第一章 有限群

为什么要研究群论。简单说，首先物理体系的对称性构成群，其次量子力学体系的动力学由薛定谔方程或者海森堡方程描述，量子态构成的 Hilbert 空间的对称结构则由对称群的表示刻画。要完整的理解量子体系的运动特征，就必须研究其对称群的表示特性。

1.1 节 群及其表示

群的定义：

群 G 是指一个集合以及一个将 G 中元素的每一有序对联系到第三个元素的运算规则，满足：

(1) 如果 $f, g \in G$ 则 $h = fg \in G$。

(2) 对任意 $f, g, h \in G$， $f(gh) = (fg)h$。

(3) 存在**单位元，** e， 使得对任意元素 $f, f \in G$，有 $ef = fe = f$。

(4) 每一元素 $f \in G$ 有**逆元，** f^{-1}，使得 $ff^{-1} = f^{-1}f = e$。

群的例子： $\mathbb{R}$ **和** $\mathbb{C}$

实数集合 $\mathbb{R}$ 在加法下构成群。 实数的加法有结合律，0是实数加法的单位元 （即 $0 + x = x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R}$）； 每个实数 x 都有加法逆元 $-x$。类似地复数集合 $\mathbb{C}$ 也在加法下构成群， 0是加法单位元，每个 z 都有加法逆元 $-z$。

$\mathbb{R}^*$ **和** $\mathbb{C}^*$： 全体非零实数 $\mathbb{R}^*$ 在实数乘法下构成群。 1是乘法单位元；每个非零实数 x 都有乘法逆元 $\frac{1}{x}$。 类似地全体非零复数 $\mathbb{C}^*$ 在乘法下也构成群。

群的乘法表：对于分立群（群元素是分立可数的），群乘法完全由下表刻画：可以看出乘法表的每一行和每一列都是群元素的一个排列。

	e	g_1	g_2	…
e	e	g_1	g_2	…
g_1	g_1	g_1^2	g_1g_2	…
g_2	g_2	g_2g_1	g_2^2	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

群表示：

G 的**表示** D 是 G 到线性空间 V 上**线性算子集合**上的一个映射， $\forall g \in G$， $D: g \mapsto D(g)$， $D(g): V \to V$ 是线性映射。 D 需满足下列性质：

(1) $D(e)=I$，这里I表示线性空间 V 上的单位线性映射。

(2) $D(g_1)D(g_2)=D(g_1g_2)$，换言之，群元素的乘法被映射成为所对应V 上线性算子的自然乘法（顺序作应，或者称为线性算子的复合）。

G 的**表示** D 将 G 的乘法表映射成所对应 V 上线性算子的乘法表：

	$D(e)=I$	$D(g_1)$	$D(g_2)$	…
$D(e)=I$	I	$D(g_1)$	$D(g_2)$	…
$D(g_1)$	$D(g_1)$	$D(g_1^2)=D(g_1)^2$	$D(g_1)D(g_2)=D(g_1g_2)$	…
$D(g_2)$	$D(g_2)$	$D(g_2)D(g_1)=D(g_2g_1)$	$D(g_2^2)=D(g_2)^2$	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

群 G 的表示 D 将每一个群元 g 映射为线性空间 V 上的线性算子 $D(g)$，线性空间 V 称为表示 D 的表示空间。V 的维数称为表示 D 的维数，简称为表示的维数。

例子：任何一个群在任意线性空间 V 上都有一个平庸表示 D，即 $\forall g\in G$，$D(g)=I$。

1.2 节 例子 - Z_3群

定义:

有限群：群元素个数有限的群。

无限群：群元素个数无限多的群。

群的阶：有限群群元素的个数。

Z_3 群：有限群的一个例子是阶为 3 的群，它一定是 3 阶循环群，乘法表如下：

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

所以 $Z_3=\{e,a,a^2\,|\,a^3=e\}$。推而广之，$n$ 阶循环群可以定义为 $Z_n=\{e,a,\cdots,a^{n-1}\,|\,a^n=e\}$。

阿贝尔群： 群乘法可交换的群，即任意两个 $g_1,g_2\in G$，

$$g_1g_2=g_2g_1 \tag{1}$$

都成立。

Z_3 的一个表示:

$$D(e)=1, D(a)=e^{i\frac{2\pi}{3}}, D(b)=e^{i\frac{4\pi}{3}} \tag{2}$$

这是个一维表示。

1.3 节 群的正则表示

设群 $G=\{g_1,g_2,\cdots\}$，将其每一元素 g_i 对应一组正交归一基矢 $|g_i\rangle$，这些正交归一基矢的所有可能线性组合构成一线性空间，记为 $V=Span\{\ |g_1\rangle,|g_2\rangle,\cdots\ \}$。定义群表示 D 在 V 上的作用为:

$$D(g_i)|g_j\rangle=|g_ig_j\rangle\ 。 \tag{3}$$

这个表示称为群 G 的**正则表示**，**正则表示的维数等于群的阶数。**

记 $|e_1\rangle=|e\rangle$，$|e_2\rangle=|a\rangle$ 和 $|e_3\rangle=|b\rangle$，按线性变换在一组基下的矩阵定义，以线性变换符号外套 [ ] 代表其矩阵，则 $[D(g)]_{ij}=\langle e_i|D(g)|e_j\rangle$，因为 $D(g)|e_j\rangle=\sum_i |e_i\rangle\langle e_i|D(g)|e_j\rangle=\sum_i [D(g)]_{ij}|e_i\rangle$。对于 Z_3 群的正则表示，其矩阵为

$$[D(e)]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},[D(a)]=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},[D(b)]=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\ 。 \tag{4}$$

运用插入完备正交归一基矢单位分解 $\sum_k |e_k\rangle\langle e_k|=I$ 的办法，可以证明线性算子乘积的矩阵为相应线性算子矩阵的乘积:

$$\begin{aligned}&[D(g_1g_2)]_{ij}=[D(g_1)D(g_2)]_{ij}=\langle e_i|D(g_1)D(g_2)|e_j\rangle\\&=\sum_k \langle e_i|D(g_1)|e_k\rangle\langle e_k|D(g_2)|e_j\rangle=\sum_k [D(g_1)]_{ik}[D(g_2)]_{kj}\end{aligned} \tag{5}$$

Z_3 群的正则表示构造办法具有普适性，可推广到任意有限群。**对任意有限群，我们都可以定义一个线性空间其基矢用群元来标记，这个线性空间就是正则表示的表示空间，也称为群代数。**

1.4 节 不可约表示

线性空间基的选取是任意的，线性变换把一组基变为另外一组基，其作用在线性算子上就是算子的**相似变换**，用相似变换 S，我们总可以从表示 D 得到新的表示 D':

$$D(g)\to D'(g)=S^{-1}D(g)S\text{。}\tag{6}$$

新算子集合 $\{\ D'(g)\big|\ g\in G\ \}$ 与旧算子集 $\{\ D(g)\big|\ g\in G\ \}$ 有相同的乘法规则，所以 如果 D 是表示，D' 也是。D' 与 D 被称为**等价表示**，因为它们仅相差一个基的选取。

表示 D 被称为**幺正**的，如果所有的 $D(g)$ 都是幺正的（算子 O 是幺正的充要条件是 $O^{\dagger}=O^{-1}$）。**有限群的所有表示都等价于幺正表示**（后面会证明）。

表示 D 被称为**可约**的，如果其表示空间 V 有**不变子空间** W。对 V 的子空间 W 中任意矢量 $w\in W$ 和任意群元 $g\in G$，都有 $D(g)w\in W$，就称 W 为不变子空间。设 W 的基为 $\{e_1,\cdots,e_m\}$，取 V 的基为 $\{e_1,\cdots,e_m,e_{m+1},\cdots,e_n\}$，令 $W'=Span\{e_{m+1},\cdots,e_n\}$，则

$$V=W\oplus W'\tag{7}$$

为直和分解。可用

$$Pv=\begin{cases}v, & v\in W\\ 0, & v\in W'\end{cases}\tag{8}$$

来定义从 V 到 W 的**投影算子** P，亦即，$\forall v\in V$，由于存在唯一 $w\in W$ 和 $w'\in W'$ 使得 $v=w+w'$，则 $Pv=w$，因而 $PV=W$。投影算子的特征是限制在所投影子空间 W 上即为 W 的恒等算子 $P\big|_W=I_W$，因而满足

$$P^2=P\ \text{，}\tag{9}$$

反之，满足该关系的线性算子一定将 V 投影到某子空间 W。 借助投影算子 P，表示 D 的**可约**性可以表述为，$\forall g\in G$ 满足

$$PD(g)P=D(g)P\ \text{。}\tag{10}$$

将表示 D 限制在不变子空间上也是一个表示，每个群元对应 W 上的线性算子 $D(g)\ \big|_W=D(g)P$**。**

例子: $P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$ 满足 $P^2=P$，因而是一个投影算子。 可以验证 Z_3 的正则表示满足 $D(g)P=P$ 对 $g=e,a,b$ 都成立（例如 $D(a)P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$），因而满足 $PD(g)P=D(g)P$ 的可约性条件。 由 $P|e\rangle=P|a\rangle=P|b\rangle=\frac{1}{3}\left(|e\rangle+|a\rangle+|b\rangle\right)$ 知不变子空间 $W=PV=Span\{P|e\rangle,P|a\rangle,P|b\rangle\}=Span\left\{w=\frac{1}{3}\left(|e\rangle+|a\rangle+|b\rangle\right)\right\}$。

由 $D(g)\big|_W = D(g)P = P = I\big|_W$ 知 Z_3 的正则表示限制在不变子空间 W 上的表示是平庸的。

表示称为**不可约**的：如果它不是可约的。

表示称为**完全可约**：如果它与具有如下**对角块**矩阵形式的表示等价，

$$\begin{pmatrix} [D_1] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [D_j] \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $\forall j$， D_j 是不可约的。

对角块形式的表示叫做是其子表示 D_j 的**直和**，

$$D \cong D_1 \oplus \cdots \oplus D_j \oplus \cdots \text{ 。} \tag{12}$$

重要结论：完全可约表示可分解为不可约表示的直和。

完全可约表示表示空间的结构：简单起见设 $D \cong D_1 \oplus D_2$，即 $[D]=\begin{pmatrix} [D_1] & 0 \\ 0 & [D_2] \end{pmatrix}$。定义 $P_1=\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $P_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$，则 $P_1+P_2=I$，$P_iP_j=\delta_{ij}P_i$。$W_1=P_1V$ 为 D_1 的表示空间，$W_2=P_2V$ 为 D_2 的表示空间，分别为不变子空间，

$$V = W_1 \oplus W_2 \text{ 。} \tag{13}$$

重要结论：完全可约表示的表示空间可分解为相应不可约表示的不变表示子空间的直和，从原表示空间到各不变子空间的投影算子之和为单位算子。

记 $\omega = e^{2\pi i/3}$，取相似变换为

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

从 Z_3 正则表示(4)做相似变换得到的新表示 $D'(g)=S^{-1}D(g)S$ 为

$$D'(e)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D'(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, D'(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \text{ 。} \tag{15}$$

显然 D 是完全可约的，并可约化为三个一维表示的直和。

1.5 节 变换群

物理系统变换的自然乘积即为变换的复合，如果 g_1 和 g_2 为两个变换，则 g_1g_2 的意思是先做 g_2 然后再做 g_1 的变换。

量子力学系统的对称变换将其 Hilbert 空间做等价变换。关于对称变换，基本的考

量可得到几个结论：首先对称变换是**结合**的；第二，什么都不变即为平庸的**恒等对称变换**；第三，每个对称变换的**逆**也是一个对称变换。所以群结构自然地出现在对称变换集合中，亦即对称变换构成群。每个对称变换群元 g，都有一个与之对应的算子 $D(g)$ 将 Hilbert 空间做等价映射， 对任意两个态 $|\varphi\rangle$ 和 $|\psi\rangle$，对称变换应保持其内积不变，即

$$\langle\varphi|\psi\rangle=\langle D(g)\varphi|D(g)\psi\rangle=\langle\varphi|D(g)^{\dagger}D(g)|\psi\rangle \quad , \tag{16}$$

所以

$$D(g)^{\dagger}D(g)=I \quad , \tag{17}$$

因此 $D(g)$ 是**幺正算子**。这些幺正算子集合构成了变换群的表示，这是因为经变换 g_1g_2 变换过系统其量子态的变换可以从两个途径得到，一方面

$$|\psi\rangle\overset{g_1g_2}{\rightarrow}D(g_1g_2)|\psi\rangle \quad , \tag{18}$$

另一方面

$$|\psi\rangle\overset{g_2}{\rightarrow}D(g_2)|\psi\rangle\overset{g_1}{\rightarrow}D(g_1)D(g_2)|\psi\rangle \quad , \tag{19}$$

所以 $D(g_1g_2)=D(g_1)D(g_2)$. **因而对系统的任意对称群，在该系统 Hilbert 空间上存在这个对称群的一个表示**– 我们称**该 Hibert 空间按群的某一表示变换**。 进一步，由于变换过的态与原来的态有相同的能量，即如果 $H|\psi_n\rangle=E_n|\psi_n\rangle$ ，则 $HD(g)|\psi_n\rangle=E_nD(g)|\psi_n\rangle=D(g)H|\psi_n\rangle$ ， 则能量本征子空间是 $D(g)$ 的不变子空间，这意味着**我们永远可以选择能量本征态按对称群的不可约表示变换**。并且所有 $|\psi_n\rangle$ 构成 Hilbert 空间的完备基，则对任意态 $|\psi\rangle$ ，可得 $HD(g)|\psi\rangle=HD(g)\sum_n\langle\psi_n|\psi\rangle|\psi_n\rangle=D(g)H|\psi\rangle$ ，所以 $D(g)$ 与哈密顿量对易，即

$$[D(g),H]=0 \quad 。 \tag{20}$$

例：量子力学的中心力场问题。

哈密顿量

$$H=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2+V(r)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\vec{l}^{\,2}}{2mr^2}+V(r) \tag{21}$$

具有空间旋转对称性，空间旋转构成对称群 $SO(3)$。能量本征值与径向量子数 n_r 和角动量量子数 l 有关，与磁量子数 m 无关，$H|n_rlm\rangle=E_{n_rl}|n_rlm\rangle$，$n_r=0,1,\cdots$，$l=0,1,\cdots$ 和 $m=-l,\cdots,l$，能级简并度 $2l+1$。事实上角量子数 l 标记了 $SO(3)$ 群的不可约表示，表示空间的基为 $\{|lm\rangle|m=-l,\cdots,l\}$，维数是 $2l+1$。所以一般中心力场的能量本征态按 $SO(3)$ 群的不可约表示变换。

1.6 节 应用：量子力学中的宇称

宇称变换即镜面反射，反射两次和不变一样，以 p 代表宇称反射变换，则 $p^2 = e$。p 和 e 就构成一个简单的群，其乘法规则如下：

	e	p
e	e	p
p	p	e

这个群称为 Z_2 群（2 阶循环群），它只有两个不可约表示，一个是 $D(e) = D(p) = 1$ 的平庸表示和另一个 $D(e) = 1$ ， $D(p) = -1$ 的表示。任意表示都完全可约，特别是，这意味着任何宇称变换不变系统的 Hilbert 空间可以按宇称变换群不可约表示变换的态来直和分解， 在这些不可约表示中， $D(p)$ 或为1或为 -1。进一步由于 $D(p)$ 与哈密顿量对易， $D(p)$ 和 H 可以同时被对角化，也就是我们可以赋给每个能量本征态一个确定的 $D(p)$ 值。 $D(p) = 1$ 的能量本征态被称为按平庸表示变换， $D(p) = -1$ 则按另一个表示变换。在非相对论量子力学关于 $x = 0$ 一维对称势的问题中，能量本征函数在 $x \to -x$ 变换下要么对称（对应于平庸表示）要么反对称（对应于 $D(p) = -1$ 的表示）。

1.7 节 例子： S_3

三个物体的**置换群**（或者对称群）称为 S_3，其元素为 e，$a_1 = (1, 2, 3)$，$a_2 = (1, 3, 2)$ ，$a_3 = (1, 2)$， $a_4 = (2, 3)$ 和 $a_5 = (1, 3)$。 a_1 是位于 1，2 和 3 三个位置物体的循环置换-轮换，a_2 是其逆，反向循环置换，a_3 是位置 1 和 2 物体的对换，等等。乘法规则由变换的乘法规则确定，即 $g_1 g_2$ 意味着先做 g_2 再做 g_1 。置换可以表示为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$，例如 $a_1 a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13) = a_5$，循环置换就可以表示为 $(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ p_2 & p_3 & \cdots & p_1 \end{pmatrix}$。

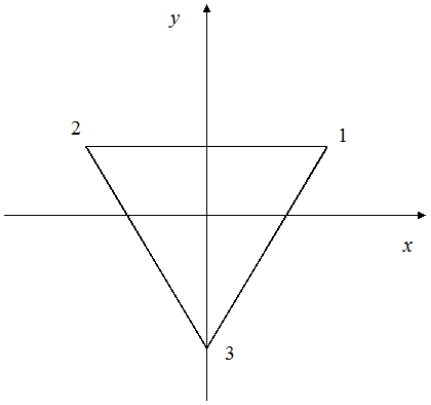
S_3 的乘法表：

	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	a_2	e	a_5	a_3	a_4

a_2	a_2	e	a_1	a_4	a_5	a_3
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_5	a_3	a_2	e	a_1
a_5	a_5	a_3	a_4	a_1	a_2	e

从乘法表知S_3为非阿贝尔群。

将S_3看作等边三角形三顶点的对称群。



在$x-y$平面上等边三角形的顶点对称变换诱导线性变换：

$$D(e)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},D(a_1)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},D(a_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$
$$D(a_3)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},D(a_4)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},D(a_5)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}。\quad(22)$$

这给出了S_3的一个幺正不可约表示。

有趣的是在这个例子中幺正不可约表示是高于一维的。对于非阿贝尔群一定有高于一维的不可约表示，因为只有高于一维的矩阵才能有非阿贝尔乘法律，这时不可能将所有表示算子同时对角化，群表示理论之所以是一个强有力的数学工具正是跟这个特性有关。

1.8 节 例子：整数的加法群

整数加法群记为$\mathbb{Z}$，$\forall x,y\in\mathbb{Z}$，

$$xy\equiv x+y \quad(23)$$

对无限群无法写下乘法表，群乘法用规则来确定，下面是它的一个表示：

$$D(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ 。 \tag{24}$$

这个表示可约但不完全可约，也不等价于一个幺正表示。如果取

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ , \tag{25}$$

则

$$D(x)P=P\ \ , \tag{26}$$

所以它可约，但是

$$D(x)(I-P)\neq(\mathrm{I}\ -P)\ \ , \tag{27}$$

所以它不完全可约。

对有限群可约表示一定完全可约，因为所有表示都等价于幺正表示，幺正表示可约必完全可约（证明见下节）。整数群是无限群，这个结论不适用，这里就是一个反例。

1.9 节 几个有用的定理

定理 1.1 有限群的任一表示都等价于幺正表示。

证明： 设$D(g)$是有限群G的表示，构造算子

$$S=\sum_{g\in G}D^{\dagger}(g)D(g)\ \ , \tag{28}$$

则S是厄米和半正定的，可以用幺正变换对角化且其本征值非负。即存在U，

$$U^{\dagger}=U^{-1}\ \ , \tag{29}$$

使

$$S=U^{-1}dU\ \ , \tag{30}$$

d是对角矩阵

$$d=\begin{pmatrix}d_1 & 0 & \cdots\\ 0 & d_2 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix} \tag{31}$$

其中$d_j\geq 0,\forall j$。 由群的性质，事实上所有的$d_j\geq 1$，这是因为

$$S=D^{\dagger}(e)D(e)+\sum_{g\in G,g\neq e}D^{\dagger}(g)D(g)=I+\sum_{g\in G,g\neq e}D^{\dagger}(g)D(g)\ \ 。 \tag{32}$$

因此我们可以构造S的厄米可逆平方根矩阵

$$X = S^{\frac{1}{2}} \equiv U^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{d_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} U \tag{33}$$

d_j 都不为零得 X 可逆，且

$$X^{\dagger} = X \tag{34}$$

和

$$\left(X^{-1}\right)^{\dagger} = X^{-1} \quad 。 \tag{35}$$

定义

$$D'(g) = XD(g)X^{-1} \tag{36}$$

由于

$$\begin{aligned} &D(g)^{\dagger} SD(g) = D(g)^{\dagger}\left(\sum_{h\in G} D^{\dagger}(h)D(h)\right)D(g) = \sum_{h\in G} D^{\dagger}(hg)D(hg) \\ &= \sum_{h\in G} D^{\dagger}(h)D(h) = S = X^2 \end{aligned} \quad , \tag{37}$$

其中最后一行成立原因是因为当 g 取遍 G 的所有群元时，hg 也取遍所有群元。这个新表示就是幺正的了：

$$D'(g)^{\dagger} D'(g) = X^{-1}D(g)^{\dagger} XXD(g)X^{-1} = X^{-1}D(g)^{\dagger} SD(g)X^{-1} \quad 。 \tag{38}$$

证毕。

*设 $W \subset V$ 为子空间，则 W 在 V 中有正交补空间 $W^{\perp}$，即 $\forall w \in W, w^{\perp} \in W^{\perp}$ 则 $\left\langle w^{\perp} \middle| w \right\rangle = 0$。使得 $V = W \oplus W^{\perp}$， 即任一 $v \in V$ 有唯一正交分解 $v = w + w^{\perp}$，其中 $w \in W$， $w^{\perp} \in W^{\perp}$。可以定义正交投影算子 P 使得 $Pv = w$，则 $W = PV$。可证明 P 是厄米算子[1]。

在整数加法群的例子中，我们看到表示可约但不完全可约，这是因为 P 投影出不变子空间，但 $(I - P)$ 并没有。这种情况对于幺正表示不会发生，因而有限群的表示总是完全可约的。

定理 1.2 有限群的任一表示都是完全可约的。

证明: 由前一定理，考虑幺正表示就足够了。如果表示不可约，就没什么好证的：已经是完全约化形式。如果表示可约，那么就存在投影算子 P 使得 $\forall g \in G$，$PD(g)P = D(g)P$。取厄米共轭得到 $\forall g \in G$ 有 $PD(g)^{\dagger} P = PD(g)^{\dagger}$。因为 $D(g)$

[1] $\forall v_1, v_2 \in V$， $v_i = w_i + w_i^{\perp}, i = 1,2$，
$\left\langle v_2 \middle| Pv_1 \right\rangle = \left\langle v_2 \middle| w_1 \right\rangle = \left\langle w_2 \middle| w_1 \right\rangle = \left\langle w_2 \middle| v_1 \right\rangle = \left\langle Pv_2 \middle| v_1 \right\rangle = \left\langle P^{\dagger} v_2 \middle| v_1 \right\rangle$，因而 $P^{\dagger} = P$。

幺正， $D(g)^{\dagger}=D(g)^{-1}=D(g^{-1})$ 并且由于当 g 跑遍 G 时 g^{-1} 也跑遍 G，所以 $\forall g\in G$ 有 $PD(g)P=PD(g)$。这就给出 $\forall g\in G$，

$$\begin{aligned}&(I-P)D(g)(I-P)=D(g)-PD(g)-D(g)P+PD(g)P\\&=D(g)(I-P)\end{aligned}\tag{39}$$

因而 $I-P$ 也投影出一个不变子空间。由数学归纳法我们就可以最终将表示彻底约化。

1.10 节 子群

群元素组成的各类子集。

群 H 的所有元素都是群 G 的元素时称其为 G 的**子群**。单位元和群 G 本身是 G 的**平庸子群**，但许多群具有**非平庸子群**。例如由元素 $\{e,a_1,a_2\}$ 构成的 Z_3 群就是 S_3 的子群。

H 在 G 中的**右陪集**： H 的所有元素从左边作用到 G 的给定元素 g 上得到的集合 Hg， g 为其代表元素。类似地可以定义左陪集。

例如， $\{a_3,a_4,a_5\}$ 就是 Z_3 在 S_3 中的陪集。 H 的陪集元素的个数就是 H 的阶。

G 的每个元素属于并仅属于一个陪集。因而，对有限群而言，子群 H 的阶数一定是 G 的阶数的因子。

陪集空间 G/H ：每个陪集作为元素构成的集合。

正规子群： G 的子群 H 称为不变子群或者正规子群，如果 $\forall g\in G$，

$$gH=Hg\quad 。\tag{40}$$

表述的更具体一些就是： $\forall g\in G,h_1\in H$， $\exists h_2\in H$ 使得

$$h_1g=gh_2\tag{41}$$

或者

$$h_1=gh_2g^{-1}\quad 。\tag{42}$$

也可以 $\forall g\in G,h\in H$ 定义作用

$$C_g:h\mapsto ghg^{-1}\quad ,\tag{43}$$

H 是 C_g 作用不变的，即

$$C_g:H\to gHg^{-1}=H\tag{44}$$

称其为不变子群，就是指在任意 C_g 作用下是不变的。平庸子群 $\{e\}$ 和 G 对于任意群都是不变子群。 S_3 的子群 Z_3 也是不变的就没那么显然。（可以直接验证，或者注意到 Z_3 的元素是涉及偶数次对换的置换）。集合 $\{e,a_4\}$ 是 G 的子群就不是不变子群，如 $a_5\{e,a_4\}=\{a_5,a_1\}$ 而 $\{e,a_4\}a_5=\{a_5,a_2\}$。

如果 H 是不变子群，则由群的乘法可以自然地定义陪集空间上的乘法使其成为群。

陪集的乘法：

$$(Hg_1)(Hg_2)=(Hg_1Hg_1^{-1})(g_1g_2) \tag{45}$$

由 H 是不变子群 $Hg_1Hg_1^{-1}=H^2=H$，可得

$$(Hg_1)(Hg_2)=H(g_1g_2)\ 。 \tag{46}$$

所以两个群元代表的陪集中元素的乘积落在由两个群元乘积代表的陪集之中。这样陪集空间 G/H，就称为 G **除以** H 的**商群。**

群 G 的**中心**是 G 中所有与 G 的所有元素对易的元素集合。中心永远是 G 的阿贝尔不变子群，当然它有可能是平庸的，只含单位元或者是整个群。

不变子群在变换(44) $C_g:H\to gHg^{-1}$，$\forall g\in G$ 作用下不变，即 $\forall g\in G$，

$$gHg^{-1}=H\quad 。 \tag{47}$$

任一群元经过所有群元的 C_g 变换作用的像构成的集合称为**共轭类。** g 为给定群元，含 g 的共轭类为集合

$$\{g'gg'^{-1}\,|\,\forall g'\in G\}\ 。 \tag{48}$$

考虑所有群元对应的 C_g 变换作用下不变的 G 子集 S，$\forall g\in G$

$$C_g:S\to gSg^{-1}=S \tag{49}$$

这类不变集合中最小的即为共轭类。后面我们会看到在**共轭类与不可约表示之间存在一对一的对应关系。由共轭类的并集构成的子群一定是不变子群，反之亦然。**

例子： S_3 的共轭类是 $\{e\}$，$\{a_1,a_2\}$ 和 $\{a_3,a_4,a_5\}$。

关于群之间映射的几个定义：

同构是两个群之间一对一保持乘法关系的可逆映射。

自同构是群到自身的一对一保持乘法关系的可逆映射。

对固定的 $g\in G$，映射 C_g：

$$G\to g^{-1}Gg\ 。 \tag{50}$$

称为**内自同构**映射。内自同构一定是自同构：由于 $(g^{-1}g_1g)(g^{-1}g_2g)=g^{-1}g_1g_2g$，说明它保持乘法运算关系，又由 $g^{-1}g_1g=g^{-1}g_2g\Rightarrow g_1=g_2$，所以是一对一映射。**外自同构**是除内自同构之外的自同构，对任意 $g\in G$ 都写不成 $g^{-1}Gg$ 的形式。

同态是两个群之间保持乘法关系的映射。同构一定是同态，反之则不然。

1.11 节 舒尔（Schur）引理

定理 1.3 对于不等价不可约表示 D_1 和 D_2，如果 $\forall g\in G$ 有

$$D_1(g)A=AD_2(g) \tag{51}$$

那么 $A=0$。

证明： 这是舒尔引理的前半部分。

设存在向量 $|\mu\rangle\neq 0$ 使得 $A|\mu\rangle=0$，所有这样的向量构成线性空间 $W=\{|\mu\rangle|A|\mu\rangle=0\}$，则 $W\neq\{0\}$，从 V 到 W 的投影算子 P 就非零，即 $W=PV$。由于 $\forall g\in G$，$AD_2(g)P=D_1(g)AP=0$，所以 $D_2(g)W\subset W$。

因为 D_2 是不可约的，W 作为不变子空间必为整个表示空间 V，即 $P=I$ 或者 $A=0$。也就是说如果 A 湮灭一个态，必湮灭所有的态。类似的讨论可以论证如果 A 向左作用湮灭一个态 $\langle v|$，则 A 必为零算子，即 $A=0$。如果 A 向两边作用都不湮灭态，则 A 必为可逆方矩阵。因为如果 A 的列数大于行数，设 $n>m$ ，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{52}$$

令

$$B=\left.\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} n-m, \tag{53}$$

则 $\det B=0$ 使 $BC=\begin{pmatrix} AC \\ 0 \end{pmatrix}=0$ 有非零解 $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，即存在 $C=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\neq 0$ 使 $AC=0$，所以只能 $n\le m$；类似地可证 $n\ge m$，故 $n=m$ ，A 必为方矩阵，若 $\det A=0$ 则 $AC=0$ 有非零解，所以 A 必为可逆方矩阵。

A 为可逆则 $\forall g\in G$ 有

$$A^{-1}D_1(g)A=D_2(g) \tag{54}$$

那么 D_1 和 D_2 就是等价的，与假定矛盾。证毕。

舒尔引理得后半部分处理当 D_1 和 D_2 为等价不可约表示的情形，通过重新定义 A 我们可以取 $D_1=D_2=D$ [2]。

定理 1.4 对于有限维不可约表示 D，如果 $\forall g\in G$，有 $D(g)A=AD(g)$ 都成立，则 $A\propto I$。

即如果一个矩阵与一个有限维不可约表示的所有群元表示矩阵对易，则该线性变换必正比于单位矩阵。

[2] 设 $D_2(g)=SD_1(g)S^{-1}$，则 $D_1(g)A=AD_2(g)=ASD_1(g)S^{-1}$，可定义新的 A 为 AS。

证明：有限维矩阵 A 至少有一个本征值，因为 $\det\left(A-\lambda I\right)=0$ 至少有一个根，解相应这个根的本征方程 $\left(A-\lambda I\right)\left|\mu\right\rangle=0$ 可得本征向量 $\left|\mu\right\rangle$ 。由于 $\forall g\in G$ ，$D(g)\left(A-\lambda I\right)=\left(A-\lambda I\right)D(g)$ ，由前一定理的证明可得 $A-\lambda I=0$ 。证毕。

舒尔引理的一个结论就是不可约表示的基态形式除一个整体相因子外基本是唯一的。定理 1.4 可以写成：对任意不可约表示 D ，如果 $\forall g\in G$ ，有 $A^{-1}D(g)A=D(g)$ ，则 $A\propto I$ 。这意味着一旦 D 的形式确定，就没有进一步在态上做非平庸相似变换的自由度了，唯一可做的幺正变换就是在所有态上乘以相同的相因子。

量子力学中舒尔引理对于在对称变换下不变的任意可观测量 O 的矩阵元的形式给出很强的限制。这是因为矩阵元 $\left\langle a,\,j,\,x\right|O\left|b,\,k,\,y\right\rangle$ 表现得象 $\forall g\in G$ ，$D_1(g)A=AD_2(g)$ 中的算符 A 。为看清楚这点，我们仔细地来考虑 Hilbert 空间关于对称群表示的完全约化。任意群元 $g\in G$ 都对应一作应于量子系统整个 Hilbert 空间上的幺正表示 $D(g)$ （通常是高度可约化的），即 $g\to D(g)$ 。

如果表示 D 是完全可约的，那么我们就可以选择一组基使得 D 具有对角块的形式，每一块相应于 G 的某个幺正不可约表示。由于整个 Hilbert 空间对于这些不可约表示空间有直和分解，这组基可以由这些不可约表示空间的基合并在一起构成。这样我们就可以对这组正交归一基标记为 $\left|a,\,j,\,x\right\rangle$ ，满足

$$\left\langle a,\,j,\,x\right|\left.b,\,k,\,y\right\rangle=\delta_{ab}\delta_{jk}\delta_{xy}\ \ 。\tag{55}$$

这里 a 标记不可约表示， $j=1,\cdots,n_a$ 标记第 a 个不可约表示中的基，在诸如同一不可约表示 $\left[D_a\left(g\right)\right]$ 出现在完全约化的 $\left[D\left(g\right)\right]$ 中多次的情形，我们需要别的物理参量 χ 来区分出现多次的 $\left[D_a\left(g\right)\right]$:

$$\left[D\left(g\right)\right]=\begin{pmatrix}\left[D_1\left(g\right)\right] & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \left[D_a\left(g\right)\right]\dashrightarrow x_1\\ & & \left[D_a\left(g\right)\right]\dashrightarrow x_2\\ & & \ddots\end{pmatrix}\tag{56}$$

这里暗含了一个假定，就是我们取的这组基使得同一不可约表示以相同的矩阵形式出现在 $\left[D\left(g\right)\right]$ 中，也就是说对每个不可约表示，我们选用了一个**正则形式。**

在这组特殊的基下， $D\left(g\right)$ 的矩阵元为

$$\left\langle a,\,j,\,x\right|D(g)\left|b,\,k,\,y\right\rangle=\delta_{ab}\delta_{xy}\left[D_a(g)\right]_{jk}\tag{57}$$

这就是将 $\left[D\left(g\right)\right]$ 用指标而非矩阵重新表达一遍。在表示 $D\left(g\right)$ 的两边插入中间态的完备集

$$I=\sum_{a,\,j,\,x}\left|a,\,j,\,x\right\rangle\left\langle a,\,j,\,x\right| \tag{58}$$

则可以将表示为对角块形式写成另一种形式

$$\begin{aligned}D(g)&=\sum_{a,\,j,\,x}\left|a,\,j,\,x\right\rangle\left\langle a,\,j,\,x\right|D(g)\sum_{b,\,k,\,y}\left|b,\,k,\,y\right\rangle\left\langle b,\,k,\,y\right|\\&=\sum_{\substack{a,\,j,\,x\\b,\,k,\,y}}\left|a,\,j,\,x\right\rangle\delta_{ab}\delta_{xy}\left[D_a(g)\right]_{jk}\left\langle b,\,k,\,y\right|\\&=\sum_{a,\,j,\,k,\,x}\left|a,\,j,\,x\right\rangle\left[D_a(g)\right]_{jk}\left\langle a,\,k,\,x\right|\end{aligned} \tag{59}$$

如果某一个特定不可约表示在D中只出现一次，事实上我们就不需要χ来标记它的态。但一般每一不可约表示在完整的量子 Hilbert 空间中会出现很多次，那么变量χ就区分那些对称性相同，物理性质不同的态。 然而重要的是

$$\left\langle a,\,j,\,x\right|D(g)\left|b,\,k,\,y\right\rangle=\delta_{ab}\delta_{xy}\left[D_a(g)\right]_{jk} \tag{60}$$

对物理的依赖是非常平庸的：仅在于态是正交归一的， 群理论的一切与χ和 y 无关。

在变换下，态的变换如下

$$\begin{aligned}&\left|\mu\right\rangle\to D(g)\left|\mu\right\rangle,\\&\left\langle\mu\right|\to\left\langle\mu\right|D(g)^{\dagger},\\&O\left|\mu\right\rangle\to D(g)O\left|\mu\right\rangle=D(g)OD(g)^{\dagger}D(g)\left|\mu\right\rangle\end{aligned}\quad, \tag{61}$$

因而算符如此变换

$$O\to D(g)OD(g)^{\dagger}\ 。 \tag{62}$$

因此，变换不变可观测量满足

$$O\to D(g)OD(g)^{\dagger}=O \tag{63}$$

即对$\forall g\in G$， O与$D(g)$对易

$$\left[O,D(g)\right]=0\ , \tag{64}$$

所以

$$\begin{aligned}0&=\left\langle a,\,j,\,x\right|\left[O,D(g)\right]\left|b,\,k,\,y\right\rangle\\&=\sum_{k'}\left\langle a,\,j,\,x\right|O\left|b,\,k',\,y\right\rangle\left\langle b,\,k',\,y\right|D(g)\left|b,\,k,\,y\right\rangle\\&-\sum_{j'}\left\langle a,\,j,\,x\right|D(g)\left|a,\,j',\,x\right\rangle\left\langle a,\,j',\,x\right|O\left|b,\,k,\,y\right\rangle\\&=\sum_{k'}\left\langle a,\,j,\,x\right|O\left|b,\,k',\,y\right\rangle\left[D_b(g)\right]_{k'k}-\sum_{j'}\left[D_a(g)\right]_{jj'}\left\langle a,\,j',\,x\right|O\left|b,\,k,\,y\right\rangle\end{aligned} \tag{65}$$

这样我们就可以得到矩阵元$\left\langle a,\,j,\,x\right|O\left|b,\,k,\,y\right\rangle$满足的的限制。

定义

$$\langle a,\ j,\ x|O|b,\ k,\ y\rangle=\left[O(a,b,x,y)\right]_{jk}\ ,\tag{66}$$

我们得到

$$\left[O(a,b,x,y)\right]\left[D_b(g)\right]=\left[D_a(g)\right]\left[O(a,b,x,y)\right]\ 。\tag{67}$$

所以矩阵元$\langle a,\ j,\ x|O|b,\ k,\ y\rangle$ 满足舒尔引理的条件，如果$a\neq b$则必为零，如果$a=b$它必正比于单位矩阵δ_{ij} 。然而，对称性告诉不了我们任何对于物理参数x 和y的依赖。因而我们可以得到

$$\langle a,\ j,\ x|O|b,\ k,\ y\rangle=\ f_a(x,y)\delta_{ab}\delta_{jk}\ ,\tag{68}$$

或者写成矩阵形式

$$[O]=\begin{pmatrix}\ddots & & & 0\\ & f_a(x_1,x_1)I_{n_a\times n_a} & \cdots & f_a(x_1,x_{m_a})I_{n_a\times n_a}\\ & \vdots & \ddots & \vdots\\ & f_a(x_{m_a},x_1)I_{n_a\times n_a} & \cdots & f_a(x_{m_a},x_{m_a})I_{n_a\times n_a}\\ 0 & & & \ddots\end{pmatrix}\ 。\tag{69}$$

这个结论重要的地方在于**物理全部包含在函数** $f_a(x,y)$ **中** – 所有对于群理论指标的依赖的依赖关系都完全被确定下来了。这是**Wigner-Eckart**定理的一个简单情形。

1.12 节　正交关系

*定理 1.1（有限群的任一表示都等价于一幺正表示）的证明中，我们用到了对群元素的求和，这种求和再加上舒尔引理可以用来展示关于不可约表示的一些重要性质。设D_a和D_b是G的有限维不可约表示，考虑下列线性算子

$$A_{jl}^{ab}\equiv\sum_{g\in G}D_a(g^{-1})|a,\ j\rangle\langle b,l|D_b(g)\ 。\tag{70}$$

需要注意的是，A_{jl}^{ab}作用在整个 Hilbert 空间上，其非零矩阵元仅在D_a和D_b的表示空间的直和空间上，也就是$\langle c,i|A_{jl}^{ab}|d,k\rangle\neq\delta_{ca}\delta_{bd}$[3]。

则

$$D_a(g_1)A_{jl}^{ab}=\sum_{g\in G}D_a(g_1)D_a(g^{-1})|a,\ j\rangle\langle b,l|D_b(g)$$

$$=\sum_{g\in G}D_a(g_1g^{-1})|a,\ j\rangle\langle b,l|D_b(g)=\sum_{g\in G}D_a\left(\left(gg_1^{-1}\right)^{-1}\right)|a,\ j\rangle\langle b,l|D_b(g)\ ,$$

[3] 事实上，由于$A_{jl}^{ab}=\sum_{g\in G}D_a\left(g^{-1}\right)|a,\ j\rangle\langle b,l|D_b\left(g\right)=\sum_{g\in G}D_a\left(g^{-1}\right)|a,\ j\rangle\ \left(D_b^{\dagger}\left(g\right)|b,l\rangle\right)^{\dagger}$

$=\sum_{g\in G,n,m}\left[D_a\left(g^{-1}\right)\right]_{nj}\left[D_b\left(g\right)\right]_{lm}|a,n\rangle\langle b,m|,$

$\langle c,i|A_{jl}^{ab}|d,k\rangle=\delta_{ca}\delta_{bd}\sum_{g\in G}\left[D_a\left(g^{-1}\right)\right]_{ij}\left[D_b\left(g\right)\right]_{lk}\equiv\delta_{ca}\delta_{bd}\left[A_{jl}^{ab}\right]_{ik}$。

令 $g'=gg_1^{-1}$ ，则

$$\begin{aligned} D_a(g_1)A_{jl}^{ab} &= \sum_{g'\in G} D_a\left(g'^{-1}\right)\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g'g_1) \\ &= \sum_{g'\in G} D_a\left(g'^{-1}\right)\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g')D_b(g_1)=A_{jl}^{ab}D_b(g_1) \end{aligned} \tag{71}$$

由舒尔引理得到如果 D_a 和 D_b 是不同的则 $A_{jl}^{ab}=0$，如果是相同的则 $A_{jl}^{ab}\propto I$（这里假定我们取了正则基底，所有等价表示矩阵形式都一样）。这样我们就得到

$$A_{jl}^{ab}=\sum_{g\in G} D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g)=\delta_{ab}\lambda_{jl}^{a}I \tag{72}$$

要计算 λ_{jl}^{a}，我们用两种不同方法来计算 A_{jl}^{ab} 的迹（在 **Hilbert 空间中的迹，并非对于指标的迹）。**计 n_a 为 D_a 的维数，一方面

$$TrA_{jl}^{ab}=\delta_{ab}\lambda_{jl}^{a}TrI=\delta_{ab}\lambda_{jl}^{a}n_a \tag{73}$$

另一方面，由于 $A_{jl}^{ab}\propto\delta_{ab}$，记 N 为群的阶，$\left\{\left|\mu\right\rangle\right\}$ 为正交归一基向量的完备集，我们可以利用迹的轮换性质

$$\begin{aligned} TrA_{jl}^{ab} &= \sum_{\mu}\left\langle\mu\right|\sum_{g\in G} D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g)\left|\mu\right\rangle \\ &= \sum_{g\in G}\left\langle b,l\right|D_b(g)\sum_{\mu}^{\sum\left|\mu\right\rangle\left\langle\mu\right|=I}\left|\mu\right\rangle\left\langle\mu\right|D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle = \sum_{g\in G}\left\langle b,l\right|D_b(g)D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle \\ &= \delta_{ab}\sum_{g\in G}\left\langle a,l\right|I_a\left|a,j\right\rangle=\delta_{ab}\sum_{g\in G}\delta_{lj}=N\delta_{ab}\delta_{lj} \end{aligned}$$

因而 $\lambda_{jl}^{a}=\delta_{jl}N/n_a$ 并且

$$\sum_{g\in G} D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g)=\frac{N}{n_a}\delta_{ab}\delta_{jl}I \tag{74}$$

取矩阵元就得到**不可约表示矩阵元的正交归一关系。**

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in G}\frac{n_a}{N}\left\langle a,k\right|D_a(g^{-1})\left|a,j\right\rangle\left\langle b,l\right|D_b(g)\left|b,m\right\rangle=\delta_{ab}\delta_{jl}\left\langle a,k\right|b,m\left\rangle \right. \\ &=\sum_{\boldsymbol{g\in G}}\frac{\boldsymbol{n_a}}{\boldsymbol{N}}\left[\boldsymbol{D_a(g^{-1})}\right]_{\boldsymbol{kj}}\left[\boldsymbol{D_b(g)}\right]_{\boldsymbol{lm}}=\boldsymbol{\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}} \end{aligned} \tag{75}$$

对幺正不可约表示，上式可写成

$$\sum_{\boldsymbol{g\in G}}\frac{\boldsymbol{n_a}}{\boldsymbol{N}}\left[\boldsymbol{D_a(g)}\right]^{*}_{\boldsymbol{jk}}\left[\boldsymbol{D_b(g)}\right]_{\boldsymbol{lm}}=\boldsymbol{\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}}\ ， \tag{76}$$

所以不等价不可约幺正表示的矩阵元在适当归一化后

$$\sqrt{\frac{n_a}{N}}\left[D_a(g)\right]_{jk} \tag{77}$$

是群元素 g 的正交归一函数。

群元素 g 的函数 F 可以延拓到群的正则表示空间 $Span\{|e\rangle,|g\rangle,\cdots\}$ 上作为其上的线性函数，等同于一个 bra 矢量 $\langle F|$， $F(g)=\langle F|g\rangle$ 。

记

$$\left\langle \sqrt{\frac{n_a}{N}}[D_a]_{jk}\right| \equiv \sum_{g\in G}\sqrt{\frac{n_a}{N}}[D_a(g)]_{jk}\langle g| \quad , \tag{78}$$

则

$$\begin{aligned}&\left\langle \sqrt{\frac{n_b}{N}}[D_b]_{lm}\middle|\sqrt{\frac{n_a}{N}}[D_a]_{jk}\right\rangle = \sum_{g,g'\in G}\sqrt{\frac{n_b}{N}}\sqrt{\frac{n_a}{N}}[D_a(g')]^*_{jk}[D_b(g)]_{lm}\langle g|g'\rangle \\ &=\sum_{g\in G}\frac{n_a}{N}[D_a(g)]^*_{jk}[D_b(g)]_{lm}=\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}\end{aligned} \tag{79}$$

因为矩阵元正交，所以它们必然是线性独立的，我们还可以证明它们是群元 g 的函数的完备集，即 g 的任意函数都可以用它们来线性展开。 g 的任意函数都可以表达成正则表示空间中的 bra 向量，记

$$\langle F|=\sum_{g'\in G}F(g')\langle g'| \tag{80}$$

则

$$F(g)\equiv\langle F|g\rangle=\langle F|D_R(g)|e\rangle \tag{81}$$

这里 D_R 是正则表示。所以任意群元函数 $F(g)$ 可以表达成正则表示矩阵元的线性组合：

$$F(g)=\sum_{g'\in G}F(g')\langle g'|D_R(g)|e\rangle=\sum_{g'\in G}F(g')[D_R(g)]_{g'e} \tag{82}$$

又由于 D_R 是完全可约的， 记正则表示空间的自然基为 $\{|g\rangle \ \ |g\in G\}$，正则表示 D_R 完全约化的正则基底为 $\{|a,j\rangle\}$， S 为从自然基到完全约化基的变换，$\{|a,j\rangle\}=S\{|g\rangle\}$ 或 $|a,j\rangle=\sum_g [S]_{g,(a,j)}|g\rangle$， $[S]_{g,(a,j)}\equiv\langle g|a,j\rangle=\langle g|S|g'\rangle$，则

$$[D_R(g)]=[S]\begin{pmatrix}[D_1] & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & [D_a]\\ & & & \ddots\end{pmatrix}\left[S^{-1}\right] \tag{83}$$

写成矩阵元的形式：

$$\begin{aligned}[D_R(g)]_{g'g''}&=\sum_{\substack{a,j\\ b,k}}[S]_{g'(a,j)}[D_c(g)]_{jk}\delta_{ac}\delta_{bc}\left[S^{-1}\right]_{(b,k)g''}\\ &=\sum_{j,k}[S]_{g'(a,j)}\left[S^{-1}\right]_{(a,k)g''}[D_a(g)]_{jk}\end{aligned} \quad 。 \tag{84}$$

这表明不等价不可约表示的矩阵元作为群元 g 的函数是完备的。需要注意的是，这些表达式和正交关系并没告诉我们不可约表示的矩阵元的具体形式。把这些结果总结在一起，就得到

定理 1.5 群的幺正不可约表示矩阵元构成正则表示空间的正交归一完备集，或者换一种说法，构成群元 $g \in G$ 函数的完备正交归一集。

一个直接推论就是

$$N = \sum_i n_i^2 \quad , \tag{85}$$

即**不等价不可约表示维数 n_i 的平方和等于群的阶 N 。**

例子： 傅里叶级数 – 循环群 $Z_N = \left\{ a_j \middle| j = 0, \cdots, N-1 \right\}$ （$a_0 = e$），从循环群的定义 $Z_N = \left\{ e, a, \cdots a^{N-1} \middle| a^N = e \right\}$ 可知 $a_j = a^j$ 并且

$a_j a_k = a_{(j+k) \bmod N}$ 。[4]

Z_N 的不可约表示全部是一维的，为

$$D_n(a_j) = e^{2\pi i n j / N} \tag{86}$$

因而正交关系(76) $\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} \left[D_a(g) \right]^*_{jk} \left[D_b(g) \right]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km}$ 给出

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi i n' j / N} e^{2\pi i n j / N} = \delta_{n'n} \tag{87}$$

这正是傅里叶级数的基本关系。

1.13 节 特征标

群表示 D 的特征标 $\chi_D(g)$ 是表示的线性算子或者表示矩阵的迹：

$$\chi_D(g) = TrD(g) = \sum_i \left[D(g) \right]_{ii} \quad 。 \tag{88}$$

由于迹具有循环不变性 $TrAB = TrBA$ ，特征标在相似变换下不变，因而所有等价表示具有相同的特征标。每个不等价不可约表示的特征标都不相同，事实上它们正交归一到 N ，这可以在 $j = k$ 且 $l = m$ 时对

$$\sum_{g \in G} \frac{n_a}{N} \left[D_a(g) \right]^*_{jk} \left[D_b(g) \right]_{lm} = \delta_{ab} \delta_{jl} \delta_{km} \tag{89}$$

---

[4]这里 $(j+k) \bmod N$ 的意思是 $j+k$ 除 N 的余数，满足 $j + k = mN + (j+k) \bmod N, 0 \le (j+k) \bmod N < N$ 。

求和得到：

$$\sum_{\substack{g\in G\\ j=k\\ l=m}}\frac{1}{N}\left[D_a(g)\right]^*_{jk}\left[D_b(g)\right]_{lm}=\sum_{\substack{j=k\\ l=m}}\frac{1}{n_a}\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}=\delta_{ab} \tag{90}$$

或者

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\chi_{D_b}(g)=\delta_{ab}\ \text{。} \tag{91}$$

由于正交，不同的不可约表示的特征标不同。 在共轭类上特征标是常数，因为

$$TrD(g^{-1}g_1g)=Tr\left(D(g^{-1})D(g_1)D(g)\right)=TrD(g_1) \tag{92}$$

即特征标是共轭类的函数。

可以证明不等价不可约表示的特征标构成共轭类函数的完备基。设$F(g_1)$是一共轭类函数，我们已知$F(g_1)$可以展开成不可约表示的矩阵元

$$F(g_1)=\sum_{a,\,j,\,k}c^a_{jk}\left[D_a(g_1)\right]_{jk}\ \text{。} \tag{93}$$

由于F在共轭类上是常数，$F(g_1)$可写

$$F(g_1)=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}F(g^{-1}g_1g)=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\sum_{a,\,j,\,k}c^a_{jk}\left[D_a(g^{-1}g_1g)\right]_{jk}\ \text{，} \tag{94}$$

因而

$$F(g_1)=\frac{1}{N}\sum_{\substack{a,\,j,\,k\\ g,\,l,\,m}}c^a_{jk}\left[D_a(g^{-1})\right]_{jl}\left[D_a(g_1)\right]_{lm}\left[D_a(g)\right]_{mk}$$

$$=\sum_{\substack{a,\,j,\,k\\ l,\,m}}c^a_{jk}\left[D_a(g_1)\right]_{lm}\sum_{g\in G}\frac{1}{N}\left[D_a(g^{-1})\right]_{jl}\left[D_a(g)\right]_{mk}\ \text{。}$$

$$=\sum_{\substack{a,\,j,\,k\\ l,\,m}}\frac{1}{n_a}c^a_{jk}\left[D_a(g_1)\right]_{lm}\delta_{jk}\delta_{lm}=\sum_{a,\,j,\,l}\frac{1}{n_a}c^a_{jj}\left[D_a(g_1)\right]_{ll}=\sum_{a,\,j,}\frac{1}{n_a}c^a_{jj}\chi_a(g_1)$$

上式给出一个重要结论：**不等价不可约表示特征标$\chi_a(g)$构成共轭类上函数的正交归一完备基。**共轭类上独立的函数数目应为共轭类的数目（对比独立的群元函数为群元数目），所以**不等价不可约表示的个数等于共轭类的个数。**这还意味着存在一个关于不可约表示求和的正交关系。将共轭类以α标记，设κ_α为共轭类α中的元素个数，g_α为共轭类α中的任一元素，定义矩阵V的矩阵元为

$$V_{\alpha a}=\sqrt{\frac{\kappa_\alpha}{N}}\chi_{D_a}(g_\alpha)\ \text{，} \tag{95}$$

则正交关系(91)可写成

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\chi_{D_b}(g)=\sum_{\alpha}\frac{\kappa_\alpha}{N}\chi_{D_a}(g_\alpha)^*\chi_{D_b}(g_\alpha)=\sum_{\alpha}V_{\alpha a}{}^*V_{\alpha b}$$
$$=\sum_{\alpha}\left(V^\dagger\right)_{a\alpha}V_{\alpha b}=\delta_{ab} \tag{96}$$

也就是 $V^\dagger V=I$。 由于V 是方矩阵，所以它是幺正矩阵，所以$VV^\dagger=I$，或者

$$\left(VV^\dagger\right)_{\beta\alpha}=\delta_{\alpha\beta}=\sum_a V_{\beta a}\left(V^\dagger\right)_{a\alpha}=\sum_a V_{\beta a}V^*_{\alpha a}$$
$$=\sum_a\frac{\sqrt{\kappa_\alpha}\sqrt{\kappa_\beta}}{N}\chi_{D_a}(g_\alpha)^*\chi_{D_a}(g_\beta)=\sum_a\frac{\kappa_\alpha}{N}\chi_{D_a}(g_\alpha)^*\chi_{D_a}(g_\beta)=\delta_{\alpha\beta} \tag{97}$$

。

对不可约表示求和的正交关系为

$$\sum_a\chi_{D_a}(g_\alpha)^*\chi_{D_a}(g_\beta)=\frac{N}{\kappa_\alpha}\delta_{\alpha\beta} \quad 。 \tag{98}$$

设是任意表示D，其完全约化的形式中，含每个不可约表示整数m_a^D 次，D为一个直和

$$D\cong\sum_a\overbrace{D_a\oplus\cdots\oplus D_a}^{m_a^D\ times}\oplus\cdots\ , \tag{99}$$

我们可以利用特征标的正交归一关系将整数m_a^D 计算出来：

$$\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\chi_D(g)=m_a^D \quad 。 \tag{100}$$

以正则表示为例，其特征标为

$$\chi_R(e)=N,\chi_R(g)=0,\ g\neq e \quad 。 \tag{101}$$

因而

$$m_a^R=\frac{1}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\chi_R(g)$$
$$=\frac{1}{N}\left(\chi_{D_a}(e)^*\chi_R(e)+\sum_{g\neq e}\chi_{D_a}(g)^*\chi_R(g)\right)=n_a \tag{102}$$

每个不可约表示在正则表示的约化中出现其维数那么多次。需要注意的是，m_a^D 被唯一确定，与基无关。

例子：再考察S_3，我们要不借助其二维表示的具体形式来求出S_3的所有不可约表示特征标。S_3的共轭类为$\{e\}$ ，$\{a_1,a_2\}$ 和$\{a_3,a_4,a_5\}$。 最容易的办法是从已知的一维平庸表示D_0出发。对所有群元g，$D_0(g)=1$，其特征标为$\chi_0(g)=1$，本身就是归一化的。由推论(85)$\sum_a n_a^2=N$，其余两个表示的维数为一和二。

写出另一个一维表示的特征标也很容易。一般而言，当存在一个G 的不变子群H

的时候，就存在在不变子群 H 上取常数的的表示，并且构成商群 G/H 的表示。现在的情况是商群为 Z_2，其非平庸表示为在 $H=\{e,a_1,a_2\}$ 上取 1 并在 $\{a_3,a_4,a_5\}$ 上取-1。

对于二维表示，我们知道 $\chi_3(e)=n_3=2$，因而目前特征标表呈现如下：

	e	a_1 a_2	a_3 a_4 a_5
D_0	1	1	1
D_1	1	1	-1
D_2	2	?	?

接下来我们可以利用正交性填上最后两个空格。我们事实上可以只利用正交性关系甚至不要知道第二个一维表示也能填好特征标表，但利用 Z_2 使问题变得简单得多。

	e	a_1 a_2	a_3 a_4 a_5
D_0	1	1	1
D_1	1	1	-1
D_2	2	-1	0

利用特征标不仅可以找出一个特定可约表示中包含多少不可约表示，实际上还可以明确地将可约表示分解成其不可约组分。如果 D 是一任意表示，不难看出求和

$$P_a=\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*D(g) \tag{103}$$

是投影到按表示 D_a 变换的子空间上的投影算子。为看出这点，在正交关系(76) $\sum_{g\in G}\frac{n_a}{N}\left[D_a(g)\right]^*_{jk}\left[D_b(g)\right]_{lm}=\delta_{ab}\delta_{jl}\delta_{km}$ 中让 $j=k$ 并对其求和，可以得到

$$\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\left[D_b(g)\right]_{lm}=\delta_{ab}\delta_{lm} \tag{104}$$

因而，当 D 被写成对角块形式的时候，在按 D_a 变换的子空间上，上式的求和给出单位算子 I，在其余子空间上给出零算子 0。在完全约化基 $\{|a,j\rangle\}$ 中

$$
\begin{aligned}
&P_a\left(\cdots,\left|a,1\right\rangle,\cdots,\left|a,n_a\right\rangle,\cdots\right)\\
&=\left(\cdots,\left|a,1\right\rangle,\cdots,\left|a,n_a\right\rangle,\cdots\right)\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\begin{pmatrix}\ddots & & 0\\ & \left[D_a(g)\right] & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}。
\end{aligned}
\tag{105}
$$

因而，对任意

$$
\left|\psi\right\rangle=\sum_a\sum_{j=1}^{n_a}\left\langle a,j\left|\psi\right.\right\rangle\left|a,j\right\rangle=\left(\cdots,\left|a,1\right\rangle,\cdots,\left|a,n_a\right\rangle,\cdots\right)\begin{pmatrix}\vdots\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\end{pmatrix},
\tag{106}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*\begin{pmatrix}\ddots & & 0\\ & \left[D_a(g)\right] & \\ 0 & & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \left[I\right] & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{107}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&P_a\left|\psi\right\rangle=P_a\left(\cdots,\left|a,1\right\rangle,\cdots,\left|a,n_a\right\rangle,\cdots\right)\begin{pmatrix}\vdots\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\end{pmatrix}\\
&=\left(\cdots,\left|a,1\right\rangle,\cdots,\left|a,n_a\right\rangle,\cdots\right)\begin{pmatrix}0\\ \left\langle a,1\left|\psi\right.\right\rangle\\ \vdots\\ \left\langle a,n_a\left|\psi\right.\right\rangle\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{n_a}\left\langle a,j\left|\psi\right.\right\rangle\left|a,j\right\rangle
\end{aligned}
\tag{108}
$$

位于 D_a 的表示空间内。

因而 P_a 的确是投影算子，在完全约化基 $\{|a,j\rangle\}$ 中的矩阵形式是(104)，关键是(103)中的 $P_a=\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*D(g)$ 给出的投影算子将 D 的表示空间投影到 D_a 的表示空间上，并不依赖于其矩阵形式。P_a 在未约化基中的矩阵形式就是 $\frac{n_a}{N}\sum_{g\in G}\chi_{D_a}(g)^*[D(g)]$，我们并不需要知道 D 如何约化到对角块形式。

例子： 再看 S_3

下面是 S_3 的三维表示

$$D_3(e)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},D_3(a_1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},D_3(a_2)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$
$$D_3(a_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},D_3(a_4)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},D_3(a_5)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix} \tag{109}$$

这个表示很重要，它是 S_3 的定义表示，其被置换的物体即为一个三维向量空间的基向量，$\{|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\}$。

首先我们验证(109)中的表示确实对态实施了置换。比如

$$\begin{aligned}D_3(a_1)|1\rangle&=\sum_k|k\rangle[D_3(a_1)]_{k1}=|2\rangle\\D_3(a_1)|2\rangle&=\sum_k|k\rangle[D_3(a_1)]_{k2}=|3\rangle\\D_3(a_1)|3\rangle&=\sum_k|k\rangle[D_3(a_1)]_{k3}=|1\rangle\end{aligned} \tag{110}$$

因而这个表示是轮换变换 $(1,2,3)$ 或者 $1\to2\to3\to1$ 的实现。

如果置换 a_i 将 x_j 换成 x_k，相应的表示算子 $D(a_i)$ 就将 $|j\rangle$ 换成 $|k\rangle$，所以

$$D(a_i)|j\rangle=|k\rangle \tag{111}$$

因而

$$\langle l|D(a_i)|j\rangle=\delta_{kl} \tag{112}$$

表示中的每个矩阵在每一列、每一行都只有单独一个 1。

这里我们再强调一下矩阵和算子的关系。通常用一组矩阵来给出线性算子时，这组矩阵表示的是线性算子的矩阵，即

$$[D_3(g)]_{jk}=\langle j|D_3(g)|k\rangle \tag{113}$$

为区分矩阵和线性算子，我们可以用不同的符号，但通常从上下文可以很容易的推断出来到底是矩阵还是算子。关键是其作用在态上的方式，态 $|j\rangle$ 由矩阵右乘作用，因为

通过插入中间态完备集可得

$$D_3(g)|j\rangle=\sum_k|k\rangle\langle k|D_3(g)|j\rangle=\sum_k|k\rangle[D_3(g)]_{kj}=\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right)\begin{pmatrix}[D_3(g)]_{1j}\\ [D_3(g)]_{2j}\\ [D_3(g)]_{3j}\end{pmatrix}$$

或者

$$D_3(g)\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right)=\left(|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right)[D_3(g)]\ 。\qquad (114)$$

现在我们构造投影算子，得到

$$P_0=\frac{n_0}{N}\sum_{g\in S_3}\chi_{D_0}(g)^*D_3(g)=\frac{1}{6}\left(D_3(e)+\sum_{j=1}^{5}D_3(a_j)\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$$

$$P_1=\frac{n_1}{N}\sum_{g\in S_3}\chi_{D_1}(g)^*D_3(g)=\frac{1}{6}\left(D_3(e)+\sum_{j=1}^{2}D_3(a_j)-\sum_{j=3}^{5}D_3(a_j)\right)=0,$$

$$P_2=\frac{n_2}{N}\sum_{g\in S_3}\chi_{D_2}(g)^*D_3(g)=\frac{1}{3}\left(2D_3(e)-\sum_{j=1}^{2}D_3(a_j)\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}。$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\end{pmatrix}$$

这些式子意义很明确： P_0 将表示空间 $Span\left\{|1\rangle,|2\rangle,|3\rangle\right\}$ 投影到按平庸表示变换的不变子空间 $Span\left\{\left(|1\rangle+|2\rangle+|3\rangle\right)/\sqrt{3}\right\}$ 上，而 P_2 则投影到按 D_2 表示变换的二维不变子空间 $Span\left(\left(|1\rangle-|2\rangle\right),\left(|2\rangle-|3\rangle\right)\right)$ 上。

表示空间这种构造表明 D_3 可分解为不可约表示的直和

$D_3=D_0\oplus D_2$ 。

1.14 节 本征态

在量子力学中，我们经常对不变厄米算子特别是哈密顿算子 H 的本征态感兴趣，我们总是可以让这些本征态按对称群的不可约表示变换。要证明这点，首先注意到 Hilbert 空间可以被划分成的不同本征值的本征子空间，由于对称群在整个 Hilbert 空间上的表示 $D(g)$ 不改变 H 的本征值 (见(20)，$\left[D(g),H\right]=0$)，每一个本征子空间都是对称群的不变子空间，我们就可以在每个本征子空间上完全约化对称群的表示。

与之相关的一点就是如果某个不可约表示在 Hilbert 空间中只出现一次，则该不可

约表示空间中的态必为H（或者任意别的不变算子）的本征态。这是因为

$$D(g)H|a,j,x\rangle = HD(g)|a,j,x\rangle = \sum_k H|a,k,x\rangle\left[D(g)\right]_{kj} \tag{115}$$

所以$H|a,j,x\rangle$必定在与$|a,j,x\rangle$同一不可约表示中，因而

$$H|a,j,x\rangle = \sum_y c_y|a,j,y\rangle \ , \tag{116}$$

并且如果x和y只能取一个值，那么$|a,j,x\rangle$就是本征态。

这些结论可以总结为一个定理：

定理 1.6 如果一个厄米算子H与群G 所有群元的表示$D(g)$ 对易，则可以选择该厄米算子的本征态按群G的不可约表示变换。如果某一不可约表示在 Hilbert 空间中只出现一次，则该不可约表示空间中的每个态都是厄米算子同一本征值的本征态。

对于阿贝尔群选择H本征态按不可约表示变换的步骤与同时对角化H和$D(g)$是类似的。比如对于和宇称相关的群Z_2，上述结论就变成了我们总是可以选择本征态为对称或者反对称（因为宇称变换群Z_2只有两个不可约表示，见 1.6 节 应用：量子力学中的宇称）。在宇称的情形里，代表宇称的线性算子是厄米的，所以我们知道可以对角化它。一般情形下，我们已经证明有限群元的表示算子可选为幺正的而不是厄米的，然而对于与H对易的阿贝尔群，我们可以证明群元表示算子可以与H一道同时对角化，理由就是下述定理：

定理 1.7 有限阿贝尔群的所有不可约表示都是一维的。

这个定理的一个证明可从关于共轭类的讨论和$\sum_a n_a^2 = N$得到。对阿贝尔群，因为$gg'g^{-1} = g'$，共轭变换是恒等变换，每个群元自身就构成一个共轭类，而每个共轭类对应一个不可约表示，所以不可约表示的数目等于群的阶数，则满足$\sum_a n_a^2 = N$的唯一一组解就是所有的n_i等于一，这就证明了定理，也意味着将把阿贝尔群的表示约化为不可约表示就是将所有群元的表示矩阵同时对角化。

对非阿贝尔群，我们无法同时对角化所有的$D(g)$，退而求其次，在H为常数的每个本征子空间上完全约化表示$D(g)$就是最好的选择。

与量子力学中对角化哈密顿量问题很类似的一个经典力学问题是求解在经典力学系统的稳定平衡点附近微振动的简正模式问题。

设n 自由度系统在稳定平衡点附近拉格朗日量L 可表为

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q} - \frac{1}{2}q^T Kq \ , \tag{117}$$

M，K为$n\times n$矩阵。总可以使$M = M^T$, $K = K^T$在n自由度系统在稳定平衡点附近小振动这类问题中，如果体系有对称变换

$$g: q_i \to Q_i = g_i(q_1,\cdots,q_n), i = 1,\cdots,n \ , \tag{118}$$

选取坐标原点使稳定平衡点对应 $Q_i=0$，则在平衡点附近对 $Q_i=g_i(q_1,\cdots,q_n)$ 泰勒展开，舍掉高阶量后有 $Q_i=\sum_j\left[D(g)\right]_{ij}q_j$ 即

$$\begin{pmatrix}Q_1\\ \vdots\\ Q_n\end{pmatrix}=\left[D(g)\right]\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}\ , \tag{119}$$

即广义坐标按对称群的表示 D 变换，考虑幺正表示，由拉格朗日函数 L 在变换下不变，$M\to\left[D(g)\right]^T M\left[D(g)\right]=M$ 和 $K\to\left[D(g)\right]^T K\left[D(g)\right]=K$，有 $\left[\left[D(g)\right],M\right]=0$ 和 $\left[\left[D(g)\right],K\right]=0$。所以在寻求简正模式、简正坐标和本征频率的问题中，我们可以运用定理 1.6。

1.15 节 张量积

从表示的约化看到，我们可以将可约表示分解成小一些表示的直和，反过来我们也可以把表示合在一起构成大一些的表示。设 D_1 是 m 维表示，表示空间为 $Span\{|j\rangle\}$，基为 $\{|j\rangle|j=1,\cdots,m\}$；$D_2$ 为 n 维表示，表示空间为 $Span\{|x\rangle\}$，基为 $\{|x\rangle|x=1,\cdots,n\}$。我们可以构造一组以 j 和 x 的序对标记的基向量 $\{|j,x\rangle|j=1,\cdots,m;x=1,\cdots n\}$，当 j 从 1 取遍 m，x 从 1 取遍 n 时，序对 $|j,x\rangle\equiv|j\rangle|x\rangle$ 就取遍了 $m\times n$ 种不同组合，以 $\{|j,x\rangle|j=1,\cdots,m;x=1,\cdots n\}$ 为基向量的 $m\times n$ 维向量空间就称为 $Span\{|j\rangle\}$ 与 $Span\{|x\rangle\}$ **张量积空间** $Span\{|j,x\rangle\}$，记为

$$Span\{|j,x\rangle\}=Span\{|j\rangle\}\otimes Span\{|x\rangle\}\ 。 \tag{120}$$

在这个大张量积空间上，我们可以把两个小表示 D_1 和 D_2 乘起来，构成一个称为**张量积表示**的新表示 $D_1\otimes D_2$。更确切地说，$D_{D_1\otimes D_2}(g)$ 的矩阵元为 $D_1(g)$ 的 $D_2(g)$ 矩阵元乘积：

$$\langle j,x|D_{D_1\otimes D_2}(g)|k,y\rangle\equiv\langle j|D_1(g)|k\rangle\langle x|D_2(g)|y\rangle\ 。 \tag{121}$$

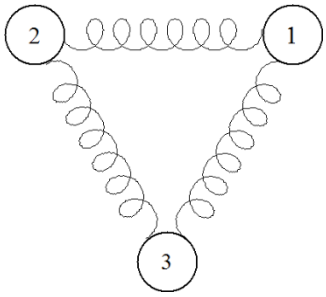
容易看出上式的确定义了 G 的表示，这个表示一般是可约的，可以约化为不可约表示的直和。

定理 1.8 张量积表示的特征标是因子表示特征标的乘积。

$$\chi_{D_1\otimes D_2}(g)=\chi_{D_1}(g)\chi_{D_2}(g) \tag{122}$$

1.16 节 张量积的例子

考虑下属物理问题，如图所示，三个相同的物体由相同的弹簧相连接构成一个三角形



设它们可以在平面上自由无摩擦滑动，我们感兴趣这个系统的简正模式。问题的关键是该系统具有 S_3 对称性，利用对称性和定理 1.6 我们可以对系统做许多推断。该系统有六个自由度，每个物体由 x 和 y 坐标描述：

$$\left(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\right) \text{ 。} \tag{123}$$

这里有一个张量积的结构：系统的六维位形空间是三个物体构成的三维空间与 x 和 y 坐标构成的二维空间的张量积。这些坐标来自于三个两分量二维矢量 $\vec{r}_i$ ，可以将它们看作有两个指标，记为 $r_{j\mu}$，其中 j 标记物体，取值从 1 到 3 而 μ 标记 x 和 y 分量，取值从 1 到 2，

$$\left(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\right) = \left(r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, r_{31}, r_{32}\right) \text{ 。} \tag{124}$$

三维空间在 S_3 下按(109)中的表示 D_3 变换，

$$D_3(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_3(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_3(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_3(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D_3(a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D_3(a_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{。}$$

二维空间按(22)中的表示 D_2 变换，

$$D_2\left(e\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2\left(a_1\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D_2\left(a_2\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D_2\left(a_3\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2\left(a_4\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D_2\left(a_5\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{。} \tag{125}$$

则由(121)，坐标的六维表示即为两个表示的张量积：

$$\left[D_6\left(g\right)\right]_{j\mu k\nu} = \left[D_3\left(g\right)\right]_{jk}\left[D_2\left(g\right)\right]_{\mu\nu} \text{ 。} \tag{126}$$

因此得到，比如

$$\left[D_6(a_1)\right]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} 。 \quad (127)$$

上式具有在 $D_3(a_1)$ 中 1 的位置上有三套 $D_2(a_1)$ ，其余的群元表示有类似的结构。

因为系统具有 S_3 对称性， **系统的简正模式一定按对称群特定不可约表示变换。**因此为寻找简正模式，可以尝试构造投影到这些不变子空间上投影算子。特别是，**如果某个不可约表示只出现一次，由定理 1.6，它必定对应着一个简正模式。**如果某个不可约表示出现多于一次，我们就需要更多的信息来确定简正模式。

由张量积表示特征标的公式(122) $\chi_{D_1\otimes D_2}(g)=\chi_{D_1}(g)\chi_{D_2}(g)$ ，易得 D_6 的特征标，并找出每个不可约表示在 D_6 中出现的次数，

$$\chi_6(g)=\sum_{j\mu}\left[D_6(g)\right]_{j\mu,j\mu}=\sum_{j}\left[D_3(g)\right]_{jj}\sum_{\mu}\left[D_2(g)\right]_{\mu\mu}=\chi_3(g)\chi_2(g)$$

	e	a_1 a_2	a_3 a_4 a_5
D_3	3	0	1
D_2	2	-1	0
D_6	6	0	0

D_6 的特征标与正则表示相同，所以 D_6 这个表示与正则表示等价其不可分解为

$$D_6\cong D_0\oplus D_1\oplus 2D_2 \quad 。 \quad (128)$$

有了这些准备，我们就可以用群论来寻求系统的简正模式了。

1.17 节　求简正模式

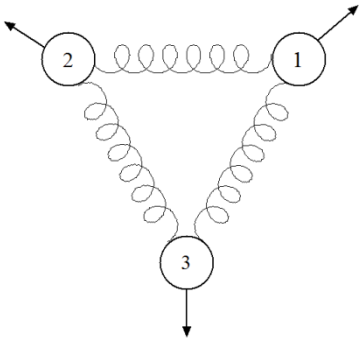
因为 D_0 和 D_1 在 D_6 中只出现一次，按它们变换的正则模式即为相应投影算子投影出的子空间。投影到 D_0 和 D_1 的子空间是一维的。

$$P_0=\frac{1}{6}\sum_{g\in G}\chi_0(g)^*\,D_6(g)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}}\\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{6}\\ 0\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} \tag{129}$$

，

相应于运动模式

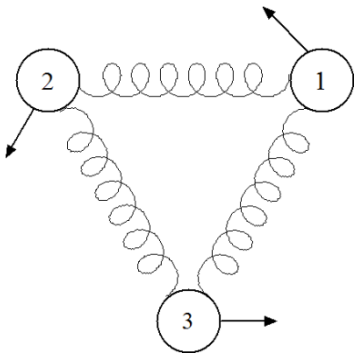


即所谓的“呼吸模式”，三角形保持形状的膨胀和收缩模式。

$$P_1=\frac{1}{6}\sum_{g\in G}\chi_1(g)^*D_6(g)=\begin{pmatrix}\frac{1}{12} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & 0\\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix} \tag{130}$$

相应于运动模式



即三角形整体转动的模式，因为弹簧没有形变，这个模式相应的本征频率为零。

需要注意的是我们找到这两个简正模式只利用了对称性，没有凭借任何物理！

最后是P_2

$$P_2=\frac{2}{6}\sum_{g\in G}\chi_2(g)^*D_6(g)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\0&\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&0&\frac{2}{3}&\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{2}{3}&0\\\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{\sqrt{3}}{6}&\frac{1}{6}&0&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

(131)

这是一个秩为四的投影（$TrP_2=4$），投影出的子空间是四维的，投影出 D_2 两次。这里我们需要一些动力学信息了。很幸运的是，有两个简正模式很容易得到，它们是三角形整体的平移。

譬如， x 方向的平移由投影算子 T_x 给出

$$T_x=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&0&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&0&0\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\tag{132}$$

而 y 方向的平移由投影算子 T_y 给出

$$T_y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\\0&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\tag{133}$$

.

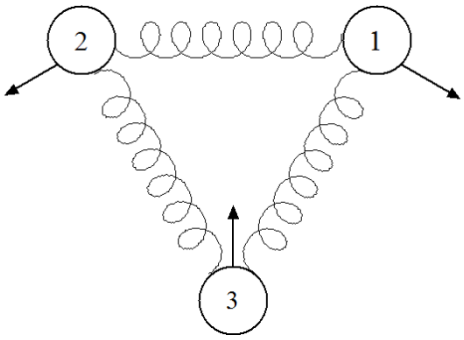
所以非平庸的简正模式由投影算子 P_3 给出

$$P_3 = P_2 - T_x - T_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{134}$$

为看出相应的简正模式是怎样的，将向量$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$做投影得到

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

相应的运动模式为



然后将上述模式旋转$2\pi/3$给出另一个线性无关的模式。

习题 1.1： 将Z_3的表示(2)推广到Z_n群。

习题 1.2： 证明(3)定义的D是一个表示，维数为群的阶。

习题 1.3： 证明Z_3群正则表示的矩阵为(4)。

习题 1.4： 证明P为投影算子的充要条件是$P^2 = P$，TrP为所投影空间W的维数。

习题 1.5： 证明借助投影算子P，表示D的**可约**性可以表述为，$\forall g \in G$满足$PD(g)P = D(g)P$。

习题 1.6：证明$V = W_1 \oplus W_2$，W_1和W_2为不变子空间。

习题 1.7：论证如何从(4)中表示D得到(14)中的相似变换S。

习题 1.8：证明(4)中表示D的表示空间$V = Span\{|e\rangle, |a\rangle, |b\rangle\}$可分解为一维不变子空间的直和：

$$Span\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e\rangle+|a\rangle+|b\rangle\right)\right\}\oplus Span\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e\rangle+\omega^2|a\rangle+\omega|b\rangle\right)\right\}$$

$$\oplus Span\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|e\rangle+\omega|a\rangle+\omega^2|b\rangle\right)\right\}$$

习题 1.9：证明量子力学体系的任意对称群在 Hilbert 空间上有幺正表示；证明哈密顿算符与对称群任一群元的表示对易，总可以选取能量本征态使其构成的能量本征子空间按对称群的某一不可约表示变换。

习题 1.10：论证 Z_2 的所有表示都是完全可约的，并且只有两个不可约表示。

习题 1.11：用有限深方势阱、无限深方势阱和线性谐振子的例子印证宇称的理论。

习题 1.12：验证 S_3 的乘法表。

习题 1.13：具体构造出表示(22)，论证它是幺正、不可约表示。(提示：如果这个表示是可约的，则所有矩阵需要能同时对角化，这些矩阵不是相互对易的，所以表示是不可约的)。

习题 1.14：论证(24)定义的 D 是群 $\mathbb{Z}$ 的表示。

习题 1.15：　证明：　Z_N 的不可约表示为 $D_n(a_j)=e^{2\pi inj/N}$ 。

习题 1.16：证明子空间 W 在 V 中有唯一正交补空间 $W^{\perp}$ 并且从 V 到 W 的正交投影 P 是厄米算子。

习题 1.17：证明 S_3 中 $\{e,a_1,a_2\}=Z_3$。

习题 1.18：论证 S_3 中 Z_3 的元素涉及偶数次置换，其余元素为奇数次置换。证明 Z_3 是 S_3 的不变子群。

习题 1.19：　证明商群 S_3/Z_3 为 Z_2 。

习题 1.20：　证明 G 的中心是 G 的阿贝尔不变子群。

习题 1.21：　证明 S_3 的共轭类是 $\{e\}$ ， $\{a_1,a_2\}$ 和 $\{a_3,a_4,a_5\}$ 。

习题 1.22：　证明群表示是同态。

习题 1.23：　构造同态映射 $S_3\to S_3/Z_3$ 。

习题 1.24：　$\mathbb{R}^+=\{\alpha\in\mathbb{R}|\alpha>0\}$ 为正实数集合， $\mathbb{R}^+$ 在实数乘法下构成群，证明 $\mathbb{R}^+$ 与加法群 $\mathbb{R}$ 同构。

习题 1.25：　证明如果不存在非零 $|\mu\rangle$ 和 $\langle\nu|$ 使得 $A|\mu\rangle=0$ 或 $\langle\nu|A=0$ 成立，则 A 为可逆方矩阵。

习题 1.26：证明 $\sum_a P_a=I$ ，证明 $P_aP_b=\delta_{ab}P_a$ 。

习题 1.27：设 n 自由度系统在稳定平衡点附近拉格朗日量 L 可表为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^T M\dot{q}-\frac{1}{2}q^T Kq \quad ,$$

M ，K 为 $n\times n$ 矩阵。证明总可以使 $M=M^T$, $K=K^T$ ；本征频率的平方为 $M^{-1}K$ 的本征值，简正模式为 $M^{-1}K$ 的本征向量。

习题 1.28：证明　$\chi_{D_1\otimes D_2}(g)=\chi_{D_1}(g)\chi_{D_2}(g)$ 。

习题 1.29：验证三个相同的物体由相同的弹簧相连接构成一个三角形系统的 M 和 K 与 $D_6(g)$ 对易。

习题 1.30：验证(129)式，证明 P_0 投影到呼吸模式，该简正模式按 D_0 变换。

习题 1.31：验证(130)式，证明整体旋转模式对应的简正模式按 D_1 变换。

习题 1.32：验证(131)中的 P_2，证明 T_x，T_y 投影出平移模式，平移模式对应的简正模式按 D_2 变换。

习题 1.33：证明(134)模式与旋转 $2\pi/3$ 的模式构成不变子空间，按 D_2 变换，对应同一本征频率。求出旋转 $4\pi/3$ 的模式，证明可以由上面两种模式线性叠加得到。

习题 1.34：验证 $P_0P_1=P_1P_2=P_0P_2=0$，并且

$$
\begin{aligned}
P_3 = &\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{pmatrix} \\
+ &\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{135}
$$

第二章 李群

设群元 $g \in G$ 光滑地依赖一组连续参数 α ，可表示为

$$g = g(\alpha) \tag{1}$$

光滑性在这里意味着在群上可定义某种意义上的近邻性，即如果两个群元在群元构成的空间中是“邻近的”则描述两个群元的参数也是邻近的。

2.1节 生成元

由于单位元是群的一个重要元素，群元素方便的参数化办法是将 $\alpha = 0$ 对应于单位元（至少靠近单位元的那些元素），因而可以假定在单位元的某个领域中，群元是由一个 N 个实独立参数 α_a ， $a = 1, \cdots, N$ ，的函数来描述，满足

$$g(\alpha)\big|_{\alpha=0} = e \tag{2}$$

这样，如果我们找到群的一个表示 D，表示中的线性算子也就以同样的方式被参数化，并且

$$D(\alpha)\big|_{\alpha=0} = I \tag{3}$$

所以在单位元的某个邻域中，我们可以泰勒展开 $D(\alpha)$，并且可以只保留第一项如果离单位元足够近：

$$D(d\alpha) = I + \sum_a id\alpha_a X_a + \cdots \tag{4}$$

这里我们将参数标为 $d\alpha$ 来表明它是无穷小，并定义

$$X_a = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)\bigg|_{\alpha=0} \tag{5}$$

这些 X_a， $a = 1, \cdots, N$ ，称为群的生成元。如果参数化得合适（即没有冗余的参数，为区分不同的群元，所有参数都是必须的）并且 D 是任意非平庸表示（即任一 X_a 不为零），

则 X_a 为线性无关并构成线性空间 $\mathfrak{g}=Span\{X_1,\cdots,X_N\}$ 的基。i 包含在 X_a 的定义中是为了使得群表示为幺正时，X_a 为厄米算子。

Sophus Lie证明，生成元可以不借助表示，在抽象群中定义，由于他的研究工作，这类群就被称为李群。 有一类李群称为连通李群，在物理中特别重要，指每个群元可以由有限个连续实参数 α_a 描述，并且都可以用群中的一条连续曲线与单位元相连。群乘法即为

$$g(\bar{\alpha})g(\alpha)=g\left(f(\bar{\alpha},\alpha)\right) \tag{6}$$

$f_a(\bar{\alpha},\alpha)$ 是 $\bar{\alpha}$ 和 α 的光滑函数。单位元对应 $\alpha=0$ ，所以有

$$f_a(\alpha,0)=f_a(0,\alpha)=\alpha_a \tag{7}$$

考虑该群的任一非平庸幺正表示 $D(\alpha)$ ，则

$$D(\bar{\alpha})D(\alpha)=D\left(f(\bar{\alpha},\alpha)\right) \tag{8}$$

在单位元的邻域内 $D(\alpha)$ 可以展开成

$$D(\alpha)=1+i\alpha_a X_a+\frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b t_{ab}+\cdots \tag{9}$$

显然 X_a,t_{ab} 等等都是与 α_a 无关的厄密算子。由(7)，将 $f_a(\bar{\alpha},\alpha)$ 对 $\bar{\alpha}$ 和 α 展开一定有

$$f_a(\bar{\alpha},\alpha)=\alpha_a+\bar{\alpha}_a+C_{abc}\bar{\alpha}_b\alpha_c+\cdots \tag{10}$$

C_{abc} 为实。在单位元的领域内群乘法就给出

$$\begin{aligned}&\left(1+i\bar{\alpha}_a X_a+\frac{1}{2}\bar{\alpha}_a\bar{\alpha}_b t_{ab}+\cdots\right)\left(1+i\alpha_a X_a+\frac{1}{2}\alpha_a\alpha_b t_{ab}+\cdots\right)\\&=1+i\left(\alpha_a+\bar{\alpha}_a+C_{abc}\bar{\alpha}_b\alpha_c+\cdots\right)X_a+\frac{1}{2}\left(\alpha_b+\bar{\alpha}_b+\cdots\right)\left(\alpha_c+\bar{\alpha}_c+\cdots\right)t_{bc}+\cdots\end{aligned} \tag{11}$$

对 $\bar{\alpha}$ 和 α 的幂次逐项对比，可得

$$t_{bc}=-X_b X_c-iC_{abc}X_a \tag{12}$$

这说明一旦**群的结构**给定，即**函数** $f(\bar{\alpha},\alpha)$ 和其**展开式的二次项系数** C_{abc} 给定，$D(\alpha)$ 展开式中二次项就可以通过一次项，生成元，计算出来。由于自洽性要求，t_{bc} 关于下标必为对称的，所以就有

$$\left[X_b, X_c\right] = if_{bca}X_a \tag{13}$$

这里

$$f_{bca} \equiv -C_{abc} + C_{acb} \tag{14}$$

对易关系(13)在生成元集合 $\mathfrak{g} = Span\left\{X_1, \cdots, X_N\right\}$ 上封闭，生成元集合就称为李代数。

从单位元出发，将群元参数化有很大的任意性，可以选择一种参数化方式使得群乘法律和希尔伯特空间中表示算子的乘法律好看一些，特别是可以将无穷小群元

$$D\left(d\alpha\right) = I + \sum_a id\alpha_a X_a \tag{15}$$

自乘到某个大的幂次来从在一个固定方向上远离单位元。因为群的性质，$D\left(d\alpha\right)$ 的幂次总给出另一个群元。所以对于有限参数 α 可以定义参数化的群元为

$$D\left(\alpha\right) = \lim_{k\to\infty}\left(I + i\sum_a \alpha_a X_a \Big/ k\right)^k = e^{i\sum_a \alpha_a X_a} \tag{16}$$

当 k 很大时，$I + i\sum_a \alpha_a X_a \Big/ k$ 是群元的表示，因而这个极限一定是一个群元的表示。这就定义了群元表示的一个特殊参数化（通常称为指数参数化），群乘法也因而被确定。特别是，这意味着可以 (至少在单位元 e 的某个邻域中) 用生成元来表示群元。这样做很方便，因为生成元不像群元，它们生成一个矢量空间，它们可以相加或乘上一实数。生成元一词经常指由 X_a 张出的实线性空间中任一元素。

2.2节 李代数

现在在任何一个特定的方向上，群乘法都不复杂。存在一个具有形式

$$U\left(\lambda\right) = e^{i\lambda\sum_a \alpha_a X_a} \tag{17}$$

的单参数群元族，群乘法律简单地呈现为

$$U\left(\lambda_1\right)U\left(\lambda_2\right) = U\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \tag{18}$$

但是，如果我们把由两组生成元不同线性组合生成的群元乘起来时，事情就不简单了。通常

$$e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} \neq e^{i\sum_a (\alpha_a+\beta_a) X_a} \tag{19}$$

另一方面，因为指数参数化构成了一个群表示（至少在靠近单位元时），两个指数形式的群元乘积一定是生成元的某个 δ 方向线性组合生成的指数形式，

$$e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} = e^{i\sum_a \delta_a X_a} \tag{20}$$

由光滑性，我们可以在等式两边做展开，比较 α 和 β 的适当幂次来得到 δ_a 。

$$\begin{aligned}\left[\sum_a \alpha_a X_a, \sum_b \beta_b X_b\right] &== -2i\sum_c \left(\delta_c - \alpha_c - \beta_c\right) X_c + \cdots \equiv i\sum_c \gamma_c X_c \\ &= \sum_{a,b} \alpha_a \beta_b \left[X_a, X_b\right]\end{aligned} \tag{21}$$

这里 i 是为了使所有参数为实，省略号 $\cdots$ 表示含有多于两个 α 或 β 因子的项。由于这个式子对于所有的 α 和 β 的值都应成立，我们就必须有

$$\gamma_c = \sum_{a,b} \alpha_a \beta_b f_{abc} \tag{22}$$

f_{abc} 为某些常数，可以写出公式

$$\delta_a = \alpha_a + \beta_a - \frac{1}{2}\gamma_a + \cdots \tag{23}$$

因而如果 γ 和其它高阶项消失，我们就可以将关系 $e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} \neq e^{i\sum_a (\alpha_a+\beta_a) X_a}$ 恢复为等式。这样做的时候，我们发现仅当生成元在对易关系下构成一个代数 $\mathfrak{g}$（或者对易子的代数）时 δ_a 才有解。

$$\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c \tag{24}$$

因为 $\left[A, B\right] = -\left[B, A\right]$，满足

$$f_{abc} = -f_{bac} \tag{25}$$

$\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ **即意味着生成元在对易关系下构成代数的断言。**由于李群元素光滑地依赖群参数，对易关系在代数中对易子扮演了类似群乘法的角色。

从 $\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ 易得 $\left[iX_a, iX_b\right] = -\sum_c f_{abc} iX_c$，所以 $Span\left\{iX_a\right\}$ 的确在对易子关系下构成了 $\mathbb{R}$ 上的代数。

继续展开 $i\sum_a \delta_a X_a = \ln\left(1+e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} - 1\right)$ 超过2阶，看起来也许会需要附加条件来使群乘法律得以保持，**但事实上并不需要附加条件，对易关系** $\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ **就足够了。**事实上一旦 f_{abc} 已知，就可以对于原点某个有限邻域中的任意 α 和 β 重建 δ 到想要的任意精确度。因而 f_{abc} 极其重要，它们蕴含了整个群的乘法规律， f_{abc} 称为群的结构常数，**它们可以借助群的任意非平庸表示计算出来，也就是除了所有** X_a **为零的情形。**

空间 $\mathfrak{g}$ **连同对易关系** $\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ **称为群的李代数**，李代数完全由结构常数确定。**群的每个表示显然也给出其李代数的表示，由于结构常数是由群乘法和光滑性所确定，所以对所有的表示，结构常数都是同一组数。表示的等价性，可约性，不可约性这些概念可以直接不加改变地从群移植到代数。**

注意到如果群具有任何幺正表示，结构常数 f_{abc} 就是实的，因为如果取厄米生成元 X_a 对易关系的厄米共轭，得到

$$\left[X_a, X_b\right]^\dagger = -i\sum_c f^*_{abc} X_c = \left[X_b, X_a\right] = i\sum_c f_{bac} X_c = -i\sum_c f_{abc} X_c \tag{26}$$

由于我们专注于研究具有幺正表示的群，所以就假定 f_{abc} 为实。

在表示 D 中 $e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} = e^{i\sum_a \delta_a X_a}$ 给出 $\delta = \delta(\alpha, \beta)$ ，但需要注意的是，由于表示 D 保持李群的乘法运算，所以这两个关系并不依赖于表示 D ，一旦在 D 中成立，则在该李群的任意表示都成立。同样地，在表示 D 中，我们已表明 $e^{i\sum_a \alpha_a X_a} e^{i\sum_b \beta_b X_b} = e^{i\sum_a \delta_a X_a}$ 或者 $\delta = \delta(\alpha, \beta)$ 与李代数对易关系 $\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ 是等价的，所以在该李群的任意表示中，对于同样的参数化，相应生成元的对易关系是与表示无关的，亦即 f_{abc} 是一组与具体表示无关，仅由李群确定的一组数。对表示 D ， $X_a = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$ 也是表示 D 表示空间上的线性算子，这些线性算子构成李代数，其结构常数仅由李群确定。我们因而可以这样定义李代数的表示：李代数到线性空间上线性算子集合的映射，该映射保持李代数对易关系。

由前面的讨论知道李群的任意表示由关系 $X_a = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$ 就诱导了李代数的一个表示，反过来李代数的任意表示也可以通过指数映射 $D(\alpha) = e^{i\sum_a \alpha_a X_a}$ 诱导李群的表示。

如果李群的表示 D 是可约的，即其表示空间 V 有非平庸不变子空间 W，即 $\forall w \in W$，$D(\alpha) w \in W, \forall \alpha$ ，则 $X_a w = -i\frac{\partial}{\partial \alpha_a} D(\alpha)\Big|_{\alpha=0} w \in W$ ，所以 W 也是李代数表示空间的不变子空间，反之李代数的不变表示子空间也是相应李群的不变表示子空间。所以李群与其李代数表示的可约（不可约）性质完全相同，其表示空间的约化也完全相同，所以在讨论李群的表示约化性质时，只需要讨论李代数表示的约化性质即可。另外舒尔引理的结论完全可以用到李代数的表示。

2.3 雅克比恒等式

将对易子展开就可以证明矩阵生成元满足下面的恒等式：

$$\left[X_a,\left[X_b, X_c\right]\right]+\left[X_b,\left[X_c, X_a\right]\right]+\left[X_c,\left[X_a, X_b\right]\right]=0 \tag{27}$$

这称为**雅克比恒等式。**

雅克比恒等式可以写成更容易运用并具有启发性的形式：

$$\left[X_a,\left[X_b, X_c\right]\right]=\left[\left[X_a, X_b\right], X_c\right]+\left[X_b,\left[X_a, X_c\right]\right] \tag{28}$$

这可以看成对易子乘法规则的推广：

$$\left[X_a, X_b X_c\right]=\left[X_a, X_b\right] X_c + X_b\left[X_a, X_c\right] \tag{29}$$

对于只有有限维表示的李代数而言，雅克比恒等式很平庸。但值得注意的是在Lie更一般的处理中，雅克比恒等式即使在生成元乘积没有良好定义的情形下都是有道理的。任何具有双线性乘积的向量空间满足(27)和(28)就称为**李代数。**

2.4 伴随表示

代数有一个表示是由结构常数本身生成的，称为**伴随表示。**假如 $\left[X_a, X_b\right] = i\sum_c f_{abc} X_c$ ，

可以得到

$$\left[X_a,\left[X_b,X_c\right]\right]=i\sum_d f_{bcd}\left[X_a,X_d\right]=-\sum_{d,e} f_{bcd}f_{ade}X_e \tag{30}$$

由于 X_a 线性独立，雅克比恒等式(27)给出

$$\sum_d \left(f_{bcd}f_{ade}+f_{abd}f_{cde}+f_{cad}f_{bde}\right)=0 \tag{31}$$

定义一组矩阵 T_a

$$\left[T_a\right]_{cb}\equiv if_{abc} \tag{32}$$

则式(31)可以改写为

$$\left[\left[T_a\right],\left[T_b\right]\right]=i\sum_c f_{abc}\left[T_c\right] \tag{33}$$

因而结构常数本身构成代数的一个表示，称为**伴随表示。**

对于代数也可以定义正则表示。在李代数 $\mathfrak{g}=Span\left\{\left|X_1\right\rangle,\cdots,\left|X_N\right\rangle\right\}$ 上定义 $T_a\left|X_b\right\rangle=\sum_c \left|X_c\right\rangle\left[T_a\right]_{cb}$ ，所以这样定义的正则表示就是伴随表示。伴随表示的表示空间是李代数 $\mathfrak{g}$ 本身。

如同有限群一样，表示的维数为表示作用于其上的线性空间的维数，伴随表示的维数就是线性独立生成元的个数，也就是描述群元所需要的实参数个数。需要注意的是，由于 f_{abc} **是实的，生成元的伴随表示矩阵就是純虚的。**

在伴随表示生成元 $\left[T_a\right]_{cb}=if_{abc}$ 构成的线性空间上如果定义一个方便的标量积就可以将其转化为一个内积空间。取伴随表示的迹就可以

$$\left[B\right]_{ab}=Tr\left(T_aT_b\right) \tag{34}$$

$\left[B\right]$ 是对称矩阵，我们可以将它变成一个非常简单的正则形式。要改变它的形式，可以对 X_a 做线性变换，进而诱导出结构常数的线性变换。设

$$X_a\to X'_a=\sum_b L_{ba}X_b\,, \tag{35}$$

则

$$\begin{aligned}\left[X'_a, X'_b\right] &= \left[\sum_d L_{da}X_d, \sum_e L_{eb}X_e\right] = i\sum_{d,e,c} L_{da}L_{eb}f_{dec}X_c \\ &= i\sum_{d,e,g,h,c} L_{da}L_{eb}f_{\deg}X_c L_{ch}L^{-1}_{hg} = i\sum_{d,e,g,c} L_{da}L_{eb}f_{\deg}L^{-1}_{cg}X'_c\end{aligned} \text{。} \tag{36}$$

因而

$$f_{abc} \to f'_{abc} = \sum_{d,e,g} L_{da}L_{eb}f_{\deg}L^{-1}_{cg} \tag{37}$$

如果用变换过的 f 来定义新的 T_a ，则

$$\left[T_a\right]_{cb} \to \left[T'_a\right]_{cb} = \sum_{d,e,g} L_{da}L^{-1}_{cg}\left[T_d\right]_{ge}L_{eb} \tag{38}$$

或者

$$T_a \to T'_a = \sum_d L_{da}L^{-1}T_d L \text{。} \tag{39}$$

换言之，X_a 上的线性变换诱导了 T_a 上不仅是相似变换而且还有关于标示生成元指标 a 的同一线性变换， 由于相似变换不改变迹，所以

$$\left[B\right]_{ab} = Tr\left(T_a T_b\right) \to \left[B'\right]_{ab} = Tr\left(T'_a T'_b\right) = \sum_{c,d} L_{ca}L_{db}Tr\left(T_c T_d\right) = \sum_{c,d} L_{ca}L_{db}\left[B\right]_{cd} \text{，} \tag{40}$$

即

$$\left[B\right] \to \left[B'\right] = \left[L\right]^T\left[B\right]\left[L\right] \tag{41}$$

因而可以选择合适的 L（这里只需要用正交矩阵）来将迹对角化，设已经做好了对角化（将撇号也去掉），则

$$Tr\left(T_a T_b\right) = k^a\delta_{ab} \tag{42}$$

还有自由度对生成元做重标度（做一个对角的 L 变换），比如，可以使所有的非零 k^a 其绝对值为1，但是 k^a 的符号无法改变（因为 L 在变换中相乘地出现 $Tr\left(T_a T_b\right) \to Tr\left(T'_a T'_b\right) = \sum_{c,d} L_{ca}L_{db}Tr\left(T_c T_d\right)$）。

如果 k^a 都是正的，该代数就称为**紧致李代数**，后面会简要讨论一下某些 k^a 为零的代数。取

$$Tr\left(T_a T_b\right) = \lambda\delta_{ab} \text{，} \tag{43}$$

λ 为正。在这组基中，结构常数完全反对称，因为

$$\begin{aligned} &-i\lambda^{-1}Tr\left(\left[T_a,T_b\right]T_c\right)=-i\lambda^{-1}Tr\left(i\sum_{c'}\ f_{abc'}T_{c'}T_c\right)=\sum_{c'}\ f_{abc'}\lambda^{-1}Tr\left(T_{c'}T_c\right) \\ &=\sum_{c'}\ f_{abc'}\delta_{cc'}=f_{abc} \end{aligned} \tag{44}$$

其完全反对称是因为迹的循环性质

$$Tr\left(\left[T_a,T_b\right]T_c\right)=Tr\left(T_aT_bT_c-T_bT_aT_c\right)=Tr\left(T_bT_cT_a-T_cT_bT_a\right)=Tr\left(\left[T_b,T_c\right]T_a\right), \tag{45}$$

这就给出

$$f_{abc}=f_{bca} \tag{46}$$

结合 $f_{abc}=-f_{bac}$ 和 $f_{abc}=f_{bca}$ 就得出了 f_{abc} 的完全反对称性，

$$f_{abc}=f_{bca}=f_{cab}=-f_{bac}=-f_{acb}=-f_{cba} \text{ 。} \tag{47}$$

在这组基中，伴随表示是幺正的，因为 T_a 为虚且反对称因而厄米。

2.5 单纯李代数与单纯李群

与代数的任意生成元对易子都落入自身的生成元集合构成不变子代数，即若 X 是不变子代数的任意生成元，Y 是整个代数的任意生成元，则 $\left[Y,X\right]$ 是不变子代数的生成元。指数化不变子代数的生成元就生成一个不变子群，这点可以通过下式看出来

$$h=e^{iX},\ g=e^{iY},\ g^{-1}hg=e^{iX'} \tag{48}$$

其中

$$X'=e^{-iY}Xe^{iY}=X-i\left[Y,X\right]-\frac{1}{2}\left[Y,\left[Y,X\right]\right]+\cdots \tag{49}$$

有简单的方法可以得到上式，考虑

$$X'\left(\varepsilon\right)=e^{-i\varepsilon Y}Xe^{i\varepsilon Y} \tag{50}$$

对 ε 做泰勒展开并取 $\varepsilon=1$ ，每求一次导数都会带来一个新的对易子，结果是 X' 中的每一项都在子代数中，因而 $e^{iX'}$ 就在子群里，因而是不变的。

整个代数自身和零维代数$\{0\}$ 是平庸不变子代数，**没有不变子代数的代数称为单纯李代数，单纯李代数生成单纯李群。**

单纯李代数满足$Tr\left(T_aT_b\right)=\lambda\delta_{ab}$的伴随表示是不可约的，因为假定可约的话，就存在伴随表示的不变子空间，但伴随表示的态对应着生成元，这就意味着可以找到一组基，不变子空间由生成元的某个子集张成，对于$r=1,\cdots,K$ 将生成元记为T_r，其余的$x=K+1,\cdots,N$ 生成元记为T_x ，由于T_r 张成一个不变子空间，一定有

$$\left[T_a\right]=\begin{pmatrix}\left[T_a\right]_{rr} & \left[T_a\right]_{rx}\\ 0 & \left[T_a\right]_{xx}\end{pmatrix}, \tag{51}$$

因而对于所有的a,x 和r 有

$$\left[T_a\right]_{xr}=if_{arx}=0 \tag{52}$$

由于结构常数的完全反对称性，这意味着 f 的所有有两个r 一个x 或者两个x 一个r 的分量全部为零。这也意味着非零的结构常数下标要么是三个r 或者三个x ，因而代数就分成了两个非平庸的不变子代数，意即不是单纯的。因而单纯李代数满足$Tr\left(T_aT_b\right)=\lambda\delta_{ab}$的伴随表示一定是不可约的。

与群的所有生成元对易， 由单一生成元构成的阿贝尔不变子代数是很特殊的。记这个阿贝尔不变子代数生成元为X_0， 其余生成元为$X_1,\cdots,X_N$，则$\forall a=1,\cdots,N$，$\left[X_0,X_a\right]=0$。$e^{i\alpha X_0}$幺正则X_0为厄米，李代数$Span\left\{X_0\right\}$的表示总是可以对角化，所以，其不可约表示都是一维的，其生成的李群$\left\{e^{i\alpha X_0}\right\}$幺正不可约表示也都是一维的，所以对应着相位变换，称为$U\left(1\right)$群。称这个阿贝尔不变子代数$Span\left\{X_0\right\}$为群的$U\left(1\right)$ 因子， 它在结构常数中没有任何表现。这样的阿贝尔不变子代数对应着生成元空间中在$Tr\left(T_aT_b\right)=k^a\delta_{ab}$ 里的$k^a=0$ 的那些方向。如果X_a 是一个$U\left(1\right)$生成元，则对于所有的b 和c， $f_{abc}=0$，这也意味着相应的k^a 为零，所以迹内积在空间上给不出模。结构常数没有告诉我们任何关于$U\left(1\right)$子代数的信息。

没有阿贝尔不变子代数的李代数称为**半单李代数**，他们是单纯李代数的直和。半单李代数所谓每一生成元都会与某个别的生成元有非零的对易子。由于结构常数 $f_{abc}=-i\lambda^{-1}Tr\left(\left[T_a,T_b\right]T_c\right)$ 的轮换性质，这也意味着每一生成元都可表达为生成元对易子的线性组合。这时结构常数携带了大量李代数的信息， 利用它可以来确定李代数的结构和表示。从现在起，除非特别申明，我们只讨论半单李代数和幺正表示。

2.6 生成元对态与算子的作用

表示的生成元（如同由其生成的表示的元素一样）既可被看做算子亦可视为矩阵，就像在讨论有限群表示时所见到的

$$X_a\left|i\right\rangle=\sum_j\ \left|j\right\rangle\left\langle j\right|X_a\left|i\right\rangle=\sum_j\ \left|j\right\rangle\left[X_a\right]_{ji}. \tag{53}$$

基态形成行矩阵，线性算子对应的矩阵从右面作用。

$$X_a\left(\left|1\right\rangle,\cdots,\left|N\right\rangle\right)=\left(\left|1\right\rangle,\cdots,\left|N\right\rangle\right)\left[X_a\right]. \tag{54}$$

在表示作用的希尔伯特空间里，群元可被当作态上的变换，群元 $e^{i\sum_a\alpha_aX_a}$ 将ket态映射成为或者变换成为

$$\left|i\right\rangle\rightarrow\left|i'\right\rangle=e^{i\sum_a\alpha_aX_a}\left|i\right\rangle. \tag{55}$$

取其伴随（厄米共轭）得到相应的bra态的变换为

$$\left\langle i\right|\rightarrow\left\langle i'\right|=\left\langle i\right|e^{-i\sum_a\alpha_aX_a} \tag{56}$$

用算子 O 作用在 $\left|i\right\rangle$ 上得到的ket态是ket态的线性组合，因而也按(55)式变换，

$$O\left|i\right\rangle\rightarrow e^{i\sum_a\alpha_aX_a}O\left|i\right\rangle=e^{i\sum_a\alpha_aX_a}Oe^{-i\sum_a\alpha_aX_a}e^{i\sum_a\alpha_aX_a}\left|i\right\rangle=O'\left|i'\right\rangle \tag{57}$$

这意味着任意算子在群元作用下变换为

$$O\rightarrow O'=e^{i\sum_a\alpha_aX_a}Oe^{-i\sum_a\alpha_aX_a}. \tag{58}$$

该变换不改变所有的矩阵元。

代数在这些对象上的作用与在无穷小变换下态和算子的改变相联系。

$$
\begin{aligned}
-i\delta|i\rangle &= -i\left(\left(1+i\sum_a \alpha_a X_a\right)|i\rangle - |i\rangle\right) = \sum_a \alpha_a X_a |i\rangle \\
-i\delta\langle i| &= -i\left(\langle i|\left(1-i\sum_a \alpha_a X_a\right) - \langle i|\right) = -\langle i|\sum_a \alpha_a X_a \\
-i\delta O &= -i\left(\left(1+i\sum_a \alpha_a X_a\right) O \left(1-i\sum_a \alpha_a X_a\right) - O\right) = \left[\sum_a \alpha_a X_a, O\right]。
\end{aligned}
\tag{59}
$$

因而相应于生成元 X_a 对ket态的作用

$$
X_a|i\rangle \tag{60}
$$

的是 $-X_a$ 作用在bra态上

$$
-\langle i|X_a \tag{61}
$$

和 X_a 与算子的对易子作为对算子的作用

$$
[X_a, O] \tag{62}
$$

矩阵元 $\langle i|O|j\rangle$ 的不变性就表达为

$$
\langle i|O(X_a|j\rangle) + \langle i|[X_a, O]|j\rangle - (\langle i|X_a)O|j\rangle = 0 \quad 。 \tag{63}
$$

2.7 指数算符的有趣公式

X_a 是一个矩阵表示，考虑指数算符

$$
e^{i\sum_a \alpha_a X_a} \quad , \tag{64}
$$

总可以把指数定义为幂级数

$$
e^{i\sum_a \alpha_a X_a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\sum_a \alpha_a X_a\right)^n}{n!} \quad 。 \tag{65}
$$

指数算符的微积分也会更加复杂。特别是

$$
\frac{\partial}{\partial \alpha_b} e^{i\sum_a \alpha_a X_a} \neq i X_b e^{i\sum_a \alpha_a X_a} \quad 。 \tag{66}
$$

下式却是成立的

$$\frac{d}{ds}e^{is\sum_a \alpha_a X_a} = i\sum_b \alpha_b X_b e^{is\sum_a \alpha_a X_a} = ie^{is\sum_a \alpha_a X_a}\sum_b \alpha_b X_b \tag{67}$$

因为$\sum_a \alpha_a X_a$ 与其自身对易。下式也对

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b}e^{i\sum_a \alpha_a X_a}\Big|_{\alpha=0} = iX_b \tag{68}$$

这可以从展开式直接得到。

还有一个一般的关于导数的优美公式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_b}e^{i\sum_a \alpha_a X_a} = \int_0^1 ds e^{is\sum_a \alpha_a X_a}\left(iX_b\right)e^{i(1-s)\sum_c \alpha_c X_c} \tag{69}$$

这个关系很不寻常但容易记忆，积分只是表达了导数可以作用于指数表达式内的任何位置，因而结果是导数可能作用的所有位置的平均。.导出该式方法之一是定义指数表达式为极限

$$e^{i\sum_a \alpha_a X_a} = \lim_{k\to\infty}\left(1+i\sum_a \alpha_a X_a \Big/ k\right)^k \tag{70}$$

然后两边取微分，将积分定义为求和的极限，结果就可以作为练习得到。另一方法是将(69)两边展开，然后利用著名的积分公式

$$\int_0^1 ds s^m\left(1-s\right)^n = \frac{m!n!}{\left(m+n+1\right)!} \quad 。 \tag{71}$$

另一个关于指数算符的有用公式是

$$\det\left(e^X\right) = e^{TrX} \quad 。 \tag{72}$$

2.8 李群举例

1.一般线性群

n 是任一正整数，所有$n\times n$可逆实矩阵构成的集合在矩阵乘法下构成群，称为 $\mathbb{R}$ 上的一般线性群 $GL\left(n,\mathbb{R}\right)$。该群对于 $n\geq 2$ 是非阿贝尔群，如果取其矩阵元为实参数，则 $GL\left(n,\mathbb{R}\right)$ 光滑地依赖 n^2 个实连续参数。

$\mathbb{C}$ 上的一般线性群 $GL(n,\mathbb{C})$ 是所有 $n\times n$ 可逆复矩阵的集合在矩阵乘法下构成的群，群元光滑地依赖 $2n^2$ 个实连续参数。

对任意 $n\times n$ 复矩阵 X ， $e^{i\alpha X}$ 都是可逆的。所以 $GL(n,\mathbb{C})$ 的李代数是所有 $n\times n$ 复矩阵构成的线性空间，记为 $gl(n,\mathbb{C})$。如果X是任意 $n\times n$ 纯虚矩阵，则 $e^{i\alpha X}$ 为实可逆矩阵。另一方面，如果 $D(\alpha)$ 对所有 α 为实，则 $X=-i\dfrac{d}{d\alpha}D(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$ 为**纯虚矩阵**。所以 $GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数是所有 $n\times n$ 纯虚数矩阵构成的线性空间，记为 $gl(n,\mathbb{R})$。

注意到上述讨论表明**若 G 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子群，则 G 的李代数必为纯虚矩阵构成。**

2. 特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R})$ 和 $SL(n,\mathbb{C})$

（$\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的）特殊线性群是指行列式为1的 $n\times n$ 可逆矩阵（矩阵元为实数或者复数）构成的群，分别光滑地依赖于 n^2-1 或 $2n^2-2$ 个实参数，都是 $GL(n,\mathbb{C})$ 的子群。

由于 $\det\left(e^{X}\right)=e^{TrX}$，如果 $TrX=0$，则对于所有的实 α 有 $\det\left(e^{i\alpha X}\right)=1$。反过来如果 X 任意 $n\times n$ 矩阵对于所有的实 α 满足 $\det\left(e^{i\alpha X}\right)=1$，则对于所有的实 α，有 $e^{i\alpha TrX}=1$，也就是 $i\alpha TrX$ 对于所有的实 α 是 $2\pi i$ 的整数倍，这只有 $TrX=0$ 才能成立。所以 $SL(n,\mathbb{C})$ 的李代数是所有迹为零的 $n\times n$ 复矩阵构成的空间，记为 $sl(n,\mathbb{C})$。类似地，$SL(n,\mathbb{R})$ 的李代数是所有 $n\times n$ 纯虚零迹矩阵构成的空间，记为 $sl(n,\mathbb{R})$。

3.正交群 $O(n)$ 和特殊正交群 $SO(n)$

$n\times n$ 实矩阵 A 称为正交如果 $A^TA=I$，即 $A^T=A^{-1}$。 A 正交与 A 保持 $\mathbb{R}^n$ 内积等价，即对所有 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 有 $\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle=\sum_i x_iy_i$。

由 $\det A^T=\det A$，若 A 正交则 $\det\left(A^TA\right)=(\det A)^2=\det I=1$，因而 $\det A=\pm1$。所以正交矩阵可逆，如果 A 正交，则

$$\left\langle A^{-1}x,A^{-1}y\right\rangle=\left\langle A\left(A^{-1}x\right),A\left(A^{-1}y\right)\right\rangle=\langle x,y\rangle$$

即正交矩阵的逆也是正交矩阵。所有 $n\times n$ 实正交矩阵构成正交群 $O(n)$，是 $GL(n,\mathbb{R})$

的子群。所有$n\times n$行列式为1的实正交矩阵构成特殊正交群$SO(n)$。

$SO(n)$是$O(n)$的子群。如果$g(\alpha)\in SO(n)$位于单位元的邻域内，该群元也位于$O(n)$的单位元邻域内。 所以$O(n)$的李代数与$SO(n)$的李代数是同一李代数。 任给一$n\times n$实矩阵X ，$e^{i\alpha X}$ 为正交当且仅当 $\left(e^{i\alpha X}\right)^{T}=\left(e^{i\alpha X}\right)^{-1}$即 $e^{i\alpha X^{T}}=e^{-i\alpha X}$ 。 若对所有实α都有$e^{i\alpha X^{T}}=e^{-i\alpha X}$ 成立，在α=0处微分一定可得 $X^{T}=-X$ 。

$O(n)$连同$SO(n)$的李代数是所有满足 $X^{T}=-X$ 的$n\times n$纯虚矩阵*X*构成的空间，记为$so(n)$。条件 $X^{T}=-X$ 使 X 的对角元为零，迹当然也为零。

4. The complex orthogonal groups（复正交群） $O(n,\mathbb{C})$ and $SO(n,\mathbb{C})$

保持双线性形式$\langle x,y\rangle=\sum_i x_i y_i$不变的*n*×*n*复矩阵*A*的集合构成复正交群$O(n,\mathbb{C})$，即$\langle Ax,Ay\rangle=\langle x,y\rangle=\sum_i x_i y_i,\ \forall x,y\in\mathbb{C}^n$，它是$GL(n,\mathbb{C})$的子群。需要注意的是双线性形式$\langle x,y\rangle=\sum_i x_i y_i$并不是$\mathbb{C}^n$的内积。证明$O(n,\mathbb{C})$为群与证明$O(n)$为群是类似的，易证$A\in O(n,\mathbb{C})$的充要条件是$A^{T}A=I$，并且$\det A=\pm 1,\ \forall A\in O(n,\mathbb{C})$。 群$SO(n,\mathbb{C})$是$O(n,\mathbb{C})$中$\det A=1$的所有*A*构成的子群。

与正交群同样的讨论可知$SO(n,\mathbb{C})$的李代数是所有满足 $X^{T}=-X$ 的$n\times n$复矩阵构成的空间，记为$so(n,\mathbb{C})$。

5.幺正和特殊幺正群，$U(n)$ and $SU(n)$.

保持$\mathbb{C}^n$中内积的$n\times n$复矩阵U称为幺正，即$\langle Ux|Uy\rangle=\langle x|y\rangle=\sum_i x_i^{*}y_i,\forall x,y\in\mathbb{C}^n$。$U$为幺正的充要条件是$U^{\dagger}U=I$，即$U^{\dagger}=U^{-1}$。

由于$\det U^{\dagger}=(\det U)^{*}$，若$U$为幺正，则$\det(U^{\dagger}U)=|\det U|^{2}=1$，因而对所有幺正矩阵$U$，都有$|\det U|=1$，所以幺正矩阵$U$也是可逆的。与正交矩阵相同的讨论给出$n\times n$ 幺正矩阵的集合构成群，称为幺正群$U(n)$。行列式为1的幺正矩阵构成特别幺正群$SU(n)$。注意到幺正矩阵的行列式$e^{i\theta}$可以是任意θ，所以相对于$SO(n)$作为$O(n)$的子集，$SU(n)$

是$U(n)$小一些的子集：$SO(n)$与$O(n)$的维数相同，而$SU(n)$比$U(n)$小一维。

$e^{i\alpha X}$ 为幺正的充要条件是 $\left(e^{i\alpha X}\right)^{\dagger}=\left(e^{i\alpha X}\right)^{-1}=e^{-i\alpha X}$ ，而 $\left(e^{i\alpha X}\right)^{\dagger}=e^{-i\alpha X^{\dagger}}$ ，所以 $e^{-i\alpha X^{\dagger}}=e^{-i\alpha X}$,即 $X^{\dagger}=X$ 。因而$U(n)$的李代数是所有$n\times n$满足 $X^{\dagger}=X$ 的复矩阵 X 构成的空间，记为$u(n)$。

$e^{i\alpha X}$ 行列式为一的条件是$TrX=0$，所以$SU(n)$的李代数是所有满足 $X^{\dagger}=X$ 并且 $TrX=0$ 的$n\times n$复矩阵 X 构成的空间，记为$su(n)$。

6. 广义正交群

设n 和k 是正整数，保持$\mathbb{R}^{n+k}$中双线性形式

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{j=1}^{k}x_{n+j}y_{n+j},\ x,y\in\mathbb{R}^{n+k}$$

的$(n+k)\times(n+k)$实矩阵A的集合构成广义正交群$O(n,k)$，亦即 A 满足

$(Ax,Ay)=(x,y),\forall x,y\in\mathbb{R}^{n+k}$。

由于$O(n,k)$和$O(k,n)$ 是同一个群，我们只需考虑$n\geq k$的情形。

令g 标记头n个对角元为1，后k个对角元为-1的$(n+k)\times(n+k)$对角矩阵，即

$$g=\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{matrix}}^{n}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\underbrace{\begin{matrix}-1&&\\&\ddots&\\&&-1\end{matrix}}_{k}\end{pmatrix}$$

，则 $A\in O(n,k)$的充要条件是 $A^TgA=g$ ，或者由 $g^{-1}=g$ ，$gA^Tg=A^{-1}$。取行列式得$(\det A)^2=1$，即$\det A=\pm1$。

$O(n,k)$中$\det A=1$的A 构成的集合称为$SO(n,k)$群，也是$GL(n+k,\mathbb{R})$的子群。$O(3,1)$即为物理中特别有兴趣的洛伦兹群。

若 X 为 $(n+k)\times(n+k)$ 纯虚矩阵，则 $e^{i\alpha X}\in O(n,k)$ 的充要条件是 $ge^{i\alpha X^T}g=e^{-i\alpha X},\forall\alpha\in\mathbb{R}$，亦即 $gX^Tg=-X$ 。$O(n,k)$ 的李代数和 $SO(n,k)$ 的李代数相同，是所有 $(n+k)\times(n+k)$ 满足 $gX^Tg=-X$ 的纯虚矩阵X构成的空间，记为 $so(n,k)$。

习题：证明生成元 X_a 线性独立并且完备（对群元的任意一种保持单位元参数为零的参数化 $g(\beta)$，$Y_a=-i\frac{\partial}{\partial\beta_a}D(\beta)\Big|_{\beta=0}$ 则 $Y_a\in\mathfrak{g}$）。

习题：证明如果 $D(\alpha)$ 幺正则 X_a 为厄米算子。

习题：证明生成元构成实线性空间。

习题：论证 $[X_a,X_b]=i\sum_c f_{abc}X_c$。

习题：验证 $[X_a,[X_b,X_c]]=[[X_a,X_b],X_c]+[X_b,[X_a,X_c]]$。

习题：验证(31)。

习题：验证(33)。

习题：验证 $Tr(T_aT_b)$ 是伴随表示生成元表示矩阵 $[T_a]_{cb}=if_{abc}$ 生成的向量空间上的内积。

习题：证明可选择正交矩阵 L 使得 $Tr(T_aT_b)=k^a\delta_{ab}$。

习题：设 $h=e^{iX}$，$g=e^{iY}$，$g^{-1}hg=e^{iX'}$，证明

$X'=e^{-iY}Xe^{iY}=X-i[Y,X]-\frac{1}{2}[Y,[Y,X]]+\cdots$。

习题：证明半单李代数是单纯李代数的直和。（提示：证明伴随表示是李代数的厄米表示，如果可约，则必完全可约）

习题：证明半单李代数的任一生成元可表成生成元对易子的线性组合。（提示：对单

纯李代数证明结论就足够了，设能表成 $\sum_{i,j} c_{ij}\left[T_i,T_j\right]$ 形式的生成元空间为 $\mathfrak{h}$ ，显然，$\mathfrak{h}\supseteq\left[\mathfrak{g},\mathfrak{g}\right]$ ，则 $\left[\mathfrak{g},\mathfrak{h}\right]\subset\mathfrak{h}$ ，所以 $\mathfrak{h}$ 为不变子代数。显然 $\mathfrak{h}\neq\{0\}$，所以 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}$ 。）

习题：证明 $\frac{\partial}{\partial\alpha_b}e^{i\sum_a \alpha_a X_a}=\int_0^1 ds e^{is\sum_a \alpha_a X_a}\left(iX_b\right)e^{i(1-s)\sum_c \alpha_c X_c}$ 。

习题：证明对任意 $n\times n$ 矩阵 X ， $\det\left(e^X\right)=e^{TrX}$ 。

习题：证明 $GL\left(n,\mathbb{R}\right)$ 和 $GL\left(n,\mathbb{C}\right)$ 构成群。

习题：证明 $SL\left(n,\mathbb{R}\right)$ 和 $SL\left(n,\mathbb{C}\right)$ 构成群。

习题： $O\left(n\right)$ 和 $SO\left(n\right)$ 构成群。

习题：群 $O\left(2\right)$ 和 $SO\left(2\right)$ 。

证明矩阵

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

是 $SO\left(2\right)$ 元素，并且

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\phi\right) & -\sin\left(\theta+\phi\right)\\ \sin\left(\theta+\phi\right) & \cos\left(\theta+\phi\right)\end{pmatrix}$$

证明 $O\left(2\right)$ 的元素具有两种形式

$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 或者 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$。

习题： $U\left(n\right)$ 和 $SU\left(n\right)$ 构成群。

习题：群 $SU\left(2\right)$ 。若复数 α,β 满足 $\left|\alpha\right|^2+\left|\beta\right|^2=1$ ，则

$$A=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta^*\\ \beta & \alpha^*\end{pmatrix}$$

是 $SU\left(2\right)$ 元素。 $SU\left(2\right)$ 元素也一定能唯一地表达成这种形式。

习题：群 $O\left(1,1\right)$ 和 $SO\left(1,1\right)$ 。证明

$$A=\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}$$

是$SO(1,1)$的元素，并且

$$\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh s & \sinh s\\ \sinh s & \cosh s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh(t+s) & \sinh(t+s)\\ \sinh(t+s) & \cosh(t+s)\end{pmatrix}$$

证明$O(1,1)$的元素具有下列四种形式之一

$$\begin{pmatrix}\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\cosh t & \sinh t\\ \sinh t & -\cosh t\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\cosh t & -\sinh t\\ \sinh t & -\cosh t\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}-\cosh t & -\sinh t\\ \sinh t & \cosh t\end{pmatrix}$$

第三章 $SO(3)$，$SU(2)$ 以及洛伦兹群$O(3,1)$

3.1 $SO(3)$ 群的共轭类

三维空间中的刚体做定点转动时，刚体的运动完全被嵌在刚体上的任意一个三角形的运动所确定，所以刚体运动过程中，刚体上任意两点的距离和任意两条直线的夹角都不变，以$\vec{u}$ 和$\vec{v}$ 标记刚体上的任意两个向量，则在任意转动R 作用下，有

$$\left(R\vec{u},R\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right) \text{ 。} \tag{1}$$

因而

$$R^TR=I \tag{2}$$

转动变换首先是正交变换，又由于任何转动变换连续依赖转动角度即$R=R\left(\theta\right)$ ，当转角为无穷小时，转动变换接近单位变换，即

$$\lim_{\theta\to0}R\left(\theta\right)=I \text{ ，} \tag{3}$$

所以转动变换为特殊正交变换，转动变换的全体构成$SO\left(3\right)$ 群。设$R\in SO\left(3\right)$，则

$$\det R=\det R^T=1 \text{ ，} \tag{4}$$

因而

$$\det\left(I-R\right)=\det R\det\left(I-R\right)=\det\left(R^T-R^TR\right)=-\det\left(I-R\right) \text{ ，} \tag{5}$$

所以

$$\det\left(I-R\right)=0 \text{ ，} \tag{6}$$

即R 至少有一个本征值为1，相应本征向量设为$\vec{n}$ ，则

$$R\vec{n}=\vec{n} \text{ 。} \tag{7}$$

$\vec{n}$ 在R 的作用下不变，即R 必为绕该向量方向转轴的转动，记为R_θ^n， θ为转角。

取正交归一基$\left\{e_1,e_2,e_3\right\}$，考虑一个绕$e_3$ 轴的任意转动$R_\theta^{e_3}$，易写出其矩阵形式为

$$\left[R_\theta^{e_3}\right]=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ , \tag{8}$$

可得

$$TrR_\theta^{e_3}=1+2\cos\theta\ , \tag{9}$$

即$TrR_\theta^{e_3}$ 仅与转角θ 有关。

在正交归一基$\{e_1,e_2,e_3\}$上考虑绕$\vec{n}$ 轴的转动R_θ^n 。设$O\in SO(3)$，使得$Oe_3=n$，的矩阵为$[O]$，即$O(e_1,e_2,e_3)=(e_1,e_2,e_3)[O]$，则

$$\begin{aligned}&OR_\theta^{e_3}O^{-1}(Oe_1,Oe_2,Oe_3)=OR_\theta^{e_3}(e_1,e_2,e_3)=O(e_1,e_2,e_3)\left[R_\theta^{e_3}\right]\\&=(Oe_1,Oe_2,Oe_3)\left[R_\theta^{e_3}\right]\end{aligned}\ 。 \tag{10}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&OR_\theta^{e_3}O^{-1}(e_1,e_2,e_3)=OR_\theta^{e_3}(e_1,e_2,e_3)[O]^{-1}=O(e_1,e_2,e_3)[R][O]^{-1}\\&=(e_1,e_2,e_3)[O][R][O]^{-1}\end{aligned} \tag{11}$$

，所以特殊正交变换$OR_\theta^{e_3}O^{-1}\in SO(3)$在正交归一基$\{e_1,e_2,e_3\}$上的矩阵为$[O][R][O]^{-1}$，在正交归一基$\{Oe_1,Oe_2,Oe_3=n\}$上的矩阵为$\left[R_\theta^{e_3}\right]$，由于

$$\left(OR_\theta^{e_3}O^{-1}\right)n=OR_\theta^{e_3}e_3=Oe_3=n\ , \tag{12}$$

故n 为$OR_\theta^{e_3}O^{-1}$的转轴，又由于

$$TrOR_\theta^{e_3}O^{-1}=TrR_\theta^{e_3}=1+2\cos\theta\ , \tag{13}$$

故

$$OR_\theta^{e_3}O^{-1}=R_\theta^n\ 。 \tag{14}$$

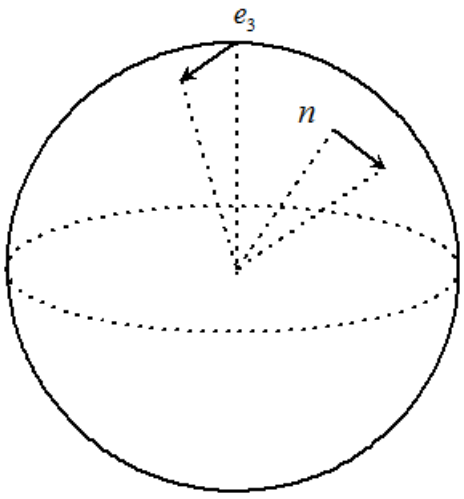
结论：$SO(3)$ 群的共轭类是由转角相同的转动变换构成的。

3.2 $SO(3)$ 群元的欧拉角描述

转动变换完全由一个三角形在该转动变换作用下如何变换所确定，取单位元上的e_3点和过e_3点的单位圆的切线与圆心构成的任一直角三角形，确定该直角三角形在转动变换下如何变换，

只需确定 e_3 点被转到哪一点以及所选切线方向如何变换。

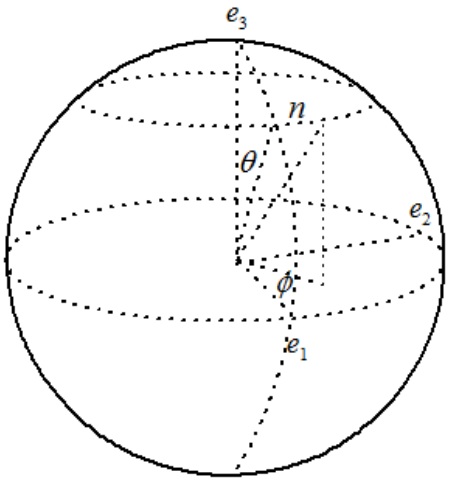
图 1 $SO(3)$ 群元示意.



如图 1 $SO(3)$ 群元示意.，对任意转动变换 R ，设其将 e_3 转到 n ，即 $Re_3 = n$。另一转动 O 也将 e_3 转到 n ，但并不一定将所选切线方向转到 R 所转到的方向，$Oe_3 = Re_3 = n$，则 $RO^{-1}n = Re_3 = n$， RO^{-1} 的转轴为 n ，设其转角为 ψ ，即 $TrRO^{-1} = 1 + 2\cos\psi$，则由(14)，

$$RO^{-1} = R_\psi^n = OR_\psi^{e_3}O^{-1} \quad 。 \tag{15}$$

图 2 方位角示意图



如图 2 方位角，设 n 的方位角为 (θ, ϕ)，则 $R_\phi^{e_3}R_\theta^{e_2}e_3 = n$，可取 $O = R_\phi^{e_3}R_\theta^{e_2}$，则

$$R = OR_\psi^{e_3} = R_\phi^{e_3}R_\theta^{e_2}R_\psi^{e_3} \tag{16}$$

，这就是 $SO(3)$ 元素 R 的**欧拉角参数化**，(θ, ϕ, ψ) 三个角称为 R 的**欧拉角**，取值范围分别为 $0 \le \theta \le \pi$， $0 \le \phi < 2\pi$ 和 $0 \le \psi < 2\pi$ 。

3.3 $SL(2,\mathbb{C})$ 与洛伦兹群的同态

设四维实空间 $\mathbb{R}^4$ 具洛伦兹度量

$$\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \tag{17}$$

其中 $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$，记为 $M = \mathbb{R}^4$。M 即为取了光速为1单位制的通常狭义相对论闵可夫斯基空间。洛伦兹变换 B 为从 M 到其自身保持洛伦兹度量不变的线性变换，满足

$$\|Bx\|^2 = \|x\|^2, \forall x \in M \tag{18}$$

L 为所有洛伦兹变换构成的群，称为洛伦兹群，在 $M = \mathbb{R}^4$ 上洛伦兹群的表示就是其自然表示，即洛伦兹变换，可在 M 内引入内积

$$x \cdot y \equiv x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3, \forall x, y \in M = \mathbb{R}^4 \tag{19}$$

，则 $\|x\|^2 = x \cdot x$。由 $\|Bx\|^2 = \|x\|^2$，可得 $\|B(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2, \forall x, y$，展开化简得 $Bx \cdot By = x \cdot y, \forall x, y \in M$，即洛伦兹变换保持闵氏时空洛伦兹内积不变，所以洛伦兹群 $L = O(3,1)$ 。

在群 $SL(2,\mathbb{C})$ 与洛伦兹群 L 之间存在一个同态，为描述这个同态，先构造 $SL(2,\mathbb{C})$ 的一个四维表示。考虑一般的 2×2 的厄米矩阵 X ， $X^\dagger = X$ ，取 $x_0 = \frac{1}{2} TrX$ 和 $x_3 = \frac{1}{2}(x_{11} - x_{22})$ ，总可以将其表达为

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} , \tag{20}$$

即

$$X = x_0 I_2 + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 , \tag{21}$$

其中

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\sigma^1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \sigma^2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \sigma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{22}$$

为四个2×2 线性独立厄米矩阵，$\sigma^i, i=1,2,3$ 为三个泡利矩阵，定义

$$\sigma^0\equiv I_2 \tag{23}$$

则

$$X=\sigma\cdot x \ 。 \tag{24}$$

所以2×2 厄米矩阵构成四维实线性空间$\mathbb{R}^4$ ，可以有同构映射η

$$X=\sigma\cdot x=\begin{pmatrix}x_0+x_3&x_1-ix_2\\x_1+ix_2&x_0-x_3\end{pmatrix}\overset{\eta}{\longmapsto}x=\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \tag{25}$$

即$x=\eta(X)$ 。

任意$A\in GL(2,\mathbb{C})$ 对X 作用可定义为

$$X\to AXA^\dagger \ , \tag{26}$$

显然$\left(AXA^\dagger\right)^\dagger=AXA^\dagger$ ，相应的在$\mathbb{R}^4$ 中对应有变换$\phi(A)$

$$\begin{array}{ccc}X&\xrightarrow{A}&AXA^\dagger\\\downarrow\eta&&\downarrow\eta\\x&\xrightarrow{\phi(A)}&\phi(A)x\end{array} \ 。 \tag{27}$$

由

$$ABX\,(AB)^\dagger=A\left(BXB^\dagger\right)A^\dagger \tag{28}$$

可得

$$\phi(AB)X=\phi(A)\phi(B)X \tag{29}$$

因而

$$\phi(AB)=\phi(A)\phi(B) \ , \tag{30}$$

这样$\phi(A)$ 就给出了$GL(2,\mathbb{C})$ 在$\mathbb{R}^4$ 上的一个实四维表示。由

$$\det X = \|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \ , \tag{31}$$

得到

$$\left\|\phi(A)x\right\|^2 = \det\left(AXA^\dagger\right) = \left|\det A\right|^2 \det X = \left|\det A\right|^2 \|x\|^2 \ , \tag{32}$$

因而如果 $A \in SL(2,\mathbb{C})$ ，则

$$\left\|\phi(A)x\right\|^2 = \|x\|^2 \tag{33}$$

所以 $\phi(A)$ 是一个洛伦兹变换，即洛伦兹群的自然表示。

所以 $\phi : SL(2,\mathbb{C}) \to \phi\left(SL(2,\mathbb{C})\right) \subset L$ 是一个同态。需要注意的是 $\phi(-A) = \phi(A)$，所以 ϕ 不是一到一的映射而是二到一的映射。 A 和 $-A$ 对应同一洛伦兹变换，并且只有 A 和 $-A$ 对应该洛伦兹变换。为看出这点，注意到如果

$$\phi(A) = I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \tag{34}$$

则对任意厄米矩阵 $X = \sigma \cdot x$，有 $AXA^\dagger = X$ ，即

$$AXA^\dagger = x_0 AA^\dagger + \sum_{i=1}^{3} x_i A\sigma^i A^\dagger = x_0 I + \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma^i \tag{35}$$

对于任意 $x_\alpha, \alpha = 0,1,2,3$ 成立，因而 $AA^\dagger = I_2$ 并且 $\sigma^i A = A\sigma^i, i = 1,2,3$，可以证明 $A = \pm I_2$ [1]。如果 $\phi(A) = \phi(B)$，则 $\phi\left(A^{-1}B\right) = I_4$，因而 $B = \pm A$。

另一点需要注意的是 $\phi(A)$ 光滑地、连续地依赖 A 的参数。

---

[1]设 $A = (a_1, a_2)$ 则 $\sigma^3(a_1, a_2) = (a_1, a_2)\sigma^3 = (a_1, -a_2)$，即 $\sigma^3 a_1 = a_1, \sigma^3 a_2 = -a_2$，由于 $AA^\dagger = I_2$ 即 $a_i^\dagger a_j = \delta_{ij}$，可解出 $a_1 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\phi} \end{pmatrix}$。再由 $\sigma^1(a_1, a_2) = (a_1, a_2)\sigma^1 = (a_2, a_1)$ 得 $e^{i\theta} = e^{i\phi}$ 即 $A = e^{i\theta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。又由于 $A \in SL(2,\mathbb{C})$ 即 $\det A = 1$，得 $e^{2i\theta} = 1$，所以 $\theta = 0, \pi$ 即 $A = \pm I_2$。

设 A 属于 $SL(2,\mathbb{C})$ 子群 $SU(2)$ ，即 $AA^{\dagger}=I_2$ ，则

$$AI_2A^{\dagger}=I_2 \text{ 。} \tag{36}$$

I_2 对应类时4-矢量 e_0 ，

$$\mathrm{e}_0=\eta(I_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{37}$$

(36)意味着

$$\phi(A)\mathrm{e}_0=\mathrm{e}_0 \text{ 。} \tag{38}$$

如果一个洛伦兹变换 C 满足 $C\mathrm{e}_0=\mathrm{e}_0$ 则 C 也将由类空矢量

$$\begin{pmatrix}0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \tag{39}$$

构成的三维空间 $\mathrm{e}_0^{\perp}$ 变换成自身， C 是三维空间 $\mathrm{e}_0^{\perp}$ 上的正交变换。另一方面，

$O(3)$ 群可被看做由那些保持 $C\mathrm{e}_0=\mathrm{e}_0$ 的洛伦兹变换构成的群 L 的子群。

因而，映射 ϕ 限制在 $SU(2)$ 上时，将 $SU(2)$ 映射到 $O(3)$ 内，即

$$\phi:SU(2)\to\phi(SU(2))\subset O(3) \tag{40}$$

是一个同态。实际上 $\phi(A)$ 连续地依赖 $A\in SU(2)$ 的参数，所以 $\det\phi(A)$ 也是如此。因此 $\phi:SU(2)\to\phi(SU(2))\subset SO(3)$ 是同态。

例如，考虑对角 $SU(2)$ 矩阵

$$U_{\frac{\theta}{2}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\end{pmatrix} , \tag{41}$$

则

$$U_{\frac{\theta}{2}}\sigma\cdot xU_{-\frac{\theta}{2}}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}\end{pmatrix} \tag{42}$$
$$=\begin{pmatrix}x_0+x_3 & e^{-i\theta}\left(x_1-ix_2\right)\\ e^{i\theta}\left(x_1+ix_2\right) & x_0-x_3\end{pmatrix}=\sigma\cdot\left(\phi\left(U_\theta\right)x\right)$$

据此，可以读出$\phi\left(U_{\frac{\theta}{2}}\right)x$ 的形式，$\phi\left(U_{\frac{\theta}{2}}\right)$ 保持x_0 和x_3 不变因而是关于x_3 轴的一个转动，它将x_1+ix_2 变成

$$e^{i\theta}\left(x_1+ix_2\right)=x_1\cos\theta-x_2\sin\theta+i\left(x_1\sin\theta+x_2\cos\theta\right)\ , \tag{43}$$

这是x_1, x_2 平面上转角为θ 的转动。这样就表明$\phi\left(U_{\frac{\theta}{2}}\right)$ 是关于x_3 轴转θ 的转动

$$\phi\left(U_{\frac{\theta}{2}}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ 。 \tag{44}$$

需注意当$\frac{\theta}{2}$ 从0 到π 取值时，相应的转动转角从0 到2π 构成一个轮回，从0 到2π 取值时，相应的转动构成两个轮回，这正反映了$\phi\left(-A\right)=\phi\left(A\right)$ 的一个侧面。

类似地，考虑幺正矩阵

$$V_{\frac{\theta}{2}}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \tag{45}$$

的作用，注意到$V_{\frac{\theta}{2}}^{\dagger}=V_{-\frac{\theta}{2}}$ ，计算$\phi\left(V_{\frac{\theta}{2}}\right)x$可用矩阵乘法

$$V_{\frac{\theta}{2}}XV_{-\frac{\theta}{2}}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\ 。 \tag{46}$$
$$=\begin{pmatrix}x_0-x_1\sin\theta+x_3\cos\theta & x_1\cos\theta+x_3\sin\theta-ix_2\\ x_1\cos\theta+x_3\sin\theta+ix_2 & x_0+x_1\sin\theta-x_3\cos\theta\end{pmatrix}$$

据此，可以读出$\phi\left(V_{\frac{\theta}{2}}\right)x$ 的形式，$\phi\left(V_{\frac{\theta}{2}}\right)$ 保持x_0 和x_2 不变因而是关于x_2 轴的一个转动，它将x_1 变成$x_1\cos\theta+x_3\sin\theta$ ，将x_3 变成$-x_1\sin\theta+x_3\cos\theta$ ，因而是x_3, x_1 平面上关于x_2 轴转θ 的转动

$$\phi\left(V_{\frac{\theta}{2}}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}。 \tag{47}$$

作为第三个例子，考虑实对角矩阵

$$M_{\frac{\tau}{2}}=\begin{pmatrix}e^{\frac{\tau}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\tau}{2}}\end{pmatrix}, \tag{48}$$

显然$M_{\frac{\tau}{2}}=M_{\frac{\tau}{2}}^{\dagger}$ ，于是

$$\begin{aligned}M_{\frac{\tau}{2}}XM_{\frac{\tau}{2}}^{\dagger}&=\begin{pmatrix}e^{\frac{\tau}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\tau}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{\frac{\tau}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{\tau}{2}}\end{pmatrix}。\\ &=\begin{pmatrix}e^{\tau}\left(x_0+x_3\right) & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & e^{-\tau}\left(x_0-x_3\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{49}$$

因而洛伦兹变换$\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)$ 保持x_1 和x_2 不变并将x_0 和x_3 坐标变成

$$x_0'=x_0\cosh\tau+x_3\sinh\tau \tag{50}$$

和

$$x_3'=x_0\sinh\tau+x_3\cosh\tau 。 \tag{51}$$

沿z 方向以速度v 运动的Lorentz伪转动变换式为

$$x_1'=x_1, x_2'=x_2, x_0'=\gamma(x_0-vx_3/c^2), x_3'=\gamma(x_3-vx_0) \tag{52}$$

其中$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ 。记$\beta=v/c$ ，取$c=1$ 的自然单位，令$e^{\tau}=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ ，则$\cosh\tau=\gamma$ ，$\sinh\tau=-\gamma\beta$ ，洛伦兹boost变换式为

$$x_1'=x_1,x_2'=x_2,x_0'=\left(\cosh\tau\right)x_0+\left(\sinh\tau\right)x_3,\ \ x_3'=\left(\sinh\tau\right)x_0+\left(\cosh\tau\right)x_3 \tag{53}$$

该变换称为参数为 τ 的沿 z 方向洛伦兹伪转动，记为 L_τ^z 。

换言之 L_τ^z 是矩阵

$$L_\tau^z=\begin{pmatrix}\cosh\tau & 0 & 0 & \sinh\tau\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \sinh\tau & 0 & 0 & \cosh\tau\end{pmatrix} \tag{54}$$

给出的洛伦兹变换，即

$$\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)=L_\tau^z \tag{55}$$

总结一下，业已证明

$$\phi\left(U_{\frac{\theta}{2}}\right)=R_\theta^z,\phi\left(V_{\frac{\theta}{2}}\right)=R_\theta^y,\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)=L_\tau^z \ 。 \tag{56}$$

可得**结论：任意 $R\in SO(3)$，则由欧拉角参数化(16)得到**

$R=R_\theta^zR_\phi^yR_\psi^z=\phi\left(U_{\theta/2}\right)\phi\left(V_{\phi/2}\right)\phi\left(U_{\psi/2}\right)=\phi\left(U_{\theta/2}V_{\phi/2}U_{\psi/2}\right)$**，所以 $\phi:SU(2)\to SO(3)$ 是满射，即为 $SU\left(2\right)$ 到 $SO\left(3\right)$ 上的同态映射。**

现在可以问 ϕ 的像域有多大，也就是洛伦兹群 L 中哪些元素 C 可以由某些 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 中的 A 表成 $\phi\left(A\right)$ 的形式。首先 $\forall A\in SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 连续地依赖于 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 的参数，由若当（Jordan）定理，任意 $\forall A\in SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 都相似于一个上三角矩阵，即

$$A=S\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}S^{-1}\ , \tag{57}$$

$a=1,b=0$ 相应于 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 的单位元 I ，保持 S 固定，显然任意 A 都可从 I 经连续变化 a 和 b 得到，这清楚地表明 $\forall A\in SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 连续地依赖 $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 的参数。

设 B 是任意洛伦兹变换则满足 $\left(Bx,By\right)=x^TB^T\eta By=\left(x,y\right)=x^T\eta y,\forall x,y\in\mathbb{R}^4$，这

里$\eta=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$，则$B^T\eta B=\eta$，取行列式得$\left(\det B\right)^2=1$，即$\det B=\pm1$。

然而，并非每个L 的元素都能从单位元经参数的连续变化得到，因为行列式是矩阵元的连续函数，所以一个行列式为负值的群元是无法经参数的连续形变从单位元得到的。进一步，L 的每个元素都保持类时矢量，即$\left\|x\right\|^2>0$ ，的集合不变，类时矢量集合根据x_0 为正还是为负分成两部分，L 的元素$B=diag\left[-1,1,1,1\right]$ 可以将这两部分互换，且$\det B=1$ ， 但显然能与单位元连续地连接起来的L 中元素必保持每一部分不变，意即B 不能。所以存在L 的元素不在ϕ 映射像域内。

行列式为正，保持向前光锥不变，即将类时向量集合的两部分各自变到其自身的变换，构成洛伦兹群L 的子群，记为$L_+^{\uparrow}$ 称为正时正规洛伦兹群，满足$\det\Lambda=+1$ 和$\Lambda^0{}_0>0$ 。

引理

任一正时正规洛伦兹变换B 都可以分解为

$$B=R_1L_u^zR_2 \tag{58}$$

其中R_1 和R_2 是转动，L_u^z 是z 方向合适的伪转动。

*证明：*设

$$B\mathrm{e}_0=\begin{pmatrix}x_0\\\mathbf{x}\end{pmatrix} \tag{59}$$

其中$\mathbf{x}=x_1\mathrm{e}_1+x_2\mathrm{e}_2+x_3\mathrm{e}_3$ 且$x_0^2-\left\|\mathbf{x}\right\|^2=1$ 。转动S 将矢量$\mathbf{x}$ 转到正z 方向，所以

$$SB\mathrm{e}_0=\begin{pmatrix}x_0\\0\\0\\\left\|\mathbf{x}\right\|\end{pmatrix}\text{。} \tag{60}$$

显然S 需要两个参数刻画。

与 $SB\mathrm{e}_0$ 对应的厄米矩阵就是

$$\begin{pmatrix} x_0+\|\mathbf{x}\| & 0 \\ 0 & x_0-\|\mathbf{x}\| \end{pmatrix}。 \tag{61}$$

取 τ 使得 $e^{\frac{\tau}{2}}=\left(x_0+\|\mathbf{x}\|\right)^{-1}=x_0-\|\mathbf{x}\|$ ，则

$$M_{\frac{\tau}{2}}\begin{pmatrix} x_0+\|\mathbf{x}\| & 0 \\ 0 & x_0-\|\mathbf{x}\| \end{pmatrix}M_{\frac{\tau}{2}}{}^{T}=I_2 \tag{62}$$

即 $\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)SB\mathrm{e}_0=\mathrm{e}_0$ ，所以 $\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)SB$ 为一转动，命之为 R_2 ，则有

$$\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)SB=R_2 \tag{63}$$

或者

$$B=S^{-1}\left[\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)\right]^{-1}R_2=R_1L_u^zR_2 \tag{64}$$

其中 $R_1=S^{-1}$ 而 $L_u^z=L_{-\tau}^z=\left[\phi\left(M_{\frac{\tau}{2}}\right)\right]^{-1}$ 。

从证明过程(60)和(63)可以看出

从已证明的引理与转动的欧拉分解，得到**结论：** $\phi\left(SL\left(2,\mathbb{C}\right)\right)=L_+^{\uparrow}$ **，**

$\phi\left(SU\left(2\right)\right)=SO\left(3\right)$ **，** ϕ **是二到一的同态映射，并且** $\phi^{-1}\left(\phi\left(A\right)\right)=\pm A$ **。**

$$L_+^{\uparrow}\cong SL\left(2,\mathbb{C}\right)/Z_2 \tag{65}$$

3.4 $SO\left(3\right)$，$SU\left(2\right)$的Lie代数

考虑绕 z 轴的转动

$$\left[R_\theta^z\right]=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}， \tag{66}$$

泰勒展开到 θ 的一阶，

$$\left[R_\theta^z\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-i\theta\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right)\ , \tag{67}$$

得到李代数 $so(3)$ 生成元[2]

$$L_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{68}$$

。类似地，考虑绕 x 轴的转动和绕 y 轴的转动 R_θ^x 和 R_θ^y，

$$\left[R_\theta^x\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix} \tag{69}$$

和

$$\left[R_\theta^y\right]=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix} \tag{70}$$

分别泰勒展开到 θ 的一阶，

$$\left[R_\theta^x\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-i\theta\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right) \tag{71}$$

和

$$\left[R_\theta^y\right]=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-i\theta\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right) \tag{72}$$

得到

$$L_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \tag{73}$$

---

[2] 这里生成元定义为 $X_a\equiv i\left.\dfrac{\partial D\left(g\left(\alpha\right)\right)}{\partial\alpha_a}\right|_{\alpha=0}$，如果换成第二章（4）式的定义，结构常数需要加一负号。

和

$$L_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\text{。}\tag{74}$$

可以得到对易关系

$$\left[L_a,L_b\right]=i\sum_c\varepsilon_{abc}L_c\tag{75}$$

，因此李代数$so(3)$结构常数

$$f_{abc}=\varepsilon_{abc}\text{。}\tag{76}$$

$SU(2)$到$SO(3)$的同态ϕ将$SU(2)$单位元附近邻域的元素映射到$SO(3)$单位元附近的邻域，所以ϕ限制在$SU(2)$单位元附近邻域中是1-1映射，因而ϕ将诱导李代数$su(2)$到李代数$so(3)$的1-1地映射，也记为ϕ，亦即李代数$su(2)$与李代数$so(3)$同构。

在$SU(2)$单位元附近邻域中

$$\phi^{-1}\left(R_\theta^z\right)=\begin{pmatrix}e^{-i\theta/2}&0\\0&e^{i\theta/2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-i\theta\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right)\text{，}\tag{77}$$

得到李代数$su(2)$生成元

$$J_3=\frac{1}{2}\sigma_3\text{。}\tag{78}$$

类似地，由

$$\phi^{-1}\left(R_\theta^y\right)=\begin{pmatrix}\cos\theta/2&-\sin\theta/2\\\sin\theta/2&\cos\theta/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-i\theta\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right)\text{，}\tag{79}$$

得到

$$J_2=\frac{1}{2}\sigma_2\text{。}\tag{80}$$

由$R_{\pi/2}^y\mathrm{e}_3=\mathrm{e}_1$和(14)得到

$$R_\theta^x=R_{\pi/2}^yR_\theta^zR_{-\pi/2}^y\text{，}\tag{81}$$

所以

$$\begin{aligned}&\phi^{-1}\left(R_\theta^x\right)=\phi^{-1}\left(R_{\pi/2}^y\right)\phi^{-1}\left(R_\theta^z\right)\phi^{-1}\left(R_{-\pi/2}^y\right)\\&=\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-i\theta/2} & 0\\ 0 & e^{i\theta/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & \sin\pi/4\\ -\sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix},\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & -i\sin\theta/2\\ -i\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-i\theta\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+O\left(\theta^2\right)\end{aligned}\tag{82}$$

得到

$$J_1=\frac{1}{2}\sigma_1\ 。\tag{83}$$

显然

$$\left[J_a,J_b\right]=i\sum_c\varepsilon_{abc}J_c\tag{84}$$

并且$\phi\left(J_a\right)=L_a$，$a=1,2,3$ 。

3.4 洛伦兹代数

由(65)，在单位元附近，$SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ 与$SO\left(3,1\right)$ 局部同构，洛伦兹代数或者$so\left(3,1\right)$

李代数有

$$so\left(3,1\right)\cong sl\left(2,\mathbb{C}\right)\ 。\tag{85}$$

李代数$sl\left(2,\mathbb{C}\right)$ 为2×2 无迹复矩阵，其元素α 可表为

$$\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\alpha_3 & \alpha_+\\ \alpha_- & -\frac{1}{2}\alpha_3\end{pmatrix}=\alpha_+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\alpha_-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\tag{86}$$

$\alpha_\pm,\alpha_3$ 为任意复数，可在复数域$\mathbb{C}$ 上选其一组基

$$\mathscr{J}^+=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\mathscr{J}^-=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\mathscr{J}^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\tag{87}$$

使得

$$\alpha=\alpha_+\mathscr{J}^+ +\alpha_-\ \mathscr{J}^-+\alpha_3\mathscr{J}^3=\alpha_1\mathscr{J}^1+\alpha_2\ \mathscr{J}^2+\alpha_3\mathscr{J}^3\tag{88}$$

其中$\mathscr{J}^i,i=1,2,3$ 是另一组基满足$\mathscr{J}^\pm=\mathscr{J}^1\pm i\mathscr{J}^2$ ，$\alpha_1=\alpha_++ia_-$ ，$\alpha_2=\alpha_+-ia_-$ 。显

然 $\mathscr{J}^i=\frac{1}{2}\sigma_i, i=1,2,3$ ，且

$$\left[\mathscr{J}^i,\mathscr{J}^j\right]=i\varepsilon_{ijk}\mathscr{J}^k \tag{89}$$

李代数 $sl(2,\mathbb{C})$ 是实李代数 $su(2)$ 的复化，即 $sl(2,\mathbb{C})\cong\left(su(2)\right)_c$ ，是一个六维实李代数，反过来 $su(2)$ 也称为 $sl(2,\mathbb{C})$ 的实型。李代数与其复化之间表示及其不可约表示是一一对应的。实李代数 $sl(2,\mathbb{C})$ 的一组基可取为

$$\mathscr{J}^i=\frac{1}{2}\sigma_i, i=1,2,3 \tag{90}$$

和

$$\mathscr{K}^i=\frac{i}{2}\sigma_i, i=1,2,3 \tag{91}$$

则

$$\left[\mathscr{J}^i,\mathscr{J}^j\right]=i\varepsilon_{ijk}\mathscr{J}^k,\left[\mathscr{K}^i,\mathscr{K}^j\right]=-i\varepsilon_{ijk}\mathscr{J}^k,\left[\mathscr{J}^i,\mathscr{K}^j\right]=i\varepsilon_{ijk}\mathscr{K}^k \quad 。 \tag{92}$$

由(77)，(79)和(82)，生成元 $\mathscr{J}^i=\frac{1}{2}\sigma_i, i=1,2,3$ 相应洛伦兹代数 $so(3,1)$ 生成元为

$$L_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}, L_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&i\\0&0&0&0\\0&-i&0&0\end{pmatrix}, L_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad 。 \tag{93}$$

考虑单参数子群元素

$$B_1=\exp\left(-i\tau\mathscr{K}^1\right)=\exp\left(\frac{\tau}{2}\sigma_1\right)=\begin{pmatrix}\cosh\frac{\tau}{2}&\sinh\frac{\tau}{2}\\\sinh\frac{\tau}{2}&\cosh\frac{\tau}{2}\end{pmatrix} \quad , \tag{94}$$

则

$$\sigma^\mu\left(\phi\left(B_1\right)x\right)_\mu=B_1XB_1^\dagger=\begin{pmatrix}\cosh\frac{\tau}{2}&\sinh\frac{\tau}{2}\\\sinh\frac{\tau}{2}&\cosh\frac{\tau}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0+x_3&x_1-ix_2\\x_1+ix_2&x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\frac{\tau}{2}&\sinh\frac{\tau}{2}\\\sinh\frac{\tau}{2}&\cosh\frac{\tau}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_3+x_0\cosh\tau+x_1\sinh\tau&-\mathrm{i}x_2+x_1x_1\cosh\tau+x_0\sinh\tau\\\mathrm{i}x_2+x_1\cosh\tau+x_0\sinh\tau&-x_3+x_0\cosh\tau+x_1\sinh\tau\end{pmatrix} \tag{95}$$

可读出相应洛伦兹变换为

$$\phi\left(B_1\right)=\begin{pmatrix}\cosh\tau & \sinh\tau & 0 & 0\\ \sinh\tau & \cosh\tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}。 \tag{96}$$

这正是沿 x_1 方向参数为 τ 的洛伦兹boost。对 τ 做泰勒展开

$$\phi\left(B_1\right)=I_4-i\tau i\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{97}$$

相应生成元为

$$K_1=i\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{98}$$

类似地可得

$$K_2=i\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{99}$$

和

$$K_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{100}$$

满足

$$\left[J_i,J_j\right]=i\varepsilon_{ijk}J_k,\left[K_i,K_j\right]=-i\varepsilon_{ijk}J_k,\left[J_i,K_j\right]=i\varepsilon_{ijk}K_k \tag{101}$$

定义 $N^{\pm}{}_i=\frac{1}{2}\left(J_i\pm iK_i\right)$ ，则对易关系(101)给出

$$\left[N^{+}{}_i,N^{-}{}_j\right]=0,\left[N^{\pm}{}_i,N^{\pm}{}_j\right]=i\varepsilon_{ijk}N^{\pm}{}_k \quad , \tag{102}$$

也就是洛伦兹李代数可以表示成两个复化 $su(2)$ 李代数的直和。当然两个复化 $su(2)$ 相应的李群 $SL(2,\mathbb{C})$ 不是独立的，这可以从任意正时正规洛伦兹群 $L^{\uparrow}_{+}$ 元素其群参数互为共轭看出来

$$\exp\left(-i\xi^i K_i - i\eta^i L_i\right) = \exp\left(-i\zeta^i N^{+}{}_i - i\zeta^{i*} N^{-}{}_i\right) \tag{103}$$

其中 $\zeta^i = \eta^i - i\xi^i$ 。

洛伦兹代数的表示就可以借助分解(102)用 $su(2)$ 的表示来构造。

习题 1：**证明 $SO(3)$ 群的共轭类是由转角相同的转动变换构成的。**

习题 2 证明(25)定义的 η 为所有 2×2 厄米矩阵构成的线性空间到四维实线性空间 $\mathbb{R}^4$ 的同构映射。

习题 3：证明 $\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \pm i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \pm i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \pm i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ **是一个阶为八的非阿贝尔群，自然表示是一个二维不可约表示；用舒尔引理证明若 $\phi(A) = I_4$ 则 $A = \pm I_2$ 。**

习题 4 ：考虑 $W_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\\ \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ ，证明 $\phi\left(W_{\frac{\theta}{2}}\right) = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 。

习题 5：证明 $\phi(B_2) = \begin{pmatrix}\cosh\tau&0&\sinh\tau&0\\0&1&0&0\\\sinh\tau&0&\cosh\tau&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ ， $\phi(B_3) = \begin{pmatrix}\cosh\tau&0&0&\sinh\tau\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\sinh\tau&0&0&\cosh\tau\end{pmatrix}$ 以及(99)和(100)。

第四章 $SU(2)$ 代数的表示

在第三章中已得到 $SU(2)$ 代数的对易关系

$$\left[J_i, J_j\right] = i\sum_k \varepsilon_{ijk} J_k \quad , \tag{1}$$

这是最简单的紧致李代数，因为 ε_{ijk} 是最简单的关于三个指标反对称的一组量，对易关系(1)等价于量子力学中角动量对易关系（取 $\hbar = 1$ 的单位制）。

4.1 节 J_3 本征态

要实现将世界的 Hilbert 空间彻底约化为对角块形式的最终目的，先考虑一个按代数的某个不可约表示变换，维数为 N 的有限维子空间，考察在这里面代数的形式对表示的起的作用。首先希望能尽可能多地对角化代数生成元，但在 $SU(2)$ 的情形，生成元相互不对易，只能对角化一个生成元，比如说是 J_3 ，这样就可以挑出最高 J_3 值的态，（因为考虑的是有限维表示空间，总可以做到这点）。将最高 J_3 值记为 j ，就有一组态满足

$$J_3 \left| j, \alpha \right\rangle = j \left| j, \alpha \right\rangle \tag{2}$$

当存在一个最高 J_3 态时 α 是用来区分不同态的标记号（事实上最高态是唯一的，并不需要 α 但这需要证明）。总可以选择态满足

$$\left\langle j, \alpha \right| \left. j, \beta \right\rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{3}$$

4.2 节 升降算子

定义升降算子

$$J^{\pm} = \left(J_1 \pm iJ_2\right) \Big/ \sqrt{2} \tag{4}$$

则升降算子满足

$$\left[J_3, J^{\pm}\right] = \pm J^{\pm}, \ \left[J^{+}, J^{-}\right] = J_3 \tag{5}$$

将态的 J_3 值提高或者降低。若

$$J_3 \left| m \right\rangle = m \left| m \right\rangle \tag{6}$$

则

$$J_3 J^{\pm}\left|m\right\rangle = J^{\pm} J_3\left|m\right\rangle \pm J^{\pm}\left|m\right\rangle = \left(m \pm 1\right) J^{\pm}\left|m\right\rangle \tag{7}$$

这里的关键思想是可以利用升降算子来构造不可约表示并完全约化可约表示。对于 $SU\left(2\right)$ ，这个想法很简单，但在 $SU\left(2\right)$ 这个简单情形中该思路如何起作用对于将它推广到任意紧致李代数很有用。

首先，不存在 $J_3 = j+1$ 的态，因为已经假设 j 是 J_3 的最高值。因而一定有

$$J^{+}\left|j,\alpha\right\rangle = 0, \quad \forall \alpha \tag{8}$$

否则，作用出来的任何非零态必将有 $J_3 = j+1$ 。用降算子作用态会得到 $J_3 = j-1$ ，所以定义

$$J^{-}\left|j,\alpha\right\rangle \equiv N_j\left(\alpha\right)\left|j-1,\alpha\right\rangle \tag{9}$$

是有意义的， $N_j\left(\alpha\right)$ 为归一化因子。易得不同 α 的态是正交的，因为

$$\begin{aligned} & N_j\left(\beta\right)^{*} N_j\left(\alpha\right)\left\langle j-1,\beta\right|\left.j-1,\alpha\right\rangle = \left\langle j,\beta\right|J^{+}J^{-}\left|j,\alpha\right\rangle \\ & = \left\langle j,\beta\right|\left[J^{+},J^{-}\right]\left|j,\alpha\right\rangle = \left\langle j,\beta\right|J_3\left|j,\alpha\right\rangle \\ & = j\left\langle j,\beta\right|\left.j,\alpha\right\rangle = j\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{10}$$

因此可以选择 $N_j\left(\alpha\right)$ 使态 $\left|j-1,\alpha\right\rangle$ 正交归一

$$N_j\left(\alpha\right) = \sqrt{j} \equiv N_j \tag{11}$$

这样就有

$$\begin{aligned} & J^{+}\left|j-1,\alpha\right\rangle = \frac{1}{N_j} J^{+}J^{-}\left|j,\alpha\right\rangle = \frac{1}{N_j}\left[J^{+},J^{-}\right]\left|j,\alpha\right\rangle \\ & = \frac{j}{N_j}\left|j,\alpha\right\rangle = N_j\left|j,\alpha\right\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

要点是因为代数结构的关系，可以定义态使得升降算符的作用不改变 α ，这也是为什么最后参数 α 可以不出现的原因。类似的讨论表明存在正交归一的态 $\left|j-2,\alpha\right\rangle$ 满足

$$J^{-}\left|j-1,\alpha\right\rangle = N_{j-1}\left|j-2,\alpha\right\rangle \tag{13}$$

以及

$$J^+\left|j-2,\alpha\right\rangle = N'_{j-1}\left|j-1,\alpha\right\rangle \tag{14}$$

易得$\left\langle j-2,\alpha\right|J^-\left|j-1,\alpha\right\rangle = N_{j-1}$ 和$\left\langle j-1,\alpha\right|J^+\left|j-2,\alpha\right\rangle = N'_{j-1}$ 。

可调整$\left|j-1,\alpha\right\rangle$ 的相因子使 N_{j-1} 为实数，则

$$\left\langle j-1,\alpha\right|J^+\left|j-2,\alpha\right\rangle = N^*_{j-1} = N_{j-1} = N'_{j-1} \text{ ，} \tag{15}$$

所以

$$J^+\left|j-2,\alpha\right\rangle = N_{j-1}\left|j-1,\alpha\right\rangle \text{ 。} \tag{16}$$

继续这个过程可找到一个完整塔状的正交归一态$\left|j-k,\alpha\right\rangle$ 满足

$$J^-\left|j-k,\alpha\right\rangle = N_{j-k}\left|j-k-1,\alpha\right\rangle \tag{17}$$

和

$$J^+\left|j-k-1,\alpha\right\rangle = N_{j-k}\left|j-k,\alpha\right\rangle \tag{18}$$

可调整$\left|j-2,\alpha\right\rangle$ 的相因子使 N_{j-2} 为实数，等等，可以选择所有的 N 为实，又由于代数结构的关系，有递推关系

$$\begin{aligned} N^2_{j-k} &= \left\langle j-k-1,\alpha\right|N^2_{j-k}\left|j-k-1,\alpha\right\rangle = \left\langle j-k,\alpha\right|J^+J^-\left|j-k,\alpha\right\rangle \\ &= \left\langle j-k,\alpha\right|\left[J^+,J^-\right]\left|j-k,\alpha\right\rangle + \left\langle j-k,\alpha\right|J^-J^+\left|j-k,\alpha\right\rangle \\ &= \left\langle j-k,\alpha\right|J_3\left|j-k,\alpha\right\rangle + \left\langle j-k+1,\alpha\right|N^2_{j-k+1}\left|j-k+1,\alpha\right\rangle \\ &= N^2_{j-k+1} + j-k \end{aligned} \tag{19}$$

习题 1 证明可以选择所有的 N 为实

这个递推关系可以从 N_j 开始容易地求解出来

$$\begin{array}{rcl} N^2_j & = & j \\ N^2_{j-1} - N^2_j & = & j-1 \\ \vdots & & \vdots \\ N^2_{j-k} - N^2_{j-k+1} & = & j-k \\ \hline N^2_{j-k} & = & (k+1)\,j - k(k+1)/2 \\ & = & \dfrac{1}{2}(k+1)(2j-k) \end{array} \tag{20}$$

或者可令 $k = j - m$

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)} \tag{21}$$

因为表示是有限维的（这是假设，还没证明），在从最高 J_3 态 $|j,\alpha\rangle$ 下降的过程中最终会遇到某个 $m = j - l$ ，使得继续作用降算符就会给出零态，l 就是可用降算子对 $|j,\alpha\rangle$ 作用的非负整数最大次数

$$J^- |j-l,\alpha\rangle = 0 \tag{22}$$

这时态 $J^- |j-l,\alpha\rangle$ 的模一定为零，即

$$N_{j-l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2j-l)(l+1)} = 0 \tag{23}$$

因子 $l+1$ 不可能为零，因此

$$l = 2j \tag{24}$$

因而

$$j = \frac{l}{2} \tag{25}$$

对某个整数 l 成立。

现在已经不再需要标记 α 了。因为生成元不改变 α 值，显然表示空间已经被分解成了每个 α 值对应一个的代数不变子空间的直和。从最初假设的不可约性，只能有一个值，所以可以彻底扔掉 α 。

习题 2 证明从最高 J_3 态经降算符作用出来的塔状结构态构成 $SU(2)$ 的有限维幺正不可约表示空间。

提示：这样构造出来的空间 $Span\{|j\rangle, |j-1\rangle, \cdots, |-j\rangle\}$ 是 $SU(2)$ 的有限维幺正不可约表示空间，为看出其不可约性，设 $|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^{j} \langle m|\psi\rangle |m\rangle$ 为 $Span\{|j\rangle, |j-1\rangle, \cdots, |-j\rangle\}$ 中的

任一态，$\langle m|\psi\rangle \neq 0$ 的最小 m 为 $m_{\min}$ ，则

$$\left(J^{+}\right)^{j-m_{\min}}|\psi\rangle \propto |j\rangle, J^{-}\left(J^{+}\right)^{j-m_{\min}}|\psi\rangle \propto |j-1\rangle,\cdots,\left(J^{-}\right)^{2j}\left(J^{+}\right)^{j-m_{\min}}|\psi\rangle \propto |-j\rangle \quad (26)$$

也就是 $Span\{|j\rangle,|j-1\rangle,\cdots,|-j\rangle\}$ 在 $SU(2)$ 作用下不变子空间必是自身，没有非平庸不变子空间，因而是不可约表示空间。

另一方面 $SU(2)$ 的所有有限维幺正不可约表示空间都可以从最大 J_3 本征值的本征态通过 J^{-} 作用构造出来。

至此生成元如何作用在有限维不可约表示空间上就清楚了，事实上没有其它表示（本课程不予证明），也就是说所有的表示都是有限维的，所以 $SU(2)$ 所有的表示已经都了解清楚了。

4.3 节 标准记号

现在可以转用标准记号了，不可约表示的态用该不可约表示中最高 J_3 值和态的 J_3 值来标记：

$$|j,m\rangle \quad (27)$$

生成元的矩阵元由 J_3 的矩阵元和升降算符 $J^{\pm}$ 的矩阵元给出：

$$\begin{aligned}
&\langle j,m'|J_3|j,m\rangle = m\delta_{m'm}\\
&\langle j,m'|J^{+}|j,m\rangle = \langle j,m'|N_{m+1}|j,m+1\rangle = \sqrt{(j+m+1)(j-m)/2}\,\delta_{m',m+1}\\
&\langle j,m'|J^{-}|j,m\rangle = \langle j,m'|N_{m}|j,m-1\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)/2}\,\delta_{m',m-1}
\end{aligned} \quad (28)$$

这些矩阵元定义了 $SU(2)$ **代数的自旋-** j **表示**：

$$\left[J_a^j\right]_{kl} = \langle j, j+1-k|J_a|j, j+1-l\rangle \quad (29)$$

这里矩阵元是以传统语言给出的，行和列用1 到 $2j+1$ 标记。将行和列直接用 m 值来标记经常很方便，正是上式中的 $j+1-l$ 和 $j+1-k$ 。在这种记号里，$\left[J_a^j\right]_{kl}$ 就写成

$$\left[J_a^j\right]_{m'm} = \langle j,m'|J_a|j,m\rangle \quad (30)$$

其中 m 和 m' 的取值从 j 取到 $-j$ 相邻值差为-1。通常两种记号会交叉使用，根据

手头的问题选择最方便的。

比如，对 $j=1/2$ (30)给出了自旋$1/2$ 表示

$$
\begin{aligned}
J_1^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_1 \\
J_2^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_2 \\
J_3^{1/2} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_3
\end{aligned}
\tag{31}
$$

其中的σ 是泡利矩阵

$$
\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}
$$

满足

$$
\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} + \sum_c i\varepsilon_{abc}\sigma_c \tag{33}
$$

自旋$1/2$ 表示是$SU(2)$ 最简单的表示，称为$SU(2)$ 的定义表示。指数化生成元的自旋$1/2$ 表示矩阵就得到有限群元的表示矩阵的形式

$$
e^{i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma}} \tag{34}
$$

就是最一般的行列式为 1 的2×2 幺正矩阵。

所有其它不可约表示可以类似地构造出来，比如自旋 1 表示形式为

$$
J_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, J_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, J_3^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{35}
$$

而自旋$3/2$ 表示为

$$J_1^{3/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&\sqrt{\frac{3}{2}}&0&0\\ \sqrt{\frac{3}{2}}&0&2&0\\ 0&2&0&\sqrt{\frac{3}{2}}\\ 0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}&0\end{pmatrix}$$

$$J_2^{3/2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-\sqrt{\frac{3}{2}}i&0&0\\ \sqrt{\frac{3}{2}}i&0&-2i&0\\ 0&2i&0&-\sqrt{\frac{3}{2}}i\\ 0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}i&0\end{pmatrix},\quad J_3^{3/2}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&0&0&0\\ 0&\frac{1}{2}&0&0\\ 0&0&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix} \tag{36}$$

习题 3 验证(31)、(35)和(36)式。

上述不可约表示的构造可以推广到任意紧致李代数，J_3 值称为**权**，上述不可约表示的构造是从表示的唯一**最高权**开始的，称为**最高权构造。**同样是这个构造也提供了一个系统化的办法，把任意有限维表示约化为对角块的形式。

最高权构造步骤总结如下：

1. 对角化 J_3 ；
2. 找出最高 J_3 值 j 的态；
3. 对每个这样的态，用升降算子作用于最高 J_3 态上，明确构造出自旋 j 表示；
4. 求出已经呈正则形式的表示扩张成的空间的正交补空间
5. 在这些剩余态空间上重新开始步骤 2，从仅次于最高 J_3 值的态重复。

最后结果就构造出了 Hilbert 空间一组基，具有以下形式

$$\left|j,m,\alpha\right\rangle \tag{37}$$

其中 m 和 j 如同(27)中的含义一样，标记 J_3 值，α 标记所有其它可对角化用来刻画态

的可观测量，满足

$$\left\langle j',m',\alpha' \middle| j,m,\alpha \right\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}\delta_{\alpha'\alpha} \tag{38}$$

正交归一性是该构造的自动结果，也是舒尔引力的要求，因为生成元矩阵元满足

$$\begin{aligned} &\left\langle j',m',\alpha' \middle| J_a \middle| j,m,\alpha \right\rangle = \left[J_a^{j'} \right]_{m'm''} \left\langle j',m'',\alpha' \middle| j,m,\alpha \right\rangle \\ &= \left\langle j',m',\alpha' \middle| j,m'',\alpha \right\rangle \left[J_a^{j} \right]_{m''m} \end{aligned} \tag{39}$$

上式成立是因为，在 J_a 两侧都可以插入中间态的完备集。因而 $\left\langle j',m',\alpha' \middle| j,m,\alpha \right\rangle$ 与代数一个不可约表示的所有元素对易，就有，如果 $j \neq j'$ ，其值为零，如果 $j = j'$ 其正比于单位 $\delta_{m'm}$ 。.

4.4 节 张量积

最高权方案大家可能早已熟悉只是不知其名而已，在量子力学中，比如在用两套在群作用下变换的态形成**张量积**时，**角动量叠加**就是做同样的事，这尤其适应于每当系统对于群变换有一种以上的反应时，一个典型的例子是粒子不但携带自旋角动量也有轨道角动量的情形。系统可以为两种不同 ket 态张量积描述，

$$\left| i,x \right\rangle \equiv \left| i \right\rangle \left| x \right\rangle \tag{40}$$

第一类态 $\left| i \right\rangle$ 按群的 D_1 表示变换，第二类态 $\left| x \right\rangle$ 按表示 D_2 变换，其乘积即称为张量积变换规律为：

$$\begin{aligned} &D(g)\left| i,x \right\rangle = \sum_{j,y} \left| j,y \right\rangle \left[D_{1\otimes 2}(g) \right]_{jy,ix} = \sum_{j,y} \left| j \right\rangle \left| y \right\rangle \left[D_1(g) \right]_{ji} \left[D_2(g) \right]_{yx} \\ &= \left(\sum_j \left| j \right\rangle \left[D_1(g) \right]_{ji} \right) \left(\sum_y \left| y \right\rangle \left[D_2(g) \right]_{yx} \right) \end{aligned} \tag{41}$$

换句话说，两种 ket 态按其自身表示独立变换，如果对于无穷小参数 α_a ，看单位元附近，看 α_a 的第一阶

$$\begin{aligned}\left(1+\sum_a \alpha_a J_a\right)|i,x\rangle &= \sum_{j,y} |j,y\rangle\langle j,y|\left(1+\sum_a \alpha_a J_a\right)|i,x\rangle \\ &= \sum_{j,y} |j,y\rangle\left(\delta_{ji}\delta_{yx}+\sum_a \alpha_a\left[J_a^{1\otimes 2}(g)\right]_{jy,ix}\right) \\ &= \sum_{j,y} |j,y\rangle\left(\delta_{ji}+\sum_a \alpha_a\left[J_a^{1}(g)\right]_{ji}\right)\left(\delta_{yx}+\sum_a \alpha_a\left[J_a^{2}(g)\right]_{yx}\right)\end{aligned} \tag{42}$$

即

$$\left[J_a^{1\otimes 2}(g)\right]_{jy,ix} = \left[J_a^{1}(g)\right]_{ji}\delta_{yx} + \delta_{ji}\left[J_a^{2}(g)\right]_{yx} \tag{43}$$

将表示相乘时，在上式的意义上，生成元是相加的关系。这正是角动量叠加所发生的情形，可以将(43)简略地记为

$$J_a^{1\otimes 2} = J_a^1 + J_a^2 \tag{44}$$

这里指标可以根据具体情况填上，δ 函数省略掉了，因为它其实表示在相应的表示空间中的单位算子。事实上，把(44)看成如下式的生成元作用更好理解

$$J_a\left(|i,x\rangle\right) = \left(J_a|i\rangle\right)|x\rangle + |i\rangle\left(J_a|x\rangle\right) \tag{45}$$

4.5 节 J_3 值的叠加律

由于在 J_3 对角的表象中讨论问题， J_3 的叠加律特别简单，张量积态的 J_3 值直接就是因子态的 J_3 值相加：

$$J_3\left(|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle\right) = \left(m_1+m_2\right)\left(|j_1,m_1\rangle|j_2,m_2\rangle\right) \tag{46}$$

自然这正是经典角动量叠加所期望得到的，但在量子力学中，只有一个分量能做到这点。然而在最高权构造中可以运用这个特征。

例如，考虑自旋 1/2 和自旋 1 表示的张量积。最高权步骤正好可以用来将张量积空间分解为不可约表示空间直和，下面将明确地进行分解，首先存在唯一的最高权态，

$$|3/2,3/2\rangle = |1/2,1/2\rangle|1,1\rangle \tag{47}$$

现在可以用降算子作用上式两边构造出自旋 3/2 表示的其它态，比如借助(45)得到

$$J^-\left(\left|3/2,3/2\right\rangle\right)=\left(J^-\left|1/2,1/2\right\rangle\right)\left|1,1\right\rangle+\left|1/2,1/2\right\rangle\left(J^-\left|1,1\right\rangle\right)$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2}}\left|3/2,1/2\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{2}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle+\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle \tag{48}$$

或者

$$\left|3/2,1/2\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle+\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle \tag{49}$$

继续这个步骤得到

$$\left|3/2,-1/2\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle+\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,-1\right\rangle \tag{50}$$

和

$$\left|3/2,-3/2\right\rangle=\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,-1\right\rangle \tag{51}$$

剩下的态与这些态正交

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle \tag{52}$$

和

$$\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,-1\right\rangle \tag{53}$$

对这个约化的空间再用最高权方案得到

$$\left|1/2,1/2\right\rangle=\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,1\right\rangle-\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle \tag{54}$$

和

$$\left|1/2,-1/2\right\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\left|1/2,-1/2\right\rangle\left|1,0\right\rangle-\sqrt{\frac{2}{3}}\left|1/2,1/2\right\rangle\left|1,-1\right\rangle \tag{55}$$

现在所有的态都用过了，约化过程就结束了。注意用与自旋 3/2 态正交来得到的自旋 1/2 态的符号并不确定，但 $J_3=\pm 1/2$ 态是由升降算子相联系的，因而其相对符号确定。

记 $SU(2)$ 自旋 k 的表示为 $\{k\}$，则 $\{j\}\otimes\{s\}=\sum_l m_l\{l\}$。为确定 m_l，由

$J_3\left|j,m_j\right\rangle\left|s,m_s\right\rangle=\left(m_j+m_s\right)\left|j,m_j\right\rangle\left|s,m_s\right\rangle$ 和 $J^+\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle=0$ 得到最高权态之一为 $\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle$，其 $J_3=j+s$ 为 J_3 最大值。由最高权构造可构造出不可约自旋 $j+s$ 表示

$$\left\{j+s\right\}=Span\left\{\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle,J^-\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle,\cdots,\left(J^-\right)^{2(j+s)}\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle\right\} \tag{56}$$

因而 $m_{j+s}=1$ 并且如果 $l>j+s$ 则 $m_l=0$。在张量积空间

$$Span\left\{\left|j,m_j\right\rangle\left|s,m_s\right\rangle\middle|m_j=j,j-1,\cdots,-j,m_s=s,s-1,\cdots,-s\right\} \tag{57}$$

中，设 J_3 的本征子空间为 V_{J_3}，则

$$V_{j+s-1}=Span\left\{\left|j,j-1\right\rangle\left|s,s\right\rangle,\left|j,j\right\rangle\left|s,s-1\right\rangle\right\}\ , \tag{58}$$

即

$$\dim V_{j+s-1}=2\ 。 \tag{59}$$

又由于

$$J^-\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle=N_j\left|j,j-1\right\rangle\left|s,s\right\rangle+N_s\left|j,j\right\rangle\left|s,s-1\right\rangle\in V_{j+s-1}\ , \tag{60}$$

设

$$\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle=\alpha_{j+s-1}\left|j,j-1\right\rangle\left|s,s\right\rangle+\beta_{j+s-1}\left|j,j\right\rangle\left|s,s-1\right\rangle \tag{61}$$

并且

$$\left\langle\psi_{j+s-1}\middle|J^-\left|j,j\right\rangle\right|s,s\rangle=0\ , \tag{62}$$

则 $J^+\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle$ 的 $J_3=j+s$ 并且 $J^+\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle$ 与 $\left|j,j\right\rangle\left|s,s\right\rangle$ 正交，因而

$$J^+\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle=0 \tag{63}$$

$\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle$ 为 $J_3=j+s-1$ 的最高权态，也就是 $\left|\psi_{j+s-1}\right\rangle$ 为 $\left\{j+s-1\right\}$ 的最高权态，所以 $m_{j+s-1}=1$。以此类推，可以归纳地证明 $\left\{j\right\}\otimes\left\{s\right\}=\sum_{l=|j-s|}^{l=j+s}\left\{l\right\}$。一个直接推论是张量积空间

$$Span\left\{\left|j,m_j\right\rangle\left|s,m_s\right\rangle\middle|m_j=j,j-1,\cdots,-j,m_s=s,s-1,\cdots,-s\right\} \tag{64}$$

按不可约表示变换的标准正交基是

$$\left\{\left|J,M\right\rangle\middle|J=j+s,j+s-1,\cdots,\left|j-s\right|,M=J,J-1,\cdots,-J\right\}\ 。 \tag{65}$$

习题 4 用数学归纳法证明$\{j\}\otimes\{s\}=\sum_{l=|j-s|}^{l=j+s}\{l\}$。

4.6 节 $SO(3)$ 群的不可约表示

前面已经通过最高权构造步骤，构造了$SU(2)$所有的有限维不可约表示，也就是自旋j的表示D_j。要确定$SO(3)$的所有有限维不可约表示，可以借助$SU(2)$到$SO(3)$的2-1同态映射

$$\phi:SU(2)\to SO(3) \tag{66}$$

满足

$$\phi(g)=\phi(g') \tag{67}$$

当且仅当$g'=\pm g$。

如果D是$SO(3)$的表示，则D$(\phi(g))$是$SU(2)$的表示。如果D是不可约表示，则D$(\phi(g))$也是不可约表示。所以如果D是$SO(3)$的不可约表示，则D(ϕ)必等价于$SU(2)$的某个不可约表示D_j。问题就变成了哪些D_j可给出$SO(3)$的不可约表示。由于$\forall g\in SU(2)$，有D$(\phi(\pm g))=$D$(\phi(g))$，显然只有满足$D_j(\pm g)=D_j(g)$的那些D_j可给出$SO(3)$的不可约表示，也就是D_j满足

$$D_j(-I)=D_j(I)=I_{2j+1}\ 。 \tag{68}$$

通过指数映射

$$-I=e^{i2\pi\frac{1}{2}\sigma_3} \tag{69}$$

可得

$$\left[D_j(-I)\right]=\left[D_j\left(e^{i2\pi J_3}\right)\right]=e^{i2\pi\left[J_3^j\right]} \tag{70}$$

由

$$\left[J_3^j\right]=\begin{pmatrix} j & & & 0 \\ & j-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -j \end{pmatrix} \tag{71}$$

得

$$e^{i2\pi\left[J_3^j\right]}=\begin{pmatrix} e^{i2\pi j} & & & 0 \\ & e^{i2\pi(j-1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{i2\pi(-j)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{72}$$

所以 j 必为整数。即 $j=0,1,2,\cdots,$ 时，$\forall g\in SO(3),\mathsf{D}_j(g)\equiv D_j\left(\phi^{-1}(g)\right)$给出 $SO(3)$ 的所有不可约表示。又由于

$$\left[D_j\left(\phi^{-1}(L_a)\right)\right]=\left[D_j(J_a)\right]=\left[J_a^j\right] \tag{73}$$

对于

$$g=e^{i\sum_a a_a L_a}\in SO(3) \tag{74},$$

其表示为

$$\left[\mathsf{D}_j(g)\right]=\left[D_j\left(\phi^{-1}\left(e^{i\sum_a a_a L_a}\right)\right)\right]=\left[D_j\left(e^{i\sum_a a_a J_a}\right)\right]=e^{i\sum_a a_a\left[J_a^j\right]}\ 。 \tag{75}$$

习题 5 求 $SO(3)$ 的自旋 1,2 的表示

第五章 张量算子

一组与某李代数生成元对易关系按该李代数一个不可约表示变换的算子集合称为张量算子，本章定义和讨论 $SU(2)$ 的张量算子。按 $SU(2)$ 自旋 s 变换的张量算子由一组算子集合 O_l^s ，其中 $l=1,\cdots,2s+1$ （或者 $-s,\cdots,s$ ），满足

$$\left[J_a, O_l^s\right] = \sum_m O_m^s \left[J_a^s\right]_{ml} \tag{1}$$

$SU(2)$ 的每一不可约表示都是有限维的，等价于用最高权构造所找出来的表示中的一个，总可以选择所有 $SU(2)$ 张量算子具有上式形式。

5.1 节 轨道角动量

举一例子，球对称势中的粒子，如果粒子无自旋，则 J_a 就是轨道角动量算子

$$J_a = L_a = \sum_{b,c} \varepsilon_{abc} r_b p_c \tag{2}$$

位置算符与张量算子有关因为其按伴随表示变换

$$\begin{aligned}\left[J_a, r_b\right] &= \sum_{c,d} \varepsilon_{acd}\left[r_c p_d, r_b\right] = -i\sum_{c,d} \varepsilon_{acd} r_c \delta_{bd} \\ &= -i\sum_c \varepsilon_{acb} r_c = \sum_c r_c \left[J_a^{adj}\right]_{cb}\end{aligned} \tag{3}$$

这里 J_a^{adj} 是伴随表示，与来自最高权构造的自旋 1 表示等价。

5.2 节 张量算子的运用

注意(3)中位置算子的变换形式不太正确，因为 J_a^{adj} 不是标准形式。运用张量算子，第一步是选择算子基使得传统的自旋 s 表示出现在(1)中，这不是绝对必要的，但可以使情形简化，下面先对一般的过程做讨论，再考察 r_a 的情形。

设有一组算子 Ω_x ，其中 $x=1,\cdots,2s+1$ ，按 $SU(2)$ 一个等价于自旋 s 的表示 D 变换：

$$\left[J_a, \Omega_x\right] = \sum_y \Omega_y \left[J_a^D\right]_{yx} \tag{4}$$

则存在矩阵 S 使得

$$SJ_a^D S^{-1} = J_a^s \tag{5}$$

或者

$$\sum_{x,y} [S]_{lx} \left[J_a^D \right]_{xy} \left[S^{-1} \right]_{yl'} = \left[J_a^s \right]_{ll'} \tag{6}$$

定义一组新算子

$$O_l^s = \sum_y \Omega_y \left[S^{-1} \right]_{yl} \tag{7}$$

其中 $l = -s, \cdots, \mathrm{s}$ ，则 O_l^s 满足

$$\begin{aligned} \left[J_a, O_l^s \right] &= \sum_y \left[J_a, \Omega_y \right] \left[S^{-1} \right]_{yl} = \sum_{y,z} \Omega_z \left[J_a^D \right]_{zy} \left[S^{-1} \right]_{yl} \\ &= \sum_{y,z,l',z'} \Omega_z \left[S^{-1} \right]_{zl'} [S]_{l'z'} \left[J_a^D \right]_{z'y} \left[S^{-1} \right]_{yl} = \sum_{l'} O_{l'}^s \left[J_a^s \right]_{l'l} \end{aligned} \tag{8}$$

这正是所希望的形式。对于 J_3 公式特别简单，因为在标准基中，l 标记 J_3 值， J_3^1 （或者任意 s 的 J_3^s ）为对角矩阵

$$\left[J_3^s \right]_{l'l} = l\delta_{ll'} \tag{9}$$

其中 $l, l' = -s, \cdots, \mathrm{s}$ 。因而

$$\left[J_3, O_l^s \right] = \sum_{l'} O_{l'}^s \left[J_3^s \right]_{l'l} = l O_l^s \tag{10}$$

在实际问题中，通常不需要明确找出矩阵 S ，如果能找到 Ω_x 的任何一种具有确定 J_3 值的线性组合 (其与 J_3 的对易子正比于其自身)，即可将其作为 O_s 的一个分量，用升降算子就可以得到 O_s 的所有其它分量。

对位置算子，最容易的办法是先找出 r_0 。由于 $\left[J_3, r_3 \right] = 0$ ，可以确定 r_3 的 $J_3 = 0$ ，因此 $r_3 \propto r_0$ ，于是就取

$$r_0 = r_3 \tag{11}$$

自旋 1 表示的升降算子的对易关系给出其它分量

$$\left[J^{\pm}, r_0 \right] = r_{\pm 1} = \mp \left(r_1 \pm i r_2 \right) / \sqrt{2} \tag{12}$$

5.3 节 Wigner-Eckart 定理

关于张量算子比较有趣的是乘积 $O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle$ 如何变换

$$\begin{aligned} J_a O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle &= \left[J_a, O_l^s\right]\left|j,m,\alpha\right\rangle + O_l^s J_a\left|j,m,\alpha\right\rangle \\ &= \sum_{l'} O_{l'}^s\left|j,m,\alpha\right\rangle\left[J_a^s\right]_{l'l} + O_l^s \sum_{m'}\left|j,m',\alpha\right\rangle\left[J_a^j\right]_{m'm} \end{aligned} \tag{13}$$

这正是自旋 s 表示与自旋 j 表示的张量积表示 $s\otimes j$ 的变换规律。在标准基中，J_3 是对角的，(13)对于来说特别简单

$$J_3 O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle = (l+m) O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle \tag{14}$$

张量算子作用在态上的 J_3 值是算子与态各自 J_3 值的和。

值得注意的是张量算子与 ket 态的积在代数作用下表现如同两个 ket 态的张量积，因而可以将其以与最高权步骤完全一样的方式分解成不可约表示，即记 $J_3 = j+s$ 的 $O_s^s\left|j,j,\alpha\right\rangle$ 为最高权态，通过降低其权来构造自旋 $j+s$ 表示的其余态，然后就可以找到 $J_3 = j+s-1$ 态的一个线性组合作为自旋 $j+s-1$ 表示的最高权态，通过降低其权可得整个表示，等等。用这个方法可以将张量积的不可约组分以 $O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle$ 的线性组合明确地表达出来，在分解中从自旋 $j+s$ 到 $\left|j-s\right|$ 表示，每个表示只出现一次。

在张量积空间 $Span\left\{\left|s,m_s\right\rangle\left|j,m_j\right\rangle\middle| m_j = j,\cdots,-j,\ m_s = s,\cdots,-s\right\}$ 中，设 J_3 的本征子空间为 V_{J_3}，则 V_M 中 $\left\{\left|s,l\right\rangle\left|j,M-l\right\rangle\right\}$ 为完备正交归一基。有单位分解

$$\begin{aligned} &\left(\sum_l \left|s,l\right\rangle\left|j,M-l\right\rangle\left\langle s,l\right|\left\langle j,M-l\right|\right)\left|J,M\right\rangle = \left|J,M\right\rangle \\ &= \sum_l \left|s,l\right\rangle\left|j,M-l\right\rangle\left\langle s,j,l,M-l\middle|J,M\right\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $O_l^s\left|j,m\right\rangle$ 和 $\left|s,l\right\rangle\left|j,m\right\rangle$ 的变换规律完全一样，而

$$J^+\sum_l \left|s,l\right\rangle\left|j,J-l\right\rangle\left\langle s,j,l,J-l\middle|J,J\right\rangle = J^+\left|J,J\right\rangle = 0 \tag{16}$$

因而

$$J^{+}\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle=0 \tag{17}$$

并且

$$J_{3}\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle=J\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle \tag{18}$$

所以

$$\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle=\kappa_{J}\left|J, J\right\rangle \tag{19}$$

其中 $\kappa_{J}=\kappa_{J}\left(\alpha, O^{s}, s\right)$ ，$\left|J, J\right\rangle$ 是在代数作用下按 J_{3} 值为 J 变换的态，由于 O_{l}^{s} 的关系，一般来说是 $\left|J, J, \alpha\right\rangle$ 的线性组合。

由于 $O_{l}^{s}\left|j, m\right\rangle$ 和 $\left|s, l\right\rangle\left|j, m\right\rangle$ 在 J^{-} 作用下表现完全相同，即

$$J^{-}\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle=\kappa_{J} J^{-}\left|J, J\right\rangle=\kappa_{J} N_{J}\left|J, J-1\right\rangle \tag{20}$$

并且

$$\begin{aligned} & J^{-}\sum_{l}\left|s, l\right\rangle\left|j, J-l\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle=J^{-}\left|J, J\right\rangle=N_{J}\left|J, J-1\right\rangle \\ & =N_{J}\sum_{l}\left|s, l\right\rangle\left|j, J-1-l\right\rangle\left\langle s, j, l, J-1-l\right|J, J-1\rangle \end{aligned} \tag{21}$$

得到

$$\begin{aligned} & J^{-}\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-l\right|J, J\rangle \\ & =N_{J}\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-1-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-1-l\right|J, J-1\rangle \end{aligned} \tag{22}$$

因而

$$\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, J-1-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, J-1-l\right|J, J-1\rangle=k_{J}\left|J, J-1\right\rangle \tag{23}$$

由归纳法，最高权分析的结果为

$$\sum_{l} O_{l}^{s}\left|j, M-l, \alpha\right\rangle\left\langle s, j, l, M-l\right|J, M\rangle=k_{J}\left|J, M\right\rangle \tag{24}$$

这里 $\left|J, M\right\rangle$ 表示在代数作用下按 J_{3} 值为 M 变换的态，一般来说 $\left|J, M\right\rangle$ 也是 $\left|J, M, \alpha\right\rangle$ 的线性组合。系数 $\kappa_{J}=\kappa_{J}\left(\alpha, O^{s}, s\right)$ 与 J 有关，但不依赖于 M 。

原来的乘积态就可以作为总自旋 J 的态的线性组合反解出来

$$O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle=\sum_{J=|j-s|}^{j+s}\left\langle J,l+m\middle|s,j,l,m\right\rangle k_J\left|J,l+m\right\rangle \tag{25}$$

系数$\left\langle J,M\middle|s,j,l,M-l\right\rangle$ 完全由代数确定，只有某些态的相角不确定度，一旦采用一个约定来固定这些相角，就可以一劳永逸地将这些系数制成表来运用。记号$\left\langle J,l+m\middle|s,j,l,m\right\rangle$ 意味着张量积$\left|s,l\right\rangle\left|j,m\right\rangle$ 中$\left|J,l+m\right\rangle$ 的系数，称为 **Clebsch-Gordan 系数。**

Clebsch-Gordan 系数完全由群论确定，物理仅对将$\left|J,l+m\right\rangle$ 表达成 Hilbert 空间基$\left|J,l+m,\beta\right\rangle$ 的线性组合发生影响

$$k_J\left|J,l+m\right\rangle=\sum_\beta k_{\alpha\beta}\left|J,l+m,\beta\right\rangle \tag{26}$$

则

$$O_l^s\left|j,m,\alpha\right\rangle=\sum_{J=|j-s|}^{j+s}\left\langle J,l+m\middle|s,j,l,m\right\rangle\sum_\beta k_{\alpha\beta}\left|J,l+m,\beta\right\rangle \tag{27}$$

这里已将未知的k_J 吸收进了同样未知的$k_{\alpha\beta}$ 中，其依赖于α,j,O^s 和s 因为最初的乘积也依赖这些量，当然还依赖β 和J ，但是$k_{\alpha\beta}$ 一点都不依赖l 或者m ，只需知道这些系数对一个$l+m$ 值的数值就可以了。系数$k_{\alpha\beta}$ 称为约化矩阵元并被记为

$$k_{\alpha\beta}=\left\langle J,\beta\middle|O^s\middle|j,\alpha\right\rangle \tag{28}$$

总结这些推导，就得到对于张量算子矩阵元的 Wigner-Eckart 定理：

$$\left\langle J,m',\beta\middle|O_l^s\middle|j,m,\alpha\right\rangle=\delta_{m',l+m}\left\langle J,l+m\middle|s,j,l,m\right\rangle\cdot\left\langle J,\beta\middle|O^s\middle|j,\alpha\right\rangle \tag{29}$$

如果已知张量算子在给定J,β 和j,α 态之间的任一非零矩阵元，用代数就可以计算出所有其它矩阵元，这听上去很神奇，但这真的就是借助纯粹的群理论，利用升降算子在表示中的态之间上升下降所做的。因此巧妙地运用升降算子，可以从一个矩阵元计算出任意一个矩阵元，Wigner-Eckart 定理不过是把这一切形式地表达了出来。

4.4 节 例子

设

$$\langle 1/2,1/2,\alpha|r_3|1/2,1/2,\beta\rangle = A \tag{30}$$

求

$$\langle 1/2,1/2,\alpha|r_1|1/2,-1/2,\beta\rangle = ? \tag{31}$$

首先，因为 $r_0 = r_3$ ，所以

$$\langle 1/2,1/2,\alpha|r_0|1/2,1/2,\beta\rangle = A \tag{32}$$

由(12)得

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r_{+1} + r_{-1}\right) \tag{33}$$

因而

$$\begin{aligned}\langle 1/2,1/2,\alpha|r_1|1/2,-1/2,\beta\rangle &= \langle 1/2,1/2,\alpha|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-r_{+1}+r_{-1}\right)|1/2,-1/2,\beta\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1/2,1/2,\alpha|r_{+1}|1/2,-1/2,\beta\rangle\end{aligned} \tag{34}$$

算到这里，就可以查表得到 Clebsch-Gordan 系数，然后代入公式算得结果。其实不代公式。而是从公式的含义出发来考虑问题更有启发性。可以从将 $1/2 \otimes 1$ 分解成不可约表示出发来考虑，比如从最高权构造得到

$$|3/2,3/2\rangle \equiv r_{+1}|1/2,1/2,\beta\rangle \tag{35}$$

是一个 3/2,3/2 态，因为它是算子 r_l 作用在 $|1/2,m\rangle$ 态上所能得到的最高权态。同一表示中相应的 $|3/2,1/2\rangle$ 态可由降算子 J^- 作用得到

$$|3/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}J^-|3/2,3/2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}r_0|1/2,1/2,\beta\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}r_{+1}|1/2,-1/2,\beta\rangle \tag{36}$$

这个自旋 3/2 的态与任何自旋 1/2 的态都正交，因而

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle 1/2,1/2,\alpha | 3/2,1/2 \rangle \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}} \langle 1/2,1/2,\alpha | r_0 | 1/2,1/2,\beta \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \langle 1/2,1/2,\alpha | r_{+1} | 1/2,-1/2,\beta \rangle
\end{aligned} \tag{37}
$$

所以

$$
\langle 1/2,1/2,\alpha | r_{+1} | 1/2,-1/2,\beta \rangle = -\sqrt{2} \langle 1/2,1/2,\alpha | r_0 | 1/2,1/2,\beta \rangle = -\sqrt{2} A \tag{38}
$$

所以

$$
\langle 1/2,1/2,\alpha | r_1 | 1/2,-1/2,\beta \rangle = A \tag{39}
$$

还可以得到

$$
|1/2,1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} r_0 |1/2,1/2,\alpha\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} r_{+1} |1/2,-1/2,\alpha\rangle \tag{40}
$$

是一个 1/2,1/2 态。这个结论有点微妙，显示了代数的威力。在对 $j=1$ 和 $j=1/2$ 的张量积做类似分析时，可以用 $|1/2,1/2\rangle$ 必定与 $|3/2,1/2\rangle$ 正交来得到 $|1/2,1/2\rangle$ 态的模，但这里没法这样做，因无法仅仅凭借对称性来确定如下态的模

$$
r_l |1/2,m\rangle \tag{41}
$$

然而，从对态的分析知道，这类态与 $j=1$ 和 $j=1/2$ 的张量积态的变换是类似的，即

$$
J^+ \left(\sqrt{\frac{1}{3}} r_0 |1/2,1/2,\alpha\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} r_{+1} |1/2,-1/2,\alpha\rangle \right) = 0 = J^+ |1/2,1/2\rangle \tag{42}
$$

由于它是表示的最高权态，因而是 $1/2,1/2$ 态。

有几种办法来处理这类问题，这里介绍另一种方法， 考虑矩阵元

$$
\langle 1/2,m,\alpha | r_a | 1/2,m',\beta \rangle \tag{43}
$$

Wigner-Eckart 定理给出这些矩阵元全部正比于一个单参数 $k_{\alpha\beta}$ ，进一步，该结果是代数本身的结论。任何与 J_a 对易关系与 r_a 相同的算子其矩阵元必正比于 r_a 的矩阵元，而 J_a 本身就是这样的算子，所以 r_a 的矩阵元正比于 J_a 的矩阵元。当然，仅当 J_a 的矩阵元非零，这结论才有用 (如果 J_a 的矩阵元全部是零，Wigner-Eckart 定理就被平庸地满足)。

在现在的情形里，J_a 的矩阵元非零（至少对于$\alpha=\beta$ 时），

$$\langle 1/2,m,\alpha|J_a|1/2,m',\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}[\sigma_a]_{mm'} \tag{44}$$

所以

$$\langle 1/2,m,\alpha|r_a|1/2,m',\beta\rangle\propto[\sigma_a]_{mm'} \tag{45}$$

与(39)的结果相同。

5.5 节 构造张量算子

经常会有一堆算子在与代数生成元的对易关系下按代数的一个可约表示变换

$$[J_a,\Omega_x]=\sum_y \Omega_y\left[J_a^D\right]_{yx} \tag{46}$$

表示D 为可约的。这堆算子需要经过变换才是张量算子，但需要做的事本质上又是最高权构造。第一步是做有确定J_3 值算子Ω_x 的线性组合

$$\left[J_3,O_{m,\alpha}\right]=mO_{m,\alpha} \tag{47}$$

这点总能做到，因为D 可以被分解为具有上述性质的不可约表示。接着就可以应用最高权步骤断言，对每个α 值，最高权算符$O_{j,\alpha}$ 是一个自旋 j 张量算子的分量。如果存在任何权为 $j-1/2$ 的算子$O_{j-1/2,\beta}$ ，那它们准是自旋 $j-1/2$ 张量算子的分量。可是事情在下一级会变得微妙起来，为找出自旋 $j-1$ 的张量算子，需要找出权为 $j-1$ ，与 J^+ 对易的算子线性组合，这才对应着自旋 $j-1$ 表示的最高权

$$\left[J^+,O_{j-1,\gamma}\right]=0 \tag{48}$$

要点是如果随机选取算子基底，就没有一个类似标积的东西，也就不能简单地通过将算子与已纳入表示约化的算子“正交”来找到合适的算子。

下面的例子会使这点更清楚。考虑七个算子$a_{\pm1},b_{\pm1}$ 和a_0,b_0 以及c_0 与生成元具有如下的对易关系

$$
\begin{aligned}
&\left[J_3, a_{+1}\right]=a_{+1},\left[J_3, b_{+1}\right]=b_{+1},\left[J_3, a_0\right]=\left[J_3, b_0\right]=\left[J_3, c_0\right]=0\\
&\left[J_3, a_{-1}\right]=-a_{-1},\left[J_3, b_{-1}\right]=-b_{-1}\\
&\left[J^+, a_{+1}\right]=\left[J^+, b_{+1}\right]=0,\left[J^+, a_0\right]=a_{+1},\left[J^+, b_0\right]=b_{+1},\left[J^+, c_0\right]=a_{+1}-b_{+1}\\
&\left[J^+, a_{-1}\right]=c_0,\left[J^+, b_{-1}\right]=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0-3c_0\right)\\
&\left[J^-, a_{+1}\right]=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0+c_0\right),\ \left[J^-, b_{+1}\right]=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0-c_0\right),\left[J^-, a_0\right]=2a_{-1}+b_{-1}\\
&\left[J^-, b_0\right]=a_{-1}+b_{-1},\left[J^-, c_0\right]=a_{-1},\left[J^-, a_{-1}\right]=\left[J^-, b_{-1}\right]=0
\end{aligned}
\tag{49}
$$

要构造张量算子，就从最高权态出发，定义

$$A_{+1}=a_{+1},\ B_{+1}=b_{+1} \tag{50}$$

其它分量由降算子给出

$$A_0=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0+c_0\right),\ B_0=\frac{1}{2}\left(a_0+b_0-c_0\right) \tag{51}$$

和

$$A_{-1}=2a_{-1}+b_{-1},\ B_{-1}=a_{-1}+b_{-1} \tag{52}$$

可以检验升算子将这些算子在表示内作用回去。

现在剩下一个算子，所以它一定是自旋 0 算子，哪一个呢？一定是与 $J^{\pm}$ 对易的线性组合，因此它就是

$$C_0=a_0-b_0-c_0 \tag{53}$$

要强调的是，在此例的分析中，明显地显示出了处理态与处理张量算子的区别，假如如此例中处理的是七个在代数下类似变换的态，那么通过找出与三重态中 $J_3=0$ 的态正交的 $J_3=0$ 的线性组合就可以构造出单态了。此例中算符的处理就没这么方便，虽然仍然可以直接通过对易关系来得到单态算子。对于态的处理当然也可以用同样的办法，但通常借助标量积的良好性质处理态会更容易一些。i

5.6 节 算符乘积

张量算子之所以重要的一个原因是分别属于 s_1 表示的自旋张量算子 $O_{m_1}^{s_1}$ 与属于 s_2 表

示的自旋张量算子 $O_{m_2}^{s_2}$ 的乘积按张量积表示 $s_1 \otimes s_2$ 变换，因为

$$\begin{aligned}\left[J_a, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}\right] &= \left[J_a, O_{m_1}^{s_1}\right] O_{m_2}^{s_2} + O_{m_1}^{s_1}\left[J_a, O_{m_2}^{s_2}\right] \\ &= O_{m_1'}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}\left[X_a^{s_1}\right]_{m_1' m_1} + O_{m_1}^{s_1} O_{m_2'}^{s_2}\left[X_a^{s_2}\right]_{m_2' m_2}\end{aligned} \tag{54}$$

所以乘积可以用最高权程序约化成张量算子。如同以前的情形，对于生成元 J_3 表达式特别简单

$$\left[J_3, O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2}\right] = \left(m_1 + m_2\right) O_{m_1}^{s_1} O_{m_2}^{s_2} \tag{55}$$

即，两个张量算子乘积的 J_3 值是两个算子各自 J_3 值的和。

习题 1 证明 $J_{\pm 1} = \mp\left(J_1 \pm i J_2\right)/\sqrt{2}$， $J_0 = J_3$ 是张量算子