

普通高等教育"十五"国家级规划教材

简明微积分

(第四版)

龚 昇

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



ISBN 7-04-018693-4

9 787040 186932 >

定价 37.90 元

查询其他教学用书，敬请浏览
www.hep-st.com.cn

普通高等教育“十五”国家级规划教材

简明微积分

（第四版）

龚　昇

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

简明微积分 / 龚昇著. —4 版. —北京:高等教育出版社,2006.4
ISBN 7-04-018693-4

Ⅰ.简… Ⅱ.龚… Ⅲ.微积分-高等学校-教材
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020463 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 胡志萍 **责任校对** 尤 静 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京市联华印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版 次	1978 年 7 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2006 年 4 月第 4 版
印 张	36.75	**印 次**	2006 年 4 月第 1 次印刷
字 数	690 000	**定 价**	37.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18693-00

内 容 简 介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是在第三版的基础上，根据作者近年来的教学经验及教学信息反馈修订而成。作者将一些章节进行了修改和补充，扩大了应用实例的范围，突出了数学思想的理解，便于读者更好地深入了解和掌握课程内容。

教材将微分与积分、连续与离散、有限与无限等视为矛盾，在强调严格应用数学语言的同时，形象地介绍了它们之间的联系与区别。全书以 Newton-Leibniz 关于微积分的基本定理及其高维情形的相应 Stokes 定理为核心贯串始终，观点新颖而深入，在众多微积分教材中可谓独树一帜。本书自 1978 年第一版问世以来，一直在中国科学技术大学作为教本，得到非常高的评价。

本书在内容安排上较其他通用教材有所区别，共分十一章：微积分的概念，微积分的运算，微积分的一些应用，常微分方程，矢量代数与空间解析几何，重积分与偏微商，线、面积分与外微分形式，多变量微积分的一些应用，$\varepsilon-\delta$ 语言，无穷级数与无穷积分，Fourier 级数与 Fourier 积分。

教材集作者多年极为丰富的教学和科研经验之大成，将经过广泛教学实践检验的成果精心编纂，对广大微积分教学工作者具有很高的参考价值，可供高等学校理工类专业学生选用或参考，也可供有关人员学习参考。

第四版序*

吴文俊

龚昇教授的《简明微积分》一书，问世以来已经出了三版，现又将出第四版.该书以 Newton-Leibniz 关于微积分的基本定理及其高维情形的相应 Stokes 定理为核心贯串全书，观点新颖而深入，在浩如烟海的微积分教材中可谓独树一帜。该书长期以来在中国科学技术大学作为教本，取得巨大成功。现对该书略述本人阅读后的观感如下。

美国一位著名的数学史家与数学教育家 M. Kline 先生在他著《西方文化中的数学》一书中曾经说过："一个人拥有牛顿处于顶峰时期所掌握的知识，在今天不会被认为是一位数学家。"

M. Kline 又说："数学是从微积分开始，而不是以之为结束。"

M. Kline 先生对微积分的推崇或许有些过分，但言外之意反映出微积分的发明对于数学历史发展过程具有无与伦比的巨大作用，则是毋庸置疑的。

回顾一下微积分发明的历史，对于龚昇教授这部微积分教程的理解，应不无裨益。

恩格斯曾经指出：微积分"是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的"。

恩格斯道出了历史的真实。事实上，早在大约从 15 世纪初开始的文艺复兴时期起，工业、农业、航海事业与商贾贸易的大规模发展，形成了一个新的经济时代。宗教改革与对教会思想禁锢的怀疑，东方先进科学技术通过阿拉伯的传入，以及拜占庭帝国覆灭后希腊大量文献的流入欧洲，在当时的知识阶层前面呈现出一个完全崭新的面貌，等待着他们充分发挥聪明才智。

无数伟大的思想家在这种大时代气息的培育下应运而生，现代科学也在与宗教迷信的顽强斗争中应运而生，与新时代的要求相适应的新数学也因之应运而生。

文艺复兴初期一位多才多艺具有代表性的思想家 Leonardo da Vinci (1452—1519)，是现代科学的先驱者之一。他提倡寻找数量关系，认为"人们的

---

* 吴文俊院士的这篇文章原名"龚昇教授《简明微积分》读后感"，发表于《高等数学研究》第二卷第3期(1999 年 9 月)、《数学通报》2000 年第 1 期。征得吴文俊院士同意，引用该文为序。

探讨不能称为是科学的，除非通过数学上的说明和论证”。时代的要求促成数学上一个空前活跃和富有创造性时期的诞生。例如测量、航海与地图绘制等促成几何学与三角学的发展；而绘画对透视深入认识的要求成为射影几何发展的出发点。更为重要的是，对解决各种问题的普遍科学方法的研究，导致 P. de Fermat 与 R. Descartes 创造了坐标几何，或所谓解析几何，为微积分的创造提供了必要的技术条件。

科学上对数学提出的种种要求，最后汇总成四种核心的问题，并最终导致微积分的产生。这四种问题是：运动中速度与距离的互求问题，曲线求切线的问题，求长度、面积、体积与重心的问题，以及求极大、极小值的问题。在 Fermat，Descartes，Pascal，Kepler，Wallis，Roberval，Barrow，Cavalieri，Galileo 等难以计数的 16、17 世纪学者们的不断探索之下，第一、二、四问题导致微分的概念，第三个问题导致积分的概念，虽然微分与积分在当时还是比较朦胧的概念，而且是独立地发展的，但至少 Newton 的老师 Barrow 就已经在他关于几何的讲义中，指出求曲线切线的问题与求曲线下所围面积的问题的关系。不仅 Newton 作为 Barrow 的学生应亲受其益，即使是 Leibniz，据知也曾研究过 Barrow 的著作。

经过一个多世纪的酝酿，通过 Newton 与 Leibniz 之手，终于认识到微分与积分是互逆的两个概念，并统一成微积分基本定理。正如恩格斯所说，微积分从此已大体上完成——微积分从此创立。

由这一段历史过程可知，Newton 与 Leibniz 之所以能完成微积分的创立大业，正是由于他们站到了前辈巨人们的肩膀上，才能居高临下，才能高瞻远瞩，终于获得了真理。

微积分创立之后的两百年间，又经历了一段既曲折又自然的发展过程。在 18 世纪期间，数学家们由于微积分解决问题的特殊能力，忙着致力于微积分多种多样的应用，建立了不少以微积分方法为主的分支学科，对于微积分的理论基础，则未遑顾及。进入 19 世纪，微积分本身的矛盾迭出。数学家们才不得不对微积分的基本概念与理论方法细加分析，通过实数的精确概念与 $\varepsilon-\delta$ 方法等来奠定了严实的基础。

在 18、19 世纪中，原来局限于单变量的微分与积分运算，也已推广到多变量的情形。但与把微分积分作为互逆运算的 Newton-Leibniz 微积分基本定理之限于单变量的情形相应，如何扩展至多变量的情形，则似乎并非想像中那么容易。

一个转折点似乎是近于 19 世纪之末，法国数学家 H. J. Poincaré 指出了多重积分的体积元应有一个正负定向。这一看似平凡的看法使得多重积分在坐标变换下原来有些拖泥带水的变换公式，有了一个精练的形式，并使 Newton-Leibniz 微积分基本定理到多变量的推广，步入了坦途。

H. J. Poincaré 关于体积元有定向的这一发现，导致了外微分形式的出现。

有关理论由 F. G. Frobenius, E. Cartan 等发扬光大，成为近代数学的重要篇章。对微积分本身来说，则原来以 Green, Gauss, Ostrogradsky 等命名的不同形式的定理，统一并推广成了一个简明的 Stokes 公式：

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega,$$

其中 ω 是外微分形式，D 是一个定向区域，而 d 是外微分运算记号，∂ 是区域取其边界。

龚昇教授强调指出，这一 Stokes 公式正好是单变量情形的 Newton-Leibniz 微积分基本公式在多变量情形的推广。

认识这一点并非是件易事。

首先是定向的概念。法国著名的拓扑学家 Thom 教授，曾经对本人表达过这样的意见：定向概念是几何拓扑中最有深刻意义的伟大创造之一。对于 Thom 先生的卓识，本人深为钦服。

其次，Stokes 定理的真正意义，似乎并未为许多数学史家与数学家们所认识。前面已提到过的 M. Kline 一书，就把 Stokes 定理纳入四元数向量和线性结合代数这一章中，根本未触及 Stokes 定理的实质意义，即其一例。

从 15、16 世纪的文艺复兴至 17、18 世纪的工业革命，使人类从农业经济时代进入到工业经济时代。与时代的要求相适应，在数学上出现了解析几何与微积分等伟大创造。当前，人类又将从工业经济时代进入到一个崭新的信息时代。与新时代的要求相适应，在数学上应有什么样的创新，对数学家们是一个巨大的挑战，值得人们给以严肃的关注与深长的思考。

龚昇教授以其敏锐的目光指出了微积分的核心是单变量的 Newton-Leibniz 微积分基本定理以及多变量的 Stokes 公式，可谓切中要害，并使高等院校的初学者得以轻松地登堂入室。龚昇教授的《简明微积分》一书，将在汗牛充栋的微积分教程中，占有特殊的地位。值此《简明微积分》即将四版之际，谨志数语，以表本人对龚昇教授的敬意。

第四版前言

已出版的微积分教材有很多很多种了，那么我为何还要再写一本？这得从1958年中国科学技术大学成立说起。

为了筹建中国科学技术大学，1958年我从中国科学院数学研究所调到中国科学技术大学教书。到学校后，大多数时间教的是非数学专业的高等数学，即微积分。教了8年之后，逐渐对微积分这门学科与这门课程，产生了一些想法与看法。于是在1965年，在中国科学技术大学近代物理系搞了一个试点班，所写的讲义就是本书的初稿。由于十年浩劫，教材直到1978年才由人民教育出版社正式出版第一册，然后出版第二册，到1981年出版第三册，于是完成了本书的第一版。1992年、1997年由中国科学技术大学出版社分别出版了第二版与第三版。现在十分高兴地得知本书能作为“普通高等教育‘十五’国家级规划教材”，由高等教育出版社出版第四版。

这本教材从1978年第一版出版后，一直在中国科学技术大学等高校作为教材，沿用至今，已有27年了。

至于1965年我对微积分这门学科与这门课程的想法与看法是什么？我于1965年写了一篇短文，题为《对高等数学课程改革的一些尝试》，刊登在《自然辩证法研究通讯》1966年第一期上，对此作了一个十分简要的说明，这当然不可能引起人们的注意。直到30年后的1995年，我在中国科学技术大学数学系的一次教学研讨会上，讲了为何30年前我要写这本微积分教材以及对微积分这门学科、这门课程的一些看法与想法时，大多数教员说从未听过。后来我又在多次有关会议及多所大学讲了这个课题，在同行们的鼓励下，以1966年刊登在《自然辩证法研究通讯》上那篇短文为基础，加以扩展与充实，写成了一本很小的小册子《话说微积分》，于1998年由中国科学技术大学出版社出版。此书后来流传较广，引起了不少人的关注。我的另一本小书《微积分杂谈》，于2002年由科学技术文献出版社出版，这将我那些年刊登过的有关对微积分的论述的文章汇集而成。2002年，陈省身教授嘱咐我到天津南开大学讲微积分，共讲了16个学时，2003年我在丘成桐教授创办的浙江大学数学科学研究中心工作期间，又作了微积分的系统讲演，共10个学时，2004年在中国科学技术大学作了20学时的微

积分的系统讲演。这三处演讲，听众都有数百人不等。在这三次演讲的基础上，写了《微积分五讲》这本小书，由科学出版社于2004年出版。这三本小书都是从不同角度，不同程度上来阐述我对微积分这门学科、这门课程的看法与想法。也是阐述我撰写本书的主导思想。这三本小书分别产生了不同影响，受到了较为普遍的关注。

我要深切感谢陈省身教授，承蒙他肯定了我对微积分的一些认识，还嘱咐我到天津去讲微积分。他对我的多次有关数学，尤其是微积分的谈话，使我深受教育，得益匪浅，例如：他十分深刻地指出了，多变量微积分与单变量微积分的根本差别在于前者有外微分形式。尤其重要的，正是由于他的大力倡导，用外微分形式的观点来讲微积分，才会被愈来愈多的人们所认识与接受。

我也要深切感谢吴文俊教授，感谢他对本书的关注。他在百忙中，以八旬高龄亲自为本书撰写了这篇十分精彩的序，使我深为感动。此文不仅评述了本书，更为重要的是十分深刻地论述了微积分的地位、微积分的产生和发展，微积分的精髓。这对读者认识微积分这门学科以及这门课程，具有十分重要的指导意义。建议读者务必认真地阅读此文。

在国内众多的微积分教材中，本书也许是第一本用外微分形式及矛盾的观点来撰写的。时光匆匆已过了四十年，本书初稿中的这些看法与想法也已愈来愈多地为人们所接受，这实在是十分令人欣慰之事。

由于四十年来，我对微积分这门学科与这门课程的想法无根本性的变化，因此，本书第四版与前面几版无根本性的改变，只是将一些章节作了些修改与补充。本书原来是作3个学期教学用的，共需大约二百多个学时。现在不少大学已将这门课程压缩为两个学期，学时也有所减少。而本书的内容并未减少，所以现在使用本书时，其中一部分内容应该删去。至于哪些部分应该删去，我想还是由教这门课程的老师自己来做主为好。

本书从一开始就与张声雷教授合作，他不但为本书配备了习题，且对本书的部分章节加以改写与补充。还以本书为教材进行了大量的教学活动，不幸他已作古多年，不胜惋惜之至。

我还要感谢这四十年来关心、支持本书以及以此书为教材的广大师生们，尤其是朱国城教授，他不但长时间的以本书作为教材，且本书第四版的修订很大程度上是采纳了他的意见。

我还要感谢中国科学技术大学历任校、院、系的各位领导对本书的支持与关心，尤其是程艺教授、叶向东教授、李尚志教授、章璞教授、陈发来教授与刘太顺教授等。

最后感谢高等教育出版社为出版本书所付出的辛勤劳动，尤其是李艳馥

同志。

本书虽已再版多次，但依然会有不少缺点有待改进，请广大师生不吝赐教，不胜感激之至。

龚 界

2005 年 5 月于北京中关村

第二版前言

自从1958年中国科学技术大学成立以来，我有多次从事非数学专业的高等数学课程的教学工作的机会。在实际教学工作中，感到有对这门课程进行教学改革的必要，于是于1965年萌发了在中国科学技术大学近代物理系搞一个试点班的想法。当时一面讲、一面写，希望课讲完，讲义也就有了个初稿，可惜由于十年浩劫而中断。直到浩劫结束，一切重新开始，于1978年由人民教育出版社出版讲义的第一册——《简明微积分》第一册，直到1981年全书3册全部出齐。这是一本小书，从某种意义上讲，是反映了我对微积分的认识与看法，读者也许可以发现，其在内容以及处理方法上与国内通行的一些高等数学的教科书相比较，是有自己的特色的，之所以起名“简明微积分”是因为我认为：非数学专业高等数学这门课程讲的是微分与积分这对矛盾，起名微积分比高等数学更切题；还因为我认为：微积分的主要内容也就是这些，与其繁琐不如简明，这可以说是我写这本小书的一些主导思想。这本教材在中国科学技术大学已经用了十多年了，从实际教学效果来看，应该说是令人满意的。同时在十多年的教学过程中也发现了有些地方需要作些补充，有些地方需要补缺，于是由张声雷、朱国城等多位同志，在总的框架不动、原有的特色保留的基础上，对本书进行了修订，合订成一册，由中国科学技术大学出版社再版出版。我十分感谢这些老同事的辛勤劳动。十多年来以本书为教材的广大师生们也曾对本书提出过不少有益的意见，我也同样十分感谢。这本小书若经过修订再版后，可以更好地为广大师生服务，那会是一件使我很愉快的事情。

龚　昇

1992年2月

第一版前言

1965年，在中国科学技术大学近代物理系搞一个高等数学试点班时，我与张声雷同志合写了这本《简明微积分》。

当时我校非数学专业的高等数学课程，在教学工作中存在着3个问题：一是新同学刚入大学，学习高等数学这门主要课程时，普遍感到进度快、难度大，与中学数学距离较大，有不少困难；二是与物理课程的配合问题，物理上要用到的数学知识，却要到较后才能讲到，既影响物理教学，也影响数学的教学质量；三是学生学了这门课往往消化不良、掌握不牢、不会灵活应用。怎样才能改变这个局面呢？

毛泽东同志在“矛盾论”中指出：“在复杂的事物的发展过程中，有许多的矛盾存在，其中必有一种是主要的矛盾，由于它的存在和发展，规定或影响着其他矛盾的存在和发展。”高等数学这门课程实际上讲的是微分和定积分这一对矛盾，而以往在教学中这对主要矛盾十分不突出。由于同学未能掌握住主要矛盾，以致学到的东西不易串起来，容易忘掉。我们要使同学不仅得到一颗颗的珍珠，而且应该使他们得到一串珍珠，而把这些珍珠串起来的线，应该是这门课程的主要矛盾，所以在讲课中，就把这对主要矛盾及早引出，尽力突出。

在第一章中，首先介绍了定积分和微分的概念，然后通过微积分基本定理揭示它们如何成为对立统一的；第二章讲运算时，强调了这对主要矛盾在运算过程中的体现，指出微分和积分之间的紧密关系；第三章讲应用，训练同学用微积分作工具处理实际问题，特别注意与物理课程相配合，在用的过程中更牢固、更灵活地掌握这对主要矛盾；第四章讲的是常微分方程，把它看作微分和积分这一对矛盾的进一步发展和应用。

第二册讲多变量微积分时，应用外微分形式讲清楚微分和积分是如何成为一对矛盾的。在本书第三册要讲 $\varepsilon-\delta$ 语言以及傅氏分析等，并强调连续与离散的关系，使同学在前面学习的基础上更深刻地认识微积分这一对矛盾。

在教学过程中，在讲述微分和积分这对主要矛盾的同时，也指出数学中的一些基本矛盾，如：连续与离散，有限与无限，必然与偶然，数与形等，这对同学深入了解与掌握课程内容是有好处的。

关于编写这套《简明微积分》的想法，我曾写过一篇短文：“对高等数学课程改革的一些尝试”，发表在《自然辩证法研究通讯》1966年第1期上，希望进一步了解想法的读者，请参阅这篇短文。《简明微积分》第一册现在出版了，除了一

些小的修改外，基本上是13年前写的稿子。由于自己水平不高，又缺乏足够的教学实践，本书肯定有很多缺点、错误，诚恳地希望广大读者给予批评指正。

龚 昇

1978年3月

目　录

第一章　微积分的概念 …… 1

1.1　函数与极限 …… 1

1.1.1　数列极限与函数极限 …… 1

1.1.2　连续函数 …… 2

1.2　定积分 …… 5

1.2.1　计算面积 …… 5

1.2.2　定积分的定义 …… 9

1.2.3　对数函数 $y=\ln x$ …… 14

1.3　微商与微分 …… 18

1.3.1　曲线的切线 …… 18

1.3.2　速度、密度 …… 19

1.3.3　微商的定义 …… 20

1.3.4　微分 …… 24

1.3.5　微分中值定理 …… 26

1.4　微积分基本定理 …… 30

第二章　微积分的运算 …… 34

2.1　微分法 …… 34

2.1.1　微商与微分的计算 …… 34

2.1.2　高阶微商与高阶微分 …… 43

2.1.3　利用微分作近似计算 …… 47

2.2　积分法 …… 54

2.2.1　不定积分的计算 …… 54

2.2.2　定积分的计算 …… 72

2.2.3　定积分的近似计算 …… 79

第三章　微积分的一些应用 …… 85

3.1　面积、体积、弧长 …… 85

3.1.1　面积 …… 85

3.1.2　体积 …… 87

3.1.3　弧长 …… 89

3.2　曲线的描绘 …… 93

3.2.1　函数图形的上升和下降 …… 93

3.2.2　函数图形的凹与凸 …… 95

3.2.3　曲线的渐近线 …… 97

3.2.4 描绘图形的例子 …… 99
3.2.5 曲率 …… 101
3.3 Taylor(泰勒)展开与极值问题 …… 105
3.3.1 Taylor(泰勒)展开式 …… 105
3.3.2 极值问题 …… 110
3.4 物理应用举例 …… 119
第四章 常微分方程 …… 125
4.1 一阶微分方程 …… 125
4.1.1 概念 …… 125
4.1.2 分离变量 …… 128
4.1.3 线性方程 …… 135
4.2 二阶微分方程 …… 141
4.2.1 可降阶的方程 …… 141
4.2.2 二阶线性方程 …… 144
4.2.3 常系数线性方程 …… 153
4.2.4 质点振动 …… 162
4.2.5 n 阶线性微分方程与常微分方程组 …… 167
第五章 矢量代数与空间解析几何 …… 179
5.1 空间直角坐标系与矢量 …… 179
5.1.1 直角坐标系 …… 179
5.1.2 矢量的加法与数乘 …… 180
5.2 矢量的乘积 …… 184
5.2.1 矢量的内积 …… 184
5.2.2 矢量的外积 …… 186
5.2.3 矢量的混合积 …… 188
5.3 平面与直线 …… 191
5.3.1 平面方程 …… 191
5.3.2 直线方程 …… 194
5.4 二次曲面 …… 197
5.4.1 柱面 …… 197
5.4.2 旋转曲面 …… 199
5.4.3 锥面 …… 200
5.4.4 椭球面 …… 201
5.4.5 双曲抛物面 …… 202
5.4.6 单叶双曲面 …… 203
5.4.7 双叶双曲面 …… 203
5.4.8 椭圆抛物面 …… 204
5.5 坐标变换 …… 205

5.5.1　坐标系的平移 …… 206
5.5.2　坐标系的旋转 …… 207
第六章　重积分与偏微商 …… 211
6.1　重积分 …… 211
6.1.1　多变量函数的极限与连续性 …… 211
6.1.2　重积分的概念 …… 213
6.1.3　重积分的计算 …… 216
6.2　偏微商 …… 225
6.2.1　偏微商与全微分 …… 225
6.2.2　隐函数的微商 …… 233
6.3　Jacobi(雅可比)行列式、面积元素与体积元素 …… 247
6.3.1　Jacobi(雅可比)行列式的性质 …… 247
6.3.2　面积元素与体积元素 …… 248
第七章　线、面积分与外微分形式 …… 263
7.1　数量场与矢量场 …… 263
7.1.1　数量场的等值面与梯度 …… 263
7.1.2　矢量场的流线 …… 266
7.2　曲线积分 …… 270
7.2.1　第一种曲线积分(关于弧长的曲线积分) …… 270
7.2.2　第一种曲线积分的应用(旋转曲面的面积) …… 273
7.2.3　第二种曲线积分(关于弧长元素投影的积分) …… 274
7.2.4　第二种曲线积分的计算方法 …… 277
7.2.5　两种曲线积分的关系 …… 278
7.2.6　矢量场的环流量,矢量的曲线积分 …… 279
7.3　曲面积分 …… 283
7.3.1　第一种曲面积分(关于面积元素的曲面积分) …… 283
7.3.2　矢量场的通量,第二种曲面积分(关于面积元素投影的积分) …… 285
7.3.3　第二种曲面积分的计算方法 …… 287
7.4　Stokes 公式 …… 292
7.4.1　Green 公式 …… 292
7.4.2　Gauss 公式、散度 …… 295
7.4.3　Stokes 公式、旋度 …… 300
7.5　全微分与线积分 …… 308
7.5.1　与途径无关的曲线积分 …… 308
7.5.2　有势场 …… 312
7.5.3　管型场 …… 314
7.6　外微分形式 …… 317
7.6.1　外乘积、外微分形式 …… 317

7.6.2 外微分运算,Poincaré 引理及其逆 …… 323
7.6.3 梯度、旋度与散度的数学意义 …… 329
7.6.4 多变量微积分的基本定理(Stokes 公式) …… 331
第八章 多变量微积分的一些应用 …… 335
8.1 Taylor(泰勒)展开与极值问题 …… 335
8.1.1 多变量函数的 Taylor 展开 …… 335
8.1.2 多变量函数的极值问题 …… 336
8.1.3 条件极值问题 …… 340
8.2 物理上的应用举例 …… 345
8.2.1 重心、转动惯量与引力 …… 345
8.2.2 流体动力学的完全方程组 …… 350
8.2.3 声的传播 …… 353
8.2.4 热的传导 …… 354
第九章 $\varepsilon-\delta$ 语言 …… 358
9.1 数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言 …… 358
9.1.1 数列极限的定义 …… 358
9.1.2 数列极限的一些性质 …… 359
9.1.3 极限存在的判别准则 …… 362
9.2 函数连续性的 $\varepsilon-\delta$ 语言 …… 370
9.2.1 连续趋限 …… 370
9.2.2 连续函数的定义 …… 376
9.2.3 连续函数的一些基本性质 …… 378
9.2.4 函数的一致连续性 …… 380
9.3 定积分的存在性 …… 386
9.3.1 Darboux 和 …… 386
9.3.2 连续函数的可积性 …… 387
9.3.3 定积分概念的推广 …… 393
第十章 无穷级数与无穷积分 …… 400
10.1 数项级数 …… 400
10.1.1 基本概念 …… 400
10.1.2 一些收敛判别法 …… 402
10.1.3 条件收敛级数 …… 406
10.2 函数项级数 …… 414
10.2.1 无穷次相加产生的问题 …… 414
10.2.2 一致收敛函数列 …… 415
10.2.3 一致收敛函数项级数 …… 419
10.2.4 隐函数存在定理 …… 422
10.2.5 常微分方程解的存在性与唯一性 …… 426

10.3　幂级数与 Taylor 级数 …… 433
10.3.1　幂级数的收敛半径 …… 433
10.3.2　幂级数的性质 …… 436
10.3.3　Taylor 级数 …… 440
10.3.4　幂级数的应用 …… 446
10.4　无穷积分与含参变量积分 …… 459
10.4.1　无穷积分的收敛判别法 …… 459
10.4.2　含参变量的积分 …… 469
10.4.3　含参变量的无穷积分 …… 473
10.4.4　几个重要的无穷积分 …… 486
第十一章　Fourier 级数与 Fourier 积分 …… 498
11.1　Fourier 级数 …… 498
11.1.1　三角函数系的正交性 …… 498
11.1.2　Bessel 不等式 …… 507
11.1.3　Fourier 级数的收敛判别法 …… 510
11.2　Fourier 积分 …… 515
11.2.1　Fourier 积分 …… 515
11.2.2　Fourier 变换 …… 517
11.2.3　Fourier 变换的应用 …… 521
11.2.4　高维 Fourier 变换 …… 523
习题答案 …… 525

第一章

微积分的概念

1.1 函数与极限

1.1.1 数列极限与函数极限

我们先介绍一下极限的概念，而不予以证明及深入的讨论.

对于无穷数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

来说，当项数 n 无限增大时，数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 A，就是说，无论预先给定怎样小的正数，在数列里都能找到一项，从这一项起，以后所有项与 A 的差的绝对值，都小于预先给定的小的正数，那么固定常数 A 就叫做这个无穷数列的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

如果两个数列有极限，那么，这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限，分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商（作为除数的数列的极限不能是零）.

就是说，如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim_{n\to\infty} b_n = B$，那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = AB,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

如果 k 为常数，那么

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = kA.$$

再如果有 $\lim_{n\to\infty} c_n = C$，且 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，则

$$A \leqslant B \leqslant C.$$

而对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 x 无限接近 a 时，函数值 $f(x)$ 无限趋近于一个固定的常数 A，那么这个常数 A 就叫做函数 $y=f(x)$ 当 x 趋向于 a 时的极限，记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

这里，a 可以是有限数，也可以是无穷大.

和数列的情形相仿，有下述结果：若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在且有限，则有

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x),$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} f(x) / \lim_{x\to a} g(x). \text{（假定} \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\text{）}$$

此外，如在点 a 的附近成立不等式

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

关于极限的概念，将在本书第九章 9.1 节及 9.2 节中严格、仔细地加以讨论.

1.1.2　连续函数

当我们观察或研究客观世界的各种过程时，会遇到很多不同的量，这些量一般来说都是在不断变化的，这是客观世界不断变化、不断运动、不断发展在量的方面的表现. 例如，由于热胀冷缩的原因，金属杆的长度 L 是依赖于温度 T 的，由实验知道，

$$L = L_0(1 + \alpha T),$$

这里 L_0 表示在 0℃时金属杆的长度，α 叫做线胀系数，上面的关系就是长度 L 与温度 T 之间的一个简单的函数关系. L 和 T 是变化着的量，叫做变量.

当然，任何过程中的变量都有一定的变化范围，即变量所能取的数值有一定的限制，如物体的温度永远不会低于 -273℃. 变量的变化范围常常是一个区间，而区间有开的、有闭的等等. 适合不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的全体记为 $[a,b]$，称为闭区间. 适合不等式 $a < x < b$ 的实数 x 的全体记为 (a,b)，称为开区间. 适合不等式 $a \leqslant x < b$ 的实数 x 的全体记为 $[a,b)$. 同样，读者可以不难理解 $(a,b]$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$ 等.

但是在某一特定问题中，某些因素的变化极小，因而可以看作不变，这时相应的量叫做常量. 例如，地面上自由落体的重力加速度 g 在一定的范围内（例如

在北京市的范围内)是看作常量的.还有一种表现变化事物之间的一定关系的量也看作是常量,例如,无论一个圆的直径如何变化,相应的圆周长随着变化,但周长与直径之比却是不变的,是个常量(即 $\pi = 3.141\ 592\ 65\cdots$).

我们知道,客观世界中各个事物是互相联系、互相依赖与互相制约的,因此,从量的侧面来看,各个变量之间也是相互依赖、相互制约的,变量之间的这种互相依赖的关系叫做函数关系.

例 1 物体从离地面某一高度处自由落下,设经过时间 t 落下的距离为 s,s 与 t 之间的关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 表示重力加速度.

例 2 一天中气温 θ 与时间 t 是两个变量,某日气温的自动记录仪记录了这两者的关系,如图 1.1.从图可确定某一时刻 t_0 相应的气温 θ_0.

例 3 寄往外埠的信件,重量在 20 g 以下者邮资为 80 分,每增加 20 g,邮资增加 80 分,因此邮资是重量 x 的函数,可以记作

$$y = \begin{cases} 80, & 0 \leqslant x \leqslant 20; \\ 160, & 20 < x \leqslant 40; \\ 240, & 40 < x \leqslant 60; \\ \cdots\cdots & \end{cases}$$

作图如图 1.2.

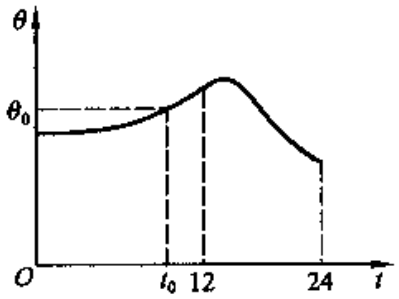

图 1.1

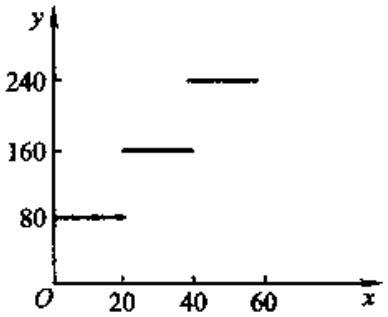

图 1.2

从这些例子可以看出,所谓函数关系,就是两个变量之间的一种对应规律,依据它,可以从一个变量 x 所能取到的每个值,确定出另一个变量 y 的相应值.这种关系一般地常用 $y = f(x)$ 表示,即 y 是 x 的函数,符号 f 表示对应规律,x 称为自变量,y 称为因变量.自变量变化的范围称为函数的定义域,函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 的值记为 $f(a)$,函数值全体称为函数 $f(x)$ 的值域.

在很多自然现象中,遇到的函数往往是"连续"的.例如,一个质点运动时,它的一个坐标 x 就是时间 t 的连续函数 $x = f(t)$,因为质点从一个位置过渡到另

一位置时，它必须经过一切中间位置. 函数 $x=f(t)$ 的图形如图 1.3，这是一条连续不断的曲线. 考察其中的一个时刻，例如 $t=t_0$. 当 t 在 t_0 处有很小变化 Δt 时，$f(t)$ 也相应地有很小的变化 $\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$，且当 $\Delta t\to 0$ 时，Δx 也趋向于零，即当 $t\to t_0$ 时，有 $f(t)\to f(t_0)$. 反之，如果当 $\Delta t\to 0$ 时，$f(t)$ 的相应的变化 $\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$ 不趋于零，那么曲线在 $t=t_0$ 处就会有一间断，如图 1.4.

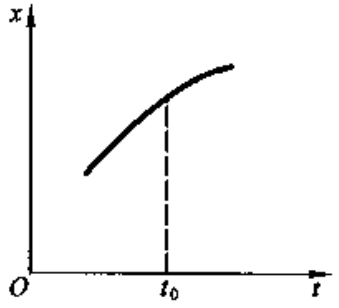

图 1.3

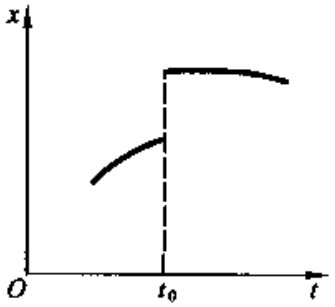

图 1.4

一般来说，函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点处连续，是指 $\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$ 成立，否则称为间断. 由图 1.3 也可看出，如 $f(x)$ 在 t_0 点处连续，且 $f(t_0)>0$，则在 t_0 的附近 $f(t)>0$.

如 $x=f(t)$ 在闭区间 $a\leqslant t\leqslant b$（或开区间 $a<t<b$）上每点都连续，则称 $f(t)$ 为 $[a,b]$（或 (a,b)）上的连续函数.

设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，又设 $f(a)$ 与 $f(b)$ 有相反的符号，即点 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 是处在 t 轴上下不同的两侧. 因为 $x=f(t)$ 是连续函数，所以 $x=f(t)$ 的图形是一条连接点 $(a,f(a))$ 及 $(b,f(b))$ 的连续曲线，它必定穿过 t 轴（图 1.5），即在 (a,b) 中至少有一点 c，使 $f(c)=0$. 从这里可以推出：若 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，r 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一数，则必有一点 $c(a<c<b)$，使 $f(c)=r$. 这只要考虑函数 $F(t)=f(t)-r$ 即可. 显然 $F(t)$ 仍为 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $F(a)=f(a)-r$，与 $F(b)=f(b)-r$ 异号，故必有一点 c，$a<c<b$，使 $F(c)=f(c)-r=0$，即 $f(c)=r$.

从图形（图 1.6）中还可以看出：在闭区间上连续的函数一定达到在这闭区

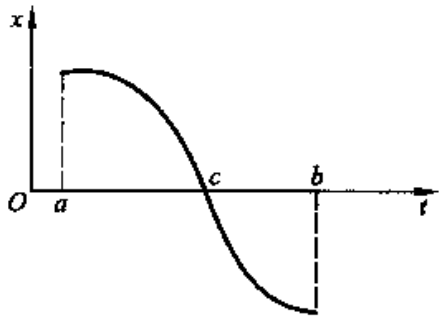

图 1.5

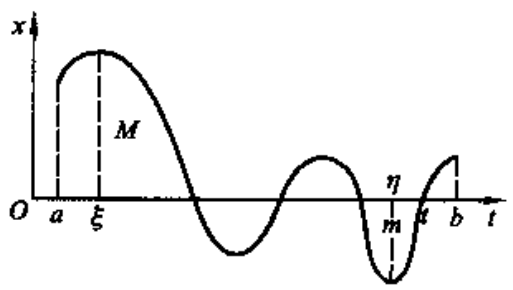

图 1.6

间上的最大值 M 和最小值 m. 即在 $[a,b]$ 中能找到两点 ξ,η, 使 $f(\xi)=M$, $f(\eta)=m$, 而对于 $[a,b]$ 中所有的点 t 都有 $m\leqslant f(t)\leqslant M$. 而在开区间上这是不一定成立的.

可以证明, 一切初等函数在其定义区间中是连续函数.

关于连续函数的概念, 将在本书第九章 9.2 节中严格、仔细地加以讨论.

习题 1.1

1. 设 $f(x)=x2^x$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, $f(x)+1$, $f(x+1)$, $|f(-a)|$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$.

2. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{当 } x\neq 0;\\ 1, & \text{当 } x=0.\end{cases}$$

这是函数吗? 是一个函数还是两个函数? 它的定义域是什么? 作出它的图形, 并求 $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(t)$, 它在哪些点上连续、哪些点上不连续?

3. 已知两个点电荷 q_1, q_2 的距离为 r, 试表示相互作用力 f 与距离 r 间的函数关系.

4. 将半径为 R 的圆铁片, 自中心剪去一扇形, 其中心角为 θ, 余下的铁片围成一个无底的圆锥, 将其体积用 θ 表示出来.

5. 横梁长 8 m, 距左端 2 m 到 4 m 这段上均匀分布总重为 30 kg 的载荷, 又在距左端 5 m 处作用着一个 10 kg 的集中载荷, 试将从左端起到 x 处长为 x 的这段上的总载荷 W 用 x 表示出来.

6. 设 (1) $f(x)=ax+b$; (2) $f(x)=x^2$; (3) $f(x)=a^x$; 求 $\varphi(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

7. 研究下列函数的连续性:

(1) $y=x^2$; (2) $y=\sin x$; (3) $y=x^2\sin x$;

(4) $y=\dfrac{1-x^2}{2+x}$; (5) $y=\dfrac{1}{\sin \pi x}$; (6) $y=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(7) $y=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 4x-2, & 1<x<3,\\ 13-x, & 3\leqslant x<\infty.\end{cases}$

8. 证明下列方程在指定区间上有根:

(1) $x^3-3x=1$, 在 $[1,2]$ 上;

(2) $x2^x=1$, 在 $[0,1]$ 上.

1.2 定 积 分

1.2.1 计算面积

在中学数学里, 我们学到了计算一些直线图形及圆的面积的公式, 但是实际

问题中遇到的许多图形不会如此简单. 那么如何来计算面积呢? 用以前的那些办法已经不够了,于是产生了用微元求和的想法来计算这些面积. 以曲边梯形为例,这个想法的实质是:将图形分成有限块长条,把每块长条都近似地看作矩形,把这些矩形的面积算出来加在一起作为这个图形面积的近似值. 长条分得愈细,这个近似值与面积真正值之差愈小,如果长条分得无穷多、无限小,这样,近似值就成为真正要求的值了.

举个具体例子,考虑抛物线 $y=x^2$,它的图形如图 1.7,在 Ox 轴上取一点 C,设 OC 的长是 1. 作垂直于 Ox 轴的直线 AC,交抛物线于 A,我们来求曲边三角形 OAC 的面积.

把区间[0,1]三等份,算出抛物线下面有斜线的矩形的面积的和(图 1.8):

$$S_3=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]=\frac{1}{3^3}[1^2+2^2]=\frac{5}{27}.$$

这个数可以作为所求图形面积的一个粗略的近似值.

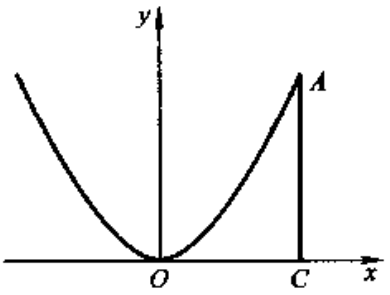

图 1.7

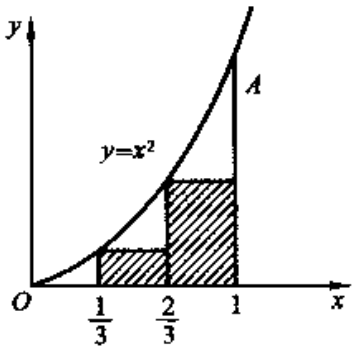

图 1.8

如果把[0,1]四等份,将画有斜线的三个矩形的面积加起来(图 1.9),得到

$$S_4=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4^3}[1^2+2^2+3^2]=\frac{7}{32}.$$

从直观上看来,这是个比 S_3 稍好的近似值.

继续这种作法,把区间[0,1]分成 n 等分,作出 $n-1$ 个矩形(图 1.10). 把它们的面积一一加起来,得到

$$S_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]$$

$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}.$$

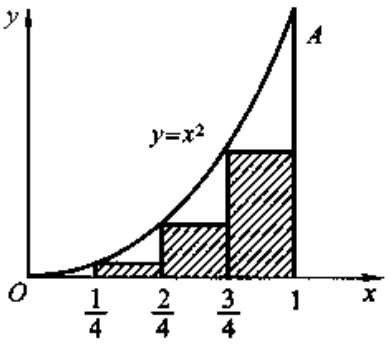

图 1.9

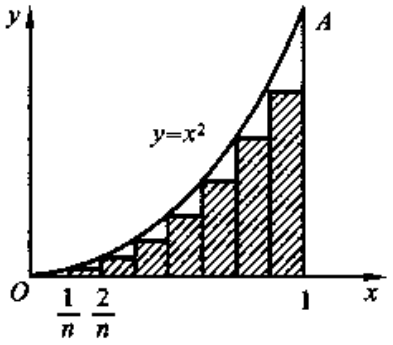

图 1.10

如果 n 相当大,直觉告诉我们,台阶形的面积 S_n 就更精确地接近所求图形的面积了. 若无限继续下去,我们得到一个数列 $\{S_n\}$:$S_3, S_4, \cdots, S_n \cdots$,就是

$$\frac{5}{27}, \frac{7}{32}, \cdots, \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right), \cdots.$$

我们看到,随着 n 无限增大,S_n 中的 $1/n$ 及 $1/n^2$ 就无限变小而接近于零,从而 S_n 越来越接近于一个定数 $1/3$,或者说 $\{S_n\}$ 极限是 $1/3$.

从这里可以看出,如果 OC 的长不是 1,而是任意实数 a,应用上述办法可以算出曲边三角形 OAC 的面积是 $a^3/3$. 从这里还可以立刻得到,如果所求的面积是图 1.11 中的 $ACDB$,那么这块面积应该是 $(b^3-a^3)/3$,这里 $OC=a, OD=b$.

再来考虑一个比抛物线稍复杂一点的例子. 即以曲线 $y=x^3$ 作为一边的曲边三角形的面积,这时采用处理 $y=x^2$ 的同样的办法来进行,只要用到恒等式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$$

即可,至于这个恒等式,可以用数学归纳法来证明之.

再进一步,如果考虑曲线 $y=x^4$ 与 x 轴及 $x=a$ 围成的曲边三角形的面积. 这时应用上面同样的办法,就必须考虑和

$$1^4+2^4+\cdots+n^4.$$

要求出这个和来已经比上面困难了,如果更一般,考虑曲线 $y=x^m$(m 是整数)与 x 轴及 $x=a$ 围成的曲边三角形的面积,方法不变,则必须考虑和

$$1^m+2^m+\cdots+n^m.$$

而这个和是不太好求的,于是就得另想办法. 我们来考虑曲线 $y=x^4$ 与 x 轴及 $x=a, x=b$ 之间的面积 $ACDB$(图 1.12),把 CD 仍分成 n 段,分点是

$$(C =) M_0, M_1, M_2, \cdots, M_{n-1}, M_n (= D).$$

如果 $OC = a, OD = b$，我们这样来选取 $M_1, \cdots, M_n$，使

$$OM_1 = aq, \quad OM_2 = aq^2, \cdots, OM_n = aq^n.$$

这里 $q = \sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$，于是

$$M_1C = a(q-1), M_2M_1 = aq(q-1),$$

$$M_3M_2 = aq^2(q-1), \cdots, M_kM_{k-1} = aq^{k-1}(q-1), \cdots,$$

$$M_nM_{n-1} = aq^{n-1}(q-1).$$

这样，CD 之间并不是等分的，而是越靠近 C 分得越小，越靠近 D 分得越大，但是当分点越来越多，即越分越细时，每一段的长都趋于零.

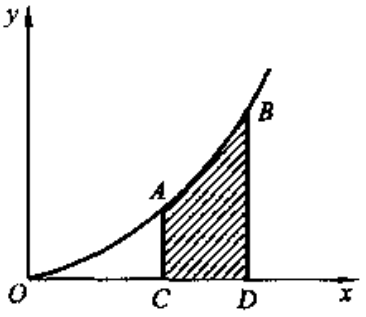

图 1.11

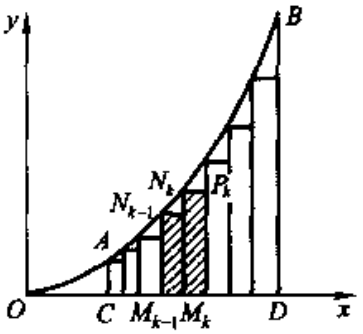

图 1.12

这样分割后，矩形 $M_{k-1}N_{k-1}P_kM_k$ 的面积就是

$$aq^{k-1}(q-1)(aq^{k-1})^4 = (q-1)(aq^{k-1})^5.$$

把这些矩形的面积加起来就得到曲边三角形面积的近似值：

$$S_n = (q-1)(aq^{1-1})^5 + (q-1)(aq^{2-1})^5 + \cdots + (q-1)(aq^{n-1})^5$$

$$= (q-1)a^5(1 + q^5 + \cdots + q^{5(n-1)}) = (q-1)a^5\frac{q^{5n}-1}{q^5-1}.$$

但 $q^n = b/a$，所以

$$S_n = a^5\frac{\left(\dfrac{b}{a}\right)^5 - 1}{\dfrac{q^5-1}{q-1}}.$$

当 $n \to \infty$ 时，q 显然趋于 1，故 $\dfrac{q^5-1}{q-1} = q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ 当 $n \to \infty$ 时趋于 5. 因此当 $n \to \infty$ 时，$S_n \to \dfrac{b^5 - a^5}{5}$.

用同样的办法，可以计算曲线 $y=x^m$（m 为任意整数，但 $m\neq -1$）与 x 轴之间的面积. 从 $x=a$ 到 $x=b$ 之间的面积是 $\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$. 至于 $m=-1$，即 $y=1/x$ 的情形，可以看出应用上面的分割办法仍旧不能得到什么结果，我们将在 1.2.3 节中仔细讨论这个问题.

1.2.2 定积分的定义

前面我们已经考察了几个具体的函数所表示的曲线与 x 轴之间的面积的计算. 每一个这样的图形，实际上是曲边梯形. 所谓曲边梯形，就是由直线 $x=a$，$x=b$，x 轴及一条曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形. 现在再来更一般地考察由任意连续函数 $y=f(x)$ 所描绘的曲线组成的曲边梯形的情形，不妨假定 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 $\geqslant 0$. 如同前一段中一样，先把 $[a,b]$ 分成 n 份（可以相等，也可以不相等）（图 1.13），也即插入分点：

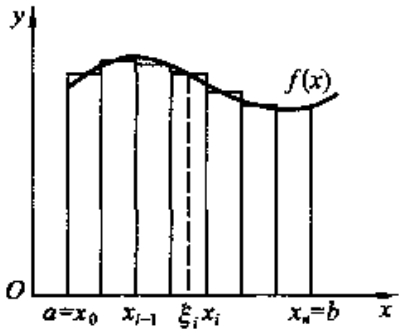

图 1.13

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

以每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度为底，$f(\xi_i)$ 为高（ξ_i 是小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中任意一点）作矩形，则其面积为 $f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$，如此可得 n 个矩形，它们的面积之和为

$$f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}).$$

为了方便起见，记作

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}).$$

它是我们所要求的面积 S 的一个近似值. 凭直观可以知道，把区间 $[a,b]$ 分得越细，则所得矩形的面积之和就越接近于 S. 因此，只要把区间 $[a,b]$ 分得充分细，和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{1}$$

就可和真正的面积 S 接近到任意需要的程度. 换句话说，若把区间 $[a,b]$ 无限细分，则式(1)的极限就是 S. 我们就把式(1)的极限定义为曲边梯形的面积，记这 n 个小段 $(x_1-x_0),\cdots,(x_n-x_{n-1})$ 中的最长者为 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x-x_{i-1})=\lambda$，则有

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}). \tag{2}$$

因此，求曲边梯形面积的问题就归结到求上述这种类型的极限.

我们再来考察几个物理方面的例子.

大家知道,如果一个物体以不变的速度 v 沿一条直线运动,则物体在某一段时间间隔 $[t_0,T]$ 内所走的距离为

$$s = v(T - t_0).$$

如果物体不是以常速运动,而是以变速 $v=f(t)$ 沿直线运动,物体在时间间隔 $[t_0,T]$ 内所走的路程是多少? 这是一个新问题.

我们把区间 $[t_0,T]$ 分成 n 份,插入分点 $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$. 当区间分得很细时,由于 $[t_{i-1},t_i]$ 很小,就有理由设想速度 $v=f(t)$ 在这个时间间隔内不可能有多大的变化,因此在 $[t_{i-1},t_i]$ 上可以近似地把速度看成不变的,并且可以把 $[t_{i-1},t_i]$ 内任一时刻 $t=\xi_i$ 的速度 $v=f(\xi_i)$ 看成是 $[t_{i-1},t_i]$ 内每一时刻的速度,因此在时间间隔 $[t_{i-1},t_i]$ 内物体所走的路程近似地等于

$$f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

在整个时间间隔 $[t_0,T]$ 内所走的路程

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{3}$$

记这 n 个小段的时间 $(t_1 - t_0),\cdots,(t_n - t_{n-1})$ 中的最长者为 $\max\limits_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1}) = \lambda$,显然可以看出,当区间 $[t_0,T]$ 被分得越细时,上面的近似就越精确. 若把区间 $[t_0,T]$ 无限分细,即令 $\lambda\to 0$,则和式(3)的极限就等于所要求的路程:

$$s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{4}$$

于是已知物体运动的速度 $v=f(t)$,求物体所走路程的问题也归结到计算形如(2)的和式的极限.

再来考察功的例子. 已经知道,如果物体在常力作用下沿直线运动,这时所做的功 A 就是力 F 与位移 s 的乘积,即 $A = F\cdot s$. 如果作用的力不是一个常数,而是随着每点位置的不同而变化的,即 F 是 s 的函数,那么在某一段距离 $[s_0,s]$ 之间所做的功是多少呢?

与以前一样,把区间分成 n 份,即插入分点 $s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = s$,当我们把区间分得很细时,由于 $[s_{i-1},s_i]$ 很小,可以认为 $F = F(s)$ 在这段路程 $[s_{i-1},s_i]$ 中不可能有多大变化,而可近似地看作常量,并且可以把 $[s_{i-1},s_i]$ 内任一点 $s=\eta_i$ 上的力 $F = F(\eta_i)$ 看成 $[s_{i-1},s_i]$ 中每一点处所作用的力,因此在这段路程中,所做的功近似地为

$$F(\eta_i)(s_i - s_{i-1}).$$

在整个路程 $[s_0,s]$ 中,所做的功近似地为

$$\sum_{i=1}^{n} F(\eta_i)(s_i - s_{i-1}). \tag{5}$$

分割愈细,近似愈精确,如果无限分细,即令 $\lambda \to 0$,而 $\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(s_i - s_{i-1})$,则(5)的极限即为我们所求的功,

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\eta_i)(s_i - s_{i-1}). \tag{6}$$

因此,功 A 的计算也归结为求形如(2)的和式的极限.

从上面所举的这些例子来考察,尽管问题来自不同的领域,但解决它们的方法却完全一样,即归结到计算一个特殊构造的极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \text{(其中 } \xi_i \text{ 是}[x_{i-1}, x_i] \text{ 中任一点)}.$$

以后我们还会看到,不仅求曲边梯形的面积、变力所做的功、变速运动的路程等问题,都可归结到这样一个极限,还有很广泛的一类实际问题的求解最后也归结到计算这样一个极限. 为此,有必要将它们的共同特点抽象出来,阐明概念,进行深入的讨论.

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数,以 T 表示用点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 来分区间 $[a,b]$ 的任意一种分法,对于这个分法,作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{7}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$,而 ξ_i 就是小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中任一点,称和数(7)为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和. 显然,这个和数既与分法 T 有关,又与 ξ_i 的取法有关. 但如果我们把小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中最大一个的长度记作 $\lambda(T)$,即令 $\lambda(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$,那么,当 $\lambda(T) \to 0$ 时,如果这些不同的和,都会趋向同一极限值 I. 这个值 I 就称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分,记作

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

"$\int$" 称为积分号,表示和的意思,$f(x)\,\mathrm{d}x$ 则相应于 $f(\xi_i)\Delta x_i$,称为被积表达式,积分号下的函数 $f(x)$ 称为被积函数,x 称为积分变量,a 与 b 分别称为积分的下限与上限.

但是在什么情况下,定积分是存在的? 即定积分的存在性定理,这将在第九章 9.3 节中进行仔细的讨论.

从定积分的定义可以看出:定积分所涉及的是函数 $f(x)$ 在整个积分区间 $[a,b]$ 上的一个整体性质,即定积分的值与函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中的每一段都

有关.

从定积分的定义还可以看出:函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分的数值,只与函数 $f(x)$ 本身及区间 $[a,b]$ 有关,而与积分变量的符号无关,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi = \cdots.$$

有了定积分的定义之后,我们知道在 1.2.1 节中所计算的是:

(1) $\int_0^a x^2\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$;

(2) $\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{b^3 - a^3}{3}$;

(3) $\int_a^b x^4\mathrm{d}x = \frac{b^5 - a^5}{5}$;

(4) $\int_a^b x^m\mathrm{d}x = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$. ($m$ 为不等于 -1 的整数)

此外,求曲线 $y=f(x)$ 及直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围成的曲边梯形的面积就成为求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;求变速直线运动从时间 t_0 到 T 的位移就成为求定积分 $\int_{t_0}^T v(t)\mathrm{d}t$,这里 $v(t)$ 为变速;求变力作用下的直线运动从始点 s_0 到 s 所做的功,就成为求定积分 $\int_{s_0}^s F(s)\mathrm{d}s$,这里 $F(s)$ 为变力.

在定义定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的时候,规定 $a<b$,至于 $a\geqslant b$ 时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}(x)$ 表示什么意义还没有明确指出,现在我们规定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \text{其中 } a<b,$$

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

从定积分的定义立刻得到以下的性质:

1° $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$;

2° $\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,其中 c 为任意常数;

3° 不论 a,b,c 三点的相互位置如何,恒有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x;$$

4° 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\leqslant g(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx,$$

特别，若在$[a,b]$上，$m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

1°～4°都是显然的，不加以证明了.

5° $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$

事实上，由不等式

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

得到 $$-\int_a^b |f(a)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

此即 $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

这个性质和不等式$|a+b| \leqslant |a| + |b|$相当，也可以从定积分定义直接证明.

6° 对区间$[a,b]$上的任一连续函数$f(x)$，在$[a,b]$上一定有一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

事实上，若m,M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值和最大值，则$m \leqslant f(x) \leqslant M\ (a \leqslant x \leqslant b)$. 由4°得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

即 $$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

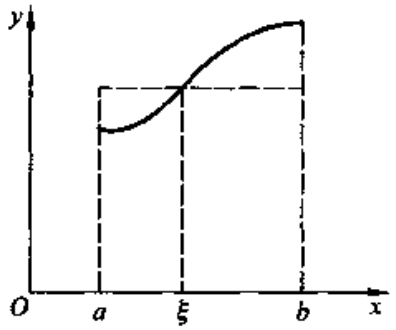

图 1.14

记$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$，则$m \leqslant \mu \leqslant M$. 由于$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，而$m,M$分别为$f(x)$在这区间上的最小值和最大值，故根据连续函数的性质，在区间$[a,b]$上一定有一点ξ，使得$f(\xi) = \mu$，即

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi),$$

亦即 $$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

这叫做积分中值定理，它有明显的几何意义：对于任意的曲边梯形来说，总

存在一个以 $b-a$ 为底，以曲边上一点 ξ 的纵坐标 $f(\xi)$ 为高的矩形，其面积就等于曲边梯形的面积(图 1.14).

1.2.3　对数函数 $y=\ln x$

在 1.2.1 节中，讨论了由曲线 $y=x^m$ 与 $x=a, x=b$ 及 x 轴组成的曲边梯形的面积，并且指出它的值是 $(b^{m+1}-a^{m+1})/(m+1)$，这里 m 为任意整数，但 m 不能等于 -1. 当 $m=-1$ 时怎样呢？先来考察一个具体的物理问题：封闭在圆柱筒中的理想气体膨胀时推动活塞，设气体体积从 V_0 膨胀至 V_1，且假定膨胀时温度不变，现在来求气体压力对活塞所做的功(图 1.15).

设活塞的面积为 A，活塞移动的方向取作 x 轴的正向，于是当理想气体的体积从 V_0 膨胀到 V_1 时，活塞从 $s_0=\dfrac{V_0}{A}$ 处移动到 $s=\dfrac{V_1}{A}$，如果活塞在 $x=s_i$ 处作微小移动 Δs_i，到达 $x=s_i+\Delta s_i$ 处，这时所做的功近似地等于

$$Ap(s_i)\Delta s_i$$

(图 1.16). 这里 $p(s_i)$ 表示活塞在 $x=s_i$ 时的压强. 现在活塞从 s_0 移动到 s，由定

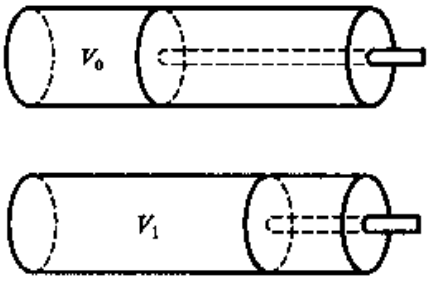

图 1.15

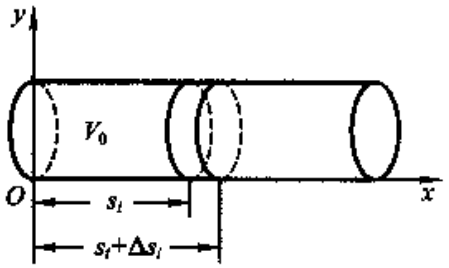

图 1.16

积分的定义，所做的功为

$$\int_{s_0}^{s} Ap(s)\,\mathrm{d}s = A\int_{s_0}^{s} p(s)\,\mathrm{d}s.$$

我们知道，理想气体的物态方程为

$$pV = RT,$$

这里 V 表示体积，T 表示温度，R 为一常数，由此有

$$p = RT\frac{1}{V}.$$

但 $V=As$，所以 $p=\dfrac{RT}{A}\cdot\dfrac{1}{s}$. 于是所要求的功是

$$A\int_{s_0}^{s}\frac{RT}{A}\cdot\frac{1}{s}\mathrm{d}s = RT\int_{s_0}^{s}\frac{1}{s}\mathrm{d}s.$$

因此问题就归结为求形如 $\int_a^b \frac{1}{s}\mathrm{d}s$ 的积分.

曲线 $r=\frac{1}{s}$ 是双曲线. 由 $r=\frac{1}{s}$, s 轴, 以及 $s=1$, $s=x$ 所围成的面积记为 $\ln x$, 即

$$\int_1^x \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \ln x \quad (x>0)$$

(图 1.17). 显然 $\int_1^x \frac{1}{s}\mathrm{d}s$ 是 x 的连续函数, 且随 x 单调增加. 特别地, 记使 $\ln x = 1$ 的 x 的值为 e, 即 $\ln \mathrm{e} = 1$, 或 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = 1$. 这样的 e 是能找得到的, 因为从图 1.18 可以看出,

$$\int_1^4 \frac{1}{s}\mathrm{d}s > \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{13}{12} > 1.$$

可是 $\ln x$ 到底是个什么函数? e 到底是怎样的一个数呢?

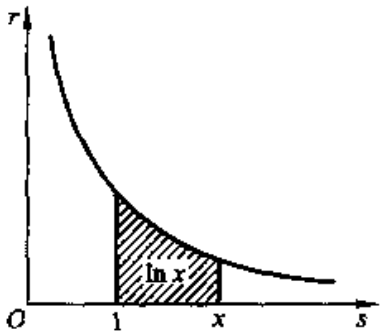

图 1.17

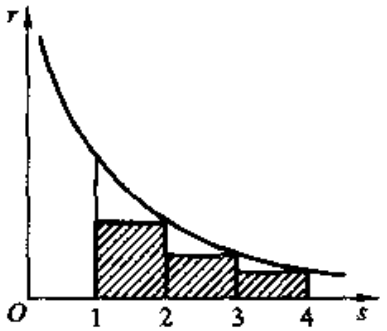

图 1.18

在 Os 轴上取三点, $x_1>0$, $x_2>0$, x_1x_2, 可以证明永远成立着

$$\ln x_1x_2 = \ln x_1 + \ln x_2.$$

这是因为

$$\ln x_1x_2 = \int_1^{x_1x_2} \frac{1}{s}\mathrm{d}s,$$

由 1.2.2 节中定积分的性质 3°, 知道

$$\int_1^{x_1x_2} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_1^{x_1} \frac{1}{s}\mathrm{d}s + \int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{1}{s}\mathrm{d}s.$$

现在来计算 $\int_{x_1}^{x_1x_2} \frac{1}{s}\mathrm{d}s$. 将 $[x_1, x_1x_2]$ (不妨假定 $x_2>1$, 不然考虑 $[x_1x_2, x_1]$) 分成 n 等份, 于是

$$\int_{x_1}^{x_1x_2}\frac{1}{s}\mathrm{d}s=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_1+\dfrac{x_1x_2-x_1}{n}}+\frac{1}{x_1+2\dfrac{x_1x_2-x_1}{n}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x_1+n\dfrac{x_1x_2-x_1}{n}}\right]\frac{x_1x_2-x_1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\dfrac{x_2-1}{n}}+\frac{1}{1+2\dfrac{x_2-1}{n}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+n\dfrac{x_2-1}{n}}\right]\frac{x_2-1}{n}=\int_1^{x_2}\frac{1}{s}\mathrm{d}s.$$

因此　$$\int_1^{x_1x_2}\frac{1}{s}\mathrm{d}s=\int_1^{x_1}\frac{1}{s}\mathrm{d}s+\int_1^{x_2}\frac{1}{s}\mathrm{d}s,$$

即　$$\ln x_1x_2=\ln x_1+\ln x_2.$$

特别取 $x_2=\dfrac{1}{x_1}$，则

$$\ln 1=\ln x_1+\ln x_2=\ln x_1+\ln\frac{1}{x_1},$$

而　$$\ln 1=\int_1^1\frac{1}{s}\mathrm{d}s=0,$$

所以　$$\ln\frac{1}{x_1}=-\ln x_1.$$

再取 $x_2=x_1=x$，则

$$\ln x^2=\ln x+\ln x=2\ln x.$$

于是继续有

$$\ln x^3=\ln(x^2\cdot x)=\ln x^2+\ln x=2\ln x+\ln x=3\ln x,$$

……

$$\ln x^n=\ln(x^{n-1}\cdot x)=\ln x^{n-1}+\ln x=(n-1)\ln x+\ln x=n\ln x.$$

因此，对于正整数 n，我们有

$$\ln x^n=n\ln x.$$

若 k 为负整数，$k=-n$（n 为正整数），由于

$$\ln x^k=\ln\frac{1}{x^n}=-\ln x^n=-n\ln x=k\ln x,$$

所以对于所有整数 β,都有

$$\ln x^{\beta} = \beta \ln x.$$

特别取 $x_1 = x_0^{1/m}$,m 为整数,则 $x_0 = x_1^m$,于是

$$\ln x_0 = \ln x_1^m = m \ln x_1 = m \ln x_0^{1/m},$$

即

$$\ln x_0^{1/m} = \frac{1}{m} \ln x_0.$$

在上式中取 $x_0 = x^n$,n 为整数,则

$$\ln x^{\frac{n}{m}} = \frac{1}{m} \ln x^n = \frac{n}{m} \ln x,$$

即对于任意有理数 μ,我们有

$$\ln x^{\mu} = \mu \ln x.$$

对于任意一个无理数 α,我们一定能够找到两个有理数列

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \text{及} \ \alpha_1', \alpha_2', \cdots$$

使得

$$\alpha_n < \alpha < \alpha_n',$$

且

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \lim_{n \to \infty} \alpha_n' = \alpha.$$

若 $x > 1$,则从 $\ln x$ 的定义立刻得到

$$\ln x^{\alpha_n} < \ln x^{\alpha} < \ln x^{\alpha_n'},$$

此即

$$\alpha_n \ln x < \ln x^{\alpha} < \alpha_n' \ln x.$$

两边取极限,即得

$$\ln x^{\alpha} = \alpha \ln x.$$

特别取 $x = e$,于是有

$$\ln e^{\alpha} = \alpha \ln e = \alpha,$$

所以 $\ln x$ 原来就是以 e 为底的对数函数,即 $\ln x$ 就是 $\log_e x$,即

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{s} ds = \log_e x.$$

同样可以证明当 $0 < x \leqslant 1$ 时,上式必成立. 至于 e 的数值将来再仔细计算,可以证明,e 实际上是一个无理数,它等于

$$2.718\ 28\cdots.$$

以 e 为底的对数叫做自然对数,区别于以 10 为底的常用对数,以后我们所说的对数函数是指的 $\ln x$.

关于定积分理论的进一步深入地讨论,将在本书第九章 9.3 节中进行.

习题 1.2

1. 已知质点的运动速度 $v = t + 4$ m/s,试求质点在前 10 s 内所走的路程.

2. 指出(不计算)下列积分哪个较大?

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{11}^{15} \lg x\mathrm{d}x$ 和 $\int_{11}^{15} (\lg x)^2\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\mathrm{d}x$ 和 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)^2\mathrm{d}x$.

3. 求证

$$\int_a^b x^3\mathrm{d}x = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

4. 求证

$$\int_a^b x^{-2}\mathrm{d}x = \frac{b^{-1} - a^{-1}}{-1}.$$

5. 求证当 m 为不等于 -1 的整数且 $[a,b]$ 不含零点时,

$$\int_a^b x^m\mathrm{d}x = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

6. 放射性物体的分解速度 v 是时间的函数,$v = v(t)$,试表示放射性物体由时间 T 到 T_1 所分解的质量 m:(1) 用有限和表示其近似值,(2) 用定积分表示其准确值.

7. 试证

$$\int_0^{10} \frac{1}{x^3 + 16}\mathrm{d}x \leqslant \frac{5}{8}.$$

8. 已知作用在作直线运动的质点上的力是 $F = s^2 + 1$,试求从距离 1 到 10 之间所做的功.

1.3　微商与微分

1.3.1　曲线的切线

在上一节中已经介绍了这门课程的主要矛盾的一面,即定积分的概念. 在这一节中,我们将介绍它的另一面. 微分的概念. 先介绍微商的概念,从曲线求切线说起.

在中学里我们只知道圆的切线是定义为与圆只有一个交点的直线. 这种定义只有对圆这样一类曲线才适用. 例如,考虑抛物线 $y = x^2$,这时 x 轴,y 轴和抛物线都只有一个交点,难道说 y 轴也是抛物线的切线吗? 这显然是不对的. 因此,对于一般的曲线,究竟如何来定义它的切线还是一个新问题. 为了解决这个

问题，我们要用极限的想法. 设曲线 C(图 1.19)上一点 P 的坐标为$(x_0, f(x_0))$，在曲线 C 上另取一点 P'，设其坐标为$(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$. 连接点 P 和 P'的直线就是曲线 C 的一条割线，它的斜率显然是

$$\tan\varphi = \frac{P'Q}{PQ} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

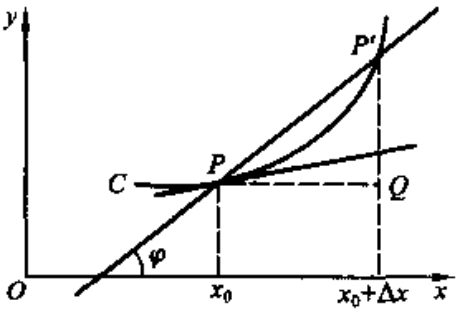

图 1.19

如果令点 P'沿着曲线 C 移动并无限地接近于点 P，那么割线 PP'亦将随之而转动. 由于当 P'无限地接近于 P 时，$\Delta x\to 0$，所以割线 PP'的斜率亦将趋于极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (\text{记作 } k).$$

这就是说，当 P'无限地接近 P 时，割线 PP'必无限地接近某一极限位置，处于这极限位置的直线就叫做曲线 C 在点 P 的切线.

切线的斜率既然知道，根据解析几何中的点斜式，可以立刻写出它的方程：

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

这就是通过曲线 $y=f(x)$ 上一点(x_0, y_0)的切线的方程.

例 求抛物线 $y=x^2$ 在点(2,4)处的切线方程.

解 先算 $f(x)=x^2$ 在点(2,4)的斜率，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = 4,$$

所以在点(2,4)处的切线方程为

$$y - 4 = 4(x - 2),$$

即

$$4x - y - 4 = 0.$$

从这里可以看出，求曲线 $y=f(x)$ 在一点的切线问题，实际上就是求下列极限值的问题：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

1.3.2 速度、密度

再来看两个物理方面的例子.

一个质点沿着直线运动，设已知质点从始点开始走过的路程 s 与经历的时间 t 的函数关系为 $s=s(t)$，这称为质点的运动规律. 我们来研究质点运动的快

慢问题. 质点在时刻 t_0 到时刻 t 这段时间间隔内走过的路程为 $s(t)-s(t_0)$，比值 $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}=\bar{v}(t)$ 表示质点在时间间隔 $[t_0,t]$ 内平均的快慢程度，称为质点在时间间隔 $[t_0,t]$ 内的“平均速度”，它显然是一个以连续变量 t 为自变量的函数. 由于运动一般是非均匀的，即在相等的时间间隔内所走过的路程并不相同，因此 $\bar{v}(t)$ 还不能精确地表达质点在 t_0 那个瞬时的动态；但很明显，间隔 $[t_0,t]$ 越短，$\bar{v}(t)$ 就越接近于那个瞬时的动态，当时间间隔 $[t_0,t]$ 无限缩短，也就是让 t 无限接近于 t_0 时，平均速度 $\bar{v}(t)$ 所趋向的极限 $v(t_0)$ 就表达了质点在时刻 t_0 的“瞬时速度”，因此我们要计算极限

$$\lim_{t\to t_0}\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}. \tag{2}$$

再来看一个例子. 设有一条由某种物质做成的细杆 AB（图 1.20），用 x 表示杆上从端点 A 到点 M 处的长度，当然，AM 这一段杆的质量 m 是 x 的函数

$$m=m(x).$$

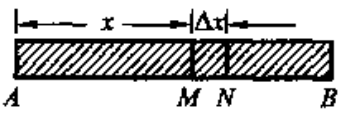

图 1.20

假定杆是不均匀的，怎样确定在点 M 处杆的线密度呢？取一个和它相邻的点 N，并命 $MN=\Delta x$，那么由 M 到 N 这一段杆的质量将是 $m(x+\Delta x)-m(x)$，比值 $\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$ 就表示在 MN 这一段上每单位长度的质量，也就是平均线密度. 当然，这个平均密度还不能代表杆在 M 处的密度，但当 Δx 充分小时，这个平均密度就能任意接近 M 处的线密度，因此极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x} \tag{3}$$

就表示杆在 M 处的线密度，这显然又是(1)型的极限.

从求曲线在一点上的切线，以及上面所举的两个例子来看，问题来自不同的领域，但解决的方法却完全一样，即计算(1)型的极限. 也就是(1)型的极限表征着自然界中很多不同现象在量方面的共性，因此有必要从这些具体问题中把它抽象出来加以研究，再反过来去解决这类具体问题.

1.3.3　微商的定义

设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的一个函数，x_0 是这个区间内的一点，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，我们就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，并称这极限为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的微商（或导数），记为 $f'(x_0)$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

显然 $f'(x_0)$ 的值与点 x_0 有关，当点 x_0 在区间 $[a,b]$ 内变化时，$f'(x_0)$ 也将跟着变化. 因此，如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内每点都可微，那么 $f'(x)$ 便是一个新的函数，称为 $f(x)$ 的导函数.

求已知函数 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$ 的运算，称为微商运算.

我们称 Δx 这个量为自变量 x 的改变量，而称差

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 x 点的相应的改变量. 函数的改变量和自变量改变量的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称为函数 $f(x)$ 的差商，因此微商

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

就是当自变量改变量 $\Delta x\to 0$ 时差商的极限. 应当注意，这里 $\frac{dy}{dx}$ 是一个独立的记号，它表示函数 $f(x)$ 在点 x 的微商，现在我们还不能把它当成一个分数来看待，必须把它看成一个整体. 将来要赋予 dy, dx 以独立的意义，到那时，就可以把它理解为 dy, dx 之商了.

从微商的定义可以看出：曲线在一点的切线的斜率，就是函数在这一点的微商；运动质点在时刻 t_1 的瞬时速度，就是 $s(t)$ 在 t_1 的微商；求杆在一点的线密度，就是求质量 $m(x)$ 对 x 的微商. 微商所刻画的，实际上是函数关系中因变量相对于自变量的变化率.

从微商的定义可以看出：微商所涉及的是函数的“局部”性质，也就是说，函数 $y=f(x)$ 在一点 x_0 处是否可微，如果可微，它在该点的微商等于多少，只与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其近旁的性质有关，而与其他地方无关.

从微商的定义还可以看出：如果函数 $y=f(x)$ 在一点 $x=x_0$ 处可微，则一定在这一点连续. 这是因为

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\Delta x,$$

令 $\Delta x\to 0$，两边取极限，由于 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 存在，所以等式的右边显然趋于零，故 $\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0$，即 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 显然，连续也是一个“局部”性质.

例 1　常数的微商等于零，即$\frac{dC}{dx}=0$，此处 C 为常数.

例 2　求 $y=x^n$（n 为正整数）在 $x=x_0$ 处的微商.

解　从定义知道

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^n-x_0^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^n+nx_0^{n-1}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^n-x_0^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx_0^{n-1},$$

即
$$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}(n\text{ 为正整数}).$$

例 3　求 $y=\sin x$ 在 $x=x_0$ 处的微商.

解　从定义知道

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

我们先来证明：$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. 取半径等于 1 的圆，取 α 适合 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 从图 1.21 可以看出，$\triangle OAB$ 的面积大于扇形 OAC 的面积，而扇形 OAC 的面积大于 $\triangle OAC$ 的面积，但 $\triangle OAB$ 的面积是 $\frac{1}{2}\tan\alpha$，扇形 OAC 的面积是 $\frac{1}{2}\alpha$，$\triangle OAC$ 的面积是 $\frac{1}{2}\sin\alpha$，因此

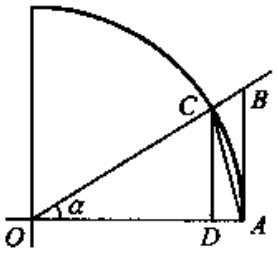

图 1.21

$$\frac{1}{2}\tan\alpha>\frac{1}{2}\alpha>\frac{1}{2}\sin\alpha,$$

这就是
$$\frac{1}{\sin\alpha}>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\tan\alpha},$$

$$1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha.$$

当 $\alpha\to 0$ 时，上面不等式的右边趋于 1，所以当 $\alpha\to 0$ 时，$\frac{\sin\alpha}{\alpha}\to 1$. 同样可以证明 $\alpha<0$，$\alpha\to 0$ 的情形.

有了这点准备，立刻可以看出

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x_0+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x.$$

同样可以推得$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x.$

例 4 求 $y = \ln x$ 在 $x = x_0$ 处的微商.

解 由 1.2.3 节知道 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{s}\mathrm{d}s$, 所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_1^{x_0 + \Delta x} \frac{1}{s}\mathrm{d}s - \int_1^{x_0} \frac{1}{s}\mathrm{d}s}{\Delta x}.$$

由 1.2.2 节定积分的性质 3°,知道上式右边即为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{1}{s}\mathrm{d}s.$$

由 1.2.2 节定积分的性质 6°,知道存在一点 $\xi \in [x_0, x_0 + \Delta x]$,使

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{\xi}(x_0 + \Delta x - x_0) = \frac{1}{\xi}\Delta x,$$

所以
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\xi}\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\xi} = \frac{1}{x_0}.$$

因此我们有$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}.$

在 1.2.3 节中,已经证明了 $\ln x$ 就是以 e 为底的对数函数,即 $\ln x = \log_e x$. 由微商的定义

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\log_e x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x + \Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}.$$

刚才证明了

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x},$$

所以
$$\lim_{\Delta x \to 0} \log_e\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

特别取 $x=1$，$\Delta x=\frac{1}{n}$，由于对数函数是连续函数，因此，从

$$\lim_{n\to\infty}\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1,$$

得出

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

从上述公式中，可求出 e 的近似值. 读者可把它作为一个练习计算之(参阅第九章 9.1.3 节例 3).

1.3.4　微分

和微商概念紧密关联的是微分的概念. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处有微商 $f'(x)$，则自变量的改变量 Δx 与这微商的乘积 $f'(x)\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分，记作

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{4}$$

这里引进的微分与上一节中介绍的定积分是本课程的一对主要矛盾. 读者今后将会逐步看到，本书的全部内容都是围绕着这对主要矛盾而展开的. 现在先来看看微分本身的意义.

在很多具体问题中往往需要计算函数的改变量

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

例如，求内半径为 r，厚度为 Δr 的球壳的体积，我们已知球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. 当半径从 r 增加到 $r+\Delta r$ 时，球的体积增加了

$$\begin{aligned}\Delta V&=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\\&=\frac{4}{3}\pi(3r^2\Delta r+3r\Delta r^2+\Delta r^3)\\&=4\pi r^2\Delta r+4\pi r\cdot(\Delta r)^2+\frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3,\end{aligned}$$

这就是球壳的体积. 当 Δr 相对于 r 来讲很小时，表达式中后两项可以略去不计，ΔV 近似地等于 $4\pi r^2\Delta r$，即 V 的微分.

一般说来，当 $y=f(x)$ 比较复杂时，这个改变量 Δy 不易计算，然而由微商的定义知道

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

若令

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha,$$

则显然有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$，即当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha \to 0$. 由(4)得

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

也就是说，给自变量 x 一个改变量 Δx 时，函数 y 获得的改变量 Δy 由两部分组成：一部分是 $f'(x_0)\Delta x$，即微分；另一部分是 $\alpha \Delta x$. 当 $\Delta x \to 0$ 时，$\alpha \to 0$，所以 $\alpha \Delta x$ 是一个比 Δx 更快地趋向于零的一个量. 也就是，如果 $f'(x_0) \neq 0$，那么当 Δx 很小时，第一部分 $f'(x_0)\Delta x$ 在 Δy 中所占的比例要比第二部分 $\alpha \Delta x$ 大得多，因此可以把第二部分忽略不计，即以微分来近似地替代函数的改变量 Δy，即差分.

再来看这件事的几何意义. 在 $y = f(x)$ 所表示的曲线上取点 $M(x, y)$ 和其邻近的点 $M'(x + \Delta x, y + \Delta y)$（图 1.22）. 作 $MN, M'N'$ 垂直于 x 轴，过 M 点作曲线的切线，它与 $M'N'$ 交于 Q，与 x 轴的交角设为 α，于是从图上可以看出：

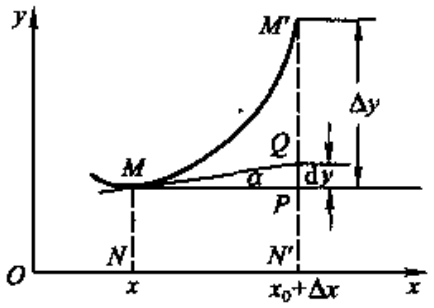

图 1.22

$$MP = \Delta x,$$

$$M'P = M'N' - PN'$$

$$= f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y,$$

$$PQ = MP\tan\alpha = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}y,$$

因此 Δy 是曲线的纵坐标的改变量，而 $\mathrm{d}y$ 是切线的纵坐标的对应改变量. 从图上还可以看出：

$$\Delta y - \mathrm{d}y = M'Q.$$

当 $\Delta x \to 0$ 时，这个量也趋于零，而且趋于零的速度比 Δx 快.

特别取函数 $y = x$，则 $f'(x) = x' = 1$. 因此，函数 $y = x$ 的微分

$$\mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x,$$

即自变量的微分就是自变量的改变量，因此可把(4)改写为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x.$$

上式中的 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 现在都有完全确定的意义，它们分别是自变量 x 和因变量 y 的微分，所以函数的微商可以表示成这两个微分的商：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x).$$

过去我们只把$\frac{dy}{dx}$看作一个记号，它表示函数 y 的微商；现在有了微分的概念，就可以把它当作一个比值，因此函数 $y=f(x)$ 的微商就是函数的微分和自变量的微分之商，这也就是微商这个名称的由来.

显然，微分所涉及的是函数的"局部"性质，即函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分存在与否，等于多少，只与函数在这点及其附近的性质有关，而与其他地方无关.

例 1　常数的微分等于零.

例 2　若 $y=x^n$（n 为正整数），则 $dy=nx^{n-1}dx$.

例 3　若 $y=\sin x$，则 $dy=\cos x dx$.

例 4　若 $y=\ln x$，则 $dy=\frac{1}{x}dx$.

1.3.5　微分中值定理

由微积分基本定理知道，微分与定积分是一对矛盾，因之，有关微分的定理、公式与法则，往往和有关积分的定理、公式与法则相互成对出现. 例如对应 1.2.2 节中的积分中值定理，就有**微分中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可微，则在 (a, b) 中定有一点 ξ，使得**

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

这个定理当然也有它十分明显的几何意义. 事实上，只要把式子改写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

从图 1.23 看出，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 实际上是连接点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的割线的斜率，微分中值定理告诉我们，在 (a,b) 中一定能找到一点 ξ，使曲线在点 $(\xi,f(\xi))$ 上的切线与割线相平行.

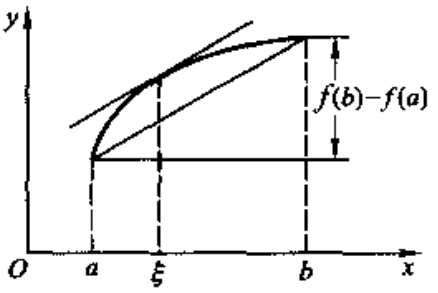

图 1.23

现在来证明微分中值定理，为此要引入极值的概念.

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的值，比它在充分接近 x_0 的一切点的值都大，也就是说，如果能找到一个正数 δ，使得对区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的任意点 x，都有

$$f(x)\leqslant f(x_0),$$

我们就说 $f(x)$ 在点 x_0 取到了极大值. 同样，如果对于区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内的任意点 x，都有

$$f(x) \geqslant f(x_0),$$

我们就说$f(x)$在点x_0取到了极小值.

函数的极大值与极小值统称为极值.使函数取到极值的点称为极值点.

先来证明:如果函数在x_0点可微,且在该点取到极值,那么必有$f'(x_0)=0$.

事实上,设$f(x)$在x_0点取到极大值,则必存在x_0的一个邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$,使得对其中任何x都有

$$f(x) \leqslant f(x_0),$$

亦即对任意$h(0<h<\delta)$,有

$$f(x_0+h) \leqslant f(x_0), \quad f(x_0-h) \leqslant f(x_0).$$

于是得到

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \geqslant 0.$$

在上述两个不等式中,命$h \to 0$就有

$$f'(x_0) \leqslant 0, \quad f'(x_0) \geqslant 0,$$

由此即得

$$f'(x_0) = 0.$$

对于极小值也可仿此证明.

这个结果称为**Fermat定理**.

关于极值问题将在本书第三章第3.3.2节中仔细讨论.

有了上述结果,就可证明如下的结果.这个结果称为**Rolle定理**.若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微,且$f(a)=f(b)$,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi) = 0.$$

证 若m, M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值,则有$\xi, \eta \in [a,b]$满足

$$f(\xi) = M, \quad f(\eta) = m.$$

若$M=m$,则$f(x)$在$[a,b]$上恒为常数,故$f'(\xi)=0$,对所有$\xi \in [a,b]$都成立.

若$M>m$,则M与m两数中至少有一个与$f(a)$(亦即$f(b)$)不相同,不妨设

$$M = f(\xi) > f(a) = f(b),$$

因此$\xi \in (a,b)$显然是极大值点,因之

$$f'(\xi) = 0,$$

若 $f(a)=f(b)>f(\eta)=m$，则 $\eta\in(a,b)$ 显然是极小值点，因之

$$f'(\eta)=0.$$

有了这些准备，就可以来证明微分中值定理.

考虑函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad x\in[a,b],$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且有

$$\varphi(a)=\varphi(b).$$

故由 Rolle 定理，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$. 对 $\varphi(x)$ 的表达式求导，立即得到

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

最后要指出：这里给出的微分中值定理与 1.2.2 节中所给出的积分中值定理，尽管形式上完全不相同，且有完全不同的几何意义. 积分中值定理说：曲边梯形的面积等于一个矩形的面积；微分中值定理说：可以作一条切线与一条割线相平行. 尽管如此，重要的是：这两条定理实质上是说的同一件事，不过用不同形式来表达而已，一个是用微分形式，一个是用积分形式. 为了说清楚这一点，这里用另一个符号来叙述微分中值定理：

若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 上可微，则在 (a,b) 中一定存在一点 ξ，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi).$$

如果在上述定理中，取 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，那么上述定理中的等式就成为积分中值定理中的等式. 差别仅仅在于在积分中值定理中 ξ 也可能是 a 或 b.

在微分与积分是微积分这门课程的主要矛盾的观点下，**原则上讲，微分中的一条定理或公式，在积分中也应有相应的定理或公式，反之亦然**，即它们之间是相互对应的，即，它们之间，既是对立的（一个是微分的形式，一个是积分的形式），又是统一的（它们表述的往往是同一件事情，是同一件事物的两种不同的表达形式），这一节的中值定理是这样，在下一节中的微积分基本定理也是这样. 说的是同一件事情，而都有两种表达形式，这将不断地出现在今后的一些定理及一些公式中.

在这里所说的中值定理，也叫做 Lagrange 中值定理，这个定理可以很容易地

推广到更为一般形式的中值定理,叫做 **Cauchy 中值定理.**

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的连续函数,且在 (a,b) 上可微,且对任一点 $x \in (a,b)$,$g'(x) \neq 0$,则必有 $\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 由 Rolle 定理,因为 $g'(x) \neq 0$,对所有 $x \in (a,b)$,故不能有 $g(a) = g(b)$,把证明 Lagrange 中值定理中的 $\varphi(x)$ 换成

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) - f(a).$$

于是立即可得

$$F(b) - F(a) = 0.$$

由 Rolle 定理知,有 $\xi \in (a,b)$,使得

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x) = 0$$

此即定理的结论.

显然当 $g(x) = x$,Cauchy 中值定理就是 Lagrange 中值定理.

习题 1.3

1. 求 $y = x^3$ 在 $(1,1)$ 处的切线.

2. 已知质点的直线运动方程为 $s = 5t^2 + 6$.

(1) 求 $2 \leqslant t \leqslant 2 + \Delta t$ 时间内的平均速度,设 $\Delta t = 1$,$\Delta t = 0.1$,$\Delta t = 0.01$,$\Delta t = 0.001$;

(2) 从上面平均速度的变化趋势估计在 $t = 2$ 秒这一时刻的瞬时速度;

(3) 由瞬时速度的定义算出在 $t = 2$ 秒的瞬时速度.

3. 有一质量分布不均匀的细杆 AB,长 20 cm,AM 段的质量与从 A 到 M 点的距离的平方成正比,并且已知一段 $AM = 2$ cm 的质量等于 8 g,试求:

(1) $AM = 2$ cm 一段上的平均线密度;

(2) 全杆的平均线密度;

(3) A 点的线密度;

(4) 在任意点 M 处的线密度.

4. 长 30 cm 的非均匀细杆 AB 的质量(g)按规律 $m = 3l^2 + 5l$ 分布,l 表示从 A 算起的一段杆长,试求:

(1) 杆的平均线密度;

(2) 离 A 点 5 cm 处的线密度;

(3) 杆的末端 B 点的线密度.

5. 求曲线 $y = x - \frac{1}{x}$ 在与横轴交点处的切线方程.

6. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1, x_2=3$ 的两点，抛物线上哪一点的切线平行于过这两点所引的割线.

7. 抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线和直线 $3x-y+1=0$ 交成 45°角？

8. 证明双曲线 $xy=a^2$ 的切线与两坐标轴组成的三角形的面积等于常数 $2a^2$.

9. 求曲线 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的交角（即两曲线交点处的切线的夹角）.

10. 当自变量 x 由 $x=1$ 变到 $x=1.02$ 时，函数 $y=x^2$ 的增量 Δy 等于多少？Δy 的主要部分 $\mathrm{d}y$ 等于多少？

11. 设 $y=x^2+x$，计算在 $x=1$ 处，当 $\Delta x=10, 1, 0.1, 0.01$ 时，相应的函数改变量 Δy 和函数的微分 $\mathrm{d}y$. 并观察两者之差 $\Delta y-\mathrm{d}y$ 随着 Δx 减少的变化情况.

12. 一个正方形的边长等于 8 cm，如果每边增加：

(1) 1 cm；(2) 0.5 cm；(3) 0.1 cm，那么正方形的面积分别增加多少？并求这个问题的增量的主要部分.

13. 当 φ 由 $\frac{\pi}{6}$ 变到 $\frac{61}{360}\pi$ 时，求 $y=\sin 2\varphi$ 的微分.

14. 设 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，不求出 $f(x)$ 的导数，试确定方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

15. 设 $P(x)$ 是 n 次实系数多项式. 若 $P(x)$ 的根都是实数，求证：$P'(x)$ 的根也都是实数.

16. 设 $b>a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，求证：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $2\xi(f(b)-f(a))=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

1.4 微积分基本定理

在前两节中已经介绍了构成本课程主要矛盾的两个对立面——定积分和微分，可是为什么它们构成一对矛盾？在本节中就要回答这个问题.

先看一个例子. 回忆在引进定积分概念时，曾经讨论过作变速直线运动的质点的位移. 若 $v(t)$ 表示质点运动的速度，则质点从开始到时刻 t 所作的位移就是定积分 $\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$. 若质点运动的规律为 $s=s(t)$（为简单起见，设 $s(0)=0$），则质点从运动开始到时刻 t 所作的位移又显然是 $s(t)$. 从而有

$$\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = s(t) \quad (=s(t)-s(0)).$$

而在 1.3 节中我们已经知道 $s'(t)=v(t)$，这就是

$$\mathrm{d}s(t) = v(t)\mathrm{d}t,$$

即 $s(t)$ 的微分就是 $v(t)\mathrm{d}t$，而 $v(t)$ 的积分就是 $s(t)$. 因此，在积分符号 $\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$ 中的 $v(\tau)\mathrm{d}\tau$，实际上是 $s(\tau)$ 的微分，所以所谓积分 $\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$ 就是由微分 $v(\tau)\mathrm{d}\tau$

所“累积”而成，$\int_0^t$ 表示从0到t进行“累积”. 也就是作为反映整体性质的定积分是由作为反映局部性质的微分所组成的. 在这里，作为整体的整个位移$\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$可以看成是由每一点的速度$v(\tau)$及无穷小间隔$\mathrm{d}\tau$的乘积$v(\tau)\mathrm{d}\tau$的“累积”. 反过来，在运动过程中质点的速度$v(t)$，瞬时间所作的位移$v(t)\mathrm{d}t$，是由运动规律$s=s(t)$所规定的. 由此可以看出，微分和定积分是局部和整体这一对矛盾在量的方面的一个反映. 下面我们来更一般地叙述这个问题.

微积分基本定理(微分形式) 设函数$f(t)$在区间$[a,b]$上连续，x是$[a,b]$中某一固定点，令

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

则$\Phi(x)$在$[a,b]$上可微，并且

$$\Phi'(x)=f(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

即

$$\mathrm{d}\Phi(x)=f(x)\mathrm{d}x.$$

换句话说，若$f(x)$的积分是$\Phi(x)$，则$\Phi(x)$的微分就是$f(x)\mathrm{d}x$，即$f(t)$的积分的微分就是$f(t)$自己乘上$\mathrm{d}t$. 也就是，作为反映整体性质的积分$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是由作为反映局部性质的微分$\mathrm{d}\Phi=f(x)\mathrm{d}x$所决定.

证 要证明的只是$\Phi'(x)=f(x)$，亦即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x).$$

由$\Phi(x)$的定义有

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t.$$

因为$f(t)$是在$[a,b]$上连续，所以由1.2.2节中的性质6°，即积分中值定理知道：在$[x,x+\Delta x]$之间一定存在一点ξ，使

$$\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x+\Delta x-x)=f(\xi)\Delta x,$$

因此

$$\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi).$$

由于$\xi\in[x,x+\Delta x]$，故当$\Delta x\to 0$时，便有$\xi\to x$；又因为$f(t)$在x点连续，所以$\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$. 因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=f(x).$$

从这条定理还可以得到基本定理的另一形式.

微积分基本定理(积分形式) 设 $\Phi(x)$ 是在 $[a,b]$ 上可微的,且 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x}$ 等于连续函数 $f(x)$,那么成立着

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi(x) - \Phi(a) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

换句话说,若 $\Phi(x)$ 的微分是 $f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)$ 的积分就是 $\Phi(x)$,即 $\Phi(x)$ 的微商的积分就是 $\Phi(x)$ 自己(或相差一常数). 也就是,作为反映局部性质的微分 $f(x)\mathrm{d}x$ 是由作为反映整体性质的积分 $\Phi(x) - \Phi(a)\left(= \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$ 所规定.

证 记 $G(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,那么从前面定理知道 $\dfrac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$,而由 $f(x)$ 的定义知道 $\dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$,因此 $\dfrac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\mathrm{d}\Phi(x)}{\mathrm{d}x} = 0$,此即

$$\frac{\mathrm{d}(\Phi - G)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

记 $F(x) = \Phi(x) - G(x)$,于是有 $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0$. 在 1.3 节中我们已经知道 $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ 表示曲线 $y = F(x)$ 在点 x 的切线的斜率,而现在 $\dfrac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ 在 $[a,b]$ 中处处是零,这意味着所有的切线都与 x 轴平行,这样的曲线除了直线 $y = C$(常数)以外,别的是不可能的,也就是

$$F(x) = \Phi(x) - G(x) = C(\text{常数}),$$

即 $\Phi(x) = G(x) + C$. 特别取 $x = a$,有

$$\Phi(a) = G(a) + C,$$

而由 $G(x)$ 的定义知道 $G(a) = 0$,所以 $C = \Phi(a)$,于是 $\Phi(x) - G(x) = \Phi(a)$,即 $G(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$,这就是我们所要证明的.

微积分的基本定理也称为牛顿 - 莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式.

这两条定理十分清楚地揭露了定积分与微分构成一对矛盾,它们之间是如何对立、如何统一的. 不但如此,还可以立刻得到以下的推论:

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,又若可以找到 $H(x)$,使 $H(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = f(x)$,那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = H(b) - H(a).$$

这样的 $H(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数,且 $f(x)$ 的任意两个原函数之间只可能相差一个

常数. 原函数的全体叫做$f(x)$的不定积分,记作$\int f(x)\,dx$.

显然,不定积分与微商互为逆运算. 像算术中的加法与减法、乘法与除法、乘方与开方一样,构成一对矛盾.

有了这个推论之后,求定积分的问题不再要用以前切条条的办法,而成为求微商的逆运算,即求原函数或不定积分的问题了. 在下一章中我们就要用这个方法来计算定积分.

随便举几个例子:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$\int_1^2 \frac{-1}{x^2}\,dx = \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - 1 = \frac{-1}{2},$$

$$\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$$

第二章

微积分的运算

2.1 微 分 法

2.1.1 微商与微分的计算

在第一章第三节中，我们根据微商的定义，已经算出了如下一些函数的微商：

(i) $\frac{dC}{dx}=0$，这里 C 是常数；

(ii) $\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$，这里 n 是正整数；

(iii) $\frac{d\sin x}{dx}=\cos x$，$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$；

(iv) $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$.

有了这几个简单的、但是最基本的微商公式，再和下面的微商法则结合起来，就可以求出另外许多函数的微商.

若 $u(x)$，$v(x)$ 都是可微函数（以后我们遇到的函数都假设是可微函数而不再一一声明），那么它们的和、差、积、商（假设分母不为零）都是可微的，则

(1) $[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x)$；

(2) $[u(x)-v(x)]'=u'(x)-v'(x)$；

(3) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(4) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$.

(1)与(2)可立刻从微商的定义得到，现在证明(3). 由定义知道

$$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}\right.$$

$$+\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\Big]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

这里用到了函数 $v(x)$ 的连续性.

在(3)中特别取 $u(x)=C$(常数),则得

(5) $[Cv(x)]'=Cv'(x)$

至于(4)也一样可以由定义证明之,留作练习.

例 1 求 $y=\log_a x$ 的微商.

解 由于 $a^y=x$,故 $\ln x=y\ln a$,即 $y=\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

由(5)知道

$$y'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

例 2 求 $y=\tan x$ 的微商.

解 由(4),

$$y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

例 3 求 $y=\sec x$ 的微商.

解 由(4),

$$y'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{(1)'\cos x-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

若 y 是 u 的函数,u 又是 x 的函数,即

$$y=f(u),u=\varphi(x),$$

这时 y 显然是 x 的函数. 这个函数关系是通过中间变量 u 来实现的,故称这种函数关系为复合函数关系,记作 $y=f[\varphi(x)]$.

当自变量 x 有改变量 Δx 时,中间变量 u 相应地有改变量

$$\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x),$$

而当中间变量 u 有改变量 Δu 时,因变量 y 相应地有改变量

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

令 $\Delta x \to 0$,注意这时也有 $\Delta u \to 0$,于是得

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\varphi'(x).$$

因此我们有

(6) 若 $y = f(u), u = \varphi(x)$,则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x).$$

例 4 求 $y = \sin x^3$ 的微商.

解 把 $y = \sin x^3$ 看成是由函数

$$y = \sin u, u = x^3$$

复合而成,由(6)即有

$$y' = \cos u \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3.$$

例 5 求 $y = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{100}$ 的微商.

解 把 $y = \left(x + \frac{1}{x} \right)^{100}$ 看成是由函数

$$y = u^{100} \text{ 及 } u = x + \frac{1}{x}$$

复合而成,由(6)即有

$$y' = 100u^{99}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 100\left(x + \frac{1}{x}\right)^{99}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

例 6 若 $s(t)=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^3$，求 $s'(0)$ 的值.

解 把 $s(t)=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^3$ 看成是由函数

$$s=u^3,u=\frac{1+t}{1-t}$$

复合而成，由(6)即有

$$s'(t)=3u^2\frac{2}{(1-t)^2}=\frac{6(1+t)^2}{(1-t)^4},$$

所以

$$s'(0)=6.$$

上述复合函数的微分法则可以推广到由有限个函数组成的复合函数，例如由函数

$$y=f(u),u=\varphi(v),v=\psi(x)$$

复合而成的复合函数 $y=f[\varphi(\psi(x))]$，对 x 求微商，可以通过下面公式来计算：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x).$$

例 7 求 $y=\sin^3(x+x^2)$ 的微商.

解 把 $y=\sin^3(x+x^2)$ 看成是由函数

$$y=u^3,u=\sin v,v=x+x^2$$

复合而成，于是

$$y'=3u^2\cos v(1+2x)=3(1+2x)\sin^2(x+x^2)\cos(x+x^2).$$

若 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，则 x 也可以看成是 y 的函数. 对于 y 的每个值，可以决定 x 的一个(或多个)值 $x=g(y)$. 称 $x=g(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. 显然 $y=f(g(y))$ 必须成立.

根据复合函数的微商公式(6)，考虑单调且可微函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=g(y)$ 的微商. 由于 $y=f(g(y))$，立刻有

$$1=f'(x)g'(y).$$

若 $f'(x)\neq 0$，此即

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

因此,我们有

(7) 若 $x=g(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,且 $f'(x)\neq 0$,则

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

它有一个简单的几何解释. 在图 2.1 中,$y=f(x)$ 和 $x=g(y)$ 表示同一曲线 C,而

$$\tan\alpha=f'(x),\tan\beta=g'(y),$$

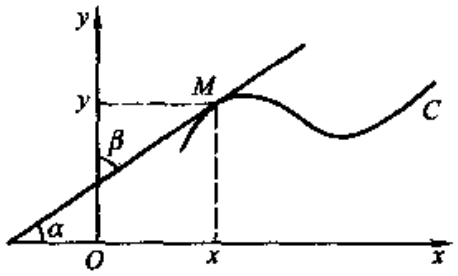

图 2.1

由于 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$,所以 $\tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha}$,即 $g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$.

例 8　证明 $(e^x)'=e^x$.

证　由于 $y=e^x$ 是 $x=\ln y$ 的反函数,故由(7),

$$(e^x)'=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x,$$

同理可以算出

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

例 9　证明 $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$.

证　由于 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数,故由(7)得到

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

这时我们考虑的 y 限于 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. 故 $\cos y>0$,因此在根号前取正号.

又因 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数,所以

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

同理可以算出

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, (\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

在第一章中已经证明了，当 n 为正整数时，$(x^n)' = nx^{n-1}$ 成立，对于 n 为实数亦成立.

例 10 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$，μ 为任意实数.

证 因为 $x^\mu = e^{\mu \ln x}$，故由复合函数的微商公式可得

$$(x^\mu)' = (e^{\mu \ln x})' = e^{\mu \ln x}(\mu \ln x)' = x^\mu \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}.$$

现将上面一些公式列表于下：

1. $(C)' = 0$（C 为常数）；
2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$（μ 为任意实数）；
3. $(\sin x)' = \cos x$；
4. $(\cos x)' = -\sin x$；
5. $(\tan x)' = \sec^2 x$；
6. $(\cot x)' = -\csc^2 x$；
7. $(\sec x)' = \sec x \tan x$；
8. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$；
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$；
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$；
11. $(e^x)' = e^x$；
12. $(a^x)' = a^x \ln a$；
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；
14. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$；
15. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$；
16. $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$.

上面的公式，再加上前面列举的微商法则，为数就不算少，在这数量众多的公式与法则中，究竟哪些是最主要的呢？可以看出，法则中最重要的是(1)，(3)，(6)，即

(1) $[u(x)+v(x)]' = u'(x)+v'(x)$，

(3) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+v(x)v'(x)$，

(6) 若 $y = f(u)$，$u = g(x)$，则

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x).$$

这是因为(2)可以由(1)推出；(4)可以由(3)推出，只要将恒等式

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)v(x) = u(x)$$

两边求导,对恒等式的左边看成两个函数$\frac{u(x)}{v(x)}$与$v(x)$的乘积,求导时应用(3),即可得到(4);(5)是(3)的特例,而(7)是(6)的特例. 公式中最重要的是2,3,11,即

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, (\sin x)' = \cos x, (e^x)' = e^x.$$

因为所有其他公式,都可以由这三个公式及微商运算法则推出.

表中所列的函数以及由它们经过有限次四则运算与有限次复合而成的函数,统称为初等函数,例如:

$$y = \ln\left(\sqrt{3^{2x}+1} + \cos(x^2+1)\right), y = \left(\frac{a^x + \sin x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}, y = x^x$$

等都是初等函数.

有了上面这些基本公式及运算法则,我们就能计算出所有初等函数的微商了.

例11 求幂指函数$y = x^x$的微商.

解 因为$x^x = e^{x\ln x}$,所以

$$y' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)' = x^x(\ln x + 1).$$

同理可以算出一般幂指函数$y = u(x)^{v(x)}$的微商为

$$y' = [u(x)^{v(x)}] = u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

例12 求$y = x^{a^x}(a>0)$的微商.

解
$$y' = (e^{a^x\ln x})' = e^{a^x\ln x}\left(a^x\ln a\ln x + \frac{a^x}{x}\right)$$
$$= a^x x^{a^x}\left(\ln a\ln x + \frac{1}{x}\right).$$

例13 求$y = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$的微商.

解
$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1 + \frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\right]$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

例14 求证不论$x>0$或$x<0$,总有$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

事实上，当 $x>0$ 时 $\ln|x|=\ln x$，所以上式显然成立；当 $x<0$ 时，$\ln|x|=\ln(-x)$，故有

$$(\ln|x|)'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}.$$

例 15 设 $\rho(\varphi)=\frac{1}{2}\arctan\frac{2\varphi}{1-\varphi^2}$，求 $\frac{d\rho}{d\varphi}$.

解 $$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(\frac{2\varphi}{1-\varphi^2}\right)^2}\frac{2(1+\varphi^2)}{(1-\varphi^2)^2}=\frac{1}{1+\varphi^2}.$$

例 16 有一底半径 Rcm，高 $h$cm 的正圆锥形容器. 今以每秒 Acm^3 的速度自顶部往容器内倒水，试求当容器内水位等于锥高的一半时，水面上升的速度(见图 2.2).

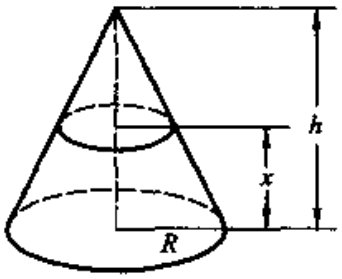

图 2.2

解 命 x 表示时刻 t 时容器内水面的高度，则 x 是 t 的函数，记为 $x=x(t)$. 现在要求当 $x=\frac{h}{2}$ 时，$\frac{dx}{dt}$ 之值.

先计算容器中水量增加的速度，由于容器内的水形成一个高为 x，上下底半径分别为 $\frac{h-x}{h}R$ 和 R 的截锥，故其体积为

$$V=\frac{\pi R^2}{3h^2}[h^3-(h-x)^3].$$

面水量增加的速度就是 V 对 t 的微商

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2\frac{dx}{dt}.$$

另一方面，水量增加的速度显然和倒水的速度相等. 即为每秒 Acm^3，于是

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Ah^2}{\pi R^2(h-x)^2},$$

故当 $x=\frac{h}{2}$ 时，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{4A}{\pi R^2}.$$

从 $\frac{dx}{dt}=\frac{Ah^2}{\pi R^2(h-x)^2}$ 可以看出，x 愈大，$\frac{dx}{dt}$ 也愈大；x 愈小，$\frac{dx}{dt}$ 也愈小. 说明在

水面较低时升高缓慢，而水面较高时，升高很快，这和实际观察是完全一致的.

例 17　一飞机在离地面 2 km 的高度，以 200 km/h 的速度飞临某目标之上空，以便进行航空摄影. 试求飞机飞至该目标正上方时摄影机转动的角速度(图 2.3).

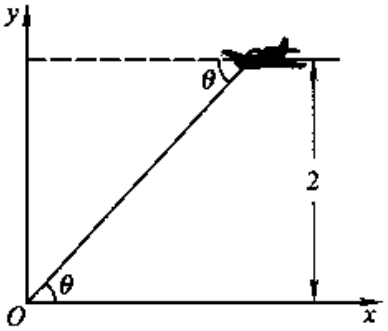

图 2.3

解　我们把该目标取为坐标原点，设飞机和目标的水平距离为 x，显然，它是时间 t 的函数 $x=x(t)$，现在要求出飞机在目标正上方时，$\frac{d\theta}{dt}$之值. 为此先找出 θ 和 x 的关系. 从图 2.3 中可以看出 $\tan\theta=\frac{2}{x}$，所以 $\theta=\arctan\frac{2}{x}$. 于是

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{-2}{x^2+4}\frac{dx}{dt}.$$

但根据题意知道$\frac{dx}{dt}=-200$，这里负号表示 x 在减小，故得

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{400}{x^2+4}.$$

当飞机在目标正上方时，即 $x=0$ 时，$\frac{d\theta}{dt}=100$ 弧度/h，化为角度即为$\frac{d\theta}{dt}=\frac{5}{\pi}$度/s.

在第一章中已经知道，函数 $y=f(x)$ 在 x 点的微分为

$$dy=f'(x)dx.$$

因此算出了函数的微商，即可求得它的微分，例如，$y=\arctan x$，由于$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，所以

$$dy=\frac{1}{1+x^2}dx.$$

又如 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$. 因 $y'=[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，故

$$dy=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

读者不难从微商基本公式表，推出相应的微分基本公式表.

对应于微商的运算法则,我们有以下一些微分运算法则:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = udv + vdu,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

其中 u,v 都是 x 的函数,在商的情况下当然假定 $v \neq 0$.

这些公式可以直接从微分定义推得,例如

$$d(uv) = (uv)'dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu.$$

下面我们再来讨论一下复合函数的微分. 设 $y = f(x), x = \varphi(t)$ 都是可微函数,面已知复合函数 $y = f[\varphi(t)]$ 的微商为

$$y' = f'(x)\varphi'(t),$$

因此

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt,$$

但

$$dx = \varphi'(t)dt,$$

故得

$$dy = f'(x)dx.$$

这就是说,不论 x 是自变量或中间变量,函数 $y = f(x)$ 的微分形式 $dy = f'(x)dx$ 总是不变的. 这一特性称为一阶微分形式的不变性.

2.1.2 高阶微商与高阶微分

前面已讲过,函数 $f(x)$ 的微商 $f'(x)$ 仍然是 x 的函数,对它也可以讨论微商的问题. 如果函数 $f'(x)$ 的微商存在,我们就把它称为函数 $f(x)$ 的二阶微商,记作 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

根据上面的定义,函数 $f(x)$ 在 x 点的二阶微商就是下面的极限

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

假如质点运动的规律为 $s = f(t)$,我们已经知道,它的一阶微商表示质点运动的速度,面二阶微商按照上面的定义应该是速度的变化率,也就是质点运动的加速度. 至于二阶微商的几何意义将在后面介绍.

容易知道,函数 $f(x)$ 的二阶微商 $f''(x)$ 仍是 x 的函数,如果函数 $f''(x)$ 的微商存在,我们就称它为函数 $f(x)$ 的三阶微商,记为 $f'''(x)$ 或 $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$. 依此类推,

一般地说,如果函数$f^{(n-1)}(x)$的微商存在,就称它为函数$f(x)$的n阶微商,记为$f^{(n)}(x)$或$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

显然,求函数的高阶微商,不需要任何新的方法,只要对函数$f(x)$连续进行几次微商运算就行了.

同样,一阶微分的微分称为二阶微分,即

$$d^2y = d(dy).$$

命$y=f(x)$,则$dy=f'(x)dx$. 若$f'(x)$的微商存在,则有

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = f''(x)dx^2.$$

若$f''(x)$的微商存在,还可对二阶微分求微分

$$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)dx^3,$$

得到三阶微分. 依此类推. 一般地说,如果$f^{(n-1)}(x)$的微商存在,则可有n阶微分

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

由于从高阶微商可得高阶微分,故在这一节中对高阶微分不再作单独的讨论.

例1 已知n次多项式为$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,那么

$$y' = a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

由此可见,n次多项式的微商仍是一个多项式,不过它的次数比原来的降低一次. 这样就可以推出,经过n阶微商后就变成一个常数了,即

$$y^{(n)} = n!a_0,$$

因此

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \cdots = 0.$$

也就是说,n次多项式的一切阶数高于n的微商都等于零.

例2 考虑指数函数$y=e^{ax}$. 由于

$$y' = ae^{ax}, y'' = a^2e^{ax}, y''' = a^3e^{ax}, \cdots,$$

因此一般有

$$y^n = a^ne^{ax}.$$

例3 考虑对数函数$y=\ln(1+x)$. 易知

$$y' = \frac{1}{1+x}, y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}, y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \cdots,$$

故 $$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

例 4 对于三角函数 $y=\sin x, y=\cos x$，有公式

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right); (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

我们用归纳法来证明这两个等式. 事实上，

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

因此当 $n=1$ 时公式是正确的. 设 $n=k$ 时也正确，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$(\sin x)^{(k+1)} = [(\sin x)^{(k)}]' = \left[\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]'$$

$$= \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right).$$

这样就证明了第一式，用同样方法可以证明第二式.

如果函数 u 和 v 都有 n 阶微商，那么显然有

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}(C \text{ 为常数}); (u\pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

但两个函数乘积的高阶微商就没有这样简单了. 例如

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

可见当微商的阶数愈高，表达式也就愈复杂. 但仔细观察上面三个式子不难找出它们的规律，即上述等式中右端系数恰好与二项展开式中的系数相同，因此可以用归纳法来证明下面的一般公式：

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots$$

$$+ C_n^r u^{(n-r)}v^{(r)} + \cdots + uv^{(n)},$$

其中 $$C_n^r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

这个公式给出了计算两个函数乘积的高阶微商的法则，把它简写为

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r u^{(n-r)}v^{(r)}, \tag{1}$$

这里 $u^{(0)}=u, v^{(0)}=v$,或是写成微分形式

$$\mathrm{d}^n(uv)=\sum_{r=0}^{n} C_n^r \mathrm{d}^{n-r}u\mathrm{d}^r v.$$

(1) 式称为 **Leibnitz 公式**. 公式(1)和二项式展开公式

$$(u+v)^n=\sum_{r=0}^{n} C_n^r u^{n-r}v^r$$

完全相似,所不同的在于后一公式每个项 $C_n^r u^{n-r}v^r$ 中上角的 $n-r$ 和 r 代表指数,而前一公式中每个项 $C_n^r u^{(n-r)}v^{(r)}$ 中上角的 $(n-r)$ 和 (r) 则代表函数 u 和 v 的微商阶数,$u^{(0)}, v^{(0)}$ 就是函数本身.

例 5 求函数 $y=x^2\cos ax$ 的第 50 阶微商 $y^{(50)}$.

解 令 $u=\cos ax, v=x^2$,由于

$$u^{(n)}=a^n\cos\left(ax+\frac{n\pi}{2}\right); v'=2x, v''=2,$$

$$v'''=v^{(4)}=\cdots=0,$$

所以

$$\begin{aligned} y^{(50)} &= a^{50}x^2\cos(ax+25\pi)+50a^{49}(2x)\cos\left(ax+\frac{49\pi}{2}\right) \\ &\quad +\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2a^{48}\cos(ax+24\pi) \\ &= -a^{50}x^2\cos ax-100a^{49}x\sin ax+2\,450a^{48}\cos ax \\ &= a^{48}[(2\,450-a^2x^2)\cos ax-100ax\sin ax]. \end{aligned}$$

现在来考虑由参数方程所确定的函数的微分法. 设有参数方程

$$x=\varphi(t), y=\psi(t).$$

如果 $x=\varphi(t)$ 的反函数是 $t=\omega(x)$,那么参数方程就确定了 y 是 x 的函数 $y=\psi(\omega(x))$. 根据复合函数的微分法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

当然这里要假定 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 都存在且 $\varphi'(t)\neq 0$.

如果 $\varphi''(t), \psi''(t)$ 都存在,那么由微商公式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 6 求椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处的切线.

解 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应于曲线上点 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. 由于

$$\varphi'(t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-a\sin t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$\psi'(t)\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=b\cos t\big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{b}{\sqrt{2}},$$

所以切线方程为

$$y-\frac{b}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{a}{\sqrt{2}}}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

即

$$bx+ay=\sqrt{2}ab.$$

2.1.3 利用微分作近似计算

我们已经知道,函数 $y=f(x)$ 的改变量 Δy 可用微分 $\mathrm{d}y$ 来近似地表达,即

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y \quad 或 \quad f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x,$$

上式可改写为

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{2}$$

可见函数 $f(x)$ 在 $x_0+\Delta x$ 点的数值,可以通过它在 x_0 点的数值 $f(x_0)$ 和它在该点的微商 $f'(x_0)$ 来近似地表达. 一般来说,$|\Delta x|$ 愈小,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 的相差也愈小,所以这个公式在 $|\Delta x|$ 很小时,常被用来作近似计算.

例 1 证明当 $|x|$ 很小时,有近似等式

$$(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x \quad (\alpha 为任意实数). \tag{3}$$

证 设 $f(x)=(1+x)^\alpha$,令 $x_0=0,\Delta x=x$,于是

$$f(x_0 + \Delta x) = (1 + x)^{\alpha}, f(x_0) = 1, f'(x_0) = \alpha,$$

代入(2)即得

$$(1 + x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha x.$$

利用上面的公式,可以求一些近似值. 例如,求$\sqrt[5]{245}$的近似值,由于

$$\sqrt[5]{245} = (243 + 2)^{\frac{1}{5}} = \left[243\left(1 + \frac{2}{243}\right)\right]^{\frac{1}{5}} = 3\left(1 + \frac{2}{243}\right)^{\frac{1}{5}},$$

所以,取$x = \frac{2}{243}$,代入(2)即得

$$\sqrt[5]{245} \approx 3\left(1 + \frac{1}{5}\frac{2}{243}\right) = 3.004\ 9.$$

例 2 求 $\sin 30°13'$的近似值.

解 $\sin 30°13' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{60 \times 180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{10\ 800}\right)$.

取$f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}, \Delta x = \frac{13\pi}{10\ 800}$,代入公式(2)即得

$$\sin 30°13' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{13\pi}{10\ 800}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{13\pi}{10\ 800}$$

$$= 0.503\ 3.$$

例 3 某挂钟的周期为 1 s 的摆,在冬季缩短了 0.01 cm,这钟每天大约快多少?

解 单摆的周期为

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长,g 是重力加速度. 钟摆原周期为 1 s,故由上式可知摆的原长为

$$l = \frac{g}{(2\pi)^2}.$$

由于摆缩短了 0.01 cm,因而周期也要缩短. 现在先计算周期究竟缩短了多少,为此,要计算 ΔT. 根据单摆周期公式,有

$$\mathrm{d}T = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{l}}\mathrm{d}l = \frac{\pi}{\sqrt{g}}\frac{1}{\sqrt{l}}\Delta l.$$

现在 $$\Delta l = -0.01, l = \frac{g}{(2\pi)^2}.$$

故有 $$\Delta T \approx \mathrm{d}T = \frac{2\pi^2}{g}(-0.01) = -0.000\ 2\ \mathrm{s}$$

这就是说,由于摆缩短了 0.01 cm,摆的周期约缩短 0.000 2s,即每秒约快 0.000 2s,因此每天约快

$$86\ 400 \times 0.000\ 2 = 17.28\ \mathrm{s}.$$

微分的另一应用是求形如方程 $f(x)=0$ 的根的近似值.

假设已经知道这个方程的根 α 的一个近似值 x_0,命 $\Delta x = \alpha - x_0$,则有

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx f(x_0 + \Delta x) = 0.$$

因此我们有

$$\Delta x \approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

从而得

$$\alpha \approx x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

这样得到的数 x_1 可以看作最初的近似值 x_0 的一个改进. 对 x_1 又可作同样的改进,得

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

等等. 只要 x_0 取得足够好,用这个方法一般可以很快地接近方程的根 α.

由于 x_1 这个数就是函数 $y=f(x)$ 的图形在点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线和 x 轴的交点的坐标,因此这一方法称为切线法.

初始近似值 x_0 可以根据函数的图形观察出来,或可用下面的方法来找.

设函数 $f(x)$ 在 a, b 两点的值异号,那么据前一章所述连续函数的性质,$f(x)=0$ 在 a 与 b 之间有一根. 容易看出,连接 $(a, f(a))$,$(b, f(b))$ 两点的直线段和 x 轴的交点的横坐标

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

我们就以这个数 x_0 作为根的初始近似值(图 2.4). 如果还嫌这个初次近似不够

好,那么可以再比较$f(x_0)$与$f(a)$及$f(b)$的符号. 如$f(x_0)$与$f(a)$(或$f(b)$)异号,则可用连接$(x_0,f(x_0))$与$(a,f(a))$(或$(b,f(b))$)两点的直线段与x轴的交点的横坐标作为更好的初次近似. 余类推.

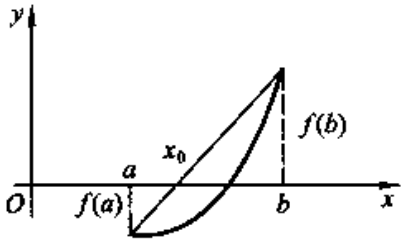

图 2.4

例 4　求方程$f(x)=x^3+2x^2-3x-7=0$的实根.

解　由于$f(1.8)=-0.088<0$,$f(1.9)=1.379>0$,故在 1.8 和 1.9 之间一定有方程的根. 取$x_0=1.8$,于是

$$x_1=1.8-\frac{f(1.8)}{f'(1.8)}=1.8+\frac{0.088}{13.92}=1.806.$$

代入原方程得

$$f(1.806)=-0.004\,2<0.$$

因为根在 1.806 与 1.9 之间. 第二次近似值为

$$x_2=1.806-\frac{f(1.806)}{f'(1.806)}=1.806+\frac{0.004\,2}{13.934\,8}=1.806\,3.$$

因为$f(1.806\,3)<0$,故知根在 1.806 3 与 1.9 之间. 另外算出$f(1.807)>0$,所以根在 1.806 3 与 1.807 之间. 因此,若取$x_2=1.806\,3$作为根的近似值,则其误差小于 0.001.

这个方程的另外两个根是复根.

习题 2.1

1. 求下列函数的微商:

(1) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

(2) $y=\sqrt[5]{x}+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}+\frac{b}{\sqrt[5]{x}}$;

(3) $y=x^3\sqrt[5]{x}$;

(4) $y=\frac{x+1}{x-1}$;

(5) $y=\frac{3x^2+9x-2}{5x+8}$;

(6) $y+\sin x\cos^2 x$;

(7) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(8) $y=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$;

(9) $y=\frac{0.3x^5+a\sin x}{(a+b)\cos x}$;

(10) $y=\frac{\ln x}{x^a}$;

(11) $y=a^x\ln x$;

(12) $y=\frac{1-10^x}{1+10^x}$;

(13) $y=\dfrac{t^3\arctan t}{e^t}$;

(14) $y=(a^2+b^2)x^ne^x\arctan x$;

(15) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

(16) $y=x^2\log_3 x$;

(17) $y=\sin^{\alpha}x\ln^{\beta}x$;

(18) $y=\sqrt[3]{1+\ln^2 x}$;

(19) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x+x^2}}+\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(20) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(21) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$;

(22) $y=\sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x)$;

(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$;

(24) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$;

(25) $y=\sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(26) $y=\sec^2\dfrac{x}{a^2}+\tan^2\dfrac{x}{b^2}$;

(27) $y=a^xe^{\arctan x}$;

(28) $y=\cos\dfrac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}$;

(29) $y=\arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(30) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(31) $y=\ln\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

(32) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(33) $y=\sqrt[n]{x}$;

(34) $y=x^x$;

(35) $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$;

(36) $y=x^{x^x}$;

(37) $y=(\sin x)^{\cos x}$;

(38) $y=x^{a^x}$;

(39) $y=(\ln x)^x x^{\ln x}$;

(40) $y=\arccos(\sin x^2-\cos x^2)$;

(41) $y=\dfrac{1}{\arccos^2(x^2)}$;

(42) $r=\arctan\left(\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}\right)$;

(43) $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{\varphi}{2}\right)$;

(44) $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$;

(45) $y=\arctan(x+\sqrt{1+x^2})$;

(46) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(47) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$;

(48) $s=\dfrac{t^6}{1+t^{12}}-\operatorname{arccot} t^6$;

(49) $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$;

(50) $y=\ln\cos\arctan\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

2. 若 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$，当 x 为何值时，

(1) $f'(x)=0$; (2) $f'(x)=-2$; (3) $f'(x)=10$.

3. 求下列函数在指定点的微商：

(1) $f(x)=\dfrac{3x^3-3x+\sqrt{x}-1}{x}$，求 $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$;

(2) $\rho(\varphi)=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}$，求 $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 用以下两种方法求 $y=\dfrac{1}{x^2-5}$ 的微商，并比较之：

(1) 利用商的微商公式;

(2) 写成 $y=(x^2-5)^{-1}$,用复合函数微分法.

5. 用以下两种方法求 $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1}}$ 的微商,并比较之:

(1) 直接用复合函数微分法;

(2) 改为 $y=\dfrac{1}{3}[\ln(x+2)+\ln(x+3)-\ln(x+1)]$ 再求.

6. 用下述两种方法求 $y=\dfrac{2x+1}{2x-1}$ 的微商,并比较之:

(1) 直接用商的微商公式;

(2) 改成 $y=1+\dfrac{2}{2x-1}$ 再求.

7. 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 为可微函数,求 $\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$;

(2) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$;

(3) $y=\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}$;

(4) $y=\arctan[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]$.

8. 在下列各题中求 $\dfrac{dx}{dy}$:

(1) $y=xe^x$;

(2) $y=\operatorname{arctan}\dfrac{I}{x}$;

(3) $y=2e^{-x}-e^{-2x}$.

9. 求下列函数的二阶微商:

(1) $y=e^{-x^2}$;

(2) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $y=x^2a^x$;

(4) $y=\sin x\arctan\dfrac{x}{a}$;

(5) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(6) $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

10. 设 $u=\varphi(x),v=\psi(x)$ 为可微二次的函数. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $y=\ln\dfrac{u}{v}$;

(2) $y=\sqrt{u^2+v^2}$.

11. 设 $f(x)$ 为可微三次的函数,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2},\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(e^x+x)$.

12. 求下列函数的高阶微商:

(1) $(x^2e^x)^{(50)}$;

(2) $[\ln(1+x)^x]^{(30)}$;

(3) $[(x^2+1)\sin x]^{(20)}$;

(4) $\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}\right)^{(100)}$;

(5) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$;

(6) $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^{(n)}$;

(7) $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{(n)}$.

13. 验证函数 $y=e^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$ 满足关系式 $y'+y=\cos x$.

14. 验证函数 $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ 满足方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0$.

15. 若 r_1, r_2 是代数方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根，证明函数 $y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$ 满足方程 $y''+py'+qy=0$，其中 c_1, c_2 为任意常数.

16. 求下列函数的微分：

(1) $y=\ln\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$；　　(2) $y=a^{\ln\tan x}$；

(3) $y=\sin x-x\cos x$；　　(4) $y=\frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$.

17. 当 x 很小时，有近似等式 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$. 证明

(1) $\sin x\approx x$；　(2) $\ln(1+x)\approx x$；　(3) $\tan x\approx x$；

(4) $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}$　$(a>0)$.

18. 求下列各题的近似值：

(1) $\sqrt[5]{1.01}$；　　(2) $e^{1.01}$；

(3) $\sqrt[10]{1\,000}$；　　(4) $\sin 29°$；

(5) $\ln 1.03$；　　(6) $\tan 45°4'$.

19. 求方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $[1,2]$ 内的根的近似值，精确到小数点后两位.

20. 设 $x=\sqrt{1+t}, y=\sqrt{1-t}$，验证 $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}, \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}$.

21. 设 $x=\ln(1+t^2), y=t-\arctan t$，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

22. 设 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

23. 写出下列曲线在已给点处的切线与法线方程：

(1) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$，在 $t=\pi$ 处；

(2) $x=\sin t, y=\cos 2t$，在 $t=\frac{\pi}{6}$ 处；

(3) $x=\frac{3at}{1+t^2}, y=\frac{3at^2}{1+t^2}$，在 $t=2$ 处.

24. 一质点沿直线运动，从 A 点出发，经 t 秒后与 A 点相距为 $s=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$，问何时它的速度为零.

25. 已知一气球的半径以 10 cm/s 的速度增长着，求半径为 10 cm 时，这个球的体积和表面积的增长速度.

26. 设汽车轮子半径为 R，在开始运动时轮子转动角速度随时间变化规律为 $\theta(t)=at^3$，

求汽车运动速度.

27. 一气球在与观察者相距 500 m 处离地铅直上升,其速度为 140 m/min,当气球高度为 500 m 时,观察者视线的斜角增加率如何?

28. 水自高为 18 cm、底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中,已知水在漏斗中深度为 12 cm 时,水平面下降之速率为 1 cm/min,问圆柱形筒中水平面上升之速度为何?

29. 有一长为 5 m 的梯子贴靠在铅直的墙上,若其下端沿地板以 3 m/s 的速度离开墙脚而滑动,问当其下端离开墙脚 1.4 m 时梯子的上端下滑之速度为何?

2.2 积 分 法

在上一节中,已经讨论了作为主要矛盾的一个方面——微分的运算,本节将讨论它的另一方面——定积分的运算.

2.2.1 不定积分的计算

微积分的基本定理告诉我们,求定积分的问题,可以归结为求原函数或求不定积分的问题,为此,我们先来介绍不定积分的求法.

由于微分与积分是矛盾的对立面,微分运算与积分运算互为逆运算,如同乘方和开方互为逆运算那样,因此,每一个微分公式或法则,就应该有一个对应的积分公式或法则. 反过来,每一个积分公式或法则就应该有一个对应的微分公式或法则. 也就是,微分公式或法则与积分公式或法则是相互对应的.

对应于微分基本公式表,应该有下面的积分公式表:

1. $\int 0\mathrm{d}x = C$(常数);
2. $\int 1\mathrm{d}x = x + C$;
3. $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;
4. $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;
5. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;
6. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
7. $\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$;
8. $\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$;
9. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$;
10. $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$;
11. $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$;
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$.

读者不难在这张积分公式表和上一节的微分公式表的公式之间找到相互对应关系. 例如,积分公式 $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$ 就是与微商公式 $(\sin x)' = \cos x$ 相对应的.

对于微分与微商的运算法则也是一样,例如,在微商法则中的(1)及(5)是

$$(u + v)' = u' + v', (cv)' = cv',$$

而与之相对应的积分法则显然为

$$(1')\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x(c \text{ 为任意常数}).$$

在第一节中已经指出,微商法则中最基本的是(1),(3),(6),即

(1) $(u+v)' = u' + v'$,

(3) $(uv)' = u'v + uv'$,

(6) 若 $y = f(u), u = g(x)$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u)g'(x).$$

在积分法中和这些相对应的法则是什么呢? 与(1)相对应的公式就是(1');至于与(3),(6)相对应的公式,就是下面要介绍的分部积分公式和积分换元公式,而这两个公式是积分法中最基本的公式. 在介绍这两个公式以前,我们先叙述应用(1')的两个例子.

例 1 求不定积分 $\int\left(3x^2 + 5x + 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解

$$\int\left(3x^2 + 5x + 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 3\int x^2\mathrm{d}x + 5\int x\mathrm{d}x + 6\int \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + \ln|x| - \frac{2}{x} + C.$$

例 2 求不定积分 $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x + \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

现在来介绍积分法中最基本的两种方法.

1 换元法 如果 $x=\varphi(t)$ 是一个可微函数且 $\varphi'(t)$ 是连续函数,那么有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这个公式就叫积分换元公式,是与微分法则中的(6)相对应的.

事实上,令 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

根据复合函数微分法则(6),有

$$\mathrm{d}F[\varphi(t)] = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

两边积分,即得

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}F = F[\varphi(t)] + C$$

$$= F(x) + C = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

这就是我们所要证明的公式.

这个公式的用处在于:当我们要求一个较复杂的函数 $g(t)$ 的原函数时,如果能设法把它配成 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 这种形式,其中 $f(x)$ 的原函数为已知或较易求出的,那么,所求的原函数就立即可以得到.

例 3 求不定积分 $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x$.

解 易见

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(ax+b)}{ax+b}.$$

设 $ax+b=t$,则上式右边等于

$$\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

同理可算出

$$\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1).$$

例 4 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

例 5 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a}$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

例 6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

例 7 求 $\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$$

例 8 求 $\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解 $$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

例 9 求 $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sin^5 x\mathrm{d}x = \int \sin^4 x \sin x\mathrm{d}x = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \mathrm{d}\cos x$$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)\mathrm{d}\cos x$$

$$= -\left(\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x\right) + C.$$

例 10 求 $\int \sec x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sec x\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t}{1 - t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right| + C$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

有时候,换元公式可以倒过来使用,那就是直接在积分号下的表达式 $f(x)\mathrm{d}x$ 中作代换 $x = \varphi(t)$,把不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 化成

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int g(t)\mathrm{d}t,$$

而 $g(t)$ 的原函数是容易求得的,设为 $G(t)$,那么就有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\psi(x)) + C$$

其中 $t = \psi(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

例 11 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$.

解 这里,必有 $|x| \leqslant a$,所以可令 $x = a\sin t$,则 $\mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t$. 于是有

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t = a^2\int \frac{1 + \cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{1}{2}a\sin t\sqrt{a^2 - (a\sin t)^2} + C$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 12 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

解 这里,x 可以取一切实数值,所以可令 $x = \tan t$,则 $\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$,于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\tan^2 t + 1}}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C = \ln(\tan t + \sqrt{1 + \tan^2 t}) + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

例 13 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{1}{\sqrt{(x + 2)^2 + 1}}\mathrm{d}x$.

解 令 $x + 2 = t$,得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) + C$$

$$= \ln(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 5}) + C.$$

例 14 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

解 这里,$|x|$ 不能 < 1,因此可令 $x = \sec t$,而 $\mathrm{d}x = \sec t\tan t\mathrm{d}t$,故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\sec^2 t - 1}}\sec t\tan t\mathrm{d}t = \int \sec t\mathrm{d}t$$

$$= \ln(\sec t + \tan t) + C = \ln(\sec t + \sqrt{\sec^2 t - 1}) + C$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

2 分部积分法　另一个重要的积分法是分部积分法，它是与微分运算法则中的(3)：$d(uv) = udv + vdu$ 相对应的. 事实上，对上述公式积分，得

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

即

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

这就是

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

这个公式叫做分部积分公式，显然，它是与微分公式(3)相对应的.

这个公式的用处在于：有时候，被积函数可以表示成 uv' 这种形式，但积分不易计算，而函数 $u'v$ 的积分却比较容易求出，这时就可应用这个公式来做.

例 15　求 $\int x^3 \ln x dx$.

解　令 $u = \ln x, dv = x^3 dx$，则

$$u' = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{4}x^4.$$

因此

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$$

例 16　求 $\int \arctan x dx$.

解　令 $u = \arctan x, dv = dx$，则

$$u' = \frac{1}{1 + x^2}, v = x.$$

从而

$$\int \arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1 + x^2}dx$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln (1 + x^2) + C.$$

例 17　求 $\int e^{ax}\cos bx dx$ 及 $\int e^{ax}\sin bx dx$.

解　分别令 $u = \cos bx, dv = e^{ax}dx$ 及 $u = \sin bx, dv = e^{ax}dx$，则得

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x.$$

由此解出

$$\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2 + b^2}e^{ax} + C.$$

有时,必须连续使用分部积分法才能算出所要求的不定积分来.

例 18 求 $\int x^2 e^x \mathrm{d}x$.

解 令 $u = x^2$, $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$, 则

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\int x e^x \mathrm{d}x.$$

在右端的积分中,再令 $u = x$, $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$, 则得

$$\int x^2 e^x \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x \mathrm{d}x\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C.$$

例 19 求积分 $\int x^2 \sin x\mathrm{d}x$.

解 令 $u = x^2$, $\mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x$, 于是有

$$\int x^2 \sin x\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x.$$

在右端的积分中,再令 $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x$, 则得

$$\int x^2 \sin x\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

例 20 求积分 $\int \sqrt{x^2 + a^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $u = \sqrt{x^2 + a^2}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, 则得

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\mathrm{d}x = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x + a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

移项,即得

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.$$

例 21　求积分 $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, $a \neq 0$.

解　令 $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$,则

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x - a^2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= J_n - a^2 J_{n+1},$$

因此　　$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(J_n - a^2 J_{n+1}),$$

即　　$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_n.$$

这一公式称为求积分 J_n 的递推公式,它把积分 J_{n+1} 的计算化为 J_n 的计算,当 $n=1$ 时,有

$$J_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

故由递推公式可知

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C,$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\arctan\frac{x}{a} + C.$$

前面我们从和、积的微分法则以及复合函数的微分法则推出了它们相应的积分计算法则，至于差与商的微分法则和反函数的微分法则可以分别归并在和、积与复合函数的微分法则中，因此它们就不再有另外的对应的积分法则了.

下面讨论有理函数的积分. 若被积函数是一个有理分式，则在分子次数高于分母的次数时，只要作一次除法就可以把它写成一个多项式与一个真分式之和，面前者是容易求积的，至于真分式的积分如何求，先看几个例子.

例 22 求不定积分 $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解 把被积函数的分母配方得

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x.$$

令 $t = x + \frac{1}{2}$，即得

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(t^2+\frac{3}{4}\right)}{t^2+\frac{3}{4}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例 23 求 $\int \frac{5x+6}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x$.

解 把分母配方得

$$\int \frac{5x+6}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{5x+6}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}\mathrm{d}x.$$

令 $t=x+\frac{3}{2}$,即得

$$\int \frac{5x+6}{x^2+3x+1}\mathrm{d}x = \int \frac{5t-\frac{3}{2}}{t^2-\frac{5}{4}}\mathrm{d}t = 5\int \frac{t}{t^2-\frac{5}{4}}\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|t^2-\frac{5}{4}\right| - \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t-\sqrt{5}}{2t+\sqrt{5}}\right| + C$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left(x^2+3x+1\right)$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}\right| + C.$$

从这两个例子读者不难学会计算一般积分

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

的方法. 例 22 是 $p^2-4q<0$ 的情况,例 23 是 $p^2-4p>0$ 的情况.

例 24 求 $\int \frac{5x+6}{(x^2+x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 把分母配方得

$$\int \frac{5x+6}{(x^2+x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{5x+6}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]^2}\mathrm{d}x.$$

令 $x+\frac{1}{2}=t$,即得

$$\int \frac{5x+6}{(x^2+x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{5t+\frac{7}{2}}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 5\int \frac{t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2}\mathrm{d}t + \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2}.$$

这里第一个积分是容易算出的：

$$\int \frac{t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\frac{1}{t^2+\frac{7}{4}} + C.$$

利用分部积分法的例 21，便知第二个积分为

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{2}{7}\frac{t}{t^2+\frac{7}{4}} + \frac{4}{7\sqrt{7}}\arctan\frac{2t}{\sqrt{7}} + C,$$

故

$$\int \frac{5x+6}{(x^2+x+2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\frac{1}{x^2+x+2} + \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

从这个例子读者不难学会计算下列一般积分的方法：

$$\int \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x \quad (k=2,3,\cdots).$$

下面两个例子介绍一个方法，把一个一般的真分式化为

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^k}$$

这两种简单分式之和来求它的不定积分.

例 25 求 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

解 设被积函数可表示成两个真分式之和

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}$$

其中 A,B,C 为待定常数. 先将右端通分，然后再比较等式两端分子同次幂的系数，便可得出一组关系式来确定 A,B,C. 我们有

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A+B=1, \\ -B+C=0. \end{cases}$$

解之得 $A=-\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=\frac{1}{2}$，从而有

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\ &= -\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan x\\ &\quad +\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

例 26　求 $\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$.

解　将被积函数的分母分解因子，得

$$x^4-3x^3+3x^2-x=x(x^3-3x^2+3x-1)=x(x-1)^3,$$

所以可设

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

先将等式右端通分后，再比较两端的系数得

$$\begin{cases} A+D=1,\\ -3A+C-2D=0,\\ 3A+B-C+D=0,\\ -A=1,\end{cases}$$

解之得 $A=-1, B=2, C=1, D=2$. 故

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x\\ &=-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}+2\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}+\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1}\\ &=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+C\\ &=-\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.\end{aligned}$$

有许多不定积分可以经过一个适当的变量代换，化为有理函数的积分来计

算,下面就举几个简单的例子.

例 27 求积分 $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x+1}=t$,则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是有

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{t+2}{t^3-1}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{2}{t-1}-\frac{2t+2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+\sqrt{x+1}+2}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

例 28 求 $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}\mathrm{d}x$.

解 由于 $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}}=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{x+1}$,

因此令 $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$,则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$,$\mathrm{d}x=\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$. 故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)}} = -3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3-1} = \int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right|+\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\left|\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{(x-1)^2}\right|}{(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})^2}$$

$$+\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x-1}}+C.$$

例 29 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x}$.

解 令 $t=\tan\frac{x}{2}$,则有

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

由于

$$x = 2\arctan t, \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

因此我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{5+4\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int \frac{2}{5t^2+8t+5}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\frac{3}{5}}\arctan\left(\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}\right)+C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5t+4}{3}\right)+C$$

$$= \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right)+C.$$

例 30 求积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos^2 x)(2+\sin^2 x)}$.

解 把被积函数写为

$$\frac{1}{(1+\cos^2 x)(2+\sin^2 x)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{2+\sin^2 x}\right),$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos^2 x)(2+\sin^2 x)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}.$$

对第一个积分作代换 $t=\tan x$,于是

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right)+C_1.$$

同法可以计算

$$\int\frac{dx}{2+\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C_2.$$

故最后得

$$\int\frac{dx}{(1+\cos^2 x)(2+\sin^2 x)}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right)+\frac{1}{4\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right)+C.$$

上面我们只是介绍了求不定积分的几个基本方法,其目的在于说明如何扩大前述基本积分公式表的使用范围,一些较难的不定积分可以直接从现成积分表中查到,或者可以稍作变形之后利用现成积分表求出.

最后还应指出,有很多初等函数的不定积分是无法用有限个初等函数表达出来的,例如

$$\int e^{-x^2}dx,\int\sin x^2dx,\int\cos x^2dx,$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\int\frac{\cos x}{x}dx,\int\frac{1}{\ln x}dx,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}},\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx$$

等等就是这样,这类积分需要特别处理,现在还不能讨论.

习题 2.2.1

1. 迅速看出以下各微分:

(1) $d(x^2+a)$; (2) $d\sqrt{x}$;

(3) $d\left(\frac{1}{x}\right)$; (4) $d\sqrt{1+x^2}$;

(5) $d\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (6) $d(\cos x+1)$;

(7) de^{2x}; (8) $d\arctan\frac{x}{a}$.

2. 填写以下各等式的右端:

(1) $xdx=d?$ (2) $\frac{1}{x}dx=d?$

(3) $\frac{1}{x^2}dx = d?$ (4) $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = d?$

(5) $\sin x dx = d?$ (6) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d?$

(7) $e^{-x}dx = d?$ (8) $\frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = d?$

(9) $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = d?$ (10) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d?$

(11) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = d?$ (12) $\frac{1}{1+x^2}dx = d?$

3. 利用简单的积分公式求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$; (2) $\int \sqrt[m]{x^n}dx$;

(3) $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; (4) $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$;

(5) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$; (6) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;

(7) $\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}dx$; (8) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$; (10) $\int (2^x+3^x)^2 dx$.

4. 求下列 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 型的不定积分：

(1) $\int \frac{x}{1+x^2}dx$; (2) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx$;

(3) $\int \tan x dx$; (4) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$;

(5) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$.

5. 用换元法求下列不定积分：

(1) $\int (2x-3)^{100}dx$; (2) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; (4) $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

(5) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; (6) $\int x^2\sqrt[3]{1+x^2}dx$;

(7) $\int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+6}}dx$; (8) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx$;　(10) $\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$;

(11) $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$;　(12) $\int \cot \frac{x}{b-a}dx$;

(13) $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$;　(14) $\int (e^x+1)^3 e^x dx$;

(15) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx$.

6. 用分部积分法求下列不定积分：

(1) $\int x\sin 2x dx$;　(2) $\int xe^{-x}dx$;

(3) $\int x^2 a^x dx$;　(4) $\int \arcsin x dx$;

(5) $\int x\arctan x dx$;　(6) $\int x^2 \ln(1+x)dx$;

(7) $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$;　(8) $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$;

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}dx$;　(10) $\int x^2 \sin x\cos x dx$;

(11) $\int x\ln \frac{1+x}{1-x}dx$;　(12) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

(13) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$;　(14) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2}dx$;

(15) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

7. 求下列有理函数的积分：

(1) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$;　(2) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$;

(3) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$;　(4) $\int \frac{x^2}{x^4+3x^2+2}dx$;

(5) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;　(6) $\int \frac{4x-3}{(x-2)^2}dx$;

(7) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$;　(8) $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$;

(9) $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$;　(10) $\int \frac{1}{(x^2+4x+6)^2}dx$.

8. 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}dx$;　(2) $\int \frac{1}{1+\sin x}dx$;

(3) $\int \frac{1}{a\sin x+b\cos x}dx$;　(4) $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$;

(5) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$;

(6) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}dx$;

(7) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$;

(8) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$;

(9) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}dx$;

(10) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$;

(11) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(12) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$;

(13) $\int \sqrt{3+4x-4x^2}dx$;

(14) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

(15) $\int \frac{1}{\cos^4 x}dx$;

(16) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx$;

(17) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$;

(18) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$;

(19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;

(20) $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$;

(21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}$;

(22) $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$;

(23) $\int \sqrt{x}\ln^2 x dx$;

(24) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

(25) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x dx$;

(26) $\int x^5 e^{x^3}dx$;

(27) $\int (\tan^2 x+\tan^4 x)dx$;

(28) $\int \frac{dx}{(\tan x+1)\sin^2 x}$;

(29) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$;

(30) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$;

(31) $\int \frac{2^x}{1-4^x}dx$;

(32) $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}dx$;

(33) $\int \ln(1+x^2)dx$;

(34) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(35) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$;

(36) $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$;

(37) $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$;

(38) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}dx$;

(39) $\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$;

(40) $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}dx$.

2.2.2 定积分的计算

有了不定积分的计算方法,就容易计算定积分,这只要先算出不定积分,再把它“定”一下,即把定积分的上、下限代到不定积分中去,将结果相减就可

以了.

与不定积分中的计算方法相对应,定积分也完全有相应的计算方法,例如,与不定积分中的公式

$$\int [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int Cg(x)\mathrm{d}x = C\int g(x)\mathrm{d}x \quad (C \text{ 为常数})$$

相对应,在定积分中有

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b Cg(x)\mathrm{d}x = C\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

等. 可是这两个定积分的公式,早在第一章第二节中引入定积分概念时就已经证明了,因此我们甚至可以这样说:上面两个不定积分的公式可以通过定积分的变上限而从相应的定积分公式中推导出来.

这里着重讲一下,常用到的积分换元法和分部积分法所建立的公式实际上就是不定积分中介绍的公式,只是把不定积分改成了定积分罢了,并无原则上的不同.

1 换元法 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,而$\varphi(t)$是定义在$[\alpha,\beta]$上的一个可微函数,并且满足条件

(i) $\varphi'(t)$是连续函数;

(ii) $\varphi(t)$的值都在$[a,b]$上;

(iii) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;

则成立着

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这个公式叫做定积分的换元公式,证明它是不困难的. 事实上,若$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数,由微积分基本定理(积分形式)的推论知道:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

从复合函数的微商公式知道:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\varphi(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

由于，$F[\varphi(t)]$是$f[\varphi(t)]\varphi'(t)$在$[\alpha,\beta]$上的一个原函数，所以

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)]\Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)]$$

$$= F(b) - F(a).$$

这就证明了要证的公式(记号 $H(x)\Big|_{\eta}^{\xi}$ 表示 $H(\xi) - H(\eta)$).

例 1　计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $x = \sin t$，则当 x 从 0 变到 1 时，由于 $\sin 0 = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1$，所以 t 从 0 变到$\frac{\pi}{2}$，有

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\mathrm{d}\sin t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

例 2　计算 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$　$(a>0)$.

解　令 $x = a\tan t$，则当 x 从 0 变到 a 时，由于 $\tan 0 = 0, \tan\frac{\pi}{4} = 1$，所以 t 从 0 变到$\frac{\pi}{4}$，而 $\mathrm{d}x = a\sec^2 t\mathrm{d}t$，因此有

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2a^2}.$$

例 3　计算 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　令 $x = \frac{1-t}{1+t}$，则当 x 从 0 变到 1 时，t 从 1 变到 0，于是

$$I = -\int_1^0 \frac{\ln 2 - \ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln 2\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - I,$$

从而有

$$I = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

例 4 若$f(x)$是奇函数,即$f(-x)=-f(x)$,则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

若$f(x)$是偶函数,即$f(-x)=f(x)$,则

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

事实上,令$x=-t$,则

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int_{l}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{l} f(-t)\,dt.$$

若$f(x)$是奇函数,那么

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{l} f(t)\,dt;$$

若$f(x)$是偶函数,那么

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(t)\,dt.$$

而

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

将前面的计算代入上式,即得所需要证明的.

2 分部积分法 如果$u'(x)$及$v'(x)$是$[a,b]$上的连续函数,那么有

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)\,dx,$$

或即

$$\int_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)\,du(x).$$

这个公式叫定积分的分部积分公式,证明它并不难,只要把不定积分分部积分公式中的不定积分改成定积分就行了.

事实上,由于

$$\left[\int u(x)v'(x)\,dx\right]' = u(x)v'(x),$$

所以

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)\,dx = \left[\int u(x)v'(x)\,dx\right]\Big|_{a}^{b}$$

$$= \left[u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \right] \Big|_a^b$$

$$= u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

这就证明了我们所要证的公式.

例 5　求定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$ 的值.

解　$$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x\,d(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 6　设 m 为正整数,计算积分

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx \text{ 和 } J'_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\,dx.$$

解　$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x)$$

$$= -\sin^{m-1}x\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin^{m-2}x\,dx$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}x\,dx - (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx.$$

所以　$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m.$$

故得　$$J_m = \frac{m-1}{m}J_{m-2},$$

这是计算 J_m 的递推公式. 由

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1,$$

分别可算得 J_2, J_3；再由 J_2, J_3 可得 J_4, J_5，依此类推，可得

$$J_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

$$J_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x = \frac{2n(2n-2)4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

对 J'_m 可得到完全一样的结论，统一起来，便得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(m-1)!!}{m!!}\dfrac{\pi}{2} & (\text{当 } m \text{ 为偶数}); \\ \dfrac{(m-1)!!}{m!!} & (\text{当 } m \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

例 7 设 $f''(x)$ 连续，那么我们有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x.$$

解

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$= x(1-x)f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (1-2x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (2x-1)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$= (2x-1)f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(1)+f(0)-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

移项后即得所证公式.

习题 2.2.2

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$;

(2) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}dx$;

(3) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$;

(4) $\int_0^{\pi} x^2\sin^2 x dx$;

(5) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$;

(6) $\int_0^2 |1-x|dx$;

(7) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

(8) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos^3 x dx$;

(10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 x}dx$;

(11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x dx$;

(12) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$;

(13) $\int_0^a \ln(t+\sqrt{t^2+a^2})dt, (a>0)$;

(14) $\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx, (a>0)$;

(15) $\int_1^e \ln^3 x dx$;

(16) $\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$;

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x dx$;

(18) $\int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{1+\sin x}dx$;

(19) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$;

(20) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-3x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

2. 当 m,n 为正整数时,证明:

(1) $\int_0^{2\pi} \sin mx\cos nx dx = 0$;

(2) $\int_0^{2\pi} \cos mx\cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx\sin nx dx = \begin{cases} 0 & \text{当 } m \neq n, \\ \pi & \text{当 } m = n. \end{cases}$

3. 当 n 为正整数时,证明:

(1) $\int_0^{\pi} \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$;

(2) $\int_0^{\pi} \cos^{2n} x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx$.

4. 利用 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 的递推公式,计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;

(2) $\int_0^{\pi} \cos^6 x dx$;

(3) $\int_0^{\pi} \sin^{11} x dx$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^7 2x dx$;

(5) $\int_0^{\pi} \sin^6 \frac{x}{2} dx$; (6) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$;

(7) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$; (8) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$.

5. 设 $f(x)$ 是具有周期 T 的周期函数，证明

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

并说明这个等式的几何意义.

6. (1) 若 $f(x)$ 是奇函数，证明 $\int_0^x f(x) dx$ 是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数；$\int_0^x f(x) dx$ 是奇函数吗？

7. 设 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$. 这里 a_1, b_1, a_2, b_2 均为常数，证明：

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2).$$

8. 设 $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$,

$$g(x) = c_1 \cos x + d_1 \sin x + c_2 \cos 2x + d_2 \sin 2x,$$

证明：
$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx\right]^2 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \cdot \int_{-\pi}^{\pi} g^2(x) dx.$$

2.2.3 定积分的近似计算

我们在第一章第二节中计算定积分时，用的是“切条条”的办法，也就是把要计算的定积分通过和式的极限来计算. 可是用这种办法能算出的积分十分有限，等到微积分基本定理出现，指出了微分和定积分是一对矛盾，于是用“切条条”的办法就被否定，而代之以求原函数或不定积分来计算定积分. 这是一次十分重要的否定，由于这次否定，使大量原来用“切条条”的办法无法计算的定积分成为可以计算的了. 但是，事物都是一分为二的，用这个办法来求定积分并不是万能的. 事实上，有更大量函数的不定积分是不能用初等函数来表达的，对此，微积分基本定理就无用武之地，于是对定积分的计算要再来一次否定，这就是现在要讲的定积分的近似计算. 这里，基本的想法仍然是“切条条”，可是由于我们已经掌握了微积法的一些方法，所以现在的“切条条”的办法与一开始的“切条条”的办法已经有了质的不同，这也正好反映了事物是波浪式前进，螺旋式上升的.

同时，定积分的近似计算也有它本身的现实意义，这是因为：第一，在实际应用的许多情况下，本来就只需要知道定积分的近似值和误差大小的估计；第二，在许多情况下，被积函数本身就不是一个精确的分析表达式，甚至函数值是由表格给出的，因此它本身已经包含了计算或测量上的误差.

1 梯形法　在第一章第二节中我们曾谈到，积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围成的面积. 假如能近似地算出这块面积，那就等于说，我们近似地算出了积分

$$I=\int_a^b f(x)\,dx.$$

用分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成 n 等份，过各分点作平行于 y 轴的直线. 记 $y_k=f(x_k)$.

曲线下方夹在直线 $x=x_{i-1}, x=x_i$ 之间的区域是一个曲边四边形，它的一条曲边是原曲线 $y=f(x)$ 的一段弧. 若把区间分得足够细，这段小弧可近似地看成一段直线，于是这个曲边四边形可近似地用一个梯形来代替（图 2.5），而这个梯形的面积等于

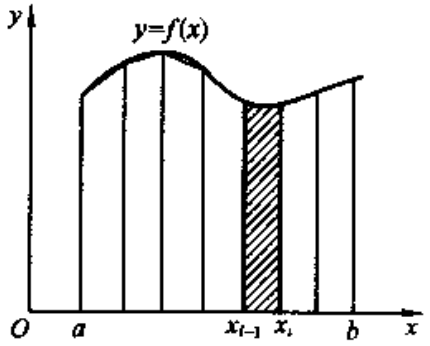

图 2.5

$$\Delta\bar{I}_i=\frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\frac{b-a}{n}\frac{y_i+y_{i-1}}{2}.$$

所有这种梯形面积的和等于

$$\bar{I}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\frac{y+y_{i-1}}{2}$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

显然它是整个曲边梯形面积的近似值，因而也就是积分的近似值，故得梯形公式

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right).$$

用梯形法来计算定积分时，误差有多大呢？为了回答这个问题，注意第 i 条的面积的精确值为

$$\Delta I_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

作代换 $x=x_{i-1}+t\Delta x_i$ 并利用定积分的分部积分法的例 7，便得

$$\Delta I_i = \Delta x_i \int_0^1 f(x_{i-1} + t\Delta x_i)\,dt$$

$$= \frac{\Delta x_i}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$- \frac{(\Delta x_i)^3}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(x_{i-1} + t\Delta x_i)\,dt.$$

因此,如果在整个积分区间$[a,b]$上有$|f''(x)| \leqslant M_2$. 那么就有

$$|\Delta I_i - \Delta \bar{I}_i| = \frac{(\Delta x_i)^3}{2}\left|\int_0^1 t(1-t)f''(x_{i-1} + t\Delta x_i)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{(\Delta x_i)^3}{2}\int_0^1 t(1-t)\,|f''(x_{i-1} + t\Delta x_i)|\,dt$$

$$\leqslant \frac{(\Delta x_i)^3}{2}M_2\int_0^1 t(1-t)\,dt \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^3},$$

从而有

$$|I - \bar{I}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\Delta I_i - \Delta \bar{I}_i| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2.$$

这就是说,当 n 增大时,误差是一个级别不低于$\frac{1}{n^2}$的无穷小量.

例 1 应用梯形法,求 ln 5 的近似值.

解 我们来计算积分 $\int_1^5 \frac{dx}{x}$ 的近似值. 把区间$[1,5]$分为 8 等份,因此$\frac{b-a}{n} = 0.5$,各分点为

$$x = 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5;$$

而

$$y = \frac{1}{x} = 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{1}{5}.$$

由梯形公式得

$$\ln 5 = \int_1^5 \frac{1}{x}dx$$

$$\approx 0.5\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9}\right) = 1.63,$$

即　　$$\ln 5 \approx 1.63$$

由于$f''(x)=\frac{2}{x^3}$，所以，$|f''(x)|$在$[1,5]$上的最大值$M_2=2$，故其最大误差不超过

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2=\frac{4^3}{12\times 8^2}\times 2=\frac{1}{6}\approx 0.166.$$

2 抛物线法　梯形法的基本想法是：在小区间$[x_{i-1},x_i]$上用直线来近似地代替曲线$y=f(x)$；当然这种代替是比较粗糙的. 我们自然会想到，假如在小区间上用高次多项式来近似地代替$f(x)$，应该可以得到更大的精确性. 当然，过多地增加多项式的次数就要增加计算量，在实用上并不合适. 下面只考虑用二次多项式来代替$y=f(x)$.

把区间$[a,b]$分为$2n$等份，仍记$y_k=f(x_k)$. 取一对相邻的小区间(x_{2k-2},x_{2k-1})，(x_{2k-1},x_{2k}). 在它们连接起来的整个区间$[x_{2k-2},x_{2k}]$上，我们用通过给定曲线上三点M_{2k-2},M_{2k-1},M_{2k}（图 2.6）的抛物线$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$来代替曲线$y=f(x)$. 系数$\alpha,\beta,\gamma$当然很容易根据这些条件计算出来.

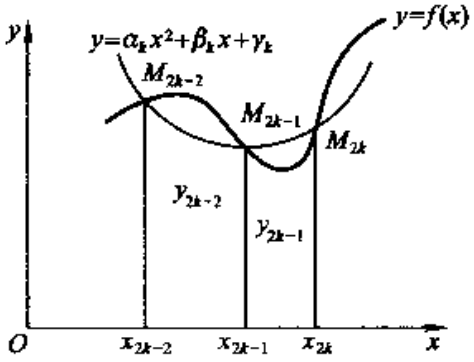

图 2.6

所谓抛物线法，就是在每个区间$[x_{2k-2},x_{2k}]$$(k=1,2,\cdots,n)$上函数的积分都用相应的抛物线段底下的面积来代替：

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx=\bar{I}_k$$

计算$\bar{I}_k$时，注意到如果y轴的位置移动一下，抛物线段底下的面积是不受影响的. 因此，不妨假定$x_{2k-1}=0$. 记$\frac{b-a}{2n}=h$，则$x_{2k-2}=-h$，$x_{2k}=h$，从而有

$$y_{2k-2}=\alpha h^2-\beta h+\gamma,$$

$$y_{2k-1}=\gamma,$$

$$y_{2k} = \alpha h^2 + \beta h + \gamma.$$

这样一来,便有

$$\bar{I}_k = \int_{-h}^{h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx = \frac{h}{3}(2\alpha h^2 + 6\gamma)$$

$$= \frac{h}{3}[\alpha h^2 + \beta h + \gamma) + 4\gamma + (\alpha h^2 - \beta h + \gamma)]$$

$$= \frac{b-a}{6n}(y_{2k} + 4y_{2k-1} + y_{2k-2}),$$

所以

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{k=1}^{n} (y_{2k} + 4y_{2k-1} + y_{2k-2})$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{k=1}^{n} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k}\right).$$

这叫做抛物线公式. 与梯形法相仿,可以证明,用这个公式求定积分的近似值,其最大误差不超过

$$\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4,$$

其中 M_4 是函数 $|f^{(4)}(x)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值.

这里的误差是与 $\frac{1}{n^4}$ 同级的无穷小量,这当然要比 $\frac{1}{n^2}$ 趋于零的速度快得多. 因此,一般来说,用抛物线公式作积分的近似计算比用梯形公式精确得多.

例 2 用抛物线公式,计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$,精确到 0.000 01.

解 直接算出被积函数的四阶导数以后可知,它的绝对值不超过 12,因此最大误差不超过 $\frac{12}{180(2n)^4}$. 现在,要使 $\frac{12}{180(2n)^4} < 0.000\ 01$,只要取 $n = 5$ 就够了.

$$x_0 = 0 \quad y_0 = 1.000\ 00$$

$$x_{10} = 1 \quad y_{10} = 0.367\ 88$$

$$\text{和 } 1.367\ 88$$

$x_2 = 0.2$ $y_2 = 0.960\ 79$ $x_1 = 0.1$ $y_1 = 0.990\ 05$

$x_4 = 0.4$ $y_4 = 0.852\ 14$ $x_3 = 0.3$ $y_3 = 0.913\ 93$

$x_6 = 0.6$ $y_6 = 0.697\ 68$ $x_5 = 0.5$ $y_5 = 0.778\ 80$

$x_7 = 0.7$ $y_7 = 0.612\ 63$

$x_8 = 0.8$ $y_8 = 0.527\ 29$ $x_9 = 0.9$ $y_9 = 0.444\ 86$

(和 3.037 90) · 2 (和 3.740 27) · 4

6.075 80 14.961 08

所以

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{30}(1.367\ 88 + 6.075\ 80 + 14.961\ 08) = 0.746\ 825.$$

例 3 设有 20 m 宽的河，从河的一岸到对岸，每隔 2 m，测得河深为 0.2，0.5，0.9，1.1，1.3，1.7，2.1，1.5，1.1，0.6，0.2 m. 试求河流横截面的面积 A.

解 把河流横截面的底看成曲线 $y=f(x)$，而 $A=\int_0^{20} f(x)dx$. 上述条件告诉我们：$y_0 = 0.2, y_1 = 0.5, y_2 = 0.9, y_3 = 1.1, y_4 = 1.3, y_5 = 1.7, y_6 = 2.1, y_7 = 1.5, y_8 = 1.1, y_9 = 0.6, y_{10} = 0.2$. 用抛物线公式

$$\begin{aligned} A = \int_0^{20} f(x)dx &\approx \frac{20}{30}[0.2 + 0.2 + 2(0.9 + 1.3 + 2.1 + 1.1) \\ &\quad + 4(0.5 + 1.1 + 1.7 + 1.5 + 0.6)] \\ &= 21.9\ \text{m}^2. \end{aligned}$$

在实际使用过程中，抛物线法比梯形法用得多，这是因为抛物线法的精确度比梯形法好.

习题 2.2.3

1. 将[0,1]分成十等份利用梯形法和抛物线法分别计算积分

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

的近似值，使其最大误差不超过 10^{-3}.

2. 利用抛物线法计算下列积分的近似值：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx \quad (n = 10).$$

第三章

微积分的一些应用

3.1 面积、体积、弧长

3.1.1 面积

在第一章中,已经知道由曲线 $y=f(x)(\geqslant 0)$ 与直线 $x=a, x=b, y=0$ 所围成的曲边梯形的面积为(图 3.1)

$$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b y\mathrm{d}x. \tag{1}$$

当 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号时(图 3.2),显然有

$$A=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x. \tag{2}$$

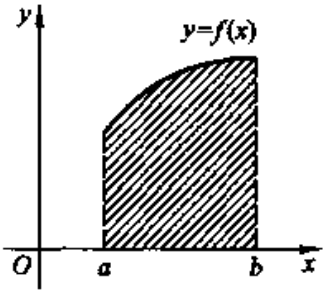

图 3.1

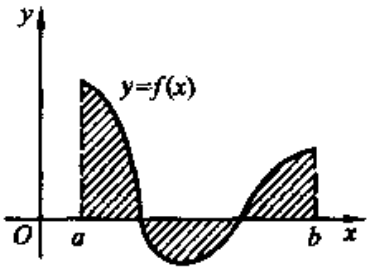

图 3.2

如果图形是由封闭曲线所围成(图 3.3),那么,容易知道它的面积为

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x. \tag{3}$$

例 1 求曲线 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的面积(图 3.4).

解 由于两曲线的交点为(0,0)及(1,1),所以利用公式(3)可得

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

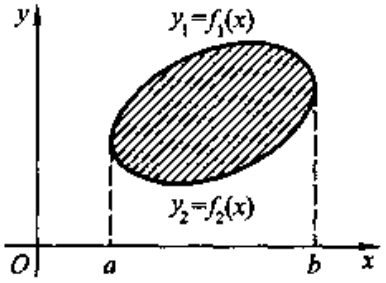

图 3.3

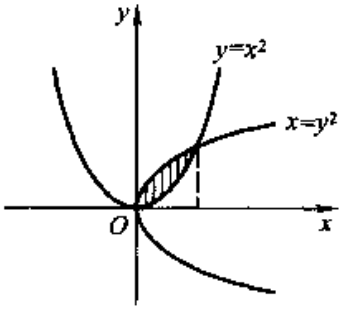

图 3.4

例 2　计算椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积(图 3.5).

解　面积 A 为

$$\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{-b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{2b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=4ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab.$$

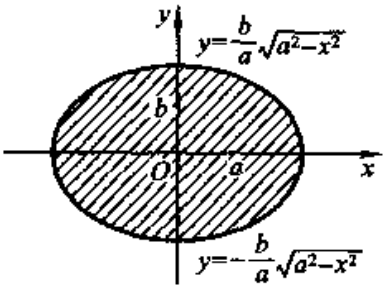

图 3.5

假如曲线是由极坐标方程给出

$$\rho=f(\theta),\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,$$

这时如何来计算由曲线 $\rho=f(\theta)$ 及直线 $\theta=\alpha,\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积呢?

我们知道,半径为 r,中心角为 θ 的圆扇形的面积为$\frac{1}{2}r^2\theta$. 现在用很多个小的圆扇形拼成的图形来近似所给的曲边扇形.

将$[\alpha,\beta]$任意分成 n 份:

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{i-1}<\theta_i<\cdots<\theta_n=\beta,$$

由射线 $\theta=\theta_{i-1},\theta=\theta_i$ 及曲线 $\rho=f(\theta)$所围成的小扇形面积 ΔA_i(图 3.6)近似地

等于

$$\frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\theta_i \quad (\theta_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant \theta_i).$$

因而面积 A 近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\theta_i.$$

命 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\theta_i\}$，即得

$$A = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}f^2(\xi_i)\Delta\theta_i = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

例 3 计算双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围成的面积 A（图 3.7）.

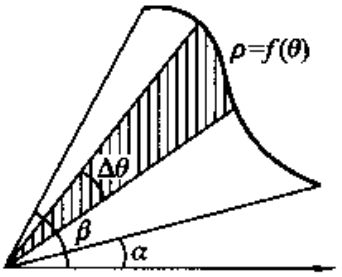

图 3.6

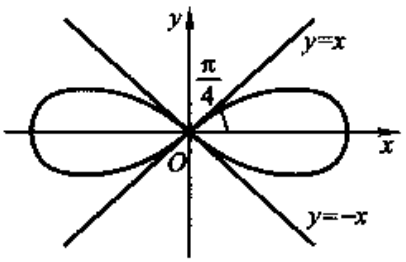

图 3.7

解 由图形的对称性，可知

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = 2a^2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

3.1.2 体积

假设一物体为 $x=a, x=b$ 这两张平面所夹住. 已知坐标为 $x(a\leqslant x\leqslant b)$ 的平行截面的面积为 $S(x)$，求这个物体的体积（图 3.8）.

考虑夹在平面 $x=x_{i-1}$，及 $x=x_i$ 之间的物体体积 ΔV_i，它近似地等于

$$S(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i),$$

因而

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

例如，由平面曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 Ox 轴旋转而成的旋转体（图 3.9），其横截面就是以 y 为半径的圆，因此

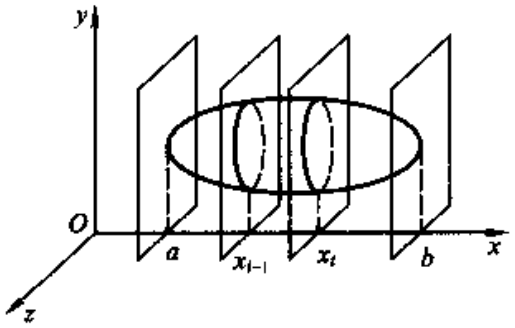

图 3.8

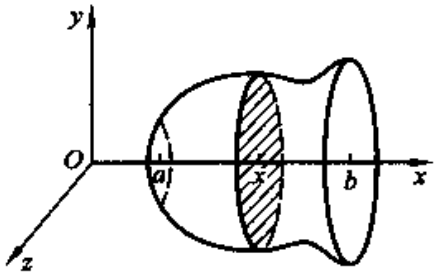

图 3.9

$S(x)=\pi y^2$，所以旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x.$$

例 1　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 Ox 轴旋转所得旋转体的体积.

解　由公式知道，体积 V 为

$$\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 2　设有底半径为 a 的圆柱，被一与圆柱底交成 α 角且过底直径 AB 的平面所截，求截下的楔形的体积(图 3.10).

解　取直径 AB 为 x 轴，底的中心为原点，这时垂直于 x 轴的诸断面都是直角三角形，它的一个锐角为 α，与这个锐角相邻的直角边长为 $\sqrt{a^2-x^2}$，因此，断面面积为

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}\tan\alpha$$

$$=\frac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha,$$

所以有

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(a^2 - x^2)\tan \alpha dx = \frac{2}{3}a^3 \tan \alpha.$$

如果断面面积函数 $S(x)$ 不知道，那就用近似计算的办法. 例如，如果测得一系列等分点

$$x_0(=a), x_1, x_2, \cdots, x_{2n}(=b)$$

上的断面面积为

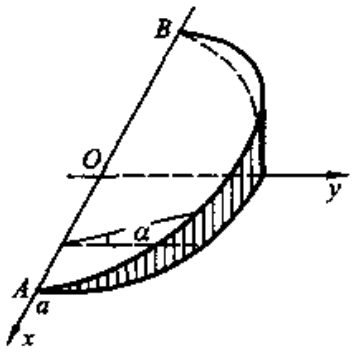

图 3.10

$$S_0, S_1, S_2, \cdots, S_{2n},$$

那么，根据抛物线公式，体积就近似地等于

$$\frac{b-a}{6n}\left(S_0 + S_{2n} + 4\sum_{k=1}^{n} S_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n-1} S_{2k}\right).$$

3.1.3 弧长

在初等几何中，只能计算直线和圆的长度，下面将讨论一般曲线的长度问题.

设曲线由参数方程

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

给出，其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的两个有连续微商的函数(图 3.11). 在 $\overset{\frown}{AB}$ 间插入分点

$$A = M_0, M_1, \cdots, M_{i-1}, \quad M_i, \cdots, M_n = B,$$

把每两个相邻的分点都用直线段连接起来，就得到弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的一条内接折线，显然，这条内接折线的长度是 $\overset{\frown}{AB}$ 长度的一个近似值. 分点愈密，近似值愈接近真正的弧长，因此，我们定义弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度为折线当分点无限变密时的长度的极限.

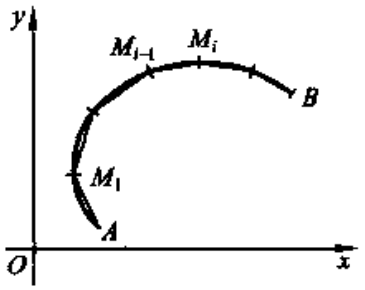

图 3.11

设 M_i 对应于参数 t_i，其中 $t_0 = \alpha, t_n = \beta$. 于是线段 $M_{i-1}M_i$ 的长为

$$\sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2},$$

因此，整个折线长为

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

而

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) \approx \varphi'(t_{i-1})\Delta t_i,$$

$$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) \approx \psi'(t_{i-1})\Delta t_i,$$

因此,曲线长度 s 近似等于

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2}\Delta t_i.$$

命 $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}\{\Delta t_i\}$,就有

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(t_{i-1})]^2 + [\psi'(t_{i-1})]^2}\Delta t_i.$$

由于 $\varphi'(t)$ 及 $\psi'(t)$ 的连续性,上述极限即为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t \tag{4}$$

在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 M,设对应的参数为 t,那么弧 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度为

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t, \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

对 t 求微商,得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}, \tag{5}$$

即

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

或

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \tag{6}$$

这个公式有简单的几何解释.

在曲线上任取点 $M(x,y)$ 及邻近点 $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$,弧长 $\overset{\frown}{MM'} = \Delta s$,过 M 作曲线的切线 MT,从图 3.12 可以看出

$$MN = \Delta x = \mathrm{d}x, NP = \mathrm{d}y$$

公式(6)表明:弧长的微分等于直角 $\triangle MNP$ 的弦——切线上被截下的线段 MP,即 $\mathrm{d}s = MP$.

当我们取切线正向与弧长增加方向一致时,由图 3.12 可知,

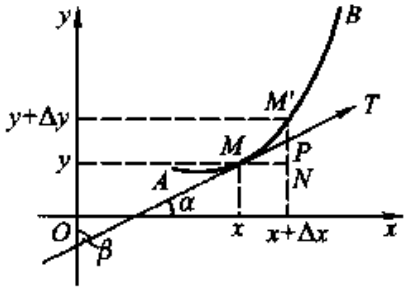

图 3.12

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \frac{dy}{ds} = \cos\beta,$$

这里 α,β 分别为切线 MT 与 Ox 轴，Oy 轴的夹角.

例 1 一个半径为 a 的圆，在一条直线上滚动. 圆周上一定点 P 描出一条多拱形的曲线，求它的一拱的长度(图 3.13).

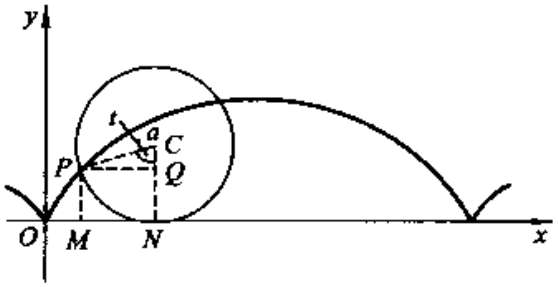

图 3.13

解 设圆滚动时所沿的直线为 x 轴，取一拱开始点作为坐标原点，过拱上一点 P 作 PM 垂直于 x 轴，作 PQ 垂直于半径 CN. 取参数 $t = \angle PCN$. 于是

$$ON = \overset{\frown}{PN} = at.$$

从而可得一拱曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = OM = ON - MN = at - a\sin t = a(t - \sin t), \\ y = PM = NC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t). \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

由弧长公式(3)，得

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = 8a.$$

如果曲线由直角坐标方程

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

给出，这时可把它看成这样的参数方程：

$$x = x, y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

这里 x 看作参数，于是由(3)，(4)即得

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx,$$

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

由此也可得出

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

例 2　求抛物线 $y = x^2$ 在点 $O(0,0)$，$A(a,a^2)$ 之间的一段弧长.

解　由公式，弧长 $\overset{\frown}{OA}$ 等于

$$\int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int_0^a \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2a} \sqrt{1 + t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}[2a\sqrt{1 + 4a^2} + \ln(2a + \sqrt{1 + 4a^2})].$$

习题 3.1

1. 计算下列曲线所围成的平面图形的面积：

(1) $y = x^2, x + y = 2$；　　(2) $y^2 + 8x = 16, y^2 - 24x = 48$；

(3) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$　$(a > 0)$；　　(4) $\rho = 2a\cos\theta$　$(a > 0)$；

(5) $\rho = a(1 + \cos\theta)$　$(a > 0)$；

(6) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$　$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$　$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, a > 0)$.

2. 求下列曲线旋转所成的旋转体体积：

(1) $y = \sin x$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上一段绕 x 轴，y 轴；

(2) $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (0 < a < b)$ 绕 x 轴；

(3) $y^2 = 4x$ 和 $x = 1$ 所围成图形绕 x 轴；

(4) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 绕 x 轴，y 轴.

3. 求平面 $z = 1$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 2z$ 之间的部分的体积.

4. 证明：由平面图形 $a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体体积为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

5. 证明:底半径为 a,高为 h 的正圆锥的体积

$$V = \frac{1}{3}Sh \quad (S = \pi a^2).$$

6. 计算下列曲线的弧长:

(1) $x^2 + y^2 = 2x$;

(2) $y = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant b$ 上的一段($a > 0$);

(3) $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

7. 若曲线段由极坐标方程给出:

$$\rho = f(\theta) \quad (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta),$$

证明:该曲线段的长度 s 为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\theta.$$

8. 利用 7 中公式计算下列曲线的弧长:

(1) $\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$;

(2) $\rho = a\theta$ 在 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 上的一段弧的长度.

3.2 曲线的描绘

把函数关系形象地表达出来,我们就经常需要作出函数的图形.

描绘函数图形的描点法,就是选取自变量的一组值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,算出相应的函数值 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 把点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 描绘在坐标纸上,然后用平滑的曲线把这些点依次连接起来,所得曲线就认为是这函数的图形了. 当然,这样描出的曲线是粗糙的,有时还会漏掉在自变量 x 的某个小范围内,而因变量 y 的较大变化的点. 例如,在图 3.14 中函数图像在 P, Q 两点间转了个大弯,如果在描点时,仅描出 P 和 Q 两点,用图 3.14 中的虚线把它们连接起来,就无法把这种变化反映出来.

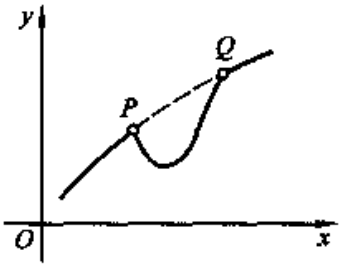

图 3.14

现在利用微分学的知识,对于函数的变化情况可以作出较多的判断,因而就能描出比较精确的图形来.

3.2.1 函数图形的上升和下降

给定函数 $y = f(x)$,如果在区间 (a, b) 内任取两点 x_1, x_2,当 $x_2 > x_1$ 时,总有 $f(x_2) > f(x_1)$,则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是递增的;反之,如当 $x_2 > x_1$ 时,总有

$f(x_2)<f(x_1)$，则称$f(x)$在区间(a,b)内是递减的.

从图形上看，如果$f(x)$在(a,b)内递增，那么$y=f(x)$所表示的曲线在x增大的过程中是上升的. 反之，如$f(x)$在(a,b)内递减，那么在x增大的过程中曲线是下降的.

在图 3.15 中，可以看出曲线上每一点处的切线具有正的斜率，亦即$f'(x)>0$，则在x增大过程中，曲线是上升的. 又从图 3.16 可知，曲线上每一点处的切线具有负的斜率，即$f'(x)<0$，则在x增大过程中，曲线是下降的.

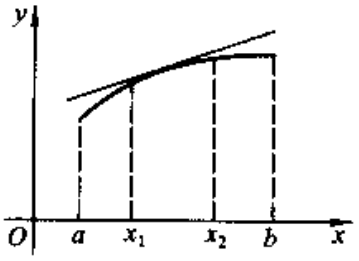

图 3.15

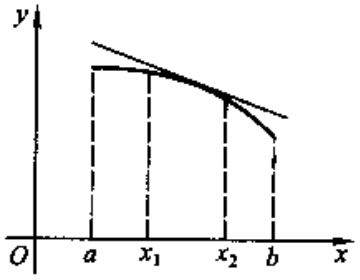

图 3.16

由此可知，利用函数的一阶微商就能判别曲线在某一区间内的上升和下降.

如果在区间(a,b)内$f'(x)>0$(或$f'(x)<0$)，那么函数在这个区间内是递增(或递减)的.

事实上，在(a,b)内任取两点x_1,x_2，且设$x_1<x_2$，根据微分中值定理可得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),x_1<\xi<x_2.$$

已知$f'(x)>0(a<x<b)$，故有$f'(\xi)>0$. 又由于$x_2>x_1$，所以上式右端恒大于0，因而就有

$$f(x_2)>f(x_1).$$

这就证明了$f(x)$在(a,b)内是递增的. 同理可以证明：若$f'(x)<0(a<x<b)$，则$f(x)$在(a,b)内是递减的.

例　研究函数$f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$的变化情况.

解　由于

$$\begin{aligned}f'(x)&=2(x-1)(x-2)^3+3(x-2)^2(x-1)^2\\&=(x-1)(5x-7)(x-2)^2,\end{aligned}$$

因此在$x_1=1,x_2=\frac{7}{5},x_3=2$上$f'(x)$取零值. 为了研究$f(x)$的变化情况，我们考察它的微商在整个数轴上符号改变的情况. 上述三点把整个数轴分成下面几个区间：

$$(-\infty,1),\left(1,\frac{7}{5}\right),\left(\frac{7}{5},2\right),(2,+\infty).$$

根据$f'(x)$在这些区间上的符号,便可断定$f(x)$在这些区间中是上升的还是下降的.我们把分析的结果列表如下:

x	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{7}{5}\right)$	$\left(\frac{7}{5},2\right)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f(x)$	上升	下降	上升	上升

根据这些资料,就可把函数$f(x)$的图形大致描绘出来(图 3.17).有了这个图形,函数$f(x)$的变化情况就比较清楚了.

3.2.2 函数图形的凹与凸

从 2.1 节的例子中,可知曲线$y=f(x)$在区间$(-\infty,1),(2,+\infty)$内都是上升的,但仔细观察一下图 3.17,就会发现它们上升的形状却不一样,因此要描绘出函数的图形,仅仅知道它在区间内上升或下降的情况是不够的,还必须知道它是如何上升与如何下降的.

为此我们下面就来介绍函数图形的凹与凸.

按照通常的说法,图 3.18 中的曲线段$\overset{\frown}{AB}$是凸的,$\overset{\frown}{BC}$是凹的.但究竟什么叫凸,什么叫凹呢?如果在曲线段$\overset{\frown}{AB}$上每点作它的切线,就会发现这些切线都在曲线段的上方;而对$\overset{\frown}{BC}$上每一点作切线时,又发现这些切线都在$\overset{\frown}{BC}$的下方.我们就利用这个事实来定义曲线的凹与凸.

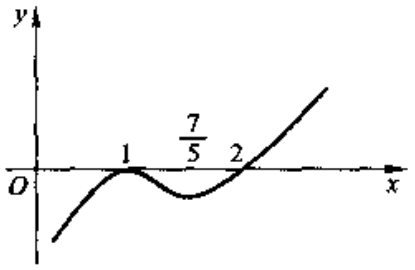

图 3.17

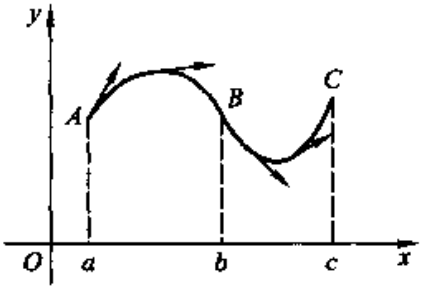

图 3.18

凡曲线段的切线都在它上方者,称这曲线段是凸的;而切线都在曲线段的下方者,称这曲线段为凹的.

如何判断曲线的凹凸呢?

从图 3.18 中可以看出，对于凸的曲线段$\overset{\frown}{AB}$来说，当 x 由 a 变到 b 时，切线的斜率在逐渐减小，即 $f'(x)$ 是递减函数；而凹的曲线段$\overset{\frown}{BC}$的情况恰好相反，当 x 由 b 变到 c 时，切线的斜率越来越大，即 $f'(x)$ 是递增函数. 因此，曲线的凹凸，也可用 $f'(x)$ 的上升下降来刻画.

设 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的一个线段，假定在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，这时函数 $f'(x)$ 是递增的，因而这曲线段在 (a,b) 内是凹的. 用类似的方法可知当 $f''(x)<0(a<x<b)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的. 这样就得到判断曲线凹凸的一个方法：

如果在某一区间内 $f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在这区间内是凹的；如果 $f''(x)<0$，则是凸的.

图 3.18 中的 b 点是曲线由凸变凹的转折点，叫做拐点或扭转点. 一般来说，无论是由凸转为凹，或由凹转为凸，曲线改变凹凸的这个地方都叫做拐点. 由于它是凹凸的转折点，也即二阶微商通过它要变号，因此在拐点 x_0 处必有 $f''(x_0)=0$.

应当注意，这个条件并不是充分的. 例如 $y=x^4$ 在 $x=0$ 点虽然有

$$f''(0)=12x^2\big|_{x=0}=0,$$

但画出图形就可知道这一点并不是拐点. 为了确定 x_0 是不是拐点，只需观察当 x 由 x_0 的左侧变到右侧时 $f''(x)$ 是否变号，如果变号，x_0 便是拐点，否则就不是.

以上考虑的是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶微商存在的情形. 但在二阶微商不存在的那些点，还可能是曲线的拐点. 例如，

$$y=f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}},$$

易见，当 $x\neq 2$ 时，

$$f''(x)=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}.$$

当 $x=2$ 时，$f''(x)$ 不存在. 但 $f''(x)$ 在 $x=2$ 的左近旁小于零，而在 $x=2$ 的右近旁大于零，且 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以，$x=2$ 所对应的曲线上的点 $M_0(2,0)$ 是此曲线的拐点.

知道了函数的上升下降区间以后，再根据函数的二阶微商在这区间上的符号，就可断定出函数图形的凹凸. 这样，图形的大致轮廓可以勾画无遗，不会像描点那样，有漏掉一个大弯的可能了. 但还有一个重要事项没有注意到，那就是如果函数图形伸向无穷时，它的动态如何？

3.2.3 曲线的渐近线

我们知道,双曲线有两条渐近线. 当双曲线伸向无穷时,它和两条渐近线越来越靠近,通过这两条渐近线,就可清楚地了解双曲线伸向无穷时的动态.

因此,要比较正确地画出函数的图形,还必须看它是否有渐近线,如果有,必须把它找出来. 一般来说,我们可以这样定义渐近线:当曲线上的一点沿着曲线离原点无限远移时,如果这点与某一固定直线的距离趋向于零,我们就把那条固定直线叫做曲线的渐近线.

最简单的渐近线是水平渐近线或垂直渐近线,下面给出找这种渐近线的方法.

如果对于函数 $y=f(x)$ 有

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

则其图形如图 3.19 所示,因此 $x=a$ 显然是它的一条垂直渐近线.

假如

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b(b \text{ 为一有限数}).$$

则其图形如图 3.20 所示,因此 $y=b$ 就是它的一条水平渐近线.

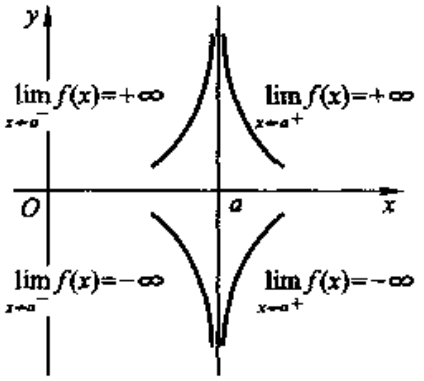

图 3.19

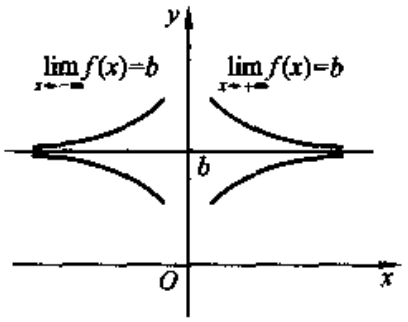

图 3.20

斜的渐近线找起来稍麻烦一些. 设渐近线的方程是

$$y = ax + b, (a \neq 0). \tag{1}$$

我们从图 3.21 中看到,$f(x)$ 图形上动点 M 到直线(1)的距离 MK 与 MK' 有关系

$$MK = MK'\cos\alpha,$$

这里 α 是直线(1)与 x 轴的交角. 因此 MK 趋于零和 MK' 趋于零是等价的. 于是

当 M 在图形上移向无穷时，有 $\lim\limits_{x\to\infty} MK' = 0$，即

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0. \tag{2}$$

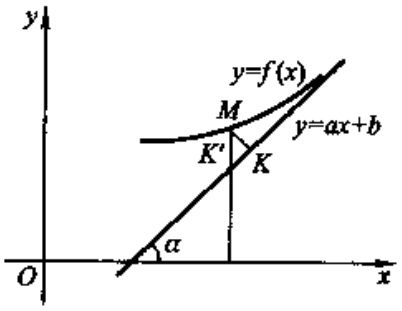

图 3.21

适合这一性质的直线必定是渐近线. 因此得到这样一个结论：

直线 $y = ax + b$ 是函数 $f(x)$ 的渐近线的充分必要条件为

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax - b) = 0.$$

现在我们就根据这一条件来确定 a 与 b. 由(2)知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x) - ax - b}{x} = 0$$

也一定成立，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - a\right) = 0,$$

或者

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = a. \tag{3}$$

由此可具体算出 a. 又根据(2)有

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b, \tag{4}$$

从而得到 b. 通过(3)，(4)两式，就能找到一般的渐近线

$$y = ax + b.$$

例 求曲线 $y = \dfrac{x^2}{1+x}$ 的渐近线.

解 由于

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{1+x} = \infty,$$

故 $x=-1$ 是一条垂直渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1,$$

即得 $a=1$,而

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=-1,$$

故得另一条渐近线为 $y=x-1$.

3.2.4 描绘图形的例子

有了上面这些知识以后,就可以比较精确地描绘出函数的图形来了.

例 1 描绘 $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ 的图形.

解 首先看到除 $x=-1$ 外,$f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 都有定义. 由于

$$\lim_{x\to-1}f(x)=-\infty,$$

因此 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的一条垂直渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5,$$

故得

$$y=x-5$$

是 $f(x)$ 的一条斜渐近线.

容易看到 $x=1$ 时,$f(x)=0$,因此图形与 x 轴交于 $(1,0)$. 因

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3},$$

所以

$$f'(1)=f'(-5)=0.$$

又因

$$f''(x)=\frac{24(x-1)}{(x+1)^4},$$

所以

$$f''(1)=0.$$

以所找到的几个特殊点为端点，把整个数轴分成几个区间，考察在这些区间中的变化情况：

x	$(-\infty,-5)$	$(-5,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+	+
$f''(x)$	−	−	−	+
$f(x)$	凸，上升	凸，下降	凸，上升	凹，上升

从表上容易看出，$(1,0)$是拐点，因为$f''(x)$经过$x=1$时改变了符号.

根据上表，以及渐近线$x=-1$及$y=x-5$，可得函数的大致图形如图 3.22.

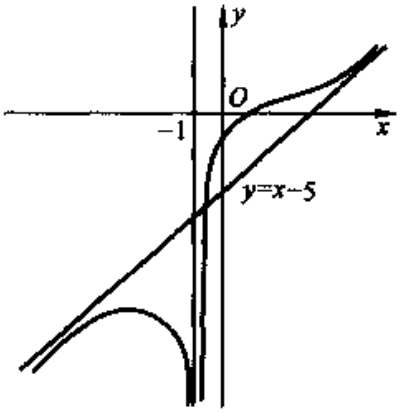

图 3.22

例 2　描绘$y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$的图形.

解　函数的定义域为$-\infty<x<1,1<x<+\infty$. 由于

$$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3},$$

可知　　$f'(3)=0,f'(-1)=0.$

现在来求渐近线. 因为

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}=\infty,$$

故$x=1$是一条垂直渐近线；又由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = -\frac{5}{4},$$

故得另一条渐近线

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}.$$

再考察函数在几个特殊点所构成的区间上的变化情况：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f''(x)$	−	−	+	+
$f(x)$	凸，上升	凸，下降	凹，下降	凹，上升

按上表及渐近线，即得函数大致图形（图 3.23）.

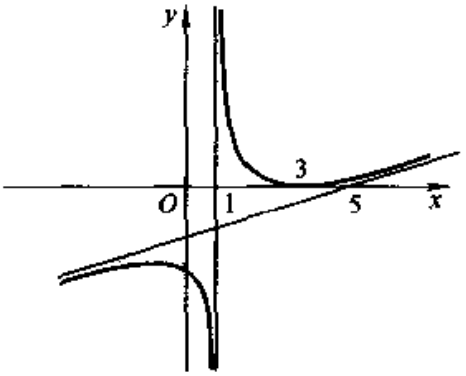

图 3.23

3.2.5 曲率

在 3.2.3 节中我们利用函数的二阶微商，判断了曲线的凹与凸，或者说断定了曲线弯曲的方向. 现在进一步来研究曲线弯曲的程度，这个问题是有现实意义的，因为在力学及某些工程技术问题中，需要知道的恰恰就是曲线弯曲程度的定量估计.

为了给出这个定量的估计，注意图 3.24，不难发现，曲线的弯曲程度与它的切线方向变化的快慢有关，即与曲线两端点处切线的夹角的大小有关. 另一方面，如果某条 1 km 长的公路和一条 1 m 长的绳子都弯了 30°（即两端点切线的夹角为 30°），那么显然可以看出，后者比前者弯曲得厉害. 由此可见，曲线的弯曲程度不仅与两端点处切线的夹角有关，而且还与曲线本身的长度有关.

容易知道，如果曲线两端点处切线的夹角为 $\Delta\varphi$，曲线的长度为 Δs，那么 $\Delta\varphi/\Delta s$ 这个量刻画了曲线的平均弯曲的程度，叫做该曲线的平均曲率. 为了定

义曲线上某点 A 的曲率，在 A 的附近任取一点 B，算出$\overset{\frown}{AB}$段的平均曲率 $\Delta\varphi/\Delta s$，当 B 点愈靠近 A 时，这个平均曲率愈能反映曲线在 A 点的弯曲程度. 因此，曲线在 A 点的曲率 k 就定义为：当 $\Delta s\to 0$（即 $B\to A$）时，$\Delta\varphi/\Delta s$ 的极限，即

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

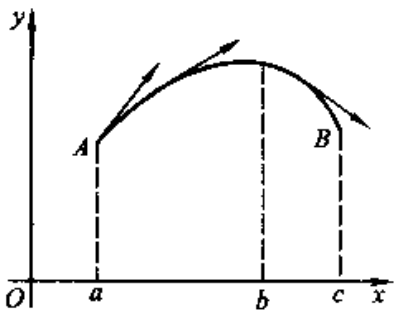

图 3.24

从这定义立刻可知道直线上每点的曲率都为零. 这是因为 $\Delta\varphi=0$，故 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}=0$.

现在我们根据定义来导出曲线 $y=f(x)$ 上点的曲率公式.

在曲线 $y=f(x)$ 上取点 A（图 3.25），其横坐标为 x，另取一点 B，其横坐标为 $x+\Delta x$. 设 A,B 两点的切线和 x 轴正向的交角分别为 α,β，则

$$\tan\alpha = f'(x),\tan\beta = f'(x+\Delta x).$$

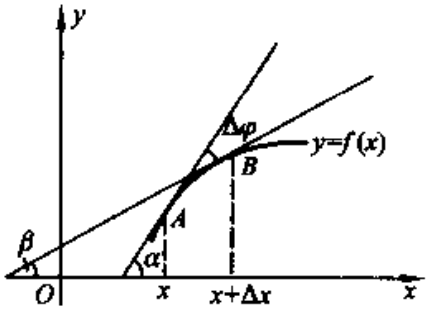

图 3.25

两切线的夹角

$$\Delta\varphi = |\beta-\alpha| = |\arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x)|.$$

另一方面，若把曲线在$[a,x]$中一段的弧长记为 $s(x)$，其中 a 为 x 轴上任一点，那么$\overset{\frown}{AB}$弧的长度为

$$\Delta s = s(x+\Delta x) - s(x).$$

$\overset{\frown}{AB}$弧的平均曲率为

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{|\arctan f'(x+\Delta x) - \arctan f'(x)|}{s(x+\Delta x) - s(x)},$$

即

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{\left|\dfrac{\arctan f'(x+\Delta x)-\arctan f'(x)}{\Delta x}\right|}{\dfrac{s(x+\Delta x)-s(x)}{\Delta x}}.$$

显然，当 $\Delta s\to 0$ 时，Δx 亦趋于 0，而当 $\Delta x\to 0$ 时，上式分子趋于

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan f'(x))\right|=\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan y')\right|=\frac{|y''|}{1+y'^2},$$

而分母的极限为

$$\frac{\mathrm{d}s(x)}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}.$$

子是得到

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}},\tag{5}$$

这就是我们要找的计算曲率的公式.

如果曲线方程是由参数方程

$$x=\varphi(t),y=\psi(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

给出，由于

$$y'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},y''=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3},$$

代入(5)式，即得

$$k=\frac{|\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{3/2}}.\tag{6}$$

例如，半径为 R 的圆的参数方程为

$$x=R\cos t,y=R\sin t\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi),$$

代入(6)式，即得

$$k=\frac{1}{R}.$$

故圆周上每点的曲率都等于半径的倒数，由此可看出半径愈大的圆，曲率愈小，这和我们的直观是一致的.

假定曲线 $y=f(x)$ 在 A 点的曲率为 $k\neq 0$. 过 A 引曲线的法线，又在法线上

曲线凹的一面取点 C，使 $AC=\frac{1}{k}$，以 C 为圆心，AC 之长为半径画一圆（图 3.26），由于 C 点在曲线的法线上，故这个圆和曲线在 A 点相切，而且两者在 A 点有相同的曲率. 因此我们可以说，在通过 A 点的一切圆中，以这个圆在 A 点附近和曲线的形状最接近. 我们就把这个圆叫做曲线在 A 点的曲率圆，它的半径叫做曲率半径，圆心叫曲率中心.

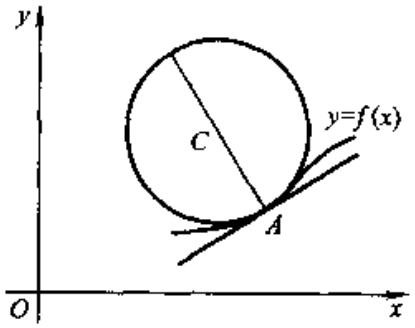

图 3.26

由于曲率圆具有上述的性质，因此在谈到有关曲线凹凸和曲率问题时，我们往往拿曲率圆来代替曲线，使问题得以简化. 例如在研究质点的曲线运动时，用曲率圆来代替一点附近的曲线弧，就可利用圆周运动的知识来分析这一点处的曲线运动. 如质量为 m 的质点，在曲线上一点的切线速度为 v，记曲线在此点的曲率半径为 R，则质点运动在此点处的向心加速度就是 $\frac{v^2}{R}$，向心力为 $\frac{mv^2}{R}$.

习题 3.2

1. 证明函数 $y=e^{-x^2}$ 在 $(-\infty,0)$ 内是上升的；在 $(0,+\infty)$ 内是下降的.

2. 证明：

（1）当 $a>b>0, n>1$ 时 $nb^{n-1}(a-b)\leqslant a^n-b^n\leqslant na^{n-1}(a-b)$；

（2）当 $x\neq 0$ 时，$e^x>1+x$；

（3）当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$.

3. 证明：若在 $x>0$ 时，$f'(x)>g'(x)$，又 $f(0)=g(0)$，则 $f(x)>g(x)$.

4. 求下列函数的凹凸区间和拐点：

（1）$y=x^3-3x^2-9x+9$；　　（2）$y=(1+x^2)e^x$；

（3）$y=x+\sin x$；　　（4）$y=\ln(1+x^2)$.

5. a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

6. 求下列曲线的渐近线：

（1）$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$；　　（2）$y=c+\frac{a^3}{(x-b)^2}$；

（3）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；　　（4）$y=xe^{\frac{2}{x}}+1$.

7. 描绘下列函数的图形：

(1) $y=\dfrac{8a^2}{x^2+a^2}$；　　(2) $y=x-2\arctan x$；

(3) $y=x-\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$；

(5) $y=\dfrac{\ln x}{x}$；　　(6) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$；

(7) $y=e^{-x^2}$；　　(8) $y=e^{-x}\sin x \quad (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

8. 求下列曲线在指定点的曲率：

(1) $xy=4$ 在点(2,2)处；　　(2) $y=\ln x$ 在点(1,0)处；

(3) $y=x^3$ 在任意点处；　　(4) $x=3t^2, y=3t-t^3$ 在 $t=1$ 处；

(5) $x=a\cos t, y=b\sin t$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处　$(a>0, b>0)$.

9. 证明悬链线 $y=a\left(\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)(a>0)$ 上任一点 P 的曲率半径之值等于 P 点之法线夹于 P 点与 x 轴间的长度.

3.3 Taylor(泰勒)展开与极值问题

3.3.1 Taylor(泰勒)展开式

在第一章 1.3 节的最后，指出微商(及微分)所涉及的是函数的“局部”性质，高阶微商(及微分)也是这样. 我们现在用微商(及高阶微商)来近似地刻画函数在这点附近的一些性质，这就是 Taylor(泰勒)展开式.

已给函数 $y=f(x)$，它在 $x=x_0$ 处具有 n 阶微商，我们希望找到一个 n 次多项式 $P_n(x)$，使得 $P_n(x)$ 在 $x=x_0$ 处与 $f(x)$ 有相同的值，且它们的一阶、二阶、……、n 阶微商也相同，即要求

$$P_n(x_0)=f(x_0), P_n'(x_0)=f'(x_0),$$

$$P_n''(x_0)=f''(x_0), \cdots, P^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

显然

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

(想一想 $P_n(x)$ 是怎样作出来的?)

$f(x)$与$P_n(x)$之间相差多少？若$f(x)$有$n+1$阶微商，记

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}Q_n,$$

作z的函数

$$\phi(z) = f(x) - f(z) - \frac{x-z}{1!}f'(z)$$

$$- \frac{(x-z)^2}{2!}f''(z) - \cdots - \frac{(x-z)^n}{n!}f^{(n)}(z) - \frac{(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}Q_n,$$

则显然有$\phi(x_0)=0$，$\phi(x)=0$. 由微分中值定理，一定有点$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$，使$\phi'(\xi)=0$. 但

$$\phi'(z) = \frac{(x-z)^n}{n!}[Q_n - f^{(n+1)}(z)],$$

故$Q_n = f^{(n+1)}(\xi)$. 于是得到

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

而$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$.

上述式子称为函数$f(x)$在$x=x_0$处的泰勒展开式，而$f(x)$与$P_n(x)$之差

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

称为泰勒展开式的余项. 当x与x_0十分靠近时，则$x-x_0$的绝对值很小. 所以$P_n(x)$与$f(x)$之差只是与$(x-x_0)^{n+1}$的数量级相同. 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \text{常数 } C(C\neq 0).$$

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=$常数$C(C\neq 0)$，则可用记号

$$g(x) = O[h(x)]$$

来记它，这种记号是有用的. 所以

$$f(x) - P_n(x) = O[(x - x_0)^{n+1}].$$

例 1 求 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式.

解 由于 $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$. 故在 $x = 0$ 处

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1,$$

即得

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开式.

解 由于 $f'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \cdots, f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$, 故有

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \cdots,$$

$$f^{(2m)}(0) = 0, f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m,$$

因此

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$+ \frac{x^{n+3}}{(2n+3)!}\sin\left(\theta x + \frac{2n+3}{2}\pi\right).$$

从这里可得到 $\sin x$ 的种种近似公式,而且还可以给出其精确度. 例如我们有

$$\sin x \approx x, \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}, \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \cdots$$

而且有

$$|\sin x - x| < \frac{x^3}{6}, \left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| < \frac{x^5}{120},$$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}\right| < \frac{x^7}{5\,040}, \cdots$$

又例如要使用 x 代 $\sin x$ 的误差小于 0.001,就要

$$\frac{x^3}{3!} < 0.001$$

或 $x < 0.181\,7$,就是当 $x < 0.181\,7$(约 10°)时,用 x 代 $\sin x$ 的误差 < 0.001.

例 3　求 $f(x)=(1+x)^{\alpha}(x>-1,\alpha$ 为任意实数$)$在 $x=0$ 处的泰勒展开式.

解　由于

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

故有

$$f(0)=1,f'(0)=\alpha,\cdots,f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

所以泰勒展开式为

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

关于泰勒展开的问题,将在第十章中进一步讨论.

关于泰勒展开式还可以从另一个角度来理解与认识它.

对于任给的一个函数,要在一点附近对它进行讨论,由于函数一般来说,都是十分复杂,所以讨论起来往往十分困难. 于是想可否在一点附近用一些简单的易于掌握的函数来逼近它或表示它,那么哪些函数是简单的易于掌握的函数呢? 自然想到的是在本书第二章第 2.1 节中所说的那些初等函数. 实际上,所谓初等函数是由下列三大类函数及其复合函数所组成. 这三大类函数是:

(1) 幂函数 x^{μ},μ 是任意实数;

(2) 三角函数及其反函数,如:$\sin x,\cos x,\arcsin x,\arccos x,\cdots$;

(3) 指数函数及其反函数,如:$e^x,\ln x$ 等等.

用幂函数 $x,x^2,\cdots,x^n$ 组成的多项式在一点附近来逼近已给的函数,这就是泰勒展开式,用幂函数所组成的级数在一点附近来表示已给的函数,这就是本书第十章要讨论的 Taylor 级数. 当然我们必会想到用三角函数组成三角多项式在一点附近来逼近已给的函数,这就是 Fourier 展开式,用三角函数所组成的级数在一点附近来表示已给的函数,这就是 Fourier 级数,这是本书第十一章中的内容. 当然我们也会想到可否用指数函数组成多项式及级数在一点附近来逼近及表示已给的函数? 回答是在微积分中是没有的. 原因是在复数域中有重要的 Euler 公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$,这里 $i=\sqrt{-1}$. 所以用指数函数组成多项式或级数在一点附近来逼近或表示已给的函数是与用三角函数组成多项式或级数在一点附近来

逼近或表示已给函数相一致的.

泰勒展开式是十分重要的公式.因为函数在一点附近的性质都可以用多项式的性质来进行讨论.显然,在第一章第 1.3 节中的微分中值定理,只是它的一个最简单的特例($n=0$).下一节中要讨论的极值问题的理论用泰勒展开式来看待,也是一目了然的.最后列举一个泰勒展开式的应用.

若$f(x),g(x)$在$x=x_0$处有二阶微商,$g'(x_0)\neq 0$,且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

这个公式叫做 **L' Hospital 法则**.

证明这点是十分容易的,因为$f(x),g(x)$在$x=x_0$处的泰勒展开式分别为

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + O[(x-x_0)^2],$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + O[(x-x_0)^2],$$

而$f(x_0)=g(x_0)=0$,故

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)(x-x_0) + O[(x-x_0)^2]}{g'(x_0)(x-x_0) + O[(x-x_0)^2]}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0) + O[(x-x_0)]}{g'(x_0) + O[(x-x_0)]} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

当然还可以有:若$f(x),g(x)$在$x=x_0$处有 n 阶微商,且

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f'(x) = \cdots = \lim_{x\to x_0} f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} g'(x) = \cdots = \lim_{x\to x_0} g^{(n-1)}(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

同样可以处理能够归结为上述情形的那种问题,例如:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

求

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$，求$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$等.

例 4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　由于

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,\lim_{x\to 0}x^2=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

例 5　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　由于

$$\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)=0,\lim_{x\to 0}x^3=0,$$

且

$$\lim_{x\to 0}(\tan x-\sin x)'=\lim_{x\to 0}(\sec^2 x-\cos x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(x^3)'=\lim_{x\to 0}3x^2=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(\sec^2 x-\cos x)'=\lim_{x\to 0}(2\sec^2 x\tan x+\sin x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(3x^2)'=\lim_{x\to 0}6x=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(2\sec^2 x\tan x+\sin x)'$$

$$=\lim_{x\to 0}2(\sec^4 x+4\sec^2 x\tan^2 x+\cos x)=3,$$

$$\lim_{x\to 0}(6x)'=6,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

3.3.2　极值问题

在实际工作中，常常会遇到这样一些问题，例如，由半径为 R 的圆铁皮，剪去一个扇形，把剩下来的部分围成一个圆锥形容器，为了使所得的圆锥形容器有最大的容积，问剪去扇形的中心角应该多大？

设剪去扇形后，所剩材料的圆心角为 x，则由它围成的圆锥底的周长为 Rx

(图 3.27),故圆锥的底半径

$$r = \frac{Rx}{2\pi},$$

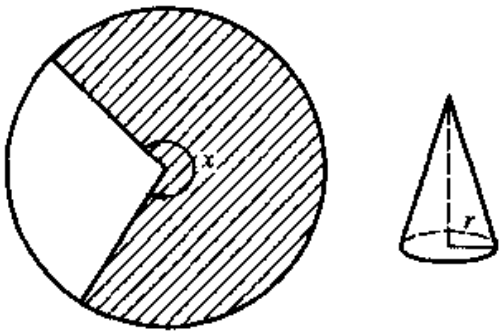

图 3.27

圆锥高为

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

因此圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{Rx}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

$$= \frac{R^3 x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

于是,这个具体问题就变成一个数学问题:问 x 等于多大时,函数

$$f(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$$

具有最大值?

我们再来看一个例子.

设一水雷艇停泊在距岸 $AO = 9$ km 处,现需派人送信到岸上某沿海兵营 B,兵营与 O 点相距 15 km. 设步行 5 km/h,划小舟 4 km/h,问送信者在何处上岸,所费时间最短.

设送信者上岸点 C 距 O 为 $x$km(图 3.28),于是

$$AC = \sqrt{9^2 + x^2}, CB = 15 - x,$$

故送信者到达兵营所需时间为

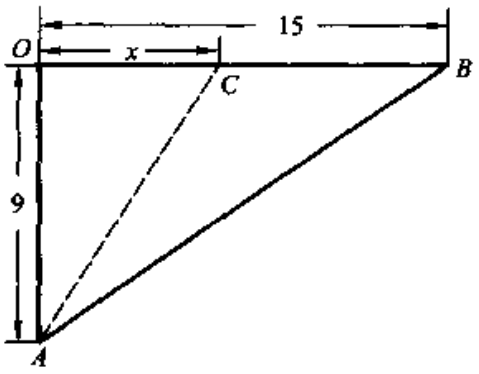

图 3.28

$$t = \frac{\sqrt{9^2 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5} \quad (0 \leqslant x \leqslant 15).$$

这样，这个问题又变成一个数学问题：问 x 取多大，才能使函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{9^2 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

有最小值？

类似的问题还可以举出很多，它们虽然来自不同的领域，但舍去其具体内容而取其共性，都能归结到这样一个数学问题：对于在 $[a,b]$ 上给定的函数 $f(x)$，问 x 等于何值时，才能使 $f(x)$ 取到最大值或最小值.

函数的极大值、极小值、极值、极值点等都已在第一章第 1.4 节中定义.

在图 3.29 中点 x_0, x_1, x_2, x_3 均为曲线升降的转折点，显然它们都是极值点. 函数在 x_0, x_2 取到了极大值，在 x_1, x_3 取到了极小值.

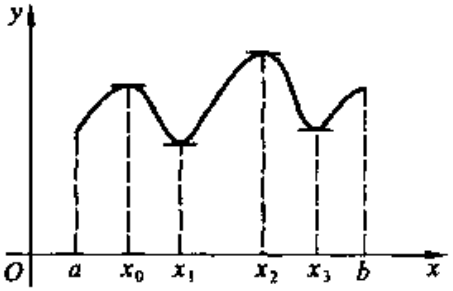

图 3.29

容易知道，函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值就是函数在这个区间上的极大值和端点值中的最大者，而最小值就是极小值和端点值中的最小者. 因此，要知道函数在哪一点取得最大值（或最小值），只要先找出使函数取极大值（或极小值）的点，然后把函数在这些点上的值与函数在端点的值相比较，就能找到使函数取最大值（或最小值）的点.

这样,问题就归结为如何去寻找函数的极值点了.

从图 3.29 中容易看出,凡在函数的极值点上,切线都具有水平方向,也就是说,如果函数在 x_0 点可微,且在该点取到极值,则必有 $f'(x_0)=0$. 这个结论已在第一章第 1.4 节中加以证明.

注意,上面的条件 $f'(x_0)=0$ 是函数在 x_0 点取到极值的必要条件,而不是充分条件. 例如,对函数 $y=x^3$ 来说,它在 $x=0$ 点既不取极大值,又不取极小值(图 3.30),但有

$$f'(0)=3x^2\big|_{x=0}=0.$$

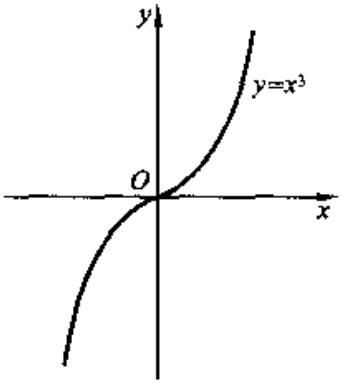

图 3.30

从上面的讨论可知,要想找出函数在定义区间内部的极值点,只要在微商等于零的点中去找. 但微商等于零的点还不一定是极值点,因此下面就来讨论如何去判定这些点是否函数的极值点.

设 $f'(x_0)=0$,考虑 x_0 的一个充分小的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,这里 δ 是一个很小的正数. 如果当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,$f'(x)>0$,而当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,$f'(x)<0$,这时 $f(x)$ 在 x_0 左边是上升的,在 x_0 的右边是下降的,因面 $f(x)$ 在 x_0 取到了极大值. 同理,如果 $f'(x)$ 在 x_0 点左近旁小于零,而在右近旁大于零,即当 x 由 x_0 左近旁经 x_0 到 x_0 的右近旁时 $f'(x)$ 由负变成正,那么,$f(x)$ 在 x_0 取极小值(图 3.31).

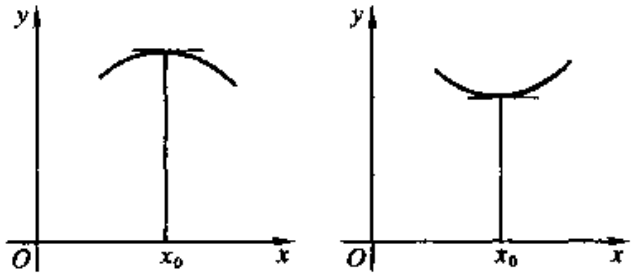

图 3.31

当然,如果 $f'(x)$ 在 x_0 附近恒大于零(或恒小于零),这时,x_0 显然不再是 $f(x)$ 的极值点了.

例 1 求函数 $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3$ 在 $[0,2]$ 上的极值点.

解
$$f'(x)=2(x-1)(x-2)^3+3(x-2)^2(x-1)^2$$
$$=(x-1)(x-2)^2(5x-7).$$

若令 $f'(x)=0$,可得 $x=1,x=\frac{7}{5},x=2$,其中 $x=1,x=\frac{7}{5}$ 可能是 $f(x)$ 的极值点.

由于

$$f'(x) = (x-1)(x-2)^2(5x-7),$$

故在 $x=1$ 的左近旁 $f'(x)>0$，而在 $x=1$ 的右近旁 $f'(x)<0$，因而知道 $x=1$ 是函数的极大点. 同理可验证 $x=\frac{7}{5}$ 是函数的极小点. 函数在这两点上的极值是

$$f(1)=0, f\left(\frac{7}{5}\right)=-0.035.$$

如果 $f''(x_0)>0$，即

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0,$$

那么在 x_0 附近也有

$$\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0,$$

但由于 $f'(x_0)=0$，故上式即为

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}>0.$$

当 x 在 x_0 的左近旁，即 $x<x_0$ 时，由上式得 $f'(x)<0$，当 x 在 x_0 的右近旁，即 $x>x_0$ 时，由上式得 $f'(x)>0$. 于是根据判定极值的法则，可知 $f(x)$ 在 x_0 取到极小值. 同理可以证明：如果 $f''(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 取到极大值.

这样我们又得到了判定极值的另一个法则：已知 $f'(x_0)=0$，如果 $f''(x_0)>0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 点取到极小值；如果 $f''(x_0)<0$，那么 $f(x)$ 在 x_0 点取到极大值. 假如 $f''(x_0)=0$，这时，我们只能用前一个法则来判断，或是用泰勒展开式来进行讨论，留给读者做练习.

上面讨论的是 $f(x)$ 在 x_0 处可微的情形. 除此之外，使 $f'(x)$ 不存在的那些点，也可能是它的极值点. 例如，$y=f(x)=1+(x-2)^{\frac{2}{3}}$，$f'(x)=\frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$，$(x\neq 2)$. 当 $x=2$ 时，$f'(x)$ 不存在，但在 $x=2$ 的左近旁，$f'(x)<0$，在它的右近旁，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处达到极小值，极小值为 1.

最后还必须指出，在实际问题中常常会遇到这样的情况：连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的内部只有一个极值点 x_0，这时，如果 x_0 是 $f(x)$ 的极大点，则必是 $f(x)$ 的最大点；如果 x_0 是 $f(x)$ 的极小点，则必是 $f(x)$ 的最小点.

例 2　在剪扇形的那个例题中，最后归结到求函数

$$f(x) = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

在$[0,2\pi]$上的最大值. 这里只要求函数

$$f(x) = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

的极值点就行了. 由于

$$f'(x) = \frac{8\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}},$$

令$f'(x) = 0$,即$8\pi^2 x - 3x^3 = 0$,解得

$$x_1 = 0, x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

显然,

$$x_1 = 0, x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

这两个根对我们的问题是没有意义的,不必予以考虑,对于

$$x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

容易验证

$$f''(x_3) < 0,$$

故知$f(x)$在$x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$点取极大值. 由于$f(x)$在$[0,2\pi]$上只有这一个极大值. 故必为最大值. 于是最后得到结论,当所剪去扇形的圆心角为

$$2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\pi(3 - \sqrt{6})$$

时,才能使所围成的容器有最大的容积.

例3 在送信的那个例题中,最后归结到求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{9^2 + x^2}}{4} + \frac{15 - x}{5}$$

在$[0,15]$上的最小值. 因为

$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{9^2 + x^2}} - \frac{1}{5},$$

令 $f'(x) = 0$，得 $5x = 4\sqrt{9^2 + x^2}$，解这个方程得 $x = 12$. 而

$$f''(x) = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{9^2 + x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{9^2 + x^2}}}{9^2 + x^2} = \frac{1}{4}\frac{9^2}{(9^2 + x^2)^{3/2}},$$

所以

$$f''(12) = \frac{1}{4}\frac{9^2}{(9^2 + 12^2)^{3/2}} > 0.$$

即 $x = 12$ 使 $f(x)$ 取得极小值. 因 $f(x)$ 在 $[0,15]$ 上只有一个极小值，所以它就是最小值. 故送信者应在距 O 点 12 km 上岸.

例 4　重量为 G 的物体放在水平的平面上，加一力 F 克服摩擦力，使之移动. 问该力应与水平面成何角度，方能使所加之力为最小（设摩擦系数为 μ）？

解　设力 F 与水平面成 θ 角. 由物理学知道，摩擦力 f 与接触面正压力成正比，其比例系数为 μ. 所以

$$f = \mu(G - F_y) = \mu(G - F\sin\theta).$$

物体开始移动时，推力等于摩擦力，即

$$f = F\cos\theta \text{ 或 } \mu(G - F\sin\theta) = F\cos\theta.$$

故得

$$F = \frac{\mu G}{\cos\theta + \mu\sin\theta} \quad \left(0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

现在的问题是，θ 取何值时，F 最小.

欲使 F 最小，只需使分母

$$g(\theta) = \cos\theta + \mu\sin\theta$$

最大，这样就把问题简化了. 命

$$g'(\theta) = -\sin\theta + \mu\cos\theta = 0,$$

得 $\tan\theta = \mu$，或 $\theta = \arctan\mu$.

为了检验 $\theta = \arctan\mu$ 是否使 $g(\theta)$ 取最大值，我们考虑

$$g''(\theta) = -\cos\theta - \mu\sin\theta = -\cos\theta(1 + \mu\tan\theta)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}(1 + \mu\tan\theta),$$

所以 $$g''(\arctan \mu) = -\sqrt{1+\mu^2} < 0.$$

故知当 $\theta = \arctan \mu$ 时,$g(\theta)$ 有最大值,也即 F 有最小值.

习题 3.3

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的泰勒展开式,并写出其余项:

(1) $\cos x$;

(2) $\ln(1+x)$;

(3) $\ln(1-x)$;

(4) xe^x;

(5) $\arctan x$;

(6) $\arcsin x$.

2. 近似计算下列值准确到小数五位:

(1) $\sin 10°$.

(2) $\sqrt[5]{1\,000}$.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x - 1}{\sin 4x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(1-\cos x)}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$;

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x} - e^x}{\tan x - x}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ $(a>0)$;

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to \infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1)$;

(18) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(19) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$;

(20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\tan \dfrac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$;

(21) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^x$;

(22) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\tan x)^{2x-\pi}$;

(23) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}$;

(24) $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{k}{x}$;

(25) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$;

(26) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cot x}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$;

(27) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$;

(28) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$;

(29) $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$;　　(30) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

4. 求下列函数的极值:

(1) $y=2x^3-3x^2$;　　(2) $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(3) $y=\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}$;　　(4) $y=x-\ln(1+x)$;

(5) $y=x^2e^{-x^2}$;　　(6) $y=\cos x+\sin x\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(7) $y=x-\sin x$;　　(8) $y=x^2(x-1)^3$.

5. 求下列函数在指定区间上的最大值和最小值:

(1) $y=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上;

(2) $y=\sqrt{100-x^2}$ 在 $[-6,8]$ 上;

(3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 在 $[0,4]$ 上;

(4) $y=\sin 2x-x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上.

6. 证明:若 $p>1$,则对于 $[0,1]$ 内任一 x,有

$$x^p+(1-x)^p\geqslant\frac{1}{2^{p-1}}.$$

7. 从长为 8 cm,宽为 5 cm 的矩形纸板的四个角上剪去相同的小正方形,而后折成一个无盖的盒子. 要使盒子的容积最大,问剪去的小正方形边长应为多少?

8. 要做一个母线长 20 cm 的圆锥形漏斗,使其容积最大,其高应为多少?

9. 试证,定容圆锥形帐幕当其高为底半径的$\sqrt{2}$倍时,所需的材料最省.

10. 设圆桌面的半径为 a,应该在桌面中央上方多高的地方安置电灯,才可使桌子边缘上的照度为最大?

[提示:照度 $I=k\dfrac{\sin\varphi}{r^2}$,式中 φ 为光线倾斜的角度,r 为光源与被照处的距离,k 为光源强度.]

11. A,B,C 三点不在同一直线上,$\angle ABC=60°$,汽车以 80 km/h 的速度由 A 向 B 进行,同时火车以 50 km/h 的速度由 B 向 C 驶去. 如果 $AB=200$ km,问运动开始几小时后汽车与火车的距离最小?

12. 对量 A 做了 n 次测量,得到 n 个数值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,通常将与这 n 个数之差的平方和最小的那一个数 x 作为 A 的值,试求 x.

13. 某工厂将制造一种无盖的圆柱形金属桶,容量为 $4.71\left(\approx\dfrac{3}{2}\pi\right)\text{m}^3$,用来作底的金属 3 元/$\text{m}^2$,作侧面的金属 2 元/$\text{m}^2$,为使成本最低,应如何制作这圆桶?

14. 有甲、乙两城,甲位于一直线形的河岸;乙离岸 40 km,而其到岸的垂足与甲相距 50 km. 两城同用一抽水机从河中取水,从水厂到甲城及乙城之水管费用分别为 500 元/km 和 700 元/km,为使水管费用最省,水厂应建在河边何处?

15. 从南到北的铁路干线经过甲乙两城,两城相距 15 km. 某工厂位于乙城正西 2 km 处. 现要从甲城把货物运往工厂,铁路运费 3 元/km,公路运费 5 元/km. 为使运费最省,应在铁路干线上何处起,修一条通往工厂的公路?

16. 一张 1.4 m 高的图片挂在墙上,它的底边高于观察者的眼 1.8 m,问观察者离墙多远才能看得最清晰(即视角最大)?

17. 宽度为 a 的运河垂直地流向宽度为 b 的运河,问能在运河中航行的船的最大长度是多少?

3.4 物理应用举例

在这一节中,当我们利用定积分来计算某个量 Q 的时候,不再每次去重复说明为什么它可以归结为一个积分. 而是在所讨论的区间上取一小段 $[x, x+\Delta x]$,写成

$$\Delta Q = q(x)\Delta x$$

并直接计算这个积分.

例 1 设有半径为 R 密度不均匀的圆盘,已知其面密度为 $\rho = ar + b$,其中 r 是所考虑的点到圆心的距离,a 和 b 为常数,求圆盘的质量 m.

解 考虑由半径为 r 和 $r+\mathrm{d}r$ 的两个圆周所割出的一个小圆环(图 3.32),它的质量近似地为

$$\Delta m \approx 2\pi r(ar + b)\mathrm{d}r,$$

因此有

$$m = 2\pi\int_0^R r(ar + b)\mathrm{d}r = \frac{1}{3}\pi R^2(2aR + 3b).$$

例 2 有一半圆形的水闸,其半径为 1 m,问水满时闸所受的压力是多少?

解 如图 3.33,取水平为 y 轴,取 x 轴垂直向下,考虑图中画有斜线的一条所受的压力 ΔP. 由于圆的方程为

$$y = \sqrt{1 - x^2},$$

故这一条的面积近似地等于 $2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 因而有

$$\Delta P = 2gx\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 g 为重力加速度. 于是整个圆盘所受的压力是

$$P = 2g\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}g.$$

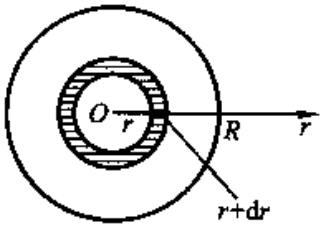

图 3.32

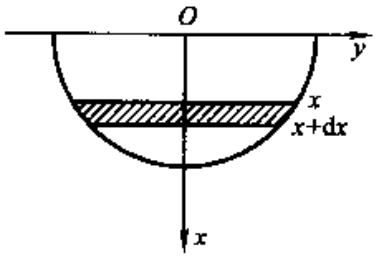

图 3.33

例 3　有一根均质的半圆形杆(图 3.34),已知杆的密度为 ρ,圆半径为 a,求它绕半圆直径(x 轴)旋转的转动惯量.

解　如图 3.34 所示,半圆方程为

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

在半圆上取一个小弧段 $\mathrm{d}s$,它绕 x 轴旋转的转动的惯量为

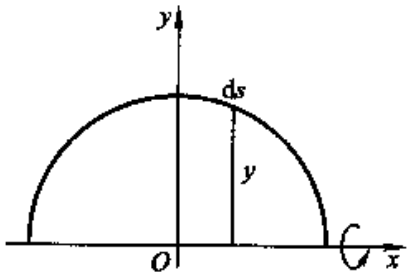

图 3.34

$$\mathrm{d}I_x = y^2\rho\mathrm{d}s = \rho y^2\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x,$$

故总的杆绕 x 轴旋转的转动惯量为

$$I_x = \int_{-a}^{a}\rho y^2\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = 2\rho\int_0^a (a^2 - x^2)\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho a^3.$$

例 4　有长为 l,质量为 M 的两个同样的均匀杆位于一直线上,其间距离为 l,求它们之间的相互引力.

解　取所给直线为 x 轴,左杆的左端点为坐标原点,如图 3.35. 首先计算整

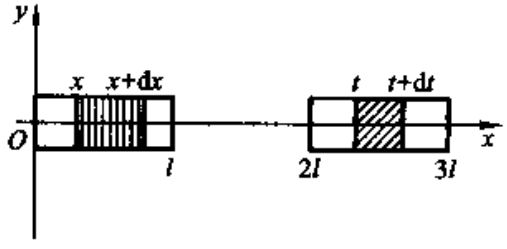

图 3.35

个左杆对右杆上带有斜线的一小段的引力. 注意后者的质量是

$$\Delta m_2 = \frac{M}{l}\mathrm{d}t.$$

今在左杆上取带有竖线的一段,其质量为

$$\Delta m_2 = \frac{M}{l}\mathrm{d}x,$$

两小段之间的引力是

$$\Delta F = k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{(t-x)^2},$$

其中 k 是万有引力常数.

这样,整个左杆对右杆上一小段的引力是

$$F_1 = k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \mathrm{d}t \int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{(t-x)^2} = k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \left[\frac{1}{t-l} - \frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t.$$

再作积分,便得整个左杆对整个右杆的引力为

$$F = k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \int_{2l}^{3l} \left[\frac{1}{t-l} - \frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t = k\left(\frac{M}{l}\right)^2 \ln\frac{4}{3}.$$

例 5 某容器的形状是由曲线 $x=f(y)$ 绕 y 轴旋转而成的立体(图 3.36),今按速率 $2t$ cm/s 往内倒水,为使水面上升速度恒为 $\frac{2}{\pi}$ cm/s,问 $f(y)$ 应是怎样的函数?

解 由曲线 $x=f(y)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积为

$$V(y) = \int_0^y \pi x^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^y [f(y)]^2 \mathrm{d}y.$$

由题设可知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 2t, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{\pi}. \tag{2}$$

但

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \pi[f(y)]^2 \frac{2}{\pi} = 2[f(y)]^2,$$

故由(1)得

$$f(y) = \sqrt{t}.$$

又由(2)得 $y = \frac{2}{\pi}t$,代入上式即得

$$x = f(y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}y}.$$

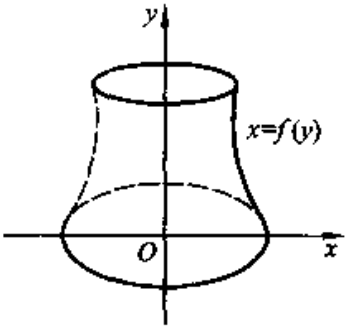

图 3.36

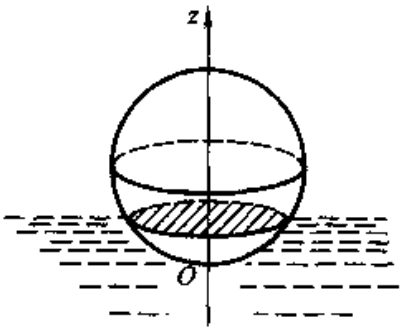

图 3.37

例 6　把一个半径为 1 m,密度为 0.1 kg/m³ 的均质球放入水中,问该球在水中下沉多少?又如对这个球施加压力,把它的一半压入水中,克服浮力的功是多少(取水的密度为 1×10^3 kg/m³)?

解　如图 3.37,设水的面为 $z = z$,则球受的浮力

$$f(z) = \int_0^z \pi[1^2 - (1-\tau)^2]\,\mathrm{d}\tau = \pi\left(z^2 - \frac{1}{3}z^3\right).$$

设 $z = h$ 时平衡,这时浮力 = 球重,故得

$$\pi\left(h^2 - \frac{1}{3}h^3\right) = \frac{4}{3}\pi \times 1^3(0.1).$$

化简得

$$f(h) = h^3 - 3h^2 + 0.4 = 0.$$

现在来解这个方程,由于

$$f(0.40) = -0.016 < 0, f(0.39) = 0.003 > 0,$$

故在 0.39,0.40 之间一定有方程的根.取 $h_0 = 0.39$,于是

$$h_1 = 0.39 - \frac{f(0.39)}{f'(0.39)} = 0.39 + \frac{0.003\,0}{1.887\,3} = 0.391\,6,$$

代入原方程得

$$f(0.391\ 6) = -0.000\ 1 < 0.$$

故知根在 0.39 与 0.391 6 之间. 另外算出 $f(0.391\ 5) > 0$,所以根在 0.391 5 与 0.391 6 之间. 若取 $h = 0.391\ 6$ 作为根的近似值,则其误差小于 0.000 1.

这个方程在[0,1]内只有一个根,于是得到结论:球在水中下沉 0.391 6 m.

若把球下压 dz,那么克服浮力所做的功为

$$\mathrm{d}W = f(z)\mathrm{d}z.$$

故把它一半压入水中克服浮力的功为

$$W = \int_{0.391\ 6}^{1} \pi\left(z^2 - \frac{1}{3}z^3\right)\mathrm{d}z = \pi\left[\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{12}z^4\right]\Big|_{0.391\ 6}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}\right) - \left(\frac{1}{3}(0.391\ 6)^3 - \frac{1}{12}(0.391\ 6)^4\right)\right]$$

$$\approx 0.728\ 5.$$

习题 3.4

1. 某一质点由静止开始沿直线运动,已知时刻 t 时的加速度为 $t^2 - 1$,而在 $t = 1$ 时,速度为 1/3,求位移对时间 t 的函数关系(设 $s(0) = 0$).

2. 某质点沿直线运动,受到阻力,速度每秒减少 2 m,若初速度为 25 m/s,问它能走多远?

3. 火箭铅直向上射出,初速度为 0,加速度是正值函数 $\frac{A}{a - bt}$,求它在 t_1 时刻的速度和离地面的高度,这里 $t_1 < \frac{a}{b}$(设 $a > 0, b > 0$).

4. 某质点沿半径为 1 m 的圆周运动,已知初速度为 3 m/s,角加速度为 $6(t-1)$ m/s^2,走路程 9 m 需要多少时间?

5. 把质量为 m 的物体从地球表面升高到高度为 h 的地方,需作多少功?

6. 土块的密度为 1.5 t/m^3. 挖一个深度为 20 m 的半球形蓄水池,需要做多少功?

7. 使自由长度为 1 m 的弹簧伸长 0.025 m,需要费力 24.5 N,若把它由 1.1 m 拉长到 1.2 m,需要再做多少功?

8. 长为 30 cm,线密度为 30 g/cm 的细杆,一端固定地在水平面内转动,已知角速度是 10 π/s,求杆的动能.

9. 有一块等腰梯形的板,上底为 6 m,下底为 10 m,高为 5 m. 将它垂直放在水中,设下底沉没于水面下 20 m 处,求水对该板的压力.

10. 设某物体在化学反应中分解的速度与反应进行的时间成正比,比例系数为 2,设开始时有物质 m_0(g),问 3 秒后有物质多少?

11. 液体从容器中流出的速度 $v = c\sqrt{2gh}$,其中 g 为重力加速度,h 为液体表面在开孔上

的高，$c=0.6$，为实验系数. 现有直径 1 m，高 2 m 的圆柱形大桶，充满水之后让水从其底上直径为 1 cm 的小圆孔流出，问需多少时间桶内水才能流完？

12. 设有质量均匀分布的一根杆，其线密度为常量 ρ，长为 $2l$. 在这杆的中垂线上距杆 a 处置一单位质点 M，求杆对这单位质点的引力.

第四章

常微分方程

4.1 一阶微分方程

4.1.1 概念

自然现象中的许多运动规律表现在量的侧面往往是某种函数关系，可是有时候我们所能知道的常常不是这些函数本身，而仅是函数及其微商或微分、高阶微商或高阶微分所满足的一些关系，即所谓微分方程. 我们现在就是要从这些关系中找出所需的函数来. 下面先举几个例子.

例 1 将温度为 100℃ 的物体放在温度为 0℃ 的介质中冷却，依照冷却定律，冷却的速度与温度 T 成正比，求物体的温度 T 与时间 t 之间的依赖关系.

由冷却定律，立即可以写出它的冷却方程为

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -kT, \tag{1}$$

其中 k 为比例常数.

例 2 一潜水艇在下降时，所受的阻力与下降的速度成正比，若潜水艇由静止状态开始运动，求它的运动规律.

潜水艇主要依靠它的重量 W 克服阻力而作下降运动. 设在时刻 t 下降的速度是 $v(t)$，则阻力为 kv(k 是比例常数)，于是根据第二运动定律，其运动方程为

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = W - kv. \tag{2}$$

例 3 设质量为 m 的质点系于一长度为 l 的线上摆动(图 4.1)，并设在任何时候，这个摆都在同一个平面上. 如果取摆的平衡位置为原点 O，而 s 表示动点 M 到 O 的弧长，当点 M 在 O 的右方，$s>0$；当 M 在 O 的左方，$s<0$. 假若不计阻力，并设运动开始时摆处于平衡位置，点 M 在最大偏离的弧长为 s_0，求摆的运动方程.

将重力 mg 沿切向及法向分解. 这时对运动起作用的是切向的分力 $-mg\sin\theta$.

根据第二运动定律，得到运动的方程为

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\sin\theta,$$

而 $s = l\theta$，故为

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta. \tag{3}$$

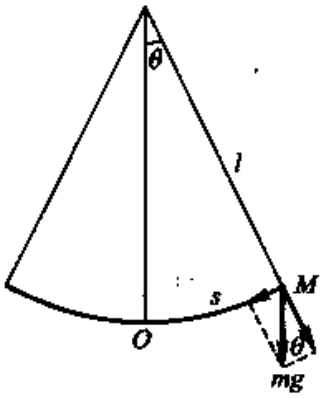

图 4.1

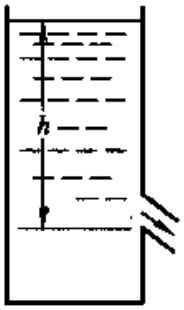

图 4.2

例 4　设一桶中盛水，横截面为 1 m^2，在距水面 1 m 的地方，水从一个直径为 2 cm 的水孔流出(图 4.2)，若不计摩擦等因素，问要多少时间，孔以上的水全流完？

要知道多少时间水流完，必须知道水流的规律. 水从孔中流出的速度等于自由落体下落距离 h 所得到的速度，即 $\sqrt{2gh}$，但实际速度要小一些，约为

$$v = 0.6\sqrt{2gh} = 26.57\sqrt{h}\ \text{cm/s},$$

故在 dt 时间内流出的水量是 vdt 乘孔的面积，即

$$\pi v dt.$$

又设在时间 dt 内水面下降 dh，于是有

$$-10\,000dh = \pi v dt = \pi 26.57\sqrt{h}dt. \tag{4}$$

如果从中解出了高度 h 与时间 t 之间的函数关系，就能解决我们的问题了.

例 5　求一曲线，使在曲线上任一点 (x,y) 处的切线垂直于该点的矢径.

曲线上任一点处切线的斜率为 $\frac{dy}{dx}$，矢径的斜率为 $\frac{y}{x}$，按题意，应有

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{5}$$

从上面这些例子可以看出，这些问题的解决，都划归为带有微分（或微商）的方程的求解，即微分方程的求解问题. 确切地说，所谓微分方程是指含有未知函数及其对自变量的微商或微分、高阶微商或高阶微分的方程. 例如：

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2; \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dx} = xy; \tag{7}$$

$$y'' + ay' + by = \sin x, (a, b \text{ 是常数}); \tag{8}$$

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0. \tag{9}$$

以及例 1 到例 5 中所列举的方程都是微分方程.

微分方程中未知函数的微商的最高阶数叫做方程的阶，例如(1)，(2)，(4)，(5)，(6)，(7)，(9)都是一阶微分方程；(3)，(8)是二阶微分方程.

如果微分方程中变量 y 及其各阶微商都是一次的，而且也不包含有其乘积如 yy'，$y'y''$，$y'y'''$ 或 $y, y', \cdots$ 的其他函数，如 $\sin y, e^{y'}, \cdots$，则称方程是线性的. 否则，则方程就称为非线性的. 从(1)到(9)全是线性方程.

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

就是关于 y 的 n 阶线性微分方程的一般形式. 这里，$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$，$f(x)$ 都是 x 的函数.

而例如

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + y^2 = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2} + y = 0$$

等都是二阶非线性方程.

直到今天，人们对线性微分方程了解较多，而对非线性方程了解甚少，在这一章中主要介绍一阶与二阶线性微分方程，附带讨论一些高阶线性方程和方程组的问题.

在某一区间上的一个函数，如果代入一个微分方程之中，能使方程变成恒等式，则该函数就叫做该方程在此区间上的一个解. 例如 $y = \cos 2x$ 及 $y = 1$ 就是方程

$$y'' - 2(\cot 2x)y' = 0$$

在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的解. 今后凡不提及区间的解,是指整个实数轴上的解.

常微分方程的首要问题是求出它的全部解,或是求出满足一些已给条件的方程的解.

4.1.2 分离变量

说起解常微分方程,还是从微积分基本定理说起.

从微积分基本定理知道,所谓积分某一函数$f(x)$,就是要找出一个函数y,使得

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

所以在求积分时,事实上已经在解一种最简单的一阶微分方程了.

我们就从这里开始.

上面方程可以改写成

$$dy = f(x)dx. \tag{10}$$

两边积分,即得

$$\int dy = \int f(x)dx,$$

即

$$y = \int f(x)dx + C.$$

从这里可以看出,如果考虑一个比(10)稍微复杂一些的方程

$$g(y)dy = f(x)dx, \tag{11}$$

那么,也只要两边积分,得到

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C,$$

这是x与y之间的一个关系式. 解出y为x的函数,就是我们所要求的方程(11)的解. 也就是,对于形如(11)的方程,或形为

$$\frac{dy}{dx} = \psi(y)f(x)\left(\psi(y) = \frac{1}{g(y)}\right)$$

的方程,我们是会解的. 这种微分方程称为可分离变量的微分方程. 也就是说,如果能将方程中的变量分离开来,使得方程的一边只有自变量的微分,另一边只有因变量的微分,这样的微分方程称为可分离变量的. 这种求解方程的方法叫做分

离变量法,这种方法是求解微分方程的一个十分重要的基本方法.

例 1 求解 4.1.1 节中的例 1.

解 要解的方程是

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -kT,$$

此即

$$\frac{1}{T}\mathrm{d}T = -k\mathrm{d}t.$$

当时间 $t=0$ 时(开始时),物体尚未冷却,$T=100$ ℃,所以

$$\int_{100}^{T}\frac{1}{T}\mathrm{d}T = \int_{0}^{t} -k\mathrm{d}t,$$

由此得

$$\ln\frac{T}{100} = -kt.$$

于是

$$T = 100\mathrm{e}^{-kt}.$$

这就是我们所要求的冷却规律.

例 2 求解 4.1.1 节中的例 2.

解 要解的方程是

$$\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = W - kv,$$

分离变量后成为

$$\frac{W\mathrm{d}v}{g(W-kv)} = \mathrm{d}t.$$

潜水艇是由静止状态开始运动,即当 $t=0$ 时,$v=0$,所以

$$\int_{0}^{v}\frac{W\mathrm{d}v}{g(W-kv)} = \int_{0}^{t}\mathrm{d}t,$$

此即

$$\frac{-W}{kg}\ln\frac{W-kv}{W} = t,$$

也就是

$$W - kv = W\mathrm{e}^{-kgt/W},$$

所以

$$v = \frac{W}{k}(1-\mathrm{e}^{-kgt/W}).$$

从这个关系式只能知道时刻 t 时的速度,但我们希望知道潜水艇在时刻 t 下降的距离 $s(t)$,这只要把 $v(t)$ 再积分一次就可以了,而当 $t=0$ 时,潜水艇下降的距离

$s(t)=0$,于是有

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t \frac{W}{k}(1-\mathrm{e}^{-kgt/W})\,\mathrm{d}t,$$

即得潜水艇下降的运动规律为

$$s(t) = \frac{W}{k}\left(t+\frac{W}{kg}\mathrm{e}^{-kgt/W}-\frac{W}{kg}\right).$$

从这两个例子中可以看出,在实际问题中我们所要求的解,不仅要满足微分方程,而且要求它在某一点取已给的值,这种条件称为初始条件,它常由实际问题本身所给出,这样的问题称为初值问题.

例 3　求解 4.1.1 节中的例 4.

解　问题已经归结到解微分方程(4),分离变量得

$$\mathrm{d}t = -119.8\,\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}.$$

这是一个初值问题,其初始条件为:当 $t=0$ 时(开始时),$h=100$ cm,所以

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\int_{100}^h 119.8\,\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}},$$

即

$$t = -239.6\sqrt{h}+239.6\sqrt{100}.$$

孔以上的水全流完时,$h=0$,这时

$$t = 2\,396\ \mathrm{s} = 39.9\ \mathrm{min}.$$

因而约 40 分钟流完.

例 4　求解 4.1.1 节中的例 5.

解　将方程(5)分离变量后,即得

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x,$$

积分之,得

$$y^2+x^2 = C,$$

C 为任意常数. 所以以原点为中心的任何圆,都满足要求. 如果另外加一个条件,圆就能唯一确定下来. 例如,我们要求曲线经过点(3,4),这时 $C=3^2+4^2=25$,所以圆

$$x^2+y^2 = 25,$$

就是我们所要求的曲线.

例 5 求解方程(7).

解 分离变量后,即为

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y = x\mathrm{d}x.$$

两边积分,得

$$\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C',$$

即

$$|y| = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2+C'} = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2},$$

这里 $C = \mathrm{e}^{C'}$,或 $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$,这里 $C_1 = \pm C$ 是任意常数.

有些方程虽然不是(11)的形式,但经过变换可以变成(11)的形式. 例如,方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{12}$$

令 $y = xu$ 引进新变量,则

$$y' = u + xu',$$

代入(12)得到

$$u + xu' = f(u).$$

因而得出

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{-u + f(u)},$$

由此解得

$$\ln|x| = \int\frac{\mathrm{d}u}{f(u) - u} + C_1,$$

即

$$x = C\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}} = C\Phi(u),$$

这里 $C = \pm\mathrm{e}^{C_1}$,是任意常数. 代回原来的 y,则得

$$x = C\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

例 6 求解方程(9).

解 方程(9)可以写成

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x-y} = -\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}.$$

让 $y = xu$,即得

$$u + x\frac{du}{dx} = -\frac{1+u}{1-u},$$

所以

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-u}{-1-2u+u^2}du.$$

两边积分,得

$$\frac{-1}{2}\ln|-1-2u+u^2| = \ln|x| + C',$$

即

$$-1-2u+u^2 = Cx^{-2},$$

这里 $C = \pm e^{-2C'}$ 是任意常数. 以 $u = y/x$ 代入上式,即得

$$y^2 - 2xy - x^2 = C.$$

例 7 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

解 令 $y = ux$,得

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2},$$

或

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

积分之,得

$$\ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln Cx,$$

即

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx.$$

再以 $u = y/x$ 代回去,得

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2.$$

例 8 有一小船渡河,它在每一时刻的速率都是 v_1,其方向一直指向它出发时正对岸的那一点 O,又设河水的流速是 v_2,试求船行的路线(图 4.3).

解 设河宽为 a,如图 4.3 取定坐标系,船的瞬时速度在两个坐标轴上的分量为

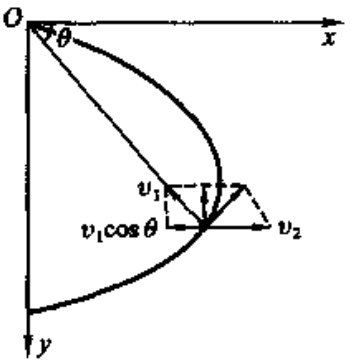

图 4.3

$$\frac{dx}{dt} = v_2 - v_1\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_1\sin\theta.$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-v_1\sin\theta}{v_2 - v_1\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - b},$$

其中 $b = v_2/v_1$. 因为

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

故原方程变为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - b\sqrt{x^2+y^2}}.$$

把它改写成

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - b\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}.$$

令 $x = uy$,得

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -b\frac{dy}{y}.$$

积分之,得

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = -b\ln y + C.$$

显然,当 $y = a$ 时,$x = 0$(船位于出发点),亦即 $u = 0$,所以有

$$C = b\ln a,$$

从而得到

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = b\ln\frac{a}{y}.$$

于是

$$u = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{y}\right)^b - \left(\frac{y}{a}\right)^b\right].$$

再用 $u = x/y$ 代回来，即得所求的解为

$$x = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{a}{y}\right)^{b-1} - \left(\frac{y}{a}\right)^{b+1}\right].$$

现在来对这个解进行讨论：

(i) 若 $v_1 > v_2$，则 $b < 1$，这时船能到达对岸 O 点.

(ii) 若 $v_1 < v_2$，则 $b > 1$，当 $y \to 0$ 时，$x \to \infty$，这时小船将被水流冲走，而在无穷远处到达对岸.

(iii) 若 $v_1 = v_2$，则 $b = 1$，这时小船的航行路线是一条抛物线

$$x = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right).$$

当 $y \to 0$ 时，$x \to \frac{a}{2}$. 粗看起来，小船到达对岸的点不是 O 点，而是在下游离 O 点 $\frac{a}{2}$ 的地方. 但是，实际上，小船是到不了对岸的，原因是，花的时间为无穷大. 下面来说明此点.

让我们回到最初的方程

$$\frac{dy}{dt} = -v_1 \sin\theta, \text{又 } \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

故

$$dt = -\frac{1}{v_1}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}dy,$$

用 $x = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ 代入上式，

得

$$dt = -\frac{1}{v_1}\frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + y^2}}{y}dy.$$

设到达对岸的时间为 T，则

$$T = \int_a^0 -\frac{1}{v_1}\frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + y^2}}{y}dy$$

$$= \frac{1}{v_1}\int_0^a \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2 + y^2}}{y}\mathrm{d}y.$$

以后学了反常积分会知道,上面关于 y 的积分是一个发散的反常积分. 在这里不妨先提及一下这里碰到的反常积分的定义,详细讨论反常积分将在第九章进行.

首先,可以估计出,

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2 + y^2} > \frac{a}{2},$$

所以

$$\int_0^a \frac{\sqrt{\frac{a^2}{4}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)^2 + y^2}}{y}\mathrm{d}y > \frac{a}{2}\int_0^a \frac{1}{y}\mathrm{d}y.$$

而根据定义,

$$\int_0^a \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^a \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\ln|a| - \ln|\varepsilon|] = +\infty,$$

因此,$T = +\infty$.

4.1.3 线性方程

在这一节中,要给出一阶线性微分方程的全部解. 一阶线性微分方程的一般形式为下面的(15)式,其中 $P(x)$,$Q(x)$ 是 x 的函数. 对这类方程的求解,还是从微积分基本定理出发.

前面已经考虑了一个比 $\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 略为复杂一点的方程(11)的解法,这时只要在两边进行积分就行了. 现在仍从方程(10)出发,考虑另一个比它略为复杂一点的方程

$$\mathrm{d}(\psi(x)y) = f(x)\mathrm{d}x, \tag{13}$$

也就是(10)的左端 $\mathrm{d}y$ 换成 $\mathrm{d}(\psi(x)y)$. 将(13)两边积分,得

$$\psi(x)y = \int f(x)\mathrm{d}x + C'',$$

即方程(13)的解是

$$y = \frac{1}{\psi(x)}\int f(x)\mathrm{d}x + \frac{C''}{\psi(x)}. \tag{14}$$

方程(13)就是

$$\psi(x)\frac{dy}{dx}+\psi'(x)y=f(x).$$

上式还可以写成

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \tag{15}$$

的形式,此处

$$P(x)=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)},Q(x)=\frac{f(x)}{\psi(x)}, \tag{16}$$

事实上,对于任意的一阶线性方程,即任意的 $P(x)$、$Q(x)$,一定可以找到 $\psi(x)$ 及 $f(x)$,使得(16)成立. 这是因为从

$$\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}=P(x),\frac{f(x)}{\psi(x)}=Q(x),$$

立刻得到

$$\psi(x)=C'e^{\int P(x)dx},f(x)=C'Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

所以一阶线性方程(15)的解是

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]. \tag{17}$$

这里 $C=C''/C'$. 注意,这里 $\int P(x)dx$ 仅表示 $P(x)$ 的一个原函数.

特别,当 $Q(x)=0$ 的情形,即考虑方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

这时方程称为齐次的,由(17),其解为

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

这当然是齐次方程的全部解. 这样形式的解称为通解. 显然

$$e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

是方程(15)的一个解,称为(15)的一个特解. 很明显,方程(15)的全部解是(17),即(17)是方程(15)的通解. 因此,(15)的通解分成两部分,一部分是它的一个特解,一部分是相应的齐次方程的通解,而(15)的通解是这两部分的和.

例 1 求解方程

$$\frac{dy}{dx} + y\cot x = x^2\csc x.$$

解 这里 $P(x) = \cot x, Q(x) = x^2\csc x$,故由公式(17),解为

$$y = e^{-\int \cot x dx}\left[\int x^2\csc x \cdot e^{\int \cot x dx}dx + C\right]$$

$$= e^{-\ln \sin x}\left[\int x^2 \csc x \cdot e^{\ln \sin x}dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(\int x^2 dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{\sin x}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = \frac{1}{3}x^3\csc x + C\csc x.$$

例 2 求解方程

$$x\frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x.$$

解 这里 $P(x) = -x^{-1}, Q(x) = x^2 + 3x - 2$. 故由(17),解为

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int (x^2 + 3x - 2)e^{-\int \frac{1}{x}dx}dx + C\right]$$

$$= x\int\left(x + 3 - \frac{2}{x}\right)dx + Cx$$

$$= \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x| + Cx.$$

例 3 求解方程 $y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$.

解 把 y 看作自变量,x 看作因变量,方程成为

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y\ln y} = \frac{1}{y}.$$

于是

$$P(y) = \frac{1}{y\ln y}, Q(y) = \frac{1}{y}.$$

因此

$$x = e^{-\int \frac{1}{y\ln y}dy}\left[\frac{1}{y}e^{\int \frac{1}{y\ln y}dy}dy + C\right]$$

$$= e^{-\ln\ln y}\left[\int \frac{1}{y}e^{\ln\ln y}dy + C\right]$$

$$= \frac{1}{\ln y}\left[\int \frac{\ln y}{y}dy + C\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln y + \frac{C}{\ln y}.$$

有些方程可以化成线性方程,例如方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1),$$

不是线性方程.这个方程称为 Bernoulli 方程,但是可以用适当的变换,可以将它变成线性方程.这只要用 y^n 除两边,得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x).$$

命 $z = y^{-n+1}$,则得

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)P(x)z = (-n+1)Q(x),$$

这是一个线性方程.

例 4 求解 $\frac{dy}{dx} - xy = -e^{-x^2}y^3$.

解 命 $u = y^{-2}$,则得

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dx} + xu = e^{-x^2}.$$

这是线性方程,解之得

$$u = e^{-x^2}(2x + C).$$

将 u 换成 y^{-2},即得原方程的解为

$$y^2 = e^{x^2}(2x + C)^{-1}.$$

如上所述,我们已经求出了一般的一阶线性方程(15)的全部解,即它的通解.这个通解由两部分组成,一是(15)的齐次方程的通解,一是(15)的一个特解,(15)的通解就是这两部分之和.这个结果的得到是从考虑一个比 $dy = f(x)dx$ 略为复杂一点的方程(13)后得到的.但是这个结果还可以用另一种方法得到,这个方法叫"常数变易法".这个方法也是求微分方程的解的一个十分重要的基本方法.

由分离变量法立即得到齐次方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ 的通解 $y = Ce^{-\int P(x)dx}$,这里 C 是任意常数.现在用常数变易法来找出(15)的一个特解.这时将齐次方程的通解中的常数 C 变易为 x 的函数 $C(x)$,然后将 $C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入(15),就得到

一个 $C(x)$ 的微分方程

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$ 就是它的解. 于是就找到了(15)的一个特解

$$e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

将齐次方程的通解与这个特解相加,就得到了(15)的通解.

习题 4.1

1. 求下列可分离变量方程的通解:

(1) $(1+y^2)dx = xdy$; (2) $y' = e^{2x-y}$;

(3) $y - xy' = a(y + x^2y)$; (4) $xyy' = 1 - x^2$;

(5) $\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y dy = 0$;

(6) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$;

(7) $yy' = (1 - 2x)/y$; (8) $xy' + y = y^2$.

2. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y'\sin x = y\ln y, y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$;

(2) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, y\big|_{x=0} = 1$;

(3) $\sin y\cos x dy = \cos y\sin x dx, y\big|_{x=0} = \dfrac{\pi}{4}$.

(4) $y - xy' = 6(1 + x^2y'), y\big|_{x=1} = 1$.

3. 一曲线通过点(2,3),其在两坐标轴间的任意切线段被切点所平分,求这曲线.

4. 求所有这样的曲线,其切线在切点和横坐标轴之间的线段被此切线和纵坐标轴的交点所平分.

5. 一物体冷却的速率与物体和周围介质温度之差成正比,其比例系数为 $k = k_0(1 + at)$. 在这种假定下,设 $t = 0$ 时,物体温度 $\theta = \theta_0$,介质温度 θ_1,试求温度 θ 和时间 t 之间的依赖关系.

6. 某液体起化学反应的速度与该液体尚未起化学反应的存量成正比. 若设液体总量为 a,试求这液体起化学反应之量与时间 t 的关系.

7. 有一质量为 1 g 的质点受力的作用作直线运动,这力从瞬时 $t = 0$ s 起和时间成正比,和质点运动的速度成反比. 在 $t = 10$ s 时,速度等于 50 cm/s,力为 4 dyn. 建立这质点运动的微分方程,又问经过一分钟之后速度是多少?

8. 一汽艇以速度 $v = 10$ km/h 在静水上运动,它的发动机在开足马力后关掉,经过 $t = 20$ s 后,汽艇的速度降低到 $v_1 = 6$ km/h. 设水对汽艇运动的阻力和速度成正比,试求发动机停止两分钟后汽艇的速度,再求发动机停止后一分钟汽艇所经过的距离.

9. 求下列形为 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$ 的方程的解：

(1) $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$；　　(2) $y'=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$；

(3) $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$；　　(4) $y^2+x^2y'=xyy'$；

(5) $xy'=y\ln\frac{y}{x}$；　　(6) $y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}$；

(7) $y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$.

10. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

[提示：若直线 $ax+by+c=0$ 与 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 有交点 (α,β)，作代换 $x=\xi+\alpha,y=\eta+\beta$. 若这两条直线平行，作代换 $ax+by=z$.]

11. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-7x+7}{3x-7y-3}.$$

12. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+4y+3}{x+2y+1}.$$

13. 一曲线上任意点 M 的向径的长度等于 M 点的切线和 y 轴的交点到原点间的距离，求这曲线的方程.

14. 如果从光源发出的光线反射成为平行光线，问反射镜应该是什么形状？

15. 求下列线性方程和可以化为线性方程的方程的解：[提示：(4)，(5)，(6)题均视 y 为自变量]

(1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$；　　(2) $y'+ay=e^{ax}$；

(3) $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$；　　(4) $(y^2-6x)y'+2y=0$；

(5) $y'=\frac{1}{2x-y^2}$；　　(6) $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$.

(7) $dy+(xy-xy^3)dx=0$；　　(8) $y'+2xy=2x^3y^3$；

(9) $(xy+x^2y^3)y'=1$；　　(10) $3y^2y'-ay^3=x+1$.

16. 由曲线上任意点的横坐标及该点切线与纵轴交点的纵坐标为边所作成的矩形面积为一常量 a^2，求这曲线的方程.

17. 一质量为 m 的质点作直线运动，从速度等于 v_0 的一瞬间起，有和时间的立方成正比（比例系数为 k_1）的力作用在它上面. 此外，质点又受到介质的阻力，其大小和速度与时间的

乘积成正比(比例系数为 k_2),试求速度和时间的依赖关系.

4.2 二阶微分方程

4.2.1 可降阶的方程

有些二阶微分方程可以化成一阶微分方程来处理,这种方程称为可降阶的方程,这种解法叫做降阶法.在本节中所讨论的二阶微分方程全是可降阶的,先来看两种最简单的情形.

(1) 不显含未知函数的二阶方程

$$y'' = f(x, y'),$$

这时,只要令 $y' = p$ 就可以将方程降成一阶方程.事实上,经过变换后,方程成为

$$p' = f(x, p).$$

如果从中求出解 $p = \varphi(x, C_1)$,再由 $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$ 就可解得

$$y = \psi(x, C_1, C_2).$$

例 1 求解方程 $xy'' + y' = 4x$.

解 令 $y' = p$,则得

$$xp' + p = 4x,$$

或

$$\frac{d}{dx}(xp) = 4x.$$

于是有

$$xp = 2x^2 + C_1, \quad \text{即} \quad \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{C_1}{x}.$$

再积分一次,得

$$y = x^2 + C_1 \ln |x| + C_2.$$

(2) 不显含有自变量的二阶方程

$$y'' = f(y, y').$$

此时仍作变换 $y' = p$,由于

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy},$$

所以方程化成

$$\frac{dp}{dy} = \varphi(y,p).$$

解出此方程后,再对 x 积分一次,即得方程的解.

例 2 求解方程

$$2y\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

解 令 $\frac{dy}{dx} = p$,于是有

$$2py\frac{dp}{dy} = 1 + p^2.$$

分离变量得

$$\frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}.$$

积分之,得

$$\ln(1+p^2) = \ln C_1 y,$$

即

$$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

也就是

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 y - 1}, \text{或} \frac{dy}{dx} = -\sqrt{C_1 y - 1}.$$

积分之,得

$$2\sqrt{C_1 y - 1} = \pm C_1 x + C_2.$$

这就是方程的解.

例 3 一质量分布均匀、可以任意变形但绝对不伸长的绳子,挂在等高的两点之间,在自身重量的作用下,处于平衡状态.试求这条绳子的形状.

解 为了研究这条绳子的形状,在它所在的平面内取一直角坐标系,设绳子所形成的曲线方程为 $y = f(x)$(图 4.4).考虑绳子上两点 $M(x,y)$ 和 $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之间的一小段,它受着以下三个力的作用:

(i) 在 M 点的张力 T,这个力沿点 M 的切线方向.切线与水平方向成一角度 α,而 $\tan\alpha = f'(x)$.

(ii) 在 M_1 点的张力 T_1，这个力沿点 M_1 的切线方向. 切线与水平方向成一角度 α_1，而

$$\tan \alpha_1 = f'(x + \Delta x).$$

(iii) 这一小段绳子本身的重量 $\rho g \Delta s$，其中 ρ 为绳子密度，g 为重力常数，Δs 为这一小段绳子的长度，当 M_1 与 M 很近时，

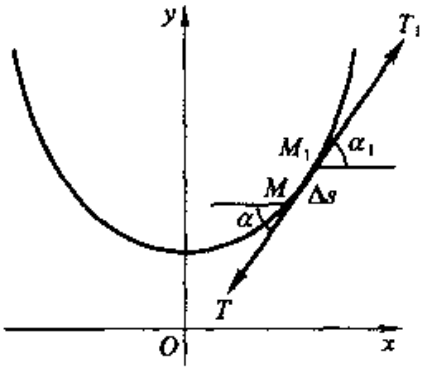

图 4.4

$$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x.$$

绳子处于平衡状态，这三个力的合力为 0，故这三个力在水平与垂直方向分量之和分别为零，故有

$$\begin{cases} T\cos \alpha = T_1 \cos \alpha_1 = T_0, \\ T\sin \alpha + \rho g \Delta s = T_1 \sin \alpha_1. \end{cases}$$

从前式，有

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha}, T_1 = \frac{T_0}{\cos \alpha_1}.$$

代入后式，得

$$T_0 \tan \alpha + \rho g \Delta s = T_0 \tan \alpha_1,$$

或

$$T_0(\tan \alpha_1 - \tan \alpha) \approx \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\Delta x.$$

由微分中值定理，

$$\tan \alpha_1 - \tan \alpha = f'(x + \Delta x) - f'(x) = f''(x + \theta \Delta x)\Delta x,$$

其中 $0 < \theta < 1$. 故有

$$T_0 f''(x + \theta \Delta x) \approx \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

由此，当 $\Delta x \to 0$ 时，便得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T_0}\sqrt{1 + y'^2}.$$

这是一个二阶方程,且不显含有自变量. 因此,令 $y'=p$,就化成一阶方程

$$\frac{dp}{dx} = k\sqrt{1+p^2},$$

其中 $k=\frac{\rho g}{T_0}$ = 常数,分离变量后,得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = k dx.$$

积分之,有

$$\ln(p+\sqrt{1+p^2}) = kx + C_1,$$

或

$$p = \frac{1}{2}(e^{kx+C_1} - e^{-kx-C_1}),$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{kx+C_1} - e^{-kx-C_1}).$$

再积分一次得

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx+C_1} + e^{-kx-C_1}) + C_2.$$

如果选取坐标系如图 4.4,那么显然在 $x=0$ 处,y 有极小($y'=0$),所以 $C_1=0$. 于是方程的解为

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + C_2.$$

如选取 x 轴,使原点 O 到绳索最低点的距离恰好等于$\frac{1}{k}$,即当 $x=0$ 时,有 $y=\frac{1}{k}$,则可得 $C_2=0$. 此时方程的解为

$$y = \frac{1}{k}\operatorname{ch} kx = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}).$$

它称为悬链线.

4.2.2 二阶线性方程

在上一节中,讨论了一些特殊的二阶线性方程,它们都是可以降阶的,即通过一些变换,将它们变为一阶线性方程. 所以这样的二阶线性方程,本质上来讲,还是一阶线性方程. 在这一节中将讨论一般的二阶线性方程.

在实际问题中最常碰到的是二阶线性常微分方程,它的一般形状是:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{1}$$

其中 $p(x)$,$q(x)$,$f(x)$ 均为 x 的连续函数,未知函数 y 及其导数 y',y'' 都是一次的. 如果 $f(x) \equiv 0$,则方程称为齐次的,否则称为非齐次的. 先来讨论与(1)相对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2}$$

齐次二阶线性常微分方程的初值问题是指

$$\left.\begin{aligned} &y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ &y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta \end{aligned}\right\} \quad (\text{I})$$

除了一些简单的情形外,一般无法用简单的式子把这个问题的解写出来. 但我们可以证明问题(Ⅰ)的解是存在的,且为唯一. 这个证明我们把它放在第十章.

由这条存在性与唯一性定理,可以得到解的结构定理:

若 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的一对线性无关的解,则对任意常数 C_1,C_2,$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是它的解,反之,方程的任一解,都可表成 $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 的形式,即

$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是方程的**通解**.

现在来一步步地证明这条结构定理. 首先要来解释什么叫"一对线性无关的解".

先说明一下,什么叫两个函数 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 是线性相关的. 所谓 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 在 $[a,b]$ 上**线性相关**,是指存在两个不同时为零的常数 C_1 和 C_2,使得

$$C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) = 0$$

在区间 $[a,b]$ 上恒等地成立,否则就称为**线性无关**.

如果方程(2)的两个解,$y_1(x)$,$y_2(x)$ 是线性无关的,则称它们为"一对线性无关的解".

如果两个函数 $\varphi(x)$,$\psi(x)$

$$C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) \equiv 0,$$

则

$$C_1\varphi'(x) + C_2\psi'(x) \equiv 0.$$

因此,要存在两个不同时为零的常数 C_1,C_2,当且仅当

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix} = 0.$$

这个行列式称为函数 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 所构成的 Wronski 行列式,记为 $W(\varphi,\psi)$ 即

$$W(\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) \\ \varphi'(x) & \psi'(x) \end{vmatrix}.$$

这样,我们得到了如下的结论:

如果函数 $\varphi(x)$,$\psi(x)$,线性相关,则 $W(\varphi,\psi)\equiv 0$,但必须指出,由 $W(\varphi,\psi)\equiv 0$,却未必能说 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 这两函数线性相关. 例如

$$\varphi(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 0, & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ (x-1)^2 & 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

这两个函数在区间[0,2]上是线性无关的,因为当恒等式

$$C_1\varphi(x) + C_2\psi(x) \equiv 0$$

在[0,1]上成立时,可以推知 $C_1 = 0$;当它在[1,2]上成立时,可推知 $C_2 = 0$,故若上式在[0,2]上成立时,必有 $C_1 = C_2 = 0$. 依定义,$\varphi(x)$,$\psi(x)$ 在[0,2]上线性无关. 但不难计算 $W(\varphi,\psi)$ 在[0,2]上恒等于零.

上面讨论的 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是任意两个函数,如果 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 是齐次线性方程的两个解,则情况就不同,我们有下面的结论:

设 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 都是齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的解,如果 $W(y_1,y_2)$ 在[a,b]中某点等于零,那么 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 在[a,b]上线性相关. 换句话说,如果 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 线性无关,则 $W(y_1,y_2)$ 在[a,b]上处处不等于零.

证明这一点是容易的. 事实上,如果在点 x_0 有

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0,$$

那么一定存在两个不同时为零的数 C_1 和 C_2,使

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = 0, \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = 0. \end{cases}$$

考虑函数

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

由于 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程的解，故 $y(x)$ 也是它的解，且满足初始条件

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0.$$

另一方面，$\tilde{y}(x) \equiv 0$ 当然是齐次方程的解，且满足 $\tilde{y}(x_0) = 0, \tilde{y}'(x_0) = 0$，于是 $\tilde{y}(x)$ 和 $y(x)$ 满足同样的初始条件，由解的存在唯一性定理推知

$$y(x) \equiv \tilde{y}(x) \equiv 0.$$

这就证明了 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关.

当 $y_1(x), y_2(x)$ 都是齐次方程解时，$W(y_1, y_2)$ 还有一个很好的性质，记 $W(x) = W(y_1(x), y_2(x))$，对 x 微商，得

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1y_2' - y_1'y_2) = y_1y_2'' - y_1''y_2.$$

但

$$y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1,$$

$$y_2'' = -p(x)y_2' - q(x)y_2,$$

所以，

$$\frac{dW}{dx} = y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1) = -pW.$$

用分离变量法积分之，得到

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \text{（或 } W(x) = Ce^{-\int p(x)dx}\text{）}. \tag{3}$$

这个公式称为刘维尔公式(Liouville)公式，它给出了齐次方程的系数 $p(x)$ 和它的两个解 y_1, y_2 的 Wronsky 行列式之间的关系. 从这里可以看出，$W(x)$ 在某点为零，与处处为零是等价的.

因此，(2)的两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 的 Wronsky 行列式处处不为 0 或恒为 0，正好对应着 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是线性无关或线性相关.

有了以上一些准备之后，我们就可以很容易来证明齐次方程的解的结构定理了. 证明如下：

由于方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

是齐次的. 所以,如果 $y_1(x), y_2(x)$ 为它的解,则对任意常数 $C_1, C_2, C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是它的解,反之,如果 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关,则存在 x_0,使

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

设 $y(x)$ 为方程的任意一个解,故一定可以找到一对常数 C_1 与 C_2,使得

$$C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) = y(x_0),$$

$$C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) = y'(x_0).$$

因为 $y(x)$ 与 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 同时是方程的解,由上式知,它们有相同的初始条件,根据唯一性定理,故

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

成立. 这就证明了齐次二阶线性常微分方程的解的结构定理.

所以,求方程通解的问题,就化为求两个线性无关的解的问题,这样的两个线性无关的解是否一定存在? 回答是肯定的,可证明如下.

任取两组数 $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$,使得

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

解下列两个初值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = \alpha_1, y'(x_0) = \beta_1; \end{cases}$$

及

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = \alpha_2, y'(x_0) = \beta_2. \end{cases}$$

由本节一开始就提到的齐次二阶线性常微分方程的初值问题的存在唯一性定理,知上述两个初值问题分别有唯一的解 y_1 与 y_2,这样所得的解 y_1 与 y_2 一定是线性无关的,因为在 $x = x_0$ 时,有

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

因之,方程(2)的两个线性无关的解是一定存在的.

话虽这样说,可要真正找到(2)的这一对线性无关解,却没有一般的办法.但若能用某种方法找到一个不恒等于零的解(比如,可以很容易观察出一个解),则可借助于刘维尔公式(3)得出另一解,使这两个解构成一对线性无关解.

设 $y_1(x)(\neq 0)$ 是齐次方程的一个解,由刘维尔公式

$$W(y_1,y_2) = Ce^{-\int P dx}. \qquad (C \neq 0)$$

两边同除以 y_1^2,得

$$\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P dx},$$

或

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}e^{-\int P dx}.$$

积分之,得

$$\frac{y_2}{y_1} = C\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P dx}dx.$$

所以

$$y_2 = Cy_1 \cdot \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int P dx}dx. \qquad (4)$$

这样,有了 y_1,就可以根据上式求得 y_2.

因之,找(2)的通解问题,就归结为找(2)的一个特解问题.因为如果能找到(2)的一个特解 $y_1(x)$,则由公式(4),可找到(2)的另一个特解 $y_2(x)$,且 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关的.于是 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 就是(2)的通解,这里 C_1, C_2 为任意常数.

例 1 求方程 $xy'' - y' = 0$ 的通解.

解 容易看出 $y_1(x) = 1$ 是它的一个解,另一解 $y_2(x)$ 用上述公式(4)来求.在上述公式中,取 $C = 1$,得

$$y_2(x) = \int e^{-\int P dx}dx = \int e^{\int \frac{1}{x}dx}dx = \frac{x^2}{2},$$

故此方程的通解 $y(x) = C_1 + C_2\frac{x^2}{2}$.

有了上述与非齐次方程(1)相对应的齐次方程(2)的系统讨论之后,就可以来讨论非齐次方程(1)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的求解问题.

如果我们有上述非齐次方程的特解 y,而齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的通解为 u,则 $y+u$ 就是非齐次方程的通解.

证明这一点很容易,将 $y+u$ 代入方程是满足的,反之,如 z 为非齐次方程的任一解,则 $z-y$ 就是齐次方程的一个解,故任何非齐次方程的解都可写成 $y+u$ 的形式.

由前所述

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的通解为 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$,这里 $y_1(x)$,$y_2(x)$ 为线性无关的函数,故

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的通解为 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*$,这里 y^* 为这个方程的特解.

如何来求出非齐次二阶线性微分方程(1)的一个特解 y^*?

在 4.1.3 节的最后,讲到了常数变易法,即为了求出非齐次一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{5}$$

的一个特解,就将与之相应的齐次一阶线性微分方程

$$y' + P(x)y = 0$$

的通解 $Ce^{-\int P(x)dx}$ 中的常数 C 变易为函数 $C(x)$,然后将 $C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入(5)中,求出 $C(x)$,这样就得到了(5)的一个特解.

这个常数变易法,同样也可以用来从齐次二阶线性微分方程(2)的通解中,将常数变成函数后,来找到非齐次二阶线性微分方程(1)的一个特解.

若 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 是齐次方程(2)的通解. 假设非齐次方程(1)有一个形如

$$y^* = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

的特解. 于是

$$\frac{dy^*}{dx} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x) +$$

$$[C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)].$$

不妨命

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

于是

$$\frac{dy^*}{dx} = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

再微分一次得

$$\frac{d^2y^*}{dx^2} = C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x) + [C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)],$$

代入

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

得到

$$C_1(x)[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2(x)[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] + [C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x)] = f(x).$$

由于 y_1, y_2 是齐次方程的解，所以

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

将此方程与

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

联立，由于 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关，故 $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$，解方程得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \dfrac{-y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}, \\ C_2'(x) = \dfrac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}. \end{cases}$$

积分之，得

$$\begin{cases} C_1(x) = -\int \dfrac{y_2(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx, \\ C_2(x) = \int \dfrac{y_1(x)f(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx. \end{cases}$$

于是得到一个特解

$$y^*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

$$= -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)\mathrm{d}x}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} +$$

$$y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)\mathrm{d}x}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} \tag{6}$$

综上所述,求非齐次二阶线性微分方程(1)的通解问题,归结成为求齐次二阶线性微分方程(2)的一个特解问题. 如果得到了(2)的一个特解 $y_1(x)$,则由公式(4)可求得另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的(2)的特解 $y_2(x)$,再由公式(6),可求得(1)的一个特解 $y^*(x)$. 于是 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y^*(x)$ 就是(1)的通解.

例 2 求方程

$$\begin{cases} xy'' - y' = x^2 \\ y(1) = 1, y'(1) = 1, \end{cases}$$

的解.

解 由前例知 $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{2}x^2$ 是对应的齐次方程的两个线性无关解,用常数变易法得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}x} + \dfrac{x^2}{2}\dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}x} = 0, \\ x\dfrac{\mathrm{d}C_2}{\mathrm{d}x} = x. \end{cases}$$

因而 $C_2 = x, C_1 = -\frac{1}{6}x^3$. 故方程有一特解

$$C_1y_1 + C_2y_2 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3 = \frac{1}{3}x^3.$$

故原方程的通解为

$$y = k_1 + \frac{k_2}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

代入初始条件得

$$\begin{cases} k_1 + \dfrac{1}{2}k_2 + \dfrac{1}{3} = 1, \\ k_2 + 1 = 1. \end{cases}$$

故得 $k_2=0, k_1=\frac{2}{3}$. 于是满足初始条件的特解为

$$y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x^3.$$

4.2.3 常系数线性方程

上一节中,讨论了一般的非齐次二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

最后得出:求其通解的问题,归结为求与之相应的齐次二阶线性微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的一个特解问题.

当 $p(x), q(x)$ 均为常数时,就得到了二阶常系数线性微分方程

$$y''+ay'+by=f(x), \tag{7}$$

这里 a, b 都是常数. 这是一类常见的、重要的微分方程. 在这一节中,将给出(7)的通解的全部具体表达式.

要求(7)的通解,如前所述,只要求与(7)相应的齐次二阶线性微分方程

$$y''+ay'+by=0 \tag{8}$$

的特解即可. 这是容易做到的

观察发现,(8)可能有

$$y=e^{sx}$$

形式的解. 将它代入(8),得

$$(s^2+as+b)e^{sx}=0.$$

由于 $e^{sx}\neq 0$,所以必有

$$s^2+as+b=0 \tag{9}$$

(9)叫做方程(8)的特征方程. (9)的根叫做(9)的特征根. $\lambda^2+a\lambda+b$ 叫做(8)的特征多项式. (9)的根,可能有三种情形. 有两个相异实根;有一个重根;有一对共轭复根.

1° 若(9)有两个相异实根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1\neq\lambda_2$,这时 $a^2-4b>0, \lambda_1=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2-4b})$, $\lambda_2=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{a^2-4b})$,于是(8)有两个解

$$e^{\lambda_1 x} \quad , \quad e^{\lambda_2 x}.$$

它们的 Wronsky 行列式

$$W(e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x}, & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

故它们是线性无关的,因之,(8)的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2° 若(9)有重根,这时 $a^2 - 4b = 0$,重根为 $\lambda = -\frac{a}{2}$,于是

$$y_1(x) = e^{-\frac{a}{2}x}.$$

是(8)的一个解. 应用上一节的公式(4),就得到(8)的另一个解

$$y_2(x) = e^{-\frac{a}{2}x} \int e^{\alpha x} \cdot e^{-\int a dx} dx = x e^{-\frac{a}{2}x},$$

显然,$y_1(x)$与 $y_2(x)$线性无关. 故(8)的通解为

$$y = e^{-\frac{a}{2}x}(C_1 + C_2 x).$$

3° 若(9)有一对共轭复根,$\lambda_1 = \alpha + i\beta$,$\lambda_2 = \alpha - i\beta$,这时 $a^2 - 4b < 0$,故 $\alpha = -\frac{a}{2}$,$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. 于是(8)有两个复值解

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

这里用到了著名的 Euler 公式

$$\cos \beta + i \sin \beta = e^{i\beta}.$$

于是,

$$y_1(x) = \frac{1}{2}(\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2i}(\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

就是(2)的实值解. 它们的 Wronsky 行列式

$$W(y_1(x),y_2(x)) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos \beta x, & e^{\alpha x}\sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos \beta x - e^{\alpha x}\sin \beta x, & \alpha e^{\alpha x}\sin \beta x + e^{\alpha x}\cos \beta x \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\alpha x} \neq 0.$$

故 $y_1(x),y_2(x)$ 是线性无关的. 因之,(8)的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos \beta x + C_2\sin \beta x).$$

例 1 求方程

$$y'' + 2y' + 2 = 0$$

的通解.

解 特征方程

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

有一对共根复根 $-1+i, -1-i$,所以方程的通解为

$$y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

例 2 求方程

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

的通解.

解 特征方程 $s^2+4s+4=0$ 有重特征根 -2,故有两个特解

$$e^{-2x}, \quad xe^{-2x}.$$

所以,方程的通解为

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

以上我们得到了齐次二阶常系数线性微分方程(8)的所有可能的通解. 应用上一节中的公式(6),就可以得到非齐次二阶常系数线性微分方程(7)的一个特解,这就得到了(7)的通解.

于是得到

1° 当(9)有两个相异实根 λ_1,λ_2 时,由上一节中的公式(6),

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 x}\int^x e^{-\lambda_1 t}f(t)\,dt - e^{\lambda_2 x}\int^x e^{-\lambda_2 t}f(t)\,dt\right]$$

就是方程(7)的一个特解,这里 $\int^x H(t)\,dt$ 表示积分之后的函数,是以 x 为自变量的. 因之,(7)的通解为

$$y = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 x}\int^x e^{-\lambda_1 t} f(t)\,dt - e^{\lambda_2 x}\int^x e^{-\lambda_2 t} f(t)\,dt\right]$$

$$+ C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{10}$$

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

2° 当(9)有重根 $\lambda = -\frac{a}{2}$ 时,由上一节中的公式(6),

$$e^{\lambda x}\int^x (x - t) e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

就是方程(7)的一个特解. 因之,(7)的通解为

$$y = e^{\lambda x}\int^x (x - t) e^{-\lambda t} f(t)\,dt + C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}, \tag{11}$$

这里 C_1, C_2 为任意常数.

3° 当(9)有一对共轭复根 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 时,由上一节中的公式(6),

$$\frac{1}{\beta}\int^x e^{-\frac{a}{2}(x-t)} \sin\beta(x - t) f(t)\,dt$$

就是方程(7)的一个特解. 因之,(7)的通解为

$$y = \frac{1}{\beta}\int^x e^{-\frac{a}{2}(x-t)} \sin\beta(x - t) f(t)\,dt + C_1 e^{-\frac{ax}{2}}\cos\beta x$$

$$+ C_2 e^{-\frac{ax}{2}}\sin\beta x, \tag{12}$$

这里 C_1, C_2 是任意常数.

例 3 求解第一节中方程(8).

解 这时 $f(x) = \sin x$,所以当方程 $s^2 + as + b = 0$

(i) 有两个相异实根 λ_1, λ_2 时,其解为

$$y = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[e^{\lambda_1 x}\int^x e^{-\lambda_1 t}\sin t\,dt - e^{\lambda_2 x}\int^x e^{-\lambda_2 t}\sin t\,dt\right]$$

$$+ C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\frac{-\lambda_1\sin x - \cos x}{\lambda_1^2 + 1} + \frac{\lambda_2\sin x + \cos x}{\lambda_2^2 + 1}\right]$$

$$+ C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\cos x + (\lambda_1\lambda_2 - 1)\sin x}{(\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)} + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$= \frac{-a\cos x + (b-1)\sin x}{(b-1)^2 + a^2} + C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

(ii) 有重根 λ 时,其解为

$$y = e^{\lambda x}\int^x (x-t)e^{-\lambda t}\sin t\,dt + C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

$$= x\frac{-\lambda\sin x - \cos x}{\lambda^2 + 1} + \frac{x\cos x + \lambda x\sin x}{\lambda^2 + 1}$$

$$- \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^2}[-\lambda\cos x + \sin x + \lambda(-\lambda\sin x - \cos x)]$$

$$+ C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

$$= \frac{(\lambda^2 - 1)\sin x + 2\lambda\cos x}{(\lambda^2 + 1)^2} + C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}$$

$$= \frac{(b-1)\sin x - a\cos x}{(b-1)^2 + a^2} + C_1 x e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}.$$

(iii) 有一对复根 $-\frac{a}{2} + i\beta$, $-\frac{a}{2} - i\beta$ 时,其解为

$$y = \frac{1}{\mu}\int^x e^{-\frac{a}{2}(x-t)}\sin\beta(x-t)\sin t\,dt + C_1 e^{-\frac{a}{2}x}\cos\beta x + C_2 e^{-\frac{a}{2}x}\sin\beta x$$

$$= \frac{1}{2\mu}\int^x e^{-\frac{a}{2}(x-t)}(\cos(\beta x - (\beta+1)t) - \cos(\beta x - (\beta-1)t))\,dt$$

$$+ C_1 e^{-\frac{a}{2}x}\cos\beta x + C_2 e^{-\frac{a}{2}x}\sin\beta x$$

$$= \frac{(b-1)\sin x - a\cos x}{(b-1)^2 + a^2} + C_1 e^{-\frac{a}{2}x}\cos\beta x + C_2 e^{-\frac{a}{2}x}\sin\beta x.$$

这时要求 $a \neq 0, b \neq +1$. 若 $a = 0, b = 1$,则我们要解的方程是

$$y'' + y = \sin x.$$

由公式(6),其解为

$$y = \int^x \sin(x-t)\sin t\,dt + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \frac{-x}{2}\cos x + C_1\cos x + C_2'\sin x.$$

例 4 求解方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$.

解 这里 $s^2 - 5s + 6 = 0$ 的两个根是 2,3. $f(x) = xe^{2x}$,所以由公式(10)得到方程的解是

$$y = e^{3x}\int^x e^{-3t}te^{2t}dt - e^{2x}\int^x e^{-2t}te^{2t}dt + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

$$= e^{3x}\int^x te^{-t}dt - e^{2x}\int^x tdt + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

$$= -xe^{2x} - e^{2x} - \frac{x^2}{2}e^{2x} + C_1e^{3x} + C_2e^{2x}$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2} - x\right)e^{2x} + C_1e^{3x} + C_2'e^{2x}.$$

例 5 求解方程 $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin x$.

解 这时 $s^2 - 4s + 4 = 0$ 有重根 2,$f(x) = e^{2x}\sin x$. 所以由公式(11)得到方程的解是

$$y = e^{2x}\int^x (x - t)e^{-2t}e^{2t}\sin t dt + C_1xe^{2x} + C_2e^{2x}$$

$$= e^{2x}\int^x (x - t)\sin t dt + C_1xe^{2x} + C_2e^{2x}$$

$$= e^{2x}(-\sin x) + C_1xe^{2x} + C_2e^{2x}.$$

例 6 求解方程 $y'' + y = x\cos x$.

解 这时 $s^2 + 1 = 0$ 有一对虚根 $\pm i$,于是 $\mu = 1$,所以由(12)知道解为

$$y = \int^x t\sin(x - t)\cos t dt + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \frac{1}{2}\int^x t[\sin x - \sin(2t - x)]dt + C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$= \frac{x^2}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x + C_1\cos x + C_2'\sin x.$$

有了本节的公式(10)、(11)和(12)以后,二阶常系数线性微分方程的求解问题已彻底解决. 但这些公式都由积分形式给出. 当非齐次项 $f(x)$ 取某些特殊形式时,可不用积分而用代数的方法直接求出非齐次方程(7)的特解.

设 $f(x)$ 取如下特殊形式：

(i) $f(x)=\varphi_m(x)$ （m 次多项式）；

(ii) $f(x)=\varphi_m(x)e^{\alpha x}$ （α 是实数）；

(iii) $f(x)=\varphi_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=\varphi_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ （β 是实数）.

其实，上面三种形式可合并成一种形式，即

$$f(x)=\varphi(x)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

当 $\alpha=\beta=0$ 时，这就是形式(i)，当 $\beta=0$ 时，就是形式(ii)，而形式(iii)只不过是它的实部或虚部而已. 因此，我们可以一般地讨论非齐次项 $f(x)$ 具有形式

$$f(x)=\varphi_m(x)e^{\rho x} \tag{13}$$

其中 ρ 是复数.

我们假定方程(7)有形如

$$y^*=z(x)e^{\rho x} \tag{14}$$

的特解，其中 $z(x)$ 待定.

由于

$$y^{*\prime}=e^{\rho x}(\rho z+z'),$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\rho x}(\rho^2 z+2\rho z'+z''),$$

代入(1)，得到

$$[z''+(2\rho+a)z'+(\rho^2+a\rho+b)z]e^{\rho x}=\varphi_m(x)e^{\rho x}.$$

消去 $e^{\rho x}$，并记 $l(\rho)=\rho^2+a\rho+b$，上式可写成

$$z''+l'(\rho)z'+l(\rho)z=\varphi_m(x). \tag{15}$$

(i) 如果 ρ 不是特征方程的根，即 $l(\rho)\neq 0$，我们必须假设 $z(x)$ 是与 $\varphi_m(x)$ 同次的多项式，即可设 $y^*=Q_m(x)e^{\rho x}$，其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式：

$$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m,$$

这里有 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 共 $m+1$ 个常数待定. 由(15)式不难定出这些常数.

(ii) 如果 ρ 是特征方程的单根，即 $l(\rho)=0$，而 $l'(\rho)\neq 0$，那么必须假定 $z(x)$ 是比 $\varphi_m(x)$ 高一次的多项式，所以可假定 $y^*=xQ_m(x)e^{\rho x}$.

(iii) 如果 ρ 是特征方程的二重根，即 $l(\rho)=0,l'(\rho)=0$，由(15)可见，必须假定 $z(x)$ 是比 $\varphi_m(x)$ 高两次的多项式，于是可假定 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\rho x}$.

综上所述可得：

如果 $f(x)=\varphi_m(x)e^{\rho x}$,则可假设方程(7)的特解形式为

$$y^*=x^kQ_m(x)e^{\rho x},$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $\varphi_m(x)$ 同次的多项式,而 k 视 ρ 是特征方程的二重根,单根或不是它的根分别取为 2,1 或 0.

让我们再来考虑例 4:

例 7 求解方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$.

解 它的特征方程为

$$s^2-5s+6=0,$$

它有两相异实根 $s_1=2,s_2=3$,于是对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

现在,$\varphi_m(x)=x$ 是一次多项式,$\rho=2$ 是特征方程的单根,故应设

$$z(x)=x(b_0x+b_1).$$

由(15)式得

$$z''+l'(2)z'+l(2)z=2b_0-(2b_0x+b_1)=x.$$

比较系数,解得

$$b_0=-\frac{1}{2},b_1=-1,$$

所以

$$z(x)=-\frac{1}{2}x^2-x.$$

因此,方程的特解为

$$y^*=\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x},$$

而其通解为

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+\left(-\frac{1}{2}x^2-x\right)e^{2x}.$$

例 8 求 $y''-y=4x\sin x$ 的通解.

解 它的特征方程为

$$s^2-1=0.$$

它的两个根为 $s_1=1$ 和 $s_2=-1$,所以,对应的齐次方程的通解为

$$\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

为求它的一个特解,先求

$$y'' - y = 4xe^{ix} \tag{16}$$

的特解.

由于 $\rho = i$ 不是特征方程的根,所以设它的特解为

$$y_1^* = (b_0 x + b_1) e^{ix},$$

即

$$z(x) = b_0 x + b_1.$$

代入(15),解得

$$b_0 = -2, b_1 = -2i.$$

所以方程(16)的特解为

$$y_1^* = (-2x - 2i) e^{ix} = -2(x + i)(\cos x + i\sin x),$$

其虚部

$$y^* = -2(\cos x + x\sin x)$$

就是我们要找的特解,最后,得到方程的通解为

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 2(\cos x + x\sin x).$$

例 9 求 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1 + e^{-x}$

解 特征方程为,$s^2 - 2s - 3 = 0$,有两个实根

$$s_1 = -1, s_2 = 3.$$

所以,对应的齐次方程的通解

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

为求它的一个特解,我们需分别解

$$y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$$

及

$$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}.$$

易解得前一方程的一个特解

$$y_1^* = -x + \frac{1}{3}$$

及后一方程的一个特解

$$y_2^* = -\frac{1}{4}xe^{-x}.$$

于是原方程的一个特解为

$$y^* = y_1^* + y_2^* = -x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}xe^{-x}.$$

因此,原方程的通解为

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - x + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}xe^{-x}.$$

上面介绍的方法称为待定系数法,这种方法也是求解微分方程的一个十分重要的基本方法.

4.2.4 质点振动

自然现象中许多运动规律常常可以用微分方程来描述,通过解这些微分方程,使得人们对自然现象中的这些运动规律有了深入的了解与认识.这就是微分方程的威力所在,也是微积分的威力所在.在这一节中将通过对一个具体例子,质点振动,来认识它.

考察联结在一根弹簧上的质量为 m 的质点 M 的运动状态,取质点 M 的平衡位置为原点,M 的位置用它离开平衡位置的位移 x 来决定(图 4.5).作用力 f 与位移 x 成正比,且指向平衡位置,故有

$$f = -bx,$$

负号表示力的方向与位移 x 的方向相反,而 b 为弹性系数(常数).

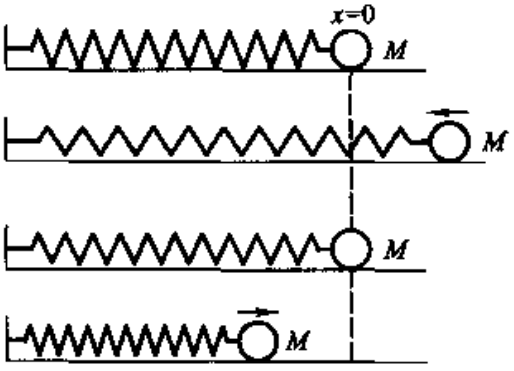

图 4.5

按照第二运动定律 $f = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$，就得 M 运动的微分方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + bx = 0. \tag{17}$$

这就是所谓简谐振动方程；它是一个二阶常系数齐次方程. 如果给出初值条件，例如，设初始状态为

$$x(0) = 0, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0 > 0.$$

那就可以唯一决定它的振动状态.

如果质点处在一个有阻尼的介质中，例如处在具有明显摩擦影响的空气中，且设阻力与速度成正比，阻力的方向永远与速度方向相反，记阻尼系数为 a（常数），则考虑到阻力作用，质点 M 的运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + bx = -a\frac{dx}{dt}. \tag{18}$$

这仍然是一个二阶常系数齐次方程，即所谓阻尼运动方程.

若作用在这质点 M 上的力除弹性力和阻尼力外，还有一附加的周期性外力 f_1，称为强迫力：

$$f_1 = F\sin\tilde{\omega}t,$$

其中 F 为常数，于是，此时质点 M 的运动方程变为

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = -F\sin\tilde{\omega}t. \tag{19}$$

它是一个二阶常系数线性方程，这就是所谓强迫振动方程.

我们来解这些方程：

1. 先来考虑方程(17)（简谐运动）. 记 $\omega = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$，于是(17)成为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

由(12)，其解为

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t,$$

把它写成

$$x = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos \omega t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin \omega t\right),$$

令 $\sin r = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$, $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, 则上式可以写成

$$x = A\sin(\omega t + r),$$

其中 A 称为质点振动的振幅, r 称为初相. 通解表明, 质点离开平衡位置的距离是随时间 t 按正弦律周期地变化的. 振动周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}.$$

振幅 A 及初相 r 可由初始条件, 即在某一时刻质点离平衡位置的距离及速度来确定.

2. 再来考虑方程(18)(阻尼运动). 记 $\beta = \frac{a}{2m}$, $\omega = \sqrt{\frac{b}{m}}$, 于是(18)成为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

对应的代数方程为

$$s^2 + 2\beta s + \omega^2 = 0.$$

分三种情形来讨论:

(i) $\beta > \omega$. 这时方程有两个实根

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}, \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2},$$

所以由(3), 方程(16)的通解为

$$x = C_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}.$$

其中 C_1 及 C_2 由初始条件确定. 例如, 当初始条件为 $x(0) = 0$. $x'(0) = 1$ 时, 有

$$x = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}[e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t} - e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})t}].$$

由于 $\sqrt{\beta^2 - \omega^2} < \beta$, 故 $-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2} < 0$, 因此,

$$\lim_{t \to \infty} x = 0.$$

这说明, 随着时间 t 的增长, 质点单调地趋于平衡位置, 不发生振动.

(ii) $\beta=\omega$. 这时方程有重根 $\lambda=-\beta$. 因此,由(11)知道,方程(18)的通解为

$$x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}.$$

显然也有

$$\lim_{t\to\infty}x=0.$$

这表明,随着时间 t 的增长,质点单调地趋于平衡位置,不发生振动.

情况(i)及(ii)称为非周期性的阻尼振动.

(iii) $\beta<\omega$. 这时方程有一对共轭复根

$$\lambda_1=-\beta+i\sqrt{\omega^2-\beta^2},\lambda_2=-\beta-i\sqrt{\omega^2-\beta^2},$$

因此,由(12)知道,方程(18)的通解为

$$x=e^{-\beta t}(C_1\cos\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+C_2\sin\sqrt{\omega^2-\beta^2}t).$$

令 $\sqrt{C_1^2+C_2^2}=A,\sin r=\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2+C_2^2}}$,上式可写成

$$x=Ae^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+r).$$

显然也有

$$\lim_{t\to\infty}x=0.$$

但由于它的微商为

$$x'=Ae^{-\beta t}[-\beta\sin(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+r)+\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cos(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+r)],$$

当

$$\tan(\sqrt{\omega^2-\beta^2}t+r)=\frac{\sqrt{\omega^2-\beta^2}}{\beta}$$

时,$x'=0$,即当

$$t=\frac{1}{\sqrt{\omega^2-\beta^2}}\left(\arctan\frac{\sqrt{\omega^2-\beta^2}}{\beta}-r+n\pi\right)$$

时,x 取极值. 由此可见,在 x 渐近于零的过程中,上下振动无限多次. 这与(i)及(ii)显然是有区别的.

$Ae^{-\beta t}=Ae^{-\frac{\beta}{2\pi}t}$ 称为振幅,r 是初相. A 及 r 的值可由初始条件决定. $\omega'=$

$\sqrt{\frac{b}{m}-\frac{a^2}{4m^2}}$是振动频率，称为这个振动系统的固有频率.

振动周期为　$T=\frac{2\pi}{\omega'}=2\pi\Big/\sqrt{\frac{b}{m}-\frac{a^2}{4m^2}}$.

通解表明：质点以振幅 $Ae^{-\frac{a}{2m}t}$，频率 ω'作振动. 随着时间 t 的增长，振幅作无穷次摆而趋于零. 如图 4.6 所示.

3. 最后来考虑强迫振动，即考虑方程(19).

(i) 假设有阻尼 $a\neq 0$. 这时方程(19)有一特解

$$x_1=F\frac{a\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t+(b-\tilde{\omega}^2m)\sin\tilde{\omega}t}{(b-m\tilde{\omega}^2)^2+a^2\tilde{\omega}^2}.$$

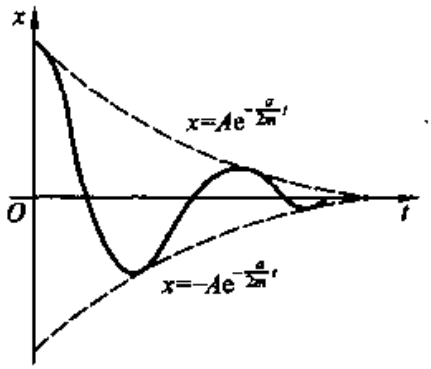

图 4.6

注意到 $b=m\omega^2$，$\beta=\frac{a}{2m}$，所以上式就是

$$\begin{aligned}x_1&=Fm^{-1}\frac{2\beta\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t-(\omega^2-\tilde{\omega}^2)\sin\tilde{\omega}t}{(\omega^2-\tilde{\omega}^2)^2+4\beta^2\tilde{\omega}^2}\\&=\tilde{F}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi),\end{aligned}$$

其中

$$\tilde{F}=\frac{Fm^{-1}}{\sqrt{(\omega^2-\tilde{\omega}^2)^2+(2\beta\tilde{\omega})^2}},\cos\varphi=\frac{\tilde{\omega}^2-\omega^2}{\sqrt{(\omega^2-\tilde{\omega}^2)^2+(2\beta\tilde{\omega})^2}}.$$

如果把对应于(19)的齐次方程(18)的通解记作 $x_0(t)$，则(19)的通解为

$$x(t)=x_0(t)+\tilde{F}\sin(\tilde{\omega}t+\varphi).$$

根据上面说过的性质

$$\lim_{t\to\infty}x_0(t)=0,$$

就知道：$x_0(t)$只在开始一段时间里起作用，而时间一久，它本身对于解的影响越来越小. 也就是说，在强迫力作用下，经较长时间之后，粗粗地看，质点基本上作与外力周期相同的振动，只是振幅及初相不同罢了.

(ii) 假设无阻尼，即 $a=0$. 分两种情形来考察.

(a) 如果 $\omega \neq \tilde{\omega}$,则有通解

$$x(t) = A\sin(\omega t + r) - \frac{F}{m(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)}\sin\tilde{\omega}t.$$

这是两种简谐振动的合成,第一项相当于自振的影响,后一项相当于外力(强迫力)的影响,它们的结果是形成叠加振动. 亦即仍是一种振动,但却已是变振幅变周期的运动了,不过,振动的振幅都是有限的.

(b) 如果 $\omega = \tilde{\omega}$,这时方程(19)的通解是

$$x(t) = A\sin(\omega t + r) + \frac{F}{2m\omega}t\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

显然,第一项的振幅是保持不变的,而第二项的振幅随时间 t 的增大而无限增大,时间久了,它可以超过任何事先规定的范围(图 4.7). 这种现象称为共振现象. 在自然界中,共振现象是经常出现的,在建筑等工程技术中,要防止共振现象;而在电子技术中,则要利用这种现象.

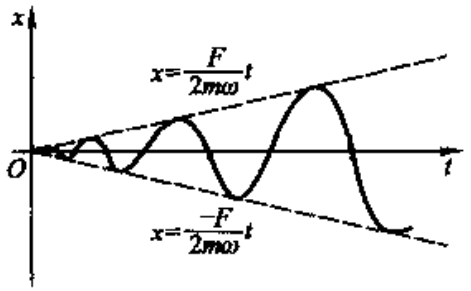

图 4.7

这样我们对于简单的质点振动问题就有了初步的了解. 不仅对于质点振动,还有很多物理现象,如电路振荡等,也都提出了二阶常系数线性方程,对这些问题,我们完全可以像上面那样来进行探讨.

4.2.5 n 阶线性微分方程与常微分方程组

前面讨论了一阶与二阶微分方程,着重讨论的是一阶与二阶线性微分方程. 显然对一般的 n(n 为任意正整数)阶微分方程进行讨论,其困难程度可想而知,即使是 n 阶线性微分方程也是如此. 在这一节中先讨论 n 阶线性微分方程,主要是 n 阶常系数线性微分方程,然后简略地讨论常微分方程组.

n 阶非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \tag{20}$$

这里 $p_1(x), \cdots, p_n(x), f(x)$ 是 x 的连续函数与之相应的 n 阶齐次线性微分方

程为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0 \tag{21}$$

在 4.2.2 节中给出了二阶线性微分方程的结构定理. 对 n 阶线性微分方程,也有相应的结构定理.

若 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是方程(21)的 n 个线性无关解,$\tilde{y}(x)$ 是(20)的一个特解,则(21)与(20)的通解分别为

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

和

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + \tilde{y}(x).$$

至于"n 个线性无关解"的定义,是 4.2.2 节中"一对线性无关解"的定义的自然推广.

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数,若存在 n 个不同时为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) = 0$$

在区间 $[a,b]$ 上恒等地成立,则称 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是在 $[a,b]$ 上线性相关的. 否则称为线性无关.

一般来说,如何找到(21)的 n 个线性无关解及(20)的一个特解都不是易事. 这里只对 n 阶常系数线性微分方程进行一些讨论.

n 阶常系数线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x), \tag{22}$$

这里 $a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 均为实常数.

现在我们利用 4.2.3 节中的结果,来求(22)的解,在那一节中,给出了非齐次二阶常系数线性微分方程(7)的通解为(10),(11)与(12). 现用此来解(22).

与(22)相对应的代数方程为

$$s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

我们知道上式左边可以分解为一次式与二次式的乘积,即上式可写成

$$(s - \alpha_1)\cdots(s - \alpha_r)(s^2 - p_1s + q_1)(s^2 - p_2s + q_2)\cdots = 0.$$

此处 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, p_1, q_1, p_2, q_2, \cdots$ 均为实数,于是(22)可写成

$$\left(\frac{d}{dx} - \alpha_1\right)\cdots\left(\frac{d}{dx} - \alpha_r\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} - p_1\frac{d}{dx} + q_1\right)\cdots y = f(x)$$

这又等价于

$$\frac{dy_1}{dx} - \alpha_1 y_1 = f(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} - \alpha_2 y_2 = y_1,$$

.....

$$\frac{dy_r}{dx} - \alpha_r y_r = y_{r-1},$$

$$\frac{d^2 y_{r+1}}{dx^2} - p_1 \frac{dy_{r+1}}{dx} + q_1 y_{r+1} = y_r,$$

.....

这是一组一阶或二阶常系数线性方程,由 4.1.3 节及 4.2.3 节,我们已知道如何来解这些方程. 现在可以从解第一个方程开始,将得到的结果代入第二个方程,然后来解第二个方程,…,这个步骤可以一直进行下去,直到求得解 y.

例 1 求解 $ay''' - by'' + ay' - by = \sin x$.

解 对应的代数方程为

$$as^3 - bs^2 + as - b = 0.$$

即为

$$(as - b)(s^2 + 1) = 0.$$

于是方程可以写成

$$\left(a\frac{d}{dx} - b\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1\right)y = \sin x.$$

记 $z = \frac{d^2 y}{dx^2} + y$,则方程成为

$$a\frac{dz}{dx} - bz = \sin x,$$

于是

$$z = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}x}\left(\int \sin x e^{-\frac{b}{a}x}dx + C_1\right)$$

$$= \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}x}\left[\frac{-\frac{b}{a}\sin x - \cos x}{\frac{b^2}{a^2} + 1}e^{-\frac{b}{a}x} + C_1\right]$$

$$= \frac{-b\sin x - a\cos x}{b^2 + a^2} + C_1 e^{\frac{b}{a}x}.$$

再来解方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{-b\sin x - a\cos x}{b^2 + a^2} + C_1 e^{\frac{b}{a}x}.$$

$$= \frac{-\sin(x+\theta)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C_1 e^{\frac{b}{a}x},$$

这里

$$\theta = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

而这个方程的解由(12)知道为

$$y = \int^x \sin(x-t)\left[\frac{-\sin(t+\theta)}{\sqrt{a^2 + b^2}} + C_1 e^{\frac{b}{a}x}\right] dt + C_2\cos x + C_3\sin x$$

$$= \frac{x\cos(\theta + x)}{2\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{a^2 C_1 e^{\frac{b}{a}x}}{a^2 + b^2} + C_2'\cos x + C_3'\sin x.$$

在 4.2.3 节中,对于二阶非齐次常系数微分方程(7),有一种解法叫待定系数法,这种方法尤其对 $f(x)$ 是 $\varphi(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ 时,尤为有效,这里 $\varphi(x)$ 是多项式,α, β 为实数. 当(22)中的 $f(x)$ 也是这种形式时,待定系数法对解这种类型的方程同样有效.

若 n 阶常系数线性微分方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n y = \varphi_m(x)e^{\rho x}, \tag{23}$$

这里 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 为实常数,而 ρ 为复常数,$\varphi_m(x)$ 是 m 次多项式. 对应的齐次方程为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_n = 0, \tag{24}$$

其特征方程为

$$l(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

(i) 当特征方程有 n 个相异的实根 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 时,则齐次方程(24)的通解为

$$\bar{y} = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x} + \cdots + C_n e^{s_n x}.$$

(ii) 当特征方程有一个 r 重实根 λ 时,方程(24)有 r 个线性无关的解

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots x^{r-1}e^{\lambda x};$$

(iii) 当特征方程有 r 重共轭复根 $\alpha+i\beta$ 和 $\alpha-i\beta$ 时,它给方程(24)提供 $2r$ 个线性无关解

$$e^{\alpha x}\cos \beta x, xe^{\alpha x}\cos \beta x, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}\cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin \beta x, xe^{\alpha x}\sin \beta x, \cdots, x^{r-1}e^{\alpha x}\sin \beta x,$$

至于求非齐次方程(23)的特解 y^*,仍设

$$y^* = z(x)e^{\rho x},$$

把它代入方程(23),可得

$$z^{(n)} + \frac{1}{(n-1)!}l^{(n-1)}(\rho)z^{(n-1)} + \frac{1}{(n-2)!}l^{(n-2)}(\rho)z^{(n-2)} + \cdots$$

$$+ l'(\rho)z' + l(\rho)z = \varphi_m(x).$$

当 ρ 是特征方程的 r 重根时,应设

$$z(x) = x^r Q_m(x)e^{\rho x},$$

这里 $Q_m(x)$是一个 m 次多项式. 然后将 $y^* = z(x)e^{\rho x}$代入(23),比较等式两边的系数,就可得到 y^*.

例 2 求解 $y^{(4)} + 2y'' + y = 9\sin 2x$.

解 特征方程为 $s^4 + 2s^2 + 1 = 0$,于是,$s_1 = i, s_2 = -i$ 皆为二重根,于是相应的齐次方程通解为

$$\bar{y} = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x.$$

为求非齐次方程的特解,先考虑方程

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 9e^{2ix}$$

的求解.

由于 $\rho = 2i$ 不是特征方程的根,故它的特解应设为

$$y_1^* = Ae^{2ix}.$$

代入方程求得 $A = 1$,即 $y_1^* = e^{2ix}$,它的虚部就是我们所寻求的非齐次方程的特解 y^*,故

$$y^* = \sin 2x.$$

于是方程的通解

$$y = \bar{y} + y^* = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x + \sin 2x.$$

最后来简略地讨论一下微分方程组.

由只有一个自变量,而因变量却有两个或两个以上的这类常微分方程联立组成的系统,称为常微分方程组. 例如:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x; \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 - 1)^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2)^{1/2}(x^2 + y^2 - 1)^2 - x; \end{cases}$$

等都是常微分方程组.

对于微分方程组的一般的讨论,就不在这里叙述了,我们只通过举例来简单介绍求解微分方程组的消元升阶法,也就是通过对方程求微商,一个个地消去因变量,最后成为一个高阶的一个因变量的常微分方程. 求出其解,并用它求出其他因变量来.

例 3 试解方程组(25).

解 微商其中一个式子,譬如前一个,得$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt}$. 借助第二个方程消去$\dfrac{dy}{dt}$,就得高阶方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0,$$

由此解得

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

再利用第一个方程,我们得到

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t}.$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = C_1e^t - C_2e^{-t}. \end{cases}$$

一般来说,设有一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y), & (26) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y). & (27) \end{cases}$$

将(26)式求微商得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{df}{dt}.$$

以(26)及(27)代入此式右端,得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(t,x,y). \tag{28}$$

将(26)式和(28)式联立,得一新的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y), & (26) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = F(t,x,y). & (28) \end{cases}$$

而要解方程组(26),(28),只要从中消去 y 得到 x 的二阶方程,求出其通解为

$$x = \varphi(t,C_1,C_2).$$

再将此解代入(26)式,便得解 y. 这样求出来的解 x,y 的确是方程组(26),(27)的解.

至于三个或三个以上因变量的方程组,也是同样处理.

例 4 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z + x, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$$

解 将第一个方程对 t 求微商,得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 2x + y + z,$$

与第一个方程联立，消去 y,z 得

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x = 0,$$

其解为

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

所以

$$\frac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} + 2C_2e^{2t}.$$

以此代入第一及第三方程中，消去 y，得

$$\frac{dz}{dt} + z = 3C_2e^{2t},$$

由此可解得

$$z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

从第一方程中得到

$$y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}.$$

所以方程组的解为

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ y = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2e^{2t}, \\ z = C_3e^{-t} + C_2e^{2t}. \end{cases}$$

例 5　求方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2 + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 3y_2 + 2x, \end{cases}$$

满足 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ 的解.

解　把第一个方程对 x 求微商，则得

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 1.$$

以方程组中的 $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}$ 代入上式，得出

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -3y_1 - 2y_2 + 3x + 1.$$

从第一个方程知

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - y_1 - x,$$

以此代入上式得到

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{dy_1}{dx} + y_1 = 5x + 1.$$

根据(11),解出 y_1 为

$$y_1 = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9.$$

所以 $$y_2 = \frac{dy_1}{dx} - y_1 - x = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14.$$

为了满足 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$,C_1, C_2 必须满足

$$\begin{cases} 1 = C_1 - 9, \\ 0 = C_2 - 2C_1 + 14, \end{cases}$$

所以 $C_1 = 10, C_2 = 6$. 因此,所求的解为

$$\begin{cases} y_1 = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9, \\ y_2 = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14. \end{cases}$$

习题 4.2

1. 求下列二阶方程的通解:

(1) $y'' = x + \sin x$;　　(2) $xy'' = y'$;

(3) $y'' = y' + x$;　　(4) $y'' = \frac{y'}{x} + x$;

(5) $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$;　　(6) $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$;

(7) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;　　(8) $1 + (y')^2 = 2yy''$;

(9) $(y')^2 + 2yy'' = 0$;　　(10) $a^2y'' - y = 0$;

(11) $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$;　　(12) $yy'' + (y')^2 = 1$.

(13) $yy'' = (y')^2$.

2. 一质量为 m 的物体以初速 v_0 铅直向上抛,空气阻力等于 kv^2. 试建立物体向上抛时的

运动方程和落下时的运动方程，并求物体落到地上那一瞬间所具有的速度.

3. 一子弹以速度 $v_0 = 200$ m/s 打进一块厚度为 $h = 10$ cm 的板，然后穿透它，以速度 $v_1 = 80$ m/s 离开板，设板与子弹运动的阻力和运动速度的平方成正比，求子弹穿过板的时间.

4. 求下列方程的解：

(1) $y'' - 2y' - y = 0$；　　(2) $4y'' - 8y' - 5y = 0$；

(3) $y'' + y' + y = 0$；　　(4) $y'' - 2y + y = 0$；

(5) $\frac{d^2r}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt} + 10r = 0$.

5. 求下列初值问题的解：

(1) $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 5s = 0, s(0) = 1, s'(0) = 1$；

(2) $\frac{d^2s}{dt^2} - 4\frac{ds}{dt} + 3s = 0, s(0) = 6, s'(0) = 10$；

(3) $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15$；

(4) $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0$.

6. 求下列方程的通解：

(1) $2y'' + 5y' = \cos^2 x$；　　(2) $2y'' + 5y' = 29x \sin x$；

(3) $y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$；　　(4) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x \cos\frac{x}{2}$；

(5) $y'' - 2y' + y = 2e^{-x} + 3e^x$；　　(6) $y''' + y = e^{-x}$；

(7) $y''' - y' = \sin x$；　　(8) $y''' - y = e^{-x}$.

(9) $y'' + y' - 2y = e^{3x}(x - 2) + e^{-x}(x^3 - 2x + 3)$；

(10) $y'' - y = 4x\sin x$；　　(11) $3y'' + 2y' - 8y = 5\cos x$；

(12) $y'' + 4y = e^x$；　　(13) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$；

(14) $y'' + y = x^2 - x + 2$；　　(15) $y'' + y' - 12y = x^2e^x$.

7. 求下列初值问题的解：

(1) $y'' - 7y' + 10y = x^2e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0$；

(2) $y'' - 6y' + 9y = e^x\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 1$；

(3) $y'' + y' + y = x\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0$；

(4) $y''' - y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$；

(5) $y'' + 9y = 5\sin x, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

8. 求解方程(Euler 方程)

$$x^2y'' + axy' + by = f(x),$$

这里 a, b 为常数.

[提示：作变换 $x = e^t$，方程就变为 $\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = f(e^t)$].

9. 求下列方程的通解：

(1) $x^2y'' + 3xy' + y = 0$；

(2) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x$；

(3) $x^2y''-xy'+y=0$;

(4) $\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{n(n+1)}{r^2}R=0$;

(5) $x^2y''-xy'+2y=x\ln x,(x>0)$;

(6) $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3+3x$.

10. 求下列方程组满足所指初始条件的解:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}-2\frac{dy}{dt}=\sin t,\\ \frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\cos t.\end{cases}$ $x(0)=0,y(0)=1$;

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-x.\end{cases}$ $x(0)=0,y(0)=1$;

(3) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}=y,\\ \frac{d^2y}{dt^2}=x.\end{cases}$ $x(0)=2,x'(0)=2,y(0)=2,y'(0)=2$;

(4) $\begin{cases}\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}-x=0,\\ \frac{dx}{dt}+y=0.\end{cases}$ $x(0)=1,y(0)=0$.

11. 求下列方程组的通解:

(1) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}+y=\cos t,\\ \frac{dy}{dt}+x=\sin t;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=-x+y+3,\\ \frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=x+y-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x+y+z,\\ \frac{dy}{dt}=x-y+z,\\ \frac{dz}{dt}=x+y-z;\end{cases}$

12. 设重量为 W 的炮弹在原点以初速 v_0 射出,其方向与 x 轴成 α 角(只考虑在 $x-y$ 平面内的运动). 假定它在运动中所受的阻力与其速度成正比(比例系数为 k),试列出炮弹运动的微分方程组,并求出炮弹运动的曲线.

13. 一物体质量为 m,自水平速度为 v_0 的飞机中抛出. 设空气的阻力与速度成正比(比例系数为 k,设其值很小),求物体的运动方程及运动曲线.

14. 设质量为 $m=1$ 的质点系在弹性系数为 k 的弹簧上作振动,又设此运动受有与其速度成正比的阻力,比例系数为 μ. 今又设恒有一周期外力 $f(t)=A_0\sin 3t(A_0>0)$ 作用于该质点上,其中 x 为质点离平衡位置的距离. 试求:

(1) 运动的微分方程.

(2) 若 $\mu=10,k=16$,求出运动状态;

(3) 若 $\mu=10,k=25$,求出运动状态;

(4) 若 $\mu=8,k=25$,求出运动状态;

(5) 若 $\mu=0,k=9$,讨论运动状态.

(6) 如果无周期外力(即设 $A_0=0$),则上述结果如何解释?

15. 研究下列函数组的线性相关性:

(1) x,e^x; (2) $\cos x,\sin x$;

(3) $\cos x,\cos^3 x,\cos 3x$; (4) x,x^3,e^x.

16. 已知方程 $y''\sin^2 x=2y$ 的一个特解 $y_1=\cot x$. 求此方程的通解.

17. 求下列方程的通解:

(1) $x^2y''-2xy'+2y=0,(x\neq 0)$; (2) $xy''-(1+x)y'+y=0,(x\neq 0)$;

(3) $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$; (4) $x^2y''-xy'=3x^3,(x\neq 0)$.

18. 方程 $(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$ 有一特解 $y=x^2$,试求此方程满足初始条件 $y|_{x=-1}=y'|_{x=-1}=0$ 的特解.

19. 求初值问题

$$\begin{cases}(2x-x^2)y''+(x^2-2)y'+2(1-x)y=0 & (x\neq 0,2),\\ y|_{x=1}=0,y'|_{x=1}=1\end{cases}$$

的解.

第五章

矢量代数与空间解析几何

5.1 空间直角坐标系与矢量

5.1.1 直角坐标系

空间解析几何与平面解析几何一样，都是用代数方法来研究几何图形的学科. 把几何与代数沟通起来的是在空间引进坐标系，使空间的点与数组对应起来，这样就可以用方程来表示图形.

在空间取三条相交于一点 O 且两两垂直的直线，分别称它们为 x 轴、y 轴与 z 轴. 先取定长度单位，在每一轴上都由 O 量起. 轴的方向的选取原可任意，但按通常习惯，规定按右手规则排列：即当 x 轴正向按右手握拳方向以$\frac{\pi}{2}$的角度转向 y 轴正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向(图 5.1).

过空间任一点 P 作三个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴. 设三个垂足对应的实数分别是 a,b,c. 于是 P 点对应于一个三元实数组 (a,b,c). 反之，任给一个三元实数组 (a,b,c)，便可过 x,y,z 轴上的点 a,b,c 作三张平面分别垂直于 x,y,z 轴，这三张平面相交于空间一点 P. 因此，三元实数组与空间的点一一对应. (a,b,c) 被称为点 P 的坐标(图 5.2). 这种坐标系叫做直角坐标系.

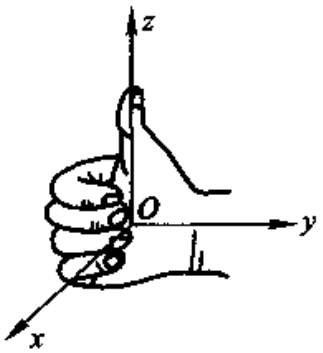

图 5.1

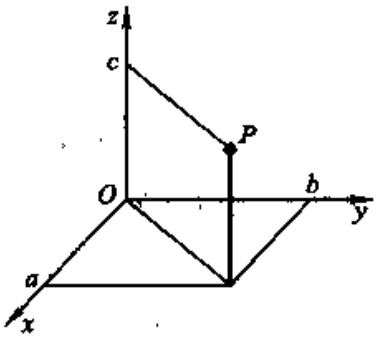

图 5.2

过 x 轴与 y 轴，y 轴与 z 轴及 z 轴与 x 轴的平面分别称为 xy 平面，yz 平面及 zx 平面. 这三张平面两两垂直且将空间分成八个卦限(图 5.3)，这三张平面称为坐标面.

若 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间两点. 过 P_1，P_2 分别作平行于坐标面的平面，形成一个长方体，它的棱与坐标轴平行(图 5.4). 由于

$$P_1A = x_2 - x_1,\ AB = y_2 - y_1,\ BP_2 = z_2 - z_1,$$

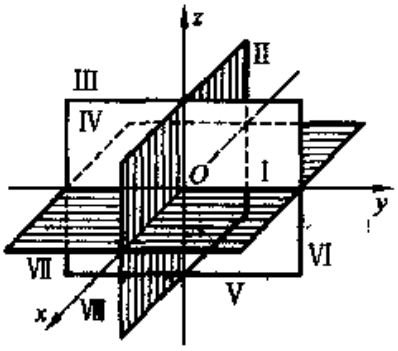

图 5.3

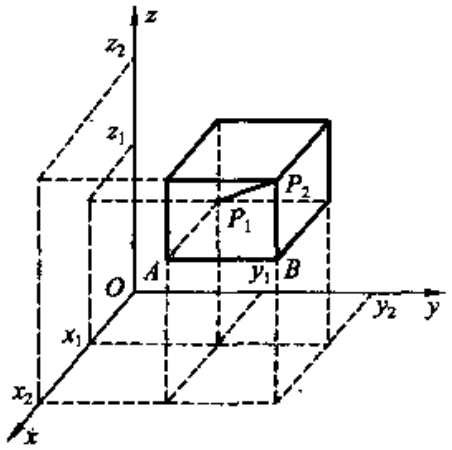

图 5.4

就得到空间任两点的距离公式

$$P_1P_2 = \sqrt{\overline{P_1B}^2 + \overline{BP_2}^2} = \sqrt{\overline{P_1A}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BP_2}^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

点 $P(x,y,z)$ 和原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

例　求到两定点 $A(1,-2,1)$ 与 $B(2,1,-2)$ 等距离的点 $M(x,y,z)$ 的轨迹.

解　由于 $AM = BM$，所以

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2}$$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2}$$

化简得到点 M 的轨迹为

$$2x + 6y - 6z - 3 = 0.$$

在 5.3 中可以看到这是一个平面方程.

5.1.2　矢量的加法与数乘

把代数运算引到几何中来的另一途径是矢量代数. 矢量是既有大小又有方

向的量，可以用一个有方向的线段来表示. 线段的长度表示矢量的大小，线段的方向表示矢量的方向. 若线段的起点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，终点为 $Q(x_0+a_1,y_0+a_2,z_0+a_3)$，则这个矢量就完全确定了，记作$\overrightarrow{PQ}$(图 5.5).

通常所研究的矢量有以下两种：

一种是不管起点如何，所有同方向、等长度的矢量都算相同，这样的矢量称为自由矢量，将 P 移到原点，则 Q 成为(a_1,a_2,a_3)，因此可以用 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 来表示矢量$\overrightarrow{PQ}$.

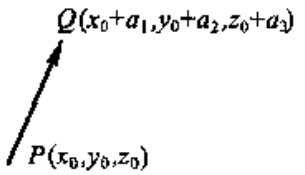

图 5.5

另一种是在同一直线上不管起点如何，所有同方向、等长度的矢量都算相同，这样的矢量称为滑动矢量.

以下所讨论的矢量仅指自由矢量. 显然，一个自由矢量

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

的长度为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

方向由

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|},\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$$

决定. a_1,a_2,a_3 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴上的投影，α,β,γ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 x,y,z 轴所成的角度. 称$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 而

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

在实际问题中，矢量早已遇到过，如位移、速度、加速度、力等都是不仅有大小而且有方向的量.

两矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的和定义为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$，把矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点都移到原点，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边作平行四边形，由原点作出的对角线就表示矢量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 5.6). 请读者自己证明这个结论. 这种矢量的加法，也早已见过，如力的合成，速度的合成都是用的这种加法.

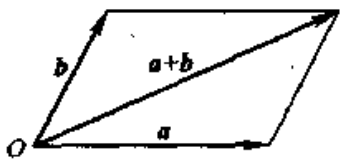

图 5.6

零矢量定义为 $0(0,0,0)$. $\boldsymbol{a}$ 的反向矢量定义为

$$-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2,-a_3).$$

反向矢量也是以前遇到过的，如作用力与反作用力是大小相等、方向相反的两个矢量，作用力为 $\boldsymbol{a}$，则反作用力为 $-\boldsymbol{a}$.

对任一实数 λ，定义

$$\lambda \boldsymbol{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$$

称为矢量的数乘. 例如将速度或力增大两倍，就是指速度或力的方向不变，只是数值增大两倍. 这就是一个矢量的数乘. 显然，如 $\lambda > 0$，则 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；如 $\lambda < 0$，则 $\lambda \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反. 特别取

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

则
$$\lambda \boldsymbol{a} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right).$$

显然，$\boldsymbol{a}^0 = \lambda \boldsymbol{a}$ 的长度为 1，称为单位矢量. $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{a}^0$.

取 $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$，$\boldsymbol{j} = (0,1,0)$，$\boldsymbol{k} = (0,0,1)$，则 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 都是单位矢量，且任意矢量 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 可分解为：

$$\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{i} + a_2 \boldsymbol{j} + a_3 \boldsymbol{k}.$$

此外，若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 为任意矢量，λ, μ 为任意实数，则

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$　　(交换律)；

(2) $\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$　　(结合律)；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$　　(数乘分配律)；

(4) $\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda \mu) \boldsymbol{a}$　　(数乘结合律)；

(5) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 共线的充要条件为存在实数 $\lambda \neq 0$，使 $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$；

(6) 由三角形两边之和大于第三边，得到

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

例 1　证明对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证　由于 $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$，

所以
$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC},$$

即
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

(图 5.7). 这就是 AD 与 BC 相等且平行. 因此，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

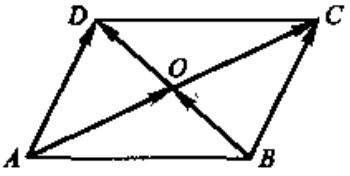

图 5.7

例 2　已知两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，点 M 将线段 $\overline{M_1 M_2}$ 分成定比为 λ 的两段，求 M 点的坐标.

解　设点 M 的坐标为 (x, y, z)，

$$\overrightarrow{OM_1} = \boldsymbol{r}_1, \quad \overrightarrow{OM_2} = \boldsymbol{r}_2, \quad \overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r},$$

于是$\overrightarrow{M_1M}=r-r_1$，$\overrightarrow{MM_2}=r_2-r$（图 5.8）. 由于

$$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2},$$

所以 $$r-r_1=\lambda(r_2-r),$$

即 $$r=\frac{r_1+\lambda r_2}{1+\lambda}.$$

而 $$r=(x,y,z),\ r_1=(x_1,y_1,z_1),$$

$$r_2=(x_2,y_2,z_2),$$

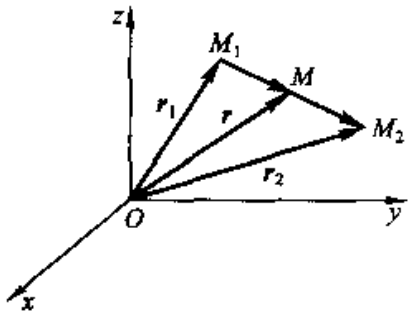

图 5.8

因此，M 点的坐标为：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

若 $\lambda=1$，就得到线段中点的坐标为：

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

习题 5.1

1. (1) 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及到各坐标轴的距离；

(2) 已给 $A(4,-7,1)$，求点 $B(6,2,z)$，使 A,B 的距离为 11；

(3) 已给 $A(2,3,4)$，求点 $B(x,-2,4)$，使 A,B 的距离为 5.

2. 在 yz 平面上求与点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，及 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

3. 给定矢量 a 与 b，试用图表示出如下矢量：

(1) $a-b$； (2) $b-a$； (3) $-a-b$； (4) $3a$； (5) $-\frac{1}{2}b$；

(6) $2a+\frac{1}{3}b$； (7) $\frac{1}{2}a-3b$.

4. 已知矢量 a 与 b 垂直，并且 $|a|=5$，$|b|=12$，求 $|a+b|$ 与 $|a-b|$.

5. 已知矢量 a 与 b 的夹角 $\alpha=60°$，并且 $|a|=5$，$|b|=8$，求 $|a+b|$ 与 $|a-b|$.

6. 已知力 P 与 Q 的夹角 $\varphi=120°$，并且 $|P|=4$ kg，$|Q|=5$ kg，求合力 $R=P+Q$ 的大小和方向.

7. 已知 $|a|=13$，$|b|=19$，$|a+b|=24$，求 $|a-b|$.

8. 说明下列各式的几何意义：

(1) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$； (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$；

(3) $|a-b|\geqslant||a|-|b||$.

9. 设 $ABCD$ 为平行四边形，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$. 用 a,b 来表示矢量 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点.

10. 设 M 是三角形 ABC 的重心. 证明对任意一点 O，

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

11. 设 A,B,C,D 是一个四面体的顶点，M,N 分别是边 AB,CD 的中点. 证明

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

12. 已知两点 $P_1(a_1,b_1,c_1),P_2(a_2,b_2,c_2)$，求矢量$\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标、模和方向余弦.

13. 设矢量的方向余弦分别满足下列条件：

(1) $\cos\alpha = 0$；　(2) $\cos\beta = 1$；　(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$.

这些矢量与坐标轴或坐标面之间有什么关系？

14. 设矢量与 x 轴，y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求这矢量的方向余弦.

15. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿矢量 $\boldsymbol{a} = 8\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$ 的方向取一线段 AB，长为 34，求 B 点的坐标.

16. 已知 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{a}^0$ 的坐标.

17. 已知 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\alpha = 60°,\beta = 120°$ 且 $|\boldsymbol{a}| = 2$，求 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

18. 给定两点 $M_1(2,5,-3),M_2(3,-2,5)$，在线段 M_1M_2 上取一点 M，使$\overrightarrow{M_1M} = 3\overrightarrow{MM_2}$，求 M 点的坐标.

19. 已知三个矢量 $\boldsymbol{p} = (3,-2,1),\boldsymbol{q} = (-1,1,-2),\boldsymbol{r} = (2,1,-3)$，求矢量 $\boldsymbol{a} = (11,-6,5)$，按 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 的分解式，即决定数 α,β,γ，使得

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{q} + \gamma\boldsymbol{r}.$$

20. 已知三角形的三顶点为 $A(2,5,0),B(11,3,8)$ 和 $C(5,11,12)$，求各中线之长.

5.2　矢量的乘积

5.2.1　矢量的内积

二矢量 $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$ 的内积(数量积)定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，λ,μ 为任意实数，则易知：

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$　　(交换律)；

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$　　(分配律)；

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　　(数乘结合律)；

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2.$$

若 θ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两矢量的夹角，由余弦定理知道(图 5.9)，

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

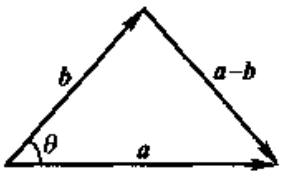

图 5.9

另一方面，

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

因此，内积也可以看成为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影(图 5.10).

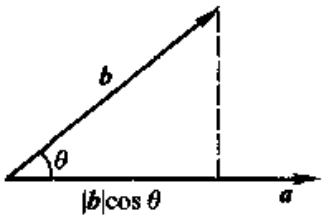

图 5.10

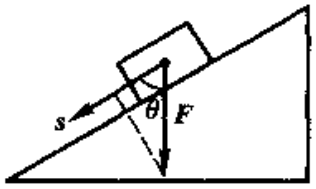

图 5.11

内积是数学中的一个重要概念. 例如物体受重力 $\boldsymbol{F}$(这是一个矢量)作用，沿斜面下滑(图 5.11)，重力的方向是垂直向下的，而物体位移 $\boldsymbol{s}$(这也是一个矢量)的方向和斜面平行，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 正向间的夹角为 θ. 于是重力所做的功为

$$w=|\boldsymbol{F}|\,|\boldsymbol{s}|\cos\theta=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

从内积的定义得到：矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 又显然

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

例 1 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求矢量 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{d}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角 φ.

解 由于 $\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}|\,|\boldsymbol{d}|}$，而

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$=6|\boldsymbol{a}|^2+7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-3|\boldsymbol{b}|^2=6\cdot2^2+7\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{3}-3\cdot1^2=28,$$

同样，
$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=37,$$
$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=31,$$

所以　　$$\cos\varphi = \frac{28}{\sqrt{37}\sqrt{31}} = 0.826\,8\cdots, \varphi \doteq 34°14'.$$

例 2　求与 $\boldsymbol{a}=(1,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1,3)$ 都垂直的单位矢量.

解　设所求的单位矢量为 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，则

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b}=0,\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=1.$$

于是得到如下的方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

解方程组，得到

$$x_1 = \pm\frac{8}{3\sqrt{10}},\ x_2 = \pm\frac{1}{3\sqrt{10}},\ x_3 = \mp\frac{5}{3\sqrt{10}},$$

所以　　$$\boldsymbol{x} = \pm\frac{1}{3\sqrt{10}}(8,1,-5).$$

例 3　证明不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

证　令 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 由内积定义

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$

而　　$$|\cos\theta| \leqslant 1,$$

所以　　$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leqslant |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2.$$

此即要证的不等式.

5.2.2　矢量的外积

两矢量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 的外积（矢量积）定义为：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

或可写成

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为任意矢量，λ,μ 为任意实数，则

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ （分配律）；

$(\lambda\boldsymbol{a})\times(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ （数乘结合律）；

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ （交换律不满足）；

特别有 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a},$$

所以 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0.$$

反之，如果 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0,$$

则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线.

矢量积的几何意义从以下三点可以看出：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，即垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所成的平面.

这是因为

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$$

同样 $$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0.$$

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积，且

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

这是因为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2.$$

这就是

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)$$

$$=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta.$$

(3) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 组成一个右手系统，即 $\boldsymbol{a}$ 以右手握拳方向转向 $\boldsymbol{b}$ 时，拇指所指为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向(图 5.12).

为了说明这一点，取 $\boldsymbol{a}$ 的底线为 x 轴，$\boldsymbol{a}$ 的方向就取为 x 轴的正向，并取 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面为 xy 平面. 假定由 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的角度为 θ，$|\theta|\leqslant\pi$，则

$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|(1,0,0)$，　$\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|(\cos\theta,\sin\theta,0)$，

因此　$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(0,0,\sin\theta)$.

即 $\boldsymbol{c}$ 的底线与 z 轴相同，但方向视 θ 的正负而定，如 $\theta>0$，$\boldsymbol{c}$ 的指向与 z 轴正向相同，不然与 z 轴负向相同，故成右手系统.

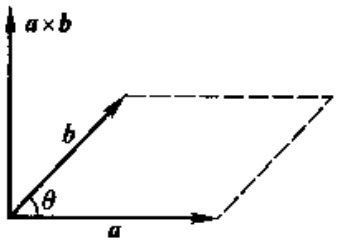

图 5.12

特别有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = 0,\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = 0,\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0;$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.$$

与内积一样，外积也是数学中的一个重要概念. 在第七章中介绍外微分形式时还要见到类似的乘积.

例　三角形的顶点坐标为 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(-1,-2,7)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　三角形的面积 S 为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$，而

$$\overrightarrow{AB} = (2,2,2),\quad \overrightarrow{AC} = (-2,-4,4),$$

所以
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 16\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k},$$

因此
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{26}.$$

5.2.3　矢量的混合积

若 $\boldsymbol{a} = (a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c} = (c_x,c_y,c_z)$ 为三矢量，称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 为三矢量的混合积. 由于

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

所以
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

另一方面，从图 5.13 可知

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\varphi=\pm|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h=\pm V,$$

其中 V 为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系统时,φ 为锐角取正号,否则取负号. 因此

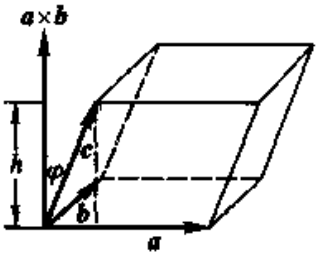

图 5.13

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}\\&=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}\\&=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

矢量混合积的绝对值就是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积. 当三矢量共面时,所成的平行六面体体积为零,即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0,$$

或

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0.$$

还可以验证

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

因此,

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

一般不成立. 即结合律不成立. 对于外积来说,不但交换律不成立,结合律也不成立.

例 1 求以点 $A(1,1,1),B(3,4,4),C(3,5,5),D(2,4,7)$ 为顶点的四面体 $ABCD$ 的体积.

解 以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行六面体的体积是所求四面体体积 V 的 6 倍. 即

$$V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})|.$$

而

$$\overrightarrow{AB}=(2,3,3),\ \overrightarrow{AC}=(2,4,4),\ \overrightarrow{AD}=(1,3,6),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 6\end{vmatrix}=6.$$

因此

$$V = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

例 2　证明点 $A(1,1,1)$，$B(4,5,6)$，$C(2,3,3)$，$D(10,15,17)$ 共面.

解　只须证明由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 所组成的平行六面体的体积为零. 而

$$\overrightarrow{AB} = (3,4,5),\ \overrightarrow{AC} = (1,2,2),\ \overrightarrow{AD} = (9,14,16),$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

因此，A，B，C，D 四点共面.

习题 5.2

1. 已知 a，b 的夹角 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$，且 $|a| = 3$，$|b| = 4$ 计算

(1) $a \cdot b$；　　(2) $(3a - 2b) \cdot (a + 2b)$.

2. 已知 $a = (4, -2, 4)$，$b = (6, -3, 2)$，计算：

(1) $a \cdot b$；　　(2) $(2a - 3b) \cdot (a + 2b)$；

(3) $(a - b)^2$.

3. 求矢量 $a = (4, -3, 4)$ 在矢量 $b = (2, 3, 1)$ 上的投影.

4. 已知三角形两边的矢量为 $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -2)$，$\overrightarrow{BC} = (3, 2, 6)$，求这三角形的三内角.

5. 若 $|a| = 5$，$|b| = 2$，a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $u = 2a - 3b$ 的长度.

6. 若矢量 $a + 3b$ 垂直于矢量 $7a - 5b$，矢量 $a - 4b$ 垂直于矢量 $7a - 2b$，求 a 和 b 的夹角.

7. 设 $a = (2, -3, 1)$，$b = (1, -1, 3)$，$c = (1, -2, 0)$，求

(1) $(a \cdot b)c - (a \cdot c)b$；　　(2) $(a + b) \times (b + c)$；

(3) $(a \times b) \cdot c$；　　(4) $(a \times b) \times c$.

8. 已知矢量 a 和 b 互相垂直，且 $|a| = 3$，$|b| = 4$，计算：

(1) $|(a + b) \times (a - b)|$；　(2) $|(3a - b) \times (a - 2b)|$.

9. 已知矢量 a 和 b 的夹角 $\varphi = \frac{2}{3}\pi$，又 $|a| = 1$，$|b| = 2$，计算

(1) $(a \times b)^2$；　　(2) $[(a + 3b) \times (3a - b)]^2$.

10. 已知三角形三顶点是 $A(3, 4, -1)$，$B(2, 0, 3)$，$C(-3, 5, 4)$，求它的面积.

11. 一平行四边形以矢量 $a = (2, 1, -1)$ 和 $b = (1, -2, 1)$ 为边，求这平行四边形两对角线夹角的正弦.

12. 计算顶点为 $A(2, -1, 1)$，$B(5, 5, 4)$，$C(3, 2, -1)$，$D(4, 1, 3)$ 的四面体的体积.

13. 判断下列二组矢量 a，b，c 是否共面？

(1) $a=(2,3,-1),b=(1,-1,3),c=(1,9,-11)$;

(2) $a=(3,-2,1),b=(2,1,2),c=(3,-1,-2)$.

14. 已知 $a+b+c=0,|a|=3,|b|=5,|c|=7$,求 a,b 间的夹角 θ.

15. 已知 $a+b+c=0$. 证明

$$a\times b=b\times c=c\times a.$$

16. 证明 $(a\times b)\times c=(a\cdot c)b-(b\cdot c)a$;

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c;$$

$$(a\times b)\times c+(b\times c)\times a+(c\times a)\times b=0.$$

17. 证明 $|a\times b|^2=|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2$,更一般地证明

$$a\times b\cdot c\times d=(a\cdot c)(b\cdot d)-(a\cdot d)(b\cdot c).$$

18. 证明

$$|(a+b)\times(a-b)|=2|a\times b|.$$

19. 若 $a\times b+b\times c+c\times a=0$,则 a,b,c 共面.

20. 证明三角形三条中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的$\frac{3}{4}$.

21. 用矢量方法证明:(1) 平面三角中的余弦定理;(2) 平面上半圆内的圆周角为直角;(3) 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

22. 若矢量 x 同时满足下列两个方程:

$$x\cdot a=\alpha,\quad x\times b=c,$$

其中 a,b,c 是给定的矢量,且 $a\cdot b\neq 0,\alpha$ 为给定的数量,求 x.

23. 如果存在矢量 x 同时满足 $a_1\times x=b_1,a_2\times x=b_2$,证明:

$$a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1=0.$$

5.3 平面与直线

5.3.1 平面方程

用矢量来写平面与直线的方程就很简单.

(1) 已给空间一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,一个方向 $n=(A,B,C)$,求过 M_0 这一点且与 n 相垂直的平面方程.

若平面上的任一点为 $M(x,y,z)$,则$\overrightarrow{M_0M}$与 n 相垂直(图 5.14). 记$\overrightarrow{OM}=r,\overrightarrow{OM_0}=r_0$,则

$$(r-r_0)\cdot n=0.$$

这就是平面方程. n 称为平面的法矢量. 这个方程可写成

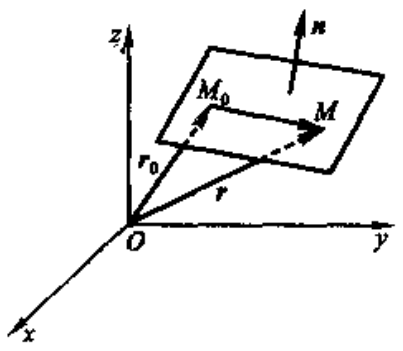

图 5.14

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

也可写成

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

而　　$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

反之,已给方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

只要 A,B,C 不同时为零,则满足这个方程的点组成一张平面.

这是显然的,因为 A,B,C 不同时为零,所以总可以找到 x_0,y_0,z_0,满足

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,$$

于是　　$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0,$$

如果记满足　　$$Ax+By+Cz+D=0$$

的点 (x,y,z) 为 M,(x_0,y_0,z_0) 为 M_0,以及

$$\overrightarrow{OM}=r\quad\overrightarrow{OM_0}=r_0,$$

则已给的方程　　$$Ax+By+Cz+D=0$$

就是　　$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

而此即　　$$(r-r_0)\cdot n=0.$$

这说明 $r-r_0$ 永远与 n 相垂直,所以 M 在过 M_0 且与 n 相垂直的平面上. 前面已经指出凡在这平面上的点都满足此方程,因之,

$$Ax+By+Cz+D=0$$

表示一张平面.

(2) 已给空间三点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,$M_3(x_3,y_3,z_3)$,求过这三点的平面方程.

设平面上的任一点为 $M(x,y,z)$,记 $\overrightarrow{OM_i}=r_i(i=1,2,3)$,$\overrightarrow{OM}=r$,由于 $r-r_1$,r_2-r_1,r_3-r_1 共面,所以

$$(r-r_1)\cdot[(r_2-r_1)\times(r_3-r_1)]=0,$$

此即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

特别当这三点是 $(a,0,0)$,$(0,b,0)$,$(0,0,c)$ 时,上式成为

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

这可化为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

反之，任给$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，这表示一张平面，它与 x 轴，y 轴，z 轴分别交于 $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$. 也就是说，平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

截 x 轴，y 轴，z 轴于 a,b,c. 所以平面方程

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

也称为平面的截距式方程.

例 1 求通过点 $M_1(8,-3,1)$ 和 $M_2(4,7,2)$ 且垂直于平面 $\pi: 3x+5y-7z+21=0$ 的平面方程.

解 所求平面的法矢量 n 应同时垂直于 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 和 π 的法矢量 $n_1=(3,5,-7)$，因此取

$$n = n_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & -7 \\ -4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 25(3i+j+2k).$$

由(1)得到所求平面方程为

$$3(x-8)+(y+3)+2(z-1)=0,$$

即

$$3x+y+2z-23=0.$$

例 2 求通过 x 轴和点 $P(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解 在 x 轴上取两点 $(0,0,0)$ 及 $(1,0,0)$，则由(2)，平面方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

即为

$$y-3z=0.$$

例 3 求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离.

解 设点 P_1 在 π 上的垂足为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，那么所求距离就是 $|P_0P_1|$，因

P_0 在 π 上，所以

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为 π 的法向量. 因此 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 共线，于是

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = \pm \, |\boldsymbol{n}| \, |P_0P_1|.$$

但是
$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} &= A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) \\ &= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D, \end{aligned}$$

于是
$$|P_0P_1| = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

这就是点 (x_1, y_1, z_1) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离.

5.3.2　直线方程

(1) 求过一已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与矢量 $\boldsymbol{s} = (l, m, n)$ 平行的直线 L 的方程(图 5.15).

若直线上任一点为 $M(x, y, z)$，则矢量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 平行，因此

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \boldsymbol{s},$$

即

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(l, m, n).$$

所以

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \\ z = z_0 + \lambda n. \end{cases}$$

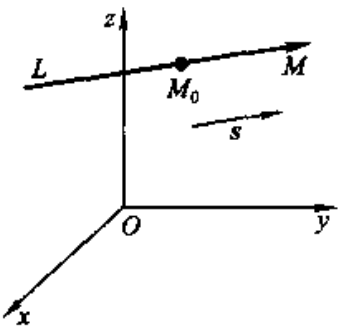

图 5.15

这称为直线的参数方程，这里 λ 为参数. 它还可写为

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

这称为直线的点向式方程. $\boldsymbol{s}$ 称为直线的方向矢量，l, m, n 称为直线的方向数.

(2) 一条空间直线，可以看成是两个平面

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的交线. 这个直线方程称为直线的一般式方程.

通过一条直线可作无限多个平面. 因此，可以有不同的方程组表示同一条

直线.

由于两平面的交线和它们的法矢量

$$\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

都垂直,所以直线的方向矢量可取为

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

例 1 化直线方程

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0, \\ 3x + y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

为点向式方程.

解 先在直线上找一点,令 $z=0$,得到

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 3x + y = 2. \end{cases}$$

解得

$$x = 1, \quad y = -1,$$

所以$(1, -1, 0)$为直线上一点. 直线的方向矢量为

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 11\boldsymbol{k},$$

故所求直线方程为

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{11}.$$

例 2 求过 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$两点的直线方程.

解 所求直线的方向矢量可取为 $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$,因此直线方程可写成点向式

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

习题 5.3

1. 作出下列各平面:

(1) $2x + 2y + 2z = -1$; (2) $2x - 3y + 20 = 0$;

(3) $4y - 7z = 0$; (4) $3x - 2 = 0$.

2. 求下列各平面的方程：

(1) 过点(2,0,-3)且与两平面 $x-2y+4z-7=0, 3x+5y-2z+1=0$ 垂直；

(2) 过两点 $M_1(1,2,1), M_2(2,-1,2)$ 及平行于矢量 $n=(3,2,1)$；

(3) 过一点 $M(1,3,2)$ 且平行于两矢量 $n_1=(1,-1,1), n_2=(3,1,2)$；

(4) 通过 x 轴且垂直于平面 $5x-4y-2z+3=0$；

(5) 过三点 $A(1,1,-1), B(-2,-2,2), C(1,-1,2)$；

(6) 过点 $M_1(2,-1,1)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于 y 轴.

3. 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面夹角的余弦.

4. 过点(0,-1,0)与点(0,0,1)作与 xy 平面成 60°的角的平面.

5. 分别计算下列各点到平面的距离 d：

(1) $M(2,-1,-1), 16x-12y+15z-4=0$；

(2) $M(1,2-3), 5x-3y+z+4=0$；

(3) $M(9,2,-2), 12y-5z+5=0$.

6. 计算两平行平面 $2x-y+2z+9=0, 4x-2y+4z-21=0$ 间的距离.

7. 在平面 $x+y+z-1=0$ 与三坐标面所围成的四面体内求一点，使与各面间的距离相等.

8. 在 y 轴上求一点，使它到平面 $x+2y-2z-2=0$ 的距离 $d=4$.

9. 设一平面与平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行，而与三坐标面所构成的四面体的体积为 1，求这平面的方程.

10. 求通过下列两已知点的直线的方程：

(1) (1,-2,1),(3,1,-1)；

(2) (3,-1,0),(1,0,-3).

11. 求直线 $\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\3x-5y+2z+1=0\end{cases}$ 的参数方程.

12. 求下列直线与平面的交点：

(1) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}, 2x+3y+z-1=0$；

(2) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}, x+2y-2z+6=0$.

13. 求下列直线的夹角：

(1) $\begin{cases}2x-2y-z+3=0,\\x+2y-2z+1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}4x+y+3z-21=0,\\2x+2y-3z+15=0;\end{cases}$

(2) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{-12}=\dfrac{z-1}{3}$ 和 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-8}{-2}$.

14. 求直线 $\begin{cases}3x-2y=24,\\3x-z=-4\end{cases}$ 和平面 $6x+15y-10z+31=0$ 的夹角.

15. 求过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z-1=0, y-3z-2=0$ 平行的直线.

16. 求过点(1,-2,1)且垂直于直线 $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\x+y-z+2=0\end{cases}$ 的平面的方程.

17. 求经过两平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+4=0$ 的交线，且和平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 45°角的平面方程.

18. 求通过点 $M(1,-2,3)$ 和两平面 $2x-3y+z-3=0, x+3y+2z+1=0$ 的交线的平面方程.

19. 求通过点 $M(-1,2,-3)$，垂直于矢量 $s=(6,-2,-3)$ 且与直线 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$ 相交的直线方程.

20. 求由平行线 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=z, \frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=z+1$ 决定的平面.

21. 求过点(1,2,-3)且平行于两直线

$$\frac{x-7}{2}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z-7}{3} \quad 和 \quad \frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{-1}$$

的平面的方程.

22. 求通过直线 $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=3+2t, \\ z=-2-t, \end{cases}$ 且平行于直线 $\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$ 的平面方程.

23. 求两平行线 $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$ 和 $\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}$ 间的距离.

24. 求直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-3}=z-3$ 与直线 $\begin{cases} x+1=\frac{z-1}{-3}, \\ y-2=0 \end{cases}$ 间的距离.

25. 求一平面，它到原点距离为 6，且在坐标轴上的截距之比为 1:3:2.

5.4 二次曲面

已经知道：平面上的点 $M(x,y,z)$ 满足 x,y,z 的一次方程. 反过来，满足变量 x,y,z 的一次方程的点 $M(x,y,z)$ 都在平面上. 所以平面可以用一次方程来表示.

一般说，给定空间一曲面，它是由空间中的一部分点组成的. 任取一坐标系后，当一个点在曲面上的时候，它的坐标 (x,y,z) 不能是任意的，而要满足一定的条件，这个条件一般地可以写成一个方程 $F(x,y,z)=0$. 如果曲面上点的坐标一定满足 $F(x,y,z)=0$，坐标满足 $F(x,y,z)=0$ 的点 (x,y,z) 也一定在曲面上，则曲面可以用方程 $F(x,y,z)=0$ 来表示，也就是说，曲面是这个方程的图形. 这个方程叫做曲面的一般方程.

在平面解析几何中，用二次方程表示抛物线、双曲线与椭圆. 在空间解析几何中，二次方程所表示的曲面要复杂些. 这种曲面都叫做二次曲面. 这里介绍一些特殊的二次曲面.

5.4.1 柱面

平行于定直线 L 且与定曲线 C 相交的直线移动时所生成的曲面称为柱面

(图 5.16). 定曲线 C 称为柱面的准线,动直线称为它的母线.

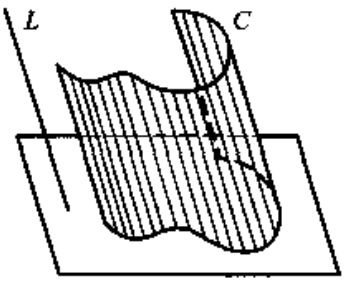

图 5.16

设柱面的母线平行于 z 轴,且准线是 xy 平面内的一条曲线 C,其方程为 $f(x,y)=0$(图 5.17). 对于柱面上的任一点 $M(x,y,z)$,它在 xy 平面上的垂足 $M_1(x,y,0)$ 就在曲线 C 上,即满足 $f(x,y)=0$. 反过来,任一满足 $f(x,y)=0$ 的点 $M(x,y,z)$ 一定在过 $M_1(x,y,0)$ 的母线上,即在柱面上. 所以准线是 C 且母线平行于 z 轴的柱面方程是 $f(x,y)=0$.

同样,方程 $g(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面,方程 $h(z,x)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面.

还要注意:方程 $f(x,y)=0$ 在空间表示柱面,而此柱面在 xy 平面上的准线 C 用 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 来表示.

下面给出母线平行于 z 轴的几个柱面方程,它们都是二次曲面.

椭圆柱面方程:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(图 5.18);

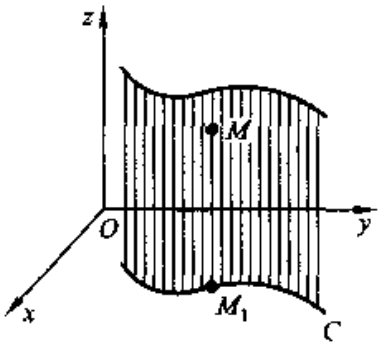

图 5.17

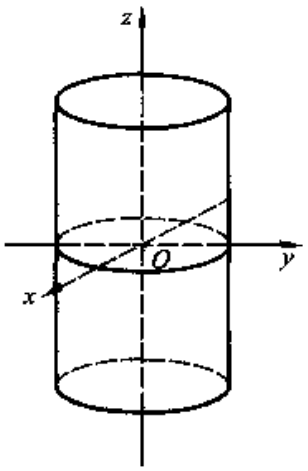

图 5.18

双曲柱面方程:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(图 5.19);

抛物柱面方程:$y^2=2px$(图 5.20).

同样还可以写出母线平行于 x 轴或 y 轴的椭圆柱面方程、双曲柱面方程及抛物柱面方程. 这些都是二次曲面.

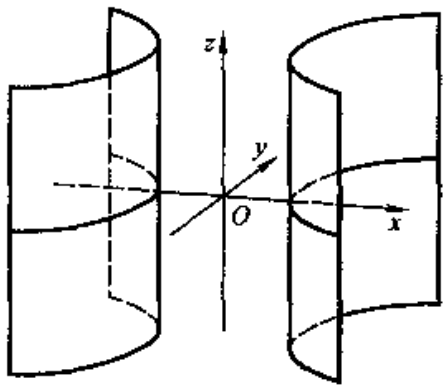

图 5.19

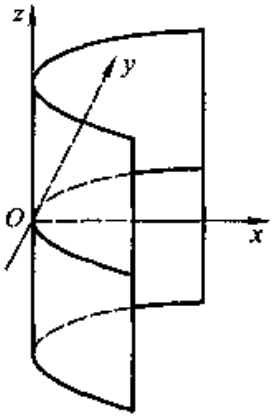

图 5.20

5.4.2 旋转曲面

平面上的曲线绕这平面上一条定直线旋转而成的曲面,称为旋转曲面,定直线称为旋转曲面的轴.

设一旋转曲面是以 xy 平面上的曲线 $C:f(x,y)=0$ 旋转得来,旋转轴为 x 轴. 在此旋转曲面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 过 P_0 作平面 $x=x_0$,它和此旋转面的交线为一圆,圆的半径为

$$r=\sqrt{y_0^2+z_0^2},$$

圆心在 x 轴上. 这圆是平面曲线上的点 (x_0,r) 在绕 x 轴旋转时所生成的曲线,故 $f(x_0,r)=0$. 因此 P_0 点应满足

$$f(x_0,\sqrt{y_0^2+z_0^2})=0.$$

由于 P_0 是旋转曲面上任意一点,故此旋转曲面的方程为

$$f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0.$$

同样将曲线绕 y 轴旋转,所得的旋转曲面方程为

$$f(\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

当曲线是二次曲线时,所得的旋转曲面是二次曲面. 例如:

(1) 抛物线 $y^2=2pz$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程是

$$x^2+y^2=2pz,$$

这种曲面叫做旋转抛物面(图 5.21).

(2) 椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转所成的曲面方程是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

称为旋转椭球面(图 5.22).

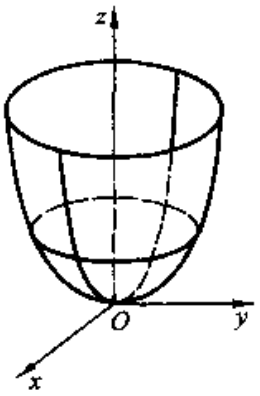

图 5.21

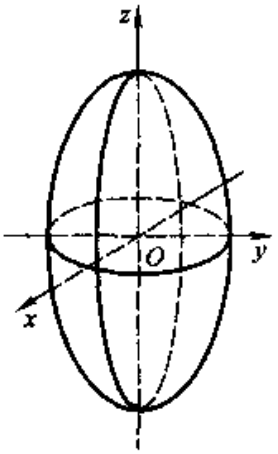

图 5.22

(3) 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$绕 z 轴和绕 x 轴旋转所成的曲面分别是

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1 \quad 及 \quad \frac{x^2}{a}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1,$$

分别称为旋转单叶双曲面(图 5.23)和旋转双叶双曲面(图 5.24).

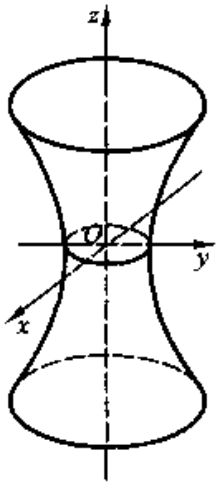

图 5.23

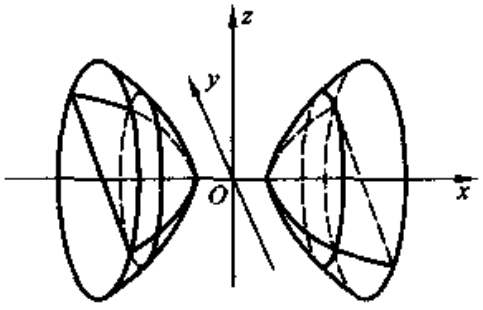

图 5.24

5.4.3　锥面

移动直线 L,使它始终通过定点 Q,且始终与定曲线 C 相交,这样由 L 所产生的曲面称为锥面. 直线 L 称为锥面的母线;定点 Q 称为锥面的顶点;定曲线 C 称为锥面的准线(图 5.25). 显然,锥面的特征是:顶点与曲面上任意其他点的连线都在曲面上. 如果顶点在原点,那么顶点与一点 (x,y,z) 的连线上的点就是 (tx,ty,tz),t 可为任意实数. 因此对于顶点在原点的锥面,方程的特征是:如果

(x,y,z)满足方程,那么对于任意实数 t,(tx,ty,tz)也满足方程. 例如设 $F(x,y,z)$是一个齐次多项式,(若 $F(tx,ty,tz)=t^lF(x,y,z)$,这里 l 为整数,则称 $F(x,y,z)$为齐次多项式),那么 $F(x,y,z)=0$ 就表示一个顶点在原点的锥面. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a\neq 0,b\neq 0,c\neq 0)$$

所表示的曲面就是一个顶点在原点的锥面. 要确定这个锥面,只要给出一条准线就行了. 用 $z=c$ 去截它,就得到一条准线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0,\\ z=c.\end{cases}$$

显然这是一个椭圆. 但锥面与平面 $x=a$ 和 $y=b$ 的截口都是双曲线(图 5.26).

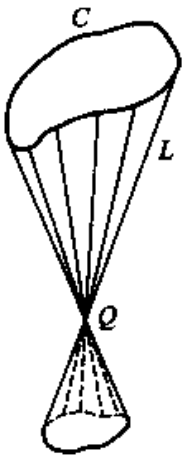

图 5.25

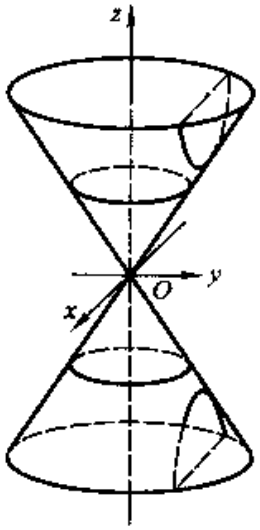

图 5.26

5.4.4 椭球面

椭球面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0).$$

用平行于坐标面的一组平面去截割,对所得截口进行分析,就可看出椭球面的形状.

从方程本身可知

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即　　$|x| \leqslant a,\ |y| \leqslant b,\ |z| \leqslant c.$

这说明椭球面上的所有点都在以

$$x = \pm a,\ y = \pm b,\ z = \pm c$$

所构成的长方体内.

用平行于 xy 平面的平面 $z = h$ 去截这个曲面,截线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

当 $0 < |h| < c$ 时,截线是椭圆(图 5.27),而且由 xy 平面上的最大椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

开始,随着 $|h|$ 增大向 z 轴的两个方向逐渐缩小. 当 $|h| = c$ 时,上述椭圆就缩成两点 $(0,0,\pm c)$.

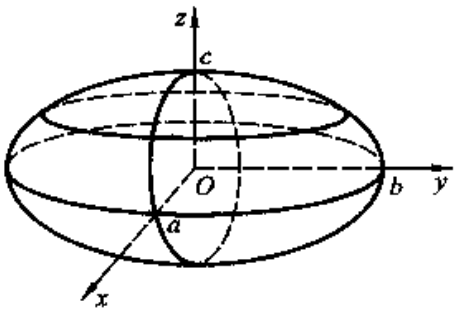

图 5.27

同样,用平行于 yz 平面或 zx 平面的平面去截,也得类似的结果.

在椭球面方程中,a,b,c 若有两个相等,如 $a = b$,它就表示由 yz 平面上的椭圆

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

绕 z 轴旋转而成的旋转椭球面. 若 $a = b = c$,就得到球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

5.4.5　双曲抛物面

双曲抛物面的标准方程是

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

先用平面 $z = h$ 去截,截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h,\\ z=h.\end{cases}$$

当 $h>0$ 时，这是双曲线，实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 y 轴. 当 $h=0$ 时，这是 xy 平面上的两条相交于原点的直线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0;\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0,\\ z=0.\end{cases}$$

当 $h<0$ 时，它也是双曲线，但实轴平行于 y 轴，虚轴平行于 x 轴.

其次用平面 $x=h$ 去截，得到截线为

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{a^2}-2z,\\ x=h.\end{cases}$$

当 $h=0$ 时，截线是 yz 平面上顶点为原点的抛物线，且张口朝下. 当 $|h|>0$ 时，也都是张口朝下的抛物线，不过随 $|h|$ 增大，抛物线的顶点也随之提高.

最后，用平面 $y=h$ 去截，截线是张口向上的抛物线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}=2z+\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h.\end{cases}$$

综上所述，得到双曲抛物面的形状如图 5.28. 其形状似马鞍，也称马鞍面.

用同样的方法研究，可得出下述方程所表示的曲面的形状.

5.4.6 单叶双曲面

单叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (\text{图 5.29}).$$

5.4.7 双叶双曲面

双叶双曲面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (\text{图 5.30}).$$

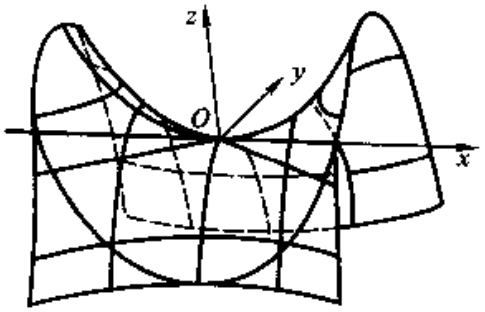

图 5.28

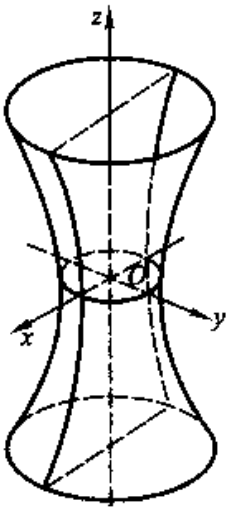

图 5.29

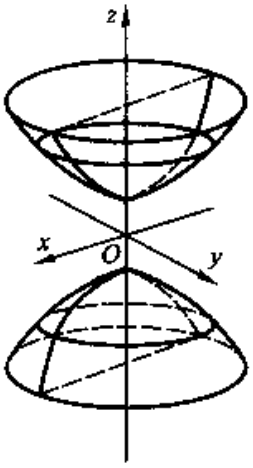

图 5.30

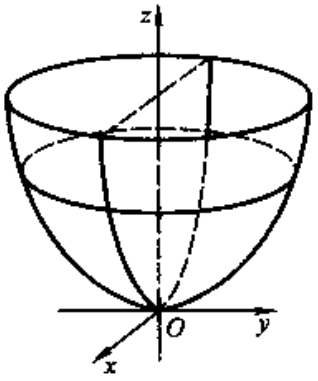

图 5.31

5.4.8　椭圆抛物面

椭圆抛物面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (\text{图 5.31}).$$

习题 5.4

1. 指出下列方程中哪些是旋转曲面. 如果是,它们是怎样产生的?

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;　　(2) $x^2+y^2+z^2=1$;

(3) $x^2+2y^2+3z^2=1$;　　(4) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$; (6) $x^2-y^2-z^2=1$.

2. 求下列旋转曲面的方程.

(1) 曲线$\begin{cases}4x^2-9y^2=36,\\ z=0,\end{cases}$绕 x 轴及 y 轴旋转;

(2) 曲线$\begin{cases}y=kx,\\ z=0,\end{cases}$绕 x 轴及 y 轴旋转;

(3) 曲线$\begin{cases}y=\sin x\quad(0\leqslant x\leqslant\pi),\\ z=0.\end{cases}$绕 x 轴旋转.

3. 下列方程在平面直角坐标系和空间直角坐标系中分别表示怎样的几何图形.

(1) $x=2$; (2) $y=x+1$;

(3) $x^2+y^2=4$; (4) $x^2-y^2=1$;

(5) $\begin{cases}y-5x-1=0,\\ y-2x+3=0;\end{cases}$ (6) $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=2.\end{cases}$

4. 描绘出下列各组曲面所围成的立体图形:

(1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+z=1$ 与坐标面;

(2) $z=x^2+y^2, x=0, y=0, z=0, x+y-1=0$;

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2+z^2=R^2$;

(4) $x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$;

(5) $x^2+y^2=1, y^2+z^2=1$.

5. 分别考察曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$ 在平面 $z=0, z=3, x=0, x=\frac{1}{3}, y=0, y=\frac{1}{3}$ 上的截口曲线,写出它们的方程,并作出这曲面的简单图形.

6. 分别考察曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在平面 $x=2, y=0, y=5, z=1, s=2$ 上的截口曲线,写出它们的方程,并作出这曲面的简单图形.

7. 一动点到原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离,求此动点的轨迹,并判定它是哪一种二次曲面.

5.5 坐标变换

在平面解析几何中,坐标变换是重要的内容. 在空间解析几何中,也是这样. 例如:在上一节中尽管讨论了一些特殊的三元二次方程所表示的曲面,但对于一般的三元二次方程能表示哪些曲面,只有利用坐标变换,才能讨论得清楚. 在这一节中,只讨论坐标的平移和旋转,而对一般二次方程的化简不作仔细介绍. 事实上,应用平移与旋转,所有二次曲面都可以化成上一节中所讨论的类型之一(退化成平面,直线或点的除外).

5.5.1　坐标系的平移

设有空间两个直角坐标系 $Oxyz, O_1x_1y_1z_1$（图 5.32），它们相应的坐标轴平行且同向，且设 O_1 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标为 (a,b,c). 这时空间一点 M 就可以有两种坐标表示：在 $Oxyz$ 中为 (x,y,z)，在 $O_1x_1y_1z_1$ 中为 (x_1,y_1,z_1)，由于

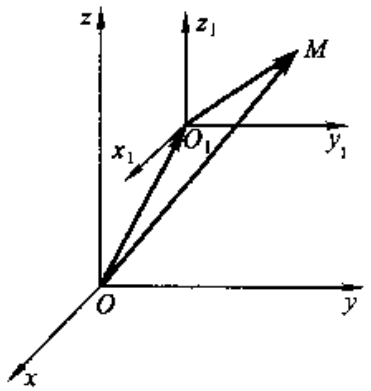

图 5.32

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M},$$

所以有

$$xi + yj + zk = (ai + bj + ck) + (x_1i + y_1j + z_1k).$$

由此即得空间直角坐标系的平移公式为

$$\begin{cases} x = x_1 + a, \\ y = y_1 + b, \\ z = z_1 + c. \end{cases}$$

例　证明　$2x^2 + 3y^2 + z^2 + 4x - 12y + 4z + 2 = 0$ 与平面 $z = 2$ 相切.

证　由于

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 + 4x - 12y + 4z + 2$$
$$= 2(x+1)^2 + 3(y-2)^2 + (z+2)^2 - 16,$$

用坐标平移，在平移公式中取

$$a = -1, b = 2, c = -2,$$

则

$$\begin{cases} x = x_1 - 1, \\ y = y_1 + 2, \\ z = z_1 - 2. \end{cases}$$

代入上式，得到平移后的方程分别为

$$2x_1^2 + 3y_1^2 + z_1^2 - 16 = 0,$$

以及

$$z_1 = 4.$$

而

$$2x_1^2 + 3y_1^2 + z_1^2 - 16 = 0$$

是以原点为中心，三个半轴长分别为 $2\sqrt{2}, \frac{4}{\sqrt{3}}, 4$ 的椭球面.

显然 $z_1 = 4$ 是与

$$2x_1^2 + 3y_1^2 + z_1^2 - 16 = 0$$

相切的. 由于相切的性质经坐标平移是不变的，故原来的图形是相切的.

5.5.2 坐标系的旋转

设空间直角坐标系 $Oxyz, Ox_1y_1z_1$ 有公共原点(图 5.33)，且设空间任一点 M 在 $Oxyz$ 中坐标为 (x,y,z)，在 $Ox_1y_1z_1$ 中坐标为 (x_1,y_1,z_1). 坐标系 $Oxyz$ 的坐标单位矢量为 i,j,k；坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的坐标单位矢量为 i_1,j_1,k_1. 若两个坐标系中间的九个夹角为

	i	j	k
i_1	α_1	β_1	γ_1
j_1	α_2	β_2	γ_2
k_1	α_3	β_3	γ_3

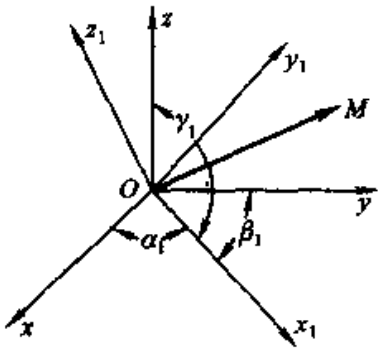

图 5.33

则
$$(i_1,j_1,k_1) = (i,j,k)\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$$

(这里用到了矩阵及其乘法运算法则，请读者参阅有关线性代数的参考书).

显然

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1,$$

$$\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2 = 1,$$

$$\cos^2\alpha_3 + \cos^2\beta_3 + \cos^2\gamma_3 = 1,$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1,$$

$$\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1,$$

$$\cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1,$$

矢量 $\overrightarrow{OM}$ 在两个坐标系内可分别表示为

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \quad 和 \quad x_1\boldsymbol{i}_1 + y_1\boldsymbol{j}_1 + z_1\boldsymbol{k}_1,$$

因此

$$x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x_1\boldsymbol{i}_1 + y_1\boldsymbol{j}_1 + z_1\boldsymbol{k}_1.$$

这就得到

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha_1 + y_1\cos\alpha_2 + z_1\cos\alpha_3, \\ y = x_1\cos\beta_1 + y_1\cos\beta_2 + z_1\cos\beta_3, \\ z = x_1\cos\gamma_1 + y_1\cos\gamma_2 + z_1\cos\gamma_3, \end{cases}$$

也就是

$$(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1)\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

这就是空间直角坐标系的旋转公式.

当 z 轴与 z_1 轴重合时,若 x 轴转到 x_1 轴的角度为 θ(图 5.34),这时有

$$\alpha_1 = \theta, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta, \quad \beta_2 = \theta,$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_3 = 0.$$

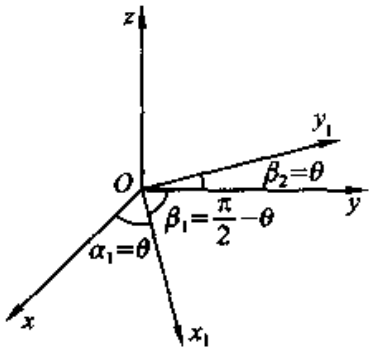

图 5.34

于是坐标变换公式成为

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \\ y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta, \\ z = z_1. \end{cases}$$

例　将直角坐标系 $Oxyz$ 绕 z 轴沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{4}$,得到另一坐标系 $O_1x_1y_1z_1$. 写出直角坐标系间的旋转公式. 并将方程 $z = xy$ 变为 $Ox_1y_1z_1$ 坐标系下的方程.

解　两坐标系的坐标轴之间的夹角为

	i	j	k
i_1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
j_1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
k_1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	0

因此旋转公式为

$$\begin{cases} x = x_1\cos\dfrac{\pi}{4} + y_1\cos\dfrac{\pi}{4} + z_1\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1), \\ y = x_1\cos\dfrac{3}{4}\pi + y_1\cos\dfrac{\pi}{4} + z_1\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1), \\ z = x_1\cos\dfrac{\pi}{2} + y_1\cos\dfrac{\pi}{2} + z_1\cos 0 = z_1. \end{cases}$$

方程 $z = xy$ 化为

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + y_1) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{y_1^2}{2},$$

这是双曲抛物面(图 5.35).

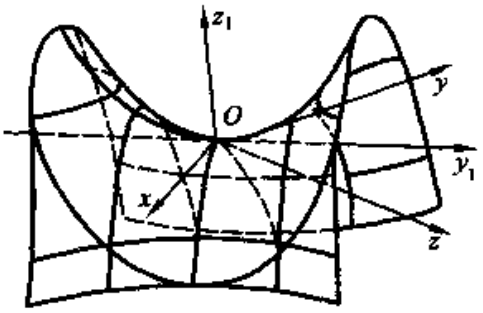

图 5.35

习题 5.5

1. 用坐标平移,将原点移至(2,4,-1)时,问下列各点 $A(-3,4,1)$,$B(2,-3,-5)$,$C(6,7,-3)$的坐标变为什么?

2. 用坐标平移将原点移至(1,2,3)时,下列各方程将变成怎样的形式?

(1) $3x - 5y + 6z = 1$; (2) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{2}$;

(3) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

3. 直角坐标系 $Oxyz$ 与 $Ox_1y_1z_1$ 之间的变换关系是

$$\begin{cases} x = x_1\cos\dfrac{\pi}{3} + y_1\sin\dfrac{\pi}{3}, \\ y = -x_1\sin\dfrac{\pi}{3} + y_1\cos\dfrac{\pi}{3}, \\ z = z_1, \end{cases}$$

如果 M 点在 $Ox_1y_1z_1$ 中的坐标是$(6,1,-2)$,求 M 点在 $Oxyz$ 中的坐标.

4. 已知直角坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 的原点 O_1 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标是(x_0,y_0,z_0),x 轴与 x_1 轴平行且同向,y 轴绕 x 轴逆时针转过 45°以后与 y_1 轴方向一致. 求这两个直角坐标系之间的变换公式.

5. 设两直角坐标系 $Oxyz$ 与 $O_1x_1y_1z_1$ 之间的变换关系是

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta + x_0, \\ y = -x_1\sin\theta + y_1\cos\theta + y_0, \\ z = z_1 + z_0, \end{cases}$$

说明变换的几何意义;如果 M 点在 $O_1x_1y_1z_1$ 中的坐标是$(0,0,1)$或$(\cos\theta,\sin\theta,0)$,分别求它们在 $Oxyz$ 中的坐标.

第六章

重积分与偏微商

6.1 重 积 分

6.1.1 多变量函数的极限与连续性

在前四章中,已经介绍了单变量函数的微积分.有了第五章作准备,从这章起要讨论多变量函数的微积分.多变量函数的微积分与单变量函数的微积分一样,也是讨论微分、积分这一对矛盾的.所谓多变量函数的微积分,实际上是在高维空间中讨论这一对矛盾.在单变量函数的微积分中,先介绍了矛盾的双方:积分与微分;然后由微积分基本定理,即牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式,揭露它们是一对矛盾.在多变量微积分中,也是一样,先介绍矛盾的双方:积分与微分.它们分别是单变量函数的积分与微分在高维空间的推广,不过这时候当然要比单变量的情形复杂,积分有重积分与线、面积分,微分有微分形式与外微分形式,最后通过多变量微积分的基本定理,即斯托克斯(Stokes)公式,揭露它们是一对矛盾.微积分这一对矛盾,在高维空间中是由 Stokes 公式来体现的.

由于多变量函数微积分是由单变量函数微积分发展来的,所以在叙述过程中与单变量函数微积分相同或相似之处一般从简,而着重叙述它们的不同之处.

多变量函数,又叫多元函数,是指自变量多于一个的函数.函数是指一个对应规律,当自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 在定义范围中取定后,必有变量 z 的一个确定的值与之对应,记作

$$z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

自变量取值的范围,称为函数的定义域.和一元函数一样,当对应规律和定义域确定后,函数也就确定了.在这本书中,主要讨论两个自变数、三个自变数的函数.自变数多于三个,原则上是完全一样的.由于变数多于一个,函数的定义域也就变得复杂起来,但是一般都讨论一些不太复杂的情形.例如在两个变数时,以平面上一条或数条曲线所围成的内部的点集作为定义域,这种点集称为开区域.如再加上曲线上的点,则称为闭区域.也可以以闭区域作为函数的定义域.对于

三个变数或更多变数也同样可以定义开区域和闭区域. 此外,还要求所讨论的区域是连通的,即区域中任意两点,都可以用一条在区域内的折线联起来. 这里讨论的都是连通区域.

例如函数 $z=\frac{1}{(9-x^2-y^2)^{1/2}}$ 是定义在圆 $x^2+y^2<9$ 之内,$x^2+y^2<9$ 就是一个开区域.

多变量函数也有极限的概念. 对于函数 $z=f(x,y)$,当点 $P(x,y)$ 在定义域内不论沿着哪一条途径趋向点 $A(a,b)$ 时,$f(x,y)$ 总是趋向于同一个数值 l,则称 l 为函数 $f(x,y)$ 当 $P(x,y)$ 趋于 $A(a,b)$ 时的极限,记作

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y)=l,$$

或

$$\lim_{P\to A} f(x,y)=l.$$

例如:当 $(x,y)\to(0,0)$ 时,不论选取什么途径,函数

$$z=xy+x^2+y^2$$

都趋于零. 在上述定义中,与单变量函数不同之处是 P 趋于 A 的途径有无穷多条,不仅要求对每一条来讲 $f(x,y)$ 有极限,而且要求这些极限是一样的,这样才能说 $f(x,y)$ 当 P 趋于 A 时有极限 l. 因为确有这样的函数,对 P 趋于 A 的无穷多条途径的每一条来讲,$f(x,y)$ 的极限都存在,但这些极限却并不相同. 例如

$$z=f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

当 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=\lambda x$ 趋于 $A(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=\frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda^2x^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

所以 $P(x,y)$ 沿着直线趋于 $A(0,0)$ 时,极限是存在的,但是对不同的直线,极限是不相同的. 故当 $P(x,y)$ 趋于 $A(0,0)$ 时,

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

的极限是不存在的. (参阅第九章 9.2.1 节).

至于极限的一些性质,与单变量函数极限一样,这里不再赘述了.

若当 $P(x,y)$ 趋于 $A(a,b)$ 时,函数 $f(x,y)$ 不但极限 l 存在,而且 $l=f(a,b)$,即

$$\lim_{P\to A} f(x,y)=f(a,b),$$

则称 $f(x,y)$ 在点 $A(a,b)$ 处是连续的. 如果函数 $f(x,y)$ 在区域内每一点都连续,

则称 $f(x,y)$ 为区域内的连续函数.

例如:$z=xy+x^2+y^2$ 在(0,0)处是连续的,也在平面上任意一点是连续的,因此,也在平面上任何区域中是连续的. 一般讨论的函数大多是连续函数. 但在多变量时,一些很简单的函数也未必每一点连续,例如:定义 $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$,当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,$z=0$,当 $x=y=0$. 那么对每一点(x,y),当 $x^2+y^2\neq 0$ 时,z 是 x,y 的连续函数. 但在(0,0)点就不连续. 因为当 $P(x,y)$ 趋于(0,0)点时,$\frac{xy}{x^2+y^2}$ 的极限不存在. 对任意固定的 x,$z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 显然是 y 的连续函数,对任意固定的 y,$z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 显然是 x 的连续函数. 所以尽管对每个变量来讲函数在一点是连续的,但作为多元函数在这一点未必连续.

多变量连续函数的性质与单变量连续函数一样. 例如:在闭区域中的连续函数,一定能在该区域取到最大值与最小值以及它们之间的任何值;连续函数的和、差、积、商(分母不等于零)仍是连续函数.

6.1.2 重积分的概念

单变量函数的定积分如何推广到高维空间? 这里有两种不同的途径来推广定积分这个概念. 先讲第一种即重积分的概念,然后介绍第二种即线、面积分的概念. 后来将会看出,这两种积分本质上是一致的.

回顾一下单变量时定积分是怎样定义的. 一个典型的例子,就是求曲边梯形的面积. 这时,将曲边梯形的底边分成很多小段,于是,曲边梯形的面积近似地等于很多个小的矩形的面积之和. 分得愈细,愈接近于面积的真正的值,分得无穷多,无限小,就能得到真正要求的值了. 所以求面积的问题成为求一个和的极限的问题,这就是积分.

在多变量时,也完全是一样的,例如对两个变量的函数 $z=f(x,y)$,要求以在 xy 平面上一个有界区域 D 为底,以 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体 V 的体积(不妨设在 D 中 $f(x,y)>0$)(图 6.1). 这时的做法与求曲边梯形面积的做法完全一样,将 D 分成互不重叠的小区域 $D_1,D_2,\cdots,D_n$. 它们的面积分别为 $\Delta A_1,\Delta A_2,\cdots,\Delta A_n$. 在 D_i 内任取一点 (x_i,y_i),于是 $f(x_i,y_i)\Delta A_i$ 就是以 D_i 为底的小柱体的体积,而 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$ 就是要求的 V 的体积的

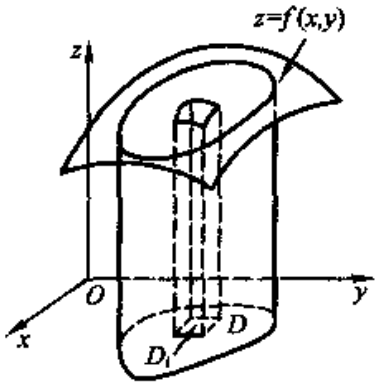

图 6.1

近似值. D 分得愈细，愈接近于真正的体积，当分得无穷多，无限小时，就成了真正的体积的值. 这样，求体积的问题就成为求和 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$ 的极限的问题了. 这里要说清楚，所谓愈分愈细是什么意思？即使是分成无穷，且 D_i 的面积 ΔA_i 趋于零还不够，因为即使 ΔA_i 很小，函数在 D_i 中两点的值依然可以相差很大，例如 D_i 是一条很狭的长条，就可以是这样. 所以对 D_i 的限制还要多一些，应该要求 D_i 中任意两点的距离都很小. 称 D_i 中任意两点的距离中的最大者为 D_i 的直径，这样，就要求所有 D_i 的直径都很小. 记在一种分割 T 之下，区域 D_i 的直径的最大者为 $\lambda(T)$，于是应该要求分割满足 $\lambda(T)\to 0$ 才行. 因此应该这样来定义 D 上的积分：设函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上定义，若对满足 $\lambda(T)\to 0$ 的任意分割 T，且对 D_i 中任意一点 (x_i, y_i)，极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)\Delta A_i$$

都存在且相同，则称 $f(x,y)$ 在 D 上是可积的，并把这个极限称为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作

$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i.$$

$f(x,y)$ 称为被积函数，D 称为积分区域，$\mathrm{d}A$ 称为面积元素.

怎样的函数是可积的？如果函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上是连续的，那么在 D 上是可积的. 不但如此，如果 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上是有界的，在这区域中，除去有限多个点或有限多条简单曲线（即曲线有参数表示 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，而 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 是连续可微函数，且仅有有限个极大极小）之外，$f(x,y)$ 是连续的，那么它在 D 上也是可积的. 在这一册中讨论的函数限于上述这种函数. 参阅第九章 9.3 节.

相对于二重积分，在第二章中所讨论的单变量函数的定积分可称为一重积分. 与一重积分一样，二重积分的概念也是一个整体的概念，它的一些性质是由整体决定的.

同样，不难得到更高维空间的定积分. 例如空间一个物体（有界闭区域）V 的质量分布的密度函数为 $\rho=\rho(M)$，如何由 ρ 算出 V 的质量？为此，把 V 分成许多小块 $V_1, V_2, \cdots, V_n$，用 ΔV_i 表示小块 V_i 的体积（图 6.2）. 在 V_i 中任取一点 M_i，于是 V_i 的质量近似地等于 $\rho(M_i)\Delta V_i$，而整个物体 V 的质量近似地等于

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta V_i.$$

令 $\lambda(T)$ 表示上述分割之下小块 V_i 的直径的最大者，那么当分割越来越细时，

极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(M_i)\Delta V_i$$

就是物体 V 的精确质量. 于是应该这样来定义 V 上的积分：如果函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上定义，若对满足 $\lambda(T)\to 0$ 的任意分割 T，且对 V_i 中任意一点 (x_i,y_i,z_i)，极限

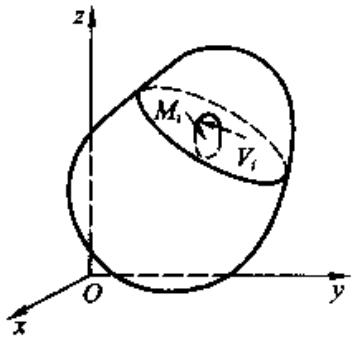

图 6.2

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

都存在且相同，则称 $f(x,y,z)$ 在 V 上是可积的，并把这个极限称为 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上的三重积分，记为

$$I=\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V.$$

$f(x,y,z)$ 称为被积函数，V 称为积分区域，$\mathrm{d}V$ 称为体积元素.

在第一章中给出定积分定义后，立即可以导出它的一些性质. 有了二重积分的定义后，也可以立即得到相应的性质. 例如：

(1) 如果 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 都是区域 D 上的可积函数，而 α,β 是任意常数，则 $\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)$ 也在 D 上可积，且

$$\iint_D(\alpha f(x,y)+\beta g(x,y))\,\mathrm{d}A$$

$$=\alpha\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A+\beta\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

(2) $\iint_D 1\cdot\mathrm{d}A=A$，这里 A 为区域 D 的面积.

(3) 如果区域 D 分解成两个不相重叠的区域 D_1,D_2，而 $f(x,y)$ 在 D_1,D_2 上分别可积，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积，且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A=\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}A+\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

(4) 如果在区域 D 上可积函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 满足不等式 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A\leqslant\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}A.$$

特别，如果在 D 上有

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M,$$

则

$$mA \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A \leqslant MA.$$

由此可导出二重积分的中值定理：

(5) 如果$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，那么一定可以在D内找到一点(ξ,η)使得

$$I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = f(\xi,\eta)A.$$

事实上，设$f(x,y)$在D上的最小值与最大值分别为m和M，那么由(4)知道I是在mA与MA之间，即有α使

$$I = \alpha A, m \leqslant \alpha \leqslant M.$$

由于在一个有界闭区域上连续的函数一定在这个区域上的一点达到它的最大值与最小值之间的任何值，故在D中有一点(ξ,η)，使得$\alpha = f(\xi,\eta)$，即

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = f(\xi,\eta)A.$$

这个中值定理的几何意义是什么？请读者想一想.

此外，还可以进一步证明：如果$\varphi(x,y)$在D上可积，且不变号，则在D中有一点(ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}A = f(\xi,\eta)\iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}A,$$

这里$f(x,y)$是在D上的连续函数.

(6) 如果$f(x,y)$在D上可积，则$|f(x,y)|$在D上也可积，且

$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A\right| \leqslant \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}A.$$

对于三重积分以及其他多重积分，也有完全一样的性质.

6.1.3　重积分的计算

由微积分基本定理计算定积分，即一重积分，可以通过求微商的逆运算得出来. 计算多重积分怎么办？在后面要介绍通过多变量微积分的基本定理，即斯托克斯公式来计算. 但对重积分来讲，可以直接地将重积分化成累次积分，也就是通过计算多个一重积分去求出多重积分的值. 先从计算二重积分开始.

假定$f(x,y)$在区域D上连续，则二重积分$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A$存在. 它也可以看成

是以 D 为底，以 $z=f(x,y)$ 为顶的柱体的体积. 不妨假设 D 位于直线 $x=a$ 和 $x=b$ 之间$(a<b)$，并且假定平行于 y 轴的每条直线 $x=x_0(a<x_0<b)$ 只和区域 D 的边界交于两点，一点是在直线穿进 D 里去的点 M_1，另一点是直线从 D 穿出去的点 M_2(图 6.3). 当 x 由 a 变到 b 时，M_1 和 M_2 就描画出边界上的两段曲线 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$. 用平面 $x=x_0$ 去截 V 时，截痕 $M_1M_2N_2N_1$ 是平面 $x=x_0$ 上的一个曲边梯形，它是由曲线 $z=f(x_0,y)$，直线 M_1N_1，M_2N_2 和 M_1M_2 所围成的(图 6.4)，它的面积是

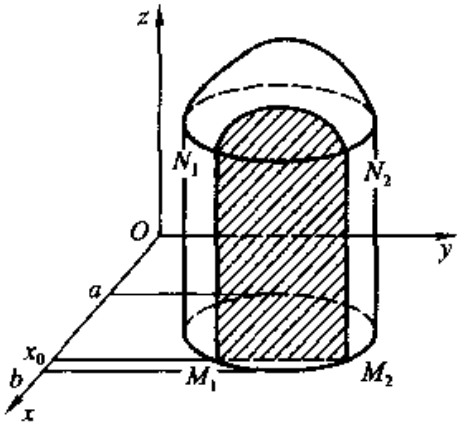

图 6.3

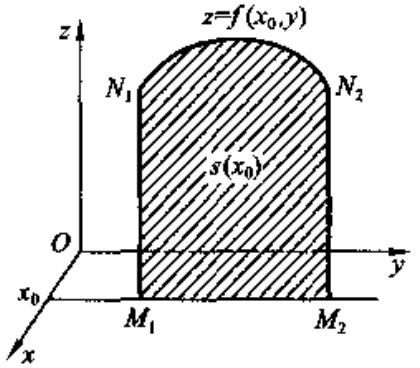

图 6.4

$$S(x_0)=\int_{M_1}^{M_2}f(x_0,y)\,dy=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\,dy.$$

用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 将 (a,b) 分成许多小段，用平面 $x=x_1,\cdots,x=x_n$ 将 V 分成许多薄片，于是每一薄片的体积近似地等于 $S(x_i)\Delta x_i$，这里 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 于是 V 的体积近似地等于 $\Sigma S(x_i)\Delta x_i$. 当 (a,b) 被分得无穷多、无限小时，$\Sigma S(x_i)\Delta x_i$ 就趋于 V 的真正的体积，而

$$\lim\Sigma S(x_i)\Delta x=\int_a^b S(x)\,dx.$$

即得

$$V=\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy\right)dx.$$

这样就把二重积分化为二次一重积分. 上式右边还可写为

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\,dy.$$

同样，假定 D 位于 $y=c$ 与 $y=d$ 之间$(c<d)$，并且假定平行于 x 轴的每条直线 $y=y_0(c<y_0<d)$ 只与 D 的边界交于两点. 若当 y 由 c 到 d 变化时，$y=y_0$ 与 D 边界的交点描画出曲线 $x=\psi_1(y)$ 和 $x=\psi_2(y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

因此还可以将 $\iint_D f(x,y)\,dA$ 写成 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. $dxdy$ 是在直角坐标下的面积元素.

如果 D 的形状比较复杂(如图 6.5),则可将 D 分成很多小块,使对每一块来讲都可以把二重积分化为二次一重积分,然后再加起来.

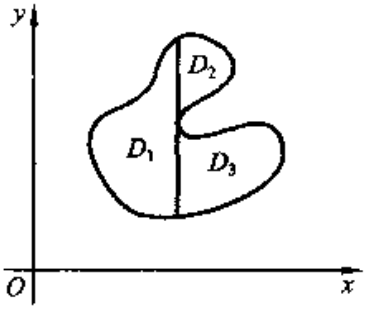

图 6.5

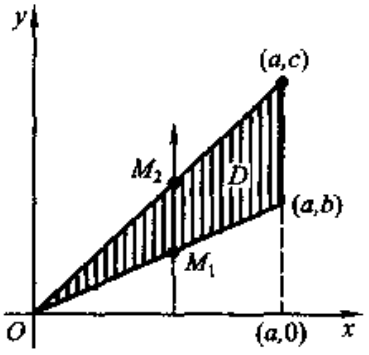

图 6.6

例 1　求 $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D 为由 $ay=bx$, $ay=cx$ 及 $x=a$ 围成的三角形(图 6.6).

解　由于三角形三个顶点为 $(0,0)$, (a,b), (a,c),边为

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = \frac{c}{a}x,$$

故

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy &= \int_0^a dx \int_{\frac{b}{a}x}^{\frac{c}{a}x} (x^2+y^2)\,dy \\ &= \frac{c-b}{a}\left(1 + \frac{b^2+bc+c^2}{3a^2}\right)\int_0^a x^3\,dx \\ &= \frac{1}{12}a(c-b)(3a^2+b^2+c^2+bc).\end{aligned}$$

例 2　计算积分 $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D 是由直线 $x=2$, $y=x$ 及 $xy=1$ 所围成的区域(图 6.7).

解　D 为图 6.7 所示的曲边三角形 ABD. 若先对 y 积分,再对 x 积分,则 D 可用不等式

$$\frac{1}{x} \leqslant y \leqslant x, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2$$

来定义,故

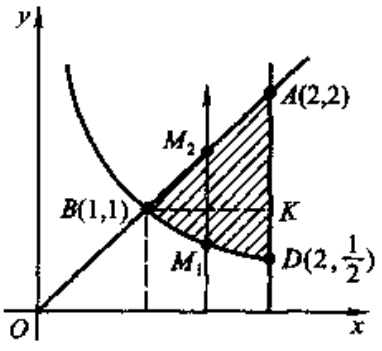

图 6.7

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 (-x + x^3)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

如先对 x 积分后再对 y 积分，由于 ABD 的左边边界有两部分，$AB: x = y$，$BD: x = \frac{1}{y}$，则须过 B 作 BK 平行于 Ox，分 ABD 为两部分：ABK 及 BDK. BK 的方程为 $y = 1$. BDK 的范围为 $\frac{1}{y} \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$；$ABK$ 的范围为 $y \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2$. 故

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{ABK} \frac{x^2}{y^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{BDK} \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^2 \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3}y \right)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{8}{3y^2} - \frac{1}{3y^5} \right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{17}{12} = \frac{9}{4}.$$

从这个例子可以看出，在把二重积分化为二次一重积分时，先对哪个变量积分很有关系. 选得好可以简单，选不好就可能带来较大的困难.

例 3 求积分 $I = \iint_D y^2 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由直线 $y = x, y = -x$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 所围成位于第一、第四象限内的区域(图 6.8).

解 在图 6.8 中，用直线 BC 将 D 分成两块. 显然直线 BC 的方程为 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$，故有

$$\iint_{D_1} y^2 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}x \int_{-x}^{x} y^2 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{45} - \frac{7\sqrt{2}}{180},$$

$$\iint_{D_2} y^2 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{16}{45} - \frac{43}{180}\sqrt{2},$$

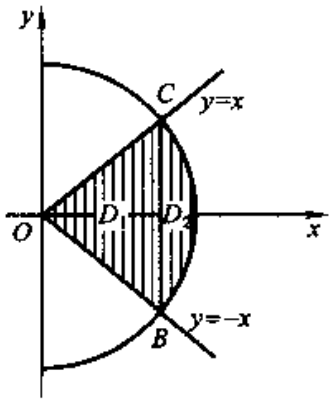

图 6.8

因此，

$$\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dxdy = \frac{4}{9} - \frac{5}{18}\sqrt{2}.$$

三重积分也可以同样化成一个一重积分及一个二重积分进而化成三次一重积分来计算.

例如考察三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$，这里 $f(x,y,z)$ 为可积函数，而空间区域 V 具有这样的性质：平行于 z 轴的每一条直线和它的边界曲面最多只相交于两个点，一点 $M_1(x,y,z)$ 穿入空间区域 V，另一点 $M_2(x,y,z)$ 穿出 V. V 在 xy 平面上的投影为 D，当 (x,y) 跑遍 D 时，M_1，M_2 描画出两块曲面

$$z = z_1(x,y), \quad z = z_2(x,y),$$

它们上下相合，就包成了区域 V（图 6.9）. 这时 V 可以看成由点 (x,y,z) 组成，其中 (x,y) 是 D 中的点，而 z 是在 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 之间. 所以三重积分可以写成

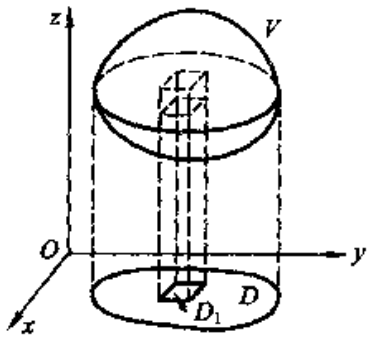

图 6.9

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy,$$

也就是可以化成一次二重积分和一次一重积分. 与前面一样，上式右端还可以写成

$$\iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

因此还可以将 $\iiint_V f(x,y,z)\,dV$ 写成 $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$. $dxdydz$ 是体积元素 dV 在直角坐标系下的表达式.

同样，也可以用垂直于 z 轴的平面来切 V，得到截面 D_z，如果整个 V 在 $z=g$ 与 $z=h$ 之间，那么与上面一样的讨论，可以得到三重积分还可以写成

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_g^h \left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy\right)dz$$

$$= \int_g^h dz \iint_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy.$$

同样的道理，对区域 V 在相应的要求下，可以得到：

如果 V 在 yz 平面上的投影为 E,在 zx 平面上的投影为 G,则

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint_E \left(\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_E \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x,$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint_G \left(\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$= \iint_G \mathrm{d}x\mathrm{d}z \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$$

如果与 x 轴相垂直的平面截 V 得到的截面为 D_x,与 y 轴相垂直的平面截 V 得到的截面为 D_y,且 V 在 $x=a$ 与 $x=b$ 以及 $y=c$ 与 $y=d$ 之间,则三重积分还可以写成

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \left(\iint_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \iint_{D_x} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_c^d \left(\iint_{D_y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_c^d \mathrm{d}y \iint_{D_y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

例 4 计算三重积分 $\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. V 由三坐标面及平面 $2x+y+z=1$ 所围成(图 6.10).

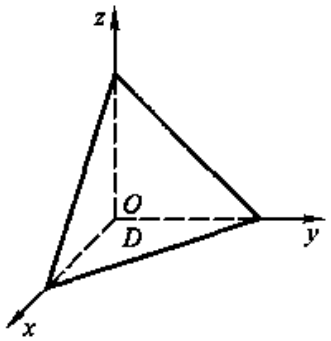

图 6.10

解 将 V 垂直投影到 xy 平面得到平面三角形区域 D,点 M_1, M_2 所描画出的曲面分别为

$$z=0,\ z=1-2x-y,$$

因此

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{1-2x-y} z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (4x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 2y + 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1-2x} (4x^2 + y^2 + 4xy - 4x - 2y + 1)\,dy$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)^3 dx = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(1-2x)^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{48}.$$

例 5　计算三重积分 $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$，V 由锥面 $R^2z^2 = h^2(x^2+y^2)$ 及平面 $z=h$ 围成.

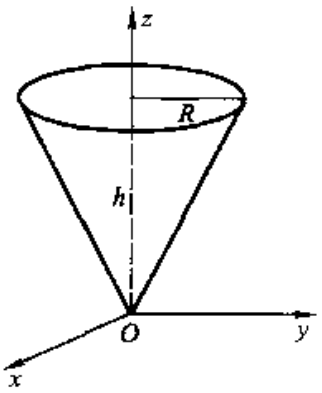

图 6.11

解　空间区域 V 在 xy 平面上的垂直投影是圆 $x^2+y^2=R^2$，这里 M_1 所描画的是锥的一部分

$$z = \frac{h}{R}(x^2+y^2)^{1/2},$$

而 M_2 所描画的则是平面 $z=h$ 上的一个圆（图 6.11）. 因此

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} dx\,dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}\left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}h^2\pi R^2 - \frac{h^2}{2R^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}h^2\pi R^2 - \frac{2h^2}{R^2}\int_0^R x^2\sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

$$-\frac{2h^2}{3R^2}\int_0^R (R^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

这个积分还可用下面的方法来计算比较简单.

由于整个空间区域 V 位于平面 $z=0$，和 $z=h$ 之间，对任意 $z(0\leqslant z\leqslant h)$，平面 $z=z$ 和 V 的交痕是这个平面上的圆 D_z：

$$x^2+y^2 \leqslant \frac{R^2}{h^2}z^2.$$

因此有

$$\iiint_V z\,dV = \int_0^h z\,dz \iint_{x^2+y^2\leqslant\frac{R^2}{h^2}z^2} dx\,dy = \frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,dz = \frac{\pi R^2h^2}{4}.$$

习题 6.1

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{\cos xy}{x+y}$，求 $f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(1,0)$，$f\left(2,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2. 设 $f(x,y)=\left(\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right)^2$，求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 若 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$，求 $f(x+y,x-y,xy)$.

4. 若 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}(x>0)$，求 $f(x)$.

5. 证明函数 $F(x,y)=\ln x\ln y$ 满足关系式：

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

6. 确定并画出下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{x-1}+\sqrt{y}$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{y^2-1}$；

(3) $z=\ln xy$；　　(4) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(5) $u=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$；　　(6) $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$；

(7) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(8) $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$；

(9) $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；　　(10) $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

7. 设 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$，求 $f(\cos t,\sin t)$.

8. 设 $f(x,y)=x^y$，$\varphi(x,y)=x+y$，$\psi(x,y)=x-y$，求：

$$f(\varphi(x,y),\psi(x,y))；\varphi(f(x,y),\psi(x,y))；\psi(\varphi(x,y),f(x,y)).$$

9. 设 $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，证明：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=1$；

(3) $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=-1$.

10. 求下列函数的不连续点：

(1) $z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$；　　(2) $z=\dfrac{1}{x-y}$；

(3) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

11. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分，这里 D 分别为：

(1) 以 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$ 为顶点的三角形；

(2) 由 $x+y=1, x-y=1, x=0$ 所围成的区域;

(3) 由 $y=x^2, y=4-x^2$ 所围成的区域;

(4) $x^2+y^2 \leqslant y$;

(5) $(x-1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$;

(6) 由 $y-2x=0, 2y-x=0, xy=2$ 所围成的在第一象限中的区域.

12. 改变下列积分顺序:

(1) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.

(2) $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(3) $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

(4) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$.

(5) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\ (a>0)$.

(6) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy$.

13. 如果 $f(x,y)$ 在定义域中是连续的,证明

$$\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx.$$

计算下列二重积分:

14. $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, D: $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$.

15. $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy$, D: 由 $y=2x, y=x, x=4, x=2$ 围成.

16. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D: 由 $y=x^2, x=y^2$ 围成.

17. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, D: 由 $y^2=4x, x=1$ 围成.

18. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D: 由 $y=x, y=x+a, y=a, y=3a\ (a>0)$ 围成.

19. $\iint\limits_D \frac{x}{y+1}\,dxdy$, D: 由 $y=x^2+1, y=2x, x=0$ 围成.

20. $\iint\limits_D y\,dxdy$, D: 由 $x^2+y^2 \leqslant a^2$ 在第一象限的部分.

21. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D: 由 $x^2-y^2=1, x^2+y^2=9$ 围成的含有原点的部分.

22. $\iint\limits_D |xy|\,dxdy$, D: $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

23. $\iint\limits_D |xy|\,dxdy$, D: 由 $|x|+|y|=1$ 围成.

24. 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则不等式

$$\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

成立，等号当且仅当 $f(x)$ 为常数时成立.

25. 将三重积分 $\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$ 化为累次积分，这里 V 分别为：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$；

(2) 由 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 围成；

(3) 由 $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ 围成的公共部分；

(4) 由 $x^2+y^2=R^2, z=0, z=H(H>0)$ 围成.

计算下列三重积分：

26. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^2}$，　V：$1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 2, 1\leqslant z\leqslant 2$.

27. $\iiint_V xyzdxdydz$，　V：由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 围成.

28. $\iiint_V xyzdxdydz$，　V：由 $z=xy, z=0, x=-1, x=1, y=2, y=3$ 围成.

29. $\iiint_V xyzdxdydz$，　V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在第一卦限部分.

30. $\iiint_V xy^2z^3dxdydz$，　V：由 $z=xy, y=x, x=1, z=0$ 围成.

6.2 偏 微 商

6.2.1 偏微商与全微分

单变量函数的微商与微分到了高维空间将成为什么？先看两个变量的函数的情形，多于两个变量的函数的情形，原则上是一样的.

首先要讨论的问题仍然是函数的变化率. 在单变量函数时，自变量只有一个，表示自变量的点只能在直线上变动，移动的方向也只有左、右两方. 而现在自变量有两个，表示自变量的点在一个区域内变动，不仅可以移动距离，而且可以按任意方向来移动同一段距离. 因此，函数的变化不仅与移动的距离有关，而且与移动的方向有关. 因此，函数的变化率是与方向有关的. 现从最简单的情形开始讨论. 定义

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x(x,y)$$

为函数 $f(x,y)$ 对 x 的偏微商，如果这个极限存在的话. 这就是函数 $f(x,y)$ 沿着与 x 轴平行的方向的变化率. 同样定义

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y(x,y)$$

为函数 $f(x,y)$ 对 y 的偏微商，如果这个极限是存在的话. 这就是函数 $f(x,y)$ 沿着与 y 轴平行的方向的变化率. 而 $\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x, \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 分别称为函数 $f(x,y)$ 对 x 和对 y 的偏微分. 它们的和

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$$

称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分.

$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 称为函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 的差分. 如果函数 $f(x,y)$ 的偏微商在点 (x,y) 是连续的，则由微分中值定理

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\\ &\quad + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

这里 θ_1, θ_2 是 0 与 1 之间的数. 命

$$f'_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) - f'_x(x,y) = \varepsilon_1,$$

$$f'_y(x, y+\theta_2\Delta y) - f'_y(x,y) = \varepsilon_2,$$

显然，当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时，$\varepsilon_1\to 0, \varepsilon_2\to 0$. 于是

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + o(\rho) = \mathrm{d}f + o(\rho).$$

这里 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，$o(\rho)$ 表示一个量，当它除以 ρ 后，令 $\rho\to 0$，则其值依然趋于 0，因此，如果把高阶无穷小忽略不计，则可以用全微分来代替差分. $\mathrm{d}f$ 是 Δf 的线性主部，两者相差的不过是 $\Delta x, \Delta y$ 的高阶项. 这与单变量函数的情形是一样的.

显然，偏微商与全微分都是函数的局部性质.

全微分还有以下的性质：

$$\mathrm{d}(u\pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v,$$

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

这与单变量函数的微分法则形式上是一样的，但有了新的内容.

单变量函数的微分法则中有复合函数的微分法则：复合函数 $z = F(\Phi(t))$ 的微商

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

这里 $s=\Phi(t)$. 在两个变量时,这成为:

如果 x,y 是 u,v 的函数,

$$x=\varphi(u,v),\quad y=\psi(u,v),$$

则函数

$$z=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

对 u,v 的偏微商等于

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v},$$

即

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}.$$

当然这里要求各个偏微商都是连续的.

在这个公式中,$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\ \frac{\partial f}{\partial v}\right)$ 相当于单变量时的 $\frac{dF}{dt}$,$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 相当于 $\frac{dF}{ds}$,而 $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$ 相当于 $\frac{d\Phi}{dt}$. 这个矩阵叫做变换

$$x=\varphi(u,v)\quad y=\psi(u,v)$$

的雅可比(Jacobi)矩阵. 它的行列式叫做雅可比(Jacobi)行列式,记作

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}.$$

雅可比矩阵和雅可比行列式在今后的讨论中将起重要作用. 由于

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

从这些公式立即可以推出

$$df=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

这称为微分的不变性.

至于两个变量的复合函数的微商公式的证明是简单的. 先给 u 以增量 Δu, v 不变,则 x,y 相应的增量为

$$\Delta x = \varphi(u+\Delta u,v) - \varphi(u,v),$$

$$\Delta y = \psi(u+\Delta u,v) - \psi(u,v).$$

由于 x,y 有增量 $\Delta x,\Delta y$, $z=f(x,y)$ 也有增量 Δf,

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x,y+\Delta y) + f(x,y+\Delta y) - f(x,y)\\ &= f'_x(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x,y+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

这里 θ_1,θ_2 为 0,1 之间的数,双方除以 Δu,让 $\Delta u\to 0$,由 f'_x, f'_y 的连续性即得

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

另一个公式

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

也同样可以证明.

有了一阶偏微商,当然可以有二阶偏微商以及更高阶的偏微商. 例如 $z=f(x,y)$,就可以有二阶偏微商.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

分别记作

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad 或 \quad f''_{xx},f''_{yx},f''_{xy},f''_{yy}.$$

但有一点要注意,如果 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 在点 (x,y) 不但存在而且连续,则

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

即微商的次序可以交换.

现在来证明这一点,令

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x,y) - f(x,y),$$

$$\Delta_y f = f(x,y+\Delta y) - f(x,y),$$

则

$$\Delta_y\Delta_x f = \Delta_y[f(x+\Delta x,y) - f(x,y)]$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)$$
$$- f(x, y+\Delta y) + f(x, y),$$
$$\Delta_x \Delta_y f = \Delta_x [f(x, y, +\Delta y) - f(x, y)]$$
$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$
$$- f(x+\Delta x, y) + f(x, y),$$

显然 $$\Delta_x \Delta_y f = \Delta_y \Delta_x f.$$

令 $$g(y) = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$$

(视 $x, \Delta x$ 为固定). 由微分中值定理,

$$\Delta_y \Delta_x f = \Delta_y [f(x+\Delta x, y) - f(x, y)] = \Delta_y g(y)$$
$$= g(y+\Delta y) - g(y) = g'(y+\theta_1 \Delta y)\Delta y$$
$$= [f'_y(x+\Delta x, y+\theta_1 \Delta y) - f'_y(x, y+\theta_1 \Delta y)]\Delta y$$
$$= f''_{yx}(x+\theta_2 \Delta x, y+\theta_1 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

其中 θ_1, θ_2 是(0,1)中的数. 同样可证

$$\Delta_x \Delta_y f = f''_{xy}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

其中 θ_3, θ_4 是(0,1)中的数. 因此

$$f''_{yx}(x+\theta_2 \Delta x, y+\theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x+\theta_3 \Delta x, y+\theta_4 \Delta y).$$

让 $\Delta x, \Delta y \to 0$, 由 f''_{yx} 与 f''_{xy} 的连续性得 $f''_{yx} = f''_{xy}$.

对于高阶微商,在相应的条件下也有同样的结果.

至于三个变量以及更多变量的情形也是一样的. 例如三个变量的函数 $u = f(x, y, z)$ 有三个偏微商 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, 以及全微分

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

和二阶偏微商等.

例 1 $z = x^y (x > 0)$ 的偏微商是

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x,$$

而全微分是

$$\mathrm{d}z = yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y.$$

例 2 近似计算

$$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1).$$

解　取二元函数

$$z=f(x,y)=\ln(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1).$$

令　　$x_0=1,\ \Delta x=0.03,\ y_0=1,\ \Delta y=-0.02.$

于是　　$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y).$

由于 Δz 近似地等于 $\mathrm{d}z$,故

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

现在

$$f(x_0,y_0)=f(1,1)=0,$$

$$f'_x(x_0,y_0)=f'_x(1,1)=\frac{1}{3},$$

$$f'_y(x_0,y_0)=f'_y(1,1)=\frac{1}{4},$$

所以　　$\ln(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1)\approx\frac{1}{3}\times0.03-\frac{1}{4}\times0.02=0.005.$

例 3　求 $z=\mathrm{e}^{xy}\sin(x+y)$ 的偏微商及全微分.

解　令 $u=xy,v=x+y,$

则　　$z=\mathrm{e}^u\sin v.$

而　　$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=x,\ \frac{\partial v}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=1.$

但　　$\frac{\partial z}{\partial u}=\mathrm{e}^u\sin v,\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\mathrm{e}^u\cos v$

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1,$$

$$=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v\cdot 1,$$

$$=\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x$$

$$+\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y.$$

例 4 证明函数 $u=\frac{1}{r}$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

其中

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

证 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{x}{r^3},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right)=\frac{r^3-3r^2\frac{\partial r}{\partial x}x}{r^6}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}.$$

由于 u 对自变量有对称性,故有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}.$$

因此,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

这个方程叫做拉普拉斯(Laplace)方程,是数学物理中一个极为重要的方程. 满足这个方程的函数称为调和函数.

例 5 证明函数 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

这里 φ 和 ψ 都是可以微分二次的函数.

证 令 $\xi=x-at,\eta=x+at$,于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+a\frac{\partial \psi}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}+a\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}+a^2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}.$$

比较后两个式子,即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

这个方程同样是数学物理中的一个极为重要的方程,称为波动方程.

函数

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$$

是这个方程的解.

例 6　证明函数 $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} (t > 0)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证　由于

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$= \left(\frac{x^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{x^2}{4t^{5/2}} - \frac{1}{2t^{3/2}} \right) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

因此即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

它和前面两个方程一样,也是数学物理中的极为重要的方程,称为热传导方程,本例中的函数就是这方程的一个解.

以上列举的三个方程是数学物理中的主要研究对象.

例 7　理想气体的体积 v,压力 p 与绝对温度 T 之间的关系式 $pv = RT$(R 是常数).

如果把 T 看作 p, v 的函数,则有

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}.$$

把 v 看作 p, T 的函数,即

$$v = \frac{RT}{p},$$

则有

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}.$$

把 p 看为 v,T 的函数，又有

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}.$$

因此得出热力学上的重要公式：

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{v^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{v}{R} = -\frac{RT}{pv} = -1.$$

在求多元复合函数的偏微商时，还会遇到一些较为复杂的情形. 例如，已知

$$u = f(x,y,t), \ x = x(r,s,t), \ y = y(r,s,t),$$

这里 x,y 是中间变量，r,s,t 是自变量. 这时三个偏微商分别为

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

注意前两式与第三式的区别. 在第三式中，$\frac{\partial u}{\partial t}$是视 u 为 r,s,t 的函数对 t 的偏微商，而$\frac{\partial f}{\partial t}$是视 f 为 x,y,t 的函数对 t 的偏微商，两者是不同的.

例 8 设 $u=f(x,y,z), y=\varphi(x,t), t=\psi(x,z)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

解 注意复合的结果，u 是 x,z 的函数，而 y,t 是中间变量. 于是有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

6.2.2 隐函数的微商

以前所讨论的函数都假定因变量 z 等于自变量 x,y 的一个表达式 $f(x,y)$，只要 x,y 之值确定了，z 的值也就确定了，这种函数叫做显函数. 更一般些，若自

变量 x,y 的函数 z 由一个方程 $F(x,y,z)=0$ 所规定，则称 z 是 x,y 的隐函数. 例如 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 和 $e^z-xyz=0$，各定义其中一个变量为其余两变量的隐函数. 任给一个方程 $F(x,y,z)=0$，自然有这样几个问题：一是能不能从这个方程中以两个变量作为自变量，解出第三个变量作为因变量，即得到

$$z=f(x,y)$$

或

$$x=g(y,z),\quad y=h(z,x).$$

例如从 $x^2+y^2+z^2=1$ 中可以解出

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2},\ x=\pm\sqrt{1-y^2-z^2},\ y=\pm\sqrt{1-z^2-x^2}.$$

二是如能解出，这种解是否可微；三是如果可微，如何来计算偏微商？第一，第二个问题留到第九章以后去讨论，现只讨论第三个问题.

若 $F(x,y,z)=0$，将 z 看作 x,y 的函数即 $z=z(x,y)$，则将 $z=z(x,y)$ 代到原方程中去得到 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0$. 分别对 x 和 y 求偏微商，由复合函数求微商的方法，得到

$$\begin{cases} F'_x+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv 0, \\ F'_y+F'_z\dfrac{\partial z}{\partial y}\equiv 0. \end{cases}$$

若 $F'_z\neq 0$，就得到 z 关于 x 和 y 的偏微商：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-F'_x/F'_z,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-F'_y/F'_z.$$

同样在 $F(x,y,z)=0$ 中也可以将 x 或 y 看作隐函数而求出它们的偏微商.

例 1　在 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 中求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$. 将这方程看作 x,y 的恒等式，便有

$$F'_x+F'_z\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

$$F'_y+F'_z\frac{\partial z}{\partial y}=2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-x/z,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-y/z.$$

例 2　有 $e^z-xyz=0$ 中求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　如果直接从方程中解出 $z=f(x,y)$ 然后再来求偏微商就比较困难. 现在

直接将方程看作是 x,y 的恒等式,便有

$$\begin{cases} F'_x + F'_z \dfrac{\partial z}{\partial x} = -yz + (e^z - xy)\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ F'_y + F'_z \dfrac{\partial z}{\partial y} = -xz + (e^z - xy)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{e^z - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy},$$

或可进一步化简,由于 $e^z = xyz$,所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{xyz - xy} = \frac{z}{x(z-1)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{e^z - xy} = \frac{xz}{xyz - xy} = \frac{z}{y(z-1)}.$$

这里讨论的是三个变数的方程 $F(x,y,z)=0$. 两个变数的方程

$$F(x,y) = 0$$

或更多变数的方程

$$F(x,y,z,\cdots) = 0$$

都可以按照这种方法分别求出各种偏微商来.

更一般些,如果给出的不是一个方程,而是一个方程组,例如给出两个方程

$$\begin{cases} F(x,y,\cdots,u,v) = 0, \\ G(x,y,\cdots,u,v) = 0. \end{cases}$$

如果把 u,v 看作因变量,则它们是自变量 $x,y,\cdots$ 的函数,也称为由这方程组确定的隐函数. 可以用同样的方法求出 u,v 的偏微商来. 也是将每个方程看作 $x,y,\cdots$ 的恒等式,而分别求它们的偏微商. 例如对 x 求偏微商,由复合函数求微商的方法得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

若

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则可解出
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)},\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.\end{cases}$$

同样可以计算$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y},\cdots$

对于有更多个方程的方程组决定的隐函数也可以应用同样的方法来处理.

例 3　从方程组
$$\begin{cases}u^3 + xv - y = 0,\\ v^3 + yu - x = 0\end{cases}$$

中求出$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解　记
$$\begin{cases}F \equiv u^3 + xv - y = 0,\\ G \equiv v^3 + yu - x = 0,\end{cases}$$

则
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$
$$= \begin{vmatrix}-v & x\\ 1 & 3v^2\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix} = \frac{x + 3v^2}{xy - 9u^2v^2}.$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$
$$= \begin{vmatrix}3u^2 & -v\\ y & 1\end{vmatrix}\Big/\begin{vmatrix}3u^2 & x\\ y & 3v^2\end{vmatrix} = \frac{3u^2 + yv}{9u^2v^2 - xy}.$$

作为隐函数的微商的应用举例,以下将讨论如何求用隐函数表示的曲线的切线以及用隐函数表示的曲面的切平面和法矢量.

设平面曲线 L 由二元方程
$$F(x,y) = 0$$
所确定,若 L 上一点(x,y)使 $F'_y(x,y)\neq 0$,则 L 在该点切线的斜率为
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)},$$
同样,若 $F'_x(x,y)\neq 0$,则
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_x(x,y)}.$$

以(ξ,η)表示L在点(x,y)处的切线上的点，则无论是$F'_x(x,y)\neq 0$，还是$F'_y(x,y)\neq 0$，L在点(x,y)的切线方程为

$$(\xi-x)F'_x(x,y)+(\eta-y)F'_y(x,y)=0.$$

而在点(x,y)的法线方程为

$$(\xi-x)F'_y(x,y)-(\eta-y)F'_x(x,y)=0.$$

例 4 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$在点$(x,y)$的切线方程.

解 将椭圆方程改写为

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

则

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2}.$$

故切线方程为

$$(\xi-x)\frac{x}{a^2}+(\eta-y)\frac{y}{b^2}=0,$$

化简得

$$\frac{\xi x}{a^2}+\frac{\eta y}{b^2}=1.$$

如果在曲线上有某点使F'_x与F'_y同时为零，则这种点叫做曲线L的奇点. 在奇点上是不能用上述办法讨论切线的. 例如双纽线(图 6.12)

$$(x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0,$$

原点$(0,0)$就是奇点.

如果曲线无奇点，且F'_x,F'_y是连续的，则称曲线是光滑的. 光滑曲线有连续转动的切线.

空间曲线的切线也可以用同样的办法来进行讨论.

如果空间曲线L可以用参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),$$

来表示，记

$$r(t)=(x(t),y(t),z(t)),$$

于是

$$\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right).$$

如果当$\Delta t\to 0$时，$\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}$存在极限，则得到矢量$r(t)$在点$(x,y,z)$的微

商，记作$\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$，显然，这是曲线在点$(x,y,z)$的切线方向的矢量（图 6.13）.

$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$和$(dx,dy,dz)$都是切线方向的矢量. 由此立即得到曲线 L 的弧长的线素

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

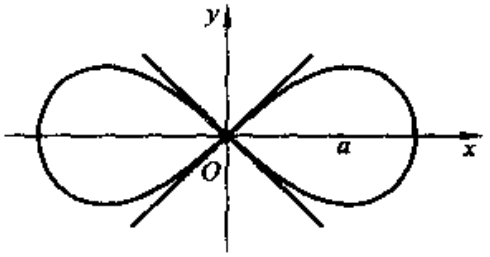

图 6.12

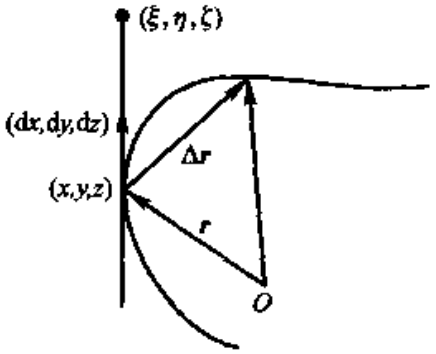

图 6.13

假如空间曲线 L 是用隐函数

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

来表示的，则立即得到

$$\begin{cases} F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0, \\ G'_x dx + G'_y dy + G'_z dz = 0. \end{cases}$$

记　　$\boldsymbol{f} = (F'_x, F'_y, F'_z)$，　$\boldsymbol{g} = (G'_x, G'_y, G'_z)$，

则上式表示 L 的切矢量(dx,dy,dz)与 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 都是垂直的，即与

$$\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ G'_x & G'_y & G'_z \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\boldsymbol{k}$$

是平行的. 若以(ξ,η,ζ)表示切线上的点，则 L 在点(x,y,z)上的切线方程为

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}.$$

另一方面，矢量$(\xi-x,\eta-y,\zeta-z)$也是在切线上，故

$$\begin{cases}(\xi-x)F'_x+(\eta-y)F'_y+(\zeta-z)F'_z=0,\\(\xi-x)G'_x+(\eta-y)G'_y+(\zeta-z)G'_z=0,\end{cases}$$

也是 L 在点(x,y,z)的切线方程.

过切点而与切线相垂直的平面叫做曲线的法平面. 显然曲线在点(x,y,z)的法平面方程为

$$\begin{vmatrix}\xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}=0,$$

即 $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(\xi-x)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(\eta-y)+\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(\zeta-z)=0.$$

L 上使

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$$

同时为零的点，叫做曲线的奇点. 在这种点一般不能像上面那样来讨论切线. 若 L 无奇点，且 F 和 G 有连续的一阶偏微商，则说 L 是光滑的. 光滑曲线有连续转动的切矢量.

例 5 求曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\x^2+y^2=Rx\end{cases}$$

在点(x,y,z)的切线与法平面方程.

解 记

$$\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2,\\G(x,y,z)=x^2+y^2-Rx,\end{cases}$$

则 $F'_x=2x,F'_y=2y,F'_z=2z,G'_x=2x-R,G'_y=2y,G'_z=0$. 所以在点$(x,y,z)$的切线方程为

$$\begin{cases}x(\xi-x)+y(\eta-y)+z(\zeta-z)=0,\\(2x-R)(\xi-x)+2y(\eta-y)=0,\end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases}x\xi+y\eta+z\zeta=R^2,\\(2x-R)\xi+2\eta y=Rx.\end{cases}$$

而

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 0 & 2x-R \end{vmatrix} = 4xz - 2zR,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-R & 2y \end{vmatrix} = 2yR,$$

故切线方程又可写为

$$\frac{\xi - x}{-2yz} = \frac{\eta - y}{2xz - Rz} = \frac{\zeta - z}{Ry}.$$

法平面方程为

$$-2yz(\xi - x) + (2xz - Rz)(\eta - y) + Ry(\zeta - z) = 0.$$

现在讨论曲面的切平面与法矢量.

设 M 是曲面 Σ 上的一点，L 是 Σ 上通过 M 点的一条曲线，L 在 M 点的切线为 l，使 L 在 Σ 上变动但保持通过 M 点，切线 l 就跟着转动. 若 l 始终保持在一张平面 π 上的话，则 π 叫做曲面 Σ 在点 M 的切平面(图 6.14)，π 的法矢量叫做曲面 Σ 在点 M 的法矢量. 当然曲线不一定每点都有切线，曲而更不一定每点都有切平面.

设曲面 Σ 在直角坐标系的方程是

$$F(x,y,z) = 0.$$

在 Σ 上任作一条曲线 L：

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

则　　$$F(x(t),y(t),z(t)) = 0,$$

于是　　$$F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = 0,$$

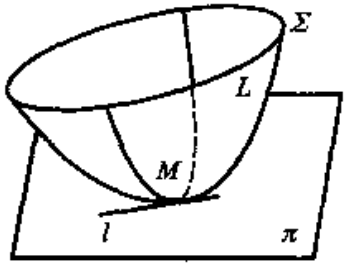

图 6.14

即 L 的切矢量 (dx,dy,dz) 与矢量 (F'_x,F'_y,F'_z) 相垂直. 由于 L 是 Σ 上的任意一条曲线，所以根据定义，矢量 (F'_x,F'_y,F'_z) 就是 Σ 的法矢量. 因此，切平面 π 的方程为

$$(\xi - x)F'_x(x,y,z) + (\eta - y)F'_y(x,y,z) + (\zeta - z)F'_z(x,y,z) = 0.$$

例 6　求球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

的切平面方程与法矢量.

解 将球面写成

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

于是

$$F'_x = 2x,\ F'_y = 2y,\ F'_z = 2z.$$

所以在点(x,y,z)的法矢量为$(2x,2y,2z)$,而切平面方程为

$$2x(\xi - x) + 2y(\eta - y) + 2z(\zeta - z) = 0,$$

即

$$x\xi + y\eta + z\zeta = R^2.$$

例如取球面上一点$\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$,该点的切平面方程为

$$\xi + \eta + \zeta = \sqrt{3}R.$$

特别,若曲面方程为

$$z = f(x,y),$$

将此方程改写为

$$F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0,$$

则

$$F'_x = -f'_x,\ F'_y = -f'_y,\ F'_z = 1.$$

因此法矢量为$(-f'_x, -f'_y, 1)$,切平面方程为

$$-(\xi - x)f'_x - (\eta - y)f'_y + \zeta - z = 0.$$

曲面Σ上使F'_x,F'_y,F'_z同时为零的点叫做Σ的奇点. 若F'_x,F'_y,F'_z连续且不同时为零,则说曲面Σ为光滑的. 因此光滑曲面处处有法矢量和切平面,且法矢量在曲面上连续转动.

设曲面Σ的方程为参数方程

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),$$

或

$$r = r(u,v).$$

固定v,得到Σ上一条u曲线;固定u,得到Σ上一条v曲线. r'_u[①]是u曲线的切矢量,r'_v是v曲线的切矢量(图 6.15).

若将曲面Σ的参数方程改写为三元方程

$$F(x,y,z) = 0,$$

则

$$\begin{cases} F'_x x'_u + F'_y y'_u + F'_z z'_u = 0, \\ F'_x x'_v + F'_y y'_v + F'_z z'_v = 0. \end{cases}$$

① 为了方便,在不混淆的情形,今后也用r_u表示r'_u.

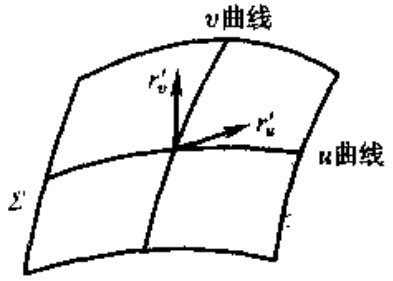

图 6.15

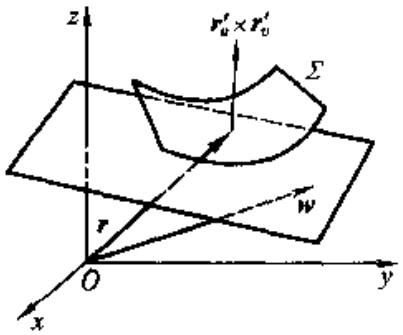

图 6.16

因此 Σ 的法矢量 (F'_x, F'_y, F'_z) 与 $\boldsymbol{r}'_u, \boldsymbol{r}'_v$ 相垂直，即与 $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ 平行. 所以 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ 是参数曲面 Σ 的法矢量(图 6.16). 又

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k}.$$

以 $\boldsymbol{w} = (\xi, \eta, \zeta)$ 表示切平面上的动点，则 Σ 的切平面方程为

$$(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

若曲面 Σ 上有点使

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = 0,$$

即

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

同时为零，则这点称为曲面 Σ 的奇点. 若 Σ 上没有这种点，且 x, y, z 有连续偏导数，则称参数曲面 Σ 是光滑的. 此时 Σ 有连续转动的法矢量.

例如在例 5 中所讨论的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 有参数表示

$$x = R\cos u \sin v,\ y = R\sin u \sin v,\ z = R\cos v,$$

其切平面方程为

$$\begin{vmatrix} \xi - R\cos u\sin v & \eta - R\sin u\sin v & \zeta - R\cos v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \end{vmatrix} = 0,$$

即为

$$\xi x + \eta y + \zeta z = R^2.$$

习题 6.2

1. 设 $f(x,y) = (1+xy)^y$，求 $f'_x(1,1)$，$f'_y(1,1)$.

2. 设 $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+2y)$，求 $f'_x\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$f'_y\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $u = \sqrt{az^3 - bt^3}$，求当 $z = b, t = a$ 时 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 之值.

在下列 4 ~ 16 题中，求各函数对于每个自变量的偏微商.

4. $z = \ln(x + y^2)$.

5. $z = (1+xy)^y$.

6. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{y}{x}}$.

7. $z = \ln\tan\frac{x}{y}$.

8. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. $z = \frac{\cos x^2}{y}$.

10. $z = \arctan\frac{y}{x}$.

11. $z = e^{-xy}\sin\sqrt{\frac{y}{x}}$.

12. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$.

13. $u = x^{y^z}$.

14. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

15. $z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

16. $z = \ln(xy^2 + yx^2 + \sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2})$.

17. 设 $z = \ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$，求证 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

18. 设 $z = e^{\frac{x}{y^2}}$，求证 $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

19. 设 $z = x^y$，求证 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

在下列 20 ~ 24 题中，求 z 的各种二阶偏微商.

20. $z = \arcsin(xy)$.

21. $z = \frac{x-y}{x+y}$.

22. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$.

23. $z = x^y$.

24. $z = x\ln(xy)$.

25. 设 $z = \ln(e^x + e^y)$，验证：

(1) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$; (2) $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

26. 设 $z=2\cos^2\left(x-\frac{t}{2}\right)$,求证 $2\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

27. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,求证 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

28. 求下列各函数的全微分:

(1) $u=\arcsin\frac{x}{y}$; (2) $z=\ln(x^2+y^2)$;

(3) $u=\frac{s+t}{s-t}$; (4) $u=xy+yz+zx$;

(5) $u=\frac{z}{x^2+y^2}$.

29. 求函数 $z=x^2y^3$ 当 $x=2,y=-1,\Delta x=0.02,\Delta y=-0.01$ 时的全微分及全增量.

30. 求函数 $z=2x^2+3y^2$ 当 $x=10,y=8,\Delta x=0.2,\Delta y=0.3$ 时的全微分及全增量.

31. 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=0.2$ 时的全微分及全增量.

32. 计算下列各式的近似值:

(1) $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$; (2) $\sin 29°\tan 46°$;

(3) $\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98}\sqrt[4]{1.05}}$; (4) $(0.97)^{1.05}$.

33. 设 $u=z^2+y^2+yz$,而 $z=\sin t,y=t^3$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

34. 设 $u=\arctan(1+xy)$,而 $x=s+t,y=s-t$,求 $\frac{\partial u}{\partial s},\frac{\partial u}{\partial t}$.

35. 设 $z=\arcsin(x-y)$,而 $x=3t,y=4t^3$,求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

36. 设 $u=\rho^2+\varphi^2+\theta^2$,而 $\rho=\tan(\varphi\theta)$,求 $\frac{\partial u}{\partial\varphi},\frac{\partial u}{\partial\theta}$.

37. 设 $u=\arcsin(x+y+z)$,而 $z=\sin(xy)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

38. 设 $u=\arcsin\frac{x}{z}$,而 $z=\sqrt{x^2+1}$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

39. 设 $u=\frac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$,而 $y=a\sin x,z=\cos x$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

40. 设 $u=f(\xi,\eta)$,而 $\xi=t^3,\eta=2t^2$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

41. 设 $u=f(\xi,\eta,\zeta)$,而 $\xi=x^2+y^2,\eta=x^2-y^2,\zeta=2xy$,求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

42. 设 $u=f(x,y,z)$,而 $x=t,y=t^2,z=t^3$,求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

43. 设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$,求 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

44. 证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

经变换$\begin{cases}\xi = x + y \\ \eta = 3x - y\end{cases}$后变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

45. 证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

经变换$\begin{cases}\xi = x - \sin x + y \\ \eta = x + \sin x - y\end{cases}$后变成$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$

46. 设 $u = \sin x + F(\sin y - \sin x)$，其中 F 是任意可微分函数，证明：

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cos x + \frac{\partial u}{\partial x}\cos y = \cos x\cos y.$$

47. 设 $z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 F 是任意可微分的函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z + xy.$$

48. 设 $z = x^n F\left(\frac{y}{x^2}\right)$，其中 F 是任意可微分的函数，证明

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

49. 分别从下列各式中，求出$\frac{dy}{dx}$.

(1) $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$；　　(2) $\ln(x^2 + y^2) = \arctan\frac{y}{x}$；

(3) $xy - \ln y = a$；　　(4) $x^y = y^x$　$(x \neq y)$.

50. 分别从下列各式中，求出$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

(1) $z^2 + 3xyz = a^3$；　　(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$；

(3) $x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz = 0$；　　(4) $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$.

51. 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ 成立，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

52. 若 $e^z = xyz$ 成立，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

53. 若 $2\sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$ 成立，证明$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

54. 若 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 成立，其中 φ 为任意可微分的函数，证明

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

55. 求由方程 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$.

56. 求由方程 $2xz-2xyz+\ln xyz=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$.

57. 若 $F(x,y,z)=0$ 成立，且 F 是可微的，则

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1.$$

58. 若 $F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 成立，且 F 是可微的，则

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

59. 若 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$ 成立，且 f 是可微的，则

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

60. 若 $z=\frac{y}{y^2-a^2x^2}$，证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 成立.

61. 设 $z=f(x+\varphi(y))$，其中 f,φ 为任意可微分的函数. 证明

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

62. 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases}xu-yv=0,\\ yu+xv=1,\end{cases}$$

所确定的函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

63. 求平面曲线 $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ 在点 $(1,1)$ 的切线和法线方程.

64. 求平面曲线 $\cos xy=x+2y$ 在点 $(1,0)$ 的切线和法线方程.

65. 求圆

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0,\\ 2x-3y+5z-4=0,\end{cases}$$

在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

66. 在曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 上求一点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

67. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 的切平面和法线方程.

68. 求曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$ 在点 $(3,4,-7)$ 的切平面和法线方程.

69. 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

70. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使在这点的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

71. 试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$ 上任何点的切平面与各坐标轴的截距之和为 a.

72 证明曲面 $x+2y-\ln z+4=0$ 和 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 相切(即有公共的切平面).

6.3 Jacobi(雅可比)行列式、面积元素与体积元素

6.3.1 Jacobi(雅可比)行列式的性质

在上一节中已经引进了雅可比矩阵与雅可比行列式. 两个二元函数 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 的四个一阶偏微商组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

称为函数 u 和 v 的雅可比矩阵;其行列式称为雅可比行列式,记作 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. 对于多于两个变量的函数也可以同样定义它的雅可比矩阵及其行列式. 例如三个三元函数

$$u=u(x,y,z),\ v=v(x,y,z),\ w=w(x,y,z)$$

的九个一阶偏微商组成的矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix},$$

称为函数 u,v,w 的雅可比矩阵,其行列式称为雅可比行列式,记作 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$.

在上一节中已经指出,在多变量函数的情形,雅可比矩阵相当于单变量函数的微商. 下面列举的一些雅可比行列式的性质可以进一步说明这个问题.

(1) 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 是给定的两个函数,而变量 x,y 又是 s,t 的函数:$x=x(s,t)$, $y=y(s,t)$. 那么由复合函数的微商法则,立刻得到

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}.$$

如果用雅可比矩阵代替雅可比行列式，则也可得到一样的结果. 这个公式和单变量的复合函数的微商法则相当.

(2) 从(1)立刻有

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

这正好与

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$$

相当. 如果用雅可比矩阵代替雅可比行列式，也可得到一样的结果.

(3) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{\partial(v,u)}{\partial(x,y)}$.

(4) $\dfrac{\partial(u,u)}{\partial(x,y)} = 0$.

当然对于多于两个变量的函数组的雅可比行列式，也有相应的这些性质.

6.3.2　面积元素与体积元素

二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以看成将 D 用平行于 x 轴与 y 轴的两组平行线分割成许多小的矩形，它的面积 $\Delta x\Delta y$ 乘上这小矩形中一点 (x,y) 的函数值 $f(x,y)$ 的总和的极限. $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为直角坐标下的面积元素.

如果取极坐标

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

则用 $\rho = \rho_1, \cdots, \rho = \rho_n$ 等一系列的圆以及 $\theta = \theta_1, \cdots, \theta = \theta_n$ 等一系列的射线将 D 分割成许多小块(图 6.17)，其中一小块的面积为

$$\frac{1}{2}[(\rho + \Delta\rho)^2\Delta\theta - \rho^2\Delta\theta] \approx \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \quad (\text{略去高阶项}).$$

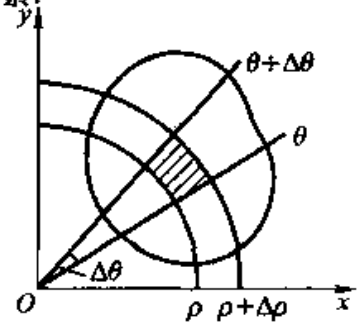

图 6.17

所以 $\rho d\rho d\theta$ 称为极坐标下的面积元素. 这时候可以由二重积分的定义得出

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} F(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta,$$

这里 $F(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$. D' 为 D 经过变换后的区域.

更一般些,如果依照

$$u = \varphi(x,y), \quad v = \psi(x,y),$$

引进新的变量来代替 x 与 y,假定由这两个方程可以解出

$$x = \varphi_1(u,v), \quad y = \psi_1(u,v),$$

而且成一一对应关系,也就是对应于平面上任一点 (x,y),两组曲线 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$ 各有唯一的一条通过 (x,y). (u,v) 称为 (x,y) 的曲线坐标. 现在来确定曲线坐标 (u,v) 下的面积元素 dA.

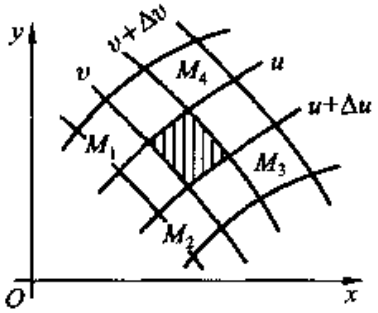

图 6.18

同样考虑用两对邻近的坐标曲线

$$\varphi(x,y) = u, \quad \varphi(x,y) = u + \Delta u;$$

$$\psi(x,y) = v, \quad \psi(x,y) = v + \Delta v.$$

计算出这些曲线围成的面积,也就是要求四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积(图 6.18).

假设偏微商都是连续的,则四点 M_1, M_2, M_3, M_4 的坐标各等于

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u,v), \\ y_1 = \psi_1(u,v); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \varphi_1(u+\Delta u,v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u + o(\rho), \\ y_2 = \psi_1(u+\Delta u,v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u + o(\rho); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \varphi_1(u+\Delta u,v+\Delta v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u \\ \qquad + \dfrac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v + o(\rho), \\ y_3 = \psi_1(u+\Delta u,v+\Delta v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\Delta u \\ \qquad + \dfrac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v + o(\rho); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \varphi_1(u,v+\Delta v) = \varphi_1(u,v) + \dfrac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v + o(\rho), \\ y_4 = \psi_1(u,v+\Delta v) = \psi_1(u,v) + \dfrac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v}\Delta v + o(\rho). \end{cases}$$

这里 $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2}$.

以 M_1, M_2, M_3, M_4 为顶点的平行四边形的面积作为四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积的近似(就像在一元微积分中,计算曲边梯形面积时,将它划分成很多小的曲边梯形,然后用小的矩形的面积作为小的曲边梯形的面积的近似). 而平行四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 的面积就是 $|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_3M_4}|$. 代入上述坐标表达式,就得到此为

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial u} \frac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial v} - \frac{\partial \varphi_1(u,v)}{\partial v} \frac{\partial \psi_1(u,v)}{\partial u} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v + o(\rho^2) \\ = &\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v + o(\rho^2). \end{aligned}$$

因之,在曲线坐标下的面积元素为

$$\mathrm{d}A = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

于是由二重积分的定义得到

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \iint_{\mathscr{D}} F(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这里 $F(u,v) = f(\varphi_1(u,v), \psi_1(u,v))$, $\mathscr{D}$ 为 D 经 $\begin{cases} u = \varphi(x,y) \\ v = \psi(x,y) \end{cases}$ 变换后的图形. $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 就是在曲线坐标下的面积元素. 面积元素十分重要,因为积分就是"微元求和",即无穷多个小柱体相加,这个小柱体的底就是面积元素,高就是在底中某一点的函数值. 所以有了面积元素也就有了"微元",于是写出积分式也就不难了.

上述公式也就是二重积分的换元公式,它与单变量的积分换元公式相当.

雅可比行列式所以取绝对值,是由于还未引入定向的概念,因而总是认为面积是正的. 在下一章中还要更进一步讨论这个问题.

回顾一下单变量函数的微积分,积分的换元法与复合函数的微分法相对应,它们实质上是一件事,只是一个用的积分形式,一个用的微分形式. 在二元函数的微积分中,积分的换元法与复合函数的微分法是怎样对应的,这一点到了下一章可以看得更清楚.

在二重积分中最常用的是极坐标的面积元素,它给计算积分常常带来方便.

例 1 求积分 $I=\iint_D (x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是图 6.19 所示的正方形.

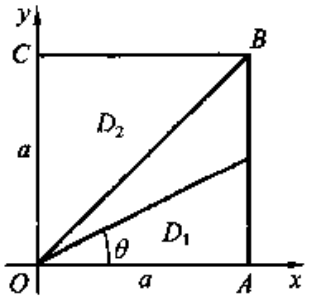

图 6.19

解 虽然积分区域是一个正方形，可是由于被积函数比较难于处理，采用极坐标计算比采用直角坐标方便. 用正方形的对角线把 D 分成两个区域 D_1 和 D_2，D_1 夹在 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 之间，并且容易看出 AB 的极坐标方程为

$$r=\frac{a}{\cos\theta},$$

所以
$$\iint_{D_1}(x^2+y^2)^{1/2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}}r^2\mathrm{d}r=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^3\theta}$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}+\frac{1}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{a^3}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\tan\frac{3}{8}\pi\right).$$

容易看出 D_2 上的积分的值等于 D_1 上的积分的值，因此有

$$I=\frac{2}{3}a^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\ln\tan\frac{3}{8}\pi\right).$$

例 2 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截，求截下来的体积 V(图 6.20).

解 柱面方程可写为

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}a^2,$$

容易看出它和 yz 平面相切于 Oz 轴，截下来的体积位于第一、四、五、八这四个卦限内，且由于对称性，各个卦限内的体积相同，因此只要计算第一卦限内的体积就行. 第一卦限内的体积是以图 6.20 中的那个半圆 D 为底，以 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为顶的柱体，因此

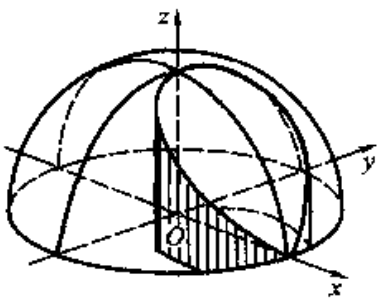

图 6.20

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标，D 在 $\theta=0$ 与 $\theta=\frac{\pi}{2}$之间，而圆周的方程为 $r=a\cos\theta$. 因此

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{x^2-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

对于多于两个变数的函数的换元法也是一样的. 例如在空间引进新的变量

$$u=\varphi(x,y,z),\ v=\psi(x,y,z),\ w=\zeta(x,y,z),$$

且可以从中解出

$$x=\varphi_1(u,v,w),\ y=\psi_1(u,v,w),\ z=\zeta_1(u,v,w),$$

并且一一对应. 如果函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上可积，则

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{V'}f(\varphi_1(u,v,w),\psi_1(u,v,w),\zeta_1(u,v,w))\times$$

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

这里 V' 为 V 经

$$\begin{cases}u=\varphi(x,y,z),\\ v=\psi(x,y,z),\\ w=\zeta(x,y,z),\end{cases}$$

的变换后的区域.

上式的证明与两个变数时的证明完全类似，这时的区域 V 被三族曲面所分割.

$$\mathrm{d}V=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

称为曲面坐标 (u,v,w) 下的体积元素. 体积元素同样十分重要，因为三重积分就是“微元求和”，即把无穷多个小柱体乘上在柱体中一点的函数值相加起来. 有了体积元素，也就有了“微元”，于是写出积分式也就不难了.

在空间坐标变换中用得最多的是球坐标，或称为空间极坐标，它与直角坐标系的关系是（图 6.21）

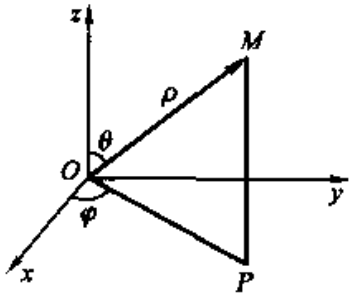

图 6.21

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

其中 $\rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

ρ,φ,θ 的几何意义是:ρ 是联结原点与已知点 $M(x,y,z)$ 的矢量的长度,θ 是这一矢量与 z 轴的夹角,φ 是 OM 在 Oxy 平面上的投影 OP 与 x 轴正向的夹角.

这个变换不是一对一的,(ρ,φ,θ) 空间中的平面 $\rho=0$ 与原点 $x=0, y=0, z=0$ 相对应,而直线 $\theta=0$(或 π),$\rho=$ 常数 $\neq 0$ 只对应于一点 $x=y=0, z=\rho$(或 $-\rho$),除此之外,则是一一对应了.

坐标曲面形成三族.

(1) $\rho=$ 常数,表示中心在原点的同心球面;

(2) $\theta=$ 常数,表示以 z 轴为中心轴线的锥面;

(3) $\varphi=$ 常数,表示通过 z 轴的半平面.

这个变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \rho^2\sin\theta.$$

所以在球坐标下的体积元素为 $\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 这也可以从计算三对曲面

$$\begin{cases} \rho = \rho_0, \\ \rho = \rho_0 + \Delta\rho; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0, \\ \varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta = \theta_0, \\ \theta = \theta_0 + \Delta\theta; \end{cases}$$

所围成的体积直接得出来(图 6.22). 因而球坐标的积分公式为

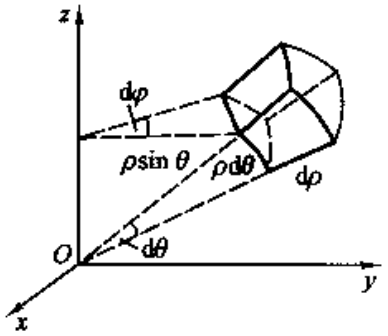

图 6.22

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_V F(\rho,\theta,\varphi)\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

这里

$$F(\rho,\theta,\varphi) = f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta).$$

例 3　求积分 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是锥面 $z^2=x^2+y^2$ 位于 xy 平面以上的那一部分和球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的区域.

解　采用球坐标，锥面 $z^2=x^2+y^2$ 上半叶的每条母线和 z 轴形成 $\frac{\pi}{4}$ 的角度，因此这个锥面就是球坐标系中的坐标曲面 $\theta=\frac{\pi}{4}$. 对区域中的点来说，ρ,θ 和 φ 的变化范围是：

$$0 \leqslant \rho \leqslant R,$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

于是 $$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_C \rho^4 \sin\theta \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta \int_0^R \rho^4\sin\theta\mathrm{d}\rho = \frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2}).$$

例 4　求积分 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^\alpha \mathrm{d}V$，$V$ 是实心球：$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$，$\alpha$ 为正实数.

解　被积函数为 $(x^2+y^2+z^2)^\alpha=\rho^{2\alpha}$. 在实心球 V 内，ρ,θ,φ 的变化范围是：

$$0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

因此 $$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)^\alpha \mathrm{d}V = \iiint_V \rho^{2\alpha+2}\sin\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^{2\alpha+2}\sin\theta\mathrm{d}\rho = \frac{4}{2\alpha+3}\pi R^{2\alpha+3}.$$

在空间坐标变换中，还常用到柱坐标（图 6.23）. 这由 xy 平面上的极坐标与变量 z 相联系而成：

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,$$

其中 $r\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi, -\infty<z<\infty$.

除 (r,θ,z) 空间的直线 $r=0, z=c$（常数）被映射到一个点 $x=y=0, z=c$ 之外，其余的点都是一一对应的. 坐标曲面形成三族：

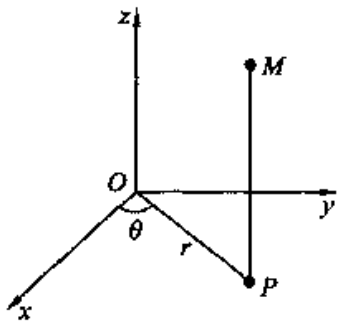

图 6.23

(1) r = 常数,表示母线平行于 z 轴的柱面,准线则是 xy 平面上以原点为中心,r 为半径的圆周;

(2) θ = 常数,是过 z 轴的半平面;

(3) z = 常数,表示平行于 xy 平面的平面.

变换的雅可比行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

因此在柱坐标下,体积元素为 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$. 这也可以从计算三对曲面

$$\begin{cases} r = r_0, \\ r = r_0 + \Delta r, \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \theta_0, \\ \theta = \theta_0 + \Delta\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} z = z_0, \\ z = z_0 + \Delta z, \end{cases}$$

所围成的体积推导出来(图 6.24). 因此,柱坐标的积分公式为

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_V F(r,\theta,z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

这里

$$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z).$$

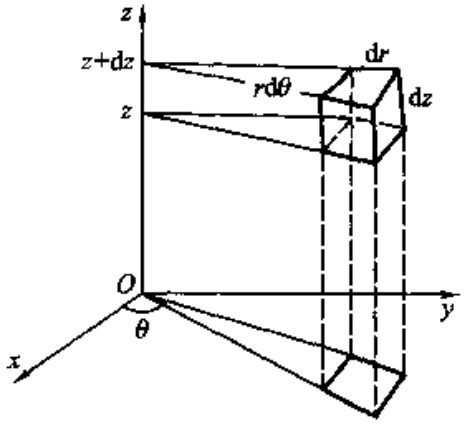

图 6.24

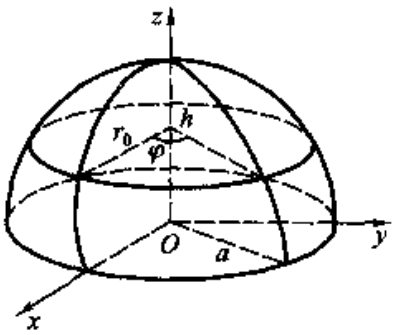

图 6.25

例 5 求充满有不均匀物质的球缺的质量(图 6.25).

解 以球心为原点,用 a 记球的半径,h 记球缺的高,r_0 记球缺的底半径. 在柱坐标系中,球面的方程是 $r^2 + z^2 = a^2$. 密度函数为 $f(r,\varphi,z)$,于是球缺的质量为

$$m = \iiint_V f(r,\varphi,z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r_0} r\mathrm{d}r\int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r,\varphi,z)\,\mathrm{d}z,$$

如果

$$f(r,\varphi,z) = b + cz,$$

这里 b,c 为已知常数，则

$$m = \iiint_V (b + cz) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{r_0} r\mathrm{d}r \int_{a-h}^{\sqrt{a^2-r^2}} (b + cz)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi \int_0^{r_0} \left[bz + \frac{cz^2}{2} \right] \Bigg|_{z=a-h}^{z=\sqrt{a^2-r^2}} r\mathrm{d}r = bV + c\pi \frac{r_0^4}{4},$$

其中 V 是球缺的体积.

当然，计算积分时，二重积分不限于用极坐标变换，三重积分也不限于用球坐标与柱坐标. 要对每个积分具体分析，然后采取计算起来最方便的坐标. 例如要计算三重积分

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

这里 V 是坐标面与平面 $x+y+z=a$ 之间的四面体，它由下列不等式来确定：

$$x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < a.$$

引进新的变量：

$$x + y + z = q_1, a(y + z) = q_1 q_2, a^2 z = q_1 q_2 q_3,$$

此即

$$q_1 = x + y + z;\ q_2 = \frac{a(y+z)}{x+y+z};\ q_3 = \frac{az}{y+z};$$

于是 V 变换成 V_1：

$$0 < q_1 < a;\ 0 < q_2 < a;\ 0 < q_3 < a.$$

容易算出：

$$x = \frac{q_1(a - q_2)}{a};\ y = \frac{q_1 q_2 (a - q_3)}{a^2};\ z = \frac{q_1 q_2 q_3}{a^2}$$

以及

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \frac{1}{a^3} q_1^2 q_2.$$

于是

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V_1} F(q_1,q_2,q_3) \frac{1}{a^3} q_1^2 q_2 \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3,$$

这里 $F(q_1,q_2,q_3)$ 是由 $f(x,y,z)$ 经上述坐标变换而得来的. 写出积分限为：

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{a-x} \mathrm{d}y \int_0^{a-x-y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \frac{1}{a^3} \int_0^a q_1^2 \mathrm{d}q_1 \int_0^a q_2 \mathrm{d}q_2 \int_0^a F(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_3.$$

例 6 计算 $\iiint\limits_V xyz(1-x-y-z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 由 $x>0, y>0, z>0, x+y+z<1$ 所确定.

解 用上述变换,积分等于

$$\int_0^1 \mathrm{d}\xi \int_0^1 \mathrm{d}\eta \int_0^1 \xi^5(1-\xi)^2\eta^3(1-\eta)\zeta(1-\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\int_0^1 \xi^5(1-\xi)^2\mathrm{d}\xi \int_0^1 \eta^3(1-\eta)\mathrm{d}\eta \int_0^1 \zeta(1-\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{20\ 160}.$$

在利用坐标变换实际计算重积分时,用得最多的还是极坐标,球坐标及柱坐标. 所以必须首先掌握在这些坐标变换下计算积分的方法.

最后我们计算一张空间曲面的面积元素.

设空间有曲面 Σ,它的参数表示为

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),$$

或写成矢量形式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v),$$

其中(u,v)的变化范围是 uv 平面中的一个有界闭域 Δ. 假定这张曲面是光滑的. 将 Δ 用平行于坐标轴的两族直线 $u=u_i$ 与 $v=v_j(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$ 细分之,这两族直线在曲面 Σ 上对应有一族 u - 曲线和一族 v - 曲线(图 6.26 及图 6.27). 对应于由

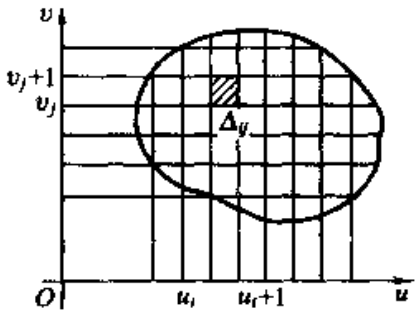

图 6.26

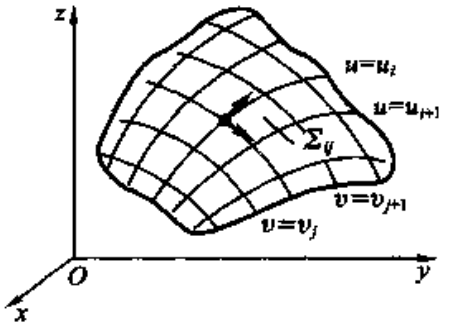

图 6.27

$$u=u_i,\ u=u_{i+1},\ v=v_j,\ v=v_{j+1}$$

围起来的小区域 Δ_{ij}是曲面上的小区域 Σ_{ij}. 考虑由矢量

$$\boldsymbol{r}(u_{i+1},v_j) - \boldsymbol{r}(u_i,v_j)$$

与矢量

$$\boldsymbol{r}(u_i,v_{j+1}) - \boldsymbol{r}(u_i,v_j)$$

所形成的平行四边形,这平行四边形的面积近似于 Σ_{ij}的面积. 但是

$$\boldsymbol{r}(u_{i+1},v_j) - \boldsymbol{r}(u_i,v_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= |x(u_{i+1},v_j) - x(u_i,v_j)|\boldsymbol{i} + |y(u_{i+1},v_j) - y(u_i,v_j)|\boldsymbol{j} \\
&\quad + |z(u_{i+1},v_j) - z(u_i,v_j)|\boldsymbol{k} \\
&\approx x'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\boldsymbol{i} + y'_u(u_i,u_j)\Delta u\boldsymbol{j} + z'_u(u_i,v_j)\Delta u_i\boldsymbol{k} \\
&= \boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i,
\end{aligned}
$$

这里 $\boldsymbol{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$ 称为矢量 $\boldsymbol{r}$ 对 u 的微商. 同理

$$\boldsymbol{r}(u,v_{j+1}) - \boldsymbol{r}(u,v_j) \approx \boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j.$$

以上两个近似等式左右相差都是 $\Delta u_i, \Delta v_j$ 的高次项. 因此，由矢量 $\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u_i$ 与矢量 $\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j$ 所成的平行四边形的面积也近似于 Σ_{ij} 的面积. 而由 $\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j)\Delta u$ 与 $\boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)\Delta v_j$ 所成的平行四边形的面积等于

$$|\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j) \times \boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)|\Delta u_i\Delta v_j.$$

将这些平行四边形的面积相加后取极限($\Delta u_i, \Delta v_j \to 0$)即得曲面 Σ 的面积为

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{i,j}\sum |\boldsymbol{r}'_u(u_i,v_j) \times \boldsymbol{r}'_v(u_i,v_j)|\Delta u_i\Delta v_j \\
&= \iint_{\Delta} |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

于是

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

就是曲面 Σ 的面积元素. 又因为

$$|\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v|^2 = \boldsymbol{r}'^2_u\boldsymbol{r}'^2_v - (\boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v)^2,$$

令

$$
\begin{aligned}
E &= \boldsymbol{r}'^2_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u, \\
G &= \boldsymbol{r}'^2_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v, \\
F &= \boldsymbol{r}'_u \cdot \boldsymbol{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,
\end{aligned}
$$

于是曲面面积又可写成

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

也就是面积元素又可写成

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这是常用的曲面面积和面积元素公式.

特别若曲面 Σ 的方程为显表示式

$$z = z(x,y).$$

定义区域为 D，将 x, y 看作参数 u, v，则

$$E = 1 + z_x'^2,\ G = 1 + z_y'^2,\ F = z_x'z_y'.$$

所以面积元素成为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

面积计算公式成为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 7 求双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所割下的面积.

解 割下来的部分在 xy 平面上的正投影是一个圆域

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2$$

因此

$$S = \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标计算这个二重积分,便得

$$S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R r\sqrt{1 + r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

前面已经介绍球坐标为

$$x = R\sin\theta\cos\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\theta$$

$$(0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

将 φ,θ 看作参数 u,v,于是以 R 为半径的球面的面积元素可以立即求得:由于

$$E = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = R^2\sin^2\theta,$$

$$G = x_\theta'^2 + y_\theta'^2 + z_\theta'^2 = R^2,$$

$$F = x_\varphi'x_\theta' + y_\varphi'y_\theta' + z_\varphi'z_\theta' = 0,$$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

从这里也立即得到球坐标的体积元素为

$$\mathrm{d}V = R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}R.$$

例 8 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被柱面 $x^2 + y^2 = Rx$ 所截下的面积.

解　只须计算在第一卦限中所截下部分 Σ 的面积. 采用球面的参数方程计算. 此时 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 为了弄清楚 Σ,要求出球面与柱面的交线,为此将球面的参数方程代入柱面方程 $x^2+y^2=Rx$,即得

$$\sin\theta=\cos\varphi.$$

所以

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

因此,Σ 的参数定义范围 Δ 是一个三角形区域(图 6.28,图 6.29). 于是 Σ 的面积为

$$S=\iint_{\Delta}R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi=R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

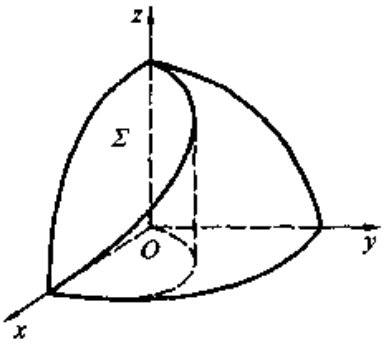

图 6.28

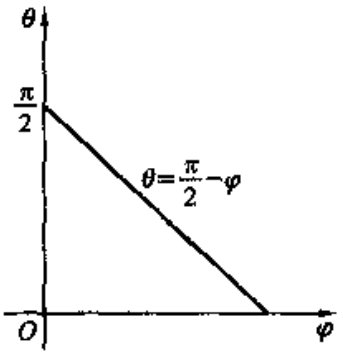

图 6.29

所以球面被柱面所截下的面积为

$$4S=2R^2(\pi-2).$$

习题 6.3

1. 求由方程 $\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v)\end{cases}$ 所确定的反函数 $\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y)\end{cases}$ 的偏微商 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. 方程 $x=f(u,v),y=g(u,v),z=h(u,v)$ 定义 z 为 x 和 y 的函数,求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设 $y=f(x,t),F(x,y,t)=0$,求证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

4. 设 $F(x,y)=0$,证明

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}.$$

利用换元法,计算下列重积分:

5. $\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant R^2$.

6. $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, D: $x^2+y^2\leqslant x$.

7. $\iint\limits_D\ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$, D: 由 $x^2+y^2=1$ 围成的区域在第一象限的部分.

8. $\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}dxdy$, D: 由 $x^2+y^2=4$,$x^2+y^2=1$,$y=x$,$y=0$ 围成的区域在第一象限的部分.

9. $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D: 由 $x^2+y^2=x+y$ 围成.

10. $\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D: $\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$.

11. $\iint\limits_D y\,dxdy$, D: $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}\leqslant 1$.

12. $\iint\limits_D\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D: 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$,$y=0$,$y=x$ 围成的区域在第一象限的部分.

13. $\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dxdy$, D: $1\leqslant\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 4$.

14. $\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

15. $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\,dxdydz$, V: 由 $x^2+y^2=2z$ 和 $z=2$ 围成.

16. $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, V: 由 $x^2+y^2+z^2=1$,$x=0$,$y=0$,$z=0$ 所围成的在第一卦限内的部分.

17. $\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}dxdydz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant z$.

18. $\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

19. $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\,dxdydz$, V: 由 $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$,$z\geqslant 0$ 围成.

20. 求下列平面曲线所围成的面积:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

(2) $(x^2+y^2)^2=2ax^3(a>0)$;

(3) $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$;

(4) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$.

求下列曲面所围成的体积:

21. 由 $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 围成(含 z 轴部分).

22. 由 $z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 和 $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 围成.

23. 由 $x^2+y^2+z^2=b^2, x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}(b>a>0)$ 围成.

24. 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$(含 z 轴部分)围成.

25. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x(a>0)$.

26. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}(h>0)$.

利用曲线坐标变换计算下列积分:

27. $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$: 由 $xy=1, xy=2, y=x, y=2x$ 在第一象限所围成的部分.

28. $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$: 由 $y^2=ax, y^2=bx, x^2=py, x^2=qy(0<a<b, 0<p<q)$ 围成的区域在第一象限的部分.

29. $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y, D$: 由 $y^2=16-8x, y^2=1-2x, y^2=81+18x, y^2=1+2x$ 围成的区域在 $y>0$ 的部分.

求下列各题中的曲面面积:

30. 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=2x$ 内部分.

31. 曲面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $x+z=0, x-z=0(x>0, y>0)$, 所截的那部分.

32. 椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{2a}+\frac{y^2}{2b}$ 被椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=c^2$ 所截下的那部分.

33. 求球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2$ 和抛物面 $x^2+y^2=2az(z\geqslant 0)$ 所围成的部分的全面积.

34. 螺旋面 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=h\varphi$(其中 $0<r<a, 0<\varphi<2\pi$)的那部分的面积.

35. 环面 $x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, z=a\sin\psi(0<a\leqslant b)$ 被两条经线 $\varphi=\varphi_1, \varphi=\varphi_2$ 和两条纬线 $\psi=\psi_1, \psi=\psi_2$ 所界的那部分. 又:整个环面的表面面积等于什么?

36. 计算柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 截下部分的面积.

37. 设平面 $\pi: x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+D=0$, 其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; 又 π 上有一有界闭区域 D, 其面积为 S. 试求 D 在 Oxy, Oyz, Ozx 面上的投影区域 D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} 的面积.

第七章

线、面积分与外微分形式

7.1 数量场与矢量场

如果在一个空间区域 V 中按某方式分布着一种量(数量或矢量),则说在 V 中有一个场. 若分布的是数量,则场是数量场;若是矢量,则是矢量场.

例如有一物体 V,质量分布的密度是 $\rho(M)(M \in V)$,则 $\rho(M)$ 是 V 中的一个数量场;又如在一个瞬时 $t=t_0$,V 的每点 M 都有一个温度 $T=T(M)$,因此 V 中又有一个数量场 $T(M)$(温度场);……

若空间区域 V 有流体流过,则 V 中每一点 M 有一个流速 $\boldsymbol{v}(M)$,这是 V 中的一个矢量场(流速场);若在空间某点置一电荷,则空间每一点 M 有一电场强度 $\boldsymbol{E}(M)$,于是在空间分布了一个矢量场(静电场);……

显然,区域 V 中分布着一个数量场 $u(M)$,就等于说在 V 中定义了一个函数 $u(M)$;而在区域 V 中分布着一个矢量场 $\boldsymbol{v}(M)$,就等于说在 V 中定义了一个矢量函数 $\boldsymbol{v}(M)$.

场,是一个物理沿用名词. 这里研究的场,是抽象的场,讨论的是各种物理场所共有的数学内容.

7.1.1 数量场的等值面与梯度

数量场有两个基本概念:等值面和梯度.

设在空间区域 V 中有一个数量场 $u=u(M)$,则 V 中任一曲面 $u(M)=C$(常数)叫做数量场 u 的一张等值面.

数量场在其等值面上保持相等(为常数). 如果是温度场,等值面就是等温面;压力场的等值面是等压面;位能所形成的场其等值面是等位面;……

过 V 中每一点 M_0 有一张并且只有一张等值面,就是 $u(M)=u(M_0)$. 因此等值面将数量场分成"层".

若在空间固定一直角坐标系 $Oxyz$,则一数量场是一个三元函数

$$u=u(x,y,z),(x,y,z) \in V.$$

例如数量场

$$u = u(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

通过点$(-1,2,0)$的等值面为

$$u(x,y,z) = u(-1,2,0) = 12,$$

即为

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 12.$$

这是椭球面.

在 V 中取一点 M_0,且设 l 是由 M_0 出发的任一半直线(射线),则 $u = u(M)$ 对 l 的方向导数定义为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in l}} \frac{u(M) - u(M_0)}{|MM_0|}$$

($M \in l$ 的意思是 M 在 l 上).

在一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,函数 $u(x,y,z)$有各个不同方向的方向导数. 命 l 的方向余弦为$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则 l 上的 M 可表示为

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma.$$

于是 $u = u(M)$对 l 的方向导数为(图 7.1)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \lim_{t \to 0} \frac{u(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma) - u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

若 i,j,k 为坐标轴的单位矢量,则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}i + \frac{\partial u}{\partial y}j + \frac{\partial u}{\partial z}k\right)_{M_0} \cdot (\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k).$$

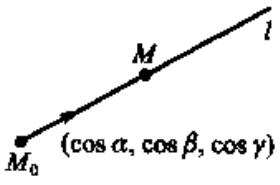

图 7.1

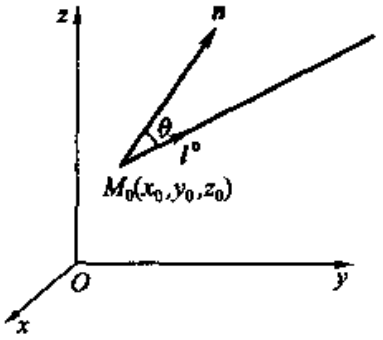

图 7.2

令

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)_{M_0},$$

$$\boldsymbol{l}^\circ = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k},$$

θ 为 $\boldsymbol{l}^\circ$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角(图 7.2),则

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0} = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}^\circ = |\boldsymbol{n}|\cos\theta.$$

当 $\theta=0$ 时,$\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0}$ 便取到最大值 $|\boldsymbol{n}|$. 此时 $\boldsymbol{l}^\circ$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向,称 $\boldsymbol{n}$ 为 u 在 M_0 的梯度,记作 $(\mathbf{grad}\ u)_{M_0}$. 于是

$$(\mathbf{grad}\ u)_{M_0} = \boldsymbol{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)_{M_0}.$$

由此可见,$\boldsymbol{n}$ 的方向就是过 M_0 的等值面的切平面的法线方向. 因此,在点 M_0 的梯度方向就是在这点的法线方向. 还可以由此得到,u 在点 M_0 的一切方向导数中,沿着梯度方向所得的导数是最大的,即:如 l 表示任意方向,n 表示 $\boldsymbol{n}$ 方向的半直线,则 $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{M_0} \geqslant \left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)_{M_0}$. 也可以用这一性质来定义函数在一点的梯度.

例如数量场仍为

$$u = u(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 8x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 6z,$$

所以梯度为

$$\mathbf{grad}\ u = 8x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 6z\boldsymbol{k}.$$

由上面的讨论,我们知道:

(1) 方向导数和梯度的关系为:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{grad}\ u)\cdot\boldsymbol{l}^\circ,$$

其中 $\boldsymbol{l}^\circ$ 是射线 l 上的单位矢量,上式表示数量场 u 在一点 M 沿半射线 l 的变化率等于该点的梯度在此半射线 l 上的投影(图 7.3). 因此,数量场沿其梯度方向有最大的变化率,梯度的大小就是这最大变化率的大小.

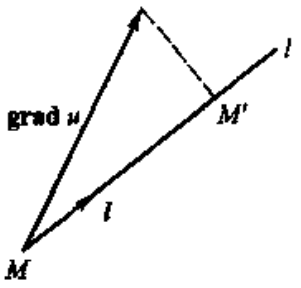

图 7.3

(2) 数量场 $u=u(M)$ 在一点 M_0 的梯度是通过该点的等值面 $u=u(M_0)$ 在该点的法矢量(图 7.4). 因此,

沿等值面的法线方向观之，数量场的变化最快，等值面分布最“密”（即达到临近等值面之距离最小，图 7.5）.

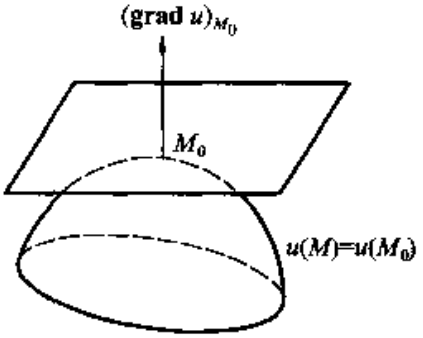

图 7.4

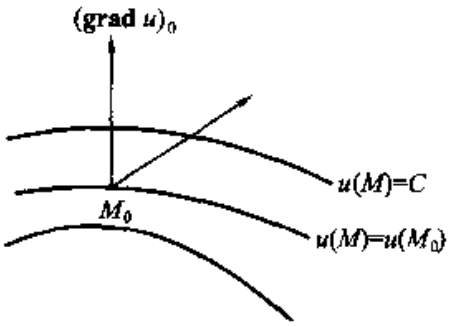

图 7.5

（3）从梯度的直角坐标表示，可得下列梯度运算法则：

（i）$\mathbf{grad}\ Cu = C\mathbf{grad}\ u$，$C$ 为常数；

（ii）$\mathbf{grad}\ (u_1 + u_2) = \mathbf{grad}\ u_1 + \mathbf{grad}\ u_2$；

（iii）$\mathbf{grad}\ u_1u_2 = u_1\mathbf{grad}\ u_2 + u_2\mathbf{grad}\ u_1$；

（iv）$\mathbf{grad}\ f(u) = f'(u)\mathbf{grad}\ u$.

梯度是场论“三度”之一，以后还要讲另外两个度. 为了使这些度统一于相同的运算符号之下，引进一个算符，叫“∇”（Nabla），其在直角坐标系中的表示为

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

这是一个运算符号，作用于一个函数 $u = u(x,y,z)$ 的意义是：

$$\nabla u = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z}.$$

因此

$$\nabla u = \mathbf{grad}\ u.$$

例　设 O 是固定的一点，$r = |OM|$，求 $\mathbf{grad}\ r$.

解　以 O 为原点作直角坐标系 $Oxyz$，点 M 的坐标为 (x,y,z)，则

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

所以

$$\nabla r = \frac{1}{r}(xi + yj + zk).$$

即

$$\nabla r = \frac{r}{r}.$$

7.1.2　矢量场的流线

设在区域 V 中分布着一个矢量场 $v = v(M)$. V 中任一条曲线，若在其各点皆

与场中矢量 v 相切,则叫做矢量场的一条流线.

例如,若矢量场是电场或磁场,则其流线就是电力线或磁力线;若矢量场是流体的稳定(不随时间而改变)的流速场,则流线就是流体质点所走的曲线.

一个矢量场有无数条流线. 如果能够描绘出矢量场的流线图形来,自然也就大体上可以看出场的形态. 取定直角坐标系 $Oxyz$,设矢量场为

$$\boldsymbol{v} = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}.$$

将流线表示为参数曲线,参数为 t. 设曲线上动点的位置矢量为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}.$$

可以证明$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$为曲线 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t)$ 在点 $\boldsymbol{r}_1 = (x(t),y(t),z(t))$ 的切线方向. 因此如果流线处处以场矢为其切矢,则有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = k\boldsymbol{v}, k \text{ 为常数}.$$

这就是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kP(x,y,z), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = kQ(x,y,z), \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kR(x,y,z),$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}.$$

这是场的流线的微分方程组,由此可以解出流线族来. 这说明在一个矢量场中通过每一点有一条且只有一条流线. 这里用到了微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

的存在性与唯一性,在此不证明了,当然要对 P,Q,R 加一定的限制.

例 1 设 $\boldsymbol{v} = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ 为 Oxy 平面上的矢量场,求其流线.

解 流线的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x},$$

即

$$x\mathrm{d}x = -y\mathrm{d}y.$$

所以流线族为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

这是以原点为中心的圆族(图 7.6).

例 2　求矢量场 $\boldsymbol{v} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + y^2z\boldsymbol{k}$ 的流线.

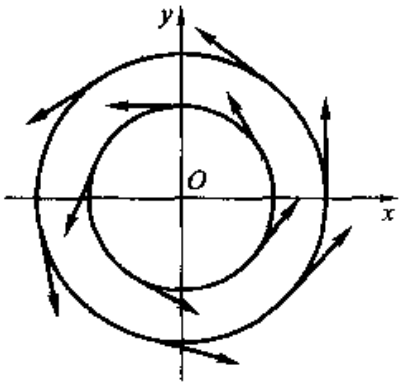

图 7.6

解　流线的微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}z}{y^2z}.$$

解之即得流线族为

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ z = Cx. \end{cases}$$

习题 7.1

1. 求下列各数量场的等值面:

(1) $u = x + y + z$;　　(2) $u = x^2 + y^2 + z^2$;

(3) $u = x^2 + y^2 - z^2$;　　(4) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

(5) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$过点(1,1,1);

(6) $u = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $f(r)$是 r 的严格单调函数.

2. 求下列各平面数量场的等值线:

(1) $z = \dfrac{y}{x}$;　　(2) $z = x^2 - y^2$;

(3) $z = \dfrac{1}{x^2 + 2y^2}$;　　(4) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

3. 求函数 $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ 在点(3,1)处到点(6,5)的方向上的导数.

4. 求函数 $z = \arctan xy$ 在点(1,1)处第一象限角分角线方向上的导数.

5. 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点(1,1,2)处分别与坐标轴成 60°,45°,60°角的方向上的导数.

6. 求函数 $u = xyz$ 在点(5,1,2)处到点(9,4,14)的方向上的导数.

7. 求 $z = \ln(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y)$在点(0,0)处方向 α 上的导数.

8. 求 $z = \ln(x + y)$在位于抛物线 $y^2 = 4x$ 上点(1,2)处沿其切线方向的导数.

9. 求函数 $z = \arctan \dfrac{y}{x}$在位于圆 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 上一点$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$处沿圆周反时针切线方向的导数.

10. 求函数 $u = x + y + z$ 在沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的外法线方向上的导数.

11. 求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在沿椭球面$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的外法线方向

上的导数.

12. 求平面温度场 $T=x^2+y^2$ 在点(1,5)处沿着与 Ox 轴相交成$\frac{\pi}{6}$及$\frac{7\pi}{6}$的方向上的温度变化率.

13. 求电位场 $v=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$在点(1,2,4)沿方向(1,1,1)的电位变化率. 在此点的电场强度等于什么?($\boldsymbol{E}=-\mathbf{grad}\ v$.)

14. 点电荷 e 产生的静电场的电位 $v=\frac{e}{r}(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$,求它的等位面及梯度. 电场强度等于什么?

15. 求场 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在点 $M(x,y,z)$ 沿此点的矢径 r 之方向的导数. 在怎样的情形下,此导数等于梯度的大小?

16. 已知场 $z=\ln\left(x+\frac{1}{y}\right)$,求一点,使在所求点有 $\mathbf{grad}\ z=\boldsymbol{i}-\frac{16}{9}\boldsymbol{j}$.

17. 已知场 $z=\sqrt{x^2+y^2}$和 $z=x-3y+\sqrt{3xy}$,求在点(3,4)处这两个场的梯度间的夹角.

18. 求场 $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$在点 $A(1,2,2)$及 $B(-3,1,0)$的梯度间的夹角.

19. 求场 $u=u(x,y,z)$沿场 $v=v(x,y,z)$梯度方向的导数,问什么情况下这个导数等于零?

20. 已给数量场 $u=\ln\frac{1}{r}$,其中 $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$,问在空间哪些点上,等式 $|\mathbf{grad}\ u|=1$ 成立?

21. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$r=|\boldsymbol{r}|$,计算:

(1) $\mathbf{grad}\ r$; (2) $\mathbf{grad}\ r^3$;

(3) $\mathbf{grad}\ \frac{1}{r}$; (4) $\mathbf{grad}\ \ln r$;

(5) $\mathbf{grad}\ f(r)$; (6) $\mathbf{grad}\ f(r^2)$.

22. 证明公式:

$$\mathbf{grad}\ f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{grad}\ u+\frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{grad}\ v.$$

23. 设 $u=\arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$,计算:

$$a=\boldsymbol{c}\cdot\nabla u.$$

24. 计算:

(1) $(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)r^n$; (2) $(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}$;

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{c}$.

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,$r=|\boldsymbol{r}|$,$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$ 为常矢量. $\boldsymbol{r}\cdot\nabla=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}$仍表示一个算子.

25. 证明公式:

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2 v + v\nabla^2 u + 2\nabla u \cdot \nabla v,$$

其中 $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$，$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$.

26. 设 $v = \omega \times r$，ω 是常矢，r 是点的矢径，求 $\mathbf{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$.

27. 证明：

(1) $\mathbf{grad}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathbf{grad}\, u + \beta\mathbf{grad}\, v$，其中 α, β 为常数；

(2) $\mathbf{grad}(uv) = u\mathbf{grad}\, v + v\mathbf{grad}\, u$；

(3) $\mathbf{grad}\, f(u) = f'(u)\mathbf{grad}\, u$.

28. 设 r 是点的矢径，a, b, c 是常矢量.

(1) 证明：$\mathbf{grad}(a \cdot r) = a$；

(2) 求 $\mathbf{grad}(r \cdot a)(r \cdot b)$；

(3) 求 $\mathbf{grad}\left\{c \cdot r + \frac{1}{2}\ln(c \cdot r)\right\}$.

29. 求平面流速场 $v = (x + t)i + (t - y)j$ 的流线.

30. 处在原点的点电荷 e 产生的静电场 $E = \frac{e}{r^3}r$，求它的电力线.

31. 不变电流 I 通过无穷长直导线(作 Oz 轴)产生的磁场

$$H = 2I\frac{-yi + xj}{x^2 + y^2},$$

求它的磁力线.

7.2　曲线积分

7.2.1　第一种曲线积分(关于弧长的曲线积分)

第一种曲线积分，如重积分那样，和定积分是属于同一类型的概念. 它是定积分概念在曲线上的推广.

设有一条(有限长的)曲线 L(图 7.7)，将 L 顺次(不管从 L 的哪一端开始)用 $n+1$ 个分点 $N_0, N_1, \cdots, N_n$ 分成小段，并且当 n 趋于无穷时各小段 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 的弧长 $\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 中之最大者趋于零. 又在每一小段 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 上各取一点 $M_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 设 $f(M)$ 是定义在曲线 L 上的一个函数. 如果极限

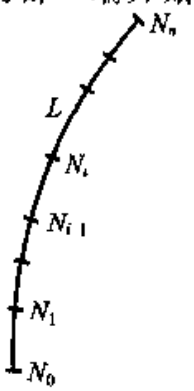

图 7.7

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

存在，并且与分点 N_i 和中间点 M_i 的取法无关，则称这个极限

为函数 $f(M)$ 在曲线 L 上的第一种曲线积分，记作

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i.$$

比如，已知曲线 L 上有质量分布，其线密度函数为 $\rho(M)$，要计算 L 的质量，显然就是要计算 $\rho(M)$ 在 L 上的第一种曲线积分.

第一种曲线积分有与定积分相当的那些性质，这里不再介绍了，只讲一讲这种积分怎样计算.

取直角坐标系 $Oxyz$. 设曲线 L 的参数方程为：

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$$

并且 $\dot{x}(t)$，$\dot{y}(t)$，$\dot{z}(t)$ 连续，L 无重点. 这里 $\dot{x}(t)$，$\dot{y}(t)$，$\dot{z}(t)$ 表示 $x(t)$，$y(t)$，$z(t)$ 对 t 求导，即 $\dot{x}(t)=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$\dot{y}(t)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，$\dot{z}(t)=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$. 若函数 $f(M)=f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $f(M)$ 在 L 上的第一种曲线积分存在，且有

$$\int_L f(M)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

事实上，作分点 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，并且当 $n\to\infty$ 时，$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta t_i\to 0$，取 $N_i=(x(t_i),y(t_i),z(t_i))$，$M_i=(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))$，其中 $t_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant t_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 又根据弧长的计算公式与定积分的中值定理，得到弧 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 的长度为

$$\begin{aligned}\Delta s_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{\dot{x}^2(\theta_i)+\dot{y}^2(\theta_i)+\dot{z}^2(\theta_i)}\,\Delta t_i,\end{aligned}$$

其中 $t_{i-1}\leqslant\theta_i\leqslant t_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i),y(\xi_i),z(\xi_i))\times\\ &\qquad \sqrt{\dot{x}^2(\theta_i)+\dot{y}^2(\theta_i)+\dot{z}^2(\theta_i)}\,\Delta t_i.\end{aligned}$$

因为，由函数 $f(M)$ 与曲线 L 的假定，

$$f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}$$

是连续函数，所以上式右端有极限，为

$$\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

因此上式左端也有极限，根据定义，左端极限是 $f(M)$ 在 L 上的第一种曲线积分，

所以

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

成立. 由此可以立刻得到:

若曲线 L 的直角坐标方程为:$y=y(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,且 $y'(x)$ 连续,则

$$\int_L f(M)\mathrm{d}s = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

若曲线 L 的极坐标方程为:$r=r(\theta)$,$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$,且 $\dot{r}(\theta)$ 连续,则

$$\begin{aligned}\int_L f(M)\mathrm{d}s &= \int_L f(x,y)\mathrm{d}s\\ &= \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+\dot{r}^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

例　设曲线 L 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分. 计算曲线积分

$$\int_L xy\mathrm{d}s.$$

解 1　L 可写为:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ 0\leqslant x\leqslant a.$$

因此

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x.$$

所以

$$\begin{aligned}\int_L xy\mathrm{d}s &= \int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \frac{b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot x\mathrm{d}x = \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.\end{aligned}$$

解 2　L 又可写为:

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t = \sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t,$$

所以

$$\int_L xy\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot b\sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2} + b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\mathrm{d}t.$$

作积分变换 $\cos 2t = u$,则

$$\sin 2t\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\mathrm{d}u,$$

所以

$$\int_L xy\mathrm{d}s = \frac{ab}{4}\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2}u\right]^{3/2}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

7.2.2 第一种曲线积分的应用(旋转曲面的面积)

设在 xy 平面上有一条(长度有限的)曲线 L,将 L 绕某一坐标轴旋转,得一旋转曲面,要计算曲面的面积. 比如 L 在 Ox 轴上方(图 7.8),使 L 绕 Ox 轴旋转,要计算旋转面的面积. 将 L 用 $n+1$ 个分点 $N_0, N_1, \cdots, N_n$ 分成 n 个小段,并且当 n 趋于无穷时各小段$\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$的弧长 Δs_i 中之最大者趋于零. 视弧$\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$为直线段 $\overline{N_{i-1}N_i}$,由$\overline{N_{i-1}N_i}$旋转所成圆台的侧面的面积是:

$$\pi(y_{i-1} + y_i)\Delta s_i,$$

此处 y_{i-1} 和 y_i 是 N_{i-1} 和 N_i 的纵坐标. 因此绕 Ox 轴旋转所成旋转面面积当为

$$\lim_{n\to\infty}\pi\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i)\Delta s_i.$$

但根据第一种曲线积分的定义就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} y_i\Delta s_i = \int_L y\mathrm{d}s,$$

所以 L 绕 Ox 轴旋转所成旋转面面积为 $2\pi\int_L y\mathrm{d}s$ (参考图 7.9). 这时 L 是在 Ox 轴的上方. 一般来说,L 在任意位置,只要 $f(x)$ 是 x 的单值函数,即给定 x 的值,对应的 $f(x)$ 只有一个值,则还可以有:

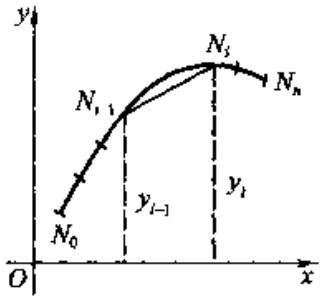

图 7.8

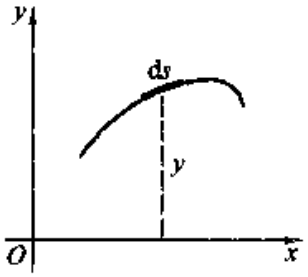

图 7.9

设 L 是 xy 平面上一条曲线，则 L 绕 Ox 轴旋转所成旋转面面积为

$$S_{Ox} = 2\pi\int_L |y|\,ds.$$

例　求旋轮线

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

绕 Ox 轴的旋转面面积.

解　$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = a\sqrt{2 - 2\cos t}dt = 2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

$$S_{Ox} = 2\pi\int_L y\,ds = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 2\pi \cdot 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt$$

$$= 16\pi a^2\int_{-1}^{1}(1 - u^2)\,du = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

7.2.3　第二种曲线积分(关于弧长元素投影的积分)

第二种曲线积分与第一种曲线积分不同：它不是关于弧长的积分，它是在直角坐标系内关于曲线在坐标轴上投影的积分. 先看平面的情形.

如图 7.10 所示，设在 xy 平面上有一条曲线 L，其一端为 A，一端为 B. 视 A 为起点，B 为终点，则记 L 为 L_{AB}. 由 A 至 B 顺次用 $n+1$ 个分点 $A = N_0, N_1, \cdots, N_n = B$ 将 L 分成 n 个小段，并且当 n 趋于无穷时，各小段 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 的弧长中之最大者趋于零，N_i 的横坐标为 $x_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$. 又在每一小段 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 上各取一点 $M_i\ (i = 1,2,\cdots,n)$. 若 $f(M) = f(x,y)$ 是 L 上的

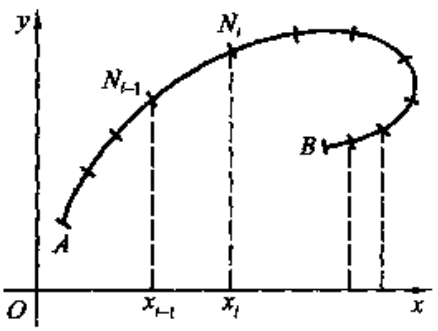

图 7.10

函数,则定义

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}x \equiv \int_{L_{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$$

为函数 $f(M)=f(x,y)$ 在曲线 L 上由 A 端至 B 端关于 x 的第二种曲线积分,但是这一极限必须存在有限,并且与分点 N_i 和中间点 M_i 的取法无关.

注意:$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 是弧 $\overset{\frown}{N_{i-1}N_i}$ 在 x 轴上的投影.

同样定义积分

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}y = \int_{L_{AB}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

若 L 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一条曲线,自然还有积分

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}z = \int_{L_{AB}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

下面罗列一些第二种曲线积分的简单性质:

(1) $\int_{L_{BA}} f(M)\,\mathrm{d}x = -\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}x.$

事实上,由 A 向 B 取分点 $A=N_0,N_1,\cdots,N_n=B$,各点的横坐标依次为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$. 将这一列分点的次序倒转,得到一列由 B 向 A 的分点(图 7.11)$\widetilde{N}_0=B,\widetilde{N}_1=N_{n-1},\cdots,\widetilde{N}_n=A$. 注意 $\widetilde{N}_0,\widetilde{N}_1,\cdots,\widetilde{N}_n$ 的横坐标依次为 $x_n,x_{n-1},\cdots,x_0$. 于是按定义有

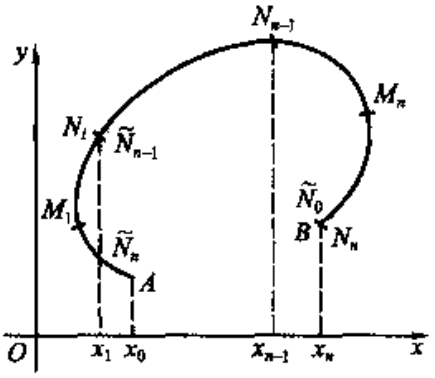

图 7.11

$$\begin{aligned}\int_{L_{BA}} f(M)\,\mathrm{d}x &= \lim\big[f(M_n)(x_{n-1}-x_n)\\ &\quad + f(M_{n-1})(x_{n-2}-x_{n-1}) + \cdots + f(M_1)(x_0-x_1)\big]\\ &= -\lim\big[f(M_1)(x_1-x_0) + \cdots\\ &\quad + f(M_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2}) + f(M_n)(x_n-x_{n-1})\big]\\ &= -\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这一性质是特别值得注意的,它说明第二种曲线积分有方向性:是由 A 端向 B 端取点(积分方向为由 A 至 B)还是由 B 端向 A 端取分点(积分方向为由 B 至 A).

下面的性质都是显然的.

(2) $\int_{L_{AB}} \mathrm{d}x = x_B - x_A$(图 7.12).

(3) $\int_{L_{AB}} (af + bg)\mathrm{d}x = a\int_{L_{AB}} f\mathrm{d}x + b\int_{L_{AB}} g\mathrm{d}x$,此处 a,b 是常数.

(4) $\int_{L_{AB}} f\mathrm{d}x + \int_{L_{BC}} f\mathrm{d}x = \int_{L_{AC}} f\mathrm{d}x$(图 7.13).

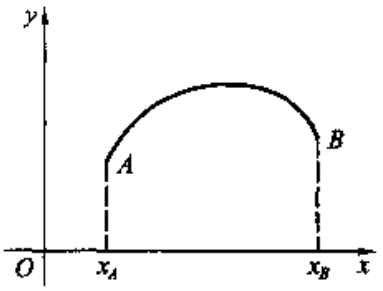

图 7.12

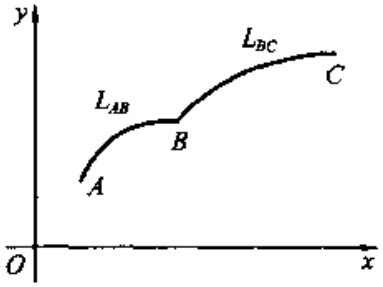

图 7.13

(5) 若 L 是 xy 平面上平行于 Oy 轴的直线段,则(图 7.14) $\int_L f\mathrm{d}x = 0$. 同样,若 L 是 $Oxyz$ 空间中在平行于 yz 平面的平面上的曲线,则 L 上关于 x 的第二种曲线积分为零(图 7.15).

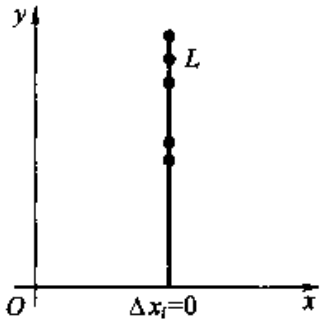

图 7.14

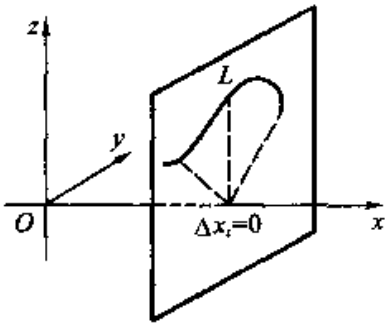

图 7.15

(6) $\left|\int_L f(M)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_L |f(M)|\mathrm{d}s$. 特别,若在 L 上 $|f(M)| \leqslant K$(L 之长也记为 L),则成立"长大不等式":

$$\left|\int_L f(M)\mathrm{d}x\right| \leqslant KL.$$

(6)的证明是容易的. 如图 7.16 所示,因为有

$$\begin{aligned}\left|\int_L f(M)\mathrm{d}x\right| &= |\lim \sum f(M_i)\Delta x_i| \\ &\leqslant \lim \sum |f(M_i)|\,|\Delta x_i|\end{aligned}$$

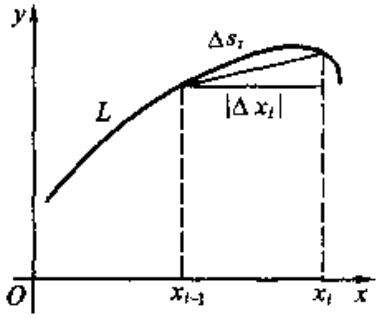

图 7.16

$$\leqslant \lim \sum |f(M_i)| \Delta s_i = \int_L |f(M)| \mathrm{d}s \leqslant KL.$$

7.2.4 第二种曲线积分的计算方法

在计算方法上,第二种曲线积分与第一种曲线积分一样,也是归结为定积分的计算.

设在直角坐标系 $Oxyz$ 空间中曲线 L 的参数方程为:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

$\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ 连续, A, B 点的坐标分别为 $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. 若 $f(M) = f(x,y,z)$ 为 L 上定义的连续函数,则 $f(M)$ 在 L 上的第二种曲线积分存在并且

$$\int_{L_{AB}} f(M)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t.$$

同样有关于 y 和 z 的积分公式.

习惯上把参数增加时曲线运行的方向叫做参数曲线的正向,所以上式可写作

$$\int_{L^+} f(M)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t)\mathrm{d}t.$$

证明方法与 7.2.1 中关于第一种曲线积分计算公式论证方法完全相同,这里不多讲了. 由此,可以立刻得到:

若 L 是 xy 平面上的曲线 $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 则(图 7.17)

$$\int_{L_{AB}} f(M)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(x, y(x))\mathrm{d}x.$$

若 L 是 xy 平面上的曲线 $x = x(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, 则(图 7.18)

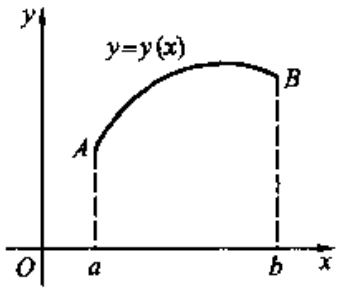

图 7.17

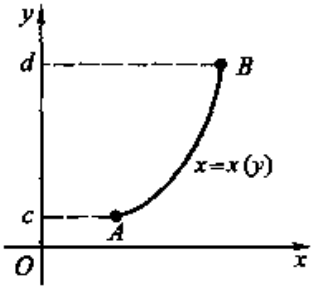

图 7.18

$$\int_{L_{AB}} f(M)\mathrm{d}y = \int_{c}^{d} f(x(y), y)\mathrm{d}y.$$

例　计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$，其中 L 如图 7.19 所示.

解
$$\int_{L_{OA}} xy\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3};$$
$$\int_{\Delta_{OA}} xy\mathrm{d}x = \int_0^1 x\cdot x^2\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \frac{1}{4};$$
$$\int_{C_{OA}} xy\mathrm{d}x = \int_{C_{OB}} xy\mathrm{d}x + \int_{C_{BA}} xy\mathrm{d}x = \int_0^1 x0\mathrm{d}x + 0 = 0.$$

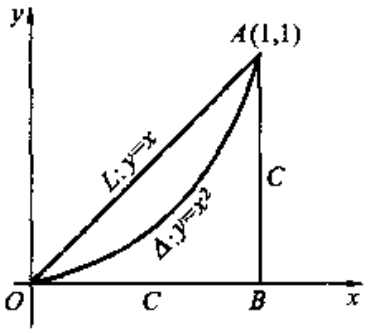

图 7.19

设 L 为封闭的平面曲线，起点 A 与终点 B 重合. 由起点至终点可以沿两个方向进行：顺时针方向(图 7.20)或反时针方向(图 7.21). 后者叫做平面封闭曲线的正向. 表示沿这两个方向的第二种曲线积分我们分别采用记号 $\oint$ 和 $\oint$.

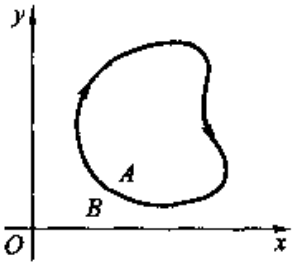

图 7.20

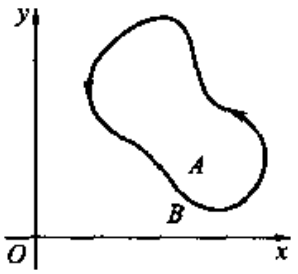

图 7.21

例如，设 L 为 xy 平面上的圆：

$$x = \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

则积分

$$\oint_L y^2\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sin^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \sin^3 t\mathrm{d}t = 0;$$
$$\oint_L x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \cos t\mathrm{d}\sin t = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\mathrm{d}t = \pi.$$

7.2.5　两种曲线积分的关系

设在空间有一曲线 L，其一端 A 视为起点，另一端 B 视为终点，全长为 s_0(图 7.22). M 为 L 上的动点，其坐标为 (x,y,z). 若 $\overset{\frown}{AM}$ 之长为 s，则 x,y,z 皆为 s 的函数：

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),\ 0 \leqslant s \leqslant s_0.$$

又设 $\dot{x}(s),\dot{y}(s),\dot{z}(s)$ 在 $0\leqslant s\leqslant s_0$ 中是 s 的连续函数，而 $\cos\alpha_M,\cos\beta_M,\cos\gamma_M$ 是 L 在 M 点的指向 B 端的单位切矢量（图 7.22）的方向余弦. 由已知的两种曲线积分的计算方法有

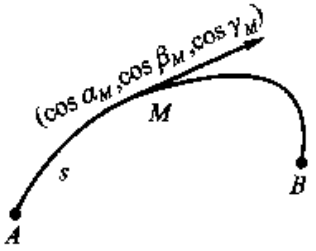

图 7.22

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\cdot} f(x(s),y(s),z(s))\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_L f(M)\cos\alpha_M\,\mathrm{d}s.$$

同样可讨论关于 y 和 z 的积分. 这样，便得两种积分的关系为

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}x = \int_L f(M)\cos\alpha_M\,\mathrm{d}s;$$

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}y = \int_L f(M)\cos\beta_M\,\mathrm{d}s;$$

$$\int_{L_{AB}} f(M)\,\mathrm{d}z = \int_L f(M)\cos\gamma_M\,\mathrm{d}s.$$

其中 $\alpha_M,\beta_M,\gamma_M$ 为 L 上点 M 处指向 B 端的单位切矢量的方向角.

7.2.6 矢量场的环流量，矢量的曲线积分

在这一段里，将说明两种曲线积分的场论具体意义.

设在空间区域 V 中有一矢量场 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)$；$L$ 是 V 中一条曲线，其一端为 A，另一端为 B；$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(M)$ 是 L 上指向 B 端的单位切矢量（图 7.23）. 定义

$$\int_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s$$

为矢量场 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 L 由 A 端至 B 端的环流量.

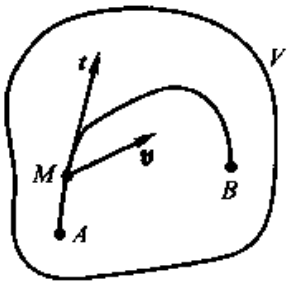

图 7.23

比如，若矢量场是力场，则沿曲线 L 由 A 至 B 的环流就是力场沿 L 由 A 至 B 所作之功. 若矢量场是电场，则沿 L 由 A 至 B 的环流就是单位电荷沿 L 由 A 移动到 B 时电场所作之功.

为了计算矢量的环流，在空间取定一直角坐标系 $Oxyz$，坐标轴上的单位矢量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$. 将矢量 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 用分量表示：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(M)=\cos\alpha_M\boldsymbol{i}+\cos\beta_M\boldsymbol{j}+\cos\gamma_M\boldsymbol{k},$$

则由 7.2.5 节中的公式，矢量场 $\boldsymbol{v}$ 沿 L 由 A 至 B 的环流量（直角坐标表示）为

$$\int_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

$$= \int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

上式第二个等号右边的意思是：

$$\int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + \int_{L_{AB}} Q\mathrm{d}y + \int_{L_{AB}} R\mathrm{d}z.$$

（这是习惯用的简写）. 如此，第二种曲线积分可以表示环流. 计算环流量只要算三个第二种曲线积分，这是第二种曲线积分在场论实际计算中的作用.

下面介绍一下矢量的曲线积分的概念，这对环流量在各种具体物理场中的意义的理解上，以及理论的表示形式方面，都是有益处的.

设在空间有一（长度为有限的）曲线 L，端点为 A 和 B，矢量

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M) = P(M)\boldsymbol{i} + Q(M)\boldsymbol{j} + R(M)\boldsymbol{k}$$

在 L 上有意义，定义 N_i，M_i 等的意义与 7.2.3 中定义第二种曲线积分时相同（图 7.24）. 这时

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \lim \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}(M_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i$$

叫做矢量 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线 L 由 A 端至 B 端的曲线积分；当然要求这个极限必须存在为有限数，并且与分点 N_i 和中间点 M_i 的取法无关.

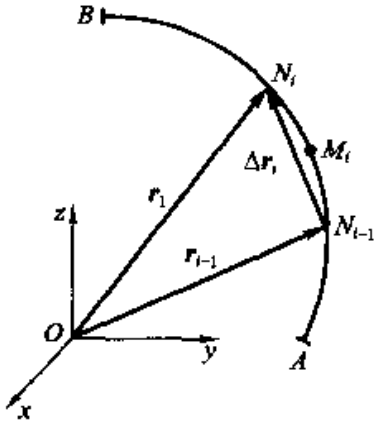

图 7.24

例如，若 $\boldsymbol{F}$ 是力场，则 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在力学上叫做“元功”，而 $\int_{L_{AB}} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 则是力 $\boldsymbol{F}$ 沿曲线 L 由 A 端至 B 端所作之功.

因为 $\Delta\boldsymbol{r}_i = \Delta x_i\boldsymbol{i} + \Delta y_i\boldsymbol{j} + \Delta z_i\boldsymbol{k}$，由定义立即可得

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L_{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

这样，矢量场的环流量又可用矢量的曲线积分来表示.

例如，矢量场为

$$\boldsymbol{v} = (y^2 - x^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k},$$

曲线 L 的参数方程为 $x = t, y = t^2, z = t^3, 0 \leqslant t \leqslant 1$，则

$$\int_{L+} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L+} (y^2 - x^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 [(t^4 - t^2) + 2t^3\cdot 2t - t^2\cdot 3t^2]\mathrm{d}t = \frac{1}{15}.$$

又例如矢量场为：

$$\boldsymbol{v} = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j},$$

曲线 L 如图 7.25 所示，则

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \oint_L 2xydx + x^2dy$$

$$= \left(\int_{\overline{OB}} + \int_{\overline{BA}} + \int_{\overline{AO}}\right)2xydx + x^2dy.$$

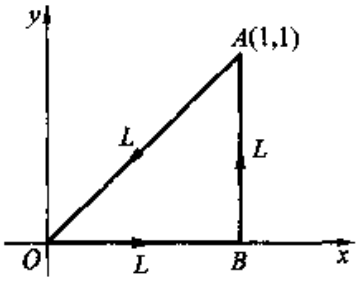

图 7.25

因为

$$\int_{\overline{OB}} = 0, \int_{\overline{BA}} = \int_0^1 dy = 1, \int_{\overline{AO}} = \int_1^0 3x^2dx = -1,$$

所以

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$

习题 7.2

1. 计算 $\int_L (x+y)ds$，L：顶点为 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$ 的三角形周界.

2. 计算 $\int_L y^2ds$，L：摆线的一拱：即

$$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

3. 计算 $\int_L (x^2+y^2)ds$，L：曲线：

$$x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

4. 计算 $\int_L xyds$，L：圆周：$x^2+y^2=a^2$.

5. 计算 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，L：圆周：$x^2+y^2=ax(a>0)$.

6. 计算 $\int_L xyds$，L：双曲线 $x=a\mathrm{ch}t, y=a\mathrm{sh}t(0\leqslant t\leqslant t_0)$ 的一段弧.

7. 计算 $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$，$L$：螺旋线第一圈，即 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = at. \end{cases} (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

8. 计算 $\int_L zds$，L：$\begin{cases} x^2+y^2=z^2 \\ y^2=ax, \end{cases}$ 由点 $O(0,0,0)$ 到 $(a,a,\sqrt{2}a)(a>0)$.

9. 计算 $\int_L (x^{4/3}+y^{4/3})ds$，$L$：内摆线第一象限部分，即

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

10. 计算 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，$L$：由 $x^2+y^2=a^2$，$y=x$ 及 x 轴在第一象限围成的图形的边界.

11. 计算 $\int_L (x^2+y^2)^n ds$, $L: x=a\cos t, y=a\sin t \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

12. 计算 $\int_L y ds$, L: 抛物线 $y^2=2px$ 由点 $O(0,0)$ 到 $A(x_0,y_0)$ 的一段.

13. 计算 $\int_L x^2 ds$, $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

14. 计算曲线 $x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$ 那一段的弧长.

15. 求右半圆 $x^2+y^2=R^2 (x\geqslant 0)$ 绕 Oy 轴旋转所成的旋转面面积.

16. 计算 $\int_L (x^2-y^2)dx$, $L: y=x^2$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $A(2,4)$ 的一段弧.

17. 计算 $\int_L x dy$, L: 由 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 和坐标轴构成的正向(反时针方向)三角形闭路.

18. 计算 $\int_L (x^2+y^2)dy$, L: 由直线 $x=1, y=1, x=3, y=5$ 构成的正向矩形闭路.

19. 计算 $\int_L xy dx$, $L: y^2=x$ 上从 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 一段弧.

20. 计算 $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, $L: y=x^2$ 上对应于 x 由 -1 增加到 1 的那一段弧.

21. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx+x^2 dy$, 沿曲线:

(1) $y=x$; (2) $y=x^2$; (3) $y=x^3$; (4) $y^2=x$.

22. 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} x dy-y dx$, 沿曲线:

(1) $y=x$; (2) $y=x^2$; (3) 由 x 轴上线段 OB 和平行于 y 轴的线段 BA 组成, $B=(1,0)$, $A=(1,1)$.

23. 计算 $\int_L y dx+x dy$, $L: x=R\cos t, y=R\sin t$ 由 $t_1=0$ 到 $t_2=\frac{\pi}{2}$ 的一段.

24. 计算 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$, $L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 反时针方向一周.

25. $\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, L: 以点 $M_1(0,-1), M_2(2,-1), M_3(2,2), M_4(0,2)$ 为顶点的矩形正向闭路.

26. $\int_L (y^2-z^2)dx+2yz dy-x^2 dz$, L: 曲线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ 上从 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段.

27. $\int_L x dx+y dy+(x+y-1)dz$, L: 从点 $A(1,1,1)$ 到点 $B(2,3,4)$ 的一段直线.

28. $\int_L \frac{y dx-x dy}{x^2+y^2}$, $L: x^2+y^2=a^2$ 沿反时针方向一周 $(a>0)$.

29. 求力场 $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}$ 沿曲线 $\overset{\frown}{OA}$ 所做的功, 其中点 $O(0,0), A(2,1)$ 连接路线为:

(1) 直线 OA; (2) 抛物线 OPA(对称轴 Ox);

(3) 抛物线 OQA(对称轴 Oy); (4) 折线 $OBA(B=(2,0))$;

(5) 折线 $OCA(C=(0,1))$.

30. 设流体沿 x 轴正向流动,每一点速度的大小正比于该点到 x 轴的距离,比例常数为 m,求流速 v 沿矩形 A 顺时针方向的环流 K,矩形的边平行于坐标轴,平行 Oy 轴的边长为 a,另一边为边长 b.

31. 求不变电流通过无穷长直导线(Oz 轴)所产生的磁场 $\boldsymbol{H}$ 沿 Oxy 平面上的曲线 $x^2+y^2=R^2$ 正向一周的环流.

32. 求引力场 $\boldsymbol{F}=-k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 中把单位质量的质点由 r_1 移到 r_2 点所做的功,并求引力沿任意闭曲线的环流量.

7.3 曲面积分

7.3.1 第一种曲面积分(关于面积元素的曲面积分)

第一种曲面积分是同第一种曲线积分相当的概念.

设有一张(有有限面积的)曲面 Σ(图 7.26). 分 Σ 为 n 个小块曲面 Σ_1, $\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$,并且当 n 趋于无穷时各小块 Σ_i 的面积 ΔS_i 中之最大者趋于零,同时各小块的最大直径也趋于 0. 在每一小块 Σ_i 上各取一点 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$. 设 $f(M)$ 是一个 Σ 上的函数,则定义

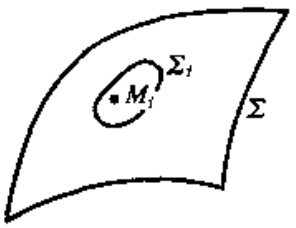

图 7.26

$$\iint_{\Sigma} f(M)\,\mathrm{d}S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$$

为函数 $f(M)$ 在曲面 Σ 上的第一种曲面积分,但是这一极限必须为有限数,并且与小分块 Σ_i 的分法和中间点 M_i 的取法无关.

同第一种曲线积分一样,比如已知曲面 Σ 的质量分布密度为 $\rho(M)$,要计算 Σ 的质量,就是要计算 $\rho(M)$ 在 Σ 上的第一种曲面积分.

第一种曲面积分的计算方法也与第一种曲线积分完全相同,只要算出面积元素 $\mathrm{d}S$ 就行了.

设在直角坐标系 $Oxyz$ 的空间中,有一光滑的用参数表示的曲面 Σ:

$$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in\Delta,$$

此处 Δ 是直角坐标 uv 平面上的有界闭区域. 若函数 $f(M)=f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则 $f(M)$ 在 Σ 上的第一种曲面积分存在. 面积元素 $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,且

$$\iint_{\Sigma} f(M)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Delta} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这个公式的证明方法与第一种曲线积分公式的证明方法是相同的(参阅第六章6.3.2).

同样,立刻可得:若在 $Oxyz$ 坐标系中有显表示的曲面 $z=z(x,y),(x,y)\in D$,此处 D 是 xy 平面上的闭域,且 z'_x,z'_y 连续,则

$$\iint_{\Sigma} f(M)\,\mathrm{d}S = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 1　设曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$. 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S.$$

解　将球面 Σ 表示为参数方程:

$$x=R\cos\varphi\sin\theta,\quad y=R\sin\varphi\sin\theta,\quad z=R\cos\theta$$

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

球面面积元素为

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

所以

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} R^2\sin^2\theta\cdot R^2\sin\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\pi R^4.$$

例 2　设曲面 Σ 为锥面 $z^2=k^2(x^2+y^2)(z\geqslant 0)$ 被柱面 $x^2+y^2\leqslant 2ax(a>0)$ 所截得的曲面(图 7.27). 计算曲面积分.

$$\iint_{\Sigma}(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,\mathrm{d}S.$$

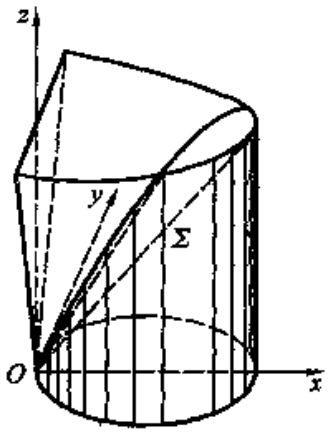

图 7.27

解　由于 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\sqrt{1+k^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,所以

$$\iint_{\Sigma}(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\sqrt{1+k^2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 2ax}[k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\sqrt{1+k^2}\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 2ax\\ y\geqslant 0}}[k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\sqrt{1+k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^4(k^2+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)r\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{24}a^6(80k^2+7)\sqrt{1+k^2}.$$

7.3.2 矢量场的通量,第二种曲面积分(关于面积元素投影的积分)

矢量场的通量是同环流量相当的概念.

设在空间区域 V 中有一张曲面 Σ,可以分成两面,一面记为 A,另一面记为 B(图 7.28). 在 Σ 的每一点 M 作出曲面的单位法矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_M$,一律指向指定的曲面的某一侧,现在一律指向 B 侧. 设 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)$ 是 V 中一矢量场,则 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 叫做矢量场 $\boldsymbol{v}$ 由曲面 Σ 的 A 侧到 B 侧的通量,或简单叫做在 Σ 的 B 侧的通量.

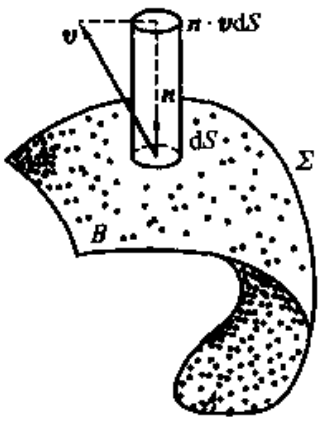

图 7.28

对于不同的物理场,通量各有其具体的实际意义. 比如,若矢量场 $\boldsymbol{v}$ 是流体(密度为 1)的速度场,则通量是流体在单位时间内通过曲面的流量. 若矢量场是电场,则通量就是通过曲面的电通量.

在空间取定了一个直角坐标系 $Oxyz$,坐标轴上的单位矢量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,则矢量场 $\boldsymbol{v}$ 可以分解为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

同时单位法矢量 $\boldsymbol{n}$(指向 B 侧)又可分解为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(M)=\cos\alpha_M\boldsymbol{i}+\cos\beta_M\boldsymbol{j}+\cos\gamma_M\boldsymbol{k},$$

于是 $\boldsymbol{v}$ 在 Σ 的 B 侧的通量便可表示为

$$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}[P(M)\cos\alpha_M+Q(M)\cos\beta_M+R(M)\cos\gamma_M]\mathrm{d}S.$$

这样,计算矢量场的通量就是要计算上式右端的三个第一种曲面积分. 计算第一种曲面积分的方法,虽然在 7.3.1 中已经讲过,但由于出现了方向余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,这就使得上式右端三个积分有了几何意义. 并且,由此还可以建立新的曲面积分概念——第二种曲面积分的概念.

由于 α,β,γ 是曲面法矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向角,易知 $\cos\alpha\mathrm{d}S,\cos\beta\mathrm{d}S,\cos\gamma\mathrm{d}S$ 分别

就是面积元素 dS 在三个坐标平面 Oyz, Ozx, Oxy 上的投影. 即(图 7.29)

$$\cos\alpha dS = \pm dydz,$$

$$\cos\beta dS = \pm dzdx,$$

$$\cos\gamma dS = \pm dxdy.$$

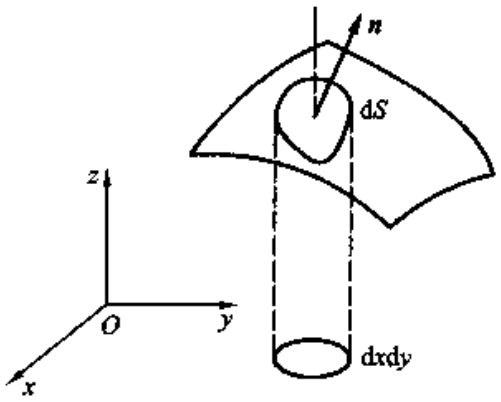

图 7.29

因此分别定义

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)dydz \equiv \iint_{\Sigma_B} f(x,y,z)dydz \equiv \iint_{\Sigma} f(M)\cos\alpha_M dS,$$

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)dzdx \equiv \iint_{\Sigma_B} f(x,y,z)dzdx \equiv \iint_{\Sigma} f(M)\cos\beta_M dS,$$

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)dxdy \equiv \iint_{\Sigma_B} f(x,y,z)dxdy \equiv \iint_{\Sigma} f(M)\cos\gamma_M dS,$$

为函数 $f(M)$ 在曲面 Σ 的 B 侧关于 yz, zx 和 xy 的第二种曲面积分.

这样,我们便得到矢量场 v 在曲面 Σ 的 B 侧的通量的直角坐标表示

$$\iint_{\Sigma} v\cdot n dS = \iint_{\Sigma_B} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

此处 n 是 Σ 的指向 B 侧的单位法矢量,P, Q, R 是 v 在坐标轴上的分量. 所以,要计算矢量场的通量,就是要计算三个第二种曲面积分. 显然,第二种曲面积分是与第二种曲线积分完全相当的概念. 第二种曲面积分是关于曲面在坐标平面上的投影的积分,是与直角坐标系的选取有关的.

第二种曲面积分也有像第二种曲线积分那样的两个特殊性质,现罗列如下:

(1) $\iint_{\Sigma_B} f(M)dxdy = -\iint_{\Sigma_A} f(M)dxdy,$

同样对于 $dydz, dzdx$ 的积分也有相应公式.

(2) 若曲面 Σ 是平行于 Oz 轴的柱面上的一部分(图 7.30),则 $\cos\gamma=0$,所以

$$\iint_{\Sigma} f(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

同样对于 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 及 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 的积分也有相应的公式.

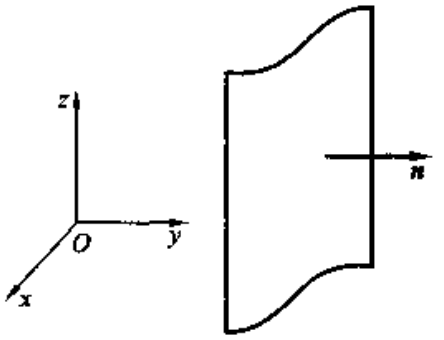

图 7.30

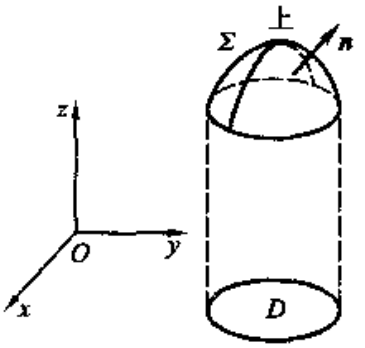

图 7.31

7.3.3 第二种曲面积分的计算方法

7.3.2 中说明了第二种曲面积分的几何意义,也就有了一个现成的计算方法.

(1) 显表示曲面的第二种曲面积分计算方法.

1° 若曲面方程为(图 7.31)$z=z(x,y)$,$(x,y)\in D$,则

$$\iint_{\Sigma_{上}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D} f(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\Sigma_{下}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D} f(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2° 若曲面方程为(图 7.32)$x=x(y,z)$,$(y,z)\in D$,则

$$\iint_{\Sigma_{前}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D} f(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\Sigma_{后}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{D} f(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3° 若曲面方程为(图 7.33)$y=y(z,x)$,$(z,x)\in D$,则

$$\iint_{\Sigma_{右}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{D} f(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

$$\iint_{\Sigma_{左}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\iint_{D} f(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

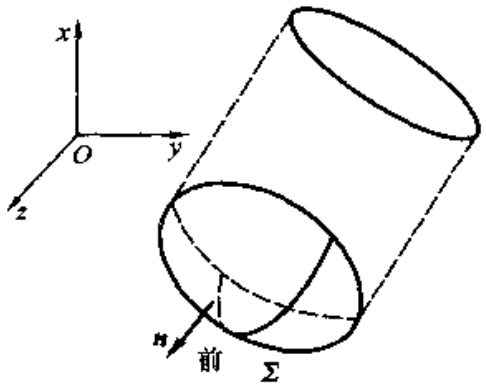

图 7.32

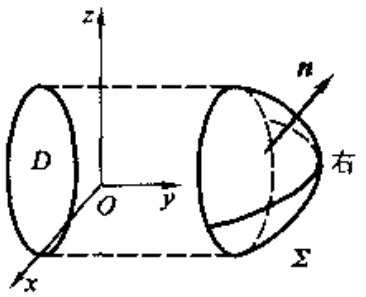

图 7.33

这个方法的详细证明与下面方法(2)的证明是相同的. 不但如此,它还可以作为方法(2)的推论,所以不细证了.

(2) 参数曲面的第二种曲面积分计算方法.

设有光滑的参数曲面 Σ:

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),\ (u,v) \in \Delta.$$

矢量形式为:

$$r = r(u,v),(u,v) \in \Delta,$$

此处 Δ 是 uv 平面上的有界闭区域. 若函数 $f(M) = f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则 $f(M)$ 在 Σ 上的三个第二种曲面积分存在,并且

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\pm\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\pm\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_{\Sigma_B} f(M)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\pm\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

三个等式的右端取用正号或负号一律视 $r'_u \times r'_v$ 是否指向 Σ 的 B 侧而定.

事实上,矢量 $r'_u \times r'_v$ 也是曲面 Σ 的法矢量. 若 n 是指向 B 侧的单位法矢量,则

$$n = \pm\frac{r'_u \times r'_v}{|r'_u \times r'_v|} = \pm\frac{1}{|r'_u \times r'_v|}\begin{vmatrix} i & j & k \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\pm 1}{|r'_u \times r'_v|}\cdot\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}i + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}j + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}k\right].$$

因此,若 n 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则

$$\cos\alpha = \pm\frac{\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|},\quad \cos\beta = \pm\frac{\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|},\quad \cos\gamma = \pm\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|},$$

取正号或负号视 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 与 n 是否方向一致而定,即视 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 是否指向 B 侧而定. 另一方面,

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

根据第二种曲面积分的定义和参数曲面的第一种曲面积分计算方法,便有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_B} f(M)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{\Sigma} f(M)\cos\gamma\mathrm{d}S\\ &= \iint_{\Sigma} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\\ &\quad\pm\left[\frac{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}{|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|}\right]|\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= \iint f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\pm\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

取正号或取负号视 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 是否指向 B 侧而定. 这就证明了第一式. 同样可证明其余两式.

若 P,Q,R 是 Σ 上的连续函数,则有公式

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma_B} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint \pm\begin{vmatrix} P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

右端取正号或负号视法矢量 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 是否指向 Σ 的 B 侧而定.

例 1 设 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 在 $0\leqslant z\leqslant h$ 之间的一段,计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma_{外}} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

解 根据 7.3.2 第二种曲面积分的性质 2°,第三项

$$\iint_{\Sigma_{外}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

为了计算第二项，将 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2（图 7.34）. 其中 Σ_1 为 Σ 在 $x-z$ 平面的右侧部分，Σ_2 为 Σ 在 $x-z$ 平面的左侧部分. 于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma_{外}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \iint_{\Sigma_{1右}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma_{2左}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \iint_{\substack{-R\leqslant x\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant h}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint_{\substack{-R\leqslant x\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant h}} zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

同样也有

$$\iint_{\Sigma_{外}} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

所以

$$\iint_{\Sigma_{外}} yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

例 2　计算矢量场 $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外法线方向的通量.

解　球面 Σ 可表示为

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\sin\theta, \\ y = a\sin\varphi\sin\theta (0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi), \\ z = a\cos\theta. \end{cases}$$

$\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi$ 的方向朝球外（图 7.35）. 所以有

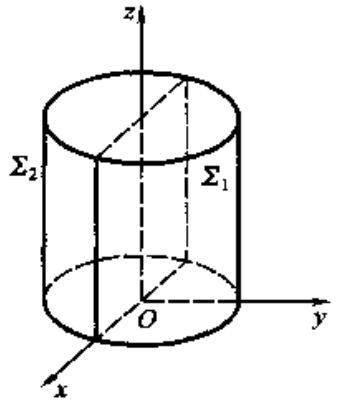

图 7.34

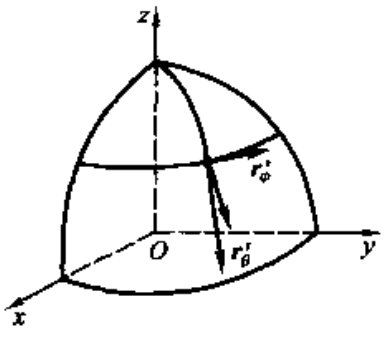

图 7.35

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_{\Sigma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{vmatrix} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} a^3 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi a^3.$$

习题 7.3

1. 计算 $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$ 为立方体：$0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面.

2. 计算 $\iint_S \left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$，$S$：平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分.

3. 计算 $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{(1+x+y)^2}$，$S$：平面 $x+y+z=1$ 及三坐标面围成的四面体的表面.

4. 计算 $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$：上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$.

5. 计算 $\iint_S \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}S$，$S$：上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\geqslant 0)$.

6. 计算 $\iint_S (x^2+y^2)\mathrm{d}S$，$S$：曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 围成的立体表面.

7. 计算 $\iint_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$S$：锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截下的那块曲面.

8. 计算 $\iint_S |xyz|\mathrm{d}S$，S：曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的部分.

9. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=\rho^2(\rho<R)$ 所割下的上面顶部那部分面积.

10. 计算 $\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：由三坐标面及三平面 $x=1, y=1, z=1$ 围成的正立方体的表面外侧.

11. 计算 $\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：由平面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$，围成的立体的表面外侧.

12. 计算 $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的外表面.

13. 计算 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=3$ 所截部分的外侧.

14. 计算 $\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=k$ $(k>0)$ 围成的立体外表面.

15. 计算 $\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$：是以原点为中心边长为 1，并平行

于坐标面的正方体的外表面.

16. 计算 $\iint_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外表面.

17. 计算 $\iint_S \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{z}$, $S:x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

18. 计算 $\iint_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$, $S:x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的下表面.

19. 计算 $\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S$, $S:x+y+z=1$ 在第一卦限部分的上表面.

20. 求矢量 $A=yzi+zxj+xyk$ 通过曲面 $S:x^2+y^2=R^2(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外表面的通量.

21. 求矢量 $A=xyi+yzj+xzk$ 穿过球面 $S:x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分(向外)的通量.

22. 求矢量 r 通过圆柱 $x^2+y^2=R^2$,$(0\leqslant z\leqslant h)$ 侧面(向外)的通量.

7.4　Stokes　公　式

前面已经介绍了线、面积分,这一节中要着重介绍线、面积分之间的关系以及它们的物理意义.

7.4.1　Green 公式

在平面上说清楚线、面积分之间关系的是下述 Green 公式.

Green 公式　设 D 是 xy 平面上封闭曲线 L 围成的闭区域,且函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏微商,则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证　先假定 L 的形状满足这样的要求:平行于 y 轴的直线至多与 L 交于两点(如图 7.36). 设下面曲线 L' 的方程为 $y=y_1(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,上面曲线 L'' 的方程为 $y=y_2(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$. 于是

$$\begin{aligned}
-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= -\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y \\
&= -\int_a^b [P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))]\mathrm{d}x \\
&= \int_{L''} P\mathrm{d}x + \int_{L'} P\mathrm{d}x = \oint_L P\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

同样可以证明:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q\mathrm{d}y.$$

因此,对如图 7.36 中那样的曲线 L,Green 公式成立,至于一般的区域可以划成很多小块,每一小块都可以像图 7.36 那样处理. 如图 7.37,将 D 分成两小块 D_1, D_2,在每个小块中,Green 公式都成立,故

$$-\iint_{D_1}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{ABCA}} P\mathrm{d}x;$$

$$-\iint_{D_2}\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\overset{\frown}{CDAC}} P\mathrm{d}x.$$

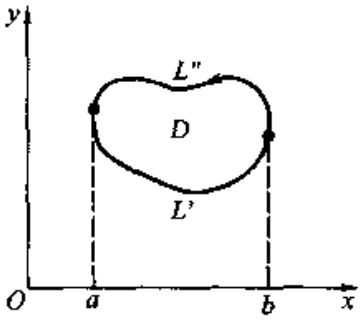

图 7.36

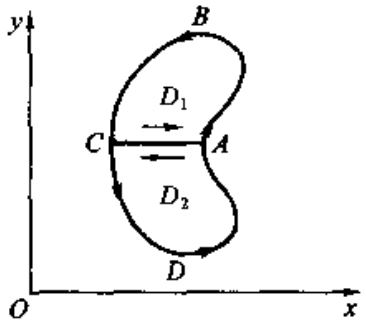

图 7.37

将此两式相加,因为

$$\int_{\overset{\frown}{CA}} P\mathrm{d}x + \int_{\overset{\frown}{AC}} P\mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x.$$

同理可证

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L Q\mathrm{d}y.$$

这就证明了对任意由封闭曲线 L 围成的闭区域,Green 公式都成立.

Green 公式是基本的,下面要证的 Gauss 公式及 Stokes 公式都分别是它在空间的推广.

Green 公式还可以写成更一般的形式:

设 D 是 xy 平面上 $n+1$ 条封闭曲线 $L, l_1, l_2, \cdots, l_n$ 围成的闭区域,其中 $l_1, \cdots, l_n$ 在 L 内(如图 7.38 那样). 若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上有连续一阶偏微商,则

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L + \oint_{l_1} + \cdots + \oint_{l_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

成立.

证　只要看最简单的情形就可以了. 假设 L 的内部只有一条曲线 l(图 7.39).

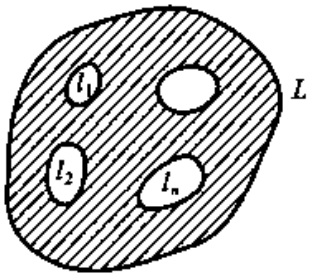

图 7.38

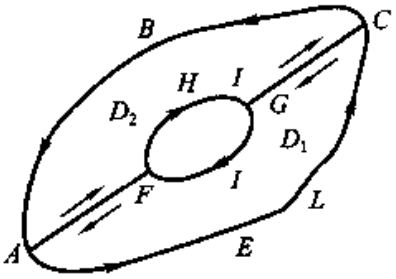

图 7.39

用曲线 AF 和 CC 将 D 分成两区域 D_1 和 D_2. 根据 Green 公式,有

$$\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\overrightarrow{AEC}}+\int_{\overrightarrow{CC}}+\int_{\overrightarrow{GIF}}+\int_{\overrightarrow{FA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\overrightarrow{AF}}+\int_{\overrightarrow{FHG}}+\int_{\overrightarrow{GC}}+\int_{\overrightarrow{CBA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

两式相加得

$$\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{L}+\oint_{l}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

利用 Green 公式可以计算平面区域的面积.

设在 xy 平面上有一条封闭曲线 L,内部面积为 A,则

$$A=\oint_L x\mathrm{d}y=-\oint_L y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

证明这件事是很容易的,只要在 Green 公式中取 $P=0,Q=x$ 即得第一式,再令 $P=-y,Q=0$ 即得第二式,两式相加除 2 得第三式.

例 1　$\oint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=-2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi ab.$

例 2　$\oint_{x^2+y^2=1}y^2\mathrm{d}x=-2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

例 3　$\oint_L 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant y\leqslant x\\0\leqslant x\leqslant 1}}(2x-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$

这里 L 为 $y=0,x=1,y=x$ 所围成的三角形的边.

例 4　计算椭圆面积. 若椭圆的参数方程为

$$x = a\cos t, y = b\sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

则
$$A = -\oint_L y\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} b\sin t\mathrm{d}(a\cos t)$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t = \pi ab.$$

7.4.2 Gauss 公式、散度

Green 公式考虑的是平面的线积分和二重积分之间的关系. 在空间,应该考虑曲面积分与三重积分之间的关系. Gauss 公式便是说明这样关系的.

Gauss 公式 设 V 是空间封闭曲面 Σ 所围成的闭区域,函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$在 V 上有一阶连续偏微商,则

$$\oint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V,$$

这里 $\Sigma_{外}$ 表示曲面 Σ 的定向为法线向外.

证 证明的办法与 Green 公式完全一样. 先假定 V 是由上、下两个显表示的曲面,和周围是其母线平行于 z 轴的柱面所围成的. V 在 xy 平面上的投影为 D (图 7.40). 设下面的曲面为

$$\Sigma_1 : z = z_1(x,y), (x,y) \in D,$$

上面的曲面为

$$\Sigma_2 : z = z_2(x,y), (x,y) \in D,$$

周围的柱面为 Σ_3. 于是

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$= \iint_D R(x,y,z_2(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$- \iint_D R(x,y,z_1(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma_{2上}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_{1下}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 $\Sigma_{2上}$ 表示 Σ_2 的定向为法线向上，$\Sigma_{1下}$ 表示 Σ_1 的定向为法线向下. 但由 7.3.2 (2) 知

$$\iint\limits_{\Sigma_{3外}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

所以

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_{2上}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_{1下}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_{3外}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oiint\limits_{\Sigma_{外}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同样对于

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

及

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

可得类似结果. 这就对这种 V 证明了 Gauss 公式. 至于一般的空间封闭曲面 Σ 围成的闭区域，如同证明 Green 公式那样，可以分成多块这样的区域，对一块来讲 Gauss 公式成立，然后相加，即可证明对一般的区域都成立.

也与 Green 公式一样，Gauss 公式可以写成更一般的形式：

设空间有封闭曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$ 在封闭曲面 Σ 的内部，它们围成闭区域 V（图 7.41）；函数 P,Q,R 在 V 有连续的一阶偏微商，则

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \oiint\limits_{\Sigma_{外}} + \oiint\limits_{\Sigma_{1内}} + \cdots + \oiint\limits_{\Sigma_{n内}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

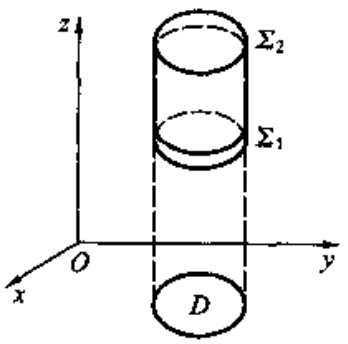

图 7.40

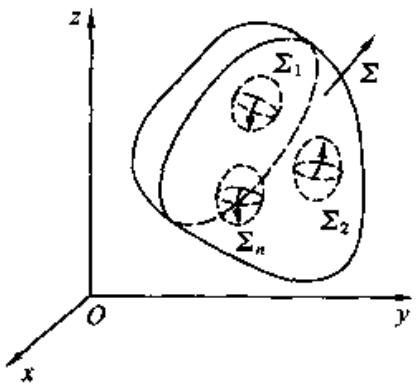

图 7.41

同样也可以用 Gauss 公式来计算体积：设在空间中有一张封闭曲面 Σ，内部体积为 V，则

$$V = \oiint_{\Sigma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma_{外}} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \oiint_{\Sigma_{外}} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Gauss 公式有什么物理意义？$\oiint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的物理意义是很清楚的，这就是矢量场 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 由曲面 $\Sigma_{内}$ 到 $\Sigma_{外}$ 的通量. 现在来说明 $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$ 的物理意义.

不妨设想 $\boldsymbol{v}$ 是一个稳定的流体速度场，Σ 为封闭曲面，单位外法矢为 $\boldsymbol{n}$. 通量也可以写为 $\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$. 如果通量不等于零，就表示流进与流出 Σ 的流体不相抵消，流体通过 Σ 的内部有所增加或减少，Σ 的内部分布着某种正的或负的流源. 为了表示矢量场流源的分布情况，如同讨论质量分布时引进密度函数那样，引进散度的概念. 它是这样定义的：设有矢量场 $\boldsymbol{v}$，M 是场中一点（图 7.42）. 围绕 M 在场中作一封闭曲面 Σ，围成闭区域 V，体积也记作 V，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位外法矢，定义矢量场 $\boldsymbol{v}$ 在点 M 的散度为

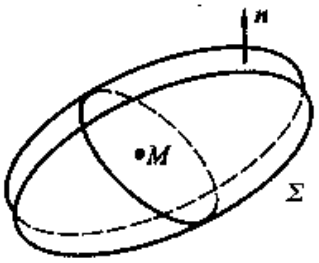

图 7.42

$$(\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})_M = \lim_{\Sigma\to M}\frac{\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V}.$$

散度描写了矢量场的流源分布情况，它是流源分布的强度，而 $\boldsymbol{v}$ 的散度就是

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

证明这点是很容易的，因为由 Gauss 公式

$$\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

由重积分中值定理，上式右边等于$\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{\widetilde{M}}\cdot V$，其中$\widetilde{M}$是$V$中某点. 两边除以$V$，令$\Sigma$收缩成为点$M$，则$\widetilde{M}\to M$，即得

$$(\operatorname{div} \boldsymbol{v})_M=\lim_{\Sigma\to M}\frac{\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V}$$

$$=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M.$$

于是还可以将 Gauss 公式叙述如下：

设有矢量场$\boldsymbol{v}$，V是场中一闭区域，它的边界是封闭曲面Σ，$\boldsymbol{n}$是Σ的单位外法矢，则

$$\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V.$$

若V的边界是封闭曲面$\Sigma,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$，$\boldsymbol{n}$是$\Sigma$的单位外法矢，$\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$的单位内法矢(图 7.41). 则

$$\oiint_{\Sigma}+\oiint_{\Sigma_1}+\cdots+\oiint_{\Sigma_n}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}V.$$

此外容易验证：若α,β是常数，φ是函数，则

(i) $\operatorname{div}(\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{v}_2)=\alpha\operatorname{div}\boldsymbol{v}_1+\beta\operatorname{div}\boldsymbol{v}_2$，

(ii) $\operatorname{div}\varphi\boldsymbol{v}=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,\varphi$.

散度也可用 Nabla 算于∇写成

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}+\boldsymbol{j}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}+\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}.$$

例 1　设点O固定，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，计算$\operatorname{div}r^n\boldsymbol{r}$.

解　以O为原点，设M点的坐标为(x,y,z)，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3,$$

而

$$\nabla r^n=nr^{n-1}\nabla r=nr^{n-1}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}.$$

由上述(ii)$\operatorname{div}\varphi\boldsymbol{v}=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{grad}\,\varphi$，即得

$$\nabla\cdot r^n\boldsymbol{r}=3r^n+\boldsymbol{r}\cdot(nr^{n-2}\boldsymbol{r})=(3+n)r^n.$$

特别取 $n=-3$,得

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=0.$$

再定义一个重要算子,叫做 Laplace 算子 Δ,在直角坐标下它是

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

于是

$$\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla,$$

因之

$$\mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,u=\Delta u.$$

例 2 散度在电场中的物理意义.

设在一点 O 置一电荷 q,则在点 M 的场强为

$$\boldsymbol{E}=q\frac{\overrightarrow{OM}}{|OM|^3}=\frac{q\boldsymbol{r}}{r^3},$$

这里 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 在 O 点这个场当然没有意义,但除 O 点外由例 1 得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0.$$

设 Σ 是一内部包括 O 点的封闭曲面. 若要计算 $\boldsymbol{E}$ 通过 Σ 外侧的场通量,可在 Σ 的内部作一半径为 ε 的球面 Σ_ε,内部包含 O 点(图 7.43). 取 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 和 Σ_ε 的单位外法矢,则由 Gauss 公式

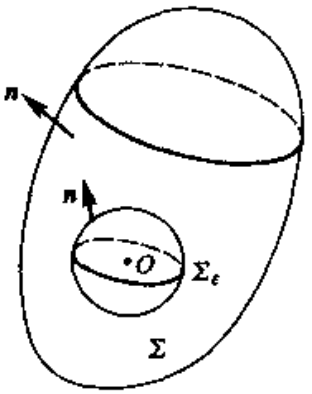

图 7.43

$$\oiint_{\Sigma}-\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V\mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V=0.$$

但在 Σ_ε 上,$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r$. 所以

$$\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma_\varepsilon}q\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_{\Sigma_\varepsilon}q\frac{\mathrm{d}S}{r^2}=\frac{q}{\varepsilon^2}\oiint_{\Sigma_\varepsilon}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{q}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2=4\pi q.$$

如果在 Σ 内有若干电荷 $q_1,\cdots,q_n$,令 $\boldsymbol{E}_i$ 为 q_i 所产生的电场$(i=1,\cdots,n)$,则场强 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1+\cdots+\boldsymbol{E}_n$. 所以

$$\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \sum_{i=1}^{n}\oiint_{\Sigma_i}\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi\sum_{i=1}^{n} q_i.$$

因此，如果电荷连续分布在 Σ 的内部体积 V 上，电荷密度为 ρ，则根据通常的由离散到连续的处理方法得到

$$\iiint_{V}\mathrm{div}\boldsymbol{E}\mathrm{d}V = \oiint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = 4\pi\iiint_{V}\rho\mathrm{d}V,$$

所以

$$(\mathrm{div}\boldsymbol{E})_M = \lim_{\Sigma\to M}\frac{\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V}$$

$$= \lim_{\Sigma\to M}\frac{4\pi\iiint_{V}\rho\mathrm{d}V}{V} = 4\pi\rho(M).$$

因此，场强的散度就是电荷密度.

7.4.3　Stokes 公式、旋度

Green 公式是说明平面中的曲线积分与二重积分之间的关系，Gauss 公式是说明空间的曲面积分与三重积分的关系，Stokes 公式则是说明空间的曲线积分与空间的曲面积分之间的关系.

Stokes 公式　设在空间曲面 Σ，边界是封闭曲线 L（图 7.44）. 若函数 P,Q,R 有一阶连续偏微商，则

$$\oint_{\text{图示方向}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_B}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

（顺 L 的积分方向前进时 B 侧在左手）.

证　与 Green 公式及 Gauss 公式一样，先来证明可以用显式表示的曲面的 Stokes 公式. 设曲面 Σ 为：

$$z = z(x,y),(x,y)\in D.$$

D 是 xy 平面上闭区域，边界为 L^*（图 7.45）. 设 Σ 的边界 L 的参数方程为

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) = z(x(t),y(t)),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

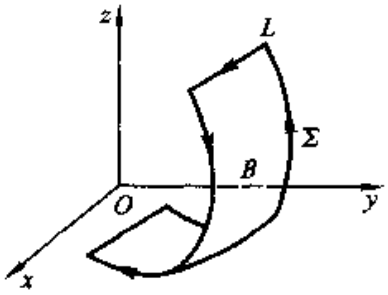

图 7.44

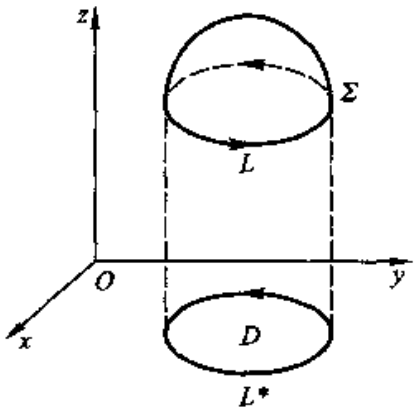

图 7.45

并且图示方向为参数增加方向，L^* 的参数方程显然就是

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\oint_{L\text{图示方向}} P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\dot{x}(t) \\
&\quad + Q(x(t),y(t),z(x(t),y(t)))\dot{y}(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \oint_{L^*\text{图示方向}} P(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}x \\
&\quad + Q(x,y,z(x,y))\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\oint_{L\text{图示方向}} R\,\mathrm{d}z &= \int_{\alpha}^{\beta} R\dot{z}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} R(z'_x\dot{x} + z'_y\dot{y})\,\mathrm{d}t \\
&= \oint_{L^*\text{图示方向}} Rz'_x\,\mathrm{d}x + Rz'_y\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

将以上两式相加，应用 Green 公式，得到

$$\begin{aligned}
&\oint_{L\text{图示方向}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z \\
&= \oint_{L^*\text{图示方向}} (P + Rz'_x)\,\mathrm{d}x + (Q + Rz'_y)\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q + Rz'_y) - \frac{\partial}{\partial y}(P + Rz'_x)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) z'_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) z'_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

另一方面，将 Σ 的方程 $z = z(x,y)$ 视为参数方程，参数为 x,y，应用 7.3.3 中的参数曲面的第二种曲面积分的计算公式得到

$$\iint_{\Sigma_B} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} & \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} & \dfrac{\partial y}{\partial y} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) z'_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) z'_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

合并上述两式，就得知 Stokes 公式对显式表示的曲面成立.

对于一般的曲面可以将其分为若干显式表示的曲面，如图 7.46 中虚线将曲面 Σ 分成显式表示的曲面 Σ_1, Σ_2. 对 Σ_1, Σ_2 分别应用显式表示曲面的 Sotkes 公式，然后相加，因在虚线上来回积分相消，故得 Stokes 公式对一般的曲面 Σ 也成立.

Stokes 公式还可以写成便于记忆的形式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma_B} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma_B} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，是 Σ 的指向 B 侧法矢的方向余弦，顺 L 的积分方向前进时 B 侧位于左手边.

例 1 计算矢量场 $\boldsymbol{v}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ 沿三角形 $ABCA$（A,B,C 在坐标轴正向上截距为 1）的环流量（图 7.47）.

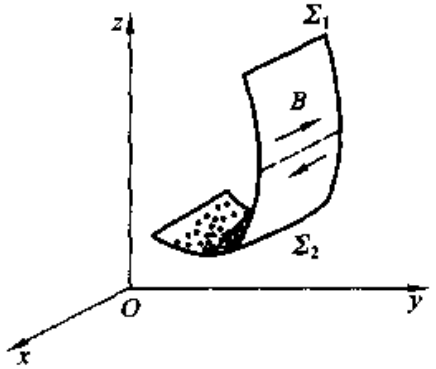

图 7.46

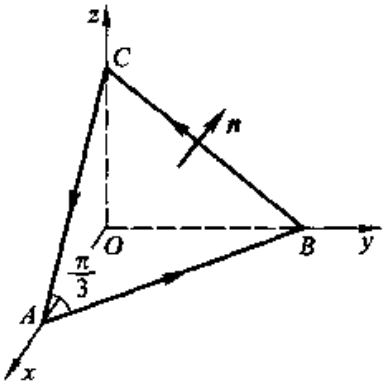

图 7.47

解 三角形 $ABCA$ 围成曲面 Σ 为：$x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$. Σ 的单位外法矢为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. 应用 Stokes 公式

$$\oint_{ABCA} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\,\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=-1.$$

Stokes 公式有什么物理意义？显然 $\oint P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为矢量场 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的环流量. 现在来说明 Stokes 公式等式右边的物理意义.

在空间取一定点 M，从 M 点作一单位矢量 $\boldsymbol{n}$，过 M 点又作平面与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，再在平面上围绕 M 画一封闭曲线 L. 在 L 上各点作单位切矢量 $\boldsymbol{t}$，使得 $\boldsymbol{n}$ 是在 $\boldsymbol{t}$ 的左边. 如果有两个矢量场 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$，它们的大小处处相等：$|\boldsymbol{v}_1|=|\boldsymbol{v}_2|$. 但是它们向 $\boldsymbol{t}$ 偏转的程度不等，$\boldsymbol{v}_1$ 向 $\boldsymbol{t}$ 偏转的程度要大些，则显然 $\boldsymbol{v}_1$ 沿 L 的环流量要大些. 这时我们认为：从方向 $\boldsymbol{n}$ 看过去，$\boldsymbol{v}_1$ 沿 L 的涡旋或旋转程度较 $\boldsymbol{v}_2$ 为大（图

7.48)；如果 v_1 和 v_2 不是大小相等的场，则 v_2 沿 L 的环流量可能会反较 v_1 为大，但这总的来说要 v_2 的模较 v_1 的模为大才能做到，此时我们反过来认为(从方向 n 看过去)v_2 沿 L 的涡旋程度较 v_1 为大(图 7.49)．有了以上的考虑，我们定义一个量，叫做矢量场的旋度，用来表示出一个矢量场在各处各方向的涡旋程度，并也可能解释 Stokes 公式右端的场论意义．

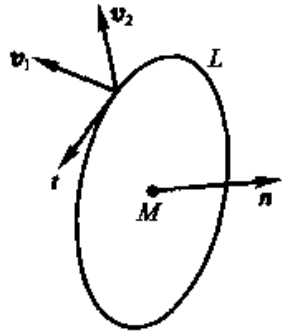

图 7.48

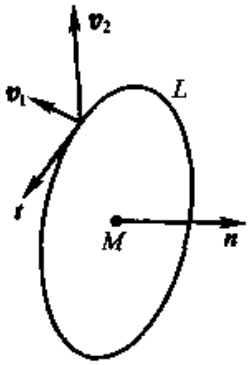

图 7.49

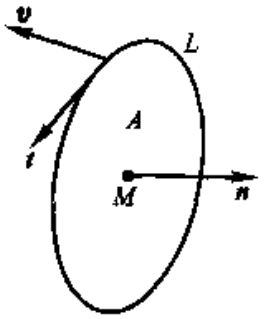

图 7.50

矢量场 v 在一点 M 的旋度(**rot** v)是一个矢量，它是这样定义的：从点 M 作一单位矢量 n，过 M 点又作一平面与 n 垂直，再在平面上画一封闭曲线 L，若内部面积记为 A，在 L 上各点作单位切矢量 t，使得 n 是在 t 左边(图 7.50)，显然环流量

$$\oint P\mathrm{d}x + P\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \oint v \cdot t\mathrm{d}s,$$

定义

$$(\mathbf{rot}\ v)_M \cdot n = \lim_{L \to M} \frac{\oint_L v \cdot t\mathrm{d}s}{A}.$$

这样，我们定义了旋度 **rot** v 在各个方向 n 的投影．下面我们用 Stokes 公式证明这样的 **rot** v 是存在的，$(\mathbf{rot}\ v)_M \cdot n$ 表示出从方向 n 看去矢量场 v 在点 M 周围的涡旋程度．

旋度 **rot** v 有时也记成 **curl**v．

在直角坐标下，矢量场 $v = Pi + Qj + Rk$ 的旋度就是

$$\mathbf{rot}\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

证明这点是容易的. 若取 $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\boldsymbol{i} + \cos\beta\boldsymbol{j} + \cos\gamma\boldsymbol{k}$, L 的内部为平面区域, 记作 Σ, 则由 Stokes 公式及积分中值定理

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_{\widetilde{M}} \cdot A,$$

其中 $\widetilde{M}$ 为 Σ 上某点, 所以

$$(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v})_M \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{L\to M} \frac{\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s}{A} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}_M$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{n}.$$

分别取 $\boldsymbol{n}$ 为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 就得到 $(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v})_M$ 在坐标轴上的分量为

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

于是 Stokes 公式还可以写成: 设有矢量 $\boldsymbol{v}$, Σ 为场中一曲面, 边界是曲线 L, $\boldsymbol{n}$ 是 Σ 的单位法矢量, $\boldsymbol{t}$ 是 L 的单位切矢量, $\boldsymbol{n}$ 是在 $\boldsymbol{t}$ 的左边, 则

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}s = \iint_\Sigma (\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s.$$

此外容易验证: 若 α,β 为常数, φ 为函数, 则

1. $\mathbf{rot}\ (\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha \mathbf{rot}\ v_1 + \beta \mathbf{rot}\ v_2$;
2. $\mathbf{rot}\ \varphi v = \varphi \mathbf{rot}\ v + \mathbf{grad}\ \varphi \times v$;
3. $\mathrm{div}(v_1 \times v_2) = v_2 \cdot \mathbf{rot}\ v_1 - v_1 \cdot \mathbf{rot}\ v_2$;
4. $\mathbf{rot}(v_1 \times v_2) = (v_2 \cdot \nabla) v_1 - (v_1 \cdot \nabla) v_2 + v_1 \mathrm{div}\ v_2 - v_2 \mathrm{div}\ v_1$;
5. $\mathbf{rot}\ \mathbf{rot}\ v = \nabla(\nabla \cdot v) - \nabla^2 v$.

请读者自证.

再有两个恒等式也请读者证明之:

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\ u \equiv 0,$$

$$\mathrm{div}\mathbf{rot}\ v \equiv 0.$$

矢量场 v 的旋度也可以用 Nabla 算子 ∇ 来表示:

$$\mathbf{rot}\ v = \nabla \times v = i \times \frac{\partial v}{\partial x} + j \times \frac{\partial v}{\partial y} + k \times \frac{\partial v}{\partial z}.$$

例 2　设 O 是空间固定一点,$r = \overrightarrow{OM}$,则 $\mathbf{rot}\ r = 0$. 若 v 为常矢量,$r = |\overrightarrow{OM}|$,则

$$\mathbf{rot}\ rv = r\mathbf{rot}\ v + \mathbf{grad}\ r \times v$$

$$= 0 + \frac{v}{r} \times v = \frac{r \times v}{r}.$$

例 3　一刚体绕通过 O 点的一固定轴旋转,角速度为 ω,则在固定时刻,刚体中每一点 M 有一速度 $v = \omega \times \overrightarrow{OM} = \omega \times r$. 由于 ω 为常矢量,所以

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ v &= \mathbf{rot}\ (\omega \times r)\\ &= (r \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla) r + \omega \mathrm{div} r - r \mathrm{div}\omega\\ &= -(\omega \cdot \nabla) r + \omega \mathrm{div} r\\ &= -\omega + 3\omega = 2\omega.\end{aligned}$$

这也正好说明了旋度可能表示矢量场的旋转程度.

在三维空间中用来说明在高维空间中的区域(例如曲面、体)上的积分与在低维边界(例如曲线、曲面)上积分之间的关系就是这三个公式,即 Green 公式,Gauss 公式及 Stokes 公式. 对于高于三维的空间也有相应的 Stokes 公式,我们把刻画这种积分之间的关系的公式统称为 Stokes 公式,这些公式的物理意义已在这一节中讲清楚,这些公式实际上是微积分基本定理在高维空间的体现,也就是刻画了在高维空间中微分和积分是如何成为一对矛盾的. 详细的论述将在 7.6 中引进了外微分形式后再进行.

习题 7.4

1. 利用 Green 公式求下列曲线积分：

(1) $\oint_C xy^2dy - x^2ydx$, C：圆周 $x^2+y^2=a^2$，沿正方向；

(2) $\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy$, C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，沿正方向；

(3) $\oint_C e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$ C：由 $0<x<\pi, 0<y<\sin x$ 围成的区域边界，沿正方向；

(4) $\int_{AMO} (e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy$, AMO：由点 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$, $(y\geqslant 0)$；

(5) $\int_C (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$,

(i) C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，沿正方向.

(ii) C：$x^2+y^2=ax$，沿正方向.

2. 如果积分 $\int_C (yx^3+e^y)dx + (xy^3+xe^y-2y)dy$ 中 C 是对称于两坐标轴的闭曲线，证明积分值为 0.

3. 计算 $I=\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, C 为依正方向进行，而不经过坐标原点的简单封闭曲线.

(提示：研究两种情况：(1) 原点在围线外，(2) C 包围原点).

4. 利用 Gauss 公式计算下列积分

(1) $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, S：立方体 $0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant a, 0\leqslant z\leqslant a$ 的边界的外表面；

(2) $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$, S：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外表面；

(3) $\iint_S yzdxdy + zxdydz + xydzdx$, S：圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和平面 $x=0, y=0, z=0, z=H(H>0)$ 围成的曲面(在第一卦限)的外侧.

(4) $\iint_S xzdxdy + xydydz + yzdzdx$, S：由 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 围成的四面体的外表面；

(5) $\iint_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dzdx$, S：柱面 $x^2+y^2=1$ 及 $z=0, z=3$ 围成立体表面外侧.

5. 利用 Stokes 公式求下列积分：

(1) $\oint_C ydx + zdy + xdz$, C：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 若从 Ox 轴正向看去，圆周 C 反时针方向；

(2) $\oint_C (y+z)\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}z$, C:依参数 t 增大的方向通过椭圆 $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t, z = a\cos^2 t (0 \leqslant t \leqslant \pi)$;

(3) $\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$, C:椭圆 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1, \end{cases} (a > 0, b > 0)$, 若从 Ox 轴正向看去,椭圆反时针方向;

(4) $\int_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, C:圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ z = \dfrac{a}{2}, \end{cases}$ 若从 Oz 轴正向看去时,圆周取反时针方向.

6. 计算下列矢量场的散度和旋度.

(1) $A = (y^2 + z^2)\boldsymbol{i} + (z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$;

(2) $C = x^2yz\boldsymbol{i} + xy^2z\boldsymbol{j} + xyz^2\boldsymbol{k}$.

7. 计算:(1) $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,(x^2 + y^2 + z^2))$;

(2) $\mathrm{div}(\mathbf{grad}\, f(r))$(其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

8. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 是常矢量,计算下列矢量场的旋度:

(1) $f(r)\boldsymbol{c}$; (2) $\boldsymbol{r}$; (3) $f(r)\boldsymbol{r}$; (4) $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$; (5) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}$; (6) $\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}$.

9. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{c}$ 是常矢量,计算下列矢量场的散度:

(1) $\boldsymbol{r}$; (2) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$; (3) $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$;

(4) $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}$; (5) $f(r)\boldsymbol{c}$; (6) $\nabla f(r)$.

10. 求下列矢量场的旋度:

(1) 点电荷产生的静电场 $\boldsymbol{E}$;

(2) 刚体绕定轴等速转动产生的速度场 $\boldsymbol{v}$.

11. 利用曲线积分计算下列曲线围成的面积:

(1) 椭圆 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

(2) 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. 围成的区域;

(3) 旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. 与 Ox 轴所围成的区域.

7.5　全微分与线积分

7.5.1　与途径无关的曲线积分

所谓与途径无关的曲线积分乃指:在某一域 Σ 内取两点 A, B,由 A 到 B 在

Σ 内作一曲线 l，如果积分 $\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 仅与起点 A 及终点 B 有关而与怎样取曲线无关，这时称积分为与途径无关的曲线积分.

先讨论平面的情形，且设域 Σ 为单连通的，也就是说 Σ 中任一条闭曲线可以在这区域内连续地收缩为一点，换言之，这个区域是没有洞的. 假定 P, Q 在 Σ 内连续，且有连续偏微商，我们将证明：

$$\int_{(A)}^{(B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

与途径无关的充分必要条件为 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 这一条件被称为确切微分条件.

首先证明：$\int_{(A)}^{(B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与途径无关的充分必要条件是在 Σ 内部作任一闭曲线 l，皆有

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

如果两条途径 l_1 与 l_2 都从 A 到 B（图 7.51），且有

$$\int_{l_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{l_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

由此可得

$$\int_{l_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{l_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

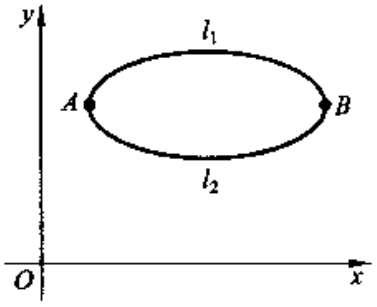

图 7.51

命 l 为这样一条闭曲线，先沿 l_1 由 A 到 B，再沿 l_2 从 B 到 A，如此则得

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$$

由此可知，沿任何封闭曲线 l 的积分都为零.

反之，容易证明：如果沿 Σ 内任何封闭曲线 l 的积分为零，则曲线积分 $\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 仅与端点有关.

现在再证：一曲线积分在 Σ 内沿任何闭曲线等于零的必要充分条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

由 Green 公式：若 l 为封闭曲线，则

$$\int_l P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以沿封闭曲线积分为零的条件又等价于对任意域 Σ

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

如果$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$，于是可以找到一点$(x_0, y_0)$，在这一点$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$，不妨假定在一点$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$，由于$\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$是连续的，故可作一以$(x_0, y_0)$为中心的小圆 Σ_0，使在 Σ_0 中$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geqslant c\ (>0)$. 如此则

$$\iint_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant c\Sigma_0 > 0,$$

这与假定矛盾，所以如果积分与途径无关，一定有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

反过来是显然的.

因此如果$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$在 Σ 中成立，则可设

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = U(x,y).$$

保持 y 不变，作为 x 函数，有

$$\begin{aligned} &U(x+\Delta x, y) - U(x,y) \\ &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

由于积分是与途径无关的，于是选取途径为联结(x,y)与$(x+\Delta x, y)$的直线段，这就得到

$$\begin{aligned} &U(x+\Delta x, y) - U(x,y) \\ &= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{x}^{x+\Delta x} P\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

即得 $\frac{\partial U}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} = P(x,y).$

同法可得

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y).$$

所以
$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

这说明如果$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$成立，则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是一个函数 $U(x,y)$ 的全微分，反之亦对. 所以微分形式 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某一函数 U 的全微分的必要充分条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

此时 U 由等式

$$U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + C$$

给出，C 为积分常数.

区域 Σ 的单连通性是不可缺少的，例如 Σ 为 $x^2 + y^2 > 0$，积分曲线为 $x^2 + y^2 = 1$，则

$$\oint \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.$$

但是
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

在 Σ 上是满足的. 所以会产生这种情形，是因区域 $x^2 + y^2 > 0$ 不是单连通的，原点是一孔，而积分曲线 $x^2 + y^2 = 1$ 的内部恰好就有原点.

例 解微分方程

$$(x + y + 1)\mathrm{d}x + (x - y^2 + 3)\mathrm{d}y = 0.$$

解 令 $P = x + y + 1$，$Q = x - y^2 + 3$，因为$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$，所以一定有 u 使得

$$\mathrm{d}u = (x + y + 1)\mathrm{d}x + (x - y^2 + 3)\mathrm{d}y.$$

因此，一方面由 $\mathrm{d}u = 0$ 可得 $u = C$（常数），另一方面考虑选取途径为折线段 OBM（图 7.52），则

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+y+1)\mathrm{d}x + (x-y^2+3)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\overline{OB}} + \int_{\overline{BM}} (x+y+1)\mathrm{d}x + (x-y^2+3)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x (x+1)\mathrm{d}x + \int_0^y (x-y^2+3)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y. \end{aligned}$$

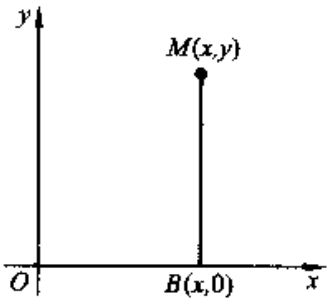

图 7.52

因此,微分方程的解为

$$3x^2 + 6x + 6xy - 2y^3 + 18y = C.$$

空间的曲线积分 $\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 只与端点有关而与途径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

在区域中处处成立. 这个结论的证明与平面的情形完全一样,只是用 Stokes 公式代替 Green 公式就是了.

7.5.2　有势场

设空间区域 V 中分布着一个矢量场 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(M)$,若有函数 $u = u(M)$ 使得 $\boldsymbol{v} = \mathrm{grad}\ u$ 在 V 中成立,则说 u 是 $\boldsymbol{v}$ 的势函数,$\boldsymbol{v}$ 是有势场. 若 $\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$,由于

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

即

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z},$$

因之

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

成立,即曲线积分与途径无关. 所以有 u 使得

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \mathrm{d}u,$$

即

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

为全微分,于是由 7.5.1 节立即得到:

(i) 若 $\boldsymbol{v}$ 为有势场,L_{AB} 是端点为 A, B 的在 V 中的一条曲线,则

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s = u(B) - u(A).$$

这里 $\boldsymbol{t}$ 是 L 上指向 B 端的单位切矢量(见 7.2.6 节)

(ii) 反之,若矢量场 $\boldsymbol{v}$ 的环流量与途径无关,只与途径的端点有关,则 $\boldsymbol{v}$ 为有势场.

(iii) $\boldsymbol{v}$ 为有势场当且仅当场中一切闭路上环流量为零.

(iv) $\boldsymbol{v}$ 为有势场当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 为无旋场(即 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}=0$). 这说明了旋度的重要意义. 另一方面,由于给定了矢量场 $\boldsymbol{v}$ 以后,$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v}$ 是可以计算的,所以这也是判别矢量场是否有势场的实际方法.

例 1 设 O 是一固定点,$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$,$r=|\overrightarrow{OM}|$. 证明有心场 $\boldsymbol{v}=\varphi(r)\boldsymbol{r}$ 是有势场.

证
$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = \varphi(r)\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\ \varphi(r) \times \boldsymbol{r}$$

$$= \mathbf{0} + \varphi'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r} \times \boldsymbol{r} = \mathbf{0}.$$

例 2 在一点 O 置一电荷 q,得一电场

$$\boldsymbol{E} = q\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|^3} = q\frac{\boldsymbol{r}_M}{r_M^3},$$

这是有心场,由例 2 知,这是有势场. 现求其势函数:图 7.53 中,F 是一固定点,$L_{M'M}$ 在同一球面上,M' 在射线 OF 延线上,于是

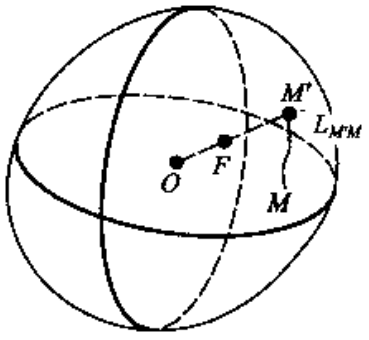

图 7.53

$$u(M) = \int_F^M \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s = \int_{\overline{FM'}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s + \int_{L_{M'M}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\overline{FM'}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{t}\mathrm{d}s = \int_{\overline{FM'}} q\frac{\boldsymbol{r}_p}{r_p^3} \cdot \frac{\boldsymbol{r}_p}{r_p}\mathrm{d}s$$

$$= q\int_{\overline{FM'}} \frac{\mathrm{d}s}{r_p^2} = q\int_{r_F}^{r_{M'}} \frac{\mathrm{d}r_p}{r_p^2},$$

(这是因为 $s = r_p - r_F$,所以 $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r_p$),于是(由于 $r_{M'} = r_M$)

$$u(M) = -\frac{q}{r_M} + \frac{q}{r_F} = -\frac{q}{r_M} + C.$$

按物理学的习惯,取 $U = \frac{q}{r_M}$,称 U 为 $\boldsymbol{E}$ 的势函数,则有 $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\ U$.

7.5.3　管型场

同样，设在闭区域 V 中分布着一个矢量场 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(M)$. 若有矢量 $\boldsymbol{b}$ 使得 $\boldsymbol{v}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$，则说 $\boldsymbol{v}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的旋度场，$\boldsymbol{b}$ 叫做 $\boldsymbol{v}$ 的矢量势. 可以有如下的结论：**矢量场 $\boldsymbol{v}$ 有矢量势（即 $\boldsymbol{v}$ 为旋度场）当且仅当** $\operatorname{div}\boldsymbol{v}\equiv 0$（**即 $\boldsymbol{v}$ 为无源场**）.

证　设 $\boldsymbol{v}$ 有矢量势 $\boldsymbol{b}$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}\equiv 0.$$

反之，若 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}\equiv 0$，则可用下列办法求出 $\boldsymbol{v}$ 的矢量势 $\boldsymbol{b}$. 设已知 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，而要求的 $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$. 于是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k},$$

即要解方程

$$\frac{\partial b_3}{\partial y}-\frac{\partial b_2}{\partial z}=P,\ \frac{\partial b_1}{\partial z}-\frac{\partial b_3}{\partial x}=Q,\ \frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=R.$$

取 $b_3=0$，则从第一个式子得到

$$b_2(x,y,z)=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,\mathrm{d}z,$$

从第二个式子得到

$$b_1(x,y,z)=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z+f(x,y).$$

将这两个式子代入第三个式子，由于 $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$，所以

$$R(x,y,z)=\frac{\partial b_2}{\partial x}-\frac{\partial b_1}{\partial y}=-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}z-\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z-\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$=R(x,y,z)-R(x,y,z_0)-\frac{\partial f}{\partial y}.$$

所以可取

$$f(x,y) = -\int_{y_0}^{y} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y.$$

最后得到

$$\boldsymbol{b} = \left\{\int_{z_0}^{z} Q\,\mathrm{d}z - \int_{y_0}^{y} R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y\right\}\boldsymbol{i} - \int_{z_0}^{z} P\,\mathrm{d}z\boldsymbol{j}.$$

使得 $\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$ 注意 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \mathbf{grad}u$. 所以矢量势的存在不是唯一的,一个矢量场的两个矢量势相差一个梯度.

例 设 $\boldsymbol{v} = (xy+1)\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$. 证明 $\boldsymbol{v}$ 是旋度场,并求出其矢量势.

解 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = y + 0 - y = 0$,

所以 $\boldsymbol{v}$ 是旋度场. 为了求矢量势 $\boldsymbol{b}$,解方程

$$\frac{\partial b_3}{\partial y} - \frac{\partial b_2}{\partial z} = xy + 1,$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial z} - \frac{\partial b_3}{\partial x} = z,$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = -yz.$$

取 $b_3 = 0$,由第一式得到

$$b_2 = -\int_0^z (xy+1)\,\mathrm{d}z = -(xy+1)z,$$

由第二式得到

$$b_1 = \int_0^z z\,\mathrm{d}z + f(x,y) = \frac{z^2}{2} + f(z,y).$$

将这两个式子代入第三式得

$$-yz = \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = -yz - \frac{\partial f}{\partial y},$$

故可取 $f = 0$,这样就得到

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{2}z^2\boldsymbol{i} - (xy+1)z\boldsymbol{j}.$$

前面已经证明:旋度场就是无源场. 我们进一步证明:**矢量场 $\boldsymbol{v}$ 为无源场当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 在任何闭曲面上的通量为零.**

证 设 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} \equiv 0$,$\Sigma$ 是封闭曲面,围成区域 V,由 Gauss 公式(参阅 7.4.2 节)

$$\oint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iiint_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = 0.$$

反之，设 $\boldsymbol{v}$ 在任何闭曲面上的通量为 0，M 为场中任何一点，围绕 M 作闭曲面 Σ，围成闭区域 V（体积也记作 V），用 Gauss 公式及积分中值定理

$$0 = \oint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iiint_{V} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathrm{d}V = (\operatorname{div} \boldsymbol{v})_{\widetilde{M}} \cdot V,$$

其中 $\widetilde{M}$ 是 V 中某点. 因此得 $(\operatorname{div} \boldsymbol{v})_{\widetilde{M}} = 0$. 令 Σ 收缩成 M，则 $\widetilde{M} \to M$，便得 $(\operatorname{div} \boldsymbol{v})_{M} = 0$. 由于 M 是场中任意一点，故场是无源的.

设有无源场 $\boldsymbol{v}$（图 7.54），在场中作一流管（流线形成的管子）Σ，管的一端截面为 Σ_1，另一端是截面 Σ_2，$\boldsymbol{n}$ 是单位法矢量，在 Σ_1 上向内，在 Σ_2 上向外，则

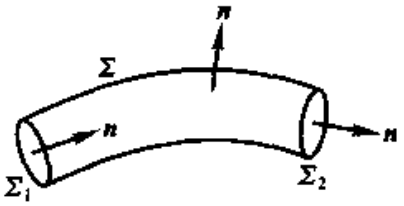

图 7.54

$$-\iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = 0.$$

因为 Σ 是流线形成的，所以在 Σ 上，$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$，于是

$$\iint_{\Sigma_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

如果把 $\boldsymbol{v}$ 设想为流速场，这一等式是说：从管的一端流进的数量等于从另一端流出的，故无源场又名管型场. 无源场的这个意义同最初对散度的设想是符合的.

习题 7.5

1. 验证下列积分与路径无关，并求出其值.

(1) $\int_{(0,1)}^{(3,3)} (x+y)\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2}$;

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(4) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$;

(5) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \dfrac{xy}{z^2}\mathrm{d}z$;

(6) $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$，这里 f 具有连续微商.

2. 检验下列方程是否为全微分方程，并解之.

(1) $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0$;

(2) $2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=0$;

(3) $\mathrm{e}^y\mathrm{d}x+(x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y=0$;

(4) $(1+x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x+(-1+\sqrt{x^2+y^2})y\mathrm{d}y=0$.

3. 证明：场 $\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+zx(2y+z+x)\boldsymbol{j}+xy(2z+x+y)\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求其势函数.

4. 证明：有心力场 $\boldsymbol{F}=f(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ 是有势场，并求其势函数.

5. 下列各矢量场是有势场，无源场，还是调和场(即既是有势又是无源)?

(1) $\boldsymbol{a}=(xy+y^2)\boldsymbol{i}+x^2y\boldsymbol{j}$;

(2) $\boldsymbol{a}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(4y+x+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$;

(3) 点电荷产生的静电场 $\boldsymbol{E}$;

(4) 无穷长直导线产生的磁场 $\boldsymbol{H}$;

(5) 引力场.

6. 验证下列各场 $\boldsymbol{a}$ 是无源场.

(1) $\boldsymbol{a}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{a}=xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+yz\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{a}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-z)\boldsymbol{k}$.

7.6 外微分形式

7.6.1 外乘积、外微分形式

在前面的几节中，出现了线积分、面积分与体积分等，与之同时出现的是一些微分形式. 例如在线积分

$$\int A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z$$

中就出现微分 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的一次式：

$$\omega=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z$$

称为一次微分形式，在面积分

$$\iint P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中就出现了微分 dx,dy,dz 的二次式：

$$\alpha = P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

称为二次微分形式；在体积分

$$\iiint H\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

中就出现了微分的三次式

$$\lambda = H\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

称为三次微分形式.

在我们所讨论的三度空间中，能出现的微分形式就是这三种，再加上零次微分形式即函数 f. 值得注意的是所有出现的这些微分形式中都不出现像 $\mathrm{d}x\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}y$、…，即至少有两个相同的 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的项，而每个形式中只包含具有不同的 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的项.

此外，我们还有了联系这些线、面、体积分的三个基本公式，即

（1）Green 公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里 D 为 L 围成的闭区域. P,Q 为 D 上的具有一阶连续偏微商的函数.

（2）Gauss 公式

$$\oint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

这里 V 是由封闭曲面 Σ 围成的闭区域. 函数 P,Q,R 为 V 上有一阶连续偏微商的函数.

（3）Stokes 公式：

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里封闭曲线 L 为曲面 Σ 的边界，P,Q,R 为 Σ 上具有一阶连续偏微商的函数.

这表面上看来很不相像的上述三个公式，它们之间有没有什么联系？它们

的本质是什么？能不能用统一的公式将它们概括起来，以至使之能在更高维的空间中也有这样的公式？

此外，我们还介绍了场论的三个“度”，即梯度，旋度与散度. 若 u 为数量场，$\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 为矢量场，则它们的意义为：

$$\mathbf{grad}\ u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

这三个“度”的物理意义是十分重要的，已在前面作了阐述. 从数学上来看，这三个“度”是怎样产生的，它的意义如何？还有没有其他的“度”？

在单变量微积分中，说清楚微分与积分是一对矛盾的是微积分基本定理，即 Newton – Leibniz 公式. 到了多变量微积分时，这对主要矛盾是怎样体现的？

所有这些，都必须在引入外微分形式之后才能清楚.

什么是外微分形式？

首先我们看到线、面积分的区域都是有方向的（指第二种线、面积分，以后都是这样，不另作申明）. 把一重、二重积分看作线、面积分的特殊情形，则它们的积分区域也是有方向的. 同样对三重积分也可以定向. 例如一条曲线 L 的端点为 A、B，那么对它有两种定向的办法，或是由 A 到 B，或是由 B 到 A. 有了定向之后，从 A 到 B 的线积分与从 B 到 A 的线积分差一符号，也就是曲线的长度可以有正有负. 这事在单变量积分时也早已有了：

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

关于曲面，也有个定向的问题. 假设所讨论的曲面可以分为内外两侧，也就是法线从一点出发连续移动，当回到原来位置时法线方向不变，于是可以有法线向外或向内两种定向的办法. 这里值得注意的是，的确存在这样的曲面，它只有一侧，即法线从一点出发走了一些路后回到原来的位置，法线的方向指向另一面了. 例如把一矩形纸条 $ABCD$ 的一对对边拧转粘上，即将 A 与 C 重合，B 与 D 重合.（图 7.55，7.56），这样的曲面就无法分出内外两侧了. 这种曲面就不可定向. 我们不讨论这种曲面，面只讨论可定向的曲面. 在曲面定向后，不同方向的积分值

差一符号，也就是曲面的面积在面积元素定向之后有正有负. 对于三维空间中的区域也可给予定向. 再回忆一下二重积分的下述定义：如 $f(x,y)$ 在 D 中有定义，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}A = \lim \sum f(\xi_i,\eta_i)\,\Delta A_i$$

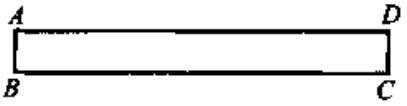

图 7.55

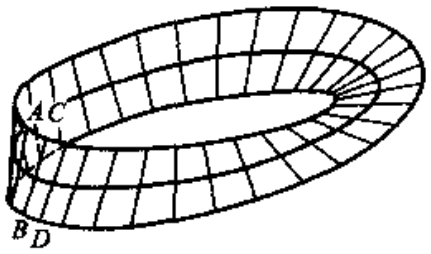

图 7.56

这里 ΔA_i 为面积元素，由于没有对 D 定向，所以总假定是正的. 因此，进行变数变换

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases}$$

则

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

即为了保持面积元素还是正的，必须对雅可比行列式取绝对值. 但是对于在已经定向的面积元素的曲面进行积分时，由于面积元素本来就可正可负，所以就没有必要对雅可比行列式取绝对值了，即此时

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

此处 D 是已经定了向的. D' 为由 D 经过变换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$ 的逆变换得到的区域，当然也是定了向的. 于是

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

从这里可以得到：

(i) 如果取 $y=x$,则

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = 0.$$

(ii) 如果将 x,y 对换,则

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\partial(y,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

所以此时 $\mathrm{d}y\mathrm{d}x \neq \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,也就是说 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 在乘积中的次序不能颠倒,如要颠倒就要差一符号.

满足上述两条规则的微分乘积称为微分的外乘积,为了表示与普通乘积不一样,用记号 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 来记它,即

$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$(两个相同的微分外乘积为零);

$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$(两个不同微分的外乘积交换次序差一符号).

当然 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = 0$ 是 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ 的推论.

普通的两个不相同的微分乘积变换次序是不变的,即 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}y\mathrm{d}x$. 但微分的外乘积就不一样了.

由微分的外乘积乘上函数组成的微分形式称为外微分形式,例如若 P,Q,R,A,B,C,H 为 x,y,z 的函数,则

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

为一次外微分形式(由于一次没有乘积,与普通的微分形式是一样的).

$$A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

为二次外微分形式.

$$H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

为三次外微分形式. 而 P,Q,R,A,B,C,H 等称为微分形式的系数.

例如：$\sin y\mathrm{d}x+\tan z\mathrm{d}y+\cos x\mathrm{d}z$ 是一次外微分形式；$z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$ 为二次外微分形式，$\mathrm{e}^{x+y+z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 为三次外微分形式.

对任意两个外微分形式 λ、μ 也可以定义外乘积 $\lambda\wedge\mu$，只要相应的各项外微分进行外乘积就可以了. 例如：A,B,C,E,F,G,P,Q,R 为 x,y,z 的函数，

$$\lambda=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z,$$

$$\mu=E\mathrm{d}x+F\mathrm{d}y+G\mathrm{d}z,$$

$$\nu=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

则

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\mu&=(A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z)\wedge(E\mathrm{d}x+F\mathrm{d}y+G\mathrm{d}z)\\&=AE\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x+BE\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x+CE\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+AF\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+BF\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y+CF\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\\&\quad+AG\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z+BG\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+CG\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x=\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y=\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0,$$

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\mu&=(BG-CF)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(CE-AG)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+(AF-BE)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned}\lambda\wedge\nu&=(A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z)\wedge(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)\\&=AP\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+BP\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+CP\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&\quad+AQ\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+BQ\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+CQ\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&\quad+AR\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+BR\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+CR\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}z=0,$$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z=0.$$

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=-\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z$$

$$= (-1)^2 dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz,$$

$$dz \wedge dz \wedge dx = 0, dx \wedge dx \wedge dy = 0,$$

$$dy \wedge dx \wedge dy = -dy \wedge dy \wedge dx = 0,$$

$$dz \wedge dx \wedge dy = -dx \wedge dz \wedge dy$$

$$= (-1)^2 dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz,$$

所以 $$\lambda \wedge \nu = (AP + BQ + CR)dx \wedge dy \wedge dz.$$

有了这个定义后,立刻可得到:外微分形式的外乘积满足分配律及结合律,即如果 λ, μ, ν 为任意三个外微分形式,则

(1) $(\lambda + \mu) \wedge \nu = \lambda \wedge \nu + \mu \wedge \nu$;

$\lambda \wedge (\mu + \nu) = \lambda \wedge \mu + \lambda \wedge \nu$;

(2) $\lambda \wedge (\mu \wedge \nu) = (\lambda \wedge \mu) \wedge \nu$.

当然外微分形式的外乘积不满足交换律,而满足

(3) 若 λ 为 p 次外微分形式,μ 为 q 次外微分形式,则

$$\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq} \lambda \wedge \mu \quad \text{(请读者证明这点)}.$$

按照(1) $dx \wedge dx = 0$,

(2) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$.

的规律进行的外乘积,实际上以前我们早已遇到过,例如在第五章中,两个矢量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的外乘积(矢量积)就是服从这个规律的,即 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$. 所以对微分进行外乘积就好像对矢量进行外乘积(矢量积).

7.6.2 外微分运算,Poincaré 引理及其逆

对外微分形式 ω 可以定义外微分算子 d,对于零次外微分形式,即函数 f,定义

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

即是普通的全微分算子. 对于一次外微分形式

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

定义 $$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz,$$

即对 P, Q, R 进行外微分,然后进行外乘积. 由于

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz,$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz,$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz,$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dz. \end{aligned}$$

由于　　$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0,$

以及　　$dy \wedge dx = -dx \wedge dy, dz \wedge dy = -dy \wedge dz,$

$$dx \wedge dz = -dz \wedge dx,$$

所以

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy. \end{aligned}$$

对于二次外微分形式

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

也是一样，定义

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy.$$

将 dA, dB, dC 的式子代入上式，利用外乘积的性质，立刻得到

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz.$$

对于三次外微分形式

$$\omega = H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

也是一样定义：

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}H \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

而

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial H}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial H}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial H}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial H}{\partial y}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

这是因为每一项中至少有两个微分是相同的. 于是在三维空间中任意三次外微分形式的外微分为零. 在这些规定下，外微分算子 d 与普通的微分算子是一样的了，即对每一项进行运算，在每一项中分别对每一个因子进行运算，其余因子不动，将得出的各项相加. 不同的只是外微分算子 d 是运算之后进行外乘积，而普通的微分算子是运算之后进行通常的乘积.

关于外微分算子，立即可得重要的 **Poincaré 引理：若 ω 为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏微商，则** $\mathrm{dd}\omega = 0$.

证 由于只在三维空间中讨论，而三维空间中的外微分形式不外乎有以下四种：即零次外微分形式即函数 f，以及一、二和三次微分形式：

$$\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

$$\omega_2 = A\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + B\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,$$

$$\omega_3 = H\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

分别对它们一一验证就是了.

先看零次外微分形式 $\omega = f$，有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{dd}\omega = \mathrm{dd}f = \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \wedge \mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z.$$

由于

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}z = 0,$$

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z = -\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x,$$

所以

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

但假设f具有二阶连续偏微商，故

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z},$$

故

$$\mathrm{d}\mathrm{d}f = 0.$$

同样对于一次形式ω_1，

$$\mathrm{d}\omega_1 = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

于是

$$\mathrm{d}\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = 0.$$

对于二次形式 ω_2，

$$d\omega_2 = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy$$

这是个三次形式，前面已证任意三次形式的外微分为零，故 $dd\omega_2 = 0$.

至于三次形式 $\omega_3 = H dx \wedge dy \wedge dz$，前已证明得 $d\omega_3 = 0$，所以当然有 $dd\omega_3 = 0$.

反过来，还可以有

Poincaré 引理之逆：若 ω 是一个 p 次外微分式且 $d\omega = 0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 a，使 $\omega = da$.

证明实际上已在 7.5.2，7.5.3 中进行了. 在这里还再仔细给出它的证明：

ω 可能是一次形式，二次形式或三次形式.

如果 ω_3 是三次形式，那么 ω_3 只可能是

$$\omega_3 = H dx \wedge dy \wedge dz.$$

于是取 $\alpha_0 = \int_0^x H(t,y,z)\,dt$，则 $\alpha_2 = \alpha_0 dy \wedge dz$ 就是 $\omega_3 = d\alpha_2$ 的解. 这只要直接验证就是了.

如果 ω_2 是二次形式，那么 ω_2 可以写成

$$\omega_2 = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy.$$

由于 $d\omega_2 = 0$，所以

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = 0,$$

故

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

显然

$$d\left(\int_0^y A(x,t,z)\,dt dz\right)$$

$$= A(x,y,z)\,dy \wedge dz + \int_0^y \frac{\partial A(x,t,z)}{\partial x} dt dx \wedge dz,$$

$$d\left(\int_0^y -C(x,t,z)\,dt dx\right)$$

$$= -C(x,y,z)\,dy \wedge dx - \int_0^y \frac{\partial C(x,t,z)}{\partial z} dt dz \wedge dx.$$

于是

$$\mathrm{d}\Big(\int_0^y A(x,t,z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z - \int_0^y C(x,t,z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\Big)$$

$$= A(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$- \int_0^y \Big(\frac{\partial A(x,t,z)}{\partial x} + \frac{\partial C(x,t,z)}{\partial z}\Big)\mathrm{d}t\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$= A(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$+ \int_0^y \frac{\partial B(x,t,z)}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$= A(x,y,z)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + C(x,y,z)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$+ B(x,y,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - B(x,0,z)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x.$$

所以取一次形式

$$\alpha_1 = \int_0^y A(x,t,z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}z - \int_0^y C(x,t,z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$+ \int_0^y B(x,0,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

就得

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \omega_2.$$

如果 ω_1 是一次形式,那么 ω_1 可以写成

$$\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

由于 $\mathrm{d}\omega_1 = 0$,所以

$$\mathrm{d}\omega_1 = \Big(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\Big)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \Big(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\Big)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

$$+ \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

于是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

取

$$f(x,y,z) = \int_0^x P(t,y,z)\,\mathrm{d}t,$$

那么

$$\mathrm{d}f = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \int_0^x \frac{\partial P(t,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}t\mathrm{d}y$$

$$+\int_0^x \frac{\partial P(t,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}t\mathrm{d}z = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^x \frac{\partial Q(t,y,z)}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y + \int_0^x \frac{\partial R(t,y,z)}{\partial t}\mathrm{d}t\mathrm{d}z$$

$$= P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$- Q(0,y,z)\,\mathrm{d}y - R(0,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

所以只要取

$$\alpha = \int_0^x P(t,y,z)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(0,t,z)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(0,0,t)\,\mathrm{d}t,$$

就有 $$\mathrm{d}\alpha = \omega_1.$$

这样就证明了 Poincaré 引理之逆.

在这个证明过程中,读者可以发现,我们已经作了这样的假定:所涉及的区域是有限或无限的长方体. 如果没有这个假定,证明中所出现的积分不一定存在. 这个假定对区域的要求太高,可作如下降低:

1. 对一次微分形式 ω_1,如果区域中任一条闭曲线都可在区域内连续变动收缩为区域中的一点(这时可自由使用 Stokes 公式),那么当 $\mathrm{d}\omega_1 = 0$ 时便存在零次微分形式 α 使 $\mathrm{d}\alpha = \omega_1$.

2. 对二次微分形式 ω_2,如果区域是"星形区域"(即:可在区域中找到一点 P_0,对于区域中的任何一点 P,线段 $\overline{PP_0}$ 都完全落在区域内),那么当 $\mathrm{d}\omega_2 = 0$ 时便存在一次微分形式 α_1 使 $\mathrm{d}\alpha_1 = \omega_2$.

这些结论的证明不再介绍了.

7.6.3 梯度、旋度与散度的数学意义

有了这些准备之后,用外微分形式来重新叙述前几节的结果,就一目了然了.

首先来看看梯度、旋度与散度在外微分形式的意义下是怎样一回事:

先看零次外微分形式 $\omega = f$. 零次外微分形式的外微分

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

而 f 的梯度为

$$\mathbf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

所以梯度与零次外微分形式的外微分相当.

再看一次外微分形式

$$\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

它的外微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z & \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x & \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

而矢量 $\boldsymbol{u} = (P, Q, R) = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 的旋度为

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

所以旋度与一次外微分形式的外微分相当.

再看二次外微分形式

$$\omega_2 = A\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + B\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + C\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

于是 ω_2 的外微分为

$$\mathrm{d}\omega_2 = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,$$

而矢量 $\boldsymbol{v} = (A, B, C)$ 的散度为

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}.$$

所以散度与二次外微分形式的外微分相当.

从这个观点来看还有没有可能产生具有这种性质的其他的“度”？很明显

在三维空间中这是不可能了,因为在三维空间中,三次外微分形式的外微分为零,所以不可能再有与之相当的"度"了. 所以从这个观点看,在三维空间只能有这三个度,即梯度、旋度与散度. 它们与外微分形式的对应关系可列表如下:

外微分形式的次数	对应的度
0	梯度
1	旋度
2	散度

此外,Poincaré 引理 $\mathrm{dd}\omega = 0$ 也有其场论意义. 当 ω 为零次外微分形式,即 $\omega = f$,则 $\mathrm{dd}f = 0$,就是

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{grad}\ f = \mathbf{0}.$$

当 ω 为一次外微分形式,即 $\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$,记 $\boldsymbol{u} = (P,Q,R)$,那么 $\mathrm{dd}\omega_1 = 0$,也就是

$$\mathrm{div}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{u} = 0.$$

同样 Poincaré 引理之逆也有其场论的意义. 从第五节知道:$\boldsymbol{v}$ 为有势场的充分必要条件是 $\boldsymbol{v}$ 为无旋场,即 $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\ f$ 的充要条件为 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{v} = 0$. 这就是 Poincaré 引理及其逆,$\mathrm{d}\omega = 0$ 必有 $\omega = \mathrm{d}\alpha$,即如果一次微分形式的外微分为零,则此外微分形式一定是一个函数(零次外微分形式)的外微分.

同样,如果 $\boldsymbol{v}$ 为旋度场,当且仅当 $\boldsymbol{v}$ 为无源场,即 $\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}\ \boldsymbol{b}$ 当且仅当 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{v} = 0$. 这就是 Poincaré 引理及其逆,$\mathrm{d}\omega = 0$ 必有 $\omega = \mathrm{d}\alpha$,即如果二次外微分形式的外微分为零,则此外微分形式一定是一个一次的外微分形式的外微分.

7.6.4 多变量微积分的基本定理(Stokes 公式)

有了外微分形式,就可以说清楚在高维空间中微分与积分如何成为一对矛盾了.

先看 Green 公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

如果记 $\omega_1 = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$,则 ω_1 为一次外微分形式,于是

$$\mathrm{d}\omega_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

由于线积分的曲线 L 是定向的,所以 Green 公式可以写成

$$\oint\omega_1 = \iint \mathrm{d}\omega_1.$$

同样 Gauss 公式为：

$$\oint\!\!\!

式写出来,即

$$\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega,$$

这里 ω 为外微分形式,$\mathrm{d}\omega$ 为 ω 的外微分,Σ 为 $\mathrm{d}\omega$ 的封闭的积分区域,$\partial\Sigma$ 表示 Σ 的边界,$\int$ 表示区域有多少维数就是多少重数.

从这里还可以看到,除了 Green 公式,Gauss 公式与 Stokes 公式以外,联系区域与其边界的积分公式不会再有了,因为三维空间中,三次外微分形式的外微分为零.

这个一般的公式

$$\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega$$

可以推广到更高维的空间去,可推广到更一般的流形上去(什么叫流形不在此解释了),而这个一般的公式揭露了高维空间的微分与积分是如何成为一对矛盾的. 这对矛盾的一方为外微分形式 $\mathrm{d}\omega$,另一方为线、面、体积分. 这个公式是说高次的外微分形式 $\mathrm{d}\omega$ 在区域上的积分等于低一次的外微分形式 ω 在区域的低一维空间的边界上的积分. 外微分运算与积分起了相互抵消作用,就像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方相互抵消一样. 在一维空间中这就是微积分的基本定理

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\mathrm{d}x = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a),$$

这里 Σ 为直线段 $[a,b]$,$\partial\Sigma$ 为 Σ 的边界,这时就是端点 a 与 b,$\mathrm{d}\omega$ 就是 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$.

公式

$$\int_{\partial\Sigma}\omega = \int_{\Sigma}\mathrm{d}\omega$$

统称为 Stokes 公式,所以在高维空间,Stokes 公式就是高维空间的微积分基本定理,相当于一维空间的 Newton – Leibniz 公式,而这是一维空间的微积分的基本定理.

综上所述,对三维空间,可列表如下:

外微分形式的次数	空　间	公　式
0	直线段	Newton – Leibniz 公式
1	平面区域	Green 公式
1	空间曲面	Stokes 公式
2	空间中区域	Gauss 公式

最后必须申明,这一节的着眼点不是数学上的严格,而是希望对于外微分形式有一个比较直观的了解,在这个了解的基础上,可以用来加深对以往学过的内容有一个比较深入的本质的认识,从而搞清楚在高维空间中微分与积分这对矛盾是如何体现的.有了这一节的认识,再来学习严格的用外微分形式来写的多变量微积分大概是不会有多大困难了.

有了对高维空间中的微分与积分如何成为一对矛盾的认识以后,再回过头来看第六、七章的内容可以更清楚了.限于篇幅,不在此一一详述了,读者可以按照第一至四章的系统自己好好想一想.

最后还要强调的是:这里所说的 Stokes 公式是微积分的顶峰.从理论上讲,这是微积分的终点,也是微积分从古典走向现代的入口处.在现代数学中,微积分的各种定理中,这条定理也许是用得最多定理之一.在数学上,这是一条少有的简洁、美丽而深刻的定理.

习题 7.6

1. 计算下列外乘积:

(1) $(x\mathrm{d}x + 7z^2\mathrm{d}y) \wedge (y\mathrm{d}x - \sin 3x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$;

(2) $(5\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y) \wedge (3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y)$;

(3) $(6\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + 27\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x) \wedge (\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$.

2. 计算下列外微分:

(1) $\mathrm{d}(\cos y\mathrm{d}x - \sin x\mathrm{d}y)$;

(2) $\mathrm{d}(2xy\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y)$;

(3) $\mathrm{d}(6z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - xy\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z)$.

3. 设 λ 为 p 次外微分形式,μ 为 q 次外微分形式.证明:

(1) $\mu \wedge \lambda = (-1)^{pq}\lambda \wedge \mu$;

(2) $\mathrm{d}(\mu \wedge \lambda) = \mathrm{d}\mu \wedge \lambda + (-1)^q \mu \wedge \mathrm{d}\lambda$.

4. 设 $\omega = \sum a_{ij}\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$,$a_{ij} = -a_{ji}$.证明

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{3}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_k \wedge \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j.$$

第八章

多变量微积分的一些应用

多变量微积分的应用是很广泛的,这里只是举一些例子,使读者对如何应用它来解决实际问题有所启发.

8.1 Taylor(泰勒)展开与极值问题

8.1.1 多变量函数的 Taylor 展开

与单变量函数一样,也有多变量函数的 Taylor 展开. 这里只考虑两个变量 x,y 的函数 $u=f(x,y)$ 的 Taylor 展开,至于更多个变量的函数的 Taylor 展开是完全一样的.

设 $u=f(x,y)$ 是定义在某一平面区域 D 中的一个函数,在 D 中有直到 $n+1$ 阶的各种形式的连续偏微商. 在 D 中取一点 $M_0(x_0,y_0)$. 取 h,k 充分小,使得点 (x_0+h,y_0+k) 和 M_0 的联线都落在 D 内. 定义 $\varphi(t)=f(a+th,b+tk)$,于是 $\varphi(0)=f(a,b)$,$\varphi(1)=f(a+h,b+k)$. 这样 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处有 Taylor 展开(参阅第 3.3 节)

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

而 $0<\theta<1$.

另一方面

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f,$$

因面得出

$$\varphi^{(p)}(t)=\frac{\mathrm{d}^p\varphi}{\mathrm{d}t^p}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f=\sum_{r=0}^{p}c_p^r h^r k^{p-r}\frac{\partial^p f}{\partial x^r\partial y^{p-r}},$$

故

$$\varphi^{(p)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}},$$

及

$$\varphi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}.$$

代入原式即得 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的 Taylor 展开为：

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}} \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a+\theta h\\y=b+\theta k}}. \\ &\quad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

多于两个变量时，所得的 Taylor 展开完全是相同形式的. 显然，Taylor 展开是一个局部性质，即在一点的 Taylor 展开仅与在这点及其很小的邻域有关，而与别处无关.

8.1.2　多变量函数的极值问题

先看两个变量的函数. 假定 $f(x,y)$ 在域 D 内定义，并且 (a,b) 是 D 的内部的点. 如果 (a,b) 有一个邻域，$f(a,b)$ 常不小于邻域中的其他的 $f(x,y)$，即 $f(x,y)\leqslant f(a,b)$ 在邻域中成立，则 $f(a,b)$ 称为极大. 同样方法可定义极小. 显然极大、极小都是局部性质.

例如 $f(x,y)=3x^2+4y^2$ 在 $(0,0)$ 点有极小值. 因在点 $(0,0)$ 周围，函数值均大于零，而在 $(0,0)$ 点函数值为零.

又如 $f(x,y)=xy$ 在 $(0,0)$ 点处既不取极大值也不取极小值. 这是因为函数在 $(0,0)$ 点的值为零，而在该点的近旁总能找到使函数值为正的点，也能找到使函数值为负的点，因此不满足极值定义的要求. 从图形上看，$z=xy$ 表示双曲抛物面，它在 $(0,0,0)$ 点呈马鞍形，所以在 $(0,0)$ 点不取极值.

假定 $f(x,y)$ 有连续偏微商，以下用到偏微商多少次，就假定它有多少次.

考虑函数

$$\varphi(t) = f(a+\lambda t, b+\mu t),$$

只要 λ,μ 不同时为零，它是 t 的函数. 如果 $f(x,y)$ 在 $x=a,y=b$ 处取极大值，则 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处取极大值. 因此，$\varphi'(0)=0$，即

$$\varphi'(0) = \left[\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=a\\y=b}} = 0.$$

特别取 $\lambda=1,\mu=0$ 及 $\lambda=0,\mu=1$，可得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = 0.$$

由此可见,$f(x,y)$在(a,b)(D的内点)为极大值或极小值只有当在该点的每个偏微商等于零时才有可能. 又

$$\varphi''(0) = \left(\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}}.$$

如果对所有的λ、μ(λ、μ不同时为零)常有$\varphi''(0)<0$,那么$\varphi(t)$在$t=0$取极大值,即$f(x,y)$在(a,b)取极大值.

记

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = A, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = B, \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = C,$$

则问题成为A、B、C在什么情况下,对任意不同时为零的λ,μ,常有

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 < 0.$$

取$\lambda=1,\mu=0$,得$A<0$. 又

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 = A\left(\lambda + \frac{B}{A}\mu\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\mu^2,$$

所以还要求$C-\frac{B^2}{A}<0$. 不然,取$\mu=1,\lambda=-\frac{B}{A}$,则

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 \geqslant 0.$$

反之,如果$A<0, C-\frac{B^2}{A}<0$,则当λ,μ不全为零时,有

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 < 0,$$

因而得出:如果在$x=a,y=b$这一点

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0,$$

则$f(x,y)$在这一点取极大值.

同样,如果在$x=a,y=b$这一点

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x} > 0,\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0,$$

则$f(x,y)$在这一点取极小值.

如果在点$x=a,y=b$,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) > 0,$$

则在这一点不取极大,也不取极小.

证明这点是很容易的,因为此时方程 $A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2=0$ 有实数解:

$$\lambda=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}\mu.$$

对这样的 $\lambda,\mu,\varphi''(0)=0$. 并可取 λ,μ 使 $\varphi''(0)>0$,也可取 λ,μ 使 $\varphi''(0)<0$,所以不取极大,也不取极小.

如果在点 $x=a,y=b$,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0$$

则在(a,b)是否取极大极小值不能确定,还要看 $\varphi'''(0)$及 $\varphi^{(4)}(0)$等等的值.

因此,对于求区域 D 上定义的函数$f(x,y)$的极大、极小值点可以如下进行:首先解方程

$$f'_x(x,y)=0,\ f'_y(x,y)=0.$$

如 a,b 是以上方程的解之一,则命

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}=A,\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x\partial y}=B,\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}=C.$$

如果 $B^2-AC<0$,且 $A<0$,则$f(x,y)$在点(a,b)取极大值;

如果 $B^2-AC<0$,且 $A>0$,则$f(x,y)$在点(a,b)取极小值;

如果 $B^2-AC>0$,则$f(x,y)$在点(a,b)既不取极大值也不取极小值;

如果 $B^2-AC=0$,则进一步讨论 $\varphi'''(0),\varphi^{(4)}(0)$.

例 1　求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值点.

解　从$\begin{cases}f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0,\\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0,\end{cases}$

可以得到四组解:

$$M_1(1,0),M_2(1,2),M_3(-3,0),M_4(-3,2).$$

再算二阶偏导数

$$A=f''_{xx}(x,y)=6x+6,\ B=f''_{xy}(x,y)=0,$$

$$C=f''_{yy}(x,y)=-6y+6.$$

在 $M_1(1,0),A=12,B=0,C=6$,这时 $A=12>0$,以及 $B^2-AC=-72<0$,所以 $M_1(1,0)$为极小值点;在 $M_2(1,2),A=12,B=0,C=-6$,这时 $A=12>0$,但 $B^2-AC=72>0$,所以 $M_2(1,2)$不是极值点;在 $M_3(-3,0),A=-12,B=0,C=6$,这时 $A=-12<0$,但 $B^2-AC=72>0$,所以 $M_3(-3,0)$不是极值点;在 $M_4(-3,$

2),$A=-12$,$B=0$,$C=-6$,这时 $A=-12<0$,而 $B^2-AC=-72<0$,所以 $M_4(-3,2)$是极大值点.

例 2 求 $u=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$的最大值,此处 x 与 y 适合 $x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$,$x+y\leqslant 2\pi$.

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x-\cos(x+y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y-\cos(x+y)=0,\end{cases}$$

得到 $x=y=\dfrac{2\pi}{3}$,此时 $u=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. 而在区域的周界 $x=0$,$y=0$ 及 $x+y=2\pi$ 上,$u=0$,故在$\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$函数达到最大值.

例 3 最小二乘法.

这是广泛用以整理观测数据的一个方法.

设有 $n>2$ 个线性方程

$$a_ix+b_iy=d_i\quad(1\leqslant i\leqslant n),$$

这些 a_i,b_i,d_i 是由经验或实验的方法得来的(例如测量得来的数据),要求根据这些数据来确定 x,y 的值. 假定$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$,从前两个方程解出的 x,y,一般并不满足其余的方程. 我们要求 x,y,使

$$w=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(a_ix+b_iy-d_i)^2$$

最小.

用上面介绍求极小值的办法,解方程

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\sum_{i=1}^{n}a_i(a_ix+b_iy-d_i)=0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=2\sum_{i=1}^{n}b_i(a_ix+b_iy-d_i)=0.$$

记 $(a,b)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$,$(a,a)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$ 等等. 于是上式变为

$$(a,a)x+(a,b)y=(a,d),$$

$$(a,b)x+(b,b)y=(b,d).$$

由于

$$\begin{vmatrix}(a,a) & (a,b)\\ (a,b) & (b,b)\end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\begin{vmatrix}a_i & b_i\\ a_j & b_j\end{vmatrix}^2 \geqslant \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}^2 > 0,$$

故方程有解.

不难证明这一解确使 w 达到最小值.

8.1.3　条件极值问题

命 $u=f(x,y,z)$. 现研究在满足条件 $g(x,y,z)=0$ 的情况下，u 的极大值与极小值.

不妨把 x,y 看作自变数，z 是由 $g(x,y,z)=0$ 所定义的函数.

由 u 取极值的条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

再从 $g(x,y,z)=0$ 得到

$$\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

从这四个方程中消去$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial z}-\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial g}{\partial y}=0.\end{cases}$$

从这两个方程与 $g(x,y,z)=0$ 解出 x,y,z 的数值，这就得到可能达到极大值与极小值的点.

这两个方程也可以写成

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial x}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\dfrac{\partial g}{\partial z}}(=-\lambda),$$

即有 λ 使

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial g}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial g}{\partial z}=0.$$

如果把 x,y,z,λ 看作未知数，则从这三个方程及 $g=0$ 中可解出 x,y,z,λ 来. 使 f 达到条件极值的点只能是这组方程的解.

当然这些式子可以从另一个角度来求得,即考虑函数

$$w = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z),$$

这函数的极值点当然适合

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = g(x,y,z) = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} = 0.$$

这方法称为 Lagrange 乘子法.

例 1 求点(a,b)到直线 $Ax + By + C = 0$ 的最短距离.

解 设(a,b)至直线上动点(x,y)的距离为 r,则

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

作

$$w = (x-a)^2 + (y-b)^2 + \lambda(Ax + By + C),$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2(x-a) + \lambda A = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 2(y-b) + \lambda B = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda} = Ax + By + C = 0,$$

得出

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda A, y = b - \frac{1}{2}\lambda B, Ax + Bx + C = 0,$$

故

$$\lambda = \frac{2(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2}.$$

但是当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时,$r \to \infty$,故最短距离是存在的. 因此(a,b)到(x_0,y_0)的距离最短,这里

$$x_0 = a - \frac{A(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2} = \frac{aB^2 - bAB - AC}{A^2 + B^2},$$

$$y_0 = b - \frac{B(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2} = \frac{bA^2 - aAB - BC}{A^2 + B^2}.$$

最短距离为

$$\sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2} = |Aa + Bb + C| / \sqrt{A^2 + B^2}.$$

当然 Lagrange 乘子法可以推广到 n 个变数的情形. 其结果与三个变数是一样的,不同的只是多几个式子而已,这里不详细写了,只简单举一例.

例 2 把正数 a 分成 n 个正数的和，使这 n 个正数的乘积有最大值.

解 命 $a=x_1+x_2+\cdots+x_n$，其中 $x_1>0,x_2>0,\cdots,x_n>0$. 问题就是：在上述条件下，求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$$

的最大值. 作

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n+\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n-a),$$

命它们的偏导数为零，即

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_2x_3\cdots x_n+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=x_1x_3\cdots x_n+\lambda=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_n}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=x_1+x_2+\cdots+x_n-a=0.$$

从前 n 个等式中得到 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，再代入最后一个等式即得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{n}$. 这样就得到了唯一可能的极值点. 但从题意知最大值是存在的，因此这就是使函数取最大值的点. 也就是将 a 平均分成 n 份，那么所得的乘积最大，最大值为 $\left(\frac{a}{n}\right)^n$.

从上述结果可得一个重要不等式：由于

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n,$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},$$

即任意 n 个正数的几何平均值一定不大于这 n 个正数的算术平均值.

上面介绍的 Lagrange 乘子法涉及的是只有一个限制条件的情形. 如果涉及不止一个限制条件，例如，要求 n 元函数

$$u=f(x_1,\cdots,x_n)$$

在满足 $m(<n)$ 个条件

$$g_1(x_1,\cdots,x_n) = 0,$$

$$g_2(x_1,\cdots,x_n) = 0,$$

$$g_m(x_1,\cdots,x_n) = 0$$

情形下的极值点,方法是类似的. 作辅助函数

$$w = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \cdots + \lambda_m g_m$$

其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 m 个待定常数. 于是可以由下面的方程组解出可能的极值点:

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda_1} = g_1 = 0,$$

.....

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda_m} = g_m = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0,$$

.....

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_m} = 0.$$

例 3 求椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ Ax + By + Cz = 0, \end{cases}$$

的两个半轴之长.

解 因该椭圆的中心是原点,故求半轴长的问题就归结为求函数

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

在条件

$$g_1(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$g_2(x,y,z) = Ax + By + Cz = 0,$$

下的最大值和最小值. 令

$$w = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2,$$

写出方程组

$$2x + 2\lambda_1 \frac{x}{a^2} + \lambda_2 A = 0,$$

$$2y + 2\lambda_1 \frac{y}{b^2} + \lambda_2 B = 0,$$

$$2z + 2\lambda_1 \frac{z}{c^2} + \lambda_2 C = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$Ax + By + Cz = 0.$$

可解得(前三式分别乘以 x,y,z 相加)

$$r^2 + \lambda_1 = 0, \quad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2).$$

进而得

$$x = \lambda_2 \frac{Aa^2}{r^2 - a^2}, \quad y = \lambda_2 \frac{Bb^2}{r^2 - b^2}, \quad z = \lambda_2 \frac{Cc^2}{r^2 - c^2}.$$

三式分别乘以 A,B,C 相加,得

$$\frac{A^2a^2}{r^2 - a^2} + \frac{B^2b^2}{r^2 - b^2} + \frac{C^2c^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

解出 r^2 即得 u 的最大值和最小值.

习题 8.1

1. 在点 $A(1,-2)$ 的邻域内根据 Taylor 公式展开函数

$$f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5.$$

2. 利用二元 Taylor 公式证明:当 $|x|, |y|$ 充分小时有近似公式

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

3. 写出函数 $f(x,y) = x^y$ 在点 $A(1,1)$ 的邻域内的展开式,到二次项为止.

4. 将函数 $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 在 $(0,0)$ 点按 Taylor 公式展开,到四次项为止.

5. 将函数 $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ 在 $(0,0)$ 点按 Taylor 公式展开.

6. 求下列多变量函数的极值:

(1) $z = x^2 + (y-1)^2$;

(2) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$;

(3) $z=x^3+y^3-3xy$;

(4) $z=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}(x>0,y>0)$.

7. 求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

(1) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$;

(2) $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0$.

8. 求下列函数的条件极值:

(1) $u=xy$,若 $x+y=1$;

(2) $u=x^2+y^2$,若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

(3) $u=x+y+z$,若 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\ (x>0,y>0,z>0)$;

(4) $u=xyz$,若 $x^2+y^2+z^2=1,x+y+z=0$.

9. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形,其底边平行于椭圆的长轴. 而使其面积最大.

10. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到这椭圆的最长与最短距离.

11. 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点,使它与点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,3,4)$ 的距离的平方和最小.

12. 从斜边为定长 l 的一切直角三角形中求出最大周界的三角形.

13. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆,其表面积等于 S,当其尺寸怎样时,此盆有最大的容积?

14. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

15. 已知矩形的周长为 $2p$,将它绕其一边旋转而成一旋转体,求所得旋转体的体积为最大的那个矩形.

16. 一帐幕,下部为圆柱形,上部盖以圆锥形顶篷,设帐幕体积为常数 V_0,试证:当 $R=\sqrt{5}H,h=2H$ 时(其中 R,H 各为圆柱形底半径和高,h 为圆锥形的高)所用幕布最省.

17. 已知平行六面体所有各棱边之和为 $12a$,求其最大体积.

18. 在 xy 平面上求一点,使它到 $x=0,y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 三直线的距离平方和为最小.

8.2 物理上的应用举例

8.2.1 重心、转动惯量与引力

先讨论物体 V 的重心的求法.

将 V 分成 n 块小块 V_i,在 V_i 上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,若用 $\rho(x,y,z)$ 表 V 在每点的密度,V_i 的质量近似为 $\rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$. 其中 ΔV_i 是 V_i 的体积.

把 n 块小块看成 n 个质点 $M(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,(M_i 的质量等于 $\rho(M_i)\Delta V_i$),这个

质点系的重心坐标为

$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\sum\limits_i \xi_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}, \\ \bar{y} = \dfrac{\sum\limits_i \eta_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}, \\ \bar{z} = \dfrac{\sum\limits_i \zeta_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}. \end{cases}$$

把 V 无限细分，取极限，即得 V 的重心坐标 (x_0,y_0,z_0) 为：

$$x_0 = \lim \frac{\sum\limits_i \xi_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i} = \frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$y_0 = \lim \frac{\sum\limits_i \eta_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i} = \frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$z_0 = \lim \frac{\sum\limits_i \zeta_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i}{\sum\limits_i \rho(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i} = \frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}.$$

若物体 V 是均匀的，则 ρ 为常数，并且 $M=\rho V$（V 表示物体的体积）. 因此，均匀物体重心坐标为：

$$x_0 = \frac{1}{V}\iiint_V x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad y_0 = \frac{1}{V}\iiint_V y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$z_0 = \frac{1}{V}\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对于均匀的物质薄片 D，它的重心坐标显然就是

$$x_0 = \frac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad y_0 = \frac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 A 是 D 的面积.

再来考虑物体 V 的转动惯量.

仿照上法,把 V 近似看作 n 个质点,这质点系对 x 轴的转动惯量就是

$$\sum_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2)\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

把 V 无限细分,取极限,即得物体 V 对 x 轴的转动惯量为

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

同理,V 对 y 轴、z 轴的转动惯量为

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\ I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

V 对原点的转动惯量为

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例 1 求球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ 的重心,并设球中各点密度与到坐标原点的距离成反比(图 8.1).

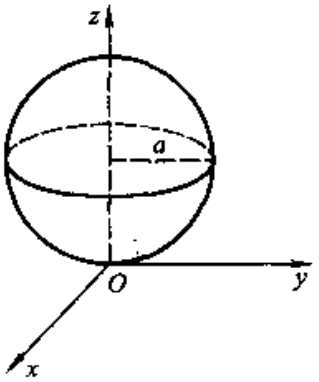

图 8.1

解 显然,球的重心是在 z 轴上,而密度为 $\rho = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$($k$ 是比例常数).将

$$z_0 = \iiint_V \frac{kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \Big/ \iiint_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

记上式右边的分子为 M_{xy},分母为 m,则上式为

$$z_0 = \frac{M_{xy}}{m}.$$

用球坐标:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$

代入围成 V 的球面方程得:

$$0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta,$$

而 φ, θ 的变动范围为:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

因此球体质量为

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{k}{r}\,|r^2\sin\theta|\,\mathrm{d}r \\ &= 2\pi k\int_0^{\pi/2} 2a^2\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi k a^2, \end{aligned}$$

而

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \frac{k}{r} \cdot r\cos\theta \mid r^2 \sin\theta \mid dr$$

$$= 2\pi k \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3} a^3 \cos^4\theta \sin\theta d\theta = \frac{16}{15}\pi k a^3,$$

故重心坐标为

$$x_0 = y_0 = 0,\ z_0 = \frac{\frac{16}{15}\pi k a^3}{\frac{4}{3}\pi k a^2} = \frac{4}{5}a.$$

例 2　求密度均匀的圆柱体对其轴线的转动惯量.

解　设密度 ρ 为常数,圆柱体半径为 R,高为 l. 取轴线为 z 轴,于是 V 由圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及平面 $z = 0, z = l$ 所围成. 对 z 轴的转动惯量为

$$I_z = \iiint_V \rho(x^2 + y^2)\,dxdydz = \int_0^l dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \rho(x^2 + y^2)\,dxdy$$

$$= \rho \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi l\rho \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}MR^2,$$

其中 M 为柱体的质量.

例 3　求半径为 R 的均匀球体绕其直径的转动惯量.

解　取直径为 z 轴,球心为原点,则 V 由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 围成. 于是

$$I_z = \iiint_V \rho(x^2 + y^2)\,dxdydz = \int_{-R}^R dz \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2} \rho(x^2 + y^2)\,dxdy$$

$$= \rho \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$= \pi R^5 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\,dt = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{2}{5}MR^2$$

其中 M 为球体的质量.

最后来讨论引力问题.

物体 V 外部有质量为 m 的质点 $A(\xi,\eta,\zeta)$,求物体 V 对该质点所产生的引力 F(图 8.2).

只须求出 F 在三轴上投影即可. 设物体的密度为 $\rho = \rho(x,y,z)$,将 V 分割为 n 个小块 $V_1, V_2, \cdots, V_n$,V_i 的体积为 ΔV_i,在 V_i 内任取一点 $M_i(x_i,y_i,z_i)$,将 V_i 的

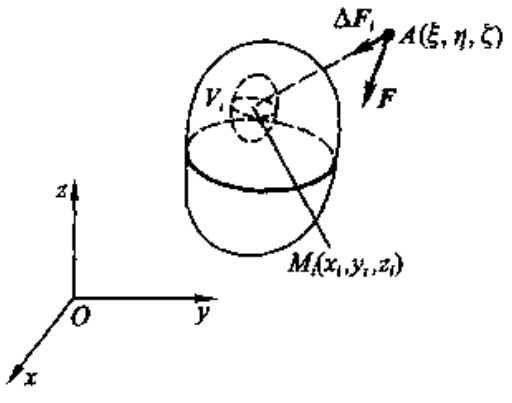

图 8.2

质量 $\rho\Delta V_i$ 看成集中于点 M_i，则 V_i 对点 A 的引力 $\Delta \boldsymbol{F}_i$ 的大小近似地为

$$|\Delta \boldsymbol{F}_i| = k\frac{m\rho\Delta V_i}{r_i^2},$$

其中 $$r_i^2 = (x_i-\xi)^2 + (y_i-\eta)^2 + (z_i-\zeta)^2,$$

而 $\Delta \boldsymbol{F}_i$ 的方向与 $\overrightarrow{AM_i}$ 相同，k 为比例常数，不妨设 $k=1$，而 $\overrightarrow{AM_i}$ 的单位矢量为

$$\left(\frac{x_i-\xi}{r_i}, \frac{y_i-\eta}{r_i}, \frac{z_i-\zeta}{r_i}\right),$$

所以 $\Delta \boldsymbol{F}_i$ 为：

$$\frac{m\rho\Delta V_i}{r_i^2}\left(\frac{x_i-\xi}{r_i}, \frac{y_i-\eta}{r_i}, \frac{z_i-\zeta}{r_i}\right).$$

对 V 中各小块求和，再取极限，则 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴上的投影为：

$$\begin{cases} F_x = \iiint\limits_V \dfrac{m(x-\xi)}{r^3}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ F_y = \iiint\limits_V \dfrac{m(y-\eta)}{r^3}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ F_z = \iiint\limits_V \dfrac{m(z-\zeta)}{r^3}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \end{cases}$$

其中 $$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

例 4 已知半径为 R 的均匀球体，求它对球外质量为 1 的质点 A 的引力.

解 取球心为坐标原点，z 轴过点 A，设质点 A 的坐标为 $(0,0,l)$，$l>R$. 设密度 $\rho=1$，则

$$F_x = \iiint\limits_V \frac{x}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad F_y = \iiint\limits_V \frac{y}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$F_z = \iiint\limits_V \frac{z-l}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $r^2 = x^2+y^2+(z-l)^2$；V 为球体：

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2.$$

球体对 z 轴是对称的，故必有 $F_x = F_y = 0$. 不妨验证一下：

$$F_x = \int_{-R}^{R}\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho^2 \cos\varphi}{[\rho^2 + (z-l)^2]^{3/2}} \mathrm{d}\rho$$

$$= \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{0}^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho^2}{[\rho^2 + (z-l)^2]^{3/2}} \mathrm{d}\rho = 0,$$

这是因为 $\int_{0}^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = 0$，同样 $F_y = 0$. 再来计算

$$F_z = \int_{-R}^{R} (z-l)\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2 + y^2 + (z-l)^2]^{3/2}}.$$

由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2 + y^2 + (z-l)^2]^{3/2}} = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{0}^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho}{[\rho^2 + (z-l)^2]^{3/2}} \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{l-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right),$$

故

$$F_z = 2\pi \int_{-R}^{R} \left[-1 - \frac{z-l}{\sqrt{R^2 - 2lz + l^2}} \right] \mathrm{d}z = -\frac{4\pi R^3}{3l^2}.$$

但是球的质量为 $M = \frac{4}{3}\pi R^3$，而 A 点质量为 $m = 1$，故对质量为 m 的质点的引力为

$$F_z = -\frac{Mm}{l^2}.$$

由此可见，球体形状的物体对外部质点的引力，可看成将球体的质量集中在球心上直接应用牛顿定律的结果. 所以在天体力学中考虑星球之间的引力，常常将星球的质量集中于球心，再直接应用牛顿定律.

8.2.2　流体动力学的完全方程组

假定流体连续地充满某一区域 V，并假定为无源场，即既无泉源又无渗并. 一般说来，流体密度可以是依赖于时间、地点而变化的(即可压缩的流体).

假定 S 是 V 的边界，在单位时间内向外流出的流量等于

$$Q = \iint_{S} \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S,$$

这里 $\rho = \rho(x,y,z,t)$ 是流体的密度，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线单位矢量，$\boldsymbol{v} = (u,v,w)$

是流体的速度.

另一方面,从 V 内流体的总质量来考虑,在时间 dt 内,密度的改变量为 $\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$,体积元素 dV 的质量 ρdV 的改变量等于 $\frac{\partial \rho}{\partial t}dtdV$,因而整个 V 的流体量的改变量等于

$$dt\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV,$$

这是 dt 时间内流进的流量. 改变符号,在单位时间内流出的流量等于

$$Q = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV.$$

因此

$$\iint_S \rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n}dS + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = 0.$$

由 Gauss 公式,即得

$$\iiint_V \left(\operatorname{div}\rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)dV = 0.$$

这对于 V 内任何一块都成立. 因此由积分的中值定理得到流体力学的连续性方程

$$\operatorname{div}\rho \boldsymbol{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

设流体无粘滞性,即是所谓理想流体. 现在来考虑它的运动方程.

物体的运动取决于外力与内力. 考虑最简单的情形:外力与质量成正比. 命 $\boldsymbol{F}$ 是作用在一单位质量上的力,在体积元素 dV 上作用的力等于 $\rho dV\boldsymbol{F}$.

至于内力,就是流体中一块 V 所受到的其余部分的力. 对理想流体来说,这等于朝向流体内部的压力,也就是 V 的边界曲面 S 上所受的压力. 以 $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ 表示 S 的向外法线的方向余弦,曲面元素 dS 上所作用的力在坐标轴上的投影等于

$$-p\cos\lambda dS,\ -p\cos\mu dS,\ -p\cos\nu dS,$$

这里 p 代表单位面积上所受的压力. 因此,作用在 V 上的力等于矢量

$$\left(-\iint_S p\cos\lambda dS,\ -\iint_S p\cos\mu dS,\ -\iint_S p\cos\nu dS\right).$$

用 Gauss 公式,得到这矢量就是

$$\left(-\iiint_V \frac{\partial p}{\partial x}dV,\ -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial y}dV,\ -\iiint_V \frac{\partial p}{\partial z}dV\right).$$

也就是加在 $\mathrm{d}V$ 上的力是

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}V,\ \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}V,\ \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}V\right) = -\,\mathrm{d}V\mathbf{grad}\ p.$$

于是由牛顿第二定律

$$\rho\mathrm{d}V\boldsymbol{a} = \rho\mathrm{d}V\boldsymbol{F} - \mathrm{d}V\mathbf{grad}\ p,$$

这里 $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ 是加速度，也就是

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p,$$

这就是理想流体的运动方程.

而

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (u,v,w).$$

位置 (x,y,z) 和速度 (u,v,w) 都与 t 有关，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w.$$

如果 $\boldsymbol{F} = (F_x,F_y,F_z)$，则运动方程可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w = F_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w = F_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z},\end{cases}$$

这称为 **Euler 公式**.

这也可写成

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p,$$

即

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p.$$

总而言之,流体的速度 $\boldsymbol{v}=(u,v,w)$,压力 p 及密度 ρ 适合于

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad (\text{连续性方程}),\\[2ex] \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \dfrac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p \quad (\text{运动方程}),\end{cases}$$

这里有五个未知函数,方程仅有四个,余下的一个是压力 p 与密度 ρ 间关系的物态方程

$$p = f(\rho).$$

这些方程合在一起便得出流体动力学的完全方程组.

8.2.3 声的传播

下面把流体动力学的方程应用到声的传播过程. 作以下的假定:

(i) 声的传播过程是绝热的,也就是假定物态方程是 Poisson 绝热线

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},\ \gamma = c_p/c_v,$$

这里 ρ_0, p_0 是初始密度与压力,而 c_p 与 c_v 是定压比热与定容比热;

(ii) 气体振动是微小的,也就是可以把速度、密度 ρ 的梯度这些数量的高次项略去不计.

引进密度的相对变化

$$s = s(x,y,z,t) = \frac{\rho-\rho_0}{\rho_0},$$

即得

$$\rho = (1+s)\rho_0.$$

于是

$$\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\ p = \frac{1}{\rho_0}(1+s)^{-1}\mathbf{grad}\ p \approx \frac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}\ p,$$

$$\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\mathbf{grad}\ \rho + \rho\operatorname{div}\boldsymbol{v} \approx \rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}.$$

所以流体动力学的方程可以写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} - \dfrac{1}{\rho_0}\mathbf{grad}\ p, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \boldsymbol{v}, \\ p = p_0(1+s)^{\gamma} \approx p_0(1+\gamma s). \end{cases}$$

命 $a^2 = \gamma p_0/\rho_0$，则得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{F} - a^2\mathbf{grad}\ s, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{v}. \end{cases}$$

交换微分次序，消去 $\boldsymbol{v}$，得

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \operatorname{div}(-a^2\mathbf{grad}\ s + \boldsymbol{F}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} - a^2\Delta s,$$

即得波动方程

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\Delta s - \operatorname{div} \boldsymbol{F}.$$

如果没有外力，即 $\boldsymbol{F}=0$，则得

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = a^2\Delta s = a^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right),$$

这是通常见到的波动方程.

注意 s 是压缩或膨胀现象的量的刻画，因此方程所代表的是声的传播律，$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ 代表声源.

8.2.4　热的传导

一物体在不同点处与不同时刻有不同的温度 $\varphi(x,y,z,t)$，这就定义了一个数量场，即温度场. 矢量 $-k\mathbf{grad}\ \varphi$ 称为热流矢量，其中 $k>0$ 是比热系数. 用“$-$”号是根据“热向低温处流”而取定的，$\operatorname{grad}\varphi$ 的方向是 φ 增长最快的方向.

取曲面元素 $\mathrm{d}S$，在时间 $\mathrm{d}t$ 内通过 $\mathrm{d}S$ 的热量与 $\mathrm{d}t\mathrm{d}S$ 及温度法向微商 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ 成正比，也就是

$$\Delta Q = k\mathrm{d}t\mathrm{d}S\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -k\mathrm{d}t\mathrm{d}S\mathbf{grad}\ \varphi \cdot \boldsymbol{n}.$$

因此，如果闭曲面 S 包围 V，则通过 S 的全部热量等于

$$-\mathrm{d}t\iint_S k\mathbf{grad}\ \varphi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

假定无热源,则单位时间内物体 V 通过界面 S 流出的热量等于

$$Q=-\iint_S k\mathbf{grad}\ \varphi\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

用 Gauss 公式,可知流入的热量等于

$$\iiint_V \mathrm{div}(k\mathbf{grad}\ \varphi)\mathrm{d}V.$$

再用另一方法计算 V 的热量. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内,温度增加

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

则 $\mathrm{d}V$ 需要输入的热量是

$$C\mathrm{d}\varphi\rho\mathrm{d}V=C\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}t\rho\mathrm{d}V,$$

这里 C 是一比例常数,叫做物质的热容量,而 ρ 是物质密度. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内整个立体 V 要吸收的热量等于

$$\mathrm{d}t\iiint_V C\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

单位时间内吸收的热量等于

$$\iiint_V C\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{d}V.$$

因此

$$\iiint_V\left\{C\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mathrm{div}(k\mathbf{grad}\ \varphi)\right\}\mathrm{d}V=0.$$

这对考察的区域的任何一部分都对,所以有方程

$$C\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\mathrm{div}(k\mathbf{grad}\ \varphi),$$

这就是热传导方程.

在均匀介质中,命 $a^2=\dfrac{k}{C\rho}$,则得方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=a^2\Delta\varphi=a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right).$$

当温度稳定分布时,即若 φ 仅依赖于位置 x,y,z,而不依赖于时间 t,则 φ 适合 Laplace 方程

$$\Delta\varphi = 0.$$

如有热源,则有以下的式子

$$\iiint_V \left\{ C\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\mathbf{grad}\ \varphi) \right\} \mathrm{d}V = \iiint_V e\mathrm{d}V,$$

这里 $e = e(x,y,z,t)$ 给出连续分布于 V 中的热源强度,所以上式右边表示在单位时间内由 V 放出的热量. 由此可得

$$C\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div}(k\mathbf{grad}\ \varphi) = e.$$

在均匀介质情况下,为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a^2 \Delta\varphi + \frac{e}{C\rho}.$$

习题 8.2

1. 求椭圆薄片 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ 的质量,设密度 $\rho = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

2. 半径为 a 的圆盘,其各点密度与到圆心的距离成正比(设比例系数为 1). 今内切于圆盘截去半径为 $\frac{a}{2}$ 之小圆,求余下的圆盘的重心坐标.

3. 一个平面圆环是由半径为 R 和 $r(R>r)$ 的两个同心圆所围成的,已知材料各点的密度和到圆心的距离成反比,并在内圆的圆周上密度为 1,求环的质量.

4. 一个物体是由两个半径各为 R 和 $r(R>r)$ 的同心球所围成. 已知材料的密度和到球心的距离成反比,且密度在距离等于 1 处等于 k,求物体的全部质量.

5. 求由曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ 和 $z = c$ 围成的均匀物体的重心坐标.

6. 由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的质量均匀分布的物体,求它的重心坐标.

7. 球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ 内各点密度与各点到原点的距离成反比,求它的重心坐标.

8. 求密度为 1 的均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ 对坐标轴的转动惯量.

9. 求以下各物体的转动惯量($\rho = 1$).

(1) 质量为 m,长为 l 的细棒,

(i) 对通过棒的中心并与棒垂直的轴的转动惯量;

(ii) 对通过棒的一端并与棒垂直的轴的转动惯量;

(2) 质量为 m,半径为 R 的细圆环,

(i) 对通过中心与环面垂直的轴的转动惯量;

(ii) 对直径的转动惯量.

(3) 薄圆盘质量为 m,半径为 R,

(i) 对通过中心与盘面垂直的轴的转动惯量;

(ii) 对直径的转动惯量.

(4) 质量为 m 的球,半径为 R,对切线的转动惯量.

10. 一个密度为 ρ 的均匀截锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0<a\leqslant z\leqslant b)$,求它对于处在锥顶的质点(质量为 m)的引力.

11. 一个均匀的球壳,密度为 ρ 半径为 R,试求它对于距球心为 a 的质点(质量为 m)的引力.并讨论质点在球内和球外两种情形.

12. 一半径为 R 的均匀球壳(密度为 ρ),以等角速度 ω 绕其直径旋转,求它对于转轴的转动惯量及转动动能.

13. 证明:一物体对于任意一轴的转动惯量等于 Md^2+I_C,其中 M 是物体的质量,d 是由轴到物体重心 C 的距离,I_C 是对平行于已给轴且经过物体重心 C 的轴的转动惯量.

第九章

$\varepsilon-\delta$ 语言

9.1 数列极限的 $\varepsilon-N$ 语言

9.1.1 数列极限的定义

在本书的前 8 章中,已经介绍了单变量与多变量函数的微积分. 单变量函数的微分与积分是由微积分基本定理,即通常说的 Newton - Leibniz 公式揭示它们是一对矛盾;多变量函数的微分与积分是由 Stokes 公式揭示它们是一对矛盾. 在这一章中,我们要进一步用精确化的语言,将前面学过的内容再重新叙述一遍.

因为极限是微积分的基础概念,我们首先从极限的概念开始.

在 1.1.1 节中已经介绍了极限的概念. 对于无穷数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

来说,当项数 n 无限增大时,数列的项如果无限趋近于一个固定的常数 a,就是说,无论预先给定怎样小的正数,在数列里都能找到一项,从这项起,以后所有项与 a 的差的绝对值,都小于预先给定的小的正数,那么固定常数 a 就叫做这无穷数列的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

这也就是,以 a 为中心画出一个小区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$(图 9.1),当 n 大到一定程度以后,a_n 皆落入到小区间以内. 若小区间再小,只要 n 大到更大的程度以后,a_n 又落入小区间以内,不管小区间多小,都是如此. 因此,数列极限可定义为:设有数列 a_n,如果有一定数 a,对于不管怎样小的一个正数 ε,都相应地存在一个正整数 $N=N(\varepsilon)$(它随 ε 而变动),只要 $n>N$,就有 $|a_n-a|<\varepsilon$,则说 a 为数列 a_n 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 或简记为 $\lim a_n = a$,也可记为 $a_n \to a\ (n\to\infty)$,或简记为 $a_n \to a$. 由此立即可推出,在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外,只能有有限个 a_n(图 9.2).

上述定义用语,习惯上称为"$\varepsilon-N$"语言.

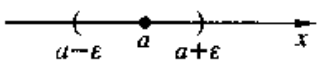

图 9.1

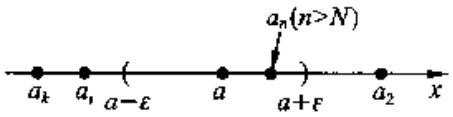

图 9.2

例 1 证明 $\lim \frac{1}{n^{\alpha}}=0 \quad (\alpha>0)$.

证 任给 $\varepsilon>0$,要使 $\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon$,只要 $n^{\alpha}>\frac{1}{\varepsilon}$,即 $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. 因此,只要取一正整数 $N>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$,$\left($例如取 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]+1$,这里 $[a]$ 表示 a 的整数部分$\right)$. 则当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|<\frac{1}{N^{\alpha}}<\varepsilon.$$

例 2 证明 $\lim a^{\frac{1}{n}}=1 (a>1)$.

证 因 $a>1$,故 $a^{\frac{1}{n}}>1$,令 $\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1$,则 $\alpha_n>0$,于是

$$a=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\cdots+\alpha_n^n>n\alpha_n,$$

所以 $\alpha_n<\frac{a}{n}$. 因此,任给 $\varepsilon>0$,只要取正整数 $N>\frac{a}{\varepsilon}$,则当 $n>N$ 时,

$$\left|a^{\frac{1}{n}}-1\right|=\alpha_n<\frac{a}{N}<\varepsilon.$$

若数列 α_n 以一数 a 为其极限,则说数列 a_n 是收敛的,a_n 收敛于 a. 反之,则说数列 a_n 是发散的.

9.1.2 数列极限的一些性质

有了 $\varepsilon-N$ 语言后,我们可以证明数列极限的一些基本性质. 例如,第一章中一开始就说,如果两个数列有极限,那么这两个数列各对应项的和、差、积、商组成的数列的极限,分别等于这两个数列的极限的和、差、积、商(作为除数的数列极限不能为零). 就是说,如果

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,\ \lim_{n\to\infty}b_n=b,$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\quad(b\neq 0).$$

现在用 $\varepsilon-N$ 语言证明第一个式子.

由于

$$\begin{aligned}|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)| &= |(a_n-a)\pm(b_n-b)|\\ &\leqslant |a_n-a|+|b_n-b|,\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon>0$,则有正整数 N_1,当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon/2.$$

又有正整数 N_2,当 $n>N_2$ 时,

$$|b_n-b|<\varepsilon/2$$

因此,当 $n>N=\max(N_1,N_2)$ 时,

$$\begin{aligned}|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)| &\leqslant |a_n-a|+|b_n-b|\\ &<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了第一个式子. 其他几个式子都可以用同样办法证明.

由

$$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=a\cdot b,$$

可以得到:如果 k 为常数,那么

$$\lim_{n\to\infty}ka_n=ka.$$

由 $\varepsilon-N$ 语言,还容易证明如下一些极限的性质.

1. 若数列有极限,则只有一个极限.

证 设 a_n 有两个极限 a 与 $b(a\neq b)$,取 $\varepsilon=|a-b|/3$,这样,小区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 与 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 不相交,无公共点,因为 a 是 a_n 的极限,故只有有限项在 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 之外,所以只有有限个 a_n 落在 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ 内. 但 b 也是 a_n 极限,这是不可能的,得到矛盾.

若有正数 M,使 $|a_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$,则说 a_n 有界. 若有一数 A,使得 $a_n\leqslant A(n=1,2,\cdots)$,则说 A 是数列 a_n 的上界. 若有一数 B,使得 $a_n\geqslant B(n=1,2,\cdots)$,则说 B 是数列 a_n 的下界. 即有上界又有下界的数列称为**有界数列**.

2. 收敛数列必有界.

证 设数列 a_n 收敛,极限为 a. 取 $\varepsilon=1$,则有自然数 N,当 $n>N$ 时,$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|$. 取 $M=\max(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a|+1)$,显然 $|a_n|\leqslant M$ 对一切 $n=1,2,\cdots$ 都成立,即 a_n 有界.

3. 若 $\lim a_n=a$，$\lim b_n=b$，且 $a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则 $a\leqslant b$.

证 设 $a>b$，取 $\varepsilon=\dfrac{a-b}{2}$，则有自然数 N，当 $n>N$ 时，$b_n<\dfrac{a+b}{2}<a_n$，这与假设相矛盾.

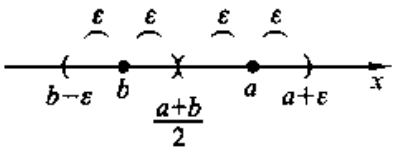

图 9.3

注意，如果假设是 $a_n<b_n$，则结论仍是 $a\leqslant b$，并不一定有 $a<b$. 看例子：$0<\dfrac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，但

$$\lim 0=0=\lim\frac{1}{n}.$$

4. 若 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，且 $\lim b_n=\lim c_n=a$，则 $\lim a_n=a$.

证 任给 $\varepsilon>0$，由假设，有自然数 N，当 $n>N$ 时，

$$a-\varepsilon<b_n<a+\varepsilon,a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon.$$

因此，当 $n>N$ 时，

$$a-\varepsilon<b_n\leqslant a_n\leqslant c_n<a+\varepsilon,\text{即 }a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}$.

解 由于

$$\frac{2n^3+3n^2+4}{5n^3+6n+7}=\frac{2+3\cdot\frac{1}{n}+4\cdot\frac{1}{n^3}}{5+6\cdot\frac{1}{n^2}+7\cdot\frac{1}{n^3}}\to\frac{2+0+0}{5+0+0}=\frac{2}{5},$$

故当 $n\to\infty$ 时，极限为 $\dfrac{2}{5}$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 3 若 $a>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$.

证 当 $a>1$ 时，证明见 9.1.1 节例 2.

当 $a=1$ 时，结论是显然的.

当 $0<a<1$ 时，由于 $a^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$，而 $\dfrac{1}{a}>1$，故 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\to1(n\to\infty)$，从而

$a^{\frac{1}{n}}\to 1(n\to+\infty)$. 因此,当 $a>0$ 时,$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\to 1(n\to\infty)$.

例 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

解 当 $\lambda>0$ 时,因

$$(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n,$$

所以 $(1+\lambda)^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$,命 $\lambda=\sqrt[n]{n}-1$,则有

$$n>\frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n}-1)^2,$$

故当 $n\geqslant 2$ 时,

$$0<\sqrt[n]{n}-1<\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}},$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}=0$,因此,$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

9.1.3 极限存在的判别准则

什么样的数列有极限?如果有,这极限是什么?当然我们可以根据数列极限的定义进行验证.但困难的是,要根据定义来验证,先要知道 a 是什么?一般来说,这是事先不知道的.当然我们可以用一些 a 去试试,可是这样做带有很大的盲目性.能否不必先知道 a,直接从数列本身来判断它是否收敛呢?这里介绍两种收敛判别准则.

所谓一个数列 a_n 是**单调增加**的,是指 $a_n\leqslant a_{n+1}$ 对所有的 $n=1,2,\cdots$ 都成立.同样,如果 $a_n\geqslant a_{n+1}$ 对所有 $n=1,2\cdots$ 都成立,则称 a_n 为**单调减少**的.

有了这些定义后,可以有如下的判别准则:

1. 单调增加(减少)数列如有上(下)界必有极限

这个准则,直观上易于看出是正确的,但严格的证明却不大容易.

我们称所有的无穷小数(有穷小数也可以看作无穷小数)为实数,即实数 a 可表示为一个整数部分 α_0,及小数部分 $0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$,这里每个 $\alpha_i(1\leqslant i<\infty)$ 为 $0,1,2,\cdots,9$ 中这 10 个数字之一.如果这个无穷小数只有有限位,或是一个循环小数,那么这个实数是一个有理数,即 a 可以写成 p/q,此处 p,q 均为整数.如这个无穷小数是一个不循环的无穷小数,则称为无理数.

若 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant\cdots$ 为一单调增加数列,且有上界 M,即

$$a_n\leqslant M,n=1,2,\cdots.$$

由于每个 a_n 为一实数，故为一无穷小数. 先来比较所有 a_n 的整数部分，由于 a_n 有上界，故 a_n 的整数部分，除掉前面有限项以外，从某一项开始，一定是一个不再变化的数，例如为 α_0，再来比较它们的第一位小数，也一定从某一项起都相同，例如为 α_1，如此继续进行下去，就得到一个无穷小数 $a=\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots$，这个实数 a 就是数列 a_n 的极限. 现在证明 a 的确为数列 a_n 的极限.

事实上，任取 $\varepsilon>0$，可取一正整数 k，使

$$a-\varepsilon<\alpha_0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k,$$

因 $\alpha_0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$ 不是 a_n 的上界，故必有 a_N，使得

$$a-\varepsilon<\alpha_0\cdot\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k<a_N\leqslant a,$$

由于 a_n 是单调增加的，故当 $n>N$ 时，

$$a-\varepsilon<a_N\leqslant a_n\leqslant a<a+\varepsilon,$$

即 a_n 收敛于 a

同样可证，单调减少数列如有下界必有极限.

例 1 设 $\alpha\geqslant 2$，

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\quad(n=1,2,\cdots),$$

证明 a_n 收敛.

证 a_n 显然是单调增加的，故只须证明数列 a_n 有上界. 事实上

$$\begin{aligned}a_n&<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2\quad(n=1,2\cdots).\end{aligned}$$

例 2 试证

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\quad(n\text{ 重根式})$$

有极限.

证 先证 $a_n<2$. 当 $n=1$ 时，$\sqrt{2}<2$，假定 $a_k<2$，则 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<2$. 故由归纳法知 $a_n<2$. 另一方面，a_n 是单调增加数列. 故有极限.

最重要的例子，也许是下面这个例子.

例 3 证明

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

有极限.

证 先证 a_n 单调增加,

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1}.$$

再证 a_n 有上界

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right) < 3.$$

我们已在第一章(1.3.3 节)中知道,a_n 的极限就是

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots.$$

在这个判别准则中,如果数列没有单调性,是否还有极限呢? 当然不一定. 如果一个数列不仅有上界,而且有下界(这时称数列是有界的),那么,我们可以从这个数列中选出一个子列,使得这个子列是有极限的. 这就是

2. Bolzano – Weierstrass 判别准则

在一有界数列中,一定可以选出一个有极限的子列

证 由假设,数列 a_n 有界,故有区间 $[A,B]$,使得所有 a_n 都落在这区间内. 将 $[A,B]$ 平分成两个区间,那么其中必有一个是含有无穷个点的,假定含有无穷个点的那个区间为 $[A_1,B_1]$,显然有

$$B_1 - A_1 = \frac{1}{2}(B-A).$$

同法将区间 $[A_1,B_1]$ 再一分为二,则其中必有一个是含有无穷个点的,等等. 第 k 次分出的区间 $[A_k,B_k]$ 也同样含有无穷多个点.

这些区间,每一个都包含在前一个中,且每个区间的长度为前一个区间的长度的一半,所以第 k 个区间的长度为

$$B_k - A_k = \frac{1}{2^k}(B - A),$$

当 k 趋于无穷时,这长度趋于零. 如此得出两个单调数列

$$A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant \cdots \leqslant A_k \leqslant A_{k+1} \leqslant \cdots,$$

$$B_1 \geqslant B_2 \geqslant B_3 \geqslant \cdots \geqslant B_k \geqslant B_{k+1} \geqslant \cdots.$$

显然这两个数列都有界,故都有极限. 又由 $A_k - B_k \to 0$ 可知,这两个极限相等,记为 a,即

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k = a.$$

但 $[A_k, B_k]$ 中含有数列 a_n 中的无穷多个点,我们任取一个,命它为 a_{n_k},由于

$$A_k \leqslant a_{n_k} \leqslant B_k,$$

及

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} B_k = a,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

所以我们可以从数列 a_n 中选出一个子列 a_{n_k},使得数列 a_{n_k} 有极限.

由 Bolzano - Weierstrass 判别准则,立即得到十分重要的另一判别准则.

3. Cauahy 判别准则

设有数列 a_n,如果对于不管怎样小的一个正数 ε,都相应地存在一个自然数 $N = N(\varepsilon)$(它随 ε 而变动),只要 n, m 都大于 N,就有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

那么数列 a_n 一定有极限.

证 由假定,任给一个 $\varepsilon > 0$,必有 N 存在,当 $m, n > N$ 时,都有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

固定 m,则对所有的 $n > N$,有

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon,$$

即在 $[a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon]$ 内有无穷个点,依据 Bolzano - Weierstrass 判别准则,可以找到一个子列 a_{n_k},使得

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

所以仅须证明 a_n 也趋于 a. 我们可以选取充分大的 n_k,使

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon,$$

不妨要求 $n_k>N$,于是当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a_{n_k}|<\varepsilon.$$

所以得到:当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<2\varepsilon.$$

这就是说 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

Cauchy 判别准则十分重要,事实上它是数列有极限的充分必要条件. 上面已经证明了,如果数列满足 Cauchy 判别准则,则数列有极限,反过来,如果数列 a_n 有极限,那么必然满足 Cauchy 判别准则. 证明这点十分容易.

如果 a_n 有极限 a,那么按照定义,对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 N,使 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|<\varepsilon/2,$$

因此,对于任意 $m,n>N$,有

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a|+|a_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

由于 Cauchy 判别准则中没有用到极限值 a,所以用起来更方便,同时它又是数列有极限的充分必要条件,因此我们也可以把 Cauchy 判别准则作为数列有极限的定义.

例 4 求证数列

$$a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$$

收敛.

证 由于

$$|a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$$

$$+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)<\frac{1}{2^n}.$$

对一切正整数 p 都成立,所以任给 $\varepsilon>0$,一定存在 $N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$. 从而 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$ 对一切正整数 p 成立,即当 $m,n>N$ 时,$|a_m-a_n|<\varepsilon$ 成立. 由 Cauchy 判别准则,数列 a_n 有极限.

这个数列是非单调的，因为 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}$ 的符号时正时负，不能用本节中的第一个判别准则来判别，而且 a_n 的极限值也不是一眼看得出的，所以用定义来直接验证也很困难，但用 Cauchy 判别准则却很容易判别.

由于 Cauchy 判别准则是数列收敛的充分必要条件，所以也能用它判断数列是否发散.

例 5 试证

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

发散.

证 由于

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}>\frac{p}{n+p},$$

当 $p=n$ 时，就有

$$|a_{2n}-a_n|>\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}.$$

所以如果选定 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$，不管 n 多大，总有

$$|a_{2n}-a_n|>\varepsilon.$$

这不符合 Cauchy 判别准则的收敛条件，因而数列 a_n 发散.

习题 9.1

1. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明下列各题：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n(0.1)^n=0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+1}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{1+2^n}=0$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{n+1}}=0$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\,000n}{n^2+1}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2-5n+9}{6n^2-2n+1}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1\,000}{n-1}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n+1}}{2n+1}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n)$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1^2}{n}}-1\right)n$;

(14) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+4}-n^2)$;

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$;

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right|$;

(17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$;

(18) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$;

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2n]{2})$.

3. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0$ $(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$ $(|q|<1)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$ $(a>1)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)=0$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=0$ $\left(\text{提示:}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$. 反之成立吗?

6. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $a>b$. 证明,当 n 充分大时:有 $a_n>b$.

7. 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

8. 设 $|b_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.

9. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 能否判定 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$?

10. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,其中 $a_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,m)$.

11. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;

(2) 求下列极限:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$.

12. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a(a_n>0,n=1,2,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$,

$$\left(\text{提示：}\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right);$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\quad(a_n>0,n=1,2,\cdots)$,证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

13. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

14. 证明下列数列收敛：

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\dfrac{10}{1}\cdot\dfrac{11}{3}\cdots\dfrac{n+9}{2n-1}$.

15. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

16. 设 $c>0,a_1=\sqrt{c},a_2=\sqrt{c+\sqrt{c}},\cdots a_n=\sqrt{c+\sqrt{c+\cdots+\sqrt{c}}}$($n$ 重根号),证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\sqrt{4c+1}+1}{2}$.

17. 设 a_n 是单调增加数列,b_n 是单调减少数列,且 $a_n<b_n(n=1,2,\cdots)$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

18. 设 $a>0,a_0>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)\quad(n=0,1,\cdots)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

19. 设 $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$ 有界,证明 a_n 收敛.

20. 利用 Cauchy 准则,判别下列数列的收敛性：

(1) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$;

(2) $a_n=\dfrac{a\cos 2+b\sin 2}{2(2+\sin 2!)}+\dfrac{a\cos 3+b\sin 3}{3(3+\sin 3!)}+\cdots+\dfrac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin n!)}$;

(3) $a_n=a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{10^n}$,其中 $|a_k|<10\quad(k=1,2,\cdots,n)$;

(4) $a_n=\dfrac{1}{1^k}+\dfrac{1}{2^k}+\cdots+\dfrac{1}{n^k}$,　$(0<k<1)$.

9.2 函数连续性的$\varepsilon-\delta$语言

9.2.1 连续趋限

设$f(x)$是一个函数,它在$x=a$附近有定义,也就是有一$d>0$存在,使$f(x)$在满足$0<|x-a|<d$的每一点x上有定值.

如果对于任给的$\varepsilon>0$,能求出$\delta>0$,使当$0<|x-a|<\delta$时,

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立,则称当$x\to a$时,$f(x)\to A$. A称为$f(x)$在$x\to a$时的极限,记为

$$\lim_{x\to a} f(x)=A.$$

还可以定义右极限,即对任给$\varepsilon>0$,若能求出$\delta>0$,使当$0<x-a<\delta$时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

记为

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A \text{ 或 } f(a+0)=A.$$

同法可定义左极限

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \text{ 或 } f(a-0).$$

从这些定义可以看出,函数$f(x)$当$x\to a$时有极限,当且仅当右极限与左极限都存在,且相等. 上述这种定义连续趋限的语言,习惯上称为"$\varepsilon-\delta$"语言.

例1 证明$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{m}}=1$ (其中m为正整数).

证 不妨设$|x|<1$,对于$x\neq 0$,有

$$1-|x|<(1+x)^{\frac{1}{m}}<1+|x|,$$

也就是

$$|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|<|x|.$$

于是,对于任给$\varepsilon>0$,取$\delta=\min(\varepsilon,1)$,当$0<|x|<\delta$时,必有

$$|(1+x)^{\frac{1}{m}}-1|<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{m}}=1.$$

读者不难将前面讲到的连续趋限的结果,用$\varepsilon-\delta$语言重述一遍.

如对任一 $E>0$,如果有 $\delta>0$ 存在,使当 $0<|x-a|<\delta$ 时,$|f(x)|>E$,则称为当 $x\to a$ 时,$f(x)$ 趋于无穷,即

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty.$$

例 2 当 $x\to +0$ 时,$\cot x\to +\infty$;当 $x\to -0$ 时,$\cot x\to -\infty$.

又若对任一 $\varepsilon>0$,有正数 K 存在,使当 $x>K$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则定义为

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = A.$$

同法可定义

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A,\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,$$

的情形.

从下面的推导可以看出,连续趋限与数列极限之间有着十分密切的关系.

命 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是任何一个趋于 a 的数列,定义

$$f(x_n) = y_n,$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$,则有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

反之,如果对任一趋于 a 的数列 x_n,其所对应的 y_n 都趋于 A,则有

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

事实上,如 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在,或它存在但不等于 A,则由极限的定义,必存在 ε,使对无论怎样小的 δ,在 $0<|x-a|<\delta$ 中必有点 x,使

$$|f(x)-A|>\varepsilon,$$

令 δ_n 为趋向于 0 的数列,而命 x_n 为落在 $0<|x-a|<\delta_n$ 中,且使

$$|f(x_n)-A|>\varepsilon$$

成立的点,则 x_n 为一趋向于 a 的数列,当 $n\to\infty$ 时,$f(x_n)$ 不能趋于 A,这与假设相矛盾. 所以必须有

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

连续趋限的 Cauchy 判别准则为

当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 有有限极限的必要充分条件是：任给 $\varepsilon>0$，必存在 $\delta>0$，使适合于

$$0<|x-a|<\delta, 0<|x'-a|<\delta$$

的 x 与 x'，恒有不等式

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

证明方法与数列极限的 Cauchy 准则的证法是一样的，读者自证之，并试述 $a=\infty$ 时的相仿定理.

同样，连续趋限的四则运算与数列的情形有相仿的结果：若下式右边两项都存在且有限，则有

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x);$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x);$$

又如果 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)/\lim_{x\to a}g(x).$$

这些结果都可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明之，如同 9.1.2 节中用 $\varepsilon-N$ 语言证明数列极限的四则运算那样. 9.1.2 节中的其他一些性质也可以平移过来.

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

证 在 9.1.3 节中的例 3，已经证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

对于 $x\to+\infty$，设 n 是不大于 x 的最大整数，即

$$n\leqslant x<n+1,$$

由此得到

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

于是

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\leqslant\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{\mathrm{e}}{1}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

若 $x\to-\infty$，令 $y=-x$ 则当 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$. 不妨设 $y>1$，这时有

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right),$$

因此

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)$$

$$=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

综上所述，即得

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

在极限中，特别要指出的两类极限是无穷小量与无穷大量.

当 x 趋于 x_0（有限数或无穷大）时，$\alpha(x)$ 若以 0（或无穷大）为极限，则称 $\alpha(x)$ 当 x 趋于 x_0 时为**无穷小量（或无穷大量）**.

设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 均是当 x 趋于 x_0 时的无穷小量，且 $\beta(x)\neq 0$，若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A,$$

则当 $A\neq 0$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 x 趋于 x_0 时的**同级无穷小量**.

当 $A=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 x 趋于 x_0 时的**等价无穷小量**，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$.

当 $A=0$ 时，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高级无穷小量**，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))(x\to x_0)$.

设 $u(x)$，$v(x)$ 均是 x 趋于 x_0 时的无穷大量，且 $v(x)\neq 0$，若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=A\quad(\text{有限数}),$$

则当 $A\neq 0$ 时，称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是 x 趋于 x_0 时的**同级无穷大量**.

当 $A=1$ 时，称 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是 x 趋于 x_0 时的**等价无穷大量**.

当 $A=0$ 时，称 $v(x)$ 是比 $u(x)$ **高级无穷大量**.

更一般地，当 x 趋于 x_0 时，若 $\alpha(x)$ 以 α 为极限，$\beta(x)$ 以 β 为极限，则 $\alpha(x)-\alpha$ 及 $\beta(x)-\beta$ 均以 0 为极限，于是 $\alpha(x)-\alpha$ 与 $\beta(x)-\beta$ 之间可以进行比较，同样，若

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)-\alpha}{\beta(x)-\beta}=A,$$

且 $A\neq 0$，则称 $\alpha(x)-\alpha$ 与 $\beta(x)-\beta$ 是 x 趋于 x_0 时的同级无穷小量. 同样也可定义 $\alpha(x)-\alpha=o(\beta(x)-\beta)\quad(x\to x_0)$.

例 4　比较无穷小量 $\alpha(x)=x(x\to 0)$，$\beta(x)=\sin x(x\to 0)$ 的级.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量. 即

$$\sin x\sim x\quad(x\to 0).$$

例 5　比较无穷小量 $\alpha(x)=x(x\to 0)$，$\gamma(x)=1-\cos x(x\to 0)$ 的级.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$，所以 $\gamma(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高级无穷小量，即 $1-\cos x=o(x)(x\to 0)$.

下面讨论二元函数的极限.

设 $f(x,y)$ 是一个定义在点集 D 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，能求出 $\delta>0$，使得适合不等式

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

或

$$0<|x-x_0|<\delta,0<|y-y_0|<\delta$$

的属于 D 的一切点 $p(x,y)$，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为 $f(x,y)$ 当 $p(x,y)\to p_0(x_0,y_0)$ 时的极限，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A\quad\text{或}\quad\lim_{p\to p_0}f(p)=A.$$

二元函数极限的定义与一元函数极限的定义形式上完全类似，但必须注意，所谓二元函数极限存在是指点 $p(x,y)$ 在区域 D 中以任何方式趋于点 $p_0(x_0,y_0)$

时，函数 $f(x,y)$ 都无限接近于 A. 因此，如果 $p(x,y)$ 以某个特殊方式（例如沿某一条确定的直线或曲线）趋向于 $p_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 无限接近于某个确定值，这时还不能得出：当 $p(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 极限存在的结论. 但是如果当 $p(x,y)$ 以不同的方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 趋于不同的值，那么就可以断言：当 $p(x,y)\to p_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限不存在.

例 6 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 由 $(x-y)^2\geqslant 0$ 得出

$$\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1,$$

故有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}.$$

于是对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<|x|<\delta, 0<|y|<\delta$ 时，必有

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

例 7 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.（见 6.1.1 节）

证 取 $y=kx$，于是有

$$\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{xkx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

因此，当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋向原点 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 就以 $\dfrac{k}{1+k^2}$ 为极限，当点 (x,y) 沿着不同斜率的直线（k 取不同值）趋向 $(0,0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 的极限也就不同，所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在.

完全类似，读者不难用 $\varepsilon-\delta$ 语言来定义 $n(n\geqslant 3)$ 元函数的极限.

9.2.2 连续函数的定义

我们很容易地用 $\varepsilon-\delta$ 语言来定义函数的连续性.

若 $f(x)$ 是一函数,它在某一点 x_0 附近定义,如果 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$,则称此函数在 $x=x_0$ **连续**,如果 $f(x_0)=f(x_0+0)$,则称为**右连续**,如果 $f(x_0)=f(x_0-0)$,则称为**左连续**.

使函数不连续的点称为函数的**间断点**.

上述定义还可说成:

函数 $f(x)$ 在 x_0 的附近(包括 x_0 本身)有定义,若对于任给 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 同样也可用 $\varepsilon-\delta$ 语言来定义左、右连续.

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内(闭区间 $[a,b]$ 上)的每一点连续,则称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内(闭区间 $[a,b]$ 上)是连续的.

从定义可以看出,函数的连续性是个"局部"性质,即函数在点 x_0 连续与否,只与它在 x_0 及其近旁的性质有关,而与函数在其他地方的性质无关.

用 $\varepsilon-\delta$ 语言,容易证明以下一些以前早已应用过的性质.

1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 x_0 点上连续,则

$$f(x)\pm g(x);\ f(x)\cdot g(x)\ f(x)/g(x)$$

都在那点上连续,但对商必须假定 $g(x_0)\neq 0$.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续,且 $f(x_0)=y_0$,又 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 处连续,则 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 处也连续.

证 任给 $\varepsilon>0$,因 $\varphi(y)$ 在 $y=y_0$ 连续,所以必有 $\sigma>0$,使当 $|y-y_0|<\sigma$ 时,$|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$,另一方面,因为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,所以必有 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-y_0|<\sigma$,从而 $|\varphi(f(x))-\varphi(f(x_0))|=|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon$. 所以 $\varphi(f(x))$ 在 $x=x_0$ 连续.

3. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上严格单调,并且连续,其值域为 J,则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 J 上连续.

证 在 J 中任取一点 $y_0=f(x_0)$,由于 $f^{-1}(y)$ 是单调的,而由 9.1.3 节中第一个判别准则知道,$f^{-1}(y_0-0)$ 和 $f^{-1}(y_0+0)$ 存在且有限,要证的是

$$f^{-1}(y_0-0)=f^{-1}(y_0+0)=f^{-1}(y_0).$$

设 $f^{-1}(y_0)=x_0$,$f^{-1}(y_0-0)=x_1$,$f^{-1}(y_0+0)=x_2$,即要证 $x_0=x_1=x_2$. 由于 $f(x)$ 是连续的,

$$y_0=\lim_{y\to y_0-0}y=\lim_{y\to y_0-0}f[f^{-1}(y)]$$

$$= \lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1),$$

$$y_0 = \lim_{y \to y_0+0} y = \lim_{y \to y_0+0} f[f^{-1}(y)]$$

$$= \lim_{x \to x_2} f(x) = f(x_2).$$

由单调性,所以 $x_1 = f^{-1}(y_0) = x_0, x_2 = f^{-1}(y_0) = x_0$.

由幂函数、指数函数、三角函数以及它们的反函数;对数函数,及反三角函数经过有限次加、减、乘、除、乘方、开方等运算及有限次复合而成的函数称为初等函数.

由以上这些结果,就可以推出:

4. 一切初等函数在它们本身的定义域内都是连续的.

这个结果其实我们在前面书中一直在用,现在可以用上述结果来证明之.先看

1°三角函数的连续性.

$\sin x$ 在数轴上处处连续.

因为对任意实数 x_0,有

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$$

$$\leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|,$$

由此可知

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0,$$

即 $\sin x$ 在数轴上处处连续.

由于 $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,所以 $\cos x$ 也连续,而由于 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$,可知除使 $\cos x = 0$ 的诸点外,$\tan x$, $\sec x$ 都是连续的,除去 $\sin x = 0$ 的诸点外,$\cot x$, $\csc x$ 都连续.

由 3 知,反三角函数在它们的自然定义域内是连续的.例如,因为 $\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 中是严格单调上升的连续函数,由 3 知 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 内是连续的.同样可以讨论其他反三角函数 $\arccos x$, $\arctan x$ 等的连续性.这里要注意的是:由于三角函数是周期函数,故反三角函数是多值函数,这里对连续性的讨论是指在指定的一个分支上进行.

2° 指数函数与对数函数的连续性.

假定 $a>1$,如果我们能够证明

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1,$$

则得到,对于任意的 x_0

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0+(x-x_0)} = a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}$$

$$= a^{x_0}\lim_{y\to 0} a^y = a^{x_0},$$

于是 a^x 是一个连续函数.

在 9.1.1 节的例 2,我们已证

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad (a>1),$$

任给 $0<x<1$,一定可以找到正整数 n,使得 $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$,所以 $a^{\frac{1}{n+1}}<a^x<a^{\frac{1}{n}}$,

于是

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \lim_{x\to 0} a^x \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}},$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$. 所以当 $a>1$ 时,a^x 是连续函数. 同样可证 $0<a<1$ 的情形.

当 $a>1$ 时,a^x 是单调上升的连续函数,当 $0<a<1$ 时,a^x 是单调下降的连续函数. 由性质 3 知,$\log_a x(a>0,a\neq 0,x>0)$ 也是连续函数,而且 e^x 和 $\ln x$ 都是单调上升的连续函数.

3° 幂函数 $x^\mu(x>0)$ 的连续性.

由于 e^x 和 $\ln x$ 都是连续函数,所以由性质 2,它们的复合函数 $e^{\mu\ln x}=x^\mu$ 也是连续函数(其中 μ 为任意实数).

因此,基本初等函数在它们本身具有意义的一切点处,即它们的自然定义域内都是连续的.

由上述基本初等函数的连续性,从基本初等函数经过有限次算术运算和有限次复合所得的函数也是连续的,由此得到一切初等函数在其定义域内都是连续的.

9.2.3 连续函数的一些基本性质

在 1.1.2 节中,对连续函数的性质,曾列举过以下几条,并以此为出发点,证明了一些重要定理,如 1.1.2 节的积分中值定理等. 由于这些性质都非常直观,当时并未给予证明,现重新叙述证明之.

1. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,并且在 a,b 两点所取的值异号,则 a,b

间必有一点 c，使

$$f(c) = 0 \quad (a < c < b),$$

也就是一条连续曲线从 x 轴的一侧延伸到 x 轴的另一侧时，它必与 x 轴相交.

证 把 a,b 分为二等分，如果 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$，则定理已证明，不然，$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 中必有一区间使 $f(x)$ 在其两端取异号，命之为 $[a_1,b_1]$，不妨假设 $f(a_1)<0, f(b_1)>0$，逐步进行得出 $[a_2,b_2],[a_3,b_3],\cdots,[a_n,b_n],\cdots$ 一系列的一个包有下一个的区间，而 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$. $f(a_2)<0,\cdots,f(a_n)<0; f(b_2)>0,\cdots,f(b_n)>0,\cdots$，因为 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots, b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant\cdots$，而 $b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$，所以

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

由于

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0,\ f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant 0,$$

所以

$$f(c) = 0.$$

2. 同上假设，如果 $f(a)=A, f(b)=B$，则对 A,B 之间的任一数 C，一定有 $x=c$，使 $f(c)=C$.

这是上面的推论，考虑 $f(x)-C$ 即得所求.

3. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，它必有界，即一定存在两个常数 m 与 M，使

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

证 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，即对任一自然数 n，在 $[a,b]$ 中一定有 x_n，使

$$|f(x_n)| \geqslant n.$$

由 9.1.3 节中的 Bolzano - Weierstrass 判别准则，在 $\{x_n\}$ 中可以选出一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使

$$x_{n_k} \to x_0 \quad (k\to\infty).$$

显然 $a\leqslant x_0\leqslant b$，由函数连续性，有

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

这是不可能的.

由 3,2,即得 1.1.2 节中的积分中值定理.

使 $m \leqslant f(x) \leqslant M$ 成立的最小的 M 称为**上确界**,最大的 m 称为**下确界**.

4. 同上假设,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 中一定取得上确界与下确界.

这就是说,在 $[a,b]$ 中,存在 $x=x_0$ 与 $x=x_1$,使 $f(x_0)$ 与 $f(x_1)$ 各为 $f(x)$ 的一切数值中的最大者和最小者.

证 命 M 是上确界,由 3 知,M 有限. 用反证法. 假定恒有 $f(x)<M$,即 $f(x)$ 不能达到 M,作函数

$$\varphi(x)=\frac{1}{M-f(x)},$$

这是分母永不为 0 的函数,也是连续的. 由 3 知,它有界,也即有 $\mu>0$,使 $\varphi(x) \leqslant \mu$. 因此

$$f(x) \leqslant M-\frac{1}{\mu},$$

于是有一小于 M 的数 $M-\frac{1}{\mu}$ 成为 $f(x)$ 的上界,这与上确界的定义矛盾. 所以必有一 x_0,使 $f(x_0)=M$.

同法可证,必有一 x_1,使 $f(x_1)=m$.

9.2.4 函数的一致连续性

前面已经说过,函数 $f(x)$ 在某个点 x_0 连续是个局部性的概念,即它只与函数在 x_0 及其近旁的性质有关,而与函数在其他地方的性质无关. 同样,函数 $f(x)$ 在某个区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上连续,也是一个局部性的概念,这就是说 $f(x)$ 在区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上的每一点处都是连续的,即点点连续的意思. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言来说,那就是对于区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上的每一个点 x_0 及任给的 $\varepsilon>0$,都相应地存在 $\delta(\varepsilon,x_0)>0$,只要 (a,b)(或 $[a,b]$)上的点 x 满足 $|x-x_0|<\delta$,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立,这里 $\delta(\varepsilon,x_0)$ 表示它不仅依赖于任给的 ε,而且依赖于所讨论的点 x_0,对于 (a,b)(或 $[a,b]$)上不同的点 x_0,相应的 δ 亦应有所不同. 换句话说,使得不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 开始成立的那样一个"时刻"δ,对于 (a,b)(或 $[a,b]$)上各个不同点来说是不一致的. 如果存在一个对 (a,b)(或 $[a,b]$)上一切点都共同适用的 δ,这就是一致连续的概念. 以下我们来定义函数在区间 (a,b)(成 $[a,b]$)上的一致连续性.

设函数 $f(x)$ 定义在区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上,如果对于任给的 $\varepsilon>0$,存在仅与 ε 有关的 $\delta(\varepsilon)>0$,只要 $|x-x_0|<\delta$,就有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 对于 (a,b)(或 $[a,b]$)上一切点 x_0 都成立,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上**一致连续**(或**均匀连续**)

这个定义还可以用另一种办法来陈述.

设 $f(x)$ 定义在区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上,如果对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$,只要 $|x'-x''|<\delta$,就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 对于 (a,b)(或 $[a,b]$)上的任意两点 x',x'' 成立,则称 $f(x)$ 在区间 (a,b)(或 $[a,b]$)上一致连续.

例 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 上显然点点连续,但不一致连续.

证 取 $\varepsilon=1$,不论怎样的 $\delta>0$,只要正整数 n 充分大,总可找到 $(0,1)$ 上两点 $x'=\dfrac{1}{n},x''=\dfrac{1}{n+1}$,尽管它们的距离

$$|x'-x''|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\delta,$$

可是

$$|f(x')-f(x'')|=|n-(n+1)|=1.$$

这就是说,对于 $\varepsilon=1$,我们已经找不到满足上述定义的 δ 了,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

但是对于闭区间,我们有如下的结果.

若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则必在 $[a,b]$ 上一致连续.

证 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不一致连续,则存在 $\varepsilon>0$,对于一切正整数 n,总存在 $x_n,x'_n\in[a,b]$,使 $|x_n-x'_n|<\dfrac{1}{n}$,而

$$|f(x_n)-f(x'_n)|\geqslant\varepsilon.$$

因为 x_n 有界,由 9.1.3 节中的 Bolzano-Weierstass 判别准则,有收敛子列 x_{n_k},设 $x_{n_k}\to x_0$,则 $x_0\in[a,b]$. 另一方面,因为 $|x_{n_k}-x'_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}\to 0(k\to\infty)$,所以又有 $x'_{n_k}\to x_0$. 于是由

$$|f(x_{n_k})-f(x'_{n_k})|\geqslant\varepsilon$$

及 $f(x)$ 的连续性,令 $k\to\infty$,就得到 $0\geqslant\varepsilon$ 的矛盾.

习题 9.2

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}x^3=1$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x+1}=1$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，求 $f(0+0)$，$f(0-0)$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 2, \\ -ax, & x<2, \end{cases}$$

(1) 求 $f(2+0)$，$f(2-0)$；(2) 当 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在？

4. 证明：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$，则当 x 充分靠近 x_0 时，$f(x)$ 有界；

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a(a>0)$，则当 x 充分靠近 x_0 时，$f(x)>0$.

5. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$　(m,n 为正整数)；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$　(m,n 为正整数)；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$　(n 为正整数)；

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$；　　(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$；

(12) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$；

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$；

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$　(m,n 为正整数，α,β 为实数)；

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$　(m,n 为正整数，α,β 为实数).

7. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^r-1}{x}=r$ （r 为有理数）；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+p(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$ （其中：$p(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$m$ 为正整数）.

8. 定出常数 a,b 使下列等式成立：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

9. 设

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_n},\quad (a_0\neq 0,b_0\neq 0,m,n\text{ 为正整数})$$

证明

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{当 } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m,\\ 0, & \text{当 } n<m.\end{cases}$$

10. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-x^2}{1+x}}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ （m,n 为整数）；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^m)}{\sin^n x}$ （m,n 为正整数）.

11. 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ （$a>1,k>0$）；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0$ （$k>0$）；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

12. 证明：当 $x\to 0$ 时，函数 $e^{2x}-e^x$ 和 $\sin 2x-\sin x$ 是等价的无穷小量.

13. 当 $x\to 0$ 时，下列函数关于 x 是几级的无穷小量？

(1) $e^x-\cos x$；　　(2) $2x-3x^3+x^{10}$；

(3) $\sqrt{1+x^2}-1$; (4) $\sin(\sqrt{1+x}-1)$.

14. 当 $x\to+\infty$ 时,试比较下列无穷大量的级.

(1) 2^x 与 3^x; (2) $\sqrt{1+x^2}$ 与 $x-1$;

(3) $\sqrt{x^3+x+1}$ 与 $\sqrt{x+\sin^2 x}$;

(4) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 与 $\sqrt{x^3+x+1}$.

15. (1) 证明 $x^2\sin\dfrac{1}{x}=o(x)(x\to0)$;

(2) 证明,若 $a_0\neq0$,则当 $n\to\infty$ 时,$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 与 x^n 是同级无穷大量;

(3) 当 A 为何值时

$$\frac{\arctan x}{1+x^2}\sim\frac{A}{x^2}\quad(x\to+\infty).$$

16. 设 $\alpha(x),\beta(x),\alpha_1(x),\beta_1(x)$ 当 $x\to x_0$ 时都是无穷小量,$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)(x\to x_0)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)(x\to x_0)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在,证明

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

17. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$; (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)}{x}$.

18. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明下列函数的连续性:

(1) $f(x)=x^2$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

19. 研究下列函数的连续性:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\leqslant1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ -x+4, & 3\leqslant x\leqslant4;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}, & x\neq1,\\ A, & x=1;\end{cases}$

(4) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+x^2e^{nx}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$;

(5) $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

20. 确定 a,b,c 使

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -1,\\ ax^2+bx+c, & |x|<1(x\neq 0),\\ 0, & x=0,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

为一连续函数.

21. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续,证明 $|f(x)|$ 必在 x_0 点连续,反之是否成立?

22. 设(1) $f(x)$ 在 x_0 点连续,$g(x)$ 在 x_0 点不连续;(2) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点都不连续,研究 $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点的连续性.

23. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $[a,b]$ 内的 n 个点,则在 (a,b) 内必可找到一点 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

24. 证明:

(1) 方程 $x^3-3x=1$ 在 $[1,2]$ 中有根;

(2) 方程 $x2^x=1$ 在 $[0,1]$ 中有根;

(3) 方程 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0,(a_1,a_2,a_3>0,\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3)$ 在 $(\lambda_1,\lambda_2),(\lambda_2,\lambda_3)$ 中各有一根;

(4) 实系数代数方程

$$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0.$$

至少有一实根.

25. 证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\neq 0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号.

26. 研究下列函数在所给区间上的一致连续性:

(1) $f(x)=x,x\in(-\infty,+\infty)$; (2) $f(x)=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $f(x)=\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$; (4) $f(x)=\dfrac{1}{x},x\in(a,1)(a>0)$;

(5) $f(x)=\sqrt{x},x\in[1,+\infty)$; (6) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x},x\in(0,1)$;

(7) $f(x)=\sqrt[3]{x},x\in[0,+\infty)$.

27. 证明,函数 $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续且有界,但在此区间上不一致连续.

28. 证明:函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界,但在此区间上不一致连续.

29. 证明:若函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且有根,则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

9.3 定积分的存在性

9.3.1 Darboux 和

在 1.2.2 节中,我们给出了连续函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分的确切概念,现重述如下.

若 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数,以 T 表示用点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

来分区间 $[a,b]$ 的任意一种分法,对于这个分法,作和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 而 ξ_i 就是小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中的任意一点,称和数 σ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和. 显然,这个和数既与分法 T 有关,又与 ξ_i 的取法有关,但如果我们把小区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 中最大一个的长度记作 $\lambda(T)$,即命 $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,那么,当 $\lambda(T)\to 0$ 时,这些不同的和都会趋向同一极限值 I. 这个值就称为函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.

此外,我们在 1.2.1 节中以计算 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 上所形成的曲边三角形的面积为例,那里,我们将 $[0,1]$ 等分成 n 份就求出了该曲边三角形的面积;在那里,我们还看到,当 $y=x^m$,$m\geqslant 4$ 时,为便于计算,就不再是将 $[0,1]$ 等分成 n 份,而是分为等比等分,即相邻两小段长度之比是一样的,这样也可以求出该曲边三角形的面积. 那里,我们的确看到了取的是不同的 T. 但是怎么知道,对于不同的 T,只要 $\lambda(T)\to 0$,σ 都会趋于同一个极限值呢? 又怎么知道,对同一个 T,取不同的 ξ,σ 也都会趋于同一个极限值呢? 这就是定积分的存在性问题. 在第一章中,我们承认了它,面并未证明. 在第六、七章时,实际上也默认了它. 在这一章中,可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来证明它,当然我们只证明一维的情形,二维与三维的情形是完全类似的.

上述关于定积分的定义,是 Riemann 给出的. 这种积分通常称为 Riemann 积分. 一个函数,在一区间中,如果 Riemann 积分存在,则称这函数在这区间中是 Riemann 可积的. 上述的结果就是说,连续函数在其定义区间中是 Riemann 可积的.

因而,我们需要证明的是,给定在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 之后,不论用哪种分法 T 来分 $[a,b]$,也不论在 $[x_{i-1},x_i]$ 中选取怎样的 ξ_i,只要 $\lambda(T)\to 0$,所作的和数 σ 都趋于同一极限值.

如上所述,对一种分点的分法 T,可以有和数

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

这个和数称为 Riemann 和. 为了表示这个和数是由分点的分法 T 得来的. 我们记 σ 为 $S(f,T)$.

由于 $f(x)$ 是在闭区间 $[a,b]$ 上连续的,把 $[a,b]$ 用分法 T 分成 n 个闭区间 $[a,x_1],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots,[x_{n-1},b]$ 由 9.2.3 节的 4,$f(x)$ 在任一小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上必能取到最大值与最小值,记其最大值为 $M_i(x)$,最小值为 $m_i(x)$. 于是在所有 $S(f,T)$ 中最大的一个是

$$S_1(f,T) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x)\Delta x_i,$$

最小的一个是

$$S_0(f,T) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x)\Delta x_i,$$

这分别叫做 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 Darboux 上和和下和. 显然

$$S_0(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S_1(f,F).$$

9.3.2 连续函数的可积性

现在我们来证明在闭区间上的连续函数的可积性.

1. 设 T_1 和 T_2 是区间 $[a,b]$ 的两个分法,若 T_1 中的分点都同时是 T_2 中的分点,那么

$$S_0(f,T_1) \leqslant S_0(f,T_2) \leqslant S_1(f,T_2) \leqslant S_1(f,T_1)$$

我们只证最后一个不等式. 为简单起见,如图 9.4 所示,x_{i-1},x_i 是 T_1 的两个分点,$y_{k-1}(=x_{i-1}),y_k,y_{k+1}(=x_i)$ 是 T_2 的分点,则

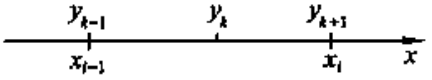

图 9.4

$$M_k(y)\Delta y_k + M_{k+1}(y)\Delta y_{k+1} \leqslant M_i(x)\Delta y_k + M_i(x)\Delta y_{k+1}$$
$$= M_i(x)\Delta x_i,$$

相加即得所证.

2. 设 T_1 和 T_2 是 $[a,b]$ 的两个分法,将 T_1 和 T_2 中的分点合在一起成为一个新的分法 T_0. 于是由 1 所证,可得

$$S_0(f,T_1) \leqslant S_0(f,T_0) \leqslant S_1(f,T_0) \leqslant S_1(f,T_2),$$

所以对于任意两个分法 T_1 与 T_2,我们恒有

$$S_0(f,T_1) \leqslant S_1(f,T_2).$$

于是得到,对于所有的分法 T,$S_0(f,T)$ 有上界,取所有上界中的那个最小的上界,称为它的**上确界**,记作 I_0. 同样,由上式还可以得到,对于所有的分割 $S_1(f,T)$ 有下界,取所有下界中的那个最大的下界,称为它的**下确界**,记作 I_1. 显然

$$I_0 \leqslant I_1,$$

由此,我们可以得到

3. 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件为:对任意的分法 $T(\lambda(T)\to 0)$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}[S_1(f,T) - S_0(f,T)] = 0$$

都成立. 这时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分为 $I = I_0 = I_1$.

证 先证充分性. 显然

$$0 < I_1 - I_0 \leqslant S_1(f,T) - S_0(f,T).$$

令 $\lambda(T)\to 0$. 即得 $I_1 = I_0$,记之为 I. 由于

$$S_0(f,T) \leqslant S(f,T) \leqslant S_1(f,T),$$

$$I_1 \leqslant S_1(f,T), I_0 \geqslant S_0(f,T), I_1 = I_0 = I,$$

所以

$$S_0(f,T) - S_1(f,T) \leqslant S(f,T) - I \leqslant S_1(f,T) - S_0(f,T),$$

即

$$|S(f,T) - I| \leqslant S_1(f,T) - S_0(f,T).$$

令 $\lambda(T)\to 0$,即得

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,T) = I.$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,积分为 $I = I_0 = I_1$.

再证必要性. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,积分为 I,即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,T) = I.$$

任给 $\varepsilon>0$,则有 $\delta>0$,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,不论 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上如何选取,

$$I - \varepsilon < S(f,T) < I + \varepsilon.$$

因为 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上是任意的,而 $I-\varepsilon$ 和 $I+\varepsilon$ 是常数,与这些 ξ_i 无关,故由上述不等式可得

$$I - \varepsilon \leqslant S_0(f,T) \leqslant S_1(f,T) \leqslant I + \varepsilon,$$

即

$$0 \leqslant S_1(f,T) - S_0(f,T) \leqslant 2\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(S_1(f,T) - S_0(f,T)) = 0.$$

4. 现在可以来证明在$[a,b]$上连续的函数$f(x)$是可积的.

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,由 9.2.4 节知,$f(x)$在$[a,b]$上一致连续,因此,任给$\varepsilon>0$,有$\delta>0$,δ仅与ε有关. 当$t,s\in[a,b]$,$|t-s|<\delta$时,

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

成立. 于是当$\lambda(T)<\delta$时,上式在每个区间$[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$上成立. 因此当$t,s$在$[x_{i-1},x_i]$中变动时,$|f(t)-f(s)|$的最大值,记之为$L_i(x)$,不超过$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$,这件事对所有的$i=1,2,\cdots,n$都成立. 而

$$M_i(x) - m_i(x) = L_i(x).$$

所以,当$\lambda(T)<\delta$时,

$$\begin{aligned} S_1(f,T) - S_0(f,T) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(x) - m_i(x))\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} L_i(x)\Delta x \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i \\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

因此,

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}(S_1(f,T) - S_0(f,T)) = 0.$$

由 3 知,$f(x)$在$[a,b]$上可积.

从整个证明过程可以看出,连续函数在闭区间上的一致连续性起了十分重要的作用.

同理,我们可以证明:**在区间$[a,b]$上除了有有限个间断点外都连续有界的函数也是可积的.**

假定$f(x)$在$[a,b]$上的间断点按递增的顺序是:$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,又假设$\varepsilon$是充分小的任意正数,使得区间

$$(\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon) \quad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

彼此不相交(如图 9.5 所示,这些小区间用铅直的短线标出).

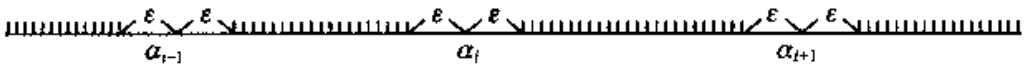

图 9.5

对区间$[a,b]$的任意一个分法 T,我们把用这个分法分成的小区间分成两类:第一类是那些整个包含在某个带短线的小区间$[\alpha_{i-1}+\varepsilon,\alpha_i-\varepsilon]$$(1\leqslant i\leqslant r)$内,第二类是与某个小区间$(\alpha_i-\varepsilon,\alpha_i+\varepsilon)$$(1\leqslant i\leqslant r)$有公共点的小区间. 这样把 $f(x)$在$[a,b]$上的上和与下和之差也分成两部分

$$S_1(f,T)-S_0(f,T)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x=\sum{}'+\sum{}'',$$

其中 $\sum'$ 是对应于所有第一类小区间所作的和,$\sum''$ 是对应于所有第二类小区间所作的和. 由于$f(x)$在每个小区间$(\alpha_{i-1}+\varepsilon,\alpha_i-\varepsilon)$上是连续的. 因此,对第一类中的每个小区间$(\alpha_{i-1}+\varepsilon,\alpha_i-\varepsilon)$都可找到充分小的 $\delta>0$,当 $\lambda(T)<\delta$ 时,$f(x)$在每个小区间(x_{i-1},x_i)上的上确界 M_i 与下确界 m_i 之差都小于 ε,则

$$\sum{}'=\sum{}'(M_i-m_i)\Delta x_i\leqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x=\varepsilon(b-a).$$

至于第二类小区间,它们长度的和小于$(2\varepsilon+2\delta)r$. 所以当我们取 $\delta<\varepsilon$ 时,第二类小区间的长度和不超过 $4r\varepsilon$,

$$\sum{}''=\sum{}''(M_i-m_i)\Delta x_i\leqslant(M-m)\sum{}''\Delta x_i\leqslant 4(M-m)r\varepsilon,$$

其中 M,m 分别是$f(x)$在$[a,b]$上的上确界和下确界. 因此

$$\begin{aligned}S_1(f,T)-S_0(f,T)&=\sum{}'+\sum{}''<(b-a)\varepsilon+4(M-m)r\varepsilon\\&=\{(b-a)+4(M-m)r\}\varepsilon.\end{aligned}$$

因之,任给 $\varepsilon>0$,只要取 $\lambda(T)<\delta<\varepsilon$,上式就成立. 于是

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\{S_1(f,T)-S_0(f,T)\}=0.$$

由 3,就证明了上述结论.

若$f(x)$是定义在$[a,b]$上的单调函数,不失一般性,可设$f(x)$是递增函数. 若$f(a)=f(b)$,则$f(x)$在$[a,b]$上是一常数,当然可积. 所以可设$f(b)>f(a)$. 对任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. 则当分割 T 有 $\lambda(T)<\delta$ 时,则由函数的单调性,

$$S_1(f,T)-S_0(f,T)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}m_i(x)\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

$$= \delta(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} [S_1(f,T) - S_0(f,T)] = 0$$

因之，由 3，就得到如下的结论. **闭区间上的单调函数一定是可积的.**

有没有不可积的函数？有. 这里举一例：

设函数 $D(x)$ 定义为

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

显然它在区间 $[0,1]$ 上是有界的，但它却不可积. 因为不论把 $[0,1]$ 分得多么细，在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中总能找得到有理数和无理数，于是 $M_i = 1, m_i = 0$，这样，不论 $\lambda(T)$ 如何趋于 0，

$$S_1(D,T) - S_0(D,T) = 1$$

总是成立，由 3，知道它不可积.

上面已经证明了：有限区间上的连续函数是 Riemann 可积的；还指出了在有限区间上有界，只有有限多个不连续点的函数也是 Riemann 可积的；还证明了在有限区间上单调函数是 Riemann 可积的；也举出了不是 Riemann 可积的函数，若函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 上有界，什么是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的必要与充分条件？这当然是 Riemann 积分的一个根本问题.

为了要说清楚这点，先要对由无穷多个元素所组成的集合进行分类.

令 $\mathbf{N}_+$ 是正整数的全体所组成的集合，即

$$\mathbf{N}_+ = \{1,2,3,\cdots\}$$

当然这个集合有无穷多个元素. 若 A 也是一个由无穷多个元素组成的集合，如果 A 与 $\mathbf{N}_+$ 之间可以建立起一一对应，则称 A 是一个**可数集**. 若 A 是有限集（即由有限个元素组成的集合），或是可数集，则称 A 为**至多可数集**. 否则称为不可**数集**. 可以证明：所有有理数的全体组成的集合是可数集. 所有无理数的全体组成的集合是不可数集. 当然所有实数的全体组成的集合也是不可数集.

若 A 为由一些实数所组成的一个集合，如果对任给的 $\varepsilon > 0$，一定存在至多可数的一列开区间 $\{I_n, n \in \mathbf{N}_+\}$，它组成 A 的一个开覆盖（即 A 中任何一点，一定是某一个 I_n 中的内点），并且 $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$，这里 $|I_n|$ 表示开区间 I_n 的长度，那么称 A 为**零测度集**.

显然空集是零测度集. 还可证明:如果 A 是至多可数集,则 A 一定是零测度集.

证 不妨设 A 为可数集

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$$

任给 $\varepsilon > 0$,作区间 $I_n = \left(a_n - \frac{\delta}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\delta}{2^{n+1}}\right)$, $n = 1, 2, \cdots, 0 < \delta < \varepsilon$ 显然 $\{I_n, n \in \mathbf{N}_+\}$ 组成 A 的一个开覆盖,且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{\delta}{2^{n+1}} = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \delta < \varepsilon.$$

所以 A 是一个零测度集

当 A 是有限集,结论显然成立.

另一方面,任何长度不为零的区间都不是零测度集.

证 不妨设所考虑的区间为开区间 (a, b), $a < b$. 若 $\{I_n, n \in \mathbf{N}_+\}$ 是 (a, b) 的一个开覆盖,则显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \geqslant b - a > 0.$$

上述不等式的右边 $b - a$ 是一个确定的正数,故 (a, b) 不是零测度集.

有了这些准备后,就可以叙述重要的

Lebesgue 定理 若函数 $f(x)$ 在有限区间 $[a, b]$ 上有界,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的必要与充分条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的不连续点的全体所组成的集合是一个零测度集.

这个定理的证明就不在此叙述了,这个定理彻底地解决了在有限区间上的函数什么时候是 Riemann 可积的问题. 也就是说:Riemann 可积的函数"基本上"是连续函数,差别仅仅是一个零测度集,上述不 Riemann 可积的例子,函数 $D(x)$ 之所以不可积是因为它在所有无理数点上都不连续,而所有无理数的全体组成的集合,不是零测度集.

在更深入一步学习数学的过程中,会发现 Riemann 可积的函数类,即"基本上"是连续函数类,差别一个零测度集,这样的函数类太小了. 于是要扩展积分的定义,扩展成 Lebesgue 积分,这时 Lebesgue 可积的函数类就比 Riemann 可积的函数类就大大扩充了,当然这已远远超出本书的范围了. 但是对微积分这门课程来讲,讨论 Riemann 可积的函数类已经是足够的了.

以上就是对定积分存在定理的讨论,现在回到 Riemann 积分,以下所说的定积分都是指 Riemann 定积分.

有了定积分的存在性定理,定积分理论就建立在牢固的基础上了. 同样,对于微商的定义,也可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言重新说一遍,但这里并不需要作什么特殊的

补充,至于多变量的积分也一样可以这样做,例如,我们可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言来定义多变量函数的连续、一致连续,并且也一样可以证明,在闭区域上的连续函数是一致连续的. 也可以一样的作多个变数的 Darboux 和. 也可以证明在闭区域上的连续函数是 Riemann 可积的. 同样的办法,可以用 $\varepsilon-\delta$ 语言定义线、面积分及多变量的偏微商,不在此一一列举了.

9.3.3 定积分概念的推广

在讨论 Riemann 积分的存在性时,假定了积分的区间是有限闭区间以及函数是连续的,由于闭区间上的连续函数是有界的. 所以也就假定了被积函数是有界的. 这些限制都可以去掉,把 Riemann 积分的定义加以推广,下面讨论推广了的 Riemann 积分在什么条件下是有意义的.

例如,计算由曲线 $y=\frac{1}{x^2}(x\geqslant 1)$ 和直线 $x=1, y=0$ 所围成的开口曲边梯形的面积(图 9.6). 从形式看,这块面积应等于无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$,但这样的积分的意义是什么? 按照原来的 Riemann 积分的定义,这是无意义的. 因而,我们要想法对这样的积分给予意义. 先计算图 9.7 中阴影的面积,即由 $y=\frac{1}{x^2}, x=1, x=b$ 及 $y=0$ 所围成的曲边梯形的面积

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1-\frac{1}{b},$$

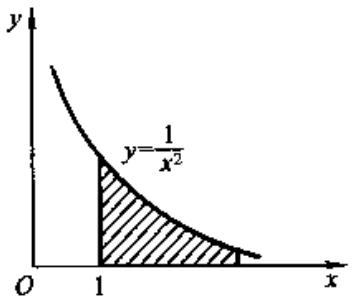

图 9.6

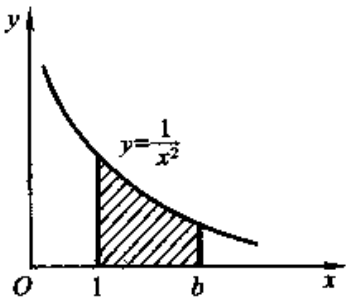

图 9.7

当 b 增大时,面积也增大,当 $b\to+\infty$ 时,这块面积就是整个开口的曲边梯形的面积. 因而,自然应定义

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1.$$

一般来说,我们可按下述方式定义这种情形的定积分.

设 $f(x)$ 在无限区间 $[a,+\infty)$ 上连续,如当 $b\to+\infty$ 时,积分

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

的极限

$$\lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

存在，就称**无穷积分**[①]

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

是收敛的，并把上述极限定义为这个积分的值，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

反之，就说**积分是发散的**.

同样，如果 $f(x)$ 在 $(-\infty, b]$ 上连续，而当 $a\to-\infty$ 时，积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的极限

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

是存在的，则称无穷积分 $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ 是收敛的. 并把上述极限定义为这个积分的值，即

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

反之，就说积分是发散的.

如果 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，可用同样办法，定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)\,dx,$$

如果上式右边积分的极限存在的话.

例 1 证明积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$ 收敛.

证 因为

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\arctan b = \frac{\pi}{2},$$

所以积分收敛.

---

① “无穷积分”在《数学名词》上用“反常积分”.

例 2 证明积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证 当 $p>1$ 时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p})=\frac{a^{1-p}}{p-1},$$

所以积分收敛.

当 $p<1$ 时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p})=+\infty,$$

所以积分发散.

当 $p=1$ 时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty,$$

所以积分发散.

这时微积分基本定理依然成立.

若 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，若记

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x),\quad F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x),$$

则有

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^b=F(b)-F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty).$$

例 3 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$

例 4 计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x dx$.

解 用两次分部积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x dx=e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}.$$

对于定积分的被积函数在区间$[a,b]$上有界的限制，也可用同样办法去掉.

例如，考虑积分$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$，当$x\to 0$时，$\frac{1}{\sqrt{x}}\to+\infty$，所以按原有的 Riemann 积分的定义，积分是没有意义的. 但是，如果回到 1.2 节中，将定积分的意义理解为曲边梯形的面积的话，那么，在图 9.8 中有阴影的那块面积有可能是存在的. 为此，先看图 9.9 中有阴影的那块面积，显然，这块面积为

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = 2(1-\sqrt{\varepsilon}).$$

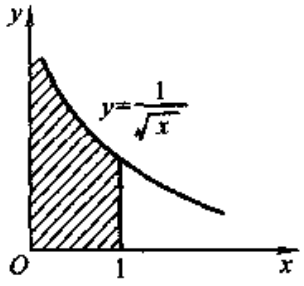

图 9.8

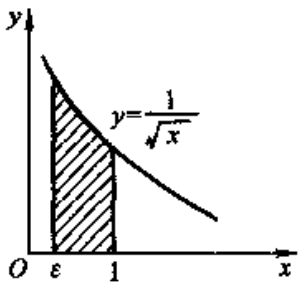

图 9.9

当ε愈接近于0，面积愈大，当$\varepsilon\to 0$时，图 9.9 中的面积就成为图 9.8 中的面积，即

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2,$$

我们自然定义

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2.$$

一般来说，我们可按下述方式定义这种情形的定积分.

设函数$f(x)$在$(a,b]$上连续，当$x\to a+0$时，$f(x)\to\infty$（称点a为**瑕点**），如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

存在,则称**积分** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**,并定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

反之,称此**积分发散**.

同样,如果 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续,当 $x\to b-0$ 时,$f(x)\to\infty$,如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,并定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x.$$

反之,称此积分发散.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中一点 c 处有 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$,则可定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon'\to 0^+}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\mathrm{d}x,$$

如果右边两个极限都存在的话.

这时微积分基本定理依然成立.

若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,则

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a)$ (若 b 是瑕点);

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a+0)$ (若 a 是瑕点);

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-0)-F(a+0)$ (若 a,b 都是瑕点).

例 5 计算 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

解 当 $x\to 0^+$ 时,$\ln x\to-\infty$,所以 $x=0$ 是瑕点,但

$$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0^+}^1 - \int_0^1 \mathrm{d}x = -1.$$

例 6 证明积分 $\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\ (a>0)$ 当 $p<1$ 时收敛;当 $p\geqslant 1$ 时发散.

证 $x=0$ 是瑕点,当 $p\neq 1$ 时有

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{0^+}^a$$

若 $p<1$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-p}=0$，故

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}a^{1-p},$$

所以积分收敛. 若 $p>1$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1-p}=+\infty$，所以积分发散，当 $p=1$ 时，

$$\int_0^a \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x\Big|_{0^+}^{a} = \infty,$$

积分发散.

有了上述这些推广之后，不论函数有界与否，积分区间有限与否，在一定条件下，定积分依然有意义.

关于无穷积分，将在第十章中详细讨论.

习题 9.3

1. 指出下列数集的上下确界：

(1) $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；

(2) $A=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Big|_{n=1,2,\cdots}\right\}$；

(3) $A=\left\{\sin\frac{\pi}{n}\Big|_{n=1,2,\cdots}\right\}$；

(4) $A=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\Big|_{n=1,2,\cdots}\right\}$；

(5) $A=\left\{x\,\middle|\,\sin\frac{\pi}{x}=0,x>0\right\}$；

(6) $A=\{x\mid \ln x<0\}$；

(7) $A=\left\{x\,\middle|\,x>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,n=1,2,\cdots\right\}$；

(8) $A=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{1}{n},n=1,2,\cdots\right\}$.

2. 求下列函数的上下确界：

(1) $f(x)=x^2 \quad (-2<x<5)$；

(2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty<x<+\infty)$；

(3) $f(x)=\frac{2x}{1+x^2} \quad (0<x<+\infty)$；

(4) $f(x)=\sin x \quad (0<x<+\infty)$；

(5) $f(x)=2^x \quad (-1<x<2)$；

(6) $f(x)=\sin x+\cos x \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$.

3. 把区间 $[-1,4]$ 分为 n 个相等的子区间，并取这些子区间中点的坐标作为自变量 ξ_i.

的值($i=0,1,2,\cdots,n-1$). 求函数$f(x)=1+x$在此区间上的 Riemann 和.

4. 设(1) $f(x)=x^3(-2\leqslant x\leqslant 3)$;(2) $f(x)=\sqrt{x}(0\leqslant x\leqslant 1)$. 把相应区间等分成$n$份,求给定函数$f(x)$在相应区间上的 Darboux 上和及下和.

5. 从积分的定义出发,求

$$\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t,$$

其中v_0及g均为常数.

6. 利用定积分,求下列和的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

7. 计算下列积分:

(1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^4}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x\quad(a>0)$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ (n为正整数);

(8) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$ (n为正整数);

(9) $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^1 x\ln x\mathrm{d}x$;

(12) $\int_0^1\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$;

(13) $\int_1^2\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$;

(14) $\int_0^1\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ (n为正整数);

(15) $\int_0^1\dfrac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (n为正整数);

(16) $\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}x$ (n为正整数).

第十章

无穷级数与无穷积分

10.1 数项级数

10.1.1 基本概念

到现在为止，虽然我们对一般的函数讨论了它的微分与积分，但我们能运用的只是一些初等函数．可是，客观世界是千变万化的，不可能只用初等函数来刻画它．由于初等函数的有限次运算还是初等函数，不可能产生新的函数，故必须考虑无限次运算，而最基本的运算是加法（减法相当于加上一个负项）与乘法（除法相当于乘上它的倒数）．对一些函数，尤其是初等函数，进行无穷次相加，就得到无穷级数，进行无穷次相乘，就得到无穷乘积．初等函数中，最简单的函数为幂函数、三角函数及指数、对数函数．如果把幂函数无穷次相加，就得幂级数，这是本章中要讨论的．如果把三角函数无穷次相加，就得三角级数，这是下一章中要讨论的．至于指数函数，在将来学习了复变函数论以后可以明白，指数函数与三角函数可以用公式来相互表达，所以不必专门讨论指数函数的无穷次相加的问题．读者如有兴趣，可参阅复变函数论的书．

另一方面，由于幂函数、三角函数易于掌握与研究，因而，对于一些复杂的函数，尽可能的用幂函数的无限和（称为 Taylor 级数，这是本章的内容）或三角函数的无限和（称为 Fourier 级数，这是下一章的内容）来表达之．尤其是由于电子计算机的发展，有了这种用基本初等函数表示的表达式，可以上机计算那些复杂的函数．

我们已经知道，初等函数的微商仍然是初等函数，即通过微商运算不可能产生非初等函数，但是，初等函数的积分不一定是初等函数．因此，通过对初等函数的积分，可以产生新的非初等函数．所以，对于含参变量的积分的研究与讨论是很重要的．这也是本章的内容．

在 1.2 节及 9.3 节中，曾十分明确地指出，所谓积分，就是和的极限，即无限项“连续”相加．而级数为函数无限项相加，即为无限项“离散”的相加．所以从本质上讲，这两者有共同之点，而且“连续”与“离散”之间是相互可以转化的，这

些都要在本章中仔细讨论.

为了便于进行讨论,先从数项级数开始.

所谓数项级数是指无穷个数 $a_n(n=1,2,\cdots)$ 相加:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

其中 a_n 是实数,也可以是复数,这里只讨论实数. 命

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

称它为级数的部分和,如果

$$S_n \to S \quad (n \to \infty),$$

则称级数为**收敛级数**,并且称它收敛于 S,否则就称级数是**发散**的.

例 1 当 $|r|<1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} r^n = \lim_{N\to\infty}(1 + r + \cdots + r^N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r},$$

所以级数收敛.

例 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots.$

因为当 $n\to\infty$ 时,部分和

$$S_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

$$= \ln(n+1) \to \infty.$$

所以级数发散.

例 3 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + \cdots + (-1)^n + \cdots.$

它的部分和

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时,S_n 没有极限,即级数是发散的.

从定义可以看出,无穷级数与无穷数列本质上是一件事,它们是可以相互转化的. 事实上,从无穷级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

可以得到无穷数列 S_n,而级数的收敛与否决定于数列 S_n 的收敛与否. 反之,如果已给无穷数列

$$b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots.$$

我们可以造出无穷级数

$$b_1 + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_n - b_{n-1}) + \cdots,$$

而这个级数的开始 n 项之和 S_n 就是 b_n. 所以,无穷数列的收敛与否,决定于无穷级数的收敛与否,也即从收敛性看,无穷级数与无穷数列本质上是一致的. 因此,关于无穷数列的那些定理,我们可以容易写出无穷级数的相应定理.

10.1.2 一些收敛判别法

从数列的 Cauchy 准则容易写出无穷级数的 Cauchy 判别准则:

无穷级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛的充分必要条件为:对任一 $\varepsilon > 0$,存在一正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n > m > N$ 时,

$$|S_n - S_m| < \varepsilon$$

成立,即

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| < \varepsilon$$

成立.

由单调有界数列必有极限可以得出下列正项级数的收敛判别法:

如果 $a_n \geqslant 0$, $|S_n| \leqslant M$ 对一切 n 都成立(此处 M 为一正常数),则级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛.

在 Cauchy 判别准则中,特别取 $m = n - 1$,则 $S_n - S_{n-1} = a_n$,所以得到:

如果级数 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ 收敛,则必须有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

这个条件只是级数收敛的必要条件,而不是充分条件,即如果上述条件满足,级数未必收敛. 例如例 2 的级数,$a_n = \ln\frac{n+1}{n}$,当 $n \to \infty$ 时,$a_n \to 0$,但级数是发散的.

如果级数

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots$$

收敛,则称级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为绝对收敛.

由 Cauchy 判别准则及

$$|a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n| \leqslant |a_{m+1}|+|a_{m+2}|+\cdots+|a_n|$$

可知,凡绝对收敛的级数一定收敛.

实际上,这个定理还可以更一般些,依然用 Cauchy 判别准则,可以证明

如果 $b_n \geqslant 0$,**且**

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$$

收敛,若 $|a_n| \leqslant b_n$,**则**

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

绝对收敛.

事实上,上述结果,只要求当 n 充分大时,$|a_n| \leqslant b_n$ 成立即可.

更一般些,还可以有

比较判别法:设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **为两个正项级数**(即 $a_n \geqslant 0, b_n \geqslant 0$),**且** $a_n \leqslant b_n (n=1,2,\cdots)$,**那么**

(i) **若** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **收敛**,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(ii) **若** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.

根值判别法(Cauchy 判别法):如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 有

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r,$$

则当 $r<1$ 时级数绝对收敛;当 $r>1$ 时级数发散;当 $r=1$ 时不能作出结论.

证 若 $r<1$,在比较判别法中,取 $b_n = r^n (0<r<1)$,由例 1 知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n (0<r<1)$ 收敛. 因此,如果当 n 充分大时,就有 $|a_n| \leqslant r^n$,即 $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant r (0<r<1)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

若 $r>1$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r > 1$,因此,当 n 充分大时,$|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$,即 $|a_n| > 1 (n > N)$,当 n 无限增大时,a_n 不趋于零,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

至于 $r=1$ 的情形,只要举例来说明不能用此判别法断定级数的敛散性.

在下面的例 4 中,将证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,而这两个级数都满足 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$.

比值判别法(d'Alembert 判别法):若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **有**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r,$$

则当 $r<1$ **时级数绝对收敛;当** $r>1$ **时级数发散;当** $r=1$ **时不能作出结论.**

证　若 $r<1$,对任一 $0<\varepsilon<1-r$,有一正整数 $N(\varepsilon)$,当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant r+\varepsilon, \text{即} \mid a_{n+1}\mid \leqslant (r+\varepsilon)\mid a_n\mid .$$

于是

$$\mid a_{N+p}\mid \leqslant (r+\varepsilon)^p \mid a_N\mid .$$

由于 $\sum_{p=1}^{\infty} a_N(r+\varepsilon)^p$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

对 $r>1$ 和 $r=1$ 时的证明方法与 Cauchy 判别法完全类似.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 本身就是正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = r,$$

则当 $r<1$ 时级数收敛;当 $r>1$ 时级数发散;当 $r=1$ 时不能作出结论.

同样,如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 本身就是正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = r,$$

则当 $r<1$ 时级数收敛;当 $r>1$ 时级数发散;当 $r=1$ 时不能作出结论,这些结论的证明,可以仿上面进行之.

对于正项级数,还可以用无穷积分来判断其收敛与否.

设 $f(x)$ **是确定在** $x\geqslant 1$ **中的非负、不增的连续函数,则无穷级数**

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1)+f(2)+\cdots+f(n)+\cdots$$

与无穷积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

证　由于 $f(x)$ 是不增的,故当 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 时,有

$$f(k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(k),$$

即

$$f(k+1)=\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

$$=f(k)\ (k=1,2,\cdots).$$

把这些不等式由 1 加到 n,得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

因为 $f(x)$ 非负,故当 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛时,级数的部分和

$$S_{n+1}=f(1)+\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leqslant f(1)+\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$\leqslant f(1)+\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = M$$

是有界的. 由于单调上升的有界数列必有极限,故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ 收敛. 反之,由于

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

故当积分发散时,级数的部分和无界,故必发散. 即两者同时收敛或同时发散.

从这个定理可以看出无穷级数与无穷积分之间的紧密关系,不但如此,还可以用无穷级数来估计无穷积分,或用无穷积分来估计无穷级数,其根本原因是由于无穷级数与无穷积分都是无穷项相加,差别只是在于,一个是"连续"地加,一个是"离散"地加.

例 1 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 是收敛的. 这是因为,由 Cauchy 判别法,得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1.$$

例 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 是发散的. 这是因为,由 Cauchy 判别法,得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{2} > 1.$$

例 3 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$ 收敛.

事实上,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{\left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{n}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{2}{e}<1.$$

由比值判别法知级数收敛.

例 4　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\cdots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\cdots$$

当 $\alpha>1$ 时收敛,当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

解　这个级数用 Cauchy 判别法及比值判别法都无效,因为此时 $r=1$. 但可以用无穷积分来判别它. 把通项中的 n 换作 x,得到非负函数 $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$,而

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha},\alpha>1;\\ \infty,\quad \alpha\leqslant 1.\end{cases}$$

故当 $\alpha>1$ 时,级数收敛,$\alpha\leqslant 1$ 时,级数发散,特别当 $\alpha=1$ 时,即为调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散级数.

10.1.3　条件收敛级数

不绝对收敛的收敛级数称为**条件收敛级数**. 例如 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ 不绝对收敛,但是

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^{p}\frac{1}{n+p}\leqslant\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]-1}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p}{2}\right]}\right)\leqslant\frac{1}{n}$$

及

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^{p}\frac{1}{n+p}\geqslant\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]}-\frac{1}{n+2\left[\frac{p-1}{2}\right]+1}\right)\geqslant 0$$

(这里[x]表示 x 的整数部分).

所以,当 $n\to\infty$ 时,$S_n - S_{n+p}\to 0$. 由 Cauchy 判别准则,知道这级数是收敛的.

以上的证明原则,立即可以推广成

Leibnitz 判别法:如果 $0 < a_{n+1} \leqslant a_n$ **及** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,**则级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ **收敛**.

证 由于

$$a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots + (-1)^p a_{n+p} \begin{cases} \leqslant a_n; \\ \geqslant 0. \end{cases}$$

故由 Cauchy 判别准则,知道级数收敛.

如级数中的各项的符号正负相间,称此级数为**交错级数**. 上述 Leibnitz 判别法称为交错级数的收敛判别法. 但交错级数是比较特殊的级数,更一般地还可以有 Abel 判别法及 Dirichlet 判别法. 为此,先证明

分部求和法:设 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k (k = 1,2,\cdots)$,则有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n.$$

证 由于 $S_k - S_{k-1} = a_k$,而

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n.$$

值得注意的是:这个分部求和法是以前分部积分法的有限项的形式.

由分部求和法,可以得到如下的

Abel **引理** **设** $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0$,

$$m \leqslant S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant M \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

则有

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant b_1 M.$$

证 由分部求和公式,得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k (b_k - b_{k+1}) + S_n b_n$$

$$\leqslant M \left(\sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + b_n \right) = M b_1.$$

同理可证

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant m b_1.$$

由 Abel 引理,可得

Dirichlet 判别法:如果 b_k 单调下降趋于 0,且 $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 有界,即 $|S_k| \leqslant M(k = 1,2,\cdots)$ 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

证　由于

$$-M \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \leqslant M,$$

即

$$-M - S_n \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \leqslant M - S_n (p = 1,2,\cdots).$$

由上述 Abel 引理,

$$-b_{n+1}(M + S_n) \leqslant a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p} \leqslant b_{n+1}(M - S_n).$$

所以　　$$-2Mb_{n+1} \leqslant a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p} \leqslant 2Mb_{n+1},$$

即为　　$$|a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \leqslant 2Mb_{n+1}.$$

由于 $b_n \to 0$,故当 $n > N$ 时,可使 $b_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2M}$,于是当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1}b_{n+1} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| < \varepsilon$$

对任意自然数 p 都成立,故由 Cauchy 判别准则,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

若在上面的级数中取 $a_k = (-1)^{k-1}$,则有

$$|S_k| = |a_1 + a_2 + \cdots + a_k| \leqslant 1$$

故当 b_k 单调下降趋于 0 时,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ 收敛. 这就是 Leibnitz 判别法.

Abel 判别法:如果 b_k 单调有界,$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛,则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

证　由于 b_k 单调有界,故有极限,设其极限为 b. 若 b_k 单调下降,命 $b_k' = b_k - b$,若 b_k 单调上升,则命 $b_k' = b - b_k$,则 b_k' 单调下降趋于 0. 因级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛,故其部分和 S_k 有界. 据 Dirichlet 判别法,级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k'$ 收敛. 于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k' + b) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k' + b \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛.

例 1 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的收敛性.

解 取 $b_n = \frac{1}{n}$, b_n 单调下降趋于 0, $a_n = \cos nx$, 则

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \cos nx \right| = \left| \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x - \sin \frac{1}{2}x}{2\sin \frac{x}{2}} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

因此, 只要 x 不是 2π 的整数倍, $\sum_{n=1}^{N} a_n$ 有界. 由 Dirichlet 判别法知, 原级数在 $x \neq 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时收敛.

例 2 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛性.

解 由上例知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}$ 是收敛的, 而数列 $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调上升且以 e 为极限, 故有界. 由 Abel 判别法, 该级数收敛.

大家知道, 有限个数相加时, 被加项可以任意交换次序而不影响其和. 无限个数相加时, 级数的项是否可以任意交换呢? 当级数是绝对收敛时, 这个结论也是对的. 而当级数是条件收敛时, 这个结论不对. 不但如此, 当级数条件收敛, 只要适当交换各项的次序, 可使其收敛于任一事先指定的数 S, 也可使其发散. 故绝对收敛的级数与条件收敛的级数是根本不同的. 下面就来证明上述结论.

绝对收敛级数的各项可以任意交换次序而不改变它的和.

证 先证明这个性质对于收敛的正项级数是正确的. 设正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

收敛且其和为 S, 又假设任意交换级数各项的次序后所得的新级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n + \cdots.$$

这个级数的每一项 a'_k 必是原级数的某一项 a_l. 因此, 对于新级数的部分和 $S'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$, 就总可以选取一个足够大的自然数 m, 使得各项 $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ 都含于原级数的部分和 $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ 中, 于是推知

$$S'_n \leqslant S_m \leqslant S$$

即 S'_n 有上界，所以新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 收敛，且其和 S' 不大于 S，即

$$S' \leqslant S.$$

另一方面，原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也可以看成是新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ 交换各项的次序后得到的，根据同样的推理可得

$$S \leqslant S'.$$

比较以上两个不等式即有 $S' = S$.

再证明这个性质对一般的绝对收敛级数是正确的. 设给定具有正负项的绝对收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，它可以表示成两个收敛的正项级数之差

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

于是当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 任意交换各项的次序时，这两个正项级数的各项也相应地改变次序，但由上面已证的结论可知，它们不会因此而改变其和. 这就证明了绝对收敛级数不会因交换各项的次序而改变它的和.

条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，适当改变它各项的次序，可以作成发散的级数，也可以作成收敛于任一事先指定的数 S 的级数.

证　先证适当改变各项的次序可以作成发散的级数. 由于条件收敛的级数必有无穷多正项，也有无穷多负项（否则就是绝对收敛级数）. 而且它的所有正项构成一个发散级数，它的所有负项也构成一个发散的级数，为了适当改变各项的次序得到一个发散的级数，我们把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项作如下安排. 一开始先取级数的若干个正项（按它们在原来级数中的次序），使得它们的和大于 1，在这些项之后放上原级数的第一个负项，然后再在余下的正项中取若干项也使它们的和大于 1，然后在这些项后面加上原级数的第二个负项，如此安排可以一直继续下去以至无穷. 并且很明显，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的每一项都会或早或晚地在这个新级数中出现. 由于这个新级数在无论多远的地方都会有数值大于 1 的片段出现，

根据级数收敛的 Cauchy 判别准则知，它是一个发散级数.

要想得到具有任意事先给定的和数 S 的收敛级数，我们对原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项作如下安排. 为了确定起见不妨假定 $S \geqslant 0$. 一开始先取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的正项（按它们在原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的次序），只要它们的和不大于 S 就一直取下去. 当我们这样取得的和刚刚大于 S 就立刻转而取级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的负项（也是按它们在原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的次序来取），只要这个整个（包含已取的正项）和还不小于 S，就一直取下去，当整个和刚刚小于 S，就立刻转而在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中依次取还没有取走的正项，等等. 这样无尽无休地取下去就得到一个新级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots,$$

很明显，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的确是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的全部项用另外一种次序重新排列出来的，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad (n = 1,2,\cdots).$$

对任意给定 $\varepsilon > 0$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，因此也有 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. 所以存在 N，当 $n \geqslant N$ 时，$|b_n| < \varepsilon$，我们来考虑任何一个 $\sigma_n (n \geqslant N)$；如果 σ_n 与 σ_{n-1} 中一个比 S 大，一个比 S 小，则

$$|\sigma_n - S| \leqslant |\sigma_n - \sigma_{n-1}| = |b_n| < \varepsilon.$$

如果 σ_n 与 σ_{n-1} 都比 S 大或者比 S 小，则根据作出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的原则，σ_n 总是比 σ_{n-1} 更接近于 S. 因此，在任何情形下，$|\sigma_n - S|$ 或者小于 ε，或者小于 $|\sigma_{n-1} - S|$. 由此可见当 $n \geqslant N$ 时有 $|\sigma_n - S| < \varepsilon$，即 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$.

习题 10.1

1. 证明

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$.

2. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^n3^n}{5^n}$

3. 证明：改变级数的有限多项，不影响级数的收敛性

4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛. 反之是否成立？

5. 证明：若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛. 反之，不一定成立，举例说明之.

6. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

7. 证明：若 $\lim_{n\to\infty}na_n=a\neq 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

8. 研究下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+5}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}\right)$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$;　　(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;　　(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{4n}$;　　(10) $\sum_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$;

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(\ln n)^n}$;　　(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\,000^n}{n!}$;　　(14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^nn!}{n^n}$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

(17) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ $(a>0)$.

9. 研究下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$;

(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$;

(3) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

10. 证明:

(1) 设 $a>0,a_n>0(n=1,2,\cdots)$,如果当 $n>N$ 时有

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+a,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 如果 $\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1(n>N)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

11. 利用 10 题结果证明:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$$

收敛.

12. 研究下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

13. 研究下列级数的收敛性和绝对收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^{2n}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

10.2　函数项级数

10.2.1　无穷次相加产生的问题

设　　$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x),\cdots$

是定义在区间$[a,b]$上的一列函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

是区间$[a,b]$上的一个**函数项级数**. 在$[a,b]$中任取一点x_0，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$$

便是一个数项级数. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，就称函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在点$x_0$收敛. 反之，就说$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在点$x_0$发散. 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$的每点收敛. 就说$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上收敛. 一般来说，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$的一些点上收敛，在另一些点上发散. 收敛点的全体称为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛区域. 在收敛区域上级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$有确定的和，记为$S(x)$. 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

是定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数项级数，它在$(-1,1)$上收敛，而$S(x)=\dfrac{1}{1-x}$；在$(-\infty,-1],[1,+\infty)$上级数发散.

有限个连续函数之和，仍为连续函数. 有限个函数之和的微商等于这些函数分别求微商后之和. 有限个函数之和的积分等于这些函数分别积分后之和. 这些结论，对于无穷级数是否成立？

例 1　在区间$[0,1]$上考虑级数

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})=x+(x^2-x)+\cdots,$$

第n个部分和为$S_n(x)=x^n$，因而和函数

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

它在 $x=1$ 处不连续,但级数的每一项

$$u_1(x) = x, u_n(x) = x^n - x^{n-1} (n = 2,3,\cdots)$$

在[0,1]上都是连续的. 所以每项连续的级数,其和函数未必连续. 而且由于 $u_1(x)=x, u_n(x)=x^n-x^{n-1}(n=2,3,\cdots)$ 在[0,1]上都可导,其和函数在 $x=1$ 却不可导. 故每项可导的级数,其和函数未必可导.

例 2 考虑级数

$$2xe^{-x^2} + (2\cdot 2^2 xe^{-2^2x^2} - 2\cdot 1^2 xe^{-1^2x^2}) + \cdots + (2n^2 xe^{-n^2x^2} - 2(n-1)^2 xe^{-(n-1)^2x^2}) + \cdots,$$

其部分和为

$$S_n(x) = 2n^2 xe^{-n^2x^2}.$$

在区间[0,1]上,

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0.$$

因而

$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x = 0.$$

另一方面,将级数逐项积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 [2n^2 xe^{-n^2x^2} - 2(n-1)^2 xe^{-(n-1)^2x^2}]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [(1-e^{-n^2}) - (1-e^{-(n-1)^2})]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-(n-1)^2} - e^{-n^2}) = 1 \neq 0.$$

所以,和函数的积分,不等于每项函数的积分的和. 因此,就产生这样的问题,什么时候上述这些结论能成立? 这就需要一致收敛的概念.

10.2.2 一致收敛函数列

由于无穷数列与无穷级数是可以相互转化的,所以,对无穷函数项级数与无穷函数列,也一样是可以相互转化的. 为此,先介绍一下无穷函数列.

函数列 $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x), \cdots$

在[a,b]上定义,对[a,b]中的任一点 x,就对应一个数列,如此数列收敛,则称函数列在这点收敛. 如在[a,b]上每一点都收敛,则称函数列在[a,b]上收敛,对于[a,b]中的一点 x,给了 $\varepsilon>0$,有自然数 N 存在,使当 $n>N$ 时,

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon,$$

这 N 不但与 ε 有关，且与点 x 有关，即当 x 变化时，N 也变化. 如果在区间 $[a,b]$ 中任何点 x，对任给的 $\varepsilon>0$，可选得 N 仅与 ε 有关而与 x 无关，使得当 $n>N$ 时，

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon,$$

成立，这时称 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**一致收敛于** $a(x)$.

相当于数列的 Cauchy 判别法，可以有以下：

一致收敛函数列的 Cauchy 判别准则：函数列

$$a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x),\cdots$$

一致收敛的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，可找到仅依赖于 ε，而不依赖于 x 的 N，使当 $m,n>N$ 时

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\varepsilon.$$

证　必要性：如果 $a_n(x)$ 一致收敛于 $a(x)$，对已给 $\varepsilon>0$，有 $N(\varepsilon)$，使当 $m,n>N$ 时，

$$|a_m(x)-a(x)|<\varepsilon/2,\quad |a_n(x)-a(x)|<\varepsilon/2,$$

所以

$$\begin{aligned}|a_m(x)-a_n(x)|&\leqslant|a_m(x)-a(x)|+|a(x)-a_n(x)|\\&<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性：由数列的 Cauchy 判别准则知，对任一 x，$a_n(x)$ 收敛，假设其极限函数为 $a(x)$. 任给 $\varepsilon>0$，我们有 $N(\varepsilon)$ 存在，使

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\varepsilon\quad(\text{当 }m,n>N\text{ 时}).$$

固定 m，命 $n\to\infty$，因 $a_n(x)\to a(x)$，所以，当 $m>N$ 时，

$$|a_m(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

即得一致收敛.

可以得到如下的结论：

连续函数的一致收敛列的极限也是连续函数.

证　由于连续函数列 $a_n(x)$ 一致收敛于 $a(x)$，所以任给 $\varepsilon>0$，有 $N(\varepsilon)$ 存在，使

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon/3(\text{当 }n>N(\varepsilon)),$$

这 N 与 x 无关. 考虑

$$\begin{aligned}|a(x+h)-a(x)|&\leqslant|a_n(x+h)-a(x+h)|\\&+|a_n(x)-a(x)|+|a_n(x+h)-a_n(x)|\end{aligned}$$

$$< 2\varepsilon/3 + |a_n(x+h) - a_n(x)|.$$

由于 $a_n(x)$ 连续，故对已给 $\varepsilon>0$，有 $\delta>0$，使当 $|h|<\delta$ 时，

$$|a_n(x+h) - a_n(x)| < \varepsilon/3,$$

因此，任给 $\varepsilon>0$，就可找到 $\delta>0$，使得 $|h|<\delta$ 时，

$$|a(x+h) - a(x)| < \varepsilon.$$

成立，即 $a(x)$ 是连续函数.

例 1 函数列

$$a_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, n = 1,2,\cdots$$

是一个收敛函数列，它的极限是

$$a(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果} \quad 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{如果} \quad x = 0. \end{cases}$$

由于 $a(x)$ 不连续，所以函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

例 2 函数列

$$a_n(x) = \frac{1}{n+x}, 0 \leqslant x \leqslant 1, n = 1,2,\cdots$$

是一个收敛函数列，它的极限是 $a(x)=0$. 但由于

$$|a_n(x) - a(x)| = \frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$$

对 $[0,1]$ 中的一切 x 都成立，故任给 $\varepsilon>0$，只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n(x) - a(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

对 $[0,1]$ 中所有的 x 都成立. 显然 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 与 x 无关，故 $a_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一个一致收敛函数列.

还可证明：

如果 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且一致收敛于 $a(x)$，则

$$\int_a^b a(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} a_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b a_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明极限运算与积分运算可以交换顺序.

证　任给 $\varepsilon>0$,有 $N(\varepsilon)$存在,当 $n>N$ 时,

$$|a_n(x)-a(x)|<\varepsilon.$$

因此,

$$\left|\int_a^b a(x)\mathrm{d}x-\int_a^b a_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|a(x)-a_n(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon(b-a).$$

所以定理成立.

例 3　考虑 $S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$,$0\leqslant x\leqslant 1$. 显然 $S(x)=0$,但 $\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ $=2ne^{-1}$,当 $n\to\infty$ 时不趋于零,故 $S_n(x)$在[0,1]上不一致收敛于 $S(x)$,这就是为什么

$$1=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2n^2xe^{-n^2x^2}\mathrm{d}x\neq\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0$$

的原因.

对于函数列可以逐项微商的条件,就要求得更多一些,可以证明:

若 $a_n(x)$在[a,b]上可导且收敛,而微商列 $a'_n(x)$在[a,b]上连续且一致收敛,则 $a_n(x)$的极限 $a(x)$是可导的,且

$$a'(x)=\lim_{n\to\infty}a'_n(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x).$$

也就是微商运算与极限运算可以交换顺序.

证　先证 $a_n(x)$在[a,b]上一致收敛. 由

$$a_n(x)=a_n(a)+\int_a^x a'_n(x)\mathrm{d}x,$$

得

$$|a_m(x)-a_n(x)|\leqslant|a_m(a)-a_n(a)|+\int_a^x|a'_m(x)-a'_n(x)|\mathrm{d}x.$$

任给 $\varepsilon>0$,因 $a'_n(x)$在[a,b]上一致收敛,故存在 N_1,使当 $m,n>N_1$ 时,

$$|a'_m(x)-a'_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

由于函数列 $a_n(x)$在 $x=a$ 收敛,有 N_2,使当 $m,n>N_2$ 时,

$$|a_m(a)-a_n(a)|<\varepsilon/2.$$

故当 $m,n>N=\max(N_1,N_2)$ 时，

$$|a_m(x)-a_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x-a)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此，$a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

命 $a^*(x)=\lim\limits_{n\to\infty}a'_n(x)$，由前述关于极限与积分可交换顺序的定理，可得

$$\begin{aligned}\int_a^x a^*(x)\mathrm{d}x&=\int_a^x\lim_{n\to\infty}a'_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^x a'_n(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}(a_n(x)-a_n(a))=a(x)-a(a).\end{aligned}$$

两边求微商，得

$$a^*(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a(x).$$

此即

$$a'(x)=\lim_{n\to\infty}a'_n(x).$$

10.2.3 一致收敛函数项级数

如果函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

在 $[a,b]$ 上收敛，也就是部分和

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$$

收敛到和函数 $S(x)$. 如果 $S_n(x)$ 一致收敛到 $S(x)$，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

由于函数列与函数项级数可相互转化，所以上一节中的结果对于级数也完全成立.

1. **Cauchy 判别准则：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充分必要条件是，任给 $\varepsilon>0$，有不依赖于 x 的 N 存在，使当 $n>N$ 时**

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+l}(x)|<\varepsilon$$

对所有 $l>0$ 都成立.

2. **一致收敛的连续函数项级数之和函数也是连续函数.**

3. **一致收敛的连续函数项级数可以逐项积分，即**

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x;$$

也就是积分号"$\int$"与和号"$\sum$"可交换顺序.

4. 如级数收敛,每项可微,微商后仍连续,且微商后的级数一致收敛,则级数可以逐项微商,即**如果** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **收敛**,$u_n'(x)$ **连续**,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ **一致收敛**,**则**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

也就是微商号"$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$"与和号"$\sum$"可交换顺序.

但是,如何来判断一个函数项级数是一致收敛的,除了最根本的 Cauchy 判别准则外,还有没有别的判别法?

当然是有的,而且没有多少困难就可将 10.1.2 节及 10.1.3 节中的那些判别法平移过来.

Weierstrass 判别法:若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **是一正项收敛级数,如果对充分大的** n,**当** $a \leqslant x \leqslant b$ **时,有**

$$|u_n(x)| \leqslant a_n,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **在**$[a,b]$**上一致收敛.**

证　由数项级数的 Cauchy 判别准则,任给 $\varepsilon > 0$,有 $N(\varepsilon)$,当 $m > n > N(\varepsilon)$时,

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \varepsilon.$$

故

$$|S_m(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_m(x)| < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m < \varepsilon.$$

由函数项级数的 Cauchy 判别准则知,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛. 这还可推广为:

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ **在**$[a,b]$**上一致收敛,且** $v_n(x) \geqslant 0$,**及在**$[a,b]$**上**

$$|u_n(x)| \leqslant v_n(x),$$

于是, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **在**$[a,b]$**上也一致收敛.**

数项级数中的 Cauchy 判别法可推广成：

如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$，使对充分大的 n，

$$|u_n(x)|^{\frac{1}{n}} < r$$

在 $[a,b]$ 上成立，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

数项级数中的比值判别法（即 d'Alembert 判别法）可推广成：

假设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致有界，即存在与 x 无关的正常数 M，使 $|u_n(x)| \leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 如果有一与 x 无关的常数 $r(<1)$，使对充分大的 n 有

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| < r$$

在 $[a,b]$ 上成立，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

在 10.1.3 节中的 Dirichlet 判别法及 Abel 判别法可分别推广成：

Dirichlet 判别法：如 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和 $B_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即有常数 M，与 n,x 无关，使

$$|B_n(x)| \leqslant M$$

在 $[a,b]$ 中任一点 x 都成立，又对任一在 $[a,b]$ 中的点 x，$a_n(x)$ 单调下降，且当 $n\to\infty$ 时 $a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致地趋于零，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

Abel 判别法：若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，又设对每一个 x，$a_n(x)$ 成一单调数列，且有一与 n,x 无关的常数 K，使

$$|a_n(x)| \leqslant K$$

对 $[a,b]$ 中任一点 x 都成立，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$$

在 $[a,b]$ 上一致收敛.

这些定理的证明，与数项级数的情形相类似，就不在此给出证明了.

例 若 a_n 是单调下降趋于零的数列，在任何一个不包含有 $2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 的闭区间上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

都一致收敛.

这是因为

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2}x} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

在所讨论的区域上，$\sin \frac{1}{2}x \neq 0$，所以有一个与 n, x 无关的上界，由 Dirichlet 判别法，知为一致收敛.

有了级数理论，就可以证明第一和第八章中所遗留下来的一些问题，这就是以级数为工具证明一些基本的定理，下面要介绍隐函数存在定理及常微分方程解的存在与唯一性定理.

10.2.4　隐函数存在定理

隐函数存在定理已在第 6.2.2 节中用到，但并未给予证明，现在我们来证明这个定理，在这一节中所用证明方法，是用的迭代法（也叫逐次逼近法）及一致收敛性. 这个方法在数学中是很有用的，这种方法在数学中不但能证明存在性，而且还可以具体的定出 $y = f(x)$ 来，而且这里的证明方法是典型的.

隐函数存在定理叙述如下：

若 $F(x,y)$ 及 $F'_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)$ 在以 (x_0,y_0) 为中心的正方形 D：$|x - x_0| \leqslant \varepsilon$，$|y - y_0| \leqslant \varepsilon$ 中连续，且

$$F(x_0,y_0) = 0, \quad F'_y(x_0,y_0) \neq 0,$$

则隐函数表达式

$$F(x,y) = 0$$

在 (x_0,y_0) 附近可以解出 y 来，即有一个单变数连续函数

$$y = f(x)$$

适合于 $y_0 = f(x_0)$，而且有恒等式

$$F(x,f(x)) = 0,$$

如果 $F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$ 也在 D 中连续，则 $y = f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有连续导数，且

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

证 先把方程 $F(x,y)=0$ 改写成

$$y = y_0 + \left[y - y_0 - \frac{F(x,y)}{F'_y(x_0,y_0)}\right] = y_0 + \varphi(x,y).$$

于是 $\varphi(x_0,y_0)=0, \varphi'_y(x_0,y_0)=0$.

由于 φ'_y 及 φ 在 D 中连续，任给 $\lambda>0, \lambda<1$，可取 ε 足够小，使在 D 中

$$|\varphi'_y(x,y)| < \lambda.$$

又取 δ 充分小，使在 $|x-x_0| \leqslant \delta(\delta \leqslant \varepsilon)$ 时，有

$$|\varphi(x,y_0)| < (1-\lambda)\varepsilon.$$

现在在

$$D^*: |x-x_0| \leqslant \delta, \quad |y-y_0| \leqslant \varepsilon$$

中讨论.

把 $y=y_0$ 代入 $y=y_0+\varphi(x,y)$ 的右边，得到 x 的函数

$$y_1 = y_1(x) = y_0 + \varphi(x,y_0).$$

再把 $y=y_1$ 代入 $y=y_0+\varphi(x,y)$ 的右边，又得到 x 的函数

$$y_2 = y_2(x) = y_0 + \varphi(x,y_1),$$

继续进行下去

$$y_3 = y_3(x) = y_0 + \varphi(x,y_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = y_n(x) = y_0 + \varphi(x,y_{n-1}).$$

如此得到一个函数列

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots.$$

先证明所有 $y_n(x)$ 都在区间 $|y-y_0|<\varepsilon$ 中. 用归纳法，显然 $|y_1-y_0| = |\varphi(x,y_0)| < (1-\lambda)\varepsilon < \varepsilon$. 如果

$$|y_{n-1}-y_0| < \varepsilon$$

成立，由于

$$y_n - y_0 = \varphi(x,y_{n-1}),$$

而

$$|\varphi(x,y_{n-1})| \leqslant |\varphi(x,y_{n-1}) - \varphi(x,y_0)| + |\varphi(x,y_0)|.$$

由中值定理，在 y_0 与 y_{n-1} 之间存在 ξ，使得

$$|\varphi(x,y_{n-1}) - \varphi(x,y_0)| = |\varphi'_y(x,\xi)|\,|y_{n-1} - y_0| < \lambda\varepsilon,$$

而

$$|\varphi(x,y_0)| < (1-\lambda)\varepsilon.$$

因此，

$$|y_n - y_0| < \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon = \varepsilon.$$

即得上面提出的断言：所有的 $y_n(x)$ 都落在区间 $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ 内.

其次证明 $y_n(x)$ 是 x 的连续函数. 还用归纳法. 显然 $y_1(x)$ 连续，假定 $y_{n-1}(x)$ 也连续，则当 x 与 x' 充分接近时，$y_{n-1}(x)$ 与 $y_{n-1}(x')$ 之差可以任意小，由于 $\varphi(x,y)$ 是连续函数，故

$$y_n(x) - y_n(x') = \varphi(x,y_{n-1}(x)) - \varphi(x',y_{n-1}(x'))$$

可任意小，即 $y_n(x)$ 也是连续的.

再来讨论 $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$ 的收敛问题，考虑级数

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1}).$$

由中值定理，

$$|y_n - y_{n-1}| = |\varphi(x,y_{n-1}) - \varphi(x,y_{n-2})| < \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}|.$$

连续应用得

$$|y_n - y_{n-1}| < \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}|$$
$$< \lambda^2|y_{n-2} - y_{n-3}| < \cdots < \lambda^{n-1}(1-\lambda)\varepsilon.$$

几何级数

$$(1-\lambda)\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}$$

是收敛的，故

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(y_n - y_{n-1})$$

在 $|x-x_0| \leqslant \delta$ 中一致收敛，所以

$$y = y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x),$$

在 $|x-x_0| \leqslant \delta$ 中连续，由于

$$y_n = y_0 + \varphi(x,y_{n-1}),$$

故

$$y = y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x),$$

为

$$y = y_0 + \varphi(x, y)$$

的一个解,因而也是

$$F(x, y) = 0$$

的一个解. 可以进一步证明解的唯一性.

如另有一解 $\tilde{y}$,则

$$\tilde{y} = y_0 + \varphi(x, \tilde{y}),$$

而

$$y = y_0 + \varphi(x, y).$$

相减得

$$|y - \tilde{y}| = |\varphi(x, y) - \varphi(x, \tilde{y})| < \lambda |y - \tilde{y}|.$$

因为 $\lambda < 1$,所以 $y \neq \tilde{y}$ 是不可能的,即解为唯一.

下面再证明 $f'(x)$ 存在且连续. 因为根据假设,$F(x, y)$ 在 $D^*: |x - x_0| \leqslant \delta$, $|y - y_0| \leqslant \varepsilon$ 上有连续的偏导数,因此

$$\begin{aligned} \Delta F &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. 假定 x 与 $x + \Delta x$ 同属于区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,令

$$y = f(x), y + \Delta y = f(x + \Delta x),$$

或

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

显然

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

因而,就有

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o(\rho) = 0,$$

可见

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y = o(\rho) = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}=o\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\right)=o\left(1+\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\right),$$

把上式写成

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mu\left(1\pm\frac{\Delta y}{\Delta x}\right).$$

其中当 $\rho\to 0$ 时，$\mu\to 0$；所以

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}-\mu}{\frac{\partial F}{\partial y}\mp\mu}.$$

由于已经证明 $y=f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上是连续的，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $\Delta y\to 0$，因而也有 $\rho\to 0$，从而也有 $\mu\to 0$；但是当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}$ 都固定不变，因此

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

这就证明了隐函数存在定理的全部论断.

10.2.5　常微分方程解的存在性与唯一性

上面应用迭代法（逐次逼近法）及一致收敛性，证明了隐函数的存在定理. 这种方法还可以用来证明其他数学问题的存在性与唯一性，例如常微分方程（包括一阶，二阶及高阶的常微分方程）及常微分方程组的存在性及唯一性，积分方程的存在性及唯一性，偏微分方程的存在性及唯一性等等. 这里给出齐次二阶线性常微分方程的初值问题的解的存在性及唯一性，其他常微分方程的解的存在性及唯一性，可仿此进行.

齐次二阶线性常微分方程的初值问题是指

$$\begin{cases}y''+p(x)y'+q(x)y=0,\\ y(x_0)=\alpha,y'(x_0)=\beta.\end{cases}\tag{1}$$

除了一些简单的情形外，一般无法用简单的式子把这个问题的解写出来. 我们要证明问题(1)的解是存在的，且为唯一的. 事实上，证明的过程，就是找出解的过程.

令 $z=\dfrac{dy}{dx}$，于是(1)就化为一个与它完全等价的问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx} = -p(x)z - q(x)y, \\ \dfrac{dy}{dx} = z, \\ y(x_0) = \alpha, z(x_0) = \beta. \end{cases}$$

或是我们考虑以下的更一般的问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2. \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2, \\ y_1(x_0) = \alpha, y_2(x_0) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 为未知函数，$a_{ij}(x)$ 在包含 x_0 的区间 $[a,b]$ 上连续. 故可假定，在 $[a,b]$ 上有

$$|a_{ij}(x)| \leqslant M, i = 1,2; j = 1,2.$$

要证的是，问题(2)的解 $y_1(x), y_2(x)$ 存在，且唯一.

将(2)的微分方程组从 x_0 到 x 积分，利用初值条件，(2)化为

$$\begin{cases} y_1(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t)]dt, \\ y_2(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t)]dt. \end{cases} \tag{3}$$

(3)与(2)是等价的. 事实上，如果 $y_1(x), y_2(x)$ 满足(3)，令 $x = x_0$，则得 $y_1(x_0) = \alpha, y_2(x_0) = \beta$. 对(3)进行微商即得(2)中的微分方程.

对(3)进行迭代，命

$$y_1^{(0)}(x) = \alpha, \quad y_2^{(0)}(x) = \beta.$$

代入(3)，得

$$y_1^{(1)}(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)\alpha + a_{12}(t)\beta]dt,$$

$$y_2^{(1)}(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)\alpha + a_{22}(t)\beta]\mathrm{d}t.$$

再将 $y_1^{(1)}(x)$ 及 $y_2^{(1)}(x)$ 代入(3)，得

$$y_1^{(2)}(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)y_1^{(1)} + a_{12}(t)y_2^{(1)}]\mathrm{d}t,$$

$$y_2^{(2)}(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)y_1^{(1)} + a_{22}(t)y_2^{(1)}]\mathrm{d}t.$$

如此类推．如 $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}$ 已得，则代入(3)后，得

$$y_1^{(n+1)}(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)y_1^{(n)} + a_{12}(t)y_2^{(n)}]\mathrm{d}t,$$

$$y_2^{(n+1)}(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)y_1^{(n)} + a_{22}(t)y_2^{(n)}]\mathrm{d}t.$$

这样就得到两函数列

$$y_1^{(0)}(x), y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), \cdots, y_1^{(n)}(x), \cdots,$$
$$y_2^{(0)}(x), y_2^{(1)}(x), y_2^{(2)}(x), \cdots, y_2^{(n)}(x), \cdots.$$

这两列函数都是$[a,b]$上的连续函数.

要证极限　$y_1(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_1^{(n)}(x), y_2(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_2^{(n)}(x)$

存在、连续且满足(3)，作级数

$$y_1^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (y_1^{(n+1)} - y_1^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_1^{(n)}(x),$$

$$y_2^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} y_2^{(n)}(x).$$

如能证这两个级数是在$[a,b]$上一致收敛，则 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 都是连续函数.

命　$A = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$，那么

$$|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)\alpha + a_{12}(t)\beta]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} [|a_{11}(t)\alpha| + |a_{12}(t)\beta|]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} 2MA\mathrm{d}t\right| = 2MA|x - x_0|,$$

$$|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)\alpha + a_{22}(t)\beta]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{x_0}^{x} [|a_{21}(t)\alpha| + |a_{22}(t)\beta|]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} 2MA\mathrm{d}t \right| = 2MA\,|x - x_0|.$$

由此两估计式,可得

$$\begin{aligned}
|y_1^{(2)} - y_1^{(1)}| &= \left| \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)(y_1^{(1)} - y_1^{(0)}) + a_{12}(t)(y_2^{(1)} - y_2^{(0)})]\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} [\,|a_{11}(t)|\,|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + |a_{12}(t)|\,|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}|\,]\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} (2M)^2 A(t - x_0)\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{(2M)^2 A}{2!}|x - x_0|^2, \\
|y_2^{(2)} - y_2^{(1)}| &= \left| \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)(y_1^{(1)} - y_1^{(0)}) + a_{22}(t)(y_2^{(1)} - y_2^{(0)})]\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} [\,|a_{21}(t)|\,|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + |a_{22}(t)|\,|y_2^{(1)} - y_2^{(0)}|\,]\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} (2M)^2 A(t - x_0)\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{(2M)^2 A}{2!}|x - x_0|^2.
\end{aligned}$$

再利用这两个估计式,可得

$$|y_1^{(3)} - y_1^{(2)}| \leqslant \frac{(2M)^3 A}{3!}|x - x_0|^3,$$

$$|y_2^{(3)} - y_2^{(2)}| \leqslant \frac{(2M)^3 A}{3!}|x - x_0|^3.$$

以次类推,可得

$$\begin{aligned}
|y_1^{(n+1)} - y_1^{(n)}| &\leqslant \frac{(2M)^{n+1}A}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \\
&\leqslant A\frac{(2M)^{n+1}}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}, \\
|y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)}| &\leqslant \frac{(2M)^{n+1}A}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \\
&\leqslant A\frac{(2M)^{n+1}}{(n+1)!}(b - a)^{n+1}.
\end{aligned}$$

而级数

$$A + \sum_{n=0}^{\infty} A \frac{(2M)^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = Ae^{2M(b-a)}$$

是收敛的,故根据 Weierstrass 判别法,级数

$$y_1^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (y_1^{(n+1)} - y_1^{(n)})$$

及

$$y_2^{(0)} + \sum_{n=0}^{\infty} (y_2^{(n+1)} - y_2^{(n)})$$

在$[a,b]$上一致收敛. 即$\lim\limits_{n\to\infty} y_1^{(n)}(x) = y_1(x)$及$\lim\limits_{n\to\infty} y_2^{(n)}(x) = y_2(x)$是$[a,b]$上的连续函数. 再对

$$y_1^{(n+1)}(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)y_1^{(n)} + a_{12}(t)y_2^{(n)}]\mathrm{d}t,$$

$$y_2^{(n+1)}(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)y_1^{(n)} + a_{22}(t)y_2^{(n)}]\mathrm{d}t.$$

两边取极限,即让$n\to\infty$,由于级数的一致收敛性,故极限与积分可交换,于是得到

$$y_1(x) = \alpha + \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2]\mathrm{d}t,$$

$$y_2(x) = \beta + \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2]\mathrm{d}t.$$

这说明$y_1(x), y_2(x)$为(3)的解.

最后证明解的唯一性. 如(3)另有一对连续函数解$z_1(x), z_2(x)$. 命

$$u_1 = y_1 - z_1, \quad u_2 = y_2 - z_2.$$

于是

$$u_1 = \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2]\mathrm{d}t,$$

$$u_2 = \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2]\mathrm{d}t.$$

u_1, u_2为$[a,b]$上连续函数,故必有N,使得

$$|u_1(x)| \leqslant N, \quad |u_2(x)| \leqslant N.$$

于是

$$|u_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2]\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} 2MN\mathrm{d}t \right| = 2MN \mid x - x_0 \mid ,$$

$$\mid u_2(x) \mid = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2]\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} 2MN\mathrm{d}t \right| = 2MN \mid x - x_0 \mid .$$

再利用这两个不等式,可得

$$\mid u_1(x) \mid = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{11}(t)u_1 + a_{12}(t)u_2]\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} (2M)^2 N(t - x_0)\mathrm{d}t \right| = \frac{(2M)^2}{2!}N \mid x - x_0 \mid^2 ,$$

$$\mid u_2(x) \mid = \left| \int_{x_0}^{x} [a_{21}(t)u_1 + a_{22}(t)u_2]\mathrm{d}t \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} (2M)^2 N(t - x_0)\mathrm{d}t \right| = \frac{(2M)^2}{2!}N \mid x - x_0 \mid^2 .$$

反复做下去,可得

$$\mid u_1(x) \mid \leqslant \frac{(2M)^n}{n!}N \mid x - x_0 \mid^n ,$$

$$\mid u_2(x) \mid \leqslant \frac{(2M)^n}{n!}N \mid x - x_0 \mid^n .$$

但

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2M)^n}{n!}N \mid x - x_0 \mid^n = 0 ,$$

故得 $u_1 \equiv 0, u_2 \equiv 0$,即 $y_1 = z_1, y_2 = z_2$. 这就证明了唯一性.

总结起来,可以这样叙述这条**微分方程组的解的存在性及唯一性定理**:

如果函数 $a_{ij}(x)\ (i,j = 1,2)$ **在含** x_0 **的某一区间** $[a,b]$ **上连续,则在该区间上,初值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 , \\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 , \\ y_1(x_0) = \alpha, y_2(x_0) = \beta . \end{cases}$$

有且只有一解 $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$.

当然上述初值问题的解的存在性与唯一性,包括了齐次二阶线性常微分方程的初值问题(1)的解的存在性及唯一性.

习题 10.2

1. 确定下列函数项级数的收敛区域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}$, $(y\geqslant 0)$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n y^n}{x^n+y^n}$ $(x>0, y>0)$.

2. 研究下列函数列在指定区间上的一致收敛性:

(1) $f_n(x)=x^n$ ((i) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; (ii) $0\leqslant x\leqslant 1$);

(2) $f_n(x)=x^n-x^{n-1}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$;

(3) $f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$;

(4) $f_n(x)=\frac{2nx}{1+n^2x^2}$ ((i) $0\leqslant x\leqslant 1$; (ii) $1<x<+\infty$).

3. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ $(0<x<+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ ((i) $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; (ii) $-1<x<1$);

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n e^{-nx}$ $(0\leqslant x<+\infty)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $(-2<x<+\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ $(0\leqslant x<+\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ $\left(\frac{1}{2}\leqslant|x|\leqslant 2\right)$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ $(0 < x < +\infty)$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + n}$ $(0 < x < +\infty)$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n\ln^2 n}\right)$ $(|x| < a, a$ 任意正数$)$.

4. 确定下列函数的定义域,并研究它们的连续性.

(1) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$; (2) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2}$

5. 设

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1 + 2x)^n}$$

求 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

6. 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 当 $x > 0$ 时是 x 的连续函数.

7. 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中有二阶连续导函数,并计算.

8. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$,计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx$.

9. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$,计算 $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$.

10.3 幂级数与 Taylor 级数

10.3.1 幂级数的收敛半径

函数级数中最简单的,但在应用上最重要的是由幂函数所组成的幂级数. 这样的幂级数,它的任何一个部分和为多项式. 所以,只要这个幂级数是收敛的,不论它的和函数怎样复杂,总可以用多项式来逼近它,且可达到任意所需要的精确度. 幂级数实际上可以看成"无穷次"多项式,而幂级数与多项式之间,的确有很多相类似的性质.

首先考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的收敛问题,有如下重要的

Abel 定理　**如果幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **在点** $x = x_0 (x_0 \neq 0)$ **收敛，那么它在区间** $|x| < |x_0|$ **中绝对收敛.**

证　在区间 $(-|x_0|, |x_0|)$ 中任取一点 x，由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，故当 $n > N$ 时有 $|a_n x_0^n| < 1$，于是

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n < \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n, n > N$$

由假设 $\frac{|x|}{|x_0|} < 1$，故几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n$ 收敛，由比较判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 收敛.

反过来，**如果幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **在点** $x = x_0' (x_0' \neq 0)$ **发散，那么它在满足** $|x| > |x_0'|$ **的点上都发散.**

证　用反证法，如存在一点 $|x_1| > |x_0'|$，而级数在点 $x = x_1$ 上收敛，则由 Abel 定理，级数必须在 $x = x_0'$ 上收敛，得矛盾.

因此，幂级数可能只在 $x = 0$ 处收敛；可能在整个数轴 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛；可能在一有限点 x_0' 处发散，于是根据 Abel 定理，可以从 $x = 0$ 处出发，向两边延伸，使得在延伸的区间内幂级数是收敛的，但这种延伸不能超过 $|x_0'|$，由单调上升有界数列必有极限，故一定存在一个分界点 R，当 $|x| < R$ 时，幂级数收敛，当 $|x| > R$ 时，幂级数发散. 这个 R 就称为幂级数的**收敛半径**.

如果存在极限

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

则对 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 用 d'Alembert 判别法知

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| = l|x|.$$

若 $l|x| < 1$，即 $|x| < \frac{1}{l}$，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛；若 $l|x| > 1$，即 $|x| > \frac{1}{l}$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 因此，

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

类似地,应用 Cauchy 判别法,只要极限

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

存在,则 R 必为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

例 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛半径为 1. 这是因为

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1.$$

例 2 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n(2x)^n$ 的收敛半径.

解 $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{2}.$

例 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为无穷大. 这是因为

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \infty.$$

例 4 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$ 的收敛半径为 0. 这是因为

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ 不存在,并不能说收敛半径不存在,只能说,此时这两种方法无效,可用别的办法来处理.

例 5 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$ 的收敛半径.

解 这级数只有偶次方的系数,奇次方系数皆为 0,即

$$a_{2n} = 2^n, \quad a_{2n+1} = 0.$$

故上述两极限都不存在,但直接用 d'Alembert 判别法得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} |x|^{2(n+1)}}{2^n |x|^{2n}} = 2|x|^2,$$

故当 $2|x|^2<1$ 时，即当 $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，级数收敛；而当 $2|x|^2>1$ 时，即 $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时发散. 因此收敛半径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

最后必须指出，级数在收敛区间 $(-R,R)$ 的两个端点 $x=\pm R$ 没有一般的结论，要看具体的级数而定. 例如

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\quad \text{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n.$$

的收敛区间都是 $(-1,1)$，其中(i)在 $x=-1$ 条件收敛，在 $x=1$ 发散，(ii)在左右两端点都绝对收敛，(iii) 在两个端点都发散.

10.3.2　幂级数的性质

我们可以将 10.2 节中的一般函数项级数的理论应用到幂级数，由于幂级数的每项只是幂函数，所以可以得到比较好的结果.

设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，它在区间 $(-R,R)$ 内确定了一个和函数 $S(x)$. 但在 $(-R,R)$ 中幂级数不一定一致收敛. 例如

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

在收敛区间中不一致收敛，但是可以有以下的结果.

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R，则对任意满足条件 $0<r<R$ 的 r，级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

证明很简单，因为当 x 为 $[-r,r]$ 中一点时，有

$$|a_nx^n|=|a_n||x|^n\leqslant|a_n|r^n,$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法知级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛.

有了一致收敛性，由于幂函数都是连续函数，所以有：

设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间为 $(-R,R)$，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.

证　在 $(-R,R)$ 中任取一点 x_0，$|x_0|<R$，在 $|x_0|$ 与 R 之间任取一数 r，于是级数在 $[-r,r]$ 上一致收敛，故 $S(x)$ 在 x_0 连续，由于 x_0 是在 $(-R,R)$ 中任意取的，故 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 上连续.

同样，由于一致收敛性，可以证明 $S(x)$ 具有任意阶微商. 事实上，

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,则其和函数 $S(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 中可微,其导函数可通过逐项求导得到,即

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

而逐项求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证 先证逐项求导后的幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R,即要证明在 $(-R,R)$ 中收敛,在 $(-R,R)$ 之外发散. 若 x_1 为 $(-R,R)$ 中一点,则 $|x_1| < R$,在 $|x_1|$ 与 R 之间任取 r,即 $|x_1| < r < R$,则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛. 因而当 n 趋于无穷时,$a_n r^{n-1}$ 趋于零,故当 n 充分大时,有 $|a_n r^{n-1}| < 1$,于是

$$|n a_n x_1^{n-1}| = \left| n a_n r^{n-1} \left(\frac{x_1}{r}\right)^{n-1} \right| < n\left(\frac{x_1}{r}\right)^{n-1}.$$

但 $\left|\frac{x_1}{r}\right| < 1$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left|\frac{x_1}{r}\right|^{n-1}$ 收敛,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x_1^{n-1}|$ 收敛.

再在 $(-R,R)$ 之外任取一点 x_2,即 $|x_2| > R$,取 r',使得 $|x_2| > r' > R$,于是

$$n|a_n r'^{n-1}| \geqslant |a_n r'^{n-1}| = \frac{1}{r'}|a_n r'^n|.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r'^n$ 发散,故 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r'^n|$ 发散,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n r'^{n-1}|$ 也发散. 因而 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x_2^{n-1}$ 是发散的. 否则,$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n r'^{n-1}|$ 将收敛. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径是 R. 于是它在闭区间 $[-r,r]$ 上一致收敛 $(r < R)$,这样,上节中所要求的微商号与和号可交换的条件全部满足,因而,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

在 $[-r,r]$ 上成立. r 可以任意接近 R,故上式在 $(-R,R)$ 中也成立.

反复应用这个结果,可得:

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中有任意次导数,且

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} S(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

而且其收敛半径仍为 R.

对于幂级数的积分，也有如下的结果：

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是 R，和函数为 $S(x)$，则对 $(-R,R)$ 中的任意点 x，有

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right]\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

且其收敛半径仍为 R.

证　不妨设 $x>0$，由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,x]$ 上一致收敛，故幂级数在 $[0,x]$ 上可逐项积分，即

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径为 R'，对 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 求微商，得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，由前所述，其收敛半径仍为 R'，但 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，故 $R' = R$.

从以上的一些性质可以看出，幂级数与多项式是十分相似的.

利用上面的这些定理，可以求出一些幂级数之和，也能把一些初等函数展开成幂级数.

例 1　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的和.

解　由 10.3.1 节中的例 3 知，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛半径为 ∞. 设其和为 $S(x)$，逐项求导得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

即得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = S(x),$$

解此方程得

$$x = \ln S(x) + C.$$

由于 $S(0)=1$，故在上式中命 $x=0$，即得 $C=0$. 于是

$$S(x) = \mathrm{e}^x.$$

这样，我们得到了 e^x 幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty).$$

例 2 把 $\ln(1+x)$, $\arctan x$ 展成幂级数.

解 当 x 在 $(-1,1)$ 中时,有

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

由 0 到 x 逐项积分,得

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

这就是 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式. 另一方面,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n},$$

逐项积分,得

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1).$$

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 和函数为 $S(x)$. 前面已经说过,在 $x = R, x = -R$ 两点,幂级数也可能收敛,也可能发散,但是可以有如下的

Abel 定理 **设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 并在 $x = R$ 处,级数收敛,则其和函数 $S(x)$ 在 $x = R$ 处左连续,即**

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

同样,如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -R$ 处收敛, 则其和函数在 $x = -R$ 处右连续,即

$$\lim_{x \to R^+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n.$$

证 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 处收敛, 我们可以证明它在 $[0,R]$ 上一致收敛,事实上,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛, 数列 $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ 对每个 $[0,R]$ 中的 x 是单调的,且一致有界,即

$$\left(\frac{x}{R}\right)^n \leqslant 1 \qquad (n = 1,2,\cdots).$$

根据 10.2 中函数项级数一致收敛的 Abel 判别法，知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,R]$ 上一致收敛，因而 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续，另一半同理可证.

例 2 中 $\ln(1+x)$ 的展开式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$ 在收敛区间的端点 $x=1$ 处是收敛的，因而展开式在 $x=1$ 处也成立，故有

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2.$$

$\arctan x$ 的展开式在收敛区间 $(-1,1)$ 两个端点 $x=\pm 1$ 都收敛，故有

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

以上的讨论局限于形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的幂级数.

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

其中 a 是一个定数. 研究这种幂级数时，只要作变换 $y=x-a$ 就可将幂级数化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n.$$

如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 的收敛半径为 R，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ 的收敛区域为 $(-R+a,R+a)$，其他的结论都可适用.

10.3.3　Taylor 级数

在这节中，要解决的问题是，在什么条件下，函数可展开成幂级数.

在 3.3 节中，介绍了 Taylor 展开式. 在那里证明了：如果 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处具有 $(n+1)$ 阶微商，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

这里，$R_n(x)$ 称为 Taylor 展开式的余项，它等于

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

这里，$\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$.

所以，要把 $f(x)$ 在 x_0 附近 (x_0-R, x_0+R) 展成幂级数，当然要求 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 上有任意次微商. 而且在 (x_0-R, x_0+R) 上，当 n 趋于无穷大时，$R_n(x)$ 趋于零. 也就是：

设 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 上有任意次微商，则 $f(x)$ 能在 (x_0-R, x_0+R) 上展为幂级数的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

这时所得到的幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

这种幂级数. 称为 $f(x)$ 在 (x_0-R, x_0+R) 上的 Taylor 级数.

要注意的是：对一个在 (x_0-R, x_0+R) 上具有任意次微商的函数 $f(x)$，它一定有 Taylor 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

但这样得到的 Taylor 级数未必收敛，即使收敛，也未必收敛于 $f(x)$. 要 Taylor 级数收敛且收敛于 $f(x)$，其充分必要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

例如

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!},$$

它在 $x=0$ 处的 Taylor 级数除 $x=0$ 外处处发散.

又例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f^{(n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$. 因此，它的 Taylor 级数虽然收敛，却不收敛到 $f(x)$（除去 $x=0$ 一点）.

还可以得到易于应用的将 $f(x)$ 展成 Taylor 级数的充分条件如下：

如果存在常数 M，使对 (x_0-R, x_0+R) 中所有 x 及一切自然数 n，均有

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M,$$

那么，$f(x)$能在(x_0-R,x_0+R)中展为 Taylor 级数.

证　只要证在上述条件下，当 x 在(x_0-R,x_0+R)中时，

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

事实上，

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由 10.3.2 节中例 1 知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$ 收敛，故$\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$. 所以，当 x 在(x_0-R,x_0+R)中时，

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

应用这些结果，可以将不少函数展成 Taylor 级数.

如果 $f(x)$能在 $x=0$ 处展开成 Taylor 级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

则称此幂级数为 Maclaurin 级数.

函数 $f(x)$的 Maclaurin 级数是 x 的幂级数，现在我们证明，如果 $f(x)$能展开成幂级数，则这种展开式是唯一的，它一定就是 $f(x)$的 Maclaurin 级数.

事实上，如果 $f(x)$在 $x=0$ 的某个邻域$(-R,R)$内能展开成 x 的幂级数，即

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

那么根据幂级数在收敛区间内可逐项求导，有

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$f''(x)=2!a_2+3\cdot2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots2a_{n+1}x+\cdots$$

把 $x=0$ 代入以上各式，得

$$a_0=f(0),a_1=f'(0),a_2=\frac{f''(0)}{2!},\cdots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\cdots.$$

由 $f(x)$幂级数展开式的唯一性可知，如果 $f(x)$能展开成 x 的幂级数，这个幂级数就是 $f(x)$的 Maclaurin 级数. 但是，反过来如果 $f(x)$的 Maclaurin 级数在 $x=0$的某个邻域内收敛，但它不一定收敛于 $f(x)$.

在 10.3.2 节中,已经证明 e^x 可以展开成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. 现在应用上述定理,也可十分容易地得到这点. 为此,只要证明任取 R,当 $|x| < R$ 时,$f^{(n)}(x)$ 对一切 n 都有界即可. 但这是显然的. 因为 $f^{(n)}(x) = e^x$,当 $|x| < R$ 时,$e^x < e^R$ 成立,所以 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. 故 e^x 可以展开成 Maclaurin 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

同样,我们可以将 $\sin x$ 及 $\cos x$ 展开成 Maclaurin 级数.

事实上,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad (n = 1,2,\cdots).$$

所以,

$$\left.\frac{(\sin x)^{(n)}}{n!}\right|_{x=0} = \frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}, & \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

又因为

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left|\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

对一切 x 与 n 都成立,所以

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

对所有 x 成立. 同样方法可得 $\cos x$ 的 Maclaurin 展开式

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots$$

对一切 x 都成立.

为了把函数 $(1+x)^\alpha$,这里 α 为任意实数,展开成 Taylor 级数,这里需要对函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开的余项 $R_n(x)$ 给出另一形式.

把函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处展开,于是余项

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$- \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

作一辅助函数

$$\varphi(y) = f(x) - f(y) - \frac{f'(y)}{1!}(x - y) - \frac{f''(y)}{2!}(x - y)^2 - \cdots$$

$$-\frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n,$$

因此，

$$\varphi(x_0)=R_n(x),\varphi(x)=0,$$

而

$$\begin{aligned}\varphi'(y)&=-f'(y)-\left[\frac{f''(y)}{1!}(x-y)-f'(y)\right]\\&\quad-\left[\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2-\frac{f''(y)}{1!}(x-y)\right]-\cdots\\&\quad-\left[\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n-\frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\right]\\&=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n,\end{aligned}$$

由中值定理

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=(x-x_0)\varphi'(c),$$

这里 $c=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1$. 于是

$$\begin{aligned}R_n(x)&=(x-x_0)\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^n\\&=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}$$

$$(0<\theta<1).$$

有了这个余项公式，就可以展开 $(1+x)^\alpha$ 为 Maclaurin 级数. 由于

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

有

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),n=1,2,\cdots,$$

故 $f(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

当 α 为自然数或 0 时，级数只有有限项，这就是二项展开式. 当 α 不是自然数或 0 时，级数中没有一项为 0. 由比较判别法知，这个幂级数的收敛半径为 1，要证这个幂级数的确收敛于 $(1+x)^\alpha$，为此，只要证当 $n\to\infty$ 时，$R_n(x)\to 0$ 即可. 由上面介绍的 Taylor 展开的余项，得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

$$= \left(\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots[(\alpha-1)-n+1]}{n!}x^n\right)\times$$

$$(\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1})\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

上式右边的 3 个因子中,第一个因子为$(1+x)^{\alpha-1}$的 Maclaurin 级数的通项,当$|x|<1$时,这级数是收敛的,因而当$n\to\infty$时,它趋于 0;第二个因子当$|x|<1$时是个有界的量;由于当$|x|<1$时,$\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$,故第三个因子小于 1. 因此

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

于是当$|x|<1$时

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

特别,当$\alpha=-1,\alpha=\frac{1}{2},\alpha=-\frac{1}{2}$时为:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1<x<1),$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3$$

$$+ \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n + \cdots \qquad (-1<x\leqslant 1).$$

不难证明:

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$,$\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$,$R_2$,命$R=\min(R_1,R_2)$,则在区间$(-R,R)$中有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

而

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l} \\ &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0. \end{aligned}$$

利用这个结果,可以得出一些函数的 Taylor 展开式.

例如,函数$\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$可以这样来展开,在$(-1,1)$中,有

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

根据幂级数乘法定理,有

$$c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l} = -\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l},$$

所以

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \quad (-1 < x < 1).$$

以下 6 个初等函数的 Maclaurin 级数会常遇到:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},\ (-\infty < x < \infty),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,\ (-1 < x \leqslant 1),$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},\ (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n,\ (-1 < x < 1).$$

10.3.4　幂级数的应用

无穷级数,在数学分析中是十分有力的工具,这在 10.2.4,10.2.5 节中可以看出. 应用函数项级数的一致收敛性,可以证明隐函数的存在性及唯一性和常微

分方程的解的存在性及唯一性，而且还可一步步地具体定出要求的函数来. 不但如此，与证明隐函数存在性及唯一性和微分方程的解的存在性及唯一性一样，利用迭代法及函数项级数的一致收敛性，可以证明，积分方程的解的存在性及唯一性、微分方程组的解的存在性及唯一性以及偏微分方程的解的存在性及唯一性等等. 所以它是十分有力的工具. 特别地，当考虑的函数的变数是复变数时，以它为工具就更为有力，这将在复变函数论中进一步讨论.

在这一节中，我们只是就幂级数的一些简单的应用，即近似计算，求隐函数的近似解及用幂级数解微分方程等三方面来举例说明它的用处.

先举几个应用于近似计算的例子.

例 1 计算 $\ln 2$ 的近似值，准确到 10^{-4}.

解 在 10.3.2 节中已证明

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

但这个级数收敛太慢，若取前 n 项的部分和作近似值，它的误差为

$$|r_n| < |a_{n+1}| = \frac{1}{n+1}.$$

要使 $\frac{1}{n+1} < 10^{-4}$，n 至少要 10^4，即要计算前面 10 000 项，这样不适用，所以想别的办法.

已知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$$

及

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots.$$

两式相减，有

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right).$$

取 $x = \frac{1}{3}$，则上式成为

$$\ln 2 = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right].$$

如取括号中前 4 项，略去后面的各项，产生的误差为

$$\frac{2}{9\cdot 3^9} + \frac{2}{11\cdot 3^{11}} + \frac{2}{13\cdot 3^{13}} + \cdots$$

$$< \frac{2}{9 \cdot 3^9}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 3^9} = \frac{1}{78\,732} < 10^{-4}.$$

于是只要对前面 4 项进行计算即可.

$$\frac{1}{3} \approx 0.333\,33, \quad \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0.012\,35,$$

$$\frac{1}{5 \cdot 3^5} \approx 0.000\,82, \quad \frac{1}{7 \cdot 3^7} \approx 0.000\,07.$$

所以 $\ln 2 \approx 0.693\,1$,其误差不超过 10^{-4}.

同样,取 $x = \frac{1}{5}$,可算出 $\ln 3$,$x = \frac{1}{4}$,可算出 $\ln 5$,而 $\ln 4 = 2\ln 2$,$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$,这样,可以编制对数表.

例 2　计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值,准确到 10^{-4}.

解　$\frac{\sin x}{x}$的 Taylor 级数为

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots, \quad (-\infty < x < \infty).$$

逐项积分

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots.$$

右边是一交错级数,误差易于估计,而

$$\frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0.055\,56, \frac{1}{5 \cdot 5!} \approx 0.001\,67, \frac{1}{7 \cdot 7!} \approx \frac{1}{35\,280} < 10^{-4},$$

所以只要算开始 3 项就够了,即

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \approx 1 - 0.055\,56 + 0.001\,67$$

$$\approx 0.946\,1.$$

其次介绍一下如何用幂级数来解出隐函数来.

为此,先研究一下两个变数的函数 $f(x,y)$ 展开成 Taylor 级数的问题. 在 8.1 节中已经介绍了多变数函数的 Taylor 展开的问题,读者可以按照一个变数函数时那样,给出多变函数可以展开成 Taylor 级数的充分必要条件等等.

现在利用级数来解隐函数.

若由方程

$$F(x,y) = 0$$

确定一个隐函数，又 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 附近能展开成 $x-x_0$ 及 $y-y_0$ 的幂级数，且 $F(x_0,y_0)=0, F'_y(x_0,y_0)\neq 0$，于是，$F(x,y)=0$ 可写成

$$\begin{aligned} y = {} & C_{10}x + C_{20}x^2 + C_{11}xy + C_{02}y^2 + C_{30}x^3 \\ & + C_{21}x^2y + C_{12}xy^2 + C_{03}y^3 + \cdots. \end{aligned}$$

要求的是

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

适合于 $F(x,y)=0$，代入后即得

$$\begin{aligned} & a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots \\ & = C_{10}x + C_{20}x^2 + C_{11}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & \quad + C_{02}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 \\ & \quad + C_{30}x^3 + C_{21}x^2(a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ & \quad + C_{12}x(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^2 \\ & \quad + C_{03}(a_1x + a_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

比较系数即得

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{10}, \\ a_2 &= C_{20} + C_{11}a_1 + C_{02}a_1^2, \\ a_3 &= C_{11}a_2 + 2C_{02}a_1a_2 + C_{30} + C_{21}a_1 + C_{12}a_1^2 + C_{03}a_1^3 \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

将前面代入后面的方程得

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{10}, \\ a_2 &= C_{20} + C_{11}C_{10} + C_{02}C_{10}^2, \\ a_3 &= (C_{11} + 2C_{02}C_{10})(C_{20} + C_{11}C_{10} + C_{02}C_{10}^2) \\ &\quad + C_{30} + C_{21}C_{10} + C_{12}C_{10}^2 + C_{03}C_{10}^3 + \cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

这样要求的解

$$y = a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

就完全决定了. 还可证明这样得到的幂级数在 $x=0$ 附近的确是绝对收敛的. 这种方法叫待定系数法.

例 3 方程

$$xy - e^x + e^y = 0$$

在(0,0)附近确定一个隐函数 $y=y(x)$,试求它在原点附近的近似表达式.

解 设 $y(x)$ 在原点的 Taylor 级数为

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

由方程 $F(x,y)=0$,对方程微商一次得

$$y + xy' - e^x + e^y y' = 0.$$

令 $x=0$ 及 $y(0)=0$,得 $y'(0)=1$,再微商一次,逐次得出

$$y''(0) = -2, y'''(0) = 12.$$

于是得到

$$y \approx y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

$$= x - x^2 + 2x^3.$$

有时还可以把精确解求出来.

例 4 讨论方程

$$y = a + x\varphi(y),$$

此处 $\varphi(y)$ 在 $y=a$ 点附近能展开成收敛的幂级数.

解 将方程分别对 x 及 a 求微商得

$$(1 - x\varphi'(y))\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y),$$

$$(1 - x\varphi'(y))\frac{\partial y}{\partial a} = 1,$$

因此

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}.$$

可以用数学归纳法证明

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi^n(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right).$$

上式当 $n=1$ 时显然成立. 若 $n=k$ 时成立,即

$$\frac{\partial^k y}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left(\varphi^k(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right),$$

对 x 再微商一次

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{k+1} y}{\partial x^{k+1}} &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left(\varphi^k(y)\frac{\partial^2 y}{\partial a\partial x} + k\varphi^{k-1}(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial a}\right)\\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left(\varphi^k(y)\frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right) + k\varphi^k(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2\right)\\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left(\varphi^k(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \varphi^{k+1}(y)\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + k\varphi^k(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2\right)\\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}\left((k+1)\varphi^k(y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \varphi^{k+1}(y)\frac{\partial^2 y}{\partial a^2}\right)\\ &= \frac{\partial^k}{\partial a^k}\left(\varphi^{k+1}(y)\frac{\partial y}{\partial a}\right).\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$y=a$，故 $\left.\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right|_{x=0} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^{k-1}}(\varphi^k(a))$. 因此，$y$ 有 Taylor 级数

$$y = a + x\varphi(a) + \frac{x^2}{2!}\frac{\partial}{\partial a}(\varphi^2(a)) + \cdots + \frac{x^n}{n!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}(\varphi^n(a)) + \cdots,$$

这个级数称为 Lagrange 级数.

最后介绍一下用幂级数解微分方程.

例如考虑二阶齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

将 $p(x)$，$q(x)$ 展成 x 的幂函数

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k,$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k.$$

若方程解为

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x + \cdots + \alpha_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k.$$

将这 3 个式子代入微分方程，就得到

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\alpha_kx^{k-2} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_kx^{k-1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_kx^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k\right) = 0.$$

比较系数,x^0 的系数为

$$2 \cdot 1\alpha_2 + a_0\alpha_1 + b_0\alpha_0 = 0,$$

x^1 的系数为

$$3 \cdot 2\alpha_3 + 2a_0\alpha_2 + a_1\alpha_1 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0 = 0,$$

x^2 的系数为

$$4 \cdot 3\alpha_4 + 3a_0\alpha_3 + 2a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0 = 0,$$

……

如给定了 α_0, α_1 的值,可由逐个方程解出 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$. 例如取 $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0$,即 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 可得一个解 y_1;再取 $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$ 即 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 可得另一个解 y_2. 于是微分方程的通解为

$$y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

这里 C_1, C_2 为两个常数. 它是满足初始条件 $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$ 的微分方程的解.

可以证明,若 $p(x), q(x)$ 展开成 Taylor 级数的收敛半径为 R,则用这个办法求出来的解的收敛半径也是 R. 证明从略.

例 5 考虑方程

$$y'' - xy = 0.$$

若方程的解为

$$y = \alpha_0 + \alpha_1x + \cdots + \alpha_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_kx^k,$$

代入方程,于是有

$$(2 \cdot 1\alpha_2 + 3 \cdot 2\alpha_3x + 4 \cdot 3\alpha_4x^2 + \cdots) - x(\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \cdots) = 0$$

比较系数得

$$2 \cdot 1\alpha_2 = 0,$$

$$3 \cdot 2\alpha_3 - \alpha_0 = 0,$$

$$4 \cdot 3\alpha_4 - \alpha_1 = 0,$$

……

$$(k+2)(k+1)\alpha_{k+2} - \alpha_{k-1} = 0,$$

……

让 $\alpha_0=1,\alpha_1=0$,就有

$$\alpha_2=0,\alpha_3=\frac{1}{2\cdot 3},\alpha_4=\alpha_5=0,$$

$$\alpha_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6},\alpha_7=\alpha_8=0,$$

$$\alpha_9=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9},\cdots$$

一般有

$$\alpha_{3k+1}=\alpha_{3k+2}=0,\alpha_{3k}=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}.$$

故得一个解

$$y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}.$$

让 $\alpha_0=0,\alpha_1=1$,可得另一个解

$$y_2=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}x^{3k+1}.$$

用比较判别法知 y_1,y_2 在$(-\infty,\infty)$上绝对收敛,这两个解线性无关,故得通解

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

事实上,对于

$$f_0(x)y''+f_1(x)y'+f_2(x)y=0.$$

而 $f_0(x)\neq 0$ 的线性方程,也可用同样的办法求解.

例 6 求解方程

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0.$$

若方程的解为

$$y=\alpha_0+\alpha_1x+\cdots+\alpha_nx^n+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k$$

代入方程,于是有

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2}-n(n-1)\alpha_n-n\alpha_n+a^2\alpha_n=0,$$

即

$$(n+2)(n+1)\alpha_{n+2}=(n^2-a^2)\alpha_n.$$

让 $\alpha_0=1,\alpha_1=0$,得解

$$y_1=1-\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^2(a^2-4)}{4!}x^4-\frac{a^2(a^2-4)(a^2-16)}{6!}x^6+\cdots,$$

$$|x| < 1$$

让 $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1$，得解

$$y_2 = x - \frac{a^2-1}{3!}x^3 + \frac{(a^2-1)(a^2-9)}{5!}x^5 - \frac{(a^2-1)(a^2-9)(a^2-25)}{7!}x^7 + \cdots, |x| < 1$$

这两个解线性无关，故原方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

附带给出一个十分有用的

Stirling 公式：$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，这里 $0 < \theta_n < 1$.

Stirling 公式的意义是给出 $n!$ 以正确的阶.

为此先证明

Wallis 公式：$\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2$.

这里

$$(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2,$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1.$$

证　当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，n 为自然数时，

$$\sin^{2n+1}x < \sin^{2n}x < \sin^{2n-1}x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}x\,dx,$$

而这就是

$$\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1} < \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}.$$

（关于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ 的值的求得见 10.4.4 节）.

即

$$\left(\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$$

$$< \left(\frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}\right)^2 \frac{1}{2n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1$，故得 Wallis 公式.

有了 Wallis 公式，就可证明 Stirling 公式.

由于

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots$$

故

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \cdots + \frac{1}{2n+1}x^{2n} + \cdots\right).$$

命 $x=\frac{1}{2n+1}$，这时 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$，故有

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right),$$

此即

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots.$$

上式显然大于 1，而小于

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

所以

$$1 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

于是

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

令

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}},$$

则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

于是

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

这说明

$$a_n > a_{n+1}.$$

即 a_n 为单调下降数列,其极限为 a,及

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{\frac{-1}{12(n+1)}}$$

即 $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ 为单调上升数列,其极限当然也为 a. 因此

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

若命

$$\theta_n = 12n\ln\frac{a_n}{a},$$

则 $0<\theta_n<1$,因此

$$a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

于是由 a_n 的定义及上式,有

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} a_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} a e^{\frac{\theta_n}{12n}}.$$

最后来确定 a. 这要用到 Wallis 公式:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

由于

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!},$$

而

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} a_n, \quad (2n)! = \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n} a_{2n},$$

于是

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}na_n^2}{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}a_{2n}}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{a_n^2}{a_{2n}}.$$

由 Wallis 公式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{a_n^2}{a_{2n}}=\frac{a}{2},$$

所以

$$a=\sqrt{2\pi}.$$

这样就得到了 Stirling 公式.

Stirling 公式还可写为

$$n!\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n},\quad(n\to\infty).$$

例 7 证明当 $n\to\infty$ 时,

$$C_{2n}^n\sim\frac{1}{\sqrt{n\pi}}2^{2n}.$$

这里 C_n^m 为组合数.

证 $C_{2n}^n=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$由 Stirling 公式,

$$(2n)!\sim\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n},\quad(n!)^2\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}2\pi n,$$

故

$$C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}2\pi n}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}2^{2n}.$$

习题 10.3

1. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+\sqrt{n}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^k}{n!}x^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.

2. 求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$　$(0<a<1)$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$　$(a>1)$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$　$(a>0,b>0)$；　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\sqrt{n}}}$　$(a>0)$.

3. 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

4. 证明下列等式($|x|<1$)：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n=\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$.

5. 利用已知初等函数展开式，求下列函数的幂级数展开式：

(1) e^{x^2}；　(2) $\cos^2 x$；

(3) $\frac{x^{12}}{1-x}$；　(4) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(5) $\frac{x}{1+x-2x^2}$；　(6) $(1+x)e^{-x}$.

6. 利用逐项微分方法和逐项积分法，求出下列函数的幂级数展开式：

(1) $\arcsin x$；　(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$；　(4) $\int_1^x\frac{e^t}{t}dt$.

7. 将下列函数在指定点附近展成幂级数，并求收敛区间：

(1) x^3-2x^2+5x-7，　$(x=1)$；　(2) $\frac{1}{x+10}$，$(x=0)$；

(3) $(1+x)\ln(1+x)$，$(x=0)$；　(4) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$，$(x=0)$；

(5) $(1+x^2)\arctan x$，$(x=0)$；　(6) $\ln x$，$(x=1)$；

(7) $\mathrm{ch}\,x$，$(x=0)$；　(8) $\cos x$，$\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$.

8. 写出下列函数按 x 的正幂展开成幂级数的展开式：

(1) $\ln(1+e^x)$，(展至 4 次项)；

(2) $\tan x$，(写出异于 0 的展开式前 3 项).

9. 利用被积函数展成幂级数的展开式，计算下列积分值，准确到0.001

(1) $\int_0^1 e^{-x^2}dx$；　　(2) $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$；

(3) $\int_0^1 \cos x^2 dx$.

10. 用幂级数解法求下列方程的通解：

(1) $y'=y+2x$；　　(2) $y''+xy'+y=0$.

11. 求方程 $y'=x+y^2$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解，近似到 x 的5次方.

12. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} y''-xy'+y-1=0, \\ y(0)=y'(0)=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y''+(y')^2=0, \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$

13. 利用 Stirling 公式近似计算：

(1) lg 100!；　　(2) C_{100}^{40}.

10.4 无穷积分与含参变量积分

10.4.1 无穷积分的收敛判别法

前面已经说过，无穷积分与无穷级数本质上是一回事，一个是无穷个“连续”地相加，而另一个是无穷个“离散”地相加，而相互之间又是紧密相连的. 在本章前3节中，已经对无穷级数分为数项级数、函数项级数及一种最简单的函数项级数即幂级数进行了讨论. 在这一节中，将对无穷积分讨论其相应的问题. 无穷数项级数对应于9.3.3节中的无穷积分，函数项级数对应于含参变量的无穷积分. 由于它们之间的本质是一样的，所以对于无穷级数的一些定理，可以毫无困难地搬到无穷积分中来.

先研究9.3.3节中所定义的无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 在什么时候收敛. 所谓收敛是指

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

有有限的极限. 记 $F(A)=\int_a^A f(x)dx$，那么 $F(A)$ 就相当于无穷级数的部分和.

先证明：

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $F(x)$ 有一有限极限的充分必要条件是，对任给 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，当 $x,x'>X$ 时，有

$$|F(x)-F(x')|<\varepsilon$$

证　必要性是显然的. 如 $\lim\limits_{A\to+\infty} F(x)=a$，那么，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$ 当 x，

$x' > X$ 时，有

$$|F(x) - a| < \varepsilon/2, |F(x') - a| < \varepsilon/2.$$

于是
$$|F(x) - F(x')| \leqslant |F(x) - a| + |F(x') - a|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性. 只要证明，对于任意趋于 $+\infty$ 的数列 x_n，

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n)$$

都有相同的有限极限. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，故对 $X > 0$，存在 N，只要 $m, n > N$，便有 $x_n > X, x_m > x$，于是

$$|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon.$$

故 $F(x_n)$ 为一 Cauchy 数列，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n)$ 有有限的极限. 最后证明，对所有趋于 $+\infty$ 的数列 x_n，$F(x_n)$ 的极限相同. 任取 $x_n \to +\infty$，$x'_n \to +\infty$，则可得一新的趋于 $+\infty$ 的数列

$$x_1, x'_1, x_2, x'_2, \cdots, x_n, x'_n, \cdots,$$

故

$$F(x_1), F(x'_1), F(x_2), F(x'_2), \cdots, F(x_n), F(x'_n), \cdots$$

有有限的极限，所以

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x'_n).$$

由此即得

Cauchy 收敛判别准则：积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $X > a$，只要 $x, x' > X$，便有

$$\left|\int_x^{x'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

如果积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 是**绝对收敛**的.

显然绝对收敛的无穷积分一定收敛，反之，收敛的无穷积分未必绝对收敛.

如 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ 发散，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 为**条件收敛**.

由于单调上升有界数列必有极限，所以有

若 $f(x)$ 是 $[a, +\infty)$ 上的非负连续函数，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充分必要条件是对所有 $a \leqslant A < +\infty$，$\int_a^A f(x)\,dx$ 有界.

由此,可得

比较判别法:设函数$f(x)$与$\varphi(x)$都在$[a,+\infty)$上连续,且对充分大的x,满足

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

那么(1)若$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;

(2)若$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散,则$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$发散.

由于$p>1$时,$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$收敛;$p\leqslant 1$时,$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$发散,故常拿$f(x)$与$\frac{1}{x^p}$作比较.

例1 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\mathrm{d}x,\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$绝对收敛.

这是因为$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2}$,而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛.

其极限形式为:

设$f(x),\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上分别为非负与恒正的连续函数,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,$$

那么(1)若$0<k<+\infty$,则$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$同时敛散.

(2)若$k=0$,则当$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛时,$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也收敛.

(3)若$k=+\infty$,则当$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$发散时,$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$也发散.

这些定理的证明与无穷级数的证明一样.

例2 积分$\int_2^{+\infty}\frac{x^2}{x^4-x^2-1}\mathrm{d}x$是收敛的.因为当$x\to+\infty$时,

$$\frac{x^2}{x^4-x^2-1}\sim\frac{1}{x^2},$$

而$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$是收敛的,故原积分收敛.

例3 积分$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$是收敛的.因为当$x\to+\infty$时,

$$\frac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2x^3}$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$ 收敛，故原积分收敛.

至于无穷级数中的 Dirchlet 判别法及 Abel 判别法，在这里也有相应的结果.

Dirichlet 判别法：如果 $f(x)$，$g(x)$ 满足

(i) $F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x (a < A < +\infty)$ **有界**，

(ii) $g(x)$ **在** $[a, +\infty)$ **中单调并且** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$，

则积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

Abel 判别法：如果 $f(x)$，$g(x)$ 满足

(i) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**，

(ii) $g(x)$ **在** $[a, +\infty)$ **上单调有界**，

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

要证明这两个判别法，也要先证明与 10.1.3 中无穷级数中 Abel 引理相当的结果，这里称之为**第二积分中值定理.**

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x) \geqslant 0$，且单调下降，则必存在某一 $\xi (a \leqslant \xi \leqslant b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

第二积分中值定理的另一形式为：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 中单调，则必在 $[a,b]$ 中存在 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证　先证两个可积函数 $f(x)$，$g(x)$ 的乘积 $f(x)g(x)$ 仍然可积，对任意分法 T，设 $S_1(f,T)$，$S_0(f,T)$，$S_1(g,T)$，$S_0(g,T)$，$S_2(fg,T)$，$S_0(fg,T)$ 分别是 $f(x)$，$g(x)$ 和 $f(x)g(x)$ 的积分上和和下和. 则

$$S_1(fg,T) - S_0(fg,T) = \sum_{i=1}^{n} |M_i(fg) - m_i(fg)|\Delta x_i$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} [M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g)]\Delta x_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \{ [M_i(f) - m_i(f)] M_i(g) \\
&\quad + [M_i(g) - m_i(g)] m_i(f) \} \Delta x_i \\
&\leqslant M(g) \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)] \Delta x_i \\
&\quad + M(f) \sum_{i=1}^{n} [M_i(g) - m_i(g)] \Delta x_i \\
&= M(g)[S_1(f,T) - S_0(f,T)] \\
&\quad + M(f)[S_1(g,T) - S_0(g,T)],
\end{aligned}
$$

其中 $M_i(f), m_i(f), M_i(g), m_i(g)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的上确界和下确界，$M(f), M(g)$ 分别是 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上确界. 由于 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $\lambda(T) < \delta$，有

$$
S_1(f,T) - S_0(f,T) < \frac{\varepsilon}{2M(g)},
$$

$$
S_1(g,T) - S_0(g,T) < \frac{\varepsilon}{2M(f)}.
$$

故

$$
S_1(fg,T) - S_0(fg,T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
$$

即 fg 在 $[a,b]$ 上可积.

由于 $f(x)$ 可积. $g(x)$ 是非负的下降函数，也可积. 所以，$f(x)g(x)$ 可积，因而 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 为

$$
\begin{aligned}
I &= f(a)g(a)(x_1 - a) + f(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) \\
&\quad + \cdots + f(x_{n-1})g(x_{n-1})(b - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

之极限，而 $I' \geqslant I \geqslant I''$，这里

$$
I' = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu g(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}),
$$

$$
I'' = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu g(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1}).
$$

而 M_ν 与 m_ν 分别表示 $f(x)$ 在 $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ 上的上、下确界，而

$$
I' - I'' \leqslant g(a) \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).
$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，故$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{\nu=1}^{n}(M_\nu - m_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$. 所以对任意在$m_i \leqslant \mu_i \leqslant M_i$之间的$\mu_i$，和

$$I_1 = \sum_{\nu=1}^{n}\mu_\nu g(x_{\nu-1})(x_\nu - x_{\nu-1})$$

的极限都是$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

由积分中值定理

$$\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x)\mathrm{d}x = \mu_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

我们就在I_1中选取这样的μ_ν.

由于 $$g(a)\geqslant g(x_1)\geqslant\cdots\geqslant g(x_n)\geqslant 0,$$

及

$$\sum\mu_\nu(x_\nu - x_{\nu-1}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

而$f(x)$在$[a,b]$上可积，故$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$有界，故由 10.1.3 节的 Abel 引理，得

$$g(a)\min_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \leqslant I_1 \leqslant g(a)\max_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,$$

I_1的极限$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$也在

$$g(a)\min_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x \text{ 与 } g(a)\max_{a\leqslant c\leqslant b}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x,$$

之间，由于$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$是c的连续函数，故存在ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x, a\leqslant\xi\leqslant b.$$

类似地，如$g(x)$是单调递增非负的函数，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_\eta^b f(x)\mathrm{d}x, a\leqslant\eta\leqslant b.$$

由此十分容易推出：当$g(x)$只有单调性，而无非负性时，有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 假定$g(x)$是递减的，故$g(x)-g(b)$为非负递减的，因此

$$\int_a^b (g(x)-g(b))f(x)\mathrm{d}x = (g(a)-g(b))\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x,$$

即得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x.$$

同法考虑 $g(x)$ 是递增的情况.

有了第二中值定理,就可以证明 Dirichlet 判别法及 Abel 判别法.

先证 Dirichlet 判别法,由第二中值定理

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x,$$

即得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

由假定

$$|F(A)| = \left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M, (a < A < +\infty)$$

所以

$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{A''} f(x)\mathrm{d}x - \int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M.$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,故对任给 $\varepsilon > 0$,存在 $A_0 > 0$,当 $A', A'' > A_0$ 时均有

$$|g(A')| < \varepsilon, |g(A'')| < \varepsilon.$$

所以只要 $A', A'' > A_0$,就有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 4M\varepsilon.$$

由 Cauchy 判别准则,积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

再证 Abel 判别法.

因为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,故对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $A_0 > 0$,只要 $A', A'' > A_0$,便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

由于 $g(x)$ 单调，故由第二中值定理，

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x, (A' \leqslant \xi \leqslant A''),$$

于是，由 $|g(x)| \leqslant M$，即有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant |g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M\varepsilon.$$

例 4　积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，但非绝对收敛.

证　由 Dirichlet 判别法，取 $g(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \sin x$，由于

$$\left|\int_0^A \sin x\mathrm{d}x\right| = |\cos 0 - \cos A| \leqslant 2$$

故知 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，但非绝对收敛. 这是因为

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

同样可以判断 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x, \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\mathrm{d}x$　$(\alpha > 0)$ 都收敛.

例 5　$\int_0^{\infty} \sin x^2\mathrm{d}x$ 是收敛的. 这是因为命 $x^2 = t$，有

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

故收敛. 同法可证 $\int_0^{\infty} x\sin x^3\mathrm{d}x$ 也收敛.

从这一节中可以看出，无穷积分的判别法与无穷级数的判别法是平行的，证明的想法与步骤是相仿的. 这是因为，一个是无穷多个“连续”相加，一个是无穷多个“离散”相加，但两者之间，还是有些差别的. 如数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件为

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

而收敛的无穷积分,被积函数当 $x\to\infty$ 时,可以不趋于0,被积函数甚至可以存在一个函数值数列趋于无穷. 例如例5中的积分

$$\int_0^{\infty} x\sin x^3 \mathrm{d}x$$

就是这种情形.

在9.3.3节中,推广了 Riemann 积分的概念,一是积分区间是无穷的,即无穷积分,前面已经讨论了关于它的收敛判别法;一是被积函数可以是无界的,即无界积分,但是无界积分的收敛问题,可以化为无穷积分的收敛问题.

如函数 $f(x)$ 定义在 $(a,b]$ 上,而当 $x\to a$ 时,$f(x)$ 无界. 这时 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

令 $x = a + \dfrac{1}{y}$,那么

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} -f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y^2}$$

$$= \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y.$$

于是,问题化为无穷积分的收敛问题. 例如

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

作变换 $\dfrac{1}{x} = y$,则

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{3/2}}\mathrm{d}y.$$

因此,对于无界积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$(当 $x\to a$ 时,$f(x)$ 无界)的收敛判别法,可以由无穷积分的收敛判别法平移过来,下面只叙述这些结论而不加证明,并且都假定积分下限 a 为瑕点.

1. Cauchy **判别准则. 积分** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ **收敛的充分必要条件为:对任意** $\varepsilon > 0$,**存在** $\delta > 0$,**只要** $0 < \delta' < \delta, 0 < \delta'' < \delta$ **时,就有**

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

2. 如积分 $\int_a^b |f(x)|\,dx$ 收敛，那么 $\int_a^b f(x)\,dx$ 也收敛.

3. 对充分接近 a 的 $x(>a)$，有不等式

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x),$$

那么(1) 若 $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛；

(2) 若 $\int_a^b f(x)\,dx$ 发散，则 $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ 发散.

4. 设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在 $(a,b]$ 上分别为非负与恒正的连续函数，且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = k,$$

则(1)若 $0<k<\infty$，则 $\int_a^b f(x)\,dx$ 与 $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ 同时敛散；

(2) 若 $k=0$，则当 $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛；

(3) 若 $k=\infty$，则当 $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ 发散时，$\int_a^b f(x)\,dx$ 发散.

例 6　积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}dx$ 是收敛的.

证　$x=1$ 为瑕点，当 $x\to 1$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{4}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}},$$

故积分收敛.

例 7　研究积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$.

解　当 $p<1$ 时，$x=0$ 是瑕点，$q<1$ 时，$x=1$ 是瑕点. 把积分拆成为两个：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

$$= \int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx + \int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (0<a<1)$$

当 $x\to 0$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1}$，故当 $1-p<1$ 或 $p>0$，第一个积分收敛；当 $x\to 1$ 时，$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1}$，故当 $1-q<1$，或 $q>0$ 时，第二个积分收敛. 因此原积分在 $p>0$，$q>0$ 时收敛. 积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 称为 B 函数，记为 $B(p,q)$.

例 8　研究积分 $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.

解 当 $p<1$ 时，$x=0$ 为瑕点，但它又是无穷积分，把它拆成两部分：

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

当 $x\to 0$ 时，

$$x^{p-1}e^{-x} \sim x^{p-1},$$

所以第一积分当 $p>0$ 时收敛，当 $x\to\infty$ 时，

$$x^2x^{p-1}e^{-x}\to 0.$$

故对充分大的 x，有

$$x^{p-1}e^{-x} < \frac{1}{x^2}.$$

故第二个积分不论 p 为何值时都收敛，故知原积分当 $p>0$ 时收敛.

这个积分称为 Γ 函数，记为 $\Gamma(p)$.

10.4.2 含参变量的积分

在本章一开始时就指出，无限多个初等函数相加可以产生新的函数. 这方面的理论已在上面两节中进行了讨论. 另一方面，对初等函数进行积分，也可能产生新的函数. 这就是以下要讨论的内容. 如果说 10.4.1 节中所讨论的无穷积分对应于无穷数项级数，那么这里所讨论的含参变量无穷积分就对应于函数项级数，而且如同 10.4.1 节一样，一些函数项级数的结果，可以相仿地平移过来.

先考虑积分限是常数的含参变量积分.

设 $f(x,u)$ 在 $D(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，那么，$f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，称积分

$$\int_a^b f(x,u)dx$$

为**含参变量** u **的积分**. 当然，$f(x,u)$ 也可以在它的定义区间内无界，或积分限可以是无穷，这两种情形在以后讨论，先讨论积分限有限及 $f(x,u)$ 有界的情形.

先证明：**如果函数** $f(x,u)$ **在** $D(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ **上连续，那么**

$$\varphi(u) = \int_a^b f(x,u)dx$$

是在区间 $[\alpha,\beta]$ **上的连续函数.**

证 在 $[\alpha,\beta]$ 中任取一点 u_0，于是

$$\varphi(u)-\varphi(u_0) = \int_a^b [f(x,u)-f(x,u_0)]dx,$$

即

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)| \leqslant \int_a^b |f(x,u)-f(x,u_0)|\,dx.$$

由于 $f(x,u)$ 在闭区间 D 上连续，故必一致连续，因此，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，在 D 中任意两点 $(x_1,u_1),(x_2,u_2)$，只要它们的距离小于 δ，就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)| < \varepsilon.$$

而点 $(x,u)(x,u_0)$ 之间的距离为 $|u-u_0|$，所以当 $|u-u_0|<\delta$ 时，便有

$$|f(x,u)-f(x,u_0)| < \varepsilon,$$

因此

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)| < \varepsilon(b-a).$$

这就证明了 $\varphi(u)$ 在 u_0 处连续.

这还可写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)\,dx = \int_a^b \lim_{u\to u_0} f(x,u)\,dx,$$

即积分运算与极限运算可以交换顺序.

由于 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，故有

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du = \int_\alpha^\beta\int_a^b f(x,u)\,dx\,du,$$

而上述等式右边等于

$$\iint_D f(x,u)\,dx\,du,$$

故也可写成

$$\int_a^b\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\,dx,$$

也就是积分号 $\int_\alpha^\beta$ 与 $\int_a^b$ 的顺序可以交换.

对于 $\varphi(u)$ 的微分性质，可有如下的结果：

如果 $f(x,u)$ 及其偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ 都在 $D(a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$ 上连续，则 $\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，且

$$\frac{d}{du}\varphi(u) = \frac{d}{du}\int_a^b f(x,u)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\,dx.$$

证 命 $g(x,u)=\dfrac{\partial f}{\partial u}$，在 $[\alpha,\beta]$ 中任取一点 u_0，则

$$\frac{\varphi(u_0+k)-\varphi(u_0)}{k}=\frac{1}{k}\int_a^b(f(x,u_0+k)-f(x,u_0))\,dx$$

$$=\int_a^b g(x,u_0+\theta k)\,dx \quad (0<\theta<1).$$

让 $k\to 0$,由于求极限与求积分的运算顺序可以交换,故

$$\frac{d\varphi}{du}=\lim_{k\to 0}\int_a^b g(x,u_0+\theta k)\,dx=\int_a^b g(x,u_0)\,dx,$$

也就是,如果 $f(x,u)$,$\frac{\partial f}{\partial u}$连续,则求微分与求积分的次序可交换.

例 1 取 $f(x,u)=x^u$,$0\leqslant x\leqslant 1$,$a\leqslant u\leqslant b(0<a<b)$,于是

$$\int_a^b du\int_0^1 x^u dx=\int_0^1 dx\int_a^b x^u du.$$

左方为

$$\int_a^b\frac{du}{1+u}=\ln\frac{1+b}{1+a},$$

右方为

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,$$

所以

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

其次,再讨论上、下限依赖于参变量的积分.

仍假定 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$,$c\leqslant u\leqslant d$ 上连续,且假定

$$x=\alpha(u),x=\beta(u),c\leqslant u\leqslant d$$

是 u 的两个连续函数,且 $a\leqslant\alpha(u)\leqslant b$,$a\leqslant\beta(u)\leqslant b$,则积分

$$I(u)=\int_{\alpha(u)}^{\beta(u)}f(x,u)\,dx$$

是 $[c,d]$ 上的 u 的连续函数.

证明这一点很容易. 取 $[c,d]$ 中一点 u_0,将 $I(u)$ 拆成 3 部分

$$I(u)=\int_{\alpha(u_0)}^{\beta(u_0)}f(x,u)\,dx+\int_{\beta(u_0)}^{\beta(u)}f(x,u)\,dx$$

$$-\int_{\alpha(u_0)}^{\alpha(u)}f(x,u)\,dx.$$

第一积分,由于上、下限都是常数,所以

$$\lim_{u\to u_0}\int_{\alpha(u_0)}^{\beta(u_0)} f(x,u)\,dx = \int_{\alpha(u_0)}^{\beta(u_0)} f(x,u_0)\,dx,$$

又

$$\left|\int_{\beta(u_0)}^{\beta(u)} f(x,u)\,dx\right| \leqslant M\,|\beta(u)-\beta(u_0)|,$$

$$\left|\int_{\alpha(u_0)}^{\alpha(u)} f(x,u)\,dx\right| \leqslant M\,|\alpha(u)-\alpha(u_0)|,$$

此处 $M=\max|f(x,u)|$，由 $\alpha(u),\beta(u)$ 的连续性可知，当 $u\to u_0$ 时，这两个积分趋于 0. 于是

$$\lim_{u\to u_0} I(u) = I(u_0),$$

故 $I(u)$ 是在 $[c,d]$ 上 u 的连续函数.

对于求微商，也有相应的结果.

假定 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant u\leqslant d$ 上连续，且

$$x=\alpha(u), x=\beta(u) \quad (c\leqslant u\leqslant d),$$

连续，微商 $\alpha'(u),\beta'(u)$ 都存在，$f'_u(x,u)$ 存在且连续，则 $I(u)$ 的微商为

$$I'(u) = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} f'_u(x,u)\,dx + \beta'(u)f(\beta(u),u) - \alpha'(u)f(\alpha(u),u).$$

证　仍仿前法，将 $I(u)$ 拆成三个积分，对于第一个积分，有

$$\frac{d}{du}\left(\int_{\alpha(u_0)}^{\beta(u_0)} f(x,u)\,dx\right)_{u=u_0} = \int_{\alpha(u_0)}^{\beta(u_0)} f'_u(x,u_0)\,dx.$$

对于第二个积分，应用中值定理，得

$$\frac{1}{u-u_0}\int_{\beta(u_0)}^{\beta(u)} f(x,u)\,dx = \frac{\beta(u)-\beta(u_0)}{u-u_0} f(\bar{x},u),$$

这里 $\bar{x}$ 为 $\beta(u)$ 与 $\beta(u_0)$ 之间的一个数值，当 $u\to u_0$ 时，这积分趋于

$$\beta'(u_0)f(\beta(u_0),u_0).$$

第三个积分也一样处理.

例 2　求积分 $I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ 的值.

解　引进参数 u，考虑更一般的积分

$$I(u) = \int_0^1 \frac{\arctan ux}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad (I(1) = I).$$

$$I'(u) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\arctan ux}{x\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\frac{x}{1+u^2x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+u^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

令 $x = \cos\theta$,则

$$I'(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1+u^2\cos^2\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+u^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+u^2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$

积分得

$$I(u) = \frac{\pi}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2}) + C.$$

因为 $I(0)=0$. 所以 $C=0$,故

$$I(u) = \frac{\pi}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2}).$$

从而有

$$I = I(1) = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

10.4.3 含参变量的无穷积分

设 $f(x,u)$ 在 $a \leqslant x < \infty$, $\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ 上连续,如对 $[\alpha,\beta]$ 中任意 u,广义积分

$$\int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$$

都收敛,这就确定了 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$\varphi(u) = \int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x.$$

这样所定义的含参变量的广义积分,就相当于无穷函数项级数 $S(u) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)$,差别在于一个是"连续"的无穷次相加,一个是"离散"的无穷次相加.

因此，对于无穷函数项级数的一些结果，都可以平行地移到含参变量的无穷积分上来.

首先要移过来的，当然是一致收敛的概念.

所谓 $\int_a^{\infty} f(x,u)\,dx$ 收敛，是指对固定的 u，有

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x,u)\,dx = \varphi(u)$$

$$= \int_a^{\infty} f(x,u)\,dx,$$

即对任给 $\varepsilon>0$，存在 $A_0(>a)$，当 $A>A_0$ 时，有

$$\left|\int_a^A f(x,u)\,dx - \int_a^{\infty} f(x,u)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_A^{\infty} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon,$$

这里 A_0 与 ε 有关，也与 u 有关.

如果对于任给的 $\varepsilon>0$，总能找到仅与 ε 有关的 $A_0(>a)$，当 $A>A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上所有的 u 都成立，就称 $\int_a^{\infty} f(x,u)\,dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上**一致收敛**.

对于具有瑕点的含参变量积分，也可同样定义一致收敛.

若 a 为瑕点，对于任给 $\varepsilon>0$，存在仅与 ε 有关的 $\delta_0(\varepsilon)>0$，当 $0<\delta<\delta_0$ 时，

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon.$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上所有的 u 都成立，就称 $\int_a^{b} f(x,u)\,dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

与函数项级数一样，对含参变量的无穷积分也有一致收敛的判别法，首先有

Cauchy **判别准则**：$\int_a^{\infty} f(x,u)\,dx$ **在区间** $[\alpha,\beta]$ **上一致收敛的充分必要条件是，对任给** $\varepsilon>0$，**总存在一个仅与** ε **有关的** A_0，**使得当** $A',A''>A_0$ **时，**

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha,\beta]$ **上所有的** u **都成立.**

同样可以有

Weierstrass **判别法**：**若** $f(x,u)$ **当** $x\geqslant a$ **时对** x **连续，如果存在一个连续函数**

$F(x)$，使得对一切充分大的 x 及 $[\alpha,\beta]$ 中的一切 u，都有

$$|f(x,u)| \leqslant F(x),$$

如果 $\int_a^{\infty} F(x)\,dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{\infty} f(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证明是显然的，由于 $\int_a^{\infty} F(x)\,dx$ 收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，只要 $A',A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} F(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

于是

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right| \leqslant \int_{A'}^{A''} |f(x,u)|\,dx \leqslant \int_{A'}^{A''} F(x)\,dx < \varepsilon.$$

同样也有

Dirichlet 判别法：如果当 $x\to\infty$ 时，$\Phi(x,u)$ 是 x 的单调下降函数，并对 u 一致地趋向于零，命

$$F(x,u) = \int_a^x f(t,u)\,dt,$$

若 $|F|$ 小于一个与 x,u 无关的常数 M，则积分

$$\int_a^{\infty} \Phi(x,u)f(x,u)\,dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

证　由于 $F(x,u)$ 一致有界，故任给 $A',A''>a$ 及 $[\alpha,\beta]$ 中的 u 有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^{A'} f(x,u)\,dx\right| + \left|\int_a^{A''} f(x,u)\,dx\right| \leqslant 2M.$$

又由于 $\Phi(x,u)$ 一致趋于零，对任意 $\varepsilon>0$，有 $A_0>a$，只要 $x>A_0$，便有

$$|\Phi(x,u)| < \varepsilon$$

对一切 $[\alpha,\beta]$ 中的点 u 都成立. 由第二中值定理，只要 $A',A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)\Phi(x,u)\,dx\right| \leqslant |\Phi(A',u)| \left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\,dx\right|$$

$$+\left|\Phi(A'',u)\right|\left|\int_{\xi}^{A'}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant 2M\varepsilon+2M\varepsilon=4M\varepsilon,$$

故积分一致收敛.

同样可以证明

Abel 判别法：如果$\int_a^{\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x$关于$u$一致收敛$(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)$以及$\Phi(x,u)$对$x$单调，且关于$u$一致有界，则积分

$$\int_a^{\infty}f(x,u)\Phi(x,u)\,\mathrm{d}x$$

在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

例 1　积分$\int_0^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x$显然对每个$u(\geqslant 0)$都收敛，且在$[\delta,\infty)(\delta>0)$中一致收敛. 事实上，对任给$\varepsilon>0$，只要取$A_0=\frac{1}{\delta}\ln\frac{1}{\varepsilon}$，当$A>A_0$时，便有

$$\int_A^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-uA}<\varepsilon\quad(\delta\leqslant u<\infty).$$

但在$[0,\infty)$中，积分非一致收敛，因为不论A多大，总有

$$\int_A^{\infty}u\mathrm{e}^{-ux}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-uA}\to 1,(\text{当 }u\to 0\text{ 时}).$$

例 2　积分$\int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x,(\alpha,\beta>0)$，在$\beta\geqslant\beta_0(>0)$中一致收敛.

证　当$\beta\geqslant\beta_0$时，

$$\left|\int_0^{A}\sin\beta x\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1-\cos\beta A}{\beta}\right|\leqslant\frac{2}{\beta_0},$$

而$\frac{x}{\alpha^2+x^2}$与β无关，当$x\geqslant a$时单调减少，且当$x\to\infty$时趋于零，由 Dirichlet 判别法知，

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x$$

在$\beta\geqslant\beta_0(>0)$中一致收敛.

例 3　积分$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-ux}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$对$u\geqslant 0$是一致收敛的.

证 因为 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛，e^{-xu} 是 x 的单调下降函数，$|e^{-xu}| \leqslant 1 (0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant u < \infty)$. 由 Abel 判别法知，当 $u \geqslant 0$ 时积分一致收敛.

利用一致收敛的概念，可给出级数在无穷区间上逐项积分的条件，即“$\sum$”与“$\int$”可交换顺序.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上收敛于和 $S(x)$，如果对任意 $A > a$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛；$\int_a^{\infty} S_n(x) dx$ 对 n 一致收敛，其中 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$；以及 $\int_a^{\infty} S(x) dx$ 收敛，则

$$\int_a^{\infty} S(x) dx = \int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x) dx.$$

证 由于 $\int_a^{\infty} S_n(x) dx$ 一致收敛及 $\int_a^{\infty} S(x) dx$ 收敛，故对任给 $\varepsilon > 0$，存在 A_0，使得

$$\left| \int_{A_0}^{\infty} S(x) dx \right| < \varepsilon/3,$$

$$\left| \int_{A_0}^{\infty} S_n(x) dx \right| < \varepsilon/3 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

于是

$$\left| \int_a^{\infty} S_n(x) dx - \int_a^{\infty} S(x) dx \right|$$

$$\leqslant \int_a^{A_0} |S_n(x) - S(x)| dx + \left| \int_{A_0}^{\infty} S_n(x) dx \right|$$

$$+ \left| \int_{A_0}^{\infty} S(x) dx \right|$$

$$< \int_a^{A_0} |S_n(x) - S(x)| dx + \frac{2}{3}\varepsilon.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, A_0]$ 上一致收敛，故对 $\varepsilon > 0$，存在 $N (> 0)$，当 $n > N$ 时，

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3(A_0 - a)}$$

对$[a, A_0]$中所有x都成立，因此，当$n > N$时有

$$\left|\int_a^{\infty} S_n(x)\,dx - \int_a^{\infty} S(x)\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3(A_0 - a)}(A_0 - a) + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

此即

$$\int_a^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^{\infty} u_n(x)\,dx.$$

例 4　计算

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

解　由于

$$e^{-x^2} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n},$$

所以
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx.$$

取
$$u_1(x) = (1 + x^2)^{-1}, u_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-(n-1)}$$

$$(n = 2, 3, \cdots),$$

则

$$e^{-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

不难验证，交换“$\sum$”与“$\int$”的运算顺序的条件全满足，故

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

作变换$x = \sqrt{n}\,t$，有

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}dx$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{2}.$$

$\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t\right.$ 的值可由 B 函数求出，见 10.4.4 节$\left.\right)$ 根据 Wallis 公式（第 10.3.4 节）

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

这个积分在概率论中是最基本的.

与函数项级数一样，含参变量的无穷积分在一致收敛的条件下，可以保证积分关于参变量的连续性、可微性及可积性.

若函数 $f(x,u)$ **在** $a \leqslant x < \infty$，$\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ **中连续，且积分** $\varphi(u) = \int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ **在** $[\alpha,\beta]$ **上一致收敛，则** $\varphi(u)$ **在** $[\alpha,\beta]$ **上连续，有**

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} \lim_{u\to u_0} f(x,u)\mathrm{d}x,$$

即lim 与$\int$ 可交换顺序.

证明与函数项级数一样.

由于 $\int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故对任给 $\varepsilon > 0$，存在 A_0，当 $A > A_0$ 时，

$$\left|\int_A^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon/3$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上所有的 u 成立. 在 $[\alpha,\beta]$ 中任取一点 u_0，

$$\varphi(u) - \varphi(u_0) = \int_a^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\begin{aligned}|\varphi(u) - \varphi(u_0)| &\leqslant \left|\int_a^{A} f(x,u)\mathrm{d}x - \int_a^{A} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \left|\int_A^{\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_A^{\infty} f(x,u_0)\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

右端第二、三积分都小于 $\varepsilon/3$，由于 $f(x,u)$ 是 $a\leqslant x<\infty$，$\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上的连续函数，故

$$\int_a^A f(x,u)\,\mathrm{d}x$$

是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数，故对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|u-u_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\int_a^A f(x,u)\,\mathrm{d}x-\int_a^A f(x,u_0)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon/3,$$

于是只要 $|u-u_0|<\delta$，就有

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\varepsilon.$$

同样，由 $\varphi(u)=\int_a^{\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一致收敛性，可保证积分次序 $\int_\alpha^\beta\int_a^\infty$ 可交换成 $\int_a^\infty\int_\alpha^\beta$，即

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\varphi(u)\,\mathrm{d}u&=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u\\&=\int_a^\infty\left[\left|\int_\alpha^\beta f(xu)\,\mathrm{d}u\right|\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

证　将 $\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 表示成级数

$$\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u),$$

而 $a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)\,\mathrm{d}x$. 由于 $\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，故对 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 $A>A_0$，便有

$$\left|\int_A^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

取 $m>A_0-a$，即 $a+m>A_0$，于是

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}a_n(u)\right|&=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\int_{a+m}^{\infty}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，于是，由函数项级数“$\sum$”与“$\int$”可交换的定理，有

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u &= \int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^\infty a_n(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta a_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta \int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}u\\ &= \sum_{n=1}^\infty \int_{a+n-1}^{a+n}\int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}x\\ &= \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(x,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于微商也有相应的定理.

若 $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<\infty$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续,而偏导数 $\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 也在上述区域连续,且积分 $\int_a^\infty \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,则 $\varphi(u)=\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微,且

$$\varphi'(u)=\int_a^\infty \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

证 这可利用函数项级数中相应定理来证明. 因为

$$\varphi(u)=\int_a^\infty f(x,u)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty a_n(u),$$

这里

$$a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots).$$

由假设,应用微商与积分可以相互交换的定理,得

$$a_n'(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

而且 $a_n'(u)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数,于是

$$\int_a^\infty \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^\infty a_n'(u).$$

由于 $\int_a^\infty \dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n'(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 于是, $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n(u)$ 满足可逐项微分的条件,因而

$$\varphi'(u)=\sum_{n=1}^\infty a_n'(u)=\int_a^\infty \frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\mathrm{d}x.$$

例 5　计算

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx.$$

解　由于

$$\frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} = \int_2^3 e^{-xu} du,$$

所以

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left[\int_2^3 e^{-xu} du \right] dx.$$

因为 $f(x,u) = e^{-xu}$ 在 $0 \leqslant x < \infty, 2 \leqslant x \leqslant 3$ 中连续，且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xu} dx$ 在 $[2,3]$ 上一致收敛. 故可交换积分次序，即

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} dx = \int_0^{\infty} \left(\int_2^3 e^{-xu} du \right) dx$$

$$= \int_2^3 \left(\int_0^{\infty} e^{-xu} dx \right) du = \int_2^3 \frac{1}{u} du = \ln \frac{3}{2}.$$

例 6　计算

$$I(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx.$$

解　因为

$$| e^{-x^2} \cos 2\beta x | \leqslant e^{-x^2},$$

且积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ 收敛，故积分 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\beta x dx$ 收敛又

$$\frac{\partial e^{-x^2} \cos 2\beta x}{\partial \beta} = -2x e^{-x^2} \sin 2\beta x$$

在区域 $0 \leqslant x < \infty, -\infty \leqslant \beta \leqslant \infty$ 上连续，且积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} [e^{-x^2} \cos 2\beta x] dx = -\int_0^{\infty} 2x e^{-x^2} \sin 2\beta x dx$$

在 $-\infty < \beta < \infty$ 上一致收敛，故微分号与积分号可交换次序. 即

$$I'(\beta) = \frac{dI}{d\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} (e^{-x^2} \cos 2\beta x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} -2x e^{-x^2} \sin 2\beta x dx$$

$$= \sin 2\beta x e^{-x^2} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x^2} 2\beta \cos 2\beta x dx$$

$$= -2\beta I(\beta)$$

由于 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,则 $I(\beta)$ 是一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dI(\beta)}{d\beta} = -2\beta I(\beta), \\ I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{cases}$$

的解,解此初值问题得

$$I(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\beta^2}.$$

对于定义在 $a \leqslant x < \infty$, $\alpha \leqslant u < \infty$ 上的连续函数 $f(x,u)$,什么时候可以交换对 x 及对 u 的积分?

如果积分

$$\int_a^{\infty} f(x,u)dx, \quad \int_{\alpha}^{\infty} f(x,u)du$$

分别关于 u 在任何 $[\alpha,\beta]$ 上,关于 x 在任何 $[a,b]$ 上一致收敛,且积分

$$\int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} |f(x,u)|dudx, \quad \int_{\alpha}^{\infty}\int_a^{\infty} |f(x,u)|dxdu$$

中至少有一个存在,则

$$\int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,u)dudx, \quad \int_{\alpha}^{\infty}\int_a^{\infty} f(x,u)dxdu$$

都存在,且相等,即

$$\int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,u)dudx = \int_{\alpha}^{\infty}\int_a^{\infty} f(x,u)dxdu,$$

也就是积分 $\int_a^{\infty}\int_a^{\infty}$ 可交换成 $\int_{\alpha}^{\infty}\int_a^{\infty}$.

证 不妨设 $\int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} |f(x,u)|dudx$ 存在,则

$$\int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,u)dudx$$

存在,要证的是

$$\lim_{\beta\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta}\int_a^{\infty} f(x,u)dxdu = \int_a^{\infty}\int_{\alpha}^{\infty} f(x,u)dudx.$$

由于 $\int_a^{\infty} f(x,u)dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,因而

$$\int_\alpha^\beta \int_a^\infty f(x,u)\,dxdu = \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(x,u)\,dudx.$$

因此,要证的是

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\infty \int_\alpha^\beta f(x,u)\,dudx = \int_a^\infty \int_\alpha^\infty f(x,u)\,dudx.$$

也就是

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\infty \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx = 0.$$

由于积分

$$\int_a^\infty \int_a^\infty |f(x,u)|\,dudx$$

收敛,故存在 $b>a$,使得

$$\int_b^\infty \int_a^\infty |f(x,u)|\,dudx < \varepsilon/2.$$

于是

$$\left|\int_b^\infty \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx\right|$$

$$\leqslant \int_b^\infty \int_\beta^\infty |f(x,u)|\,dudx$$

$$\leqslant \int_b^\infty \int_a^\infty |f(x,u)|\,dudx < \varepsilon/2.$$

但是

$$\int_a^\infty \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx$$

$$= \int_a^b \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx + \int_b^\infty \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx.$$

右端第二个积分的绝对值小于 $\varepsilon/2$,再看第一个积分,由于 $\int_a^\infty f(x,u)\,du$ 关于 x 在 $[a,b]$ 上一致收敛,故存在 β_0,当 $\beta>\beta_0$ 时,

$$\left|\int_\beta^\infty f(x,u)\,du\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对 $[a,b]$ 中所有 x 都成立. 因此

$$\left|\int_a^b \int_\beta^\infty f(x,u)\,dudx\right| \leqslant \int_a^b \left|\int_\beta^\infty f(x,u)\,du\right| dx < \varepsilon/2.$$

于是

$$\left|\int_a^{\infty}\int_{\beta}^{\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad (\text{当}\beta > \beta_0).$$

例 7 计算

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\mathrm{d}x \quad (\alpha \text{ 为常数}).$$

解 因为

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$I = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y\right]\cos \alpha x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \cos \alpha x \mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

由于被积函数 $f(x,y) = \cos \alpha x \mathrm{e}^{-y(1+x^2)}$ 在 $0 \leqslant x < \infty, 0 \leqslant y < \infty$ 上连续，并且绝对值的积分

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty} |\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\cos \alpha x|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

故原逐次积分可交换积分次序，得

$$I = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \cdot \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\cos \alpha x\mathrm{d}x.$$

利用本节例 6 的结果，可得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-yx^2}\cos \alpha x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4y}}.$$

则
$$I = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4y}}\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(y+\frac{\alpha^2}{4y}\right)}\mathrm{d}\sqrt{y}$$

令$\sqrt{y} = t$，则

$$I = \sqrt{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{\alpha^2}{4t^2}\right)}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{|\alpha|}\sqrt{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(t+\frac{|\alpha|}{2t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

令 $t - \dfrac{|\alpha|}{2t} = u$，则 $t + \dfrac{|\alpha|}{2t} = \sqrt{u^2 + 2|\alpha|}$，当 $0 < t < \infty$ 时，$-\infty < u < \infty$，

因此

$$I = \sqrt{\pi}\ e^{|\alpha|}\int_0^{\infty} e^{-(u^2+2|\alpha|)}du = \sqrt{\pi}\ e^{-|\alpha|}\int_0^{\infty} e^{-u^2}du$$

$$= \frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}.$$

10.4.4　几个重要的无穷积分

在这一节中，我们介绍几个今后会用到的无穷积分.

1. Dirichlet 积分 $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

解　以前已经证明，这个无穷积分是收敛的，而不是绝对收敛的，引入收敛因子 $e^{-\alpha x}$，考虑含参变量的积分

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx.$$

可以证明，当 $\alpha \geqslant 0$ 时，这积分是一致收敛的，而被积函数在 $0 \leqslant \alpha < \infty$，$0 \leqslant x < \infty$ 中连续，故 $I(\alpha)$ 在 $0 \leqslant \alpha < \infty$ 中连续，特别

$$\lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

将 $I(\alpha)$ 对 α 微商，得

$$I'(\alpha) = -\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx, (\alpha > 0),$$

为了说明微商与积分交换顺序的合法性，只要注意到 $\alpha \geqslant \delta > 0$ 时，

$$|e^{-\alpha x}\sin x| \leqslant e^{-\delta x},$$

故 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx$ 当 $\alpha \geqslant \delta(>0)$ 时是一致收敛的，对 $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx$ 进行分部积分两次，就得到

$$I'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2} \quad (\alpha > 0),$$

所以

$$I(\alpha) = -\arctan\alpha + C.$$

但

$$|I(\alpha)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leqslant \int_0^{\infty} e^{-\alpha x}dx = \frac{1}{\alpha},$$

故当 $\alpha\to\infty$ 时，$I(\alpha)\to 0$，所以 $C = \frac{\pi}{2}$. 因此

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arctan \alpha \quad (\alpha > 0),$$

让 $\alpha \to 0$,从而

$$I(0) = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

由此结果,不难得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha.$$

2. 计算积分

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 这个积分,前面已经计算过,这里可应用积分号可交换顺序的定理求得其值.

作代换 $x = ut(u > 0)$,则

$$J = u \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

两边乘以 $e^{-u^2} du$ 并积分之,得

$$J \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = J^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} u du \int_0^{\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

由于

$$\int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2},$$

故

$$J^2 = \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4},$$

所以

$$J = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. Fresnel 积分

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx.$$

解 命 $x^2 = t$,则

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dx,$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-tu^2}du,$$

故

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-kt}\sin t dt\int_0^{\infty} e^{-tu^2}du.$$

由积分可交换顺序的定理得

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-kt}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}du\int_0^{\infty} e^{-(k+u^2)t}\sin t dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+(k+u^2)^2}$$

由 Abel 判别法,左边积分关于 $k\geqslant 0$ 一致收敛,故可在积分号下令 $k\to 0$;右边的积分也能在积分号下取极限,于是

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{du}{1+u^4}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

所以

$$\int_0^{\infty}\sin x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

由此结果,不难得到

$$\int_0^{\infty}\cos \alpha x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

4. Γ 函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}dt.$$

前已证明,当 $s>0$ 时,积分收敛.

先来证明 $\Gamma(s)$ 是 $(0,\infty)$ 中的连续函数.

把 $\Gamma(s)$ 分成两个部分

$$\Gamma(s) = \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt.$$

对于任意 $\beta > \alpha > 0$,若 s 在 $[\alpha,\beta]$ 中,则当 $0 < t < 1$ 时,

$$t^{s-1}e^{-t} \leqslant t^{\alpha-1}e^{-t}.$$

由于 $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ 收敛,故 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,当 $t > 1$ 时,$t^{s-1}e^{-t} \leqslant t^{\beta-1}e^{-t}$. 而 $\int_1^\infty t^{\beta-1}e^{-t}dt$ 收敛,故积分 $\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ 也在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,因而积分 $\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,因此,$\Gamma(s)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,由于 $\beta > \alpha > 0$ 是任意取的,所以 $\Gamma(s)$ 在 $(0,\infty)$ 中连续.

其次来证明以下的递推关系.

对于 $s > 0$,有

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

这只要用分部积分法就可得到

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t}dt$$

$$= -t^s e^{-t}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt = s\Gamma(s).$$

由于

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1,$$

所以,当 n 为正整数时,

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n(n-1)\cdots 2\cdot 1\Gamma(1) = n!.$$

故 Γ 函数可以看成阶乘的推广.

特别有用的是 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$,此为

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt,$$

作变换 $t = x^2$,则得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}.$$

Γ 函数也称为第二类 Euler 积分.

5. B 函数

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

前已证明,当 $p>0,q>0$ 时,积分是收敛的.

先来证明,B 函数在 $p>0,q>0$ 上是连续的.

取 $p_0>0,q_0>0$,则当 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0>0$ 时,

$$t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1} \quad (0<t<1),$$

而积分 $\int_0^1 t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}dt$ 收敛,故积分 $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ 关于 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0>0$ 一致收敛. 因而 B 函数在 $p\geqslant p_0>0,q\geqslant q_0>0$ 上连续. 由于 p_0,q_0 的任意性,所以 B 函数在 $p>0,q>0$ 上连续.

对 B 函数也有递推公式.

对任意 $p>0,q>0$ 有

$$B(p+1,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q).$$

证明也不难,还是用分部积分法,

$$\begin{aligned}
B(p+1,q+1) &= \int_0^1 t^p(1-t)^q dt \\
&= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(1-t)^q\right]\Big|_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt \\
&= \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(1-t)^{q-1}dt \\
&= \frac{q}{p+1}\int_0^1 [t^p - t^p(1-t)](1-t)^{q-1}dt \\
&= \frac{q}{p+1}[B(p+1,q) - B(p+1,q+1)],
\end{aligned}$$

由此得到

$$B(p+1,q+1) = \frac{q}{p+q+1}B(p+1,q).$$

同理可得

$$B(p+1,q+1) = \frac{p}{p+q+1}B(p,q+1).$$

将 $q+1$ 换成 q 成为

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q).$$

于是

$$B(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}B(p+1,q)=\frac{q}{p+q+1}\frac{p}{p+q}B(p,q).$$

若 $p=m-1,q=n-1$(m,n 为正整数),反复运用递推公式,得

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{m-1}{m+n-1}B(m-1,n)\\&=\frac{(m-1)(m-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}B(m-2,n)\\&=\cdots=\frac{(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(n+1)}B(1,n)\\&=\frac{(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\cdots(n+1)}\frac{n-1}{n}B(1,n-1)\\&=\cdots=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}B(1,1),\end{aligned}$$

而 $B(1,1)=1$,所以

$$B(m+n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

上述关系式不但对当 p,q 为正整数时成立,而对于一般的 $p>0,q>0$ 也是成立的,即

对任何 $p>0,q>0$ 有

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

为了证明上式,先证明

$$B(p,q)=\int_0^{\infty}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}dz,(p>0,q>0).$$

这只要在 $B(p,q)$ 的定义 $\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$ 中,令 $t=\frac{1}{1+z}$,于是 $1-t=\frac{z}{1+z}$,$dt=\frac{-dz}{(1+z)^2}$,这就得到

$$\begin{aligned}B(p,q)&=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt\\&=\int_{\infty}^0\frac{1}{(1+z)^{p-1}}\frac{z^{q-1}}{(1+z)^{q-1}}\frac{-1}{(1+z)^2}dz\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}} \mathrm{d}z.$$

利用这个等式就容易证明 $\mathrm{B}(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. 在 $\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} u^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$ 中作变换 $u = tv(t>0)$,得

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} (tv)^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-tv} t\mathrm{d}v,$$

即

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{t^{\gamma}} = \int_0^{\infty} v^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-tv}\mathrm{d}v.$$

将 γ 换成 $x+y$,t 换成 $1+t$ 得

$$\frac{\Gamma(x+y)}{(1+t)^{x+y}} = \int_0^{\infty} v^{x+y-1}\mathrm{e}^{-(1+t)v}\mathrm{d}v.$$

上式两端乘上 t^{y-1},对 t 从 0 到 ∞ 积分,得

$$\Gamma(x+y)\int_0^{\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} t^{y-1}\mathrm{d}t \int_0^{\infty} v^{x+y-1}\mathrm{e}^{-(1+t)v}\mathrm{d}v.$$

左端的积分即为 $\mathrm{B}(x,y)$,右端积分交换次序,得

$$\int_0^{\infty} v^{x+y-1}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v \int_0^{\infty} t^{y-1}\mathrm{e}^{-tv}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\infty} v^{x+y-1}\mathrm{e}^{-v}\frac{\Gamma(y)}{v^{y}}\mathrm{d}v$$

$$= \Gamma(y)\int_0^{\infty} v^{x-1}\mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}v = \Gamma(x)\Gamma(y),$$

即得

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

由上式还可得出

$$\mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x),$$

此外,利用复变函数的工具,可导出 Γ 函数的余元公式:

对任意 $0<p<1$,有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi};$$

以及加倍公式:

对于 $p>0$,有

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right).$$

B 函数也称为 Euler 第一类积分,与 Γ 函数一起合称为 Euler 积分.

例 1 计算 $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

解 因为

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{q-1}}{(1+z)^{p+q}}\mathrm{d}z.$$

令 $q=\frac{1}{2}$,得

$$\mathrm{B}\left(p,\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{(1+z)^{p+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}z.$$

再令 $t=z^{\frac{1}{2}}$,得

$$\mathrm{B}\left(p,\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{p+\frac{1}{2}}}.$$

取 $p+\frac{1}{2}=n$,$p=\frac{2n-1}{2}$,故

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{2n-1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$

例 2 计算 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x \quad (m>-1, n>-1)$.

解 命 $t=\sin^2 x$,则 $x=\arcsin\sqrt{t}$,即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\sin^n x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}.$$

命 $m=0$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数};\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

命 $m=-\alpha, n=\alpha$,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

若 $p=\dfrac{1+\alpha}{2}$,则 $1-p=\dfrac{1-\alpha}{2}$. 由余元公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

习题 10.4

1. 判断下列积分的收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{3x^2-2}{x^5-x^3+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$；　(4) $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$；

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{13}}{(x^5+x^3+1)^3}\mathrm{d}x$；　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{x\arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{+\infty}x\sin x\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；　(10) $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x\quad(n\geqslant 0)$；　(12) $\int_{e^2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln\ln x}\mathrm{d}x$；

(13) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　(14) $\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-1}\mathrm{d}x$；

(15) $\int_a^b\frac{x}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}\mathrm{d}x\quad(a<b)$；

(16) $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x(n\geqslant 0)$；

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；　(18) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}\mathrm{d}x$；

(19) $\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x}dx$; (20) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^a}dx$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}dx$; (2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos \alpha x dx$;

(3) $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{1}{1+x^2+a^2}dx$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上连续,证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x [f(t+h)-f(t)]dt = f(x)-f(a).$$

4. 证明,n 阶 Bessel 函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos n\varphi - x\sin \varphi)d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2 J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) = 0.$$

5. 判别下列积分是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+1}dx$; (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}dx$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$.

6. 设 $f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,证明

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx \neq \int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy,$$

并说明等式不成立的原因.

7. 求下列函数的导数:

(1) $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^{x\sqrt{1-t^2}}dt$; (2) $f(x) = \int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}dt$;

(3) $f(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$; (4) $\varphi(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x+\alpha, x-\alpha)dx$;

(5) $f(\alpha) = \int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$.

8. 设

$$u(x) = \int_0^1 k(x,y)v(y)dy$$

其中 $v(y)$ 是连续函数,$k(x,y)=\begin{cases}x(1-y), & \text{当 } x\leqslant y;\\ y(1-x), & \text{当 } x>y.\end{cases}$

证明

$$u''(x) = -v(x) \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

9. 设 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 是分别可微分两次和一次的函数,证明

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\mathrm{d}s$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

10. 确定下列参变量积分的收敛区域：

(1) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^u}$ $(b > a)$；　　(2) $\int_0^{\infty} x^u \mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\infty} x^u \frac{x+\sin x}{x-\sin x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^u \ln x}$；

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^u}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_2^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^u x}$.

11. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ux}{1+x^2}\mathrm{d}x$ $(-\infty < u < +\infty)$；

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2(1+x^2)}\sin x\mathrm{d}x$ $(0 < u_0 \leqslant u < +\infty)$；

(3) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin x\mathrm{d}x$ $((\mathrm{i})0 < a_0 \leqslant a < +\infty$　$(\mathrm{ii})\ 0 < a < +\infty)$；

(4) $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant a < +\infty)$；

(5) $\int_0^{+\infty} \sqrt{a}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x$ $(0 \leqslant a < +\infty)$.

12. 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}\mathrm{d}x$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$；

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{bx}}{x}\mathrm{d}x$ $(a > 0, b > 0)$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\mathrm{d}x$ $(a > 0)$；

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$；

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\text{提示：}\frac{\arctan x}{x} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+x^2u^2}\right)$.

13. 利用积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(2x^2+x+2)}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax\cos bx}{x}\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$;

(6) $\int_0^{+\infty} x^{2n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (n 为正整数).

14. 利用 Euler 积分计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{+\infty} x^{2n+1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ (n 为正整数);

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$;

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\mathrm{d}x$ $(|n|<1)$;

(9) $\int_0^1 x^{n-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ $(n,q,m>0)$;

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^n}$ (n 为正整数).

15. 证明等式

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\mathrm{d}x \text{ 成立.}$$

其中 $a>0,b>0$(假设等式左端的积分有意义).

(提示:令 $ax-\frac{b}{x}=t$,当 $0<x<\infty$ 时,$-\infty<t<+\infty$,且 $ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}$).

第十一章

Fourier 级数与 Fourier 积分

11.1 Fourier 级数

11.1.1 三角函数系的正交性

在第十章中，我们已经说过，对初等函数，经过无穷次的运算，可能产生新的函数；而反过来，把函数用初等函数展开，又便于对函数本身进行讨论与研究，初等函数中最基本的是 3 种函数，即幂函数、三角函数及指数函数，在上一章中着重讲了函数的幂级数展开，即 Taylor 级数，在这一章中，要研究函数的三角函数的级数展开，即 Fourier 级数．由于三角函数是周期函数，所以，对一些实际问题，例如，要进行频谱分析时，有它的方便之处．由于 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (i = \sqrt{-1}).$$

所以，将函数展开成指数函数情形，也可归结为对三角函数的展开（Euler 公式的证明从略）．

另一方面，在第九章中看到，如果将级数这种“离散”的和连续化，则无穷级数就变为无穷积分，且这两者之间的定理几乎是完全对应的．同样，如果将 Fourier 级数这种“离散”的和连续化，就可以得到 Fourier 积分．

我们知道 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，任一以 ω 为周期的函数 $f(x)$（即 $f(x+\omega)=f(x)$），可以改换变数成为

$$g(x) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}x\right),$$

这是一个以 2π 为周期的函数．因此，对于任何以 ω 为周期的函数，可化为以 2π 为周期的函数．所以我们就局限在以 2π 为周期的这种函数来讨论．

对任一整数 k，$\sin kx$，$\cos kx$，都是以 2π 为周期的函数，以 2π 为周期的函数的线性组合

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

仍以 2π 为周期，级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

称为**三角级数**.

首先要证明：三角函数系

$\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx, \cdots$ 中是两两正交的，即它们组成一个正交系.

证明是容易的，显然有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x = 0, \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x = 0, k = 1,2,3,\cdots.$$

而由于

$$\sin kx\cos lx = \frac{1}{2}(\sin(k+l)x + \sin(k-l)x),$$

$$\sin kx\sin lx = \frac{1}{2}(\cos(k-l)x - \cos(k+l)x),$$

$$\cos kx\cos lx = \frac{1}{2}(\cos(k+l)x + \cos(k-l)x),$$

所以

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\mathrm{d}x = 0,$$

如果 $k \neq l$，还有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x = 0, \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x = 0.$$

另一方面，

$$\cos^2 kx = \frac{1+\cos 2kx}{2}, \sin^2 kx = \frac{1-\cos 2kx}{2},$$

得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x = \pi, \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x = \pi.$$

由此还可推出，三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx, k = 1,2,\cdots$$

组成一正交系，其中任意两个之积由 0 到 2π 求积分得 0，自己平方的积分为 1，因此，也称为就范正交系.

已给在$[-\pi,\pi]$上以2π为周期的周期函数$f(x)$，若令

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \pi a_0, \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos lx\mathrm{d}x = \pi a_l,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin lx\mathrm{d}x = \pi b_l,$$

则由$f(x)$得到一个三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx),$$

这个三角级数称为函数$f(x)$的Fourier级数，而$a_0, a_l, b_l (l=1,2,\cdots)$称为$f(x)$的Fourier系数．当然，这样所得到的Fourier级数未必收敛，即使收敛，也未必收敛到$f(x)$．我们记成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

当然，积分的区间未必一定要从$-\pi$到π，换成任意一个长度为2π的区间也可以，即$(c, c+2\pi)$，特别如$(0,2\pi)$．

如果利用Euler公式

$$\cos kx = \frac{\mathrm{e}^{ikx}+\mathrm{e}^{-ikx}}{2}, \sin kx = \frac{\mathrm{e}^{ikx}-\mathrm{e}^{-ikx}}{2i},$$

则$f(x)$的Fourier级数可写成

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\frac{\mathrm{e}^{ikx}+\mathrm{e}^{-ikx}}{2} + \mathrm{i}b_k\frac{\mathrm{e}^{-ikx}-\mathrm{e}^{ikx}}{2}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2}\mathrm{e}^{ikx} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k+\mathrm{i}b_k}{2}\mathrm{e}^{-ikx}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k\mathrm{e}^{ikx}.$$

而

$$F_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$F_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp \mathrm{i}b_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx \mp \mathrm{i}\sin kx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{\mp ikx}\mathrm{d}x \quad (k=1,2,3,\cdots),$$

我们称

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ikx}$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 级数的复数形式，而 $F_0, F_{\pm k}$，为 $f(x)$ 的复 Fourier 系数，它们是互为共轭复数，即

$$F_k = \overline{F}_{-k} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

当然我们也可以用另一种方式导出复数形式的 Fourier 级数，由于

$$\cdots, e^{-ikx}, \cdots, e^{-ix}, 1, e^{ix}, \cdots, e^{ikx}, \cdots$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上正交，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } m+n \neq 0, \\ 2\pi & \text{当 } m+n = 0, \end{cases}$$

给了 $f(x)$，也可以得出 Fourier 系数

$$F_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (k = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots).$$

由 Fourier 系数，得到 $f(x)$ 的 Fourier 级数

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{ikx}.$$

这两种 Fourier 级数，本质上是完全一致的，只是在使用上，哪种方便，就用哪一种.

特别，当 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)\sin kx$ 是奇函数，于是

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0.$$

故当 $f(x)$ 为偶函数时，它的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

其中

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx \quad (k = 0,1,2,\cdots),$$

这个级数称为**余弦函数**.

同样，当 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数只有正弦项，即

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x \quad (k = 1,2,\cdots),$$

这个级数称为**正弦级数**.

例 1　将 $f(x) = x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成 Fourier 级数(图 11.1).

解　$f(x) = x$ 是一个奇函数,所以可展成正弦级数.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

所以 $f(x) = x$ 的 Fourier 级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

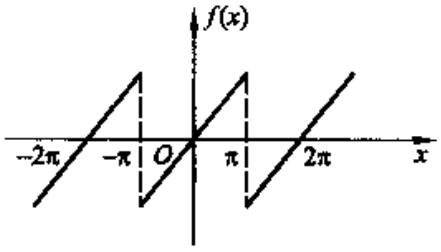

图 11.1

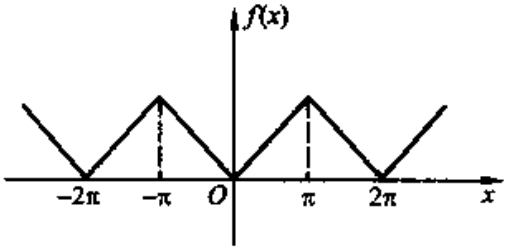

图 11.2

例 2　将 $f(x) = |x|$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成 Fourier 级数(图 11.2).

解　$f(x) = |x|$ 是一个偶函数,所以可展开成余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

而

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\sin nx = \frac{2}{n\pi}\left(x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2k; \\ \dfrac{-4}{(2k+1)^2\pi}, n = 2k+1. \end{cases}$$

于是

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

例 3 交流电压 $E(t) = E\sin t$，经半波整流后，负压被削去，求半波整流函数的 Fourier 级数(图 11.3).

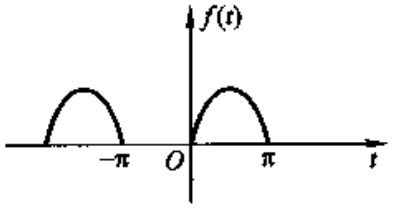

图 11.3

解 要求的函数为

$$f(t) = \begin{cases} 0, -\pi \leqslant t \leqslant 0; \\ E\sin t, 0 \leqslant t \leqslant \pi. \end{cases}$$

于是

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} E\sin t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} E\sin t\mathrm{d}t = \frac{2E}{\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} E\sin t\cos nt\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,\mathrm{d}t.$$

当 $n = 1$ 时，

$$a_1 = \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\mathrm{d}t = 0,$$

当 $n \neq 1$ 时，

$$a_n = \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1} + \frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= -\frac{E(1+(-1)^n)}{(n^2-1)\pi} \quad (n=2,3,\cdots)$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k+1; \\ \dfrac{2E}{(1-(2k)^2)\pi}, & n=2k. \end{cases}$$

而

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} E\sin t\sin nt\,dt$$

$$= \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n-1)t-\cos(n+1)t)\,dt.$$

当 $n=1$ 时，

$$b_1 = \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt = \frac{E}{2},$$

当 $n\neq 1$ 时，

$$b_n = \frac{E}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(n-1)t-\cos(n+1)t)\,dt$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)t}{n-1}-\frac{\sin(n+1)t}{n+1}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0.$$

所以，$f(t)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{E}{\pi}+\frac{1}{2}E\sin t+\frac{2E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-(2k)^2}\cos 2kt.$$

已给定义在$[0,\pi]$上的函数$f(x)$，要求展成正弦级数，我们只要先把$f(x)$奇开拓到$[-\pi,0]$上，即定义

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ -f(-x), & -\pi\leqslant x\leqslant 0. \end{cases}$$

然后再把$f_1(x)$周期开拓出去，得到一个以2π为周期的奇函数$F(x)$（如图 11.4 所示），这样就把$f(x)$在$[0,\pi]$上展成了正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

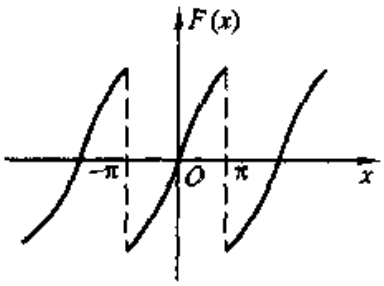

图 11.4

用同样的方法，可把 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 展成余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

对于给定在 $[-l,l]$ 上，以 $2l$ 为周期的周期函数 $f(x)$，不难作一变量代换，就得到 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

而

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

特别，当 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(-x) = f(x)$，则

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0.$$

这样就得到 $f(x)$ 的余弦级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots).$$

同样，当 $f(x)$ 为奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$，则得到 $f(x)$ 的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

用上述开拓的办法,可将定义在$[0,l]$上的函数$f(x)$展开成余弦级数或正弦级数.

例 4　将$f(x) = x$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数.

解　根据题意,只要把$f(x) = x$偶开拓到$(-\pi,0)$上去(见图 11.5),于是

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2m; \\ \dfrac{-4}{(2m+1)^2\pi}, n = 2m+1. \end{cases}$$

所以$f(x) = x$的余弦级数为

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

例 5　将

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leqslant x < \dfrac{l}{2}, \\ l - x & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

在$[0,l]$上展开成正弦级数.

解　把函数$f(x)$奇开拓到$(-l,0)$上去(见图 11.6),于是

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} x\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x + \frac{2}{l}\int_{l/2}^l (l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, n = 2m; \\ \dfrac{(-1)^m 4l}{(2m+1)^2 \pi^2}, n = 2m+1. \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的正弦级数为

$$\frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

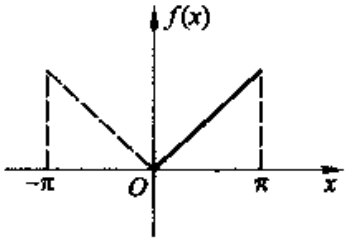

图 11.5

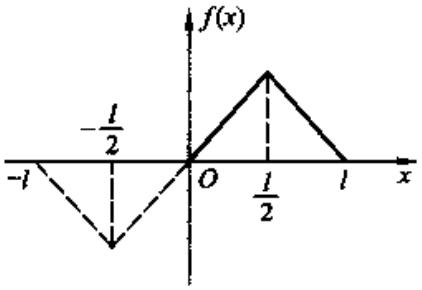

图 11.6

11.1.2 Bessel 不等式

若 $f(x)$ 是 $(-\pi,\pi)$ 上的一个函数，问题是，怎样的三角多项式

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

使平方中值误差

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx$$

最小，即定出系数 α_k, β_k 来，使 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx$ 最小.

显然

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] f(x) dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right]^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \left[\frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right]$$

$$+\pi\left[2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x+\pi\left[2\left(\frac{\alpha_0-a_0}{2}\right)^2+\sum_{k=1}^{n}((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2)\right]$$

$$-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]$$

$$\geqslant\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right],$$

所以，仅当 $\alpha_k=a_k,\beta_k=b_k$ 时取最小值，其最小值为

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

也就是，如果三角多项式的系数就是 $f(x)$ 的 Fourier 系数，则原来的函数和这三角多项式的平方中值误差最小.

但 $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\geqslant 0$，所以

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

让 $n\to\infty$，可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

右边级数的收敛性，是由单调递增有界数列必有极限得到的. 上式称为 **Bessel 不等式**，由此立即得到

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\to 0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\mathrm{d}x\to 0.$$

事实上，可以证明，如果 $f(x)$ 是可积函数，则 Bessel 不等式就成为等式，即

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

此时，称为 **Parseval 等式.**

这里就不再给出 Parseval 等式的证明了.

此外，我们还可以证明一个一般的定理，称为

Riemann - Lebesgue 定理　对任一有限区间 $[a,b]$ 及其上任一 **Riemann** 可

积函数 $f(x)$，有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

证 将 $[a,b]$ 分成 n 个部分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

以 M_i 及 m_i 表示 $f(x)$ 在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的上确界及下确界，因此，

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x) - m_i]\sin\lambda x\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} m_i\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

由于

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x) - m_i]\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}}(M_i - m_i)\mathrm{d}x = (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i),$$

和

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{\lambda},$$

故得

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

任给 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 为 Riemann 可积，故可选取 $[a,b]$ 的分法，使

$$\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon/2$$

分法确定后，则 $\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$ 为一确定的数，取 $\delta = \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$，故当 $\lambda > \delta$ 时，

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

同理，当 $\lambda>\delta$ 时

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

这就证明了 Riemann – Lebesgue 定理.

11.1.3 Fourier 级数的收敛判别法

考虑 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和

$$S_n = S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

此处

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt.$$

于是 S_n 还可写成

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\cos kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right. \\ &\quad \left. + \sin kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t) \right) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin \frac{1}{2}(x-t)} f(t) dt. \end{aligned}$$

这里用到了

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin \frac{1}{2}\theta}.$$

令 $t = x + u$，则

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} f(x+u) du,$$

由于被积函数是以 2π 为周期的，所以

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{\sin \frac{1}{2}u} f(x+u) du.$$

此称为 Dirichlet 积分. 将积分 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 分为两部分 $\int_{0}^{\pi}+\int_{-\pi}^{0}$,后者以 $-u$ 代替 u,得到

$$S_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u))\,\mathrm{d}u.$$

特别,当 $f(x)=1$ 时,$S_n=1$,故

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}2\mathrm{d}u.$$

乘以 S(S 为常数),再与上式相减,可得

$$S_n-S=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}(f(x+u)+f(x-u)-2S)\,\mathrm{d}u,$$

记
$$\Phi(u)=f(x+u)-f(x-u)-2S.$$

则收敛问题成为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\Phi(u)\,\mathrm{d}u=0.$$

是否成立的问题. 但由于 $\dfrac{\Phi(u)}{\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[\delta,\pi]$ 上 Riemann 可积,故由 Riemann-Lebesgue 定理

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,\frac{\Phi(u)}{\sin\frac{1}{2}u}\mathrm{d}u=0,$$

于是问题成为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{1}{2}u}\Phi(u)\,\mathrm{d}u=0$$

是否成立. 由于 $\left[\dfrac{1}{\sin\frac{u}{2}}-\dfrac{1}{\frac{u}{2}}\right]\Phi(u)$ 在 $[0,\delta]$ 上 Riemann 可积,再由 Riemann-

Lebesgue 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}u}-\frac{1}{\frac{u}{2}}\right)\Phi(u)\,\mathrm{d}u=0,$$

所以收敛条件变为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\Phi(u)}{u}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\mathrm{d}u=0.$$

如果

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}$$

存在，则由 Riemann - Lebesgue 定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\frac{\Phi(u)}{u}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\mathrm{d}u=0.$$

成立．即 Fourier 级数收敛于 S. 因此，得到如下的

Fourier 级数收敛判别法：如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，且在 $x=x_0$，极限

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2S}{u}$$

存在，则当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to S$. 也就是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和在 $x=x_0$ 处收敛于 S.

如果 $f(x)$ 在这点连续，S_n 就趋于 $S=f(x)$，如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 是左连续及右连续，即 $f(x_0-0)$ 及 $f(x_0+0)$ 都存在，但未必相等，则

$$S=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$$

此时

$$S_n\to\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

如果 $f(x)$ 是在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段光滑的以 2π 为周期的函数，则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上的任意点 x 收敛于

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

事实上，对逐段光滑的函数

$$\lim_{u\to 0}\frac{\Phi(x,u)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0)}{u}$$

$$= f'(x+0)+f'(x-0).$$

即 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\Phi(x,u)}{u}$存在.

由这个收敛判别法知,在 11.1.1 节中举的 5 个例子,其 Fourier 级数都是在其定义区域内收敛的,只是在间断点收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].$$

在例 1 中,取 $x=\dfrac{\pi}{2}$,即得公式

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

在例 2 中,取 $x=\pi$,即得公式

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

当然,对于收敛判别法还有种种结果,不在此介绍了.

习题 11.1

1. 证明下列函数系在$[0,\pi]$上是正交系:

(1) $1,\cos x,\cos 2x,\cdots,\cos nx,\cdots$;

(2) $\sin\pi,\sin 2x,\sin 3x,\cdots,\sin nx,\cdots$.

2. 证明:

$$\sin\frac{\pi x}{2l},\sin\frac{3\pi x}{2l},\cdots,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l},\cdots$$

是$[0,l]$上的正交系.

3. 证明三角多项式

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

4. 将下列函数展开成 Fourier 级数:

(1) $f(x)=x^2\quad(-\pi<x<\pi)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi;\end{cases}$

(4) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\quad 0<x<2\pi;$

(5) $f(x)=|\cos x|,\quad -\pi<x<\pi;$

(6) $f(x)=e^{ax},\quad -l\leqslant x\leqslant l.$

5. 将下列函数展开成正弦级数和余弦级数

(1) $f(x)=\begin{cases}A, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{h}, & 0\leqslant x\leqslant h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi.\end{cases}$

6. 将下列函数展开成 Fourier 级数，并说明收敛情况：

(1) $f(x)=|\sin x|$，　$-\pi<x<\pi$；

(2) $f(x)=\operatorname{sh} ax$，　$-\pi<x<\pi$；

(3) $f(x)=x\sin x$，　$-\pi<x<\pi$；

(4) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ -1, & 1\leqslant|x|\leqslant 2;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3;\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x\leqslant -1,\\ E, & -1<x<1,\\ 0, & 1\leqslant|x|\leqslant 2.\end{cases}$

7. 利用 Paresval 等式求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$（利用函数 $f(x)=x$　$(-\pi<x<\pi)$ 的 Fourier 展开）；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^4}$（利用函数 $f(x)=|x|$　$(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 的 Fourier 展开）.

8. 将 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<a;\\ 0, & a\leqslant|x|<\pi.\end{cases}$ 展成 Fourier 级数，并利用 Parseval 等式，求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^2}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos na}{n^2}$.

9. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi\leqslant x<0,\\ 1 & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$$

展成复数形式的 Fourier 级数.

10. 设 $|a|<1$，利用恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n e^{inx}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(a^n\cos nx+ia^n\sin nx)$$

证明：(1) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx=\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin nx=\dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}$；

(3) $1+2\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos nx=\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}$.

11.2 Fourier 积分

11.2.1 Fourier 积分

与第十章一样,可以将 Fourier 级数这个"离散"的无限次求和,化为连续的无限次求和,这就成为 Fourier 积分.

若 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上可展成 Fourier 级数

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{in\omega x},\omega=\frac{\pi}{l},$$

其中

$$F_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-in\omega\xi}d\xi.$$

将 F_n 代入级数中,并令

$$\lambda_n=n\omega=\frac{n\pi}{l}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\Delta\lambda=\omega=\frac{\pi}{l}=\lambda_n-\lambda_{n-1},$$

便得

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-in\omega(\xi-x)}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-i\lambda_n(\xi-x)}d\xi\right)\Delta\lambda.$$

当 $l\to\infty$ 时,$\Delta\lambda\to0$,因此,可以将 $\Delta\lambda$ 看作定积分的无穷小区间,λ_n 看作数轴上的分点,上式右端的和式,可看作 λ 的函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}d\xi$$

在 $(-\infty,\infty)$ 上的积分和,也就是当 $l\to\infty$ 时,上式成为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda(\xi-x)}d\xi,$$

这里对 $f(x)$ 就没有周期的限制. 上式右端称为 **Fourier 积分**,上式称为 **Fourier 积分公式**.

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi$$

是 λ 的奇函数,因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi=0,$$

而积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi$$

是 λ 的偶函数,因而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi=2\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi.$$

所以 Fourier 积分公式可写成

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi-x)\mathrm{d}\xi\\ &=\int_{0}^{\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

其中

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

$f(x)$ 在 $(-l,l)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x),\omega=\frac{\pi}{l},$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos n\omega\xi\mathrm{d}\xi,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin n\omega\xi\mathrm{d}\xi.$$

从这两者的比较中,可以清楚地看出,在 Fourier 级数中,$\cos n\omega x$,$\sin n\omega x$ 中 n 只取正整数,而在 Fourier 积分中 $\cos\lambda x$,$\sin\lambda x$ 的 λ 取 $(0,\infty)$ 上任意实数,即前者 n 取离散值,而后者 λ 取连续值,前者为离散地无限次相加,即无穷级数,而后者为连续地无限次相加,即无穷积分.

以上的推导,只是形式上的推导,要使 Fourier 积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi$$

收敛,且收敛于 $f(x)$ 是有条件的,例如 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积,且 $f(x)$ 在 x 处连续,则上述 Fourier 积分是收敛于 $f(x)$ 的,如在 x 处有广义的左、右导数,则 $f(x)$ 的 Fourier 积分收敛于 $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ 等等(证明从略).

11.2.2 Fourier 变换

Fourier 积分公式还可写成

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda(\xi-x)}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\right)e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

如命

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi,$$

则有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda = F^{-1}[F(\lambda)],$$

$F(\lambda)$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**,$f(x)$ 或 $F^{-1}[F(\lambda)]$,称为 $F(\lambda)$ 的**逆 Fourier 变换**,上面两个等式称为 **Fourier 变换公式及 Fourier 变换的反演公式**.

如果 $f(x)$ 是偶函数,则

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)(\cos\lambda\xi + i\sin\lambda\xi)d\xi$$

$$= 2\int_0^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi,$$

这称为 $f(x)$ 的 **Fourier 余弦变换**,而 $F(\lambda)$ 显然是 λ 的偶函数,因此它的逆变换是

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x)d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} F(\lambda)\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

如果$f(x)$是奇函数,则其Fourier变换为

$$F(\lambda) = 2\mathrm{i}\int_0^{\infty} f(\xi)\sin \lambda\xi \mathrm{d}\xi,$$

为避免i,定义

$$G(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(\xi)\sin \lambda\xi \mathrm{d}\xi.$$

为Fourier变换,其相应逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G(\lambda)\sin \lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

例1　求指数衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x \geqslant 0(\beta > 0), \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

的Fourier变换.

解　由定义

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda-\beta)\xi}\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\lambda-\beta)\xi}}{\lambda\mathrm{i}-\beta}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\beta-\mathrm{i}\lambda} = \frac{\beta+\mathrm{i}\lambda}{\beta^2+\lambda^2},$$

因$f(x)$在$x=0$处不连续,故由无穷积分的收敛定理,有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta+\mathrm{i}\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}\lambda = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

例2　求函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ \dfrac{1}{2}, & x = \pm a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

的Fourier变换.

解　因为$f(x)$是偶函数,故

$$F(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(\xi)\cos \lambda\xi \mathrm{d}\xi = 2\int_0^{a}\cos \lambda\xi \mathrm{d}\xi = \frac{2}{\lambda}\sin \lambda\xi \Big|_0^{a}$$

$$= \frac{2\sin \lambda a}{\lambda}.$$

在不连续点 $x = \pm a$,由于 $f(x)$ 已定义为其左右极限的平均值,故反演公式在整个数轴上成立:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda a}{\lambda}\cos \lambda x \mathrm{d}\lambda \quad (-\infty < x < \infty).$$

例 3 求函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0),$$

的 Fourier 正弦变换.

解 把 $f(x)$ 开拓到负半实轴,使 $f(x)$ 成为奇函数,即定义

$$f(x) = \frac{1}{-\sqrt{-x}} \quad (x < 0)$$

对开拓后的函数,求正弦变换

$$F(\lambda) = 2\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi}}\sin \lambda\xi \mathrm{d}\xi = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

但 $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (见 10.4.4 节的 3),所以,所求正弦变换为

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

同样,可知这个函数的余弦变换也是

$$F(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}.$$

也很容易导出 Fourier 变换的一些简单性质.

若 $F[f] = F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi$,则有

1. 线性关系 若 $f_1(x), f_2(x)$ 可进行 Fourier 变换,α, β 为任意常数,则

$$F[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha F[f_1] + \beta F[f_2].$$

2. 相似关系 若 $f(x)$ 可进行 Fourier 变换,则

$$F[f(ax)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{\lambda}{a}\right), a > 0.$$

3. 时延特性

$$F[f(x-x_0)] = e^{i\lambda x_0}F[f(x)].$$

4. 频移特性

$$F[f(x)e^{i\lambda_0 x}] = F(\lambda+\lambda_0).$$

5. 微分关系一　若$f(x)$,$f'(x)$都可以进行 Fourier 变换,且$f(\pm\infty)=0$,则

$$F[f'(x)] = -i\lambda F[f(x)].$$

一般地,如果直到$f^{(k)}(x)$都可进行 Fourier 变换,且

$$f(\pm\infty)=0, f'(\pm\infty)=0, \cdots f^{(k-1)}(\pm\infty)=0,$$

则

$$F[f^{(k)}(x)] = (-i\lambda)^k F[f(x)].$$

6. 微分关系二　若$f(x)$,$ixf(x)$都可进行 Fourier 变换,则

$$F[ixf(x)] = \frac{d}{d\lambda}F(\lambda).$$

而最重要的是关于卷积的 Fourier 变换公式.

含参变量x的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt$$

称为$f_1(x)$和$f_2(x)$的卷积,记为f_1*f_2. 显然

$$f_1*f_2 = f_2*f_1.$$

由此可得:

7. 卷积的 Fourier 变换　如$f_1(x)$,$f_2(x)$及f_1*f_2都可进行 Fourier 变换,则

$$F[f_1*f_2] = F[f_1]\cdot F[f_2]$$

证　由定义

$$F[f_1*f_2] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi-t)f_2(t)dt$$

由于$f_1(x)$和$f_2(x)$在$(-\infty,\infty)$上绝对可积,故积分次序可交换,故得

$$\begin{aligned} F[f_1*f_2] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi-t)e^{i\lambda\xi}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)e^{i\lambda(u+t)}du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{i\lambda t}dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)e^{i\lambda u}du \end{aligned}$$

$$= F[f_1] \cdot F[f_2] = F_1(\lambda) \cdot F_2(\lambda),$$

$$F^{-1}[F_1(\lambda) \cdot F_2(\lambda)] = f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t) f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

例 4 从指数衰减函数

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\beta x}, & x \geqslant 0 \quad (\beta > 0), \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

由 Fourier 变换,求正弦衰减函数

$$g(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\beta x} \sin \omega_0 x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

的 Fourier 变换.

解 由例 1,有

$$F[f(x)] = F(\lambda) = \frac{1}{\beta - \mathrm{i}\lambda},$$

而

$$g(x) = f(x) \sin \omega_0 x = -\frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 x}) f(x).$$

由线性关系及频移特性,有

$$F[g(x)] = -\frac{\mathrm{i}}{2}\{F[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} f(x)] - F[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 x} f(x)]\}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}[F(\lambda + \omega_0) - F(\lambda - \omega_0)]$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{\beta - \mathrm{i}(\lambda + \omega_0)} - \frac{1}{\beta - \mathrm{i}(\lambda - \omega_0)}\right]$$

$$= \frac{\omega_0}{(\beta - \mathrm{i}\lambda)^2 + \omega_0^2}.$$

11.2.3 Fourier 变换的应用

Fourier 变换可以用来求解常微分方程或偏微分方程的定解问题.

例 1 求微分方程 $y'' = y$ 满足 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} y'(x) = 0$ 的解.

解 设微分方程满足条件的解为 $y(x)$,并对 $y(x)$,$y''(x)$ 作 Fourier 变换

$$F[y(x)] = F(\lambda),$$

$$F[y''(x)] = -\lambda^2 F(\lambda),$$

则定解问题经 Fourier 变换后得

$$-\lambda^2 F(\lambda) = F(\lambda),$$

$$F(\lambda) = 0.$$

因此

$$y(x) = F^{-1}[F(\lambda)] = F^{-1}(0) = 0.$$

例 2　求定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, -\infty < x < \infty), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \lim\limits_{x\to\pm\infty} u(t,x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} u'(t,x) = 0 \end{cases}$$

的解.

解　设上述定解问题的解为 $u(t,x)$，并对 x 作 Fourier 变换

$$\bar{u}(t,\lambda) = F(u(t,x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t,\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\xi}\mathrm{d}\xi,$$

$$F[u''_{xx}(t,x)] = -\lambda^2 \bar{u}(t,\lambda),$$

$$F[\varphi(x)] = \bar{\varphi}(\lambda),$$

则定解问题变成

$$\begin{cases} \mathrm{d}\bar{u}\dfrac{(t,\lambda)}{\mathrm{d}t} = -a^2\lambda^2\bar{u}(t,\lambda), \\ \bar{u}(t,\lambda)_{t=0} = \bar{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

此微分方程的通解为

$$\bar{u}(t,\lambda) = C\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}$$

$$\bar{u}(t,\lambda)\Big|_{t=0} = C = \bar{\varphi}(\lambda).$$

因此

$$\bar{u}(t,\lambda) = \bar{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}$$

则原定解问题的解为

$$u(t,x) = F^{-1}[\bar{u}(t,\lambda)] = F^{-1}[\bar{\varphi}(\lambda)\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}]$$

$$= F^{-1}[\bar{\varphi}(\lambda)] * F^{-1}[\mathrm{e}^{-a^2\lambda^2 t}]$$

$$= \varphi(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

11.2.4 高维 Fourier 变换

上面讨论了单变量函数的 Fourier 变换. 但是,那里所得到的一切结论都不难推广到多变量函数的情形.

以三元函数为例. 参变量积分

$$F(\lambda,\mu,\nu) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z) e^{i(\lambda x+\mu y+\nu z)} dxdydz.$$

所确定的函数 $F(\lambda,\mu,\nu)$ 称为 $f(x,y,z)$ 的 Fourier 变换. 它的反变换公式为

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\lambda,\mu,\nu) e^{-i(\lambda x+\mu y+\nu z)} d\lambda d\mu d\nu.$$

对于多变量函数的 Fourier 变换也具有与单变量函数完全类似的那些性质,特别性质 3°成立,即

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = -i\lambda F[f(x,y,z)];$$

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = -i\mu F[f(x,y,z)];$$

$$F\left[\frac{\partial f}{\partial z}\right] = -i\gamma F[f(x,y,z)].$$

这里除要求每个等式中出现的偏微商的 Fourier 变换有意义外,还须假定 $f(x,y,z)$ 当 x,y,z 趋于正负无穷时的极限为零. 由此可得当函数 $f(x,y,z)$ 满足某些条件时,$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ 的 Fourier 变换为

$$F[\Delta f] = -(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) F[f].$$

后面这个公式在数学物理方程中十分有用,特请读者加以注意.

习题 11.2

1. 用 Fourier 积分表示下列函数:

(1) $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ $(a>0)$; (2) $f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}$ $(a>0)$;

(3) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \pi,\\ 0, & |x|>\pi;\end{cases}$

(5) $f(x)=e^{-a|x|}$　$(a>0)$.

2. 求下列函数的 Fourier 变换：

(1) $f(x)=xe^{-a|x|}$　$(a>0)$；　　(2) $f(x)=e^{-a|x|}\cos bx(a>0)$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

3. 按下列指定的要求，把函数 $f(x)=e^{-x}(0\leqslant x<\infty)$ 表示成 Fourier 积分：

(1) 用偶开拓；　　(2) 用奇开拓.

4. 利用 Fourier 变换证明：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin a\cos ax}{a}\mathrm{d}a=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & |x|>1,\\ \dfrac{\pi}{4}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

(提示：对 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 作 Fourier 变换).

习题答案

第一章　微积分的概念

习题 1.1

4. $V=\frac{1}{3}\pi R^3\left(1-\frac{\theta}{2\pi}\right)^2\sqrt{\frac{\theta}{2\pi}\left(2-\frac{\theta}{2\pi}\right)}$.

5. $W=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<2,\\ 15(x-2), & 2\leqslant x<4,\\ 30, & 4\leqslant x<5,\\ 40, & 5\leqslant x\leqslant 8.\end{cases}$

6. (1) a.　　(2) $2x+h$.

   (3) $a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}$.

7. (4) $x\neq -2$.　　(5) $x\neq 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

   (7) $x=1$ 为不连续点.

习题 1.2

1. 90 m.

2. (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\mathrm{d}x$.　　(2) $\int_{11}^{15}\lg x\mathrm{d}x<\int_{11}^{15}(\lg x)^2\mathrm{d}x$.

   (3) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ln x\mathrm{d}x<\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

6. (1) $m\approx\frac{T_1-T}{n}\sum_{i=1}^{n}v\left(T+i\frac{T_1-T}{n}\right)$;　　(2) $m=\int_T^{T_1}v(t)\mathrm{d}t$.

8. 342.

习题 1.3

1. $y=3x-2$.

2. (1) 25;20.5;20.05;20.005.

   (2) 20.　　(3) 20.

3. (1) 4.　　(2) 40.

   (3) 0.　　(4) $4x$(单位都是 g/cm).

4. (1) 95 g/cm.　　(2) 35 g/cm.

(3) 185 g/cm.

5. 交点(1,0)及(-1,0)的切线方程分别为

$2x-y-2=0$ 及 $2x-y+2=0$.

6. 点(2,4).

7. 点$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$及(-1,1).

9. $\arctan 2\sqrt{2}\approx 70°30'$.

10. $\Delta y=0.040\ 4$, $dy=0.04$.

11. $\Delta y=130;4;0.31;0.030\ 1$. $dy=30;3;0.3;0.03$.

$\Delta y-dy\to 0(\Delta x\to 0)$.

12. (1) $\Delta y=17\ cm^2$, $dy=16\ cm^2$. (2) $\Delta y=8.25\ cm^2$, $dy=8\ cm^2$.

(3) $\Delta y=1.61\ cm^2$, $dy=1.6\ cm^2$.

13. $dy=\frac{1}{360}\pi$.

第二章 微积分的运算

习题 2.1

1. (1) $3ax^2+2bx+c$. (2) $\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}-\frac{a}{3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{6}{5}x^{-\frac{6}{5}}$.

(3) $\frac{16}{5}x^2\cdot\sqrt[5]{x}$. (4) $\frac{1}{(x+2)^2}$.

(5) $\frac{15x^2+48x+82}{(5x+8)^2}$. (6) $\cos^3 x-\sin x\cdot\sin 2x$.

(7) $\sin x+\sin x\sec^2 x-\csc^2 x$. (8) $\frac{-2}{3\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)^4}}$.

(9) $\frac{x^4(1.5\cos x+0.3x\sin x)+a}{(a+b)\cos^2 x}$. (10) $\frac{1-\ln x^a}{x^{a+1}}$.

(11) $a^x\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$. (12) $-\frac{10^x\ln 100}{(1+10^x)^2}$.

(13) $t^2e^{-t}\left[(3-t)\arctan t+\frac{t}{1+t}\right]$.

(14) $(a^2+b^2)x^{\alpha-1}e^x\left[(x+\alpha)\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right]$.

(15) $\frac{-2}{x(1+\ln x)^2}$. (16) $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$.

(17) $\sin^{\alpha-1}x\cdot\ln^{\beta-1}x\left(\alpha\cos x\ln x+\frac{\beta}{x}\sin x\right)$.

(18) $\frac{2\ln x}{3x\cdot\sqrt[3]{(1+\ln^2 x)^2}}$.

(19) $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x-x^2}}-\frac{(1+2x)\arcsin x}{2(x+x^2)^{3/2}}-\frac{1}{1-x^2}$.

(20) $\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

(21) $[27\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}\cdot\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}})^2}]^{-1}$.

(22) $-\sin 2x\cos(\cos 2x)$.

(23) $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$.

(24) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}$.

(25) $-\frac{15x^2}{1+x^6}\sin(\arctan x^3)\cdot\cos^4(\arctan x^3)\cdot\cos[\cos^5(\arctan x^3)]$.

(26) $2\left[\frac{1}{a^2}\sec^2\frac{x}{a^2}\cdot\tan\frac{x}{a^2}+\frac{1}{b^2}\sec^2\frac{x}{b^2}\cdot\tan\frac{x}{b^2}\right]$.

(27) $a^x e^{\arctan x}\left(\ln a+\frac{1}{1+x^2}\right)$.

(28) $\frac{2}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}e^{\cos\frac{1}{x^2}}\left(1+\cos\frac{1}{x^2}\right)$.

(29) $-\frac{2}{1+x^2}\frac{x}{|x|}(x\neq 0)$.

(30) $\frac{6}{x\ln x\cdot\ln(\ln^3 x)}$.

(31) $\frac{1}{\cos x}$.

(32) $\frac{1}{1+x^2}$.

(33) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.

(34) $x^x(\ln x+1)$.

(35) $e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

(36) $x^{x^x}\cdot x^{x-1}[x\ln x(\ln x+1)+1]$.

(37) $\sin x^{\cos x}[\cot x\cos x-\sin x\ln(\sin x)]$.

(38) $x^{a^x}\left[a^x\ln a\cdot\ln x+\frac{a^x}{x}\right]$.

(39) $(\ln x)^{x-1}x^{\ln x-1}(x+2\ln^2 x+x\ln x\ln\ln x)$.

(40) $-\frac{2x(\sin x^2+\cos x^2)}{\sqrt{\sin(2x^2)}}$.

(41) $\frac{4x}{\arccos^3(x^2)\cdot\sqrt{1-x^4}}$.

(42) -1.

(43) $\frac{1}{a+b\cos\varphi}$.

(44) $\sqrt{a^2-x^2}$.

(45) $\frac{1}{2(1+x^2)}$.

(46) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

(47) $\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

(48) $\frac{12t^5}{(1+t^{12})^2}$.

(49) $\frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$.

(50) $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$.

2. (1) $-2,1$. (2) $-1,0$.

(3) $-4,3$.

3. (1) 13.5. (2) pe.

7. (1) $\dfrac{\varphi(x)\varphi'(x)+\psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$.

(2) $\dfrac{\varphi(x)\sqrt{\psi(x)}}{\varphi^2(x)\psi(x)}[\varphi(x)\psi'(x)-\varphi'(x)\psi(x)\ln\psi(x)]$.

(3) $2\left[\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right]^{\ln\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}}\cdot\ln\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\dfrac{\varphi'(x)\psi(x)-\varphi(x)\psi'(x)}{\varphi(x)\psi(x)}$.

(4) $\dfrac{\varphi'(x)+\varphi(x)^{\psi(x)-1}[\varphi(x)\psi'(x)\ln\varphi(x)+\varphi'(x)\psi(x)]}{1+[1+\varphi(x)+\varphi(x)^{\psi(x)}]^2}$.

8. (1) $x'(y)=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$. (2) $x'(y)=-(1+x^2)$.

(3) $x'(y)=\dfrac{-1}{2(e^{-x}-e^{-2x})}$.

9. (1) $2(2x^2-1)e^{-x^2}$.

(2) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2}\left[3x+\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right]$.

(3) $a^x(2+4x\ln a+x^2\ln^2 a)$. (4) $\dfrac{2a\cos x}{a^2+x^2}-\dfrac{2ax\sin x}{(a^2+x^2)^2}-\sin x\arctan\dfrac{x}{a}$.

(5) $2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$. (6) $-\dfrac{2}{x}\sin(\ln x)$.

10. (1) $\dfrac{uu''-u'^2}{u^2}-\dfrac{vv''-v'^2}{v^2}$. (2) $\dfrac{(u^2+v^2)(uu''+vv'')+(u'v-uv')^2}{(u^2+v^2)^{3/2}}$.

11. (1) $y''=2[f'(x^2)+2x^2f''(x^2)]$,

$y^{(3)}=4x[3f''(x^2)+2x^2f^{(3)}(x^2)]$.

(2) $y''=(e^x+1)^2f''(e^x+x)+e^xf'(e^x+x)$,

$y^{(3)}=(e^x+1)^3f^{(3)}(e^x+x)3e^x(e^x+1)f''(e^x+x)$

$+e^xf'(e^x+x)$.

12. (1) $e^x(x^2+100x+2\,450)$. (2) $\dfrac{28!(x+30)}{(1+x)^{30}}$.

(3) $(x^2-379)\sin x-40x\cos x$. (4) $\dfrac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$.

(5) $(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]$.

(6) $e^x\left[\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\dfrac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{x^{i+1}}\right]$.

(7) $\dfrac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

16. (1) $\dfrac{dx}{x-2\pi}$. (2) $\dfrac{a^{\ln\tan x}\cdot\ln a}{\sin x\cos x}dx$.

(3) $x\sin x\mathrm{d}x$.

(4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$.

18. (1) 1.002.

(2) 2.745 5.

(3) 1.995 3.

(4) 0.484 9.

(5) 0.03.

(6) 1.002 3.

21. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

22. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cot\dfrac{t}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{a(1-\cos t)^2}$.

23. (1) 切线：$y=2a$，法线：$x=a\pi$.

(2) 切线：$4x+2y-3=0$，法线：$2x-4y+1=0$.

(3) 切线：$4x+3y-12a=0$，法线：$3x-4y+6a=0$.

24. 0，4，8 秒.

25. $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=3\,141.6\ \mathrm{cm}^3/\text{秒}$，$\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\,513.3\ \mathrm{cm}^2/\text{秒}$.

26. $v(t)=3aRt^2$.

27. 8 度/分.

28. 0.64 cm/分.

29. -0.875 m/秒.

习题 2.2.1

1. (1) $2x\mathrm{d}x$.

(2) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

(3) $-x^{-2}\mathrm{d}x$.

(4) $\dfrac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

(6) $-\sin x\mathrm{d}x$.

(7) $2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$.

(8) $\dfrac{a}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$.

2. (1) $\dfrac{1}{2}x^2$.

(2) $\ln|x|$.

(3) $-\dfrac{1}{x}$.

(4) $2\sqrt{x}$.

(5) $-\cos x$.

(6) $\tan x$.

(7) $-\mathrm{e}^{-x}$.

(8) $2\sqrt{x+2}$.

(9) $\sqrt{x^2+a^2}$.

(10) $\arcsin x$.

(11) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(12) $\arctan x$.

3. (1) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$.

(2) $\dfrac{m}{n+m}x^{\frac{n}{m}+1}+C$.

(3) $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$.

(4) $-\dfrac{2}{3}x^{\frac{-3}{2}}-\mathrm{e}^x+\ln|x|+C$.

(5) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$.

(6) $x-\frac{1}{x}-2\ln|x|+C$.

(7) $\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x+C$.

(8) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

(9) $\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

(10) $\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$.

4. (1) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

(2) $\ln|x^2-3x+8|+C$.

(3) $-\ln|\cos x|+C$.

(4) $-\ln(1+\cos x)+C$.

(5) $\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$.

5. (1) $\frac{1}{202}(2x-3)^{101}+C$.

(2) $\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

(3) $-\frac{1}{2}\cot\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$.

(4) $e^{\sin x}+C$.

(5) $-\sqrt{1-x^2}+C$.

(6) $\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$.

(7) $2\sqrt{3x^2-5x+6}+C$.

(8) $\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

(9) $\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x}+C$.

(10) $\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2+C$.

(11) $(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

(12) $(b-a)\ln\left|\sin\frac{x}{b-a}\right|+C$.

(13) $\ln|\ln(\ln x)|+C$.

(14) $\frac{1}{4}(e^x+1)^4+C$.

(15) $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}+C$.

6. (1) $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

(2) $-e^{-x}(x+1)+C$.

(3) $\frac{a^x}{\ln a}\left(x^2-\frac{2x}{\ln a}+\frac{2}{\ln^2 a}\right)+C$.

(4) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

(5) $\frac{1}{2}(x^2\arctan x+\arctan x-x)+C$.

(6) $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+C$.

(7) $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$, $(n\neq -1)$.

(8) $x\tan x+\ln|\cos x|+C$.

(9) $\frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}}+C$.

(10) $-\frac{x^2}{4}\cos 2x+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

(11) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$.

(12) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

(13) $\frac{1}{2}\left(\arctan x-\frac{x}{1+x^2}\right)+C$.

(14) $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$.

(15) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot x\right)+C$.

7. (1) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$.

(2) $\arctan x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

(3) $\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C$.

(4) $\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}-\arctan x+C$.

(5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

(6) $4\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$.

(7) $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C$.

(8) $\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2(x+1)}+C$.

(9) $\frac{1}{2}\ln|(x+1)(x+3)|-\ln|x+2|+C$.

(10) $\frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+4x+6}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{2}}+C$.

8. (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|+C$ 或 $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$.

(2) $\tan x-\sec x+C$ 或 $\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+C$.

(3) $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\varphi}{2}\right|+C$，其中 $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

(5) $\frac{1}{2}\arctan\sin^2 x+C$.

(6) $\frac{1}{6}\ln\frac{(2+\cos x)^2(1-\cos x)}{(1+\cos x)^3}+C$.

(7) $2[\sqrt{1+x}-\ln(1+\sqrt{1+x})]+C$.

(8) $\frac{\sqrt{2+4x}}{6}(x-1)+C$.

(9) $x+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{1}{6}}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C.$

(10) $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

(11) $\arccos\frac{1}{x}+C.$

(12) $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

(13) $\arcsin\frac{2x-1}{2}+\frac{2x-1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+C.$

(14) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$

(15) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$

(16) $\ln\left|\cos x+\sin x\right|+C.$

(17) $\ln(e^x+e^{-x})+C.$

(18) $2\mathrm{Sgn}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)+C.$

$$\left(\text{注：}\operatorname{Sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}\quad |x|=x\operatorname{Sgn}x\right)$$

(19) $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

(20) $$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}(x+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}\\ +\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C. & x\geqslant 0\\ -\frac{1}{3}(x+x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}\\ -\frac{1}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C. & x\leqslant -1\end{cases}$$

(21) $\frac{2}{3}[(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.$

(22) $\frac{1}{3}[x^3+(x^2-1)^{\frac{3}{2}}]+C.$

(23) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$

(24) $\arctan(\ln x)+C.$

(25) $\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{1}{24}\sin 6x+C.$

(26) $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C.$

(27) $\frac{1}{3}\tan^3 x+C.$

(28) $\ln\left|1+\cot x\right|-\cot x+C.$

(29) $\tan x-\cot x+C.$

(30) $\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

(31) $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|+C.$

(32) $2\sqrt{x+1}[\ln(x+1)-2]+C$.

(33) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$.

(34) $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C$.

(35) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$.

(36) $-\frac{1}{1+\tan x}+C$.

(37) $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+C$.

(38) $-\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})+C$.

(39) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C$.

(40) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+C$.

习题 2.2.2

定积分的计算

1. (1) $\frac{1}{2}$.

(2) 1.

(3) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

(4) $\frac{\pi}{12}[2\pi^2-3]$.

(5) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$.

(6) 1.

(7) $2(2-\ln 3)$.

(8) $2-\frac{\pi}{2}$.

(9) $\frac{1}{12}$.

(10) $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

(11) $\frac{1}{5}(2e^x+1)$.

(12) $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$.

(13) $a\ln(a+\sqrt{2}a)-\sqrt{2}a+a$.

(14) $\frac{1}{2}a^2[\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)]$.

(15) $6-2e$.

(16) $\frac{\pi}{9}$.

(17) $\frac{1}{6}$.

(18) $4(\sqrt{2}-1)$.

(19) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

(20) 0.

4. (1) $\frac{8}{15}$.

(2) $\frac{35}{128}\pi$.

(3) $\frac{512}{693}$.

(4) $\frac{8}{35}$.

(5) $\frac{5}{16}\pi$.

(6) $\frac{3}{16}\pi$.

(7) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(8) $\frac{1}{16}\pi a^4$.

习题 2.2.3

1. 3.244,3.144.
2. 1.370 39.

第三章 微积分的一些应用

习题 3.1

1. (1) 4.5

(2) $\frac{32}{3}\sqrt{6}$.

(3) $\frac{4}{3}a^3$.

(4) πa^2.

(5) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

(6) $\frac{5}{8}\pi a^2$.

2. (1) $\frac{\pi^2}{2}, 2\pi^2$.

(2) $2\pi^2 a^2 b$.

(3) 2π.

(4) $\frac{32}{105}\pi a^3, \frac{32}{105}\pi a^3$.

3. π.

6. (1) 2π.

(2) $a\mathrm{sh}\frac{b}{a}$.

(3) $6a$.

8. (1) $8a$.

(2) $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$.

习题 3.2

4. (1) 在$(-\infty,1)$凸,在$(1,+\infty)$凹,$x=1$(所对应的曲线上的点)是拐点.
(2) $(-\infty,-3)$和$(-1,+\infty)$凹,在$(-3,-1)$凸;$x=-3$和$x=-1$均为拐点.
(3) 在$(2k\pi,(2k+1)\pi)$凸,在$((2k+1)\pi,(2k+2)\pi)$凹;$x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是拐点.
(4) 在$(-1,1)$凹;在$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$凸;$x=-1$和$x=1$是拐点.

5. $a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}$.

6. (1) $y=0, x=1, x=2$.

(2) $y=c, x=b$.

(3) $y=\pm\frac{b}{a}x$.

(4) $x=0, y=x+3$.

8. (1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(3) $\frac{6|x|}{(1+9x^4)^{3/2}}$.

(4) $\frac{1}{6}$.

(5) $\dfrac{ab}{\left[\dfrac{a^2+b^2}{2}\right]^{3/2}}$.

习题 3.3

3. (1) 2.
(2) 2.
(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$.
(4) $-\dfrac{1}{2}$.
(5) 2.
(6) $-\dfrac{1}{3}$.
(7) $\dfrac{1}{6}$.
(8) $\dfrac{1}{2}$.
(9) 1.
(10) 3.
(11) 2.
(12) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$.
(13) 1.
(14) $\dfrac{1}{a}$.
(15) $\dfrac{1}{3}$.
(16) $-\dfrac{e}{2}$.
(17) -1.
(18) $\dfrac{1}{2}$.
(19) 1.
(20) e^{-1}
(21) 1.
(22) 1.
(23) $e^{-\frac{1}{6}}$.
(24) k.
(25) 1.
(26) $-\dfrac{1}{3}$.
(27) $e^{-\frac{2}{\pi}}$.
(28) 0.
(29) 0.
(30) $e^{-\frac{1}{2}}$.

4. (1) 极大 $y(0)=0$,极小 $y(1)=-1$.
(2) 极大 $y(0)=4$,极小 $y(-2)=\dfrac{8}{3}$.
(3) 极大 $y(0)=\sqrt[3]{a^4}$,极小 $y=(\pm a)=0$.
(4) 极小 $y(0)=0$.
(5) 极大 $y(\pm 1)=e^{-1}$,极小 $y(0)=0$.
(6) 极大 $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.
(7) 无极值.
(8) 极大 $y(0)=0$,极小 $y\left(\dfrac{2}{5}\right)=-\dfrac{108}{3\ 125}$.

5. (1) 最大值 $y=13$,最小值 $y=4$.
(2) 最大值 $y=10$,最小值 $y=6$.

(3) 最大值 $y=\frac{3}{5}$,最小值 $y=-1$.

(4) 最大值 $y=\frac{\pi}{2}$,最小值 $y=-\frac{\pi}{2}$.

7. 边长为 1 cm.

8. 高为 $\frac{20}{\sqrt{3}}$ cm.

10. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

11. $1\frac{27}{43}$小时.

12. $x=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

13. 桶底半径为 1 m,高为 1.5 m.

14. 离甲城 $50-\frac{100}{\sqrt{6}}$ km 处.

15. 离乙城 1.5 km 处.

16. 2.4 m.

17. $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{3/2}$

习题 3.4

1. 位移 $S(t)=\frac{t^4}{12}-\frac{t^2}{2}+t$.

2. 156.25 m.

3. $v(t_1)=\frac{A}{b}[\ln a-\ln(a-bt_1)]$,

$$h(t_1)=\int_0^{t_1}v(t)\,dt$$

$$=\frac{A}{b}\left[(\ln a+1)t_1+\frac{a-bt_1}{b}\ln(a-bt_1)-\frac{a}{b}\ln a\right].$$

4. 3 秒.

5. $mg\frac{Rh}{R+h}$,其中 R 为地球半径.

6. $6\times10^4\pi$ 吨·米.

7. 112.7 焦耳.

8. $135\pi^2\cdot10^5$ 尔格.

9. $708\frac{1}{3}$吨.

10. (m_0-9)克.

11. 大约 3 小时.

12. $\frac{2Glp}{a(a+2l)}$(G 为万有引力常数).

第四章 常微分方程

习题 4.1

1. (1) $y=\tan\ln|x|+C$,及 $x=0$,其中 C 为任意常数(下同).

(2) $y=\ln\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right)$.

(3) $y = C|x|^{1-a}e^{-\frac{a}{2}x^2}$，及 $y = 0$.

(4) $y^2 = \ln x^2 - x^2 + C$.

(5) $\frac{1}{\sin^2 y} = \frac{1}{\cos^2 x} + C$.

(6) $1 + y^2 = C(x^2 - 1)$，及 $x = \pm 1$.

(7) $y^2 = 3x - 3x^2 + C$.

(8) $y = \frac{1}{1 - Cx}$.

2. (1) $y = 1$.

(2) $y = \frac{1+x}{1-x}$.

(3) $y = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$.

(4) $y = 6 - \frac{35x}{1+6x}$.

3. $xy = 6$.

4. $y^2 = Cx$.

5. $\theta = \theta_1 + (\theta_0 - \theta_1)e^{-k_0\left(t + \frac{a}{2}t^2\right)}$.

6. $x = a(1 - e^{-kt})$

7. $50\sqrt{29}$ cm/s.

8. (1) ≈ 0.467 km/小时.

(2) 85.2 m.

9. (1) $y = \frac{x(2 + Cx^3)}{1 - Cx^3}$.

(2) $y^2 - x^2 = Cy^2$.

(3) $y^2 = x^2 \ln x^2 + Cx^2$.

(4) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$.

(5) $y = xe^{Cx+1}$.

(6) $e^{-\frac{y}{x}} = -\ln|x| + C$.

(7) $y = xe^{Cx}$.

11. $(y + x - 1)^5(y - x + 1)^2 = C$.

12. $y - 2x - \frac{1}{5}\ln\left|x + 2y + \frac{7}{5}\right| = C$.

13. $x^2 = 2Cy + C^2$.

14. $y^2 = 4C(x + C)$.

15. (1) $y = (1 + x^2)(x + C)$.

(2) $y = \begin{cases} \frac{1}{m+a}e^{mx} + Ce^{-ax}, & \text{当 } m + a \neq 0. \\ e^{-ax}(x + C), & \text{当 } m + a = 0. \end{cases}$

(3) $y = x^2(Ce^{\frac{1}{x}} + 1)$.

(4) $x = Cy^3 + \frac{1}{2}y^2$.

(5) $x = Ce^{2y} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$.

(6) $x = y\ln y + \frac{C}{y}$.

(7) $y = \frac{1}{\pm\sqrt{Ce^{x^2} + 1}}$.

(8) $y = \frac{1}{\pm\sqrt{Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}}}$.

(9) $y=\dfrac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}y^2}-y^2+2}$.

(10) $y^3=Ce^{ax}-\dfrac{1}{a}(x+1)-\dfrac{1}{a^2}$.

16. $y=Cx\pm\dfrac{a^2}{2x}$.

17. $v=\dfrac{k_1}{k_2}t^2-\dfrac{2mk_1}{k_2^2}+\left(V_0+\dfrac{2mk_1}{k_2^2}\right)e^{-\frac{k_2}{2m}t^2}$.

习题 4.2

1. (1) $y=\dfrac{1}{6}x^3-\sin x+C_1x+C_2$.

(2) $y=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2$.

(3) $y=C_1e^x-\dfrac{1}{2}x^2-x+C_2$.

(4) $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}C_1x^3+C_2$.

(5) $y=(1+C_1^2)\ln|x+C_1|-C_1x+C_2$.

(6) $y=(C_1x-C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1}+C_2$.

(7) $y=\pm\dfrac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3}+C_2$.

(8) $y=\dfrac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\dfrac{1}{C_1}$.

(9) $y=C_1(x+C_2)^{\frac{2}{3}}$.

(10) $y=C_1e^{\frac{x}{a}}+C_2e^{-\frac{x}{a}}$.

(11) $y=\dfrac{x+C_1}{x+C_2}$.

(12) $y^2=x^2+C_1x+C_2$.

(13) $y=C_2e^{C_1x}$.

2. (1) 若取向上的方向为 y 轴的正向,则上抛和下落运动方程分别为

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg-kv^2,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg+kv^2.$$

(2) $V=\sqrt{\dfrac{mgv_0^2}{mg+kv_0^2}}$.

3. 0.000 82 秒.

4. (1) $y=C_1e^{(1+\sqrt{2})x}+C_2e^{(1-\sqrt{2})x}$.

(2) $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{5}{2}x}$.

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

(4) $=e^x(C_1+C_2x)$.

(5) $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

5. (1) $S=e^{-t}(\cos 2t+\sin 2t)$.

(2) $S=4e^t+2e^{3t}$.

(3) $y=3e^{-2x}\sin 5x$.

(4) $y=(x+2)e^{-\frac{x}{2}}$.

6. (1) $y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\dfrac{x}{10}+\dfrac{5}{164}\sin 2x-\dfrac{1}{41}\cos 2x$.

(2) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} - \left(\frac{26}{29} + 5x\right)\cos x + \left(\frac{185}{29} - 2x\right)\sin x.$

(3) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + (2x^2 + x)e^{x}.$

(4) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} - \frac{8}{5}\left(\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\right)e^{x}.$

(5) $y = (C_1 + C_2 x)e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 e^{x}.$

(6) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}xe^{-x}.$

(7) $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x.$

(8) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}e^{-x}.$

(9) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{28}x - \frac{67}{784}\right)e^{3x}$

$$+ \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{8}\right)e^{-x}.$$

(10) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 2\cos x - 2x\sin x.$

(11) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{4}{3}x} - \frac{11}{25}\cos x + \frac{2}{25}\sin x.$

(12) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{5}e^{x}.$

(13) $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{x} + \frac{1}{6}x^2 e^{x}.$

(14) $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - x.$

(15) $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x} - \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{50}x + \frac{19}{500}\right)e^{x}.$

7. (1) $y = -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{96}e^{5x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{21}{32}\right)e^{x}.$

(2) $y = -\frac{4}{25}e^{3x} + \frac{34}{25}xe^{3x} + \frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x.$

(3) $y = \frac{4\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x + (x-2)\sin x.$

(4) $y = \frac{1}{6}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$

$$- \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

(5) $y = \cos 3x + \frac{1}{8}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x.$

9. (1) $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x}\ln x.$

(2) $y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2}x.$

(3) $y = x(C_1 + C_2\ln x).$

(4) $R = C_1 r^{-(n+1)} + C_2 r^2.$

(5) $y = C_1 x\cos \ln x + C_2 x\sin \ln x + x\ln x$.

(6) $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 x\ln x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x(\ln x)^2$.

10. (1) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(-\cos t + 2\sin t + 1), \\ y = \frac{1}{3}(\cos t + \sin t + 2). \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = 2e^t. \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

11. (1) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \sin t, \\ y = C_2 e^{-t} - C_1 e^t. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 3, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t, \\ y = C_3 e^{-2t} + C_2 e^t, \\ z = -(C_1 + C_2)e^{-2t} + C_2 e^t. \end{cases}$

12. 炮弹运动的微分方程组为

$$\begin{cases} \frac{W}{g}\ddot{x} = -k\dot{x}, \\ \frac{W}{g}\ddot{y} = -k\dot{y} - W. \end{cases}$$

$$x = -\frac{Wv_0\cos a}{kg}e^{-\frac{kg}{W}t} + \frac{Wv_0\cos a}{kg},$$

$$y = \left(\frac{W^2}{k^2 g} + \frac{Wv_0\sin a}{kg}\right) - \left(\frac{W^2}{k^2 g} + \frac{Wv_0\sin a}{kg}\right)e^{-\frac{kg}{W}t} - \frac{W}{k}t.$$

13. 取坐标轴为飞机刚抛出物体时的地方为坐标原点，水平方向为 x 轴，垂直向上为 y 轴，则物体运动方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k\dot{x}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \\ m\ddot{y} = -k\dot{y} - mg, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{m}{k}v_0 - \frac{m}{k}v_0 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y = \frac{m^2 g}{k^2} - \frac{m^2 g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t. \end{cases}$$

14. (1) $\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = A_0\sin 3t$.

(2) $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t} - \frac{30}{949}A_0\cos 3t + \frac{7}{949}A_0\sin 3t$.

(3) $x = (C_1 + C_2 t)e^{-5t} - \frac{30A_0}{1\,156}\cos 3t + \frac{16A_0}{1\,156}\sin 3t$.

(4) $x = C_1 e^{-4t}\cos 3t + C_2 e^{-4t}\sin 3t - \frac{24A_0}{1\,132}\cos 3t + \frac{16A_0}{1\,132}\sin 3t$.

(5) $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t - \frac{A_0}{6}t\cos 3t$.

15. (1) 线性无关. (2) 线性无关.

(3) 线性相关. (4) 线性无关.

16. $y = C_2 + (C_1 - C_2 x)\cot x$.

17. (1) $y = C_1 x + C_2 x^2$. (2) $y = C_1 e^x + C_2(x+1)$.

(3) $y = C_1 e^x + C_2(x^2 - 1)$. (4) $y = C_1 + C_2 x^2 + x^3$.

18. $y = \pi - 1 + 4\arctan x + x^2$.

19. $y = x^2 - e^{x-1}$.

第五章 矢量代数与空间解析几何

习题 5.1

1. (1) $5\sqrt{2}, \sqrt{34}, \sqrt{41}, 5$. (2) $z_1 = 7, z_2 = -5$.

(3) $x = 2$.

2. $D(0,1,-2)$. 4. 13,13.

5. $\sqrt{129}, 7$. 6. $\sqrt{21}$.

7. 22.

9. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a+b), \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(a-b)$.

$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(a+b), \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(b-a)$.

12. $(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1)$,

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(a_2-a_1)^2 + (b_2-b_1)^2 + (c_2-c_1)^2}$,

$\cos\alpha = \frac{a_2 - a_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \cos\beta = \frac{b_2 - b_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}, \cos\gamma = \frac{c_2 - c_1}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$.

13. (1) 与 x 轴垂直. (2) 与 y 轴平行.

(3) 垂直于 xy 平面.

14. $(0,0,-1)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$. 15. $B(18,17,-17)$.

16. $a^\circ = \left(\frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13}\right)$. 17. $a = (1, -1, \pm\sqrt{2})$.

18. $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{4}, 3\right)$. 19. $\alpha = 2, \beta = -3, \gamma = 1$.

20. $\sqrt{153}, \sqrt{93}, \sqrt{114}$.

习题 5.2

1. (1) -6.
(2) -61.
2. (1) 38.
(2) -184.
(3) 9.
3. $\frac{3}{14}\sqrt{14}$.
4. $A=\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}, c=\arccos\frac{9}{14}\sqrt{2}$.
5. $2\sqrt{19}$.
6. $\frac{\pi}{3}$或$\frac{2\pi}{3}$.
7. (1) $(0,-8,-24)$.
(2) $(0,-1,-1)$.
(3) 2.
(4) $(2,1,21)$.
8. (1) 24.
(2) 60.
9. (1) 3.
(2) 300.
10. $\frac{1}{2}\sqrt{1\,562}$.
11. 1.
12. 3.
13. (1) 共面.
(2) 不共面.
14. $\frac{\pi}{3}$.
22. $x=\frac{1}{a\cdot b}(ab+a\times c)$.

习题 5.3

2. (1) $-16(x-2)+14y+11(z-3)=0$,
即 $-16x+14y+11z-1=0$.
(2) $-5(x-1)+2(y-2)+11(z-1)=0$.
(3) $-3(x-1)+y-3+4(z-2)=0$.
(4) $y-2z=0$.
(5) $x-3y-2z=0$.
(6) $-x+z+1=0$.
3. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$.
4. $\pm\sqrt{2}x-y+z-1=0$.
5. (1) 1.
(2) 0.
(3) 3.
6. 6.5.
7. $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.
8. $(0,7,0)$或$(0,-5,0)$.
9. $2x+y+2z-2\sqrt{3}=0$.
10. (1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.
(2) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$.

11. $x=t+1,y=-7t,z=-19t-2$.

12. (1) $(2,-3,6)$.　(2) 直线位于平面内.

13. (1) $79°1'$.　(2) $68°58'$.

14. $\arcsin\frac{3}{133}$.　15. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$.

16. $x+2y+3z=0$.

17. $x+20y+7z-12=0$ 或 $x-z+4=0$.

18. $2x+15y+7z+7=0$.　19. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$

20. $4x+3y-6z+18=0$.　21. $9x+11y+5z-16=0$.

22. $13x-14y+11z+51=0$.　23. 25.

24. $\frac{4}{37}\sqrt{259}$.　25. $6x+2y+3z\pm42=0$.

习题 5.4

1. (1),(2),(4),(6)是旋转曲面.

2. (1) $4x^2-9y^2-9z^2=36$.　$4x^2+4z^2-9y^2=36$.

(2) $\sqrt{y^2+z^2}=kx,y=k\sqrt{x^2+z^2}$.

(3) $\sqrt{y^2+z^2}=\sin x$.

3. (1) 直线;平面.　(2) 直线;平面.

(3) 圆;平行于 z 轴的圆柱面.

(4) 双曲线;平行于 z 轴的双曲柱面.

(5) 点;平行于 z 轴的一条直线.

(6) 两点 $\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{5},2\right)$;

分别通过这两点且平行于 z 轴的两条直线.

7. $x^2+y^2=-8z+16$,旋转抛物面.

习题 5.5

1. $A(-5,0,2),B(0,-7,-4),C(4,3,-2)$.

2. (1) $3x'-5y'+6z'+10=0$.　(2) $\frac{x'}{3}=\frac{y'}{4}=\frac{z'}{2}$.

(3) $x'^2+y'^2+z'^2-25=0$.

3. $\left(3+\frac{\sqrt{3}}{2},-3\sqrt{3}+\frac{1}{2},-2\right)$.　4. $\begin{cases}x=x_0+x_1,\\ y=y_0+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1-\frac{\sqrt{2}}{2}z_1,\\ z=z_0+\frac{\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}z_1.\end{cases}$

5. $O_1x_1y_1z_1$ 的原点在 $Oxyz$ 中的坐标是 (x_0,y_0,z_0)，z 轴与 z_1 轴平行且同向；x 轴绕 z 轴顺时针转过 θ 角以后与 x_1 轴方向一致. $M(x_0,y_0,1+z_0)$，$M(x_0+1,y_0,z_0)$.

第六章 重积分与偏微商

习题 6.1

1. $\frac{2}{\pi}$，1，0.

2. $\frac{9}{16}$.

3. $(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}$.

4. $\sqrt{1+x^2}$.

6. (1) $x\geqslant 1,y\geqslant 0$.　(2) $-1<x<1,y\leqslant -1$ 或 $y\geqslant 1$.

(3) $x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0$，　(4) $x+y>0,x-y>0$.

(5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.　(6) $|y|\leqslant |x|,x\neq 0$.

(7) $y\geqslant 0,x\geqslant\sqrt{y}$.　(8) $0<x^2+y^2<1,y^2\leqslant 4x$.

(9) $2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots$.

(10) $x\leqslant x^2+y^2<2x$.

7. $\tan 2t$.

8. $(x+y)^{x-y},x^y+x-y,x+y-x^y$.

10. (1) $(0,0)$　(2) $x=y$ 上的点.

(3) $y^2=2x$ 上的点.

11. (1) $\int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)\,dx$.　(2) $\int_0^1 dx\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy$.

(3) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx\int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$.　(4) $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)\,dx$.

(5) $\int_0^2 dx\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.

(6) $\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy$.

12. (1) $\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$.　(2) $\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx$.

(3) $\int_{-1}^0 dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx+\int_0^8 dy\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx$.

(4) $\int_{-1}^0 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx$.

(5) $\int_0^a dy\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\right\}$

$$+\int_{a}^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

(6) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{2-2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$

14. $(e-1)^2$.

15. 9.

16. $\frac{1}{12}$.

17. $\frac{8}{5}$.

18. $\frac{20}{3}a^4$.

19. $\frac{9}{8}\ln 3-\ln 2-\frac{1}{2}$.

20. $\frac{a^2}{3}$.

21. 0.

22. $\frac{a^4}{2}$.

23. $\frac{1}{6}$.

24. 将不等式左边改写成

$$\iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}}f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

然后研究积分

$$\iint\limits_{\substack{a\le x\le b\\ a\le y\le b}}[f(x)-f(y)]^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

25. (1) $\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\mathrm{d}y\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{-r}^{r}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}y.$

(3) $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}a^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$

(4) $\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{0}^{R}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$

26. $\frac{7}{2}\ln 2-\frac{3}{2}\ln 5$.

27. $\frac{1}{720}$.

28. 0.

29. $\frac{1}{48}$.

30. $\frac{1}{364}$.

习题 6.2

1. $1,1+2\ln 2$.

2. $-1,0$.

3. $\frac{3ab^2}{2\sqrt{ab^3-ba^3}},-\frac{3ba^2}{2\sqrt{ab^3-ba^3}}$,

4. $\frac{1}{x+y^2},\frac{2y}{x+y^2}$.

5. $y^2(1+xy)^{y-1}, xy(1+xy)^{y-1}+(1+xy)^y\ln(1+xy)$.

6. $-\frac{y}{x^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{z}}\ln 3, \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{x}{z}}\ln 3$.

7. $\frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}, \frac{-2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}$.

8. $\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

9. $-\frac{2x\sin x^2}{y}, -\frac{\cos x^2}{y^2}$.

10. $-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}$.

11. $-ye^{-xy}\sin\sqrt{\frac{y}{x}}-\frac{e^{-xy}}{2x}\sqrt{\frac{y}{x}}\cos\sqrt{\frac{y}{x}}$,

$-xe^{-xy}\sin\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{e^{-xy}}{2\sqrt{xy}}\cos\sqrt{\frac{y}{x}}$.

12. $\frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z, -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z, \left(\frac{x}{y}\right)^z\ln\frac{x}{y}$.

13. $\frac{y^z}{x}x^{y^z}, zy^{z-1}x^{y^z}\ln x, y^zx^{y^z}\ln x\ln y$.

14. $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

15. $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x(1-xy)}(1+\sqrt{xy})}, -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y(1-xy)}(1+\sqrt{xy})}$.

16. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(2x+y)}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(2y+x)}{\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}}$.

20. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{xy^3}{(1-x^2y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3y}{(1-x^2y^2)^{3/2}}$.

21. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4y}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2(x-y)}{(x+y)^3}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4x}{(x+y)^3}$.

22. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^3+(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}$.

23. $\frac{\partial^2 z}{2x^2}=y(y-1)x^{y-2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x^{y-1}(1+y\ln x), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$.

24. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{y^2}$.

28. (1) $du=\frac{ydx-xdy}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}$. (2) $dz=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$.

(3) $du=\frac{2(sdt-tds)}{(s-t)^2}$.

(4) $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$.

(5) $du=\dfrac{(x^2+y^2)dz-2z(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}$.

29. $dz=-0.2,\Delta z\approx -0.204\ 04$.

30. $dz=22.4,\Delta z=22.75$.

31. $dz=0.075,\Delta z=0.071\ 4$.

32. (1) 2.95. (2) 0.502.

(3) 1.055. (4) 0.97.

33. $\dfrac{du}{dt}=\sin 2t+6t^5+t^3\cos t+3t^2\sin t$.

34. $\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{2s}{1+(1+s^2-t^2)^2},\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{-2t}{1+(1+s^2-t^2)^2}$.

35. $\dfrac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$.

36. $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=2[\varphi+\theta\tan(\varphi\theta)\sec^2(\varphi\theta)]$,

$\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=2[\theta+\varphi\tan(\varphi\theta)\sec^2(\varphi\theta)]$.

37. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1+y\cos(xy)}{\sqrt{1-[x+y+\sin(xy)]^2}}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1+x\cos xy}{\sqrt{1-[x+y+\sin(xy)]^2}}$.

38. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

39. $e^{ax}\sin x$.

40. $3t^2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}+4t\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$.

41. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}x+2\dfrac{\partial f}{\partial \eta}x+2\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}y$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=2\dfrac{\partial f}{\partial \xi}y-2\dfrac{\partial f}{\partial \eta}y+2\dfrac{\partial f}{\partial \zeta}x$.

42. $\dfrac{\partial f}{\partial x}+2t\dfrac{\partial f}{\partial y}+3t^2\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

43. $\Delta u=3f''_{11}+4(x+y+z)f''_{12}+4(x^2+y^2+z^2)f''_{22}+6f'_2$.

49. (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{y-x}$. (2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y}{x-2y}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{1-xy}$. (4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$.

50. (1) $\dfrac{yz}{z^2+xy},\dfrac{xz}{z^2+xy}$. (2) $-\dfrac{c^2x}{a^2z},-\dfrac{c^2y}{b^2z}$.

(3) $\dfrac{ayz-x^2}{z^2-axy},\dfrac{axz-y^2}{z^2-axy}$. (4) $\dfrac{z}{x+z},\dfrac{z^2}{y(x+z)}$.

51. $\dfrac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$.

52. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{(e^z-xy)2y^2z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}=\dfrac{2z(z-1)-z^3}{x^2(z-1)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2z(z-1)-z^3}{y^2(z-1)^3}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{z}{xy(z-1)^3}$.

55. $dz=-\dfrac{1}{\sin 2z}(\sin 2xdx+\sin 2ydy)$.

56. $dz=-\dfrac{z}{x}dx+\dfrac{(2xyz-1)z}{(2xz-2xyz+1)y}dy$.

62. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{xv-yu}{x^2+y^2}$.

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yu-xv}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{xu+yv}{x^2+y^2}$.

63. $x+y-2=0, y=x$.

64. $x+2y-1=0, 2x-y-2=0$.

65. $\dfrac{x-1}{16}=\dfrac{y-1}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$, $16x+9y-z=24$.

66. $(-1,1,-1)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

67. $x+2y-4=0$, $\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2},\\ z=0.\end{cases}$

68. $17x+11y+5z=60$, $\dfrac{x-3}{17}=\dfrac{y-4}{11}=\dfrac{z+7}{5}$.

69. $x-y+2z=\pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

70. $(-3,-1,3)$, $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

习题 6.3

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial v}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial v}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial x}{\partial u}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial(z,y)}{\partial(u,v)}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\Big/\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

5. $\dfrac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1]$.

6. $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4}{9}$.

7. $\dfrac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$.

8. $\dfrac{3}{64}\pi^2$.

9. $\frac{8}{9}\sqrt{2}$.

10. $-6\pi^2$.

11. 18π.

12. $\frac{8}{3}ab\arctan\frac{a}{b}$.

13. $\frac{15}{4}\pi b(a^2+b^2)$.

14. $\frac{2}{3}\pi ab$.

15. $\frac{16}{3}\pi$.

16. $\frac{1}{48}$.

17. $\frac{\pi}{10}$.

18. $\frac{\pi^2}{4}abc$.

19. $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$.

20. (1) πab.

(2) $\frac{5}{8}\pi a^2$.

(3) $2a^2$.

(4) $\frac{a^2b^2}{2c^2}$.

21. πa^3.

22. 8π.

23. $\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^2-a^2)$.

24. $\frac{2\pi}{3}(2-\sqrt{2})abc$.

25. $\frac{\pi}{3}a^3$.

26. $\frac{\pi}{3}\frac{a^2bc}{h}$.

27. $\frac{3}{4}\ln 2$.

28. $\frac{1}{3}(b-a)(q-p)$.

29. $13\frac{1}{3}$.

30. $\sqrt{2}\pi$.

31. $2a^2$.

32. $\frac{2}{3}\pi ab[(1+e^2)^{3/2}-1]$.

33. $\frac{16}{3}\pi a^2$.

34. $\pi\left[a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right]$.

35. $a(\varphi_2-\varphi_1)[b(\psi_2-\psi_1)+a(\sin\psi_2-\sin\psi_1)]$, $4\pi^2ab$.

36. $8a^2$.

37. $S\cos\gamma, S\cos\alpha, S\cos\beta$.

第七章 线、面积分与外微分形式

习题 7.1

1. (1) $x+y+z=C$.

(2) $x^2+y^2+z^2=R^2$ $(R\neq 0)$.

(3) 旋转单叶双曲面,或旋转双叶双曲面,或圆锥面.

(4) $z=C\sqrt{x^2+y^2}$.

(5) $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

(6) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(R\neq 0)$.

2. (1) $y=Cx$.

(2) $x^2-y^2=C$.

(3) $x^2+2y^2=C$, $(C>0)$.

(4) $\frac{x}{x^2+y^2}=C$.

3. 0.

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 5.

6. $\frac{98}{13}$.

7. $\frac{1}{2}(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

8. $\frac{\sqrt{2}}{3}$或$-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

9. $\frac{1}{2}$.

10. $\frac{x_0+y_0+z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$.

11. $\frac{2\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}}$.

12. $\sqrt{3}+5$, $-\sqrt{3}-5$.

13. $\frac{\sqrt{3}}{9}$, $-\left(\frac{1}{21},\frac{2}{21},\frac{4}{21}\right)$.

14. $x^2+y^2+z^2=R$, $-e\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)$, $e\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)$.

15. $\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{2u}{r}$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

当 $a=b=c$ 时, $\frac{\partial u}{\partial r}=|\operatorname{grad} u|$.

16. $\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$或$\left(\frac{7}{3},-\frac{3}{4}\right)$.

17. $\cos\varphi=-\frac{12}{5\sqrt{145}}$.

18. $\cos\varphi=-\frac{4}{405}$.

19. $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$; $\operatorname{grad} u\perp\operatorname{grad} v$ 时, $\frac{\partial u}{\partial l}=0$.

20. 使 $r=1$ 的点.

21. (1) $\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$.

(2) $(2x,2y,2z)$.

(3) $-\left(\frac{x}{r^3},\frac{y}{r^3},\frac{z}{r^3}\right)$.

(4) $\left(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2},\frac{z}{r^2}\right)$.

(5) $f'(r)\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$.

(6) $2f'(r^2)(x,y,z)$.

23. $\frac{x^2+y^2-z(x+y)}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.

24. (1) nr^n.

(2) (x,y,z).

(3) $(0,0,0)$.

26. $\omega^2\gamma-(\omega\cdot\gamma)\omega$.

28. (2) $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$.　　(3) $\boldsymbol{c}+\frac{\boldsymbol{c}}{2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}$.

29. $(x+t)(t-y)=C$.

30. 电力线为原点发出的射线：

$$\begin{cases} x=at, \\ y=bt, 0<t<+\infty\ a,b,c \text{ 为任意常数}. \\ z=ct. \end{cases}$$

31. $x^2+y^2=R^2,(R>0)$.

习题 7.2

1. $1+\sqrt{2}$.　　2. $\frac{256}{15}a^2$.

3. $2\pi^2a^3(1+2\pi^2)$.　　4. 0.

5. $2a^2$.　　6. $\frac{a^3}{6}(\mathrm{ch}^{\frac{3}{2}}2t_0-1)$.

7. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a\pi^3$.

8. $\frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left[100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right]$.

9. $a^{\frac{7}{8}}$.　　10. $\frac{\pi a}{4}e^a+2(e^a-1)$.

11. $2\pi a^{2n+1}$.　　12. $\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3]$.

13. $\frac{2}{3}\pi a^3$.　　14. 5.

15. $4\pi R^2$.　　16. $-\frac{56}{15}$.

17. 3.　　18. -8.

19. $\frac{4}{5}$.　　20. $-\frac{14}{15}$.

21. 皆为 1.

22. (1) 0.　　(2) $\frac{1}{3}$.

(3) 1.

23. 0.　　24. 0.

25. 6.　　26. $\frac{1}{35}$.

27. 13.　　28. -2π.

29. (1) $\frac{4}{3}$.　　(2) 0.

(3) $\frac{12}{5}$.　　(4) -4.

(5) 4.

30. mab.

31. 参见 7.1 第 32 题.

环流为 $4\pi I$.

32. 所作功为 $\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}$.

当闭曲线不通过原点时环流量为 0.

习题 7.3

1. 9.

2. $4\sqrt{61}$.

3. $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$.

4. πa^3.

5. πR^3.

6. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$.

7. $\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$.

8. $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

9. $2\pi R\left(1-\frac{\sqrt{R^2-\rho^2}}{R}\right)$.

10. 1.

11. $\frac{1}{8}$.

12. $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^2$.

13. 6π.

14. 0.

15. 3.

16. 0.

17. 0.

18. $-\frac{\pi}{2}h^4$.

19. $\frac{1}{2}$.

20. 0.

21. $\frac{3\pi}{16}$.

22. $2\pi R^2 h$.

习题 7.4

1. (1) $\frac{\pi a^4}{2}$.

(2) $-2\pi ab$.

(3) $-\frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$.

(4) $\frac{\pi m a^2}{8}$.

(5) (i) 0.

(ii) $\frac{\pi a^3}{8}$.

3. $I=\begin{cases}2\pi, & C \text{ 包围原点};\\ 0, & \text{原点在 } C \text{ 外}.\end{cases}$

4. (1) $3a^4$.

(2) $\frac{12}{5}\pi a^5$.

(3) $R^2H\left(\frac{2}{3}R+\frac{\pi H}{8}\right)$.　　(4) $\frac{1}{8}$.

(5) 0.

5. (1) $-\sqrt{3}\pi a^2$.　　(2) 0.

(3) $-2\pi a(a+b)$.　　(4) $-\frac{3\pi a^2}{4}$.

6. (1) div $A=0$.

rot $A=2(y-z,z-x,x-y)$.

(2) div $c=6xyz$.

rot $c=(x(z^2-y^2),y(x^2-z^2),z(y^2-x^2))$.

7. (1) 6.　　(2) $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

8. (1) $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c})$.　　(2) 0.

(3) 0.　　(4) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

(5) $2\boldsymbol{c}$.

(6) $2f(r)\boldsymbol{c}+\frac{f'(r)}{r}[\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})]$.

9. (1) 3.　　(2) $\frac{2}{r}$.

(3) 0.　　(4) 0.

(5) $\frac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$.　　(6) $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$.

10. (1) 0.

(2) 在刚体上的点,rot $v=2\omega$,这里 ω 为定轴转动的角速度.

11. (1) πab.　　(2) $\frac{3\pi}{8}a^2$.

(3) $3\pi a^2$.

习题 7.5

1. (1) 4.　　(2) $-\frac{3}{2}$.

(3) 9.　　(4) 62.　(5) 2.

(6) $\int_{r_1}^{r_2}f(r)r\mathrm{d}r$,这里 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, $r_2=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

2. (1) $xy=C$.　　(2) $x^2y=C$.

(3) $xe^y-y^2=C$.　　(4) $x-\frac{y^2}{2}+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

3. $x^2yz+y^2zx+z^2xy$.　　4. $\int_{r_0}^{r}f(r)\mathrm{d}r$, r_0 可任意取定.

5. (1) 非有势场,非无源场.　　(2) 调和场.

(3) 调和场. (4) 无源场.

(5) 调和场.

习题 7.6

1. (1) $7z^2dy\wedge dz - xdz\wedge dx - (x\sin 3x + 7yz^2)dx\wedge dy$.

(2) $dx\wedge dy$. (3) $-21dx\wedge dy\wedge dz$.

2. (1) $(-\cos x + \sin y)dx\wedge dy$. (2) 0.

(3) $(x+6)dx\wedge dy\wedge dz$.

第八章 多变量微积分的一些应用

习题 8.1

1. $5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

3. $1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2$.

4. $1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^2 + R_4$.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x^2+y^2 < +\infty)$.

6. (1) 在点$(0,1)$, $z_{极小}=0$. (2) 在点$(1,0)$, $z_{极小}=-1$.

(3) 在点$(1,1)$, $z_{极小}=-1$. (4) 在点$(5,2)$, $z_{极小}=30$.

7. (1) 极大 $z(1,-1)=6$, 极小 $z(1,-1)=-2$.

(2) $x=y=-(3+\sqrt{6})$时, $z_{极小}=-(4+2\sqrt{6})$.

$x=y=-(3-\sqrt{6})$时, $z_{极大}=2\sqrt{6}-4$.

8. (1) 极大 $z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

(2) 极小 $u\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2},\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

(3) 极小 $u(3,3,3)=9$.

(4) 其中一个变量为$-\frac{2}{\sqrt{6}}$, 而其余为$\frac{1}{\sqrt{6}}$时, $z_{极小}=-\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

其中一个变量为$\frac{2}{\sqrt{6}}$, 而其余为$\frac{-1}{\sqrt{6}}$时, $z_{极大}=\frac{1}{3\sqrt{6}}$.

9. 该内接等腰三角形底边所在直线方程为 $y=-1$.

10. $\sqrt{9\pm5\sqrt{3}}$. 11. $\left(\frac{21}{13},2,\frac{63}{26}\right)$.

12. 当两直角边都是$\frac{l}{\sqrt{2}}$时, 周界最大.

13. $H=2R=2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. 14. $\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

15. 边为$\frac{p}{3}$及$\frac{2}{3}p$的矩形.　　17. a^2.

18. $\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$.

习题 8.2

1. $\frac{\pi}{2}ab$.

2. 以原圆盘中心为坐标原点,使 x 轴正向通过小圆中心,则有

$$x_0 = \frac{-6a}{5(3\pi - 2)}, y_0 = 0.$$

3. $2\pi r(R-r)$.　　4. $2k\pi(R^2 - r^2)$.

5. $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{3}{4}c$.　　6. $\left(0,0,\frac{2}{3}\right)$.

7. $\left(0,0,\frac{4}{5}a\right)$.　　8. $\frac{8}{15}\pi a^5$.

9. (1) (i) $\frac{1}{12}ml^2$,　　(ii) $\frac{1}{3}ml^2$.

(2) (i) mR^2,　　(ii) $\frac{1}{2}mR^2$.

(3) (i) $\frac{1}{2}mR^2$,　　(ii) $\frac{1}{4}mR^2$.

(4) $\frac{7}{5}mR^2$.

10. $F_x = F_y = 0, F_z = k\rho m\pi \ln\frac{b}{a}$.

11. 当质点在球壳内部时,引力等于 0;
当质点在球壳外部时,引力等于把球壳质量集中于球心时对质点的引力.

12. 转动惯量 $I = \frac{8}{3}\pi\rho R^4$,

动能 $T = \frac{4}{3}\pi\rho R^4\omega^2$.

第九章　$\varepsilon-\delta$ 语言

习题 9.1

2. (1) 0.　　(2) $\frac{2}{3}$.

(3) 0.　　(4) 0.

(5) $\frac{1}{3}$.　　(6) $-\frac{1}{2}$.

(7) $\frac{1}{3}$.　　(8) $\frac{1}{2}$.

(9) $\frac{1-b}{1-a}$.　　(10) 0.

(11) $\frac{a+b}{2}$.　　(12) 0.

(13) $\frac{1}{3}$.　　(14) 0.

(15) $\ln(1+\sqrt{2})$.　　(16) 不存在.

(17) 1.　　(18) 3.

(19) 2.

20. (1) 收敛.　　(2) 收敛.

(3) 收敛.　　(4) 发散.

习题 9.2

2. $f(0+0)=1, f(0-0)=1$.

3. (1) $f(2+0)=4, f(2-0)=-2a$. (2) $a=-2$.

6. (1) 1.　　(2) $\frac{2}{3}$.

(3) $\frac{1}{2}$.　　(4) 6.

(5) 10.　　(6) $\frac{1}{2}nm(n-m)$.

(7) $\frac{m}{n}$.　　(8) $\frac{n(n+1)}{2}$.

(9) 0.　　(10) 1.

(11) -1.　　(12) 0.

(13) $\frac{1}{2}(a+b)$.　　(14) $\frac{3}{2}$.

(15) $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$.　　(16) $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$.

8. (1) $a=1, b=-1$.　　(2) $a=1, b=-\frac{1}{2}$.

(3) $a=-1, b=\frac{1}{2}$.

10. (1) e^{-1}.　　(2) e^{-2}.

(3) e^{2}.　　(4) e^{-1}.

(5) 5.　　(6) $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$.

(7) $\frac{1}{2}$.　　(8) 1.

(9) $-\sin a$

(10) $\begin{cases} 1 & \text{当 } m=n, \\ 0 & \text{当 } m>n, \\ \infty & \text{当 } m<n. \end{cases}$

13. (1) 一阶.

(2) 一阶.

(3) 二阶.

(4) 一阶.

14. (1) 3^x 是比 2^x 高阶的无穷大量.

(2) $\sqrt{1+x^2}$ 是与 $x-1$ 同阶的无穷大量.

(3) $\sqrt{x^3+x+1}$ 是比 $\sqrt{x+\sin^2 x}$ 高阶的无穷大量.

(4) $\sqrt{x^2+x+1}$ 是比 $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 高阶的无穷大量.

15. (3) $A=\dfrac{\pi}{2}$.

17. (1) $\dfrac{m}{n}$.

(2) $\dfrac{1}{4}$.

(3) 1.

(4) 1.

19. (1) $x=\pm 1$ 为第一类间断点.

(2) 连续.

(3) $x=1$ 为第一类间断点.

(4) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x<0, x=0 \text{ 为第二类间断点.} \\ 1, & \text{当 } x=0, \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{当 } x>0. \end{cases}$

(5) $f(x)=\operatorname{sgn} x$, $x=0$ 为第一类间断点.

20. $a=0, b=1, c=0$.

22. (1) $f(x)+g(x)$ 在 x_0 点不连续;若 $f(x)=0$ 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点连续,若 $f(x)\neq 0$ 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 点不连续.

(2) $f(x)+g(x)$ 和 $f(x)\cdot g(x)$ 都可能在 x_0 点连续.

26. (1) 一致连续.

(2) 不一致连续.

(3) 一致连续.

(4) 一致连续.

(5) 一致连续.

(6) 不一致连续.

(7) 一致连续.

习题 9.3

1. (1) $\inf(A)=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $\sup(A)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

(2) $\inf(+A)=2$, $\sup(A)=e$.

(3) $\inf(A)=0$, $\sup(A)=1$.

(4) $\inf(A)=-1$, $\sup(A)=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\inf(A)=-1$, $\sup(A)=1$.

(6) $\inf(A)=0$, $\sup(A)=1$.

(7) $\inf(A)=e$, $\sup(A)=+\infty$.

(8) $\inf(A)=-\infty$, $\sup(A)=1$.

2. (1) $\inf(f(x))=0$, $\sup(f(x))=25$.

(2) $\inf(f(x))=0$, $\sup(f(x))=1$.

(3) $\inf(f(x))=0$, $\sup(f(x))=1$.

(4) $\inf(f(x))=-1$, $\sup(f(x))=1$.

(5) $\inf(f(x))=\frac{1}{2}$, $\sup(f(x))=4$.

(6) $\inf(f(x))=-\sqrt{2}$, $\sup(f(x))=\sqrt{2}$.

3. $\sigma=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{25}{n^2}=12\frac{1}{2}$.

4. (1) $S_1(f,T)=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$, $S_0(f,T)=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}$,

(2) $S_1(f,T)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$, $S_0(f,T)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}}$.

5. $V_0T+\frac{1}{2}gT^2$.

6. (1) $\frac{2}{3}(2^{\frac{3}{2}}-1)$. (2) $\ln 2$.

(3) $\frac{\pi}{4}$.

7. (1) $\frac{1}{3}$. (2) $\frac{1}{a}$.

(3) π. (4) $\frac{2}{3}\ln 2$.

(5) $\frac{1}{2}$. (6) $\frac{1}{2}$.

(7) $n!$. (8) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$.

(9) -1. (10) $\frac{\pi}{2}$.

(11) $-\frac{1}{4}$. (12) $\frac{\pi}{2}$.

(13) $\frac{8}{3}$.

(14) $\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数},\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{当 } n \text{ 为奇数},\end{cases}$

(15) $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$. (16) $(-1)^n n!$.

第十章 无穷级数与无穷积分

习题 10.1

2. (1) $\frac{7}{2}$. (2) $\frac{55}{24}$.

3. (1) 收敛. (2) 发散.
(3) 收敛. (4) 发散.
(5) 发散. (6) 收敛.
(7) 收敛. (8) 发散.
(9) 发散. (10) 收敛.
(11) 收敛. (12) 发散.
(13) 收敛. (14) 收敛.
(15) 收敛. (16) 收敛.
(17) $a>1$ 时收敛,$0<a<1$ 时发散.

9. (1) $p>1$ 时收敛,$p\leqslant 1$ 时发散. (2) 发散.
(3) 当 $p>1$,q 任意和 $p=1$,$q>1$ 时收敛.

12. (1) 收敛. (2) 收敛.
(3) 收敛. (4) 收敛.
(5) 发散. (6) 收敛.
(7) 收敛.

13. (1) 当 $p>1$ 时绝对收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛.
(2) 当 $|a|>1$ 时绝对收敛;当 $|a|=1$ 时条件收敛;当 $|a|<1$ 时发散;
(3) 当 $p>1$ 时绝对收敛;当 $0<p\leqslant 1$ 时条件收敛;
(4) 对于任何不为负整数的 x 条件收敛.

习题 10.2

1. (1) 当 $|x|>1$ 时绝对收敛. (2) 当 $x>0$ 时绝对收敛.
(3) 当 $x>-\frac{1}{4}$ 和当 $x<-\frac{1}{2}$ 时绝对收敛.
(4) 当 $|x|<1$ 时绝对收敛. (5) 当 $|x|\neq 1$ 时绝对收敛.
(6) 当 $x>1$ 时绝对收敛.
(7) 当 $|x|<1$,$0\leqslant y\leqslant+\infty$ 和 $|x|>1$,$y>|x|$ 时绝对收敛,当 $x=-1$,$0\leqslant y\leqslant 1$ 时条件收敛.
(8) 当 $0<\min(x,y)<1$ 时绝对收敛.

2. (1) (i) 一致收敛, (ii) 不一致收敛.
(2) 一致收敛. (3) 一致收敛.
(4) (i) 不一致收敛; (ii) 一致收敛.

3. (1) 一致收敛. (2) 一致收敛.
(3) (i) 一致收敛; (ii) 不一致收敛.
(4) 一致收敛. (5) 一致收敛.
(6) 一致收敛. (7) 一致收敛.
(8) 一致收敛. (9) 不一致收敛.
(10) 一致收敛. (11) 一致收敛.
(12) 一致收敛.

4. (1) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0.\end{cases}$

即函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 而在点 $x\neq 0$ 处连续.

(2) $f(x)$ 在整个数轴上连续.

5. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{-1}{4}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

7. $f''(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}$.

8. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)\,dx=\dfrac{1}{2}$.

9. $\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx=0$.

习题 10.3

1. (1) $R=2$. (2) $R=1$.
(3) $R=1$. (4) $R=+\infty$.
(5) $R=e$. (6) $R=4$.

2. (1) $R=\dfrac{1}{e}$; $\left(\dfrac{-1}{e},\dfrac{1}{e}\right)$. 当 $x=\pm\dfrac{1}{e}$ 时发散.
(2) $R=+\infty$. $(-\infty,+\infty)$. (3) $R=+\infty$. $(-\infty,+\infty)$.
(4) $R=\dfrac{1}{3}$. $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$. 当 $x=-\dfrac{4}{3}$ 时,条件收敛;当 $x=-\dfrac{2}{3}$ 时,发散.
(5) $R=\max(a,b)$. $(-R,R)$. 当 $x=\pm R$ 时,发散.
(6) $R=1$; $(-1,1)$. 当 $x=\pm 1$ 时若 $a>1$ 绝对收敛;若 $a\leqslant 1$ 时发散.

3. (1) $s(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $(|x|<1)$.

(2) $s(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $(|x|<1)$.

(3) $s(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2}$, $(|x|<1)$.

(4) $s(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & \text{当 } 0<|x|<1,\\ 0, & \text{当 } x=0,\\ 1-2\ln 2, & \text{当 } x=-1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$

5. (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$, $(|x|<1)$.

(2) $1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $(|x|<+\infty)$.

(3) $\sum_{n=12}^{+\infty} x^n$, $(|x|<1)$.

(4) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|<1)$.

(5) $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}[1-(-2)^n]x^n$, $\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$.

(6) $1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n-1)!}\right]x^n$, $(|x|<+\infty)$.

6. (1) $x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|\leqslant 1)$.

(2) $x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $(|x|\leqslant 1)$.

(3) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $(|x|<+\infty)$.

(4) $\ln x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{nn!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{nn!}$.

7. (1) $(x-1)^3+(x-1)^2+4(x-1)-3$, $(|x|<+\infty)$.

(2) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{10^{n+1}}$, $(|x|<10)$.

(3) $x+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $(|x|<1)$. 收敛域为 $|x|\leqslant 1$.

(4) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n$, $(|x|<1)$.

(5) $x+2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}$, $(|x|\leqslant 1)$.

(6) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$, $(0<x\leqslant 2)$.

(7) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(|x|<+\infty)$.

(8) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$, $(|x|<+\infty)$.

8. (1) $\ln 2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{192}x^4+\cdots$.

(2) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots$.

9. (1) 0.747. (2) 1.605.

(3) 0.905.

10. (1) $y = Ce^x - 2x - 2$,其中 C 为任意常数.

(2) $y = C_1 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!} + C_2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!!}$,其中 C_1, C_2 为任意常数.

11. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{20}x^5 + \cdots$.

12. (1) $y = \dfrac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!}x^{2n}$.

(2) $y = \ln(1+x)$.

13. (1) $157.970 + 0.000\,4\theta$, $(0 < \theta < 1)$.

(2) $10^{28} \times 1.378\left(1 + \dfrac{\theta}{288}\right)$, $(|\theta| < 1)$.

习题 10.4

1. (1) 发散.
(2) 收敛.
(3) 收敛.
(4) $p > 1$ 收敛,$p \leqslant 1$ 发散.
(5) 收敛.
(6) 发散.
(7) 发散.
(8) $a > 0$ 时收敛,$a \leqslant 0$ 时发散.
(9) 收敛.
(10) 收敛.
(11) 当 $m > -1$ 和 $n - m > 1$ 时收敛.
(12) 发散.
(13) 收敛.
(14) 收敛.
(15) 收敛.
(16) 收敛.
(17) 收敛.
(18) 收敛.
(19) 发散.
(20) 当 $1 < a < 2$ 时收敛.

2. (1) 1.
(2) $\dfrac{8}{3}$.
(3) $\dfrac{\pi}{4}$.

5. (1) 条件收敛.
(2) 绝对收敛.
(3) 条件收敛.

7. 1. $-(e^{x|\sin x|}\sin x + e^{x|\cos x|}\cos x) + \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}e^{x\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

(2) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{b+x}\right)\sin x(b+x) - \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a+x}\right)\sin x(a+x)$.

(3) $-\int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2}\,dy + 2xe^{-x^5} - e^{-x^3}$.

(4) $f(a,-a) + 2\int_0^a f'_b(u,v)\,dx$, 其中 $u = x + a, v = x - a$.

(5) $\dfrac{2}{a}\ln(1+a^2)$.

10. (1) $u < 1$.
(2) 处处发散.

(3) $u<-1$.　　(4) $u>1$.

(5) $u<3$.　　(6) $u<1$.

11. (1) 一致收敛.　　(2) 一致收敛.

(3) (i)一致收敛; (ii) 不一致收敛.

(4) 一致收敛.　　(5) 不一致收敛.

12. (1) $\ln\frac{1+\beta}{1+\alpha}$.　　(2) $\ln\frac{b}{a}$.

(3) $\sqrt{\pi a}$.　　(4) $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$.

(5) $\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$.　　(6) $\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

13. (1) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{15}{8}}$.　　(2) $\sqrt{\pi}$.

(3) 0(当 $a<b$), $\frac{\pi}{4}$(当 $a=b$), $\frac{\pi}{2}$(当 $a>b$).

(4) $\frac{\pi}{2}$　　(5) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})$.

(6) $\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}$.

14. (1) $\frac{\pi}{3}$.　　(2) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

(3) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.　　(4) $\frac{\pi a^4}{16}$.

(5) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.　　(6) $\frac{n!}{2}$.

(7) $\frac{3}{512}\pi$.　　(8) $\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$.

(9) $\frac{1}{m}B\left(\frac{n}{m},q\right)$.　　(10) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}$.

第十一章　Fourier 级数与 Fourier 积分

习题 11.1

4. (1) $f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$.

(2) $f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right]$.

(3) $f(x)\sim\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{\frac{1-(-1)^ne^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx\right.$

$$+\left[\frac{-n+(-1)^n n\mathrm{e}^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1}{n}(1-(-1)^n)\right]\sin nx\Big\}.$$

(4) $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$.

(5) $f(x)\sim\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$.

(6) $f(x)\sim 2\mathrm{sh}\,al\left[\dfrac{1}{2al}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{al\cos\dfrac{nx}{l}x-n\pi\sin\dfrac{n\pi}{l}x}{(al)^2+(n\pi)^2}\right]$.

5. (1) $f(x)=\dfrac{A}{2}+\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x\left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)$，在 $x=\dfrac{\pi}{2}$，级数收敛于 $\dfrac{A}{2}$.

$f(x)=\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{n\pi}{2}}{n}\sin nx\left(0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi\right)$，在 $x=\dfrac{\pi}{2}$，级数收敛于 $\dfrac{A}{2}$.

(2) $f(x)=\dfrac{h}{2\pi}+\dfrac{2}{\pi h}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1-\cos nh}{n^2}\cos nx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

$f(x)=\dfrac{2}{\pi h}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{nh-\sin nh}{n^2}\sin nx\quad(0<x\leqslant\pi)$,

在 $x=0$，级数收敛于 0.

6. (1) $|\sin x|=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(2) $\mathrm{sh}\,ax=\dfrac{2\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n\sin nx}{n^2+a^2}\quad(-\pi<x<\pi)$.

(3) $x\sin x=1-\dfrac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx\quad(-\pi<x<\pi)$.

(4) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2}x\quad(|x|<1,1<|x|\leqslant 2)$,

在 $x=\pm 1$，级数收敛于 0.

(5) $f(x)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1+(-1)^{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{3}}{n^2}\cos\dfrac{2n\pi}{3}x\quad(0\leqslant x\leqslant 3)$.

(6) $f(x)=\dfrac{E}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n}\cos\dfrac{nx}{2}x\quad(|x|<1,1<|x|\leqslant 2)$,

在 $x=\pm 1$，级数收敛于 $\dfrac{E}{2}$.

7. (1) $\dfrac{\pi^2}{6}$.　　(2) $\dfrac{\pi^4}{96}$.

8. $f(x)=\frac{a}{\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n\pi}\sin na\cos nx$ $(|x|<a, a\leqslant|x|\leqslant\pi)$，在 $x=\pm a$，级数收敛于 $\frac{1}{2}$.

(1) $\frac{a(\pi-a)}{2}$. (2) $\frac{\pi^2-3\pi a+3a^2}{6}$.

9. $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{\cos n\pi-1}{n\pi}\right)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}nx}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\cos n\pi-1}{n\pi}\right)\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}nx}$

$(0<|x|<\pi)$ 在点 $x=0$ 和 $x=\pm\pi$，级数收敛于 0.

习题 11.2

1. (1) $\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$ $(-\infty<x<\infty)$.

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-a\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$ $(-\infty<x<\infty)$.

(3) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$ $(|x|<1, |x|>1)$.

在点 $x=\pm1$，$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$.

(4) $f(x)=-2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda\pi}{1-\lambda^2}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda$.

(5) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2+\lambda^2}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda$.

2. (1) $F(\lambda)=\frac{4a\lambda\mathrm{i}}{(a^2+\lambda^2)^2}$.

(2) $F(\lambda)=\frac{a}{(\lambda-b)^2+a^2}+\frac{a}{(\lambda+b)^2+a^2}$.

(3) $F(\lambda)=\frac{2\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{1-\lambda^2}$.

3. (1) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$.

(2) $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$. $(x>0)$.

在点 $x=0$，积分为 0.