\mu\nu}\xi_{\mu}^{\alpha}+\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\xi_{0}^{\alpha}=0 \tag{4.3.19}$$

由此解得

$$\xi_{\mu}^{\alpha}=\Omega^{\mu\nu}\left\{\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}+\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\xi_{0}^{\alpha}\right\} \tag{4.3.20}$$

$$(\mu=1,\cdots,2n)$$

为使变换是对称变换，需令积分(4.3.16)等于守恒量(4.3.13)，即令

$$R_{\mu}\xi_{\mu}^{\alpha}-B\xi_{0}^{\alpha}=I^{\alpha} \tag{4.3.21}$$

为使变换是准对称变换，需令积分(4.3.16)等于守恒量(4.3.14)，即令

$$R_{\mu}\xi_{\mu}^{\alpha}-B\xi_{0}^{\alpha}+G^{\alpha}=I^{\alpha} \tag{4.3.22}$$

于是得到

定理 4.3.7 如果已知约束 Birkhoff 系统(4.3.1)，(4.3.3)的 r 个线性独立的第一积分(4.3.16)，那么由式(4.1.9)，(4.3.20)，(4.3.21)所确定的唯一无限小变换，只要满足条件(4.3.12)，必是系统的对称变换.

定理 4.3.8 如果已知约束 Birkhoff 系统(4.3.1)，(4.3.3)的 r 个线性独立的第一积分(4.3.16)，那么由式(4.1.9)，(4.3.20)，(4.3.22)所确定的无限小变换，只要满足条件(4.3.12)，必是系统的准对称变换.

定理 4.3.7 和定理 4.3.8 称为约束 Birkhoff 系统的广义

Noether 逆定理.根据这些定理可由已知积分找到系统的对称变换或准对称变换.

定理 4.3.7 和定理 4.3.8 中的限制条件(4.3.12) 可放宽为条件(4.3.15).于是得

定理 4.3.9 如果已知约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3) 的 r 个线性独立的第一积分(4.3.16),那么由式(4.1.9),(4.3.20),(4.3.21) 所确定的唯一无限小变换,只要满足条件(4.3.15),必是系统的对称变换.

定理 4.3.10 如果已知约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3) 的 r 个线性独立的第一积分(4.3.16),那么由式(4.1.9),(4.3.20),(4.3.22) 所确定的无限小变换,只要满足条件(4.3.15),必是系统的准对称变换.

4.3.5 约束 Birkhoff 系统与相应自由 Birkhoff 系统的对称性

定理 4.3.1 指出,与约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3) 相应的自由 Birkhoff 系统(4.3.5) 的对称性,要求满足条件(4.3.7).定理 4.3.3 指出,约束 Birkhoff 系统(4.3.1),(4.3.3) 的对称性,不仅要求满足对称变换条件,还要求满足条件(4.3.12).这就说明,约束 Birkhoff 系统的对称性一定是相应自由 Birkhoff 系统的对称性;反过来,则是有条件的.下述定理给出这个条件.

定理 4.3.11 如果相应自由 Birkhoff 系统的无限小变换满足式(4.3.7),而且还满足条件(4.3.12),那么相应自由 Birkhoff 系统的对称性导致约束 Birkhoff 系统的对称性.

4.3.6 算 例

例 1 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} \\ R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

所受约束为

$$\begin{cases} f_1 = a^1 a^3 - c_1^2 = 0 \\ f_2 = a^1 + a^4 - c_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

试研究系统的对称性与守恒量.

首先,研究相应自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.带乘子的方程(4.3.3) 给出

$$\begin{cases} -\dot{a}^3 - a^1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 \\ -\dot{a}^4 = 0 \\ \dot{a}^1 - a^3 = \lambda_1 a^1 \\ \dot{a}^2 - a^4 = \lambda_2 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3) 求得

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{a^1}, \lambda_2 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \tag{4}$$

故有

$$\begin{cases} P_1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 = -a^1, P_2 = 0 \\ P_3 = \lambda_1 a^1 = -a^3, P_4 = \lambda_2 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \end{cases} \tag{5}$$

广义 Killing 方程(4.1.40) 给出

$$\begin{cases} a^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial a^1} + a^4 \frac{\partial \xi_2}{\partial a^1} + \xi_3 - B \frac{\partial \xi_0}{\partial a^1} - a^1 \xi_0 = -\frac{\partial G}{\partial a^1} \\ a^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial a^2} + a^4 \frac{\partial \xi_2}{\partial a^2} + \xi_4 - B \frac{\partial \xi_0}{\partial a^2} = -\frac{\partial G}{\partial a^2} \\ a^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial a^3} + a^4 \frac{\partial \xi_2}{\partial a^3} - B \frac{\partial \xi_0}{\partial a^3} - a^3 \xi_0 = -\frac{\partial G}{\partial a^3} \\ a^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial a^4} + a^4 \frac{\partial \xi_2}{\partial a^4} - B \frac{\partial \xi_0}{\partial a^4} + [-a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}] \xi_0 = -\frac{\partial G}{\partial a^4} \\ B \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + a^1 \xi_1 + a^3 \xi_3 + a^4 \xi_4 - a^3 \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - a^4 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - a^1 \xi_1 \\ -a^3 \xi_3 + [-a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1}] \xi_4 = \frac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{6}$$

方程(6) 有如下解

$$\xi_0^1 = \xi_1^1 = \xi_2^1 = \xi_4^1 = 0, \xi_3^1 = -1, G^1 = a^1 \tag{7}$$

$$\xi_0^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2 = \xi_4^2 = 0, \xi_1^2 = 1, G^2 = 0 \tag{8}$$

$$\xi_0^3 = \xi_1^3 = \xi_3^3 = \xi_4^3 = 0, \xi_2^3 = 1, G^3 = 0 \tag{9}$$

$$\begin{cases} \xi_0^4 = \xi_4^4 = 0, \xi_1^4 = a^3, \xi_2^4 = a^4, \xi_3^4 = -a^1 \\ G^4 = \dfrac{1}{2}\left\{(a^1)^2 - (a^3)^2 - (a^4)^2\right\} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} \xi_0^5 = 0, \xi_1^5 = -\dfrac{2a^3}{a^1}t, \xi_2^5 = -t, \xi_3^5 = -t - t\left(\dfrac{a^3}{a^1}\right)^2 \\ \xi_4^5 = -1, G^5 = a^2 + a^1 t + \dfrac{(a^3)^2}{a^1}t \end{cases} \tag{11}$$

式(7)—(11)都对应相应自由 Birkhoff 系统的 Noether 广义准对称变换.定理 4.3.1 的积分(4.3.8)分别给出守恒量

$$I^1 = a^1 = c'_1 \tag{12}$$

$$I^2 = a^3 = c'_2 \tag{13}$$

$$I^3 = a^4 = c'_3 \tag{14}$$

$$I^4 = \frac{1}{2}\left\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\right\} = c'_4 \tag{15}$$

$$I^5 = a^2 - a^4 t + a^1 t - \frac{(a^3)^2}{a^1}t = c'_5 \tag{16}$$

4 个积分式(12)— 式(15)只有一个是独立的.实际上,显然有

$$c'_4 = \frac{1}{2}\left\{(c'_1)^2 + (c'_1)^2 + (c'_3)^2\right\} \tag{17}$$

由约束方程(2),有

$$c'_1 c'_2 - c_1^2 = 0, c'_1 + c'_3 - c_2 = 0 \tag{18}$$

其次,研究约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.限制条件(4.3.12)给出

$$\begin{cases} a^3\overline{\xi}_1 + a^1\overline{\xi}_3 = 0 \\ \overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_4 = 0 \end{cases} \tag{19}$$

容易看出,只有式(9)满足限制(19).因此,由定理 4.3.11 知,式

(9) 对应的变换才是约束 Birkhoff 系统的广义准对称变换.

例 2 4 阶 Birkhoff 系统为

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} \\ R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

约束方程为

$$\begin{cases} f_1 = a^1 a^3 - c_1^2 = 0 \\ f_2 = a^1 + a^4 t - c_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用定理 4.3.4 由已知对称性求守恒量. 第一步,求准对称变换. Noether 等式(4.1.30) 和公式(4.3.12) 给出

$$\begin{cases} (\dot{a}^1 - a^3)\xi_3 + (\dot{a}^2 - a^4)\xi_4 - a^1\xi_1 - B\dot{\xi}_0 + a^3\dot{\xi}_1 + a^4\dot{\xi}_2 = -\dot{G} \\ a^3(\xi_1 - \dot{a}^1\xi_0) + a^1(\xi_3 - \dot{a}^3\xi_0) = 0 \\ \xi_1 - \dot{a}^1\xi_0 + t(\xi_4 - \dot{a}^4\xi_0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

方程(3) 有解

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0, G = 0 \tag{4}$$

第二步,求守恒量. 定理 4.3.4 的守恒量(4.3.14) 给出

$$I = a^4 = \text{const.} \tag{5}$$

其次,利用定理 4.3.8 由已知积分求相应的准对称变换. 假设系统有积分(5). 公式(4.3.20),(4.3.22) 给出为

$$\begin{cases} \xi_1 = a^3\xi_0 \\ \xi_2 = 1 + a^4\xi_0 \\ \xi_3 = -a^1\xi_0 \\ \xi_4 = 0 \\ a^3\xi_1 + a^4\xi_2 - B\xi_0 + G = a^4 \end{cases} \tag{6}$$

当取

$$G = 0 \tag{7}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0, \xi_2 = 1 \tag{8}$$

若取

$$G = \frac{1}{2}\{(a^1)^2 - (a^3)^2 - (a^4)^2\} \tag{9}$$

则有

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = a^3, \xi_2 = 1 + a^4, \xi_3 = -a^1, \xi_4 = 0 \tag{10}$$

式(8) 满足方程(3) 的后两个方程, 因此, 由定理 4.3.8 知, 式(8) 对应约束Birkhoff 系统的准对称变换.式(10) 不满足方程(3) 的后两个方程, 因此, 式(10) 对应的变换不是约束 Birkhoff 系统的准对称变换.

本 章 小 结

约束力学系统的 Noether 对称性研究可从不同的作用量出发.本章以 Pfaff 作用量代替 Hamilton 作用量, 由 Pfaff 作用量在无限小群变换下的不变性出发, 研究自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量.

Birkhoff 系统是 Hamilton 系统的自然推广, Hamilton 系统是 Birkhoff 系统的特殊情形.可以证明, 一切完整约束系统和非完整约束系统都有 Birkhoff 表示.因此, 本章结果更具普遍性.

习 题

1. 已知二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B = \frac{1}{2m}(a^2)^2 + \frac{1}{m}a^2 f_1(t) + \frac{1}{2m}f_1^2(t) + f_0(t)$$

$$R_1 = a^2, R_2 = 0$$

试由对称性找到相应的守恒量.

2. 已知 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组和 Birkhoff 函数分别为

$$R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0$$

$$B = \frac{1}{2}[a^3 - \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt]^2 + \frac{1}{2}[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2t^2)]^2$$

试由对称性找到相应的守恒量并解反问题.

3. 广义 Birkhoff 系统为

$$B = \frac{1}{6}(a^1)^6 + \frac{1}{2}(a^2)^2$$

$$R_1 = a^2, R_2 = 0$$

$$\Lambda_1 = -\frac{2}{t}a^2, \Lambda_2 = 0$$

已知系统有积分

$$I = \frac{1}{6}t^3(a^1)^6 + \frac{1}{2}t^2a^1a^2 + \frac{1}{2}t^3(a^2)^2$$

试求与其相应的广义准对称变换.

4. 用寻求生成函数的方法证明

(1) 如果自由 Birkhoff 系统是自治的,而约束是正常的,则 $I = B$ 是约束 Birkhoff 系统的第一积分;

(2) 如果 $R_\mu(\mu = 1, \cdots, 2n)$ 和 B 都不含 a^1,且约束方程也不含 a^1,则 $I = R_1$ 是约束 Birkhoff 系统的第一积分.

参 考 文 献

[1] Birkhoff G.D., Dynamical Systems, New York, AMS College Publ., Providence R.I., 1927.

[2] Santilli R.M., Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ, New York, Springer-Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬, Birkhoff 系统动力学, 北京, 北京理工大学出版社, 1996.

[4] Лурье А.И., Ана литическая Механика, Москва, ФМ, 1961.

[5] 梅凤翔, 非完整系统力学基础, 北京, 北京工业学院出版社, 1985.

[6] 梅凤翔, Birkhoff 系统的 Noether 理论, 中国科学, A 辑, 1993, 23(7): 709—717.

[7] 梅凤翔、刘端、罗勇, 高等分析力学, 北京, 北京理工大学出版社, 1991.

第五章　约束力学系统的 Noether 对称性(Ⅲ)

约束力学系统的 Noether 对称性可基于作用量 ——Hamilton 作用量和 Pfaff 作用量在无限小变换下的不变性来进行研究,这就是第三章和第四章讨论的.约束力学系统的 Noether 对称性也可基于微分变分原理来进行研究.本章从经典微分变分原理出发,引进无限小单参数变换群来得到系统的守恒量,包括微分变分原理,非等时变分,基于 D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理,Gauss 原理,以及万有 D'Alembert 原理的守恒量研究.

§5.1　微分变分原理

本节简略叙述各类经典基本微分变分原理,包括 D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理,Gauss 原理,以及万有 D'Alembert 原理.

5.1.1　D'Alembert-Lagrange 原理

D'Alembert-Lagrange原理表述为:在理想双面约束下,在所有时刻,系统真实运动不同于运动学上可能的运动仅在于,对真实运动来说,主动力和假想的惯性力在系统任何虚位移上所作元功之和等于零.原理的矢量形式为

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0$$

$$(i = 1, \cdots, N) \qquad (5.1.1)$$

其中 N 为组成系统的质点数目,m_i 为第 i 个质点的质量,$\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为它的加速度,$\boldsymbol{F}_i$ 为作用在其上的主动力.引入广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$,则有

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t) \qquad (5.1.2)$$

原理(5.1.1) 可表为 Euler-Lagrange 形式[1]

$$\left(Q_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0$$

$$(s = 1, \cdots, n) \qquad (5.1.3)$$

其中 T 为系统的动能, Q_s 为广义力. 将广义力 Q_s 分为有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s, 有

$$\begin{cases} Q'_s = -\dfrac{\partial V}{\partial q_s},\ V = V(\boldsymbol{q}, t), \mathrm{Q_s} = \mathrm{Q'_s} + \mathrm{Q''_s} \\ Q''_s = Q''_s(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) \end{cases} \qquad (5.1.4)$$

则原理(5.1.3) 表为

$$\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta q_s = 0 \qquad (5.1.5)$$

其中

$$L = T - V \qquad (5.1.6)$$

为系统的 Lagrange 函数.

5.1.2 Jourdain 原理

Jourdain 原理表述为: 在理想双面约束下, 在所有时刻, 系统的真实运动不同于运动学上可能的运动仅在于, 对真实运动来说, 主动力和假想的惯性力在系统任何速度空间虚位移上所作元功之和等于零. 原理的矢量形式为

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta_1 \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (5.1.7)$$

其中 $\delta_1 \dot{\boldsymbol{r}}_i$ 为速度空间虚位移[2], 或称 Jourdain 变分. 约束的理想性表为

$$\boldsymbol{R}_i \cdot \delta_1 \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (5.1.8)$$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 为约束反力. Jourdain 变分表示时间和坐标不变, 仅速度有无限小改变, 即

$$\begin{cases} \delta_1 t = 0, \delta_1 \boldsymbol{r}_i = 0, \delta_1 \dot{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_1 \boldsymbol{r}_i)^{\cdot} \neq 0 \\ \delta_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_1 \dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot} = (\delta_1 \boldsymbol{r}_i)^{\cdot\cdot} \neq 0, \cdots \end{cases} \qquad (5.1.9)$$

Jourdain 原理(5.1.7) 可表为 Euler-Lagrange 形式[1]

$$\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta_1 \dot{q}_s = 0 \qquad (5.1.10)$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

5.1.3 Gauss 原理

Gauss原理表述为:在理想双面约束下,在所有时刻,系统的真实运动不同于运动学上可能的运动仅在于,对真实运动来说,主动力和假想的惯性力在系统任何加速度空间虚位移上所作元功之和等于零.原理的矢量形式为

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (5.1.11)$$

其中 $\delta_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 为加速度空间虚位移[2],或称 Gauss 变分.约束的理想性表为

$$\boldsymbol{R}_i \cdot \delta_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \qquad (5.1.12)$$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 为约束反力.Gauss 变分表示时间、坐标、速度不变,仅加速度有无限小任意改变,即

$$\begin{cases} \delta_2 t = \delta_2 \boldsymbol{r}_i = \delta_2 \dot{\boldsymbol{r}}_i = 0 \\ \delta_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_2 \boldsymbol{r}_i)^{\cdot\cdot} = (\delta_2 \dot{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot} \neq 0 \\ \delta_2 \dddot{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_2 \boldsymbol{r}_i)^{\cdot\cdot\cdot} \neq 0, \cdots \end{cases} \qquad (5.1.13)$$

引进拘束

$$Z_w = \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} - \ddot{\boldsymbol{r}}_i\right)^2 \qquad (5.1.14)$$

则 Gauss 原理表为

$$\delta_2 Z_w = 0 \qquad (5.1.15)$$

Gauss 原理在广义坐标下可表为 Euler-Lagrange 形式[1]

$$\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta_2 \ddot{q}_s = 0 \qquad (5.1.16)$$

5.1.4 万有 D'Alembert 原理

万有 D'Alembert 原理表述为:在理想双面约束下,在所有时

刻,系统的真实运动不同于运动学上可能的运动仅在于,对真实运动来说,主动力和假想的惯性力在系统任何 m 次速度空间虚位移上所作元功之和等于零.原理的矢量形式为[3]

$$(\boldsymbol{F}_i - m_i \ddot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \delta_m \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = 0 \quad (m = 0,1,2,\cdots) \tag{5.1.17}$$

其中 $\delta_m \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i$ 为 m 次速度空间虚位移,可称为 Dolaptchiew 变分.约束的理想性表为

$$\boldsymbol{R}_i \cdot \delta_m \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = 0 \tag{5.1.18}$$

其中 $\boldsymbol{R}_i$ 为约束反力.Dolaptchiew 变分表示时间、坐标、速度,直至矢径的 $(m-1)$ 次导数都不变,仅 $\overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i$ 有无限小任意改变,即

$$\begin{cases} \delta_m t = \delta_m \boldsymbol{r}_i = \delta_m \dot{\boldsymbol{r}}_i = \cdots = \delta_m \overset{(m-1)}{\boldsymbol{r}}_i = 0 \\ \delta_m \overset{(m)}{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_m \boldsymbol{r}_i)^{(m)} = (\delta_m \dot{\boldsymbol{r}}_i)^{(m-1)} = \cdots = (\delta_m \overset{(m-1)}{\boldsymbol{r}}_i)^{\cdot} \neq 0 \\ \delta_m \overset{(m+1)}{\boldsymbol{r}}_i = (\delta_m \boldsymbol{r}_i)^{(m+1)} \neq 0, \cdots \end{cases} \tag{5.1.19}$$

万有 D'Alembert 原理(5.1.17)可表为 Euler-Lagrange 形式

$$\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta_m \overset{(m)}{q}_s = 0 \tag{5.1.20}$$

当 $m = 0$ 时,原理(5.1.20)成为原理(5.1.5);当 $m = 1$ 时,原理(5.1.20)成为原理(5.1.10);当 $m = 2$ 时,原理(5.1.20)成为原理(5.1.16).

以上各种基本微分变分原理不仅适用于完整约束系统,而且适用于非完整约束系统.同时,这些原理还可用于研究约束力学系统的守恒量.

§5.2 非等时变分

为扩展动力学系统守恒量的类型,需引进时间的变分.本节讨论与各种微分变分原理相应的非等时变分,包括 Lagrange 非等时变分,Jourdain 非等时变分,Gauss 非等时变分,以及 Dolaptchiew 非

等时变分.

5.2.1 Lagrange 非等时变分

广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 的等时变分 δq_s 是时间 t 不变时坐标的无限小增量

$$\begin{cases} \overline{q}_s(\overline{t}) = q_s(t) + \delta q_s \\ \overline{t} = t \end{cases} \tag{5.2.1}$$

这里字母上方杠表示可变路径.显然,式(5.2.1) 作为一个无限小变换,将真实运动上的点$(q_1, \cdots, q_n)$ 变到可变路径上的同时点$(q_1 + \delta q_1, \cdots, q_n + \delta q_n)$.

考虑可变路径 $\overline{q}_s(t + \Delta t)$,它无限接近于真实路径 $q_s(t)$,但受到时间的小连续变分 Δt.展开并保留一阶小项,得

$$\overline{q}_s(t + \Delta t) = \overline{q}_s(t) + \dot{q}_s \Delta t \tag{5.2.2}$$

将式(5.2.1) 代入(5.2.2) 并定义广义变分或非等时变分 Δq_s 为

$$\Delta q_s = \overline{q}_s(t + \Delta t) - q_s(t) \tag{5.2.3}$$

于是有

$$\Delta q_s = \delta q_s + \dot{q}_s \Delta t \tag{5.2.4}$$

与等时变分情形一样,将广义变分当作广义坐标和时间的无限小变换,使时刻 t 真实轨道上的点$(q_1, \cdots, q_n)$ 变到时刻 $t + \Delta t$ 可变轨道上的点$(q_1 + \Delta q_1, \cdots, q_n + \Delta q_n)$,即

$$\begin{cases} \overline{q}_s(\overline{t}) = q_s(t) + \Delta q_s \\ \overline{t} = t + \Delta t \end{cases} \tag{5.2.5}$$

广义变分与经典等时变分有如下关系[4]

$$\Delta(*) = \delta(*) + (*)^{\cdot} \Delta t \tag{5.2.6}$$

利用式(5.2.6),有

$$\Delta \dot{q}_s = \delta \dot{q}_s + \ddot{q}_s \Delta t \tag{5.2.7}$$

将式(5.2.4) 两端对 t 求导数,得

$$(\Delta q_s)^{\cdot} = \delta \dot{q}_s + \ddot{q}_s \Delta t + \dot{q}_s (\Delta t)^{\cdot} \tag{5.2.8}$$

联合式(5.2.7),(5.2.8),得到

$$\Delta\dot{q}_s = (\Delta q_s)^{\cdot} - \dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} \tag{5.2.9}$$

因此,运算 Δ 和 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 不能交换.

类似地,有

$$\Delta\ddot{q}_s = \delta\ddot{q}_s + \dddot{q}_s\Delta t \tag{5.2.10}$$

$$(\Delta q_s)^{\cdot\cdot} = \delta\ddot{q}_s + \dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot\cdot} + \ddot{q}_s\Delta t + 2\ddot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} \tag{5.2.11}$$

将式(5.2.9) 两端对 t 求导数,得

$$(\Delta\dot{q}_s)^{\cdot} = (\Delta q_s)^{\cdot\cdot} - \ddot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} - \dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot\cdot} \tag{5.2.12}$$

由式(5.2.10),(5.2.11) 得

$$\Delta\ddot{q}_s = (\Delta q_s)^{\cdot\cdot} - \dot{q}_s(\Delta t)^{\cdot\cdot} - 2\ddot{q}_s(\Delta t)^{\cdot} \tag{5.2.13}$$

广义变分 $\Delta q_s, \Delta t$ 的引进对研究力学系统的守恒量来说有重要意义.假设

$$\begin{cases} \Delta q_s = \varepsilon F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \Delta t = \varepsilon f(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.2.14}$$

通常称 F_s 和 f 为无限小变换(5.2.5) 的空间生成元和时间生成元.

5.2.2 Jourdain 非等时变分

现在确定Jourdain非等时变分 $\Delta_1\dot{q}_s, (\Delta_1 q_s)^{\cdot}$,以及$(\Delta_1 t)^{\cdot}$,并要求

$$\Delta_1 q_s = 0, \quad \Delta_1 t = 0 \tag{5.2.15}$$

将式(5.2.7)— 式(5.2.9) 中的 Δ 和 δ 分别用 Δ_1 和 δ_1 替代,并利用式(5.2.15),得到

$$\Delta_1\dot{q}_s = \delta_1\dot{q}_s \tag{5.2.16}$$

$$(\Delta_1 q_s)^{\cdot} = \delta_1\dot{q}_s + \dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\cdot} \tag{5.2.17}$$

$$\Delta_1\dot{q}_s = (\Delta_1 q_s)^{\cdot} - \dot{q}_s(\Delta_1 t)^{\cdot} \tag{5.2.18}$$

广义坐标、时间和速度的无限小变换为

$$\overline{q}_s = q_s$$

$$\overline{t} = t$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{q}_s}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \delta_1 \dot{q}_s = \Delta_1 \dot{q}_s \tag{5.2.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overline{q}_s}{\mathrm{d}\overline{t}} - \frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = (\Delta_1 q_s)^{\cdot}$$

由上述变换可以很好地理解 Jourdain 变分的性质. 将无限小量 $(\Delta_1 q_s)^{\cdot}$ 和 $(\Delta_1 t)^{\cdot}$ 取为 Jourdain 无限小变换的组成元或原元, 引入变换的空间和时间 Jourdain 生成元[5]

$$\begin{cases} (\Delta_1 q_s)^{\cdot} = \varepsilon F_s^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ (\Delta_1 t)^{\cdot} = \varepsilon f^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{5.2.20}$$

由式(5.2.16)— 式(5.2.18) 可将 Jourdain 等时变分表为生成元, 有形式[5]

$$\delta_1 \dot{q}_s = \varepsilon [F^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{q}_s) - \dot{q}_s f^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})] \tag{5.2.21}$$

5.2.3 Gauss 非等时变分

引进 Gauss 非等时变分 $\Delta_2 \ddot{q}_s$, $(\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot}$, $(\Delta_2 \dot{q}_s)^{\cdot}$ 和 $(\Delta_2 t)^{\cdot\cdot}$, 并要求

$$\Delta_2 q_s = 0, \Delta_2 t = 0, \Delta_2 \dot{q}_s = 0, (\Delta_2 q_s)^{\cdot} = 0, (\Delta_2 t)^{\cdot} = 0 \tag{5.2.22}$$

又

$$\delta_2 q_s = 0, \delta_2 t = 0, \delta_2 \dot{q}_s = 0 \tag{5.2.23}$$

将式(5.2.10)— 式(5.2.13) 中的 Δ 和 δ 分别用 Δ_2 和 δ_2 替代, 并利用式(5.2.22), 得

$$\Delta_2 \ddot{q} = \delta_2 \ddot{q}_s \tag{5.2.24}$$

$$(\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} = \delta_2 \ddot{q}_s + \dot{q}_s (\Delta_2 t)^{\cdot\cdot} \tag{5.2.25}$$

$$(\Delta_2 \dot{q}_s)^{\cdot} = (\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} - \dot{q}_s (\Delta_2 t)^{\cdot\cdot} \tag{5.2.26}$$

$$\Delta_2 \ddot{q}_s = (\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} - \dot{q}_s (\Delta_2 t)^{\cdot\cdot} \tag{5.2.27}$$

比较式(5.2.24)— 式(5.2.27), 得到

$$(\Delta_2 \dot{q}_s)^{\cdot} = \Delta_2 \ddot{q}_s = \delta_2 \ddot{q}_s \tag{5.2.28}$$

这样,可建立 Gauss 意义下加速度的无限小变换[5]

$$\begin{cases} \bar{q}_s = q_s \\ \bar{t} = t \\ \dfrac{\mathrm{d}\bar{q}_s}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\bar{q}_s}{\mathrm{d}\bar{t}} - \dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{q}_s}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}^2 q_s}{\mathrm{d}t^2} = \delta_2 \ddot{q}_s = (\delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} = (\Delta_2 \dot{q}_s)^{\cdot} = \Delta_2 \ddot{q}_s \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{q}_s}{\mathrm{d}\bar{t}^2} - \dfrac{\mathrm{d}^2 q_s}{\mathrm{d}t^2} = (\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} \end{cases} \tag{5.2.29}$$

引入广义加速度无限小变换的 Gauss 空间和时间生成元 F_s^2, f^2

$$\begin{cases} (\Delta_2 q_s)^{\cdot\cdot} = \varepsilon F_s^2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ (\Delta_2 t)^{\cdot\cdot} = \varepsilon f^2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{5.2.30}$$

利用关系(5.2.25),将 Gauss 等时变分用生成元表为

$$\delta_2 \ddot{q}_s = \varepsilon\left[F_s^2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \dot{q}_s f^2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right] \tag{5.2.31}$$

5.2.4 Dolaptchiew 非等时变分

引进 Dolaptchiew 非等时变分 $\Delta_m \overset{(m)}{q_s}, (\Delta_m q_s)^{(m)}, (\Delta_m \dot{q}_s)^{(m-1)}, \cdots, (\Delta_m \overset{(m-1)}{q_s})^{\cdot}$ 和 $(\Delta_m t)^{(m)}$ 并要求

$$\begin{cases} \Delta_m q_s = \Delta_m \dot{q}_s = \cdots = \Delta_m \overset{(m-1)}{q_s} = 0 \\ (\Delta_m q_s)^{\cdot} = \cdots = (\Delta_m q_s)^{(m-1)} = 0 \\ \Delta_m t = (\Delta_m t)^{\cdot} = \cdots = (\Delta_m t)^{(m-1)} = 0 \end{cases} \tag{5.2.32}$$

又

$$\delta_m q_s = \delta_m \dot{q}_s = \cdots = \delta_m \overset{(m-1)}{q_s} = 0, \delta_m t = 0 \tag{5.2.33}$$

考虑 m 次速度空间的一个函数 $h(t)$,定义[6]

$$\begin{cases} \delta_m h = \bar{h}(t) - h(t) \\ \Delta_m h = \bar{h}(\bar{t}) - h(t) \\ \bar{t} = t + \Delta_m t \end{cases} \tag{5.2.34}$$

则有

$$\Delta_m h = \delta_m h + \dot{h}\Delta_m t \tag{5.2.35}$$

于是有

$$\Delta_m \overset{(m)}{h} = \delta_m \overset{(m)}{h} + \overset{(m+1)}{h}\Delta_m t \tag{5.2.36}$$

$$(\Delta_m h)^{(m)} = (\delta_m h)^{(m)} + (\dot{h}\Delta_m t)^{(m)} \tag{5.2.37}$$

考虑到 d,δ 运算的可交换性,得到

$$\Delta_m \overset{(m)}{h} - (\Delta_m h)^{(m)} = \overset{(m+1)}{h}\Delta_m t - (\dot{h}\Delta_m t)^{(m)} \tag{5.2.38}$$

由式(5.2.36),(5.2.32) 得

$$\Delta_m \overset{(m)}{q_s} = \delta_m \overset{(m)}{q_s} \tag{5.2.39}$$

由式(5.2.37) 得

$$\begin{aligned}(\Delta_m q_s)^{(m)} &= (\delta_m q_s)^{(m)} + (\dot{q}_s \Delta_m t)^{(m)} \\ &= \delta_m \overset{(m)}{q_s} + \dot{q}_s(\Delta_m t)^{(m)}\end{aligned} \tag{5.2.40}$$

$$\begin{aligned}(\Delta_m \dot{q_s})^{(m-1)} &= (\delta_m \dot{q}_s)^{(m-1)} + (\ddot{q}_s \Delta_m t)^{(m-1)} \\ &= \delta_m \overset{(m)}{q_s}\end{aligned} \tag{5.2.41}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(\Delta_m \overset{(m-1)}{q_s})^{\cdot} = (\delta_m \overset{(m-1)}{q_s})^{\cdot} + (\overset{(m)}{q_s}\Delta_m t)^{\cdot} = \delta_m \overset{(m)}{q_s} \tag{5.2.42}$$

由式(5.2.36),(5.2.32) 得

$$\Delta_m \overset{(m)}{q_s} = \delta_m \overset{(m)}{q_s} + \overset{(m+1)}{q_s}\Delta_m t = \delta_m \overset{(m)}{q_s} \tag{5.2.43}$$

于是有

$$\Delta_m \overset{(m)}{q_s} = (\Delta_m \dot{q}_s)^{(m-1)} = \cdots = (\Delta_m \overset{(m-1)}{q_s})^{\cdot} = \delta_m \overset{(m)}{q_s} \tag{5.2.44}$$

这样便可建立 Dolaptchiew 意义下 m 次速度的无限小变换

$$
\begin{cases}
\overline{q}_s = q_s \\
\overline{t} = t \\
\dfrac{\mathrm{d}\overline{q}_s}{\mathrm{d}t} - \dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\overline{q}_s}{\mathrm{d}\overline{t}} - \dfrac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}t} = \cdots = \dfrac{\mathrm{d}^{(m-1)}\overline{q}_s}{\mathrm{d}t^{(m-1)}} - \dfrac{\mathrm{d}^{(m-1)}q_s}{\mathrm{d}t^{(m-1)}} \\
\qquad\qquad = \dfrac{\mathrm{d}^{(m-1)}\overline{q}_s}{\mathrm{d}\overline{t}^{(m-1)}} - \dfrac{\mathrm{d}^{(m-1)}q_s}{\mathrm{d}t^{(m-1)}} = 0 \\
\dfrac{\mathrm{d}^{(m)}\overline{q}_s}{\mathrm{d}t^{(m)}} - \dfrac{\mathrm{d}^{(m)}q_s}{\mathrm{d}t^{(m)}} = \delta_m \overset{(m)}{q}_s = (\delta_m q_s)^{(m)} = (\Delta_m \dot{q}_s)^{(m-1)} \\
\qquad\qquad = \cdots = (\Delta_m \overset{(m-1)}{q}_s)^{\cdot} = \Delta_m \overset{(m)}{q}_s \\
\dfrac{\mathrm{d}^{(m)}\overline{q}_s}{\mathrm{d}\overline{t}^{(m)}} - \dfrac{\mathrm{d}^{(m)}q_s}{\mathrm{d}\,t^{(m)}} = (\Delta_m q_s)^{(m)}
\end{cases}
\tag{5.2.45}
$$

引入 m 次速度无限小变换的 Dolaptchiew 空间和时间生成元 F_s^m, f^m

$$
\begin{cases}
(\Delta_m q_s)^{(m)} = \varepsilon F_s^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\
(\Delta_m t)^{(m)} = \varepsilon f^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})
\end{cases}
\tag{5.2.46}
$$

利用关系(5.2.40),将 Dolaptchiew 等时变分用生成元表为

$$
\delta_m \overset{(m)}{q}_s = \varepsilon[F_s^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \dot{q}_s f^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})] \tag{5.2.47}
$$

§5.3 基于 D'Alembert-Lagrange 原理的守恒量

本节利用 D'Alembert-Lagrange 原理在无限小变换下的不变性条件导出完整力学系统和非完整力学系统的守恒量存在条件和形式,包括 D'Alembert-Lagrange 原理不变性条件,完整系统的守恒量,以及非完整系统的守恒量等.

5.3.1 D'Alembert-Lagrange 原理不变性条件

将式(5.2.4),(5.2.14)代入 D'Alembert-Lagrange 原理(5.1.5),得到

$$\varepsilon\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)(F_s - \dot{q}_s f) = 0 \qquad (5.3.1)$$

将其展开得

$$\varepsilon\left\{Q''_s(F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L}{\partial q_s}(F_s - \dot{q}_s f) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(F_s - \dot{q}_s f)\right] + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{F}_s - \ddot{q}_s f - \dot{q}_s \dot{f})\right\} = 0$$

将上式加上并减去 $\varepsilon\dfrac{\partial f}{\partial t}$，整理得

$$\varepsilon\left\{Q''_s(F_s - \dot{q}_s f) + \left(\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)f + \frac{\partial L}{\partial t}f - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\dot{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(F_s - \dot{q}_s f)\right]\right\} = 0 \qquad (5.3.2)$$

因

$$\dot{L} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s$$

再在式(5.3.2) 中加上并减去一个规范函数 $\varepsilon\dot{P}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$，得到下述关系

$$\varepsilon\left\{Q''_s(F_s - \dot{q}_s f) + \frac{\partial L}{\partial q_s}F_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f} + \frac{\partial L}{\partial t}f + \dot{P}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s)f + P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right]\right\} = 0 \qquad (5.3.3)$$

这就是 D'Alembert-Lagrange 原理不变性条件的变换[7]，或称 D'Alembert-Lagrange 原理在无限小变换下的变形.

5.3.2 完整系统的守恒量

由基本关系(5.3.3) 可同时找到完整力学系统守恒量的形式和存在条件.

如果无限小变换的生成元 F_s, f 和规范函数 P 满足如下条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s + \frac{\partial L}{\partial t}f + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}$$

$$+ Q''_s(F_s - \dot{q}_s f) + \dot{P}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.3.4)$$

那么由式(5.3.3) 可得到守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f + P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \quad (5.3.5)$$

式(5.3.4) 可称为广义 Noether-Bessel-Hagen 方程, 或简称 Noether 等式.

上述结果归为

定理 5.3.1 对完整非保守系统, 如果由式(5.2.5), (5.2.14)确定的无限小变换的生成元 F_s, f 和规范函数 $P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足Noether 等式(5.3.4), 那么系统存在形如式(5.3.5) 的守恒量.

对于 Lagrange 系统, 有

$$Q''_s = 0 \quad (s = 1, \cdots, n) \qquad (5.3.6)$$

条件(5.3.4) 退化为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s + \frac{\partial L}{\partial t}f + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f} + \dot{P}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.3.7)$$

而守恒量仍为式(5.3.5). 于是得

定理 5.3.2 对 Lagrange 系统, 如果由式(5.2.5), (5.2.14) 确定的无限小生成元 F_s, f 和规范函数 $P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足式(5.3.7), 则系统存在守恒量(5.3.5).

注意到, 这里基于 D'Alembert-Lagrange 原理的不变性所得结果, 与由 Hamilton 作用量在无限小变换下的不变性所得结果一致.

实际上, 定理 5.3.1 与定理 3.4.1 一致, 定理 5.3.2 与定理 3.2.2 一致.

与第三章类似, 这里也可提出逆问题: 由已知守恒量找到相应的 Noether 对称性. 假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \qquad (5.3.8)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{5.3.9}$$

式(5.3.1) 可写成形式

$$\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\overline{F}_s = 0 \tag{5.3.10}$$

其中

$$\overline{F}_s = F_s - \dot{q}_s f \tag{5.3.11}$$

将式(5.3.10) 展开并与式(5.3.9) 相加,由 $\ddot{q}_k$ 的系数为零得到

$$\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\overline{F}_s = 0 \tag{5.3.12}$$

由此解得

$$\overline{F}_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.3.13}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kl} = \delta_{sl}, h_{sk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \tag{5.3.14}$$

再令积分(5.3.8) 等于守恒量(5.3.5),即

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f + P = I \tag{5.3.15}$$

这样,由$(n+1)$ 个方程(5.3.13),(5.3.15) 便可求出无限小变换的生成元 F_s, f. 于是有

定理 5.3.3 如果已知完整非保守系统的积分(5.3.8),那么由式(5.2.5),(5.2.14),(5.3.13),(5.3.15) 确定的无限小变换必是系统的满足 Noether 等式(5.3.4) 的变换.

5.3.3 非完整系统的守恒量

假设系统受有 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{5.3.16}$$

按约束加在虚位移上的 Appell-Chetaev 定义,有

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \tag{5.3.17}$$

由原理(5.1.5) 和式(5.3.17),利用通常的 Lagrange 乘子法,得到 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (5.3.18)$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

在运动微分方程积分之前,可由方程(5.3.16),(5.3.18) 求出约束乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数[8].于是,方程(5.3.18) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\Lambda_s \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (5.3.19)$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (5.3.20)$$

称方程(5.3.19) 为与非完整系统(5.3.16),(5.3.18) 相应的完整系统的运动方程.

定理 5.3.4 对相应完整系统(5.3.19),如果由式(5.2.5),(5.2.14)确定的无限小变换的生成元 F_s,f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s+\frac{\partial L}{\partial t}f+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}$$
$$+(Q''_s+\Lambda_s)(F_s-\dot{q}_s f)+\dot{P}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (5.3.21)$$

那么系统存在守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f+P(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const.} \qquad (5.3.22)$$

将式(5.2.4),(5.2.14) 代入式(5.3.17),注意到参数 ε 的任意性,得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\overline{F}_s=0 \qquad (5.3.23)$$

这是非完整约束(5.3.16) 对无限小生成元的限制.将式(5.3.23) 代入式(5.3.21),便得式(5.3.4).于是有

定理 5.3.5　对非完整系统(5.3.16),(5.3.18),如果由式(5.2.5),(5.2.14)确定的无限小生成元 F_s, f 和规范函数 $P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足关系(5.3.4),而且无限小生成元还满足 Appell-Chetaev 条件(5.3.23),那么非完整系统存在形如式(5.3.22)的守恒量.

如果没有非完整约束,则定理 5.3.5 变成为定理 5.3.1.

条件(5.3.23)可放宽为

$$\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(F_s - \dot{q}_s f) = 0 \tag{5.3.24}$$

于是有

定理 5.3.6　对非完整系统(5.3.16),(5.3.18),如果由式(5.2.5),(5.2.14)确定的无限小生成元 F_s, f 和规范函数 $P = P(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足关系(5.3.4),而且无限小生成元还满足条件(5.3.24),那么非完整系统存在形如式(5.3.22)的守恒量.

非完整系统的对称性和相应完整系统的对称性之间的关系有如下结果.

定理 5.3.7　非完整系统的对称性一定是相应完整系统的对称性;反之,则不一定.如果相应完整系统的无限小变换的生成元满足 Appell-Chetaev 条件(5.3.23),那么相应完整系统的对称性导致非完整系统的对称性.

5.3.4　算　例

例 1　考虑气体动力学中的微分方程

$$\ddot{q} = aq^{-1/2} \quad (a = \text{const.}, q \neq 0) \tag{1}$$

它可化成 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + 2aq^{1/2} \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用定理 5.3.2 由已知对称性求守恒量.第一步,寻求系统(2)的 Noether 对称性.Noether 等式(5.3.4)给出

$$aq^{-1/2}F + \dot{q}\dot{F} - \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - 2aq^{1/2}\right)\dot{f} + \dot{P} = 0 \tag{3}$$

假设空间和时间生成元有形式

$$F = F(q), f = f(\dot{q}) \tag{4}$$

将式(4) 代入式(3),并利用方程(1),得

$$-\dot{P} = \dot{q}^2\left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} - \frac{1}{2}aq^{-1/2}\frac{\mathrm{d}f(\dot{q})}{\mathrm{d}\dot{q}}\right] + aq^{-1/2}F(q) + 2a^2\frac{\mathrm{d}f(\dot{q})}{\mathrm{d}\dot{q}} \tag{5}$$

取

$$\frac{\mathrm{d}f(\dot{q})}{\mathrm{d}\dot{q}} = 1$$

即

$$f(\dot{q}) = \dot{q} \tag{6}$$

则式(5) 括号内不依赖于 $\dot{q}$. 令括号为零,得

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{2}aq^{-1/2}$$

即

$$F = aq^{1/2} \tag{7}$$

而方程(5) 成为

$$\dot{P} = -3a^2$$

即

$$P = -3a^2t \tag{8}$$

这样, 式(6), (7), (8) 确定 Noether 对称性. 第二步, 利用定理 5.3.2 求相应的守恒量. 守恒量式(5.3.5) 给出[5]

$$I = \dot{q}^3 - 6aq^{1/2}\dot{q} + 6a^2t = \text{const.} \tag{9}$$

其次,研究定理 5.3.3 的应用. 假设已知系统(2) 有积分

$$I = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - 2aq^{1/2} = \text{const.} \tag{10}$$

求与其相应的 Noether 对称性. 式(5.3.13), (5.3.15) 给出为

$$\overline{F} = \frac{\partial I}{\partial \dot{q}} = \dot{q} \tag{11}$$

$$\dot{q}\overline{F} + \left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 + 2aq^{1/2}\right)f + P = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - 2aq^{1/2}$$

方程(11) 有解

$$F = 0, f = -1, P = 0 \tag{12}$$

例 2 Appell-Hamel 例. 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_3 - (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{1/2} = 0 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,研究与非完整系统(1),(2) 相应的完整系统的 Noether 对称性与守恒量. 第一步,建立相应完整系统的运动方程. Routh 方程(5.3.18) 给出

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -\lambda\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3} \\ m\ddot{q}_2 = -\lambda\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3} \\ m\ddot{q}_3 + mg = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3) 求得

$$\lambda = \frac{1}{2}mg \tag{4}$$

于是有

$$\begin{cases} \Lambda_1 = -\dfrac{1}{2}mg\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3} \\ \Lambda_2 = -\dfrac{1}{2}mg\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3} \\ \Lambda_3 = \dfrac{1}{2}mg \end{cases} \tag{5}$$

第二步,求 Noether 对称性. Noether 等式(5.3.21) 给出

$$-mgF_3 + m\dot{q}_1\dot{F}_1 + m\dot{q}_2\dot{F}_2 + m\dot{q}_3\dot{F}_3 - \left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2\right.$$

$$+ \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3\Big]\dot{f} - \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}(F_1 - \dot{q}_1 f) - \frac{1}{2}mg\frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}(F_2 -$$

$$\dot{q}_2 f) + \frac{1}{2}mg(F_3 - \dot{q}_3 f) + \dot{P} = 0 \tag{6}$$

方程(6) 有如下解

$$F_s = 0, f = -1, P = 0 \tag{7}$$

$$f = 0, F_1 = -\frac{1}{\dot{q}_2}, F_2 = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2^2}, F_3 = 0, P = -m\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} \tag{8}$$

$$f = 0, F_1 = 0, F_2 = \dot{q}_3, F_3 = \dot{q}_2, P = mgq_2 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 \tag{9}$$

$$f = 0, F_1 = \dot{q}_3, F_2 = 0, F_3 = \dot{q}_1, P = mgq_1 - m\dot{q}_1\dot{q}_3 \tag{10}$$

$$f = 0, F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 1, P = \frac{1}{2}mgt \tag{11}$$

$$f = 0, F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = t, P = \frac{1}{2}mgt^2 - mq_3 \tag{12}$$

第三步，求守恒量. 对式(7)—(12)，定理 5.3.4 的守恒量式(5.3.22) 分别给出

$$I_1 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = c_1 \tag{13}$$

$$I_2 = \frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2} = c_2 \tag{14}$$

$$I_3 = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mgq_2 = c_3 \tag{15}$$

$$I_4 = m\dot{q}_1\dot{q}_3 + mgq_1 = c_4 \tag{16}$$

$$I_5 = m\dot{q}_3 + \frac{1}{2}mgt = c_5 \tag{17}$$

$$I_6 = m\dot{q}_3 t - mq_3 + \frac{1}{2}mgt^2 = c_6 \tag{18}$$

第四步，由已知守恒量求 Noether 对称性. 假设系统有积分(15)，求与其相应的 Noether 对称性. 式(5.3.13)，(5.3.15) 给出

$$\begin{cases} \overline{F}_1 = 0 \\ \overline{F}_2 = \dot{q}_3 \\ \overline{F}_3 = \dot{q}_2 \\ m\dot{q}_2\dot{q}_3 + m\dot{q}_3\dot{q}_2 + Lf + P = m\dot{q}_2\dot{q}_3 + mgq_1 \end{cases} \tag{19}$$

选

$$P = mgq_1 - m\dot{q}_2\dot{q}_3 \tag{20}$$

则有

$$f = 0, F_1 = 0, F_2 = \dot{q}_3, F_3 = \dot{q}_2 \tag{21}$$

其次,研究非完整系统(1),(2)的 Noether 对称性与守恒量.限制条件(5.3.23)给出为

$$\begin{aligned} &- \dot{q}_1(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}(F_1 - \dot{q}_1 f) - \dot{q}_2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)^{-1/2}(F_2 - \dot{q}_2 f) \\ &+ F_3 - \dot{q}_3 f = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

容易验证,式(7)—(10)满足条件(22),因此,它们都对应非完整系统的广义准对称变换.式(11),(12)不满足条件(22),故不是非完整系统的对称性.

§5.4 基于 Jourdain 原理的守恒量

本节利用 Jourdain 原理不变性条件导出完整力学系统和非完整力学系统的守恒量存在条件和形式,包括 Jourdain 原理不变性条件,完整系统的守恒量,以及非完整系统的守恒量等.

5.4.1 Jourdain 原理不变性条件

由式(5.2.17),(5.2.20)得到用生成元表示的 Jourdain 等时变分为

$$\delta_1 \dot{q}_s = \varepsilon(F_s^1 - \dot{q}_s f^1) \tag{5.4.1}$$

将式(5.4.1)代入 Jourdain 原理(5.1.10),得到

$$\varepsilon\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)(F_s^1 - \dot{q}_s f^1) = 0 \tag{5.4.2}$$

类似于 §5.3 中的讨论,得到

$$\begin{aligned} \varepsilon\Big\{ & Q''_s(F_s^1 - \dot{q}_s f^1) + \frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^1 + \frac{\partial L}{\partial t}f^1 \\ & + P^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^1 + \end{aligned}$$

$$\dot{P}^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\Big]\Big| = 0 \tag{5.4.3}$$

这就是 Jourdain 原理不变性条件的变换,其中 P^1 为规范函数.

5.4.2 完整系统的守恒量

如果无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足如下关系

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^1 + \frac{\partial L}{\partial t}f^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^1$$

$$+ Q''_s(F_s^1 - \dot{q}_s f^1) + \dot{P}^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \tag{5.4.4}$$

那么由式(5.4.3) 得到守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^1 + P^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{5.4.5}$$

上述结果归为

定理 5.4.1[5] 对完整非保守系统,如果由式(5.2.19),(5.2.20) 确定的无限小变换生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足关系(5.4.4),那么系统存在形如式(5.4.5) 的守恒量.

对 Lagrange 系统,有 $Q''_s = 0(s = 1,\cdots,n)$,条件(5.4.4) 成为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^1 + \frac{\partial L}{\partial t}f^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^1 + \dot{P}^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \tag{5.4.6}$$

而守恒量仍为式(5.4.5). 于是得

定理 5.4.2 对 Lagrange 系统,如果由式(5.2.19),(5.2.20) 确定的无限小变换生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足关系(5.4.6),那么系统存在形如(5.4.5) 的守恒量.

5.4.3 非完整系统的守恒量

首先,研究一阶非完整系统的守恒量. 假设系统的运动受有 g

个非完整约束(5.3.16).约束(5.3.16)加在速度空间虚位移上的限制为[2]

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta_1 \dot{q}_s = 0 \tag{5.4.7}$$

由 Jourdain 原理(5.1.10)和条件(5.4.7),利用 Lagrange 乘子法,得到 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{5.4.8}$$

在运动微分方程积分之前,可求出约束乘子 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数.于是得到相应完整系统的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s + \Lambda_s \tag{5.4.9}$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{5.4.10}$$

类似于定理 5.3.4,有

定理 5.4.3 对相应完整系统(5.4.9),如果由式(5.2.19),(5.2.20)确定的无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^1 + \frac{\partial L}{\partial t}f^1 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^1$$

$$+ (Q''_s + \Lambda_s)(F_s^1 - \dot{q}_s f^1) + \dot{P}^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \tag{5.4.11}$$

那么系统存在形如(5.4.5)的守恒量.

将式(5.4.1)代入式(5.4.7),并注意到 ε 的任意性,得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\overline{F}_s^1 = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{5.4.12}$$

其中

$$\overline{F}_s^1 = F_s^1 - \dot{q}_s f^1 \tag{5.4.13}$$

条件(5.4.12) 是非完整约束对无限小变换生成元的限制,可称为牛青萍条件. 将式(5.4.12) 代入式(5.4.11),便得式(5.4.4). 于是有

定理 5.4.4[9] 对非完整系统(5.3.16),(5.3.18),如果由式(5.2.19),(5.2.20) 确定的无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.4.4),而且生成元还满足牛青萍条件(5.4.12),那么系统存在形如式(5.4.5) 的守恒量.

如果没有非完整约束,则定理 5.4.4 退化为定理 5.4.1.

条件(5.4.12) 可放宽为条件

$$\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \overline{F}_s^1 = 0 \tag{5.4.14}$$

有如下结论

定理 5.4.5 对非完整系统(5.3.16),(5.3.18),如果由式(5.2.19),(5.2.20) 确定的无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.4.4),而且生成元还满足条件(5.4.14),那么系统存在形如式(5.4.5) 的守恒量.

在施加限制条件(5.4.12) 之后,条件(5.4.11) 成为条件(5.4.4). 于是有

定理 5.4.6 非完整系统的对称性一定是相应完整系统的对称性;反之,则不一定. 如果相应完整系统的无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 满足牛青萍条件(5.4.12),那么相应完整系统的对称性导致非完整系统的对称性.

其次,研究二阶非完整系统的守恒量. 假设系统的运动受有 g 个二阶理想非完整约束

$$f_\beta^{(2)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = 0$$

$$(\beta = 1, \cdots, g) \tag{5.4.15}$$

约束(5.4.15) 加在虚位移 $\delta_1 \dot{q}_s$ 上的限制,由二阶 Chetaev 定义给出[10]

$$\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s}\delta_1 \dot{q}_s = 0 \tag{5.4.16}$$

在此定义下,Jourdain 原理便可用于研究二阶非完整系统动力学.由 Jourdain 原理和关系(5.4.16),利用 Lagrange 乘子法得到二阶非完整系统的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{5.4.17}$$

将式(5.4.1) 代入式(5.4.16),得到

$$\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s}\overline{F}_s^1 = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{5.4.18}$$

定理 5.4.7[11] 对二阶非完整系统(5.4.15),(5.4.17),如果由式(5.2.19),(5.2.20) 确定的无限小变换的生成元 F_s^1, f^1 和规范函数 $P^1 = P^1(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.4.4),而且生成元还满足条件(5.4.18),那么系统存在形如式(5.4.5) 的守恒量.

对于一阶非完整系统,定理 5.4.7 退化为定理 5.4.4.

5.4.4 算 例

例 1 某完整系统为

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_3 \\ Q''_1 = -\dot{q}_2, Q''_2 = \dot{q}_1, Q''_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

试用 Jourdain 原理研究系统的对称性与守恒量.

首先,利用定理 5.4.1 由已知 Noether 对称性来求守恒量.为此,先求对称性.Noether 等式(5.4.4) 给出

$$-F_3^1 + \dot{q}_1\dot{F}_1^1 + \dot{q}_2\dot{F}_2^1 + \dot{q}_3\dot{F}_3^1 - [\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + q_3]\dot{f}^1$$

$$-\dot{q}_2(F_1^1 - \dot{q}_1 f^1) + \dot{q}_1(F_2^1 - \dot{q}_2 f^1) + \dot{P}^1 = 0 \tag{2}$$

方程(2) 有如下解

$$f^1 = -1 \quad F_s^1 = 0 \qquad (s = 1,2,3), P^1 = 0 \tag{3}$$

$$F_3^1 = 1, f^1 = 0, F_1^1 = F_2^1 = 0, P^1 = t \tag{4}$$

$$F_1^1 = 1, f^1 = 0, F_2^1 = F_3^1 = 0, P^1 = q_2 \tag{5}$$

$$F_2^1 = 1, f^1 = 0, F_1^1 = F_3^1 = 0, P^1 = -q_1 \tag{6}$$

$$F_1^1 = \cos t, F_2^1 = \sin t, F_3^1 = 0, f^1 = 0, P^1 = 0 \tag{7}$$

$$F_1^1 = -\sin t, F_2^1 = \cos t, F_3^1 = 0, f^1 = 0, P^1 = 0 \tag{8}$$

再由定理 5.4.1 的守恒量式(5.4.5) 分别给出积分

$$I_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + q_3 = \text{const.} \tag{9}$$

$$I_2 = \dot{q}_3 + t = \text{const.} \tag{10}$$

$$I_3 = \dot{q}_1 + q_2 = \text{const.} \tag{11}$$

$$I_4 = \dot{q}_2 - q_1 = \text{const.} \tag{12}$$

$$I_5 = \dot{q}_1 \cos t + \dot{q}_2 \sin t = \text{const.} \tag{13}$$

$$I_6 = -\dot{q}_1 \sin t + \dot{q}_2 \cos t = \text{const.} \tag{14}$$

其次,由已知积分求相应的对称性. 假设系统有积分(13),求相应的 Noether 对称性. 将式(5.3.13),(5.3.15) 中的 F_s, f, P 分别用 F_s^1, f^1, P^1 替代,给出

$$\overline{F}_1^1 = \cos t, \overline{F}_2^1 = \sin t, \overline{F}_3^1 = 0 \tag{15}$$

$$\dot{q}_1 \cos t + \dot{q}_2 \sin t + Lf^1 + P^1 = \dot{q}_1 \cos t + \dot{q}_2 \sin t$$

当取规范函数

$$P^1 = 0 \tag{16}$$

则有

$$f^1 = 0, F_1^1 = \cos t, F_2^1 = \sin t, F_3^1 = 0 \tag{17}$$

若取

$$P^1 = L \tag{18}$$

则有

$$f^1 = -1, F_1^1 = \cos t - \dot{q}_1, F_2^1 = \sin t - \dot{q}_2, F_3^1 = -\dot{q}_3 \tag{19}$$

例 2 半径为 a 的匀质圆球在完全粗糙水平面上的纯滚动问题.

令

$$q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi, q_4 = x, q_5 = y \tag{1}$$

分别为 Euler 角和球心的坐标,系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2) \tag{2}$$

表示球在水平面上作纯滚动的非完整约束方程为

$$\begin{cases} f_1 = \dot{q}_4 + a(\dot{q}_3\sin q_2\cos q_1 - \dot{q}_2\sin q_1) = 0 \\ f_2 = \dot{q}_5 + a(\dot{q}_3\sin q_2\sin q_1 + \dot{q}_2\cos q_1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Routh 方程(5.4.8) 给出为

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)^{\cdot} = 0 \\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_2)^{\cdot} + \frac{2}{5}ma^2\dot{q}_1\dot{q}_3\sin q_2 = -\lambda_1 a\sin q_1 + \lambda_2 a\cos q_1 \\ \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3 + \dot{q}_1\cos q_2)^{\cdot} = \lambda_1 a\sin q_2\cos q_1 + \lambda_2 a\sin q_2\sin q_1 \\ m\ddot{q}_4 = \lambda_1 \\ m\ddot{q}_5 = \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

文献[12] 已证明,这是一个非完整系统的自由运动问题,有

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \tag{5}$$

因此,条件(5.4.14) 成立.由定理 5.4.5 知,只要生成元和规范函数满足条件(5.4.4),便可找到系统的守恒量.条件(5.4.4) 给出

$$\begin{aligned} &-\frac{2}{5}ma^2\dot{q}_1\dot{q}_3F_2^1\sin q_2 + \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2)(\dot{F}_1^1 - \dot{q}_1\dot{f}^1) \\ &+\frac{2}{5}ma^2\dot{q}_2(\dot{F}_2^1 - \dot{q}_2\dot{f}^1) + \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3 + \dot{q}_1\cos q_2)(\dot{F}_3^1 - \dot{q}_3\dot{f}^1) \\ &+ m\dot{q}_4(\dot{F}_4^1 - \dot{q}_4\dot{f}^1) + m\dot{q}_5(\dot{F}_5^1 - \dot{q}_5\dot{f}^1) \\ &+\left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2)\right]\dot{f}^1 \\ &+\dot{P}^1 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

方程(6) 有如下解

$$f^1 = F_2^1 = F_3^1 = F_4^1 = F_5^1 = 0, F_1^1 = 1, P^1 = 0 \tag{7}$$

$$f^1 = F_1^1 = F_2^1 = F_4^1 = F_5^1 = 0, F_3^1 = 1, P^1 = 0 \tag{8}$$

$$f^1 = F_1^1 = F_2^1 = F_3^1 = F_5^1 = 0, F_4^1 = 1, P^1 = 0 \tag{9}$$

$$f^1 = F_1^1 = F_2^1 = F_3^1 = F_4^1 = 0, F_5^1 = 1, P^1 = 0 \tag{10}$$

$$f^1 = -1, F_1^1 = F_2^1 = F_3^1 = F_4^1 = F_5^1 = 0, P^1 = 0 \tag{11}$$

定理 5.4.5 的守恒量式(5.4.5) 分别给出

$$I_1 = \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_3\cos q_2) = c_1 \tag{12}$$

$$I_2 = \frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_3 + \dot{q}_1\cos q_2) = c_2 \tag{13}$$

$$I_3 = m\dot{q}_4 = c_3 \tag{14}$$

$$I_4 = m\dot{q}_5 = c_4 \tag{15}$$

$$I_5 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2) + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}ma^2(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_3\cos q_2) = c_5 . \tag{16}$$

需要注意的是，式(8)，(9)，(10) 并不满足牛青萍条件(5.4.12).

例 3[13]　二阶非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{1}$$

$$f^{(2)} = \dot{q}_1^2\ddot{q}_1 + \dot{q}_2^2\ddot{q}_2 - \dot{q}_3^2\ddot{q}_3 - 1 = 0 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

Routh　方程(5.4.17) 给出

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \lambda\dot{q}_1^2 \\ \ddot{q}_2 = \lambda\dot{q}_2^2 \\ \ddot{q}_3 = -\lambda\dot{q}_3^2 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3) 解得

$$\lambda = (\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + \dot{q}_3^4)^{-1} \tag{4}$$

于是有

$$\begin{cases} \Lambda_1 = \dot{q}_1^2(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + \dot{q}_3^4)^{-1} \\ \Lambda_2 = \dot{q}_2^2(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + \dot{q}_3^4)^{-1} \\ \Lambda_3 = -\dot{q}_3^2(\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + \dot{q}_3^4)^{-1} \end{cases} \tag{5}$$

Noether 等式(5.4.4) 给出

$$\dot{q}_1\dot{F}_1^1 + \dot{q}_2\dot{F}_2^1 + \dot{q}_3\dot{F}_3^1 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\dot{f}^1$$
$$+ (\dot{q}_1^4 + \dot{q}_2^4 + \dot{q}_3^4)^{-1}[\dot{q}_1^2(F_1^1 - \dot{q}_1 f^1) + \dot{q}_2^2(F_2^1 - \dot{q}_2 f^1)$$
$$+ \dot{q}_3^2(F_3^1 - \dot{q}_3 f^1)] + \dot{P}^1 = 0 \tag{6}$$

条件(5.4.18) 给出

$$\dot{q}_1^2(F_1^1 - \dot{q}_1 f^1) + \dot{q}_2^2(F_2^1 - \dot{q}_2 f^1) - \dot{q}_3^2(F_3^1 - \dot{q}_3 f^1) = 0 \tag{7}$$

方程(6),(7) 有解

$$\begin{cases} f^1 = 0, F_1^1 = -\dot{q}_1^{-2}, F_2^1 = -\dot{q}_2^{-2}, F_3^1 = -2\dot{q}_3^{-2} \\ P^1 = 2(\dot{q}_1^{-1} + \dot{q}_2^{-1} + 2\dot{q}_3^{-1}) \end{cases} \tag{8}$$

守恒量式(5.4.5) 给出

$$I = \dot{q}_1^{-1} + \dot{q}_2^{-1} + 2\dot{q}_3^{-1} = \text{const.} \tag{9}$$

§5.5 基于 Gauss 原理的守恒量

本节利用 Gauss 原理不变性条件导出完整系统和非完整系统的守恒量,包括 Gauss 原理不变性条件,完整系统的守恒量,以及非完整系统的守恒量等.

5.5.1 Gauss 原理不变性条件

将式(5.2.31) 代入 Gauss 原理(5.1.16),得到

$$\varepsilon(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s})(F_s^2 - \dot{q}_s f^2) = 0 \tag{5.5.1}$$

类似于 §5.3 中的讨论,得到

$$\varepsilon\left\{Q''_s(F_s^2 - \dot{q}_s f^2) + \frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^2 + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^2\right.$$

$$+\frac{\partial L}{\partial t}+\dot{P}^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^2+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^2+P^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\right]$$

$$=0 \tag{5.5.2}$$

这就是 Gauss 原理不变性条件的变换,其中 P^2 为规范涵数.

5.5.2 完整系统的守恒量

由 Gauss 原理不变性条件(5.5.2) 可以看出,如果由式(5.2.29),(5.2.30) 所确定的无限小变换的生成元 F_s^2, f^2 和规范函数 P^2 满足如下关系

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^2+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^2+\frac{\partial L}{\partial t}f^2+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^2$$

$$+Q''_s(F_s^2-\dot{q}_sf^2)+\dot{P}^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \tag{5.5.3}$$

那么系统有守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^2+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^2+P^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const.} \tag{5.5.4}$$

于是有

定理 5.5.1[5] 对完整非保守系统,如果由式(5.2.29),(5.2.30) 确定的无限小变换的生成元 F_s^2, f^2 和规范函数 $P^2=P^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.5.3),那么系统存在形如式(5.5.4) 的守恒量.

对 Lagrange 系统,有 $Q''_s=0(s=1,\cdots,n)$,条件(5.5.3) 成为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^2+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^2+\frac{\partial L}{\partial t}f^2+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^2+\dot{P}^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \tag{5.5.5}$$

于是有

定理5.5.2 对 Lagrange 系统,如果由式(5.2.29),(5.2.30) 确定的无限小变换的生成元 F_s^2, f^2 和规范函数 $P^2=P^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.5.5),那么系统存在形如式(5.5.4) 的守恒量.

5.5.3 非完整系统的守恒量

假设系统受有一阶非完整约束(5.3.16),将其对时间 t 求导数,得到

$$\dot{f}_\beta = \frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s + \frac{\partial f_\beta}{\partial t} = 0 \qquad (5.5.6)$$

取 Gauss 变分,得

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta_2 \ddot{q}_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (5.5.7)$$

由 Gauss 原理(5.1.16) 和式(5.5.7),利用 Lagrange 乘子法,得到 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s = 1, \cdots, n) \qquad (5.5.8)$$

将 Gauss 等时变分公式(5.2.31) 代入式(5.5.7),得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(F_s^2 - \dot{q}_s f^2) = 0 \qquad (5.5.9)$$

这是非完整约束(5.3.16) 对无限小变换生成元 F_s^2, f^2 的限制.

类似于 § 5.3 中的讨论,得到

定理 5.5.3 对一阶非完整系统(5.3.16),(5.3.18),如果由式(5.2.29),(5.2.30) 确定的无限小变换的生成元 F_s^2, f^2 和规范函数 $P^2 = P^2(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.5.3),而且变换的生成元还满足条件(5.5.9),那么系统存在形如式(5.5.4) 的守恒量.

进而,假设系统受有 g 个二阶理想非完整约束

$$f_\beta^{(2)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.5.10)$$

$$(\beta = 1, \cdots, g)$$

约束(5.5.10) 加在加速度空间虚位移上的限制为[2]

$$\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s}\delta_2 \ddot{q}_s = 0 \qquad (5.5.11)$$

由 Gauss 原理(5.1.16) 和式(5.5.11),利用 Lagrange 乘子法,得到

Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\lambda_\beta\frac{\partial f^{(2)}_\beta}{\partial \ddot{q}_s} \tag{5.5.12}$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

将式(5.2.31)代入式(5.5.11),得到

$$\frac{\partial f^{(2)'}_\beta}{\partial \ddot{q}_s}(F^2_s-\dot{q}_s f^2)=0 \tag{5.5.13}$$

条件(5.5.13)是二阶非完整约束(5.5.10)对无限小变换生成元 F^2_s, f^2 的限制.

对完整非保守系统的定理5.5.1在施加限制条件(5.5.13)之后,便可应用于二阶非完整系统,有如下结论

定理 5.5.4 对二阶非完整系统(5.5.10),(5.5.12),如果由式(5.2.29),(5.2.30)确定的无限小变换的生成元 F^2_s, f^2 和规范函数 $P^2=P^2(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.5.3),而且变换生成元还满足条件(5.5.13),那么二阶非完整系统存在形如式(5.5.4)的守恒量.

如果所受非完整约束是一阶的,则定理 5.5.4 退化为定理 5.5.3.

5.5.4 算 例

例 1 线性非保守系统的能量类守恒量[5].

假设系统的运动方程有形式

$$\ddot{q}_s+2k\dot{q}_s+a_{sr}q_r=0$$

$$(s,r=1,\cdots,n) \quad (1)$$

其中 k, a_{sr} 为给定常数.位置力

$$Q_s=-a_{sr}q_r \tag{2}$$

是非保守的,即

$$\frac{\partial Q_s}{\partial q_r}\neq\frac{\partial Q_r}{\partial q_s} \tag{3}$$

引入 Lagrange 函数

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2)e^{2kt} \tag{4}$$

及非保守广义力

$$\tilde{Q}_s = -a_{sr}q_r e^{2kt} \tag{5}$$

则有方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = \tilde{Q} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{6}$$

它们与方程(1) 等价.

Noether 等式(5.5.3) 给出

$$\left\{\dot{q}_s F_s^2 + \left(\sum_{s=1}^{n}\dot{q}_s^2\right)\left(kf^2 - \frac{1}{2}\dot{f}^2\right) - \left(F_s^2 - \dot{q}_s f^2\right)a_{sr}q_r\right\}e^{2kt} + \dot{P}^2 = 0 \tag{7}$$

假设

$$f^2 = 0 \tag{8}$$

选空间生成元为

$$F_1^2 = F, F_\alpha^2 = \lambda_\alpha F \quad (\alpha = 2, \cdots, n) \tag{9}$$

其中 λ_α 为待定常因子,而 F 为时间、坐标和速度的函数.将式(8),(9) 代入式(7),得到

$$\{\dot{F}(\dot{q}_1 + \lambda_\alpha\dot{q}_\alpha) - F[(a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1})q_1 + (a_{12} + \lambda_\alpha a_{\alpha 2})q_2 + \cdots + (a_{1n} + \lambda_\alpha a_{\alpha n})q_n]\}e^{2kt} + \dot{P}^2 = 0$$

或

$$\left\{\dot{F}(\dot{q}_1 + \lambda_\alpha\dot{q}_\alpha) - F(a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1})\left[q_1 + \frac{a_{12} + \lambda_\alpha a_{\alpha 2}}{a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1}}q_2 + \cdots + \frac{a_{1n} + \lambda_\alpha a_{\alpha n}}{a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1}}q_n\right]\right\}e^{2kt} + \dot{P}^2 = 0 \tag{10}$$

令

$$\Omega^2 = a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1} \tag{11}$$

并取

$$\frac{a_{12}\lambda_\alpha a_{\alpha 2}}{a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1}} = \lambda_2, \cdots, \frac{a_{1n} + \lambda_\alpha a_{\alpha n}}{a_{11} + \lambda_\alpha a_{\alpha 1}} = \lambda_n \tag{12}$$

则式(10) 可写成形式

$$(\dot{F}\dot{\theta} - \Omega^2 F\theta)\mathrm{e}^{2kt} + \dot{P}^2 = 0 \tag{13}$$

其中

$$\theta = q_1 + \lambda_\alpha q_\alpha \tag{14}$$

选空间生成元有形式

$$F = A\dot{\theta} + B\theta \tag{15}$$

其中 A, B 为常数.将式(15) 代入式(13),得

$$[A(\dot{\theta}\ddot{\theta} - \Omega^2\theta\dot{\theta}) + B(\dot{\theta}^2 - \Omega^2\theta^2)]\mathrm{e}^{2kt} + \dot{P}^2 = 0 \tag{16}$$

对 $A = 1, B = k$,方程(16) 可积.此时规范函数为

$$P^2 = \frac{1}{2}(\Omega^2\theta^2 - \dot{\theta}^2)\mathrm{e}^{2kt} \tag{17}$$

将式(8),(9),(15),(17),(4) 代入式(5.5.4),得到积分

$$\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\Omega^2\theta^2 + k\theta\dot{\theta}\right)\mathrm{e}^{2kt} = \text{const.} \tag{18}$$

返回到原记号,有

$$\left\{\frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \lambda_\alpha\dot{q}_\alpha)^2 + \frac{1}{2}\Omega^2(q_1 + \lambda_\alpha q_\alpha)^2 + k(q_1 + \lambda_\alpha q_\alpha)(\dot{q}_1 + \lambda_\alpha\dot{q}_\alpha)\right\}\mathrm{e}^{2kt} = \text{const.} \tag{19}$$

所得积分(19) 实际上是动力学系统(1) 的 n 个独立的平方守恒量[5].

例 2　二阶非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{1}$$

$$f^{(2)} = \ddot{q}_2 - t\ddot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

试用 Gauss 原理研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

条件(5.5.3) 和(5.5.13) 给出为

$$-F_2^2 + \dot{q}_1\dot{F}_1^2 + \dot{q}_2\dot{F}_2^2 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)\dot{f}^2 + \dot{P}^2 = 0 \tag{3}$$

$$F_2^2 - \dot{q}_2 f^2 - t(F_1^2 - \dot{q}_1 f^2) = 0 \tag{4}$$

方程(3),(4) 有解

$$f^2 = 0, F_1^2 = 1, F_2^2 = t, P^2 = -q_2 + \frac{1}{2}t^2 \tag{5}$$

定理 5.5.4 的守恒量式(5.5.4) 给出为

$$\dot{q}_1 + \dot{q}_2 t - q_2 + \frac{1}{2}t^2 = \text{const.} \tag{6}$$

§5.6 基于万有 D'Alembert 原理的守恒量

本节利用万有 D'Alembert 原理不变性条件导出完整系统和非完整系统的守恒量存在条件和形式,包括万有 D'Alembert 原理不变性条件,完整系统的守恒量,以及非完整系统的守恒量等.

5.6.1 万有 D'Alembert 原理不变性条件

将用生成元表示的 Dolaptchiew 等时变分公式(5.2.47) 代入万有 D'Alembert 原理(5.1.20),得到

$$\varepsilon\left(Q''_s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial q_s}\right)(F_s^m - \dot{q}_s f^m) = 0 \tag{5.6.1}$$

类似于 §5.3—§5.5 中的讨论,得到

$$\begin{aligned}\varepsilon\Big\{&Q''_s(F_s^m - \dot{q}_s f^m) + \frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^m \\ &+ \frac{\partial L}{\partial t}f^m + \dot{P}^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^m \\ &+ P^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\Big]\Big\} = 0\end{aligned} \tag{5.6.2}$$

这就是万有 D′Alembert 原理不变性条件的变换,其中 P^m 为规范函数.

由不变性条件(5.6.2) 可以同时找到守恒量的存在条件和形式.

5.6.2 完整系统的守恒量

如果 Dolaptchiew 意义下的无限小变换(5.2.45),(5.2.46) 的

生成元 F_s^m, f^m 和规范函数 P^m 满足条件

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^m + \frac{\partial L}{\partial t}f^m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^m$$

$$+ Q''_s(F_s^m - \dot{q}_s f^m) + \dot{P}^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.6.3)$$

那么由式(5.6.2) 可得到守恒量

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}F_s^m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)f^m + P^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \qquad (5.6.4)$$

于是有

定理 5.6.1 对完整非保守系统，如果由式(5.2.45), (5.2.46) 确定的无限小变换的生成元 F_s^m, f^m 和规范函数 $P^m = P^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{q})$ 满足式(5.6.3)，那么系统存在形如(5.6.4) 的守恒量.

对 Lagrange 系统，有 $Q''_s = 0(s = 1, \cdots, n)$，条件(5.6.3) 成为

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}F_s^m + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{F}_s^m + \frac{\partial L}{\partial t}f^m + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{f}^m + \dot{P}^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.6.5)$$

于是有

定理5.6.2 对 Lagrange 系统，如果由式(5.2.45), (5.2.46) 确定的无限小变换的生成元 F_s^m, f^m 和规范函数 $P^m = P^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足关系(5.6.5)，那么系统存在形如式(5.6.4) 的守恒量.

当 $m = 0$ 时，定理 5.6.1 成为定理 5.3.1；当 $m = 1$ 时，定理 5.6.1 成为定理 5.4.1；当 $m = 2$ 时，定理 5.6.1 成为定理 5.5.1.

5.6.3 非完整系统的守恒量

假设系统的运动受有 g 个理想 m 阶非完整约束

$$f_\beta^{(m)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \cdots, \overset{(m)}{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (5.6.6)$$

$$(\beta = 1, \cdots, g)$$

约束(5.6.6) 加在 m 次速度空间虚位移 $\delta_m \overset{(m)}{q_s}$ 上的限制条件为

$$\frac{\partial f_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \delta_m \overset{(m)}{q_s} = 0 \tag{5.6.7}$$

$$(\beta = 1, \cdots, g)$$

由万有 D'Alembert 原理(5.1.20) 和式(5.6.7), 利用 Lagrange 乘子法, 得到 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \tag{5.6.8}$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

将 Dolaptchiew 等时变分公式(5.2.47) 代入式(5.6.7), 得到

$$\frac{\partial f_\beta^{(m)}}{\partial \overset{(m)}{q_s}}(F_s^m - \dot{q}_s f^m) = 0 \tag{5.6.9}$$

这是 m 阶非完整约束(5.6.6) 对无限小生成元 F_s^m, f^m 的限制.

类似于 §5.3—§5.6 中的讨论, 得到

定理 5.6.3 对 m 阶非完整系统(5.6.6), (5.6.8), 如果由式(5.2.45), (5.2.46) 确定的无限小变换的生成元 F_s^m, f^m 和规范函数 $P^m = P^m(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足条件(5.6.3), 而且变换的生成元还满足条件(5.6.9), 那么 m 阶非完整系统存在形如式(5.6.4) 的守恒量.

5.6.4 算 例

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{1}$$

m 阶非完整约束为

$$f^{(m)} = \dot{q}_1^2 \overset{(m)}{q_1} + \dot{q}_2^2 \overset{(m)}{q_2} - \dot{q}_3^2 \overset{(m)}{q_3} = 0$$

$$(m \geqslant 2) \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

公式(5.6.3) 和(5.6.9) 给出为

$$M(\dot{q}_1\dot{F}_1^m + \dot{q}_2\dot{F}_2^m + \dot{q}_3\dot{F}_3^m) - \frac{1}{2}M(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)\dot{f}^m + \dot{P}^m = 0 \tag{3}$$

$$\dot{q}_1^2(F_1^m - \dot{q}_1 f^m) + \dot{q}_2^2(F_2^m - \dot{q}_2 f^m) - \dot{q}_3^2(F_3^m - \dot{q}_3 f^m) = 0 \tag{4}$$

方程(3),(4) 有解

$$\begin{cases} f^m = 0, F_1^m = \dot{q}_1^{-2}, F_2^m = \dot{q}_2^{-2}, F_3^m = 2\dot{q}_3^{-2} \\ P^m = 2M(\dot{q}_1^{-1} + \dot{q}_2^{-1} + 2\dot{q}_3^{-1}) \end{cases} \tag{5}$$

定理 5.6.3 的守恒量式(5.6.4) 给出为

$$3M(\dot{q}_1^{-1} + \dot{q}_2^{-1} + 2\dot{q}_3^{-1}) = \text{const.} \tag{6}$$

本章小结

本章由经典微分变分原理 ——D'Alembert-Lagrange 原理, Jourdain 原理, Gauss 原理, 万有 D'Alembert 原理, 在无限小变换下的变形形式出发, 研究了完整力学系统和非完整力学系统的 Noether 对称性与守恒量. 守恒量的存在条件与形式统一在原理的变形形式中. 所得结果与第三章中的一致.

习　　题

1. 对完整力学系统, 如果有

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, Q''_s\dot{q}_s = 0$$

试由定理 5.3.1 导出广义能量积分, 并求出相应的无限小变换生成元.

2. 对完整力学系统, 如果有

$$Q''_s = 0 \quad (s = 1, \cdots, n), \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$$

试由定理 5.4.1 导出循环积分, 并求出相应的无限小变换生成元.

3. 试由 Gauss 原理和二阶 Chetaev 定义

$$\frac{\partial f_\beta^{(3)}}{\partial \ddot{q}_s}\delta_2\ddot{q}_s = 0$$

导出三阶非完整系统守恒量的存在条件和形式.

4. 试由 D'Alembert-Lagrange 原理研究 Emden 方程

$$\ddot{x} + \frac{2}{t}\dot{x} + x^5 = 0$$

的 Noether 对称性与守恒量.

5. 设系统的位形由两个广义坐标 q_1, q_2 来确定,系统的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), V = 0$$

所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_1 + bt\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0 \quad (b = \text{const.})$$

试由 Jourdain 原理研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

6. 已知非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2$$

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \mathrm{tg} q_3 = 0$$

试用 Gauss 原理研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

参 考 文 献

[1] 梅凤翔、刘端、罗勇,高等分析力学,北京,北京理工大学出版社,1991.

[2] 牛青萍,经典力学基础微分原理与不完整力学组的运动方程,力学学报,1964,7(2):139—148.

[3] Dolaptchiew B., Sur les systèmes mécaniques non holonomes assujettis à les liaisons arbitraires, Computes Rendus Acad. Sc Paris, 1966, 262(11).

[4] Лурье А.И., Аналитическая Механика, Москва, фМ, 1961.

[5] Vujanovic´ B., A study of conservation laws of dynamical systems by means of differential variational principles of Jourdain and Gauss, Acta Mechanica, 1986, 65: 63—80.

[6] 赵跃宇,一般动力学系统的守恒律(Ⅱ),黄淮学刊,1990,6(1):27—34.

[7] Vujanovic´ B., Conservation laws of dynamical systems via D'Alembert's principle, Int. J. Non-Linear Mechanics, 1978, 13: 185—197.

[8] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京,北京工业学院出版社,1985.

[9] 李子平,经典和量子约束系统及其对称性质,北京,北京工业大学出版社,1993.

[10] 梅凤翔,非完整动力学研究,北京,北京工业学院出版社,1987.

[11] 梅凤翔,利用 Jourdain 原理研究二阶非完整系统的守恒律,北京理工大学学报,

1998,18(1):17—21.

[12] 梅凤翔，非完整系统的自由运动与非完整性的消失，力学学报，1994,26(4):470—476.

[13] 梅凤翔，二阶非完整系统的 Lie 对称与 Noether 对称，江西科学，1997,15(4):199—204.

第六章　约束力学系统的 Noether 对称性(IV)

本章利用 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理这一新型微分变分原理的不变性条件,研究自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,包括 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理,非等时变分,Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件,自由 Birkhoff 系统的守恒量,以及约束 Birkhoff 系统的守恒量等.

§6.1　Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理

本节研究 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理,包括原理的建立,原理的应用,以及它与 D'Alembert-Lagrange 原理的关系等.

6.1.1　Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的建立

本世纪 20 年代 Birkhoff 在他的名著《动力系统》中提出一类新型积分变分原理[1],后经 Santilli 改进[2],表为形式

$$\begin{cases} \delta A = 0 \\ A = \int_{t_1}^{t_2} (R_\mu \dot{a}^\mu - B)\, \mathrm{d}t \end{cases} \tag{6.1.1}$$

$$\mathrm{d}\delta a^\mu = \delta \mathrm{d} a^\mu \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{6.1.2}$$

$$\delta a^\mu \big|_{t=t_1} = \delta a^\mu \big|_{t=t_2} = 0 \tag{6.1.3}$$

将等时变分原理(6.1.1)带有交换关系(6.1.2)及端点条件(6.1.3),称之为 Pfaff-Birkhoff 原理.这是迄今为止最一般的一阶积分变分原理.

由 Pfaff-Birkhoff 原理可以导出一类新型微分变分原理.将式(6.1.1)展开,并利用式(6.1.2),(6.1.3),得到

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right\} \delta a^\mu \mathrm{d}t = 0 \tag{6.1.4}$$

由原理(6.1.4)中积分区间$[t_1, t_2]$的任意性,得到

$$\left\{ \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right\} \delta a^\mu = 0 \tag{6.1.5}$$

$$(\mu, \nu = 1, \cdots 2n)$$

称微分变分原理(6.1.5)为 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理[3]. 它是一个新型的微分变分原理.

6.1.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的应用

用 Pfaff-Birkhoff-D'Alemert 原理可以导出自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的运动方程.

如果原理(6.1.5)中的 $\delta a^\mu (\mu = 1, \cdots, 2n)$ 是彼此独立的,则系统称为自由 Birkhoff 系统. 此时,由原理(6.1.5)得到 Birkhoff 方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0 \tag{6.1.6}$$

$$(\mu, \nu = 1, \cdots, 2n)$$

如果系统受有约束

$$\varphi_\beta(t, \boldsymbol{a}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, 2m; m < n) \tag{6.1.7}$$

则对式(6.1.7)取等时变分,得到

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial a^\mu} \delta a^\mu = 0 \tag{6.1.8}$$

此时,系统称为约束 Birkhoff 系统. 由原理(6.1.5)和关系(6.1.8),利用通常的 Lagrange 乘子法,得到约束 Birkhoff 系统带乘子的方程

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial a^\mu} \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{6.1.9}$$

由方程(6.1.7),(6.1.9)便可确定 a^μ, λ_β.

6.1.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理与 D'Alembert-Lagrange 原理

如果 R_μ 不显含 t,则原理(6.1.5)给出

$$\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right\}\delta a^\mu=0 \tag{6.1.10}$$

令

$$a^\mu=\begin{cases}q_\mu & (\mu=1,\cdots,n)\\ p_{\mu-n} & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases}$$

$$R_\mu=\begin{cases}p_\mu & (\mu=1,\cdots,n)\\ O & (\mu=n+1,\cdots,2n)\end{cases} \tag{6.1.11}$$

$$B=H$$

则原理(6.1.10)给出

$$\left(-\dot{p}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\delta q_s+\left(\dot{q}_s-\frac{\partial H}{\partial p_s}\right)\delta p_s=0 \tag{6.1.12}$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

注意到

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s},\frac{\partial H}{\partial q_s}=-\frac{\partial L}{\partial q_s},\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s} \tag{6.1.13}$$

则式(6.1.12)成为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)\delta q_s=0 \tag{6.1.14}$$

这就是特殊情形下的 D'Alembert-Lagrange 原理.

§6.2 非等时变分

本节讨论 Birkhoff 系统的非等时变分,包括等时变分,非等时变分,以及无限小变换的生成元等.

6.2.1 等时变分

变量 $a^{\mu}(\mu=1,\cdots,2n)$的等时变分 δa^{μ} 是时间 t 不变时变量的无限小增量

$$\begin{cases}\overline{a}^{\mu}(\overline{t})=a^{\mu}(t)+\delta a^{\mu}\\ \overline{t}=t\end{cases}\tag{6.2.1}$$

其中字母上方杠表示可变路径.显然,式(6.2.1)作为一个无限小变换,将真实运动上的点$(a^1,\cdots,a^{2n})$变到可变路径上的同时点$(a^1+\delta a^1,\cdots,a^{2n}+\delta a^{2n})$.

6.2.2 非等时变分

考虑可变路径 $\overline{a}^{\mu}(t+\Delta t)$,它无限接近于真实路径 $a^{\mu}(t)$,但受到时间的小连续变分 Δt.将 $\overline{a}^{\mu}(t+\Delta t)$展开并保留一阶小项,得

$$\overline{a}^{\mu}(t+\Delta t)=\overline{a}^{\mu}(t)+\dot{a}^{\mu}\Delta t\tag{6.2.2}$$

将式(6.2.1)代入式(6.2.2)并定义非等时变分或广义变分 Δa^{μ} 为

$$\Delta a^{\mu}=\overline{a}^{\mu}(t+\Delta t)-a^{\mu}(t)\tag{6.2.3}$$

于是得

$$\Delta a^{\mu}=\delta a^{\mu}+\dot{a}^{\mu}\Delta t\tag{6.2.4}$$

与等时变分情形一样,将广义变分当作变量和时间的无限小变换,使时刻 t 真实路径上的点$(a^1,\cdots,a^{2n})$变到时刻 $t+\Delta t$ 可变路径上的点$(a^1+\Delta a^1,\cdots,a^{2n}+\Delta a^{2n})$,即

$$\begin{cases}\overline{a}^{\mu}(\overline{t})=a^{\mu}(t)+\Delta a^{\mu}\\ \overline{t}=t+\Delta t\end{cases}\tag{6.2.5}$$

公式(6.2.4)与一般关系

$$\Delta(*)=\delta(*)+(*)^{\cdot}\Delta t\tag{6.2.6}$$

相一致.

6.2.3 无限小变换的生成元

引进广义变分 $\Delta a^{\mu},\Delta t$ 对研究 Birkhoff 系统的守恒量来说有

重要意义.假设

$$\begin{cases} \Delta a^{\mu} = \varepsilon F_{\mu}(t, \boldsymbol{a}) & (\mu = 1, \cdots, 2n) \\ \Delta t = \varepsilon f(t, \boldsymbol{a}) \end{cases} \tag{6.2.7}$$

其中 F_{μ} 和 f 分别称为无限小变换(6.2.5)的空间生成元和时间生成元.

§6.3 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件

Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件是研究自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统守恒量的基础.本节研究 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的不变性条件,包括用生成元表示的等时变分、原理的变形等.

6.3.1 用生成元表示的等时变分

将式(6.2.7)代入式(6.2.4),得到

$$\delta a^{\mu} = \Delta a^{\mu} - \dot{a}^{\mu}\Delta t = \varepsilon(F_{\mu} - \dot{a}^{\mu} f) \tag{6.3.1}$$

这样,Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理(6.1.5)中的等时变分 δa^{μ} 就用生成元 F_{μ} 和 f 表示出来.公式(6.3.1)就是第四章中的公式(4.1.15).利用公式(6.3.1),可得到 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在无限小变换下的变形公式.

6.3.2 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理的变形

将式(6.3.1)代入原理(6.1.5),得到

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right\}(F_{\mu} - \dot{a}^{\mu} f) = 0 \tag{6.3.2}$$

注意到

$$\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}\dot{a}^{\mu} = 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Bf) - B\dot{f} - \frac{\partial B}{\partial t} f \tag{6.3.3}$$

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)F_\mu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu F_\mu)-R_\mu\dot{F}_\mu$$

则式(6.3.2)可改写为形式

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)F_\mu+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)f\right.$$
$$\left.+R_\mu\dot{F}_\mu-B\dot{f}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu F_\mu-Bf)\right\}=0 \tag{6.3.4}$$

引入规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$,并在式(6.3.4)中相加并相减 $\varepsilon\dot{P}$,得到

$$\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)F_\mu+R_\mu\dot{F}_\mu+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)f\right.$$
$$\left.-B\dot{f}+\dot{P}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R_\mu F_\mu-Bf+P)\right\}=0 \tag{6.3.5}$$

这就是 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理不变性条件的变换,或称为 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理在无限小变换下的变形.

§6.4 自由 Birkhoff 系统的守恒量

本节讨论自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,包括守恒量的存在条件与形式,广义 Killing 方程等.

6.4.1 守恒量的存在条件和形式

由 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理不变性条件(6.3.5)知,如果无限小变换(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 P 满足如下关系

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)F_\mu+R_\mu\dot{F}_\mu+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)f$$
$$-B\dot{f}+\dot{P}(t,\boldsymbol{a})=0 \tag{6.4.1}$$

那么系统存在如下形式的守恒量

$$R_\mu F_\mu-Bf+P=\text{const.} \tag{6.4.2}$$

于是得到

定理 6.4.1 对自由 Birkhoff 系统(6.1.6),如果无限小变换

(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 满足条件(6.4.1),那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

对自治形式的 Birkhoff 系统,有

$$\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=\frac{\partial B}{\partial t}=0 \quad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{6.4.3}$$

此时,式(6.4.1)成为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)F_\mu+R_\mu\dot{F}_\mu-B\dot{f}+\dot{P}=0 \tag{6.4.4}$$

于是有

定理 6.4.2 对自治形式的 Birkhoff 系统,如果无限小变换(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 满足条件(6.4.4),那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

条件(6.4.1)和条件(6.4.4)可统称为 Noether 等式.如果能由 Noether 等式找到生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$,那么可由定理 6.4.1 找到一般自由 Birkhoff 系统的守恒量,可由定理 6.4.2 找到自治形式的自由 Birkhoff 系统的守恒量.

应用定理 6.4.1 或定理 6.4.2 的关键在于寻求无限小变换的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$.

6.4.2 广义 Killing 方程

用 Noether 等式(6.4.1)或(6.4.4)来求无限小变换的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 有时不方便.这是因为待求函数 F_μ, f, P 共有 $(2n+2)$ 个,而等式只有一个.常用的方法是建立广义 Killing 方程并求解.

展开 Noether 等式(6.4.1),得到

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu F_\mu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}F_\mu+R_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial t}+R_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu$$

$$+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu f-\frac{\partial B}{\partial t}f-B\frac{\partial f}{\partial t}-B\frac{\partial f}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu+\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu=0$$

(6.4.

分开式(6.4.5)中含 $\dot{a}^\nu$ 与不含 $\dot{a}^\nu$ 的项,令其分别为零,得到

$$\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}F_\mu+\frac{\partial F_\mu}{\partial a^\nu}R_\mu-B\frac{\partial f}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}f+\frac{\partial P}{\partial a^\nu}=0 \tag{6.4.6}$$

$$(\nu=1,\cdots,2n)$$

$$R_\mu\frac{\partial F_\mu}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}F_\mu-B\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial t}f+\frac{\partial P}{\partial t}=0 \tag{6.4.7}$$

方程(6.4.6),(6.4.7)是关于$(2n+2)$个待求函数 F_μ, f, P 的$(2n+1)$个偏微分方程,称为广义 Killing 方程.如果广义 Killing 方程有解,便可找到这些待求函数.

定理 6.4.1 可表为如下定理.

定理 6.4.3 对自由 Birkhoff 系统(6.1.6),如果无限小变换 6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$满足广义 Killing 方程(6.4.6),(6.4.7),那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

6.4.3 算　　例

例 1 二阶自由 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为

$$B=\frac{1}{6}t^2(a^1)^6+\frac{1}{2}\frac{(a^2)^2}{t^2} \tag{1}$$

Birkhoff 函数组为

$$R_1=a^2,\qquad R_2=0 \tag{2}$$

研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,由 Noether 等式(6.4.1)寻求系统无限小变换的生成元规范函数.Noether 等式(6.4.1)给出为

$$\dot{a}^1F_2-t^2(a^1)^5F_1-\frac{a^2}{t^2}F_2+a^2\dot{F}_1-\left[\frac{1}{3}t(a^1)^6-\frac{(a^2)^2}{t^3}\right]f$$

$$-\left[\frac{1}{6}t^2(a^1)^6+\frac{(a^2)^2}{2t^2}\right]\dot{f}+\dot{P}=0 \tag{3}$$

程(3)有解

$$f=-t,\ F_1=\frac{1}{2}a^1,\ F_2=-\frac{1}{2}a^2,\ P=0 \tag{4}$$

其次,由定理 6.4.1 求相应的守恒量.对式(4),定理 6.4.1 的守恒量式(6.4.2)给出

$$\frac{1}{2}a^1a^2+\frac{1}{6}t^3(a^1)^6+\frac{(a^2)^2}{2t}=\text{const.} \tag{5}$$

例 2 已知 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组为

$$R_1=a^3,R_2=a^4,R_3=R_4=0 \tag{1}$$

而 Birkhoff 函数为

$$B=\frac{1}{2}\left[a^3-\frac{1}{b}\text{arctg}bt\right]^2+\frac{1}{2}\left[a^4-\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 \tag{2}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,利用广义 Killing 方程求 Noether 对称性.广义 Killing 方程(6.4.6),(6.4.7)给出

$$\begin{cases}
F_3+\dfrac{\partial F_1}{\partial a^1}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial a^1}a^4-B\dfrac{\partial f}{\partial a^1}+\dfrac{\partial P}{\partial a^1}=0\\
F_4+\dfrac{\partial F_1}{\partial a^2}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial a^2}a^4-B\dfrac{\partial f}{\partial a^2}+\dfrac{\partial P}{\partial a^2}=0\\
\dfrac{\partial F_1}{\partial a^3}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial a^3}a^4-B\dfrac{\partial f}{\partial a^3}+\dfrac{\partial P}{\partial a^3}=0\\
\dfrac{\partial F_1}{\partial a^4}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial a^4}a^4-B\dfrac{\partial f}{\partial a^4}+\dfrac{\partial P}{\partial a^4}=0\\
\dfrac{\partial F_1}{\partial t}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}a^4-\dfrac{\partial B}{\partial a^3}F_3-\dfrac{\partial B}{\partial a^4}F_4-B\dfrac{\partial f}{\partial t}-\dfrac{\partial B}{\partial t}f+\dfrac{\partial P}{\partial t}=0
\end{cases} \tag{3}$$

假设

$$f=0,\qquad F_\mu=F_\mu(t) \tag{4}$$

则方程(3)简化为

$$\begin{cases}
F_3=-\dfrac{\partial P}{\partial a^1},F_4=-\dfrac{\partial P}{\partial a^2}\\
0=-\dfrac{\partial P}{\partial a^3},0=-\dfrac{\partial P}{\partial a^4}\\
\dfrac{\partial F_1}{\partial t}a^3+\dfrac{\partial F_2}{\partial t}a^4-\left(a^3-\dfrac{1}{b}\text{arctg}bt\right)F_3-\left[a^4-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]F_4=-\dfrac{\partial P}{\partial t}
\end{cases} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 P}{\partial a^1 \partial t} = \dfrac{\partial F_3}{\partial t} = 0 \\ -\dfrac{\partial^2 P}{\partial a^2 \partial t} = \dfrac{\partial F_4}{\partial t} = 0 \\ -\dfrac{\partial^2 P}{\partial a^3 \partial t} = 0 = \dfrac{\partial F_1}{\partial t} - F_3 \\ -\dfrac{\partial^2 P}{\partial a^4 \partial t} = 0 = \dfrac{\partial F_2}{\partial t} - F_4 \end{cases} \tag{6}$$

由此解得

$$\begin{cases} F_3 = c_3, F_4 = c_4, F_1 = c_1 + c_3 t, F_2 = c_2 + c_4 t \\ P = -c_3 a^1 - c_4 a^2 - \dfrac{c_3}{b}\int \mathrm{arctg} bt \,\mathrm{d}t - \dfrac{c_4}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{7}$$

这就是无限小变换生成元和规范函数的一般表达式. 当仅取一个 $c_\mu(\mu = 1, \cdots, 4)$为 1 而其余取为零时, 可得到以下 4 组解

$$f = 0, F_1 = 1, F_2 = F_3 = F_4 = 0, P = 0 \tag{8}$$

$$f = 0, F_2 = 1, F_1 = F_3 = F_4 = 0, P = 0 \tag{9}$$

$$f = 0, F_1 = t, F_2 = 0, F_3 = 1, F_4 = 0, P = -a^1 - \frac{1}{b}\int \mathrm{arctg} bt \,\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$\begin{cases} f = 0, F_1 = 0, F_2 = t, F_3 = 0, F_4 = 1 \\ P = -a^2 - \dfrac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{11}$$

其次, 利用定理 6.4.1 求相应的守恒量. 对式(8)—(11), 守恒量式(6.4.2)分别给出积分

$$I_1 = a^3 = \text{const.} \tag{12}$$

$$I_2 = a^4 = \text{const.} \tag{13}$$

$$I_3 = a^3 t - a^1 - \frac{1}{b}\int \mathrm{arctg} bt \,\mathrm{d}t = \text{const.} \tag{14}$$

$$I_4 = a^4 t - a^2 - \frac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2)\mathrm{d}t = \text{const.} \tag{15}$$

由此便可最终求得

$$a^{\mu}=a^{\mu}(t) \qquad (\mu=1,\cdots,4)$$

§6.5 约束 Birkhoff 系统的守恒量

本节讨论约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量,包括约束对生成元的限制条件,相应自由系统的守恒量,以及约束系统的守恒量等.

6.5.1 约束对生成元的限制条件

将式(6.3.1)代入式(6.1.8),并注意到参数 ϵ 的任意性,得到

$$\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial \dot{a}^{\mu}}(F_{\mu}-\dot{a}^{\mu}f)=0 \quad (\beta=1,\cdots,2m) \tag{6.5.1}$$

这是约束(6.1.7)对无限小变换生成元 F_{μ}, f 的限制.由于这些限制,使约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性比自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性要少.

6.5.2 相应自由系统的守恒量

由方程(6.1.7),(6.1.9)可求出约束乘子 λ_{β} 作为 t, $\boldsymbol{a}$ 的函数,将其代入方程(6.1.9),得到

$$\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=P_{\mu} \tag{6.5.2}$$

$$(\mu=1,\cdots,2n)$$

其中

$$P_{\mu}=P_{\mu}(t,\boldsymbol{a})=\lambda_{\beta}\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial a^{\mu}} \tag{6.5.3}$$

方程(6.5.2)称为与约束 Birkhoff 系统(6.1.7),(6.1.9)相应的自由 Birkhoff 系统的方程.如果运动初始条件满足约束方程(6.1.7),那么方程(6.5.2)的解就给出约束 Birkhoff 系统的运动.

类似于定理 6.4.1,有

定理 6.5.1　对相应自由 Birkhoff 系统(6.5.2),如果无限小变换(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 满足条件

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)F_\mu+R_\mu\dot{F}_\mu+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)f$$

$$-B\dot{f}-P_\mu(F_\mu-\dot{a}^\mu f)+\dot{P}(t,\boldsymbol{a})=0 \tag{6.5.4}$$

那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

6.5.3　约束 Birkhoff 系统的守恒量

将式(6.5.1)代入式(6.5.4),便得式(6.4.1).因此有

定理 6.5.2　对约束 Birkhoff 系统(6.1.7),(6.1.9),如果无限小变换(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 满足条件(6.4.1),而且变换的生成元还满足限制条件(6.5.1),那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

定理 6.5.3　对约束 Birkhoff 系统(6.1.7),(6.1.9),如果无限小变换(6.2.5),(6.2.7)的生成元 F_μ, f 和规范函数 $P=P(t,\boldsymbol{a})$ 满足广义 Killing 方程(6.4.6),(6.4.7),而且变换的生成元还满足限制条件(6.5.1),那么系统存在形如式(6.4.2)的守恒量.

6.5.4　算　　例

4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\} \tag{1}$$

$$R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0 \tag{2}$$

约束方程为

$$\begin{cases}\varphi_1=a^1a^3-c_1^2=0\\ \varphi_2=a^1+a^4-c_2=0\end{cases} \tag{3}$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

首先,研究与约束 Birkhoff 系统相应的自由系统的对称性与

守恒量.第一步,建立相应自由系统的运动方程.方程(6.1.9)给出

$$\begin{cases} -\dot{a}^3 - a^1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 \\ -\dot{a}^4 = 0 \\ \dot{a}^1 - a^3 = \lambda_1 a^1 \\ \dot{a}^2 - a^4 = \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

由方程(3),(4)解得

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{a^1}, \qquad \lambda_2 = \frac{(a^3)^2}{a^1} - a^1 \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} P_1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 = -a^1 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = \lambda_1 a^1 = -a^3 \\ P_4 = \lambda_2 = \dfrac{(a^3)^2}{a^1} - a^1 \end{cases} \tag{6}$$

第二步,求无限小变换的生成元和规范函数.条件(6.5.4)给出

$$\begin{aligned} &(\dot{a}^1 - a^3)F_3 + (\dot{a}^2 - a^4)F_4 - a^1 F_1 + a^3 \dot{F}_1 + a^4 \dot{F}_2 \\ &- B\dot{f} + a^1(F_1 - \dot{a}^1 f) + a^3(F_3 - \dot{a}^3 f) \\ &- \left[\frac{(a^3)^2}{a^1} - a^1\right](F_4 - \dot{a}^4 f) + \dot{P} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

方程(7)有如下解

$$f = 1, F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0, P = 0 \tag{8}$$

$$f = 0, F_2 = 1, F_1 = F_3 = F_4 = 0, P = 0 \tag{9}$$

$$f = 0, F_1 = 1, F_2 = F_3 = F_4 = 0, P = 0 \tag{10}$$

$$f = 0, F_3 = -1, F_1 = F_2 = F_4 = 0, P = a^1 \tag{11}$$

第三步,求相应的守恒量.定理 6.5.1 的守恒量式(6.4.2)分别给出为

$$I_1 = \frac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} = \text{const.} \tag{12}$$

$$I_2 = a^4 = \text{const.} \tag{13}$$

$$I_3 = a^3 = \text{const.} \tag{14}$$

$$I_4 = a^1 = \text{const.} \tag{15}$$

其次,研究约束系统的对称性与守恒量.限制条件(6.5.1)给出

$$\begin{aligned} &a^3(F_1 - \dot{a}^1 f) + a^1(F_3 - \dot{a}^3 f) = 0 \\ &F_1 - \dot{a}^1 f + F_4 - \dot{a}^4 f = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

容易验证,式(8),(9)满足条件(16),式(10),(11)不满足条件(16).因此,与式(8),(9)相应的无限小变换才是约束 Birkhoff 系统的对称性.

本章小结

本章基于 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 新型微分变分原理在无限小变换下的变形形式,研究了自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量.所得结果与第四章中的一致.

习　题

1. 利用定理 6.4.1 证明,对自治形式的自由 Birkhoff 系统,Birkhoff 函数是系统的守恒量,并找出对应的生成元.

2. 4 阶 Birkhoff 系统为

$$B = \frac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\}$$

$$R_1 = R_2 = 0, \quad R_3 = a^1, R_4 = a^2$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

3. 已知二阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组分别为

$$B = \frac{1}{2m}(a^2)^2 + \frac{1}{m}a^2 f_1(t) + \frac{1}{2m}f_1^2(t) + f_0(t)$$

$$R_1 = a^2, \quad R_2 = 0$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

4. 利用定理 6.5.2 证明,如果自由 Birkhoff 系统是自治的,约束是定

常的,则 Birkhoff 函数是约束系统的守恒量,并找出对应的生成元.

5. 4 阶 Birkhoff 系统为

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}$$

约束方程为

$$\varphi_1=a^1a^3-c_1^2=0$$

$$\varphi_2=a^1+a^4t-c_2=0$$

试研究系统的 Noether 对称性与守恒量.

参 考 文 献

[1] Birkhoff G. D., Dynamical Systems, New York, AMS College Publ., Providence RI, 1927.

[2] Santilli R. M., Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ, New York, Springer-Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬, Birkhoff 系统动力学, 北京, 北京理工大学出版社, 1996.

第七章　完整约束力学的 Lie 对称性

本章以及第八章和第九章研究约束力学系统的 Lie 对称性. 上世纪末著名数学家 Sophus Lie 研究了微分方程在无限小群变换下的不变性. 专著[1,2]从数学角度研究并发展了 Lie 理论. 1979 年 Lutzky 将 Lie 理论应用于力学系统的运动微分方程, 开始研究力学系统的 Lie 对称性与守恒量[3]. 文献[4,5]将 Lie 理论用于研究完整非保守系统的 Lie 对称性与守恒量.

本章研究完整约束力学系统的 Lie 对称性, 包括 Lie 变换群和无限小变换, 常微分方程的不变性, Lagrange 系统, Hamilton 系统, 广义坐标下一般完整系统, 准坐标下一般完整系统, 有多余坐标完整系统, 变质量完整系统, 事件空间中完整系统, 相对运动动力学系统, 以及奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量等.

Lie 对称性是一种高级算法[2]. 为找到 Lie 对称性, 需解复杂的确定方程, 再建立结构方程并求规范函数, 最后由生成元和规范函数找到相应的守恒量. 这种由 Lie 对称性求守恒量的问题称为 Lie 对称性正问题. 反之, 由守恒量找到相应的 Lie 对称性问题称为 Lie 对称性逆问题.

§7.1　Lie 变换群和无限小变换

本节介绍 Lie 变换群, 无限小变换, 多参数 Lie 变换群和 Lie 代数等基本知识.

7.1.1　Lie 变换群

首先, 给出群的定义.

群 G 是一些元素的集合. 在群 G 中定义元素间的复合律(乘

法运算)Φ,满足下述4个条件

1.封闭性:对任意 $a,b\in G$, $\phi(a,b)$是 G 的一个元素;

2.结合律:对任意 $a,b,c\in G$,有 $\Phi(a,\phi(b,c))=\phi(\phi(a,b),c)$

3.有单位元素:存在 G 在唯一单位元素 e,使得对任意$a\in G$,有

$$\phi(a,e)=\phi(e,a)=a$$

4.有逆元素:对任意 $a\in G$,存在唯一逆元素 $a^{-1}\in G$,使得

$$\phi(a,a^{-1})=\phi(a^{-1},a)=e$$

群的复合律一般不具有可交换性.一般说 $\phi(a,b)$与 $\phi(b,a)$不相等.如果对任意 $a,b\in G$,有

$$\phi(a,b)=\phi(b,a)$$

则称 G 为 Abel 群.

例1 定义数的加法为群的复合律,则全体整数构成一个群,表为

$$\phi(a,b)=a+b,\quad e=0,\quad a^{-1}=-a$$

G 的子群由 G 元素的子集构成,并有同样的复合律 ϕ.

其次,研究变换群与单参数 Lie 变换群.令 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$在域 $D\subset R^n$ 中.对 D 中每个x 确定的变换集合

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{X}(x;\epsilon)$$

依赖于集合 $S\subset R$ 中的参数 ϵ, S 中参数 ϵ 和 δ 的复合律为 $\phi(\epsilon,\delta)$,构成 D 上的一个变换群,如果满足

1. 对 S 中每个参数ϵ,变换在 D 中是一一对应的,特别是 $\boldsymbol{x}^*$ 处于 D 中;

2. 有复合律的 S 构成一个群G;

3. 当 $\epsilon=e$ 时,$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}$,即

$$\boldsymbol{X}(x;e)=\boldsymbol{x}$$

4. 如果 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{X}(x;\epsilon)$, $\boldsymbol{x}^{**}=\boldsymbol{X}(x^*;\delta)$,那么

$$\boldsymbol{x}^{**}=\boldsymbol{X}(x;\phi(\epsilon,\delta))$$

进而,一个变换群,如果除上述4条外还满足以下三条

5. ϵ 是连续参数,即 S 是R 中一个区间.不失一般性,$\epsilon=0$

对应于单位元素 e；

6. $\boldsymbol{X}$ 相对 D 中 $\boldsymbol{x}$ 是无穷次可微的，且是 S 中 ϵ 的解析函数；

7. 对 $\epsilon\in S,\delta\in S,\phi(\epsilon,\delta)$ 是 ϵ 和 δ 的解析函数.

那么就定义了一个单参数 Lie 变换群.

例 2 平面上的比例群

$$x^*=\alpha x,\quad y^*=\alpha^2 y,\quad 0<\alpha<\infty$$

这里 $\phi(\alpha,\beta)=\alpha\beta$，单位元素 $e=1$. 这个变换群可重新参数化，表为 $\epsilon=\alpha-1$

$$x^*=(1+\epsilon)x,y^*=(1+\epsilon)^2 y,\quad -1<\epsilon<\infty$$

则单位元素是 $e=0$，有参数的复合律

$$\phi(\epsilon,\delta)=\epsilon+\delta+\epsilon\delta$$

7.1.2 无限小变换

考虑单参数 Lie 变换群

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x};\epsilon)\tag{7.1.1}$$

有单位元素 $\epsilon=0$ 和复合律 ϕ. 将式(7.1.1)在 $\epsilon=0$ 展开，得到

$$\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}+\epsilon\left(\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\epsilon}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\right)+O(\epsilon^2)\tag{7.1.2}$$

令

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial\epsilon}(\boldsymbol{x};\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}\tag{7.1.3}$$

变换 $\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ 称为 Lie 变换群(7.1.1)的无限小变换，$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$ 的分量称为变换(7.1.1)的无限小量.

定理 7.1.1 （Lie 第一基本定理） 存在参数化 $\tau(\epsilon)$ 使得 Lie 变换群(7.1.1)等价于一阶微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}\tau}=\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}^*)\tag{7.1.4}$$

在初值

$$\tau=0,\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}\tag{7.1.5}$$

下的解. 特别地

$$\tau(\epsilon) = \int_o^{\epsilon} \Gamma(\epsilon')\mathrm{d}\epsilon' \tag{7.1.6}$$

其中

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b}\bigg|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} \tag{7.1.7}$$

而

$$\Gamma(o) = 1 \tag{7.1.8}$$

这里 ϵ^{-1}表示 ϵ 的逆元素.

证明见文献[2].

Lie 第一基本定理表明,无限小变换包含确定单参数 Lie 变换群的基本信息.

例 3 对于比例群

$$x^* = (1+\epsilon)x, \quad y^* = (1+\epsilon)^2 y, \quad -1 < \epsilon < \infty$$

复合律为

$$\phi(a,b) = a + b + ab$$

而

$$\phi(\epsilon, \epsilon^{-1}) = \epsilon + \epsilon^{-1} + \epsilon\epsilon^{-1} = e = 0$$

于是

$$\epsilon^{-1} = -\frac{\epsilon}{1+\epsilon}$$

又

$$\frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b} = 1 + a$$

因此

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b}\bigg|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} = 1 + \epsilon^{-1} = \frac{1}{1+\epsilon}$$

令

$$\boldsymbol{x} = (x, y)$$

群为

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x};\epsilon) = ((1+\epsilon)x, (1+\epsilon)^2 y)$$

因此

$$\frac{\partial \boldsymbol{X}(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = (x, 2(1+\varepsilon)y)$$

而

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x};\varepsilon)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = (x, 2y)$$

参数化表示

$$\tau = \int_0^{\varepsilon} \Gamma(\varepsilon')\mathrm{d}\varepsilon' = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+\varepsilon'}\mathrm{d}\varepsilon' = \ln(1+\varepsilon)$$

而群成为

$$x^* = \mathrm{e}^{\tau}x, \quad y^* = \mathrm{e}^{2\tau}y, \quad -\infty < \tau < \infty$$

下面给出无限小生成元的定义.假设单参数 Lie 变换群可参数化,使得复合律为

$$\phi(a,b) = a+b, \varepsilon^{-1} = -\varepsilon, \Gamma(\varepsilon) = 1$$

单参数 Lie 变换群用无限小 $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})$表出为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}^*) \tag{7.1.9}$$

有初值

$$\varepsilon = 0, \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x} \tag{7.1.10}$$

单参数 Lie 变换群(7.1.1)的无限小生成元定义为算子

$$X = X(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla = \xi_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{7.1.11}$$

对任意可微函数 $F(\boldsymbol{x})$有

$$XF(\boldsymbol{x}) = \xi_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{7.1.12}$$

定理 7.1.2[2] 单参数 Lie 变换群(7.1.1)等价于

$$\boldsymbol{x}^* = e^{\varepsilon X}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k\boldsymbol{x} \tag{7.1.13}$$

其中 $X = X(\boldsymbol{x})$由式(7.1.11)确定, $X^k = XX^{k-1}(k = 1,2,\cdots)$.

这样,有两种办法由无限小变换找到单参数 Lie 变换群:将群表为 Lie 级数(7.1.13),可由相应于无限小变换的生成元(7.1.11)来展开;解初值问题(7.1.9),(7.1.10).

例 4 考虑转动群

$$x^* = x\cos\epsilon + y\sin\epsilon$$

$$y^* = -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon$$

初值问题(7.1.9),(7.1.10)成为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\epsilon} = -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon, \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\epsilon} = -x\cos\epsilon - y\sin\epsilon$$

$$\epsilon = 0, x^* = x, y^* = y$$

相应的无限小量为

$$\xi(x) = (\xi(x,y)), \eta(x,y)) = \left(\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}, \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\right) = (y, -x)$$

无限小生成元为

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

对应的 Lie 级数为

$$(x^*, y^*) = (e^{\epsilon X}x, e^{\epsilon X}y)$$

$$Xx = y, X^2x = Xy = -x, X^3x = X(-x) = -y$$

$$X^4x = X(-y) = x, \cdots$$

因此

$$\begin{aligned} x^* &= e^{\epsilon X}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}X^kx \\ &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2!} + \frac{\epsilon^4}{4!} + \cdots\right)x + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{3!} + \frac{\epsilon^5}{5!} + \cdots\right)y \\ &= x\cos\epsilon + y\sin\epsilon \end{aligned}$$

7.1.3 多参数 Lie 变换群和 Lie 代数

r 参数 Lie 变换群表为

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{7.1.14}$$

其中 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$. 参数的复合律表为

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}) = (\phi_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}), \cdots, \phi_r(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta}))$$

其中 $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \cdots, \delta_r)$; $\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})$满足群公理, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ 相应单位元素$\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_r = 0$; 假设 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\delta})$在定义域中是解析的. 无限小矩阵 A 是$r \times n$ 矩阵, 其元素为

$$\xi_{\alpha j}(x)=\frac{\partial x_j^*}{\partial \epsilon_\alpha}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}=\frac{\partial X_j(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \epsilon_\alpha}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} \tag{7.1.15}$$

$$(\alpha=1,\cdots,r;j=1,\cdots,n)$$

令 $\theta(\epsilon)$是 $r\times r$ 矩阵,有元素

$$\theta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{\partial \phi_\beta(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta})}{\partial \delta_\alpha}\Big|_{\boldsymbol{\delta}=0} \tag{7.1.16}$$

并令

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon})=\theta^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{7.1.17}$$

那么对 r 参数 Lie 变换群的 Lie 第一基本定理指出,变换群(7.1.14)等价于 nr 个一阶偏微分方程

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1^*}{\partial \epsilon_1} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \epsilon_1}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_1^*}{\partial \epsilon_r} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial \epsilon_r}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon})A(\boldsymbol{x}^*) \tag{7.1.18}$$

在初值

$$\boldsymbol{\varepsilon}=0,\quad \boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x} \tag{7.1.19}$$

下的解.

对应于 r 参数 Lie 变换群(7.1.14)的参数 ϵ_α 的无限小生成元 X_α 为

$$X_\alpha=\sum_{j=1}^{n}\xi_{\alpha j}\frac{\partial}{\partial x_j}\quad(\alpha=1,\cdots,r) \tag{7.1.20}$$

可以证明,r 参数 Lie 变换群(7.1.14)等价于

$$\boldsymbol{x}^*=\mathrm{e}^{\epsilon\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha X_\alpha}\boldsymbol{x} \tag{7.1.21}$$

其中 $\epsilon,\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 表示 r 参数的任意实常数,还等价于

$$\boldsymbol{x}^*=\prod_{\alpha=1}^{r}\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha}x=\mathrm{e}^{\mu_1 X_1}\cdots\mathrm{e}^{\mu_r X_r}\boldsymbol{x} \tag{7.1.22}$$

其中 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ 为任意实常数.

例 5 对双参数 Lie 变换群

$$x^*=\mathrm{e}^{\epsilon_1}x+\epsilon_2,\ y^*=\mathrm{e}^{2\epsilon_1}y$$

有

$$x^{**} = e^{\delta_1} x^* + \delta_2 = e^{\phi_1(\varepsilon,\delta)} + \phi_2(\varepsilon,\delta)$$

$$y^{**} = e^{2\delta_1} y^* = e^{2\phi_1(\varepsilon,\delta)} y$$

复合律给出为

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}) = (\phi_1(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta}), \phi_2(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\delta})) = (\varepsilon_1 + \delta_1, e^{\delta_1}\varepsilon_2 + \delta_2)$$

可以验证式(7.1.18),(7.1.19)成立.实际上,有

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1} = e^{\varepsilon_1} x = x^* - \varepsilon_2, \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1} = 2e^{2\varepsilon_1} y = 2y^*$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2} = 1, \qquad \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2} = 0$$

因此

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1} & \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1} \\ \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2} & \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* - \varepsilon_2 & 2y^* \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

进而

$$\xi_{11}(x) = \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_1}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = x, \xi_{12}(x) = \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_1}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = 2y$$

$$\xi_{21}(x) = \frac{\partial x^*}{\partial \varepsilon_2}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = 1, \xi_{22}(x) = \frac{\partial y^*}{\partial \varepsilon_2}\Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = 0$$

因此无限小矩阵

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & 2y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

又

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \delta_1} = 1, \frac{\partial \phi_2}{\partial \delta_1} = e^{\delta_1}\varepsilon_2, \frac{\partial \Phi_1}{\partial \delta_2} = 0, \frac{\partial \Phi_2}{\partial \delta_2} = 1$$

因此

$$\theta_{11} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \delta_1}\Big|_{\boldsymbol{\delta}=0} = 1, \qquad \theta_{12} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \delta_1}\Big|_{\boldsymbol{\delta}=0} = \varepsilon_2$$

$$\theta_{21} = \frac{\partial \phi_1}{\partial \delta_2}\Big|_{\boldsymbol{\delta}=0} = 0, \qquad \theta_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \delta_2}\Big|_{\boldsymbol{\delta}=0} = 1$$

于是得到

$$\theta(\boldsymbol{\varepsilon})=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

而

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})=\theta^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon})=\begin{bmatrix}1 & -\varepsilon_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

易见

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})A(x^*)=\begin{bmatrix}x^*-\varepsilon_2 & 2y^*\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

下面简单介绍 Lie 代数基本知识. 考虑 r − 参数 Lie 变换群(7.1.14), 具有由式(7.1.15),(7.1.20)确定的无限小生成元 $\{X_\alpha\}(\alpha=1,\cdots,r)$. X_α 和 X_β 的对易子是另一个一阶算子

$$[X_\alpha,X_\beta]=X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha=\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\qquad(7.1.23)$$

其中

$$\eta_j=\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{\alpha i}\frac{\partial\xi_{\beta j}}{\partial x_i}-\xi_{\beta i}\frac{\partial\xi_{\alpha j}}{\partial x_i}\right)\qquad(7.1.24)$$

直接导出

$$[X_\alpha,X_\beta]=-[X_\beta,X_\alpha]\qquad(7.1.25)$$

定理 7.1.3 (Lie 第二基本定理) r − 参数 Lie 变换群的两个任意无限小生成元的对易子也是一个无限小生成元, 特别地

$$[X_\alpha,X_\beta]=C_{\alpha\beta}^{\gamma}X_\gamma\quad(\alpha,\beta,\gamma=1,\cdots,r)\qquad(7.1.26)$$

其中系数 $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 为常数, 称为结构常数, 式中相同指标表示求和.

公式(7.1.26)称为具有无限小生成元(7.1.20)的 r 参数 Lie 变换群(7.1.14)的对易关系.

对任意三个无限小生成元 $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma$, 可直接证明 Jacobi 恒等式成立

$$[X_\alpha,[X_\beta,X_\gamma]]+[X_\beta,[X_\gamma,X_\alpha]]+[X_\gamma,[X_\alpha,X_\beta]]=0\qquad(7.1.27)$$

由式(7.1.25),(7.1.26),(7.1.27)容易证明关于结构常数的下述定理.

定理 7.1.4 （Lie 第三基本定理） 由对易关系(7.1.26)确定的结构常数满足关系

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}_{\beta\alpha} \tag{7.1.28}$$

$$C^{\rho}_{\alpha\beta}C^{\delta}_{\rho\gamma} + C^{\rho}_{\beta\gamma}C^{\delta}_{\alpha\gamma} + C^{\rho}_{\gamma\alpha}C^{\delta}_{\rho\beta} = 0 \tag{7.1.29}$$

一个 Lie 代数 $\mathscr{L}$ 是某域 $\mathscr{F}$ 上的向量空间，具有满足性质(7.1.25)，(7.1.27)在 $\mathscr{L}$ 中元素的结合律(对易子)，更重要的是有对对易的封闭性. 特别地，r 参数 Lie 变换群(7.1.14)的无限小生成元 $\{X_\alpha\}(\alpha = 1, \cdots, r)$ 构成域 R 上的 r 维 Lie 代数 $\mathscr{L}^r$，因为对任意 $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma \in \mathscr{L}^r$，$a, b \in R$，有

1. $aX_\alpha + bX_\beta \in \mathscr{L}^r$；
2. $X_\alpha + X_\beta = X_\beta + X_\alpha$；
3. $X_\alpha + (X_\beta + X_\gamma) = (X_\alpha + X_\beta) + X_\gamma$；
4. $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathscr{L}^r$；
5. $[X_\alpha, X_\beta] = -[X_\beta, X_\alpha]$；
6. $[X_\alpha[X_\beta, X_\gamma]] + [X_\beta, [X_\gamma, X_\alpha]] + [X_\gamma, [X_\alpha, X_\beta]] = 0$；
7. $[aX_\alpha + bX_\beta, X_\gamma] = a[X_\alpha, X_\gamma] + b[X_\beta, X_\gamma]$.

§7.2 常微分方程的不变性

常微分方程在无限小变换下的不变性质是研究约束力学系统 Lie 对称性的基本出发点. 本节讨论一阶常微分方程和二阶常微分方程在无限小变换下的不变性质.

7.2.1 一阶常微分方程的不变性

假设一阶常微方程表为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - f(x, y) = 0 \tag{7.2.1}$$

取变换

$$x^* = x^*(x, y), \qquad y^* = y^*(x, y) \tag{7.2.2}$$

如果有

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} - f(x^*, y^*) = G(x, y)\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - f(x, y)\right] = 0 \qquad (7.2.3)$$

则称方程(7.2.3)相对方程(7.2.1)是保形不变的,其中 $G(x, y)$ 为保形因子.变换(7.2.2)称为方程(7.2.1)的对称点变换.

假设点变换(7.2.2)是一个单参数变换

$$x^* = x^*(x, y; \alpha), y^* = y^*(x, y; \alpha) \qquad (7.2.4)$$

在恒等变换的邻域内对 α 是解析的.取

$$x^*(x, y; \alpha_0) = x, \qquad y^*(x, y; \alpha_0) = y \qquad (7.2.5)$$

且 $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$,则有

$$\begin{aligned} x^*(x, y; \alpha) &= x^*(x, y; \alpha_0 + \varepsilon) \\ &= x + \varepsilon \left.\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 x^*}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \cdots \\ y^*(x, y; \alpha) &= y^*(x, y; \alpha_0 + \varepsilon) \\ &= y + \varepsilon \left.\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left.\frac{\partial^2 y^*}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \cdots \end{aligned}$$

定义

$$\left.\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \xi(x, y), \left.\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \eta(x, y) \qquad (7.2.6)$$

则有

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 x^*}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\left.\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\left.\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \left.\frac{\partial^2 y^*}{\partial \alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0} &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\left.\frac{\partial x^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left.\frac{\partial y^*}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = \xi \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases} x^* = x + \varepsilon\xi(x, y) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!}\left(\xi \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \cdots \\ y^* = y + \varepsilon\eta(x, y) + \dfrac{\varepsilon^2}{2!}\left(\xi \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) + \cdots \end{cases} \qquad (7.2.7)$$

进而,因 ε 是小量,有

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*}-f(x^*,y^*)=\frac{\dfrac{\partial y^*}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial y^*}{\partial y}\mathrm{d}y}{\dfrac{\partial x^*}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial x^*}{\partial y}\mathrm{d}y}-f(x+\varepsilon\xi,y+\varepsilon\eta)+O(\varepsilon^2)$$

$$=\frac{\mathrm{d}y+\varepsilon\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}{\mathrm{d}x+\varepsilon\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\mathrm{d}y\right)}-f(x,y)-\varepsilon\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$=\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\varepsilon\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\left[1-\varepsilon\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]-f(x,y)$$

$$-\varepsilon\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right)+O(\varepsilon^2)$$

$$=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-f(x,y)+\varepsilon\left[\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

$$+O(\varepsilon^2)$$

在上式中仅保留 ε 的一阶小量,由式(7.2.3)得到

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial\xi}{\partial y}f^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}=0 \tag{7.2.8}$$

于是有

定理 7.2.1 变换 $x^*=x+\varepsilon\xi(x,y)$, $y^*=y+\varepsilon\eta(x,y)$唯一确定方程(7.2.1)的一个对称变换的必要充分条件是满足方程(7.2.8).

方程(7.2.8)称为无限小变换的确定方程.

偏微分方程(7.2.8)中有两个待求函数 $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$,因此是超定的,不可能给出它的一般解.但是,由方程(7.2.8)关于 ξ,η 的线性性质知,如果 ξ_1,η_1 和 ξ_2,η_2 是方程的解,则 $\xi_1+\xi_2,\eta_1+\eta_2$ 也是它的解.因此,一阶常微方程具有对称性的无限参数群.

方程(7.2.8)可用来解两类问题:已知函数 f 求 ξ,η;已知生成元 ξ,η 求 f.

首先,研究第一类问题.讨论几种特殊情形下方程(7.2.8)的解.

1.如果 $\xi=0$, $\eta\neq0$,则方程(4.2.8)成为

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + f\frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta\frac{\partial f}{\partial y} \tag{7.2.9}$$

线性非齐次方程(7.2.9)的解归结为求下述常微分方程组的首次积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{f} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta f_y} \tag{7.2.10}$$

其中

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

2. 如果 $\xi = 0$, $\eta = \eta(f, f_x, f_y)$, 则方程(7.2.8)成为

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}f = \eta f_y \tag{7.2.11}$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{f} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta f_y}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \frac{f_y \mathrm{d}y}{f}$$

又

$$\mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y = \left(\frac{f_x}{f} + f_y\right)\mathrm{d}y$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = \frac{\mathrm{d}f}{\dfrac{f_x}{f_y} + f}$$

于是求得

$$\eta = \exp\left(A + \int \frac{\mathrm{d}f}{\dfrac{f_x}{f_y} + f}\right) \tag{7.2.12}$$

3. 如果 $\eta = 0$, $\xi = \xi(f, f_x, f_y)$, 则方程(7.2.8)给出

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x}f - \frac{\partial \xi}{\partial y}f^2 - \xi\frac{\partial f}{\partial x} \tag{7.2.13}$$

类似地,求得

$$\xi = \exp\left(B - \int \frac{\mathrm{d}f}{\frac{f_y}{f_x}f^2 + f} \right) \tag{7.2.14}$$

结合式(7.2.12),(7.2.14),以及方程(7.2.8)的线性性质,得到

$$\begin{cases} \xi = \exp\left(B - \int \dfrac{\mathrm{d}f}{\frac{f_y}{f_x}f^2 + f} \right) \\ \eta = \exp\left(A + \int \dfrac{\mathrm{d}f}{\frac{f_x}{f_y} + f} \right) \end{cases} \tag{7.2.15}$$

只要

$$\frac{f_x}{f_y} \neq -f \tag{7.2.16}$$

便可由式(7.2.15)找到无限小生成元 ξ, η.

如果能由方程(7.2.8)求得无限小生成元 $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$,那么可求得方程(7.2.1)的积分因子.实际上,将方程(7.2.1)表为

$$\begin{cases} M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = 0 \\ f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} \end{cases} \tag{7.2.17}$$

如果

$$I(x,y) = \text{const.} \tag{7.2.18}$$

是方程(7.2.1)的通解,则有

$$N\frac{\partial I}{\partial x} - M\frac{\partial I}{\partial y} = 0 \tag{7.2.19}$$

又因式(7.2.18)是方程(7.2.1)的不变曲面族,故有[2]

$$X(I) = 1, \quad X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} \tag{7.2.20}$$

即

$$\xi \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} = 1 \tag{7.2.21}$$

由式(7.2.19),(7.2.21) 解得

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{M}{M\xi + N\eta}, \quad \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{N}{M\xi + N\eta} \tag{7.2.22}$$

但 dI 是一恰当微分,因此得到积分因子

$$\mu(x, y) = \frac{1}{M\xi + N\eta} \tag{7.2.23}$$

一旦求得生成元 ξ, η,便可由式(7.2.23) 找到积分因子.如果已知两个积分因子 μ_1 和 μ,那么不用求积分,便可求得通积分

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const.} \tag{7.2.24}$$

其次,可研究第二类问题:已知生成元 ξ, η,来求函数 f.将方程(7.2.8) 改写成

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) f - \frac{\partial \xi}{\partial y} f^2 \tag{7.2.25}$$

线性方程(7.2.25) 的解归结为下述常微分方程组的首次积分

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta} = \frac{\mathrm{d}f}{F} \tag{7.2.26}$$

其中

$$F = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) f - \frac{\partial \xi}{\partial y} f^2 \tag{7.2.27}$$

例 1　讨论方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x + y)^n$$

的无限小变换生成元和积分因子.

因

$$f(x, y) = (x + y)^n$$

故有

$$\frac{f_x}{f_y} = 1$$

令

$$\xi = 0$$

则式(7.2.12)给出

$$\eta = \exp\left(A + \int \frac{\mathrm{d}f}{1+f} \right) = \mathrm{e}^{A}[1 + (x+y)^{n}]$$

而式(7.2.23)给出积分因子

$$\mu = \frac{1}{\eta} = \mathrm{e}^{-A}[1 + (x+y)^{n}]^{-1}$$

例2 求具有无限小生成元 $\xi = y, \eta = 0$ 的一阶方程(7.2.1)中的函数 f.

将 $\xi = y, \eta = 0$ 代入方程(7.2.26),得

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{0} = \frac{\mathrm{d}f}{-f^{2}}$$

方程有积分

$$y = c_1, \quad x - \frac{y}{f} = c_2$$

偏微分方程的通积分为

$$\Phi\left(y, x - \frac{y}{f} \right) = 0$$

由此解得

$$f = \frac{y}{x + F(y)}$$

即一阶方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + F(y)}$$

其中 F 为任意函数.

7.2.2 二阶常微分方程的不变性

讨论二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}} = f\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) \tag{7.2.28}$$

在无限小变换下的不变性.

问题归为如下两个一阶方程

$$v - y' = 0, \qquad v' - f(x, y, v) = 0 \tag{7.2.29}$$

的不变性,其中

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

取无限小变换

$$\begin{cases} x^* = x + \varepsilon\xi(x, y, v) \\ y^* = y + \varepsilon\eta(x, y, v) \\ v^* = v + \varepsilon\omega(x, y, v) \end{cases} \tag{7.2.30}$$

有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} &= \frac{\mathrm{d}y + \varepsilon\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial\eta}{\partial v}\mathrm{d}v\right)}{\mathrm{d}x + \varepsilon\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial\xi}{\partial v}\mathrm{d}v\right)} \\ &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\left\{\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}v + \frac{\partial\eta}{\partial v}f - \frac{\partial\xi}{\partial x}v - \frac{\partial\xi}{\partial y}v^2 - \frac{\partial\xi}{\partial v}vf\right\} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}v + \frac{\partial\eta}{\partial v}f - \frac{\partial\xi}{\partial x}v - \frac{\partial\xi}{\partial y}v^2 - \frac{\partial\xi}{\partial v}vf \\ &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}v \end{aligned} \tag{7.2.31}$$

又

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x^*} &= \frac{\mathrm{d}v + \varepsilon\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\mathrm{d}v\right)}{\mathrm{d}x + \varepsilon\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial\xi}{\partial v}\mathrm{d}v\right)} \\ &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\left(\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}v + \frac{\partial\omega}{\partial v}f - \frac{\partial\xi}{\partial x}v - \frac{\partial\xi}{\partial y}v^2 - \frac{\partial\xi}{\partial v}vf\right) \end{aligned} \tag{7.2.32}$$

在变换(7.2.30) 下,方程(7.2.29) 的第二个保持不变,有

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x^*} - f(x^*, y^*, v^*) = 0$$

将式(7.2.32) 代入上式,并展开 f,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\left\{\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}v + \frac{\partial\omega}{\partial v}f - \frac{\partial\xi}{\partial x}v - \frac{\partial\xi}{\partial y}v^2 - \frac{\partial\xi}{\partial v}vf\right\}$$

$$-f(x,y,v)-\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial x}\xi+\frac{\partial f}{\partial y}\eta+\frac{\partial f}{\partial v}\omega\right)=0$$

于是得

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}v+\frac{\partial\omega}{\partial v}f-\frac{\partial\xi}{\partial x}v-\frac{\partial\xi}{\partial y}v^2-\frac{\partial\xi}{\partial v}vf$$
$$-\frac{\partial f}{\partial x}\xi-\frac{\partial f}{\partial y}\eta-\frac{\partial f}{\partial v}\omega=0 \tag{7.2.33}$$

最后,将式(7.2.31)代入式(7.2.33),消去 ω 及其偏导数,得到

$$f\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$$
$$+v\left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}-3\frac{\partial\xi}{\partial y}f-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial v}\right]$$
$$+v^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}v^3$$
$$+v^2\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial v}f+\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}-2\frac{\partial^2\xi}{\partial v\partial x}f-\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}f^2-\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$+2\frac{\partial^2\eta}{\partial v\partial x}f+\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2}f^2+\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}-2\frac{\partial\xi}{\partial v}f^2$$
$$-v^2\left(2\frac{\partial^2\xi}{\partial v\partial y}f+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0 \tag{7.2.34}$$

方程(7.2.34)是包含两个未知函数 ξ,η 和三个独立变量 x,y,v 的二阶偏微分方程,它是超定的,因此有无穷多参数的对称性.

当取

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y)$$

即它们不含 $v=y'$ 时,方程(7.2.34)成为

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+v\left(2\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)+v^2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}v^3$$
$$+f\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-3\frac{\partial\xi}{\partial y}vf-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial v}v$$
$$+\frac{\partial\xi}{\partial y}v^2\frac{\partial f}{\partial v}=0 \tag{7.2.35}$$

方程(7.2.34),(7.2.35)称为确定方程.如能从中找到生成元 ξ,η,便可找到二阶方程的不变性.

方程(7.2.35)是两个变量 x,y 有两个未知函数 ξ,η 的一个

二阶线性偏微分方程.因此,所有解集合是一向量空间.然而,确定方程还有另外的固有性质:任何确定方程的解集构成一个 Lie 代数,其维数小于等于 8[6].

确定方程可用来解两类问题:已知函数 f 求 ξ, η;已知 ξ, η 求 f.

例 3 研究二阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{1}$$

的不变性.

设 $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$,则确定方程(7.2.35) 给出

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right)v + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}\right)v^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}v^3 = 0 \tag{2}$$

方程(2) 是对 v 的三阶多项式方程,令其中 $v^k(k = 0, 1, 2, 3)$ 的系数为零,得到 4 个方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad 2\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(3) 的第一、四两个方程得

$$\xi = \alpha(x)y + \beta(x), \eta = \gamma(y)x + \delta(y) \tag{4}$$

由第二、三两个方程得

$$\begin{cases} 2\gamma'(y) - \alpha''(x)y + \beta''(x) = 0 \\ \gamma''(y)x - 2\alpha'(x) + \delta''(y) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

将方程(5) 第一个对 y,第二个对 x 求偏导数,得到

$$\gamma''(y) = \alpha''(x) = 0 \tag{6}$$

于是有

$$\begin{cases} \xi(x, y) = a_1 xy + a_2 y + c_1 x^2 + b_1 x + b_2 \\ \eta(x, y) = c_1 xy + c_2 x + a_1 y^2 + d_1 y + d_2 \end{cases} \tag{7}$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ 为任意常数.

式(7) 是一个 8 参数群 G_8,无限小生成元为

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}, X_3 = x\dfrac{\partial}{\partial y}, X_4 = x\dfrac{\partial}{\partial x} \\ X_5 = y\dfrac{\partial}{\partial x}, X_6 = y\dfrac{\partial}{\partial y}, X_7 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y} \\ X_8 = xy\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases} \tag{8}$$

由此可计算出 28 个对易子$[X_\alpha, X_\beta]$

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = 0, [X_1, X_3] = X_2, [X_1, X_4] = X_1, [X_1, X_5] = 0 \\ [X_1, X_6] = 0, [X_1, X_7] = 2X_4 + X_6, [X_1, X_8] = X_5 \\ [X_2, X_3] = 0, [X_2, X_4] = 0, [X_2, X_5] = X_1, [X_2, X_6] = X_2 \\ [X_2, X_7] = X_3, [X_2, X_8] = X_4 + 2X_6 \\ [X_3, X_4] = -X_3, [X_3, X_5] = X_4 - X_6, [X_3, X_6] = X_3 \\ [X_3, X_7] = 0, [X_3, X_8] = X_7 \\ [X_4, X_5] = -X_5, [X_4, X_6] = 0, [X_4, X_7] = X_7 \\ [X_4, X_8] = 0, [X_5, X_6] = -X_5, [X_5, X_7] = X_8 \\ [X_5, X_8] = 0, [X_6, X_7] = 0, [X_6, X_8] = X_8 \\ [X_7, X_8] = 0 \end{cases} \tag{9}$$

对比式(7.1.26)得到结构常数 $C^\gamma_{\alpha\beta}$

$$\begin{cases} C^\gamma_{12} = 0(\gamma = 1, \cdots, 8); C^2_{13} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{13} = 0; \\ C^1_{14} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{14} = 0; C^\gamma_{15} = C^\gamma_{16} = 0, C^4_{17} = 2, \\ C^6_{17} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{17} = 0; C^5_{18} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{18} = 0; \\ C^\gamma_{23} = C^\gamma_{24} = 0; C^1_{25} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{25} = 0; C^2_{26} = 1, \\ \text{其余 } C^\gamma_{26} = 0; C^3_{27} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{27} = 0; C^4_{28} = 1, \\ C^6_{28} = 2, \text{其余 } C^\gamma_{28} = 0; C^3_{34} = -1, \text{其余 } C^\gamma_{34} = 0; \\ C^4_{35} = 1, C^6_{35} = -1, \text{其余 } C^\gamma_{35} = 0; C^3_{36} = 1, \\ \text{其余 } C^\gamma_{36} = 0; C^\gamma_{37} = 0; C^7_{38} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{38} = 0; \\ C^5_{45} = -1, \text{其余 } C^\gamma_{45} = 0; C^\gamma_{46} = 0; C^7_{47} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{47} = 0; \\ C^\gamma_{48} = 0, C^5_{56} = -1, \text{其余 } C^\gamma_{56} = 0; C^8_{57} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{57} = 0; \\ C^\gamma_{58} = C^\gamma_{67} = 0; C^8_{68} = 1, \text{其余 } C^\gamma_{68} = 0; C^\gamma_{78} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

例 4　单自由度简谐振动方程的不变性.

方程表为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = -q \tag{1}$$

取变换

$$t^* = t + \varepsilon\tau(t,q), q^* = q + \varepsilon\xi(t,q) \tag{2}$$

则方程(7.2.35) 给出

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \dot{q}\left(2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q} - \frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}\right) + \dot{q}^2\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2\tau}{\partial t\partial q}\right) - \dot{q}^3\frac{\partial^2\tau}{\partial q^2}$$

$$-q\left(\frac{\partial\xi}{\partial q} - 2\frac{\partial\tau}{\partial t}\right) + 3q\dot{q}\frac{\partial\tau}{\partial q} + \xi = 0 \tag{3}$$

方程(3) 对 $\dot{q}$ 为三阶多项式,令每项系数为零,得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\tau}{\partial q^2} = 0, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial q^2} - 2\dfrac{\partial^2\tau}{\partial t\partial q} = 0 \\ 2\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q} - \dfrac{\partial^2\tau}{\partial t^2} + 3q\dfrac{\partial\tau}{\partial q} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - q\dfrac{\partial\xi}{\partial q} + 2q\dfrac{\partial\tau}{\partial t} + \xi = 0 \end{cases} \tag{4}$$

解方程(4),可得到生成元

$$\begin{cases} \tau = c_1\sin 2t + c_2\cos 2t + c_3 \\ \xi = (c_1\cos 2t - c_2\sin 2t)q + c_4\cos t + c_5\sin t \end{cases} \tag{5}$$

其中 $c_1, \cdots, c_5$ 为任意常数,这是一个 5 参数群 G_5,无限小生成元为

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, X_2 = \sin t\dfrac{\partial}{\partial q}, X_3 = \cos t\dfrac{\partial}{\partial q} \\ X_4 = \cos 2t\dfrac{\partial}{\partial t} - \sin 2t\dfrac{\partial}{\partial q}, X_5 = \sin 2t\dfrac{\partial}{\partial t} + \cos 2t\dfrac{\partial}{\partial q} \end{cases} \tag{6}$$

由此可计算出 10 个 Lie 括号$[X_\alpha, X_\beta]$

$$\begin{cases} [X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = -X_2, [X_1, X_4] = -2X_5 \\ [X_1, X_5] = 2X_4, [X_2, X_3] = [X_2, X_4] = [X_2, X_5] = 0 \\ [X_3, X_4] = [X_3, X_5] = 0, [X_4, X_5] = 2X_1 \end{cases} \tag{7}$$

以及结构常数 $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$，其中不为零的有

$$\begin{cases} C_{12}^{3} = 1, C_{13}^{2} = -1, C_{14}^{5} = -2, C_{15}^{4} = 2 \\ C_{45}^{1} = 2 \end{cases} \tag{8}$$

例 5　已知二阶常微分方程(7.2.28) 有以下三种生成元

$$\xi_1 = 1, \eta_1 = 0 \tag{1}$$

$$\xi_2 = 2x, \eta_2 = y \tag{2}$$

$$\xi_3 = x^2, \eta_3 = xy \tag{3}$$

试求 $f = f(x, y, y')$ 的形式.

将式(1) 代入确定方程(7.2.35)，得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

将式(2)，(3) 代入方程(7.2.35)，得

$$-2x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + (y')^2\frac{\partial f}{\partial y'} - 3f = 0 \tag{5}$$

$$-3xf - xy\frac{\partial f}{\partial y} - x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{6}$$

将式(4) 代入式(5)，(6)，得

$$-y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + (y')^2\frac{\partial f}{\partial y'} = 3f \tag{7}$$

$$-y\frac{\partial f}{\partial y} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 3f \tag{8}$$

由式(7)，(8) 得

$$(y')^2\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{9}$$

故有

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \tag{10}$$

再将式(10) 代入式(8)，得

$$-y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f \tag{11}$$

由此并注意到式(4)，(10)，最终得到

$$f = cy^{-3} \tag{12}$$

其中 c 为任意常数.

§7.3 Lagrange 系统的 Lie 对称性

本节研究 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量,包括系统的运动方程,变换群与生成元,微分方程不变性的无限小判据,结构方程与守恒量,以及 Lie 对称性逆问题等.

7.3.1 Lagrange 系统的运动方程

一切力学系统的运动微分方程,如能表为形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.3.1}$$

则称系统为 Lagrange 系统.

Lagrange 系统大致可分为三类:完整保守系统;广义力有广义势的完整系统;Lagrange 力学逆问题系统.

在第一章中已经研究了系统的代数结构,在第三章中已研究了系统的 Noether 对称性与守恒量,本章则研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

假设系统(7.3.1) 非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{7.3.2}$$

则由方程(7.3.1) 可求得所求广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.3.3}$$

7.3.2 无限小变换与生成元

取时间 t 和广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 的无限小单参数变换群

$$t^*=t+\Delta t,\quad q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.3.4}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{7.3.5}$$

其中 ε 为小参数，ξ_0, ξ_s 称为无限小变换的生成元，或生成函数.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{7.3.6}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{7.3.7}$$

以及它的二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s} \tag{7.3.8}$$

7.3.3 微分方程不变性的无限小判据

Lie 方法的基本思想是使运动微分方程(7.3.3) 在无限小变换(7.3.5) 下保持不变. 为得到微分方程不变性的无限小判据，利用以下基本定理.

定理 7.3.1[2] 当且仅当

$$X^{(2)}[\ddot{q}_s - \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})] = 0 \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.3.9}$$

如果

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.3.10}$$

那么方程(7.3.3) 允许有无限小变换.

定理 7.3.1 的结果归结为对无限小生成元 ξ_0, ξ_s 的方程. 实际上，利用定义(7.3.7)，(7.3.8)，式(7.3.9) 及方程(7.3.10)，有

$$\begin{aligned} & X^{(2)}[\ddot{q}_s - \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})] \\ &= (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot\cdot} - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(\alpha_s) \\ &= \ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s - X^{(1)}(\alpha_s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

即

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 \alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (7.3.11)$$

方程(7.3.11)就是无限小生成元 ξ_0, ξ_s 应满足的微分方程，称为确定方程. 如果 ξ_0, ξ_s 满足确定方程，则称生成元为 Lie 对称性生成元. 确定方程是研究力学系统 Lie 对称性时一个很关键的方程.

由确定方程可以研究两类问题. 第一类，由已知微分方程(7.3.3)求 Lie 对称性生成元 ξ_0, ξ_s；第二类，由给定生成元 ξ_0, ξ_s 来求函数 α_s.

第一类问题，由已知 α_s 求无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s，在一般情形是非常困难的，因为它归结为一组非常复杂的偏微分方程. 第二类问题相对容易些.

现在研究一个特殊情形. 假设系统有一个自由度，而变换生成元不含广义速度 $\dot{q}$，即设

$$\xi_0 = \xi_0(t, q), \xi_s = \xi_s(t, q) \quad (7.3.12)$$

并设运动方程有形式

$$\ddot{q} = g(t, q)\dot{q} + h(t, q) \quad (7.3.13)$$

此时方程(7.3.11)给出

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2}\dot{q}^2 + \frac{\partial \xi}{\partial q}(g\dot{q} + h)$$

$$-2\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right)(g\dot{q} + h) - \left[\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial q}\dot{q} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q}(g\dot{q} + h)\right]\dot{q}$$

$$= \xi_0\left(\frac{\partial g}{\partial t}\dot{q} + \frac{\partial h}{\partial t}\right) + \dot{\xi}\left(\frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial h}{\partial q}\right) + \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial q}\dot{q} - \dot{q}\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial q}\dot{q}\right)\right]g \quad (7.3.14)$$

比较方程(7.3.14)两端含 $\dot{q}^3, \dot{q}^2, \dot{q}$ 以及不含 $\dot{q}$ 的项，得到以下 4 个方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial q^2} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial q^2} - 2g\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q} - \left(2\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial t \partial q} + \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q}g\right) - \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q}g = 0 \\ 2\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial q} + \dfrac{\partial \xi}{\partial q}g - 2\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}g + \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q}h\right) - \left(\dfrac{\partial^2 \xi_0}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q}h\right) \\ = \xi_0\dfrac{\partial g}{\partial t} + \xi\dfrac{\partial g}{\partial q} + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial q} - \dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}\right)g \\ \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \dfrac{\partial \xi}{\partial q}h - 2\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}h = \xi_0\dfrac{\partial h}{\partial t} + \xi\dfrac{\partial h}{\partial q} + \dfrac{\partial \xi}{\partial t}g \end{cases} \tag{7.3.15}$$

进而,假设

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial q} = 0 \tag{7.3.16}$$

则由方程(7.3.15)第二个得到

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial q^2} = 0$$

于是知

$$\xi_0 = \xi_0(t), \xi = qf_1(t) + f_2(t) \tag{7.3.17}$$

7.3.4 系统的结构方程和守恒量

定理 7.3.2 对于满足确定方程(7.3.11)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足如下结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G} = 0 \tag{7.3.18}$$

则系统存在对应于 Lie 对称性的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \tag{7.3.19}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$$

$$+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)-L\dot{\xi}_0$$

$$=(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}\right)=0$$

定理 7.3.3 结构方程(7.3.18)等价于 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\dot{G}=0 \tag{7.3.20}$$

定理 7.3.4 Lie 对称性与 Noether 对称性具有同样的守恒量形式(7.3.19).

将结构方程(7.3.18)展开,并分出含 $\ddot{q}$ 和不含 $\ddot{q}$ 的项,得到

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}-\dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}\right)+\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,n) \\ L\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\xi_0\dfrac{\partial L}{\partial t}+\xi_s\dfrac{\partial L}{\partial q_s}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right. \\ \left.-\dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}-\dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\dfrac{\partial G}{\partial t}+\dfrac{\partial G}{\partial q_k}\dot{q}_k=0 \end{cases} \tag{7.3.21}$$

方程(7.3.21)称为广义 Killing 方程.

定理 7.3.5 对于满足确定方程(7.3.11)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足广义 Killing 方程(7.3.21),则 Lagrange 系统存在形如式(7.3.19)的守恒量.

应用定理 7.3.2 求系统守恒量的步骤如下:首先,建立确定方程(7.3.11),并由此求出 Lie 对称性生成元 ξ_0,ξ_s;其次,建立结构方程(7.3.18)并求出 $\dot{G}$,如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数,则可求得规范函数 G;最后,由式(7.3.19)求得守恒量.上述由 Lie 对称性求守恒量的问题,称为 Lie 对称性正问题.

Lagrange 系统可以有多种 Lie 对称性,但每个 Lie 对称性不一定有相应的守恒量.

7.3.5 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法是:由已知守恒量来求相应的 Lie 对

称性.

为解上述逆问题,可先由 Noether 理论按已知守恒量找到相应的 Noether 对称性,再用确定方程(7.3.11)来判断所得对称性是否为 Lie 的.

假设 Lagrange 系统(7.3.1)有守恒量

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{7.3.22}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{7.3.23}$$

将方程(7.3.1)两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{7.3.24}$$

并对 s 求和,得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s}\right) = 0 \tag{7.3.25}$$

将式(7.3.23)与(7.3.25)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{7.3.26}$$

由此在假设(7.3.2)下可解出

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.3.27}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr} = \delta_{sr}, \quad h_{sk} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k} \tag{7.3.28}$$

再令积分(7.3.22)等于守恒量(7.3.19),即

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G = I \tag{7.3.29}$$

这样,由$(n+1)$个方程(7.3.27),(7.3.29)便可找到对应于积分(7.3.22)的$(n+1)$个生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应于系统的 Noether 对称性.

将所得 ξ_0, ξ_s 代入 Lie 对称性的确定方程(7.3.11),如果它们满足,则对称性是 Lie 的.

上述结果归纳为

定理 7.3.6 如果由方程(7.3.27),(7.3.29)所确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.3.11),则所得对称性是与积分(7.3.22)相应的 Lie 对称性.

7.3.6 算 例

例 1 Hénon-Heiles 问题.

Hénon-Heiles 问题是一个完整保守系统,其 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}(Aq_1^2+Bq_2^2)-Dq_1^2q_2-\frac{1}{3}Cq_2^3$$

相应的 Lagrange 方程为

$$\ddot{q}_1=\alpha_1=-Aq_1-2Dq_1q_2$$

$$\ddot{q}_2=\alpha_2=-Bq_2-Dq_1^2-Cq_2^2$$

由于方程的非线性特性,使 Hénon-Heiles 问题的研究成为近代非线性科学的热门课题.

Lie 对称性的确定方程(7.3.11)给出

$$\ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_1=X^{(1)}(\alpha_1)$$

$$\ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_2=X^{(1)}(\alpha_2)$$

令生成元取特定形式

$$\xi_0=a_1+a_2\dot{q}_1+a_3\dot{q}_2$$

$$\xi_1=b_1+b_2\dot{q}_1+b_3\dot{q}_2$$

$$\xi_2=c_1+c_2\dot{q}_1+c_3\dot{q}_2$$

其中 $a_i, b_i, c_i (i=1,2,3)$ 为 $t, \boldsymbol{q}$ 的函数.将这些生成元代入第一个确定方程,比较 $\dot{q}$ 的 4 次、3 次、2 次、1 次项以及不含 $\dot{q}$ 的项,得到以下 14 个方程

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_1^2}=0 \tag{1}$$

$$2\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_1 \partial q_2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial q_1^2}=0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 a_2}{\partial q_2^2}+2\frac{\partial^2 a_3}{\partial q_1 \partial q_2}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 a_3}{\partial q_2^2}=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_1^2}-2\frac{\partial^2 a_2}{\partial t \partial q_1}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_1^2}=0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1^2}+2\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_1 \partial q_2}-2\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_1 \partial q_2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial t \partial q_2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial t \partial q_1}\right)=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_2^2}+2\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1 \partial q_2}-\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_2^2}-2\frac{\partial^2 a_3}{\partial t \partial q_2}=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_2^2}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial q_1^2}+2\frac{\partial^2 b_2}{\partial t \partial q_1}-\left(2\frac{\partial^2 a_1}{\partial t \partial q_1}+a_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+5\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}+2\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial q_1}+\alpha_2\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\right)=0 \tag{9}$$

$$2\left(\frac{\partial^2 b_1}{\partial q_1 \partial q_2}+\frac{\partial^2 b_2}{\partial t \partial q_2}+\frac{\partial^2 b_3}{\partial t \partial q_1}\right)-\left(2\frac{\partial^2 a_1}{\partial t \partial q_2}+a_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}+4\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial t^2}+3\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial q_2}+3\alpha_1\frac{\partial a_3}{\partial q_1}\right)=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial q_2^2}+2\frac{\partial^2 b_3}{\partial t \partial q_2}-2\alpha_1\frac{\partial a_3}{\partial q_2}=0 \tag{11}$$

$$2\frac{\partial^2 b_1}{\partial t \partial q_1}+b_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+3\alpha_1\frac{\partial b_2}{\partial q_1}+b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 b_2}{\partial t^2}+2\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial q_1}+\alpha_2\frac{\partial b_2}{\partial q_2}$$
$$-\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2}+4\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial t}+\alpha_2\frac{\partial a_1}{\partial q_2}+2\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial t}+3\alpha_1\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\right)$$
$$-\left(b_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}\right)=0 \tag{12}$$

$$2\frac{\partial^2 b_1}{\partial t \partial q_2}+b_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}+2\alpha_1\frac{\partial b_2}{\partial q_2}+b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 b_3}{\partial t^2}+2\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial q_2}+\alpha_1\frac{\partial b_3}{\partial q_1}$$

$$-2\alpha_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2}+\frac{\partial a_3}{\partial t}\right)-\left(b_3\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+c_3\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}\right)=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial t^2}+2\alpha_1\frac{\partial b_2}{\partial t}+2\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial t}+\alpha_1\frac{\partial b_1}{\partial q_1}+\alpha_2\frac{\partial b_1}{\partial q_2}$$

$$-2\alpha_1\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}+\alpha_1 a_2+\alpha_2 a_3\right)-\left(b_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+c_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}\right)=0 \tag{14}$$

类似地,由第二个确定方程得到除(1)—(4)外的以下 10 个方程

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1^2}=0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_2^2}+2\frac{\partial^2 c_3}{\partial q_1\partial q_2}-2\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial t\partial q_2}+\frac{\partial^2 a_3}{\partial t\partial q_1}\right)=0 \tag{16}$$

$$2\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 c_3}{\partial q_1^2}-\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_1^2}+2\frac{\partial^2 a_2}{\partial t\partial q_1}\right)=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 c_3}{\partial q_2^2}-\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial q_2^2}+2\frac{\partial^2 a_3}{\partial t\partial q_2}\right)=0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial q_1^2}+2\frac{\partial^2 c_2}{\partial t\partial q_1}-2\alpha_2\frac{\partial a_2}{\partial q_1}=0 \tag{19}$$

$$2\left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial^2 c_2}{\partial t\partial q_2}+\frac{\partial^2 c_3}{\partial t\partial q_1}\right)-2\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial t\partial q_1}+a_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+3\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial q_1}\right.$$
$$\left.+a_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2}+4\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial q_1}+3\alpha_2\frac{\partial a_2}{\partial q_2}\right)=0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial q_1^2}+2\frac{\partial^2 c_3}{\partial t\partial q_2}-\left(2\frac{\partial^2 a_1}{\partial t\partial q_2}+a_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}+2\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial q_2}+a_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 a_3}{\partial t^2}+5\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial q_2}+\alpha_1\frac{\partial a_3}{\partial q_1}\right)=0 \tag{21}$$

$$2\frac{\partial^2 c_1}{\partial t\partial q_1}+c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}+3\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial q_1}+c_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2}+2\alpha_2\frac{\partial c_3}{\partial q_1}$$
$$+\alpha_2\frac{\partial c_2}{\partial q_2}-2\alpha_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1}+\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)-\left(b_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+c_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)=0 \tag{22}$$

$$2\frac{\partial^2 c_1}{\partial t\partial q_2}+c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}+2\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial q_2}+c_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 c_3}{\partial t^2}+3\alpha_2\frac{\partial c_3}{\partial q_2}$$

$$+\alpha_1\frac{\partial c_3}{\partial q_1}-\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2}+2\alpha_1\frac{\partial a_2}{\partial t}+4\alpha_2\frac{\partial a_3}{\partial t}+\alpha_1\frac{\partial a_1}{\partial q_1}\right.$$

$$\left.+3\alpha_2\frac{\partial a_1}{\partial q_2}\right)-\left(b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+c_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)=0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial t^2}+2\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial t}+2\alpha_2\frac{\partial c_3}{\partial t}+\alpha_1\frac{\partial c_1}{\partial q_1}+\alpha_2\frac{\partial c_1}{\partial q_2}$$

$$-2\alpha_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial t}+\alpha_1 a_2+\alpha_2 a_3\right)-\left(b_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}+c_1\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}\right)=0 \tag{24}$$

首先,令

$$a_1=a_2=a_3=0,\quad b_1=b_2=c_1=c_3=0 \tag{25}$$

则方程(1)—(5),(9),(18),(21)恒成立,其余 16 个方程简化为

$$\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1^2}=\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_2^2}=\frac{\partial^2 b_3}{\partial t\partial q_1}=\frac{\partial^2 b_3}{\partial t\partial q_2}=\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial t}=0 \tag{26}$$

$$2\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial q_1}+b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}-c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}=0 \tag{27}$$

$$2\alpha_2\frac{\partial b_3}{\partial q_2}+b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}+\alpha_1\frac{\partial b_3}{\partial q_1}-b_3\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}=0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1^2}=\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_2^2}=\frac{\partial^2 c_2}{\partial t\partial q_1}=\frac{\partial^2 c_2}{\partial t\partial q_2}=\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial t}=0 \tag{29}$$

$$3\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2}+\alpha_2\frac{\partial c_2}{\partial q_2}+c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1}-c_2\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}=0 \tag{30}$$

$$2\alpha_1\frac{\partial c_2}{\partial q_2}+c_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2}-b_3\frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1}=0 \tag{31}$$

由方程(26)可得

$$b_3=Mq_1+Nq_2+P \tag{32}$$

由方程(29)可得

$$c_2=lq_1+kq_2+g \tag{33}$$

这里 M, N, P, l, k, g 都是常数.将式(32),(33)代入方程(27),(28),(30),(31),可找到

$$k=l=M=N=0,\quad g=P \tag{34}$$

$$A=B,\quad C=D \tag{35}$$

于是有

$$b_3 = c_2 = g = \text{const.} \tag{36}$$

而生成元为

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = g\dot{q}_2,\ \xi_2 = g\dot{q}_1 \tag{37}$$

其次,令

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad b_1 = c_1 = c_3 = 0 \tag{38}$$

此时方程(1)—(4),(18),(21)恒成立,其余 18 个方程为

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 b_3}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 b_3}{\partial t \partial q_2} = \frac{\partial^2 b_2}{\partial t \partial q_1} = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1^2} + 2\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial q_2^2} + 2\frac{\partial^2 b_3}{\partial q_1 \partial q_2} = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial t \partial q_2} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial t \partial q_1} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 b_2}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + 3\alpha_1 \frac{\partial b_2}{\partial q_1} + 2\alpha_2 \frac{\partial b_3}{\partial q_1} + b_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1} - c_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2} = 0 \tag{43}$$

$$2\alpha_1 \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial t^2} + b_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2} + 2\alpha_2 \frac{\partial b_3}{\partial q_2} + b_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2}$$

$$+ \alpha_1 \frac{\partial b_3}{\partial q_1} - b_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} = 0 \tag{44}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial b_2}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial b_3}{\partial t} = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1^2} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial q_2^2} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial t \partial q_1} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial t \partial q_2} = \frac{\partial c_2}{\partial t} = 0 \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 c_2}{\partial t^2} + 3\alpha_1 \frac{\partial c_2}{\partial q_1} + \alpha_2 \frac{\partial c_2}{\partial q_2} + c_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_1} - b_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1} - c_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_2} = 0 \tag{47}$$

$$2\alpha_1 \frac{\partial c_2}{\partial q_2} + c_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q_2} - b_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial q_1} = 0 \tag{48}$$

由这些方程可以求得

$$c_2 = b_3 = 4Dq_1,\ b_2 = -8Dq_2 + 2(4A - B),\ C = 6D \tag{49}$$

于是有生成元

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = [-8Dq_2 + 2(4A - B)]\dot{q}_1 + 4Dq_1\dot{q}_2,\ \xi_2 = 4Dq_1\dot{q}_1 \tag{50}$$

这样,便找到了 Lie 对称性的两组生成元式(37)和(50).显然,还有生成元

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{51}$$

满足确定方程.

下面由结构方程(7.3.18)求规范函数.对式(37),结构方程给出

$$(-Aq_1 - 2Dq_1q_2)g\dot{q}_2 + (-Bq_2 - Dq_1^2 - Cq_2^2)g\dot{q}_1 + g\dot{q}_1\ddot{q}_2 + g\dot{q}_2\ddot{q}_1 + \dot{G} = 0 \tag{52}$$

注意到 $A = B, C = D$,由方程(52)求得

$$G = gAq_1q_2 + gDq_1q_2^2 + \frac{1}{3}gDq_1^3 - g\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{53}$$

类似他,对式(50),由结构方程求得规范函数

$$G = A(4A - B)q_1^2 + D^2q_1^4 + 4ADq_1^2q_2 + 4D^2q_1^2q_2^2 - (4A - B)\dot{q}_1^2 + 4D\dot{q}_1^2q_2 - 4Dq_1\dot{q}_1\dot{q}_2 \tag{54}$$

对式(51),得

$$G = 0 \tag{55}$$

最后,求 Lie 对称性的守恒量.对式(37),(53),守恒量表达式(7.3.19)给出

$$I_1 = \dot{q}_1\dot{q}_2 + Aq_1q_2 + Dq_1q_2^2 + \frac{1}{3}Dq_1^3 = \text{const.} \tag{56}$$

对式(50),(54),有

$$I_2 = D[4\dot{q}_1(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1q_2) + 4Aq_1^2q_2 + Dq_1^4 + 4Dq_1^2q_2^2] + (4A - B)(Aq_1^2 + \dot{q}_1^2) = \text{const.} \tag{57}$$

对式(51),(55),有

$$I_3 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}(Aq_1^2 + Bq_2^2) + Dq_1^2q_2 + \frac{1}{3}Cq_2^3 = \text{const.} \tag{58}$$

例 2　平面 Kepler 问题.

Kepler 问题平面运动的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\mu(q_1^2+q_2^2)^{-1/2}\qquad(q_1^2+q_2^2\neq 0)\tag{1}$$

运动方程为

$$\begin{cases}\ddot{q}_1=-\mu q_1(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}=\alpha_1\\ \ddot{q}_2=-\mu q_2(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}=\alpha_2\end{cases}\tag{2}$$

它是一个完整保守系统.

首先,由确定方程求 Lie 对称性.确定方程(7.3.11)给出

$$\begin{cases}\ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_1=\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial q_1}\xi_1+\dfrac{\partial\alpha_1}{\partial q_2}\xi_2\\ \ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_2=\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial q_1}\xi_1+\dfrac{\partial\alpha_2}{\partial q_2}\xi_2\end{cases}\tag{3}$$

方程(3)有如下解

$$\xi_0=-1,\quad \xi_1=\xi_2=0,\quad X^{(0)}=-\frac{\partial}{\partial t}\tag{4}$$

$$\xi_0=0,\ \xi_1=-q_2,\ \xi_2=q_1;\ X^{(0)}=-q_2\frac{\partial}{\partial q_1}+q_1\frac{\partial}{\partial q_2}\tag{5}$$

$$\xi_0=t,\ \xi_1=\frac{2}{3}q_1,\ \xi_2=\frac{2}{3}q_2;\ X^{(0)}=t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{2}{3}q_1\frac{\partial}{\partial q_1}+\frac{2}{3}q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\tag{6}$$

式(4),(5),(6)对应系统的 Lie 对称性变换.

其次,由结构方程求规范函数.对式(4),结构方程(7.3.18)给出

$$G=0\tag{7}$$

对式(5),有

$$G=0\tag{8}$$

对式(6),有

$$\dot{G}=-\frac{1}{3}L\tag{9}$$

最后,按定理 7.3.2 求相应的守恒量.对式(4),(7),守恒量式(7.3.19)给出

$$I_1=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\mu(q_1^2+q_2^2)^{-1/2}=\text{const.} \tag{10}$$

它是能量积分.对式(5),(8),守恒量式(7.3.19)给出

$$I_2=q_1\dot{q}_2-q_2\dot{q}_1=\text{const.} \tag{11}$$

它是动量矩积分.对式(6),(9),没有相应的守恒量,因为找不到相应的规范函数 G.

例 3 Emden 方程.

Emden 方程为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0 \tag{1}$$

它是一个单自由度完整非保守系统,但可以 Lagrange 化,其 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right) \tag{2}$$

试研究 Emden 方程的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题:由已知对称性求守恒量.第一步,建立确定方程并求解.确定方程(7.3.11)给出

$$\ddot{\xi}-\dot{q}\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\left(-\frac{2}{t}\dot{q}-q^5\right)=\frac{2}{t^2}\dot{q}\xi_0-\frac{2}{t}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)-5q^4\xi \tag{3}$$

取定

$$\xi_0=\xi_0(t),\ \xi=\xi(t,q) \tag{4}$$

将式(4)代入方程(5),分出含 $\dot{q}^2$,$\dot{q}$以及不含 $\dot{q}$的项,得到

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2}=0 \tag{5}$$

$$2\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial q}-\ddot{\xi}_0+\frac{2}{t}\dot{\xi}_0-\frac{2}{t^2}\xi_0=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-\frac{\partial\xi}{\partial q}q^5+2\dot{\xi}_0q^5+\frac{2}{t}\frac{\partial\xi}{\partial t}+5q^4\xi=0 \tag{7}$$

由方程(5)得

$$\xi=qf_1(t)+f_2(t) \tag{8}$$

将式(8)代入方程(6),(7),得

$$2\dot{f}_1 - \ddot{\xi}_0 + \frac{2}{t}\dot{\xi}_0 - \frac{2}{t^2}\xi_0 = 0 \tag{9}$$

$$q\ddot{f}_1 + \dot{f}_2 - f_1 q^5 + 2\dot{\xi}_0 q^5 + \frac{2}{t}(q\dot{f}_1 + \dot{f}_2) + 5q^4(qf_1 + f_2) = 0 \tag{10}$$

将方程(10)中含 q^5, q^4, q 以及不含 q 的项分开,得到

$$\begin{cases} 4f_1 + 2\dot{\xi}_0 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \ddot{f}_1 + \frac{2}{t}\dot{f}_1 = 0 \\ \ddot{f}_2 + \frac{2}{t}\dot{f}_2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

由方程(11)解得

$$f_1 = 1, f_2 = 0, \xi_0 = -2t \tag{12}$$

$$f_1 = \frac{1}{t}, f_2 = 0, \xi_0 = -2\ln t \tag{13}$$

但式(13)不满足方程(9),舍之.将式(12)代入式(8),得

$$\xi = q \tag{14}$$

于是有 Lie 对称性生成元向量

$$X^{(0)} = -2t\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial q} \tag{15}$$

第二步,求规范函数.结构方程(7.3.18)给出

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -L\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L) \\ &= 2t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right) + 4t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right) + t^2q^6 - 3\dot{q}^2t^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

于是得

$$G = 0 \tag{17}$$

第三步,求守恒量.守恒量式(7.3.19)给出

$$I = t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{6}q^6\right)(-2t) + [q - \dot{q}(-2t)]\dot{q}t^2 = \text{const.}$$

即

$$t^3\dot{q}^2 + t^2 q\dot{q} + \frac{1}{3}t^3 q^6 = \text{const.} \tag{18}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统(1)有守恒量

$$I = t^3\dot{q}^2 + t^2 q\dot{q} + \frac{1}{3}t^3 q^6 = \text{const.} \tag{19}$$

求与之相应的 Lie 对称性.方程(7.3.27),(7.3.29)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi} = 2t\dot{q} + q \\ L\xi_0 + t^2\dot{q}\,\bar{\xi} + G = t^3\dot{q}^2 + t^2 q\dot{q} + \dfrac{1}{3}t^3 q^6 \end{cases} \tag{20}$$

由此得

$$\xi = 2tq^{\cdot} + q + \dot{q}\xi_0,\ \xi_0 \text{ 任意} \tag{21}$$

它对应系统的 Noether 对称性.现验证生成元(21)是否满足确定方程(3).由式(21)求得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\dot{q} + 2t\ddot{q} + \dot{q} + \ddot{q}\xi_0 + \dot{q}\dot{\xi}_0 \\ &= -\dot{q} - 2tq^5 + \ddot{q}\xi_0 + \dot{q}\dot{\xi}_0 \\ \ddot{\xi} &= -\ddot{q} - 2q^5 - 10tq^4\dot{q} + \dddot{q}\xi_0 + 2\ddot{q}\dot{\xi}_0 + \dot{q}\ddot{\xi}_0 \end{aligned}$$

于是,方程(3)的左端为

$$\begin{aligned} &\dddot{q}\xi_0 - \ddot{q} - 2q^5 - 10tq^4\dot{q} \\ &= \left(\frac{b}{t^2}\dot{q} + \frac{2}{t}q^5 - 5q^4\dot{q}\right)\xi_0 + \frac{2}{t}\dot{q} - q^5 - 10tq^4\dot{q} \end{aligned}$$

而方程(3)的右端为

$$\begin{aligned} &\frac{2}{t^2}\dot{q}\xi_0 - \frac{2}{t}\left\{-\dot{q} - 2tq^5 + \left(-\frac{2}{t}\dot{q} - q^5\right)\xi_0\right\} - 5q^4(2t\dot{q} + q + \dot{q}\xi_0) \\ &= \left(\frac{6}{t^2}\dot{q} + \frac{2}{t}q^5 - 5q^4\dot{q}\right)\xi_0 + \frac{2}{t}\dot{q} - q^5 - 10tq^4\dot{q} \end{aligned}$$

因此,生成元(21)满足 Lie 对称性的确定方程.由定理 7.3.6 知,无论 ξ_0 取何值,生成元(21)都对应于与积分(19)相应的 Lie 对称性.

§7.4 Hamilton 系统的 Lie 对称性

本节讨论 Hamilton 系统的 Lie 对称性与守恒量，包括 Lie 对称性正问题：建立系统的运动方程，变换群与生成元，Lie 对称性的确定方程，结构方程和守恒量形式等，以及 Lie 对称性逆问题：由已知守恒量求相应的 Lie 对称性.

7.4.1 Hamilton 方程

非奇异 Lagrange 系统的方程经过 Legendre 变换并引进 Hamilton 函数，可表为正则形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.4.1}$$

其中 $H=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$为 Hamilton 函数.

完整保守系统，广义力有广义势的系统，以及 Lagrange 力学逆问题系统等，都是 Lagrange 系统，因此它们的运动方程都有 Hamilton 形式(7.4.1).

方程(7.4.1)可展开为显式

$$\dot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),\ \dot{p}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.4.2}$$

7.4.2 变换群与生成元

引入时间，广义坐标和广义动量的无限小群变换

$$\begin{cases} t^*=t+\Delta t \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \\ p_s^*(t^*)=p_s(t)+\Delta p_s \end{cases}\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{7.4.3}$$

其展开式为

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ q_s^*=q_s+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \\ p_s^*=p_s+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) \end{cases}\qquad (s=1,\cdots,n) \tag{7.4.4}$$

其中 ϵ 为无限小参数，ξ_0，ξ_s，η_s 称为无限小变换的生成元. 引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_s \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s \frac{\partial}{\partial p_s} \tag{7.4.5}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + (\dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s} \tag{7.4.6}$$

7.4.3 Lie 对称性的确定方程

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知，方程(7.4.2)在无限小变换(7.4.4)下的不变性归为

$$\begin{cases} X^{(1)}(\dot{q}_s - g_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) = 0 \\ X^{(1)}(\dot{p}_s - h_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})) = 0 \end{cases} \tag{7.4.7}$$

如果

$$\dot{q}_s = g_s, \quad \dot{p}_s = h_s \tag{7.4.8}$$

将算子(7.4.6)代入方程(7.4.7)并注意到方程(7.4.8)，得到

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s - \dot{\xi}_0 g_s = X^{(0)}(g_s) \\ \dot{\eta}_s - \dot{\xi}_0 h_s = X^{(0)}(h_s) \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{7.4.9}$$

方程(7.4.9)称为 Lie 对称性的确定方程. 如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s，η_s 满足确定方程(7.4.9)，则称相应的变换是 Hamilton 系统的 Lie 对称变换.

7.4.4 结构方程与守恒量

定理 7.4.1 对于满足确定方程(7.4.9)的无限小生成元 ξ_0，ξ_s，η_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$满足如下结构方程

$$-H\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H) + \dot{G} = 0 \tag{7.4.10}$$

则 Hamilton 系统存在如下形式的守恒量

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const.} \tag{7.4.11}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\dot{H}\xi_0 - H\dot{\xi}_0 + \dot{p}_s\xi_s + p_s\dot{\xi}_s + H\dot{\xi}_0$$

$$-\frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s - p_s\dot{\xi}_s + X^{(0)}(H)$$

$$=\frac{\partial H}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_0\xi_0) + \dot{p}_s\left(\xi_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0\right) = 0$$

定理 7.4.2 结构方程(7.4.10)等价于 Noether 等式

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{\xi}_0 = -\dot{G} \qquad (7.4.12)$$

定理 7.4.3 结构方程(7.4.10)归为如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases} p_s\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t} + p_k\dfrac{\partial \xi_k}{\partial q_s}\dfrac{\partial H}{\partial p_S} - \dfrac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \dfrac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_s}\dfrac{\partial H}{\partial p_s} \\ \quad = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q_s}\dfrac{\partial H}{\partial p_s} \\ p_k\dfrac{\partial \xi_k}{\partial p_s} - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial p_s} = -\dfrac{\partial G}{\partial p_s} \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \qquad (7.4.13)$$

当已知生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 时，可由结构方程求得规范函数，亦可由 Noether 等式求规范函数，还可由解广义 Killing 方程来求规范函数.

定理 7.4.4 Lie 对称性的守恒量与 Noether 对称性的守恒量有同样形式.

由 Lie 对称性求相应的守恒量，称为 Lie 对称性正问题. Lie 对称性正问题的解法如下：首先，建立确定方程(7.4.9)并由此求得 Lie 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s；其次，由结构方程(7.4.10)，或由 Noether 等式(7.4.12)，或由广义 Killing 方程(7.4.13)，求出规范函数 G；最后，由式(7.4.11)求得 Hamilton 系统的 Lie 对称性守恒量.

7.4.5 Lie 对称性逆问题

Hamilton 系统 Lie 对称性逆问题的提法是：由已知积分(守恒

量)来求与其相应的 Lie 对称性.这类逆问题的解法是:首先,按 Noether 理论由已知积分找到相应的 Noether 对称性;其次,验证所得 Noether 对称性是否 Lie 对称性.如果所得生成元满足 Lie 对称性的确定方程,那么便找到了与已知积分相应的 Lie 对称性

第一步,根据已知积分求相应的 Noether 对称性.假设 Hamilton 系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \text{const.} \tag{7.4.14}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial p_s}\dot{p}_s = 0 \tag{7.4.15}$$

即

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} + \frac{\partial I}{\partial p_s}\dot{p}_s = 0 \tag{7.4.16}$$

将 Hamilton 方程第二组乘以 $\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0$,并对 s 求和,得

$$\left(-\dot{p}_s - \frac{\partial H}{\partial q_s}\right)\left(\xi_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0\right) = 0 \tag{7.4.17}$$

比较式(7.4.16)与式(7.4.17)中含 $\dot{p}_s$ 的项,得到

$$\xi_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}\xi_0 + \frac{\partial I}{\partial p_s} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.4.18}$$

再令积分(7.4.14)等于 Lie 对称性的守恒量(7.4.11),即令

$$p_s\xi_s - H\xi_0 + G = I \tag{7.4.19}$$

这样,由方程(7.4.18),(7.4.19)就可求得无限小生成元 ξ_0, ξ_s.生成元 η_s 由式(3.3.29)给出,即

$$\eta_s = \frac{\partial p_s}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial p_s}{\partial q_k}\xi_k + \frac{\partial p_s}{\partial \dot{q}_k}(\dot{\xi}_k - \dot{q}_k\dot{\xi}_0) \tag{7.4.20}$$

这样,便找到了与积分(7.4.14)相应的 Noether 对称性.

第二步,由 Noether 对称性求 Lie 对称性.将由式(7.4.18)—(7.4.20)求得的 Noether 对称性生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 代入 Lie 对称性的确定方程(7.4.9),如果它们满足,则所得对称性是 Lie 的,否则不是 Lie 的.

定理 7.4.5　如果由式(7.4.18),(7.4.19),(7.4.20)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(7.4.9),则无限小变换(7.4.4)是 Lie 对称的.

7.4.6　算　　例

例 1　研究单自由度线性阻尼振子

$$\ddot{q} + \gamma\dot{q} = 0 \tag{1}$$

的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,将问题化成 Hamilton 系统.方程(1)可化为 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}^2 \tag{2}$$

于是有

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathrm{e}^{\gamma t}\dot{q}$$

$$H = p\dot{q} - L = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\gamma t}p^2$$

$$g = \frac{\partial H}{\partial p} = \mathrm{e}^{-\gamma t}p, \quad h = -\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(7.4.9)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi} - \mathrm{e}^{-\gamma t}p\dot{\xi}_0 = -\gamma\mathrm{e}^{-\gamma t}p\xi_0 + \mathrm{e}^{-\gamma t}\eta \\ \dot{\eta} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

方程(3)有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}, \eta = 1; X_1^{(0)} = -\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p} \tag{4}$$

$$\xi_0 = 0, \xi = 1, \eta = 0; X_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q} \tag{5}$$

$$\xi_0 = e^{\gamma t}, \xi = 0, \eta = 0; X_3^{(0)} = \mathrm{e}^{\gamma t}\frac{\partial}{\partial t} \tag{6}$$

第三步,建立结构方程并求规范函数.将生成元(4)代入结构方程(7.4.10),得到

$$\mathrm{e}^{-\gamma t}p + \dot{G} = 0$$

注意到 $\dot{q}=\mathrm{e}^{-\gamma t}p$,于是得

$$G=-q \tag{7}$$

将生成元(5),(6),分别代入结构方程(7.4.10),得到

$$G=0 \tag{8}$$

第四步,求守恒量.将式(4),(7),式(5),(8),以及式(6),(8)分别代入 Lie 对称性守恒量式(7.4.11),得到三个积分

$$I_1=-\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}p-q=\text{const.} \tag{9}$$

$$I_2=p=\text{const.} \tag{10}$$

$$I_3=-\frac{1}{2}p^2=\text{const.} \tag{11}$$

实际上,只要两个积分(9),(10),问题便可最终解决.

注意到,生成元(4)—(6)可作为 Lie 代数的基,其对易子(Lie 括号)为

$$[X_1^{(0)},X_2^{(0)}]=0,[X_1^{(0)},X_3^{(0)}]=X_2^{(0)},[X_2^{(0)},X_3^{(0)}]=0 \tag{12}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.第一步,求与已知积分对应的 Noether 对称性.假设系统(1)有积分

$$I=\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}p+q=\text{const.} \tag{13}$$

式(7.4.18)—(7.4.20)给出

$$\begin{cases}\xi=\mathrm{e}^{-\gamma t}p\xi_0+\dfrac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}\\ p\xi-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\gamma t}p^2\xi_0+G=\dfrac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t}p+q\\ \eta=\gamma\mathrm{e}^{\gamma t}q\xi_0+\mathrm{e}^{\gamma t}(\dot{\xi}-q\dot{\xi}_0)\end{cases} \tag{14}$$

取

$$G=q \tag{15}$$

则由方程(14)求得

$$\xi_0=0,\xi=\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma t},\eta=-1 \tag{16}$$

第二步,由 Noether 对称性求 Lie 对称性.将式(6)代入确定方程

(3),显然成立.因此,由定理 7.4.5 知,生成元(6)对应的变换是 Lie 对称的.

例 2 研究 Emden 方程

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0 \tag{1}$$

的 Lie 对称性与守恒量.

Emden 方程可化为 Lagrange 系统,其 Lagrange 函数为

$$L=t^2\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{6}q^6\right) \tag{2}$$

于是有

$$\begin{cases} p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}=t^2\dot{q} \\ H=p\dot{q}-L=\dfrac{1}{2}\dfrac{p^2}{t^2}+\dfrac{1}{6}t^2q^6 \end{cases} \tag{3}$$

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立确定方程并求解.确定方程(7.4.9)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}-\dfrac{p}{t^2}\dot{\xi}_0=-\dfrac{2p}{t^3}\xi_0+\dfrac{1}{t^2}\eta \\ \dot{\eta}+t^2q^5\dot{\xi}_0=-2tq^5\xi_0-5t^2q^4\xi \end{cases} \tag{4}$$

方程(4)有解

$$\xi_0=-2t,\ \xi=q,\ \eta=-p \tag{5}$$

第二步,求规范函数.将式(5)代入 Noether 等式(7.4.12),得

$$\begin{aligned} -\dot{G}&=p\dot{q}-\left(-\frac{p^2}{t^3}+\frac{1}{3}tq^6\right)(-2t)-t^2q^6-\left(\frac{1}{2}\frac{p^2}{t^2}+\frac{1}{6}t^2q^6\right)(-2) \\ &=0 \end{aligned}$$

于是有

$$G=0 \tag{6}$$

第三步,求守恒量.式(7.4.11)给出

$$I=\frac{p^2}{t}+pq+\frac{1}{3}t^3q^6=\text{const.} \tag{7}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分(7),未求相应

的 Lie 对称性.式(7.4.18)—(7.4.20)给出

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{p}{t^2}\xi_0 + \dfrac{2p}{t} + q \\ p\xi - H\xi_0 + G = \dfrac{p^2}{t} + pq + \dfrac{1}{3}t^3 q^6 \\ \eta = 2tq\xi_0 + t^2(\dot{\xi} - q\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{8}$$

当取

$$G = 0 \tag{9}$$

时,有

$$\xi_0 = -2t, \xi = q, \eta = -p \tag{10}$$

若取

$$G = -\frac{p^2}{t} + \frac{1}{3}t^3 q^6 \tag{11}$$

则有

$$\xi_0 = 0, \xi = \frac{2p}{t} + q, \eta = -p - 2t^3 q^5 \tag{12}$$

式(9),(10)或式(11),(12)都是系统的 Noether 对称性.容易验证,式(10)或式(12)还满足确定方程(4),因此,据定理 7.4.5 知,式(10)或式(12)对应的变换也是 Lie 对称的.

§7.5 广义坐标下一般完整系统的 Lie 对称性

本节研究一般完整系统广义坐标下运动方程的 Lie 对称性两类问题.一类是正问题:由 Lie 对称性找到守恒量;另一类是逆问题:由守恒量找到 Lie 对称性.

7.5.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$来确定.系统的运动方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.5.1}$$

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为系统的 Lagrange 函数，$Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为非势广义力.假设系统非奇异，即设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{7.5.2}$$

则展开方程(7.5.1)后，可求出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,\cdots,n) \tag{7.5.3}$$

7.5.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程

引进时间和广义坐标的无限小变换

$$\begin{cases}t^*=t+\Delta t\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\end{cases}\qquad(s=1,\cdots,n) \tag{7.5.4}$$

或其展开式

$$\begin{cases}t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\end{cases} \tag{7.5.5}$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{7.5.6}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s} \tag{7.5.7}$$

以及它的二次扩展

$$X^{(2)}=X^{(1)}+[(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)^{\cdot}-\ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s} \tag{7.5.8}$$

根据微分方程在无限小群变换下的不变性理论知，方程(7.5.3)在无限小变换(7.5.5)下的不变性表为

$$X^{(2)}[\ddot{q}_s-\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})]\Big|_{\ddot{q}_s=\alpha_s}=0 \tag{7.5.9}$$

它可表为

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_s=X^{(1)}(\alpha_s)\quad(s=1,\cdots,n) \tag{7.5.10}$$

称方程(7.5.10)为方程(7.5.3)的确定方程.

定义 7.5.1　如果无限小变换(7.5.5)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.5.10),则称对应的对称性为完整力学系统的 Lie 对称性.

7.5.3　结构方程与守恒量

定理 7.5.1[4]　对于满足确定方程(7.5.10)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad (7.5.11)$$

则完整系统(7.5.3)存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \qquad (7.5.12)$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ &\quad - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ &= (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s\right) = 0\end{aligned}$$

定理 7.5.2　结构方程(7.5.11)等价于 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad (7.5.13)$$

定理 7.5.3　结构方程(7.5.11)归为如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + \xi_0\dfrac{\partial L}{\partial t} + \xi_s\dfrac{\partial L}{\partial q_s} + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ \quad + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k - \dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} - \dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q_k}\dot{q}_k \\ L\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k} + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k} - \dot{q}_s\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}\right) = -\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, \cdots, n) \end{cases} \qquad (7.5.14)$$

定理 7.5.4　完整系统的 Lie 对称性与 Noether 对称性有同

样的守恒量形式(7.5.12).

完整力学系统 Lie 对称性正问题的解法如下:首先,建立确定方程(7.5.10)并求出 Lie 对称性生成元 ξ_0, ξ_s;其次,建立结构方程并求出相应的规范函数 G;最后,由式(7.5.12)找到相应的 Lie 对称性守恒量.

一般说来,Lie 对称性不一定有其相应的守恒量.如果由结构方程求出的 $\dot{G}$为零,或为 t, $\boldsymbol{q}$ 的某函数的全导数时,才能找到相应的规范函数,进而求得系统的守恒量.

7.5.4 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法是:由已知守恒量来求相应的 Lie 对称性.因为 Lie 对称性不一定导致守恒量,因此由守恒量也不一定能找到相应的 Lie 对称性.这样,Lie 对称性逆问题可能有解,也可能无解.

Lie 对称性逆问题的解法如下:首先,由给定的守恒量按 Noether 理论找到相应的 Noether 对称性;其次,由 Noether 对称性生成元是否满足确定方程来判断对称性是否 Lie 的.

假设完整系统(7.5.3)有守恒量

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{7.5.15}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{7.5.16}$$

将方程(7.5.1)两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{7.5.17}$$

并对 s 求和,得

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s\right) = 0 \tag{7.5.18}$$

将式(7.5.16)与式(7.5.18)相加,展开并分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零得到

$$\bar{\xi}_s \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{7.5.19}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.5.20}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk} h_{kr} = \delta_{sr} \tag{7.5.21}$$

再令积分(7.5.15)等于守恒量(7.5.12),即

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \bar{\xi}_s + G = I \tag{7.5.22}$$

这样,由方程(7.5.20),(7.5.22)便可求得生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应系统的 Noether 对称性.将所得到的 Noether 对称性生成元 ξ_0, ξ_s 代入 Lie 对称性的确定方程(7.5.10),如果它们满足,则对称性成为 Lie 的.归纳为如下结论

定理 7.5.5 如果由方程(7.5.20),(7.5.22)所确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.5.10),则无限小变换(7.5.5)是 Lie 对称的,否则不是 Lie 对称的.

7.5.5 算　　例

例 1 二自由度完整系统为

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\ Q''_1 = -\dfrac{t}{1+t^2}\dot{q}_1, Q''_2 = \dfrac{1}{1+t^2}\dot{q}_1 \end{cases} \tag{1}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立确定方程并求解.确定方程(7.5.10)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{t}{1+t^2}\dot{q}_1\right) = -\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\dot{q}_1\xi_0 - \dfrac{t}{1+t^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\dfrac{1}{1+t^2}\dot{q}_1\right) = -\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\dot{q}_1\xi_0 + \dfrac{1}{1+t^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{2}$$

确定方程(2)有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = t \tag{3}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_1, \xi_2 = q_2 \tag{4}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{5}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0 \tag{6}$$

第二步,建立结构方程并求规范函数.对式(3)—式(6),结构方程(7.5.11)分别给出

$$-\dot{G}_1 = \dot{q}_2 \tag{7}$$

$$-\dot{G}_2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \frac{t}{1+t^2} q_1 \dot{q}_1 + \frac{1}{1+t^2} q_2 \dot{q}_1 \tag{8}$$

$$-\dot{G}_3 = \frac{1}{1+t^2} \dot{q}_1 \tag{9}$$

$$-\dot{G}_4 = -\frac{t}{1+t^2} \dot{q}_1 \tag{10}$$

由式(7)求得

$$G_1 = -q_2 \tag{11}$$

但找不到 G_2, G_2, G_4.第三步,求守恒量.对式(3),(11),守恒量式(7.5.12)给出

$$I_1 = \dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 = \text{const.} \tag{12}$$

可见,本问题有多种 Lie 对称性生成元,但仅生成元(3)才有相应的守恒量.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统(1)有积分

$$I = \dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 = \text{const.} \tag{13}$$

求相应的 Lie 对称性.式(7.5.20),(7.5.22)给出

$$\begin{cases} \xi_1 = 1, \xi_2 = t \\ L\xi_0 + \dot{q}_1 \bar{\xi}_1 + \dot{q}_2 \bar{\xi}_2 + G = \dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_2 \end{cases} \tag{14}$$

由此解得

$$\xi_0 = -\frac{G + q_2}{L}, \xi_1 = 1 + \dot{q}_1 \xi_0, \xi_2 = t + \dot{q}_2 \xi_0 \tag{15}$$

将式(15)代入确定方程(2),容易验证它们满足.因此,由定理

7.5.5知,对任意 ξ_0 及

$$\xi_1 = 1 + \dot{q}_1\xi_0, \quad \xi_2 = t + \dot{q}_2\xi_0 \tag{16}$$

无限小变换(7.5.5)是 Lie 对称的.

例 2 Emden 方程.

Emden 方程

$$\ddot{q} + \frac{2}{t}\dot{q} + q^5 = 0 \tag{1}$$

作为一个一般完整系统,有

$$L = \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2, \quad Q'' = -t^2q^5 \tag{2}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立确定方程并求解.确定方程(7.5.10)给出

$$\ddot{\xi} - \dot{q}\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\frac{2}{t}\dot{q} - q^5\right) = \frac{2}{t^2}\dot{q}\xi_0 - 5q^4\xi - \frac{2}{t}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) \tag{3}$$

方程(3)有解

$$\xi_0 = -2t, \xi = q; X^{(0)} = -2t\frac{\partial}{\partial t} + q\frac{\partial}{\partial q} \tag{4}$$

它对应 Lie 对称变换.第二步,求规范函数.将式(2),(4)代入结构方程(7.5.11),得

$$\begin{aligned} -\dot{G} &= \frac{1}{2}t^2\dot{q}^2(-2) + t\dot{q}^2(-2t) + t^2\dot{q}(\dot{q} + 2\dot{q}) + (-t^2q^5)(q + 2t\dot{q}) \\ &= -t^2q^6 - 2t^3q^5\dot{q} \end{aligned} \tag{5}$$

于是有

$$G = \frac{1}{3}t^3q^6 \tag{6}$$

第三步,求守恒量.将式(4),(6)代入守恒量式(7.5.12),得

$$I = t^3\dot{q}^2 + t^2q\dot{q} + \frac{1}{3}t^3q^6 = \text{const.} \tag{7}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统(2)有积分(7),求与之相应的 Lie 对称性.方程(7.5.20),(7.5.22)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi} = q + 2tq^{\cdot} \\ L\xi_0 + t^2 q^{\cdot}\,\bar{\xi} + G = t^3 q^{\cdot 2} + t^2 qq^{\cdot} + \dfrac{1}{3}t^3 q^6 \end{cases} \tag{8}$$

由此解得

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{3}t^3 q^6 - t^3 q^{\cdot 2} - G\right) \\ \xi = q + q^{\cdot}(2t + \xi_0) \end{cases} \tag{9}$$

将 ξ 代入确定方程(3),可以验证它成立.因此,不论 ξ_0 取何值,生成元(9)都是 Lie 对称的.

§7.6 准坐标下一般完整系统的 Lie 对称性

本节研究一般完整系统准坐标下运动方程的 Lie 对称性两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求守恒量,包括系统的运动方程,无限小变换和生成元,确定方程,结构方程与守恒量等.另一类是 Lie 对称性逆问题:根据已知守恒量求相应的 Lie 对称性.

7.6.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定.选 n 个彼此独立且相容的准速度

$$\omega_s = a_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k \quad (s=1,\cdots n) \tag{7.6.1}$$

并且有逆变换

$$\dot{q}_s = b_{sk}(\boldsymbol{q})\omega_k \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.6.2}$$

则系统的运动方程可表为[7,8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \omega_s} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_s} + \frac{\partial T^*}{\partial \omega_k}\gamma_{rs}^k\omega_r = P_s^* \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.6.3}$$

其中

$$\begin{cases} \gamma_{rs}^k = \left(\dfrac{\partial a_{kt}}{\partial q_m} - \dfrac{\partial a_{km}}{\partial q_t}\right)b_{mr}b_{ts} \\ T^*(t,q_s,\omega_s) = T(t,q_s,b_{sk}\omega_k) \end{cases} \tag{7.6.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_s} = b_{ks} \frac{\partial}{\partial q_k} P_s^* = Q_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \omega_s} \tag{7.6.5}$$

将 P_s^* 分为有势的 $P_s^{*'}$ 和非势的 $P_s^{*''}$，则方程(7.6.3)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_k} \gamma_{rs}^k \omega_r = P_s^{*''} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.6.6}$$

将方程(7.6.6)展开，假设可求出所有 $\dot{\omega}_s$，并简记作

$$\dot{\omega}_s = g_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.6.7}$$

7.6.2 无限小变换与生成元

引入时间和准坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \Delta \pi_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{7.6.8}$$

其展开式为

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \\ \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{7.6.9}$$

注意到，式(7.6.8)中 π_s, π_s^* 只是一种记号，而 $\Delta \pi_s$ 是有意义的.

引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial \pi_s} \tag{7.6.10}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \omega_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \omega_s} \tag{7.6.11}$$

以及二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \omega_s \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \dot{\omega}_s \dot{\xi}_0] \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_s} \tag{7.6.12}$$

7.6.3 Lie 对称性的确定方程

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知，方程(7.6.7)在无限小变换(7.6.9)下的不变性归为

$$X^{(2)}(\dot{\omega}_s - g_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})) = 0 \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (7.6.13)$$

如果

$$\dot{\omega}_s = g_s \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (7.6.14)$$

将算子(7.6.12)代入式(7.6.13)并注意到方程(7.6.14),得到

$$\ddot{\xi}_s - \omega_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 g_s = X^{(1)}(g_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (7.6.15)$$

方程(7.6.15)称为准坐标下一般完整力学系统的 Lie 对称性的确定方程.

定义 7.6.1 如果无限小变换(7.6.9)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.6.15),则称相应变换为 Lie 对称变换.

7.6.4 结构方程与守恒量

定理 7.6.1 对于满足确定方程(7.6.15)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$满足结构方程

$$L^* \dot{\xi}_s + X^{(1)}(L^*) + K_s(\xi_s - \omega_s \xi_0) + \dot{G} = 0 \quad (7.6.16)$$

其中

$$K_s = P_s^{*'} - \frac{\partial L^*}{\partial \omega_k} \gamma_{rs}^k \omega_r \quad (7.6.17)$$

则准坐标下一般完整系统的方程存在如下 Lie 对称性守恒量

$$I = L^* \xi_0 + (\xi_s - \omega_s \xi_0) \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} + G = \text{const.} \quad (7.6.18)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dot{L}^* \xi_0 + L^* \dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} (\xi_s - \omega_s \xi_0) + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} (\dot{\xi}_s - \dot{\omega}_s \xi_0 - \omega_s \dot{\xi}_0)$$

$$- L^* \dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L^*) - K_s(\xi_s - \omega_s \xi_0)$$

$$= (\xi_s - \omega_s \xi_0) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} - K_s \right) = 0$$

定理 7.6.2 结构方程(7.6.16)等价于 Noether 等式

$$\frac{\partial L^*}{\partial t} \xi_0 + \frac{\partial L^*}{\partial \pi_s} \xi_s + \left(L^* - \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} \omega_s \right) \dot{\xi}_0 + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s} \dot{\xi}_s + K_s(\xi_s - \omega_s \xi_0) = -\dot{G} \quad (7.6.19)$$

定理 7.6.3 结构方程(7.6.16)归为如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L^*}{\partial t}\xi_0+\dfrac{\partial L^*}{\partial \pi_s}\xi_s+\left(L^*-\dfrac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\omega_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \pi_s}\omega_s\right) \\ \qquad +\dfrac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s}{\partial \pi_k}\omega_k\right)+K_s(\xi_s-\omega_s\xi_0)=-\dfrac{\partial G}{\partial t}-\dfrac{\partial G}{\partial \pi_s}\omega_s \\ \left(L^*-\dfrac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\omega_k\right)\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \omega_s}+\dfrac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\dfrac{\partial \xi_k}{\partial \omega_s}=-\dfrac{\partial G}{\partial \omega_s} \quad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \tag{7.6.20}$$

定理 7.6.4 准坐标下完整系统的 Lie 对称性与 Noether 对称性有同样的守恒量形式(7.6.18).

7.6.5 Lie 对称性逆问题

准坐标下一般完整系统 Lie 对称性逆问题的提法如下:由已知守恒量来求相应的 Lie 对称性.这类逆问题的解法如下:首先,利用 Noether 理论,根据已知积分来求相应的 Noether 对称性;其次,将所得 Noether 对称性的生成元代入 Lie 对称性的确定方程,检验是否满足,如果满足,则对称性是 Lie 的.

首先,按 Noether 理论求与积分对应的 Noether 对称性.假设系统有积分

$$I=I(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})=\text{const.} \tag{7.6.21}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial \pi_s}\omega_s+\frac{\partial I}{\partial \omega_s}\dot{\omega}_s=0 \tag{7.6.22}$$

再将方程(7.6.6)两端同时乘以 $\bar{\xi}_s=\xi_s-\omega_s\xi_0$,并对 s 求和,得

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}-\frac{\partial L^*}{\partial \pi_s}+\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{rs}^k\omega_r-P_s^{*\cdot}\right)=0 \tag{7.6.23}$$

将式(7.6.22)与(7.6.23)相加,分出含 $\dot{\omega}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s\frac{\partial^2 L^*}{\partial \omega_s\partial \omega_k}-\frac{\partial I}{\partial \omega_k}=0 \quad (k=1,\cdots,n) \tag{7.6.24}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}^*_{sk}\frac{\partial I}{\partial \omega_k} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.6.25}$$

其中

$$\begin{cases} \tilde{h}^*_{sk}h^*_{kr} = \delta_{sr} \\ h^*_{sk} = \dfrac{\partial^2 L^*}{\partial \omega_s \partial \omega_k} \end{cases} \tag{7.6.26}$$

令积分(7.6.21)等于守恒量(7.6.18),即令

$$L^*\xi_0 + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\bar{\xi}_s + G = I \tag{7.6.27}$$

这样,由方程(7.6.25),(7.6.27)便可求出生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应系统的 Noether 对称性.

其次,在 Noether 对称性中寻找 Lie 对称性.将由方程(7.6.25),(7.6.27)确定的 Noether 对称性生成元代入 Lie 对称性的确定方程(7.6.15),如果它们满足,便是 Lie 对称性.

定理 7.6.5 如果由式(7.6.25),(7.6.27)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.6.15),则无限小变换(7.6.9)是 Lie 对称的.

7.6.6 算 例

刚体绕定点转动的 Euler 动力学方程的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,列写准坐标下的运动方程.令

$$q_1 = \psi, q_2 = \theta, q_3 = \varphi \tag{1}$$

取准速度为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{q}_1 \sin q_2 \sin q_3 + \dot{q}_2 \cos q_3 \\ \omega_2 = \dot{q}_1 \sin q_2 \cos q_3 - \dot{q}_2 \sin q_3 \\ \omega_3 = \dot{q}_1 \cos q_2 + \dot{q}_3 \end{cases} \tag{2}$$

则有

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \omega_1 \dfrac{\sin q_3}{\sin q_2} + \omega_2 \dfrac{\cos q_3}{\sin q_2} \\ \dot{q}_2 = \omega_1 \cos q_3 - \omega_2 \sin q_3 \\ \dot{q}_3 = -\omega_1 \sin q_3 \operatorname{ctg} q_2 - \omega_2 \cos q_3 \operatorname{ctg} q_2 + \omega_3 \end{cases} \tag{3}$$

于是有

$$\begin{cases} a_{11} = \sin q_2 \sin q_3, \quad a_{12} = \cos q_3, \quad a_{13} = 0 \\ a_{21} = \sin q_2 \cos q_3, \quad a_{22} = -\sin q_3, \quad a_{23} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_{31} = \cos q_2, \quad a_{32} = 0, \quad a_{33} = 1 \\ b_{11} = \dfrac{\sin q_3}{\sin q_2}, \quad b_{12} = \dfrac{\cos q_3}{\sin q_2}, \quad b_{13} = 0 \\ b_{21} = \cos q_3, \quad b_{22} = -\sin q_3, \quad b_{23} = 0 \\ b_{31} = -\sin q_3 \operatorname{ctg} q_2, \quad b_{32} = -\cos q_3 \operatorname{ctg} q_2, \quad b_{33} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

计算 Boltzmann 三标记号,得

$$\begin{cases} \gamma_{23}^1 = -\gamma_{32}^1 = -1, \gamma_{31}^2 = -\gamma_{13}^2 = -1 \\ \gamma_{12}^3 = -\gamma_{21}^3 = -1 \end{cases} \tag{6}$$

其余为零.又

$$L^* = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \tag{7}$$

其中 A, B, C 为主惯性矩.进行下列计算

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_1} = A\omega_1, \frac{\partial L^*}{\partial \omega_2} = B\omega_2, \frac{\partial L^*}{\partial \omega_3} = C\omega_3$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \pi_1} = \frac{\partial L^*}{\partial \pi_2} = \frac{\partial L^*}{\partial \pi_3} = 0$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{r1}^k \omega_r = \frac{\partial L^*}{\partial \omega_3}\gamma_{21}^3 \omega_2 + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_2}\gamma_{31}^2 \omega_3 = (C - B)\omega_2 \omega_3$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{r2}^k \omega_r = (A - C)\omega_3 \omega_1$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial \omega_k}\gamma_{r3}^k \omega_r = (B - A)\omega_1 \omega_2$$

$$K_1 = P_1^* - (C - B)\omega_2 \omega_3$$

$$K_2 = P_2^* - (A - C)\omega_3\omega_1$$

$$K_3 = P_3^* - (B - A)\omega_1\omega_2$$

将这些表达式代入方程(7.6.6),得到 Euler 动力学方程

$$\begin{cases} A\,\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = P_1^* \\ B\,\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = P_2^* \\ C\,\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = P_3^* \end{cases} \tag{8}$$

由此解得

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \dfrac{B - C}{A}\omega_2\omega_3 + \dfrac{P_1^*}{A}, \dot{\omega}_2 = \dfrac{C - A}{B}\omega_3\omega_1 + \dfrac{P_2^*}{B} \\ \dot{\omega}_3 = \dfrac{A - B}{C}\omega_1\omega_2 + \dfrac{P_3^*}{C} \end{cases} \tag{9}$$

假设非势广义力为零,即

$$P_1^* = P_2^* = P_3^* = 0$$

则方程(9)成为

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \dfrac{B - C}{A}\omega_2\omega_3 \\ \dot{\omega}_2 = \dfrac{C - A}{B}\omega_3\omega_1 \\ \dot{\omega}_3 = \dfrac{A - B}{C}\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{10}$$

第二步,建立确定方程并求解.对方程(10),确定方程(7.6.15)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \omega_1\,\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\dfrac{B - C}{A}\omega_2\omega_3\right) = \dfrac{B - C}{A}[\,\omega_3(\dot{\xi}_2 - \omega_2\dot{\xi}_0) \\ \qquad + \omega_2(\dot{\xi}_3 - \omega_3\dot{\xi}_0)\,] \\ \ddot{\xi}_2 - \omega_2\,\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\dfrac{C - A}{B}\omega_3\omega_1\right) = \dfrac{C - A}{B}[\,\omega_1(\dot{\xi}_3 - \omega_3\dot{\xi}_0) \\ \qquad + \omega_3(\dot{\xi}_1 - \omega_1\dot{\xi}_0)\,] \\ \ddot{\xi}_3 - \omega_3\,\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\dfrac{A - B}{C}\omega_1\omega_2\right) = \dfrac{A - B}{C}[\,\omega_2(\dot{\xi}_1 - \omega_1\dot{\xi}_0) \\ \qquad + \omega_1(\dot{\xi}_2 - \omega_2\dot{\xi}_0)\,] \end{cases} \tag{11}$$

方程(11)有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi_s = \omega_s; X_1^{(0)} = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \pi_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \pi_2} + \omega_3 \frac{\partial}{\partial \pi_3} \tag{12}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_s = 0; X_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{13}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = 0; X_3^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \pi_1} \tag{14}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = 0; X_4^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \pi_2} \tag{15}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_3 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0; X_5^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \pi_3} \tag{16}$$

它们都对应系统的 Lie 对称性. 第三步, 建立结构方程并求守恒量. 对生成元(12)—(16), 结构方程(7.6.16)分别给出

$$G_1 = -\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \tag{17}$$

$$G_2 = 0 \tag{18}$$

$$(B - C)\omega_2\omega_3 + \dot{G}_3 = 0 \tag{19}$$

$$(C - A)\omega_3\omega_1 + \dot{G}_4 = 0 \tag{20}$$

$$(A - B)\omega_1\omega_2 + \dot{G}_5 = 0 \tag{21}$$

对式(12), (17), 守恒量(7.6.18)给出积分

$$I_1 = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = \text{const.} \tag{22}$$

对式(13), (18), 守恒量(7.6.18)给出积分

$$I_2 = -\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = \text{const.} \tag{23}$$

对式(19)—(21), 找不到相应的规范函数, 因此, 对生成元(14)—(16)没有相应的守恒量. 积分(22)或(23)是能量积分.

其次, 研究 Lie 对称性逆问题. 假设系统有积分

$$I = \frac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) = \text{const.} \tag{24}$$

求与其相应的 Lie 对称性. 方程(7.6.25), (7.6.27)给出

$$\begin{cases} \tilde{\xi}_1 = A\omega_1,\ \tilde{\xi}_2 = B\omega_2,\ \tilde{\xi}_3 = C\omega_3 \\ L^* \xi_0 + A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 + G = \dfrac{1}{2}(A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2) \end{cases} \tag{25}$$

可以证明,不论 ξ_0 取何值,由式(25)确定的生成元 ξ_0, ξ_s 都不满足确定方程(11).因此,系统不存在与积分(24)相应的 Lie 对称性.

§7.7 有多余坐标完整力学系统的 Lie 对称性

本节研究有多余坐标完整力学系统的 Lie 对称性两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由已知 Lie 对称性求相应的守恒量,包括系统的运动方程、确定方程、限制方程、结构方程与守恒量形式等.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量求相应的 Lie 对称性.

7.7.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定.为方便计算及其他需要,选 m 个多余坐标 $q_{n+\gamma}(\gamma=1,\cdots,m)$,并有 m 个理想双面完整约束

$$f_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma}) = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,m) \tag{7.7.1}$$

约束(7.7.1)对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\delta q_u = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,m;\ u = 1,\cdots,n+m) \tag{7.7.2}$$

由 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(7.7.2),利用通常的 Lagrange 乘子法,得到系统的运动微分方程[7,8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial T}{\partial q_u} = Q_u + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial q_u} \qquad (u = 1,\cdots,n+m) \tag{7.7.3}$$

或写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = Q''_u + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial q_u} \qquad (u = 1,\cdots,n+m) \tag{7.7.4}$$

其中 Q''_s 为非势广义力.由约束方程(7.7.1)和运动方程(7.7.4)可求出乘子 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,记作

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (\beta = 1, \cdots, m) \tag{7.7.5}$$

将式(7.7.5)代入方程(7.7.4),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} = Q''_u + \Lambda_u \quad (u = 1, \cdots, n+m) \tag{7.7.6}$$

其中

$$\Lambda_u = \Lambda_u(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u} \tag{7.7.7}$$

已表为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数.假设系统非奇异,则由方程(7.7.6)可解出所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_u = \alpha_u(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (u = 1, \cdots, n+m) \tag{7.7.8}$$

称方程(7.7.8)为与有多余坐标完整系统(7.7.1),(7.7.4)相应的完整系统的运动方程.如果运动初始条件满足约束方程(7.7.1),那么方程(7.7.8)的解就给出所论系统的运动.

7.7.2 无限小群变换和确定方程

引入无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ q_u^*(t^*) = q_u(t) + \Delta q_u \quad (u = 1, \cdots, n+m) \end{cases} \tag{7.7.9}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_u^*(t^*) = q_u(t) + \varepsilon\xi_u(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{7.7.10}$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_u\frac{\partial}{\partial q_u} \tag{7.7.11}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_u - \dot{q}_u\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \tag{7.7.12}$$

以及二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_u - \dot{q}_u\dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_u\dot{\xi}_0]\frac{\partial}{\partial \dot{q}_u} \quad (7.7.13)$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知,方程(7.7.8)在无限小变换(7.7.10)下的不变性归为满足如下确定方程

$$\ddot{\xi}_u - \dot{q}_u\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_u = X^{(1)}(\alpha_u) \quad (7.7.14)$$

$$(u = 1, \cdots, n+m)$$

定义 7.7.1 如果无限小变换(7.7.10)的生成元 ξ_0, ξ_u 满足确定方程(7.7.14),则称无限小变换为相应完整系统(7.7.8)的 Lie 对称变换.

7.7.3 限制方程

注意到,在由方程(7.7.1),(7.7.4)导出式(7.7.5)的过程中,需将约束方程(7.7.1)对时间求两次导数,即

$$\dot{f}_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (7.7.15)$$

$$\ddot{f}_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (7.7.16)$$

约束方程(7.7.1)在无限小变换(7.7.10)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(0)}[f_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma})]\Big|_{f_\beta = 0} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (7.7.17)$$

关系(7.7.15),(7.7.16)的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}[\dot{f}_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma})]\Big|_{\dot{f}_\beta = 0} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (7.7.18)$$

$$X^{(2)}[\ddot{f}_\beta(t, q_s, q_{n+\gamma})]\Big|_{\substack{\dot{f}_\beta = 0 \\ \ddot{f}_\beta = 0}} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \quad (7.7.19)$$

定理 7.7.1 只要满足限制方程(7.7.17),则必满足限制方程(7.7.18),(7.7.19).

证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{(0)}(f_\beta) - X^{(1)}(\dot{f}_\beta) = \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial t} + \frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0 = \dot{f}_\beta\dot{\xi}_0 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X^{(1)}(\dot{f}_\beta) - X^{(2)}(\ddot{f}_\beta) = \left(\frac{\partial^2 f_\beta}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f_\beta}{\partial t \partial q_u}\dot{q}_u\right.$$

$$+\frac{\partial^2 f_\beta}{\partial q_u \partial q_v}\dot{q}_u\dot{q}_v+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\dot{q}_u\Big)\dot{\xi}_0 \quad = \dot{f}_\beta\dot{\xi}_0=0$$

定义 7.7.2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_u 满足确定方程(7.7.14)和限制方程(7.7.17),则称变换(7.7.10)为有多余坐标完整系统的弱 Lie 对称变换.

其次,注意到虚位移方程(7.7.2)对无限小生成元 ξ_0, ξ_u 还有附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}(\xi_u-\dot{q}_u\xi_0)=0 \quad (\beta=1,\cdots,m) \tag{7.7.20}$$

定义 7.7.3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_u 满足确定方程(7.7.14)、限制方程(7.7.17)和附加限制方程(7.7.20),则称变换(7.7.10)为有多余坐标完整系统的强 Lie 对称变换.

定理 7.7.2 对有多余坐标的完整系统,弱 Lie 对称性等价于其强 Lie 对称性.

证明

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}(\xi_u-\dot{q}_u\xi_0)=\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}\xi_u+\frac{\partial f_\beta}{\partial t}\xi_0=X^{(0)}(f_\beta)$$

7.7.4 结构方程与守恒量

Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出守恒量的存在条件和形式.

定理 7.7.3[9] 对于满足确定方程(7.7.14)和限制方程(7.7.17)的无限小生成元 ξ_0, ξ_u,如果存在满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q''_u+\Lambda_u)(\xi_u-\dot{q}_u\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{7.7.21}$$

的规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,则有多余坐标完整系统存在如下形式的守恒量

$$I=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_u}(\xi_u-\dot{q}_u\xi_0)+G=\text{const.} \tag{7.7.22}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dot{L}\xi_0+L\dot{\xi}_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_u}(\xi_u-\dot{q}_u\xi_0)+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_u}(\dot{\xi}_u-\ddot{q}_u\xi_0-\dot{q}_u\dot{\xi}_0)$$

$$-L\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L) - (Q''_u + \Lambda_u)(\xi_u - \dot{q}_u\xi_0)$$

$$= (\xi_u - \dot{q}_u\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u} - \frac{\partial L}{\partial q_u} - Q''_u - \Lambda_u\right) = 0$$

实际上,由式(7.7.7),(7.7.17)知,结构方程(7.7.21)中带 Λ_u 的项可以去掉.

由 Lie 对称性求相应的守恒量,称为 Lie 对称性正问题.正问题的解法如下:首先,对已知有多余坐标完整系统建立 Lie 对称性的确定方程(7.7.14)和限制方程(7.7.17),并由此求出 Lie 对称性的生成元 ξ_0, ξ_u;其次,将所得生成元 ξ_0, ξ_u 代入结构方程(7.7.21)求出 $\dot{G}$,如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数,则可找到规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$;最后,将所得 ξ_0, ξ_u, G 代入式(7.7.22),便可求出 Lie 对称性的守恒量.

7.7.5 Lie 对称性逆问题

现在研究上述问题的逆问题:由已知守恒量(积分)来寻找相应的 Lie 对称性.

首先,按 Noether 逆定理由已知守恒量求相应的 Noether 对称性.在 §3.6 中已知,对有多余坐标的完整系统的 Noether 对称性,有 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_u}\xi_u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}\dot{\xi}_u + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}\dot{q}_u\right)\dot{\xi}_0 + Q''_u(\xi_u - \dot{q}_u\xi_0) = -\dot{G} \tag{7.7.23}$$

以及约束的限制条件

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial q_u}(\xi_u - \dot{q}_u\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, m) \tag{7.7.24}$$

定理 7.7.4 对有多余坐标的完整系统,Noether 等式(7.7.23)等价于 Lie 对称性的结构方程(7.7.21);两种对称性有同样的守恒量(7.7.22).

证明 前面已指出,结构方程(7.7.21)中的带 Λ_u 的项可以去掉,又有

$$X^{(1)}(L)=\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_u}\xi_u+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}(\dot{\xi}_u-\dot{q}_u\dot{\xi}_0)$$

故 Noether 等式(7.7.23)与结构方程(7.7.21)一致.证毕.

假设系统有积分

$$I=I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const.} \tag{7.7.25}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_u}\dot{q}_u+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_u}\ddot{q}_u=0 \tag{7.7.26}$$

将方程(7.7.6)两端同时乘以 $\bar{\xi}_u=\xi_u-\dot{q}_u\xi_0$,并对 u 求和,得

$$\bar{\xi}_u\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}-\frac{\partial L}{\partial q_u}-Q''_u-\Lambda_u\right)=0 \tag{7.7.27}$$

将式(7.7.26),(7.7.27)相加,分出含 $\ddot{q}_v$ 的项,由其系数为零,得

$$\bar{\xi}_u\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial \dot{q}_v}-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_v}=0\quad(v=1,\cdots,n+m) \tag{7.7.28}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_u=\tilde{h}_{uv}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_v}\quad(u=1,\cdots,n+m) \tag{7.7.29}$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{h}_{uv}h_{vw}=\delta_{uw}\\ h_{uv}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_u\partial \dot{q}_v}\end{cases} \tag{7.7.30}$$

再令积分(7.7.25)等于守恒量(7.7.22),即

$$L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_u}\bar{\xi}_u+G=I \tag{7.7.31}$$

这样,在给定规范函数 G 下,便可由方程(7.7.29),(7.7.31)找到无限小变换生成元 ξ_0,ξ_u.它们对应相应完整系统(7.7.8)的 Noether 对称性.如果生成元还满足限制条件(7.7.24),则它们对应所论有多余坐标完整系统的 Noether 对称性.

其次,用确定方程(7.7.14)是否满足来判断所得对称性是否 Lie 的.

定理 7.7.5 如果由式(7.7.29),(7.7.31)确定的无限小生

成元 ξ_0, ξ_u 满足限制条件(7.7.24)且满足确定方程(7.7.14),则所得生成元对应有多余坐标完整系统的 Lie 对称性.

归纳起来, Lie 对称性逆问题的解法如下:首先,建立方程(7.7.29),(7.7.31),并由此求出无限小变换生成元 ξ_0, ξ_u;其次,验证条件(7.7.24);最后,验证确定方程(7.7.14).如果仅满足确定方程(7.7.14),则给出相应完整系统(7.7.8)的 Lie 对称性;如果满足确定方程(7.7.14)且满足限制条件(7.7.24),则给出有多余坐标完整系统的 Lie 对称性.

7.7.6 算　　例

有多余坐标系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\omega^2 q_1^2)-mgq_2 \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q''_1=-m\dot{q}_2, Q''_2=m\dot{q}_1 \tag{2}$$

所受约束为

$$f=q_2-aq_1^2=0 \tag{3}$$

其中 m, g, ω, a 均为正常数,试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立方程(7.7.8).方程(7.7.4)给出

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1-m\omega^2 q_1=-m\dot{q}_2-2\lambda a q_1 \\ m\ddot{q}_2+mg=m\dot{q}_1+\lambda \end{cases} \tag{4}$$

将式(3)对 t 求两次导数,得

$$\ddot{q}_2-2a\dot{q}_1^2-2aq_1\ddot{q}_1=0 \tag{5}$$

由方程(4),(5)求得乘子

$$\lambda=\frac{m}{1+4a^2q_1^2}(2a\omega^2q_1^2+2a\dot{q}_1^2+g-\dot{q}_1-2aq_1\dot{q}_2) \tag{6}$$

将式(6)代入方程(4),并注意到约束方程(3),解得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{q_1}{1+4a^2q_1^2}(\omega^2 - 4a^2\dot{q}_1^2 - 2ag) = \alpha_1 \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{2a}{1+4a^2q_1^2}(\omega^2 q_1^2 + \dot{q}_1^2 - 2agq_1q_1^2) = \alpha_2 \end{cases} \tag{7}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(7.7.14)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_1 = X^{(1)}(\alpha_1) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_2 = X^{(1)}(\alpha_2) \end{cases} \tag{8}$$

方程(8)有如下解

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \dot{q}_1, \quad \xi_2 = \dot{q}_2; \quad X_1^{(0)} = \dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{9}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = t; \quad X_2^{(0)} = t\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{10}$$

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1; \quad X_3^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q_2} \tag{11}$$

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_1 = \xi_2 = 0; \quad X_4^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{12}$$

限制方程(7.7.17)给出

$$\xi_2 - 2aq_1\xi_1 = 0 \tag{13}$$

显然,生成元(9),(12)满足限制方程(13);生成元(10),(11)不满足限制方程(13).因此,生成元(10),(11)只对应相应完整系统(7)的 Lie 对称性,不是有多余坐标系统的 Lie 对称性.生成元(9),(12)才对应有多余坐标系统的 Lie 对称性.第三步,建立结构方程并求守恒量.对生成元(9),结构方程(7.7.21)给出

$$G_1 = -\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2 + mgq_2 \tag{14}$$

对生成元(12),给出

$$G_2 = 0 \tag{15}$$

将式(9),(14)代入式(7.7.22),得到守恒量

$$I_1 = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2 q_1^2) + mgq_2 = \text{const.} \tag{16}$$

此即能量积分.将式(12),(15)代入式(7.7.22),得到守恒量

$$I_2 = -I_1 = \text{const.} \tag{17}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题,假设系统有积分

$$I = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2 q_1^2) + mgq_2 = \text{const.} \tag{18}$$

方程(7.7.29),(7.7.31)给出

$$\bar{\xi}_1 = \dot{q}_1,\ \bar{\xi}_2 = \dot{q}_2 \tag{19}$$

$$L\xi_0 + m\dot{q}_1\bar{\xi}_1 + m\dot{q}_2\bar{\xi}_2 + G = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2 q_1^2) + mgq_2 \tag{20}$$

由此解得

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{L}\left[mgq_2 - \dfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \omega^2 q_1^2) - G\right] \\ \xi_1 = \dot{q}_1(1+\xi_0),\ \xi_2 = \dot{q}_2(1+\xi_0) \end{cases} \tag{21}$$

容易验证,生成元(21)满足限制方程(13)且满足确定方程(8).因此,不论取怎样的 ξ_0,由生成元(21)确定的变换都是系统的 Lie 对称变换.

§7.8 变质量完整力学系统的 Lie 对称性

本节研究变质量完整力学系统的 Lie 对称性两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求守恒量,包括系统的运动方程、Lie 对称性的确定方程、结构方程与守恒量形式等.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知积分找到相应的 Lie 对称性.

7.8.1 系统的运动方程

研究 N 个质点组成的力学系统.在时刻 t,第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,\cdots,N)$;在时刻 $t+\mathrm{d}t$,由质点分离(或并入)的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$.假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定,并假设[10]

$$m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (i=1,\cdots,N) \tag{7.8.1}$$

运动方程可表为形式[11]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+P_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.8.2}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数，Q''_s 为非势广义力，P_s 为广义反推力，有[10,11]

$$P_s=(\boldsymbol{R}_i+m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)$$
$$(s=1,\cdots,n) \tag{7.8.3}$$

这里 $\boldsymbol{r}_i$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度，而

$$\boldsymbol{R}_i=\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i \tag{7.8.4}$$

而 $\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度. 注意，式(7.8.4)不对 i 求和.

将方程(7.8.2)展开，可求出所有广义加速度[12]，记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.8.5}$$

7.8.2 无限小变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^*=t+\Delta t \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \end{cases} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.8.6}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.8.7}$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} \tag{7.8.8}$$

和它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{7.8.9}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知，方程(7.8.5)在无限小变换(7.8.7)下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.8.10}$$

定义 7.8.1 如果无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.8.10),则称变换为变质量完整力学系统的 Lie 对称变换.

7.8.3 结构方程与守恒量

对变质量完整力学系统,Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出守恒量的存在条件和形式.

定理 7.8.1 对于满足确定方程(7.8.10)的生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q''_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{7.8.11}$$

则变质量完整系统存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \tag{7.8.12}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\ &\quad - L\dot{\xi}_0 - X^{(1)}(L) - (Q''_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\\ &= (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s - P_s\right) = 0\end{aligned}$$

对于常质量完整系统,定理 7.8.1 退化为定理 7.5.1.

定理 7.8.2 结构方程(7.8.11)等价于 Noether 等式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0\\ &\quad + (Q''_s + P_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G}\end{aligned} \tag{7.8.13}$$

定理 7.8.3 对变质量完整系统,Lie 对称性与 Noether 对称性有同样的守恒量形式(7.8.12).

上述 Lie 对称性正问题的解法归纳如下:首先,对给定的变质量完整系统建立确定方程(7.8.10),并由此求出生成元 ξ_0, ξ_s;其次,将所得生成元代入结构方程(7.8.11)求得 $\dot{G}$,如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数,则可求出规范函数 G;最后,将所得 ξ_0, ξ_s, G

代入式(7.8.12)求得 Lie 对称性的守恒量.

7.8.4 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法如下:根据已知守恒量(积分)来求相应的 Lie 对称性. Lie 对称性逆问题的解法如下:根据 Noether 理论按已知积分求相应的 Noether 对称性;将 Noether 对称性代入 Lie 对称性的确定方程,检验是否满足.

假设变质量完整系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{7.8.14}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{7.8.15}$$

将方程(7.8.2)两端同时乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s \xi_0 \tag{7.8.16}$$

并对 s 求和,得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s - P_s\right) = 0 \tag{7.8.17}$$

由式(7.8.3)知,P_s 在一般情形对 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是线性的,记作

$$P_s = W_{sk}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\,\ddot{q}_k + W_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{7.8.18}$$

其中

$$W_{sk} = \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_k}(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial^2 m_i}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{7.8.19}$$

如果

$$\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (i = 1, \cdots, N; k = 1, \cdots, n) \tag{7.8.20}$$

则有

$$W_{sk} = 0 \tag{7.8.21}$$

将式(7.8.15),(7.8.17)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right) \bar{\xi}_s - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{7.8.22}$$

假设

$$\det(\omega_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right) \neq 0 \tag{7.8.23}$$

则由方程(7.8.22)解得

$$\bar{\xi}_s = \tilde{\omega}_{sk} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.8.24}$$

其中

$$\tilde{\omega}_{sk}\omega_{kr} = \delta_{sr} \tag{7.8.25}$$

再令积分(7.8.14)等于守恒量(7.8.12),即

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \bar{\xi}_s + G = I \tag{7.8.26}$$

这样,由方程(7.8.24),(7.8.26)在给定规范函数 G 下可求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s,而这生成元对应于变质量完整力学系统的 Noether 对称性.

定理 7.8.4 结构方程(7.8.11)归为如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) \\ + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) + (Q''_s + W_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q_s}\dot{q}_s \\ \left(L - \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right)\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_s} + \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dfrac{\partial \xi_k}{\partial \dot{q}_s} + W_{ks}(\xi_k - \dot{q}_k\xi_0) = -\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_s} \end{cases} \tag{7.8.27}$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

系统的守恒量不一定有相应的 Lie 对称性.下面的定理给出守恒量导致 Lie 对称性的条件.

定理 7.8.5 如果由方程(7.8.24),(7.8.26)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Lie 对称性的确定方程(7.8.10),那么所得对称性就是变质量完整系统的 Lie 对称性.

上述 Lie 对称性逆问题的解法如下:首先,按方程(7.8.24),

(7.8.26)求出与已知积分相应的 Noether 对称性;其次,将所得 Noether 对称性代入 Lie 对称性的确定方程(7.8.10),如果它们满足,则所得对称性是 Lie 的,否则不是 Lie 的.

7.8.5 算　　例

研究一变质量质点,其质量为

$$m = m_0 e^{-\alpha t} \quad (m_0 = \text{const.}, \alpha = \text{const.}, \alpha > 0) \tag{1}$$

Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{2}$$

非势广义力为

$$\begin{cases} Q''_1 = Q''_1(t, q_1, \dot{q}_1, \dot{q}_2) \\ Q''_2 = \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_1 \end{cases} \tag{3}$$

微粒分离的绝对速度为零,即

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -\dot{q}_1 \boldsymbol{i} - \dot{q}_2 \boldsymbol{j} \tag{4}$$

试研究此变质量系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立确定方程并求解.由式(7.8.3),(7.8.4)和(4)知

$$P_1 = P_2 = 0 \tag{5}$$

方程(7.8.2)给出

$$(m\dot{q}_1)^{\cdot} = Q''_1, (m\dot{q}_2)^{\cdot} = \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_1 \tag{6}$$

由此求得广义加速度

$$\ddot{q}_1 = \alpha \dot{q}_1 + \frac{Q''_1}{m}, \ddot{q}_2 = \alpha \dot{q}_2 + \frac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_1) \tag{7}$$

确定方程(7.8.10)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\alpha\dot{q}_1 + \dfrac{Q''_1}{m}\right) = \xi_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{Q''_1}{m}\right) + \xi_1\dfrac{\partial}{\partial q_1}\left(\dfrac{Q''_1}{m}\right) \\ \quad + (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\left[\alpha + \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\dfrac{Q''_1}{m}\right)\right] + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0)\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\dfrac{Q''_1}{m}\right) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left[\alpha\dot{q}_2 + \dfrac{1}{m}(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1)\right] = \xi_0\left(-\dfrac{1}{m^2}\dfrac{\partial m}{\partial t}\right)(\dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1) \\ \quad + \dfrac{1}{m}\dot{q}_1\xi_1 + \dfrac{1}{m}q_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + \left(\dfrac{1}{m} + \alpha\right)(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{8}$$

方程(8)有解

$$\xi_1 = \dot{q}_1\xi_0,\ \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0 \qquad (\xi_0\ 任意) \tag{9}$$

第二步,建立结构方程并求解.结构方程(7.8.11)给出

$$L\dot{\xi}_0 + \dot{L}\xi_0 + \dot{q}_2 + q_1\dot{q}_1 + \dot{G} = 0 \tag{10}$$

由此解得

$$G = -L\xi_0 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 \tag{11}$$

第三步,求守恒量.将式(9),(11)代入式(7.8.12),得到守恒量

$$I = m(t)\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 = \text{const.} \tag{12}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分(12),来求相应的 Lie 对称性.第一步,求与积分相应的 Noether 对称性.方程(7.8.24),(7.8.26)给出

$$\bar{\xi}_1 = 0,\ \bar{\xi}_2 = 1 \tag{13}$$

$$L\xi_0 + m(t)\dot{q}_1\bar{\xi}_1 + m(t)\dot{q}_2\bar{\xi}_2 + G = m(t)\dot{q}_2 - q_2 - \frac{1}{2}q_1^2$$

由此求得

$$\begin{cases} \xi_0 = -\dfrac{1}{L}\left(G + q_2 + \dfrac{1}{2}q_1^2\right) \\ \xi_1 = \dot{q}_1\xi_0,\ \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0 \end{cases} \tag{14}$$

其中包含规范函数 G.第二步,由 Noether 对称性求 Lie 对称性.将式(14)代入确定方程(8),可以验证它们满足.因此,对任取的规

范函数 G,生成元(14)对应系统的 Lie 对称性.特别地,取规范函数为

$$G = -q_2 - \frac{1}{2}q_1^2 \tag{15}$$

则有

$$\xi_0 = \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{16}$$

§7.9 事件空间中完整力学系统的 Lie 对称性

本节在事件空间中研究完整力学系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求相应的守恒量,包括系统的运动方程、无限小群变换与确定方程、结构方程与守恒量等.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量找到相应的 Lie 对称性.

7.9.1 系统的运动方程

假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$来确定.建立$(n+1)$维扩充的位形空间,即事件空间,此空间中点的坐标是广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$和时间 t,引入记号

$$x_1 = t, x_{s+1} = q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.9.1}$$

这样,所有变量 $x_\alpha(\alpha=1,\cdots,n+1)$可作为某参数 τ 的已知函数.令 $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$是 C^2 类曲线,使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = x'_\alpha \tag{7.9.2}$$

不同时为零,有

$$\dot{x}_\alpha = \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{x'_\alpha}{x'_1} \tag{7.9.3}$$

假设系统在位形空间中的 Lagrange 函数为

$$L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

非势广义力为

$$Q''_s = Q''_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

则事件空间中的 Lagrange 函数为

$$\Lambda(x_\alpha, x'_\alpha) = x'_1 L\left(x_1, x_2 \cdots, x_{n+1}, \frac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \frac{x'_{n+1}}{x'_1}\right) \tag{7.9.4}$$

事件空间中广义力定义为[13]

$$\begin{cases} P_1 = -Q''_s x'_{s+1} \\ P_{s+1} = x'_1 Q''_s\left(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}, \dfrac{x'_2}{x'_1}, \cdots, \dfrac{x'_{n+1}}{x'_1}\right) \end{cases} \tag{7.9.5}$$

系统的运动方程表为参数形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{7.9.6}$$

下面分析参数方程(7.9.6).

首先,它们中的第一个($\alpha = 1$)代表能量方程.因

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_1} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -H \tag{7.9.7}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = x'_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} \tag{7.9.8}$$

故方程(7.9.6)的第一个有形式

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} + t'\frac{\partial L}{\partial t} = t' Q''_s \dot{q}_s \tag{7.9.9}$$

当

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \; Q''_s \dot{q}_s = 0$$

时,有积分

$$H = \text{const.}$$

其次,($n+1$)个方程(7.9.6)不是彼此独立的,它们有如下联系

$$x'_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha\right) = 0 \tag{7.9.10}$$

最后,当取 $t = \tau$ 时,方程(7.9.6)的第一个成为通常的能量方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} = Q''_s \dot{q}_s \tag{7.9.11}$$

后面 n 个方程成为位形空间中的 Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{7.9.12}$$

注意到,还有两个重要关系容易证明

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}x_\alpha'=\Lambda \tag{7.9.13}$$

$$P_\alpha x_\alpha'=0 \tag{7.9.14}$$

将方程(7.9.6)展开,并求出 x''_{s+1},记作

$$x''_{s+1}=h_s(x_\alpha,x'_\alpha,x''_1) \tag{7.9.15}$$

$$(s=1,\cdots,n;\alpha=1,\cdots,n+1)$$

7.9.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程

引入参数 τ 和事件空间中坐标 x_α 的无限小群变换

$$\begin{cases}\tau^*=\tau+\Delta\tau\\ x_\alpha^*(\tau^*)=x_\alpha(\tau)+\Delta x_\alpha \quad (\alpha=1,\cdots,n+1)\end{cases} \tag{7.9.16}$$

或其展开式

$$\begin{cases}\tau^*=\tau+\varepsilon\xi_0(\tau,x_\alpha,x'_\alpha)\\ x_\alpha^*(\tau^*)=x_\alpha(\tau)+\varepsilon\xi_\alpha(\tau,x_\alpha,x'_\alpha)\end{cases} \tag{7.9.17}$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial\tau}+\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \tag{7.9.18}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\xi'_\alpha-x'_\alpha\xi'_0)\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \tag{7.9.19}$$

将方程(7.9.6)后面 n 个方程表为

$$h_{s+1,k+1}x''_{k+1}=R_{s+1} \quad (s,k=1,\cdots,n) \tag{7.9.20}$$

其中

$$\begin{cases} h_{s+1,k+1}=\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_{k+1}} \\ R_{s+1}=P_{s+1}+\dfrac{\partial\Lambda}{\partial x_{s+1}}-\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x_\beta}x'_\beta-\dfrac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x''_1 \end{cases} \tag{7.9.21}$$

用算子 $X^{(2)}$作用方程(7.9.20),有

$$\begin{aligned} &h_{s+1,k+1}\xi''_{k+1}+\left(\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha\right)x''_{k+1} \\ &\quad+\xi''_0(-h_{s+1,k+1}x'_{k+1})+\xi'_0\left(-\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha-2h_{s+1,k+1}\right)x''_{k+1} \\ &=\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}\xi''_1+\xi''_0\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x'_1\right) \\ &\quad+\xi'_0\left(-\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha+2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x''_1\right) \end{aligned} \tag{7.9.22}$$

可以证明如下关系

$$h_{s+1,k+1}x'_{k+1}+\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x'_1=0 \tag{7.9.23}$$

$$\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha+h_{s+1,k+1}=0 \tag{7.9.24}$$

$$\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x'_\alpha}x'_\alpha-2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x''_1=R_{s+1} \tag{7.9.25}$$

于是方程(7.9.22)中 ξ'_0 和 ξ''_0 的系数均为零.方程(7.9.22)简化为

$$\begin{aligned} &h_{s+1,k+1}\xi''_{k+1}+\left(\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha\right)x''_{k+1} \\ &=\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial R_{s+1}}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha-\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}\xi''_1 \end{aligned} \tag{7.9.26}$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

这就是系统的确定方程.

注意到,事件空间中完整力学系统的确定方程中不含生成元 ξ_0.这与参数 τ 的任意选取有关.

定义 7.9.1 如果无限小变换(7.9.17)的生成元 $\xi_\alpha(\alpha=1,$

…, $n+1$)满足确定方程(7.9.26),则称相应的对称性为事件空间中完整力学系统的 Lie 对称性.

7.9.3 结构方程与守恒量

Lie 对称性不一定能导致守恒量.下面的定理给出守恒量的存在条件和形式.

定理 7.9.1 对于满足确定方程(7.9.26)的无限小生成元 ξ_α,如果存在规范函数 $G=G(x_\alpha,x'_\alpha)$满足结构方程

$$\Lambda\xi'_0+X^{(1)}(\Lambda)+P_\alpha\xi_\alpha+G'=0 \tag{7.9.27}$$

则事件空间中完整力学系统存在如下形式的守恒量

$$I=\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha+G=\text{const.} \tag{7.9.28}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha-\Lambda\xi'_0-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha\\&-\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}(\xi'_\alpha-x'_\alpha\xi'_0)-P_\alpha\xi_\alpha\\=&\xi_\alpha\left(\frac{d}{d\tau}\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}-P_\alpha\right)=0\end{aligned}$$

注意,结构方程(7.9.27)的 ξ'_0 可以消去.

定理 7.9.2 事件空间中完整力学系统的结构方程(7.9.27)等价于 Noether 等式

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha+\frac{\partial\Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi'_\alpha+P_\alpha\xi_\alpha=-G' \tag{7.9.29}$$

定理 7.9.3 事件空间中完整力学系统的 Lie 对称性与 Noether 对称性有同样的守恒量形式(7.9.28).

7.9.4 Lie 对称性逆问题

首先,根据 Noether 理论由已知积分求与其相应的 Noether 对称性.假设方程(7.9.6)有积分

$$I=I(x_\alpha,x'_\alpha)=\text{const.} \tag{7.9.30}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial I}{\partial x_\alpha}x'_\alpha+\frac{\partial I}{\partial x'_\alpha}x''_\alpha=0 \tag{7.9.31}$$

将方程(7.9.6)两端同时乘以 ξ_α 并对 α 求和,得

$$\xi_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}-\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}-P_\alpha\right)=0 \tag{7.9.32}$$

将式(7.9.31),(7.9.32)相加,分出含 x''_β 的项,由其系数为零,得到

$$\xi_\alpha\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}-\frac{\partial I}{\partial x'_\beta}=0\quad(\beta=1,\cdots,n+1) \tag{7.9.33}$$

注意到式(7.9.33)中的$(n+1)$个关系不完全是独立的.再令积分(7.9.30)等于守恒量(7.9.28),即

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha+G=I \tag{7.9.34}$$

这样,在指定规范函数 G 下,可由方程(7.9.33),(7.9.34)求出无限小生成元 $\xi_\alpha(\alpha=1,\cdots,n+1)$.它们对应系统的 Noether 对称性.

其次,用确定方程(7.9.26)是否满足来判断所得对称性是否 Lie 的.

定理 7.9.4 如果由方程(7.9.33),(7.9.34)所确定的无限小生成元 ξ_α 满足确定方程(7.9.26),则所得对称性是 Lie 的.

定理 7.9.4 表明,事件空间中完整力学系统的守恒量不一定有 Lie 对称性.

7.9.5 算　　例

假设二自由度完整系统在位形空间中的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-q_2 \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q''_1=-\dot{q}_2,Q''_2=\dot{q}_1 \tag{2}$$

试研究系统在事件空间中的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统在事件空间中的运动方程.按式(7.9.4),(7.9.5),有

$$\Lambda = x_1' \left\{ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_2'}{x_1'} \right)^2 + \left(\frac{x_3'}{x_1'} \right)^2 \right] - x_3 \right\} \tag{3}$$

$$\begin{cases} P_1 = -Q_1'' x_2' - Q_2'' x_3' = 0 \\ P_2 = x_1' Q_1'' = -x_3' \\ P_3 = x_1' Q_2'' = x_2' \end{cases} \tag{4}$$

又

$$\begin{cases} h_{21} = \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2' \partial x_1'} = -\dfrac{x_2'}{(x_1')^2}, h_{22} = \dfrac{1}{x_1'} \\ h_{23} = 0 \\ h_{33} = \dfrac{1}{x_1'} \\ R_2 = -x_3' + \dfrac{x_2'}{(x_1')^2} x_1'' \\ R_3 = x_2' - x_1' + \dfrac{x_3'}{(x_1')^2} x_1'' \end{cases} \tag{5}$$

于是方程(7.9.20)给出

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1'} x_2'' = -x_3' + \dfrac{x_2'}{(x_1')^2} x_1'' \\ \dfrac{1}{x_1'} x_3'' = x_2' - x_1' + \dfrac{x_3'}{(x_1')^2} x_1'' \end{cases} \tag{6}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(7.9.26)给出

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1'} \xi_2'' - \dfrac{1}{(x_1')^2} \xi_1' x_2'' = -\xi_3' + \dfrac{1}{(x_1')^2} \xi_2' x_1'' \\ \qquad - \dfrac{2x_2'}{(x_1')^3} x_2'' \xi_1' + \dfrac{x_2'}{(x_1')^2} \xi_1'' \\ \dfrac{1}{x_1'} \xi_3'' - \dfrac{1}{(x_1')^2} \xi_1' x_3'' = \xi_2' - \left[1 + \dfrac{2x_3'}{(x_1')^3} x_1'' \right] \xi_1' + \dfrac{x_1''}{(x_1')^2} \xi_3' + \dfrac{x_3'}{(x_1')^2} \xi_1'' \end{cases} \tag{7}$$

方程(7)有如下解

$$\begin{cases}\xi_1 = 1\\ \xi_2 = \xi_3 = 0\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}\xi_2 = 1\\ \xi_1 = \xi_3 = 0\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases}\xi_3 = 1\\ \xi_1 = \xi_2 = 0\end{cases} \tag{10}$$

第三步,求规范函数 G.对式(8),结构方程(7.9.27)给出

$$G_1 = 0 \tag{11}$$

对式(9)给出

$$G_2 = x_3 \tag{12}$$

对式(10)给出

$$G_3 = x_1 - x_2 \tag{13}$$

第四步,求守恒量.对式(8),(11),守恒量式(7.9.28)给出

$$I_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)^2 + \left(\frac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right] - x_3 = \text{const.} \tag{14}$$

它代表能量积分.对式(9),(12),给出

$$I_2 = \frac{x'_2}{x'_1} + x_3 = \text{const.} \tag{15}$$

对式(10),(13)给出

$$I_3 = \frac{x'_3}{x'_1} + x_1 - x_2 = \text{const.} \tag{16}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题,假设系统有积分

$$I = \frac{x'_2}{x'_1} + x_3 = \text{const.} \tag{17}$$

来求与其相应的 Lie 对称性.第一步,求 Noether 对称性.方程(7.9.33),(7.9.34)给出

$$
\begin{cases}
\xi_1 \dfrac{1}{(x'_1)^3}\left[(x'_2)^2+(x'_3)^2\right]+\xi_2\left[-\dfrac{x'_2}{(x'_1)^2}\right] \\
\quad +\xi_3\left[-\dfrac{x'_3}{(x'_1)^2}\right]=-\dfrac{x'_2}{(x'_1)^2} \\
\xi_1\left[-\dfrac{x'_2}{(x'_1)^2}\right]+\xi_2\left(\dfrac{1}{x'_1}\right)=\dfrac{1}{x'_1} \\
\xi_1\left[-\dfrac{x'_3}{(x'_1)^2}\right]+\xi_3\left(\dfrac{1}{x'_1}\right)=0 \\
\left\{-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{x'_2}{x'_1}\right)^2+\left(\dfrac{x'_3}{x'_1}\right)^2\right]-x_3\right\}\xi_1+\dfrac{x'_2}{x'_1}\xi_2+\dfrac{x'_3}{x'_1}\xi_3+G=\dfrac{x'_2}{x'_1}+x_3
\end{cases}
\tag{18}
$$

方程(18)中取

$$G=0 \tag{19}$$

则有

$$\xi_1=0,\ \xi_2=1,\ \xi_3=0 \tag{20}$$

它对应系统的 Noether 对称性. 第二步, 求 Lie 对称性. 将所得生成元(20)代入确定方程(7), 可以验证它们满足. 因此, 生成元(20)也对应 Lie 对称性.

§7.10 相对运动动力学系统的 Lie 对称性

本节研究完整力学系统相对运动动力学方程的 Lie 对称性与守恒量的两类问题. 一类是 Lie 对称性正问题: 由 Lie 对称性找到相应的守恒量. 另一类是 Lie 对称性逆问题: 由守恒量求得相应的 Lie 对称性.

7.10.1 相对运动动力学方程

设系统由载体和被载体组成. 载体极点 O 的速度 $\boldsymbol{V}_0$ 和载体角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为时间的已知函数. 被载体由 N 个质点组成, 系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定. 假设被载体的运动不

影响载体事先给定的运动规律.完整力学系统的相对运动动力学方程有形式[7,8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T_r}{\partial q_s}=Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}(V^0+V^\omega)+Q_s^{\omega\cdot}+\Gamma_s$$

$$(s=1,\cdots,n) \qquad (7.10.1)$$

方程(7.10.1)中的各量已在§3.9中说明.将广义力 Q_s 分为有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s

$$Q_s=Q'_s+Q''_s,\ Q'_s=\frac{\partial V}{\partial q_s} \qquad (7.10.2)$$

令

$$L_r=T_r-V-V^0-V^\omega \qquad (7.10.3)$$

则方程(7.10.1)写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q''_s+Q_s^{\omega\cdot}+\Gamma_s \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (7.10.4)$$

假设系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \qquad (7.10.5)$$

则由方程(7.10.4)可解出所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (7.10.6)$$

7.10.2 无限小群变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^*=t+\Delta t \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \qquad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \qquad (7.10.7)$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \qquad (7.10.8)$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s 称为无限小生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{7.10.9}$$

及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{7.10.10}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知,方程(7.10.6)在无限小变换(7.10.8)下的不变性归为

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s - \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \tag{7.10.11}$$

如果

$$\ddot{q}_s = \alpha_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.10.12}$$

进而,归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 \alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.10.13}$$

定义 7.10.1 如果无限小变换(7.10.8)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.10.13),则称对应的对称性为相对运动动力学系统的 Lie 对称性.

7.10.3 结构方程与守恒量

对于相对运动动力学系统,Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件和形式.

定理 7.10.1 对于满足确定方程(7.10.13)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L_r \dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L_r) + (Q''_s + Q_s^{\omega} + \Gamma_s)(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{7.10.14}$$

则相对运动动力学方程(7.9.6)存在如下形式的守恒量

$$I = L_r \xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) + G = \text{const.} \tag{7.10.15}$$

定理 7.10.2 相对运动动力学系统的 Lie 对称性结构方程(7.10.14)等价于其 Noether 等式

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L_r-\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0$$

$$+(Q''_s+Q^{\omega}_s+\Gamma_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dot{G} \qquad (7.10.16)$$

定理 7.10.3 相对运动动力学系统 Lie 对称性与 Noether 对称性有同样形式的守恒量(7.10.15).

7.10.4 Lie 对称性逆问题

首先,按 Noether 理论由已知守恒量来求与其相应的 Noether 对称性.假设系统(7.10.4)有积分

$$I=I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const.} \qquad (7.10.17)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s=0 \qquad (7.10.18)$$

将运动方程(7.10.4)两端同时乘以

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0 \qquad (7.10.19)$$

并对 s 求和,得

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L_r}{\partial q_s}-Q''_s-Q^{\omega}_s-\Gamma_s\right)=0 \qquad (7.10.20)$$

将式(7.10.18)与式(7.10.20)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k}=0 \quad (k=1,\cdots,n) \qquad (7.10.21)$$

因假设有式(7.9.5),故可由方程(7.10.21)解出所有 $\bar{\xi}_s$

$$\bar{\xi}_s=\tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (7.10.22)$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr}=\delta_{sr} \qquad (7.10.23)$$

再令积分(7.10.17)等于守恒量(7.10.15),即令

$$L_r\xi_0+\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s+G=I \qquad (7.10.24)$$

这样,由方程(7.10.22),(7.10.24)便可求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应系统的 Noether 对称性.注意到,解答中含有规范函数 G.

其次,将所得 Noether 对称性生成元 ξ_0, ξ_s 代入 Lie 对称性的确定方程(7.10.13),如果它们满足,则为 Lie 对称性,否则不是 Lie 对称性.

上述结果归纳为如下定理.

定理 7.10.4 如果由方程(7.10.22),(7.10.24)所确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Lie 对称性的确定方程(7.10.13),那么这种对称性就是相对运动动力学系统的 Lie 对称性.

由定理 7.10.4 知,系统的守恒量不一定有相应的 Lie 对称性.

7.10.5 算　　例

已知单自由度相对运动动力学系统

$$\begin{cases} T_r = \dfrac{1}{6}ml^2\dot{q}^2 + \dfrac{1}{2}m(9l^2\dot{q}^2\sin^2 q + l^2\dot{q}^2\cos^2 q) \\ V = -3mgl\cos q,\ V^{\omega} = -\dfrac{2}{3}ml^2\omega^2\sin^2 q \\ Q'' = V^0 = \Gamma = Q^{\dot{\omega}} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

其中 m, l, ω, g 为常数.试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的相对运动动力学方程,方程(7.10.4)给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{3}ml^2\dot{q} + ml^2\dot{q}(9\sin^2 q + \cos^2 q)\right] - 8ml^2\dot{q}^2\sin q\cos q$$

$$+ 3mgl\sin q - \frac{4}{3}ml^2\omega^2\sin q\cos q = 0 \tag{2}$$

由此解得

$$\ddot{q} = \frac{\sin q}{\dfrac{4}{3} + 8\sin^2 q}\left(\frac{4}{3}\omega^2\cos q - 8\dot{q}^2\cos q - \frac{3g}{l}\right) = \alpha \tag{3}$$

第二步,建立 Lie 对称性的确定方程并求解.方程(7.10.13)给出

$$\ddot{\xi} - \dot{q}\,\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha = X^{(1)}(\alpha) \tag{4}$$

方程(4)有如下解

$$\xi_0 = 1,\ \xi = \dot{q} \tag{5}$$

$$\xi_0 = -1,\ \xi = 0 \tag{6}$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi = \dot{q} \tag{7}$$

第三步,建立结构方程并求规范函数.对式(5),结构方程(7.10.14)给出

$$G_1 = -L_r \tag{8}$$

对式(6),给出

$$G_2 = 0 \tag{9}$$

对式(7),给出

$$G_3 = -L_r \tag{10}$$

第四步,求守恒量.将式(5),(8)代入守恒量式(7.10.15),得

$$I_1 \equiv 0 \tag{11}$$

因此,解(5)是平庸的.将式(6),(9)代入式(7.10.15),得

$$I_2 = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L_r = \frac{1}{6}ml^2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2(9\sin^2 q + \cos^2 q)$$

$$-3mgl\sin q - \frac{2}{3}ml^2\omega^2\sin^2 q = \text{const.} \tag{12}$$

它是系统的广义能量积分.将式(7),(10)代入式(7.10.15),得

$$I_3 = \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L_r = I_2 = \text{const.} \tag{13}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统(1)有积分

$$I = \frac{1}{6}ml^2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2(9\sin^2 q + \cos^2 q) - 3mgl\cos q$$

$$-\frac{2}{3}ml^2\omega^2\sin^2 q = \text{const.} \tag{14}$$

求与其相应的 Lie 对称性.方程(7.10.22),(7.10.24)给出

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{\xi}} = \dot{q} \\
\left\{ \frac{1}{6} ml^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 (9\sin^2 q + \cos^2 q) + 3mgl\cos q + \frac{2}{3} ml^2 \omega^2 \sin^2 q \right\} \xi_0 \\
\quad + \left\{ \frac{1}{3} ml^2 \dot{q} + ml^2 \dot{q} (9\sin^2 q + \cos^2 q) \right\} \bar{\xi} + G \\
\quad = \frac{1}{6} ml^2 \dot{q}^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{q}^2 (9\sin^2 q + \cos^2 q) - 3mgl\cos q \\
\quad - \frac{2}{3} ml^2 \omega^2 \sin^2 q
\end{cases} \tag{15}
$$

由此解得

$$
\xi_0 = -1 - \frac{G}{L_r}, \xi = q(1 + \xi_0) \tag{16}
$$

将式(16)代入确定方程(4),可验证满足.由定理 7.10.4 知,式(16)对应的变换,不论 ξ_0 取何值,都是 Lie 对称变换.

§7.11 奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性

本节研究奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量.奇异 Lagrange 系统是一个物理系统,特别是场论中许多重要的物理系统都是奇异系统,如相对论性运动粒子、电磁场、引力场、杨-Mills 场、超对称、超引力和超弦等[14].

7.11.1 奇异 Lagrange 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$来确定,系统的 Lagrange 函数为

$$
L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{7.11.1}
$$

如果

$$
\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \right) = 0 \tag{7.11.2}
$$

则系统称为奇异 Lagrange 系统.进而,假设系统所受非势广义力为

$$Q''_s = Q''_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.11.3}$$

系统的运动方程可表为 Lagrange 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q''_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.11.4}$$

展开得

$$h_{sk}\ddot{q}_k = \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} + Q''_s$$

$$(s = 1, \cdots, n) \tag{7.11.5}$$

因系统奇异,不可能由此解出所有广义加速度,但可解出一部分广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_i = \alpha_i(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (i = 1, \cdots, r; 0 \leqslant r \leqslant n) \tag{7.11.6}$$

以及$(n-r)$个关系

$$\beta_j(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n-r) \tag{7.11.7}$$

7.11.2 无限小群变换,确定方程和限制方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \end{cases} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{7.11.8}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{7.11.9}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0, ξ_s 为无限小生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{7.11.10}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{7.11.11}$$

方程(7.11.6)在无限小变换(7.11.9)下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_i - \dot{q}_i \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 \alpha_i = X^{(1)}(\alpha_i) \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{7.11.12}$$

方程(7.11.7)在无限小变换(7.11.9)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(\beta_j(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}))\Big|_{\beta_j = 0} = 0 \quad (j = 1, \cdots, n - r) \tag{7.11.13}$$

定义 7.11.1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(7.11.12)和限制方程(7.11.13),则称对称性为奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性.

7.11.3 结构方程与守恒量

对奇异 Lagrange 系统,Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 7.11.1 对于满足确定方程(7.11.12)和限制方程(7.11.13)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{7.11.14}$$

则奇异 Lagrange 系统存在如下 Lie 对称性守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \tag{7.11.15}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = {} & \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ & - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ & - Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ = {} & (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s\right) = 0\end{aligned}$$

定理 7.11.2 奇异 Lagrange 系统的结构方程(7.11.14)等价于其 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dot{G} \tag{7.11.16}$$

定理 7.11.3 奇异 Lagange 系统 Lie 对称性与 Noether 对称性有同样的守恒量形式(7.11.15).

定理 7.11.4 对非奇异 Lagrange 系统,对于满足确定方程(7.11.12)($r=n$)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(7.11.14),则系统存在守恒量(7.11.15).

定理 7.11.5 如果非势广义力 $Q''_s=0(s=1,\cdots,n)$,对于满足确定方程(7.11.12)和限制方程(7.11.13)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+\dot{G}=0 \tag{7.11.17}$$

则奇异 Lagrange 系统存在守恒量(7.11.15).

7.11.4 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法如下:根据已知积分来求相应的 Lie 对称性.

为解此类问题,可以首先按 Noether 理论求与已知积分相应的 Noether 对称性,然后再使对称性满足确定方程和限制方程来寻求 Lie 对称性.

假设奇异 Lagrange 系统有积分

$$I=I(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\text{const.} \tag{7.11.18}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s=0 \tag{7.11.19}$$

将方程(7.11.5)两端同时乘以

$$\bar{\xi}_s=\xi_s-\dot{q}_s\xi_0 \tag{7.11.20}$$

并对 s 求和,得到

$$\bar{\xi}_s\left(h_{sk}\ddot{q}_k-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial t}-Q''_s\right)=0 \tag{7.11.21}$$

将式(7.11.19)与式(7.11.21)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s h_{sk}-\frac{\partial I}{\partial\dot{q}_k}=0\quad(k=1,\cdots,n) \tag{7.11.22}$$

因系统奇异,故由方程(7.11.22)不可能求出所有 $\bar{\xi}_s$,只能求出一部分.

再令积分(7.11.18)等于守恒量(7.11.15),即令

$$L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\bar{\xi}_s+G=I \tag{7.11.23}$$

这样,由方程(7.11.22),(7.11.23)可以求得 ξ_0, ξ_s 中的一部分生成元.将这些生成元代入 Lie 对称性的确定方程(7.11.12)和限制方程(7.11.13)使它们满足,便有可能找到 Lie 对称性.

7.11.5 算　　例

系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}_1^2+\dot{q}_1q_2+\frac{1}{2}(q_1-q_2)^2 \tag{1}$$

非势广义力为

$$Q''_1=-\dot{q}_2,\ Q''_2=\dot{q}_1 \tag{2}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.

方程(7.11.4)给出

$$\ddot{q}_1+\dot{q}_2-(q_1-q_2)=-\dot{q}_2,\quad -\dot{q}_1+(q_1-q_2)=\dot{q}_1$$

即

$$\ddot{q}_1=q_1-q_2-2\dot{q}_2,\quad -2\dot{q}_1+q_1-q_2=0 \tag{3}$$

第二步,建立 Lie 对称性的确定方程和限制方程并求解.方程(7.11.12),(7.11.13)给出

$$\ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - 2\dot{q}_2) = \dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2 - 2(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) \quad (4)$$

$$-2(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) + \xi_1 - \xi_2 = 0 \quad (5)$$

方程(4),(5)有如下解

$$\xi_0 = -1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \quad (6)$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \quad (7)$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 1 \quad (8)$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{1}{2}t + 1, \xi_2 = \frac{1}{2}t \quad (9)$$

第三步,建立结构方程并求规范函数.对式(6),结构方程(7.11.14)给出

$$G_1 = 0 \quad (10)$$

对式(7),给出

$$G_2 = -L \quad (11)$$

对式(8),给出

$$G_3 = q_2 - 2q_1 \quad (12)$$

对式(9),给出

$$G_4 = -tq_1 + \frac{1}{2}tq_2 - \frac{1}{2}q_1 + q_2 \quad (13)$$

第四步,求守恒量.对式(6),(10)守恒量(7.11.15)给出

$$I_1 = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 = \text{const.} \quad (14)$$

对式(7),(11),给出

$$I_2 = I_1 = \text{const.} \quad (15)$$

对式(8),(12),给出

$$I_3 = \dot{q}_1 + 2q_2 - 2q_1 = \text{const.} \quad (16)$$

对式(9),(13),给出

$$I_4 = (\dot{q}_1 + q_2)(\frac{1}{2}t + 1) - tq_1 + \frac{1}{2}tq_2 - \frac{1}{2}q_1 + q_2 = \text{const.} \quad (17)$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = \dot{q}_1 + 2q_2 - 2q_1 = \text{const}. \tag{18}$$

方程(7.11.22),(7.11.23)给出

$$\bar{\xi}_1 = 1 \tag{19}$$

$$L\xi_0 + (\dot{q}_1 + q_2)\,\bar{\xi}_1 + G = \dot{q}_1 + 2q_2 - 2q_1 \tag{20}$$

由此解得

$$\xi_1 = 1 + \dot{q}_1 \xi_0 \tag{21}$$

$$\xi_0 = \frac{1}{L}(q_2 - 2q_1 - G) \tag{22}$$

取

$$G = q_2 - 2q_1 \tag{23}$$

则有

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = 1 \tag{24}$$

将式(24)代入确定方程(4)和限制方程(5),得

$$\xi_2 = 1 \tag{25}$$

于是得到与积分(18)相应的 Lie 对称性生成元

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \xi_2 = 1 \tag{26}$$

本章小结

本章基于微分方程在无限小群变换下不变性的 Lie 理论,研究了 Lagrange 系统,Hamilton 系统,广义坐标下一般完整系统,准坐标下一般完整系统,有多余坐标完整系统,变质量完整系统,事件空间中完整系统,相对运动动力学系统,以及奇异 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量.Lie 对称性不一定导致守恒量.本章给出各类完整系统存在 Lie 对称性守恒量的条件和形式.守恒量也不一定有相应的 Lie 对称性.本章给出各类完整系统守恒量导致 Lie 对称性的条件.

习　题

1.设 $\xi(x,y)$任意 $\eta(x,y)=\xi(x,y)f(x,y)+\chi(x,y)$,而 χ 满足一阶

偏微分方程

$$\frac{\partial \chi}{\partial x}+\frac{\partial \chi}{\partial y}f-\frac{\partial f}{\partial y}\chi=0$$

试证 ξ,η 是方程(7.2.8)的通解.

2.试证方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{k-1}F\left(\frac{y}{x^k}\right)$$

有如下 Lie 对称性

$$X^{(0)}=x\frac{\partial}{\partial x}+ky\frac{\partial}{\partial y}$$

3.已知生成元 $\xi=1,\eta=\frac{y}{x}$,试求一阶方程(7.2.1)中的函数 f.

4.试用直接计算方法导出 Lie 对称性的确定方程(7.3.11).

5.已知 Lagrange 系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{2}kq_1^2$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

6.二自由度系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{6}\dot{q}\mathrm{arctg}bt-\frac{1}{2b}\dot{q}_2\ln(1+b^2t^2)$$

试用 Lagrange 系统和 Hamilton 系统的 Lie 理论研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

7.试证,确定方程(7.5.10)有平庸解 $\xi_0=1,\xi_s=\dot{q}_s(s=1,\cdots,n)$,而守恒量为 $I\equiv 0$.

8.试证,§ 7.5 例 1 的确定方程有解

$$\xi_0=0,\xi_1=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right),\xi_2=\sqrt{1+t^2}$$

但没有相应的守恒量.

9.试证,当取

$$\omega_s=a_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k,\dot{q}_s=b_{sk}(\boldsymbol{q})\omega_k$$

时,Noether 等式(3.5.34)成为 Noether 等式(7.6.19).

10.已知二自由度系统广义坐标下的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+q_1^2\dot{q}_2^2)+\int f(q_1)\mathrm{d}q_1$$

取准速度为

$$\omega_1 = \dot{q}_1, \omega_2 = \frac{1}{2} q_1^2 \dot{q}_2$$

试研究系统在准坐标下的 Lie 对称性与守恒量.

11. 有多余坐标完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1$$

$$Q''_1 = \dot{q}_2, Q''_2 = -\dot{q}_1$$

$$f = q_2 - q_1^3 = 0$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

12. 试证,当质量不变时,变质量完整系统的 Lie 对称性定理 7.8.1 成为定理 7.5.1.

13. 试证关系(7.9.23),(7.9.24),(7.9.25).

14. 相对运动动力学系统为

$$T_r = \frac{1}{2} m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

$$V = V(q_1, q_2)$$

$$Q''_1 = m\dot{q}_2, Q''_2 = -m\dot{q}_1, Q''_3 = 0$$

$$V^0 = \Gamma_s = Q_s^{\omega} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3)$$

$$V^{\omega} = -\frac{1}{2} m(q_1^2 + q_2^2)\omega^2$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

15. 试研究奇异 Lagrange 系统

$$L = \dot{q}_1 q_2 - q_1 \dot{q}_2 + q_1^2 + q_2^2, Q''_1 = Q''_2 = 0$$

的 Lie 对称性与守恒量.

参 考 文 献

[1] Olver P. J., Applications of Lie Groups to Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1986.

[2] Bluman G. W., Kumei S., Symmetries and Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1989.

[3] Lutzky M., Dynamical Symmetries and Conserved Quantities, J. Phys., A: Math. Gen., 1979, 12(7):973—981.

[4] 赵跃宇,非保守力学系统的 Lie 对称性与守恒量,力学学极,1994, 26(3):380—384.

[5] 赵跃宇、梅凤翔,关于力学系统的对称性与不变量,力学进展,1993,23(3):260—372.

[6] Ibragimov N. H., CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Boca Raton, CRC Press, 1994.

[7] Лурье А. И., Аналитическая Механика, . Москва, ФМ, 1961.

[8] 梅凤翔、刘桂林,分析力学基础,西安,西安交通大学出版社,1987.

[9] Mei F. X., Lie symmetries and conserved quantities of holonomic systems with remainder coordinates, J. of BIT, 1998. 7(1):26—31.

[10] Новоселов В. С., Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами, Вестн ЛГУ, 1979, 7.

[11] 杨来伍、梅凤翔,变质量系统力学,北京,北京理工大学出版社,1989.

[12] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬,Birkhoff 系统动力学,北京,北京理工大学出版社,1996.

[13] Mei F. X., Parametric equations of nonholonomic nonconservative systems in the event space and the method of their integration , Acta Mechanica Sinica, 1990, 6 (2):160—168.

[14] 李子平,约束系统的正则对称性和 Dirac 猜想,见:陈滨、梅凤翔,中国非完整力学三十年,开封,河南大学出版社,1994,27—35.

第八章　非完整约束力学系统的 Lie 对称性

本章研究非完整约束力学系统的 Lie 对称性与守恒量，包括广义坐标下一般非完整系统，准 坐标下一般非完整系统，变质量非完整系统，事件空间中非完整系统，非完整相对运动动力学系统，高阶非完整系统，以及非 Chetaev 非完整系统的 Lie 对称性与守恒量. 最后，研究具有可积微分约束的力学系统的 Lie 对称性与守恒量.

§8.1　广义坐标下一般非完整系统的 Lie 对称性

本节研究广义坐标下一般非完整系统的 Lie 对称性与守恒量两类问题。一类是正问题：根据已知 Lie 对称性寻求与其相应的守恒量，包括系统的运动方程，确定方程，限制方程，结构方程与守恒量等. 另一类是逆问题：由已知守恒量找到与其相应的 Lie 对称性.

8.1.1　一般非完整系统广义坐标中的方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定. 系统的运动受有 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.1.1)$$

约束(8.1.1) 对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.1.2)$$

由 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程 (8.1.2). 利用 Lagrange 乘子法，可导出系统运动的 Routh 型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (8.1.3)$$

或写成形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(8.1.4)$$

其中 L 为 Lagrange 函数，Q''_s 为非势广义力. 假设系统非奇异，即设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0\qquad(8.1.5)$$

在运动微分方程积分之前，可由方程(8.1.1),(8.1.4) 求出乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数[1]. 于是方程(8.1.4) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\Lambda_s\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(8.1.6)$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\qquad(8.1.7)$$

称方程(8.1.6) 为与非完整系统(8.1.1),(8.1.4) 相应的完整系统的运动方程. 如果运动的初始条件满足非完整约束方程(8.1.1)，那么方程(8.1.6) 的解就给出非完整系统的运动. 展开方程(8.1.6)，可求出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(8.1.8)$$

8.1.2 无限小群变换与 Lie 对称性确定方程

引进时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases}t^*=t+\Delta t\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\qquad(s=1,\cdots,n)\end{cases}\qquad(8.1.9)$$

或其展开式

$$\begin{cases}t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,\cdots,n)\end{cases}\qquad(8.1.10)$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}\qquad(8.1.11)$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.1.12}$$

据微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 理论知，方程(8.1.8) 在无限小变换(8.1.10) 下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_s = X^{(1)}(h_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.1.13}$$

定义 8.1.1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.1.13)，则相应对称性称为与非完整系统(8.1.1)，(8.1.4) 相应的完整系统(8.1.8) 的 Lie 对称性。

8.1.3 限制方程和附加限制方程

非完整约束方程(8.1.1) 在无限小变换(8.1.10) 下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.1.14}$$

定义 8.1.2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.1.13) 和限制方程(8.1.14)，则相应对称性称为非完整系统的弱 Lie 对称性 .

单从微分方程在无限小变换下的不变性考虑，上述定义的弱 Lie 对称性就是通常理解的 Lie 对称性.

若还考虑到微分方程的导出过程，则因对无限小生成元还要施加另外的限制，而必须定义另外的 Lie 对称性. 在推导方程(8.1.3) 的过程中，要用到 Chetaev 条件(8.1.2). 这个条件对 δq_s 施加了限制. 又因

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s \Delta t = \varepsilon(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) \tag{8.1.15}$$

将式(8.1.15) 代入式(8.1.2)，得到

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \tag{8.1.16}$$

称方程(8.1.16) 为附加限制方程.

定义 8.1.3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.1.13)、限制方程(8.1.14) 和附加限制方程(8.1.16)，则相应的对称性称为非完整系统的强 Lie 对称性.

8.1.4 结构方程与守恒量

对于非完整系统,Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 8.1.1 对于满足确定方程(8.1.13) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s'' + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \quad (8.1.17)$$

则与非完整系统相应的完整系统(8.1.8) 存在如下形式的 Lie 对称性守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \quad (8.1.18)$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)$$

$$- L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) - (Q_s'' + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$$

$$= (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s'' - \Lambda_s\right) = 0$$

定理 8.1.2[2] 对于满足确定方程(8.1.13) 和限制方程(8.1.14)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数$G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.1.17),则非完整系统存在形如(8.1.18) 的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.1.3 对于满足确定方程(8.1.13)、限制方程(8.1.14) 和附加限制方程(8.1.16) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.1.17),则非完整系统存在形如(8.1.18) 的强 Lie 对称性守恒量.

非完整系统的 Lie 对称性正问题是指,由已知 Lie 对称性找到相应的守恒量问题.正问题的解法步骤如下:首先,建立确定方程(8.1.13),并由此求得相应完整系统的 Lie 对称性.其次,将所得对称性代入限制方程(8.1.14) 和附加限制方程(8.1.16).如仅满足限制方程(8.1.14),则所得对称性为非完整系统的弱 Lie 对称

性;如满足限制方程(8.1.14)并满足附加限制方程(8.1.16),则所得对称性为非完整系统的强 Lie 对称性.第三,将所得对称性代入结构方程(8.1.17),并由此求得规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$.最后,由式(8.1.18)求得 Lie 对称性守恒量.

这里要注意的是,对非完整系统有三种 Lie 对称性.但是,不论对哪种 Lie 对称性,只有在由结构方程(8.1.17)求得规范函数 G 的情形下,才能求得相应的守恒量.

8.1.5 Lie 对称性逆问题

下面研究 Lie 对称性逆问题.非完整系统的 Lie 对称性逆问题的提法是:由已知守恒量来求相应的 Lie 对称性.非完整系统的守恒量不一定有相应的 Lie 对称性.因此,Lie 对称性逆问题可能有解,也可能无解.

为解上述逆问题,首先由已知守恒量求出与其相应的 Noether 对称性.假设非完整系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{8.1.19}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{8.1.20}$$

将方程(8.1.6)两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{8.1.21}$$

并对 s 求和,得

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s - \Lambda_s\right) = 0 \tag{8.1.22}$$

将式(8.1.20)与式(8.1.22)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s\frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{8.1.23}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.1.24}$$

其中

$$\bar{h}_{sk}h_{kr} = \delta_{sr} \tag{8.1.25}$$

再令积分(8.1.19)等于 Lie 对称性的守恒量(8.1.18),即令

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G = I \tag{8.1.26}$$

这样,由方程(8.1.24),(8.1.26)便可求得生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应系统(8.1.6)的 Noether 对称性.注意,其中包含规范函数 G.

其次,将所得 Noether 对称性生成元 ξ_0, ξ_s 代入 Lie 对称性确定方程(8.1.13)、限制方程(8.1.14)和附加限制方程(8.1.16)来检验对称性是否 Lie 的.有如下结果.

定理 8.1.4 如果由方程(8.1.24),(8.1.26)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.1.13),则所得对称性为与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性;进而,如果 ξ_0, ξ_s 还满足限制方程(8.1.14),则所得对称性为非完整系统的弱 Lie 对称性;最后,如果 ξ_0, ξ_s 还满足附加限制方程(8.1.16),则所得对称性为非完整系统的强 Lie 对称性。

8.1.6 算 例

例 1 研究 Appell-Hamel 例的 Lie 对称性与守恒量.

Appell-Hamel 例的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0 \tag{2}$$

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.

方程(8.1.4)给出

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = 2\lambda\dot{q}_1 \\ m\ddot{q}_2 = 2\lambda\dot{q}_2 \\ m\ddot{q}_3 = -mg - 2\lambda\dot{q}_3 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3)解得

$$\lambda = -\frac{mg\,\dot{q}_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)} = -\frac{mg}{4\,\dot{q}_3} \tag{4}$$

于是有

$$\begin{cases} m\,\ddot{q}_1 = -\dfrac{mg\,\dot{q}_1}{2\,\dot{q}_3} \\ m\,\ddot{q}_2 = -\dfrac{mg\,\dot{q}_2}{2\,\dot{q}_3} \\ m\,\ddot{q}_3 = -mg+\dfrac{1}{2}mg \end{cases} \tag{5}$$

对照方程(8.1.6)和(8.1.8),有

$$\begin{cases} Q''_1+\Lambda_1 = -\dfrac{1}{2}mg\,\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}, Q''_2+\Lambda_2 = -\dfrac{1}{2}mg\,\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3} \\ Q''_3+\Lambda_3 = \dfrac{1}{2}mg, h_1 = -\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}, h_2 = -\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}, h_3 = -\dfrac{1}{2}g \end{cases} \tag{6}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(8.1.13)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\,\ddot{\xi}_0-2\,\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3}\right) \\ \quad =(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\,\dot{\xi}_0)\left(-\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{1}{\dot{q}_3}\right)+(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\,\dot{\xi}_0)\left(\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_1}{\dot{q}_3^2}\right) \\ \ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\,\ddot{\xi}_0-2\,\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3}\right) \\ \quad =(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\,\dot{\xi}_0)\left(-\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{1}{\dot{q}_3}\right)+(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\,\dot{\xi}_0)\left(\dfrac{1}{2}g\,\dfrac{\dot{q}_2}{\dot{q}_3^2}\right) \\ \ddot{\xi}_3-\dot{q}_3\,\ddot{\xi}_0-2\,\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1}{2}g\right)=0 \end{cases} \tag{7}$$

方程(7)有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_s = 0 \quad (s=1,2,3); X_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{8}$$

$$\xi_0 = \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = 1; \qquad X_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q_3} \tag{9}$$

这些生成元对应方程(5)的 Lie 对称性,即与此非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.第三步,验证限制方程和附加限制方程.限制方程(8.1.14)给出

$$(\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_0)\dot{q}_1 + (\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_0)\dot{q}_2 - (\xi_3 - \dot{q}_3 \xi_0)\dot{q}_3 = 0 \quad (10)$$

容易验证,生成元(8),(9) 都满足方程(10),因此,它们对应的对称性都是非完整系统的弱 Lie 对称性.附加限制方程(8.1.16) 给出

$$(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0)\dot{q}_1 + (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0)\dot{q}_2 - (\xi_3 - \dot{q}_3\xi_0)\dot{q}_3 = 0 \quad (11)$$

容易验证,生成元(8) 满足方程(11),但生成元(9) 不满足方程(11).因此,生成元(8) 对应的对称性是 Appell-Hamel 例的强 Lie 对称性.第四步,建立结构方程并求守恒量.对生成元(8),(9),由结构方程(8.1.17) 分别求得规范函数

$$\begin{cases} G_1 = 0 \\ G_2 = \dfrac{1}{2}mgt \end{cases} \quad (12)$$

将式(8),(9),(12) 代入式(8.1.18),分别得到守恒量

$$\begin{cases} I_1 = -\dfrac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + mgq_3 = \text{const.} \\ I_2 = m\dot{q}_3 + \dfrac{1}{2}mgt = \text{const.} \end{cases} \quad (13)$$

这里 I_1, I_2 是相应完整系统的 Lie 对称性守恒量,同时又是非完整系统的弱 Lie 对称性守恒量;而 I_1 是非完整系统的强 Lie 对称性守恒量.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = m\dot{q}_3 + \frac{1}{2}mgt = \text{const.} \quad (14)$$

来求与其相应的 Lie 对称性.方程(8.1.24),(8.1.26) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_2 = 0, \bar{\xi}_3 = 1 \\ L\xi_0 + G = \dfrac{1}{2}mgt \end{cases} \quad (15)$$

由此得到

$$\begin{cases} \xi_0 = \dfrac{1}{L}\left(\dfrac{1}{2}mgt - G\right), \xi_1 = \dot{q}_1\xi_0 \\ \xi_2 = \dot{q}_2\xi_0, \xi_3 = 1 + \dot{q}_3\xi_0 \end{cases} \quad (16)$$

将式(16) 代入确定方程(7),容易验证,不论 ξ_0 取何值,它们都满

足.因此,生成元(16) 对应相应完整系统的 Lie 对称性.将式(16) 代入限制方程(10),它亦满足.因此,所得对称性又是非完整系统的弱 Lie 对称性.将式(16) 代入附加限制方程(11),知它不满足,因此,所得对称性不是非完整系统的强 Lie 对称性。

例 2　研究受有扭转恢复力矩的 Chaplygin 雪橇的 Lie 对称性与守恒量.

问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2 \quad (k = \text{const.}) \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \text{tg} q_3 = 0 \tag{2}$$

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,列写系统的运动方程.方程(8.1.4) 给出

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -\lambda \text{tg} q_3 \\ m\ddot{q}_2 = \lambda \\ J\ddot{q}_3 + kq_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3) 解得

$$\lambda = m\dot{q}_1\dot{q}_3 \tag{4}$$

于是方程(3) 成为

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -m\dot{q}_1\dot{q}_3 \text{tg} q_3 \\ m\ddot{q}_2 = m\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ J\ddot{q}_3 + kq_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

对照方程(8.1.6),(8.1.8),有

$$\begin{cases} Q''_1 + \Lambda_1 = -m\dot{q}_1\dot{q}_3 \text{tg} q_3 \\ Q''_2 + \Lambda_2 = m\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ Q''_3 + \Lambda_3 = 0 \\ \\ h_1 = -\dot{q}_1\dot{q}_3 \text{tg} q_3, h_2 = \dot{q}_1\dot{q}_3, h_3 = -\dfrac{k}{J}q_3 \end{cases} \tag{6}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(8.1.13) 给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ \ddot{\xi}_0 - 2\ \dot{\xi}_0(-\ \dot{q}_1\ \dot{q}_3 \mathrm{tg} q_3) \\ \quad = \xi_3\left(-\dfrac{\dot{q}_1\ \dot{q}_3}{\cos^2 q_3}\right) + (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ \dot{\xi}_0)(-\ \dot{q}_3 \mathrm{tg} q_3) \\ \quad + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\ \dot{\xi}_0)(-\ \dot{q}_1 \mathrm{tg} q_3) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0(\dot{q}_1 \dot{q}_3) = (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \dot{\xi}_0)\ \dot{q}_3 + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3 \dot{\xi}_0)\ \dot{q}_1 \\ \ddot{\xi}_3 - \dot{q}_3\ \ddot{\xi}_0 - 2\ \dot{\xi}_0\left(-\dfrac{k}{J} q_3\right) = -\dfrac{k}{J}\xi_3 \end{cases} \tag{7}$$

方程(7) 有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{8}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{9}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = 0 \tag{10}$$

这些生成元对应方程(5) 的 Lie 对称性,即与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性. 第三步,验证限制方程和附加限制方程. 限制方程(8.1.14) 给出

$$(\xi_2 - \dot{q}_2\ \xi_0) - (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ \dot{\xi}_0)\mathrm{tg} q_3 - \frac{q_1}{\cos^2 q_3}\xi_3 = 0 \tag{11}$$

生成元(8),(9),(10) 都满足限制方程(11),因此,它们对应完整系统的弱 Lie 对称性. 附加限制方程(8.1.16) 给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_0 - (\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_0)\mathrm{tg} q_3 = 0 \tag{12}$$

生成元(8) 满足附加限制方程(12),生成元(9),(10) 不满足附加限制方程(12). 因此,生成元(8) 对应的对称性为非完整系统的强 Lie 对称性. 第四步,建立结构方程并求守恒量. 对生成元(8),结构方程(8.1.17) 结出规范函数

$$G_1 = 0 \tag{13}$$

对生成元(9),(10),结构方程(8.1.17) 分别给出为

$$-\ m\ \dot{q}_1\ \dot{q}_3 \mathrm{tg} q_3 + \dot{G}_2 = 0 \tag{14}$$

$$m\ \dot{q}_1\ \dot{q}_3 + \dot{G}_3 = 0 \tag{15}$$

由此找不到规范函数. 将式(8),(13) 代入守恒量式(8.1.18),求得

$$I_1 = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2 = \text{const.} \tag{16}$$

它代表能量积分.对生成元(9),(10)没有相应的 Lie 对称性守恒量.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2 = \text{const.} \tag{17}$$

求与其相应的 Lie 对称性.方程(8.1.24),(8.1.26)给出

$$\begin{cases} \bar{\xi} = 0, \bar{\xi}_2 = 0, \bar{\xi}_3 = \dot{q}_3 \\ L\xi_0 + J\dot{q}_3^2 + G = \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2 \end{cases} \tag{18}$$

由此求得

$$\begin{cases} \xi_1 = \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = \dot{q}_2\xi_0, \xi_3 = \dot{q}_3(1 + \xi_0) \\ \xi_0 = \frac{1}{L}(\frac{1}{2}kq_3^2 - \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - G) \end{cases} \tag{19}$$

生成元(19)满足附加限制方程(12),因此,它对应非完整系统的 Noether 对称性.将式(19)代入确定方程(7),容易验证,它不满足.因此,生成元(19)对应的对称性不是 Lie 对称性,即积分(17)没有相应的 Lie 对称性.

§8.2 准坐标下非完整系统的 Lie 对称性

本节研究准坐标下非完整系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性找到相应的守恒量,包括系统的运动方程,Lie 对称性的确定方程,限制方程和附加限制方程,结构方程与守恒量等.另一类是 Lie 对称性逆问题:根据已知守恒量找到相应的 Lie 对称性.

8.2.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确

定,它的运动受有 g 个理想双面线性非完整约束

$$a_{\varepsilon+\beta,k}(\boldsymbol{q})\,\dot{q}_k = 0$$

$$(\beta = 1,\cdots,g;\varepsilon = n-g;k = 1,\cdots,n) \quad (8.2.1)$$

选 n 个彼此独立且相容的准速度

$$\omega_s = a_{sk}(\boldsymbol{q})\,\dot{q}_k \qquad (s = 1,\cdots,n) \quad (8.2.2)$$

并有逆变换

$$\dot{q}_s = b_{sk}(\boldsymbol{q})\omega_k \quad (8.2.3)$$

于是,非完整约束(8.2.1) 成为

$$\omega_{\varepsilon+\beta} = 0 \quad (8.2.4)$$

它对准坐标虚位移的限制为

$$\delta\pi_{\varepsilon+\beta} = 0 \quad (\beta = 1,\cdots,g) \quad (8.2.5)$$

由准坐标下的 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(8.2.5),可导出非完整系统的 Boltzmann-Hamel 方程[1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial\omega_\sigma} - \frac{\partial T^*}{\partial\pi_\sigma} + \frac{\partial T^*}{\partial\omega_r}\gamma^r_{\nu\sigma}\omega_\nu = P^*_\sigma \quad (8.2.6)$$

$$(\sigma,\nu = 1,\cdots,\varepsilon;r = 1,\cdots,n)$$

其中 $\gamma^r_{\nu\sigma}$ 为 Boltzmann 三标记号

$$\gamma^r_{\nu\sigma} = \left(\frac{\partial a_{rt}}{\partial q_m} - \frac{\partial a_{rm}}{\partial q_t}\right)b_{m\nu}b_{t\sigma} \quad (8.2.7)$$

$$(m,t = 1,\cdots,n) \quad ,$$

而 T^* 为准速度表示的动能

$$T^*(q_s,\omega_k,t) = T(q_s,b_{sk}\omega_k,t) \quad (8.2.8)$$

将准坐标下的广义力 P^*_σ 分成有势的 $P^{*\prime}_\sigma$ 和非势的 $P^{*\tilde{}}_\sigma$,则方程(8.2.6) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial\omega_\sigma} - \frac{\partial L^*}{\partial\pi_\sigma} + \frac{\partial L^*}{\partial\omega_r}\gamma^r_{\nu\sigma}\omega_\nu = P^{*\prime\prime}_\sigma \quad (8.2.9)$$

$$(\sigma = 1,\cdots,\varepsilon)$$

它们与方程(8.2.4) 联合,便可求解非完整系统的运动.假设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L^*}{\partial\omega_\sigma\partial\omega_\nu}\right) \neq 0 \quad (8.2.10)$$

则由方程(8.2.9) 可求出所有$\dot{\omega}_\sigma$,简记作

$$\dot{\omega}_\sigma = h_\sigma(t, q_k, \omega_\nu) \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{8.2.11}$$

8.2.2 无限小群变换和 Lie 对称性确定方程

引入时间和准坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ \pi_s^*(t^*) = \pi_s(t) + \Delta\pi_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{8.2.12}$$

这里 π_s, π_s^* 是一种记号,$\Delta\pi_s$ 有意义,表为

$$\Delta\pi_s = \delta\pi_s + \omega_s \Delta t \tag{8.2.13}$$

式(8.2.12) 展开得

$$\begin{cases} t_* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \\ \pi_s^* = \pi_s + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) \end{cases} \tag{8.2.14}$$

取无限小生成元向量为

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial \pi_s} \tag{8.2.15}$$

它的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \omega_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \omega_s} \tag{8.2.16}$$

二次扩展为

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\dot{\xi}_s - \omega_s \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \dot{\omega}_s \dot{\xi}_0] \frac{\partial}{\partial \dot{\omega}_s} \tag{8.2.17}$$

运动微分方程(8.2.11) 在无限小变换(8.2.14) 下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_\sigma - \omega_\sigma \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 h_\sigma = X^{(1)}(h_\sigma) \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{8.2.18}$$

定义 8.2.1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.2.18),则相应对称性称为方程(8.2.11) 的 Lie 对称性.

8.2.3 限制方程和附加限制方程

非完整约束方程(8.2.4) 在无限小变换(8.2.14) 下的不变性

归为

$$X^{(1)}(\omega_{\epsilon+\beta}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.2.19)$$

如果

$$\omega_{\epsilon+\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.2.20)$$

利用算子(8.2.16),式(8.2.19) 归为如下限制方程

$$\dot{\xi}_{\epsilon+\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.2.21)$$

由此得到

$$\xi_{\epsilon+\beta} = c_\beta = \text{const.} \qquad (8.2.22)$$

定义 8.2.2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.2.18) 并满足限制方程(8.2.22),则称对称性为准坐标下非完整系统的弱 Lie 对称性.

条件(8.2.5) 归为如下附加限制方程

$$\xi_{\epsilon+\beta} - \omega_{\epsilon+\beta}\xi_0 = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.2.23)$$

即

$$\xi_{\epsilon+\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.2.24)$$

定义 8.2.3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.2.18)、限制方程(8.2.22) 和附加限制方程(8.2.24),则称对称性为准坐标下非完整系统的强 Lie 对称性.

因为满足式(8.2.24) 必满足式(8.2.22),故有

定理 8.2.1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.2.18) 和附加限制方程(8.2.24),则对称性必为准坐标下非完整系统的强 Lie 对称性.

8.2.4 结构方程和守恒量

准坐标下非完整系统的 Lie 对称性不一定导致守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 8.2.2 对于满足确定方程(8.2.18) 和附加限制方程(8.2.24) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$ 满足结构方程

$$L^{*}\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L^{*}) + K_\sigma^{*}(\xi_\sigma - \omega_\sigma\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad (8.2.25)$$

其中

$$K_\sigma^{*} = P_\sigma{}^{*\prime\prime} - \frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_r}\gamma_{\nu\sigma}^{r}\omega_\nu \qquad (8.2.26)$$

则准坐标下非完整系统存在如下形式的强 Lie 对称性守恒量

$$I = L^{*}\xi_0 + \frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_s}(\xi_s - \omega_s\xi_0) + G = \text{const.} \qquad (8.2.27)$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} =& \dot{L}^{*}\xi_0 + L^{*}\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_s}(\xi_s - \omega_s\xi_0) + \frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_s}(\dot{\xi}_s - \dot{\omega}_s\xi_0 - \omega_s\dot{\xi}_0)\\ &- L^{*}\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L^{*}}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L^{*}}{\partial\pi_s}\xi_s - \frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_s}(\dot{\xi}_s - \omega_s\dot{\xi}_0)\\ &- K_\sigma^{*}(\xi_\sigma - \omega_\sigma\xi_0)\\ =& (\xi_\sigma - \omega_\sigma\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_\sigma} - \frac{\partial L^{*}}{\partial\pi_\sigma} - K_\sigma^{*}\right)\\ &+ (\xi_{\epsilon+\beta} - \omega_{\epsilon+\beta}\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_{\epsilon+\beta}} - \frac{\partial L^{*}}{\partial\pi_{\epsilon+\beta}}\right)\\ =& 0\end{aligned}$$

定理 8.2.2 的证明过程已用到方程(8.2.23).因此,守恒量式(8.2.27) 还可简写成形式

$$I = L^{*}\xi_0 + \frac{\partial L^{*}}{\partial\omega_\sigma}(\xi_\sigma - \omega_\sigma\xi_0) + G = \text{const.} \qquad (8.2.28)$$

准坐标下非完整系统 Lie 对称性正问题的解法如下:首先,建立确定方程(8.2.18),并求出无限小生成元 ξ_0, ξ_σ.其次,施加限制(8.2.22) 而得到弱 Lie 对称性;施加限制(8.2.24) 而得到强 Lie 对称性.最后,由结构方程(8.2.25) 求得规范函数 G,并由式(8.2.28) 找到守恒量.

8.2.5 Lie 对称性逆问题

准坐标下非完整系统 Lie 对称性逆问题的提法是:由已知守恒量找到与其相应的 Lie 对称性.因为守恒量不一定有相应的 Lie

对称性,因此逆问题可能有解,也可能无解.

为解此类逆问题,可先用 Noether 理论由已知守恒量找到相应的 Noether 对称性.假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega}) = \text{const.} \tag{8.2.29}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial \pi_\sigma}\omega_\sigma + \frac{\partial I}{\partial \omega_\sigma}\dot{\omega}_\sigma = 0 \tag{8.2.30}$$

将方程(8.2.9) 两端乘以 $\bar{\xi}_\sigma = \xi_\sigma - \omega_\sigma \xi_0$,并对 σ 求和,得到

$$\bar{\xi}_\sigma \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma} - \frac{\partial L^*}{\partial \pi_\sigma} - K_\sigma^* \right) = 0 \tag{8.2.31}$$

将式(8.2.30) 与(8.2.31) 相加,分出含 $\dot{\omega}_\nu$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_\sigma \frac{\partial^2 L^*}{\partial \omega_\sigma \partial \omega_\nu} - \frac{\partial I}{\partial \omega_\nu} = 0 \tag{8.2.32}$$

由此解得

$$\bar{\xi}_\sigma = \bar{h}_{\sigma\nu}\frac{\partial I}{\partial \omega_\nu} \qquad (\sigma, \nu = 1, \cdots, \epsilon) \tag{8.2.33}$$

其中

$$\bar{h}_{\sigma\nu} h_{\nu\mu} = \delta_{\sigma\mu}, \quad h_{\sigma\nu} = \frac{\partial^2 L^*}{\partial \omega_\sigma \partial \omega_\nu} \tag{8.2.34}$$

再令积分(8.2.29) 等于 Lie 对称性守恒量(8.2.28),即令

$$L^* \xi_0 + \frac{\partial L^*}{\partial \omega_\sigma}\bar{\xi}_\sigma + G = I \tag{8.2.35}$$

这样,由方程(8.2.33),(8.2.35) 可找到无限小生成元 ξ_0, ξ_σ,它们对应方程(8.2.11) 的 Noether 对称性.

其次,将所得生成元 ξ_0, ξ_σ 代入 Lie 对称性的确定方程(8.2.18),检验其是否满足.如果它们满足,则所得对称性是方程(8.2.11) 的 Lie 对称性.为使其成为非完整系统的 Lie 对称性,还要添加限制(8.2.22) 和(8.2.24).

定理 8.2.3 如果由方程(8.2.33),(8.2.35) 所确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_σ 满足确定方程(8.2.18),对其添加限制(8.2.22),

则所得对称性为准坐标下非完整系统的弱 Lie 对称性;对其添加限制(8.2.24),则所得对称性为系统的强 Lie 对称性.

8.2.6 算 例

研究质量为 m,半径为 a 的匀质圆环沿绝对粗糙水平面纯滚动问题的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,列写系统在准坐标中的运动方程.取圆环中心坐标 x, y 和三个 Euler 角 ψ, θ, φ 为广义坐标.令

$$q_1 = \theta, q_2 = \psi, q_3 = \varphi, q_4 = x, q_5 = y \tag{1}$$

取准速度为

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{q}_1, \omega_2 = \dot{q}_2 \sin q_1, \omega_3 = \dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3 \\ \omega_4 = \dot{q}_4 \cos q_2 + \dot{q}_5 \sin q_2 + a(\dot{q}_2 \cos q_1 + \dot{q}_3) \\ \omega_5 = -\dot{q}_4 \sin q_2 + \dot{q}_5 \cos q_2 + a\dot{q}_1 \sin q_1 \end{cases} \tag{2}$$

非完整约束条件为

$$\omega_4 = \omega_5 = 0 \tag{3}$$

由式(2) 反解出

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \omega_1, \dot{q}_2 = \dfrac{\omega_2}{\sin q_1}, \dot{q}_3 = \omega_3 - \omega_2 \operatorname{ctg} q_1 \\ \dot{q}_4 = (\omega_4 - a\omega_3)\cos q_2 - (\omega_5 - a\omega_1 \sin q_1)\sin q_2 \\ \dot{q}_5 = (\omega_4 - a\omega_3)\sin q_2 + (\omega_5 - a\omega_1 \sin q_1)\cos q_2 \end{cases} \tag{4}$$

计算 Boltzmann 三标记号,得[1]

$$\begin{cases} \gamma_{12}^2 = -\gamma_{21}^2 = \operatorname{ctg} q_1, \gamma_{21}^3 = -\gamma_{12}^3 = 1 \\ \gamma_{23}^5 = -\gamma_{32}^5 = \dfrac{a}{\sin q_1} \end{cases} \tag{5}$$

其余为零.系统的 Lagrange 函数在广义坐标中表为

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + a^2 \dot{q}_1^2 \cos^2 q_1) + \frac{1}{2}\{A(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 \sin^2 q_1) + C(\dot{q}_3 + \dot{q}_2 \cos q_1)^2\} - mga \sin q_1 \tag{6}$$

其中 $C = 2A = ma^2$.系统的 Lagrange 函数在准速度下表为

$$L^* = \frac{1}{2}m\left[a^2\left(\frac{3}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 + 2\omega_3^2\right) - 2a\omega_3\omega_4 - 2a\omega_1\omega_5\sin q_1 + \omega_4^2 + \omega_5^2\right] - mga\sin q_1 \tag{7}$$

Boltzmann-Hamel 方程(8.2.9) 给出

$$\begin{cases} \frac{3}{2}ma^2\,\dot{\omega}_1 - \frac{1}{2}ma^2\omega_2^2\operatorname{ctg}q_1 + 2ma^2\omega_2\omega_3 - mga\cos q_1 = 0 \\ \frac{1}{2}ma^2\,\dot{\omega}_2 + \frac{1}{2}ma^2\omega_1\omega_2\operatorname{ctg}q_1 - ma^2\omega_3\omega_1 = 0 \\ 2ma^2\,\dot{\omega}_3 - ma^2\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

对比关系(8.2.26), 知

$$\begin{cases} K_1^* = ma^2\left(\frac{1}{2}\omega_2^2\operatorname{ctg}q_1 - 2\omega_2\omega_3\right) \\ K_2^* = -ma^2\left(\frac{1}{2}\omega_1\omega_2\operatorname{ctg}q_1 - \omega_3\omega_1\right) \\ K_3^* = ma^2\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{9}$$

由方程(8) 求得

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{1}{3}\omega_2^2\operatorname{ctg}q_1 - \frac{4}{3}\omega_2\omega_3 - \frac{2g}{3a}\cos q_1 \\ \dot{\omega}_2 = -\omega_2\omega_1\operatorname{ctg}q_1 + 2\omega_1\omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = \frac{1}{2}\omega_1\omega_2 \end{cases} \tag{10}$$

第二步, 建立确定方程并求解. 确定方程(8.2.18) 给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \omega_1\,\ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0\left(\frac{1}{3}\omega_2^2\operatorname{ctg}q_1 - \frac{4}{3}\omega_2\omega_3 - \frac{3g}{2a}\cos q_1\right) \\ \quad = \left(-\frac{1}{3}\omega_2^2\frac{1}{\sin^2 q_1} + \frac{3g}{2a}\sin q_1\right)\xi_1 + \left(\frac{2}{3}\omega_2\operatorname{ctg}q_1 - \frac{4}{3}\omega_3\right)(\dot{\xi}_2 - \omega_2\,\dot{\xi}_0) \\ \quad\quad - \frac{4}{3}\omega_2(\dot{\xi}_3 - \omega_3\,\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_2 - \omega_2\,\ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0(-\omega_2\omega_1\operatorname{ctg}q_1 + 2\omega_1\omega_3) \\ \quad = \omega_2\omega_1\frac{1}{\sin^2 q_1}\xi_1 + (-\omega_2\operatorname{ctg}q_1 + 2\omega_3)(\dot{\xi}_1 - \omega_1\,\dot{\xi}_0) \\ \quad\quad - \omega_1\operatorname{ctg}q_1(\dot{\xi}_2 - \omega_2\,\dot{\xi}_0) + 2\omega_1(\dot{\xi}_3 - \omega_3\,\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_3 - \omega_3\,\ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0\left(\frac{1}{2}\omega_1\omega_2\right) = \frac{1}{2}\omega_2(\dot{\xi}_1 - \omega_1\,\dot{\xi}_0) + \frac{1}{2}\omega_1(\dot{\xi}_2 - \omega_2\,\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{11}$$

方程(11) 有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{12}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = 0 \tag{13}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_3 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{14}$$

限制方程(8.2.22) 给出

$$\xi_4 = c_4, \xi_5 = c_5 \tag{15}$$

附加限制方程(8.2.24) 给出

$$\xi_4 = \xi_5 = 0 \tag{16}$$

按定义 8.2.2 知,下列生成元对应系统的弱 Lie 对称性

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_4 = 1, \xi_5 = 1 \tag{17}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_3 = 0, \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = 1 \tag{18}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 1 \tag{19}$$

由定义 8.2.3 知,下列生成元对应系统的强 Lie 对称性

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0 \tag{20}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = 0 \tag{21}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_3 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = 0 \tag{22}$$

第三步, 建立结构方程并求守恒量. 对生成元(20), 结构方程(8.2.25) 给出

$$G_1 = 0 \tag{23}$$

对生成元(21),(22),结构方程(8.2.25) 分别给出

$$-ma^2\left(\frac{1}{2}\omega_1\omega_2\mathrm{ctg}q_1 - \omega_3\omega_1\right) + \dot{G}_2 = 0$$

$$ma^2\omega_1\omega_2 + \dot{G}_3 = 0$$

由此找不到相应的规范函数 G_2, G_3,亦即找不到与生成元(21) 或(22) 相应的守恒量.将式(20),(23) 代入守恒量式(8.2.27),得

$$I = L^* - \frac{\partial L^*}{\partial \omega_s}\omega_s = \text{const.} \quad (s = 1, \cdots, 5) \tag{24}$$

它代表系统的能量守恒律.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = \frac{1}{2}ma^2\left(\frac{3}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 + 2\omega_3^2\right) + mga\sin q_1 = \text{const.} \quad (25)$$

方程(8.2.33),(8.2.35) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \omega_1, \bar{\xi}_2 = \omega_2, \bar{\xi}_3 = \omega_3 \\ \xi_0 = -1 - \dfrac{G}{L^*} \end{cases} \quad (26)$$

容易验证,生成元(26) 满足确定方程(11),因此它们是方程(10) 的 Lie 对称性生成元.对式(26) 再添加

$$\xi_4 = \xi_5 = 0 \quad (27)$$

则生成元(26),(27) 对应系统的强 Lie 对称性.

§8.3 变质量非完整系统的 Lie 对称性

本节研究变质量非完整系统 Lie 对称性与守恒量的两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性找到相应的守恒量,包括系统的运动方程,Lie对称性的确定方程,结构方程与守恒量等.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量来求相应的 Lie 对称性.

8.3.1 系统的运动方程

研究 N 个质点组成的力学系统.在时刻 t,第 i 个质点的质点为 $m_i(i = 1, \cdots, N)$;在时刻 $t + \mathrm{d}t$,由质点分离(或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$.假设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定,并设质量有一般形式

$$m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (i = 1, \cdots, N) \quad (8.3.1)$$

假设系统的运动受有 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.3.2)$$

约束(8.3.2) 加在虚位移 δq_s 上的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g; s = 1, \cdots, n) \quad (8.3.3)$$

系统的运动方程可表为 Routh 形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+P_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\qquad(8.3.4)$$

$$(s=1,\cdots,n)$$

其中 L 为 Lagrange 函数，Q''_s 为非势广义力，P_s 为广义反推力，有形式

$$P_s=(\boldsymbol{R}_i+\dot{m}_i\boldsymbol{r}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\qquad(8.3.5)$$

这里$\boldsymbol{r}_i$，$\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 分别为第 i 个质点的矢径和速度，而

$$\boldsymbol{R}_i=\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_i\qquad(8.3.6)$$

其中 $\boldsymbol{u}_i$ 为微粒相对第 i 个质点的相对速度. 注意，式(8.3.6) 对 i 不求和. 一般说来，P_s 可包含广义加速度.

由方程(8.3.2) 和(8.3.4) 可在运动微分方程积分之前将 λ_β 求出为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数. 将其代入方程(8.3.4)，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+P_s+\Lambda_s\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(8.3.7)$$

称方程(8.3.7) 为与变质量非完整系统(8.3.2)(8.3.4) 相应的完整系统的运动方程. 展开方程(8.3.7)，可求得所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(s=1,\cdots,n)\quad(8.3.8)$$

8.3.2 无限小群变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases}t^*=t+\Delta t\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s\quad(s=1,\cdots,n)\end{cases}\qquad(8.3.9)$$

或其展开式

$$\begin{cases}t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\quad(s=1,\cdots,n)\end{cases}\qquad(8.3.10)$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8.3.11}$$

和它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.3.12}$$

根据微分方程在无限小群变换下的不变性理论知，方程(8.3.8)在无限小变换(8.3.10)下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 \alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.3.13}$$

定义 8.3.1 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.3.13)，则相应对称性称为与变质量非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.

8.3.3 限制方程和附加限制方程

非完整约束方程(8.3.2)在无限小变换(8.3.10)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.3.14}$$

虚位移方程(8.3.3)对无限小生成元有附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.3.15}$$

定义 8.3.2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.3.13)和限制方程(8.3:14)，则相应对称性称为变质量非完整系统的弱 Lie 对称性.

定义 8.3.3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.3.13)、限制方程(8.3.14)和附加限制方程(8.3.15)，则相应对称性称为变质量非完整系统的强 Lie 对称性.

8.3.4 结构方程与守恒量

变质量非完整系统的 Lie 对称性不一定导致守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 8.3.1 对于满足确定方程(8.3.13)的无限小生成元

ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s'' + P_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{8.3.16}$$

则与变质量非完整系统相应的完整系统(8.3.8) 存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \tag{8.3.17}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = {} & \dot{L}\xi_0 + L\dot{\xi}_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ & + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \ddot{q}_s\xi_0 - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ & - L\dot{\xi}_0 - \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 - \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) \\ & - (Q_s'' + P_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) \\ = {} & (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s'' - P_s - \Lambda_s\right) \\ = {} & 0\end{aligned}$$

推论 1　对变质量完整系统，定理 8.3.1 成为定理 7.8.1.

推论 2　对常质量非完整系统，定理 8.3.1 成为定理 8.1.1.

定理 8.3.2　对于满足确定方程(8.3.13) 和限制方程(8.3.14) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.3.16)，则变质量非完整系统存在形如式(8.3.17) 的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.3.3　对于满足确定方程(8.3.13)，限制方程(8.3.14) 和附加限制方程(8.3.15) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.3.16)，则变质量非完整系统存在形如式(8.3.17) 的强 Lie 对称性守恒量.

定理 8.3.4　结构方程(8.3.16) 等价于 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + (Q_s'' + P_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$$

$$= -\dot{G} \tag{8.3.18}$$

定理8.3.5 变质量非完整系统Lie对称性与Noether对称性有同样形式的守恒量(8.3.17).

由Lie对称性求相应的守恒量问题称为Lie对称性正问题.正问题的解法如下:首先,对给定的变质量非完整系统建立确定方程(8.3.13),并由此求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s. 其次,验证限制方程(8.3.14)和附加限制方程(8.3.15)是否满足.第三,将所得生成元代入结构方程(8.3.16)并求出$\dot{G}$,如果$\dot{G}$为零或为某函数的全导数,则可找到规范函数 G. 最后,将生成元和规范函数代入式(8.3.17)而得到系统的Lie对称性守恒量.

8.3.5 Lie对称性逆问题

Lie对称性逆问题的提法如下:由已知守恒量(积分)来寻求与其相应的Lie对称性.系统的守恒量不一定有相应的Lie对称性,因此,逆问题可能有解,也可能无解.

为解Lie对称性逆问题,首先利用Noether理论由已知积分找到相应的Noether对称性.假设变质量非完整系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{8.3.19}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{8.3.20}$$

将方程(8.3.7)两端乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{8.3.21}$$

并对 s 求和,得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s'' - P_s - \Lambda_s\right) = 0 \tag{8.3.22}$$

由式(8.3.5)知,P_s 在一般情形对$\ddot{\boldsymbol{q}}$是线性的,记作

$$P_s = W_{sk}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\ \ddot{q}_k + W_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{8.3.23}$$

其中

$$W_{sk} = \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_k}(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} + \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i \frac{\partial^2 m_i}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k} \tag{8.3.24}$$

将式(8.3.20)与式(8.3.22)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零,得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right) - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{8.3.25}$$

假设

$$\det(\omega_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - W_{sk}\right) \neq 0 \tag{8.3.26}$$

则由方程(8.3.25)解得

$$\bar{\xi}_s = \tilde{\omega}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{8.3.27}$$

其中

$$\tilde{\omega}_{sk}\omega_{kr} = \delta_{sr} \tag{8.3.28}$$

再令积分(8.3.19)等于 Lie 对称性守恒量(8.3.17),即令

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G = I \tag{8.3.29}$$

这样,由方程(8.3.27),(8.3.29)在给定规范函数 G 下可求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应与非完整系统相应的完整系统的 Noether 对称性.

其次,由 Noether 对称性来求 Lie 对称性.有如下结果.

定理 8.3.6 如果由方程(8.3.27),(8.3.29)确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.3.13),则所得对称性为与变质量非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性;进而,如果 ξ_0, ξ_s 还满足限制方程(8.3.14),则对称性为变质量非完整系统的弱 Lie 对称性;最后,如果 ξ_0, ξ_s 还满足附加限制方程(8.3.15),则对称性为变质量非完整系统的强 Lie 对称性.

8.3.6 算 例

质点质量为

$$m(t) = m_0 e^{-\alpha t} \qquad (\alpha = \text{const.}) \tag{1}$$

Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2} m(t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{2}$$

非势广义力为

$$\begin{cases} Q_1'' = -\dfrac{1}{t(1+t^2)}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) \\ Q_2'' = -\dfrac{1}{1+t^2}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) \end{cases} \tag{3}$$

微粒分离的绝对速度为零,即

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -\dot{q}_1\boldsymbol{i} - \dot{q}_2\boldsymbol{j} \tag{4}$$

所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0 \tag{5}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.由式(1),(4) 及式(8.3.5) 知

$$P_1 = P_2 = 0 \tag{6}$$

方程(8.3.4) 给出

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_1) = -\dfrac{1}{t(1+t^2)}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) - \lambda t \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{q}_2) = -\dfrac{1}{1+t^2}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) + \lambda \end{cases} \tag{7}$$

由方程(5),(7) 解得

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) \tag{8}$$

故有

$$\begin{cases} Q''_1 + P_1 + \Lambda_1 = -\dfrac{1+t}{t(1+t^2)}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\dot{q}_2 - \dot{m}t\dot{q}_1) \\ Q_2'' + P_2 + \Lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

将式(1),(9) 代入方程(7),得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{1}{t}\dot{q}_1 + \dfrac{1}{t}\alpha\dot{q}_2 = \alpha_1 \\ \ddot{q}_2 = \alpha\dot{q}_2 = \alpha_2 \end{cases} \tag{10}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(8.3.13) 给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ \ddot{\xi}_0 - 2\,\xi_0\left(-\dfrac{1}{t}\dot{q}_1 + \dfrac{1}{t}\alpha\dot{q}_2\right) \\ \quad = \left(\dfrac{1}{t^2}\dot{q}_1 - \dfrac{1}{t^2}\alpha\dot{q}_2\right)\xi_0 + \left(-\dfrac{1}{t}\right)(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) \\ \qquad + \dfrac{1}{t}\alpha(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\,\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ \ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0(\alpha\dot{q}_2) = \alpha(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\,\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{11}$$

方程(11) 有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 0 \tag{12}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{13}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -\frac{1}{2t}, \xi_2 = 1 \tag{14}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{15}$$

它们对应相应完整系统的 Lie 对称性.第三步,验证限制方程和附加限制方程.限制方程(8.3.14) 给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\,\dot{\xi}_0 - t(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) - \dot{q}_1\xi_0 = 0 \tag{16}$$

生成元(12),(13),(15) 满足方程(16),因此,它们对应变质量非完整系统的弱 Lie 对称性.附加限制方程(8.3.15) 给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - t(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) = 0 \tag{17}$$

生成元(15) 满足方程(17),因此,它对应变质量非完整系统的强 Lie 对称性.第四步,建立结构方程并求守恒量.对生成元(12),结构方程(8.3.16) 给出

$$-\frac{1+t}{t(1+t^2)}(m\dot{q}_1 + \dot{m}\,\dot{q}_2 - \dot{m}\,t\,\dot{q}_1) + \dot{G}_1 = 0 \tag{18}$$

由此找不到相应的规范函数 G_1. 对生成元(13),结构方程(8.3.16) 给出

$$G_2 = 0 \tag{19}$$

对生成元(14),(15),由结构方程(8.3.16) 都找不到相应的规范函数.将式(13),(19) 代入式(8.3.17),得到守恒量

$$I = m\dot{q}_2 = \text{const.} \tag{20}$$

它是变质量非完整系统的弱 Lie 对称性守恒量.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = m\dot{q}_2 = \text{const.} \tag{21}$$

方程(8.3.27),(8.3.29) 给出

$$\begin{cases} \bar{\xi}_1 = 0, \bar{\xi}_2 = 1 \\ L\xi_0 + G = 0 . \end{cases} \tag{22}$$

由此解得

$$\xi_1 = \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2\xi_0, \xi_0 = -\frac{G}{L} \tag{23}$$

将式(23) 代入确定方程(11),容易验证它们满足,因此,不论 ξ_0 取何值,生成元(23) 都对应与变质量非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.将式(23) 代入限制方程(16),容易验证它满足,因此,生成元(23) 对应的对称性又是变质量非完整系统的弱 Lie 对称性.但生成元(23) 不满足附加限制方程(17),因此,它对应的对称性不是系统的强 Lie 对称性.

§8.4 事件空间非完整系统的 Lie 对称性

本节在事件空间中研究非完整系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求出相应的守恒量,包括系统的运动方程,确定方程,限制方程,结构方程与守恒量等.另一类是 Lie 对称性逆问题:由守恒量求出相应的 Lie 对称性.

8.4.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定.建立$(n + 1)$ 维扩充的位形空间,即事件空间.此空间中点的坐

标是广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 和时间 t.引入记号

$$x_1 = t, \quad x_{s+1} = q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \quad (8.4.1)$$

令 $x_\alpha = x_\alpha(\tau)$ 为 C^2 类曲线,使得

$$\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = x_\alpha' \qquad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \quad (8.4.2)$$

不同时为零,有

$$\dot{x}_\alpha = \frac{x_\alpha'}{x_1'} \qquad (8.4.3)$$

假设系统在位形空间中的 Lagrange 函数为

$$L = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

非势广义力为

$$Q_s'' = Q_s''(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s = 1, \cdots, n)$$

所受非完整约束为

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.4.4)$$

并设 f_β 对$\dot{\boldsymbol{q}}$ 是齐次的 .

构造事件空间中 Lagrange 函数

$$\Lambda(x_\alpha, x_\alpha') = x_1' L\left(x_\alpha, \frac{x_{s+1}'}{x_1'}\right) \qquad (8.4.5)$$

非完整约束

$$F_\beta(x_\alpha, x_\alpha') = f_\beta\left(x_\alpha, \frac{x_{s+1}'}{x_1'}\right) = 0 \qquad (8.4.6)$$

以及广义力[3]

$$\begin{cases} P_1 = -Q_s'' x_{s+1}' \\ P_{s+1} = x_1' Q_s''\left(x_\alpha, \dfrac{x_{s+1}'}{x_1'}\right) \end{cases} \qquad (8.4.7)$$

则事件空间中非完整系统的运动方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'} \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \quad (8.4.8)$$

现在分析方程(8.4.8). 首先,它的第一个($\alpha = 1$) 代表能量方程.因

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1'} = L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = -H$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = x_1' \frac{\partial L}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_1'} = -\frac{1}{x_1'}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s$$

故方程(8.4.8)的第一个成为

$$-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\tau} - t'\frac{\partial L}{\partial t} = -t'Q_s''\dot{q}_s - \frac{1}{t'}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s \tag{8.4.9}$$

当

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, Q_s''\dot{q}_s = 0, \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s = 0 \tag{8.4.10}$$

时,有能量积分

$$H = \text{const.} \tag{8.4.11}$$

其次,$(n+1)$ 个方程(8.4.8)不是彼此独立的,有如下联系

$$x_\alpha'\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha - \lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'}\right) = 0 \tag{8.4.12}$$

这是因为

$$x_\alpha' P_\alpha = 0 \tag{8.4.13}$$

$$\lambda_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'}x_\alpha' = 0 \tag{8.4.14}$$

$$x'_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\right) = 0 \tag{8.4.15}$$

最后,当取 $t = \tau$ 时,方程(8.4.8)第一个成为能量方程

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} = Q_s''\dot{q}_s + \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s \tag{8.4.16}$$

而后面 n 个方程成为位形空间中的 Routh 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'' + \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.4.17}$$

由方程(8.4.6),(8.4.8)可求出 λ_β 作为 x_α', x_α 的函数,于是方程(8.4.8)可表为形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} = P_\alpha + R_\alpha \qquad (8.4.18)$$

$$(\alpha = 1, \cdots, n+1)$$

其中

$$R_\alpha = \lambda_\beta(x_\gamma, x_\gamma')\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'} \qquad (8.4.19)$$

将方程(8.4.18) 后面 n 个方程展开,可求得

$$h_{s+1,k+1}x''_{k+1} = W_{s+1} \quad (s,k = 1, \cdots, n) \qquad (8.4.20)$$

其中

$$\begin{cases} h_{s+1,k+1} = \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_{k+1}} \\ W_{s+1} = P_{s+1} + R_{s+1} + \dfrac{\partial \Lambda}{\partial x_{s+1}} - \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x_\beta}x_\beta' \\ \qquad\qquad - \dfrac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x_1'}x''_1 \end{cases} \qquad (8.4.21)$$

8.4.2 无限小群变换与确定方程

引入参数 τ 和事件空间中坐标 x_α 的无限小群变换

$$\begin{cases} \tau^* = \tau + \Delta\tau \\ x_\alpha{}^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \Delta x_\alpha \quad (\alpha = 1, \cdots, n+1) \end{cases} \qquad (8.4.22)$$

或其展开式

$$\begin{cases} \tau^* = \tau + \varepsilon\xi_0(\tau, x_\alpha, x_\alpha') \\ x_\alpha^*(\tau^*) = x_\alpha(\tau) + \varepsilon\xi_\alpha(\tau, x_\beta, x_\beta') \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1) \end{cases} \qquad (8.4.23)$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial\tau} + \xi_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \qquad (8.4.24)$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\xi_\alpha' - x_\alpha'\xi_0')\frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \qquad (8.4.25)$$

以及它的二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + [(\xi_\alpha' - x_\alpha'\xi_0')' - x_\alpha''\xi_0'] \frac{\partial}{\partial x_\alpha''} \tag{8.4.26}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知，方程(8.4.20)在无限小变换(8.4.23)下的不变性归为

$$X^{(2)}(h_{s+1,k+1}x''_{k+1} - W_{s+1}) = 0 \tag{8.4.27}$$

即

$$\begin{aligned} & h_{s+1,k+1}(\xi''_{k+1} - x'_{k+1}\xi_0'' - 2\xi_0'x''_{k+1}) \\ & + \left[\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}(\xi_\alpha' - x_\alpha'\xi_0')\right]x''_{k+1} - \frac{\partial W_{s+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha \\ & - \frac{\partial W_{s+1}}{\partial x'_\alpha}(\xi_\alpha' - x_\alpha'\xi_0') + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}(\xi_1'' - x_1'\xi_0'' - 2\xi_0'x_1'') \\ & = 0 \end{aligned} \tag{8.4.28}$$

确定方程(8.4.28)可以简化.可以证明如下关系

$$h_{s+1,k+1}x'_{k+1} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x_1' = 0 \tag{8.4.29}$$

$$\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}x_\alpha' + h_{s+1,k+1} = 0 \tag{8.4.30}$$

$$\frac{\partial W_{s+1}}{\partial x'_\alpha}x_\alpha' - 2\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}x_1'' - W_{s+1} = 0 \tag{8.4.31}$$

于是有

$$\begin{aligned} & h_{s+1,k+1}\xi''_{k+1} + \left(\frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial h_{s+1,k+1}}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha'\right)x''_{k+1} \\ & - \frac{\partial W_{s+1}}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha - \frac{\partial W_{s+1}}{\partial x'_\alpha}\xi_\alpha' + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x'_{s+1}\partial x'_1}\xi''_1 = 0 \end{aligned} \tag{8.4.32}$$

$$(s, k = 1, \cdots, n)$$

可见,确定方程(8.4.32)中不含生成元 ξ_0.

定义 8.4.1 如果无限小生成元 ξ_α 满足确定方程(8.4.32),则称相应对称性为与事件空间中非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.

8.4.3 限制方程和附加限制方程

事件空间中非完整约束方程(8.4.6)在无限小变换(8.4.23)

下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(F_\beta(x_\alpha, x_\alpha'))\Big|_{F_\beta=0} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.4.33}$$

它们可简化为

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha' = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g; \alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{8.4.34}$$

定义 8.4.2 如果无限小生成元 ξ_α 满足确定方程(8.4.32)和限制方程(8.4.34),则称相应对称性为事件空间中非完整系统的弱 Lie 对称性.

事件空间中非完整约束方程(8.4.6) 对虚位移 δx_α 有如下限制

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\beta'}\delta x_\alpha = 0 \tag{8.4.35}$$

注意到

$$\delta x_\alpha = \Delta x_\alpha - x_\alpha'\Delta\tau = \varepsilon(\xi_\alpha - x_\alpha'\xi_0) \tag{8.4.36}$$

则式(8.4.35) 成为

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'}(\xi_\alpha - x_\alpha'\xi_0) = 0 \tag{8.4.37}$$

它们可简化为

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g; \alpha = 1, \cdots, n+1) \tag{8.4.38}$$

称方程(8.4.38) 为附加限制方程.

定义 8.4.3 如果无限小生成元 ξ_α 满足确定方程(8.4.32)、限制方程(8.4.34) 和附加限制方程(8.4.38),则称相应对称性为事件空间中非完整系统的强 Lie 对称性.

8.4.4 结构方程与守恒量

事件空间中非完整系统的 Lie 对称性不一定有相应的守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 8.4.1 对于满足确定方程(8.4.32) 的无限小生成元 ξ_α,如果存在规范函数 $G = G(x_\alpha, x_\alpha')$ 满足结构方程

$$\Lambda\xi_0' + X^{(1)}(\Lambda) + (P_\alpha + R_\alpha)\xi_\alpha + G' = 0 \tag{8.4.39}$$

则与事件空间中非完整系统相应的完整系统存在如下形式的守恒量

$$I = \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha + G = \text{const.} \tag{8.4.40}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau} = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha' - \Lambda\xi_0' - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}(\xi_\alpha' - x_\alpha'\xi_0') \\ & - (P_\alpha + R_\alpha)\xi_\alpha \\ = & \xi_\alpha\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha - R_\alpha\right) = 0\end{aligned}$$

结构方程(8.4.39) 中 ξ_0' 实际上不出现,它可简化为

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha}\xi_\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'}\xi_\alpha' + (P_\alpha + R\alpha)\xi_\alpha + G' = 0 \tag{8.4.41}$$

这就是 Noether 等式.

定理 8.4.2 事件空间中的结构方程(8.4.39) 等价于其 Noether 等式(8.4.41).

定理 8.4.3 对于满足确定方程(8.4.32) 和限制方程(8.4.34) 的无限小生成元 ξ_α,如果存在规范函数 $G = G(x_\alpha, x_\alpha')$ 满足结构方程(8.4.39), 则事件空间中非完整系统存在形如(8.4.40) 的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.4.4 对于满足确定方程(8.4.32)、限制方程(8.4.34) 和附加限制方程(8.4.38) 的无限小生成元 ξ_α,如果存在规范函数 $G = G(x_\alpha, x_\alpha')$ 满足结构方程(8.4.39),则事件空间中非完整系统存在形如(8.4.40) 的强 Lie 对称性守恒量.

在定理 8.4.4 中,结构方程可简化为形式

$$\Lambda\xi_0' + X^{(1)}(\Lambda) + P_\alpha\xi_\alpha + G' = 0 \tag{8.4.42}$$

Lie 对称性正问题的提法是:由已知 Lie 对称性找到相应的守恒量.正问题的解法如下:首先,建立确定方程(8.4.32),并由此求出无限小生成元 ξ_α. 其次,验证限制方程(8.4.34) 和附加限制方程(8.4.38). 第三, 由结构方程(8.4.39) 求出规范函数 G. 最后,将 ξ_α, G 代入式(8.4.40) 而求得守恒量.

8.4.5 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法是:由已知守恒量(积分) 来求相应的 Lie 对称性. 为解此类逆问题,首先按 Noether 理论根据已知积分来求相应的 Noether 对称性. 假设系统有积分

$$I = I(x_\alpha, x_\alpha') = \text{const.} \tag{8.4.43}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial I}{\partial x_\alpha} x_\alpha' + \frac{\partial I}{\partial x_\alpha'} x_\alpha'' = 0 \tag{8.4.44}$$

将方程(8.4.8) 两端乘以 ξ_α 并对 α 求和,得

$$\xi_\alpha \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha} - P_\alpha - \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha'} \right) = 0 \tag{8.4.45}$$

将式(8.4.44) 与(8·4.45) 相加,分出含 x_β'' 的项,由其系数为零得到

$$\xi_\alpha \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} - \frac{\partial I}{\partial x_\beta'} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n+1) \tag{8.4.46}$$

注意到,$(n+1)$ 个方程(8.4.46) 不是彼此独立的. 再令积分(8.4.43) 等于守恒量(8.4.40),即令

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_\alpha'} \xi_\alpha + G = I \tag{8.4.47}$$

这样,由方程(8.4.46),(8.4.47) 便可求得生成元 ξ_α,它对应系统的 Noether 对称性.

其次,将所得 Noether 对称性代入确定方程(8.4.32)、限制方程(8.4.34) 和附加限制方程(8.4.38) 来检验对称性是否 Lie 的. 结果归纳为

定理 8.4.5 如果由方程(8.4.46),(8.4.47) 确定的无限小生成元 ξ_α 满足确定方程(8.4.32),则所得对称性为与事件空间中非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性;进而,如果无限小生成元 ξ_α 还满足限制方程(8.4.34),则对称性为事件空间中非完整系统的弱 Lie 对称性;最后,如果无限小生成元 ξ_α 还满足附加限制方

程(8.4.38),则对称性为系统的强 Lie 对称性.

8.4.6 取某坐标作为参数的情形

如果在事件空间参数方程(8.4.8) 中,取某个坐标为参数 τ,则有可能使方程得以简化.此时,方程只有 n 个,并且是彼此独立的.但是,此时关系(8.4.13)—(8.4.15) 一般说已不再成立.取

$$x_{n+1} = \tau, \quad x_s = \frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}x_{n+1}}$$

则方程(8.4.8) 写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{n+1}}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_s'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_s} = P_s + \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial x_s'} \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (8.4.48)$$

在运动微分方程积分之前,可由方程(8.4.6),(8.4.48) 求出 λ_β 作为 x_{n+1}, x_s, x_s' 的函数.于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{n+1}}\frac{\partial \Lambda}{\partial x_s'} - \frac{\partial \Lambda}{\partial x_s} = P_s + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (8.4.49)$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s(x_{n+1}, x_s, x_s') = \lambda_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial x_s'} \quad (8.4.50)$$

展开方程(8.4.49),可求得 x_s'',简记作

$$x_s'' = \alpha_s(x_{n+1}, x_k, x_k') \quad (s, k = 1, \cdots, n) \quad (8.4.51)$$

Lie 对称性的确定方程成为

$$\xi_s'' - x_s'\xi_0'' - 2\xi_0'\alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \quad (8.4.52)$$

限制方程为

$$X^{(1)}(F_\beta(x_{n+1}, x_s, x_s'))\Big|_{F_\beta = 0} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.4.53)$$

附加限制方程为

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial x_s'}(\xi_s - x_s'\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \quad (8.4.54)$$

结构方程为

$$\Lambda\xi'_0 + X^{(1)}(\Lambda) + (P_s + \Lambda_s)(\xi_s - x_s'\xi_0) + G' = 0 \quad (8.4.55)$$

守恒量有形式

$$I = \Lambda\xi_0 + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_s'}(\xi_s - x_s'\xi_0) + G = \text{const.} \qquad (8.4.56)$$

8.4.7 算　例

研究事件空间中 Appell-Hamel 例的 Lie 对称性与守恒量.

Appell-Hamel 例在位形空间中的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - mgq_3 \qquad (1)$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \dot{q}_3^2 = 0 \qquad (2)$$

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立事件空间中的运动方程.令

$$x_1 = t, \quad x_{s+1} = q_s \quad (s = 1,2,3) \qquad (3)$$

则有

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{m}{x_1'}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2] - mgx_1'x_4 \qquad (4)$$

$$F = \frac{1}{(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 - (x_4')^2] = 0 \qquad (5)$$

运动方程(8.4.8)的后面三个方程给出为

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{x_2'}{x_1'}\right)' = \lambda\dfrac{2x_2'}{(x_1')^2} \\ m\left(\dfrac{x_3'}{x_1'}\right)' = \lambda\dfrac{2x_3'}{(x_1')^2} \\ m\left(\dfrac{x_4'}{x_1'}\right)' + mgx_1' = -\lambda\dfrac{2x_4'}{(x_1')^2} \end{cases} \qquad (6)$$

由方程(5),(6)解得

$$\frac{2\lambda}{m} = -\frac{g(x_1')^3}{2x_4'} \qquad (7)$$

对照方程(8.4.18),有

$$\begin{cases} P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0 \\ R_2 = -\frac{1}{2} mg \frac{x_1' x_2'}{x_4'} \\ R_3 = -\frac{1}{2} mg \frac{x_1' x_3'}{x_4'} \\ R_4 = \frac{1}{2} mg x_1' \end{cases} \tag{8}$$

于是有

$$\begin{cases} \frac{x_2''}{x_1'} = \frac{x_2' x_1''}{(x_1')^2} - \frac{1}{2} g \frac{x_1' x_2'}{x_4'} \\ \frac{x_3''}{x_1'} = \frac{x_3' x_1''}{(x_1')^2} - \frac{1}{2} g \frac{x_1' x_3'}{x_4'} \\ \frac{x_4''}{x_1'} = \frac{x_4' x_1''}{(x_1')^2} + \frac{1}{2} g x_1' - g x_1' \end{cases} \tag{9}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程可按方程(8.4.32)列写,亦可直接由算子 $X^{(2)}$ 对方程(9)作用而得到,有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x_1'} \xi_2'' - \frac{1}{(x_1')^2} \left[\frac{x_2' x_1''}{x_1'} - \frac{1}{2} g \frac{(x_1')^2 x_2'}{x_4'} \right] \xi_1' \\ &= -2 \frac{x_2' x_1''}{(x_1')^3} \xi_1' + \frac{x_1''}{(x_1')^2} \xi_2' + \frac{x_2'}{(x_1')^2} \xi_1'' \\ &\quad - \frac{1}{2} g \left| \frac{x_2'}{x_4'} \xi_1' + \frac{x_1'}{x_4'} \xi_2' - \frac{x_1' x_2'}{(x_4')^2} \xi_4' \right| \\ &\quad \frac{1}{x_1'} \xi_3'' - \frac{1}{(x_1')^2} \left[\frac{x_3' x_1''}{x_1'} - \frac{1}{2} g \frac{(x_1')^2 x_3'}{x_4'} \right] \xi_1' \\ &= -2 \frac{x_3' x_1''}{(x_1')^3} \xi_1' + \frac{x_1''}{(x_1')^2} \xi_3' + \frac{x_3'}{(x_1')^2} \xi_1'' \\ &\quad - \frac{1}{2} g \left| \frac{x_3'}{x_4'} \xi_1' + \frac{x_1'}{x_4'} \xi_3' - \frac{x_1' x_3'}{(x_4')^2} \xi_4' \right| \\ &\quad \frac{1}{x_1'} \xi_4'' - \frac{1}{(x_1')^2} \left[\frac{x_4' x_1''}{x_1'} - \frac{1}{2} g (x_1')^2 \right] \xi_1' \\ &= -2 \frac{x_4' x_1''}{(x_1')^3} \xi_1' + \frac{x_1''}{(x_1')^2} \xi_4' + \frac{x_4'}{(x_1')^2} \xi_1'' - \frac{1}{2} g \xi_1' \end{aligned} \tag{10}$$

确定方程(10) 显然有如下解

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{11}$$

$$\xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{12}$$

$$\xi_3 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = 0 \tag{13}$$

$$\xi_4 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{14}$$

这些生成元对应相应完整系统的 Lie 对称性. 第三步, 验证限制方程和附加限制方程. 方程(8.4.34),(8.4.38) 分别给出

$$x_2'\xi_2' + x_3'\xi_3' - x_4'\xi_4' = 0 \tag{15}$$

$$x_2'\xi_2 + x_3'\xi_3 - x_4'\xi_4 = 0 \tag{16}$$

易见, 生成元(11)—(14) 都满足式(15), 因此, 它们都对应事件空间中非完整系统的弱 Lie 对称性. 生成元(11) 还满足式(16), 因此, 它对应系统的强 Lie 对称性. 第四步, 建立结构方程并求守恒量. 结构方程(8.4.39) 给出

$$\begin{aligned} &- mgx_1'\xi_4 + \left\{ -\frac{m}{2(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2] - mgx_4 \right\} \xi_1' \\ &+ \frac{m}{x_1'}x_2'\xi_2' + \frac{m}{x_1'}x_3'\xi_3' + \frac{m}{x_1'}x_4'\xi_4' - \frac{1}{2}mg\frac{x_1'x_2'}{x_4'} \\ &- \frac{1}{2}mg\frac{x_1'x_3'}{x_4'}\xi_3 + \frac{1}{2}mgx_1'\xi_4 + G' = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

对生成元(11), 结构方程(17) 给出

$$G_1 = 0 \tag{18}$$

对生成元(12),(13), 分别给出

$$-\frac{1}{2}mg\frac{x_1'x_2'}{x_4'} + G_2' = 0 \tag{19}$$

$$-\frac{1}{2}mg\frac{x_1'x_3'}{x_4'} + G_3' = 0 \tag{20}$$

由此找不到规范函数 G_2, G_3. 对生成元(14), 结构方程(17) 给出

$$G_4 = \frac{1}{2}mgx_1 \tag{21}$$

将式(11),(18) 代入式(8.4.40),得到守恒量

$$I_1 = -\frac{m}{2(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2] - mgx_4 = \text{const.} \quad (22)$$

将式(14),(21) 代入式(8.4.40),得

$$I_4 = \frac{mx_4'}{x_1'} + \frac{1}{2}mgx_1 = \text{const.} \quad (23)$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题. 假设系统有积分(23),求与其相应的 Lie 对称性. 方程(8.4.46),(8.4.47) 给出

$$\begin{cases} \xi_1 \dfrac{m}{(x_1')^3}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2] + \xi_2\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_2'\right) \\ \quad + \xi_3\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_3'\right) + \xi_4\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_4'\right) = -\dfrac{m}{(x_1')^2}x_4' \\ \xi_1\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_2'\right) + \xi_2\left(\dfrac{m}{x_1'}\right) = 0 \quad \xi_1\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_3'\right) + \xi_3\left(\dfrac{m}{x_1'}\right) = 0 \\ \xi_1\left(-\dfrac{m}{(x_1')^2}x_4'\right) + \xi_4\left(\dfrac{m}{x_1'}\right) = \dfrac{m}{x_1'} \\ \left\{-\dfrac{m}{2(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + (x_4')^2] - mgx_4\right\}\xi_1 + \dfrac{mx_2'}{x_1'}\xi_2 \\ \quad + \dfrac{mx_3'}{x_1'}\xi_3 + \dfrac{mx_4'}{x_1'}\xi_4 + G = \dfrac{mx_4'}{x_1'} + \dfrac{1}{2}mgx_1 \end{cases} \quad (24)$$

方程(24) 有解

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \xi_4 = 1, G = \frac{1}{2}mgx_1 \quad (25)$$

它满足限制方程(15),但不满足附加限制方程(16),因此,它对应非完整系统的弱 Lie 对称性.

最后,取某个坐标作为参数来研究 Lie 对称性. 选

$$x_4 = \tau \quad (26)$$

则有

$$\Lambda = \frac{1}{2}\frac{m}{x_1'}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + 1] - mgx_1'\tau \quad (27)$$

$$F = \frac{1}{(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 - 1] = 0 \tag{28}$$

此时方程(8.4.48) 给出为

$$\frac{m}{(x_1')^3}x_1''[(x_2')^2 + (x_3')^2 + 1] - \frac{m}{(x_1')^2}(x_2'x_2'' + x_3'x_3'') - mg$$

$$= -2\lambda \frac{1}{(x_1')^3}[(x_2')^2 + (x_3')^2 - 1]$$

$$m\left(\frac{x_2'}{x_1'}\right)' = 2\lambda \frac{x_2'}{(x_1')^2} \tag{29}$$

$$m\left(\frac{x_3'}{x_1'}\right)' = 2\lambda \frac{x_3'}{(x_1')^2}$$

由方程(28),(29) 求得

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{4}mg(x_1')^3, & x_1'' = \frac{1}{2}g(x_1')^3 \\ x_2'' = 0, & x_3'' = 0 \end{cases} \tag{30}$$

而

$$\begin{cases} P_1 + R_1 = 0 \\ P_2 + R_2 = -\frac{1}{2}mgx_1'x_2' \\ P_3 + R_3 = -\frac{1}{2}mgx_1'x_3' \end{cases} \tag{31}$$

确定方程(8.4.52) 给出

$$\begin{cases} \xi_1'' - x_1'\xi_0'' - 2\xi_0'\left[\frac{1}{2}g(x_1')^3\right] = \frac{3}{2}g(x_1')^2(\xi_1' - x_1'\xi_0') \\ \xi_2'' - x_2'\xi_0'' = 0, \qquad \xi_3'' - x_3'\xi_0'' = 0 \end{cases} \tag{32}$$

方程(32) 有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{33}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = x_1', \xi_2 = x_2', \xi_3 = x_3' \tag{34}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = x_1', \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{35}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{36}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = \tau, \xi_3 = \tau \tag{37}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = x_3', \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{38}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = x_2', \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{39}$$

它们对应与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性. 限制方程(8.4.53) 和附加限制方程(8.4.54) 分别给出

$$x_2'(\xi_2' - x_2'\xi_0') + x_3'(\xi_3' - x_3'\xi_0') = 0 \tag{40}$$

$$x_2'(\xi_2 - x_2'\xi_0) + x_3'(\xi_3 - x_3'\xi_0) = 0 \tag{41}$$

生成元(33)—(36),(38),(39) 都满足方程(40),因此它们都对应事件空间中非完整系统的弱 Lie 对称性. 生成元(34)—(36),(38),(39) 同时还满足方程(41),因此它们对应事件空间中非完整系统的强 Lie 对称性. 对生成元(33)—(39),结构方程(8.4.55) 分别给出

$$G_1 = \frac{1}{2} mgx_1 \tag{42}$$

$$G_2 = -\Lambda \tag{43}$$

$$G_3 = -\frac{m}{x_1'} + mg(\tau x_1' - x_1) \tag{44}$$

$$G_4 = 0 \tag{45}$$

$$G_5' = m\frac{x_2'}{x_1'} + m\frac{x_3'}{x_1'} - \frac{1}{2} mgx_1'x_2'\tau - \frac{1}{2} mgx_1'x_3'\tau \tag{46}$$

$$G_6 = 0 \tag{47}$$

$$G_7 = 0 \tag{48}$$

守恒量(8.4.56) 分别为

$$I_1 = \frac{m}{x_1'} + \frac{1}{2} mgx_1 = \text{const.} \tag{49}$$

$$I_2 \equiv 0 \tag{50}$$

$$I_3 = -\frac{2m}{x_1'} - mgx_1 = \text{const.} \tag{51}$$

$$I_4 = -\frac{m}{(x_1')^2} - mg\tau = \text{const.} \tag{52}$$

$$I_6 = -\frac{m}{2(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + 1]x_3' - mg\tau x_3'$$
$$= \text{const.} \tag{53}$$

$$I_7 = -\frac{m}{2(x_1')^2}[(x_2')^2 + (x_3')^2 + 1]x_2' - mg\tau x_2'$$
$$= \text{const.} \tag{54}$$

这样,生成元(34) 是平庸的,生成元(37) 没有相应的守恒量.

可见,对 Appell-Hamel 例,取 $x_4 = \tau$ 将带来方便.

§8.5 非完整系统相对运动动力学的 Lie 对称性

本节研究非完整系统相对运动动力学的 Lie 对称性与守恒量两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求相应的守恒量.另一类是 Lie 对称性逆问题:由守恒量找到相应的 Lie 对称性.

8.5.1 非完整系统相对运动动力学方程

假设系统位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定.系统的运动受有 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.5.1}$$

约束(8.5.1) 加在虚位移 δq_s 上的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.5.2}$$

系统的运动方程可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} = Q_s'' + Q_s^{\omega} + \Gamma_s + \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.5.3}$$
$$(s = 1, \cdots, n)$$

这里符号同 §7.10 中所述,λ_β 为约束乘子.

假设系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{8.5.4}$$

在运动微分方程积分之前,可由方程(8.5.1),(8.5.3) 求出

λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数.将其代入方程(8.5.3),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} = Q_s'' + Q_s^{\omega} + \Gamma_s + \Lambda_s \qquad (8.5.5)$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (8.5.6)$$

称方程(8.5.5) 为与非完整系统(8.5.1),(8.5.3) 相应的完整系统的运动方程.展开方程(8.5.5),可求出所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \qquad (8.5.7)$$

8.5.2 无限小群变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \qquad (8.5.8)$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \qquad (8.5.9)$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \qquad (8.5.10)$$

及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \qquad (8.5.11)$$

根据微分方程在无限小群变换下的不变性理论知,方程(8.5.7) 在无限小变换(8.5.9) 下的不变性归为

$$X^{(2)}(\ddot{q}_s - \alpha_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \qquad (8.5.12)$$

如果

$$\ddot{q}_s = \alpha_s \qquad (8.5.13)$$

进而,归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \qquad (8.5.14)$$

定义8.5.1 如果无限小变换(8.5.9)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.5.14),则称相应的对称性为与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.

8.5.3 限制方程和附加限制方程

非完整系统相对运动动力学的约束方程(8.5.1) 在无限小群变换(8.5.9) 下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (8.5.15)$$

定义8.5.2 如果无限小变换(8.5.9)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.5.14) 和限制方程(8.5.15), 则称相应的对称性为非完整系统相对运动动力学的弱 Lie 对称性.

虚位移方程(8.5.2) 对无限小变换生成元的限制归为如下附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (8.5.16)$$

定义 8.5.3 如果无限小变换(8.5.9) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.5.14)、限制方程(8.5.15) 和附加限制方程(8.5.16),则称相应的对称性为非完整系统相对运动动力学的强 Lie 对称性.

8.5.4 结构方程与守恒量

Lie 对称性不一定导致守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 8.5.1 对于满足确定方程(8.5.14) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L_r\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L_r) + (Q_s'' + Q_s^{\omega} + \Gamma_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \qquad (8.5.17)$$

则与非完整系统相应的完整系统存在如下形式的 Lie 对称性守恒量

$$I = L_r\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \quad (8.5.18)$$

定理 8.5.2 对于满足确定方程(8.5.14)和限制方程(8.5.15)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.5.17)，则非完整系统相对运动动力学存在形如(8.5.18)的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.5.3 对于满足确定方程(8.5.14)、限制方程(8.5.15)和附加限制方程(8.5.16)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L_r\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L_r) + (Q_s'' + \dot{Q}_s^{\omega} + \Gamma_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \quad (8.5.19)$$

则非完整系统相对运动动力学存在形如(8.5.18)的强 Lie 对称性守恒量.

定理 8.5.4 结构方程(8.5.17)等价于 Noether 等式

$$\frac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s + (L_r - \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s)\dot{\xi}_0 + (Q_s'' + \dot{Q}_s^{\omega} + \Gamma_s + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G} \quad (8.5.20)$$

定理 8.5.5 非完整系统相对运动动力学 Lie 对称性与 Noether 对称性有同样形式的守恒量(8.5.18).

Lie 对称性正问题的提法是：由已知 Lie 对称性来求相应的守恒量. 正问题的解法如下：首先，建立确定方程(8.5.14)并求解. 其次，验证限制方程(8.5.15)和附加限制方程(8.5.16). 第三，将所得生成元代入结构方程(8.5.17)并求出 $\dot{G}$，如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数，则可求得规范函数 G. 最后，将所得生成元和规范函数代入式(8.5.18)，便得守恒量.

8.5.5 Lie 对称性逆问题

Lie 对称性逆问题的提法是：由已知守恒量来求相应的 Lie 对称性. 为解此类逆问题，首先按 Noether 理论由已知积分找到相应

的 Noether 对称性. 假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{8.5.21}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{8.5.22}$$

将运动方程(8.5.3) 两端同时乘以

$$\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0 \tag{8.5.23}$$

并对 s 求和, 得到

$$\bar{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_r}{\partial q_s} - Q_s'' - Q_s^{\dot{\omega}} - \Gamma_s - \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0 \tag{8.5.24}$$

将式(8.5.22) 与式(8.5.24) 相加, 分出含 $\ddot{q}_k$ 的项, 由其系数为零得到

$$\bar{\xi}_s\frac{\partial^2 L_r}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \tag{8.5.25}$$

因有假设(8.5.4), 故可由方程(8.5.25) 解出所有 $\bar{\xi}_s$, 表为

$$\bar{\xi}_s = \tilde{h}_{sk}\frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \quad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{8.5.26}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk}h_{kr} = \delta_{sr} \tag{8.5.27}$$

再令积分(8.5.21) 等于守恒量(8.5.18), 即令

$$L_r\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G = I \tag{8.5.28}$$

这样, 由方程(8.5.26), (8.5.28) 便可求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 其中包含规范函数 G. 这些生成元对应相应完整系统的 Noether 对称性.

其次, 将所得生成元代入确定方程(8.5.14)、限制方程(8.5.15) 和附加限制方程(8.5.16) 来检验对称性是否 Lie 的. 有如下结果

定理 8.5.6 如果由方程(8.5.26), (8.5.28) 所确定的无限

小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.5.14),则所得对称性为与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性;进而,如果它们还满足限制方程(8.5.15),则为非完整系统相对运动动力学的弱 Lie 对称性;最后,如果它们还满足附加限制方程(8.5.16),则为系统的强 Lie 对称性.

8.5.6 算　例

某力学系统在相对运动中有

$$\begin{cases} T_r = \dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ V^0 = 0, V^\omega = -\dfrac{1}{2}\omega^2(q_1^2 + q_2^2) \\ \Gamma_1 = 2\omega\dot{q}_2, \Gamma_2 = -2\omega\dot{q}_1, \Gamma_3 = 0 \\ Q_s'' = 0, Q_s^\omega = 0 \quad (s = 1,2,3) \end{cases} \tag{1}$$

所受非完整约束为

$$f = \dot{q}_2 - q_3\dot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.方程(8.5.3) 给出

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 - \omega^2 q_1 = 2\omega\dot{q}_2 - \lambda q_3 \\ \ddot{q}_2 - \omega^2 q_2 = -2\omega\dot{q}_1 + \lambda \\ \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3) 求得约束乘子

$$\lambda = \frac{1}{1 + q_3^2}\{\omega^2(q_3 q_1 - q_2) + 2\omega(\dot{q}_1 + q_3\dot{q}_2) + \dot{q}_1\dot{q}_3\} \tag{4}$$

将式(4) 代入方程(3),得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \dfrac{1}{1+q_3^2}\{\omega^2(q_1+q_2q_3)-q_3\,\dot{q}_1\,\dot{q}_3\} = \alpha_1 \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{1}{1+q_3^2}\{\omega^2(q_2q_3^2+q_3q_1)+\dot{q}_1\,\dot{q}_3\} = \alpha_2 \\ \ddot{q}_3 = 0 = \alpha_3 \end{cases} \tag{5}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(8.5.14)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_1 = X^{(1)}(\alpha_1) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_2 = X^{(1)}(\alpha_2) \\ \ddot{\xi}_3 - \dot{q}_3\ddot{\xi}_0 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

方程(6)有解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{7}$$

它对应相应完整系统的 Lie 对称性.第三步,检验限制方程和附加限制方程.限制方程(8.5.15)给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 - q_3(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) - \dot{q}_1\xi_3 = 0 \tag{8}$$

附加限制方程(8.5.16)给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - q_3(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) = 0 \tag{9}$$

显然,生成元(7)满足方程(8),(9),因此它对应非完整系统相对运动动力学的强 Lie 对称性.第四步,建立结构方程并求守恒量.对生成元(7),结构方程(8.5.17)给出

$$\begin{aligned} &-(2\omega\,\dot{q}_2-\lambda q_3)\,\dot{q}_1-(-2\omega\,\dot{q}_1+\lambda)\,\dot{q}_2+\dot{G} \\ &=0 \end{aligned} \tag{10}$$

由此求得规范函数

$$G = 0 \tag{11}$$

将式(7),(11)代入守恒量式(8.5.18),得到

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}\omega^2(q_1^2+q_2^2) \\ &= \text{const.} \end{aligned} \tag{12}$$

它是系统的广义能量积分.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = \dot{q}_3 = \text{const.} \tag{13}$$

求与其相应的 Lie 对称性.方程(8.5.26),(8.5.28) 给出

$$\begin{cases} \overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = 0, \overline{\xi}_3 = 1 \\ L_r\xi_0 + G = 0 \end{cases} \tag{14}$$

由此解得

$$\xi_1 = \dot{q}_1\xi_0, \xi_2 = \dot{q}_2\xi_0, \xi_3 = 1 + \dot{q}_3\xi_0, \xi_0 = -\frac{G}{L_r} \tag{15}$$

它对应相应完整系统的 Noether 对称性.将生成元(15) 代入确定方程(6),易见,它们不满足,因此,生成元(15) 对应的对称性不是 Lie 对称性.

§8.6 高阶非完整系统的 Lie 对称性

本节研究高阶非完整系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题.一类问题是 Lie 对称性正问题:由 Lie 对称性求得相应的守恒量.为解 Lie 对称性正问题,首先要建立系统的运动方程,然后建立 Lie 对称性的确定方程和限制方程,最后建立结构方程并给出守恒量的形式.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量找到相应的 Lie 对称性.

8.6.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定,它的运动受有 g 个理想双面 m 阶非完整约束

$$\begin{pmatrix} \overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q}_s, \overset{(m)}{q}_\sigma) \\ s = 1, \cdots, n; \beta = 1, \cdots, g; \\ \sigma = 1, \cdots, \varepsilon; \varepsilon = n - g \end{pmatrix} \tag{8.6.1}$$

系统的运动方程可表为 Routh 形式,有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \dfrac{\partial L}{\partial q_\sigma} = Q''_\sigma - \lambda_\beta \dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}{}_\sigma} & (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}} - \dfrac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}} = Q''_{\varepsilon+\beta} + \lambda_\beta & (\beta = 1, \cdots, g) \end{cases} \tag{8.6.2}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数，Q''_s 为非势广义力，λ_β 为约束乘子. 由方程(8.6.2) 消去 λ_β，得到[4]

$$f_{\varepsilon+\beta} a_{\beta\sigma} + f_\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1, \cdots, \varepsilon) \tag{8.6.3}$$

其中

$$\begin{cases} f_s(t, q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k) \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \dfrac{\partial L}{\partial q_s} - Q''_s \\ a_{\beta\sigma}(t, q_s, \dot{q}_s, \cdots, \overset{(m-1)}{q_s}, \overset{(m)}{q_\nu}) \equiv \dfrac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q_s}} \end{cases} \tag{8.6.4}$$

方程(8.6.3)的阶依赖于 $\partial \varphi_\beta / \partial \overset{(m)}{q}{}_\sigma$，可由 2ε 阶到 $m\varepsilon$ 阶. 如果在这些偏导数中广义坐标对 t 的导数的最高阶为 $l(0 \leqslant l \leqslant m)$，那么将方程(8.6.3) 对 t 求 $(m-2)$ 阶导数 $(l \leqslant 2)$ 或 $(m-l)$ 阶导数 $(l \geqslant 2)$，则其阶成为 $m\varepsilon$. 将所得方程与约束方程(8.6.1) 联合，并假设可以解出 $\overset{(m)}{q}{}_s$，简记作

$$\overset{(m)}{q}{}_s = h_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \cdots, \overset{(m-1)}{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n)(m > 2) \tag{8.6.5}$$

称方程(8.6.5) 为与非完整系统(8.6.1), (8.6.3) 相应的完整系统的运动方程.

为由方程(8.6.5) 求得方程(8.6.1), (8.6.3) 在初值 $q_{so}, \dot{q}_{so}, \cdots, \overset{(m-1)}{q}{}_{so}$ 下的解，尚需对方程(8.6.3) 施加限制[4]. 这些限制依赖于在得到方程(8.6.5) 过程中对方程(8.6.3) 的求导次数. 例如，当 $l = 1, m = 4$ 时，有限制

$$\begin{cases} (f_{\varepsilon+\beta})_0 (a_{\beta\sigma})_0 + (f_\sigma)_0 = 0 \\ (f_{\varepsilon+\beta})_0 (a_{\beta\sigma})_0 + (f_{\varepsilon+\beta})_0 (\dot{a}_{\beta\sigma})_0 + (\dot{f}_\sigma)_0 = 0 \end{cases} \tag{8.6.6}$$

对高阶非完整系统 $(m > 2)$，还存在方程(8.6.1) 与方程(8.6.2) 相容的问题. 这里讨论问题以相容为前提，即方程

(8.6.1),(8.6.2) 不是矛盾方程组.

8.6.2 无限小群变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \qquad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{8.6.7}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{8.6.8}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小生成元. 取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8.6.9}$$

以及它的一次扩展至 m 次扩展

$$\begin{cases} X^{(1)} = X^{(0)} + \overset{(1)}{\eta}_s \dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \ \overset{(1)}{\eta}_s = \dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0 \\ X^{(2)} = X^{(1)} + \overset{(2)}{\eta}_s \dfrac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}, \ \overset{(2)}{\eta}_s = (\overset{(1)}{\eta}_s)^{\cdot} - \ddot{q}_s \dot{\xi}_0 \\ \quad \vdots \\ X^{(m)} = X^{(m-1)} + \overset{(m)}{\eta}_s \dfrac{\partial}{\partial \overset{(m)}{q}_s}, \ \overset{(m)}{\eta}_s = (\overset{(m-1)}{\eta}_s)^{\cdot} - \overset{(m)}{q}_s \dot{\xi}_0 \end{cases} \tag{8.6.10}$$

根据微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 理论知, 方程 (8.6.5) 在无限小变换(8.6.8) 下的不变性归为如下确定方程

$$X^{(m)}(\overset{(m)}{q}_s - h_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \cdots, \overset{(m-1)}{q})) \Big|_{\overset{(m)}{q_s} = h_s} = 0 \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.6.11}$$

即

$$\overset{(m)}{\xi}_s - \dot{q}_s \overset{(m)}{\xi}_0 - C_m^1 \ddot{q}_s \overset{(m-1)}{\xi}_0 - C_m^2 \dddot{q}_s \overset{(m-2)}{\xi_0} - \cdots - C_m^{m-2} \overset{(m-1)}{q_s} \ddot{\xi}_0 - C_m^{m-1} \dot{\xi}_0 h_s$$

$$= X^{(m-1)}(h_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.6.12}$$

其中

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!\,k!}$$

定义 8.6.1 如果无限小变换的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.6.12),则称相应对称性为相应完整系统(8.6.5) 的 Lie 对称性.

8.6.3 限制方程和附加限制方程

对于高阶非完整系统的 Lie 对称性,还要考虑一些限制.这些限制依赖于在得到方程(8.6.5) 过程中对方程(8.6.3) 的求导次数.例如,当 $l = 1, m = 4$,为得到方程(8.6.5),需对方程(8.6.3) 求两次导数.这就要求方程(8.6.3) 保持不变,它对 t 的一次导数也保持不变,即有

$$X^{(2)}(f_{\epsilon+\beta}a_{\beta\sigma} + f_\sigma) = 0$$

$$X^{(3)}(\dot{f}_{\epsilon+\beta}a_{\beta\sigma} + f_{\epsilon+\beta}\dot{a}_{\beta\sigma} + \dot{f}_\sigma) = 0 \quad (\sigma = 1, \cdots, \epsilon) \tag{8.6.13}$$

称这些方程为限制方程.

定义 8.6.2 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.6.12) 和限制方程,则相应对称性称为高阶非完整系统的弱 Lie 对称性.

注意到,在推导方程(8.6.2) 的过程中要用到约束(8.6.1) 对虚位移 $\delta\overset{(m)}{q}_s$ 的限制,即

$$\delta\overset{(m)}{q}_{\epsilon+\beta} = \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\delta\overset{(m)}{q}_\sigma \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.6.14}$$

转化为对生成元 ξ_0, ξ_s 的限制,归为

$$\xi_{\epsilon+\beta} - \dot{q}_{\epsilon+\beta}\xi_0 - \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}(\xi_\sigma - \dot{q}_\sigma\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.6.15}$$

定义 8.6.3 如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.6.12)、限制方程和附加限制方程(8.6.15),则相应对称性称为高阶非完整系统的强 Lie 对称性.

8.6.4 结构方程与守恒量

高阶非完整系统的 Lie 对称性不一定有相应的守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件和守恒量的形式.

定理 8.6.1 对于满足确定方程(8.6.12) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s'' + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} \doteq 0 \tag{8.6.16}$$

其中

$$\Lambda_\sigma = -\lambda_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \overset{(m)}{q}_\sigma}, \Lambda_{\epsilon+\beta} = \lambda_\beta \tag{8.6.17}$$

则与高阶非完整系统相应的完整系统(8.6.5) 存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \tag{8.6.18}$$

定理 8.6.2 对于满足确定方程(8.6.12) 和限制方程的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.6.16), 则高阶非完整系统存在形如(8.6.18) 的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.6.3 对于满足确定方程(8.6.12)、限制方程和附加限制方程(8.6.15) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.6.16), 则高阶非完整系统存在形如(8.6.18) 的强 Lie 对称性守恒量.

注意到, 对于高阶非完整系统($m > 2$), 上述定理对 Λ_s 是有限制的. 因为结构方程(8.6.16) 必须对 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是线性的, 因此, Λ_s 必须对 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 是线性的, 不应出现对 $\ddot{\boldsymbol{q}}$ 的非线性项和 $\boldsymbol{q}$ 对 t 的更高阶导数项; 或者由运动方程有结果

$$\Lambda_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \tag{8.6.19}$$

Lie 对称性正问题的提法是: 由已知对称性找到守恒量. 正问题的解法如下: 首先, 建立系统的运动方程(8.6.5). 其次, 建立确

定方程(8.6.12)并求解.第三,检验限制方程和附加限制方程.最后,建立结构方程并求守恒量.

8.6.5 Lie对称性逆问题

高阶非完整系统Lie对称性逆问题的提法是:由已知守恒量找到相应的Lie对称性.为解这类逆问题,首先由已知守恒量求Noether对称性.假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \tag{8.6.20}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \tag{8.6.21}$$

将方程(8.6.2)两端乘以 $\overline{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0$ 并对 s 求和,得

$$\overline{\xi}_s\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s'' - \Lambda_s\right) = 0 \tag{8.6.22}$$

假设 Λ_s 有形式

$$\Lambda_s = K_{sk}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\ddot{q}_k + K_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{8.6.23}$$

$$(s, k = 1, \cdots n)$$

将式(8.6.21),(8.6.22)相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零得到

$$\overline{\xi}_s\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - K_{sk}\right) - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n) \tag{8.6.24}$$

再令积分(8.6.20)等于守恒量(8.6.18),即令

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\overline{\xi}_s + G = I \tag{8.6.25}$$

这样,由方程(8.6.24),(8.6.25)就有可能求得无限小生成元 ξ_0,ξ_s,它们对应系统的Noether对称性.

其次,检验确定方程(8.6.12)、限制方程和附加限制方程(8.6.15),判断所得对称性是否Lie的.结果归为如下定理.

定理8.6.4 如果由方程(8.6.24),(8.6.25)确定的无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(8.6.12),则所得对称性为与高阶非完整系统相应的完整系统的Lie对称性;进而,如果所得生成元

ξ_0, ξ_s 还满足限制方程，则为高阶非完整系统的弱 Lie 对称性；最后，如果所得生成元 ξ_0, ξ_s 还满足附加限制方程(8.6.15)，则为高阶非完整系统的强 Lie 对称性.

8.6.6 算　例

假设系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_3 \tag{1}$$

所受约束是三阶的，有形式

$$\dddot{q}_1 - t\,\dddot{q}_2 + t^2\,\dddot{q}_3 = 0 \tag{2}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先，研究 Lie 对称性正问题. 第一步，建立系统的运动方程. 方程(8.6.2) 给出

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = \lambda \\ \ddot{q}_2 = -\lambda t \\ \ddot{q}_3 + 1 = \lambda t^2 \end{cases} \tag{3}$$

由此消去 λ，得

$$t\,\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 = 0, t^2\,\ddot{q}_1 - (\ddot{q}_3 + 1) = 0 \tag{4}$$

将方程(4) 对 t 求一次导数，并将结果与约束方程(2) 联合，解得

$$\begin{cases} \dddot{q}_1 = -\dfrac{t(1+2t^2)}{1+t^2+t^4}\,\ddot{q}_1 = h_1 \\ \dddot{q}_2 = -\dfrac{1-t^4}{1+t^2+t^4}\,\ddot{q}_1 = h_2 \\ \dddot{q}_3 = \dfrac{t(2+t^2)}{1+t^2+t^4}\,\ddot{q}_1 = h_3 \end{cases} \tag{5}$$

并且有

$$\Lambda_1 = \lambda = \ddot{q}_1, \Lambda_2 = -\lambda t = -t\,\ddot{q}_1, \Lambda_3 = \lambda t^2 = t^2\,\ddot{q}_1 \tag{6}$$

第二步，建立确定方程并求解. 确定方程(8.6.12) 给出

$$\begin{aligned} &\dddot{\xi}_s - \dot{q}_s\,\dddot{\xi}_0 - 3\,\ddot{q}_s\,\ddot{\xi}_0 - 3\,\dot{\xi}_0 h_s \\ &\quad = X^{(2)}(h_s) \quad (s = 1,2,3) \end{aligned} \tag{7}$$

它们有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_s = \dot{q}_s \qquad (s = 1,2,3) \tag{8}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_1 + c_2 t, \xi_2 = c_3 + c_4 t, \xi_3 = c_5 + c_6 t \tag{9}$$

它们对应系统(5) 的 Lie 对称性. 第三步, 检验限制方程和附加限制方程. 因为在导出方程(5) 的过程中已将方程(4) 对 t 求一次导数, 故限制方程给出

$$\begin{cases} X^{(2)}(t\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2)\Big|_{t\ddot{q}_1+\ddot{q}_2=0} = 0 \\ X^{(2)}(t^2\ddot{q}_1 - (\ddot{q}_3 + 1))\Big|_{t^2\ddot{q}_1-(\ddot{q}_3+1)=0} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

即

$$\begin{cases} \xi_0 \ddot{q}_1 + t[(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_1 \dot{\xi}_0] \\ \qquad + [(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_2 \dot{\xi}_0] = 0 \\ 2t\xi_0 \ddot{q}_1 + t^2[(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_1 \dot{\xi}_0] \\ \qquad - [(\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3 \dot{\xi}_0)^{\cdot} - \ddot{q}_3 \dot{\xi}_0] = 0 \end{cases} \tag{11}$$

容易验证, 生成元(8), (9) 满足限制方程(11), 因此它们对应高阶非完整系统的弱 Lie 对称性. 附加限制方程(8.6.15) 给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_0 - t(\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_0) + t^2(\xi_3 - \dot{q}_3 \xi_0) = 0 \tag{12}$$

生成元(8) 满足式(12), 因此它对应高阶非完整系统的强 Lie 对称性. 将生成元(9) 代入式(12), 得到

$$c_1 + c_2 t - t(c_3 + c_4 t) + t^2(c_5 + c_6 t) = 0 \tag{13}$$

为使生成元(9) 对应系统的强 Lie 对称性, 对系数 $c_i (i = 1, \cdots, 6)$ 有如下限制

$$c_1 = 0, c_2 - c_3 = 0, -c_4 + c_5 = 0, c_6 = 0 \tag{14}$$

即当生成元(9) 取形式

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_3 t, \xi_2 = c_3 + c_4 t, \xi_3 = c_4 \tag{15}$$

时, 它才对应强 Lie 对称性. 第四步, 建立结构方程并求守恒量. 对生成元(8), 结构方程(8.6.16) 给出

$$G_1 = q_3 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \tag{16}$$

对生成元(9),结构方程(8.6.16) 给出

$$c_2\dot{q}_1 + c_4\dot{q}_2 + c_6\dot{q}_3 - (c_5 + c_6 t) + \ddot{q}_1(c_1 + c_2 t)$$

$$- t\ddot{q}_1(c_3 + c_4 t) + t^2\ddot{q}_1(c_5 + c_6 t) + \dot{G}_2 = 0 \tag{17}$$

积分之,得

$$G_2 = -c_2 q_1 - c_4 q_2 - c_6 q_3 + c_5 t + \frac{1}{2}c_6 t^2 - c_1\dot{q}_1 - c_2(t\dot{q}_1 - q_1)$$

$$+ c_3(t\dot{q}_1 - q_1) + c_4\int t^2\ddot{q}_1 \mathrm{d}t - c_5\int t^2\ddot{q}_1 \mathrm{d}t - c_6\int t^3\ddot{q}_1 \mathrm{d}t \tag{18}$$

取

$$c_5 = c_4, c_6 = 0 \tag{19}$$

则有

$$G_2 = -c_1\dot{q}_1 - c_2 t\dot{q}_1 + c_3(t\dot{q}_1 - q_1)$$

$$+ c_4(t - q_2) \tag{20}$$

将式(8),(16) 代入守恒量形式(8.6.16),得

$$I_1 \equiv 0 \tag{21}$$

因此,与生成元(8) 对应的无限小变换是平庸的. 将式(9),(19),(20) 代入式(8.6.18),得

$$I_2 = c_3(\dot{q}_2 + t\dot{q}_1 - q_1) + c_4(t\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + t - q_2)$$

$$= \text{const.} \tag{22}$$

由此可得到两个守恒量

$$I_2' = \dot{q}_2 + t\dot{q}_1 - q_1 = \text{const.} \tag{23}$$

$$I_2'' = t\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + t - q_2 = \text{const.} \tag{24}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题. 假设系统有积分

$$I = \dot{q}_2 + t\dot{q}_1 - q_1 = \text{const.} \tag{25}$$

来求与其相应的 Lie 对称性. 由式(8.6.23),(6) 得

$$\begin{cases} K_{11} = 1, K_{12} = K_{13} = 0 \\ K_{21} = -t, K_{22} = K_{23} = 0 \\ K_{31} = t^2, K_{32} = K_{33} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

因此,方程(8.6.24),(8.6.25) 给出

$$\begin{cases} \overline{\xi}_2 t - \overline{\xi}_3 t^2 = t \\ \overline{\xi}_2 = 1 \\ \overline{\xi}_3 = 0 \\ L\xi_0 + \dot{q}_1 \overline{\xi}_1 + G = t\dot{q}_1 - q_1 \end{cases} \tag{27}$$

方程(27) 还不能唯一地确定 $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$. 现在取

$$\overline{\xi}_1 = t, \xi_0 = 0 \tag{28}$$

则

$$G = -q_1 \tag{29}$$

最终得到

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = t, \xi_2 = 1, \xi_3 = 0, G = -q_1 \tag{30}$$

生成元(30) 满足限制方程(11) 和附加限制方程(12). 因此,它为对应积分(25) 的强 Lie 对称性 .

§8.7 非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性

本节研究非 Chetaev 型非完整系统 Lie 对称性与守恒量的两类问题. 一类问题是 Lie 对称性正问题:根据 Lie 对称性来求相应的守恒量. 为解这类问题,要建立系统的运动方程、确定方程、限制方程、结构方程并给出守恒量形式. 另一类问题是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量求出相应的 Lie 对称性.

8.7.1 系统的运动方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, \cdots, n)$ 来确定,系统的运动受有 g 个彼此独立的非 Chetaev 型非完整约束

$$F_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.7.1}$$

假设约束(8.7.1) 加在虚位移 δq_s 上的条件为

$$f_{\beta s}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\delta q_s = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g; s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.2}$$

一般说来，$f_{\beta s}$ 与 $\partial F_\beta / \partial \dot{q}_s$ 无关. 特别地，当取

$$f_{\beta s} = \frac{\partial F_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.7.3}$$

时，则退化为 Chetaev 型非完整约束 . 由 D'Alembert-Lagrange 原理和虚位移方程(8.7.2)，利用通常的 Lagrange 乘子法，可得到系统的 Routh 型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'' + \lambda_\beta f_{\beta s} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.4}$$

其中 L 为 Lagrange 函数，Q_s'' 为非势广义力，λ_β 为约束乘子. 在运动微分方程积分之前，由约束方程(8.7.1) 和运动方程(8.7.4) 可求出 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，于是方程(8.7.4) 可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'' + \Lambda_s \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.5}$$

其中

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta f_{\beta s} \tag{8.7.6}$$

假设系统非奇异，即设

$$\det(h_{sk}) = \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0 \tag{8.7.7}$$

则由方程(8.7.5) 可解出所有广义加速度，记作

$$\ddot{q}_s = g_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.8}$$

称方程(8.7.8) 为与非完整系统(8.7.1)，(8.7.4) 相应的完整系统的运动方程.

8.7.2 无限小群变换与确定方程

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$\begin{cases} t^* = t + \Delta t \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, \cdots, n) \end{cases} \tag{8.7.9}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon \xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{cases} \tag{8.7.10}$$

取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8.7.11}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.7.12}$$

根据微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 理论知，运动方程(8.7.8) 在无限小变换(8.7.10) 下的不变性归为满足如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 g_s = X^{(1)}(g_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.13}$$

定义 8.7.1 如果无限小变换(8.7.10) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.7.13)，则称相应对称性为与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.

8.7.3 限制方程和附加限制方程

非完整约束方程(8.7.1) 在无限小变换(8.7.10) 下的不变性归为满足如下限制方程

$$X^{(1)}(F_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.7.14}$$

定义 8.7.2 如果无限小变换(8.7.10) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.7.13) 和限制方程(8.7.14)，则称相应对称性为非 Chetaev 型非完整系统的弱 Lie 对称性.

虚位移方程(8.7.2) 加在无限小生成元 ξ_0, ξ_s 上的限制归为满足如下附加限制方程

$$f_{\beta s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g; s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.15}$$

定义 8.7.3 如果无限小变换(8.7.10) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.7.13)、限制方程(8.7.14) 和附加限制方程(8.7.15)，则称相应对称性为非 Chetaev 型非完整系统的强 Lie 对称性.

8.7.4 结构方程与守恒量

定理 8.7.1 对于满足确定方程(8.7.13) 的无限小生成元

ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + (Q_s'' + \Lambda_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \quad (8.7.16)$$

则与非完整系统相应的完整系统存在如下形式的 Lie 对称性守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \quad (8.7.17)$$

定理 8.7.2[5] 对于满足确定方程(8.7.13) 和限制方程(8.7.14) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.7.16)，则非 Chetaev 型非完整系统存在形如(8.7.17) 的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 8.7.3 对于满足确定方程(8.7.13)、限制方程(8.7.14) 和附加限制方程(8.7.15) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程(8.7.16)，则非 Chetaev 型非完整系统存在形如(8.7.17) 的强 Lie 对称性守恒量.

对于非 Chetaev 型非完整系统，首先建立 Lie 对称性的确定方程(8.7.13) 并求出无限小生成元 ξ_0, ξ_s；其次，验证限制方程(8.7.14) 和附加限制方程(8.7.15)；第三，将所得生成元代入结构方程(8.7.16) 求出 $\dot{G}$，如果 $\dot{G}$ 为零或为某函数的全导数，则可求得规范函数 G；最后，由式(8.7.17) 找到 Lie 对称性守恒量. 上述步骤是 Lie 对称性正问题的解法.

8.7.5 Lie 对称性逆问题

非 Chetaev 型非完整系统 Lie 对称性逆问题的提法是：由已知守恒量(积分) 来求相应的 Lie 对称性.

为解此类逆问题，首先按 Noether 理论由已知积分找到相应的 Noether 对称性. 假设系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const.} \quad (8.7.18)$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0 \quad (8.7.19)$$

将方程(8.7.4) 两端同时乘以

$$\overline{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s \xi_0 \tag{8.7.20}$$

并对 s 求和,得到

$$\overline{\xi}_s \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} - Q_s'' - \lambda_\beta f_{\beta s} \right) = 0 \tag{8.7.21}$$

将式(8.7.19),(8.7.21) 相加,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零得到

$$\overline{\xi}_s \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (s, k = 1, \cdots, n) \tag{8.7.22}$$

由此解得

$$\overline{\xi}_s = \tilde{h}_{sk} \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} \qquad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.7.23}$$

其中

$$\tilde{h}_{sk} h_{kr} = \delta_{sr} \tag{8.7.24}$$

再令积分(8.7.18) 等于守恒量(8.7.17),即令

$$L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \overline{\xi}_s + G = I \tag{8.7.25}$$

这样,由方程(8.7.23),(8.7.25) 可找到相应于积分(8.7.18) 的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,它们对应系统(8.7.5) 的 Noether 对称性.

其次,将所得对称性代入确定方程(8.7.13)、限制方程(8.7.14) 和附加限制方程(8.7.15),检验它们是否成立.

Lie 对称性逆问题解法结果归纳为如下定理.

定理 8.7.4 如果由方程(8.7.23),(8.7.25) 确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.7.13),则所得对称性为与非 Chetaev 型非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性;进而,如果它们还满足限制方程(8.7.14),则为非 Chetaev 型非完整系统的弱 Lie 对称性;最后,如果它们还满足附加限制方程(8.7.15),则为非 Chetaev 型非完整系统的强 Lie 对称性.

8.7.6 算 例

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{1}$$

所受非完整约束为

$$F = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

假设约束(2) 是非 Chetaev 型的,虚位移方程有形式

$$\delta q_1 - \delta q_2 = 0 \tag{3}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量[5].

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.方程(8.7.4) 给出

$$\ddot{q}_1 = \lambda, \ddot{q}_2 + 1 = -\lambda \tag{4}$$

由方程(2),(4) 解得

$$\lambda = -\frac{1 + \dot{q}_1}{1 + t} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{1 + \dot{q}_1}{1 + t} = g_1 \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{\dot{q}_1 - t}{1 + t} = g_2 \\ \Lambda_1 = -\Lambda_2 = g_1 \end{cases} \tag{6}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(8.7.13) 给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1 + \dot{q}_1}{1 + t}\right) = \dfrac{1 + \dot{q}_1}{(1 + t)^2}\xi_0 - \dfrac{1}{1 + t}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(\dfrac{\dot{q}_1 - t}{1 + t}\right) = -\dfrac{1 + \dot{q}_1}{(1 + t)^2}\xi_0 + \dfrac{1}{1 + t}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{7}$$

方程(7) 有解

$$\begin{cases} \xi_0 = 0, \xi_1 = c_1\ln(1 + t) + c_2 \\ \xi_3 = -c_1\ln(1 + t) + c_3 t + c_4 \end{cases} \tag{8}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{9}$$

它们对应方程(6) 的 Lie 对称性.第三步,检验限制方程和附加限制

方程.限制方程(8.7.14) 给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\,\dot{\xi}_0 - t(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) - \dot{q}_1\xi_0 = 0 \tag{10}$$

附加限制方程(8.7.15) 给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0 - (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = 0 \tag{11}$$

将生成元(8) 代入方程(10),得

$$-\frac{c_1}{1+t} + c_3 - t\frac{c_1}{1+t} = 0 \tag{12}$$

仅当

$$c_1 = c_3 = 0 \tag{13}$$

时,它才满足.因此,生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_2, \xi_2 = c_4 \tag{14}$$

是非完整系统的弱 Lie 对称性.将式(8) 代入方程(11),得

$$c_1\ln(1+t) + c_2 + c_1\ln(1+t) - c_3 t - c_4 = 0 \tag{15}$$

仅当

$$c_1 = c_3 = 0, c_2 = c_4 \tag{16}$$

时,它才成立.因此,生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 1 \tag{17}$$

对应非完整系统的强 Lie 对称性.再将生成元(9) 代入方程(10) 和(11),显然,它们都成立.因此,生成元(9) 既对应非完整系统的弱 Lie对称性,又对应强 Lie对称性.第四步,建立结构方程并求守恒量.将生成元(8) 代入结构方程(8.7.16),得

$$\begin{aligned} &c_1\ln(1+t) - c_3 t - c_4 + \dot{q}_1\left(\frac{1}{1+t}\right) + \dot{q}_2\left(-\frac{c_1}{1+t} + c_3\right) \\ &-\frac{1+\dot{q}_1}{1+t}[c_1\ln(1+t) + c_2] + \frac{1+\dot{q}_1}{1+t}[-c_1\ln(1+t) \\ &+ c_3 t + c_4] + \dot{G} = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

当

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_2 = c_4 \tag{19}$$

时,可由方程(18) 求得规范函数

$$G_1 = c_2 t \tag{20}$$

将生成元(9) 代入结构方程(8.7.16),求得

$$G_2 = q_2 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{21}$$

将式(17),(20) 代入守恒量式(8.7.17),得

$$I_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = \text{const.} \tag{22}$$

将式(9),(21) 代入式(8.7.17),得

$$I_2 \equiv 0 \tag{23}$$

它是平庸解.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有积分

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + t = \text{const.} \tag{24}$$

方程(8.7.23),(8.7.25) 给出

$$\begin{cases} \overline{\xi}_1 = 1, \overline{\xi}_2 = 1 \\ L\xi_0 + G = t \end{cases} \tag{25}$$

由此解得

$$\xi_1 = 1 + \dot{q}_1 \xi_0, \xi_2 = 1 + \dot{q}_2 \xi_0, \xi_0 = \frac{t - G}{L} \tag{26}$$

将式(26) 代入确定方程(7),容易验证,不论 ξ_0 取何值,它们都满足.因此,生成元(26) 对应与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.将式(26) 代入限制方程(10) 和附加限制方程(11),容易验证,它们也满足.因此,生成元(26) 对应非完整系统的弱 Lie 对称性和强 Lie 对称性.

§8.8 具有可积微分约束系统的 Lie 对称性

本节研究具有可积一阶微分约束和可积二阶微分约束的力学系统的 Lie 对称性.采用两种方法:一是用不可积微分约束系统,即非完整系统的方法;另一是用积分后降阶约束系统的方法.研究两种方法之间的关系.

8.8.1 可积一阶微分约束系统的 Lie 对称性

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个双面理想一阶微分约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{8.8.1}$$

假设存在函数 $F_\beta=F_\beta(t,\boldsymbol{q})$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_\beta=f_\beta \tag{8.8.2}$$

则约束(8.8.1)是可积的.将系统当作一阶非完整约束系统来处理，则运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.3}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数，Q_s'' 为非势广义力，λ_β 为约束乘子.若将系统当作有多余坐标的完整系统来处理，则运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.4}$$

其中 μ_β 为约束乘子，而约束表为

$$F_\beta(t,\boldsymbol{q})-c_\beta=0 \tag{8.8.5}$$

这里 c_β 为任意常数.

现在分别研究原系统(8.8.1)，(8.8.3) 和降阶系统(8.8.4)，(8.8.5) 的 Lie 对称性.

首先，研究系统(8.8.1)，(8.8.3) 的 Lie 对称性.在运动微分方程积分之前，可由方程(8.8.1)，(8.8.3) 求得乘子 λ_β 作为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数，将其代入方程(8.8.3)，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\Lambda_s^{(1)} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.6}$$

其中

$$\Lambda_s^{(1)}=\Lambda_s^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \tag{8.8.7}$$

假设系统非奇异，即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\,\dot{q}_s \partial\,\dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{8.8.8}$$

则由方程(8.8.6) 可求出所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s = h_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.8.9}$$

引入无限小群变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \tag{8.8.10}$$

$$(s = 1, \cdots, n)$$

或其展开式

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), q_s^*(t^*) \\ &= q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{aligned} \tag{8.8.11}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0, ξ_s 为无限小生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{8.8.12}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial\,\dot{q}_s} \tag{8.8.13}$$

微分方程(8.8.9) 在无限小变换(8.8.11) 下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0 h_s = X^{(1)}(h_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.8.14}$$

约束方程(8.8.1) 在无限小变换(8.8.11) 下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.8.15}$$

约束(8.8.1) 加在虚位移 δq_s 上的限制归为如下附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\,\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.8.16}$$

定义 8.8.1 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.14),则称相应对称性为方程(8.8.9) 的 Lie 对称性.

定义 8.8.2 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.14) 和限制方程(8.8.15),则称相应对称性为原系统(8.8.1),(8.8.3) 的弱 Lie 对称性.

定义 8.8.3　如果无限小变换(8.8.11)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.14)、限制方程(8.8.15)和附加限制方程(8.8.16),则称相应对称性为原系统(8.8.1),(8.8.3)的强 Lie 对称性.

其次,研究降阶系统(8.8.4),(8.8.5)的 Lie 对称性.由方程(8.8.4),(8.8.5)可求出 μ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,于是方程(8.8.4)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s'' + \Lambda_s^{(0)} \quad (s = 1, \cdots, n) \tag{8.8.17}$$

其中

$$\Lambda_s^{(0)} = \Lambda_s^{(0)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \mu_\beta \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \tag{8.8.18}$$

因

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \tag{8.8.19}$$

故方程(8.8.17)展开后,仍有形式(8.8.9),确定方程仍为方程(8.8.14).约束方程(8.8.5)在无限小变换(8.8.11)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(0)}(F_\beta(t, \boldsymbol{q})) = 0 \tag{8.8.20}$$

约束(8.8.5)加在虚位移 δq_s 上的限制归为如下附加限制方程

$$\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s \xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{8.8.21}$$

定义 8.8.4　如果无限小变换(8.8.11)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.14)和限制方程(8.8.20),则称相应对称性为降价系统(8.8.4),(8.8.5)的弱 Lie 对称性.

定义 8.8.5　如果无限小变换(8.8.11)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.14)、限制方程(8.8.20)和附加限制方程(8.8.21),则称相应对称性为降阶系统(8.8.4),(8.8.5)的强 Lie 对称性.

定理 8.8.1　降阶系统(8.8.4),(8.8.5)的弱 Lie 对称性就是它的强 Lie 对称性.

证明

$$X^{(0)}(F_\beta(t,\boldsymbol{q})) = \xi_0\frac{\partial F_\beta}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} = -\xi_0\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s + \xi_s\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}$$

$$= \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$$

定理8.8.2 降价系统(8.8.4),(8.8.5)的弱Lie对称性必是原系统(8.8.1),(8.8.3)的弱Lie对称性;反之,则不一定.

证明 因

$$X^{(1)}(f_\beta) = X^{(1)}(\dot{F}_\beta) = X^{(1)}\left(\frac{\partial F_\beta}{\partial t} + \frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)$$

$$= \xi_0\left(\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial t\partial q_s}\dot{q}_s\right) + \xi_s\left(\frac{\partial^2 F_\beta}{\partial t\partial q_s} + \frac{\partial^2 F_\beta}{\partial q_s\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

$$+ (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X^{(0)}(F_\beta))$$

故当

$$X^{(0)}(F_\beta) = 0$$

时,必有

$$X^{(1)}(f_\beta) = 0$$

定理8.8.3 降阶系统(8.8.4),(8.8.5)的强Lie对称性必是原系统(8.8.1),(8.8.3)的强Lie对称性;反之,则不一定.

证明 由式(8.8.19),(8.8.21),(8.8.16)知,两类系统的附加限制方程一致.

由定理8.8.2,定理8.8.3知,降阶系统(8.8.4),(8.8.5)的Lie对称性比原系统(8.8.1),(8.8.3)的Lie对称性要少.因此,将可积一阶微分约束系统当作有多余坐标完整系统来处理时,将失去一些Lie对称性.

例1 系统的Lagrange函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 \tag{1}$$

所受可积一阶微分约束为

$$f = \dot{q}_2 - q_1\dot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

试研究原系统与降阶系统的 Lie 对称性.

首先,建立系统的运动方程.方程(8.8.3) 给出

$$\ddot{q}_1 + 1 = -\lambda q_1, \quad \ddot{q}_2 = \lambda \tag{3}$$

由方程(2),(3) 解得

$$\lambda = \frac{\dot{q}_1^2 - q_1}{1 + q_1^2} \tag{4}$$

方程(8.8.9) 给出

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{1 + q_1\,\dot{q}_1^2}{1 + q_1^2} = h_1 \\ \ddot{q}_2 = \dfrac{\dot{q}_1^2 - q_1}{1 + q_1^2} = h_2 \\ \Lambda_1^{(1)} = \Lambda_1^{(0)} = -\dfrac{q_1(\dot{q}_1^2 - q_1)}{1 + q_1^2} = -q_1\Lambda_2^{(1)} = -q_1\Lambda_2^{(0)} \end{cases} \tag{5}$$

其次,建立确定方程并求解.确定方程(8.8.14) 给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1 + q_1\,\dot{q}_1^2}{1 + q_1^2}\right) \\ \quad = -\dfrac{1}{(1 + q_1^2)^2}\{\dot{q}_1^2(1 + q_1^2) - 2(1 + q_1\,\dot{q}_1^2)q_1\}\,\xi_1 \\ \quad -\dfrac{2q_1\,\dot{q}_1}{1 + q_1^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\,\ddot{\xi}_0 - 2\,\dot{\xi}_0\left(\dfrac{\dot{q}_1^2 - q_1}{1 + q_1^2}\right) = \dfrac{1}{(1 + q_1^2)^2}\{-(1 + q_1^2) \\ -2(\dot{q}_1^2 - q_1)q_1\}\,\xi_1 + \dfrac{2\,\dot{q}_1}{1 + q_1^2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\,\dot{\xi}_0) \end{cases} \tag{6}$$

方程(6) 有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = 0 \tag{7}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{8}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{9}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1 \tag{10}$$

第三, 验证限制方程和附加限制方程. 降阶系统的限制方程(8.8.20) 给出

$$\xi_2 - q_1\xi_1 = 0 \tag{11}$$

附加限制方程(8.8.21) 给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - q_1(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) = 0 \tag{12}$$

原系统的限制方程(8.8.15) 给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 - q_1(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - \dot{q}_1\xi_1 = 0 \tag{13}$$

附加限制方程为(12). 生成元(7)—(10) 满足方程(13), 生成元(7)—(9) 满足方程(11), 但生成元(10) 不满足(11), 因此, 生成元(7)—(9) 既是对应降阶系统又是对应原系统的弱 Lie 对称性, 生成元(10) 对应原系统的弱 Lie 对称性, 但不是降阶系统的弱 Lie 对称性. 生成元(7)—(9) 还满足附加限制方程(12), 因此, 它们既对应降阶系统又对应原系统的强 Lie 对称性.

最后, 建立结构方程并求守恒量. 对生成元(7)—(9), 由结构方程分别得到规范函数

$$G_1 = 0 \tag{14}$$

$$G_2 = q_1 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{15}$$

$$G_3 = q_1 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \tag{16}$$

对生成元(10), 结构方程给出

$$\frac{\dot{q}_1^2 - q_1}{1 + q_1^2} + \dot{G} = 0 \tag{17}$$

由此找不到相应的规范函数. 对生成元(7), (8), (9), 守恒量分别为

$$I_1 = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 = \text{const.} \tag{18}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1 = \text{const.} \tag{19}$$

$$I_3 \equiv 0 \tag{20}$$

8.8.2 可积二阶微分约束系统的 Lie 对称性

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定，它的运动受有 g 个理想二阶微分约束

$$f_\beta^{(2)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{8.8.22}$$

假设存在函数 $F_\beta^{(1)}=F_\beta^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F_\beta^{(1)})=f_\beta^{(2)} \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{8.8.23}$$

则约束(8.8.22) 是可积的. 将系统当作二阶非完整系统来处理，则运动方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial\ddot{q}_s} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.24}$$

若当作一阶非完整系统来处理，则运动方程表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\mu_\beta\frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial\dot{q}_s} \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.25}$$

其中约束为

$$F_\beta^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})-c_\beta=0 \tag{8.8.26}$$

现在分别研究原系统(8.8.22)，(8.8.24) 和降阶系统(8.8.25),(8.8.26) 的 Lie 对称性.

首先，研究原系统(8.8.22),(8.8.24) 的 Lie 对称性. 假设由方程(8.8.22),(8.8.24) 可解出所有广义加速度，简记作

$$\ddot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \tag{8.8.27}$$

微分方程(8.8.27) 在无限小变换(8.8.11) 下的不变性归为满足如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0g_s=X^{(1)}(g_s) \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8.8.28}$$

约束方程(8.8.22) 在无限小变换(8.8.11) 下的不变性归为满足如下限制方程

$$X^{(2)}(f_\beta^{(2)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}}))=0 \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{8.8.29}$$

约束(8.8.22) 对虚位移的限制归为满足如下附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (8.8.30)$$

定义 8.8.6 如果无限小变换(8:8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28),则称相应对称性为方程(8.8.27) 的 Lie 对称性.

定义 8.8.7 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28) 和限制方程(8.8.29),则称相应对称性为原系统(8.8.22),(8.8.24) 的弱 Lie 对称性.

定义 8.8.8 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28)、限制方程(8.8.29) 和附加限制方程(8.8.30),则称相应对称性为原系统(8.8.22),(8.8.24) 的强 Lie 对称性.

因为方程(8.8.27) 是由方程(8.8.22) 和(8.8.24) 经过代数运算得到的,因此,只要生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28),则它必满足限制方程(8.8.29).于是有

定理 8.8.4 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28),则对应的对称性必为原系统(8.8.22),(8.8.24) 的弱 Lie 对称性.

其次,研究降阶系统(8.8.25),(8.8.26) 的 Lie 对称性.因

$$\frac{\partial f_\beta^{(2)}}{\partial \ddot{q}_2} = \frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial \dot{q}_s} \qquad (\beta = 1, \cdots, g; s = 1, \cdots, n) \qquad (8.8.31)$$

故确定方程仍为式(8.8.28).约束方程(8.8.26) 在无限小变换(8.8.11) 下的不变性归为满足如下限制方程

$$X^{(1)}(F_\beta^{(1)}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (8.8.32)$$

约束(8.8.26) 对虚位移的限制归为如下附加限制方程

$$\frac{\partial F_\beta^{(1)}}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0 \qquad (\beta = 1, \cdots, g) \qquad (8.8.33)$$

定理 8.8.5 原系统(8.8.22), (8.8.24) 的附加限制方程(8.8.30) 等价于降阶系统(8.8.25),(8.8.26) 的附加限制方程.

定义 8.8.9 如果无限小变换(8.8.11) 的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28) 和限制方程(8.8.32),则称对应对称性为降阶系统(8.8.25),(8.8.26) 的弱 Lie 对称性.

定义8.8.10　如果无限小变换(8.8.11)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(8.8.28)、限制方程(8.8.32)和附加限制方程(8.8.33),则称对应对称性为降阶系统(8.8.25),(8.8.26)的强 Lie 对称性.

定理8.8.6　降阶系统(8.8.24),(8.8.25)的弱 Lie 对称性必是原系统(8.8.22),(8.8.24)的弱 Lie 对称性;反之,则不一定.

证明

$$X^{(2)}(f_\beta^{(2)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}})) = X^{(2)}(\dot{F}_\beta^{(1)})$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X^{(1)}(F_\beta^{(1)}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))\}$$

定理8.8.7　降阶系统(8.8.24),(8.8.25)的强 Lie 对称性必是原系统(8.8.22),(8.8.23)的强 Lie 对称性;反之,不一定.

例2　系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2 \tag{1}$$

所受二阶微分约束为

$$f^{(2)} = \ddot{q}_2 - t\ddot{q}_1 = 0 \tag{2}$$

试研究原系统与降阶系统的 Lie 对称性.

首先,建立系统的运动方程.方程(8.8.24)给出

$$\ddot{q}_1 = -\lambda t, \ddot{q}_2 + 1 = \lambda \tag{3}$$

由方程(2),(3)解得

$$\lambda = \frac{1}{1+t^2} \tag{4}$$

于是,方程(8.8.27)给出

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{t}{1+t^2} = g_1, \ddot{q}_2 = -1 + \dfrac{1}{1+t^2} = -\dfrac{t^2}{1+t^2} = g_2 \\ \Lambda_1^{(2)} = \Lambda_1^{(1)} = -\dfrac{t}{1+t^2}, \Lambda_2^{(2)} = \Lambda_2^{(1)} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{cases} \tag{5}$$

其次,建立确定方程并求解.确定方程(8.8.28)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{t}{1+t^2}\right) = \xi_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{t}{1+t^2}\right) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right) = \xi_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right) \end{cases} \tag{6}$$

方程(6) 有解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_1 t + c_2, \xi_2 = c_3 t + c_4 \tag{7}$$

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \dot{q}_1, \xi_2 = \dot{q}_2 \tag{8}$$

它们对应原系统的弱 Lie 对称性. 原系统的限制方程(8.8.29) 自然成立, 附加限制方程(8.8.30) 给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2 \xi_0 - t(\xi_1 - \dot{q}_1 \xi_0) = 0 \tag{9}$$

将生成元(7) 代入式(9), 得

$$c_3 t + c_4 - t(c_1 t + c_2) = 0 \tag{10}$$

欲使它成立, 必有

$$c_1 = c_4 = 0, c_3 = c_2 \tag{11}$$

因此, 生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = t \tag{12}$$

对应原系统的强 Lie 对称性. 将生成元式(8) 代入式(9), 显然成立. 因此, 它对应原系统的强 Lie 对称性. 降阶系统的约束方程为

$$F^{(1)} = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 + q_1 - c = 0 \tag{13}$$

降阶系统的限制方程(8.8.32) 给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \dot{\xi}_0 - t(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \dot{\xi}_0) - \dot{q}_1 \xi_0 + \xi_1 = 0 \tag{14}$$

将生成元(7) 代入式(14), 得

$$c_2 + c_3 = 0 \tag{15}$$

因此, 生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_1 t + c_2, \xi_2 = -c_2 t + c_4 \tag{16}$$

对应降阶系统的弱 Lie 对称性, 但非强 Lie 对称性.

最后, 建立结构方程并求守恒量. 对生成元(7), 结构方程给出

$$-(c_3 t + c_4) + \dot{q}_1 c_1 + \dot{q}_2 c_3 - \frac{t}{1+t^2}(c_1 t + c_2)$$

$$+\frac{1}{1+t^2}(c_3t+c_4)+\dot{G}=0 \tag{17}$$

由此求得规范函数

$$G=\frac{1}{2}c_3t^2+c_4t-c_1q_1-c_3q_2+c_1(t-\mathrm{arctg}t)$$

$$+\frac{1}{2}c_2\ln(1+t^2)-\frac{1}{2}c_3\ln(1+t^2)-c_4\mathrm{arctg}t \tag{18}$$

相应的守恒量为

$$I=\dot{q}_1(c_1t+c_2)+\dot{q}_2(c_3t+c_4)+\frac{1}{2}c_3t^2+c_4t-c_1q_1-c_3q_2$$

$$+c_1(t-\mathrm{arctg}t)+\frac{1}{2}c_2\ln(1+t^2)-\frac{1}{2}c_3\ln(1+t^2)-c_4\mathrm{arctg}t \tag{19}$$

它是原系统的弱 Lie 对称性守恒量. 当取

$$c_1=c_4=0,\quad c_2=c_3$$

则有原系统的强 Lie 对称性守恒量

$$I=\dot{q}_1+\dot{q}_2t+\frac{1}{2}t^2-q_2=\mathrm{const.} \tag{20}$$

本章小结

本章研究各类非完整约束力学系统的 Lie 对称性与守恒量, 包括广义坐标和准坐标下一般非完整系统, 变质量非完整系统, 非完整相对运动动力学系统, 事件空间中非完整系统, 高阶非完整系统以及非 Chetaev 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题——由 Lie 对称性求守恒量的正问题, 以及由守恒量求 Lie 对称性的逆问题. 不同于完整约束系统, 非完整约束系统的 Lie 对称性除满足确定方程外, 还需满足使约束不变的限制方程以及虚位移限制引起的附加限制方程. 因此, 需要定义弱 Lie 对称性与强 Lie 对称性. 本章最后还研究了具有可积微分约束系统的 Lie 对称性, 证明降阶系统比原系统的 Lie 对称性要少些.

习　　题

1. 非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$$

$$f = \dot{q}_1 + bt\,\dot{q}_2 - bq_2 + t = 0$$

$$Q_1'' = Q_2'' = 0$$

试研究它的 Lie 对称性与守恒量.

2. 非完整系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

$$f = \dot{q}_3 - q_2\dot{q}_1 = 0$$

$$Q_1'' = Q_2'' = Q_3'' = 0$$

令准速度为

$$\omega_1 = \dot{q}_1, \omega_2 = \dot{q}_2, \omega_3 = \dot{q}_3 - q_2\,\dot{q}_1$$

试在准坐标下研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

3. 试在事件空间中研究 Chaplygin 雪橇问题的 Lie 对称性与守恒量.

4. 试研究三阶非完整系统

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_3$$

$$f = \dddot{q}_1 - t^3\dddot{q}_2 = 0$$

$$Q_1'' = Q_2'' = Q_3'' = 0$$

的 Lie 对称性与守恒量.

5. 试研究非 Chetaev 型非完整系统

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - q_3$$

$$f = \dot{q}_2 - t\,\dot{q}_1 = 0$$

$$\delta q_1 - q_1\delta q_2 = 0$$

的 Lie 对称性与守恒量.

6. 可积一阶微分约束系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_2$$

$$f = \dot{q}_2 - 3q_1^2\,\dot{q}_1 = 0$$

试研究原系统与降阶系统的 Lie 对称性与守恒量.

7. 可积二阶微分约束系统为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1$$

$$f = \dot{q}_1 \ddot{q}_1 - \frac{1}{2}\dot{q}_2^3 - q_2\dot{q}_2 \ddot{q}_2 = 0$$

试研究原系统与降阶系统的 Lie 对称性与守恒量.

参考文献

[1] 梅凤翔, 非完整系统力学基础, 北京, 北京工业学院出版社, 1985.

[2] Wu R.H., Mei F.X., On the symmetries of the nonholonomic mechanical systems, J. of BIT, 1997, 6(3): 229—235.

[3] Mei F.X., Parametric equations of nonholonomic nonconservative systems in the event space and their integration method, Acta Mechanica Sinica, 1990, 6(2): 160—168.

[4] Мэй Фунсян, Об одном методе интегрирования уравнений движения неголономных систем со связями высшего порядка, ПММ, 1991, 55(4): 691—695.

[5] 梅凤翔、吴润衡、张永发, 非 Четаев 型非完整系统的 Lie 对称性与守恒量, 力学学报, 1998, 30(4): 468—474.

第九章　Birkhoff 系统的 Lie 对称性

本章研究 Birkhoff 系统的 Lie 对称性，包括自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与守恒量的两类问题. 一类是 Lie 对称性正问题——由已知对称性寻求相应的守恒量；另一类是 Lie 对称性逆问题——由已知守恒量找到相应的 Lie 对称性. 因为一切完整约束系统和非完整约束系统都可归为 Birkhoff 系统[1]，因此，本章的 Lie 对称性研究更具普遍性.

§9.1　自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

本节研究自由 Birkhoff 系统 Lie 对称性的两类问题. 一类是 Lie 对称性正问题：由 Lie 对称性找到相应的守恒量，为此，需研究系统的确定方程、结构方程与守恒量形式. 另一类是 Lie 对称性逆问题：由守恒量找到相应的 Lie 对称性.

9.1.1　自由 Birkhoff 系统的运动方程

Birkhoff 方程的一般形式为[1,2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0\quad(\mu=1,\cdots,2n)\tag{9.1.1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$称为 Birkhoff 函数，$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$称为 Birkhoff 函数组，而

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\tag{9.1.2}$$

称为 Birkhoff 张量. 用 Birkhoff 方程(9.1.1)描述运动的力学系统或描述状态的物理系统，称为自由 Birkhoff 系统. 自由 Birkhoff 系

统中变量 $a^{\mu}(\mu=1,\cdots,2n)$是彼此独立的.

如果 R_{μ} 和 B 都不显含时间 t,则称为 Birkhoff 自治系统,此时有方程

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}=0 \quad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{9.1.3}$$

如果 R_{μ} 不显含 t,则称为 Birkhoff 半自治系统,此时仍有方程(9.1.3).

假设系统(9.1.1)非奇异,即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0 \tag{9.1.4}$$

则由方程(9.1.1)可解出所有 $\dot{a}^{\mu}$

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\gamma}}{\partial t}\right) \quad (\mu=1\cdots,2n) \tag{9.1.5}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\tau}=\delta_{\mu\tau} \tag{9.1.6}$$

9.1.2 无限小群变换与确定方程

取时间 t 和变量 a^{μ} 的无限小群变换

$$\begin{cases} t^{*}=t+\Delta t \\ a^{\mu *}(t^{*})=a^{\mu}(t)+\Delta a^{\mu} \qquad (\mu=1,\cdots,2n) \end{cases} \tag{9.1.7}$$

或其展开式

$$\begin{cases} t^{*}=t+\varepsilon\xi_0(t,a) \\ a^{\mu *}=a^{\mu}+\varepsilon\xi_{\mu}(t,a) \end{cases} \tag{9.1.8}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_{μ} 为无限小生成元.引进无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{\mu}\frac{\partial}{\partial a^{\mu}} \tag{9.1.9}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_{\mu}-\dot{a}^{\mu}\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{a}^{\mu}} \tag{9.1.10}$$

根据微分方程在无限小变换下的不变性理论知,当且仅当

$$X^{(1)}\left[\dot{a}^{\mu}-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right]=0 \quad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{9.1.11}$$

如果

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right) \tag{9.1.12}$$

那么方程(9.1.5)在无限小变换(9.1.8)下保持不变.

由式(9.1.9),(9.1.10)知

$$\begin{aligned}
&X^{(1)}\left[\dot{a}^{\mu}-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right]\\
&\quad=\dot{\xi}_{\mu}-\dot{a}^{\mu}\dot{\xi}_{0}-X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right]\\
&\quad=\dot{\xi}_{\mu}-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\dot{\xi}_{0}-X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right]
\end{aligned}$$

因此有

$$\dot{\xi}_{\mu}-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\dot{\xi}_{0}=X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\right] \quad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{9.1.13}$$

称方程(9.1.13)为自由 Birkhoff 系统的确定方程.

定义 9.1.1 如果无限小变换(9.1.8)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(9.1.13),则相应对称性称为自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

9.1.3 结构方程与守恒量

自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出 Lie 对称性有相应守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 9.1.1[3] 对于满足确定方程(9.1.13)的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{a})$满足结构方程

$$(R_{\mu}\dot{a}^{\mu}-B)\dot{\xi}_{0}+X^{(1)}(R_{\mu}\dot{a}^{\mu}-B)+\dot{G}=0 \tag{9.1.14}$$

则自由 Birkhoff 系统存在 Lie 对称性守恒量

$$I=R_{\mu}\xi_{\mu}-B\xi_{0}+G=\text{const.} \tag{9.1.15}$$

证明

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}+\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu\right)\xi_\mu+R_\mu\dot{\xi}_\mu-\left(\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu\right)\xi_0$$

$$-\dot{B}\xi_0-(R_\mu\dot{a}^\mu-B)\dot{\xi}_0-R_\mu(\dot{\xi}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{\xi}_0)$$

$$-\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\xi_\nu\right)\dot{a}^\mu+\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu$$

$$=(\xi_\mu-\dot{a}^\mu\xi_0)\left[\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}-\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu\right]$$

$$-\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\mu\dot{a}^\nu\xi_0=0$$

定理 9.1.2 自由 Birkhoff 系统的结构方程(9.1.14)等价于其 Noether 等式

$$R_\mu\dot{\xi}_\mu-\dot{B}\xi_0+\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu$$

$$+\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0+\dot{G}=0 \tag{9.1.16}$$

定理 9.1.3 Noether 等式(9.1.16)归结为如下广义 Killing 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu+\dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu}R_\mu-B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu}+\dfrac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0=-\dfrac{\partial G}{\partial a^\nu} & (\nu=1,\cdots,2n)\\ R_\mu\dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial t}-\dfrac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu-B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}-\dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_0=-\dfrac{\partial G}{\partial t}\end{cases} \tag{9.1.17}$$

自由 Birkhoff 系统 Lie 对称性正问题的解法步骤如下：首先，建立确定方程(9.1.13)，并由此求出 Lie 对称性的无限小生成元 ξ_0,ξ_μ. 其次，由结构方程(9.1.14)求出 $\dot{G}$，如果 $\dot{G}$ 为零或为某 $t,\boldsymbol{a}$ 函数的全导数，则可求得规范函数 G. 最后，将所得 ξ_0,ξ_μ,G 代入式(9.1.15)，便得到 Lie 对称性守恒量.

9.1.4 Lie 对称性逆问题

自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性逆问题的提法是:根据已知守恒量来求相应的 Lie 对称性.假设自由 Birkhoff 系统有守恒量

$$I = I(t, \boldsymbol{a}) = \text{const}. \tag{9.1.18}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu} = 0 \tag{9.1.19}$$

将 Birkhoff 方程(9.1.1)两端乘以

$$\bar{\xi}_{\mu} = \xi_{\mu} = \dot{a}^{\mu}\xi_0 \tag{9.1.20}$$

并对 μ 求和,得到

$$\bar{\xi}_{\mu}\left(\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right) = 0 \tag{9.1.21}$$

将式(9.1.19)与式(9.1.21)相加,得到

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^{\mu}}\dot{a}^{\mu} + \bar{\xi}_{\mu}\left(\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu} - \frac{\partial B}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right) = 0 \tag{9.1.22}$$

式(9.1.22)中含 $\dot{a}^{\mu}\dot{a}^{\nu}$ 的项显然为零.由式(9.1.22)中 $\dot{a}^{\nu}$ 的系数为零,得到

$$\frac{\partial I}{\partial a^{\nu}} + \Omega_{\mu\nu}\xi_{\mu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\xi_0 = 0 \quad (\nu = 1, \cdots, 2n) \tag{9.1.23}$$

由假设(9.1.4),可由式(9.1.23)解得所有 ξ_{μ}

$$\xi_{\mu} = \Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^{\nu}} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\xi_0\right] \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{9.1.24}$$

再令积分(9.1.18)等于守恒量(9.1.15),即令

$$R_{\mu}\xi_{\mu} - B\xi_0 + G = I \tag{9.1.25}$$

这样,由方程(9.1.24),(9.1.25)便可求得生成元 ξ_0, ξ_{μ},它对应自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.为使所得对称性为 Lie 对称性,生成元 ξ_0, ξ_{μ} 尚需满足确定方程(9.1.13)

定理 9.1.4 如果由方程(9.1.24),(9.1.25)所确定的无限

小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(9.1.13),则所得对称性是自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

定理 9.1.4 表明,Lie 对称性逆问题可能有解,也可能无解.

9.1.5 算　　例

已知 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组和 Birkhoff 函数分别为

$$\begin{cases} R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ B = \dfrac{1}{2}[a^3 - \operatorname{arctg} bt]^2 + \dfrac{1}{2}\left[a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)\right]^2 \end{cases} \tag{1}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题,第一步,建立系统的运动方程.由式(1)知

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

方程(9.1.5)给出

$$\begin{cases} \dot{a}^1 = a^3 - \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt \\ \dot{a}^2 = a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2) \\ \dot{a}^3 = 0 \\ \dot{a}^4 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(9.1.13)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 - (a^3 - \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt)\dot{\xi}_0 = \xi_3 - \dfrac{1}{1 + b^2 t^2}\xi_0 \\ \dot{\xi}_2 - \left[a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)\right]\dot{\xi}_0 = \xi_4 - \dfrac{bt}{1 + b^2 t^2}\xi_0 \\ \dot{\xi}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_4 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

方程(4)有如下解

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = c_1 + c_3 t, \xi_2 = c_2 + c_4 t, \xi_3 = c_3, \xi_4 = c_4 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \xi_0 = 1, \xi_1 = c_1 + c_3 t - \int \dfrac{1}{1 + b^2 t^2} \mathrm{d}t, \xi_2 = c_2 + c_4 t - \int \dfrac{bt}{1 + b^2 t^2} \mathrm{d}t \\ \xi_3 = c_3, \xi_4 = c_4 \end{cases} \tag{6}$$

其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数.这些生成元都对应 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.第三步,建立结构方程并求守恒量.对生成元(5),结构方程(9.1.4)给出

$$G_1 = - c_3 a^1 - c_4 a^2 - \frac{c_3}{b} \int \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t - \frac{c_4}{2b} \int \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \tag{7}$$

对生成元(6),结构方程(9.1.14)给出

$$\begin{aligned} G_2 = & - c_3 a^1 - c_4 a^2 + \frac{1}{b} \int \frac{1}{1 + b^2 t^2} \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{t}{1 + b^2 t^2} \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t - \frac{c_3}{b} \int \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t - \frac{c_4}{2b} \int \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{8}$$

将式(5),(7)代入守恒量形式(9.1.15),得到守恒量

$$\begin{aligned} I_1 = & a^3 (c_3 t + c_1) + a^4 (c_4 t + c_2) - c_3 a^1 - c_4 a^2 \\ & - \frac{c_3}{b} \int \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t - \frac{c_4}{2b} \int \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \\ = & \, \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{9}$$

将式(6),(8)代入式(9.1.15),得到守恒量

$$\begin{aligned} I_2 = & a^3 \left[c_3 t + c_1 - \int \frac{1}{1 + b^2 t^2} \mathrm{d}t \right] + a^4 \left[c_4 t + c_2 - \int \frac{bt}{1 + b^2 t^2} \mathrm{d}t \right] \\ & - \frac{1}{2} \left(a^3 - \frac{1}{b} \mathrm{arctg} bt \right)^2 - \frac{1}{2} \left[a^4 - \frac{1}{2b} \ln(1 + b^2 t^2) \right]^2 - c_3 a^1 - c_4 a^2 \\ & + \frac{1}{b} \int \frac{1}{1 + b^2 t^2} \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int \frac{t}{1 + b^2 t^2} \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \\ & - \frac{c_3}{b} \int \mathrm{arctg} bt \, \mathrm{d}t - \frac{c_4}{2b} \int \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \\ = & \, \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{10}$$

由式(9)可得 4 个守恒量

$$I_{11} = a^3 \tag{11}$$

$$I_{12} = a^4 \tag{12}$$

$$I_{13} = a^3 t - a^1 - \frac{1}{b}\int \text{arctg} bt \, \mathrm{d}t \tag{13}$$

$$I_{14} = a^4 t - a^2 - \frac{1}{2b}\int \ln(1 + b^2 t^2) \mathrm{d}t \tag{14}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有守恒量

$$I = a^3 t - a^1 - \frac{1}{b}\int \text{arctg}\ bt \, \mathrm{d}t = \text{const.} \tag{15}$$

来求与其相应的 Lie 对称性.方程(9.1.24),(9.1.25)给出

$$\begin{cases} \xi_1 = t, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = 1, \quad \xi_4 = 0 \\ -B\xi_0 + G = -a^1 - \dfrac{1}{b}\int \text{arctg} bt \, \mathrm{d}t \end{cases} \tag{16}$$

将式(16)代入确定方程(4),给出

$$\begin{cases} (a^3 - \dfrac{1}{b}\text{arctg} bt)\dot{\xi}_0 = \dfrac{1}{1 + b^2 t^2}\xi_0 \\ [a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)]\dot{\xi}_0 = \dfrac{bt}{1 + b^2 t^2}\xi_0 \end{cases} \tag{17}$$

由此得

$$\xi_0 = 0 \tag{18}$$

于是,生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = t, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 0 \tag{19}$$

对应 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

§9.2 约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

本节研究约束 Birkhoff 系统 Lie 对称性的两类问题.一类是 Lie 对称性正问题:由已知 Lie 对称性求得相应的守恒量.为解正问题,需建立系统 Lie 对称性的确定方程、限制方程及结构方程,并给出守恒量形式.另一类是 Lie 对称性逆问题:由已知守恒量找到相应的 Lie 对称性.为解逆问题,可借助系统的 Noether 理论按已知守恒量找到相应的 Noether 对称性,然后再按确定方程和限

制方程来检验对称性是否 Lie 的.

9.2.1 约束 Birkhoff 系统的运动方程

如果 Birkhoff 系统中的变量 $a^{\mu}(\mu=1,\cdots,2n)$不是彼此独立的,而受到一些限制,则称系统为约束 Birkhoff 系统.这些限制表为约束方程

$$f_{\beta}(t,a^{\mu})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{9.2.1}$$

约束(9.2.1)对虚位移 δa^{μ} 的限制表为

$$\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\delta a^{\mu}=0 \qquad (\beta=1\cdots,g) \tag{9.2.2}$$

文献〔1〕建立的 Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理有形式

$$\left(\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)\delta a^{\mu}=0 \tag{9.2.3}$$

由原理(9.2.3)和方程(9.2.2),利用 Lagrange 乘子法,容易导出约束 Birkhoff 系统带乘子的运动方程

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}} \qquad (\mu=1,\cdots,2n) \tag{9.2.4}$$

约束 Birkhoff 系统的运动由约束方程(9.2.1)和运动方程(9.2.4)来确定.

在运动微分方程积分之前,可求出 λ_{β} 作为 t, $\boldsymbol{a}$ 的函数,有形式

$$\lambda_{\beta}=-\frac{\Delta_{\gamma\beta}}{\Delta}\left\{\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)+\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial t}\right\} \qquad (\beta=1,\cdots,g) \tag{9.2.5}$$

其中

$$\Delta=\det\left(\frac{\partial f_{\gamma}}{\partial a^{\rho}}\Omega^{\rho\mu}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\right) \tag{9.2.6}$$

$\Delta_{\gamma\beta}$为行列式Δ 元素(γ,β)的代数余子式.有如下结果:

定理 9.2.1[1] 如果约束 Birkhoff 系统的约束方程数目为奇数,则约束乘子 λ_{β} 没有唯一解.

定理 9.2.2[1] 如果给定约束 $f_{\beta}(t,\boldsymbol{a})=0(\beta=1,\cdots,g)$都是

自由 Birkhoff 系统的积分,则约束乘子 $\lambda_\beta=0(\beta=1,\cdots,g)$.

假设 $\Delta\neq0$,将式(9.2.5)代入方程(9.2.4),得到

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=P_{\mu}\quad(\mu=1,\cdots,2n)\tag{9.2.7}$$

其中

$$P_{\mu}=P_{\mu}(t,\boldsymbol{a})=\lambda_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial a^{\mu}}\tag{9.2.8}$$

称方程(9.2.7)为与约束 Birkhoff 系统(9.2.1),(9.2.4)相应的自由 Birkhoff 系统的运动方程.

9.2.2 确定方程、限制方程和附加限制方程

引入无限小变换(9.1.8),并引进无限小生成元向量(9.1.9)和它的一次扩展.微分方程(9.2.7)在无限小群变换(9.1.8)下的不变性归为如下确定方程

$$\dot{\xi}_{\mu}-\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}+P_{\nu}\right)\dot{\xi}_{0}=X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}+P_{\nu}\right)\right]$$
$$(\mu=1,\cdots,2n)\tag{9.2.9}$$

定义 9.2.1 如果无限小变换(9.1.8)的生成元 ξ_0,ξ_μ 满足确定方程(9.2.9),则相应对称性称为与约束 Birkhoff 系统相应的自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

约束方程(9.2.1)在无限小变换(9.1.8)下的不变性归为满足如下限制方程

$$X^{(0)}(f_{\beta}(t,a))\Big|_{f_{\beta}=0}=0\quad(\beta=1,\cdots,g)\tag{9.2.10}$$

定义 9.2.2 如果无限小变换(9.1.8)的生成元 ξ_0,ξ_μ,满足确定方程(9.2.9)和限制方程(9.2.10),则相应对称性称为约束 Birkhoff 系统的弱 Lie 对称性.

注意到,在导出方程(9.2.4)的过程中用到了虚位移方程(9.2.2),这就限制了无限小生成元 ξ_0,ξ_μ,其限制条件归为如下附加限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, g) \tag{9.2.11}$$

定义 9.2.3 如果无限小变换(9.1.8)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(9.2.9)、限制方程(9.2.10)和附加限制方程(9.2.11),则相应对称性称为约束 Birkhoff 系统的强 Lie 对称性.

定理 9.2.3 对约束 Birkhoff 系统,限制方程(9.2.10)等价于附加限制方程(9.2.11).

证明

$$X^{(0)}(f_\beta) = \frac{\partial f_\beta}{\partial t}\xi_0 + \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\xi_\mu = \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0)$$

定理 9.2.4 约束 Birkhoff 系统的弱 Lie 对称性就是它的强 Lie 对称性.

9.2.3 结构方程与守恒量

对约束 Birkhoff 系统, Lie 对称性不一定导致守恒量. 下面的定理给出 Lie 对称性导致守恒量的条件以及守恒量的形式.

定理 9.2.5 对于满足确定方程(9.2.9)的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ, 如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{a})$ 满足结构方程

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(R_\mu \dot{a}^\mu - B) - P_\mu(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{9.2.12}$$

则与约束 Birkhoff 系统相应的自由 Birkhoff 系统存在如下形式的 Lie 对称性守恒量

$$I = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G = \text{const.} \tag{9.2.13}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = {} & (\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0)\left[P_\mu + \frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\mu}\right)\dot{a}^\nu\right] \\ & - \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\mu \dot{a}^\nu \xi_0 \\ = {} & 0\end{aligned}$$

定理 9.2.6 对于满足确定方程(9.2.9)和限制方程

(9.2.10)的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{a})$ 满足结构方程(9.2.12)，则约束 Birkhoff 系统存在形如(9.2.13)的强(弱)Lie 对称性守恒量.

注意到，对定理 9.2.6，结构方程(9.2.12)中可去掉带 P_μ 的项.

约束 Birkhoff 系统 Lie 对称性正问题的解法步骤如下：首先，建立方程(9.2.7)．其次，建立确定方程(9.2.9)并求解．第三，检验限制方程(9.2.10)．最后，建立结构方程(9.2.12)并求出规范函数 G，再代入式(9.2.13)，便得 Lie 对称性守恒量.

9.2.4 Lie 对称性逆问题

约束 Birkhoff 系统 Lie 对称性逆问题的提法是：由已知守恒量来求与其相应的 Lie 对称性．为解此逆问题，可先按 Noether 理论由已知守恒量找到相应的 Noether 对称性，再用确定方程和限制方程来检验对称性是否 Lie 的.

假设约束 Birkhoff 系统有守恒量

$$I = I(t, \boldsymbol{a}) = \text{const.} \tag{9.2.14}$$

于是有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^\mu}\dot{a}^\mu = 0 \tag{9.2.15}$$

将方程(9.2.7)两端乘以

$$\bar{\xi}_\mu = \xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0 \tag{9.2.16}$$

并对 μ 求和，得到

$$\bar{\xi}_\mu\left(\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - P_\mu\right) = 0 \tag{9.2.17}$$

将式(9.2.15)与(9.2.17)相加，分出含 $\dot{a}^\nu$ 的项，由其系数为零得到

$$\frac{\partial I}{\partial a^\nu} + \Omega_{\mu\nu}\xi_\mu + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right)\xi_0 = 0 \tag{9.2.18}$$

$$(\nu = 1, \cdots, 2n)$$

由此解得

$$\xi_\mu = \Omega^{\mu\nu}\left[\frac{\partial I}{\partial a^\nu} + \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right)\xi_0\right] \qquad (9.2.19)$$

$$(\mu = 1, \cdots, 2n)$$

再令积分(9.2.14)等于守恒量(9.2.13),即令

$$R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G = I \qquad (9.2.20)$$

这样,由方程(9.2.19),(9.2.20)便可找到生成元 ξ_0, ξ_μ,它们对应方程(9.2.7)的 Noether 对称性.

其次,将所得 Noether 对称性代入确定方程(9.2.9)和限制方程(9.2.10)来检验是否 Lie 的.有如下结果

定理 9.2.7 如果由方程(9.2.19),(9.2.20)所确定的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(9.2.9),则所得对称性为与约束 Birkhoff 系统相应的自由系统的 Lie 对称性;进而,如果它们还满足限制方程(9.2.10),则所得对称性为约束 Birkhoff 系统的强(弱)Lie 对称性.

9.2.5 算　例

已知 4 阶 Birkhoff 系统为

$$\begin{cases} R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ B = \dfrac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} \end{cases} \qquad (1)$$

约束方程为

$$f = a^1 a^3 - c_1^2 = 0, f_2 = a^1 + a^4 - c_2 = 0 \qquad (2)$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,研究 Lie 对称性正问题.第一步,建立系统的运动方程.

由式(1)求得

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

方程(9.2.4)给出

$$\begin{cases} -\dot{a}^3 - a^1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 \\ -\dot{a}^4 = 0 \\ \dot{a}^1 - a^3 = \lambda_1 a^1 \\ \dot{a}^2 - a^4 = \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

由约束方程(2)和方程(4)求得

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{a^1}, \lambda_2 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} P_1 = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a^1} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial a^1} = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 = -a^1 \\ P_2 = 0 \\ P_3 = -a^3 \\ P_4 = -a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1} \end{cases} \tag{6}$$

第二步,建立确定方程并求解.确定方程(9.2.9)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 - \left[a^4 - a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1} \right] \dot{\xi}_0 = \xi_4 - \xi_1 - \dfrac{(a^3)^2}{(a^1)^2} \xi_1 + \dfrac{2a^3}{a^1} \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_4 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

方程(7)有如下解

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{8}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{9}$$

$$\xi_0 = 0, \xi_2 = t, \xi_4 = 1, \xi_1 = \xi_3 = 0 \tag{10}$$

它们都对应与约束 Birkhoff 系统相应的自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.第三步,验证限制方程.限制方程(9.2.10)给出

$$a^3\xi_1 + a^1\xi_3 = 0, \quad \xi_1 + \xi_4 = 0 \tag{11}$$

显然,生成元(8),(9)满足限制方程(11),因此,它们对应约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.生成元(10)不满足限制方程(11),它不对应约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.第四步,由结构方程求规范函数并求守恒量.对生成元(8),(9),结构方程(9.2.12)给出

$$G = 0 \tag{12}$$

对生成元(10),结构方程(9.2.12)给出

$$a^4 + \dot{G} = 0 \tag{13}$$

由此找不到规范函数 G.将式(8),(9),(12)代入守恒量形式(9.2.13),分别得到

$$I = -B = \text{const.} \tag{14}$$

$$I = a^4 = \text{const.} \tag{15}$$

其次,研究 Lie 对称性逆问题.假设系统有守恒量

$$I_1 = a^4 = \text{const.} \tag{16}$$

来求与其相应的 Lie 对称性.方程(9.2.19),(9.2.20)给出

$$\begin{cases} \xi_1 = 0 \\ \xi_2 = 1 + \left[a^4 - a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1}\right]\xi_0 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \\ a^4\left[a^4 - a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1}\right]\xi_0 - B\xi_0 + G = 0 \end{cases} \tag{17}$$

生成元(17)对应系统的 Noether 对称性.将生成元(17)代入确定方程(7)和限制方程(11),容易看出,它们都满足,因此这个对称性又是约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.再假设系统有积分

$$I_2 = a^3 = \text{const.} \tag{18}$$

方程(9.2.19),(9.2.20)给出

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 \\ \xi_2 = \left[a^4 - a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1} \right] \xi_0 \\ \xi_3 = 0 \\ \xi_4 = 0 \\ a^4 \left[a^4 - a^1 + \dfrac{(a^3)^2}{a^1} \right] \xi_0 - B\xi_0 + G = 0 \end{cases} \tag{19}$$

生成元(19)对应系统的 Noether 对称性.将生成元(19)代入确定方程(7),发现它们不满足,因此,与积分(18)相应的对称性不是 Lie 对称性.

本章小结

本章研究了自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统 Lie 对称性的两类问题——正问题和逆问题.Lie 对称性正问题是指,由已知对称性来求与其相应的守恒量.Lie 对称性逆问题是指,由已知守恒量来求与其相应的 Lie 对称性.两类问题都可能有解,也可能无解,即,Lie 对称性不一定导致守恒量,而守恒量也不一定有与其相应的 Lie 对称性.本章解决了在什么条件下 Lie 对称性与守恒量可以对应起来的问题.这里的关键在于解确定方程和结构方程.

习　题

1.二阶 Birkhoff 系统为

$R_1 = a^2, R_2 = 0$

$$B = \frac{1}{2m}(a^2)^2 + \frac{1}{m}a^2 f_1(t) + \frac{1}{2m}f_1^2(t) + f_0(t)$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

2.二阶 Birkhoff 系统为

$R_1 = 0, R_2 = a^1$

$$B = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{2}(a^2)^2 + t(a^1 - a^2)$$

试研究它的 Lie 对称性与守恒量.

3.约束 Birkhoff 系统为

$$R_1 = R_2 = 0, R_3 = a^1, R_4 = a^2$$

$$B = \frac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\}$$

$$f_1 = (a^1)^2 + a^2 - c_1 = 0, f_2 = a^3 + a^4 - c_2 = 0$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

参 考 文 献

[1] 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬, Birkhoff 系统动力学, 北京, 北京理工大学出版社, 1996.

[2] Santilli R. M., Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ, New York, Springer-Verlag, 1983.

[3] 梅凤翔, Birkhoff 系统的 Lie 对称性和守恒律, 科学通报, 1998, 43(18), 1937—1939.

第十章　约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

将约束力学系统分为完整约束力学系统、非完整约束力学系统，以及 Birkhoff 系统三大类. 第三章至第六章研究了约束力学系统的 Noether 对称性. Noether 对称性是作用量——Hamilton 作用量、Pfaff 作用量在无限小群变换下的不变性质. 第七章至第九章研究了约束力学系统的 Lie 对称性. Lie 对称性是微分方程在无限小群变换下的不变性质. 因此，两种对称性有不同的涵义. 文献〔1〕指出，从逻辑的角度来说，Noether 对称性应当是 Lie 对称性的一个子集. 文献〔2〕给出一个例子说明 Noether 对称性不一定是一个 Lie 对称性. 这是近年关于 Noether 对称性与 Lie 对称性关系的两个结果.

本章研究各类约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

§10.1　Lagrange 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究 Lagrange 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系. 研究表明，对 Lagrange 系统，Noether 对称性可以是 Lie 对称性，也可以不是 Lie 对称性；反之，Lie 对称性可以是 Noether 对称性，也可以不是 Noether 对称性.

10.1.1　Lagrange 系统的 Noether 对称性

Lagrange 系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,\cdots,n) \tag{10.1.1}$$

它可表示完整保守系统、广义力有广义势的系统以及 Lagrange 力学逆问题系统.假设系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{10.1.2}$$

则展开方程(10.1.1)可得到所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{10.1.3}$$

取单参数变换群的无限小变换为

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ \qquad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \tag{10.1.4}$$

如果无限小变换(10.1.4)的生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s=0 \tag{10.1.5}$$

则变换是 Noether 对称的.如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G 满足 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+\dot{G}=0 \tag{10.1.6}$$

则变换是 Noether 准对称的.由等式(10.1.5),(10,1,6)可导出 Killing 方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)=0$$

$$\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{10.1.7}$$

和广义 Killing 方程

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t}+\frac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\partial \xi_s}{\partial t}+\frac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)$$

$$=-\frac{\partial G}{\partial t}-\frac{\partial G}{\partial q_k}\dot{q}_k\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=-\frac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \tag{10.1.8}$$

$$(k=1,\cdots,n)$$

如果给定的无限小变换(10.1.4)是 Lagrange 系统的对称变换,则存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = \text{const.} \qquad (10.1.9)$$

如果给定的无限小变换(10.1.4)是 Lagrange 系统的准对称变换，则存在如下形式的守恒量

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G = \text{const.} \qquad (10.1.10)$$

10.1.2 Lagrange 系统的 Lie 对称性

方程(10.1.3)在无限小变换(10.1.4)下的不变性归为如下确定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \quad (s = 1, \cdots, n) \qquad (10.1.11)$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \qquad (10.1.12)$$

如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.1.11)，则称变换(10.1.4)是 Lie 对称变换.

对于满足确定方程(10.1.11)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s，如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \dot{G} = 0 \qquad (10.1.13)$$

则 Lagrange 系统存在形如(10.1.10)的守恒量.

10.1.3 Lagrange 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

Lagrange 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系不外以下三种情况：

1)是 Noether 对称的，又是 Lie 对称的；是 Lie 对称的，又是 Noether 对称的；

2)是 Noether 的，非 Lie 的；

3)是 Lie 的，非 Noether 的.

Lie对称性要求生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.1.11).

Noether 对称性要求生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式(10.1.5)或 Killing 方程(10.1.7). Noether 准对称性要求生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 G 满足 Noether 等式(10.1.6)或广义 Killing 方程(10.1.8). 前面已证明, Lie 对称性的结构方程(10.1.13)等价于 Noether 等式(10.1.6). 于是有

定理 10.1.1 对 Lagrange 系统(10.1.1), 如果无限小变换(10.1.4)是 Lie 对称的, 当结构方程(10.1.13)中 $\dot{G}=0$ 或 $\dot{G}$ 为某 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数的全导数时, 则无限小变换是 Noether(准)对称的, 否则不是 Noether(准)对称的.

定理 10.1.2 对 Lagrange 系统(10.1.1), 如果无限小变换(10.1.4)是 Lie 对称的, 当广义 Killing 方程(10.1.8)有解时, 则无限小变换是 Noether 对称的, 否则不是 Noether 对称的.

定理 10.1.1 和定理 10.1.2 回答了 Lie 对称性是 Noether 对称性以及 Lie 对称性不是 Noether 对称性的问题.

定理 10.1.3 对 Lagrange 系统(10.1.1), 如果无限小变换(10.1.4)是 Noether 对称的, 当生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.1.11)时, 则无限小变换是 Lie 对称的, 否则不是 Lie 对称的.

定理 10.1.3 回答了 Noether 对称性是 Lie 对称性以及 Noether 对称性不是 Lie 对称性的问题.

10.1.4 算　　例

平面 Kepler 问题的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\mu(q_1^2+q_2^2)^{-1/2}(q_1^2+q_2^2\neq 0) \tag{1}$$

运动微分方程为

$$\begin{cases}\ddot{q}_1=-\mu q_1(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}=\alpha_1\\ \ddot{q}_2=-\mu q_2(q_1^2+q_2^2)^{-3/2}=\alpha_2\end{cases} \tag{2}$$

Lie 对称性的确定方程(10.1.11)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \ddot{q}_1 \xi_0 - 2\dot{\xi}_0[-\mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-3/2}] \\ \quad = -\mu[(q_1^2 + q_2^2)^{-3/2} - 3q_1^2 (q_1^2 + q_2^2)^{-5/2}]\xi_1 \\ \quad\quad + 3\mu q_1 q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-5/2}\xi_2 \\ \ddot{\xi}_2 - \ddot{q}_2 \xi_0 - 2\dot{\xi}_0[-\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-3/2}] \\ \quad = -\mu[(q_1^2 + q_2^2)^{-3/2} - 3q_2^2 (q_1^2 + q_2^2)^{-5/2}]\xi_2 \\ \quad\quad + 3\mu q_2 q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-5/2}\xi_1 \end{cases} \tag{3}$$

结构方程(10.1.13)给出

$$\left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \mu(q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}\right]\dot{\xi}_0 - \mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-3/2}\xi_1$$

$$-\mu q_2 (q_1^2 + q_2^2)^{-3/2}\xi_2 + \dot{G} = 0 \tag{4}$$

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = -q_2, \xi_2 = q_1 \tag{5}$$

它满足确定方程(3),因此相应变换是 Lie 对称的.将式(5)代入结构方程(4),得

$$\dot{G} = 0 \tag{6}$$

由定理 10.1.1 知,生成元(5)对应的变换是 Noether 对称的.

取生成元为

$$\xi_0 = t, \xi_1 = \frac{2}{3}q_1, \xi_2 = \frac{2}{3}q_2 \tag{7}$$

它满足确定方程(3),因此相应变换是 Lie 对称的.将式(7)代入结构方程(4),得

$$\dot{G} = -\frac{1}{3}L \tag{8}$$

由定理 10.1.1 知,生成元(7)对应的变换不是 Noether 对称的.

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = q_2\dot{q}_2, \xi_2 = q_2\dot{q}_1 - 2q_1\dot{q}_2 \tag{9}$$

将式(9)代入结构方程(4),可求得

$$G = \dot{q}_2^2 q_1 - q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \mu q_1 (q_1^2 + q_2^2)^{-1/2} \tag{10}$$

因此,生成元(9)对应系统的 Noether 对称性.将式(9)代入确定方

程(3),可验证它们满足.由定理 10.1.3 知,生成元(9)对应的变换是 Lie 对称的.

§10.2 Hamilton 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究 Hamilton 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.结果表明,对 Hamilton 系统,Noether 对称性可以是 Lie 对称性,也可以不是 Lie 对称性;Lie 对称性可以是 Noether 对称性,也可以不是 Noether 对称性.

10.2.1 Hamilton 系统的 Noether 对称性

Hamilton 系统的运动微分方程有形式

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}\quad (s=1,\cdots,n)\qquad (10.2.1)$$

它不仅表示完整保守系统,而且可表示广义力有广义势的系统以及 Lagrange 力学逆问题系统.方程(10.2.1)可展开为显式,记作

$$\begin{cases}\dot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ \dot{p}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\end{cases}\quad (s=1,\cdots,n)\qquad (10.2.2)$$

取单参数变换群的无限小变换为

$$\begin{cases}t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\\ p_s^*(t^*)=p_s(t)+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\end{cases}\quad (s=1,\cdots,n)\qquad (10.2.3)$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_0,ξ_s,η_s 为无限小变换生成元.如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s,η_s 满足 Noether 等式

$$-\frac{\partial H}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s-H\dot{\xi}_0+p_s\dot{\xi}_s=-\dot{G}\qquad (10.2.4)$$

其中 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$为规范函数,则变换是 Noether(准)对称的.由等式(10.2.4)可导出广义 Killing 方程

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial t}\xi_0 - \dfrac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} + p_s\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t} + p_s\dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \qquad = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q_s}\dfrac{\partial H}{\partial p_s} \\ p_s\dfrac{\partial \xi_s}{\partial p_k} - H\dfrac{\partial \xi_0}{\partial p_k} = -\dfrac{\partial G}{\partial p_k} \qquad (k=1,\cdots,n) \end{cases} \tag{10.2.5}$$

如果生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 和规范函数 G 满足广义 Killing 方程(10.2.5),则变换是 Noether(准)对称的.

如果给定的无限小变换(10.2.3)是 Hamilton 系统的 Noether(准)对称变换,则系统存在如下形式的守恒量

$$I = -H\xi_0 + p_s\xi_s + G = \text{const.} \tag{10.2.6}$$

10.2.2 Hamilton 系统的 Lie 对称性

方程(10.2.2)在无限小变换(10.2.3)下的不变性归为如下确定方程

$$\begin{cases} \dot{\xi}_s - \dot{\xi}_0 g_s = X^{(0)}(g_s) \\ \dot{\eta}_s - \dot{\xi}_0 h_s = X^{(0)}(h_s) \end{cases} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{10.2.7}$$

其中

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s\frac{\partial}{\partial p_s} \tag{10.2.8}$$

如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(10.2.7),则称变换(10.2.3)是 Lie 对称的.

对于满足确定方程(10.2.7)的生成元 ξ_0, ξ_s, η_s,如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$满足结构方程

$$-H\dot{\xi}_0 + \frac{\partial H}{\partial p_s}\eta_s + p_s\dot{\xi}_s - X^{(0)}(H) + \dot{G} = 0 \tag{10.2.9}$$

则 Hamilton 系统存在形如(10.2.6)的守恒量.

10.2.3 Hamilton 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

定理 10.2.1 对 Hamilton 系统(10.2.1),如果无限小变换(10.2.3)是 Lie 对称的,当结构方程(10.2.9)中的 $\dot{G}=0$ 或 $\dot{G}$ 为某 $t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ 函数的全导数时,则无限小变换是 Noether(准)对称的,否则不是 Noether(准)对称的.

证明 因结构方程(10.2.9)等价于 Noether 等式(10.2.4),故定理得证.

定理 10.2.2 对 Hamilton 系统(10.2.1),如果无限小变换(10.2.3)是 Lie 对称的,当广义 Killing 方程(10.2.5)有解时,则无限小变换是 Noether 对称的,否则不是 Noether 对称的.

定理 10.2.1 和定理 10.2.2 回答了 Lie 对称性是 Noether 对称性以及 Lie 对称性不是 Noether 对称性的问题.

定理 10.2.3 对 Hamilton 系统(10.2.1),如果无限小变换(10.2.3)是 Noether(准)对称的,当生成元 ξ_0, ξ_s, η_s 满足确定方程(10.2.7)时,则无限小变换是 Lie 对称的,否则不是 Lie 对称的.

定理 10.2.3 回答了 Noether 对称性是 Lie 对称性以及 Noether 对称性不是 Lie 对称性的问题.

10.2.4 算　　例

系统 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{b}\dot{q}_1\mathrm{arctg}bt-\frac{1}{2b}\dot{q}_2\ln(1+b^2t^2) \tag{1}$$

则有

$$\begin{cases} p_1=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\dot{q}_1-\dfrac{1}{b}\mathrm{arctg}bt,\ p_2=\dot{q}_2-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \\ H=\dfrac{1}{2}\left[p_1+\dfrac{1}{b}\mathrm{arctg}bt\right]^2+\dfrac{1}{2}\left[p_2+\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 \\ g_1=\dfrac{\partial H}{\partial p_1}=p_1+\dfrac{1}{b}\mathrm{arctg}bt,\ g_2=p_2+\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \\ h_1=h_2=0 \end{cases} \tag{2}$$

Lie 对称性的确定方程(10.2.7)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_0\left[p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right] = \eta_1 + \dfrac{1}{1+b^2t^2}\xi_0 \\ \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_0\left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right] = \eta_2 + \dfrac{bt}{1+b^2t^2}\xi_0 \\ \dot{\eta}_1 = 0, \\ \dot{\eta}_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

广义 Killing 方程(10.2.5)给出

$$\begin{cases} -\left\{\left(p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right)\dfrac{1}{1+b^2t^2} + \left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]\dfrac{bt}{1+b^2t^2}\right\}\xi_0 \\ \quad - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t} - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial q_1}\left(p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right) - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial q_2}\left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right] \\ \quad + p_1\dfrac{\partial\xi_1}{\partial t} + p_2\dfrac{\partial\xi_2}{\partial t} + p_1\dfrac{\partial\xi_1}{\partial q_1}\left(p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right) \\ \quad + p_1\dfrac{\partial\xi_1}{\partial q_2}\left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right] \\ \quad + p_2\dfrac{\partial\xi_2}{\partial q_1}\left(p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right) + p_2\dfrac{\partial\xi_2}{\partial q_2}\left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right] \\ = -\dfrac{\partial G}{\partial t} - \dfrac{\partial G}{\partial q_1}\left(p_1 + \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\right) - \dfrac{\partial G}{\partial q_2}\left[p_2 + \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right] \\ p_1\dfrac{\partial\xi_1}{\partial p_1} + p_2\dfrac{\partial\xi_2}{\partial p_1} - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial p_1} = -\dfrac{\partial G}{\partial p_1} \\ p_1\dfrac{\partial\xi_1}{\partial p_2} + p_2\dfrac{\partial\xi_2}{\partial p_2} - H\dfrac{\partial\xi_0}{\partial p_2} = -\dfrac{\partial G}{\partial p_2} \end{cases} \tag{4}$$

取无限小生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0 \tag{5}$$

它显然满足方程(3),故对应系统的 Lie 对称变换.将式(5)代入广义 Killing 方程(4),解得

$$G = 0 \tag{6}$$

故由定理 10.2.2 知,生成元(5)对应系统的 Noether 对称性.

取无限小生成元为

$$\begin{cases} \xi_0 = t, \xi_1 = q_1 + \dfrac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2), \xi_2 = q_2 + \dfrac{t}{b} - \dfrac{1}{b^2}\mathrm{arctg}bt \\ \eta_1 = \eta_2 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

将其代入方程(3),显然成立,因此它对应的对称性是 Lie 的.将式(7)代入广义 Killing 方程(4),得

$$\begin{aligned} &-(p_1 + \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt)\frac{t}{1+b^2t^2} - [p_2 + \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]\frac{bt^2}{1+b^2t^2} - H \\ &+ p_1\frac{t}{1+b^2t^2} + p_2\frac{bt^2}{1+b^2t^2} + p_1(p_1 + \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt) \\ &\quad + p_2[p_2 + \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)] \\ &= -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial G}{\partial q_1}(p_1 + \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt) - \frac{\partial G}{\partial q_2}[p_2 + \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial p_1} = \frac{\partial G}{\partial p_2} = 0 \tag{9}$$

将方程(8)两端分别对 p_1, p_2 求偏导数,并利用方程(9),得

$$\frac{\partial G}{\partial q_1} = -p_1, \quad \frac{\partial G}{\partial q_2} = -p_2 \tag{10}$$

而这与方程(9)矛盾.因此,广义 Killing 方程无解,由定理 10.2.2 知,生成元(7)对应的对称性不是 Noether 的.

§10.3 一般完整系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究一般完整系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.结果表明,对于一般完整系统,Lie 对称性可以是 Noether 对称性.也可以不是;Noether 对称性可以是 Lie 对称性,也可以不是.

10.3.1 一般完整系统的 Noether 对称性

一般完整系统的运动微分方程有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{10.3.1}$$

其中 $Q''_s=Q''_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$为非势广义力.假设系统非奇异,即设

$$\det(h_{sk})=\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \tag{10.3.2}$$

展开方程(10.3.1),可求得所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n) \tag{10.3.3}$$

取单参数变换群的无限小变换为

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \tag{10.3.4}$$

如果无限小变换(10.3.4)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s+Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{10.3.5}$$

则变换是 Noether 广义准对称的.由等式(10.3.5)可导出广义 Killing 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) \\ \qquad +Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dfrac{\partial G}{\partial t}-\dfrac{\partial G}{\partial q_s}\dot{q}_s \\ \left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=-\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,n) \end{cases} \tag{10.3.6}$$

如果给定的无限小变换(10.3.4)是一般完整系统的 Noether 广义准对称变换,则存在如下形式的守恒量

$$I=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G=\text{const.} \tag{10.3.7}$$

10.3.2 一般完整系统的 Lie 对称性

方程(10.3.3)在无限小变换(10.3.4)下的不变性归为如下确

定方程

$$\ddot{\xi}_s - \dot{q}_s \ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0 \alpha_s = X^{(1)}(\alpha_s) \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (10.3.8)$$

其中

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s \dot{\xi}_0) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \qquad (10.3.9)$$

如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.3.8),则称相应的对称性为 Lie 对称性.

对于满足确定方程(10.3.8)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + Q''_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G} = 0 \quad (10.3.10)$$

则一般完整系统存在形如(10.3.7)的守恒量.

10.3.3 一般完整系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

定理 10.3.1[3] 对一般完整系统(10.3.1),如果无限小变换(10.3.4)是 Lie 对称的,当结构方程(10.3.10)中的 $\dot{G}=0$ 或 $\dot{G}$ 为某 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 函数的全导数时,则无限小变换是 Noether(广义准)对称的,否则不是 Noether 对称的.

证明 因结构方程(10.3.10)等价于 Noether 等式(10.3.5).

定理 10.3.2 对一般完整系统(10.3.1),如果无限小变换(10.3.4)是 Lie 对称的,当广义 Killing 方程(10.3.6)有解时,则相应对称性是 Noether 的,否则不是 Noether 的.

定理 10.3.1 和定理 10.3.2 回答了一般完整系统 Lie 对称性是 Noether 对称性以及 Lie 对称性不是 Noether 对称性的问题.

定理 10.3.3[3] 对一般完整系统(10.3.1),如果无限小变换(10.3.4)是 Noether 对称的,当无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.3.8)时,则相应对称性是 Lie 的,否则不是 Lie 的.

定理 10.3.3 回答了 Noether 对称性是 Lie 对称性以及 Noether 对称性不是 Lie 对称性的问题.

10.3.4 算　　例

Emden 方程为

$$\ddot{q}+\frac{2}{t}\dot{q}+q^5=0 \tag{1}$$

将方程(1)作为一般完整系统,有

$$L=\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2,\quad Q''=-t^2q^5 \tag{2}$$

Lie 对称性的确定方程(10.3.8)给出

$$\xi-\dot{q}\xi_0-2\dot{\xi}_0\left(-\frac{2}{t}\dot{q}-q^5\right)=\frac{2}{t^2}\dot{q}\xi_0-\frac{2}{t}(\dot{\xi}-\dot{q}\dot{\xi}_0)-5q^4\xi \tag{3}$$

Noether 等式(10.3.5)给出

$$t^2\dot{q}^2\xi_0-\frac{1}{2}t^2\dot{q}^2\dot{\xi}_0+t^2\dot{q}\dot{\xi}-t^2q^5(\xi-\dot{q}\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{4}$$

取无限小生成元为

$$\xi_0=-2t,\qquad \xi=q \tag{5}$$

将其代入式(4)可求得

$$G=\frac{1}{3}t^3q^6 \tag{6}$$

因此,生成元(5)对应的对称性是 Noether 的,将式(5)代入方程(3),则满足.据定理 10.3.3 知,生成元(5)对应的对称性是 Lie 的.

取生成元为

$$\xi_0=0,\xi=q \tag{7}$$

它满足确定方程(3),因此对应的对称性是 *Lie* 的.将式(7)代入广义 Killing 方程(10.3.6),得

$$\begin{cases}t^2\dot{q}^2-t^2q^6=-\dfrac{\partial G}{\partial t}-\dfrac{\partial G}{\partial q}\dot{q}\\[2ex]\dfrac{\partial G}{\partial\dot{q}}=0\end{cases} \tag{8}$$

将方程(8)第一个两端对 $\dot{q}$求偏导数,并利用方程(8)第二个,得

$$2t^2\dot{q}=-\frac{\partial G}{\partial q} \tag{9}$$

而它与第二个相矛盾.因此,广义 Killing 方程无解.据定理 10.3.2 知,生成元(7)对应的对称性不是 Noether 的.

§10.4 非完整系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究非完整系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

10.4.1 非完整系统的 Noether 对称性

Chetaev 型非完整系统的约束方程和运动微分方程分别为

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g) \qquad (10.4.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (10.4.2)$$

假设系统非奇异,即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\right)\neq 0 \qquad (10.4.3)$$

在运动微分方程积分之前,可由方程(10.4.1),(10.4.2)求出 λ_β 为 $t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,将其代入方程(10.4.2),得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q''_s+\Lambda_s \qquad (s=1,\cdots,n) \qquad (10.4.4)$$

其中

$$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (10.4.5)$$

由方程(10.4.4)可解出所有广义加速度,简记作

$$\ddot{q}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (10.4.6)$$

取单参数变换群的无限小变换为

$$\begin{cases} t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (s=1,\cdots,n) \end{cases} \qquad (10.4.7)$$

如果无限小变换(10.4.7)的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 G 满足

Noether 等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dot{\xi}_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_s$$

$$+(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0 \qquad (10.4.8)$$

则称相应对称性为相应完整系统(10.4.6)的 Noether 广义准对称性.由等式(10.4.8)可导出广义 Killing 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial t}\xi_0+\dfrac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s+\left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\left(\dfrac{\partial \xi_s}{\partial t}+\dfrac{\partial \xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\ \qquad +(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=-\dfrac{\partial G}{\partial t}-\dfrac{\partial G}{\partial q_s}\dot{q}_s\\ \left(L-\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\dfrac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k}+\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dfrac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k}=-\dfrac{\partial G}{\partial \dot{q}_k} \qquad (k=1,\cdots,n)\end{cases} \qquad (10.4.9)$$

非完整约束(10.4.1)对生成元 ξ_0,ξ_s 的限制条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \qquad (10.4.10)$$

如果无限小变换(10.4.7)的生成元 ξ_0,ξ_s 以及规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足 Noether 等式(10.4.8),且生成元满足限制条件(10.4.10),则称相应对称性为非完整系统(10.4.1),(10.4.2)的 Noether 强广义准对称性.

Noether 对称性的守恒量表为

$$I=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G=\text{const.} \qquad (10.4.11)$$

10.4.2 非完整系统的 Lie 对称性

方程(10.4.6)在无限小变换(10.4.7)下的不变性归为如下确定方程

$$\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0h_s=X^{(1)}(h_s) \quad (s=1,\cdots,n) \qquad (10.4.12)$$

如果无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(10.4.12),则称相应对称性为与非完整系统相应的完整系统的 Lie 对称性.

约束方程(10.4.1)在无限小变换(10.4.7)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0 \quad (\beta=1,\cdots,g) \tag{10.4.13}$$

如果无限小变换(10.4.7)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.4.12)和限制方程(10.4.13),则称相应对称性为非完整系统的弱 Lie 对称性.进而,如果无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.4.12),限制方程(10.4.13)和附加限制方程(10.4.10),则称相应对称性为非完整系统的强 Lie 对称性.

对于满足确定方程(10.4.12)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+(Q''_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{10.4.14}$$

则相应完整系统存在形如(10.4.11)的守恒量.进而,对于满足确定方程(10.4.12)和限制方程(10.4.13)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 G 满足结构方程(10.4.14),则非完整系统存在形如(10.4.11)的弱 Lie 对称性守恒量.最后,对于满足确定方程(10.4.12),限制方程(10.4.13)和附加限制方程(10.4.10)的无限小生成元 ξ_0, ξ_s, 如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q''_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0 \tag{10.4.15}$$

则非完整系统存在形如(10.4.11)的强 Lie 对称性守恒量.

10.4.3 非完整系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

对于与非完整系统相应的完整系统,两种对称性之间的关系有如下结果.

定理 10.4.1 对于与非完整系统相应的完整系统(10.4.6),如果无限小变换(10.4.7)是 Lie 对称的,当结构方程(10.4.14)中 $\dot{G}$为零或为某 t, $\boldsymbol{q}$, $\dot{\boldsymbol{q}}$ 函数的全导数时,则无限小变换是 Noether(广义准)对称的,否则不是 Noether 对称的.

证明 因结构方程(10.4.14)等价于 Noether 等式(10.4.8).

定理 10.4.2 对于与非完整系统相应的完整系统(10.4.6),

如果无限小变换(10.4.7)是 Lie 对称的，当广义 Killing 方程(10.4.9)有解时，则相应对称性是 Noether(广义准)对称的，否则不是 Noether 对称的.

定理 10.4.3 对于与非完整系统相应的完整系统，如果无限小变换(10.4.7)是 Noether(广义准)对称的，当无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.4.12)时，则相应对称性是 Lie 的，否则不是 Lie 的.

对于非完整系统，两种对称性之间的关系有如下结果.

定理 10.4.4 对于非完整系统(10.4.1),(10.4.2)，如果无限小变换(10.4.7)是强 Lie 对称的，当结构方程(10.4.15)中 $\dot{G}$ 为零或为某 $t, q, \dot{q}$ 函数的全导数时，则相应对称性为非完整系统的 Noether 强广义准对称性. 否则不是.

定理 10.4.5 对于非完整系统(10.4.1),(10.4.2)，如果无限小变换(10.4.7)是强 Lie 对称的，当广义 Killing 方程(10.4.9)($\Lambda_s=0$)有解时，则相应对称性为非完整系统的 Noether 强广义准对称性，否则不是.

定理 10.4.6 对于非完整系统(10.4.1),(10.4.2)，如果无限小变换(10.4.7)是非完整系统的 Noether 强广义准对称的，当生成元 ξ_0, ξ_s 满足确定方程(10.4.12)和限制方程(10.4.13)时，则相应对称性为非完整系统的强 Lie 对称性，否则不是.

10.4.4 算　　例

例 1 非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{1}$$

$$f=\dot{q}_1+bt\dot{q}_2-bq_2+t=0 \quad (b=\text{const.}) \tag{2}$$

试研究它的 Noether 对称性与 Lie 对称性.

非完整系统的 Routh 方程给出为

$$\ddot{q}_1=\lambda, \qquad \ddot{q}_2=\lambda bt \tag{3}$$

由方程(2),(3)求得

$$\lambda = -\frac{1}{1+b^2t^2} \tag{4}$$

于是得

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\dfrac{1}{1+b^2t^2} = \Lambda_1 = h_1 \\ \ddot{q}_2 = -\dfrac{bt}{1+b^2t^2} = \Lambda_2 = h_2 \end{cases} \tag{5}$$

Noether 等式(10.4.8)给出

$$-\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)\dot{\xi}_0 + \dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2 - \frac{1}{1+b^2t^2}(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0)$$

$$-\frac{bt}{1+b^2t^2}(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{6}$$

方程(6)有如下解

$$\xi_1 = 1,\ \xi_0 = \xi_2 = 0,\ G_1 = \frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt \tag{7}$$

$$\xi_2 = 1,\ \xi_0 = \xi_1 = 0,\ G_2 = \frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2) \tag{8}$$

$$\xi_1 = -bt,\ \xi_2 = 1,\ \xi_0 = 0,\ G_3 = bq_1 \tag{9}$$

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = \dot{q}_1,\ \xi_2 = \dot{q}_2,\ G_4 = -\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{10}$$

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = -\frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt,\ \xi_2 = -\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)$$

$$G_5 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\mathrm{arctg}bt\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 \tag{11}$$

生成元(7)—(11)对应相应完整系统(5)的 Noether 广义准对称性.

Lie 对称性的确定方程(10.4.12)给出

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{1}{1+b^2t^2}\right) = \xi_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{1}{1+b^2t^2}\right) \\ \ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\dfrac{bt}{1+b^2t^2}\right) = \xi_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{bt}{1+b^2t^2}\right) \end{cases} \tag{12}$$

容易验证,生成元(7)—(11)都满足确定方程(12),因此,由定理 10.4.3 知,它们都对应相应完整系统(5)的 Lie 对称性.

限制方程(10.4.13)给出

$$\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0 + b\dot{q}_2\xi_0 + bt(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - b\xi_2 + \xi_0 = 0 \tag{13}$$

附加限制方程(10.4.10)给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0 + bt(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = 0 \tag{14}$$

生成元(10)满足方程(14),因此对应非完整系统的 Noether 强广义准对称性.生成元(10)还满足确定方程(12)和限制方程(13),因此,由定理 10.4.6 知,它对应非完整系统的强 Lie 对称性.生成元(7)满足方程(13),但不满足方程(14),因此,它对应非完整系统的弱 Lie 对称性.生成元(9)满足方程(14),因此它对应非完整系统 Noether 强广义准对称性.生成元(9)不满足限制方程(13),由定理 10.4.6 知,它不对应非完整系统的强 Lie 对称性.

例 2 Chaplygin 雪橇问题.

Chaplygin 雪橇问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 - \frac{1}{2}kq_3^2 \tag{1}$$

非完整约束方程为

$$f = \dot{q}_2 - \dot{q}_1\mathrm{tg}q_3 = 0 \tag{2}$$

试研究它的 Noether 对称性与 Lie 对称性.

非完整系统的 Routh 方程为

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -\lambda\,\mathrm{tg}q_3 \\ m\ddot{q}_2 = \lambda \\ J\ddot{q}_3 + kq_3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

由方程(2),(3)求得乘子

$$\lambda = m\dot{q}_1\dot{q}_3 \tag{4}$$

将式(4)代入方程(3),得

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 = -m\dot{q}_1\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3 \\ m\ddot{q}_2 = m\dot{q}_1\dot{q}_3 \\ J\ddot{q}_3 + kq_3 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} Q''_1 + \Lambda_1 = -m\dot{q}_1\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3,\ Q''_2 + \Lambda_2 = m\dot{q}_1\dot{q}_3,\ Q''_3 + \Lambda_3 = 0 \\ h_1 = -\dot{q}_1\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3,\ h_2 = \dot{q}_1\dot{q}_3,\ h_3 = -\dfrac{k}{J}q_3 \end{cases} \tag{6}$$

Lie 对称性的确定方程(10.4.12)给出

$$\ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0(-\dot{q}_1\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3) = \xi_3\left(-\frac{\dot{q}_1\dot{q}_3}{\cos^2 q^2}\right)$$

$$+(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)(-\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3) + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)(-\dot{q}_1\mathrm{tg}q_3)$$

$$\ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0(\dot{q}_1\dot{q}_3) = (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\dot{q}_3 + (\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0)\dot{q}_1$$

$$\ddot{\xi}_3 - \dot{q}_3\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\left(-\frac{k}{J}q_3\right) = -\frac{k}{J}\xi_3 \tag{7}$$

Noether 等式(10.4.8)给出

$$-k_3q_3\xi_3 + m(\dot{q}_1\dot{\xi}_1 + \dot{q}_2\dot{\xi}_2) + J\dot{q}_3\dot{\xi}_3 - \left[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2\right]\dot{\xi}_0$$

$$-m\dot{q}_1\dot{q}_3\mathrm{tg}q_3(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) + m\dot{q}_1\dot{q}_3(\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{8}$$

限制方程(10.4.13)给出

$$\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0 - (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0)\mathrm{tg}q_3 - \dot{q}_1\frac{\xi_3}{\cos^2 q_3} = 0 \tag{9}$$

附加限制方程(10.4.10)给出

$$\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0 - (\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0)\mathrm{tg}q_3 = 0 \tag{10}$$

取生成元为

$$\xi_0 = -1,\ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \tag{11}$$

它满足确定方程(7),因此相应对称性为相应完整系统的 Lie 对称性.将式(11)代入式(8),解得

$$G = 0 \tag{12}$$

据定理 10.4.1 知,生成元(11)对应的对称性是 Noether 广义准对称的.生成元(11)还满足方程(9),(10),因此它对应非完整系统的强 Lie 对称性.据定理 10.4.4 知,它也对应非完整系统的 Noether 强广义准对称性.

取生成元为

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \xi_3 = \dot{q}_3 \tag{13}$$

将其代入 Noether 等式(8),求得

$$G = -\frac{1}{2}J\dot{q}_3^2 + \frac{1}{2}kq_3^2 \tag{14}$$

生成元(13)还满足附加限制方程(10),因此它对应非完整系统的 Noether 强广义准对称性.生成元(13)不满足确定方程(7),因此,据定理 10.4.6 知,它不对应系统的 Lie 对称性.

§10.5 自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究自由 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.结果表明,Lie 对称性可以是 Noether 对称性,也可以不是 Noether 对称性;反之亦然.

10.5.1 自由 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

自由 Birkhoff 系统的运动方程为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right) = 0 \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.5.1}$$

引进单参数变换群的无限小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{a}) \\ a^{\mu *}(t^*) = a^\mu(t) + \varepsilon\xi_\mu(t, \boldsymbol{a}) \end{cases} \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.5.2}$$

如果无限小变换(10.5.2)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足如下 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu$$

$$- B\dot{\xi}_0 + R_\mu\dot{\xi}_\mu + \dot{G} = 0 \tag{10.5.3}$$

其中 $G = G(t, \boldsymbol{a})$为规范函数,则称相应对称性为 Birkhoff 系统(10.5.1)的 Noether 对称性.由等式(10.5.3)可导出广义 Killing 方程

$$\begin{cases} R_\mu \dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu} + \dfrac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \dfrac{\partial R_\nu}{\partial t}\xi_0 - B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial a^\nu} = -\dfrac{\partial G}{\partial a^\nu} \\ \qquad\qquad (\nu = 1, \cdots, 2n) \\ \dfrac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\dfrac{\partial \xi_0}{\partial t} + \dfrac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - R_\mu \dfrac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{10.5.4}$$

Noether 对称性的守恒量为

$$I = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G = \text{const.} \tag{10.5.5}$$

10.5.2 自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

由方程(10.5.1)解出所有 $\dot{a}^\mu$，有

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right) \quad (\mu, \nu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.5.6}$$

其中

$$\begin{cases} \Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\tau} = \delta_{\mu\tau} \\ \Omega_{\mu\nu} = \dfrac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \dfrac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \end{cases} \tag{10.5.7}$$

方程(10.5.6)在无限小变换(10.5.2)下的不变性归为如下确定方程

$$\dot{\xi}_\mu - \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right] \tag{10.5.8}$$

$$(\mu = 1, \cdots, 2n)$$

其中

$$X^{(0)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu} \tag{10.5.9}$$

如果无限小变换(10.5.2)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.5.8)，则称相应对称性为自由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

Lie 对称性的结构方程为

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(R_\mu \dot{a}^\mu - B) + \dot{G} = 0 \tag{10.5.10}$$

对于满足确定方程(10.5.8)的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ，如果存在规

范函数 $G=G(t,\boldsymbol{a})$满足结构方程(10.5.10),则自由 Birkhoff 系统存在形如(10.5.5)的守恒量.

10.5.3 自由 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

对自由 Birkhoff 系统、Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系有如下结果.

定理 10.5.1 对自由 Birkhoff 系统,如果无限小变换(10.5.2)是 Lie 对称的,当结构方程(10.5.10)中的 $\dot{G}$ 为零或为某 $t,\boldsymbol{a}$ 函数的全导数时,则相应对称性是 Noether 的,否则不是 Noether 的.

证明 因结构方程(10.5.10)等价于 Noether 等式(10.5.3)

定理 10.5.2 对自由 Birkhoff 系统,如果无限小变换(10.5.2)是 Lie 对称的,当广义 Killing 方程(10.5.4)有解时,则相应对称性是 Noether 的,否则不是 Noether 的.

定理 10.5.1 和定理 10.5.2 回答了自由 Birkhoff 系统 Lie 对称性是 Noether 对称性以及不是 Noether 对称性的问题.

定理 10.5.3 对自由 Birkhoff 系统,如果无限小变换(10.5.2)是 Noether 对称的,当无限小生成元 ξ_0,ξ_μ 满足确定方程(10.5.8)时,相应对称性是 Lie 的,否则不是 Lie 的.

定理 10.5.3 回答了自由 Birkhoff 系统 Noether 对称性是 Lie 对称性以及不是 Lie 对称性的问题.

10.5.4 算 例

4 阶 Birkhoff 系统为

$$\begin{cases} R_1=a^3, R_2=a^4, R_3=R_4=0 \\ B=\dfrac{1}{2}\left[a^3-\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}bt\right]^2+\dfrac{1}{2}\left[a^4-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\right]^2 \end{cases} \tag{1}$$

试研究系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性.

由式(1)得

$$(\Omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{2}$$

Birkhoff 方程为

$$\begin{cases} \dot{a}^1 = a^3 - \dfrac{1}{b}\operatorname{arctg} bt\\ \dot{a}^2 = a^4 - \dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)\\ \dot{a}^3 = 0\\ \dot{a}^4 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

广义 Killing 方程(10.5.4)给出

$$\begin{cases} a^3\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^1}+a^4\dfrac{\partial\xi_2}{\partial a^1}+\xi_3-B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^1}=-\dfrac{\partial G}{\partial a^1}\\ a^3\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^2}+a^4\dfrac{\partial\xi_2}{\partial a^2}+\xi_4-B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^2}=-\dfrac{\partial G}{\partial a^2}\\ a^3\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^3}+a^4\dfrac{\partial\xi_2}{\partial a^3}-B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^3}=-\dfrac{\partial G}{\partial a^3}\\ a^3\dfrac{\partial\xi_1}{\partial a^4}+a^4\dfrac{\partial\xi_2}{\partial a^4}-B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial a^4}=-\dfrac{\partial G}{\partial a^4}\\ -\left\{(a^3-\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}bt)\dfrac{1}{1+b^2t^2}+[a^4-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]\dfrac{bt}{1+b^2t^2}\right\}\xi_0\\ +B\dfrac{\partial\xi_0}{\partial t}+(a^3-\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}bt)\xi_3+[a^4-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]\xi_4\\ -a^3\dfrac{\partial\xi_1}{\partial t}-a^4\dfrac{\partial\xi_2}{\partial t}=\dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{4}$$

Lie 对称性的确定方程(10.5.8)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1-(a^3-\dfrac{1}{b}\operatorname{arctg}bt)\dot{\xi}_0=\xi_3-\dfrac{1}{1+b^2t^2}\xi_0\\ \dot{\xi}_2-[a^4-\dfrac{1}{2b}\ln(1+b^2t^2)]\dot{\xi}_0=\xi_4-\dfrac{bt}{1+b^2t^2}\xi_0\\ \dot{\xi}_3=0,\ \dot{\xi}_4=0 \end{cases} \tag{5}$$

选生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = t, \xi_2 = 0, \xi_3 = 1, \xi_4 = 0 \tag{6}$$

将式(6)代入方程(4),可求得

$$G = -a^1 - \frac{1}{b}\int \text{arctg}bt\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

因此,生成元(6)对应系统的 Noether 对称性.将式(6)代入确定方程(5),容易验证它满足,因此,由定理 10.5.3 知,生成元(6)对应 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

取生成元为

$$\begin{cases} \xi_0 = t, \xi_1 = a^1 - \dfrac{1}{2b^2}\ln(1+b^2t^2), \xi_2 = a^2 - \dfrac{t}{b} + \dfrac{1}{b^2}\text{arctg}bt \\ \xi_3 = \xi_4 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

它满足确定方程(5),对应的对称性是 Lie 的.将式(8)代入广义 Killing 方程(4),得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial a^1} = -a^3, \dfrac{\partial G}{\partial a^2} = -a^4, \dfrac{\partial G}{\partial a^3} = \dfrac{\partial G}{\partial a^4} = 0 \\ \dfrac{t}{b}\text{arctg}bt\ \dfrac{1}{1+b^2t^2} + \dfrac{t}{2b}\ln(1+b^2t^2)\dfrac{bt}{1+b^2t^2} + B = \dfrac{\partial G}{\partial t} \end{cases} \tag{9}$$

方程(9)无解.由定理 10.5.2 知,生成元(8)对应的对称性不是 Noether 的.

§10.6 约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与 Lie 对称性

本节研究约束 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.结果表明,两种对称性可以一致,也可以不一致.

10.6.1 约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性

假设 Birkhoff 系统受有约束

$$f_\beta(t, a^\mu) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, 2m; \mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.6.1}$$

约束(10.6.1)对虚位移 δa^μ 的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}\delta a^\mu = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, 2m) \tag{10.6.2}$$

系统的运动方程表为

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.6.3}$$

在运动微分方程积分之前，可由方程(10.6.1)，(10.6.3)求出 λ_β 为 $t, \boldsymbol{a}$ 的函数，于是方程(10.6.3)有形式

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = P_\mu \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.6.4}$$

其中

$$P_\mu = P_\mu(t, \boldsymbol{a}) = \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu} \tag{10.6.5}$$

称方程(10.6.4)为与约束 Birkhoff 系统(10.6.1)，(10.6.3)相应的自由 Birkhoff 系统的运动方程.

取单参数变换群的无限小变换

$$\begin{cases} t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{a}) \\ a^{\mu *}(t^*) = a^\mu(t) + \varepsilon\xi_\mu(t, \boldsymbol{a}) \qquad (\mu = 1, \cdots, 2n) \end{cases} \tag{10.6.6}$$

如果无限小变换(10.6.6)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足如下 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_0 + \left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}\dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu - B\dot{\xi}_0$$

$$+ R_\mu\dot{\xi}_\mu - P_\mu(\xi_\mu - \dot{a}^\mu\xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{10.6.7}$$

则称相应对称性为与约束 Birkhoff 系统相应的自由系统的 Noether 对称性.

虚位移方程(10.6.2)对无限小生成元的限制表为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial a^\mu}(\xi_\mu - \dot{a}^\mu\xi_0) = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, 2m) \tag{10.6.8}$$

如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足式(10.6.7)和式(10.6.8)，则称相应对称性为约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.

对相应自由 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统，Noether 对称性导致的守恒量有形式

$$I = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G = \text{const.} \tag{10.6.9}$$

10.6.2 约束 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

方程(10.6.4)可表为形式

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right) \quad (\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.6.10}$$

方程(10.6.10)在无限小变换(10.6.6)下的不变性归为如下确定方程

$$\dot{\xi}_\mu - \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + P_\nu\right)\dot{\xi}_0 = X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} + p_\nu\right)\right]$$
$$(\mu = 1, \cdots, 2n) \tag{10.6.11}$$

约束方程(10.6.1)在无限小变换(10.6.6)下的不变性归为如下限制方程

$$X^{(0)}(f_\beta(t, \boldsymbol{a}))\Big|_{f_\beta = 0} = 0 \quad (\beta = 1, \cdots, 2\mathrm{m}) \tag{10.6.12}$$

如果无限小变换(10.6.6)的生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.6.11),则称对称性为相应自由系统的 *Lie* 对称性.如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.6.11)和限制方程(10.6.12),则称对称性为约束 *Birkhoff* 系统的弱 *Lie* 对称性.如果无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.6.11)、限制方程(10.6.12)和附加限制方程(10.6.8),则称相应对称性为约束 *Birkhoff* 系统的强 *Lie* 对称性.

因为限制方程(10.6.12)和附加限制方程(10.6.8)等价,因此约束 *Birkhoff* 系统的弱 *Lie* 对称性就是它的强 *Lie* 对称性.

对于满足确定方程(10.6.11)的无限小生成元 ξ_0, ξ_μ,如果存在规范函数 $G = G(t, \boldsymbol{a})$ 满足结构方程

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(R_\mu \dot{a}^\mu - B) - P_\mu(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) + \dot{G} = 0 \tag{10.6.13}$$

则相应自由系统存在形如(10.6.9)的守恒量.

10.6.3 约束 Birkhoff 系统 Noether 对称性与 Lie 对称性的关系

对与约束 Birkhoff 系统相应的自由系统,两种对称性之间的关系有如下结果.

定理 10.6.1 对相应自由系统,如果无限小变换(10.6.6)是 Lie 对称的,当结构方程(10.6.13)中 $\dot{G}$ 为零或为某 $t, \boldsymbol{a}$ 函数的全导数时,则相应对称性是 Noether 的,否则不是 Noether 的.

证明 因结构方程(10.6.13)等价于 Noether 等式(10.6.7). 故定理得证.

定理 10.6.2 对相应自由系统,如果无限小变换(10.6.6)是 Noether 对称的,当无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.6.11)时,则相应对称性是 Lie 的,否则不是 Lie 的.

对约束 Birkhoff 系统,两种对称性之间的关系有如下结果.

定理 10.6.3 对约束 Birkhoff 系统,如果无限小变换(10.6.6)是系统的强(弱)Lie 对称性,当结构方程

$$(R_\mu \dot{a}^\mu - B)\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(R_\mu \dot{a}^\mu - B) + \dot{G} = 0 \quad (10.6.14)$$

中 $\dot{G}$ 为零或为某 $t, \boldsymbol{a}$ 函数的全导数时,则相应对称性是约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性,否则不是 Noether 对称性.

定理 10.6.4 对约束 Birkhoff 系统,如果无限小变换(10.6.6)是系统的 Noether 对称性,当无限小生成元 ξ_0, ξ_μ 满足确定方程(10.6.11)时,则相应对称性是约束 Birkhoff 系统的强(弱)Lie 对称性,否则不是.

10.6.4 算　　例

4 阶 Birkhoff 系统为

$$\begin{cases} R_1 = a^3, R_2 = a^4, R_3 = R_4 = 0 \\ B = \dfrac{1}{2}\{(a^1)^2 + (a^3)^2 + (a^4)^2\} \end{cases} \quad (1)$$

所受约束为

$$f_1 = a^1 a^3 - c_1^2 = 0, f_2 = a^1 + a^4 - c_2 = 0 \tag{2}$$

试研究它的 Lie 对称性与 Noether 对称性.

由式(1)知

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

方程(10.6.3)给出

$$\begin{cases} -\dot{a}^3 - a^1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2, -\dot{a}^4 = 0 \\ \dot{a}^1 - a^3 = \lambda_1 a^1, \dot{a}^2 - a^4 = \lambda_2 \end{cases} \tag{4}$$

由方程(2),(4)解得

$$\lambda_1 = -\frac{a^3}{a^1}, \lambda_2 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \tag{5}$$

于是有

$$\begin{cases} P_1 = \lambda_1 a^3 + \lambda_2 = -a^1, P_2 = 0 \\ P_3 = -a^3, P_4 = -a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \end{cases} \tag{6}$$

Noether 等式(10.6.7)给出

$$\begin{aligned} &\dot{a}^1 \xi_3 + \dot{a}^2 \xi_4 - a^1 \xi_1 - a^3 \xi_3 - a^4 \xi_4 - B\dot{\xi}_0 + a^3 \dot{\xi}_1 + a^4 \dot{\xi}_2 \\ &+ a^1(\xi_1 - \dot{a}^1 \xi_0) + a^3(\xi_3 - \dot{a}^3 \xi_0) - \left[-a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \right](\xi_4 - \dot{a}^4 \xi_0) + \dot{G} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Lie 对称性的确定方程(10.6.11)给出

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = 0 \\ \dot{\xi}_2 - \left[a^4 - a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \right] \dot{\xi}_0 = \xi_4 - \xi_1 - \frac{(a^3)^2}{(a^1)^2} \xi_1 + \frac{2a^3}{a^1} \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = 0 \\ \dot{\xi}_4 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

限制方程(10.6.12)给出

$$\begin{cases} a^3\xi_1 + a^1\xi_3 = 0 \\ \xi_1 + \xi_4 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

取生成元为

$$\xi_0 = 1, \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{10}$$

它满足方程(8),因此对称性是相应自由系统的 Lie 对称性.它又满足方程(9),因此对应约束 Birkhoff 系统的强 Lie 对称性.将生成元(10)代入式(7),得

$$a^1\dot{a}^1 + a^3\dot{a}^3 + \left[-a^1 + \frac{(a^3)^2}{a^1} \right]\dot{a}^4 - \dot{G} = 0$$

由此得

$$G = 0 \tag{11}$$

由定理 10.6.3 知,生成元(10)对应约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性.

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = t, \xi_3 = 0, \xi_4 = 1 \tag{12}$$

它满足方程(8),因此对称性是相应自由系统的 Lie 对称性.将式(12)代入式(7),则找不到相应的规范函数 G.由定理 10.6.1 知,生成元(12)对应的对称性不是相应自由系统的 Noether 对称性.

取生成元为

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0 \tag{13}$$

由式(7)得

$$G = 0 \tag{14}$$

因此它对应相应自由系统的 Noether 对称性.但生成元(13)不满足确定方程(8),由定理 10.6.2 知,它对应的对称性不是 Lie 的.

本章小结

本章研究了约束力学系统 Noether 对称性与 Lie 对称性两者

之间的关系，包括 Lagrange 系统，Hamilton 系统，一般完整系统，非完整系统，自由 Birkhoff 系统，以及约束 Birkhoff 系统等. 研究结果表明：不论对何种约束力学系统，Lie 对称性可以是 Noether 对称性，也可以不是；Noether 对称性可以是 Lie 对称性，也可以不是. 当然，相应两种对称性的守恒量有同样形式.

习　题

1. 已知二自由度 Lagrange 系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)-\frac{1}{b}\dot{q}_1\mathrm{arctg}bt-\frac{1}{2b}\dot{q}_2\ln(1+b^2t^2)$$

试研究系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

2. 已知二自由度 Hamilton 系统为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\frac{1}{2}kq_2^2$$

试研究它的 Lie 对称性与 Noether 对称性.

3. 已知单自由度完整系统的运动方程为

$$\ddot{q}+q\dot{q}=0$$

试研究系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

4. 已知非完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$$

$$f=\dot{q}_2-t\dot{q}_1=0$$

试研究系统 Noether 对称性与 Lie 对称性之间的关系.

5. 已知二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=a^2,\ R_2=0$$

$$B=\frac{1}{2m}(a^2)^2+\frac{1}{m}a^2f_1(t)+\frac{1}{2m}f_1^2(t)+f_0(t)$$

试研究系统的两种对称性.

6. 给束 Birkhoff 系统为

$$R_1=R_2=0,\ R_3=a^1,\ R_4=a^2$$

$$B=\frac{1}{2}\{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2+(a^4)^2\}$$

$$f_1=(a^1)^2+a^2-c_1=0,\ f_2=a^3+a^4-c_2=0$$

试研究系统的两种对称性.

参考文献

[1] 赵跃宇、梅凤翔,关于力学系统的对称性与不变量,力学进展,1993,23(3):360—372。

[2] 赵跃宇,关于非保守系统的 Lie 对称性和守恒量,力学学极,1994,26(3):380—384。

[3] 吴润衡、梅凤翔,关于 Lie 对称性与 Noether 对称性,见:程昌钧等,现代数学和力学,MMM-Ⅶ,上海,上海大学出版社,1997,566—569。

名 词 索 引

B

半自治 40

变质量系统 155

标律 1

不可积微分约束 442

C

参数方程 162

常微分方程 288

抽象代数 1

D

单参数变换群 281

第一积分 9

动量守恒 90

动量矩守恒 90

对称变换 92

对易子 21

多参数变换群 284

多余坐标 146

F

反对称性 2

非等时变分 230

非势力 22

非完整系统 12

非自治系统 73

非 Chetaev 型 188

附加限制方程 379

G

高阶非完整系统 426

惯量张量 172

广义动量 317

广义加速度 301

广义经典力学 30

广义力 3

广义能量积分 90

广义势 3

广义陀螺力 172

广义准对称变换 95

广义 Hamilton 系统 34

广义 Noether 定理 151

广义 Noether 逆定理 152

广义 Poisson 括号 34

J

机械能守恒 90

结构参数 22

结构方程 304

浸渐不变量 132

K

可积微分约束 442

N

逆变代数形式 50
逆变范式 7
逆变张量 7
逆问题 3

Q

奇异 Lagrange 系统 367
强广义准对称变换 179
强 Lie 对称性 379
全变分 91
确定方程 296

R

弱广义准对称变换 180
弱 Lie 对称性 379

S

生成元 91
事件空间 161
守恒量 236
守恒律 90
速度空间 228

W

完整保守系统 3
万有 D'Alembert 原理 227
微分变分原理 227
无限小变换 91

X

限制方程 379
相对运动 171
相容代数 8
相应完整系统 12
相空间 7
协变范式 7
协变张量 7
循环积分 90

Y

右分配律 1
约束乘子 12
约束 Birkhoff 系统 77

Z

正则方程 23
准对称变换 94
准速度 132
准坐标 133
自伴随条件 4
自由运动 12
自由 Birkhoff 系统 209
自治系统 41
左分配律 1

Appell-Chetaev 条件 177
Birkhoff 方程 40
Birkhoff 函数 40
Birkhoff 系统 40
Chaplygin 方程 57
Chaplygin 系统 12
Chaplygin 雪橇 64
Chetaev 型 177
D'Alembert-Lagrange 原理 22
Dolaptchiew 变分 230
Emden 方程 99
Gauss 变分 229
Gauss 原理 229
Hamilton 函数 5
Hamilton 系统 5
Hénon-Heiles 问题 9
Jacobi 恒等式 24
Jacobi-Painlevé 积分 105
Jordan 代数 2
Jourdain 变分 232
Jourdain 原理 245
Killing 方程 96
Lagrange 方程 5
Lagrange 函数 3
Lagrange 系统 3
Legendre 变换 5
Lie 代数 2
Lie 对称性 279
Lie 变换群 279
Lie 容许代数 2
Noether 等式 95
Noether 定理 102
Noether 对称性 90
Noether 逆定理 103
Pfaff-Birkhoff 原理 77
Pfaff-Birkhoff-D'Alembert 原理 264
Pfaff 作用量 199
Poincaré-Chetaev 方程 20
Poisson 括号 9
Routh 方程 12

ISBN 7-03-007514-5

