华罗庚等著
颜秉海选编

数学家谈怎样学数学

4.6

黑龙江教育出版社

数学家谈怎样学数学

华罗庚 等著

颜秉海 选编

黑龙江教育出版社

1986年·哈尔滨

责任编辑：孙怀川
封面设计：李　康

数学家谈怎样学数学

Shuxuejia tan zenyang xue Shuxue

华罗庚 等著
顾泰海 选编

黑龙江教育出版社　出版
（哈尔滨市道里森林街42号）
黑龙江新华印刷厂　印刷
黑龙江省新华书店　发行

开本 787×1092 毫米 1/32 · 印张 5
字数 98,000
1986年9月第1版　1986年9月第1次印刷
印数 1— 3,920

统一书号：7357·107　定价：0.88元

為學应須毕生力
攀高貴在少年時

蘇步青

序

《数学家谈怎样学数学》一书的出版，对于广大学生、自学青年、数学教师和职工来说，无疑是很及时、很有帮助的。这是一件值得高兴与庆贺的事。

书中收集了华罗庚老师与苏步青老师的文章，他们二位是中国现代数学的创始人与开拓者。半个多世纪以来，他们在中国这块土地上艰苦奋斗，从事数学的科研、教学与普及工作，在他们的教育与影响之下，一代代数学家成长起来了。我们除了要学习他们的学问与治学经验外，更要学习他们高尚的品德与情操。

书中也搜集了不少老一辈与中年数学家的文章。特别是陈景润、杨乐与张广厚同志，他们都是解放后进大学，在新中国成长起来的数学家。他们的成长过程与经验证明了，只要我们长志气与努力工作，我们是可以达到世界先进水平的。

学习态度的端正与学习方法的正确，将可以收到少走弯路与事半功倍的作用。本书将在这些方面，对数学的学习提供一些宝贵的经验。还有不少很好的数学家的宝贵经验，将在以后陆续搜集与补充。

最后，我们要借此机会感谢黑龙江教育出版社的同志们，在组织出版本书的过程中所付出的辛勤劳动。

王　元

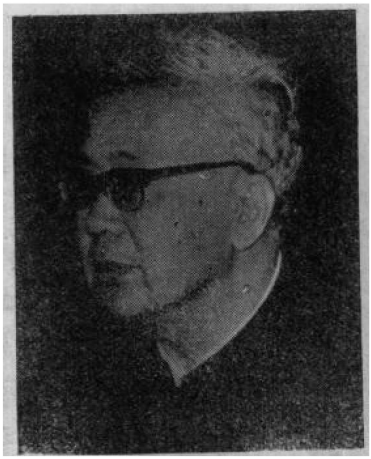
1985 年 3 月 26 日

目　录

序……王　元
学习和研究数学的一些体会……华罗庚（1）
数学的用场与发展……华罗庚（15）
谈数学……华罗庚（31）
谈谈数学打基础问题……苏步青（34）
要讲究学习方法……苏步青（39）
学习数学的几点体会……王　元（43）
谈怎样学习数学……陈景润（50）
回忆我的中学时代……陈景润（55）
怎样学好数学……杨乐　张广厚（58）
学习数学的几点体会……张广厚（64）
和同学们谈学习……赵访熊（76）
数学学习漫谈……越民义（83）
学习数学的管见……王梓坤（95）
直觉与联想对学习和研究数学的作用……徐利治（104）
数学方法论与数学教学改革……徐利治（112）
谈谈怎样学习数学……莫绍揆（119）
与自学青年谈怎样学习好数学……余元希（132）
编后记……顾秉海（150）

学习和研究数学的一些体会

华罗庚



作者简介：著名数学家，教授。1910年11月12日出生于江苏省金坛县。1924年在金坛县中学初中毕业后，刻苦自学，取得了极其优异的成就。1930年发表了《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立的理由》。大数学家熊庆来认为他是个人才，值得培养，1930年就邀请他到清华大学当助理。一年后任助教，又一年升为讲师。1936年去英国剑桥大学作访问学者，在数论方面取得了卓越的成就。他解决了当时著名的一些难题，如华林问题、泰利问题等。1938年回国，在昆明西南联大任教授。著有《堆垒素数论》专著，并开展了矩阵几何和多复变函数论的研究，取得了重要成果。1946年去美国，历任普林士顿大学、意利诺斯大学教授。1950年回国担任清华大学教授，中国科学院数学研究所所长，中国数学学会理事长，中国科学院数理化学部主任、学部委员。1958年担

任中国科技大学数学系主任，后又担任副校长。从1978年起担任中国科学院副院长。1985年增选为全国政协副主席。

华罗庚教授对数学研究工作既广泛，又具有开创性，他在数论、代数、多复变函数论等方面都有深刻的研究和卓越的贡献。他的著作《典型域上的调和分析》在1956年曾获国家科学一等奖。著有《数论导引》、《堆垒素数论》、《高等数学引论》等数十种专著，及大量科学论文，他不仅是一位卓有成就的杰出数学研究科学家，而且还非常重视应用数学的研究推广工作，热心科普工作，发表了大量的科普文章和书籍。如从70年代以来在全国各地开展推广应用统筹法和优选法工作，著有《统筹方法平话》、《优选法平话》等书。他十分关心青少年的学习，还为中学生写了很多课外读物。如《给青年数学家》、《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之圆周率谈起》、《从孙子的"神奇妙算"谈起》、《从单位圆谈起》、《数学归纳法》等。

人贵有自知之明。我知道，我对科学研究的了解是不全面的。也知道，搞科学极重要的是独立思考，各人应依照各人自己的特点找出最适合的道路。听了别人的学习、研究方法，就以为我也会学习研究了，这个就无异于吃赚金丹就会

本文是作者对科大研究生的讲话稿。

成仙，而无需经过勤修苦练了。

今天把我五十年来的经验教训，所见所闻、所体会的给你们介绍，目的在于尽可能把我的经验作为你们的借鉴，具体问题具体分析，具体的个人应当想出最适于自己的有效方法来。

我第一点准备和同志们谈的问题是速度、是效率 速度是实现社会主义现代化的保证。例如说象我这样又老又拐的人，我在前头走你们赶我不费劲，一赶就赶上，而我要赶你们，除非你们躺下来睡大觉，否则我无论如何是赶不上的。现在世界上科学发展很快，我们如果没有超过美国的速度和效率就不可能赶上美国。我们没有超过日本的速度和效率，我们就不可能赶上日本。如果我们的速度仅仅和美、日等国一样，那么也只能是等时差的赶，超就是一句空话。所以说，我们应当首先在速度和效率上超过他们。

但要我们的速度和效率超过他们有没有可能呢？这似乎是一个大问题，其实不然，我在美国呆过，在英国呆过，也在苏联呆过。我看到他们的速度不是神话般的快不可及。我们是赶得上超得过的！我们许多美籍华人，如果他们的速度不能超过一般的美国人的话，也就不会成为现代著名的科学家了。所以事实证明，只要我们努力下功夫，赶超是完全可以的。就以我自己来说，我是三六年到英国的，在那里呆了两年，回国后在昆明乡下住了两年，四零年就完成了堆垒素数论的工作。后来五〇年回国后，在五八年之前，我们的数论、代数、多复变函数论等等都达到了世界上的良好的水平。所以经验告诉我们纯数学的一门学科，有四五年就能在世界上见头角了。你们现在时代更好了，党中央一举粉碎了"四人

帮”，带来了科学的春天。在这样的条件下边，我敢断言，只要肯下功夫，努力钻研，只要不浪费一分一秒的时间，我们是能够赶上世界先进水平的。特别是我们数学，前有熊庆来、陈建功、苏步青等老前辈的榜样，现在又有许多后起之秀，更多的后起之秀也一定会接踵而来。

二、消化 抢速度不是越级乱跳，不是一本书没有消化好就又看一本，一个专业没有爬到高处就又另爬一个山峰。我们学习必须先从踏踏实实地读书讲起，古时候总说这个人“博闻强记”“学富五车”。实际上古人的这许多话到现在已是不足为训了。五车的书，从前是那种大字的书，我想一个指甲大小的集成电路就可以装它五本十本，学书五车，也不过十几块几十块集成电路而已。现在也有相似的看法，说某人念了多少多少书，某人对世界上的文献记的多熟多熟，当然这不是不必要的，而这只能说走了开始的第一步，如果不经过消化，实际抵不上一个图书馆，抵不上一个电子计算机的记忆系统。人之所以可贵就在于会创造，在于善于吸收过去的文献的精华，能够经过消化创造出前人所没有的东西，不然人云亦云世界就没有发展了，懒汉思想是科学的敌人，当然也是社会发展的敌人。

什么叫消化？检验消化的最好的方法就是“用”。会用不会用，不是说空话，而是在实际中考验。碰到这个问题束手无策，碰到那个问题又是一筹莫展，即使他能写几篇模仿性的文章，写几本抄抄译译稿著，这同社会的发展又有什么关系呢？当然我不排斥初学的人写几篇模仿性的文章，但决不能局限于此。须发皆白还是如此。

消化，只有消化后，我们才会灵活运用。如果社会主义建设需要我们，我们就会为社会主义建设服务，解决问题，贡献力量。客观的问题上面不会贴上标签的，告诉你这需要用数论，那个是要用泛函，而社会主义建设所提出来的问题是各种各样无穷无尽的，想用一个方法套上所有的实际问题，那就是形而上学的做法。只有经过独立思考和认真消化的学者，才能因时因地根据不同的问题，运用不同的方法真正解决问题。

当然，刚才说消化不消化只有在实际中进行检验。但是同学们不一定就有那么多的实践机会，在校学习的时候有没有检查我们消化了没有的方法呢？我以前讲过，学习有一个由薄到厚，再由厚到薄的过程。你初学一本书，加上许多注解，又看了许多参考书，于是书就由薄变厚了。自己以为这就是懂了，那是自欺欺人，实际上这还不能算懂。而真正懂，还有一个由厚到薄的过程。也就是全书经过分析，扬弃枝节，抓住要点，甚至于来龙去脉都一目了然了，在没有这条定理前，人家是怎样想出来的，这样才能说是开始懂了，这也是一个检验自己是否消化了的方法。当然，这个方法不如前面那种更踏实。总的一句话，检验我们消化没有，弄通没有的最后的标准是实践，是能否灵活运用解决问题。也许有人会说这样念书太慢了。我的体会不是慢了，而是快了。因为我们消化了我们以前念过的书，再看另一本书时，我们脑子里的记忆系统就会排除那些过去弄懂了的东西。而只注意新书中自己还没有碰到过的新东西。所以说，这样脚踏实地的上去，不是慢了而是快了。不然的话囫囵吞枣的学了一阵，忘

掉一阵，再学再忘，白费时光事小，使自己"于国于家无望"事大。更可怕的是好高骛远。例如中学数学没学懂，他已读到大学三、四年级的课程，遇到困难，但又不屑于回去复习，再去弄通中学的东西，这样前进，就愈进愈糊涂，陷入泥坑，难于自拔。有时候阅读同一水平的书，如果我们以往的书弄懂了，消化了，那么在同一水平书里找找以往书上没有的东西就可以过去了。找不到很快送上书架，找到一点两点就只要把这一两点弄通就得了，这样读书就快了，不是慢了。

读书得法了，然后看文献，实际上看文献和看书没有什么不同，也是要消化。不过书上是比较成熟的东西，去粗取精，则精多粗少。而文献是刚出来的，往往精少而粗多。当然也不排除有些文章，一出来就变成经典著作的情况，但这毕竟是少数的少数。不过多数文章通过不多时间就被人们遗忘了。有了吸取文献的基础，就可以搞研究工作。

这里我还要强调一下独立思考。独立思考是搞科学研究的根本，在历史上，重大的发明没有一个是不通过独立思考就能搞出来的。当然，这并不等于说不接受前人的成就而"独立""思考"。例如有许多人，搞哥德巴赫猜想，对前人的工作一无所知，这样搞，成功的可能性是很小的。独立思考也并不是说不要攻书，不要看文献，不要听老师的讲述了。书本、文献、老师都是要的，但如果拘泥于这些，就会失去创造力，使学生变成教师的一部分，这样就会愈缩愈小，数学上出了收敛的现象。只有独立思考才能够跳出这个框框，创造出新的方法，创造出新的领域，推动科学的进步。独立思考不是说一个人独自在那里冥思苦想，不和他人交流。独立

思考也要借助别人的结果，也要依靠群众和集体的智慧。独立思考也可以补救我们现在导师不够，导师经验较差，导师太忙顾不过来，但这都需独立思考来补救。甚至于象我们过去在昆明被封锁的时候，外国杂志没处来，我们还是独立思考，想出新的东西来，而想出来的东西和外国人并没重复。即使有，也别怕。例如说，我青年时在家里发表过几篇文章，而退稿的很多，原因是别人说你的这篇文章那本书里已有此定理了，那篇文章在某书里也已有证明了等等。面对这种情况是继续干呢？还是就泄气呢？觉得上不起学，老是白费时间搞前人所搞过的东西。当时，我并没有这样想，在收到退稿时反而高兴，这使我明白，原来某大科学家搞过的东西，我在小店里也能搞出来。因此我还是加倍继续坚持搞下去了。我这里并不是说过去的文献不要看，而是说即使重复了人家的工作也不要泄气，要对比一下自己搞出来的同已有的有什么区别，是不是他们的比我们的好，这样就学习人家长处，就有进步，如果我们还有长处就增加了信心。

我们有了独立思考，没有导师或文献不全，就都不会成为我们的阻力。相反，有导师我们也还要考虑考虑讲的话对不对，文献是否完整了……。总之，科学事业是善于独立思考的人所创造出来的，而不是象我前面所说的等于几块集成电路的那种人创造出来的，因为这种人没有创造性。毛主席指出：研究问题，要由此及彼，由表及里，去粗取精，去伪存真。做到这四点，就非靠独立思考不可，不独立思考就只能得其表，取其粗，只能够伪善杂存，无法明辨是非。

三、搞研究工作的几种境界

1. 照葫芦画瓢的模仿。模仿性的工作，实际上就等于做一个习题。当然，做习题是必要的，但是一辈子做习题而无新创又有什么意思呢？

2. 利用成法解决几个新问题。这个比前面就进了一步，但是我们在这个问题上也应区别一下。直接利用成法也和做习题差不多，而利用成法，又通过一些修改，这就走上搞科学研究的道路了。

3. 创造方法，解决问题。这就更进了一步。创造方法是一个重要的转折，是自己能力的提高的重要表现。

4. 开辟方向。这就更高了，开辟了一个方向，可以让后人做上几十年，成百年。这对科学的发展来讲就是有贡献。我是粗略地分为以上这四种，实际上数学还有许多特殊性的问题。象著名问题你怎样改进它，怎样解决它，这在数学方面一般也是受到称赞的。在二十世纪初希尔伯特提出了二十三个问题。这许多问题，有些是会对数学的本质产生巨大的影响。费尔马问题我想这是大家都知道的。这个问题如用初等数论方法解决了，那没有发展前途，当然，这样他可以获得"十万马克"。但对数学的发展是没有多大意义的。而 Kummer 虽没有解决费尔马问题，但他为研究费尔马却创造了理想数，开辟了方向。现在无论在代数、几何、分析等方面，都用上了这个概念，所以它的贡献远比解决一个费尔马问题大。所以我觉得，这种贡献就超过了解决个别难题。

我对同志们提一个建议，取法乎上得其中，取法乎中得其下。研究工作还有一条值得注意的，要攻得进去，还要打

得出来。攻进去需要理论，真正深入到所搞专题的核心需要理论，这是人所共知的。可是要打得出来，并不比钻进去容易。世界上有不少数学家攻是攻进去了，但是进了死胡同就出不来了，这种情况往往使其局限在一个小问题里，而失去了整个时间。这种研究也许可以自娱，而对科学的发展和社会主义的建设是不会有作用的。

四、我还想跟同学们讲一个字，"漫"字 我们从一个分支转到另一个分支，是把原来所搞分支丢掉跳到另一分支吗？如果这样就会丢掉原来的。而"漫"就是在你搞熟弄通的分支附近，扩大眼界，在这个过程中逐渐转到另一分支，这样，原来的知识在新的领域就能有用，选择的范围就会越来越大。我赞成有些同志钻一个问题钻许多年搞出成果，我也赞成取得成果后用漫的方法逐步转到其它领域。

鉴别一个学问家或个人，一定要同广，同深联系起来看。单是深，固然能成为一个不坏的专家，但对推动整个科学的发展所起的作用，是微不足道的。单是广，这儿懂一点，那儿懂一点，这只能欺欺外行，表现表现他自己博学多才，而对人民不可能做出实质性的成果来。

数学各个分支之间，数学与其它学科之间实际上没有不可逾越的鸿沟。以往我们看到过细分割，各搞一行的现象，结果呢？哪行也没搞好。所以在钻研一科的同时，把与自己学科或分支相近的书和文献浏览浏览，也是大有好处的。

五、我再讲一个"严"字 不单是搞科学研究需要严，就是练兵也都要从难，从严。至于说相互之间说好听的话，听

了谁都高兴。在三国的时候就有两个人，一个叫孔融，一个叫弥衡，弥衡捧孔融是仲尼复生。孔融捧弥衡是颜回再世。他们虽然相互捧的上了九霄云外，而实际上却是两个饭桶，其下场都被曹操直接或间接地杀死了。当然，听好话很高兴，而说好话的人也有他的理论，说我是在鼓励年青人。但是这样的鼓励，有的时候不仅不能把年青人鼓励上去，反而会使年青人自高自大，不再上进。特别是若干年来，我知道有许多对学生要求从严的教师受到冲击。而一些分数给的宽，所谓关系搞得好的，结果反而得到一些学生的欢迎。这种风气只会拉社会主义的后腿。到现在我们要一个老师对我们要求严格些，而老师都不敢真正对大家严格要求。所以我希望同学们主动要求老师严格要求自己，对不肯严格要求的老师，我们要给他们做一定的思想工作，解除他们的顾虑。同样一张嘴，说几句好听的话同说几句严格要求的话，实在是一样的，而且说说好听话大家都欢迎，这有何不好呢？并且还有许多人认为这样是团结好的表现。若一听到批评，就认为不团结了，需要给他们做思想工作了等等。实际上这是多余的，师生之间的严格要求，只会加强团结，即使有一时想不开的地方，在长远的学习、研究过程中，学生是会感到严师的好处的。同时对自己的要求也要严格。大庆三老四严的作风，我们应随时随地、人前人后地执行。

我上面谈到过的消化，就是严字的体现，就是自我严格要求的体现。一本书马马虎虎的念，这在学校里还可以对付，但是就这样毕了业，将来在工作中间要用起来就不行了。我对严还有一个教训，在1964年，我刚走向实践想搞一点东西

的时候，在乌蒙磅礴走泥丸的地方，有一位工程师，出于珍惜国家财产的心情，就对我说："雷管现在成品率很低，你能不能降低一些标准，使多一些的雷管验收下来。"我当时认为这个事情好办。我只要略略降低一些标准，验收率就上去了。但后来在梅花山受到了十分深刻的教训。使我认识到，降低标准1%，实际就等于要牺牲我们四位可爱的战士的生命。这是我们后来搞优选法的起点。因为已经造成了的产品，质量不好，我们把住关，把废品卡住，但并不能消除由于废品多而造成的损失。如果产品质量提高了，废品少了，那么给国家造成的损失也就自然而然地小了。我这并不是说质量评估不重要，我在1969年就提倡过。不过我们搞优选法的重点就在这里。这就和治病、防病一样，以防为主。搞优选法就是防止次品出现。而治就是出了废品进行返工，但这往往无法返工，成为不治之症。老实说，以往我对学生的要求是习题上数据错一点没有管，但是自从那次血的教训，使我得到深刻的教育。我们在办公室里错一个1%好象不要紧，可是拿到生产、建设的实践中去，就会造成极大的损失。所以总的一句话，包括我在内，对严格要求我们的人，应该是感谢不尽的。对给我们戴高帽子的人，我也感谢他，不过他这顶帽子我还是退还回去，请他自己戴上。同学们，求学如逆水行舟，不进则退。只要哪一天不严格要求自己，就会出问题。当然，数学工作者，从来没有不算错过题的。我可以这样说一句，天下只有哑巴没有说过错话；天下只有白痴没想错过问题；天下没有数学家没算错过题的。错误是难免要发生的，但不能因此而降低我们的要求，我们要求是没有错误，但既

然出现了错误，就应该引以为教训。不负责任的吹嘘，虽然可能会使你高兴，但我们要善于分析，对这种好说恭维话的人要敬而远之。不负责任地恭维人，是旧社会遗留下来的恶习，我们要尽快地把它洗刷掉。当然，别人说我们好话，我们不能顶回去，但我们的头脑要冷静、要清醒，要认识到这是顶一文钱不值的高帽子，对我的进步毫无益处。

实事求是，是科学的根本。如果搞科学的人不实事求是，那就搞不了科学，或就不适于搞科学。党一再提倡实事求是的作风，不实事求是地说话、办事的人，就背离了党的要求。科学是来不得半点虚假的。我们要正确估价好的东西，就是一时得不到表扬，也不要灰心，因为实践会证明是好的。而不太好的东西，就是一时得到大吹大擂，不会多久也就会烟消云散了。我们要有毅力，要善于坚持。但是在发现是死胡同的时候，我们也得善于转移，不过发现死胡同是不容易的，不下功夫是不会发现的。就是退出死胡同时，也得搞清楚它死在何处，经过若干年后，发现难点解决了，死处复活了，我就又可以打进去。失败是经常的事，成功是偶然的。所有发表出的成果，都是成功的经验，同志们都看到了，而同志们哪里知道，这是总结了无数失败的经验教训才换来的。跟老师学习就有这样一个好处，好老师可以指导我们减少失败的机会，更快吸收成功的经验，在这个基础上又创造出更好的东西。还可以看到他的失败的经验，和山穷水尽疑无路柳暗花明又一村地从失败又怎样转到成功的经验，切不可有不愿下苦功侥幸成功的想法。天才，实际上在他很漂亮地解决问题之前是有一个无数次失败的艰难过程。所以同学们千万

别怕失败，千万别以为我写了一百张纸了，但还是失败了，我搞一个问题已两年了，而还没有结果等就丧失信心，我们应总结经验，找到我们失败的原因，不再重复我们失败的道路。总的一句话，失败是成功之母。

似懂非懂，不懂装懂比不懂还坏。这种人在科学研究上是无前途的，在科学管理上是瞎指挥的。如果自己真的知己和承认不懂，则容易听取群众的意见，分析群众的意见，尊重专家的意见，然后和大家一起做出决定来，……。特别对你们年青人，没有经过战火的考验（战火的考验是最好的考验，错误的判断就打败仗，甚至于被敌人消灭），也没有深入钻研的经验，就不知道旁人的甘苦。如果没有组织群众性的搞科学研究的锻炼和能力，就必然陷入瞎指挥的陷阱。虽然他（或她）有雄心想办好科学，实际上会造成拆台的后果。所以我要求你们年青人有两条：①有对科学钻深钻懂一行两行的锻炼。②能有搞科学实验运动，组织群众，发动群众，把科学知识普及给群众的本领。不然，对四个现代化来说就会起拉后腿的作用。对个人来说一事无成，而两鬓已斑。

当前在两条不可得兼的时候，择其一也可，总之没有农民不下田就有大丰收的事情，没有不在机器边而能生产出产品的工人。脑力劳动也是如此，养得肠肥脑满，清清闲闲，饱食终日无所用心的科学家或科学工作组织者是没有的。

单凭天才的科学家也是没有的，只有勤奋，才能勤能补拙，才能把天才真正发挥出来。天资差的通过勤奋努力，就可以赶上和超过有天才而不努力的人。古人说，人一能之己十之，人十能之己百之，这是大有参考价值的名言。

六、要善于暴露自己 不懂装懂好不好？不好！因为不懂装懂就永远不会懂。要敢于把自己的缺点和不懂的地方暴露出来，不要怕难为情。暴露出来顶多受老师的几句责备，说你"连这个也不懂"，但是受了责备后不就懂了吗？可是不想受责备，不懂装懂，这就一辈子也不懂。科学是实事求是的学问，越是有学问的人，就越是敢暴露自己，说自己这点不清楚，不清楚经过讨论就清楚了。在大的方面，百家争鸣也就是如此，每家都敢于暴露自己的想法，每家都敢批评别人的想法，每家都接受别人的优点和长处，科学就可以达到繁荣、昌盛。"四人帮"搞得大家对问题表态不好，不表态也不好，明知不对也不敢暴露，这样就自然产生僵化，僵化是科学的死敌，科学就不能发展。不怕低，就怕不知底。能暴露出来，让老师知道你的底在哪里，就可以因才施教。同时，懂也不要装着不懂。老师知道你懂了很多东西，就可以更快地带着你前进。也就是一句话，懂就说懂，不懂就说不懂，会就说会，不会就说不会，这是科学的态度。

好表现。这似乎是一个坏事，实际也该分析一下，如果自己不了解，或半知半解而就卖弄他的渊博，这是真正的好表现，这不好。而把自己懂的东西交流给旁人，使别人以更短的时间来掌握我们的长处，这种表现是我们欢迎的，这不是好表现，这是好表现。科学有赖于相互接触，互相交流彼此的长处，这样我们就可以兴旺发达。

我上面所讲的有片面性，更重要的是为人民服务的问题。大家政治理论学习比我好，同时我们这里也没有时间了，就不在这里多讲了。我用一句话结束我的发言。

不为个人，而为人民服务。

当然我这篇讲话就是这个主题，但没能充分发挥，不过人贵有自知之明，我对这方面的认识更弱于我对数学的认识了，而政治干部比我搞业务的人就知道的更多了，我也就不想在这里超出我的范围多说了。

数学的用场与发展

华罗庚

数 与 量

数（读作 shù）起源于数（读作 shǔ），如一、二、三、四、五……，一个、两个、三个……。量（读作 liàng）起源于量（读作 liáng）。先取一个单位标准，然后一个单位一个单位地量。天下虽有各种不同的量（各种不同的量的单位如尺、斤、斗、秒、伏特、欧姆和卡路里等等），但都必须通过数才能确切地把实际的情况表达出来。所以"数"是各种各样不同量的共性，必须通过它才能比较量的多寡，才能说明量的变化。

"量"是贯穿到一切科学领域之内的，因此数学的用处也就渗透到一切科学领域之中。凡是要研究量、量的关系、量的变化、量的关系变化、量的变化的关系的时候，就少不了数学。不仅如此，量的变化还有变化，而这种变化一般也是用量来刻划的。例如，速度是用来描写物体的变化的动态的。而加速度则是用来刻划速度的变化。量与量之间有各种各样

的关系，各种各样不同的关系之间还可能有关系。为数众多的关系还有主从之分——也就是说，可以从一些关系推导出另一些关系来。所以数学还研究变化的变化，关系的关系，共性的共性，循环往复，逐步提高，以至无穷。

数学是一切科学得力的助手和工具。它有时由于其他科学的促进而发展，有时也先走一步，领先发展，然后再获得应用。任何一门科学缺少了数学这一项工具便不能确切地刻划出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的精确度。

恩格斯说："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系。"数学是从物理模型抽象出来的，它包括数与形两方面的内容。以上只提要地讲了数量关系，现在我们结合宇宙之大来说明空间形式。

宇宙之大

宇宙之大，宇宙的形态，也只有通过数学才能说得明白。天圆地方之说，就是古代人民用几何形态来描绘客观宇宙的尝试。这种"苍天如圆盖，陆地如棋局"的宇宙形态的模型，后来被航海家用事实给以否定了。但是，我国从理论上对这一模型提出的怀疑要早得多，并且也同样的有力。论点是："混沌初开，乾坤始奠，气之轻清上浮者为天，气之重浊者下凝者为地。"但不知轻清之外，又有何物？也就是圆盖之外，又有何物？三十三天之上又是何处？要想解决这样的问题，就必须借助于数学的空间形式的研究。

四维空间听来好象有些神秘，其实早已有之，即以“宇宙”二字来说，“四方上下曰宇，往古来今曰宙，以喻天地”（《淮南子·原道》）。就是宇是东西、南北、上下三维扩展的空间，而宙是一维的时间。牛顿时代对宇宙的认识也就是如此。宇宙是一个无边无际的三维空间，而一切的日月星辰都安排在这框架中运动。找出这些星体的运动规律是牛顿的一大发明。也是物理模型促进数学方法，而数学方法则是用来说明物理现象的一个好典范。由于物体的运动不是等加速度，要描绘不是等加速度，就不得不考虑速度时时在变化的情况。于是既创造了新工具——微积分，又发现了万有引力定律。有了这些，宇宙间一切星辰的运动初步统一地被解释了。行星凭什么以椭圆轨道绕日而行的，何时以怎样的速度，达到何处等，都可以算出来了。

有人说西方文明之飞速发展是由于欧几里得几何的推理方法和进行系统实验的方法。牛顿的工作也是逻辑推理的一个典型。他用简单的几条定律推出整个的力学系统，大至解释天体的运行，小到造房、修桥、杠杆、称物都行。但是人们在认识自然界而建立的理论总是不会一劳永逸完美无缺的，牛顿力学不能解释的问题还是有的。用它解释了行星绕日公转，但行星自转又如何解释呢？地球自转一天 24 小时有昼有夜。还有一个有名的问题：水星进动每百年 42″，这是牛顿力学无法解释的。

爱因斯坦不再把“宇”、“宙”分开来看，也就是时间也在进行着。每一瞬间三维空间中的物质在占有它一定的位置。他根据麦克斯韦-洛伦兹的光速不变假定，并继承了牛顿的相

对性原理而提出了狭义相对论。狭义相对论中的洛伦兹变换把时空联系在一起，当然并不是消灭了时空特点。如向东走三里，再向西走三里，就回到原处，但时间则不然，共用了走六里的时间。时间是一去不复返地流逝着。值得指出的是有人推算出狭义相对论不但不能解释水星进动问题，而且算出的结果是"退动"。这是误解。我们能算出进动 28″，即客观数的三分之二。另外，有了深刻的分析，反而能够浅出，连微积分都不要用，并且在较少的假定下，就可以推出爱因斯坦狭义相对论的全部结果。

爱因斯坦进一步把时、空、物质联系在一起，提出了广义相对论。用它可以算出水星进动是 43″，这是支持广义相对论的一个有力证据。由于证据还不多，因此对广义相对论还有不少看法，但它的建立有赖于数学上的先行一步。如先有了黎曼几何。另一方面它也给数学提出了好些到现在还没有解决的问题。对宇宙的认识还将有多么大的进展，我不知道，但可以说，每一步都是离不开数学这个工具的。

粒子之微

佛经上有所谓"金粟世界"，也就是一粒粟米也可以看作一个世界。这当然是佛家的幻想。但是我们今天所研究的原子却远远地小于一粒粟米，而其中的复杂性却不亚于一个太阳系。

即使研究这样小的原子核的结构也还是少不了数学。描述原子核内各种基本粒子的运动更是少不了数学。能不能用处理普通世界的方法来处理核子内部的问题呢？情况不同了！

在这里，牛顿的力学，爱因斯坦的相对论都遇到了困难。在目前人们应用了另一套数学工具。如算子论，群表示论，广义函数论，固体子等。这些工具都是近代的产物。即使如此，也还是不能完整地说明它。

在物质结构上不管分子论、原子论也好，或近代的核子结构、基本粒子的互变也好，物理科学上虽然经过了多次的概念革新，但自始至终都和数学分不开。不但今天，就是将来，也有一点是可以肯定的，就是一定还要用数学。

是否有一个统一的处理方法，把宏观世界和微观世界统一在一个理论之中，把四种作用力统一在一个理论之中，这是物理学家当前的重大问题之一。不管将来他们怎样解决这个问题，但是在处理这些问题的数学方法必须统一。必须有一套既可以解释宏观世界又可以解释微观世界的数学工具。数学一定和物理学刚开始的时候一样，是物理科学的助手和工具。在这样的大问题的解决过程中，也可能如牛顿同时发展天体力学和发明微积分那样促进数学的新分支的创造和形成。

火箭之速

在今天用"一日千里"来形容慢则可，用来形容快则不可了！人类可创造的物体的速度远远地超过了"一日千里"。飞机虽快到日行万里不夜，但和宇宙速度比较，也显得缓慢得很。

不妨回忆一下，在星际航行的开端——由诗一般的幻想进入科学现实的第一步，就是和数学分不开的。早在牛顿时

代就算出了每秒钟近八公里的第一宇宙速度，这给科学技术工作者指出了奋斗目标。如果能够达到这一速度，就可以发射地球卫星。1970 年我国发射了第一颗人造卫星，东方红的歌声传遍了全世界。数学工作者自始至终都参与这一工作（当然，其中不少工作者不是以数学工作者见称，而是运用数学工具者）。作为人造行星环绕太阳运行所必须具有的速度是 11.2 公里/秒，称为第二宇宙速度；脱离太阳系飞向恒星际空间所必须具有的速度是 16.7 公里/秒，称为第三宇宙速度。

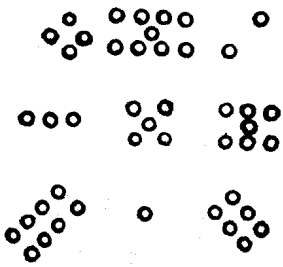


图 1

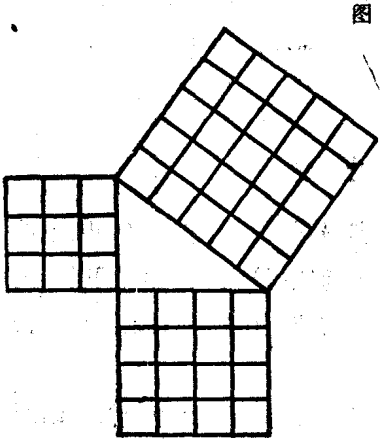


图 2

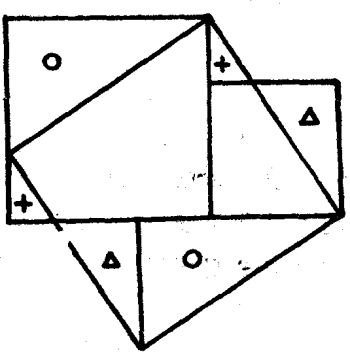


图 3

这样的目标，也将会逐步去实现。

顺便提一下，如果我们宇宙航船到了一个星球上，那儿也有如我们人类一样高级的生物存在。我们用什么东西作为我们之间的媒介。带幅画去吧，那边风景殊，不了解。带一段录音去吧，也不能沟通。我看最好带两个图形去。一个"数，"一个"数形关系"（勾股定理）（图1和图2）。

为了使那里较高级的生物知道我们会几何证明，还可送去下面的图形。即"青出朱入图"（图3）。这些都是我国古代数学史上的成就。

化工之巧

化学工业制造出的千千万万种新产品，使人类的物质生活更加丰富多彩，真是"巧夺天工"，"巧夺造化之工"。在制造过程中，它的化合和分解方式是用化学方程来描述的，但它是在变化的，因此，伟大革命导师恩格斯明确指出："表示物体的分子组合的一切化学方程式，就形式来说是微分方程式。但是这些方程式实际上已经由于其中表示的原子量而积分起来了。化学所计算的正是量的相互关系为已知的微分。"

为了形象化地说明，例如，某种物质中含有硫，用苯提取硫。苯吸取硫有一定的饱含量，在这个过程中，苯含硫越多越难再吸取硫，剩下的硫越少越难被苯吸取。这个过程时刻都在变化的，吸收过程速度在不断减慢着。实验本身便是这个过程的积分过程，它的数学表达形式就是微分方程式及其求解。简单易作的过程我们可以用实验去解决。但对于复杂、难作的过程，则常常需要用数学手段来加以解决。特别

是选取最优过程的工艺，数学手段更成为必不可少的手段。特别是量子化学的发展，使得化学研究提高到量子力学的阶段，数学手段——微分方程及矩阵图论更是必需的数学工具。

应用了数学方法还可使化学理论问题得到极大的简化。例如，对于共轭分子的能级计算，在共轭分子增大时十分困难。应用了分子轨道的图形理论，由图象形来简化计算，取得了十分直观和易行的效果，便是一例。其主要根据是如果一个行列式中的元素为0的多，那就可以用图论来简化计算。

地球之变

我们所生活的地球处于多变的状态之中，从高层的大气，到中层的海洋，下到地壳，深入地心都在剧烈地运动着，而这些运动规律的研究也都用到数学。

大气环流，风云雨雪，天天需要研究和预报，使得农民可以安排田间农活，空中交通运输可以安排航程。飓风等灾害性天气的预报，使得海军，渔民和沿海地区能够及早预防，减少损害。而所有这些预报都离不了数学。

"风乍起，吹皱一池春水"。风和水的关系自古便有记述，"无风不起浪"。但是风和浪的具体关系的研究，则是近代才逐步弄清的，而在风与浪的关系中用到了数学的工具，例如偏微分方程的间断解的问题。

大地每年有上百万次的地震，小的人感觉不到，大的如果发生在人烟稀少的地区，也不成大灾。但是每年也有几次

在人口众多的地区的大震，形成大灾。对地壳运动的研究，对地震的预报，以及将来进一步对地震的控制都离不开数学工具。

生物之谜

生物学中有许许多多的数学问题。蜜蜂的蜂房为什么要象如下的形式(图 4)，一面看是正六角形，另一面也是如此。但蜂房并不是六棱柱，而它的底部是由三个菱形所拼成的。图 5 是蜂房的立体图。这个图比较清楚，更具体些，拿一支六棱柱的铅笔未削之前，铅笔一端形状是 $ABCDEF$ 正六角形（图 6）。通过 AC，一刀切下一角，把三角形 ABC 搬置 AOC 处。过 AE，CE 也如此同样切三刀，所堆成的形状就是图 7，而蜂巢就是两排这样的蜂房底部和底部相接而成。

关于这个问题有一段趣史：巴黎科学院院士数学家克尼

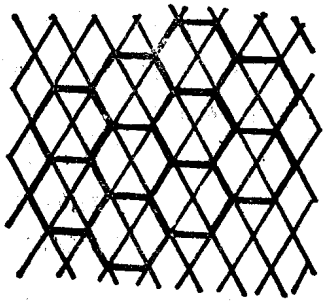


图 4

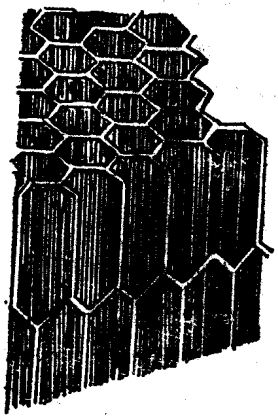


图 5

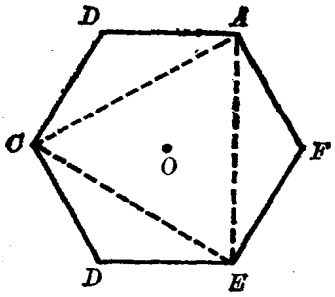


图 6

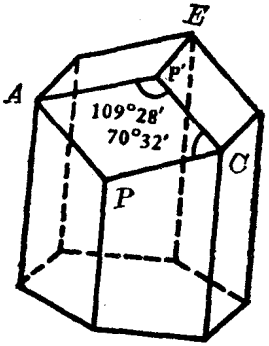


图 7

格，从理论上计算为使消耗材料最少菱形的两个角度应该是109°26′和70°34′。与实际蜜蜂所做出的仅相差2分。后来苏格兰数学家马克劳林重新计算，发现错了的不是小小的蜜蜂，而是巴黎科学院的院士，因克尼格用的对数表上刚好错了一个字。这十八世纪的难题，1964年我用它来考过高中生，不少高中生提出了各种各样的证明。

这一问题，我写得篇幅略长些，目的在于引出生物之谜中的数学，另一方面也希望生物学家给我们多提些形态的问题。蜂房与结晶学联系起来，这是"透视石"的晶体。再回到化工之巧，有多少种晶体可以无穷无尽、无空无隙地填满空间，这又要用到数学。数学上已证明，只有230种。

还有如胰岛素的研究中，由于复杂的立体模型也用了复杂的数学计算。生物遗传学中的密码问题是研究遗传与变异这一根本问题的，它的最终解决必然要考虑到数学问题。生物的反应用数学加以描述成为工程控制论中"反馈"的泉源。神经作用的数学研究为控制论和信息论提供了现实的原型。

日用之繁

日用之繁，的确繁，从何谈起真为难！但也有容易处。日用之繁与亿万人民都有关，只要到群众中去，急工农之所急，急生产和国防之所急，不但可以知道哪些该搞，而且知道轻重缓急。群众是真正的英雄，遇事和群众商量，不但政治上有提高，业务上也可以学到书本上所读不到的东西。象我这样自学专攻数学的，也在各行各业师傅的教育下，学到了不少学科的知识，这是一个大学一个专业中所学不到的东西。

我在日用之繁中搞些工作始于大跃进的1958年，但真正开始是1964年接受毛主席的亲笔指示后。并且使我永远不会忘记的是在我刚迈出一步写了《统筹方法平话》下到基层试点时，毛主席又为我指出："不为个人而为人民服务，十分欢迎"的奋斗目标。后来在敬爱的周总理关怀下又搞了《优选法》。由于各省、市、自治区的领导的关怀，我曾有机会到过二十个省市、下过数以千计的工矿农村，拜得百万工农老师，形成了以具有实践经验的工人为主体的三结合的小分队。通过群众性的科学实验活动证明，数学确实大有用场，数学方法用于革新挖潜，能为国家创造巨大的财富。回顾已往，真有"抱着金饭碗讨饭吃"之感。

由于我们社会主义制度的优越性，在这一方面可能有我们自己的特点，不妨结合我下去后的体会多谈一些。

统筹方法不仅可用于一台机床的维修、一所房屋的修建、一组设备的安装、一项水利工程的施工，更可用于整个

企业管理和大型重点工程的施工会战。大庆新油田开发，万人千台机的统筹，黑龙江省林业战线采、运、用、育的统筹，山西省大同市口泉车站运煤的统筹，太原铁路局太钢和几个工矿的联合统筹，还有一些省市公社和大队的农业生产统筹等等，都取得了良好效果。看来统筹方法宜小更宜大。大范围的过细统筹效果越好，油水越大。

为了贯彻统筹兼顾、合理安排的思想，统筹方法仅提供了一个辅助工具。初步看来潜力不小，特别是把方法交给广大群众，结合具体实际，大家动手搞起来，由小到大、由简到繁，在普及的基础上进一步提高，收效甚大。初步设想可以概括成十二个字：大统筹，理数据，建系统，策发展，使之发展成一门学科——统筹学，以适应我国的具体情况，体现我们社会主义社会的特点。统筹的范围越大，得到和用到的数据也越多。我们不仅仅是统计这些数据，而且还要从这些数据中取出尽可能多的信息来作为指导。因此数据处理提到了日程上来。数据纷繁就要依靠电子计算机。新系统的建立和旧系统的改建和扩充，都必须在最优状态下运行。更进一步就是策发展，根据今年的情况明年如何发展才更积极又可靠，使国民经济的发展达到最大可能的高速度。

优选法是采用尽可能少的试验次数，找到最好方案的方法。优选学作为这类方法的数学理论基础，已有初步地系统研究。实践中，优选法的基本方法，已在大范围内得到推广。目前，我国化工、电子、冶金、机械、轻工、纺织、交通、建材等等方面都有较广泛地应用。在各级党委的领导下，大搞推广应用优选法的群众运动，各行各业搞，道道工序搞，

短期内就可以应用优选法开展数以万计项目的试验。使原有的工艺水平普遍提高一步。在不添人、不增设备、不加或少加投资的情况下，就可收到优质、高产、低耗的效果。例如，小型化铁炉，优选炉形尺寸和操作条件，可使焦铁比一般可达1:18。机械加工优选刀具的几何参数和切削用量，工效可成倍提高。烧油锅炉，优选喷枪参数，可以达到节油不冒黑烟。小化肥工厂搞优选，既节煤又增产。在大型化工设备上搞优选，提高收率潜力更大。解放牌汽车优选了化油器的合理尺寸，一辆汽车一年可节油一吨左右，全国现有民用汽车都来推广，一年就可节油六十余万吨。粮米加工优选加工工艺，一般可提高出米率百分之一、二、三，提高出粉率百分之一。若按全国人数的口粮加工总数计算，一年就等于增产几亿斤粮食。

最好的生产工艺是客观存在的，优选法不过是提供了认识它的、尽量少做试验、快速达到目的的一种数学方法。

物资的合理调配，农作物的合理分布，水库的合理排灌，电网的合理安排，工业的合理布局，都要用到数学才能完满解决，求得合理的方案。总之一句话，在具有各种互相制约、互相影响的因素的统一体中，寻求一个最合理（依某一目的，如最经济，最省人力）的解答便是一个数学问题，这就是"多、快、好、省"原则的具体体现。所用到的数学方法很多，其中确属适用者我们也准备了一些，但由于林彪、"四人帮"一伙的干扰破坏，没有力量进行深入的工作。今天科技工作要大干快上。用于"当务之急"的数学研究和应用必将出现一个崭新的局面。

数学之发展

宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。其它如爱因斯坦用数学工具所获得的公式指出了寻找新能源的方向，并且还预示出原子核破裂发生的能量的大小。在天文学上，也是先从计算上指出海王星的存在，而后发现了海王星。又如高速飞行中，由次音速到超音速时出现了突变，而数学出现了混合型偏微分方程的研究。还有无线电电子学与计算技术同信息论的关系，自动化与控制技术同常微分方程的关系，神经系统同控制论的关系，形态发生学与结构稳定性的关系等等，不胜枚举。

数学是一门富有概括性的学问。抽象是它的特色。同是一个方程，弹性力学上是描写振动的，流体力学上却描写了流体动态，声学家不妨称它是声学方程，电学家也不妨称它为电报方程，而数学家所研究的对象正是这些现象的共性的一面——双曲型偏微分方程。这个偏微分方程的解答的性质就是这些不同对象的共同性质，数值的解答也将是它所联系各学科中所要求的数据。

不但如此，这样的共性，一方面可以促成不同分支产生统一理论的可能性，另一方面也可以促成不同现象间的相互模拟性。例如：声学家可以用相似的电路来研究声学现象，这大大地简化了声学实验的繁重性。这种模拟性的最普遍的应用便是模拟电子计算机的产生。根据神经细胞有兴奋与抑制两态，电学中有带电与不带电两态，数学中二进位数的0

与1、逻辑中的"是"与"否"，因而有用电子数字计算机来模拟神经系统的尝试，及模拟逻辑思维的初步成果。

我们作如上的说明，并不意味着数学家可以自我陶醉于共性的研究之中。一方面我们得承认，要求数学家深入到研究对象所联系的一切方面是十分困难的，但是这并不排斥数学家应当深入到他所联系到的为数众多的科学之一或其中的一部分。这样的深入是完全必要的。这样做既对国民经济建设可以做出应有的贡献，而且就是对数学本身的发展也有莫大好处。

客观事物的出现一般讲来有两大类现象。一类是必然的现象——或称因果律。一类是大数现象——或称机遇律。表示必然现象的数学工具一般是方程式，它可以从已知数据推出未知数据来，从已知现象的性质推出未知现象的性质来。通常出现的有代数方程，微分方程，积分方程，差分方程等等（特别是微分方程）。处理大数现象的数学工具是概率论与数理统计。通过这样的分析便可以看出大势所趋，各种情况出现的比例规律。

数学的其它分支当然也可以直接与实际问题相联系。例如，数理逻辑与计算机自动化的设计，复变函数论与流体力学，泛函分析与群表示论与量子力学，黎曼几何与相对论等等。在计算机设计中也用到数论。一般说来，数学本身是一个互相联系的有机整体，而上面所提到的两方面是与其它科学接触最多、最广泛的。

计算数学是一门与数学的开始而俱生的学问，不过今天由于快速大型计算机的出现特别显示出它的重要性。因为对

象日繁，牵涉日广（一个问题的计算工作量大到了前所未有的程度）。解一个一百个未知数的联立方程是今天科学中常见的（如水坝应力，大地测量，设计吊桥，大型建筑等等），仅靠笔算就很困难。算一个天气方程，希望从今天的天气数据推出明天的天气数据，单凭笔算要花成年累月的时间。这样算法与明天的天气何干？一个讽刺而已！电子计算机的发明就满足了这种要求。高速度大存储量的计算机的发展改变了科学研究的面貌，但是近代的电子计算机的出现丝毫没有减弱数学的重要性，相反地更发挥数学的威力，对数学的要求提得更高。繁重的计算劳动减轻了或解除了，而创造性的劳动更多了。计算数学是一个桥梁，它把数学的创造同实际结合起来。同时它本身也是一个创造性的学科。例如推动了一个新学科计算物理学的发展。

除掉上面所特别强调的分支以外，并不是说数学的其余部分就不重要了。只有这些重点部门与其它部分环环扣紧，把纯数学和应用数学都分工合作地发展起来，才能既符合我国当前的需要，又符合长远需要。

从历史上数学的发展的情况来看。社会愈进步，应用数学的范围也就会愈大，所应用的数学也就愈精密，应用数学的人也就愈多。在日出而作，日入而息的古代社会里，会数数就可以满足客观的需要了。后来由于要定四时，测田亩，于是需要窥天测地的几何学。商业发展，计算日繁，便出现了代数学。要描绘动态，研究关系的变化，变化的关系，因而出现了解析之学、微积分等等。

数学的用处在物理科学上已经经过历史考验而证明。它

在生物科学和社会科学上的作用也已经露出苗头。存在着十分宽广的前途。

最后，我得声明一句，我并不是说其它科学不重要或次重要。应当强调的是，数学之所以重要正是因为其他科学的重要而重要的，不通过其他学科，数学的力量无法显示，更无重要之可言了。

需要指出的是，"四人帮"为了复辟资本主义，疯狂地破坏生产，破坏科学技术的发展，他们既破坏理论研究工作，更疯狂地打击从事应用数学的工作者，他们要的是无文化的体力劳动者，供他们剥削。他们的遗毒需要彻底清除，不可低估。为了在本世纪末实现"四个现代化"，为把我国建成强大的社会主义国家这一伟大目标，发展数学的重要性是无可置辩的。

谈　数　学

华罗庚

难！有人说数学难！是否能难于上青天？但时至今天，人们已能在月上徘徊，空间漫步。人类总是不满足于现在，从"难"走向宇宙空间去！事实上，有志者天下无难事，畏难者寸步不敢移。就登天来说：九十九难中，数学仅算一难，但却是必不可少的工具之一。从牛顿力学一开始就为计算卫星轨道写下了方程。牛顿以前，算星球轨道知其然，而不知

其所以然，的确很难。有了万有引力定律，至今人造卫星轨道的计算早已不在话下。时代发展了，难的不难了，人类总是不畏攀登，一步一个脚印，后人踏前人的脚印前进。当然一步登天难，三百年来一步一步，一代一代地前进，今天不是已初见成效了吗？就数学来说，也是如此。要想一步登天万难，但步步踏实何难之有？君不见，自古失足坠崖者，都是一步落空人。

烦！有人说数学烦！是否烦过于千头万绪、相关相联的人类经济活动。要钢！炼钢要矿石，要煤要焦要电力，建炼钢炉本身还要钢，又要炉砖，即使有了原料，还要运得来，成品还要出得去，销得了。在生产矿石的时候又要挖掘机（钢做的），电力（煤烧的），木材（支撑坑道用的），修铁路又要钢轨、枕木、机车头，等等。一着出错，全盘牵连，一步落后，全队窝工。这么复杂的系统，岂是说空话可以找得出头绪来的？不！一个不小心的决策，就会使比例失调，顾此失彼，甚至于造成灾难，但不怕烦，善御烦，搞得得法，便能左右逢源，稳步速见之率。这样的烦，是否比数学上的习题要烦些？烦得多了！但御烦之道也少不了数学这一助手，特别是有了近代的电子技术，这助手更能发挥作用。但机器毕竟是机器，它们会的，都是人类已经会的，真正的主人还是有创造性的善利用善驾驶这些机器的人，学好数学是其中一个重要的环节。

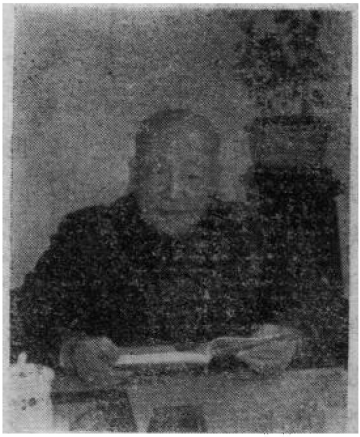
板，死板！有人说数学太死板了！一点儿趣味都没有！然！把数学看成是公式的堆积，把定理作为背诵的教条，把讲解说成为形式逻辑的推演，把考试弄成为死记硬背按标准

答案不敢越雷池一步地生搬硬套，这样的情况岂能不板不僵化！僵化是科学的大敌，是社会发展的大敌。

但是，实质上完全是另一回事：数学是自然科学中容易联系不同实际的学科之一，也是自然科学和社会科学得力的助手。西方有些学者指出：西方现代科学突飞猛进发展的两大支柱：欧几里得几何的推理方法，还有培根科学实验的倡导（当然他们可能漏掉了更重要的一点：生产力的发展，社会制度的变革）。科学实验方法的优选和结果的处理也少不了数学，数学是同科学发展而发展的，它怎么会死、会僵呢？就数学本身来说，也是壮丽多彩，千姿百态，引人入胜的。一个问题想不出时，固然有些苦恼，若一旦豁然想通，那滋味难道不是甜蜜蜜的，这和音乐，舞蹈艺术的享受有何不同。如果在成法之外，别开生面地想出一些新法来，那就更是其乐无比了。我们在银幕上看到过体育夺得锦标、高奏国歌的激动场面，科学中也有同样的感受。实质上，科学是前进的，任何一个有创造发明的科学家都不会是墨守成规的死板人，而是能够想前人所未想的、思想活跃的人。更重要的是：社会的需要，祖国的需要，新长征的需要，这是我们最大动力之所在。兴趣是可以培养的，难何足怕，烦何足虑，死板更是吓唬不了人！何况事实并非如此，不信，请下些功夫，试上一试。认清了道路，信心自来，干劲随至。为了祖国，学习好祖国所需要的一切。当然，数学只不过是其中之一。

谈谈数学打基础问题

苏步青



作者简介：著名数学家，教授。1902年9月23日生于浙江省平阳县北港带溪村。早在中学读书时，他便勤奋好学，酷爱数学。中学四年演算了上万道数学题，各科平均成绩也名列全班第一。中学毕业后，于1919年到日本留学。年仅十七岁的苏步青以优异的数学成绩考入了日本的名牌大学——东京高等工业学校电机科学习，1924年毕业又考取日本东北帝国大学数学系。当时该系只招九名学生，他的考试成绩突出，《微积分》和《解析几何》都得了一百分。在日本帝大学习期间，入学仅两年半，便于1926年在日本学士院学报上发表了他的第一篇著名数学论文《某个定理的扩充》，轰动了全校。1927年获理学士学位，此后又连续发表三十多篇论文。1927年由东北帝大数学系毕业后进入该校研究院，为著名数学家窪田忠彦教授的研究生。在微分几何

研究方面取得了明显的成果，于1931年获得理学博士学位。1931年回国后到浙江大学历任数学系教授、系主任。自1952年起一直任复旦大学教授，先后担任副校长、校长等职务。1958年他创办复旦大学数学研究所，兼任所长迄今。现任全国人大常务委员、民盟中央副主席、中国数学会名誉理事长，还担任中国科学院数学物理学学部委员、全国人大教科文卫专门委员会副主任及《数学年刊》主编等职务。现为中国共产党党员。

苏步青教授自1927年以来，先后在国内外学术刊物上发表了150多篇数学研究论文，还出版了多种微分几何专著：《射影曲线概论》、《一般空间微分几何学》、《射影曲面概论》、《射影共轭网概论》、《微分几何五讲》、《计算几何》、《仿射微分几何》等。并已汇编出版《苏步青数学论文选集》。近几年来，他将计算几何的理论应用于航空、造船、汽车制造工业，取得了可喜的成果。他不仅是一位成绩卓著的数学家，自成微分几何学派，而且又是一位知名的教育家，半个多世纪以来，为祖国培养出一批又一批的科学人才做出了重大贡献。

学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，这有利于弄清基本概念、定义，以至于达到熟练运算的程度。这就是非常重要的基本功。我青年时代学数学，就养成多解题的习惯。我首先把教科书上的规定的习题，通过自己独立思考把它解

出来，从中领会其所依据的是什么基本概念，什么定理，然后思考是否还能用别的方法解题，把这道习题真正搞懂。有一次，我曾用大同小异的二十种方法解一道习题，互相比较，从中找出最简便的一种方法。由于基本功扎实了，后来我在演算其它题目时，就感到运用自如。

但是，目前有人对解题的意义认识有偏差，以为题目做得越多，考试命中率就越高。于是家长、老师忙于收集各类习题，历届高考试题，竞赛题；外国中学生试题等，统统要求学生做出来，幻想从中碰上升学的试题。这种"题海战术"式的解题，实际上是一种变相的下赌注。它不利于学生基本功的训练，对提高学习成绩收效甚微。其实，每年高考，数学试题的类型就那么一些，但题目却变化万千。你做这题，他出那题，完全相同的题几乎没有。如果定理不熟，不会应用，有时看上去象是"对上号"，结果还是要解错的。所以，"题海战术"只能加重学生的负担，不利于学生的健康成长，不可能真正提高教学质量。前几年，我收到一位外省青年学生寄来十公斤重的笔记本，打开一看，全是数学习题解答，起码有七八千道。他附信说，自己解了这么多题，数学高考还是考不好，身体也搞坏了，这件事足以发人深省。

有的青年写信问我学好数学有什么"秘诀"。我想了一下，认为学数学要打好基础，是一个根本问题。初等数学的基础就是算术、代数、几何、三角，学好这些学科才有可能学高等数学，高等数学的基础应该说是解析几何和微积分，由此可见，算术、代数、几何、三角是数学的基础的基础。中小学生要在解数学习题上能够做到多快好省，必须牢固地

学好这四门学科的基础知识，这应该说是唯一的"秘诀"罢。所谓"学好"，是指把各学科的内容即教科书内容包括其中所有习题学得深透，演算得烂熟，真正做到没有一个定理不会证，没有一个习题不会做的程度。

我们为什么要演算习题呢？第一，是为了加深对书本中的基本概念、定义和定理的理解，这是主要的。第二，也是为了训练我们的运算技巧和逻辑思维。这虽是次要的，但是必不可缺的。习题是不可不做的，多做些习题，对于加深理解和提高运算技巧，逻辑思维都是有利的。但必须指出，光靠演算习题而忽视学深学透教科书中的基本概念、定义、定理（包括证明），首先是学不好数学，因而也演不出改头换面的习题来的。

我这里举一个数学竞赛试题为例，来说明学深学透教科书中的基本概念、定义、定理的重要性。题目是这样的：经过一条定二次曲线上的二定点 A 和 B，任意作圆，使和二次曲线再交于另外二点 C 和 D，求证连线 CD 常有一定的方向。这确是什么书上都没见到过的试题，乍看起来是有点难。我们的看法是这样：大部分考生做不出这道题，不是因为问题太难太偏，而是因为他们没有学深学透解析几何的基本内容。哪些是解析几何的基本内容呢？

第一，为了讨论几何图形的方便，我们要恰当地选择坐标系（指的是正交坐标系），使问题中有关图形的表达式化为简单的形式。在上述的试题里，我们选 A 为坐标原点 O，直线 AB 为 x 轴，于是 B 的坐标便为 $(1,0)$，而 AB 的方程化为 $y=0$。

第二，二次曲线的方程关于 x，y 是二次的，比方说 $f(x, y)=0$，由于要通过 A 和 B，所以方程是：

$$f(x,y)=x^2+2hxy+by^2-lx+cy=0$$

式中 h，b，c 都是已知的，至于经过 A 和 B 的任意元，它也具有同一形式的方程，不过 x^2 和 y^2 的系数相等而且没有 xy，这是圆方程的特点，所以圆的方程是：

$$g(x,y)=x^2+y^2-lx+my=0$$

式中的 m 是任意的。

第三，两条二次曲线一般有四个交点。就上列的二次曲线和圆看，A，B，C，D 就是这四个交点。现在我们作方程：

$$f(x,y)-g(x,y)=0$$

并研究这条新的二次曲线。可是这个方程可以写成：

$$y[2hx+(b-1)y+c-m]=0$$

所以它表示经过四个交点的两条直线。由于 $y=0$ 表示直线 AB，所以

$$2hx+(b-1)y+c-m=0$$

应该是直线 CD 的方程了。从此看出直线 CD 的斜率 $\frac{2h}{1-b}$ 是常数(和 m 无关)。

我恳切地希望广大中学同学在中学数学教师的指导下，学好各门数学的基础知识，有计划、有步骤地练好做习题的计算技巧和逻辑思维，适当挑选一些辅助习题而不是盲目贪多地去找习题。我也恳切地希望中学数学教师指导青年人更好地学习数学基础知识，使他们更快地成长起来。

要讲究学习方法

苏步青

我常收到一些中学生来信，谈及学习中遇到的种种问题。可以看出，这些同学都有一股强烈的求知欲，也想使自己的成绩出众，然而成绩总是提不上去。他们不服气，因为论努力的程度，并不亚于成绩比自己好的同学。成绩不佳的原因是多方面的，但从来信中谈到的情况看，不讲究学习方法，不重视打好基础，恐怕也是学习成绩差的原因之一。

常言道，过河需要有桥，学习不能不注意学习方法。一般说来，学习成绩好的同学，大多数都能联系自己的实际情况，讲出几种行之有效的学习方法，譬如解题时要注意审题，运算当中要防止粗枝大叶，演算要多采用几种方法，得出结果之后应该验算等等。同学们可以学习别人的好方法，也可以靠自己在学习中开动脑筋，不断摸索和积累新的方法。但我总觉得，在研究学习方法时，一定不要忘记打好基础和改进学习方法之间的关系。这篇短文不可能细谈具体的某个学习方法，我只想针对同学中提出的一两个较普遍的问题，谈谈自己的看法。

“我看到题目，自己想不出解题的方法，当别人稍加提示，就能做出来。”有的同学来信询问，这究竟是个什么问

题？依我看，这主要是基础知识掌握得不扎实，对概念和定理没有真正弄懂。我们为什么要演算习题呢？第一，是为了加深对书本中的基本概念、定义和定理的理解，这是主要的。第二，也是为了训练我们的运算技巧和逻辑思维。这虽是次要的，但是必不可少的。做习题，对于加深理解和提高运算技巧、逻辑思维都是有利的。但必须指出，光靠演算习题而忽视学深学透教科书中的基本概念、定义、定理（包括证明），肯定是学不好数学的。所以，我们在解题时，首先要看清楚这道题包含了哪些基础知识，会用到哪几个公式或定理，然后从某个公式或定理下手，一步步将题解出来。有的同学需要别人提示才能做出来，这就是自己不知从何处下手，需要别人给予具体的指点，说明他对需要运用的定理或公式没有真正弄懂，在使用中要么无从下手，要么下了手把题目解错了。由此可见，在学习中我们必须反对不懂装懂的不良学风，懂就懂，绝对不能使用“不太懂”这类含糊其词的话来对待学习。

“我做习题，单个的定理或公式的运用，还可以，一遇到综合性的题目，就怎么也想不出解题的办法。”这毛病又出现在哪呢？我认为，这些同学对定理或公式虽然懂了，但这大多是靠死记硬背的，对这些定理之间的内在联系缺乏了解，更没有达到融会贯通的程度，这应当说是不熟的毛病。定理怎么可以靠死记硬背来掌握呢？我们要学好数学，这个“学好”，我理解是把算术、代数、几何、三角这几门基础学科的内容，即教科书内容包括其中所有习题学得深透，演算得烂熟，真正做到没有一个定理不会证，没有一个习题不

会做的程度。这样，遇到综合题，就能把几个单一的定理公式融会贯通起来思考，再加上熟能生巧，综合题就不难解出来了。当然，要达到这样的程度，这并不是显而易得的事。譬如有的平面几何题目，在运算解题中需要画一条辅助线，这条线画在什么地方大有讲究，这确实是有一定的难度。画准了，一下子就能解出来，画不准，就可能解不出来，即使解出来，也可能是错误的答案。那么，怎样才能有把握一画即准呢？这就要靠平时的锻炼，按类型来练，演算多了，积累的经验也就丰富了。从另一个方面来说，演算习题还要经受失败的考验。有的同学一发现解不出，就不肯多动脑筋，总希望别人指点，这样自己就缺乏独立解题的能力，稍为难点的题目就望而生畏、缩手缩脚，这也是不利于解题能力的。所以，从某种意义上说，经过自己解出的题目，尽管时间多花了一点，但对定理和公式的理解和运用，印象就深刻得多了。

“我的脑子笨，也许不是学数学的料子。”有的同学在解题中多次碰到困难之后，往往容易产生悲观情绪和无所作为的思想。有的同学则显得非常急躁，到处求师，希望能得到一套现成的学习方法，使他在几天之内变聪明起来，学习成绩一下子提上去。这种想法是不现实的。因为学习这东西，是有其规律性的，必须由浅入深，由易到难，由低到高，循序渐进。别人的学习方法是他自己总结出来的，是针对他自己的情况而定的。别人的好方法，不能生搬硬套。目前学习成绩较差的同学不要悲观，不要性急，须知，欲速则不达。正确的态度是，既向同学学习好方法，为我所用；更重要的

是，要下决心，从打基础抓起，一点一滴，扎扎实实，把所学的定理、公式及其证明真正搞懂，弄熟，这样也许时间多花了，效果也许慢了一点，但提高学习成绩的效果也许会明显一点。

学习数学的几点体会

王　元



王元教授（右）与华罗庚教授在一起

作者简介：著名数学家、教授。1930年4月30日生于江苏省镇江市。1948年由南京市立第六中学毕业后，入浙江金华英士大学数学系学习，1952年毕业于浙江大学数学系。由著名数学家陈建功、苏步青推荐，分配到中国科学院数学研究所工作。从1952年起在著名数学家华罗庚教授的指导下，研究数论。在数论的研究中成绩卓著，他首先研究了著名的哥德巴赫猜想与筛法。于1956年证明了“3+4”，1957年证明了(2+3)，即“每个充分大的偶数都是一个不超过两个素因子的乘积与一个不超过三个素因子的乘积之和”。为我国首次在最困难的哥德巴赫猜想研究方面取得了世界领先地位。这项研究工作曾荣获我国自然科学一等奖。

1958年以后他与华罗庚教授一起从事高维空间积分的数值计算的研究，建立了精密度很高的高

维空间近似积分公式，有广泛的理论与实际价值，被国际上誉为“华—王方法”。他共发表数学论文七十余篇，专著有《哥德巴赫猜想》文集（1984年在新加坡出版）、《数论在近似分析中的应用》（与华罗庚合著，1978年科学出版社）。

王元现任中国科学院学部委员，数学研究所所长，研究员；中国数学学会副理事长；《数学学报》主编；西德《分析》杂志编辑等职。

一、认识学习数学的重要性

从远古到今天，人们都要和数学打交道。1，2，3，…这些简单的整数，从日常生活到尖端科学技术都离不开它们。由于生产的需要而引起了初等几何学的产生与发展。每一门学问，当它们需要用数量来精确刻划时，都离不开数学。科学技术越发展，就越需要更多更深的数学作为工具。特别是在电子计算机产生之后，更为数学方法的广泛使用与渗透，开辟了前所未有的广阔前景。由于计算数量太大，不少过去以为不可能计算的问题，现在都有可能计算了。不仅是力学、天文学、物理学、工程技术等这些经常需要用数学的领域，即使过去不常用数学的领域，如化学、物理学、经济学与工厂企业管理等，都日益离不开数学，而且用到很深的数学。值得指出的是，有了好的数学逻辑思维的训练，再去学习与研究别的很多领域，往往是易于深入的。所以数学几乎是所有人必须掌握的强有力的工具。因此可以说，数学的重要，正

表现在其他学科的重要是它们对于数学的需要上面。

二、掌握基本概念

不断地抽象是数学的特性之一。1，2，3，…是一个人，一个桔子，两张桌子等等的抽象，其四则运算可以概括无穷多个具体事物间的四则运算。初等几何中的直线与圆等，在现实生活中都是没有的。所谓圆就是与一点等距离的点的轨迹。现实生活中的圆盘子与脸盆的周围只是近似的圆。但许多具体对象，一经抽象，就能概括得更广泛。由此而得到的规律，可以在更广泛的实践中得到运用。学习数学时，不断会碰到新的抽象概念。在小学时，会碰到整数、质数、分数、小数的概念。中学的代数，用文字代替具体的数字，除普通平面几何外，在解析几何中，引进了直角坐标系，所以空间的点有了坐标表示，从而可以用代数方法处理几何问题。进了大学，微积分的第一关就是新加入了无穷小与无穷大的概念，极限的概念。如此等等。

学习数学首先就要弄清楚一个个概念。否则脑子里难免是一盆浆糊。掌握抽象概念的办法是多想想具体的例子。例如二分之一等于四分之二，可以说想象为一块月饼的半块等于两块四等分块月饼。中学的代数方程可以看作一些数满足的关系式，其中有一个未知数。用数的四则运算法则，可以将这个未知数求出来。这样与算术就可以一致起来。有了未知数的引进，就可以将算术的四则应用题用方程表示出来，十分易解。而这类问题，如果用算术方法去做，则要困难得多。解析几何也是同样的，将平面几何中的点，直线等都用数字

（或文字）与方程表示出来，因此问题远比用平面几何方法解决来得容易。在学到极限时，更要多掌握些具体数列求极限的例子。

所以要牢牢地掌握基本概念，一是要多了解这一概念的具体例子，二是要对照过去学过的东西 看看有了新概念与方法，到底有什么优越性？这样还可以把学过的东西有机地联系起来，加深对新概念的理解。

三、勤于思考与动手

仅仅弄清楚概念还不够，还要勤于动手。否则不仅会眼高手低，而且对概念的了解也很浮浅。在学校学习数学的阶段，适当地多做一些习题是很有必要的，真正弄清楚一个新的概念与方法的标准是看掌握运用它们的水平如何。而这些是需要通过做习题，即通过独立思考，自己多动手做才能学会。因此一定要勤于思考与动手。当然，同样水平的题目，特别是代公式的习题，做它许许多多，也是不必要的。要做一些经过思考以后才能够得到答案的较难的习题。更要养成一个好习惯，就是不要看不起容易的东西，不要放过每一个可以锻炼自己的机会。我国著名数学家华罗庚教授说过："搞数学要拳不离手，曲不离口"。他是善于利用一切机会思考数学问题的榜样。例如 1961 年报纸登载苏联向太平洋海域发射火箭，公报中给出了由四个点构成的一个火箭头着落区域，他就由此去推算出火箭的发射点。又如 1953 年，匈牙利数学家保尔·吐朗来我国访问时，曾报告了由他给出的我国古代数学家李善兰的一个恒等式的证明，其中用了不少高深

数学知识。华老连夜思考，终于在吐朗离北京前夕，给了李善兰恒等式一个纯初等的证明，并将结果告诉吐朗，为我国数学家争了气。我跟华老学习与工作，深深体会到这是一个很好的方法。例如，到本世纪末，我国工农业总产值要翻两番。利用对数知识可以算出年递增率为百分之十七点二左右。这个结论不用对数知识可不可以算出来？我算过，是可以的。

华老还教导我们，在遇到一个数学问题时，要学会分析，逐步将问题化简，最后加以解决。解决之后，要多想想是不是走了弯路？有没有更简单的证明？要这样反复推敲提高。还要学会心算，学会利用零星时间想问题。他告诉我们在学习一条定理时，一定要多想想，多分析一下这个定理是怎样创造出来的。这样的分析不仅可以破除对著名数学家的迷信，对于培养与提高自己以后独立解决问题的能力会有很大的作用。在我跟华老学习与工作的三十多年里，曾多次看到他解决一些数学问题的全部思索过程。这对培养我学数学与研究数学的能力是受益不尽的。

要勇敢的暴露自己的缺点，争取别人的帮助。中国民间有句话："不要班门弄斧"。说的是你不要到鲁班面前去玩弄斧头。意思是不要到专家内行面前去谈论他们内行的东西，以免暴露缺点，弄错丢脸。在旧社会，为了生计，这可以说是一句处事格言。但这决不是鼓励人上进的话。华老把它改为"必需到班门弄斧"。因为只有到班门去弄斧，才能得到最多的批评与帮助。华老是最善于向别人的优点学习的人。他听别人演讲时，常常打破锅子问到底，有时还对别人的工作加以简化提高。对学生则更为严格，学生演讲时，常常被问

得下不了讲台。他写的东西，在发表前，总是让学生看看，提的意见愈多，他就愈高兴，师生关系也就越亲密。不少东西，他还专门寄交国内外专家提意见，争取得到帮助。在他出国讲学时，每到一个学校，专门讲对方特别高明的东西，华老这样做，就是为了从他们那里得到真正的批评与更多的帮助。华老之所以能够成为有多方面卓越贡献的数学家，除他本人的天分与努力之外，跟他善于学习别人的长处也是分不开的。

还应指出，有些人专喜欢做偏题怪题，所谓偏题怪题都是孤立的东西，只不过是玩弄一些特殊技巧而已，并无助于加深对数学基本概念与内容的了解。这种学习方法是不可取的。

四、循序前进

学数学最怕的是吃夹生饭。如果一些东西学得糊里糊涂，再继续往前学，则一定越学越糊涂。结果将是一无所获。所以不要怕学得慢，一定要学得踏实。常常起步慢一些，只要学得很踏实，后来就会快起来的。学习要少而精，力求达到彻底掌握。华老常说："要正确估计自己，如果不行，就要退，一直退到懂的地方再继续前进。"华老问我们问题时，回答一定要求干脆，懂就说懂，不懂就说不懂。说什么"大致差不多"之类不确切的话，他是决不允许的。学数学更不可以打肿了脸充胖子，假装懂了很多东西。现在有不少人，连初等数学都不掌握，更不用说对近代的数论文献有所了解。却听不进好言劝告，在那里"研究"费马大定理和哥德巴赫猜

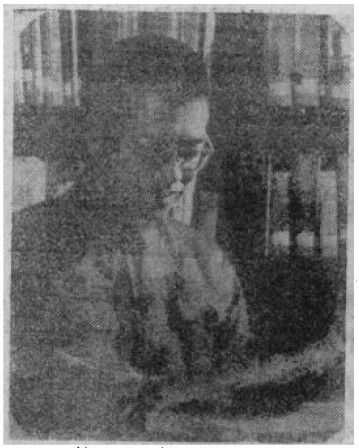
想，浪费了很多宝贵的光阴，毫无所获。反而将很多错误的东西当成正确的东西，印在脑子里，对以后的学习与工作，都将起着很坏的作用。这当然是一种极端的情况。但确有不少人，当学到一定水平后，就再也学不进去了。究其原因，就是某些部分吃了夹生饭之故。

当然也要防止永远停留在一个水平上，不再继续前进的偏向。有些人掌握了一些工具，例如初等数学，就停留在这个水平上，用这些工具解决一些问题，不再继续学习与提高。结果是观点很低，水平很低。这是又一种偏向。特别是一帆风顺，有了一些成绩的人容易犯这个毛病。应该承认学习与掌握一个自己不熟悉的新东西是很费劲的，而且有时还要冒点风险。这就是要向自己的懒惰与安于现状的心理作斗争。关于这一点，我们特别要向华老学习，他永远不知满足。当他在四十年代，已经成为国际著名数论学家后，不停步。宁肯另起炉灶，搞抽象代数学与复分析。在他老年时，还从事应用数学的研究与普及。他是既很踏实，又不保守，在数学上，做到了活到老，学到老，工作到老。他的治学经验是值得我们很好地研究，继承与学习的。

以上是几点不成熟的意见，不妥之处，还望读者不吝指教。

谈怎样学习数学

陈景润



作者简介：著名数学家，中国科学院数学研究所研究员。生于1933年。福建人。他在高中时听到沈元教授讲哥德巴赫猜想的故事。沈教授说："科学的皇后是数学，数学的皇冠是数论，哥德巴赫猜想则是皇冠上的明珠。"这些话深深地打动着青年学生陈景润的心，他立下决心要学数学。1950年高中没毕业，以同等学力考进了厦门大学，攻读数学专业。1953年秋，因成绩特别优异而提前毕业，分配到北京当中学数学教师。他一面教学，一面进行科学研究。后来由厦门大学校长王亚南把他调回母校，安排到图书馆当管理员，让他专心研究数学。他精心钻研华罗庚教授的名著《堆垒素数论》和《数论导引》，写出了数论方面的专题论文《他利问题》。他将论文寄给中国科学院数学研究所，得到了华罗庚教授的重视，建议调他到北京数学所当实习研究员。1956年

底，先后写了40多篇论文的陈景润到了中国科学院，开始在著名数学家华罗庚教授的指导下专心研究数论。

关于哥德巴赫猜想，多少学者经历过漫长的道路，花费过无数的精力来探索。但到二十世纪二十年代才开始有了一点进展。挪威数学家布朗用古老的筛法证明了"每一个大偶数是九个素因子之积加九个素因子之积(9+9)"。此后，外国数学家又先后证明了(7+7)、(6+6)、(5+5)、(4+4)、(3+3)，1958年我国数学家王元证明了(2+3)。1962年王元、潘承洞证明了(1+4)。1965年外国数学家证明了(1+3)。陈景润继承前人成果，吸取前人智慧，以坚韧不拔的毅力，顽强地向哥德巴赫猜想挺进。在1966年他证明了(1+2)。后来加以简化终于发表了深受世界数学界重视的著名论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》，被外国数学家誉为"陈氏定理"，是"筛法的光辉的顶点"。他为祖国增添了荣誉，为推动我国学术繁荣做出了极大的贡献。

黑龙江人民出版社要我向青年同志谈谈怎样学习数学，而且也有不少人来信来访，询问我是怎样学习数学的。看到青年同志们奋发向上的学习热情及我们祖国的大好未来，我感到非常高兴。我是研究数学的，我想就自己多年来的学习实践，谈谈学习体会，仅供青年同志参考。

数学有人称为"科学之王"，因为科学的发展离不开数学；也有人把数学称为"科学的奴隶"，因为数学是科学发展中不可少的工具。不管怎样讲，有一点是相同的，数学已经进入了人类所从事斗争的每一个领域。尤其是现在科学技术的飞速发展以及电子计算机的出现，各方面对数学提出的要求就越来越多，这是摆在我们面前的一项紧迫任务。没有科学技术，就不可能在我国实现四个现代化。从小学我们开始学习建设祖国的本领。自然界中存在着大量的数和图形。例如，一个人，二个人，三个人……，其中一、二、三就是数；又如图，三角形，长方形，正方形等就是图形。在小学里，算术是最重要的课程之一；在中学、数、理、化则是课程中最重要的部分。如果数学学得不好，那么物理、化学也不可能学好。在理工科大学中，数学更是一个基础。例如，在工农业，我们在现有条件下，如何合理地安排生产过程，使产量最高，质量最好，使消耗费用最小，又能在最短的时间内完成任务，在这类问题中就存在有大量的数学理论和计算问题。所以数学在我们社会主义建设中能够并应该起很大的作用。

古今中外的科学家、工程师中，有相当部分是出身于贫穷家庭的。他们吃不饱，穿不暖，哪里有钱去上学？但是他们通过刻苦自学，为科学技术的发展作出了很大的贡献。例如，我的老师华罗庚教授，是我国最著名的数学家。他小时候由于家中经济困难，上完小学就无法上初中了，只好去当店员。他在数学方面的不少工作是在做店员时经过刻苦自学做出来的。所以说，有条件上大学当然是好的，没有条件上大学通过自学也能为四个现代化做出贡献。由于我国目前条

件所限，大多数青年不可能上大学。但是在工作岗位上也一定能自学好的。特别是数学。

学习首先要谦虚。有一些青年人很骄傲自满，或者说夜郎自大。他们对近代数学缺少起码的了解，就想解决世界有名的数学难题。每当我看到这些情况，就感到十分心痛，因为他们白白浪费了宝贵的时间。青年时代要踏踏实实地认真地学习，不要想入非非，浪费精力。我们说要有信心，主要是说通过刻苦的努力，就一定能学好数学，攻克难关，为祖国实现四个现代化作出贡献。

有了决心加信心，还必须有恒心。这就是说要有坚强的意志加毅力，要长期努力，坚持不懈。青年同志们，祖国期待着你们，人民在期待着你们，为了祖国四个现化代，我们一定要做出这样的努力。

有了决心、信心加恒心，我们还必须注意学习方法。

第一，知识面要宽些，基础要扎扎实实。前几年，一些青年在学习上出现了一些偏差。有的青年人以为学好数理化就行了，至于语文学得好不好无所谓。这种看法是错误的，有的理工科大学生学数理化还好，但写个实验报告却文理不通，错别字很多。这样，即使你很有创造性，别人还是看不懂。数理化固然重要，但语文却是各门学科最基本的工具。语文学得好，阅读写作能力提高了，就有助于学好其它学科，有助于知识的积累和思路的敞开。这个意见我是很赞成的，我希望青年同志们千万不要忽视语文学习及其它各科的学习。

有的青年问我学习数学有什么"秘诀"，我觉得在学习上

没有捷径好走，也无"秘诀"可言。要说有，那就是刻苦钻研扎扎实实地打好基础，练好基本功。在学习中不可平均使用力气，而要把劲头特别用在一门新功课上，一个新篇章的开头，用在最基本的东西上。要打好坚实的基础，循序渐进。自然科学，特别是数学，有很强的系统性和连贯性。只有把前面的基础打牢，才好进入后一步的学习。只有一步一个脚印，学得扎扎实实，才能逐步提高，最后才有希望达到科学的顶峰。

第二，要注意独立思考。拿数学来说，它是一门着重于理解的学科，在学习中要防止死记硬背，不求甚解的倾向。一定要勤分析，多思考。对每部分内容和每个问题，要从正面、反面各个角度多想想。要善于找出它们之间的联系，总结出规律性的东西。不要一遇到不会的东西就马上去问别人，自己不动脑子。专门依赖别人，而是要自己先认真地思考一下，这样就可能依靠自己的努力克服其中的某些困难。对经过很大努力仍不能解决的问题，再虚心请教别人，这样往往能受到更大的帮助和锻炼。

第三，学习态度要端正，要注意培养良好的习惯，刻苦钻研。要做到专心致志。不论复习、做题、阅读参考书籍，都要精力集中。要争分夺秒，提高效率，切忌分心。学习中还要养成严肃认真，踏踏实实的好学风，不要好高骛远，更不能夸夸其谈。自己要多动手，从一点一滴做起，日积月累，逐步有所提高。

以上是我的一点粗浅体会。供青年同志们参考，希望青年同志们能积极响应党中央的号召，发奋努力，学政治、学文

化，树立爱科学、讲科学、用科学的风气。让我们每个人都在四化的征途中留下值得自豪的不间断的深深的脚印吧！

回忆我的中学时代

陈 景 润

我在中小学读书阶段，从成绩上看，并不显得特别好，但我总是踏踏实实地学好基础知识，从不计较分数。有一次考数学，我只把考题的答案写在考卷上，没有将演算过程列进去，按此卷应算不及格，但当时教我的数学老师心想，陈景润这个学生不会弄虚作假，还是当面问个明白再说。于是数学老师就找我谈，查问结果，果然我运用了好几种方法来演算这几道题目，只因草稿纸算得太多了，所以没有交上去。当时我的数学老师十分欣慰，高兴地对我说："以后请你算题目时，一定要交上演算稿，懂吗？今天不给你一百分，只给你九十五分！"这时我点点头，微笑着向老师道了谢才走。

我在中小学时是我们班上的有名的"Booker"（福州学生称"书呆子"或"读书迷"），同学们倒也十分佩服我这个"读书迷"背诵书本的本领。我读书不只满足于读懂，而是要把读懂的东西背得滚瓜烂熟，熟能生巧嘛！我国著名的文学家鲁迅先生把他搞文学创作的经验总结成四句话："静默观察，烂熟于心，凝思想，然后一挥而就。"当时我走的就是这样一条路子，真是所见略同！当时我能把数、理、化的许多概念、

公式、定理、定律，一一装在自己的脑海里，随时拈来应用。有一次化学老师要同学们把一本书背起来，同学们都感到很困难，但我却觉得："这一点点很容易，多花点功夫就可以记下来，怕什么？"果然没几天，我就把全书背诵记牢了。当时我认为，我们年青人，知识面有限，理解力较差，记忆力特别强，必须背诵多多的知识，将来使用时方会左右逢源，一呼百应，十分得心应手了。

我在中小学读书时娴静少言，不善于交往，但这不妨碍我的勤学好问。为了深入探求知识，我常常主动接近老师，请教问题或借阅参考书。我知道时间是最宝贵的，不愿意浪费老师的时间，常常趁下课后老师散步或者放学回家的路上，跟随老师一起走，边走边请教老师数学问题。只要是谈论数学的时候，我就滔滔不绝，不再沉默寡言。

我在福州英华中学读书时，那时学校分文、理两科，理科班侧重数、理、化，文科班侧重文、史、地。我很喜欢数学，可是当时我偏偏选读文科班，因为文科班数、理、化都比理科班浅，这样我就可以在不留级的前提下，集中最大精力去攻读高深的数学方面的书籍。我并不单纯地跟在数学老师后面跑，而擅长奇取。当时我经常到英华中学图书馆借书，其中有大学丛书《微积分学》，哈佛大学讲义《高等代数引论》，以及《赫克士大代数学》等。

我在厦门大学读书时，大学的书本是又大又厚，携带阅读十分不方便。我便把我国最著名的数学家华罗庚教授的《堆垒素数论》和《数论导引》拆成一页一页的，随身带，随时阅读。我坐着读，站着读，躺着读，蹲着也读，一直读到书

本跟我走，书尸烂床边的程度。

一九四六年春天，我在福建省三明市第一中学读初二时考试成绩是：代数99分，国文92分，英文89分，几何83分，化学88分，历史83分，地理85分，图画85分，音乐85分，体育80分，生理卫生82分，劳作75分。成绩是画笔，勾画出我当时是一个活生生的孩子来。我能唱能跳，天真活泼，瞧，音乐85，体育80！当时我衣衫素净、惹人喜爱，生理卫生82嘛！我几十年死死抱住的"金娃娃"——数学，确是夙有姻缘，代数99呀！分数最低的是劳作，我那时一双小手可不巧。

我念中学的时候是抗日战争和解放战争时期，我们班上许多同学为了抗日救国和解放全中国，推翻压在中国人民头上的三座大山，参加了中国人民解放军。他们为全国劳动人民建立了不可磨灭的功勋。当时我们班上有不少同学参加了地下党组织的活动，被国民党反动派残酷迫害。没有他们的英勇奋斗，就不会有我们今天的幸福生活。回想起我念中学时的情况，我觉得现在我们伟大祖国的中学的情况，和我当时在中学时的情况完全不一样了。现在中学教师的经济情况比我当时在中学读书时的老师们的经济情况不知改善了多少倍，现在同学们的经济情况也比我们当时的情况好得多。现在我们中学的图书设备、房屋等都比我在中学时好得不知多少倍。所以我认为现在的同学们是很幸福的。我希望同学们一定要爱惜宝贵的时间，在老师们的指导帮助下，努力学好政治和数、理、化，以及其它各种知识，练好身体，为我们伟大祖国的四个现代化做出自己的贡献！

怎样学好数学

杨　乐　张广厚



杨乐简介：著名数学家、中国科学院数学研究所副所长、研究员。1939 年 11 月生于江苏省南通市。1956 年考入北京大学数学系学习，在大学里他是一位品学兼优的学生。1962 年毕业后又考取了中国科学院数学研究所研究生，在我国著名老数学家熊庆来先生指导下，进一步深造。

杨乐和张广厚同志，既是大学里的同学，又是研究所里的好友。他们研究的主要方向都是函数论中的整函数、亚纯函数的值分布理论。在他们的共同努力下，终于在七十年代中期取得了突破性的成就，获得了系统的具有世界水平的数学成果，在我国学术界产生了积极的影响。在 1965 年至 1977 年，杨乐和张广厚共同发表了八篇重要论文：《解析函数族的正规性涉及重值的研究》、《关于亚纯函数的波莱耳方向的分布》、《亚纯函数亏值总数和波莱耳方向总数的研究》、《关于整函数的亏值总数》、《整函数的波莱耳方向的分布》、《具有给定奇异方向的

亚纯函数的构造》、《一类极值整函数的亏值》、《整函数的亏值与渐近值》等。这许多创造性的成果，开辟了一个新的研究方向。国外数学家把他们的研究成果称为"杨—张定理"、"杨—张不等式"。1978年他们合作的《整函数和亚纯函数的值分布理论》获得了全国科学大会奖励，1982年又获得我国自然科学二等奖。1979年加入中国共产党。现任中国科学院学部委员，中国数学会秘书长，全国政协委员，全国青联副主席。

同学们，你们在学校里数学学得怎样？你们知道为什么要学数学吗？现在我们就从这个问题谈起。

在自然界里，在生产实践中，存在着大量的数字和图形，数学就是研究数量关系和空间形式的一门科学。各门科学和工程技术，都用得上数学，例如怎么安排生产才能多快好省地完成任务，这个问题就可以用数学方法来帮助解决。所以，数学是一种不可缺少的有力工具。近几十年来随着科学技术的飞速发展以及电子计算机的出现，各方面对数学提出的要求就越来越多。同学们在中学里也可以体会到数学是一门重要课程，是学习其他课程，如物理、化学等所不可缺少的。下面我们就对怎样学好数学，提出几点意见。

第一，我们热忱希望同学们从中学开始，就树立远大的理想，为革命勤奋学习。有了正确的学习目的和态度，才能够刻苦钻研，努力克服学习中的困难。

有的同学在学习中遇到了困难，常常爱说"我的脑子不

好使，不适合学习数学。"这种说法是不正确的。事实上，学习的好坏并不在于脑子灵或不灵，而是决定于是否下了足够的功夫，是否付出了大量的、艰巨的劳动。

也有的同学刚学了一点，就骄傲自满起来，认为不必花费多大气力，便能轻而易举地学好数学。这种想法也不对。数学和其他自然科学一样，都是老老实实的学问。在学习数学的前进道路上，没有任何捷径可走，更不能投机取巧。只有勤奋地学习，持之以恒，才会得到优秀的成绩。

第二，努力学习最基本的东西，练好基本功。同学们要多下些功夫，把最基本的东西学深学透，并且要十分熟练，将来不论进一步学习或者参加工作，能够非常自如地运用它们。

在中学数学里，代数是最基本的，平面几何也很重要。代数和算术的最大区别，是前者引进了文字来进行运算。我们要掌握这个特点，善于从个别到一般，从具体到抽象，使认识不断深化。例如，同学们不仅要会解数字系数的代数方程，如 $2x^2+5x-3=0$；而且要会解文字系数的方程，如 $ax^2+bx+c=0$。从前者到后者，就是这样一个认识深化的过程。

在学习中，要把基本概念弄清楚。例如在代数中，什么叫恒等式，什么叫方程式，它们之间有何区别，什么叫方程的元、次数和根；在平面几何中，给了一个命题，什么是已知的条件，什么是要证明的结论，这些首先要搞得清清楚楚。具体演算要准确，数值、符号不能有任何差错。每一步推理要论据充足，十分严谨，决不能马马虎虎。

代数中因式分解十分重要，对于学习其他部分有较大作用。一些基本公式，例如 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，不仅要从右边出发，用乘法来验证它，更重要的是必须从左边出发，经过因式分解，得到公式。对于其他的公式，也必须这样做。还要多加运用，不能只限于简单地代公式，而是要适应种种变化的情况，灵活地加以运用。这样才能真正掌握这些公式。

数学的每一部分往往有一些关键，要特别留意。例如解一元一次方程的关键，是移项；解二元一次联立方程组的关键，是消元。这些都比较容易理解。解一元二次方程的关键，是配方。在方程 $ax^2+bx+c=0$ 中，如果 $b=0$，就可以化为：

$$ax^2-(-c)=0$$

即

$$a\left[x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)\right]=0$$

应用平方差的公式，可以分解为

$$a\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$$

由此便能求出方程的两个根。一般的一元二次方程，如果能够消去它的一次项，就可以化为上面的形式。事实上，对于方程

$$ax^2+bx+c=0$$

可以化为

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=0$$

即

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)=0$$

如果设

$$y=x+\frac{b}{2a}\qquad c'=c-\frac{b^2}{4a}$$

则上述方程即为

$$ay^2+c'=0$$

在这个方程中，一次项消失了，从而成为我们可以解决的类型。所以这种所谓配方的办法，实际上就是消去一次项的过程。经过一番分析和思考以后，理解加深了，分析问题和解决问题的能力也提高了一步。

第三，要注意培养独立思考、刻苦钻研的精神。

数学是一门着重于理解的学科，在学习中要防止死记硬背、不求甚解的倾向，一定要勤分析，多思考。对一个问题要从正面、反面、各个角度多想想，要善于找出它们之间的联系，总结出规律性的东西。

除了听老师在课堂中讲的以外，还要自己动手，认真演算，多做练习。演算和练习是非常重要的，不这样做就不能把书本上写的和老师讲的知识，真正化为自己的知识。除了基本练习，还要做一些具有一定难度的、需要经过一番思考才做得出来的题目。做出一道较难的题目之后还要回想一下：这道题的难点和关键在哪里？应该从什么地方入手？还有没有其他的解决途径？……这样就可以不断提高分析问题和解决问题的能力。

在学习中要注意循序前进。要一步一个脚印，由易到难，扎扎实实地学。不注重基本训练，一味钻偏题、难题、钻牛角尖，是十分有害的，要注意防止。

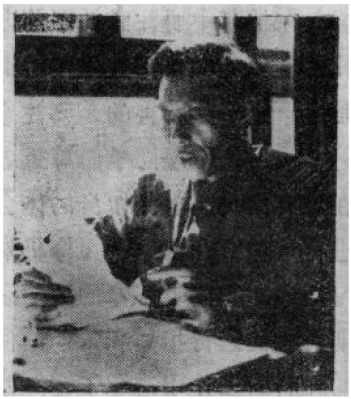
最后还希望同学们尊重老师的劳动，认真向老师学习。在这方面我们有些切身的体会。中学时期，很多老师对我们进行过教育和帮助，至今仍然记忆犹新。在大学和研究所学习期间，我国老一辈的数学家熊庆来先生和庄圻泰先生，长期对我们进行指导和帮助，使我们打下比较坚实的基础，能够在科研工作中避免了走一些弯路。我们现在做出了一些研究成果，这中间也凝聚着他们的辛劳和心血。

党中央对教育工作十分重视，对广大青少年寄予了深切的希望。我们深信在毛主席光辉的教育方针指引下，在党中央的英明领导下，教育战线必将和其他战线一样，取得辉煌的成绩，为实现四个现代化源源不断地输送又红又专的人才。

预祝同学们取得新的成绩和更大的进步！

学习数学的几点体会

张广厚



作者简介：著名数学家、中国科学院数学研究所研究员。1937年1月22日生于河北省唐山市。先后在唐山市新生中学和第十一中学学习。1956年以优异成绩考入北京大学数学系，受到庄圻泰教授的多方培养，成绩优异。1962年毕业后考取了中国科学院数学研究所熊庆来教授的研究生。1967年留数学所工作，1977年提升为副研究员，1978年加入中国共产党。1979年由于他在函数论方面的深刻造诣，被提升为研究员，他从做研究生时起，一直从事整函数和亚纯函数理论的研究工作，取得了重要成果，先后发表论文十余篇。他的论文《整函数与亚纯函数的亏值，渐近值和茹利雅方向的关系的研究》受到国内外著名数学家的高度评价。在《整函数和亚纯函数的渐近值》和《关于整函数的

● 本文为张广厚同志在西安对数学教师的一次讲话。

渐近路径的长度》论文中，解答了1964年和1973年两次国际函数论会议上提出的有关渐近值方面的五个问题，得到英国函数论专家海曼教授的赞赏，他认为“这是惊人的结果”。1965年至1977年张广厚和杨乐共同发表了八篇重要论文，在解析函数族正规性涉及重值、亏值、渐近值、波莱耳方向等方面得出了许多创造性的结果，开辟了新的研究方向。国外数学家称他们的研究成果为“杨—张定理”、“杨—张不等式”。他俩合作的《整函数和亚纯函数的值分布理论》获得1978年全国科学大会奖励，1982年又获得我国自然科学二等奖。现任中国科学技术协会党组成员、中国科协书记处书记。

西安是座文明古城，是古文化的中心，我到西安来非常高兴。我怀着崇敬的心情参观了昭陵，秦始皇兵马俑，半坡村文化遗址。这些灿烂辉煌的文化，是我们祖国的骄傲。今天到会的都是老师，有的是中学老师，有的是大学的青年教师。教师这个职务是神圣的，是人类灵魂的工程师，要培养出一代科学家、工程师，在很大程度上取决于教师。所以我在教育部召开的一次座谈会上曾提出了两条意见，第一应当多办些师范院校，培养出更多的好教师；第二是编写一些好教材。我自己对老师是很尊敬的，包括我的小学的、中学的、大学的老师。教师岗位应当引起整个社会的尊敬。今天大家要我谈谈我个人成长的道路。我的确没有什么好谈的，我的

很少谈这个问题。

我的成长过程，首先应归功于党对我的培养和教育。第二是教师在我身上花的心血，这里边有小学的教师、中学的、大学的教师。第三才是个人的努力。

现在我谈这三个问题。首先，我能成为一个数学家，是党和人民对自己的培养，现在好象人们不太谈这个问题了，但对我来说确实是如此。我的父亲是开滦煤矿的一个工人，家里只有三块薄沙地，大约有四、五亩。我兄弟五人，还有一个妹妹，加上我母亲，还要负担祖父一部分生活费。这种经济情况，在旧社会当然是很困难的，作梦也不会想到自己会当一个数学家的，现在有许多记者问我是如何从小立志当一个数学家的，我每次都使他们失望。"我小时最大的理想是将来能不作井下的挖煤工人。而能做一个有技术的工人"。解放后，才有了上初中的条件，打算初中毕业后能上技校就满足了。初中毕业后才希望将来能上大学。所以考了高中而没有考技校。到高中后，我想，假若党不让我搞别的我就搞数学工作。考入北大数学系后，才算专心致志踏踏实实地搞数学，做了一个数学工作者。的确，我现在能成为一个数学家，正是党对自己长期的培养和教育。我认为：努力学习、刻苦钻研作出一定的贡献，是自己对党应尽的责任和义务。长期以来，自己从事科研工作之所以能不怕困难和挫折、一直很努力，作出了一些成就，动力之一就是党对自己多年的培养和教育。

第二是老师们的心血。我前边说了，我小时，家里是那样一种环境，自己也比较调皮，功课学的并不太好。[illegible]

年，我刚好小学毕业，考初中时，出了七道算术题，只作了三道，其中一道还是我猜出了得数，给了一个验证，当然不能算对，这样我就落榜了。引起我数学兴趣的恰好是我小学的老师。说起来很滑稽，考不上初中就回家种地。过了三个月家里让我到原来上学的小学上补习班，回校的第一天赶上考数学，说来也怪有趣的，我考了一百分，第二天老师在课堂上表扬了我，还让大家向我学习。"高帽子"一戴自己很得意，也增强了我的信心，另外，自己没有考上学校总觉的不光彩，从此我和我的几个同学，起早贪黑，真正下了狠功夫。我们的算术老师，确实是很有水平，算术题出的非常之好，三个月后，我的算术就打下了一个很好的底子，解题的能力很高，解一般难题都不成问题。所以我说老师对学生还是要以表扬为主。这是我的小学老师。上高中后，我遇到一个很好的数学老师，他教育我的路子很对，帮助我在宽的方面打基础，他对我进行个别辅导，辅导我学习《范氏大代数》中中学课本不讲的内容，给我打下了很好的中学数学基础，提供了上大学的条件。到了北大，后来作熊庆来先生的研究生，有幸亲受熊先生教诲。熊先生是我国数学界的老前辈，79年去世。华罗庚老师、严济慈老师等许多有成就的科学家都与他有师生之谊。上研究生第二年，我写了一篇论文，题目是"关于公共 Borel 方向"。自己很得意，也急于求成很快发表，写了个文稿交熊先生审查。熊先生在前两页改了几个字让我拿回去再看看，我拿回来又急急忙忙抄了一遍送给他，过了几天熊先生又是只改了两页让我拿回去仔细看看。我有点恼火，但是对老师也没有办法，还是重抄了一遍送给他，往返

三次我想不对劲，原来是自己治学态度不严肃，不认真。此后，我所有稿件的每句话都是经过仔细修改，写的也很工整，抄好后再让熊先生看，熊先生培养了我严谨的治学精神。有一次，记者访问我，看见我文稿的字迹很工整，每个字都是一笔一划的写，他说，你这稿子象刻的一样。我说这是严格训练的结果。现在外地有许多同志向数学所寄稿件来，字迹很潦草，有的还附上一句话，说他很忙，字迹潦草希见谅。这些同志就不想想审稿人的时间，同样是很宝贵的。说实在的，审稿人看你字迹潦草就不愿给你看了。再比如，庄圻泰先生在我身上花的心血就更多了。庄先生有一次给我审一篇稿子从早晨八点半直到下午一点半，师母一再催我们吃饭也没停。庄先生当时已是68岁高龄了，用了这么长的时间为我审稿，许多稿子都是审两三遍，老先生在自己身上花了那么多的精力和心血，真使人感动。我四十多岁了，也搞了二十多年数学，可以说有些数学知识比我的中、小学的老师知道的还多一些，但是我还是很尊敬我的老师。今天到会的老师很多。我对大家由衷的起敬。

个人成长的第三个因素当然是自己的努力。许多记者访问我，希望我能谈出如何从小立志，能讲出自己多么有才能，多么与众不同，给他描绘出一个动人的过程。但是我的回答总是不能使他们满意。我的生活并没有太动人的情节，而是很平淡的，很清苦的，自己记忆最深的东西往往是失败和挫折，但正是这多次的失败和挫折才使自己达到成功或者说接近成功。陈景润同志是著名的数学家，他的生活也不是想象的那么轰轰烈烈，而是坚强的毅力、刻苦的劳动、多次的失

败和挫折。作为一个科学家，要全面发展、全面成长，首先需要一个好的思想基础。要立志，要有一个远大的理想和抱负，养成从小爱科学，对他走科学道路很有必要。我在高中时，政治上是团支委，学习上是拔尖的，就产生了骄傲情绪，上了北大那是硬碰硬，北大数学系集中了全国的数学尖子，北京市数学竞赛的前几名都在北大，自己在班上学习是全优，思想上往往产生了不健康的东西干扰自己学习。一个人要经得起胜利也要经得起失败和挫折，不然就学不好数学或者其它科学，有些人满脑子里整天家、家、家反而成不了家，应当把主要精力放在艰苦的劳动中去。前几年我到科大去，和少年班的孩子们见见面，也讲了几句话，一方面对他们进行了鼓励，同时也向他们讲了要有一个比较好的素质，就是说要经得起吹捧和失败的考验，不然，很难说会有什么发展。没有一个好的思想基础，能不能有成就值得怀疑。比如说，人们可能会想，陈景润、杨乐、张广厚有成就是因为条件优越。其实不然，陈住六平方米房子是全国闻名的，而他的六平方米在数学所来说也许是最好的，因为他自己住一个屋也没别人干扰。杨乐有两个孩子，四口人住十六平方米，一张方桌，每天晚上到八、九点先熄灯，让孩子们睡觉，过半小时后等孩子们睡实了再开灯工作。我们的办公室有十六平方米，放了六张桌子。我比他们更差，原来我家住在德胜门外一个荒僻的地方，我上班每天要骑三十五分钟自行车，我爱人在城里上班，两个孩子得我照管，我经常把孩子先托给一个七岁的小孩照管，我到所里报个到。我们的支部书记知道我的困难，让我可以在家办公。邻居中有与我情况相同的，

看我在家，还托我给他们代管孩子。打倒"四人帮"后，孩子们要念书了，一个三斗桌，两个孩子一人占一边，我爱人在缝纫机上工作，我坐个马扎在床板上工作，我的五万字的论文就是在这样的工作条件下写出来的。去年所里给我和杨乐解决了住房问题，我一家四口人住了二十九平方米的一套。这是因为我二人出了点名占了便宜。当然数学所的资料比别处多一些、全一些。生活条件就是如此，在这样的条件下，能不能坚持搞科学研究，这是需要一定的思想认识基础的。一个人条件好作出的成绩，不算什么，主要是在困难条件下，有一个好的思想基础，坚持搞科研作出成绩来。另外，搞科研，想当一个数学家或者其它科学家，需要有较好的素质。基本的素质之一是不怕困难，在科研中，一般讲困难与成就是成正比的。有困难才能有成就，有大困难才能有大成就。一定要养成不怕困难，或者说喜欢困难，而且，遇见困难能咬住不放，搞科研需要咬住困难不放。比如杨乐和我，报纸上说我二人发现了"奇异方向与亏值的联系"，1973 年在《中国科学》上发表的我们的文章：《亚纯函数的波莱耳方向的分布》，当时加了一个条件，在亏值条件下可以得到奇异方向分布的规律。传统的认识亏值这个条件是人为的。我两想用一切办法取掉这个条件，仍然得到个结论。为这个问题，我们几乎花了一年时间，整天泡在这个问题上，用尽办法就是过不去，拿不掉。但是，我二人下决心一定要拿掉它，每次都失败，在失败中我们有了新的认识，换了个提法，它们的依赖关系便出现了，问题终于解决了。若是没有坚定的毅力，没有咬住困难不放的决心，就不能达到成功。有人问成功有

没有灵感？我说有灵感，但灵感是长期艰苦劳动积累的结果。没有长期的积累就没有灵感。拿成就来说，失败在我一生中占的比例很大。没有多次的失败就达不到成功。只有不怕困难、咬住困难不放的人才能达到成功。往往是在特别困难的时候坚持下去就是"柳暗花明又一村"了。

另外，身体也很重要。我小时，家庭经济比较困难，营养差，身体一直不好，许多人担心我上大学上不下来。一年级时，班上人才济济，狠命干了一年，成绩虽然全优，但暑假整整在家躺了一个月。大家劝我不能这样干，不然犯了心脏病就不得了。二年级增强了身体的锻炼，三年级当了文体委员，若不是加强身体的锻炼，很难预料今天的情况。

业务问题就是智育问题，主要是由于长期的刻苦的劳动。我参观昭陵时，几个孩子围着要看张广厚，一个老人对我说，你就是张广厚，让我看看你的脑袋是怎么长的?！我说，聪明人是有的，但是光靠聪明是不行的，主要是靠后天的努力，而且聪明也是后天培养的。杨乐有一次骑的自行车坏了，在修车铺借了工具自己修，半天修不好，修车师傅说："你怎么这么笨呢？"他拿住工具一下就修好了。所以说才能是后天的，聪明与不聪明也是相对的。我小时也是一样，学习成绩不好，后来真正用了功就不一样了。到高中，我的数学没有考过99分，都是100分。有才能的人不是都可以作出很好的成绩来的，最主要的还是长期勤奋的，刻苦的学习。陈景润同志的刻苦精神给我留下深刻印象，他每天工作量很大，邓副主席说他七天七夜搞科研，除了必要的休息，这样说他不过分。并且十年如一日，二十多年如一日。真了

不起。前年国庆节报纸上登了陈景润、杨乐和我三人游园的照片，我们三个人从来没游过园，领导上让去这次就去了，八点多到那，录了音，照了张像，陈景润就提出他要走了，接着杨乐也走了，只有我游了一个多钟头，因我带了两个孩子去了，他们不让回。再讲一个杨乐的故事，唐山地震时，北京震得也很厉害，大家都住在防震棚里，楼委让杨乐出来，杨也只好出来，但是半夜两点钟几个小孩发现一层楼有灯，爬到窗户上一看，是杨乐在那里看书，说明成功是靠花大量的心血和刻苦的劳动得来的，不是聪明能够代替的，段学复（北大数学系系主任）先生有一次和我说："人人都知道华老天分很高，却不了解他是多么用功，他每天工作学习至少都在十个小时以上（指在西南联大时期）。"业务学习也有一个方法问题，得法不得法的问题。但是，更需要一定的思想认识和素质，不在素质上全面成长，要当工程师、科学家永远是个梦。

关于学习方法问题。任何方法都是建立在一定的思想基础上。常常有人问我怎样才能保证自己当一名科学家，有没有灵丹妙药？我说任何人也开不出这样一个药方来。方法是因人而异。但是学习还是有一定的规律性的，有一定的共性。应该注意那些问题呢？首先，在开头要狠下功夫，要尽量放慢一些。我在念一本新书时，开头我特别下功夫，因为开头都是基础的东西，基础的东西往往是容易接受却较难理解，特别是高等数学是这样。和打仗一样，开头下了功夫争取了主动权。中学学习也是一样，开头简单，自己认为懂了，实际没懂，不下功夫，过两三个月就吃力了。要入门，就要在开

头下功夫，我觉得开头的基础要搞扎实。要下狠功夫，要慢一点，人家一个钟头解决一个问题，我用两个钟头，但到后来，别人解一个题需一小时，我却在半小时解出来了。现在中学生负担过重，靠压力培养不出人才。充其量培养个中等人才。小学生的负担也很重，整天应付考试。当前学生还有一个毛病，就是花功夫作难题。这次高考，理科的数学题出的好，都是基础的东西。许多重点学校只注意引导学生作难题、偏题吃了亏。基础一定要打好，基础概念要搞清。我的孩子考数学，老师出了一道题，其他同学作出 $\sin^2 x = -3$ 结论是无解，他做成了 $\sin^2 x = +3$ 却说有解，我告诉他不对。就是 $\sin^2 x = +3$ 也是无解，因 $\sin x$ 最大值是 1 。不注意基础训练是不行的。我和杨乐都是这个意见，不同意引导学生搞偏题、难题。对基础好的人应当适当作一些难题，但是基础打不好作难题也没有用，要着重于基础训练。难题和容易的题是相对的，基础好难题也就不难了，基础不好解容易的题也很吃力，所以开头要狠下功夫，打好基础非常重要。

有了好的基础就要循序渐进。学习没有别的办法就是要循序渐进。很多人缺乏循序渐进这个过程。陈景润同志搞的哥德巴赫猜想，出了大名，很多人都搞起哥德巴赫猜想。数学所每天都收到大量的信件和来稿，都说他们解决了哥德巴赫猜想。哥德巴赫问题是一个非常困难的问题，没有很好的数学训练是不行的，过早的进入是浪费精力，没有很严格的数学训练，没有很好的造诣是过不去的。陈景润同志搞了二十年，就算你有才能，没有十年、八年的苦功夫是谈不上这个问题的。再如三等分角问题，华老大约在1960年前后就曾

为此写过文章，但至今还有人在浪费精力。一个我的熟人拿一份三等分角的稿件让我审查，我说不要看了，这是不可能的，华老曾为此写过文章了。后来，写稿人给我一封信，说他从来就不相信权威！我说不相信权威可以，但不能不相信科学，科学的问题是来不得半点虚假的，所以我说要循序渐进。在座的有许多中学老师，我的意见要教育学生不要浪费精力，一步一个脚印的走下去，前途是无量的。中国要搞"四化"需要大量的人才，需要从现在的中小学培养大量的人才，在中学时一定要打好基础。要循序渐进，这是一个总原则。

第三注意阶段复习。现在学生为应付考试而复习。考试是学习不可缺少的环节。引导学生系统的学习，培养学生逻辑思维的能力，阶段复习是必要的。中学教育要加强基础训练。会作难题不算太大本事，说数学水平高，什么是数学水平高呢？我认为自己知道自己作的题是错是对，不用老师判断，自己会判断就是有点数学水平。

学风问题。要培养好的学风，好学风的第一条是精力集中。该玩就玩，该工作就很好的工作，不要又作功课又在玩。适当的娱乐活动是需要的，但干完别的要能很快转到学习上来。我自己是可以很快的"进入情况"。我认为学好中学数学要抓住三个过程：练准。一个题我两个钟头算出来对了，你十分钟算出来但是错了有什么用？还是要算对。二要练快、练速度。一个题九分钟可以算完，绝不能拖到十分钟，一分钟也不拖。最后要练习工整，这个工整不但要书写工整而且思维逻辑过程不多也不少。干工作精力要集中，精力不

集中，什么也搞不成，要保证一定的工作效率。再就是要独立思考。我主张不要轻易问人，经过自己充分考虑以后再问人。问人的结果与自己独立思考的效果不一样。我自己是不轻易问人的，对问题我总是一天、二天、三天的靠自己钻研，要培养这种精神。大学生也要这样，订一个好的规划，要坚持搞，主要在坚持。看参考书要慎重选择，选一本为好。我在大学就是选一本念透，其他书也容易理解了，浏览一下就够了。今天到会的有中学老师，教育中学生学好外语很重要，以后我们的国际交往会越来越多，我们要学习外国先进的科学技术，在中学打好外语基础是必要的。

我今天拉杂讲这么多，可能有不对的地方，请大家批评指正。

和同学们谈学习



赵 访 熊

作者简介：著名数学家、教授。1908 年 10 月 30 日生于江苏省武进县。中国民主同盟盟员。现任清华大学教授、清华大学副校长、中国计算数学学会理事长等职务。1928 年在清华大学毕业后赴美国留学，1930 年获麻省理工学院电机系学士，1931 年获哈佛大学算学研究所硕士学位。1933 年回国后任清华大学数学教授至今。1956 年至 1958 年曾去苏联进修。赵访熊教授专长应用数学和计算数学，在这方面有较高水平，是国内知名的专家。在运算微积分、实用调和分析图算法、联立方程、差分方程、拉普拉斯方程数值解法、代数方程的变根求法等方面写过十几篇论文。还曾用解析几何原理发明了“节气日晷”。其重要著作有《高等微积分》、《微积分及微分方程》、《高等数学》等。主要论文有《斜量法的比较及应用》、《解高次代数方程的路斯表格法》、《复系数高次代数方程解法》、《代数方程根

的列表计算法》等。《高等微积分》、《微积分及微分方程》两书，多年来一直作为大学教材，起过较大作用。

粉碎"四人帮"以来，在党中央的关怀下，教育战线的形势越来越好，教师为革命而教和学生为革命而学的积极性空前高涨。现在，广大教师正在为同学们的学习创造良好的条件，但教师的任务主要是领路。至于走，还得靠同学自己。因此，要真正学好，还需要同学们付出艰苦的努力。

懂、用、记——学到手的三个标志

理工科大学的同学们在大学期间学习的任务是，把教学计划所规定的各门课程的基本内容扎扎实实地学到手。学到手的标志就是：懂、用、记，即能够懂透课程的基本原理，能够运用这些原理解决问题，能够记牢小量必须记住的定义、定理及公式。这三者是相互联系的，而且不同性质的课程对它们的要求也有所不同。比如数学，首先要求懂透，其次是会用，要记牢的东西并不是太多的。

懂——要真正理解所学内容的精神实质，弄清来龙去脉，不仅知其然，而且知其所以然。比如数学的推演都是很完整的，一定要从教师的讲授中搞清方向，是往东还是往西，首先把路子找对。然后具体掌握推演方法，第一步如何走，第二步如何走。在这方面切忌浮光掠影，满足于一知半解。有一次答疑，我从同学所提的问题中，知道他对某个重要概念的理解很差，可是当我刚刚提示一句的时候，他就连

连点头，说已经懂了。我估计他不可能懂得这么快，就反问了他一个问题，果然无言以对，这就表示他还没有真懂。懂透是首要的，只有懂透了，才会灵活运用，否则就只能生搬硬套，甚至牛头不对马嘴；也只有懂透了，才能记牢，否则就只能死记，而死记是靠不住的，不但忘得快，也容易记错。

用——我们所学的原理都是为了解决问题，所以要会用，多用，用得灵活些。反过来，用的次数多了，对原理就会懂的透些。常常有这样的情况：学某个原理的时候，觉得很好懂，也提不出什么问题，但用起来就动辄得咎，问题百出。这是因为，只有通过用才能充分暴露原理的内在矛盾，解决这些矛盾，就能进一步掌握原理。如果学原理不会用，那就很难说是懂了。同时，多用也能帮助我们记牢固一些。我们都有这样的体会：一个定义、公式，经常用就记得很熟，否则，日子一久就淡忘了。

记——在学习的最初阶段，记住少量的法则、公式也是必要的。比如微分和积分中的十几个基本公式，有如外文的基本词汇，经常用到，应该牢牢记住。不过不应当不分主次什么都记，这样就什么也记不住。应该先记住几个主要式，"第二线"上的公式就不必死记，用多了也就会记得住。有一年，我去参观北京的一个中学，发现教室里黑板左边墙上贴了一张招贴画，画的上方是一个愁眉苦脸的学生用手捂着脑袋，下面写着："必须记住！"再下面列着十个三角恒等式，其中只有一个是我所认得的。黑板右边墙上也有这么一张招贴画。听说，这种招贴画还经常换新的。我觉得要中学生记

住这么多的公式是不必要的，而且是有害的。

改进学习方法　提高学习效率

有些同学在学习上非常艰苦，花在学习上的时间很多，但是考试成绩却不理想。这是什么原因呢？时间花得越多，学到手的东西并不一定就越多。也就是说，学习效果与学习时间并不是成正比例的，这有个学习效果问题。效果应是效率与时间的乘积，说得更确切些，效果是效率对时间的定积分，要提高学习效率，就要注意改进学习方法。好的学习方法应该是比较自觉的，主动的，均衡的，而不是被动的，突击式的。

据了解，有些同学的学习效率所以不高，主要原因是缺乏思考。古语说得好："学而不思则罔。"我们看书，要养成边看边想的习惯，有时用思考的时间往往比看的时间还要长一些。这就象吃饭一样，消化的时间往往要超过吃的时间，光吃不消化，是吸取不到营养的。宁可少看一些，要看得透一些。譬如说，书上常常是先有结论，再一步一步推演。我们看的时候，就应该倒过来想一想：为什么要提出这个问题，为了解决这个问题，首先要解决哪个问题，其次需要解决哪个问题，再次需要解决哪个问题，如此类推，步步追根，最后引出结论，这样就能把这个结论"立体化"。然后总起来整理一下，看了以后有哪些收获，还有哪些问题不清楚。如果知道问题在哪里，也就可以说这些问题已解决了一半，再去找教师答疑，就能"一语道破"。这种思考方法书上是不写的，但是可以在教师讲授的时候来谈这些"背景"，不要以为

这些背景是书上没有的"闲话"，就不予重视，实际上其中贯穿了活学的思想方法，是教师的经验之谈。教师不仅给我们知识，还传授进一步获取知识的方法，所以我们不仅要注意教师给我们的"金子"，还要特别注意学习教师的"点金术"。

写读书笔记是帮助我们深入思考、巩固学习收获的重要方法。有些同学过于相信自己的记忆力，懒于动手把看书的收获写下来。而脑子只有那么大，能记得了多少东西呢？收获写出来是罐头菜，随时打开都是新鲜的。有些同学也写笔记，但我看了几本，几乎都是整段整段地抄书，只把知识搬了个家，结果书是书，笔记是笔记，并没有真正装进自己的脑子。其实，这些书将来还是容易找到的，你抄得再好些也没有书上印得好，何必费劲这么抄呢？我写笔记的方法是：看完了把书搁在一边，拿张白纸，用自己的话写下自己所体会到的内容和心得。这样可能写不了多少，但那是自己真正拿到手的东西。如果一点写不出来，那就说明自己没有收获，或者这本书根本就不值得看。

不仅看书需要思考，在整个学习过程中都需要思考。比如做题，一定要想一想：这个题目是为了解决什么问题，可以应用哪些原理、方法来解决，然后把它真正做透。有少数同学拿到题目不看清楚题意就套起公式来，或者一碰到困难就和别人"讨论"，甚至抄别人的，这种"手力劳动"的收获是不会大的。我觉得，与其马马虎虎地做三个题，不如自己真正独立做透一个题。做出结果以后，还要再看看，再想想，检查一下有无错误。一九五二年考三角时，有一个同学考完

了不看一眼就把卷子交上来，我一看，烟囱的高度是二千多米！试问，世界上有这么高的烟囱吗？所以学会自己检验结果也是独立工作能力很重要的一方面。

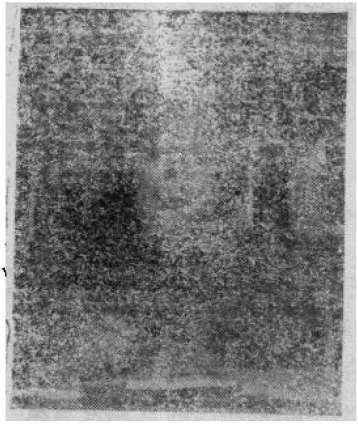
提倡循序渐进　切忌急躁情绪

学习和教学一样，也要贯彻"少而精"的原则，提倡实事求是、循序渐进的精神，克服贪多求快、好高骛远的现象。这好比吃饭，决不能三顿饭一顿吃，吃得过多，吃得过快，就不能细嚼慢咽，就会造成消化不良。目前同学们的学习积极性很高，这是很可贵的。也有少数同学单纯追求数量，贪多、求快，甚至暗自比赛看谁的题目做得多，谁的书看得多。有些同学连课堂讲授的基本内容还没掌握好，就无目的地去乱翻许多大书本，以后才需要看的参考书，以致事倍功半，得不偿失。他们认为"学了总比不学好"，"学了以后总会用得着"，什么都学，结果连最基本的东西都掌握不住。学习有如走路，一定要先学走，再学跑，再学跳，还不会走步，就想跳高，没有不摔跤的。首先要把基本内容扎扎实实地学透了，其它次要问题也就容易解决了。记得有一个同学，当年在班上并不是题目做得最多、书啃得最多的一个，但由于他学得扎实，一步一步地前进，现在已成为国内著名的数学家，是同班同学中成就最大的一个。

科学是老老实实的学问，必须日积月累，细水长流，切忌急躁情绪。一个重要概念，往往不是一下子就能深刻掌握的。象极限是渗透在全部微积分中的一个基本概念，应该通过整个学习过程一点一点地逐步深入掌握它。有时也会发生

这种情况：一个问题，今天解决不了、明天还没有解决，后天也没能解决，但钻了一个月以后，忽然就解决了。表面上看，前二十九天的功夫好象都白费了，其实不然，没有前二十九天坚持不断的努力，也就不会有最后一天的成功。有这样一个笑话：一个人上街买烧饼吃，先吃一个不饱，再吃一个还是不饱，吃下第三个饱了，于是他后悔说："我肚子是第三个饱的，早知如此，光买第三个就行了。"这虽然只是笑话，却寓意深远，说明学习必须循序渐进，万不可一蹴而就。

毛主席说："世界是你们的，也是我们的，但是归根结底是你们的。你们青年人朝气蓬勃，正在兴旺时期，好象早晨八、九点钟的太阳。希望寄托在你们身上。"现在，我国人民正在进行新的长征，在本世纪内实现四个现代化。我们坚决相信广大青年一定会通过自己的勤奋学习，掌握更多的科学文化知识，担负起向四个现代化进军的光荣任务。



数学学习漫谈

越民义

作者简介：著名数学家、中国科学院应用数学研究所研究员、中国运筹学会理事长。1921年6月生于贵州省贵阳市，1945年毕业于浙江大学数学系。此后先后在贵阳高中、浙江大学和贵州大学任教。1951年调到中国科学院数学研究所从事数学研究。先后任助研、副研和正研。在应用数学方面的研究取得了很多的成就，是我国著名的运筹学专家。曾在富氏分析、数论、排队论、组合数学、数学规划等学科领域发表论文20余篇以及其他著作若干。现担任《运筹学》杂志主编、《应用数学学报》副主编、《中国大百科全书》数学卷运筹学分册主编。

喜欢介绍自己学习经验的，大多是一些自以为有所成就而又不愿意淹没不闻的人。我既然愿意写这篇短文，也就难

把自己排除在这些人之外。但我确是个碌碌终日，无所建树的人。假若说有一些"经验"，主要也是在失败这方面。失败的经验对于后之来者虽不能导引"方向"，却并非没有指出"迷津"之用。

数学是一门使人着迷的学科，但它却不象文学那样容易使人接近。一个作者在创作一篇（部）文艺作品时，心里往往不知不觉地怀想着广大的读者，希望从他们那里得到共鸣，唤起他们的某种钦佩或同情。而多数数学工作者在创造某一成果时，心里怀想的主要是他的一(小)部分水平比他更高的同行，希望以一种优胜者的姿态引起那些人的钦佩或赞赏（为了升级或别的目的而撰写"论文"的人不在此列）。不重视同行的评价，而只希望得到社会多数群众的同情和钦佩的，这样的数学家，我想，准不能说没有，但为数不会很多。因此，数学上的定理，从它们出现的过程来说，就难说具有主动地去赢得广大群众欣赏的愿望，人们就谈不上会自然地去接近它们。

一个青年人开始喜欢数学，往往是由于他自觉或不自觉地经过一段或长或短的时期的努力之后，使他感到比其周围的人胜过一筹，使他感到，对于这种被普遍看作是难于对付的学科，他却有某种程度的过人之处，多少怀着一种优胜者的心情向前迈进。这时，他会对于解决数学难题感到乐趣，数学才把他"迷住"。他越是被迷住，学习就会变得刻苦深入，成绩自然也就会显著提高，兴趣也就越来越大。所以，对于数学的爱好（或兴趣）是后天养成的，是经过刻苦的努力产生的，不是先天的。

有的人，在幼年时代对于数学计算或对某些简单几何图

象的识别或想像，比他周围同年龄的人高一些，后来他又以数学为职业。这种情况往往使他感到具有一种天生的数学才能，甚至生来就是要搞数学这门行业的。我们认为天生的某些才干只是有助于他容易对数学感兴趣，他对数学的爱好是后天的。除个别人之外，一般人的才干差不了多少。

我在高中上学时，从二年级开始分文理班，由于要求学理科的人多，到理科班需要通过考试。我数学学得很差，勉强通过。但在月考时，我只考了五十几分，不及格，挨了老师一顿臭骂。我同寝室中有一位和我邻铺位的同学，人家都叫他郑老总，却考了七十几分，受到表扬（那时考上七十几分多不容易）。我心里不服，认为我比他聪明，至少人家没有叫我老总，认为他只不过偶然碰上罢了。当时有好几位同学来向郑老总请教，他回答得头头是道。我不禁暗中钦佩，便问他是怎么会的。他告诉我，每天当我们吃完中饭去睡觉时，他却到教室里做习题。他的话给了我很大的启发。从那天谈话后，我每天吃完中饭，便不再睡午觉，赶到教室里做习题。不久我也取得了良好的成绩，开始了我的数学生涯。

* * *

我不是一个循规蹈矩做学问的人，稍有所得，便好高骛远，希望一步登天。我总是力图学一些比课堂上更深更难的东西。比如说，当老师在教复数和二次方程时，我却拼命地去做方程式论（范氏大代数）一章的习题。由于是自学，对课文是一知半解，等到老师教授方程式论一章时，由于大部分内容我已熟悉，便无心听课，自己不清楚的地方也无心仔细钻研，成天感兴趣的则是微积分和微分方程，其结果，所

学的大部分是"夹生饭"，到时都得回锅，事倍功半。虽然我从朋友们的工作中逐渐认识到循序渐进是很好的学习方式，但毕竟已浪费了不少时间。而且，那种好高骛远，见异思迁的习惯已难根除。

所谓循序渐进，就是说，当第一步尚未学得很透彻，甚至还是似懂非懂的时候，不要进入第二步。数学这门学科，逻辑性很强，后面的部分往往要用到前面部分的知识，或处理问题的方法。有时虽然没有直接用到定理或方法，但却需要某种训练，缺少这些知识、方法和训练，越往下走，便会感到越来越糊涂。写出来的东西，似是而非，以直观代替严格的数学推理，谬误百出。在学习上，由于遇到的东西越来越复杂，便会感到乱成一片，不知道文章里的问题是如何解决的，甚至连讲些什么也不清楚。这样就会越来越感到学不下去，从而丧失了兴趣。假若养成一种循序渐进的习惯，便会将学习的东西整理得一清二楚。一个复杂的证明，哪些部分是作者独创的，哪些是"高着"，估计自己是作不出来的。从这当中便发现了自己与作者之间的差距。"舜人也，我亦人也"，一定要向那些有才干的作者看齐。不足之处，赶快补起来，努力追上去。一般来说，在同一篇文章中，"高着"一般说来是不多的。对于这种"高着"，必须下功夫学习，体会，还要想办法把它派个用场。关于这一点下面还要讲到。

当你养成一种分析问题、琢磨文章的习惯之后，日积月累，你便会感到复杂的东西也是由少数几个大的部分组成的。这些部分出现的原因和它们之间的相互关系也是可以理解的。与此同时，由于读的东西多了，运算的技巧也高了，你

会发现，一些复杂的推演过程大部分是由某些必然的步骤所组成，就比较容易抓住新的关键性的部分。而当你自己要创作、写文章的时候，便能看到大的布局，容易知道困难的所在。这就好比下棋，一个好的棋手，每下一子棋，他都必须全力以赴，不轻易落子，把每种可能出现的情况，尽自己的力量考虑得清清楚楚。习之既久，他便发现，每欲下一子，所须考虑的只是少数几种情况，其余的可以置之不理，把考虑的范围归结到少数几种可能性，分析问题便会深入。好的棋手可以看到十步、二十步，甚至更多，功夫便在于此。反之，有的人不注意培养自己，随手下子，靠的是直观，深入不进去，一子下去，便成大错。盘数下了不少，却是一手屎棋。

* * *

对于学习来说，循序渐进很有必要，可以避免夹生饭。但是，光是循序渐进是不够的。一本书或一篇文章，它总是按着某种逻辑次序来写。按其所包含的内容，依照相互牵连的关系，把内容安排成某种次序，使前面所讲的东西不会用到后面所讲的，这叫做顺理成章，不然就乱了套。不可能设想，一本中学教本把二次方程放在一次方程的前面来讲。因为在解二次方程时要用到一次方程方面的知识。一本象样的书总是按照循序渐进的精神来写的。

我们读一本书，目的是要学得一些有用的知识。也就是说，这些知识将来可能在某种场合用到。需用时，我们既知道有这些东西存在，不必临时现学。这里讲的知识，可以是某一定理或结论，可以是某些处理问题的技巧，也可以是它

们的某种复体。要使我们的工作能顺利进行，而不是到处碰壁，就要求我们能够熟练地掌握这些知识。在使用时，有的是信手拈来，有的须要加以改造，有的则须要进行某种创造。而要做到这一点，教师和学生都要对自己有较高的要求。

拳教师在教人练拳时，一般总是先把拳术一套套教给学生。学生在学过这些套数之后，在真正遇到对手时，若他按照老师所教的顺序一一施展出来，那便成了一出滑稽戏。他要不挨打，就得随机应变，灵活使用自己学过的东西。他应该懂得在什么情况下应用哪一手，在什么情况之下把不相关联的几手放在一起来使用，有时需要改变，有时需要创造，等等，这叫做拆得开、聚得拢。教师好坏的差别，首先是他教的每个动作是否正确，但更重要的差别是：好的教师着重于学生如何使用已经学到的知识。他与学生对打，看出他的破绽，让他吃个亏，然后再指点他，教他如何克服他的缺点。水浒传第二回里所说的王进教史进的方法便是一个很好的例子。史进早先的教师打虎将李忠看来是一位不甚高明的教师。史进虽然经了七、八个"有名的师父"的教导，使出来的棍棒"只是有破绽，赢不得真好汉"，"好是好，上不了阵"。在与王进较量时，才经过一个回合，给王进"只一激，那后生（史进）的棒丢在一边，扑地望后倒了。"

当然，这并不是说，那七、八个"有名的师父"都是混饭吃。史进从他们那里的确也学了不少东西，所以"前后得半年之上，史进把十八般武艺，从新学得十分精熟，多得王进尽心指教，点拨得件件都有奥妙。"那七、八个师父所缺的就是没法点拨出这种奥妙。

但江湖上能人甚多，各有各的专长，各有各的花招。如何对付这些花招，再好的师父也不可能给学生一一指出。这就需要自己在实践中去学习，去体会，精益求精。

数学的内容比之拳术要复杂得多。对于如何运用所学的知识，一般是通过做习题来达到（在这里，我要说一句，我是不赞成出题解书的）。但习题一般与其所在的章节的内容有关，因此，在训练人的能力和应用已得到的知识方面有它的局限性。应该培养学生有一种见着偏题、怪题、难题就试一试，不搞它个水落石出不肯罢休的习惯。要求学生使出通身解数，把“吃奶的力气”也拿出来。一道题，若自己做不出来，而别人做出来了，说明自己是个“陋蛋”，须要加倍学习，努力赶上去；若自己做出来了，别人尚未做出，说明自己还有一些可取之处，起到鼓舞士气的作用。通过做一些不入正规的习题，可以培养学生灵活使用学得知识的能力。

我们应鼓励老师与学生一起作题。老师有时难免输给学生，这是正常的。“三人行，必有我师”，何况一个班有好几十个学生，其中自然会有一些有才华的。老师掌握的知识可能超过学生，但不能说，他的聪明才智也超过班上所有的学生。这是合乎逻辑的推理。因此，输给他们决不是什么丢脸的事。老师从失败中可以从学生那里学到某些思考问题的方法，某些自己不知道的东西。有了这些，在教下一班时，便增加了一分能力，逐渐赢得学生的信任，这就叫教学相长。

我们现在来谈一谈学习的目的问题。我们说学习是一种手段，不是目的。我们总是为着某种目的而学。漫无边际的学习，只不过是浪费时间和精力罢了。学习的目的就是要利

用所得到的知识和能力去解决问题。在这里，我们要特别强调"能力"这个词。它是在学习的过程中，无形地逐渐培养起来的。常听到一些人说："我在工作中就没有用到课堂上学来的东西。"这种提法并不全面，课堂上的知识，对于有的人来说，可能是没有直接用上，但通过学习培养出来的能力却在那里发生作用。这种能力包括思考问题的方式，思维逻辑，以及由于具有较广泛的知识而获得的分析和吸收新鲜事物的能力，等等。既使对于这些人，我相信，只要他肯钻研，而不是应付眼前的工作算事，他所学过的东西必能派上用场。

学习的目的就是要去解决问题。去解决什么样的问题呢？就数学来说，问题大致有三个来源。一类问题是由数学内部产生的，也就是所谓纯数学方面的问题。比如说，任何一个充分大的偶数是否必能表示成两个素数之和？这一问题是由数学的结构产生的。第二类问题是为了解决实际问题而产生的具有普遍性的数学问题。运筹学以及力学中绝大部分问题皆属此类。比如运输的组织问题。这类问题可以化为某种特定形式的数学问题。随之而来的就是研究如何求解，以及研究在各种情况下解的性质，等等。这里所研究的不是某一个具体的运输问题，而是研究某种具有共性，代表性的运输问题。然后将研究出来的结果运用到各种具有类似结构的实际问题中去。我们称这种以研究自然现象和社会现象为背景的数学问题为主的学科为应用数学。第三类问题是对于某一具体的实际问题如何利用数学方法来求解。同样是运输问题，但具体情况各有不同。比如说，有的货物容易破碎，有的货物易燃，有些货物，例如化学药品与食物，不能放在

一起运输。在将应用数学中的方法用于具体问题时，还须根据情况作某些修改。我们称这类工作为数学的应用。不管是哪类问题，都要求我们灵活运用所学的知识，要求我们在旧的基础上创造新的。在这里，我想对年轻的读者说几句话。事物的发展总是后来居上，后来的人总是要超过前人。这是历史发展的必然规律。否则人类就不可能从穴居野处进步到现在的生活情况。但究竟由谁来超过前人，那又是另一回事了。通过努力学习、刻苦钻研虽然并不一定就胜过前人，但不这样做，必然不可能胜过前人。胜利只是属于那些不畏艰险、不辞辛劳的人。而在这里，毅力是极为重要的，我不只一次有这样的经验，当我研究一个问题时，经过一番"努力"之后，感到走投无路，便决然放弃。但没有多久，别人做了出来。把别人的做法拿来一看，完全是自己力所能及的。我的失败就在于缺乏毅力。能不能把一些错综复杂、千头万绪相互纠结在一起的事物整理得有条不紊，一清二楚，弄清它们之间相互的关系，推出必要的结论，这需要毅力；在遇到困难，感到束手无策的时候，能不能再从各种不同的渠道来考虑，去仔细阅读和分析有关的资料，从中吸取有用的东西，把它们用到自己的问题上面来，这需要毅力；在要开辟一个新的课题或领域时，要阅读大量文献，学习一些自己前所未遇的东西，任重道远，能不能贯彻始终，这需要毅力。总之，毅力是一种完成事业的必备因素。孔子说，"刚毅木讷近仁"，把毅力提到近乎仁（儒家的最高品德）的高度。国外也把它(fortitnde)列入四种基本品德之一，这不是没有道理的。

学习的目的就是用。要运用已学到的东西去创出精神的或物质的财富。那种只问耕耘，不问收获的思想不能被认为是一种好的思想，对人民负责的思想。"用"是针对某种目标而言。有了目标，对于学习的内容就有所选择，不会漫无边际。用时，也知道应学到什么程度为止，也可衡量出对于已学过的东西是否真正了解，融会贯通，也知道哪些知识对自己的目的来说是需要掌握的。这时，你也会感到，有些知识虽然已经很熟悉，甚至可以背诵如流，但并没有真正掌握，因为不会使用，这时重新学习，体会便和以前大有不同。

在这里就出现了一个如何寻找"目标"的问题。对于从事实际工作的同志来说，目标往往来自当时所从事的实际课题。例如一个设计人员，在设计某一工程时，假若他希望有所创造，就应该去了解当前国际上该方面的最新方法和最新成就。然后根据我国的具体条件，经过认真分析，提出应兴应革的意见。对于一个搞理论工作的同志来说，事情就比较复杂一些，理论课题的要求不象实际问题那么具体，自由度大一些。如何选择一个适当的课题，即使对于有经验的人来说，也不是那么容易的。在这方面，虽然不乏自学成才之士，但若能得到良师益友之助，则可少走一些弯路。

一个理论课题的选择，至少必须考虑两个方面：其一，该课题应具有一定的理论价值；其二，应是自己的能力所能胜任的。初学的人容易走极端，或者把问题选得很难，大大超过自己的能力，结果是到处碰壁，一筹莫展，白白浪费了许多时间。比如有不少人把 Goldbach 问题或 Fermat 问题作为研究课题，而他们对于有关这些课题的研究工作发展的情

况，以及前人未能成功的原因，也就是问题困难的所在，毫无所知，贸然从事，也就不可能指望成功。另外又有一些人则把只能作为简单习题的东西选作研究课题。文章写出来不能发表，既使发表了，也难登大雅之堂。要选题得当，必须熟悉与该课题有关的文献，知道什么叫做"前进了一步"，就可确立自己努力的目标。

* * *

最后，我想谈一谈"基础"问题。这里所说的基础，是指从事一门学问所必须具备的知识和训练。缺乏必要的知识便不知道别人在讲些什么，不理解问题和结论的含义。缺乏必要的训练，则会感到处处是困难，寸步难行。因此，一定的基础是必要的。但基础只是相对于某种科目而言。研究代数的人，对数学分析的要求便不同于研究微分方程的人。而一个人常常会依据客观的需要或学科的发展而改变自己的观点和选题，这时，原有的基础便不能适应新的需要，要从新学习。即使老是在同一学科里工作，但随着学科的发展和自己工作范围的扩大，也需要学习新的基础性的东西。因此，基础是一个无底洞。虽然一定的基础是必要的，但不能等到把一切都准备好了再开始工作。只能在工作中通过边干边学，扩大和加深自己的基础知识。

对于培养基本训练来谈，重要的是多作些不同类型的题。做到脑子活，思路宽。一个优秀的作家总是具有宽广多变的思路。莎士比亚便是一个很好的例子，他的三十七部剧本在题材和处理手法方面，各有其特色。《水浒传》里的那些主要人物也各有其独特的面貌。但一个拙劣的作者在处理题材时，

则往往千篇一律，大同小异，使人一见便知出自谁手。这样的人来搞数学，在最好的情况下，也不过是个程咬金，就是那么三板斧。遇到问题，凑巧他那一手可以驾驶，算碰上一回；若对不上号，便无所施其计。程咬金的缺点，不是他无能，因为他也有三板斧，而在于他因循守旧，满足现状，不愿学习新事物，也不想学习别人的长处。

在上面，我拉杂写了一些自己在学习数学的过程中的一些体会。谈了这些，并不意味着我已经学好了；相反，我却具备了上面提到的各种缺点。将自己的缺点与别人的优点相比，感受颇多，所写的实际上是一些感受。另一方面，对于学习，各人有各人的体会，这当中自然带有不少偏见和局限性，请读者见谅。

学习数学的管见

王梓坤



作者简介：著名数学家、教授。1929年4月生于江西省吉安县枫墅村。1948年在江西省立泰和中学高中毕业，1952年在武汉大学数学系毕业。以后在天津南开大学数学系任教。1955年赴苏联留学，在莫斯科大学数学力学系作研究生，攻读概率论。1958年毕业获副博士学位。回国后先后担任南开大学教授、数学系副主任。1950年加入中国共产党。1961年为天津市劳动模范，1973年为党的十大代表。1978年全国科学大会获奖。现任北京师范大学校长。

王梓坤教授主要从事于概率论的研究，侧重研究随机现象演变过程的数量关系。他在生灭过程的构造、泛函分布和马氏过程的边界问题、遍历性、零一律等方面有卓越的成就。受到国外专家的高度评价。主要论著有《生灭过程的分类》、《一个生灭过程》、《生灭过程泛函的分布及其在排队论中的应

用》、《生灭过程构造论》等二十余篇论文，以及《概率论基础及其应用》、《随机过程论》（这二书已被许多高等院校用作教师进修或研究生的教材）、《生灭过程与马尔科夫链》、《概率统计预报及其在地震与气象中的应用》、《布朗运动与位势》等专著。此外，在对自然科学研究的方法论方面，著有《科学发现纵横谈》一书，影响较大，荣获1980年全国科普作品二等奖。

一、成功的四个基本条件

学会游泳并不难，但要成为国家选手就很难。同样，学会一门专业和精通它不完全是一回事。一般地说，要做出较大成绩，四个条件是不可少的：理想、勤奋、毅力和方法。理想，或者说志气，是我们力量的源泉，是行动的方向，是心灵上的太阳。为建设强大的祖国而学习，为发展科学技术造福人类而工作，是我们的理想。许多革命前辈和科学巨人，不知疲倦地奋斗，直到生命最后一刻，究其原因，主要是由于有崇高的理想。没有远大的理想一般是不会有重大建树的。古人说："哀莫大于心死"；最大的悲哀，不过于没有理想了。为了实现理想，必须勤奋，即使天赋独厚，也不例外。大科学家如牛顿、居里夫人，大文豪如鲁迅、巴尔扎克，都是异常勤奋的人。牛顿的助手说："他（牛顿）很少在二、三点钟以前睡觉，有时到五、六点，……特别是春天或落叶的时候，他常常六个星期，一直在实验室里。不分昼夜，灯火

是不熄的，他通夜不眠地守过第一夜，我继续守第二夜，直到他完成他的化学实验。”然而勤奋并不等于毅力。有些人勤则勤矣，却缺乏毅力。他回避困难，一有阻力就转移方向，不敢坚持在一个重要专题上长期奋斗。他辛辛苦苦地筑了许多土堆，却没有建成一间象样的房子。除理想、勤奋、毅力而外，方法也是重要的。高明的方法可以收到事半功倍的效果，而且富有趣味和启发性。所以，一些大科学家如笛卡儿、爱因斯坦、拉普拉斯等都很重视方法。具体到数学，由于数学离不开逻辑推理，在学习一种理论或一条定理时，首先要看准推理的终点，既要达到什么目的，需要证明什么结论。其次要掌握推理的起点，既各种有关的公理、定义、概念和条件。第三是要分析推导起点与终点的推理程序，包括证明的思路、方法和用到的计算、公式等等。吃透了推理的程序，往往可以改进原来的证明使之适用于更一般的情况，或在改善原来的条件和结论。学习数学与研究数学的思想程序有些不同。学数学是由起点推终点，既学习前人如何由已给条件一步一步地推导出结论。研究数学则反其道而行之，常常是由终点推起点。我希望得到结论甲，为了甲必须先有乙，为了乙又必须有丙……。如果丙已足够简单明了，便于应用，就把它当做起点。由此可见，不论是学数学或研究数学，都必须循序渐进，每前进一步，都必须立脚稳固，这是数学方法中的一个显著特点。其它的科学也要循序渐进，不过数学尤其如此。前头没有弄懂，切勿冒进。有如登塔，只有一层一层地上时，才能达到光辉的顶点。

学习的三要项是理解、记忆和练习。知其然以及其所以

然，这是理解；然后记住它，并且通过练习以加深理解、增强记忆、应用理论和发展理论。所以这三项都是不可或缺的。对于数学练习尤其重要。通过练习不仅可以增加知识，更重要的是，可以培养我们解决问题的能力。不去水里不能学会游泳；不做足够多而且有一定难度的练习题，是不可能学好数学的。

二、两种循环与争取主动

“我整天生活在紧张和被动之中”，一位大学生向我诉苦，“各门功课的习题象潮水一样涌来，又多又难。课堂上老师讲得很快，还要求抄笔记，但顾得上抄就顾不上听。作业完不成，越堆越多，这怎么办呢？”的确，这是一个带有普遍性的问题。从中学到大学是一个飞跃，中学教本写得简明、清楚，一个公式后面配着几个例题。学生仿着做，大部分作业就可以完成。大学则不然，内容越来越抽象，方法也很灵活，老师的辅导随着年级的上升而减少，对独立工作能力的要求不断提高。

“听课——复习——练习”，又是“听课——复习——练习”，每门功课都是这样重复地进行着。如果听课效率不高，许多地方没有听懂，复习的时间必然增加，做练习的时间必然减少，于是作业完不成，但下一次练习又来了。就这样，他卷入了恶性循环。反之，如果听课效率高，课堂上基本解决了问题，复习就快，练习能按时甚至提前完成。于是他有余力可以预习，或再另看一些参考书；这样他的自学能力越来越强，听课效率也越来越高，他进入了良性循环。常常有这

种情况：两极分化非常厉害，两个人入学时水平差不多，但到大学毕业时相差很远，一个甚至可以当另一个的老师。原因固然很多，进入不同的循环也许是其中重要原因之一。

怎样才能使循环成为良性的呢？关键在于预习。如果上课前对老师要讲的内容有了思想准备和大致了解，那么听起来主动多了，只要把重点放在预习时看不懂的地方。由于听课高度集中、有的放矢，所以在课堂上基本上能消灭难点，这样便节省了复习时间。更有甚者，我们可以领悟到为什么自己预习时看不懂，卡在那里，思想方法上有什么毛病，从而提高自学的能力。

剩下的问题是：哪里有时间预习呢？主要靠假期。放假时间很多，一部分用来休息和锻炼身体，另一部分用来预习。预习下期要学习的重点课程，哪怕是其中前几章。这样，我们就走在老师讲课的前头，变被动为主动了。

三、如何攻读数学专著

没有进货的商店不能持久。类似地，缺乏获取新知识的能力，就不能前进。所以在各种独立工作能力之中，自学能力可算是最基本的了。

数学书刊，浩如烟海，一个人的精力有限，只能精读其中几本有代表性的高水平的著作；读懂了这几本，其它的就比较好办。如何选择精读书？首先要确定主攻方向，然后围绕主攻方向，争取老师或先行者的帮助。高水平的著作虽然难读，但读懂了却终身受益。所以，花高代价也是值得的。一般地说，要打好基础，读几本这样的书实是必不可少

的。

如何攻读数学专著？先阅读序言、目录以及有关介绍，以便了解本书概况及作好必要的准备。读第一遍时要慢和细，一步一步地循序渐进，这样才能读得深和走得远；正如诸葛亮所说："非宁静无以远"。如果贪多图快，又不消化，则必半途而废，读不下去。预防冒进的好方法是做笔记，既动脑又动手。把一些重要的概念、定理及证明仔细地整理一遍，必要时作补充证明，写读书体会；还要做一定数量的习题。一章过后，做一小结。如此前进，直到全书读完，再从头开始读第二遍。这时，由于大部分细节已经弄懂，读起来会快得多。我们可以把重点放在解决遗留问题上，同时尽量搞清楚各概念之间、各定理之间、各章节之间的内在联系，学习各种证明方法和计算技巧，展望理论的进一步发展。所以，如果说第一遍是"局部地读"，那么第二遍便主要是"整体地读"了。第二遍过后，原来的问题解决了不少，但又可能会出现一些新问题。我们必须乘胜追击（切勿冷下来），再读第三遍。这时可以顺读，可以反读（从后面往前读），也可以就一些专题有目的地读。反读可以清理源流，专题读可以攻坚，甚至做出新发现。学习应以自力更生为主，争取外援，参考有关书刊。为此反复几遍，全书的体系也就经络分明，了然在目了。如果还有一些问题，那也不必着急，可以留待以后慢慢解决。

"攻读"与"阅读"是不同的概念。攻者，攻坚也。无坚则无所谓攻。攻读需要勇气和毅力，决非一般的阅读所能比拟。

四、专题研究的三个阶段

有了一定的专业基础和解题能力，便可开始科研。万事开头难，从学习到科研是一飞跃，不可等闲视之。学习主要是继承前人成果；科研则要解决新问题，或再作出新发现，科研贵在创新。

数学研究的第一步是提出问题。它们可以来自实际，也可以是理论发展中的新问题。数学中分支繁多，发展又极为迅速。今天，世界上恐怕没有一个人敢说通晓全部数学。对于新手来说，起初只能在一个分支工作，待站稳后再逐步扩大战果。即使在一个分支里，要了解它的前沿也非易事，需要争取外援。在科研第一线工作的老师可以给我们介绍情况、提出问题，把我们迅速地带上最前线。

问题明确以后，要尽可能收集有关文献，为此可充分利用《数学评论》及类似期刊。对最重要的文章，要精心攻读，搞得烂熟，以了解前人的成果、思想方法、解题技巧、理论观点等等。

下一步进入攻坚阶段，我们开始进攻，先找出它的薄弱环节，集中全部精力和时间，攻此一点。不过我们可能碰上了钉子，几个月也没有进展。这时得抬起头来看看，需不需要改变策略，从另一点着手，但不可灰心。要知道，高斯说过，"有一条定理的证明折磨了他两年，忽然在一刹间象闪电般想出来了。"高斯尚且如此，我为什么不能再想它一年呢？

下例的思想方法可以参考：

1. 我似乎在什么地方碰到过类似的问题，不妨借用那里

的方法来试试（类比法）。

2. 这个问题太大了，太抽象了，我简直把握不住它。能不能把它分解成几个问题，或再分成几部分，由易而难地各个击破，然后再串起来（《老子》说：为难于其易，图大于其细）？

3. 尽可能举一些具体的例子，或考虑一些特殊的情况，从中找出一般的规律（从具体到抽象，从特殊到一般）。

4. 我的计算能力比较强，必须发挥这个优势。先加一些条件，把这个问题算到底，看会得到什么。是骡是马，先牵出一匹来看看。然后我超脱一些，站高一点，把这个结果直观地理解一下，看是否能使用别的更好的方法。也许我会恍然大悟，想出一般的解法（发挥优势）。

5. 直观和猜想，在科学发挥中是不可少的。这个问题有什么物理（或几何、或概率）意义吗？我能不能直观地把结果猜出来？这种"发散式思维"，常常会给我们指出道路。不过它很可能是错误的导引，在没有严格的确证以前，我不能轻易相信它。

6. 我不知这个结论是否正确，用归纳法试试，先看它当 $n=1,2,\cdots\cdots,k$ 时情况如何，这至少可以提供一点信息。数论中一些定理不就是这样发现的吗？

7. 我就卡在这个该死的不等式上。我真傻，为什么不去查数学工具书（手册、公式集等）呢？

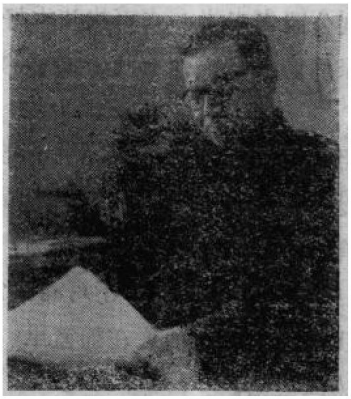
8. 某人的工作，某个讨论班，与我这个题多少有点关系，也许会从他们那里得到启发。

9. 这个问题折磨了我好几个月，搞得我神魂颠倒，坐立

不安。我现在要换一换脑筋，到公园去走走，或再找几本好小说看看。不是说，长时间紧张后的短暂松弛有利于灵感的出现吗？

10. 我已经有了一些进展，但必须采取客观态度，决不能自我姑息，轻易相信我的结论是正确的。要利用头脑最清醒的时间，再三考验它，它与已有的定理和谐吗？有无反例？由它会得出荒谬的结果吗？证明中的每一步是否都不可动摇？我能否找到另一证明？总之，我必须把错误消灭在摇篮里，要不，它很可能给以后的工作铸成大错。

问题基本上解决了，研究工作便进入第三阶段，既整理提高或付诸应用的阶段。一项较大的研究，需要很长的时间，前后的思路未必一致，弯路走了不少，草稿纸也积累了一大堆。现在需要用统一的思想，简明的叙述，正确的论证，数学的语言，写成一篇规规矩矩的论文，争取发表，以供同好。如果这项研究来自实践，就应让研究成果接受实践的考验，并为实践服务。



直觉与联想对学习和研究数学的作用

徐利治

作者简介：著名数学家、教授。1920年9月出生于江苏省沙洲县。1945年毕业于西南联合大学，1946年冬加入中国共产党。1951年后历任清华大学与东北人民大学（现称吉林大学）副教授及教授等职。现任吉林大学数学系教授及《数学研究与评论》杂志主编。兼任中国科学院成都分院研究教授，大连工学院应用数学研究所所长及华中工学院数学系名誉系主任等职。在渐近分析、函数逼近论、计算方法、组合数学及数学基础等方面发表过110篇专题论文。若干项成果在国内外专家的著作中多次被引用并推广。有的被命名为“徐氏公式”、“徐氏逼近”、“徐氏多项式”等。出版的数学专著主要有《渐近积分和积分逼近》、《高维数值积分》、《计算组合数学》、《函数逼近的理论与方法》以及《浅谈数学方法论》、《数学方法论选讲》等。科研成果中的《数值逼近与数值积分》一项曾获1982年国家自然科学

三等奖。

一

"对待数学必须重视逻辑推理的严谨性，需要掌握演绎论证的技巧。"这些都是数学教师经常告诫学生的有益教诲。现代心理学家常把理性的逻辑思维叫作收敛思维，而把感性的、直观的想象、联想、猜想等思维运动形式称为发散思维。这里，我想专门讨论属于发散思维范畴的直觉与联想在数学思维过程中的积极作用，并将举例介绍自己的点滴经验，以供青年同志们参考，并希读者批评指正。

我在大学读书时，在两位数学老师的启发下，使我逐渐懂得直觉能力（又称直观力）在理解数学和进行创造性思考中的重要性，并且领会到这种能力是可以在学习的过程中逐步成长起来的。我们学习数学理论、方法或数学定理时，怎样才算真正弄懂了呢？事实上，只有做到了直观上懂才算"真懂"。所谓"真懂"的意思是指：对数学的理论、方法或定理能洞察其直观背景，并且看清楚它是如何从具体特例过渡到一般（抽象）形式的。

如此说来，为了达到"真懂"或"彻悟"的境界，就不能只停留在弄清楚演绎论证的步骤里，而必须重视具体特例的分析，必须注意直观背景素材的综合，也即必须通过人脑的联想力和概括思维能力从具体素材中领悟出最基本、最本质、最一般性的东西。达到了这个境界，数学上的理论、方法或定理就好象是您自己发现的一样，您就能用自己的语言随时把它复述出来，当然也就成为您终生不忘的知识了。

如果一位数学教师，只是给学生们讲清楚一些数学定理的形式演绎论证步骤，不指出那些定理的直观背景和整个来龙去脉，那就好比带领一个人进入森林中只看到了一些个别树木，但对整片森林的形貌还是一无所知，这就所谓“见树不见林”。优秀的数学教师无疑都会使学生“既见树、又见林”。但要做到这一点也不是容易的事，教师本身首先要对数学教材作一番整体性的分析概括，使教材内容成为他自己脑海中非常直观浅显的东西。这样才可能使学生也感到所学的知识是比较直观的，是完全符合他们的认识过程的。

记得四十年前西南联大时代的老师华罗庚先生曾不止一次地对我们讲过他的读书经验，他说“读一本数学书，应该把它读得越读越薄。”怎样变薄呢？其实，就是要把书中的知识经过彻底消化，变为非常直观的非常概括的材料，最后就只留下最精髓的那一点，当然书就变薄了。

二

“数学的直觉”是有丰富的含义的，南京大学哲学系教师郑毓信同志曾对此作了分析讨论（见1983年《哲学研究》杂志）。大家知道，近代数学基础问题研究领域中有一个“直觉主义流派”。他们的观点是十分偏激的，但在西方数学界却有一定的影响。在这里，我并不想分析评述这一流派的思想方法和观点。现在我想讨论的是另一个问题，即一般数学界较为普遍认可的“数学直觉”的内容含义。

我在青年时代曾经读过法国数学家庞卡莱（Poincare）《论数学的创造》一文，后来还阅读了阿达玛（Hadamard）著

述的《数学领域的发明心理学》一书，感到很受启发。"尽信书不如无书"，当然我们不可能完全同意书中的一切观点。但是，这两位杰出的数学家以他们自己的经验所阐发的某些心智活动规律，已经成为现代"创造学"研究工作者，特别是一些心理学家分析探讨的课题。

毫无疑问，如能根据辩证唯物主义的反映论观点去研究评析庞卡莱——阿达玛的数学创造学说，那将是很有意义的工作。

按照庞卡莱、阿达玛的见解，数学上的创造发明同自然科学领域中的发明创造一样，无非是"选择"而已。这就是说，无非是选择最有用的"观念组合"，以产生新思想、新概念、新发明。那么凭什么能作出观念组合的最佳选择呢？他们认为选择能力的基础就是"数学直觉"，而数学直觉的本质就是某种"美的意识"或"美感"。这样说来，似乎就有点令人感到奇妙而难以捉摸了。

其实，通俗点讲，"数学直觉"应包括人脑认识反映过程中的"美的直觉"、"真伪的直觉"和"关系的直觉"等几个方面。因为一切事物（包括作为数学概念背景的事物或对象）都是处在对立统一和普遍联系的关系之中，所以在它们之间会呈现出某种对称性、协调性、统一性和简洁性，这些便构成美的直觉内容。凡是学得的数学知识越多，便越会增强"数学美"的直觉意识。正是这种意识能帮助人们去选取数学观念间的最佳组合，从而形成新的数学思想或概念，新思想、新概念经常以"顿悟"的形式出现，"顿悟"实际就是认识过程的飞跃。

许多有经验的数学工作者，在探索数学真理的过程中，常常会作出这样或那样的近乎正确的数学猜想。实际上很多数学定理最初都是猜出来的，而证明不过是后来补行的手续。猜想正是人们借助于“真伪的直觉”所表现的思维形式。这种思维形式对推动科学进步是很起作用的，我们从事数学工作的人也往往是离不开这种思维形式的。

在数学领域里，“关系的直觉”内容也很丰富，例如关于“序”的直觉、“相似性”与“相关性”的直觉、对应关系的直觉、连续性的直觉，以及空间的对称性直觉等都属于这一范畴。我们从事数学研究时，常常凭借这种直觉产生类比联想，把一些表面上似乎无关的对象纳入到同一个更高层次的理论框架中去。只要瞧一瞧现代各门高度发展了的数学理论结构体系的丰富概括性，就可以意识到人脑思维的“关系直觉”在现代数学结构体系的发展中起了多么重要的作用！

所有上述各种直觉，当然不是天赋的，一个人从童年时期学习算术起，就开始逐步发展上述各种直觉能力，事实上，一切直觉能力都是通过实践成长起来的。

三

直觉能力和抽象思维能力是相辅相成的。如果没有任何直觉作基础，则数学的抽象思维是根本不能进行的。大家知道，十九世纪德国的分析数学大师维尔斯特拉斯(Weierstrass)是一位十分严谨的数学家，他曾经令人信服地作出了一个“处处连续处处不可微”的著名的函数例子。这个函数的直观含义是，它在每个无限小邻域内都有无限小振幅的振荡。当然

这可以凭借极限手续来作出。后来，代数学家梵德尔·瓦屯（Wander Waerden）根据同样思想干脆利用折线函数的无限叠加来作出具有同样性质的函数。试想，假如上述两位数学家缺乏生动的直观能力，那又怎能构造出上述例子呢？

从感性到理性，从生动的直观到抽象思维，这是任何一位数学工作者都必须遵循的认识规律。数学直觉既是抽象思维的起点，又是抽象思维的归宿。通过抽象理性思维，对数学对象的本质有所洞察，有所概括，这样就形成了更高层次的数学直觉，从而又可进行更高层次的创造性思维活动。

直觉与联想这两种思维运动形式也是互为因果的。前者促进后者的展开，而后者又反过来充实并发展前者的内容。所以对于一个学习或研究数学的人说来，为了开发智力，必须同时注意培养直觉与联想两种能力。怎样培养呢？我想，首先要注意培养较广泛的兴趣，要博览群书，好学深思，要提倡多想问题，甚至不限于思考数学领域的内部问题。

从数学史上我们看到许多作出大贡献的数学家往往不是专攻数学一科的学者。他们往往怀有广泛的兴趣去研究其他有关应用部门的种种问题，以及和生产实践相联系的问题，因此他们的联想特别丰富，数学直觉能力也特别强，而作出的创造发明也最多。

我国宋代爱国诗人陆游曾谈到学习作诗的经验，他说过："纸上得来终觉浅"，"功夫全在诗之外"。其实，对从事数学工作的人来说道理也是一样的，必须注重实践，联系实际，要经常动手去解决问题，才能把数学工具掌握到手，并能有

所创造。不能只把自己的视野总是局限于一个科目或一个分支，否则由于联想范围的狭窄就很难作出有意义的贡献来。一位英国科学家曾说过：一个人如果长期钻研一个问题，就容易使自己的思想枯涩起来，当然不可能发展创造能力。特别是，曾经谈到："成功的科学家往往是兴趣广泛的人，他们的独创精神可能来自他们的博学。"我想，这句话是很有道理的。

四

这里我想谈一点亲身经验，说一说直觉与联想是如何在我的一项工作中起到推进作用的。我在青年时代跟华罗庚教授学习数论时，曾听说他去重庆时破译了当年侵华日军军事密码中利用麦比乌斯（Möbius）反演公式一事。这就引起我对上述反演公式的兴趣。1964年我又闻知美国的组合学家罗塔（Rota）对上述反演公式作了高度的抽象概括，使其成为组合学中的重要工具。接着1967年我曾利用互反 μ 函数概念把麦比乌斯——罗塔的公式进行拓广并作了种种应用。但上述拓广毕竟是十分平凡的，并无实质性的发展。

1980年后我开始思索一个更基本的问题：离散数学中的反演公式是否可以和分析数学中的著名反演公式——如牛顿、莱布尼兹积分学基本定理等获得某种统一呢？这就涉及到离散数学与连续数学两类不同结构的沟通问题。开始我并没有找到这种沟通的桥梁。但借助于关系直觉使我仿佛模糊地意识到A.鲁宾生的"非标准分析"方法有成为桥梁的可能。这个联想是怎样形成的呢？因为注意到非标准微积分学中，定积分可以作为精细分划点列上的离散形式的总和的标

准部分，这就是说，定积分对应的和式在非标准数域上具有离散化的形式。这就使我直观地猜想到离散型的广义麦比乌斯反演公式有可能推广到非标准数域上去。接着我就逻辑地验证这个想法，果然达到了目标，得到了一条普遍的反演定理。它把组合学中的反演公式和卷积方程论中的一些反演定理（包括微积分基本定理）都作为特例概括进去了。我想这个工作的意义并不在于拓广本身，而主要在于表明：离散数学与连续数学的特定部分是能够实现沟通的。同时还表明"非标准分析"方法确实能起到一般标准分析学所不能起到的作用（上述初步结果已发表于1983年《科学探索》3卷1期上）。

由上所述，可见学习上的"不保守"或许也是一点值得介绍的经验。事实上，假如在七十年代我采取了象国外有些分析学家瞧不起"非标准分析"的态度，或者干脆轻率地认为那不过是"标准分析"的等价物而已，那么我就不会虚心地去学习非标准分析，也就不会有机会使自己的想象力伸入新的领域，当然更不可能发现离散数学与连续数学中两类重要的反演关系能够统一起来。

我搞了四十年的数学工作，深深感到学习和研究数学是互相促进的。学习数学知识必须重视生动的直观背景并采取分析研究态度，才能学得透、学得活；另一方面，研究工作过程中又必须随时学习新知识新工具，这样才能开阔视野，扩大联想领域，获取新的成果。

数学上的创新和发明决不是神秘莫测的事情，只要坚持辩证唯物主义的反映论观点，就不难发现客观规律。只要很好地运用这些规律，人人都能进行创造发明活动。本文讨论

的数学直觉与联想不过是数学发明创造心智过程中的两个环节而已。这些涉及"微观数学方法论"的问题，在最近出版的拙著《数学方法论选讲》（1983年华中工学院出版社出版）一书的第1讲与第10讲中已作了较多的论述，这里就不多说了。

数学方法论与数学教学改革

徐利治

自1981年以来，笔者曾在大连、长春、武汉的三所高等院校讲授过数学方法论课程，并曾在其它一些城市作过方法论的多次讲演。1983年还由华中工学院出版社出版了拙著《数学方法论选讲》一书，发现不少数学教师和哲学工作者对所述及的题材内容都很感兴趣。有些读者还在来信中提到方法论对培养师资和改革数学方法的重要性。这就引起笔者写作本文的动机。本文打算从数学方法论角度来探讨数学教学改革的有关问题。但提出的观点和建议未必正确合用，仅供有兴趣的读者参考讨论而已。

一般都认为，作为科学方法论重要分支的数学方法论，主要是研究数学发展规律、数学结构的思想方法以及数学的发现、发明与创新等法则的一门学问，显然它与数学教育与教学法研究有着不可分割的联系，所以它能引起数学教师们的普遍关注，也是理所当然的事了。

多少年来，无论是中学数学教本或是大学数学各门课程的教材，都是无例外地把数学知识力求组织成演绎结构系统来进行教学。这有历史的必然性。因为随着人类文化的发展，数学科学知识的庞大积累，必须经过筛选和提炼，把最重要最精华的题材，用演绎法串联起来，才能最有效地传授给后代。人类的知识发展过程总带有历史阶段性和逻辑演绎性，所以数学教材的编选，常常要反映历史发展的顺序和演绎推理的要求，这应该是众所公认的准则。

但是，如果要培养具有数学想象力和创造力的青年一代，要使他们不仅能够灵活地运用数学工具，而且还可能日后在科技上有所创新和发明，那么在教材教法中只注重传授演绎性的数学知识，过分强调逻辑演绎推理的训练，将是不利于达到上述目标的。

从方法论角度来看，数学真理知识的发现、发掘和推陈出新，离不开对特殊实例的观察、分析、归纳、抽象概括和运用探索性推理等过程。所以重要的事情，是要教会学生运用科学归纳法，能从特殊例子中去发现出一般性的东西来（例如，从一批特殊结构关系中观察出某种一般性结构或一般数量关系等等）。大家知道，十八、十九世纪的杰出数学家欧拉(Euler)和高斯(Gauss)等人都是运用归纳法的大师，他们所获得的许多公式和定理，都是靠归纳法发现的。

归纳法和类比法常常被认为是发现数学真理的重要方法，前者是从特殊过渡到一般的思想方法，后者是由此及彼以及由彼及此的联想方法。只需略略浏览中外数学史，即可发现许多有深远意义的极为重要的数学知识都是通过归纳法

与类比法发掘出来的。这方面的题材和例子真是举不胜举。因此在中学和大专学校的数学教材中理应有归纳法与类比法教材的适当位置。

归纳和类比离不开观察、分析和联想。因此，在数学教学中如果适当加进这方面的有趣题材，则对培养学生的观察力、分析能力和联想能力也是极有帮助的。值得欢迎的是，美籍匈牙利数学家兼数学教育家乔治·波利亚(C. Polya)的名著《数学的发现》、《数学中的归纳与类比》、《数学中的合情推理》(后两书的中译本起名为《数学与猜想》)已陆续译为中文出版发行。这些书包含有大量的有趣题材和富于启发性的例子，相信对国内关心数学教学改革的同志们会有一定的参考价值。

波利亚所说的"合情推理"(也称似真推理)，实际上类似于爱因斯坦(A. Einstein)所倡导的"探索性演绎法"，这种演绎法至少在两点上不同于一般形式逻辑范围内的演绎法：一是作为推理出发点的前提或条件多半是不够充分的，或者是比较模糊的；二是推理的前提或假设往往是一种不稳定的猜测。在推理过程中经常处于可更改的地位。例如，凭直观猜到某命题的一部分必要条件或者可信以为真的条件，用以形象的直观地(由猜想的外推)去"推断"出某种结论来，这便属于第一种情形。在推理过程中发现作为假设的前提不尽正确而需要随时加以修改补充的作法即属于第二种情形。事实上，许多有创造力的数学工作者，正是惯用这种探索性演绎法去发现和建立他们的定理和理论成果的。通常在数学的解题和证题过程中，人们也常常不自觉地试用着探索性演绎

法，只是运用这种演绎法的技巧和能力水平各不相同而已。因此有关这种演绎法的题材也应该在教学与教材中占据一定的重要位置。举例来说，数学中需要讲述一些引人入胜的“反例”，要揭示“反例”是怎样发现出来的，不正是阐明“探索性演绎法”的一种简单应用吗？

综上所述，归纳、类比和探索性演绎法通常是靠猜想与联想（包括直观想象）等心智运动串联起来的。这些心智活动形式能导致人们作出新的判断和预见，能帮助发现数学真理，包括发现新的数学关系结构、新的数学方法及数学命题等等。但是，它们毕竟是一种非逻辑的思维形式，属于现代心理学上所谓的“发散思维”范畴，当然，并不能用以精确地建立数学命题和理论。最后要证明命题或定理，还必须用严格的逻辑分析与演绎推理，既收敛思维。

因此，为了培养既有创造发明能力，又有逻辑论证能力的数学师资和学生，应该在中学和大专院校的数学教学教材中，采用“归纳与演绎交互为用的原则”。按照这条原则，不仅应该教学生学会运用科学归纳法试着去猜结论、猜条件、猜定理、猜证法，而且还要让他们学会从探索性演绎法过渡到纯形式的演绎法，能够把预见到的合理命题或定理的证明一丝不苟地建立在逻辑演绎基础上。

总而言之，在数学教学过程中，既要发展学生的发散思维能力，又要培训他们的收敛思维能力。既要教会学生进行严格逻辑推理，还要教会学生大胆进行不严格的猜想、联想和合情推理。

传统的数学教育与教学似乎过份偏重于培养收敛思维能

力，这对造就面向未来的科技人才来说，自然是不够理想的。因此我们认为"归纳与演绎并用"的原则在数学教学改革中应该是一条值得重视的原则。

但是，又须把话说回来，数学往往以其特有的逻辑严密性而骄傲，数学教师们又往往以讲述为本职。因此，正象波利亚在《数学与猜想》一书中所指出的，一般教师都不愿向学生讲述"不严格的思想方法"（如猜想与合情推理等），以免有损于"威信"。而且，从归纳到演绎，首先需要观察分析诸特例，作起来有时是很费工夫的，毕竟不象专讲逻辑演绎那样简便而直接。因此，如何恰当地使"归纳演绎并用的原则"体现到数学教改中去，看来还有些思想认识问题是需要讨论解决的呢。

青少年从小学、中学到大学，都要把许多时间花在数学学习上，但当他们进入社会从事各行各业的工作后，其中就有一个相当比例的人数，再也用不着或者很少运用他们学过的数学知识，其中还有些人甚至对数学产生了"那是枯燥无味，太伤脑筋的玩意儿的"错觉。尤其是，一些具有艺术爱好倾向的学生，往往更容易产生上述错觉，有的人还对数学怀有敬而远之的惧怕心理。

其实，上述情况可能是由于数学教育与教学中一贯忽视"美学原则"所导致的必然现象。作为科学语言的数学，具有一般语言文学与艺术所共有的特点，既数学在其内容结构上和方法上也都具有自身的某种美，所谓数学美。"数学美"的含义是丰富的，如数学概念的简单性、统一性，结构系统的协调性、对称性，数学命题与数学模型的概括性、典型性与

普通性，还有数学中的奇异性等等都是数学美的具体内容。不仅在高等数学中，而且在初等数学中也处处存在这些数学美。例如，仅就"对称性"而言，已故数学家外以耳(H. Weyl)就写过一本讨论这种数学美的著作，令人读之兴味盎然。

谈到数学理论（结构或模型）的典型性，其思想方法实际上和文学创作中的典型性概念是很相似的。文学小说和艺术需要以具体背景素材为基础，采用扬弃法或抽象法塑造出某种来自生活而又高于生活的形象典型。数学理论，其实也是以一些具体问题、具体材料为背景，通过归纳、分析、抽象等一系列过程建立起来的模型结构或关系典型。当然，一切抽象物都有一个共同特征：它们来自实际、反映实际，而又往往超出实际（所谓"超出实际"，并不是说脱离实际，而是把一切有着可能性的对象也包括进去的意思，数学的抽象物具有逻辑演绎性，或许这是不同于艺术的主要之点）。

因此，按照上述类比，完全可以教懂即使是具有艺术爱好倾向的学生们，使他们也能领会到"数学美"的享受。

数学教育与数学的目的之一，应当让学生们获得对数学美的审美能力，从而既有利于激发他们对数学科学的爱好，也有助于增长他们的创造发明能力。例如，在拙著的第十讲中，笔者曾介绍了庞卡莱(Poincare)和阿达玛(Hadamard)的"数学领域的发明心理学"。姑且不论他们的观点是否完全正确，但他们一致强调了的"美的直觉"在数学创造发明中的作用却是大多数数学工作者所共有的经验。事实上，马克思也曾说过，人类社会的生产活动是按照"美学原则"进行的。当然，作为精神生产物的数学知识之符合美学原则（或审美

原则）也是无可怀疑的。

因此，我和数学界许多同志都有同样的看法，即认为数学教改中还应把"数学中的审美原则"尽可能体现到数学教材与教法中去。

为了在我国培养大批有创造才能的学生，高水平的数学师资的培养自然是刻不容缓的。我同意波利亚的观点，好的数学教师应保持良好的"作题胃口"，显然这种"胃口"将有利于感染学生去发展解题的兴趣和才能。此外笔者还赞成数学教师能够具有泛读数学史的兴趣，且能涉猎一些创造心理与科学方法论。这样，将有助于增长教师本身对数学科学的审美修养，从而能潜移默化地去感染学生们爱好数学。

以上只是提了一些原则性观点或建议，至于如何在具体的数学教材改革与教法改革中去反映上述原则，那还有许多实际问题需要进一步讨论研究。本文目的仅是抛砖引玉，有何不当之处，敬希批评指正。

谈　谈
怎样学习数学

莫绍揆



作者简介：著名数学家，教授，1917年生于广西桂平县。读私塾两年，小学四年，初高中各三年。1939年在前中央大学理学院数学系毕业。后在前中央大学、中山大学数学系任助教及讲师。1947年到瑞士高工留学。1950年回国后任南京大学数学系副教授及教授至今。在大学时即对数理逻辑发生浓厚兴趣，自学罗素的《数学原理》。到瑞士留学后，随贝尔奈斯学数理逻辑，回国后主要工作亦在数理逻辑方面。发表的论文共约50余篇，涉及到数理逻辑的基础理论以及递归论、集合论、证明论等方面。出版的主要著作有《数理逻辑导论》、《递归函数论》、《算法论》、《数理逻辑教程》。还有即将出版的《递归论》、《公理集合论》和《递归算术》等。另外还有出版的译著《数理逻辑基础》、《递归函数论》、《形式语言及其与自动机的关系》等。其中《数理逻辑

导论》及《递归函数论》曾在1978年获全国科学大会奖。论文《高级函词的本质》及《自然推理系统》曾获1980年江苏省科学奖。

"怎样学习数学"？这个问题太大了，极难于回答。至少作者自问没有能力来回答它。但是，这个问题又太重要了，很多初学数学的人都询问它，着急地等待着对它的回答，哪怕是部分地回答也罢。作者也问过这个问题，也遇到人们提出类似的询问，也作过一些思考，也得到一些粗浅的体会。因此，我想根据自己的一些经验和粗浅的体会，就这个问题说几句。拉拉杂杂，毫无系统，也许很不正确，也许很不对题，只是供初学数学的人作个参考罢了。

我国从古相传有一句成语："从大处着眼，从小处着手"，我觉得这句话对学习数学来说，是完全适用的。

所谓"从大处着眼"，便是眼界要远大，要站得高，不要鼠目寸光，局守一隅。还要自信，要有攻坚的志气，有研究巨大问题、解决困难问题的决心。这也就是我国相沿下来的所谓立大志的精神。

但立大志绝不是目空一切、好高骛远、自高自大，而必须脚踏实地、埋头苦干、按部就班、一步一个脚印地苦学苦练。这便是从小处着手，也就是锲而不舍磨铁成针的精神。

显然，这两点表面上看来是互相反对的，但实际上却是相辅相成、缺一不可的。

我们又常常议论博与专、泛读与精读的问题，这也是我

们应该注意的。这也是两个表面看来相互矛盾，实际上也是相辅相成的。我国相沿下来的"由博返约"便是告诉我们一个答案，教我们怎样处理这对矛盾的。

所谓"由博返约"照我的理解便是：首先，博览，然后选择一些(或三两个)科目精研下去。这里的"首先""然后"，只是大体上作阶段性的划分，并不是说每次都必须先博后约。

我们首先必须博览，尤其是对最新的发展趋向、最近的研究动态，必须经常注意，换句话说，我们必须对该学科的进展状况时刻理解，既使不能深研下去，也必须保持接触，不能闭目塞听，"两耳不闻窗外事"，那就脱离了学科进展的轨道，自甘落伍了。

但是我们绝不能够只限于知道一些消息，知道一些情况，而必须参加进去，必须就其中一些方向（至少一个方向）深入钻研，透彻理解其中一切细节，融汇贯通，加以发展，这样才能真正懂得这个方向，才能有所创新，有所贡献。

这里我想强调两点：

第一，反复学习、反复思考是非常必要的，这是"精读"的一个非常重要的内容。如果看一篇新文章，或者没有老师在旁指教的时候，只有反复学习才能把所学的内容学懂，只看一遍便懂的情况是非常少的。只有反复学习反复琢磨才能有所收获。其次，即使学懂了，对那些基本定理、证明极繁的定理，也必须反复学习反复琢磨，这样才能真正有所收获。可以说，求学问恰和交朋友一样。必须有频繁地接触交谈，才算是知心朋友，才算是知交。那些只见过一两面，说过一两句话的人，只能说是"面善"，或者是"点头之交"，算

不得好朋友。一旦出了什么事情，只有知交才来帮助，至于点头之交呢，是不能指望的。同样，当我们作科研、遇上什么难题时，只有经过我们深钻、理解得透彻的部分（那些定理）才能供我们使用，帮助我们的忙，那些只见过一两面的定理或方法，是很难给我们驱使的。因此反复学习反复思维这一过程是非常重要，不能忽视的。

第二，必须打有准备的仗，不打无准备的仗。除去学习、理解以外，我们又必须动动手。在别的自然科学中，这是指实验或调查，在数学则指做习题或搞新题目。不管哪一种，在动手前，必须作好充分准备，切忌盲目动手。

试就作习题来说，在动手作习题之前，必须先把正课温习一遍，把有关的知识重新理解一遍，然后才作习题，这样如果作了出来，固然是已得学识的一次应用，可从应用过程中加深自己的理解。既使作不出来，一般也能知道问题所在，可以检查自己在哪一个"关口"通不过，然后就这个关口再重新复习一遍，这样逐步克服困难，逐步前进，不管最后这个习题是否作了出来，都对自己大有益处，都使自己对正课有进一步的深一层的理解。反之，如果不作准备，不先复习，为做习题而习题（只是为了老师要交习题，不能不做），动手便做，盲目乱撞，东拼西凑，即使偶然把题目做出来了，那只是碰巧，自己并未曾把所学到的知识拿来应用。如果作不出来，也不知问题出在什么地方，应该在什么地方想点子，而只是继续乱碰乱撞。结果，时间是花了不少，但对自己毫无收益。

至于搞科研、做新题目（前人未曾做过的新题目），充分

的准备仍然是必要的。我们不反对这时采用"尝试"、"试猜"、"碰撞"的方式（西文叫做 heuristical），东碰碰西试试，但在这之前仍必须做大量的准备工作。首先，必须仔细研读前人有关这个问题的成果，只有在前人已有的成果之上开始工作，才能有所前进，如果盲目地开始工作，势必重复前人的工作，徒然浪费时间与精力。其次，也必须详细考究与本题目有关的学科，哪些是与本题目某方面关系最密切，哪些是比较次要的。并且要订完大体的"作战计划"，有几个攻击方向，遇到怎样困难时该怎样克服或回避等等。我们不反对"试猜"，但对每一次试猜都要仔细检查其后果以及可能出现的意外情况，因此每一种试猜，除可能导致我们所希望的结果以外，还常常可以导出一些我们绝对不愿意出现的情况。如果及早注意到后者，那么很快便可以把这种试猜的假设排除了。

一般人，无论做习题或搞新题目，都喜欢题目一到手便乱碰试，忽视了准备工作，其结果往往事倍功半，收效不大。

另外，有很多初学的人对所谓难题有兴趣，例如，非常喜欢去搞"三等分一角（用圆规直尺）"，或者去搞费尔马最后定理，即"不可能有正整数 n，x，y，z 满足方程 $x^{n+2}+y^{n+2}=z^{n+2}$"，或者哥德巴赫猜想："任何大于 4 的偶数都可写成两个奇素数之和"，他们常常写出一些他们自认的"证明"，寄到杂志刊物去，要求刊登，或寄到一些数学工作者那里，要求代他们审阅。这常常引起杂志刊物编辑部的麻烦，或数学工作者的麻烦，打扰他们的日常工作的秩序了。无论怎样劝说他们都不愿意倾听。

这类所谓难题，实际上分两种：

第一种当时是难题，但目前已经解决了。例如，用圆规直尺来三等分一个角，在古希腊时代是一个难题，现在已经证明这是不可能的，因此这个问题已经解决了，解答是："不可能"。既然已经知道解答，为什么还要继续去研究它？原来这些人受到以前"左"的思想的流毒，无视科学规律，"以前不可能的，在社会主义的今天便可能了"，或者"外国不可能的，在社会主义的中国都是可能了"等等。对这些受"左"的流毒的人，除向他们加强科学规律严肃性的教育外，还可对他们说，你在做你的伟大的研究之前，最好先把$\sqrt{2}$或$\sqrt{3}$表成分数，即先找分数m/n，使得$m^2/n^2=2$或$m^2/n^2=3$。如果你无法找出，那么对那些证明为不可能的问题便不必再搞下去了。

第二种直到目前仍是难题，仍是未解决的难题。对这种难题是应该探究的，但是正为上文所说，在探讨之前应该有充分的准备，我们反对打无准备的仗，例如，要研究费尔马大定理或哥德巴赫猜想，首先应该熟悉前人已获得的成果，前人已走过的道路，而这一般要专门从事数学（尤其是从事数学中数论这部分）的人才能做到，仅凭对自然数的一些粗浅知识，是无法总结前人已有的成果的。不总结前人的成果，单想凭乱碰乱试而解决有名的数学难题，这不是太过于天真了吗？

举个例说，在今天要想采矿，当然要依靠专业队伍从事普查，勘探，才能探明地下的矿藏。如果某处曾有一人偶尔发现露天矿藏，便以为只要自己东奔西跑，便可以赤手空拳

地找出有开采价值的大矿藏，不是和上面提到的那些同样地天真吗？

总结起来，对于已经解决了的不可能问题，绝不应该再去研究它（把前提改变、结论改变，从而已变成了一个新问题的，当然不在此限）；对于尚未解决的难题，当然应该研究，但必须有充分的准备，包括必须熟悉前人已获得的成果。我们希望由从事数学工作的人来做，可以省却准备时间，但有兴趣的人来研究未尚不可，但必须作充分准备。

初学的人每每走极端，把很好的主张或办法推行到极端，结果反而误事。例如，当人们提到注重基础理论时，便整天泡在几本教科书中，整天做教科书上的习题，十多年下去，人也老了，一事无成了；当人们提到注重科研，应早日从事科研时，又不顾条件，不作准备，马上去读论文，第一篇勉强读完，还没有消化，又读第二篇，不到几年工夫，论文读了不少，但没有一篇是读透了的，所谓"人人面善，无一知交"，当自己从事一个题目的探讨时，竟然束手无策，那些"面善"而不是"知交"的朋友，没有一个出来帮忙。因此有一个大问题，对初学数学的人说来，该怎样做呢？是埋头于教科书拚命做习题呢，还是提早读论文开始搞科研呢？

问题在于：任何主张和办法，不能夸大到极端，而应保持一个适当的限度，基础的训练是必要的，但长期埋头于教科书便不对了；及早从事科研也是必要的。但基础训练不够，准备不够便不对了。如何适当地掌握两类的界限，这是随各人而异的，不能预先规定的，谁能够适当地根据自己的具体情况而掌握界限，谁的成功机会便大。

值得指出，所谓基础训练绝不限于无休止地做教科书里（或习题集中）的习题，这只是一方面的。更重要的是，对主要定理的证明（这一般是较为艰深的）反复钻研（以便加深理解），并设法加以改动或改进。这是提高自己作题能力的一个良好办法。

主要定理牵连较多，证明一般也较繁杂，应该首先弄清证明的主要思路，主要步骤，这样才能加深对主要定理的理解。但这还不够，我们还应加以改动，使其主要思路更为突出，主要步骤更为清楚。然后再进一步改进，或使用更弱的前提，或推出更强的结论，或把使用高等数学工具的地方改掉，换上使用初等数学的工具等等。后面这些改进，实际上已经是获得一些新成果，如果这些新成果是别人不知道的，可以说已在科研道路上走了第一步，如果是一些意义不大的（因为别人认为不必提及）成果，至少也是走科研道路的一个良好开端，因此这种做法，既是理解主要定理的良好方法，也是走科研道路前的一个良好练兵，是值得提倡的。

这里所谓主要定理，是指教科书中的定理而言，教科书中的定理一般都经受了数百年的考察，要想改动或改进，一般是比较难的，如果初学者不能改动或改进，这是正常现象，不必强求，只要对主要定理反复琢磨，尝试改进便成了。曾经有人说过，你要学好数学分析，最好的办法是，自己写一本数学分析，他的话也正是我们上面所说的意思。因为动手写数学分析时，势必要对数学分析里的定理仔细分析，考虑各定理的证明的安排，没有这样细致的考虑，对数学分析是难于学得透的。

这种对已知的主要定理（比较艰深的定理）的证明加以改动或改进，其困难程度一般不亚于探讨著名难题，我们固然鼓励前者，是否我们也鼓励后者，鼓励大家经常去搞著名的未解决的难题呢？不，两者本质是不相同的。对已知主要定理的证明加以改动，与对未解决难题的探讨，两者的工作是截然不同的。前者比较易做，做了以后得到很好的训练，因此即使初学者也是可以做而且应该做的。但后者则不同，难度极大，要做的准备工作非常多，即使有了充分准备以后，如何下手也是很难预计的。因此对于没有充分准备的初学者，一般是不应该盲目从高的。两者本质不同，不应混淆。

在数学发展史中，始终贯串着几个矛盾。如果掌握好这几个矛盾，可以帮助我们更好地学习数学。这几个矛盾是：离散与连续的矛盾，以及有穷与无穷的矛盾，一般与特殊的矛盾。

我们不去定义这些名词，但大家都在直观上懂得这几对矛盾指的是什么。

自然数是离散的，有理数虽到处稠密，但因为每个有理数都可表为两整数的商（亦可表示为两整数组成的数偶），一般也看作离散的；直线上或曲线上的点是连续的，从而实数也是连续的（或说实数组成连续统），因此研究自然数与有理数的算术以及初等代数，便是离散数学的代表，而研究直线曲线的几何学，以及研究实数的数学分析，便是连续数学的代表。两种数学都是源远流长。但在古代，可以说偏于离散方面，那怕是几何学，基本上也是用处理离散的方式来处理的（欧氏几何中的定理，几乎全部可以不用连续性公理而导

出)。等到近代，微积分兴起了，发展成为数学分析这个分支，连续数学才突飞猛进，成为数学的主流，但数理逻辑、抽象代数等的发展，仍然主要是沿着离散的方向。尤其是第二次世界大战时电子计算机的出现，更使离散数学突出其重要性，要想把数学分析问题用电子计算机来计算，必须先作出近似公式，把实数用有理数逼近，把求极限求导数等运算化成加减乘除等有理运算才成，可以说，电子计算机不懂得连续数学，只懂得离散数学。由此可见，离散数学与连续数学无论就其发展来看，或就所处理的问题来看，都是既是互相反对，又是彼此相辅相成的，代表着数学的两大主流。

其次，有穷与无穷的问题，不但在哲学上引起巨大的激烈争论，在数学上也引起争论，而且影响到数学的发展。欧几里得的《几何原本》中关于比例论的讨论，实质上便是使用了无穷集合，只是表面上避开罢了。在古代，对数学家来说，"无穷"只是从否定方面着眼，"不是有穷"，"其个数没有上界"等等，这便是所谓潜在无穷论，把无穷集合看作生成中的东西，还未完成。但事实上，我们的确是有"完成了"的无穷集合，例如，直线段上的点集，便是无穷集。(无穷个点)，而且是完成了的(已组成"线段")，不是生成中的(谁人把"线段"看作：今日添一个点，明日再添一个点，如此永远添下去，但始终未完成的东西呢？)。正是因为线段是已完成的无穷点集合，因此在几何学上，不能不把点看作没有大小(即长度)而只有位置的东西。姑且不论没有大小的东西为何能占有位置，即就下列问题而言，亦是使人们迷惑不解的：

(1) 没有长度　即长度为0，由长度为0的点聚集起来，怎能构成有长度的线段呢？

(2) 极易证明（一般人亦极易相信），任何两个有穷线段，其上的点都是一样多的，同样多的点怎样能够组成不同长度的线段呢？

如此等等，足见无穷的问题在数学中是不能不讨论的，是不能回避的。的确，康托尔的无穷集合论出现以后，一方面引起数学界的极大争论，另一方面也促使数学有极大的发展，这里我们不能多做讨论了，只是顺便说一句，极限论的本质在于把所谓无穷小（以及其倒数无穷大）化归为有限数的数列，这是沿着潜在无穷论的方向而发展的，它很成功，解决了很多问题。但以为极限论出现了，无穷的问题也就解决了，无穷集合场可用潜在无穷论的观点来处理了，那都是不对的。因为还有很多有关无穷集合的问题是不能用极限论解决的。有穷与无穷的矛盾始终是数学上的一个大问题，始终是推进数学进展的一大动力。

现在再说一般与特殊。数学是抽象的，也是一般的。数学的定理可以应用于各种自然科学上，这便是它具有一般性的标志。尤其是自从公理方法盛行以后，数学界更力求普遍，力求一般。现在新的抽象系统越来越多，每一种新系统的出现，都或明言或暗示地说，它是最一般的系统，可以包括所有已知的数学系统作为其特例。有些人甚至于说，现在的数学界对于获得一条一条的特殊定理没有兴趣，而着眼在获得具有普遍性、一般性的定理。当然也有人出来反对这种趋向。

其实，所谓一般与特殊，多少是相对的而不是绝对的，在数学中尤其如此。例如下面两个等式：

(1) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

(2) $(a+d)\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c+d\cdot b+d\cdot c$

到底谁是特例谁是一般呢？我们可以说，(1)是(2)的特例(当$d=0$时的特例)，但亦可以说，(2)是(1)的特例，因a可以代表任何项，而$a+d$是一个二项式，它是"项"的特例。例如，$(s\cdot t)\cdot(b+c)$，便可以依照(1)而进行(用$s\cdot t$代入a去)，却不能依照(2)而进行，因$s\cdot t$不是二项式。在数学中，互为特例的例子非常多，很难说谁该是一般，谁该是特例。目前提出很多新抽象系统，被说成是很一般的系统的，其实在另一观点之下，它们却是已知系统的一个特例。由此可见，竭力追求一般之无谓了。

再举一个例子，试考虑数论函数(它把自然数变成自然数)与字函数(它把A_n上的字变成A_n上的字，所谓A_n指具n个字母的字母表)。

如果把自然数看作孤一字母表A_1上的字，那么字函数是通例而数论函数是特例($n=1$时的特例)。如果把A_n上的字看作采用(无零)n进制时自然数的表达式(所谓n进制数)，那么字函数讨论的只是使用(无零)n进制数时数论函数的具体形式，而数论函数则是不牵涉到数制时数论函数的性质，显然数论函数是通例而字函数是特例。现在很多人采用前一观点，认为把数论函数推广而成字函数，其实采用后一观点更觉得自然而且能揭示问题的本质。不管采用哪个观点，这里至少表明了：通例与特例并非是一成不变的，从而拼命

地追求"一般"将不是很好的方向。

其次，既使明确无疑地肯定了谁是一般，谁是特殊，我们也不能只研究一般而忽视特殊。因为"一般"总是比较抽象的，纯粹从"一般"立论，给人的印象总不够深刻，总难于理解透，如用具体例子(这是特殊)立论，至少举出具体例子，人们的理解便深刻了，其次，一般总是从特殊抽象得的，是从特殊而来的。只有熟悉特殊，才能产生问题，才能给人指出新方向。不熟悉特殊而凭空从一般而立论，诚然是既简洁又漂亮，但却不能指出问题不能指出问题的新方向。从物理天文等方面而引起的数学新问题新方法，其数量之多质量之高是尽人皆知的。如果当初不与自然科学挂钩，数学是难于发展成今天的样子的。

最后，即使你对"一般"熟悉了，但要运用到特例去，仍然是要费一番气力的。你如果对特例不熟悉，仍然无法运用的。最具体的例子是，尽管在数学方面数学工作者比物理工作者熟悉得多，但应用数学来解决物理问题时，物理工作者都常常能够根据物理问题的性质而懂得该选用怎样的数学工具从而把问题解决了，而数学工作者虽然熟悉各种各样的数学工具，如果对物理问题不清楚，往往无法选用适当工具，问题仍得不到解决。总之，把一般应用于特殊时，除懂得一般外，也应懂得特殊，强调一般而忽视特殊是不对的。

以上就数学有关的问题说了一些话，既无系统又没有什么新见，只供读者作参考而已。



与自学青年谈怎样学习好数学

余元希

作者简介：数学教育家，副教授。1915年11月出生于浙江省慈溪县。1931年毕业于崇明县立师范学校师范专修科。即到小学任教，工作中对数学教学特感兴趣，立志继续深造，专攻数学。抗战期间，一边工作，一边进高中、大学读书。1945年毕业于上海交通大学数学系。此后即在上海市泸新中学、上海中学等校任数学教师。并开始了中小学数学教材教法的研究。1956年因工作需要调到华东师范大学数学系数学教学法教研室，专门从事于中学数学教材教法的教学与科研工作。现任华东师范大学教育科学院教材教法研究室副教授。中国数学会教育工作委员会成员。曾编写出版了中学数学教材教法研究丛书：《近似计算初步》、《函数概念》、《数的概念》等书，并在上海等地的数学教学研究刊物上发表多篇关于数学教学研究的论文。他又是一个积极热心

于数学普及工作者，曾兼任数理化自学丛书数学部分的主编，并执笔编写了其中的代数第三、四册，以及其他科普读物，还担任华东师大《数学教学》的副主编。

数学是一门重要的工具学科，随着时代的发展，科学技术的突飞猛进，数学的应用也越来越广泛。每一个有文化的人，不管他是干哪一行的，都需要具备一定的数学知识，具有应用数学这一工具，解决有关实际问题的能力。许多自学青年，正积极地在学习数学，希望了解怎样有效地学习好数学的一些诀窍。

怎样才能学习好数学，掌握数学的知识和技能，培养起应用数学的知识和技能解决实际问题的能力呢？这里我提出几点看法，供青年同志们参考。

一、前　提

要学好数学，我认为必须坚持循序前进、打好基础这一原则。这里所说的打好基础，主要包括着要学好数学的基础知识，练好研究数学所需用到的运算、画图、推理论证等等基本功。

数学是一门系统性很强的学科。数学的知识一般都是从一些最基本的概念出发，按照一定的逻辑顺序展开的。学习当前所讨论的内容，需要有先行的知识为基础，现在学习的内容，又常是学习后继知识的基础。前面的知识学得扎实，学习后面的知识，就能顺利；前面的知识，没有掌握好，学

习后面的知识，就会困难重重。这一特点也就规定了学习数学必须循序渐进。

在小学数学的基础上，中学阶段所学习的数学是打基础的一个重要阶段。根据所研究的对象的重点，我们可以把它们在大体上划分成以研究空间形式为主的几何和以研究数量关系为主的代数与初等函数两条线。在几何这条线上，先学习平面几何，这时应该把平面图形的一些主要概念及其性质以及推理论证的方法这些最基本的知识学习好。学好这些知识，除掉它们本身的应用外，也正是为下一步学习立体几何、平面解析几何奠定基础。再就学习平面几何这门学科来说，线索更是十分明朗的，"三角形的全等与相似"这一课题，一般认为在平面几何中占有特殊重要的地位。如能很好地加以掌握，那么学习关于多边形及圆的知识，就可迎刃而解。但是，要学习三角形的全等的知识及其应用，首先就得学好安排在它前面的那些先行知识。在代数与初等函数这条线上，研究的内容主要包括有"数"、"式"、方程与"不等式"、"函数"等部分，这些内容，一般都需要交错安排的，所以线索不象几何那样明朗，但是仍应注意循序前进。例如要学习高中代数中关于初等函数的那部分知识（这些知识是今后学习初等微积分的基础），一个重要的前提就在于主要学好在初中代数所学习的那些最基本的知识。如数和式的运算，方程和不等式的解法等等。另外，还应注意到数的研究与形的研究也不是绝对分开的。在我们打基础的阶段，要注意到两条线之间的相互呼应、相互配合，这里也有一个循序前进的问题。例如，在学习"三角形的解法"之前，就需要先学好三角形的相

似形以及初中代数中的那部分知识。中学数学教学大纲中所规定的教学内容的安排是根据循序前进这一原则的，它可以作为自学青年制订自己的学习计划的参考。

学习数学离不开数和式的各种运算，把空间形式用图形来表达，以及进行推理和论证。这一些数学基本技能也是需要在学习的过程中循序前进地逐步培养起来的。就运算这一技能来说，首先要保证运算结果的正确性，再追求运算迅速。就画图这一技能来说，开始时应该学会使用工具来作出平面图形和空间图形的直观图，进一步还应该学会徒手作图。不管使用工具也好，徒手作图也好，都要做到正确反映了现实对象。更进一步，还要培养起不在纸面上作出图形而只是在头脑里想象的能力。至于推理和论证，必须从最简单的推理和论证学起，一开始就要学会正确运用有关方法，再逐步提高那就更不用说了。

把各种各样的有关实际问题，归结成为一个数学问题予以解决，这就是学习数学的一个重要目的。解题也是学好数学的一个重要手段。解题能力的培养也要注意循序前进，打好基础。要解题，首先就要掌握好有关的数学基础知识与基本技能。一个比较复杂的问题，一般都需要通过分析把它转化为一些简单的问题来解决。因此在学习某一内容的数学知识和技能后，就要学会运用这些知识和技能来解答一些最基本的、简单的问题，在这基础上进一步去解答那些较复杂的问题，逐步提高要求。分析和综合的能力也正是需要通过这样的过程逐步培养起来的。忽视基础知识的理解与掌握，不练好基本功，只是追求解难题偏题，向基础习题集讨教，死

记硬背现成的解答，必然会事倍功半，甚至是徒劳无益。

总之，要学好数学我们必须在思想上重视，行动上做到切切实实的打好基础，要从头开始，步步前进。

二、要　求

要学好数学，应该有一个明确的目标，给自己提出一些具体的要求。要求是什么呢？我认为要求可以归结为五个字："知"、"懂"、"会"、"熟"、"活"。

知：即知道所学习的内容是什么，为什么要学习这些内容。这是学习中必须达到的，也是起码的要求。数学的知识是由一些数学的概念和数学的规律（包括公理、定理、法则、方法等等）组成的。学习的第一步就应该做到对这些概念和规律有清楚的了解，这样下一步才能正确地加以运用。例如，在初中代数中学习一元一次方程这一课题，首先就要做到清楚地了解什么是方程、方程的解、解方程、一元一次方程等这一些数学概念，了解解一元一次方程的法则和步骤，以及列出一元一次方程解应用题的方法，这样下一步才能应用这些知识来解具体的关于一元一次方程的问题。

懂：仅仅是知，所获得的知识，一般来说还是停留在表面上的，只能机械地加以记忆或者搬用，而真正的知，还在于理解。这也就要求我们对于所学的知识不仅要知道它讲的是什么，而且要懂得它的来龙去脉。只有这样，我们对于所学的知识才能在理解的基础上加以记忆，牢固地加以掌握，即使一旦遗忘，也就有可能自己来进行推导使它重现。例如在高中代数中"两角和与差的三角函数"这一项目，公式繁

多，记忆困难，但是这些公式却是有着紧密的内在联系。学习中如果一开始就注意到第一组公式（两角和与差的正弦函数及余弦函数）所追求的目的（以这两个角的正弦或余弦函数的代数式来表达它们的和或差的三角函数）和公式的推导过程，那么即使一旦遗忘，或者记忆上有所模糊，也不难自己来进行推导。学习中我们不仅满足于知道一些有关的结论，而更着眼于追本溯源，收益还不仅仅如此。事实上，我们只要能掌握上面所说的那套公式推导过程中所使用的基本方法（从一个公式的导出出发，利用变量代换，应用先行知识来导出后继的公式），那么象倍角公式、半角公式之类公式，也就完全可以自己来进行推导，并加以推广，这样学习既省事，印象也更深刻。

会：学习的目的在于应用。把学到的知识、学会应用显然是学习中必须达到的要求。会用也正是衡量是不是真正把知识学到手的一条主要标准。当我们从书本中学习了某一新的概念、定理、法则、方法，懂得了它们有什么应用，怎样应用之后，当然就要通过适当数量的练习，着手学会其应用，并通过应用，加深理解，加以巩固。这一过程中，主要的要求是要用得正确。应该注意的是要及时检查，如果发现错误，要及时找出原因，予以纠正，并吸取教训，避免重犯错误。数学里还有着许多更具有一般性的思想方法，我们也应该逐步学会其应用。例如"转化"就是常用的一种思想方法。在解高次方程中所用到的降次法，解方程组中所用到的消元法，都是基于这种思想方法。平面解析几何中，以直角坐标系为媒介，建立起一个点与一对有序实数间的一一对应和一条曲

线与一个二元方程间的对应关系，把形数结合起来，使关于形的问题，利用数的知识来解决。例如几何中的一个已知圆与一条已知直线的位置关系，可以归结为代数中的一个二元二次方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

的解的讨论来予以解决，其基本思想也就在于"转化"。又如把抽象的问题具体化，一般的问题特殊化，解决了具体的、特殊的问题之后，再反过来去解决原来的问题，这也是数学中常用的一种思想方法。例如，下面这一排列、组合问题就可以使用这一思想方法，寻求它的解答途径。

题目：平面上有 n 个点，其中有 $k(3\leqslant k\leqslant n-2)$ 个点在同一条直线上，此外不再有3个点同在一直线上，问经过这些点可以确定多少条不同的

(1) 直线；　　(2) 射线？

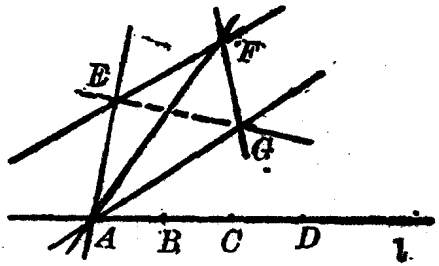
在这一问题中，如果没有3个点在同一直线，那是一个非常简单的问题，初学者只要掌握了排列、组合的概念和判断方法以及排列数、组合数的公式，立即可以作出解答：

(1) $N=C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

(2) $N=P_n^2=n(n-1)$

现在的问题就在于题中有 k 个点在同一直线这一条件，而且所给的数据是用字母 n、k 表示的抽象的自然数，要解决它就有一定的困难。但是，如果你已经学会了运用上述的解题思想方法，那么也就有可能想到可以先把这个问题改造一

下，使它在不失去一般性的前提下，变成一个既具体又简单的问题，从而能使用过去学过的列举法把可能的排列或组合具体作出，由此来寻求解题的方案。例如，可以设 $k=4$（$k=3$ 不合适，$k=5$ 不必要）$n=7$（$n=6$ 不合适，$n=8$ 不必要），并画出如下图形，由此就不难发现这个具体问题的一种解



法：——把直线进行分类，应用加法原理，即

过直线 l 外两点确定的直线有 $C_5^2=3$ 条；

过直线 l 上一点及 l 外一点确定的直线有 $C_4^1C_5^1=12$ 条；

由直线 l 上的点确定的直线只有 1 条。根据加法原理，总共可以确定的直线有

$$N=C_5^2+C_4^1\cdot C_5^1+1=3+12+1=16$$

条。

注意到上式中的 $3=n-k$，把它推广到一般情形，即得原题(1)的解应是

$$N=C_{n-k}^2+C_k^1\cdot C_{n-k}^1+1=\frac{1}{2}(n-k)(n+k-1)+1$$

原题中（2）的解法，同样的可以利用上述的方法来。

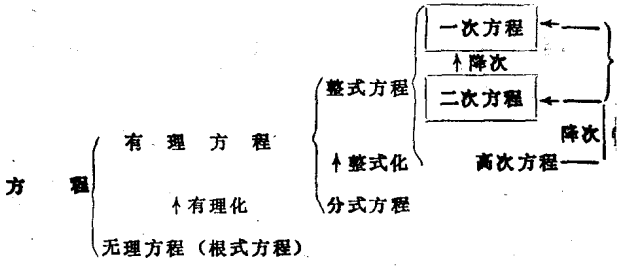
数学中常用的思想方法还有不少，学习中应该有意识地进行探索（如果书本中没有明朗提出的话），予以掌握，学会

应用。

熟：对于学到的知识和技能，不仅要能够正确地掌握它，而且要熟练地掌握它，这样才能应用自如。这显然是在知、懂、会的基础上，进一步应该达到的要求，这里就不详谈了。

活：熟能生巧，这只是说"熟"给"巧"提供了条件。巧意味着活——灵活地掌握知识、灵活地运用知识，因此，在熟的基础上，我们还得提出活这一要求。

我们所学习的数学知识内容是非常丰富的，知识是逐渐积累起来的，但是单纯地积累，知识就会僵化，所以还得通过消化，重行组织、进行概括、加以提炼。例如，在初中代数中学习了各种代数方程的解法，从知识的积累中，通过消化、体会到解方程的本质就在于通过适当的变形，把原方程变形成一个或几个形如 $x=a$ 的方程，基本的思想方法是通过转化把它归结为解一个或几个一元一次方程或一元二次方程（实质上它也是归结到一元一次方程来解的，但由于它有现成的求根公式可用，所以也把它作为基础），这样也就可以把学过的那些知识，提炼成一张简单的图表，如



这样只要再掌握了降次、整式化、有理化的基本方法（因式

分解、去分母、等号两边自乘同次方以及变量代换），注意到变形过程中是否同解（在初中代数中，一般只需通过检算剔除增根），也就掌握了所学过的那些内容。

掌握知识的灵活性，更体现在能够在已有知识的基础上，加以推广或扩展，能够触类旁通举一反三。例如，在学习一元二次方程时知道了方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的两个根 x_1、x_2 与系数 a、b、c 之间有如下的关系：

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

尽管书本中还不曾讲过一元三次方程的根与系数的关系，遇到需要时，也应该能够通过自己的推导来获得应有的结论。又如，在学习排列和组合时，讨论的只是相异元素不许重复选取的排列和组合，如果我们不仅仅满足于这些知识，很自然地在思想上会引起“如果可以重复选取或者所给的元素中有重复元素怎么办？”的问题。这一问题的解决是有实用价值的，要解决它，看起来似乎也不太容易。但是如果能够灵活地掌握和运用以前所学过的知识，那么解决这个问题的基础还是有的。例如：

（1）n 个相异元素中，选取 m 个元素，可重复的排列问题，可以直接应用加法原理来解决，由此还可导出公式 $N=n^m$；

（2）n 个相异元素中，选取 m 个元素，可重复的组合问题，可以先把各种情况进行分类，拆成几个不重复选取的组合问题，再应用加法原理、乘法原理来解决。为了导出一般

的公式还可以通过具体的、简单的例子，用列举法写出所有可能的组合，把其中有重复元素出现的设法变成不重复，再与相应的不许重复选取的组合问题进行对比，找出规律，由此推广到一般来得出有关公式。具体举例如下：

问题　在1，2，3，4四个数字中选取三个数字，数字可以重复，有几种不同选法？

解法一　选取的数字有三种可能：

(1) 都重复，选法有 $C_4^1=4$ 种；

(2) 只有二个重复，选法有 $C_4^1\cdot C_3^1=12$ 种；

(3) 都不重复，选法有 $C_4^3=4$ 种。

根据加法原理总共有选法 $C_4^1+C_4^1\cdot C_3^1+C_4^3=20$ 种。

（联想起 $C_6^3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$，这一结果，恰巧相当于在6个相异元素中选取3个不许重复选取的组合数，由此也可能得到一些启发）

解法二　应用列举法把各种可能组合列出下表：

111	112	113	114	122
123	124	133	134	144
222	223	224	233	234
244	333	334	344	444

共有20种

为了使重复元素变成不重复，在上表所列的每个数中，从第1个数字起顺次加上0、1、2得出下表：

123	124	125	126	134
135	136	145	146	156
234	235	236	245	246
256	345	346	356	456

共有20种

这张表正反映了在1，2，3，4，5,6六个数字中选取三个数字，不许重复选取的所有可能的组合，而20也就等于C_6^3。

把两者进行比较，可以发现一个重要事实：

$$H_4^3 = C_6^3 = C_{4+(3-1)}^3$$

这里符号H_4^3表示4个相异元素中取3个可以重复选取的组合数。

把这一规律推广到一般，也就可以导出公式

$$H_n^m = C_{n+m-1}^m$$

关于n个不尽相异元素的全排列问题，以及在其中选取m个($m<n$)的选排列问题和组合问题的解法，这里不详细介绍了。有兴趣的读者，不妨自己试一试能不能把它解决(提示：关键在于能通过举例，解决一个简单的不尽相异元素的全排列问题，由此导出一般的公式)。

同一个数学问题，往往有几种不同的解法，这就要求我们不只满足于能把问题解出，而且要尽可能地选择最简捷的解法，这也是灵活性的一种体现。例如举过的那个确定直线的例子，直接应用加法原理是一种常规的解法，但也可采用另一种解法，求得它的解是

$$N = C_n^2 - (C_k^2 + 1) = \frac{1}{2}(n-k)(n+k-1) + 1$$

这一解法就较简捷。又如，某些平面几何的问题，在学过三角、解析几何、复数、向量等知识之后，也不妨试用三角法、坐标法、复数法、向量法来解答，使思考过程比较简单，解法比较简捷"一题多解"是值得提倡的，但主要的着眼点应该着眼于质——灵活地、创造性地应用了学过的知识，而不能

于量——片面地追求方法多。

知、懂、会、熟、活这五点要求是紧密联系着的，为了叙述的方便，我们把它们分成了层次，但这并不是说在学习中必须按照层次，按步就班地提高要求。例如，某些内容也可以在初步了解，知道了具体的方法之后，先学会应用，在获得了较多的感性知识的基础上再回过来把原理搞懂。

三、关　键

要求既然已经明确，那么怎样才能全面地达到这些要求呢？多看——阅读有关的书籍，从而获得知识，扩大知识面。多动手——作有关的练习，从而巩固知识。学会应用，使之熟练。这些当然是必要的。另外还要多开动脑筋——多想、多问、勤于思考、善于提出问题，自己进行探索，找寻解决问题的途径。

数学中有不少内容，前后间的联系是十分紧密的。后者是前者的发展，只要善于思考，通过分析找出问题所在就可以利用已有的知识予以解决。学习这类内容，就不妨暂且不阅读书本中的材料，而自己先探索一下解决问题的办法。例如，在初中代数中学过一元一次方程及其解法之后，紧接着要学习由两个二元一次方程所组成的二元一次方程组的解法。在搞清楚了二元一次方程组以及它的解这些概念之后，对于具体的解法，也不妨直接不看书本而自己先进行一下探索。基础较好，能力较强的学习者通过分析也许有可能自己发现这里的问题就在于方程中有两个未知数，如果能把它变成只含有一个未知数的方程，那么就可以应用已有知识来解

决，从而引起了消元的想法。经过进一步观察与探索，也许还可能发现由于这里给出了两个二元一次方程，联想起等量可以进行代换这一已有知识，而把用代入消元法解二元一次方程组的方法找到。初学者，由于过去缺乏经验，很可能不能一下子就能找到解决问题的途径，但是要先想一想，把问题找出来，再带着问题去看书本，学习书本中的解法，还是有好处的。这样有的放矢地进行学习，印象可以更深，效果更好。掌握了这种学习方法，并养成了习惯，今后知识增多了，经验丰富了，那么有些内容，更可以采用这种先探索再阅读的方法来学习。例如，在学习二元一次方程组的解法掌握了消元这一基本思想方法对于三元一次方程组的解法，就更有条件自己来探索；以后学习了一元二次方程的解法，掌握了降次这一基本思想方法，那么也就有可能综合应用消元和降次这两种思想方法来解决某些特殊的二元二次方程组的求解问题。学习书本中的某些内容，当然也可以采取直接阅读，把它搞懂的学习方法，这种方法有时还是必要的。但即使在这种情况下，也要强调探索，要追根究源，多想多问。

我们所学习的数学书本，在讲过某一新的知识之后，一般都配有适当数量的例题。这些例题大体上可以分成两类：一类例题目的只是在于举例说明当前所学知识的应用。学习这些例题，只需阅读一遍，把它看懂就够了。另外一类例题就比较复杂或者难度较高，要解决它们，不仅需要综合运用学过知识，而且要具备一定的思考能力。学习这一类例题更应该强调要采用先探索再阅读的学习方法。解决一个比较复

杂的数学问题，一般有这样的过程：首先是在搞清题意的基础上，找寻解题途径；然后再按照这一途径作出解答；在解答完成之后，有时还需要对解法作出评价，考虑是不是有其它更好的解法。学习书本中的第二类例题也应该采取这样的过程。由于问题的难易程度不同，个人的知识水平和能力的基础不同，在第一步探索解题途径时，可以有不同的情况产生。最顺利的情况是确实找到了一条可行的解题途径。这时下一步只需作出解答与书本上的解答进行核对。如果解法不同，那么就要进一步探索一下，作出评价并总结经验。另一种情况是在探索自己认为找到了一条可行的途径，并且也作出了解答，但是与课本中的解答核对之下，却发现自己的解答是错误的。这时就应该先把书本中的解法看懂，并找出关键所在，此后还得回过来追究一下自己造成错误的原因，从而吸取教训。再有一种情况，自己虽然已经进行了努力，但仍感到无从着手，探索不出解题途径。在这种情况下，当然只能向书本请教了。不过仍应注意在搞懂了书本中所介绍的解法之后，还得回过来探索一下这一解法的思路，从而得到启发。这样地进行学习，花费的时间可能要多一些，但收益可更多。

四、注　意

最后，我还想指出一点：要学好数学必须注意一个"严"字——要严谨、要严密、要严格。

逻辑严谨性是数学的主要特点之一。学习数学必须注意到这一特点，要做到言必有据。通过形象的直观、简单的枚

举或者类比，抽象概括出一般的结论，这是发现真理的一种重要手段。在学习中我们应该通过训练，培养起这能力。但是直观不能代替论证。特殊不足以表示一般。所以应用上述手段所作出的结论，在数学中只是仅仅提供了一种合理的猜想，其最后得到承认，还得通过严谨的逻辑论证。我们当前所学习的作为学科的数学，限于学者已有知识的水平以及本学科体系安排上的需要，当然不可能象作为科学的数学那样追求逻辑上的绝对严谨；有些在科学数学里应该给出严格定义的概念，需要严谨地予以证明的定理，往往只是用描述的方法，作为定义、公理来引入，有些定理也只是通过举例验论，而不作证明；但自身还是保持着一定的逻辑系统。在学习代数等其它学科时，也同样要注意到这一点。在学习书本知识时，要习惯于问一问根据是什么，在自己应用知识解决问题的时候，更应该自问一下根据何在，是不是做到了言必有据。

数学中许多命题都是在一定的前提下成立的，前提不同，结论也可能不同。例如一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 是在实数范围内讨论的，命题

$\Delta>0 \iff$ 方程有两个相异实根

$\Delta=0 \iff$ 方程有两个相等实根

$\Delta<0 \iff$ 方程没有实根（两个共轭虚根）

这是在 a、b、c 都是实数，且 $a\neq 0$ 这一前提下成立，忽视了这一前提，应用时就要犯错误。又如，在平面解析几何中直线的点斜式 $y-y_1=m(x-x_1)$ 只能表示过点 (x_1,y_1) 且具有斜率 m 的所有直线，但并不表示过点 (x_1,y_1) 的所有直线，忽视了

"具有斜率"这一前提，应用时也就要犯错误。要避免发生这类问题，学习中阅读就要仔细，思考要严密；在解题时更应予以注意。

下面我们举一个由于思考的不严密，解题中造成错误的例子：

题目：有6本不同的书，按

(1) 1:2:3 或 (2) 1:1:1

分成二堆，问各有几种不同分法？

解：(1) $N_1=C_6^1\cdot C_5^2\cdot C_3^3=60$（种）

(2) $N_2=C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2=90$（种）

这里(2)的解答是错误的，为什么会造成错误呢？很可能这是受到(1)的影响，盲目地应用了类比的方法，考虑问题时没有注意到1,2,3是三个不相等的数，而1,1,1则是相同的数。其实，象这种平均分组的问题，正确的解法应是：

$$N_2=\frac{C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{3!}=\frac{90}{6}=15$$

对于上面的问题改造一下，我们进一步追问：

(1) 如果把 h 本不同的书，按 $m:n:p$ 分成三堆，则有几种不同的分法？这里 $h=m+n+p$

这一问题，显然是原题的一般化，于是容易想到只需把原题中的数据换成字母就可以得到解答：

解：(1) 如果 $m\neq n\neq p$，则

$$N_1=C_{m+n+p}^m\cdot C_{n+p}^n\cdot C_p^p$$

(2) 如果 $m=n=p$，则

$$N_2=\frac{C_{m+n+p}^m\cdot C_{n+p}^n\cdot C_p^p}{3!}$$

但是，这一解答仍然是不完整的，因为讨论中还没有考虑到另一种情况——三个数中有两个相等，而在这种情况下，可能的分法种数应是：

$$(3)\quad N_3=\frac{C_{m+n+p}^{m}\cdot C_{n+p}^{n}\cdot C_{p}^{p}}{2!}$$

数学中的一些术语和符号，它们的意义都有严格的规定，同一形式的符号在不同的场合可能具有不同意义，而同一个概念在不同的书籍里，用来表示的数学符号也可能不同。学习中对于这些术语和符号，必须首先明确其意义。

严格地按照规定的意义来使用。数学里的语言，特别要求具有确定性，不能模棱两可。例如上例中我们对 m、n、p 这三个数间的关系分类时，把第三种情况说成“有且只有两个相等”就排斥了三个都相等这一情况，如果略去“只有”两字，虽然在这里也不致会发生误解，但仔细推敲一下，就可发现这样讲是不严格的。学习中必须逐步培养起正确使用数学语言作既精确又简洁的合理表达能力。

编 后 记

我很早就想编辑一本《数学家谈怎样学数学》这样的书，因为在我从事数学教育四十年，培养大批数学教师和长期接触大中学生中了解到，他们不仅热爱数学，学习数学家们辛勤创造的数学知识，而且更希望了解和学习数学家们是怎样学习和研究数学的思想、方法和经验。数学家之所以成为数学家，他们的诀窍在哪里？成功的经验是什么？这无疑对于广大青年数学爱好者和数学工作者在学习思想和方法上都会有很大的启迪作用。当前我们正处在振兴中华、建设四化的伟大时代。由于科学的春天的到来，迎接世界新的技术革命，被誉为"科学的皇后和仆人"的数学，它的重要意义和广泛应用，将会日益受到空前的重视。数学在普通教育和专业教育中都是重要的基础课。它在人才培养、智力开发上起着重要作用。当前学习数学的不仅是亿万的中小学生和大专学生，而且有广大的科技人员、管理干部和技术工人等。这在我国的数学教育史上是规模空前的。他们不仅学习基础数学，而且近代数学、应用数学都将被更多的人们所学习和掌握。它将在祖国的四化建设和新的技术革命中发挥巨大的作用。

本书的目的就是想给广大的大中学生、青年数学爱好者和数学教师们，提供一本我国数学家们在学习数学和研究数学中总结出来的宝贵经验。使我们能够看到在他们取得的伟

大的科学成果的背后，是怎样付出巨大的劳动，克服艰难险阻，攀登上科学的高峰的。希望广大读者能够在怎样学好数学这一问题上有所收益。以不辜负前辈数学家们的教导，也希望能对未来的青年数学家的成长有所启示。

借参加1983年召开中国数学会第四次代表大会之机，我和孙怀川同志邀请了一些著名数学家们对本书给以支持，不少数学家和数学教育家专门赐稿，热情支持，表现了他们对广大青年一代数学爱好者和数学工作者的极大关怀。另外还选编了著名数学家华罗庚、苏步青等人过去在报刊上发表过的文章，汇编成册，以飨读者。本书对文章作者的生平简历、科学成就和主要著作都给以介绍，并且配以作者照片，以便于广大读者了解我国数学家的生平和成就，从中获得教益。对这些数学家们的热情支持，谨表衷心感谢。当编完本书即将付印时，惊悉我国著名数学家，我国现代数学的开拓者华罗庚教授不幸逝世的消息，不胜悲痛。这是我国数学界的巨大损失，我们永远怀念他和学习他。

在此谨向为协助本书出版做了大量工作的黑龙江教育出版社孙怀川同志、河南教育社刘和玉同志表示感谢。

黑龙江大学数学系　颜秉海

1985年6月于哈尔滨