数学奥林匹克辅导讲座

龚 昇 主编

科 学 出 版 社

1988

内 容 简 介

本书紧扣数学奥林匹克辅导这个主题，从国内外数学竞赛中遇到的数学内容选出17个专题．每个专题独立成文，集中介绍该专题的基本理论，并用大量国内外数学竞赛中出现的试题，向读者介绍遇到这类问题应如何思考和解题的技巧，从而达到启发读者思路、开拓读者视野的作用．

本书读者对象为中学数学教师、优秀高中学生、各类数学竞赛讲习班、培训班、数学奥林匹克学校的教师和学生．

数学奥林匹克辅导讲座

龚 昇 主编

责任编辑 毕 顿

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1988年7月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1988年7月第一次印刷 印张：10 3/8

印数：0001—28,050 字数：234,000

ISBN 7-03-000617-8/O·161

定价：2.75元

序　言

目前各种知识竞赛风起云涌，有令人应接不暇之感，似乎有点“竞赛热”. 我相信社会会将这种“竞赛热”自动调节到正常的温度，同样我也相信，中学的数学竞赛是会长期举办下去的，而且会愈办愈好. 原因是：（1）这是一种国际性的活动，世界很多国家年年都举办，而且还年年举办国际数学奥林匹克.（2）这是一项历史悠久的竞赛，在我国也已有 30 多年的历史了.（3）在长期的实践中已经摸索出一套适合于我国国情的方针、方法与步骤来举办数学竞赛.（4）各国也包括我国的长期实践证明，这种竞赛确能促进中学数学教学，也有利于大学数学教学.（5）这项活动深受广大教师、学生及家长的欢迎，可以说中学数学竞赛在人们的心目中已经扎下了根.

体育竞赛要创造好成绩，除了运动员的素质及刻苦锻炼外，教练所起的作用也是很关键的. 他们制定严密的训练计划，给予启发性的辅导，循序渐进，严格要求，以达到预期的目的. 在数学竞赛中同样也是如此.

实践证明，在数学竞赛中一些启发性的辅导报告往往有着十分重要的作用. 这不仅对参加竞赛的同学大有裨益，而且对不参加竞赛的同学也起到启发思路、开拓视野的作用. 而这对中学数学课堂教学无疑是重要的补充. 当 50 年代我国开始举办数学竞赛时，一批老一辈的数学家华罗庚、江泽涵、段学复、吴文俊、闵嗣鹤等都曾为青少年作过辅导报告，这些报告后来经过整理，编辑出版，并多次再版，供不应求，至今还深受广大中学师生的欢迎. 30 多年过去了，现在再拿来看看，

依然感到趣味盎然，开卷有益。

1986 年 7 月，我国首次派出了六名中学生参加国际数学奥林匹克，结果是得了三个一等奖，一个二等奖，一个三等奖，总分名列第四．成绩斐然，一炮打响，中学生为国争了光，大家感到欢欣鼓舞．

当然这一令人注目的成绩，首先归功于广大的中学数学教师的长期辛勤劳动，而有计划、有组织的严格训练，也起了很大的作用．经过 1985 年的全国高中数学联赛之后，从中选拔了一些优胜者组织了冬令营．之后又组成了集训班．在这个集训班上，有来自许多大学及研究所的十几位教授、副教授作了辅导报告．事实证明，这些报告对参加竞赛起了重要的作用．

自从华罗庚教授于50年代创导数学竞赛以来，中国科学技术大学数学系的老师对中学数学教学以及数学竞赛一直有着十分浓厚的兴趣．关心中学数学教学，与其他大学和研究所一起参与这些活动在中国科学技术大学数学系已经成为传统，而且有一支多年参与这项工作的队伍．他们作了大量的工作，为中学数学竞赛作辅导报告就是其中的一项．

这种辅导报告，不是中学数学教材的重复，更不是大学教材的提前．要紧的是在中学数学教学的范围内对同学能真正起到启发思路、开拓视野的作用．要作好这样的报告是不容易的，并不比写一篇一般性的论文容易．要做好这一点，必须做到华罗庚老师生前经常说的那样："居高才能临下，深入才能浅出"．如果对讲的内容没有高明的观点，没有十分深刻的理解，是很难做到这一点的．华罗庚老师等老一辈的著名数学家为我们树立了学习的榜样．他们的书之所以经久不衰，就是因为这些书是"居高临下、深入浅出"的典范．

中国科学技术大学数学系的同志们继承了华罗庚老师等

老一辈数学家的传统，在这方面作了不少努力。这本小册子中的演讲，就是按照这样的标准，从他们近年来几个暑期在安徽屯溪举办的全国中学数学教师讲习班的报告中选择出来的。其目的也无非是想为数学竞赛起点推波逐澜的作用。是不是能达到这样一个目的，还有待于读者的指教。

冀　昇

1987 年 12 月 6 日于合肥

目　　录

序言……葑　昇　iii

第一讲　谈谈数学竞赛的命题……常庚哲　1

第二讲　反证法……徐森林　19

第三讲　数学归纳法应用技巧举例……苏　淳　31

第四讲　学会从普遍性的角度来看待问题……苏　淳　48

第五讲　不等式问题……严镇军　61

第六讲　几何题的复数解法……常庚哲　89

第七讲　函数迭代与函数方程……杜锡录　108

第八讲　初等数论方面的问题……谢盛刚　124

第九讲　有理数与代数数……李尚志　147

第十讲　多项式问题……李炯生　169

第十一讲　关于组合数的计算……史济怀　191

第十二讲　组合计数问题……李炯生　217

第十三讲　组合几何问题……杜锡录　240

第十四讲　抽屉原则……常庚哲　256

第十五讲　组合几何中的运动问题……杜锡录　267

第十六讲　图论问题……王树禾　282

第十七讲　初等数学中所遇到的一些子集类……苏　淳　300

第一讲　谈谈数学竞赛的命题

常　庚　哲

世界各地每年都在举行着各种水平的数学竞赛，而且有越来越多的趋势．在这种情况之下，出现了不少试题发生重复的现象．国际上有许多重要的数学竞赛，例如国际数学奥林匹克，即 IMO，美国的普特南（Putnam）数学竞赛等．美国、加拿大、德意志联邦共和国等国的数学竞赛，已经出版过自己的试题集，它们已经成了参赛的学生和他们的教练认真研究的对象．因此，今天的竞赛命题委员会不得不小心翼翼地工作，尽量避免成题的出现，因为一旦出现成题，竞赛结果的公平性就值得怀疑了．在我国，全国数学联赛的命题工作中也发生过这类毛病，这表明我国在命题方面水平不高，又缺乏专门的研究，不能为全国联赛提供优秀试题，更不用说多提几道能被国际数学奥林匹克选中的题目．

为了避免成题，最安全的办法是有一批人来制造自己的题目．按照我个人的经验，命题有两种途径，第一是将已有的题目认真解剖，然后作实质性的推广，这里所说的实质性推广是指非平凡的推广，不能仅仅是改头换面；第二是来自自己的科学研究，因为大多数高级的数学研究，总会包含着初等的等式、不等式以及其他的数学结论．在本文中，我将沿着这两条线索介绍一下我的命题经验．

1. 很久以前，我看到过这样一个题目：在边长为 1 的正方形中，任意地放置 5 个点．求证：其中一定可以找到两个点，它们的距离不大于 $\sqrt{2}/2$．

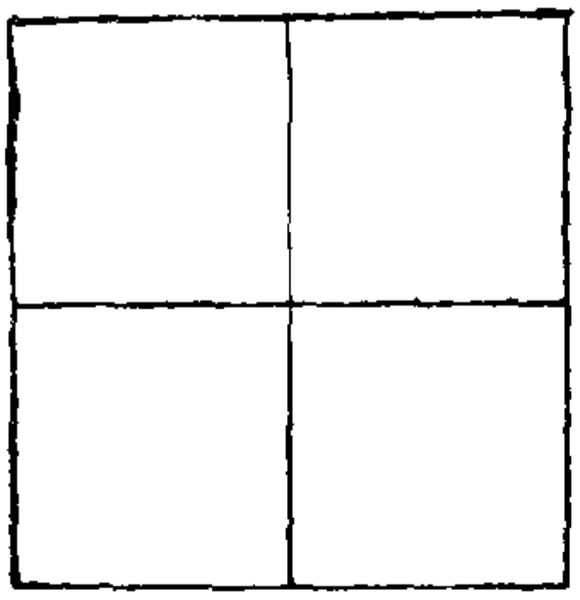


图 1.1

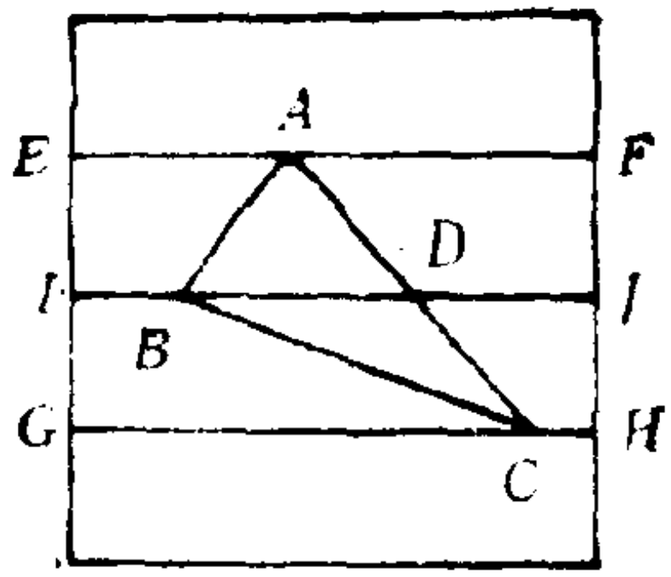


图 1.2

证法是很简单的，按图 1.1 所示，将这个正方形分成 4 个相等的小正方形，每一个小正方形对角线长为 $\sqrt{2}/2$；任意放置 5 个点，由抽屉原则，其中至少有两个点会落在同一个小正方形内，显然它们是符合要求的点.

题目是证完了，但是我们不要马上离开它，应当停留下来，仔细看看有没有推广的潜力. 如果我们把上述正方形分成 9 个大小相等的正方形，然后任意放置 10 个点，那么得到的结论是：必有两点它们之间的距离不超过 $\sqrt{2}/3$. 这虽然也算得上是一种推广，但这是平凡的推广，结论和证明方法上没有任何新意.

设想把两点改为 3 点，两点之间的距离用 3 点作为顶点的三角形的面积来代替，这样所造成的推广就是有意义的了. 这就是北京市 1963 年数学竞赛，高三第二试的第二题：在一个边长为 1 的正方形内任意地给定 9 个点. 试证明：在以这些点作为顶点的三角形中必有一个三角形，它的面积不大于 1/8.

证明 用对边中点的联线把正方形分成 4 个面积为 1/4 的小正方形(如图 1.1)，显然至少有一个小正方形所含(在内部及边界上) 的给定点不少于 3 个. 设这个小正方形为 Q，其中的 3 个点用 A, B, C 来记(图 1.2). 把正方形最上头的

那一条边平行地向下移动，直至第一次碰到 A，B，C 中的某一点为止，设 EF 就是终止的位置，碰到的点中的一个(因为可能有两个甚至 3 个）记为 A；再把正方形最下的那一条边平行地向上移动，直到第一次碰到这三点中的一个点为止，设 GH 就是这个位置，把 GH 上异于点 A 的那点叫作 C. 注意，线段 EF 与 GH 可能重合，这时三角形 ABC 的面积等于 0，结论自然是成立的. 现在还余下一点 B 在 EF 与 GH 所夹的矩形之间，过 B 点作平行于 EF 的线段 IJ（IJ 可能与 EF 或 GH 重合），记 IJ 与 AC 的交点为 D. 很显然

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = \triangle ABD \text{ 的面积} + \triangle BDC \text{ 的面积}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \text{矩形 } IJFE \text{ 的面积} + \frac{1}{2} \text{矩形 } IJHG \text{ 的面积}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \text{矩形 } Q \text{的面积} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

2. 1986 年 3 月，作者与吉林大学齐东旭副教授在浙江大学参加“计算几何”学术讨论会. 由于初等数学是我们的共同爱好，所以它成了我们晚间聊天的话题. 我们谈及 1985 年“五四青年智力竞赛”的一个题目：地面上有 A，B，C 三点，一只青蛙位于地面上距 C 为 0.27 米的 P 点处，青蛙第一步从 P 跳到关于 A 的对称点 P_1，第二步从 P_1 跳到关于 B 点的对称点 P_2，第三步从 P_2 跳到关于 C 点的对称点 P_3，第四步从 P_3 跳到关于 A 的对称点 P_4，……，按这种方式一直跳下去，若青蛙在第 1985 步跳到了 P_{1985}，问 P 与 P_{1985} 相距多少厘米？

1985 是一个很大的数目，你看到它，请不要害怕，反而应当感到安慰，因为在“跳”的过程中一定包含着某种规律. 如果一点规律也没有，真要到 1985 步才呈现某种特殊现象，谁有那么多的时间来重复这种单调无味的操作？

只要利用初中代数里的“中点公式”，经过 6 次计算之后，

就可发现 $P_6 = P$，这就是说，青蛙跳过6步之后又回到了原处. 所以说，$P, P_1, P_2, P_3, \cdots$ 是有周期现象的点列，$P_{1985} = P_5$，而 P_5 是点 P 关于 C 的对称点，因此 P_{1985} 到 P 的距离 $= 2 \times 0.27$ 米 $= 54$ 厘米.

大家知道，“五四青年智力竞赛”是一项群众性、普及型的知识竞赛，参加者是全国各行各业的青年，不能要求他们有较多的数学知识. 这就是说，上述这个题目不涉及多少数学知识，而且解法十分简单，连国内专门的数学竞赛题的水平也够不上.

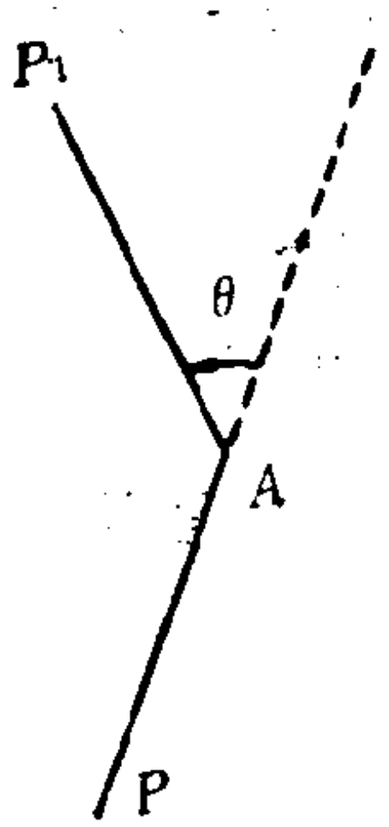


图 1.3

如果我们当时就满足于这一解答，不再多想任何问题，那就只能是到此止步了！幸运的是，当时我们向自己提出了更多的问题.

为简单起见，我们称青蛙上述的动作为“对称跳”，对称跳的特点是走直线，不拐弯，就象大家玩最普通的“跳棋”一样，如果设想青蛙有更高一点的智商，会拐弯，即从 P 沿直线到 A 之后，转某一个角度，再往前走一个相等的直线距离，到达 P_1. 以后仍用这种方式做下去，会有什么结果？会不会还有周期现象？

现在来回答这一问题，设青蛙到达 A 后，“向左”转一角度 θ（图 1.3），我们称青蛙作“左转 θ 角运动”. 这时，由于将向量 $\boldsymbol{PA}$ 左转 θ 角后就变成向量 $\boldsymbol{AP}_1$，用复数来表示就是

$$(A - P)e^{i\theta} = P_1 - A$$

这里 $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\sin\theta$，为了记号简单，令 $u = e^{i\theta}$，我们便有

$$P_1 = (1 + u)A - uP$$

用同样的方法可得以下一系列等式

$$P_2 = (1 + u)B - uP_1$$
$$= (1 + u)(B - uA) + u^2P$$

$$P_3 = (1 + u)C - uP_2$$

也就是

$$P_3 = (1 + u)(C - uB + u^2A) - u^3P.$$

由于从 P_3 到 P_6 与从 P 到 P_3 的过程完全一样，利用上式可得

$$P_6 = (1 + u)(C - uB + u^2A) - u^3P_3,$$

这也就是

$$P_6 = (1 + u)(1 - u^3)(C - uB + u^2A) + u^6P.$$

把 u^6 表为

$$1 - (1 - u^3)(1 + u)(1 - u + u^2),$$

于是

$$P_6 = (1 + u)(1 - u^3)[C - uB + u^2A - (1 - u + u^2)P] + P.$$

为了让 $P_6 = P$ 必须且只须

$$(1 + u)(1 - u^3)[C - uB + u^2A - (1 - u + u^2)P] = 0.$$

由此可见，当

$$u = 1,\ e^{i2\pi/3},\ -1,\ e^{i4\pi/3}$$

时，亦即

$$\theta = 0,\ 120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ$$

时，不管 A，B，C 三点在平面上怎样分布，也不管青蛙最初在什么位置，6 步之后总能回到原来的出发点.

上述 u 的四个值，正好是 6 次单位根中的 4 个. 如果让 u 取另外的两个 6 次单位根，即 $u = e^{i\pi/3}$，$e^{-i\pi/3}$，这时有 $1 - u + u^2 = 0$（或 $u^2 = u - 1$），因此令

$$C - uB + u^2A = 0$$

也能导致周期现象. 这一等式也可表为

$$C - uB + (u - 1)A = 0,$$

由此得

$$u(B-A)=C-A.$$

当 $u=e^{i\pi/3}$ 时，等式

$$(B-A)e^{i\pi/3}=C-A,$$

表明 ABC 为一等边三角形，且 $A\to B\to C\to A$ 是沿反时针方向行进的，我们称 ABC 为正向正三角形。 而当 $u=e^{i5\pi/3}=e^{-i\pi/3}$ 时，等式

$$(B-A)e^{-i\pi/3}=C-A$$

相当于

$$e^{i\pi/3}(C-A)=B-A$$

也表明 ABC 为一等边三角形，但 $A\to B\to C\to A$ 是沿顺时针方向行进的，这时称 ABC 为负向正三角形(图 1.4)。

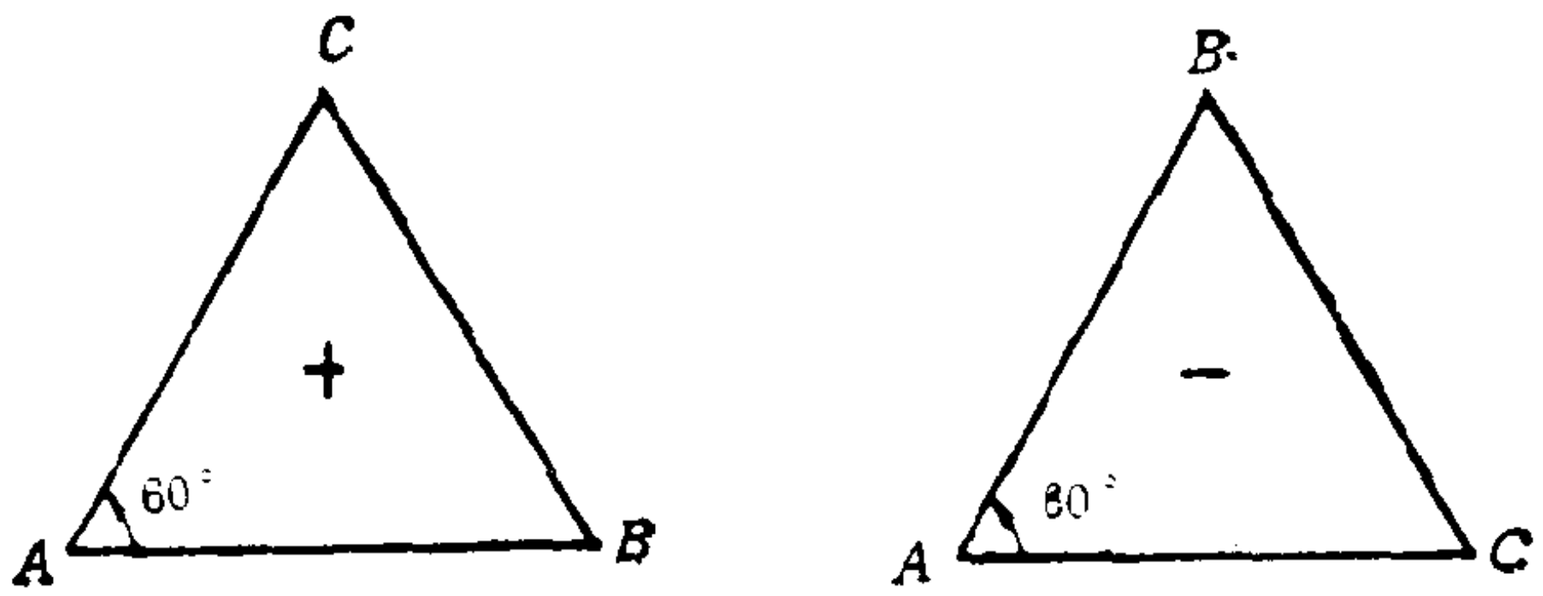


图 1.4

最后两种情况表明：A，B，C 为平面上给定的三个点，如果一只青蛙依次对它们作“60° 的左(右)转弯运动”，三步之后回到原出发点，那么 ABC 必须是一个正(负)向正三角形。

把结论标志在六次单位根的图上也许是有意义的（图 1.5)。

有了以上的讨论之后，提出以下的命题就是十分自然的了。

在平面上给定三点 A，B，C。一个人从同一平面上的一

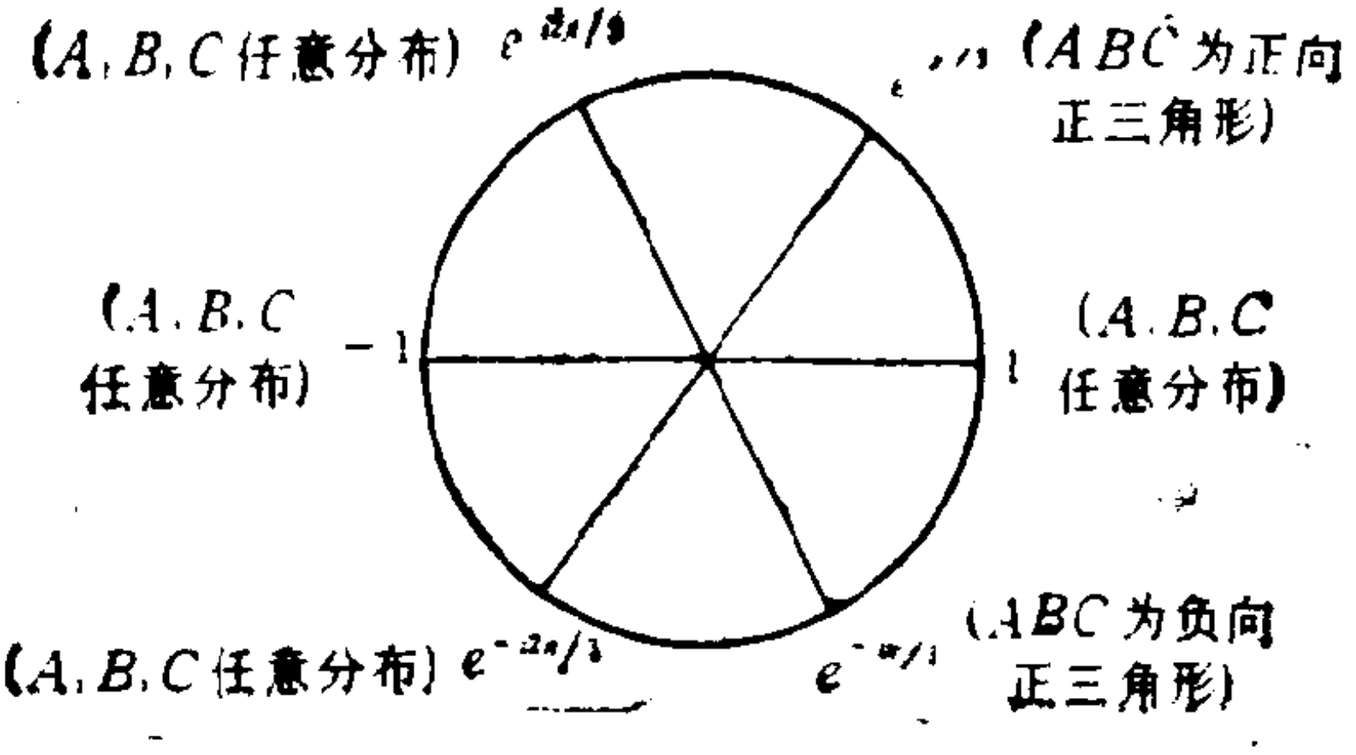


图 1.5

点 P 出发，直线行进到点 A，向左转 60° 之后继续沿直线前进，走过一相同距离之后，到达一点 P_1. 我们称他关于 A 点作了一次左转 60° 的运动. 接着，从 P_1 出发对 B 作左转 60° 的运动到达 P_2，再从 P_2 出发对 C 作左转 60° 的运动到达 P_3，然后依次对 A，B，C，A，$B\cdots$ 作左转 60° 的运动. 经过 1986 步之后，此人发现已回到了原出发点 P. 求证：ABC 必为正向正三角形.

这个题目已被 1986 年在波兰举行的第 27 届国际数学奥林匹克选为第 2 题，这是我们中国第一次被国际数学奥林匹克选中的题目.

问题到此并没有完结，我们还可以继续前进.

3. 如果给定的点不只是三个，而是 t 个. 比较方便的记法是 A_1，A_2，$\cdots$，A_t. 出发点 P 记为 P_0. 从 P_0 对 A_1 作左转 θ 角的运动到达 P_1，又从 P_1 对 A_2 作左转 θ 角的运动到达 P_2，如此继续下去，得到点列

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\cdots,\ P_n,\cdots$$

我们还是关心这一点列的周期性.

相邻两点 P_{k-1} 与 P_k 的关系是

$$P_k - A_k = (A_k - P_{k-1})e^{i\theta}$$

仍令 $u = e^{i\theta}$，于是得到“递推公式”

$$P_k = (1+u)A_k - uP_{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

注意，这里点列 A_k 的下标按模 t 取值，就是说

$$A_{t+1} = A_1, \quad A_{t+2} = A_2, \cdots$$

反复地利用递推公式，第 n 步所得之点

$$\begin{aligned} P_n &= (1+u)A_n - uP_{n-1} \\ &= (1+u)A_n - u[(1+u)A_{n-1} - uP_{n-2}] \\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1}) + u^2P_{n-2} \\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1}) + u^2[(1 \\ &\qquad + u)A_{n-2} - uP_{n-3}] \\ &= (1+u)(A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2}) - u^3P_{n-3} \end{aligned}$$

继续下去，一推到底，便得

$$\begin{aligned} P_n = (1+u)[&A_n - uA_{n-1} + u^2A_{n-2} - u^3A_{n-3} + \cdots \\ &+ (-u)^{n-1}A_1] + (-u)^nP_0 \end{aligned}$$

上式的规律是十分明显的：每一项中，u 的方幂和文字的下标之和等于 n，各项前的符号正负交替。

由上式明显看出，当 $u+1=0$ 即 $u=-1$ 时，点列 $\{P_n\}$ 实际上是常驻点列 $P_0, P_0, P_0, \cdots$，即周期为 1 的点列。因此设 $u \neq -1$。

为了构造周期为 t 的点列，必须且只须令 $P_t = P_0$，即应令

$$\begin{aligned} &(1+u)[A_t - uA_{t-1} + u^2A_{t-2} - \cdots(-u)^{t-1}A_1] \\ &\quad + (-u)^tP_0 = P_0 \end{aligned}$$

能使上式满足的一种最简单的取法为

$$\begin{cases} (-u)^t = 1 \\ A_t - uA_{t-1} + u^2A_{t-2} - \cdots + (-u)^{t-1}A_1 = 0 \end{cases}$$

第一个式子表明：$(-u)$ 应取作任何一个 t 次单位根。当 u 一旦取定之后，如果给定的点 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 适合第二式，那

么一定会出现周期现象.

看看 $t = 4$ 的例子.这时给定的点为 A_1, A_2, A_3, A_4. u 是四次单位根,因此

$$u = -1,\ 1,\ -i,\ i$$

前已说过, $u = -1$ 时,将导致周期为 1 的点列,这时对四点 A_1, A_2, A_3, A_4 无任何要求.

$u = 1$ 时,这时的动作化为"对称跳".而第二个等式变为

$A_4 - A_3 + A_2 - A_1 = 0$ 亦即 $A_2 + A_4 = A_1 + A_3$. 这时 A_1, A_2, A_3, A_4 为一平行四边形的四个顶点(图 1.6). 我们得到

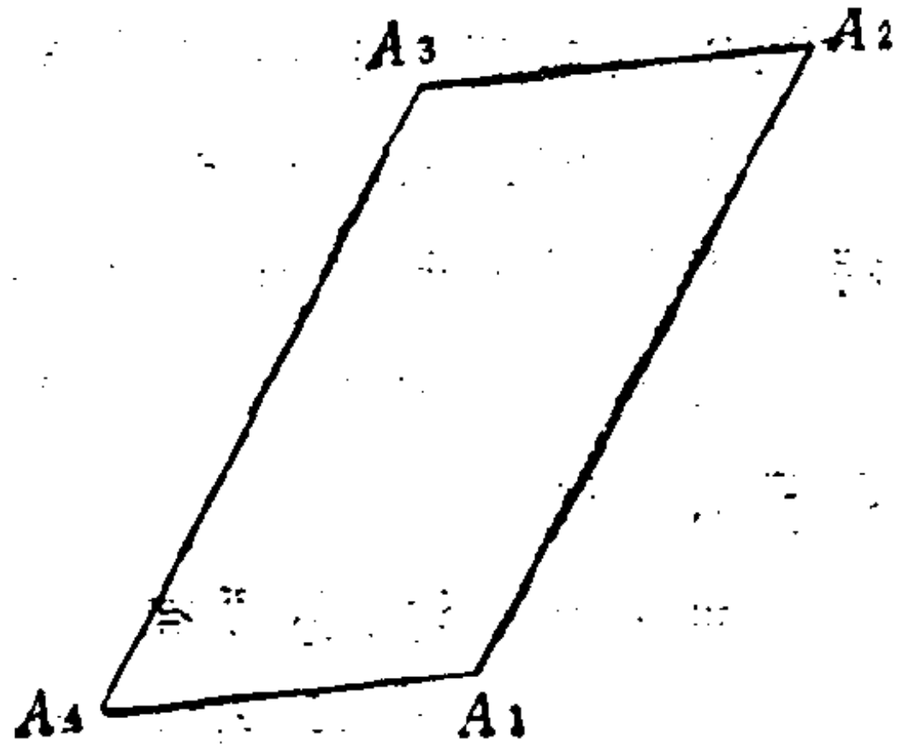


图 1.6

命题 1 如果 A_1, A_2, A_3, A_4 依次为某一平行四边形的四个顶点,那么由平面上的任何一点 P 出发,依次对它们连续作"对称跳",那么四步以后就回到了原地.

命题 1 等价于熟知的几何命题

命题 2 将平面上任意四边形的各边上的中点顺次连接起来,得到的是一个平行四边形.

再看 $u = i$, 这时第二个式子给出

$$A_4 - iA_3 - A_2 + iA_1 = 0$$

即 $(A_1 - A_3)i = A_2 - A_4$. 这表明向量 $\boldsymbol{A_3A_1}$ 向反时针方向旋转一直角时,得到向量 $\boldsymbol{A_4A_2}$ (图 1.7). 如果取 $u = -i$, 则应有 $(A_3 - A_1)i = A_2 - A_4$, 此时四点的分布如图 1.8. 特别,据此我们可以造出如下命题.

命题 3 如果 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个正(负)向的正方形,那

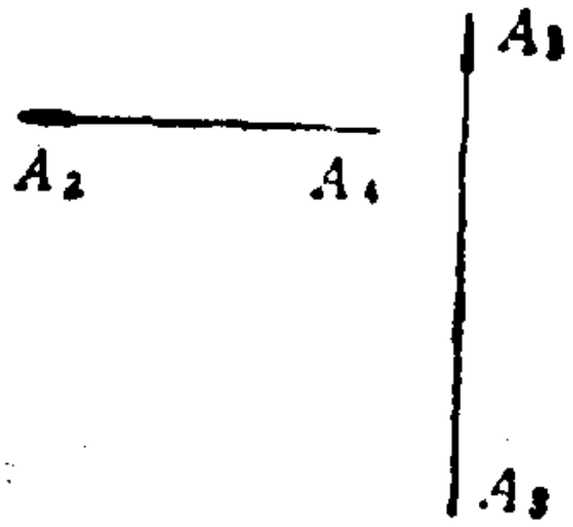


图 1.7

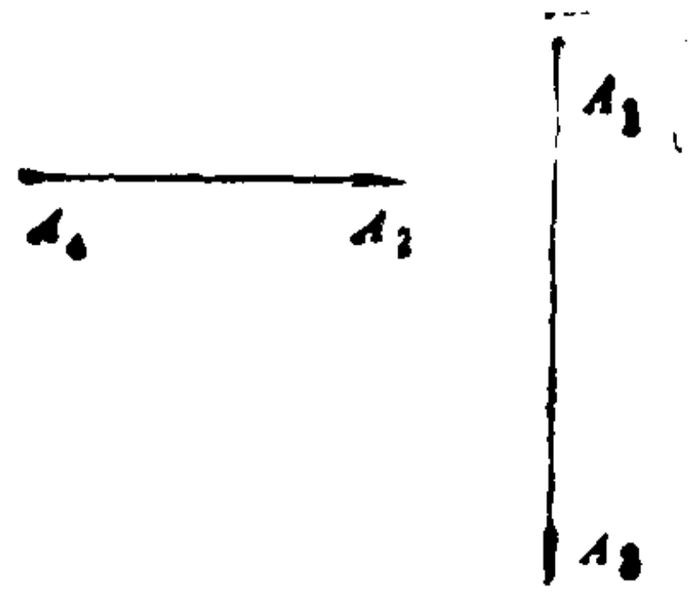


图 1.8

么从平面上任一点出发，依次对这四点作"左(右)转弯 90° 运动"，那么所产生的一定是周期为 4 的点列.

类似地，取 $t = 5$ 或 6，…，再取一 u 为某些特殊的单位根，可以导出形形色色的几何定理，内容将是十分丰富的.

以 $t = 6$ 为例. 六次单位根已在前面写出过了，下面分别予以讨论.

当 $u = 1$ 时，必须有

$$A_1 + A_3 + A_5 = A_2 + A_4 + A_6$$

这就是说，当且仅当 $\triangle A_1A_3A_5$ 与 $\triangle A_2A_4A_6$ 有相同的重心时，对于 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 的对称跳将发生周期现象.

当 $u = e^{i\pi/3}$ 及 $e^{-i\pi/3}$ 时，这时 $u^3 = -1$，于是

$$A_6 - uA_5 + u^2A_4 - u^3A_3 + u^4A_2 - u^5A_1 = 0$$

将变为

$$\left(\frac{A_5 + A_6}{2}\right) - u\left(\frac{A_2 + A_5}{2}\right) + u^2\left(\frac{A_1 + A_4}{2}\right) = 0$$

这表明：当线段 $\overline{A_1A_4}$ 的中点，A_2A_5 的中点，A_3A_6 的中点组成一正(负)向正三角形时，向左(右)转 60° 运动会发生周期现象. 特别，若 $A_1 = A_4$，$A_2 = A_5$，$A_3 = A_6$ 时，分别用 A，B，C 记这三点，因此当 ABC 为正(负)向正三角形时，对它们作左(右)转 60° 的运动将会产生周期现象. 这已经在前面提到过了.

$u=-1$ 时，不论 A_1，A_2，$\cdots$，A_6 为什么点，都产生常驻点列.

最后，讨论 $u=e^{i2\pi/3}$ 及 $e^{i4\pi/3}$. 此时 $u^3=1$，我们必须有

$$(A_6-A_3)-u(A_5-A_2)+u^2(A_4-A_1)=0$$

有好多种情况均可使上式成立. 例如说 $A_4=A_1$，$A_5=A_2$，$A_6=A_3$ 就是其中之一，这时实际上只有三个点 A_1，A_2，A_3，对它们已无任何限制. 这样，又一次得到了：若 A，B，C 为平面上任意给定的三点，依次对它们作左(右)转 120° 的运动，那么 6 次之后一定回到原来的出发点.

4. 这里谈的不是一个数学竞赛题目，它属于初等微积分学的范围，对此不熟悉的同志可以跳过这一段.

在 1978 年美国《数学杂志》的问题栏中，有这样一道题目：在 [0, 1] 上可微的函数 f 适合 $f(0)=0$ 及 $f(1)=1$. 求证：对任何正整数 n，在 [0, 1] 中必存在不同的点 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f'(x_i)}=n.$$

证明是这样的：把 y 轴上的 [0, 1] 区间 n 等分，分点是 $y_i=\frac{i}{n}$，$i=0,1,\cdots,n$. 由连续函数的介值定理，在 x 轴上的 [0, 1] 区间中总存在点 t_i，使得 $f(t_i)=y_i=\frac{i}{n}$，并且可以安排成 $t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1$. 今在区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上用中值定理，知有 $x_i\in(t_{i-1},t_i)$ 使得

$$f(t_i)-f(t_{i-1})=f'(x_i)(t_i-t_{i-1}),$$

亦即

$$\frac{1}{n}=f'(x_i)(t_i-t_{i-1}) \qquad (1)$$

或

$$\frac{1}{f'(x_i)} = n(t_i - t_{i-1}),$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, n$. 将上式对 i 从 1 到 n 求和,便得到

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = n(t_n - t_0) = n,$$

很明显, $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$. 证完.

稍微仔细地想一下便可知道, 何必一定要把 y 轴上的区间 $[0, 1]$ **等分**呢? 对于任意的分割的情形,只是插入分点

$$y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1.$$

这时前面推导的过程都能保持,只是公式(1)应改为

$$y_i - y_{i-1} = f'(x_i)(t_i - t_{i-1}),$$

也就是

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{f'(x_i)} = t_i - t_{i-1},$$

双方对 i 求和可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - y_{i-1}}{f'(x_i)} = 1. \tag{2}$$

若令 $m_i = y_i - y_{i-1} > 0$, 注意,应有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = 1. \tag{3}$$

这时(2)成为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{f'(x_i)} = 1. \tag{4}$$

我们希望把条件(3)隐含在题设之中,只须令

$$m_i = \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这里 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是任意的正数. 代入(4)式之后, 便得到一个面目一新的题目:

设 $[0, 1]$ 上的可微函数 f 适合 $f(0) = 0$ 及 $f(1) = 1$. 对于任意给定的一组正数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 求证: 在 $(0, 1)$

内存在互不相同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

这个题目发表在《数学杂志》1981 年的第 3 期上，后来又被拉尔松（Larson）作为一个习题列在他的著作《通过问题学解题》中.

5. 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的任一函数，那么

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \qquad (5)$$

称为 f 的 n 次伯恩斯坦（Bernstein）多项式. 这里 C_n^i 是组合数

$$C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

伯恩斯坦多项式是高等数学中的一个研究课题.

如果 $f(x) = 1$，那么它的 n 次伯恩斯坦多项式就是

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$
$$= [x + (1-x)]^n = 1.$$

如果 $f(x) = x$，则 $f\left(\frac{i}{n}\right) = \frac{i}{n}$，于是

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}$$

$$= x \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i x^i (1-x)^{n-1-i}$$

$$= x[x + (1-x)]^{n-1},$$

这表明，$f(x) = x$ 的 n 次伯恩斯坦多项式仍旧是 x. 由以上

这两个事实可以推知，如果 f 是一个一次多项式，那么它的任意次的伯恩斯坦多项式仍旧是它自身．这是高等数学中一个人所共知的事实．但是把这一事实改头换面，便可造出下列数学竞赛题．

1986 年全国高中数学联赛第二试第一题：设数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 适合 $2a_i = a_{i-1} + a_{i+1}, i = 1, 2, 3, \cdots$，且 $a_0 \neq a_1$．求证：对任何自然数 n

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \tag{6}$$

是 x 的一次多项式．

这是因为由条件可知

$$a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} = \cdots = a_1 - a_0 \neq 0,$$

这表明 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 是一个公差不为零的等差数列．把公差记为 d，那么 $a_i = a_0 + id$，$i = 1, 2, \cdots$．于是 a_i 可以看作是 $f(x) = a_0 + ndx$ 在 $x = i/n$ 处的值．因此 (6) 表示的正好是一次函数 $a_0 + ndx$ 的伯恩斯坦多项式．

只是为了指出命题的背景材料，我们才讲了伯恩斯坦多项式的简单知识，并不要求中学生具备这种知识．中学生可以有很多的办法，例如直接的计算，或者用数学归纳法等等，来证明这个问题．

6. 最后这个题目的背景是二元的伯恩斯坦多项式．

设平面上给定了一个等边三角形 ABC，在每一边上找出若干点将这一边分成 n 等份，然后用平行于每一边的直线将这些分点联接起来，将这个等边三角形分成了 n^2 个小的等边三角形，图 1.9 中画出了 $n = 4$ 的情况．小三角形的每一顶点称为**结点**，很明显，结点的个数为

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)(n+2)/2.$$

现在转到空间里讨论．设想在那个正三角形的上空，张

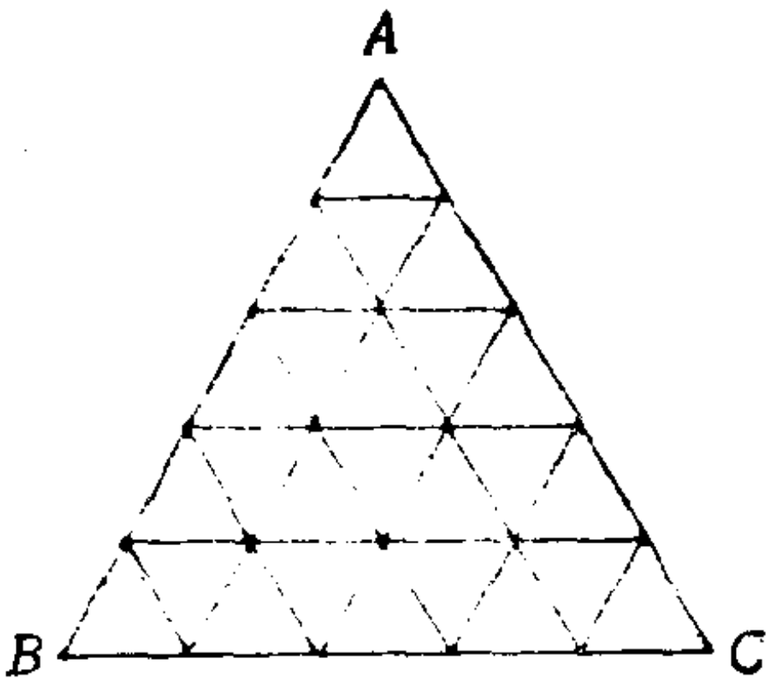


图 1.9

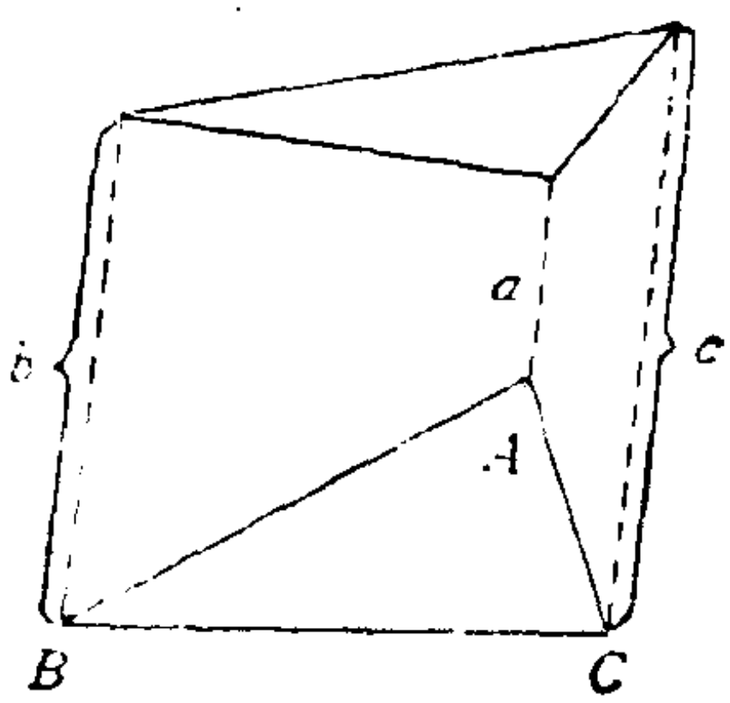


图 1.10

着一个三角形片，这个片完全决定于它与它的下面那个等边三角形的三顶点的距离，见图 1.10 中的 a，b，c。从每一个结点作三角形 ABC 的垂线，与空中那个三角形片将有交点，交点到底平面的距离是一些实数，它们完全被 a，b，c 三数所确定，我们把这 $(n+1)(n+2)/2$ 个实数写在 ABC 中的对应结点上，就得到一张三角形数组，很明显，空间三角形的重心的第三坐标既可以用

$$\frac{a+b+c}{3} \tag{7}$$

来描述，也可以用平均值

$$\frac{\text{各节点上放置的数的总和}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \tag{8}$$

来描述。比较 (7) 与 (8) 式，可知

$$\text{各节点上放置的数的总和} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}(a+b+c).$$

考虑空间图形的结果，使我们能够造出 1987 年全国中学生数学冬令营的一个竞赛试题，为了完备起见，现将题目全部抄录如下：

把一个给定的等边三角形 ABC 的各边都 n 等分，过各分点作平行于其他两边的直线，将这个三角形分成小三角形，小三角形的每一顶点都称为结点。在每个结点上放置了一个实数。已知

(1) A, B, C 三点上放置的数分别为 a, b, c;

(2) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形中，两组相对顶点上放置的数之和相等。

试求所有结点上的数的总和 S。

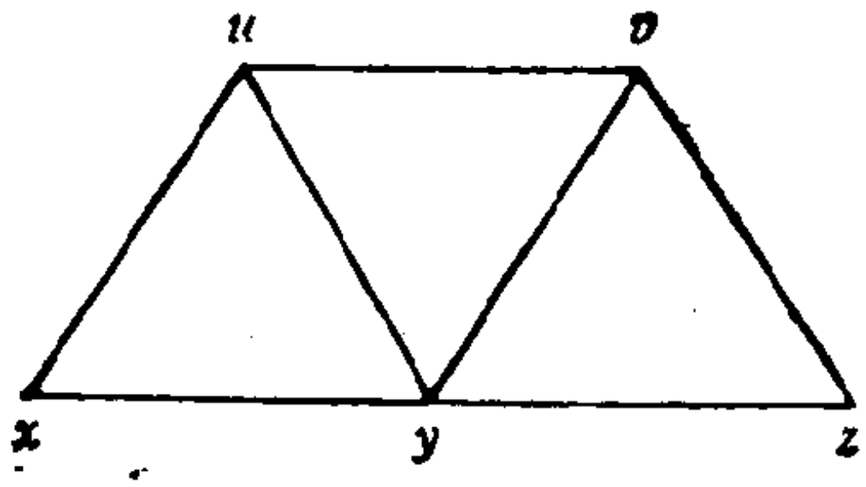


图 1.11

解 考察有下列关系的 5 个结点上所放的数(图 1.11)。由性质 (2) 可得

$$x+v=y+u,\quad y+v=z+u,$$

由此得出 $2y=x+z$，即 $y-x=z-y$，这表明，**任一共线结点上所放的数成一等差数列**，为简便计，我们称这个性质为性质 1 好了。由此可见，每一个结点上所放数值完全由 a, b, c 所决定。原则上说，我们可以把每个节点上的数通过 a, b, c 表达出来，然后再算总和 S。但是，上海向明中学的学生潘子刚(后来他成了我国参加第 28 届国际数学奥林匹克的代表队员)所给出的解答充分地利用了对称性，为此他获得了本届冬令营的特别奖。

他将同一个正三角形按不同的方位放置 (图 1.12)，然后把它们迭起来，对应结点上的三个数作加法，得到一张新的三

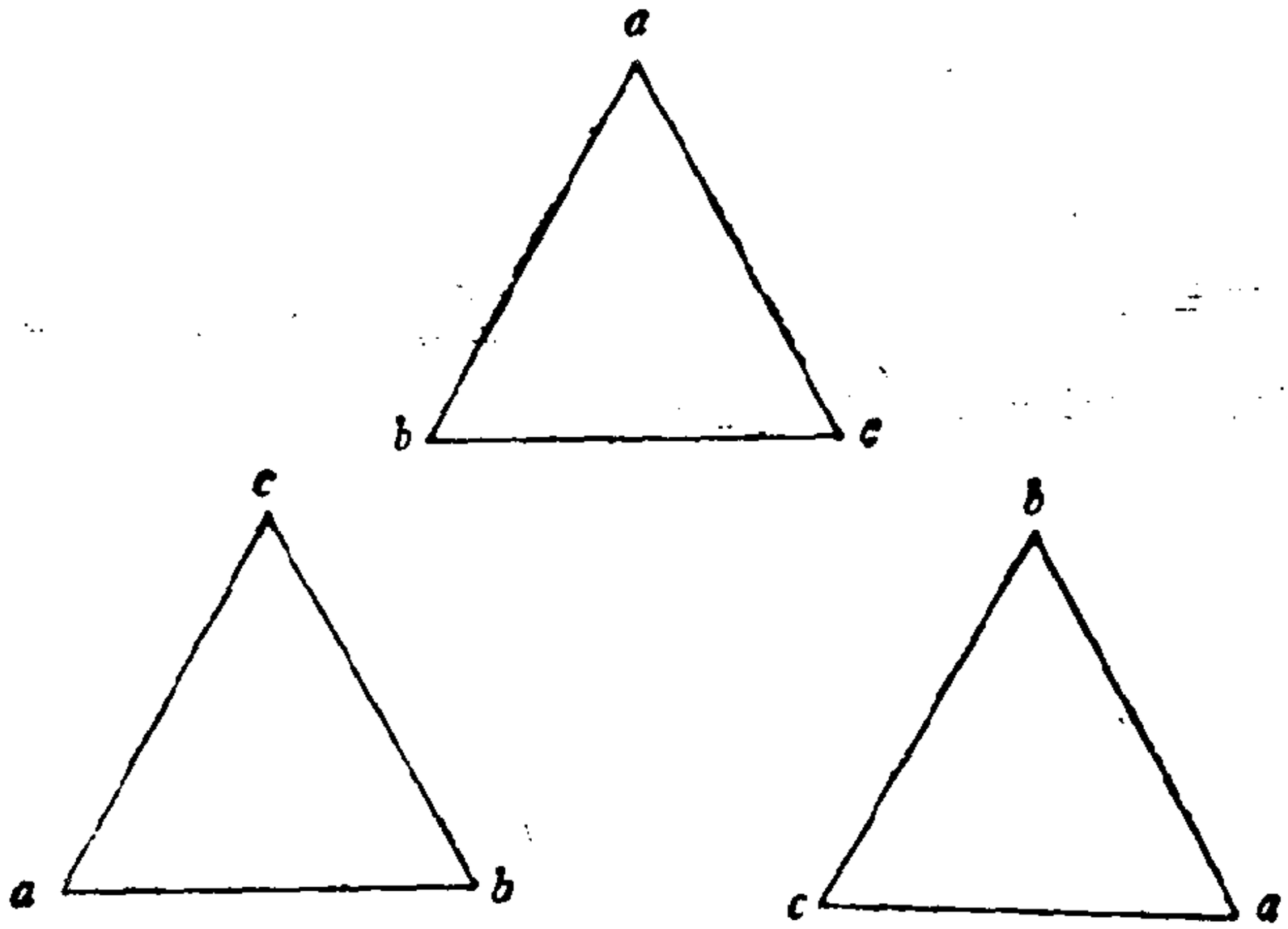


图 1.12

角形数表，三顶点上的数都是 $a + b + c$（图 1.13）。

由于原来的三张数表有性质 1，所以迭加起来的数表也有性质 1，由此得出每一结点上所放的数都是 $a + b + c$，因此总和为

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}(a+b+c),$$

但因它是由具有同一和数 S 的三张三角形数表迭起来的，故上数应为 $3S$，所以

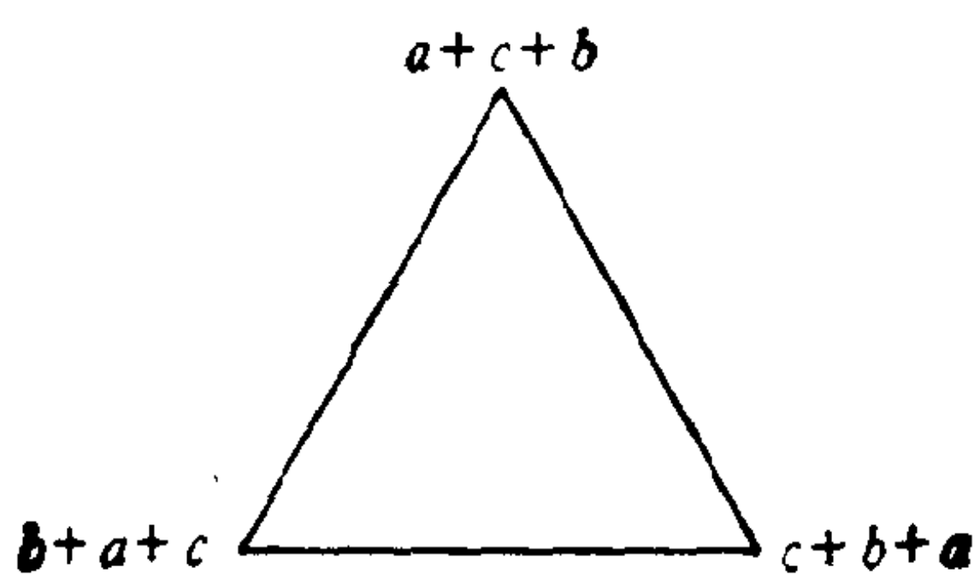


图 1.13

$$S = \frac{(n+1)(n+2)}{6}(a+b+c),$$

与我们预想的结果一致。

题目中的条件（2）正是为了保证每一个结点上空的对应点全落在一张平面上而设置的。

第二讲　反　证　法

徐　森　林

反证法是证明命题正确的一种行之有效的方法．在各种数学竞赛中，都会有应用反证法来论证的命题．因此，反证法是必须掌握的一种方法．它的要点是，假设命题不真，通过一系列正确的逻辑推理，导出一个与已知条件或已知结论相矛盾的结论，从而断言“假设”是不正确的，原命题是正确的．这个方法的关键是如何从“假设”导出矛盾．

在证明“存在”或“不存在”的问题时，特别能显示出反证法的作用．下面的例 1—例 7 都是这类问题．

例 1（1958 年波兰数学竞赛题）　如果整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，那么 a，b，c 至少有一个是偶数．

证明　假设 a，b，c 都为奇数．因为二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有有理根，则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 为奇数和完全平方数．因而 Δ 为奇数的平方．　为此可设 $\Delta=b^2-4ac=(2n+1)^2$，n 是非负整数．这样，$b^2=4ac+(2n+1)^2$，而

$$(b+1)(b-1)=b^2-1=4ac+(2n+1)^2-1$$
$$=4(n^2+n+ac).$$

b 是奇数，因此 $b+1$，$b-1$ 中一个是 2 的倍数，另一个一定是 4 的倍数，故 $(b+1)(b-1)$ 是 8 的倍数．但 $n(n+1)$ 是偶数，ac 是奇数，故 $n^2+n+ac=n(n+1)+ac$ 是奇数，$4(n^2+n+ac)$ 只能是 4 的倍数，不能是 8 的倍数．这就导出了矛盾．

所以 a, b, c 至少有一个是偶数.

例 2 (第 5 届美国数学奥林匹克试题) 证明不存在自然数 a, b, c, n 使得

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^n abc.$$

证明 假设存在四个自然数 a, b, c, n 使得

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^n abc.$$

因为右边 $2^n abc$ 是偶数，所以左边也一定是偶数. 又由于 $a^2 + b^2 + c^2$ 为三项式，因此可分两种情形讨论.

情形 1 a, b, c 不全为偶数. 由于 $a^2 + b^2 + c^2$ 为偶数，a, b, c 中恰有两个为奇数，一个为偶数. 由 a, b, c 在式中位置的对称性，不妨设 a, b 为奇数，c 为偶数. 令

$$a = 2m + 1, \quad b = 2k + 1, \quad c = 2c_1,$$

其中 m, n, c_1 为整数，代入就有

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (2m + 1)^2 + (2k + 1)^2 + 4c_1^2 \\ &= 4(m^2 + m + k^2 + k + c_1^2) + 2, \\ 2^n abc &= 2^n(2m + 1)(2k + 1) \cdot 2c_1 \\ &= 2^{n+1} c_1(2m + 1)(2k + 1), \\ 2 &= 4[2^{n-1} c_1(2m + 1)(2k + 1) - m^2 - \\ &\quad m - k^2 - k - c_1^2], \end{aligned}$$

显然，右边是 4 的倍数，而左边不是 4 的倍数，矛盾. 因此，这种情形是不可能存在的.

情形 2 a, b, c 全为偶数. 设

$$a = 2^m a_1, \quad b = 2^m b_1, \quad c = 2^m c_1,$$

其中 a_1, b_1, c_1 是不全为偶数的自然数. 代入原等式有

$$2^{2m}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = 2^{n+3m} a_1 b_1 c_1,$$

从而

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^{n+m} a_1 b_1 c_1,$$

a_1, b_1, c_1 不全为偶数. 这就回到了情形 1，因此也是不可能

的.

综上所述,不存在自然数 a, b, c, n 使等式

$$a^2+b^2+c^2=2^nabc.$$

成立.

例 3 设集合 S 中的元素为素数,且满足条件:若 $a, b\in S$, 则 $ab+4\in S$. 证明 S 为空集.

证明 设 N 表示自然数集合, $x, y\in$ N. 如果 $y-x$ 为 $n\in$ N 的整倍数,则记作 $n\mid y-x$ 或 $y\equiv x(\mathrm{mod}\ n)$. 令

$$x^*=\{y\mid y\equiv x(\mathrm{mod}\ 7)\},$$

$$S^*=\{x^*\mid x\in S\}.$$

假设 S 为非空集,一定有素数 $a\in S$, 就有 $a^*\in S^*$, 故 S^* 也非空. 由 S 的条件可得到下面一系列的结果:

$$3^*\in S^*\Rightarrow(3^2+4)^*=6^*\in S^*,$$

$$4^*\in S^*\Rightarrow(4^2+4)^*=6^*\in S^*,$$

$$6^*\in S^*\Rightarrow(6^2+4)^*=5^*\in S^*$$

$$\Rightarrow(5^2+4)^*=1^*\in S^*$$

$$\Rightarrow(1\cdot(1^2+4)+4)^*=2^*\in S^*$$

$$\Rightarrow(2^2+4)^*=1^*\in S^*,$$

$$(1^2+4)^*=5^*\in S^*,$$

$$(2\times5+4)^*=0^*\in S^*.$$

可以看出,若有素数 $a\in S$, 一定能得到 $0^*\in S^*$. 由于 S 为素数集合, 故 $7\in S$. 由条件 $7^2+4=53\in S$, $7\times53+4=375\in S$, 但 $375=5^3\times3$ 不是素数,矛盾. 所以 S 必为空集.

例 4 证明方程 $[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$ 无实数解 ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

证明 假设方程有实数解 x, 则

$$195\times63<12345=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$$

$$\leqslant x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x$$
$$= 63x, \quad 195 < x.$$

又若 $x \geqslant 196$，则 $[x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x] \geqslant 63 \times 196 = 12348 > 12345$，所以 $195 < x < 196$。

记 $x = 195 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$，$a_i = 0$ 或 1，则有

$$2x = 2 \times 195 + a_1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i},$$

$$4x = 4 \times 195 + 2a_1 + a_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+2}}{2^i},$$

$$8x = 8 \times 195 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+3}}{2^i},$$

$$16x = 16 \times 195 + 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+4}}{2^i},$$

$$32x = 32 \times 195 + 16a_1 + 8a_2 + 4a_3 + 2a_4 + a_5 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+5}}{2^i},$$

代入方程化简得到

$$12345 = [x] + [2x] + [4x] + [8x] + [16x] + [32x]$$
$$= 63 \times 195 + 31a_1 + 15a_2 + 7a_3 + 3a_4 + a_5,$$
$$60 = 12345 - 63 \times 195 = 31a_1 + 15a_2 + 7a_3 + 3a_4 + a_5$$
$$\leqslant 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 57,$$

矛盾。

所以方程无实数解。

例 5 设 x 为任一实数，证明数 $x, 2x, \cdots, nx$ 中必有一数，它与一个整数之差的绝对值不大于 $\frac{1}{n+1}$。

证明 假设在数 $x, 2x, \cdots, nx$ 中没有数与一个整数之差的绝对值不大于 $\frac{1}{n+1}$。由于

$$[ix] \leqslant ix < [ix] + 1,$$

则

$$ix - [ix] > \frac{1}{n+1},$$

$$[ix] + 1 - ix > \frac{1}{n+1}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

由抽屉原理，存在 $i, j \in \mathrm{N}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$ 使得

$$|jx - [jx] - (ix - [ix])| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

即

$$|(j-i)x - ([jx] - [ix])| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

$(j-i)x \in \{x, 2x, \cdots, nx\}$，它与整数 $[jx] - [ix]$ 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{n+1}$，这与假设相矛盾。所以结论成立。

例 6 （1978 年安徽数学竞赛试题） 有两个同心圆盘，各分成 n 个相等的小扇形，外盘固定，内盘可转动（如图 2.1 所示），内外两盘的小扇形上分别填有实数 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$，且满足：

$$a_1 + \cdots + a_n < 0,$$

$$b_1 + \cdots + b_n < 0.$$

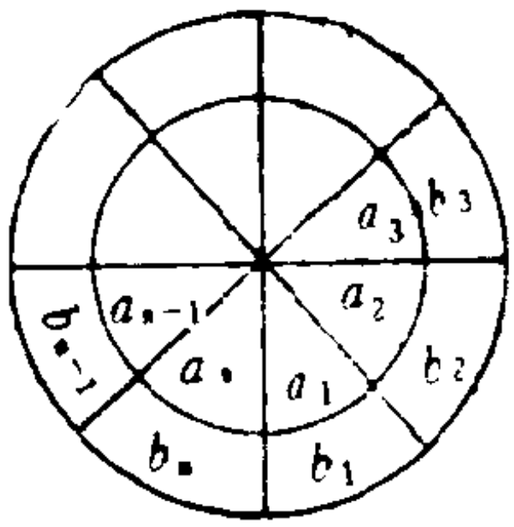


图 2.1

证明可将内盘转动到一个适当位置，使两个盘的小扇形对齐，两个盘 n 个对应小扇形内数字之积的和为一正数。

证明 假设这样的位置不存在，把 n 个小扇形对应数字

之积的和都写出来就有

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant 0,$$

$$a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \leqslant 0,$$

$$\cdots$$

$$a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1} \leqslant 0.$$

将以上各式相加得

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) \leqslant 0.$$

但已知 $a_1 + \cdots + a_n < 0$，$b_1 + \cdots + b_n < 0$，所以

$$(a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) > 0,$$

这就产生了矛盾．因而命题是成立的．

例 7（1964 年匈牙利数学奥林匹克试题） 在毕业舞会上，每个小伙子至少和一个姑娘跳舞，但任何一个小伙子都没有和所有的姑娘跳舞．而每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞，但任何一个姑娘都没有和所有的小伙子跳舞．证明在所有参加舞会的人中，可以找到这样两个小伙子和两个姑娘，这两个小伙子中的每一个只和这两个姑娘中的一个跳过舞，而这两个姑娘中的每一个只和这两小伙子中的一个跳过舞．

证明 假设在出席毕业舞会的小伙子和姑娘中，不能挑出满足本题条件的四个人．

设 G_1 是一个姑娘，F_1 是和 G_1 跳过舞的一个小伙子，G_2 是没有和 F_1 跳过舞的一个姑娘，F_2 是和 G_2 跳过舞的一个小伙子．可以断定 F_2 和 G_1 跳过舞，否则 G_1，F_1，G_2，F_2 四个人将满足本题结论的要求，与假设相矛盾．

假设在参加毕业舞会的人中我们已挑出了一组人：

$$G_1,\ F_1,\ G_2,\ F_2,\cdots,\ G_k,\ F_k,$$

其中当 $j \leqslant i$ 时，小伙子 F_j 与姑娘 G_j 跳过舞；当 $j > i$ 时，小伙子 F_j 与姑娘 G_j 未跳过舞．当 $k = 2$ 时．这样的组的存在性上面已证过．

现在证明对上面挑出的一组人总可以再增加一对人G_{k+1}，F_{k+1}，使扩大的组仍具有原来组的性质. 因为 F_k 与 $G_1,\cdots,G_k$ 中每一个都跳过舞，那么至少有一个姑娘 G_{k+1}，F_k 未和她跳过舞. 则姑娘 G_{k+1} 没有和小伙子 $F_1,\cdots,F_{k-1}$ 中任何一个跳过舞.(反证) 若她和小伙子 $F_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 跳过舞，则 G_k，F_k，G_{k+1}，F_i 四个人具有本题结论中的要求，因而与假设矛盾. 既然 G_{k+1} 没有和小伙子 $F_1,\cdots,F_k$ 中任何一个跳过舞，则在舞会的参加者中至少可以找到一个和 G_{k+1} 跳过舞的小伙子 F_{k+1}. 不难看出，F_{k+1} 和 $G_1,\cdots,G_k$ 都跳过舞 (反证)若他没有和 $G_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 跳过舞，则 G_i，F_i，G_{k+1}，F_{k+1} 四个人与假设相反而满足本题结论中的全部要求. 于是我们作出了一个扩大了的序列:

$$G_1,\ F_1,\ G_2,\ F_2,\cdots,\ G_k,\ F_k,\ G_{k+1},\ F_{k+1},$$

它具有同样的性质: 小伙子中的任何一个 F_i 和任何一个姑娘 $G_j(1\leqslant i,\ j\leqslant k+1)$，当 $j\leqslant i$ 时跳过舞;当 $j>i$ 时没有跳过舞.

由于这种过程可以无限地作下去，所以参加舞会的人应有无限个，这与参加舞会的人只有有限个相矛盾.

所得到的矛盾证明了本题断言的正确性.

此外，反证法在证明"有限个"和"无限个"的问题中也能得到充分的应用. 下面举两个这方面的例子.

例 8 (1983 年济南数学竞赛试题) 证明形如 $6n+5$ $(n\in\mathbf{N})$ 的素数有无限个.

证明 用归纳法可以证明 $\prod_{i=1}^{n}(6k_i+1)=6k+1$，其中 k_i，$k\in\mathbf{N}$.

(反证) 假设等差数列 $\{6n+5\mid n\in\mathbf{N}\}$ 中只含有限个素数，把它们记作 $p_1,\cdots,p_r$，则奇数 $Q=6p_1\cdots p_r-1$ 一定

含有素因子 $6p+5$. 事实上，因为奇数的素因子的形状只有 $6p+1$，$6p+5$. 如果 Q 不含形如 $6p+5$ 的素因子，即 Q 只含形如 $6p+1$ 的素因子.因此，$Q=\prod_{i=1}^{n}(6k_i+1)$，$k_i\in \mathbf{N}$，故存在 $k\in \mathbf{N}$ 使 $Q=6k+1$. 再由 $6k+1=Q=6p_1\cdots p_r-1$ 得 $3(p_1\cdots p_r-k)=1$，所以，$3|1$(3 能除尽 1)，这是不可能的. 于是，Q 含有素因子 $6p+5$，由于形如 $6p+5$ 的素数只有 $p_1,\cdots,p_r$，故存在 $p_i=6p+5$，$6p+5=p_i|6p_1\cdots p_i\cdots p_r$，$6p+5|Q$，从而 $6p+5|6p_1\cdots p_r-Q=1$，矛盾. 这就证明了 $\{6n+5|n\in \mathbf{N}\}$ 中含有无限个素数.

例 9（第 7 届国际数学奥林匹克试题）设平面上有 $n(\geqslant 3)$ 个点，其中任两点的距离最大为 d. 距离为 d 的两点间的线段称为这组点的直径. 证明直径的数目至多 n 条.

证明 假设直径多于 n 条. 如果从某个点出发的直径少于两条，可以把这个点除去，剩下的 $n-1$ 点至少有 n 条直径(显然 $n-1\geqslant 3$). 故不妨设从任何一点出发都至少有两条直径.

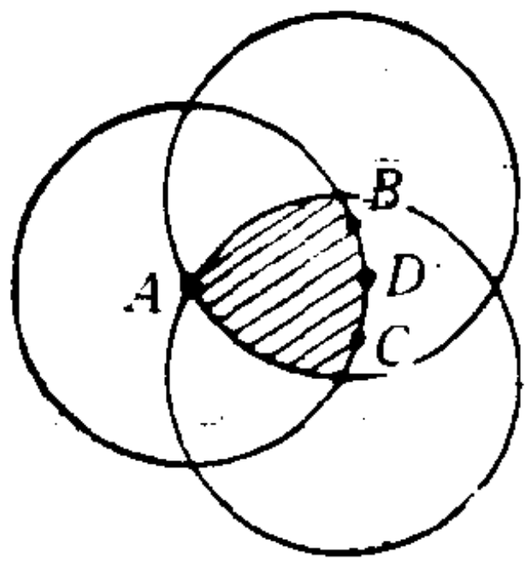


图 2.2

因为直径的数目比点多，所以至少有一个点 A 引出三条直径 AB，AC，AD，每两条直径的夹角不超过 60°，否则另一端 B，C，D 间的距离会大于 d. 不妨设 AD 在 AB 和 AC 之间，圆 $\odot(A,d)$，$\odot(B,d)$，$\odot(C,d)$ 的公共部分包含着全部 n 个点，但其中与 D 的距离为 d 的点只有 A 一个，与从一点出发至少有两条直径相矛盾. 所以直径的数目至多 n 条.

通过上面的例子，可以看到，反证法在论证命题时可以起到直接证法起不到的作用，在无法直接证明一个命题时，往往

就可以使用“反证法”这个武器。以下继续用反证法来证明几个命题。

例 10（西尔维斯特（J. J. Sylvester）问题） 设 M 为平面上的有限点集，M 中的任两点的连线必过 M 中的第三点，则 M 中的点必在一直线上。

证明 假设 M 中的点不在一直线上。在 M 中任取两点作一直线，直线外必有 M 中另外的点。直线外的点到该直线都有大于 0 的距离。这样的直线有有限多条，这种距离的值也只有有限个，故有最小者。

不妨设 $A \in M$ 到过 M 中三点 B，C，D 的直线 l 的距离为上述的最小者（C 在 B 和 D 之间），则 C 到 AB，AD 的距离中必有一距离比 A 到 l 的距离更小，这与 A 到 l 的距离为最小者相矛盾。从而证明了 M 中的点必在一直线上。

例 11 证明平面上任何两个半径小于 1 的圆片不能覆盖住一个半径为 1 的圆片。

证明 假设两个半径分别为 $r_1, r_2 < 1$ 的圆片 O_1，O_2 能覆盖半径为 1 的圆片 O。连结 OO_1，过 O 作直径 $AB \perp OO_1$（$O = O_1$ 时结论明显成立），则

$$O_1A = O_1B > OA = OB = 1 > r_1,$$

所以 A，$B \in$ 圆片 O_1，于是，A，$B \in$ 圆片 O_2，且

$$2 = \overline{AB} \leqslant 2r_2 < 2, \text{ 矛盾.}$$

为了再举两个用反证法证明的有趣例子，我们先介绍可数集和不可数集的概念。

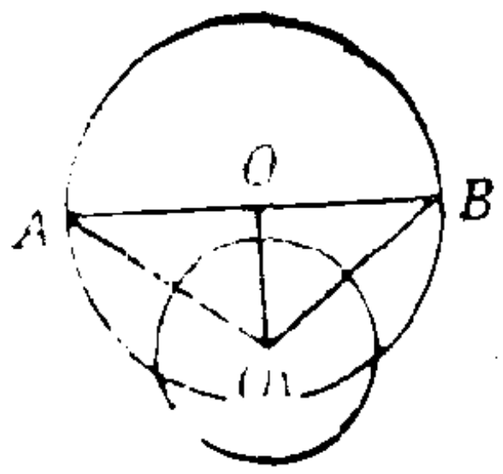
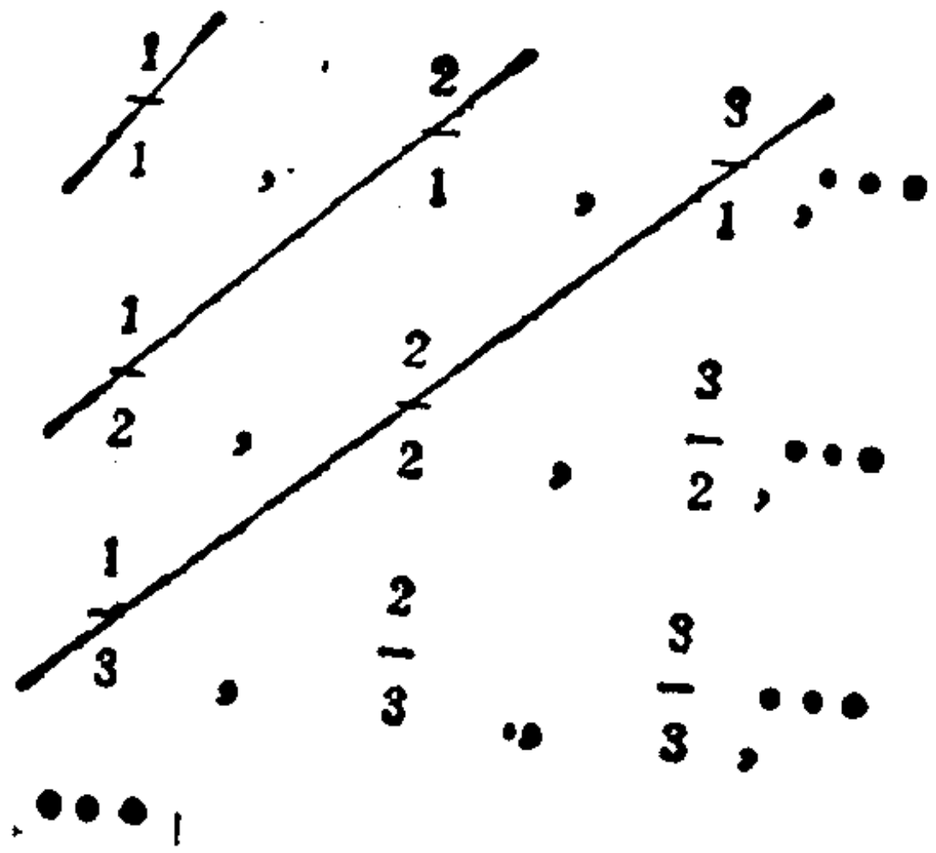


图 2.3

与自然数集 $\mathbf{N}$ 一一对应的集合称为可数（列）集。换句话说，可数集是可以将该集中所有元素依次排列为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的集合。有限集或可数集统称为至多可数集。不是可

数的无限集(即与N 不能一一对应的无限集)称为不可数(列)集.

例如有理数集 Q 可按



中斜线和有理数正负相间次序(有重复数只排第一个，如 $\frac{1}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{3}$，… 只排 $\frac{1}{1}$) 依次排列为

$$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \cdots,$$

所以 Q 为可数集，记 $Q = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$.

再如平面上有理点集 $Q^2 = \{(r_i, r_j) | i, j = 1, 2, \cdots\}$ 可由 $i + j$ 从小到大的次序排列为

$(r_1, r_1), (r_2, r_1), (r_1, r_2), (r_3, r_1), (r_2, r_2), (r_1, r_3), \cdots,$

所以 Q^2 也为可数集.

例 12 证明直线上的任一开区间 (a, b) 不能表示成至多可数个彼此不相交的闭区间 $F_i = [a_i, b_i] (a_i \leqslant b_i)$ 的并集. 因而开区间 (a, b) 是不可数集.

证明 假设 (a, b) 可表示成至多可数个不相交的闭区间 $F_i = [a_i, b_i] (a_i \leqslant b_i)$ 的并，即 $(a, b) = \bigcup_i F_i$.

(1) 如果 $\{F_i\}$ 为有限集，记为 $\{F_i | i = 1, \cdots, n\}$. 因

为 $a\in\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，令 $\varepsilon=\min\left\{|x-a|\,\middle|\,x\in\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i\right\}$，显然 $\varepsilon>0$

且 $(a,a+\varepsilon)\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i=\Phi$（空集），所以 $(a,b)\neq\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$.

(2) $\{F_i\}$ 为可数集. 因为 $F_1\cap F_2=\Phi$，令

$$(c_1,d_1)=(\min(b_1,b_2),\max(a_1,a_2)),$$

则 $(c_1,d_1)\cap(F_1\cup F_2)=\Phi$. 设含在 (c_1,d_1) 内的 F_i 中下标最小的为 m_1，次小的为 n_1，同上证明可得到 (c_2,d_2)，使 $(c_2,d_2)\subset(c_1,d_1)$，且 $(c_2,d_2)\cap(F_{m_1}\cup F_{n_1})=\Phi$，依次类推可得到 (c_k,d_k) 使 $(c_k,d_k)\subset(c_{k-1},d_{k-1})$ 且 $(c_k,d_k)\cap(F_{m_{k-1}}\cup F_{n_{k-1}})=\Phi$. 于是，由闭区间套原理，必有

$$a_0\in[c_i,d_i],\ i=1,2,\cdots.$$

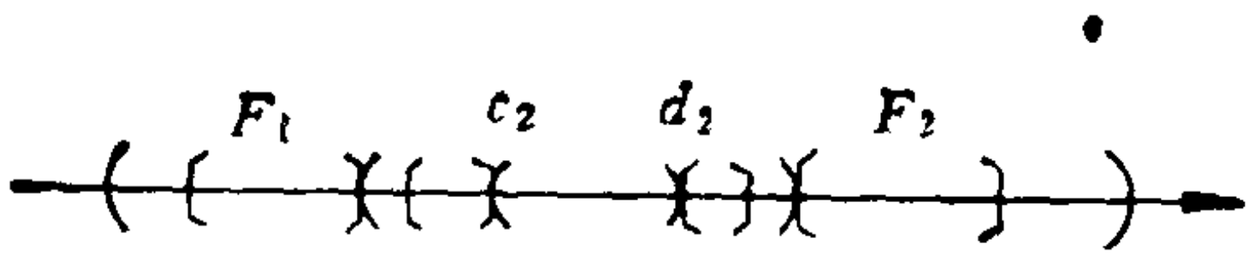


图 2.4

由区间的造法知道，$a_0\in F_i$，$i=1,2,\cdots$，即 $a_0\in\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$，这与 $a_0\in(a,b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ 相矛盾.

例 13 证明平面上边平行坐标轴的开矩形 $(a,b)\times(c,d)$ 不能被含在此开矩形之中的彼此无公共内点的圆片所覆盖.

证明 假设 $(a,b)\times(c,d)$ 能被含在此开矩形之中的彼此无公共内点的圆片所覆盖.

在每个圆片内部取一个有理点，则不同的圆片所取的有

理点不同. 因为有理点集 Q' 是可数集，所以圆片至多有可数个，而圆片彼此的切点至多可数个. 因 (c, d) 为不可数集，故存在 $e \in (c, d)$，使直线段 $l = \{(x, e) | a < x < b\}$ 不经过所有的切点. 于是，l 与各圆片或者不相交，或者相交于一闭区间线段(包括退缩为一点)，而这些闭区间是至多可数个，且彼此不相交，记为 F_i，$i = 1, 2, \cdots$. 于是，$l = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$，这与例 12 中的结论相矛盾.

第三讲　数学归纳法应用技巧举例

苏　淳

众所周知，数学归纳法是一种重要的数学证明方法，有着广泛的应用．在各类数学竞赛中，也多有有关的试题出现，国际数学奥林匹克中的试题还具有相当难度．这种局面提醒我们要注意这一方法的应用技巧．笔者曾在多种场合介绍过其中的一些常用技巧，本文则打算围绕几个难度较大的问题，进一步谈谈数学归纳法应用中的几个值得注意的方面，或者称为技巧．

一般来说，用归纳法证题时的第一步验证是比较容易的，而第二步的归纳过渡则有时会具有相当的难度．所以本文的内容主要是围绕着第二步的归纳过渡来谈的．

要想顺利地实现归纳过渡，其关键就是要能有效地利用归纳假设．在归纳法的基本形式之下，就是首先要能成功地将“$n=k+1$”的情形化归“$n=k$”的情形，以便能够利用归纳假设．但是仅有这一步还是不够的，因为我们的真正目标是“$n=k+1$”，因此还有一个从“$n=k$”恢复为“$n=k+1$”的问题．这就需要我们在由“$n=k+1$”退到“$n=k$”的过程中，预先埋下伏笔，以便能够成功地“复位”．这样两个“一退一复”的过程，在一些简单问题中显得并不突出，未必值得特别考虑，而在一些较为复杂的问题中则有时却很需要一番慎重的考虑．在这种考虑中，往往需要我们对问题中的数量关系作一番深入、细致的考察和研究．下面来看两个例子．

例 1 设 n 为 2 的正整数次方幂. 证明,从任何由 $2n-1$ 个正整数所组成的集合中,总能取出 n 个整数来,它们的和可被 n 整除.

记 $n=2^m$,其中 m 为正整数. 我们可以通过对 m 使用归纳法来论证命题.

当 $m=1$ 时,有 $n=2$ 及 $2n-1=3$. 由于在任意 3 个正整数中,至少会有两个数的奇偶性相同,它们的和为偶数,可被 $n=2$ 整除,知命题成立.

接下来,我们假设当 $m=k$ 时,命题已成立,要证当 $m=k+1$ 时,命题也能成立. 由于此时 $n=2^{k+1}$, $2n-1=2^{k+2}-1$,所以我们就是要证明,在任意 $2^{k+2}-1$ 个正整数中,都可以找出 2^{k+1} 个来,它们的和可被 2^{k+1} 整除. 为了解决这个问题,我们当然要利用归纳假设,即"已知从任意 $2^{k+1}-1$ 个正整数中都可以找出 2^k 个来,它们的和可被 2^k 整除",但问题是怎样利用?

显然, $2^{k+2}-1=2\cdot 2^{k+1}-1=2(2^{k+1}-1)+1$,所以我们自然地会想到,可将现有的 $2^{k+2}-1$ 个正整数分为 3 组,使它们各有 $2^{k+1}-1$, $2^{k+1}-1$ 和 1 个数,然后再应用归纳假设于前两个组,知从中各可选出 2^k 个数来,使它们的和分别可被 2^k 整除. 所以看起来,由"$m=k+1$"退到"$m=k$"似乎并不难. 但是,我们还需要"复位",还要由"$m=k$"回到"$m=k+1$". 这样一来,我们便面临着一个难题:"将上面所述的、由两个组中分别挑出的 2^k 个数合在一起,这样所得到的 2^{k+1} 个数的和,是否一定可被 2^{k+1} 整除?"显然,谁也不能打这个保票. 可见刚才的"退"并未为现在的"复"埋好伏笔,以致现在在"复位"问题上陷入了困境,这也就告诉了我们,刚才对归纳假设的利用并不是完全成功的.

怎么办?我们当然还可以回过头去审视刚才的证明过程,

当然也不妨多想几个方面，包括从 $m=1$ 的情形去寻求启示．这样的“审视”对我们自然是有益的，它可以启发我们考虑：既然每 3 个正整数当中都会有某两个之和可被 2 整除，那么每 3 组 2^k 个适当的正整数之中会不会必有两组之和可被 2^{k+1} 整除呢？看来这里面有着某种共性，开门的钥匙可能正在于此，可能正在于整数的奇偶性．

以上的思考，自然会启发我们去设法从 $2^{k+2}-1$ 个正整数中，找出 3 组 2^k 个数来，它们的和分别可被 2^k 整除．因为我们只要能找出这样 3 组 2^k 个数，那么它们的和就可以分别表示成

$$a\cdot 2^k,\ b\cdot 2^k \text{ 和 } c\cdot 2^k$$

的形式，其中 a,b,c 为正整数，而它们中自然会至少有两者的奇偶性相同，不妨设为 a 和 b 奇偶性相同，于是就只要将前两组 2^k 个数相加，并注意到 $a+b=2d$，其中 d 为正整数，便知该 2^{k+1} 个数的和为

$$a\cdot 2^k+b\cdot 2^k=(a+b)\cdot 2^k=d\cdot 2^{k+1},$$

确实可被 2^{k+1} 整除．因而便可成功地“复位”了．

这样一来，关键的问题，便仍在于如何有效利用归纳假设，以便从 $2^{k+2}-1$ 个正整数中，找出相互之间没有公共成员的 3 组 2^k 个数来，使得它们的和分别都可被 2^k 整除？如果我们仍从前面已有的基础上来考虑这个问题，便会发现它并不难解决．

事实上，前面已从 $2^{k+2}-1$ 个数中，找出了两组相互之间没有公共成员的两组 2^k 个数，它们的和分别可被 2^k 整除，因此只要再从剩下的数中找出一组来就行了．注意到这时我们还剩有

$$2^{k+2}-1-2\cdot 2^k=2^{k+1}-1$$

个正整数，便知还可再应用一次归纳假设于剩下的数，从中选

出我们所翘首以盼的第 3 组 2^k 个数来，以满足归纳过渡中“复位”的需求．至此，我们总算是为例 1 觅得了完满的解答途径．

通过对上述例题的分析和解答的过程，我们希望读者能总结出一些应用数学归纳法来解题的经验来．我们则想在此再次强调这样一句话：利用归纳假设，是应用数学归纳法解题的必由之路，也是根本大计，但利用归纳假设的目的是为了由“$n=k$”得到“$n=k+1$”，因此关键的关键还在于由“$n=k$”恢复到“$n=k+1$”．所以要求我们既要能“退”，又要能“复”．而要做到这一点，首要的问题便是学会深入考察问题中的数量关系，善于寻求启示和规律．

例 2 设M是由有限个格点构成的平面点集，现将M中的每个点都分别染为蓝、白两色之中的一种颜色．证明，可以有一种办法，使得在每条平行于坐标轴的直线上，所染的两色点的数目至多相差 1 个．

这是 1986 年的一道国际数学奥林匹克试题．大家知道，一旦在平面上取定一个直角坐标系之后，平面上的每个点便都唯一地对应于一对实数 (x, y)，它们分别称为该点的横坐标和纵坐标．其中两个坐标值都是整数的点叫做整点，也叫做格点．有关格点的许多命题都是非常有趣的．

现在我们来将M中的格点数目记作 n，并通过对 n 使用数学归纳法来论证上述命题．

当 $n=1$ 时，命题的结论显然是成立的．

假设当 $n=k$ 时，结论已成立，我们要来证明当 $n=k+1$ 时，命题的结论也可成立．毫无疑问，我们需要利用归纳假设．这样，我们就要先自M中去掉一个点，而先对其余 k 个点按照规则着色，然后再恢复到“$n=k+1$”的情形．即要在保持已着色的 k 个点不变的情况下，适当对刚才去掉的一个

点着色，使得题述的要求仍能满足．这就告诉我们：如何去点是很重要的，因为它涉及到能否顺利“复位”的问题．

如果在某条平行于坐标轴的直线 l_1 上有 M 中奇数个点，那么上述问题极易解决．事实上，我们只要先自 l_1 上去掉一个 M 中的点 A，并将归纳假设应用于集合 $M_1 = M - \{A\}$，即可知存在一种办法，可使每条平行于坐标轴的直线上的 M_1 中的点中，着蓝、白两色的点数至多相差 1 个．此时，由于 l_1 上有 M_1 中偶数个点，所以其中的蓝、白两色点数必然相等．因此，无论将 A 点着为蓝色还是着为白色，l_1 上的 M 中的两色点数都至多相差 1 个．所以只须根据过 A 点而平行于另一坐标轴的直线 l_2 上的 M_1 中的蓝、白点的多寡情况，将 A 适当着色，即可使得每条平行于坐标轴的直线上，M 中的两色点数都至多相差 1 个．可见在此种情况下，命题的结论在 $n = k+1$ 时也成立．

如果不是上述情况，则“复位”稍微要复杂一些，这时就需要我们深入细致地考察命题内部的数量关系了．此时，在每条平行于坐标轴的直线上都有 M 中偶数个点，而我们却必须先去掉其中之一．假设我们先去掉 A 点，并记 $M_1 = M - \{A\}$，则在过 A 点而分别平行于 X 轴和 Y 轴的直线 l_1 和 l_2 上，都有 M_1 中奇数个点．当我们应用归纳假设于 M_1 后，则在除了 l_1 和 l_2 之外的一切平行于坐标轴的直线上，M_1 中的蓝点和白点的数目都相等，而在这两条直线上则都是两色点数各相差 1 个．当然，如果两条直线上都是蓝点比白点多 1 个，或者都是白点比蓝点多 1 个，那么问题都十分好办，只要将 A 点着为点数较少的颜色就行了．但现在的问题是：实际情况是否一定如此？为了回答这个问题，我们当然就需要以严格的态度，对事物内部的数量关系作一番较为细致的考察．

考察的结果是令人高兴的，因为我们可以严格地证明出：

实际情况确实如此.事实上,如果我们逐条累计分布在各平行于 X 轴的直线上的 M_1 中的蓝点和白点数目,可以得出 M_1 中的蓝点总数和白点总数. 如果 l_1 上是蓝点比白点多 1 个, 那么由于其余各直线上都是两色点数相等, 所以总数中一定也是蓝点比白点多 1 个.相应地,如果我们逐条累计分布在各平行于 Y 轴的直线上的 M_1 中的蓝点和白点数目, 也一定能得出同样的结果, 即总数中仍是蓝点比白点多 1 个. 既然在除了 l_2 之外的平行于 Y 轴的直线上,蓝白两色点数都相等,所以一定在 l_2 上是蓝点比白点多 1 个, 而这正是我们所期望的结论.

经过诸如上述的一番考察和推理, 我们终于觅得了第二种情况下的"复位"可能性和具体的"复位"办法, 从而完成 $n = k + 1$ 场合下的全部证明.

通过上述两个例题,我们已经清楚地看到了,深入细致地考察事物内部的数量关系, 对于克服归纳过渡之中所遇到的困难,具有极为重要的意义. 尤其在例 2 中,我们通过考察这种关系,发现出一种必然的现象,并从数学角度对其必然性给予了严格的证明. 这种为了归纳过渡的需要, 而发现并加以证明的结论, 我们通常称为辅助命题. 辅助命题在归纳过渡中, 往往就象桥或船一样,起着极为重要作用.许多问题的归纳证明,都离不了诸如此类的辅助命题的帮助.因此在应用数学归纳法证明问题时,尤其是在归纳过渡遇到困难的时候,应当养成深入考察数量关系的习惯, 并应注意发现其中的具有普遍性的规律, 以便能不失时机地利用这些规律建立辅助命题,达到帮助实现归纳过渡的目的.

对于刚才的例 2, 除了上面所用的办法之外,还有一种克服归纳过渡中困难的办法,这就是适当调整归纳途径,并采用灵活的归纳步骤, 以达到既能"退"又能"复"的目的. 具体做

法如下：

当 $n=1$ 时，命题的结论自然成立．接下来，我们假设对一切 $n \leqslant k$，命题都已成立，要证对 $n=k+1$，命题也能成立．这种以“$n \leqslant k$”代替“$n=k$”的做法，为我们的“退”留下了广阔的余地，因而使我们可以采用较为灵活的退法．以下仍分两种情况考虑．

如果在某条平行于坐标轴的直线上仅有 M 中的 1 个点 A，则只要先将 A 点去掉，而对 $M_1=M-\{A\}$ 中的点应用归纳假设，然后再适当为 A 着色即可．所以下面只需再考虑其余情况，即只要在某条平行于坐标轴的直线上有 M 中的点，则都至少有两个的情况．

此种情况下，设 A_1 是 M 中的一个点，过 A_1 而平行于 X 轴和 Y 轴的直线分别为 l_1 和 l_2，则在 l_1 和 l_2 上可以分别找到 M 中的另外两点 A_2 和 A_3．我们再来观察与 A_1，A_2，A_3 一起构成一个矩形的第 4 个顶点 A_4（图 3.1）的归属情况：

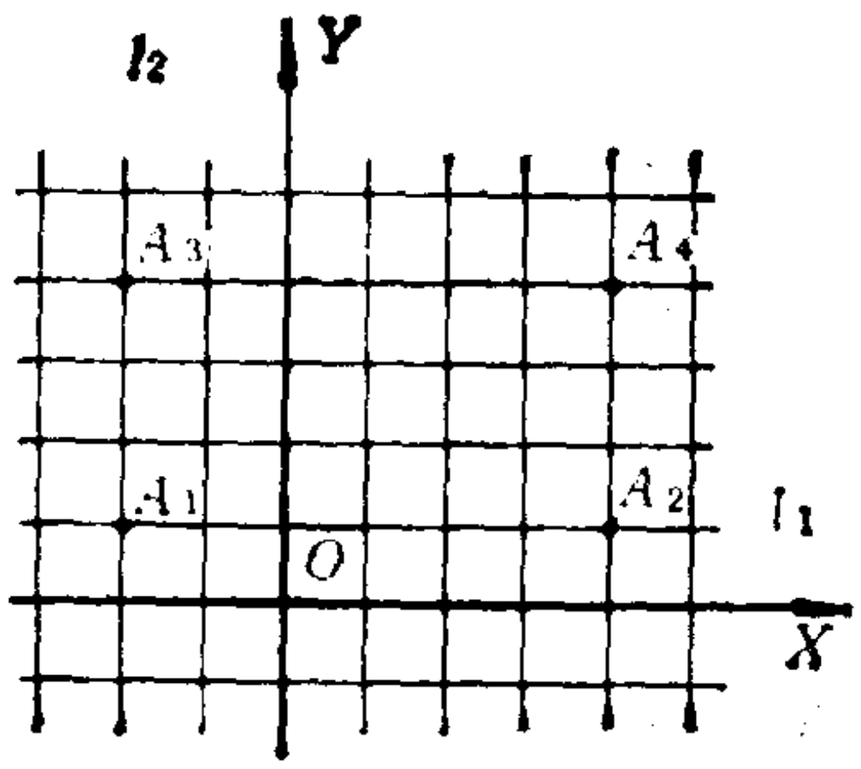


图 3.1

（1）如果 $A_4 \in M$，则事情极易处理，我们只要先将 A_1，A_2，A_3，A_4 这 4 个点全都去掉，而对集合 $M_2=M-\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 应用归纳假设，然后再将 A_1 和 A_4 着为同色，并将 A_2 和 A_3 同着为另一种颜色，即可符合规定的方式．事实上，由于 M_2 中只有 $k-3$ 个点，所以按归纳假设，可以找到一种符合规定的为 M_2 中点着色的方式；接下来的为 A_1，A_2，A_3，A_4 着色的方式，显然可以保证对整个 M 中点的着色都能符合规定．

(2) 如果 $A_4 \notin M$，则我们需要采用更为灵活的处理办法，先来考虑集合

$$M_3 = M \cup \{A_4\} - \{A_1, A_2, A_3\}$$

中点的着色办法，然后再考虑如何恢复为M的问题. 此时，由于 M_3 中仅有 $k+1+1-3=k-1$ 个点，所以可以应用归纳假设于 M_3，找到一种符合规定的为 M_3 中点着色的方式. 剩下的问题便是如何"复位"了，然而这并不难办到：我们可以先将 A_2 和 A_3 着为与 A_4 同色，再将 A_1 着为与 A_4 异色，然后再将 A_4 抹去，便可发现，这种为M中所有点着色的方式仍是符合规定的.

综合上述各款，便知命题的结论在 $n=k+1$ 的场合下仍然都是成立的，从而完成了归纳过渡.

在刚才的情形 (2) 之下，我们采用了较为罕见的"补一去三"的做法来将"$n=k+1$"转化为"$n=k-1$"，其用心良苦之处，并不是为了"退"，而恰是为了易于由"$n \leqslant k$"复位为"$n=k+1$"，这在明眼人来说，是一望可知的. 由此也可以说明，数学归纳法应用中的大部分技巧，实际上都是为了既能"退"又能"复"，而挖空心思想出来的.

下面我们再来介绍数学归纳法应用中的另外一个值得注意的方面，这就是所谓灵活处理命题的问题. 一般来说，解答数学问题，总是根据问题本身的要求来解答，即是说问题要求什么，我们就回答什么. 但有时，这种方式会显得过于刻板反而会给问题的解答带来不便. 这时，我们就可以对命题本身采取比较灵活的态度. 通常可以有两种截然不同的做法——加强命题或减弱命题. 对于加强命题的做法，笔者曾在一些场合作过介绍，现在则主要从减弱命题的角度来作些介绍. 我们先来看一个例子.

例 3 设 f 是一个函数，它的定义域和值域都是自然数

集，且有 $f(n+1) > f(f(n))$. 证明，对一切自然数 n，都有 $f(n) = n$.

在这里，命题的条件是用不等号给出来的，而结论却是以等号的形式出现，因此要想一口吃成个胖子是不可能的，我们不如退而先证一个较低的目标，即："若 $m \geqslant n$，则 $f(m) \geqslant n$"，然后再设法向最终的目标"$f(n) = n$"靠拢.

我们来对 n 使用归纳法.

当 $n = 1$ 时，由于对一切自然数 $m \geqslant 1$，都有 $f(m) \geqslant 1$，知所要证明的不等式是成立的.

假设当 $n = k$ 时，所要证明的不等式是成立的，要证当 $n = k+1$ 时，该不等式也能成立. 由于当 $m \geqslant k+1$ 时必有 $m - 1 \geqslant k$，所以可对 $m-1$ 使用归纳假设，因而得到 $f(m-1) \geqslant k$. 注意到 $f(m-1)$ 还是一个不小于 k 的自然数，所以又可对其使用归纳假设，得到 $f(f(m-1)) \geqslant k$. 这样，结合题述条件，便知 $f(m) > f(f(m-1)) \geqslant k$. 再由 $f(m)$ 是自然数，即知必有 $f(m) \geqslant k+1$，也就是当 $n = k+1$ 时，所证的不等式也成立. 故知对任何 $k \geqslant n$，都有 $f(k) \geqslant n$. 这表明我们的第一步论证目标已经达到，下面的问题便是进一步发展战果，向最终目标靠拢.

在已证的不定式中令 $k = n$，即得 $f(n) \geqslant n$. 从而结合题设条件及所证的不等式，便可得到

$$f(n+1) > f(f(n)) \geqslant f(n),$$

这表明 f 严格增加，而且 $n+1 > f(n)$. 这样便有

$$n \leqslant f(n) < n+1,$$

再由 $f(n)$ 是自然数，即得 $f(n) = n$，命题获证.

在这里，我们通过数学归纳法来证明的并不是命题本身，而是一个比命题本身要弱的命题，但是这个命题却为论证命题本身铺平了道路. 这就告诉我们，在有些目标难于一步实

现的场合下，可以通过先证一个较弱的命题来铺平道路，同时借以达到降低论证难度的目的．这种手法在很多利用数学归纳法来证明的问题中都是可以使用的．

下面的例子选自 1985 年国际数学奥林匹克试题，它表明适当对命题作等价变形，有时也可收到降低论证难度的效果．

例 4 设 n 和 k 为正整数，$k<n$ 且互质．将 $1, 2, \cdots, n-1$ 组成的集合记作 M．M 中的每个数染上蓝、白两色之中的一种颜色，染法如下：

(i) 对 M 中的每个 i，将 i 和 $n-i$ 染为同色，

(ii) 对 M 中的每个 i，$i \neq k$，将 i 和 $|i-k|$ 染为同色．

证明，M 中所有的数全都同色．

拿到这个问题后的自然想法是对 n 使用归纳法．但是要一下子证明一个集合中的元素全都同色是困难的，因此需要考虑“能否用一个较易证明的目标来取代最终目标？”经过一番斟酌，我们发现，如下的断言是与“M 中的所有的数全都同色”的断言等效的：“对任何 $1<a\in M$，都存在 $b<a$，有 b 与 a 同色”，而后者证明起来却要容易得多．既然如此，我们何不用证明后者来代替证明原来的断言？这样做，既未削弱命题，却又达到了降低论证难度的目的，真是两全齐美、何乐而不为？现在就让我们来证明后一断言吧！

当 $n=3$ 时，有 $M=\{1, 2\}$，由规则 (i) 即知 2 与 $3-2=1$ 同色，知断言成立．

假设当 $3\leqslant n\leqslant m$，断言均已成立，要证当 $n=m+1$ 时，断言也可成立．分几种情况讨论：

若 $k=1$，则对任何 $a\in M$，由规则 (ii) 即可知 a 与 $a-1$ 同色，从而断言成立．

若 $k>1$，且 $a>k$，则由规则 (ii) 知 a 与 $a-k$ 同色，知断言成立．若 $k>1$ 且 $a\leqslant k$，则因 $n=m+1=$

$kq+r$，其中 $q\geqslant 1$，$0<r<k$ 皆为整数，知当 $a=k$ 时，

$$a\sim n-a=(q-1)k+r\sim |n-a$$
$$-k|\sim\cdots\sim r<k=a,$$

此处 $a\sim b$ 表示 a 与 b 同色，从而知断言也成立。而当 $k>1$ 且 $a<k$ 时，有 $a\in M'=\{1,2,\cdots,k-1\}$，我们只要以 M' 代替 M，以 k 代替 n，以 r 代替 k，便可转化为 $k\leqslant m$ 的情形。事实上，此时在 M' 中有：a 与 $k-a$ 同色；a 与 $n-a=kq+r-a$ 与 $|r-a|$ 同色；知两条染色规则对 M' 都仍然成立。故可应用归纳假设于 M'，得知所证之断言仍可成立。

这样，我们便证得了变形后的断言，从而也就证得了命题中所要证明的断言。

诸如例 4 中所用的对原命题作等价变形，求得一种易于证明的形式的办法，自然可收“事半功倍”之效，因而在数学中极为常用。这用俗话来说，叫做“磨刀不误砍柴功”。我们在用数学归纳法证题时，也要注意使用这一手法。

下面，我们再来谈谈合理选择归纳对象的问题。有时，我们会碰到一些数学问题，其中的命题虽与自然数 n 有关，但在使用归纳法对它们进行证明时，却不能简单地对 n 进行归纳，而是先要作进一步的分析，才能确定该如何归纳、以及对谁归纳，等等。下面是几个例子。

例 5 我们知道，6 的正约数有 1，2，3，6，它们又分别有 1，2，2，4 个正约数，这时有 $1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2$。试问，是否每个自然数 n 都具有这样的性质？

显然，如果只是简单地对 n 使用归纳法，在这里是没有出路的，我们需要对命题作些进一步的分析。

鉴于这是一个与正约数有关的命题，因此使人容易想起自然数的质因数分解式。即对任何自然数 n，都可以找到若

干个质数 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 和正整数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，使得可将 n 表示为

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}.$$

面对这个分解式，自然地就会使人想到可对 m 进行归纳．而这正是解答这个问题的正确途径．

事实上，当 $m = 1$ 时，$n = p_1^{\alpha_1}$，它的所有正约数为 $1, p_1, p_1^2, \cdots, p_1^{\alpha_1}$，它们分别有 $1, 2, 3, \cdots, \alpha_1 + 1$ 个正约数，显然有

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (\alpha_1 + 1)^3$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + (\alpha_1 + 1))^2,$$

故知命题的结论成立．

假设当 $m = k$ 时，命题的结论已成立，我们要来证明当 $m = k + 1$ 时，命题的结论也能成立．此时 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$，为方便计，我们记 $n_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，于是就有 $n = n_0 \cdot p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$．

由归纳假设，我们知道对 n_0，命题的结论已经成立，对此我们记作 $S_{k}^{(左)} = S_{k}^{(右)}$．

由于在 n_0 的每个正约数上分别乘上 1、p_{k+1}，$p_{k+1}^2, \cdots, p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ 后，可得 n 的所有正约数，因此就有

$$S_{左}^{(k+1)} = S_{左}^{(k)} + 2^3 S_{左}^{(k)} + 3^3 S_{左}^{(k)} + \cdots + (\alpha_{k+1} + 1)^3 S_{左}^{(k)}$$
$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (\alpha_{k+1} + 1)^3) S_{左}^{(k)}$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + (\alpha_{k+1} + 1))^2 S_{右}^{(k)}$$

而因 $S_{右}^{(k+1)}$ 和 $S_{右}^{(k)}$ 分别是 n 和 n_0 的所有正约数的正约数数目之和的平方，所以又有

$$S_{右}^{(k+1)} = (\sqrt{S_{右}^{(k)}} + 2\sqrt{S_{右}^{(k)}} + 3\sqrt{S_{右}^{(k)}} + \cdots + (\alpha_{k+1}+1)\sqrt{S_{右}^{(k)}})^3$$
$$= (1 + 2 + 3 + \cdots + (\alpha_{k+1} + 1))^2 S_{右}^{(k)},$$

从而知有 $S_{左}^{(k+1)} = S_{右}^{(k+1)}$，即当 $m = k + 1$ 时命题的结论也能成立，故知命题获证．

诸如此类的、需对归纳对象作出选择的问题是很多的，下

面再来看一个例子.

大家知道，对自然数 n 和实数 x，二项式 $(1+x)^n$ 的展开式中，$1, x, x^2, \cdots, x^n$ 的系数依次是 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$，而这 $n+1$ 个系数恰好是自 n 个不同元素中任取若干个的所有不同的取法数，即组合数. 众所周知，很早以前，我们的祖先就已在杨辉三角形中描绘了这些组合数的变化规律.现在，我们也想来讨论一个关于组合数的性质的命题. 这个命题将告诉我们：在 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^n$ 这 $n+1$ 个正整数中，究竟有多少个奇数？它们取决于 n 的什么样的性质？

学过一点计算机的读者都了解，每一个十进制的自然数都有一个对应的二进制表达式，例如：$1=1$，$2=10$，$3=11$，$4=100$，$5=101$，$6=110$，$7=111$，$8=1000$，$9=1001$，$10=1010$，…. 总之，每一个十进制的自然数 n 都可以表示为如下形式：

$$n=2^{s_1}+2^{s_2}+\cdots+2^{s_m},$$

其中 $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_m$ 为十进制整数. 显然，在这样的表达式下，n 是一个 s_m+1 位的二进制整数；而且在 m 个数位上是 1，其余数位上为 0.

有了上述预备知识，我们即会发现下面的命题是相当有趣的.

例 6 如果自然数 n 的二进制表达式为

$$n=2^{s_1}+2^{s_2}+\cdots+2^{s_m},$$

其中 $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_m$ 为十进制整数，则 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 中恰有 2^m 个奇数.

换言之，例 6 告诉了我们：如果 n 的二进制表达式中有 m 个 1，则不论其中有多少个 0，在 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 中的奇数都是 2^m 个，这确实是很有趣的. 然而，以下的证明方式却更加有趣：我们不是对 m 使用归纳法，而是对 s_1 进行归纳！

我们先来证明，如果 $n = 2^{s_1}$，则在 $(1+x)^n$ 的展开式中，仅有 1 和 x^n 的系数 C_n^0 和 C_n^n 为奇数.

当 $s_1 = 0$ 时，有 $(1+x)^n = 1 + x$，知断言成立.

假设当 $s_1 = k$ 时断言成立，即在 $(1+x)^{2^k}$ 的展开式中仅有 1 和 x^{2^k} 的系数为奇数. 那么当 $s_1 = k+1$ 时，由于

$$(1+x)^{2^{k+1}} = (1+x)^{2^k} \cdot (1+x)^{2^k},$$

知 $(1+x)^{2^{k+1}}$ 的展开式中，系数为奇数的项只能是

$$(1+x^{2^k})(1+x^{2^k}) = 1 + 2x^{2^k} + x^{2^{k+1}}$$

中系数为奇数的项，也就是仅有 1 和 $x^{2^{k+1}}$ 的系数为奇数，故知断言仍然成立.

综合上述，即知当 $n = 2^{s_1}$ 时，$(1+x)^n$ 的展开式中，仅有 1 和 x^n 的系数为奇数，也就是说，此时在 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 中仅有 2 个奇数. 可见原命题在 $m = 1$ 的场合下是成立的.

我们再来考察一般情况，设 $n = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \cdots + 2^{s_m}$ $(0 \leqslant s_1 < s_2 < \cdots < s_m)$，于是就有

$$(1+x)^n = (1+x)^{2^{s_1}}(1+x)^{2^{s_2}} \cdots (1+x)^{2^{s_m}}.$$

根据上面已证的结论，即知 $(1+x)^n$ 的展开式中系数为奇数的项，只能是如下定义的 $f(x)$ 的展开式中的系数为奇数的项：

$$f(x) = (1+x^{2^{s_1}})(1+x^{2^{s_2}}) \cdots (1+x^{2^{s_m}}).$$

一旦直接将上式右端乘开，便可得到 2^m 个系数为 1 的项，由于 $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$，可知它们都不是同类项，所以 $f(x)$ 的 2^m 个加项的系数均为奇数. 综合上述，即知在 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 中恰有 2^m 个奇数. 至此，命题全部证毕.

在上述证明中，我们不是按通常想象的那样，对 m 进行归纳，而是仅对 s_1 进行了归纳，而后再直接将所得的结论应用于 $(1+x)^{2^{s_2}}, \cdots, (1+x)^{2^{s_m}}$ 之上，得出一般场合下的结

论。这乍一看来，似乎有些难以理解，其实却是非常自然的。这是因为只要我们尝试一下对 m 进行归纳，便会立即触及到 $(1+x)^{2^s k+1}$ 中的奇数系数项的分布情况，而要求我们先对 $n=2^s$ 中的 s 作归纳。而这正是产生如上证法的直接原因。由此看来，归纳对象的选择，并不见得都是随心所欲的，而经常是要受到命题性质的制约的。这也就要求我们能够适应问题的变化，而在归纳对象的选择上采取随机应变的态度。

最后，我们再来通过一个例题，谈谈在应用数学归纳法证题的过程中，如何"破题"的问题。

我们有时会碰到一些问题，乍一看来似与自然数 n 有关，但仔细一想，却难以从数学归纳法入手，这时，便存在一个如何破题的问题。我们来看一个例子。

例 7 设有一个两端无限的数列

$$\cdots, a_{-n}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

其中的每一项都等于它的两边邻项之和的 $\frac{1}{4}$。证明，如果数列中有某两项(不一定是邻项)相等，则一定会有无穷多对两两相等的项。

本题乍一看来，似乎难以下手。但在考察了一些具体的例子之后，可以发现出一些规律，这些规律就是：如果 $a_i = a_j$，其中 $i < j$ 为两个不同脚标，则相应地会有 $a_{i-1} = a_{j+1}$，$a_{i-2} = a_{j+2}, \cdots, a_{i+1} = a_{j-1}, a_{i+2} = a_{j-2}, \cdots$。这启发我们猜测，"对一切满足等式 $k+l=i+j$ 的整数 $k<l$，都应当有 $a_k = a_l$"，但问题是应该如何证明？

当然，最朴素的想法便是先证明夹在 a_i 和 a_j 之间的最靠近区间 $[i, j]$ 中点的两项相等。这就是说，当 $j-i=2m+1$ 时，先证 $a_{i+m} = a_{i+m+1}$；而在 $j-i=2m$ 时，先证 $a_{i+m-1} = a_{i+m+1}$。而这自然启发我们去考察 $a_{i+m} - a_{i+m+1}$ 或 $a_{i+m-1} -$

a_{i+m+1} 与 $a_i - a_j$ 之间的关系，并且会令我们猜测，上述关系一定也可以推广到 $a_{i+m-n} - a_{i+m+1+n}$ 之上，其中 n 为任何一个自然数. 而经过这样一想，我们便找到了一条明晰的思路：对任意选定的脚标 i_0，我们来考察 $a_{i_0-n} - a_{i_0+n+1}$ 与 $a_{i_0} - a_{i_0+1}$ 之间的关系，并用数学归纳法证明之. 好吧，现在就让我们来试一试吧！

由题意可以知道，对任何 a_p 和 a_q，都有

$$a_p = 4a_{p+1} - a_{p+2}, \quad a_q = 4a_{q-1} - a_{q-2},$$

因此知有

$$a_p - a_q = 4(a_{p+1} - a_{q-1}) - (a_{p+2} - a_{q-2}). \tag{1}$$

(1) 式是一个极为重要的递推公式，如果我们取 $p = i_0 - n$，$q = i_0 + 1 + n$，并记 $b_n = a_{i_0-n} - a_{i_0+1-n}$，就有

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2}, \tag{2}$$

这就表明 $\{b_n\}$ 是一个二阶线性循环数列. 利用关于这种数列的有关理论，以及 $b_0 = a_{i_0} - a_{i_0+1}$，并且当我们以 $p = i_0$，$q = i_0 + 1$ 代入 (1) 式后，可以得到

$$a_{i_0} - a_{i_0+1} = 4(a_{i_0+1} - a_{i_0}) - (a_{i_0+2} - a_{i_0-1}),$$

这也就告诉我们 $b_1 = 5(a_{i_0} - a_{i_0+1})$，我们可以算得

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{(5 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{n-1} + (5 - 3\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{n-1}\right\}b_0. \tag{3}$$

当然，我们也可以通过观察 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 的变化规律，总结出公式 (3)，然后再用数学归纳法证明之，这里不再赘述.

下面我们来用公式 (3)，部分地解答我们的问题.

设 $a_i = a_j$，且 $j - i = 2m + 1 \geqslant 1$，我们来证明对任何整数 k，都有 $a_{i-k} = a_{i+k}$. 取 $i_0 = i + m$，则显然有 $i = i_0 - m$，$j = i_0 + 1 + m$，于是有

$$b_m = a_i - a_j = 0,$$

将 $b_m = 0$ 代入 (3) 式，可得 $b_0 = 0$. 从而仍由该式，得

$$a_{i-k} - a_{j+k} = a_{i_0-m-k} - a_{i_0+1+m+k} = b_{m+k} = 0,$$

这表明在 $j - i$ 为奇数的情形下，我们命题的结论已经获证. 而在 $j - i$ 为偶数的情形下，可以采用类似的办法来证明，这只需在 (1) 式中取 $p = i_0 - n - 1$, $q = i_0 + 1 + n$, 并记 $b_n = a_{i_0-n-1} - a_{i_0+n+1}$, 并作类似的推导即可. 限于篇幅，我们不再对推导过程作详细叙述.

第四讲　学会从普遍性的角度来看待问题

苏　淳

我国首届全国数学冬令营试题中曾有如下一道试题：

例 1　能否将两个 1，两个 2，…，两个 1986 排成一列，使得两个 1 之间刚好夹着 1 个数，两个 2 之间刚好夹着两个数，…，两个 1986 之间刚好夹着 1986 个数？

可能大家已经知道，这个问题的答案是否定的，求得答案的办法也不止一种．现在我们来这样考虑这个问题：

考察任何两个 a 和两个 b 的相互被夹关系，容易看出：如果恰有 1 个 b 被夹在两个 a 之间，那么也恰有 1 个 a 被夹在两个 b 之间；如果两个 b 都被夹在两个 a 之间，那么就不会有 a 被夹在两个 b 之间；而如果没有 b 被夹在两个 a 之间，那么或者没有 a 被夹在两个 b 之间，或者两个 a 都被夹在两个 b 之间；除此之外，再没有其它情况．因此，任何两对不同数字相互被夹的数目之和不是 2 即是 0，总为偶数．推而广之，即知在两个 1，两个 2，…，两个 1986 之间，被夹的其它数字的总数目一定是偶数．

但现在按题目意思，这个总数目却需要为

$$1+2+\cdots+1986=\frac{1987\times 1986}{2}=1987\times 993,$$

是一个奇数．可见题目中所述的排法是办不到的．

上述考察问题的方法，便是一种从普遍性来考察问题的方法．它考察问题的角度是力图摆脱具体对象的影响，而去

寻求一般性的规律。因此，从一开始，我们便着眼于**任何**两个 a，**任何**两个 b 的相互被夹的关系。这种考察问题的方法的好处是有利于从本质上去认识问题。事实上，从上述考察中，我们还给出了下述问题的一个初步的答案。

例 1* 能否将两个 1，两个 2，…，两个 n 排成一列，使两个 1 之间刚好夹着 1 个数，两个 2 之间刚好夹着两个数，……，两个 n 之间刚好夹着 n 个数？

关于这个问题的初步答案就是：在

$$1+2+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}=C_{n+1}^{2}$$

为奇数的场合，所述的排法不能办到。

至于对在 C_{n+1}^{2} 为偶数的场合，所述排法能否实现？尚需作进一步讨论。所以我们说这个答案是初步的。下面我们仅仅指出，在 $n=3$ 和 4 时，所述的排法是能实现的：

231213，　41312432。

在 1985 年莫斯科数学奥林匹克试题中有如下的一道题目。

例 2 证明，在任何由 12 人组成的人群中，都可以找出两个人，使得在其余 10 人中，至少有 5 个人，他们中的每 1 个人或者全认识这两个人或者全不认识这两个人。

考虑这个问题时，我们就可以站在其中**任何** 1 个人的角度上来设想，而且还可以把人群的总人数考虑得更一般一些，比如说记作 n。

为便于讨论起见，我们对每个人，将除他之外的 $n-1$ 个人所俩俩形成的 C_{n-1}^{2} 个“两人对”都分作两类：将“对”中的两人他都不认识或都认识的“两人对”归于甲类，而将他认识其中 1 人不认识另 1 人的“两人对”归于乙类。我们先来考察，对其中每个人来说，属于乙类的“两人对”至多有几对？

原

书

缺

的 $n-2$ 人中，至少有 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 人，每个人或者同这 2 人都相识，或者都不相识。假定“相识”是对称关系。$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数。

美国和苏联在同一年的竞赛中出现类似的试题，已经不是第一次了。内里的原因无从考究，单就命题人“英雄所见略同”去解释，也是有其道理的。

通过以上两道例题的解答，似乎可以看出，从普遍性看问题的方法，一般都包括如下两个方面：一是先从“**任何**”一个对象出发，得出关于其中“个体”的一些一般性认识；二是再从“总体”方面总结规律，得出关于“整体”的一些一般性认识，例如例 1 中的“和为偶数”，例 2 中的“至少…，至多…”，等等。以上两个方面相辅相成，一般说来是缺一不可的。对于“整体”的认识来源于对“个体”的考察，因此对“个体”的考察必须服从于认识“整体”的目的。

我们下面再以莫斯科数学奥林匹克中的几道试题作为例子，继续练习用这种方法解题。

例 3 在正方形纸的内部给出了 1985 个点，现用 M 记纸的 4 个顶点和这 1985 个点构成的集合，并按下述规则将这张纸剪成一些三角形：

(1) 每个三角形的 3 个顶点都是 M 中的元素；

(2) 除顶点外，每个三角形中不再具有 M 中的点。

试问：共可剪出多少个三角形？共需剪多少刀（每剪出一个三角形的一条边，需要剪一刀）？

显然，M 中每一个点，都是一些三角形的公共顶点。因此，纸的 4 个顶点各为这些三角形的内角贡献了 90° 的角度，而其余的 1985 个点各为这些三角形的内角贡献了 360° 的角度。除此之外，这些三角形的内角度数再无别的来源，所以这

些三角形的内角之和为

$$4 \times 90^\circ + 1985 \times 360^\circ = 1986 \times 360^\circ = 3972 \times 180^\circ,$$

可见共剪出了 3972 个三角形.

由于每个三角形都有 3 条边，所以这些三角形共有 3972×3 条边. 正方形纸的 4 条边显然都属于这些边所构成的集合，它们是不用剪的；至于其余的边，则因都是两个三角形的公用边，因此知一共只需剪

$$\frac{3972 \times 3 - 4}{2} = 5956 \text{ (刀)}.$$

在这里，我们首先立足于每一个点，考察它们在度数上的贡献；而后立足于每一个三角形，考察它们的边的情况. 这些都是为了取得对“个体”的一般性认识. 接下来，考察总度数和总边数，便是为了对“整体”作一般性认识了. 这道试题如果不是这样考虑，大概是很难弄清楚的. 而我们的考察方法，不仅对 1985 个点，就是对一般的 n 个点，也是适用的.

例 4 能否将全体非负整数划分为 1986 个集合，使得每个集合中即使只有 1 个整数，也要满足下述条件：即如果数 m 能够由 n 划去两个相邻的相同数码或是相同的数码组得到，则 m 和 n 属于同一集合(例如，数字 7,9339337,93223393447，932239447 必将属于同一集合)?

为了回答这个问题，我们首先需要弄清楚每一个集合的组成情况，为此我们先来看看怎样的整数属于同一集合? 我们可以先从最简单的情形看起.

首先，易知 12 和 21 属于同一集合，这是因为它们都应与 122121 属于同一集合. 由此不难想见，数字 $a_1 \cdots a_{i-1} a_i \times a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_j a_{j+1} \cdots a_k$ 应当与数字 $a_1 \cdots a_{i-1} a_j a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_i \times a_{j+1} \cdots a_k$ 属于同一集合. 换言之，如果 m 和 n 是两个自然数，它们仅仅在某两个数位上对换了数码，那么它们一定属于

同一集合。为了说明这一点，我们举 $k=7$，$i=2$，$j=6$ 的情形作为例子，对于一般情形，完全可以作类似的说明，不过书写起来太长，不易看清楚罢了。设

$$m=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7,\quad n=a_1a_6a_3a_4a_5a_2a_7,$$

容易看出，它们都可由下面的 l 逐步划去相邻的相同数码或数码组得出：

$$l=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_7a_6a_3a_4a_5a_2a_1a_1a_6a_3a_4a_5a_2a_7.$$

事实上，如果我们先划去两个相邻的 a_1，再划去此时已变得相邻的两个数码组 $a_6a_3a_4a_5a_2$，再划去两个相邻的 a_7，即可得到 m；而如果按类似的办法，逐步划去 l 的前 14 位数字，则又可得到 n；可见 m 与 n 确实同属一个集合。最后，由于数码 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的任一排列，都可通过一系列的两两对换得出。便知，如果 m 和 n 是两个自然数，它们仅仅是数码的排列顺序不同，那么它们也一定属于同一集合。

基于上述讨论，我们已经初步弄清了每个集合的组成情况。根据这一认识，我们可以看到，凡是每一个数码都在其中出现了偶数次的自然数，必都属于同一集合，我们将这个集合记作 M_0。例如，11，231321，400444，77888998，等等，都属于 M_0。对于其余的每一个集合，则都必然有一些数码在其中的每一个成员中出现了奇数次。显然，对于同一个集合的成员，都必然有同样一些数码出现奇数次；对于不同集合的成员，出现奇数次的数码必然不全相同。因此，每一个集合都对应着一个在其成员中出现奇数次的数码集合，即都对应着 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 的一个子集，而 M_0 可认为与空集 $\varnothing$ 对应，显然这种对应是一一的。因此上述集合的个数恰与 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 的子集个数相等，即为 $2^{10}=1024$ 个。而题目中却要求分成 1986 个，$1986>1024$，故知是不可能的。

从上述问题的解答中，我们可以进一步看到从普遍性角

度考察问题方法的特点和作用.在这里,我们并不急于去回答"能"还是"不能",而是立足于弄清每个集合的组成情况,建立它们与 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 子集的对应关系,从而从一般性规律的高度上去认识它们. 这种方法有利于我们从根本上去把握事物的性质,把问题看深看透,彻底弄明白. 它在处理一些较为复杂的问题时,显得尤为有效.

下面再看几个例子.

例 5 (1) 某 1987 个自然数的乘积恰有 1986 个不同的质因数. 证明,这 1987 个自然数中,或者有一个完全平方数,或者有某几个的乘积是完全平方数.

(2) 某 48 个自然数的乘积恰有 10 个不同的质因数. 证明,从这 48 个自然数中,必可挑出 4 个,它们的乘积是完全平方数.

我们先来解答 (1). 记 1987 个不同自然数的集合为 M,并记它们乘积的 1986 个质因数的集合为 $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_{1986}\}$. 我们来考察 M 中的每一个成员或者若干个成员的乘积的一般形式. 显然,M 中的每一个成员或是若干个成员,都形成 M 的一个子集. 因此,我们也就是要对 M 的每一个子集,考察其中成员乘积的一般形式.

显然,对 M 的任何一个非空子集,都可将其中成员的乘积表示为 $\prod_{j=1}^{1986} p_j^{\alpha_j}$ 的形式,其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{1986}$ 是一些非负整数.如果对 M 的某个非空子集 M',有 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{1986}$ 皆为偶数,则我们的命题即已获证,现在我们即来证明这一点.

设 M' 是 M 的任一非空子集,在 M' 成员的乘积 $\prod_{j=1}^{1986} p_j^{\alpha_j}$ 中,有某些 p_j 的指数 α_j 为奇数,我们将这些 p_j 组成的集合记作 P',则 P' 是 P 的一个子集. 如果对 M 的非空子集 M' 来说,

每个 p_i 的指数皆为偶数，则记 $P'=\varnothing$。于是 M 的每个子集 M' 都唯一地对应了 P 的一个子集 P'

由于 M 共有 $2^{1987}-1$ 个非空子集，而 P 却只有 2^{1986} 个子集，$2^{1987}-1>2^{1986}$，因此上述对应不是一一的，即必然会有 M 的两个不同子集 M_1 和 M_2，对应着 P 的同一个子集 $P'=\{p_{i_1},\cdots,p_{i_k}\}$。记 M_1 和 M_2 中的成员乘积分别为 m_1 和 m_2，则易知有

$$m_1=n_1^2p_{i_1}\cdots p_{i_k},\quad m_2=n_2^2p_{i_1}\cdots p_{i_k},$$

其中 n_1 和 n_2 也是两个自然数，从而就有

$$m_1\cdot m_2=(n_1n_2p_{i_1}\cdots p_{i_k})^2$$

是一个完全平方数。

由于在 m_1m_2 中，将 $M_1\cap M_2$ 中的每个成员都连乘了两次（作为 M_1 的成员在 m_1 中乘了一次，作为 M_2 的成员在 m_2 中也乘了一次），刚好是一个平方数。因此当自 $M_1\cup M_2$ 中划去 M_1 和 M_2 的公共成员之后，剩下的数的乘积仍是一个完全平方数。

对（2）的证明可按类似思路进行，不过更为复杂一些罢了。我们把它作为练习留给读者。

在刚才的证明中，我们除了遵循与前面几个例题相似的方法之外，还用到了抽屉原则。应当指出，这并不是一种偶然的现象。因为对抽屉原则、奇偶数性质等等的利用，都是建立在对事物的整体性认识的基础上的。而从普遍性角度看待问题，正是获得这种认识的有效途径。

例 6 数字 $a_1, a_2,\cdots, a_{1987}$ 是自然数 1，2，…，1987 的任意一种排列，将每个数字 a_k 都与其脚标 k 相乘得到乘积 ka_k。证明，在所得的 1987 个乘积中，最大者不会小于 994^2。

这道题乍一看来似觉很难，但若从整体上看问题，却很容易。事实上，在数字 1，2，…，1987 中，不小于 994 的数字恰

有 994 个，超过一半，因此不论 $a_1, a_2, \cdots, a_{1987}$ 是 1，2，…，1987 的怎样一种排列，在排在后边的 994 个数字 $a_{994}, \cdots, a_{1987}$ 中，都至少会有一个不小于 994，将其下标与其相乘，乘积自然不小于 994^2，命题因此得证。

例 7 给了 1987 个集合，每个集合都由 45 个元素组成。现知其中每两个集合的并集中都刚好有 89 个元素，试求这 1987 个集合的并集中共有多少个元素？

以 $A_1, A_2, \cdots, A_{1987}$ 记这 1987 个集合。由于其中任意两者之并都刚好有 89 个元素，所以知其中任意两者都刚好有 1 个公共元素。

我们来考察一下 A_1 与其余集合的元素公用情况。显然 A_1 中至少有一个元素，是它与至少 45 个其它集合所公有的。否则，如果 A_1 中每个元素都是它至多与其余 44 个集合所公有的，那么就至多有 $45 \times 44 = 1980$ 个集合与 A_1 有公共元素，而与已知条件矛盾。于是可设 $a \in A_1$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_{46}$ 的公有元素。下面我们就来证明 a_1 是所有 1987 个集合的唯一的公有元素。

设有 $A_j \cap A_1 \neq \{a_1\}$，则必 $j \geqslant 47$。考察 A_j 与 $A_1, A_2, \cdots, A_{46}$ 的公有元素，发现它们应当各不相同。事实上，对任何 A_i，$2 \leqslant i \leqslant 46$，$A_i$ 与 A_j 的公有元素都不可能为 a_1。如若不然，必有某个 $A_i (2 \leqslant i \leqslant 46)$ 与 A_j 的公有元素为 a_1，那么 a_1 也必然是 A_1 与 A_j 的公有元素，而与我们的假设矛盾。其次，如果有某两个集合 A_{i_1} 和 A_{i_2} $(1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 46)$ 与 A_j 的公有元素相同，设为 a_2，则因 $a_2 \neq a_1$，知 A_{i_1} 和 A_{i_2} 至少有两个不同的公有元素，而与题目条件矛盾。综上即知，A_j 与 $A_1, A_2, \cdots, A_{46}$ 的公有元素全都两两不同，从而 A_j 中至少有 46 个不同元素，又与题目条件矛盾。所以必有 $A_j \cap A_1 = \{a_1\}$。

上述推理对任何 $47 \leqslant j \leqslant 1987$ 都成立,所以 $A_1, A_2, \cdots A_{1987}$ 中任何两者的公有元素都是 a_1. 由此即知, $\bigcup_{j=1}^{1987} A_j$ 中含有的元素数目为 $44 \times 1987 + 1 = 87429$ 个. 至此,我们便获得了这个命题的完整解答.

上述解答与前面几个例子的一个显著的不同之处,是我们紧紧抓住 A_1 来做文章. 这乍看起来,似乎有些缺乏普遍性,其实并不尽然. 事实上,在我们以 A_1 作为重点对象进行推理时,我们并未用到 A_1 的任何**特有**性质,因此,如果将所作推理搬到其它集合身上,它们也都能够成立. 这正是普遍性的一种体现. 也许有人会问,为什么不直接对**任何**一个集合进行考察,而要以 A_1 作为对象呢? 我们的回答是:这样做,可以减少书写中的麻烦,也可以减少讨论中的过多的不确定性,而使证明过程更易于为人所理解. 事实上,数学上对很多问题的证明都是这样做的. 而我们在证明中所用的"于是可设 $a_1 \in A_1$ 是 $A_1, A_2, \cdots, A_{46}$ 的公有元素",也是同出一辙.

下面,我们再来看一个大家所熟悉的问题.

例 8 在一张 $m \times n$ 的方格表的每一格中随意填入一个整数(可正、可负、也可为零),然后求出每行数字与每列数字之和. 如果某行(列)数字之和为负数,则可改变该行(列)所有数字的符号,这叫做进行一次"操作". 证明,至多只需进行有限次操作,即可使得所有"行和"与"列和"皆成非负.

我们来考察每一次"操作"所造成的后果. 先以对"行"所作的操作为例,从该行的"行和"来看,"操作"使其由负变正,增加了其绝对值的两倍,至少为 2. 但从各列"列和"来看,对"行"所作的"操作",则可能会把表中的一些正数变负,反而会使某些"列和"下降,甚至由正变负. 而后如果再又对列进行"操作",则又可能对某些"行和"造成下降. 如此恶性循环,何

时能了？但实际上，这只是一种“前进中的倒退”，而并非恶性循环。为了看清这一点，我们需要从更高的层次上，从更宽的面上来考察每次“操作”所造成的后果，也就是要从整体上来把握事物的变化规律。

如果我们跳出一个一个具体的“行和”与“列和”的框框，而从整体上来考察全体“行和”与全体“列和”在每次“操作”后的变化情况，事情就会一清二楚了。事实上，如果我们把 m 个“行和”全都加起来，就会得到表中 $m \times n$ 个整数的总和 S，而将 n 个“列和”全都加起来，其总和也是 S，即是说

$$S = \text{“行和”之和} = \text{“列和”之和}.$$

而每次对行所作的“操作”，都至少会使该行数字之和由负变正，至少增加 2，从而也就使得 S 至少增加 2。因此，纵然可能会有某些“列和”下降，甚至由正变负，但是“列和”之和却仍然是上升的。而每次对列所作的“操作”，也会产生同样效果。这正是我们所说的“前进中的后退”一话的含义所在。这样，我们便真正看清楚了每次“操作”所带来的后果，即只要能“操作”一次，则 S 至少增加 2。但这还只是问题的一个方面。

问题的另一个方面便是：每次“操作”都至多是改变了方格表中某些数字的符号，而没有改变它们的绝对值。因此，无论 S 怎样上升，都不会超过表中 mn 个数字的绝对值之和。可见 S 至少以跃度 2 上升的势头至多只能持续有限次。这也就告诉我们，对行和列所作的“操作”只能进行有限次。换句话说，必然在至多有限次操作之后，所有的“行和”与“列和”均已非负，而这正是我们所要证明的。

通过对这个例题的解答，我们可以看到，对“个体”一般性质的考察，最终必须达到对“整体”的普遍性规律的认识。而如何从“整体”上认识事物？有时却并非一件易事，而需要我们跳出一些框框，从多个方面多个角度来考察它们、认识它

们，抓出事物内在的普遍性的规律来。

最后，作为本文的结束，我们再来举一个数学归纳法方面的例子。

例 9 如果从凸 n 边形的各个顶点，都能连出偶数条对角线，将其划分为一些三角形，而这些对角线在形内都不相交，则 n 必是 3 的倍数。

首先，当 $n=3$ 时，各顶点连出的对角线条数都是 0，命题是成立的。

下设当 $3 \leqslant n < k$ 时，只要命题的条件成立，则 n 都是 3 的倍数。现设 $n=k$ 时，命题的条件都可成立，要证 n 也是 3 的倍数。记此时的凸 n 边形为 $A_1A_2\cdots A_n$，并设过 A_1 所连的对角线不是零条。设 A_1A_i 和 A_1A_j 是其中的两条，而在 $\angle A_iA_1A_j$ 内不再有自 A_1 连出的对角线，但在 $\angle A_nA_1A_j$ 和 $\angle A_iA_1A_2$ 内，却分别有自 A_1 连出的偶数条对角线。显然，A_1A_i 和 A_1A_j 将凸 n 边形分成了 3 个边数都小于 k 的凸多边形：$A_1A_2\cdots A_i$，$A_1A_i\cdots A_j$，$A_1A_j\cdots A_n$。一个直觉的想法便是：应当对这 3 个凸多边形分别使用归纳假设。这个想法当然是合理的，但是却面临着一个问题，这就是：这 3 个凸多边形是否都满足命题的条件？

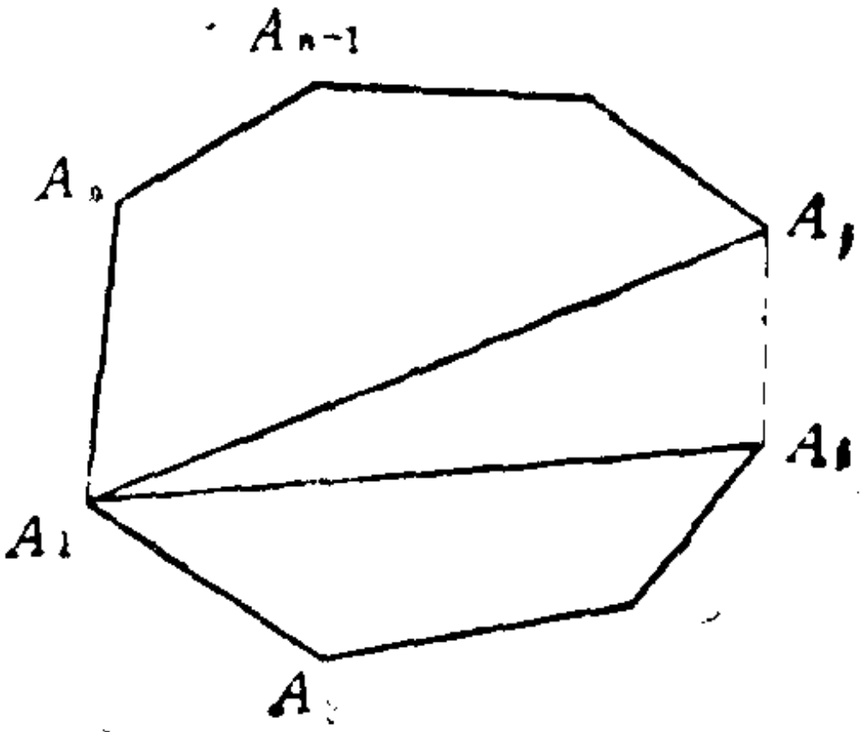


图 4.1

为了回答这个问题，我们就必须对一般情况，研究 A_i 和 A_j 的位置关系，研究在多边形 $A_1A_2\cdots A_i$ 和多边形 $A_1A_j\cdots A_n$ 内，分别由 A_i 和 A_j 所连出的对角线的条数是否为偶数的问题。显然对后者的研究，会导致我们从一般性的角度考察如下的普遍性命题：“如果除了一个顶点外，从凸多边形的其

余顶点都连出了偶数条对角线，那么从这个顶点所连出的对角线也一定是偶数条”。

正如我们在前面讲座中介绍过的，诸如此类的命题称为辅助命题，它们在帮助归纳过渡的过程中起着船或桥的作用．而正如我们在这里所见到的，许多辅助命题都是来自于从一般性的角度考察问题，而提出并加以证明了的反映着普遍性规律的数学命题．从这一点上甚至可以说，如果不学会从普遍性的角度看问题，那么也就不可能真正用好用活数学归纳法．

第五讲　不等式问题

严　镇　军

不等式在数学中占有重要地位，由于它自身的完美性及证明的困难性，使不等式问题成了各种数学竞赛，特别是国际数学奥林匹克中的“热门”试题．从第 1 届至第 28 届国际数学奥林匹克共有 25 道不等式试题，此外还有许多极值问题和涉及到不等式或利用不等式方法求解的试题．本文的主要部分是通过剖析其中的若干题，讲一些不等式的证明方法和技巧．

一、一些常用方法和技巧

证明不等式的最基本的手法是应用不等式的基本性质，并通过代数变换予以论证．　在国际数学奥林匹克的试题中，有些题要有较高的运算技巧才能获得证明．

例 1（第 12 届国际数学奥林匹克第 3 题）　设 $\{a_n\}$ 是具有下列性质的实数列：

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant \cdots. \tag{1}$$

而 $\{b_n\}$ 则由下式定义：

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{2}$$

求证：（a）对所有 $n = 1, 2, 3, \cdots$，有 $0 \leqslant b_n < 2$；

（b）对满足 $0 \leqslant c < 2$ 的任意 c，总存在一个满足 (1) 的数列 $\{a_n\}$，使得在由 (2) 式定义的数列 $\{b_n\}$ 中，有无穷多个下标 n 使 $b_n > c$．

证明 (*a*) 由所设条件，有 $\frac{a_{k-1}}{a_k} \leqslant 1$，显然 $b_n \geqslant 0$，且

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)$$

$$\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$\therefore \quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

(*b*) 设 $c(0 \leqslant c < 2)$ 已给定，我们试设 $\{a_k\}$ 是一个等比数列，令

$$a_k=\frac{1}{a^{2k}}\ (k=0,1,2,\cdots) \tag{3}$$

当 $0<a<1$ 时，数列 $\{a_k\}$ 满足条件 (1)。相应地，由 (2) 式确定的数列

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-a^2)a^k=(1-a^2)a\,\frac{1-a^n}{1-a}$$

$$=a(1+a)(1-a^n)\quad (n=1,2,\cdots). \tag{4}$$

由 $0<a<1$ 易知，$\{b_n\}$ 是递增数列，即当 $m>n$ 时，有 $b_m>b_n$。下面证明对于适当选取的 a，存在这样的自然数 N，使得 $b_N>c$。事实上

$$b_N=a(1+a)(1-a^N)>c$$

$$\Longleftrightarrow a^N < 1 - \frac{c}{a(1+a)} \tag{5}$$

由 $0 \leqslant c < 2$，有 $0 \leqslant \sqrt{\frac{c}{2}} < 1$．现选取 a 满足条件：

$$\sqrt{\frac{c}{2}} < a < 1 \tag{6}$$

则 $$c < 2a^2 < a + a^2 = a(1+a)$$

这就是说，对取定的满足 (6) 式的 a，由于不等式 (5) 的右边是一确定的正数，又 $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$，所以，当 N 充分大时，不等式 (5) 成立．再由 $\{b_n\}$ 的递增性，得知当 $n \geqslant N$ 时，$b_n > c$．

附注 1. 在本题 (a) 的证明中，利用了代数恒等式

$$a_n = a_1 + (a_3 - a_1) + (a_5 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}).$$

这个恒等式在处理某些和式的问题，特别是某些和式的不等式问题是常用的，这称为差分求和法．

2. 在 (b) 的证明中，使用了变量代换 (3)，变量代换法是证明不等式的一种常用方法，下面两个不等式用变量代换法较易证明：

习题 1 设 $a > 1$，$n \in N$，$n \geqslant 2$，求证：

$$\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}.$$

(提示：令 $x = \sqrt[n]{a} - 1$)

习题 2 (第 26 届国际数学奥林匹克预选题) 设 $x_1, x_2, \cdots x_n \in R^+$，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1}$$

$$+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant 1.$$

(提示：记 $x_{n+1}=x_1$，$x_{n+2}=x_2$，令

$$y_i=\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}}\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

则 $y_1y_2\cdots y_n=1$，原不等式化为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+y_i}\right)\leqslant n-1.$$

再用归纳法证明)

3. 例 1 是一个涉及无穷数列的问题，对于熟悉函数极限的读者，在得到(4)式以后，从 $a\to 1-0$ 时，有 $b_n\to 2$. 立即可以得到要证的结论 (b).

例 2（第 12 届国际数学奥林匹克第 2 题） 给定自然数 a, b, n, 且 $a>1$, $b>1$, $n>1$, A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数系中的数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数系中的数. A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, 和 B_n 呈如下形式：

$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-1}\cdots x_0$, $A_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$ (按 a 进制写出)；

$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$, $B_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$ (按 b 进制写出). 其中 $x_n\neq 0$, $x_{n-1}\neq 0$. 证明当 $a>b$ 时，有

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

证法一 本题涉及数的进位制，我们知道在十进制中，有

$$1234=1\times 10^3+2\times 10^2+3\times 10+4.$$

而在 k 进制中，则有

$$1234=1\times k^3+2\times k^2+3\times k+4.$$

于是，在本题中，有

$$A_n=x_na^{n-1}+x_{n-1}a^{n-2}+\cdots+x_0$$

$$A_{n-1} = x_{n-1}a^{n-2} + \cdots + x_0$$

$\therefore$ $$A_n = x_n a^{n-1} + A_{n-1}$$

同理 $$B_n = x_n b^{n-1} + B_{n-1}$$

$\therefore$ $$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n$$

$$= (x_n a^{n-1} + A_{n-1})B_{n-1} - (x_n b^{n-1} + B_{n-1})A_{n-1}$$

$$= x_n(a^{n-1}B_{n-1} - b^{n-1}A_{n-1})$$

$$= x_n[a^{n-1}(x_{n-1}b^{n-2} + x_{n-2}b^{n-3} + \cdots + x_0)$$

$$- b^{n-1}(x_{n-1}a^{n-2} + x_{n-2}a^{n-3} + \cdots + x_0)]$$

$$= x_n[x_{n-1}(a^{n-1}b^{n-2} - a^{n-2}b^{n-1}) + x_{n-2}(a^{n-1}b^{n-3}$$

$$- a^{n-3}b^{n-1}) + \cdots + x_0(a^{n-1} - b^{n-1})]$$

由于 $a > b$，有 $(a^{n-1}b^{n-2} - a^{n-2}b^{n-1}) > 0, \cdots (a^{n-1} - b^{n-1}) > 0$，又 $x_n > 0$，$x_{n-1} > 0$，$x_{n-2} \geqslant 0$，$\cdots$，$x_0 \geqslant 0$，从而

$$A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n > 0.$$

即 $$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

证法二 由于 $A_{n-1} = A_n - x_n a^n$，$B_{n-1} = B_n - x_n b^n$

$\therefore$ $$\frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{1}{A_nB_n}(A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n)$$

$$= \frac{x_n}{A_nB_n}(a^nB_n - b^nA_n)$$

于是，原不等式等价于

$$a^nB_n - b^nA_n > 0.$$

而这个不等式不难用归纳法证明，具体细节留给读者作练习.

一个关于字母 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 的不等式，如果把任何两个字母 a_i 及 a_j $(i \neq j)$ 对调位置，都不改变这个不等式，则称此不等式关于 $a_1, a_2, \cdots a_n$ 是对称的. 例如，不等式

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}} \quad (a, b, c \in R^+) \tag{7}$$

关于 a、b、c 是对称的(此不等式是美国第 3 届数学竞赛题).

在证明一个对称不等式时,由于各字母处于同等的位置,我们可以把字母按照一定的顺序排列起来,例如可设

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n.$$

也就是说,补充了一个假定条件,从而给不等式的论证带来了很大的方便. 如证不等式(7)时,若设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$,则由

$$\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \geqslant 1$$

即得(7)式.

例 3 (第 6 届国际数学奥林匹克第 2 题) 设 a, b, c 是一个三角形的三边长,求证

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

证法一 要证的不等式关于 a, b, c 对称,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$. 于是

$$\begin{aligned} 3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) \\ - c^2(a+b-c) \\ = a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \\ + c(c-a)(c-b) \\ \geqslant a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \\ \geqslant a(a-b)(a-c) + a(b-c)(b-a) \\ = a(a-b)[(a-c) - (b-c)] \\ = a(a-b)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

证法二 仍设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$,作变量代换

$$a = c + m, b = c + n \quad (m \geqslant n \geqslant 0)$$

则
$$\begin{aligned}
&3abc - a^2(b+c-a) - b^2(c+a-b) \\
&\quad - c^2(a+b-c) \\
&= a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) \\
&\quad + c(c-a)(c-b) \\
&= (c+m)(m-n)m + (c+n) \\
&\quad \cdot n(n-m) + cmn \\
&= [c(m-n) + (m^2-n^2)] \\
&\quad \cdot (m-n) + cmn \geqslant 0.
\end{aligned}$$

附注 1. 在上面两个证明中，都未用到 a, b, c 是三角形三边这一条件。所以，本题的不等式对任何 $a, b, c \in R^+$ 成立。

2. 证法二中使用的变量代换法称为增量法或松弛法。这种方法在证明不等式，特别是对称不等式时是常用的。

例 4（第 19 届国际数学奥林匹克第 4 题） 设 a, b, A, B 都是已知实数，如果对任何一个实数 x，$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x \geqslant 0$，求证：$a^2 + b^2 \leqslant 2$；$A^2 + B^2 \leqslant 1$。

证明 用反证法。其思路是：反设 $a^2 + b^2 > 2$ 及 $A^2 + B^2 > 1$。我们设法找出一个数 x_0，使 $f(x_0) < 0$ 就将导致矛盾。为此先用熟知的三角方法，通过引入辅助角 θ，φ，将 $f(x)$ 的项减少，即可选取 θ，φ，使

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \theta) - \sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x + \varphi)$$

取 $x_1 = \frac{\pi}{4} - \theta$，这时

$$f(x_1) = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x_1 + \varphi)$$

$$< 1 - \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x_1 + \varphi)$$

$$= -\sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x_1 + \varphi) \tag{8}$$

如果我们能断定 $\sin 2(x_1 + \varphi) \geqslant 0$，则有 $f(x_1) < 0$. 但 $\sin 2(x_1 + \varphi) \geqslant 0$ 这一结论无法直接得到，于是再取 $x_2 = \frac{3\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + x_1$，又得

$$f(x_2) < -\sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x_2 + \varphi)$$

$$= -\sqrt{A^2 + B^2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2} + x_1 + \varphi\right)$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2}\sin 2(x_1 + \varphi) \tag{9}$$

这样，当 $\sin 2(x_1 + \varphi) = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \theta + \varphi\right) \geqslant 0$，则从 (8) 式得 $f(x_1) < 0$；而当 $\sin 2(x_1 + \varphi) < 0$，则从 (9) 式得 $f(x_2) < 0$. 总之，无论何种情况，都导致了矛盾，这就证明了 $a^2 + b^2 \leqslant 2$.

$A^2 + B^2 \leqslant 1$ 的证明是类似的，请读者自行补充.

习题 3 (1983 年全国高中数学竞赛试题) 函数

$$F(x) = |\cos^2 x + 2\sin x\cos x - \sin^2 x + Ax + B|$$

在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A, B 有关. 问 A, B 取什么值 M 最小.

简解 答 $A = B = 0$. 这时

$$F(x) = \sqrt{2}\left|\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

在 $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上有三点 $x_1 = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}$ 使 $F(x)$ 达最大值 $\sqrt{2}$，下面证明：当 A, B 不全为 0 时，有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2} F(x) > \sqrt{2}$$

这可用反证法，反设上式不成立，则有

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2},\ F\left(\frac{5\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2},\ F\left(\frac{9\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}.$$

从这三个不等式可导致矛盾.

二、 重要不等式的应用

一些重要的不等式，如排序不等式、算术平均-几何平均不等式(简称平均不等式)、柯西不等式等常被用来证明其它的不等式. 为了读者的方便，这里把这几个不等式叙述如下(证明均从略)：

排序不等式 设有两个有序数组： $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 及 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，则

$$\begin{aligned} &a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \text{ (顺序和)}\\ &\geqslant a_1b_j + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \text{ (乱序和)}\\ &\geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \text{ (逆序和)}. \end{aligned}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列. 当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时等号(对任一排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$) 成立.

平均不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n\in R^+$，则它们的算术平均值必不小于它们的几何平均值，即有

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

以下引用这个不等式时简记为 $A_n\geqslant G_n(n = 2, 3\cdots)$.

柯西不等式 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是

实数，则

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

等号当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时成立(约定 $a_i = 0$ 时，$b_i = 0$).

例 5(第 20 届国际数学奥林匹克第 5 题) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots$ 为各不相同的正整数. 求证：对任何正整数 n，有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

证法一 设 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的一个排列，且满足 $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$. 因 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是正整数，故 $b_1 \geqslant 1$, $b_2 \geqslant 2, \cdots, b_n \geqslant n$, 又因

$$1 > \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3^2} > \cdots > \frac{1}{n^2}$$

故由排序不等式，得

$$a_1 + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \text{(乱序和)}$$

$$\geqslant b_1 + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \text{(逆序和)}$$

$$\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

证法二 由柯西不等式，有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right)$$

因 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互不相同的自然数，易知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}.$$

证法三 用比较法证. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 依大小顺序的排列是

$$a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_n}$$

这里 $i_1, i_2, \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 由题设条件有:

$a_{i_1}\geqslant 1,\ a_{i_2}\geqslant 2,\cdots,\ a_{i_n}\geqslant n.$

$$\therefore\quad a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_n}$$
$$\geqslant 1+2+\cdots+n.$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k^2}-\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_k\frac{-k}{k^2}$$
$$\geqslant\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}k\right)\geqslant 0.$$

例 6 （第 17 届国际数学奥林匹克第 1 题） 设 x_i, y_i $(i=1, 2,\cdots, n)$ 是实数，且 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$, $y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n$, $z_1, z_2,\cdots, z_n$ 是 $y_1, y_2,\cdots, y_n$ 的一个排列，求证：

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2.$$

证明 因 $\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\sum_{i=1}^{n}z_i^2$, 故原不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\text{（顺序和）}\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\text{（乱序和）}.$$

例 7 （第 11 届国际数学奥林匹克第 6 题） 求证： 对所有满足条件 $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$, $x_2y_2-z_2^2>0$ 的实数 x_1, x_2, y_1, y_2 及 z_1, z_2 有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}$$

$$+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

并求出等号成立的条件。

证明 由于原式两边分式的分母中都含有 $x_1y_1-z_1^2$ 及 $x_2y_2-z_2^2$，所以，令 $a=x_1y_1-z_1^2>0$，$b=x_2y_2-z_2^2>0$，则 $x_1y_1=a+z_1^2$，$x_2y_2=b+z_2^2$。于是

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\\&=a+b+x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2\\&=a+b+\frac{x_1}{x_2}x_2y_2+\frac{x_2}{x_1}x_1y_1-2z_1z_2\\&=a+b+\frac{x_1}{x_2}(b+z_2^2)+\frac{x_2}{x_1}(a+z_1^2)-2z_1z_2\\&=a+b+\left(\frac{x_1}{x_2}b+\frac{x_2}{x_1}a-2\sqrt{ab}\right)+2\sqrt{ab}\\&\quad+\left(\frac{x_1}{x_2}z_2^2+\frac{x_2}{x_1}z_1^2-2z_1z_2\right)\\&=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}b-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}a\right)^2\\&\quad+\left(\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2-\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1\right)^2\geqslant(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\quad(1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-2z_1z_2}\leqslant\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\quad(2)$$

又原不等式右边即是 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，这样，只要能证明

$$\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

就可以了. 由 $A_2 \geqslant G_2$, 有 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \geqslant 2\sqrt[4]{ab}$ 及 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 所以

$$\frac{8}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} \leqslant \frac{2}{\sqrt{ab}} \leqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

至此原不等式得证. (1) 式等号成立的充要条件是

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\, b = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\, a \\ \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\, z_2 = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}\, z_1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1\sqrt{b} = x_2\sqrt{a} \\ x_1 z_2 = x_2 z_1 \end{cases}$$

(2) 式等号成立的充要条件是 $a=b$. 从以上结果, 得原不等式等号成立的充要条件是

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2.$$

例 8 (第 23 届国际数学奥林匹克第 3 题) 设有无穷数列 $\{x_i\}$: $x_0 = 1$, $x_{i+1} \leqslant x_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$.

(a) 证明对每一个这样的数列, 有一个 $n \geqslant 1$, 使得

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant 3.999$$

(b) 求这样一个数列, 对所有的 n, 有

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

证明 (a) 我们先用数学归纳法证明下述结论: 对于每个数列 $1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots > 0$, 存在有正数列 $C_n (n \geqslant 1)$, 使得

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}^2}{x_{i+2}} + \cdots + \frac{x_{i+n-1}^2}{x_{i+n}} \geqslant C_n x_i \qquad (3)$$

与 i 的取值无关.

事实上，当 $n=1$ 时，因 $x_i \geqslant x_{i+1}$，故 $x_i^2/x_{i+1} \geqslant x_i$，从而可取 $C_1=1$.

设 C_n 已确定，则由归纳假设及平均不等式，有

$$\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+\left(\frac{x_{i+1}^2}{x_{i+1}}+\cdots+\frac{x_{i+n}^2}{x_{i+n+1}}\right) \geqslant \frac{x_i^2}{x_{i+1}}+C_n x_{i+1}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{x_i}{x_{i+1}}C_n x_{i+1}}=2\sqrt{C_n}\,x_i.$$

这就是说，可取 $C_{n+1}=2\sqrt{C_n}$.

利用上面求得的数列 $\{C_n\}$ 的递推关系，不难求得

$$C_n=4\cdot 2^{-1/2^{n-2}}.$$

特别地，在 (3) 式中取 $i=1$，得

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geqslant C_n.$$

为使上式左边 $\geqslant 3.999$，只需取 n，使

$$4\cdot 2^{-1/2^{n-2}} \geqslant 3.999.$$

即
$$\left(\frac{4}{3.999}\right)^{2^{n-2}} \geqslant 2.$$

但
$$\left(\frac{4}{3.999}\right)^{2^{n-2}}=\left(1+\frac{0.001}{3.999}\right)^{2^{n-2}}$$

$$>\left(1+\frac{1}{4000}\right)^{2^{n-2}} \geqslant 1+\frac{2^{n-2}}{4000},$$

当 $n=14$ 时，有

$$1+\frac{2^{12}}{4000}=1+\frac{4096}{4000}>2$$

因此 $n=14$ 即可.

(*b*) 取无穷等比数列 $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n=0,1,2,\cdots$，则

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}$$

$$=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}<4.$$

例 9（第 25 届国际数学奥林匹克第 1 题） 设 x，y，z 是非实数，且 $x+y+z=1$. 求证：

$$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

证明 要证的不等式关于 x，y，z 对称，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$. 于是 $1=x+y+z\geqslant 3z$，即 $z\leqslant 1/3$. 从而

$$2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$$

$$\therefore\quad yz+zx+xy-2xyz\geqslant 0.$$

下面证明右边不等式，在前述假定下 $z\leqslant\frac{1}{3}$，$x+y\geqslant 2/3$，令

$$x+y=\frac{2}{3}+\delta$$

则 $z=\frac{1}{3}-\delta$，且 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{3}$. 又由平均不等式，有

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$\therefore\quad yz+zx+xy-2xyz=z(x+z)+xy(1-2z)$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2\delta\right)$$

$$=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^3}{2}=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\leqslant\frac{7}{27}.$$

附注 本题的替换方法仍然是增量方法，在两个或三个

字母之和为常数的条件下，论证某个不等式时常用.

习题 4（1978 年全国高中数学竞赛试题） 有 10 个人各拿一只水桶去打水，设水龙头注满第 i 个人的水桶需 t_i 分钟. 假设这些 t_i 各不相同，问只有一个水龙头时，应如何安排 10 个人的次序，使它们花费的总时间最少？这个最少的总时间是多少？

简解 不妨设 $t_1 < t_2 < \cdots < t_{10}$，则按水桶的大小顺序接水，所需总时间是

$$10t_1 + 9t_2 + \cdots + t_{10} \text{（逆序和）}$$

这就是要求的结果.

习题 5 设 $a > 1$，$n \in N$，求证

$$a^n - 1 \geqslant n(a^{(n+1)/2} - a^{(n-1)/2})$$

提示 令 $a = s^2 (s > 1)$，得到等价的不等式

$$s^{2(n-1)} + s^{2(n-2)} + \cdots + s^2 + 1 \geqslant ns^{n-1}$$

再利用 $A_n \geqslant G_n$ 证此不等式.

三、几何不等式

几何问题中出现的不等式称为几何不等式. 在 IMO 的试题中有许多几何不等式，特别是关于三角形各元素的不等式. 证明这类不等式常用三角方法及代数方法. 三角方法主要是利用三角函数、正弦定理及余弦定理等作边角关系的转换后予以论证. 代数方法最常用的手段是因式分解、配方及变量代换等，同时在计算过程中要用熟知的一些几何计算公式，如海伦 (Heron) 公式等作代数变形.

例 10（第 2 届国际数学奥林匹克第 3 题） 已知三角形的边长 a, b, c 及其面积 s. 求证：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\,s$$

并求等号成立的条件.

这个不等式称为魏琴伯克（Weitjenbock）不等式，它有许多证法.

证法一 设C是c边所对的角. 由余弦定理及三角形的面积公式,得

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\,s&=a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C\\&\quad-2\sqrt{3}\,ab\sin C\\&=2[a^2+b^2-2ab\sin(C+30^\circ)]\\&\geqslant 2(a^2+b^2-2ab)\geqslant 0.\end{aligned}$$

上式中第一个不等式当且仅当 $C+30^\circ=90^\circ$ 时等号成立，第二个不等式当且仅当$a=b$时等号成立. 所以，原不等式当且仅当$a=b=c$时等号成立.

证法二 记A, B, C是边a, b, c的对角，R是三角形的外接圆半径,则由正弦定理,有

$$s=\frac{1}{2}ab\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C.$$

再由 $A_3\geqslant G_3$，得

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{s}&=\frac{4\sin^2A+4\sin^2B+4\sin^2C}{2\sin A\sin B\sin C}\\&\geqslant 6\sqrt[3]{\frac{\sin^2A\cdot\sin^2B\cdot\sin^2C}{\sin^3A\sin^3B\sin^3C}}\\&=6\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}\end{aligned}\tag{1}$$

下面利用和差变积公式不难证明（具体证明留给读者）：

$$\sin A \sin B \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}. \tag{2}$$

等号当且仅当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ 时成立.

再将不等式(2)应用于(1)即得

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{s} \geqslant 6 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 4\sqrt{3}.$$

证法三 记 $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$. 利用海伦公式及 $G_3 \leqslant A_3$, 得

$$4s = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\leqslant 4\sqrt{p}\sqrt{\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}}$$

$\because$ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2cb$

$$\leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$\therefore$ $$4s \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}}$$

即 $$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,s.$$

附注 证法二及证法三都没有分析等号成立的条件，这个问题留给读者讨论.

例 11 (第 22 届国际数学奥林匹克第 1 题) 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D，E，F 分别为 P 到 BC，CA，AB 所引垂线的垂足，求所有使

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$

为最小的 P 点。

解 如图 5.1，设 $\triangle ABC$ 的面积为 s，显然有

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF = 2s.$$

由柯西不等式

$$\left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}\right)(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF)$$
$$\geqslant (BC + CA + AB)^2.$$

即
$$l = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}$$
$$\geqslant \frac{(BC + CA + AB)^2}{2s} \text{（定值）}.$$

上式等号当且仅当 $PD = PE = PF$ 时成立。这就是说使 l 为最小的 P 点是 $\triangle ABC$ 的内心。

证明关于三角形内各元素的形形色色的不等式时，常利用下面的变量代换方法，把几何不等式化成代数不等式：由于三角形总有内切圆存在（如图 5.2）因而它的三边长 a，b，c 总可以表示为

$$a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y.$$

其中 $x > 0$，$y > 0$，$z > 0$。反之，若三个正数 a，b，c 可以

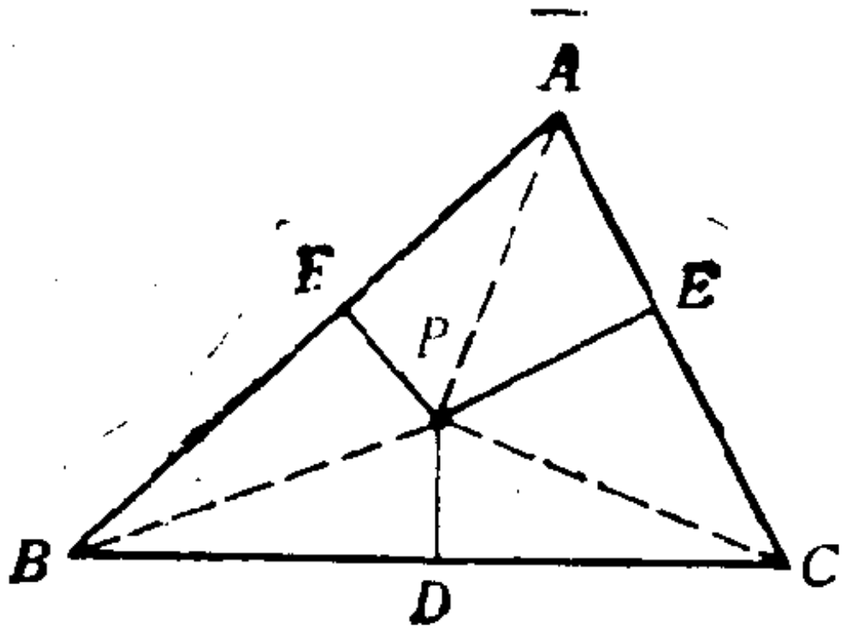


图 5.1

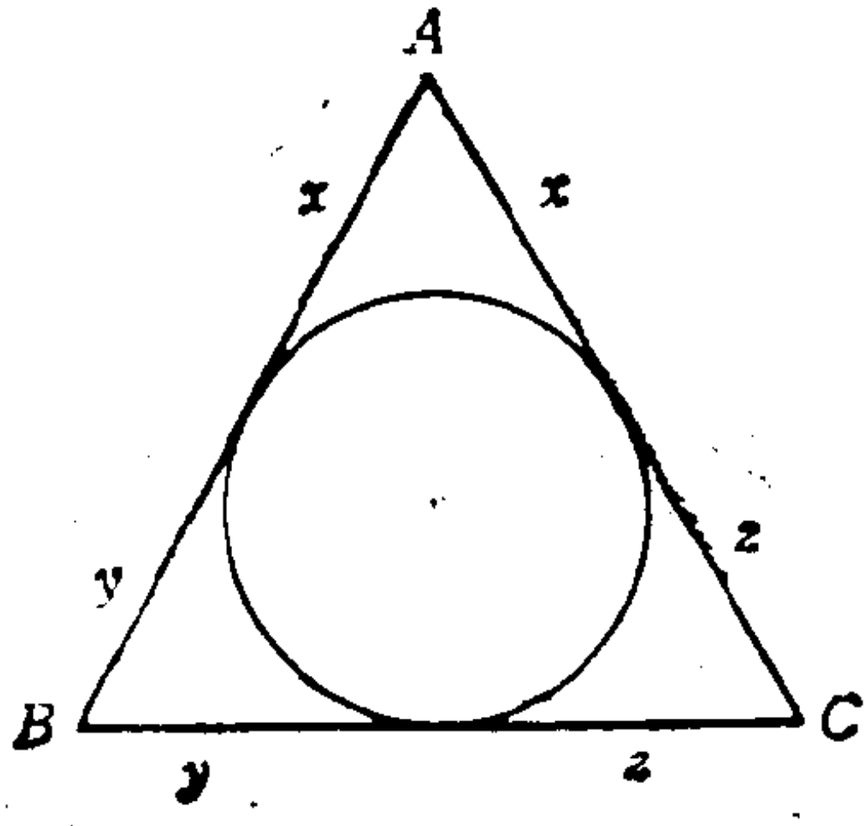


图 5.2

表示为上述形式，则 a,b,c 一定是某个三角形的三边. 因为三边长 a, b, c 完全确定三角形,从而三角形的各元素（半周长、面积、外接圆半径、内切圆半径、三条高等等）也可以通过上述变换用 x, y, z 表示. 所以,关于三角形的不等式原则上总可以化为关于 x, y, z 的代数不等式.

先用这个方法证明例1中魏琴伯克不等式的推广：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}s+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

令 $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, $(x, y, z\in R^+)$ 并利用海伦公式,则此不等式等价于

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2$$

$$\geqslant 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}+(z-y)^2+(x-z)^2+(z-x)^2$$

$$\Longleftrightarrow 4(xy+yz+zx)$$

$$\geqslant 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Longleftrightarrow (xy+yz+zx)^2\geqslant 3xyz(x+y+z)$$

$$\Longleftrightarrow (xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2\geqslant 0.$$

最后这个不等式显然成立,而且易知它当且仅当 $x=y=z$ 时等号成立，从而原不等式当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立.

例 12 （第24届国际数学奥林匹克第6题） 设 a, b, c 是三角形的三边长,求证：

$$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0.$$

并确定等号何时成立.

证明 令 $a=y+z, b=z+x, c=x+y(x, y, z\in R^+)$，代入原不等式,展开并化简后,得

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 \geqslant 0$$

即

$$xyz\left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y} - x - y - z\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geqslant x + y + z.$$

最后这个不等式可以用柯西不等式证明如下：

$$(x + y + z)^2 = \left(\sqrt{y} \cdot \frac{x}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{y}{\sqrt{z}} + \sqrt{x} \cdot \frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\leqslant (x + y + z)\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}\right)$$

故

$$x + y + z \leqslant \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x}.$$

附注 本题不等式不具有前面讲过的对称性. 所以，添加补充假设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$ 来证是错误的. 但这个不等式仍具有一种较弱的对称性——轮换对称，即同时把 a 换成 b，b 换成 c，c 换成 a，不等式不变，可添加较弱的补充假设 $a \geqslant c > 0$ 及 $b \geqslant c > 0$ 来论证.

例 13（第 9 届国际数学奥林匹克第 2 题） 一个四面体恰有一条棱长大于 1，求证：它的体积 $V \leqslant \frac{1}{8}$.

证明 如图 5.3，设在四面体 $ABCD$ 中，$AB > 1$，其它棱长不超过 1，作此四面体的高 AH，点 H 为垂足，再分别作 $AF \perp CD$，$BE \perp CD$，连 FH，令 $CD = x(\leqslant 1)$，则 CF 和 DF 中必有一条 $\geqslant x/2$，设 $CF \geqslant x/2$，在直角 $\triangle AFC$ 中

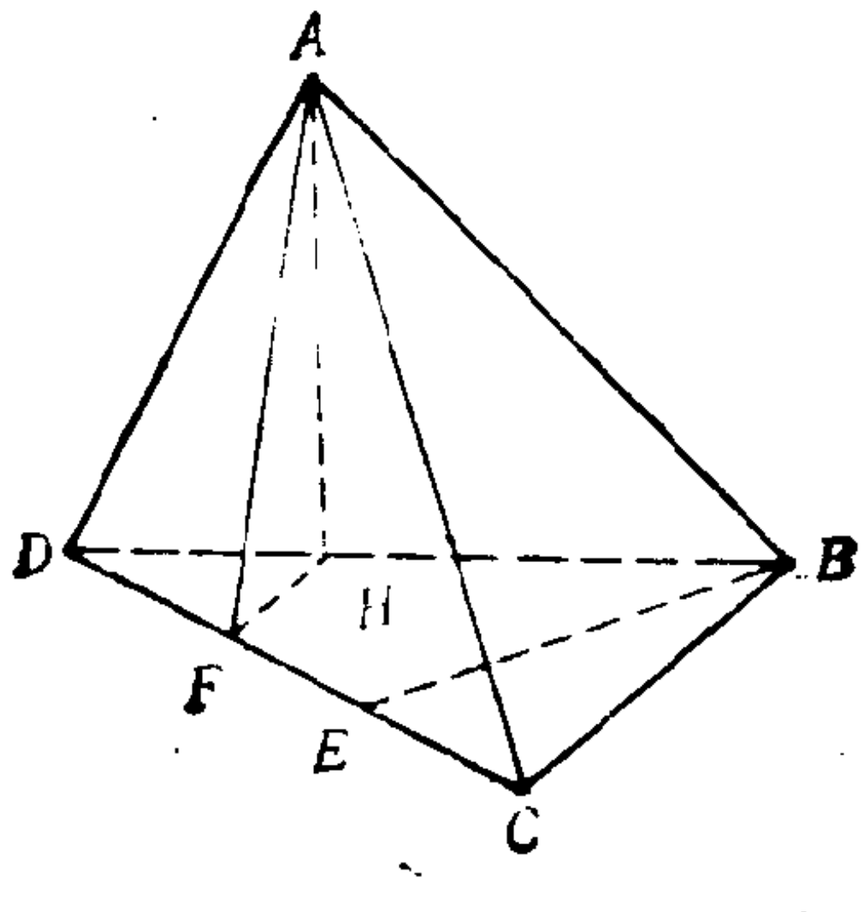


图 5.3

$$AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} \leqslant \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

同理 $BE \leqslant \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.

又显然有 $AH \leqslant AF$. 于是

$$V = \frac{1}{3} AH \cdot S_{\triangle BCD} \leqslant \frac{1}{3} AF \cdot \frac{1}{2} CD \cdot BE$$

$$\leqslant \frac{x}{6}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{x}{2} + \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{2}\right]^2 = \frac{1}{8}.$$

附注 本题不等式的等号是可以实现的，如在四面体中：

$$AC = CD = AD = BC = BD = 1,$$

且平面 $ACD \perp$ 半面 BCD 时，$AB = \sqrt{3}/2 > 1$. 体积 $V = \frac{1}{8}$.

习题 6 设 a, b, c 是三角形的三条边长，S，R，r 分别表示面积、外接圆半径、内切圆半径，求证：

(1) $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant 16S^2 + (a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4$

(2) $R \geqslant 2r$.

提示：利用变量代换转换成 x，y，z 的代数不等式，这时有

$$R = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{+\sqrt{xyz(x+y+z)}},$$

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}.$$

四、 其它不等式问题

在国际数学奥林匹克的试题中还有许多涉及到不等式的问题，兹举数例如下：

例 14（第 16 届国际数学奥林匹克第 5 题） a，b，c，d 是任意正整数，求和式

$$s = \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d}$$

的取值范围.

解 由题设条件，有

$$\frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

同理

$$\frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} < 1$$

$$\therefore \qquad s < 2$$

又

$$s > \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d}$$

$$+ \frac{c}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1$$

综上证得 $s \in (1, 2)$. 若令 $a = c = 1$，则

$$s = \frac{1}{1+b+d} + \frac{b}{2+b} + \frac{1}{1+b+d} + \frac{d}{2+d}$$

由此可见，当 b 和 d 充分小时，s 可以任意接近于 2；又若令 $a = b = 1$，则

$$s = \frac{1}{2+d} + \frac{1}{2+c} + \frac{c}{1+c+d} + \frac{d}{1+c+d}$$

当 c，d 充分小时，s 可以任意接近于 1，所以 s 的取值范围是开区间 (1, 2).

附注 如果要严格论证 s 的值充满开区间 (1, 2)，这就必须利用到连续函数的性质，这已超出了现行中学教学内容.

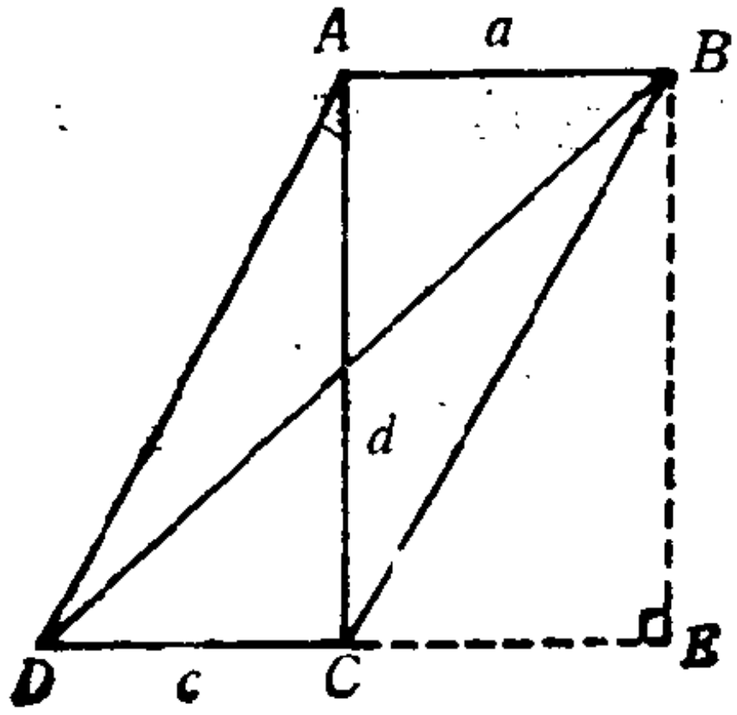


图 5.4

例 15 (第 18 届国际数学奥林匹克第 1 题) 在一个面积为 32cm² 的平面凸四边形中，一条对角线与两条对边之和为 16cm，试确定另一条对角线的长度.

解 如图 5.4，设所给四边形为 $ABCD$，其中 $AB = a$，$AC = d$，$CD = c$，则 $a + c + d = 16$. 于是

$$32 = S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}(a+c)d$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+c+d}{2}\right)^2 = 32.$$

这样，上式中的两个不等式等号都成立，第一个不等式等号成立的充要条件是 $AB \perp AC$，$AC \perp CD$；第二个不等式等号成立的充要条件是

$$a + c = d = 8.$$

在上述两个条件下，过 B 作 $BE \perp DC$（E 在 DC 的延长线上），所以另一条对角线

$$BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{d^2 + (a+c)^2} = 8\sqrt{2}.$$

例 16（第 7 届国际数学奥林匹克第 1 题） 已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数满足下列条件： a）a_{11}，a_{22}，a_{33} 是正数；b）所有其他系数都是负数；c）每一个方程中的系数和为正. 求证：$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 是此方程组的唯一解.

证明 显然，$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ 满足方程组. 下面证明这是唯一解. 不妨设有一组解 x_1，x_2，x_3 满足：$|x_1| \geqslant |x_2| \geqslant |x_3|$（否则，改变下标必可办到），则由

$$0 = |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3| \geqslant |a_{11}x_1| - |a_{12}x_2| - |a_{13}x_3|$$

$$= a_{11}|x_1| + a_{12}|x_2| + a_{13}|x_3|$$

$$\geqslant (a_{11} + a_{12} + a_{13})|x_1| \geqslant 0$$

$\because a_{11} + a_{22} + a_{33} > 0$，故 $|x_1| = 0$，从而 $x_1 = 0$. 由此又得 $x_2 = x_3 = 0$.

附注 本题也可以通过证明方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

的方法来论证，不过直接计算的方法太繁. 这是矩阵中有名的哈达玛 (Hadamard) 定理的特殊情形，这条定理用行列式的形式可叙述为：设有 n 阶行列式

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 为实数或复数，且

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则 $A \neq 0$. 哈氏定理就是用本题的方法证明的.

例 17 （第 21 届国际数学奥林匹克第 6 题） 求出所有实数 a，使得存在非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足下列关系：

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^2 x_k = a^2$$

及

$$\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^3.$$

证明 设有非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足题设要求，则由柯西不等式及题设条件，得

$$a^4 = \left(\sum_{k=1}^{5} k^2 x_k\right)^2 = \left[\sum_{k=1}^{5} (k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k})(k^{\frac{3}{2}}\sqrt{x_k})\right]^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{5} kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k\right) = a^4,$$

这样上式中的不等式只能是等号，于是

$$\frac{k^{\frac{5}{2}}\sqrt{x_k}}{k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k}} = k^2\frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k}} = \text{常数} \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

如果 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 中有两个或两个以上不为 0，上式是不可能成立的. 所以，只能有下面的两种情形：

(1) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$，这时 $a = 0$；

(2) 某个 $x_k = c \neq 0$，其余 $x_i = 0$ $(i \neq k)$，这时由题设得

$$kc = a, \quad k^3c = a^2, \quad k^5c = a^3$$

由此即得 $k^2 = a$ 及 $c = k(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

综上讨论可知，当 $a = 0, 1, 4, 9, 16, 25$ 时，存在非负实数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 满足题设方程组.

习题 7 (第 19 届国际数学奥林匹克第 5 题) 设 a, b 都是自然数，当 $a^2 + b^2$ 除以 $a + b$ 时，商为 q，余数为 r. 寻找所有自然数对 (a, b)，使得 $q^2 + r = 1977$.

简解 本题是不定方程求正整数解，这类问题的求解，常要用到不等式方法.

$\because q^2 + r = 1977$，$\therefore q^2 \leqslant 1977$，$q \leqslant 44$. 下面证只能有 $q = 44$. 若 $q \leqslant 43$，则 $r \geqslant 128$，且

$$\frac{1}{2}(a + b)^2 \leqslant a^2 + b^2 = q(a + b) + r$$

$$\leqslant 44(a + b).$$

$\therefore a + b \leqslant 88$，与 $r \geqslant 128$ 矛盾. 当 $q = 44$ 时，$r = 41$. 且

$$a^2 + b^2 = 44(a + b) + 41$$

即 $$(a - 22)^2 + (b - 22)^2 = 1009.$$

若 $a \geqslant b$，则 $(a - 22)^2 \geqslant 500$，从而 $45 \leqslant a \leqslant 53$. 再经

验算得 $a=50$、$b=37$ 及 $a=50$、$b=7$ 两组解. 由对称性,还有另两组解 $a=37$, $b=50$ 及 $a=7$, $b=50$.

习题 8 (第 19 届国际数学奥林匹克第 6 题) 设 $f(n)$ 是一个定义在自然数集 N 并在 N 上取值的函数,且对任意 $n\in N$, $f(n+1)>f[f(n)]$. 求证 $f(n)=n$.

提示: 先用归纳法证明: 当 $m\geqslant n$ 时, $f(m)\geqslant n$. 特别取 $m=n$, 得 $f(n)\geqslant n$, 从而又得

$$f(n+1)>f[f(n)]\geqslant f(n).$$

再用反证法证明 $f(n)=n$.

第六讲　几何题的复数解法

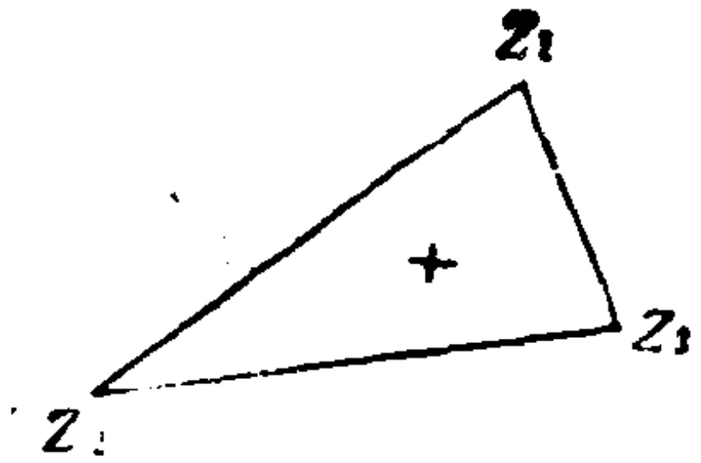
常　庚　哲

复数就是平面向量。复数的加法和减法的几何表示正好是向量的加法和减法。用一个实数去乘复数的几何表示相当于把向量进行拉伸，也就是说相当于数乘向量的运算。因此，可以这样说，凡是用平面向量运算能解的题目，一定可以用复数运算来解。但是，复数运算中可以很方便地表示一个向量的旋转，这一点在向量运算中不易作到。正是这一理由，使得在解决几何问题中，复数更优于向量。本文作者一向推崇用复数来解平面几何问题，详情见拙作《复数计算与几何证题》（上海教育出版社，1980年）。

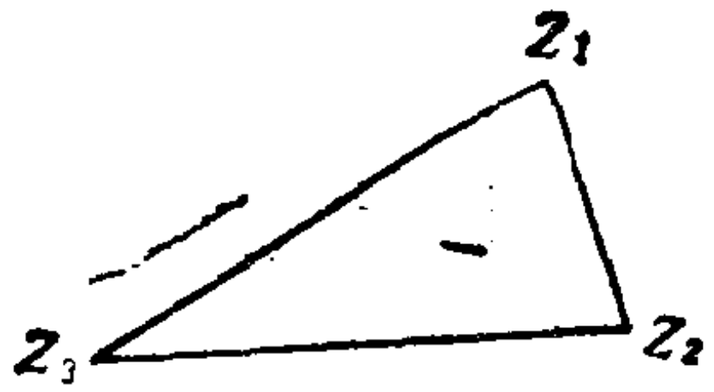
在国际数学奥林匹克的试题中，几何题占有一定的份量。这些几何题中，有一部分是可以用复数计算来解的。本文通过用复数解算这些题目，展示给读者怎样用复数解几何题，介绍有关的基本知识和技巧。

一、面积公式

设 Z_1，Z_2，Z_3 是复平面上的三点。我们来讨论定向三角形 $\triangle Z_1Z_2Z_3$。所谓"定向"是指，如果 $Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to Z_1$ 的绕行方向是反时针的，那么 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 叫做"正向三角形"；如果上述绕行方向是顺时针的，则称 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为"负向三角形"。



(a) $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为正向三角形



(b) $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为负向三角形

图 6.1

下面，我们写出三角形的有向面积公式

$$\triangle Z_1Z_2Z_3 = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

这里 $\bar{Z}_1$ 表示 Z_1 的共轭复数，如此等等. 所谓有向面积是指，若三角形 $Z_1Z_2Z_3$ 为正向的，那么(1)的右边的数 $\geqslant 0$，否则 $\leqslant 0$.

怎样来证明(1)呢？设 $Z_j = x_j + iy_j$，$j = 1, 2, 3$. 因此(1)式右边的三阶行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 & x_3 + iy_3 \\ x_1 - iy_1 & x_2 - iy_2 & x_3 - iy_3 \end{vmatrix},$$

将第三行加到第二行，得

$$2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 - iy_1 & x_2 - iy_2 & x_3 - iy_3 \end{vmatrix},$$

再从第三行减去第二行，得

$$2(-i)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

因此(1)式变为

$$\triangle Z_1Z_2Z_3=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}. \tag{2}$$

由平面解析几何的知识，(2) 是三点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 为顶点的三角形的面积公式，并且它的正负与三角形 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的定向是相一致的。由 (2) 出发，反推回去便可得 (1)。在本文中，我们要用的公式是 (1) 式，而不是 (2) 式。

如果 Z_1，Z_2，Z_3 三点共线，那么它们组成的三角形 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的面积为零；反之也是如此，因此我们得到

定理 1 三点 Z_1，Z_2，Z_3 共线的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ Z_1 & Z_2 & Z_3\\ \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3\end{vmatrix}=0. \tag{3}$$

二、面积坐标

设三点 Z_1，Z_2，Z_3 不共线，并且 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为一正向三角形。设这三角形内部有一点 p，联 Z_1 与 p，延长与对边交于 p' (图 6.2)。

由于 p 在点 Z_1 与 p' 的联线上，由定比分点公式，有实数 λ 适合 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 且

$$p=(1-\lambda)Z_1+\lambda p', \tag{4}$$

同理，有 μ 适合 $0\leqslant\mu\leqslant 1$ 且

$$p'=(1-\mu)Z_2+\mu Z_3. \tag{5}$$

将 (5) 代入 (4) 式，得

$$p=(1-\lambda)Z_1+\lambda(1-\mu)Z_2+\lambda\mu Z_3,$$

若令 $\alpha=1-\lambda$，$\beta=\lambda(1-\mu)$，$\gamma=\lambda\mu$，上式可写为

$$p=\alpha Z_1+\beta Z_2+\gamma Z_3, \tag{6}$$

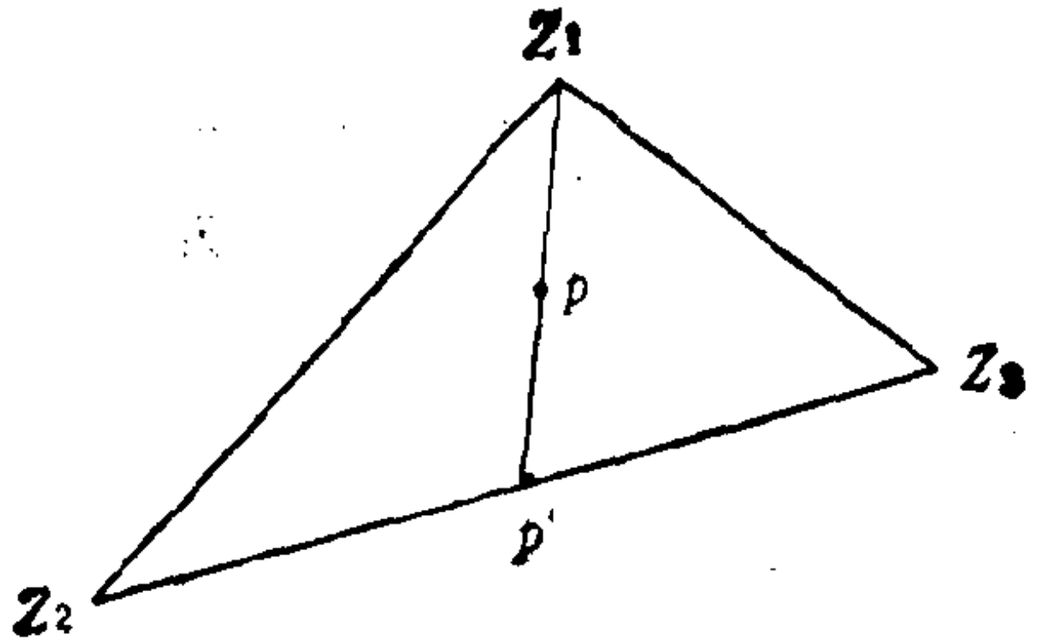


图 6.2

注意：$0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 1$ 且

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{7}$$

现在我们来讨论满足(6)与(7)的 α，β，γ 的几何意义。考察有向面积 $\triangle pZ_2Z_3$，按公式(1)，我们有

$$\triangle pZ_2Z_3 = \frac{i}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & Z_2 & Z_3 \\ \bar{p} & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

将(6)与(7)代入上式右边的三阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & 1 & 1 \\ \alpha Z_1+\beta Z_2+\gamma Z_3 & Z_2 & Z_3 \\ \alpha\bar{Z}_1+\beta\bar{Z}_2+\gamma\bar{Z}_3 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix}$$

用$(-\beta)$及$(-\gamma)$分别乘第二、第三两列再加到第一列上，得到

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \alpha\bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix}.$$

因此(8)式可写为

$$\triangle pZ_2Z_3 = \alpha\triangle Z_1Z_2Z_3.$$

也就是

$$\alpha = \frac{\triangle pZ_2Z_3}{\triangle Z_1Z_2Z_3}, \tag{9}$$

类似地可得

$$\left.\begin{aligned}\beta &= \frac{\triangle Z_1 p Z_3}{\triangle Z_1 Z_2 Z_3},\\ \gamma &= \frac{\triangle Z_1 Z_2 p}{\triangle Z_1 Z_2 Z_3}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

这就说明了：满足(6)与(7)的三个实数 α，β，γ 可以表成两个三角形的面积之比(图 6.3)，也顺便说明了，对于一个点 p 而言，适合(6)与(7)的三个数(α，β，γ)是唯一确定的，称(α，β，γ)为点 p 关于三角形 $Z_1Z_2Z_3$ 的"面积坐标"。显然，Z_1，Z_2，Z_3 的面积坐标分别为 (1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1)。

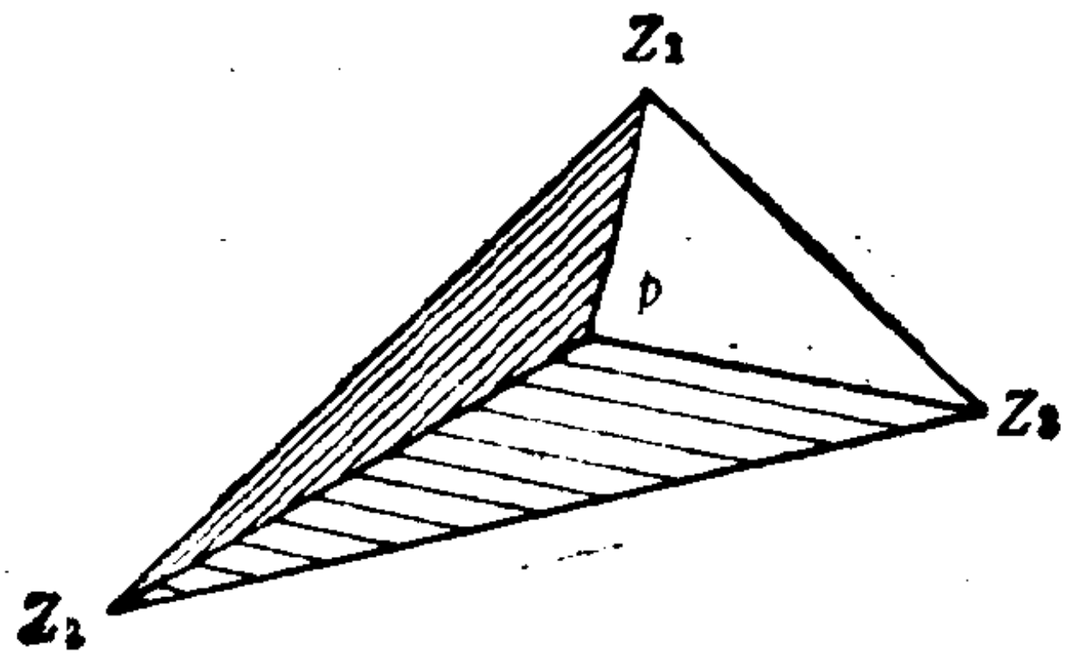


图 6.3

设 p 的面积坐标为(α，β，γ)。问联线 Z_1 与 p 延长后同对边的交点 p' 的面积坐标是什么(见图 6.2)？由(5)式可见，p' 的面积坐标为 $(0, 1-\mu, \mu)$。但从前面的推导可知

$$1-\mu = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{\beta}{\beta+\gamma},$$

$$\mu = 1 - \frac{\beta}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma},$$

这表明当 p 的面积坐标为(α，β，γ)时，p' 的面积坐标是

$$\left(0, \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \frac{\gamma}{\beta+\gamma}\right). \tag{11}$$

现在来解国际数学奥林匹克中某些平面几何题目.

例 1（第 3 届国际数学奥林匹克第 4 题） 给定一个三角形 $P_1P_2P_3$ 及其内部任意一个点 P. 直线 P_1P, P_2P 及 P_3P 与对边的交点分别为 Q_1, Q_2, Q_3. 求证下列三个比值

$$\overline{P_1P}:\overline{PQ_1},\quad \overline{P_2P}:\overline{PQ_2},\quad \overline{P_3P}:\overline{PQ_3}$$

中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2.

证明 题中所有文字既代表点，又表示在复平面上该点的复数表示，以下均此，不再申明.

把 $P_1P_2P_3$ 作为坐标三角形，设 P 关于它的面积坐标为 (α, β, γ). 参照 (4) 可知，比值

$$\overline{P_1P}:\overline{PQ_1} = (1-\alpha):\alpha,$$

对称地有

$$\overline{P_2P}:\overline{PQ_2} = (1-\beta):\beta,$$
$$\overline{P_3P}:\overline{PQ_3} = (1-\gamma):\gamma.$$

如果这三个比值个个大于 2，我们有

$$1-\alpha > 2\alpha,\quad 1-\beta > 2\beta,\quad 1-\gamma > 2\gamma.$$

亦即 $1 > 3\alpha$, $1 > 3\beta$, $1 > 3\gamma$，将以上三式相加，得

$$3 > 3(\alpha+\beta+\gamma) = 3,$$

这是一个矛盾. 同样可证：这三个比值也不能个个小于 2. 证完.

请读者注意：以上证明是多么简洁!

设 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为一固定的坐标三角形，w_1, w_2, w_3 为平面上三个复数(三个点)，设后者关于 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的面积坐标依次为

$$(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j),\quad j = 1, 2, 3.$$

于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 \\ \alpha_1 z_1+\beta_1 z_2+\gamma_1 z_3 & \alpha_2 z_1+\beta_2 z_2+\gamma_2 z_3 & \alpha_3 z_1+\beta_3 z_2+\gamma_3 z_3 \\ \alpha_1 \bar{z}_1+\beta_1 \bar{z}_2+\gamma_1 \bar{z}_3 & \alpha_2 \bar{z}_1+\beta_2 \bar{z}_2+\gamma_2 \bar{z}_3 & \alpha_3 \bar{z}_1+\beta_3 \bar{z}_2+\gamma_3 \bar{z}_3 \end{vmatrix}$$

把上式右边的行列式各列拆成 3 列，共可得到 27 个三阶行列式，但其中不为零的只有 6 个，它们的和为

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \bar{Z}_1 & \bar{Z}_2 & \bar{Z}_3 \end{vmatrix}$$

而圆括号内的 6 项正好是三阶行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

参照三角形的面积公式，可知

定理 2 设 w_j 关于 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的面积坐标为 $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$，$j=1,2,3$，那么有向面积

$$\triangle w_1w_2w_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \triangle Z_1Z_2Z_3. \tag{12}$$

与定理 1 对照起来，可得

定理 3 三点 w_1, w_2, w_3 共线的必要充分条件为

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

现在我们可以利用刚刚建立起来的知识来做题目.

例 2（第 8 届国际数学奥林匹克第 6 题） 在三角形 ABC 的三边 AB，BC，CA 上分别任取不与端点重合的三点 M，K，L. 求证：在三角形 LAM，MBK，KCL 中至少有一个的面积不大于原三角形面积的四分之一.

证明 为了避免出现负的面积，我们有意地把各个三角形安排成正向(图 6.4)。

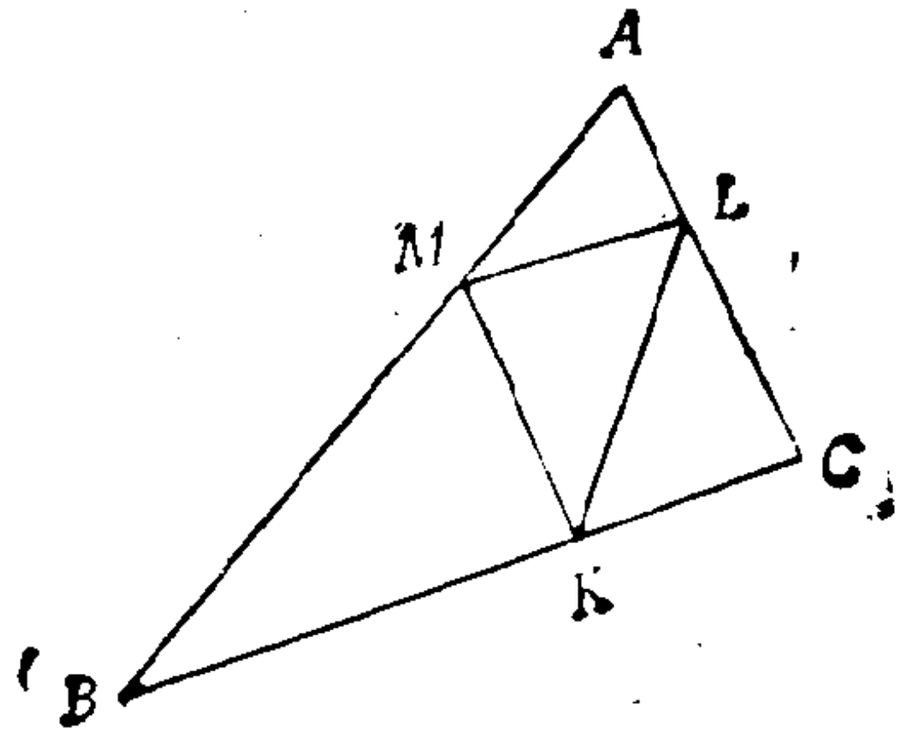


图 6.4

把 M，K，L 三点用面积坐标来表达，设

$$K=(0,\ 1-k,\ k),$$

$$L=(l,\ \ 0,\ 1-l),$$

$$M=(1-m,\ m,\ 0),$$

这里实数 k，l，m 适合 $0<k,l,m<1$。按公式(12)来计算面积：

$$\triangle AML=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-m & m & 0 \\ l & 0 & 1-l \end{vmatrix}\triangle ABC$$

$$=m(1-l)\triangle ABC,$$

对称地有

$$\triangle MBK=k(1-m)\triangle ABC,$$

$$\triangle KCL=l(1-k)\triangle ABC.$$

把以上三式各方相乘，得

$$(\triangle AML)(\triangle MBK)(\triangle KCL)=k(1-k)$$

$$\cdot l(1-l)m(1-m)(\triangle ABC)^3$$

由于当 $x\in(0,\ 1)$ 时，$x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$，因此上式右边将不超过

$$\left(\frac{1}{4}\triangle ABC\right).$$

因此 $\triangle AML$，$\triangle MBK$，$\triangle KCL$ 不能都大于 $\triangle ABC$ 的四分之一. 证完.

下面这个例子虽不是国际数学奥林匹克的题目，但由于解题中还要用到共线的技巧，我们还是讲述一下.

例 3 (1978 年安徽省数学竞赛试题) 过三角形的重心任作一直线，把这三角形分成两部分，求证：这两部分面积之差不大于原三角形面积的 1/9.

证明 设原来的三角形为 ABC，G 是它的重心，G 的面积坐标是 (1/3, 1/3, 1/3) (为什么？请读者证明之). 设 XY 为过 G 的任一直线，且 X 与 Y 有面积坐标

$$X=(1-x, x, 0),\quad Y=(y, 0, 1-y).$$

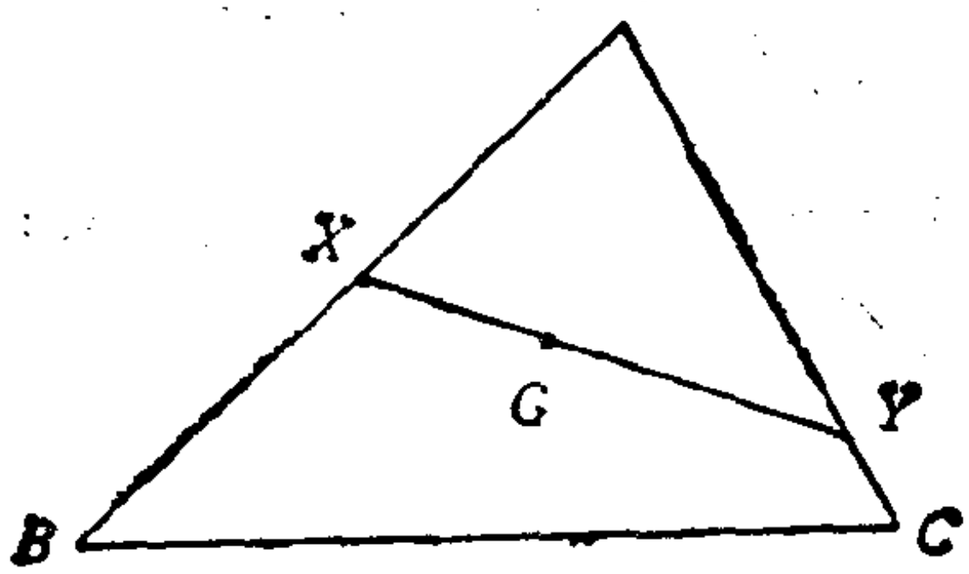


图 6.5

为了保持 X 在 AB 上变化，同时 Y 在 AC 上变化，因此 y 的变化范围是 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$，而 x 相应地受到限制 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$. 由于 G, X, Y 三点共线，依定理·3，有

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1-x & x & 0 \\ y & 0 & 1-y \end{vmatrix}=0,$$

由此解出

$$1-y=\frac{x}{3x-1}. \tag{14}$$

依定理2，我们计算三角形 AXY 的面积

$$\triangle AXY=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1-x & x & 0\\ y & 0 & 1-y\end{vmatrix}\triangle ABC,$$

即 $$\triangle AXY=x(1-y)\triangle ABC.$$

将 (14) 代入上式，得

$$\triangle AXY=\frac{x^2}{3x-1}\triangle ABC, \tag{15}$$

由于函数 $x^2/(3x-1)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ 上的 $x=\frac{2}{3}$ 处达到最小值 4/9，由 (15) 知

$$\triangle AXY\geqslant\frac{4}{9}\triangle ABC,$$

因此另一部分的面积 $\leqslant\frac{5}{9}\triangle ABC$. 这就表明，这两部分的面积之差不超过三角形 ABC 的面积的九分之一。

三、单位向量

模长(长度)为 1 的向量叫做**单位向量**. 单位向量可以用模为 1 的复数表示：$|Z|=1$ 或者 $ZZ=1$. 单位向量更形象的记法是

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,$$

这里 θ 为任意的实数，它表示这个向量与正实轴所夹的角. $e^{i\theta}$ 是一个很方便的记号，它是较长的表达式 $\cos\theta+i\sin\theta$ 的一种缩写.

例 4（第 15 届国际数学奥林匹克第 1 题） 设 O 为直线

g 上的一点. $\boldsymbol{OP}_1, \boldsymbol{OP}_2, \cdots, \boldsymbol{OP}_n$ 为单位向量，所有的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 在同一平面内，且在 g 的同一侧. 求证：当 n 为奇数时

$$|\boldsymbol{OP}_1 + \boldsymbol{OP}_2 + \cdots + \boldsymbol{OP}_n| \geqslant 1$$

($|\boldsymbol{OM}|$ 表示向量 $\boldsymbol{OM}$ 的长度).

证明 由题设可知，$\boldsymbol{OP}_1, \cdots, \boldsymbol{OP}_n$ 为平面向量，选择复坐标系使 g 为实轴，点 O 为原点，因此 P_i 可用复数 $e^{i\theta_i}$ 来表示，$i = 1, 2, \cdots, n$. 不妨设：$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_n \leqslant \pi$，这时所有点 P_i 都在上半平面.

我们用归纳法进行证明. $n = 1$ 时，只有一个点 $P_1 = e^{i\theta_1}$，这时

$$|\boldsymbol{OP}_1| = |P_1| = 1,$$

命题显然成立. 今设 n 为奇数，对于小于 n 的奇数来说命题已经成立. 令

$$Z = P_2 + P_3 + \cdots + P_{n-1},$$

由归纳假设 $|Z| \geqslant 1$. 再看 P_1 与 P_n. 如果它们方向相反，这时 $P_1 + P_n = 0$. 于是

$$\begin{aligned} |P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + P_n| &= |O + Z| \\ &= |Z| \geqslant 1. \end{aligned}$$

所以设 $P_1 + P_n \neq 0$. 这时 $P_1 + P_n$ 位于 $\angle P_1OP_n$ 的平分线上. 由于 Z 也在 $\angle P_1OP_n$ 之内，因此 Z 与 $P_1 + P_n$ 这两个非零向量之间的夹角 $\leqslant \frac{1}{2} \angle P_1OP_n < \frac{1}{2}\pi$，表明这二个向量之间夹成锐角. 但是由向量加法的平行四边形法则可知，夹成锐角的两个非零向量之和的长度将大于这二个向量中任何一个的长度，因此有

$$\begin{aligned} |P_1 + P_2 + \cdots + P_{n-1} + P_n| &= |Z + (P_1 + P_n)| \\ &> |Z| \geqslant 1, \end{aligned}$$

命题到此证完.

四、旋　　转

设 Z 为任一复数，考虑 $Ze^{i\theta}$，由于

$$|Ze^{i\theta}| = |Z|,$$

$$(Ze^{i\theta}) \text{ 的幅角} = Z\text{的幅角} + \theta,$$

可见 $Ze^{i\theta}$ 是将向量 $\boldsymbol{OZ}$ 绕着原点 O 旋转 θ 角所到达的位置，长度却没有变化. 平面上的旋转可以如此轻巧地用 $e^{i\theta}$ 来作乘法而实现，这是复数优于平面向量之处.

例 5（第 17 届国际数学奥林匹克第 3 题）　在任意三角形 ABC 各边的外侧作三角形 BPC，CQA，ARB，使得

$$\angle PBC = \angle CAQ = 45°,$$

$$\angle BCP = \angle QCA = 30°,$$

$$\angle ABR = \angle BAR = 15°,$$

试证

1) $\angle QRP = 90°$;

2) $\overline{QR} = \overline{RP}$.

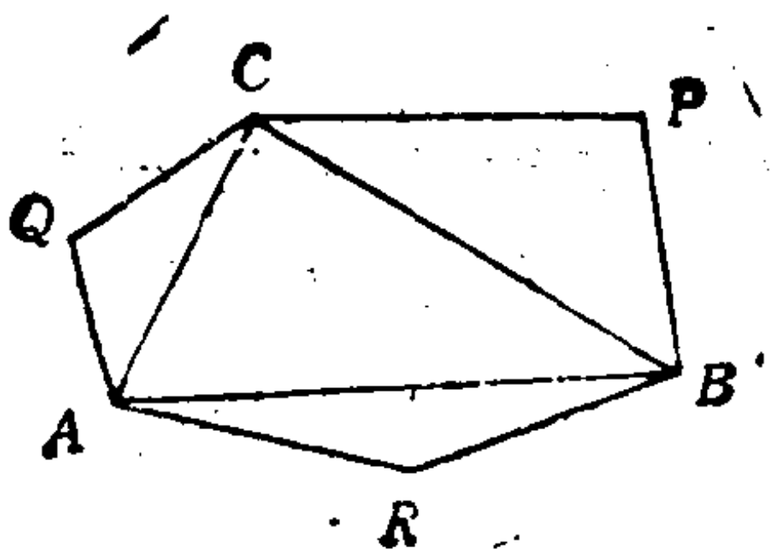


图 6.6

证明　作图 6.6. 由于 $\boldsymbol{CB}$ 向反时针方向转动 30° 与 $\boldsymbol{CP}$ 同向，因此有正数 λ 使

$$P - C = \lambda(B - C)e^{i\frac{\pi}{6}},$$

即

$$P = C + \lambda(B - C)e^{i\pi/6}.$$

同样，由于 BC 向顺时针转动 45° 后与 BP 同向，因此应有正数 μ 使得

$$P = B + \mu(C - B)e^{-i\pi/4}.$$

P 的上述两种表示法应当相等，由此得

$$C - B + \lambda(B - C)e^{i\pi/6} = \mu(C - B)e^{-i\pi/4}.$$

约去非零的因子 $C - B$，得到

$$1 - \lambda e^{i\pi/6} = \mu e^{-i\pi/4}.$$

比较上式双方的实部和虚部，得到 $\lambda = \sqrt{3} - 1$，从而

$$P = C + (\sqrt{3} - 1)(B - C)e^{i\pi/6}. \tag{16}$$

用相同的做法可得

$$Q = C + (\sqrt{3} - 1)(A - C)e^{-i\pi/6}; \tag{17}$$

如果注意到三角形 ACQ 与 BCP 是反向相似，上一等式无需重新推导．又用同样方法得出

$$R = B + \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}(A - B)e^{i\pi/12}, \tag{18}$$

在推导过程中，涉及一些特殊角三角函数的计算．我们需证的结论实际上是一个复数等式

$$e^{i\frac{\pi}{2}}(P - R) = Q - R,$$

也就是

$$R(1 - i) = Q - iP,$$

而这只须用 (16), (17), (18) 代入上式，经过冗长的计算便可达到目的．

例 6（第 19 届国际数学奥林匹克第 1 题） 在已给正方形 $ABCD$ 的每一条边上，向内侧各作等边三角形 ABK, BCL, CDM, DAN. 求证：四线段 KL, LM, MN, NK 的

中点以及八线段 AK，BK，BL，CL，CM，DM，DN，AN 的中点，是一个正 12 边形的顶点.

证明 不妨设 A，B，C，D 四点依次用 1，i，-1，$-i$ 来代表. 令

$$u = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+i}{2},$$

所以 $u^2 = e^{i\pi/3} = \dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$. 由正三角形顶点应适合的条件可以立刻写出

$$K = 1 + (i-1)u^2, \quad L = i - (1+i)u^2,$$

$$M = -1 + (1-i)u^2, \quad N = -i + (1+i)u^2.$$

这样一来，题中所指的 12 条线段的中点可以立即写出. 为书写的简便，令 $\lambda = (\sqrt{3}-1)/2$，故

KL 的中点为：$-\lambda i$；

LM 的中点为：λ；

MN 的中点为：λi；

NK 的中点为：$-\lambda$；

AK 的中点为：$\lambda e^{i11\pi/6}$；

BK 的中点为：$\lambda e^{i2\pi/3}$；

BL 的中点为：$\lambda e^{i\pi/3}$；

CL 的中点为：$\lambda e^{i7\pi/6}$；

CM 的中点为：$\lambda e^{i5\pi/6}$；

DM 的中点为：$\lambda e^{i5\pi/3}$；

DN 的中点为：$\lambda e^{i4\pi/3}$；

AN 的中点为：$\lambda e^{i\pi/6}$.

以上 12 个点均匀地分布在一个半径为 $(\sqrt{3}-1)/2$ 的圆周上. 证完.

例 7（第 21 届国际数学奥林匹克第 3 题） 平面上两圆

相交，A 为一个交点．两点同时自 A 出发，以常速度分别在各自的圆周上依相同方向绕行，旋转一周后两点同时回到原出发点．求证：在这平面上有一定点 P，使得在任何时刻从 P 到两动点的距离相等．

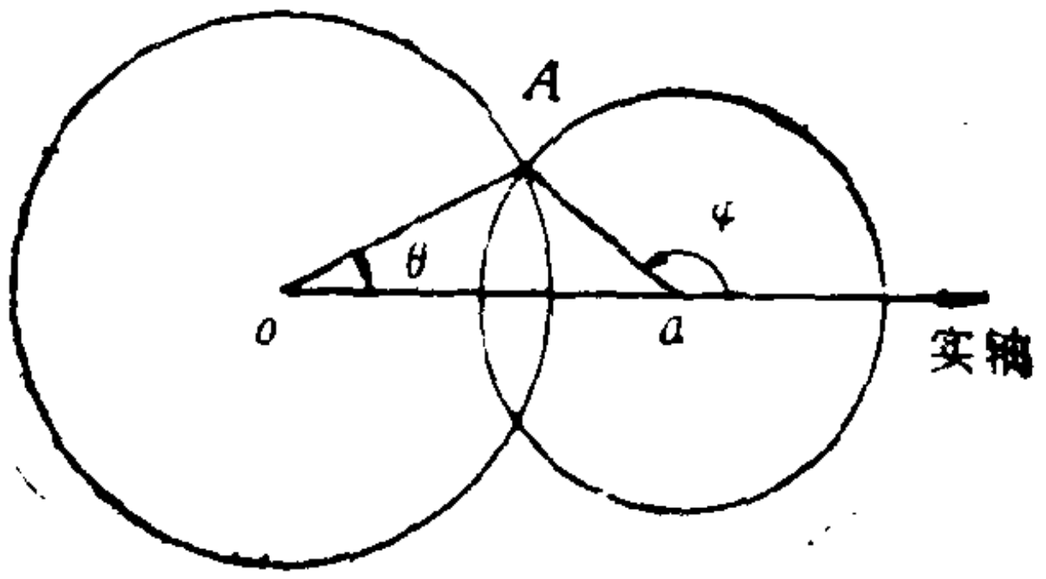


图 6.7

证明 不妨设这两圆在复平面上，方程为

$$|z| = 1 \quad 及 \quad |z - a| = \rho,$$

其中 $a > 0$．也就是说，第一个圆为单位圆，第二个圆的中心在正实轴上(图 6.7)．

点 A 有两种表示方法

$$A = e^{i\theta} \quad 及 \quad A = a + \rho e^{i\varphi}.$$

为了证明本题，必须且只须求出一个复数 P，使得对一切实数 t 有

$$|P - e^{i\theta}e^{it}| = |P - (a + \rho e^{i\varphi}e^{it})|.$$

在上式左边用 $e^{i\theta} = a + \rho e^{i\varphi}$ 代入，得到

$$|P - ae^{it} - \rho e^{i\varphi}e^{it}| = |P - \rho e^{i\varphi}e^{it} - a|$$

将上式左边绝对值内的复数取共轭之后再提取因子 e^{-it}，即

$$\bar{P} - ae^{-it} - \rho e^{-i\varphi}e^{-it} = e^{-it}(\bar{P}e^{it} - a - \rho e^{-i\varphi}),$$

从而可知

$$|\bar{P}e^{it} - a - \rho e^{-i\varphi}| = |P - \rho e^{i\varphi}e^{it} - a|$$

若能使 $\bar{P}e^{it} - \rho e^{-i\varphi} = P - \rho e^{i\varphi}e^{it}$，则上式自然能成立，而后者正是

$$P+\rho e^{-i\varphi}=e^{it}(\bar{P}+\rho e^{i\varphi}).$$

由此显见，若取 $P=-\rho e^{-i\varphi}$，则上式双方均为零，不论其中的 t 为怎样的实数. 故 $-\rho e^{-i\varphi}$ 正是所求的点.

由复数的表示法可知，$-\rho e^{-i\varphi}$ 正是点 A 关于两圆圆心连续的中垂线的对称点.

例 8（第 23 届国际数学奥林匹克第 5 题） 正六边形 $ABCDEF$ 的对角线 AC 和 CE 分别被内点 M，N 分成如下的比例

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r.$$

若 B，M，N 三点共线，试求比值 r.

解 虽然我们可以用 $e^{i\pi/3}$ 的方幂来表示一个正六边形的顶点，但不这样做反而简单一点. 依定比分点公式，我们有

$$M=(1-r)A+rC,$$

$$N=(1-r)C+rE.$$

由于 B，M，N 共线，依定理一，应有

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ B & M & N\\ \bar{B} & \bar{M} & \bar{N}\end{vmatrix}=0,$$

也就是

$$\begin{vmatrix}1 & (1-r)+r & (1-r)+r\\ B & (1-r)A+rC & (1-r)C+rE\\ \bar{B} & (1-r)\bar{A}+r\bar{C} & (1-r)\bar{C}+r\bar{E}\end{vmatrix}=0.$$

由此可得

$$(1-r)^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ B & A & C\\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{C}\end{vmatrix}+(1-r)r\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ B & A & E\\ \bar{B} & \bar{A} & \bar{E}\end{vmatrix}$$

$$+r^2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ B & C & E\\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{E}\end{vmatrix}=0.$$

注意，三角形 BAC，BAE 是同向的，它们与三角形 BCE 是反向的．其次三角形 BAE 与 BEC 有相等的面积，这个面积等于三角形 ABC 的面积的2倍，因此由上式可得方程

$$(1-r)^2+2(1-r)r-2r^2=0,$$

化简后得 $3r^2-1=0$，由此解出 $r=\sqrt{3}/3$.

例 9（第27届国际数学奥林匹克第2题）

本题的题目和解答请见本书的第一讲．这是一个典型的用复数来解的题目．在27届国际数学奥林匹克试题中，还有一个题可用复数来解．

例 10（第27届国际数学奥林匹克第4题） 以点 O 为心的正 n 边形（$n\geqslant 5$）的两个相邻顶点记为 A，B．三角形 XYZ 与 OAB 全等．最初令三角形 XYZ 重叠于 OAB，然后在平面上移动 XYZ，使点 Y 和 Z 都沿着多边形周界移动一周，而点 X 保持在多边形内移动．求点 X 的轨迹．

解 将 O 放在复平面的原点上．设 A，B，C 是这正 n 边形连续的三个顶点，依反时针方向排列．设在移动过程中的某一时刻，Y 在线段 AB 上，Z 在线段 BC 上，依定比分点公式，得

$$Y=(1-\lambda)A+\lambda B,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$
$$Z=(1-\mu)B+\mu C,\quad 0\leqslant\mu\leqslant 1.$$

令 $\iota=e^{i2\pi/n}$，于是 $B=\iota A$，$C=\iota B=\iota^2 A$．显然应有

$$(Y-X)\iota=Z-X.$$

由上式解出

$$X=\frac{Z-Y\iota}{1-\iota}=\frac{1}{1-\iota}(\mu-\lambda)(C-B)$$

$$= \frac{1}{1-t}(\mu-\lambda)(tB-B),$$

即

$$X = -(\mu-\lambda)B.$$

由于 $\mu-\lambda$ 为实数，上式表明，点 X 总在 O 与 B 决定的直线上. 其次,由 $|A| = |Y-X|$ 得出

$$|A| = |(1-\lambda)A + \mu B| = |1-\lambda+\mu t||A|,$$

可见 $|1-\lambda+\mu t| = L$. 由此得

$$1 \leqslant |1-\lambda| + |\mu t| = 1-\lambda+\mu,$$

立知 $\mu \geqslant \lambda$. 可见点 X 将在从 B 到 O 的联线的延长线上移动. X何时离O最远? 由对称性与连续性的考虑，当线段 YB 与 ZB 等长时可实现. 由此可得 $\lambda+\mu=1$ 或 $1-\lambda=\mu$. 于是 $\mu|1+t| = L$，由此解出

$$2\mu = \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{-1},$$

从而最远距离为

$$(\mu-\lambda)|B| = (2\mu-1)|B|$$

$$= \left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{-1}|B|.$$

若用 a 记此正 n 边形的边长,我们有

$|B| = a\left(2\sin\frac{\pi}{n}\right)^{-1}$，从而 X 到 O 的最远距离为

$$a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{-1}.$$

最后得出结论: 所求轨迹为以 O 为中心的“星形”，从 O 出发,背向多边形的每一顶点画一线段,其长度由上式表示.

解题就到此为止. 我们没有把握说是已经把国际数学奥林匹克中凡是可用复数解的几何题都已挑了出来，但从已挑

出的题目来看，为数已经不少．复数解法不是万应灵药，有不少几何题很难用复数计算来解决；即使能够用复数解决，在有的时候也不是一种最优的方法．比如说本文的例3，计算是较繁的，并且要用到有理函数求极值的方法．事实上，这个题目有非常初等的解法，非常清晰，非常干脆：把三角形的每一边三等分，过每一分点作平行于其他两边的直线，这些直线把三角形 ABC 分成9个面积相等的小三角形（图6.8），内部那个交点 G 正好是这个三角形的重心．过 G 任作一直线（用虚线表示），它把三角形 ABC 分成两部分．经过很简单的观察，可以发现，这两部分面积之差，正好是在三角形 BEF 中画斜线的部分与没有画斜线的部分的面积之差，显然不会超过三角形 BEF 的面积，即三角形 ABC 面积的九分之一．

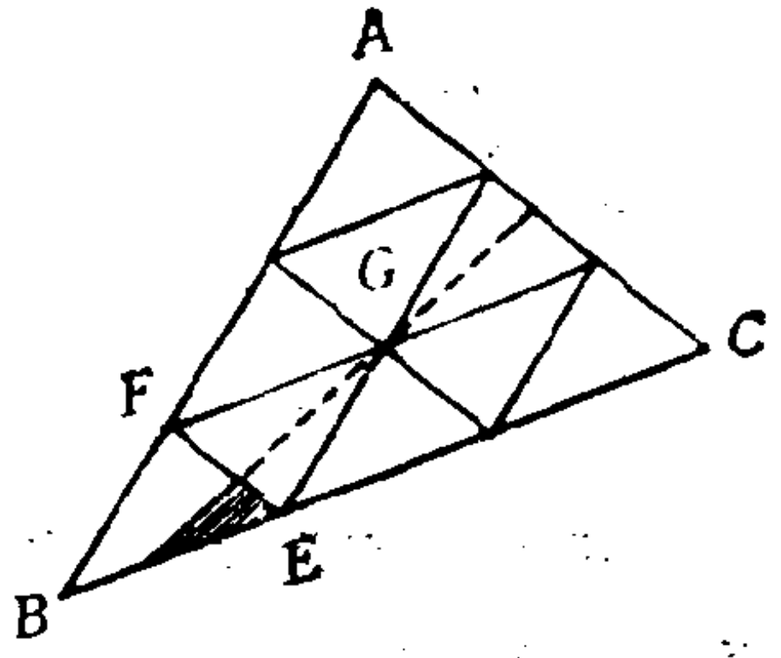


图 6.8

例1、例2、例8和例9都是体现复数解法的很优越的例子．复数解法的另一优点是：一旦写出有关点的复数表示之后，余下来的就是直截了当的计算，用不着巧思，用不着辅助线，甚至连画一张精确的图形也不必要，这一优点，在例5和例6中得到了体现．

第七讲　函数迭代与函数方程

杜　锡　录

在数学竞赛中，函数迭代和函数方程是一个重要的专题，例如从第 24 届国际数学奥林匹克以来，不包括有关数列的函数迭代与函数方程方面的题目就超过 10 题，平均一年考一题，可见出现的频率还是不小的。其原因在于，函数迭代与函数方程方面的研究．虽然本世纪初以谢留德为首的波兰学派对此进行了一些开创性工作，但在数学界并未引起足够的重视．40 年代前后，苏联盖尔谢凡诺夫教授，发展了其中的理论并成功地解决了一系列有关力学、渗透理论、弹性理论和地层动力理论的问题，这些问题都与谢留德方程有关。这开始引起了一些数学家的重视，特别是近年来关于微分动力体系的研究，对函数迭代和函数方程更引起了广泛的兴趣．又由于其中一些简单问题的解决，仅仅以初等数学或微积分为工具，所以就容易引起数学竞赛命题者的兴趣，因此，从 70 年代以来，在数学竞赛中就频繁出现了有关函数迭代和函数方程方面的题目．

有关函数迭代和函数方程方面的一些基础知识，本文作者曾和严镇军、吴之季老师合写了一本小册子《归纳、递归、迭代》，将由人民教育出版社出版，本文就不多叙述了．下面仅就这些题目出现的形式，分类简述，以期引起大家的重视，从而共同研讨之。

数学竞赛中这方面的题目大致分三类：一、确定函数性质；二、确定函数值；三、确定函数形式。

一、确定函数性质

例 1（第15届国际数学奥林匹克第5题）给出呈 $f(x)=ax+b$ 型的非常值函数 f 所组成的非空集 G，这里 a，b 是实数且 $a\neq 0$，x 是实变数．若 G 有如下性质：

（1）若 f，$g\in G$，则 $g\circ f\in G$，其中定义 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$；

（2）若 $f\in G$ 且 $f(x)=ax+b$，那么反函数 f^{-1} 也属于 G，这里 $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$；

（3）对每一个 $f\in G$，有一个 x_f，使得 $f(x_f)=x_f$。

证明：总有一个 k，使对所有 $f\in G$，有 $f(k)=k$。

证明 显然 $I(x)=x\in G$，考虑集 $G\backslash\{I\}$，用反证法证明我们的结论．

设有 f，$g\in G\backslash\{I\}$，$x_f\neq x_g$，令

$$f(x)=ax+b,\quad g(x)=a'x+b',$$

则由 $f(x_f)=x_f$，$g(x_g)=x_g$，易得

$$x_f=\frac{b}{1-a},\quad x_g=\frac{b'}{1-a'},$$

这里 $a\neq 1$，$a'\neq 1$。于是

$$\begin{aligned}h(x)&=f\circ g\circ f^{-1}\circ g^{-1}(x)\\&=a\left[a'\left(\frac{\dfrac{x-b'}{a'}-b}{a}\right)+b'\right]+b\\&=x-b'-a'b+ab'+b\\&=x+(1-a)(1-a')(x_f-x_g),\end{aligned}$$

由于 $(1-a)(1-a')(x_f-x_g)\neq 0$，不存在 x_h 使 $h(x_h)=$

x_k，与 $h(x)\in G$ 矛盾.

这题在几何上的意义是很明显的，G 实际上是平面上的过 (k,k) 点的直线束所构成的集合，不含直线 $x=k$ 和 $y=k$. 显然，这个集合满足命题所要求的所有条件.如果 G 中的两条直线 f 和 g 与直线 $y=x$ 相交于不同的点，因为两直线只有一个交点，所以显然不能满足题目结论的要求.

例 2（第 14 届国际数学奥林匹克第 5 题） f 和 g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的实函数，而且对所有的 x 和 y 成立方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(x).$$

证明：若 $f(x)\not\equiv 0$，且 $|f(x)|\leqslant 1$ 对所有 x 都成立，则有 $|g(y)|\leqslant 1$ 对所有 y 都成立.

证明 设 $M=\sup|f(x)|$，则由题设 $M>0$，对任意 δ，$0<\delta<M$，总可以找到 x，使得 $|f(x)|>M-\delta$. 此时对任意 y，有

$$\begin{aligned}2M &\geqslant |f(x+y)|+|f(x-y)|\\ &\geqslant |f(x+y)+f(x-y)|\\ &=2|f(x)||g(y)|\\ &>2(M-\delta)|g(y)|,\end{aligned}$$

于是

$$|g(y)|<\frac{M}{M-\delta}=1+\frac{\delta}{M-\delta},$$

由于 δ 是任意的，令 $\delta\to 0$，即有

$$|g(y)|\leqslant 1.$$

例 3（第 19 届国际数学奥林匹克第 6 题） 设 $f(n)$ 是一个在自然数集上定义，并在这个数集上取值的函数. 试证：如果对于每个 n 值，不等式 $f(n+1)>f[f(n)]$ 都成立的话，那么，对于每一个 n 值，都有 $f(n)=n$.

证明 先用归纳法证明命题 A_n：

当 $m \geqslant n$ 时，$f(m) \geqslant f(n)$。

显然 A_1 真，设 $f(m-1) \geqslant n-1$，由

$$f(m) > f(f(m-1)) \geqslant n-1,$$

立得 $f(m) \geqslant n$，即 A_n 为真。

由此可知 $f(n) \geqslant n$，而

$$f(n+1) > f(f(n)) \geqslant f(n),$$

于是 $f(n)$ 单调增加。

若有某个 n 使 $f(n) > n$，则有

$$f(n) \geqslant n+1, \quad f(f(n)) \geqslant f(n+1)$$

与题设矛盾

所以只能有 $f(n) = n$。

此题可以看出，数学归纳法是解决一些函数迭代问题的重要方法之一。

例 4（第 24 届美国普特南数学竞赛第 *A2* 题） 设 $f(n)$ 是定义在自然数集上且取自然数值的严格递增的函数，$f(2)=2$，当 m，n 互素时

$$f(mn) = f(m)f(n).$$

证明：对一切正整数 n

$$f(n) = n.$$

证明 因为

$$\begin{aligned} f(3)f(7) &= f(21) < f(22) = f(2)f(11) \\ &= 2f(11) < 2f(14) = 2f(2)f(7) \\ &= 4f(7), \end{aligned}$$

所以 $f(3) < 4$，但 $f(3) > f(2) = 2$，故 $f(3) = 3$。

若命题不真，设使 $f(n) \neq n$ 的最小正整数为 $n_0 \geqslant 4$，即

$$f(2) = 2,\ f(3) = 3, \cdots,\ f(n_0-1) = n_0-1,\ \text{但有}$$

$$f(n_0) \neq n_0,$$

因为 $f(n_0) > f(n_0-1) = n_0 - 1$，故只能 $f(n_0) > n_0$。又由 $f(n)$ 严格递增，从而，当 $n \geqslant n_0$ 时

$$f(n) > n. \tag{1}$$

下面分两种情况讨论.

(i) 当 n_0 是奇数时，则 2 和 $n_0 - 2$ 互素，故

$$\begin{aligned} f(2(n_0-2)) &= f(2)f(n_0-2) \\ &= 2(n_0-2), \end{aligned} \tag{2}$$

但因 $n_0 \geqslant 4$，故 $2(n_0-2) \geqslant n_0$，(1) 与 (2) 矛盾.

(ii) 当 n_0 是偶数时，2 与 $n_0 - 1$ 互素，同样有

$$f(2(n_0-1)) = f(2)f(n_0-1) = 2(n_0-1), \tag{3}$$

显然 $2(n_0-1) > n_0$，从而 (1) 和 (3) 矛盾.

综上所述，(1) 永远不能成立，于是命题获证.

二、确定函数值

给出函数方程式或函数迭代式以及一些性质和初始值，求出函数在某处的函数值，也是数学竞赛中的一大类问题.解决这一类问题通常是巧妙地利用给出的表达式，利用归纳法或函数迭代的技巧来获得.

例 5（第 23 届国际数学奥林匹克第 1 题） 函数 $f(n)$ 对所有正整数 n 有定义，取非负函数值. 并且对所有的正整数 m，n 有

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \quad 或\ 1;$$

以及 $f(2) = 0$，$f(3) > 0$，$f(9999) = 3333$. 求 $f(1982)$.

解 由 $0 = f(2) \geqslant 2f(1)$，得 $f(1) = 0$，由

$$f(3) - f(2) - f(1) = 0 \text{ 或 } 1,$$

得

$$0 \leqslant f(3) \leqslant 1.$$

由题设 $f(3)>0$，得 $f(3)=1$。

下面我们首先证明，对于 $k<3333$，有

$$f(3k)=k.$$

由于

$$f(3k)\geqslant f(3(k-1))+f(3),$$

由数学归纳法易得

$$f(3k)\geqslant k.$$

如果 $f(3k)\geqslant k+1$，则由

$$\begin{aligned}f(9999)&\geqslant f(9999-3k)+f(3k)\\&\geqslant 3333-k+k+1>3333\end{aligned}$$

与题设矛盾，所以必有 $f(3k)=k$。

于是显然有

$$660\leqslant f(1982)\leqslant 661,$$

如果 $f(1982)=661$，则由

$$\begin{aligned}f(9999)&=f(5\times 1982+89)\\&\geqslant 5f(1982)+f(89)\\&\geqslant 5\times 661+f(87)\\&\geqslant 3305+29>3333,\end{aligned}$$

与题设矛盾．所以必有

$$f(1982)=660.$$

例 6（第 22 届国际数学奥林匹克第 6 题） 函数 $f(x,y)$ 对所有的非负整数 x,y 满足

(1) $f(0,y)=y+1$；

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$；

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$。

试确定 $f(4,1981)$。

解 由

$$f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=f(1,n-1)+1,$$

及 $f(1,0)=f(0,1)=2$，得

$$f(1,n)=n+f(1,0)=n+2.$$

又由

$$\begin{aligned} f(2,n)&=f(1,f(2,n-1))\\ &=f(2,n-1)+2\\ &=2n+f(2,0), \end{aligned}$$

$$f(2,0)=f(1,1)=3,$$

所以

$$f(2,n)=2n+3.$$

再由

$$\begin{aligned} f(3,n)&=f(2,f(3,n-1))\\ &=2f(3,n-1)+3\\ &=2[f(3,n-1)+3]-3, \end{aligned}$$

即有

$$\frac{f(3,n)+3}{f(3,n-1)+3}=2.$$

从而有

$$f(3,n)+3=2^n(f(3,0)+3),$$

因为

$$f(3,0)=f(2,1)=5,$$

所以

$$f(3,n)=2^{n+3}-3.$$

最后我们计算 $f(4,n)$，由

$$\begin{aligned} f(4,n)&=f(3,f(4,n-1))\\ &=2^{f(4,n-1)+3}-3, \end{aligned}$$

即

$$f(4,n)+3=2^{f(4,n-1)+3}.$$

令 $t_n=f(4,n)+3$，$\varphi(x)=2^x$，

则有

$$t_n = \varphi(t_{n-1}),$$

于是

$$t_n = \varphi^{[n]}(t_0) = \underbrace{\varphi(\varphi\cdots(\varphi}_{n\text{ 重迭代}}(t_0)))$$

由于

$$t_0 = f(4,0) + 3$$
$$= f(3,1) + 3 = 2^4$$

所以

$$f(4,n) = \varphi^{[n]}(16) - 3.$$

这样一来，得

$$f(4,1981) = \varphi^{[1981]}(16) - 3 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} - 3,$$

其中指数的重数为 1984.

这个题目的解法是极为典型的，它充分地利用所给的迭代条件，利用求 n 次迭代的各种方法，把相应的迭代都求出来.这些方法中经常采用的是：归纳法、简单迭代、特征值法、不动点法、桥函数相似法等.

例 7（第 20 届国际数学奥林匹克第 3 题） 设 f，g：$Z^+ \to Z^+$ 严格递增函数，并且

$$f(Z^+) \cup g(Z^+) = Z^+,$$
$$f(Z^+) \cap g(Z^+) = \phi,$$
$$g(n) = f(f(n)) + 1,$$

求 $f(240)$. 这里 Z^+ 是正整数集合.

解 令

$$F\{f(n)\}, \quad G = \{g(n)\},$$

由 $F \cup G = Z^+$，$F \cap G = \phi$，则 F 和 G 互补.

我们证明

$$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right].$$

利用归纳法. 由于 $g(n)=f(f(n))+1>1$，所以只能有

$$f(1)=1=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right],$$

于是 $g(1)=2$.

设当 $n<m$ 时，

$$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right],$$

取 n，使 $f(n)<m\leqslant f(n+1)$，由 f 的递增性可得 $n+1<m$ （$\because f(n)\geqslant n+1$，$n>1$ 时），由归纳假设有

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}n<m<\frac{\sqrt{5}+1}{2}(n+1), \qquad (1)$$

所以，由此可知不大于 $f(n)$ 的自然数中有 m 个属于 F，即 $f(1),f(2),\cdots,f(m)$，又由

$$g(n)=f(f(n))+1<f(m)+1,$$

所以有 n 个自然数属于 G，即 $g(1),g(2),\cdots,g(n)$. 因此，

$$f(m)=n+m.$$

但由（1）式

$$n<\frac{\sqrt{5}-1}{2}m<n+1,$$

故

$$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}m\right]=n.$$

于是

$$f(m)=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}m\right]+m=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}m\right].$$

这就完成了归纳法的证明．不难由此算出

$$f(240) = 388.$$

三、确定函数形式

例 8（第 32 届美国普特南数学竞赛第 B2 题） 设 $F(x)$ 是对除 $x = 0$ 及 $x = 1$ 以外的一切实数有定义的实值函数，且

$$F(x) + F\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x, \tag{1}$$

求 $F(x)$.

解 令 $x = \dfrac{y-1}{y}$, $y \neq 0$, $y \neq 1$, 代入(1)得

$$F\left(\frac{y-1}{y}\right) + F\left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{2y-1}{y}, \tag{2}$$

令 $x = \dfrac{1}{1-z}$, $z \neq 0$, $z \neq 1$, 代入(1)得

$$F\left(\frac{1}{1-z}\right) + F(z) = \frac{2-z}{1-z}, \tag{3}$$

分别把(2)、(3)的变量 y, z 换为 x, 得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right) + F\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2x-1}{x}, \tag{4}$$

$$F\left(\frac{1}{1-x}\right) + F(x) = \frac{2-x}{1-x}. \tag{5}$$

从(1)，(4)和(5)消去 $F\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, $F\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ 得

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[(1+x) + \frac{2-x}{1-x} - \frac{2x-1}{x}\right]$$

$$= \frac{1 + x^2 - x^3}{2x(1 - x)}.$$

例 9（第 17 届国际数学奥林匹克第 6 题） 求出满足下列条件的所有含两个变量的多项式：

（1） P 是 n 次齐次的. 即对所有实数 t, x, y, 有

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y);$$

（2） 对所有实数 a, b, c 有

$$P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0;$$

（3） $P(1, 0) = 1$.

解 由于常数多项式不可能同时满足（2）和（3），故 $n \geqslant 1$.

在（2）中令 $a = b$, $c = -2a$, 则由 P 的齐次性得

$$\begin{aligned} 0 &= P(2a, -2a) + P(-a, a) + P(-a, a) \\ &= ((-2)^n + 2)P(-a, a). \end{aligned}$$

若 $n > 1$, 则有 $P(-a, a) = 0$, 因而 $x + y$ 能整除 $P(x, y)$. 设

$$P(x, y) = (x + y)P_1(x, y),$$

则由（2）得

$$\begin{aligned} &P_1(a + b, c)(a + b + c) + P_1(b + c, a)(a + b + c) \\ &\quad + P_1(c + a, b)(a + b + c) = 0, \end{aligned}$$

于是

$$P_1(a + b, c) + P_1(b + c, a) + P_1(c + a, b) = 0,$$

$P_1(x, y)$ 仍是 $n - 1$ 齐次的，且

$$P_1(1, 0) = P_1(1, 0)(1 + 0) = P(1, 0) = 1,$$

即 $P_1(x, y)$ 仍满足条件（1）—（3），它的次数是 $n - 1$ 次的. 如果 $n - 1 > 1$, 同样可再构造一个 $n - 2$ 次齐次多项式 $P_2(x, y)$, 它满足条件（1）—（3），并且

$$P_1(x, y) = (x + y)P_2(x, y),$$

如此下去，最后总会得到一个一次多项式

$$P_{n-1}(x, y) = Ax + By,$$

仍满足条件(1)—(3)，显然 $A = 1$，由条件(2)，令 $a = 1$，$b = c = 0$，得

$$2 + B = 0, \quad B = -2,$$

所以

$$P(x, y) = (x + y)^{n-1}(x - 2y)$$

不难验证这个多项式满足我们的要求．由以上推理，可知满足条件(1)—(3)的多项式也都具有这种形式．

例 8 和例 9 是这一类问题的典型题目，在处理手法上也有一些相似的地方，都是通过对所给的表达式反复推敲，给出某些变量的一些特殊值，找出一些更明确的性质和更进一步的关系式，从而接近并达到我们的目的．例 9 中 $P_1(x, y)$，$P_2(x, y), \cdots, P_{n-1}(x, y)$ 的这种归纳构造的方法是常用的，而且对很多问题是行之有效的．

例 10（第 27 届国际数学奥林匹克第 5 题） f 为定义于非负实数上的且取非负实数值的函数，求所有满足下列条件的 f：

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$；

(ii) $f(2) = 0$；

(iii) $f(x) \neq 0$，当 $0 \leqslant x < 2$．

解 如果 $w > 2$，那么在 (i) 中取 $y = 2$，$x = w - 2$，就得

$$f(w) = f((w - 2)f(2))f(2) = 0,$$

于是

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2.$$

在 (i) 中，令 $x \geqslant 0$，$0 \leqslant y < 2$，则

$$\text{左边} = 0 \Leftrightarrow xf(y) \geqslant 2,$$

$$右边 = 0 \Longleftrightarrow x + y \geqslant 2,$$

这样一来，当 $0 \leqslant y < 2$，$x > 0$ 时，有

$$xf(y) \geqslant 2 \Longleftrightarrow x + y \geqslant 2,$$

这等价于

$$f(y) \geqslant \frac{2}{x} \Longleftrightarrow x \geqslant 2 - y,$$

$$f(y) < \frac{2}{x} \Longleftrightarrow x < 2 - y,$$

固定 y，让 x 从左、右趋向于 $2 - y$，由上面两式可得

$$f(y) = \frac{2}{2 - y}.$$

于是，所求的 f 就是

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2 - y}, & 当\ 0 \leqslant y < 2; \\ 0, & 当\ y \geqslant 2. \end{cases}$$

它显然满足条件 (ii) 和 (iii)．下面验证它也满足条件 (i)．

对 $x + y$ 和 $xf(y)$ 进行讨论，仅发生以下四种情况．

1°．当 $x+y<2$ 且 $xf(y)<2$，此时 $c \leqslant y < 2$，$f(y)=\frac{2}{2-y}$，

$$f(xf(y)) = \frac{2}{2 - xf(y)} = \frac{2}{2 - \dfrac{2x}{2 - y}} = \frac{2 - y}{2 - (x + y)}$$

所以

$$f(xf(y))f(y) = \frac{2 - y}{2 - (x + y)} \cdot \frac{2}{2 - y}$$

$$= \frac{2}{2 - (x + y)} = f(x + y).$$

2°．当 $x + y \geqslant 2$，且 $xf(y) \geqslant 2$，此时 (i) 中左右两

边都等于 0，因而相等.

3°. 当 $x+y\geqslant 2$，$xf(y)<2$. 这时如果 $y\geqslant 2$，(i) 中左右两边都等于 0，因而相等. 但如果 $y<2$，由 $xf(y)=x\cdot\frac{2}{2-y}<2$，得出 $x+y<2$，与所给条件矛盾.

4°. 当 $x+y<2$，$xf(y)>2$ 时，因为 $f(y)\geqslant\frac{2}{x}$，且 $x\frac{2}{2-y}\geqslant 2$，即 $x+y\geqslant 2$，这是矛盾的.

于是验证完毕.

例 11（第 24 届国际数学奥林匹克第 1 题） 求出定义在正实数集上并且取正实数值的一切函数 f，使之适合条件：

(i) $f(xf(y))=yf(x)$，对一切正数 x，y 均成立；

(ii) 当 $x\to+\infty$ 时，$f(y)\to 0$.

解 在已知条件 (i)

$$f(xf(y))=yf(x) \tag{1}$$

中，令 $x=y=1$，得到

$$f(f(1))=f(1). \tag{2}$$

再令 $x=1$，$y=f(1)$，由 (1) 得

$$f(f(f(1)))=f(1)f(1), \tag{3}$$

由 (2) 和 (3) 即知

$$f(1)=[f(1)]^2, \tag{4}$$

但 $f(1)>0$，所以 $f(1)=1$.

现在我们来证明恒有 $xf(x)=1$. 若不然，对某个 x 有 $xf(x)>1$，在 (1) 中令 $y=x$，得

$$f(xf(x))=xf(x).$$

上式两边同时乘以 $xf(x)$，有

$$xf(x)f(xf(x))=[xf(x)]^2,$$

用 f 作用于上式两边，得

$$f([xf(x)]^2)=f(xf(x)f(xf(x)))$$

$$= xf(x)f(f(xf(x)))$$
$$= xf(x)f(xf(x))$$
$$= [xf(x)]^2.$$

反复进行上述过程可得

$$f([xf(x)]^{2^n}) = [xf(x)]^{2^n} \tag{6}$$

令 $n \to +\infty$，则 $[xf(x)]^{2^n} \to +\infty$，由条件 (ii)，

$$f([xf(x)]^{2^n}) \to 0,$$

这就得出了矛盾.

再设 $xf(x) < 1$，这时我们在 (1) 中令 $x = 1$，得 $f(f(y)) = y$ 对任何 $y > 0$ 均成立，再令 $x = \dfrac{1}{f(y)}$，得

$$f\left(\frac{1}{f(y)}\right) = \frac{1}{y}.$$

用 f 作用于上式两边，得

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{f(y)}, \tag{7}$$

令 $y = [xf(x)]^{2^n}$，并利用 (6) 式可得

$$f\left(\frac{1}{[xf(x)]^{2^n}}\right) = \frac{1}{f([xf(x)]^{2^n})} = \frac{1}{[xf(x)]^{2^n}},$$

令 $n \to +\infty$，因为 $xf(x) < 1$，知

$$\frac{1}{[xf(x)]^{2^n}} \to +\infty, \quad f\left(\frac{1}{[xf(x)]^{2^n}}\right) \to 0$$

发生矛盾.

因此，只能是 $xf(x) = 1$，对一切 $x > 0$ 恒成立，即是

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

例 12（第 28 届国际数学奥林匹克第 4 题） 证明：不存在非负整数集 N_0 到非负整数集 N_0 的这样一个函数，能使

对每一个 $n\in N_0$，成立 $f(f(n))=n+1987$。

证明 如果存在这样的函数，则

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987,$$

对所有的 $n\in N_0$ 成立．用数学归纳法可得

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k,$$

对所有的 $n,k\in N_0$ 成立。

设 $r\in N_0$，$r\leqslant 1986$，则

$$f(r)=1987k+l,$$

其中 $l,k\in N_0$，$l\leqslant 1986$。

根据定义

$$r+1987=f(f(r))=f(1987k+l)$$
$$=f(l)+1987k.$$

所以 k 只可能是 0 或 1．从上两式知

$k=1$ 时，$f(r)=1987+l$，

$$f(l)=r\Rightarrow r\neq l;$$

$k=0$ 时，$f(r)=l$

$$f(l)=r+1987\Rightarrow r\neq l.$$

因此，数集 $\{0,1,2,\cdots,1986\}$ 中的数总是两两配对，使得

$$f(l)=r,\quad f(r)=1987+l;$$

或 $f(r)=l,\quad f(l)=1987+r,$

而且 $r\neq l$．但是数集 $\{0,1,2,\cdots,1986\}$ 中一共有 1987 个数，两两配对后总有一对数相同，与 $r\neq l$ 矛盾．因此题目中给出的函数不存在。

第八讲　初等数论方面的问题

谢　盛　刚

数论研究的是整数的性质，人们首先认识到的数就是整数．因此数论就自然而然地成为数学的最古老的分支之一．由于历代数学家尤其是近百年来一些优秀数学家的努力，数论已成为整个数学的一个庞大分支，并且还在不断发展中．

初等数论是指用初等的方法即算术的方法去研究整数．它自然不容易得到深刻的结果．但是由于初等数论的方法、技巧对于学习数学有其特殊的训练价值，所以已经越来越受到数学教学工作者和数学竞赛组织者的重视．从历届国际数学奥林匹克的试题来分析，就可以看到传统的几何、三角一类的题目日渐减少，而代之以初等数论和组合数学的内容．其中有关初等数论的试题在深度和难度上都有很大的提高．

由于初等数论在中学教学中没有占到应有的地位，所以凡是准备参加数学竞赛的学生都必须在这方面进行专门的学习和训练．

本讲向读者介绍初等数论的基本内容和技巧．因为不是教科书，所以就不过分追求理论上的严密性和系统性，而着眼于通过例题说明解题的基本技巧．

在本讲中凡不加说明的外文字母都表示整数．

一、整　除　性

1. 唯一分解定理

在数学竞赛题中，经常出现有关可除性的问题．其中应

用最广泛，同时也是初等数论中最重要和最基本的结论是下面的定理.

定理 1（唯一分解定理，算术基本定理） 任何一个大于1的整数都可以分解成素数的乘积. 如果不考虑这些素因子的次序，则这种分解法还是唯一的.

定理1也可以说成：设 $n \geqslant 2$，则 n 可以唯一地表成

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot p_s^{\alpha_s}, \tag{1}$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$ 均是素数，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 都是正整数.（1）的右端称为 n 的标准因子分解式.有时为了方便，在标准因子分解式中还可以添加某些素数的零次幂.

设 A 是一个由大于1的自然数组成的集合. A 对乘法是封闭的，即是对任何 $a, b \in A$，都有 $ab \in A$. 如果 $p \in A$，并且 p 不能写成 A 中两个元素的乘积，即不存在 $a, b \in A$，使 $p = ab$，则称 p 是 A 中的素元素. 若 a 不是 A 中的素元素，就有 $b_1, b_2 \in A$，使 $a = b_1 b_2$. 如果 b_1, b_2 都是 A 中素元素，则我们已经把 a 分解成素元素的乘积了. 如果 b_1 或 b_2 不是素元素，那末它又可以写成 A 中两个元素的乘积. 由于 A 中元素都大于1，因此经过有限次分解，a 就能够表成素元素的乘积了. 问题是这种分解是否唯一呢？让我们来看一个例子.

例 1（第19届国际数学奥林匹克试题） 设 n 是大于2的给定自然数. $V_n = \{kn + 1 : k \in N\}$. 求证：必有 V_n 中数 r 能用至少两种不同的方式表成 V_n 中素元素的乘积.

证明 首先，由于 V_n 中的数都不小于 $n + 1$，所以 $(n-1)^2$ 是 V_n 中的素元素. 又如果 $(2n-1)^2$ 不是 V_n 中的素元素，则有 $a \geqslant b \geqslant 1$ 使 $(an + 1)(bn + 1) = (2n - 1)^2$. 因此 $4n - 4 = abn + a + b$. 显然要有 $1 \leqslant ab \leqslant 3$，这只有三种可能，即 $b = 1$，$a = 1, 2, 3$. 分别得到 $n = 2$，$7/2$，

8. 由于 $n>2$，所以 $n=8$. 也就是说当 $n\neq 8$ 时 $(2n-1)^2$ 也是 V_n 中的素元素. 于是

$$(2n-1)^2\times(n-1)^2=[(2n-1)(n-1)]\times[(2n-1)(n-1)]. \tag{2}$$

(2) 式右端的两个因子如果不是素元素，还可以继续分解下去. 但总是和(2)式右端不同的素因子分解式.

当 $n=8$ 时，容易验证 $3^2\times 11^2$ 和 33×33 就是 1089 的两种不同的素因子分解式.

这个例子告诉我们定理 1 中分解的唯一性不是不证自明的. 但是在算术课中，我们只是承认了它，并没有给出它的证明. 在我们这个讲座里，也不准备证明这个定理了，读者可以在任何一本初等数论的教材中找到这个定理的证明.

例 2 一个有理数 α 的平方若是整数，则 α 是整数.

证明 设 $\alpha=\frac{q}{p}$，$(p,q)=1$，$p\geqslant 1$，于是 $\alpha^2=\frac{q^2}{p^2}=a$ 是一个正整数，所以 $q^2=p^2a$，因此 $p\mid q^2$. 由于 p 和 q 没有公共素因子，所以只有 $p=1$.

读者们是否注意到这里已经用到了分解的唯一性?

例 3 设 A 是有理数构成的集合，A 中任意两个不同元素的乘积都是整数，则 A 中任意 $k(k\geqslant 2)$ 个不同元素的乘积也是整数.

证明 任给 A 中 k 个不同元素 a_1，a_2，$\cdots$，a_k，由假设可知 $(a_1a_2\cdots a_k)^2=(a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{k-1}a_k)(a_ka_1)$ 是整数，又因 $a_1a_2\cdots a_k$ 是有理数，由例 2 可知 $a_1\cdots a_k$ 是整数.

例 4 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不超过 $2n$ 的正整数. 求证：必有 $i\neq j$，使 $a_i\mid a_j$.

证明 设 $a_i=2^{k_i}b_i$，$2\nmid b_i$，则 b_i 是区间 $[1,2n-1]$ 中的奇数. 由于 $[1,2n-1]$ 中只有 $n-1$ 个奇数，所以

$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中必有两个是相同的. 设它们是 b_i 和 b_j, 并满足 $k_j \geqslant k_i$. 于是 $a_j = 2^{k_j}b_j = 2^{k_j}b_i = 2^{k_j-k_i}a_i$, 也就是 $a_i | a_j$.

设 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 是 n 的标准因子分解式, 则 n 的任一个正约数 d 都可以写成 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_s^{\beta_s}$ $(0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i, i=1, 2, \cdots, s)$. 由于 β_i 可以取 $1+\alpha_i$ 个不同的值, 所以 n 的正约数个数 $d(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_s)$.

例 5 (第 26 届国际数学奥林匹克备选题) 求出最小正整数 n, 使其恰有 144 个正约数, 并且其中有 10 个是连续整数.

解 由于 10 个连续整数中必有 $2^3, 3^2, 5, 7$ 这些数的倍数, 反之如果一个数是这些数的倍数, 则 $1, 2, \cdots, 10$ 就都是它的约数. 因此 n 必是 $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ 的倍数. 所以它的标准因子分解式是 $2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}\cdots p_s^{\alpha_s}$, 其中 $\alpha_1 \geqslant 3$, $\alpha_2 \geqslant 2$, $\alpha_3 \geqslant 1$, $\alpha_4 \geqslant 1$.

由假设可知 $d(n) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_s) = 144$. 因为 $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4) \geqslant 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$, 所以 $(\alpha_5+1)\cdots(\alpha_s+1) \leqslant 3$. 因此只有 $s=5$, $0 \leqslant \alpha_5 \leqslant 2$. 于是有

$$n = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5},$$

$$(\alpha_1 \geqslant 3, \alpha_2 \geqslant 2, \alpha_3 \geqslant 1, \alpha_4 \geqslant 1, 2 \geqslant \alpha_5 \geqslant 0)$$

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)(1+\alpha_3)(1+\alpha_4)(1+\alpha_5) = 144. \quad (3)$$

显然用相同的 5 个数来组成指数组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 时, 以 $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3 \geqslant \alpha_4 \geqslant \alpha_5$ 的次序来排列所得的乘积为最小. 因此, 由 $144 = 2^4 3^2$ 和 (3) 可知 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ 有如下可能的几种选择:

$$(11, 2, 1, 1, 0), (7, 2, 2, 1, 0), (5, 5, 1, 1, 0),$$
$$(5, 3, 2, 1, 0), (5, 2, 1, 1, 1), (3, 3, 2, 2, 0),$$

$(3, 2, 2, 1, 1)$.

直接计算可知,以

$$n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 110880$$

为最小。

2. 带 余 除 法

用一个正整数 a 去除整数 b，一般除不尽,就得到一个商和一个余数，余数一定要比除数小．例如用 8 去除 19，得商为 2，余数为 3．这是小学算术的内容．把上面的说法用公式来表达,就是下面的定理．

定理 2 设 $a > 0$，对任意整数 b 有唯一的 q 和 r，满足

$$b = aq + r,\ (0 \leqslant r \leqslant a - 1) \qquad (4)$$

定理 2 中的 a 是除数，b 是被除数，q 是商，r 是余数．如果 $r = 0$，就是 a 整除 b，显然 $q = \left[\frac{b}{a}\right]$.

例 6 设 $n > 0$，x 是一个实数,则 $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$.

证明 设 $[x] = nq + r\ (0 \leqslant r \leqslant n - 1)$，于是 $q = \left[\frac{[x]}{n}\right]$. 又

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x] + \{x\}}{n}\right] = \left[q + \frac{r + \{x\}}{n}\right] = q + \left[\frac{r + \{x\}}{n}\right],$$

由于 $0 \leqslant r + \{x\} \leqslant n - 1 + \{x\} < n - 1 + 1 = n$，故

$$\left[\frac{r + \{x\}}{n}\right] = 0.$$

因此

$$\left[\frac{x}{n}\right] = q = \left[\frac{[x]}{n}\right].$$

下面的定理也是初等数论中的一个重要定理.

定理 3 设 $n \geqslant 1$，p 是素数，则 $n!$ 的标准因子分解式中 p 的次数为

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots \tag{5}$$

证明 对 n 用归纳法.

当 $n=1$ 时，$n!=1$. 显然.

设当 $n=1,\cdots,k$ 时，命题成立. 当 $n=k+1$ 时，若 $p>n$，则显然 p 在 $n!$ 中的次数为零. 若 $p \leqslant n$，则在 $1,2,\cdots,n$ 中恰有 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 个 p 的倍数，它们是 $p,2p,\cdots,\left[\frac{n}{p}\right]p$. 故 p 在 $n!$ 中的次数等于 p 在

$$p\cdot 2p\cdot\cdots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]p=p^{\left[\frac{n}{p}\right]}\cdot\left[\frac{n}{p}\right]!$$

中的次数. 由归纳法假设和例 6 可知 p 在 $\left[\frac{n}{p}\right]!$ 中的次数为

$$\left[\frac{1}{p}\left[\frac{n}{p}\right]\right]+\left[\frac{1}{p^2}\left[\frac{n}{p}\right]\right]+\cdots$$

$$=\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

因此 p 在 $n!$ 中的次数等于 $\left[\frac{n}{p}\right]$ 加上 p 在 $\left[\frac{n}{p}\right]!$ 中的次数，即

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots.$$

例 7（第 14 届国际数学奥林匹克试题） 设 m，n 是非负整数，求证：$\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ 是整数.

证明 如 $m=0$ 或 $n=0$，结论是显然的.

设 $m,n \geqslant 1$. 对任意的素数 p，p 在 $(2m)!(2n)!$ 中

的次数是

$$E_p = \left[\frac{2m}{p}\right] + \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2m}{p^2}\right] + \left[\frac{2n}{p^2}\right] + \cdots.$$

p 在 $m!n!(m+n)!$ 中的次数是

$$F_p = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{m+n}{p}\right] + \cdots.$$

要证明我们的命题，只要证明对任何素数 p，$E_p \geqslant F_p$ 就行了，而要证明这一点，只要证明对任何实数 α，β 都有

$$[2\alpha] + [2\beta] \geqslant [\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta] \tag{6}$$

就行了. 下面就来证明(6)式. 我们有

$$\begin{aligned}[2\alpha] + [2\beta] &= [2[\alpha] + 2\{\alpha\}] + [2[\beta] + 2\{\beta\}] \\ &= 2[\alpha] + 2[\beta] + [2\{\alpha\}] + [2\{\beta\}] \end{aligned} \tag{7}$$

及

$$\begin{aligned}[\alpha] + [\beta] + [\alpha + \beta] &= [\alpha] + [\beta] \\ &\quad + [[\alpha] + [\beta] + \{\alpha\} + \{\beta\}] \\ &= 2[\alpha] + 2[\beta] + [\{\alpha\} + \{\beta\}]. \end{aligned} \tag{8}$$

显然有

$$\{\alpha\} + \{\beta\} \leqslant \max(2\{\alpha\}, 2\{\beta\}). \tag{9}$$

由(7)，(8)，(9)三式可知(6)成立.

3. 最大公约数

设 $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$，$b = p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s}$ $(p_1 < \cdots < p_s$，α_i，$\beta_i \geqslant 0)$. 由唯一分解定理可知：a 与 b 的最大公约数是 $(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}$，其中 $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$，$i = 1, \cdots, s$. a 与 b 的最小公倍数是 $[a, b] = p_1^{\mu_1} \cdots p_s^{\mu_s}$，其中 $\mu_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$，$i = 1, \cdots, s$. 由此我们立刻推出 $(a, b)[a, b] = ab$.

可见，我们只要求出两个正整数的标准因子分解式，就很容易求出它们的最大公约数和最小公倍数。但是在事实上，要把一个大的正整数进行因子分解，往往是很困难的。下面我们介绍另一种求最大公约数的方法——辗转相除法。求出最大公约数 (a, b) 以后利用 $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$，就很容易算出最小公倍数了。

定理 4 设 a, b 不全为零，则

1°. $(a, b) = (a, b - ax)$ 对任何 x 成立。

2°. 存在 x, y 使 $ax + by = (a, b)$.

3°. 如果 $(a, b) = 1$, $a \mid bc$, 则 $a \mid c$。

证明 1°. 如果 $d \mid a$, $d \mid b$, 则 $d \mid b - ax$. 反之，如果 $d \mid a$, $d \mid b - ax$, 则 $d \mid (b - ax) + ax = b$. 由此可见，a 和 b 的公约数集与 a 和 $b - ax$ 的公约数集相等，因而它们的最大数也必相等。

2°. 不失一般可设 $a \geqslant b \geqslant 0$. 对 b 即 a, b 中较小的那个用归纳法。

如 $b = 0$, 则 $a > 0$. 显然有 $(a, b) = a$. 这时取 $x = y = 1$ 即可。

设定理对 $0 \leqslant b \leqslant k$ 都成立。当 $b = k + 1$ 时，由带余除法可知有 $a = bq + r$, 其中 $0 \leqslant r \leqslant b - 1 = k$. 由 1° 可知 $(a, b) = (a - bq, b) = (r, b) = (b, r)$. 由于 $0 \leqslant r \leqslant k$, 故由归纳法假设可知存在 x_1, y_1 使

$$\begin{aligned}(a, b) &= (b, r) = bx_1 + ry_1 \\ &= bx_1 + (a - bq)y_1 = b(x_1 - qy_1) + ay_1,\end{aligned}$$

命 $x = y_1$, $y = x_1 - qy_1$ 即得。

3°. 由 2° 可知，存在 x, y 使 $ax + by = 1$, 故 $acx + bcy = c$. 由于 $a \mid bc$, 故 $a \mid acx + bcy = c$。

如果 $ax + by = (a, b)$，则显然对任何整数 t，都有 $a(x - bt) + b(y + at) = (a, b)$. 因此 2° 中的 x, y 不是唯一确定的，而是可以有无穷多个.

定理 4 的 3° 可以由唯一分解定理直接推出，但是我们还没有证明唯一分解定理，并且唯一分解定理恰恰是这个论断的推论.

定理 4 中的 1° 给出了求 (a, b) 的辗转相除法. 而定理 4 中的 2° 则给出了求 x, y 使 $ax + by = (a, b)$ 的具体步骤. 让我们看一个例子.

例 8 求 x, y 使 $243x + 198y = (243, 198)$.

解 1°. (辗转相除法)

$$\begin{aligned}(243, 198) &= (243 - 198, 198) = (45, 198)\\ &= (45, 198 - 4 \times 45) = (45, 18)\\ &= (45 - 2 \times 18, 18) = (9, 18) = 9 \qquad (10)\end{aligned}$$

2°. 由 (10) 从后面往前面看有

$$\begin{aligned}9 &= 45 - 2 \times 18 = 45 - 2 \times (198 - 4 \times 45)\\ &= 9 \times 45 - 2 \times 198 = 9 \times (243 - 198) - 2 \times 198\\ &= 9 \times 243 - 11 \times 198\end{aligned}$$

因此，可取 $x = 9$, $y = -11$.

例 9 (第 26 届国际数学奥林匹克试题) 设 $m \geqslant n \geqslant 1$. 在 m 个盒子中装有一些球. 在其中 n 个盒子里各添加一个球，称为一次“操作”. 证明：1°. 如果 $(m, n) = 1$，则必能经过有限次操作，使每个盒子里的球一样多. 2°. 如果 $(m, n) > 1$，则必有球的某种初始分布，使无论经过怎样的有限次操作，都不能使每个盒子里的球一样多.

证明 1°. 由于 $(m, n) = 1$，故必有 x, y 使 $nx - my = 1$. 由于对任何 t，都有 $n(x + mt) - (my + nt) = 1$，故我们总可以假定 $x > 0$, $y > 0$，于是有 $nx = 1 + my$. 现

在我们把这 m 个盒子排成一个圆圈，从某个盒子 P 开始按顺时针方向依次给每个盒子添一个球. 当添完 nx 个球时，相当于进行了 x 次操作. 但是 $nx = 1 + my$，所以恰好给盒子 P 添了 $y+1$ 个球，而给其它盒子各添了 y 个球. 我们只要把 P 选成球数最少的那个盒子，每经过如上的 n 次操作，就能让它比别的盒子都多添一个球. 这样反复操作下去，就必能使每个盒子里的球一样多.

2°. 例如在开始的时候，在这些盒子里只有一个盒子里有一个球，其它盒子都是空的. 我们可以用反证法来证明，经过任意有限次操作，它们的球总不是一样多的. 若不然，经过 x 次操作后，每个盒子里都有 y 个球. 于是球的总数就等于 $1+nx$（原先有一个球，经 x 次操作，共添了 nx 个球）. 又因为每个盒子里有 y 个球，故球的总数又等于 my. 因此 $1+nx=my$. 于是 (m,n) 除尽 $my-nx=1$. 但由假设 $(m,n)>1$，这是不可能的.

由定理 4 可以圆满地解决一类所谓“二元一次不定方程”求解的问题.

例 10 设 $(a,b)=1$，则方程 $ax+by=n$ 有解. 如 (x_0, y_0) 是方程的一个解，则

$$x = x_0 + bt, \quad y = y_0 - at$$
$$(t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{11}$$

是方程的全部解.

证明 因为 $(a,b)=1$，故有 r，s 使

$$ar + bs = 1.$$

显然 $x_0 = nr$，$y_0 = ns$ 就是方程的一组解.

如果 (x_0, y_0) 是方程的一组解，则显然 (11) 也必是解. 又如果 (x_1, y_1) 是方程的任意一组解，则有

$$ax_1 + by_1 = ax_0 + by_0 = n.$$

因此有

$$a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1), \tag{12}$$

即是 $b|a(x_1 - x_0)$。由于 $(a, b) = 1$，故由定理 4 中的 3° 可知，$b|x_1 - x_0$，即有 t 使 $x_1 - x_0 = bt$，因此 $x_1 = x_0 + bt$。代入 (12) 即得 $y_1 = y_0 - at$。所以凡是方程的解都在 (11) 中，因此 (11) 是全部解.

例 11 设 $(a, b) = d$，则 $ax + by = n$ 有解的充分必要条件是 $d|n$。如果 (x_0, y_0) 是方程的一组解，则

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \quad y = y_0 - \frac{a}{d}t,$$

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{13}$$

是方程的全部解。

证明 如果方程有解 (x_0, y_0)，则 $d|ax_0 + by_0 = n$。反之，如果 $d|n$，则方程 $ax + by = n$ 与方程

$$\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y = \frac{n}{d}$$

同解.但 $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$，故方程有解。且若 (x_0, y_0) 是方程的解，则 (13) 是其全部解.

在解实际问题时，可能对解有一定的限制条件，我们只要把通解公式 (11) 或 (13) 写出来，再取 t 使这些解满足所要求的条件就行了。下面的例子是中国古代名题.

例 12 公鸡一只，值钱 5 元；母鸡一只，值钱 3 元；小鸡三只，值钱 1 元。百元买鸡百只。问买了多少只公鸡、母鸡和小鸡?

解 设买公鸡、母鸡和小鸡各 x 只、y 只和 z 只。于是可得方程组

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \dfrac{z}{3} = 100. \end{cases} \tag{14}$$

消去未知数 z，得

$$7x + 4y = 100. \tag{15}$$

由于 $7 \times (-1) + 4 \times 2 = 1$，故方程(15)有一个解 $(-100, 200)$. 因此它的全部解是

$$x = 4t - 100, \quad y = 200 - 7t, \quad t = 0, \pm 1, \cdots.$$

由于 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$，解得 $25 \leqslant t \leqslant 28$. 因此取 $t = 25, 26, 27, 28$ 得到(14)的四组解：

$(0, 25, 75)$, $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$, $(12, 4, 84)$.

二、同 余 式

先给大家介绍一种抓子的游戏. 游戏的规则很简单：两个人轮流从一堆棋子中抓子，每次至少取一个，至多取三个，最后把棋子抓完的人就是胜者.

这里有一个简单的取胜之道：你只要设法把棋子取成4的倍数，你就必胜. 以后你的对手取几个，你就再次把棋子取成4的倍数. 最后只剩4个棋子时，你的对手就会发现他已经输定了. 因此你在取子之前就必须4个4个地数一下棋子，看余下是几个棋子. 这里起关键作用的是余下的棋子数，这个数相同，你取子的方法就是一样的.

从这个游戏里，我们可以看出，有时我们不必去关心一个数是多少，而要关心的是这个数用 m 除后的余数 r 是多少. 对余数 r 相同的数，我们都可以用同一种方法去处理. 这样我们就需要引进同余的概念：设 $m \geqslant 1$，如果 a 和 b 被 m 除后的余数相同，就称 a 和 b 对模 m 同余，记成

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

1. 同余式的基本性质

显然,同余关系满足下面三个性质:

性质 1° $a \equiv a \pmod{m}$.

性质 2° 如果 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $b \equiv a \pmod{m}$.

性质 3° 如果 $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, 则 $a \equiv c \pmod{m}$.

把全体整数按照对模 m 同余的关系进行分类, 凡同余的数归于同一类.于是全体整数被分成 m 个彼此不相交的数集:

$$A_0 = \{mq: q \in Z\}$$

$$A_1 = \{mq + 1: q \in Z\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{m-1} = \{mq + m - 1: q \in Z\}$$

$$= \{mq - 1: q \in Z\}.$$

每一个这样的数集 A_i, 称为模 m 的一个剩余类. 显然每个剩余类都是一个两端无限的等差数列,其公差为 m. 特别,模 2 的两个剩余类就是全体奇数和全体偶数.讨论奇偶的问题,其实就是讨论用 2 作模的同余问题.

定理 5 $a \equiv b \pmod{m}$ 的充分必要条件是 $m \mid a - b$.

证明 设 $a \equiv b \pmod{m}$.假定 $a = mq_1 + r$, $b = mq_2 + r$。于是 $a - b = m(q_1 - q_2)$, 即 $m \mid a - b$.

如果 $m \mid a - b$. 假定 $a = mq_1 + r_1$, $b = mq_2 + r_2$, $0 \leqslant r_1, r_2 \leqslant m - 1$, 则有 $m \mid r_1 - r_2$. 但因为 $|r_1 - r_2| \leqslant m - 1$, 所以只有 $r_1 - r_2 = 0$, 即 $r_1 = r_2$. 也就是 a 和 b 关于模 m 同余.

推论 $a \equiv b \pmod{m}$ 的充分必要条件是存在 q, 使 $a =$

$b + mq$.

显然 $m|a$ 也就是 $a \equiv 0 \pmod m$.

例 13 在 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，必能找到若干个，使它们的和是 n 的倍数.

证明 命 $S_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 1, \cdots, n$. 如果 $S_1, S_2, \cdots S_n$ 分别属于模 n 的不同剩余类，则其中必有一个，例如 S_r 与 0 在同一个类中，即 $S_r \equiv 0 \pmod m$. 也就是 $m|S_r = a_1 + \cdots + a_r$. 如果 $S_1, \cdots, S_n$ 只属于至多 $n-1$ 个不同的剩余类，则必有两个，例如 S_r 与 S_t, $t > r$, 属于同一类.即有

$$n|S_t - S_r = a_{r+1} + \cdots + a_t.$$

同余式的运算和等式的运算有很多相同的性质.

性质 4° 如果 $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, 则

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m.$$

证明 由 $m|a-b$ 和 $m|c-d$ 可知 $m|(a \pm c) - (b \pm d)$. 也就是

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod m.$$

由此可知，和等式一样，同余式的一端的一项可以变号后移到同余式的另一端去.

性质 5° 如果 $a \equiv b \pmod m$, $c \equiv d \pmod m$, 则

$$ac \equiv bd \pmod m.$$

证明 由于 $ac - bd = c(a-b) + b(c-d)$. 故当 $m|a-b$ 和 $m|c-d$ 时，也有 $m|c(a-b) + b(c-d) = ac - bd$.

例 14（弃九法） 一个十进制数被 9 除的余数等于它的各位数字之和被 9 除的余数. 特别这个数是 9 的倍数的充分必要条件是它的各位数字之和是 9 的倍数.

证明 因为 $10 \equiv 1 \pmod 9$，故对任何 $l \geqslant 1$，都有 $10^l \equiv$

$1^l \equiv 1(\mathrm{mod}\,9)$. 因此

$$a_n \cdot 10^n + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0(\mathrm{mod}\,9).$$

例 15（第 17 届国际数学奥林匹克试题） 设 4444^{4444} 的各位数字之和为 A, A 的各位数字之和为 B, 求 B 的各位数字之和 C（这里讨论的数都是十进制数）.

解 $4444^{4444} < (4.5 \times 10^3)^{4444} < 10^{(2/3+3)\times 4444} < 10^{11851}$, 所以 4444^{4444} 至多有 11851 位数字. 因此 $A \leqslant 9 \times 11851 = 106659$. 在不超过 106659 的正整数中, 各位数字之和最大的是 99999, 因此 $B \leqslant 45$. 又因为在不超过 45 的正整数中, 各位数字之和最大的是 39, 所以必有 $1 \leqslant C \leqslant 12$. 用 9 作模, 得

$$\begin{aligned} C \equiv B \equiv A &\equiv 4444^{4444} \equiv 16^{4444} \\ &\equiv (-2)^{4444} \equiv 2^{4444} \equiv 2^{3\times 1481+1} \\ &\equiv 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \\ &\equiv -2 \equiv 7(\mathrm{mod}\,9). \end{aligned}$$

由于 $1 \leqslant C \leqslant 12$, 因此, 只有 $C = 7$.

在等式两端可以消去相同的非零因子. 那么一个同余式两端能不能消去一个非模 m 的整数倍的因子呢? 答案是否定的. 例如

$$3 \cdot 3 \equiv 3(\mathrm{mod}\,6).$$

但是同余式两端的因子 3 不能消去, 因为

$$3 \not\equiv 1(\mathrm{mod}\,6).$$

不过我们还是有下面的定理.

定理 6 如果 $(a, m) = 1$, $ax \equiv ay(\mathrm{mod}\,m)$, 则

$$x \equiv y(\mathrm{mod}\,m).$$

证明 由 $(m, a) = 1$ 及 $m \mid ax - ay = a(x - y)$ 可知 $m \mid x - y$, 即是

$$x \equiv y(\mathrm{mod}\,m).$$

定理 7 如果 $(a, m) = 1$，则必有 $\bar{a}$ 使

$$a\bar{a} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m).$$

证明 由于 $(a, m) = 1$，故必有 $\bar{a}, y$ 使

$$a\bar{a} + my = 1,$$

故 $m | a\bar{a} - 1$，也就是

$$a\bar{a} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ m).$$

这里的 $\bar{a}$ 相当于 a 的"倒数"。同余式两端乘以 $\bar{a}$ 可以看成是用 a 去"除"同余式两端。

一个数 a 有"倒数"$\bar{a}$的充分必要条件是 a 与 m 互素.因为由定理 7,条件显然是充分的.反过来如果有$a\bar{a} \equiv 1 (\mathrm{mod} m)$，则由于 $a\bar{a} = 1 + mq$，所以 $(a\bar{a}, m) = (a\bar{a} - mq, m) = (1, m) = 1$，所以必须 $(a, m) = 1$。

显然如果 a 有"倒数" $\bar{a}$，则有无穷多个"倒数"，它们就是 $\bar{a}$ 所在的剩余类中的所有数。

如果 $\bar{a}$ 是 a 的一个"倒数"，则 a 也必是 $\bar{a}$ 的一个"倒数"。

例 16 设 $(a, n) = 1$，$n \geqslant 2$。求证：必有 $1 \leqslant r \leqslant n - 1$使 $a^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$。

证明 因为 a^0，a^1，$\cdots$，a^{n-1} 这 n 个数都与 n 互素，故它们只能属于模 n 的至多 $n - 1$ 个不同的剩余类。所以必有两个在同一个剩余类中，设它们是 a^k 和 a^l，$0 \leqslant l < k \leqslant n - 1$，于是

$$a^k \equiv a^l (\mathrm{mod}\ n),$$

由于 $(a, n) = 1$，故由定理 6 可知

$$a^{k-l} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n),$$

命 $r = k - l$ 即得。

例 17 设 $(a, n) = 1$，$n \geqslant 2$，$a^l \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. 若 r 是使 $a^r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$ 成立的最小正整数，则 $r | l$（这里的 r 称为 a 关于模 n 的阶）。

证明 设 $l = rq + t$, $0 \leqslant t \leqslant r-1$, 则有

$$1 \equiv a^l \equiv a^{rq} \cdot a^t \equiv (a^r)^q \cdot a^t \equiv a^t \pmod{n}.$$

由于 r 最小及 $0 \leqslant t \leqslant r-1$, 因此必有 $t = 0$.

2. 完全剩余系(完系)

从同余的观点来看，两个同余的数是没有区别的. 也就是说一个剩余类的所有的数，都在同余的意义下有完全相同的性质. 因此我们可以用这个剩余类的任一个数来代表这个剩余类中的所有的数. 好象为了解决学校的问题，可以由各班级选派一个代表来开会商讨一样. 这样模 m 的 m 个剩余类，就可以选出 m 个数做它们的代表，这就是完全剩余系的概念.

定义 1 设 m 个数 $a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}$ 彼此对模 m 不同余，则 $\{a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}\}$ 称为模 m 的一个完全剩余系，简称完系. 特别 $\{0, 1, \cdots, m-1\}$ 称为模 m 的最小非负完系.

定理 8 设 $(a, m) = 1$, $\{a_0, \cdots, a_{m-1}\}$ 是模 m 的完系，则 $\{aa_0 + b, \cdots, aa_{m-1} + b\}$ 也是完系.

证明 下面我们用反证法证明对于 $i \neq j$

$$aa_i + b \not\equiv aa_j + b \pmod{m}.$$

若不然有某 $i \neq j$ 使

$$aa_i + b \equiv aa_j + b \pmod{m}.$$

于是由 $(a, m) = 1$ 可知

$$a_i \equiv a_j \pmod{m}.$$

这与 $\{a_0, \cdots, a_{m-1}\}$ 是完系相矛盾.

例 18 设 $(a, n) = 1$, 求 $\sum_{x=1}^{n} \left\{\frac{ax+b}{n}\right\}$.

解 先看一下 $\left\{\frac{l}{n}\right\}$ 是什么数.

设 l 被 n 除的余数是 r，即

$$l = nq + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1.$$

于是 $q = \left[\frac{l}{n}\right]$，故

$$\left\{\frac{l}{n}\right\} = \frac{l}{n} - q = \frac{r}{n}.$$

由于 $(a, n) = 1$，因此当 x 取遍模 n 的完系 $1, 2, \cdots, n$ 时，$ax + b$ 也取遍模 n 的完系，因此它们的余数正好是 $0, 1, \cdots, n-1$ 的一种排列．所以

$$\sum_{x=1}^{n} \left\{\frac{ax+b}{n}\right\} = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{r}{n} = \frac{n-1}{2}.$$

例 19（第 26 届国际数学奥林匹克试题） 给数集 $M = \{1, 2, \cdots, n-1\}$，$(n \geqslant 3)$ 的数染色，使满足：(1) 对 $i \in M$，i 与 $n-i$ 同色；(2) 存在 $k \in M$，$(k, n) = 1$，使得对任何 $i \in M$ 和 $i \neq k$，i 与 $|k-i|$ 同色．求证：M 只有一个颜色．

证明 命 $lk = nq_l + r_l$，$(0 \leqslant r_l \leqslant n-1, l = 0, 1, \cdots, n-1)$ 由于 $(k, n) = 1$．故 $\{0 \cdot k, \cdots, (n-1)k\}$ 是模 n 的一个完系．因而它们的余数恰好是模 n 的最小非负完系．所以 $\{r_0, r_1, \cdots, r_{n-1}\}$ 是 $\{0, 1, \cdots, n-1\}$ 的一种排列．但显然有 $r_0 = 0$，故 $\{r_1, \cdots, r_{n-1}\} = M$．下面我们来证明 r_l 与 r_{l+1} 同色 $(1 \leqslant l \leqslant n-2)$．由

$$(l+1)k = lk + k = nq_l + r_l + k$$

可知：如果 $r_l + k < n$，则 $r_{l+1} = r_l + k$；如果 $r_l + k > n$，则因 $2n > r_l + k$ 可知 $r_{l+1} = r_l + k - n$．

若 $r_{l+1} = r_l + k$，则 $r_l = r_{l+1} - k$．由假设 (2)，r_l 与 r_{l+1} 同色．

若 $r_{l+1} = r_l + k - n$，则 $n - r_l = k - r_{l+1}$．由假设

(1)，r_l 与 $n-r_l=k-r_{l+1}$ 同色，又由假设 (2)，$k-r_{l+1}$ 与 r_{l+1} 同色，所以也有 r_l 与 r_{l+1} 同色.

又 $r_l+k\neq n$. 因若不然 $r_{l+1}=0$，这是不可能的.

3. 缩剩余系

假设 $a\equiv b\pmod m$，则存在 q 使 $a=b+mq$. 所以 $(a,m)=(a-mq,m)=(b,m)$. 即是如果 a 与 m 的最大公约数为 d，则 a 所在的剩余类中的任何一个数与 m 的最大公约数也是 d. 特别当 a 与 m 互素时，a 所在的类中任一个数都与 m 互素.因此我们可以说这个剩余类是与模 m 互素的. 与模 m 互素的剩余类的个数显然是由 m 确定的正整数，记成 $\varphi(m)$，称为欧拉函数.

定义 2 从每一个与模 m 互素的剩余类中取出一个数，组成数集 $\{a_1,\cdots,a_{\varphi(m)}\}$，这个数集称为模 m 的缩剩余系，简称缩系.

显然每个完系中与模 m 互素的那些数正好组成模 m 的一个缩系. 当模 $m\geqslant 2$ 时，包含在最小非负完系中的缩系，称为最小正缩系.

当模 $m=1$ 时，任意一个整数都是它的完系，也是它的缩系.

例 20 设 $m\geqslant 2$，$\{a_1,\cdots,a_{\varphi(m)}\}$ 是模 m 的最小正缩系. 求 $a_1+\cdots+a_{\varphi(m)}$.

解 考察 $\{m-a_1,\cdots,m-a_{\varphi(m)}\}$. 它也是模 m 的一个缩系，因为它的 $\varphi(m)$ 个数互不同余，且都是与 m 互素的. 又我们有 $1\leqslant a_i\leqslant m-1$，$i=1,\cdots,\varphi(m)$，故 $1\leqslant m-a_i\leqslant m-1$，$i=1,\cdots,\varphi(m)$. 所以 $\{m-a_1,\cdots,m-a_{\varphi(m)}\}$ 也是 m 的最小正缩系. 于是我们有

$$m - a_1 + \cdots + m - a_{\varphi(m)} = a_1 + \cdots + a_{\varphi(m)}.$$

将上式略加整理即得到

$$a_1 + \cdots + a_{\varphi(m)} = \frac{m}{2}\varphi(m).$$

下面给出计算欧拉函数 $\varphi(m)$ 的方法.

设 p 是素数，$l \geqslant 1$，则在模 p^l 的一个完系 $1, 2, \cdots, p^l$ 中恰有 p^{l-1} 个数是 p 的倍数,它们是 $1 \cdot p, 2 \cdot p, \cdots, p^{l-1} \cdot p$. 其它 $p^l - p^{l-1}$ 个数都不是 p 的倍数,因而都和 p 互素. 所以由定义可知

$$\varphi(p^l) = p^l - p^{l-1} = p^l\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

一般,设 n 的标准因子分解式是

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s},$$

则

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{a_1}) \cdots \varphi(p_s^{a_s}) \\ &= p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right) \\ &= n \prod_{p \mid n}\left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

定理 9 如果 $(a, m) = 1$，$\{a_1, \cdots, a_{\varphi(m)}\}$ 是模 m 的缩系,则 $\{aa_1, \cdots, aa_{\varphi(m)}\}$ 也是模 m 的缩系.

证明 与定理 8 类似,读者试自证明之.

例 21 设 $(k, n) = 1$，$n \geqslant 2$. 求 $\sum\limits_{\substack{x=1 \\ (x,n)=1}}^{n} \left\{\frac{kx}{n}\right\}$.

解 由于 $(k, n) = 1$，故当 x 取遍模 n 的缩系时 kx 也取遍 n 的缩系，因而 kx 被 n 除的余数取遍模 n 的最小正缩系,即有

$$\sum_{\substack{x=1\\(x,n)=1}}^{n}\left\{\frac{kx}{n}\right\}=\sum_{\substack{r=1\\(r,n)=1}}^{n-1}\frac{r}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\cdot\varphi(n)$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(n).$$

这里用到了例 20 的结果.

定理 10（费尔马定理） 设 $(a, m)=1$，则

$$a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ m).$$

证明 设 $\{a_1, \cdots, a_{\varphi(m)}\}$ 是模m的一个缩系. 则 $\{a a_1, \cdots, a a_{\varphi(m)}\}$ 也是m的缩系，因此有

$$a_1\cdots a_{\varphi(m)}\equiv aa_1\cdots aa_{\varphi(m)}$$

$$\equiv a^{\varphi(m)}a_1\cdots a_{\varphi(m)}(\mathrm{mod}\ m).$$

从上式两边消去与m互素的因子 $a_1, \cdots, a_{\varphi(m)}$，就得到定理的结论.

从例 16 和例 17 我们知道存在正整数 r 使

$$a^r\equiv 1(\mathrm{mod} n).$$

从定理 10 我们更进一步知道，可以取 $r=\varphi(n)$. 并且最小的 r 必是 $\varphi(n)$ 的一个约数. 这一点对于寻求这样的 r 是很有好处的.

例 22 设素数 $p\neq 2, 5$. 求证：在数列 1, 11, 111, … 中有无穷多个是 p 的倍数.

证明 如果 $p=3$，则显然 $\overbrace{1\ 1\cdots1}^{3k\text{ 位}}$ 都是 3 的倍数，它们有无穷多个.

设 $p\geqslant 7$，我们有

$$\overbrace{1\ 1\cdots1}^{k\text{ 位}}=\frac{10^k-1}{9}.$$

由于 $(10, p)=1$，故

$$10^{\varphi(p)} \equiv 10^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p).$$

因此对任何 $l \geqslant 1$ 有

$$10^{l(p-1)} \equiv 1(\mathrm{mod}\ p).$$

即 $p \mid 10^{l(p-1)} - 1$。取 $k = l(p-1)$，就有

$$p \mid \frac{10^k - 1}{9} = \overbrace{11\cdots1}^{k\text{位}}.$$

在讨论同余式的时候，有时为了方便，可以把模换成原来的模的因子，例如 $m = m_1 m_2$。又

$$a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m),$$

于是 $m = m_1 m_2 \mid a - b$。因此 $m_1 \mid a - b$，$m_2 \mid a - b$，即是

$$a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_1), \quad a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m_2).$$

由于模换小了，讨论起来也就比较方便了。

例 23（第 20 届国际数学奥林匹克试题） 设 $n > m \geqslant 1$。1978^n 与 1978^m 末三位数字相等。试求 m 和 n 使 $m + n$ 最小。

解 由题设可知

$$1978^n - 1978^m \equiv 1978^m(1978^{n-m} - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2^3 \cdot 5^3)$$

由于 $n > m$，故 $1978^{n-m} - 1$ 是奇数。故

$$2^3 \mid 1978^m.$$

因此 $m \geqslant 3$。

又必有 $5^3 \mid 1978^{n-m} - 1$，即

$$1978^{n-m} \equiv 1(\mathrm{mod}\ 5^3). \tag{17}$$

先用 5 做模，于是有

$$1 \equiv 1978^{n-m} \equiv 3^{n-m}(\mathrm{mod}\ 5).$$

容易算出使 $3^r \equiv 1(5)$ 成立的最小正整数是 $r = 4$。由例 17 可知 $n - m = 4t$。

用 25 做模，又有

$$1 \equiv 1978^{n-m} \equiv 1978^{4t} \equiv 3^{4t} \equiv 81^{t}$$
$$\equiv (1+80)^{t} \equiv 1 + 80t \pmod{25}.$$

因此 $25 \mid 80t$，故 $5 \mid t$。于是又要有 $n - m = 20k$。

现在来看 (17) 式。用 $n - m = 20k$ 代进去就得到

$$1 \equiv 1978^{20k} \equiv 3^{20k} \equiv 81^{5k}$$
$$\equiv (1+80)^{5k} \equiv 1 + 400k \pmod{125}.$$

所以又要有 $125 \mid 400k$，即 $5 \mid k$。因此 $n - m = 100s$。就是说 $n - m$ 最小为 100。故 $n + m = n - m + 2m$ 最小为 $100 + 6 = 106$。

第九讲　有理数与代数数

李　尚　志

在中学数学里，虽然一开始就以$\sqrt{2}$为例引入了无理数，后来又从$\sqrt{-1}$引入了复数，但我们在中学数学习题及数学竞赛题中实际遇到的数仍然大量是有理数，遇到的多项式大多是有理系数多项式，而遇到的无理数则大多是代数数．本文通过对若干初等数学问题解答方法的分析，着重说明怎样利用有理数与代数数的有关知识来解题．我们将看到，一些极简单的常识，经过自觉地反复灵活运用之后可以解答许多初看起来很难的问题，表现出令人意外的威力．本文在对解题方法的分析中，适当揭示和体现了在高等数学中的一些背景，这样我们就看到，在解答某些初等数学难题中所用的一些奇怪的"绝招"，其实是高等数学中很普通很自然的思想方法。

一、有理数与无理数

请记住有理数系的一条重要性质：有理数的和、差、积、商(除数不为0)仍是有理数。

例 1　(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是不是有理数的方根？

(2) 设 a, b 是正有理数，什么时候 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数？什么时候 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数的方根？

解　(1) 假如 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是某个有理数 A 的 n 次方根，即 $A=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^n$ 是有理数，于是

$$\frac{1}{A}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^n=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$$

是有理数，

$$d=A-\frac{1}{A}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$$

是有理数．但用二项式定理将 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n$ 与 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$ 分别展开后可以算出：当 n 为奇数时 $d=p\sqrt{2}$，当 n 为偶数时 $d=q\sqrt{6}$，其中 p,q 都是正整数．我们已经知道 $\sqrt{2}$、$\sqrt{6}$ 都是无理数，因而 $p\sqrt{2}$ 与 $q\sqrt{6}$ 都是无理数，d 是无理数，这就得到了一个矛盾．可见 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 不是有理数的方根．

(2) 如果 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 都是有理数，当然 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是有理数，也是有理数的方根．

现在假定 $\sqrt{a}$ 是无理数，而且 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=k$ 是有理数．当然 $k>0$，因而 $k+1$ 是正有理数．此时

$$\sqrt{b}=k\sqrt{a},\ \sqrt{a}+\sqrt{b}=(k+1)\sqrt{a}$$

是无理数，它是有理数 $(k+1)^2a$ 的二次方根．

再设 $\sqrt{a}$ 是无理数，而且 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=k$ 是无理数，因而 $\sqrt{ab}=ka$ 是无理数．如果此时某个 $A=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$ 是有理数，则 $d=A-\frac{(b-a)^n}{A}$ 是有理数．但

$$d=(\sqrt{b}+\sqrt{a})^n-(\sqrt{b}-\sqrt{a})^n$$

$$=\begin{cases}p\sqrt{a}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ q\sqrt{ab}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases},$$

其中 p,q 是正整数，因而 $p\sqrt{a}$ 与 $q\sqrt{ab}$ 都是无理数，矛盾．

故对所有的自然数n，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n$都不是有理数，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$不是有理数，也不是有理数的方根.

如果$\sqrt{a}$是有理数而$\sqrt{b}$是无理数，则$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$是无理数，由前面的讨论知道$\sqrt{b}+\sqrt{a}$不是有理数，也不是有理数的方根.

总结起来，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$为有理数的充分必要条件是：$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$同时为有理数；$\sqrt{a}+\sqrt{b}$为有理数的方根的充分必要条件是：$\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$为有理数.

例 2 判断并证明：是否能够在半径为 1 的圆周上选取 1975 个点，使得其中任意两点间的直线距离为有理数？

分析：乍看起来，这很难办到. 我们当然可以依次选取$A_1, A_2, \cdots, A_{1975}$使距离$d_1=A_1A_2, d_2=A_2A_3, \cdots, d_{1974}=A_{1974}A_{1975}$都是有理数，但在这以后别的距离$A_iA_j(1\leqslant i<j-1\leqslant 1974)$都不能再调整，这些距离要由$d_1, d_2, \cdots, d_{1974}$计算出来，计算这些距离似乎是免不了要开平方，要使许许多多平方根同时为有理数，看来是件相当困难的事情.

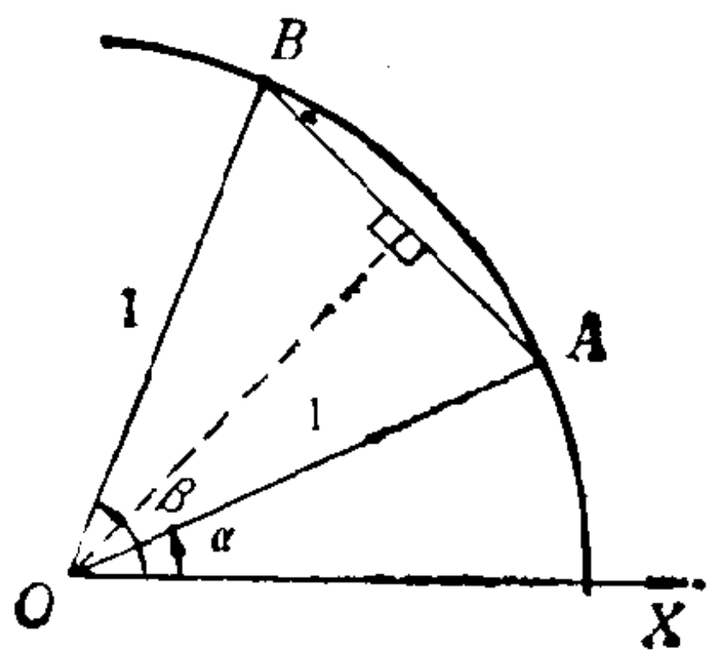


图 9.1

计算两点间的距离能不能避免开平方呢？我们以所给单位圆的圆心O为极点建立一个极坐标系，则圆周上任一点P的位置可以由它的极角θ唯一决定. 如果圆周上两点A，B的极角分别为α，β，则距离

$$AB=\left|2\sin\frac{\angle AOB}{2}\right|=\left|2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$$

$$= \left| 2\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} \right) \right|.$$

注意在求 AB 时并没有用到开平方运算. 只要在选 A, B 的位置时使 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$ 都为有理数, AB 就是有理数. 因此, 我们只需选取每个点 P 的极角 θ 使 $\sin\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$ 同时为有理数即可. 要使 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{a}{c}$ 且 $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{b}{c}$ (其中 a, b, c 为整数), 只需 $a^2 + b^2 = c^2$, 即 a, b, c 为勾股数. 而勾股数的一般形式为 $2mn$、$m^2 - n^2$、$m^2 + n^2$, (其中 m, n 为整数). 对每一对 m, n, 我们可以取一个 θ 使

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2},$$

通过选取 m, n 就可得到无穷多个不同的 θ, 从而得到无穷多个所需的点, 其中当然包括 1975 个所需的点.

证明 略.

二、代 数 数

如果一个复数 α 是某个有理系数代数方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

的根, 就称 α 为代数数. 我们不妨设 $a_0 \neq 0$, 且可要求 $a_0 = 1$, 或者要求系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都为整数.

任一有理数 a 都是代数数, 因为它是有理系数方程 $x - a = 0$ 的根. 有理数 a 的任一 n 次方根也是代数数, 它是方程 $x^n - a = 0$ 的根.

例 3 如果 α 是代数数, 则 $-\alpha$, $1/\alpha$ (当 $\alpha \neq 0$), α 的 n 次方根也都是代数数.

证明 设 α 是方程 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$ 的根，其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 都是有理数。则 $-\alpha$ 是方程 $f(-x)=(-1)^m a_0x^m+(-1)^{m-1}a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$ 的根，$\frac{1}{\alpha}$ 是方程 $x^m f\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=0$ 的根，α 的任一 n 次方根是方程 $f(x^n)=a_0x^{nm}+a_1x^{n(m-1)}+\cdots+a_m=0$ 的根，这些方程的系数都是有理数。

例 4 求证 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是代数数。

证明 设 $\theta=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，则 $\theta^2=5+2\sqrt{6}$，$(\theta^2-5)^2=(2\sqrt{6})^2=24$，$\theta^4-10\theta^2+1=0$。$\theta$ 是方程 $x^4-10x^2+1=0$ 的根，因而是代数数。

例 4 中要找以 θ 为根的有理系数方程 $S(x)=0$，这个方程除 θ 外还有别的根 $\theta_2, \theta_3, \cdots$ 等，而 $S(x)=(x-\theta)(x-\theta_2)(x-\theta_3)\cdots$，我们的目的也就是要找 $\theta_2, \theta_3, \cdots$ 使 $(x-\theta)(x-\theta_2)(x-\theta_3)\cdots$ 为有理数多项式。例 4 中实际找到的方程 $x^4-10x^2+1=0$ 的四个根为 $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}, -\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$，它们恰是 $x^2-2=0$ 的任一根与 $x^2-3=0$ 的任一根相加所得到的所有的和。一般地，对任意两个代数数 α_1, β_1，设它们各自满足的有理系数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 和 $x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m=0$ 的全部根分别是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$。以所有的 $\alpha_i+\beta_j$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ 为根造一个方程

$$S(x)=(x-\alpha_1-\beta_1)\cdots(x-\alpha_i-\beta_j)\cdots(x-\alpha_n-\beta_m)=0,$$

以所有的 $\alpha_i\beta_j$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ 为根造一个方程

$$P(x)=(x-\alpha_1\beta_1)\cdots(x-\alpha_i\beta_j)\cdots(x-\alpha_n\beta_m)=0,$$

则 $\alpha_1+\beta_1$，$\alpha_1\beta_1$ 分别是这两个方程的根。而且，我们指出

(但不加证明)，$S(x)$ 和 $P(x)$ 都是有理系数多项式，因而 $\alpha_1+\beta_1$ 与 $\alpha_1\beta_1$ 都是代数数. 也就是说，代数数的和与积仍是代数数. 再应用例 3 的结果可得定理 1.

定理 1 代数数的和、差、积、商(除数不为 0)、方根仍是代数数.

例 5 设 β 是方程 $x^3+x-1=0$ 的根，求出 $\sqrt{2}+\beta$ 所满足的一个有理系数方程.

解 记 $\theta=\sqrt{2}+\beta$，因 $\theta-\sqrt{2}=\beta$ 是方程 $x^3+x-1=0$ 的根，θ 是方程 $S_1(x)=(x-\sqrt{2})^3+(x-\sqrt{2})-1=0$ 的根. $S_1(x)=(x^3+7x-1)-(3x^2+3)\sqrt{2}$，另取 $S_2(x)=(x^3+7x-1)+(3x^2+3)\sqrt{2}$，则 $S(x)=S_1(x)S_2(x)=(x^3+7x-1)^2-2(3x^2+3)^2=x^6-4x^4-2x^3+13x^2-14x-17$ 是有理系数多项式，而 θ 是方程 $S(x)=0$ 的根.

注意，在上面的解答中，$S_1(x)$ 的全部零点为 $\sqrt{2}+\beta_j$ $(1\leqslant j\leqslant 3)$，$\beta_j(1\leqslant j\leqslant 3)$ 是 $x^3+x-1=0$ 的三个根. 而 $S_2(x)$ 就是 $(x+\sqrt{2})^3+(x+\sqrt{2})-1$，它的三个零点是 $-\sqrt{2}+\beta_j$ $(1\leqslant j\leqslant 3)$. 因此，$S(x)$ 的六个零点为 $\alpha_i+\beta_j(1\leqslant i\leqslant 2,\ 1\leqslant j\leqslant 3)$，其中 α_1，α_2 分别是 $x^2-2=0$ 的两个根 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$.

例 6 设 a，b 是有理数，$a+b\sqrt{2}$ 是有理系数方程 $f(x)=0$ 的根，求证 $a-b\sqrt{2}$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根.

证明 $\sqrt{2}$ 是有理系数方程 $f(a+bx)=0$ 的根. 注意，在另一方面，$\sqrt{2}$ 是有理系数二次方程 $x^2-2=0$ 的根. 作带余除法，用 x^2-2 去除 $f(a+bx)$，设所得的商与余式分别是 $Q(x)$ 和 $r(x)$，则 $f(a+bx)=Q(x)(x^2-2)+r(x)$. 将 $x=\sqrt{2}$ 代入此等式两边得 $r(\sqrt{2})=0$. 注意 $r(x)=cx+d$，而且，由于作带余除法时只对被除式 $f(a+bx)$ 和

除式 x^2-2 的系数(它们都是有理数)施行加、减、乘、除运算，因此商式和余式的系数也是有理数，即 c，d 是有理数。$c\sqrt{2}+d=0$，如果 $c\neq 0$，$\sqrt{2}=-\frac{d}{c}$ 将为有理数，矛盾，故 $c=0$，于是 $d=-c\sqrt{2}=0$，x^2-2 整除 $f(a+bx)$。x^2-2 的另一零点 $-\sqrt{2}$ 也是 $f(a+bx)$ 的零点，$a-b\sqrt{2}$ 是 $f(x)=0$ 的根。

例 6 使我们联想到关于实系数方程根的一个定理：如果复数 $\theta=a+bi$ (a，b 为实数) 是实系数方程 $f(x)=0$ 的根，$\bar{\theta}=a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的根。这个定理的证明与例 6 完全类似：用 x^2+1 对 $f(a+bx)$ 作带余除法得 $f(a+bx)=Q(x)(x^2+1)+r(x)$，将 $x=i$ 代入得 $r(i)=0$；$r(x)=cx+d$ 的系数 c，d 应为实数，$ci+d=0$ 导致 $c=d=0$；$f(a+bx)=Q(x)(x^2+1)$，将 $x=-i$ 代入即得 $f(a-bi)=0$。我们称 θ 与 $\bar{\theta}$ 互相共轭，它们所“共”的是实系数方程，可以称为“关于实数系共轭”。而 $a+b\sqrt{2}$ 与 $a-b\sqrt{2}$ (a，b 为有理数)则称为“关于有理数系共轭”。

例 7 若 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理系数方程 $f(x)=0$ 的根，则 $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ 与 $-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 也都是 $f(x)=0$ 的根，$f(x)$ 被 x^4-10x^2+1 整除。

证明 设 $f(\sqrt{2}+x)$ 被 x^2-3 除得到商 $Q_1(x)$ 与余式 $r_1(x)$，则 $f(\sqrt{2}+x)=Q_1(x)(x^2-3)+r_1(x)$，将 $x=\sqrt{3}$ 代入得 $r_1(\sqrt{3})=0$，其中 $r_1(x)=c_1x+d_1$，于是 $c_1\sqrt{3}+d_1=0$。注意被除式 $f(\sqrt{2}+x)$ 与除式 x^2-3 的系数都在集合 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\text{ 为有理数}\}$ 中。F 中任意两数 $a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}$ (其中 a_1，b_1，a_2，b_2 为有理数)的和与差 $(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}$、积 $(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$ 以及商

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}$$

仍在 F 中（注意当 $a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$ 时 $a_2^2-2b_2^2\neq 0$），$r_1(x)=c_1x+d_1$ 的系数 c_1,d_1 由 $f(\sqrt{2}+x)$ 及 x^2-3 的系数经加、减、乘、除算出，因而也都在 F 中. 如果 $c_1\neq 0$，则由 $c_1\sqrt{3}+d_1=0$ 得 $\sqrt{3}=-\frac{d_1}{c_1}\in F$，即 $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$，其中 a,b 为有理数.

$$3=(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$$

为有理数，故 $ab=0$. 如果 $b=0$，则 $\sqrt{3}=a$ 为有理数，矛盾. 如果 $a=0$，则 $\sqrt{\frac{3}{2}}=b$ 为有理数，仍矛盾. 可见应该 $c_1=0$，$d_1=-c_1\sqrt{3}=0$，$f(\sqrt{2}+x)=Q_1(x)(x^2-3)$. 将 $x=-\sqrt{3}$ 代入即知 $f(\sqrt{2}-\sqrt{3})=0$. 记 $\beta=\pm\sqrt{3}$，用 x^2-2 对 $f(x+\beta)$ 作带余除法得 $f(x+\beta)=Q_2(x)(x^2-2)+r_2(x)$. 将 $x=\sqrt{2}$ 代入得 $r_2(\sqrt{2})=0$，这里 $r_2(x)=c_2x+d_2$ 的系数 c_2,d_2 在集合 $E=\{a+b\sqrt{3}\mid a,b$ 为有理数$\}$ 之中，由 $r_2(\sqrt{2})=c_2\sqrt{2}+d_2=0$ 可知应有 $c_2=d_2=0$（若不然，$c_2\neq 0$，$\sqrt{2}=-\frac{d_2}{c_2}=a+b\sqrt{3}$，$a,b$ 为有理数，这将导致矛盾）. 于是 $f(x+\beta)=Q_2(x)(x^2-2)$，将 $x=-\sqrt{2}$ 代入可知 $f(-\sqrt{2}+\beta)=0$. 这就证明了 $\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 与 $-\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$ 都是 $f(x)=0$ 的根，$f(x)$ 被

$$(x-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})=x^4-10x^2+1$$

整除.

例 8 (1) 对有理数 a, b, c, 若有 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, 则有 $a=b=c=0$.

(2) 若 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数方程 $f(x)=0$ 的根.则 x^3-2 整除 $f(x)$, $\sqrt[3]{2}\omega$ 与 $\sqrt[3]{2}\omega^2$ 都是 $f(x)=0$ 的根,其中

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

证明 (1) 若 $c\neq 0$, 则 $\sqrt[3]{2}$ 是有理系数二次方程 $a+bx+cx^2=0$ 的根. 用 $a+bx+cx^2$ 对 x^3-2 作带余除法得商 $Q(x)$ 和余式 $r(x)$, $x^3-2=Q(x)(a+bx+cx^2)+r(x)$, 将 $x=\sqrt[3]{2}$ 代入得 $r(\sqrt[3]{2})=0$. 但 $r(x)=dx+e$, d, e 为有理数, 由 $r(\sqrt[3]{2})=d\sqrt[3]{2}+e=0$ 知 $d=e=0$, $Q(x)$ 整除 x^3-2. 注意 $Q(x)$ 是有理系数一次多项式,有唯一的有理根 u, u 应是 x^3-2 的零点,即 $u^3=2$,这不可能,故 $c=0$. 再由 $a+b\sqrt[3]{2}=0$ 知必须 $b=a=0$.

(2) 用 x^3-2 对 $f(x)$ 作带余除法得商 $Q_1(x)$ 和余式

$$r_1(x)=a_1+b_1x+c_1x^2,$$

$$f(x)=Q_1(x)(x^3-2)+a_1+b_1x+c_1x^2,$$

将 $x=\sqrt[3]{2}$ 代入得 $a_1+b_1\sqrt[3]{2}+c_1\sqrt[3]{4}=0$, 由 (1) 知 $a_1=b_1=c_1=0$. x^3-2 整除 $f(x)$,x^3-2 的零点 $\sqrt[3]{2}\omega$ 与 $\sqrt[3]{2}\omega^2$ 都是 $f(x)=0$ 的根.

作为例 8 的推广,我们有

定理 2 若 $m(x)=0$ 是以代数数 α 为根的最低次数的有理系数方程, $f(x)=0$ 是 α 所满足的任一有理系数方程, 则 $m(x)$ 整除 $f(x)$, $m(x)$ 所有零点都是 $f(x)=0$ 的根.

证明 用 $m(x)$ 对 $f(x)$ 作带余除法,得到商 $Q(x)$ 与余式 $r(x)$, $f(x)=Q(x)m(x)+r(x)$, 将 α 代入得 $r(\alpha)=0$. 若 $r(x)\neq 0$,则 $r(x)=0$ 是以 α 为根的有理系数方程,

其次数低于 $m(x)$，矛盾．故 $r(x)=0$，$m(x)$ 整除 $f(x)$．

定理 2 中的“有理系数”可全部换为“实系数”，或换为“复系数”．当 $m(x)$ 的次数为 1 时即得到因式定理．

三、三次方程和四次方程的根

任何三次方程都可以化为 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 的形式，再令 $x=y-\frac{b}{3}$ 可消去二次项，化为 $y^3+py+q=0$ 的形式．

要解方程 $y^3+py+q=0$，我们令 $y=u+v$，代入得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$

即

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0 \qquad \text{(i)}$$

（注意，我们在展开 $(u+v)^3$ 时利用了公式 $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$）．方程 (i) 包含了两个未知数 u，v，是一个不定方程，我们只要求出 u，v 的任一组解即可算出 y 来．于是可以任选一个方程 (ii) 与 (i) 联立解之，只要能求出一组 u，v 即可．观察方程 (i) 后可以发现，如果选

$$3uv+p=0, \qquad \text{(ii)}$$

则代入方程 (i) 后即化为

$$u^3+v^3=-q \qquad \text{(iii)}$$

而由所选的方程 (ii) 可得

$$u^3v^3=-\frac{p^3}{27} \qquad \text{(iv)}$$

由 (iii)、(iv) 解出 u^3，v^3 分别为

$$-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

开立方可以求出 u，v，于是得

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

这就是三次方程的求根公式(注意，每个复数有三个立方根，因此在由 u^3 求 u 时有三种选择，u 选定后 v 即由 $uv=-\frac{p}{3}$ 唯一决定)。

例 9 求证

$$\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}=2.$$

注意到等式左边的根式与三次方程的求根公式很相似，很象是用求根公式解某个三次方程得出的结果。当然，很容易求出这个根式所满足的那个三次方程。于是得到下面的证法：

证法 1 记

$$u=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}},\quad v=\sqrt{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}},$$

令 $x=u+v$，则

$$x^3=u^3+v^3+3uv(u+v)=u^3+v^3+3uvx$$
$$=4+2x,x^3-2x-4=0,$$
$$(x-2)(x^2+2x+2)=0.$$

由于 x 是实数，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1>0$，故 $x-2=0$，$x=2$。

当然，既使不知道三次方程的求根公式，也可以想出这个证法，但是，我们总有点疑惑：那么复杂的两个立方根相加，怎么刚好就等于一个简单的有理数 2？而出题的人又怎么会刚好凑出这么一个奇怪的等式？知道了三次方程求根公式，

其中的奥妙就完全暴露出来. 而且我们可以如法泡制，编出许许多多类似的题目来. 比如，我们想要编出形如

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=1$$

的等式来，就选取一个以 1 为唯一实根的方程 $(x-1)(x^2+x+k)=0$ (只要 $k>\frac{1}{4}$ 即可)，此方程即 $x^3+(k-1)x-k=0$，用求根公式解之即得

$$\sqrt[3]{\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{(k-1)^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{k}{2}-\sqrt{\frac{k^2}{4}+\frac{(k-1)^3}{27}}}=1.$$

比如，选 $k=4$ 得

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=1,$$

选 $k=10$ 得

$$\sqrt[3]{5+\sqrt{52}}+\sqrt[3]{5-\sqrt{52}}=1,$$

……

例 9 还有一个更为简捷的证法. 注意到

$$u=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}} \text{ 与 } v=\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

的乘积 $uv=\frac{2}{3}$. 如果 $u+v=2$ 成立，u，v 就应当是二次方程 $z^2-2z+\frac{2}{3}=0$ 的两根，解这个方程就知 u，v 应是 $1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$. 于是得到下面的证法：

证法 2 易验证

$$\left(1\pm\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3=2\pm\frac{10}{3\sqrt{3}},$$

于是

$$u=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$v=\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}=1-\frac{1}{\sqrt{3}},\ u+v=2.$$

如果把例9改为“化简根式 $\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$”，则证法1仍有效，但证法2就很难采用了，因为我们很难直接猜出 $\sqrt[3]{2\pm\frac{10}{3\sqrt{3}}}=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 事实上，如何将 $\sqrt[3]{2\pm\frac{10}{3\sqrt{3}}}$ 化简为 $1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，这本身就是一个不太容易的问题.

例 10 化简 $\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}$.

分析 我们希望找出有理数 a，b 使

$$u=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}=a+\frac{b}{\sqrt{3}},$$

即

$$\left(a+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^3=(a^3+ab^2)+\left(3a^2b+\frac{b^3}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$=2+\frac{10}{3\sqrt{3}}.$$

当然，可以考虑由方程组

$$\begin{cases}a^3+ab^2=2\\ 3a^2b+\dfrac{b^3}{3}=\dfrac{10}{3}\end{cases}$$

解出 a，b 来，但这方程组很难解出. 不过，注意到

$$\left(a-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^3=(a^3+ab^2)-\left(3a^2b+\frac{b^3}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 - \frac{10}{3\sqrt{3}},$$

可知

$$v = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}} = a - \frac{b}{\sqrt{3}},$$

于是 $u + v = 2a$ 为有理数. 我们可以先用例 9 的证法 1 求出 $2a$, 再由 $u + v = 2a$ 及 $uv = \sqrt[3]{2^2 - \left(\frac{10}{3\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{3}$ 解出 u, v.

解 记 $u = \sqrt[3]{2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}}$, 取 $v = \sqrt[3]{2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}}$, 则 $uv = \frac{2}{3}$.

令 $x = u + v$, 则 $x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 4 + 2x$, $x^3 - 2x - 4 = 0$, 此方程的唯一实根 $x = 2$. 于是

$$u + v = 2, \text{ 与 } uv = \frac{2}{3}$$

联立解之得 $u = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

读者试用同样的方法化简 $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$, $\sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$.

例 11 证明 n 为整数时 $n^4 - 20n^2 + 4$ 为合数.

证明 $n^4 - 20n^2 + 4 = n^4 - 4n^2 + 4 - 16n^2 = (n^2 - 2)^2 - (4n)^2 = (n^2 - 2 + 4n)(n^2 - 2 - 4n)$, 且当 n 为整数时 $n^2 - 2 + 4n$ 与 $n^2 - 2 - 4n$ 都不为 ± 1(因为, 方程 $n^2 - 2 + 4n = \pm 1$ 与 $n^2 - 2 - 4n = \pm 1$ 的解都不是整数).

例 12 证明有无穷多个自然数 a 具有下面的性质:对任意自然数 n, 数 $n^4 + a$ 不是素数.

证明 对每个大于 1 的自然数 k，取 $a=4k^4$，则

$$\begin{aligned} n^4+a &= n^4+4k^2n^2+4k^4-4k^2n^2 \\ &= (n^2+2k^2)^2-(2kn)^2 \\ &= (n^2+2k^2+2kn)(n^2+2k^2-2kn), \end{aligned}$$

其中 $n^2+2k^2\pm 2kn=(n\pm k)^2+k^2\geqslant 4$，$n^4+a$ 是合数.

在复数系内对双二次三项式 x^4+bx^2+c 进行因式分解时，可以按 x^4+bx^2 配平方得 $\left(x^2+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4}-c\right)$，也可以按 x^4+c 配平方得 $(x^2\pm\sqrt{c})^2-(\pm 2\sqrt{c}-b)x^2$，由于常数 $\frac{b^2}{4}-c$ 与二次单项式 $(\pm 2\sqrt{c}-b)x^2$ 都可以写成平方，因而都可以用平方差公式作因式分解. 在实数系、有理数系、整数系内，这两种配方法就不一定都行得通. 如在例 11、例 12 中，第一种配方法行不通，采用了第二种配方法.

一般地，要解四次方程 $x^4+bx^3+cx^2+d=0$，令 $x=y-\frac{b}{4}$ 可以消去三次项，化为 $y^4+py^2+qy+r=0$ 的形式. 下面需要对 y^4+py^2+qy+r 作因式分解，我们也考虑对它进行配平方，但当 $q\neq 0$ 时既不能按 y^4+py^2 配成

$$\left(y^2+\frac{p}{2}\right)^2-\left(-qy+\frac{p^2}{4}\right),$$

也不能按 y^4+r 配成 $(y^2\pm\sqrt{r})^2-((\pm\sqrt{r}-p)y^2-qy)$，因为 $-qy+\frac{p^2}{4}$ 与 $(\pm\sqrt{r}-p)y^2-qy$ 肯定不能写成平方. 我们设法选取适当的参数 t，将 y^4+py^2+qy+r 配方为 $(y^2+t)^2-[(2t-p)y^2-qy+(t^2-r)]$，如果能选择 t 使二次三项式 $(2t-p)y^2-qy+(t^2-r)$ 是完全平方式，再利用平方差公式就可以将 y^4+py^2+qy+r 分解为两个二次三项式的乘积. 要使 $(2t-p)y^2-qy+(t^2-r)$

为完全平方，即等于 $(\sqrt{2t-p}\,y+\sqrt{t^2-r})^2$，只须使

$$q=\pm 2\sqrt{2t-p}\cdot\sqrt{t^2-r},$$

即 $q^2=4(2t-p)(t^2-r)$. 这是关于 t 的一个三次方程可以用三次方程的求根公式解出，于是总可求得所需的参数 t，从而得到所希望的分解式.

四、1 的 方 根

1 的 n 次方根，即方程 $x^n-1=0$ 的根，在复数范围内共有 n 个，它们是 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$，其中 $k=0,1,2,\cdots,n-1$. 记 $\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$，则这 n 个方根可以写为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$. 我们有

$$x^n-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}),$$

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1}).$$

注意 1 的这 n 个 n 次方根各不相同，也就是说，方程 $x^n-1=0$ 没有重根，多项式 x^n-1 没有重零点、没有重因子.

例 13 m,n 是自然数，求 x^m-1 和 x^n-1 的最高公因式.

解 记 x^m-1 与 x^n-1 的最高公因式为 $D(x)$. 由于 x^m-1 没有重因子，它的因子 $D(x)$ 也没有重因子. 只要我们能求出 x^m-1 与 x^n-1 的全部公共零点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，这些公共零点也就是 $D(x)$ 的全部零点，$D(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)$.

记 m 与 n 的最大公约数为 d. 对任意复数 α，如果 $\alpha^d=$

1，则 $\alpha^m=(\alpha^d)^{\frac{m}{d}}=1$，$\alpha^n=(\alpha^d)^{\frac{n}{d}}=1$，$\alpha$ 是 x^m-1 与 x^n-1 的公共零点. 反过来，设α是 x^m-1 与 x^n-1 的公共零点，即有整数 k，r 使

$$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}=\cos\frac{2r\pi}{n}+i\sin\frac{2r\pi}{n},$$

且 $0\leqslant k\leqslant m-1$，$0\leqslant r\leqslant n-1$，于是

$$0\leqslant\frac{k}{m}=\frac{r}{n}=\frac{p}{q}<1,$$

其中 $\frac{p}{q}$ 是由 $\frac{k}{m}$ 和 $\frac{r}{n}$ 约分得到的最简分数，q 应该整除 m 和 n，因而整除 m 和 n 的最大公约数 d，

$$\alpha^d=\left(\cos\frac{2p\pi}{q}+i\sin\frac{2p\pi}{q}\right)^d=\cos\left(\frac{d}{q}\cdot 2p\pi\right)+i\sin\left(\frac{d}{q}\cdot 2p\pi\right)=1.$$

因此，$D(x)$ 的全部零点恰是 1 的全部 d 次方根，也就是 x^d-1 的全部零点，$D(x)=x^d-1$.

注意，我们有定理：对任意整数 m 与 n 的最大公约数 d，可以找到整数 a，b 使 $d=ma+nb$. 如果利用这个定理，则对 x^m-1 与 x^n-1 的公共零点 α 立即有 $\alpha^d=\alpha^{ma+nb}=(\alpha^m)^a(\alpha^n)^b=1$.

例 14 求 $\cos 5^\circ+\cos 77^\circ+\cos 149^\circ+\cos 221^\circ+\cos 293^\circ$.

解 原式是复数 γ 的实部，这里 $\gamma=(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)+(\cos 77^\circ+i\sin 77^\circ)+(\cos 149^\circ+i\sin 149^\circ)+(\cos 221^\circ+i\sin 221^\circ)+(\cos 293^\circ+i\sin 293^\circ)=(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)$，其中 $\omega=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$，

$$\omega^5 = 1, \quad 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} = 0,$$

故 $\gamma = 0$，原式 $= 0$.

例 15 设 k 是有理数.

(1) 求证 $\cos k\pi$ 是代数数.

(2) 什么时候 $\cos k\pi$ 是有理数.

解 设 $k = \frac{a}{m}$，a，m 为整数且 $m > 0$. 记

$$\omega = \cos k\pi + i \sin k\pi,$$

取 $n = 2m$，则 $\omega^n = \cos 2a\pi + i \sin 2a\pi = 1$.

(1) ω 是代数数，由本文第二节定理 1 知

$$\cos k\pi = \frac{1}{2}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$$

为代数数. 但我们不用定理 1 而直接给出一个证明.

将等式 $(\cos k\pi + i \sin k\pi)^n = 1$ 左边按二项式定理展开，再比较等式两边的实部得：

$$\cos^n k\pi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} k\pi \sin^2 k\pi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} k\pi \sin^4 k\pi - \cdots = 1.$$

将 $\sin^2 k\pi = 1 - \cos^2 k\pi$ 代入即得关于 $\cos k\pi$ 的一个有理系数代数方程，于是 $\cos k\pi$ 是代数数.

(2) ω 是方程 $x^n - 1 = 0$ 的根，$\bar{\omega} = \cos k\pi - i \sin k\pi$ 也是 $x^n - 1 = 0$ 的根，于是 $x^n - 1$ 被 $(x - \omega)(x - \bar{\omega}) = x^2 - 2x \cos k\pi + 1$ 整除. 设 $\cos k\pi$ 是有理数，则 $x^2 - 2x \cos k\pi + 1$ 是有理系数多项式. 根据高斯引理，整系数多项式 $x^n - 1$ 能被某个整系数多项式 $c(x^2 - 2x \cos k\pi + 1)$ 在整数范围内整除，这里 c 是某个整数且 $2c \cos k\pi$ 为整数. 但在整数范围内 $x^n - 1$ 的因子 $c(x^2 - 2x \cos k\pi + 1)$ 的首项

系数 c 只能为 ± 1，于是 $2\cos k\pi$ 为整数．但 $|2\cos k\pi| \leqslant 2$，于是 $2\cos k\pi$ 只能为 0、± 1 或 ± 2，$\cos k\pi$ 为 0、$\pm \frac{1}{2}$ 或 ± 1，$k = \frac{m}{2}$ 或 $\frac{m}{3}$，其中 m 为任意整数．

例 16 求证

$$\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

证明 令 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$，则 $\omega, \omega^2, \cdots, \omega^{n-1}$ 是多项式 $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = \frac{x^n - 1}{x - 1}$ 的全部零点，

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = (x - \omega)(x - \omega^2) \cdots (x - \omega^{n-1}),$$

在这个等式两边取 $x = 1$ 得 $(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1}) = n$．两边取绝对值，并注意到

$$|1 - \omega^k| = \left|1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n}\right|$$

$$= \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(\sin \frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right)} = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

$$0 \leqslant k \leqslant n - 1,$$

即得 $$2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = n,$$

由此立即得所需等式．

当 d 整除 n 时 $x^d - 1$ 整除 $x^n - 1$．写 $n = md$，则

$$1 + x^d + x^{2d} + \cdots + x^{(m-1)d} = \frac{x^{md} - 1}{x^d - 1}.$$

下面将反复利用这个等式来作 $1+x^d+x^{2d}+\cdots+x^{(m-1)d}$ 的因式分解.其基本方法为:将 $1+x^d+x^{2d}+\cdots+x^{(m-1)d}$ 写成 $\dfrac{x^{md}-1}{x^d-1}$,再适当分解 $x^{md}-1=f_1(x)f_2(x)$, $x^d-1=g_1(x)g_2(x)$, 使 $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$ 与 $\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$ 均为整式.

例 17 在有理数范围内分解 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.

解

$$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1).$$

例 18 证明在整数的无穷数列

$$10001,\ 100010001,\ 1000100010001,\ \cdots$$

中没有素数.

证明 这个数列的第 n 项

$$a_n=1+10^4+10^8+\cdots+10^{4n}=\frac{10^{4(n+1)}-1}{10^4-1},$$

当 n 为偶数时 $a_n=\dfrac{(10^2)^{n+1}+1}{10^2+1}\cdot\dfrac{10^{2(n+1)}-1}{10^2-1}$, 当 n 为奇数且 $n\geqslant 3$ 时

$$a_n=(10^{2(n+1)}+1)\frac{10^{2(n+1)}-1}{10^4-1},$$

a_n 都被分解为两个大于 1 的自然数的乘积, 不是素数. 当 $n=1$ 时 $a_1=10001=73\times 137$, 仍不是素数.

例 19 设自然数 N 的十进制表示由 91 个 1 组成: $N=\underbrace{1\cdots1}_{91\text{个}}$, 证明 N 为合数.

证明 注意 $91=13\times 7$, 于是

$$N=1+10+10^2+\cdots+10^{90}=\frac{10^{91}-1}{10-1}$$

$$= \frac{10^{13}-1}{10-1}\cdot(10^{13\times 6}+10^{13\times 5}+\cdots+10^{13}+1),$$

等于两个大于 1 的整数之积，故 N 为合数.

例 20 对什么 n，多项式 $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$ 被多项式 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ 整除.

解 要求 n 使

$$f(x)=\frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$$

为整式. 但

$$f(x)=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\Big/\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x^{2n}-1}{x^n-1}\cdot\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x^n+1}{x+1},$$

它为整式的充分必要条件为：n 是奇数.

例 20 是下面的例题的特例.

例 21 求出所有的正整数对 (m,n) 使 $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 被 $1+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除.

解 要求 (m,n) 使

$$f(x)=\frac{1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}}{1+x+x^2+\cdots+x^m}$$

为整式. 但

$$f(x)=\frac{x^{(m+1)n}-1}{x^n-1}\Big/\frac{x^{m+1}-1}{x-1}=\frac{g(x)}{g_1(x)g_2(x)},$$

其中

$$g(x)=\frac{x^{(m+1)n}-1}{x-1},\quad g_1(x)=\frac{x^n-1}{x-1},$$

$$g_2(x)=\frac{x^{m+1}-1}{x-1}.$$

如果 n 与 $m+1$ 的最大公约数 $d>1$，由于 x^d-1 是 x^n-1 与 $x^{m+1}-1$ 的公因式，

$g_0(x)=\dfrac{x^d-1}{x-1}$ 是 $g_1(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ 与 $g_2(x)=\dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$ 的公因式，$(g_0(x))^2$ 是 $g_1(x)g_2(x)$ 的因式且 $g_0(x)$ 的次数 $d-1\geqslant 1$，但 $g(x)=\dfrac{x^{(m+1)n}-1}{x-1}$ 没有重因子，不能被 $(g_0(x))^2$ 整除，也就不能被 $g_1(x)g_2(x)$ 整除，$f(x)$不是整式。

假设n与$m+1$互素，此时 x^n-1 与 $x^{m+1}-1$ 的最高公因式为$x-1$（见例13. 或重复例13的证明如下：设α是 x^n-1 与 $x^{m+1}-1$ 的公共零点，则 $\alpha^n=\alpha^{m+1}=1$，有整数 k，r 使

$$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2r\pi}{m+1}+i\sin\frac{2r\pi}{m+1}$$

且 $0\leqslant k\leqslant n-1,0\leqslant r\leqslant m,0\leqslant\dfrac{k}{n}=\dfrac{r}{m+1}=\dfrac{p}{q}<1$，其中 $\dfrac{p}{q}$ 是由 $\dfrac{k}{n}$ 和 $\dfrac{r}{m+1}$ 约分得到的最简分数. q 整除 n 与 $m+1$，由 n 与 $m+1$ 互素知 $q=1$. 由 $0\leqslant\dfrac{p}{1}<1$ 知 $p=0$，因而 $k=r=0$，$\alpha=1$. x^n-1 与 $x^{m+1}-1$ 的最高公因式没有重零点且只有唯一的零点1因而只能是 $x-1$). 于是 $g_1(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ 与 $g_2(x)=\dfrac{x^{m+1}-1}{x-1}$ 互素，$g_1(x)$ $g_2(x)$ 是一些互不相同的一次因子的乘积. 由于 x^n-1 与 $x^{m+1}-1$ 都整除 $x^{(m+1)n}-1$，$g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 都整除 $g(x)$，$g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 的一次因子都是 $g(x)$ 的因子，$g_1(x)g_2(x)$ 是 $g(x)$ 的一部分一次因子的乘积，因而整除 $g(x)$，$f(x)$ 为整式.

因此，$1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 被 $1+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除的充分必要条件为：n 与 $m+1$ 互素.

第十讲　多项式问题

李　炯　生

多项式理论是古典代数学的主要内容，又是现代代数学的一个源头，它对数学其他分支有着深刻的影响，历来为人们所重视．在各国数学奥林匹克试题中经常出现有关多项式的问题．例如，在由各国提供的第 26 届国际数学奥林匹克的 97 个备选题中，有关多项式的题目就有十道题，约占 10%，足见多项式理论在数学奥林匹克中所占的分量．

在中学现行数学教材中，从初中就开始讲授一次方程、二次方程的求根问题，以及多项式的因式分解．到高中又学习了高次方程的知识．这些只是多项式理论的初步知识，要应付出现在数学奥林匹克中多项式问题是远远不够的．因此有必要对数学奥林匹克所涉及到的多项式理论知识作些介绍．这就是本文的目的．

一、多项式的相等

设 n 是非负整数，$a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是数，x 是未定元，则

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

称为关于 x 的多项式，$a_i x^i$ 称为 $f(x)$ 的 i 次项，a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数．如果多项式 $f(x)$ 的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 全是零，则 $f(x)$ 称为零多项式，记作 0．如果 $a_n \neq 0$，即 $f(x)$ 称为 n 次多项式，n 称为 $f(x)$ 的次数，记作 $\deg f(x)$、而 a_n 称为 $f(x)$ 的首项系数．如果多项式 $f(x)$ 的系数都是整数，

则 $f(x)$ 称为整系数多项式. 有理系数多项式、实系数多项式与复系数多项式可以类似理解.

如果多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

的同次项系数都相等，即 $a_i = b_i$，$i = 0, 1, 2, \cdots$，则称多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等.

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 定义为

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots.$$

多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的乘积 $f(x)g(x)$ 是按中学里所说的去括号原则定义的，即

$$f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0.$$

容易看出，多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等的充要条件是，它们的次数相同，而且同次项系数都相等. 这一结论看似简单，但却是多项式许多重要定理证明的基本依据，也是处理多项式的一个基本出发点.

例 1 设 k 是给定的正整数，且非零多项式 $f(x)$ 适合 $f(f(x)) = f^k(x)$. 求多项式 $f(x)$.

解 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x + \cdots + a_0,$$

则

$$f(f(x)) = a_n(a_n x^n + \cdots + a_0)^n + \cdots + a_0. \qquad \text{(i)}$$

显然，$\deg f(f(x)) = n^2$，而

$$f^k(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0)^k, \qquad \text{(ii)}$$

因此 $\deg f^k(x) = nk$. 由于 $f(f(x)) = f^k(x)$，所以，$n^2 = nk$. 因此 $n = 0$，或者 $n = k$.

如果 $n = 0$，则 $f(x) = a$，a 为非零的数. 由于 $f(f(x)) =$

$f^k(x)$，所以 $a = a^k$。 因此，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k > 1 \text{ 时}, \\ a, & \text{当 } k = 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

如果 $n = k$，则比较 (i) 与 (ii) 的首项系数得到

$$a_k a_k^k = a_k^k,$$

所以 $a_k = 1$。 因此 (i) 与 (ii) 化为

$$f(f(x)) = (x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0)^k + a_{k-1}(x^k + a_{k-1}x + \cdots + a_0)^{k-1} + \cdots + a_0,$$

$$f^k(x) = (x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0)^k.$$

由 $f(f(x)) = f^k(x)$ 得到

$$a_{k-1}(x^k + a_{k-1}x + \cdots + a_0)^{k-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

其中左端多项式的首项为 $a_{k-1}x^{k(k-1)}$，右端为零多项式，因此 $a_{k-1} = 0$。如此继续即得 $a_{k-3} = \cdots = a_0 = 0$。所以

$$f(x) = x^k.$$

例 2 （第 5 届莫斯科数学奥林匹克试题） 已知两个整系数多项式，其乘积是偶系数多项式，但不是每个系数都能被 4 整除。证明，其中有一个是偶系数多项式，另一个至少有一个系数是奇数。

证明 设已知整系数多项式为

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0, \quad b_m \neq 0,$$

且

$$f(x)g(x) = c_k x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

则 $k = n + m$，且对 $i = 0, 1, 2, \cdots, n + m$，

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0, \qquad \text{(i)}$$

由题意，每个 c_i 都被 2 整除，$0 \leqslant i \leqslant n + m$，但存在某个 c_i 不被 4 整除。

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不是偶系数的，则存在 i，j，$0 \leqslant i \leqslant$

n，$0 \leqslant j \leqslant m$，使 $a_0, a_1, \cdots, a_{i-1}$ 与 $b_0, b_1, \cdots, b_{j-1}$ 都被 2 整除，但 a_i 与 b_j 都不被 2 整除．于是 $a_0b_{i+j}, a_1b_{i+j-1}, \cdots, a_{i-1}b_{j+1}, a_{i+1}b_{j-1}, \cdots, a_{i+j}b_0$ 都被 2 整除．由题意，c_{i+j} 被 2 整除．由 (i)

$$c_{i+j} = a_0b_{i+j} + a_1b_{i+j-1} + \cdots + a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + \cdots + a_{i+j}b_0,$$

因此 a_ib_j 能被 2 整除．从而 a_i 或 b_j 能被 2 整除．矛盾．所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中至少有一个是偶系数的．

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是偶系数的，则每个 a_i 与每个 b_j 都能被 2 整除，$0 \leqslant i \leqslant n$，$0 \leqslant j \leqslant n$．因此每个 a_ib_j 都能被 4 整除．所以由 (i)，每个 c_i 能被 4 整除，与题设矛盾．因此 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能都是偶系数．

综上可知，$f(x)$ 与 $g(x)$ 中有一个是偶系数的，另一个至少有一个系数是奇数．

二、多项式的根

设多项式

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0. \quad (1)$$

如果数 c 适合

$$f(c) = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1c + a_0 = 0, \quad (2)$$

则 c 称为多项式 $f(x)$ 的根，或者零点．关于多项式的根，有

定理 1 数 c 是多项式 $f(x)$ 的根的充要条件是，$f(x) = (x - c)g(x)$，其中 $g(x)$ 是关于 x 的多项式．

证明 充分性是显然的，下面证明必要性．设多项式 $f(x)$ 具有形式 (1)，且 c 是 $f(x)$ 的根，则式(2)成立．于是

$$f(x) = f(x) - f(c) = a_n(x^n - c^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - c^{n-1}) + \cdots + a_1(x - c). \quad (i)$$

由于

$$x^k - c^k = (x - c)(x^{k-1} + cx^{k-2} + \cdots + c^{k-2}x + c^{k-1}),$$

因此式(i)中每一项都含有因式 $x - c$. 将因式 $x - c$ 提取出来,即得 $f(x) = (x - c)g(x)$, $g(x)$ 是关于 x 的多项式.

n 次多项式 $f(x)$ 是否一定有根? 对此,著名数学家高斯作了回答. 这就是下面的所谓代数基本定理.

定理 2 n 次复系数多项式 $f(x)$ 至少有一个复根.

代数基本定理有许多种初等证明,但都比较难、比较复杂. 利用复变函数论知识可以给出代数基本定理的简捷证明. 可惜无法在这里给出. 利用定理 2 与归纳法容易证明

定理 3 n 次复系数多项式 $f(x)$ 恰有 n 个复根.

证明 显然一次多项式 $f(x) = a_1x + a_0$ 具有根 $-\frac{a_0}{a_1}$. 反之,如果 $f(x) = a_1x + a_0$ 具有根 c,则由 $a_1c + a_0 = 0$ 得到,$c = -\frac{a_0}{a_1}$. 因此一次多项式恰有一个根. 设命题对 $n-1$ 次多项式成立. 现在证明 n 次多项式 $f(x)$ 恰有 n 个根.

由定理 2, $f(x)$ 具有根 c_1. 由定理 1

$$f(x) = (x - c_1)g(x).$$

比较两端次数,可知 $g(x)$ 是 $n-1$ 次复系数多项式. 由归纳假设, $g(x)$ 恰有 $n-1$ 个根 $c_2, c_3, \cdots, c_n$. 反复用定理 1 可知

$$g(x) = a(x - c_2)\cdots(x - c_n),$$

其中 a 是复数. 因此

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n).$$

这表明, n 次多项式 $f(x)$ 具有 n 个根 $c_1, c_2, \cdots, c_n$. 如果 $f(x)$ 还有根 c, 则由定理 1

$$f(x) = b(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)(x - c).$$

上次左端多项式 $f(x)$ 的次数为 n, 右端多项式的次数至少为

$n+1$，显然矛盾．因此 n 次多项式 $f(x)$ 恰有 n 个复根．

应当指出，定理 2 与定理 3 是对复系数多项式而言的．一般地说，n 次实系数多项式可能没有实根，例如，实系数多项式 $f(x)=x^2+2$ 就没有实根．同样，n 次整系数多项式也可能没有整数根．尽管如此，依然有

定理 4 n 次多项式 $f(x)$ 至多有 n 个不同的根．

定理 4 的证明不难，请读者自行补出．

例 3 设整系数多项式 $f(x)$ 在 x 的三个不同的整点 a, b 与 c 上取值为 1，或者 -1，证明 $f(x)$ 没有整根．

证明 反证法．设整数 k 是 $f(x)$ 的根．由定理 1，$f(x)=(x-k)g(x)$．由定理 1 的证明可以看出，$g(x)$ 是整系数多项式．由已知条件，有 $|f(a)|=|a-k||g(a)|=1$．显然 $a-k$ 与 $g(a)$ 是整数，因此 $|a-k|=1$．这表明，x 轴上整点 k 到整点 a 的距离为 1．同理，$|b-k|=|c-k|=1$．因此 x 轴上整点 k 到三个不同整点 a, b 与 c 的距离都是 1，这不可能．

例 4 （匈牙利数学奥林匹克试题）设 p 与 q 为奇数．证明二次方程 $x^2+2px+2q=0$ 没有有理根．

证明 反证法．设方程具有有理根 $\frac{m}{n}$，其中 m 与 n 是整数，且 m 与 n 互素，则

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2+2p\frac{m}{n}+2q=0.$$

通分得到

$$m^2+2pmn+2qn^2=0. \tag{i}$$

即 $m^2=-2(pmn+qn^2)$．因此 2 整除 m^2，从而 2 整除 m．设 $m=2k$．由 (i) 得到，$2k^2+2pkn+qn^2=0$．因此 2 整除 qn^2．由于 q 是奇数，所以 2 整除 n^2，从而 2 整除 n．这说明，2 是 m 与 n 的公因数，和 m 与 n 互素的假设矛盾．因此

方程没有有理根.

例 5 （第 12 届美国数学奥林匹克试题） 设 a 与 b 为实数，$2a^2 < 5b$. 证明五次方程 $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的根不可能都是实数.

证明 反证法. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_5$ 是方程的五个实根. 由定理 1

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ &= (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4)(x - c_5). \end{aligned}$$

右端去括号，并比较两边四次项、三次项系数，得到

$$a = -(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5),$$

$$\begin{aligned} b &= c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_1c_5 + c_2c_3 + c_2c_4 + c_2c_5 \\ &\quad + c_3c_4 + c_3c_5 + c_4c_5 = c_1(c_2 + c_3 + c_4 + c_5) \\ &\quad + (c_2 + c_3)(c_4 + c_5) + c_3c_5 + c_4c_5. \end{aligned}$$

因为 $2a^2 < 5b$，所以

$$\begin{aligned} 2[c_1^2 + (c_2 + c_3)^2 + (c_4 + c_5)^2] &< c_1(c_2 + c_3) \\ &\quad + c_1(c_4 + c_5) + (c_2 + c_3)(c_4 + c_5) \\ &\quad + 5c_2c_3 + 5c_4c_5. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} 2[c_1^2 + (c_3 + c_5)^2 + (c_4 + c_5)^2] &- c_1(c_2 + c_3) \\ &- c_1(c_4 + c_5) - (c_2 + c_3)(c_4 + c_5) \\ &< 5c_2c_3 + 5c_4c_5. \end{aligned}$$

显然，$4c_2c_3 \leqslant (c_2 + c_3)^2$，$4c_4c_5 \leqslant (c_4 + c_5)^2$，因此

$$\begin{aligned} 2c_1^2 + \frac{3}{4}(c_2 + c_3)^2 + \frac{3}{4}(c_4 + c_5) &- c_1(c_2 + c_3) \\ &- c_1(c_4 + c_5) - (c_2 + c_3)(c_4 + c_5) < 0. \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} [2c_1 - (c_2 + c_3)]^2 + [2c_1 - (c_4 + c_5)]^2 \\ + 2[(c_2 + c_3) - (c_4 + c_5)]^2 < 0. \end{aligned}$$

显然不可能. 因此方程的根不可能都是实数.

例 6 求所有满足 $f(0)=0$，且 $f(x^2+1)=f^2(x)+1$ 的多项式 $f(x)$.

解 首先注意

$$f(0)=0,$$

$$f(1)=f(0^2+1)=f^2(0)+1=1,$$

$$f(2)=f(1^2+1)=f^2(1)+1=2,$$

$$f(5)=f(2^2+1)=f^2(2)+1=5,$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

上述一系列等式使我们想到，如果记 $x_0=0$，且当 $k\geqslant 1$ 时记 $x_k=x_{k-1}^2+1$，则应有 $f(x_k)=x_k$. 下面用归纳法证明这一点. 当 $k=0$ 时，$f(x_0)=f(0)=0=x_0$，即结论对 $k=0$ 成立. 假设结论对 k 成立，即有 $f(x_k)=x_k$. 由于

$$f(x_{k+1})=f(x_k^2+1)=f^2(x_k)+1=x_k^2+1=x_{k+1},$$

因此结论对 $k+1$ 也成立.

现在考查多项式 $g(x)=f(x)-x$. 如果 $g(x)$ 是 n 次多项式，则 $g(x)$ 至多有 n 个不同的根. 但上面已证明 $g(x)$ 具有根 x_k，$k=0,1,2,\cdots$，显然对不同的 i，j，$x_i\neq x_j$. 矛盾. 因此 $g(x)$ 是零多项式，所以 $f(x)=x$.

三、韦达定理

多项式的根与系数之间存在密切的联系. 例如，设二次多项式 $f(x)=x^2+a_1x+a_0$ 的两个根为 c_1 与 c_2. 由定理 1

$$f(x)=x^2+a_1x+a_0=(x-c_1)(x-c_2).$$

左端去括号得到

$$x^2+a_1x+a_0=x^2-(c_1+c_2)x+c_1c_2.$$

比较两端同次项系数，得到

$$a_1 = -(c_1 + c_2),$$

$$a_0 = c_1c_2.$$

又例如，设三次多项式 $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 的三个根为 c_1, c_2 与 c_3. 由定理 1

$$f(x) = x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3).$$

左端去括号，并比较同次项系数得到

$$a_2 = -(c_1 + c_2 + c_3),$$

$$a_1 = c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3,$$

$$a_0 = -c_1c_2c_3.$$

n 次多项式的根与系数之间也有类似的关系. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 个数. 从数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 中取出 k 个不同的数 $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_k}$，作连乘积 $c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}$，其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$. 显然这样的连乘积共有 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 个. 这 $\binom{n}{k}$ 个连乘积之和记作

$$\sigma_k(c_1, c_2, \cdots, c_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_k}.$$

特别

$$\sigma_1(c_1, c_2, \cdots, c_n) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n,$$

$$\sigma_2(c_1, c_2, \cdots, c_n) = c_1c_2 + c_1c_3 + \cdots + c_1c_n + c_2c_3 + \cdots + c_2c_n + \cdots + c_{n-1}c_n.$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\sigma_n(c_1, c_2, \cdots, c_n) = c_1c_2\cdots c_n.$$

$\sigma_k(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 简记为 σ_k.

定理 5 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是 n 次多项式 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 的 n 个根. 则对 $k = 1, 2, \cdots, n$

$$a_{n-k} = (-1)^k\sigma_k. \tag{1}$$

证明 由定理1

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$= (x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n).$$

右端去括号得到

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = x^n - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)x^{n-1}$$
$$+ \Big(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n} c_{i_1}c_{i_2}\Big)x^{n-2} + \cdots + (-1)^k$$
$$\times\Big(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_n}\Big)x^{n-k} + \cdots + (-1)^n c_1 c_2 \cdots c_n,$$

比较两端 $n-k$ 次项系数，即得式(1).

定理5是多项式理论中的一个基本定理. 它是著名数学家韦达首先证明的，所以称为韦达定理. 它在多项式理论中有广泛的应用.

例7 (第13届美国数学奥林匹克试题) 设四次方程 $x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$ 的四个根中有两个根的乘积为 -32. 求 k.

解 设方程的四个根为 c_1, c_2, c_3 与 c_4. 由韦达定理

$$\sigma_1(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 18, \quad \text{(i)}$$

$$\sigma_2(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_2c_3$$
$$+ c_2c_4 + c_3c_4 = k, \quad \text{(ii)}$$

$$\sigma_3(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + c_1c_3c_4$$
$$+ c_2c_3c_4 = -200, \quad \text{(iii)}$$

$$\sigma_4(c_1, c_2, c_3, c_4) = c_1c_2c_3c_4 = -1984. \quad \text{(iv)}$$

由题意可设 $c_1c_2 = -32$. 于是由(iv)，$c_3c_4 = \dfrac{1984}{32} = 62$. 由(iii)得到，

$$c_1c_2(c_3 + c_4) + (c_1 + c_2)c_3c_4 = -32(c_3 + c_4)$$
$$+ 62(c_1 + c_2) = -200,$$

即

$$31(c_1 + c_2) - 16(c_3 + c_4) = -100. \qquad \text{(v)}$$

解 (i) 与 (v) 得到

$$c_1 + c_2 = 4, \quad c_3 + c_4 = 14.$$

由 (ii) 得到

$$k = -32 + 62 + (c_1 + c_2)(c_3 + c_4) = 86.$$

例 8 （第 14 届加拿大数学奥林匹克试题）设三次方程 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 的根是 a, b 与 c。证明

(1) a, b, c 两两不等；

(2) $\dfrac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b} + \dfrac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \dfrac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a}$ 是整数.

证明 用反证法证明 (1)。不妨设 $a = b$。由韦达定理

$$\sigma_1 = a + b + c = 2a + c = 1, \qquad \text{(i)}$$

$$\sigma_2 = ab + ac + bc = a^2 + 2ac = -1, \qquad \text{(ii)}$$

$$\sigma_3 = abc = a^2c = 1. \qquad \text{(iii)}$$

由 (i) 与 (ii) 消去 c，得到

$$3a^2 - 2a - 1 = 0.$$

解得 $a = 1$，或 $-\dfrac{1}{3}$。由 (i) 得到

$$a = b = 1, \quad c = -1, \text{ 或者 } a = b = -\frac{1}{3}, \ c = \frac{5}{3}.$$

显然都与 (iii) 矛盾。因此 a, b 与 c 两两不等。

(2) 的证明。因为 a 是方程的根，所以

$$a^3 = a^2 + a + 1.$$

因此当 $n \geqslant 3$ 时

$$a^n = a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3}.$$

同理

$$b^n = b^{n-1} + b^{n-2} + b^{n-3},$$

$$c^n = c^{n-1} + c^{n-2} + c^{n-3}.$$

由此得到

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a^{n-1} - b^{n-1}) + (a^{n-2} - b^{n-2}) \\ &\quad + (a^{n-3} - b^{n-3}), \\ b^n - c^n &= (b^{n-1} - c^{n-1}) + (b^{n-2} - c^{n-2}) \\ &\quad + (b^{n-3} - c^{n-3}), \\ c^n - a^n &= (c^{n-1} - a^{n-1}) + (c^{n-2} - a^{n-2}) \\ &\quad + (c^{n-3} - a^{n-3}). \end{aligned}$$

因此如果记

$$S_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} + \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a},$$

则

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}, \qquad \text{(iv)}$$

其中 $S_0 = 0, S_1 = 3, S_2 = a + b + b + c + c + a = 2(a + b + c) = 2$. 显然，$S_0$，$S_1$ 与 S_2 是整数. 假设当 $n \leqslant k$ 时，S_n 是整数. 由 (iv)，$S_{k+1} = S_k + S_{k-1} + S_{k-2}$ 是整数. 由归纳法，对一切 n，S_n 是整数. 特别，S_{1982} 是整数.

例 9（第 2 届美国数学邀请赛试题） 设 x，y，z 与 w 适合

$$\frac{x^2}{2^2 - 1^2} + \frac{y^2}{2^2 - 3^2} + \frac{z^2}{2^2 - 5^2} + \frac{w^2}{2^2 - 7^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{4^2 - 1^2} + \frac{y^2}{4^2 - 3^2} + \frac{z^2}{4^2 - 5^2} + \frac{w^2}{4^2 - 7^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{6^2 - 1^2} + \frac{y^2}{6^2 - 3^2} + \frac{z^2}{6^2 - 5^2} + \frac{w^2}{6^2 - 7^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{8^2 - 1^2} + \frac{y^2}{8^2 - 3^2} + \frac{z^2}{8^2 - 5^2} + \frac{w^2}{8^2 - 7^2} = 1,$$

求 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$.

解 首先注意，$2^2, 4^2, 6^2$ 与 8^2 是分式方程

$$\frac{x^2}{t-1^2}+\frac{y^2}{t-3^2}+\frac{z^2}{t-5^2}+\frac{w^2}{t-7^2}=1 \qquad \text{(i)}$$

的四个解。式 (i) 去分母，得到

$$\begin{aligned}(t-1^2)(t-3^2)(t-5^2)(t-7^2)&=x^2(t-3^2)\\&\times(t-5^2)(t-7^2)+y^2(t-1^2)(t-5^2)(t-7^2)\\&+z^2(t-1^2)(t-3^2)(t-7^2)+w^2(t-1^2)\\&\times(t-3^2)(t-5^2). \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

两端去括号得到

$$\begin{aligned}t^4-(1^2+3^2+5^2+7^2)t^3+f(t)&=(x^2+y^2+z^2\\&+w^2)t^3+g(t),\end{aligned}$$

其中 $f(t)$ 与 $g(t)$ 分别是式 (ii) 左右两端的多项式中次数不超过 2 的各项之和。移项得到

$$\begin{aligned}t^4-(1^2+3^2+5^2+7^2+x^2+y^2+z^2+w^2)t^3\\+f(t)-g(t)=0.\end{aligned}$$

上式左端是关于 t 的四次多项式，并且有四个根 $2^2, 4^2, 6^2, 8^2$。因此由韦达定理

$$\begin{aligned}1^2+3^2+5^2+7^2+x^2+y^2+z^2+w^2\\=2^2+4^2+6^2+8^2,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+w^2&=(2^2-1^2)+(4^2-3^2)\\&+(6^2-5^2)+(8^2-7^2)\\&=3+7+11+15=36.\end{aligned}$$

四、爱森斯坦定理

在中学代数中经常遇到因式分解问题，即将一个多项式分解为两个多项式的乘积，在解这类问题时往往为这样一个

问题所苦恼：在对给定的多项式进行若干次因式分解之后，是否还要再因式分解？也就是如何判别一个多项式是否不可分解。这里，我们就整系数多项式谈谈这个问题.

设 $f(x)$ 是一个正次数整系数多项式. 如果存在两个正次数整系数多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $f(x)$ 是可约的；否则 $f(x)$ 称为不可约的. 例如，一次整系数多项式恒不可约. 又如二次整系数多项式 x^2+2 是不可约的.

如何判断一个整系数多项式是否不可约？对此，著名数学家爱森斯坦（Eisenstein）给出了下面的定理.

定理 6 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式. 如果存在一个素数 p，使得 p 不整除 $f(x)$ 的首项系数，但整除其他所有的系数，并且 p^2 不整除常数项，则 $f(x)$ 不可约.

证明 反证法. 设 $f(x)$ 可约，则 $f(x)$ 可以表成两个正次数整系数多项式的乘积：

$$f(x)=(b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}+\cdots+b_0)(c_lx^l+c_{l-1}x^{l-1}+\cdots+c_0).$$

因此，$a_n=b_kc_l$，$a_0=b_0c_0$. 因为 p 整除 a_0，所以 p 整除 b_0，或者 p 整除 c_0. 但 p^2 不整除 a_0，所以 p 不同时整除 b_0 与 c_0. 不妨设 p 整除 b_0 但 p 不整除 c_0. 另一方面，p 不整除 $a_n=b_kc_l$，所以 p 不整除 b_k. 设 $b_0,b_1,\cdots,b_k$ 中第一个不被 p 整除的是 b_m. 比较 $f(x)$ 中第 m 次项系数，得到

$$a_m=b_mc_0+b_{m-1}c_1+\cdots+b_0c_m.$$

其中 p 整除 $b_0,b_1,\cdots,b_{m-1}$. 显然 $m\leqslant k<n$. 由定理条件知，p 整除 a_m. 因此 p 整除 b_mc_0. 由于 p 不整除 c_0，所以 p 整除 b_m. 矛盾. 因此 $f(x)$ 是不可约的.

例 10 （1922 年匈牙利数学竞赛试题）证明四次整系数

多项式 $f(x)=x^4+2x+2x+2$ 不能分解为两个二次整系数多项式的乘积.

证明 取素数 $p=2$, 则 2 不整除 $f(x)$ 的首项系数 1, 但整除所有其他项的系数, 并且 2^2 不整除常数项 2. 因此由爱森斯坦定理, $f(x)$ 不可约. 当然 $f(x)$ 不能分解成两个二次整系数多项式的乘积.

顺便指出, 例 4 也可以用爱森斯坦定理来证明. 当然, 并不是所有整系数多项式都可用爱森斯坦定理来判别它们是否不可约. 不过证明爱森斯坦定理的思想却富启发性.

例 11 (上海第 1 届数学竞赛试题) 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 是整系数多项式, 并且存在奇数 k 与偶数 l, 使得 $f(k)$ 与 $f(l)$ 都是奇数. 证明 $f(x)$ 没有整数根.

证明 因为 $f(l)=(a_nl^{n-1}+\cdots+a_1)l+a_0$ 为奇数, 而 l 为偶数, 因此 a_0 为奇数. 所以对任意偶数 s, $f(s)=(a_ns^{n-1}+\cdots+a_1)s+a_0$ 为奇数. 这说明, 偶数不能是 $f(x)$ 的根. 另一方面, 由题意, 记 $k=2m+1$, 则

$$\begin{aligned} f(2m+1) &= a_n(2m+1)^n+\cdots+a_1(2m+1)+a_0 \\ &\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2). \end{aligned}$$

所以对任意奇数 $2t+1$

$$\begin{aligned} f(2t+1) &= a_n(2t+1)^n+\cdots+a_1(2t+1)+a_0 \\ &\equiv a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2). \end{aligned}$$

这说明, $f(2t+1)$ 为奇数. 因此奇数也不能是 $f(x)$ 的根.

例 12 (莫斯科第 7 届数学奥林匹克试题) 设整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处的值 $f(0)$ 与 $f(1)$ 为奇数, 证明 $f(x)$ 没有整数根.

证明 这是例 11 的特殊情形.

例 13 (北京第 4 届数学竞赛高二组试题) 证明: $bd+cd$ 为奇数的整系数多项式 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 不能

分解为两个整系数多项式的乘积.

证明 如果 $f(x)$ 可以分解为两个整系数多项式的乘积，则因为 $f(x)$ 是三次的，所以其中必有一个是一次的，而另一个是二次的. 因此设

$$f(x)=(\alpha x+\beta)(\gamma x^2+\delta x+\xi),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ 是整数. 比较 $f(x)$ 的首项系数，得到 $\alpha\gamma=1$，所以 $\alpha=\gamma=1$，或者 $\alpha=\gamma=-1$. 这表明，如果 $f(x)$ 可以分解，则 $f(x)$ 具有整数根，反之也然. 因此只需证明 $f(x)$ 没有整数根即可.

因为 $(b+c)d$ 为奇数，所以 $b+c$ 与 d 都是奇数，从而 $1+b+c+d$ 是奇数. 于是 $f(0)=d$ 与 $f(1)=1+b+c+d$ 都是奇数. 于是由例 12 可知，$f(x)$ 没有整数根.

五、对称多项式

一元多项式可以推广为 n 元多项式. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个未定元，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是非负整数，a 是常数，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 称为 n 元单项式，$k_1+k_2+\cdots+k_n$ 称为单项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的次数. 如果两个单项式 $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 与 $bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 适合 $k_i=l_i, i=1, 2, \cdots, n$，则称它们是同类项. 有限多个 n 元单项式之和

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

称为 n 元多项式. 多项式 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中的单项式的最大次数称为 $h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的次数，例如，三元多项式 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1+3x_2x_3+x_1^3x_2x_3^2$ 的次数是 6.

两个 n 元多项式可以相加，相加时只要将两个 n 元多项式中同类项合并即可，例如，

$$(3x_1x_2x_3 + x_1x_2^2x_3^3) + (x_1x_2x_3 - 4x_1x_2^2x_3^3)$$
$$= 4x_1x_2x_3 - 3x_1x_2^2x_3^3.$$

两个 n 元多项式可以按去括号的原则相乘，例如

$$(3x_1x_2x_3 + x_1x_2^2x_3^3)(x_1x_2x_3 - 4x_1x_2^2x_3^3)$$
$$= 3x_1^2x_2^2x_3^2 - 11x_1^2x_2^3x_3^4 - 4x_1^2x_2^4x_3^6.$$

在 n 元多项式中，重要的是对称多项式. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元多项式，如果对任意整数 k 与 l，$1 \leqslant k < l \leqslant n$，均有

$$f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_l, x_{k+1}, \cdots, x_{l-1}, x_k, x_l, \cdots, x_n)$$
$$= f(x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{l-1}, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_n),$$

即如果任意调换 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中两个未定元的位置，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 总保持不变，则 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为对称多项式. 例如

$$s_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$
$$s_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2,$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$s_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k.$$

都是对称多项式. $s_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 k 次等幂和，简记为 s_k. 约定 $s_0 = n$.

又例如

$$\sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} x_{i_1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$\sigma_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}$$
$$= x_1x_2 + \cdots + x_1x_n + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$
$$\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k},$$
$$\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$\sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$$

是 n 个对称多项式，其中 $\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 k 次对称多项式，简记为 $\sigma_k, k = 1, 2, \cdots, n$，并约定 $\sigma_0 = 1$. σ_1, $\sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 称为基本对称多项式.

基本对称多项式与等幂和是两类重要的对称多项式. 它们之间有着密切的联系.

定理 7 n 元基本对称多项式 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 与等幂和 $s_1, s_2, \cdots, s_k, \cdots$ 适合下面的关系:

(1°) 当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^k k\sigma_k = 0;$$

(2°) 当 $k \geqslant n$ 时

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^n \sigma_n s_{k-n} = 0.$$

证明 把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 看成常数,构造多项式

$$f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n).$$

它具有 n 个根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 由韦达定理

$$f(t) = t^n - \sigma_1 t^{n-1} + \sigma_2 t^{n-2} + \cdots + (-1)^l \sigma_l t^{n-l} + \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

因此,当 $k \geqslant n$ 时

$$t^{k-n} f(t) = t^k - \sigma_1 t^{k-1} + \sigma_2 t^{k-2} + \cdots + (-1)^l \sigma_l t^{k-l} + \cdots + (-1)^n \sigma_n t^{k-n}.$$

因为 x_i 是 $f(t)$ 的根,所以

$$x_i^k - \sigma_1 x_i^{k-1} + \sigma_2 x_i^{k-2} + \cdots + (-1)^l \sigma_l x_i^{k-l} + \cdots + (-1)^n \sigma_n x_i^{k-n} = 0.$$

上式对 i 求和即得 (2°).

(1°) 的证明较难. 大体步骤如下: 先对多项式 $f(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n)$ 求导数,得到

$$t^{k+1} f'(t) = f(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{k+1} - x_i^{k+1}}{t - x_i} + g(t),$$

其中 $g(t)$ 的次数小于 n. 将 $f(t)=t^n-\sigma_1 t^{n-1}+\sigma_2 t^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$ 代入上式,然后比较两端同次项系数即可得(1°). 具体过程请自行补足.

定理 7 称为牛顿公式. 利用牛顿公式,既可以把等幂和表成基本对称多项式的多项式,也可以把基本对称多项式表成等幂和的多项式.

例 14 (第 26 届国际数学奥林匹克备选题) 设实数 x, y, z, w 满足

$$x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0,$$

求 $w(w+x)(w+y)(w+z)$ 的值.

解 将 x, y, z, w 看成 4 个未定元,则已知条件为 $s_1=s_7=0$. 由牛顿公式得到, $s_2=-2\sigma_2, s_3=3\sigma_3, s_4=2\sigma_2^2-4\sigma_4, s_5=-5\sigma_2\sigma_3, s_7=7(\sigma_2^2-\sigma_4)\sigma_3=0$. 因此 $\sigma_4=\sigma_2^2$, 或者 $\sigma_3=0$.

如果 $\sigma_4=\sigma_2^2$, 则 $s_4=-2\sigma_2^2\leqslant 0$. 但 $s_4=x^4+y^4+z^4+w^4\geqslant 0$, 因此 $s_4=0$, 即 $x=y=z=w=0$. 所以 $w(w+x)(w+y)(w+z)=0$; 如果 $\sigma_3=0$, 则由 $\sigma_1=s_1=0$ 可知

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)(t-w)=t^4+\sigma_2 t^2+\sigma_4.$$

因此多项式 $f(t)$ 的四个根必由两对正负相反数构成. 所以 $(w+x)(w+y)(w+z)=0$. 从而

$$w(w+x)(w+y)(w+z)=0.$$

例 15 (第 26 届国际数学奥林匹克备选题) 定义多项式 $P_m(x, y, z)$ 如下: $P_0(x, y, z)=1$, 当 $m\geqslant 1$ 时,

$$P_m(x, y, z)=(x+z)(y+z)P_{m-1}(x, y, z+1)-z^2P_{m-1}(x, y, z). \tag{i}$$

证明: 对每个 m, 多项式 $P_m(x, y, z)$ 是对称的.

分析 为证明多项式 $P_m(x, y, z)$ 是对称的,必须证明

$$P_m(x, y, z) = P_m(x, z, y) = P_m(z, x, y) = \cdots.$$

由题设 (i)

$$P_m(x, z, y) = (x + y)(y + z)P_{m-1}(x, z, y + 1) - y^2P_{m-1}(x, z, y). \tag{ii}$$

式 (i) 减式 (ii)，得

$$y^2P_{m-1}(x, z, y) - z^2P_{m-1}(x, y, z) + (y + z) \times [(x + z)P_{m-1}(x, y, z+1) - (x + y)P_{m-1}(x, z, y + 1)] = 0. \tag{iii}$$

如果已证明 $P_{m-1}(x, y, z)$ 对称，则

$$P_{m-1}(x, z, y) = P_{m-1}(x, y, z).$$

于是式 (iii) 化为

$$(y - z)P_{m-1}(x, y, z) = (x + y)P_{m-1}(x, z, y + 1) - (x + z)P_{m-1}(x, y, z + 1).$$

上述分析告诉我们，应当用归纳法证明如下命题 $P(m)$：多项式 $P_m(x, y, z)$ 对称，并且

$$(y - z)P_{m-1}(x, y, z) = (x + y)P_m(x, z, y + 1) - (x + z)P_m(x, y, z + 1). \tag{iv}$$

证明 用归纳法证明命题 $P(m)$. 当 $m = 0$ 时，$P_0(x, y, z) = 1$ 是对称的，并且

$$(y - z)P_0(x, y, z) = y - z,$$

$$(x + y)P_0(x, z, y + 1) - (x + z)P_0(x, y, z + 1) = x + y - x - z = y - z,$$

即 (iv) 对 $m = 0$ 成立. 因此命题 $P(m)$ 对 $m = 0$ 成立. 假设命题 $P(m)$ 对 $m = k$ 成立，下面证明命题对 $m = k + 1$ 成立. 由题设 (i)

$$P_{k+1}(x, y, z) = (x + z)(y + z)P_k(x, y, z + 1) - z^2P_k(x, y, z),$$

$$P_{k+1}(x, z, y) = (x + y)(y + z)P_k(x, z, y + 1)$$

$$- y^2P_k(x, z, y).$$

由归纳假设，$P_k(x, y, z)$ 对称，因此 $P_k(x, z, y) = P_k(x, y, z)$。于是上两式相减得到

$$P_{k+1}(x, y, z) - P_{k+1}(x, z, y) = (x + y)[(x + z)P_k(x, y, z + 1) - (x + y)P_k(x, z, y + 1) + (y - z)P_k(x, y, z)].$$

由归纳假设式 (iv) 可知

$$P_{k+1}(x, z, y) = P_{k+1}(x, y, z). \tag{v}$$

再由题设 (i) 及归纳假设 $P_k(x, y, z)$ 对称，得到

$$P_{k+1}(y, x, z) = (y + z)(x + z)P_k(y, x, z + 1) - z^2P_k(y, x, z) = (x + z)(y + z)P_k(x, y, z + 1) - z^2P_k(x, y, z) = P_{k+1}(x, y, z). \tag{vi}$$

反复用式 (v) 与式 (vi)，得到

$$P_{k+1}(x, y, z) = P_{k+1}(x, z, y) = P_{k+1}(z, x, y) = P_{k+1}(z, y, x) = P_{k+1}(y, z, x) = P_{k+1}(y, x, z).$$

因此 $P_{k+1}(x, y, z)$ 是对称的。

现在证明式 (iv) 对 $m = k + 1$ 成立。因为 $P_{k+1}(x,y,z)$ 是对称的，因此式 (iv) 的右端为

$$\begin{aligned}
&(x + y)P_{k+1}(x,z,y + 1) - (x + z)P_{k+1}(x,y,z + 1)\\
&= (x + y)P_{k+1}(y + 1, z, x) - (x + z)P_{k+1}(z + 1, y, x) = (x + y)[(y + 1 + x)(x + z) \times P_k(y + 1, z, x + 1) - x^2P_k(y + 1, z, x)]\\
&\quad - (x + z)[(z + 1 + x)(x + y)P_k(z + 1, y, x + 1) - x^2P_k(z + 1, y, x)]\\
&= (x + y)(x + z)[(y + 1 + x)P_k(y + 1, z, x + 1) - (z + 1 + x)P_k(z + 1, y, x + 1)]\\
&\quad - x^2[(x + y)P_k(y + 1, z, x) - (x + z)P_k(z + 1, y, x)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x+y)(x+z)[(x+y+1)P_k(x+1,z,y+1) \\
&\quad -(x+z+1)P_k(x+1,y,z+1)]-x^2[(x \\
&\quad +y)P_k(x,z,y+1)-(x+z)P_k(x,y,z+1)] \\
&= (x+y)(x+z)(y-z)P_k(x+1,y,z) \\
&\quad -x^2(y-z)P_k(x,y,z) \\
&= (y-z)[(x+y)(x+z)P_k(x+1,y,z) \\
&\quad -x^2P_k(x,y,z)] \\
&= (y-z)[(x+y)(x+z)P_k(y,z,x+1) \\
&\quad -x^2P_k(y,z,x)] \\
&= (y-z)P_{k+1}(y,z,x) \\
&= (y-z)P_{k+1}(x,y,z).
\end{aligned}
$$

因此式 (iv) 对 $m=k+1$ 成立. 于是命题 $P(m)$ 对 $m=k+1$ 成立.

第十一讲　关于组合数的计算

史　济　怀

牛顿二项式公式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n \qquad (1)$$

的系数恰好是组合数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$，所以组合数有时也称为二项式系数．组合数有许多有趣的性质．例如在(1)中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，就得到下面两个恒等式

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

这是大家熟知的．

在各类数学竞赛中，关于计算含有组合数的和式的值以及研究这种和式的性质的问题时有所见，而且其中有些问题是有一定难度的，对组合数的性质和运算技巧没有一定程度的了解，是很难下笔的．下面是几个这方面的例子．

例 1　（第 23 届美国普特南数学竞赛试题）　求和式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + n^2 C_n^n$$

之值．

例 2　（第 14 届国际数学奥林匹克试题）　设 m 与 n 是任意的非负整数，试证

$$a_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

是一整数．

例 3 （第 16 届国际数学奥林匹克试题） 试证对任意的自然数 n，和数

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除.

例 4 （第 26 届美国普特南数学竞赛试题） 对任何正整数 n，证明

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \left\{\left(1-\frac{2k}{n}\right) C_n^k\right\}^2 = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1}. \tag{2}$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

在这一讲中，我们将介绍计算包含组合数的和式的值的一些常用的方法，同时也讨论一些和组合数有关的其它问题. 对于一名希望在数学竞赛中取得好成绩的学生来说，熟练地掌握组合数的性质，并能灵活地运用它们来解决各种问题是十分必要的.

一、几个基本的组合恒等式

从下面六个基本的组合恒等式出发，经过归纳、递推、迭代等方法，我们往往能够算出一些由组合数构成的和式的值或给出一些较为复杂的组合恒等式的证明. 这六个基本恒等式是:

(i) $C_n^k = C_n^{n-k}$; (3)

(ii) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$; (4)

(iii) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$; (5)

(iv) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m$, $m \leqslant k \leqslant n$; (6)

$$(\mathrm{v})\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n; \tag{7}$$

$$(\mathrm{vi})\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0. \tag{8}$$

这六个基本恒等式中，前两个是大家熟知的。第三个是第四个的特例：只要在 (6) 的第一个等式中取 $m = 1$，就得到等式 (5)。

现在来证明等式 (6)。事实上，按照计算组合数的公式，有

$$C_n^k C_k^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{k!}{m!(k-m)!},$$

$$C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!},$$

$$C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m = \frac{n!}{(k-m)!(n-k+m)!}\,\frac{(n-k+m)!}{m!(n-k)!}.$$

显然，这三个乘积是相等的，这就是等式 (6)。

等式 (7) 和 (8) 就是文章开头已经提到过的两个恒等式。

下面我们将看到，这些基本恒等式虽然简单，但用它们可以算出许多由组合数构成的和式的值。

二、基本恒等式的应用

例 5 计算 $S_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k$，$m \leqslant n$。

解 从等式 (8) 知道，当 $m = n$ 时，$S_{n,n} = 0$。现设 $m < n$，利用基本恒等式 (4)，$S_{n,m}$ 可以写成

$$S_{n,m} = 1 + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})$$

$$= 1 - (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1)$$

$$- \cdots + (-1)^m (C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1})$$

$$= (-1)^m C_{n-1}^m.$$

这样，就得到等式

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 0, & m = n, \\ (-1)^m C_{n-1}^m, & m < n. \end{cases}$$

例 6 证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n.$$

证明 记 $a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k$, $b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k$,

则由等式(7)得

$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}.$$

另一方面，对 b_n 的流动指标作变换：$k = 2n - l$，于是

$$b_n = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-l} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^l + C_{2n}^n - C_{2n}^n = \sum_{l=0}^{n} C_{2n}^l - C_{2n}^n$$

$$= a_n - C_{2n}^n.$$

由此即得

$$a_n = 2^{2n} - b_n = 2^{2n} - a_n + C_{2n}^n,$$

所以

$$a_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n.$$

例 7 计算

$$p_n = C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1} C_n^n, \quad (9)$$

$$q_n = C_n^0 - \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{3} C_n^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} C_n^n \quad (10)$$

解 计算这两个和式的主要困难是在每个组合数 C_n^k 前有一个因子 $\frac{1}{k+1}$，若能通过变换把这个因子去掉，利用(7)、(8)就能得到(9)、(10)的求和公式.把基本恒等式(5)改写成

$$\frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1} \quad (11)$$

就能达到这个目的. 事实上,把(11)代入(9)即得

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1),$$

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{n+1}^{k+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}.$$

例 8（习题） 证明 $\sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^k = n\, 2^{2n-1}$.

例 9（习题） 证明 $\sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^{n-k} = n C_{2n-1}^n$.

现在回到文章开头提到的例 1： 计算和式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k. \quad (12)$$

先利用基本恒等式(5)： $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$，(12) 可写为

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k = n \sum_{k=1}^{n} k C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1} + n\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n\sum_{k=2}^{n}(k-1)C_{n-1}^{k-1} + n\,2^{n-1}. \qquad (13)$$

这里我们已经利用了基本恒等式(7). 对(13)右端的和式再利用一次基本恒等式(5): $(k-1)C_{n-1}^{k-1} = (n-1)C_{n-2}^{k-2}$, 得

$$\sum_{k=1}^{n}k^2C_n^k = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2} + n\,2^{n-1}$$

$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

这就是要算的结果. 计算过程中用到的也就是基本恒等式(5)和(7).

读者不妨利用上述方法,自己给出

$$\sum_{k=1}^{n}k^3C_n^k, \quad \sum_{k=1}^{n}k^4C_n^k$$

的求和公式.

例 10 证明 $S_{mn} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^m$

$$= (-1)^m\delta_{mn}, \quad m \leqslant n.$$

这里

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

证明 当 $m = n$ 时, 上面的和式只有一项

$$S_{mn} = (-1)^mC_m^mC_m^m = (-1)^m,$$

故等式成立. 现设 $m < n$, 利用基本恒等式(6), 即得

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^{n}(-1)^kC_n^mC_{n-m}^{k-m} = C_n^m\sum_{k=m}^{n}(-1)^kC_{n-m}^{k-m}.$$

对上式的流动指标 k 作一变换：$k-m=l$，则当 k 从 m 变到 n 时，l 从 0 变到 $n-m$. 于是

$$S_{mn}=C_n^m\sum_{l=0}^{n-m}(-1)^{l+m}C_{n-m}^l$$

$$=(-1)^mC_n^m\sum_{l=0}^{n-m}(-1)^lC_{n-m}^l=0.$$

最后一步利用了等式(8). 证明完毕.

证明这个等式的关键是基本恒等式(6)，它把两个因子都和变动指标 k 有关的乘积 $C_n^kC_k^m$ 变成了只有一个因子与 k 有关的乘积 $C_n^mC_{n-m}^{k-m}$. 这样 C_n^m 就可作为公因子提出来，和式就化简了. 这里利用(6)的目的和例7中利用(5)的目的是一样的，都是为了把和式化简. 这个等式在下面的讨论中还要用到.

用同样的方法还可证明

$$\sum_{k=m}^{n}C_n^kC_k^m=2^{n-m}C_n^m,\quad m\leqslant n.$$

例 11（习题）

例 12（习题） 证明等式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{x^k}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}.$$

在上式中命 $x=1$，就得到例7中关于 p_n 的恒等式.

例 13 计算

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2$$

$$+\frac{1}{3}C_n^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}C_n^n.$$

解 看上去这个和式和例7中的 q_n 差不多，但现在不能直接用(5)，不过容易想到通过恒等式(4)来使用(5). 事实上，先用(4)，再用(5)可得

$$\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{k}(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})=\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}C_n^k.$$

于是

$$f_n=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}C_n^k$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=f_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k$$

$$=f_{n-1}+\frac{1}{n}.$$

这里最后的等式用了恒等式(8). 从这个递推关系可得

$$f_{n-1}=f_{n-2}+\frac{1}{n-1},\ \cdots,\ f_2=f_1+\frac{1}{2},\ f_1=1.$$

所以

$$f_n=f_{n-1}+\frac{1}{n}=f_{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

$$=f_{n-3}+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

$$=\cdots=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

这样,就得到恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}. \tag{14}$$

从证明这个等式的过程可以看出,我们不仅使用了基本恒等式(4)和(5),还使用了递推的办法,这是证明组合恒等式常用的手段.

例 14 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^k=n+1. \tag{15}$$

证明 记(15)左端的和式为 a_n. 利用基本恒等式(4),

a_n 可写为

$$a_n = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k}(C_{2n-k}^{k} + C_{2n-k}^{k-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1}. \tag{16}$$

对上式第二个和式作指标变换 $k = l + 1$ 得

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} 2^{2(n-1)-2l} C_{2(n-1)-l+1}^{l}$$

$$= -a_{n-1}.$$

如果命

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k},$$

则 (16) 可写为

$$b_n = a_n + a_{n-1}. \tag{17}$$

在 b_n 中再用基本恒等式 (4) 得

$$b_n = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k 2^{2n-2k}(C_{2n-k-1}^{k} + C_{2n-k-1}^{k-1}) + (-1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k-1}$$

$$= 4 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 2^{2(n-1)-2k} C_{2(n-1)-k+1}^{k}$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} 2^{2(n-1)-2l} C_{2(n-1)-l}^{l}$$

$$= 4a_{n-1} - b_{n-1}. \tag{18}$$

从 (17) 和 (18) 得

$$a_n + a_{n-1} = 4a_{n-1} - b_{n-1} = 4a_{n-1} - a_{n-1} - a_{n-2},$$

由此得递推关系式

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{19}$$

显然 $a_0 = 1$，$a_1 = 2$，于是从 (19) 得

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} = \cdots \\ &= a_1 - a_0 = 1, \end{aligned}$$

即

$$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 2 = \cdots = a_0 + n = n + 1.$$

这就是要证明的等式 (15).

从 (15) 和 (17) 又可得一新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k} = 2n + 1. \tag{20}$$

如果把 (20) 中的流动指标 k 换成 $n - l$，又得恒等式

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} 2^{2l} C_{n+l}^{2l} = 2n + 1.$$

例 15 计算 $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{k+1}{C_{2n}^{k}}$.

证明 记 $Y_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{k+1}{C_{2n}^{k}}$. 两次利用基本恒等式 (4) 可得

$$\frac{k+1}{C_{2n}^{k}} = \frac{2n+1}{C_{2n+1}^{k+1}} = \frac{2n+1}{C_{2n+1}^{2n-k}} = \frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k-1}},$$

于是

$$Y_n = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{2n-k}{C_{2n}^{2n-k-1}},$$

作指标变换 $l = 2n - k - 1$，则当 k 从 0 变到 $2n - 1$ 时，l 从 $2n - 1$ 变到 0，因而

$$Y_n = \sum_{l=0}^{2n-1} (-1)^{2n-l} \frac{l+1}{C_{2n}^{l}} = \sum_{l=0}^{2n-1} (-1)^{l} \frac{l+1}{C_{2n}^{l}}$$

$$= -Y_n.$$

由此即得 $Y_n = 0$.

例 16（习题） 证明 $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^k}=0$.

例 17 证明 $\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{C_{2n}^k}=\frac{1}{n+1}$.

证明 若记

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{C_{2n}^k},\quad b_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{k}{C_{2n}^k},$$

则由例 15 知道

$$a_n+b_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{k+1}{C_{2n}^k}=\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{k+1}{C_{2n}^k}$$
$$+1=1. \tag{21}$$

从例 16 又有

$$na_n-b_n=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{n-k}{C_{2n}^k}=0. \tag{22}$$

从 (21) 和 (22) 即得 $b_n=\frac{n}{n+1}$，代入 (21) 得

$$a_n=1-b_n=\frac{1}{n+1}.$$

这样我们就得到了下面两个组合恒等式：

$$\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{C_{2n}^k}=\frac{1}{n+1},\quad \sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k-1}\frac{k}{C_{2n}^k}=\frac{n}{n+1}.$$

例 17 还有一个更简单的证法. 根据组合数的定义直接计算可得

$$\frac{2n+2}{2n+1}\frac{1}{C_{2n}^k}=\frac{1}{C_{2n+1}^k}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}, \tag{23}$$

于是

$$\frac{2n+2}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{C_{2n}^{k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\left\{\frac{1}{C_{2n+1}^{k}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{k+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{C_{2n+1}^{1}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}-\frac{1}{C_{2n+1}^{2}}-\frac{1}{C_{2n+1}^{3}}+\frac{1}{C_{2n+1}^{3}}$$

$$+\frac{1}{C_{2n+1}^{4}}-\cdots-\frac{1}{C_{2n+1}^{2n}}-\frac{1}{C_{2n+1}^{2n+1}}$$

$$=\frac{1}{2n+1}-1=\frac{-2n}{2n+1},$$

即 $a_n-1=\frac{n}{n+1}$，所以 $a_n=\frac{1}{n+1}$。

这个证明不需要例 15 和例 16 两个恒等式的帮助，而仅仅利用了等式(23)，这是从组合数的计算公式直接得到的，但要想到这一点，要对组合数的运算非常熟练才能办到。

三、母函数方法

设 $\{a_k\}$，$k=0,1,\cdots,n$，是一个给定的数列，如果它恰好是某一多项式 $p(x)$ 的系数，即

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

就称 $p(x)$ 是这个数列的母函数或生成函数。意思是这个数列是由多项式 $p(x)$ 产生的。

例如，组合数列

$$C_n^0,\ C_n^1,\ \cdots,\ C_n^n$$

的母函数是 $(1+x)^n$，这是因为由二项式定理可得

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n.$$

同样道理，数列 $C_{2n}^0,\ C_{2n}^1,\ \cdots,\ C_{2n}^{2n}$ 的母函数便是 $(1+x)^{2n}$。

设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是两个给定的数列，为了确定它们之间的某种关系，我们可以先分别算出二者所对应的母函数，通过研究母函数之间的某种关系来确定数列之间的关系。这就是用母函数方法来计算或证明组合恒等式的基本思想。

让我们先用母函数方法来证明基本恒等式

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

刚才说过，数列

$$C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^k, \cdots, C_n^n \tag{24}$$

的母函数是 $(1+x)^n$，那么数列

$$C_n^n, C_n^{n-1}, \cdots, C_n^{n-k}, \cdots, C_n^0 \tag{25}$$

的母函数又是什么？按定义，它的母函数是

$$\begin{aligned} &C_n^n + C_n^{n-1}x + \cdots + C_n^{n-k}x^k + \cdots + C_n^0 x^n \\ &= x^n\left(C_n^n \frac{1}{x^n} + C_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + C_n^0\right) \\ &= x^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = (1+x)^n. \end{aligned}$$

这说明 (24) 和 (25) 具有相同的母函数，因而这两个数列也是相同的，即 $C_n^k = C_n^{n-k}$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

利用母函数的方法不仅可以证明恒等式，还可以发现一些新的恒等式.

例 18 证明 $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

证明 因为 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$,

所以 $$(1+x)^{2n} = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^n\right)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^n\right).$$

这个乘积中 x^n 的系数是

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

但从展开式 $(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$ 知道 x^n 的系数是 C_{2n}^n，

因而得

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

利用上面的证明方法，我们可以发现一些新的组合恒等式。例如把展开式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n \tag{26}$$

中的 x 换成 $-x$，得到

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + \cdots + (-1)^n C_n^n x^n. \tag{27}$$

两式相乘得

$$(1-x^2)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^k\right). \tag{28}$$

另一方面，在 (26) 中用 $-x^2$ 代 x，可得

$$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2k}. \tag{29}$$

比较 (28)，(29) 中 x^{2r} 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_n^k C_n^{2r-k} = (-1)^r C_n^r. \tag{30}$$

比较 (28)，(29) 中 x^{2r+1} 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^k C_n^k C_n^{2r+1-k} = 0. \tag{31}$$

如果 n 是偶数，在 (30) 中取 $r = \frac{n}{2}$，就得

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}. \tag{32}$$

如果 n 是奇数，在 (31) 中取 $r=\frac{n-1}{2}$，得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2=0. \tag{33}$$

综合 (32) 和 (33) 得到组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^2=\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数},\\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数}.\end{cases}$$

有了例 18 的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n, \tag{34}$$

我们就可证明例 4 中的恒等式 (2) 了：

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

为此，我们先证明

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2. \tag{35}$$

对 (2) 左端的和式作指标变换：$l=n-k$，于是当 $k=0$ 时，$l=n$；当 $k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 时，$l=n-\left[\frac{n-1}{2}\right]$，和式变成

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{l=n-[\frac{n-1}{2}]}^{n}\left(\frac{2l-n}{n}C_n^{n-l}\right)^2$$

$$=\sum_{l=n-[\frac{n-1}{2}]}^{n}\left(\frac{n-2l}{n}C_n^l\right)^2. \tag{36}$$

如果 n 是奇数，则 $n-1$ 为偶数，因而

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\frac{n-1}{2},$$

$$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]=n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

(36) 就变成

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2$$

这样

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}$$

$$=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2,$$

即 (35) 成立. 如果 n 是偶数,则 $n-1$ 为奇数,因而

$$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\frac{n-2}{2},$$

$$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]=n-\frac{n-2}{2}=\frac{n+2}{2}.$$

(36) 变成

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

由于当

$$k=\frac{n}{2}\text{ 时},\ \frac{n-2k}{n}C_n^k=0,$$

因而

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}$$

$$=2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

这就证明了在 n 为偶数的情况下，(35) 也是成立的。现在只要计算 (35) 的左端就行了。

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2-\frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}k(C_n^k)^2+\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(kC_n^k)^2$$

$$=a_1+a_2+a_3. \tag{37}$$

由 (34) 得 $a_1=C_{2n}^n$。为了计算 a_3，利用基本恒等式 (5)，再利用 (34) 即得

$$a_3=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kC_n^k)^2=\frac{4n^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(C_{n-1}^{k-1})^2=4C_{2n-2}^{n-1}.$$

利用基本恒等式 (5)，可把 a_2 写成

$$a_2=-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2=-4\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k=-4C_{2n-1}^{n-1},$$

最后一个等式是用母函数方法得到的。把 a_1，a_2，a_3 加起来，就得

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=C_{2n}^n-4C_{2n-1}^{n-1}+4C_{2n-2}^{n-1}$$

$$=C_{2n}^n-4C_{2n-2}^{n-2}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{4(2n-2)!}{(n-2)!n!}$$

$$=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\left(\frac{2n(2n-1)}{n^2}-\frac{4(n-1)}{n}\right)$$

$$= \frac{2}{n} C_{2n-2}^{n-1}.$$

从(35)即得(2). 证明完毕.

从整个证明过程来看，普特南数学竞赛的这道试题是有一定难度的，但对熟悉组合数运算的学生来说，这道题也没有什么特殊的技巧.

四、组合变换的互逆公式

组合变换的互逆公式是计算由组合数构成的和式和发现新的组合恒等式的重要工具.

设$\{a_n\}$是一个给定的数列，命

$$b_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a_l, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{38}$$

则公式(38)把数列$\{a_n\}$变换成一个新数列$\{b_n\}$. 如果把数列$\{b_n\}$再经过(38)变换一次，所得结果如何?

为了讨论这个问题，先说明一个求和公式. 设$\{x_{kl}\}$是一个和两个指标有关的数列，考虑下面这些数的和:

$$\begin{aligned}
& x_{00} \\
+\ & x_{10} + x_{11} \\
+\ & x_{20} + x_{21} + x_{22} \\
+\ & x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \\
+\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\ & x_{n0} + x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn}.
\end{aligned}$$

每一行的和可写成$\sum_{l=0}^{k} x_{kl}, k = 0, 1, \cdots n$，再把$n+1$行的和加起来得表中所有数的和

$$S=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}x_{kl}.$$

当然 S 也可用另一种办法写出来：先把每一列的和写出来得

$$\sum_{k=l}^{n}x_{kl},\ l=0,1,\cdots,n,$$

再把 $n+1$ 列的和加起来得

$$S=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}x_{kl}.$$

因而得求和公式

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}x_{kl}=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}x_{kl}. \tag{39}$$

现在回到原来的问题. 把 $\{b_n\}$ 经过 (38) 再变换一次，可得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kb_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\left(\sum_{l=0}^{k}(-1)^lC_k^la_l\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}(-1)^{k+l}C_n^kC_k^la_l.$$

记 $x_{kl}=(-1)^{k+l}C_n^kC_k^la_l$，利用求和公式 (39) 和例 10 的恒等式得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kb_k=\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=l}^{n}(-1)^{k+l}C_n^kC_k^la_l$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^la_l\sum_{k=l}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^l$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^la_l(-1)^l\delta_{ln}=\sum_{l=0}^{n}a_l\delta_{ln}=a_n.$$

上面的推导说明，把 $\{a_n\}$ 经变换 (38) 变为 $\{b_n\}$，若把 $\{b_n\}$ 再经变换 (38) 变换一次，则又回到了原来的 $\{a_n\}$. 也就是说：

设 $\{a_n\}$ 是一个给定的数列，如果

$$b_k = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l C_k^l a_l, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

那么

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{40}$$

(38) 和 (40) 称为一对组合变换的互逆公式. 利用这对公式，可以由一个组合恒等式产生一个新的组合恒等式.

在例 13 中，我们已经证明了恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

如果命 $a_0 = 0$, $a_k = -\frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \cdots$, $b_0 = 0$,

$$b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, \cdots,$$

那么上式便可写成

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a_k = b_n, \ n = 0, 1, \cdots.$$

根据组合变换的互逆公式，立刻得

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k b_k, \ n = 0, 1, \cdots.$$

把 a_n, b_n 的表达式代入上式，就得新的恒等式：

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{n}.$$

要直接证明这个恒等式是颇不容易的.

例 19 证明 $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (C_{m+k}^k)^{-1} = \frac{m}{m+n}$. (41)

证明 直接证明这个等式比较困难. 根据组合变换的互

逆公式，如果能证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} = (C_{m+n}^n)^{-1}, \tag{42}$$

那么(41)成立。记(42)的左端为b_n，利用基本恒等式(4)和(5)得

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) \frac{m}{m+k} + (-1)^n \frac{m}{m+n}$$

$$= b_{n-1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_{n-1}^{k-1} \frac{m}{m+k}$$

$$= b_{n-1} + \frac{m}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{k}{m+k}$$

$$= b_{n-1} + \frac{m}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \left(1 - \frac{m}{m+k}\right)$$

$$= b_{n-1} + \frac{m}{n}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}\right\}$$

$$= b_{n-1} - \frac{m}{n} b_n,$$

即 $b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1}$。从这递推公式立刻可得

$$b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1} = \frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} b_{n-2}$$

$$= \cdots = \frac{n(n-1)\cdots 1}{(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)} b_0$$

$$= \frac{n!\,m!}{(n+m)!} = (C_{m+n}^n)^{-1}.$$

这就是(42)，因而(41)也成立。

例 20（习题） 证明

(i) $\sum_{l=0}^{k} C_n^l C_m^{k-l} = C_{n+m}^k$;

(ii) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k C_{m+k}^l = (-1)^n C_m^{l-n}$.

例 21（习题） 证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (C_{m+k}^m)^{-1} \frac{(-1)^k}{m+k+1} = \frac{1}{m+n+1}.$$

五、复 数 方 法

有一部分组合恒等式可以通过复数运算来证明.

例 22 证明

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx = 2^n \cos \frac{nx}{2} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n, \tag{43}$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx = 2^n \sin \frac{nx}{2} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n. \tag{44}$$

证明 记 $z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, 由棣莫佛公式

$$z^k = \cos kx + i \sin kx,$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos kx + i \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin kx = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k$$

$$= (1+z)^n. \tag{45}$$

而

$$1 + z = 1 + e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}} (e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}) = 2e^{i\frac{x}{2}} \cos \frac{x}{2},$$

$$(1+z)^n = 2^n e^{i\frac{nx}{2}} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n = 2^n \cos \frac{nx}{2} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^n$$

$$+ i\,2^n \sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n.$$

把它代入 (45)，并分别令实部与实部相等，虚部与虚部相等，即得 (43) 和 (44)。

例 23（习题） 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \cos kx = (-1)^n\ 2^n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n \times \cos\frac{n(x+\pi)}{2},$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sin kx = (-1)^n 2^n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n \sin\frac{n(x+\pi)}{2}.$$

例 24 证明

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} C_n^{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \tag{46}$$

证明 记 $\omega = e^{i\frac{2}{3}\pi}$，则

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k, \quad (1+\omega)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega^k,$$

$$(1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega^{2k}$$

把三式相加得

$$2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1+\omega^k+\omega^{2k}), \tag{47}$$

但已知 $1+\omega^k+\omega^{2k} = \begin{cases} 3, & \text{若 } k \text{ 是 3 的倍数}, \\ 0, & \text{若 } k \text{ 不是 3 的倍数}. \end{cases}$

于是 (47) 可写为

$$3\sum_{k=0}^{[\frac{n}{3}]} C_n^{3k} = 2^n + (1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n, \tag{48}$$

现在

$$(1+\omega)^n = (-\omega^2)^n = (-1)^n e^{i\frac{4n}{3}\pi} = e^{i\frac{n\pi}{3}},$$

$$(1+\omega^2)^n = (-\omega)^n = (-1)^n e^{i\frac{2n\pi}{3}} = e^{-i\frac{n\pi}{3}},$$

所以

$$(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-i\frac{n\pi}{3}} = 2\cos\frac{n\pi}{3}.$$

把它代入(48)，就得到(46)。

例 25（习题） 证明

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{4}]} C_n^{4k} = \frac{1}{4}\left\{2^n + 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}\right\}.$$

六、和组合数有关的问题

熟悉了组合数的基本性质和一些基本恒等式以后，讨论与组合数有关的问题就有一些办法了。

我们回到一开头提出的数学竞赛题。例 2 要证明对任意的非负整数 m, n

$$a_{m,n} = \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

是一整数。

这个题目从表面上看与组合数无关，但当 $n = 0$ 时，

$$a_{m,0} = \frac{(2m)!}{m!m!} = C_{2m}^{m}$$

是一个组合数，它当然是一个整数。由此启发我们，是否能把 $a_{m,n}$ 写成若干个组合数的整系数线性组合？若能做到这一点，

那么因为每个组合数是整数，从而得知 $a_{m,n}$ 是一整数。沿着这一线索思考下去，就不难得到下面的递推公式：

$$a_{m,n} = 4\,a_{m,n-1} - a_{m+1,n-1}, \tag{49}$$

这可以通过直接验算而得。上式说明 $a_{m,n}$ 可以通过 $a_{m,n-1}$ 和 $a_{m+1,n-1}$ 的整系数线性组合来表示。同样道理，$a_{m,n-1}$ 和 $a_{m+1,n-1}$ 可以分别通过 $a_{m,n-2}$，$a_{m+1,n-2}$ 和 $a_{m+1,n-2}$ 和 $a_{m+2,n-2}$ 的整系数线性组合来表示。每递推一次 n 就降为 $n-1$，继续做下去，最终可得

$$a_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} C_k a_{m+k,0}.$$

这里 C_k 是确定的整数。由于 $a_{m+k,0} = C_{k(m+k)}^{m+k}$ 是整数，因而 $a_{m,n}$ 是整数。证明完毕。

再看例 3，它要求证明对任意自然数 n

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k} C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除。

证明这个题目除了要用组合数的性质外，还要用一些整数的性质。

记

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k}, \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} 2^{3k},$$

于是

$$\sqrt{8}\,a_n + b_n = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (\sqrt{8})^{2k+1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k} (\sqrt{8})^{2k} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} (\sqrt{8})^{k}$$

$$= (\sqrt{8}+1)^{2n+1},$$

同理

$$\sqrt{8}\,a_n - b_n = (\sqrt{8}-1)^{2n+1}.$$

两式相乘得

$$8a_n^2 - b_n^2 = 7^{2n+1}. \tag{50}$$

由于

$$8 \equiv 3 \pmod 5,\ 7 \equiv 2 \pmod 5,\ 7^2 \equiv -1 \pmod 5,$$

$$7^{2n} \equiv (-1)^n \pmod 5,$$

从(50)可得

$$3a_n^2 - b_n^2 \equiv 2 \cdot 7^{2n} \equiv 2(-1)^n \pmod 5 \tag{51}$$

已知 $0^2 \equiv 0 \pmod 5$, $1^2 \equiv 4^2 \equiv 1 \pmod 5$, $2^2 \equiv 3^2 \equiv -1 \pmod 5$,因此决不可能有 $b_n^2 \equiv 2 \pmod 5$和$b_n^2 \equiv -2 \pmod 5$. 从(51)知决不可能有 $3a_n^2 \equiv 0 \pmod 5$. 这就证明了 a_n 不可能被5整除.

做这道题时,第一个想法是把 a_n 的表达式算出来,这并不困难. 但即使写出了表达式,还是不能证明要求的结论. 这里引进 b_n,并利用二项式定理把 a_n, b_n 的关系用(50)表达出来,这是技巧很高的一步. 有了(50),问题就迎刃而解了.

第十二讲　组合计数问题

李　炯　生

组合数学是研究有关某些对象按照某种特定要求进行安排的一个数学分支，它包括求出符合要求的安排方法种数，或者估计安排方法种数的上、下界的计数问题．组合数学的产生、形成与发展，源远流长．随着计算机科学的兴起，组合数学引起了科技界的关注．受其影响，在国内外各类数学竞赛中，有关组合数学的题目越出越多．据统计，在近三年的国际数学奥林匹克中，每年都有这方面的题目．1985年第 26 届国际数学奥林匹克的 99 道备选题中，有关组合数学的就有 17 道题．我国要在数学竞赛中走向世界，这方面的训练一定要加强．这里仅就数学竞赛所遇到的组合计数问题谈谈计数的基本原理与典型的解题技巧．

一、配 对 原 理

抽象地说，所谓计数问题是指，给定一个集合 A，要求出集合 A 所含元素的个数 $|A|$．从集合论角度讲，A 给定，A 中的元素也就给定，A 的元素个数 $|A|$ 自然也就确定，似乎没有什么难处，做不出什么大文章．其实不然，在具体问题中给出的集合 A 都有它的实际背景，往往很复杂．而且集合 A 中的元素是由某些条件确定的，要判定一个元素是否在 A 中，已非易事，要确定 A 的元素个数就更加困难．这就是为什么要考虑计数问题的原因．人们经过长期探索，已经积累了许

多行之有效的计数方法，这里先介绍配对原理.

配对原理 设A与B是两个集合. 如果A的元素与B的元素都能配成对，而且A与B的每个元素只能参加一对，则$|A| = |B|$.

配对原理可以用集合论语言叙述. 设φ是集合A到集合B的一个映射.如果对任意$a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, 均有$\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$，则$\varphi$称为单射. 如果对每个$b \in B$，必有$a \in A$，使得$\varphi(a) = b$，则$\varphi$称为满射. 既是单射又是满射的映射$\varphi$称为双射. 如果$\varphi$是$A$到$B$上的双射，则将$A$的元素$a$与它在$\varphi$下的象$\varphi(a)$配成对：$(a, \varphi(a))$. 因为$\varphi$是单射，所以对不同的$a \in A$, $\varphi(a)$也不同. 因此A的不同元素与B的不同元素配对. 因为φ是满射，所以对每个$b \in B$，必有$a \in A$，使$\varphi(a) = b$. 因此，B的每个元素都只参加一对. 这说明，A的元素个数与B的元素个数相等. 于是，配对原理的集合论形式是:

配对原理（集合论形式） 如果存在集合A到集合B上的双射，则$|A| = |B|$.

应用配对原理求$|A|$的关键是，寻找一个便于计数的集合B，使A的元素与B的元素可以两两配对，也就是说，可以建立A到B上的双射，这样求$|A|$的问题就转化为求$|B|$的问题. 如何寻求B，以及如何将A的元素与B的元素配对，也即如何建立A到B上的双射，往往需要相当的技巧.

例 1（第 1 届莫斯科数学奥林匹克试题） 将正整数n写成三个正整数之和，有多少种写法.

解 将n写成三个正整数之和的所有写法集合记作A_n. 将n个 1 排成一列，两个相邻的 1 之间空出一个空格，共有$n-1$个空格:

$$1\square 1\square 1\square\cdots\square 1\square 1\square\cdots\square 1\square 1.$$

从 $n-1$ 个空格中取出两个空格，都填上“+”号，所有填法集合记作 B_n. 设填法 $\beta \in B_n$. 按照填法 β，填上“+”号的两个空格分别是第 n_1, n_1+n_2 个空格. 于是填法 β 记作 (n_1, n_2). 对于填法 $\beta=(n_1, n_2)$，第 n_1 个格子以前 1 的个数为 n_1，两个填上“+”号的格子之间 1 的个数为 n_2，第 n_1+n_2 个格子之后 1 的个数为 $n_3=n-n_1-n$. 于是 $n=n_1+n_2+n_3$ 是将 n 写成三个正整数之和的一种写法，记作 (n_1, n_2, n_3). 建立集合 B_n 到 A_n 的映射 φ 如下：设 $(n_1, n_2) \in B_n$，令 $\varphi(n_1, n_2)=(n_1, n_2, n_3)$. 容易看出，对不同的 (n_1, n_2)，$\varphi(n_1, n_2)$ 也不同，因此 φ 是单射. 反之设 $(n_1, n_2, n_3) \in A_n$，分别在第 n_1 与 n_1+n_2 个空格中填上“+”号，便得到一个填法 $\beta=(n_1, n_2) \in B_n$，且 $\varphi(n_1, n_2)=(n_1, n_2, n_3)$. 即 φ 是满射，从而 φ 是 B_n 到 A_n 上的双射. 由配对原理，$|A_n|=|B_n|$，容易看出，$|B|=C_{n-1}^2$. 所以 $|A_n|=C_{n-1}^2$.

应当指出，例 1 是将 n 写成若干个正整数之和的特殊情形. 一般地说，正整数 2 可以表为 $2=2$，$2=1+1$；正整数 3 可以表为 $3=2+1=1+2=1+1+1$；正整数 4 可以表为 $4=3+1=1+3=2+2=2+1+1=1+2+1=1+1+2=1+1+1+1$，等等. 正整数的这种表示称为有序分拆. n 的所有有序分拆种数记作 $r(n)$，它称为 n 的有序分拆数. 与例 1 相仿可以证明：$r(n)=2^{n-1}$.

例 2（第 17 届美国普特南数学竞赛试题） 将正整数 n 写成若干个 1 与若干个 2 之和，和项顺序不同认为是不同的写法. 所有写法种数记作 $\alpha(n)$. 将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和，和项顺序不同认为写法不同. 所有写法种数记作 $\beta(n)$. 证明：对每个 n，$\alpha(n)=\beta(n+2)$.

证明 由若干个 1 与若干个 2 构成且其和为 n 的所有数列集合记作 A_n. 由若干个大于 1 的正整数构成且其和为 n

的所有数列集合记作 B_n. 容易看出，$\alpha(n) = |A_n|$，$\beta(n) = |B_n|$. 欲证的是 $|A_n| = |B_{n+2}|$. 因此关键在于建立 A_n 到 B_{n+2} 上的双射.

设数列 $a \in A_n$. 因为 a 的每项为 1 或 2，且其和为 n，因此数列 a 的项数是有限的，设为 m，且 $a = \{a_1, a_2 \cdots, a_m\}$，其中 $a_{i_1} = a_{i_2} = \cdots = a_{i_k} = 2$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant m$，其他的 a_i 为 1. 记

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1} = b_1, \\ &a_{i_1+1} + a_{i_1+2} + \cdots + a_{i_2} = b_2, \cdots, \\ &a_{i_{k-1}+1} + a_{i_{k-1}+2} + \cdots + a_{i_k} = b_k, \\ &a_{i_k+1} + a_{i_k+2} + \cdots + a_m + 2 = b_{k+1}. \end{aligned} \tag{i}$$

且 $b = \{b_1, b_2, \cdots, b_k, b_{k+1}\}$. 对每个 i，$1 \leqslant i \leqslant k+1$，$b_i \geqslant 2$，且 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + 2 = n + 2$. 所以数列 $b \in B_{n+2}$. 建立 A_n 到 B_{n+2} 的映射 φ 如下：设 $a \in A_n$，令 $\varphi(a) = b$. 如果 a，$a^* \in A_n$，$a \neq a^*$，则数列 a 与 a^* 中项为 2 的项要么项的个数不同，要么虽然项的个数相同，但项的位置不同. 因此按照上述方法得到的数列 b 与 b^* 不同，所以 $\varphi(a) \neq \varphi(a^*)$，即 φ 是单射. 反之设 $b \in B_{n+2}$. 因为数列 b 的每项都大于 1 且其和为 n，所以 b 的项数是有限的，设 $b = \{b_1, b_2, \cdots, b_k, b_{k+1}\}$. 利用式 (i) 可以确定数列 $a \in A_n$，且 $\varphi(a) = b$. 因此 φ 是满射，从而 φ 是双射. 由配对原理即得，$|A_n| = |B_{n+2}|$.

例 3 在给定的圆周上取定 n 个点，$n \geqslant 6$，每两点间连一线段，其中任意三条在圆内都不共点. 求这些线段确定的且顶点在圆内的三角形个数.

解 符合题意的所有三角形集合记作 A. 从 n 个给定的点取六点的所有取法集合记作 B. 设 $\Delta a_1a_2a_3 \in A$，延长它的三边，交圆周六个点 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ (图 12.1，其中

六点按反时针方向排列). 六个点 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ 便确定一种取法 $\alpha \in B$. 建立 A 到 B 的映射 φ 如下: 设 $\Delta a_1a_2a_3 \in A$, 令 $\varphi(\Delta a_1a_2a_3) = \alpha$. 容易看出, 对不同的三角形 $\Delta a_1a_2a_3 \in A$, 按上述方法所确定的六点组$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$也不同, 因此$\varphi(\Delta a_1a_2a_3)$也不同, 即 φ 是单射. 反之设取法 $\alpha \in B$, 按取法α可以在圆周上确定按反时针顺序排列的六个点 $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, 联结 b_1b_4, b_2b_5, b_3b_6, 便得到 $\Delta a_1a_2a_3 \in A$, 即 $\varphi(\Delta a_1a_2a_3) = \alpha$. 因此$\varphi$是满射, 从而$\varphi$是双射. 由配对原理, $|A| = |B|$. 由于从 n 个点取六个点的取法种数为 C_n^6, 所以 $|A| = C_n^6$.

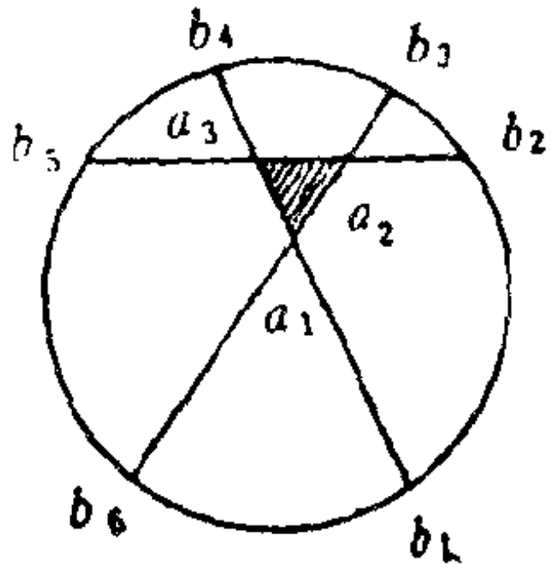


图 12.1

二、乘法原理与加法原理

在计数中有两条最基本的原理, 即乘法原理与加法原理, 许多基本的组合计数公式都是由它们推导出来的.

乘法原理 如果进行甲过程有 n 种方法, 进行乙过程有 m 种方法, 则进行甲过程后再进行乙过程的方法种数为 nm.

加法原理 如果进行甲过程有 n 种方法, 进行乙过程有 m 种方法, 甲、乙两过程并行, 则进行甲过程或乙过程的方法种数为 $n + m$.

这里所谓甲、乙两过程并行, 是指甲、乙两过程没有先后顺序. 也就是说, 甲过程的进行不必等待乙过程结束, 乙过程的进行也不必等待甲过程结束.

乘法原理与加法原理可以用集合论语言叙述. 设 A 与 B 是两个集合. A 与 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并

集，记作 $A \cup B$. A 与 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$. 不含任何元素的集合称为空集，记作 ϕ. 如果 $A \cap B = \phi$，则称 A 与 B 不交. 设 $a \in A, b \in B$，则 (a, b) 称为有序元素对，所有形如 (a, b) 的有序元素对集合称为 A 与 B 的直积，记作 $A \times B$. 在乘法原理中，进行甲过程的所有方法集合记作 A，进行乙过程的所有方法集合记作 B. 设 a, b 分别是进行甲过程与乙过程的一种方法，即 $a \in A, b \in B$. 则按方法 a 进行甲过程后再按 b 进行乙过程的方法可以记成 (a, b). 因此进行甲过程后再进行乙过程的所有方法为 $|A \times B|$ 种. 于是乘法原理可以叙述为

乘法原理(集合论形式) 如果集合 S 可以分解为集合 A 与 B 的直积，即 $S = A \times B$，则 $|S| = |A| \cdot |B|$.

同样，仍用 A 与 B 表示加法原理中进行甲过程与乙过程的所有方法集合. 则进行甲过程或乙过程的所有方法集合即是 A 与 B 的并 $A \cup B$. 由于甲过程与乙过程并行，所以 $A \cap B = \phi$. 因此加法原理可以叙述为

加法原理（集合论形式） 如果集合 S 可以分划为两个不交的集合 A 与 B 的并，即 $S = A \cup B, A \cap B = \phi$，则 $|S| = |A| + |B|$.

乘法原理与加法原理可以推广到多个过程的情形. 下面给出它们的集合论形式. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 m 个集合，$a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, m$，则 $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ 称为依次取自 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的有序 m 元组，所有有序 m 元组的集合称为 $A_1, A_2 \cdots, A_m$ 的直积，记作 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$. 由 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的所有元素构成的集合称为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的并，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$. $A_1, A_2 \cdots, A_m$ 的所有公共元素集合称为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的交集，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$. 如果集合 S 的非空子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两不

交，并且 $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 称为 S 的一个分划.

乘法原理的推广 如果集合 S 可以分解成集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的直积，即 $S = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$. 则

$$|S| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

加法原理的推广 如果子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 S 的一个分划，则 $|S| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$.

乘法原理与加法原理的推广可以用归纳法证明. 请读者自行补出.

应用乘法原理进行计数的关键是，将集合 S 分解成 m 个集合的直积，也就是说，将一个复杂的长过程分解成若干个接连进行的简单过程；而在应用加法原理时，关键是将 S 分划为若干个两两不交的子集，也就是说，将一个复杂的过程，分划为若干个并行的小过程. 当然，对 S 是分解还是分划，如何分解以及如何分划，要由具体问题决定. 这正是使用乘法原理与加法原理的技巧所在.

例 4（第 4 届美国数学邀请赛试题） 在掷硬币得到的结果序列中，可以数出出现反面接着出现正面（记作“反正”）的次数，出现正面接着出现正面（记作“正正”）的次数，出现反面接着出现反面（记作“反反”）的次数，以及出现正面接着出现反面（记作“正反”）的次数. 例如，掷硬币 15 次，结果序列为

正正反反正正正正反正正反反反反

其中有 5 个“正正”，3 个“正反”，2 个“反正”，4 个“反反”. 现在掷硬币 15 次. 求恰有 2 个“正正”，3 个“正反”，4 个“反正”与 5 个“反反”的所有结果序列个数.

解 符合题意的所有结果序列集合记作 A，则结果序列 $a \in A$ 具有两种可能的形式：

(i) 反…反正…正反…反正…正反…反正…正反…反

正…正…

(ii) 正…正反…反正…正反…反正… 正反 … 反正 … 正

反…反…

如果 a 呈形式 (ii)，则因 a 恰有 3 个“正反”，故 a 应取如下形式：

正…正反…反正…正反…反正…正反…反，

其中仅有两个“反正”，不可能，所以 a 具有形式 (i)。 因为 a 恰有 4 个“反正”，所以 a 取如下形式：

反…反正…正反…反正…正反…反正…正反…反正…正。

设序列 a 依次有 n_1 个反，m_1 个正，n_2 个反，m_2 个正，n_3 个反，m_3 个正，n_4 个反，m_4 个正，其中 $n_i, m_i \geqslant 1, i = 1, 2, 3, 4$。因为序列 a 具有 2 个“正正”，5 个“反反”，因此，

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1) + (n_4 - 1) = 5,$$

$$(m_1 - 1) + (m_2 - 1) + (m_3 - 1) + (m_4 - 1) = 2.$$

即

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 9,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 6.$$

于是 (n_1, n_2, n_3, n_4) 与 (m_1, m_2, m_3, m_4) 分别是正整数 9 与 6 写成 4 个正整数之和的一种写法. 正整数 9 与 6 写成 4 个正整数之和的所有写法集合分别记作 B 与 C. 上面的讨论表明，对序列 $a \in A$，可以确定 $(b, c) \in B \times C$，其中 $b = (n_1, n_2, n_3, n_4)$，$c = (m_1, m_2, m_3, m_4)$. 建立 A 到 $B \times C$ 的映射 φ 如下：设序列 $a \in A$，则令 $\varphi(a) = (b, c)$. 不难看出，对不同的序列 $a \in A$，它们所确定的 (b, c) 不同，因此 $\varphi(a)$ 也不同，所以 φ 是单射. 反之设 $(b, c) \in B \times C$，其中 $b = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in B$，$c = (m_1, m_2, m_3, m_4) \in C$，则序列 a

$$\underbrace{反\cdots反}_{n_1}\underbrace{正\cdots正}_{m_1}\underbrace{反\cdots反}_{n_2}\underbrace{正\cdots正}_{m_2}\underbrace{反\cdots反}_{n_3}\underbrace{正\cdots正}_{m_3}\underbrace{反\cdots反}_{n_4}\underbrace{正\cdots正}_{m_4}$$

符合题意，并且 $\varphi(a)=(b,c)$. 因此φ是满射，从而φ是双射. 由配对原理，$|A|=|B\times C|$. 由乘法原理，$|A|=|B|\cdot|C|$. 仿照例1可得，$|B|=C_8^3$,$|C|=C_5^3$. 因此，$|A|=C_8^3C_5^3=560$.

例5（第26届美国普特南数学竞赛试题） 将自然数1，2，…，n排成一列，使得除最前面的一个数外，其他每个数都与排在它前面的某个数之差为1. 这种排列的种数是多少?

分析 1，2，…，n的符合题意的所有排列集合记作A_n，并记 $a(n)=|A_n|$. 先观察特殊情形:

$$A_2=\{1,2;2,1\},$$

$$A_3=\{1,2,3;2,1,3;2,3,1;3,2,1\},$$

$$A_4=\{1,2,3,4;2,1,3,4;2,3,1,4;3,2,1,4;$$
$$2,3,4,1;3,2,4,1;3,4,2,1;4,3,2,1\}.$$

从A_2，A_3，A_4的构成可以想到，A_n似乎应由最后一个数为1或n的排列组成. 比较A_2与A_3，A_3与A_4，可以想到，A_n中最后一个数为n的排列可以由A_{n-1}中的一个排列并在它后面添加数n得到，而A_n中最后一个数为n的排列可以在A_{n-1}中的一个排列的$n-1$个数上都加上1然后在排列后面添加一个数1得到. 这为求$|A_n|$提供了线索.

解 先证明，如果排列 $i_1i_2\cdots i_n\in A_n$，则 $i_n=1,n$. 反证法. 设 $1<i_n<n$，根据题意，必有某个 $i_{t_1}=i_n-1$,$t_1<n$. 如果$t_1>1$，则必有某个 $i_{t_2}=i_{t_1}-1=i_n-2$，$t_2<t_1<n$. 如果 $t_2>1$，则必有某个 $i_{t_3}=i_{t_2}-1=i_n-3$，$t_3<t_2<t_1<n$. 如此继续. 因为n有限，所以经过k步后，必有 $i_1=i_{t_k}-1=i_n-k$，因此 $i_1<i_n$. 同理，必有某个 $i_{s_1}=i_n+1$，$s_1<n$，$i_{s_2}=i_{s_1}+1=i_n+2$，$s_2<s_1<n$，…，$i_1=i_{s_l}=i_n+l>i_n$、矛盾. 因此$i_n=1,n$.

A_n中最后一个数为n与1的所有排列集合分别记为B_n

与 C_n. 由上面的证明，子集 B_n，C_n 是 A_n 的一个分划. 由加法原理，$\alpha(n) = |A_n| = |B_n| + |C_n|$.

设排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1} \in A_{n-1}$，则 $i_1i_2\cdots i_{n-1}n \in B_n$. 建立 A_{n-1} 到 B_n 的映射 φ 如下：设 $i_1i_2\cdots i_{n-1} \in A_{n-1}$，令 $\varphi(i_1i_2\cdots i_{n-1}) = i_1i_2\cdots i_{n-1}n$. 容易验证，$\varphi$ 是双射. 因此 $|B_n| = |A_{n-1}| = \alpha(n-1)$.

设排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1} \in A_{n-1}$. 记 $i_t^* = i_t + 1, t = 1, 2\cdots, n-1$，则排列 $i_1^*i_2^*\cdots i_{n-1}^*1 \in C_n$. 建立 A_{n-1} 到 C_n 的映射 ψ 如下：设 $i_1i_2\cdots i_{n-1} \in A_{n-1}$，令 $\psi(i_1i_2\cdots i_{n-1}) = i_1^*i_2^*\cdots i_{n-1}^*1$. 容易验证，$\psi$ 是双射，因此 $|C_n| = |A_{n-1}| = \alpha(n-1)$.

于是，$\alpha(n) = 2\alpha(n-1)$. 由此即得，$\alpha(n) = 2^{n-1}$.

例 6（第 26 届国际数学奥林匹克备选题）设 p 是素数. 当 k 是什么数时，集合 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 可以分划为 p 个子集，使每个子集的元素和都相等.

解 符合要求的所有 k 值的集合记作 V_p. 设 $k \in V_p$，则必有 $S = \{1, 2, \cdots, k\}$ 的一个符合要求的分划 $A_1, A_2\cdots A_p$. 由于每个子集 A_i 的元素和都相等，因此 $A_1, A_2\cdots, A_p$ 中至多有一个恰含一个元素. 因此

$$2p-1 \leqslant |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_p| = |S| = k.$$

即

$$2p-1 \leqslant k. \tag{i}$$

设 A_i 的元素和为 a，则

$$pa = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

即

$$p \mid \frac{k(k+1)}{2}. \tag{ii}$$

记满足 (i) 与 (ii) 的正整数集合记作 U_p. 由上面的证明，$V_p \subseteq U_p$. 下面将证明，$V_p = U_p$. 为此只需证明，对每个 $k \in U_p$, $S = \{1, 2, \cdots, k\}$ 具有符合要求的分划. 下面分两种情形讨论.

设 $p = 2$，且 $k \in U_2$. 由 (ii)，$4 \mid k$ 或 $4 \mid k+1$. 因此 $k = 4m-1, 4m$，m 为正整数. 由 (i)，$m \geqslant 1$. 当 $m = 1$ 时，$k = 3, 4$. 容易看出，$\{1, 2\}$，$\{3\}$ 是 $\{1, 2, 3\}$ 的符合要求的分划；$\{1, 4\}$，$\{2, 3\}$ 是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的符合要求的分划. 因此，$3, 4 \in V_2$. 设 $k \in V_2$，且 A_1, A_2 是 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的符合要求的分划，取

$$A_i^* = A_i \cup \{k+i, k+4-(i-1)\}, \quad i = 1, 2.$$

则 A_1^*, A_2^* 是 $\{1, 2, \cdots, k+4\}$ 的符合要求的分划. 所以 $k+4 \in V_2$. 由于 $3, 4 \in V_2$，所以当 $m \geqslant 2$ 时，$k = pm-1$，$pm \in V_2$. 这表明，$V_2 \supseteq U_2$. 从而 $V_2 = U_2$.

设 p 为奇素数，且 $k \in U_2$. 由 (ii) 与 (i) 可以证明，$k = pm-1$，pm，$m = 2, 3, \cdots$.

当 $k = 2p-1$ 时，$\{1, 2p-2\}$，$\{2, 2p-3\}$，$\cdots$，$\{p-1, p\}$，$\{2p-1\}$ 是 $\{1, 2, \cdots, 2p-1\}$ 的符合要求的分划；

当 $k = 2p$ 时，$\{1, 2p\}$，$\{2, 2p-1\}$，$\cdots$，$\{p, p+1\}$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, 2p\}$ 的符合要求的分划；

当 $k = 3p-1$ 时，因为 p 是奇数，故可设 $p = 2n+1$，即 $k = 6n+2$. 取

$$A_i = \{3(i-1), 3n+1+3(i-1), 6n+2-6(i-1)\}, \quad i = 1, 2, \cdots, 2n+1.$$

则 $A_1 - \{0\}, A_2, \cdots, A_p$ 是 $\{1, 2, \cdots, 6n+2\}$ 的符合要求的分划；

当 $k = 3p$ 时，同上，$k = 6n+3$. 取

$$A_i = \{1 + 3(i-1), 3n + 2 + 3(i-1),$$
$$6n + 3 - 6(i-1)\}, i = 1, 2, \cdots, 2n + 1,$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_p$ 是 $\{1, 2, \cdots, 6n + 3\}$ 的符合要求的分划.

因此，$2p-1, 2p, 3p-1, 3p \in V_p$. 和情形 $p = 2$ 相仿，可以证明，如果 $k \in V_p$，则 $k + 2p \in V_p$. 因此 $pm-1, pm \in V_p$，$m = 2, 3, \cdots$. 所以 $U_p \subseteq V_p$，即 $V_p = U_p$.

例 6 的难点在于构造出符合题意的分划. 请读者分析符合题意的分划是如何构造的.

三、容斥原理

为了应用加法原理，必须将一个集合分划为若干个两两不交的子集. 要做到这一点并不那么容易. 这就产生了下面的问题: 将集合 A 分成子集 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的并集，但 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 并不一定两两不交，如何通过 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 来求 $|A|$? 为此需将加法原理进一步推广.

容斥原理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 A 的子集，$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$. 则

$$|A| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m|. \quad (1)$$

证明 对 m 用归纳法. 当 $m = 2$ 时，容易证明(见图12.2)，用 $A_2 - A_1$ 表示属于 A_2 但不属于 A_1 的所有元素集合，则

$$A = A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 - A_1),$$
$$A_1 \cap (A_2 - A_1) = \phi.$$

由加法原理

$$|A| = |A_1| + |A_2 - A_1|.$$

但

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - A_1),$$

$$(A_1 \cap A_2) \cap (A_2 - A_1) = \phi.$$

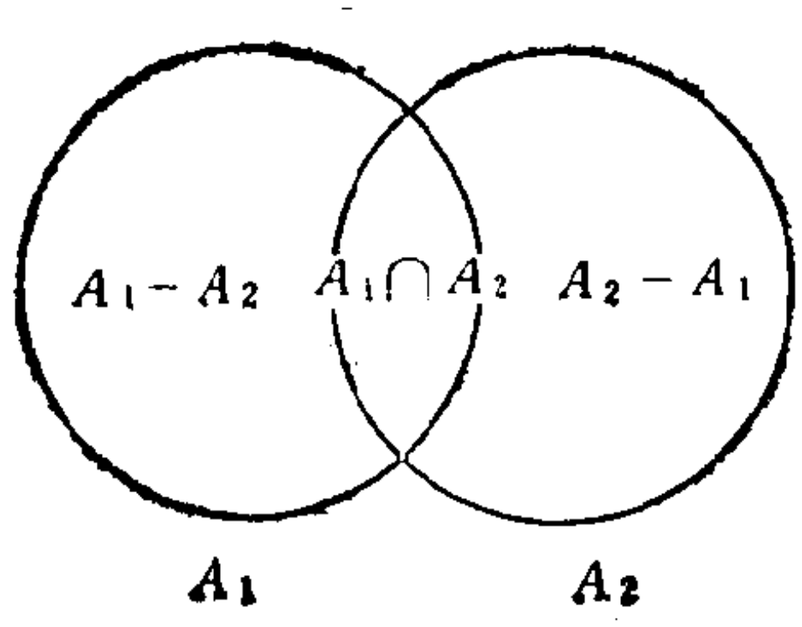


图 12.2

由加法原理

$$|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_2 - A_1|.$$

因此

$$|A| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|. \tag{2}$$

即式(1)对 $m = 2$ 成立. 设式(1)对 $m \leqslant n$ 成立. 下面证明式(1)对 $n + 1$ 成立.

记 $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 则 $A = S \cup A_{n+1}$. 由(2)

$$|A| = |S| + |A_{n+1}| - |S \cap A_{n+1}|. \tag{3}$$

由归纳假设

$$|S| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \tag{4}$$

又

$$S \cap A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = (A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1}).$$

再由归纳假设

$$|S \cap A_{n+1}| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}|$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_{n+1}|+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n+1}|. \quad (5)$$

将式 (4) 与式 (5) 代入式 (3) 得到

$$|A|=\sum_{1\leqslant i<n+1}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j<n+1}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n+1}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n+1}|.$$

这就证明了容斥原理成立.

应指出,当 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两不交时,容斥原理即是加法原理. 容斥原理是由西尔维斯特发现的. 它是组合计数的一个重要工具. 容斥原理还有其他形式与推广.

设 B 是集合 A 的子集, A 中不属于 B 的所有元素集合称为 B 对 A 的补集,记作 $\bar{B}$.

逐步淘汰原理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 A 的子集,则

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_m|=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|. \quad (6)$$

证明 不难证明

$$A=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\cup(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\cdots\cup\bar{A}_m),$$
$$(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)\cap(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_m)=\phi.$$

由加法原理

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_m|=|A|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|.$$

对 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$ 用容斥原理,即得式 (6).

逐步淘汰原理与数论中著名的筛法有密切的联系,它在

数论中有着广泛的应用.

例 7 从 1 至 1000000 的正整数中，至少能被 3，5 与 7 中一个整数整除的有多少个?

解 符合题意的所有整数集合记作 A. A 中被整数 k 整除的所有整数集合记作 A_k. 则 $A = A_3 \cup A_5 \cup A_7$. 由容斥原理

$$|A| = |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|.$$

容易算得

$$|A_3| = \left[\frac{10^6}{3}\right] = 333333, \quad |A_5| = \left[\frac{10^6}{5}\right] = 200000,$$

$$|A^7| = \left[\frac{10^6}{7}\right] = 142857,$$

$$|A_3 \cap A_5| = \left[\frac{10^6}{15}\right] = 66666,$$

$$|A_3 \cap A_7| = \left[\frac{10^6}{21}\right] = 47619,$$

$$|A_5 \cap A_7| = \left[\frac{10^6}{35}\right] = 28571,$$

$$|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left[\frac{10^6}{105}\right] = 9523,$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 因此，

$$|A| = 542857.$$

例 8(第 4 届莫斯科数学奥林匹克试题) 在小于 1000 的正整数中，既不能被 5 整除也不能被 7 整除的有多少个?

解 小于 1000 的所有正整数集合记作 A. A 中被整数 k 整除的所有正整数集合记作 A_k. 则 $\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7$ 是 A 中既不被 5 整除也不被 7 整除的所有正整数集合. 由逐步淘汰原理

$$|\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = |A| - |A_5| - |A_7| + |A_5 \cap A_7|.$$

容易算得，

$$|A| = 999, \quad |A_5| = \left[\frac{999}{5}\right] = 199,$$

$$|A_7| = \left[\frac{999}{7}\right] = 142, \quad |A_5 \cap A_7| = \left[\frac{999}{35}\right] = 28.$$

因此，$|\overline{A}_5 \cap \overline{A}_7| = 666$.

例 9 设正整数 $n > 1$. 小于 n 且与 n 互素的所有正整数个数记作 $\varphi(n)$. 约定 $\varphi(1) = 1$. 设 $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_t^{k_t}$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 是不同的素数，$k_1, k_2, \cdots, k_t$ 是正整数. 证明：

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right).$$

证明 所有不超过 n 的正整数集合记作 A，所有不超过 n 且被 p_i 整除的正整数集合记作 A_i，$i = 1, 2, \cdots, t$. 所有小于 n 且与 n 互素的正整数集合记作 S.

设 $m \in S$，则 $m < n$，且 m 不被每个 p_i 整除. 因此 $m \in \overline{A}_i$，$i = 1, 2, \cdots, t$，即 $m \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t$. 所以 $S \subseteq \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t$. 反之设 $m \in \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t$，则 $m \in \overline{A}_i$，$i = 1, 2, \cdots, t$. 因此 $m < n$，且 m 不被每个 p_i 整除. 从而 $m < n$，且 m 与 n 互素. 所以 $m \in S$，即 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t \subseteq S$. 于是 $S = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t$. 由逐步淘汰原理，

$$\begin{aligned}|S| = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_t| &= |A| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} |A_i| \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &+ \cdots + (-1)^t |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t|.\end{aligned}$$

容易看出，$|A| = n$. 当 $i = 1, 2, \cdots, t$ 时

$$A_i = \{p_i l \mid l = 1, 2, \cdots, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_{i-1}^{k_{i-1}} p_i^{k_i - 1} p_{i+1}^{k_{i+1}} \cdots p_t^{k_t}\}.$$

因此

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant t.$$

同理

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant t,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant t.$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_t| = \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}.$$

所以

$$\varphi(n) = |S| = n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant t} \frac{n}{p_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant t} \frac{n}{p_i p_j}$$

$$- \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant t} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \cdots + (-1)^t \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_t}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_t}\right).$$

函数 $\varphi(n)$ 称为欧拉函数. 它是数论中的一个重要函数.

例 10 国际奥运会足联举办一次明星队大奖赛，邀请上届奥运会前 12 名球队参加，假定奥运会与大奖赛都不设并列名次，而且大奖赛所有可能出现的比赛结果都是等可能的. 求大奖赛中各队所得名次都与它们原先名次不同的概率 P.

解 上届奥运会前 12 名球队按名次编号为 1，2，…，12，它们在大奖赛中所得名次依次记为 $i_1, i_2, \cdots, i_{12}$. 因为不设并列名次，所以 $i_1 i_2 \cdots i_{12}$ 是 1，2，…，12 的一个排列. 大奖赛所有可能结果的集合记作 A. 显然，$|A| = 12!$.

大奖赛中各队所得名次都与原先不同的所有可能结果集合记作 S，上届第 k 名球队仍得第 k 名的所有可能结果记作 A_k，$k = 1, 2, \cdots, 12$. 设比赛结果 $i_1 i_2 \cdots i_{12} \in S$，则 $i_k \neq$

k, $k=1,2,\cdots,12$. 因此，$i_1i_2\cdots i_{12}\in\bar{A}_k$, $k=1,2,\cdots,12$，即 $i_1i_2\cdots i_{12}\in\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{12}$. 所以，$S\subseteq\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{12}$. 将上述证明过程反推，得到，$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{12}\subseteq S$. 因此 $S=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_{12}$. 由逐步淘汰原理

$$|S|=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant 12}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 12}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 12}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{12}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{12}|. \qquad (i)$$

设 $1\leqslant i_1\leqslant i_2<\cdots<i_k\leqslant 12$，且 $i_1i_2\cdots i_{12}\in A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$. 则 $i_{i_t}=i_t$, $t=1,2,\cdots,k$. 从排列 $i_1i_2\cdots i_{12}$ 中划掉 $i_{i_1}, i_{i_2},\cdots,i_{i_k}$，并将留下的整数按它们在 $i_1i_2\cdots i_{12}$ 中的顺序排成一列，得到的排列记作 $l_1l_2\cdots l_{12-k}$. 于是，$l_1l_2\cdots l_{12-k}$ 是集合 $X=\{1,2,\cdots,12\}-\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 的一个排列. X 的所有排列集合记作 S_{n-k}. 现在建立 $A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$到 S_{n-k} 的映射 φ 如下：设 $i_1i_2\cdots i_{12}\in A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}$，则令 $\varphi(i_1i_2\cdots i_{12})=l_1l_2\cdots l_{12-k}$，容易验证，$\varphi$ 是双射. 由配对原理

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}|=|S_{n-k}|=(n-k)!. \qquad (ii)$$

将式 (ii) 代入式 (i) 得到

$$|S|=12!-C_{12}^1\times 11!+C_{12}^2\times 10!-C_{12}^3\times 9!$$
$$+\cdots+C_{12}^{10}\times 2!-C_{12}^{11}\times 1!+C_{12}^{12}\times 0!$$
$$=12!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{10!}-\frac{1}{11!}+\frac{1}{12!}\right).$$

因此所求概率 P 的

$$P = \frac{|S|}{|A|} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{10!} - \frac{1}{11!} + \frac{1}{12!}.$$

例 10 与所谓错位排列有关.设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 如果对 $i = 1, 2, \cdots, n$, $i_i \neq i$, 则 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为错位排列. $1, 2, \cdots, n$ 的所有错位排列个数记作 D_n. 用例 10 的方法可以证明

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right). \qquad (7)$$

错位排列数 D_n 有许多应用.

集合 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 到 X 上的双射 φ 称为 X 上的一个置换,通常记作

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{pmatrix},$$

其中下一行的元素 $\varphi(i)$ 表示上一行元素 i 在映射 φ 下的象. 因为 φ 是双射,所以 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 对 X 上的不同置换 φ, 排列 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 也不同. 反之,对 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 则

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

是 X 上的置换. 因此 X 上所有置换集合 S 与 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列集合 $\tilde{S}$ 之间存在一个双射. 所以, X 上的置换共有 $n!$ 个.

例 11(第 15 届加拿大数学竞赛试题) 设 φ 是集合 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 上的置换, $i \in X$. 如果 $\varphi(i) = i$, 则 i 称为 φ 的一个不动点. X 上没有不动点的置换个数记作 f_n, 恰有 1 个不动点的置换个数记作 g_n. 证明, $|f_n - g_n| = 1$.

证明 X 上恰有一个不动点的置换集合记作 A，恰有一个不动点 i 的置换集合记作 A_i，$i=1,2,\cdots,n$. 容易看出，对任意 i 与 j，$1\leqslant i\neq j\leqslant n$，$A_i\cap A_j=\phi$，并且 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. 由加法原理

$$g_n=|A|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|.$$

设 $\varphi\in A_j$，则 $\varphi(j)=j$. 因此

$$\varphi^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & j-1 & j+1 & \cdots & n\\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(j-1) & \varphi(j+1) & \cdots & \varphi(n)\end{pmatrix}$$

是 $X-\{j\}$ 上的一个置换，并且 φ^* 没有不动点. 对于不同的 $\varphi\in A_j$，φ^* 也不同. 反之，设 φ^* 是 $X-\{j\}$ 上一个没有不动点的置换，则

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n\\ \varphi^*(1) & \varphi^*(2) & \cdots & \varphi^*(j-1) & j & \varphi^*(j+1) & \cdots & \varphi^*(n)\end{pmatrix}\in A_j.$$

因此，$|A_i|=f_{n-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，所以

$$g_n=nf_{n-1}. \tag{i}$$

X 上没有不动点的置换集合记作 B. $1,2,\cdots,n$ 的错位排列集合记作 C. 设 $\varphi\in B$，则对每个 j，$1\leqslant j\leqslant n$，$\varphi(j)\neq j$. 因此 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)\in C$. 对于不同的 $\varphi\in B$，$\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 也不同. 反之，设 $i_1i_2\cdots i_n\in C$，则对于 $t=1,2,\cdots,n$，$i_t\neq t$. 因此

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\in B.$$

所以 $f_n=|B|=D_n$. 于是，由 (7)

$$f_n-g_n=D_n-nD_{n-1}=(-1)^n.$$

例 12（第 26 届国际数学奥林匹克备选题） 有 n 个不同的字，每个字出现两次. 将它们配成 n 对，每对含两个字，这

两个字可能相同，也可能不同．配对时，各对之间顺序不同，或者一对字中两个字顺序不同，不认为是不同的配对．配对种数记作 u_n．证明

$$u_{n+1}=(n+1)u_n-\frac{n(n-1)}{2}u_{n-2}.$$

证明 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是不同的字．$a_1, a_1, a_2, a_2, \cdots, a_i, a_i$ 的配对集合记作 A_i，则 $u_i=|A_i|$．A_{n+1} 中 a_{n+1} 与 a_{n+1} 配对的配对集合记作 S_1，并记 $A_{n+1}-S_1$ 为 S_2．由加法原理

$$u_{n+1}=|A_{n+1}|=|S_1|+|S_2|. \tag{i}$$

设配对 $\alpha\in S_1$．在 α 中去掉 a_{n+1} 与 a_{n+1} 配成的一对，留下的 n 个对是 $a_1, a_1, a_2, a_2, \cdots, a_n, a_n$ 的一个配对，记作 α^*，$\alpha^*\in A_n$．对不同的 $\alpha\in S_1$，α^* 也不同．反之，对配对 $\alpha^*\in A_n$，在 α^* 中添加 a_{n+1} 与 a_{n+1} 配成的一对，得到的配对 $\alpha\in S_1$．因此，$|S_1|=|A_n|=u_n$．

现在求 $|S_2|$．A_n 中的配对 α^* 记作 α^*：$a_1, a_{j_1}; a_2, a_{j_2}; \cdots; a_i, a_{j_i}; \cdots, a_n, a_{j_n}$；则 α_i^*：$a_1, a_{j_1}; a_2, a_{j_2}; \cdots; a_i, a_{n+1}; \cdots; a_n, a_{j_n}; a_{n+1}, a_{j_i};$ 属于 S_2．建立 A_n 到 S_2 的映射 φ 如下：设 $\alpha^*\in A_n$，则令 $\varphi_i(\alpha^*)=\alpha_i^*$．容易看出，$\varphi_i$ 是单射，$i=1, 2, \cdots, n$．A_n 在 φ_i 下的象记作 $\varphi_i(A_n)$．则 $\varphi_1(A_n)\cup\varphi_2(A_n)\cup\cdots\cup\varphi_n(A_n)\subseteq S_2$．下面证明

$$S_2=\varphi_1(A_n)\cup\varphi_2(A_n)\cup\cdots\cup\varphi_n(A_n). \tag{ii}$$

取 S_2 中的一个配对 α：$a_1, a_{k_1}; a_2, a_{k_2}; \cdots, a_n, a_{k_n}; a_{n+1}, a_{k_{n+1}}$．则必有某个 a_i，$1\leqslant i\leqslant n$，使 $a_{k_i}=a_{n+1}$．因此，α^*：$a_1, a_{k_1}; a_2, a_{k_2}; \cdots; a_i, a_{k_{n+1}}; \cdots; a_n, a_{k_n}$ 属于 A_n，并且

$$\varphi_i(\alpha^*)=\alpha.$$

因此式 (ii) 成立．

由容斥原理，

$$|S_2| = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi_i(A_n)| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)|$$
$$+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)\cap\varphi_k(A_n)|$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1}|\varphi_1(A_n)\cap\varphi_2(A_n)$$
$$\cap\cdots\cap\varphi_n(A_n)|. \qquad \text{(iii)}$$

因为 φ_i 是单射,所以

$$|\varphi_i(A_n)| = |A_n| = u_n, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \qquad \text{(iv)}$$

设 $1\leqslant i<j\leqslant n$, 且 $\alpha\in\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)$, 则必有 α^*, $\beta^*\in A_n$, 使 $\alpha=\varphi_i(\alpha^*)=\varphi_j(\beta^*)$. 设

$$\alpha^*: a_1, a_{k_1}; a_2, a_{k_2}; \cdots; a_i, a_{k_i}; \cdots; a_n, a_{k_n},$$
$$\beta^*: a_1, a_{l_1}; a_2, a_{l_2}; \cdots; a_j, a_{l_j}; \cdots; a_n, a_{l_n}.$$

由 φ_i 与 φ_j 的定义

$$\varphi_i(\alpha^*): a_1, a_{k_1}; \cdots; a_i, a_{n+1}; \cdots; a_n, a_{k_n}; a_{n+1}, a_{k_i},$$
$$\varphi_j(\beta^*): a_1 a_{l_1}; \cdots; a_j, a_{n+1}; \cdots; a_n, a_{l_n}; a_{n+1}, a_{l_j}.$$

由 $\varphi_i(\alpha^*)=\varphi_j(\beta^*)$ 得到,当 $t\neq i, j$ 时, $k_t=l_t$, 并且 a_i, a_{n+1}; a_{n+1}, a_{k_i} 和 a_j, a_{n+1}; a_{n+1}, a_{l_j} 相同, $i\neq j$. 所以, $a_{k_i}=a_j$, $a_{l_j}=a_i$. 因此,配对 α^* 与 β^* 相同,并且其中字对 a_i, a_j 出现两次. A_n 中字对 a_i, a_j 出现两次的配对集合记作 B_{ij}. 去掉 α^* 中重复出现的字对 a_i, a_j, 得到的配对记作 $\tilde{\alpha}$, 则 $\tilde{\alpha}\in A_{n-2}$. 通过上面的方法, 可以建立 $\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)$ 到 A_{n-2} 的映射 ψ 如下: 对 $\alpha\in\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)$, 令 $\psi(\alpha)=\tilde{\alpha}$. 不难验证, ψ 是双射. 因此

$$|\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)| = |A_{n-2}| = u_{n-2}, \quad 1\leqslant i<j\leqslant n. \qquad \text{(v)}$$

设 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$, 且 $\alpha\in\varphi_i(A_n)\cap\varphi_j(A_n)\cap\varphi_k(A_n)$, 则存在配对 $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*\in A_n$, 使 $\alpha=\varphi_i(\alpha^*)=\varphi_j(\beta^*)=\varphi_k(\gamma^*)$. 由上段证明可知, $\alpha^*=\beta^*=\gamma^*$, 并且 α^* 中字对

a_i, a_j 与 a_i, a_k 都出现两次. 矛盾. 因此 $\varphi_i(A_n) \cap \varphi_j(A_n) \cap \varphi_k(A_n) = \phi$, 即

$$|\varphi_i(A_n) \cap \varphi_j(A_n) \cap \varphi_k(A_n)| = 0, \quad 1 \leqslant i < j < k \leqslant n. \tag{vi}$$

由于

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1}(A_n) \cap \varphi_{i_2}(A_n) \cap \cdots \cap \varphi_{i_{t-1}}(A_n) \cap \varphi_{i_t}(A_n) \\ = (\varphi_{i_1}(A) \cap \varphi_{i_2}(A) \cap \cdots \cap \varphi_{i_{t-1}}(A_n)) \cap \varphi_{i_t}(A_n), \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n, \ t \geqslant 4,\end{aligned}$$

所以由 (vi) 得到

$$\begin{aligned}|\varphi_{i_t}(A_n) \cap \varphi_{i_2}(A_n) \cap \cdots \cap \varphi_{i_t}(A_n)| = 0, \\ 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_t \leqslant n.\end{aligned} \tag{vii}$$

将式 (iv), (v), (vi) 与 (vii) 代入式 (iii), 得到,

$$|S_2| = nu_n - \frac{n(n-1)}{2} u_{n-2}.$$

于是由式 (i) 得到所欲证的结论.

第十三讲　组合几何问题

杜　锡　录

近年来，国内外的数学竞赛中，组合几何方面的题目经常出现，解答这些题目的一个基本方法是“计数”．本书第十二讲中所讲的计数侧重于代数方面，本讲着重于计数在组合几何中的应用．计数表现在组合几何上大致有两个方面：一是对某些几何元素或几何量直接计算其数目；二是研究当某些几何元素或几何量达到某个数值时，这个集合所具有的性质．

很多几何上的计数问题大都要讨论其几何结构，只有把结构搞清楚了，方能算清其数目，这其中又用到不少计数方面的技巧．

以下的例题都来自国内外的数学竞赛，我们的叙述是按方法来分类的．

一、利用排列组合

例 1（第 6 届数学奥林匹克第 5 题）　在平面上给出 5 点，连接这些点的直线互不平行，互不垂直，也不重合．过一点向其余四点的联线作垂线，求这些垂线的交点最多能有多少？其中不计已知的 5 点．

解　设 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 为所给的点，两两连成的直线有 $C_5^2 = 10$ 条，每三点构成一个三角形，共有 $C_5^3 = 10$ 个，其中每四点能连成的直线有 $C_4^2 = 6$ 条，自另一点可作 6 条垂

线，共可作 $6 \times 5 = 30$ 条，这些垂线至多有 $C_{30}^2 = 435$ 个交点.

因为 10 条连线上，每一连线上有三条垂线互相平行，没有交点，故应减去 $10C_3^2 = 30$. 又 10 个三角形每三条高相交于 1 点，故还要减去 $10(C_3^2 - 1) = 20$. 而每个点都有 6 条垂线通过，同时这 5 点又不计，所以还应减去 $5 \cdot C_6^2 = 75$.

最后，我们得到垂线的交点最多是

$$435 - 30 - 20 - 75 = 310.$$

这个例题是常见的几何上的排列组合题，它除了用到简单的排列组合知识外，还用到一些几何上的结果，主要是这些垂线的结构特点. 所以，搞清一个问题的几何结构是很有必要的，是大有好处的.

在下面一些例题的讨论中，为了搞清结构，在组合几何中经常要用到凸包的概念. 为此，先简要地给出有关凸包的一些概念.

定义 1 如果对于点集 M 中任意两点 A, B，线段 AB 上的每一点都属于点集 M，那么 M 就称为凸集.

显然线段、直线、射线、带形、圆、整个平面等都是凸集. 空集、一点都是凸集.

注意到两个凸集的并集不一定是凸集，如两个相离的圆. 但是，容易证明

定理 1 两个凸集的交是凸集.

证明 设 M_1, M_2 是凸集，则 $M = M_1 \cap M_2$ 也是凸集.

事实上，设 A, $B \in M$，必有 A, $B \in M_1$，则线段 $AB \in M_1$，同理 $AB \in M_2$，即 $AB \in M$，所以 M 是凸集.

由此可以得到下面的结论：

推论 任意多个凸集的交是凸集.

对于每一个点集 M，都有包含它的凸集（例如全平面），

所有包含M的凸集的交仍然是凸集，并且是包含M的最小凸集，我们称它为点集M的凸包，并记为$\widetilde{M}$.

通常一个有限点集的凸包为一个凸多边形或一线段.

例 2 （第 12 届数学奥林匹克第 6 题） 平面上给出 100 个点，其中任三点可组成三角形. 我们观察以上述点为顶点的所有可能的三角形. 证明：其中至多只有 70% 的三角形为锐角三角形.

证明 我们证明它的等价命题：至少有 30% 的非锐角三角形.

先讨论任意一个五点组的结构：任给 5 个点，其中没有 3 点共线，则在以它们为顶点的三角形中，至少可以找到 3 个非锐角三角形.

设所给 5 点为 A，B，C，D，E，其凸包有下列三种情况：

(1) 所给 5 点的凸包为五边形 $ABCDE$，则至少有两个内角为钝角，可能相邻，也可能不相邻. 如果 A，B 是钝角，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ABE$ 为钝角三角形，在四边形 $BCDE$ 中，四个内角至少有一个非锐角，则可组成另一个非锐角三角形. 如果 A，C 为钝角，则在四边形 $ACDE$ 的四个内角中，至少有一个非锐角，故相应的有三个非锐角三角形.

(2) 所给 5 点的凸包为四边形(见图 13.1). 设 E 在凸四边形 $ABCD$ 的内部，则 $\angle AEB$、$\angle BEC$、$\angle CED$、$\angle DEA$、$\angle AEC$、$\angle BED$ 中至少有两个是非锐角，而四边形 $ABCD$ 中至少有一个非锐角的内角，故至少可找到三个非锐角三角形.

(3) 所给 5 点的凸包为三角形(见图 13.2). 设 D，E 在 $\triangle ABC$ 的内部，则因 $\angle ADB$、$\angle BDC$、$\angle ADC$ 中至少有两个非锐角，所以至少可找到四个非锐角三角形.

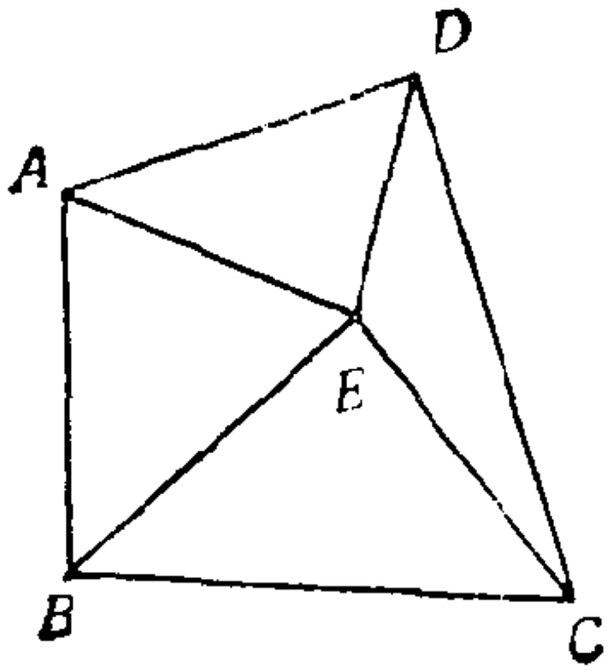


图 13.1

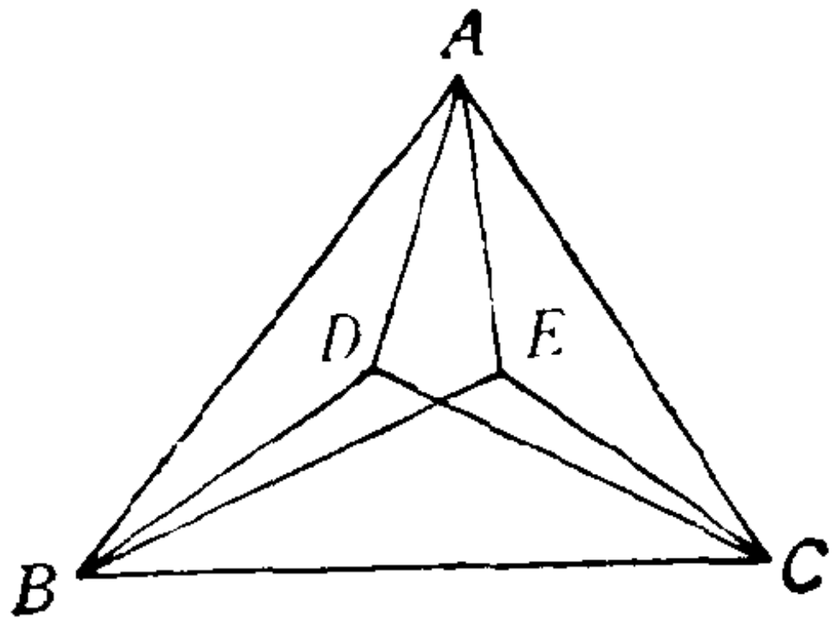


图 13.2

这样一来，由于每个非锐角三角形至多属于 C_{97}^{4} 个 5 点组，而 5 点组共有 C_{100}^{5} 个，故非锐角三角形至少有 $3\cdot C_{100}^{5}/C_{97}^{2}$ 个，至少占三角形总数 C_{100}^{3} 的

$$\frac{3C_{100}^{5}}{C_{97}^{2}C_{100}^{3}}=\frac{3}{10},$$

所以，锐角三角形不多于 70%.

以上两题都是典型的排列组合题，在处理这类几何题时，大致有三个步骤：（i）搞清几何结构，几何元素较多时，先搞清简单状态下的几何结构.（ii）利用排列组合算出总数.（iii）查出重复情况，把重复的状态除去. 例 1 是减(加法原则)，例 2 是除(乘法原则).

有些题目可以用不同的手段讨论其结构. 同样可能得到我们的结论，有时还要精确些.

例 3（第 11 届数学奥林匹克第 5 题） 平面上给出 n 个点 $(n>4)$，其中没有三个点在同一直线上，证明：至少可以找到 C_{n-3}^{2} 个以上述点为顶点的凸四边形.

第一种想法：事实上，从要证明的结论中已经指明证明的路子：C_{n-3}^{2} 是 $n-3$ 个元素(点)中任取两个的组合数，$n-3$ 表明要从 n 个点中选出三个点，这三个点中的某两个

和 $n-3$ 个中的任意两个都能组成凸四边形. 所以，问题就转化为如何找出这有代表性的三个点来. 这往往要用到组合几何中的最优原则.

证明一 任三点可组成一三角形，考察所有这样的三角形，取其面积最大者为 $\triangle ABC$，过各顶点分别作对边的平行线，得另一大三角形 $A'B'C'$（如图 13.3），则这几个点都被 $\triangle A'B'C'$ 所覆盖. 否则，将会与 $\triangle ABC$ 面积最大矛盾.

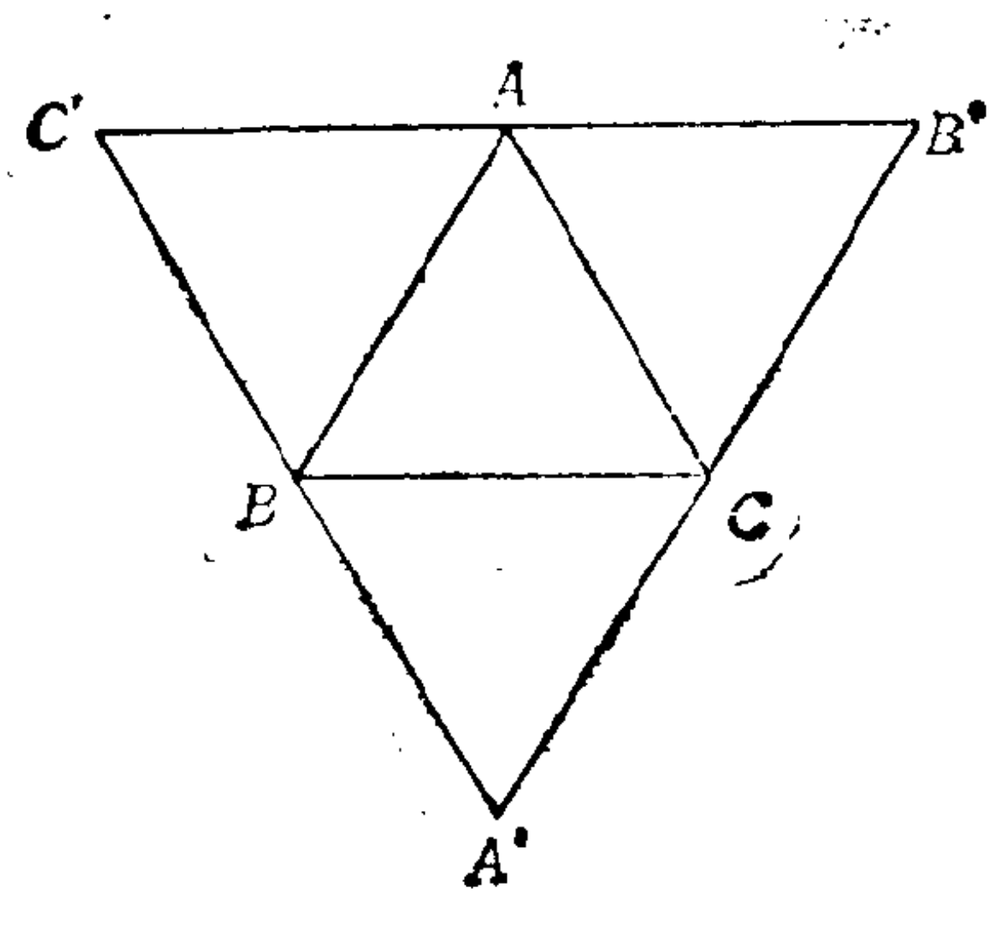


图 13.3

除去 A, B, C 剩下的 $n-3$ 个点中，任取两点 D, E，则直线 DE 与线段 AB, BC, CA 或者不交，或者与其中两条线段相交. 设与 BC 不交，则 B, C, D, E 将组成凸四边形.

所以，凸四边形的总数至少为 C_{n-3}^{2} 个.

下面我们来讨论第二种证明方法.

第二种想法：先讨论简单的几何结构. 从结论中可以看出，当 $n=5$ 时，$C_{n-3}^{2}=1$，即“任意 5 个点，其中没有三个点在同一条直线上，则可以找出 4 个点，是一个凸四边形的顶点.”现在，作为一个引理先来证明它.

考虑其凸包：

(1) 凸包为五边形，则任意四点可组成凸四边形.

(2) 凸包为四边形，此即是.

(3) 凸包为三角形，设 D,E 在 $\triangle ABC$ 内部，则直线 DE 与三角形的两边相交，设与 AB，AC 相交，则 B，C，D，E 可组成凸四边形.

所以，命题总是成立的.

下面我们就利用排列组合及去掉重复的方法来计数了。

证明二 由引理知，其中任 5 点至少有一个以其中 4 点为顶点的凸四边形，共有 C_n^5 个 5 点组，每一个凸四边形所在的 5 点组最多是 $n-4$ 个，所以至少有这样的四边形

$$\frac{C_n^5}{n-4}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!}$$

个. 不难证明

$$\frac{C_n^5}{n-4}\geqslant C_{n-3}^2,$$

等号仅在 $n=5$ 时成立。用归纳法，对 $n+1$ 有

$$\frac{C_{n+1}^5}{(n+1)-4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{5!}$$

$$=\frac{n+1}{n-3}\cdot\frac{C_n^5}{n-4},$$

$$C_{(n+1)-3}^4=\frac{(n-2)(n-3)}{2}=\frac{n-2}{n-4}C_{n-3}^2,$$

因为

$$\frac{n-2}{n-4}<\frac{n}{n-3}<\frac{n+1}{n-3},$$

利用归纳假设

$$\frac{C_n^5}{n-4}\geqslant C_{n-3}^2, \tag{1}$$

立得

$$\frac{C_{n+1}^{3}}{(n+1)-4} \geqslant C_{(n+1)-3}^{3},$$

所以不等式(1)所有 $n \geqslant 5$ 的自然数恒成立.

从这个证明中可以看出，我们得到了一个更精确些的结论.

二、利用数学归纳法

对某些与自然数有关的命题，利用数学归纳法是常常奏效的. 在处理有关的组合几何问题时，又常用到一些组合几何中的常用技巧. 这在研究下面的例题时将有所体会.

例 4(匈牙利数学奥林匹克试题) 假设在平面上给定了 $4n+1$ 个点，其中任三点都不在同一条直线上. 证明：它们可以分成 $2n$ 对点，使得连接每一对点的线段，至少相交于 n 个不同的点.

先讨论一下证明的基本思路：$2n$ 对点，可组成 $2n$ 条线段，如果以两条线段为一组，共有 n 组，如果每一组的两条线段都相交，则有 n 个交点. 这里要克服两个困难，其一是怎样的两条线段才能相交，这个问题的相反的提法更明确些：如果两线段相交，那么四个顶点所具有的性质是什么呢？显然，可组成一凸四边形，即“凸四边形的两条对角线必相交.”所以，问题就转化为寻找这样的几个凸四边形，这时，利用我们前述的引理：任一五点组，如果没有三点共线，一定可选出四个点，组成一凸四边形. 这样一来，每选一个五点组，都可以分离出四个点来，可组成凸面边形，其对角线必相交，对角线的两个端点作为一对点. 如此进行下去，就能找出 $2n$ 对点，这一重复过程，可以用数学归纳法，以一个步骤的简述之. 第二

个难点是怎样能保证这些交点不同，这里要用到组合几何中一个常用的技巧——对有限元素的分区分组法。

证明 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$4n+1=5$，对这一五点组，利用已知的结果，可得到 4 个点组成凸四边形，其两条对角线的两对端点，构成所需要的 2 对点.

假设当 $n=k$ 时，命题成立，即可从 $4k+1$ 个点中选出 $2k$ 对点，每一对点所连的线段，至少相交于 k 个不同的点.

当 $n=k+1$ 时，有 $4(k+1)+1=4k+5$ 个点，由于点数是有限的，我们可以作一个足够大的圆将这些点全部包含在内. 在圆外作一条直线，并向圆内平移，碰到集中的点时就停下来. 这时，如果直线碰到集中的两个点，将这两个点记为 A_0，A_1；如果碰到集中的一个点，记为 A_0，以 A_0 为中心旋转该直线(不妨假设按逆时针方向旋转)，碰到的第一个点记为 A_1. 不论怎样，集中所有的点都在直线 A_0A_1 的同一侧.

从 A_0 向其余点引射线，构成旋转的最小正角(以逆时针为正向)依次为

$$\angle A_1A_0A_2<\angle A_1A_0A_3<\angle A_1A_0A_4<\angle A_1A_0A_5$$
$$<\angle A_1A_0A_6<\cdots<\angle A_1A_0A_{4k+4},$$

如图 13.4 所示.

选 A_0，A_1，A_2，A_3，A_4 为一五点组，由例 3 中的引理知，可选出四个点，组成一个凸四边形，其中两条对角线的端点构成满足要求的 2 对点. 显然，这两条对角线的交点在 $\angle A_1A_0A_4$ 的内部. 设余下的一个点为 $A_i(0\leqslant i\leqslant 4)$，那么 A_i，A_2，A_0，$\cdots$，A_{4k+4} 这 $4k+1$ 个点，由归纳假设，可选出 $2k$ 对点，使得连接每一对点的线段，至少相交于 k 个不同的点. 显然，这至少 k 个点都在 $\angle A_4A_0A_{4k+4}$ 这个角的内部. 再加上先选出的两对点，共构成 $2k+2=2(k+1)$ 对点，连接每

对点的线段至少交于 $k+1$ 个不同的点.

即命题对 $k+1$ 成立.

从而,命题对所有的自然数 n 都成立.

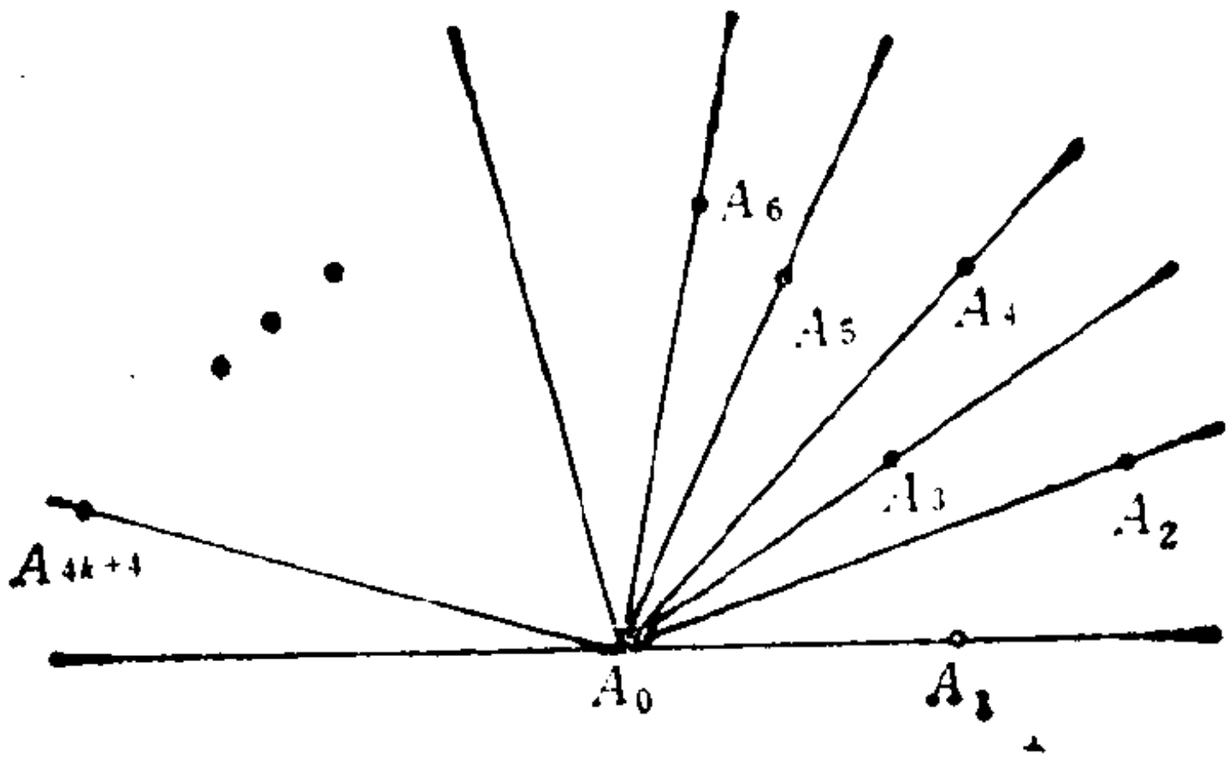


图 13.4

三、利用容斥原理

利用容斥原理来计数是一个基本的方法，几何中的问题在用到容斥原理时自有它的微妙之处.

例 5（第 16 届美国普特南数学竞赛第 $B5$ 题） 考虑空间 $2n$ 个点的集合 $Z(n>1)$,其中任四点不共面,设它们之间至少用 n^2+1 条线段相连,则这些线段至少构成一个三角形.

证明 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$n^2+1=5$，即 4 个点间有 5 条线段相连，显然有三角形存在.

假设命题对 $n=k$ 成立,即对 $2k$ 个点，它们之间至少有 k^2+1 条线段相连,则至少能构成一个三角形.

当 $n=k+1$ 时,设 A, B 有线段相连,记

$$S=\{P|P\text{与}A\text{有线段相连，}P\in Z\}\backslash\{B\},$$

$$T=\{P|P\text{与}B\text{有线段相连，}P\in Z\}\backslash\{A\},$$

考察集合 $Z\backslash\{A, B\}$，显然 $|Z\backslash\{A,B\}| = 2k$，集合 $Z\backslash\{A, B\}$ 中线段的条数有如下两种情况：

(1) $Z\backslash\{A, B\}$ 中至少有 k^2+1 条线段，则由归纳假设至少存在一个三角形.

(2) 设 $Z\backslash\{A, B\}$ 中至多有 k^2 条线段，则由

$$|S\cup T| \leqslant 2k,$$

$$|S| + |T| \geqslant (k+1)^2 + 1 - 1 - k^2 = 2k+1,$$

得

$$\begin{aligned}|S\cap T| &= |S| + |T| - |S\cup T| \\ &\geqslant 2k+1-2k = 1,\end{aligned}$$

即 $S\cap T \neq \varnothing$. 取 $C \in S\cap T$，则 A, B, C 之间都有线段相连，故构成 $\triangle ABC$.

总之，命题对所有的自然数 n 都成立.

例 6 (波兰 1968 年数学竞赛试题) 设 z 是平面上由 $n(>3)$ 个点组成的点集，其中任三点不共线. 又设自然数 k 满足不等式 $\frac{n}{2} < k < n$. 如果 z 中的每个点都至少与 z 中的 k 个点有线段相连，证明：这些线段中一定有三线段构成三角形的三条边.

证明 因为 z 中的每点都至少引出 k 条线段，设 AB 是这些线段之一，令

$$S = \{P|P \text{ 与 } A \text{ 有线段相连，} P \in Z\}\backslash\{B\},$$

$$T = \{P|P \text{ 与 } B \text{ 有线段相连，} P \in Z\}\backslash\{A\},$$

因为

$$|S| + |T| \geqslant 2(k-1) > n-2,$$

$$|S\cup T| \leqslant n-2,$$

所以

$$|S\cap T| = |S| + |T| - |S\cup T| > 0,$$

即

$$S \cap T \neq \varnothing.$$

取点 $C \in S \cap T$，则 A，B，C 能构成三角形．证毕．

例 5 和例 6 实质上是一样的，都反映了这样一个事实，当某一种几何量或某一系统的元素多到一定程度时，就具有一定的性质或某种规律．这两个例题反映的是当线段的条数多到一定程度时，都有三角形存在．注意，例 5 中的 n^2+1 是不可再少的，当线段的条数少于 n^2+1 时，我们可以造出反例来，使之没有三角形存在．这两个例题的证明手法就是在数量上下功夫，而容斥公式就是描述这类事件的手段之一，而且是一种很自然的想法．这里仅用到两个集合的容斥公式，利用文氏图很容易得到．

最后再对例 5 说几句话，在与例 5 相同的条件下，可以得到更强一些的结论——存在有 n 个三角形．但这一证明较为复杂，限于篇幅就不给出它的证明了．还有一个中间难度的好题目，同时也是上述的一个中间结果：

“考虑空间 $2n$ 个点的集合 $z(n>1)$，其中任四点不共面，设它们之间至少用 n^2+1 条线段相连，则这些线段至少构成两个有公共边的三角形．”

此题结论比例 5 进了一步，它曾作为 1987 年国家集训队选拔出国去古巴参赛的选手们的选拔题．请读者作为练习．

四、利用映射和运动

如果要处理的问题中，几何元素的集合是有限集，映射往往是一个有力的工具．首先，把要处理的两类元素 X 和 Y 建立对应关系，即建立映射 $\varphi: X \to Y$，如果 φ 是一单射，则有 $|X| \leqslant |Y|$；如果是一满射，则有 $|X| \geqslant |Y|$；如果映射是一一的，则有 $|X| = |Y|$．

例 7（1985 年匈牙利数学竞赛研题） 在一个 6 × 6 的棋盘上，已经摆好了一些 1 × 2 的骨牌，每一个骨牌都覆盖两个相邻的格子．证明：如果还有 14 个格子没有被覆盖，则至少能再放进一个骨牌．

证明思路分析 还有 14 个空格，说明已经摆好了 11 块骨牌．如果已经摆好的骨牌是 12 块，下面的一种摆法就说明不能再放入骨牌（见图 13.5）．所以，有 14 个空格这一条件是

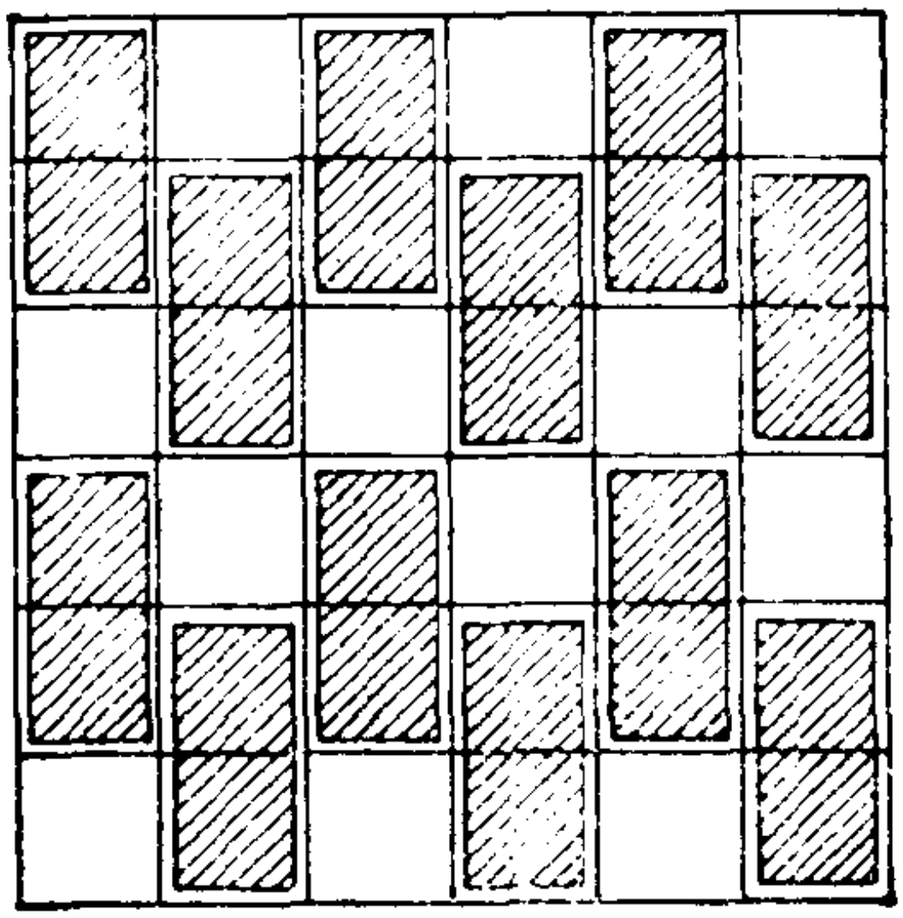


图 13.5

完全必要的．我们要证明当还有 14 个空格时，能再放入一个骨牌，只要能证明必有两个相邻的空格就够了．如果这种情况不发生，则每一个空格的四周都有骨牌，由于正方形是对称的，当我们选定一个方向时，空格和骨牌就有了某种对应关系，即可建立空格到骨牌的一种映射，通过对空格集合与骨牌集合之间的数量关系，可以得到空格分布的一个很有趣的结论，从而也就证明了我们的命题．

证明 我们考虑下面 5 × 6 个方格中的空格即除去第一行后的方格中的空格．对每一个这样的空格，考察它上方的与之相邻的方格中的情况：

(1) 如果上方的这个方格是空格，则问题得到解决.

(2) 如果上方的这个方格被骨牌所占，这又有三种情况：

(i) 骨牌是横放的，且与之相邻的下方的另一个方格也是空格，则这时有两空格相邻，即问题得到解决；

(ii) 骨牌是横放的，与之相邻的下方的另一个方格不是空格，即被骨牌所覆盖；

(iii) 骨牌是竖放的.

现在假设仅发生 (2) 中的 (ii) 和 (iii) 时，我们记 X 为下面 5×6 个方格中的空格集合，Y 为上面 5×6 个方格中的骨牌集合，作映射

$$\varphi: X \to Y,$$

由于每个空格 (X 中的) 上方都有骨牌 (Y 中的)，且不同的空格对应于不同的骨牌，所以，这个映射是单射，于是有 $|X| \leqslant |Y|$.

如果棋盘第一行(即最上方的一行)中的空格数多于 3 个时，则必有两空格相邻，这时问题就得到解决.

现设第一行中的空格数最多是 3 个，则有 $|X| \geqslant 14-3 = 11$. 另一方面全部的骨牌数为 11，即 $|Y| \leqslant 11$. 所以必有 $|X| = |Y|$，事实上这是一个一一映射. 这时，将发生一个很有趣的现象：最下面一行全是空格，当然可以放入一个骨牌.

这个题目的证明是颇具特色的，从内容上讲，这个题目具有一定的综合性，即有覆盖与结构，又有计数与映射，尤其是利用映射来计数，在数学竞赛中还较少见.

当然这个题目也可以用其他的方法来解决，例如用抽屉原则以及用分组的方法来讨论其中两行的结构，也能比较容易地解决这个问题，请读者作为练习.

几何问题都是和运动紧密相连的，实质上几何的本质就

是运动，所以在解决一些组合几何中的某些计数问题时，也是要用到运动的.

例 8（第 26 届数学奥林匹克预选题） 对哪些整数 $n \geq 3$，平面上有一正 n 边形，它的顶点全是整点?

解 假设有正 n 边形 P，顶点全是整点.

如果 $n > 6$，将 P 的各边平移，使得一个端点为原点 0，这时另一个端点仍然为整点，并且构成一个正 n 边形 P'. 如果 P 的边长为 a，那么 P' 的边长 $a' = 2a\sin\frac{\pi}{n} < a$. 这一过程可以无限次重复下去，但是不超过 a 的，整点间的距离只有有限多种，矛盾.所以，$n > 6$ 的这样的整点正 n 边形不存在.

如果 $n = 3$ 或 5，将 P' 绕原点每次旋转 90°，旋转三次得出一个正 12 边形或正 20 边形，顶点为整点，根据上面所证，这是不可能的. 即没有整点正三边形和正五边形.

如果 $n = 6$，那么 P 的三个不相邻的顶点构成整点正三边形，这不可能.

最后我们可以得到结论:

正 n 边形其顶点全是整点当且仅当 $n = 4$.

当是显然的，仅当如上证明.

五、利 用 迭 代

利用迭代方法来计数是众所周知的，在处理有关的几何问题时亦是如此.

例 9（第 21 届数学奥林匹克第 6 题） A，E 为正八边形的相对顶点，一只青蛙从 A 点开始跳跃，如果青蛙在任一个不是 E 的顶点，那么它可以跳向两个相邻顶点中的任一点，当它跳到 E 点时就停在那里. 设 e_n 为经过 n 步到达 E 点的不同

的路的个数，证明：

$$e_{2n-1}=0,\quad e_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad n=1,2,3,\cdots$$

其中，$x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$.

注：一个 n 步的路是指顶点的一个序列 $(P_0,P_1,\cdots,P_n)$ 满足

(i) $P_0=A,P_n=E$;

(ii) 对每一i，$0\leqslant i\leqslant n-1$，$P_i$ 与 E 不同；

(iii) 对每一i，$0\leqslant i\leqslant n-1$，$P_i$ 与 P_{i+1} 是相邻的顶点.

证明 如图 13.6，设正八边形为 $ABCDEFGH$. 从 A 出发经过 n 步到达 B，C，D，A 的路(定义见注，只需把 E 分别改为 B，C、D，A) 的个数分别记为 b_n，c_n，d_n，a_n. 由于对称性，由 A 出发经过 n 步到达 H，G，F 的路的个数也分别是 b_n，c_n，d_n，因此有

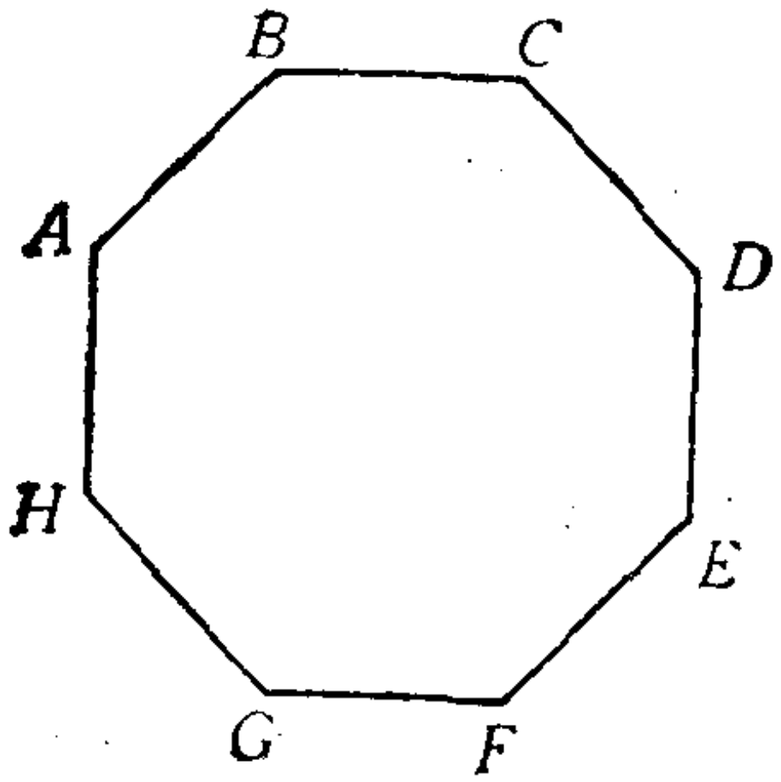


图 13.6

$$e_n=2d_{n-1} \tag{1}$$

$$c_n=b_{n-1}+d_{n-1} \tag{2}$$

$$b_n=c_{n-1}+a_{n-1} \tag{3}$$

$$a_n=2b_{n-1} \tag{4}$$

由于青蛙跳到 E 点后就停止不动了. 所以

$$d_n=c_{n-1} \tag{5}$$

根据关系式(1)—(5)得

$$\begin{aligned}e_n&=2d_{n-1}=2c_{n-2}=2(b_{n-3}+d_{n-3})\\&=2(c_{n-4}+a_{n-4}+d_{n-3})\\&=2(d_{n-3}+2b_{n-5}+d_{n-5})\\&=2[d_{n-5}+2(d_{n-3}-b_{n-5})+d_{n-3}]\end{aligned}$$

$$= 8\,d_{n-3} - 4\,d_{n-5},$$

从而

$$e_n = 4\,e_{n-2} - 2\,e_{n-4} \tag{6}$$

由于

$$e_1 = e_3 = 0$$

$$e_2 = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{1-1} - y^{1-1})$$

$$e_4 = 2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{2-1} - y^{2-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}[(2+\sqrt{2})$$

$$-(2-\sqrt{2})],$$

所以命题对 $n = 1, 2$ 是成立的，假定命题对一切 $n \leqslant k$ 已经成立，那么

$$e_{2k+1} = 4\,e_{2k-1} - 2\,e_{2k-3} = 0.$$

$$e_{2k+2} = 4\,e_{2k} - 2\,e_{2k-2}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}) - \frac{2}{\sqrt{2}}(x^{k-2} - y^{k-2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(x+y)(x^{k-1} - y^{k-1})$$

$$-xy(x^{k-2} - y^{k-2})]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[x^k - y^k + x^{k-1}y - xy^{k-1}$$

$$- x^{k-1}y + xy^{k-1}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^k - y^k),$$

即命题对于 $n = k+1$ 也是成立的，因此命题对一切自然数 n 皆成立.

解决组合几何中的计数问题的方法还有其他种种，限于篇幅，本文就不一一列举了。

第十四讲　抽屉原则

常　庚　哲

在数学中，有时需要证明具有某种性质的对象的存在，简单地说成“证明存在性”，所谓的“抽屉原则”就是数学中证明存在性的一种特殊的方法，举最简单的例子来看，有 3 只苹果按任意的方式放入两个抽屉中，那么一定有一个抽屉里面放有两只或两只以上的苹果，这是因为如果每一个抽屉至多放有一只苹果的话，那么两个抽屉至多只装有两只苹果．同样的推理表明，在任何由 366 个以上的人组成的人群之中，一定至少有两个人他们的生日是相同的．换言之，一定存在两个人，他们的生日是同一天．虽然这两个人的存在性是确定无疑的，但是我们无法具体地指明是哪两个人他们的生日相同．这是数学中证明存在性的特有方式，它对于其他的应用科学不能适用．例如说，某个医学家发现了一种新的细菌，他只有拿出具体的细菌标本来，虽说是不可能让全世界每一个人看到，但至少也应当让一些有权威的、为人诚实可靠的同行们看到这些标本．火星上有没有生命存在？这一直是一个争论不休、没有结论的问题．那些坚持说有生命的人，始终拿不出具体的标本来支持“存在性”；看来是持反对意见的人占了优势，因为他们指出火星上不具备使生命能存在的条件．

数学中的抽屉原则是简单的，有如下三种类型：

1．把 $n+1$ 个元素以任意确定的方式放入 n 个集合中，那么至少有一个集合含有三个或二个以上的元素；

2．把 $mn+1$ 个元素以任意确定的方式放入 n 个集合

中，那么至少有一个集合含有$m+1$或多于$m+1$个的元素(如果取$m=1$，我们就得到了第一种类型的抽屉原则)；

3. 把无限多个元素以任意确定的方式放入有限个集合中，那么至少有一个集合仍含有无限多个元素.

这些原则的正确性是很容易被人们所承认的，但是如果利用巧妙，可以得到许多意想不到、令人惊异的效果.

近年来国内外的各种数学竞赛中，越来越多地出现了要用抽屉原则才能解答的题目. 这里，我们罗列出历届国际数学奥林匹克中需要用到抽屉原则来作证明的问题.

例1(第6届国际数学奥林匹克第4题) 17个科学家，其中每一个人都和其余所有的人通信. 在他们的通信中，只讨论3个题目，而且每两个科学家之间只讨论1个题目. 求证：至少有3个科学家相互之间在讨论同一个题目.

证明 从这17个科学家中，任意找出一位，不妨称之为X先生，X先生同其余16位科学家通信，讨论的是3个题目，由于$16=3\times5+1$，由第二种类型的抽屉原则可知，至少有6位科学家在同X先生讨论着同一题目，无妨称此题目为题目1. 如果这6位科学家中，有2位也在讨论着题目1，那么结论已得证明. 所以只需考虑这种情形：这6位讨论的是题目2与题目3.

以这6位科学家中，请出一位Y先生，他同其余5位科学家通信，只讨论2个题目. 由于$5=2\times2+1$，再一次运用抽屉原则，得知Y先生一定同至少3位科学家之间讨论同一题目，例如说是题目2. 如果那3位科学家之间，有两个人也在讨论题目2，命题又已得证，排除这一情况之后，那3个人只能是相互讨论题目3，这样，命题也已得证. 证完.

评注 本题中，我们两次使用了抽屉原则，每用一次，就把范围缩小一点，然后注意到各种可能的情况. 以后的题目

中，有的需要更多次地使用抽屉原则.

在第二步中我们证明的结论，可以单独地组成一个题目，而且可以改变它的叙述方式，例如说："从全世界的人口中，任意选出 6 个人来，其中一定有 3 个人，他们彼此认识或者彼此不认识."

例 2（第 14 届国际数学奥林匹克第 1 题） 已给一个集合，由任意 10 个互不相等的两位十进制正整数组成. 求证：这个集合必有两个无公共元素的子集，它们所含各数之和是相等的.

证明 一个有着 10 个元素的集合，它共有多少个可能的子集呢？由于在组成一个子集的时候，每一个元素可以被取过来或者不被取过来，因此我们有 $2^{10} = 1024$ 种不同的构造子集的方法，也就是说，一共是 1024 个不同的子集，包括空集和全集在内. 对于我们的题目，空集与全集肯定不是可以考虑的对象，所以可以考虑的子集的个数是 1022 个.

再看各个真子集中一切数字之和. 用 S 来记这个和数，很明显

$$10 \leqslant S \leqslant 99 + 98 + \cdots + 91 = 855,$$

这表明 S 至多只有 $855 - 9 = 846$ 种不同的花样. 由于真子集的个数是 1022，所以一定存在两个子集 A 与 B，使得

$$A \text{ 中各数之和} = B \text{ 中各数之和}.$$

但是，A 与 B 可能有公共的元素，但这并不要紧. 我们剔除 A 与 B 中的一切公有元素，得出两个不相交的子集 A_1 与 B_1，很明显

$$A_1 \text{ 中各元素之和} = B_1 \text{ 中各元素之和},$$

因此 A_1 与 B_1 是符合题目要求的子集. 证完.

例 3（第 18 届国际数学奥林匹克第 5 题） 已知 p 个方程，$q = 2p$ 个未知量的方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中所有的系数 a_{ij} 只取 $-1, 0, 1$ 三个数值之一. 求证: 方程组 (1) 有一解 $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$ 具有如下性质:

(i) $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 全为整数;

(ii) 其中至少有一个不等于零

(iii) $|x_j| \leqslant q$, $j = 1, 2, \cdots, q$.

证明 考察适合条件 $|y_j| \leqslant p(j = 1, 2, \cdots, q)$ 的所有整数组 $(y_1, y_2, \cdots, y_q)$. 由于每一个位置上只能取

$$-p, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, p$$

这 $2p + 1$ 个数中的一个,而又一共有 q 个位置,从而一共只有 $(2p + 1)^q$ 个这样的数组. 令

$$A_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{iq}y_q,$$
$$i = 1, 2, \cdots, p.$$

由于每个 a_{ij} 只能是 $-1, 0, 1$, 所以每一个 A_i 也都是整数, 并且

$$|A_i| \leqslant |y_1| + |y_2| + \cdots + |y_q| \leqslant pq,$$
$$i = 1, 2, \cdots, p.$$

由此可知,由上述 $(y_1, y_2, \cdots, y_q)$ 造出来的数组 $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ 至多有 $(2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p$ 种花样. 可是, 因为

$$(2p + 1)^q = (2p + 1)^{2p} = (4p^2 + 4p + 1)^p > (4p^2 + 1)^p,$$

因此一定有两组不同的 $(y_1, y_2, \cdots, y_q)$ 与 $(y'_1, y'_2, \cdots, y'_q)$, 由它们所造出的 $(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ 与 $(A'_1, A'_2, \cdots, A'_p)$ 是相同的,即

$$A_1 = A'_1, A_2 = A'_2, \cdots, A_p = A'_p.$$

这说明：

$$a_{i1}(y_1 - y_1') + a_{i2}(y_2 - y_2') + \cdots + a_{iq}(y_q - y_q') = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

令

$$x_1 = y_1 - y_1', \ x_2 = y_2 - y_2', \cdots, \ x_q = y_q - y_q',$$

它们都是整数，不全为零，并且适合

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{iq}x_q = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

而且，对于 $j = 1, 2, \cdots, q$，有

$$|x_j| = |y_j - y_j'| \leqslant |y_j| + |y_j'| \leqslant 2p = q.$$

这说明我们已经找到了一个解 $(x_1, x_2, \cdots, x_q)$，它适合题目的全部要求.

例 4（第 20 届国际数学奥林匹克第 6 题） 一个国际社团的成员来自六个国家，共有 1978 人，用 1,2,…,1977,1978 来编号. 试证明：该社团至少有一个成员的编号与他的两个同胞的编号和相等，或是其中一个同胞的编号的两倍.

证明 本题与下列问题完全相当："把 1, 2, 3, …, 1978 按任一方式分成六组，则其中至少有一组有这样的性质：其中有一个数，或是等于同组中其他某两数之和，或是等于其中某一数的两倍."

用反证法来证明我们所需的结论. 假设这六组中的每一组数都不具备上述性质，也就是说，每一组数都具备这样的性质：

性质 1 同组任何两数之差必不在此组中.

因为如果有 a, b 连同 $a - b$ 都同在一组中，那么由 $a = b + (a - b)$ 可知，这组已经具备了题目所要求的性质.

由于 $1978 \div 6$ 大于 329，由抽屉原则，可以肯定有一个组，不妨记之为 A，在 A 中至少有 330 个正整数，从 A 中任取出 330 个数来，其中最大者记为 a_1. 把 a_1 减去其余 329 个数，

它们互不相等并且仍旧≤1978. 由性质1，它们不会再在组 A 中，而是会属于其余五组. 又因 $329\div5$ 大于 65，还是根据抽屉原则，可以肯定有一组 B，其中至少含上述 329 个数中的 66 个数，从 B 中任取上述 66 个数中的最大者，记为 b_1；再把 b_1 减去其余 65 个数，得出的差显然不再属于 B. 我们说，它们也不会属于 A；假若其中某一个数 b_1-b 属于 A，由于 b_1 与 b 分别可以写为

$$b_1=a_1-a',\quad b=a_1-a,$$

其中 a 与 a' 都属于 A，于是

$$b_1-b=(a_1-a')-(a_1-a)=a-a',$$

这就同 A 具备性质1的假设相违背. 这样就说明了，上述的 65 个数必属于其余的 4 组. 由于 $65\div4$ 大于 16，所以至少有一组，称为 C，包含上述整数中的 17 个. 反复进行上述推理，最后可得一组 F，至少含有两个数，大数与小数之差是一个小于 1978 的自然数，可是它不在 A, B, C, D, E, F 任何一组中，这显然是一个矛盾. 这说明至少有一组数不具备性质 1. 命题得证.

例 5（第 21 届国际数学奥林匹克第 2 题） 一棱柱以五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 分别为上底和下底. 这两个多边形的每一条边以及线段 $A_iB_j(i,j=1,2,\cdots,5)$ 均涂上了红色或绿色，每一个以棱柱的顶点为顶点，以涂了颜色的线段为边的三角形都有两条颜色不同的边. 求证：上底和下底的 10 条边颜色一定相同.

证明 首先证明上底的五条边同色. 不然的话，一定可以找到相邻的两条边，例如说是 A_5A_1 及 A_1A_2，前者是红的而后者是绿的.

自 A_1 往下底的顶点一共可以引 5 条线段，即 $A_1B_j(j=1,2,\cdots,5)$，它们被两种颜色所涂，因此其中必有 3 条是

同色的，不妨设它们涂着绿色. 这三条绿色的线段中，必有两条，它们的下端点的标号是相邻的，例如说是 B_1 与 B_2，这就是说 A_1B_1 与 A_1B_2 是绿的. 依题设，此时 B_1B_2 必为红色. 考察三角形 $A_1A_2B_2$，可知 A_2B_2 必为红色；再看三角形 $A_2B_1B_2$，这时 A_2B_1 为绿色，这时三角形 $A_1A_2B_1$ 的三边全为绿色，与假设相违. 这就证完了上底的 5 边同色，同理，下底的 5 边也同色.

如果上、下底的颜色不同，无妨设上底为绿色而下底为红色. 由前面说过的理由，可设 A_1B_1 与 A_1B_2 同色，由于 B_1B_2 为红色，所以这两条线段只能是绿色. 这时，A_2B_1 与 A_2B_2 只能为红色，而这时三角形 $A_2B_1B_2$ 三边全为红色，又得矛盾. 因此，上、下底上的 10 条边只能是同一种颜色.

评注 本题中上、下底的边数可以改为 $2n+1$，这里正整数 $n \geqslant 2$，证明完全相同. 但边数不可改为 $2n$，这时我们可将上、下底的边任意地涂色，对线段 A_iB_j，按下列规则进行：

$$\begin{cases} \text{涂红，} & \text{当 } i+j \text{ 为偶数时，} \\ \text{涂绿，} & \text{当 } i+j \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

对于相邻的两自然数 j，$j+1$，这时 $i+j$ 与 $i+j+1$ 奇偶性不同，所以 A_iB_j 与 A_iB_{j+1} 一定不同色. 显然 $2n$ 与 1 的奇偶性也不同，故 A_iB_{2n} 与 A_iB_1 也不同色. 这时，任何所说的三角形的 3 边必不同色，但对上、下底边上的颜色却无任何限制.

例 6（第 24 届国际数学奥林匹克第 4 题） 设 ABC 为一等边三角形，E 是三边上点的全体. 对于每一个把 E 分成两个不相交子集的分划，问这两个子集中是否至少有一个子集包含着一个直角三角形的三顶点？给出证明.

证明 在边 BC，CA，AB 上分别取三点 P，Q，R 使得

$$PC = BC/3,\quad QA = CA/3,\quad RB = AB/3.$$

很明显，$\triangle ARQ$，$\triangle BPR$，$\triangle CQP$ 都是直角三角形，它们的锐角是 30° 及 60°.

设 $E = E_1 \cup E_2$，$E_1 \cap E_2 =$ 空集. 由抽屉原则，P, Q, R 中至少有二点属于同一子集，不妨设 $P, Q \in E_1$. 如果 BC 边上除 P 之外还有属于 E_1 的点，那么结论已明. 设 BC 上的点除 P 之外全属于 E_2，那么只要 AB 上有异于 B 的点 S 属于 E_2，设 S 在 BC 上的投影点为 S'，则 $\triangle SS'B$ 为一直角三角形了. 再设 AB 内的每一点均不属于 E_2，即除 B 之外全属于 E_1，特别，$R, A \in E_1$，于是 APR 为一直角三角形，这时三顶点全在 E_1 中. 证完.

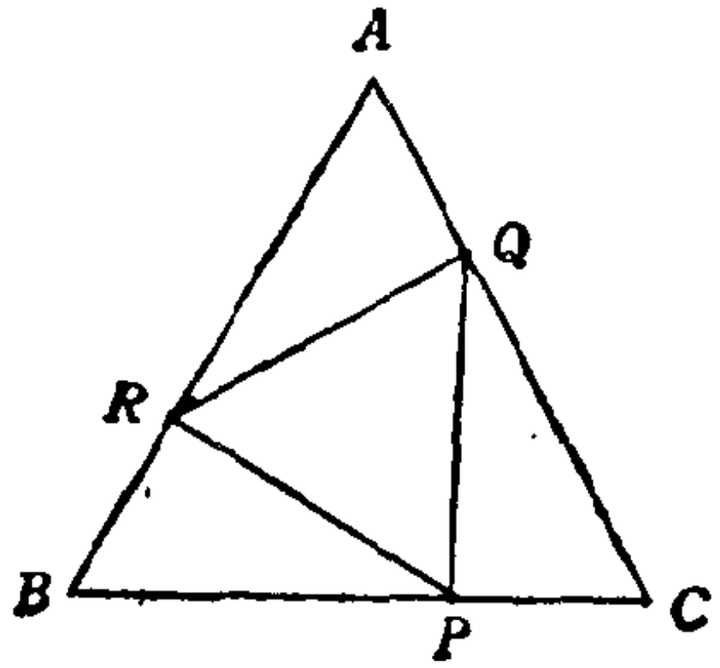


图 14.1

评注 把点分类和把点"染色"是同一个意思. "分类"，数学味道重一些，染色似乎通俗一些，本质是一样的. 因此，本题可以改述为：对于一等边三角形边界上的每一点染上红色或者绿色中的一种颜色，对于任何一种染色方法，你能不能找到同色的三点，它们组成一个直角三角形？证明你的回答.

在讲述最后一个例子之前，先讲一个名词和一个题目，这对于理解是有帮助的. 在平面直角坐标系中，点 (m, n) 称为整点，如果其中 m 与 n 都是整数，那么整点也称为"格点". 通过整点而表述的数学竞赛题目，渐渐多起来了.

题目是这样的：在平面上任给五个整点，求证从中一定可以找到两个点，使得它们联线的中点仍为整点.

要解决这一题目，先要了解整点的一种分类. 我们可以按两个坐标的奇偶性把全体整点分成以下四类

(奇,奇),(奇,偶),(偶,奇),(偶,偶).

由于我们有五个整点,由抽屉原则,其中至少有二个整点属于同一类中,无妨设这二个整点是(m, n)及(x, y). 这时m与x, n与y都有相同的奇偶性,因此$m+x$及$n+y$全为偶数,从而$\left(\frac{m+x}{2}, \frac{n+y}{2}\right)$是整点. 这一点也正是$(m, n)$与$(x, y)$的联线的中点.

我们可以把整点的概念推广: 如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是n个有序的数,且$x_1, x_2, \cdots, x_n$中的每一个数都是整数,则称$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是一个n维整点. 如果对所有的n维整点按每一个x_i的奇偶性来分类的话,由于每一个位置上有奇、偶两种可能性,因此共可分$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$个类. 这些知识对以下的讨论很有好处.

例 7 (第 26 届国际数学奥林匹克第 4 题) M是 1985 个不同的自然数的集合,M中的每一个数的素因子均小于 26. 求证: 从M中一定可以选出四个不同的数来,使它们之积等于一个自然数的四次方.

证明 小于 26 的素数共有 9 个,即 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. 我们依次用$p_1, p_2, \cdots, p_9$来表示它们. 由题设,M中的每一个数a具有形式:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_9^{\alpha_9}, \tag{2}$$

这里$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_9$为非负的整数. 这就是说,对于每一个$a \in M$, 按(2)就有一个有序数组$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_9)$与之对应. 简言之,每一个$a \in M$, 都唯一地确定一个 9 维整点. 按前述方法,一切 9 维整点可以分为$2^9 = 512$类. 由M所决定的 9 维整点共有 1985 个,所以其中必有两个,不妨记为

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_9)$与$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_9)$, 属于同一类中, 这就是说$\alpha_i + \beta_i =$偶数, $i = 1, 2, \cdots, 9$. 如果这两个 9

维整点分别对应于M中的两数a与b，那么

$$ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_9^{\alpha_9+\beta_9}$$

$$= (p_1^{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}}p_2^{\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}}\cdots p_9^{\frac{\alpha_9+\beta_9}{2}})^2$$

就是某个自然数的平方了．仿此进行反复推理，可从M中选出 736 对数：

$$a_1 与 b_1,\quad a_2 与 b_2,\cdots, a_{736} 与 b_{736}$$

使 a_ib_i 为自然数的平方．例如说

$$a_1b_1 = (p_1^{\gamma_{11}}p_2^{\gamma_{12}}\cdots p_9^{\gamma_{19}})^2, \tag{3}$$

等等．这样，a_1b_1 又决定了一个 9 维整点 $(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{19})$，$a_ib_i$ 共对应着 736 个整点，多于类的数目 512，因此从中可找出两个为同类的．设

$$(\gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{19}) 与 (\delta_{11}, \delta_{12}, \cdots, \delta_{19})$$

为同类．即 $\gamma_{1i} + \delta_{1i}$ = 偶数．无妨设 (3) 及

$$a_2b_2 = (p_1^{\delta_{11}}p_2^{\delta_{12}}\cdots p_9^{\delta_{19}})^2$$

成立．于是

$$a_1b_1a_2b_2 = (p_1^{\gamma_{11}+\delta_{11}}p_2^{\gamma_{12}+\delta_{12}}\cdots p_9^{\gamma_{19}+\delta_{19}})^2$$

$$= (p_1^{\frac{\gamma_{11}+\delta_{11}}{2}}p_2^{\frac{\gamma_{12}+\delta_{12}}{2}}\cdots\cdot p_9^{\frac{\gamma_{19}+\delta_{19}}{2}})^4$$

上式右边是一个自然数的四次方．证完．

例 8（第 28 届国际数学奥林匹克第 3 题） 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数，满足条件 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$． 求证：对于每一整数 $k \geqslant 2$，存在不全为零的整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $|a_i| \leqslant k-1$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 并且

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

证明 由柯西不等式得

$$(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2 \leqslant (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2),$$

即

$$|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leqslant \sqrt{n}.$$

所以，当 $0 \leqslant a_i \leqslant k-1$ 时，我们有

$$a_1|x_1| + a_2|x_2| + \cdots + a_n|x_n| \leqslant (k-1)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) \leqslant (k-1)\sqrt{n}.$$

把区间 $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ 等分成 $k^n - 1$ 个小区间，每个小区间的长度为 $(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$. 由于每一个 a_i 只能取 k 个整数，因此

$$a_1|x_1| + a_2|x_2| + \cdots + a_n|x_n|$$

共有 k^n 个正数，因此必有二数会落在同一个小区间之内，设它们分别是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i'|x_i| \quad 与 \quad \sum_{i=1}^{n} a_i''|x_i|$$

因此有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} (a_i' - a_i'')|x_i|\right| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}, \tag{4}$$

很明显，我们有

$$|a_i' - a_i''| \leqslant k-1, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

现在取

$$a_i = \begin{cases} a_i' - a_i'', & \text{如果 } x_i \geqslant 0, \\ a_i'' - a_i', & \text{如果 } x_i < 0, \end{cases}$$

这里 $i = 1, 2, \cdots, n$. 于是 (4) 可表示为

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1},$$

这里 a_i 为整数，适合 $|a_i| \leqslant k-1$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 证完.

第十五讲　组合几何中的运动问题

杜　锡　录

几何的本质就是运动．通常所说的所谓几何性质，其实质就是某个运动群的不变量．所以，利用运动——平移、旋转、反射等来解决几何问题，应该是本质的常用的方法．组合几何中的问题当然也不例外．

点的运动，或者是具有某种性质的点的集合，就是点的轨迹，应用常见的点的轨迹——曲线也是常见的方法．

运动事实上就是一个映射，例如平面上的运动就是平面到自身的一个映射．有时利用映射更能有效地反映运动的本质．在利用常见的运动不能解决问题时，利用某些映射(如仿射变换等)更能起到关键的作用．

通过下面的一组例题，能初步认识到上述观点和学到一些解题技巧．这些例题大都是国内外的数学竞赛题，有的问题虽然稍难，但其含意深刻，如能深入探讨，将获益非浅．

例 1　设 Q 是正方形 $ABCD$ 内的一点，则在正方形的边上存在两点 P_1 和 P_2，使得 Q 是线段 P_1P_2 的中点．

证法一　过 Q 点作 $MN/\!/AB$，设 O 是正方形的中心，O 到 MN 的距离为 d (O 和 AB 在 MN 的异侧)，作 $P_1L/\!/DC$，其距离为 $2d$，则 MN 到 P_1L 和 AB 之间的距离相等．联 P_1Q 交 AB 边于 P_2，则 P_1，P_2 为所求，事实上，MQ 为 ΔP_1AP_2 的中位线，所以 Q 是线段 P_1P_2 的中点(见图 15.1)．

上述证明中的本质是把正方形的一边 DC 平移至 P_1L，使 Q 点位于矩形 P_1ABL 的对称轴上，利用其轴对称性而证得

本题．再进一步探讨，则发现 Q 点实际上是矩形 P_1AP_2A' 的中心．那么，利用其中心对称性不是更容易地证明本题吗？这里的问题是矩形 P_1AP_2L 是怎样产生的？既然 Q 是中心，A' 就可以看作是 A 点绕 Q 点旋转 180° 而得的，$A'P_1$ 是 AP_2 绕 Q 点旋转 180° 而得的，P_2A' 是 P_1A 绕 Q 点旋转 180° 而得的．这样一来，矩形 P_1AP_2A' 是正方形 $ABCD$ 绕 Q 点旋转 180° 而得到另一个正方形 $A'B'C'D'$，这两个正方形的公共部分就是矩形 P_1AP_2A'，这样我们就可以利用旋转运动而很容易地证得本题(如图 15.2)．

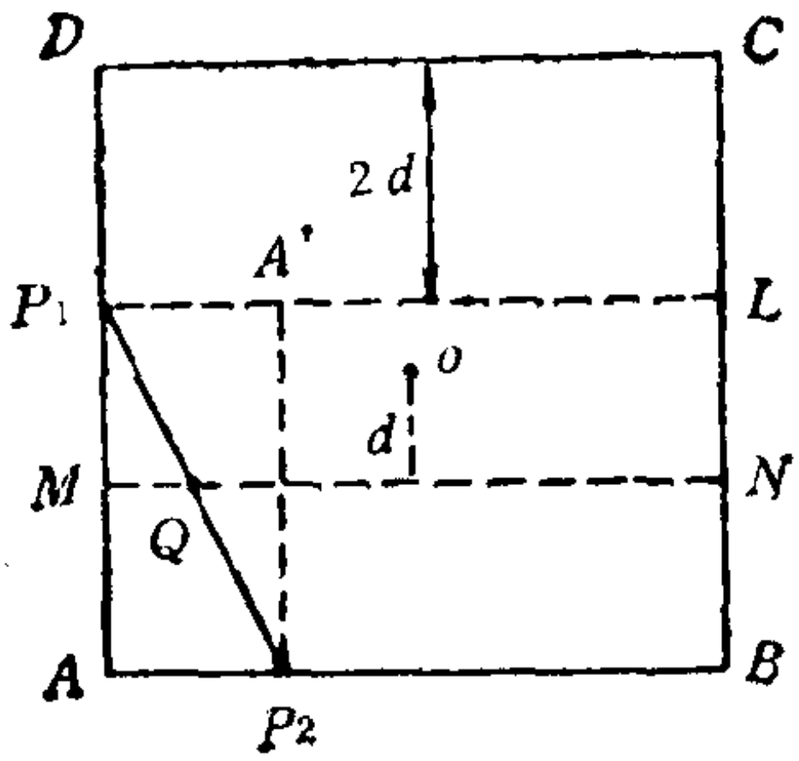


图　15.1

证法二　将正方形 $ABCD$ 绕 Q 点旋转 180° 得另一正方形 $A'B'C'D'$．由于 Q 是正方形 $ABCD$ 的内点，同时也是正方形 $A'B'C'D'$ 的内点，所以正方形 $ABCD$ 和正方形 $A'B'C'D'$ 必有交点．又由于中心对称性，所以必有两个交点，设为 P_1，P_2，则 P_1 和 P_2 即为所求．于是本题得证．

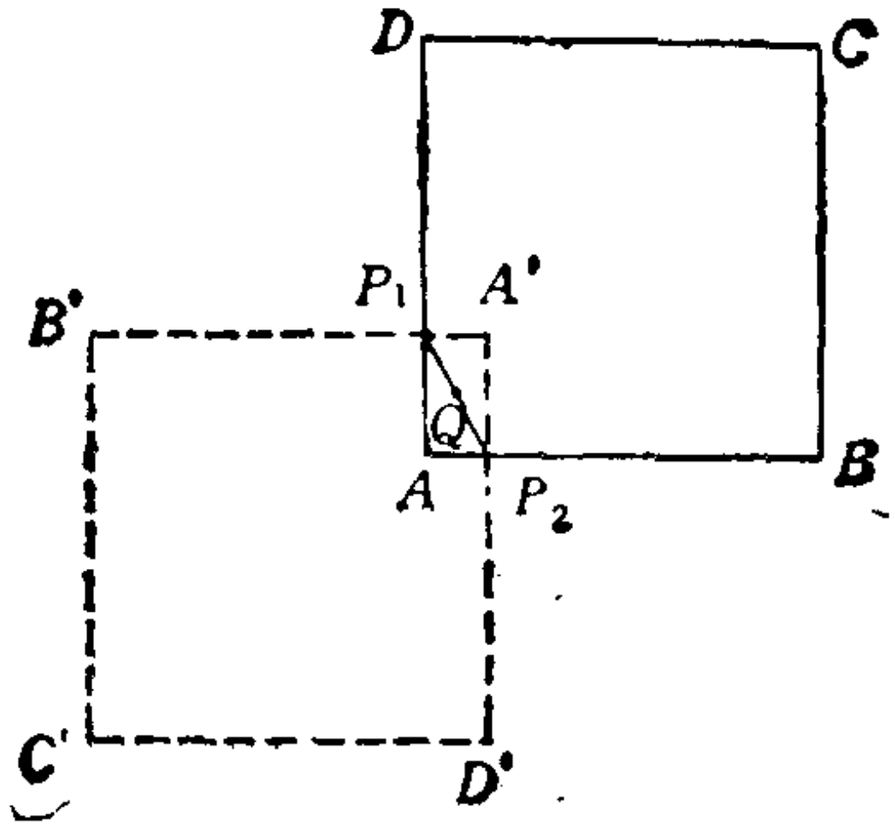


图　15.2

这个题目是简单的，证明也不复杂，但是这种证明的方法却是有意思的，这种思想在证明一些比较复杂的题目也是生效的.

例 2（第 38 届美国普特南数学竞赛第 $B4$ 题） 设 C 是平面内一条自身不相交的封闭曲线. 又设 Q 是 C 内一点，证明：在 C 上存在点 P_1 和 P_2，使得 Q 是线段 P_1P_2 的中点.

证明 不妨设 Q 是原点，不然通过一平移运动即可，作旋转运动

Γ: $P \to -P$, $P \in C$. 即把点 P 的坐标 (x, y) 变为 $-P(-x, -y)$，就是把 C 绕 Q 旋转 $180°$ 而得另一曲线 $-C$，即 C 的象为 $-C$，亦是一条自身不相交的封闭曲线.显然，由于 Q 在 C 内同时又在 $-C$ 内，知

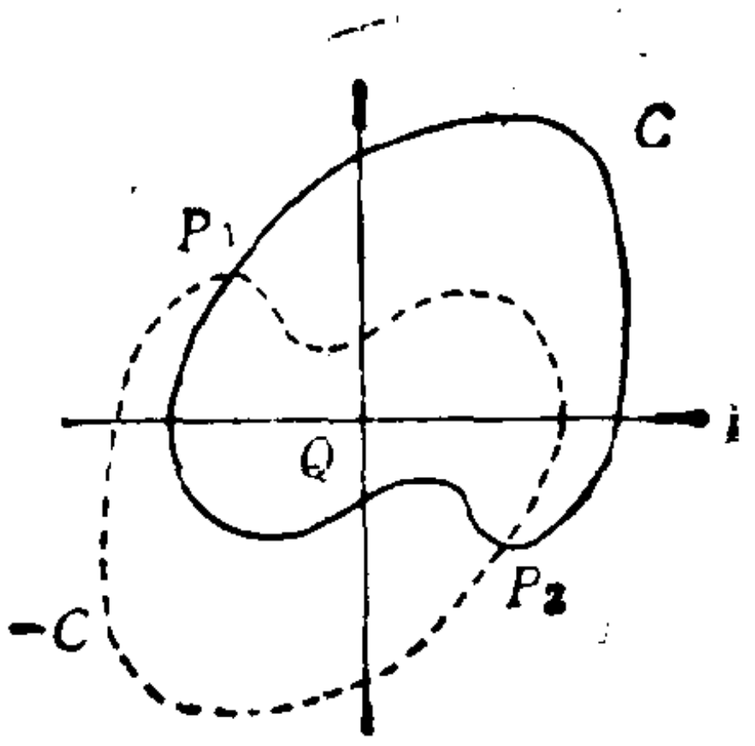


图 15.3

$$C \cap (-C) \neq \phi.$$

设 $P_1 \in C \cap (-C)$, $P_1 \in -C$，则必有 $P_2 \in C$，使得

$$P_1 = \Gamma(P_2) = -P_2.$$

所以，P_1 和 P_2 即为所求.

这个例题看似比较复杂，但利用旋转运动却很容易地而且是简明地解决了.

例 3（第 14 届国际数学奥林匹克第 6 题） 给出四个不重合的互相平行的平面，证明：存在一个正四面体，恰好每个平面上有它的一个顶点.

证明 设给定四个相互平行的平面 α, β, γ, δ, 其中 β, γ, δ 在 α 的同侧，它们与 α 的距离分别是 b, c, d, $b < c < d$.

我们先证明：给定平面上三条相互平行的直线 l, m, n, 其中 l, m 在 n 的同侧, l, m 与 n 的距离分别是 c, b, 则一定可以找到一个正三角形 ABC, 它的三个顶点分别在 l, m, n 上.

如图 15.4,以 A 为旋转中心将 n 旋转 60°, 再向相反的方向将 m 旋转 60°, 得到 n' 和 m', m 和 n' 交于 B, n 与 m' 交于 C, 则不难看出 $\triangle ABC$ 为正三角形, 它的边长记为 a, 所有这些三角形重心的轨迹是一条平行于 l 的直线 p, p 与 n 的距离记为 S.

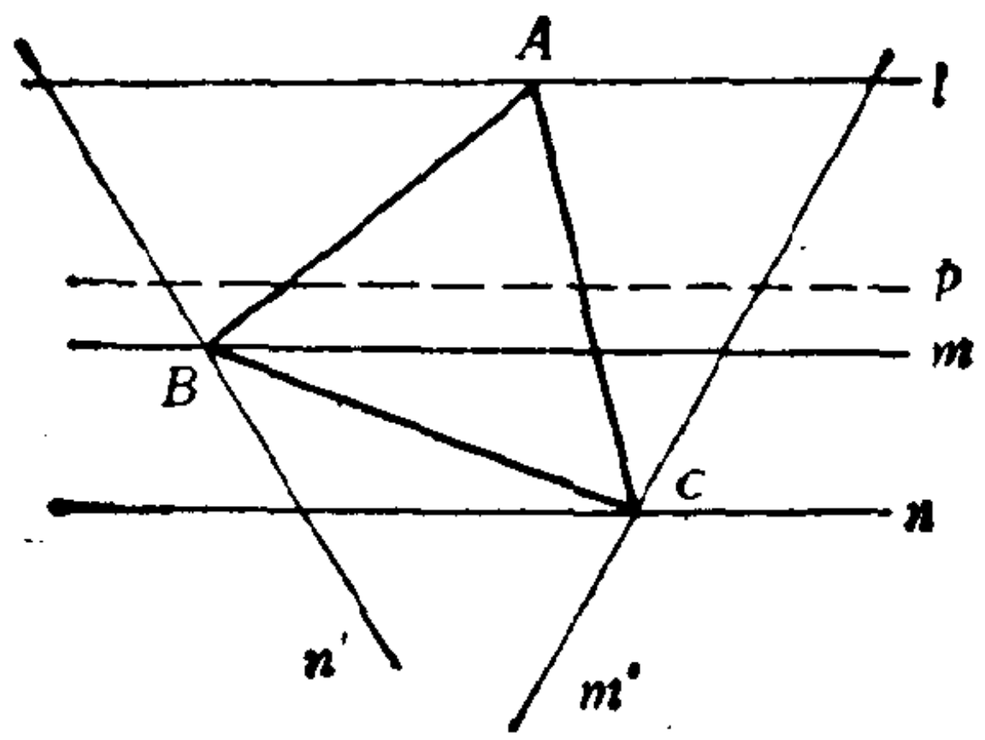


图 15.4

若任一平面 π 与平面 α 的夹角 $\varphi > 0$, 则它与 α, β, γ 分别交于三条平行的直线 n_1, m_1, l_1. m_1, l_1 与 n_1 的距离分别是 $b/\sin\varphi$, $c/\sin\varphi$. n_1, m_1, l_1 组成的图形与前述的 n, m, l 组成的图形相似,因而可以找到正三角形 $A_1B_1C_1$, 使得它的顶点分别在 l_1, m_1, n_1 上, 它的边长为 $a/\sin\varphi$, 而它的重心 M 与平面 α 的距离为 s.

令 $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{a}{d-s}\right)$, 过 M 作平面 π 的垂线与平面 δ 交于 D_1, 则

$$MD_1 = \frac{d-s}{\cos\varphi} = \frac{d-s}{\sin\varphi}\ \mathrm{tg}\,\varphi$$

$$= \frac{d-s}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{a}{d-s}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\ \frac{a}{\sin\varphi} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ A_1B_1,$$

所以，$A_1B_1C_1D_1$ 为正四面体.

以上三题都是存在性问题，证明是构造性的，构造的方法是利用运动，这是解决这一类几何问题的常用方法. 下一个例题虽稍复杂，但这一思想体现得更充分.

例 4（第 17 届美国普特南数学竞赛 第 $B7$ 题） 设 C 是以正多边形为边界的平面闭区域，证明：对任意正整数 n，恒存在平面上的点集 $S(n)$，使 $S(n)$ 中的任意 n 个点能被 C 覆盖，但 $S(n)$ 本身不能被 C 覆盖.

证明 设 C 是以正 $m(m \geqslant 3)$ 边形为边界的平面闭区域，正多边形的中心为 O，内切圆半径为 r，对于任意给定的正整数 n，取

$$S(n) = \left\{P \,\middle|\, |PO| \leqslant r\sec\frac{\pi}{2mn}\right\},$$

即 $S(n)$ 是以 O 为中心，半径为 $r\sec\dfrac{\pi}{2mn}$ 的圆面. 我们下面证明 $S(n)$ 即为所求.

首先，$S(n)$ 的半径 $r\sec\dfrac{\pi}{2mn}$ 大于 C 的内切圆半径 r，故 $S(n)$ 本身不能被 C 所覆盖.

另外，设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是 $S(n)$ 上的任意 n 个点，我们证明适当旋转 C，能够覆盖这 n 个点. 定义 C 关于 0 的一个旋转为

$$T:\ C \to Ce^{i\theta},\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

若 $|P_iO| \leqslant r$，则任何旋转都不会使 P_i 跑到 C 外.

若 $r < |P_iO| \leqslant r\sec\dfrac{\pi}{2mn}$，则使 P_i 点仍留在 C 外的旋转所对应的 θ 属于 m 个区间，每个区间的长度等于

$$l = 2\arccos\frac{r}{|P_iO|} \leqslant 2\arccos\left(\frac{r}{r\sec\dfrac{\pi}{2mn}}\right) = \frac{\pi}{mn},$$

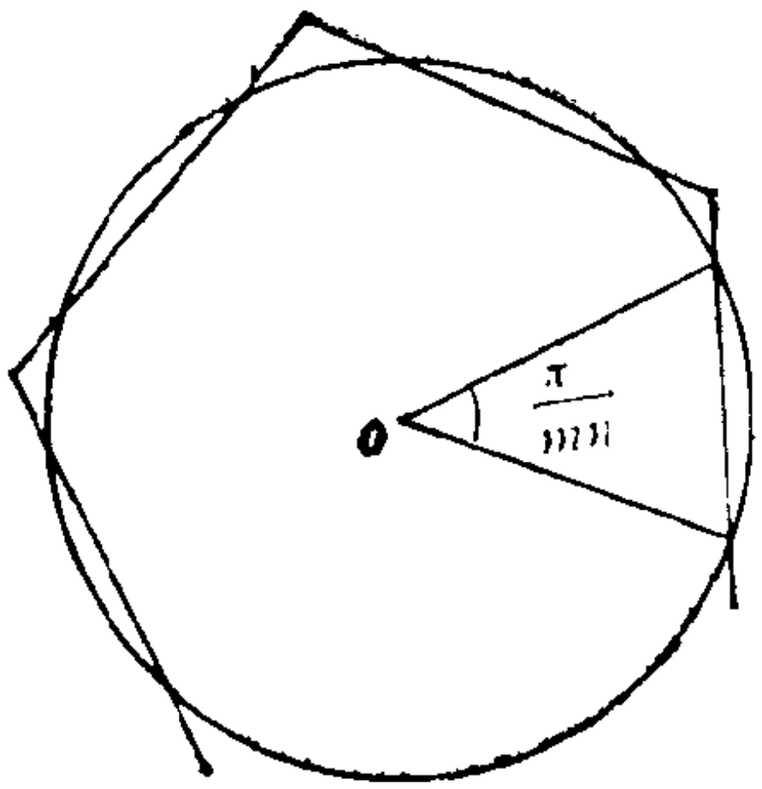


图 15.5

(如图 15.5 所示) 这 m 个区间的总长度不超过 $\dfrac{\pi}{n}$. 从而使 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 都留在 C 外的旋转角所组成的区间的总长度不超过 $n \cdot \dfrac{\pi}{n} = \pi < 2\pi$. 所以至少存在一个 θ_0，旋转

$$\Gamma_{\theta_0}: C \to Ce^{i\theta_0}$$

使 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 全在 C 内，即 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 能被 C 所覆盖.

例 5 (1938 匈牙利数学奥林匹克第 3 题) 我们把连接三角形任一顶点和它的对边(或延长线)上任一点的直线段叫做三角形的截线. 证明：对空间中的任何一个锐角三角形，一定可以找到这样一个点，使得任一截线对这点所张的角都是直角.

证明 如果满足本题条件的点存在，那么它对三角形的每一条边的张角都是直角.反之，如果空间某一点 O 对 $\triangle ABC$ 的三边所张的角都是直角，那么线段 OA, OB, OC 互相垂直. 因此，只要能找到空间中的一点 O，它对三角形的三边所张的角都是直角，那么本题就解决了.

对三角形的一条边所张的角为直角的空间点的轨迹是以

这条边为直径的球面．因此必须证明，以三角形的三条边为直径的三个球面具有公共点．

首先，我们研究两个这样的球面的公共点．例如研究以 AB 和 BC 为直径的球面．由顶点 B 作对边 AC 的垂线，垂足为 B_1，那么点 B 和 B_1 在以 AB 和 BC 为直径的球面上．因为任何两个球面的交线是一个圆，而以 AB 和 BC 为直径的球面关于$\triangle ABC$的平面是对称的，所以，所交成的圆关于这个平面也是对称的．因此，这个圆在和$\triangle ABC$ 所在的平面垂直的平面上，且以线段 BB_1 为其直径．同理可证，以 AC 和 BC 为直径的球面所交成的圆在和$\triangle ABC$ 所在的平面垂直的平面上，且以线段 CC_1 为其直径．这样一来，如果以 BB_1 和 CC_1 为直径的两个圆有交点，那么以$\triangle ABC$ 的三边为直径的三个球面也有交点．由于$\triangle ABC$ 是锐角三角形，线段 BB_1 和 CC_1 相交，其交点为M，M 是$\triangle ABC$ 的垂心．这时M在$\triangle ABC$ 内部，同时也在三个球面的内部，也在两个圆（以 BB_1 和 CC_1 为直径的圆）的内部．所以，这两个圆必相交，其交点在直线 l 上，其中直线 l 是过点M与$\triangle ABC$ 所在平面的垂线．显然，这个交点就是以三角形的三边为直径的三个球面的交点．于是本题得证．

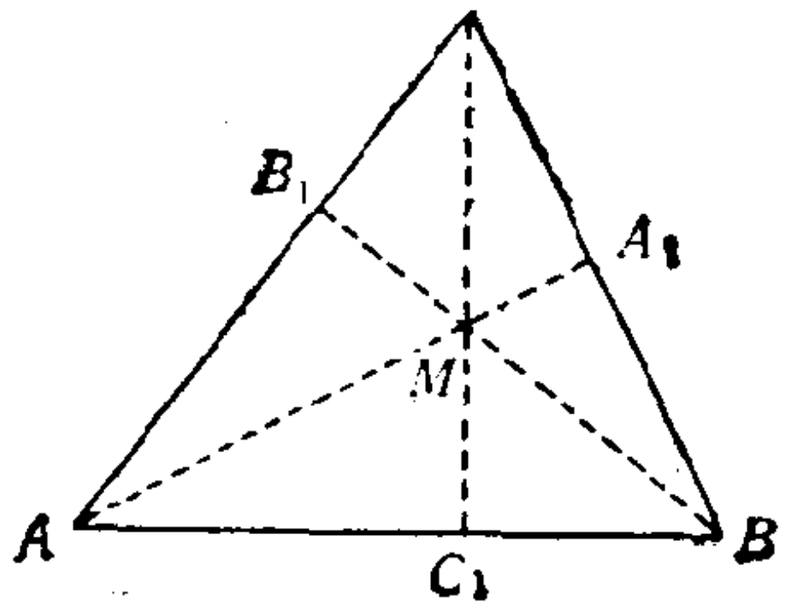


图 15.6

这个例题也是有关存在性的问题，这里利用的是运动的结果——轨迹．下面一个例题更能看出利用轨迹的妙处．

例 6（第 18 届美国普特南数学竞赛 第 $B5$ 题） 在平面上给定无穷个点，如果它们之间的距离都是整数，证明：这些点都在同一条直线上．

证明 记这些点的集合为 V，设 $A, B, C \in V$，且不共线，令 $|AB| = r, |AC| = s$，r, s 是整数.

对任意的 $P \in V$，显然 $|PA - PB|$ 取整数，且

$$0 \leqslant |PA - PB| \leqslant r.$$

记双曲线族

$$H_i = \{X \mid |XA - XB| = i\},$$

$$i = 1, 2, \cdots, r-1.$$

$$H_0 = \{\text{线段 } AB \text{ 的中垂线}\} \cup \{\text{直线 } AB\}.$$

则 P 点必落在其中之一上面. 同理，P 点也必落在另一族双曲线 $K_i (i = 0, 1, \cdots, s-1)$ 的一条上面，其中

$$K_i = \{X \mid |XA - XC| = i\} \quad i = 1, 2, \cdots, s-1,$$

$$K_0 = \{\text{线段 } AC \text{ 的中垂线}\} \cup \{\text{直线 } AC\}.$$

从而集合 V 的任一点必定在集合 $H_i \cap K_j$ 之一上面. 由于对任意的 H_i 和 K_j，$H_i \neq K_j$，且实轴相交，故 H_i 和 K_j 必相交，但 $|H_i \cap K_j| \leqslant 4$，所以

$$|V| \leqslant 4rs,$$

这与 V 中含无穷个点矛盾.

这一矛盾说明这无穷个点是共线的.

在这个题的证明中，我们把所考虑的点集 V 中的各点作为一些轨迹——双曲线的交点来处理，进而推证出我们的结论，这种利用轨迹的方法和利用运动的方法有异曲同工之妙. 实际上，轨迹作为点的运动来处理时，二者是相同的. 有时，一些题目不能用常见的运动来描述，这时利用映射也能收到同样的效果，并且具有一般性，先看下面一个简单的例题.

设映射

$$\varphi: (x, y) \to (x, ky),$$

这是一个平面到自身的映射，其中 k 是固定正数. 这种变换当

$k<1$ 时称为压缩，当 $k>1$ 时称为伸长. 更精确地说，它分别称为系数为 k 的向 x 轴的压缩及系数为 k 的沿 y 轴方向的伸长. 显然，系数为 k 的向 x 轴的压缩(沿 y 轴方向的伸长)的逆变换是系数为 $1/k$ 的沿 y 轴方向的伸长(向 x 轴的压缩).

例 7 设 E 为椭圆，其方程为

$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

而 φ 是系数为 $k=a/b$ 的向 x 轴的压缩(或沿 y 轴方向的伸长)，那么 $\varphi(E)$ 是方程为

$$(x-c_1)^2+\left(y-\frac{a}{b}c_2\right)^2=a^2 \tag{2}$$

的圆.

证明 设 (x, y) 是椭圆 E 的点，即坐标满足方程(1)的点. 我们证明点 $\varphi(x, y)=\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ 满足方程(2). 将点 (x, y) 的象点 $\left(x, \frac{a}{b}y\right)$ 的坐标代入方程(2)，得

$$(x-c_1)^2+\left(\frac{a}{b}y-\frac{a}{b}c_2\right)^2$$

$$=a^2\left(\frac{(x-c_1)^2}{a^2}+\frac{(y-c_2)^2}{b^2}\right)=a^2$$

从等式可看出其逆命题也成立.

例 8(第 26 届国际数学奥林匹克预选题) 能否找出 1985 个三角形，都是椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的最大内接三角形?

证明 众所周知，圆的最大内接三角形是圆内接正三角形，这种三角形有无数多个. 考虑圆 $x^2+y^2=9^2$ 的 1985 个不同的内接正三角形，变换 $\varphi(x, y)=\left(x, \frac{3}{2}y\right)$ 的逆变换

$\varphi^{-1}(x,\ y)=\left(x,\ \frac{2}{3}y\right)$ 将该圆变为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$，在这个变换下，内接三角形的面积变为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & \frac{2}{3}y_1\\ 1 & x_2 & \frac{2}{3}y_2\\ 1 & x_3 & \frac{2}{3}y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{2}{3}\Delta,$$

其中△是圆 $x^2+y^2=9^2$ 的内接正三角形的面积．所以，原来的最大面积仍为最大面积． 这样所得的 1985 个椭圆的内接三角形即为所求．

这题的证明中我们利用了例 7 的结论，同时还可以得到下面的结论：

设 F 是某个图形，其面积为 S． 如果 φ 是系数为 k 的向 x 轴的压缩或沿 y 轴方向的伸长，则图形 F 的象 $\varphi(F)$ 的面积为 kS．

例 9（1973 年波兰数学竞赛第 3 题） 证明：对于任何具有对称中心的多边形，存在不多于 1 个包含该多边形，而且面积最小的椭圆．

证明 我们首先证明，如果多边形 W 有对称中心，并且包含多边形 W 的椭圆 E 有最小面积，那么多边形对称中心与椭圆的对称中心重合．

假设多边形 W 的对称中心 P 不与椭圆 E 的中心重合．设 ψ 是关于中心 P 的对称变换，那么 $\psi(E)$ 是包含多边形 $\psi(W)=W$ 并且与 E 不同的椭圆． 因为中心对称变换下任何线段的象平行于原线段，所以椭圆 E 与椭圆 $\psi(E)$ 的轴分别平行． 我们选取坐标轴平行于椭圆 E 的轴（如图 15.7 所示）．

椭圆 E 和 $\phi(E)$ 全等，所以由例 5 可知，存在向 x 轴的压缩（或沿 y 轴方向的伸长）φ，使图形 $\varphi(E)$ 和 $\varphi(\phi(E))$ 是中心在点 O_1 和 O_2 的等圆．这些圆都包含多边形 $\varphi(W)$（图 15.8）。

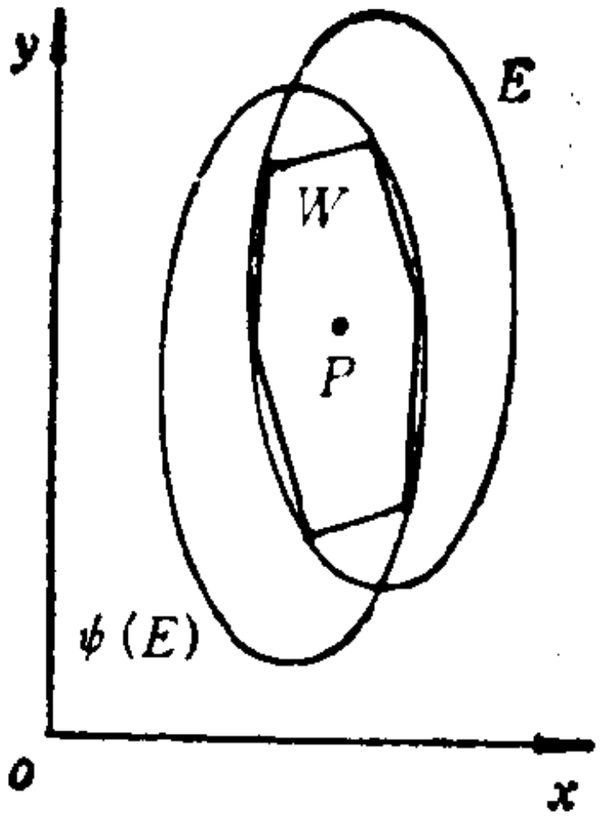


图 15.7

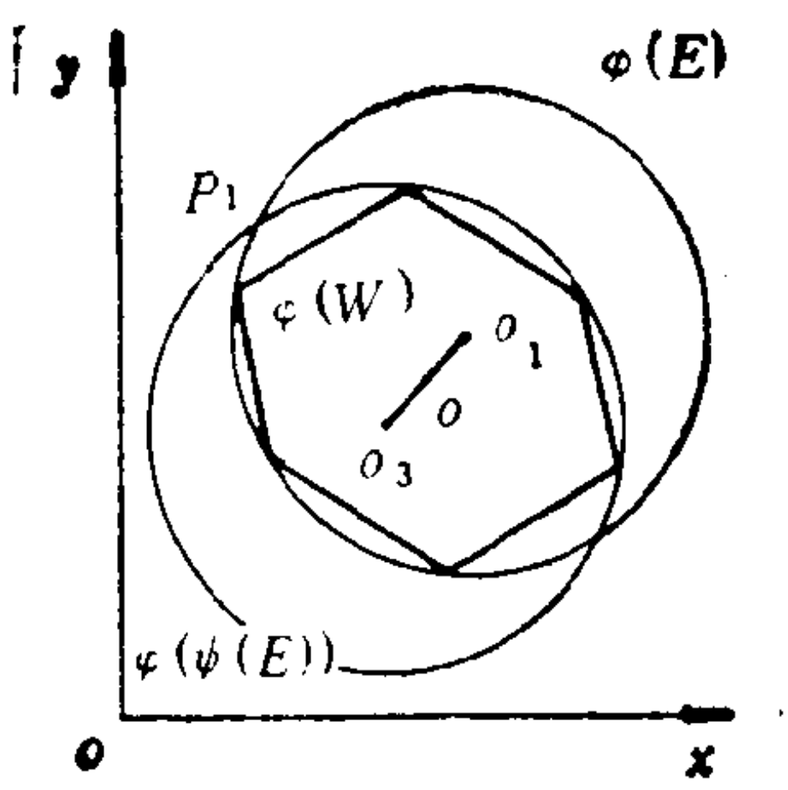


图 15.8

设 O 是线段 O_1O_3 的中点，P_1 是圆 $\varphi(E)$ 和 $\varphi(\phi(E))$ 的一个交点．显然，以 O 为中心，半径为 OP_1 的圆 Q 包含圆 $\varphi(E)$ 和 $\varphi(\phi(E))$ 的公共部分．另外，$OP_1 < O_1P_1$，因此，圆 Q 的面积小于圆 $\phi(E)$ 的面积。

设伸长(压缩) φ^{-1} 是压缩（伸长）的逆变换．由例 5 易知，图形 $\varphi^{-1}(Q)$ 是椭圆，它的面积小于椭圆 $\varphi^{-1}(\varphi(E)) = E$ 的面积．因为 $Q \supset \varphi(W)$，所以 $\varphi^{-1}(Q) \supset \varphi^{-1}(\varphi(W)) = W$．于是，与 E 是包含多边形 W 的面积最小的椭圆之假定矛盾．因此，多边形 W 的对称中心与任何包含多边形 W 而且面积最小的椭圆的对称中心重合。

下证这样的椭圆不多于 1 个。

假设椭圆 E_1 和 E_2 是两个包含多边形 W 的面积最小的椭圆．根据以上所证，多边形的对称中心 P 与这两个椭圆 E_1 和 E_2 的中心重合．任何向 x 轴的压缩(沿 y 轴方向的伸长)，显

然都把椭圆变成椭圆，适当选取系数k，可以使两个椭圆之一，例如E_1，退化为圆．此时不妨假定对称中心P点与坐标原点重合，椭圆E_2的两条对称轴与坐标轴重合．那么椭圆E_1和E_2的方程分别有下列形式：

$$\begin{aligned}&(E_1)\quad x^2+y^2=r^2,\\&(E_2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a\neq b.\end{aligned}\tag{1}$$

因为椭圆E_1和E_2的面积相等，所以$ab=r^2$．因此，当且仅当

$$\begin{aligned}&x^2+y^2\leqslant ab,\\&\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\end{aligned}\tag{2}$$

时，点(x, y)属于集$E_1\cap E_2$．

将这两不等式的两边分别相加，得

$$\left(1+\frac{1}{a^2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{b^2}\right)y^2\leqslant ab+1,$$

整理后得

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(ab+1)}{a^2+1}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(ab+1)}{b^2+1}}\leqslant 1.\tag{3}$$

因此，集$E_1\cap E_2$包含在椭圆(3)中．因为当$a\neq b$时

$$\begin{aligned}&(a^2+1)(b^2+1)-(ab+1)^2\\&=(a^2b^2+a^2+b^2+1)-(a^2b^2+2ab+1)\\&=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2>0,\end{aligned}$$

所以

$$(a^2+1)(b^2+1)>(ab+1)^2\tag{4}$$

(由柯西不等式也可以立得不等式(4)).

由此可知，一方面$W\subset E_1\cap E_2\subset$椭圆(3)中，另一方面，椭圆(3)的面积的平方满足

$$S^2 = \pi^2 \frac{a^2b^2(ab+1)^2}{(a^2+1)(b^2+1)} < \pi^2a^2b^2.$$

因为椭圆 E_2 的面积的平方等于 $\pi^2a^2b^2$，所以这个不等式表明椭圆(3)的面积小于椭圆 E_1 的面积. 这个矛盾就证明了包含多边形 W 的面积最小的椭圆不可能多于1个.

以上三个例题主要是讲了压缩或伸长变换以及应用. 这种压缩(伸长)变换是仿射变换的一种，仿射变换在几何变换中是很重要的，它包括了我们常见的平移、旋转等几何变换.

例 10(1986 年匈牙利数学竞赛试题) 一个闭圆面是否能分成两个不交的合同部分（或者说：一个闭圆面能否分成两个不交的点集，这两个点集是相等的)?

答 不能.

一个直觉的想象是，问题将发生在圆心上，圆心只能属于一个点集，在另一个集中就很难找到在合同映射下的它的象点. 下面我们将证明确实不能分成两个不交的合同部分.

设 C 为单位圆盘，O 为圆心，ρ 表示圆盘内两点间的距离函数.

假设 C 可分为两个不相交的合同部分 A 和 B，记对应的合同变换为 $\varphi: A \to B$，或写为

$$\varphi: x \to x^*, \quad x \in A, x^* \in B,$$

且有 $\varphi(O) = O^* \in B$.

作 C 的直径 $rs \perp OO^*$，由于 O 是圆心，对任意的 $a \in A$，有 $\rho(O,a) \leqslant 1$；对任意的 $b \in B$，有 $\rho(b, O^*) \leqslant 1$，以及 $\rho(O^*, r) = \rho(O^*, s) > 1$，即知 $r \in A, s \in A$.

因为合同变换是保距的，则有

$$\rho(r^*, s^*) = \rho(r, s) = 2,$$

所以 r^*s^* 也是直径，再由 $\rho(O^*, r^*) = \rho(O, r) = 1$，即知 O^* 也是 C 的圆心. 于是 $O = O^*$，这与 $A \cap B$ 是空集矛盾.

因此，C 不能分成两个不相交的合同部分.

作为这一讲的结束，我们介绍一个有名而且有趣的问题，在解决这个问题的过程中，多次用到了运动——平移和旋转，同时又用到了连续函数的基本性质. 如果有的中学生还没有学到闭区间上连续函数的性质，这个例题可暂时略去不读，这对你在这一讲中的收获不会有任何损失.

例 11 证明：在每一条闭的简单平面曲线上，存在四个点，它们是一正方形的顶点(注：没有自交点的曲线是简单曲线).

证明 记 m_x 是一族水平直线，其中有一些与曲线相交于 X 和 X'. 设在 X_1 和 X_2 处，m_{x_1} 和 m_{x_2} 是曲线的切线或支撑线，且曲线全部包含在 m_{x_1} 和 m_{x_2} 之间.

如果使 m_x 从位置 X_1 连续变动到 X_2，并且得到交点 X 和 X' 的两串连续点列. 倘若曲线是凹的，就选择这样一些交点，能使 X，X' 沿曲线连续运动. 于是，为了适应 X，X' 的徘徊运动，m_x 和 X 要倒退几次，然而，无论何时，m_x，X，X' 的运动，尤其是 XX' 的长度都是连续函数.

设 YY' 是 XX' 的垂直平分线，交 XX' 于 P，并且端点 Y，Y' 是与曲线的交点，设在初始位置 m_{x_1}

$$Y'P > PY = 0,$$

在最终位置 m_{x_2}

$$O = Y'P < PY.$$

由于 XX' 连续运动，YY' 也对应于 m_x 连续运动，所以必有某一位置使

$$Y'P = PY,$$

即总有一内接菱形，对角线分别是水平的和垂直的.

因此，将 m_x 任意旋转一个角度，同样都能得到一个内接菱形.

如果 $XX'=YY'$，这菱形就是正方形．否则，设 $XX'<YY'$，当 m_x 连续旋转 $90°$ 后，有 $XX'>YY'$．由于旋转是连续的，必有一个中间位置使 $XX'=YY'$，此时的 X，X'，Y，Y' 就是所求正方形的四个顶点．

第十六讲　图论问题

王　树　禾

国内外历届数学竞赛，多次出现一种生动诱人而又十分难解的试题类型，这类试题出自图论，只要我们掌握图论的一些基本概念，对付它们就会相当顺手。

本讲介绍图论的基本知识，并从国内外数学竞赛试题当中精选了若干典型试题，用图论方法给出新的简洁解答。每节之末的思考题，仅用本讲介绍的概念即可得解，读者不妨一试。

一、图

某些人之间的认识关系可以用图形来表达。认识是相互的，我们用点代表人，如果两个人相识，则在相应的两个点之间连接一条曲线，这样形成的图形就是我们下面定义的图这个数学概念的直观形式。

定义 1　设集合 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\} \neq \varnothing$，$E(G)=\{e_1, e_2, \cdots, e_q\}$ 是 $V(G)$ 中的某些元素对的无序集合，则称 $G=(V(G), E(G))$ 是一个图；称 $V(G)$ 是图 G 的顶点集合，其元素叫做顶点；称 $E(G)$ 是图 G 的边集合，其元素叫做边。若 $u, v \in V(G)$，边 e_i 是无序顶点对 (u, v)，则记 $e_i=uv=vu$，且称 u 与 v 是边 e_i 的端点，e_i 与顶点 u, v 相关联，顶点 u 与 v 相邻。有公共端点的边称为邻边，$|G|$ 表示图 G 的顶点数，$\|G\|$ 表示图 G 的边数。若图 $H=(V(H),$

$E(H))$ 满足 $V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，则称H是G的子图，记为$H\subseteq G$.

我们把图G的顶点用位置任意选定的几何点来表示. 边$e_j=uv$ 时，e_j用连接u与v的曲线来表示，此曲线之长短曲直不作限制，如此得到的是图G的图示，例如 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$e_1=v_1v_2$，$e_2=v_2v_3$，$e_3=v_3v_4$，$e_4=v_2v_4$，这个图的图示如图 16.1 所示. 对于图 16.1 中的图 G，$|G|=4$，$\|G\|=4$，e_1,e_2,e_4是相邻的边，v_1，v_3，v_4是v_2的相邻顶点，三角形$v_2v_3v_4$是G的子图，等等.

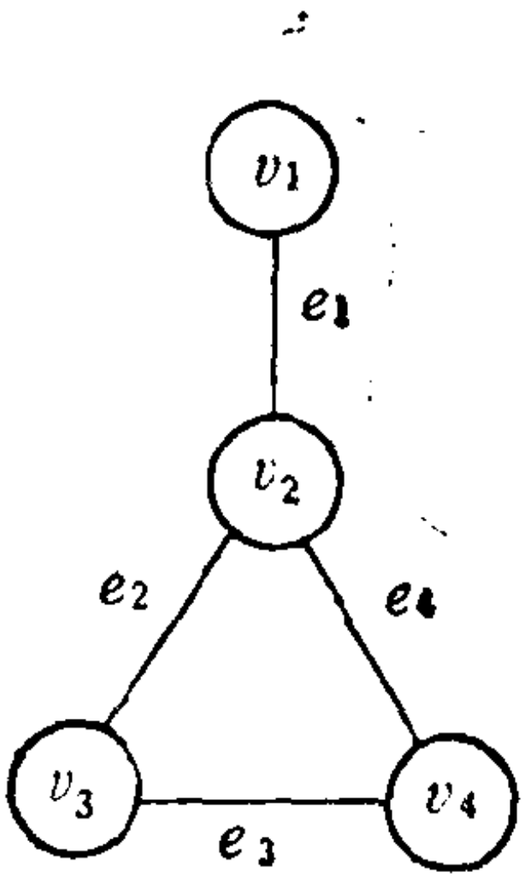


图 16.1 图的图示

我们只讨论两顶点间至多连一条边且每边的两个端点相异的简单图. 当$|G|=1$时，称G为平凡图. 任何两顶点皆相邻的图叫做完全图，记为K_p，p是顶点数. 与顶点v相关联的边的数目叫做顶点v的度，记为$d(v)$，例如图 16.1 中 $d(v_1)=1$，$d(v_3)=d(v_4)=2$，$d(v_2)=3$. 关于度有下述定理.

定理 1 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\|G\|$.

证明 所有顶点度的和等于所有边的端点个数之和，每条边在这个和中都计算了二次，故所有度之和是边数的 2 倍，即 $\sum\limits_{v\in V(G)} d(v)=2\|G\|$，证毕.

推论 1 图中奇度顶点的个数是偶数.

证明 令 $V(G)=V_e\cup V_o$，V_e是图G中偶度顶点集合，V_o是G中奇度顶点集合，由定理 1

$$\sum_{v\in V_e} d(v)+\sum_{v\in V_0} d(v)=2\|G\|,$$

而 $\sum_{v\in V_e} d(v)$ 是偶数，故 $\sum_{v\in V_0} d(v)$ 也是偶数，但 V_0 中顶点的度皆奇数，所以 $|V_0|$ 必为偶数，证毕。

例 1（1956 年北京市数学竞赛试题） 空间中不可能有这样的多面体存在，它们有奇数个面，而它们的每个面又都有奇数条边。

证明 以这种多面体的面集合作为 $V(G)$，当且仅当两个面有公共棱时，在 G 的相应两顶点间连一边得到一个图 G，依题意，$|G|$ 是奇数，而且 $\sum_{v\in V(G)} d(v)$ 也是奇数，与定理 1 相违，故这种多面体不存在，证毕。

例 2（1978 年美国数学奥林匹克赛试题） 在一间房子里有 N 个 $(N>3)$ 人，至少有一个人没有和房子里每个人握手，房子里可能与每个人都握手的人数的极大值是多少？

解 以人为顶点，对于握过手的两个人，在相应的这两顶点之间连一边，得图 G. 因为不是任何两个人都握过手，所以 G 的边最多时为 K_N-e（这里用 $G-e$ 表示从图 G 中删除边 e），其中 e 是未握过手的二人 A_1，A_2 的连线，所以 $N-2$ 即为所求。

例 3（1916 年匈牙利数学奥林匹克试题） 把 1，2，3，4，5 任意分成两个集合，则必然有一个集合包含两个数及其差。

证明 设 S_1 与 S_2 是任意分成的两个集合，以 1，2，3，4，5 为五个顶点构作 K_5，当且仅当二顶点 u 与 v 满足 $|u-v|\in S_j(j=1,2)$ 时，把边 uv 染成 j 色。

(i) 若五边形 123451 与 135241 分别是 1 色与 2 色的同色五边形，则 1 与 4 同在一个集合，2 与 3 同属另一集合。这时不论 5 在哪一个集合中，命题都会成立。

(ii) 不是上述情形，若边 15 与道路（定义见本讲二）12345 异色，而边 13 与 35 同色，则不论这两条边是什么颜色，都会出现同色三角形.若边 15 与道路 12345 同色，则还有一边与五边形 123451 同色，于是又出现同色三角形.设$\triangle uvw$是同色三角形，不妨设 $u>v>w$，令 $x=u-v, y=v-w$，$z=u-w$，则 x, y, z 不仅属于同一集合，而且 $x+y=z$，即此集合中含有两个数 x, z 及其差 y. 证毕.

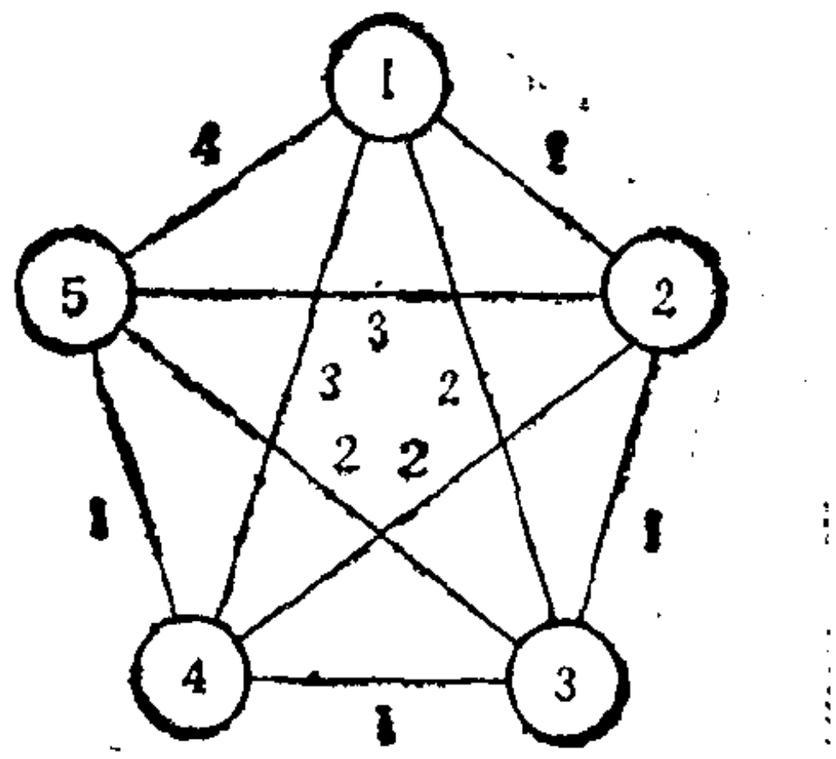


图 16.2

思考题 1 任何由两个以上的人组成的人群中，至少有两个人，他们的朋友数目一样多.

思考题 2 $2n(n\geqslant 2)$ 个人中每个人至少同其中 n 个人相识，证明其中至少有四个人，使得这四个人围圆桌而坐时，每个人旁边都是他认识的人.

思考题 3 7, 6, 5, 4, 3, 3, 2 与 6, 6, 5, 4, 3, 3, 1 是否是某个简单图的度序列？为什么？

二、树

“树”在这里是一个数学名词，它是图论中的一个重要概念.

定义 2 $P(u_0,u_l)=u_0e_1u_1\cdots u_{l-1}e_lu_l$ 叫做图 G 中的一条道路，其中 $u_0,u_1,\cdots,u_l$ 是相异顶点，且对于 $i=0,1,\cdots,l-1$，u_i 与 u_{i+1} 是 e_{i+1} 的两个端点. l 叫做道路长. 若 u_0 与 u_l 重合，则称 P 为圈. 如果任取两顶点 u, v，存在道路

$P(u, v)$ 时，则称图 G 为连通图。无圈的连通图叫做树，树上度为 1 的顶点称为叶。

定理 2 非平凡树至少有两个叶。

证明 设 $P(u_0, u_l)$ 是非平凡树 T 上的最长道路，则 u_0 与 u_l 必为叶，事实上，由于 T 是连通图，故 $d(u_0) \neq 0$，$d(u_l) \neq 0$。若 $d(u_0) \neq 1$，则 $d(u_0) \geqslant 2$，从而至少存在一条边 u_0w，w 不在 $P(u_0, u_l)$ 上，不然 T 上有圈，与 T 为树矛盾。这样，$P(u_0, u_l)$ 可延长到 w，与 $P(u_0, u_l)$ 是最长道路矛盾，可见 $d(u_0) = 1$，即 u_0 为叶。同理可证 $u_.$ 亦是叶，证毕。

定理 3 若 T 是树，则 $\|T\| = |T| - 1$.

证明 对 $|T|$ 用归纳法证明。当 $|T| \leqslant 2$ 时，定理显然成立。假设 $\|T\| \leqslant k$ 时定理成立，下面证明 $|T| = k + 1$ 时定理仍成立。由定理 2，T 上存在叶，取一个叶 u_0，把 u_0 连同与 u_0 相关联的边从 T 上删除，得一个子树 T'，由归纳法假设，$\|T'\| = |T'| - 1$，而 $\|T'\| = \|T\| - 1$，$|T'| = |T| - 1$，故 $\|T\| = |T| - 1$。证毕。

例 4（第 24 届莫斯科数学奥林匹克试题） n 个点由线段连接着，已知每一点与另外任何一点都有道路相连通，而任何两点都没有两种不同的道路。证明：线段总数为 $n - 1$。

证明 视 n 个点为一个图 G 的 n 个顶点，线段是 G 的边，依题意，G 是连通无圈图，即是树，由定理 3，边数为 $n - 1$。证毕。

我们称只有一个顶点不是叶的树为星。

例 5（1958 年波兰数学奥林匹克试题） 平面上有 n 条线段，$n \geqslant 3$，其中任意 3 条都有公共点，则这 n 条线段有一个公共点。

证明 把这 n 条线段的端点视为一个图 G 的顶点，线段为 G 的边，依题意，G 是无圈连通图，是树，且最长轨长为 2，

所以G是星，故这n条线段有一个公共点。证毕。

思考题4 若树仅有两个叶，则此树为一道路。

思考题5 烷烃分子式为C_mH_n，问n，m满足什么条件，才可能有C_mH_n存在？

思考题6 若$|G|-\|G\|\geqslant 3$，图G中有几个圈？

三、平 面 图

定义3 若一个图G的图示可以画在平面上，使得任何两条边都不(在非顶点)相交，则称G为平面图，此种图示称为G的平面嵌入。平面嵌入把平面划分成的每个单连通区域叫做平面图G的一个面。

定理4 G是连通平面图，则欧拉公式

$$|G|-\|G\|+\Phi=2$$

成立，其中Φ是G的面数。

证明 对Φ进行归纳证明。当$\Phi=1$时，G为树，欧拉公式显然成立。假设$\Phi\leqslant n$时欧拉公式已成立，考虑$\Phi=n+1(n\geqslant 1)$，这时G上有圈，从某圈上删除一条边e可得连通图G'，在G中被e隔开的两个面在G'中变成了一个面，由归纳法假设，$|G'|-\|G'\|+\Phi'=2$，而$|G'|=|G|$，$\|G'\|=\|G\|-1$，$\Phi'=\Phi-1$，所以$|G|-\|G\|+\Phi=2$。证毕。

例6(1968年波兰数学奥林匹克试题) 对哪些n，存在n条棱的多面体？

解 以多面体的顶点为图的顶点，以多面体的棱为图的边，组成一个平面图G，则$|G|\geqslant 4$，$\Phi\geqslant 4$。由欧拉公式，$\|G\|\geqslant 6$，即无棱数小于6的多面体。

四面体是棱数为6的多面体。

又因 $2\|G\| \geqslant 3\Phi$，若有 7 条棱的多面体，则 $\Phi \leqslant \frac{14}{3}$，即 $\Phi = 4$，于是 $7 = |G| + \Phi - 2 = |G| + 2$，$|G| = 5$，但当 $\Phi = 4$ 时唯一的多面体是四面体，它只有四个顶点与 $|G| = 5$ 矛盾，可见没有 7 条棱的多面体。

考虑 $k \geqslant 4$，以 k 边形为底的棱锥，它即为 $2k$ 条棱的多面体。若把底为 $k-1$ 边形的棱锥上底角处的一个三面角“锯掉一个尖儿”，得到 $2k+1$ 条棱的多面体。总之，当 $n \geqslant 6$，$n \neq 7$ 时有 n 条棱的多面体。

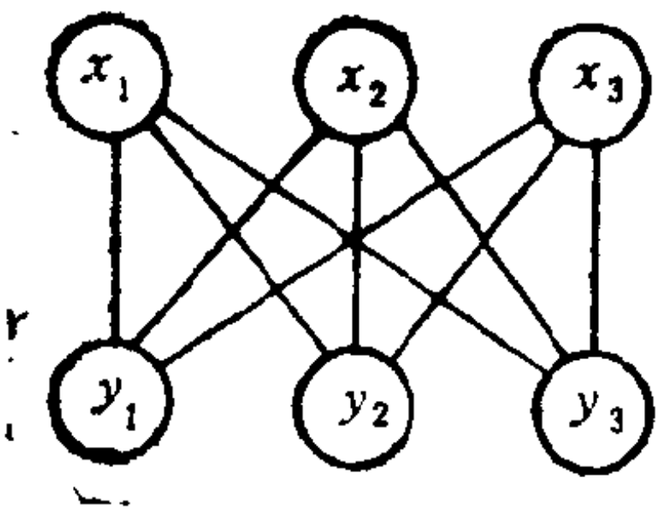


图 16.3

思考题 7 K_5 与 $K_{3,3}$(见图16.3)是否平面图?

思考题 8 论证正多面体有哪几种?

思考题 9 把平面划分成 Φ 个区域，每两个区域都有一段公共边界，问 Φ 最大是多少?

四、欧 拉 图

哥尼斯堡城（现苏联加里宁格勒）位于普雷格尔河畔，河中有两个小岛，通过七座桥相连(图 16.4)。18 世纪，城中居民热衷于这样一个问题：游人从四块陆地的任一块出发，按什么路线才能使每座桥通过一次最后返回原处？问题看来并不复杂，但谁也解决不了，于是他们就去请教数学家欧拉，欧拉把四块陆地抽象成四个点，每座桥抽象成连接两点的线段，从而否定地回答了上述七桥问题。下面我们讨论从一顶点出发不重复地行遍所有边的图的特征。

定义 4 在图 G 中，$W = u_0e_1u_1e_2\cdots u_{q-1}e_qu_0$ 叫做欧拉

回路，其中 $q = \|G\| \neq 0$，边 $e_{i+1}(i = 0, 1, \cdots, q-1)$ 的端点是 u_i 与 u_{i+1}，$u_q = u_0$，且 $i \neq j$ 时，$e_i \neq e_j(1 \leqslant i, j \leqslant q)$. 有欧拉回路的图叫做欧拉图.

直观地讲，欧拉图就是从一顶点出发而每边通过一次又能回到出发顶点的图.

定理 5 当 G 为连通图时，G 为欧拉图的充分必要条件是 G 的每个顶点皆偶数度.

证明 条件的必要性显然成立. 下面证明充分性，对 $\|G\|$ 归纳证明. 每个顶点皆偶度的连通图，边数最少者为 K_3，这时命题成立. 假设对 $3 \leqslant \|G\| \leqslant k$ 的图命题已成立，考虑 $\|G\| = k+1$ 的情形. 因为没有一度顶点，故 G 不是树，G 上有圈，假设 C 是 G 的一个圈，把 C 的所有边从 G 上删除，所得的图 G' 仍是每顶皆偶度. 设 G' 是由无公共顶点的连通图 $G_1, G_2, \cdots, G_\omega$ 组成的. 不妨设前 m 个是非平凡图，后面 $\omega - m$ 个是平凡图，由归纳法假设，$G_1, G_2, \cdots, G_m$ 分别有欧拉回路 $W_1, W_2, \cdots, W_m$，于是 $W_1 \cup W_2 \cup \cdots \cup W_m \cup C$ 为 G 的欧拉回路. 证毕.

例 7 (1964 年波兰数学奥林匹克赛试题) 在圆上任取 $n > 2$ 个点，把每个点用线段与其余各点相连接，能否一笔画出所有这些线段，使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重，第二条线段的终点与第三条线段的起点相重，……，最后一条线段的终点与最初那条线段的起点相重合?

解 以这 n 个点为顶点，以这些线段为边构成一个连通图 G. 当 n 为奇数时，G 的每个顶点皆偶度，由定理 5，例 7 的回答是肯定的，当 n 为偶数时，回答是否定的.

思考题 10 哥尼斯堡七桥问题：从图 16.4 中 A, B, C, D 四块陆地中任一块出发通过每桥恰一次再返回出发点，是否可能?

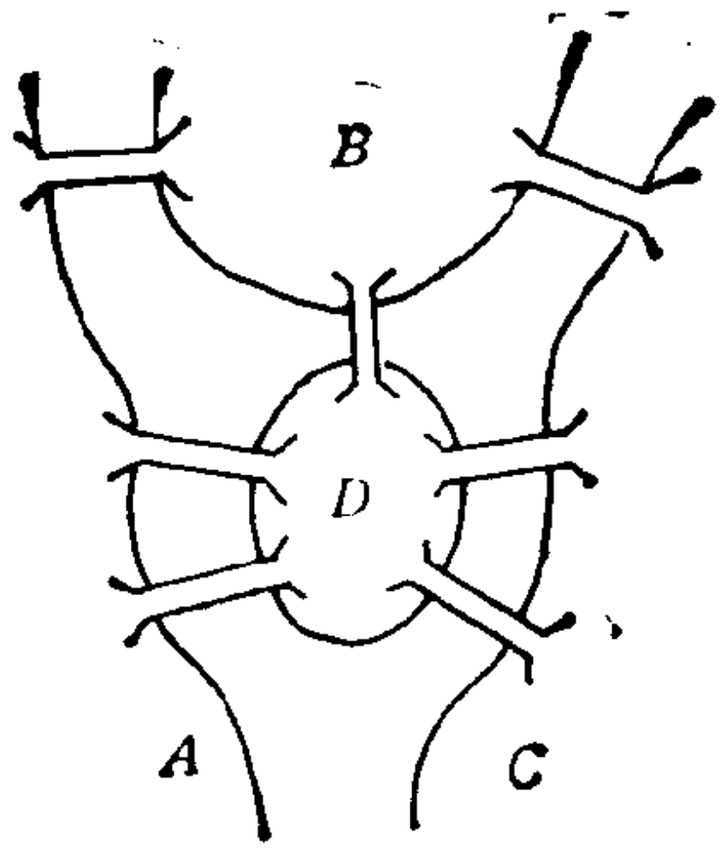
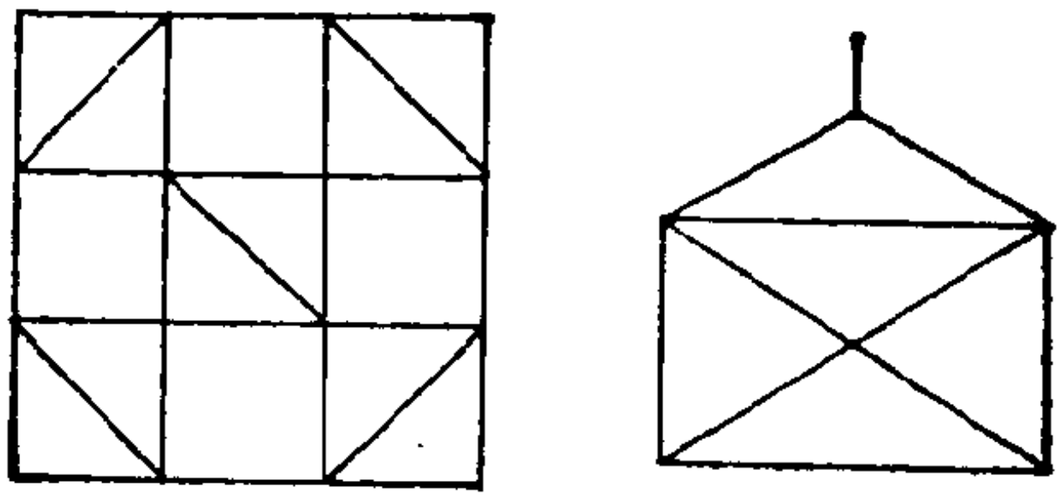


图 16.4　七桥问题

思考题 11　图 16.5 中 (a) 与 (b) 哪个可以一笔画出?



(a)　　(b)

图 16.5　一笔画问题

思考题 12　$|G|$已知，平面欧拉图 G 中无公共边的圈最多有多少?

五、哈密尔顿图

1859 年,数学家哈密尔顿发明了一种周游世界的游戏,把一个 12 面体的 20 个顶点分别标上北京、伦敦等 20 个大城市.要求玩的人从某座城市出发,沿着 12 面体的棱,通过每一城市恰一次，又回到原来的城市. 这种游戏曾风靡一时. 其实,这是在一个图(以正 12 面体的顶点为顶点，棱为边)上寻求一个包括一切顶点的圈的问题.

定义 5 含图的一切顶点的圈叫做哈密尔顿圈，有哈密尔顿圈的图叫做哈密尔顿图。

定理 6 $|G| \geqslant 3$，且图 G 的任意两个顶点 u，v 满足 $d(u) + d(v) \geqslant |G|$，则 G 是哈密尔顿图。

证明 先证 G 是连通图。若 G 不是连通图，$G = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_\omega$，$\omega \geqslant 2$，$G_i$ 与 $G_j (i \neq j)$ 是无公共顶点的连通图或平凡图。对于 G_i 的顶点 u_1，$d(u_1) \leqslant |G_i| - 1$，对于 G_j 的顶点 u_2，$d(u_2) \leqslant |G_j| - 1$，于是 $d(u_1) + d(u_2) \leqslant |G_i| + |G_j| - 2 \leqslant |G| - 2$，与定理条件相违，故 G 连通。

设 $P(v_1, v_{l+1})$ 是 G 之最长道路，它的内顶点依次是 v_2，v_3，$\cdots$，v_l，于是与 v_1，v_{l+1} 关联的边有一端点是 $P(v_1, v_{l+1})$ 的内顶点。设 v_1 与 $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ 相邻，若 v_{l+1} 与 $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \cdots, v_{i_k-1}$ 都不相邻，则 $d(v_{l+1}) \leqslant l - k$，$d(v_1) = k$，$d(v_1) + d(v_{l+1}) \leqslant l \leqslant |G| - 1$，与定理条件相违，所以 G 中必出现图 16.6 所示的结构。

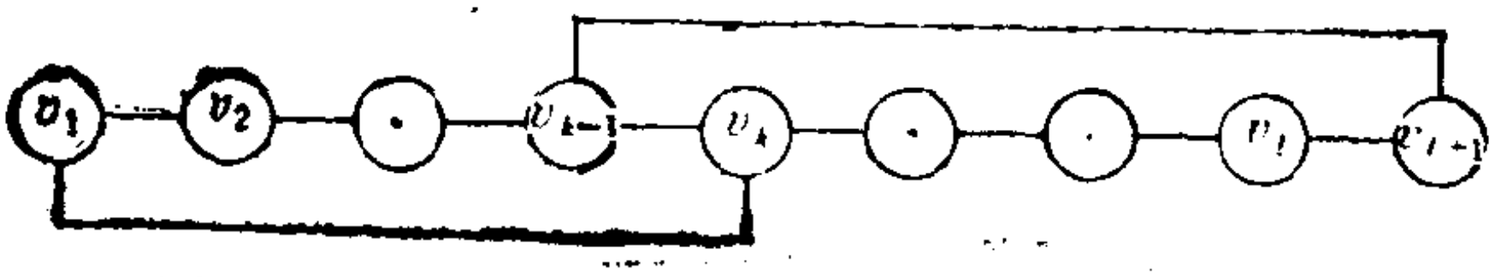


图 16.6 图中的圈

于是找到一个圈 $C = v_1 v_2 \cdots v_{k-1} v_{l+1} v_l v_{l-1} \cdots v_k v_1$；若 C 不是哈密尔顿圈，则有一个顶点 w 不在 C 上，由 G 的连通性，存在一道路 $P(w, v_1)$，设 v_{k_0} 是 $P(w, v_1)$ 上从 w 开始第一个在 C 上的内顶点，于是得到一条比 $P(v_1, v_{l+1})$ 更长的道路，与 $P(v_1, v_{l+1})$ 是最长道路矛盾，所以 G 是哈密尔顿图。证毕。

例 8 （1928 年匈牙利数学奥林匹克试题） 置 1，2，…，n 于一圆周上，使相邻两数之间的差最多为 2，证明恰有一解。

证明 以 1，2，…，n（不妨设 $n > 3$）为顶点，当且仅当 $|u - v| \leqslant 2$ 时连一边 uv，所得图 G 中，$d(1) = 2$，只欠证

明 G 有唯一的哈密尔顿圈. 事实上,当 $n=2k(k\geqslant 2)$ 时哈密尔顿圈为 $(1)(2)(4)(6)\cdots(2k)(2k-1)(2k-3)\cdots(3)(2)(1)$; 当 $n=2k+1(k>1)$ 时,哈密尔顿圈为 $(1)(2)(4)(6)\cdots(2k)(2k+1)(2k-1)\cdots(5)(3)(1)$. 见图 16.7 与图 16.8; 又由于 $d(1)=2$, 所以哈密尔顿圈是唯一的. 证毕.

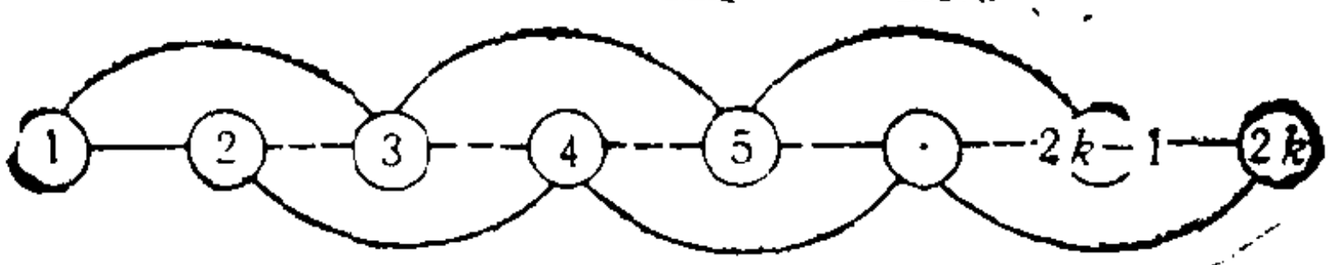


图 16.7 $n=2k$

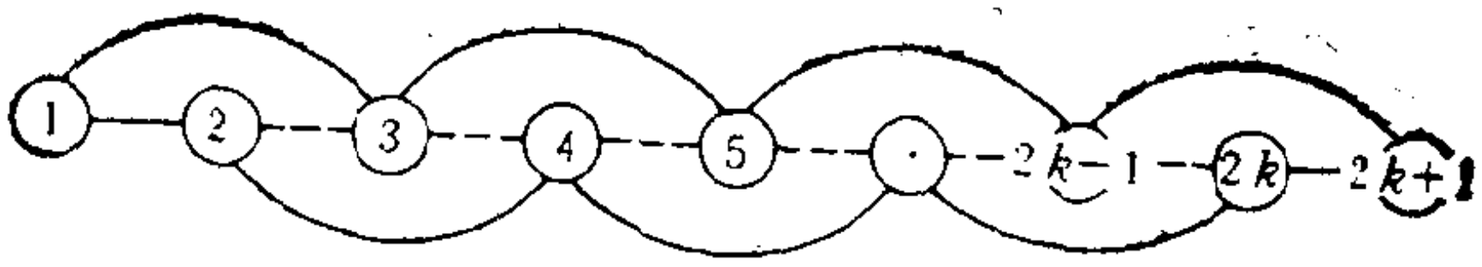


图 16.8 $n=2k+1$

例 9 (1967 年波兰数学奥林匹克试题) 证明: 若围圆桌至少坐着五个人,那么一定可以调整他们的座位,使得每个人两侧都挨着两个新邻居.

证明 若恰好五人入席, 设原来依逆时针为序是 $ABCDEA$, 调整成 $ADBECA$ 即可.

若超过五个人,以人为顶点,当两个人原来不相邻时, 在此相应的二顶点间连一边, 得到一个图 G. 只欠证 G 为哈密尔顿图. 事实上, $d(v)=|G|-3$, 于是任二顶点度数之和为 $2|G|-6$. 又 $|G|>5$, $|G|\geqslant 6$, 故对任二顶点 u, v, $d(u)+d(v)=2|G|-6\geqslant|G|$, 由定理 6, G 是哈密尔顿图. 证毕.

例 10 (1971 年波兰数学奥林匹克试题) 证明任一个有限集的全部子集可以这样排列顺序, 使任何相邻的集相差一个元素.

证明 设此有限集 A 有 n 个元素，其子集用 n 个数码的 0—1 数列来表示：当此子集中含 A 的第 i 个元素时（事先把 A 的 n 个元素编号），0—1 数列的第 i 个数码写 1，否则写 0。于是全部子集共计 2^n 个，以这 2^n 个数列为顶点，当且仅当两个数列仅一个同位数码相异时，此两顶点间连一边，得一个图 G_n。这种图叫做 n 维立方体，它是两个 $n-1$ 维立方体（$n \geqslant 2$）对应顶点（在 $n-1$ 维立方体中顶标一致的顶点）连上边得到的。于是用数学归纳法易证它是哈密尔顿图，按哈密尔顿圈的顺序排列即可。证毕。

图 16.9 是 n 维立方体 $n=3$ 的情形，上底下底是两个 2 维立方体，对应顶连线后（同时把上底上顶标末位加写 0，下底上顶标末位加写 1）得到 3 维立方体，实线表示出一个哈密尔顿圈为 (100)(000)(010)(110)(111)(011)(001)(101)(100)。更高维的情形与此类似，见图 16.10，实线为哈密尔顿圈。

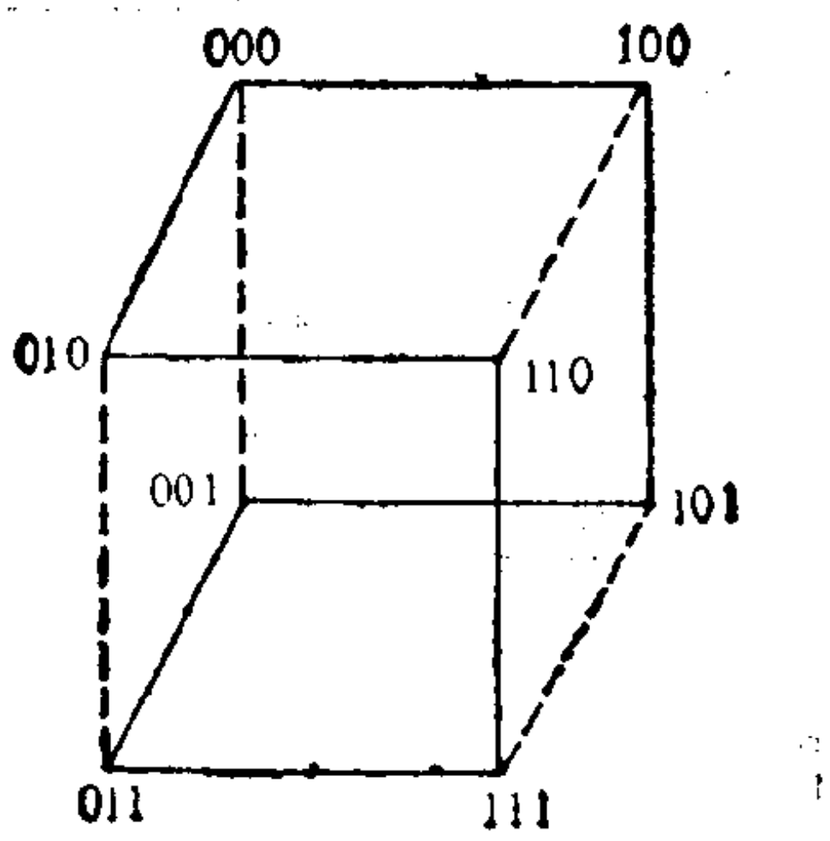


图 16.9 3 维立方体

下面讨论有向图中的哈密尔顿道路。把图的每边定一个方向后得到的图叫做有向图，有向的 K_p 叫做竞赛图。

设 G 是有向图，$v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 中 $v_0, v_i \in V(G)$，$e_i \in E(G)$，且 e_i 的方向是由 v_{i-1} 到 v_i，$i=1,2,\cdots,k$。则称 $v_0e_1v_1\cdots e_kv_k$ 为 G 中一条有向道路。若有向道路上包含图 G 的一切顶点，则称为有向哈密尔顿道路。

定理 7 竞赛图中存在有向哈密尔顿道路。

证明 用关于顶点数的归纳法来证。对仅两个顶点的竞

赛图，定理成立．假设对不超过 k 个顶点的竞赛图，定理已成立，下设竞赛图有 $k+1$ 个顶点，记成 $\boldsymbol{K}_{k+1}$，任取 $v \in V(\boldsymbol{K}_{k+1})$，则 $\boldsymbol{K}_{k+1}-v$ 中存在有向哈密尔顿道路 $u_1u_2\cdots u_k$（u_i 是顶点）．

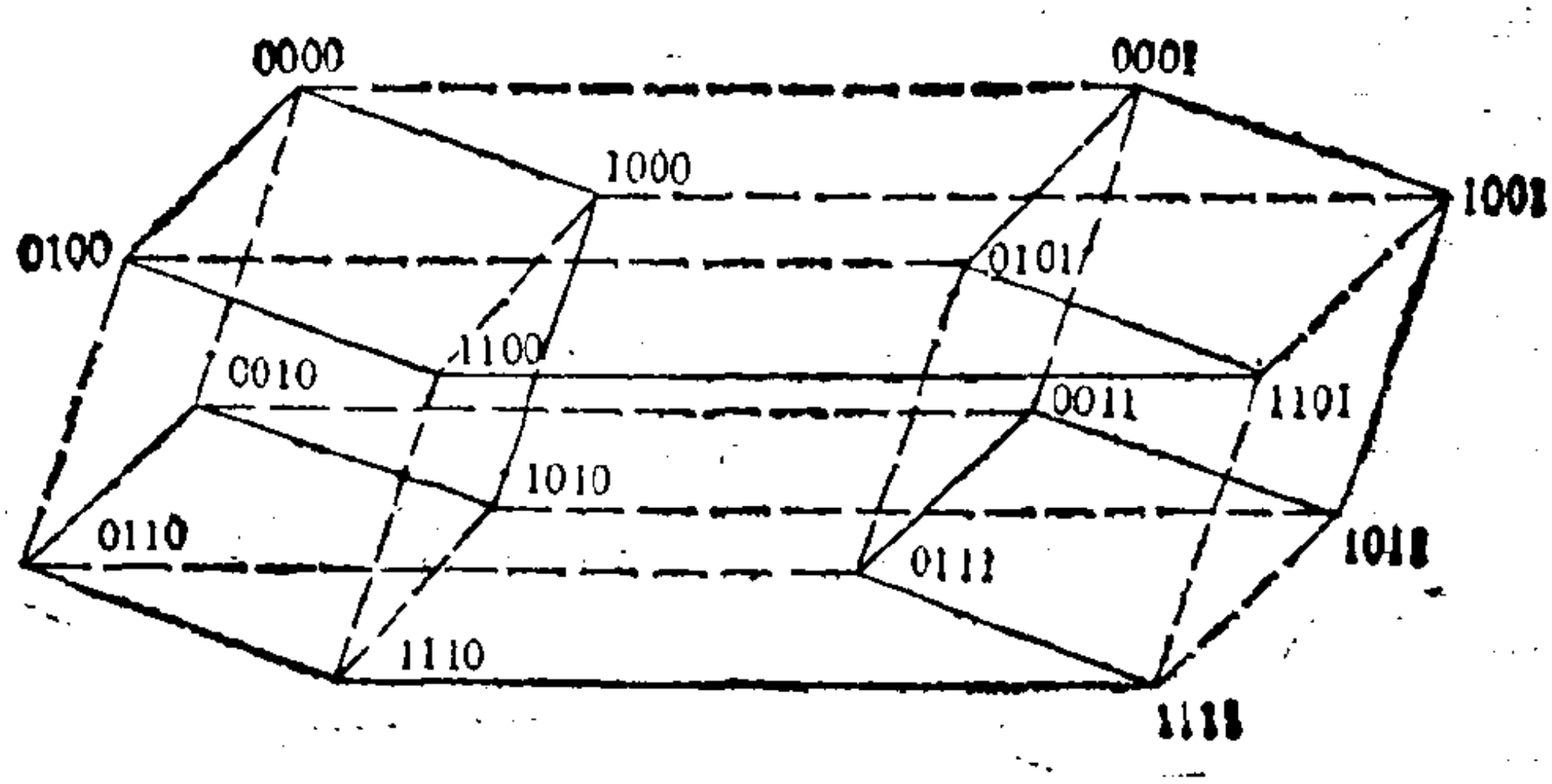


图 16.10　4 维立方体

(1) 若 $\boldsymbol{K}_{k+1}$ 中与 v 关联的边皆从 v 指向 $\boldsymbol{K}_{k+1}-v$ 中的顶点或皆从 $\boldsymbol{K}_{k+1}-v$ 中的顶点指向 v，显然 $\boldsymbol{K}_{k+1}$ 中也有有向哈密尔顿道路．

(2) 否则，呈现图 16.11 的情形．记 $V_1=\{u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_m}\}$，$V_2=\{u_{i_{m+1}},\cdots,u_{i_k}\}$．若 u_1 在 V_1 中或 u_k 在 V_2 中，则 $\boldsymbol{K}_{k+1}$ 中也有有向哈密尔顿道路；不然，从 u_1 起，追踪有向道路 $u_1u_2\cdots u_k$，由于 $u_1\in V_2$，当我们沿有向道路 $u_1u_2\cdots u_k$ 行至 $u_{i_{j0}}\in V_2$，而 $u_{i_{j0}+1}\in V_1$ 时，由 $u_{i_{j0}}$ 行至 v，再由 v 行至 $v_{i_{j0}+1}$，然后继续追踪 $u_1u_2\cdots u_k$ 一直行至 u_k，于是得到 $\boldsymbol{K}_{k+1}$

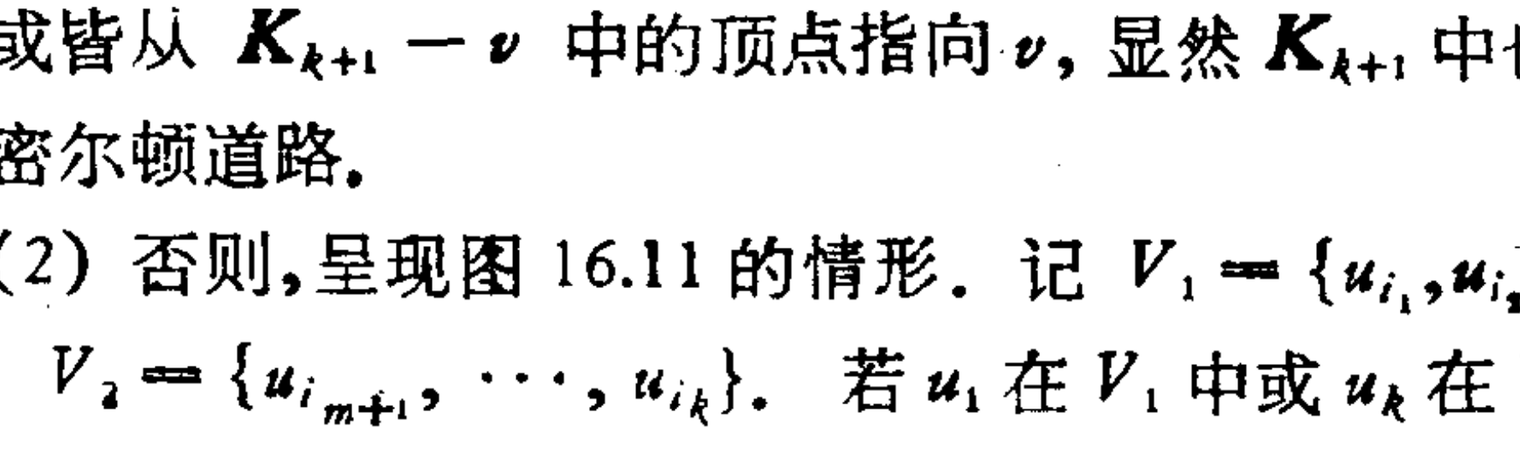


图 16.11　$\boldsymbol{K}_{k+1}$ 中的哈密尔顿道路

中的一条有向哈密尔顿道路. 证毕.

例 11 （第 25 届莫斯科数学奥林匹克试题） 在象棋赛中，每两个选手都要赛一场，证明：我们可以给所有参赛选手编号，使得无论哪个选手都没有输给紧接在他后面编号的那个选手.

证明 以选手为顶点，当甲未输给乙时，从甲顶向乙顶连一条有向边，得到一个竞赛图 K_n（不妨设共 n 个选手），由定理 7，K_n 中有有向哈密尔顿道路，我们按此有向道路上选手出现的顺序为他们编号即可. 证毕.

思考题 13 中世纪英国亚瑟王在宫中召见他的 $2n$ 个骑士，其中某些骑士间互存仇怨，但每个骑士的仇人不超过 $n-1$ 个，证明：亚瑟王的谋士摩尔林能够让这些骑士围着圆桌就坐，每个骑士都不与其仇人相邻.

思考题 14 一百种昆虫，每两种之中有一种能消灭另一种，将这一百种昆虫每种取一只排成一路纵队，使得每一昆虫都能消灭它后面的那个昆虫.

思考题 15 n 名棋手循环赛，无平局，也无全胜者，则必有三人甲乙丙，使甲胜乙，乙胜丙，丙又胜甲 ($n \geqslant 3$).

六、图上匹配

定义 6 若 $M \subseteq E(G)$，M 中任二边无公共端点，则称 M 是图 G 中的一个匹配；若 M 的边之端点包括 G 的一切顶点时，则称 M 为 G 的一个完备匹配. M 中每一边的两个端点称为相配.

例 12 (1961 年波兰数学竞赛试题) 某人给六个人写了六封信，并且准备了六个写有收信人地址的信封. 问有多少

种投放信笺的方法，使每份信笺与信封上收信人不相符？

解 设信笺为 x_i，信封为 y_i，$i=1,2,3,4,5,6$，x_i 与 y_i 是相符的，于是问题转化为求图 16.12 中的图 G 有多少不同的完备匹配，我们把这个数目记成 $\varphi(6)$。x_1 与 y_2 相配时，完备匹配的个数等于从图 G 中删除顶点 x_1，y_2 后所得的图 $G_{x_1y_2}$ 中完备匹配的个数，这个数目记成 $\phi(5)$。在 $G_{x_1y_2}$ 中，若 x_2 与 y_1 相配，则 $\phi(5)=\varphi(4)$；若 x_2 与 y_1 不相配，则 $\phi(5)=\varphi(5)$。于是 G 中 x_1 与 y_2 相配时，可得到 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配。同理，x_1 与 y_j $(3\leqslant j\leqslant 6)$ 相配时，亦有 $\varphi(5)+\varphi(4)$ 个完备匹配，故 $\varphi(6)=5[\varphi(5)+\varphi(4)]$。同理可得 $\varphi(5)=4[\varphi(4)+\varphi(3)]$，$\varphi(4)=3[\varphi(3)+\varphi(2)]$，$\varphi(3)=2[\varphi(2)+\varphi(1)]$，而 $\varphi(2)=1$，$\varphi(1)=0$，故可求得 $\varphi(6)=265$，即可有 265 种投放方法。

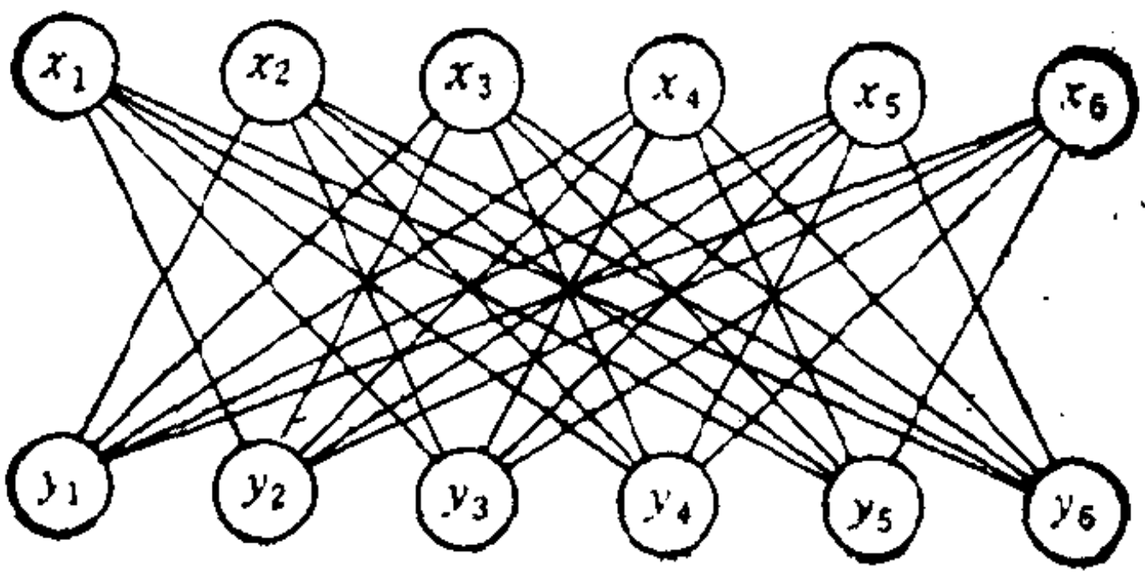


图 16.12 信笺错放

这个问题即著名的伯努利-欧拉错放信笺问题，对于 n 封信的一般情形，同样有递推公式

$$\varphi(n)=(n-1)[\varphi(n-1)+\varphi(n-2)].$$

思考题 16 求 K_{2n} 中（n 是自然数）不同的完备匹配的个数。

思考题 17 两人在图 G 上博奕，交替地选择相异的顶点 $v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得当 $j>0$ 时，v_j 与 v_{j-1} 相邻直至不能再

选到顶点时比赛结束，最后选到顶点的人为赢，证明第一个选顶点者有必胜策略的充要条件是G中无完备匹配。

七、图的着色和拉姆赛数

定义 7 用n种颜色对图K_p的边进行着色，使每个边都用某种颜色染色，若总会出现同色三角形时，则记p的最小值为r_n，称r_n为拉姆赛数。

定理 8 设$S_1, S_2, \cdots, S_n$是集合$\{1, 2, \cdots, r_n\}$的任意划分，则存在一个i，$1 \leqslant i \leqslant n$，使得$S_i$中有方程$x + y = z$的根。

证明 用$1, 2, 3, \cdots, n$这n种颜色对K_{r_n}的边着色，设K_{r_n}的顶点集为$\{1, 2, \cdots, r_n\}$，当且仅当$|u - v| \in S_j$时，uv边着以j色，由r_n的定义，必有同色三角形出现，设同色三角形的三个顶点为a, b, c.无损一般性，不妨设$a > b > c$.这时边ab，bc，ac有同色i.令$x = a - b$，$y = b - c$，$z = a - c$，则$x, y, z \in S_i$，且$x + y = z$.证毕.

例 13（第 11 届莫斯科数学奥林匹克试题） 在平面上任做n条直线，这些直线把平面划分成若干区域.证明：只需两种颜色即可把任何有公共线段的相邻区域染上不同的颜色.

证明 对n进行归纳证明.$n = 1$时命题成立，假设$n \leqslant k$时命题成立，令$n = k + 1$，从$k + 1$条直线中任意删除一条直线L，由归纳法假设，对剩下的k条直线划分的区域，可用a, b两种颜色着色，且使相邻区域异色.这时再把L恢复到原来位置上，且把L某一侧的a, b两色互换，则得证命题对$k + 1 = n$亦成立.证毕.

例 14（1947 年匈牙利数学奥林匹克试题） 六人中必有

三人彼此相识或有三人彼此不相识.

证明 考虑 K_6，顶点代表人，当相识时二顶点间为绿色边，否则为红色边. 设 $V(K_6)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$. 与 v_1 关联的 5 条边中有三条边同色，不妨设同为绿边，它们是 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4. 若 $\triangle v_2v_3v_4$ 是红色的，则命题得证，不然，$\triangle v_2v_3v_4$ 中至少有一边绿色，这时又出现以此边为底边以 v_1 为顶点的一个绿色三角形. 证毕.

容易举出反例，5 个人中不具有例 15 所述的结论，故知 $r_2=6$.

例 15 (1976 年波兰数学奥林匹克试题) 平面上有六个点，任何三点都是一个不等边三角形的顶点，则这些三角形有一个的最短边又是另一个三角形的最长边.

证明 把每个三角形的最短边染成红色，剩下的边染成白色. 由于 $r_2=6$，必出现同色三角形. 又每个三角形都有最短边，所以每个三角形上都有红色边，故上述同色三角形是红色的，所以它的最长边也是红的，同时又是另一个三角形的最短边. 证毕.

例 16 (第 20 届国际数学奥林匹克试题) 一个国际社团，由六个国家的 1976 名人士组成，对每个人任意编一号码，号码从 1 到 1976，则一定有一人的号码是其一同胞号码的二倍或两个同胞号码之和.

证明 由定理 8，只欠证 $r_6 \leqslant 1976$. 为此我们首先证明不等式(方括号表示取整数部分)

$$r_n \leqslant [n!e]+1.$$

事实上，由于 $r_2=6$，故当 $n=2$ 时不等式成立. 假设 $r_n \leqslant [n!e]+1$ 已成立，下面证明 $r_{n+1} \leqslant [(n+1)!e]+1$.

可以证明 $r_{n+1} \leqslant (n+1)(r_n-1)+2$，于是由归纳假设，得

$$r_{n+1} \leqslant (n+1)[n!\,e] + 2$$

$$= (n+1)\left[n!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\right)\right] + 2 = (n+1)!$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) + 2, \quad (0 < \theta < 1)$$

而

$$[(n+1)!\ e] + 1 = \left[(n+1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^{\theta'}}{(n+2)!}\right)\right] + 1$$

$$= (n+1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}\right) + 1$$

$$= (n+1)!\left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + 2,$$

$$0 < \theta' < 1.$$

故 $r_{n+1} \leqslant [(n+1)!\,e] + 1$.

于是

$$r_6 \leqslant [6!\,e] + 1 = 1958.$$

证毕.

由上述证明可见,把 1976 缩小为 1958, 命题仍成立.

思考题 18 9 人中必有 3 人彼此相识或 4 人彼此不相识.

思考题 19 用 $\triangle+1$ 种颜色定能对图的顶点着色, 使相邻顶点异色,其中$\triangle$是图中顶的最大度数.

思考题 20 把 k 维立方体的顶点着色, 使相邻顶点异色,至少需要几种颜色?

第十七讲　初等数学中所遇到的一些子集类

苏　淳

集合论的引入，为20世纪的数学发展带来了蓬勃的生机．集合论的概念，如今已几乎渗透到了现代数学的每一个分支．在我国的中学数学课本之中，已经对集合论的概念作了一些介绍．而在各类数学竞赛中，需要用集合论的概念来解答的问题，则早已是屡见不鲜了．为了适应数学竞赛解题的需要，我们打算就历年来各种竞赛试题所涉及的一些子集类的性质集中作些介绍．当然这种介绍只能是初步的，有些甚至还只是就事论事的．

在此还应当说明一点，这就是本文的有些内容，笔者曾分别在一些中学数学杂志和《初等数学论丛》（上海教育出版社出版）上发表过，这次只是为了能系统地作些介绍，而把它们集中了起来．

我们先从有限集合谈起．

生活中的有限集合是很多的．　如：一个班的同学的全体，10以内的自然数的全体，某个城市的公共汽车站的全体，等等．有限集合中的元素数目，叫做该集合的阶．换句话说，一个n阶的集合，就是一个由n个元素组成的集合．

由集合中的部分元素组成的集合，叫做原来集合的子集．特别地，任何一个集合都是它自身的一个子集；而空集可以看成任何一个集合的子集．除自身之外的子集，都叫做真子集．由排列、组合知识不难算出，一个n阶集合拥有2^n个不同的

子集，其中有 2^n-1 个非空子集，也有 2^n-1 个真子集.

设 Ω 是一个 n 阶集合，$A\subset\Omega$ 是 Ω 的一个子集. 那么 Ω 中凡不属于 A 的元素当然也构成了 Ω 的一个子集（当 A 就是 Ω 自身时，这个子集就是空集），我们将这个子集记作 $\bar{A}$，称为 A 的补集. 显然在 A 和 $\bar{A}$ 之间存在着下述关系：

$$A\cap\bar{A}=\varnothing,\quad A\cup\bar{A}=\Omega.$$

由于每一个子集 A 都有一个补集 $\bar{A}$（而 $\bar{A}$ 的补集就是 A，故知 $\bar{\bar{A}}=A$），所以可将 Ω 的全部 2^n 个子集按照互补关系分成 2^{n-1} 对. 利用这一结论，我们可以解答下面的问题.

例 1（1972年加拿大中学生数学竞赛试题） 在某次竞选中，各个政党共作出 p 种不同的诺言（$p>0$），任何两党都至少有一种公共诺言，但没有两党作出全部相同的诺言. 试证，政党的数目不多于 2^{p-1} 个.

我们将 p 种诺言构成的集合记作 Ω，则每个政党所作的诺言所构成了 Ω 的一个子集，而且由题意可知，它们都是 Ω 的一些不同的子集. 又由于任何两党都至少有一种公共诺言，所以决不可能有某两个政党的诺言刚好构成一对互补的子集. 这就告诉我们，在每对具有互补关系的子集中，至多只有一者可以成为某个政党的诺言集合，由此足见政党的数目不可能超过 2^{p-1}.

通过对上述例题的讨论，我们可以看到，在许多场合下，人们不仅需要讨论有限集合的本身或是它们的某些具体的子集，而且还需要从整体方面考虑某些子集之间的相互关系，这一事实导致我们从更高层次上来考虑问题，也就是要考虑由一个集合的子集作为元素的集合.

显然，如果以一个 n 阶集合的部分子集作为元素，我们又可以得到一些“新”的集合. 但与原来的 n 阶集合不同的是，这些“集合”中的元素不再是原来集合的元素，而却是它的子

集．这样的集合，我们叫做原来集合的子集类．子集类一般用草体的大写字母表示，如，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$等．子集类中所含原来集合的子集的数目，叫做该子集类的阶．

子集类的性质是有趣的．关于某些特定的子集类的研究，构成了一些近代数学分支的主题内容．我们打算在这里介绍几种在解决初等数学问题中有用的子集类．

一、C类

设Ω是一个n阶集合，记作

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

上面已经谈到，Ω一共有2^n个不同的子集．利用这一结论，我们可以解答一些有趣的问题．

例2（第14届国际数学奥林匹克试题） 一个集合含有10个互不相同的十进制两位数．证明，这个集合必有两个无公共元素的子集合，这两个子集合中的数字之和相等．

事实上，由于该集合共有$2^{10}-1=1023$个非空子集合，每一个这样的子集合又都是由一些两位数构成，两位数的个数又都不超过10个，可见每一个这样的子集合中的数字之和都不会超过$10\times 100=1000$，因此由抽屉原则知，其中必有一些不同的子集合，它们中的数字之和相等．任意取出两个这样的子集合，划去它们的公共元素，即可使它们既无公共元素，数字之和又相等．

现在我们来考虑由n阶集合Ω的所有子集构成的子集类．这样的子集类叫做C类，C是英文单词“完全（Complete）”的第1个字母，意即这样的子集类中包括了Ω的所有子集，无一例外．如果将Ω的2^n个子集记作$A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}$（其中包括了空集$\varnothing$和$\Omega$自身），则

$$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{2^n}\}$$

即为Ω的C类.

关于C类,有如下有趣命题.

例 3 可以将Ω的C类$\mathscr{A}$中的元素排成一列,使得每两个相邻者的元素都仅相差 1 个.

在这里,我们两次用到了"元素"一词,却是代表着不同的含义,前者是指$\mathscr{A}$中的元素,即Ω的子集;后者却是子集中的元素,也就是Ω中的元素.

我们对Ω的阶数n使用数学归纳法.

当$n=1$ 时,有 $\Omega=\{\omega_1\}$, 因此 $\mathscr{A}=\{\varnothing,\{\omega_1\}\}$, 故只要将$\mathscr{A}$中的元素排列成 $\varnothing$, $\{\omega_1\}$, 即可满足要求,知命题成立.

假设当$n=k$时,命题已成立,要证当 $n=k+1$ 时,命题也能成立. 此时

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_k, \omega_{k+1}\},$$

为便于使用归纳假设,我们记 $\Omega_1=\{\omega_1, \cdots, \omega_k\}$, 则$\Omega_1$是$\Omega$的一个$k$阶子集. 设$\Omega_1$的$C$类为

$$\mathscr{A}_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}\},$$

则由归纳假设知, 可将 $\mathscr{A}_1$ 中的元素按所述规则排成一列,不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}$ 就是一种符合规则的排列. 那么,由于

$$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}, A_1\cup\{\omega_{k+1}\},$$
$$A_2\cup\{\omega_{k+1}\}, \cdots, A_{2^k}\cup\{\omega_{k+1}\}\}$$

就是Ω的C类,而且不难验证, 对$\mathscr{A}$中元素的下述排列就是符合规则的:

$$A_1, A_2, \cdots, A_{2^k}, A_{2^k}\cup\{\omega_{k+1}\}, \cdots,$$
$$A_2\cup\{\omega_{k+1}\}, A_1\cup\{\omega_{k+1}\},$$

可见当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

所以对任何有限集合 Ω，所述命题都成立。

下面我们再利用 C 类来解决一些问题。

例 4（第 9 届加拿大中学生数学竞赛试题） 矩形城市的道路非常规则，恰好有 m 段长和 n 段宽（见图 17.1）。一个妇女住在城市的西南角，工作在东北角，她每天步行去工作，可供选择的路径当然有不少。如果每个交叉路口不得经过两次，证明她所能选取的路线数目 $f(m, n)$ 满足

$$f(m, n) \leqslant 2^{mn}.$$

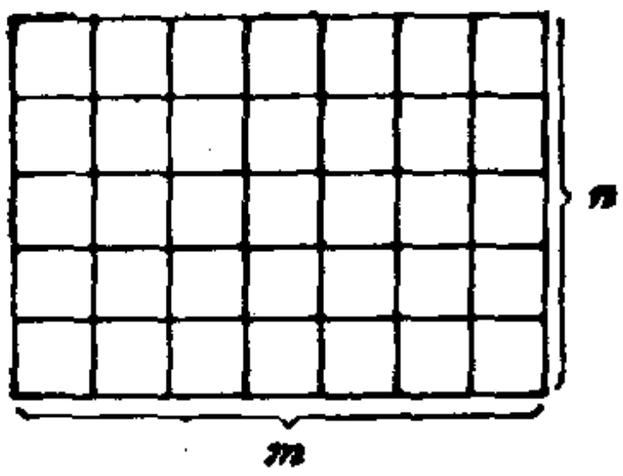


图 17.1

为了解答这个问题，我们将图 17.1 中的方格（注意，不是道路）的全体取作集合 Ω，则 Ω 共由 mn 个方格组成，即它的阶是 mn。显然，沿着每条可允许的路线划界，都可以将 Ω 分成两个不相交的子集（一个位于沿道路前进时的左侧，另一个位于右侧），当然两者之一可能为空集（例如，先一直向北，再一直向东，其左侧即为空集）。如果令每条可允许路线都与其左侧的子集相对应，则显然不同的路线对应着 Ω 的不同子集，即对应着 Ω 的 C 类 $\mathscr{A}$ 中的不同的成员，足见可允许的路线数目 $f(m, n)$ 不会超过 $\mathscr{A}$ 中的成员数目，这就是说 $f(m, n) \leqslant 2^{mn}$。

下面讨论上式中等号成立的可能性。易知，当 m，n 中有一个等于 1，例如 $n = 1$ 时（如图 17.2），则可有 $f(m, 1) = 2^m = 2^{m \cdot 1}$。但若 $\min(m, n) \geqslant 2$，则等号不可能成立。这是因为 Ω 的一切子集并不都可以通过用可容许路线划界得

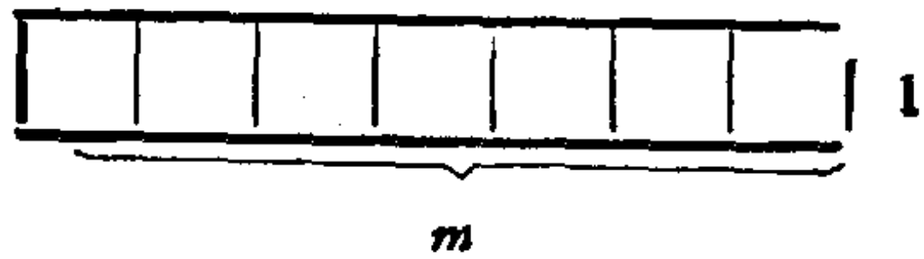


图 17.2

到. 例如 $m = n = 2$ 时，如图 17.3 中打斜线的和不打斜线的两个子集就不是以一条可容许路线划界的. 所以当 $m \geqslant 2$，且 $n \geqslant 2$ 时，$f(m, n) < 2^{mn}$.

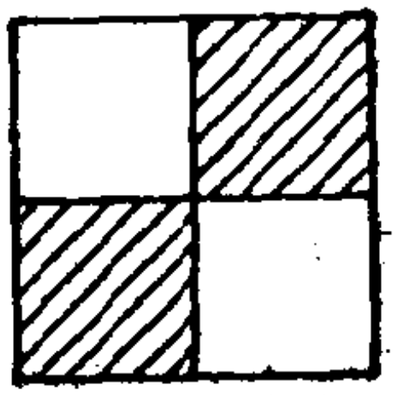


图 17.3

为了继续下面的讨论，我们需要引人一个概念，这就是 Ω 中的元素 ω 在它的某个子集类 $\mathscr{A}$ 中的出现次数的概念，其含义如下：

因为 $\mathscr{A}$ 是由 Ω 的一些子集构成的集合，所以对于 $\omega \in \Omega$，在 $\mathscr{A}$ 中可能会有一些成员以它为元素，另一些成员不以它为元素. 这样便产生了一个问题：在 $\mathscr{A}$ 中究竟有多少成员以 ω 为元素？我们把 $\mathscr{A}$ 中以 ω 作为元素的成员的数目，就叫做 ω 在 $\mathscr{A}$ 中的出现次数. 换言之，所谓 $\omega \in \Omega$ 在 $\mathscr{A}$ 中出现了 m 次，是指在 $\mathscr{A}$ 中存在 m 个不同的 Ω 的子集，这些子集都以 ω 为元素.

如果 $\mathscr{A}$ 是 n 阶集合 Ω 的 C 类，那么不难证明，Ω 的每一个元素 ω 都在 $\mathscr{A}$ 中出现了 2^{n-1} 次. 换言之，Ω 恰有 2^{n-1} 个子集以 ω 为元素，而另外 2^{n-1} 个子集则都不以 ω 为元素.

有了上述预备知识，我们就可以方便地解决如下例题了.

例 5 设 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$，$\mathscr{A}$ 为 Ω 的 C 类. 对 $\mathscr{A}$ 中的每个 Ω 的子集，都求出其中数字的和，再将这些和相加，试求出此总和.

事实上，对于每个 $i \in \Omega$，都在 $\mathscr{A}$ 中出现了 2^{n-1} 次，因此所求的总和为

$$(1 + 2 + \cdots + n)2^{n-1} = n(n + 1)2^{n-2}.$$

例 6（第 1 届美国数学邀请赛试题） 对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 及其每一非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数（例如，$\{1, 2, 4, 6, 9\}$ 的“交替和”是 9—6+

$4-2+1=6$，$\{5\}$ 的“交替和”就是 5)。 对 $n=7$，求所有这种“交替和”的总和。

解 取 $\Omega=\{1,2,\cdots,7\}$，我们来考察 Ω 的每个元素在“交替和”的总和中作了多少次“正贡献”?多少次“负贡献”?

由于 7 为最大元，它在“交替和”的总和中只作“正贡献”，不作“负贡献”。由于它在 $\mathscr{A}$ 中共出现 $2^{7-1}=2^6=64$ 次，所以它对总和的贡献为 $64\times 7=448$。

对每个 $1\leqslant i\leqslant 6$，则既有“正贡献”，又有“负贡献”，当 i 在 Ω 的某个子集中自大到小名列第一、第三、第五、第七时，其贡献为正，否则为负，容易想见，$\mathscr{A}$ 中每个包含 i 的 Ω 的子集可表为

$$A\cup\{i\}\cup B.$$

其中 $A\subset\{1,\cdots,i-1\}$，$B\subset\{i+1,\cdots,7\}$。 当 B 的阶数为奇数时， i 名列偶数位，其贡献为负；当 B 的阶数为偶数时， i 名列奇数位，其贡献为正。易知，$\{i+1,\cdots,7\}$ 为 $7-i$ 阶集合，它的偶数阶子集有

$$C_{7-i}^{0}+C_{7-i}^{2}+\cdots=2^{6-i}$$

个，它的奇数阶子集也有

$$C_{7-i}^{1}+C_{7-i}^{3}+\cdots=2^{6-i}$$

个。对应每一个 B，A 的选法有 2^{i-1} 种。所以 i 对总和的“正贡献”为

$$i\cdot 2^{6-i}\cdot 2^{i-1}=i\cdot 2^5,$$

i 对总和的“负贡献”也为

$$i\cdot 2^{6-i}\cdot 2^{i-1}=i\cdot 2^5,$$

从而对每个 $1\leqslant i\leqslant 6$，其对总和的“贡献”为 0。

综上，知对 $\Omega=\{1,2,\cdots,7\}$，其“交替和”的总和为 $7\cdot 2^6=448$。

由上述推理过程可以看出，一般地，对 $\{1,2,\cdots,n\}$，其

"交替和"的总和为 $n \cdot 2^{n-1}$。

二、R 类

R类是一种在生活中和数学研究中都十分有用的子集类。我们先来看一个例子。

例 7 （1983 年合肥市数学竞赛试题） 某新建城市购进大批公共汽车，用以解决市内交通问题。他们计划在 1983 个不同地点建立汽车站，并通过开辟若干线路的公共汽车沟通它们。他们的愿望是：(1) 尽可能多开辟一些线路；(2) 每两条线路至少有一个公用的汽车站；(3) 每个公共汽车站至多经过两条不同线路。问：照此愿望，他们最多可以开设多少条线路的公共汽车？每条线路至少应经过多少个车站？

如果我们记 1983 个车站形成的集合为 Ω，再设共开辟了 k 条线路的公共汽车，并且分别以 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 记它们所经过的车站的集合，则它们都是 Ω 的子集，从而 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是 Ω 的一个子集类。由题意可以知道，$\mathscr{A}$ 具有性质：

$$\begin{cases} \text{(i)}\ A_{i_1}A_{i_2} \neq \varnothing, \text{ 对任何 } 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant k; \\ \text{(ii)}\ A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3} = \varnothing, \text{ 对任何 } 1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant k. \end{cases}$$

也就是说，其中的每两个子集都相交，但每三个子集的交都是空集。

由上面的性质可以推知，每个子集所含的元素（即车站）数目不会少于 $k-1$ 个。这是因为，由 (i) 知每个子集都与其余 $k-1$ 个子集至少有一个公共元素，而由 (ii) 知这些公共元素两两不同(不然，就会造成某三个子集之交非空)。于是这 k 个子集所含元素之和不少于 $k(k-1)$。但在这样的计算过程中，每个元素都算了两次(因为它们都同时属于两个

不同子集)，所以 $\bigcup_{j=1}^{k} A_j$ 中的元素数目不少于 $\frac{1}{2}k(k-1)$ 个．但因 $\bigcup_{j=1}^{k} A_j = \Omega$，所以 $\frac{1}{2}k(k-1) \leqslant 1983$，即 $k(k-1) \leqslant 3966$．满足此不等式的最大整数为 $k=63$．所以，按照该城市规划人员的愿望，至多可开设 63 条线路的公共汽车，每条线路至少应经过 $k-1=62$ 个公共汽车站。

至此，例 7 就解完了．但其中涉及的子集类却具有普遍的意义，值得作进一步的讨论。

定义 1 设 Ω 是一个 n 阶集合，$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$ 是它的一个子集类，如果对某个 $2 \leqslant r \leqslant k-1$，有

(i) $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r} \neq \varnothing$，其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant k$；

(ii) $A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_r}A_{i_{r+1}} = \varnothing$，其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r < i_{r+1} \leqslant k$．则称 $\mathscr{A}$ 是 Ω 的一个指数为 r 的 R 类。

显然，指数为 r 的 R 类中的每 r 个子集都相交，但每 $r+1$ 个子集的交都是空集。例 7 中的 $\mathscr{A}$ 就是一个指数为 2 的 R 类。

运用与前类似的推理可以知道，R 类中每个子集的阶数不小于 C_{k-1}^{r-1}。这是因为：由 (i) 知每个子集都与从其余 $k-1$ 个子集中选出的任意 $r-1$ 个子集的交至少有一个公共元素，这样的选出方式有 C_{k-1}^{r-1} 种；由 (ii) 知这 C_{k-1}^{r-1} 个元素两两不同．因若不然，就会造成某 $r+1$ 个子集的交非空．事实上，如果 $(i_1, i_2, \cdots, i_{r-1})$ 和 $(j_1, j_2, \cdots, j_{r-1})$ 是自 $(1, 2, \cdots, k-1)$ 取出的不同组合，则至少存在一个元素，不妨是 i_1，有 $i_1 \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_{r-1}\}$。但若有 $\alpha_i = \alpha_j = \alpha$，使

$$\alpha_i \in A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{r-1}}A_k,$$

$$\alpha_j \in A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_{r-1}}A_k,$$

就会有 $\alpha \in A_{j_1}A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_{r-1}}A_k$，这样，$A_{j_1}$，$A_{i_1}$，$A_{i_2}$，$\cdots$，$A_{i_{r-1}}$，$A_k$ 这 $r+1$ 个子集的交集就非空了，从而与 (ii) 矛盾. 所以每个子集至少含有 C_{k-1}^{r-1} 个元素，从而$\mathscr{A}$中 k 个子集的元素之和不少于 kC_{k-1}^{r-1}. 但在上面的计算过程中，每个元素都计算了 r 次(因它们都同时属于 r 个不同子集)，所以 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ 中所含的元素个数不少于 $\frac{k}{r}C_{k-1}^{r-1}$. 但由于 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset Q$，所以有 $\frac{k}{r}C_{k-1}^{r-1} \leqslant n$，即有 $C_k^r \leqslant n$.

以上的讨论弄清了指数为 r 的 R 类中各个主要数据之间的关系，提供了应用 R 类于实际数学问题的路子.

例 8 有 11 个人需进入某一保险库，试问，应当怎样给库门加锁和分配钥匙，才能使得任何 6 个人的钥匙凑在一起就可以把门打开，而任何 5 个人的钥匙则不可能打开？

设共加了 n 把锁，以 Q 记这些锁的集合，并以 $A_1, \cdots, A_{11}$ 分别记这 11 个人所打不开的锁的集合. 由题意即知 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{11}\}$ 是一个指数为 $r=5$ 的 11 阶的 R 类. 于是有

$$n \geqslant C_{11}^5,$$

取其等号，知至少应装 C_{11}^5 把锁. 钥匙的分配，可按下述原则进行：先将 C_{11}^5 把锁依次编为 $1, 2, \cdots, C_{11}^5$ 号；再将 11 个人的所有不同的 5 人组合方式也依次编为 $1, 2, \cdots, C_{11}^5$ 号(一种组合方式对应一个号码). 于是，每一个人都属于 C_{10}^4 个不同的 5 人组合方式，它们各自都有一个号码. 我们只要不将这些号码的锁的钥匙发给该人，而将其余号码的锁的钥匙都发给他就行了. 不难验证，这种分配方法即能满足要求.

例 9(1978年美国威斯康辛大学选拔天才学生用题) 一

个盒子被若干把锁锁住，有 5 个人，每人都有一些锁的钥匙．现知每两个人都不能打开所有的锁，但每 3 个人却都可以打开．问锁的数目至少为多少？

显然有 $n \geqslant C_5^2 = 10$ 把．

例 10（1950 年莫斯科数学奥林匹克试题） 能否在一个城市设立一些车站，并开辟 10 条线路的公共汽车，使得任何 8 条线路都不能跑遍所有车站，但任何 9 条都可以．

假设共设立了几个车站，将这些车站构成的集合记作 Ω，再以 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 分别记各条线路所不能到达的车站的集合．显然 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_{10}\}$ 是 Ω 的一个子集类，且是一个指数 $r = 8$ 的 R 类，故知题述的要求是能够办到的，且因

$$n \geqslant C_{10}^8 = 45, \quad C_{k-1}^{r-1} = C_9^7 = 36,$$

知至少应设 45 个车站，而且每条线路都至少有 36 个车站不能到达．循此原则，自然不难给出一个具体的规划方案．

有趣的是，R 类不仅在日常生活中有用，而且在数学理论的研究中也有用．下例就是一个数论中的问题．

例 11 试证：对于任意给出的自然数 $2 \leqslant r \leqslant k-1$，一定可以找到 k 个自然数，其中每 r 个不互素，但每 $r+1$ 个都互素．

记 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的全部 r 阶子集为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中 $n = C_k^r$．再任取 $n = C_k^r$ 个不同的素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$．易知，对每个 $l \in \{1, 2, \cdots, k\}$，都存在 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n$，其中 $m = C_{k-1}^{r-1}$，使得 $l \in A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}$，于是令

$$a_l = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \cdots \cdot p_{i_m},$$

则由 R 类的性质不难证明 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 即为所欲求的 k 个正整数（注意：若记 $B_l = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$，则 $\mathscr{B} = \{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 恰为 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个指数为 r 的 k 阶 R 类）．

不仅如此，作者还和其他三位同志一道，运用R类性质，成功地解决了下面的概率论课题。

例 12 对任意给出的自然数 $2\leqslant r\leqslant k-1$，和 k 个非退化的分布函数，都存在 k 个随数变数，它们分别服从给定的分布函数，且其中任意 r 个相互独立，任意 $r+1$ 个不相互独立。

三、K类

K类在初等数学中的应用也很广泛，我们先来看一个例子。

例 13 在学校里有 $2m$ 门课程，所有学生的成绩每门都是 4 分或 5 分。任何两个学生的成绩都不一样，任何两个学生之间都不能说一个比另一个成绩好。试证：在这个学校里的学生总数不超过 C_{2m}^{m}（说明：如果甲学生的各门成绩都不低于乙学生，其中还至少有一门的成绩高于乙学生，就叫做甲比乙的成绩好）。

本例选自苏联莫斯科数学奥林匹克试题。苏联的学校普遍采用五级记分制，最高分为 5 分，相当于优秀，其次为 4 分，相当于良好。

如果设该学校一共有 k 个学生，以Ω记 $2m$ 门功课的集合，并分别以 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 记这 k 个学生得 5 分的功课的集合，则它们都是Ω的子集，而且其中没有哪一个子集包含着另一个子集。如果记 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，则$\mathscr{A}$就叫做一个$K$类，即

定义 2 设Ω是一个 n 阶集合，$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$是它的一个子集类，如果$\mathscr{A}$中的任何两个不同子集 A_i, A_j，都是 $A_i\not\subset A_j$ 且 $A_j\not\subset A_i$，则称$\mathscr{A}$是一个K类。

对于一个 n 阶集合 Ω 来说，由它的子集形成的 K 类是很多的。如果记 $\Omega=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，那么 $\mathscr{A}_1=\{\{a_1\}, \{a_2\}, \cdots, \{a_n\}\}$，$\mathscr{A}_2=\{\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \cdots, \{a_n, a_1\}\}$，$\mathscr{A}_3=\{\{a_1\}, \{a_2, \cdots, a_n\}\}$，$\cdots$，都是一些 K 类。读者还可以自行证明下面的命题。

例 14 任何一个 R 类都是 K 类。

既然 K 类的数目很多，而且具体的内容、类的阶数也都不同，自然就产生了一个问题：对于一个 n 阶集合 Ω 来说，由它的子集形成的 K 类中，阶数最高的是多少阶的？

下面我们就来回答这个问题。事实上，我们可以证明，这个最高的阶是 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不超过 $\frac{n}{2}$ 的最大整数。在此，先证明一个引理。

引理 1 设 Ω 为一个 n 阶集合，$\mathscr{H}_1=\{A_1, \cdots, A_r\}$ 为其一个 r 阶的子集类，其中的元素都是 Ω 的 k 阶子集。又设 $\mathscr{H}_2=\{B_1, \cdots, B_s\}$ 为其另一个 s 阶的子集类，其中的元素都是 Ω 的 $k+1$ 阶子集。而且，对每个 $B_i \in \mathscr{H}_2$，一定有某个 $A_j \in \mathscr{H}_1$，使得 $B_i \supset A_j$；又对每个 $A_i \in \mathscr{H}_1$，凡是有 $B_l \supset A_i$ 关系的 $k+1$ 阶子集 B_l 皆属于 $\mathscr{H}_2$。则

$$s \geqslant \frac{n-k}{k+1} r.$$

证明 由于对每个 $1 \leqslant i \leqslant r$，凡有 $B_l \supset A_i$ 关系的 B_l 皆属于 $\mathscr{H}_2$，所以 $\mathscr{H}_1$ 中恰有 $n-k$ 个集合 $B_l \supset A_i$，因此包含 $A_1, \cdots, A_r$ 的所有 $k+1$ 阶子集连同重复出现的次数共为 $r(n-k)$ 个。反过来，每个 $k+1$ 阶子集 B_l 最多包含 $\mathscr{H}_1$ 中 $k+1$ 个集合，换言之，每个 B_l 在总数 $r(n-k)$ 中至多重复出现 $k+1$ 次，因此 $s \geqslant \frac{(n-k)r}{k+1}$。

定理 1 一个 n 阶集合 Ω 最多可有 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个互不包含的子集，即：一个 n 阶集合 Ω 的 K 类中，阶数最高者为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 阶.

证明 记 $\mathscr{H}_0$ 为 n 阶集合 Ω 的阶数最高的 K 类. 并设 $n = 2m$ (对 $n = 2m + 1$ 的情形，可类似地证明). 我们来证明 $\mathscr{H}_0$ 中元素皆为 Ω 的 m 阶子集. 用反证法. 设 $\mathscr{H}_0$ 中有 $r \geqslant 1$ 个元素 $A_1, \cdots, A_r$ 是 Ω 的 $k \geqslant m + 1$ 阶子集，记由 $A_1, \cdots, A_r$ 的所有 $k-1$ 阶子集构成的类为 $\mathscr{H}_1 = \{B_1, \cdots, B_s\}$，显然 $\mathscr{H}_1$ 是 Ω 的一个子集类. 由于每个 k 阶集合皆含 k 个不同的 $k-1$ 阶子集，所以 $B_1, \cdots, B_s$ 连同重复出现的次数共 kr 个. 但每个 $k-1$ 阶子集可包含于 Ω 的 $n-(k-1)$ 个不同的 k 阶子集中，故从整体来看，$B_1, \cdots, B_s$ 连同重复出现的次数不会超过 $s(n-k+1)$ 个，因此有

$$kr \leqslant s(n-k+1). \qquad (*)$$

由于 $k \geqslant m+1 = \dfrac{n+2}{2} > \dfrac{n+1}{2}$，故由(*)式知

$$s \geqslant \frac{k}{n-k+1} r > r.$$

用 $B_1, \cdots, B_s$ 取代 $\mathscr{H}_0$ 中的 $A_1, \cdots, A_r$，得一新类 $\mathscr{H}_1$，易见 $\mathscr{H}_1$ 仍为 K 类，但由 $s > r$ 知 $\mathscr{H}_1$ 的阶 $>\mathscr{H}_0$ 的阶，此与 $\mathscr{H}_0$ 的阶的最大性矛盾. 所以 $\mathscr{H}_0$ 中元素都是 Ω 的不超过 m 阶的子集. 反之，设 $\mathscr{H}_0$ 中含有 $r_1 \geqslant 1$ 个 $k \leqslant m-1$ 阶的 Ω 的子集 $A'_1, \cdots, A'_{r_1}$. 记 $\mathscr{H}'_1 = \{A'_1, \cdots, A'_{r_1}\}$，按引理中方式构造相应的 $\mathscr{H}'_2 = \{B'_1, \cdots, B'_{s_1}\}$，并以 $B'_1, \cdots, B'_{s_1}$ 取代 $\mathscr{H}_0$ 中的 $A'_1, \cdots, A'_{r_1}$ 得一新类 $\mathscr{H}_2$. 当然 $\mathscr{H}_2$ 也是一个 K 类. 由引理 1 及

$$k \leqslant m-1 = \frac{n-2}{2} < \frac{n-1}{2}$$

知

$$s_1 \geqslant \frac{n-k}{k+1} r_1 > r_1.$$

又得出 $\mathscr{H}_2$ 的阶 $>\mathscr{H}_0$ 的阶，所以 $\mathscr{H}_0$ 中的元素都应为 Ω 的不低于 m 阶的子集. 综合两方面，知 $\mathscr{H}_0$ 中元素皆为 Ω 的 m 阶子集. 又由 $\mathscr{H}_0$ 的阶的最大性知: $\mathscr{H}_0$ 应由 Ω 的全部的 $C_n^{[\frac{n}{2}]} = C_n^m$ 个 m 阶子集所构成. 对 $n = 2m+1$ 的情形，可同理证明.

有了上面的定理 1，例 13 的解答就是一目了然的了. 不仅如此，我们还可以方便地回答下列问题.

例 15 21 名厨师进行烹调比赛，各人除都要用到油和盐之外，还可从酱、醋、酒、葱、蒜、姜之中选用若干种. 证明，这些厨师中或者有两人所选择的调味品品种完全一样，或者存在某两人，其中一人所选择的品种全都包含在另一人所选的品种之中.

事实上，由 $C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = 20$ 及定理 1 立即就可以得知上述结论.

在历来的数学竞赛中，也有一些可以用定理 1 来解答的问题，下面是两个例子.

例 16 (1977 年苏联大学生数学竞赛试题) 10 个学生决定按下列方式组成运动队: 1) 每个人均可报名参加任何一个运动队; 2) 每个运动队均不能完全地包含于或重合于另一个运动队. 在这些条件下，最多可以组成多少个运动队? 每队几人?

记 Ω 为 10 个学生的集合，$A_1, A_2, \cdots$ 为第一个队、第二个队…成员的集合，则 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots\}$ 是 Ω 的一个 K 类. 依定理所证，欲 $\mathscr{A}$ 的阶数最高，必须每队 5 人，共可组成 C_{10}^5 个运动队.

例 17（1981 年加拿大中学生数学竞赛试题） 11 个剧组参加一联欢节，每一天有一些组演出，其余的组作观众在台下观看. 联欢节结束时，每个剧组都至少以观众身份看过其他的每个组一次演出，问此联欢节至少持续了多少天？

记 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$. 以 $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ 表示第 1 组，第 2 组，…，第 11 组作观众的时间集合，意即：若 $A_1 = \{2, 3\}$，则表示第 2，3 两天第 1 组作观众. 当然有 $A_j \subset \Omega$（这里 $j = 1, 2, \cdots, 11$）. 又若 $\{A_1, A_2, \cdots, A_{11}\}$ 构成 Ω 的一个 K 类，则每个组在联欢会期间均可有机会以观众身份观看其他每组的演出. 因此问题化为：当 n 为多少时，Ω 的 K 类的最大阶不低于 11？由 $C_2^1 = 2$，$C_3^1 = 3$，$C_4^2 = 6$，$C_5^2 = 10$，$C_6^3 = 20$ 及定理知：$n \geqslant 6$，即联欢节至少持续了 6 天.

四、M 类

下面我们来讨论与限距组合有关的两种子集类，它们都与前 n 个自然数有关，所以我们在这一节中，将注意力集中在由前 n 个自然数构成的集合之上.

设有自然数集合 $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$，从中任意取出 k 个来（$k < n$），得到 Ω 的一个 k 阶子集 $A_1 = \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$：$\Omega$ 的 k 阶子集当然不止一个，只要取出的 k 个数字不尽相同，所得的子集也就不同. 用 $\mathscr{A}$ 记这样的子集的集合类，由初等组合知识知道：$\mathscr{A}$ 是一个 C_n^k 阶的类. 就是说，集合 Ω 一共有 C_n^k 个不同的 k 阶子集.

每个子集 $\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$ 中的元素是无序的，作为集合的一员，它们相互间是平等的. 如果要把这些元素排一排队，则每个 k 阶子集可以列成 $k!$ 个不同的 k 元有序数组. 下面，我们将仅考察每个 k 阶子集由小至大排出的数组，显然，每个

k 阶子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 只有一种由小至大的排列方式:

$$i_{(1)} < i_{(2)} < \cdots < i_{(k)}$$

为方便起见,我们约定以后写出的每个 k 阶子集 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 就是已经由小至大排列好了的,即已有

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_k.$$

假如 $k \leqslant \frac{n}{2}$, $\mathscr{A}$ 中就会有一些子集,它们中的数字两两都不相邻,也就是:

$$i_2 - i_1 > 1,\ i_3 - i_2 > 1, \cdots,\ i_k - i_{k-1} > 1,$$

如果 k 比 $\frac{n}{2}$ 小很多,m 又是一个比较小的自然数,则 $\mathscr{A}$ 中可能还有一些子集,它们中的数字两两间隔均大于 m,也就是:

$$\begin{aligned} &i_2 - i_1 > m,\ i_3 - i_2 > m, \cdots, \\ &i_k - i_{k-1} > m. \end{aligned} \qquad (M)$$

以 $\mathscr{A}_M$ 记 Ω 的满足条件 (M) 的 k 阶子集全体,则 $\mathscr{A}_M$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子集类,一个有兴趣的问题是: $\mathscr{A}_M$ 是多少阶的?也就是: Ω 的满足条件 (M) 的 k 阶子集共有多少个?

当然,$\mathscr{A}$ 中也还有一些这样的子集: 它们中的数字相距不太远,也就是有

$$\begin{aligned} &i_2 - i_1 \leqslant m,\ i_3 - i_2 \leqslant m, \cdots, \\ &i_k - i_{k-1} \leqslant m \end{aligned} \qquad (M')$$

以 $\mathscr{A}_{M'}$ 记 Ω 的满足条件 (M') 的 k 阶子集全体, $\mathscr{A}_{M'}$ 亦是 $\mathscr{A}$ 的一个子集类,一个相应的问题是: $\mathscr{A}_{M'}$ 是多少阶的?即 Ω 的满足条件 (M') 的 k 阶子集共有多少?

以上两个问题不仅在日常生活中会经常遇到,而且在讨论概率统计的较为深入的课题时常常是有用的,我们分别把它们称作第一类问题和第二类问题. 本文将给出这两类问题的解答,并运用所得结果回答若干日常生活中的问题.

第一类问题并不复杂，设 $\{i_1, i_2, \cdots, i_K\} \in \mathscr{A}_M$，即 $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 是 Ω 的一个满足条件 (M) 的 k 阶子集，我们令

$$i_1' = i_1,\ i_2' = i_2 - m,\ i_3' = i_3 - 2m,\ \cdots,$$

$$i_k' = i_k - (k-1)m,$$

则仍有 $1 \leqslant i_1' < i_2' < \cdots < i_k'$，只不过 $i_k' \leqslant n - (k-1)m$。因此 $\{i_1', i_2', \cdots, i_k'\}$ 是自然数集 $B = \{1, 2, \cdots, n-(k-1)m\}$ 的一个 k 阶子集。以 $\mathscr{B}$ 记 B 的所有 k 阶子集的子集类，则有 $\{i_1', i_2', \cdots, i_k'\} \in \mathscr{B}$。反过来，设 $\{i_1'', i_2'', \cdots i_{K'}''\} \in \mathscr{B}$，即 $\{i_1'', i_2'', \cdots, i_K''\}$ 是 B 的任意一个 k 阶子集，我们令

$$j_1'' = i_1'',\ j_2'' = i_2'' + m,\ j_3'' = i_3'' + 2m, \cdots,$$

$$j_k'' = i_k'' + (k-1)m,$$

则显然有 $1 \leqslant j_1'' < j_2'' < \cdots < j_k'' \leqslant n$，且 $\{j_1'', j_2'', \cdots, j_k''\}$ 满足条件 (M)，即有 $\{j_1'', j_2'', \cdots, j_k''\} \in \mathscr{A}_M$。这样的事实告诉我们：在 $\mathscr{A}_M$ 与 $\mathscr{B}$ 之间的对应是一一对应的，所以它们有相同的阶。由初等组合知识知道：$\mathscr{B}$ 的阶为 $C_{n-(k-1)m}^k$，所以 $\mathscr{A}_M$ 的阶也是 $C_{n-(k-1)m}^k$。由此得第一类问题的答案为 $C_{n-(k-1)m}^k$。

我们来看几个与 M 类有关的例题。

例 18 每个售货员在一个月内可休息 4 天，但同一个月内的每两个休息日至少应相距 5 天，每个售货员可有多少种选择休息日的办法？

设一个月有 30 天，$\{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ 为某售货员此月中拟休息的日期，则有 $j_2 - j_1 \geqslant 5$，$j_3 - j_2 \geqslant 5$，$j_4 - j_3 \geqslant 5$，即有 $j_2 - j_1 > 4$，$j_3 - j_2 > 4$，$j_4 - j_3 > 4$，即满足 $m = 4$ 的条件 (M)，故有 $C_{30-3\times4}^4 = C_{18}^4$ 种方法。

例 19 求自 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 中取出 n 个数字，每两个皆不相邻的取法数。

这里满足 $m=1$ 的条件 $(\overset{\circ}{M})$，故有取法 $C^{n}_{2n-(n-1)}=C^{n}_{n+1}=n+1$ 种，事实上，这些取法是：

$\{1,3,\cdots,2n-3,2n-1\}$；$\{1,3,\cdots,2n-3,2n\}$；$\cdots$；$\{2,4,\cdots,2n\}$.

例 20 设在某次晚会上共打算演出 10 个演唱节目和 4 个舞蹈节目，希望在每两个舞蹈节目之间至少安插两个演唱节目，共可有多少种不同的演出顺序？

如果记 $\Omega=\{1,2,\cdots,14\}$，并设 4 个舞蹈节目分别安排为第 $i_1<i_2<i_3<i_4$ 个节目，则应有 $i_2-i_1>2$，$i_3-i_2>2$，$i_4-i_3>2$，即是说，满足 $m=2$ 的条件 (M)，于是知有

$$C^{4}_{14-3\times2}=C^{4}_{8}=70$$

种为舞蹈节目选择场次的办法. 而在此之后，还应为 10 个演唱节目、4 个舞蹈节目分别排出先后顺序，所以知有 $10!\cdot4!\cdot70$ 种不同的演出顺序.

下面讨论第二类问题的解法. 与第一类问题相比，第二类问题要复杂得多，我们换一个角度考虑.

设想有一个长条形的木盒，中间用 k 块平行木板将它隔成 $k+1$ 个小盒（如图 17.4）. 隔板及小盒均自左至右编号，将 $n-k$ 个无区别的小球分别放入这 $k+1$ 个盒子. 再令每块隔板按下面方式对应一个自然数 $i_l(1\leqslant l\leqslant K)$：

$i_l=l+$ 位于第 l 块隔板左方各小盒中的总球数 (1)

则 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，即 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\in\mathscr{A}$，如果除头尾二盒(即第 1 盒与第 $k+1$ 盒)外，各盒中所放的球数均不超过 $m-1$，则显然有

$$i_2-i_1\leqslant m,\ i_3-i_2\leqslant m,\ \cdots,\ i_k-i_{k-1}\leqslant m,$$

即 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$ 满足条件 (M')，亦即有 $\{i_1,i_2,\cdots i_k\}\in\mathscr{A}_{M'}$. 反之，如果 $\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}\in\mathscr{A}_{M'}$，则可按 (1) 式

得到一种相应的放球方式，而且除头尾二盒外，各盒所放球数都不超过 $m-1$. 由此看来，欲解决第二类问题，就是要设法求得相应的放球方法数 b.

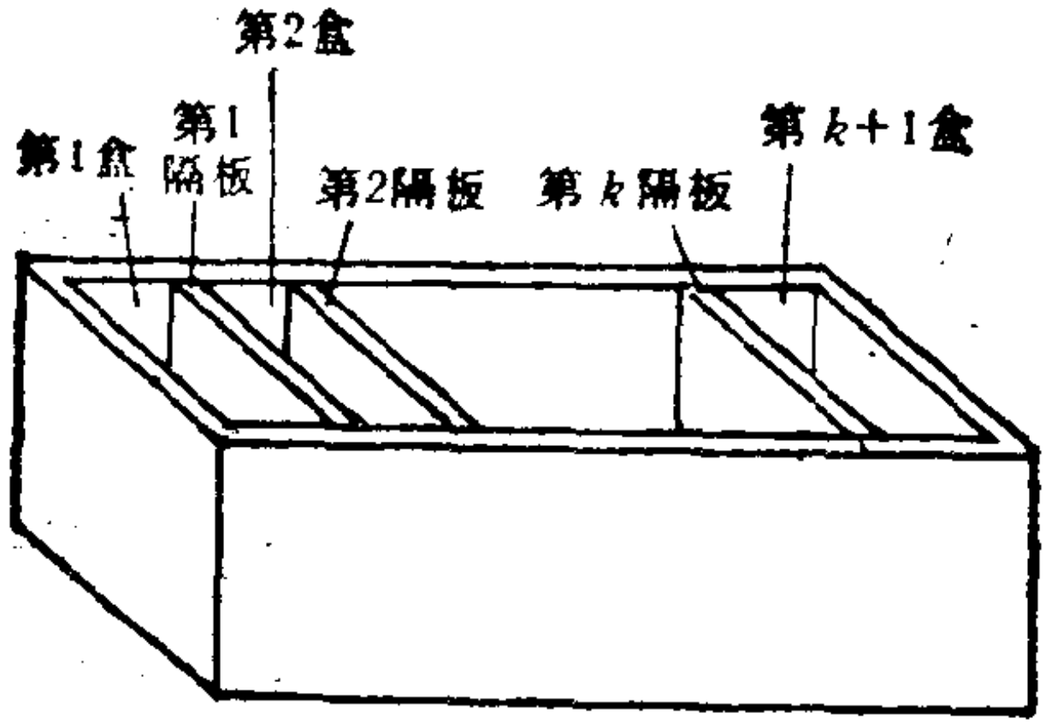


图 17.4

以 r 记第 2 盒至第 k 盒的放球总数，则

$$0 \leqslant r \leqslant (k-1)(m-1). \tag{2}$$

以 a_r 记“将 r 个无区别的球放进 $k-1$ 个盒中，每盒至多 $m-1$ 个的放法数”，则因还需将其余 $n-k-r$ 个球分别放入头尾二盒，故“在第 2 盒至第 k 盒中共放有 r 个球，每盒至多 $m-1$ 个”的放法数为

$$(n-k-r+1)a_r.$$

因此，我们所要求的放法数

$$b=\sum_{r=0}^{(k-1)(m-1)}(n-k-r+1)a_r \tag{3}$$

下面具体讨论 b 的求法.

首先，我们有恒等式

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^{k-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+\cdots a_{(k-1)(m-1)}x^{(k-1)(m-1)} \tag{4}$$

这是一个恒等式，关于它的详细介绍可参阅史济怀著《母函数》(上海教育出版社 1981 年版). 这里我们仅指出 (4) 式的

直观想法. 将 (4) 式的左端写为(共 $k-1$ 个括号)

$$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})\cdots(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}) \tag{5}$$

再将它逐项乘开,我们就得到 m^{k-1} 个形为

$$x^{l_1}\cdot x^{l_2}\cdot\cdots\cdot x^{l_{k-1}}=x^{l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}} \tag{6}$$

的项. 这里, x^{l_1} 来自第一个括弧, x^{l_2} 来自第二个括弧, …, $x^{l_{k-1}}$ 来自 $k-1$ 括弧. 如果

$$l_1+l_2+\cdots+l_{k-1}=r \tag{7}$$

则恰好可以看成这 r 个球中, 有 l_1 个放在第一盒中, 有 l_2 个放在第二盒中, …, 有 l_{k-1} 个放在第 $k-1$ 盒中. 显然, 满足 (7) 式的项有多少个,相应的放法就有多少种,而 (4) 式右端 x^r 的系数就应该是多少. 这就是 (4) 式的来历. 记

$$f(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^{k-1}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{(k-1)(m-1)}x^{(k-1)(m-1)}$$

则

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}+\cdots+\frac{1}{y^{m-1}}\right)^{k-1}$$

$$=a_0+a_1\frac{1}{y}+a_2\frac{1}{y^2}+\cdots+a_{(k-1)(m-1)}\frac{1}{y^{(k-1)(m-1)}}.$$

命 $g(y)=y^{n-k+1}f\left(\frac{1}{y}\right)$, 则有

$$g(y)=y^{n-k-(k-1)(m-1)+1}(y^{m-1}+y^{m-2}+\cdots+y+1)^{k-1}=a_0y^{n-k+1}+a_1y^{n-k}+a_2y^{n-k-1}+\cdots+a_{(k-1)(m-1)}y^{n-k-(m-1)(k-1)+1}. \tag{8}$$

由 (8) 式的第二个等号看出

$$g'(1)=\sum_{r=0}^{(k-1)(m-1)}(n-k-r+1)a_r=b,$$

所以关键是求出 $g'(y)$. 由 (8) 式的第一个等号得

$$g'(y) = (n - m(k-1))y^{n-k-(k-1)(m-1)}(y^{m-1} + y^{m-2} + \cdots + y + 1)^{k-1} + (k-1)y^{n-m(k-1)}(y^{m-2} + y^{m-3} + \cdots + y + 1)^{k-2}((m-1)y^{m-3} + (m-2)y^{m-4} + \cdots + 1),$$

所以

$$b = g'(1) = (n - m(k-1)) \cdot m^{k-1} + (k-1)m^{k-2} \cdot \frac{1}{2} m(m-1) = m^{k-1}\left(n - \frac{1}{2}(k-1) \cdot (m+1)\right). \tag{9}$$

(9) 式给出了第二类问题的答案.

下面来看一些具体的例子.

例 21 如果在例 20 中将条件改为“希望每两个舞蹈节目之间至多安插两个演唱节目”,那么可有多少种不同的演出顺序?

此时,有 $i_2 - i_1 \leqslant 3$, $i_3 - i_2 \leqslant 3$, $i_4 - i_3 \leqslant 3$, 即满足 $m = 3$ 的条件 (M') 因此有

$$b = 3^3\left(14 - \frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) = 216$$

种为舞蹈节目选择场次的办法. 再加上为 10 个演唱节目和 4 个舞蹈节目列出先后顺序,知一共有 $10! \cdot 4! \cdot 216$ 种不同的演出顺序.

例 22 10 天中将安排 4 天实地参观, 要求 4 天相连,有多少种安排方式.

显见此为 $m = 1$ 的第二类问题,由 (9) 式得 $b = n - k + 1 = 10 - 4 + 1 = 7$ 种.

例 23 10 天运肥 100 车,要求前 9 天中至少有一天运肥量不少于 15 车,而每天运肥量均不少于 1 车, 有多少种安排运肥量的办法?

以 $i_1, i_2, \cdots, i_{10}$ 记第 1 天，第 2 天，…，第 10 天的运肥累计数，则有

$0<i_1<i_2<\cdots<i_9\leqslant 99$，且 $i_{10}=100$. 可见，前 9 天每天不少于 1 车，但均少于 15 车的运法数为

$$b=14^9\left(99-\frac{1}{2}\times 8\times 15\right)=39\times 14^9 \text{ 种}$$

所以所求的运法数为

$$C_{99}^{9}-b=C_{99}^{9}-39\times 14^9 \text{ 种}.$$